2010-ENAM-0024

École doctorale n° 432 : Sciences des Métiers de l'Ingénieur

Doctorat ParisTech

T H È S E

pour obtenir le grade de docteur délivré par

l'École Nationale Supérieure d'Arts et Métiers

Spécialité " Automatique et Traitement du Signal "

présentée et soutenue publiquement par

Kashif SAEED

le 12 juillet 2010

Contribution à la surveillance de l'intégrité de structures

Directeur de thèse : **Michel VERGÉ**
Co-encadrement de la thèse : **Nazih MECHBAL**

Jury

M. Ali ZOLGHADRI, Professeur, CNRS, Université de Bordeaux	Rapporteur
M. Olivier POLIT, Professeur, LEME, Université Paris Ouest - Nanterre	Rapporteur
M. Euripedes de O. NOBREGA, Professeur, Universida de Estadual de Campinas, Brésil	Examinateur
M. Gérard COFFIGNAL, Professeur, PIMM, Arts et Métiers ParisTech	Examinateur
M. Jacques RENARD, Directeur de recherche, Centre des Matériaux, Mines ParisTech	Président
M. Michel VERGÉ, Professeur, PIMM, Arts et Métiers ParisTech	Examinateur
M. Nazih MECHBAL, Maître de conférence, PIMM, Arts et Métiers ParisTech	Examinateur

T H È S E

Arts et Métiers ParisTech - Centre de Paris
Laboratoire des Procédés et Ingénierie en Mécanique et Matériaux

This thesis is dedicated to my parents
for their love, endless support
and encouragement.

Remerciements

Le travail rapporté dans ce mémoire a été effectué au sein du Laboratoires de Procédés et Ingénierie en Mécanique et Matériaux d'Arts et Métiers ParisTech, centre de Paris. Au terme de ce travail, je tiens tout d'abord à adresser mes sincères remerciements à mon directeur de thèse, Monsieur Michel Vergé, Professeur à l'Arts et Métiers ParisTech et à mon co-encadrement de thèse, Monsieur Nazih Mechbal, Maître de conférences à l'Arts et Métiers ParisTech, pour leur aide, leur patience et leurs encouragements. Je les remercie pour les qualités scientifiques et pédagogiques de leur encadrement et pour leur disponibilité. Je souhaite qu'ils reçoivent à travers ces lignes toutes les marques de ma reconnaissance. Je souhaite également exprimer ma profonde gratitude à Monsieur Gérard Coffignal, Professeur à l'Arts et Métiers ParisTech pour sa disponibilité et les précieux conseils qu'il a su me donner durant ces quatre années de recherches.

Je remercie Monsieur Olivier Polit, Professeur à l'Université Paris Ouest - Nanterre et à Monsieur Ali Zolghadri, Professeur à l'Université de Bordeaux pout avoir accepté de rapporter sur cette thèse et l'intérêt qu'ils ont accordé à cette étude. J'exprime ma gratitude à Monsieur Jacques Renard, Professeur aux Mines ParisTech de m'avoir fait l'honneur de présider le jury. Je le remercie pour l'intérêt qu'il a porté à nos travaux. Je veux remercier également Monsieur Euripedes de Nobrega, Professeur à l'universida de Estadual de Campinas, Brésil, pour les conseils complémentaires et d'avoir accepté de participer au jury de thèse.

J'adresse aussi mes plus vifs remerciements à l'ensemble des membres du laboratoire qui m'ont accueilli et plus particulièrement, Monsieur Amadou-Abdoulaye BA, pour la richesse des échanges que nous avons pu avoir.

This thesis matured in the company of many friends and companions like Aamer Baqai and Muhammad Shoaib, shaped in the guidance of Shehzad Hanif, was inspired by the motivation of Husain Parvez and Kashif Mehmood and was enjoyed in the presence of Abdul Rauf Sher Khan, Khurram Khurshid, Kashif Zahoor and many more. I am grateful to you all for making it a cherished memorable experience.

I dedicate this thesis to my parents. Words can never express the immense gratitude I own them for their love, endless support and guidance. It would not have been possible for me to finish this work, without their strong belief in me, their sweet words of encouragement and their sincere prayers. At home, their presence and while abroad, our long phone conversations were my biggest source of energy. For now, I can just say one word, small it might sound but it means a lot. Merci!

Table des matières

Table des matières v

Liste des figures ix

Liste des tableaux xiii

Nomenclature xv

Introduction générale xxv

Chapitre 1 - Principes fondamentaux et état de l'art 1

1.1 - Rappels de mécanique 2

1.1.1 - Modèles structuraux du second ordre 2

1.2 - Rappels d'automatique 5

1.2.1 - Représentation d'état des systèmes 5

1.2.2 - Gouvernabilité et observabilité 8

1.3 - Technologie des actionneurs et des capteurs 9

1.3.1 - Céramique piézo-électrique 9

1.4 - Principe de la détection d'endommagement 11

1.5 - Identification structurelle par essais vibratoires 12

1.6 - Extraction de caractéristiques 13

1.6.1 - Caractéristiques basées sur l'analyse modale 13

1.6.2 - Caractéristiques basées sur l'analyse temporelle : 19

1.7 - Identification des endommagements 20

1.7.1 - Méthodes basées sur le recalage de modèle 21

1.7.2 - Méthodes basées sur le réseau de neurones 25

1.8 - Conclusions 29

Chapitre 2 - Modélisation d'une structure 31

2.1 - Hypothèses de la mécanique des milieux continus solides 32

2.1.1 - Théorie des poutres : 33

2.1.2 - Théorie des plaques 34

2.1.3 - Principe des puissances virtuelles (PPV) 36

2.2 - Méthode des éléments finis (approche déplacements) 37

2.2.1 - Poutre 37

2.2.2 - Plaque 40

2.3 - Modélisations de céramique piézo-électrique 42

2.3.1 - Montage des céramiques et notations 43

2.3.2 - Formulation d'un actionneur 44

2.3.3 - Formulation d'un capteur 46

2.4 - Correction paramétrique de modèle EF (Recalage de modèle) 48

2.5 - Modèle éléments finis du dispositif expérimental (Poutre) 50
2.5.1 - Description du dispositif 50
2.5.2 - Identification 52
2.5.3 - Modélisation 54
2.5.4 - Recalage de modèle 56
2.6 - Conclusions 57

Chapitre 3 - Identification par sous-espaces 59
3.1 - Identification par sous-espaces stochastique 60
3.1.1 - Problématique : 61
3.1.2 - Hypothèse 61
3.1.3 - Démonstration (Forward Model) 61
3.1.4 - Estimation de la matrice d'état et d'observation 64
3.1.5 - Estimation des paramètres modaux 65
3.2 - Mise en œuvre pratique 66
3.2.1 - Balanced Realization (BE) 66
3.2.2 - Analyse de variable aléatoire canonique (Canonical Variate Analysis) 67
3.3 - Problèmes pratiques 68
3.3.1 - Diagramme de stabilisation : 68
3.4 - Histogramme de Stabilisation 70
3.5 - Etude de cas Identification par sous-espaces d'une poutre 70
3.5.1 - Identification de l'ordre de système 71
3.5.2 - Diagramme de stabilisation 71
3.5.3 - Histogramme de stabilisation 72
3.5.4 - Identification de la structure endommagée 74
3.5.5 - Identification d'endommagements 78
3.6 - Conclusions 80

Chapitre 4 - Identification d'endommagement par sous-espaces 83
4.1 - Analyse du sous-espace noyau de la matrice de Hankel 85
4.2 - Détection des endommagements par l'analyse du noyau 87
4.2.1 - Matrices du résidu 87
4.2.2 - Indicateurs d'endommagement 88
4.2.3 - Détection et la localisation des endommagements 89
4.2.4 - Exemple 90
4.3 - Identification d'endommagement 95
4.3.1 - Résidu non-paramétrique basé sur les sous-espaces 95
4.3.2 - Exemple 96
4.4 - Réseau de neurones artificiels (RNA) 97
4.4.1 - Exemple 101
4.5 - Problèmes et difficultés pratiques 104
4.6 - Procédure pour la génération du résidu 105
4.7 - Etude de cas – Identification des endommagements d'une poutre 106
4.7.1 - Modèle éléments finis 107
4.7.2 - Base de données 108

4.7.3 - Localisation par réseau des neurones artificiels 111
4.8 - Etude de cas – Identification des endommagements d'une plaque 113
4.8.1 - Description du dispositif 113
4.8.2 - Objectif 114
4.8.3 - Identification de la plaque saine 116
4.8.4 - Modélisation 116
4.8.5 - Base de données 120
4.8.6 - Localisation par réseau des neurones 123
4.9 - Conclusions 124

Conclusions générales et perspectives 127

Références Bibliographiques 131

Annexe - Dispositif experimental : Plaque 143

Liste des figures

Figure 2.1 - Théorie des poutres. 33
Figure 2.2 - Déplacements dans le plan (X_2, X_3). 35
Figure 2.3 - Déplacements généralisés des extrémités d'un élément poutre. 37
Figure 2.4 - Elément plaque de référence. 41
Figure 2.5 - Montage et câblage des céramiques. 43
Figure 2.6 - Montage de l'amplificateur de charges. 47
Figure 2.7 - Dimensions de la poutre. 51
Figure 2.8 - Montage et câblage des céramiques piézo-électriques. 51
Figure 2.9 - Montage pratique réalisé pour l'identification. 52
Figure 2.10 - Comparaison des signaux entrées/sorties du système. 52
Figure 2.11 - Relevé expérimental des gains pour les chemins 1-2 et 1-3. 53
Figure 2.12 - Points à demi-puissance. 54
Figure 2.13 - Modèle du dispositif expérimental. 54
Figure 2.14 - Courbes de Bode obtenues par le modèle EF initial. 55
Figure 2.15 - Comparaison des gains obtenus par le modèle EF recalé et les mesures. 56
Figure 3.1 - Diagramme de stabilisation. 69
Figure 3.2 - Log des valeurs singulières de la matrice de Hankel. 71
Figure 3.3 - Diagramme de stabilisation obtenu à partir des mesures échantillonnées à 10 kHz. 72
Figure 3.4 - Diagramme de stabilisation obtenu à partir des mesures sous-échantillonnées à 1250 Hz. 73
Figure 3.5 - Histogramme de stabilisation. 73
Figure 3.6 - Différents cas d'endommagements simulés sur la poutre. 74
Figure 3.7 - Diagramme de stabilisation pour le cas 1 (a) Échantillonnage à 10 kHz (b) Échantillonnage à 1250 Hz. 75
Figure 3.8 - Histogramme de stabilisation pour le cas 1. 75
Figure 3.9 - Diagramme de stabilisation le cas 2 (a) Échantillonnage à 10 kHz (b) Échantillonnage à 1250 Hz. 76
Figure 3.10 - Histogramme de stabilisation pour le cas 2. 76
Figure 3.11 - Diagramme de stabilisation pour le cas 3 (a) Échantillonnage à 10 kHz (b) Échantillonnage à 1250 Hz. 76
Figure 3.12 - Histogramme de stabilisation pour le cas 3 77
Figure 3.13 - Diagramme de stabilisation pour le cas 4 (a) Échantillonnage à 10 kHz (b) Échantillonnage à 1250 Hz. 77

Figure 3.14 - Histogramme de stabilisation pour le cas 4. 77
Figure 3.15 - Paramètres de recalage estimés pours différents cas d'endommagements (a) Cas 1 (b) Cas 2 (c) Cas 3 (d) Cas 4. 80
Figue 4.1 - Système amorti à deux degrés de liberté. 91
Figure 4.2 - Fréquences propres du système. (a) 1ère fréquence propre. (b) 2ème fréquence propre. 92
Figure 4.3 - Variation de la norme moyenne des matrices de résidus $\underline{\underline{\Delta}}^{u}$ par rapport la matrice de parité. 93
Figure 4.4 - Indicateur d'endommagement ϱ_i^s 94
Figure 4.5 - Iindicateur d'endommagement ϱ_i^a 94
Figure 4.6 - Iindicateur d'endommagement ϱ_i^m 94
Figure 4.7 - Deux composantes du vecteur de résidus $\underline{\Delta}_i^o$ 96
Figure 4.8 - Variation croisée de deux composantes du vecteur de résidus $\underline{\Delta}_i^o$ 96
Figure 4.9 - Neurone (a) avec une seule entrée (b) avec plusieurs entrées. 97
Figure 4.10 - Couche de neurones. 99
Figure 4.11 - Architecture du perceptron multicouche. 102
Figure 4.12 - Fonction sigmoïde bipolaire ayant $\sigma_n = 2$ 102
Figure 4.13 - Système d'identification d'endommagement proposé. 106
Figure 4.14 - Densité spectrale de puissance d'une réponse (a) simulée (b) mesurée. 108
Figure 4.15 - Diagrammes de Bode des 4 FPB de type Butterworth utilisés (a) Bande passante entre 0 et 100 Hz (b) Bande passante entre 100 et 200 Hz (c) Bande passante entre 200 et 300 Hz (d) Bande passante entre 350 et 550 Hz. 109
Figure 4.16 - Densités spectrales de puissance des 4 réponses filtrées obtenues à partir d'une réponse simulée. 110
Figure 4.17 - Densités spectrales de puissance des 4 réponses filtrées obtenues à partir d'une réponse mesurée. 110
Figure 4.18 - Composantes du vecteur de résidus numériques et expérimentaux (a) 1er composante (b) 2ème composante. 111
Figure 4.19 - Dimensions de la plaque. 114
Figure 4.20 - Dimensions de la plaque et zones d'endommagements. 115
Figure 4.21 - Les photos des plaques (a) une plaque saine (b) une plaque endommagée. 115
Figure 4.22 - Relevés expérimentaux des gains pour les chemins 1-2 et 1-3. 116
Figure 4.23 – Comparaison des gains obtenus par le modèle EF initial et ceux mesurés. (a) Chemin 1-2 (b) Chemin 1-3. 117
Figure 4.24 – Comparaison des gains obtenus par le modèle EF recalé et par expérimentations. (a) Chemin 1-2 (b) Chemin 1-3. 119

Figure 4.25 – Relevés des gains simulés pour les chemins 1-2 et 1-3 et les bandes passantes des quatre FPB. 120
Figure 4.26 - Les diagrammes de Bode des 4 FPB de type Butterworth utilisés (a) Bande passante entre 25 et 45 Hz (b) Bande passante entre 105 et 175 Hz (c) Bande passante entre 300 et 345 Hz (d) Bande passante entre 390 et 420 Hz. 121
Figure 4.27 - Les densités spectrales de puissance des 4 réponses filtrées obtenues à partir d'une réponse simulée. 122
Figure 4.28 - Les densités spectrales de puissance des 4 réponses filtrées obtenues à partir d'une réponse mesurée. 123

Liste des tableaux

Tableau 1.1 - Vecteurs d'état et matrices d'état correspondantes [Gawronski, 1998]. 8
Tableau 2.1 - Théorie des poutres et des plaques. 36
Tableau 2.2 - Cinq premières fréquences propres et coefficients d'amortissements de la poutre identifiés. 53
Tableau 2.3 - Cinq premières fréquences propres et coefficients d'amortissements du modèle EF initial de la poutre. 55
Tableau 2.4 - Cinq premières fréquences propres identifiées et analytiques de la poutre. 57
Tableau 3.1 - Cinq premières fréquences propres et coefficients d'amortissements de la poutre identifiés par la méthode de sous-espaces. 73
Tableau 3.2 - Cinq premières fréquences propres de la poutre endommagée. 78
Tableau 3.3 - Poids des cinq premières fréquences propres identifiées. 79
Tableau 4.1 - Résultats de détection des endommagements. 95
Tableau 4.2 - Matrice de confusion obtenue après classification des données d'apprentissage. 104
Tableau 4.3 - Matrice de confusion obtenue après classification des données de test. 104
Tableau 4.4 - Cinq premières fréquences propres. 107
Tableau 4.5 - Matrice de confusion obtenue après classification des données d'apprentissage. 112
Tableau 4.6 - Matrice de confusion obtenue après classification des données de test numériques. 113
Tableau 4.7 - Matrice de confusion obtenue après classification des données de test expérimentales. 113
Tableau 4.8 - Seize premières fréquences propres identifiées de la plaque saine. 116
Tableau 4.9 - Comparaison des seize premières fréquences propres de la plaque obtenues par identification et par modèle EF. 118
Tableau 4.10 - Comparaison des seize premières fréquences propres de la plaque obtenues par identification et par modèle EF corrigé. 119
Tableau 4.11 - Matrice de confusion obtenue après classification des données d'apprentissage. 124
Tableau 4.12 - Matrice de confusion obtenue après classification des données de test. 124

Nomenclature

Abréviations

ddl	Degré(s) de liberté
AATD	*Army Aviation Applied Technology Directorate*
ACP	Analyse en composantes principales
BE	Réalisation équilibrée (*Balanced Realization*)
BPNN	Réseaux de neurones à rétro-propagation (*Back Propagation Neural Network*)
CAO	Conception assistée par ordinateur
CND	Contrôle non destructif
COMAC	*Coordinate Modal Assurance Criterion*
EEQ	Quotient de l'énergie élémentaire (*Elementary Energy Quotient*)
EF	Eléments finis
FDI	Détection et isolation des défauts (*Faut Detection and Isolation*)
FPB	Filtres passe-bande
FRF	Réponse en fréquence (*Frequency Response Function*)
HPP	Hypothèse de petites perturbations
ICA	Analyse de la composante indépendante (*Independent Component Analysis*)
PZT	Plomb Zirconate Titanate : céramique piézo-électrique
MAC	*Modal Assurance Criterion*
MBM	Méthodes basées sur un modèle numérique
MIMO	Plusieurs entrées et plusieurs sorties (*Multiple Inputs Multiple Outputs*)
MSB	Méthodes sans modèle numérique
PMC	Perceptrons multicouches (*Multylayer perceptron*)
PNN	Réseau de neurones probabiliste (*Probablistic Neural Network*)
PPV	Principe des puissances virtuelles
RBFNN	Réseaux de neurones de fonction radiale de base (*Radial Basis Function Neural Network*)
RFV	Vecteur Résidu en Force (*Residual Force Vector)*
RNA	Réseau de neurones
SHM	Surveillance de l'intégrité de structures (*Structural Health Monitoring*)
SISO	Une entrée et une sortie (*Single Intput Single Output*)
SVD	Décomposition en valeurs singulières (*Singular value decomposition*)
SubID	Identification par sous-espaces (*Subspace based Identification*)
1D	Unidimensionnel, 1 dimension
2D	Bidimensionnel, 2 dimensions
3D	Tridimensionnel, 3 dimensions

Notations générales :

$\otimes$	Produit de Kronecker
$\tilde{a}$	Ecart-type d'une variable a
$\hat{a}$	Valeur estimée de a
$\overline{a}$	Valeur moyenne d'une variable a
a^*	Variable a de la structure endommagée
$\dot{a}$	Première dérivée de a par rapport au temps
$\ddot{a}$	Seconde dérivée de a par rapport au temps
$a^{'}(x)$	Première dérivée de a par rapport à x
$a^{''}(x)$	Seconde dérivée de a par rapport à x
$\underline{\underline{A}}^T$	Transposée de la matrice $\underline{\underline{A}}$
$\underline{\underline{A}}^{\mp}$	Transposée conjuguée de la matrice $\underline{\underline{A}}$
$\underline{\underline{A}}^{-1}$	Inverse de la matrice carrée $\underline{\underline{A}}$
$\underline{\underline{A}}^{\oplus}$	Pseudo-inverse de la matrice $\underline{\underline{A}}$
$\underline{\underline{A}}^{\uparrow}$	Matrice obtenue après suppression du premier bloc ligne de la matrice $\underline{\underline{A}}$
$\underline{\underline{1}}_n$	Matrice identité $(n \times n)$
$\underline{\underline{0}}_{n \times m}$	Matrice $(n \times m)$ de zéros
$E[a]$	Espérance mathématique de la variable aléatoire a
$\| \underline{\underline{A}} \|_2$	Norme Euclidienne de la matrice $\underline{\underline{A}}$
$diag(a_i)$	Matrice diagonale de valeurs a_i
$div\underline{A}$	Divergence d'un champ de vecteurs $\underline{A}$
$\ln(a)$	Logarithme népérien de a
$rang(\underline{\underline{A}})$	Rang de la matrice $\underline{\underline{A}}$
$tr(\underline{\underline{A}})$	Trace de la matrice $\underline{\underline{A}}$
$vec(\underline{\underline{A}})$	Opérateur qui empile les colonnes de la matrice $\underline{\underline{A}}$ en forme vectorielle
$Hank(\underline{\underline{A}}_i)$	Matrice de Hankel des matrices $\underline{\underline{A}}_i$
$Re(a)$	Partie réelle d'un nombre complexe a

A-a :

A	Aire de la section droite
$\underline{\underline{A}}_c$	Matrice d'état continue
$\underline{\underline{A}}_d$	Matrice d'état discrète
$\underline{\underline{A}}_m$	Matrice d'état modale
$\underline{\underline{A}}_{mi}$	$i^{ème}$ matrice d'état modale
α_d	Constante d'amortissement proportionnelle de type Rayleigh
$\mathfrak{a}_i$	$i^{ème}$ sortie du réseau de neurones
$\underline{\mathfrak{a}}$	Vecteur de sorties du réseau de neurones

	$\underline{\mathfrak{a}}^{l}$	Vecteur de sorties de $l^{ème}$ couche du réseau de neurones
	$\underline{\mathfrak{a}}^{(p)}$	Vecteur de sorties du réseau de neurones d'une forme p
B-b :		
	b_b	Largeur de la poutre
	b_p	Largeur de la plaque
	b_{pz}	Largeur d'une céramique piézo-électrique
	$\underline{\underline{B}}_n$	Matrice de commande
	$\underline{\underline{B}}_m$	Matrice de commande modale
	$\underline{\underline{B}}_c$	Matrice de commande continue
	$\underline{\underline{B}}_d$	Matrice de commande discrète
	$\underline{\underline{B}}_{mi}$	$i^{ème}$ matrice de commande modale
	β	Angle de rotation de la section droite autour de X_2 (Poutre 2D)
	β_d	Constante d'amortissement proportionnel de type Rayleigh
C-c :		
	$\underline{\underline{c}}^{E}$	Tenseur des compliances élastiques à champ électrique constant
	C_g	Capacité de l'amplificateur de charges
	$\underline{\underline{C}}$	Matrice d'observation
	$\underline{\underline{\mathbb{C}}}$	Matrice de gouvernabilité
	$\underline{\underline{C}}_n$	Matrice d'observation nodale
	$\underline{\underline{C}}_m$	Matrice d'observation modale
	$\underline{\underline{C}}_{mi}$	$i^{ème}$ matrice d'observation modale
D-d :		
	$\underline{\underline{d}}$	Matrice de couplage piézo-électrique
	$\underline{D}$	Vecteurs de déplacements électriques
	$\underline{\underline{D}}$	Matrice d'amortissement
	$\underline{\underline{D}}_m$	Matrice d'amortissement modal
	ξ	Abscisse dans l'élément de référence
	$\underline{\Delta}$	Vecteur de résidus
	$\underline{\underline{\Delta}}$	Matrice de résidus
E-e :		
	$\underline{\underline{e}}$	Tenseur des constantes piézoélectriques
	E	Module d'élasticité longitudinale ou module d'Young
	EI	Rigidité en flexion
	E_i	Champ électrique
	$\underline{E}$	Vecteur de champ électrique
	η	$2^{ème}$ coordonnée dans un élément de référence

	ε_{ij}	Composante du tenseur de déformation
	$\underline{\varepsilon}$	Vecteur de déformation
	$\underline{\underline{\varepsilon}}$	Tenseur de déformation
F-f :		
	f_i	$i^{ème}$ fréquence propre
	$\underline{f}$	Densité volumique d'efforts
	$\underline{\mathcal{F}}$	Surfacique d'efforts
	$\underline{\underline{F}}$	Matrice de flexibilité
G-g :		
	$G(s,t)$	Position à l'instant t du barycentre élastique
	G_c	Gain de l'amplificateur de charge
	$\underline{\underline{G}}$	Matrice de covariance entre l'état futur et la mesure
	$\underline{\underline{G}}_v$	Matrice de gouvernabilité
	γ	Déformation de cisaillement transverse
H-h :		
	h_b	Hauteur de la poutre
	h_p	Hauteur de la plaque
	h_{pz}	Hauteur d'une céramique piézo-électrique
	$\underline{\underline{H}}$	Matrice de Hankel
	$\underline{\underline{H}}^w$	Matrice de Hankel pondérée
I-i :		
	I	Moment quadratique d'une section droite
J-j :		
	j	Imaginaire pur, $j = \sqrt{-1}$
	J	Energie de déformation
	$\underline{\underline{\mathfrak{J}}}$	Matrice de sensibilité des résidus
K-k :		
	$\underline{\underline{K}}$	Matrice de rigidité
	$\underline{\underline{K}}_m$	Matrice de rigidité modale
	$\underline{\underline{K}}^e$	Matrice de rigidité d'un élément
	χ	Courbure de flexion
L-l :		
	l	Longueur d'un élément
	L	Longueur de la structure
	$\underline{\underline{\lambda}}$	Matrice diagonale des valeurs propres de la matrice d'état
	$\underline{\underline{\Lambda}}$	Matrice de covariance des mesures

	$\underline{\underline{\Lambda}}_i$	Matrice d'auto-covariance des mesures
	$\mathfrak{L}$	Ensemble d'apprentissage d'un réseau de neurones
M-m :		
	$\underline{\underline{\tilde{m}}}$	Densité linéique de la masse
	$M(x)$	Le moment de flexion
	$\underline{\underline{M}}$	Matrice de masse
	$\underline{\underline{M}}_m$	Matrice de masse modale
	$\underline{\underline{M}}^e$	Matrice de masse d'un élément
N-n :		
	$n_{\mathfrak{a}}$	Nombre de sorties d'un réseau de neurones
	$n_{\mathfrak{a}}^l$	Nombre de sorties de $l^{ème}$ couche d'un réseau de neurones
	n_d	Nombre de degrés de liberté
	n_e	Nombre d'éléments
	n_f	Nombre de formes
	n_h	Nombre de couche cachée d'un réseau de neurones
	n_m	Nombre de modes estimés
	n_n	Nombre de nœuds
	$n_{\mathfrak{n}}$	Nombre de neurones dans un réseau de neurones
	$n_{\mathfrak{n}}^l$	Nombre de neurones dans la $l^{ème}$ couche d'un réseau de neurones
	$n_{\mathfrak{n}}^h$	Nombre de neurones dans la couche cachée d'un réseau de neurones
	n_p	Nombre de paramètres de recalage
	$n_{\mathfrak{p}}$	Nombre d'entrée du réseau de neurones
	n_r	Nombre de données de référence
	n_s	Dimension du vecteur d'état
	n_t	Ordre de troncature du système
	n_u	Nombre d'entrées
	n_y	Nombre de mesures
	n_τ	Nombre d'échantillons
	N	Effort normal
	$\underline{\underline{N}}_b$	Matrice d'interpolation (Poutre)
	$\underline{\underline{N}}_p$	Matrice d'interpolation (Plaque)
O-o :		
	$\underline{\underline{O}}$	Matrice d'observabilité
	ω_i	$i^{ème}$ pulsation propre
	$\underline{\underline{\Omega}}$	Matrice diagonale des pulsations propres

P-p :

p	Nombre de blocs lignes de la matrice de Hankel
$\widehat{p}_{def}$	Densité linéique de la puissance virtuelle de déformation d'un élément
$\underline{p}$	Vecteur des paramètres de recalage
$\underline{\underline{p}}^{\sigma}$	Coefficients diélectriques à contraintes constantes
$\widehat{P}_{acc}$	Puissance virtuelle des quantités d'accélération
$\widehat{P}_{int}$	Puissance virtuelle des efforts intétieurs
$\widehat{P}_{ext}$	Puissance virtuelle des efforts extérieurs
$\widehat{P}^{e}_{acc}$	Puissance virtuelle des quantités d'accélération d'un élément
$\widehat{P}^{e}_{def}$	Puissance virtuelle de déformation d'un élément
$\widehat{P}^{e}_{ext}$	Contribution d'un élément à la puissance virtuelle des efforts extérieurs
$\underline{\phi}_i$	$i^{ème}$ vecteur de forme du mode
$\underline{\underline{\Phi}}$	Matrice modale
$\Psi(\xi)$	Fonction de pondération
$\underline{\Psi}_i$	$i^{ème}$ vecteur propre de la matrice d'état
$\underline{\underline{\Psi}}$	Matrice formée par les vecteurs propres de la matrice d'état
$\underline{\underline{\Pi}}$	Matrice de covariance résiduelle
$\mathfrak{p}_i$	$i^{ème}$ entrée du réseau de neurones
$\underline{\mathfrak{p}}$	Vecteur d'entrée du réseau de neurones
$\mathfrak{P}$	Ensemble de formes du réseau de neurones

Q-q :

q	Nombre de blocs colonnes de la matrice de Hankel
$\underline{q}(t)$	Vecteur de déplacement nodal
$\underline{q}_m(t)$	Vecteur de déplacement modal
$\underline{q}^{A}(t)$	Vecteur de déplacement d'un point A
$\dot{\underline{q}}(t)$	Vecteur de vitesse nodal
$\ddot{\underline{q}}(t)$	Vecteur d'accélération nodal
$\mathcal{Q}$	Ensemble des déplacements admissibles
$\underline{Q}^{e}_{ab}$	Vecteur des efforts d'un actionneur sur l'élément poutre
$\underline{Q}^{e}_{ap}$	Vecteur des efforts d'un actionneur sur l'élément plaque
$\underline{\bar{Q}}^{e}$	Vecteur des efforts généralisés appliqués aux nœuds de l'élément par les éléments adjacents
$\underline{Q}$	Vecteur des efforts généralisés
$\underline{\underline{Q}}$	Matrice de covariance des bruits de processus

R-r :		
	r	Rayon de courbure
	$\underline{\underline{R}}$	Matrice de covariance des bruits de mesures
	ρ	Masse volumique
	ρ_b	Masse volumique de la poutre
	ρ_p	Masse volumique de la poutre
	ρ_{pz}	Masse volumique d'une céramique piézo-électrique
	ϱ	Indicateurs d'endommagements
	$\mathfrak{R}$	Espace universel de formes du réseau de neurones
S-s :		
	s	Abscisse curviligne le long d'un élément poutre
	$\underline{\underline{S}}_{2D}$	Tenseur de rigidité
	$\mathcal{S}$	Domaine d'un système considéré
	$\underline{\underline{S}}$	Matrice de covariance entre les bruits de processus et les bruits de mesures
	$\underline{\underline{S}}^c$	Matrice diagonale des valeurs singulières de la matrice de Hankel
	$\underline{\underline{S}}^s$	Matrice diagonale des valeurs singulières non nulles de la matrice de Hankel
	$\underline{\underline{S}}^n$	Matrice diagonale des valeurs singulières nulles de la matrice de Hankel
	$\underline{\underline{\mathbb{S}}}$	Matrice de sensibilité
	σ_{ij}	Composante du tenseur de contrainte de CAUCHY
	$\underline{\sigma}$	Vecteur des composantes du tenseur des contraintes de CAUCHY
	$\underline{\underline{\sigma}}$	Tenseur des contraintes de CAUCHY
	$\underline{\underline{\Sigma}}$	Matrice de covariance d'état
T-t :		
	t	Temps en continu
	T	Effort tranchant
	τ	Période d'échantillonnage
	θ	Angle de rotation de la section droite autour de X_2 (Poutre)
	θ_1	Angle de rotation de la section droite autour de X_2 (Plaque)
	θ_2	Angle de rotation de la section droite autour de X_1 (Plaque)
	θ^A	Angle de rotation de la section droite au noeud A (Poutre 2D)
	$\underline{\mathfrak{t}}^{(p)}$	Sorties du réseau de neurones désirées d'une forme p
	$\mathfrak{T}$	Ensembles de test du réseau de neurones
U-u :		
	u	1ére composante du déplacement le long de l'axe X_1
	u^A	Déplacement d'un nœud A le long de l'axe X_1
	$\underline{u}(t)$	Vecteur de commande
	$\underline{\underline{U}}^c$	Vecteurs singuliers à gauche de la matrice de Hankel

	$\underline{\underline{U}}^s$	Vecteurs singuliers à gauche associés à l'image de la matrice de Hankel
	$\underline{\underline{U}}^n$	Vecteurs singuliers à gauche associés au sous-espace noyau de la matrice de Hankel
	u	Potentiel du neurone
V-v :		
	v	2ème composante du déplacement le long de l'axe X_2
	v^A	Déplacement d'un noeud A le long de l'axe X_2
	$\underline{v}(t)$	Vecteur de bruits de mesures
	V	Différence entre la tension électrique entre les deux électrodes
	$V_c(t)$	Tension électrique du point d'entrée d'amplificateur de charges
	$\underline{\underline{V}}^c$	Vecteurs singuliers à droite de la matrice de Hankel
	$\underline{\underline{V}}^s$	Vecteurs singuliers à droite associés à l'image de la matrice de Hankel
	$\underline{\underline{V}}^n$	Vecteurs singuliers à droite associés aux sous-espaces noyaux de la matrice de Hankel
	υ_i	$i^{ème}$ valeur propre de la matrice d'état
	ν_{ij}	Nombre de Poisson
W-w :		
	w	3ème composante du déplacement le long de l'axe X_3
	w^A	Déplacement d'un noeud A le long de l'axe X_3
	$\underline{w}(t)$	Vecteur de bruits de mesures
	$\underline{\underline{W}}$	Matrice de pondération
	$\underline{\underline{\mathbf{w}}}^l$	Matrice de pondération d'une couche l du réseau de neurones
	$\underline{\mathbf{w}}_0^l$	Vecteur de biais d'une couche l du réseau de neurones
X-x :		
	$\underline{X}(t)$	Vecteur d'état
	ξ	1er coordonnée dans un élément de référence, abscisse curviligne dans un élément de référence
Y-y :		
	y^+	Distance entre l'électrode et la ligne moyenne de la poutre
	y_k^i	$i^{ème}$ composante du vecteur d'observation à l'instant k
	$\underline{y}(t)$	Vecteur d'observation
	$\underline{\underline{\mathbb{Y}}}^+$	Matrice de mesures futures
	$\underline{\underline{\mathbb{Y}}}^-$	Matrice de mesures passées
	$\underline{\mathbb{Y}}_k^+$	Vecteur de mesures futures à l'instant k
	$\underline{\mathbb{Y}}_k^-$	Vecteur de mesures passées à l'instant k
Z-z :		
	z	Distance du point P à partir de segment droit

$\underline{z}^A$	Vecteur de fréquences propres numériques
$\underline{z}^X$	Vecteur de fréquences propres expérimentales
$\underline{\underline{Z}}$	Matrice diagonale d'amortissement modal
$\underline{\underline{\mathbb{Z}}}$	Matrice de parité
ζ_i	$i^{ème}$ coefficient d'amortissement modal

Introduction générale

L'aptitude à évaluer rapidement l'état de santé structurel d'un processus ou ouvrage est devenue un enjeu économique de première importance. Actuellement, des entretiens programmés permettent d'éviter une immobilisation de longue durée ou des dégradations irrémédiables. Qui plus est, le coût de ces procédures d'inspection est directement tributaire des difficultés liées aux démontages partiels de certains organe difficile d'accès. Ainsi, avec les nouvelles normes de sécurité, le cout de ces procédures est de plus en plus prépondérant. A titre d'exemple, 27% du coût du cycle de vie d'un avion, civil et militaire, est lié à l'inspection et la réparation des éléments [Hall, 1999]. Parmi les systèmes et ouvrages nécessitant une inspection régulière et fréquente citons : les plateformes pétrolières immergées, les ponts, les avions ou les véhicules spatiaux et plus récemment les parcs d'éoliennes.

Pour effectuer le contrôle santé ou la surveillance de l'intégrité d'une structure, de nombreuses méthodes basées sur le contrôle non destructif (CND) sont disponibles en plus des procédures d'inspection visuelles. Ce sont des méthodes physiques nécessitant une bonne connaissance du matériau pour détecter et localiser d'éventuels endommagements. Parmi les méthodes classiques de CND, on peut citer les techniques à base d'ultrasons, de radiographie, d'émission acoustique, de courants de Foucault, de tomographie, *etc*.

La plupart de ces méthodes CND nécessitent une immobilisation du système et donc une perte d'exploitation. Il s'est révélé alors la nécessité de développer des méthodes de contrôle santé intégré, permettant de réaliser une surveillance *in situ* et de donner en temps réel une indication sur l'état structurel de la structure.

Les nouvelles approches ont bénéficié des récents progrès dans la caractérisation de dommages matériels et structurels, et des technologies des capteurs et transducteurs. Ces avancées technologiques ont favorisé l'émergence de nouvelles structures dites "*structures intelligentes*" (smart structure). Ce sont des structures qui se composent d'un réseau de capteurs et/ou d'actionneurs, d'une architecture d'acquisition et de commande en temps réel dont les progrès récents assurent le traitement des signaux [Hurlebaus & Gaul, 2006]. L'intelligence se manifeste par la présence, simultanée ou non, de capteurs et d'actionneurs, reliés à des centres d'intelligence répartie, permettant de contrôler l'état de la structure, de le modifier en fonction de l'environnement, en vue d'optimiser son comportement. L'objectif principal est de disposer de méthodes efficaces et robustes pour l'analyse structurelle, l'évaluation non destructive, la surveillance de l'intégrité, le diagnostic et la localisation d'endommagements, afin d'éviter une maintenance systématique et d'adopter une maintenance conditionnelle en surveillant en continu des signaux issus de ces structures.

D'ailleurs, durant l'année 2008, le conseil de la technologie appliquée de l'aviation militaire des Etats-Unis (AATD) a lancé un programme visant à réduire les heures d'inspection de 25%, le travail d'entretien de 8% et à imposer une augmentation de la durée de vie des composants de 10% [Baker *et al.,* 2009]. Des tendances similaires sont observées pour d'autres systèmes industriels.

Dans plusieurs applications industrielles, il s'avère nécessaire que les capteurs et les actionneurs perturbent le moins possible la masse du système et que leur installation ne soit pas coûteuse. Ces contraintes ont naturellement fait évoluer les recherches vers l'utilisation des matériaux piézo-électriques. Légers, de tailles réduites, collés sur la structure ou à l'intérieur lorsqu'il s'agit structure en composites, ces céramiques sont capables de mesurer les déformations ainsi que de transmettre des efforts au système. Même s'ils ne présentent pas un rendement très élevé, ces éléments sont très intéressants compte tenu du double effet piézo-électrique (direct et inverse). Ils peuvent ainsi être utilisés comme actionneurs ou comme capteurs, ce qui permet de multiplier les configurations expérimentales et aussi de réduire non seulement leur nombre, mais aussi le câblage électrique et le matériel associé. Il subsiste néanmoins le problème de l'optimisation de leur forme, de leur taille et de leur localisation et par conséquent la nécessité de les modéliser finement.

La surveillance de l'intégrité des structures (ou *Structural Health Monitoring*, SHM) suppose la conception, le développement et la réalisation d'un système de surveillance. Ce système est dédié à la détection, la localisation et à l'estimation des endommagements, en vue de l'évaluation de l'intégrité d'une structure. Généralement des endommagements peuvent être définis comme des changements intervenues dans un système qui affectent défavorablement sa performance actuelle ou future [Inman *et al.,* 2005]. Donc, le concept de l'endommagement n'est significatif que par la comparaison entre deux états différents du système : l'état initial du système souvent intact (*sain*) et l'état actuel.

Cette étude porte sur les méthodes de SHM qui identifient l'endommagement dans des systèmes structurels et mécaniques. La définition d'endommagement sera alors limitée aux changements des propriétés matérielles et/ou géométriques de ces systèmes. Cela inclut également les changements des conditions aux limites du système.

Pour palier aux limites des méthodes à base de CND, des méthodes de détection endommagements utilisant les essais vibratoires ont été développées. Ces approches utilisent des caractéristiques vibratoires de la structure pour identifier les endommagements. Ces caractéristiques, par exemple : les fréquences de résonance, les formes des modes et les amortissements dépendent des caractéristiques physiques de la structure, telles que sa masse et sa rigidité et si que des conditions limites. Les endommagements changent ces caractéristiques physiques et des conditions limites. Par conséquent les caractéristiques vibratoires sont aussi modifiées. Donc, Il s'ensuit, que l'estimation des changements des caractéristiques vibratoires peut permettre de détecter et de localiser les endommagements. L'avantage de ces méthodes est que l'information a priori concernant l'emplacement de l'endommagement n'est pas nécessaire. De

plus quelques capteurs installés à des endroits appropriés de la structure peuvent fournir des informations suffisantes. Ces approches permettent la détection d'éventuels endommagements avec un minimum d'intervention humaine.

Bien que le concept des méthodes de détection d'endommagement par essais vibratoires semble intuitif, la mise en œuvre de ces méthodes pose de nombreuses difficultés techniques. La plus importante consiste dans le fait que la réponse globale mesurée d'une structure est basée sur les basses fréquences qui ne sont pas sensibles à tous les types d'endommagement. Par ailleurs, les problèmes pratiques liés à l'identification précise et répétitive des caractéristiques vibratoires, en utilisant un nombre limité des capteurs, rend plus difficile l'identification des petits endommagements. Ce problème est aggravé par les variations des paramètres environnementaux qui jouent un rôle important dans le comportement du système.

Le développement d'une surveillance intelligente de l'intégrité d'une structure est un secteur de recherche multidisciplinaire qui nécessite la connaissance de plusieurs technologies comme par exemple l'ingénierie des structures, l'intelligence artificielle, la technologie des mesures, la modélisation des systèmes mécaniques de celle des endommagements. La mise en place de la surveillance de l'intégrité des structures par essais vibratoires nécessite plusieurs étapes. La première correspond à l'étude des conditions opérationnelles et environnementales de la structure. La deuxième étape est liée à l'acquisition de données traitant des problèmes de choix des capteurs, de leur positionnement sur la structure, de l'acquisition, de la transmission et du stockage des données. L'étape qui suit est l'extraction des caractéristiques sensibles aux endommagements à partir des mesures. La dernière étape est le développement d'une méthode statistique pour améliorer la confiance sur les résultats de détection des endommagements. L'objectif principal est d'évaluer si le changement dans les caractéristiques sélectionnées est statistiquement significatif pour confirmer la présence des endommagements ou/et éventuellement localiser ces éventuels endommagements.

Différentes techniques sont utilisées pour générer des caractéristiques sensibles aux endommagements et pour les détecter. Toutefois, les techniques employant des modèles numériques de la structure sont en mesure de fournir des informations plus détaillées concernant l'état de la structure. Ces méthodes comprennent la modélisation du comportement dynamique de la structure ainsi que celui des éléments actifs utilisés (des céramiques piézo-électriques dans notre cas). Elles permettent de répondre aux questions relatives à l'emplacement et à la sévérité d'endommagements en comparant les mesures obtenues à partir de la structure réelle avec celles du modèle. La difficulté majeure qui freine l'utilisation de ces méthodes est liée à la précision du modèle. Il est souvent difficile de réaliser la synthèse d'un modèle précis d'une structure complexe qui pourrait prendre en compte des modifications de comportement de la structure causées par des conditions environnementales.

L'objectif de cette thèse est de développer une approche intégrée regroupant la modélisation, la commande et la surveillance des structures dites intelligentes et d'élaborer une stratégie de validation basée sur l'intégration des algorithmes (commandes et surveillance) dans un simulateur à éléments finis.

Le mémoire est organisé en quatre chapitres.

Le chapitre 1 rappelle quelques notions de base de l'automatique et de la mécanique. Puis, à partir d'une étude bibliographique, nous dégageons les orientations de nos travaux.

Le chapitre 2 présente la modélisation d'une structure active en vue de la surveillance de son intégrité. Cette étape conduit à aborder la modélisation des structures munies de céramiques piézo-électriques par la méthode des éléments finis.

Le chapitre 3 concerne une méthode d'identification des paramètres modaux. Dans ce chapitre, les problèmes pratiques liés à l'estimation de ces paramètres sont discutés et une méthode est proposée pour les identifier sans intervention humaine.

Le chapitre 4 développe une approche pour la localisation des endommagements prédéfinis. Différents méthodes existantes sont comparées en utilisant un exemple numérique simple. Les problèmes pratiques concernant la mise en œuvre de l'approche proposée sont soulignés. Les résultats numériques et expérimentaux obtenus par l'application des techniques développées sur deux dispositifs expérimentaux sont présentés. Le premier est de type poutre. Le second est de type plaque. Ces structures ont été conçues et réalisées au sein du laboratoire.

Les résultats présentés dans ce mémoire ont donné lieu aux publications suivantes dans des congrès nationaux ou internationaux avec actes:

K. Saeed, N. Mechbal, G. Coffignal, M. Vergé, "*Recursive Modal Parameter Estimation Using Output-only Subspace Identification for Structural Health Monitoring*", 16th IEEE Mediterranean Conference on Control and Automation, Ajaccio (France), June 2008.

K. Saeed, N. Mechbal, G. Coffignal, M. Vergé, "*Operational Modal Analysis using Output-only Subspace Identification for Structural Health Monitoring*", International Conference on Noise and Vibration Engineering, ISMA2008, Leuven (Belgium), September 2008.

K. Saeed, N. Mechbal, G. Coffignal, M. Vergé, "*Structural Damage Diagnosis Using Subspace Based Residual and Artificial Neural Networks*", 7th IFAC Syposium on Fault Detection, Supervision and Safety of Technical Processes, SafeProcess2009, Barcelona (Spain), June 2009.

K. Saeed, N. Mechbal, G. Coffignal, M. Vergé, "*Structural Damage Diagnosis and Isolation Using Artificial Neural Networks Based on Non-parametric Subspace Residual*", 16th International Congress on Sound and Vibration, ICSV16, Krakow (Poland), July 2009.

K. Saeed, N. Mechbal, G. Coffignal, M. Vergé, "*Artificial Neural Network Based Structural Damage Diagnosis Using Non-parametric Subspace Residual*", 7th International Workshop on Structural Health Monitoring, IWSHM 2009, Stanford (USA), September 2009.

K. Saeed, N. Mechbal, G. Coffignal, M. Vergé, "*Null Subspace-based Damage Localization Using Artificial Neural*", 18th IEEE Mediterranean Conference on Control and Automation, Marrakech (Morocco), June 2010.

Ces résultats ont également été présentés dans deux conférences internationales sans actes :

K. Saeed, N. Mechbal, M. Vergé, G. Coffignal, "*Online Modal Parameter Estimation Using Output-only Subspace Identification for Structural Health Monitoring*" Second International Symposium on Design, Modelling and Experiments of Adaptive Structures and Systems, DeMEASS II, Bad Herrenalb (Germany), October 2007.

K. Saeed, N. Mechbal, G. Coffignal, M. Vergé, "*Damage Detection and Localization Using Subspace Based Residual and Artificial Neural Networks*" Third International Symposium on Design, Modelling and Experiments of Adaptive Structures and Systems, DeMEASS III, Vernon (France), May 2009.

Chapitre 1
Principes fondamentaux et état de l'art

Résumé : Nous présentons dans ce chapitre, les principes fondamentaux de la surveillance de l'intégrité de structures et différentes méthodologies existantes sur l'identification d'endommagement. Dans un premier temps seront abordées les notions de base en automatique et mécanique et dans un second temps seront résumées les étapes aboutissant à la mise en place d'un système de surveillance basé sur les données vibratoires. Différentes caractéristiques d'identification d'endommagement sont mises en évidence et les méthodes utilisées pour la détection et la localisation des endommagements en utilisant ces caractéristiques sont expliquées. Enfin après une synthèse des travaux existants nous fixons les objectifs de cette étude.

Chapitre 1 - Principes fondamentaux et état de l'art.....1
1.1 - Rappels de mécanique.....2
1.2 - Rappels d'automatique.....5
1.3 - Technologie des actionneurs et des capteurs.....9
1.4 - Principe de la détection d'endommagement.....11
1.5 - Identification structurelle par essais vibratoires.....12
1.6 - Extraction de caractéristiques.....13
1.7 - Identification des endommagements.....20
1.8 - Conclusions.....29

Surveillance de l'intégrité de structures (ou SHM, pour *Structural Health Monitoring*) désigne la conception, le développement et l'implémentation de techniques pour la détection, la localisation et l'estimation d'endommagements. Elle vise à surveiller l'intégrité de structures, de machines

(aéronautique, transport), d'infrastructures (génie civil). Le développement d'une surveillance intelligente de l'intégrité ou contrôle santé d'une structure constitue un secteur de recherche multidisciplinaire comprenant à titre d'exemple l'ingénierie des structures, l'intelligence artificielle, la métrologie, la physique des matériaux, la mécanique et l'automatique. Afin de faciliter la compréhension, pour les différents lecteurs, compte tenue de la nature multidisciplinaire du SHM qui requière des connaissances transverses, il nous paraît donc utile de rappeler quelques notions et définitions classiques en dynamique des structures et en automatique.

1.1 - Rappels de mécanique

En général les modélisations en mécanique s'appuient sur les équations aux dérivées partielles en espace. L'utilisation de modèles extrêmement simplifiés ou bien la discrétisation par des méthodes telle que la méthode des éléments finis (EF) permettent de se ramener à des systèmes d'équations linéaires possédant une nombre fini d'inconnues. Les modèles analytiques linéaires sont fournis par des équations différentielles linéaires. En mécanique, les modèles structuraux linéaires sont représentés par des systèmes d'équations du second ou du premier ordre. Dans le premier cas, la dynamique du système est typiquement représentée par les degrés de liberté du système, et dans le deuxième cas par les états du système.

1.1.1 - Modèles structuraux du second ordre

Les modèles structuraux du second ordre sont représentés par des équations linéaires matricielles du second ordre. En mécanique vibratoire, en général, on utilise le système de coordonnées nodales ou le système de coordonnées modales [Gawronski, 1998].

Modèle Nodal

Les modèles nodaux sont actuellement le plus souvent obtenus par des méthodes de discrétisations de type EF qui mettent en avant des points particuliers ou "*nœuds*" dont déplacements sont qualifiées de coordonnées nodales. Ils sont caractérisés par les matrices de masse, de rigidité, d'amortissement et par la position des capteurs et des actionneurs.

On suppose que le nombre de degrés de liberté de la structure flexible est n_d. Il y a n_u forces d'excitation et on peut mesurer n_y différentes variables de sorties sur cette structure. La structure est représentée en coordonnées nodales par les équations linéaires du second ordre suivantes :

$$\underline{\underline{M}}\,\ddot{\underline{q}}(t) + \underline{\underline{D}}\,\dot{\underline{q}}(t) + \underline{\underline{K}}\,\underline{q}(t) = \underline{\underline{B}}_n\,\underline{u}(t) \tag{1.1}$$

$$\underline{y}(t) = \underline{\underline{C}}_n\,\underline{q}(t) \tag{1.2}$$

où $\underline{q}(t)$ est le vecteur de déplacement nodal de dimension ($n_d \times 1$), $\underline{u}(t)$ est le vecteur de commande de dimension ($n_u \times 1$), $\underline{y}(t)$ est le vecteur de mesures de dimension ($n_y \times 1$). $\underline{\underline{M}}$ est la matrice symétrique définie positive de masse de dimension ($n_d \times n_d$), $\underline{\underline{D}}$ est la matrice semi-définie positive d'amortissement naturel de dimension ($n_d \times n_d$), $\underline{\underline{K}}$ est la matrice symétrique semi-définie positive de rigidité de dimension ($n_d \times n_d$), $\underline{\underline{B}}_n$ est la matrice de commande de dimension ($n_d \times n_u$) et $\underline{\underline{C}}_n$ est la matrice d'observation de dimension ($n_y \times n_d$). L'équation (1.1) se compose de n_d équations couplées du second ordre.

Modèle Modal

Les modèles modaux sont obtenus à partir des coordonnées modales. Ces modèles sont généralement obtenus grâce au recours à des méthodes d'identification. Si on considère que la structure vibre librement, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de force d'excitation ($\underline{u}(t) = 0$) et si on néglige l'amortissement, la solution des équations (1.1) est alors donnée par :

$$\underline{q}(t) = \underline{\phi} e^{j\omega t} \tag{1.3}$$

Par conséquent, $\ddot{\underline{q}}(t) = -\omega^2 \underline{\phi} e^{j\omega t}$. Substituant ces valeurs dans l'équation (1.1) on obtient :

$$(-\omega^2 \underline{\underline{M}} + \underline{\underline{K}}) \underline{\phi} e^{j\omega t} = 0 \tag{1.4}$$

Ainsi si $e^{j\omega t} \neq 0$, les solutions de cette équation sont alors données par :

$$\det(-\omega^2 \underline{\underline{M}} + \underline{\underline{K}}) = 0 \tag{1.5}$$

Equation (1.5) est l'équation caractéristique de la structure et on peut calculer n_m valeurs de ω_i, où $n_m \leq n_d$, qui satisfont cette équation. La substitution des ω_i dans l'équation (1.4) donne l'ensemble correspondant, des solutions $\{\underline{\phi}_1, \underline{\phi}_2, \underline{\phi}_3 \ldots \underline{\phi}_{n_m}\}$.

Ici ω_i est la $i^{ème}$ pulsation propre et $\underline{\phi}_i$ est le $i^{ème}$ vecteur de forme du mode réel de dimension (n_d x 1). On définit maintenant deux matrices supplémentaires :

$$\underline{\underline{\Omega}} = diag(\omega_i) \tag{1.6}$$

$$\underline{\underline{\Phi}} = \begin{bmatrix} \underline{\phi}_1 & \underline{\phi}_2 & \ldots & \underline{\phi}_{n_m} \end{bmatrix} \tag{1.7}$$

où $\underline{\underline{\Omega}}$ est la matrice diagonale des pulsations propres de dimension (n_m x n_m) et $\underline{\underline{\Phi}}$ est la matrice modale de dimension (n_d x n_m) fournie par les vecteurs de forme des modes. La matrice modale diagonalise les matrices de masse et de rigidité et elles sont données par :

$$\underline{\underline{M}}_{\mathrm{m}} = \underline{\underline{\Phi}}^T \, \underline{\underline{M}} \, \underline{\underline{\Phi}} \tag{1.8}$$

$$\underline{\underline{K}}_{\mathrm{m}} = \underline{\underline{\Phi}}^T \, \underline{\underline{K}} \, \underline{\underline{\Phi}} \tag{1.9}$$

où $\underline{\underline{M}}_{\mathrm{m}}$ est la matrice de masse modale de dimension (n_m x n_m) et est diagonale. $\underline{\underline{K}}_{\mathrm{m}}$ est la matrice de rigidité modale de dimension (n_m x n_m) et est diagonale.

En général, la méthode d'analyse modale ne peut pas être utilisée pour résoudre les équations (1.1) parce qu'elles possèdent un couplage provenant de la matrice d'amortissement. La transformation modale peut découpler ces équations si la matrice d'amortissement pouvait s'exprimer par la combinaison linéaire de matrice de masse et de rigidité. C'est l'hypothèse de Rayleigh [Inman, 2006] :

$$\underline{\underline{D}} = \alpha_d \, \underline{\underline{M}} + \beta_d \, \underline{\underline{K}} \tag{1.10}$$

où α_d et β_d sont constants. Dans ce cas, on dit que le système est un système à amortissement proportionnel. La matrice d'amortissement modal $\underline{\underline{D}}_{\mathrm{m}}$ est donnée par :

$$\underline{\underline{D}}_{\mathrm{m}} = \underline{\underline{\Phi}}^T \, \underline{\underline{D}} \, \underline{\underline{\Phi}} \tag{1.11}$$

La matrice d'amortissement modal $\underline{\underline{D}}_{\mathrm{m}}$ est de dimension (n_m x n_m) et est diagonale. Introduisant un nouveau vecteur $\underline{q}_m$ tel que :

$$\underline{q}(t) = \underline{\underline{\Phi}} \; \underline{q}_m(t) \tag{1.12}$$

Ici, si $n_m < n_d$, $\underline{q}(t)$ serait une approximation du vecteur réel de déplacement. Substituons $\underline{q}_m(t)$ dans les équations (1.1) et (1.2) et multiplions l'équation (1.1) avec $\underline{\underline{\Phi}}^T$ on obtient :

$$\underline{\underline{M}}_{\mathrm{m}} \, \ddot{\underline{q}}_m(t) + \underline{\underline{D}}_{\mathrm{m}} \, \dot{\underline{q}}_m(t) + \underline{\underline{K}}_{\mathrm{m}} \, \underline{q}_m(t) = \underline{\underline{\Phi}}^T \, \underline{\underline{B}}_n \, \underline{u}(t) \tag{1.13}$$

$$\underline{y}(t) = \underline{\underline{C}}_n \, \underline{\underline{\Phi}} \; \underline{q}_m(t) \tag{1.14}$$

Multipliant l'équation (1.13) avec $\underline{\underline{M}}_{\mathrm{m}}^{-1}$ on obtient :

$$\ddot{\underline{q}}_m(t) + \underline{\underline{M}}_{\mathrm{m}}^{-1} \, \underline{\underline{D}}_{\mathrm{m}} \, \dot{\underline{q}}_m(t) + \underline{\underline{M}}_{\mathrm{m}}^{-1} \, \underline{\underline{K}}_{\mathrm{m}} \, \underline{q}_m(t) = \underline{\underline{M}}_{\mathrm{m}}^{-1} \, \underline{\underline{\Phi}}^T \, \underline{\underline{B}}_n \, \underline{u}(t) \tag{1.15}$$

$$\underline{y}(t) = \underline{\underline{C}}_n \, \underline{\underline{\Phi}} \, \underline{q}_m(t) \tag{1.16}$$

Ainsi le modèle modal du second ordre est obtenu sous sa forme finale :

$$\ddot{\underline{q}}_m(t) + 2\,\underline{\underline{Z}}\,\underline{\underline{\Omega}}\,\dot{\underline{q}}_m(t) + \underline{\underline{\Omega}}^2 \underline{q}_m(t) = \underline{\underline{B}}_{nm}\,\underline{u}(t) \tag{1.17}$$

$$\underline{y}(t) = \underline{\underline{C}}_{nm}\,\underline{q}_m(t) \tag{1.18}$$

où

$\underline{\underline{\Omega}}^2 = \underline{\underline{M}}_m^{-1}\,\underline{\underline{K}}_m$ est la matrice spectrale de dimension (n_m x n_m) et est diagonale,

$\underline{\underline{Z}} = 0.5\,\underline{\underline{M}}_m^{-1}\underline{\underline{D}}_m\,\underline{\underline{\Omega}}^{-1}$ est la matrice diagonale d'amortissement modal de dimension (n_m x n_m),

$\underline{\underline{C}}_{nm} = \underline{\underline{C}}_n\,\underline{\underline{\Phi}}$ est la matrice de commande modale de dimension (n_y x n_m) et

$\underline{\underline{B}}_{nm} = \underline{\underline{M}}_n^{-1}\,\underline{\underline{\Phi}}^T\,\underline{\underline{B}}_n$ est la matrice d'observation modale de dimension (n_m x n_u).

Les équations (1.17) et (1.18) se composent des n_m équations du second ordre découplées, sous la forme :

$$\ddot{q}_{m_i}(t) + 2\zeta_i\omega_i\dot{q}_{m_i}(t) + \omega_i^2 q_{m_i}(t) = B_{nm_i}u(t) \tag{1.19}$$

$$y_i(t) = C_{nm_i}q_{m_i}(t) \tag{1.20}$$

où ζ_i est le $i^{ème}$ coefficient d'amortissement modal.

1.2 - Rappels d'automatique

1.2.1 - Représentation d'état des systèmes

Pour l'analyse des systèmes de commande, il est plus pratique d'exprimer les équations de la structure flexible dans l'espace d'état [Gawronski, 1998]. Sous cette forme, un système linéaire continu de dimension finie s'exprime par les équations différentielles (à coefficients constants) suivantes :

$$\dot{\underline{X}}(t) = \underline{\underline{A}}_c\,\underline{X}(t) + \underline{\underline{B}}_c\,\underline{u}(t) + \underline{w}(t) \tag{1.21}$$

$$\underline{y}(t) = \underline{\underline{C}}\;\underline{X}(t) + \underline{v}(t) \tag{1.22}$$

où $\underline{X}(t)$ est le vecteur d'état de dimension $(n_s \text{x } 1)$, $\underline{\underline{A}}_c$ est la matrice d'état continu de dimension $(n_s \text{x } n_s)$, $\underline{\underline{B}}_c$ est la matrice de commande continue de dimension $(n_s \text{x } n_u)$, $\underline{\underline{C}}$ est la matrice

d'observation de dimension $(n_y \text{x } n_s)$, $\underline{w}(t)$ est le bruit de processus de dimension $(n_s \text{x } 1)$ et $\underline{v}(t)$ est le bruit de mesures de dimension $(n_y \text{x } 1)$. L'effet des bruits de processus sur le système est différent de celui des mesures. Les bruits de processus ont un effet dynamique sur les états et les sorties du système, alors que les bruits de mesures affectent seulement les mesures. De la même manière si on se place maintenant dans le domaine discret, les équations (1.21) et (1.22) s'écrivent :

$$\underline{X}((k+1)\tau) = \underline{\underline{A}}_d \underline{X}(k\tau) + \underline{\underline{B}}_d \underline{u}(k\tau) + \underline{w}(k\tau) \tag{1.23}$$

$$\underline{y}(k\tau) = \underline{\underline{C}}\ \underline{X}(k\tau) + \underline{v}(k\tau) \tag{1.24}$$

ou encore :

$$\underline{X}_{k+1} = \underline{\underline{A}}_d \underline{X}_k + \underline{\underline{B}}_d \underline{u}_k + \underline{w}_k \tag{1.25}$$

$$\underline{y}_k = \underline{\underline{C}}\ \underline{X}_k + \underline{v}_k \tag{1.26}$$

où τ est la période d'échantillonnage, $\underline{\underline{A}}_d$ est la matrice d'état discret de dimension $(n_s \text{x } n_s)$ et $\underline{\underline{B}}_d$ est la matrice de commande discrète de dimension $(n_s \text{x } n_u)$. La relation entre les matrices du modèle d'état continu et discret est donnée par :

$$\underline{\underline{A}}_d = e^{\underline{\underline{A}}_c \tau} \tag{1.27}$$

$$\underline{\underline{B}}_d = \int_0^\tau e^{\underline{\underline{A}}_c (k\tau+\tau-s)} ds . \underline{\underline{B}}_c = \underline{\underline{A}}_c^{-1} (\underline{\underline{A}}_d - \underline{\underline{1}}_{n_s}) \underline{\underline{B}}_c \tag{1.28}$$

où $\underline{\underline{1}}_{n_s}$ est la matrice identité de dimension $(n_s \times n_s)$.

Représentation d'état du modèle nodal

Afin d'obtenir une représentation d'état du modèle nodal, l'équation (1.1) est récrite sous la forme suivante :

$$\ddot{\underline{q}}(t) + \underline{\underline{\mathrm{M}}}^{-1}\, \underline{\underline{\mathrm{D}}}\, \dot{\underline{q}}(t) + \underline{\underline{\mathrm{M}}}^{-1}\, \underline{\underline{\mathrm{K}}}\, \underline{q}(t) = \underline{\underline{\mathrm{M}}}^{-1}\, \underline{\underline{\mathrm{B}}}_n\, \underline{u}(t) \tag{1.29}$$

$$\underline{y}(t) = \underline{\underline{\mathrm{C}}}_n\, \underline{q}(t) \tag{1.30}$$

Le vecteur d'état $\underline{X}(t)$ est ainsi défini :

$$\underline{X}(t) = \begin{bmatrix} \underline{q}(t) \\ \dot{\underline{q}}(t) \end{bmatrix} \tag{1.31}$$

où la première composante représente le vecteur de déplacement du système et la deuxième est le vecteur de vitesse. Les matrices du système d'état, continu ($\underline{\underline{A}}_c$, $\underline{\underline{B}}_c$, $\underline{\underline{C}}$), peuvent s'écrire :

$$\underline{\underline{A}}_c = \begin{bmatrix} \underline{\underline{0}}_{n_d} & \underline{\underline{1}}_{n_d} \\ -\underline{\underline{M}}^{-1}\,\underline{\underline{K}} & -\underline{\underline{M}}^{-1}\,\underline{\underline{D}} \end{bmatrix} \tag{1.32}$$

$$\underline{\underline{B}}_c = \begin{bmatrix} \underline{\underline{0}}_{n_d} \\ \underline{\underline{M}}^{-1}\,\underline{\underline{B}}_n \end{bmatrix} \tag{1.33}$$

$$\underline{\underline{C}} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{C}}_n & \underline{\underline{0}}_{n_d} \end{bmatrix} \tag{1.34}$$

où $\underline{\underline{0}}_{n_d}$ est la matrice de zéros de dimension $(n_d \times n_d)$.

Représentation d'état du Modèle Modal

L'ordre n_d de la représentation nodale est souvent très élevé. Par exemple, le nombre de degrés de liberté du modèle EF est souvent supérieur à 10000. Par conséquent, la représentation nodale d'état est rarement employée dans la pratique. Une approche alternative consiste à obtenir la représentation de l'espace d'état en employant la forme modale du second ordre [Gawronski, 1998]. La représentation modale de l'espace d'état est alors donnée par :

$$\underline{\underline{A}}_m = diag(\underline{\underline{A}}_{mi}) \quad i = 1,2,...,n_m \tag{1.35}$$

$$\underline{\underline{B}}_m = \begin{bmatrix} \underline{\underline{B}}_{m1} & \underline{\underline{B}}_{m2} & \cdots & \underline{\underline{B}}_{mn_m} \end{bmatrix}^T \tag{1.36}$$

$$\underline{\underline{C}}_m = \begin{bmatrix} \underline{\underline{C}}_{m1} & \underline{\underline{C}}_{m2} & \cdots & \underline{\underline{C}}_{mn_m} \end{bmatrix} \tag{1.37}$$

où $\underline{\underline{A}}_{mi}$ est la $i^{ème}$ matrice d'état modale de dimension (2 x 2), $\underline{\underline{B}}_{mi}$ est la $i^{ème}$ matrice de commande modale de dimension ($2 \times n_u$) et $\underline{\underline{C}}_{mi}$ est la $i^{ème}$ matrice d'observation modale de dimension ($n_y \times 2$). Le $i^{ème}$ mode possède la représentation de l'espace d'état suivante :

$$\dot{\underline{X}}_i(t) = \underline{\underline{A}}_{mi}\underline{X}_i(t) + \underline{\underline{B}}_{mi}\underline{u}(t) \tag{1.38}$$

$$\underline{y}_i(t) = \underline{\underline{C}}_{mi}\underline{X}_i(t) \tag{1.39}$$

avec :

$$\underline{X}(t) = \begin{bmatrix} \underline{X}_1(t) & \underline{X}_2(t) & \cdots & \underline{X}_{n_m}(t) \end{bmatrix}^T \tag{1.40}$$

$$\underline{y}(t) = \sum_{i=1}^{n_m} \underline{y}_i(t) \tag{1.41}$$

Pour différents vecteurs d'état, les matrices d'état sont présentées dans le Tableau 1.1.

1.2.2 - Gouvernabilité et observabilité

Gouvernabilité :

On dit qu'un système est gouvernable si à partir d'un état quelconque $\underline{X}_0$ à t_0, il existe une entrée $\underline{u}(t)$ et un temps t_f fini tels que l'on puisse atteindre n'importe quel état $\underline{X}_f$ à t_f.

On montre qu'un système invariant est gouvernable si et seulement si $rang(\underline{\underline{G}}_v) = n_s$ avec :

$$\underline{\underline{G}}_v = \left[\underline{\underline{B}}_c \quad \underline{\underline{A}}_c \underline{\underline{B}}_c \quad \cdots \quad \underline{\underline{A}}_c^{n_s-1} \underline{\underline{B}}_c \right] \tag{1.42}$$

La gouvernabilité ne dépend pas de la représentation d'état du système.

Observabilité :

On dit qu'un système est observable si quel que soit t_f, la connaissance de $\underline{u}(t)$ et $\underline{y}(t)$ pour $0 \le t \le t_f$ suffit à déterminer $\underline{X}_0$.

On montre qu'un système invariant est observable si et seulement si la matrice $\underline{\underline{O}}$ de rang n_s avec :

$$\underline{\underline{O}} = \left[\underline{\underline{C}} \quad \underline{\underline{C}}\underline{\underline{A}}_c \quad \cdots \quad \underline{\underline{C}}\underline{\underline{A}}_c^{n_s-1} \right]^T \tag{1.43}$$

De même, l'observabilité d'un système est indépendante du choix du vecteur d'état.

$i^{ème}$ **Vecteurs d'état**	**La matrice d'état** A_{mi}	**La matrice de commande** B_{mi}
$\underline{X}_i = \begin{bmatrix} q_{mi} \\ \dot{q}_{mi} / \omega_i \end{bmatrix}$	$A_{mi} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_i \\ -\omega_i & -2\zeta_i\omega_i \end{bmatrix}$	$B_{mi} = \begin{bmatrix} 0 \\ b_{mi} / \omega_i \end{bmatrix}$
$\underline{X}_i = \begin{bmatrix} q_{mi} \\ \zeta_i q_{mi} + \dot{q}_{mi} / \omega_i \end{bmatrix}$	$A_{mi} = \begin{bmatrix} -\zeta_i\omega_i & \omega_i \\ -\omega_i + \zeta_i^2\omega_i^2 & -\zeta_i\omega_i \end{bmatrix}$	$B_{mi} = \begin{bmatrix} 0 \\ b_{mi} / \omega_i \end{bmatrix}$
$\underline{X}_i = \begin{bmatrix} q_{mi} \\ \dot{q}_{mi} \end{bmatrix}$	$A_{mi} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_i^2 & -2\zeta_i\omega_i \end{bmatrix}$	$B_{mi} = \begin{bmatrix} 0 \\ b_{mi} \end{bmatrix}$

Tableau 1.1 - Vecteurs d'état et matrices d'état correspondantes [Gawronski, 1998].

