



HAL
open science

Modèles et outils d'analyse des variabilités en phase de conception des produits à denture.

Jean-Paul Vincent

► **To cite this version:**

Jean-Paul Vincent. Modèles et outils d'analyse des variabilités en phase de conception des produits à denture.. Génie mécanique [physics.class-ph]. Arts et Métiers ParisTech, 2010. Français. NNT : 2010-ENAM-0011 . pastel-00522057

HAL Id: pastel-00522057

<https://pastel.hal.science/pastel-00522057>

Submitted on 29 Sep 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

École doctorale n° 432 : Sciences des Métiers de l'Ingénieur

Doctorat ParisTech

THÈSE

pour obtenir le grade de docteur délivré par

l'École Nationale Supérieure d'Arts et Métiers

Spécialité “ Génie mécanique ”

Présentée et soutenue publiquement par

Jean-Paul Vincent

Le 23 Juin 2010

Modèles et outils d'analyse des variabilités en phase de conception de produits à denture

Directeur de thèse : **Jean-Yves DANTAN**
Co-encadrement de la thèse : **Régis BIGOT**

Jury

Mme Zohra CHERFI, Professeur, Laboratoire ROBERVAL, Université de Technologie de Compiègne
M. Luc MATHIEU, Professeur, LURPA, Université Paris Sud
M. Michel POTIER FERRY, Professeur, Université Paul VERLAINE, Metz
M. Jean-Marc LINARES, Professeur, IUT d'Aix en Provence

Rapporteur
Rapporteur
Examineur
Examineur

**T
H
È
S
E**

Avant Propos

Ce mémoire de thèse représente une synthèse de mes activités de recherche menées depuis Septembre 2006 au sein du Laboratoire de Conception, Fabrication et Commande.

Ces activités ont été effectuées sous les statuts :

- d'allocataire Normalien de Septembre 2006 à Septembre 2009
- de professeur agrégé au lycée CARNOT à Dijon avec des enseignements en classe préparatoire aux grandes écoles (MPSI, PCSI et MP) de Septembre 2009 à ce jour.

Ce document se divise en cinq chapitres :

- *Introduction / Problématique*
- *Outil d'analyse d'engrènement*
- *Analyse des tolérances*
- *Modèles de spécification – Caractérisation*
- *Conclusion*

L'objectif de ces travaux s'inscrit dans la problématique de la maîtrise des variations géométriques le long du cycle de développement du produit. Le domaine d'application de ces travaux concerne le domaine des transmissions de puissance par obstacle (Engrenage).

Les engrenages sont utilisés pour transmettre une puissance d'un corps à un autre. Utilisés depuis l'antiquité, leur précision n'a cessé de s'améliorer. Aujourd'hui rencontrés dans de nombreux domaines comme l'automobile, l'aéronautique, l'appareillage chirurgical, etc., ils ont connu un essor significatif avec l'apparition de machines de taillage toujours plus puissantes et rapides. Très récemment, avec l'amélioration de la précision des procédés de forgeage, certaines dentures sont obtenues avec une qualité de finition et sont fonctionnelles après l'opération de forgeage, c'est le cas pour certains pignons de différentiels d'automobiles dit « net-shape ».

Ces travaux font suite, au laboratoire, aux travaux de MM Jérôme BRUYERE et Cyrille BAUDOIN. Ils ont été l'occasion d'un séjour scientifique à l'Université de Brème en Allemagne au laboratoire BIMAQ dirigé par le Professeur Gert GOCH en Avril et Mai 2009.

Remerciements

Je tiens à remercier toutes les personnes qui m'ont permis de mener à bien mon projet doctoral tant sur le plan scientifique, que sur le plan personnel.

Mes remerciements s'adressent tout d'abord à mon directeur de thèse Monsieur Jean-Yves DANTAN, pour son aide et son encadrement sans faille, aussi bien pour la thèse que pour la préparation au concours d'entrée à l'ENS. Merci pour tout Jean-Yves.

Je remercie vivement mon encadrant de thèse Monsieur Régis BIGOT, pour ses conseils, son expertise et ses tapes amicales sur l'épaule.

Je tiens fortement à remercier les différents membres du jury qui ont accepté d'évaluer ce travail. Tout d'abord, je remercie Zohra CHERFI et Luc MATHIEU pour le temps qu'ils ont consacré à la rédaction de mes rapports. Je remercie également Michel POTIER FERRY d'avoir accepté d'être mon examinateur. Enfin, je remercie Jean-Marc LINARES d'avoir accepté d'être le Président de mon jury de thèse.

Mes remerciements vont également à Jean-Luc BAUCHAT pour son soutien perpétuel tout au long de mon cursus universitaire aux Arts et Métiers, son très grand professionnalisme et son écoute auprès de ses anciens élèves.

Je remercie chaleureusement Jérôme BRUYERE pour m'avoir fait partager sa passion pour les engrenages qui fut, grâce à lui, la mienne par la suite.

Je remercie également Cyril BAUDOUIN pour son aide lors de la mise en place d'expérimentations.

Il m'est également important de remercier les différentes personnes que j'ai pu côtoyer durant ces années passées à l'ENSAM et qui ont créé une ambiance chaleureuse et amicale.

Mes remerciements s'adressent également aux personnes chargées de l'administration : Norah, Véronique et ma « maman d'adoption » Dominique. Elles m'ont toujours ouvert leurs portes avec

une grande gentillesse et cela quels que soient les problèmes administratifs que j'ai pu rencontrer et leur confier.

Je remercie également Olivier CABARROCAS et Daniel FORT du lycée Carnot de Dijon qui m'ont soutenu durant ma première année d'enseignement en classes préparatoires aux grandes écoles. Leur accueil et leur aide furent très importants pour moi et je tiens à les remercier pour tout cela.

D'un point de vue plus personnel, il me tient à cœur de remercier mon papa qui s'est sacrifié pour moi et m'a toujours soutenu durant toutes mes études. Son amour, sa confiance et son aide m'ont permis de concrétiser mes objectifs. Je tiens à lui faire part de toute l'estime et la reconnaissance que j'ai pour lui et lui dis « Merci » pour tout ce qu'il a fait pour moi depuis le début.

Enfin, je remercie du plus profond de mon cœur, Célia LEMMER, qui a toujours su m'épauler et me rassurer de manière exemplaire.

Je remercie également toute sa famille, pour tout ce qu'ils m'ont apporté durant ces trois années.

A papa.

A Célia.

Table des matières

1	Introduction - Problématique	10
1.1	Contexte général	10
1.1.1	Variabilité en production.....	10
1.1.2	Les incertitudes liées à la maîtrise des variations géométriques	12
1.3	La maîtrise des variations géométriques dans le cas des engrenages.....	15
1.4	Les incertitudes dans le contexte des engrenages.....	19
2	Outil d'analyse de l'engrènement	24
2.1	Introduction.....	24
2.2	Principe de la simulation d'engrènement-Modèles de comportement	25
2.2.1	Modèles de comportement cinématique 2D.....	26
2.2.2	Modèles de comportement cinématique 3D.....	31
2.3	Méthodes numériques pour la simulation de l'engrènement.....	37
2.3.1	Méthodes numériques dans le cas d'une formulation basée sur un modèle 2D par projection des points dans le plan d'action	38
2.3.2	Méthodes numériques dans le cas d'une formulation de type systèmes non linéaires continus	40
2.3.3	Méthodes numériques dans le cas d'une formulation basée sur un modèle 3D via une résolution par dichotomie.	48
2.3.4	Méthodes numériques d'agrégation de l'erreur cinématique	52
2.4	Modèle géométrique des engrenages.....	55
2.4.1	Construction des surfaces de substitution par des surfaces de Bézier.....	59
2.4.2	Modification géométrique des surfaces.....	68
2.4.3	Conclusion partielle.....	71
2.5	Comparaison des outils de simulation d'engrènement.	72
2.5.1	Démarche	72
2.5.2	Métrologies de l'engrenage	74
2.5.3	Comparaison essai/simulation.....	77
2.5.4	Comparaison qualitative des différents modèles de comportement cinématique	80
2.6	Discussion	81
2.7	Perspectives.....	82
3	Analyse des tolérances.....	83
3.1	Introduction.....	83
3.2	Modèles de spécification géométrique des produits.....	85
3.2.1	Spécifications dimensionnelles	85
3.2.2	Spécifications par zones	87
3.2.3	Modèle de spécification paramétrique ou vectorielle.....	89
3.2.4	Modèle de spécification statistique	89
3.2.5	Modèles de spécification dans le cas des engrenages.....	90
3.3	Les modèles de représentations des spécifications	94
3.4	La représentation mathématiques des spécifications dans le cas des engrenages..	96
3.5	Les différentes approches d'analyse des tolérances.....	104
3.5.1	Analyse au pire des cas	104
3.5.2	Analyse statistique	105
3.6	L'outil d'analyse des tolérances basé sur la simulation de Monte Carlo	109

3.6.1	Intervalle de confiance de la proportion respectant l'exigence fonctionnelle:	
	110	
3.6.2	Démarche proposée pour l'analyse des tolérances des engrenages :.....	113
3.6.3	Résultats :	119
3.7	Conclusion	120
4	Modèle de spécification et incertitudes	121
4.1	Introduction	121
4.2	Tolérancement statistique des erreurs cinématiques -Métrologie cinématique virtuelle.....	124
4.2.1	Métrologies dans le cas des engrenages.....	124
4.2.2	Les caractéristiques cinématiques spécifiées	125
4.2.3	Tolérancement statistique des caractéristiques cinématiques	126
4.2.4	Protocole pour l'estimation de ces nouvelles caractéristiques	127
4.2.5	Illustration/Application	130
4.2.6	Sensibilité du mesurande aux incertitudes d'acquisition	133
4.2.7	Discussions	136
4.3	Caractérisation des modèles de spécification via les incertitudes.....	137
4.3.1	Caractérisation des modèles de spécifications via les incertitudes de corrélation	141
4.3.2	Caractérisation des modèles de spécification via les incertitudes de mesures.	160
4.4	Conclusion partielle	164
	Conclusion générale	165

1 Introduction - Problématique

1.1 Contexte général

Les contraintes économiques et la concurrence industrielle croissent sans cesse entraînant inévitablement une augmentation du besoin ou exigences des clients et une diminution des coûts de production. Ainsi, dans le but d'assurer la conformité du produit (La conformité d'un produit est son aptitude à satisfaire les exigences fonctionnelles exprimées par le concepteur, qui sont la retranscription du besoin ou exigences du client), il est nécessaire de maîtriser les variations géométriques et les incertitudes, à chaque étape de la conception. Ces travaux de recherche se focalisent sur la maîtrise des variations géométriques et leurs spécifications fonctionnelles, et sur les incertitudes relatives aux contrôles de conformité inhérentes à cette activité de spécification fonctionnelle. La notion « variation » est ici utilisée au sens large et peut être décomposée en deux catégories : la variabilité des écarts géométriques et les incertitudes liées à la conformité du produit.

1.1.1 Variabilité en production

Les écarts géométriques des pièces et du produit sont inhérents à la fabrication. Ils peuvent être décrits par l'*Axiome de variabilité en production* [Mathieu 2007], [Srinivasan 1999]. Ils résultent du fait qu'il est impossible de fabriquer une forme géométrique strictement identique à la définition donnée par le concepteur. C'est la notion d'*exactitude*. A cela s'ajoute le fait qu'il n'est pas non plus possible de réaliser strictement la même forme plusieurs fois. C'est la notion de *dispersion*.

Cette variabilité en production génère des variations des performances du produit, engendre des problèmes de montabilité du produit ou d'interchangeabilité des pièces composant le produit. Afin de garantir un certain niveau de performances relatif aux exigences fonctionnelles transcrites par le concepteur à partir des exigences du client, il est nécessaire de transférer ces exigences sur chacun des composants. Ce transfert vise à limiter les variations de chaque composant assurant

ainsi l'interchangeabilité des composants et les exigences fonctionnelles avec une certaine probabilité.

Dans la littérature, nous pouvons distinguer deux niveaux d'outils aidant aux transferts :

- L'analyse des tolérances (Figure 1-1) consiste à analyser l'impact des variations admissibles sur les exigences et ainsi vérifier que les tolérances allouées sur chaque composant permettent d'avoir un produit vérifiant ses exigences et contraintes de conception.

L'analyse des tolérances peut être effectuée au pire des cas ou statistiquement. Pour l'analyse des tolérances au pire des cas (analyse déterministe), l'analyse considère les plus mauvaises combinaisons possibles des différentes valeurs de tolérances et évalue les jeux et les caractéristiques géométriques fonctionnelles afin d'assurer la montabilité, le respect des exigences géométriques et l'interchangeabilité de 100% des mécanismes (la probabilité que les exigences géométriques soient respectées est égale à 1). Cette condition de 100% a généralement tendance à réduire les intervalles de tolérances et donc à augmenter le coût de fabrication. L'analyse statistique est une approche plus pratique et économique d'analyser les tolérances, pour lequel on accepte un petit pourcentage de non-conformité. Mais les approches statistiques sont généralement limitées aux mécanismes pour lesquels les « response functions » sont définies explicitement ($Y=f(X)$) et continues dans un intervalle donné [Nigam 1995], [Skowronski 1997].

- La synthèse des tolérances consiste à déterminer et quantifier les spécifications des différents composants.

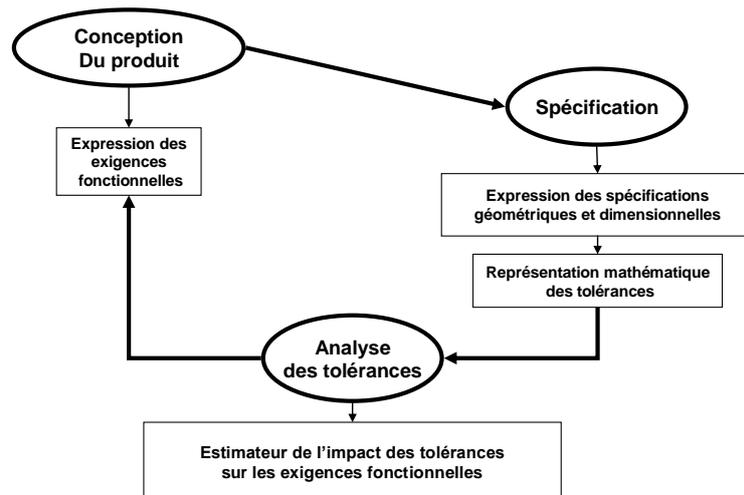


Figure 1-1-Principe de l'analyse des tolérances

Ces activités d'analyse et d'allocation des tolérances ont pour objectif la limitation des variations géométriques de chacun des composants afin d'assurer le respect des exigences fonctionnelles, c'est-à-dire la conformité du produit. Lors de la vérification de cette conformité, la prise de décision est entachée d'incertitudes liées à la mesure mais aussi aux modèles utilisés lors de l'analyse des tolérances. Ces incertitudes totales (ISO 17450 Part 2) sont détaillées dans le paragraphe suivant.

1.1.2 Les incertitudes liées à la maîtrise des variations géométriques

Les *incertitudes* entachent tous résultats du *mesurage* d'une grandeur (ou *mesurande*) et par conséquent la prise de décision sur la conformité du produit au regard des spécifications. L'opération de *vérification* permet de prendre en partie cette décision. La *métrologie* des pièces, des produits, ou des procédés de fabrication permet de gérer la préparation et l'exécution des opérations de mesurage afin de garantir les résultats de mesure, leur traçabilité et leur incertitude. Les incertitudes peuvent être décrites par l'*axiome d'incertitude en métrologie* [Mathieu 2007], [Srinivasan 1999] : Aucun mesurage ne peut donner la valeur vraie d'une grandeur (*justesse*) et plusieurs mesurages d'une même grandeur ne peuvent donner des valeurs strictement identiques (*répétabilité*).

Ainsi tout mesurage est entaché d'une incertitude et les causes sont d'origine multiple. L'estimation de l'incertitude de mesure [Priel 1999] est une tâche difficile. Le Guide pour l'expression de l'incertitude [GUM 1995] propose une liste des différentes causes agissant sur le résultat d'une mesure. Le diagramme de cause à effet d'Ishikawa (*Figure -1-2*) est alors utile pour dresser une liste des causes potentielles de variabilité des résultats d'une mesure :

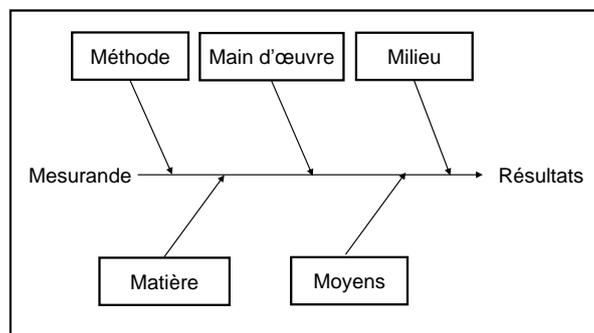


Figure -1-2 - Diagramme d'analyse des causes de variabilités dans un processus de mesure

Les incertitudes de mesures, qui regroupent toutes les causes de variabilité présentes de la spécification d'une caractéristique au résultat de son inspection, sont donc inévitables quelque soit

la rigueur avec laquelle les mesures soient faites. Elles sont ainsi désignées par les métrologues et décrites dans le Guide pour l'expression de l'incertitude. Ce dernier propose des méthodes pour évaluer et exprimer ces incertitudes de mesures.

Néanmoins elles ne décrivent que la variabilité présente de la spécification d'une caractéristique aux résultats de son mesurage. D'autre type d'incertitudes sont présentes de l'activité de conception du produit, à l'activité de spécification. La norme [ISO/TS17450-2] propose une décomposition de l'incertitude totale liée à la maîtrise des variations géométriques (*Figure 1-3*):

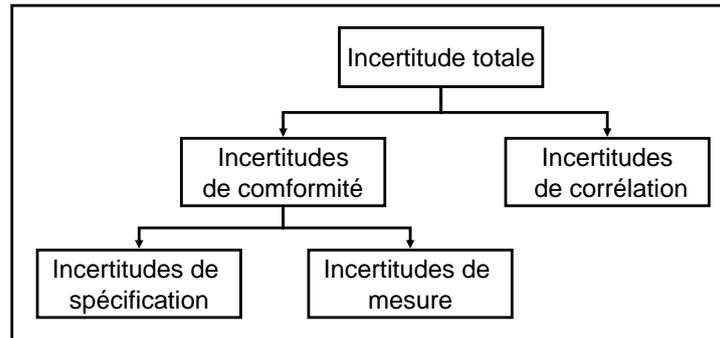


Figure 1-3 – Décomposition simplifiée de l'incertitude totale d'après [ISO TS 17450-2].

Les incertitudes totales sont composées des « incertitudes de corrélation » et des incertitudes dites « Incertitudes de conformité » qui regroupent les « incertitudes de spécification » et les « incertitudes de mesures ».

Les incertitudes de corrélation caractérisent le fait que la fonctionnalité attendue du produit et les caractéristiques spécifiées ne sont pas parfaitement corrélées. Dans le cas où les incertitudes de corrélation sont nulles, il est possible de dire que :

- Si les spécifications portées sur les caractéristiques de chacun des composants du produit sont respectées, alors les exigences portées sur les caractéristiques fonctionnelles sont garanties et réciproquement.

Dans le cas où il existe des incertitudes de corrélation, cette notion de causalité n'est plus valable :

- Si les spécifications portées sur les caractéristiques de chacun des composants du produit sont respectées, alors les exigences portées sur les caractéristiques fonctionnelles ne sont pas forcément garanties, et réciproquement.

Les incertitudes de spécification traduisent le fait que l'expression d'une spécification est ambiguë. Dans ce cas, l'interprétation d'une spécification peut différer d'un acteur du cycle de vie du produit à l'autre. Les incertitudes de spécification dépendent entre autres de la clarté de son expression, de sa complétude, de l'interprétation qu'en fait le métrologue, le concepteur, etc...

La décision à prendre sur la conformité du produit dépend des défauts de fabrication (*variabilité en production*) et des incertitudes totales. La notion de conformité est subjective, et trop souvent vue à tort, du point de vue du métrologue : une pièce est conforme, si à la suite de la mesure, l'ensemble des valeurs mesurées des caractéristiques spécifiées sont dans les tolérances. Dans ce cas le produit est conforme aux spécifications (*Figure 1-4*).

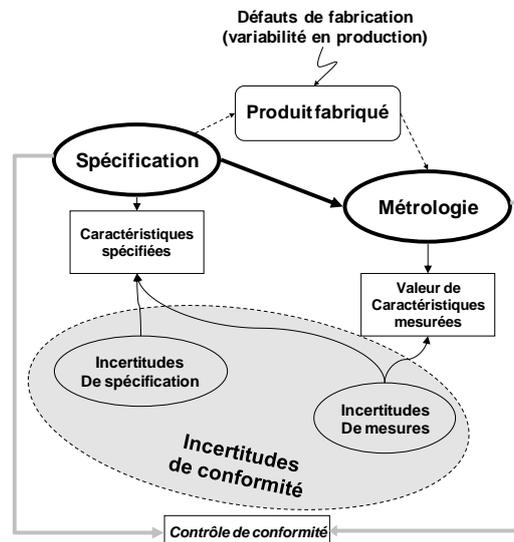


Figure 1-4 – Le contrôle de conformité vu par le métrologue.

De ce fait, le terme « incertitudes de conformité » fourni par la norme [ISO TS 17450-2] peut être remis en cause car il est considéré au sens du métrologue :

La décision relative à la conformité du produit ne doit pas être prise uniquement au regard des tolérances sur les caractéristiques spécifiées, mais par rapport aux fonctionnalités du produit (exigences fonctionnelles).

La question à se poser n'est pas : « Le produit respecte t'il l'ensemble des spécifications sur les caractéristiques spécifiées ? », qui ne sont pas forcément l'image directe du fonctionnel puisque le lien entre les exigences fonctionnelles et les caractéristiques spécifiées sont entachées d'incertitudes de corrélation, mais « Le produit est t'il conforme aux besoins du client ? ».

Ainsi le contrôle de conformité doit se faire entre le besoin (ou l'intention du concepteur) et l'ensemble des résultats de la métrologie (*Figure 1-5*).

La décision relative à la conformité du produit dépend de la variabilité du produit fabriqué et de l'incertitude totale qui est l'ensemble des incertitudes de mesures, de spécification et de corrélation. Le premier type d'incertitude est quantifiable et a fait l'objet de nombreuses études. A contrario, les incertitudes de spécification et de corrélation sont à ce jour des notions subjectives et qui ne sont actuellement pas, ou peu, quantifiables et qualifiables. Srinivasan [Srinivasan 2001] a

les propos suivant « *Correlation uncertainty, in particular, is an uncharted territory. Standards don't tell us how to find this. They provide a language to describe it. This should be an area for some intense research* ». La notion d'incertitude de corrélation impact directement la décision sur la conformité du produit.

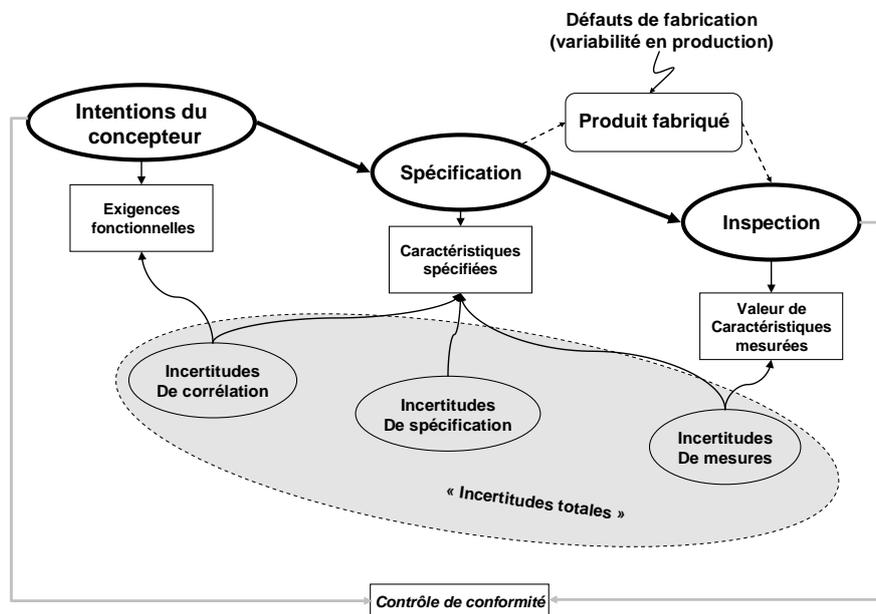


Figure 1-5 – Le contrôle de conformité d'un point de vue fonctionnel.

Afin de minimiser le risque relatif à la conformité du produit, il est nécessaire de maîtriser les variations géométriques du produit, c'est-à-dire la variation des écarts géométriques dus aux imperfections des procédés de fabrication et d'assemblage, et les incertitudes totales dont en particulier, l'incertitude de corrélation encore peu étudiée à l'heure actuelle. C'est dans ce cadre que s'inscrivent ces travaux. Néanmoins ils n'ont aucunement la prétention d'assurer la totale maîtrise des variations géométriques du produit, mais d'essayer d'y contribuer, en proposant des outils et des démarches aussi adéquates que possible.

1.3 La maîtrise des variations géométriques dans le cas des engrenages

Dans le cas des engrenages, l'intention du concepteur est de répondre aux besoins du client, elle peut s'exprimer, par exemple, sous la forme suivante : concevoir un engrenage qui :

- résiste aux efforts qui lui sont appliqués,
- ait une certaine tenue à la fatigue,

- ait un fonctionnement silencieux.
- ...

Dans le cas des transmissions fermées, c'est-à-dire qui sont enveloppées dans un carter, le bruit rayonné résulte pour l'essentiel de l'état vibratoire du carter de la transmission induit par des sources d'excitation internes et/ou externes. Les sources internes sont associées majoritairement au processus d'engrènement et sont transmises au carter via tous les composants de la transmission. Il est bien établi que *l'erreur de transmission* constitue la principale source d'excitation vibratoire interne [Driot 2001], [Litvin 2004]. Ainsi pour limiter le bruit généré lors de l'engrènement, le concepteur doit limiter les caractéristiques cinématiques relatives à l'erreur de transmission. Dans ces travaux, le modèle de comportement vibro-acoustique qui lie le niveau de bruit et l'erreur de transmission n'est pas étudié, le niveau de fonctionnalité est donc d'un niveau inférieur et nous considérerons que la **fonctionnalité attendue de l'engrenage porte sur la limitation des caractéristiques cinématiques**.

Dans le cas des engrenages, les caractéristiques spécifiées sont nombreuses et leur impact sur l'erreur cinématique d'engrènement est difficilement qualifiable puisqu'elles sont dépendantes. Pour illustrer la problématique de la maîtrise des variations géométriques des engrenages, il est judicieux d'étudier la liste des caractéristiques spécifiées.

Le profil nominal d'une dent à développante de cercle (respectivement sphérique) ne dépend que du cercle de base (respectivement cône de base) et de l'angle de pression [Henriot 1983]. La définition mathématique de ce profil ne repose donc que sur les quelques paramètres qui définissent les éléments de base et sur les propriétés cinématiques de l'engrènement. Les caractéristiques spécifiées ne sont pas l'image de ces paramètres (*Tableau 1-1*). Elles sont très nombreuses et la qualification fonctionnelle de celles-ci devient très complexe étant donné leurs dépendances (*Tableau 1-2*) [Baudouin 2007]. Il en est de même pour la qualification de ces caractéristiques au regard du processus de fabrication. Autrement dit, dans le cas des engrenages, il est très complexe d'explicitier des relations bijectives entre les fonctions techniques et les caractéristiques spécifiées et entre les caractéristiques spécifiées et les paramètres process. La définition des caractéristiques spécifiées doit répondre à plusieurs exigences : Elles doivent être mesurables avec des incertitudes de mesure « faibles », elles doivent permettre le contrôle de conformité du produit, et/ou elles doivent permettre le suivi du processus.

Granularité	Paramètre géométrique	Caractéristique	Symboles
Engrenage	Entraxe	Erreur d'entraxe	f_a
	Angle des axes	Inclinaison Déviation	$f_{\Sigma\delta}$ $f_{\Sigma\beta}$
	Jeux	Erreur composée radiale Saut radial Erreur composée tangentielle Saut tangentiel	F_i'' f_i'' F_i' f_i'
Roue dentée	Excentricité denture/arbre ou alésage	Faux rond	f_r
	Largeur		b
	Diamètre de tête		d_a
Denture	Diamètre primitif de taillage		d_0
	Diamètre de base		d_b
	Pas	Erreur individuelle de pas Erreur individuelle de pas de base Erreur consécutive de pas Erreur cumulée sur un secteur de k pas Erreur totale de division	f_p f_{pb} f_u F_{pk} F_p
	Profil	Erreur totale de profil Erreur d'inclinaison de profil Erreur de forme de profil	F_f $f_{H\alpha}$ f_f
	Hélice (Distorsion ¹)	Erreur totale de distorsion Erreur d'inclinaison longitudinale Erreur de forme longitudinale	F_β $f_{H\beta}$ f_β
	Épaisseur circulaire	Erreur d'épaisseur	A_s
	Ecartement	Erreur d'écartement	A_w

¹ Distorsion : la distorsion est un terme beaucoup plus générique que l'hélice, il englobe les modifications longitudinales voulues comme un bombé ou une dépouille d'extrémités par exemple.

Tableau 1-1- Liste des différentes caractéristiques géométriques des engrenages [Henriot 1983].

Fonction technique	Caractéristiques importantes
Grande régularité dans la transmission du mouvement	Saut tangentiel et radial Erreur totale de division Erreur composée tangentielle et radiale Faux rond
Silence de fonctionnement Bonne capacité en charge dynamique	Saut tangentiel et radial Erreur individuelle de pas Erreur totale de profil Erreur d'inclinaison longitudinale
Grande capacité de charge statique	Erreur individuelle de pas Erreur d'inclinaison longitudinale
Pas d'indication particulière de fonction	Erreur composée radiale Erreur d'inclinaison longitudinale Erreur totale de profil

Tableau 1-2- Caractéristiques déterminantes pour une fonction technique particulière [Henriot 1983]

Toutes les tolérances ne portent pas sur des caractéristiques géométriques, par exemple : l'écart total composé tangentiel (F_i') (différence maximale entre les déplacements circonférentiels effectifs

et théoriques ramenés au cercle primitif de la roue contrôlée, lorsque celle-ci engrène avec un étalon sur un tour complet), l'écart de saut tangentiel (f_i) (différence entre les écarts composés tangentiels maximal et minimal pour une rotation d'un pas de la roue à contrôler) [Goch 2003]. Ces caractéristiques sont mesurées par engrénométrie. L'engrénométrie, qui évalue l'homocinétisme de la transmission obtenue, correspond à une évaluation plus fonctionnelle qui est une image du comportement cinématique : un pignon à contrôler est entraîné par un étalon (*Figure 1-6*). Toutes les définitions d'erreurs cinématiques normalisées (F'_i et f'_i) sont définies dans ce cas de figure (*Figure 1-6*). Par contre, cette métrologie plus fonctionnelle ne permet que très difficilement le réglage et la surveillance des moyens de fabrication ; pour cette raison les industriels préfèrent une métrologie purement géométrique (erreur de pas, ...).

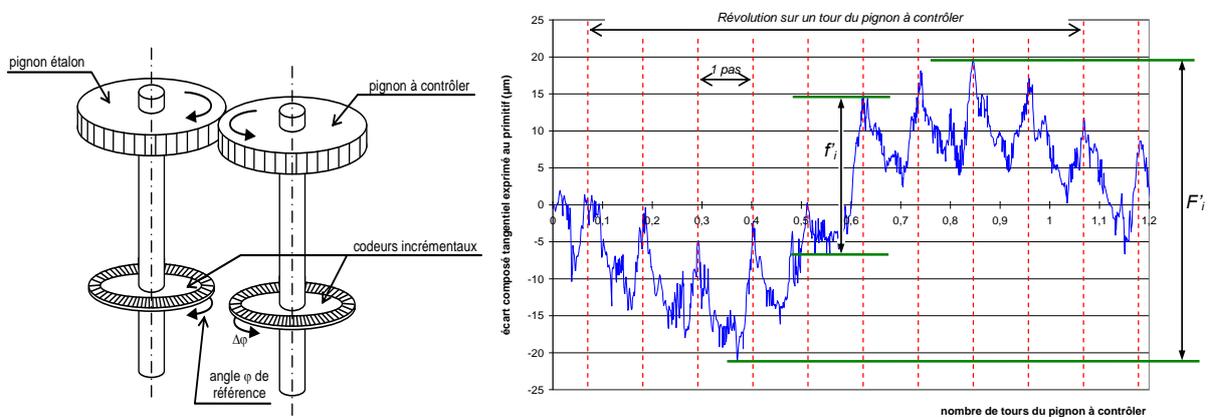


Figure 1-6- Principe de l'engrénométrie [Goch 2003]

Afin d'allouer les tolérances, les normes en vigueur pour les engrenages (AGMA, ISO ou DIN) proposent des classes de qualité et pour chaque classe, des tolérances sur les caractéristiques spécifiées. L'allocation des tolérances définie dans ces normes est issue d'un très grand nombre d'expérimentations menées sur des engrenages cylindriques obtenus par taillage. Cette allocation tient compte des capacités des procédés de taillage.

Les procédés de fabrication évoluent et il est désormais possible d'obtenir des dentures finies directement en forgeage à froid par exemple : ce sont les engrenages dit « net-shape » [Dean 2000], [Berviller 2006]. De plus il existe d'autres types de profil que la développante de cercle. Nous pouvons citer les engrenages à profils circulaires convexo-concaves comme par exemple les engrenages Wildhaber-Novikov (étudiés lors de mon Projet de Fin d'Etude), réputés pour leur résistance. Les normes ne sont pas adaptées dans de tels cas.

Afin d'allouer correctement les tolérances de ces engrenages, il est nécessaire de procéder à une analyse des spécifications dont celles de forme sur le fonctionnement cinématique. La plupart des

outils d'analyse de tolérances se focalisent sur la condition d'assemblage et de précision avec une vue statique du système mécanique, et n'intègrent pas les défauts de forme dans le modèle géométrique support de l'outil de simulation. Pour l'analyse des tolérances des engrenages, le comportement géométrique et cinématique (appelé aussi domaine de compatibilité ou « response functions ») ne sont pas modélisables via une fonction explicite ou implicite, il est calculable par simulation numérique. Au sein du laboratoire, un premier outil d'analyse des tolérances des engrenages (coniques) a été développé dans le cadre des travaux de thèse de Jérôme BRUYERE. Son approche repose sur une modélisation vectorielle des défauts d'orientation et de position, sur une modélisation surfacique (surface paramétrée avec défauts sinusoïdaux) des défauts de forme, sur une modélisation 3D des contraintes du contact entre dents (modélisation basée sur l'approche TCA) et la simulation de Monte Carlo pour la méthode d'analyse.

Dans un objectif d'étendre cet outil à d'autres modèles de spécification et de réduire les problèmes de convergence de la résolution des contraintes de contact 3D, nous avons structuré notre démarche en trois étapes :

- Développement des outils de simulation de l'impact des variations géométriques sur le comportement cinématique de l'engrenage – Partie détaillée dans le chapitre 2
- Définition des modèles spécifications et leurs représentations mathématiques – Partie détaillée dans le chapitre 3 pour le paramétrage des défauts géométriques et pour les représentations mathématiques des spécifications.
- Développement d'un outil d'analyse de tolérances – Partie détaillée dans le chapitre 3

1.4 Les incertitudes dans le contexte des engrenages

Lors de la métrologie, la prise de décision relative à la conformité fonctionnelle est perturbée par les incertitudes de mesures [Weckenmann 2007] qui sont dues aux moyens de mesure, à la stratégie de mesure et aux traitements, et par les incertitudes de corrélation (la valeur mesurée n'est pas l'image directe de la fonctionnalité du produit). Comme il a été mentionné précédemment, les caractéristiques géométriques sont nombreuses, et il est très difficile d'explicitier des relations bijectives entre la fonctionnalité du produit, et les caractéristiques spécifiées. Parmi cette multitude de caractéristiques, nous pouvons citer l'une des plus connues : l'erreur de pas tangentielle. La présence d'une erreur de pas va mener à un saut sur l'erreur cinématique d'engrènement qui correspond à un retard puis à une avance de l'engrènement, ou

inversement (*Figure 1-7*). Ainsi, une erreur de pas va être synonyme d'un écart de saut tangentiel (f_i) (*Figure 1-6*).

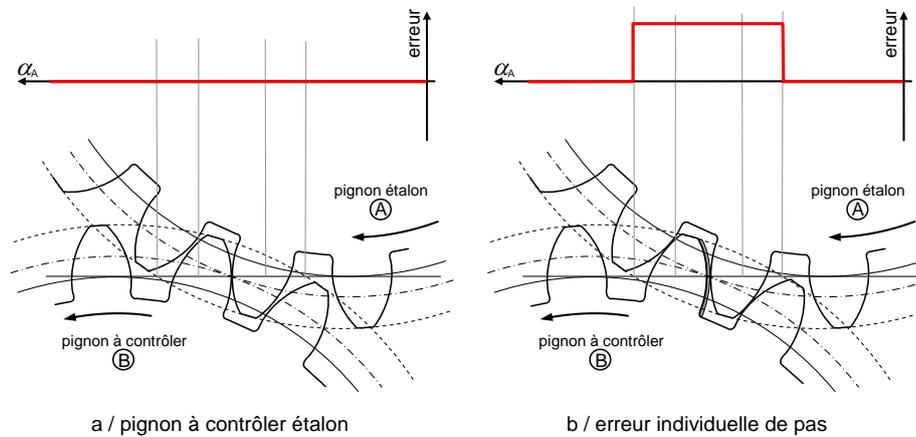


Figure 1-7- Influence d'une erreur individuelle de pas sur l'erreur de transmission [Baudouin 2007].

Les normes distinguent plusieurs types d'erreur de pas (**Figure 1-8**) [ISO 1328-1]:

- Erreur individuelle de pas (f_p) : Différence algébrique entre la valeur effective d'un pas et la valeur correspondante théorique. Elle est définie sur un cercle concentrique à l'axe de la roue situé sensiblement à mi hauteur de dent.
- Erreur individuelle de pas de base (f_{pb}) : Différence algébrique entre les valeurs réelle et théorique de la distance entre deux profils homologues consécutifs mesurée sur une tangente au cylindre ou au cône de base. Il dépend donc de la tangente choisie comme support de mesure. Aucune précision n'est apportée dans la norme sur cet aspect, ce qui laisse une interprétation possible au contrôleur.
- Erreur consécutive de pas (f_u) : Différence algébrique entre deux erreurs individuelles consécutives. Cette grandeur n'est pas normalisée au niveau international, mais recommandé dans les normes allemandes et couramment utilisée en milieu industriel.
- Erreur cumulée de pas (F_{pk}) : Différence algébrique, sur tout secteur de k pas, entre la longueur effective et la longueur théorique de l'arc considéré. En théorie, elle est égale à la somme algébrique des erreurs individuelles pour les k pas considérés.
- Erreur totale de division (F_p) : valeur maximale de l'erreur cumulée de pas sur tout secteur de flancs homologues. Il est représenté par l'amplitude totale de la courbe d'erreur cumulée de pas.

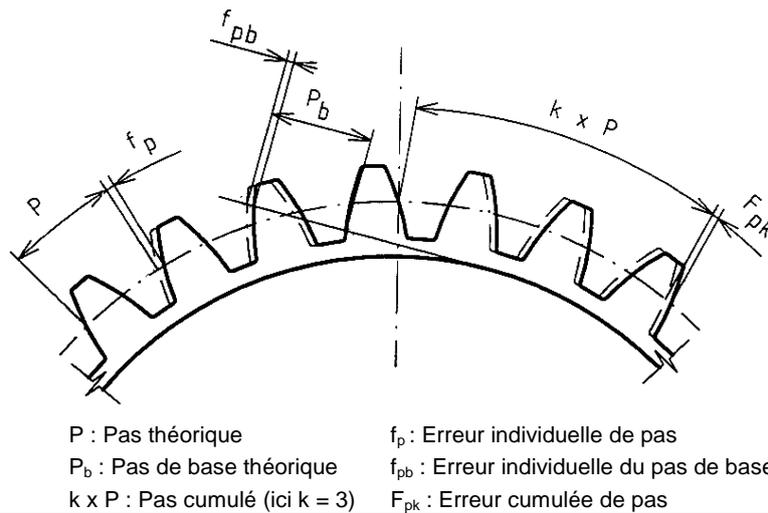


Figure 1-8- Définition des différentes erreurs de pas [ISO 1328-1]

La définition de l'erreur individuelle de pas f_p n'est pas complète et les différents éléments géométriques pour son évaluation ne sont que partiellement décrits. Il n'y a pas d'informations concernant la définition de l'axe de la roue. Que signifie la valeur effective de pas, comment est-elle définie, et par rapport à quels éléments géométriques ? L'ensemble de ces imprécisions rendent la définition de l'erreur individuelle de pas insatisfaisante. Cette « spécification » de caractéristique constitue un bon exemple de l'**incertitude de spécification** parce qu'elle n'est pas univoque.