1.3 - Technologie des actionneurs et des capteurs

La mise en place d'un système de surveillance de l'intégrité de structures nécessite l'ajout sur le système à surveiller d'éléments actifs, c'est-à-dire des actionneurs et des capteurs. Il y a plusieurs types de capteurs et actionneurs qui peuvent être utilisés en structures intelligentes mais ceux qui sont fabriqués à partir des matériaux intelligents (Smart Materials) deviennent de plus en plus populaires [Hurlebaus & Gaul, 2006]. Les matériaux intelligents présentent des propriétés qui peuvent être sensiblement changées, par les stimuli externes comme la charge unitaire, la température, l'humidité ou la charge électrique. Les capteurs généralement utilisés sont des matériaux piézo-électriques, des fluides électro-rhéologiques, des matériaux à mémoire de forme (Shape-memory material), des matériaux magnétostrictifs et des matériaux électrostrictifs. Parmi eux, les matériaux piézo-électriques offrent un certain nombre d'avantages.

Quand un cristal piézo-électrique est soumis à un champ électrique il produit une contrainte mécanique, et une fois soumis à une contrainte, il produit une charge électrique. Grâce à la particularité de cet effet piézo-électrique, les matériaux piézo-électriques sont utilisés comme capteurs et actionneurs. L'utilisation du même matériel comme un actionneur et un capteur, réduit non seulement leur nombre, mais aussi le câblage électrique et le matériel associé. Ces matériaux sont moins chers et peuvent être sous forme de cristaux, de céramiques ou de polymères. Leurs pièces peuvent être aisément coupées pour se conformer à la structure de l'étude. Ils produisent la haute tension électrique avec une faible intensité de courant. Ils ont une excellente résistance mécanique, une basse impédance acoustique, et une réponse dynamique dans une large bande passante [Hurlebaus & Gaul, 2006]. Leur principal défaut est de présenter une puissance transmise assez faible. Nous utilisons pour notre application des capteurs et actionneurs en céramiques piézo-électriques.

1.3.1 - Céramique piézo-électrique

La piézo-électricité est un phénomène découvert au XIX^{éme} siècle par les frères Pierre et Jacques Curie [Ikeda, 1990]. Il se traduit par un couplage entre les déformations mécaniques et les champs électriques au sein d'un matériau. Il existe de très nombreux matériaux qui, à l'état naturel, présentent ces propriétés.

Ce phénomène apparaît sous deux effets complémentaires. L'effet direct qui se traduit par l'apparition d'un déplacement électrique au sein d'un solide soumis à un champ de contraintes mécaniques. Il est régi par l'équation suivante :

$$\underline{D} = \underline{\underline{d}}\,\underline{\sigma} + \underline{\underline{p}}^{\sigma}\,\underline{E} \tag{1.44}$$

Le vecteur déplacement électrique $\underline{D}$ provient, d'une part, du comportement diélectrique du matériau via ses coefficients diélectriques à contrainte constante $\underline{\underline{p}}^{\sigma}$ et, d'autre part, du tenseur des contraintes $\underline{\sigma}$ via

le couplage piézo-électrique $\underline{\underline{d}}$. Ici, le vecteur des contraintes $\underline{\sigma}$ et le vecteur des déformations $\underline{\varepsilon}$ sont donnés par :

$$\underline{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{22} & \sigma_{33} & \sigma_{12} & \sigma_{23} & \sigma_{31} \end{bmatrix}^T \tag{1.45}$$

$$\underline{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{33} & 2\varepsilon_{12} & 2\varepsilon_{23} & 2\varepsilon_{31} \end{bmatrix}^T \tag{1.46}$$

Les vecteurs de déplacement électrique $\underline{D}$ et de champs électrique $\underline{E}$ sont donnés par :

$$\underline{D} = \begin{bmatrix} D_1 & D_2 & D_3 \end{bmatrix}^T \tag{1.47}$$

$$\underline{E} = \begin{bmatrix} E_1 & E_2 & E_3 \end{bmatrix}^T \tag{1.48}$$

Par ailleurs, l'effet inverse, traduisant l'apparition d'un champ de déformation au sein d'un solide soumis à un champ électrique, est lui régi par l'équation suivante :

$$\underline{\varepsilon} = \underline{\underline{c}}^E \, \underline{\sigma} + \underline{\underline{d}}^T \, \underline{E} \tag{1.49}$$

Comme pour l'effet direct, le tenseur des déformations $\underline{\varepsilon}$ a deux origines : le comportement mécanique du matériau à champ électrique constant $\underline{\underline{c}}^E$ et le champ électrique obtenu à travers le couplage piézo-électrique.

Les relations décrivant le comportement du matériau piézo-électrique (1.44) et (1.49) peuvent être exprimées sous plusieurs formes différentes. La plus appropriée pour l'écriture du principe des puissances virtuelles est la suivante :

$$\underline{D} = \underline{\underline{e}} \, \underline{\varepsilon} + \underline{\underline{p}}^{\varepsilon} \, \underline{E} \tag{1.50}$$

$$\underline{\sigma} = \underline{\underline{s}}^E \, \underline{\varepsilon} - \underline{\underline{e}}^T \, \underline{E} \tag{1.51}$$

où $\underline{\underline{s}}^E = \left(\underline{\underline{c}}^E\right)^{-1}$ et $\underline{\underline{e}} = \underline{\underline{s}}^E \underline{\underline{d}}^T$. Les détails de l'élaboration des équations (1.50) et (1.51) constitutives des matériaux solides sont présentés dans les références suivantes : [Géradin, 1993, Maugin *et al.,* 1992]. Elles sont rappelées dans [Bruant, 1999] pour les céramiques piézo-électriques. Pour la plupart des créramiques, les matrices des coefficients piézo-électriques (PZT) sont de la forme suivante :

$$\underline{\underline{d}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{24} & 0 & 0 \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{1.52}$$

$$\underline{\underline{e}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{24} & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \tag{1.53}$$

1.4 - Principe de la détection d'endommagement

[Rytter, 1993] a défini, la surveillance de l'intégrité des structures comme un processus aux quatre étapes suivantes :

Niveau 1 – Détection

Niveau II – Localisation

Niveau III – Estimation

Niveau IV – Pronostic

Le niveau I fournit uniquement l'information concernant la présence d'éventuels endommagements dans la structure. Pour de nombreuses applications pratiques, cela est suffisant.

Le niveau II consiste à déterminer l'emplacement de l'endommagement. L'utilisation d'un modèle de la structure n'est pas obligatoire, mais peut améliorer les résultats.

Le niveau III consiste à apprécier la sévérité de l'endommagement. Cette évaluation passe par l'utilisation d'un modèle permettant de décrire l'effet d'endommagements (par des paramètres tels que la longueur de la fissure, la taille d'un délaminage ou la diminution de la rigidité, *etc*.) sur le comportement dynamique de la structure.

Le dernier niveau est celui du pronostic et de la prédiction de la durée de vie de la structure. Cela nécessite la combinaison du modèle structurel global avec des modèles de lésions locales pour prédire l'évolution des endommagements, par exemple la croissance de la fissure de fatigue [Inman *et al.,* 2005].

[Sohn *et al.,* 2003, Worden & Dulieu-Barton, 2004] ont ajouté une étape supplémentaire de *classification* entre les niveaux II et III. Selon eux, la surveillance de l'intégrité des structures doit s'effectuer selon la procédure à cinq étapes suivante :

Niveau 1 – Détection

Niveau II – Localisation

Niveau III - ***Classification***

Niveau IV – Estimation

Niveau V – Pronostic

Afin de prédire efficacement la durée de vie restante de la structure, l'information concernant le type de dommages est exigée. La classification devient alors une étape importante, avant l'estimation de la sévérité des endommagements.

1.5 - Identification structurelle par essais vibratoires

Ces techniques, développées à la fin des années 70 et au début des années 80, sont basées sur les réponses vibratoires des structures. Elles ont notamment été appliquées pour détecter d'éventuels endommagements sur les dispositifs aérospatiaux (navettes et satellites) et sur les plateformes pétrolières sous-marines. L'augmentation substantielle de la puissance de calcul et le développement de structures intelligentes [Hurlebaus & Gaul, 2006] durant la dernière décennie, ont transformé ce champ en un thème de recherche à part entière et mènent au développement de nouvelles théories et techniques [Doebling *et al.,* 1996, Salawu, 1997, Doebling *et al.,* 1998, Farrar *et al.,* 2001, Sohn *et al.,* 2003, Worden & Dulieu-Barton, 2004, Carden & Fanning, 2004, Fritzen, 2009].

Les méthodes de SHM sont généralement divisées en deux groupes: les méthodes *locales* et les méthodes *globales*. Cette classification est basée sur le rapport de la longueur caractéristique des ondes ou des modes de vibration à la taille de l'endommagement ainsi que des dimensions de la structure.

Les méthodes locales utilisent par exemple des ondes ultrasonores de hautes fréquences. La longueur de ces ondes doit être inférieure à la taille de l'endommagement que l'on désire déceler. Par conséquent, la localisation sur la structure des endommagements "attendus" doit être réalisée avant. De plus, il est nécessaire que les capteurs soient situés à proximité du site d'endommagements.

Les méthodes globales consistent généralement en l'utilisation des modes basse fréquence. Ces méthodes globales utilisent un réseau de capteurs distribués spatialement couvrant toute la structure. Il n'est pas nécessaire que les capteurs soient situés à proximité du site d'endommagement. Pour des raisons évidentes, les méthodes locales devraient être plus sensibles aux dommages naissants, cependant, au vu de l'importance de l'instrumentation nécessaire (capteurs, électronique de mesures, *etc*.) elles restent très coûteuses et difficiles à mettre en œuvre. Nous nous focalisons dans la suite sur les méthodes globales.

Le processus de SHM consiste en l'observation d'une structure sur une période donnée en utilisant des mesures, à en extraire et analyser des caractéristiques, pour déterminer l'état du système. La littérature a beaucoup traité le problème de l'extraction de caractéristiques pertinentes alors que peu de travaux ont été consacrés au développement de modèles statistiques visant à améliorer la fiabilité des résultats. Dans presque toutes les applications résumées dans [Doebling *et al.,* 1996, Doebling *et al.,* 1998, Sohn *et al.,* 2003], aucun modèle statistique n'a été développé pour montrer que la variation du résidu est statistiquement significative pour confirmer la présence d'un endommagement. Dans la suite du présent

chapitre, nous allons résumer certaines des caractéristiques importantes qui ont été les plus fréquemment utilisées dans le domaine de la SHM.

1.6 - Extraction de caractéristiques

À partir de la réponse dynamique mesurée sur le système, l'extraction de caractéristiques est le processus d'identification des propriétés sensibles permettant de distinguer entre les états sains et endommagés du système [Farrar *et al.,* 2001].

1.6.1 - Caractéristiques basées sur l'analyse modale

Les paramètres modaux peuvent être identifiés par des méthodes classiques d'analyse modale en utilisant soit une approche dite "*active*" soit une approche dite "*passive*". Dans le premier cas, on utilise les mesures générées par des signaux excitateurs spécifiques [Ewins, 2001, Heylen *et al.,* 1998] alors que dans le deuxième cas c'est l'excitation ambiante (vents, charges de trafic dans le cas des ponts, *etc*.) qui fait office de signal d'entrée (méthode communément appelée *Output Only method*) [Peeters & De Roeck, 1999, Peeters & De Roeck, 2001]. À partir des paramètres modaux identifiés différentes caractéristiques peuvent être développées pour l'identification d'endommagements.

Caractéristiques basées sur le changement de fréquence

L'idée générale de ces méthodes est que les endommagements changent la rigidité et/ou la masse de la structure. Ce qui se traduit, en général, par une modification des fréquences propres de cette structure. Ainsi, certains endommagements peuvent être détectés en surveillant les fréquences propres d'une structure. Ces fréquences propres peuvent être mesurées en utilisant un nombre de capteurs limité, mais cette mesure reste très sensible aux perturbations. Parmi ces perturbations, citons : la sensibilité aux changements de température, la masse non négligeable des capteurs, les conditions limites [Kessler, 2002].

Cette facilité et rapidité de mesure explique que cette méthode soit la plus souvent mise en œuvre [Salawu, 1997]. Cependant, une modification de la fréquence n'implique pas automatiquement l'existence des endommagements. En effet, la présence de bruit de mesures vient compliquer la prise de décision ou masquer certaines modifications. Ainsi, les bruits de mesures peuvent causer des changements de fréquences de grandeurs semblables à celles produites par des endommagements [Humar *et al.,* 2006]. Pour que les endommagements soient détectés avec un seuil de confiance important dans les structures, il faudrait que les fréquences propres varient d'au moins 5% [Creed, 1988].

Qui plus est, les fréquences propres sont une propriété *globale* de la structure, il n'est pas évident que ses changements puissent être utilisés pour la localisation des endommagements [Salawu, 1997]. En d'autres termes, les fréquences ne peuvent généralement pas fournir des informations spatiales relatives aux changements structurels sauf pour des fréquences très élevées où dans ce cas les modes sont liés aux

réponses locales. Remarquons, cependant, d'un point de vue pratique, ces hautes fréquences sont difficilement excitables et mesurables. Par contre, des décalages simultanés de fréquence peuvent donner des informations spatiales. En effet les changements de la structure à différents endroits causeront différentes combinaisons des modifications des fréquences modales. Cependant, il y a souvent un nombre insuffisant de fréquences, malgré des changements significatifs, pour déterminer précisément la localisation des endommagements [Doebling *et al.,* 1998].

[Kirmser, 1944] a illustré l'effet des fissures sur les fréquences pour un modèle de poutre. Les changements des fréquences propres dus aux différentes fissures sont liés à la taille et la position de la fissure introduite dans la poutre. [Gudmundson, 1982] a mis en évidence que les fréquences propres diminuent plus lentement avec une fissure qui s'ouvre et qui se ferme qu'avec une fissure qui reste ouverte. Une étude approfondie sur l'utilisation du changement de fréquence pour l'identification des endommagements est donnée par [Salawu, 1997] et [Doebling *et al.,* 1998]. Récemment, l'utilisation des fréquences propres comme une caractéristique pour la détection de delamination dans des structures en matériaux composites est à l'étude [Zak *et al.,* 1999, Zou *et al.,* 2000]. Pour les matériaux composites, la modification des fréquences propres dépend de la taille et de la position de ces endommagements. Pour des délaminages dans une poutre en matériaux composites, les quatre premières fréquences propres sont inchangées. Parmi ces fréquences, la première est le moine sensible à la présence des délaminages tandis que la quatrième est le plus sensible. D'ailleurs, l'effet de délaminage est plus important dans la région cisaillée qu'en flexion.

Caractéristiques basées sur le changement de forme de mode

Le changement de la rigidité et/ou de la masse provoquée par des endommagements provoque aussi des modifications des formes de mode de la structure. Comme les formes des modes représentent le déplacement relatif des différents points de structure, ces modifications peuvent donc être utilisées pour la détection et la localisation des endommagements. Afin d'évaluer ces changements, on trouve dans la littérature deux principaux critères, "*Modal Assurance Criterion*" (MAC) [Allemang & Brown, 1982] et "*Coordinate Modal Assurance Criterion*" (COMAC) [West, 1984]. Si $\underline{\underline{\phi}}^a$ et $\underline{\underline{\phi}}^b$ sont deux ensembles des formes des modes mesurées à partir de la structure à des temps différents, ces deux critères sont définis par :

$$MAC(j,k) = \frac{\left|\sum_{i=1}^{n_d}\left(\phi_{ij}^a \phi_{ik}^b\right)\right|^2}{\left(\sum_{i=1}^{n_d}\left|\phi_{ij}^a\right|^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n_d}\left|\phi_{ik}^b\right|^2\right)} \tag{1.54}$$

et

$$COMAC(i) = \frac{\left(\sum_{j=1}^{n_m} \left|\phi_{ij}^a \phi_{ij}^b\right|\right)^2}{\left(\sum_{j=1}^{n_m} \left|\phi_{ij}^a\right|^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n_m} \left|\phi_{ij}^b\right|^2\right)} \tag{1.55}$$

Ces critères expriment la corrélation existante entre deux formes de modes mesurées. Les valeurs diagonales de la matrice MAC indiquent quels sont les modes les plus affectés par les endommagements. La valeur 1 représente une bonne corrélation entre deux modes.

En pratique, il est plus difficile d'identifier des formes de modes que des fréquences propres. Là où quelques capteurs suffisent, il est nécessaire d'utiliser plusieurs capteurs pour assurer un maillage fin de la structure, afin d'identifier les formes de modes. [Pandey & Biswas, 1994] ont conclu que les changements des formes des modes dus à des endommagements sont en général très faibles et fournissent rarement une indication claire sur les endommagements.

Par rapport à la forme des modes, la courbure de forme des modes est plus sensible à un changement du moment d'inertie qui est lié à un changement de la raideur locale de la structure. Quand les endommagements se présentent dans une structure, la rigidité en flexion (Bending Stiffness) aux endroits des endommagements est réduite tandis qu'en même temps la courbure de forme de modes augmente. [Pandey *et al.,* 1991] ont mis en évidence que la différence absolue entre la courbure des formes de mode de la structure saine $\underline{\phi_j''}$ et de la structure endommagée $\underline{\phi_j''^*}$ peut être un bon indicateur d'endommagement :

$$\underline{MSC} = \sum_{j=1}^{n_m} \left|\underline{\phi_j''^*} - \underline{\phi_j''}\right| \tag{1.56}$$

Plus la réduction de la rigidité en flexion est grande (correspondant à un niveau d'endommagement plus élevé), plus le changement de courbure sera grand. Donc, les valeurs des composantes de $\underline{MSC}$ sont élevées dans les régions où l'endommagement est présent et négligeables dans toutes les autres régions. La position d'endommagement est donnée par la plus grande valeur.

La courbure peut être calculée par l'intégration numérique de la forme du mode, par exemple en utilisant un schéma aux différences centrées :

$$\phi_{ij}'' = \frac{\phi_{(i+1)j} - 2\phi_{ij} + \phi_{(i-1)j}}{l_i^2} \tag{1.57}$$

où, i est le numéro de nœud, j est le numéro de la forme du mode et l_i est la distance entre les nœuds $i+1$ et $i-1$. Cependant, [Chance *et al.,* 1994] ont montré que ce calcul de la courbure peut aboutir à des erreurs inacceptables.

Les simulations [Humar *et al.,* 2006] montrent que les méthodes SHM à base de surveillance des courbures des formes des modes sont très sensibles au bruit de mesures. Ce qui limite leur utilisation dans la pratique. La précision de la détection des endommagements s'améliore, si les contraintes dynamiques sont mesurées directement. [Ho & Ewins, 2000] ont étudié d'autres variations des caractéristiques basées sur des formes de modes comme la pente de formes des modes et le carré de la courbure des formes des modes. Ils ont conclu que la caractéristique basée sur le carré de la courbure des formes des modes donne de meilleurs résultats.

Une nouvelle technique de localisation et d'estimation de la sévérité des endommagements dans les matériaux composites, stratifiés est proposée [Lestari *et al.,* 2006]. Cette méthode est basée sur des courbures des formes des modes. Un critère mathématique basé sur la perte de rigidité est donné pour estimer la sévérité des endommagements. La simulation numérique et la validation expérimentale montrent que ce critère donne une bonne approximation de la position des endommagements et leurs sévérités.

Caractéristiques basées sur l'énergie de déformation :

Considérons dans un premier temps une poutre de type Euler-Bernoulli, élastique et linéaire, subdivisée en n_e éléments et n_n nœuds sur sa longueur l_b^e. L'énergie de déformation s'écrit :

$$J = \frac{1}{2}\int_0^{l_b^e} EI\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right]^2 dx \tag{1.58}$$

où w est le déplacement vertical et EI est la rigidité en flexion. Si la forme de mode $\underline{\phi_i}$ est considérée, l'expression de l'énergie de déformation modale est donnée par :

$$J_i = \frac{1}{2}\int_0^{l_b^e} EI\left[\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x^2}\right]^2 dx \tag{1.59}$$

L'énergie de déformation modale de $i^{ème}$ mode de vibration et de $j^{ème}$ élément entre $x = a$ et b est exprimée par :

$$J_{ij} = \frac{1}{2}\int_a^b EI_j\left[\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x^2}\right]^2 dx \tag{1.60}$$

[Stubbs *et al.,* 1995] ont proposé un indicateur d'endommagement basé sur l'énergie de déformation modale pour l'estimation de la taille d'une fissure dans une poutre. Cet indicateur est basé sur le rapport entre l'énergie de déformation modale des éléments avant et après l'endommagement. Les formes des

modes mesurées ont d'abord été différenciées pour obtenir des courbures des formes des modes et ensuite interpolées pour obtenir la courbure, afin de calculer l'énergie de déformation modale.

[Farrar & Doebling, 1999] ont réussi à utiliser l'énergie de déformation modale pour localiser les endommagements d'un pont. Ils ont constaté que l'utilisation de cette caractéristique est meilleure que la comparaison directe des courbures des formes des modes pour la localisation des endommagements. [Worden *et al.,* 2000] ont prouvé que les résultats de la localisation dépendent de l'emplacement des capteurs et l'échantillonnage des modes. Le point fort de cette méthode est que la détection et la localisation peuvent être obtenues avec un petit nombre de modes de vibration [Humar *et al.,* 2006].

Dans un effort visant à comparer les différentes caractéristiques, [Kim *et al.,* 2003] ont appliqué les méthodes basées sur l'énergie de déformation modale et sur les fréquences propres pour la localisation d'un point d'endommagement et l'estimation de sa taille dans une poutre par simulation. Il a été constaté que l'énergie de déformation modale donne une estimation plus exacte que les fréquences pour la localisation d'endommagement.

[Cornwell *et al.,* 1999] ont adopté cette caractéristique de structure 1-D pour une plaque en la divisant en plusieurs bandes et en traitant chaque bande individuellement. L'erreur associée à cette approche est que la rigidité en torsion entre les bandes n'est pas conservée.

[Law *et al.,* 1998] ont proposé l'utilisation du quotient de l'énergie élémentaire (EEQ), défini comme le rapport entre l'énergie de déformation modale d'un élément et son énergie cinétique. Un résidu basé sur une mesure de la différence normalisée et moyennée entre l'EEQ de la structure saine et endommagée permet ainsi d'indiquer et de localiser les endommagements.

Caractéristiques basées sur la matrice de flexibilité

[Pandey & Biswas, 1994] ont montré que des endommagements peuvent être détectés en mesurant la différence entre les matrices de flexibilité de la structure endommagée et saine. La matrice de flexibilité $\underline{\underline{F}}$ est l'inverse de la matrice de rigidité $\underline{\underline{K}}$ et elle est obtenue par :

$$\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{K}}^{-1} = \underline{\underline{\Phi}}\,\underline{\underline{\Omega}}^{-2}\underline{\underline{\Phi}}^{T} = \sum_{i=1}^{n_d} \frac{1}{\omega_i^2}\underline{\phi}_i\underline{\phi}_i^{T} \tag{1.61}$$

En pratique, quelques modes en basse fréquence peuvent être mesurés. Dans ce cas, la matrice de flexibilité converge rapidement vers une bonne approximation. En outre, parce que de la relation (1.61) fait intervenir l'inverse du carré des fréquences modales, la matrice de flexibilité est très sensible aux changements des modes d'ordre inférieur. Pour cette raison, ici, l'utilisation d'un modèle analytique n'est pas nécessaire, si les formes de modes saines sont mesurées à partir de la structure de référence. Toutefois, les formes de modes doivent être normalisées par rapport à la masse. Ce qui signifie que la matrice de masse doit être déterminée.

[Yan & Golinval, 2005] proposent une méthode de détection et de localisation des endommagements basée sur la matrice de flexibilité et de la rigidité. Ils ont utilisé la matrice de flexibilité pour la détection de l'endommagement. Cette matrice est calculée à partir des formes de modes identifiées et la masse normalisée. Pour la matrice de rigidité ils ont utilisé le pseudo-inverse de la matrice de flexibilité pour son calcul. Les valeurs diagonales de la matrice de rigidité, indiquent l'endroit de l'endommagement. Aucun modèle analytique n'a été utilisé.

Caractéristiques basées sur le Vecteur Résidu en Force

En employant les modes de vibration mesurés, les fréquences propres et le modèle de structure saine, il est possible de calculer le Vecteur Résidu en Force (*Residual Force Vector*, RFV) qui peut être utilisé pour la détection, la localisation et l'estimation des endommagements. Pour chaque mode i la forme du mode et la fréquence propre doivent satisfaire à l'équation aux valeurs propres suivante :

$$(\underline{\underline{K}}^* - \omega_i^{*2}\underline{\underline{M}}^*)\underline{\phi}_i^* = \underline{0} \tag{1.62}$$

En supposant que la matrice de rigidité $\underline{\underline{K}}^*$ et la masse $\underline{\underline{M}}^*$ de la structure endommagée peuvent être définies comme suit :

$$\underline{\underline{M}}^* = \underline{\underline{M}} + \underline{\underline{\Delta M}} \tag{1.63}$$

$$\underline{\underline{K}}^* = \underline{\underline{K}} + \underline{\underline{\Delta K}} \tag{1.64}$$

Substituons les équations (1.63) et (1.64) dans l'équation (1.62). Nous obtenons après réorganisation la définition de RFV :

$$\underline{RFV}_i = (\underline{\underline{K}} - \omega_i^{*2}\underline{\underline{M}})\underline{\phi}_i^* = \underline{0} \tag{1.65}$$

Chaque mode i donne un RFV unique. Chaque ligne de la RFV représente un seul degré de liberté du modèle numérique de la structure. Un endommagement est matérialisé par un changement dans un élément et par conséquent une modification du degré de liberté associé. Cette modification va alors occasionner une augmentation significative de la valeur de ligne en question par rapport aux autres lignes supposées "saines". Cette relation fournit donc une méthode pour localiser l'endommagement.

La formulation de la RFV repose sur le nombre de points de mesure des modes de vibration. Si le nombre de points de mesure est petit par rapport au degré de liberté du système, la réduction des matrices de système ou/et l'extrapolation des formes de mode est nécessaire. La réduction des matrices du système détruit la structure de ces matrices et par conséquent l'utilisation directe de RFV pour localiser l'endommagement n'est plus possible. L'extrapolation des formes de mode à partir de quelques points de mesure jette un doute sur la capacité à localiser précisément les endommagements.

1.6.2 - Caractéristiques basées sur l'analyse temporelle :

La formulation temporelle a été couramment utilisée pour élaborer des stratégies de la détection et l'isolation des endommagements (*Faut Detection and Isolation,* FDI) robustes et efficaces pour surveiller les systèmes dans le domaine du contrôle et de l'automatisme. Dans le cadre du SHM et donc de la surveillance des structures, différentes approches temporelles ont été proposées. Un aperçu de ces méthodes est donné dans [Fassois & Sakellariou, 2007]. Nous proposons dans ce qui suit de résumer les plus pertinentes d'entre elles.

Caractéristiques basées sur les sous-espaces

La détection d'endommagement en utilisant les sous-espaces de la matrice de Hankel a été développée par [Basseville *et al.,* 2000, Basseville *et al.,* 2001]. Le résidu proposé est capable de détecter les endommagements, en employant seulement les mesures du système. C'est une méthode de type *Output Only*, L'excitation est alors donnée par le bruit ambiant en supposant que ce dernier est blanc et gaussien. Toutefois, il résulte de ces expériences que cette méthode donne également de bons résultats dans des conditions moins restrictives sur l'excitation. Les matrices de covariance de la réponse stochastique de la structure ont été calculées pour obtenir la matrice de Hankel $\underline{\underline{H}}$. Le noyau de cette matrice obtenu, par exemple, à partir de la décomposition en valeurs singulières (SVD), donne une matrice de parité $\underline{\underline{\mathbb{Z}}}$ telle que :

$$\underline{\underline{\mathbb{Z}}}^T \underline{\underline{H}} = \underline{\underline{\Delta}} \approx \underline{\underline{0}} \tag{1.66}$$

Cette matrice de parité est stockée et est représentative d'une structure saine. L'indicateur d'endommagement est calculé en transformant la matrice de résides $\underline{\underline{\Delta}}$ en un vecteur $\underline{\Delta}$. La norme carrée de ce vecteur $\underline{\Delta}$ pondéré par une matrice de covariance résiduelle $\underline{\underline{\Pi}}$ génère un scalaire normalisé ϱ, qui peut être utilisé pour la détection des endommagements :

$$\varrho = \underline{\Delta}^T \underline{\underline{\Pi}}^{-1} \underline{\Delta} \ , \tag{1.67}$$

Si les nouvelles données sont mesurées à partir de la structure saine et si la matrice de Hankel est calculée avec ces données, le résidu ϱ doit être proche de zéro et ne varie que dans certaines limites statistiques dues aux erreurs de mesures. Si l'endommagement se produit, le résidu devrait s'éloigner de sa valeur de référence (en moyenne zéro). [Nasser, 2006] propose des méthodes robustes permettant de prendre en compte les variations de ce résidu dues aux effets environnementaux par exemple un changement de température.

Selon [Yan & Golinval, 2006], le résidu ϱ n'est pas sensible aux petits endommagements. Ils ont ainsi proposé deux nouveaux résidus. Le premier représente la variation angulaire déduite des sous-espaces

orthonormés de la matrice de Hankel du système sain et du système endommagé. Le deuxième utilise la partie active de la matrice de Hankel au lieu de la matrice de Hankel complète dans l'équation (1.66).

Caractéristiques basées sur l'analyse en composante principales

L'analyse en composante principale (ACP) est une méthode classique utilisée pour réduire les dimensions et pour extraire les directions importantes d'un nuage de points multidimensionnel. L'ACP a été appliquée pour la validation des capteurs par [Friswell & Inman, 2000]. Cette technique a aussi été utilisée par [De Boe *et al.,* 2003a, De Boe *et al.,* 2003b] pour la détection et la localisation des endommagements et améliorée par [Yan *et al.,* 2003]. En 2005 [Yan *et al.,* 2005a] ont proposé une autre méthode basée sur l'APC pour détecter un endommagement en présence de perturbations liées à l'environnement. Cette méthode montre que les changements des caractéristiques mesurées dus aux variations environnementales en utilisant l'ACP sont différents des changements mesurés dus aux endommagements, ce qui permet de découpler les effets et donc de routinier la prise de décision. Cette méthode a aussi été développée dans le cas non linéaire [Yan *et al.,* 2005b]. Elle est alors composée de deux étapes : la première étape consiste à découper l'espace des données en plusieurs classes, la deuxième étape consiste à appliquer l'ACP sur chaque classe.

[Aimin *et al.,* 2005, Yan & Golinval, 2006] ont comparé différentes variantes de la méthode basée sur les sous-espaces et celle de l'analyse en composantes principales. Ils ont montré que les résidus basés sur les sous-espaces détectent mieux les endommagements que ceux basés sur l'analyse en composantes principales.

1.7 - Identification des endommagements

Selon [Worden & Dulieu-Barton, 2004, Fritzen, 2009], il existe deux approches complémentaires pour identifier les endommagements. La première considère l'identification des endommagements comme un problème inverse et la deuxième la traite comme un problème de reconnaissance des formes.

Dans la première approche, l'écart, produit en raison des endommagements, entre les données mesurées et les données de référence choisies est lié aux changements des paramètres d'endommagements à la condition que la relation entre ces paramètres et les données de référence soit connue. Cette relation est souvent donnée par un modèle de la structure saine, et les différences entre les données mesurées et celles simulées sont liées aux modifications des paramètres du modèle. Les algorithmes utilisés sont principalement basés sur l'algèbre linéaire ou la théorie de l'optimisation. Les méthodes basées sur le recalage de modèle considèrent l'identification de l'endommagement comme un problème inverse et ont été la base de nombreuses études de SHM et de ses applications.

La deuxième approche considère l'identification d'endommagement comme un problème de classification, où des caractéristiques sont extraites à partir des données mesurées et attribuées par un algorithme de reconnaissance des formes à une classe d'endommagement, [Worden & Dulieu-Barton,

2004]. Parmi les différents algorithmes de reconnaissance des formes, les méthodes basées sur les réseaux de neurones sont généralement utilisées en raison de leur capacité de classification et de généralisation.

Nous présentons ici une étude approfondie sur l'état de l'art les méthodes basées sur le recalage de modèle et celles basées sur les réseaux de neurones.

1.7.1 - Méthodes basées sur le recalage de modèle

Dans le cadre de ses méthodes, un modèle est employé pour simuler la dynamique d'une structure saine et des déviations observées, par rapport à la dynamique simulée. Ces déviations sont directement liées aux changements sur les paramètres du modèle. Le recalage de modèle peut être effectué par les méthodes directes ou par les méthodes de sensibilité. Les méthodes directes donnent des résultats exacts, en recalant les matrices de rigidité et de masse en une seule étape de manière à ce que la sortie du modèle corresponde aux données expérimentales [Berman & Nagy, 1983, Baruch & Bar Itzhack, 1978]. Par contre, le modèle recalé ne peut fournir aucune signification physique [Levin & Lieven, 1998b]. C'est la raison principale pour laquelle ces méthodes ne sont pas employées pour la détection d'endommagement. Les méthodes de sensibilité vainquent cette limitation des méthodes directes, mais exigent une solution itérative [Friswell & Mottershead, 1995, Link, 2000]. Le développement d'un mécanisme du recalage basé sur la sensibilité se compose des étapes suivantes :

- *choix du résidu et de la fonction objectif ;*
- *développement du modèle de base ;*
- *choix des paramètres de recalage ;*
- *choix d'algorithme d'optimisation.*

Les résidus sont définis par des différences entre les quantités dynamiques du modèle mathématique et celles identifiées expérimentalement [Natke, 1998]. Le choix du résidu joue un rôle important dans tous les problèmes de recalage de modèle EF parce qu'il influence le comportement de l'algorithme d'optimisation utilisé. La majorité des algorithmes de recalage de modèle utilisés pour identifier les endommagements ont employé des résidus basés sur les fréquences propres et les formes des modes. L'amortissement n'est généralement pas pris en considération à cause des difficultés de modélisation. L'estimation des fréquences propres d'une structure est plus rapide et plus économique (en terme de coût de calcul) que l'identification des formes des modes, ce qui implique son utilisation fréquente pour la construction d'un résidu. Ces méthodes largement utilisées pour recaler les modèles EF en mécanique des structures ont été détournées de leurs objectifs principaux pour être appliquées en détection d'endommagement. Le but maintenant est de détecter des écarts sur des paramètres et ces écarts front office de résidus indicateurs de défauts ou d'endommagements. Nous présentons ci-dessous quelques approches de SHM par recalage de modèle. Nous efforcerons pour chaque approche, de préciser la

structure et le type d'endommagement que les auteurs ont essayé de surveiller et jusqu'a quelle étape de la procédure SHM ils ont pu satisfaire.

Une fente dans une armature expérimentale de cinq étages a été localisée par [Morassi & Rovere, 1997] grâce à l'utilisation comme résidu du changement observé sur les cinq premières fréquences propres liées aux modes de cisaillement. Ils ont considéré que la distribution de la rigidité est connue dans certaines régions du modèle et qu'elle n'atteint jamais une valeur plus grande que celle de la configuration de référence. Ces deux hypothèses ont joué un rôle important dans la convergence des algorithmes d'identification d'endommagement. [Maeck *et al.,* 2000] ont créé des fissures dans une poutre en béton armé par le chargement statique et ont utilisé un algorithme de recalage du modèle pour recaler les changements mesurés des cinq premières fréquences propres de la poutre avec son modèle EF. Pour réduire le nombre de paramètres, ils ont considéré des types d'endommagements prédéfinis. Cette approche n'est pas adaptée aux structures plus complexes.

L'utilisation des fréquences propres réduit le nombre de paramètres possibles et donc le type, le nombre et les endroits où les endommagements peuvent être identifiés. Pour cette raison il est plus pratique d'utiliser les formes des modes mesurées, si elles peuvent être identifiées. [Abdel Wahab *et al.,* 1999] ont localisé des endommagements dans des poutres en béton armé en utilisant les quatre premières fréquences propre et des formes des modes. [Jang *et al.,* 2002] ont identifié des endommagements dans une armature pour laquelle six modes ont été identifiés. Ils n'ont pu détecter les endommagements qu'en trois endroits seulement, mais aucun effort n'a été fait pour estimer leurs sévérités. [Hailing *et al.,* 2001] ont employé trois fréquences et deux modes pour identifier des types de dommages prédéfinis. Des dommages ont été modélisés par des paramètres représentant le moment d'inertie des colonnes d'un pont, où les dommages ont été occasionnés. Les résultats ont permis la localisation des endommagements, mais leurs sévérités n'ont pas été corrélées avec le changement observé sur ces paramètres. [Papadopoulos & Garcia, 1998] ont présenté une méthode de recalage du modèle et d'identification d'endommagement, qui pourrait prendre en compte la variabilité de la structure. En premier lieu, ils ont estimé les propriétés statistiques de la structure saine comme la masse, la rigidité et la moyennes des fréquences propres. Ensuite, les fréquences propres et les formes des modes du système endommagé ont été simulées. Le nombre de paramètres des endommagements a été choisi égal au nombre de modes disponibles. En dernier lieu, ils ont comparé les propriétés statistiques de la rigidité de la structure endommagée à celles de la structure saine pour estimer la probabilité de l'existence d'endommagements.

Le recalage de modèle utilisant des mesures de FRF a été également employé pour l'identification des endommagements [Marwala & Heyns, 1998, Cha & Tuck-Lee, 2000]. L'avantage de ces méthodes par rapport à celles utilisant les paramètres modaux est qu'il réside dans la quantité (plus importante) d'informations obtenue dans une gamme de fréquence désirée [Lin & Ewins, 1994] et dans la suppression de l'obligation d'effectuer d'opération d'appariement. [Zang *et al.,* 2001] précisent également

que, en employant un grand nombre de points de FRF, les systèmes d'équations de recalage peuvent être aisément transformés en ensembles d'équations "hyper-déterminé".

Le choix et le nombre de paramètres à mettre à jour sont également des facteurs importants à considérer. [Casas & Aparicio, 1994] ont étudié l'identification de la fissure dans une poutre en béton armé en utilisant une technique de recalage du modèle. Ils ont conclu que la seule variation des fréquences propres ne permet pas de distinguer les changements de la flexion, du module de déformation ou la fissuration. Ils ont également conclu que l'amortissement n'était pas sensiblement différent dans les poutres avec fissure par rapport aux poutres sans fissure et qu'il n'y avait aucune relation claire entre la progression de la fissure et l'augmentation de l'amortissement. [Gola *et al.,* 2001] ont étudié le nombre de paramètres identifiables dans les méthodes de sensibilité. Le nombre théorique de paramètres qui peut être identifié est égal au nombre de fréquences de résonance mesurées. Dans le cas où on utilise aussi les formes des modes, le nombre de paramètres possède une limite supérieure ou égale au nombre de modes multiplié par le nombre de degrés de liberté mesuré.

Afin de trouver la solution d'un problème inverse, différentes méthodes d'optimisation peuvent être employées. Les systèmes linéaires peuvent être régularisés en utilisant des techniques de décomposition orthogonale comme la décomposition QR, où l'espace initial des paramètres est réduit à un plus petit sous-espaces. Ceci rend le problème numériquement plus stable et conduit à une solution plus précise. Une autre manière est d'utiliser la décomposition en valeurs singulières. Des méthodes itératives comme la méthode des gradients conjugués peuvent également être employées. [Fritzen & Kiefer, 1992] ont appliqué une méthode basée sur la décomposition SVD et une méthode du gradient conjugué pour détecter les endommagements dans une poutre uniforme. Ils ont montré que les deux méthodes fournissent l'ensemble complet des paramètres mais les résultats de la localisation ne sont pas aussi clairs qu'avec des algorithmes basés sur la décomposition QR.

Pour les systèmes non-linéaires il existe plusieurs méthodes pour rechercher le minimum absolu de la fonction d'optimisation. La méthode de Newton-Raphson peut être employée, mais présente l'inconvénient de devoir trouver des valeurs initiales dans la zone de convergence. L'avantage de la méthode des moindres carrés pondérés réside dans sa nature itérative qui assure toujours une convergence de l'algorithme [Natke & Cempel, 1991]. La méthode de Levenberg-Margquardt est une combinaison de la méthode de descente de Gauss-Newton et de la méthode gradient. C'est la plus robuste, mais prend plus de temps pour trouver le minimum.

La méthode du recuit simulé est basée sur une recherche aléatoire qui permet de trouver le minimum absolu du problème. Dans [Fritzen *et al.,* 1993] la méthode est employée pour résoudre le problème de détection d'endommagements par un choix aléatoire des petits sous-ensembles des paramètres de recalage. [Levin & Lieven, 1998a] ont comparé diverses réalisations des algorithmes basés sur la méthode du recuit simulé et l'algorithme génétique et ont proposé une nouvelle variation d'algorithme du

recuit simulé pour le recalage du modèle. Ils ont montré que les méthodes basées sur les algorithmes génétiques ne peuvent pas traiter le couplage entre les paramètres de recalage, et que les méthodes basées sur la méthode du recuit simulé sont très lentes. Ils ont également précisé que généralement la fonction objectif choisie pour le problème de recalage de modèle a beaucoup de minimums locaux, l'utilisation des techniques d'optimisation puissantes telles que le recuit simulé est donc plus appropriée.

La performance d'un algorithme de détection d'endommagement basé sur le recalage de modèle dépend fortement de l'exactitude du modèle mathématique. Les hypothèses et les simplifications jouent un rôle essentiel, comme l'ont montré [Fritzen *et al.,* 1998]. Ils ont ainsi utilisé des algorithmes basés sur la sensibilité pour localiser et détecter des endommagements. Ils ont montré que le recours à la théorie de poutre de Bernoulli-Euler au lieu de la théorie de Timoshenko a produit des résultats inexploitables du fait du décalage des hautes fréquences. Souvent les changements des quantités mesurées, provoqués par des endommagements structurels, sont plus petits que ceux observés entre la structure saine et le modèle mathématique. En conséquence, il devient presque impossible de discerner entre un modèle imparfait et le changement réel provoqué par l'endommagement. Il y a deux approches alternatives à ce problème [Friswell *et al.,* 1997]. Le premier est de recaler le modèle de manière à ce que la corrélation entre le modèle et les données mesurées soit améliorée. Cette approche exige que les erreurs qui demeurent après le recalage soient plus petites que les changements provoqués par des endommagements. De plus, les changements au modèle devraient être physiquement significatifs, de sorte que l'algorithme de recalage corrige des erreurs de modélisation réelles, et ne reproduisent pas simplement les données mesurées. La deuxième approche propose d'utiliser les résidus relatifs basés sur la différence entre les données mesurées sur la structure saine et la structure endommagée.

Les problèmes de recalage de modèle sont généralement résolus par les méthodes itératives qui exigent la résolution du problème analytique au moins une fois à chaque itération : par conséquent la taille du modèle devient un paramètre important à considérer. Selon [Natke, 1998], ces méthodes fonctionnent correctement quand le nombre de paramètres à estimer est inférieur à environ 100 et le nombre maximum du degré de liberté (ddl) est inférieur à environ 1000 mais le ddl d'un modèle EF est généralement beaucoup plus grand que cette valeur. Pour résoudre ce problème, il est recommandé d'employer la modélisation par sous-systèmes et d'utiliser différentes techniques de réduction du modèle. [Law *et al.,* 2001] a présenté une méthodologie de modélisation orientée sur la détection des endommagements dans des grandes structures. Pour réduire le nombre de ddl, des super-éléments ont été formulés tandis que la sensibilité des modes à des petits changements physiques a été maintenue. Ce qui a permis au modèle d'être employé dans un algorithme de recalage basé sur la sensibilité. Le fonctionnement de la méthode a été testé sur une structure simulée d'un pont de passerelle où les 5370 ddl initiale ont été réduites à 211 ddl avec une performance raisonnable. [Möller & Friberg, 1998] ont proposé une méthode qui a réduit le modèle par la projection sur un sous-espaces représentant un nombre réduit de modes. Ceci a eu comme conséquence de réduire le temps de calcul.

La non-unicité des modèles recalés pose un problème important aussi bien dans le domaine de l'identification des endommagements que celui du recalage de modèle EF. [Berman, 2000] a conclu qu'il ne peut y avoir aucun modèle dynamique recalé unique d'une structure tant que le ddl du modèle est inférieur au ddl de la structure réelle. Il a argumenté en affirmant que si la structure réelle a un nombre infini de ddl, il existe un nombre infini de modèles physiquement raisonnables, qui représentent le comportement de la structure sur une gamme de fréquences donnée. [Baruch, 1997] a prouvé que des changements simultanés des matrices de la masse et de rigidité ne pourraient pas être identifiés par la seul utilisation des données modales. Car les formes des modes ne pouvaient pas fournir une base de référence. Les méthodes qui utilisent des formes des modes comme base de référence peuvent identifier des matrices qui sont très différentes des matrices de rigidité et de masse réelles parce que les matrices identifiées ne sont par uniques. Ceci a des conséquences importantes sur l'identification des endommagements affectant la masse et la rigidité de la structure : ils ne peuvent pas être identifiés en grâce à la seule utilisation des mesures modales.

Ces différents développements expliquent la raison pour laquelle le recalage de modèle ne peut être développé comme une technique automatique de SHM. Beaucoup de connaissances d'ingénierie sont nécessaires au succès du recalage de modèle.

1.7.2 - Méthodes basées sur le réseau de neurones

La relation de cause à effet des endommagements et des changements du comportement dynamique (caractéristiques) peut être représentée par les réseaux de neurones artificiels (RNA), où la sortie de RNA représente différents cas d'endommagements tandis que l'entrée représente les caractéristiques retenues. Le but est d'extraire des caractéristiques sensibles, à partir des données mesurées, qui pourraient clairement distinguer les différentes classes d'endommagement de la structure. Généralement les composantes du signal, qui distinguent les diverses classes d'endommagement, sont cachées par les caractéristiques du fonctionnement normal de la structure. La caractéristique choisie devrait amplifier celles correspondant à l'endommagement et en supprimer d'autres. Le vecteur des caractéristiques doit être d'une dimension réduite parce que dans un problème de reconnaissance des formes, le nombre d'exemples de données nécessaires pour l'apprentissage se développe de façon exponentielle corrélativement avec la dimension du problème [Worden & Dulieu-Barton, 2004].

Après avoir choisi des caractéristiques sensibles, l'étape qui suit est le choix d'un algorithme de reconnaissance des formes. Il existe différentes caractéristiques et différents algorithmes de reconnaissance des formes qui peuvent être employés pour leur classification. Les premiers travaux sur la détection des endommagements basés sur le réseau de neurones ont été effectués par [Atalla & Inman, 1998]. Ces derniers ont utilisé les données fréquentielles et le réseau de type RBFNN (Radial Basis Function Neural Network) pour le recalage d'un modèle EF d'une structure linéaire en temps réel. RBFNN calculent la distance entre les entrées, c'est-à-dire que la fonction de combinaison renvoie la

norme euclidienne du vecteur issu de la différence vectorielle entre les vecteurs d'entrées. Les intégrales des composantes réelles et imaginaires des courbes de réponse en fréquence (FRFs), sur diverses gammes de fréquences, ont été utilisées comme entrée du réseau. L'apprentissage du réseau a été réalisé en utilisant un modèle numérique représentant l'état nominal du système. Les résultats obtenus à partir de différents exemples ont montré que l'approche basée sur le réseau de neurones pour identifier avec précision les endommagements, en temps réel.

Afin d'identifier des défauts dans des poutres en porte-à-faux, [Marwala & Hunt, 1999] ont choisi les perceptrons multicouches (PMC) pour construire un groupe de réseaux. Des courbes de réponse en fréquence et les paramètres modaux ont été utilisées comme entrées de ces groupes de réseaux. L'apprentissage supervisé a été effectué en utilisant des données obtenues à partir du modèle EF de la poutre représentant la structure saine et les états endommagés. L'endommagement a été simulé par la réduction d'aire de la section droite d'un élément. La structure a été divisée en sous-sections et la sortie du réseau donne le numéro de la sous-section endommagée. Les cinq premiers modes et l'énergie de 50 gammes de fréquences ont été utilisés. Ils montrent que l'utilisation de ces deux caractéristiques réduit au minimum les erreurs d'identification des endommagements.

[Waszczyszyn & Ziemianski, 2001] discutent de l'application des réseaux de neurones de rétro-propagation (BPNNs) pour identifier l'endroit et la longueur d'une fissure dans une poutre en acier. Ils ont choisi une couche cachée et des fonctions sigmoïdes binaires d'activation sur chaque neurone du réseau. Les changements des quatre premières fréquences propres de la poutre ont été utilisés comme entrée du réseau. Des paramètres sans dimensions représentant l'endroit et la longueur d'une fissure ont été choisis comme sortie du réseau. Les résultats numériques et expérimentaux prouvent que le BPNN localise et estimer correctement l'emplacement et la profondeur de la fissure.

[Thomas & Lefebvre, 2002] ont utilisé le réseau de neurones pour modéliser les systèmes non linéaires. Une architecture neuronale qui se compose d'une couche cachée a été choisie avec des neurones supplémentaires. Chaque neurone supplémentaire était relié à un neurone de la couche d'entrée et de sortie. Le poids de ces neurones a été estimé par un algorithme d'apprentissage sur des données représentant la structure saine. Ce qui permettait également l'estimation de l'écart type du bruit. Des endommagements ont été détectés en comparant l'erreur d'estimation entre le modèle et les données mesurées à partir de la structure. Le fonctionnement de l'algorithme a été montré à travers un exemple numérique.

[Roseiro *et al.,* 2005] ont utilisé le réseau de neurones de type feed-forward pour localiser et mesurer des endommagements dans la plaque stratifiée à partir des données transmises par des capteurs piézo-électriques. L'entrée du réseau était la réponse dynamique (tension) de chaque capteur piézo-électrique et la sortie était le numéro de l'élément avec un endommagement et son sévérité. Des données obtenues à partir de la simulation ont été utilisées pour l'apprentissage et la validation croisée du réseau. Des

endommagements ont été simulés par la réduction du volume de fibre de l'ensemble des éléments de la plaque. La dimension du réseau a été obtenue par expérimentation. Les résultats numériques montrent l'intérêt du procédé proposé.

[Chen *et al.,* 2003] ont utilisé un Perceptrons multicouches (PMC) pour isoler des endommagements dans une structure. Ils ont pris la réponse transitoire de la structure comme entrée et la sortie du réseau représente des classes prédéfinies d'endommagement. L'apprentissage de RNA a été réalisé en utilisant des données obtenues à partir du modèle d'EF de la structure saine et endommagée. La méthodologie proposée a été vérifiée sur une poutre et un portique en acier. Les classificateurs développés fournissent clairement des indications diagnostiquant les endommagements présents dans les structures.

[Zapico *et al.,* 2003] proposent une méthodologie destinée à fournir des informations globales sur l'endroit et la sévérité des endommagements dans une structure de type portique en acier après un chargement sismique. D'abord, un modèle d'éléments finis de la structure a été recalé grâce à un PMC. Les fréquences propres de la structure ont été choisies comme entrées de ce PMC. Des paramètres de recalage ont été choisis et une base de données d'apprentissage a été générée en les modifiant de façon aléatoire. Une fois élaboré, ce PMC est utilisé pour calculer des paramètres de recalage à partir des fréquences propres de la structure identifiée expérimentalement. Une autre base de données a été créée en employant le modèle EF recalé en modifiant aléatoirement l'emplacement des endommagements et en calculant les paramètres d'endommagement de chaque sous système et les fréquences propres. Cette base de données a permis l'apprentissage d'une autre PMC pour identifier des fréquences propres identifiées expérimentalement.

[Kao & Hung, 2003] ont développé une approche pour l'identification des endommagements structuraux basée sur un réseau de neurones utilisant la réponse libre de la structure. Tout d'abord, en utilisant des réseaux neuronaux d'identification de système (Neural System Identification Networks) les états endommagés et les états sains ont été identifiés. Ensuite un RNA a été employé pour générer des réponses libres de la structure avec les mêmes conditions initiales. En comparant les périodes et les amplitudes des réponses libres des états endommagés et sains, l'influence des endommagements a été estimée. Des résultats numériques et expérimentaux obtenus à partir d'une armature en acier ont été utilisés pour montrer le fonctionnement de l'algorithme. L'inconvénient de l'approche proposée est l'accumulation de l'erreur de simulation.

[Zang *et al.,* 2004] présentent une approche, pour la détection des endommagements structuraux, basée sur l'analyse de la composante indépendante (Independent Component Analysis, ICA) des mesures avec des réseaux de neurones. L'analyse de la composante indépendante permet de représenter les mesures par une combinaison linéaire de composantes statistiques indépendantes et par une matrice de mélange (Mixing Matix). Cette matrice de mélange a été considérée comme caractéristique et a été adoptée comme entrée d'un perceptron multicouche (PMC), qui a été construit par l'algorithme de rétro-

propagation d'erreur. L'algorithme a été testé expérimentalement sur une structure de type étagère. L'apprentissage a été réalisé sur une base des données expérimentales représentant la structure dans des conditions endommagées et saines. Les résultats obtenus montrent l'efficacité de l'algorithme pour détecter avec succès les états sains et les états endommagés.

[Haritos & Owen, 2004] ont comparé une méthode de détection d'endommagement basée sur recalage du modèle EF en utilisant l'approche neuronale proposée par [Zang *et al.,* 2004] et en utilisant des données de FRF obtenues expérimentalement à partir d'un modèle à échelle réduite d'un pont. La méthode basée sur le recalage du modèle EF peut localiser l'endommagement ; en revanche seule la détection d'endommagements était possible avec l'approche neuronale. Ils ont conclu que la méthode basée sur le recalage fournit une image beaucoup plus nette de l'état d'endommagement. Ils ont également précisé qu'en raison de la complexité et des incertitudes concernant des conditions limites dans les structures réelles, il est difficile de mettre en application ces techniques.

[Lee *et al.,* 2005] présentent une méthode de détection d'endommagement basée sur un réseau de neurones en utilisant les propriétés modales. C'est le rapport entre les composantes des formes des modes identifiés avant et après l'apparition des endommagements qui a été employé comme entrée du RNA, puisqu'il s'avère moins sensible aux erreurs de modélisation. La couche de sortie indique les indices de rigidité des éléments endommagés à identifier. Les auteurs ont appliqué l'algorithme rétro-propagation sur un réseau ayant deux couches cachées pour l'apprentissage. Les données d'apprentissage ont été obtenues numériquement à partir du modèle EF recalé de la structure. Les analyses basées sur des exemples numériques d'une poutre et d'un pont ont démontré l'efficacité et l'applicabilité de la méthode proposée en présence des erreurs de modélisation et perturbations (des chargements dus au trafic).

[Fang *et al.,* 2005] ont étudié la détection d'endommagements en utilisant la réponse fréquentielle de la structure comme entrée d'un réseau neuronal de type rétropropagation (BPNN). Ils ont proposé un algorithme d'apprentissage "*Tunable Steepest Descent*" utilisant une approche heuristique qui améliore la vitesse de convergence de manière significative, sans sacrifier la simplicité de l'algorithme. Les résultats obtenus à partir d'une poutre, montrent que le réseau de neurones ainsi construit pourrait servir à évaluer avec exactitude les conditions d'endommagements pour tous les cas d'endommagements considérés.

[Wei *et al.,* 2005] ont utilisé la variation d'énergie de la réponse de la structure, décomposée par des paquets d'ondelettes, comme entrée d'un réseau de neurones de type rétropropagation (BPNN), pour identifier la taille et de l'endroit du décollement dans des plaques composites. L'apprentissage du réseau est réalisé par des données numériques. Les résultats présentés montrent qu'il est possible d'estimer la position et l'endroit du décollement.

[Just-Agosto *et al.,* 2008] ont employé un réseau de neurones probabiliste (PNN) appartenant aux classificateurs Bayésiens pour détecter les endommagements dans des matériaux composites. Ils ont utilisé les courbures des formes des modes et la réponse transitoire en température de la structure comme entrée d'un groupe de six PNN. Les résultats prouvent que les deux caractéristiques sont complémentaires et leur utilisation simultanée permet d'augmenter significativement les possibilités de détection d'endommagements survenus dans les matières composites.

[Jeyasehar & Sumangala, 2006] ont employé un réseau de neurones "anticipatif" (FeedForward) pour détecter des endommagements dans les poutres en béton grâce à l'utilisation de leur rigidité actuelle et leur fréquence propre comme entrées. Le réseau a été construit en employant des bases de données expérimentales. Différentes architectures du réseau ont été testées et ils ont conclu que l'algorithme proposé permet de détecter, mais pas de localiser les éventuels endommagements.

[Li & Yang, 2008] ont effectué l'identification des endommagements en utilisant un réseau de neurones de type BP (BPNN). Ils ont opté pour les changements de la covariance du déplacement dynamique de la structure comme entrée du réseau. En utilisant un exemple numérique d'une poutre, ils ont démontré que la caractéristique choisie est sensible aux changements de la rigidité et peut être employée pour localiser et estimer la sévérité des faibles endommagements.

[Park & Sohn, 2006] proposent une approche séquentielle pour la détection des endommagements dans des poutres en aluminium, en utilisant les caractéristiques temporelles et modales. Dans la première étape, les endommagements sont détectés en utilisant la covariance de deux mesures d'accélération comme entrée d'un réseau de neurones. Dans la deuxième étape, les énergies de déformation modales sont employées comme entrée d'un réseau pour la localisation et l'estimation de la sévérité des endommagements.

1.8 - Conclusions

L'objectif de cette thèse est de développer une approche intégrée regroupant la modélisation, la commande et la surveillance des structures dites intelligentes. Nous avons donc, d'abord rappelé dans ce chapitre les bases de l'automatique et de la mécanique. Ensuite, avait d'atteindre cet objectif, nous avons cité brièvement dans l'état de l'art plusieurs caractéristiques et différentes méthodologies existantes sur la surveillance d'endommagement, basé sur les données vibratoires. L'analyse bibliographique que nous avons menée, ceux-ci nous ont permis de définir les directions dans lesquelles orienter nos travaux. Nous avons vu que la littérature a beaucoup traité le problème de l'extraction de caractéristiques pertinentes alors que peu de travaux ont été consacrés au développement de modèles statistiques visant à améliorer la fiabilité des résultats de système de surveillance. De plus, pour l'identification d'endommagement, il existe deux approches complémentaires. La première considère l'identification des endommagements comme un problème inverse et la deuxième la traite comme un problème de reconnaissance des formes.

Ces deux approches utilisent un modèle numérique de la structure pour l'identification des endommagements. Afin de surveiller des structures d'une manière continue et autonome ces algorithmes dépendent sur l'identification précise et si possible automatique des propriétés dynamiques structurales.

Nous proposons donc une méthode globale de mise en place de la surveillance de l'intégrité de structures basée sur les étapes suivantes :

1. *modélisation de la structure ;*
2. *identification automatique des propriétés dynamiques structurales ;*
3. *développement d'une approche intégrée regroupant la modélisation, l'identification et la surveillance.*

L'étape de modélisation sera détaillée dans le chapitre 2. Cette étape conduit à aborder la modélisation des structures munies de céramiques piézo-électriques par la méthode des éléments finis. L'étape d'identification est précisée dans le chapitre 3 et le chapitre 4 traite le développement d'une approche intégrée.

Chapitre 2
Modélisation d'une structure

Résumé : Nous présentons dans ce chapitre les premières étapes de la démarche globale de mise en place d'un système de surveillance de l'intégrité des structures, basé sur un modèle numérique. Nous détaillons ainsi la modélisation de la structure et des céramiques piézo-électriques par la méthode des éléments finis (EF). Ensuite, nous présentons une méthode de correction paramétrique de modèle EF. Nous disposons alors d'une structure active. Après une brève description de cette structure, nous abordons la modélisation mécanique et l'identification.

Chapitre 2 - Modélisation d'une structure 31
2.1 - Hypothèses de la mécanique des milieux continus solides 32
2.2 - Méthode des éléments finis (approche déplacements) 37
2.3 - Modélisations de céramique piézo-électrique 42
2.4 - Correction paramétrique de modèle EF (Recalage de modèle) 48
2.5 - Modèle éléments finis du dispositif expérimental (Poutre) 50
2.6 - Conclusions 57

Les méthodes SHM peuvent être classifiées en méthodes basées sur un modèle numérique de la structure (MBM) et celles sans modèle numérique (MSM). Les MSM sont souvent basées sur le changement des paramètres modaux (déformées propres, fréquences et coefficients d'amortissement) et leurs dérivés. L'un des avantages de ces méthodes vibratoires est qu'elles ne nécessitent pas la connaissance a priori du lieu d'endommagement, le nombre de capteurs de mesures pouvant être réduit et ne se situant pas nécessairement à proximité de l'endommagement [Alvandi, 2003]. Les MBM supposent que la réponse de la structure peut être comparée à celle calculée par simulation numérique.

La disponibilité des modèles numériques précis de la structure peut fournir des informations supplémentaires concernant le comportement de la structure saine et endommagée. Ces informations peuvent être utilisées pour améliorer les résultats de localisation ou pour estimer la sévérité des endommagements. Donc, les MBM pourraient effectuer l'identification de l'endommagement de niveau 4 alors que les MSM fournissent principalement des détections de niveau 1 et 2 (voir § 1.3) [Doebling *et al.,* 1998]. Dans cette thèse, nous focalisons nos efforts sur le développement d'une procédure pratique de l'identification d'endommagement par essais vibratoires basées sur des modèles numériques de la structure. Ce sont ces méthodes que présentent les diverses sections des chapitres suivants.

La complexité des structures continues industrielles est telle qu'il est difficile d'élaborer des modèles analytiques de ces dernières. Il faut donc faire un certain nombre d'hypothèse standards, et utiliser des méthodes approchées permettant de passer des équations aux dérivées partielles décrivant le mouvement des structures à un système d'équations différentielles. L'une de ces méthodes est la méthode des éléments finis (EF) qui est souvent utilisée pour la modélisation des structures complexes. R. Courant a développé cette méthode en 1943. Il a utilisé la méthode de Ritz de l'analyse numérique et le calcul variationnel pour obtenir des solutions approximatives des systèmes vibratoires. Depuis 1970, grâce à une décroissance rapide du coût des ordinateurs et l'augmentation phénoménale de la puissance de calcul, la méthode des EF a beaucoup évolué. Maintenant, ces méthodes sont plus précises et sont capables d'effectuer l'analyse linéaire et non-linéaire des structures complexes.

Dans toute la suite, nous nous plaçons dans l'hypothèse de petites perturbations (HPP) et dans le cas d'un comportement linéaire et expliquons les hypothèses de la mécanique des milieux continus solides. L'hypothèse des petites perturbations contient deux suppositions : les déformations sont petites et les déplacements sont petits.

2.1 - Hypothèses de la mécanique des milieux continus solides

La mécanique des milieux continus solides concerne le comportement statique ou dynamique des matériaux déformables. Selon les caractéristiques géométriques des matériaux étudiés, des hypothèses simplificatrices peuvent être faites [Salençon, 1988]. On définit deux modèles simplifiés correspondants à différents types de structures :

1. *Les plaques dont une dimension (appelée épaisseur) est beaucoup plus petite que les deux autres.*
2. *Les poutres dont deux dimensions sont beaucoup plus petites que l'autre (appelée longueur).*

A partir de ces classifications géométriques, des hypothèses simplificatrices concernant la cinématique et le comportement peuvent être faites ce qui conduit à des théories mécaniques bien spécifiques. Nous nous limitons ici à l'étude de théorie des poutres et des plaques.

2.1.1 - Théorie des poutres :

Une poutre est souvent modélisée comme un solide engendré par des surfaces, appelées "sections droites, S_G", telles que :

- *les centres de gravité des sections forment une courbe continue et dérivable, appelée "courbe moyenne" ; son rayon de courbure est important par rapport à sa longueur ;*
- *les sections sont perpendiculaires à la courbe moyenne ; elles varient de manière continue et "lente" ;*
- *la dimension des sections est petite par rapport à longueur de la courbe moyenne.*

On se limite dans ce paragraphe à l'étude des poutres droites homogènes en mouvement plan. On admet que la courbe moyenne d'une poutre est un segment droit dans la configuration initiale. Ceci impose donc :

- *que la section soit symétrique par rapport au plan (X_1, X_3) dans lequel on étudie le mouvement (Figure 2.1) ;*
- *que les efforts soient appliqués dans le plan (X_1, X_3) (couples suivant l'axe X_2 perpendiculaire au plan).*

Toutes les contraintes associées à la direction de l'axe des ordonnées ($\sigma_{22}, \sigma_{23}, \sigma_{12}$) sont nulles. On note $G(s,t)$ la position à l'instant t du barycentre élastique (centre d'inertie élastique) de la section droite S_G située à l'abscisse curviligne s dans la configuration de référence de la poutre. Pour simplifier, la configuration de référence retenue est la configuration du solide à l'instant $t = 0$ (configuration initiale). On définit par θ, l'angle de rotation de la section droite S_G après déformation.

Il existe deux types d'hypothèses cinématiques classiques pour les poutres :

- *Théorie de Timoshenko ;*
- *Théorie d'Euler-Bernoulli.*

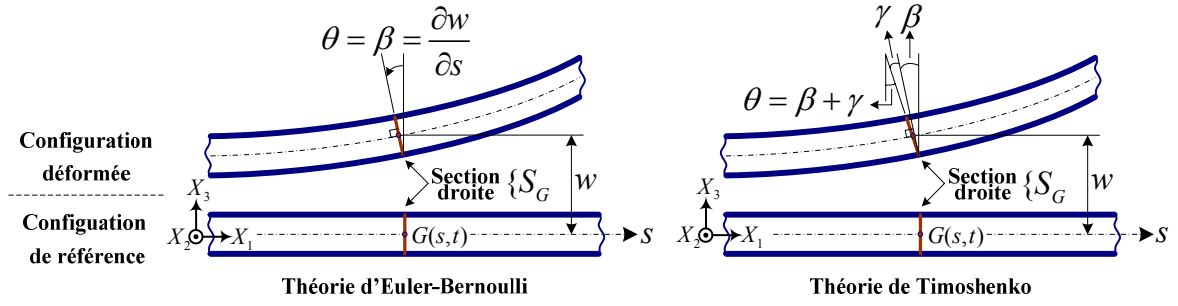


Figure 2.1 - Théorie des poutres.

Théorie de Timoshenko

Selon la théorie de Timoshenko, toute section droite reste plane après déformation. Si u et w sont les composantes du déplacement de $G(s,t)$ dans le plan (X_1, X_3) et β est l'angle de rotation de la section droite S_G et γ est la déformation de cisaillement transverse (Figure 2.1), nous avons alors selon la théorie de Timoshenko :

$$\theta = \beta + \gamma = \frac{\partial w}{\partial s} + \gamma \tag{2.1}$$

Théorie d'Euler-Bernoulli

La théorie d'Euler-Bernoulli suppose qu'une section droite S_G reste plane et orthogonale à la courbe moyenne après déformation. Il est donc imposé a priori que la section reste, au cours du mouvement, perpendiculaire à la courbe moyenne (Figure 2.1). L'hypothèse de Bernoulli permet de négliger le cisaillement γ dans le cas de la flexion. Mais cette hypothèse n'est pas valable pour les poutres courtes. Nous avons alors selon la théorie d'Euler-Bernoulli :

$$\theta = \beta = \frac{\partial w}{\partial s} \tag{2.2}$$

La théorie de Timoshenko est plus précise que la théorie d'Euler-Bernoulli, quant à la simulation de la réponse temporelle d'une poutre. La supériorité du modèle de Timoshenko se manifeste d'autant plus que les poutres présentent un rapport hauteur/longueur élevé [Aldraihem *et al.,* 1997].

2.1.2 - Théorie des plaques

La première hypothèse posée dans le cadre de la théorie des plaques, est celle d'un état de contraintes planes dans chaque plan parallèle au plan moyen pour définir le comportement membrane-flexion. Cela signifie que la contrainte normale au plan moyen σ_{33} est nulle. La relation de comportement liant les tenseurs de contraintes et de déformations $\underline{\sigma}$ et $\underline{\varepsilon}$ se réécrit alors matriciellement par :

$$\underline{\sigma} = \underline{\underline{S}}_{2D}\, \underline{\varepsilon} \tag{2.3}$$

où $\underline{\sigma} = [\sigma_{11} \quad \sigma_{22} \quad \sigma_{12} \quad \sigma_{23} \quad \sigma_{31}]^T$ et $\underline{\varepsilon} = [\varepsilon_{11} \quad \varepsilon_{22} \quad 2\varepsilon_{12} \quad \gamma_{23} \quad \gamma_{31}]^T$. $\underline{\underline{S}}_{2D}$ est la matrice de rigidité (*Stiffness Tensor*).

Il existe deux théories classiques de plaques :

1. *la théorie naturelle ou théorie de Reissner- Mindlin ;*
2. *la théorie des plaques minces de Kirchhoff-Love.*

Théorie de Reissner- Mindlin

Considérons une section droite S_G, initialement orthogonale au plan moyen de la plaque. Soit M un point de ce plan de coordonnées (x_1, x_2) et de vecteur déplacement $\underline{q}^M$ donné par :

$$\underline{q}^M = \begin{bmatrix} u(x_1, x_2, t) \\ v(x_1, x_2, t) \\ w(x_1, x_2, t) \end{bmatrix} \tag{2.4}$$

L'hypothèse de Reissner-Mindlin, consiste à considérer que le segment reste droit après déformation. Cela impose la cinématique, c'est-à-dire la forme du champ de déplacement du solide. Le déplacement de tout point P de cote z appartenant au segment droit S_G passant par M (Figure 2.2), s'écrit :

$$\underline{q}^P = \begin{bmatrix} u(x_1, x_2, t) + z\,\theta_2(x_1, x_2, t) \\ v(x_1, x_2, t) - z\,\theta_1(x_1, x_2, t) \\ w(x_1, x_2, t) \end{bmatrix} \tag{2.5}$$

où θ_1 et θ_2 représentent les rotations du segment autour respectivement de X_2 et X_1. Cette théorie s'applique aux plaques dites «Semi-épaisses» (Hauteur ≤ Largeur/20)

Théorie de Kirchhoff-Love

La théorie des plaques de Kirchhoff-Love complète celle de Reissner-Mindlin en y ajoutant une hypothèse simplificatrice supplémentaire : le segment droit initialement orthogonal au plan moyen reste orthogonal à la surface après déformation. Elle s'applique essentiellement aux plaques dites "minces" (Hauteur ≤ Largeur/100).

Cela conduit à une modification de la cinématique, puisqu'il existe une liaison entre le déplacement normal w et les rotations θ_1 et θ_2 :

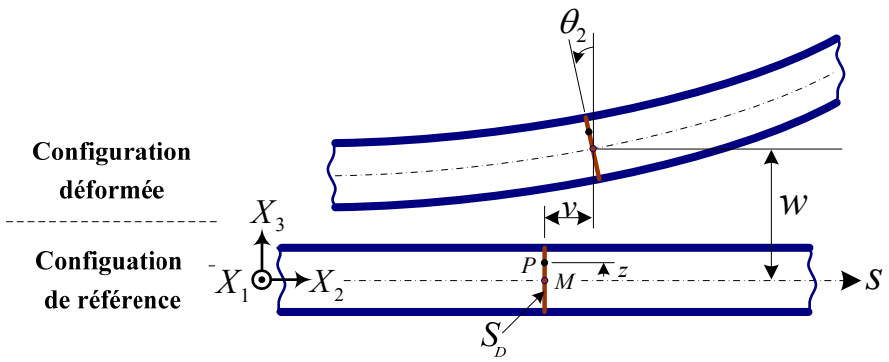


Figure 2.2 - Déplacements dans le plan (X_2, X_3).

$$\theta_1 = \frac{\partial w}{\partial x_2} \tag{2.6}$$

$$\theta_2 = -\frac{\partial w}{\partial x_1} \tag{2.7}$$

Cette hypothèse revient à négliger les déformations de cisaillement transverse.

Le Tableau 2.1 résume les théories des poutres et des plaques.

2.1.3 - Principe des puissances virtuelles (PPV)

Le principe des puissances virtuelles est un outil permettant d'écrire les équations du mouvement d'un ensemble de solides déformables sous forme variationnelle. Ainsi, si on note par $\mathcal{Q}$ l'ensemble des déplacements admissibles, ce principe s'écrit de la façon suivante :

$$\forall t \text{ , trouver } \underline{q}(t) \in \mathcal{Q} \text{ tel que } \forall \underline{\hat{q}} \in \mathcal{Q},\ \hat{P}_{acc} = \hat{P}_{int} + \hat{P}_{ext} \tag{2.8}$$

avec :

$$\hat{P}_{acc} = \int_{\mathcal{S}} \underline{\hat{q}}^T \rho\ \underline{\ddot{q}}\ ds \tag{2.9}$$

$$\hat{P}_{int} = -\int_{\mathcal{S}} tr(\underline{\underline{\sigma}}\ \underline{\underline{\hat{\varepsilon}}})\ ds \tag{2.10}$$

$$\hat{P}_{ext} = \int_{\mathcal{S}} \underline{\hat{q}}^T \underline{f}\ ds + \int_a \underline{\hat{q}}^T\ \underline{\mathcal{F}} da \tag{2.11}$$

où $\underline{\hat{q}}$ est le champ de vitesses virtuelles, $\underline{q}$ est le champ de déplacement solution, $\mathcal{S}$ est le domaine du système considéré, $\underline{f}$ est la densité volumique d'efforts et $\underline{\mathcal{F}}$ est la densité surfacique d'efforts. L'application du PPV permet donc d'accéder aux équations de mouvement d'un solide déformable.

	Semi-épaisse	**Mince**	**Fine**
Longueur / Hauteur	10 ~ 20	5 ~ 100	>100
Caractéristiques	Avec déformation de cisaillement transverse	Sans déformation de cisaillement	Géométriquement non linéaire
Théorie des poutres	Théorie de Timoshenko	Théorie d'Euler-Bernoulli	-----
Théorie des plaques	Théorie de Reissner- Mindlin	Théorie de Kirchhoff-Love	Théorie de Von Karman

Tableau 2.1 - Théorie des poutres et des plaques.

2.2 - Méthode des éléments finis (approche déplacements)

La méthode des éléments finis (EF) repose sur l'approximation du champ de déplacement solution. Ce dernier est interpolé à partir des déplacements (généralisés) d'un nombre fini de points de la structure appelés *nœuds*. Ces nœuds sont reliés entre eux par des entités appelées éléments qui définissent le type de cinématique (poutre, plaque ou volumique) et qui sont associés à des caractéristiques physiques. Leur topologie agit directement sur le type d'interpolation. Cette simplification de l'expression du champ de déplacements permet d'aboutir à la résolution d'un simple système linéaire, différentiel ou non selon le type de calcul effectué (statique et/ou dynamique). Les déplacements (généralisés) des nœuds sont appelés degrés de liberté. Dans la plupart des logiciels actuellement commercialisés, ils sont au nombre de 6 par nœud : 3 translations et 3 rotations. [Batoz & Dhatt, 1990] est un des ouvrages de référence sur cette méthode.

2.2.1 - Poutre

Nous considérons un élément poutre d'Euler-Bernoulli à deux nœuds (A et B) dont les axes et les degrés de liberté sont définis à la Figure 2.3.

Les inconnues cinématiques nodales sont définies par $\underline{q}_n^A = \left[u^A \quad w^A \quad \theta^A \right]^T$ et $\underline{q}_n^B = \left[u^B \quad w^B \quad \theta^B \right]^T$. Le déplacement généralisé d'un élément " e " à deux nœuds est défini par : $\underline{q}_e^n = \left[\underline{q}_n^A \quad \underline{q}_n^B \right]^T$. La cinématique des points de l'élément est définie en totalité par le choix des fonctions de pondération associées à chaque degré de liberté des nœuds auxquels l'élément est connecté. Les fonctions de pondération choisies, pour l'élément poutre 2D, sont les suivantes :

$$\Psi_1(\xi) = 1 - \xi \tag{2.12}$$

$$\Psi_2(\xi) = \xi \tag{2.13}$$

$$\Psi_3(\xi) = 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 \tag{2.14}$$

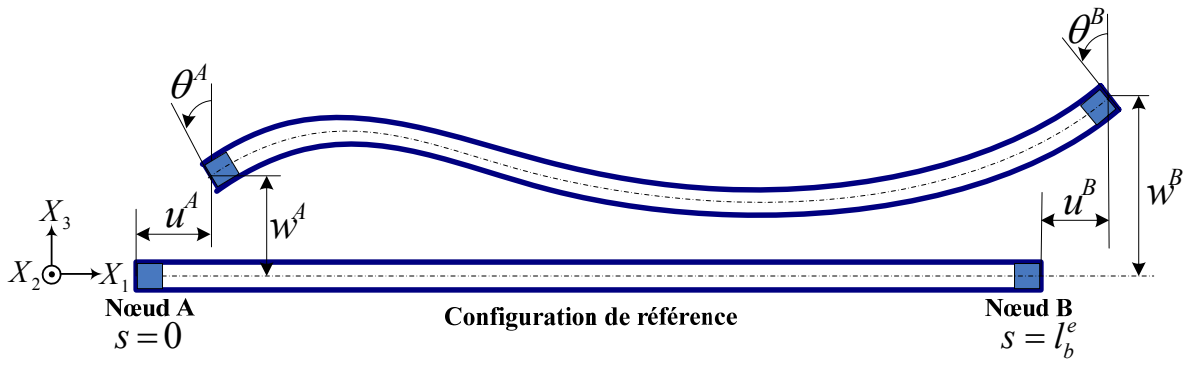


Figure 2.3 - Déplacements généralisés des extrémités d'un élément poutre.

$$\Psi_4(\xi) = \xi - 2\xi^2 + \xi^3 \tag{2.15}$$

$$\Psi_5(\xi) = 3\xi^2 - 2\xi^3 \tag{2.16}$$

$$\Psi_6(\xi) = -\xi^2 + \xi^3 \tag{2.17}$$

où s est l'abscisse curviligne le long de élément, ξ correspond à l'abscisse de l'élément de référence et est définie par : $\xi = s / l_b^e$, où l_b^e est la longueur d'un élément. Étant donné que l'on a $\theta = \partial w / \partial s$ pour le modèle de BERNOULLI, on définit le déplacement généralisé de la section droite S_G d'abscisse s dans l'élément poutre e à l'instant t par :

$$\underline{q}_e(\xi,t) = \begin{bmatrix} u(t) \\ w(t) \\ \theta(t) \end{bmatrix} = \underline{\underline{N}}_b(\xi)\underline{q}_e^n(t) \tag{2.18}$$

où

$$\underline{\underline{N}}_b(\xi) = \begin{bmatrix} \Psi_1 & 0 & 0 & \Psi_2 & 0 & 0 \\ 0 & \Psi_3 & l_b^e\Psi_4 & 0 & \Psi_5 & l_b^e\Psi_6 \\ 0 & \dfrac{1}{l_b^e}\dfrac{d\Psi_3}{d\xi} & \dfrac{d\Psi_4}{d\xi} & 0 & \dfrac{1}{l_b^e}\dfrac{d\Psi_5}{d\xi} & \dfrac{d\Psi_6}{d\xi} \end{bmatrix} \tag{2.19}$$

est la matrice d'interpolation. On isole l'élément poutre e et on applique le théorème des puissances virtuelles (PPV) qui s'exprime par l'équation (2.8). La puissance virtuelle des quantités d'accélération $\widehat{P}_{acc}^e$ de l'élément est définie par :

$$\widehat{P}_{acc}^e = \int_0^{l_b^e} \underline{\widehat{q}}_e^T \, \underline{\underline{m}}^e \, \underline{\ddot{q}}_e \, ds \tag{2.20}$$

avec, si le matériau est homogène dans l'épaisseur :

$$\underline{\underline{m}}^e = \begin{bmatrix} \rho.A & 0 & 0 \\ 0 & \rho.A & 0 \\ 0 & 0 & \rho.I \end{bmatrix} \tag{2.21}$$

ρ étant la masse volumique, A l'aire de la section droite de la poutre et I est le moment quadratique d'une section droite. L'équation (2.20) peut-être réécrite sous la forme suivante :

$$\widehat{P}_{acc}^e = \underline{\widehat{q}}_e^T \, \underline{\underline{M}}^e \, \underline{\ddot{q}}_e \tag{2.22}$$

où $\underline{\underline{M}}^e$ est la matrice masse de l'élément poutre et est donnée par :

$$\underline{\underline{M}}^e = \int_0^{l_b^e} \underline{\underline{N}}_b^T \, \underline{\underline{m}}^e \, \underline{\underline{N}}_b \, ds \tag{2.23}$$

Dans le cas où $\rho.A$ est une constante (modèle de BERNOULLI) nous avons :

$$\underline{\underline{M}}^e = \frac{\rho.A.L}{420} \begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 156 & 22.l_b^e & 0 & 54 & -13.l_b^e \\ 0 & 22.l_b^e & 2.l_b^{e^2} & 0 & 13.l_b^e & -3.l_b^{e^2} \\ 70 & 0 & 0 & 140 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & 13.l_b^e & 0 & 156 & -22.l_b^e \\ 0 & -13.l_b^e & -3.l_b^{e^2} & 0 & -22.l_b^e & 4.l_b^{e^2} \end{bmatrix} \tag{2.24}$$

où L est la longueur de la poutre. La puissance virtuelle de déformation $\hat{P}_{def}^e$ de l'élément est définie par :

$$\hat{P}_{def}^e = \int_0^{l_b^e} \hat{p}_{def}^e ds \tag{2.25}$$

où $\hat{p}_{def}^e$ est la densité linéique de la puissance virtuelle de déformation de l'élément e. Cette densité est définie par :

$$\hat{p}_{def}^e = \int_{\sec S_G} tr\left(\underline{\underline{\hat{\varepsilon}}}.\underline{\underline{\sigma}}\right) dx_2 dx_3 \tag{2.26}$$

On peut réécrire l'équation (2.26) sous la forme :

$$\hat{p}_{def}^e = \hat{\varepsilon} N + \hat{\gamma} T + \hat{\chi} M \tag{2.27}$$

avec :

$\hat{\varepsilon} = \dfrac{\partial \hat{u}}{\partial s}$ est la déformation virtuelle du point de la ligne moyenne de la poutre

$\hat{\gamma} = 2\hat{\varepsilon}_{13} = \dfrac{\partial \hat{w}}{\partial s} - \hat{\theta}$ est la déformation virtuelle de cisaillement transverse

$\hat{\chi} = \dfrac{\partial \hat{\theta}}{\partial s}$ est la courbure virtuelle de flexion

$N = \int_{\sec S_G} \sigma_{11} dx_2 dx_3$ est l'effort normal

$T = \int_{\sec S_G} \sigma_{13} dx_2 dx_3$ est l'effort tranchant

$M = \int_{\sec S_G} (-y\sigma_{11}) dx_2 dx_3$ est le moment fléchissant

Avec le modèle de BERNOULLI, nous supposons que $\gamma = 0$. Nous avons alors :

$$\hat{p}^e_{def} = \hat{\varepsilon} N + \hat{\chi} M \tag{2.28}$$

Pour les éléments de la poutre de type BERNOULLI :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon \\ \chi \end{bmatrix} \equiv \underline{\underline{B}}^e_b(\xi)\underline{q}_e(t) \tag{2.29}$$

où en considérant les fonctions de pondération choisies ((2.12) à (2.17)) :

$$\underline{\underline{B}}^e_b(\xi) = \begin{bmatrix} -1/l^e_b & 0 & 0 & 1/l^e_b & 0 & 0 \\ 0 & (-6+12\xi)/l^{e^2}_b & (-4+6\xi)/l^e_b & 0 & (6-12\xi)/l^{e^2}_b & (2-6\xi)/l^e_b \end{bmatrix} \tag{2.30}$$

En introduisant la loi de comportement du matériau, c'est-à-dire la relations liant les déformations aux contraintes, on peut calculer la matrice de rigidité d'un élément de type BERNOULLI de la forme suivante :

$$\underline{\underline{K}}^e = \begin{bmatrix} E.A/l^e_b & 0 & 0 & -E.A/l^e_b & 0 & 0 \\ 0 & 12E.I/l^{e^3}_b & 6E.I/l^{e^2}_b & 0 & -12E.I/l^{e^3}_b & 6E.I/l^{e^2}_b \\ 0 & 6E.I/l^{e^2}_b & 4E.I/l^e_b & 0 & -6E.I/l^{e^2}_b & 2E.I/l^e_b \\ -E.A/l^e_b & 0 & 0 & E.A/l^e_b & 0 & 0 \\ 0 & -12E.I/l^{e^3}_b & -6E.I/l^2 & 0 & 12E.I/l^{e^3}_b & -6E.I/l^{e^2}_b \\ 0 & 6E.I/l^{e^2}_b & 2E.I/l^e_b & 0 & -6E.I/l^{e^2}_b & 4E.I/l^e_b \end{bmatrix} \tag{2.31}$$

2.2.2 - Plaque

Nous nous intéressons ici à l'élément plaque quadrilatère de type isoparamétrique, *i.e.* la géométrie et le champ de déplacement sont interpolés avec les mêmes fonctions. Ceci permet de travailler dans un élément (dit de référence) carré de côté 2 et centré sur l'origine du repère de coordonnées réduites (ξ ,η) (Figure 2.4). Ces éléments sont associés à une interpolation bilinéaire de la forme :

$$\Psi_i(\xi,\eta) = \frac{1+\xi_i\xi}{2}.\frac{1+\eta_i\eta}{2} \tag{2.32}$$

où (ξ_i,η_i) sont les coordonnées réduites du nœud i .

La géométrie de l'élément est interpolée de la façon suivante :

$$\begin{aligned} x_1^e(\xi,\eta) &= \sum_i x_1^i \Psi_i(\xi,\eta) \\ x_2^e(\xi,\eta) &= \sum_i x_2^i \Psi_i(\xi,\eta) \end{aligned} \tag{2.33}$$

où (x_1^i,x_2^i) sont les coordonnées du nœud i et (x_1^e,x_2^e) sont les coordonnées d'un point de l'élément réel. La relation (2.33) permet de définir la matrice Jacobienne de la transformation géométrique. Le vecteur des inconnues nodales ou degrés de liberté est défini par :

$$\underline{q}_e^n = \left[\underline{q}_n^1 \quad \dots \quad \underline{q}_n^{n_n}\right]^T \tag{2.34}$$

Avec $\underline{q}_n^i = \left[u^i \quad v^i \quad w^i \quad \theta_1^i \quad \theta_2^i\right]^T$ les déplacements du nœud i et n_n le nombre de nœuds. L'interpolation du déplacement se fait par les mêmes fonctions que celles utilisées pour la géométrie :

$$\underline{q}_e = \sum_i^{n_n} \underline{q}_e^i \Psi_i(\xi_1,\eta_i) \tag{2.35}$$

La matrice d'interpolation $\underline{\underline{N}}_p$ apparaît alors dans l'expression :

$$\underline{q}_e = \underline{\underline{N}}_p \, \underline{q}_e^n \tag{2.36}$$

Cette interpolation permet d'écrire les déformations en tout point de la poutre à partir des inconnues nodales. Une fois cette relation établie, il faut faire intervenir la loi de comportement du matériau, c'est-

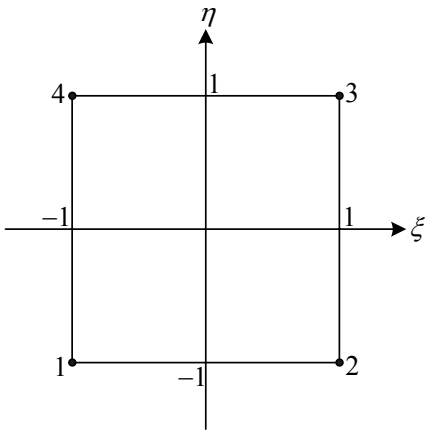


Figure 2.4 - Elément plaque de référence.

à-dire l'équation liant les déformations aux contraintes. Le principe des puissances virtuelles est ensuite appliqué à la structure :

$$\int_S \underline{\hat{q}}^T \rho \, \underline{\ddot{q}} \, ds = -\int_S tr(\sigma \hat{\varepsilon}) \, ds + \int_S \underline{\hat{q}}^T \underline{f} \, ds + \int_a \underline{\hat{q}}^T \underline{\mathcal{F}} da \tag{2.37}$$

L'introduction de (2.36) et d'une loi de comportement viscoélastique linéaire dans (2.37) conduit au système matriciel suivant :

$$\underline{\hat{q}}^T (\underline{\underline{M}} \, \underline{\ddot{q}} + \underline{\underline{D}} \, \underline{\dot{q}} + \underline{\underline{K}} \, \underline{q}) = \underline{\hat{q}}^T \underline{Q} \tag{2.38}$$

L'équation précédente étant valable quelque soit le champ de déplacement virtuel, nous obtenons :

$$\underline{\underline{M}} \, \underline{\ddot{q}} + \underline{\underline{D}} \, \underline{\dot{q}} + \underline{\underline{K}} \, \underline{q} = \underline{Q} \tag{2.39}$$

Ce système est construit par l'assemblage des matrices de masse, d'amortissement et de raideur des éléments mis en œuvre dans le modèle. Ainsi, pour chaque élément, nous pouvons écrire :

$$\underline{\underline{M}}^e \underline{\ddot{q}}_e + \underline{\underline{D}}^e \, \underline{\dot{q}}_e + \underline{\underline{K}}^e \, \underline{q}_e = \underline{Q}^e + \underline{\bar{Q}}^e \tag{2.40}$$

où le terme $\underline{\bar{Q}}^e$ représente les efforts généralisés appliqués aux nœuds de l'élément e par les éléments adjacents. Lors de l'assemblage, la somme de ces termes s'annule, ce qui les fait disparaître dans (2.39).

2.3 - Modélisations de céramique piézo-électrique

Les éléments actifs (actionneurs et capteurs) changent le comportement dynamique de la structure, soit par modification des caractéristiques physiques locales (masse, rigidité), soit par modification des conditions aux limites (liaisons supplémentaires entre la structure et les éléments actifs). Il est donc nécessaire de les introduire dans le modèle mécanique de la structure.

Une des premières approches EF pour la modélisation des matériaux piézo-électriques à été fournie par [Tzou & Tseng, 1990]. Leur étude présente la mise en équation de ces matériaux pour la réalisation de capteurs répartis sur des structures de type plaque. L'une des particularités est l'utilisation d'éléments tétraédriques fins possédant des degrés de libertés internes pour paliers les problèmes dus à cette géométrie. Dans [Chen *et al.,* 1997, Chen & Shen, 1997], Chen et al ; ont opté pour des éléments plaques, ce qui permet de ne pas surestimer les raideurs et les énergies de déformation. Une autre approche proposée par [Kim *et al.,* 1997, Kim *et al.,* 1996] consiste à modéliser les éléments piézo-électriques par des éléments volumiques classiques, le reste de la structure étant modélisé par des plaques de façon à limiter la taille du modèle. L'originalité repose sur l'utilisation d'éléments de transition qui permettent d'assurer la compatibilité cinématique entre les différents types d'éléments (problème liés aux fonctions d'interpolation). Dans toutes ces études, les inconnues électriques sont traitées comme les

inconnues cinématiques : le potentiel de chaque nœud est calculé. L'interpolation est effectuée par les mêmes fonctions de base que pour les déplacements.

La modélisation des stratifiés piézo-électriques à été largement étudiée par Collet [Collet, 1996]. Le comportement mécanique et le couplage piézo-électriques sont considérés pour chaque couche. Puis, une homogénéisation de Kirchhoff-love est effectuée en tenant compte des axes d'orthotropie des céramiques et de la forme des électrodes.

Une autre approche consiste à considérer directement le potentiel appliqué à chaque électrode. Nous limitons ainsi le nombre de degrés de liberté électrique à un seul par céramique piézo-électrique. La présence des éléments actifs est traitée sous deux aspects : la modification des caractéristiques mécaniques de la structure, et le découplage électromécanique via la loi de comportement. Ce type d'approche a été utilisé par [Bruant, 1999] pour les poutres et par [Henriot, 2000] pour les plaques. Nous avons adopté ces deux approches pour nos applications.

2.3.1 - Montage des céramiques et notations

Sur nos bancs d'essai, les céramiques sont collées en vis-à-vis de part et d'autre des structures. Les vecteurs de polarisation ont la même orientation. Le câblage impose des champs électriques de sens opposés dans les deux céramiques. Pour les actionneurs, la combinaison provoque l'apparition d'un moment de flexion suivant X_2 dans le cas des poutres (nous négligerons les éventuels moments de torsion qui pourraient apparaître) et de deux moments de flexion suivant X_1 et X_2 dans le cas des plaques. De façon similaire, seuls les effets de la flexion, c'est-à-dire les variations de courbures, sont mesurés par ces capteurs.

Le plan $(0, X_1, X_2)$ de la Figure 2.5 est commun aux poutres et aux plaques. Les grandeurs relatives aux céramiques seront distinguées par un indice « 1 » ou « 2 » selon qu'elles sont relatives à la céramique supérieure ou inférieure. De même, les électrodes seront indicées « + » et « - ».

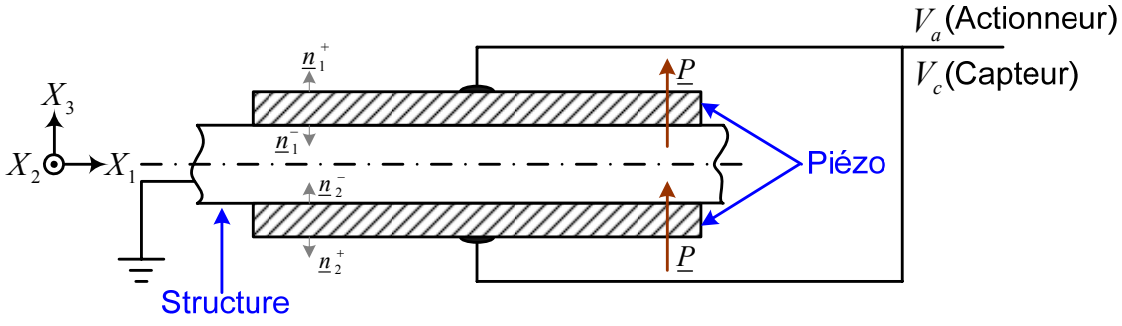


Figure 2.5 - Montage et câblage des céramiques.

2.3.2 - Formulation d'un actionneur

Nous allons introduire la loi de comportement (1.51) (sans hypothèse sur la géométrie) du matériau piézo-électrique dans le terme du PPV (2.8). Soit :

$$\widehat{P}_{int} = \widehat{P}_{meca} + \widehat{P}_{pz} \tag{2.41}$$

avec :

$$\widehat{P}_{meca} = -\int_S \underline{\widehat{\varepsilon}}^T \underline{\underline{s}}^E \underline{\varepsilon}\, ds \tag{2.42}$$

$$\widehat{P}_{pz} = -\int_S \underline{\widehat{\varepsilon}}^T \underline{\underline{e}}^T \underline{E}\, ds \tag{2.43}$$

Notre modèle simplifié repose sur la présence d'un champ électrique constant dans l'épaisseur du milieu piézo-électrique. Ce champ résulte de l'hypothèse d'un potentiel électrique variant linéairement entre les électrodes. Ainsi, les électrodes des céramiques piézo-électriques sont considérées comme des surfaces équipotentielles. Il s'ensuit qu'un unique degré de liberté électrique supplémentaire V est introduit pour chaque élément. Ce degré représente la différence de potentiel appliquée à l'élément actif.

Cas des plaques

La loi de comportement 3D doit être modifiée pour tenir compte de l'hypothèse de contraintes planes. Nous avons, sous cette hypothèse :

$$\sigma_{33} = s_{31}^E \varepsilon_{11} + s_{32}^E \varepsilon_{22} + s_{33}^E \varepsilon_{33} - e_{33} E_3 = 0 \tag{2.44}$$

D'où nous tirons ε_{33} :

$$\varepsilon_{33} = -\frac{1}{s_{33}^E}(s_{31}^E \varepsilon_{11} + s_{32}^E \varepsilon_{22}) + \frac{e_{33}}{s_{33}^E} E_3 \tag{2.45}$$

L'équation (1.51) se réécrit de la façon suivante :

$$\underline{\sigma} = \underline{\underline{s}}_{2D}^E \underline{\varepsilon} + \underline{\underline{e}}_{2D}^T \underline{E} \tag{2.46}$$

avec :

$$\underline{\underline{e}}_{2D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} \\ 0 & 0 & 0 & e_{24} & 0 \\ e_{31}^{2D} & e_{32}^{2D} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \tag{2.47}$$

où $e_{31}^{2D} = e_{31} + \frac{s_{31}^E}{s_{33}^E} e_{33}$ et $e_{32}^{2D} = e_{32} + \frac{s_{32}^E}{s_{33}^E} e_{33}$.

Compte tenu du montage et du câblage, indiqués à la Figure 2.5, la répartition des contraintes mécaniques dues à l'effet piézo-électrique dans l'épaisseur est la suivante :

- *Pour* $X_3 \in [-(h_{pz}+\frac{h_p}{2}),-\frac{h_p}{2})]$, $\underline{\underline{e}}_{2D}^T \underline{E} = -E_3 \begin{bmatrix} e_{31}^{2D} & e_{32}^{2D} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$
- *Pour* $X_3 \in [-\frac{h_p}{2},\frac{h_p}{2}]$, $\underline{\underline{e}}^T \underline{E} = \underline{0}$
- *Pour* $X_3 \in [\frac{h_p}{2},(h_{pz}+\frac{h_p}{2})]$, $\underline{\underline{e}}_{2D}^T \underline{E} = E_3 \begin{bmatrix} e_{31}^{2D} & e_{32}^{2D} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$

où h_{pz} est l'épaisseur des céramique piézo-électrique, h_p est l'épaisseur de la plaque et $E_3 = V / h_{pz}$.

En l'intégrant maintenant l'équation (2.8) suivant X_3, elle devient :

$$\widehat{P}_{pz} = \int_{A_p} \widehat{\chi}^T \begin{bmatrix} M_{11}^p \\ M_{22}^p \\ 0 \end{bmatrix} da \tag{2.48}$$

La surface A_p représente l'aire commune aux deux électrodes de chaque élément. L'équation (2.48) peut-être, en utilisant les fonctions d'interpolation, réécrite de la façon suivante :

$$\widehat{P}_{pz}^e = \underline{\widehat{q}}^{eT} \underline{\underline{Q}}_{ap}^e V_a \tag{2.49}$$

où le vecteur $\underline{\underline{Q}}_{ap}^e$ caractérise l'effet d'un actionneur sur l'élément plaque, alimenté par une tension V_a et s'écrit de la façon suivante :

$$\underline{\underline{Q}}_{ap}^e = 2(h_{pz}+h_p)[\underline{g}_1 \quad \underline{g}_2 \quad -\underline{g}_1 \quad -\underline{g}_2] \tag{2.50}$$

où $\underline{g}_1 = [0 \quad 0 \quad 0 \quad e_{31}^{2D} l_p^e \quad -e_{32}^{2D} b_p^e]$ et $\underline{g}_2 = [0 \quad 0 \quad 0 \quad e_{31}^{2D} l_p^e \quad e_{32}^{2D} b_p^e]$. l_p^e et b_p^e sont les dimensions de l'élément suivant X_1 et X_2.

Cas des poutres

Dans le cas des poutres et compte tenu des hypothèses faites concernant la forme du champ électrique, la loi de comportement des céramiques, se restreint à la composante suivant X_1. Soit :

$$\sigma_{11} = s_{11}^{1D^E} \varepsilon_{11} - e_{33}^{1D} E_3 \tag{2.51}$$

Le comportement mécanique $s_{11}^{1D^E}$ est calculé à partir des hypothèses relatives aux poutres concernant les contraintes, à savoir $\sigma_{22} = \sigma_{33} = 0$. En utilisant les fonctions d'interpolation ((2.12) à (2.17)), l'équation (2.48) peut être réécrite de la façon suivante :

$$\widehat{P}_{pz}^{e} = \underline{\widehat{q}}^{eT}\, \underline{\underline{Q}}_{ab}^{e}\, V_a \tag{2.52}$$

Le vecteur $\underline{\underline{Q}}_{ab}^{e}$ caractérise l'effet d'un actionneur sur l'élément poutre, alimenté par une tension V_a et s'écrit de la façon suivante :

$$\underline{\underline{Q}}_{ab}^{e} = 2e_{31}^{1D} b_b^e (h_{pz} + h_b) \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \tag{2.53}$$

où b_b^e est la largeur de l'élément et h_b l'épaisseur de la poutre.

2.3.3 - Formulation d'un capteur

Pour la formulation d'un capteur piézo-électrique, nous utilisons l'équation (1.51) traduisant l'effet inverse. Le milieu piézo-électrique est supposé être un isolant dans lequel il n'y a donc pas de charges électriques libres. La simplification de l'équation de Maxwell-Gauss [Maugin *et al.,* 1992] qui exprime la divergence div du champ électrique $\underline{D}$ en fonction de la densité de la charge électrique, donne :

$$div\underline{D} = 0 \tag{2.54}$$

Le théorème de la divergence s'écrit alors :

$$\int_{a_1} \underline{D}^T \underline{n}^+ \, da + \int_{a_2} \underline{D}^T \underline{n}^- \, da = 0 \tag{2.55}$$

où $\underline{n}^+$ et $\underline{n}^-$ sont les normales aux électrodes de la même céramique piézo-électrique. Soit, en tenant compte des orientations des deux normales :

$$\int_{a_1} \underline{D}^T \underline{n}^+ \, da = \int_{a_2} \underline{D}^T \underline{n}^+ \, da \tag{2.56}$$

Ainsi, la charge que l'on récupère grâce à l'électrode supérieure est donnée par :

$$\vartheta_1^+(t) = \int_{a_1} \underline{D}^{+^T} \underline{n}_1^+ \, da \tag{2.57}$$

et pour l'électrode inférieure :

$$\vartheta_2^-(t) = \int_{a_2} \underline{D}^{-^T} \underline{n}_2^- \, da \tag{2.58}$$

Le câblage permet de mesurer la somme de ces deux charges que nous noterons $\vartheta(t) = \vartheta_1^+(t) + \vartheta_2^-(t)$. En introduisant la loi de comportement du milieu piézo-électrique dans (2.55), nous obtenons :

$$\vartheta(t) = \int_{a_1^+} [\underline{\underline{e}}\,\underline{\varepsilon}^+ + \underline{\underline{p}}^{\varepsilon}\,\underline{E}^+]^T\,\underline{n}_1^+\,da + \int_{a_2^-} [\underline{\underline{e}}\,\underline{\varepsilon}^- + \underline{\underline{p}}^{\varepsilon}\,\underline{E}^-]^T\,\underline{n}_2^-\,da \tag{2.59}$$

L'équation précédente fait intervenir deux termes pour chaque céramique piézo-électrique : un terme de couplage piézo-électrique et un terme purement électrique. Selon le type de montage utilisé pour le conditionnement des signaux de mesures, il est courant de faire l'une des deux hypothèses suivantes [Lee, 1990] :

1. *Le vecteur déplacement électrique* $\underline{D}$ *est nul. Nous mesurons alors la tension aux bornes des céramiques. Cette hypothèse est rarement validée par les montages expérimentaux utilisés habituellement, dans la mesure où la présence inévitable de résistances de fuite dans le câblage rend très imprécis les relevés statiques ou à basse fréquence.*

2. *Le vecteur champ électrique* $\underline{\mathrm{E}}$ *est nul. Nous mesurons dans ce cas la charge sur l'une des électrodes des céramiques.*

Nous allons montrer que le montage que nous utilisons conduit à considérer l'hypothèse 2.

La Figure 2.6 présente le montage d'un amplificateur opérationnel (supposé parfait) dans le cadre d'un amplificateur de charges (KISTLER 5011B). Nous reconnaissons un montage intégrateur dans lequel la résistance d'entrée a été supprimée. Ceci présente deux avantages : l'impédance d'entrée est alors très élevée et le gain d'amplification est indépendant de la capacité du circuit amont (donc de la longueur de câble blindé entre le capteur et l'amplificateur) [Zelbstein, 1969]. D'autre part, le potentiel du point d'entrée V_c est nul ; ce qui justifie l'hypothèse prise concernant le champ électrique au sein du capteur piézo-électrique ($\underline{E} = \underline{0}$).

La mesure $y(t)$ est donnée par :

$$y(t) = \frac{1}{C_g}\int_0^t i(\iota)\,d\iota \tag{2.60}$$

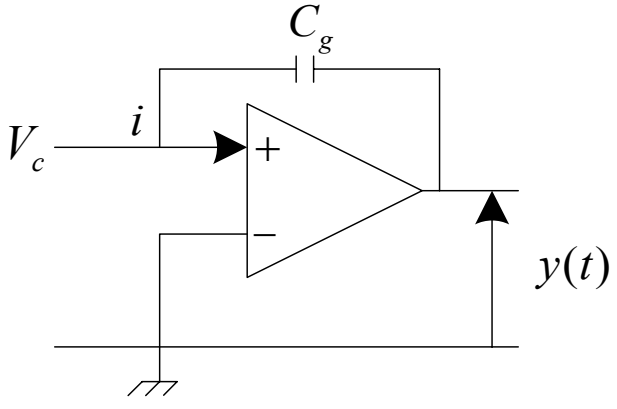


Figure 2.6 - Montage de l'amplificateur de charges.

où C_g et la capacité de l'amplificateur de charges, l'intensité est la dérivée par rapport au temps de la charge accumulée sur les électrodes. Il s'ensuit alors, compte tenu du circuit complet de l'amplificateur de charges, la relation suivante :

$$y(t) = G_c\, \vartheta(t) \tag{2.61}$$

La capacité de l'amplificateur est réglable de manière à ajuster la sensibilité et la gamme et par conséquent le gain G_c d'amplification. Le montage des pastilles conduit alors à :

$$y(t) = G_c \int_{a_1^+} [\underline{\underline{e}}\, \underline{\varepsilon}^+(t)]^T\, \underline{n}_1^+\, da + \int_{a_2^-} [\underline{\underline{e}}\, \underline{\varepsilon}^-(t)]^T\, \underline{n}_2^-\, da \tag{2.62}$$

Cas des poutres

Comme il est démontré dans [Bruant, 1999], les pastilles piézo-électriques mesurent, dans la configuration de notre étude, uniquement la courbure locale. Ainsi compte tenu des fonctions de forme de l'élément poutre utilisé, nous avons :

$$y(t) = \underline{Q}_{cb}^e\, \underline{q}^e \tag{2.63}$$

avec :

$$\underline{Q}_{cb}^e = G_c e_{31} b_p^e h_b \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.64}$$

Cas des plaques

Suivant le même raisonnement avec les fonctions de pondérations adéquates, nous écrivons pour un élément plaque la tension de sortie de l'amplificateur de charges $y(t)$ en fonction des inconnues nodales élémentaires. Nous avons alors :

$$y(t) = \underline{\underline{Q}}_{cp}^e\, \underline{q}^e \tag{2.65}$$

avec :

$$\underline{\underline{Q}}_{cp}^e = 2G_c h_p [\underline{g}_1 \quad \underline{g}_2 \quad -\underline{g}_1 \quad -\underline{g}_2] \tag{2.66}$$

où $\underline{g}_1 = [0 \quad 0 \quad 0 \quad e_{31}^{2D} l_p^e \quad -e_{32}^{2D} b_p^e]$ et $\underline{g}_2 = [0 \quad 0 \quad 0 \quad e_{31}^{2D} l_p^e \quad e_{32}^{2D} b_p^e]$.

2.4 - Correction paramétrique de modèle EF (Recalage de modèle)

Le recalage de modèle consiste à identifier les paramètres matériaux et géométriques d'un modèle numérique afin que les simulations qui en découlent reproduisent correctement le comportement du

système observé expérimentalement. Il s'agit d'un exercice difficile dans le domaine de la dynamique des structures en raison de la très grande taille des modèles numériques considérés et du grand nombre de paramètres à ajuster. Dans un contexte où la structure du modèle ne découle pas d'une approche « boite noire », mais résulte d'une modélisation physique fine, il est par ailleurs essentiel que les paramètres à ajuster prennent des valeurs physiquement admissibles (par exemple positives et proches de valeurs tabulées pour la masse volumique et le module de Young d'un matériau connu, comprise entre -1 et 0,5 pour le coefficient de Poisson *etc*.). Le problème de l'identification de paramètres étant mal posé par nature, cet objectif ne peut être atteint qu'en ajoutant des contraintes fortes au travers d'une fonctionnelle de pénalisation dont la formulation est un problème ouvert.

La technique choisie pour le recalage est celle de la sensibilité. Elle consiste à minimiser les distances entre les grandeurs de sortie, qui sont les fréquences propres et les déformées modales, mesurées et calculées. Un écart mesure – calcul minimal est approché par une analyse de sensibilité du modèle par rapport à ses paramètres influents. L'écart constitue la fonction coût qui est minimisée au cours d'un processus itératif.

Nous nous limiterons ici, aux grandes lignes de la méthode de sensibilité des fréquences propres (Eigensensitivity method) développée par [Sinha & Friswell, 2002]. C'est une approche paramétrique, basée sur les fréquences propres des systèmes linéaires non amortis ou faiblement amortis. Dans les méthodes paramétriques, un vecteur de paramètres est défini par la prise en charge des éléments inconnus. Le modèle de la structure est construit en utilisant ces paramètres. En conséquence, les réponses sorties simulées sont des fonctions des paramètres sélectionnés. Dans la méthode de sensibilité propre, nous utilisons le modèle pour estimer les fréquences propres de la structure. Soit $\underline{p} = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & \dots & p_{n_p} \end{bmatrix}$ un vecteur des n_p paramètres. Le vecteur $\underline{z}^A$ des n_m fréquences propres numériques est donné par :

$$\underline{z}^A(\underline{p}) = \begin{bmatrix} f_1(\underline{p}) & f_2(\underline{p}) & \dots & f_{n_m}(\underline{p}) \end{bmatrix} \tag{2.67}$$

L'aspect le plus important dans les méthodes de sensibilité de recalage basées sur le gradient, est de définir la fonction coût qui traduit un écart entre les données numériques et expérimentales. Les paramètres estimés sont obtenus en minimisant cette fonction qui est généralement fortement non linéaire en fonction des paramètres de recalage. Ici, cette fonction coût dépend donc des fréquences propres numériques $\underline{z}^A$ et expérimentales $\underline{z}^X$ .Elle est donnée par :

$$J(\underline{p}) = \sum_{i=1}^{n_m} w_i \left(f_i^X - f_i^A(\underline{p}) \right)^2 = \left(\underline{z}^X - \underline{z}^A(\underline{p}) \right)^T \underline{\underline{W}} \left(\underline{z}^X - \underline{z}^A(\underline{p}) \right) \tag{2.68}$$

avec :

$$J(\underline{p}) = \underline{e}^T \underline{\underline{W}}\, \underline{e} \tag{2.69}$$

où $\underline{e} = \underline{z}^A - \underline{z}^X$ représente le vecteur résiduel modal, qui est une fonction non linéaire des paramètres et $\underline{\underline{W}}$ la matrice de pondération diagonale qui rend compte du niveau de confiance qu'on souhaite attribuer aux mesures. La minimisation est résolue en utilisant une série de Taylor tronquée linéaire et des algorithmes itératifs. A la $k^{ème}$ itération :

$$\underline{e}_k = \underline{z}^X - \underline{z}_k^A = \underline{\underline{\mathbb{S}}}\, \Delta\underline{p}_k \tag{2.70}$$

où $\Delta\underline{p}_k = \underline{p}_k - \underline{p}_{k-1}$ représente l'incertitude sur les paramètres de recalage et $\underline{\underline{\mathbb{S}}}$ la matrice de sensibilité. C'est la dérivée première des valeurs propres par rapport aux paramètres de recalage. La matrice de sensibilité peut se calculer analytiquement ou numériquement [Titurus *et al.,* 2003]. Ainsi, la fonction objective à la $i^{ème}$ itération peut être approximée par :

$$J(\Delta\underline{p}_k) = (\Delta\underline{z}_k - \underline{\underline{\mathbb{S}}}\, \Delta\underline{p}_k)^T \underline{\underline{W}} (\Delta\underline{z}_k - \underline{\underline{\mathbb{S}}}\, \Delta\underline{p}_k) \tag{2.71}$$

La solution du problème de recalage est alors obtenue par minimisation du critère J (2.71) par rapport $\Delta\underline{p}$. Cette minimisation conduit à l'estimation des paramètres de recalage. Ainsi, après chaque itération nous avons :

$$\underline{p}_{k+1} = \underline{p}_k + \left[\underline{\underline{\mathbb{S}}}^T \underline{\underline{W}}\, \underline{\underline{\mathbb{S}}} \right]^{-1} \underline{\underline{\mathbb{S}}}^T \underline{\underline{W}} (\underline{z}^A - \underline{z}_k^X) \tag{2.72}$$

La dernière valeur estimée de $\underline{p}$ donne les valeurs estimées des paramètres qui étaient a priori mal connus.

2.5 - Modèle éléments finis du dispositif expérimental (Poutre)

2.5.1 - Description du dispositif

Le dispositif expérimental est une poutre en matériau composite qui est encastrée en position verticale sur le banc du laboratoire (marbre permettant une isolation vibratoire). La poutre est munie de trois paires de piézo-électriques, PZ29, pouvant travailler en capteur ou en actionneurs. Ces céramiques sont collées (colle époxy) en vis-à-vis de part et d'autre de la structure. Les dimensions de la poutre, la disposition des paires des piézo-électriques et leurs numérotations sont présentées à la Figure 2.7.

Les propriétés physiques du composite et des pastilles piézo-électriques sont les suivantes :

- *la masse volumique de la partie centrale de la poutre* $\rho_b = 1613\ Kg.m^{-3}$;
- *Le module d'Young de la partie centrale de la poutre* $E_b = 11.7\ GPa$;

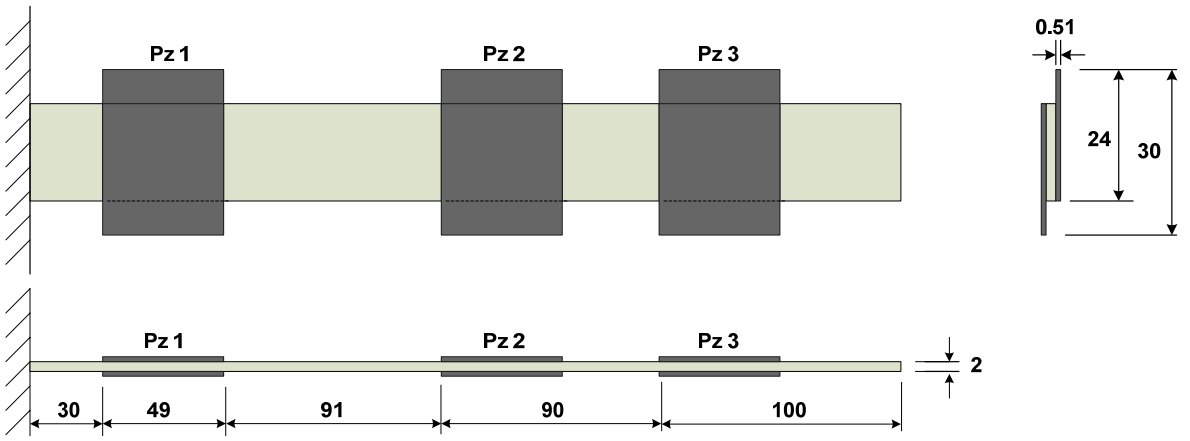


Figure 2.7 - Dimensions de la poutre.

- *La masse volumique des pastilles piézo-électriques* $\rho_{pz} = 7500\ Kg.m^{-3}$;
- *Le module d'Young des pastilles piézo-électriques* $E_{pz} = 58.8\ GPa$;
- *Les coefficients de couplage piézo-électrique :*

$$d_{31} = -4.3 \times 10^{-10}\ C/N$$
$$d_{33} = 16.7 \times 10^{-10}\ C/N$$
$$d_{15} = 11.8 \times 10^{-10}\ C/N$$

Comme expliqué au § 2.3.1, les céramiques étant en vis-à-vis, les vecteurs de polarisation $\underline{P}$ ont alors la même orientation conditionnant ainsi le comportement du PZT. De plus, les deux faces intérieures sont reliées au même potentiel ainsi que les deux faces extérieures. Ce câblage impose donc des champs électriques de sens opposés dans les deux céramiques. Ce qui conduit à des sollicitations contraires : lorsque l'une se contracte, l'autre se dilate. La combinaison provoque alors l'apparition d'un moment de flexion suivant X_2 pour les actionneurs (voir Figure 2.8). On remarque aussi de cette figure, un décalage (largeur du PZT plus grande) par rapport à la poutre dû à des contraintes de non-conductivité du composite. Ce décalage permet donc l'accès à la face intérieure du PZT.

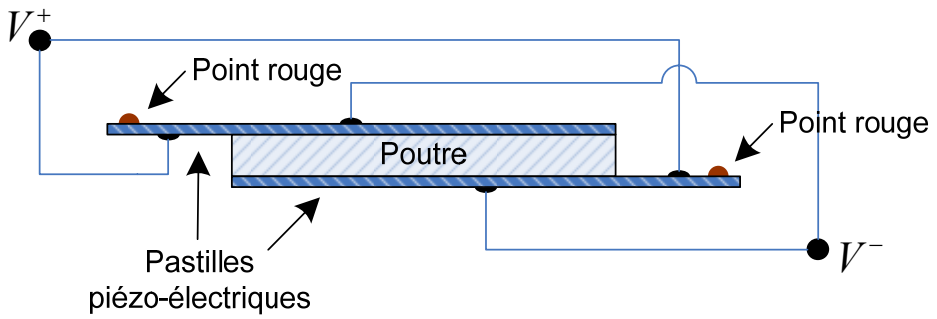


Figure 2.8 - Montage et câblage des céramiques piézo-électriques.

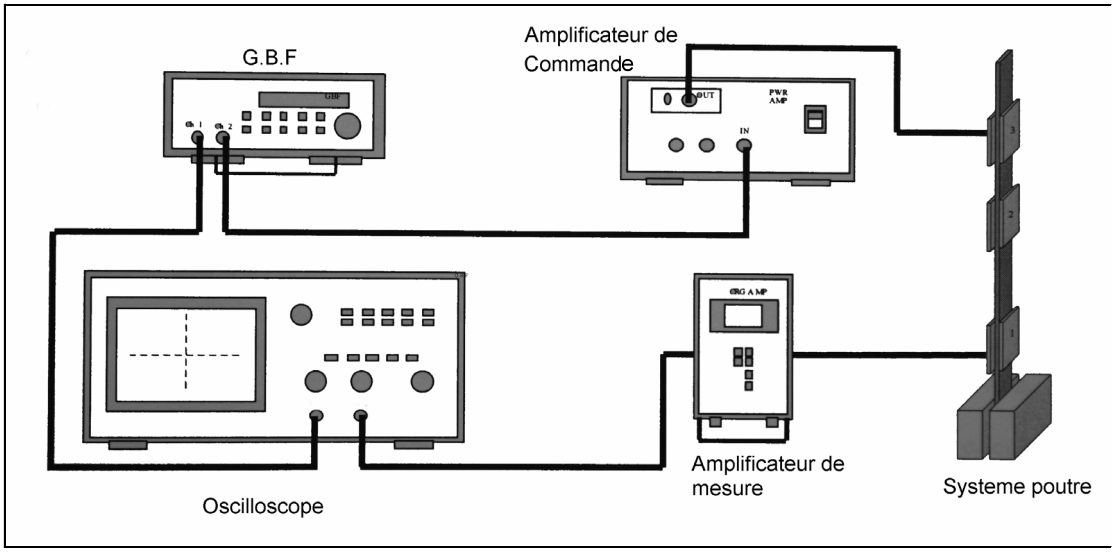


Figure 2.9 - Montage pratique réalisé pour l'identification.

2.5.2 - Identification

Afin de vérifier la validité du modèle EF de la poutre, nous avons effectué son identification en relevant la courbe de Bode expérimentale. Pour effectuer cette opération, nous avons excité la structure par des signaux électriques (voir Figure 2.9.) et nous avons analysé la réponse de celle-ci.

On crée alors un modèle global tenant compte du comportement de la structure ainsi que des modifications apportées par les divers éléments extérieurs tels que les amplis de mesure. La comparaison des signaux entrées/sorties du système nous permet alors de définir un gain ainsi qu'un déphasage (voir Figure 2.10).

En balayant un grand nombre de fréquences, puis en affinant nos mesures au niveau des fréquences de résonance, nous sommes en mesure de reconstituer, point par point, un diagramme de Bode expérimental représentatif du comportement de la structure. Ce travail doit être réalisé sur différents chemins (couple capteur/actionneur). Le modèle non paramétrique ainsi obtenu va nous servir à recaler notre modèle EF.

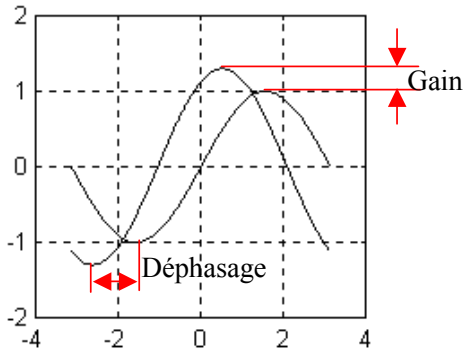


Figure 2.10 - Comparaison des signaux entrées/sorties du système.

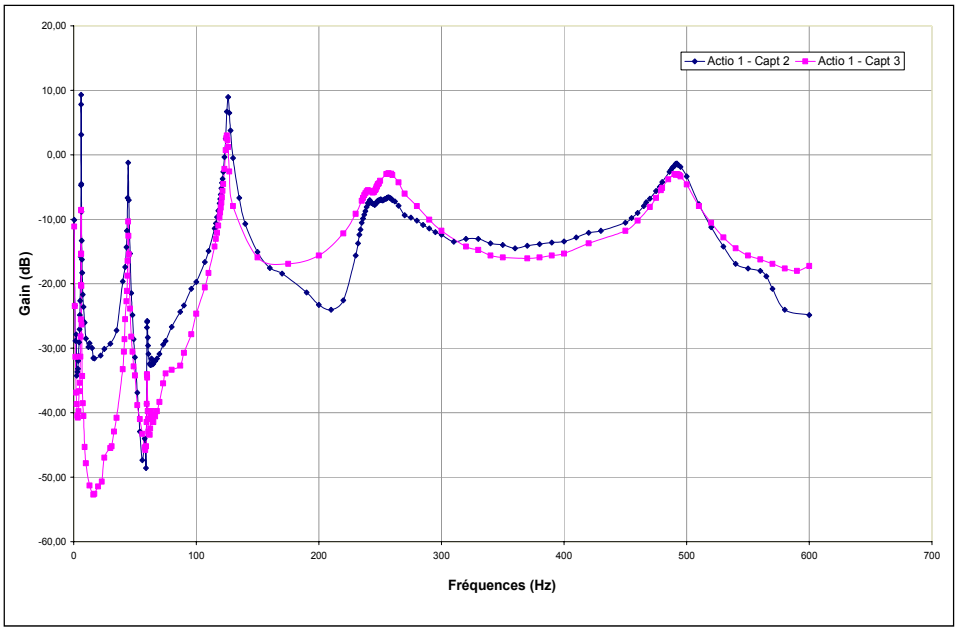


Figure 2.11 - Relevé expérimental des gains pour les chemins 1-2 et 1-3.

On appelle chemin 1-2 le transfert entre l'actionneur piézo-électrique 1 et le capteur piézo-électrique 2. La Figure 2.11 présente le diagramme de Bode expérimental obtenu pour le chemin 1-2 et 1-3. Ces courbes fréquentielles, plage [0 – 650 Hz], nous montrent les cinq premiers modes de vibration de la poutre.

Les coefficients d'amortissement pour ces cinq modes sont calculés expérimentalement (méthode graphique sur la base du relevé expérimental) en déterminant les points à demi-puissance pour chaque mode. On cherche les deux points (fréquence ω_i^A et ω_i^B) pour lesquels la réponse est 0,707 fois la réponse maximum H_{ω_i} d'un mode ω_i de vibration (Figure 2.12).

Le coefficient d'amortissement est ensuite calculé par :

$$\zeta_i = \frac{\omega_i^A - \omega_i^B}{2\omega_i} \tag{2.73}$$

Le Tableau 2.2 présente les fréquences de résonance et les coefficients d'amortissement identifiés.

Mode →	**1er**	**2ème**	**3ème**	**4ème**	**5ème**
Fréquences (Hz)	6.15	44.5	126	256	492
Les coefficients d'amortissements $\times 10^{-3}$	7	6	9.5	71	22

Tableau 2.2 - Cinq premières fréquences propres et coefficients d'amortissements de la poutre identifiés.

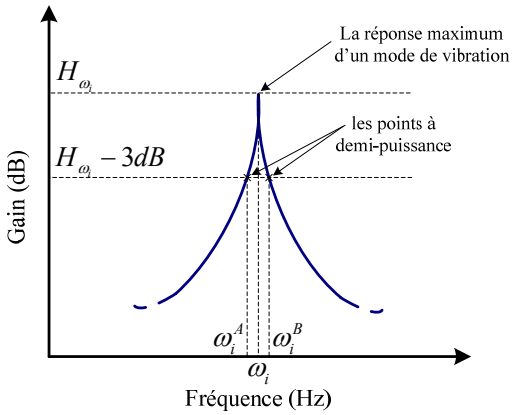


Figure 2.12 - Points à demi-puissance.

2.5.3 - Modélisation

Le modèle EF de la poutre a été réalisé avec Matlab©. La poutre a été divisée en 7 tronçons (Tr) comme illustré à la Figure 2.13. Les tronçons 2, 4, 6 sont constitués des paires piézo-électriques qui sont excentrées du centre de la poutre réelle (Figure 2.8). Dans ces parties, on suppose que la poutre et les paires de céramiques piézo-électriques sont symétriques comme montré à la Figure 2.13. Les épaisseurs des céramiques piézo-électriques ne sont pas négligeables par rapport à celle de la poutre. Nous avons modélisé la structure comme une poutre encastrée-libre d'épaisseur variable. On suppose aussi que les céramiques piézo-électriques font partie de la poutre, mais avec une densité et un module d'Young différents.

La poutre a été modélisée en utilisant des éléments de type Euler-Bernoulli (Section 2.1.1). On suppose également que chacun de ces éléments possède deux nœuds et chaque nœud a deux degrés de liberté $q = \begin{bmatrix} w & \theta \end{bmatrix}^T$. Au total, nous avons 36 éléments. Ainsi, si l'on considère que le premier nœud est fixe, le nombre total de degrés de liberté du modèle est égal à 72.

L'amortissement utilisé est un amortissement proportionnel de type Rayleigh. Les valeurs des constantes α_d et β_d utilisées sont les suivantes :

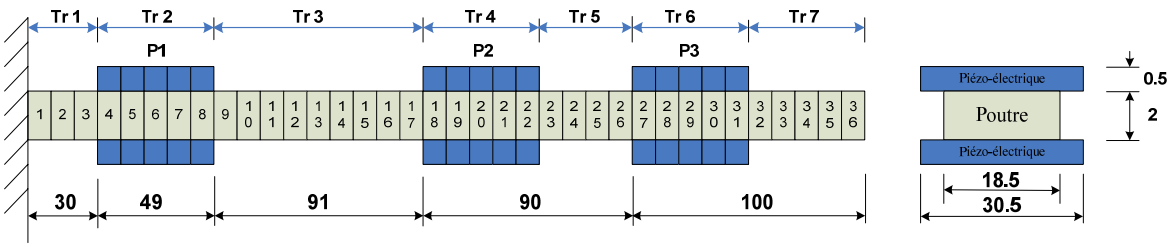


Figure 2.13 - Modèle du dispositif expérimental.

$$\alpha_d = \frac{2(\omega_a \zeta_a^E - \omega_b \zeta_b^E)}{\omega_a^2 - \omega_b^2} \tag{2.74}$$

$$\beta_d = \frac{2\omega_a \omega_b (\omega_a \zeta_a^E - \omega_b \zeta_b^E)}{\omega_a^2 - \omega_b^2} \tag{2.75}$$

Nous obtenons les courbes de Bode suivantes (Figure 2.14) pour les transferts entre l'actionneur 1 et les capteurs 2 et 3.

Les cinq premières fréquences propres et les coefficients d'amortissements de la poutre fournis par le modèle EF initial sont donnés dans le Tableau 2.3.

La correction paramétrique de ce premier modèle a été effectuée en vue d'une meilleure corrélation avec

Mode →	1er	2ème	3ème	4ème	5ème
Fréquences (Hz)	5.4	37.36	109	230	428
Les coefficients d'amortissements $\times 10^{-3}$	6	6	9.5	82	31

Tableau 2.3 - Cinq premières fréquences propres et coefficients d'amortissements du modèle EF initial de la poutre.

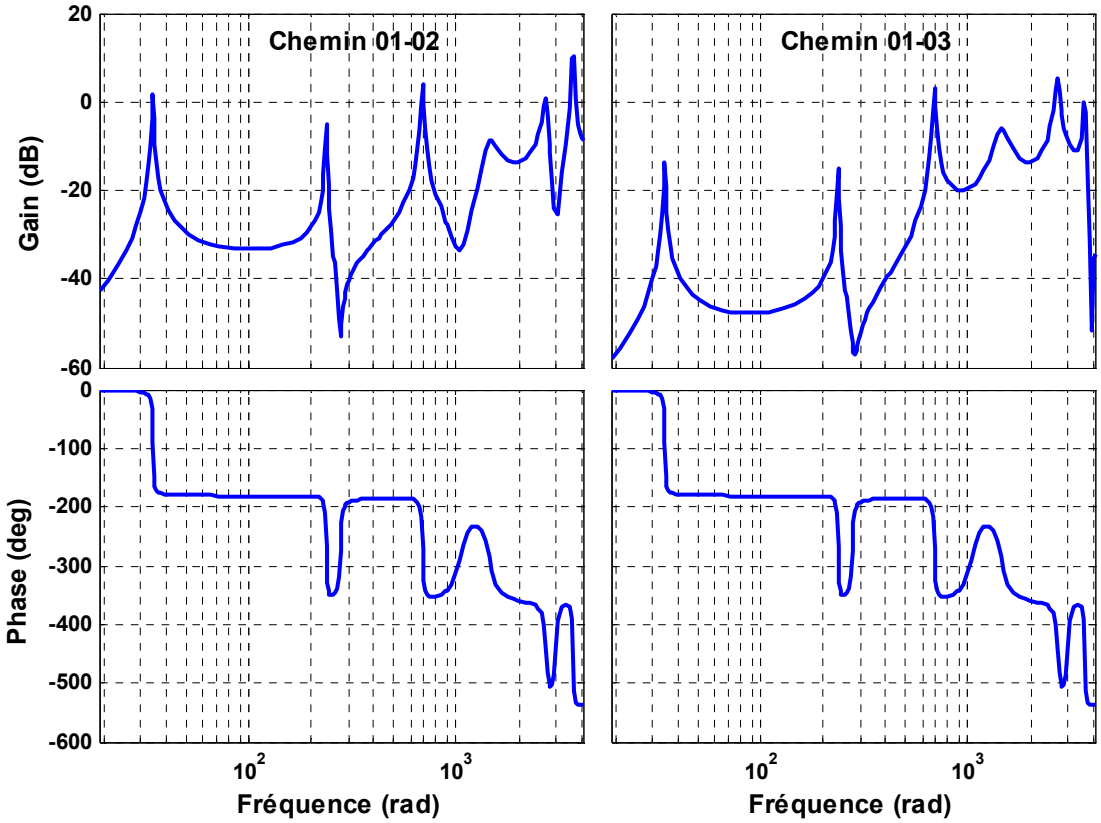


Figure 2.14 - Courbes de Bode obtenues par le modèle EF initial.

la structure réelle.

2.5.4 - Recalage de modèle

Pour ce premier modèle, la masse supplémentaire du câblage, les points de soudure et la colle n'ont pas été pris en compte dans le notre modèle EF. Nous avons alors effectué un recalage de ce premier modèle EF en deux étapes.

Dans la première étape, nous avons recalé deux paramètres : le module d'Young et la masse volumique du matériau composite. La différence entre les cinq premières fréquences propres mesurées et analytiques est minimisée par la mise à jour globale du modèle EF en utilisant la méthode de sensibilité propre [Sinha & Friswell, 2002] décrite dans la section 0. Ainsi, le module d'Young et la masse volumique retenus sont respectivement de 13.915 GPa et de 1315 kg.m^3.

Dans la deuxième étape, les masses volumiques des tronçons 2,4 et 6 (avec les céramiques piézo-électriques) ont été choisies comme paramètres de recalage. Ces trois paramètres ont été recalés en minimisant la même fonction objective qui est basée sur les cinq premières fréquences propres. La procédure d'optimisation a conduit aux valeurs des masses volumiques de ces trois tronçons suivantes : respectivement 7990, 8100 et 8200 kg.m^3. La Figure 2.15 montre les courbes de gains identifiées expérimentalement et du modèle EF après recalage.

Les cinq premières fréquences propres identifiées et celles fournies par le modèle EF recalé sont données dans le Tableau 2.4. Par rapport aux fréquences identifiées expérimentalement, il y a une erreur maximale de 2.62% (erreur sur le 4ème mode). Cet écart peut provenir des erreurs de modélisation comme le placement asymétrique des paires piézo-électriques ou des câblages. Pour notre problème SHM, nous supposerons que le changement sur les fréquences propres mesurées, induit par les endommagements, est beaucoup plus important que celui introduit par les erreurs de modélisation.

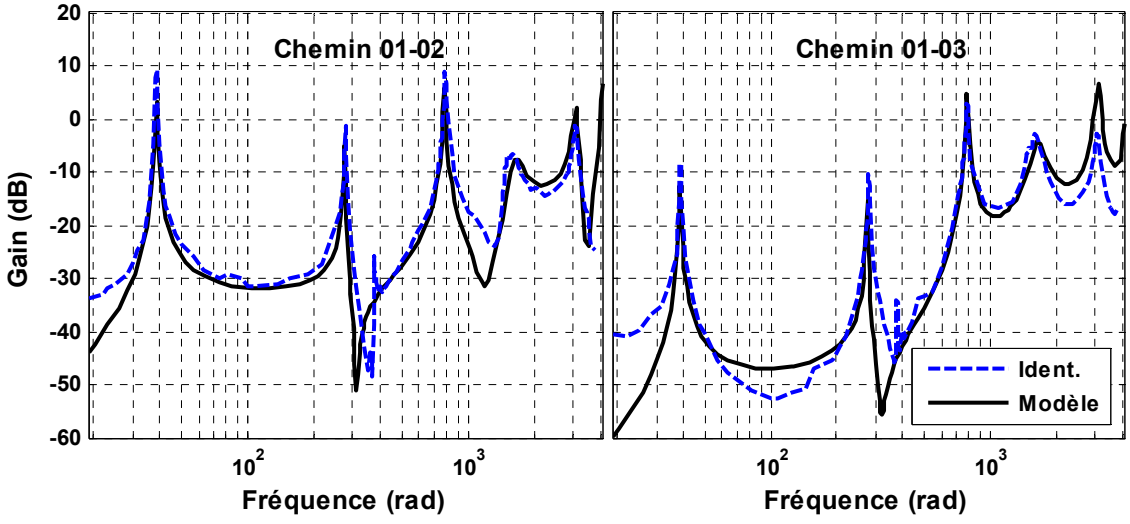


Figure 2.15 - Comparaison des gains obtenus par le modèle EF recalé et les mesures.

Fréquences Propres (Hz)	1ère	2ème	3ème	4ème	5ème
Analytiques	6.13	43.73	125.03	262.7	495.27
Identifiées	6.15	44.5	126	256	492
Pourcentage d'erreur (%)	-0.24	-1.74	-0.77	2.62	0.66

Tableau 2.4 - Cinq premières fréquences propres identifiées et analytiques de la poutre.

2.6 - Conclusions

Les différentes étapes exposées dans ce chapitre nous ont conduits à l'élaboration du modèle mécanique EF de notre dispositif expérimental. Ce modèle EF a été obtenu après un recalage paramétrique utilisant les résultats d'une identification fréquentielle expérimentale de la structure réelle. Ce modèle sera utilisé pour représenter fidèlement le comportement dynamique de la poutre saine. Il nous permettra aussi d'introduire divers endommagements pour simuler leurs effets sur la structure et ainsi tester les algorithmes SHM que nous proposons dans le chapitre suivant.

Chapitre 3
Identification par sous-espaces

Résumé : L'objectif de ce chapitre est de présenter une démarche de l'analyse modale basée sur la technique de l'identification par sous-espaces (SubID). Le but est d'améliorer la qualité de l'estimation des paramètres modaux et de l'élimination automatique des modes erronés générés par la méthode de SubID à base de covariances. L'effet de la période d'échantillonnage sur les résultats de la méthode de SubID est traité. Un histogramme de stabilisation est proposé. Il permet de combiner les résultats obtenus à partir des différentes mesures et d'extraire automatiquement les paramètres modaux identifiés, sans intervention humaine. Une poutre active en composite a été choisie pour l'application de la procédure proposée. À partir de cette procédure d'identification, une méthode SHM basée sur le recalage de modèle a été implantée, afin de détecter et localiser d'éventuels endommagements sur cette poutre.

Chapitre 3 - Identification par sous-espaces 59
3.1 - Identification par sous-espaces stochastique 60
3.2 - Mise en œuvre pratique 66
3.3 - Problèmes pratiques 68
3.4 - Histogramme de Stabilisation 70
3.5 - Etude de cas Identification par sous-espaces d'une poutre 70
3.6 - Conclusions 80

L'identification précise et si possible automatique des propriétés dynamiques structurales est une étape essentielle d'une détection et localisation d'endommagements en fonctionnement (en ligne) sur une structure. En effet, les méthodes de SHM consistent à chercher des indicateurs d'endommagement reflétant l'état du système. Ces indicateurs peuvent être les paramètres modaux

(fréquences propres, coefficients d'amortissement et formes des modes) ou liés aux paramètres structuraux (matrices de rigidité de flexibilité, *etc*.). Ainsi, pour identifier et suivre l'évolution de ces indicateurs en fonctionnement une méthode d'identification consistante et nécessaire. Cette méthode devrait être capable de traiter des systèmes d'ordre élevé possédant un grand nombre de sorties bruitées et robustes aux excitations non-stationnaires et inconnues [Basseville *et al.,* 2001]. Parmi les méthodes d'identification usuelles peu sont utilisables dans ce cadre. Une de ces méthodes est l'identification par sous-espaces [Katayama, 2005].

Les méthodes par sous-espaces datent des années 70, avec le développement de l'analyse statistique multi-variables, en particulier de l'analyse en composantes principales (ACP) et de l'analyse de corrélation canonique développée par [Hotelling, 1933, Hotelling, 1936]. Les approches actuelles utilisées pour l'identification des systèmes datent de la fin des années 1980. Elles sont basées sur la factorisation QR ou la décomposition en valeurs singulières (SVD) [De Moor *et al.,* 1988, Van Overchee & De Moor, 1993, Larimore, 1983, Larimore, 1990].