Afin de remédier à ces lacunes, les normes incluent dans la définition de la caractéristique spécifiée, sa technique de mesure. Par exemple dans la norme [ANSI/AGMA 2009-B01], associé à *single pitch variation* f_{pt} est proposée la technique de mesure.

La mesure de l'erreur de pas se fait normalement sur le cercle primitif, la position des acquisitions (cercle de contrôle –Figure 1-9) impacte la valeur mesurée [Baudouin 2007]. La Figure 1-9 illustre l'impact d'une légère modification de la position d'acquisition sur l'erreur de pas mesurée. Cette imprécision de la valeur mesurée est un exemple d'**incertitude de mesure**. Afin de diminuer ces incertitudes de mesure, Anke GUENTHER et Gert GOCH [Guenther 2006] ont proposé une nouvelle stratégie de mesure en ne modifiant pas la caractéristique mesurée. De même, Tylo PFEIFER [Pfeifer 2001] et Cyrille BAUDOUIN [Baudouin 2007], [Baudouin 2008] ont proposé deux nouvelles décompositions des écarts. La proposition de Tylo PFEIFER revient à analyser chaque flanc en le décomposant par ordres successifs de la même manière qu'on étudie un signal électronique en le décomposant en pulsations successives ; l'ordre zéro correspond à un décalage, le premier ordre correspond à une inclinaison, le deuxième à une courbure, le troisième à une ondulation de profil,

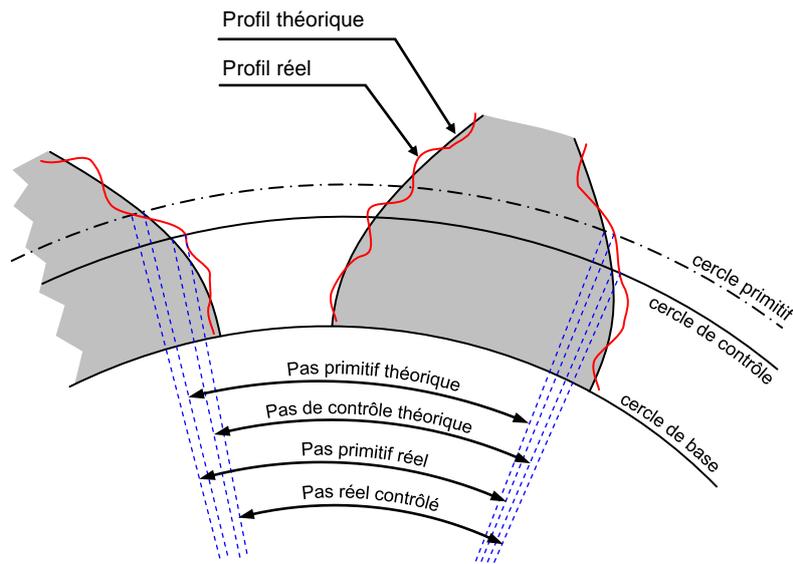


Figure 1-9- Influence de la position des acquisitions sur la valeur mesurée [Baudouin 2008].

Il existe ainsi de multiples travaux sur la métrologie des engrenages visant à réduire les incertitudes de mesure en modifiant ou non la caractéristique spécifiée et mesurée. Ces travaux ne se soucient guère des incertitudes de corrélation [Dantan 2007] qui peuvent avoir un impact fort important sur la prise de décision relative au contrôle de conformité [Srinivasan 2001].

Dans un objectif de réduire les incertitudes totales, nous proposons de se focaliser sur le modèle de spécification :

- en proposant un nouveau modèle de spécification plus proche des intentions du concepteur,
- en proposant une formalisation des incertitudes de corrélation et une procédure d'évaluation de celle-ci,
- et ainsi, en proposant une comparaison de différents modèles de spécification au regard des incertitudes de corrélation et des incertitudes de mesure (la partie incertitudes de mesures étant couplée aux travaux de Cyrille BAUDOUIN effectués au laboratoire).

Ces propositions sont détaillées dans le chapitre 4.

En synthèse, ces travaux de thèse portent sur la maîtrise des variations géométriques et des incertitudes avec comme point central le modèle de spécification et comme objet d'étude les engrenages. En effet, la motivation des travaux, concernant la partie analyse, est la flexibilisation des approches pour supporter différentes représentations des modèles de spécification et la motivation des travaux concernant les incertitudes est la réduction de celles-ci en caractérisant et proposant des modèles de spécification.

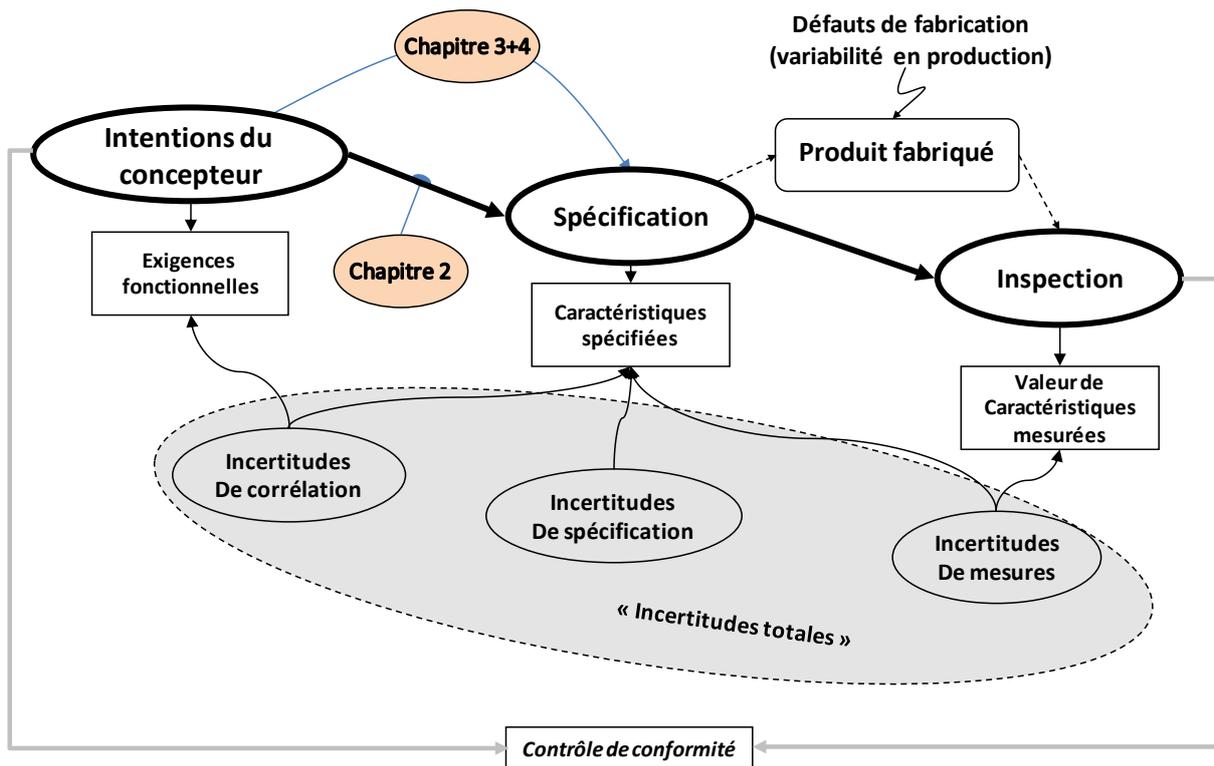


Figure 1-10- Position de nos travaux

2 Outil d'analyse de l'engrènement

2.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est de proposer un outil de simulation d'engrènement capable de simuler l'influence des défauts géométriques de l'engrenage sur ses caractéristiques fonctionnelles. D'une manière générale, l'objectif de l'analyse de l'engrènement est de fournir une information quantitative de l'impact de paramètres géométriques (écarts ou paramètres de conception) de l'engrenage sur son erreur cinématique. La géométrie nominale de l'engrenage est conçue pour assurer l'*homocinétisme* de la transmission sans charge et il existe de nombreux phénomènes et écarts influant sur l'erreur cinématique [Bruyère 2006]. En voici une liste non exhaustive :

- Ecart de forme des surfaces actives.
- Ecart de position et d'orientation des surfaces actives.
- Paramètres influant de la lubrification utilisée : épaisseur du film de lubrifiant entre dentures, viscosité,...
- Déformations dues aux effets dynamiques et aux efforts (déformation de contact, flexion et cisaillement)
- Déformation du corps de l'engrenage, des arbres, du carter, des éléments de guidage.
- Acyclisme moteur et récepteur.
- ...

Dans la suite de ces travaux, nous limitons notre étude à un engrènement sans charge, sans effet dynamique, sans effet d'usure. Toutes les pièces intervenantes sont considérées comme indéformables et il n'y a pas de lubrification ni d'acyclisme. Le comportement cinématique est quasi-statique et sans charge.

Afin d'estimer l'impact des défauts géométriques sur l'erreur cinématique et d'analyser les tolérances sur des caractéristiques spécifiées, il est nécessaire d'avoir une représentation mathématique, ou modèle mathématique des défauts géométriques et des surfaces actives : c'est le modèle de substitution. Ce modèle correspond à une description de la géométrie de l'engrenage intégrant les défauts géométriques et utilisable pour la simulation de l'engrènement. Le modèle de substitution se substitue à la réalité et est adapté à l'utilisation d'outils et de méthodes mathématiques pour la simulation de l'engrènement sans charge. Basé sur ce modèle géométrique, un modèle de comportement cinématique est utilisé afin de simuler l'engrènement sans charge.

L'estimation de l'erreur cinématique est faite par l'intermédiaire de l'utilisation de méthodes numériques adaptées à chaque modèle de comportement

Ainsi, l'outil de simulation proposé peut être explicité comme à la *Figure 2-1*.

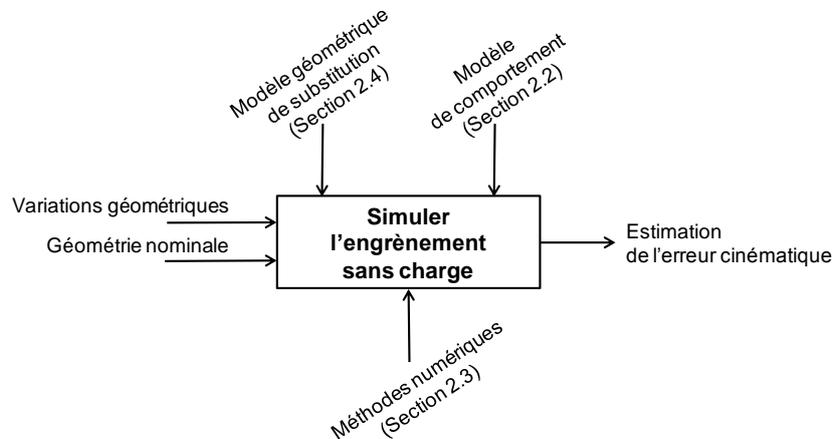


Figure 2-1 - Structure générale de l'outil de simulation d'engrènement.

Ce chapitre expose en premier lieu le principe de la simulation de l'engrènement sans charge d'une manière générale puis propose différents modèles de comportement (section 2.2). La section 2.3 aborde les différentes méthodes numériques utilisées suivant le modèle de comportement étudié et la section 2.4 décrit le modèle de substitution de l'engrenage.

2.2 Principe de la simulation d'engrènement-Modèles de comportement

L'objectif de la simulation d'engrènement est de déterminer une estimation de la position angulaire d'une roue pour un ensemble fini ou non de positions angulaires de l'autre roue, les paramètres de l'ellipse de contact (orientation et position et taille en utilisant le modèle d'Hertz par exemple), le(s) point(s) de contact, ... Dans le cas d'engrènement quasi statique et sans charge, la simulation d'engrènement revient à chercher l'angle de rotation de la roue en fonction de l'angle de rotation du pignon par exemple, de telle manière à ce qu'il y ait contact entre deux dents qui engrènent (*Figure 2-2*).

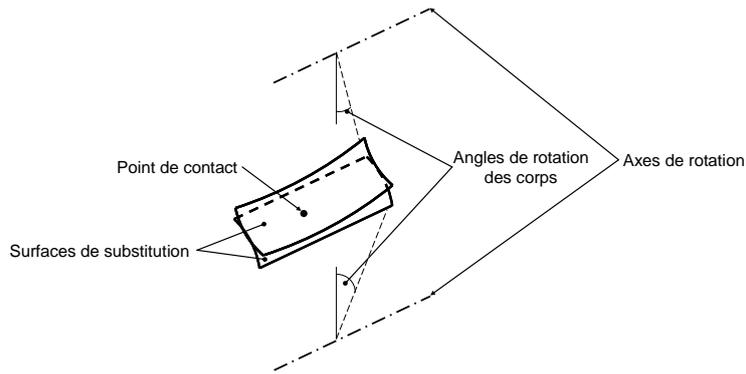


Figure 2-2- Principe de la simulation d'engrènement

Il existe plusieurs modèles de comportements cinématiques sans charge qui peuvent s'appuyer sur une modélisation en deux dimensions ou trois dimensions. La section suivante en expose une liste non exhaustive (Figure 2-3).

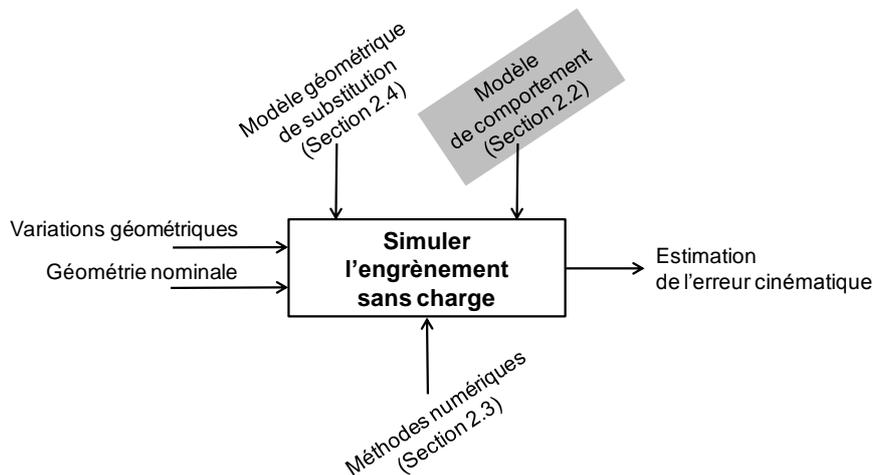


Figure 2-3 – Position de la section 2.2 dans la simulation de l'engrènement sans charge

2.2.1 Modèles de comportement cinématique 2D

La modélisation 2D du comportement cinématique repose sur l'hypothèse suivante : les contacts entre profils conjugués se font relativement proches du plan simultanément tangent aux cylindres de base du pignon et de la roue appelé plan d'action dans le cas des engrenages cylindriques à denture droite à profils développante de cercle [Velex 1995] (Figure 2-4).

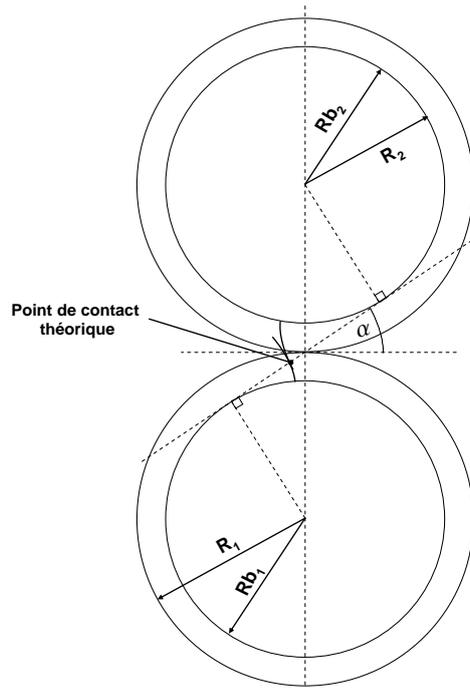


Figure 2-4- Point de contact et droite d'action dans un plan normal aux axes de rotation

La présence de variations géométriques (les écarts de forme des dents, les écarts d'orientation et de position) engendre des écarts entre les deux profils. L'écart total en un point M_i du pignon et de la roue est noté $e(M_i)$ (dans la direction normale au plan d'action). (Figure 2-5).

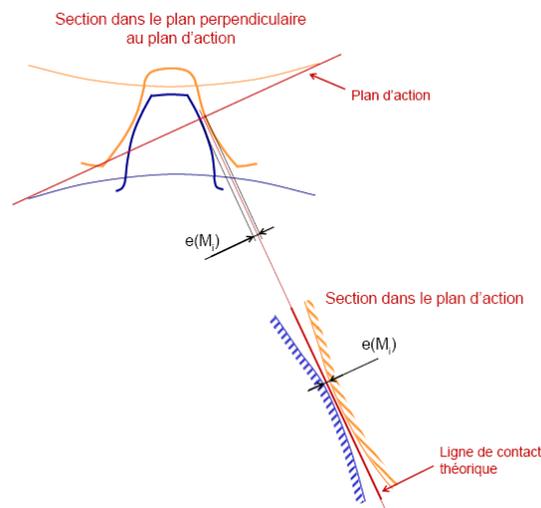


Figure 2-5 – Ecart total dans le plan d'action (denture droite)

Il est explicité par la formule :

$$e(M_i) = e_{f_p}(M_i) + e_{f_r}(M_i) + e_m(M_i) + e_x(M_i) \quad (2.1)$$

Avec :

- $ef_r(M_i)$: écart de forme de la roue au point M_i normal à la ligne de contact théorique dans le plan d'action.
- $ef_p(M_i)$: écart de forme du pignon au point M_i normal à la ligne de contact théorique dans le plan d'action.
- $e_m(M_i)$: écart de montage au point M_i normal à la ligne de contact théorique dans le plan d'action.
- $e_x(M_i)$: écart d'excentration au point M_i normal à la ligne de contact théorique dans le plan d'action.

Considérons un point de contact M^* dans le plan d'action entre les deux dents rigides du pignon et de la roue. Notons \vec{n} la normale commune aux deux surfaces en contact en M^* , orientée suivant le coté extérieur matière au pignon. Dans le cas de mouvement de corps rigides on a :

$$\overrightarrow{V_{M^* \in 2/1}} \cdot \vec{n} = 0 \quad (2.2)$$

Ainsi :

$$(\overrightarrow{\Omega_1} \wedge \overrightarrow{O_1 M^*} - \overrightarrow{\Omega_2} \wedge \overrightarrow{O_2 M^*}) \cdot \vec{n} + \frac{d}{dt}(e(M^*)) = 0 \quad (2.3)$$

Si la vitesse de rotation d'entrée est Ω_1 , dans le cas des engrenages cylindriques la vitesse de sortie Ω_2 obéit à :

$$\Omega_2 = \frac{R_{b1}}{R_{b2}} \cdot \Omega_1 - \varepsilon \cdot \frac{\frac{d}{dt}(e(M^*))}{R_{b2} \cdot \cos(\beta_b)} \quad (2.4)$$

Avec :

- $\varepsilon = 1$ si le pignon tourne dans le sens trigonométrique, -1 sinon.
- β_b l'angle d'hélice de base, R_{bi} le rayon de base de l'élément i .

Le second terme de cette équation représente les variations angulaires du solide 2 dues aux écarts géométriques et l'erreur cinématique qui dans ce cas est l'erreur de transmission sans charge. Le calcul de l'écart total $e(M)$ nécessite une discrétisation de la surface active dans le plan d'action (*Figure 2-6*) :

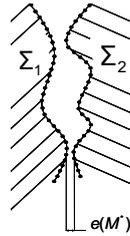


Figure 2-6 – Illustration de l'écart total dans le plan d'action

L'écart minimal $e(M^*)$, représentant le contact entre deux sections de profils dans le plan d'action correspond à la distance minimale signée entre Σ_1 et Σ_2 . Sa valeur est obtenue par la résolution d'un problème d'optimisation sous contraintes qui peut être formulé sous la forme suivante :

$$e(M^*) = \text{Min}(\text{distances signées}(\Sigma_1, \Sigma_2)) \quad (2.5)$$

Enrichi, ce modèle de comportement permet d'étudier le comportement dynamique des engrenages [Velex 1995].

Dans le cadre de la simulation de l'engrènement sans charge, nous proposons un autre modèle de comportement cinématique basé sur la projection des points de la dent du pignon et de la roue qui engrènent, dans le plan d'action. La représentation des surfaces est un ensemble de points et la recherche du point de contact se fait dans le plan d'action :

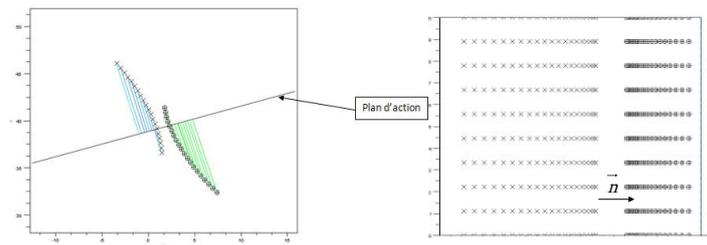


Figure 2-7 – Projection des points dans le plan d'action et points après projection

Considérons \vec{n} la normale à la ligne de contact théorique, projetée dans le plan d'action, extérieure à la matière du pignon (Figure 2-7), Φ_1 l'angle de rotation du pignon (imposé par exemple), Φ_2 l'angle de rotation de la roue à déterminer, P_{pi} (resp. P_{rj}) un point projeté des p points de la dent du pignon (resp. des q points de la roue) sur le plan d'action. La recherche de l'angle de rotation de la roue Φ_2 est effectuée en recherchant la distance minimale signée entre les nuages de points du pignon et de la roue. De la même manière que la formalisation proposée par Velex, la valeur estimée de Φ_2 est obtenue en résolvant un problème d'optimisation sous contrainte :

$$\text{Min}(\text{distances signées}(\{P_{pi}\}, \{P_{rj}\})) \text{ et distances signées} \geq 0$$

Détermination de Φ_2 : ou

$$\text{distances signées mini}(\{P_{pi}\}, \{P_{rj}\}) = 0$$
(2.6)

La *Figure 2-7* montre une projection de points de surface nominale dans le plan d'action. Des écarts de forme, de position et d'orientation introduisent des écarts entre denture. Dans ce cas, si la condition de non interpénétration est vérifiée sur tous les points du pignon et de la roue, il se peut que le contact réel ne puisse être trouvé. La *Figure 2-8* a montre qu'il existe deux points qui vérifient $\overline{P_{pi}P_{rj}} \cdot \vec{n} \leq 0$, alors que physiquement, il n'y a pas interpénétration des deux nuages de points projetés. L'algorithme ne peut pas converger vers une solution convenable. Pour remédier à cela, la recherche du point de contact ne se fait pas simultanément sur la totalité des nuages de points, mais dans plusieurs espaces de subdivision (*Figure 2-8* b)). La condition de non interpénétration n'est ainsi pas vérifiée sur la totalité du nuage mais indépendamment, à l'intérieur de chaque subdivision. De plus, il n'est pas utile d'étendre la recherche sur tous les points, ainsi est définie une zone de restriction autour de la ligne de contact théorique permettant de diminuer considérablement les temps de calcul. La condition de non interpénétration est vérifiée pour chaque subdivision.

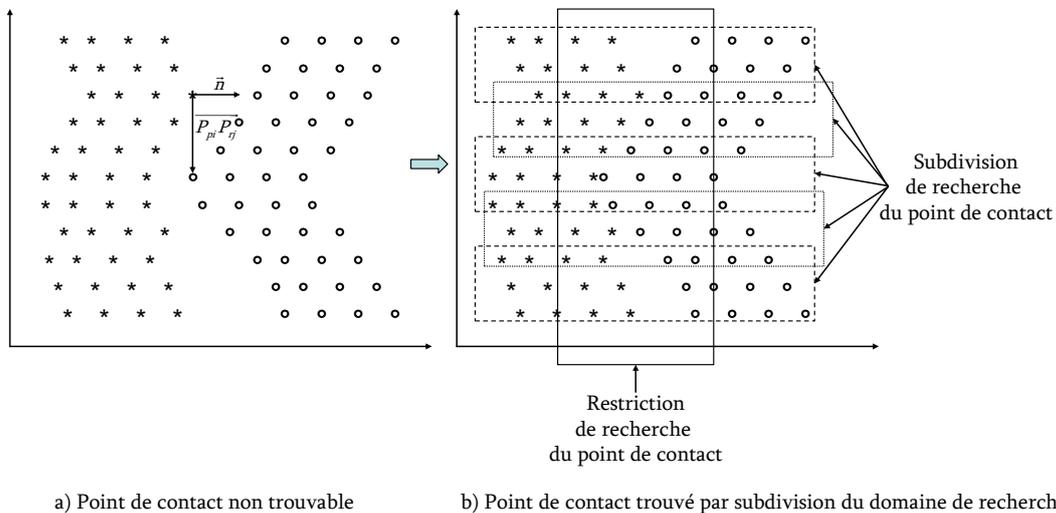


Figure 2-8 – Méthode de recherche du point de contact par subdivision

Ce modèle de comportement est basé sur l'hypothèse que le point de contact est très proche du plan d'action. La dimension de l'étude est abaissée d'un rang puisque les points des surfaces de substitution sont projetés dans un plan, ce qui revient à considérer une perte d'information au niveau de la recherche du point de contact. Cette remarque met en évidence la limite de cette

méthode lorsque les défauts d'orientation, de position et de forme sont importants, ou lorsque l'analyse de l'engrènement se fait sur d'autres profils que celui de la développante de cercle, comme par exemple les engrenages Wildhaber Novikov [Cloutier 1967] à profils en arc de cercle. Ce type de profil convexo-concave ne permet pas l'utilisation d'un modèle de comportement cinématique par projection. En effet la construction géométrique nominale de ce type d'engrenage ne se fait pas à partir d'un plan d'action, mais en s'appuyant sur une trajectoire du point de contact désirée. Le profil est choisi de façon à « habiller » l'engrenage autour de cette trajectoire. La méthode de projection se limite au profil en développante de cercle, ou à tous profils approximables à une développante de cercle, au voisinage du point de contact.

Les deux modèles de comportement cinématique détaillés ci-dessus proposent d'estimer l'erreur cinématique tel qu'il y ait contact en deux surfaces actives de substitution. Cette recherche du point de contact est basée sur la résolution d'un problème d'optimisation sous contrainte ou de résolution d'une équation non linéaire. Les modèles 2D nécessitent l'existence d'un plan d'action.

Dans la réalité, le point de contact ne se localise pas nécessairement sur le plan d'action à cause de certains défauts géométriques de l'engrenage. Afin d'avoir une meilleure estimation de la position du point de contact et par conséquent de l'erreur cinématique, il est parfois nécessaire d'utiliser des modèles de comportement cinématique en trois dimensions.

2.2.2 Modèles de comportement cinématique 3D

Tooth Contact Analysis

Ce modèle appelé TCA a été développé par la société américaine « The Gleason Work » afin de mieux connaître le contact entre les dents de roues spiro-coniques et hypoïdes. Faydor F. Litvin [Litvin 1986], [Litvin 1992] a développé cette technique et l'utilise pour la conception de roues dentées. Ce modèle trouve son application dans différentes utilisations comme par exemple l'analyse de l'influence des corrections apportées aux surfaces actives sur la sensibilité de l'erreur cinématique aux défauts d'orientation et de position [Litvin 2000], la conception d'engrenages spiro-coniques, l'influence de défauts géométriques de l'engrenage et de montage sur l'erreur cinématique, l'estimation du point de contact entre denture en vue d'une analyse de l'engrènement sous charges (connaissance du point d'application des efforts dans un modèle

éléments fini, étude de la tâche de contact,..), l'influence des variations des paramètres de l'outil générateur sur l'erreur cinématique, etc..

TCA est basé sur la tangence des surfaces aux points de contact. L'estimation de l'angle de rotation de la roue repose sur la recherche d'un point de contact régulier. Cette configuration se traduit mathématiquement par deux conditions qui décrivent le contact :

- Il y a contact, donc égalité des surfaces au point de contact (condition 1).
- Il existe un plan tangent commun aux surfaces au point de contact (condition 2).

Cette modélisation du comportement cinématique en 3D requiert une représentation paramétrique des surfaces actives de toutes les dents du pignon et de la roue qui doit être exprimée dans un même repère. Ainsi la configuration d'un point de contact régulier, c'est-à-dire que les dérivées partielles de la surface par rapport à ses paramètres descripteurs existent, est traduite par le système suivant :

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{s_f^{(1),j}}(u_1, v_1, \phi_1) &= \overrightarrow{s_f^{(2),k}}(u_2, v_2, \phi_2) \\
 \overrightarrow{n_f^{(1),j}}(u_1, v_1, \phi_1) &= -\overrightarrow{n_f^{(2),k}}(u_2, v_2, \phi_2) \\
 (u_1, v_1) &\in D_1 \\
 (u_2, v_2) &\in D_2 \\
 (\phi_1, \phi_2) &\in D_3
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

Avec :

- $\overrightarrow{s_f^{(i),j}}$ les coordonnées d'un point courant de la j-ième surface du corps i exprimé dans le repère Rf
- $\overrightarrow{n_f^{(i),j}}$ la normale unitaire d'un point courant de la j-ième surface du corps i exprimée dans le repère f.
- u_i et v_i sont les paramètres descripteurs des surfaces du corps i et ϕ_i l'angle de rotation (en radians) du corps i autour de son axe.
- Les domaines D_1 et D_2 dépendant de l'équation des surfaces considérées. D_3 peut être pris égal à R.

La première équation du système (2.7) traduit la condition 1, la seconde la condition 2.

La *Figure 2-9* montre deux surfaces Σ_1 et Σ_2 en contact en un point régulier. Le système (2.7) traduit cette configuration. T représente le plan tangent commun aux deux surfaces Σ_1 et Σ_2 en contact en un point régulier M .

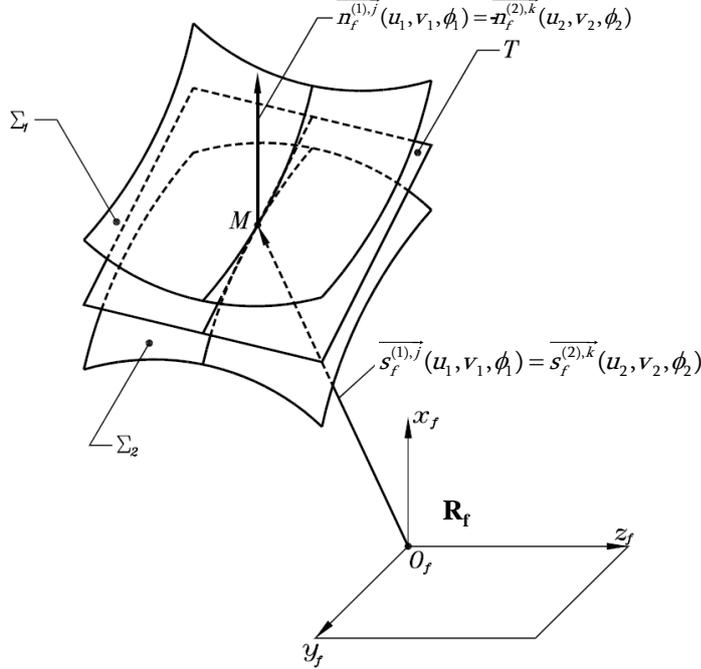


Figure 2-9 – Contact en un point régulier.

Lors de l'engrènement, il se peut que le contact ait lieu sur un des bords des surfaces actives. Dans ce cas, le contact n'a plus lieu en un point régulier, et le plan tangent de la surface n'est pas défini. La dérivée partielle de cette surface au point de contact est orthogonale au vecteur normal de l'autre surface en ce même point. La configuration correspondant à un contact en frontière u_{1fr} de la surface Σ_1 est donnée par le système (2.8).

$$\begin{aligned}
 \overline{s_f^{(1),j}}(u_{1fr}, v_1, \phi_1) &= \overline{s_f^{(2),k}}(u_2, v_2, \phi_2) \\
 \frac{\delta \overline{s_f^{(1),j}}(u_{1fr}, v_1, \phi_1)}{\delta v_1} \cdot \overline{n_f^{(2),k}}(u_2, v_2, \phi_2) &= 0 \\
 u_{1fr} &\text{ fixé} \\
 v_1 &\in F_1 \subset D_1 \\
 (u_2, v_2) &\in D_2 \\
 (\phi_1, \phi_2) &\in D_3
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

La *Figure 2-10* montre deux surfaces Σ_1 et Σ_2 en contact en un point sur une des frontières de Σ_1 .

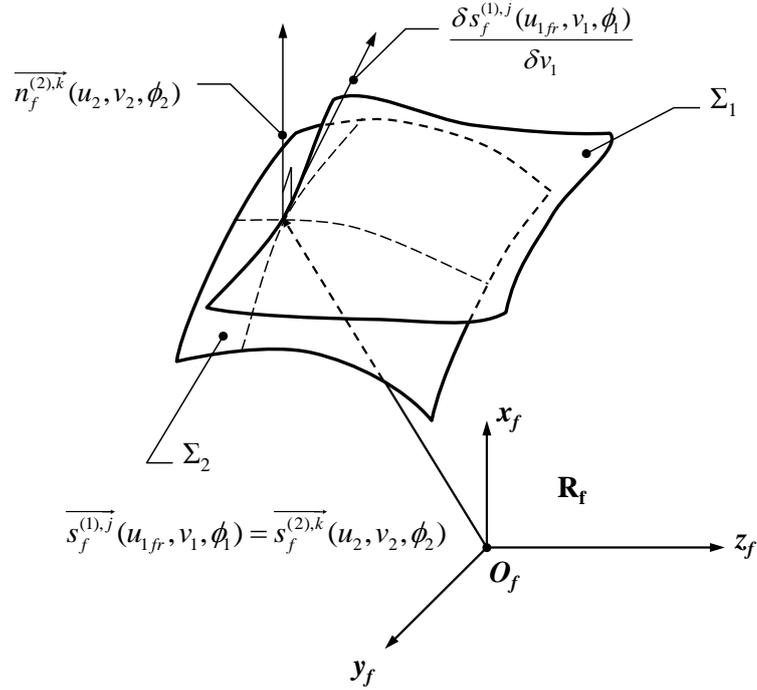


Figure 2-10 – Contact en un point sur la frontière d'une des deux surfaces

Le système (2.7) traduisant le contact en un point régulier est un système non linéaire de 6 équations. Considérons par exemple que l'angle ϕ_1 soit un paramètre d'entrée du système à résoudre. L'objectif de la simulation de l'engrènement est de fournir la relation liant l'angle de rotation de la roue (corps 2) à l'angle de rotation du pignon (corps 1) soit :

$$\phi_2 = f(\phi_1) \quad (2.9)$$

Les systèmes (2.7) et (2.8) font intervenir les normales unitaires des surfaces en un point courant :

$$\overline{n}_f^{(i),k}(u_i, v_i, \phi_i) = \frac{\frac{\delta s_f^{(i),j}(u_i, v_i, \phi_i)}{\delta u_i} \wedge \frac{\delta s_f^{(i),j}(u_i, v_i, \phi_i)}{\delta v_i}}{\left\| \frac{\delta s_f^{(i),j}(u_i, v_i, \phi_i)}{\delta u_i} \wedge \frac{\delta s_f^{(i),j}(u_i, v_i, \phi_i)}{\delta v_i} \right\|} \quad (2.10)$$

Dépendant de l'expression des surfaces dans le repère global R_f , l'expression des normales unitaires peut être relativement lourde à manipuler du fait de la normalisation. Il est donc judicieux de modifier l'expression des systèmes (2.7) et (2.8) pour alléger la résolution. Dans le cas d'un point de contact régulier, la configuration du contact est traduite par le système (2.11) et dans le cas d'un contact en frontière, par le système (2.12). Le système (2.11) est un système non linéaire, de 6 équations scalaires à 6 inconnues qui sont $(u_1, v_1, u_2, v_2, \phi_2, \lambda)^T$. λ est le coefficient de colinéarité des normales qui permet donc de s'affranchir de la normalisation de celles-ci. Le

système (2.12) est lui aussi un système non linéaire de 4 équations à 4 inconnues qui sont $(v_1, u_2, v_2, \phi_2)^T$.

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{s_f^{(1),j}}(u_1, v_1, \phi_1) &= \overrightarrow{s_f^{(2),k}}(u_2, v_2, \phi_2) \\
 \overrightarrow{N_f^{(1),j}}(u_1, v_1, \phi_1) &= \lambda \cdot \overrightarrow{N_f^{(2),k}}(u_2, v_2, \phi_2) \\
 \lambda &\in R \\
 (u_1, v_1) &\in D_1 \\
 (u_2, v_2) &\in D_2 \\
 (\phi_1, \phi_2) &\in D_3
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

Et :

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{s_f^{(1),j}}(u_{1fr}, v_1, \phi_1) &= \overrightarrow{s_f^{(2),k}}(u_2, v_2, \phi_2) \\
 \frac{\delta \overrightarrow{s_f^{(1),j}}(u_{1fr}, v_1, \phi_1)}{\delta v_1} \cdot \overrightarrow{N_f^{(2),k}}(u_2, v_2, \phi_2) &= 0 \\
 u_{1fr} &\text{ fixé} \\
 v_1 &\in F_1 \subset D_1 \\
 (u_2, v_2) &\in D_2 \\
 (\phi_1, \phi_2) &\in D_3
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

Il est impossible d'obtenir des solutions explicites des inconnues en fonction du paramètre d'entrée ϕ_1 et des écarts géométriques. Il est nécessaire de résoudre ces systèmes en faisant appel à des méthodes numériques de résolutions de systèmes non linéaires. Ainsi, la résolution se fait sur un ensemble de valeurs numériques de ϕ_1 , et pour chacune de ses valeurs, les systèmes (2.11) et (2.12) sont résolus suivant la configuration du contact. La représentation de l'erreur cinématique obtenue est un ensemble de bipoints $(\phi_{2i}, \phi_{1i})^T$.

Ce modèle de comportement cinématique 3D, s'affranchit des hypothèses des modèles 2D. TCA est très flexible : il est en effet possible de considérer une très grande diversité de formes pour les surfaces. Il est néanmoins nécessaire d'avoir une représentation paramétrique des surfaces. De plus, la résolution des systèmes peut parfois poser des problèmes de convergence.

Dichotomie « 3D »

Les systèmes non linéaires décrits par les équations (2.11) et (2.12) sont généralement lourds à manipuler et plus particulièrement les équations faisant intervenir les normales. Nous proposons un modèle de comportement cinématique basé sur la dichotomie pour la résolution. Le modèle de comportement cinématique basé sur la dichotomie en trois dimensions s'affranchit des équations des normales et dérivées partielles des surfaces. La recherche du point de contact entre deux dents qui engrènent est basée sur l'égalité des surfaces au point de contact et sur une condition de non interpénétration des surfaces de substitution :

$$\begin{aligned}
 \overline{s_f^{(1),j}}(u_1, v_1, \phi_1) &= \overline{s_f^{(2),j}}(u_2, v_2, \phi_2) \\
 (u_1, v_1) &\in D_1 \\
 (u_2, v_2) &\in D_2 \\
 (\phi_1, \phi_2) &\in D_3 \\
 \text{distance signée } (\overline{s_f^{(1),j}}(u_1^*, v_1^*, \phi_1), \overline{s_f^{(2),j}}(u_2^*, v_2^*, \phi_2)) &> \varepsilon \\
 \varepsilon &\geq 0
 \end{aligned}
 \tag{2.13}$$

Ce système est composé de trois équations non linéaires. L'angle ϕ_1 est un paramètre d'entrée. L'angle de rotation de la roue est tel qu'il y ait contact entre deux surfaces de substitution, sans interpénétration. Il est obtenu en résolvant ce système non linéaire, sous contrainte.

L'étude menée sur les différents modèles de comportement géométrique met en avant deux types d'approches : l'estimation de la relation cinématique de l'engrenage basé sur un modèle 2D ou 3D. Dans chacune des approches exposées, la recherche de l'angle de rotation de la roue en fonction de l'angle de rotation du pignon se fait de manière à ce qu'il y ait contact sans interpénétration entre deux dents qui engrènent. L'estimation de cet angle est basée sur des méthodes numériques propres à chaque modèle : les modèles cinématique 2D sont basé sur un problème d'optimisation sous contraintes ou la résolution d'une équation non linéaire non connue sous sa forme analytique mais calculable en un ensemble de points. La méthode TCA est basée sur la résolution numérique de systèmes non linéaires. La dichotomie « 3D » est basée sur la résolution numérique de systèmes non linéaires sous contraintes (*Figure 2-11*) ou la résolution d'une équation non linéaire non connue sous sa forme analytique mais calculable en un ensemble de points.

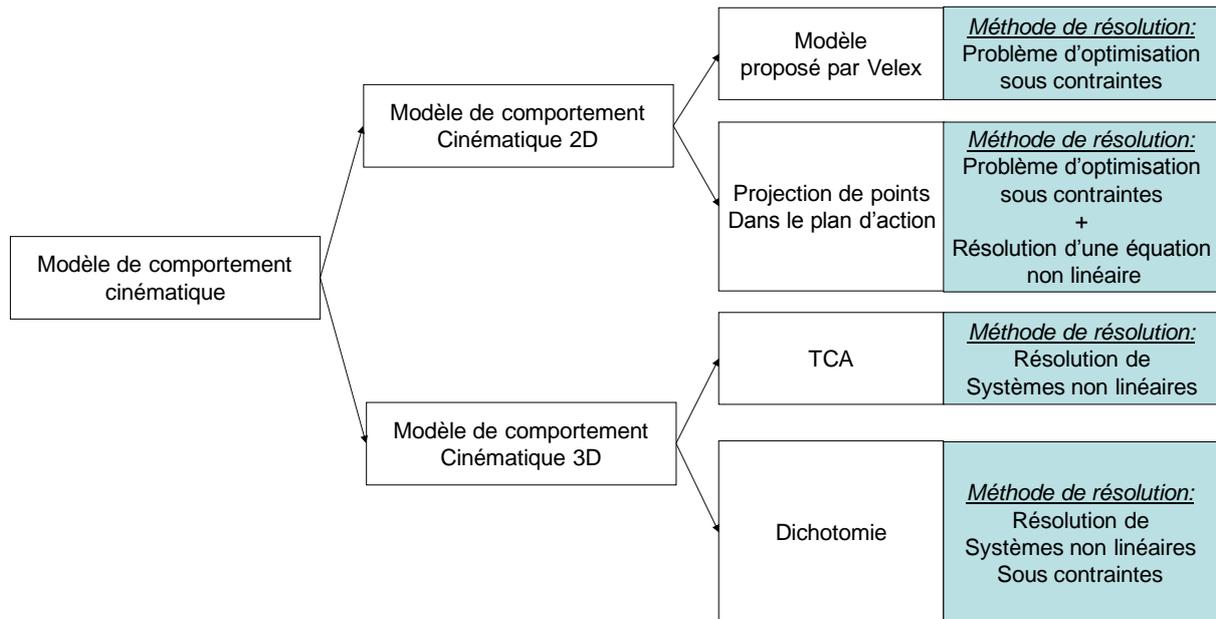


Figure 2-11 – Modèles de comportement et méthodes de résolution associées

L'objectif de la section suivante est de détailler les méthodes numériques mises en œuvre pour chacun des quatre modèles de comportement proposés.

2.3 Méthodes numériques pour la simulation de l'engrènement

La section précédente montre que l'estimation de l'erreur cinématique d'un engrenage repose sur la recherche du point de contact entre deux dents qui engrènent. La formulation mathématique de la recherche du point de contact revient à un problème d'optimisation sous contraintes ou à la résolution de systèmes non linéaires contraints ou non pour les modèles étudiés. L'objectif de cette section est de détailler ces méthodes numériques pour les modèles que nous proposons à savoir la méthode de projection de points dans le plan d'action, la méthode TCA et la méthode basée sur la dichotomie en trois dimensions (*Figure 2-12*)

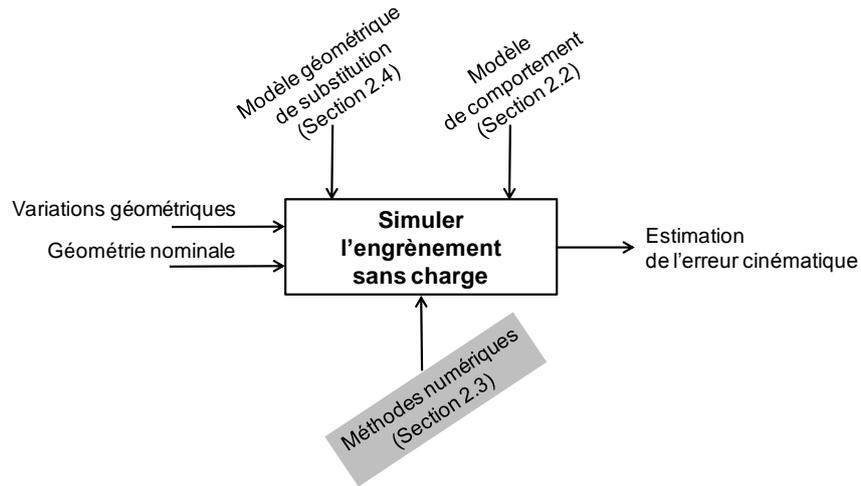


Figure 2-12 - Position de la section 2.3 dans la simulation de l'engrènement sans charge

2.3.1 Méthodes numériques dans le cas d'une formulation basée sur un modèle 2D par projection des points dans le plan d'action

Formulation mathématique du problème :

$$\text{Min}(\text{distance signée}(\{P_{pi}\}\{P_{rj}\})) \text{ et distance signée} \geq 0$$

ou

$$\text{distance signée mini}(\{P_{pi}\}\{P_{rj}\}) = 0$$

Cette formulation correspond au modèle de comportement basé sur la projection des points des surfaces de substitution dans le plan d'action. Pour ce modèle de comportement, il a été vu que l'estimation de l'angle de rotation de la roue est basée sur un problème d'optimisation sous contraintes ou la résolution d'une résolution non linéaire non connue sous sa forme analytique mais calculable en tous points. Plusieurs méthodes numériques ont été expérimentées et nous proposons une résolution de ce problème en utilisant une méthode basée sur la méthode de la sécante. L'allure de la distance minimale séparant les deux nuages de points, en fonction de l'angle de rotation Φ_2 est donnée Figure 2-13 . La distance minimale est une fonction discrète et croissante de l'angle de rotation de la roue Φ_2 (représentée en pointillé). Une distance minimale négative correspond à une interpénétration des nuages de points. L'objectif est de déterminer l'angle Φ_{2c} tel que dmini soit minimale et positive. La méthode de la sécante est particulièrement bien adaptée à ce problème du fait de la monotonie de la fonction. L'angle Φ_{2a} (resp. Φ_{2b}) correspond au cas où les nuages s'interpénètrent (resp. ne s'interpénètrent pas) :

$$d\text{mini}_a = \text{distance signée mini}(\Phi_{2a}) < 0 \text{ et } d\text{mini}_b = \text{distance signée mini}(\Phi_{2b}) > 0$$

L'angle Φ_{2c} est donné par la relation :

$$\Phi_{2c} = \Phi_{2b} - d\text{mini}_b \cdot \frac{\Phi_{2b} - \Phi_{2a}}{d\text{mini}_b - d\text{mini}_a}$$

Si distance signée $\text{mini}(\Phi_{2c}) < 0$ alors $\Phi_{2a} = \Phi_{2c}$, si distance signée $\text{mini}(\Phi_{2c}) > 0$ alors $\Phi_{2b} = \Phi_{2c}$.

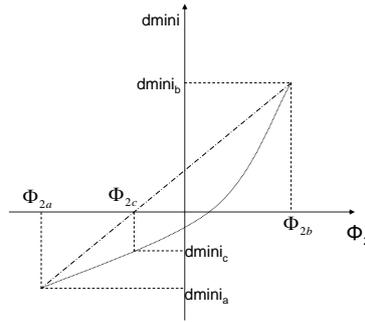


Figure 2-13 – Allure de la distance minimale signée séparant les nuages de points projetés dans le plan d'action.

Etant donné la formulation discrète du problème pour ce cas, l'estimation de l'angle Φ_2 tel qu'il y ait contact ne peut se faire que pour un ensemble fini de valeurs pour Φ_1 . L'erreur cinématique estimée est un ensemble discret de couplets $(\phi_{1k}, \phi_{2k})^T$.

Considérons une valeur quelconque de ϕ_{1k} telle qu'il y a un contact potentiel entre deux dents.

Pour un angle de rotation de la roue ϕ_2 , la liste V de dimension $p.q$ tel que :

$$V(\Phi_2) = \left\{ \begin{array}{c} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_{p.q} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \left\| \overline{P_{p1} P_{r1}} \right\| \\ \left\| \overline{P_{p1} P_{r2}} \right\| \\ \vdots \\ \left\| \overline{P_{pp} P_{rq}} \right\| \end{array} \right\} \quad (2.14)$$

représente l'ensemble des distances entre les deux nuages de points. Le pseudo code d'estimation de ϕ_{2k} est le suivant :

$\Phi_{2k} = \text{Secante}(\Phi_{1k})$
<p>Initialisation :</p> $d\text{mini}_a = \min(V(\Phi_{2a}))$ $d\text{mini}_b = \min(V(\Phi_{2b}))$ $\Phi_{2c} = \Phi_{2b} - d\text{mini}_b \cdot \frac{\Phi_{2b} - \Phi_{2a}}{d\text{mini}_b - d\text{mini}_a}$ $d\text{mini}_c = \min(V(\Phi_{2c}))$ $\varepsilon = 10^{-5}$ $\text{stop} = 1000;$
<p>Tant que la distance minimale de \vec{V} est supérieure à ε et que le critère d'arrêt n'est pas atteint :</p> <p>While $d\text{mini}_c \geq \varepsilon$ et $d\text{mini}_c < 0$ et $\text{stopi} \leq \text{stop}$</p> <p style="padding-left: 20px;">$\text{stopi} = \text{stopi} + 1$</p> <p style="padding-left: 20px;">Si il y a interpénétration, alors Φ_{2a} est recalculé</p> <p style="padding-left: 20px;">If $d\text{mini}_c < 0$</p> <p style="padding-left: 40px;">$\Phi_{2a} = \Phi_{2c}$</p> <p style="padding-left: 20px;">Sinon Φ_{2b} est recalculé</p> <p style="padding-left: 20px;">ElseIf $\Phi_{2b} = \Phi_{2c}$</p> <p style="padding-left: 20px;">Fin If</p> <p style="padding-left: 20px;">$d\text{mini}_a = \min(\vec{V}(\Phi_{2a}))$</p> <p style="padding-left: 20px;">$d\text{mini}_b = \min(\vec{V}(\Phi_{2b}))$</p> <p style="padding-left: 20px;">$\Phi_{2c} = \Phi_{2b} - d\text{mini}_b \cdot (\Phi_{2b} - \Phi_{2a}) / (d\text{mini}_b - d\text{mini}_a)$</p> <p style="padding-left: 20px;">$d\text{mini}_c = \min(\vec{V}(\Phi_{2c}))$</p> <p>Fin While</p> <p>$\Phi_{2k} = \Phi_{2c}$</p>

Tableau 2-1- Pseudo Code pour la méthode de projection de points

2.3.2 Méthodes numériques dans le cas d'une formulation de type systèmes non linéaires continus

Lors de l'engrènement sans charge, il existe au moins un point de contact entre deux dents qui engrènent. La méthode TCA permet de traduire mathématiquement l'existence d'un point de contact régulier (système (2.11)) ou sur les bords d'une des deux surfaces (système (2.12)) sous la forme de systèmes non linéaires. La recherche du point de contact basée sur la dichotomie quant à elle est donnée par la résolution du système (2.13). L'objectif de cette section est de présenter la démarche utilisée pour la résolution des systèmes non linéaires continus. Trois algorithmes ont été testés (Newton-Raphson, Levenberg Marquardt, Brent) et comparés entre terme de précision (résidu minimum) et de rapidité (temps de résolution des systèmes).

Quelque soit l'algorithme utilisé pour la résolution d'un système non linéaire, il est nécessaire de posséder une valeur approchée de la solution recherchée. Cette valeur doit être, dans la mesure du possible, la plus proche de la solution du système (risque de non convergence de l'algorithme). Elle peut être obtenue de différentes manières : mesures physiques du cas traité, approximation graphiques, expérience de l'utilisateur, etc...

Les différents algorithmes étudiés

Algorithme de Newton Raphson :

Considérons un système non linéaire de n équations à n inconnues. Résoudre ce système revient à écrire :

$$\begin{cases} f_1(\vec{X}) = 0 \\ f_2(\vec{X}) = 0 \\ \vdots \\ f_n(\vec{X}) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \vec{F}(\vec{X}) = \vec{0} \quad \vec{X} = \begin{cases} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{cases} \quad (2.15)$$

\vec{F} est une application vectorielle à valeur dans \mathbb{R}^n , dans notre cas composée des n équations du système. \vec{X} est le vecteur inconnu composé des n inconnues.

La méthode de Newton-Raphson [Vignes 1980], [Nougier 2001] consiste à linéariser \vec{F} au voisinage d'une solution initiale \vec{X}_0 proche de la solution recherchée.

Considérons $\vec{X}^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)^T$ un vecteur de départ proche de \vec{X}^* la solution recherchée, et \vec{F} dérivable. Alors si \vec{X}^0 est relativement proche de \vec{X}^* , il est possible de donner un développement limité de $\vec{F}(\vec{X}^*)$ au voisinage de \vec{X}^0 :

$$f_i(\overline{X}^*) = f_i(\overline{X}^0) + \sum_{j=1}^n (x_j^* - x_j^0) \cdot \frac{\partial f_i(\overline{X}^0)}{\partial x_j} + \frac{1}{2!} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n (x_j^* - x_j^0) \cdot (x_k^* - x_k^0) \cdot \frac{\partial^2 f_i(\overline{X}^0)}{\partial x_j \partial x_k} + \dots \quad (2.16)$$

$i = 1, \dots, n.$

En ne considérant que l'ordre 1, une approximation \overline{X}^1 de \overline{X}^* est donné par :

$$f_i(\overline{X}^0) + \sum_{j=1}^n (x_j^1 - x_j^0) \cdot \frac{\partial f_i(\overline{X}^0)}{\partial x_j} = 0 \quad (2.17)$$

$i = 1, \dots, n.$

Ainsi en notant $\Delta \overline{X}^0 = \overline{X}^1 - \overline{X}^0$, le développement de la formule (2.17) donne :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f_1(\overline{X}^0)}{\partial x_1} \cdot \Delta x_1^0 + \frac{\partial f_1(\overline{X}^0)}{\partial x_2} \cdot \Delta x_2^0 + \dots + \frac{\partial f_1(\overline{X}^0)}{\partial x_n} \cdot \Delta x_n^0 + f_1(\overline{X}^0) = 0 \\ \frac{\partial f_2(\overline{X}^0)}{\partial x_1} \cdot \Delta x_1^0 + \frac{\partial f_2(\overline{X}^0)}{\partial x_2} \cdot \Delta x_2^0 + \dots + \frac{\partial f_2(\overline{X}^0)}{\partial x_n} \cdot \Delta x_n^0 + f_2(\overline{X}^0) = 0 \\ \dots \\ \frac{\partial f_n(\overline{X}^0)}{\partial x_1} \cdot \Delta x_1^0 + \frac{\partial f_n(\overline{X}^0)}{\partial x_2} \cdot \Delta x_2^0 + \dots + \frac{\partial f_n(\overline{X}^0)}{\partial x_n} \cdot \Delta x_n^0 + f_n(\overline{X}^0) = 0 \end{array} \right. \quad (2.18)$$

La valeur de \overline{X}^1 est à priori plus proche de \overline{X}^* que ne l'est \overline{X}^0 . Une méthode itérative est donc mise en place :

$$\overline{X}^{n+1} = \overline{X}^n + \Delta \overline{X}^n \quad (2.19)$$

Ainsi le système linéaire (2.18) peut se mettre sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f_1(\overline{X}^m)}{\partial x_1} \cdot \Delta x_1^m + \frac{\partial f_1(\overline{X}^m)}{\partial x_2} \cdot \Delta x_2^m + \dots + \frac{\partial f_1(\overline{X}^m)}{\partial x_n} \cdot \Delta x_n^m + f_1(\overline{X}^m) = 0 \\ \frac{\partial f_2(\overline{X}^m)}{\partial x_1} \cdot \Delta x_1^m + \frac{\partial f_2(\overline{X}^m)}{\partial x_2} \cdot \Delta x_2^m + \dots + \frac{\partial f_2(\overline{X}^m)}{\partial x_n} \cdot \Delta x_n^m + f_2(\overline{X}^m) = 0 \\ \dots \\ \frac{\partial f_n(\overline{X}^m)}{\partial x_1} \cdot \Delta x_1^m + \frac{\partial f_n(\overline{X}^m)}{\partial x_2} \cdot \Delta x_2^m + \dots + \frac{\partial f_n(\overline{X}^m)}{\partial x_n} \cdot \Delta x_n^m + f_n(\overline{X}^m) = 0 \end{array} \right. \quad (2.20)$$

(2.20) peut être défini via une écriture matricielle. En appelant $J(\overline{X})$ la matrice jacobienne de dimension $n \times n$:

$$J(\bar{X}) = \left[\frac{\partial f_i(\bar{X})}{\partial x_j} \right]$$

$$i = 1, \dots, n$$

$$j = 1, \dots, n$$

On a :

$$J(\bar{X}^n) \cdot \Delta \bar{X}^n + \vec{F}(\bar{X}^n) = 0 \quad (2.21)$$

Si $\text{Det}(J(\bar{X}^n)) \neq 0$ alors :

$$\bar{X}^{n+1} = \bar{X}^n - J^{-1}(\bar{X}^n) \cdot \vec{F}(\bar{X}^n) \quad (2.22)$$

La méthode de Newton-Raphson propose donc une convergence quadratique qui dans certain cas converge pour un faible nombre d'itérations. Néanmoins elle n'est pas sans inconvénients : Il est nécessaire d'avoir un vecteur de départ qui soit suffisamment proche de la solution recherchée. Dans le cas contraire, il se peut que la suite (2.22) ne converge pas. De plus elle nécessite l'inversion de la matrice jacobienne, ce qui peut poser problème dans le cas où la matrice est singulière (déterminant nul) ou mal conditionnée (déterminant proche de 0).

Algorithme de Levenberg-Marquardt :

L'algorithme de Levenberg-Marquardt [Levenberg 1944], [Marquardt 1963], [Ma 2007] fournit une solution au problème de minimisation des moindres carrés. Au lieu de minimiser directement le vecteur $\vec{F}(\bar{X})$, Levenberg puis Marquardt ont proposé de minimiser la norme au carré de ce vecteur :

$$\min_{\bar{X}} \left(\sum_{i=1}^n f_i(\bar{X})^2 \right) \quad (2.23)$$

Appelons $g(\bar{X}) = \sum_{i=1}^n f_i(\bar{X})^2$ la fonction à minimiser. Un développement limité de $g(\bar{X})$ au second ordre au voisinage de $\bar{X}^k = (x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k)^T$ estimé à la k ème itération est donné par :

$$g(\bar{X}) \approx g(\bar{X}^k + \Delta \bar{X}) \approx g(\bar{X}^k) + \Delta \bar{X}^T \cdot \nabla g(\bar{X}^k) + \Delta \bar{X}^T \cdot H(\bar{X}^k) \cdot \Delta \bar{X} \quad (2.24)$$

Avec :

$$-\nabla g(\bar{X}^k) = \left(\frac{\partial g(\bar{X}^k)}{\partial x_1}, \frac{\partial g(\bar{X}^k)}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial g(\bar{X}^k)}{\partial x_n} \right)^T \text{ le vecteur gradient de } g \text{ en } \bar{X}^k$$

$$-H(\bar{X}^k) = \left[\frac{\partial^2 S(\bar{X}^k)}{\partial x_i \partial x_j} \right] \text{ la matrice hessienne de } S \text{ en } \bar{X}^k.$$

Si la relation (2.24) est exacte, c'est-à-dire que les termes d'ordres supérieurs stricts à deux sont négligeables devant les termes d'ordre inférieurs, alors on peut écrire le gradient de g de la manière suivante :

$$\nabla g(\bar{X}) = \nabla g(\bar{X}^k) + 2.H(\bar{X}^k).\Delta \bar{X} \quad (2.25)$$

L'objectif étant de trouver une valeur de \bar{X}_k qui minimise $g(\bar{X})$, donc qui annule le gradient $\nabla g(\bar{X})$, on peut écrire la relation récurrente suivante :

$$2.H(\bar{X}^k).(\bar{X}^{k+1} - \bar{X}^k) = -\nabla g(\bar{X}^k) \quad (2.26)$$

Avec :

$$\nabla g(\bar{X}^k) = \begin{cases} \frac{\partial g(\bar{X}^k)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial g(\bar{X}^k)}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial g(\bar{X}^k)}{\partial x_n} \end{cases} = 2 \cdot \begin{cases} \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i(\bar{X}^k)}{\partial x_1} \cdot f_i(\bar{X}^k) \\ \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i(\bar{X}^k)}{\partial x_2} \cdot f_i(\bar{X}^k) \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i(\bar{X}^k)}{\partial x_n} \cdot f_i(\bar{X}^k) \end{cases} \quad (2.27)$$

Soit sous forme matricielle :

$$\nabla g(\bar{X}^k) = 2.J(\bar{X}^k)^T \cdot \bar{F}(\bar{X}^k) \quad (2.28)$$

Finalement, à partir de (2.28), (2.26) devient :

$$H(\bar{X}^k).(\bar{X}^{k+1} - \bar{X}^k) = -J(\bar{X}^k)^T \cdot \bar{F}(\bar{X}^k) \quad (2.29)$$

La matrice hessienne peut s'écrire sous la forme suivante :

$$H(\bar{X}^k) = J(\bar{X}^k)^T \cdot J(\bar{X}^k) + B \quad (2.30)$$

Avec :

$$B_{ij}(\bar{X}^k) = 2 \cdot \sum_{l=1}^n f_l(\bar{X}^k) \cdot \frac{\partial^2 f_l(\bar{X}^k)}{\partial x_i \partial x_j} \quad (2.31)$$

Cette matrice, qui traduit la non linéarité du système, est dans certains cas lourde à calculer. Levenberg propose de remplacer cette matrice par une matrice proportionnelle à la matrice identité. Ainsi, (2.31) devient :

$$(J(\bar{X}^k)^T \cdot J(\bar{X}^k) + \mu.I).(\bar{X}^{k+1} - \bar{X}^k) = -J(\bar{X}^k)^T \cdot \bar{F}(\bar{X}^k) \quad (2.32)$$

μ est comparable à un coefficient d'amortissement. Le choix de μ se fait généralement de manière heuristique [Marquardt 1963]. Si la matrice J est mal conditionnée, alors il faudra choisir une valeur de μ suffisamment grande pour que $J(\overline{X}^k)^T . J(\overline{X}^k)$ devienne négligeable devant $\mu . I$. Ainsi le problème se rapproche de la méthode de la plus grande pente [Nougier 2001]. Dans le cas contraire, μ prendra une valeur faible et le problème reviendra donc à la méthode de Newton-Raphson.

La méthode de Levenberg-Marquardt est donc une méthode « mixant » la méthode de Newton-Raphson et la méthode de la plus grande pente. Elle est donc très utile dans le cas où la matrice jacobienne est mal conditionnée (cas des contacts proches des bords de la dent). Cependant dans le cas où le jacobien est régulier, cette méthode peut prendre plus de temps à converger que la méthode de Newton-Raphson.

Algorithme de Brent :

La méthode de Brent combine plusieurs méthodes de recherche de zéros d'une fonction : la dichotomie, l'interpolation quadratique inverse, et la méthode de la sécante [Vignes 1980]. Dans la mesure du possible, la méthode de Brent privilégie l'utilisation de l'interpolation inverse ou la méthode de la sécante car la dichotomie possède l'inconvénient de ne reposer que sur le signe de la fonction à minimiser, ce qui constitue une perte d'information et donc, peut donner lieu à des temps de convergence très long. La méthode de Brent est une méthode hybride qui converge très souvent, et s'affranchit du calcul des dérivées de la fonction à minimiser, mais peut donner lieu à des résidus plus importants que ceux offerts par la méthode de Newton Raphson ou Levenberg Marquardt.

Choix de l'algorithme utilisé

Le choix de l'algorithme utilisé est basé sur deux critères : le résidu et le temps mis pour résoudre un système non linéaire. Le **Tableau 2-2** montre les résultats obtenus pour la résolution de 3600 systèmes non linéaires (3600 contacts différents entre dents – identiques pour chaque algorithme) sur le même ordinateur.

	Temps de calcul moyen	Résidu moyen
Levenberg-Marquardt	0,39"	8.10^{-27}
Newton	1,09"	10^{-26}
Brent	0,22"	$7,3.10^{-10}$

Tableau 2-2 – Comparaison des méthodes de résolution de systèmes non linéaires

L'algorithme de Brent converge plus rapidement que les deux autres, mais donne un résidu moyen le plus grand. L'algorithme basé sur la méthode de Levenberg Marquardt est un bon compromis entre la rapidité de calcul et la précision sur le résidu. Il est donc utilisé dans l'outil d'analyse de l'engrènement basé sur la méthode TCA et la méthode de la dichotomie. Le pseudo algorithme utilisé pour la méthode TCA est le suivant :

$$\Phi_{2k} = \text{TCA}(\Phi_{1k})$$

Initialisation :

$$res_{\max} = 10^{-10}$$

Recherche de point de contact potentiel en testant p.q solutions initiales : pour chacune de ces valeurs résoudre le système (1.11).

For pp=1 to p,

For qq=1 to q,

$$(u_{10}, v_{10}, u_{20}, v_{20}, k, \phi_{2k}^i) = (u_{10pq}, v_{10pq}, u_{20pq}, v_{20pq}, k_0, \frac{z_1}{z_2} \phi_{1k}^i)$$

Résoudre le système (1.11) et enregistrer les solutions

$$(u_{10pqsol}, v_{10pqsol}, u_{20pqsol}, v_{20pqsol}, k_{sol}, \phi_{2ksol}^i)$$

End For

End For

Eliminer les solutions qui correspondent à un résidu supérieur à res_{\max}

Pour chaque solution restante, vérifier leur appartenance aux domaines de travail

For pp=1 to p,

For qq=1 to q,

If $(u_{10pqsol}, v_{10pqsol}) \notin D_1$ ou $(u_{20pqsol}, v_{20pqsol}) \notin D_2$

Résoudre le système (1.12) correspondant, Enregistrer les solutions offrant un résidu inférieur à res_{\max} .

Sinon Enregistrer les solutions comprises dans les domaines

End For

End For

Parmi toute les solutions, conserver celle qui correspondent à la valeur maximum des ϕ_{2k}^i trouvées.

$$\phi_{2k} = \max(\phi_{2k}^i)$$

La configuration du contact est donnée par $(\phi_{1k}, u_{1sol}, v_{1sol}, u_{2sol}, v_{2sol}, k_{sol}, \phi_{2ksol})$

Tableau 2-3 – Pseudo code pour la méthode TCA

La définition du vecteur de départ influe sur la résolution du système non linéaire. De ce fait, plusieurs définitions ont été testées : point milieu de la dent, quadrillage de la surface de la dent et point de contact identifié à l'itération précédente. Lorsque l'engrenage présente un bombé supérieur au défaut de forme, la première et la dernière solutions sont satisfaisantes et évitent de résoudre plusieurs fois le système non linéaire avec des vecteurs de départ différents. Par contre, lorsque le bombé est faible ou inexistant, la solution de quadrillage est pertinente. Nous avons testé deux répartitions du quadrillage : 3 x 3 points et 4 x 4 points répartis sur le flanc. Dans le cas où le contact risque de passer d'un côté à l'autre de la dent, cette définition par quadrillage est nécessaire : Simulation de l'engrènement sans charge d'un engrenage hélicoïdal à partir de données de métrologie effectuées au laboratoire BIMAQ de l'Université de BREMEN.

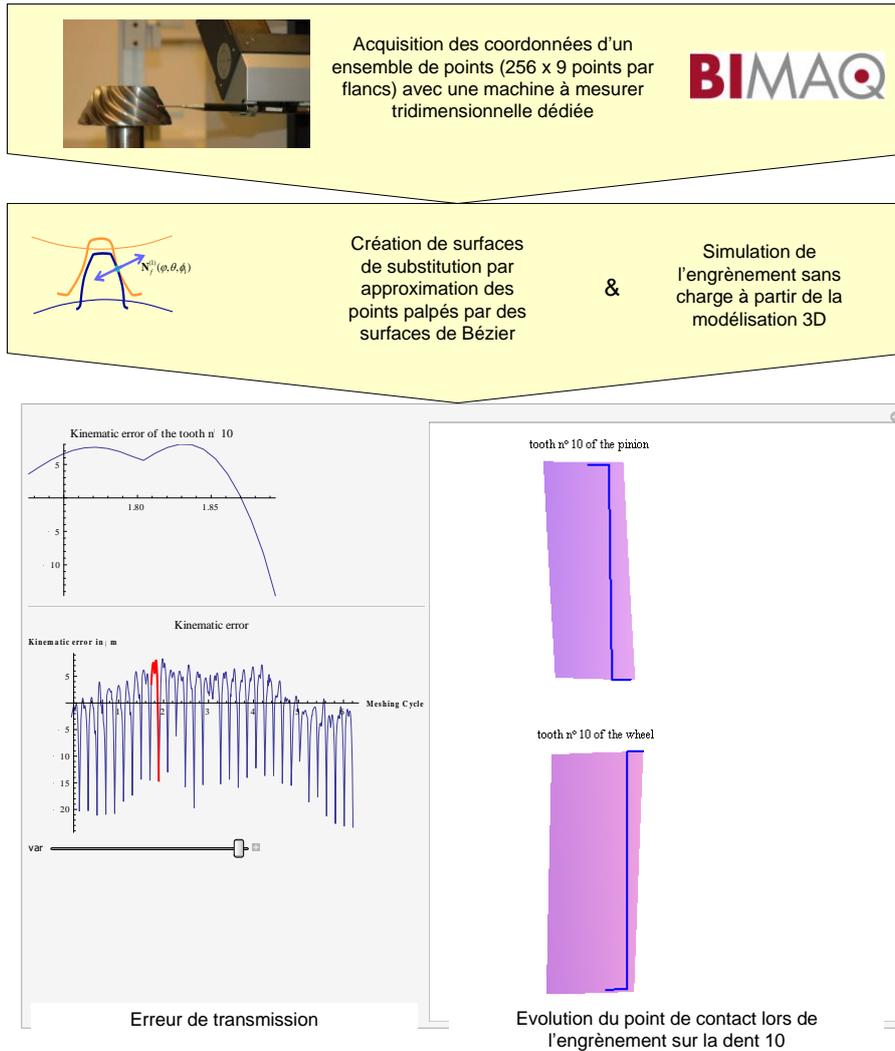


Figure 2-14 Simulation d'engrènement à partir de données de métrologie 3D.

2.3.3 Méthodes numériques dans le cas d'une formulation basée sur un modèle 3D via une résolution par dichotomie.

Le modèle de comportement basé sur la dichotomie repose sur la résolution d'un système non linéaire et d'une contrainte de non interpénétration. La résolution du système (2.13) est faite en utilisant la méthode de Levenberg-Marquardt. Le système (2.13) est non linéaire, composé de 3 équations :

$$\begin{aligned} \overline{s_f^{(1),j}}(u_1, v_1, \phi_1) &= \overline{s_f^{(2),j}}(u_2, v_2, \phi_2) \\ (u_1, v_1) &\in D_1 \\ (u_2, v_2) &\in D_2 \\ (\phi_1, \phi_2) &\in D_3 \end{aligned}$$

L'angle de rotation du pignon est un paramètre d'entrée et l'angle de rotation de la roue ϕ_2 est estimé en utilisant la méthode de la dichotomie. Cette méthode itérative nécessite la résolution du système précédent qui possède alors 5 inconnues qui sont le vecteur $(u_1, v_1, u_2, v_2, \phi_2)^T$ (ϕ_1 est un paramètre d'entrée du système)

Ainsi pour résoudre le système (2.13), il est nécessaire de fixer un paramètre supplémentaire parmi les 5 inconnues restantes : prenons arbitrairement v_1 , il reste 4 inconnues : $(u_1, u_2, v_2, \phi_2)^T$. Ce système possède une infinité de solutions.

La dichotomie est alors appliquée sur la variable Φ_{2k} avec la contrainte de non interprétation :

$$\text{distance signée } (\overrightarrow{s_f^{(1),j}}(u_1, v_1, \phi_1), \overrightarrow{s_f^{(2),j}}(u_2, v_2, \phi_1)) > \varepsilon$$

$$\varepsilon \geq 0$$

En utilisant cette méthode, il est pourtant pratiquement impossible de trouver l'unique point de contact entre les dents. En réalité, la valeur souhaitée de l'angle $\phi_{2i}(\phi_{1i})$ correspondant physiquement à une très légère pénétration des dents. Pour cette valeur, il existe donc un nombre p de points de contact très rapprochés, qui seront considérés comme le point de contact entre dents. La démarche suivie est la suivante :

- Il est possible de trouver deux valeurs ϕ_{2ia} (resp. ϕ_{2ib}) pour lesquelles les surfaces ne s'intersectent pas (resp. s'intersectent) correspondant à une valeur ϕ_{1i} .
- La dichotomie est ensuite utilisée pour réduire l'intervalle $[\phi_{2ia}, \phi_{2ib}]$ en garantissant les contraintes d'intersection pour ϕ_{2ia} et de non intersection pour ϕ_{2ib} .
- Un point de contact est ensuite choisi parmi ces p points de contact (interpénétration minimale par exemple).

La *Figure 2-15* expose la démarche suivie.

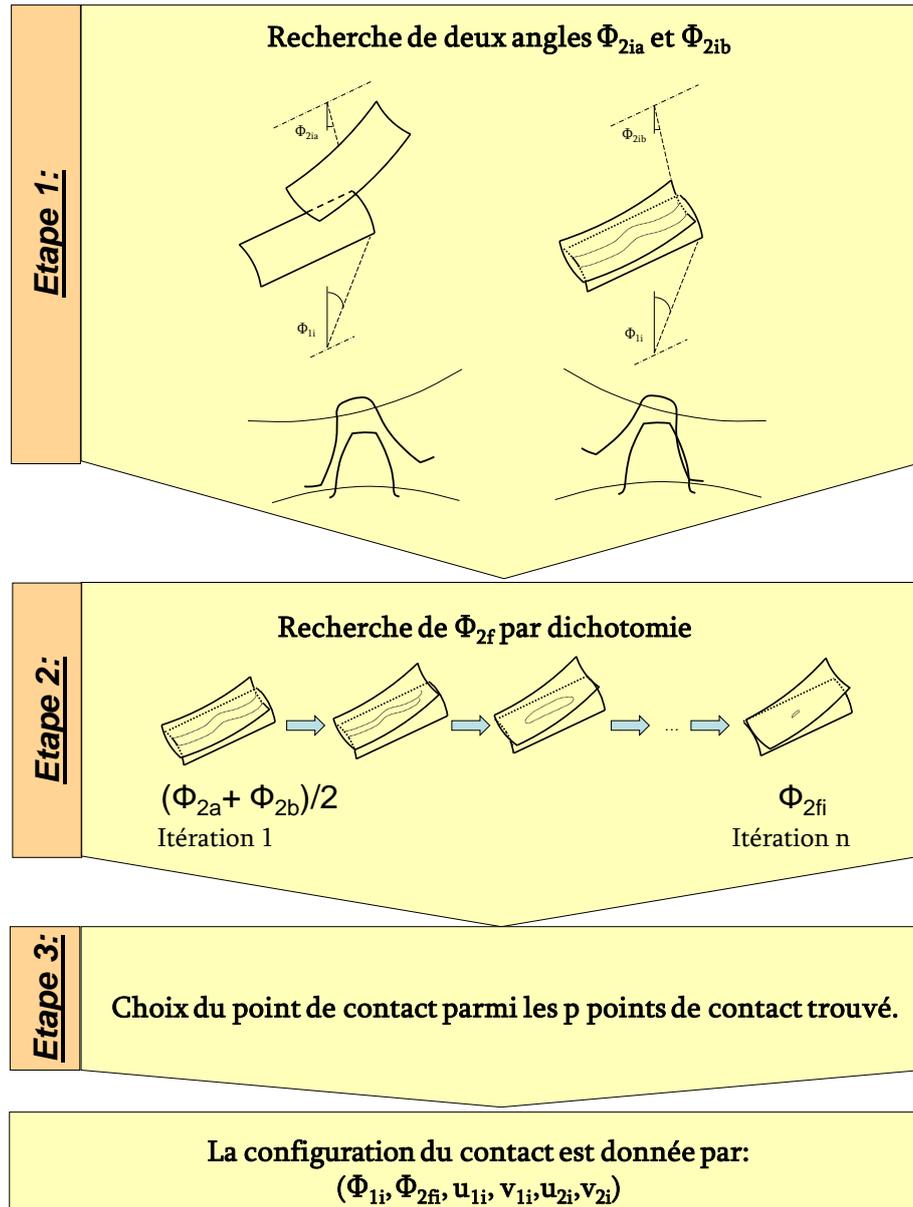


Figure 2-15 – Démarche pour la recherche du point de contact basé sur la dichotomie « 3D ».

Le pseudo code de la méthode d'estimation de l'angle de rotation de la roue est le suivant :

$\Phi_{2k} = \text{Dichotomie}(\Phi_{1k})$
<p>Initialisation :</p> <p>Résidu maximum admissible :</p> $res_{\max} = 10^{-10}$ <p>Erreur sur l'angle de rotation ϕ_2 :</p> $\varepsilon_{\phi_2} = 10^{-7}$ <p>Critère d'arrêt en cas de non convergence :</p> <p>stopi=100 ; stop=0 ;</p> <p>Recherche d'un angle ϕ_{2ka}^i tel qu'il n'y ait pas interpénétration</p> <p>Recherche d'un angle ϕ_{2kb}^i tel qu'il y ait interpénétration</p> <p>Début de la méthode par dichotomie</p> <p>stop=0 ;</p> $\phi_{2a} = \phi_{2ka}^i \text{ et } \phi_{2b} = \phi_{2kb}^i$ $\phi_{2c} = \frac{(\phi_{2a} + \phi_{2b})}{2}$ <p>While stop < stopi or $\phi_{2a} - \phi_{2b} > \varepsilon_{\phi_2}$,</p> <p style="padding-left: 20px;">For l=1 to nbv₁</p> $v_{1l} = \frac{l-1}{nbv_1 - 1}$ <p style="padding-left: 40px;">Résoudre le système 1.13 pour nbv₁ valeurs de v₁ et la valeur de ϕ_{2c}</p> <p style="padding-left: 40px;">Conserver les nbsol solutions correspondant à un résidu inférieur à res_{max}</p> <p style="padding-left: 20px;">End For</p> <p style="padding-left: 20px;">If nbsol ≠ 0,</p> <p style="padding-left: 40px;">Si il y a des solutions, alors les surfaces se touchent</p> $\phi_{2a} = \phi_c$ <p style="padding-left: 40px;">Elseif $\phi_{2b} = \phi_c$</p> <p style="padding-left: 20px;">Endif</p> $\phi_{2c} = \frac{(\phi_{2a} + \phi_{2b})}{2}$ <p style="padding-left: 20px;">End While</p> $\phi_{2k} = \phi_{2c}$

Tableau 2-4 – Pseudo code pour la dichotomie

2.3.4 Méthodes numériques d'agrégation de l'erreur cinématique

Les différentes méthodes présentées permettent d'estimer la valeur de l'angle de rotation de la roue Φ_{2k} tel qu'il y ait contact, pour une valeur fixée de l'angle de rotation du pignon Φ_{1k} . Nous proposons différents modèles de comportement cinématiques :

- Le modèle basé sur la projection des points de deux surfaces de substitution qui engrènent. La formulation mathématique est basée sur un problème de la résolution d'une équation non linéaire. Φ_{2k} est estimé en utilisant une méthode basée sur la méthode de la sécante.
- Le modèle basé sur la méthode TCA. La formulation mathématique est basée sur la résolution de systèmes non linéaires. Φ_{2k} est estimé en utilisant la méthode numérique de Levenberg-Marquardt.
- Le modèle basé sur la dichotomie « 3D ». La formulation mathématique est basée sur la résolution de systèmes non linéaires. Φ_{2k} est estimé en utilisant la méthode de la dichotomie, couplée à la méthode de résolution numérique de Levenberg-Marquardt.

Les pseudos algorithmes proposés constituent le cœur de l'estimation de l'erreur cinématique sans charge. Afin d'avoir une image représentative de l'erreur cinématique, il est nécessaire d'estimer un ensemble de couple $(\phi_{2k}, \phi_{1k})^T$. L'analyse de l'engrènement se fait en deux étapes :

- L'engrènement est étudié pour chaque dent indépendamment les unes des autres
- L'ensemble des résultats sont ensuite assemblés le cas des contacts doubles sont traités.

La section suivante détaille cette démarche explicitée Figure 2-16.