L'intérêt de ces approches réside dans le fait de ne pas nécessiter des techniques d'optimisation, ni d'imposer une forme canonique au système. Ainsi, les algorithmes de sous-espaces peuvent également aussi bien s'appliquer à l'identification des systèmes MIMO (plusieurs entrées et plusieurs sorties) qu'aux systèmes SISO (une seule entrée et une seule sortie). D'ailleurs, il a été montré [Basseville *et al.,* 2001] que des méthodes d'identification par sous-espaces à base de covariances peuvent être rendues assez robustes pour manipuler des excitations non stationnaires. Un autre avantage de l'identification par sous-espaces est l'utilisation du concept de représentation d'états sur lequel est basée l'évolution des techniques modernes de conception de commande.

Le principe de l'identification par sous-espaces consiste, d'abord, à identifier la séquence des états sur la base de mesures et de l'excitation [Van Overchee & De Moor, 1996]. Ceci est réalisé en deux étapes. D'abord, par la projection d'espace ligne des matrices de Hankel et ensuite par la factorisation QR ou par la décomposition SVD. La factorisation QR permet de réduire le traitement des données tandis que la décomposition SVD conduit à rejeter l'effet du bruit (qui se traduit par des modes erronés, non représentatifs de la dynamique du système). Une fois que la séquence des états a été calculée, le problème d'identification du modèle d'état devient un problème linéaire des moindres carrés. Les matrices de bruit de processus et de mesures peuvent être calculées à partir des résidus de moindres carrés.

3.1 - Identification par sous-espaces stochastique

Dans ce paragraphe, nous traitons de la formulation mathématique du problème d'identification et nous expliquons l'approche par sous-espaces à base de covariances. Nous montrons aussi le lien entre les paramètres structuraux et les problèmes aux valeurs propres.

3.1.1 - Problématique :

Considérons n_τ échantillons de la mesure $\underline{y}_k$, qui représente la réponse vibratoire d'un système stochastique d'ordre n_s définie comme suit :

$$\underline{X}_{k+1} = \underline{\underline{A}}_d \underline{X}_k + \underline{w}_k \tag{3.1}$$

$$\underline{y}_k = \underline{\underline{C}} \underline{X}_k + \underline{v}_k \tag{3.2}$$

avec les bruits de processus $\underline{w}_K$ et de mesures $\underline{v}_k$ indépendants, blancs et de moyennes nulles ($E\left[\underline{v}_k\right] = 0$; $E\left[\underline{w}_k\right] = 0$) et ayant les matrices de covariances suivantes :

$$E\left[\begin{bmatrix}\underline{w}_k \\ \underline{v}_k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\underline{w}_k^T & \underline{v}_k^T\end{bmatrix}\right] = \begin{bmatrix}\underline{\underline{Q}} & \underline{\underline{S}} \\ \underline{\underline{S}}^T & \underline{\underline{R}}\end{bmatrix} \tag{3.3}$$

Le but est de déterminer l'ordre n_s et d'identifier les matrices d'état et d'observation du système ($\underline{\underline{A}}_d, \underline{\underline{C}}$).

3.1.2 - Hypothèse

Nous supposons que le système stochastique est stationnaire et que la moyenne et la matrice de covariance sont données par :

$$E\left[\underline{X}_k\right] = 0 \tag{3.4}$$

$$E\left[\underline{X}_k \underline{X}_k^T\right] = \underline{\underline{\Sigma}} \tag{3.5}$$

La matrice de covariance d'état $\underline{\underline{\Sigma}}$ est stationnaire et donc indépendante du temps k .

Nous supposons également que le bruit de processus $\underline{w}_K$ est indépendant de l'état et des mesures.

3.1.3 - Démonstration (Forward Model)

Nous définissons trois matrices de covariance :

$$\begin{bmatrix}\underline{\underline{\Sigma}} & \underline{\underline{G}} \\ \underline{\underline{G}}^T & \underline{\underline{\Lambda}}_0\end{bmatrix} = E\left[\begin{bmatrix}\underline{X}_{k+1} \\ \underline{y}_k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\underline{X}_{k+1}^T & \underline{y}_k^T\end{bmatrix}\right] \tag{3.6}$$

où $\underline{\underline{\Sigma}}$ est la matrice de covariance d'état. Elle est de dimension (n_s x n_s). $\underline{\underline{G}}$ est la matrice de covariance entre l'état futur et la mesure de dimension ($n_s \times n_y$) et $\underline{\underline{\Lambda}}_0$ est la matrice de covariance des mesures de dimension ($n_u \times n_u$). Pour les systèmes stochastiques stationnaires la matrice de covariance d'état s'exprime par :

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{\Sigma}} &= E\left[\underline{X}_{k+1}\underline{X}_{k+1}^T\right] \\
&= E\left[\left[\underline{\underline{A}}_d\underline{X}_k + \underline{w}_k\right]\left[\underline{\underline{A}}_d\underline{X}_k + \underline{w}_k\right]^T\right] \\
&= E\left[\underline{\underline{A}}_d\underline{X}_k\underline{X}_k^T\underline{\underline{A}}_d^T + \underline{\underline{A}}_d\underline{X}_k\underline{w}_k^T + \underline{w}_k\underline{X}_k^T\underline{\underline{A}}_d^T + \underline{w}_k\underline{w}_k^T\right] \\
&= E\left[\underline{\underline{A}}_d\underline{X}_k\underline{X}_k^T\underline{\underline{A}}_d^T\right] + E\left[\underline{\underline{A}}_d\underline{X}_k\underline{w}_k^T\right] + E\left[\underline{w}_k\underline{X}_k^T\underline{\underline{A}}_d^T\right] + E\left[\underline{w}_k\underline{w}_k^T\right]
\end{aligned}$$

Les bruits de processus $\underline{w}_k$ sont indépendants des états, donc :

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \underline{\underline{A}}_d E\left[\underline{X}_k\underline{X}_k^T\right]\underline{\underline{A}}_d^T + \underline{\underline{A}}_d E\left[\underline{X}_k\right].E\left[\underline{w}_k^T\right] + E\left[\underline{w}_k\right]E\left[\underline{X}_k^T\right]\underline{\underline{A}}_d^T + E\left[\underline{w}_k\underline{w}_k^T\right] \tag{3.7}$$

Le bruit de processus $\underline{w}_K$ est blanc, et sa moyenne est nulle ($E\left[\underline{w}_k\right] = 0$), donc :

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \underline{\underline{A}}_d E\left[\underline{X}_k\underline{X}_k^T\right]\underline{\underline{A}}_d^T + E\left[\underline{w}_k\underline{w}_k^T\right] \tag{3.8}$$

Par conséquent, pour un système stationnaire :

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \underline{\underline{A}}_d\underline{\underline{\Sigma}}\ \underline{\underline{A}}_d^T + \underline{\underline{Q}} \tag{3.9}$$

D'une façon similaire, la matrice de covariance entre l'état suivant et la mesure est donnée par :

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{G}} &= E\left[\underline{X}_{k+1}\underline{y}_k^T\right] \\
\underline{\underline{G}} &= E\left[\left[\underline{\underline{A}}_d\underline{X}_k + \underline{w}_k\right]\left[\underline{\underline{C}}\underline{X}_k + \underline{v}_k\right]^T\right] \\
\underline{\underline{G}} &= E\left[\underline{\underline{A}}_d\underline{X}_k\underline{X}_k^T\underline{\underline{C}}^T + \underline{\underline{A}}_d\underline{X}_k\underline{v}_k^T + \underline{w}_k\underline{X}_k^T\underline{\underline{C}}^T + \underline{w}_K\underline{v}_k^T\right] \\
\underline{\underline{G}} &= E\left[\underline{\underline{A}}_d\underline{X}_k\underline{X}_k^T\underline{\underline{C}}^T\right] + E\left[\underline{\underline{A}}_d\underline{X}_k\underline{v}_k^T\right] + E\left[\underline{w}_K\underline{X}_k^T\underline{\underline{C}}^T\right] + E\left[\underline{w}_K\underline{v}_k^T\right] \\
\underline{\underline{G}} &= \underline{\underline{A}}_d E\left[\underline{X}_k\underline{X}_k^T\right]\underline{\underline{C}}^T + \underline{\underline{A}}_d E\left[\underline{X}_k\right]E\left[\underline{v}_k^T\right] + E\left[\underline{w}_k\right]E\left[\underline{X}_k^T\right]\underline{\underline{C}}^T + E\left[\underline{w}_K\underline{v}_k^T\right] \\
\underline{\underline{G}} &= \underline{\underline{A}}_d\underline{\underline{\Sigma}}\ \underline{\underline{C}}^T + \underline{\underline{S}}
\end{aligned}$$

De même, la matrice de covariance des mesures s'exprime par :

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{\Lambda}}_0 &= E\left[\underline{y}_k\underline{y}_k^T\right] \\
\underline{\underline{\Lambda}}_0 &= E\left[\left[\underline{\underline{C}}\underline{X}_k + \underline{v}_k\right]\left[\underline{\underline{C}}\underline{X}_k + \underline{v}_k\right]^T\right] \\
\underline{\underline{\Lambda}}_0 &= E\left[\underline{\underline{C}}\underline{X}_k\underline{X}_k^T\underline{\underline{C}}^T + \underline{\underline{C}}\underline{X}_k\underline{v}_k^T + \underline{v}_k\underline{X}_k^T\underline{\underline{C}}^T + \underline{v}_k\underline{v}_k^T\right] \\
\underline{\underline{\Lambda}}_0 &= E\left[\underline{\underline{C}}\underline{X}_k\underline{X}_k^T\underline{\underline{C}}^T\right] + E\left[\underline{\underline{C}}\underline{X}_k\underline{v}_k^T\right] + E\left[\underline{v}_k\underline{X}_k^T\underline{\underline{C}}^T\right] + E\left[\underline{v}_k\underline{v}_k^T\right] \\
\underline{\underline{\Lambda}}_0 &= \underline{\underline{C}}E\left[\underline{X}_k\underline{X}_k^T\right]\underline{\underline{C}}^T + \underline{\underline{C}}.E\left[\underline{X}_k\right]E\left[\underline{v}_k^T\right] + E\left[\underline{v}_k\right]E\left[\underline{X}_k^T\right]\underline{\underline{C}}^T + E\left[\underline{v}_k\underline{v}_k^T\right] \\
\underline{\underline{\Lambda}}_0 &= \underline{\underline{C}}\underline{\underline{\Sigma}}\ \underline{\underline{C}}^T + \underline{\underline{R}}
\end{aligned}$$

En regroupant les équations, on obtient :

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \underline{\underline{A}}_d \underline{\underline{\Sigma}}\ \underline{\underline{A}}_d^T + \underline{\underline{Q}}$$

$$\underline{\underline{G}} = \underline{\underline{A}}_d \underline{\underline{\Sigma}} \underline{\underline{C}}^T + \underline{\underline{S}} \tag{3.10}$$

$$\underline{\underline{\Lambda}}_0 = \underline{\underline{C}} \underline{\underline{\Sigma}} \underline{\underline{C}}^T + \underline{\underline{R}} \tag{3.11}$$

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{\Sigma}} & \underline{\underline{G}} \\ \underline{\underline{G}}^T & \underline{\underline{\Lambda}}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{A}}_d \\ \underline{\underline{C}} \end{bmatrix} \underline{\underline{\Sigma}} \begin{bmatrix} \underline{\underline{A}}_d^T & \underline{\underline{C}}^T \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{\underline{Q}} & \underline{\underline{S}} \\ \underline{\underline{S}}^T & \underline{\underline{R}} \end{bmatrix} \tag{3.12}$$

La matrice d'auto-covariance des mesures, qui est une fonction du modèle linéaire stochastique, est définie par :

$$\underline{\underline{\Lambda}}_i \triangleq E\left[\underline{y}_{k+i} \underline{y}_k^T \right] \tag{3.13}$$

Développons :

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{\Lambda}}_i &\triangleq E\left[\underline{y}_{k+i} \underline{y}_k^T \right] \\
\underline{\underline{\Lambda}}_i &= E\left[\left[\underline{\underline{C}} \underline{X}_{k+i} + \underline{v}_{k+i} \right] \left[\underline{y}_k^T \right] \right] \\
\underline{\underline{\Lambda}}_i &= \underline{\underline{C}} E\left[\underline{X}_{k+i} \underline{y}_k^T \right] + E\left[\underline{v}_{k+i} \underline{y}_k^T \right] \\
\underline{\underline{\Lambda}}_i &= \underline{\underline{C}} E\left[\underline{X}_{k+i} \underline{y}_k^T \right] + E\left[\underline{v}_{k+i} \right] E\left[\underline{y}_k^T \right] \\
\underline{\underline{\Lambda}}_i &= \underline{\underline{C}} E\left[\underline{X}_{k+i} \underline{y}_k^T \right] \\
\underline{\underline{\Lambda}}_i &= \underline{\underline{C}} E\left[\left[\underline{\underline{A}}_d^{i-1} \underline{X}_{k+1} + \underline{\underline{A}}_d^{i-1} \underline{w}_{k+1} + \underline{\underline{A}}_d^{i-2} \underline{w}_{k+2} + ... + \underline{\underline{A}}_d^0 \underline{w}_{k+i} \right] \left[\underline{Y}_k^T \right] \right], \quad i > 0
\end{aligned}$$

Le bruit de processus $\underline{w}_K$ est indépendant de l'état et des mesures. Il est blanc et sa moyenne est nulle ($E\left[\underline{w}_k \right] = 0$), donc :

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{\Lambda}}_i &= \underline{\underline{C}} \underline{\underline{A}}_d^{i-1} E\left[\underline{X}_{k+1} \underline{y}_k^T \right] \\
\underline{\underline{\Lambda}}_i &= \underline{\underline{C}} \underline{\underline{A}}_d^{i-1} \underline{\underline{G}}, \qquad i > 0
\end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{\Lambda}}_i &= \underline{\underline{C}} \underline{\underline{\Sigma}} \underline{\underline{C}}^T + \underline{\underline{R}} \qquad i = 0 \\
\underline{\underline{\Lambda}}_i &= \underline{\underline{C}} \underline{\underline{A}}_d^{i-1} \underline{\underline{G}}, \qquad i > 0
\end{aligned} \tag{3.14}$$

On définit alors la matrice de Hankel basée sur l'auto-covariance de mesures par :

$$\underline{\underline{\mathrm{H}}}_{p+1,q} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{\Lambda}}_1 & \underline{\underline{\Lambda}}_2 & \vdots & \underline{\underline{\Lambda}}_q \\ \underline{\underline{\Lambda}}_2 & \underline{\underline{\Lambda}}_3 & \vdots & \underline{\underline{\Lambda}}_{q+1} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ \underline{\underline{\Lambda}}_{p+1} & \underline{\underline{\Lambda}}_{p+2} & \vdots & \underline{\underline{\Lambda}}_{p+q+1} \end{bmatrix} = Hank(\underline{\underline{\Lambda}}_i) \tag{3.15}$$

Si le modèle ne présente pas de bruit de mesures, le premier élément de la matrice de Hankel est $\underline{\underline{\Lambda}}_0$. Les relations (3.14) nous permettent de réécrire (3.15) sous la forme suivante :

$$\underline{\underline{\mathrm{H}}}_{p+1,q} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{G}} & \underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{\underline{A}}}_d\,\underline{\underline{G}} & \vdots & \underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{\underline{A}}}_d^{q-1}\,\underline{\underline{G}} \\ \underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{\underline{A}}}_d\,\underline{\underline{G}} & \underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{\underline{A}}}_d^{2}\,\underline{\underline{G}} & \vdots & \underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{\underline{A}}}_d^{q}\,\underline{\underline{G}} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ \underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{\underline{A}}}_d^{p}G & \underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{\underline{A}}}_d^{p+1}\,\underline{\underline{G}} & \vdots & \underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{\underline{A}}}_d^{p+q}\,\underline{\underline{G}} \end{bmatrix} \tag{3.16}$$

que l'on factorise sous la forme :

$$\underline{\underline{\mathrm{H}}}_{p+1,q} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{C}} \\ \underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{\underline{A}}}_d \\ \vdots \\ \underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{\underline{A}}}_d^{p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\underline{G}} & \underline{\underline{\underline{A}}}_d\,\underline{\underline{G}} & \cdots & \underline{\underline{\underline{A}}}_d^{q-1}\,\underline{\underline{G}} \end{bmatrix} \tag{3.17}$$

ou encore :

$$\underline{\underline{\mathrm{H}}}_{p+1,q} = \underline{\underline{O}}_{p+1}\,\underline{\underline{\mathbb{C}}}_q \tag{3.18}$$

où $\underline{\underline{O}}_{p+1} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{C}} & \underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{\underline{A}}}_d & \cdots & \underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{\underline{A}}}_d^{p} \end{bmatrix}^T$ est la matrice d'observabilité de dimension $(n_y(p+1)\times n_s)$ et $\underline{\underline{\mathbb{C}}}_q = \begin{bmatrix} \underline{\underline{G}} & \underline{\underline{\underline{A}}}_d\,\underline{\underline{G}} & \cdots & \underline{\underline{\underline{A}}}_d^{q-1}\,\underline{\underline{G}} \end{bmatrix}$ représente la matrice de gouvernabilité de dimension $(n_s \times n_y q)$. En factorisant la matrice de Hankel, on peut alors obtenir la matrice d'observabilité $\underline{\underline{O}}_{p+1}$ et la matrice de gouvernabilité $\underline{\underline{\mathbb{C}}}_q$. Ces deux matrices nous permettent par la suite d'estimer les matrices du système ($\underline{\underline{\underline{A}}}_d, \underline{\underline{C}}, \underline{\underline{G}}$).

3.1.4 - Estimation de la matrice d'état et d'observation

La matrice d'observation $\underline{\underline{C}}$ représente le premier bloc ligne de la matrice d'observabilité $\underline{\underline{O}}_{p+1}$. La matrice de covariance entre l'état suivant et la mesure, $\underline{\underline{G}}$, est elle donnée par le premier bloc ligne de la matrice gouvernabilité $\underline{\underline{\mathbb{C}}}_q$. Pour la matrice d'état $\underline{\underline{\underline{A}}}_d$ elle est calculée en supprimant dans un premier temps, le premier bloc ligne du $\underline{\underline{O}}_{p+1}$. Soit :

$$\underline{\underline{O}}_{p+1}^{\uparrow} = \left[\underline{\underline{C}}\underline{\underline{A}}_d \quad \underline{\underline{C}}\underline{\underline{A}}_d^2 \quad \cdots \quad \underline{\underline{C}}\underline{\underline{A}}_d^p \right]^T \tag{3.19}$$

Puis dans un deuxième temps, en retirant le dernier bloc ligne du $\underline{\underline{O}}_{p+1}$. Soit :

$$\underline{\underline{O}}_p = \left[\underline{\underline{C}} \quad \underline{\underline{C}}\underline{\underline{A}}_d \quad \cdots \quad \underline{\underline{C}}\underline{\underline{A}}_d^{p-1} \right]^T \tag{3.20}$$

La matrice $\underline{\underline{A}}_d$ est alors donnée par :

$$\underline{\underline{A}}_d = \underline{\underline{O}}_p^{\oplus} \underline{\underline{O}}_{p+1}^{\uparrow} \tag{3.21}$$

où $\underline{\underline{O}}_p^{\oplus}$ est le pseudo-inverse de la matrice $\underline{\underline{O}}_p$. De ce triplet ($\underline{\underline{A}}_d, \underline{\underline{C}}, \underline{\underline{G}}$) le modèle stochastique complet, et les matrices $\underline{\underline{Q}}, \underline{\underline{S}}, \underline{\underline{R}}$ de covariance de bruit, peuvent se calculer à condition que la réalisation soit réelle, stable et positive [De Cock *et al.,* 2002].

3.1.5 - Estimation des paramètres modaux

Les paramètres modaux peuvent se calculer à partir des valeurs propres de matrices d'état $\underline{\underline{A}}_d$ et $\underline{\underline{C}}_d$ [Gawronski, 1998]. Ainsi, une factorisation de $\underline{\underline{A}}_d$ conduit à :

$$\underline{\underline{A}}_d = \underline{\underline{\mathbf{\Psi}}}\,\underline{\underline{\lambda}}\,\underline{\underline{\mathbf{\Psi}}}^{-1} \tag{3.22}$$

où $\underline{\underline{\lambda}}$ est la matrice diagonale des valeurs propres distinctes υ_r et $\underline{\underline{\mathbf{\Psi}}}$ représente la matrice formée par les vecteurs propres associés $\underline{\psi}_i$. Les fréquences propres f_i et les coefficients d'amortissements du système, sont alors calculés par :

$$f_i = \frac{\omega_i}{2\pi} = \frac{\left|\ln(\upsilon_r)\right|}{2\pi\tau} \qquad i = 1,2,....n/2 \tag{3.23}$$

$$\zeta_i = \frac{\mathrm{Re}(\ln(\upsilon_r))}{\left|\ln(\upsilon_r)\right|} \qquad \mathrm{r} = 1,2,....(2i-1) \tag{3.24}$$

Les formes de modes du système sont calculées par :

$$\underline{\underline{\Phi}} = \underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{\mathbf{\Psi}}} \tag{3.25}$$

Donc les paramètres modaux peuvent être calculés en utilisant la méthode d'identification par sous-espaces à base de covariance.

3.2 - Mise en œuvre pratique

3.2.1 - Balanced Realization (BE)

La mise en œuvre de cet algorithme d'identification par sous-espaces, appelé, « réalisation équilibrée » (Balanced Realization BR) [Akaike, 1974, Benveniste & Fuchs, 1985], utilise la covariance empirique calculée par l'expression suivante :

$$\hat{\underline{\underline{\Lambda}}}_i = \frac{1}{n_\tau - i} \sum_{k=1}^{n_\tau - i} \underline{y}_{k+i} \underline{y}_k^T \tag{3.26}$$

où n_τ est le nombre d'échantillons. La matrice de Hankel est construite à partir de cette covariance empirique $\hat{\underline{\underline{\Lambda}}}_i$. Soit :

$$\hat{\underline{\underline{\mathrm{H}}}}_{p+1,q} = Hank(\hat{\underline{\underline{\Lambda}}}_i) \tag{3.27}$$

Le nombre de retards $(p+q+1)$ est un paramètre de réglage et dépend de l'ordre modal du système. Dans l'analyse vibratoire, il est recommandé de prendre $q = p+1$ pour la matrice de Hankel [Basseville *et al.,* 2001]. Ainsi, le nombre de retards devient égal à $2p+2$ et ce nombre devrait être plus grand que l'ordre modal du système.

La troncature de décomposition SVD de $\hat{\underline{\underline{\mathrm{H}}}}_{p+1,q}$ à l'ordre du modèle désiré donne une estimation $\hat{\underline{\underline{O}}}_{p+1}$ de la matrice d'observabilité $\underline{\underline{O}}_{p+1}$ ((3.28) et (3.29)). Le choix de l'ordre modal est donc un paramètre d'entrée de l'algorithme. En théorie l'ordre du système peut être estimé à partir des valeurs singulières de la matrice de Hankel sachant que le rang de cette matrice est égal à n_s. En pratique, le système réel ne peut pas être modélisé exactement comme un modèle d'état linéaire, invariant et de dimension finie, car la décomposition SVD de $\hat{\mathrm{H}}_{p+1,q}$ donne plus que n_s valeurs singulières non nulles. Par conséquent, une des méthodes pour obtenir l'ordre est l'observation de la différence entre deux valeurs singulières successives. L'écart maximal entre ces valeurs, donne un ordre de grandeur sur l'ordre du système. Une autre approche consiste à utiliser des diagrammes de stabilisation. Il est préférable de faire l'évaluation de la valeur singulière avec un modèle d'ordre plus élevé et d'éliminer après modes numériques erronés, induites par la surestimation [De Cock *et al.,* 2002].

$$\hat{\underline{\underline{\mathrm{H}}}}_{p+1,q} = \underline{\underline{\mathrm{U}}}\,\underline{\underline{\mathrm{S}}}\,\underline{\underline{\mathrm{V}}}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathrm{U}}}_1 & \underline{\underline{\mathrm{U}}}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathrm{S}}}_1 & 0 \\ 0 & \underline{\underline{\mathrm{S}}}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathrm{V}}}_1 & \underline{\underline{\mathrm{V}}}_2 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \underline{\underline{\mathrm{U}}}_1 \underline{\underline{\mathrm{S}}}_1 \underline{\underline{\mathrm{V}}}_1^{\mathrm{T}} \tag{3.28}$$

$$\hat{\underline{\underline{O}}}_{p+1} = \underline{\underline{\mathrm{U}}}_1 \underline{\underline{\mathrm{S}}}_1^{1/2} \tag{3.29}$$

$$\hat{\underline{\underline{\mathbb{C}}}}_q = \underline{\underline{\mathrm{S}}}_1^{1/2} \underline{\underline{\mathrm{V}}}_1^{\mathrm{T}} \tag{3.30}$$

3.2.2 - Analyse de variable aléatoire canonique (Canonical Variate Analysis)

Cette approche [Akaike, 1975, Basseville *et al.,* 2000] emploie une matrice de Hankel pondérée $\hat{\underline{\underline{\mathrm{H}}}}^{w}_{p+1,q}$ définie par :

$$\hat{\underline{\underline{\mathrm{H}}}}^{w}_{p+1,q} = \underline{\underline{\mathrm{W}}}_1 \hat{\underline{\underline{\mathrm{H}}}}_{\mathrm{p+1,q}} \underline{\underline{\mathrm{W}}}_2^{\mathrm{T}} \tag{3.31}$$

où $\underline{\underline{\mathrm{W}}}_1$ et $\underline{\underline{\mathrm{W}}}_2$ sont des matrices de pondération connues, inversibles de dimensions $n_y(p+1) \times n_y(p+1)$ et $n_y q \times n_y q$ respectivement.

L'objectif est de normaliser les données afin que les valeurs singulières de la matrice de Hankel pondérée $\hat{\underline{\underline{\mathrm{H}}}}^{w}_{p+1,q}$ se trouvent entre 0 et 1. Cela permet d'éviter des problèmes numériques en équilibrant les effets des modes principaux et ceux d'énergie plus faible. Une manière de procéder est de prendre l'inverse des matrices de covariances empiriques des mesures futures et des mesures passées [Mevel *et al.,* 2006].

$$\underline{\underline{\mathrm{W}}}_1 = \left(\frac{1}{n_\tau} \underline{\underline{\mathrm{Y}}}^{+} \underline{\underline{\mathrm{Y}}}^{+T} \right)^{-1/2} \tag{3.32}$$

$$\underline{\underline{\mathrm{W}}}_2 = \left(\frac{1}{n_\tau} \underline{\underline{\mathrm{Y}}}^{-} \underline{\underline{\mathrm{Y}}}^{-T} \right)^{-1/2} \tag{3.33}$$

où $\underline{\underline{\mathrm{Y}}}^{+} = \left[\underline{\mathrm{Y}}_1^{+} \quad \underline{\mathrm{Y}}_2^{+} \quad \cdots \quad \underline{\mathrm{Y}}_{n_\tau}^{+} \right]$ est la matrice des mesures futures de dimension $(n_y(p+1) \times n_\tau)$ et $\underline{\underline{\mathrm{Y}}}^{-} = \left[\underline{\mathrm{Y}}_1^{-} \quad \underline{\mathrm{Y}}_2^{-} \quad \cdots \quad \underline{\mathrm{Y}}_{n_\tau}^{-} \right]$ est la matrice des mesures passées de dimension $(n_y q \times n_\tau)$. $\underline{\mathrm{Y}}_k^{+} = \left[\underline{y}_k \quad \underline{y}_{k+1} \quad \cdots \quad \underline{y}_{k+p} \right]^T$ est le vecteur des mesures futures de dimension $(n_y(p+1))$ et $\underline{\mathrm{Y}}_k^{-} = \left[\underline{y}_k \quad \underline{y}_{k-1} \quad \cdots \quad \underline{y}_{k-q-1} \right]^T$ est le vecteur des mesures passées de dimension $(n_y q)$ à l'instant k. En utilisant les matrices des mesures futures et des mesures passées, la matrice de Hankel se calcule par :

$$\hat{\underline{\underline{\mathrm{H}}}}_{p+1,q} = \frac{1}{n_\tau} \underline{\underline{\mathrm{Y}}}^{+} \underline{\underline{\mathrm{Y}}}^{-T} \tag{3.34}$$

La troncature de décomposition SVD de $\hat{\mathrm{H}}_{p+1,q}$ à l'ordre désiré fournit une estimation $\hat{O}_{p+1}$ de la matrice de observabilité O_{p+1}.

$$\hat{\underline{\underline{H}}}^{w}_{p+1,q} = \underline{\underline{W}}_1 \hat{\underline{\underline{H}}}_{p+1,q} \underline{\underline{W}}_2^T = \underline{\underline{U}}\underline{\underline{S}}\underline{\underline{V}}^T = \begin{bmatrix} \underline{\underline{U}}_1 & \underline{\underline{U}}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\underline{S}}_1 & 0 \\ 0 & \underline{\underline{S}}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\underline{V}}_1 & \underline{\underline{V}}_2 \end{bmatrix}^T = \underline{\underline{U}}_1 \underline{\underline{S}}_1 \underline{\underline{V}}_1^T \tag{3.35}$$

où

$$\hat{O}_{p+1} = \underline{\underline{W}}_1^{-1} \underline{\underline{U}}_1 \underline{\underline{S}}_1^{1/2} \tag{3.36}$$

$$\hat{\underline{\underline{\mathbb{C}}}}_q = \underline{\underline{S}}_1^{1/2} \underline{\underline{V}}_1^T \underline{\underline{W}}_2^{-1} \tag{3.37}$$

Cette approche est particulièrement utile quand l'ordre du système est inconnu (Mevel, L. *et al.*, 2006).

3.3 - Problèmes pratiques

La méthode de SubID est non-itérative et se limite à la programmation hors-ligne en raison des calculs matriciels complexes comme la décomposition SVD. De plus, comme beaucoup d'autres méthodes d'identification, SubID dépend fortement de l'excitation. Dans le cas où l'excitation est une perturbation exogène ambiante, on doit enregistrer des mesures sur de très longues durées et choisir un ordre élevé de modèle. Mais ce choix d'ordre élevé du modèle fait apparaître des modes erronés dans le calcul. Les modes erronés ne correspondent pas aux modes physiques de la structure. Si l'analyse modale est l'objectif de la méthode d'identification, le problème d'identification des modes physiques se résout en utilisant le diagramme de stabilisation [Van der Auweraer *et al.,* 2000, Van der Auweraer & Peeters, 2004, Heylen *et al.,* 1998].

3.3.1 - Diagramme de stabilisation :

Les modes physiques d'un système demeurent stables pour différents ordres d'un modèle. Ainsi, en comparant les modes associés à un ordre, à ceux calculés pour un ordre inférieur, les modes physiques stables peuvent être identifiés. C'est l'idée principale sur laquelle est basé le diagramme de stabilisation. Cette approche exploite cette caractéristique pour éliminer les modes erronés et détecter des modes physiques.

Un diagramme de stabilisation obtenu à partir de l'identification par sous-espaces d'un pont [Whelan *et al.,* 2009] est présenté dans la Figure 3.1. Entre la bande de fréquence 0 et 65 Hz, la structure dispose de 14 modes situés aux fréquences 9.5 Hz, 11.09 Hz, 17.66 Hz, 22.44 Hz, 26.9 Hz, 29.97 Hz, 31.56 Hz, 33.78 Hz, 35.38 Hz, 46.88 Hz, 47.96 Hz, 51.73 Hz, 54.04 Hz et 62.01 Hz. Pour obtenir un diagramme de stabilisation, les paramètres modaux sont identifiés, à partir des données mesurées, en choisissant différents ordres du système. Chaque mode identifié est représenté par un point sur le diagramme. Ce point est basé sur la valeur de la fréquence propre. Dans ce contexte, l'ordre a été augmenté de 10 à 70. Les modes identifiés sont classés en 3 catégories déterminées en fonction de leur stabilité : modes stables, modes semi-stables et nouveaux modes. La fréquence propre d'un mode stable varie lorsque l'ordre du modèle est augmenté, de moins de 1%. De même, l'amortissement varie de moins de 5%

et MAC varie de moins de 2% [Whelan *et al.,* 2009]. Pour un mode semi-stable, seule la valeur de la fréquence propre est stable. Sur ce diagramme, un mode stable est représenté par ○, un mode semi-stable par + et un nouveau mode par ●.

Bien que le changement d'ordre du modèle indique la stabilité des modes physiques, il introduit également des modes erronés. Dans certains cas, les modes erronés numériques se comportent comme des modes physiques, c'est-à-dire, ils ne varient pas avec le changement d'ordre du modèle par exemple lors de l'utilisation du mode situé à 1.0 Hz (Figure 3.1). Ce qui les rend très difficiles à identifier sur des diagrammes de stabilisation, et exige beaucoup d'interaction avec l'utilisateur [Goethals *et al.,* 2004].

Des méthodes ont été proposées pour une meilleure identification des modes physiques [Cauberghe *et al.,* 2005, Fan *et al.,* 2007]. Ainsi, [Cauberghe *et al.,* 2005] ont proposé de retourner temporellement la réponse du système pour aider à identifier les modes physiques. Une telle transformation des données rend les modes physiques instables et les modes erronés deviennent stables. Celle-ci facilite l'interprétation du diagramme de stabilisation, puisque les seuls modes instables seront les modes physiques. [Fan *et al.,* 2007] ont eux proposé un diagramme alternatif de stabilisation, qui examine la stabilité des paramètres modaux identifiés avec des incréments de données convenables (Fitting data). Une fois que l'ordre de modèle est fixé, le nombre de lignes de la matrice de Hankel est augmenté. La stabilité des fréquences propres et des coefficients d'amortissement est étudiée par rapport à chaque incrément. Ils ont également proposé un index énergétique (Component Energy Index) permettant d'indiquer la participation énergétique de chaque mode. Les modes qui ont un index énergétique bas sont considérés comme des modes erronés.

Ces deux méthodes n'éliminent pas automatiquement les modes erronés et exigent une interaction avec l'utilisateur. Nous proposons un nouveau diagramme nommé *histogramme de stabilisation* qui permet de

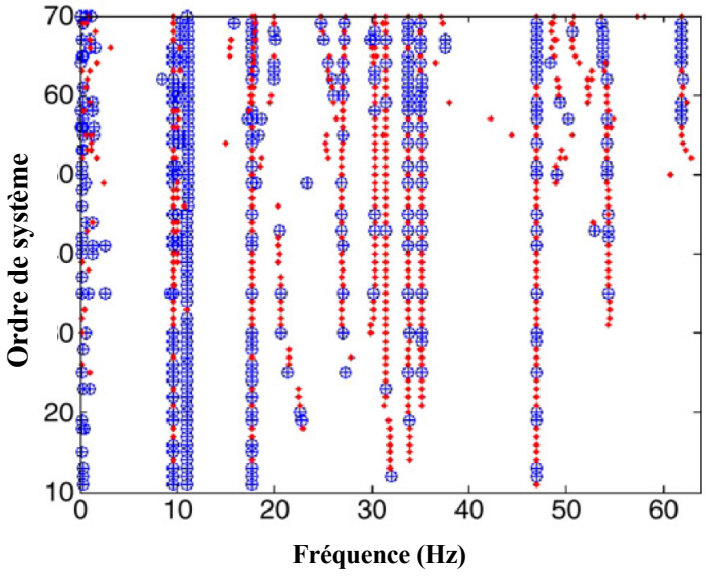


Figure 3.1 - Diagramme de stabilisation.

pallier aux limites de du diagramme de stabilisation.

3.4 - Histogramme de Stabilisation

Nous avons observé que les modes erronés produits par le bruit ne se stabilisent pas lorsque l'ordre de modèle est augmenté. Cependant, les modes erronés numériques restent stables et peuvent être considérés comme les modes physiques du système sur un diagramme de stabilisation. Nous avons également observé que ces modes erronés numériques dépendent de la période d'échantillonnage.

Pour éliminer ces modes erronés, nous proposons d'enregistrer les mesures de la structure pour une valeur de la période d'échantillonnage élevée. Puis le sous-échantillonnage de ces signaux à différentes cadences d'échantillonnage produit différentes versions de la même réponse. L'exécution de l'analyse modale sur ces signaux et l'étude de la stabilité des modes de différents ordres de modèle permettent l'identification des modes physiques de la structure. Cette notation de sous-échantillonnage et de période d'échantillonnage "élevée" est reliée à la gamme de fréquence considérée. Par exemple si on travaille entre 0 et f_b Hz, on échantillonne à $20 f_b$ Hz et ensuite sous-échantillonne ces mesures à $5 f_b$ Hz (tout en respectant les limitations de système d'acquisition).

Pour combiner les résultats et pour l'extraction automatique des paramètres modaux, nous proposons un diagramme alternatif appelé l'histogramme de stabilisation. Ce diagramme est construit en classant d'abord les modes identifiés dans n_c catégories. Les modes sont répertoriés en changeant l'ordre du modèle, selon la stabilité des fréquences propres, des coefficients d'amortissement et des formes de modes. Des poids sont associés à chaque catégorie. Le poids d'une catégorie supposée plus stable est plus élevé que celui des autres catégories moins stables. La bande de fréquence est divisée en petits intervalles discrets. À chaque intervalle est associé un compteur. Chaque mode identifié est lié à un intervalle de fréquence basé sur la valeur de sa fréquence propre. Le compteur de son intervalle de fréquence est incrémenté par le poids de la catégorie de ce mode. En conséquence, les poids des modes stables seront plus grands que ceux des modes moins stables. Traçage d'un histogramme avec la fréquence et les poids associés montre des crêtes plus élevées pour des modes physiques stables.

3.5 - Etude de cas Identification par sous-espaces d'une poutre

L'objectif de cette étude consiste à expliquer le problème pratique lié à l'identification par sous-espaces et à démontrer l'utilisation de l'histogramme de stabilisation pour l'identification d'endommagements. Le but est d'identifier automatiquement les 5 premiers modes de vibration de la poutre (saine et endommagée) dans des conditions réelles de fonctionnement.

En utilisant la carte dSpace®, nous avons excité la 1ère paire piézo-électriques de la poutre avec un signal aléatoire et nous avons enregistré les mesures fournies par la 2ème paire de piézo-électriques. La réponse vibratoire de la poutre a été mesurée pendant une 60 s. La période d'échantillonnage étant de 0.1 ms.

3.5.1 - Identification de l'ordre de système

La première étape de l'identification est l'estimation de l'ordre du système. Nous avons supposé que l'ordre maximum du système est égal à 30. Le nombre de blocs lignes de la matrice de Hankel $(p = q + 1)$ a été choisi égale 40. Les logarithmes des valeurs singulières de la matrice de Hankel sont présentés à la Figure 3.2.

Nous pouvons clairement voir qu'il n'y a aucune valeur singulière nulle mais les valeurs sont proches de zéro pour les ordres supérieurs à 46. Il y a des différences significatives entre les valeurs singulières successives de l'ordre 6 et 7 mais comme notre objectif se limite à 'identifier les 5 premières modes de la poutre, l'ordre de la troncature doit être plus grand que 10. On constate alors qu'il n'y a pas de différence significative entre les valeurs singulières pour des ordres supérieurs à 10. C'est cette difficulté consistant à fixer n_s, l'ordre d'une structure qui a conduit à la construction de diagramme de stabilisation pour l'identification des paramètres modaux.

3.5.2 - Diagramme de stabilisation

Dans cet exemple, nous étudierons seulement la stabilité des fréquences propres et des coefficients d'amortissement. Nous définissons ici trois catégories de mode pour un ordre de modèle donné : mode stable, mode semi-stable et nouveau mode. Ils sont classés grâce à la comparaison des modes associés pour un ordre *(n)* à ceux calculés pour un ordre inférieur *(n-1)*. Un mode est dit stable si le changement de la fréquence propre est inférieur à 1% et le changement du coefficient d'amortissement est inférieur à 5%. Les modes semi-stables ont des fréquences stables, mais les coefficients d'amortissement ne sont pas stables. Les nouveaux modes n'ont pas de fréquences stables ni de coefficients d'amortissement stables. Ajouter des critères de stabilité de forme de mode augmentera le nombre de catégories et pourrait améliorer les résultats.

Le diagramme de stabilisation obtenu est illustré sur la Figure 3.3. Le mode stable est symbolisé par un

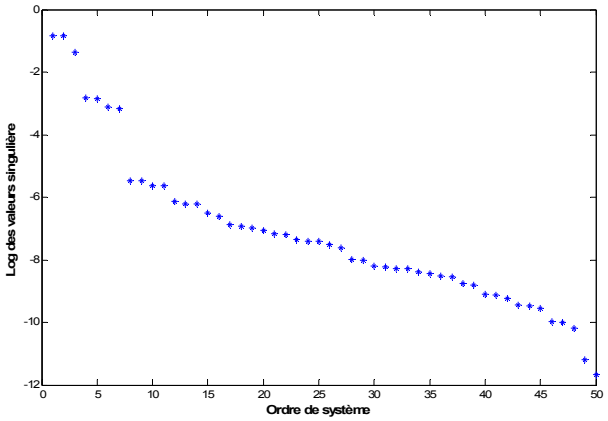


Figure 3.2 - Log des valeurs singulières de la matrice de Hankel.

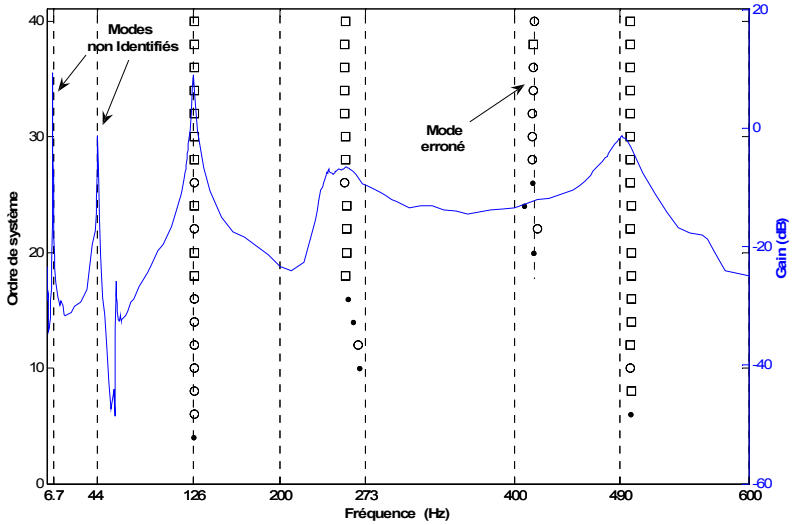


Figure 3.3 - Diagramme de stabilisation obtenu à partir des mesures échantillonnées à 10 kHz.

carré (□). Le cercle (○) représente un mode semi-stable et un point (●) indique un nouveau mode. Le diagramme de Bode obtenu expérimentalement (Figure 2.11) est superposé sur la même Figure 3.3 en utilisant l'axe des ordonnées de droite, afin de vérifier les résultats d'identification par sous-espaces. Nous pouvons voir que les deux premiers modes ne sont pas identifiés et qu'il y a un mode erroné à 415 Hz. Si nous n'avons aucune information a priori concernant la structure, nous pouvons considérer ce mode erroné comme le 3ème mode physique de la structure.

Le diagramme de stabilisation obtenu après le sous-échantillonnage de la mesure à 1250 Hz est représenté dans la Figure 3.4. Nous avons une meilleure estimation des deux premiers modes, mais le résultat du quatrième mode est détérioré. Il faut noter que le mode erroné à 415 Hz s'est décalé à 440 Hz et que plusieurs autres modes erronés sont apparus.

3.5.3 - Histogramme de stabilisation

Pour combiner les résultats de différents diagrammes de stabilisation et pour l'identification automatique des paramètres modaux nous avons proposé l'histogramme de stabilisation. Nous prenons en compte les trois catégories de mode et associons des poids à chaque catégorie. Les poids de modes stables, de modes semi-stables et de nouveaux modes sont respectivement 8, 2 et 1. La bande de fréquence est divisée en petits intervalles de 0.1 Hz. L'histogramme de stabilisation est présenté à la Figure 3.5 est obtenu à partir de la mesure enregistrée pour une période d'échantillonnage de 0.1 ms et de la mesure sous-échantillonnée à 0.8 ms.

Dans cet exemple nous cherchons à identifier automatiquement les 5 premiers modes de vibration de la poutre par conséquent nous avons choisi le poids du cinquième, le plus grand mode comme seuil. Nous pouvons observer que les cinq premiers modes sont au-dessus du seuil et les poids de tous les modes

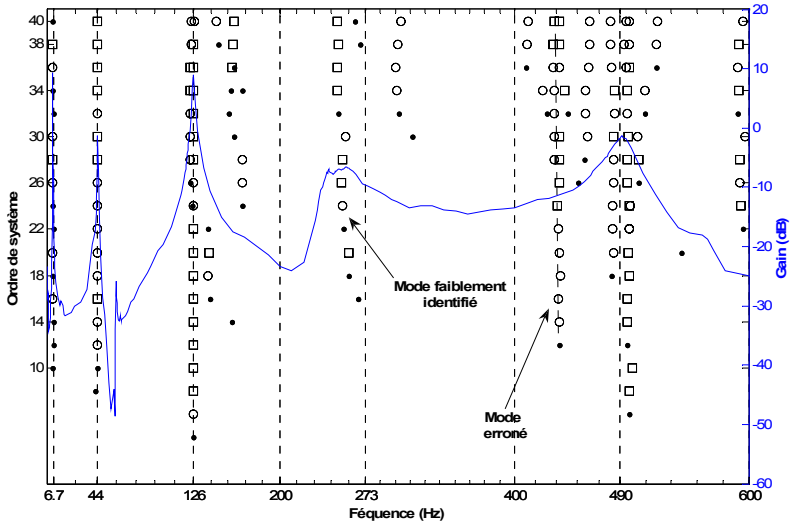


Figure 3.4 - Diagramme de stabilisation obtenu à partir des mesures sous-échantillonnées à 1250 Hz.

erronés sont inférieurs. Ceci nous permet de choisir automatiquement les fréquences propres et les coefficients d'amortissements correspondants. Le Tableau 3.1 présente les cinq premières fréquences propres et les coefficients d'amortissements de la poutre identifiés par la méthode de sous-espaces.

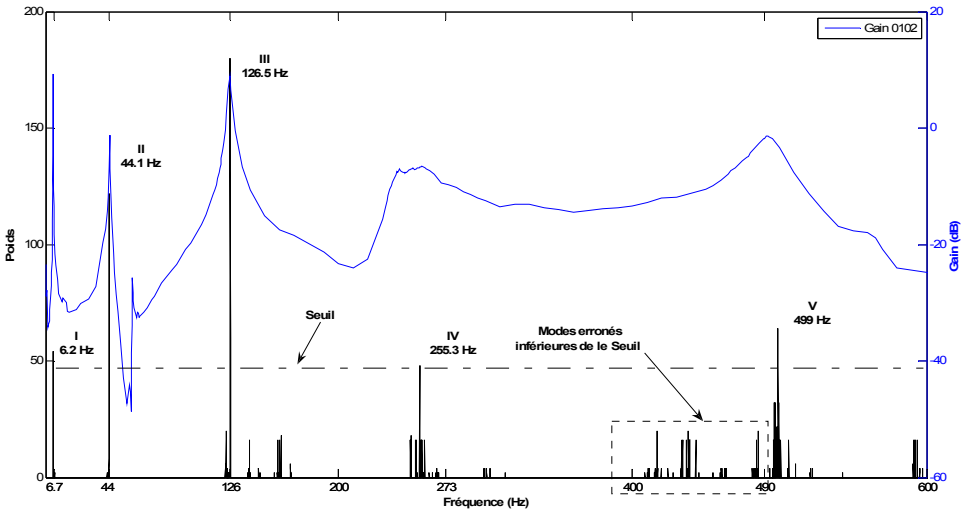


Figure 3.5 - Histogramme de stabilisation.

Mode →	1er	2ème	3ème	4ème	5ème
Fréquences propres (Hz)	6.2	44.1	126.5	255.3	499
Coefficients d'amortissements $\times 10^{-3}$	4.2	5.5	6.9	98.4	26,7

Tableau 3.1 - Cinq premières fréquences propres et coefficients d'amortissements de la poutre identifiés par la méthode de sous-espaces.

3.5.4 - Identification de la structure endommagée

Pour des raisons pratiques et d'intégrité du banc de test, nous avons étudié des défauts de type ajout/perte de masse. Ainsi, une augmentation de la masse, à un endroit donné de la poutre, est considérée comme un défaut. Quatre cas d'endommagements ont été définis en ajoutant successivement une masse de 14 grammes à 15mm, 125mm, 240mm et 335mm du point d'encastrement de la poutre comme illustré à la Figure 3.6.

Des bruits blancs sont utilisés pour exciter la structure endommagée en utilisant la première paire piézo-électrique, la plus située non loin de l'encastrement (voir Figure 3.6). Les réponses temporelles de ces excitations sont mesurées à partir de la deuxième paire piézo-électrique pendant 60 s avec une fréquence d'échantillonnage de 10 kHz. Ces mesures ont également été sous-échantillonnées à 1250 Hz.

Les diagrammes de stabilisation obtenus à partir de ces mesures sont illustrés sur les figures 3.7, 3.9, 3.11 et 3.13, pour les 4 cas d'endommagements. Dans toutes les hypothèses d'endommagements (Figure 3.6), les mesures échantillonnées à 10 kHz ne permettent pas d'identifier les deux modes de basses fréquences situés à 6 Hz et 44 Hz. En réduisant maintenant la fréquence d'échantillonnage à 1250 Hz, on constate que nous pouvons identifier ces deux premiers modes, mais en contrepartie, le diagramme obtenu présente plusieurs modes erronés et est par conséquent difficile à interpréter.

Dans le cas 1, l'endommagement est situé à 15 mm du point d'encastrement, on observe de la Figure 3.7a que le mode erroné à 175 Hz se comporte comme un mode physique. Le diagramme de stabilisation (Figure 3.7b) présente ce mode plus stable que celui représenté par le mode physique à 495 Hz. En revanche, l'approche proposée à travers la construction de l'histogramme de stabilisation donne des résultats satisfaisants (Figure 3.8). On peut ainsi voir que cet histogramme qui fusionne les informations obtenues à partir des deux diagrammes de stabilisation (10 kHz et 1250 Hz), permet non seulement de

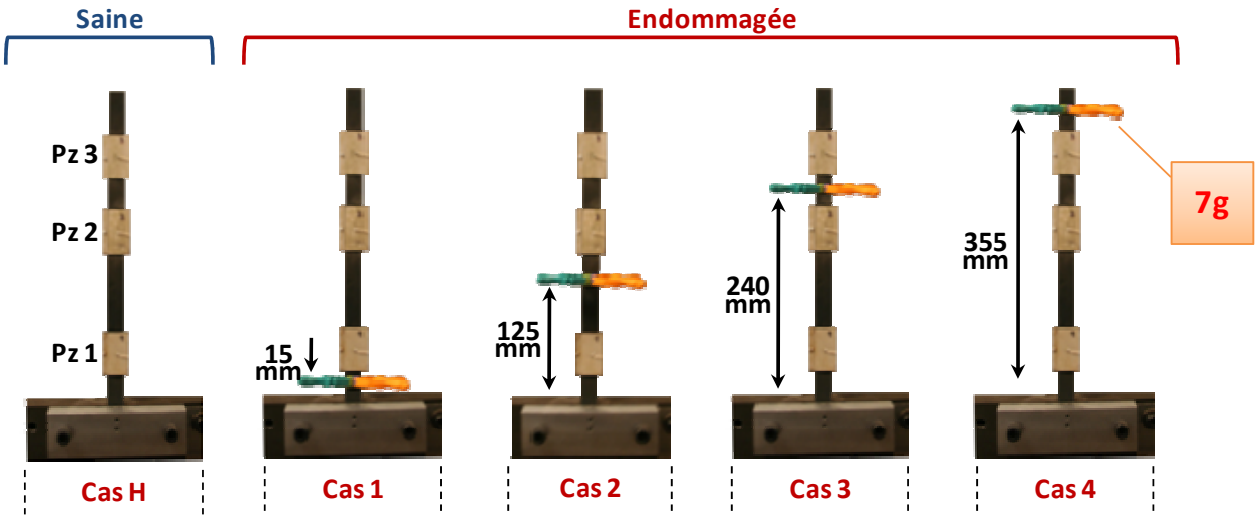


Figure 3.6 - Différents cas d'endommagements simulés sur la poutre.

déterminer le mode physique à 495 Hz, mais aussi d'éliminer le mode erroné qui apparaît à 175 Hz.

Dans le cas 2, l'endommagement est situé à 125mm du point d'encastrement, la Figure 3.9a montre qu'il y a un mode stable, mais erroné à 430 Hz qui au vu du diagramme parait plus stable que le mode physique à 470 Hz. Par contre avec changement de la période d'échantillonnage, la position de ce mode erroné sur le diagramme de stabilisation se trouve déplacée (Figure 3.9b). Son poids est par conséquent plus faible sur l'histogramme de stabilisation (Figure 3.10).

Dans le cas 3, l'endommagement est situé à 240mm du point d'encastrement, un nouveau mode est identifié à 196.5 Hz. L'histogramme de stabilisation correspondant (Figure 3.12) nous permet d'identifier automatiquement les cinq premiers modes, y compris le mode identifié à 196.5 Hz.

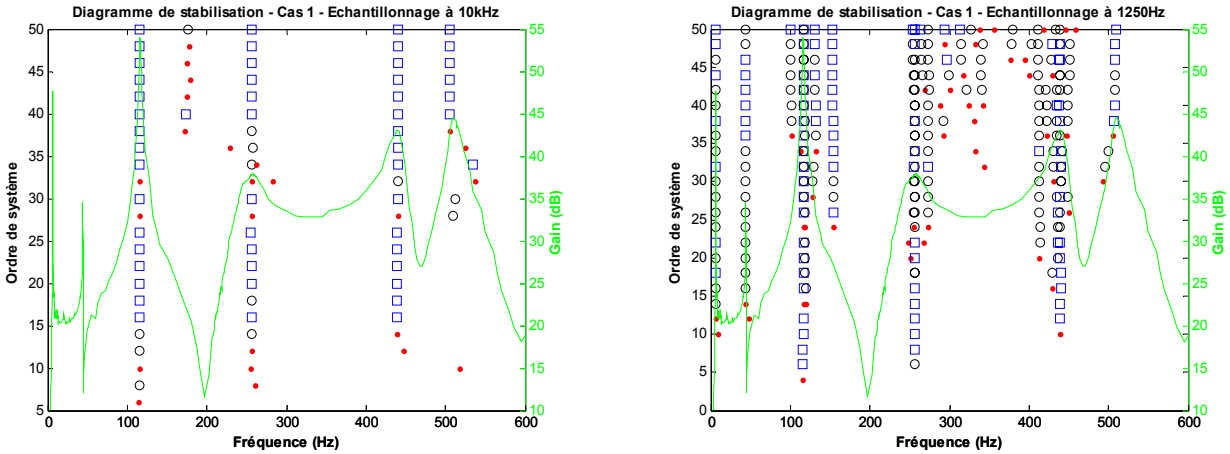


Figure 3.7 - Diagramme de stabilisation pour le cas 1 (a) Échantillonnage à 10 kHz (b) Échantillonnage à 1250 Hz.

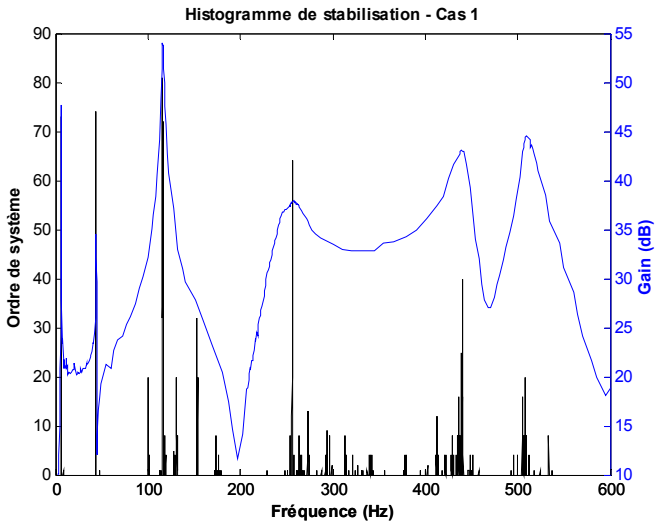
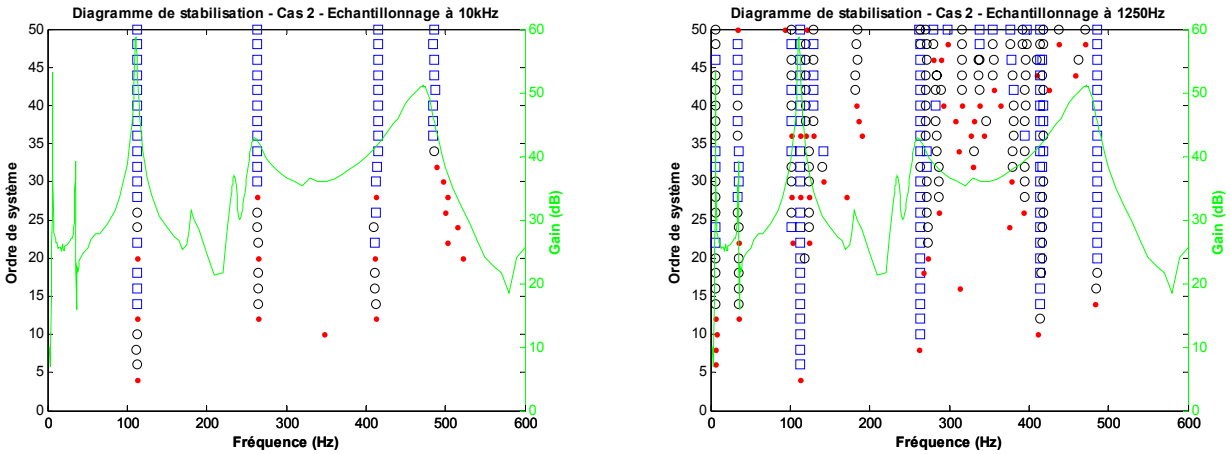


Figure 3.8 - Histogramme de stabilisation pour le cas 1.



(a) **(b)**

Figure 3.9 - Diagramme de stabilisation le cas 2 (a) Échantillonnage à 10 kHz (b) Échantillonnage à 1250 Hz.

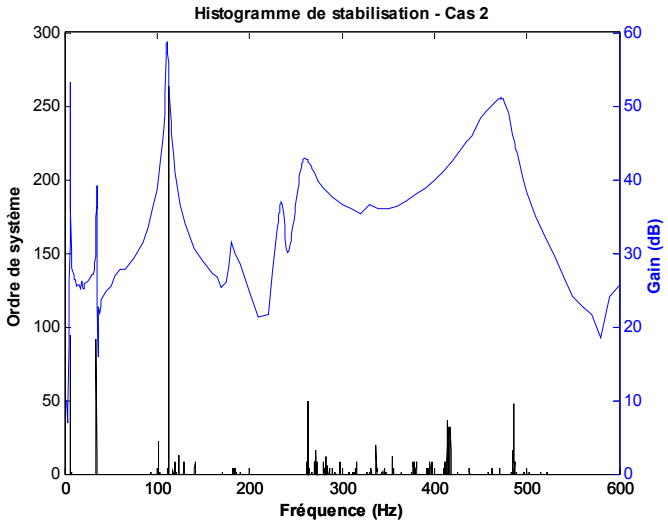
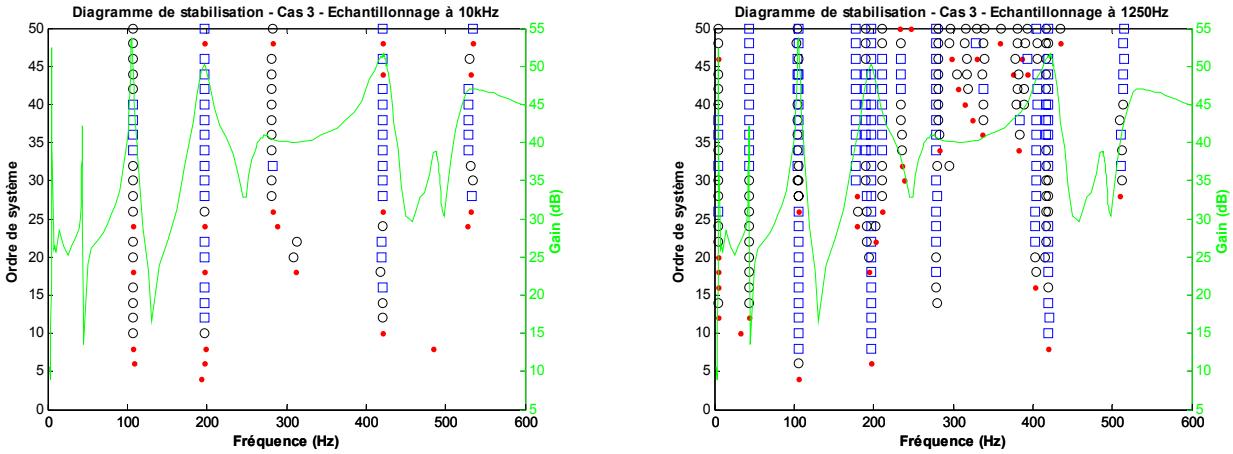


Figure 3.10 - Histogramme de stabilisation pour le cas 2.



(a) **(b)**

Figure 3.11 - Diagramme de stabilisation pour le cas 3 (a) Échantillonnage à 10 kHz (b) Échantillonnage à 1250 Hz.

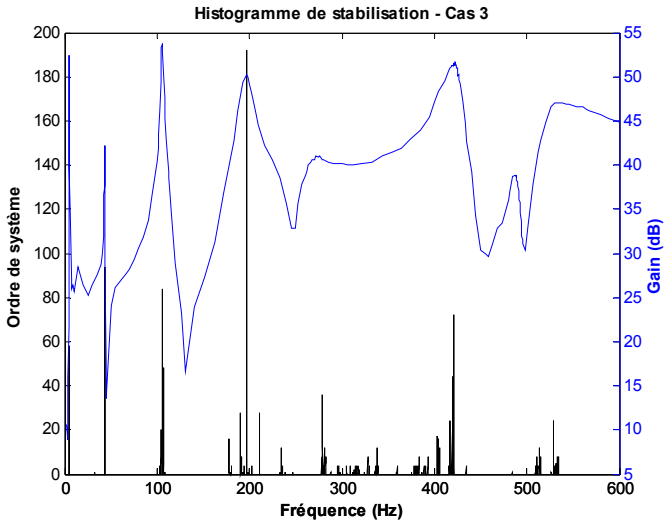
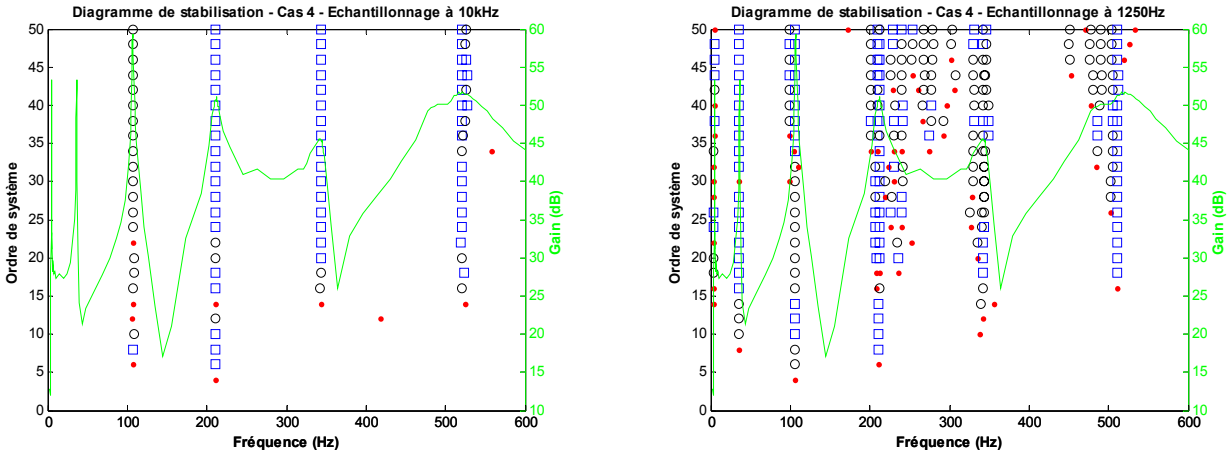


Figure 3.12 - Histogramme de stabilisation pour le cas 3



(a) **(b)**

Figure 3.13 - Diagramme de stabilisation pour le cas 4 (a) Échantillonnage à 10 kHz (b) Échantillonnage à 1250 Hz.

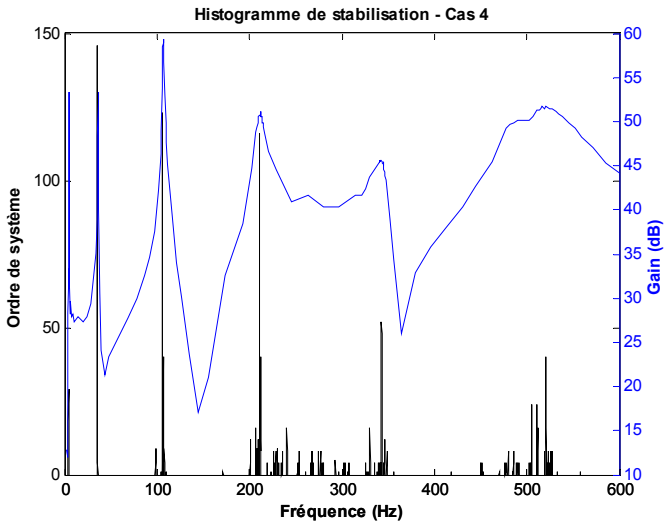


Figure 3.14 - Histogramme de stabilisation pour le cas 4.

Le Tableau 3.2 présente les cinq premières fréquences propres identifiées pour les 4 cas d'endommagement de la poutre. Ces fréquences propres sont utilisées pour l'identification d'endommagement.

3.5.5 - Identification d'endommagements

Dans cette section, nous considérons l'identification d'endommagements comme un problème inverse et employons une méthode basée sur le recalage du modèle. Dans cette technique les paramètres du modèle choisis sont liés aux endommagements, à titre d'exemple : une variable qui représente la position d'une fissure ou sa longueur. Ces paramètres sont appelés paramètres de recalage. Pour l'identification des endommagements, l'objectif principal est de trouver les valeurs de ces paramètres tels que le modèle représente la dynamique de la structure endommagée.

La méthode de recalage résumée dans la § 2.5 utilise une méthode de gradient pour estimer les paramètres de recalage en minimisant l'écart entre les fréquences propres identifiées et simulées. Nous adoptons cette méthode pour la localisation des endommagements de la poutre en utilisant le modèle EF de la poutre saine, développée dans le chapitre précédent.

Les masses volumiques des tronçons 1, 3, 5 et 7 (Figure 2.13) sont choisies comme les paramètres de recalage $\underline{p}$ parce que l'endommagement est simulé par l'augmentation de la masse d'une partie de la poutre. En d'autres termes, nous nous intéressons à l'estimation des masses volumiques du modèle EF qui nous permet de calculer numériquement les mêmes fréquences propres identifiées expérimentalement pour chaque cas d'endommagement. La valeur du paramètre la plus élevée indique la position de l'endommagement : un seul endommagement à la fois est pris en compte dans cette étude de cas. La fonction objectif utilisée est donnée par :

Cas ↓	Modes →	1er	2ème	3ème	3ème bis	4ème	5ème
1	Bode (Hz)	6.15	44.0	116.1	-	256.5	440.0
	SubID (Hz)	6.10	43.9	116.0	-	256.0	440.7
2	Bode (Hz)	6.05	34.8	111.0	-	260.1	470.0
	SubID (Hz)	6.00	34.5	112.8	-	263.1	485.5
3	Bode (Hz)	5.30	43.3	105.4	196.5	278.0	422.5
	SubID (Hz)	5.20	43.1	106.0	196.6	278.8	421.1
4	Bode (Hz)	4.40	36.1	106.7	-	212.1	342.0
	SubID (Hz)	4.20	35.8	106.2	-	211.0	342.8

Tableau 3.2 - Cinq premières fréquences propres de la poutre endommagée.

$$J(\underline{p}) = \sum_{i=1}^{n_m} w_i \left(f_i^X - f_i^A(\underline{p}) \right)^2 = \left(\underline{z}^X - \underline{z}^A(\underline{p}) \right)^T \underline{\underline{W}} \left(\underline{z}^X - \underline{z}^A(\underline{p}) \right) \tag{3.38}$$

où, $n_m = 5$ pour les cinq premières fréquences propres de la structure. Les poids w_i peuvent représenter le degré de confiance dans les mesures.

Un autre avantage de l'histogramme de stabilisation réside dans le fait que le poids de chaque mode indique le degré de confiance du mode identifié. Les poids des cinq premières fréquences propres identifiées sont donnés au Tableau 3.3. Les poids w_i sont calculés en normalisant le poids de chaque mode de l'histogramme de stabilisation par le poids du mode le plus stable. Ces poids normalisés sont également résumés au Tableau 3.3.

La matrice de sensibilité (2.70) était calculée numériquement par la méthode de différence finie. Comme les résultats des méthodes de gradient dépendent du point de départ, 20 différents points de départ aléatoires ont été utilisés et les paramètres de recalage ont été calculés en minimisant la fonction objective (3.38). Entre ces 20 ensembles de paramètres, celle qui a donné la plus faible erreur est prise comme l'indicateur d'endommagement. Les paramètres de recalage estimés d'endommagement pour les 4 cas sont présentés à la Figure 3.15. Ces valeurs sont normalisées par la masse volumique de la poutre saine.