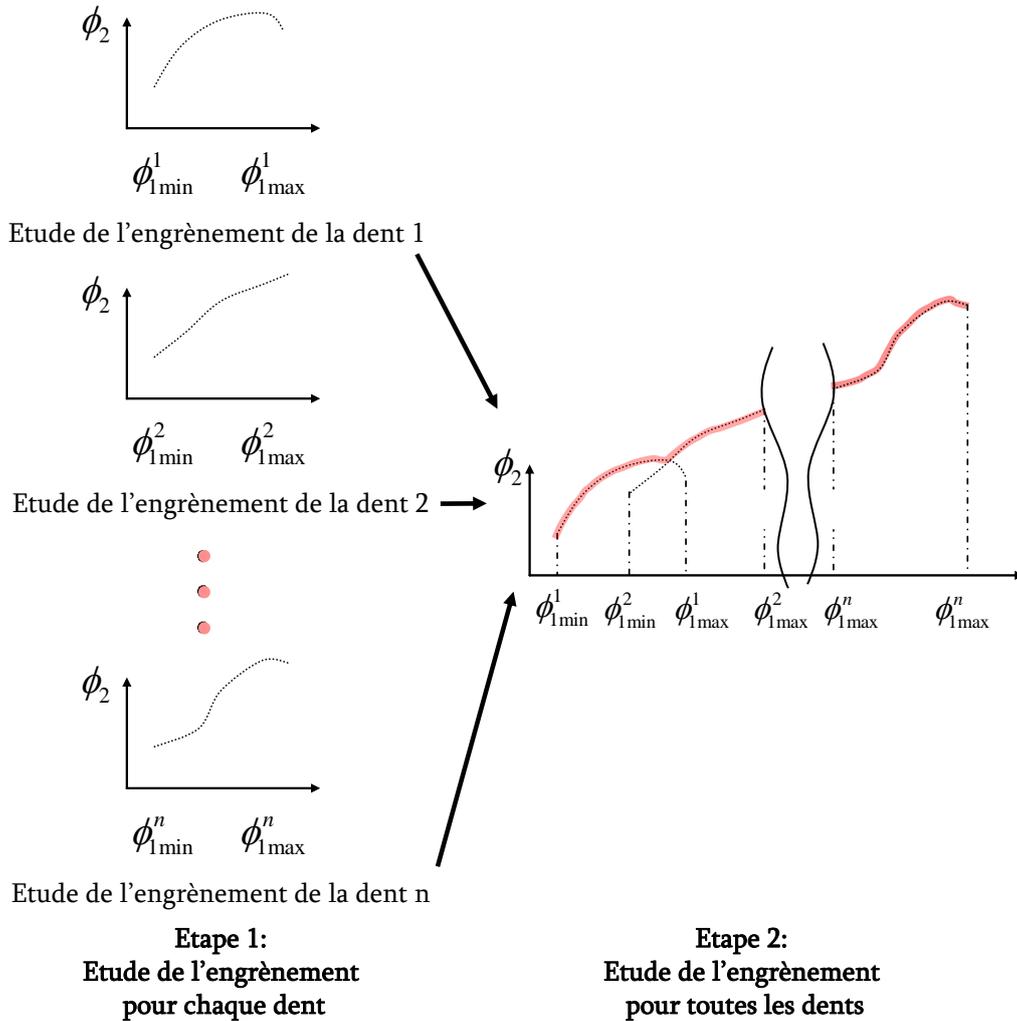


Figure 2-16 – Démarche pour l'analyse de l'engrènement

Etude de l'engrènement pour chaque dent :

Pour la i ème dent, l'angle de rotation ϕ_1 varie entre deux valeurs $\phi_{1\min}^i$ et $\phi_{1\max}^i$. L'intervalle est discrétisé en m valeurs et pour chacune de ces valeurs, une des méthodes numériques vue précédemment est appliquée. Pour la dent i , l'angle ϕ_{1k}^i de la k ème position angulaire vaut :

$$\phi_{1k}^i = \frac{2 \cdot \pi}{z_1} (i-1) + \frac{1}{(m-1)} \cdot (k \cdot (\phi_{1\max} - \phi_{1\min}) + m \cdot \phi_{1\min} - \phi_{1\max})$$

$$i = 1, \dots, z_1$$

$$k = 1, \dots, m$$
(2.33)

Les angles $\phi_{1\min}$ et $\phi_{1\max}$ sont identiques pour chaque dent considérée. Ils peuvent être déterminés par le calcul basé sur la géométrie des profils étudiés [Bruyère 2006] ou graphiquement si seul un modèle CAO est disponible. Ils correspondent aux positions théoriques du point de contact parcourant un profil entièrement, de l'élément (cercle ou cône) de pied à l'élément de tête. Afin

d'assurer la continuité d'engrènement, l'amplitude de l'intervalle $[\phi_{1\min}; \phi_{1\max}]$ doit être supérieure à la valeur du pas du corps considéré. En général, l'amplitude est choisie pour avoir un rapport de conduite [Bruyère 2006] égale environ à 1.33 :

$$\phi_{1\max} - \phi_{1\min} \approx 1,33 \cdot \frac{2 \cdot \pi}{z_1} \quad (2.34)$$

Dans ses travaux de thèse, J. Bruyère [Bruyère 2006] donne la démarche complète pour l'estimation de ces angles.

L'erreur cinématique EC_k^i est ensuite estimée à partir de ces valeurs. Elle correspond à la différence entre la valeur théorique et simulée de l'angle de rotation de la roue. La valeur théorique donnée par le rapport de transmission de l'engrenage.

$$EC_k^i = \frac{z_1}{z_2} \cdot \phi_{1k}^i - \phi_{2k}^i \quad (2.35)$$

L'étude individuelle de l'engrènement n'est pas suffisante. Les domaines $[\phi_{1\min}^i; \phi_{1\max}^i]$ se chevauchent partiellement (*Figure 2-16*) puisqu'il y a continuité d'engrènement. Dans ce cas, il y a double contact sur l'intervalle $[\phi_{1\min}^{i+1}; \phi_{1\max}^i]$. Ce traitement est exposé dans la section suivante.

Etude de l'engrènement pour toutes les dents :

La *Figure 2-16* montre les résultats typiques lorsque les portions d'erreurs cinématique sont mises bout à bout, en triant ϕ_1 par ordre croissants. Pour une même valeur de ϕ_1 , il y a deux configuration angulaires possibles pour la roue (*Figure 2-17*).

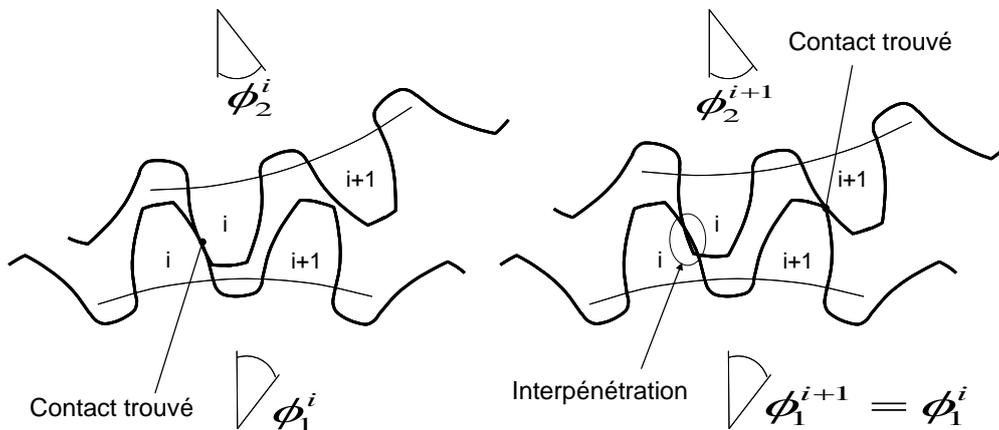


Figure 2-17 – Différentes positions angulaires pour une même valeur de ϕ_1

Dans le cas de gauche, la configuration est correcte, dans le cas de droite il y a interpénétration. Si l'évolution de ϕ_1 est choisie dans le sens croissant, il faudra choisir la valeur maximale parmi (ϕ_2, ϕ_2^{i+1}) . Les valeurs de ϕ_{1k}^i et ϕ_{1k}^{i+1} comprise dans les intervalles $[\phi_{1\min}^{i+1}; \phi_{1\max}^i]$ ne sont pas nécessairement confondues. Dans ce cas, J. Bruyère propose de choisir la bonne valeur de ϕ_2 par interpolation linéaire [Bruyère 2006]. Dans notre étude nous proposons de modifier l'intervalle $[\phi_{1\min}^i; \phi_{1\max}^i]$ pour un ensemble de m résolutions par intervalle $[\phi_{1\min}^i; \phi_{1\max}^i]$ fixée, pour les valeurs de ϕ_{1k}^i et ϕ_{1k}^{i+1} comprises dans $[\phi_{1\min}^{i+1}; \phi_{1\max}^i]$ coïncident. L'intervalle $[\phi_{1\min}^i; \phi_{1\max}^i]$ est modifié en l'élargissant très légèrement en $[\phi_{1\min}^i - \Delta\phi_1; \phi_{1\max}^i + \Delta\phi_1]$ avec $\Delta\phi_1$ une petite valeur d'angle positive.

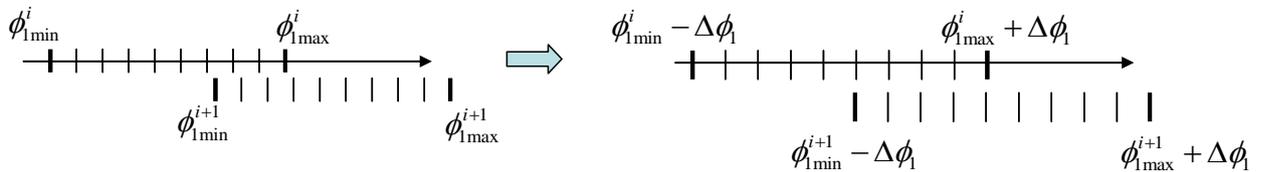


Figure 2-18 – Coïncidence des valeurs de ϕ_1 lors d'une configuration de double contact

La valeur de $\Delta\phi_1$ doit être petite, elle est obtenue en résolvant l'équation suivante :

$$\mathcal{G}(\Delta\phi_1) = E(\mathcal{G}(0)) \quad (2.36)$$

Avec :

- E l'opérateur partie entière.
- La fonction \mathcal{G} est définie par :

$$\mathcal{G}(\Delta\phi_1) = 1 + \frac{(m-1)}{\phi_{1\max} - \phi_{1\min} + 2 \cdot \Delta\phi_1} \cdot \frac{2 \cdot \pi}{z_1} \quad (2.37)$$

Cette approche d'estimation de l'erreur cinématique est basée sur celle proposée par J. Bruyère [Bruyère 2006].

2.4 Modèle géométrique des engrenages

Les modèles de comportements étudiés nécessitent d'avoir une représentation géométrique de l'engrenage. Le modèle basé sur la projection de points dans le plan d'action est basé sur une représentation discrète des surfaces de substitution. Les modèles basés sur TCA et la dichotomie

« 3D » requiert une expression paramétrique des surfaces de substitution. La section suivante explicite l'obtention de ce modèle paramétrique.

Il est possible de considérer différentes représentations des surfaces de substitution d'un engrenage (*Figure 2-19*):

- une représentation paramétrique des surfaces.
- une représentation multiparamétrique : un ensemble de surfaces reliées entre elles par des conditions de raccordement pour que, ensemble, elles représentent la surface active globale,
- une représentation de type éléments surfaciques (triangles par exemple)
- une représentation discrète (un ensemble de points par exemple)
- ...

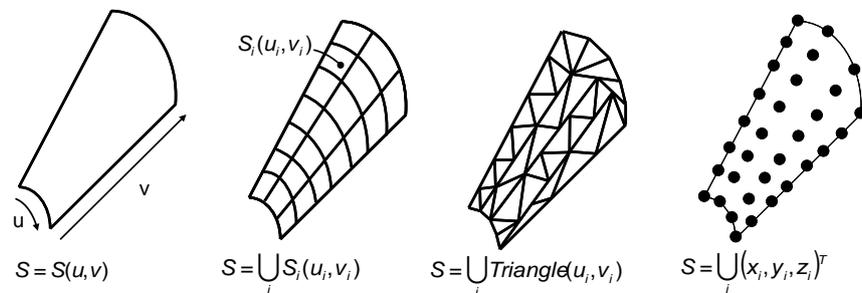


Figure 2-19 – Quelques représentations mathématiques de surfaces de dents

Le choix du modèle mathématique des surfaces dépend du modèle de comportement cinématique utilisé. Le modèle de comportement de projection de points dans le plan d'action s'appuie sur une représentation discrète des surfaces de substitution. L'ensemble des points peut être obtenu en discrétisant une représentation paramétrique continue des surfaces de substitution par exemple. Cette étape de discrétisation n'est pas un obstacle, l'inverse l'est. Ainsi, l'objectif de cette section est d'explicitier le modèle géométrique de substitution développé pour l'analyse de l'engrènement basée sur TCA ou la dichotomie (*Figure 2-20*) :

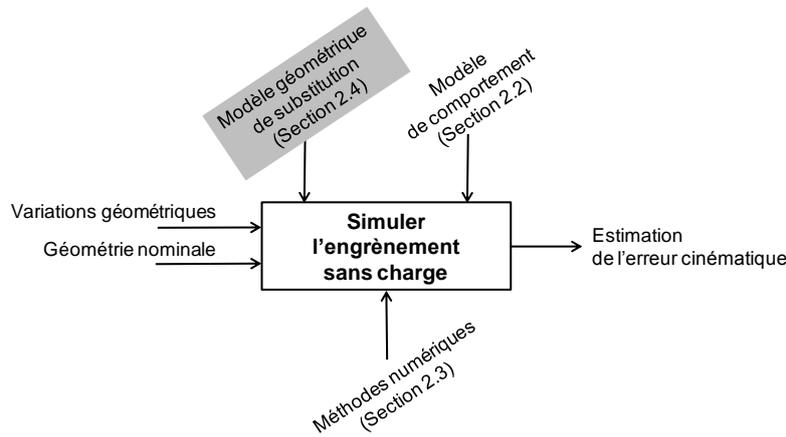


Figure 2-20- Position de la section 2.4 dans la simulation de l'engrènement sans charge

Le modèle géométrique proposé doit fournir une représentation paramétrique des surfaces de substitution et permettre l'estimation de l'influence d'écarts géométriques et de tolérances sur ces écarts sur l'erreur cinématique. Il est contraint à être cohérent avec les modèles de représentation des spécifications dans le cas des engrenages. Cet aspect est implicite dans ce chapitre et sera développé dans le chapitre 3.

La prise en compte des défauts de forme d'une surface active nécessite la possibilité de générer des surfaces de forme très diverses. Dans ses travaux, Bruyère [Bruyère 2006] propose une modélisation des défauts de formes en ajoutant des déformations normales à la surface nominale (Figure 2-21).

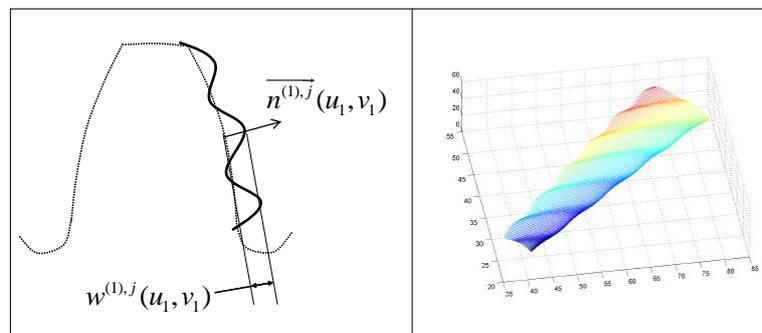


Figure 2-21 – Défauts de formes et surface de substitution

Ainsi, un point de la surface de substitution est donné par :

$$\overline{s^{(i),j}}(u_i, v_i) = \overline{\Upsilon^{(i),j}}(u_i, v_i) + w^{(i),j}(u_i, v_i) \cdot \overline{n^{(i),j}}(u_i, v_i) \quad (2.38)$$

Avec :

- $\overline{\Upsilon^{(i),j}}(u_i, v_i)$ un point courant de la surface nominale de la $j^{\text{ème}}$ dent du corps i

- $\overrightarrow{n^{(i),j}}(u_i, v_i)$ la normale unitaire en $\overrightarrow{Y^{(i),j}}(u_i, v_i)$
- $w^{(i),j}(u_i, v_i)$ la fonction scalaire décrivant le défaut de forme en un point $\overrightarrow{S^{(i),j}}(u_i, v_i)$.

La fonction $w^{(i),j}(u_i, v_i)$ proposée par Bruyère est composée de fonctions trigonométriques et permet la simulation de défauts de forme sinusoïdaux dont il est possible de paramétrer la période, l'amplitude et l'orientation sur la dent. Cette méthode d'intégration de défauts permet d'avoir une expression paramétriques des défauts de formes, mais alourdi considérablement les expressions des surfaces de substitution. De plus, il n'est possible de simuler que des défauts de forme dont l'allure est prédéfinie. Dans le but de permettre une intégration des défauts de forme qui soit plus flexible, il est nécessaire de reconsidérer le modèle mathématique des surfaces de substitution.

Le modèle mathématique recherché doit répondre aux contraintes suivantes :

- Permettre la construction de surface de substitution de forme très diverses.
- Offrir des expressions qui ne soient pas trop complexes et lourdes à manipuler.
- Offrir une bonne robustesse pour les algorithmes de résolution numérique.

Les surfaces qui répondent le mieux à ces trois critères sont les surfaces polynomiales.

Par rapport aux définitions classiques des surfaces de substitution, nous proposons une variante. L'intégration des défauts géométriques et leur paramétrage ne sont pas directement définis à partir de la définition mathématique de la géométrie nominale. L'expression mathématique des surfaces de substitution est polynomiale et est obtenue par approximation du modèle nominal et des défauts. La *Figure 2-22* détaille la procédure de définition des surfaces de substitution.

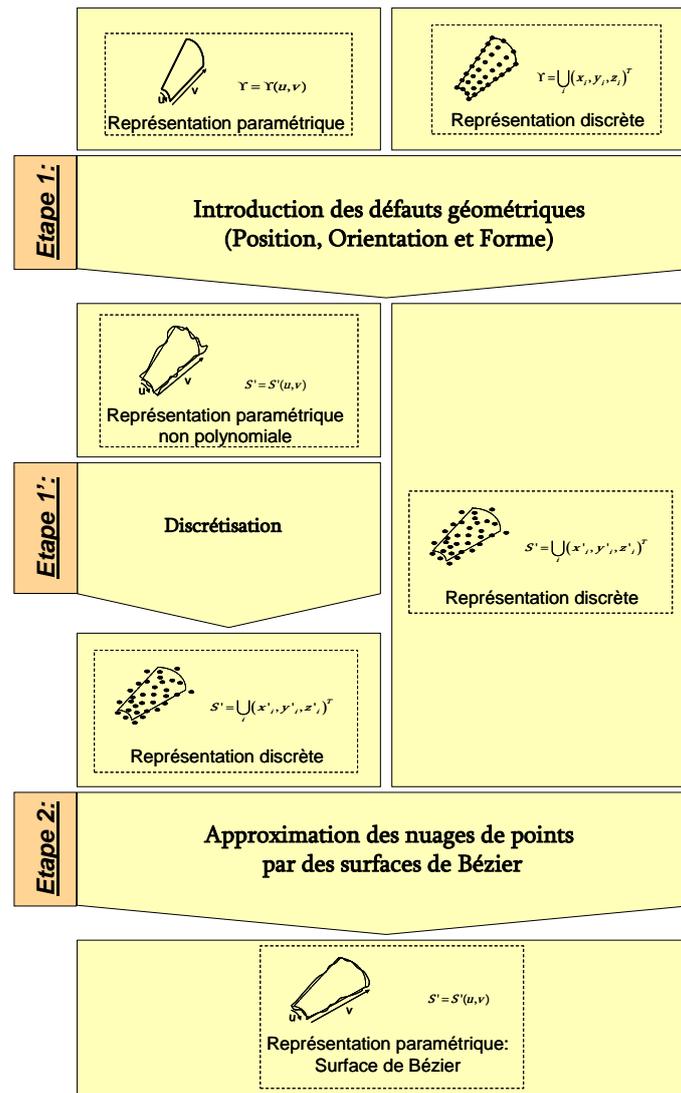


Figure 2-22 – Démarche de la constitution du modèle paramétrique de la surface de substitution

2.4.1 Construction des surfaces de substitution par des surfaces de Bézier

Comme il a été mentionné précédemment, les polynômes sont réputés pour leur facilité de mise en œuvre, leur robustesse, et leur stabilité. Nous proposons d'approximer un nuage de points, intégrant les variations géométriques par des surfaces de Bézier. Ces dernières ont fait l'objet de nombreuses études, et notamment dans le domaine du *Reverse Engineering ou retro conception*. La rétro-conception consiste à obtenir une description mathématique continue (paramétrique par exemple) d'un objet à partir d'un modèle physique via sa représentation discrète (nuage de points). Plusieurs techniques sont possibles [Popiel 2006], [Cattiaux-Huillard 1999], [Yau 1995], [Ueng 1998], [Werner 1998].

Les surfaces NURBS (Non Uniform Rational Bézier Surface) sont celles qui offrent la meilleure image du nuage de points. Une surface NURBS est constituée d'un ensemble de carreaux élémentaires de degré deux par deux par exemple, raccordés entre eux par des conditions de continuité en tangence et en courbure. La surface est l'union d'un ensemble de surfaces polynomiales ou rationnelles. Bien que cette approche soit intéressante d'un point de vue géométrique puisqu'elle permet la reconstitution de surfaces de forme très variées et permet de considérer des variations de courbures très importantes, elle ne peut être mise en œuvre que très difficilement pour la recherche de points de contact en utilisant TCA ou la dichotomie. Il serait alors nécessaire de connaître les deux carreaux les plus proches pour le contact, ce qui d'un point de vue algorithmique peut être très fastidieux à mettre en œuvre du fait de la combinatoire importante.

Afin de s'affranchir de l'aspect combinatoire des surfaces définies par morceaux comme les surfaces NURBS, nous proposons d'approximer les nuages de points des surfaces intégrant les variations géométriques par un unique carreau de Bézier. L'approximation (ou lissage) est préférable dans notre cas à l'interpolation étant donné le nombre substantiel de points pouvant constituer les nuages. La section suivante établit la formulation mathématique d'une surface de Bézier.

2.4.1.1 Formulation mathématique d'une surface de Bézier

Considérons une surface de Bézier $\vec{\Gamma}(u, v)$ de degré n en u et m en v . Son expression paramétrique est donnée par:

$$\vec{\Gamma}(u, v) = \sum_{j=0}^m \sum_{i=0}^n \vec{P}_{ij} \cdot B_{i,n}(u) \cdot B_{j,m}(v) \quad (2.39)$$

Avec :

- $B_{k,l}(t) = \binom{l}{k} \cdot t^k \cdot (1-t)^{l-k}$ un polynôme de Bernstein de degré l . $\binom{l}{k} = \frac{l!}{k!(l-k)!}$

représente le coefficient binomial.

- $\vec{P}_{ij} = (P_{ijx}, P_{ijy}, P_{ijz})^T$ est un point de contrôle (ou pôle de la surface de Bézier)

L'ensemble $P = \{P_{ij} \in R^3 \mid (i, j) \in \{0, n\} \times \{0, m\}\}$ est appelé polygone convexe de Bézier ce qui signifie que la surface est à l'intérieur de l'enveloppe convexe des points de contrôle. Une surface de Bézier est donc définie par ces points de contrôle.

2.4.1.2 Approximation d'un nuage de points par une surface de Bézier

L'objectif de cette section est de définir la démarche suivie pour l'approximation d'un nuage de points par une surface de Bézier.

Considérons un nuage de points M ordonné de $p+1$ par $q+1$ points. L'objectif de l'approximation est de créer une surface de Bézier de degré n en u et m en v avec $n < p$ et $m < q$ qui passe « au mieux » du nuage de points. Cette approximation se fait en minimisant un critère (fonction objectif). Les moindres carrés sont retenus par leur simplicité de mise en œuvre et sa stabilité. Le critère à minimiser est la somme des carrés des écarts entre le nuage de points et la surface $\Gamma(u, v)$.

La surface $\Gamma(u, v)$ n'est bien entendu pas connue avant optimisation. De ce fait, les écarts entre le nuage de points et la surface ne sont pas nécessairement orthogonaux à celle-ci (*Figure 2-23*). Ces écarts sont définis par :

$$\vec{\varepsilon}_{ij} = \vec{\Gamma}(u_{ij}, v_{ij}) - \vec{M}_{ij} \quad (2.40)$$

Une composante k du vecteur $\vec{\varepsilon}_{ij}$ s'écrit donc :

$$\varepsilon_{ij,k} = \Gamma_k(u_{ij}, v_{ij}) - M_{ij,k} \quad k \in \{1, 2, 3\} \quad (2.41)$$

Il faut donc trouver les valeurs des composantes des pôles \vec{P}_{ij} qui minimisent la somme des écarts au carré. La fonction objectif s'écrit donc :

$$\min_{P_{rs,k}} G_k = \min_{P_{rs,k}} \sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^q (\Gamma_k(u_{ij}, v_{ij}) - M_{ij,k})^2 \quad (2.42)$$

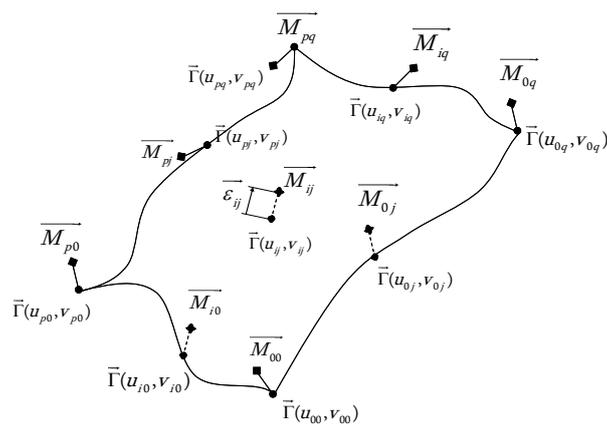


Figure 2-23- Ecart entre le nuage de points et la surface approximante

Ainsi pour minimiser G_k il faut résoudre :

$$\frac{\partial G_k}{\partial P_{rs,k}} = 0 \quad \forall (r, s) \in \{0, n\} \times \{0, m\} \quad (2.43)$$

Or :

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_k}{\partial P_{rs,k}} &= \sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^q \frac{\partial}{\partial P_{rs,k}} (\Gamma_k(u_{ij}, v_{ij}) - M_{ij,k})^2 \\ &= \sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^q \frac{\partial}{\partial P_{rs,k}} (\Gamma_k(u_{ij}, v_{ij})^2 + M_{ij,k}^2 - 2\Gamma_k(u_{ij}, v_{ij}) \cdot M_{ij,k}) \end{aligned}$$

Et comme :

$$\frac{\partial}{\partial P_{rs,k}} \Gamma_k(u_{ij}, v_{ij}) = B_{r,n}(u_{ij}) \cdot B_{s,m}(v_{ij})$$

Il en découle que :

$$\sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^q \left(B_{r,n}(u_{ij}) \cdot B_{s,m}(v_{ij}) \cdot \sum_{\alpha=0}^n \sum_{\beta=0}^m P_{\alpha\beta,k} \cdot B_{\alpha,n}(u_{ij}) \cdot B_{\beta,m}(v_{ij}) - M_{ij,k} \right) = 0 \quad \forall (r, s) \in \{0, n\} \times \{0, m\} \quad (2.44)$$

Ainsi, la minimisation de la fonction objectif consiste à résoudre $(m+1) \times (n+1)$ équations linéaires dont les inconnues sont les pôles de la surface $\vec{\Gamma}(u, v)$. Léon [Leon 1991] montre que ce système peut se mettre sous une forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} \overline{P_{00}} \\ \overline{P_{10}} \\ \vdots \\ \overline{P_{rs}} \\ \overline{P_{nm}} \end{pmatrix} = \left(\left[\overline{T_{nm,pq}} \right]^T \cdot \left[\overline{T_{nm,pq}} \right] \right)^{-1} \cdot \left[\overline{T_{nm,pq}} \right]^T \cdot \begin{pmatrix} \overline{M_{00}} \\ \overline{M_{10}} \\ \vdots \\ \overline{M_{ij}} \\ \overline{M_{pq}} \end{pmatrix} \quad (2.45)$$

avec :

$$\left[\overline{T_{nm,pq}} \right] = \begin{pmatrix} B_{0n}(u_{00}) \cdot B_{0m}(v_{00}) & \cdots & B_{nn}(u_{00}) \cdot B_{mm}(v_{00}) \\ \vdots & & \vdots \\ B_{0n}(u_{p0}) \cdot B_{0m}(v_{p0}) & \cdots & B_{nn}(u_{p0}) \cdot B_{mm}(v_{p0}) \\ B_{0n}(u_{01}) \cdot B_{0m}(v_{01}) & \cdots & B_{nn}(u_{01}) \cdot B_{mm}(v_{01}) \\ \vdots & & \vdots \\ B_{0n}(u_{pq}) \cdot B_{0m}(v_{pq}) & \cdots & B_{nn}(u_{pq}) \cdot B_{mm}(v_{pq}) \end{pmatrix} \quad (2.46)$$

Il reste maintenant à définir les paramètres u_{ij} et v_{ij} . Il existe principalement deux méthodes pour le choix des valeurs :

- La première et la plus simple consiste à choisir des répartitions uniformes. Ainsi pour un nuage de points de dimension $(p+1).(q+1)$ on a :

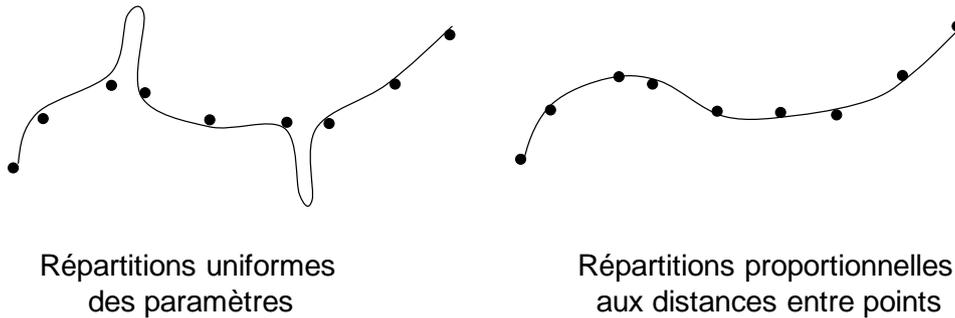
$$u_{ij} = \frac{i}{p} \quad \text{et} \quad v_{ij} = \frac{j}{q} \quad i \in \{0,1,..p\}; j \in \{0,1,..q\} \quad (2.47)$$

Cette solution est très intéressante par sa simplicité mais n'est pertinente que si les distances entre les points du nuage, pris en iso valeurs des paramètres u et v ne varie pas trop.

- Dans le cas contraire, il est possible de considérer une répartition qui soit proportionnelle à la distance entre les points :

$$u_{ij} = \frac{\sum_{k=0}^i \|\vec{P}_{ij} - \vec{P}_{i-1j}\|}{\sum_{k=0}^n \|\vec{P}_{ij} - \vec{P}_{i-1j}\|} \quad u_{00} = 0 \quad v_{ij} = \frac{\sum_{k=0}^j \|\vec{P}_{ij} - \vec{P}_{ij-1}\|}{\sum_{k=0}^n \|\vec{P}_{ij} - \vec{P}_{ij-1}\|} \quad v_{00} = 0 \quad (2.48)$$

Cette répartition permettra d'éviter des oscillations parasites lorsque les points constituant le nuage ne sont pas équirépartis (*Figure 2-24*).



*Figure 2-24 – Influence de la technique de paramétrage dans le cas d'une courbe dans le plan
[Leon 1991]*

La répartition proportionnelle aux distances entre points a été retenue dans ces travaux.

2.4.1.3 Application aux engrenages coniques forgés en développante de cercle sphérique

Afin de valider cette approche, nous proposons d'étudier les erreurs commises lors de l'approximation issues d'une surface active d'un engrenage conique en développante de cercle sphérique.

Les paramètres de la géométrie nominale sont définis dans le tableau suivant :

- | |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>-Nombre de dents du pignon $Z_1=9$;</p> <p>-Nombre de dents de la roue $Z_2=13$;</p> <p>-Angle de pression : $\alpha=24^\circ$</p> <p>-Rayon de la grande sphère $R_g=100$ mm</p> <p>-Rayon de la petite sphère $R_p=50$ mm.</p> |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

Tableau 2-5- Paramètres de l'engrenage considéré

La construction géométrique des engrenages coniques à développante de cercle sphérique est détaillée dans [Bruyère 2006] et [Berviller 2006].

La *Figure 2-25* montre le modèle nominal de l'engrenage considéré ainsi que l'extraction du nuage de 210 points d'une surface active. 10 points (correspondants à des iso-valeurs en « v » de la surface approximante) ont été pris équirépartis sur 21 profils (correspondants à des iso-valeurs en « u » de la surface approximante). Le choix des degrés des surfaces est du ressort de l'utilisateur. Si la dimensions du nuage est $(p+1).(q+1)$, les degrés en u et v de la surface approximante peuvent être :

- $n=p$ et $m=q$. Dans ce cas, la surface interpole le nuage. Dans notre cas, il est constitué de 210 points puisqu'il est désirable d'avoir une image assez conséquente de la géométrie des surfaces actives. L'interpolation n'est pas envisageable du fait des degrés élevés qui risque d'engendrer des oscillations parasites, notamment sur les bords des surfaces.

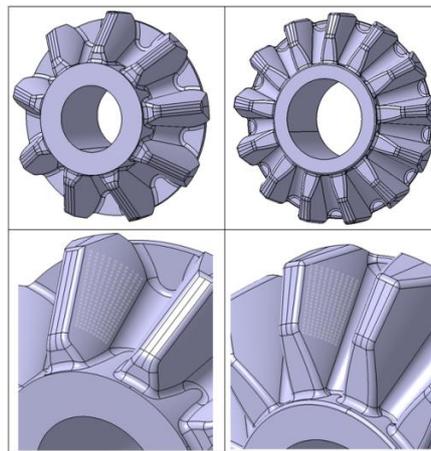


Figure 2-25 – Modèles nominaux du pignon (à gauche) et de la roue (à droite) et nuages de points des surfaces actives

- $m < p$ et $n < q$. Dans ce cas, la surface approxime (ou lisse) le nuage de points. Le choix de n et m est contraint par différents aspects :

- Des degrés élevés engendrent des oscillations parasites et entraînent des temps de calculs importants.
- Des degrés trop faibles engendrent des écarts entre le nuage de points et la surface.

Ces écarts sont les distances entre le nuage de points et la surface approximante. La qualité de l'approximation peut être quantifiée par l'intermédiaire d'un indicateur : l'erreur d'approximation maximale ε_{\max} . La valeur de cette erreur doit être relativement faible par rapport aux dimensions de la surface. La démarche pour le calcul de l'erreur d'approximation est la suivante :

Considérons un nuage de points $M = \bigcup_{i,j} \overline{M}_{ij}$ et une surface d'équation paramétrique $\overline{\Gamma}(u, v)$

approximant ce nuage au sens des moindres carrés. La distance entre un point \overline{M}_{ij} et un point courant de la surface $\overline{\Gamma}(u_i, v_j)$ suivant la normale à la surface en ce point est l'erreur d'approximation au point $\overline{\Gamma}(u_i, v_j)$. Cette erreur est donnée par :

$$\overline{\Gamma}(u_i, v_j) - \overline{M}_{ij} = \varepsilon \cdot \overline{n}(u_i, v_j) \quad (2.49)$$

Pour chaque point \overline{M}_{ij} l'erreur ε est calculée. Le maximum de ces (p+1).(q+1) erreurs est noté ε_{\max} .

L'équation (2.49) est un système non linéaire de 3 équations à 3 inconnues qui sont le vecteur $(u_i, v_j, \varepsilon)^T$. L'erreur maximale ε_{\max} est obtenue en résolvant (p+1).(q+1) fois ce système.

Le

Tableau 2-6 montre le résultat d'un plan d'expériences de l'erreur maximale d'approximation en fonction des degrés des surfaces approximantes.

Degré en u (suivant le profil)	3				4				5				6			
Degré en v (suivant le rayon de la sphère)	3	4	5	6	3	4	5	6	3	4	5	6	3	4	5	6
Erreur maximale d'approximation (microns)	5,17	5,18	5,2	5,16	1,77	1,77	1,83	1,79	0,91	0,91	0,91	0,88	1,04	0,95	0,98	1,01

Tableau 2-6 – Erreur maximale d'approximation en fonction des degrés des surfaces

Pour la géométrie étudiée, une surface de degré 5 par 3 présente une erreur d'approximation de 0.91 microns. Le choix des degrés est bien sûr propre à chaque géométrie considérée, de ce fait il est nécessaire pour chaque cas d'étude de mener ce type d'analyse. La *Figure 2-26* montre la

surface approximante ainsi que le peigne des erreurs d'approximation amplifié 5000 fois pour un degré 5 par 3.

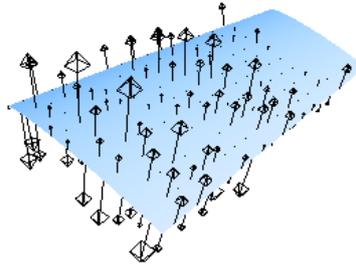


Figure 2-26 – Surface approximante et peigne des erreurs d'approximation

L'utilisation des surfaces de Bézier comme modèle géométrique des surfaces actives permet d'appliquer la méthode TCA et de la dichotomie. Elle permet de plus d'obtenir des formes de surfaces diverses et variées. La Figure 2-27 montre les différentes surfaces actives avec défauts de formes exagérés.

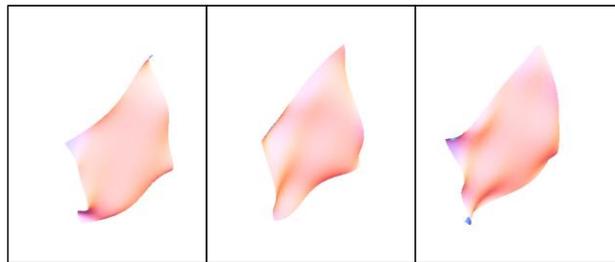


Figure 2-27 – Résultats d'approximation de nuages de points avec défauts de forme

Par définition, les surfaces de Bézier sont définies sur l'intervalle $[0 ; 1]^2$. Ainsi, il est certain que le point de contact a ses paramètres descripteurs compris dans ces intervalles. Cependant, même si le domaine d'étude est restreint à $[0 ; 1]^2$, la surface existe et n'a pas physiquement de sens en dehors de ces intervalles. Dans le cas de l'approche basée sur TCA, l'algorithme de résolution du système non linéaire décrivant le contact de deux surfaces, recherche, à partir d'un sextuplet initial s_0^T , un sextuplet s^T qui minimise la fonction objectif g par itérations successives. La solution proposée lorsqu'elle existe n'appartient pas forcément au domaine de recherche D : il peut exister un sextuplet $s^T \notin D$ tel que la valeur de la fonction objectif g soit minimale (Figure 2-28).

En fait cette situation arrive très fréquemment. Il est donc nécessaire de trouver une solution à ce problème afin d'assurer la convergence de l'algorithme de résolution à l'intérieur du domaine de recherche.

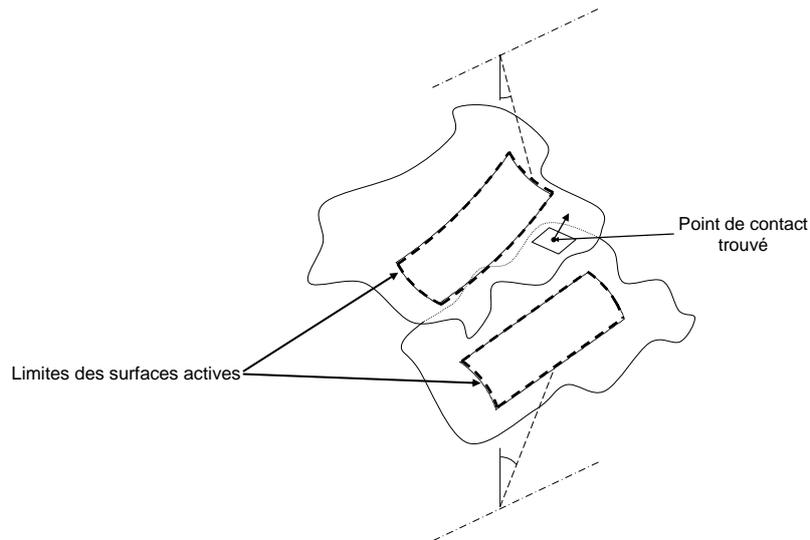


Figure 2-28 – Résultat d'une résolution en dehors du domaine de recherche

En dehors de $[0 ; 1]^2$, les surfaces ne sont plus contrôlées et peuvent présenter des variations de courbures (amplitude et sens), qui soient relativement fortes dès que l'on s'éloigne de l'intervalle $[0 ; 1]^2$ (Figure 2-29). Cette vitesse de variation de courbures croît avec les degrés des polynômes qui constituent la surface. Il est donc nécessaire d'agir sur la géométrie des surfaces.

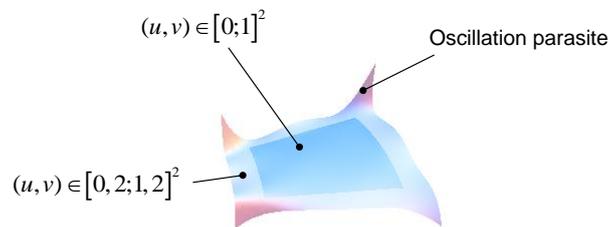


Figure 2-29 – Evolution de la surface au voisinage de l'intervalle de travail

Afin d'éviter cette situation, nous proposons de modifier la géométrie des surfaces de substitution en dehors de $[0 ; 1]^2$: pour assurer le contact à l'intérieur de l'intervalle de recherche, il est nécessaire de « rabattre » les surfaces de manière à rendre les surfaces convexe en dehors du domaine $[0 ; 1]^2$ (Figure 2-30).

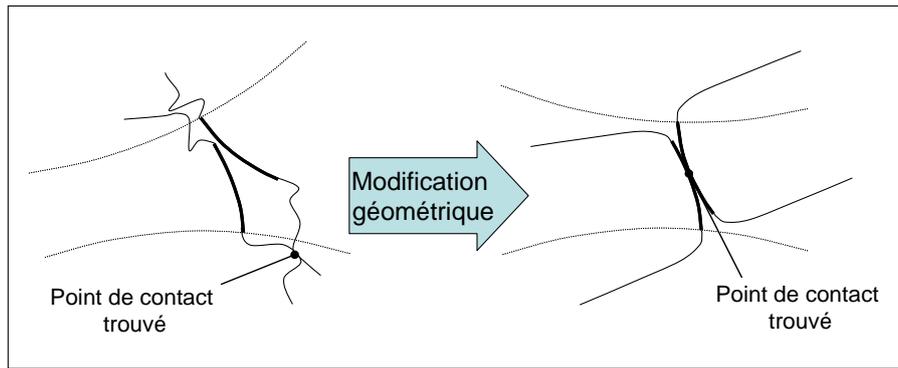


Figure 2-30 – modification géométrique des surfaces en dehors de l'intervalle de travail

Le problème est donc le suivant : comment contrôler la géométrie de la surface en dehors du domaine $D_s = [0 ; 1]^2$ sans la modifier à l'intérieur. La section suivante expose la démarche utilisée pour réaliser cette modification géométrique.

2.4.2 Modification géométrique des surfaces

La position d'un point courant appartenant à la surface de Bézier est donnée par le vecteur $\vec{\Gamma}(u, v)$ exprimé dans un repère $R_1(O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ lié à l'engrenage. Il est possible d'exprimer $\vec{\Gamma}(u, v)$ dans un nouveau repère $R_2(O_2, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ construit de la manière suivante :

- l'axe \vec{z}_2 est normal au plan formé par trois points pris sur les coins de la surface, par exemple $\vec{O_1A} = \vec{\Gamma}(0,0)$, $\vec{O_1B} = \vec{\Gamma}(0,1)$ et $\vec{O_1C} = \vec{\Gamma}(1,1)$. \vec{z}_2 est orienté du côté extérieur à la matière.
- l'axe \vec{x}_2 est colinéaire à la droite formée par \vec{AB}
- \vec{y}_2 vient compléter le repère orthonormé direct.
- Considérons un point D « assez proche » du point milieu de la surface. Une approximation convenable est le milieu de \vec{AC} . L'origine O_2 du repère est construite telle que $\vec{O_2D} = k \cdot \vec{z}_2$. k est choisi de manière à ce que O_2 soit situé du côté concave de la surface considérée. La Figure 2-31 montre la situation de ce repère relativement à la surface d'une dent.

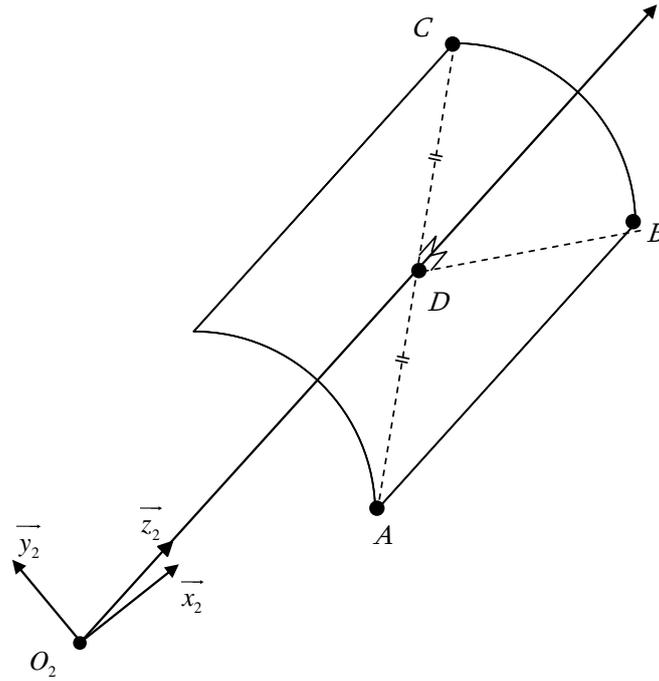


Figure 2-31 – Situation du repère R_2 par rapport à la surface active d'une dent

Les fluctuations de la surface en dehors de l'intervalle de travail D_s qui risquent de fausser la position du point de contact (Figure 2-30), sont celles qui sont orientées suivant la direction de l'axe \vec{z}_2 . Il faut donc agir sur la troisième composante de la surface exprimée dans R_2 . Notons-la

$\vec{\Gamma}_{R_2}(u, v) = (\Gamma_{xR_2}(u, v), \Gamma_{yR_2}(u, v), \Gamma_{zR_2}(u, v))^T$. L'objectif de la modification géométrique revient donc à « rabattre » la troisième composante de la surface du côté de la matière de la dent (Figure 2-30).

Puisque la surface est exprimée dans R_2 , une possibilité est de faire tendre la troisième composante vers 0 lorsque u et v sont en dehors de D_s . Nous proposons de créer une nouvelle surface à partir de $\vec{\Gamma}_{R_2}(u, v)$ qui lui soit très proche sur D_s , et dont la troisième composante tende vers 0 sinon. Notons $\vec{\Psi}_{R_2}(u, v)$ cette surface. Elle est donnée par la formule :

$$\vec{\Psi}_{R_2}(u, v) = (\Gamma_{xR_2}(u, v), \Gamma_{yR_2}(u, v), \eta(u) \cdot \eta(v) \cdot \Gamma_{zR_2}(u, v))^T \quad (2.50)$$

La fonction $\eta(x)$ doit être très proche de 1 sur l'intervalle $[0 ; 1]$ et nulle à l'extérieur.

Elle conditionne la continuité de la surface et pour permettre la résolution des systèmes (2.11), (2.12) et (2.13), elle doit être continue et dérivable sur R . Deux fonctions sont proposées :

Considérons $\eta_1(x)$ une fonction continue et dérivable sur R donnée par :

$$\eta_1(x) = \frac{e^a}{e^a + e^{\frac{a \cdot x}{b}} + e^{\frac{a(1-x)}{b}}} \quad (2.51)$$

Cette fonction doit se rapprocher d'un créneau valant 1 sur $[0 ; 1]$ et 0 en dehors de l'intervalle. Il est possible d'approximer ce créneau en choisissant des valeurs correctes pour les paramètres a et b . Le paramètre b permet de régler la largeur du créneau. Le paramètre a conditionne la rapidité du front montant et descendant (*Figure 2-32*).

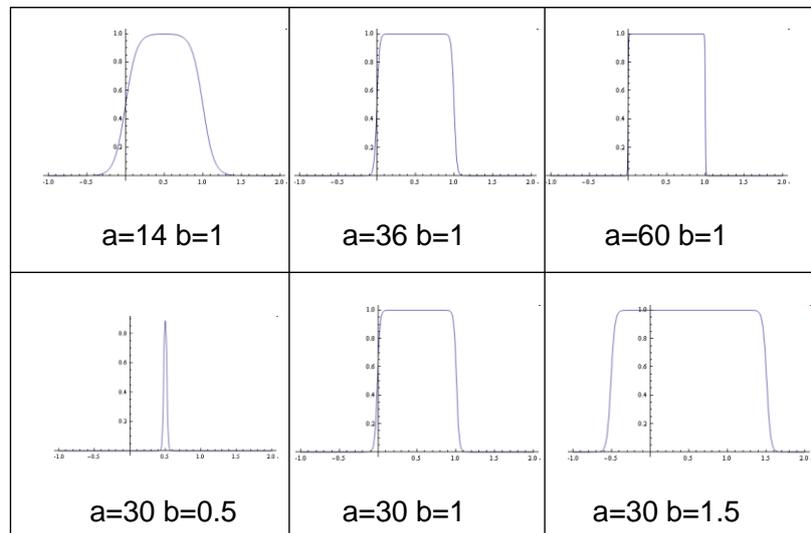


Figure 2-32 – Influence de a et b sur la fonction $\eta_1(x)$

La *Figure 2-33* montre la modification géométrique de la surface active d'une dent avec $a=50$ et $b=1.1$.

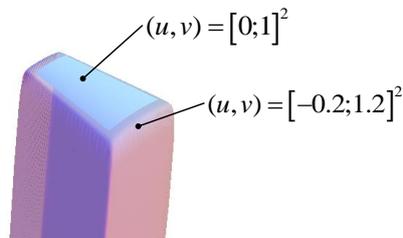


Figure 2-33 – Surface originale et modifiée

Cette modification géométrique n'est pas sans inconvénients. En effet l'introduction de fonctions exponentielles complexifie considérablement les équations des surfaces actives et de leurs normales. Les temps de calculs sont donc plus importants. De plus, elle augmente légèrement les erreurs d'interpolation puisqu'elle ne vaut pas exactement 1 sur l'intervalle de travail. Le principal avantage est d'avoir une unique équation de la surface.

La seconde proposée est une fonction $\eta_2(x)$ définie par morceaux. Elle est définie de la manière suivante :

$$\eta_2(x) = \begin{cases} \alpha_1 \cdot x^2 + \beta_1 \cdot x + \gamma_1 & x \in]-\infty; 0[\\ 1 & x \in [0; 1] \\ \alpha_2 \cdot x^2 + \beta_2 \cdot x + \gamma_2 & x \in]0; \infty[\end{cases} \quad (2.52)$$

Les coefficients polynomiaux sont choisis suivant certaines contraintes :

- Le raccord entre les différents morceaux de la surface doit assurer une continuité et une continuité en tangence.
- La fonction doit tendre rapidement vers 0 dès que x sort de [0 ; 1]

Ces contraintes mènent à 3 conditions de chaque coté de l'intervalle, traduites par 2 systèmes de 3 inconnues chacun qui sont les triplets $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$.

L'avantage de cette méthode est qu'elle n'augmente pas les erreurs d'approximation. Elle ne fait intervenir que des polynômes de degrés deux. Cette formulation est beaucoup moins complexe à manipuler que celle basée sur la fonction $\eta_1(x)$. L'inconvénient principal est que la surface et donc ses normales, sont définies par morceaux. Ce type de formulation peut poser certains problèmes lors de l'utilisation d'algorithmes de résolution de systèmes non linéaires. Les logiciels de calcul formel et numérique proposent des approches pour la résolution de tels systèmes qui sont utilisés comme une boîte noire dont on ne connaît pas le comportement face à certaines situations. L'utilisation de la fonction $\eta_2(x)$ entraîne trois écritures différentes des surfaces, des normales, et donc des systèmes à résoudre.

Les deux méthodes de modification géométrique proposée ne sont probablement pas optimales et il existe sûrement d'autres alternatives plus judicieuses. Cependant elles sont faciles à mettre en œuvre et permettent d'éviter les situations irréalistes où le point de contact trouvé après résolution des systèmes n'est pas réaliste.

2.4.3 Conclusion partielle

La méthode de recherche de points de contact basée sur Tooth Contact Analysis ou la dichotomie nécessite une représentation paramétrique des surfaces actives. Le modèle géométrique proposé permet de prendre en compte de nombreux profils autre que la développante de cercle classique ou sphérique. De plus il doit permettre la prise en compte de tous types de défauts géométrique : position, orientation et forme. De ce fait, nous proposons une modélisation par surfaces de Bézier en approximant le nuage de points intégrant les variations géométriques. Ce modèle n'est pas sans inconvénients : le choix des frontières des surfaces reste très important. Les surfaces possédant de

brusques variations de courbures sont difficilement approximables. Néanmoins, les surfaces de Bézier offrent des équations polynomiales qui sont très intéressantes de par leur simplicité d'expression, et leur robustesse pour l'utilisation d'algorithmes de résolutions de systèmes non linéaires. Cette modélisation est ensuite modifiée en « rabattant » la surface de manière à éviter des situations où le point de contact trouvé est en dehors de la zone active des dents dans le cas de la méthode TCA.

2.5 Comparaison des outils de simulation d'engrènement.

Trois modèles de comportements ont été proposés, ainsi que plusieurs méthodes numériques et modèles de substitution. Ils ont des domaines d'application différents, des performances différentes,... En premier lieu, une confrontation expérience/simulation de ces modèles est présentée. Une comparaison qualitative vient compléter cette validation.

2.5.1 Démarche

Il a été vu dans le premier chapitre qu'il existe deux types de métrologie pour les engrenages :

- Une métrologie purement géométrique qui permet la quantification des écarts géométriques explicités dans la norme (erreur individuelle de pas, défaut de forme, etc..)
- Une métrologie plus fonctionnelle pour la quantification des écarts relatifs au comportement cinématique de l'engrenage (écart de saut tangentiel, écart total composé tangentiel, etc...).

L'outil d'analyse de l'engrènement a pour objectif de déterminer l'impact des variations géométriques sur les caractéristiques fonctionnelles qui sont limités rappelons-le aux écarts cinématiques dans notre étude. Il se base donc sur un modèle géométrique de l'engrenage.

La démarche proposée pour la validation des outils d'analyse de l'engrènement permet d'établir une comparaison entre l'erreur cinématique simulée basée sur les points issus de la métrologie géométrique d'un engrenage et l'erreur cinématique mesurée (sur banc d'engrènement) de ce même engrenage. La *Figure 2-34* montre la démarche suivie.

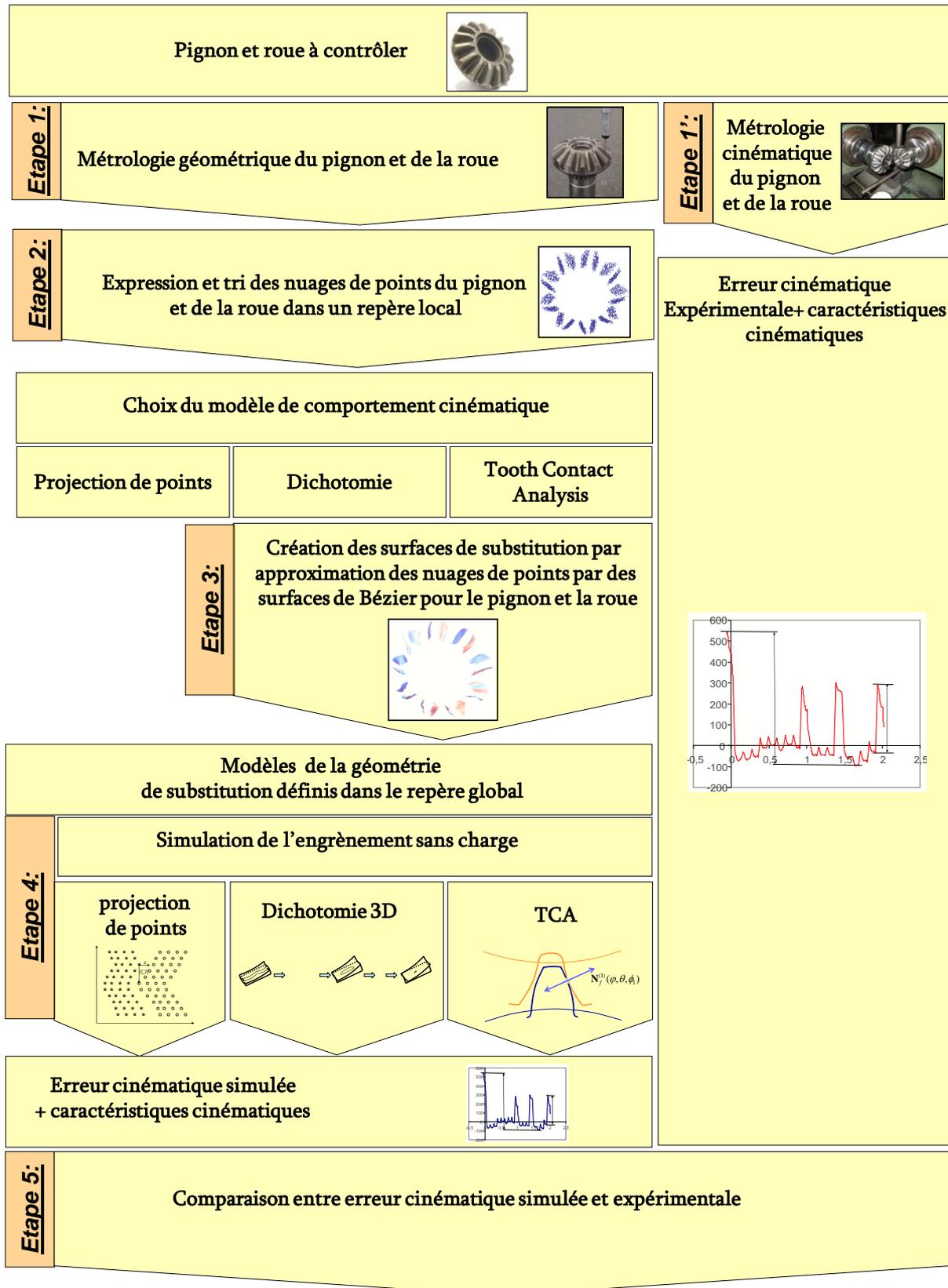


Figure 2-34 – Démarche pour la validation de l'outil de simulation d'engrènement

- Etape 1 - Métrologie géométrique du pignon et de la roue - Le pignon et la roue à contrôler sont tout d'abord mesurés géométriquement.
- Etape 2 - Expression et tri du nuage de points du pignon et de la roue dans un repère local - les nuages de points obtenus après inspection sont triés et filtrés, par élimination d'éventuels point aberrants.
- Etape 1' - Métrologie cinématique du pignon et de la roue - un essai d'engrènement du même couple est réalisé.
- Etape 3 - Création des surfaces de substitution par approximation des nuages de points par des surfaces de Bézier - A l'issue de l'étape 2, les modèle de comportement cinématique est choisi, si la « dichotomie 3D » ou la méthode TCA est choisie, alors les nuages de points sont approximés par des surfaces de Bézier
- Etape 4 - Simulation de l'engrènement sans charge - L'étape 4 consiste à simuler l'engrènement basé sur un des trois modèles de comportement cinématique proposé.
- Etape 5 - Comparaison entre erreur cinématique simulée et expérimentale. La comparaison entre l'erreur cinématique issue de la simulation et l'expérience est effectuée.

La section suivante traite la métrologie géométrique et cinématique de l'engrenage considéré.

2.5.2 Métrologies de l'engrenage

Métrologie géométrique :

Les engrenages étudiés sont des pignons de différentiels dont le modèle nominal est montré à la *Figure 2-25*. Ils sont obtenus par le procédé de forgeage dit « net-shape » [Dean 2000], [Bigot 2005]. La métrologie géométrique d'un train d'engrenage a été effectuée au sein du laboratoire à l'ENSAM de Metz par les soins de C. Baudouin [Baudouin 2008] sur une Machine à Mesurer Tridimensionnelle (*Figure 2-35*) (MMT). Les coordonnées des points mesurés sont exprimées dans un repère attaché à la pièce, défini à partir des surfaces fonctionnelle d'assemblage qui sont l'alésage et la sphère arrière [Berviller 2006].

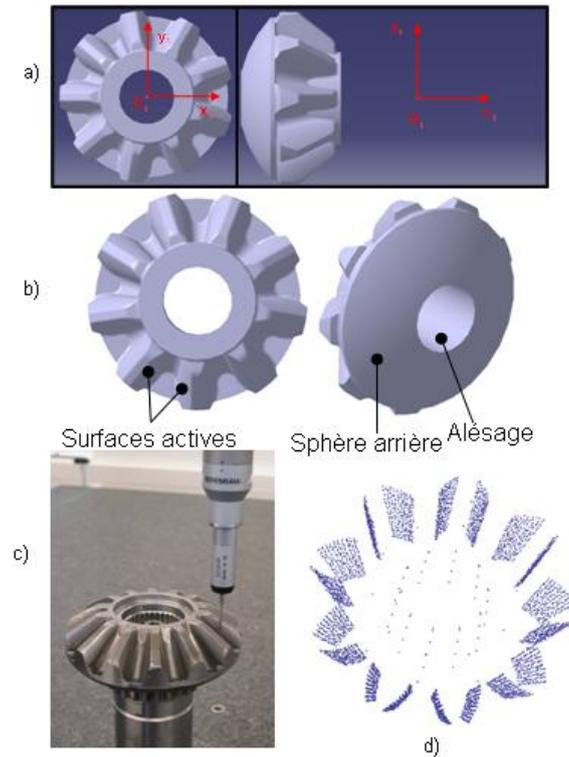


Figure 2-35 - a) Système local attaché au pignon, b) surfaces actives et surfaces d'assemblage, mesure sur MMT, d) nuage de points après mesure

Notons :

- cy_p la surface nominale cylindrique (alésage) du pignon
- sph_p la surface nominale sphérique (sphère arrière) du pignon
- $R_1(O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ le repère local attaché au pignon
- cy_p et sph_p définissent le système de référence qui possède un degré de liberté autour de l'axe \vec{z}_1 .

Le système $R_1(O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ est défini de la manière suivante :

- O_1 , l'origine du repère, correspond au centre de la sphère idéale associée à la surface nominale sphérique sph_p en utilisant le critère des moindres carrés.
- \vec{z}_1 est l'axe du cylindre idéal associé à la surface nominale cylindrique cy_p en utilisant le critère Tchebycheff.
- \vec{x}_1 est perpendiculaire à \vec{z}_1 et est contenu dans le plan de symétrie d'une dent choisie aléatoirement.

- \vec{y}_1 vient compléter le système orthonormé direct.
- Les nuages de points des surfaces actives sont exprimés dans ce repère. La démarche est identique pour la roue.

Essai d'engrènement :

Les essais engrènement ont été réalisés sur un banc d'engrènométrie conçu par L. Berviller [Berviller 2006] à partir d'une machine Gleason (*Figure 2-36*).



Figure 2-36 – Engrenage contrôlés sur banc d'engrènométrie [Berviller 2006].

Dans le cas d'un assemblage parfait, le centre des sphères de chacune des pièces coïncide :

$O_1 = O_2$ et les axes de rotation des engrenages étudiés forment un angle de 90° . En réalité ces conditions ne sont pas respectées (défauts de montages des pièces à contrôler sur le banc d'engrènement, défauts géométriques des axes du banc d'engrènement,...). Nous ferons néanmoins l'hypothèse d'un montage parfait pour notre étude.

Afin d'estimer la répétabilité de l'appareillage de mesure, 10 essais de répétabilité ont été effectués (*Figure 2-37*) avec démontage des éléments.

Pour chaque essai, les écarts de saut tangentiel ont été estimés. La valeur moyenne de ces écarts est de 45 microns, l'écart type vaut 1.67 microns. Le protocole de mesure est donc considéré comme répétable au regard de la faible valeur de la dispersion des résultats devant leur valeur moyenne et la comparaison entre les essais et la simulation peut être effectuée

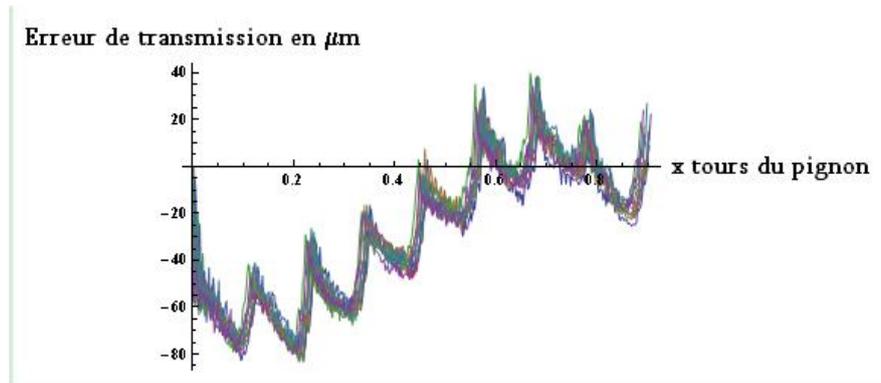


Figure 2-37 – Essais de répétabilité du banc d'engrénométrie.

2.5.3 Comparaison essai/simulation

Afin de vérifier la pertinence des modèles de comportement proposé, une comparaison des résultats simulés aux résultats expérimentaux est effectuée.

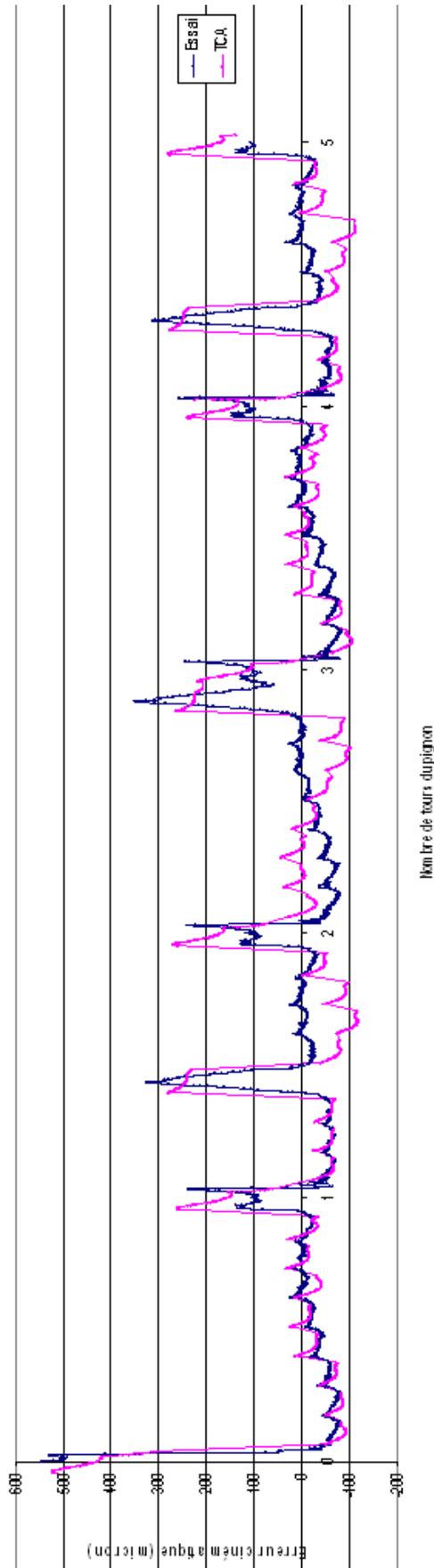
La *Figure 2-38* montre une comparaison, pour chacun des modèles de comportement géométrique (TCA, dichotomie, et projection de points) deux courbes : l'expérimentation et la simulation. En abscisse sont portés le nombre de tours du pignon et en ordonnée l'erreur cinématique ramenée au rayon primitif du pignon. La présence de piques est due à la détérioration volontaire d'une dent du pignon et d'une dent de la roue afin de recaler simulation et expérimentation selon l'axe des abscisses. Nous pouvons remarquer une différence entre chacune des courbes. La courbe expérimentale présente une tendance sinusoïdale en plus des courbes issues de la simulation. Nous supposons que cela vient du fait que les modèles de substitution ne tiennent pas compte des défauts de situation des axes de rotation des pièces. Lors de l'essai l'estimation de ces écarts n'a pas été possible. Une telle tendance est la signature typique d'un écart d'assemblage des axes de rotation [Bruyère 2006]. Les écarts entre la simulation et l'expérience sont dus à d'autres facteurs dont la liste non exhaustive est la suivante :

- Les erreurs numériques des méthodes de recherches des points de contact
- Les erreurs numériques introduites par l'approximation des nuages de points par les surfaces de Bézier.
- Le modèle de comportement géométrique.
- Les écarts de situation des axes de rotation des pièces non pris en compte.
- Les incertitudes de mesures de la machine à mesurer tridimensionnelle.

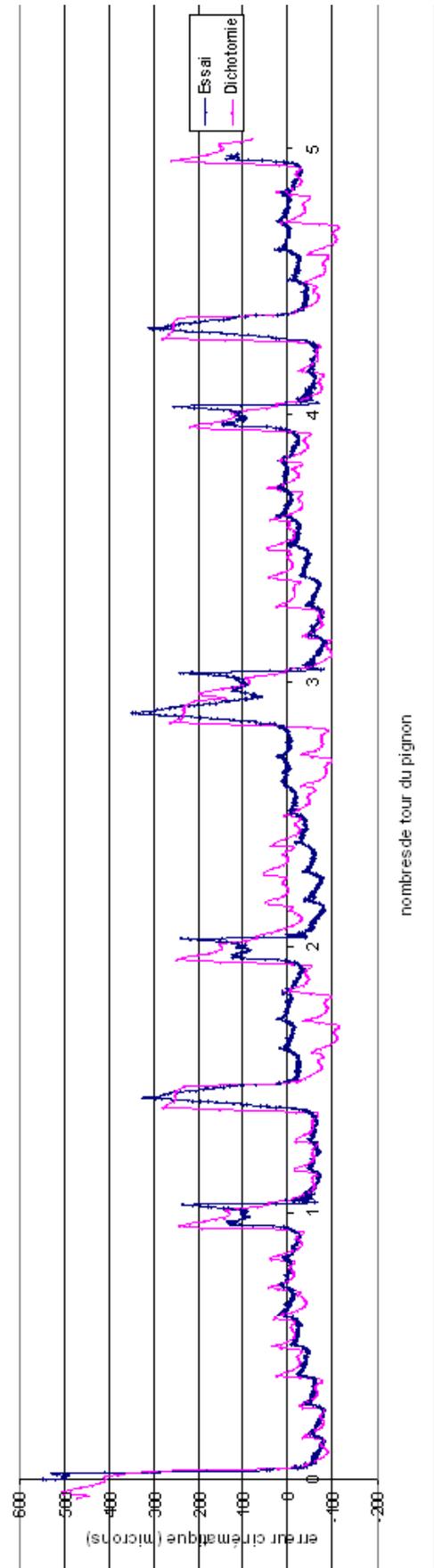
- Les erreurs numériques introduites par la phase de construction du repère de référence et d'association des surfaces.
- Les incertitudes de mesure du banc d'engrènement.
- Les conditions de mesure.
- L'influence de l'opérateur.
- ...

Cette liste non exhaustive qualifie les écarts obtenus entre la courbe expérimentale et les courbes issues des simulations. Néanmoins, il y a une assez bonne corrélation sur l'allure des courbes et les amplitudes.

Comparaison essai/TCA



Comparaison essai/dichotomie



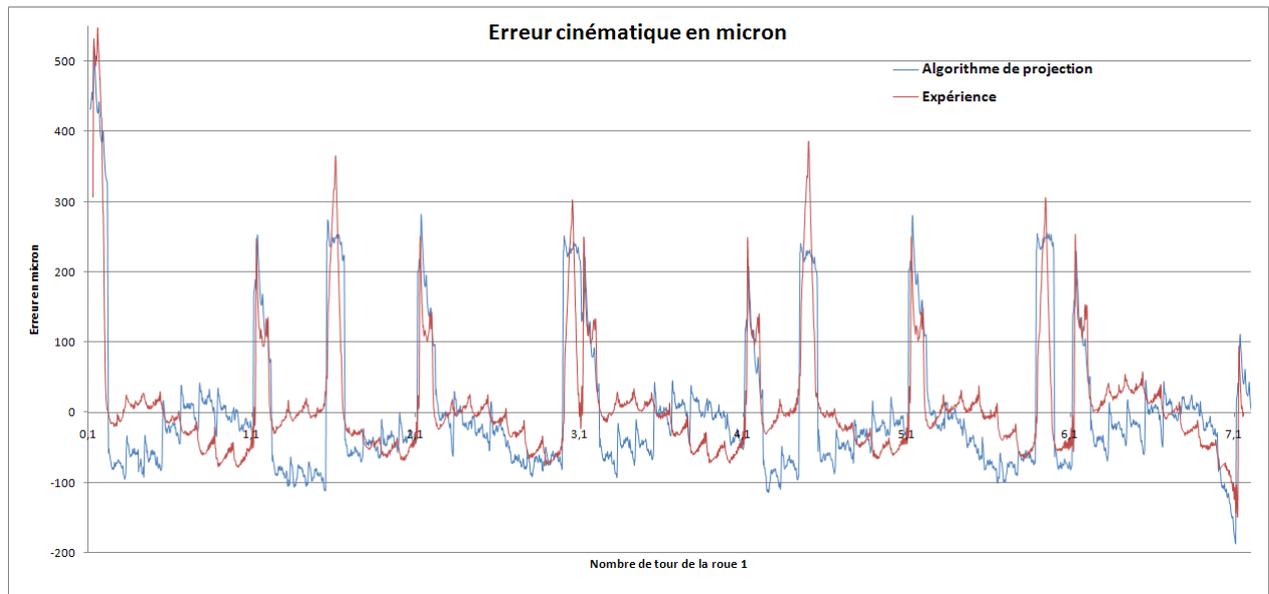


Figure 2-38 – Comparaison essai /simulation

2.5.4 Comparaison qualitative des différents modèles de comportement cinématique

Le tableau suivant propose de résumer les restrictions, hypothèses et domaines d'application des modèles de comportements cinématiques évoqués dans la section précédente :

Modèles de comportement cinématique	Hypothèses	Condition sur la nature des profils	Modèle géométrique des surfaces actives	Formulation du problème	Modèles de comportements possibles	Temps de simulation sur 13 dents
Modèle proposé par VELEX	Le point de contact se situe dans le plan d'action	Aucune	Discret	Optimisation Sous contraintes	Sans charge Quasi Statique Dynamique	/
Projection des points dans le plan d'action	Le point de contact est très proche du plan d'action	Développante de cercle uniquement	Discret	Optimisation Sous contraintes Equation Non linéaire	Sans charge Quasi Statique	5 minutes
Tooth Contact Analysis	Aucunes	Aucune	Paramétrique	Système non Linéaire continus	Sans charge Quasi Statique	1h30min
Dichotomie 3D	Aucunes	Aucune	Paramétrique	Système non Linéaire continus contraints	Sans charge Quasi Statique	2h

Tableau 2-7 – Hypothèses et restrictions propres à chaque modèle de comportement cinématique

Dans notre cas, le modèle de comportement cinématique doit être adaptable à tous types de géométries d'engrenages (développante de cercle ou non, géométrie conique, cylindrique, dentures hélicoïdales, etc...), intégrant tous types de défauts géométriques (position, orientation et forme) pour l'analyse de l'impact des variations géométriques. Pour ces raisons, nous nous sommes orientés vers le modèle de comportement cinématique basé sur Tooth Contact Analysis et de la dichotomie 3D. Si les surfaces actives du l'engrenage étudié sont nominalelement réglées, la méthode par dichotomie sera utilisée, dans le cas contraire ce sera TCA. La programmation a été effectuée sur Mathematica®.

2.6 Discussion

Tout produit manufacturier est soumis à des variations de ces caractéristiques nominales ou cibles qui peuvent être inhérentes aux procédés et processus de fabrication, aux incertitudes sur les caractéristiques des matériaux et à l'environnement d'utilisation de celui-ci. Ces variations impactent les performances du produit.

La prise en compte des variations est essentielle dans la phase de développement d'un produit. La majorité des outils de modélisation et de dimensionnement des produits manufacturiers n'intègre pas ces variations.

Il est nécessaire de développer des outils de conception « réaliste » afin de prédire et comprendre le comportement. Ainsi, une modélisation et une simulation réalistes jouent un rôle essentiel pour l'analyse des systèmes complexes comme les engrenages.

En effet, dans le cas des engrenages, les variations géométriques impactent la position des zones de contact, les déformées, le comportement cinématique, le comportement dynamique,... Il en est de même pour les cames.

Les modélisations présentées dans ce chapitre se restreignent au comportement cinématique. Elles visent à évaluer l'effet des variations géométriques de chaque pièce sur les caractéristiques fonctionnelles (dans notre cas, essentiellement cinématique). La simulation numérique est le seul moyen d'approche disponible pour l'analyse de l'impact des variations des engrenages pour lesquels l'expérimentation est très couteuse en temps et en moyens.

Afin de développer un outil d'analyse de l'impact des variations géométriques, nous avons proposé :

- une multi-représentation mathématique des surfaces de substitution adaptable aux différents types de géométrie d'engrenages et de spécifications (aspect détaillé dans le prochain chapitre)
- des modèles mathématiques de comportement de l'engrènement et les méthodes numériques associées. Pour être abordable industriellement, la simulation de l'engrènement nécessite la prise en compte de modèles de comportement « réalistes » et « allégés », très performants en exécution tout en fournissant le niveau de précision requis. De fait, personne n'est capable de réaliser un modèle exactement conforme à la réalité (un modèle est une représentation partielle du réel nécessaire à un traitement. La granularité de définition du modèle est fonction des besoins, celle-ci ne pouvant pas tendre vers l'infini. Elle est généralement le résultat d'un compromis entre traitement performant en exécution et le niveau de précision requis du résultat du traitement.

Ces deux propositions sont l'élément de base de l'outil d'analyse des tolérances proposé dans le chapitre suivant.

2.7 Perspectives

Les modèles mathématiques de comportement proposés ainsi que les représentations mathématiques des surfaces de substitution peuvent être améliorés. En effet, la validation des résultats obtenus n'est pas totale. Les écarts entre simulation et expérience montrent les limites de l'outil proposé. Les causes de ces écarts sont nombreux et certains ne sont pas quantifiables, ou très difficilement. Des améliorations, tant au point de vue algorithmique que modélisation, sont envisageables :

- un modèle mathématique basé sur les surfaces NURBS permettrait la prise en compte de surfaces plus complexes et des défauts géométriques d'ordre beaucoup plus faibles que ceux considérés dans nos travaux.
- l'automatisation des degrés des polynômes des surfaces de Bézier permettrait d'améliorer la précision des résultats, et la rapidité d'exécution.
- une programmation modulaire plus fine et plus simple
- ...

Dans la suite de cette étude, nous utiliserons cet outil.

3 Analyse des tolérances

3.1 Introduction

Comme montré dans le chapitre précédent, les variations géométriques impactent le comportement cinématique de l'engrenage. De ce fait, il est nécessaire de limiter ces variations de garantir un niveau probable de performance, via un (ou plusieurs) domaine dans lequel toute variation y évoluant sera considérée comme valide. La détermination de ces bornes de validité s'inscrit dans un processus complexe - un grand nombre de variations, de connaissances et d'outils sont nécessaires pour analyser de façon optimale les tolérances.

Loin de vouloir faire un état de l'art exhaustif de ce qu'est le tolérancement (un travail conséquent est proposé par [Hong 2002] ou dans l'ouvrage du GRT), les prochains paragraphes ont pour objectif de situer certains de nos choix (techniques ou conceptuels) parmi la pléthore des solutions existantes.

Dans ce chapitre, nous nous focalisons sur le développement d'un outil d'analyse des tolérances des engrenages. L'analyse des tolérances consiste à analyser l'impact des variations admissibles des pièces sur les exigences et ainsi vérifier que les tolérances allouées sur chaque composant permettent d'avoir un produit vérifiant ses exigences et contraintes de conception.

Deux approches sont possibles: le tolérancement au pire des cas et le tolérancement statistique. Pour l'analyse des tolérances au pire des cas (analyse déterministe), l'analyse considère les plus mauvaises combinaisons possibles des différentes valeurs de tolérances, et évalue les jeux et les caractéristiques géométriques fonctionnelles afin d'assurer la montabilité, le respect des exigences géométriques et l'interchangeabilité de 100% des mécanismes (la probabilité que les exigences géométriques soient respectées est égale à 1). Cette condition de 100% a généralement tendance à réduire les intervalles de tolérances et donc à augmenter le coût de fabrication. L'analyse statistique est une approche plus pratique et économique d'analyser les tolérances, on accepte un petit pourcentage de non-conformité. Le tolérancement statistique suppose que la probabilité de trouver une configuration au pire des cas est faible. On peut alors augmenter les tolérances sur chaque pièce. Cependant, il existe un risque sur la fonctionnalité du mécanisme: la probabilité de cumuler des pièces en limite de tolérances aussi faible soit elle n'est pas nulle. Il est alors nécessaire de maîtriser ce risque: le taux de non conformité des conditions fonctionnelles doit être évalué.

Nombreux travaux ont été réalisés sur l'analyse des tolérances d'assemblage mécanique.