Cette procédure a été répétée 50 fois pour avoir une estimation statistique des résultats de la méthode de localisation des dommages. Dans cette étude de cas, l'identification d'endommagement par la méthode de recalage a abouti à un score moyen de 70%. L'algorithme pourrait localiser l'endommagement du cas 1 et 3 avec un taux de réussite de 48%. Dans le cas 1, la masse ajoutée est proche de l'extrémité fixe de la poutre ou les quatre premières fréquences propres ne sont pas sensibles à une augmentation de la masse. Dans le cas 3, où la masse ajoutée est située sur le tronçon 5, le comportement de la poutre n'est pas

Cas ↓	**Mode →**	**1er**	**2ème**	**3ème**	**4ème**	**5ème**
1	Poids	73	74	81	64	40
	Normalisé	0,90	0,91	1	0,79	0,49
2	Poids	48	37	48	36	36
	Normalisé	1	0,77	1	0,75	0,75
3	Poids	58	94	69	36	44
	Normalisé	0,62	1	0,73	0,36	0,47
4	Poids	29	146	126	116	52
	Normalisé	0,2	1	0,86	0,79	0,36

Tableau 3.3 - Poids des cinq premières fréquences propres identifiées.

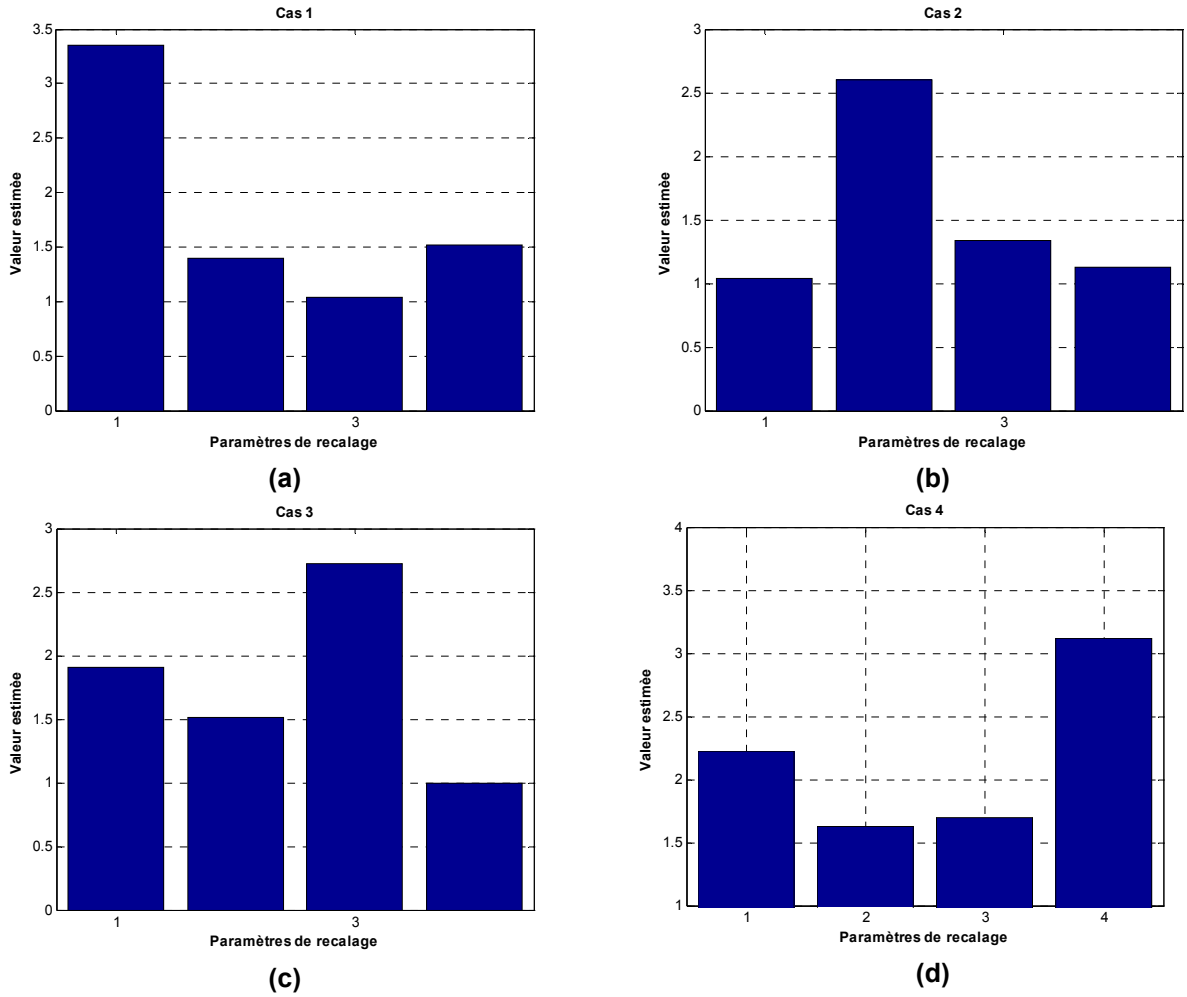


Figure 3.15 - Paramètres de recalage estimés pours différents cas d'endommagements (a) Cas 1 (b) Cas 2 (c) Cas 3 (d) Cas 4.

simulé avec précision par le modèle EF. Les résultats de l'identification montrent qu'il y a un nouveau mode à 196 Hz ce qui n'est pas calculé par ce modèle EF. Les endommagements du cas 2 et du cas 4 ont été localisés avec un taux de réussite qui est respectivement de 96% et 88%.

L'un des inconvénients majeurs de cet algorithme est le temps de calcul. Une simulation complète du modèle EF de la poutre a été réalisée pour chaque itération. Le temps de calcul se trouve alors logiquement augmenté.

3.6 - Conclusions

Les résultats obtenus après la mise en œuvre de la méthode d'identification SubID montrent que l'identification automatique ou en fonctionnement des paramètres modaux et ceci sans interaction avec l'utilisateur est tributaire

1. *du choix de l'ordre de système*
2. *et de la présence des modes erronés stable.*

L'effet de la période d'échantillonnage sur les modes erronés est traité. Il a été démontré qu'ils peuvent être éliminés grâce à l'utilisation de différentes périodes d'échantillonnage lors des mesures. Nous avons alors proposé un nouveau diagramme nommé histogramme de stabilisation qui permet de pallier aux limites de du diagramme de stabilisation et de

1. *sélectionner automatiquement les modes physiques, sans intervention humaine,*
2. *combiner les résultats obtenus à partir des mesures enregistrées pour différentes valeurs de la période d'échantillonnage,*
3. *et d'avoir une mesure de la confidence avec lequel un mode est identifié.*

La méthode d'identification d'endommagement basée sur le recalage du modèle EF a permis une localisation (partielles) des endommagements, grâce à l'utilisation des paramètres modaux identifiés. En revanche, la complexité et le temps des calculs rendent cette méthode difficile à mettre en œuvre en fonctionnement (en temps réel) et de manière automatique. Cela nous conduit à étudier d'autres méthodes d'identification des endommagements basées sur SubID, qui seront examinées dans le chapitre suivant.

Chapitre 4

Identification d'endommagement par sous-espaces

Résumé : Dans ce chapitre, nous proposons une nouvelle approche au problème SHM basée sur la génération d'un vecteur résidu non paramétrique spécifique et les réseaux de neurones. Ce résidu est associé au noyau de la matrice d'observabilité du système et il est généré à partir des matrices de parité. La matrice d'observabilité est calculée en exploitant la méthode d'identification par sous-espaces stochastiques. Dans le cadre d'un exemple numérique simple, le vecteur de résidus proposé est comparé aux indicateurs d'endommagement existants. Les différents problèmes liés à la génération du résidu sont abordés. Une procédure permettant la génération de ce résidu et l'apprentissage du réseau de neurones artificiels (RNA) est proposée. Enfin, nous étudions l'efficacité de cet algorithme en testant sa capacité à localiser les endommagements sur deux dispositifs expérimentaux : une poutre composite et une structure formée de plusieurs plaques en aluminium.

Chapitre 4 - Identification d'endommagement par sous-espaces 83
4.1 - Analyse du sous-espace noyau de la matrice de Hankel 85
4.2 - Détection des endommagements par l'analyse du noyau 87
4.3 - Identification d'endommagement 95
4.4 - Réseau de neurones artificiels (RNA) 97
4.5 - Problèmes et difficultés pratiques 104
4.6 - Procédure pour la génération du résidu 105
4.7 - Etude de cas – Identification des endommagements d'une poutre 106
4.8 - Etude de cas – Identification des endommagements d'une plaque 113
4.9 - Conclusions 124

La détection et localisation ou plus globalement identification des endommagements par essais vibratoires peut être considérée comme un problème de reconnaissance des formes [Worden & Dulieu-Barton, 2004]. Dans ce contexte, le processus d'identification peut être décomposé en quatre parties [Fugate *et al.,* 2001] :

1. *analyse du système ;*
2. *acquisition de données ;*
3. *extraction de caractéristiques ;*
4. *élaboration de modèles statistiques.*

Le processus d'extraction des caractéristiques d'une structure en vue du SHM, représente l'identification de ses propriétés dynamiques sensibles aux endommagements. Ce domaine a fait l'objet de nombreux travaux dont les résultats sont rapportés dans la littérature [Doebling *et al.,* 1998, Sohn *et al.,* 2003]. Dans ce chapitre, nos développements se focalisent sur les caractéristiques utilisant les sous-espaces à base de covariances. Les premiers travaux dans ce domaine ont été réalisés par [Basseville, 1998]. L'auteur propose un résidu basé sur le noyau de la matrice de Hankel. Cette matrice est calculée à partir des mesures. Selon [Yan & Golinval, 2005], le résidu proposé par Basseville s'est révélé insensible aux endommagements de faibles amplitudes. Ils ont quand à eux, proposé pour détecter des petits défauts structuraux, le recours à des nouveaux résidus utilisant les sous-espaces. Mais l'utilisation de ces résidus est limitée à la détection.

Dans le domaine du SHM, peu de travaux ont abordé le développement de modèles statistiques permettant d'améliorer la fiabilité des résultats obtenus à l'issue du processus d'identification d'endommagement [Fugate *et al.,* 2001]. Le développement de méthodes statistiques pour la prise de décision repose sur les algorithmes analysant les distributions des caractéristiques extraites. La prise de décision sur la présence d'endommagement est réalisée lorsque la variation des résidus est statistiquement significative.

Les algorithmes utilisés pour le développement des modèles statistiques sont généralement classés en trois catégories :

1. *classification ;*
2. *régression ;*
3. *détection des valeurs aberrantes.*

Le choix de l'algorithme approprié dépend du mode d'apprentissage envisagé :

- *apprentissage supervisé ;*

- *apprentissage non supervisé.*

L'apprentissage supervisé utilise des mesures provenant de la structure saine et de la structure endommagée. En revanche, l'apprentissage non supervisé se limite à l'utilisation des mesures provenant de la structure saine. Les modèles numériques de la structure sont souvent utilisés pour générer ou accroître ces données.

Pour la détection et la localisation des endommagements, [Basseville *et al.,* 2004] ont adopté une approche basée sur la détection des valeurs aberrantes. La sensibilité du résidu aux changements des paramètres modaux et l'incertitude du résidu dû à des erreurs d'estimation sont calculées par l'apprentissage non supervisé en vue de la détection des endommagements. La détection de l'endommagement s'effectue lorsque la valeur du résidu dépasse un seuil fixé. Ce seuil est déterminé à partir d'un test statistique χ^2. L'utilisation d'un modèle éléments finis (EF) a permis à Basseville de proposer une approche estimant la sensibilité des résidus aux variations des paramètres structuraux. Ce modèle EF permet également de déterminer l'incertitude sur le résidu et de localiser l'endommagement. Ces sensibilités agrégées sont utilisées de la même manière que pour la détection des endommagements. Elles permettent de créer des tests directionnels, concentrés dans des directions spécifiques de l'espace structurel.

Dans ce type d'approche, la sélection d'un seuil approprié est un problème à part entière. En effet, les erreurs d'estimation et les perturbations rendent sont choix très empirique. [Lovera *et al.,* 2001] ont analysé ce problème, en utilisant des résultats obtenus à partir des erreurs issues de l'identification du modèle par des méthodes de sous-espaces.

Dans ce travail de thèse, nous avons adopté la méthode de classification pour le développement d'un modèle statistique sous l'hypothèse que nous pouvons effectuer l'apprentissage supervisé à l'aide d'un modèle numérique EF calibré. Nous avons étudié dans un premier temps, différents résidus basés sur les sous-espaces. Ces résidus ne sont utilisés que pour la détection des endommagements. Puis dans un deuxième temps, nous avons élaboré un nouveau résidu vectoriel qui peut être employé pour la détection et la localisation des endommagements, une fois utilisé comme entrée d'un algorithme de classification de type réseau de neurones artificiels (RNA). L'apprentissage des RNA a été réalisé grâce à l'utilisation des résidus générés à partir des modèles EF de la structure. Ces modèles représentent différents états de la structure (sains et endommagés). Le RNA final obtenu a été employé pour identifier sur la structure réelle et en semi-temps réel, des types prédéfinis d'endommagement.

4.1 - Analyse du sous-espace noyau de la matrice de Hankel

En vue de la détection et localisation des endommagements, on a eu souvent recours à la décomposition en valeurs singulière (SVD) pour structurer les données mesurés [Basseville *et al.,* 2000, Bernal, 2002].

La décomposition SVD de la matrice de Hankel pondérée $\underline{\underline{H}}^w$ de taille $(p.n_y \times q.n_y)$ donne quatre sous-espaces fondamentaux :

$$\underline{\underline{H}}^w = \underline{\underline{W}}_1 \underline{\underline{H}} \underline{\underline{W}}_2 = \begin{bmatrix} \underline{\underline{U}}^s & \underline{\underline{U}}^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\underline{S}}^s & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{S}}^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\underline{V}}^s & \underline{\underline{V}}^n \end{bmatrix}^T = \underline{\underline{U}}^s \underline{\underline{S}}^s \underline{\underline{V}}^{s^T} \tag{4.1}$$

où $\underline{\underline{S}}^s$ est la matrice diagonale des valeurs singulières non-nulles de $\underline{\underline{H}}^w$, $\underline{\underline{S}}^n$ est la matrice des valeurs singulières nulles de $\underline{\underline{H}}^w$, $\underline{\underline{U}}^s$ et $\underline{\underline{V}}^s$ sont respectivement, les matrices des n_t vecteurs singuliers à gauche et à droite, associées à l'image de la matrice de Hankel et $\underline{\underline{U}}^n$ et $\underline{\underline{V}}^n$ sont respectivement les matrices des $(n_y.p - n_t)$ vecteurs singuliers à gauche et à droite associées aux sous-espaces noyaux de $\underline{\underline{H}}^w$. $\underline{\underline{W}}_1$ et $\underline{\underline{W}}_2$ représentent des matrices de pondération inversibles. Une discussion sur leurs choix et effets sur l'identification modale est présenté dans [Van Overchee & De Moor, 1996, Bauer & Ljung, 2002], Dans un premiers temps et sans perte de généralité, nous choisissons comme matrices de pondérations des matrices identités.

L'équation (4.1) conduit aux relations suivantes :

$$\underline{\underline{U}}^{s^T} \underline{\underline{H}}^w \underline{\underline{V}}^s \approx \underline{\underline{S}}^s \tag{4.2}$$

$$\underline{\underline{H}}^w \underline{\underline{V}}^n \approx \underline{\underline{0}} \quad ou \quad \underline{\underline{H}}^w \underline{\underline{V}}^n = \underline{\underline{\Delta}}^v \tag{4.3}$$

$$\underline{\underline{U}}^{n^T} \underline{\underline{H}}^w \approx \underline{\underline{0}} \quad ou \quad \underline{\underline{U}}^{n^T} \underline{\underline{H}}^w = \underline{\underline{\Delta}}^u \tag{4.4}$$

où $\underline{\underline{\Delta}}$ est la matrice de résidus. Dans la plupart des cas, les équations (4.3) et (4.4) s'appliquent uniquement avec des termes résiduels $\underline{\underline{\Delta}}$ car l'ordre n_s du système est difficile à déterminer. De plus, les modes élevés faiblement excités, sont souvent négligés en choisissant un ordre de troncature n_t plus petit que l'ordre réel du système.

[Basseville *et al.,* 2004] ont utilisé la relation donnée par l'équation (4.4) pour la détection et la localisation des endommagements. Selon [Yan & Golinval, 2006], les équations (4.3) et (4.4) ne sont pas idéales pour la détection des endommagements, à cause des variations des termes résiduels générés. Ces termes générés dépendent de la troncature de l'ordre du système et peuvent être du même ordre de grandeur que les variations générées par de petits endommagements. Ils proposèrent alors d'exploiter l'orthonormalité des matrices $\underline{\underline{U}}$ et $\underline{\underline{V}}$ et recommandèrent l'utilisation des relations suivantes :

$$\underline{\underline{U}}^{n^T} \underline{\underline{U}}^s = \underline{\underline{0}} \tag{4.5}$$

$$\underline{\underline{U}}^{n^T}\left(\underline{\underline{U}}^{s}\,\underline{\underline{S}}^{s}\underline{\underline{V}}^{s^T}\right)=\underline{\underline{0}} \tag{4.6}$$

$$\underline{\underline{V}}^{s^T}\underline{\underline{V}}^{n}=\underline{\underline{0}} \tag{4.7}$$

$$\left(\underline{\underline{U}}^{s}\,\underline{\underline{S}}^{s}\underline{\underline{V}}^{s^T}\right)\underline{\underline{V}}^{n^T}=\underline{\underline{0}} \tag{4.8}$$

Les équations (4.5) et (4.7) ne dépendent pas de l'ordre du système et sont valides indépendamment de l'ordre de troncature du système. Pareillement, dans les équations (4.6) et (4.8) seule la partie active des sous-espaces à gauche et à droite (selon l'ordre de troncature n_t (choisi) est utilisé au lieu de la matrice de Hankel complète. Par la suite, nous avons choisi d'utiliser les relations (4.5) et (4.6), basées sur les sous-espaces à gauche, en raison de leur similitude avec (4.7) et (4.8).

4.2 - Détection des endommagements par l'analyse du noyau

4.2.1 - Matrices du résidu

Pour la détection des endommagements, le noyau à gauche $\underline{\underline{U}}_r^n$ de la matrice de Hankel est calculé à partir des ensembles de données correspondants au système de référence, représenté par l'indice r. De même, on définit par $\underline{\underline{U}}_i^s$ l'image de la matrice de Hankel. Elle est calculée à partir d'un autre ensemble de données représentée par l'indice i. Il s'ensuit, que si $\underline{\underline{U}}_r^n$ est multipliée par les vecteurs singuliers à gauche associés à $\underline{\underline{U}}_i^s$, les équations (4.5) et (4.6) ne sont plus vérifiées. Ce ci est principalement dû à la présence du bruit et à différentes sources d'erreurs. La matrice de résidus $\underline{\underline{\Delta}}_i^s$ est donc définie par :

$$\underline{\underline{U}}_r^{n^T}\underline{\underline{U}}_i^{s}=\underline{\underline{\Delta}}_i^{s} \tag{4.9}$$

Les équations similaires peuvent être écrites pour l'image de la matrice de Hankel ($\underline{\underline{U}}_i^s\,\underline{\underline{S}}_i^s\underline{\underline{V}}_i^{s^T}$) et pour la matrice de Hankel complète $\underline{\underline{H}}_i^w$. On obtient alors :

$$\underline{\underline{U}}_r^{n^T}\left(\underline{\underline{U}}_i^{s}\,\underline{\underline{S}}_i^{s}\underline{\underline{V}}_i^{s^T}\right)=\underline{\underline{\Delta}}_i^{a} \tag{4.10}$$

$$\underline{\underline{U}}_r^{n^T}\underline{\underline{H}}_i^{w}=\underline{\underline{\Delta}}_i^{u} \tag{4.11}$$

Nous avons ainsi deux indicateurs avec des propriétés spécifiques. Soit,

1. *La matrice de résidus $\underline{\underline{\Delta}}_i^s$ représente le changement d'orthonormalité entre les sous-espaces à gauche de la matrice de Hankel dû aux effets du bruit et/ou en raison de la présence endommagements structuraux.*

2. *La matrice de résidus $\underline{\underline{\Delta}}_i^a$ représente le changement d'orthonormalité pondérée par les valeurs singulières $\underline{\underline{S}}_i^s$ et les vecteurs singuliers à droite $\underline{\underline{V}}_i^s$ associés à l'image de la matrice de Hankel.*

Ces deux matrices de résidus peuvent être considérées comme des indicateurs (ou caractéristiques) sensibles aux endommagements de faibles amplitudes. Néanmoins, d'un point de vue numérique, $\underline{\underline{\Delta}}_i^s$ semble meilleure que la matrice $\underline{\underline{\Delta}}_i^a$ en raison des valeurs singulières formant $\underline{\underline{S}}_i^s$ qui diminuent progressivement ce qui réduit la sensibilité du résidu aux endommagements. Cela est particulièrement vrai lorsque les données mesurées ne sont pas normalisées [Yan & Golinval, 2006].

Dans l'équation (4.11), $\underline{\underline{U}}_r^n$ regroupe n_t vecteurs singuliers du noyau gauche de la matrice de Hankel liés aux n_t valeurs singulières non nulles. Si les $(n_y.p - n_t)$ valeurs singulières qui restent, ne sont pas nulles, la matrice de résidus aura toujours des termes non nuls, même si la matrice de Hankel est calculée à partir des mesures obtenues par le système de référence. Ces termes non nuls sont essentiellement présents en raison de la réduction de modèles, en plus des effets du bruit et de la variation de l'excitation. Selon [Basseville *et al.,* 2004], ce problème ne conduit pas à une limitation importante. Il s'ensuit qu'en choisissant une taille adaptée de la matrice de Hankel, l'équation (4.11) peut toujours être utilisée pour la détection des endommagements.

4.2.2 - Indicateurs d'endommagement

[Yan & Golinval, 2006] ont proposé d'utiliser l'angle complémentaire entre les sous-espaces $\underline{\underline{U}}^n$ et $\underline{\underline{U}}^s$ comme un indicateur d'endommagement. Cet indicateur est calculé à l'aide de l'équation (4.9) et représente la variation angulaire entre ces deux sous-espaces. L'angle complémentaire est utilisé pour avoir un résidu ϱ_i^s nul lorsque les deux espaces sont orthogonaux.

$$\varrho_i^s = \sin^{-1}\left[norm(\underline{\underline{\Delta}}_i^s) \right] \tag{4.12}$$

La norme de la matrice de résidus $\underline{\underline{\Delta}}_i^a$ a également été proposée comme indicateur d'endommagement [Yan & Golinval, 2006]. Ce résidu représente la perte d'orthonormalité :

$$\varrho_i^a = norm(\underline{\underline{\Delta}}_i^a) \tag{4.13}$$

[Basseville *et al.,* 2000] et [Fritzen *et al.,* 2003] ont proposé une autre procédure pour la génération de l'indicateur d'endommagement, qui consiste à transformer la matrice de résidus $\underline{\underline{\Delta}}^u$ en un vecteur $\underline{\Delta}^u$. La norme de ce vecteur normalisé par la matrice de covariance de résidu $\underline{\underline{\Pi}}$ donne un scalaire qui peut être utilisé pour la détection des endommagements.

$$\varrho_i^h = \underline{\Delta}_i^{u^T} \underline{\underline{\Pi}}^{-1} \underline{\Delta}_i^u \tag{4.14}$$

où

$$\underline{\Delta}_i = vec(\underline{\underline{\Delta}}_i) \tag{4.15}$$

avec $vec()$ représente l'opérateur permettant d'empiler les colonnes de la matrice en un vecteur unique. La matrice de covariance de résidu $\underline{\underline{\Pi}}$ peut être estimée en utilisant un ensemble de n_r données de référence par :

$$\underline{\underline{\Pi}} = \frac{1}{n_r} \sum_{r=1}^{n_r} \underline{\Delta}_r \underline{\Delta}_r^T \tag{4.16}$$

Le calcul d'une matrice non singulière de covariance des résidus est souvent très difficile, car généralement le nombre n_r de données de référence est inférieur au nombre des lignes de la matrice de Hankel [Yan & Golinval, 2006]. Afin d'éviter cette difficulté, l'équation (4.14) peut être remplacée par :

$$\varrho_i^m = \frac{\underline{\Delta}_i^{u^T} \underline{\Delta}_i^u}{\Pi} \tag{4.17}$$

où

$$\Pi = \frac{1}{n_r} \sum_{r=1}^{n_r} \underline{\Delta}_r^T \underline{\Delta}_r \tag{4.18}$$

où Π et la variance des résidus.

4.2.3 - Détection et la localisation des endommagements

Pour détecter les endommagements à l'aide des indicateurs ϱ_i^s et ϱ_i^a, [Yan & Golinval, 2006] ont proposé d'estimer la variation des résidus due à l'excitation et aux effets du bruit, en utilisant les données de la structure saine. Ils recommandent que ces ensembles de données soient mesurées en tenant compte de différents niveaux d'excitations car en pratique, les excitations peuvent changer par moments. Mais ils supposent qu'elles restent stationnaires pendant les courtes périodes d'acquisition.

[Basseville *et al.,* 2004] ont proposé une méthode de détection et de localisation d'endommagement basée sur un modèle statistique utilisant l'analyse des sensibilités des résidus aux endommagements. L'indicateur ϱ_i^h a en l'absence de changement dans les paramètres du système une moyenne nulle et non-nulle en présence des changements ou d'endommagements. Donc le système est considéré comme endommagé lorsque les valeurs du résidu s'écartent sensiblement de zéro. Ce test peut être réalisé statistiquement suivant la loi χ^2 suivante :

$$\chi_i^2 = \varrho_i^{h^T} \underline{\underline{\Pi}}^{-1} \underline{\underline{\mathfrak{J}}} (\underline{\underline{\mathfrak{J}}}^T \underline{\underline{\Pi}}^{-1} \underline{\underline{\mathfrak{J}}})^{-1} \underline{\underline{\mathfrak{J}}}^T \underline{\underline{\Pi}}^{-1} \varrho_i^h, \tag{4.19}$$

où, $\underline{\underline{\mathfrak{J}}}$ est la matrice de sensibilité de résidu représentant la sensibilité du résidu par rapport aux changements des propriétés modales. Elle se calcule par :

$$\underline{\underline{\mathfrak{J}}} = (\underline{\underline{W}}_2 \otimes \underline{\underline{U}}^{n^T} \underline{\underline{W}}_1)(\underline{\underline{H}}^T \underline{\underline{O}}^{\oplus^T} \otimes \underline{\underline{1}}) \underline{\underline{O}}' \tag{4.20}$$

avec $\underline{\underline{O}}^{\oplus}$ représentant le pseudo-inverse de la matrice d'observabilité $\underline{\underline{O}}$ et

$$\underline{\underline{O}}' = \frac{\partial vec(\underline{\underline{O}})}{\partial \theta} = \begin{bmatrix} \underline{\Omega}_1'^p \otimes \underline{\phi}_1 & & 0 & \underline{\Omega}_1^p \otimes \underline{\underline{1}} & & 0 \\ & \ddots & & & \ddots & \\ 0 & & \underline{\Omega}_m'^p \otimes \underline{\phi}_m & 0 & & \underline{\Omega}_m^p \otimes \underline{\underline{1}} \end{bmatrix} \tag{4.21}$$

où $\underline{\Omega}_i^p = [1 \quad \omega_i \quad \omega_i^2 \quad \dots \quad \omega_i^p]^T$, $\underline{\Omega}_i'^p = [0 \quad 1 \quad 2\omega_i \quad \dots \quad p\omega_i^{p-1}]^T$ et $\otimes$ est le produit de Kronecker. χ_i^2 dans l'équation (4.19) est distribuée asymptotiquement comme la variable χ^2, avec $rang(\underline{\underline{\mathfrak{J}}})$ degrés de liberté. Un seuil pour χ_i^2 peut être déduit à partir d'une probabilité de fausse alarme donnée. La structure est considérée endommagée, si la valeur de χ_i^2 dépasse ce seuil prédéfini.

La localisation des endommagements est traitée comme un problème de détection des endommagements à l'aide d'un modèle numérique. En utilisant la sensibilité du résidu par rapport aux changements des propriétés modales et des paramètres structurels, l'algorithme génère des tests directionnels χ^2 applicables à chaque paramètre structurel sélectionné. Si la valeur du résidu est supérieure au seuil choisi, le résidu indique que l'endommagement se localise dans le paramètre structurel correspondant.

Cependant, dans la pratique, les valeurs de χ_i^2 sont beaucoup plus élevées que les valeurs théoriques du seuil, en raison principalement des difficultés liées à l'estimation du résidu et la présence des modes erronés. Pour mieux comprendre le comportement de ces indicateurs, un exemple simple d'un système amorti à deux degrés de liberté est proposé. Cet exemple nous servira aussi comme base de comparaison, avant le test sur des structures réelles, avec l'approche proposé dans ce travail de thèse.

4.2.4 - Exemple

L'objectif de cette étude est d'analyser si la localisation ainsi que la détection des endommagements est possible en utilisant ces indicateurs basés sur les sous-espaces. On considère un système amorti à deux degrés de liberté, comme représenté à la Figue 4.1

Les matrices de masse, de rigidité et d'amortissement du système sont données par :

$$\underline{\underline{M}} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}, \tag{4.22}$$

$$\underline{\underline{K}} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}, \tag{4.23}$$

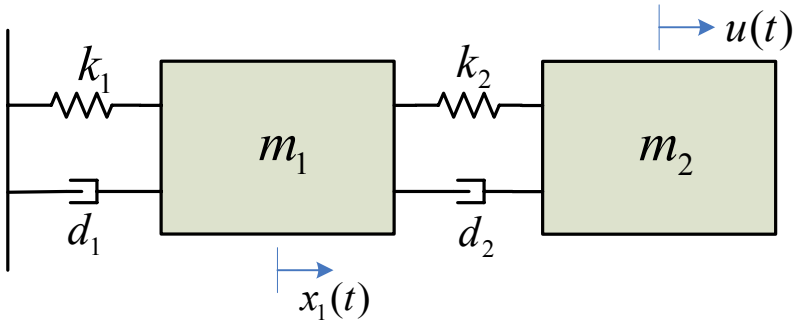
$$\underline{\underline{D}} = \begin{bmatrix} d_1 + d_2 & -d_2 \\ -d_2 & d_2 \end{bmatrix}. \tag{4.24}$$

À tout moment, la structure est supposée être dans l'un des 3 états suivants: L'état sain, l'état endommagé 1 ou l'état endommagé 2. Dans l'état endommagé 1, on suppose que l'endommagement entraîne une variation de la masse m_1 ou / et de la rigidité k_1 des éléments associés au premier degré de liberté. Le changement des éléments correspondants au deuxième degré de liberté, définit le système dans l'état endommagé 2. Dans l'état sain il n'y a pas de modification des propriétés structurelles.

Pour simuler ces différents scénarios d'endommagements, la masse et la rigidité des différents éléments sont modifiées. Pour l'état endommagé 1, la masse m_1 et la rigidité k_1 ont été modifiées en subdivisant en 8 respectivement les intervalles 0.375kg à 0.475kg et 3000N/m à 3700N/m. Pour l'état endommagé 2, les composantes correspondants au second degré de liberté, m_2 et k_2 ont également modifiées par incrémentation (8 valeurs) respectivement, de 0.125kg à 0.225kg et de 4500N/m à 5250N/m.

Les réponses temporelles (déplacements) de la masse m_1 pour différentes forces aléatoires, agissant sur la masse m_2, ayant une moyenne nulle et une variance unité, sont simulées pour des durées de 60s. La fréquence d'échantillonnage choisie est de 1 kHz. Différentes séquences d'excitations aléatoires sont utilisées pour mettre en évidence la sensibilité des différents résidus par rapport au signal d'excitation. 320 échantillons de mesures sont générés pour les 3 états du système.

Les Figure 4.2a et Figure 4.2b montrent les estimations des fréquences propres du système pour chacun



Figue 4.1 - Système amorti à deux degrés de liberté.

des 960 échantillons de données simulées. Le système dans l'état sain possède deux fréquences propres de 11.11 Hz et 30.25 Hz. Pour l'état endommagé 1, il y a une variation maximale de 10% pour la première fréquence propre et de 5% pour la deuxième fréquence propre. Pour l'état endommagé 2, les variations maximales sont respectivement de 8% et 16%.

Afin de calculer les indicateurs d'endommagement pour les différents scénarios simulés, le nombre des blocs lignes de la matrice de Hankel p et le nombre des blocs colonnes q sont fixés à 10 et l'ordre de troncature n_t est fixé à 4 parce que l'ordre du système est connu a priori pour être égale à 2.

La matrice des vecteurs singuliers du noyau gauche de la matrice de Hankel $\underline{\underline{U}}_r^n$ de taille (10×4) est estimée par la décomposition SVD de la matrice de Hankel empirique. Elle même obtenue à partir de la réponse simulée du système sain. Il convient de signaler ici que cette matrice n'est pas unique et que différentes matrices peuvent conduire à des résultats différents. Des précautions doivent être prises pour s'assurer que la matrice finale sélectionnée donne la matrice de résidus nulle lorsqu'elle est multipliée par la matrice d'Hankel obtenue à partir des réponses du système sain (4.11).

La Figure 4.3 montre la variation de la norme moyenne des matrices de résidu $\underline{\underline{\Delta}}^u$, obtenue à partir de 50 différentes matrices estimées des vecteurs singuliers du noyau gauche $\underline{\underline{U}}_r^n$. La moyenne correspond à la norme des matrices de résidu générées à partir de 50 différentes mesures représentant la réponse du système de référence pour plusieurs réalisations du signal d'excitation. Cette variation est uniquement due à la variation des signaux d'excitation et au choix de la matrice $\underline{\underline{U}}_r^n$. Parmi les 50 matrices du noyau gauche $\underline{\underline{U}}_r^n$ nous avons sélectionné celle qui a donnée la plus faible valeur en termes de norme moyenne de la matrice de résidus.

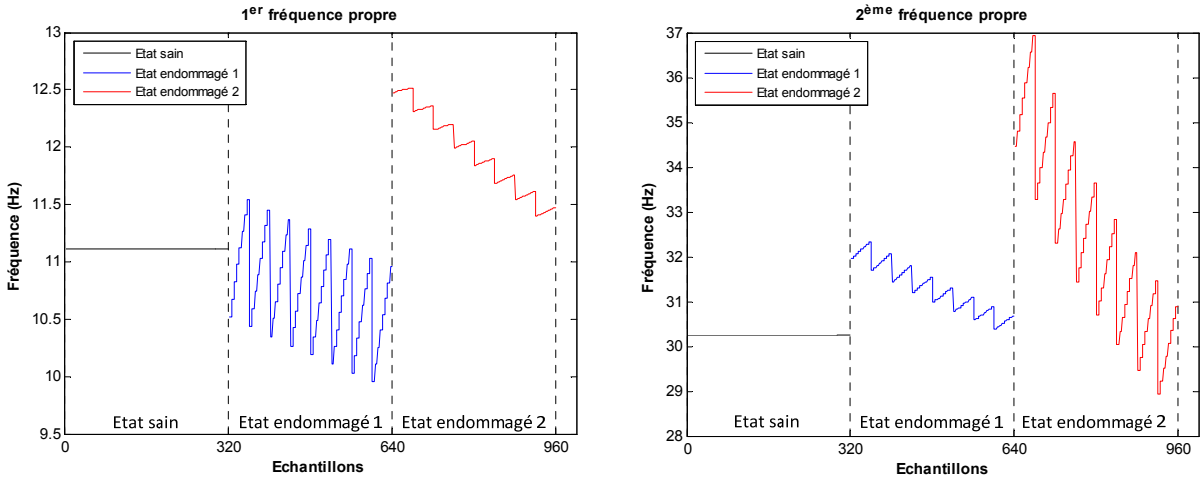


Figure 4.2 - Fréquences propres du système. (a) 1ère fréquence propre. (b) 2ème fréquence propre.

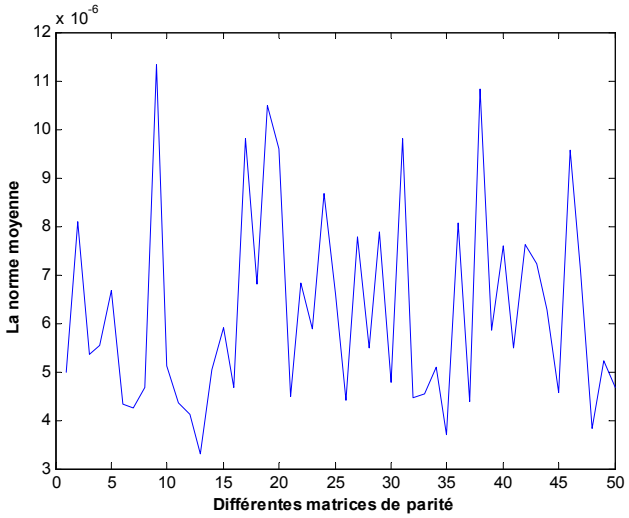


Figure 4.3 - Variation de la norme moyenne des matrices de résidus $\underline{\underline{\Delta}}^{u}$ par rapport la matrice de parité.

Malgré de nombreuses simulations, nous n'avons pas pu calculer par l'équation (4.16) une matrice, $\underline{\underline{\Pi}}$, de covariance de résidu définie positive. La variance de résidu Π a été alors calculée par l'équation (4.18) en utilisant 20 données de référence. Les indicateurs d'endommagement ϱ_i^s, ϱ_i^a et ϱ_i^m données respectivement par les équations (4.12), (4.13) et (4.17) ont été calculés pour tous les échantillons simulés et sont présentés dans les Figures 4.4, 4.5 et 4.6. Dans ces figures, les 320 échantillons initiaux correspondent au système sain, les 320 échantillons qui suivent appartiennent à l'état endommagé 1 et les derniers représentent l'état endommagé 2.

Ces trois indicateurs d'endommagements ont des distributions gaussiennes avec des moyennes et des variances spécifiques pour un état donné du système. Les distributions de ces indicateurs changent avec les variations des paramètres du système. Pour la détection d'endommagement, des seuils ont été fixés à trois fois l'écart obtenu pour le système de référence (sain).

L'indicateur ϱ^s permet une détection correcte des endommagements avec un succès de 82.03%. Les fausses alarmes sont inférieures à 0.32% et les cas de non-détection représentent 17.66%. Dans le cas de l'indicateur ϱ^a, les scores respectifs sont de 98.59%, 0.47% et 0.94%. Des résultats similaires sont obtenus avec l'indicateur ϱ^m, où les mêmes scores sont respectivement de 98.75%, 0.94% et 0.32%. Ces résultats sont résumés dans le Tableau 4.1.

Dans cet exemple simple, ϱ^s est moins sensible aux endommagements que ϱ^a et ϱ^m. De plus le comportement de ϱ^m est semblable à celui ϱ^m car l'influence des bruits n'est pas prise en compte et l'ordre du système est connu a priori. Il convient de rappeler qu'en utilisant ces indicateurs, il est difficile de classer le système endommagé dans l'un des deux états parce que pour certains types d'endommagement les indicateurs ont les mêmes propriétés statistiques (moyenne, variance).

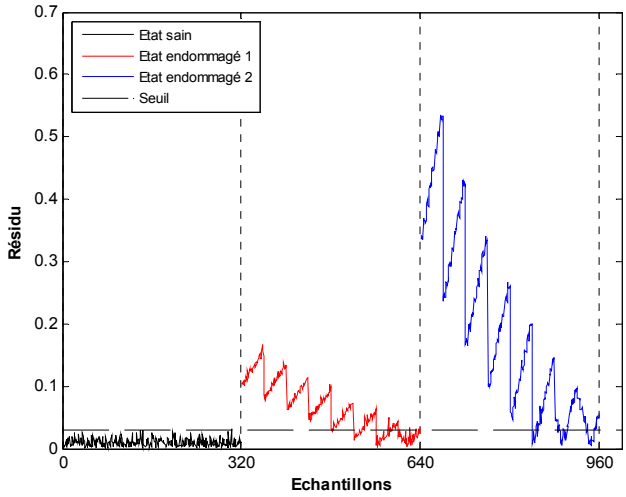


Figure 4.4 - Indicateur d'endommagement ϱ_i^s .

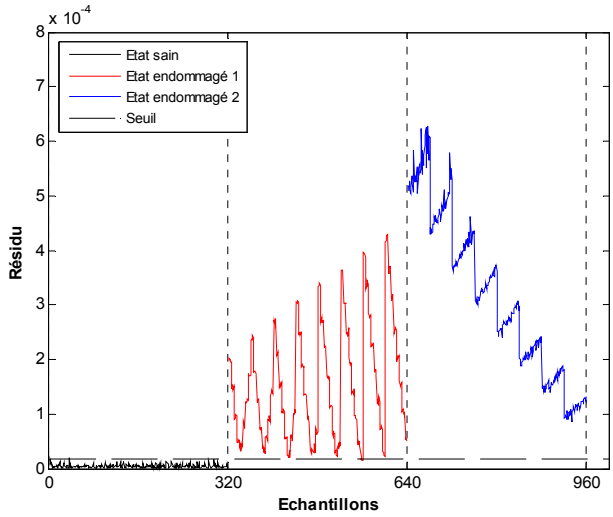


Figure 4.5 - lindicateur d'endommagement ϱ_i^a .

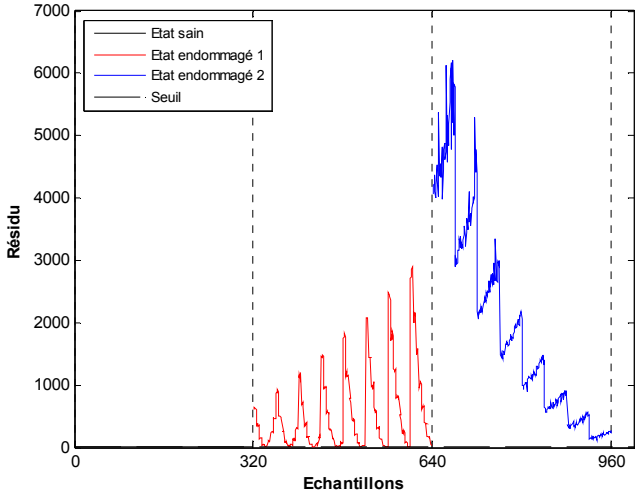


Figure 4.6 - lindicateur d'endommagement ϱ_i^m .

Indicateurs d'endommagements	ϱ^s	ϱ^a	ϱ^m
Détection des endommagements	82.03%	98.59%	98.75%
Non-détection	17.66%	0.94%	0.31%
Fausses alarmes	0.31%	0.47%	0.94%

Tableau 4.1 - Résultats de détection des endommagements.

4.3 - Identification d'endommagement

4.3.1 - Résidu non-paramétrique basé sur les sous-espaces

Dans ce travail de thèse, nous avons adopté une approche non-paramétrique pour la génération d'un résidu. Ce nouveau résidu nous permet de détecter et de localiser des endommagements par classification. Nous proposons de calculer une matrice de parité orthonormée $\underline{\underline{\mathbb{Z}}}$ basée sur les sous-espaces noyaux de la matrice d'observabilité empirique du système de référence. En effet, la matrice d'observabilité et la matrice de Hankel ont les mêmes noyaux et cette matrice non-unique de parité $\underline{\underline{\mathbb{Z}}}$ de taille $(p.n_y \times p.n_y - n_t)$ peut se calculer par la décomposition SVD de la matrice de Hankel empirique.

Pour un système qui n'a pas le même comportement que le système de référence, la multiplication de sa matrice d'observabilité empirique $\underline{\underline{\hat{O}}}_i^*$, par la matrice de parité $\underline{\underline{\mathbb{Z}}}$ permet d'obtenir une matrice de résidus $\underline{\underline{\Delta}}^o$ de taille $(p.n_y - n_t \times n_t)$ s'exprimant par :

$$\underline{\underline{\mathbb{Z}}}^T \underline{\underline{\hat{O}}}_i^* = \underline{\underline{\Delta}}_i^o \tag{4.25}$$

Nous proposons un nouveau vecteur résidu. Ce vecteur (4.26) est construit en prenant l'espérance de deux colonnes consécutives, $\underline{\Delta}_j^o$ et $\underline{\Delta}_{j+1}^o$, de la matrice de résidus $\underline{\underline{\Delta}}_i^o$ étant donné que chaque mode de vibration est associé à deux valeurs singulières consécutives de la matrice de Hankel.

$$\underline{\varrho}_i^o = \begin{bmatrix} \varrho_1^o \\ \varrho_2^o \\ \cdots \\ \varrho_{n_t/2}^o \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} E[vec(\underline{\Delta}_1^o, \underline{\Delta}_2^o)] \\ E[vec(\underline{\Delta}_3^o, \underline{\Delta}_4^o)] \\ \cdots \\ E[vec(\underline{\Delta}_{n_t-1}^o, \underline{\Delta}_{n_t}^o)] \end{bmatrix}_i \tag{4.26}$$

L'utilisation d'un vecteur de résidus au lieu d'un indicateur d'endommagement scalaire fournit des informations supplémentaires concernant l'état du système, puisque chaque composante réagit différemment à un changement des paramètres du système. Afin de mieux comprendre ce phénomène, nous reprenons l'exemple précédent d'un système ayant deux masses, deux ressorts et deux amortisseurs.

4.3.2 - Exemple

Une matrice de parité $\underline{\underline{\mathbb{Z}}}$ de taille (10×6) a été estimée à partir des données simulées du système de référence. Les matrices d'observabilité $\underline{\underline{\hat{O}}}_i$ ont été estimées pour les 960 échantillons en utilisant l'équation (3.29). Pour ce système les matrices de résidu $\underline{\underline{\Delta}}_i^o$ sont de taille (10×4). Chacune des ces matrices a été transformée sous forme d'un vecteur de résidus $\underline{\varrho}^o$, en utilisant l'équation (4.26). Ces vecteurs ont 2 composantes. Ces deux composantes sont représentées sur la Figure 4.7.

On peut voir clairement que les deux composantes sont proches de zéro pour le système sain, mais qu'ils varient différemment pour différents types d'endommagement. La Figure 4.8 illustre la variation croisée de ces deux composantes dans les différents scénarios simulés. Il résulte de cette figure que les données sont spatialement réparties en trois zones différentes. Chacune des ces zones correspond à un état du

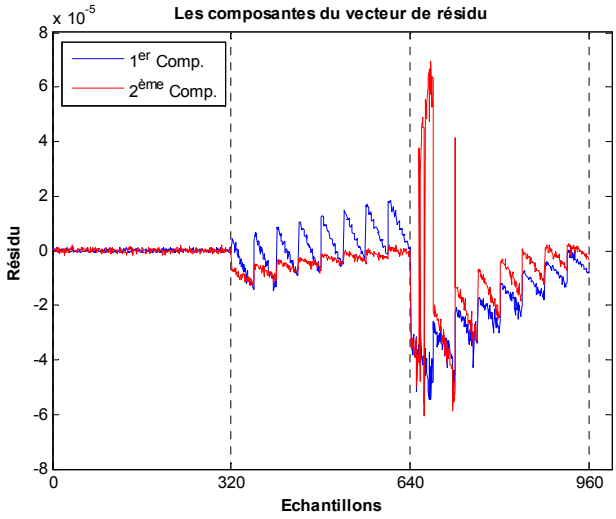


Figure 4.7 - Deux composantes du vecteur de résidus $\underline{\Delta}_i^o$.

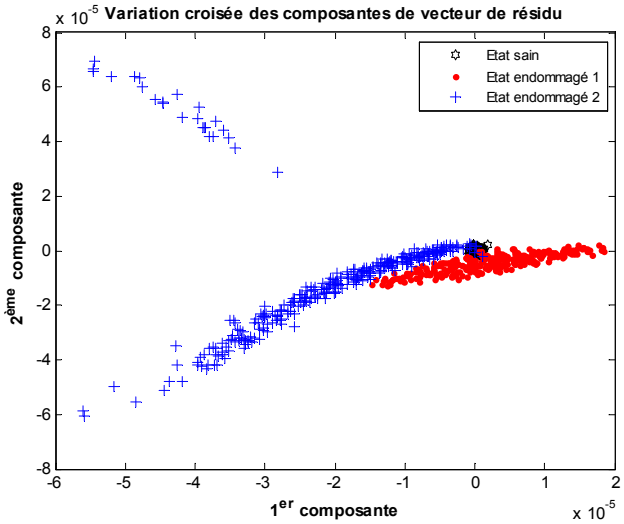


Figure 4.8 - Variation croisée de deux composantes du vecteur de résidus $\underline{\Delta}_i^o$.

système. Ce résultat nous a incité à utiliser une méthode de classification pour identifier les endommagements et tester l'efficacité de la localisation.

4.4 - Réseau de neurones artificiels (RNA)

Un réseau de neurones artificiels est un système de traitement de l'information présentant certaine caractéristique commune avec un réseau de neurones biologiques. Ces réseaux peuvent être appliqués à une grande variété de problèmes, comme pour le stockage et l'extraction des données ou des formes, la classification des formes, l'association des données appartenant à un ensemble avec les données appartenant à un autre ensemble et la résolution de problèmes d'optimisation. Ils ont été développés à partir des généralisations des modèles mathématiques de la science cognitive ou de la neurobiologie. Ces approches se basent sur les hypothèses suivantes [Fausett, 1994] :

- *le traitement de l'information s'effectue à partir des neurones ;*
- *les liaisons entre les neurones permettent la transmission des signaux ;*
- *chaque liaison est associée à un poids, qui est multiplié par le signal transmis ;*
- *une fonction d'activation (Souvent non linéaire pour reproduire le cadre complexe et non linéaire du cerveau humain) est appliquée à l'entrée d'un neurone, afin de déterminer son signal de sortie.*

En conséquence, un réseau neuronal se compose d'un grand nombre d'éléments de traitement, appelés neurones, des cellules ou des nœuds. Chaque neurone est connecté à d'autres neurones par une liaison directe. Chacune des ces liaisons a un poids associé. Ces poids de pondération représentent l'information et sont utilisés par le réseau pour modéliser une relation. Un neurone simple ayant une seule entrée est présenté sur la Figure 4.9a.

La Figure 4.9a. montre l'entrée scalaire p qui est multipliée par le poids $w_{1,1}$ auquel on ajoute un biais. Ce biais peut être considéré comme un poids $w_{1,0}$ si on suppose que le neurone a une entrée supplémentaire de valeur constante et égale à 1. Chaque neurone possède une fonction d'activation f qui dépend de la somme pondérée u désignant le potentiel du neurone. La sortie de la fonction

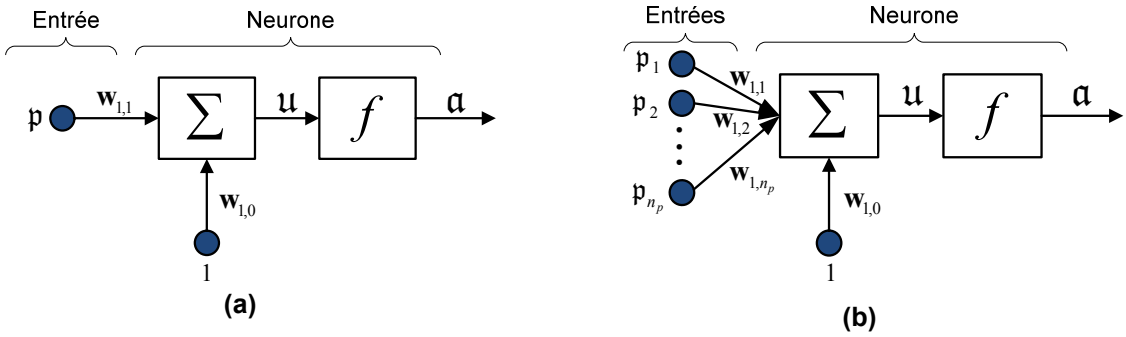


Figure 4.9 - Neurone (a) avec une seule entrée (b) avec plusieurs entrées.

d'activation est un scalaire a qui s'appelle la sortie du neurone et est calculée par :

$$a = f\left(pw_{1,1} + w_{1,0}\right) \tag{4.27}$$

Une fonction d'activation peut être une fonction linéaire ou non linéaire de u. Parmi les différentes fonctions d'activation, qui sont sélectionnées en fonction du problème à résoudre, les fonctions Sigmoïdes sont les plus fréquentes [Waszczyszyn & Ziemianski, 2001] :

- *La fonction sigmoïde binaire est donnée par :*

$$f(u) = \frac{1}{1 + exp(-\sigma_n u)} \in (0,1) \qquad \text{for} \qquad \sigma_n > 0 \tag{4.28}$$

- *Et la fonction sigmoïde bipolaire est donnée par :*

$$f(u) = \frac{1 - exp(-\sigma_n u))}{1 + exp(-\sigma_n u)} \in (-1,1) \qquad \text{for} \qquad \sigma_n > 0 \tag{4.29}$$

En général, un neurone possède plusieurs entrées. Un neurone avec n_p entrées est représenté à la Figure 4.9b. Chaque entrée p_i est pondérée par les éléments correspondants $w_{1,i}$ de la matrice de pondération $\underline{\underline{w}}$, qui a dans ce cas une seule ligne. La sortie a de ce neurone est donnée par :

$$a = f\left(u\right), \quad u = \sum_{i=0}^{n_p} p_i w_{1,i} = \underline{\underline{w}}\,\underline{p} \tag{4.30}$$

où $p_0 = 1$. Il s'ensuit qu'un neurone est une fonction non-linéaire en raison de la fonction d'activation et des sorties bornées.

Un neurone, même avec plusieurs entrées, n'est généralement pas suffisant. Pour traiter un problème, une batterie de neurones travaillant en parallèle est utilisée. Cette ensemble de neurones est appelée une couche de neurones. Une couche de n_n neurones est montrée à la Figure 4.10

Chacune des n_p entrées est reliée à chacun des n_n neurones et la matrice de pondération $\underline{\underline{w}}$ a n_n lignes. Une couche l est définie par sa matrice de pondération $\underline{\underline{w}}^l$, son vecteur de biais $\underline{w}_0^l$ et ses fonctions d'activations. Le nombre d'entrées n_p^l d'une couche peut être différent de son nombre de neurones n_n^l et les différents neurones peuvent avoir différentes fonctions d'activation.

Différentes couches de neurones peuvent être utilisées pour construire une grande variété de réseaux. On distingue deux types de réseaux de neurones : les réseaux non-bouclés et les réseaux bouclés. Le graphe des connexions d'un réseau de neurones non-bouclé ne contient pas de cycle. Un réseau de neurone non-bouclé réalise donc une ou plusieurs fonctions de ses entrées, par composition des fonctions réalisées par

chacun des neurones. Les réseaux non-bouclés sont souvent appelés « réseaux statiques » parce que le temps ne joue aucun rôle fonctionnel dans ce type de réseaux : si les entrées sont constantes, les sorties sont également constantes [Dreyfus *et al.,* 2004]. Le graphe des connexions d'un réseau de neurones bouclé est cyclique et les sorties de ces réseaux dépendent du temps. Par la suite, nous ne considérerons que les réseaux de neurones statiques.

Les réseaux de neurones statiques à couches, dont les neurones cachés ont une fonction d'activation sigmoïde, sont souvent appelés perceptrons multicouches (PMC) [Dreyfus *et al.,* 2004]. Dans ces réseaux, un neurone d'une couche donnée est relié à tous les neurones de la couche précédente et de la couche suivante. Mais les connexions entres les neurones de la même couche ne sont pas autorisés. Une couche dont la sortie est la sortie du réseau est appelée une couche de sortie. Une couche dont l'entrée est l'entrée du réseau est appelée la couche d'entrée. Toutes les autres couches sont appelées les couches cachées.

Un réseau de neurones est caractérisé par :

1. *son architecture (le schéma de connexions entre les neurones) ;*
2. *ses fonctions d'activation ;*
3. *la méthode d'apprentissage utilisée pour l'estimation des poids.*

On appelle « apprentissage » des réseaux de neurones la procédure qui consiste à estimer les paramètres c'est-à-dire les matrices de pondérations $\underline{\underline{\mathbf{w}}}^l$ et des vecteurs de biais $\underline{\underline{\mathbf{w}}}_0^l$ afin que celui-ci remplisse au mieux la tâche qui lui est affectée [Dreyfus *et al.,* 2004]. Il existe deux types d'apprentissage :

1. *apprentissage supervisé ;*
2. *apprentissage non-supervisé.*

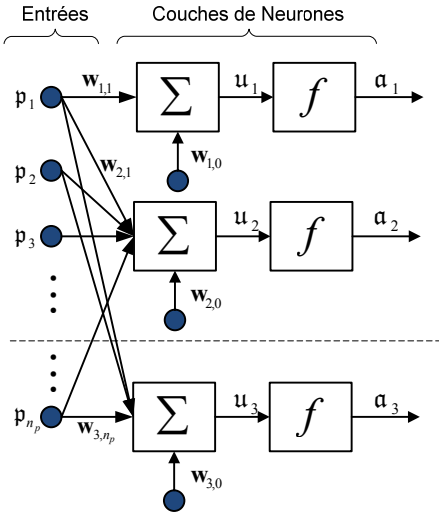


Figure 4.10 - Couche de neurones.

Dans un réseau statique où une relation algébrique est crée entre ses entrées et ses sorties. Les méthodes d'apprentissage supervisées utilisent alors pour estimer les paramètres du réseau un ensemble de valeurs dont la sortie du réseau est fonction des entrées correspondantes. Les méthodes d'apprentissage non-supervisé sont utilisées lorsque la sortie du réseau est a priori inconnue. Nous concentrerons notre attention sur les méthodes d'apprentissage supervisé parce que les réseaux de neurones non bouclés à apprentissage supervisé sont des approximateurs universels [Bishop, 1996].

Dans le processus d'apprentissage supervisé du réseau, un ensemble de formes $\mathfrak{P}$ est généré à partir d'un espace $\mathfrak{R}$. Ces formes sont composées de paires formées par les entrées connues et les vecteurs de sortie associés :

$$\mathfrak{P} = \left[(\mathfrak{p}, \mathfrak{t})^p \quad | \quad p = 1, \ldots, n_p \right] \subset \mathfrak{R} \tag{4.31}$$

où $\underline{\mathfrak{p}}^{(p)}$ et $\underline{\mathfrak{t}}^{(p)}$ sont les vecteurs d'entrée et de sortie désirés d'une forme p et il y a n_p formes. A partir de l'ensemble $\mathfrak{P}$ de formes, les ensembles d'apprentissage $\mathfrak{L}$ et de test $\mathfrak{T}$ sont sélectionnés respectivement par :

$$\mathfrak{L} = \left[(\mathfrak{p}, \mathfrak{t})^p \quad | \quad p = 1, \ldots, n_l \right] \subset \mathfrak{P} \tag{4.32}$$

$$\mathfrak{T} = \left[(\mathfrak{p}, \mathfrak{t})^p \quad | \quad p = 1, \ldots, n_t \right] \subset \mathfrak{P} \tag{4.33}$$

Considérons qu'un réseau génère un vecteur de sortie $\mathfrak{a}^{(p)}$ pour une entrée $\underline{\mathfrak{p}}^{(p)}$. Ce vecteur peut être comparé avec le vecteur de sortie désiré $\underline{\mathfrak{t}}^{(p)}$ et l'erreur du réseau peut être définie. Différentes fonctions coût, sont définies pour calculer l'erreur du réseau ; par exemple on peut utiliser l'erreur quadratique moyenne :

$$\mathfrak{e}_\mathfrak{s} = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{n_p} \sum_{i=1}^{n_m} \left(\mathfrak{t}_i^{(p)} - \mathfrak{a}_i^{(p)} \right)^2 \tag{4.34}$$

La méthode de rétropropagation [Bishop, 1996] (*Back propagation*) est une technique fréquemment utilisée pour l'apprentissage des réseaux de neurones multicouches tels que les PMC. Cette technique permet de calculer le gradient de l'erreur pour chaque neurone du réseau, de la dernière couche vers la première. Dans cette méthode, les matrices de pondération du réseau sont calculées itérativement par la formule suivante :

$$\mathbf{w}_{j,i}(k+1) = \mathbf{w}_{j,i}(k) + \Delta \mathbf{w}_{j,i}(k) \tag{4.35}$$

où, k est l'indice d'itération. $\Delta \mathbf{w}_{j,i}(k)$ représente la correction du poids et se calcule par une règle d'apprentissage. La méthode de rétro-propagation est basée sur les méthodes de type descente de gradient, c'est-à-dire :

$$\Delta \mathbf{w}_{j,i}(k) = -\eta \frac{\partial \mathfrak{e}_s}{\partial \mathbf{w}_{j,i}}|_k \tag{4.36}$$

avec η représentant le pas d'apprentissage. La descente du gradient a pour but de faire converger de manière itérative vers une configuration optimisée des poids synaptiques. Cet état peut être un minimum local ou global (idéalement) de la fonction de coût $\mathfrak{e}_s$ à optimiser.

La descente du gradient est sensible au pas d'apprentissage et de nombreuses méthodes ont été proposées pour ajuster dynamiquement le pas d'apprentissage, afin de mieux optimiser la convergence de l'algorithme. Dans le cadre de nos travaux nous avons utilisé la méthode de gradient avec pas d'apprentissage adaptatif et validation croisée.

Après l'étape d'apprentissage du réseau, il faut vérifier son comportement en utilisant l'ensemble de formes de test $\mathfrak{T}$. Parmi les nombreux problèmes liés à l'utilisation d'un RNA, les plus importants sont :

- *la sélection des formes d'apprentissage et de test ;*
- *la conception de l'architecture du réseau (nombre de couches cachées et le nombre de neurones dans ces couches) ;*
- *l'apprentissage du réseau ;*
- *et l'estimation de la capacité de généralisation du réseau.*

Dans le cadre du SHM, l'utilisation des RNA se justifie pleinement pour résoudre le problème de localisation des endommagements. En effet, la diversité, la nature et la dispersion spatiale des endommagements fais que ce problème très difficile peut être formulé en termes de classifications de données. La disponibilité d'un modèle mathématique de type EF de la structure à surveiller permet d'introduire différents endommagements et de réaliser la phase d'apprentissage décrite précédemment. Afin de mieux appréhender l'utilisation de RNA dans le SHM, nous l'appliquons pour la classification des vecteurs de résidu calculés dans l'exemple 4.3.2.

4.4.1 - Exemple

Un perceptron multicouche (PMC) a été utilisé pour classer les vecteurs du résidu $\underline{\rho}_i^o$ en trois catégories / états, qui représentent les états correspondants à la structure :

1. *état sain (S) ;*
2. *état endommagé 1 (E1) ;*

3. *état endommagé 2 (E2).*

La couche d'entrée de ce PMC a deux nœuds car les vecteurs du résidu se composent de deux éléments. La couche de sortie a trois nœuds, un pour chaque état. Nous avons choisi une couche cachée ayant 5 nœuds. L'architecture de ce réseau est illustrée à la Figure 4.11.

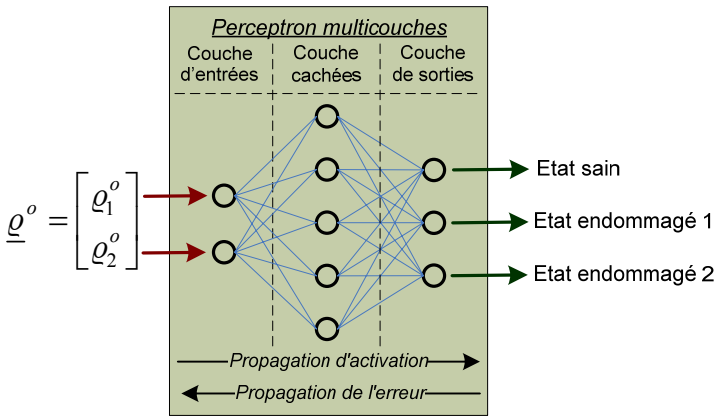


Figure 4.11 - Architecture du perceptron multicouche.

La fonction sigmoïde bipolaire (4.29) avec $\sigma_n = 2$ a été choisie pour tous les nœuds du PMC (voir Figure 4.12).

L'efficacité d'un RNA pour classer correctement un vecteur d'entrée dépend du bon apprentissage du réseau. La difficulté le calcule des matrices de pondération correctes correspondant au minimum global de la fonction coût. Nous avons utilisé la méthode du gradient avec un pas d'apprentissage adaptatif et une validation croisée. La fonction coût estime l'erreur quadratique moyenne entre la sortie désirée et la sortie du réseau. Les résultats des méthodes de gradient dépendent fortement du point de départ de l'algorithme. Afin de prendre en compte ce facteur, l'étape d'apprentissage a été répétée 50 fois, en utilisant différents points de départ générés de façon aléatoire. Le nombre d'itérations de la méthode de

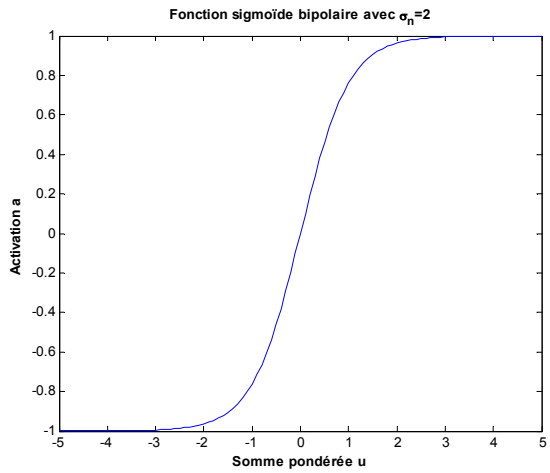


Figure 4.12 - Fonction sigmoïde bipolaire ayant $\sigma_n = 2$.

rétro-propagation a été fixé à 3000.

A partir de 960 échantillons, 654 ont été sélectionnés aléatoirement pour l'ensemble des données d'apprentissage $\mathcal{L}$, 165 ont été utilisés pour la validation croisée et les 141 échantillons restant forment l'ensemble de données de test $\mathcal{T}$. Le même nombre d'exemples a été pris pour chacun des 3 catégories de résidu. Les matrices de pondération estimées pour ce réseau par la méthode de rétro-propagation sont données par :

$$\underline{\underline{\mathbf{w}}}^1 = \begin{bmatrix} 0.054365 & -0.1552 \\ 0.039714 & -0.45842 \\ 0.059123 & -0.17027 \\ -0.46097 & 0.10342 \\ 0.22994 & 0.18859 \end{bmatrix} \tag{4.37}$$

et

$$\underline{\underline{\mathbf{w}}}^2 = \begin{bmatrix} -0.13369 & -0.60313 & 0.060792 & 0.39687 & 0.94367 \\ 0.86813 & 0.73142 & 0.37657 & 0.089095 & -0.21274 \\ -0.91413 & -0.27326 & -0.48638 & -0.12359 & -0.54087 \end{bmatrix} \tag{4.38}$$

Les vecteurs de biais sont $\underline{\mathbf{w}}_0^1 = [0.1713 \quad -0.39563 \quad 0.18325 \quad 0.29019 \quad 0.92129]^T$ et $\underline{\mathbf{w}}_0^2 = [0.1713 \quad 0.29019 \quad 0.92129]^T$.

L'évaluation du réseau pour la classification des ensembles d'apprentissage et de test donne respectivement un score moyen de 89.8% et de 89.1%. Les matrices de confusion correspondantes sont respectivement résumées au Tableau 4.2 et au Tableau 4.3. La matrice de confusion, dans la terminologie de l'apprentissage supervisé, est un outil servant à mesurer la qualité d'un système de classification. Chaque colonne de cette matrice représente le nombre d'occurrences d'une classe estimée, tandis que chaque ligne représente le nombre d'occurrences d'une classe réelle (ou de référence). Par exemple, ici dans les données d'apprentissage, nous avons eu 218 échantillons appartenant au système sain. La première ligne montre que parmi ces échantillons, 204 ont été correctement classés par le RNA comme étant des résidus liés au système sain, mais 6 échantillons ont été faussement classés comme étant liés au système représentant l'état endommagé 1 (E1) et 8 au système représentant l'état endommagé 2 (E2). La première colonne montre que sur 654 échantillons de données d'apprentissage, 219 (204+5+10 = 219) ont été classés en tant que système sain mais cinq d'entre eux appartenaient réellement au système endommagé du cas 1 et 10 au système endommagé du cas 2.

	S	E1	E2	SCORE
S	204	6	8	93.72%
E1	5	197	16	90.28%
E2	10	21	186	85.49%

Tableau 4.2 - Matrice de confusion obtenue après classification des données d'apprentissage.

	S	E1	E2	SCORE
S	45	1	2	93.79%
E1	1	43	4	89.21%
E2	3	5	40	84.29%

Tableau 4.3 - Matrice de confusion obtenue après classification des données de test.

Les matrices de confusion montrent que le RNA peut détecter 93% des cas d'endommagement et permet de localiser correctement 85% des cas. Les cas de non-détection sont inférieurs à 5% et ceux de fausses alarmes sont inférieurs à 14.5%.

4.5 - Problèmes et difficultés pratiques

Le problème de l'identification d'endommagement par les méthodes des sous-espaces est différent du problème d'identification modale qui a été étudié au chapitre 3. L'identification modale par la méthode des sous-espaces ne nécessite pas la connaissance a priori de l'ordre du système. Grâce à l'histogramme de stabilisation proposée à la § 3.4, les modes peuvent être identifiés en changeant l'ordre du système et en étudiant leur stabilité (mode physique ou numérique). En revanche, pour l'identification d'endommagement, cette connaissance a priori de l'ordre du système est déterminante pour le calcul de la matrice de parité. Si l'ordre de troncature sélectionné est inférieur à l'ordre du système, des informations cruciales liées aux modes élevés seront perdues. S'il est supérieur, des modes erronés apparaîtront dans le calcul et compliqueront ainsi la détection d'endommagement.