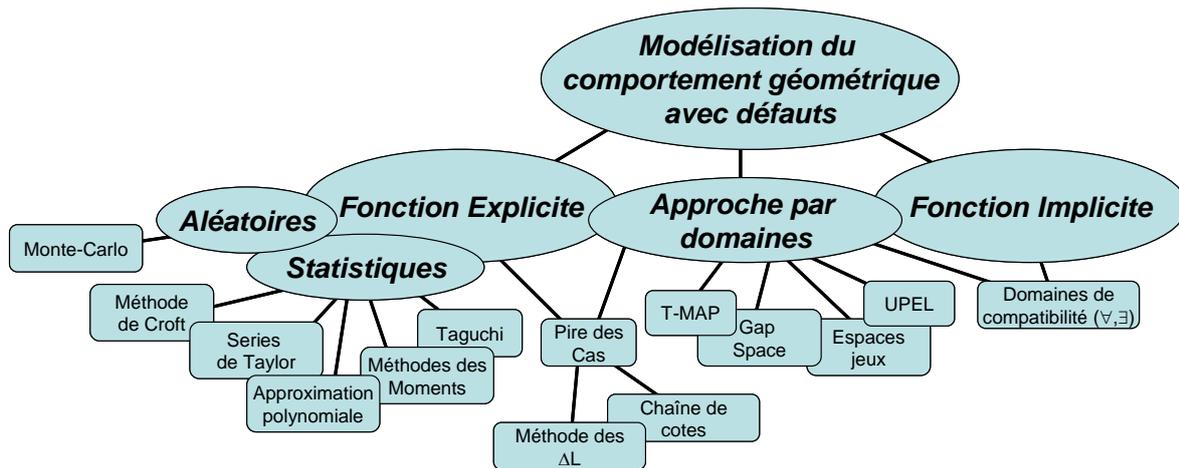


Figure 3-1-Les différentes approches pour l'analyse des tolérances [Etienne 2007]

Dans la plupart des approches citées dans la **Figure 3-1**, la formulation mathématique de l'analyse de tolérance est basée sur:

- Une modélisation de la géométrie de substitution (la géométrie de substitution est une représentation de la géométrie réelle, elle est mathématiquement descriptible. Les écarts géométriques et les jeux caractérisent les variations géométriques entre le modèle nominal et cette géométrie de substitution) permettant une paramétrisation des variations géométriques et ainsi la définition d'un espace de description
- Une modélisation du comportement du mécanisme (le comportement géométrique et cinématique n'est pas modélisable via une fonction explicite ou implicite, il est calculable par simulation numérique) définissant des relations dans l'espace de description
- Une représentation mathématique des spécifications géométriques dans l'espace de description,
- Une approche déterministe ou probabiliste pour l'analyse à proprement dit.

Pour l'analyse des tolérances des engrenages, nous avons proposé dans le chapitre précédent plusieurs modélisations possibles du comportement et plusieurs modélisations de la géométrie de substitution permettant l'analyse de l'influence de certaines variations sur l'erreur de transmission. Dans ce chapitre, nous nous focalisons sur les aspects : représentation mathématique des tolérances et approche déterministe ou probabiliste pour l'analyse.

3.2 Modèles de spécification géométrique des produits

Afin d'exprimer des limites sur la géométrie des pièces réelles (la peau de la pièce qui constitue l'interface entre la matière de la pièce et son environnement), plusieurs modèles de spécification géométrique existent. Au niveau des normes internationales, les dernières avancées (suite à la mise en place du « schéma directeur »-matrice GPS ISO TR 14638) fait apparaître deux types de tolérancement :

- le tolérancement graphique qui se trouve inscrit sur les dessins techniques
- le tolérancement formel qui consiste en une écriture déclaratrice des spécifications à partir du langage GeoSpelling. Ayant été établi à partir de concepts, il est robuste, précis et unique.

En considérant que le tolérancement formel est complet, nous pouvons considérer que tous les modèles de spécification géométrique de la littérature peuvent être décrits comme étant une condition sur une caractéristique.

Fabien SCHNEIDER dans son cours assimile le tolérancement formel au tolérancement des caractéristiques. Nous pouvons distinguer plusieurs types de modèle de spécification :

- spécification dimensionnelle.
- spécification par zone.
- spécification vectorielle ou paramétrique.
- statistique.

Cette classification n'est pas exhaustive, elle s'appuie sur la classification trouvée dans la littérature.

3.2.1 Spécifications dimensionnelles

Une spécification dimensionnelle est une condition sur des dimensions locales exprimant une grandeur linéaire ou angulaire définie entre éléments géométriques. Par exemple, une côte linéaire et sa tolérance ne limitent que l'aspect dimensionnel d'un élément. Dans l'exemple de la figure, chaque bipoint (taille) soit sa dimension limitée par la valeur 30,1 mm en maximum et la valeur 29,9 mm en minimum. Le défaut de forme de l'élément, ici deux plans, n'est pas limité.

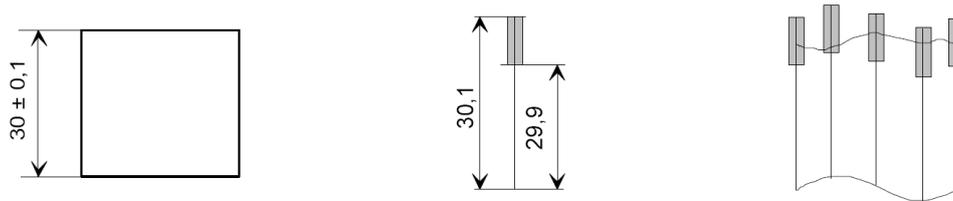


Figure 3-2-Spécification dimensionnelle entre deux plans.

Les normes définissent deux dimensions linéaires locales, aussi appelées tailles locales :

- Taille locale d'un cylindre extrait (diamètre local) : Distance entre deux points opposés de l'élément, tels que la ligne joignant les points passe par le centre du cercle associé et les sections sont perpendiculaires à l'axe du cylindre associé obtenu à partir de la surface extraite.

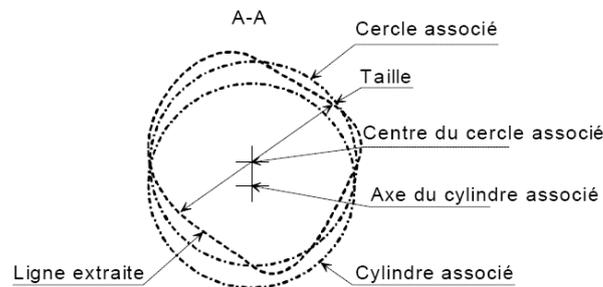


Figure 3-3-Ligne médiane d'un cylindre ISO 14660-2

- Taille locale de deux surfaces parallèles extraites : Distance entre deux points appartenant aux surfaces opposées extraites, tels que les lignes joignant les paires de points sont perpendiculaires au plan médian associé.

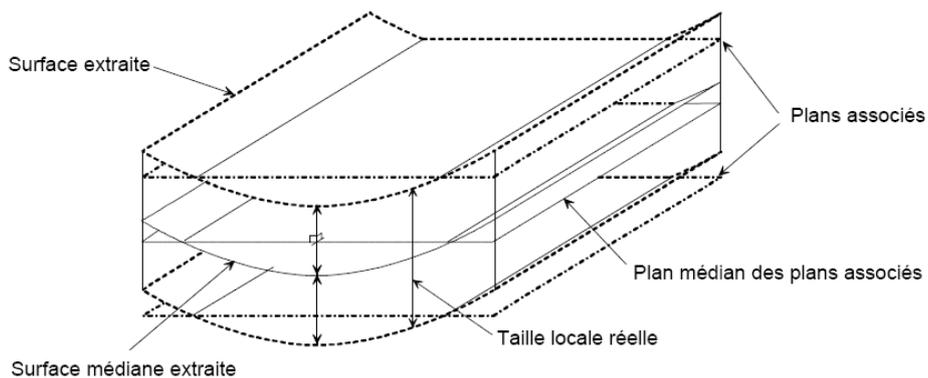


Figure 3-4-Surface médiane extraite d'un couple de plans ISO 14660-2

3.2.2 Spécifications par zones

Une spécification par zone de tolérance est une condition sur un ou plusieurs éléments géométriques – condition d'appartenir à une zone de tolérance. La zone de tolérance est un volume ou une surface délimité par des éléments surfaciques ou linéiques idéaux. Elle peut être totalement libre en position par rapport à la pièce réelle, dans ce cas l'élément auquel s'adresse la tolérance est contraint uniquement sur ses caractéristiques propres (intrinsèques) ; ou elle peut être positionnée par rapport à des éléments réels de la pièce, dans ce cas la notion de référence intervient. La norme ISO 1101 définit les zones de tolérance de toutes les tolérances géométriques. Dans la littérature, plusieurs travaux s'intéressent aux modèles de spécification par zone. Les modèles de spécification par zones ou modèle basé sur les volumes enveloppes ont été proposés par A.A.G. Requicha [Requicha 83]. Il est le premier à fournir un formalisme pour définir une sémantique du modèle de spécification par zone. Il propose un modèle de représentation des tolérances basé sur l'utilisation des surfaces offset. La zone de tolérance est représentée par un décalage du profil ou de la surface autour de sa position nominale. Requicha introduit alors la notion de classe variationnelle qui est représentée par une famille de modèles géométriques ayant la même fonction et des géométries similaires. La zone de tolérance est obtenue à l'aide d'une somme de Minkowski. Cette approche a été complétée par Srinivasan [Srinivasan 1993]. Il propose de remplacer l'opérateur de décalage des surfaces offset par celui de balayage. De manière simple, la zone de tolérance est obtenue en faisant balayer la surface, le profil ou le point d'un modèle nominal d'une pièce par une sphère (*Figure 3-5*) :

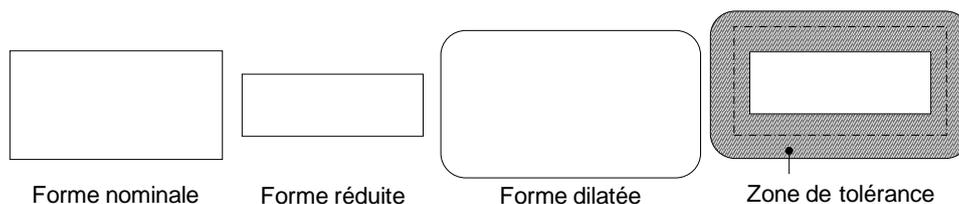


Figure 3-5 – Exemple de classe variationnelle (tiré de [Ballot 1995])

La *Figure 3-5* montre l'exemple d'un modèle de spécification par zone issue des normes

Une spécification par zone de tolérance n'est pas l'expression directe d'une condition sur une caractéristique, par contre la sémantique de celle-ci peut être exprimée comme une condition sur une caractéristique. Afin de l'illustrer, nous reprenons l'exemple détaillé par Ballu, Mathieu et Dantan, qui est une spécification géométrique de perpendicularité (*Figure 3-6*) :

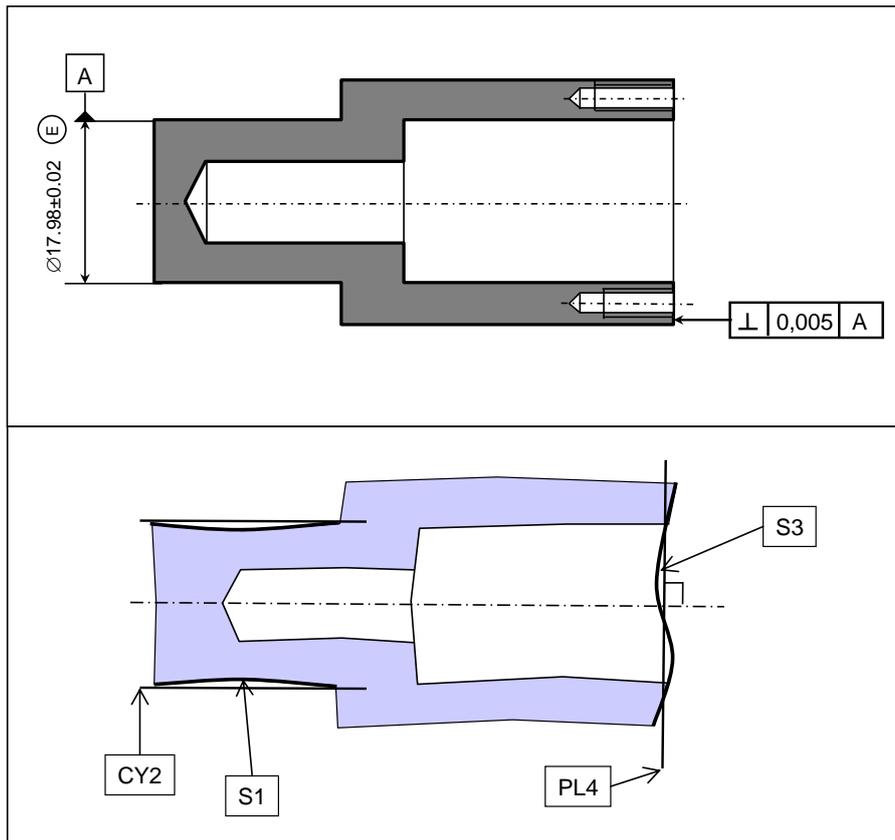


Figure 3-6-Exemple d'une spécification géométrique de perpendicularité

La première partie de l'expression de cette spécification en langage GeoSpelling concerne la définition de la référence :

- PARTITION, à partir du SKIN modèle, d'une surface nominale cylindrique (S1).
- ASSOCIATION, à partir de la surface (S1), d'un cylindre (CY2), avec :
 - contraintes : le cylindre (CY2) est extérieur matière par rapport à (S1)
 - objectif : minimiser le diamètre du cylindre (CY2)

La seconde partie de l'expression concerne l'élément tolérancé et corrigé [MAT05b] :

- PARTITION, à partir du SKIN modèle, d'une surface nominale plane (S3).
- ASSOCIATION, à partir de la surface (S3), d'un plan (PL4), avec :
 - contraintes : le plan (PL4) est orthogonal à l'axe du cylindre (CY2)
 - objectif : minimiser la plus grande des distances des points de (S3) au plan (PL4)

La caractéristique est une caractéristique entre un élément non-idéal et un élément idéal (élément corrigé) :

- EVALUATION de la caractéristique suivante : deux fois la plus grande distance des points de (S3) au plan (PL4).

La dernière partie de l'expression est la condition :

La valeur de la caractéristique doit être inférieure ou égale à la valeur de la tolérance.

3.2.3 Modèle de spécification paramétrique ou vectorielle

Une spécification paramétrique ou vectorielle est une condition sur une caractéristique géométrique. La description de la géométrie de la pièce par des caractéristiques peut être paramétrique ou vectorielle.

Le principe du tolérancement vectoriel est basé sur le concept de la surface de substitution qui est l'image de la surface non idéale mathématiquement descriptible via un ensemble de paramètres – décomposition des écarts en écarts de type élémentaire (position, orientation, taille, forme). Une spécification est une ou plusieurs conditions limitant ces paramètres. A. WIRTZ a mis en avant un modèle vectoriel qui définit pour un élément géométrique de substitution associé selon le critère des moindres carrés quatre vecteurs représentant la position par rapport à un repère unique, l'orientation, la dimension et la forme [Wirtz, 1991]. La variation de la géométrie est exprimée par la variation des composantes de ces quatre vecteurs. Cette approche a été étendue aux spécifications géométriques normalisées par D. GAUNET [Gaunet, 1993].

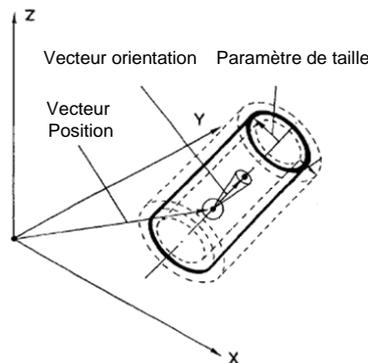


Figure 3-7 – Le modèle de spécification paramétrique par A. Wirtz [Wirtz 1991]

3.2.4 Modèle de spécification statistique

Une spécification statistique est une condition sur une caractéristique statistique d'une ou plusieurs caractéristiques géométriques. Ce type de modèle est issu des pratiques de la maîtrise de la qualité des produits mécaniques. Les entreprises manufacturières ont adopté un dispositif de validation de production par des indicateurs d'aptitude (C_{pp}, C_{pk}...) [NF X 06-033], [Pillet 99], [Pillet 02]. Ces indicateurs permettent de maîtriser la production en vue d'obtenir une proportion

importante de pièces conformes. Pillet propose le tolérancement inertiel [Pillet 2005] qui consiste à limiter l'inertie statistique des écarts, qui est proportionnelle à la fonction perte de Taguchi :

$$I = \delta^2 + \sigma^2 \quad (3.1)$$

δ représente l'écart de la caractéristique par rapport à la valeur cible et σ^2 est la variance de la caractéristique.

3.2.5 Modèles de spécification dans le cas des engrenages.

Le cas des normes :

Les spécifications et les caractéristiques spécifiées proposées par les normes [ANSI/AGMA 2009-B1], [AGMA 390.03a], [ISO/TR 10064-1], [ISO 1328-1] sont nombreuses [Henriot 1983]. Il est possible de donner une vue synthétique des caractéristiques spécifiées données par les normes (cf. Tableau 1-1 chapitre 1). D'une manière générale, les normes ne proposent pas d'expression formelle de la sémantique de chaque spécification, mais elles fournissent des informations concernant les écarts spécifiés : des définitions textuelles, des illustrations graphiques et des stratégies de mesures. Les normes concernant les engrenages proposent deux types de spécification : la spécification des écarts géométriques des pièces et la spécification des écarts liés à la cinématique de l'engrenage.

Le premier type de spécification vise à limiter les écarts géométriques des engrenages. Ces écarts peuvent être classés principalement en deux catégories :

- Les écarts de forme qui sont composés des écarts de profil (écart total, de forme et d'inclinaison de profil) et des écarts d'hélice (écart total, de forme et d'inclinaison d'hélice). Par exemple, la norme définit l'écart total de profil F_α comme *la distance entre deux tracés du profil de référence qui encadrent le tracé de profil effectif dans la longueur d'évaluation L_α (partie de la longueur utilisable sur laquelle les tolérances de la classe de précision doivent s'appliquer)* [ISO 1328-1] (Figure 3-8).

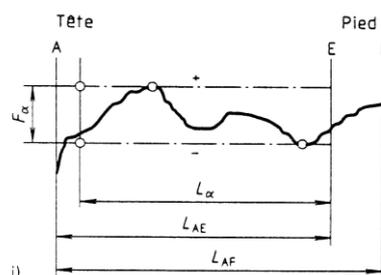


Figure 3-8- Spécification de l'écart total de profil [ISO 1328-1].

Cette spécification de l'écart total de profil s'apparente à la spécification par zone.

Le second type de spécification concerne les écarts entre différents éléments géométriques.

Globalement la norme propose deux types d'écarts :

- Les écarts de situations entre la denture de l'engrenage et l'axe de son alésage ou de son arbre. Par exemple dans le cas des engrenages coniques, la norme spécifie deux types de ces écarts dénommés par le terme *Runout*: le runout radial ou *wobble* (débattement) existe lorsque l'axe de rotation du pignon (alésage ou arbre) n'est pas parallèle à l'axe de la denture (l'ensemble des dents de l'engrenage). Cet écart est mesuré généralement dans une direction parallèle à l'axe de rotation de l'engrenage. Le second type de runout est le runout axial qui est défini par toutes les causes de variations des distances entre les axes de rotation et de la denture, prises dans un plan perpendiculaire à l'axe de rotation de la denture (*Figure 3-9*).

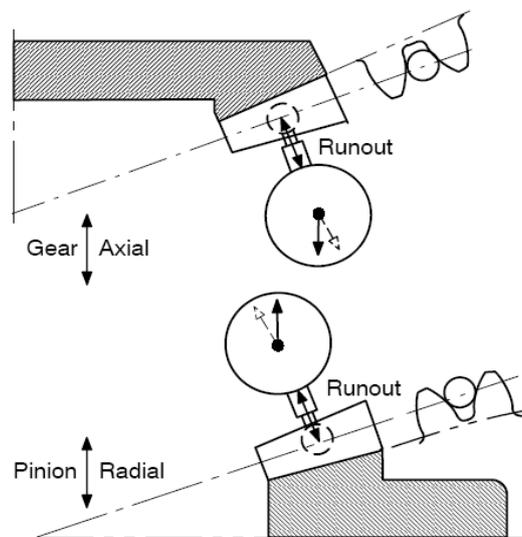


Figure 3-9-Contrôle des Runout selon [ANSI/AGMA 2009-B1]

Les runouts sont estimés par l'intermédiaire des variations d'un comparateur dont la direction de palpage est perpendiculaire à une génératrice du cône primitif.

- Les écarts de situation entre dents-erreurs de pas. Les normes différencient plusieurs types d'erreurs de pas : les erreurs individuelles et cumulées de pas. Par exemple, *une erreur individuelle de pas f_p est la différence algébrique entre la valeur effective d'un pas et la valeur correspondante théorique. Elle est définie sur un cercle concentrique à*

l'axe de la roue situé sensiblement à mi hauteur de dent [ISO 1328-1]. Le moyen de contrôle de l'erreur de pas est explicité *Figure 3-10*.

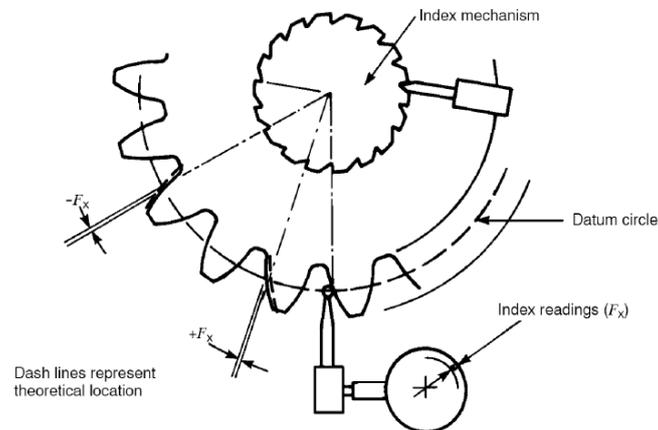


Figure 3-10- Moyen de contrôle de l'erreur de pas [ANSI/AGMA 2009-B1]

Le pignon à contrôler est monté sur un système indexé sur le pas angulaire nominal. Sa précision doit être très petite devant les défauts de la pièce à contrôler. Un comparateur dont la tête est située sur un cercle de mesure situé « sensiblement à hauteur de la dent » vient toucher la pièce. Les déviations lues donnent une estimation de l'erreur de pas individuelle f_p .

La spécification des écarts liés à la cinématique de l'engrenage permet une évaluation plus fonctionnelle de l'engrenage. Les normes proposent de limiter deux types d'écarts cinématiques : les écarts composés radiaux et les écarts composés tangentiels. Le niveau de bruit généré par un engrenage en fonctionnement et sa tenue en service dépendent principalement des écarts composés tangentiels dont les principaux sont l'écart total composé tangentiel F_i' et l'écart de saut de dent tangentiel f_i' . La norme ISO 1328-1 [ISO 1328-1] en donne les définitions suivantes :

- *L'écart total composé tangentiel F_i' est la différence maximale entre les déplacements circonférentiels effectifs et théoriques mesurés sur le cercle de référence de la roue contrôlée, lorsque celle-ci engrène au cours d'un tour complet. (Note : avec une roue étalon durant le contrôle, le contact se produit sur une seule famille de flancs conjugués.*
- *L'écart de saut de dent tangentiel f_i' est la valeur de l'écart composé tangentiel pour une rotation de un pas.*

Les normes distinguent trois types de configuration d'essai d'engrènement :

- La roue à contrôler engrène avec une roue étalon : dans ce cas un seul tour de la roue à contrôler est nécessaire puis le contact se produit sur une seule famille de flancs conjugués. La roue étalon doit être 4 classes de qualité en dessous de la roue à contrôler afin que son influence sur l'erreur d'engrènement soit la plus faible possible.
- La roue à contrôler engrène avec la roue conjuguée de l'engrenage : dans ce cas il est nécessaire d'effectuer un nombre de tour de la roue à contrôler égal au nombre de dents de la roue conjuguée divisé par le plus grand facteur commun des deux nombres de dents des engrenages. La norme [ISO 1328-1] ne traite pas ce cas.
- Un train d'engrenages avec plus de deux roues en contact : la norme [ISO 1328-1] ne traite pas ce cas.

L'estimation des écarts cinématique tangentiels au sens de la norme s'effectuent avec une roue étalon afin d'obtenir l'impact des défauts de la roue à contrôler uniquement sur l'erreur de transmission. De plus les défauts de montage (situation des axes de la machine à essais d'engrènement) sont eux aussi très faibles devant les défauts de la roue à contrôler. En service, la configuration est bien entendu différente. L'engrenage est constitué de deux roues « réelles », généralement de qualité au sens ISO sensiblement équivalente. Lors d'un fonctionnement sous charge, les déformations des organes de montage (axes, roulement,..) et du carter généreront des écarts de montage et des irrégularités dans la cinématique de l'engrenage.

Pratiques industrielles :

Nous pouvons noter d'autres approches que celle proposées par les normes. Le tolérancement par zone est pratiqué dans l'industrie (pompe à engrenages, engrenages non conventionnels, ...) (Figure 3-11-Spécification géométrique portant sur la denture d'un engrenage conique).

Cyrille BAUDOIN [Baudouin 2008] et Tylo PFEIFER [Pfeifer 2001] ont proposé, dans le même temps, une décomposition vectorielle similaire afin d'étudier les écarts de topographie des flancs de pignons pour la métrologie des engrenages.

Dans les normes des engrenages et la littérature, les spécifications sont très nombreuses et de natures différentes (dimensionnelles, par zone et vectorielle), et la définition de celles-ci est essentiellement pilotée par les moyens de métrologie pour des engrenages cylindriques.

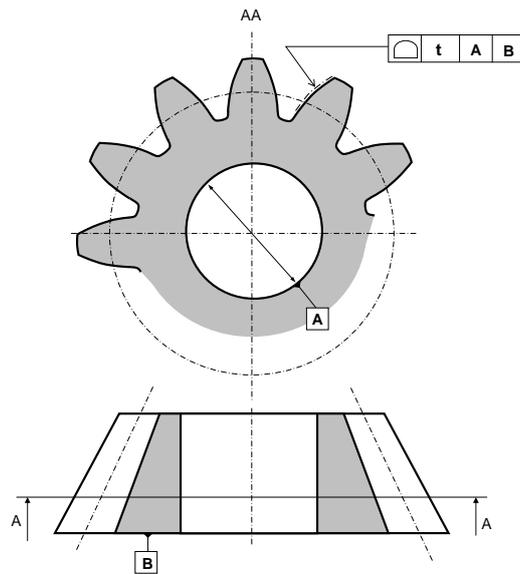


Figure 3-11-Spécification géométrique portant sur la denture d'un engrenage conique

L'analyse des tolérances a pour objectif d'évaluer l'impact des tolérances géométriques d'un produit sur les exigences fonctionnelles. Une évaluation quantitative de cet impact n'est possible que si les tolérances sont représentables mathématiquement dans l'espace de description du modèle de comportement. Que le modèle de spécification soit dimensionnel, paramétrique ou par zone, il est nécessaire de se ramener à une représentation paramétrique de la géométrie de substitution. La section suivante expose différents outils mathématiques pour la représentation des spécifications.

3.3 Les modèles de représentations des spécifications

Les travaux de recherche menés actuellement portant sur les outils d'analyse des tolérances, en prenant comme base les spécifications normalisées par l'ISO ou autres s'appuient sur une approche variationnelle où la géométrie réelle des pièces est appréhendée par une variation de la géométrie nominale. Dans cette approche, la géométrie réelle est modélisée par un ensemble d'éléments géométriques idéaux (surfaces ou éléments géométriques de substitution). L'ensemble des écarts décrit les variations des éléments de la géométrie de substitution, par rapport à la géométrie nominale. Cette modélisation permet une description mathématique des variations géométriques. Nous trouvons plusieurs modes de représentation des variations géométriques, notamment par :

- vecteurs [Bourdet, 73], [Gossard et al, 88], [Wu et al ,88],
- torseurs de petits déplacements [Gaunet, 94], [Ballot, 95], [Bourdet et al, 95] ,
- matrices [Turner, 90b], [Sodhi et Turner, 94b], [Sodhi, 95].

- ...

A partir de cette modélisation des variations de la géométrie de substitution par des écarts, la représentation mathématique des spécifications géométriques dans l'espace des écarts est un ensemble de contraintes limitant ces écarts.

Les représentations mathématiques proposées dans la littérature peuvent être distinguées suivant différents critères :

- La nature de l'élément de substitution
- L'outil mathématique de représentations des variations
- L'outil mathématique de représentations des spécifications
- ...

Ainsi, nous proposons la classification suivante :

Modèle de représentation des spécifications	1D / 3D	Nature de l'élément de substitution	Outil mathématique de représentation des variations	Outil mathématique de représentation des spécifications
Modèle unidirectionnel	1D	Point	Vecteur	Vecteur Mini ou Maxi
Delta L [Bourdet]	1D	Point	Intervalle	Intervalle
Modèle vectoriel [Chase]	3D	Point	Vecteur	Vecteur Mini ou Maxi
Modèle vectoriel [Wirtz]	3D	Surface associée de même nature que la surface nominale	Vecteurs	Intervalles
Modèle torsorien [Ballot, Giordano, Teissandier]	3D	Surface associée de même nature que la surface nominale	Torseur	Domaine
Modèle matriciel [Shah, Davidson]	3D	Surface associée de même nature que la surface nominale	Matrice homogène linéarisée	Domaine
Modèle SATT [Clément]	3D	EGRM associé	Longueurs et angles	Intervalles
Modèle cinématique [Rivest, Bennis]	3D	Surface associée de même nature que la surface nominale	Chaîne cinématique	Intervalles
Modèle Jacobien et torsorien [Desrocher, Laperriere]	3D	Surface associée de même nature que la surface nominale	Matrice Jacobienne et torseur	Intervalles
Modèle Pire des cas [Joskowicz, Sacks]	2D et 3D	Surface associée de même nature que la surface nominale	aucun	Modèle géométrique 2D ou 3D des pièces à leur état au maximum ou au minimum de matière

Les deux premières approches reposent sur une modélisation 1D : Une direction est définie par une droite de projection selon laquelle chaque surface, ligne ou point est représentée par un point, il s'agit de l'élément de substitution. Les défauts géométriques entre deux points de substitution sont modélisés soit par un vecteur (cas des chaînes de cotes 1D) ou deux intervalles (cas des Delta L).

Une grande partie des approches 3D reposent sur une géométrie de substitution ne tenant pas compte des défauts de forme et sur une modélisation des défauts relatifs d'orientation et de position par torseur et/ou matrice ou chaîne cinématique. La représentation des spécifications est soit réalisée via des intervalles en considérant indépendamment chaque variation, soit réalisée via un domaine en considérant l'ensemble des variations.

En synthèse, nous pouvons remarquer que la plupart des modèles de représentations des spécifications ne permettent pas de modéliser les défauts de forme et donc de représenter les spécifications géométriques de forme. Par rapport à la problématique de l'analyse des tolérances des engrenages nécessitant la modélisation des défauts de forme et aux modélisations des surfaces de substitution proposées dans le chapitre précédent support de l'analyse de l'engrènement, il est nécessaire d'enrichir les modèles de représentation des spécifications existants.

3.4 La représentation mathématiques des spécifications dans le cas des engrenages

Dans cette section, nous proposons une représentation mathématique des spécifications des engrenages.

Modélisation de la géométrie de substitution :

Les engrenages sont caractérisés par leurs éléments de base et la nature des profils des dents. Ces profils sont définis sur une portion et forment les surfaces actives qui permettent la transmission du mouvement. Les écarts de position et d'orientation de ces surfaces par rapport à leur situation nominale, et les défauts de forme impactent la qualité de l'engrènement. Le modèle de substitution, support de l'analyse de l'engrènement, est l'ensemble des surfaces actives des engrenages (denture). La géométrie réelle est alors modélisée par un ensemble de surfaces non idéales, intégrant les écarts de situation et de forme.

Chaque surface du modèle de substitution est mathématiquement décrite par un vecteur dont les composantes sont des équations polynomiales obtenues par approximation du modèle nominal et des défauts.

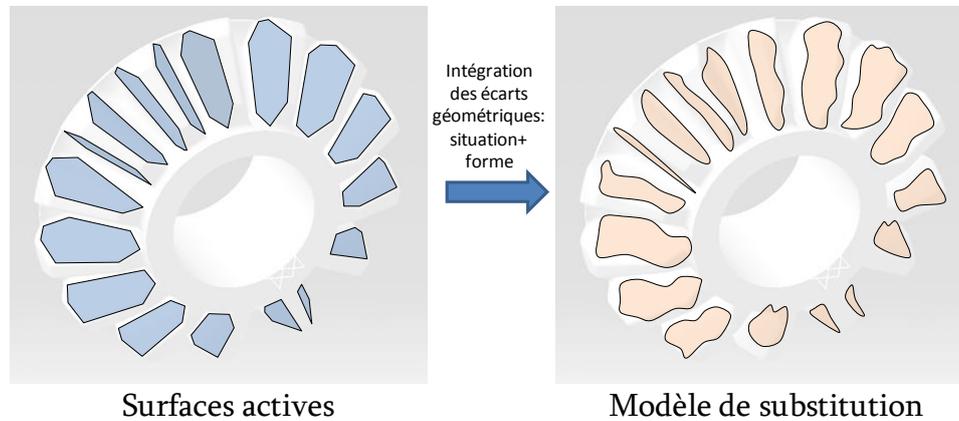


Figure 3-12-Modèle de substitution retenu pour l'analyse des tolérances

Modélisation des écarts géométriques :

Comme il a été mentionné précédemment, les écarts géométriques sont classés en deux catégories :

- les écarts de situations entre éléments géométriques et défauts de montage,
- les écarts de formes des éléments géométriques.

Un outil mathématique de représentation des variations est utilisé pour chacun de ces défauts.

Outil mathématique de représentation des écarts géométriques de situation entre éléments géométriques et défauts de montage:

Dans ses travaux de thèse [Bruyère 2006], J. Bruyère propose de modéliser les défauts d'orientation et de position entre éléments géométriques, et les défauts d'assemblage par des matrices homogènes de changement de repère : ces défauts vont provoquer des écarts de situation entre différents repères. Cette modélisation vectorielle permet de simuler :

- Les erreurs de pas,
- Les écarts de situation entre l'axe de l'élément de guidage du pignon et la denture,
- Les écarts de situation entre l'axe de l'élément de guidage et le bâti,
- Les écarts de situation entre les axes de rotation des corps.

La **Figure 3-13** schématise les différents repères introduits pour la modélisation vectorielle des écarts de situation entre éléments géométriques, et défauts de montage.

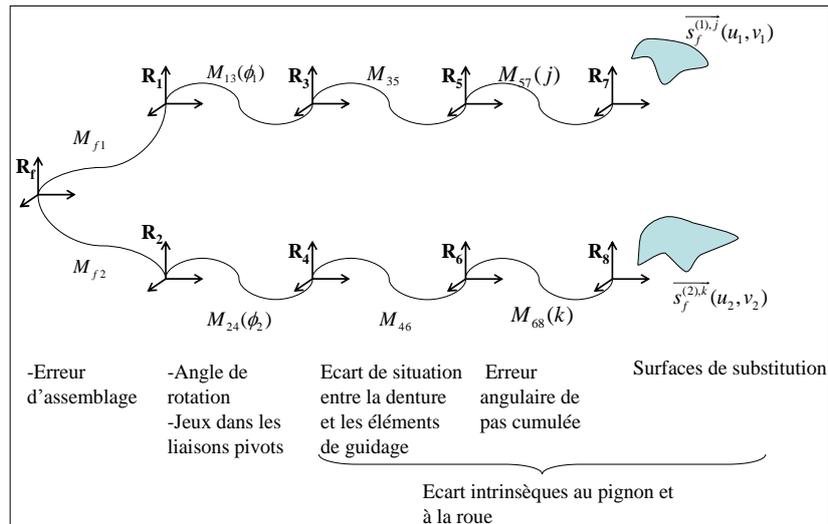


Figure 3-13- Modèle vectoriel de représentation des écarts de situation entre éléments géométrique [Bruyère 2006]

Le tableau suivant précise les éléments géométriques auxquels sont rigidement liés les différents repères :

Repère		Eléments géométriques liés
Pignon	Roue	
R ₇	R ₈	Une des surfaces actives de substitution
R ₅	R ₆	Première surface active de substitution (choix arbitraire)
R ₃	R ₄	Surface fonctionnelle réalisant la liaison pivot avec le bâti
R ₁	R ₂	Bâti
Commun		
R _f		Bâti

Tableau 3-1-Repères et éléments géométriques liés [Bruyère 2006]

Les écarts géométriques de situation entre éléments géométriques, et défauts de montage sont introduits par des matrices de changement de repères. Le tableau suivant synthétise les différents écarts introduits lors des différents changements de repères.

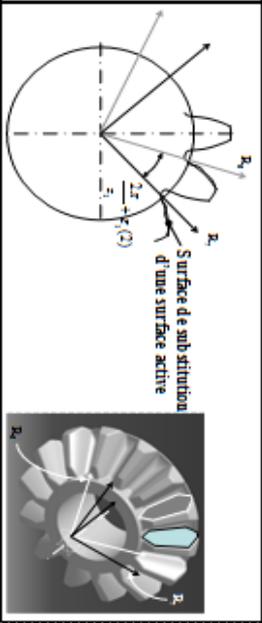
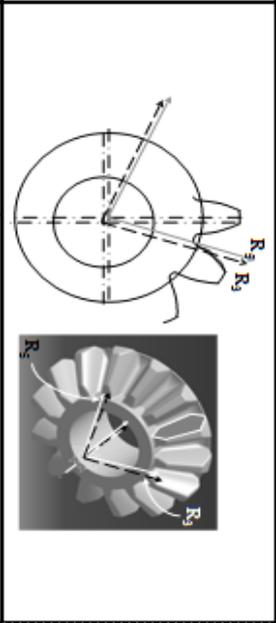
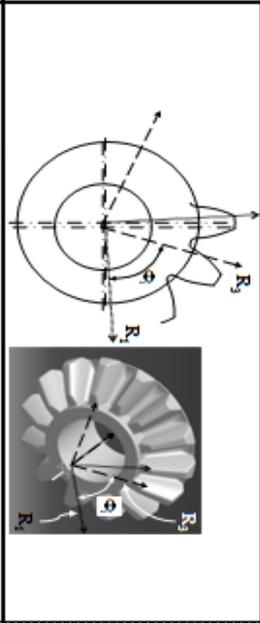
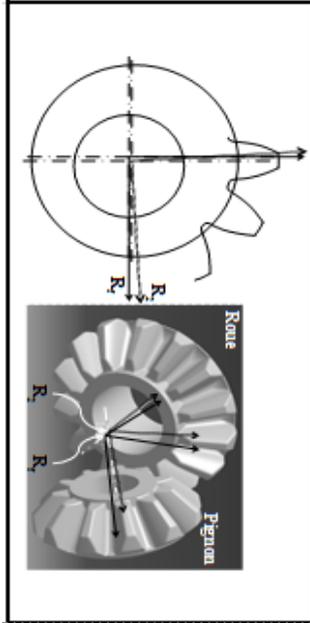
Ecart introduits	Changement de repère associé	Matrice associée	Illustration	Remarque
erreur de pas cumulée	R_7 vers R_5 et R_8 vers R_6	m57(m) et m68(m)		Une matrice pour chaque surface active de substitution
écarts de situation entre l'axe de l'élément de guidage et la denture	R_5 vers R_3 et R_6 vers R_4	m35 et m46		3 écarts linéaires et 3 écarts angulaires introduits
écarts de situation entre l'axe de l'élément de guidage et le bâti+angle de rotation	R_3 vers R_1 et R_4 vers R_2	m13(Φ_1) et m24(Φ_2)		3 écarts linéaires et 3 écarts angulaires introduits+ angles de rotation
écarts de situation entre les axes de rotation des corps	R_2 vers R_1	m2f		3 écarts linéaires et 3 écarts angulaires introduits, $R_2=R_1$

Tableau 3-2-Modélisation vectorielle des écarts géométriques [Bryère 2006]

Outil mathématique de représentation des défauts de forme :

Le modèle de représentation des défauts de forme doit permettre de transcrire analytiquement les variations de forme d'un élément géométrique à l'intérieur d'une zone de tolérance. Les formes générées doivent être les plus quelconques possibles. Nous proposons alors la démarche suivante :

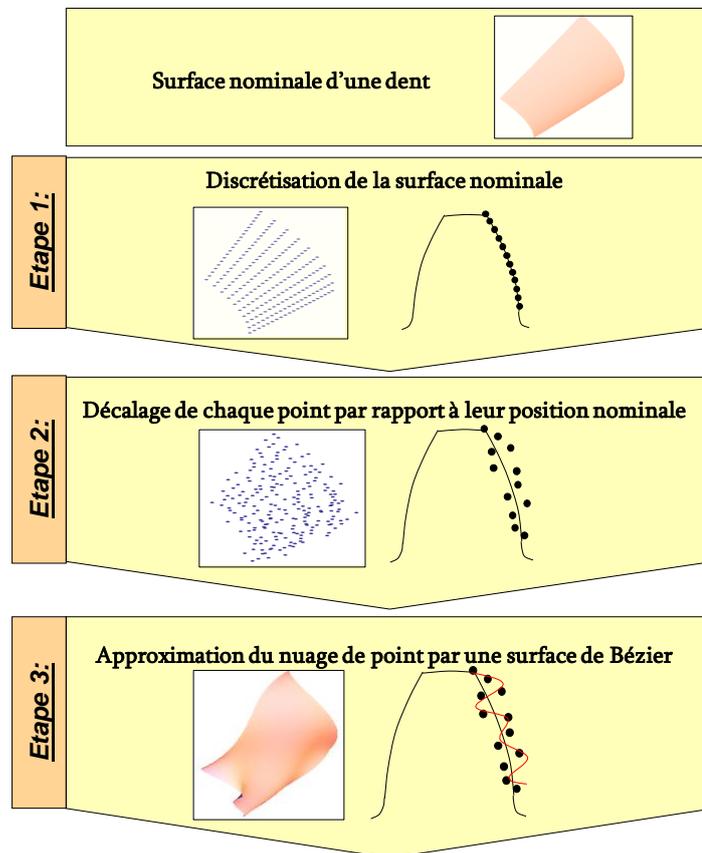


Figure 3-14-Démarche proposée pour le modèle de représentation des défauts de forme.

- En premier lieu, chaque surface nominale des dents est discrétisée
- Les défauts de forme sont ensuite introduits, en décalant chaque point suivant la normale à la surface nominale passant par le point avant transformation.
- A l'étape 3, le nuage de points ainsi obtenu est approximé par une surface de Bézier

Modélisation des spécifications via des contraintes sur les écarts :

Le modèle de substitution ainsi défini permet la simulation des variations des écarts géométriques. Les spécifications sont alors modélisées par des contraintes sur ces écarts :

- Outil mathématique de représentation des spécifications pour les écarts de situation :

Les écarts de situation correspondent aux paramètres intervenant explicitement dans les coefficients des matrices de changements de repère homogène. Une spécification est modélisée par un intervalle porté sur chacun des paramètres représentant les écarts de situation ou un ensemble de contraintes portées sur les paramètres représentant les écarts de situation.

- Outil mathématique de représentation des spécifications pour les défauts de formes :
Une spécification de forme est modélisée via une zone tolérance à l'intérieur de laquelle la surface y est contrainte. Nous proposons de modéliser la zone de tolérance par le volume dont les limites correspondent au décalage supérieur et inférieur de la surface nominale.

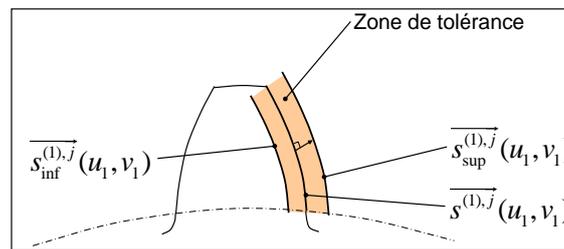


Figure 3-15- Zone de tolérance de forme spécifiée sur une surface active

Les limites supérieures et inférieures de la zone de tolérance sont données par :

$$\begin{aligned} \overline{s_{\text{sup}}^{(1),j}}(u_1, v_1) &= \overline{s^{(1),j}}(u_1, v_1) + \frac{t}{2} \overline{n^{(1),j}}(u_1, v_1) \\ \overline{s_{\text{inf}}^{(1),j}}(u_1, v_1) &= \overline{s^{(1),j}}(u_1, v_1) - \frac{t}{2} \overline{n^{(1),j}}(u_1, v_1) \end{aligned} \quad (1.1)$$

t est la valeur de la tolérance de forme.

Cette zone de tolérance impose un décalage des points dans l'intervalle $\left[-\frac{t}{2}, \frac{t}{2}\right]$.

Synthèse :

La représentation mathématique des spécifications est basée sur :

- Un modèle de substitution des engrenages limité aux surfaces actives. Ces surfaces sont mathématiquement décrites par des équations polynomiales (surfaces de Bézier).
- Un modèle de représentation des écarts géométriques. Ce modèle est basé sur une représentation vectorielle des écarts de situation entre éléments géométriques et des défauts de montage et sur une représentation par zone des écarts de forme. Ce modèle vient compléter les travaux de M. Bruyère.

- Une modélisation des spécifications via des intervalles ou contraintes limitant les variations des écarts géométriques de situations et les variations des points des nuages avant approximation.

L'approche proposée permet une modélisation des écarts géométriques de trois types :

- Une modélisation purement vectorielle : seuls les défauts de situation entre éléments géométrique et défauts de montage sont pris en compte : cette modélisation est particulièrement bien adaptée à l'analyse des tolérances où les écarts géométriques sont spécifiés selon les normes des engrenages ([AGMA 390.03a], [ISO/TR 10064-1]), donc aux engrenages à profil en développante de cercle.
- Une modélisation par zone des écarts géométriques : les surfaces intégrant les défauts géométriques sont contraintes dans une zone de tolérance. Ce type de modélisation est adapté pour l'analyse des tolérances où le tolérancement par zone est associé (fabricants de pompe à engrenages, profils non usuels, etc.) :

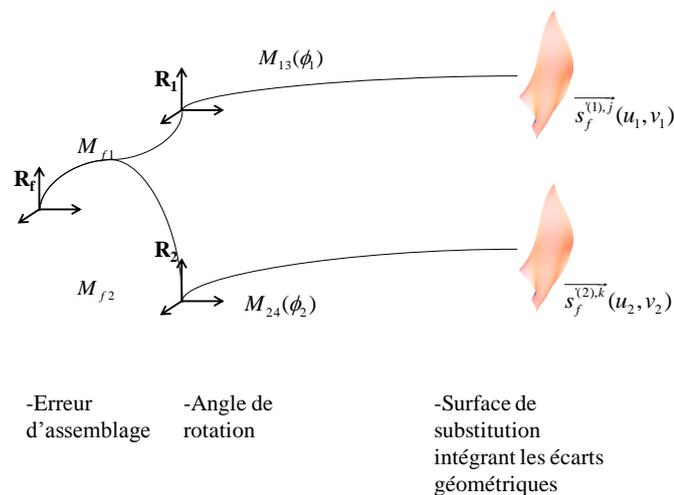


Figure 3-16-Modélisation des écarts géométriques par zone

- Une modélisation hybride faisant intervenir une modélisation vectorielle des écarts de situation entre éléments géométriques et une modélisation par zone des défauts de forme (*Figure 3-17*).

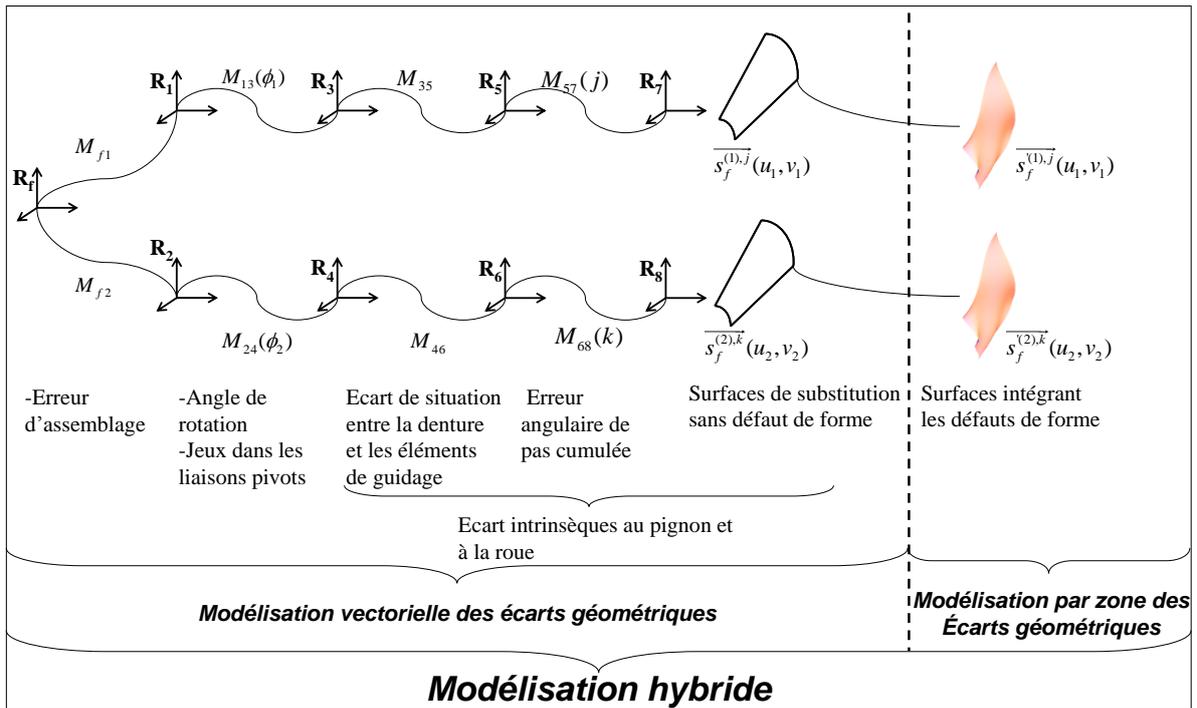


Figure 3-17- Modèle hybride de représentation des écarts géométriques

La Figure 3-18 montre l'influence d'un défaut de situation de la denture du pignon par rapport à son axe ainsi qu'un défaut de forme lorsqu'il engrène avec une roue étalon (modélisation hybride des écarts géométriques). La géométrie simulée correspond à une classe ISO 7 et engrène avec une roue étalon virtuelle.

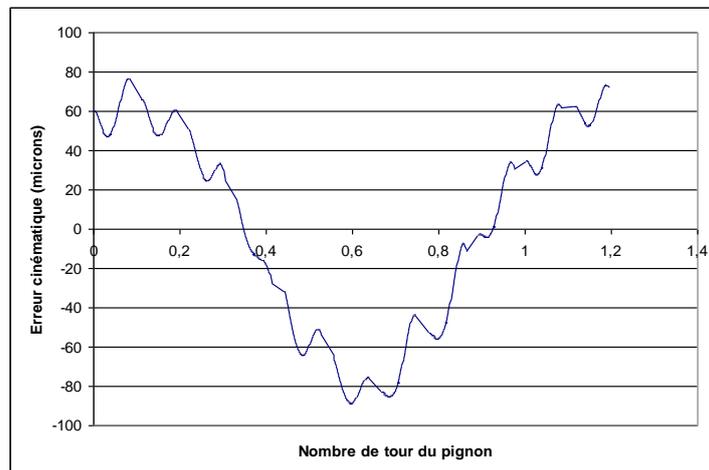


Figure 3-18- Influence d'un défaut de forme et d'un défaut de situation de la denture/axe du pignon

Rappelons que l'objectif de l'analyse des tolérances est d'évaluer l'impact des tolérances géométriques du produit. Il existe plusieurs outils/méthodes pour l'analyse des tolérances. La section suivante a pour objectif de définir le type d'analyse des tolérances adapté pour nos travaux.

3.5 Les différentes approches d'analyse des tolérances

L'analyse des tolérances vise à déterminer l'impact d'une ou plusieurs tolérances sur une ou plusieurs caractéristiques fonctionnelles d'un produit. Il existe principalement deux types d'analyse des tolérances : l'analyse au pire des cas, et l'analyse statistique.

3.5.1 Analyse au pire des cas

Une analyse des tolérances au pire des cas consiste à déterminer les valeurs des tolérances qui assurent un fonctionnement du système, au regard d'une ou plusieurs caractéristiques fonctionnelles, dans 100% des cas. Cette analyse est relativement pessimiste et conduit à des intervalles sur les écarts spécifiés qui peuvent engendrer des coûts importants. Les pires des cas se trouvent dans la configuration des écarts en limite de tolérance. J. Joskowicz [Joskowicz 1998] propose une analyse au pire des cas d'un mécanisme plan. L'exemple traité illustre la pertinence de l'approche. Une variation géométrique des pièces du mécanisme entraîne une variation de l'espace de configuration. L'influence des tolérances géométriques des pièces est modélisée par une zone dans l'espace de configuration autour du chemin de contact nominal (*configuration space path*). Cette zone de variation possible de la loi de comportement cinématique du mécanisme est obtenue en menant une analyse des tolérances au pire des cas (*Figure 3-19*).

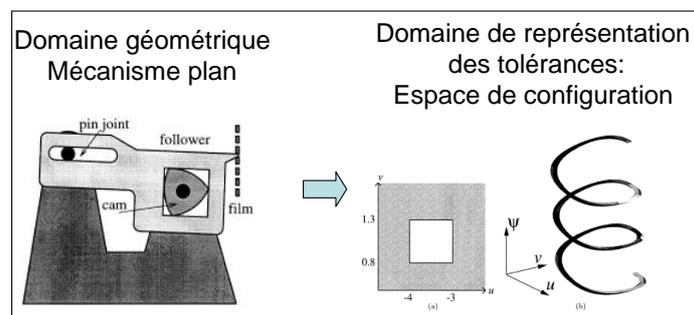


Figure 3-19 – Espace de configuration (d'après [Sacks 1998])

Elle permet la caractérisation du comportement géométrique du mécanisme. Les limites de la zone sont données par le pire de cas des tolérances portées sur le mécanisme. Dans [Berman 2005], les

auteurs proposent une relation explicite de la zone enveloppe du comportement cinématique nominal du mécanisme et mènent une analyse des tolérances en linéarisant le comportement cinématique du mécanisme à l'ordre 1. Leurs résultats montrent une comparaison entre leur méthode et les méthodes d'analyse stochastique telles que la simulation de Monte-Carlo.

Dans le cas des engrenages, la caractéristique fonctionnelle n'est pas exprimée explicitement en fonction des écarts géométriques, et il est très difficile d'affirmer que le pire des cas sur l'engrènement correspond à tous les écarts géométriques en limite de tolérance [Bruyère 2006]. Il ne faut pas oublier que lorsqu'il est utilisable, ce type d'analyse peut fournir des résultats numériques très rapides.

3.5.2 Analyse statistique

Cette approche est de plus en plus populaire. Dans le cas d'un assemblage par exemple, elle permet de trouver les valeurs des tolérances qui autorisent une très petite proportion de pièces de ne pas s'assembler. Cela conduit à un élargissement des tolérances par rapport à l'analyse au pire des cas. Par exemple, dans le cas d'un assemblage simple unidirectionnel composé d'un empilement de n pièces, les intervalles de tolérances se voient multipliés par \sqrt{n} par rapport au pire des cas [Pillet 2005]. L'analyse statistique consiste à déterminer la probabilité p d'un produit à s'assembler, ou d'une manière plus générale, à respecter une exigence fonctionnelle, étant donné une allocation de tolérances sur les pièces du produit. Considérons un produit possédant n écarts géométriques paramétrés appelés X_i . La caractéristique fonctionnelle étudiée notée Y est fonction de ces paramètres [Nigam 1995]. Elle est aussi appelée fonction réponse :

$$Y = f(X_1, X_2, \dots, X_n) \quad (3.2)$$

La fonction f appelé aussi fonction réponse lie les écarts géométriques à la caractéristique observée. Elle peut être explicite ou implicite. Il existe plusieurs techniques statistiques d'analyse des tolérances adaptées à différentes formes de f . La liste qui suit est une liste non-exhaustive. Elle résume principalement les travaux de S. D. Nigam dans son article.

Méthode des moindres carrés ou propagation linéaire :

Cette méthode est utilisée quand la fonction réponse du produit peut s'exprimer sous la forme d'une fonction linéaire des paramètres des écarts géométriques :

$$Y = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i \cdot X_i \quad (3.3)$$

Les moments d'ordre 1 et 2 (moyenne et variance) de la fonction réponse sont donnés par :

$$\begin{aligned} \mu_Y &= a_0 + \sum_{i=1}^n a_i \cdot \mu_i \\ \sigma_Y^2 &= \sum_{i=1}^n a_i^2 \cdot \sigma_i^2 \end{aligned} \quad (3.4)$$

μ_i et σ_i^2 sont les moyennes et variance du paramètre X_i .

Cette méthode nécessite d'avoir une fonction réponse qui soit explicite et linéaire.

Méthode de Croft :

Cette méthode est basée sur l'hypothèse que les distributions des X_i couvrent une étendue plus grande que son intervalle de tolérance qui donne lieu à des distributions normales tronquées qui sont approximées par des distributions uniformes. Cette approche est pessimiste, puisque la distribution uniforme fournit une concentration plus importante aux extrémités que la loi normale. Par contre, toute dissymétrie de la distribution réelle est ignorée puisque seules des distributions uniformes sont considérées. Cette méthode est proche de l'approximation linéaire et donne des résultats sensiblement identiques lorsque le nombre d'écart géométrique augmente. Cette formulation requiert aussi une expression linéaire de la fonction réponse.

Approximation linéaire par les séries de Taylor :

Si la fonction réponse est explicite mais non linéaire, le calcul des moments statistiques de Y peut s'obtenir en linéarisant la fonction réponse au voisinage des moyennes des X_i :

$$Y \approx f(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n) + \sum_{i=1}^n (X_i - \mu_i) \cdot \frac{\partial f}{\partial X_i} + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n (X_i - \mu_i) \cdot (X_j - \mu_j) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial X_i \partial X_j} \quad (3.5)$$

La fonction réponse est donc ramenée à une fonction linéaire. Elle n'est valable que pour de faibles valeurs d'étendue des paramètres X_i . Le plus souvent, les ordres supérieurs à 1 sont négligés. Cette formulation nécessite encore une fois d'avoir une expression explicite pour f .

Approximation par l'intégration numérique :

Dans le cas où la fonction réponse n'est pas connue explicitement ou qu'elle est une forme non linéaire très lourde à manipuler, elle peut être approximée par la technique de quadrature. Cette

méthode donne une approximation de la fonction f au voisinage des moyennes μ_i . Elle permet d'avoir une expression analytique de la fonction f .

Méthode FORM/SORM :

Ces méthodes sont très souvent utilisées dans l'étude de la fiabilité des systèmes mécaniques. Ces approches mécano-fiabilistes permettent de donner une approximation de la probabilité de défaillance d'un système mécanique. La fonction réponse est appelée dans ce cas la fonction défaillance $g(\vec{X})$ avec $\vec{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)^T$ le vecteur aléatoire composé des paramètres des écarts géométriques. Le système est défaillant (ou par analogie, l'exigence fonctionnelle est hors tolérance) si par définition $g(\vec{X}) \leq 0$. L'équation $g(\vec{X}) = 0$ s'appelle l'équation d'état limite. L'objectif des méthodes FORM ou SORM est trouver la probabilité de défaillance du système $P(g(\vec{X}) \leq 0)$. Cette estimation est faite en premier lieu en passant de l'espace physique à un espace euclidien tout en conservant la valeur de la probabilité en tout point de cet espace. Cette transformation est appelée une transformation iso probabiliste [Khani-Shali 2007]. Cette opération transforme les variable aléatoires X_i en d'autres variables aléatoires suivant une loi normale centrée réduite. La probabilité de défaillance est estimée par la résolution d'un problème d'optimisation : elle correspond à la distance minimum entre l'équation d'état limite, et le centre du repère normé. La résolution du problème est fait en approximant la fonction d'état limite par un hyperplan au voisinage du minimum (méthode FORM : First Order Reliability Method) ou par une hyperbole (méthode SORM : Seconde Order Reliability Method) (*Figure 3-20*).

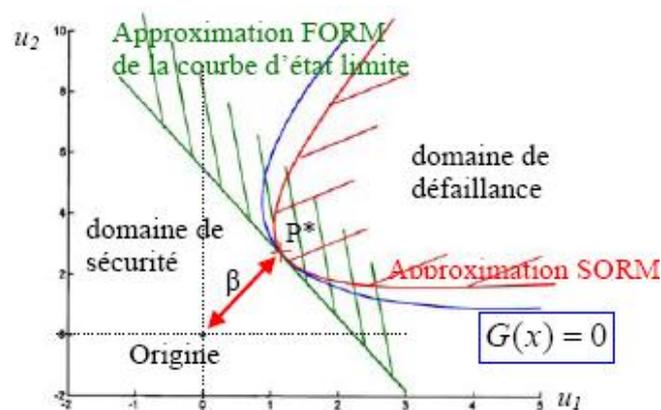


Figure 3-20- Approximation de la fonction d'état limite pour l'estimation de la probabilité de défaillance

La méthode FORM/SORM sont potentiellement pertinentes dans le cas de l'analyse des tolérances des engrenages et constituent une possibilité pour des travaux futurs.

Simulation de Monte Carlo :

La simulation de Monte Carlo est une méthode statistique d'estimation de paramètres stochastiques, telle la moyenne et l'écart-type d'une caractéristique observée, de sa distribution de probabilité, de la proportion de respect de la caractéristique à une exigence, etc. Cette technique est très souvent utilisée pour des problèmes complexes pour lesquels une résolution mathématique n'est pas envisageable ou lorsqu'ils font intervenir un nombre trop importants de variables d'entrée. La simulation de Monte-Carlo est basée sur l'échantillonnage aléatoire des variables d'entrée, supposées indépendantes. Elle est de plus en plus utilisée pour l'analyse statistique des tolérances des pièces ou des produits. Elle a pour principal avantage de reposer sur un principe très simple basé sur un processus itératif : Considérons une caractéristique Y dont on souhaite estimer l'espérance $E(Y) = m_y$ et la variance $Var(Y) = \sigma_y^2$. Les variables d'entrée sont des variables aléatoires X_i indépendantes, pouvant suivre des lois de probabilités différentes. Y est une fonction des variables X_i pouvant être explicite ou non. La méthode de Monte Carlo permet l'estimation des paramètres statistiques de Y en tirant aléatoirement des valeurs X_{ij} suivant la loi de probabilité de X_i dans un intervalle, N fois, avec N grand. A chaque itération, une valeur de $Y_j = f(X_{1j}, X_{2j}, \dots, X_{nj})$ est calculée. La suite $\{Y_1, Y_2, \dots, Y_j, \dots, Y_N\}$ est une suite de variables aléatoires. Un estimateur sans biais de la moyenne m_y est :

$$\hat{m}_y(N) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N Y_j \quad (3.6)$$

Un estimateur sans biais de la variance σ_y est :

$$\hat{\sigma}_y^2(N) = \frac{1}{N-1} \sum_{j=1}^N (Y_j - \hat{m}_y(N))^2 \quad (3.7)$$

La probabilité de respect d'une exigence sur la caractéristique Y est estimée par le quotient du nombre de cas favorables sur le nombre de cas total (*Figure 3-21*) :

$$\hat{P}(Y \leq Y_{lim}) = \frac{N_{ok}}{N} \quad (3.8)$$

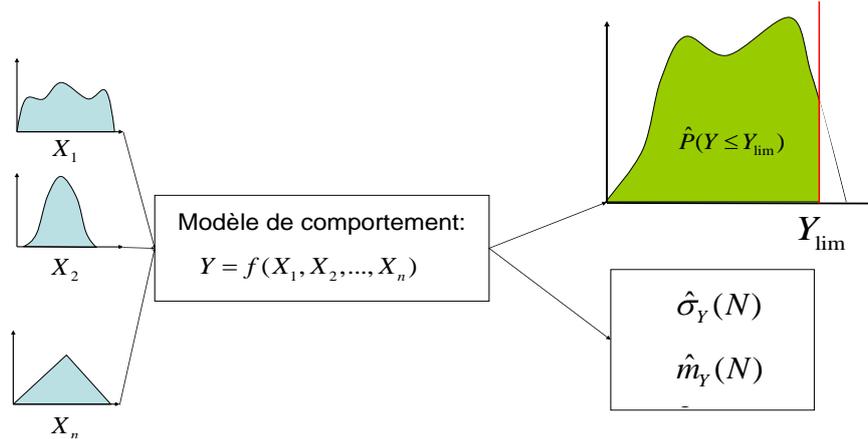


Figure 3-21 – Variables d'entrées et caractéristiques de sortie pour la simulation de Monte-Carlo

Les paramètres estimés sont issus d'un échantillonnage, ce sont donc des variables aléatoires et il est possible de définir des intervalles de confiance encadrant la moyenne et l'écart-type de Y , le plus souvent inconnus. Un point faible de cet outil est le temps de calcul. En effet, afin d'avoir une estimation correcte des paramètres statistiques considérés, il est nécessaire d'effectuer un nombre d'itérations conséquent. Néanmoins, cette méthode ne requiert pas d'avoir une expression explicite de la fonction réponse ou une approximation de celle-ci, ce qui est notre cas. Elle fournit une indication quantitative de la probabilité de respect d'une exigence, comme les méthodes FORM/SORM mais en plus permet l'estimation de la moyenne et la variance des caractéristiques étudiées. Cette méthode est donc adaptée à notre étude et nous proposons de l'utiliser comme méthode statistique pour l'analyse des tolérances des engrenages.

La section suivante détaille la simulation de Monte Carlo appliqué à nos travaux.

3.6 L'outil d'analyse des tolérances basé sur la simulation de Monte Carlo

L'outil d'analyse des tolérances doit répondre à deux contraintes : fournir un temps de simulation qui ne soit pas excessif et fournir des résultats précis, c'est à dire avoir des intervalles de confiances petits, dans la mesure du possible. La section qui suit détaille ce dernier point.

3.6.1 Intervalle de confiance de la proportion respectant l'exigence fonctionnelle:

La simulation de Monte Carlo permet l'estimation de la probabilité de Y à respecter une exigence fonctionnelle Y_{lim} . (formule 3.8). Cette probabilité est une estimation de la probabilité $P(Y \leq Y_{lim})$ qui dans notre cas est inconnue. C'est une variable aléatoire, et il est possible d'en estimer un intervalle de confiance. $\hat{P}(Y \leq Y_{lim})$ est estimée comme le quotient des cas favorables sur le nombre d'itération. Statistiquement, il est possible de dire que $\hat{P}(Y \leq Y_{lim})$ est une somme de variables aléatoire κ_i valant 1 si $Y \leq Y_{lim}$ et 0 sinon :

$$\kappa_i = \begin{cases} 1 & \text{si } Y_i \leq Y_{lim} \\ 0 & \text{si } Y_i > Y_{lim} \end{cases} \quad (3.17)$$

Par définition, les variables κ_i suivent une loi de Bernoulli de paramètre $P = P(Y \leq Y_{lim})$. Cette proportion n'est pas connue. Son estimation $P = P(Y \leq Y_{lim})$ donnée à la formule (3.8) peut s'écrire :

$$\hat{P} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \kappa_i \quad (3.18)$$

$N.\hat{P}$ est la somme de variables aléatoires, obéissant à une loi de Bernoulli. Lorsque N est suffisamment grand, $N.\hat{P}$ obéit à une loi binomiale de paramètre N et P . De plus d'après le théorème de Moivre-Laplace, lorsque N est grand, la loi binomiale peut être approchée par une loi normale de moyenne $N.P$ et d'écart-type $\sqrt{N.P(1-P)}$ et donc que :

$$\frac{N.\hat{P} - N.P}{\sqrt{N.P(1-P)}} \rightarrow \mathcal{N}(0,1)$$

Avec $\mathcal{N}(0,1)$ la loi normale centrée réduite.

Cette relation peut s'écrire :

$$\frac{\hat{P} - P}{\sqrt{\frac{P(1-P)}{N}}} \rightarrow \mathcal{N}(0,1) \quad (3.19)$$

Ainsi il est possible de définir un intervalle de confiance pour P à $1 - \alpha$ de confiance. De part la symétrie de la loi normale centrée réduite, on peut écrire :

$$P_1\left(-a \leq \frac{\hat{P} - P}{\sqrt{\frac{P(1-P)}{N}}} \leq a\right) = 1 - \alpha \quad (3.20)$$

Avec $a = \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$.

En élevant l'expression précédente au carré on a :

$$\frac{(\hat{P} - P)^2}{\frac{P(1-P)}{N}} \leq a^2 \quad (3.21)$$

D'où :

$$(\hat{P} - P)^2 - a^2 \frac{P(1-P)}{N} \leq 0 \quad (3.22)$$

Cette condition est vraie, si P est à l'intérieur de l'intervalle limité par les valeurs des deux racines de ce polynôme : c'est l'intervalle de confiance. Il s'écrit :

$$\frac{1}{2(a^2 + N)} \left(a^2 + 2N\hat{P} - a\sqrt{a^2 + 4n\hat{P}(1-\hat{P})} \right) \leq P \leq \frac{1}{2(a^2 + N)} \left(a^2 + 2N\hat{P} + a\sqrt{a^2 + 4n\hat{P}(1-\hat{P})} \right) \quad (3.23)$$

L'incertitude sur P décroît également avec N :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2(a^2 + N)} \left(a^2 + 2N\hat{P} \pm a\sqrt{a^2 + 4n\hat{P}(1-\hat{P})} \right) = \hat{P} \quad (3.24)$$

Dans la pratique, N doit être suffisamment grand pour assurer la précision voulue, en fournissant des temps de calcul raisonnables. L'estimation de cet intervalle de confiance dépend de \hat{P} qui lui-même dépend du modèle de comportement étudié. Pour estimer la variance de \hat{P} , en fonction du nombre de simulations N, il est nécessaire de procéder à une phase de test du modèle, et choisir, en fonction de la précision désirée, et de la contrainte du temps de calcul, la valeur N qui assure le meilleur compromis.

Si le calcul des tendances centrales d'une distribution par une analyse de sensibilité ne nécessite qu'un petit nombre de réalisations, en revanche la recherche de valeurs faibles de probabilité est extrêmement coûteuse : 10^{n+2} à 10^{n+3} réalisations pour une probabilité égale à 10^{-n} , avec n entier positif.

Dans ses travaux de thèses, J. Bruyère propose d'estimer quantitativement la variance de la probabilité estimée \hat{P} en menant 20 simulations de Monte Carlo pour différentes valeurs du nombre de tirage N : 20, 30, 40, 50, 75, 100, 200, 300, 400, 500, 1000, 2000 et 5000. Ces résultats sont présentés *Figure 3-22.* et *Figure 3-23.* Il est important de noter que ces essais ont été menés pour une probabilité de défaillance ou de non respect des exigences fonctionnelles de 30%.

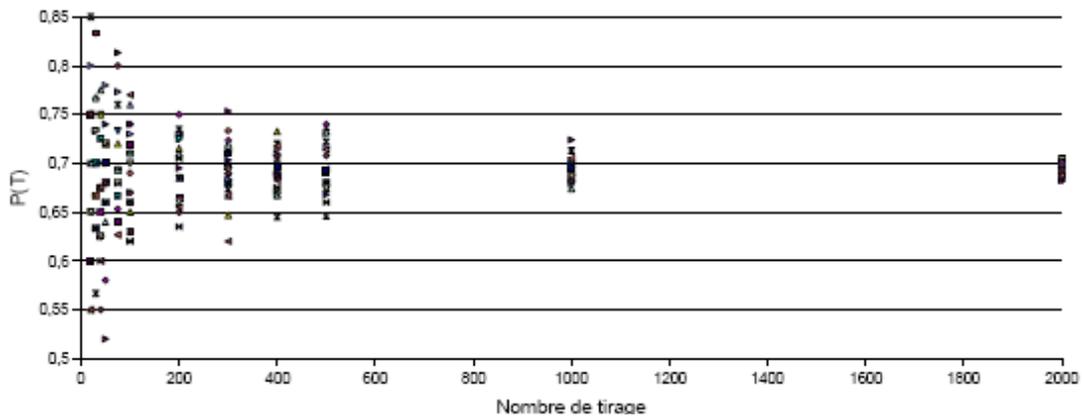


Figure 3-22- Estimation de 20 valeurs de \hat{P} en fonction du nombre de tirage [Bruyère 2006].

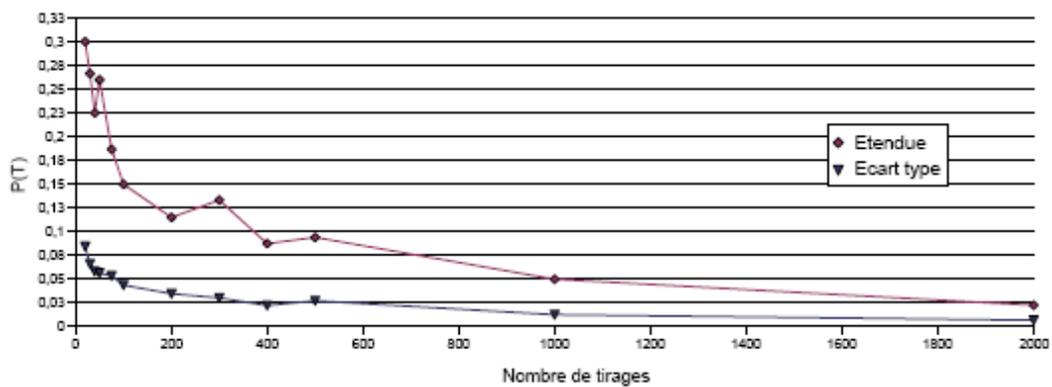


Figure 3-23- Estimation de $Var(\hat{P})$ en fonction du nombre de tirage [Bruyère 2006].

A la suite ces simulations, J. Bruyère propose de choisir un nombre de tirages pour les simulations de Monte Carlo de 2000 par rapport à la précision nécessaire et au taux de non-conformité. Nous pouvons nous baser sur cette analyse dans nos travaux. L'outil d'analyse développé par J. Bruyère est un cas particulier de l'outil que nous proposons. Cet outil pour l'analyse des tolérances est basé sur une représentation vectorielle, par zone, ou hybrides des écarts géométriques de l'engrenage. Une approche statistique basée sur la simulation de Monte-Carlo est utilisée. La démarche utilisée pour l'analyse des tolérances est proposée dans la section suivante.

3.6.2 Démarche proposée pour l'analyse des tolérances des engrenages :

Trois démarches sensiblement proches sont proposées suivant le modèle de représentation des spécifications mis en œuvre :

- **Modèle vectoriel de représentation des écarts :**

Nous proposons la démarche suivante :

- Etape 1- Définition de la décomposition des écarts via un modèle vectoriel - L'étape 1 consiste à définir la décomposition des écarts via un modèle vectoriel.
- Etape 2 - Tirage aléatoires des écarts (ou des inerties) suivant leur distribution - les écarts géométriques ou les inerties (définis vectoriellement) sont tirés suivant leurs distributions statistiques.
- Etape 2' - Discrétisation des surfaces de substitution - Le modèle de comportement cinématique est ensuite choisi. Si la projection de points est mise en œuvre, alors les surfaces de substitution sont discrétisées (Etape 2'). Dans le cas d'un autre modèle de comportement cinématique, l'étape 3 est directement atteinte.
- Etape 3 - Simulation de l'engrènement sans charge - Les modèles paramétriques des engrenages (nuages de points ou surfaces paramétriques) sont exprimés dans un repère global pour permettre la simulation de l'engrènement. L'étape 3 consiste à simuler l'engrènement suivant le modèle de comportement cinématique retenu (Projection de points, TCA ou Dichotomie 3D). A la fin de cette étape, une erreur cinématique simulée et les caractéristiques cinématiques sont obtenues.
- Etape 4 - Simulation de Monte Carlo – La simulation de Monte Carlo réitère les étapes 2, (2'), et 3.

Finalement, un ensemble d'erreurs cinématiques est obtenu ainsi que les caractéristiques cinématiques correspondantes, et il est possible d'estimer les paramètres statistiques de ces caractéristiques (moyenne, variances, proportion de respect des individus à une exigence fonctionnelle, etc.)

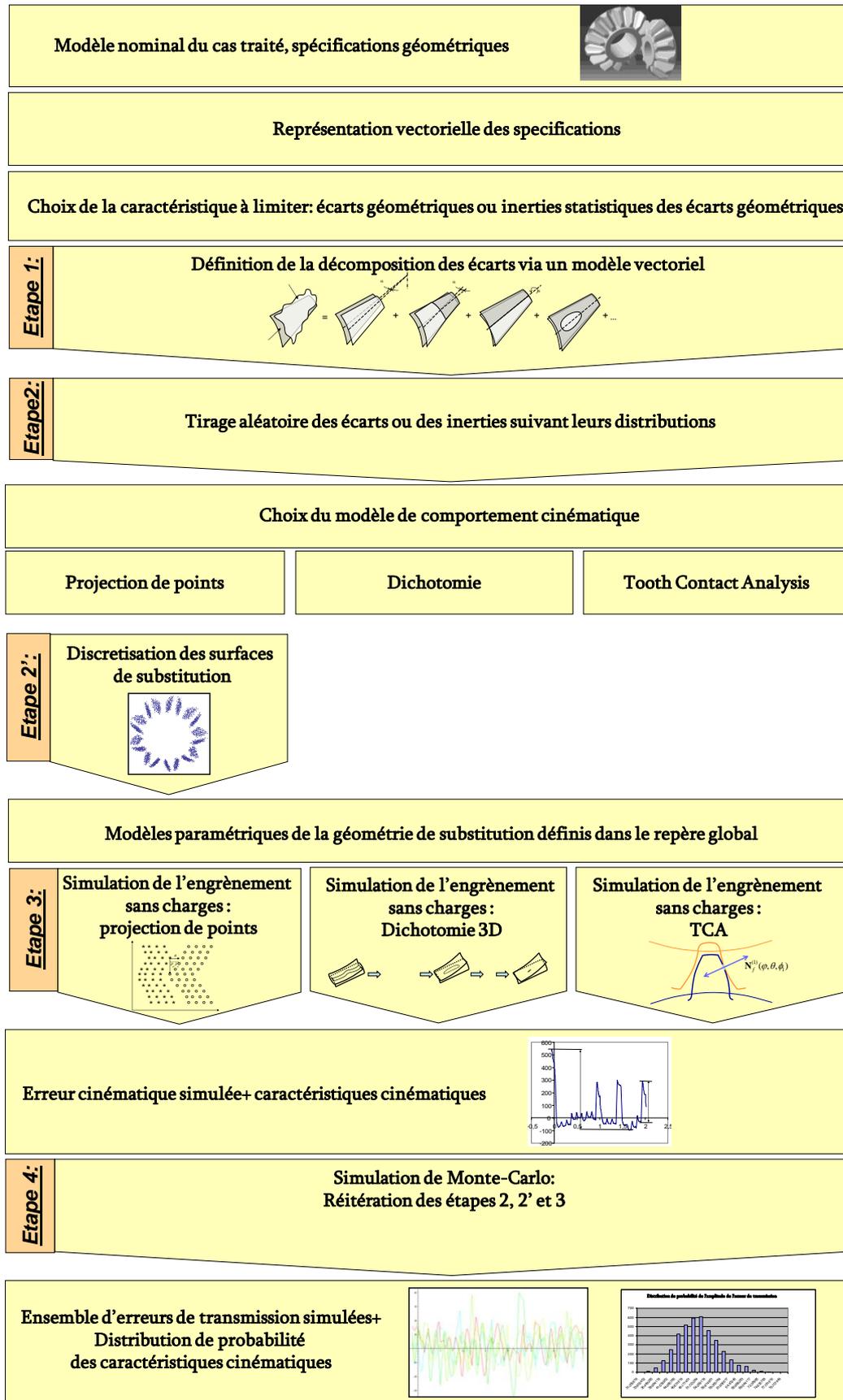


Figure 3-24- Approche proposée pour l'analyse des tolérances des engrenages-modélisation vectorielle des écarts.

- **Modèle de représentation des écarts par zone :**

Nous proposons la démarche suivante :

- Etape 1 - Discrétisation des surfaces de substitution dans un repère local - L'étape 1 consiste à discrétiser les surfaces de substitution (nominales) dans un repère local au pignon et à la roue.
- Etape 2 - Tirage aléatoire des écarts suivant leurs distributions - À l'étape 2, les écarts géométriques sont tirés suivant leurs distributions statistiques.
- Etape 2' - Création des surfaces de substitution par approximation des nuages de points par des surfaces de Bézier - Le modèle de comportement cinématique est ensuite choisi. Si la dichotomie 3D ou TCA est mise en œuvre, alors les surfaces de substitution sont créées par approximation des nuages de points perturbés par des surfaces de Bézier à l'étape 2'.
- Etape 3 - Simulation de l'engrènement sans charge - Les modèles paramétriques des engrenages (nuages de points ou surfaces paramétriques) sont exprimés dans un repère global pour permettre la simulation de l'engrènement. L'étape 3 consiste à simuler l'engrènement suivant le modèle de comportement cinématique retenu (Projection de points, TCA ou Dichotomie 3D). A l'issue de cette étape, une erreur cinématique simulée et les caractéristiques cinématiques sont obtenues.
- Etape 4 - Simulation de Monte Carlo - La simulation de Monte Carlo réitère les étapes 2, (2'), et 3.

Enfin, un ensemble d'erreurs cinématiques est obtenu ainsi que les caractéristiques cinématiques correspondantes, et il est possible d'estimer les paramètres statistiques de ces caractéristiques (moyenne, variances, proportion de respect des individus à une exigence fonctionnelle, etc.)