En outre, la sélection d'un ordre de troncature correct ne garantit pas la non-existence d'un mode erroné car tous les modes se situant dans une bande de fréquence, ne sont pas excités avec la même énergie. Il s'ensuit que les modes dominants (modes ayant une contribution énergétique plus élevée que les autres) rendent difficile l'identification des autres modes. C'est un problème récurent en identification des systèmes où si l'entrée sensibilise les modes dominants l'identification des autres modes devient très difficile. En d'autres termes, l'identification d'un mode de faible énergie, se situant à proximité d'un mode de plus forte énergie n'est pas très efficace. Dans ce cas, le choix d'un ordre de troncature correct n'aide pas et généralement les modes, qui sont faiblement excités sont remplacés par les modes erronés.

Un mode erroné peut rendre les résultats obtenus à partir des tests de détection d'endommagement basés sur les sous-espaces complètement inutiles. Chaque mode identifié est lié à une paire de valeurs singulières non nulles de la matrice de Hankel et aux vecteurs singuliers correspondants. Les modes erronés sont générés numériquement et n'ont pas de relations physiques avec le système. Par conséquent, leurs vecteurs singuliers ne peuvent pas être orthonormés avec les vecteurs singuliers de l'espace du

noyau de la matrice de Hankel obtenue à partir du système de référence. Ce qui conduit à des termes non nuls dans la matrice de résidus même si la mesure correspond à un système sain.

Un mode erroné est encore plus nuisible pour l'indicateur d'endommagements proposé dans § 4.3.1, où les ordres des valeurs singulières et des vecteurs singuliers sont importants. Si un mode est correctement identifié, il apparaît comme deux valeurs singulières consécutives de la matrice de Hankel (lorsqu'elles sont triées par ordre croissant ou décroissant). Mais, un mode erroné peut perturber cet ordonnancement de deux manières. Dans la première, la paire de valeurs singulières du mode erroné peut apparaître comme deux valeurs singulières non-nulles consécutives et déplacer tous les autres modes ayant les valeurs singulières plus petites. Dans le deuxième cas, la paire n'apparaît pas comme deux valeurs consécutives, ce qui complique encore la situation.

L'élimination des valeurs et vecteurs singuliers des modes erronés par un histogramme de stabilisation n'est pas possible car il n'est pas aisé de trouver une relation biunivoque entre un mode erroné et ses valeurs singulières. Pour résoudre ce problème, nous proposons de diviser la bande de fréquence en plusieurs sous-bandes, de sorte que dans chacune de ces sous-bandes les modes aient les mêmes contributions énergétiques. Ainsi, avec une connaissance a priori de l'ordre du système correspondant à chaque sous-bande, on s'affranchit de la présence des modes erronés.

4.6 - Procédure pour la génération du résidu

La conception d'un système d'identification des endommagements basé sur les sous-espaces débute par une analyse modale hors-ligne de la structure. Nous supposons qu'un modèle numérique calibré de la structure est disponible, ce qui nous permet d'analyser le comportement de la structure saine et de la structure endommagée. En utilisant ce modèle, les variations des fréquences propres de la structure dues aux différents types d'endommagements prédéfinis peuvent être analysées. L'objectif de cette analyse est de sélectionner les modes qui sont sensibles aux endommagements. Nous recommandons de choisir les modes ayant une énergie élevée ou ceux qui ne possèdent pas de modes dominants dans leur voisinage immédiat.

En suivant l'approche proposée au paragraphe précédent, différentes bandes de fréquences, sans recouvrement, peuvent être choisies de telle sorte que dans chaque bande, il y ait quelques modes sensibles aux endommagements. Ces bandes doivent être suffisamment larges pour couvrir la variation des modes dues aux endommagements et il devrait être possible de concevoir des filtres passe-bande (FPB) correspondants.

Une fois que les sous-bandes sont choisies et les FPB correspondants sont conçus, l'étape suivante consiste en l'estimation d'une matrice de parité pour chacune de ces sous-bandes. Le nombre de modes dans une sous-bande donne l'ordre de troncature et une matrice de parité $\underline{\underline{\mathbb{Z}}}_j$ peut alors être estimée pour le sous-système correspondant à cette sous-bande. Pour estimer ces matrices de parité, la réponse

temporelle du système de référence est filtrée séparément avec les FPBs. S'il y a n_b sous-bandes, le processus de filtrage donne n_b signaux filtrés, comme le montre la Figure 4.13.

La décomposition SVD des matrices d'observabilité $\underline{\underline{O}}_{j,r}$ estimées à partir de ces signaux filtrés, donne n_b matrices de parité souhaitées $\underline{\underline{\mathbb{Z}}}_j$ pour chaque sous-système. Ces matrices de parité peuvent être utilisées pour générer des vecteurs de résidu $\underline{\varrho}^o_{j,i}$ pour chaque sous-système. Ici l'indice j représente le sous-système et i représente le numéro de l'ensemble de données. Ces vecteurs de résidu $\underline{\varrho}^o_{j,i}$ peuvent être concaténés dans un seul vecteur de donné par :

$$\underline{\varrho}^o_i = [\underline{\varrho}^o_{1,i} \quad \underline{\varrho}^o_{2,i} \quad \cdots \quad \underline{\varrho}^o_{n_r,i}]^T .$$

Nous proposons d'utiliser ce vecteur $\underline{\varrho}^o_i$ comme entrée du RNA (Figure 4.13) pour la localisation d'endommagement.

4.7 - Etude de cas – Identification des endommagements d'une poutre

L'objectif de cette étude est de localiser, en semi-temps réel, un endommagement réalisé sur une poutre composite. Une augmentation de la masse, à un endroit précis, est considérée comme un défaut. Quatre cas de dommages ont été définis en ajoutant une masse de 14 grammes à 15mm, 125mm, 240mm et 335mm du point d'encastrement de la poutre comme illustrer sur la Figure 3.6.

Des bruits blancs sont utilisés pour exciter la structure avec la première paire piézo-électrique qui est proche de l'encastrement. Les réponses temporelles de ces excitations sont simulées et mesurées à partir de la deuxième paire piézo-électrique pendant 120s avec une fréquence d'échantillonnage de 10 kHz. Chacune de ces réponses a été normalisée pour avoir une moyenne nulle et une variance unitaire.

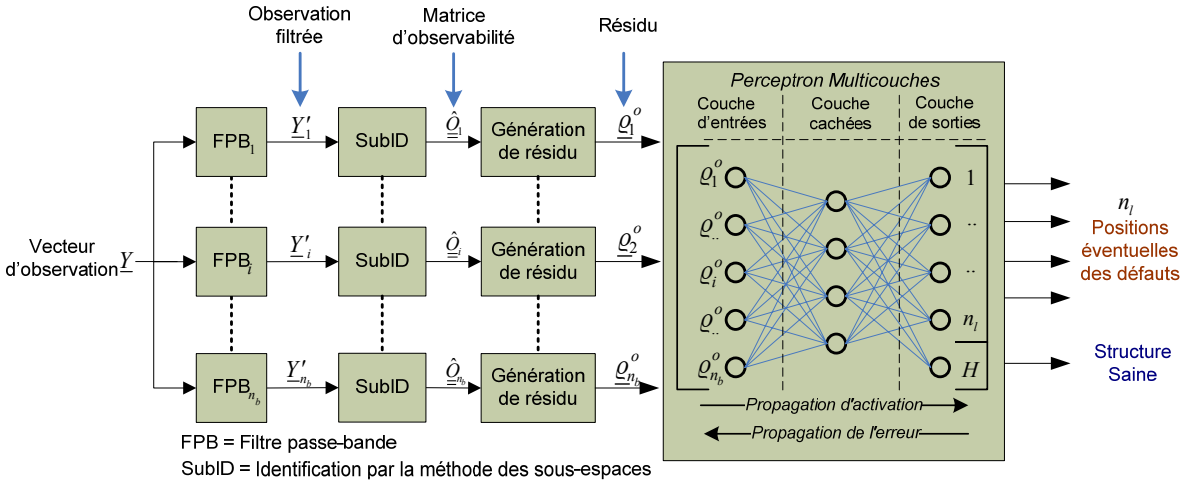


Figure 4.13 - Système d'identification d'endommagement proposé.

4.7.1 - Modèle éléments finis

Le modèle éléments finis (EF) de la poutre, qui a été construit par des éléments de type Euler-Bernoulli au chapitre 2, est utilisé pour modéliser la structure avec des endommagements. Comme l'endommagement est simulé par l'augmentation de la masse, la densité volumique des quatre tronçons 1, 3, 5 et 7 (Figure 2.13) a été modifiée.

Les cinq premières fréquences propres obtenues à partir des quatre modèles de la poutre endommagée sont résumées dans le Tableau 4.4. Les fréquences identifiées à partir de la structure endommagée réelle, sont aussi présentées dans le Tableau 4.4.

Remarque : Il est important de signaler ici que nous supposons que la dynamique de la structure endommagée réelle n'est pas a priori connue. Les fréquences propres de la structure endommagée réelle obtenues par un diagramme de Bode expérimental, sont comparées à celles identifiées, afin de quantifier l'erreur de modélisation. On remarque alors qu'une importante erreur s'est produite dans le cas de l'endommagement 2 : l'erreur est de 17% pour le $4^{ème}$ fréquence propre et de 7.1% pour le $5^{ème}$.

Ces modèles EF sont utilisés pour simuler la réponse temporelle de la poutre saine et celles de poutre endommagée. Afin de se rapprocher des conditions expérimentales, nous avons identifié et modélisé les bruits de mesures existants sur notre système et nous les avons rajouté à notre simulateur (bruit blanc additif sur les sorties). Le rapport signal sur bruit est de 10 dB. Les bases d'apprentissage et de test de

Cas	Fréquence propre (Hz)	$1^{ère}$	$2^{ème}$	$3^{ème}$	$4^{ème}$	$5^{ème}$
1	Identifiée	6.15	44.0	116.1	256.5	440.0
	numérique	6.1	44.2	126.4	252.2	447.3
	Erreur (%)	0.8	0.5	8.9	1.7	1.7
2	Identifiée	6.05	34.8	111.0	260.1	470
	numérique	5.9	33.9	116.2	213.5	436.5
	Erreur (%)	2.5	2.6	4.7	17.9	7.1
3	Identifiée	5.3	43.3	105.4	278.0	422.5
	numérique	5.3	42.2	109.3	242.1	423.0
	Erreur (%)	0	2.5	3.7	12.9	0.1
4	Identifiée	4.40	36.1	106.7	212.1	342.0
	numérique	4.4	37.6	107.6	219.0	339.2
	Erreur (%)	0	4.2	0.8	3.3	0.8

Tableau 4.4 - Cinq premières fréquences propres.

RNA sont construites à partir de ces réponses simulées.

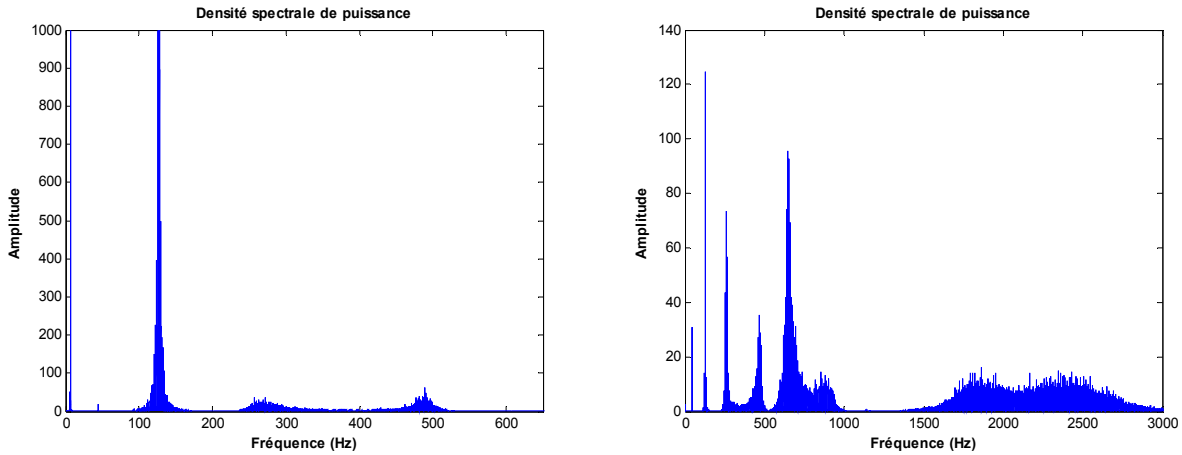
4.7.2 - Base de données

Afin de générer l'ensemble de formes $\mathfrak{P}$, nous avons simulé 5250 réponses temporelles de la poutre saine et endommagée. Chacune des ces réponses a été simulées en utilisant différents réalisations du signal d'excitation. Ces signaux sont aléatoires, non stationnaires et ont des moyennes nulles. Il y a 1050 échantillons représentant la poutre saine et 1050 échantillons représentant chacun des 4 cas d'endommagement. Pour chaque cas, la masse ajoutée a été modifiée de 5 grammes à 15 grammes pour simuler 30 différentes sévérités d'endommagement.

Nous avons également enregistré 50 mesures effectuées sur la poutre réelle, 10 pour le cas sain et 10 pour chacun des cas d'endommagement. La poutre a été excitée par différents signaux aléatoires, non stationnaires et de moyennes nulles.

Les densités spectrales de puissance d'une réponse simulée et d'une réponse mesurée expérimentalement sont présentées respectivement aux Figure 4.14a et b. Dans les deux cas, le mode à haute énergie se situant à 128 Hz, rend difficile une identification précise du mode basse énergie 44 Hz. Afin d'éviter ce problème, on utilise l'approche par subdivision proposée précédemment (§ 4.6). Nous avons ainsi élaboré quatre FPB ayant des bandes passantes de l'ordre de 0 à 100 Hz, 100 à 200 Hz, 200 à 300 Hz et de 350 à 550 Hz. Ce sont des filtres de type Butterworth et leurs réponses fréquentielles sont illustrés sur la Figure 4.15. Ces filtres sont bien des filtres passe bande qui présentent un gain constant dans la bande passante désirées et qui tend vers 0 aux fréquences de coupure.

Dans la première sous-bande il y a deux modes présentant des énergies faibles, de 6 Hz et 44 Hz. Il n'y a qu'un seul mode dans chacune des 3 autres sous-bandes sélectionnées. Chaque réponse mesurée ou simulée a été filtrée séparément par chacun de ces FPB. On obtient 4 réponses filtrées pour chaque réponse mesurée ou simulée, ayant des composantes de fréquence dans une seule sous-bande. Les



(a) **(b)**

Figure 4.14 - Densité spectrale de puissance d'une réponse (a) simulée (b) mesurée.

densités spectrales de puissance des 4 réponses filtrées obtenues à partir d'une réponse simulée et d'une réponse mesurée sont respectivement présentées sur les Figure 4.16 et Figure 4.17.

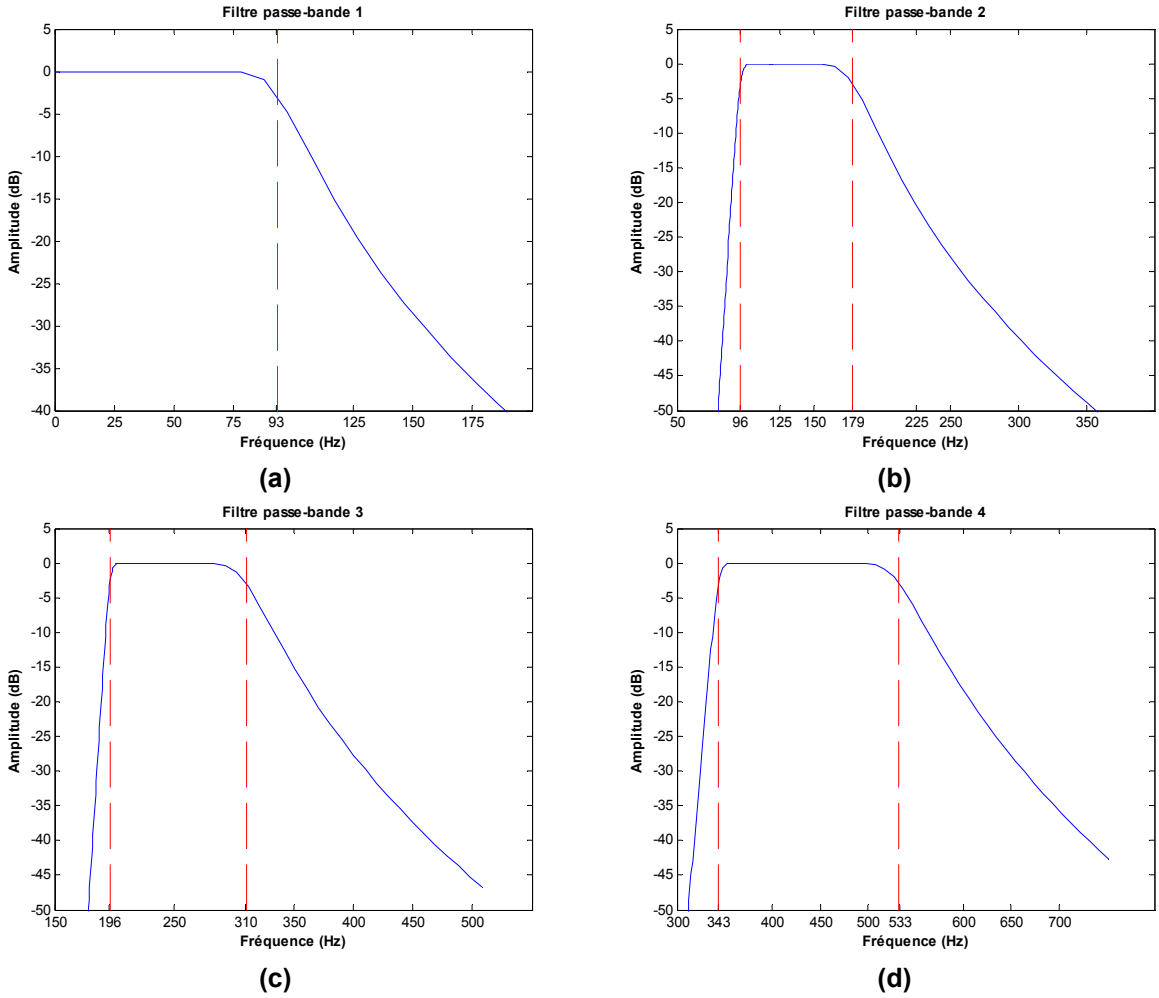
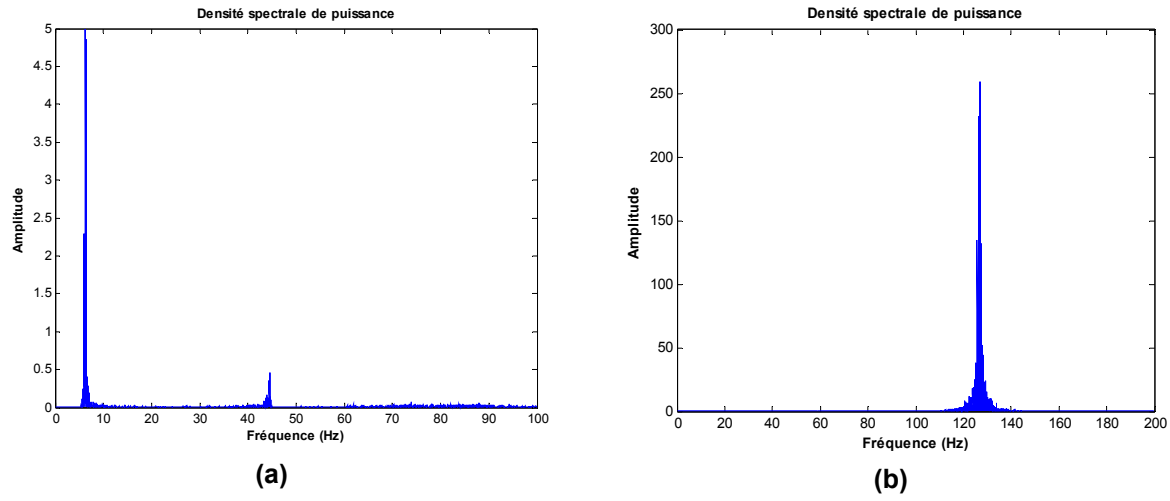


Figure 4.15 - Diagrammes de Bode des 4 FPB de type Butterworth utilisés (a) Bande passante entre 0 et 100 Hz (b) Bande passante entre 100 et 200 Hz (c) Bande passante entre 200 et 300 Hz (d) Bande passante entre 350 et 550 Hz.



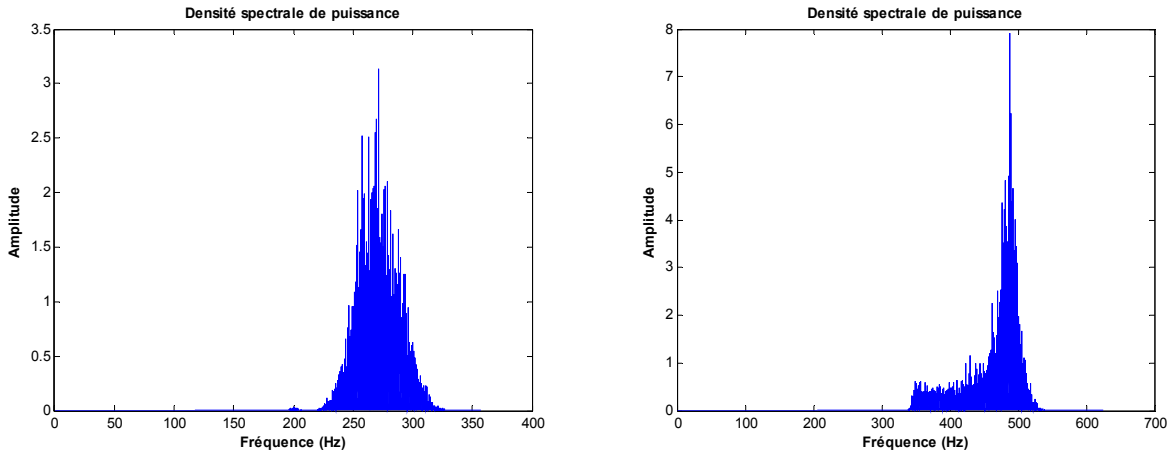


Figure 4.16 - Densités spectrales de puissance des 4 réponses filtrées obtenues à partir d'une réponse simulée.

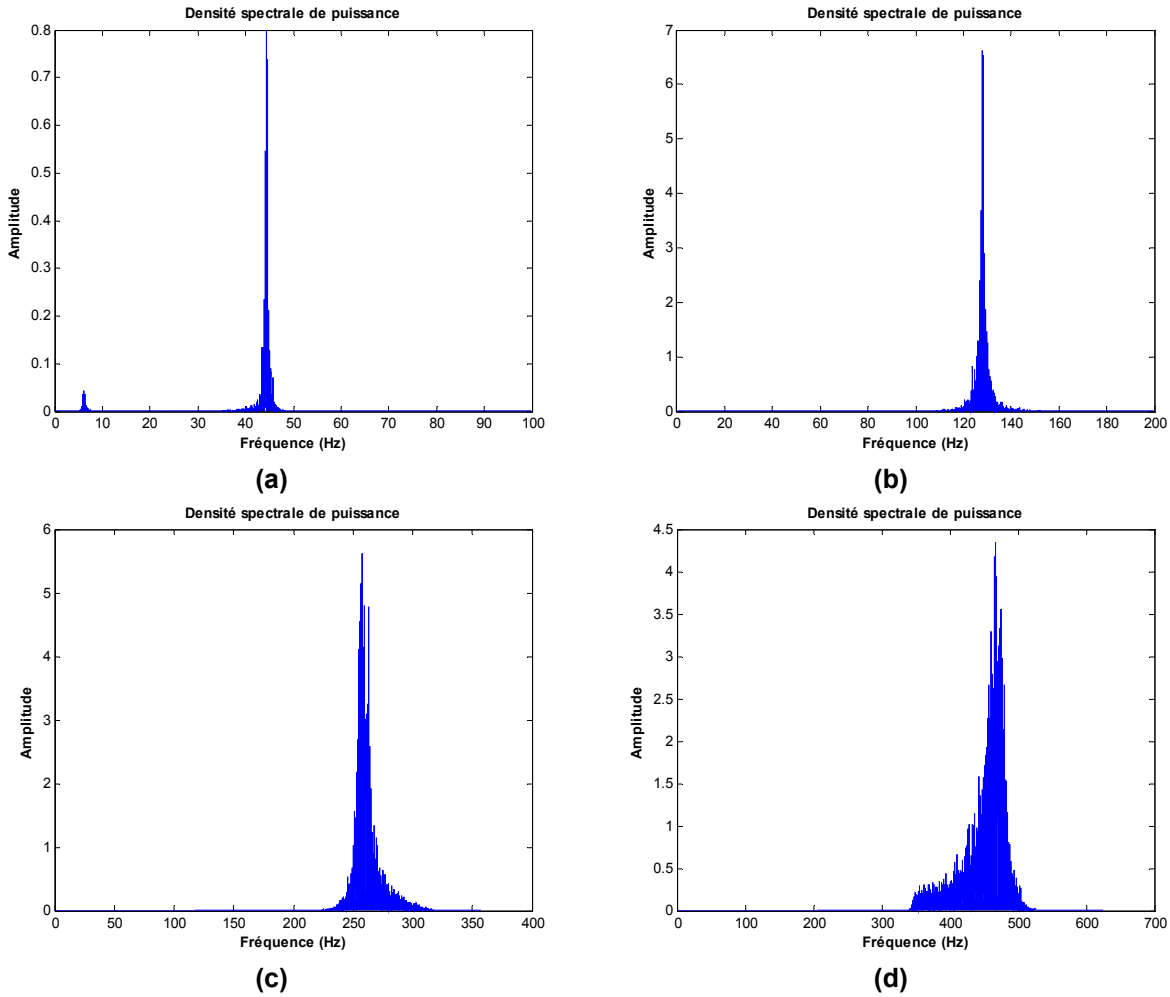


Figure 4.17 - Densités spectrales de puissance des 4 réponses filtrées obtenues à partir d'une réponse mesurée.

Afin de générer des matrices de parité, l'ordre de troncature a été choisi égal à 4 pour la première sous-bande et 2 pour les autres sous-bandes. Les matrices d'observabilité ont été calculées pour chacune des

réponses filtrées de toutes les réponses, mesurées ou simulées. Les vecteurs de résidu sont générés par la multiplication de ces matrices d'observabilité par les matrices de parité. On obtient 4 vecteurs de résidu pour chaque réponse mesurée ou simulée. La concaténation de ces vecteurs de résidu dans un seul vecteur de forme (4.26) donne le vecteur d'entrée de RNA. L'ensemble de formes $\mathfrak{P}$se compose de ces 5250 vecteurs d'entrées simulés et 50 vecteurs d'entrées mesurés. Chaque vecteur dispose de 5 composantes.

La Figure 4.18 montre les premières et les cinquièmes composantes des 25 vecteurs de résidu. Cinq échantillons aléatoires ont été choisis à partir des mesures correspondantes de la structure saine et des mesures correspondantes au quatre cas d'endommagement. On voit que ces composantes de vecteurs résidu dépendent à la fois du signal d'excitation et du type de défaut. De plus les deux composantes sont sensibles à différents endommagements et leurs comportements présentent des dissemblances évidentes, ce qui est très utile pour la localisation des endommagements.

4.7.3 - Localisation par réseau des neurones artificiels

Un perceptron multicouche ayant une couche d'entrée, une couche cachée et une couche de sortie, a été utilisé pour classer les vecteurs de résidu. L'objectif est de classer un vecteur dans une des 5 catégories suivantes :

- *Catégorie 1 - le résidu appartient à la structure endommagée de cas 1 (C1) ;*
- *Catégorie 2 - le résidu appartient à la structure endommagée de cas 2 (C2) ;*
- *Catégorie 3 - le résidu appartient à la structure endommagée de cas 3 (C3) ;*
- *Catégorie 4 - le résidu appartient à la structure endommagée de cas 4 (C4) ;*
- *Catégorie 5 - le résidu appartient à la structure saine (CS).*

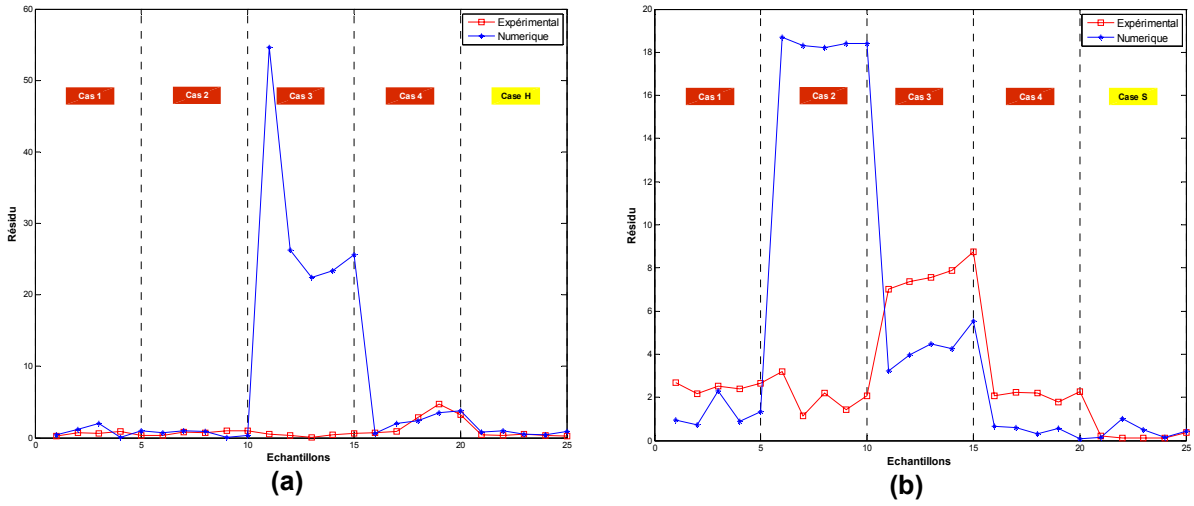


Figure 4.18 - Composantes du vecteur de résidus numériques et expérimentaux (a) 1er composante (b) 2ème composante.

Comme les vecteurs de résidus ont 5 éléments, le nombre de nœuds de la couche d'entrée est fixé à 5. La couche de sortie a 5 nœuds, un pour chaque catégorie. Après avoir effectué plusieurs essais, le nombre de nœuds de la couche cachée a été fixé à 20.

Nous avons utilisé la méthode du gradient avec un pas d'apprentissage adaptatif et une validation croisée pour l'apprentissage du réseau. La fonction coût estime l'erreur quadratique moyenne entre la sortie désirée et la sortie du réseau. L'algorithme de rétro-propagation est utilisé pour propager l'erreur calculée à la sortie du réseau, en arrière et à travers les couches internes. Les données des formes $\mathfrak{P}$ générées par simulation sont réparties en 3 sous-ensembles : *données d'apprentissage, données de validation croisée et données de test*. Les données d'apprentissage possèdent 3350 échantillons et sont utilisées pour l'apprentissage du réseau. Les données de validation croisée possèdent 1115 échantillons et les données de test possèdent 785 échantillons.

L'évaluation du réseau sur des ensembles de données d'apprentissage et de tests a abouti à un score moyen respectivement de 89.91% et 88.03%. Les matrices de confusion correspondantes sont résumées respectivement dans le Tableau 4.5 et le Tableau 4.6. Ces matrices de confusion montrent que le RNA est capable de détecter les endommagements, à la fois sur les données d'apprentissage et les données de test avec un taux de succès de 95.2% et 96.8%. Les cas de non-détection sont inférieurs à 1.5%. La performance du RNA a été la plus mauvaise pour le cas 1 avec un taux de réussite de 67.5%. Cette performance a été la meilleure pour localiser des endommagements du cas 4 avec un taux de réussite de 94.3%. Sur les données expérimentales de test, le RNA a abouti au score moyen de 64% (Tableau 4.7). Il n'y a eu aucune fausse alarme ou de non-détection. Les endommagements de cas 1 ont été parfaitement localisés tandis que ceux de cas 2 et 4 ont été localisés avec un score de 60%. La localisation des endommagements du cas 3 n'a pas été atteinte à cause des erreurs de modélisation en simulant l'augmentation de masse à la troisième zone de poutre.

	C1	C2	C3	C4	CS	SCORE
C1	495	95	69	8	3	73.8%
C2	27	633	10	0	0	94.4%
C3	44	11	614	1	0	91.6%
C4	1	0	37	632	0	94.4%
CS	20	0	3	9	638	95.2%

Tableau 4.5 - Matrice de confusion obtenue après classification des données d'apprentissage.

	C1	C2	C3	C4	CS	SCORE
C1	106	19	24	6	2	67,5%
C2	5	150	2	0	0	95,5%
C3	14	6	137	0	0	87,2%
C4	0	0	11	146	0	93,0%
CS	4	0	0	1	152	96,8%

Tableau 4.6 - Matrice de confusion obtenue après classification des données de test numériques.

	C1	C2	C3	C4	CS	SCORE
C1	10	0	0	0	0	100%
C2	4	6	0	0	0	60%
C3	0	10	0	0	0	0%
C4	0	0	4	6	0	60%
CS	0	0	0	0	10	100%

Tableau 4.7 - Matrice de confusion obtenue après classification des données de test expérimentales.

4.8 - Etude de cas – Identification des endommagements d'une plaque

4.8.1 - Description du dispositif

Nous avons conçu un nouveau dispositif (Annexe). Ce dispositif se compose de plusieurs plaques identiques. Chaque plaque est constituée d'une tôle en alliage d'aluminium. Elles sont suspendues en position verticale sur le banc d'essais. Les dimensions des plaques sont sélectionnées à partir d'une analyse modale des plaques et en utilisant ces différentes dimensions. L'objectif principal consiste à disposer d'une structure modulable dans laquelle différents types d'endommagements pourraient être introduits.

Chaque plaque est équipée de 3 céramiques piézo-électriques de types SONOX P53 de chez CeramTec©. Ces céramiques sont disposées sur une des surfaces de la plaque. Les positions de ses capteurs ont été déterminées à partir d'une analyse de courbure de flexion de la plaque. Les céramiques ont été placées la où les courbures de flexion des 7 premiers modes sont maximales. Ces céramiques piézo-électriques peuvent être indifféremment utilisées comme actionneurs ou capteurs, ce qui permet une diversité de configurations.

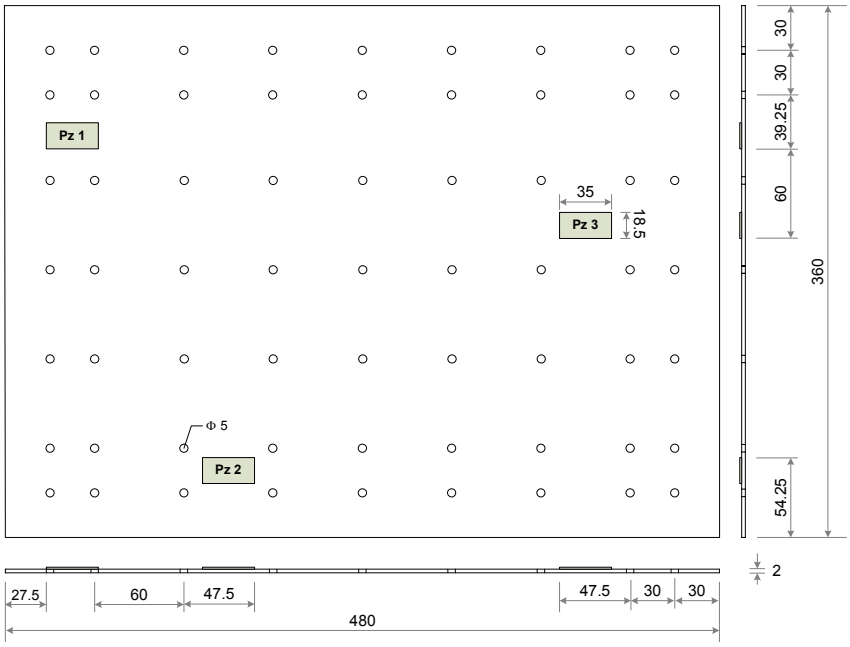


Figure 4.19 - Dimensions de la plaque.

Les dimensions d'une plaque, la disposition des piézo-électriques et leur numérotation sont présentées sur la Figure 4.19.

Les propriétés physiques d'une plaque et des pastilles piézo-électriques sont les suivantes :

- *la masse volumique de la plaque* $\rho_P = 2770\ Kg.m^{-3}$ *;*
- *le module d'Young de la plaque* $E_P = 73.1\ GPa$ *;*
- *la masse volumique des pastilles piézo-électriques* $\rho_{pz} = 7830\ Kg.m^{-3}$ *;*
- *le module d'Young des pastilles piézo-électriques* $E_{pz} = 153\ GPa$ *;*
- *les coefficients de couplage piézo-électrique :*

$$d_{31} = 680 \times 10^{-12}\ C/N$$
$$d_{33} = 0.275 \times 10^{-12}\ C/N$$
$$d_{15} = 770 \times 10^{-12}\ C/N$$

4.8.2 - Objectif

L'objectif de cette étude consiste à détecter et à localiser une fissure dans une plaque, en semi-temps-réel, en utilisant uniquement les mesures issues des capteurs piézo-électriques. Pour simplifier le problème, nous supposons que la fissure ne peut apparaître que dans trois zones indiquées à la Figure 4.20.

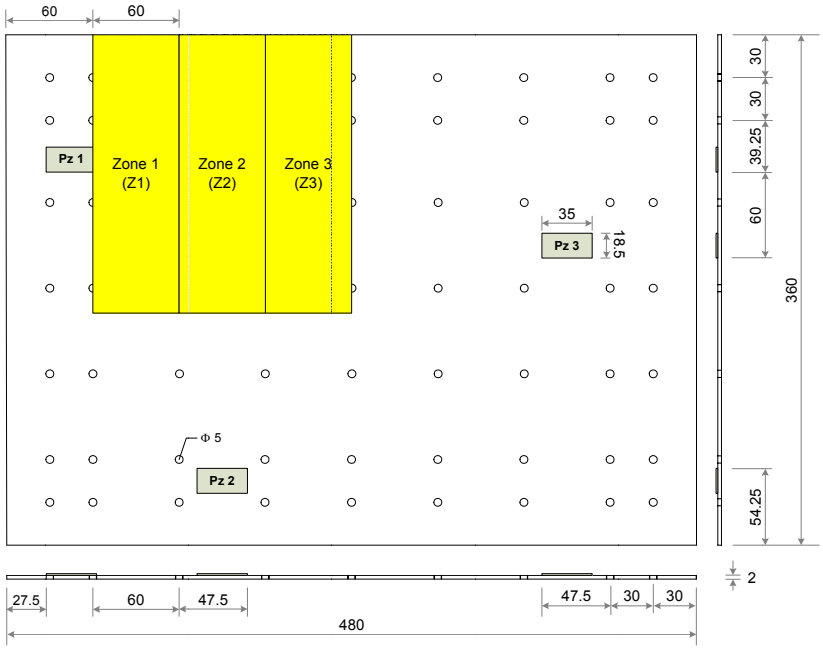


Figure 4.20 - Dimensions de la plaque et zones d'endommagements.

Un endommagement à été introduit sur une des plaques réelles. L'endommagement introduit correspond à une fissure de 140 mm à une distance de 150 mm du bord gauche (Zone 2). Cette plaque est identique à la plaque saine par rapport aux matériaux, aux dimensions et à l'emplacement des capteurs. La photo d'une plaque saine et d'une plaque endommagée sont illustrées sur la Figure 4.21. La céramique piézo-électrique 1 est employée comme actionneur et les deux autres sont utilisées comme capteurs.

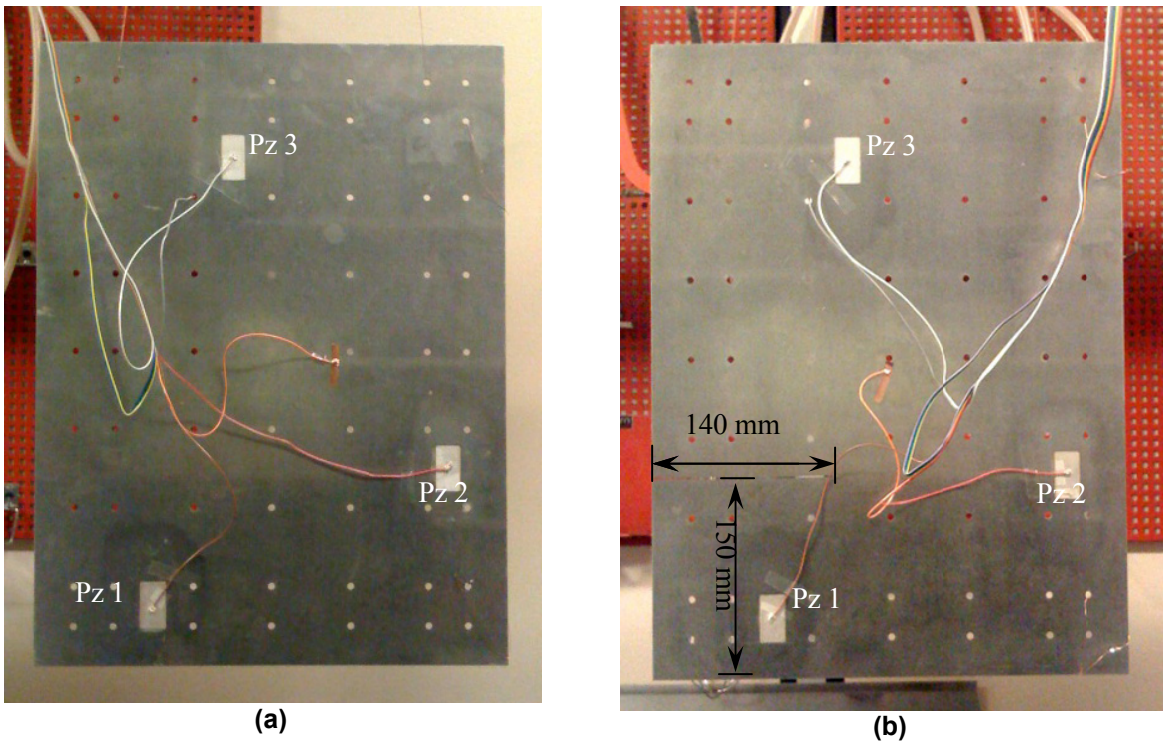


Figure 4.21 - Les photos des plaques (a) une plaque saine (b) une plaque endommagée.

4.8.3 - Identification de la plaque saine

La procédure d'identification expliquée dans la § 2.5.2 à été utilisée pour identifier les gains de la plaque saine. Les amplificateurs utilisés sont identiques à ceux de la poutre Mais la carte dSpace© est plus performante. Elle permet un nombre plus important d'entrées et de sorties et une fréquence d'échantillonnage plus élevée.

La Figure 4.22 présente le diagramme de Bode en amplitude pour le chemin 1-2 et 1-3. On appelle chemin 1-2 le transfert entre l'actionneur piézo-électrique 1 et le capteur piézo-électrique 2. Ces courbes de Bode montrent sur la plage de fréquences [0 – 450 Hz], les seize premiers modes de vibration d'une plaque saine. Le Tableau 4.8 présente les fréquences propres identifiées de la plaque saine.

Mode →	**1er**	**2ème**	**3ème**	**4ème**	**5ème**	**6ème**	**7ème**	**8ème**
Fréquences (Hz)	38.55	45.65	84.2	90.55	110.8	131.6	172.2	182.0
Mode →	**9ème**	**10ème**	**11ème**	**12ème**	**13ème**	**14ème**	**15ème**	**16ème**
Fréquences (Hz)	229.8	254.2	257.7	279.4	294.6	333.9	408.1	418.6

Tableau 4.8 - Seize premières fréquences propres identifiées de la plaque saine.

4.8.4 - Modélisation

Modèle EF de la plaque saine

Nous avons modélisé la plaque saine avec le logiciel de calcul *Structural Dynamics Toolbox* (SDT) [Balmès *et al.,* 2009] de Matlab©. Cette plaque est en configuration libre-libre et a été modélisée avec 1062 éléments plaques triangulaires (de types TRIA3). La modélisation mécanique des céramiques piézo-électriques fait intervenir 18 quadrilatères (de type QUAD4) par pastille. Ils sont localisés sur les nœuds du maillage correspondant aux contours des céramiques et sont décalés par rapport au plan moyen

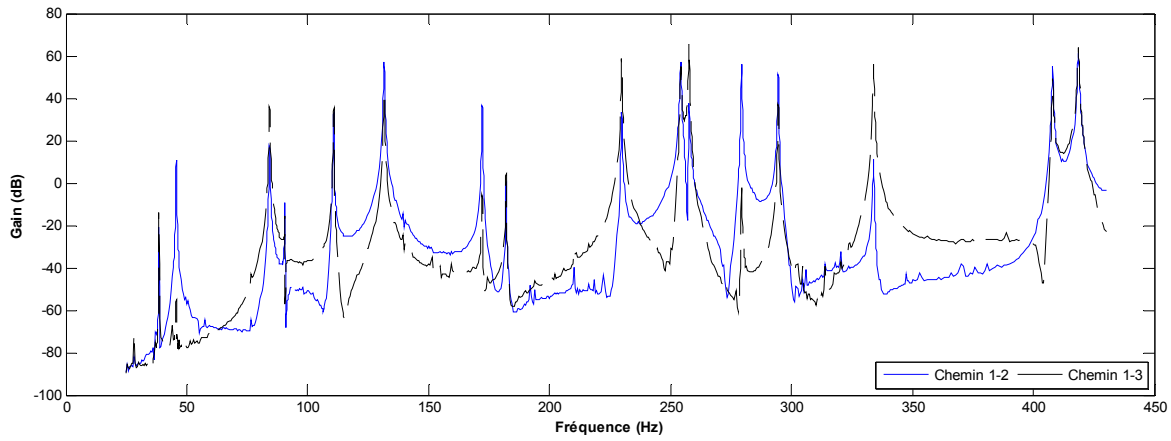
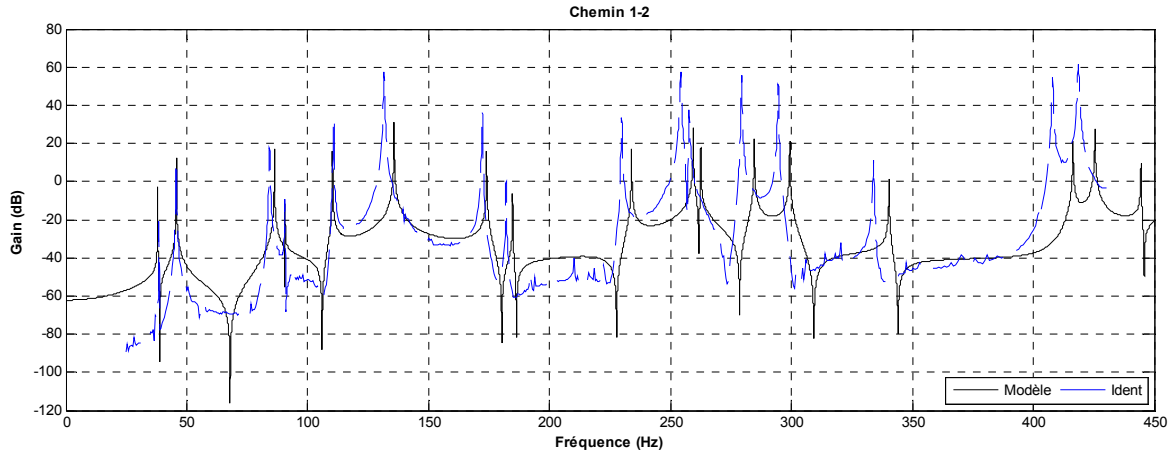


Figure 4.22 - Relevés expérimentaux des gains pour les chemins 1-2 et 1-3.

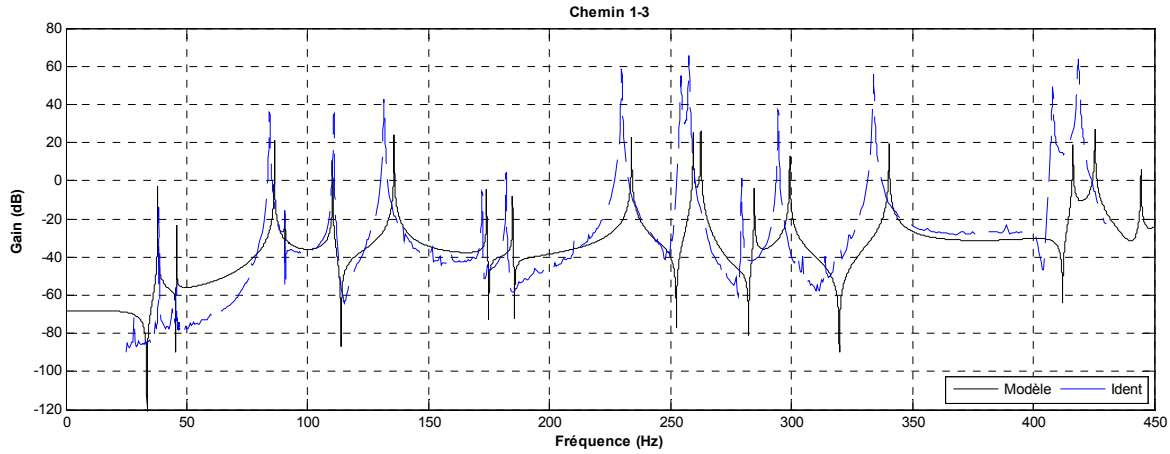
suivant l'épaisseur par des « offsets » d'une valeur correspondant à la demi-épaisseur de la structure. Ce qui conduit à un modèle à 4810 degrés de liberté.

Le modèle EF complet permet d'obtenir les fréquences propres de la structure ainsi que les réponses fréquentielles. Nous illustrons sur la Figure 4.23, la réponse fréquentielle du chemin 1-2 et 1-3 de la plaque saine.

Le Tableau 4.9 compare les fréquences propres identifiées et celles obtenues par ce modèle EF initial. Il y a une erreur maximale de 3.45% pour le $6^{ème}$ mode. De plus il y a 1.47% d'erreur pour le premier mode. Pour améliorer ces résultats, nous proposons de recaler les modèles.



(a)



(b)

Figure 4.23 – Comparaison des gains obtenus par le modèle EF initial et ceux mesurés. (a) Chemin 1-2 (b) Chemin 1-3.

Mode →		1er	2ème	3ème	4ème	5ème	6ème	7ème	8ème
Fréquences (Hz)	Identifiées	38.55	45.65	84.2	90.55	110.8	131.6	172.2	182.0
	Analytiques	37.893	45.75	86.38	90.70	110.3	136.2	173.98	184.72
Pourcentage d'erreur		1.47%	0.22%	2.59%	0.16%	0.45%	3.48%	1.03%	1.49%
Mode →		9ème	10ème	11ème	12ème	13ème	14ème	15ème	16ème
Fréquences (Hz)	Identifiées	229.8	254.2	257.7	279.4	294.6	333.9	408.1	418.6
	Analytiques	234.05	260.31	262.7	284.88	299.42	304.43	417.18	427.04
Pourcentage d'erreur		1.85%	2.40%	1.94%	1.96%	1.64%	1.96%	2.22%	2.02%

Tableau 4.9 - Comparaison des seize premières fréquences propres de la plaque obtenues par identification et par modèle EF.

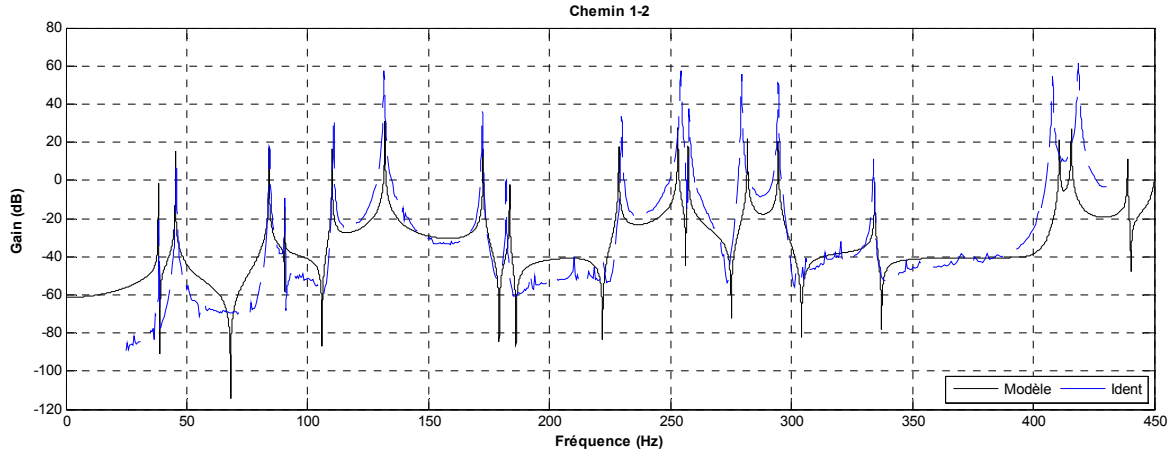
Recalage de modèle de la plaque saine

Nous avons effectué un recalage de ce premier modèle en considérant deux paramètres : le module d'Young et la masse volumique de la plaque. Dans un premier temps, nous mesurons la masse de la plaque, sans céramiques piézo-électriques. Puis nous calculons la densité de la plaque. Dans un second temps, la différence entre les seize premières fréquences propres mesurées et analytiques est minimisée par la mise à jour globale du modèle EF en variant le module d'Young. Nous avons employé la méthode de sensibilité propre [Sinha & Friswell, 2002] décrite dans § 2.5.4. Le module d'Young et la masse volumique retenus sont respectivement de 69.47 GPa et 2690 kg.m^3. La Figure 4.24 compare les gains obtenus par identification et ceux obtenus par le modèle EF recalé de la plaque saine.

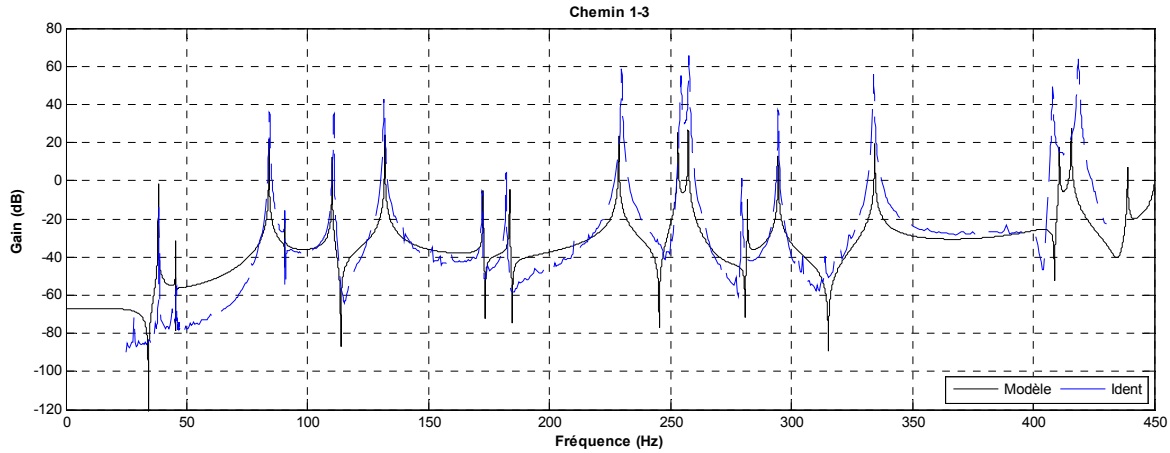
Les seize premières fréquences propres identifiées expérimentalement et de façon analytique à partir du modèle EF corrigé sont reproduites dans le Tableau 4.10. Par rapport aux fréquences identifiées, il y a une erreur maximale de 0.94% pour le 1er mode. Par la suite, nous utilisons ce modèle en supposant que le changement des fréquences propres mesurées, induites par des endommagements, est beaucoup plus important que cette erreur de modélisation. Tout endommagement provoquant une erreur inférieure ou égale à cette valeur ne pourra pas être identifié.

Mode →		1er	2ème	3ème	4ème	5ème	6ème	7ème	8ème
Fréquences (Hz)	Identifiées	38.55	45.65	84.2	90.55	110.8	131.6	172.2	182.0
	Analytiques	38.19	45.27	84.1	90.51	110.1	132.3	172.5	183.45
Pourcentage d'erreur		0.94%	0.84%	0.12%	0.05%	0.64%	0.53%	0.19%	0.80%
Mode →		9ème	10ème	11ème	12ème	13ème	14ème	15ème	16ème
Fréquences (Hz)	Identifiées	229.8	254.2	257.7	279.4	294.6	333.9	408.1	418.6
	Analytiques	228.75	253.95	257.56	282.01	294.66	334.47	411.43	417.3
Pourcentage d'erreur		0.46%	0.10%	0.05%	0.93%	0.02%	0.17%	0.82%	0.32%

Tableau 4.10 - Comparaison des seize premières fréquences propres de la plaque obtenues par identification et par modèle EF corrigé.



(a)



(b)

Figure 4.24 – Comparaison des gains obtenus par le modèle EF recalé et par expérimentations. (a) Chemin 1-2 (b) Chemin 1-3.

Modélisation de la plaque endommagée

Différents modèles de la plaque, ayant une seule fissure, ont été construits pour simuler le comportement de la structure endommagée. Les fissures sont placées dans 3 zones différentes et avec 5 longueurs différentes : 30 mm, 60 mm, 90 mm, 120 mm et 150 mm. Ce qui conduit à 15 différents modèles.

Ces modèles EF sont utilisés pour simuler la réponse temporelle de la plaque saine et endommagée. Le bruit blanc a été ajouté sur les réponses simulées, afin de se rapprocher des essais expérimentaux. Le rapport signal sur le bruit est de 10 dB. La base d'apprentissage et de test de RNA sont construites à partir de ces réponses simulées.

4.8.5 - Base de données

Afin de générer la base de données, des bruits blancs sont utilisés pour exciter les plaques. Les réponses temporelles de ces excitations sont simulées puis mesurées pendant 120s. La fréquence d'échantillonnage est de 10 kHz. Chacune de ces réponses a été normalisée pour que sa moyenne soit nulle et que sa variance soit unitaire. Comme le résidu dépend du signal d'excitation, pour chaque type d'endommagement (une fissure d'une certaine zone et d'une certaine longueur), les réponses ont été simulées pour 200 excitations différentes, générant 1000 échantillons de mesures pour chaque zone d'endommagement.

Quatre FPB ont été conçus avec des bandes passantes variant de 35 à 45 Hz, de 105 à 135 Hz, de 300 à 335 Hz et de 390 à 420 Hz. Ces bandes ont été choisies en fonction de l'analyse modale de la plaque saine et endommagée. Nous avons vu que le 2ème 6ème, 14ème et 16ème mode possède une énergie élevée, ce qui permet de les identifier plus précisément. De plus, ces modes sont sensibles à l'endommagement et sont toujours identifiables dans les quatre bandes passantes choisies.

Les filtres de Butterworth ont été utilisés pour le filtrage des mesures et leurs réponses en fréquence sont

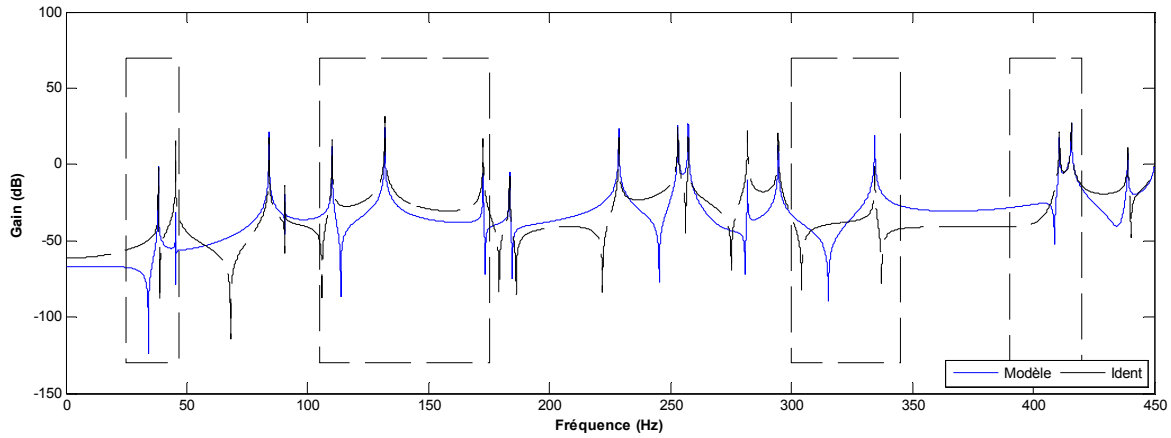


Figure 4.25 – Relevés des gains simulés pour les chemins 1-2 et 1-3 et les bandes passantes des quatre FPB.

affichées sur la Figure 4.26.

Chaque réponse mesurée ou simulée a été filtrée séparément en utilisant des FPB. En d'autres termes, on obtient 4 réponses filtrées pour chaque réponse simulée ou mesurée. Les densités spectrales de puissance des 4 réponses filtrées obtenues à partir d'une réponse simulée et d'une réponse mesurée sont respectivement présentées aux Figure 4.27 et Figure 4.28.

Les matrices d'observabilité ont été calculées pour chacune des ces réponses filtrées en fixant l'ordre de troncature à 2, pour les quatre sous-bandes. Dans chaque sous-bande, nous avons plus d'un mode. En revanche, nous avons considéré chaque sous-bande comme un système de premier ordre en fixant l'ordre de troncature à 2. Ce compromis a été fait pour limiter la taille du vecteur de résidus dont dépend la taille du réseau de neurones. De plus, l'apprentissage d'un large réseau exige une base de données riche. Le choix de l'ordre de troncature égal à 2 ne permet pas l'identification du mode d'énergie plus élevé et dans ce cas, les modes d'énergies élevés sont respectivement le 2ème, 6ème, 14ème, et 16ème mode.

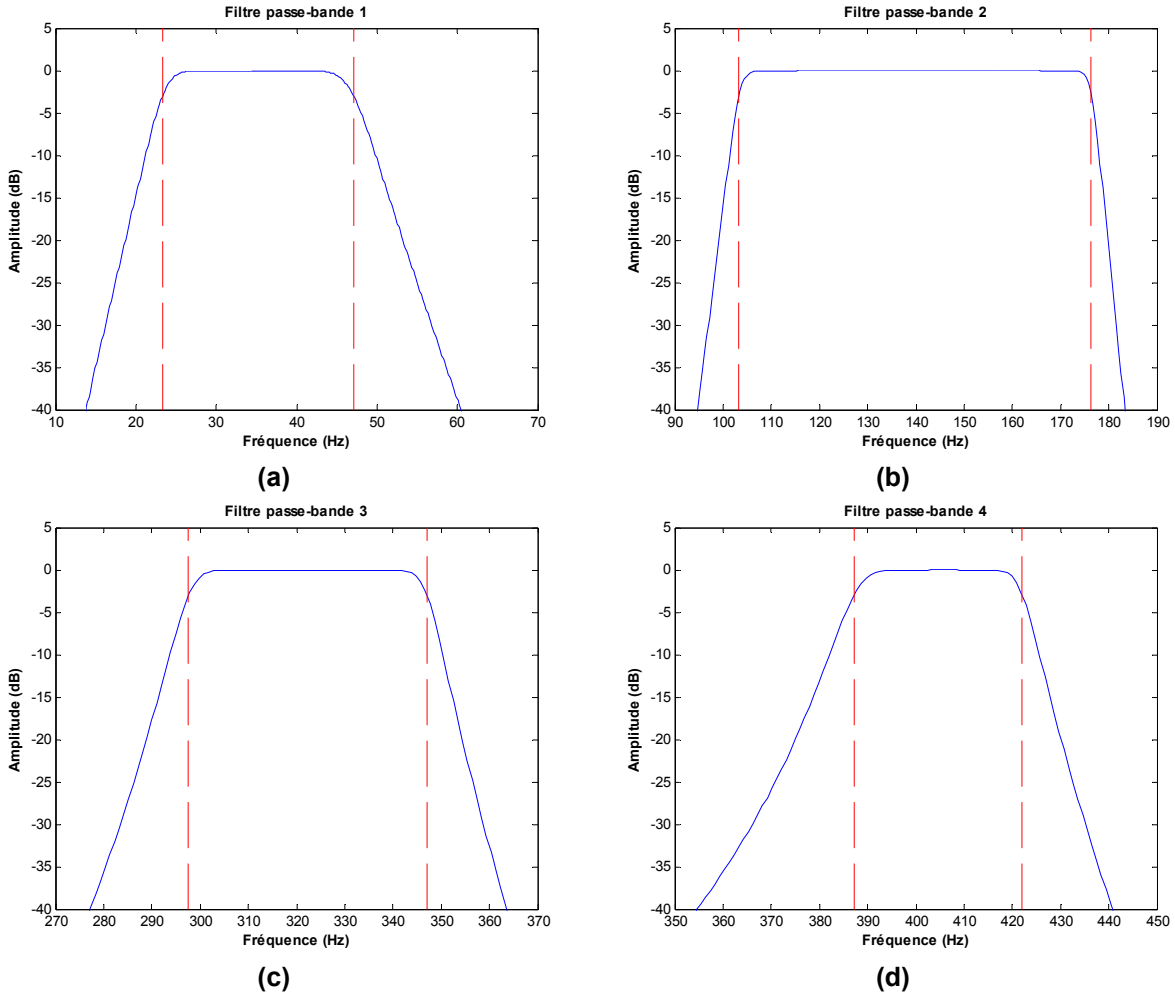


Figure 4.26 - Les diagrammes de Bode des 4 FPB de type Butterworth utilisés (a) Bande passante entre 25 et 45 Hz (b) Bande passante entre 105 et 175 Hz (c) Bande passante entre 300 et 345 Hz (d) Bande passante entre 390 et 420 Hz.

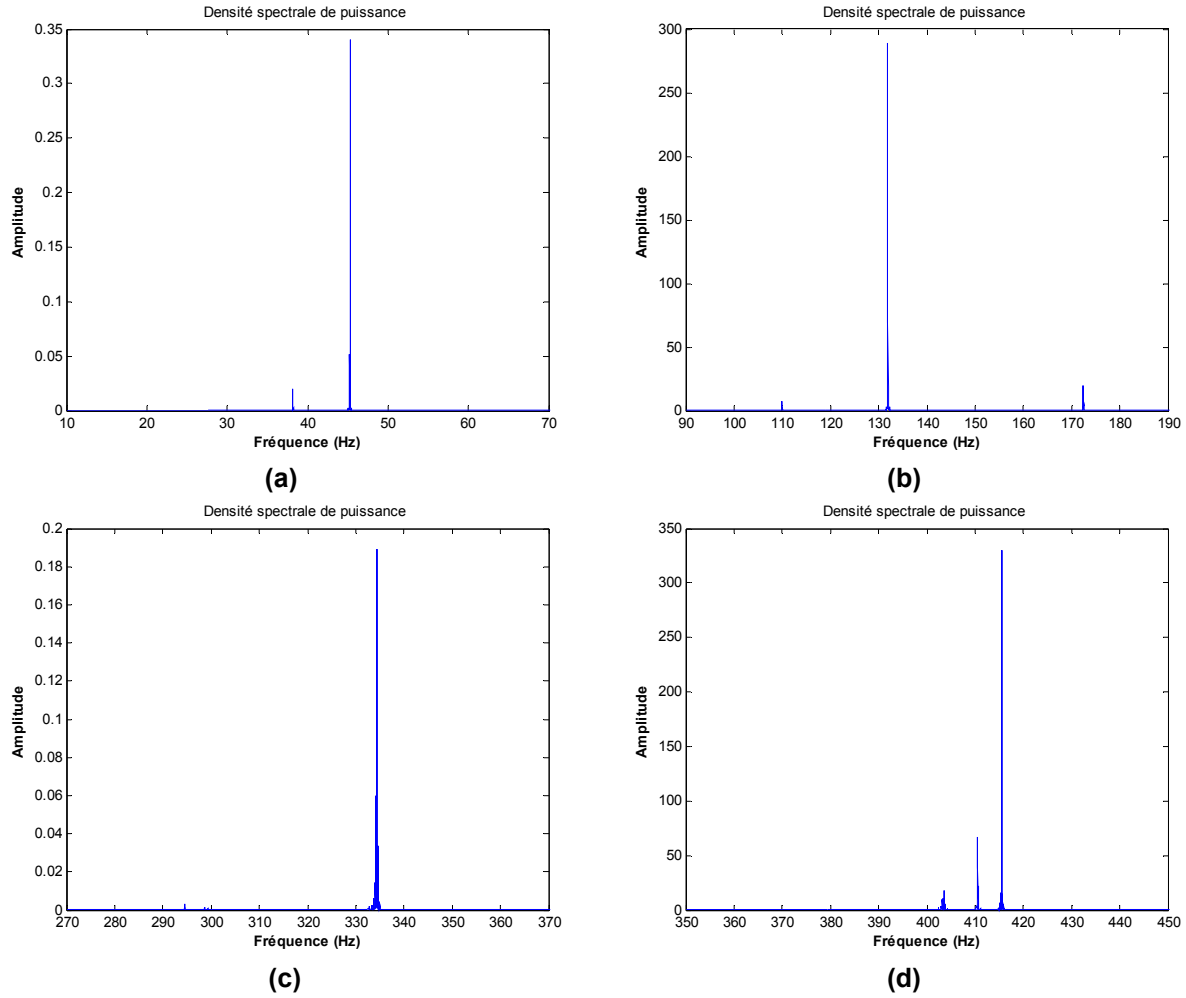
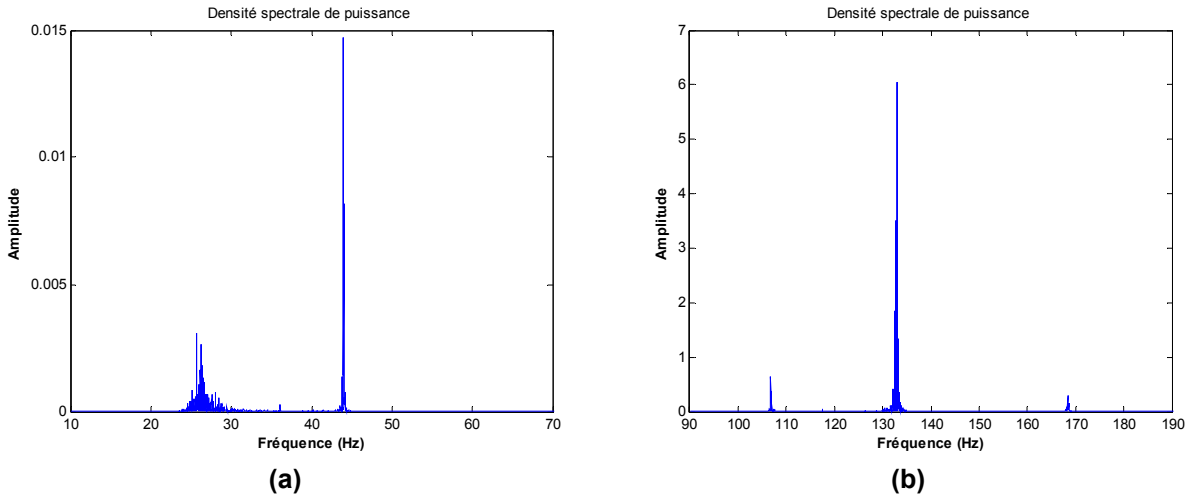


Figure 4.27 - Les densités spectrales de puissance des 4 réponses filtrées obtenues à partir d'une réponse simulée.



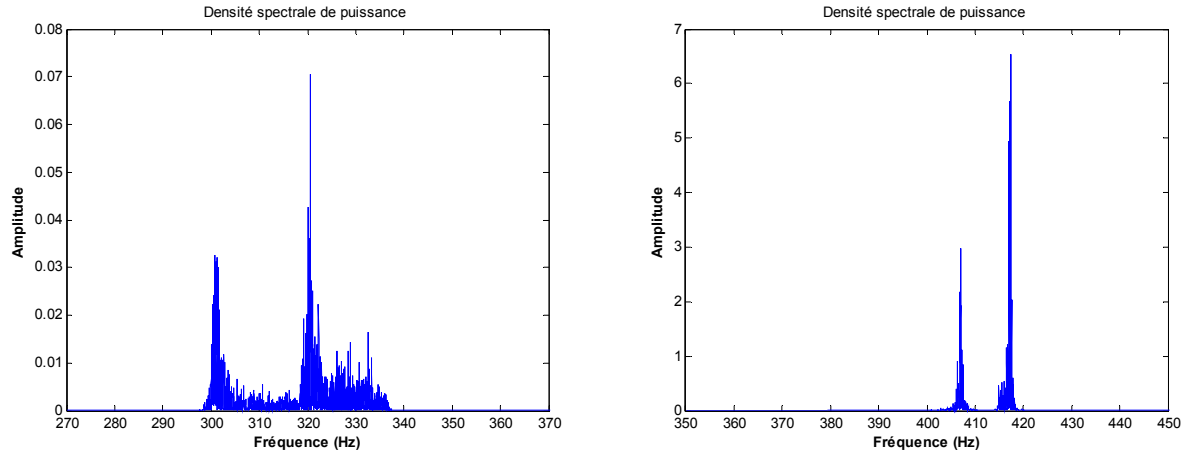


Figure 4.28 - Les densités spectrales de puissance des 4 réponses filtrées obtenues à partir d'une réponse mesurée.

Les noyaux gauches des matrices d'observabilité obtenus à partir des réponses filtrées de la structure de référence, sont employés comme des matrices de parité. Les vecteurs de résidus sont générés par le produit de ces matrices de parité et des matrices d'observabilité. On obtient 4 vecteurs de résidus pour chaque réponse simulée. La concaténation de ces vecteurs de résidus dans un seul vecteur de forme (4.26) donne le vecteur de résidus. Chacun des ces vecteurs a 4 composantes.

Une base de données similaire a été générée à partir des données mesurées expérimentalement, où 20 mesures ont été enregistrées à partir de la plaque saine et 20 à partir de la plaque endommagée. Ce qui nous donne un ensemble de formes $\mathfrak{P}$ qui se compose de 4000 vecteurs de résidus simulés et de 40 vecteurs de résidus mesurés.

4.8.6 - Localisation par réseau des neurones

Comme dans le cas de l'étude précédente, un perceptron multicouche ayant une couche d'entrées, une couche cachée et une couche de sorties, a été utilisé pour classer les vecteurs de résidus. L'objectif est de classer un vecteur dans une des 4 catégories suivantes :

- *Catégorie 1 - le résidu appartient à la plaque ayant une fissure dans la zone 1 (Z1) ;*
- *Catégorie 2 - le résidu appartient à la plaque ayant une fissure dans la zone 2 (Z2) ;*
- *Catégorie 3 - le résidu appartient à la plaque ayant une fissure dans la zone 3 (Z3) ;*
- *Catégorie 4 - le résidu appartient à la structure saine (H).*

Le nombre de nœuds de la couche d'entrées est fixé à 4 ; un nœud pour chaque élément du vecteurs de résidus. La couche de sortie a 4 nœuds, un pour chaque catégorie. Après avoir effectué plusieurs essais, le nombre de nœuds de la couche cachée est fixé à 10.

Nous avons utilisé la méthode du gradient avec un pas d'apprentissage adaptatif et exploitant la validation croisée pour l'apprentissage du réseau. La fonction coût estime l'erreur quadratique moyenne entre la sortie désirée et la sortie du réseau. L'algorithme de rétropropagation est utilisé pour propager l'erreur calculée à la sortie du réseau en arrière à travers les couches cachées.

Les données des formes P générées par simulations ont été divisées en 3 sous-ensembles : données d'apprentissage, données de validation croisée et données de test. Les données d'apprentissage possèdent 2552 échantillons utilisés pour l'apprentissage du réseau. Les données de validation croisée possèdent 848 échantillons et les données de test possèdent 600 échantillons.

L'évaluation du réseau sur des ensembles de données d'apprentissage et de test a abouti à un score moyen de 85.38%. Les matrices de confusion correspondantes sont respectivement résumées dans le Tableau 4.11 et le Tableau 4.12. Ces matrices de confusion montrent que le RNA est capable de détecter les endommagements, à la fois sur les données d'apprentissage et les données de test avec un taux de réussite de 99.7% et 96.8%. Le cas de non-détection a été inférieur à 1% et il n'y a eu aucune fausse alarme. La performance du RNA a été la plus mauvaise pour le cas 3 avec un taux de réussite de 69.91%. En revanche, elle a été la meilleure lors de la localisation des endommagements du cas 2 avec un taux de réussite de 91.3%. Sur les données expérimentales de test, le RNA a abouti au score moyen de 87.5%. Les endommagements ont été détectés dans 90% des cas. Le cas de non-détection a été de 10% et il n y a eu aucune fausse alarme. La fissure dans la zone 2 a été localisée dans 85% des cas.

	Z1	**Z2**	**Z3**	**H**	**SCORE**
Z1	512	2	119	5	80.25%
Z2	39	583	16	0	91.38%
Z3	15	175	446	2	69.91%
H	0	0	0	638	100.0%

Tableau 4.11 - Matrice de confusion obtenue après classification des données d'apprentissage.

	Z1	**Z2**	**Z3**	**H**	**SCORE**
Z1	118	1	28	3	78.67%
Z2	13	129	8	0	86.00%
Z3	6	47	97	0	64.67%
H	0	0	0	150	100.0%

Tableau 4.12 - Matrice de confusion obtenue après classification des données de test.

4.9 - Conclusions

La comparaison des indicateurs d'endommagements existants, basés sur les sous-espaces, en utilisant un modèle numérique simple, a montré que les indicateurs ϱ_i^a (4.13) et ϱ_i^m (4.17) sont plus sensibles à une variation de masse ou de raideur, que l'indicateur ϱ_i^s (4.12). Il a été également prouvé que ces indicateurs peuvent seulement être utilisés pour la détection des endommagements en utilisant des algorithmes basés sur la détection des valeurs aberrantes. En employant le même exemple, l'utilisation du nouveau vecteur

de résidus proposé, pour la localisation d'endommagement par un classifieur de type réseau neuronal, était également justifiée.

Les problèmes pratiques liés à l'application de la méthode proposée, dues au mauvais choix de l'ordre de troncature ou à la présence de modes erronés, ont été discutés et une méthodologie basée sur le filtrage passe-bande a été proposée. Les résultats numériques et expérimentaux obtenus sur une poutre permettent de valider la méthodologie proposée. Les résultats ont également démontré que le vecteur résidu proposé peut être utilisé pour la localisation des endommagements en semi-temps réel grâce aux capacités robustes de classification de RNA.

Comme la méthodologie proposée est basée sur un modèle, l'importance d'un modèle numérique calibré est fondamentale. Les résultats expérimentaux ont confirmé ce fait, où la localisation de certains types d'endommagement n'a pas été possible à cause des erreurs de modélisation, mettant ainsi en évidence les limites de la méthodologie.

Conclusions générales et perspectives

Nous avons présenté dans ce mémoire une méthode globale de surveillance de l'intégrité des structures (SHM) comprenant les étapes de modélisation, d'identification, d'extraction de caractéristiques et de développement d'un algorithme pour la localisation des endommagements. Nous avons en outre proposé un histogramme de stabilisation qui permet d'identifier les paramètres modaux automatiquement, sans connaissance a priori et sans interaction humaine (*Blind Modal Identification*). Enfin, ces propositions ont été validées sur différents dispositifs expérimentaux.

La surveillance de l'intégrité des structures est discipline transverse faisant appel aux outils de l'automatique, de la mécanique et du traitement du signal. Ainsi, après un rappel des principes fondamentaux de la mécanique et de l'automatique, un état de l'art a été présenté au chapitre 1. Cette étude bibliographique a mis en évidence la nécessité d'adopter une démarche structurée permettant d'intégrer tous les aspects de la surveillance de l'intégrité des structures. C'est donc l'objectif que nous nous étions fixé.

Au chapitre 2, nous avons proposé, étape par étape, une méthode globale de modélisation d'une structure active (la structure avec ces capteurs et actionneurs) dans l'optique de la mise en place d'un système de surveillance. Nous avons ainsi montré un exemple de modélisation des céramiques piézo-électriques en utilisant la méthode des éléments finis (EF).

Au chapitre 3, nous nous sommes intéressés à l'étape de l'identification modale en fonctionnement. Nous avons montré les difficultés pratiques et les limites des approches actuelles pour générer des identifications fiables pouvant être utilisées dans un algorithme SHM robuste. Nous avons alors proposé une nouvelle méthode permettant d'améliorer la qualité de l'estimation des paramètres modaux, et d'éliminer automatiquement les modes erronés (modes numériques). Pour l'estimation des paramètres modaux, nous avons choisi la méthode d'identification par sous-espaces. Les modes erronés sont éliminés en utilisant des mesures enregistrées pour différentes valeurs de la période d'échantillonnage. Les résultats ont été combinés sous forme d'un nouveau diagramme appelé histogramme de stabilisation. Les résultats expérimentaux montrent que la méthode proposée améliore non seulement l'estimation des paramètres modaux mais élimine aussi de façon automatique les modes erronés. Ces derniers étant néfastes pour toute procédure de détection et de localisation d'endommagements. Ces paramètres modaux identifiés ont été utilisés pour la localisation des endommagements en employant une première méthode basée sur le recalage du modèle EF. Nous avons conclu qu'en raison de la complexité des calculs ces méthodes sont difficiles à mettre en œuvre en temps réel.

L'étape de mise en place d'une procédure de surveillance de l'intégrité a été étudiée au chapitre 4. Dans le but d'élaborer une approche SHM basée sur la reconnaissance des formes (Réseaux de Neurones), nous avons été amenés à particulièrement étudier trois résidus basés sur les sous-espaces de la matrice de Hankel. En utilisant un exemple numérique simple, nous avons conclu que la localisation des endommagements par les approches de reconnaissance des formes grâce à l'emploi de ces résidus n'est pas très efficace. A partir de nos travaux sur l'identification par sous-espaces des paramètres modaux, nous avons proposé un nouveau vecteur de résidus non-paramétrique pour la localisation des endommagements. Ce vecteur est formé de plusieurs résidus qui sont associés au noyau gauche de la matrice d'observabilité du système. Il est généré en exploitant les matrices de parité calculées à partir de la méthode d'identification par sous-espaces. A travers le même exemple numérique, il a été montré que ce vecteur de résidus peut fournir des informations supplémentaires facilitant la localisation des endommagements par un réseau de neurones artificiels (RNA).

Ainsi, nous avons proposé, une méthodologie complète de localisation de l'endommagement basée sur les RNA et notre résidu non-paramétrique. L'apprentissage du RNA a été effectué à partir des données obtenues à travers la simulation de la structure par des modèles EF. Ce RNA a été employé pour localiser, en temps réel, des endommagements prédéfinis. L'efficacité de cet algorithme pour identifier des endommagements a été étudiée expérimentalement en localisant deux types de dommages : des fissures sur une plaque mince en aluminium et des changements de masse sur une poutre en composite. Ces deux structures sont munies de capteurs et actionneurs piézo-électriques. Elles ont par conséquence permis de mettre en application les différentes étapes de la démarche que nous avons proposée. Qui plus est, nous avons montré l'importance d'une méthodologie consistante intégrant les facteurs technologiques (pratiques) et les objectifs définis. Les résultats obtenus sont satisfaisants et permettent d'étendre l'application de notre méthodologie à des systèmes plus complexes.

La méthodologie proposée pour identifier les endommagements est basée sur le calcul matriciel robuste. Ce calcul consiste à estimer des matrices d'observabilité en utilisant la méthode d'identification par sous-espaces, à générer des vecteurs résidus en employant les matrices de parité et à classer ces vecteurs par un RNA. Cette méthode est particulièrement bien adaptée pour la détection et la localisation des endommagements en semi-temps réel sans aucune intervention humaine dans les diverses étapes intermédiaires. Toutefois, le coût initial hors ligne de la conception de ces systèmes reste élevé. Ce coût inclut, le développement des modèles mathématiques (par exemple, EF) précis de la structure saine et endommagée, l'analyse modale de la structure saine, la génération des bases de données d'apprentissage et les essais du RNA. La difficulté principale réside dans la modélisation des endommagements surtouts dans le cas de structure en composite où les endommagements sont très variés (délaminage, perte de masse, rupture de fibres, *etc*.) et difficile à caractériser par un modèle mathématique.

Un certain nombre de perspectives peuvent être envisagées pour la suite des travaux présentés dans ce mémoire. En vue de l'estimation des paramètres modaux par histogramme de stabilisation, différents paramètres doivent être fixés. Par exemple : les périodes d'échantillonnage des mesures, la résolution de l'intervalle de fréquence et les poids de chaque catégorie de mode. Ces paramètres sont couplés. En utilisant les mesures qui sont sous-échantillonnées, l'identification des modes d'ordre élevé est difficile à cause du nombre de modes erronés. Par conséquent, le poids de ces modes doit être inférieur au poids des modes d'ordre inférieur et vice versa pour les mesures échantillonnées à haute fréquence. De même, l'histogramme peut être construit en utilisant les tailles variables de l'intervalle de fréquence. Ce qui pourrait améliorer les résultats puisque les critères de stabilité reposent sur des taux de variations en pourcentage. L'influence de tous ces paramètres sur l'histogramme de stabilisation doit être encore plus approfondie et mieux caractérisée. Une méthode statistique de calcul du seuil peut être également élaborée. Le seuil dépend de la pondération et de l'énergie d'un mode.

Nous avons adopté une approche basée sur des modèles numériques pour l'identification des endommagements. L'un des inconvénients de cette approche est l'exigence de posséder un modèle précis de la structure. D'autre part, la disponibilité d'un modèle numérique fournit des informations supplémentaires utiles pour l'estimation de la sévérité des endommagements. Les résultats numériques montrent que le vecteur de résidus proposé dépend également de la sévérité des endommagements. En utilisant une base de données similaire à celle utilisée pour la localisation des endommagements, le RNA peut être employé pour classer les caractéristiques en fonction de la sévérité des endommagements. Il serait aussi intéressant de mettre en œuvre une approche similaire de l'estimation de la sévérité basée sur le RNA en utilisant le vecteur de résidus proposé.

Les paramètres environnementaux jouent un rôle important sur l'évaluation de l'état structurel d'un système. En particulier, la température est considérée comme une nuisance perturbatrice de la surveillance du système. En effet, les variations de température font que le système devient instationnaire. Ils peuvent alors provoquer des variations de mode interprétables comme des endommagements. En conséquence, l'un des problèmes est de surveiller l'intégrité du système tout en rejetant l'effet de la température. C'est-à-dire de générer des procédures SHM robustes aux variations de température. Ainsi, suivant notre approche par reconnaissance des formes, des modèles structurels simulant l'effet de la température sur la dynamique de la structure peuvent être développés. Il s'ensuit qu'en augmentant la base de données d'apprentissage par des échantillons représentant la variation du résidu induite par ces paramètres environnementaux, le RNA pourrait alors distinguer entre leurs effets et les endommagements.

L'approche par filtrage proposée, permet de choisir les modes qui sont sensibles aux endommagements. Grâce au filtrage, le problème du choix de l'ordre du modèle et le problème de modes erronés sont résolus. Le filtrage peut également améliorer les estimations de ces modes, puisque les effets des modes

dominants sont réduits. Cependant la conception d'un filtre passe-bande qui pourrait bien isoler les modes désirés, peut parfois s'avérée difficile. En effet, à cause des changements des propriétés physiques de la structure, de nouveaux modes peuvent apparaître. En outre, un mode désiré peut aussi quitter la plage d'un filtre passe-bande. Ce qui peut conduire à obtenir des estimations erronées dans cette sous-bande. L'information redondante présente dans le vecteur de résidus et la robustesse de RNA pourraient permettre de localiser correctement les endommagements. Cependant l'ensemble de ces facteurs doivent être pris en considération lors du choix des modes et la conception des filtres. Pour les types d'endommagement qui modifient les propriétés de la structure d'une manière progressive, comme la croissance des fissures de fatigue, ces problèmes pourraient être résolus en utilisant des filtres adaptatifs couplés avec des informations obtenues à partir de l'histogramme de stabilisation. Ainsi la bande passante des filtres pourrait être modifiée dynamiquement en fonction des informations modales obtenues à partir de l'histogramme de stabilisation.

En raison du manque des capteurs sur nos bancs d'essais, nous n'avons pas été en mesure d'intégrer le critère MAC (*Modal Assurance Criterion*) de la comparaison des formes de modes dans la définition de la stabilité des modes. Par conséquent nous n'avons pas testé expérimentalement si, après avoir intégré MAC, les modes numériques erronés restaient encore aussi stables que des modes physiques sur le diagramme de stabilisation. Puisque les formes des modes sont généralement difficiles à estimer, l'effet de MAC sur l'analyse de la stabilité des modes doit aussi être abordé. De même, nous avons effectué toutes les expériences de localisation des endommagements en utilisant des mesures issues d'un nombre limité de capteurs. L'effet de l'utilisation des données issues de plusieurs capteurs sur l'algorithme de localisation d'endommagement proposé doit être encore approfondi.

En conclusion, nous proposons les extensions suivantes :

- *L'analyse de sensibilité de la méthodologie proposée pour les différents types d'endommagements ;*
- *Le développement d'une méthode basée sur la méthodologie proposée pour estimer la sévérité des endommagements et pour éliminer l'effet de la température dans la surveillance de la structure ;*
- *L'élaboration de filtres adaptatifs et de modèles EF spécifiques pour tenir compte des variations de certains paramètres physiques de la structure ;*
- *L'introduction du critère MAC dans l'analyse da la stabilité des modes pour la génération de l'histogramme de stabilisation ;*
- *L'élaboration de la méthode de localisation pour des structures complexes 3D ;*
- *L'évaluation de la méthode proposée par comparaison avec des autres méthodes existantes dans la littérature comme les approches de type ACP (analyse en composante principales).*

Références Bibliographiques

[Abdel Wahab *et al.*, 1999] - Abdel Wahab, M., De Roeck, G., and Peeters, B. (1999). Parameterization of damage in reinforced concrete structures using model updating. *Journal of Sound and Vibration*, 228(4):717–730.

[Aimin *et al.*, 2005] - Aimin, Y., Golinval, J., and Marin, F. (2005). Fault detection algorithm based on null-space analysis for on-line structural health monitoring. In *Proceedings of 23 IMAC*, Orlando, FL. Society for Experimental mechanics.

[Akaike, 1974] - Akaike, H. (1974). Stochastic theory of minimal realization. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-19(6):667–674.

[Akaike, 1975] - Akaike, H. (1975). Markovian representation of stochastic processes by canonical variables. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 13(1):162–173.

[Aldraihem *et al.*, 1997] - Aldraihem, O., Wetherhold, R., and Singh, T. (1997). Distributed control of laminated beams: Timoshenko theory vs. euler-bernoulli theory. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 8:149–157.

[Allemang & Brown, 1982] - Allemang, R. and Brown, D. (1982). Correlation coefficient for modal vector analysis. In *Proceedings of the International Modal Analysis Conference & Exhibit*, pages 110–116.

[Alvandi, 2003] - Alvandi, A. (2003). *Contribution a l'utilisation pratique de l'evaluation dynamique pour la detection d'endommagements dans les ponts.* PhD thesis, Ecole Nationale des Ponts et Chausses, France.

[Atalla & Inman, 1998] - Atalla, M. and Inman, D. (1998). On model updating using neural networks. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 12(1):135–161.

[Baker *et al.*, 2009] - Baker, T., Bordick, C., Ferrie, M., Augustin, M., and Wilson, H. (2009). Operations support and sustainment technology program, providing technology for condition based maintenance. In Chang, F.-K., editor, *Proceedings of 7th International Workshop on Structural Health Monitoring, IWSHM 2009, Stanford, USA*, volume 2, pages 1248–1255.

[Balmès *et al.*, 2009] - Balmès, E., Bianchi, J., and Leclère, J. M. (2009). Structural dynamics toolbox user's guide version 6.1. Technical report, SD Tools, Paris, France.

[Baruch, 1997] - Baruch, M. (1997). Modal data are insufficient for identification of both mass and stiffness matrices. *AIAA Journal*, 35(11):1797–1798.

[Baruch & Bar Itzhack, 1978] - Baruch, M. and Bar Itzhack, I. Y. (1978). Optimal weighted orthogonalization of measured modes. *AIAA Journal*, 16(4):346–351.

[Basseville, 1998] - Basseville, M. (1998). On-board component fault detection and isolation using the statistical local approach. *Automatica*, 34(11):1391–1415.

[Basseville *et al.*, 2000] - Basseville, M., Abdelghani, M., and Benveniste, A. (2000). Subspace-based fault detection algorithms for vibration monitoring. *Automatica*, 36(1):101–109.

[Basseville *et al.*, 2001] - Basseville, M., Benveniste, A., Goursat, M., Hermans, L., Mevel, L., and Van Der Auweraer, H. (2001). Output-only subspace-based structural identification: from theory to industrial testing practice. *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, 4:668–676.

[Basseville *et al.*, 2004] - Basseville, M., Mevel, L., and Goursat, M. (2004). Statistical model-based damage detection and localization: subspace-based residuals and damage-to-noise sensitivity ratios. *Journal of Sound and Vibration*, 275(3-5):769–794.

[Batoz & Dhatt, 1990] - Batoz, P. and Dhatt, G. (1990). *Modélisation des structures par éléments finis*. Hermès, Paris.

[Bauer & Ljung, 2002] - Bauer, D. and Ljung, L. (2002). Some facts about the choice of the weighting matrices in larimore type of subspace algorithms. *Automatica*, 38(5):763–773.

[Benveniste & Fuchs, 1985] - Benveniste, A. and Fuchs, J. (1985). Single sample modal identification of a nonstationary stochastic process. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-30(1):66–74.

[Berman, 2000] - Berman, A. (2000). Inherently incomplete finite element model and its effects on model updating. *AIAA journal*, 38(11):2142–2146.

[Berman & Nagy, 1983] - Berman, A. and Nagy, E. (1983). Improvement of a large analytical model using test data. *AIAA journal*, 21(8):1168–1173.

[Bernal, 2002] - Bernal, D. (2002). Load vectors for damage localization. *Journal of Engineering Mechanics*, 128(1):7–14.

[Bishop, 1996] - Bishop, C. (1996). *Neural Networks for Pattern Recognition*. Oxford University Press, USA, 1st edition.

[Bruant, 1999] - Bruant, I. (1999). *Positionnement optimal d'actionneurs et de capteurs en contrôle actif des vibrations de structures : application à des poutres équipées d'éléments piézo-électriques*. PhD thesis, L'Ecole Normale Supérieure de Cachan, France.

[Carden & Fanning, 2004] - Carden, E. and Fanning, P. (2004). Vibration based condition monitoring: A review. *Structural Health Monitoring*, 3(4):355–377.

[Casas & Aparicio, 1994] - Casas, J. and Aparicio, A. (1994). Structural damage identification from dynamic-test data. *Journal of structural engineering New York, N.Y.*, 120(8):2437–2449.

[Cauberghe *et al.*, 2005] - Cauberghe, B., Guillaume, P., Verboven, P., Vanlanduit, S., and Parloo, E. (2005). On the influence of the parameter constraint on the stability of the poles and the discrimination capabilities of the stabilisation diagrams. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 19(5):989–1014.

[Cha & Tuck-Lee, 2000] - Cha, P. and Tuck-Lee, J. (2000). Updating structural system parameters using frequency response data. *Journal of Engineering Mechanics*, 126(12):1240–1246.

[Chance *et al.*, 1994] - Chance, J., Tomlinson, J., and Worden, K. (1994). A simplified approach to the numerical and experimental modelling of the dynamics of a cracked beam. In *12th International Modal Analysis Conference*, pages 778–785.

[Chen & Shen, 1997] - Chen, C. and Shen, Y. (1997). Optimal control of active structures with piezoelectric modal sensors and actuators. *Smart Materials and Structures*, 6(4):403–409.

[Chen *et al.*, 2003] - Chen, Q., Chan, Y., and Worden, K. (2003). Structural fault diagnosis and isolation using neural networks based on response-only data. *Computers and Structures*, 81(22-23):2165–2172.

[Chen *et al.*, 1997] - Chen, S., Wang, Z., and Liu, X. (1997). Active vibration control and suppression for intelligent structures. *Journal of Sound and Vibration*, 200(2):167–177.

[Collet, 1996] - Collet, M. (1996). *Contrôle actif des structures par couches piézo-électriques*. PhD thesis, L'Ecole Centrale de Lyon, France.

[Cornwell *et al.*, 1999] - Cornwell, P., Doebling, S., and Farrar, C. (1999). Application of the strain energy damage detection method to plate-like structures. *Journal of Sound and Vibration*, 224(2):359–374.

[Creed, 1988] - Creed, S. (1988). *Structural assessment - The use of full scale and large scale testing*, chapter Assessment of large engineering structures using data collected during in-service loading, pages 55–62. Butterworth Heinemann, United Kingdom.

[De Boe *et al.*, 2003a] - De Boe, P., Yan, A., and Golinval, J. (2003a). Principal componenet analysis of piezo-sensor array for damage localization. *Structural Health Monitoring*, 2:137–144.

[De Boe *et al.*, 2003b] - De Boe, P., Yan, A., and Golinval, J. (2003b). Substructure damage detection by principal componenet analysis : application to environmental vibration testing. In *Structural Health Monitoring 2003*, pages 642–649, Stanford, CA, USA.

[De Cock *et al.*, 2002] - De Cock, K., Peeters, B., Vecchio, A., and Van Der Auweraer, H. (2002). Subspace system identification for mechanical engineering. In *International Conference on Noise & Vibration Engineering*, pages 1333–1352.

[De Moor *et al.*, 1988] - De Moor, B., Moonen, M., Vandenberghe, L., and Vandewalle, J. (1988). Identification of linear state space models with svd using conanical correlation analysis. *Singular Value Decomposition and Signal Processing*, pages 161–169.

[Doebling *et al.*, 1998] - Doebling, S., Farrar, C., and Prime, M. (1998). A summary review of vibration-based damage identification methods. *The Shock and Vibration Digest*, 30(2):91–105.

[Doebling *et al.*, 1996] - Doebling, S., Farrar, C., Prime, M., and Shevitz, D. (1996). Damage identification and health monitoring of structural and mechanical systems for changes in their vibration characteristics : A literature review. Technical Report LA-13070-MS, Los Alamos National Laboratory, USA.

[Dreyfus *et al.*, 2004] - Dreyfus, G., Martinez, J., Samuelides, M., Gordon, M., Badran, F., Thiria, S., and Hérault, L. (2004). *Réseaux de neurones : Méthodologie et applications*. 1ère edition.

[Ewins, 2001] - Ewins, D. (2001). *Modal Testing: Theory, Practice and Application*. Mechanical Engineering Research Studies: Engineering Dynamics Series. Wiley, 2nd edition.

[Fan *et al.*, 2007] - Fan, J., Zhang, Z., and Hua, H. (2007). Data processing in subspace identification and modal parameter identification of an arch bridge. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 21(4):1674–1689.

[Fang *et al.*, 2005] - Fang, X., Luo, H., and Tang, J. (2005). Structural damage detection using neural network with learning rate improvement. *Computers and Structures*, 83(25-26):2150–2161.

[Farrar & Doebling, 1999] - Farrar, C. and Doebling, S. (1999). *Modal analysis and testing*, chapter Damage detection II: filed applications to large strcutres. Nato science series. Kluwer Academic Publisher, Dordrecht, Netherlands.

[Farrar *et al.*, 2001] - Farrar, C., Doebling, S., and Nix.D.A. (2001). Vibration-based structural damage identification. *Philosophical Transactions of the Royal Society: Mathematical, Physical & Engineering Sciences*, 359(1778):131–149.

[Fassois & Sakellariou, 2007] - Fassois, S. and Sakellariou, J. (2007). Time-series methods for fault detection and identification in vibrating structures. *Philosophical Transactions of the Royal Society: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 365(1851):411–448.

[Fausett, 1994] - Fausett, L. V. (1994). *Fundamentals of Neural Networks: Architectures, Algorithms And Applications*. Pearson Education, us edition.

[Friswell & Inman, 2000] - Friswell, M. and Inman, D. (2000). Sensor validation for smart structures. In *IMAC XVIII - 18th International modal analysis conference*, pages 483 – 489, San Antonio, TX, USA.

[Friswell & Mottershead, 1995] - Friswell, M. and Mottershead, J. (1995). *Finite element model updating in structural dynamics*. Kluwer Academic Publisher, Dordrecht, Netherlands, 1st edition.

[Friswell *et al.*, 1997] - Friswell, M., Penny, J., and Garvey, S. (1997). Parameter subset selection in damage location. *Inverse Problems in Engineering*, 5(3):189–215.

[Fritzen *et al.*, 1998] - Fritzen, C., Jennewein, D., and Kiefer, T. (1998). Damage detection based on model updating methods. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 12(1):163–186.

[Fritzen & Kiefer, 1992] - Fritzen, C. and Kiefer, T. (1992). Localization and correction of errors in finite-element-models based on experimental data. *Proceedings of the 17th International Seminar on Modal Analysis*, pages 1581–1596.

[Fritzen *et al.*, 1993] - Fritzen, C., Kiefer, T., and Haenisch, K. (1993). Schadenserkennung mit hilfe von fehlerlokalisationsverfahren. *Proceedings 4 Tagung ueber Dynamische Probleme - Modellierung und Wirklichkeit, Schriftenreihe des Curt-Risch-instituts*, pages 287–307.

[Fritzen *et al.*, 2003] - Fritzen, C., Mengelkamp, G., and Guemes, A. (2003). Elimination of temperature effects on the damage detection within a smart structure concept. In Chang, F., editor, *Proceedings of 6th International Workshop on Structural Health Monitoring, IWSHM 2003*, volume 2, Stanford, USA.

[Fritzen, 2009] - Fritzen, C.-P., K. P. (2009). Self-diagnosis of smart structures based on dynamical properties. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 23(6):1830–1845.

[Fugate *et al.*, 2001] - Fugate, M., Sohn, H., and Farrar, C. (2001). Vibration-based damage detection using statistical process control. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 15(4):707–721.

[Gawronski, 1998] - Gawronski, W. (1998). *Dynamics and control of structures - A modal approach*. Springer, 1st edition.

[Goethals *et al.*, 2004] - Goethals, I., Vanluyten, B., and De Moor, B. (2004). Reliable spurious mode rejection using self learning algorithms. In Sas, P. and Munck, M., editors, *Proceedings of the 2004 International Conference on Noise and Vibration Engineering, ISMA*, pages 991–1003, K.U. Leuven, Department of Electrical Engineering, Kasteelpark Arenberg 10, B-3001, Leuven, Belgium.

[Gola *et al.*, 2001] - Gola, M., Somà, A., and Botto, D. (2001). On theoretical limits of dynamic model updating using a sensitivity-based approach. *Journal of Sound and Vibration*, 244(4):583–595.

[Géradin, 1993] - Géradin, M. (1993). *Théorie des vibrations. Application à la dynamique des structures. Masson*. Masson, Paris.

[Gudmundson, 1982] - Gudmundson, P. (1982). Eigenfrequency changes of structures due to cracks, notches or other geometrical changes. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 30(5):339–353.

[Hailing *et al.*, 2001] - Hailing, M., Muhammad, I., and Womack, K. (2001). Dynamic field testing for condition assessment of bridge bents. *Journal of Structural Engineering, ASCE*, 127:126–135.

[Hall, 1999] - Hall, S. (1999). The effective management and use of structural health data. In Chang, F., editor, *Proceedings of 2nd International Workshop on Structural Health Monitoring, IWSHM 1999*, volume 1, pages 265–275, Stanford, USA.

[Haritos & Owen, 2004] - Haritos, N. and Owen, J. (2004). The use of vibration data for damage detection in bridges: A comparison of system identification and pattern recognition approaches. *Structural Health Monitoring*, 3(2):141–163.

[Henriot, 2000] - Henriot, P. (2000). *Contribution au contrôle actif des structures*. PhD thesis, L'Ecole National Supérieure d'Arts et Métiers, Paris, France.

[Heylen *et al.*, 1998] - Heylen, W., Lammens, S., and Sas, P. (1998). Modal analysis theory and testing. Technical report, Katholieke Universiteit, Leuven, Belgium.

[Ho & Ewins, 2000] - Ho, Y. and Ewins, D. (2000). On the structural damage identification with mode shapes. In *Proceedings of the european COST F3 conference on system identification & structural health monitoring*, pages 677–684. Universidad Politecnica de Madrid, Spain.

[Hotelling, 1933] - Hotelling, H. (1933). Analysis of a complex of statistical variables into principal components. *Journal of Educational Psychology*, 24:498–520.

[Hotelling, 1936] - Hotelling, H. (1936). Relations between two sets of variates. *Biometrica*, 28:321–377.

[Humar *et al.*, 2006] - Humar, J., Bagchi, A., and Xu, H. (2006). Performance of vibration-based techniques for the identification of structural damage. *Structural Health Monitoring*, 5(3):215–241.

[Hurlebaus & Gaul, 2006] - Hurlebaus, S. and Gaul, L. (2006). Smart structure dynamics. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 20(2):255–281.

[Ikeda, 1990] - Ikeda, T. (1990). *Fundamentals of Piezoelectricity*. Oxford Science Publications.

[Inman, 2006] - Inman, D. (2006). *Vibration with control*. John Wiley & Sons.

[Inman *et al.*, 2005] - Inman, D., Farrar, C., Lopes Junior, V., and Steffen Junior, V. (2005). *Damage prognosis: for aerospace, civil and mechanical systems*. John Wiley & Sons.

[Jang *et al.*, 2002] - Jang, J., Yeo, I., Shin, S., and Chang, S. (2002). Experimental investigation of system-identification-based damage assessment on structures. *Journal of Structural Engineering*, 128(5):673–682.

[Jeyasehar & Sumangala, 2006] - Jeyasehar, C. and Sumangala, K. (2006). Nondestructive evaluation of prestressed concrete beams using an artificial neural network (ann) approach. *Structural Health Monitoring*, 5(4):313–323.

[Just-Agosto *et al.*, 2008] - Just-Agosto, F., Serrano, D., Shafiq, B., and Cecchini, A. (2008). Neural network based nondestructive evaluation of sandwich composites. *Composites Part B: Engineering*, 39(1):217–225.

[Kao & Hung, 2003] - Kao, C. and Hung, S. (2003). Detection of structural damage via free vibration responses generated by approximating artificial neural networks. *Computers and Structures*, 81(28-29):2631–2644.

[Katayama, 2005] - Katayama, T. (2005). *Subspace methods for system identification*. Springer.

[Kessler, 2002] - Kessler, S. (2002). *Piezoelectric-based in-situ damage detection of composite materials for structural health monitoring systems.* PhD thesis, Department of Aeronautics and Astronautics, Massachusetts Institute of Technology, USA.

[Kim *et al.*, 2003] - Kim, J., Ryu, Y., Cho, H., and Stubbs, N. (2003). Damage identification in beam-type structures: frequency-based method vs mode-shape-based method. *Engineering Structures*, 25(1):57 – 67.

[Kim *et al.*, 1997] - Kim, J., Varadan, V., and Varadan, V. (1997). Finite element modelling of structures including piezoelectric active devices. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 40(5):817–832.

[Kim *et al.*, 1996] - Kim, J., Varadan, V., Varadan, V., and Bao, X. (1996). Finite-element modeling of a smart cantilever plate and comparison with experiments. *Smart Materials and Structures*, 5(2):165–170.

[Kirmser, 1944] - Kirmser, P. (1944). The effects of discontinuities on the natural frequency of beams. In *Proceedings of American Society of Testing and Materials*, volume 44, pages 897–904.

[Larimore, 1983] - Larimore, W. (1983). System identification, reduced-order filtering and modeling vai cononical variate analysis. In *American Control Conference*, pages 445–451, San Francisco.

[Larimore, 1990] - Larimore, W. (1990). Canonical variate analysis in identification, filtering and adaptive control. In *29th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 596–604, Honolulu.

[Law *et al.*, 2001] - Law, S., Chan, T., and Wu, D. (2001). Efficient numerical model for the damage detection of large scale structure. *Engineering Structures*, 23(5):436–451.

[Law *et al.*, 1998] - Law, S., Shi, Z., and Zhang, L. (1998). Structural damage detection from incomplete and noisy modal test data. *Journal of Engineering Mechanics*, 124:1280–1288.

[Lee, 1990] - Lee, C. (1990). Theory of laminated piezoelectric plates for the design of distributed sensors/actuators. part i: Governing equations and reciprocal relationships. *Journal of the Acoustical Society of America*, 87(3):1144–1158.

[Lee *et al.*, 2005] - Lee, J., Lee, J., Yi, J., Yun, C., and Jung, H. (2005). Neural networks-based damage detection for bridges considering errors in baseline finite element models. *Journal of Sound and Vibration*, 280(3-5):555–578.

[Lestari *et al.*, 2006] - Lestari, W., Qiao, P., and Hanagud, S. (2006). Curvature mode shape-based damage assessment of carbon/epoxy composite beams. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, pages 1–20.

[Levin & Lieven, 1998a] - Levin, R. and Lieven, N. (1998a). Dynamic finite element model updating using simulated annealing and genetic algorithms. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 12(1):91–120.

[Levin & Lieven, 1998b] - Levin, R. and Lieven, N. (1998b). Required precision and valid methodologies for dynamic finite element model updating. *ASME Journal of Vibration and Acoustics*, 120(3):733–741.

[Li & Yang, 2008] - Li, Z. and Yang, X. (2008). Damage identification for beams using ann based on statistical property of structural responses. *Computers and Structures*, 86(1-2):64–71.

[Lin & Ewins, 1994] - Lin, R. and Ewins, D. (1994). Analytical model improvement using frequency response functions. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 8(4):437–458.

[Link, 2000] - Link, M. (2000). *Structural Dynamics 2000*, chapter Updating of analytical models - Review of numerical procedures and applications aspects. Research Studies Press Ltd, Baldock, UK.

[Lovera *et al.*, 2001] - Lovera, M., Parisini, T., and Verhaegen, M. (2001). Fault detection: A subspace identification approach. In *40th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, volume 3, pages 2275–2276, Milano, Italy.

[Maeck *et al.*, 2000] - Maeck, J., Abdel Wahab, M., Peeters, B., De Roeck, G., De Visscher, J., De Wilde, W., Ndambi, J., and Vantomme, J. (2000). Damage identification in reinforced concrete structures by dynamic stiffness determination. *Engineering Structures*, 22(10):1339–1349.

[Marwala & Heyns, 1998] - Marwala, T. and Heyns, P. (1998). Multiple-criterion method for determining structural damage. *AIAA Journal*, 36(8):1494–1501.

[Marwala & Hunt, 1999] - Marwala, T. and Hunt, H. (1999). Fault identification using finite element models and neural networks. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 13(3):475–490.

[Maugin *et al.*, 1992] - Maugin, G., Pouget, J., Drouot, R., and Collet, B. (1992). *Non-linear Electromechanical Coupling*. John Wiley and Sons.

[Mevel *et al.*, 2006] - Mevel, L., Benveniste, A., Basseville, M., Goursat, M., Peeters, B., Van Der Auweraer, H., and Vecchio, A. (2006). Input/output versus output-only data processing for structural identification - application to in-flight data analysis. *Journal of Sound and Vibration*, 295(3-5):531–552.

[Möller & Friberg, 1998] - Möller, P. and Friberg, O. (1998). Updating large finite element models in structural dynamics. *AIAA Journal*, 36(10):1861–1868.

[Morassi & Rovere, 1997] - Morassi, A. and Rovere, N. (1997). Localizing a notch in a steel frame from frequency measurements. *Journal of Engineering Mechanics*, 123(5):422–432.

[Nasser, 2006] - Nasser, H. (2006). *Surveillance vibratoire de structures mécanique sous contraintes thermiques*. PhD thesis, Université de Rennes 1, France.

[Natke, 1998] - Natke, H. (1998). Problems of model updating procedures: a perspective resumption. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 12(1):65–74.

[Natke & Cempel, 1991] - Natke, H. and Cempel, C. (1991). Fault detection and localization in structures: A discussion. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 5(5):345–356.

[Pandey & Biswas, 1994] - Pandey, A. and Biswas, M. (1994). Damage detection in structures using changes in flexibility. *Journal of Sound and Vibration*, 169(1):3–17.

[Pandey *et al.*, 1991] - Pandey, A., Biswas, M., and Samman, M. (1991). Damage detection from changes in curvature mode shapes. *Journal of Sound and Vibration*, 145(2):321–332.

[Papadopoulos & Garcia, 1998] - Papadopoulos, L. and Garcia, E. (1998). Structural damage identification: A probabilistic approach. *AIAA Journal*, 36(11):2137–2145.

[Park & Sohn, 2006] - Park, H. and Sohn, H. (2006). Parameter estimation of the generalized extreme value distribution for structural health monitoring. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 21(4):366–376.

[Peeters & De Roeck, 1999] - Peeters, B. and De Roeck, G. (1999). Reference-based stochastic subspace identification for output-only modal analysis. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 13(6):855 – 878.

[Peeters & De Roeck, 2001] - Peeters, B. and De Roeck, G. (2001). Stochastic system identification for operational modal analysis: A review. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 123(4):659–667.

[Roseiro *et al.*, 2005] - Roseiro, L., Ramos, U., and Leal, R. (2005). Neural networks in damage detection of composite laminated plates. *WSEAS Transactions on Systems*, 4(4):430–434.

[Rytter, 1993] - Rytter, A. (1993). *Vibration based inspection of civil engineering structures*. PhD thesis, Department of building technology and structures Engineering, Aalborg University, Denmark.

[Salawu, 1997] - Salawu, O. (1997). Detection of structural damage through changes in frequency: A review. *Engineering Structures*, 19(9):718–723.

[Salençon, 1988] - Salençon, J. (1988). *Mécanique des milieux continus*. Ellipses, Paris, France.

[Sinha & Friswell, 2002] - Sinha, J. and Friswell, M. (2002). Model updating: A tool for reliable modelling, design modification and diagnosis. *The Shock and Vibration Digest*, 34(1):27–35.

[Sohn *et al.*, 2003] - Sohn, H., Farrar, C., Hemez, F., Shunk, D., Stinemates, D., and Nadler, B. (2003). A review of structural health monitoring literature: 1996-2001. Technical report, Los Alamos National Laboratory.

[Stubbs *et al.*, 1995] - Stubbs, N., Kim, J., and Farrar, C. (1995). An efficient and robust algorithm for damage localization in offshore platforms. In *13th International Modal Analysis Conference*, pages 543–546.

[Thomas & Lefebvre, 2002] - Thomas, P. and Lefebvre, D. (2002). Fault detection and isolation in non-linear systems by using oversized neural networks. *Mathematics and Computers in Simulation*, 60(3-5):181–192.

[Titurus *et al.*, 2003] - Titurus, B., Friswell, M., and Starek, L. (2003). Damage detection using generic elements: Part i. model updating. *Computers & Structures*, 81(24-25):2273–2286.

[Tzou & Tseng, 1990] - Tzou, H. and Tseng, C. (1990). Distributed piezoelectric sensor/actuator design for dynamic measurement/control of distributed parameter systems: A piezoelectric finite element approach. *Journal of Sound and Vibration*, 138(1):17–34.

[Van der Auweraer *et al.*, 2000] - Van der Auweraer, H., Leurs, W., Mas, P., and Hermans, L. (2000). Modal parameter estimation from inconsistent data sets. *Proceedings of the International Modal Analysis Conference - IMAC*, 1(United States):763–771.

[Van der Auweraer & Peeters, 2004] - Van der Auweraer, H. and Peeters, B. (2004). Discriminating physical poles from mathematical poles in high order systems: Use and automation of the stabilization diagram. In *Instrumentation and Measurement Technology Conference*, volume 3, pages 2193 – 2198.

[Van Overchee & De Moor, 1993] - Van Overchee, P. and De Moor, B. (1993). Subspace algorithms for the stochastic identification problem. *Automatica*, 29(3):649–660.

[Van Overchee & De Moor, 1996] - Van Overchee, P. and De Moor, B. (1996). *Subspace identification for linear systems: Theory - Implementation - Applications*. Kluwer Academic Publisher, 1st edition.

[Waszczyszyn & Ziemianski, 2001] - Waszczyszyn, Z. and Ziemianski, L. (2001). Neural networks in mechanics of structures and materials - new results and prospects of applications. *Computers and Structures*, 79(22-25):2261–2276.

[Wei *et al.*, 2005] - Wei, Z., Yam, L., and Cheng, L. (2005). Delamination assessment of multilayer composite plates using model-based neural networks. *JVC/Journal of Vibration and Control*, 11(5):607–625.

[West, 1984] - West, W. (1984). Illustration of the use of modal assurance criterion to detect structural changes in an orbiter test. In *Proceedings of Air Force Conference on Aircraft Structural Integrity*, pages 1–6.

[Whelan *et al.*, 2009] - Whelan, M., Gangone, M., Janoyan, K., and Jha, R. (2009). Real-time wireless vibration monitoring for operational modal analysis of an integral abutment highway bridge. *Engineering Structures*, 31(10):2224–2235.

[Worden & Dulieu-Barton, 2004] - Worden, K. and Dulieu-Barton, J. (2004). An overview of intelligent fault detection in systems and structures. *Structural Health Monitoring*, 3(1):85–98.

[Worden *et al.*, 2000] - Worden, K., Manson, G., and Allman, D. (2000). An experimental appraisal of the strain energy damage location method. In *Damage Assessment of structures, Proceedings of the the 4th international conference of damage assessment of structures, Wales, UK*, volume 204-205, pages 35–46.

[Yan *et al.*, 2003] - Yan, A., De Boe, P., and Golinval, J. (2003). Structural integral monitoring by vibration measurements. In Sih, S. and Tu, Z., editors, *FM2003 - Structural integrity and materials aging*, pages 363 – 370, Shanghai, China.

[Yan & Golinval, 2005] - Yan, A. and Golinval, J. (2005). Structural damage localization by combining flexibility and stiffness methods. *Engineering Structures*, 27(12):1752–1761.

[Yan & Golinval, 2006] - Yan, A. and Golinval, J. (2006). Null subspace-based damage detection of structures using vibration measurements. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 20(3):611–626.

[Yan *et al.*, 2005a] - Yan, A.-M., Kerschen, G., Boe, P. D., and Golinval, J.-C. (2005a). Structural damage diagnosis under varying environmental conditions–part i: A linear analysis. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 19(4):847 – 864.

[Yan *et al.*, 2005b] - Yan, A.-M., Kerschen, G., Boe, P. D., and Golinval, J.-C. (2005b). Structural damage diagnosis under varying environmental conditions–part ii: local pca for non-linear cases. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 19(4):865 – 880.

[Zak *et al.*, 1999] - Zak, A., Krawczuk, M., and Ostachowicz, W. (1999). Vibration of a laminated composite plate with closing delamination. In *Structural damage assessment using advanced signal processing procedures, Proceedings of DAMAS '99, University College, Dublin, Ireland*.

[Zang *et al.*, 2004] - Zang, C., Friswell, M., and Imregun, M. (2004). Structural damage detection using independent component analysis. *Structural Health Monitoring*, 3(1):69–83.

[Zang *et al.*, 2001] - Zang, C., Grafe, H., and Imregun, M. (2001). Frequency-domain criteria for correlating and updating dynamic finite element models. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 15(1):139–155.

[Zapico *et al.*, 2003] - Zapico, J., González, M., and Worden, K. (2003). Damage assessment using neural networks. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 17(1):119–125.

[Zelbstein, 1969] - Zelbstein, U. (1969). *Mesures électroniques au laboratoire et dans l'industrie physique des capteurs, circuits associés*. Dunod, Paris, France.

[Zou *et al.*, 2000] - Zou, Y., Tong, L., and Steven, G. (2000). Vibration-based model-dependent damage (delamination) identification and health monitoring for composite structures - a review. *Journal of Sound and Vibration*, 230(2):357–378.

Annexe - Dispositif experimental : Plaque

Dans le but de valider les algorithmes de SHM proposés, nous avons été amené à réaliser un démonstrateur dédié à l'étude et l'expérimentation des approches de contrôle santé. De plus, ce démonstrateur doit aussi servir de benchmark dans le cadre de collaboration avec des partenaires industriels et laboratoires extérieurs.

Le démonstrateur doit répondre à plusieurs contraintes :

- Transportabilité
- Reproductibilité
- Dispositif aisé à mettre en place
- Reproduction de contraintes industrielles

A.1 - Conception

Le démonstrateur retenu est constitué de plaques rectangulaires en Aluminium qui sont munies de plusieurs pastilles piézo-électriques. Ces plaques seront suspendues (Figure A.1), ce qui équivaut à un modèle totalement libre. La suspension de la plaque permet de s'affranchir des contraintes de liaisons et donc une meilleure reproductibilité du dispositif.

Compte tenu de la simplicité de ce modèle, l'idée est d'avoir plusieurs plaques rectangulaires identiques (découpe à la machine numérique) avec des endommagements de forme et taille différentes. De plus, les plaques peuvent se fixer l'une à l'autre et former ainsi une structure plus

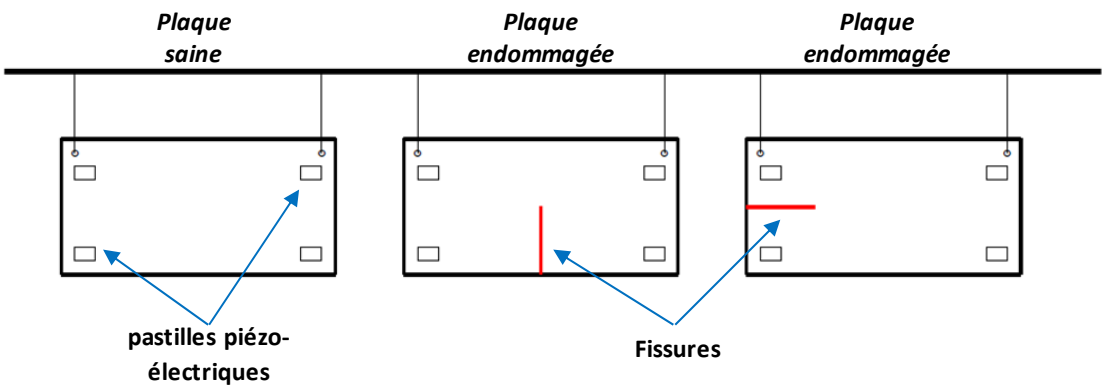


Figure A.1 – Dispositif expérimental : Plaques suspendues

complexe et modulable pouvant représenter des structures industrielles réelles comme, par exemple, des morceaux de fuselage d'avions (Figure A.2).

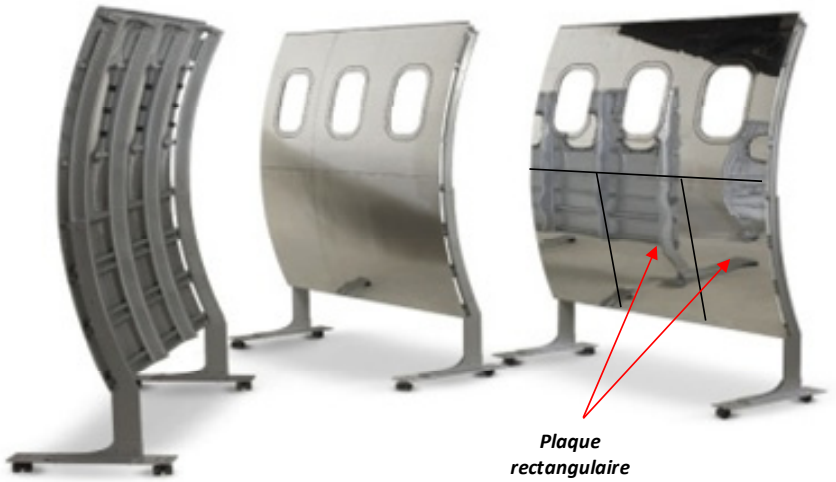


Figure A.2 – Morceaux de fuselage d'avions

La modularité et la reproductibilité de ce dispositif vont permettre de générer différents endommagements de tailles et natures différentes (par exemple, des fissures, perte de masses, ou chocs…). Cette caractérisation expérimentale des endommagements permet aussi de recaler les modèles de simulation et donc de reproduire, en vue d'un apprentissage, le fonctionnement sain et endommagé de la structure.

Les dimensions de ces plaques (Figure A.3) et leur assemblage pour différentes orientations comme le montrent les Figures A.4 et A.5 ont été étudiés par analyse modale en utilisant les logiciels MSC. NASTRAN© et MSC. PATRAN©.

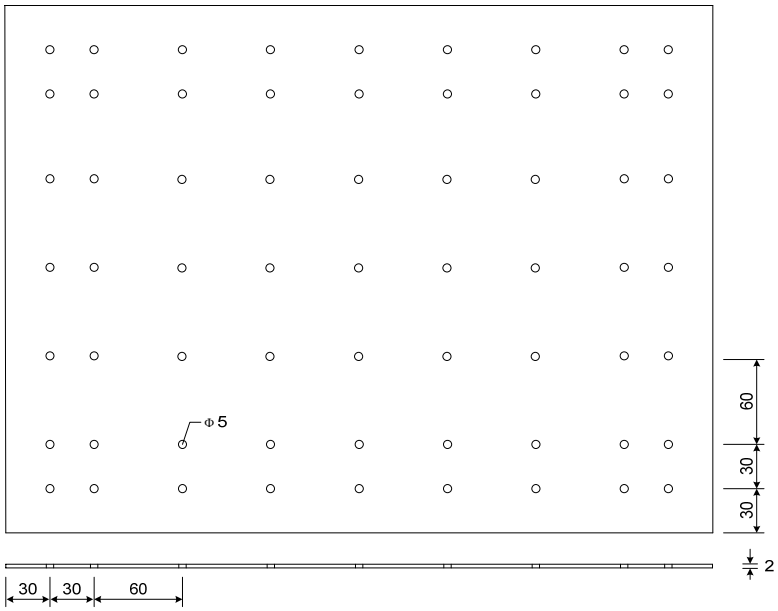


Figure A.3 – Plaque simple.

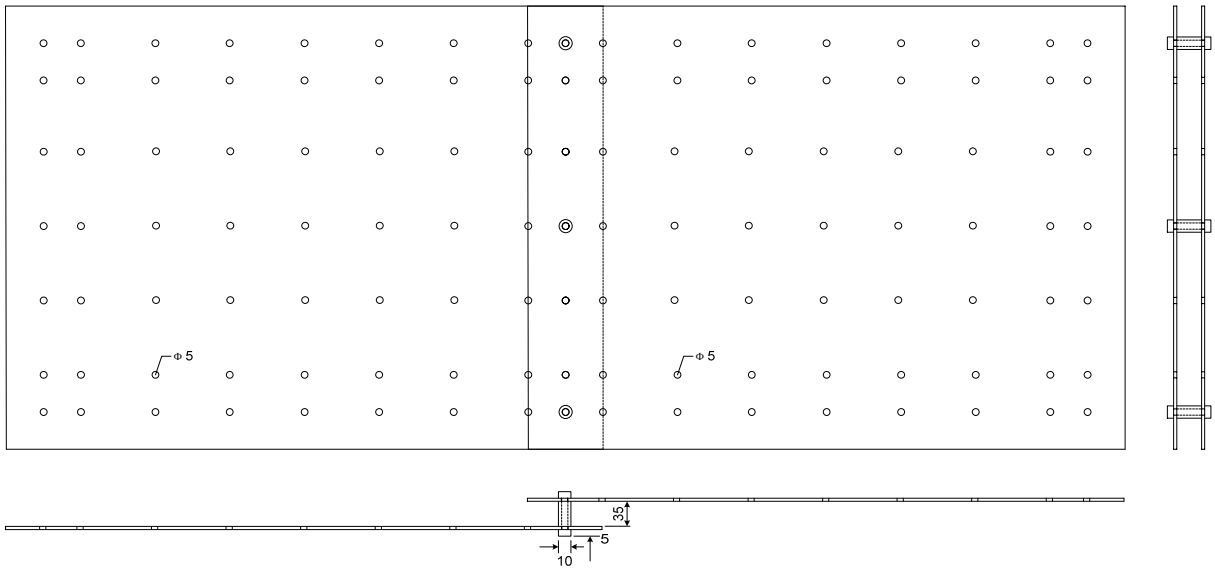


Figure A.4 - Assemblage de deux plaques – Cas A.

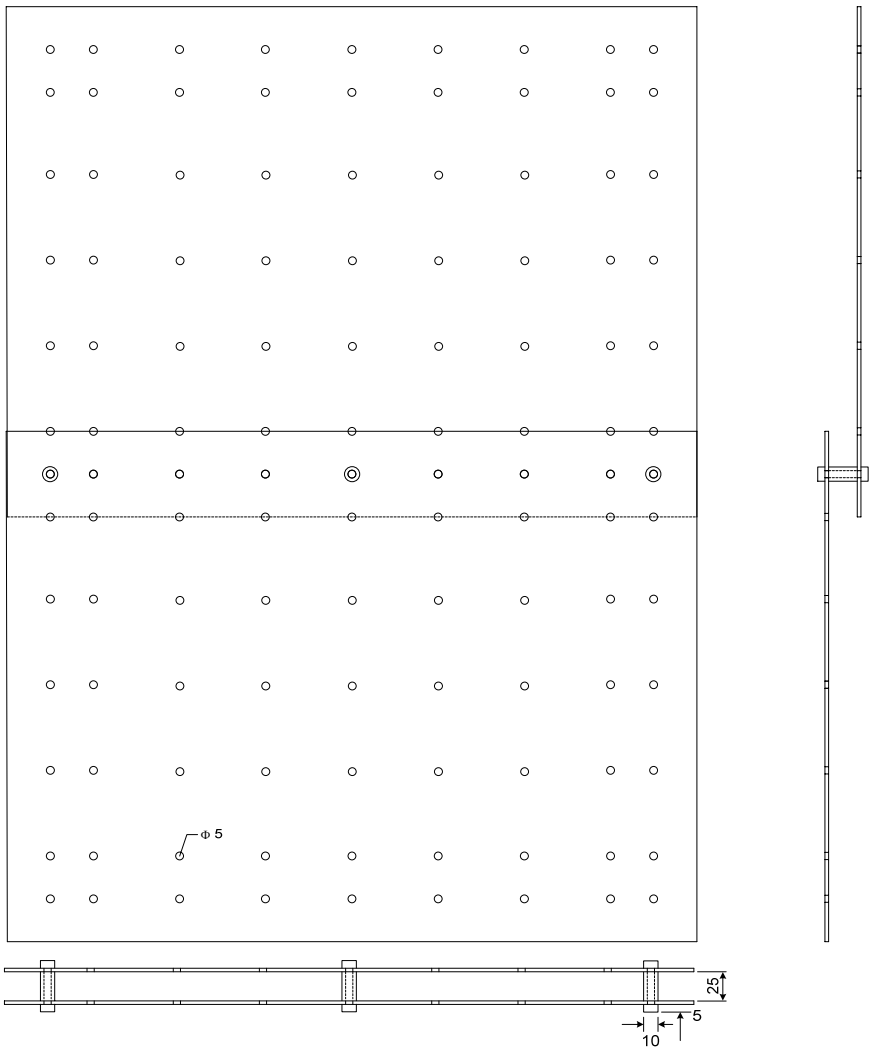


Figure A.5 - Assemblage de deux plaques – Cas B.

Après avoir testé différentes dimensions, la taille d'une plaque a été fixée à 480x360x2 mm (Figure A.6).

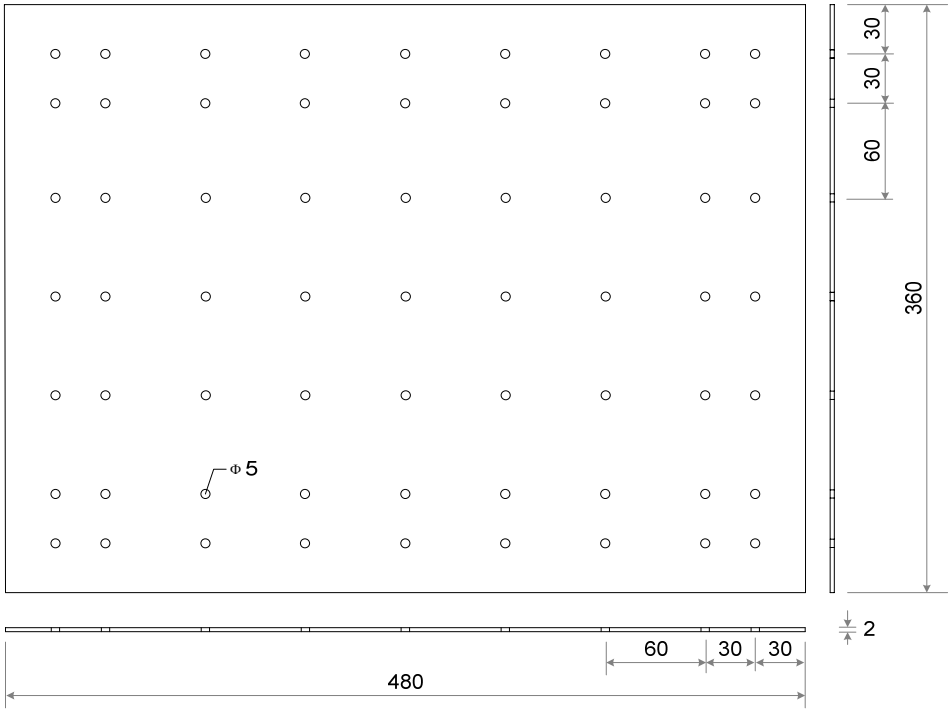


Figure A.6 - Dimensions de la plaque.

Le Tableau A.1 résume les quinze premières fréquences propres analytiques de la plaque simple et de l'assemblage de deux plaques en Cas A et B. Les formes des modes ont aussi présenté aux Figures A.7 à A.33.

A2 - Placement des capteurs et actionneurs

L'identification d'un endommagement repose sur de nombreux paramètres associés au placement des actionneurs et capteurs : la localisation, le nombre, les types de capteurs et d'actionneurs. Plusieurs approches de placement sont proposées dans la littérature [Papadimitriou, 2004, Gawronski, 1997, Soares *et al*, 1999]. Certaines de ces méthodes développées sont basées sur la notion *"d'information"*. La précision des résultats dépend de la quantité d'informations récoltées. Maximiser cette information est équivalent à minimiser l'incertitude des paramètres d'endommagements. En pratique, on cherchera à obtenir ces paramètres avec la variance la plus faible, i.e. on cherchera à minimiser *l'entropie d'information*. D'autres approches sont basées sur les propriétés dynamiques des systèmes flexibles, par exemple [Gawronski, 1997] et [Soares, 1999].

Pour effectuer notre placement optimal des capteurs/actionneurs PZT, nous avons étudié deux types de critère : l"un basée sur la déformation modale et l'autre sur les normes modales.

A.2.1 - Placement suivant la déformation modale

Dans notre premier essai de placement des actionneurs et capteurs, nous avons adopté une approche visuelle simple basée sur l'analyse des courbures de flexion de la plaque. Le signal électrique généré par un capteur piézo-électrique dépend de sa déformation. Pour maximiser le signal mesuré, les capteurs doivent être placés la où la structure se déforme le plus. Sur la base de cette idée, les céramiques ont été placées la où les courbures de flexion des 7 premiers modes sont maximales. Ceci a conduit à la configuration de placement des céramiques piézo-électrique présenté à la Figure A.34.

A.2.2 - Placement par minimisation de normes

Afin de mieux optimiser le placement de ces actionneurs et capteurs PZT, nous avons, dans un deuxième temps, adopté une méthode exhaustive [Gawronski, 1998] dont le but est de quantifier d'un point de vue énergétique tous les chemins actionneurs/capteurs possibles. Les plaques sont subdivisées en groupes représentant chacun un actionneur, un capteur ou un espace non instrumenté. Supposons par exemple que notre plaque est divisée en 10 groupes suivant l'axe X_1 et 10 groupes suivant l'axe X_2, nous avons donc 100 choix possibles pour le placement de l'actionneur et 99 pour le capteur. Chacun des 9900 chemins possibles est évalué en termes des normes H_2, H_∞ et Hankel (noté H_h) et ce, pour chaque mode.

Le problème initial à trois dimensions (actionneur × capteur × modes) est ramené à un problème à deux dimensions (chemin × modes). Ces informations peuvent ensuite ranger dans une matrice, $\underline{\underline{\Gamma}}$, de dimension ($n_c \times n_m$), ou n_c est le nombre de chemins et n_m est le nombre de modes . Chaque ligne de $\underline{\underline{\Gamma}}$ donne les normes correspondent à un unique chemin pour les n_m modes étudiés. Normalisation de chaque colonne par rapport à la norme de système donne les meilleurs placements pour les n_m modes. Ces placements peuvent être stockés dans des vecteurs d'indices de placements, notés $\underline{i}^a$ pour les actionneurs et $\underline{i}^c$ pour les capteurs.

La matrice $\underline{\underline{\Gamma}}$ donnent les meilleurs emplacements d'actionneurs et de capteurs pour chaque mode indépendamment. Cependant, si l'on considère ces dix premiers modes de vibration, et pour chacun deux patchs piézo-électriques, il faut 20 patchs pour instrumenter la plaque. Ce nombre de chemins est ensuite réduit en utilisant un algorithme de regroupement des modes. Considérons le placements des actionneurs. Nous déterminons un indice de distance $d(\underline{i}_i^a, \underline{i}_j^a)$, où $\underline{i}_i^a$ et $\underline{i}_j^a$ sont les vecteurs de placement modaux avec $(i, j) \in \{1,2,...,n_m\} \times \{1,2,...,n_m\}$, pour n_m modes. Pour cette distance (A.1), nous avons choisi de considérer le nombre d'emplacements communs aux deux

modes i et j, parmi les k meilleurs emplacements. Une valeur normée est obtenue en divisant cette valeur par k. La démarche est identique pour les capteurs.

$$d(\underline{i}_i^a, \underline{i}_j^a) = \frac{k - \dim(\underline{i}_i^a \cap \underline{i}_j^a)}{k}$$
$$d(\underline{i}_i^c, \underline{i}_j^c) = \frac{k - \dim(\underline{i}_i^c \cap \underline{i}_j^c)}{k} \qquad \text{(A.1)}$$

On fixe ensuite un niveau de proximité désiré, noté *prox*, (**Error! Digit expected.**) qui servira d'argument de réglage à l'agorithme. On construit alors n_g. Chacun contient les placements modaux vérifiant :

$$d(\underline{i}_i^a, \underline{i}_j^a) \leq prox \quad \text{avec } (i,j) \in \{1,2,...,n_m\} \times \{1,2,...,n_m\}$$
$$d(\underline{i}_i^c, \underline{i}_j^c) \leq prox \quad \text{avec } (i,j) \in \{1,2,...,n_m\} \times \{1,2,...,n_m\} \qquad \text{(A.2)}$$

On supprime ensuite les redondances et on détermine les indices de placements pour les modes regroupés.

Une première simulation de cet algorithme a été appliquée sur une plaque de dimensions 300×400×2 mm. Le résultat fournit les meilleurs placements au sens d'une maximisation de la norme H_∞ pour les 10 premiers modes de vibration. Nous obtenons quatre groupes de modes ({3 ; 8 ; 10}, {1 ; 6}, {2 ; 4 ; 7 ; 9}, {5}). Ces groupes rassemblent des modes dont les ventres de vibration sont géométriquement proches. Une proposition de placement de quatre couples actionneurs/capteurs est fournie (Figure A.35).

Fréquences propres (HZ)	Une Plaque	Assemblage de deux plaques	
		Cas A	Cas B
1er	38.35	12.04	20.73
2ème	45.68	23.66	26.40
3ème	84.75	35.36	43.481
4ème	90.68	49.11	59.15
5ème	110.72	64.00	62.12
6ème	133.14	81.40	69.98
7ème	173.03	93.47	103.86
8ème	184.57	93.57	105.60
9ème	231.21	99.60	113.21
10ème	255.85	107.45	135.37
11ème	259.95	141.92	143.38
12ème	283.71	162.10	144.33
13ème	296.05	165.17	162.91
14ème	337.75	167.42	174.14
15ème	413.53	186.13	202.84

Tableau A.1 - Quinze premières fréquences propres analytiques de la plaque.

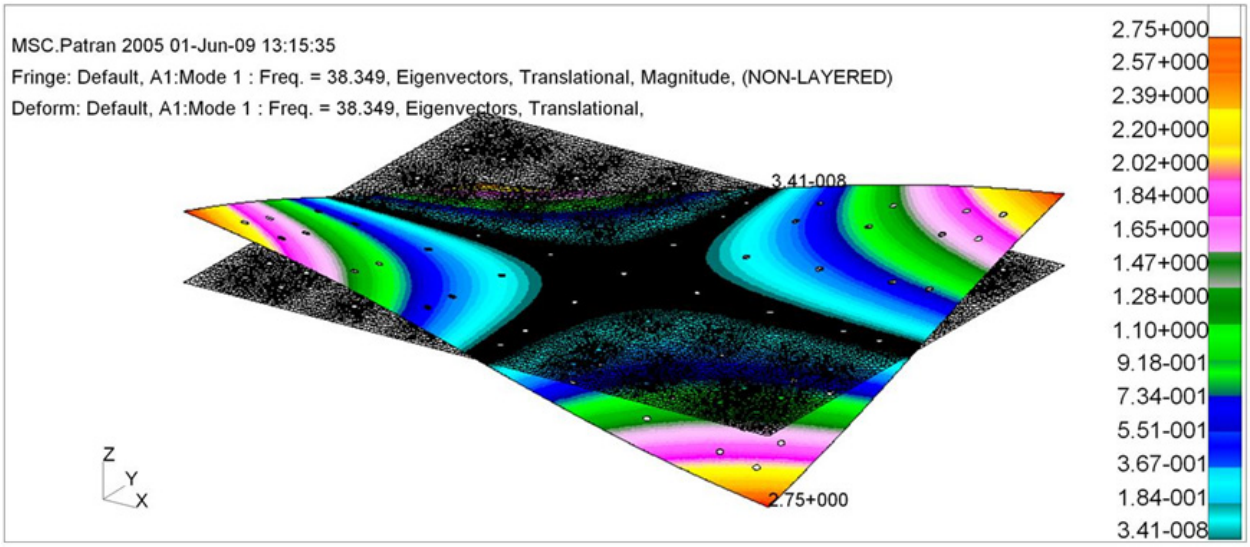


Figure A.7 - 1er forme du mode de la plaque.

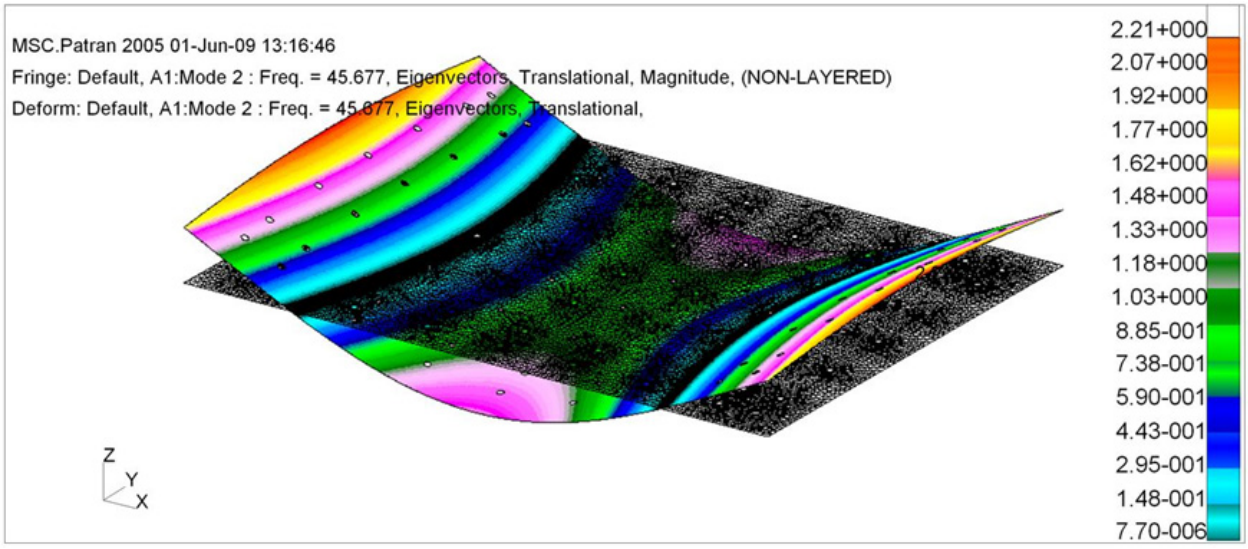


Figure A.8 - 2ème forme du mode de la plaque.

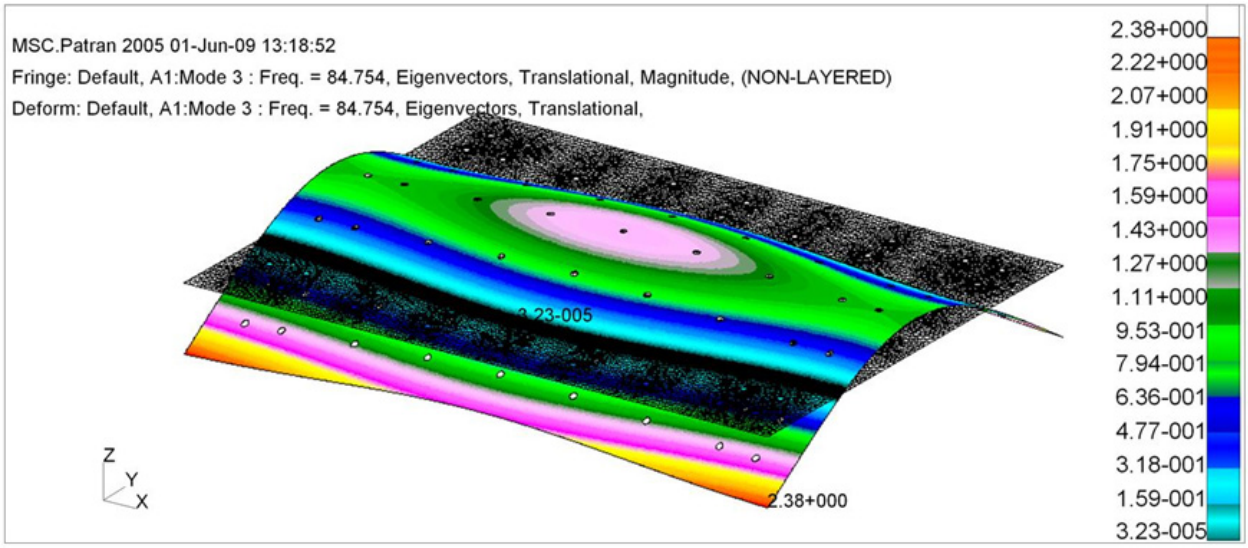


Figure A.9 - 3ème forme du mode de la plaque.

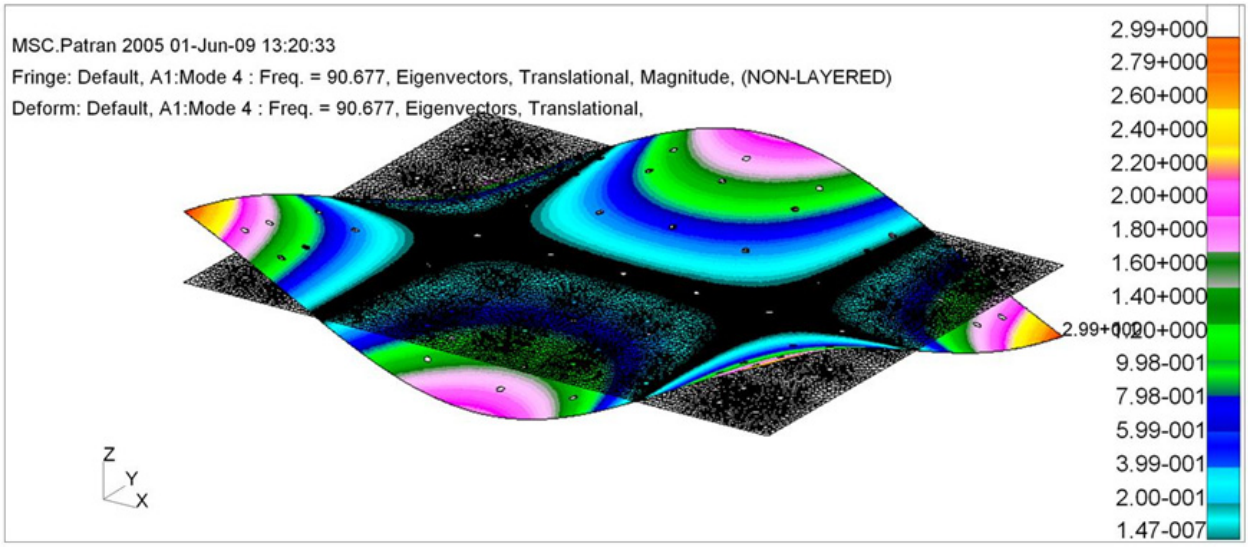


Figure A.10 - 4ème forme du mode de la plaque.

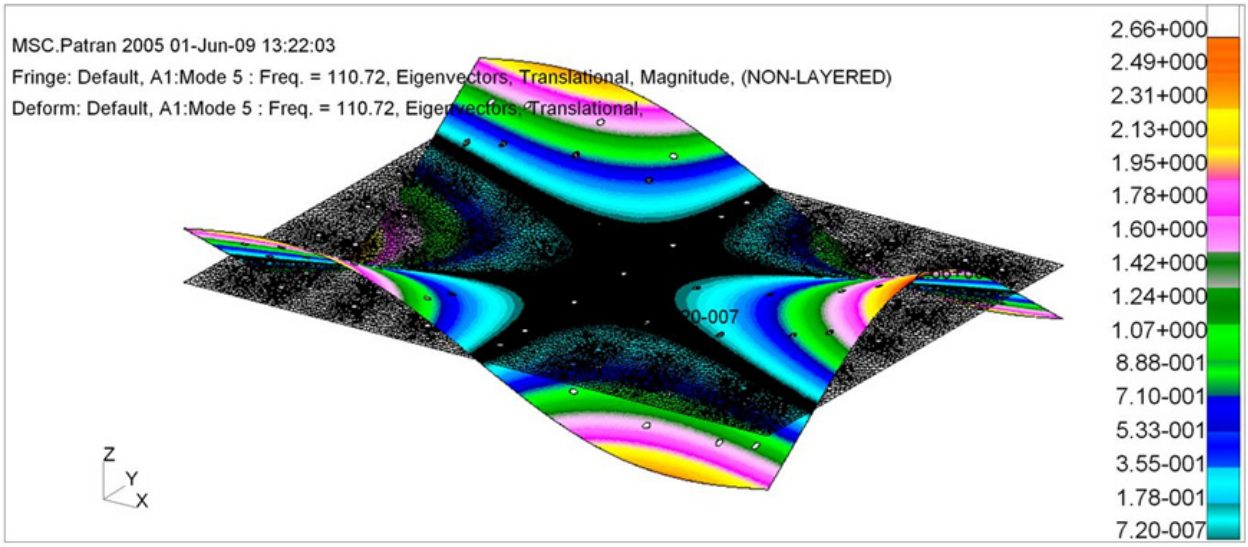


Figure A.11 - 5ème forme du mode de la plaque.

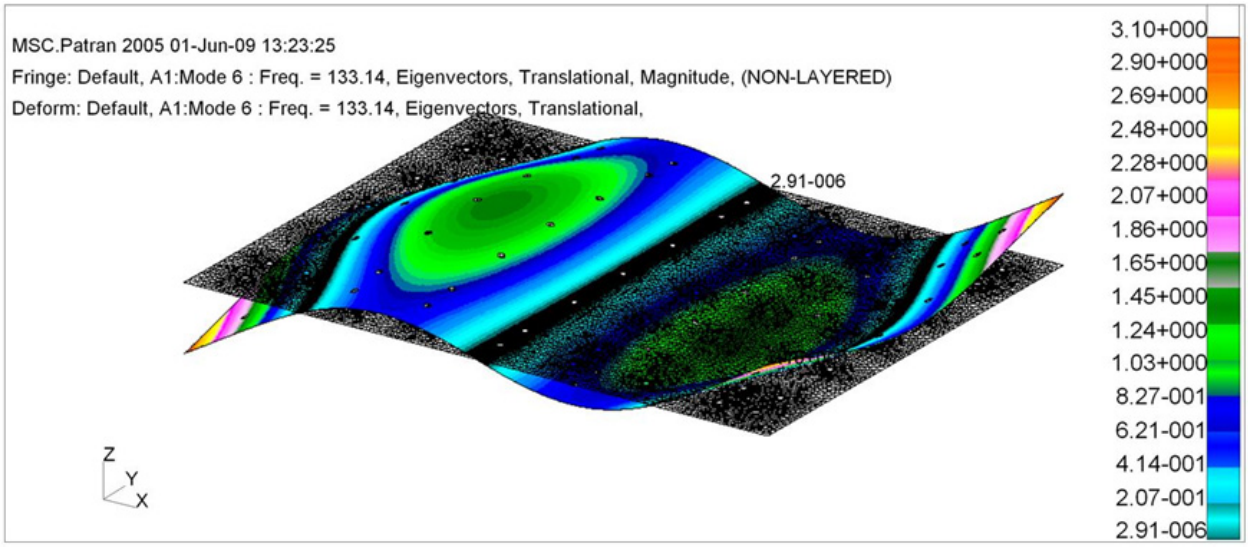


Figure A.12 - 6ème forme du mode de la plaque.

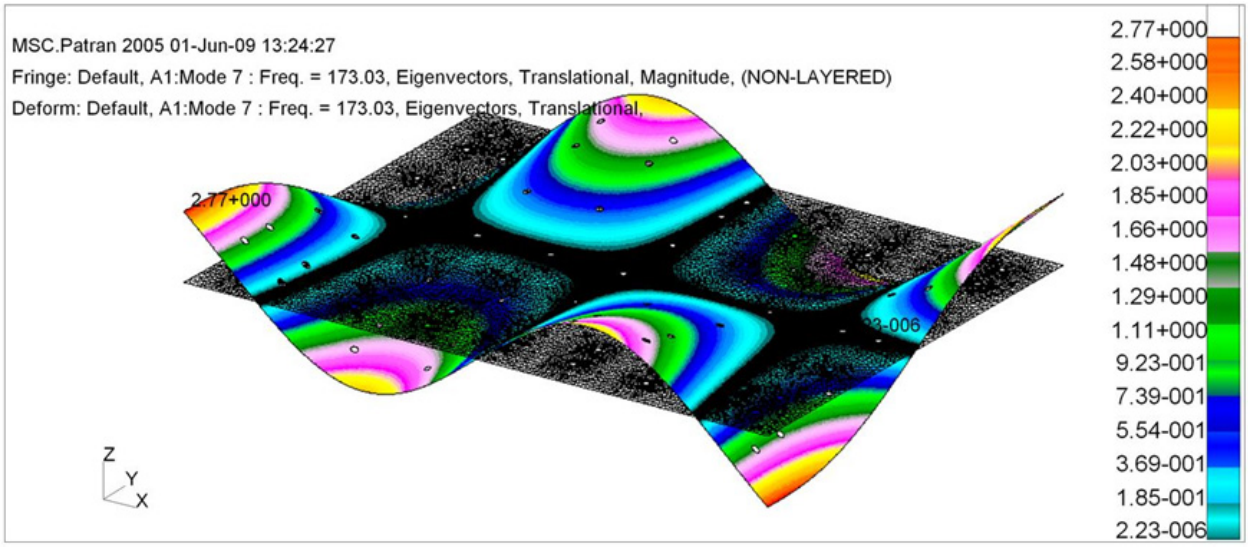


Figure A.13 - 7ème forme du mode de la plaque.

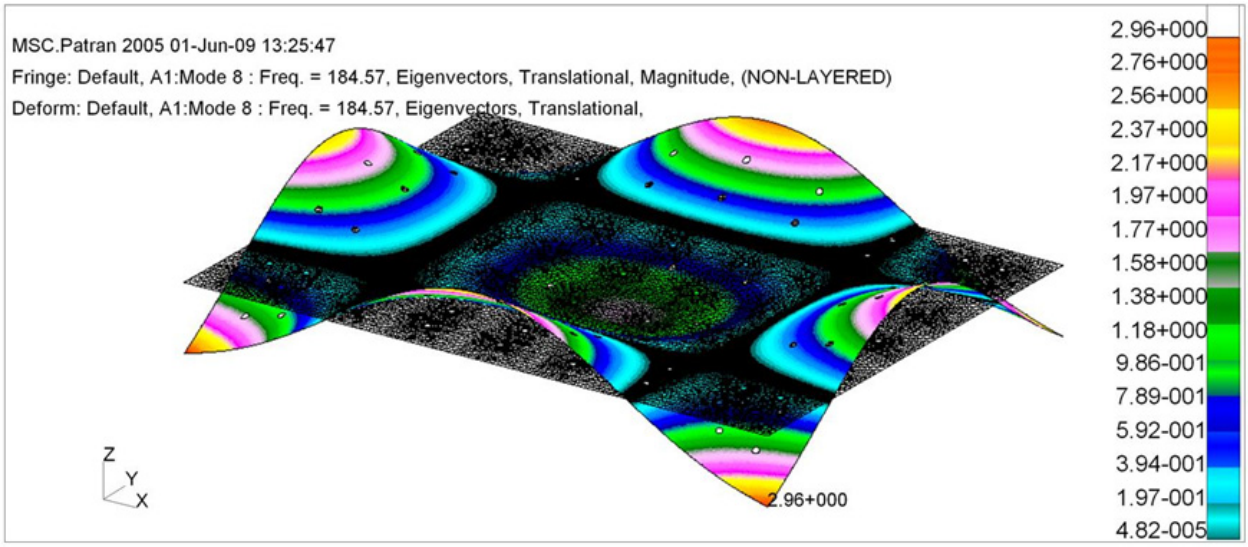


Figure A.14 - 8ème forme du mode de la plaque.

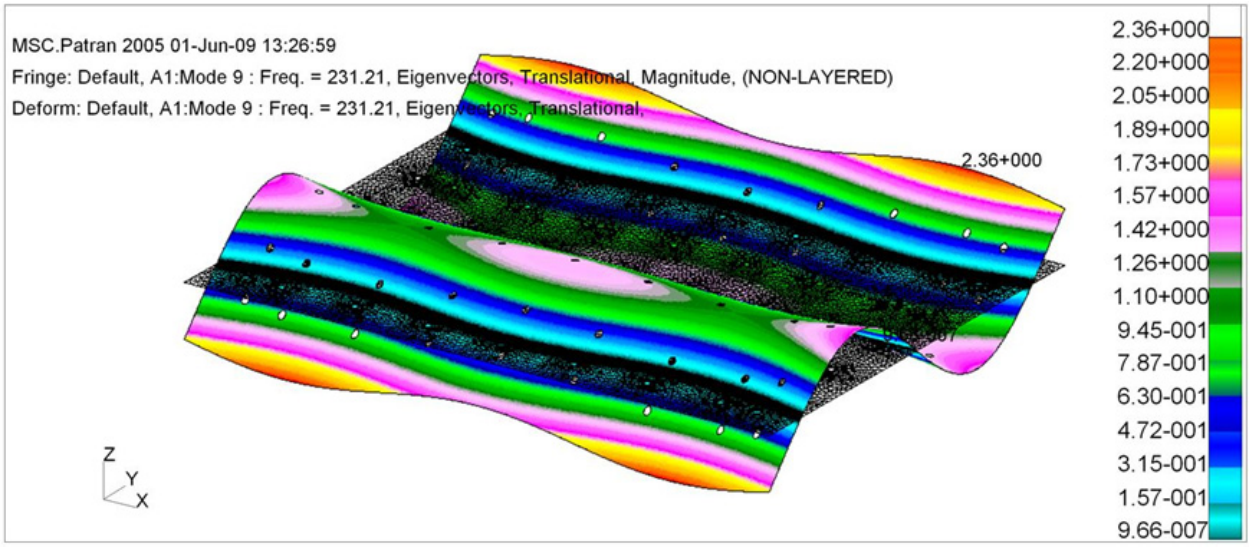


Figure A.15 - 9ème forme du mode de la plaque.

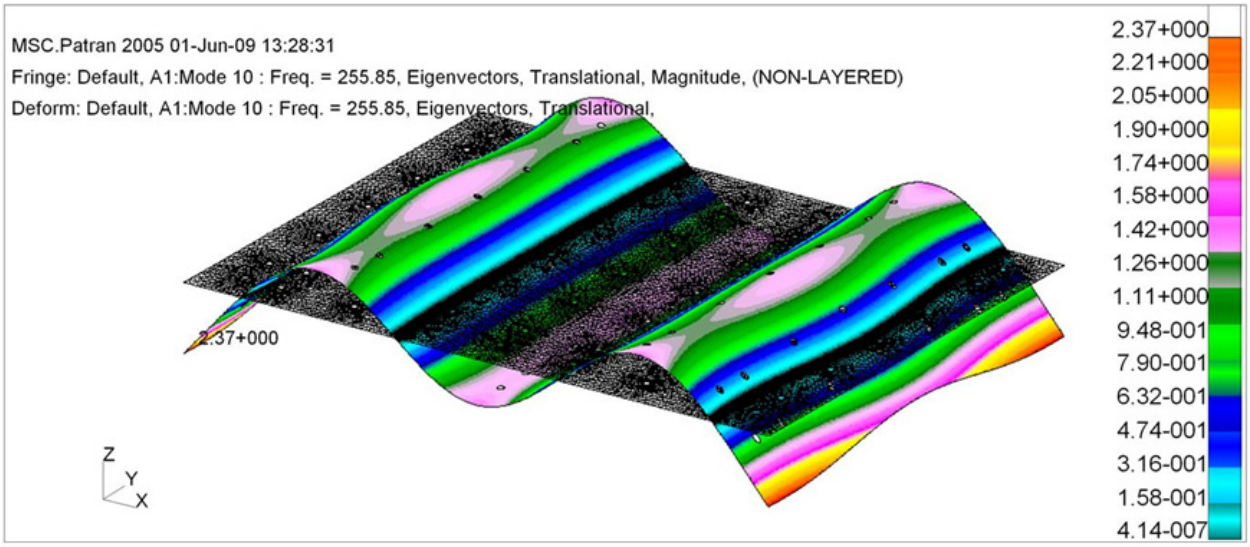


Figure A.16 - 10ème forme du mode de la plaque.

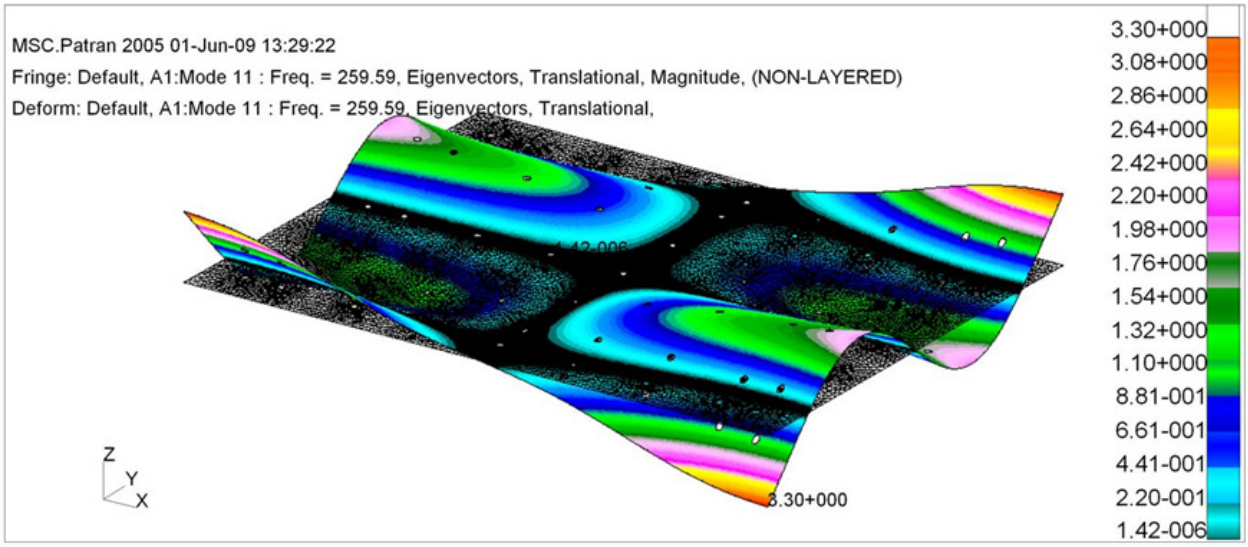


Figure A.17 - 11ème forme du mode de la plaque.

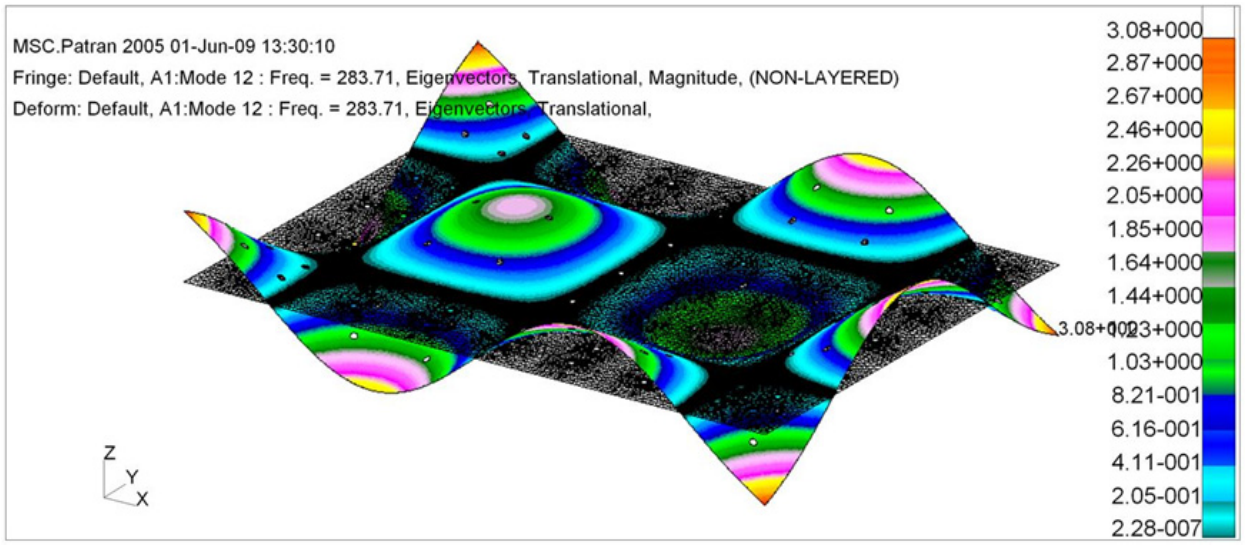


Figure A.18 - 12ème forme du mode de la plaque.

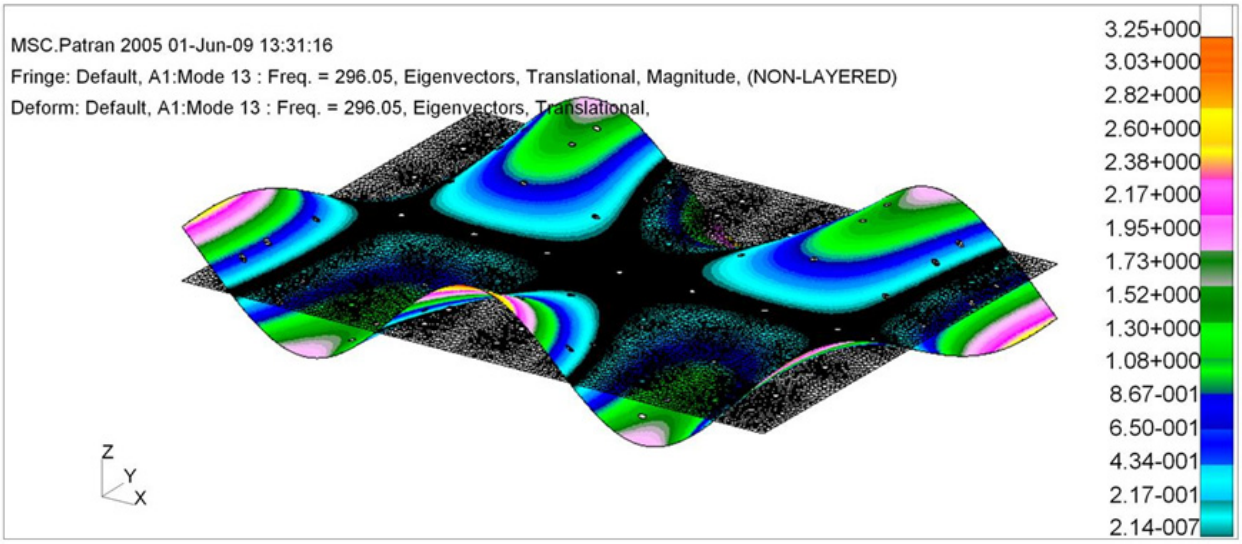


Figure A.19 - 13ème forme du mode de la plaque.

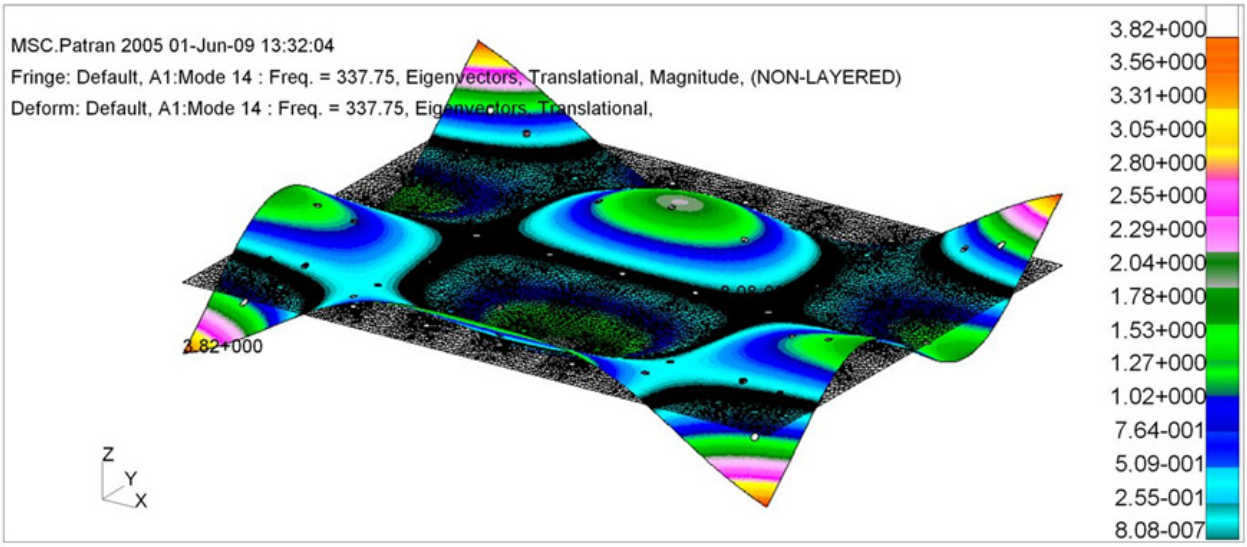


Figure A.20 - 14ème forme du mode de la plaque.

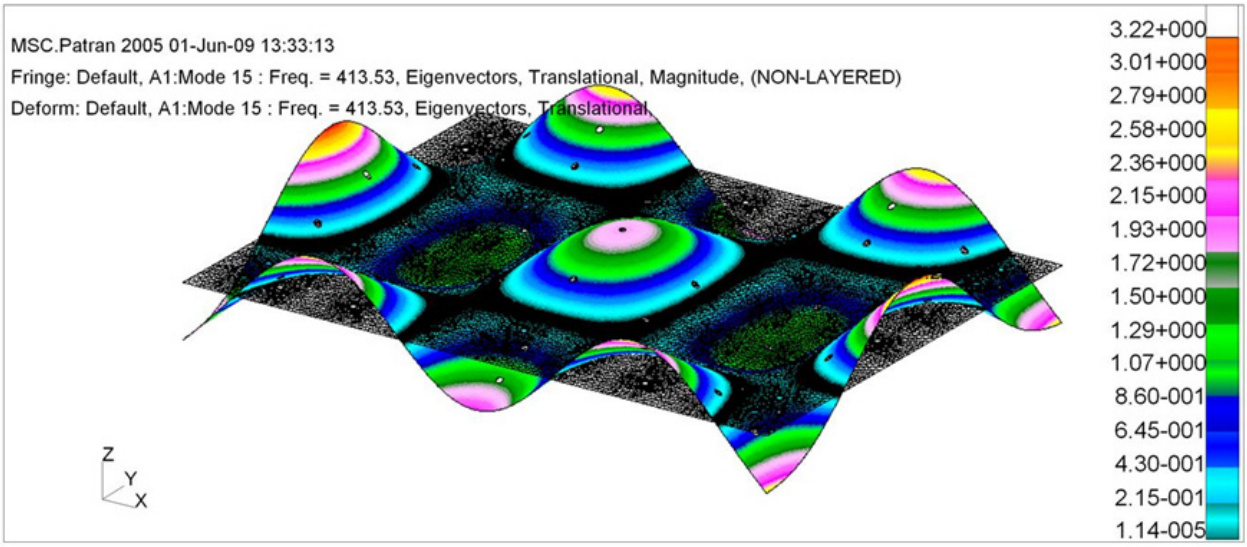


Figure A.21 - 15ème forme du mode de la plaque.

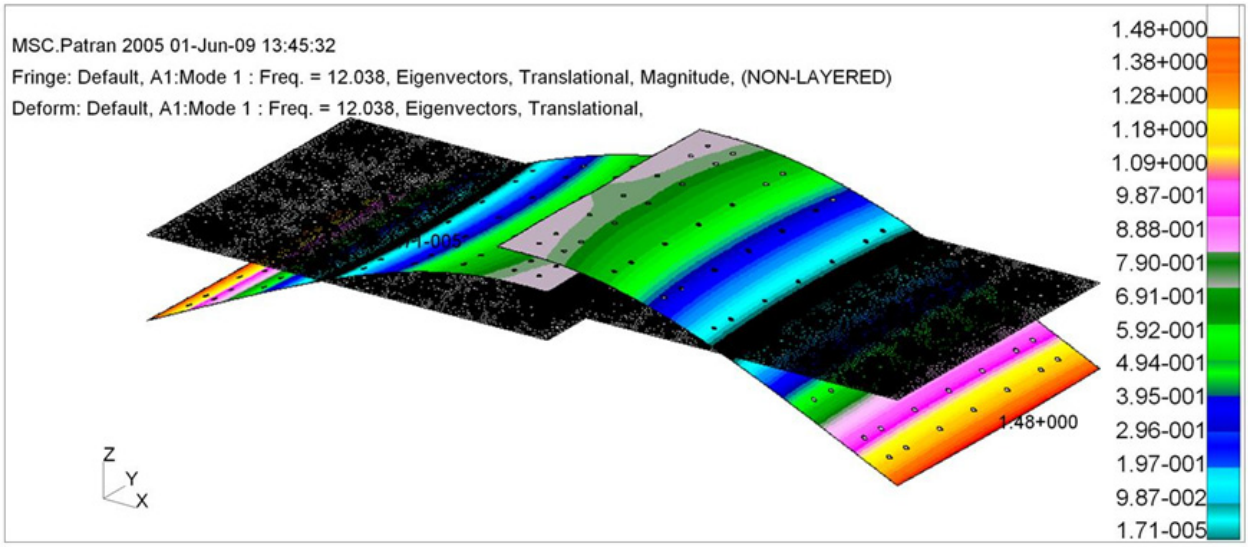


Figure A.22 - 1er forme du mode d'un assemblage de deux plaques – Cas A.

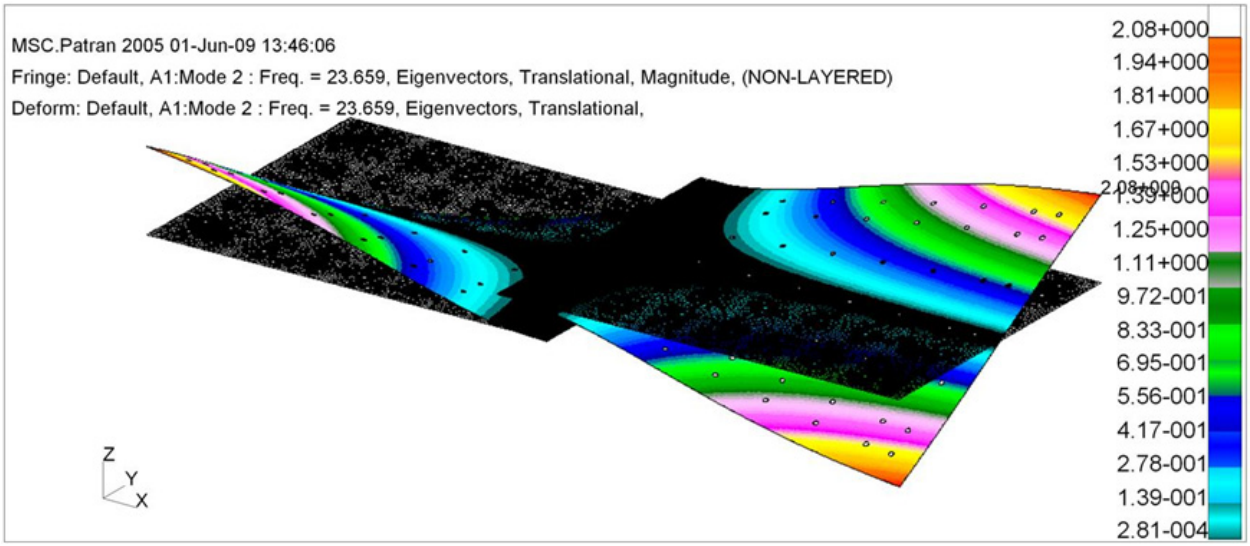


Figure A.23 - 2ème forme du mode d'un assemblage de deux plaques – Cas A.

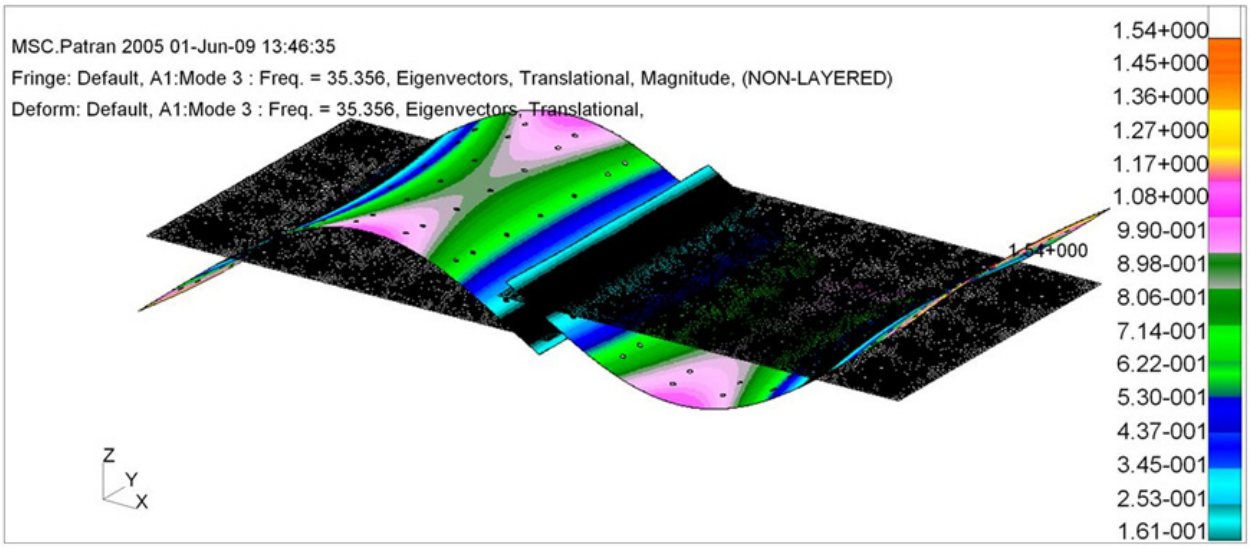


Figure A.24 - 3ème forme du mode d'un assemblage de deux plaques – Cas A.

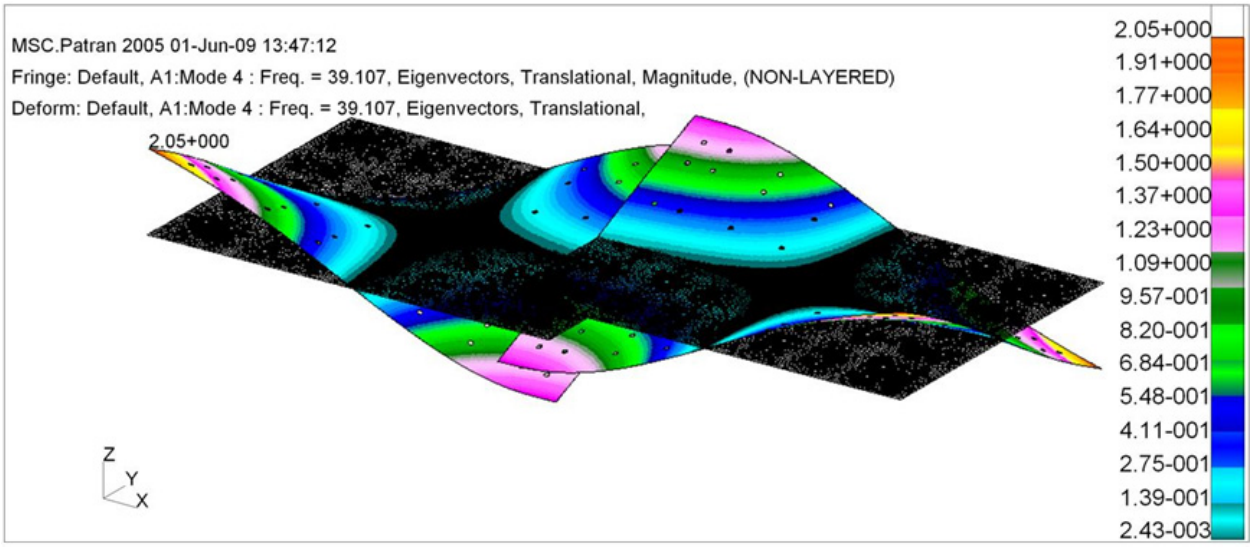


Figure A.25 - 4ème forme du mode d'un assemblage de deux plaques – Cas A.

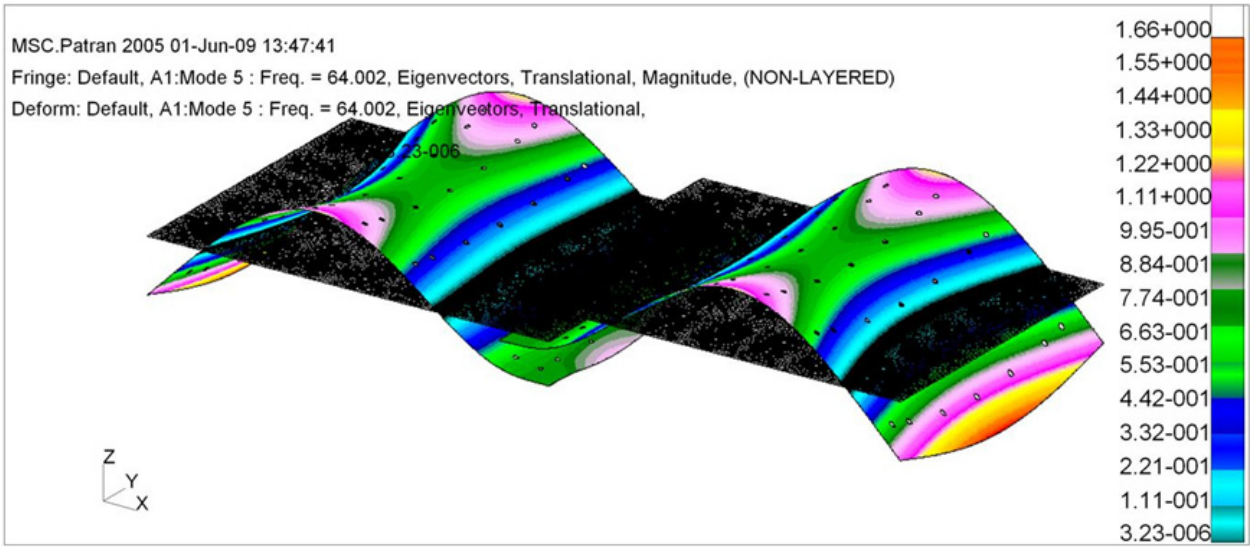


Figure A.26 - 5ème forme du mode d'un assemblage de deux plaques – Cas A.

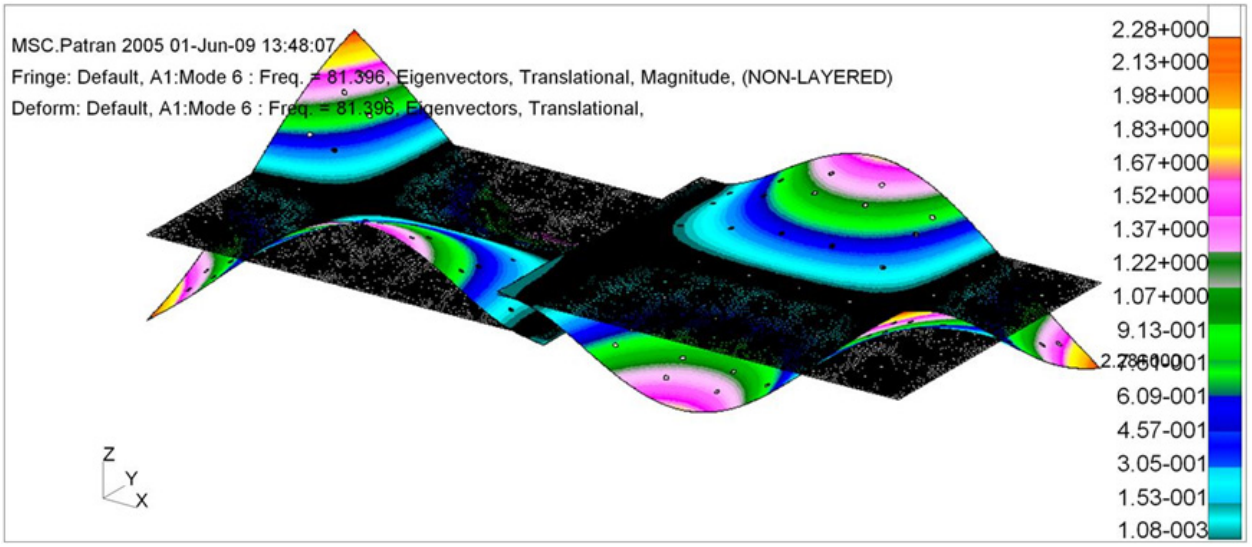


Figure A.27 - 6ème forme du mode d'un assemblage de deux plaques – Cas A.

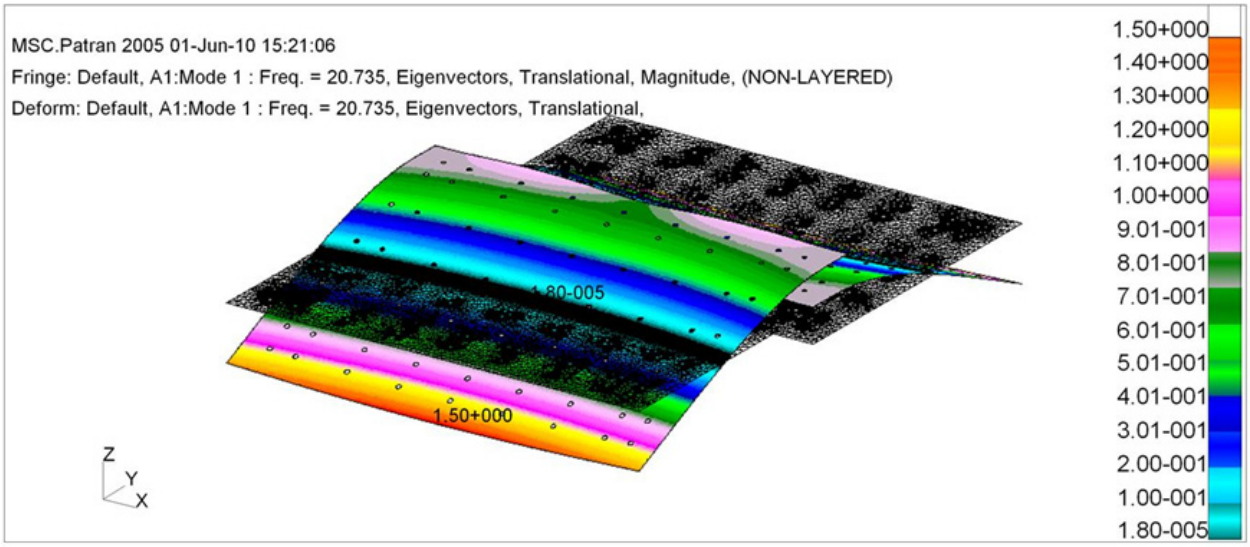


Figure A.28 - 1er forme du mode d'un assemblage de deux plaques – Cas B.

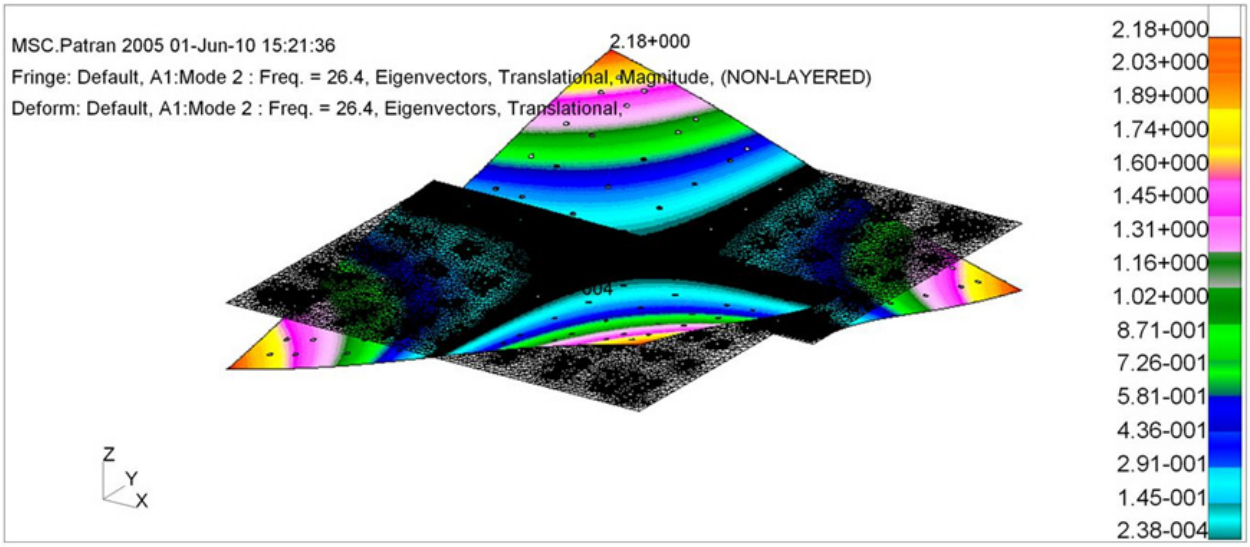


Figure A.29 - 2ème forme du mode d'un assemblage de deux plaques – Cas B.

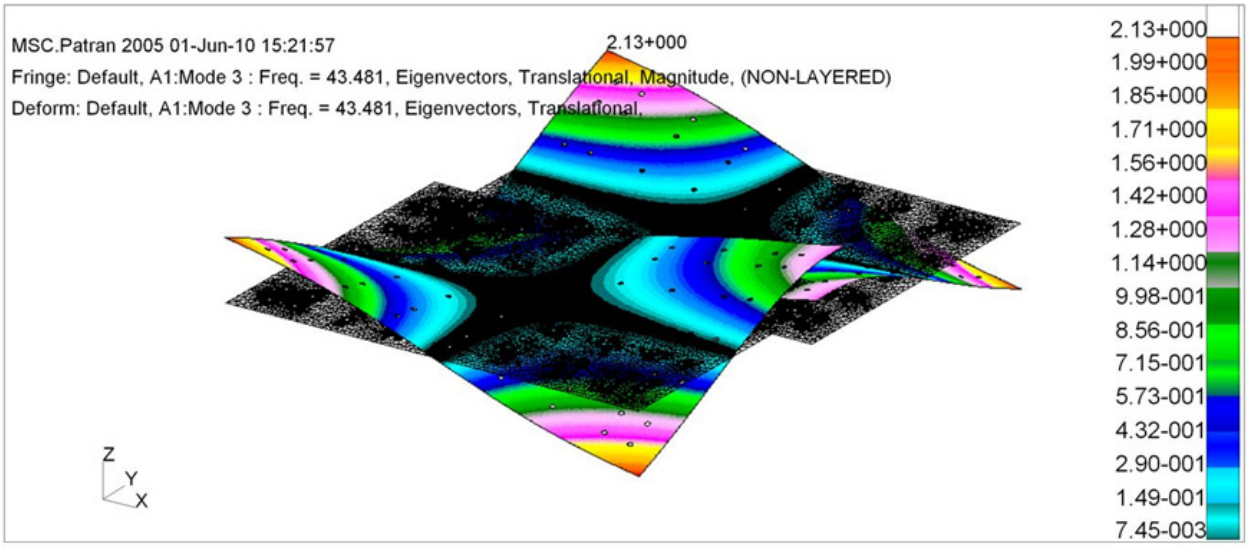


Figure A.30 - 3ème forme du mode d'un assemblage de deux plaques – Cas B.

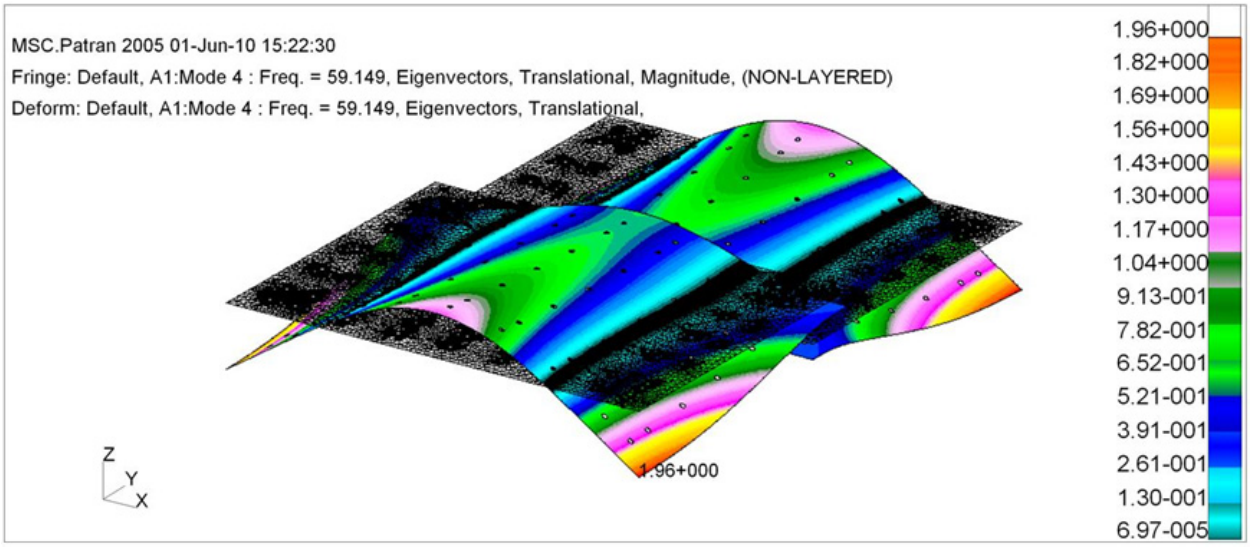


Figure A.31 - 4ème forme du mode d'un assemblage de deux plaques – Cas B.

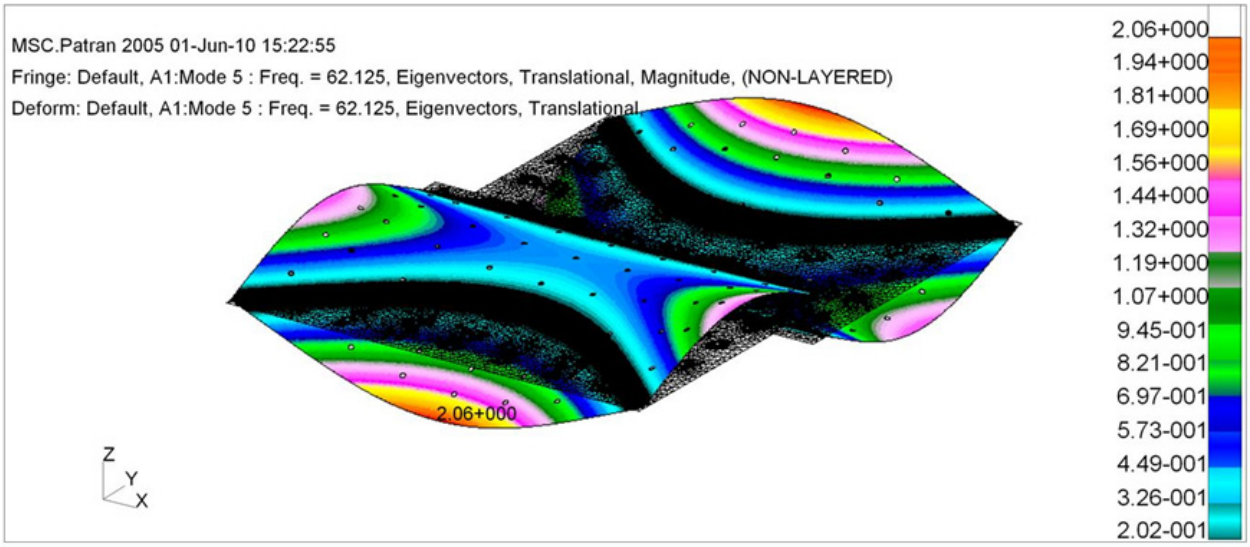


Figure A.32 - 5ème forme du mode d'un assemblage de deux plaques – Cas B.

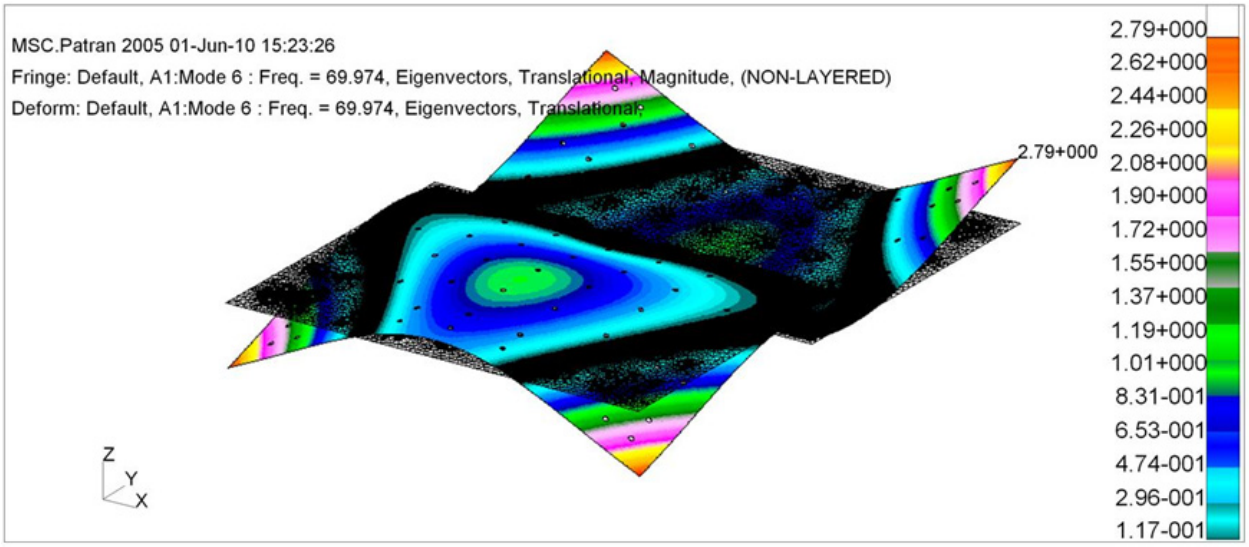


Figure A.33 - 6ème forme du mode d'un assemblage de deux plaques – Cas B.

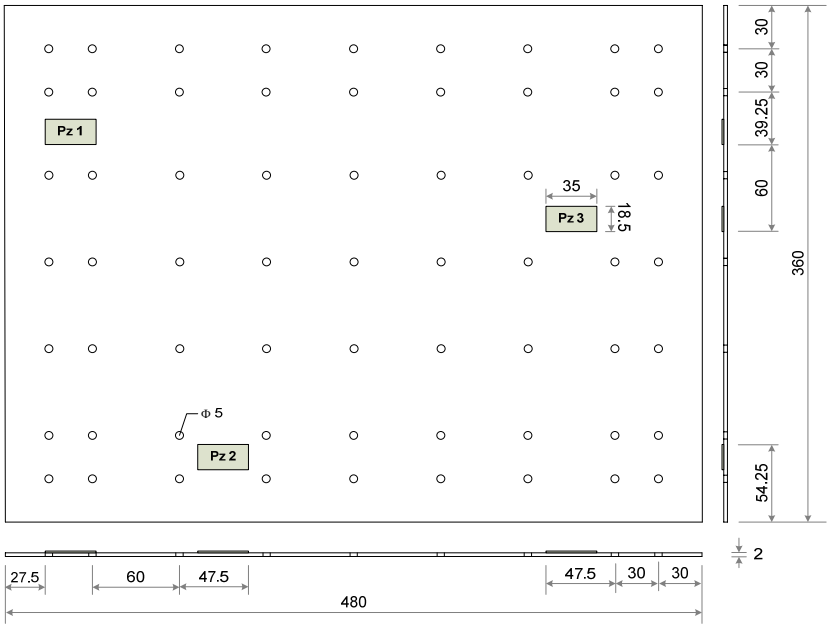


Figure A.33 - Placement des céramiques piézo-électriques suivant la déformation modale.

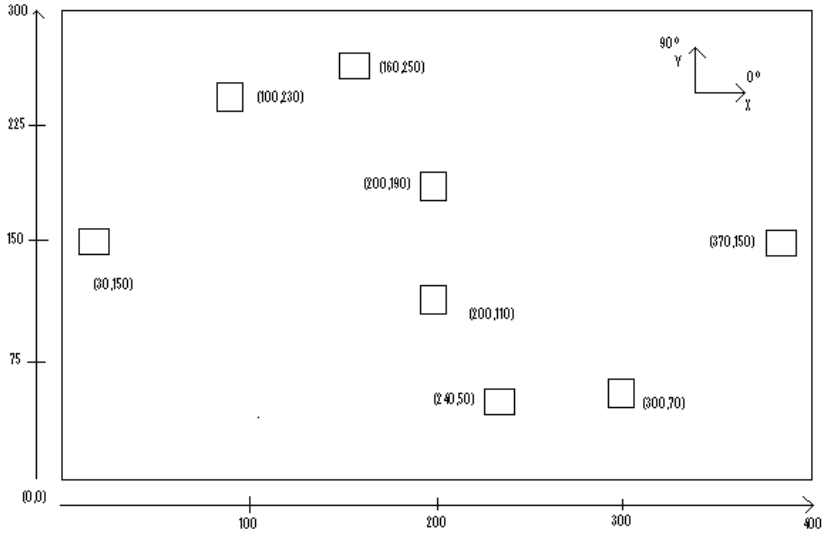


Figure A.33 - Placement des céramiques piézo-électriques par minimisation de normes.

A.3 - Références Bibliographiques

[Gawronski, 1998] - Gawronski, W. (1998). *Dynamics and control of structures - A modal approach*. Springer, 1st edition.

[Papadimitriou, 2004] - Papadimitriou C. (2004). Optimal sensor placement methodology for parametric identification of structural systems, *Journal of Sound and Vibration,* 278: 923–947.

[Gawronski, 1997] - Gawronski, W. (1997). Actuator and sensor placement for structural testing and control, *Journal of Sound and Vibration,* 208(1): 101-109.

[Soares *et al*, 1999] - Soares C.M.M. *et al* (1999), Optimal design of piezolaminated structures, *Composite Structures,* 47 : 625-634.

CONTRIBUTION A LA SURVEILLANCE DE L'INTEGRITE DES STRUCTURES

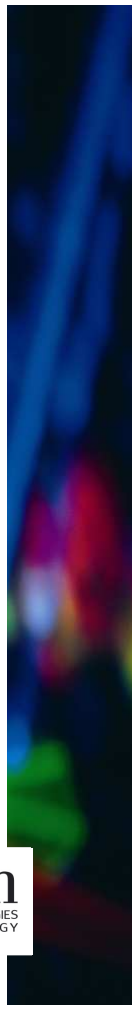
RESUME : La mise en place de la surveillance de l'intégrité des structures comprend les étapes de modélisation, d'identification, d'extraction des caractéristiques et de développement d'un modèle statistique. L'objectif de cette thèse est de développer une approche intégrée regroupant ces étapes et d'élaborer une stratégie de validation en utilisant un simulateur à éléments finis. Dans cette finalité, nous avons d'abord élaboré une méthode globale de modélisation d'une structure comprenant des capteurs piézo-électriques. Ensuite, nous avons choisi la méthode d'identification par sous-espaces pour améliorer la qualité de l'estimation des paramètres modaux et éliminer automatiquement les modes erronés. Un nouveau diagramme nommé histogramme de stabilisation a été proposé. Cet histogramme permet de sélectionner automatiquement les modes physiques, et d'obtenir le degré de confiance qui peut être accordé au mode identifié. En utilisant un modèle numérique simple, trois résidus basés sur les sous-espaces de la matrice de Hankel ont été étudiés. Nous avons montré que l'utilisation de ces résidus lors de la localisation des endommagements n'est pas très efficace. Par la suite, un nouveau vecteur de résidus non-paramétrique a été proposé. Ces résidus sont associés au noyau gauche de la matrice d'observabilité du système. En utilisant ce nouveau vecteur de résidus, nous avons également préconisé une méthodologie de localisation d'endommagement basée sur un modèle éléments finis et sur les réseaux de neurones. Les résultats numériques et expérimentaux obtenus sur une poutre composite et sur une plaque en aluminium permettent de valider la méthodologie proposée. Cette méthodologie est basée sur le calcul matriciel robuste et est bien adaptée pour l'identification des endommagements en temps semi-réel.

Mots clés : Surveillance de l'intégrité de structures, FDI, structures intelligentes, piézoélectricité, modélisation par éléments finis, identification par sous-espaces, estimation des paramètres modaux, réseau de neurones.

A CONTRIBUTION TO STRUCTURAL HEATH MONITORING

ABSTRACT: Conception of a structural health monitoring system comprises of various steps involving structural modeling, identification, feature extraction and development of a statistical model for damage identification. The objective of this thesis is to develop a damage localization approach integrating these steps and to validate the approach by finite element numerical simulations. In this context, different steps involved in the modeling of an active structure, comprising of piezoelectric sensors, were highlighted. For system identification, subspace identification (SubID) method was chosen, as it is based on robust matrix based operations. Problems related to the accuracy of modal parameter estimates and to the automatic elimination of spurious modes in this method were addressed by proposing an alternative stabilization histogram. This histogram automatically extracts identified modal parameters and gives an estimate of the level of confidence with which a mode is identified. Three existing subspace based features are tested by using a simple numerical model and it is shown that damage localization is difficult to achieve using these features. An artificial neural network based approach using a new non-parametric residual vector, as input, is proposed for damage identification. The residual vector is associated with observability null-space of the system and is generated by using parity matrices, obtained from SubID. Numerical and experimental results obtained from a cantilever beam and from aluminum plates validate the proposed methodology.

Keywords: Structural heath monitoring, FDI, intelligent structures, piezoelectricity, structural modeling, finite element analysis, subspace based identification, modal estimation, neural network.



ARTS ET MÉTIERS ParisTech

ParisTech
INSTITUT DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES
PARIS INSTITUTE OF TECHNOLOGY