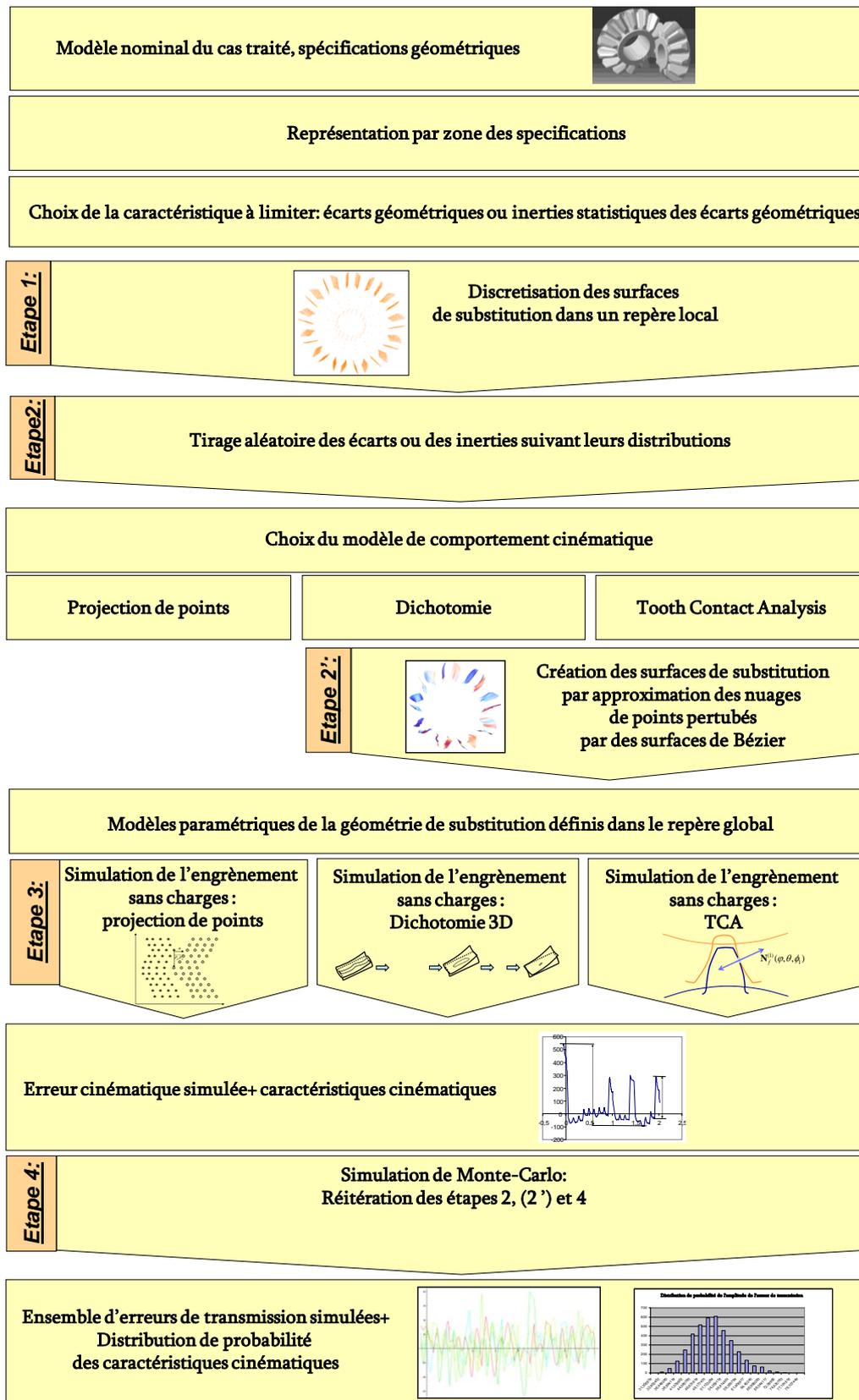


Figure 3-25- Approche proposée pour l'analyse des tolérances des engrenages-modélisation par zone des écarts.

- **Modèle de représentation hybride des écarts:**

Nous proposons la démarche suivante :

- Etape1 - Définition de la décomposition des écarts via un modèle vectoriel - L'étape 1 consiste à définir la décomposition des écarts via un modèle vectoriel. Cette décomposition dépend des écarts retenus pour la simulation.
- Etape 2 - Discrétisation des surfaces de substitution dans un repère local - L'étape 2 consiste à discrétiser les surfaces de substitution (nominales) dans un repère local au pignon et à la roue.
- Etape 3 - Tirage aléatoire des écarts ou des inerties suivant leurs distributions - A l'étape 3, les écarts géométriques sont tirés suivant leurs distributions statistiques.
- Etape 3' - Création des surfaces de substitution par approximation des nuages de points par des surfaces de Bézier - Le modèle de comportement cinématique est ensuite choisi. Si la dichotomie 3D ou TCA est mise en œuvre, alors les surfaces de substitution sont créées par approximation des nuages de points perturbés par des surfaces de Bézier à l'étape 3'.
- Etape 4 - Simulation de l'engrènement sans charge - Les modèles paramétriques des engrenages (nuages de points ou surfaces paramétriques) sont exprimés dans un repère local pour permettre la simulation de l'engrènement. L'étape 4 consiste à simuler l'engrènement suivant le modèle de comportement cinématique retenu (Projection de points, TCA ou Dichotomie 3D). A l'issue de cette étape, une erreur cinématique simulée et les caractéristiques cinématiques sont obtenues.
- Etape 5 - Simulation de Monte Carlo - Une simulation de Monte Carlo réitère les étapes 3,(3'), et 4.

Finalement un ensemble d'erreurs cinématiques est obtenu ainsi que les caractéristiques cinématiques correspondantes, et il est possible d'estimer les paramètres statistiques de ces caractéristiques (moyenne, variances, proportion de respect des individus à une exigence fonctionnelle, etc.)

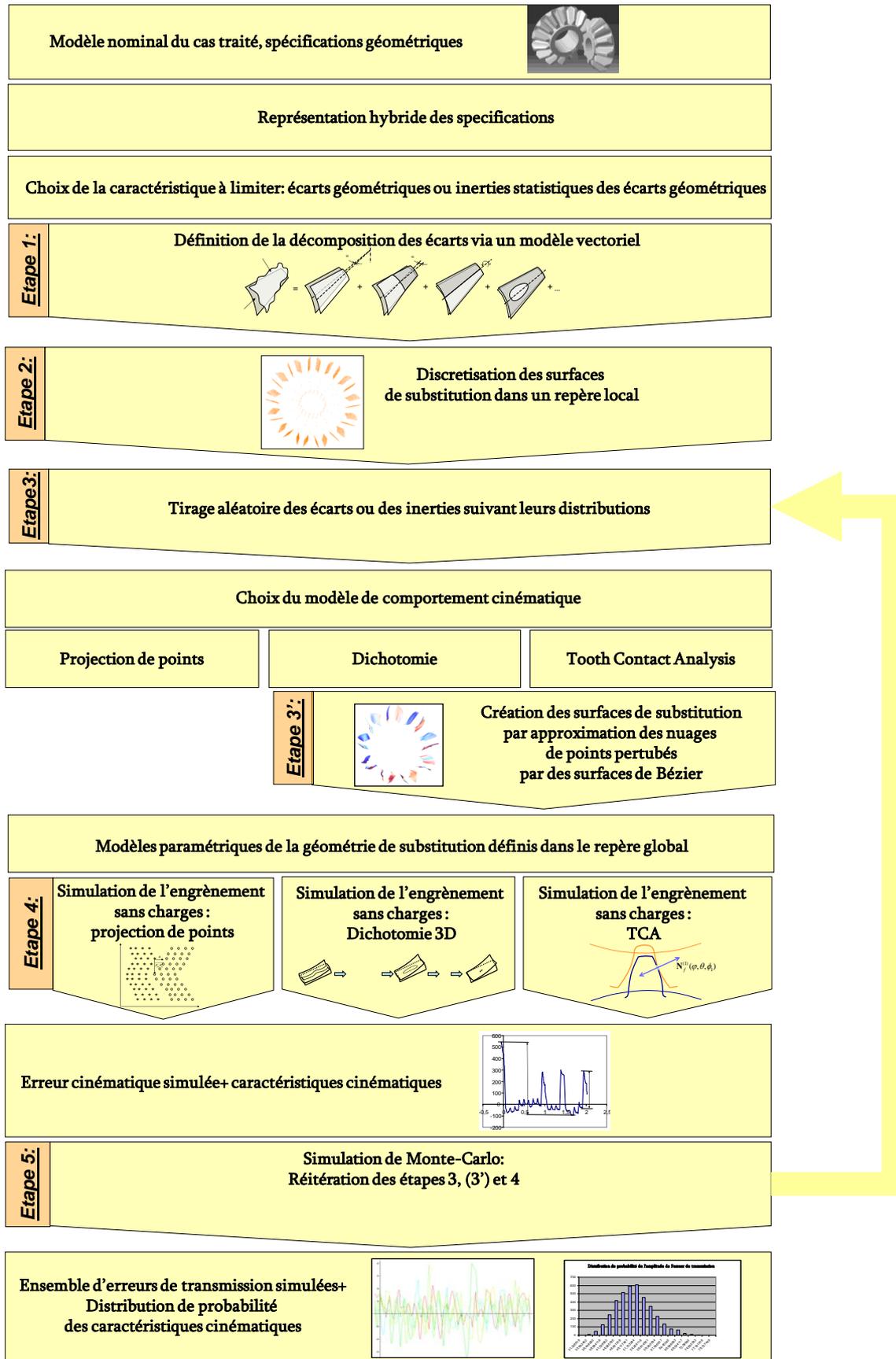


Figure 3-26- Approche proposée pour l'analyse des tolérances des engrenages-modélisation hybride des écarts.

3.6.3 Résultats :

Cette section présente quelques résultats issus de l'analyse des tolérances des engrenages.

Les résultats suivant montrent le résultat de l'analyse des tolérances de 10000 tirages d'un pignon cylindrique à denture droite de classe 9 (tous défauts géométriques spécifiés par la norme) engrenant avec une roue étalon. Le modèle de comportement utilisé pour ces résultats est la projection de points. Les f_i sont les écarts de saut de dent tangentiels et F_i les écarts totaux composé tangentiels.

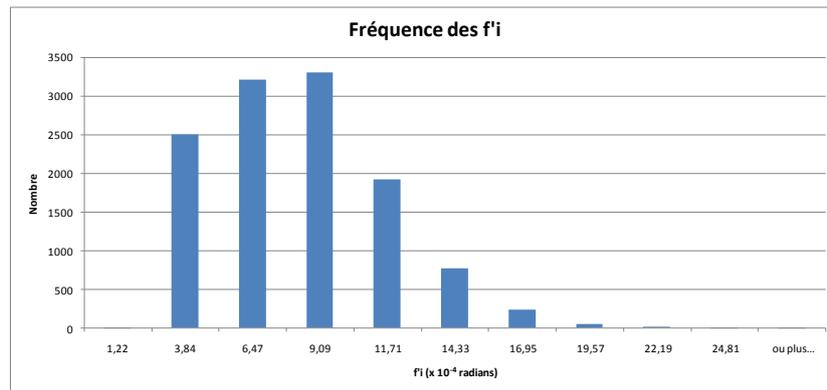


Figure 3-27- Distribution statistique de l'écart de saut de dent tangentiels (classe 9)

La Figure 3-28 montre les résultats de l'analyse des tolérances d'un engrenage cylindrique à denture droite de classe 4 :

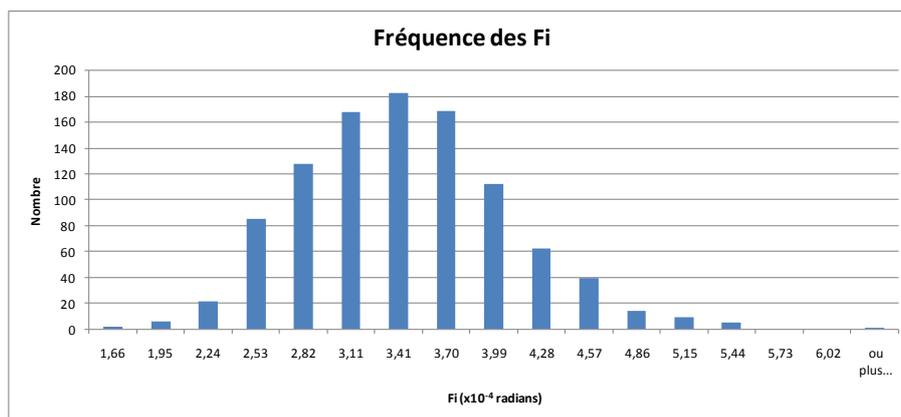


Figure 3-28- Distribution statistique de l'écart total composé tangentiels (classe 4)

A partir de ces résultats, d'estimer les moyennes des caractéristiques fonctionnelles, leurs écarts types, et la probabilité de respect des exigences fonctionnelles.

3.7 Conclusion

Les trois modèles de comportement cinématique proposés dans le chapitre 2 ne permettent pas d'exprimer explicitement la relation entre l'erreur cinématique et les écarts géométriques de l'engrenage. De plus il est trop difficile d'expliciter des relations bijectives entre écarts géométriques et caractéristiques fonctionnelles ce qui rend d'autant plus difficile l'approximation de cette relation au voisinage d'un point de fonctionnement par exemple. De ce fait, nous utilisons la simulation de Monte Carlo comme méthode statistique d'analyse des tolérances. L'outil d'analyse des tolérances proposé permet l'estimation de paramètres statistiques tel la moyenne ou la variance d'une caractéristique observée, et l'estimation de la proportion de pièces répondant au respect d'une exigence. L'outil d'analyse des tolérances est basé sur une représentation mathématique des tolérances : ce modèle doit permettre la simulation des tolérances, et rester cohérent avec les normes, de ce fait nous proposons trois modèles : le premier vectoriel, le second par zone et le troisième hybride.

L'approche proposée est assez flexible puisqu'il est possible d'étudier différentes géométries d'engrenages (profil en développante de cercle ou non) lorsque la dichotomie 3D ou TCA est utilisée.

Il est important de rappeler que l'outil d'analyse des tolérances et d'impact des écarts géométriques sur les caractéristiques fonctionnelles est basé sur de nombreuses hypothèses : l'engrènement est sans charge, la lubrification n'est pas prise en compte, l'usure n'intervient pas, le contact est à chaque instant supposé point. L'influence des défauts géométriques sur l'erreur cinématique est très difficile à qualifier et ils ne doivent pas nécessairement être étudiés séparément. Une des améliorations à apporter notamment au niveau de la modélisation mathématique des surfaces de substitution serait : une modélisation par morceaux des surfaces actives qui peut s'avérer très intéressante pour l'étude de l'impact de défauts de formes de l'ordre du micron sur l'erreur cinématique (impact d'une opération de rectification sur le fonctionnel). L'outil de simulation d'engrènement lors de son utilisation fait intervenir des erreurs et incertitudes : erreur d'approximation des nuages de points qui varie pour chaque nuage, résidu des fonctions objectifs pour les méthodes numériques, incertitudes numériques du logiciel, etc.

4 Modèle de spécification et incertitudes

4.1 Introduction

La définition de la conformité du produit diffère suivant l'acteur du cycle de vie du produit : pour le métrologue, une pièce est conforme si, à l'issue de la métrologie, les spécifications sont respectées. Pour le concepteur, un produit est conforme si l'ensemble des exigences fonctionnelles est respecté. Pour le client, le produit est conforme s'il répond à ses besoins. C'est cette dernière notion qui devrait être universelle : un produit est fabriqué pour satisfaire les besoins du client. Considérant cela, une question s'impose : comment décider qu'un produit est conforme ou non ? La réponse n'est pas si simple car la prise de décision relative au contrôle de conformité est entachée d'incertitudes (Figure 4-1):

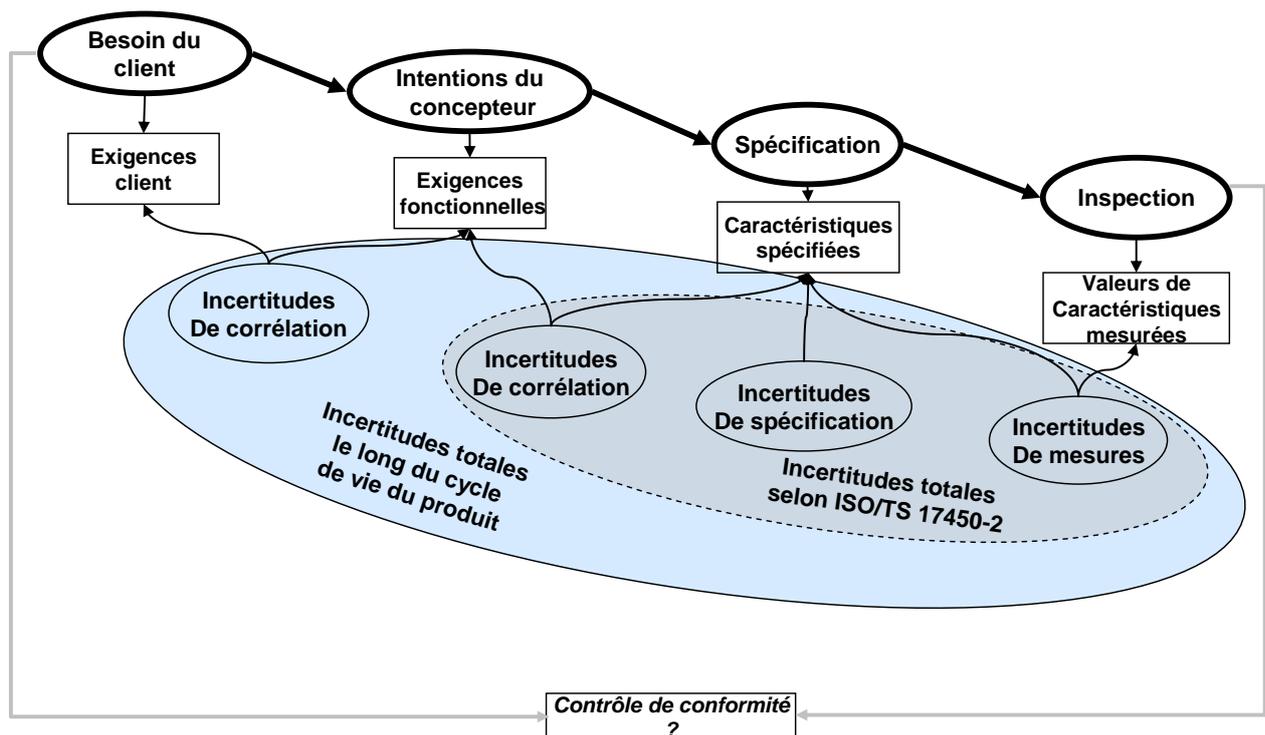


Figure 4-1- Les incertitudes, du besoin du client, à la vérification géométrique

Afin de proposer un produit conforme aux besoins du client, le concepteur formalise les exigences du client et les retranscrit en exigences fonctionnelles. Les besoins du client peuvent être des notions relativement subjectives (Exemple : le produit doit être silencieux). De cette information, le concepteur doit formuler des exigences fonctionnelles qui, si elles sont respectées, assurent le

respect des besoins du client. Dans certains cas, même si les exigences sont respectées, elles ne garantissent pas la satisfaction des besoins du client. De plus, la détermination des exigences fonctionnelles d'un futur produit peut varier d'un concepteur à l'autre, d'une entreprise à l'autre.

La qualification et la quantification des exigences fonctionnelles fait intervenir des notions subjectives, des imprécisions (méconnaissances phénoménologiques, limites de la modélisation,...), et sont donc entachées d'incertitudes.

Les incertitudes relatives aux passages des intentions du concepteur à la vérification de la conformité du produit sont définies par la norme [ISO TS 17450-2] sous le nom d'incertitudes totales (*Figure 4-1*). La norme propose une définition et un exemple pour chaque type d'incertitude :

- Les incertitudes de corrélation (notion évoquée dans le chapitre 1) caractérisent le fait que la fonctionnalité attendue du produit et les caractéristiques spécifiées ne sont pas parfaitement corrélées. L'exemple donné par la norme ISO TS 17450-2 permet d'illustrer ce type d'incertitudes. Considérons l'arbre d'une pompe rotative, et plus particulièrement la capacité de cet arbre à respecter l'exigence fonctionnelle EF_1 suivante :

$EF_1 = \{ \text{L'arbre doit être capable de tourner dans l'alésage du carter de la pompe, muni d'un joint d'étanchéité, pendant 2000 heures sans qu'il n'y ait de fuite} \}$. Afin que cette exigence soit garantie, le concepteur décide de mettre une spécification dimensionnelle sur cet arbre ainsi qu'une condition sur l'état de surface et son protocole de mesurage. Le diamètre d_a de l'arbre doit satisfaire la spécification $d_a = 30 \text{ h7}$ et la rugosité $Ra = 1.5 \mu\text{m}$ mesurée avec un filtre de 2.5 mm. L'incertitude de corrélation provient de cette spécification : si l'arbre issu de la production vérifie cette spécification, alors EF_1 est garantie, et si elle ne l'est pas, alors EF_1 ne l'est pas non plus. Or, cette causalité n'est pas toujours effective. En effet la relation entre le débit de fuite de l'arbre en fonction du temps et les caractéristiques de l'arbre (dont seules deux caractéristiques géométriques ont été prises en comptes) n'est pas a priori une relation directe étant donné la complexité du problème. La spécification proposée peut être en partie remise en cause.

Nous pouvons reformuler cette définition des incertitudes de corrélation en s'appuyant sur cette notion de causalité : il y a des incertitudes de corrélation entre les exigences

fonctionnelles et les caractéristiques spécifiées si la double causalité suivante est fausse :

- Si le produit vérifie l'ensemble des spécifications alors les exigences fonctionnelles sont garanties et réciproquement.
- Si le produit ne vérifie pas l'ensemble des spécifications, alors les exigences fonctionnelles ne sont pas garanties et réciproquement.
- Les incertitudes de spécification traduisent le fait que l'expression d'une spécification est ambiguë. Dans ce cas, l'interprétation et la lecture d'une spécification peut différer d'un métrologue ou d'un concepteur à l'autre. Pour illustrer ce type d'incertitudes, la norme ISO TS 17450-2 propose l'exemple qui suit. Une incertitude de spécification sur une caractéristique spécifiée de $30^{\pm 0.1}$ mm sur laquelle la spécification ne précise pas quel critère d'association doit être utilisé, est obtenue par l'ensemble des valeurs prises en utilisant les différents critères d'association. Les incertitudes de spécification dépendent entre autres de la clarté de son expression, de sa complétude, de l'interprétation qu'en fait le métrologue, le concepteur.
- Les incertitudes de mesures, les plus connues de toutes, considérées par les métrologues, incluent toute cause de variation, de la spécification géométrique, au résultat du contrôle.

La quantification et la réduction des incertitudes totales doit être une préoccupation cruciale. Cette tâche est difficile car, si l'incertitude de mesure peut être représentée mathématiquement, pour les autres, aucun formalisme n'a été proposé. Peu de travaux s'y intéressent à l'heure actuelle, et dans certain cas, elle est négligée à tort [Srinivasan 2001] car elle peut contribuer fortement aux incertitudes globales.

Pour la définition d'un modèle de spécification fonctionnelle, les exigences sont les suivantes :

Les caractéristiques spécifiées doivent non seulement être mesurable, avec une incertitude de mesure « faible », et doivent permettre le contrôle de conformité du produit, c'est-à-dire être l'image le plus possible du fonctionnel. Dans le cas des engrenages, les caractéristiques spécifiées sont nombreuses, et leur impact sur le fonctionnel est difficilement quantifiable puisqu'elles dépendent les unes des autres. Parmi l'ensemble de ces caractéristiques, certaines permettent d'établir un lien avec le fonctionnel (l'erreur de transmission dans notre cas) mieux que d'autres. Ainsi, nous proposons une contribution à la définition des modèles de spécification des engrenages en proposant :

- une nouvelle caractéristique spécifiée de nature statistique, plus proche du fonctionnel, pouvant réduire les incertitudes de corrélation : la distribution de probabilité des caractéristiques cinématiques obtenue via une métrologie cinématique virtuelle.
- une approche de caractérisation des modèles de spécification en termes d'incertitudes, et plus particulièrement un formalisme et une approche de quantification de l'incertitude de corrélation. Une comparaison de 4 modèles de définition de l'erreur de pas sera ainsi effectuée.

4.2 Tolérancement statistique des erreurs cinématiques - Métrologie cinématique virtuelle.

4.2.1 Métrologies dans le cas des engrenages

Comme vu au chapitre 1, il existe deux types de métrologie dans le cas des engrenages :

- une métrologie dimensionnelle et géométrique qui permet de vérifier le respect des tolérances géométriques d'un engrenage. Les normes proposent des stratégies et moyens de métrologie bien spécifiques pour l'inspection des engrenages. Certains des défauts géométriques évalués permettent d'établir un lien avec les défauts des procédés classique de taillage des engrenages. Pour de nombreux écarts géométriques (notamment les écarts de situation entre différents éléments géométriques), la spécification associée s'apparente à la spécification dimensionnelle. Les stratégies associées ont l'avantage de fournir une estimation des caractéristiques mesurées qui soit rapide, ce qui est bien entendu demandé dans le secteur de l'industrie. Néanmoins certaines de ces stratégies de métrologie sont relativement sensibles aux incertitudes de mesures. Dans ses travaux Guenther [Guenther 2006] propose de modifier la stratégie de mesure sans modifier la caractéristique mesurée afin de réduire l'influence des incertitudes de mesures sur la caractéristique mesurée.
- Une métrologie cinématique des engrenages. Elle permet l'estimation de l'erreur cinématique sans charge d'un pignon fabriqué entraîné avec un pignon étalon. Cette évaluation est plus fonctionnelle que la précédente car les caractéristiques cinématiques sont mesurées lors de l'engrènement, plus proche des conditions

d'utilisation de l'engrenage. Par contre, d'après la norme, l'engrènement avec pignon étalon permet d'isoler les défauts cinématiques d'engrènement du pignon à contrôler. Il est important de noter que cette métrologie ne reproduit pas exactement les conditions de fonctionnement d'un engrenage : les mesures sont faites sans charges, les défauts d'assemblage (écarts de situation entre les axes) sont ceux de la machine à mesurer qui généralement sont très faibles devant les défauts du pignon à contrôler. De plus celui-ci engrène avec un pignon étalon (4 classes ISO inférieures au moins). Dans la pratique, les pignons d'un train d'engrenage d'un système mécanique sont de qualités équivalentes, ou très proches.

La métrologie cinématique offre donc une évaluation plus fonctionnelle de l'engrenage que la métrologie géométrique. Afin d'apprécier plus précisément la pertinence de cette métrologie cinématique, nous proposons dans le paragraphe suivant de comparer les informations résultants de la métrologie cinématique de deux pignons et le comportement cinématique de ces deux pignons.

4.2.2 Les caractéristiques cinématiques spécifiées

Dans le cas des engrenages, les caractéristiques cinématiques sont nombreuses [ANSI/AGMA 2009-B01]. Il est communément admis que l'erreur de transmission est une source d'excitation vibratoire dominante pour le cas des transmissions fermées [Driot 2001] et plus particulièrement attribuée à :

- l'écart dent à dent (analogue à l'écart de saut tangentiel f_i défini dans les normes). Cet écart cinématique est lié à l'erreur consécutive de pas (f_u) : il correspond à une avance ou à un retard sur la courbe d'engrènement.
- l'amplitude de l'erreur cinématique (*Figure 1-6*) (analogue à l'écart total composé tangentiel F'_i défini dans les normes). Cet écart cinématique est lié à l'erreur cumulée de pas sur la totalité du pignon.

Une métrologie cinématique virtuelle a été réalisée sur deux pignons n'incluant que des erreurs de pas (sans défaut de forme). Le *Tableau 4-1* précise les erreurs de pas des deux pignons. Les résultats de cette métrologie cinématique virtuelle sont notés $f'_{i,k,j}$ (k étant l'indice de la dent et j l'indice du pignon).

dent	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
pignon	0	0,0013	-0,0005	0	0	0	0,0008	0	0,0004	/	/	/	/
roue	0	-0,0007	-0,0073	0,0011	0	0,0017	-0,0004	-0,0004	0	0	0	0	0

Tableau 4-1- Valeur des erreurs individuelles de pas pour le pignon et la roue (en radian)

La relation habituellement utilisée pour caractériser le comportement cinématique de l'engrènement de ces deux pignons est l'accumulation des erreurs cinématiques :

$$f'_{i_k} = f'_{i_{k,1}} - f'_{i_{k,2}}$$

Afin d'appréhender la pertinence de celle-ci, une simulation d'engrènement des deux pignons a été effectuée, ainsi qu'une comparaison. Le **Tableau 4-2** synthétise les résultats de cette comparaison.

fi via simulation de l'engrènement	fi via accumulation des métrologies cinématiques	erreur relative (%)
20,77094	20,76923	0,00822
-48,46388	-48,46154	0,00484
48,46218	48,46154	0,00131
-20,76923	-20,76923	0,00000
31,15385	31,15385	0,00000
-17,30669	-17,30769	-0,00581
-20,77024	-20,76923	0,00484
17,30819	17,30769	0,00286

Tableau 4-2- Comparaison des écart dent à dent mesurés et calculés

Nous pouvons remarquer que l'erreur commise est très faible. Cette même démarche a été menée en incluant des défauts de formes, l'erreur maximale est de 5.55%.

4.2.3 Tolérancement statistique des caractéristiques cinématiques

La relation entre la géométrie des roues qui engrènent et leur erreur cinématique n'est pas explicite. Le phénomène d'engrènement est complexe et connaissant les défauts géométriques des engrenages, la prédiction de l'erreur d'engrènement est quasi impossible sans l'utilisation d'un appareillage de mesure approprié ou sans l'utilisation de la simulation numérique basée sur un modèle de comportement cinématique de l'engrenage reposant sur la géométrie de celui-ci. Le seul résultat d'engrènement (issu de la simulation, ou d'une métrologie cinématique) est insuffisant.

En effet, la métrologie cinématique n'est pas assez pertinente pour prédire le comportement d'un pignon 1 étant donné la méconnaissance du pignon 2 engrenant avec lui. Cette méconnaissance

peut être modélisée de façon aléatoire. La connaissance de l'effet systématique d'un phénomène permet de l'inclure dans le modèle qui cherche à décrire le réel. Par contre, la méconnaissance de ce phénomène peut être modélisée par un effet aléatoire. Les statistiques permettent de «modéliser l'ignorance». Ces effets participent à la signature du résultat fourni par le modèle.

Tout procédé ou processus modifie son milieu environnant par une interaction multiple. La signature est la manifestation de cette interaction sous forme d'effets physiques. La signature originelle est propagée par le milieu (amplifiée, atténuée ou perturbée) pour donner la signature disponible sur le phénomène observé. Les origines de cette signature sont diverses (imperfections des procédés de fabrication, métrologie, etc.)

Dans cet esprit, les écarts géométriques du pignon 2 sont modélisés par un vecteur aléatoire. Ainsi nous proposons deux nouvelles caractéristiques spécifiées : la distribution de probabilité des caractéristiques cinématiques (amplitude de l'erreur cinématique (analogue à l'écart total composé tangentiel F_i défini dans les normes), et la distribution de probabilité de l'écart dent à dent (analogue à l'écart de saut tangentiel f_i défini dans les normes). Ces caractéristiques sont obtenues en effectuant une métrologie cinématique virtuelle et statistique d'un pignon : l'estimation de cette caractéristique fait appel à un processus stochastique basé sur l'estimation de l'erreur cinématique d'engrènement virtuelle. La section suivante propose une démarche pour l'estimation de ces caractéristiques spécifiées.

4.2.4 Protocole pour l'estimation de ces nouvelles caractéristiques

L'objectif de la métrologie est de fournir une estimation chiffrée d'un mesurande. La métrologie virtuelle statistique dans le cas des engrenages repose sur ce concept, mais l'estimation du mesurande nécessite un ensemble de simulations - le pignon contrôlé engrenant successivement avec différentes roues aléatoires. L'objectif de la métrologie virtuelle statistique est d'estimer la distribution de probabilité d'une caractéristique cinématique (amplitude de l'erreur cinématique d'engrènement ou écart dent à dent). A partir de cette distribution, différentes informations peuvent être obtenues : l'estimation des moments d'ordre 1 et 2 de cette caractéristique et la probabilité de satisfaction d'une exigence fonctionnelle par exemple. Le principe de la démarche est simple : il s'agit, à partir des données brutes de la métrologie 3D d'un pignon de simuler son engrènement successivement avec différentes roues. Cette approche repose sur la simulation de

Monte Carlo (notion présentée dans le chapitre 3). Plus le nombre de simulations est important, plus la précision obtenue sur l'estimation des paramètres statistiques est grande. Une approche expérimentale reste très onéreuse en coût, temps et main d'œuvre. Nous proposons donc l'approche suivante (*Figure 4-2*).

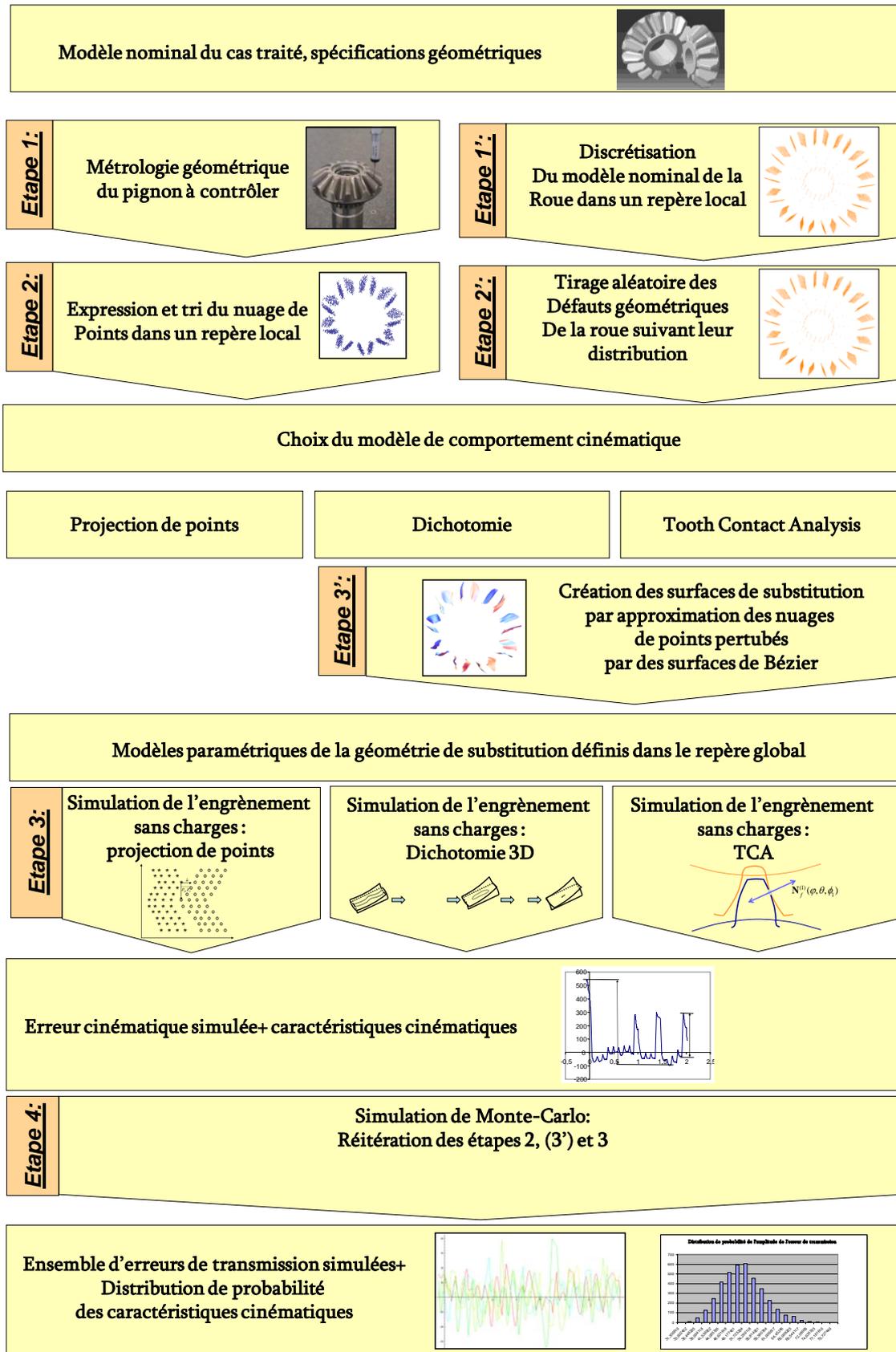


Figure 4-2- Démarche pour l'estimation de la distribution de probabilité des caractéristiques cinématiques

- Etape 1 - Métrologie géométrique du pignon - Le pignon à contrôler est tout d'abord mesuré géométriquement.
- Etape 2 - Expression et tri du nuage de points dans un repère local - le nuage de points obtenu après inspection est trié et filtré, par élimination d'éventuels point aberrants.
- Etape 1' - Discrétisation du modèle nominal de la roue dans un repère local - une représentation discrète du modèle nominal de la roue est obtenue par discrétisation des surfaces actives nominales.
- Etape 2' - Tirage aléatoire des défauts géométriques de la roue suivant leur distribution - Des défauts aléatoires (défauts de forme et défauts de situation entre éléments géométriques) sont introduits (le paramétrage du modèle de substitution intégrant les défauts et leur tirage aléatoire est détaillé au chapitre 3). Un modèle discret de la roue, intégrant les défauts géométriques est obtenu.
- Etape 3' - Création des surfaces de substitution par approximation des nuages de points perturbés par des surfaces de Bézier - A l'issue de l'étape 2 et 2', le modèle de comportement cinématique est choisi, si la « dichotomie 3D » ou la méthode TCA est choisie, alors les nuages de points intégrant les défauts géométriques (pour la roue) et obtenus après inspection (pour le pignon) sont approximés par des surfaces de Bézier à l'étape 3' (se référer au chapitre 2 pour la démarche suivie pour l'approximation d'un nuage de points par des surfaces de Bézier).
- Etape 3 - Simulation de l'engrènement sans charge - L'étape 3 consiste à simuler l'engrènement basé sur un des trois modèles de comportement cinématique proposé.
- Etape 4 - Simulation de Monte-Carlo - une simulation de Monte Carlo réitère les étapes 2', éventuellement 3' (si le modèle de comportement retenu est la « dichotomie 3D » ou TCA) et 3.

A l'issue de cette démarche, un ensemble d'erreurs cinématiques est obtenu, et une estimation de la distribution de probabilité des caractéristiques cinématiques peut être calculée.

4.2.5 Illustration/Application

Considérons le pignon conique évoqué au chapitre 2 (cf. Tableau 4-3) pour la validation de l'outil de simulation d'engrènement. 3908 roues de classe 7 ISO ont été générées.

-Nombre de dents du pignon $Z_1=9$;
-Nombre de dents de la roue $Z_2=13$;
-Angle de pression : $\alpha=24^\circ$
-Rayon de la grande sphère $R_g=100$ mm
-Rayon de la petite sphère $R_p=50$ mm.

Tableau 4-3- Paramètre de l'engrenage considéré

Elles intègrent les défauts de formes et les écarts de situation entre éléments géométriques. Pour chacune de ces roues, l'engrènement avec le pignon mesuré est simulé en utilisant la méthode TCA pour les résultats qui suivent, et une estimation de la densité de probabilité de l'amplitude de l'erreur de transmission est effectuée (*Figure 4-3*)

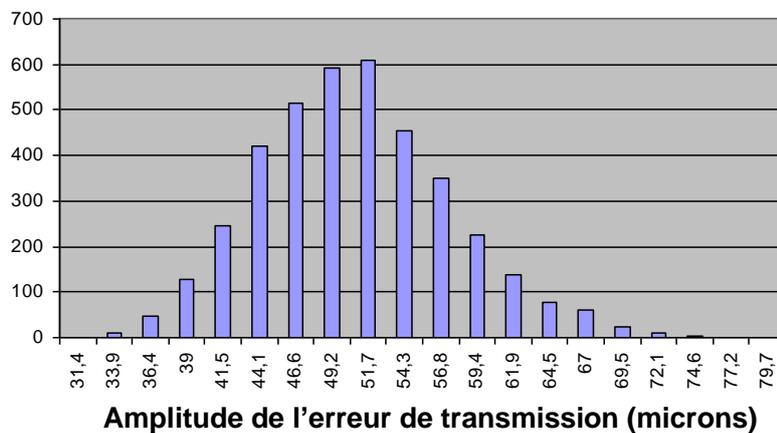


Figure 4-3-Distribution statistique de l'amplitude de l'erreur de transmission

A partir de l'estimation de la caractéristique spécifiée (la caractéristique mesurée), il est possible d'estimer la probabilité de respect d'une exigence fonctionnelle. Considérons par exemple que le concepteur souhaite que l'amplitude de l'erreur de transmission A_T n'excède pas 60 microns, une estimation de cette probabilité est obtenue :

$$\hat{P}(A_T \leq 60) = \frac{N_{cas\ favorable}}{3908} \quad (4.1)$$

Dans l'exemple traité on a :

$$\hat{P}(A_T \leq 60) = 93\% \quad (4.2)$$

D'après la formule (3.23), il est possible de donner un intervalle de confiance pour la probabilité de respect de cette exigence. Dans le cas étudié, un intervalle de confiance à 95% est donné par :

$$92.51\% \leq P(A_T \leq 60) \leq 93.64\% \quad (4.3)$$

L'approche proposée (*Figure 4-2*) permet la métrologie cinématique virtuelle et statistique d'un pignon. Comme toute inspection, les résultats sont entachés d'incertitude de mesure. Ces incertitudes incluent toutes causes de variation de l'étape d'inspection (étape 1) au résultat de la caractéristique spécifiée (fin de l'étape 4).

Ainsi les incertitudes de mesures introduites dans la démarche proposée sont dues à l'accumulation et à la propagation des incertitudes d'acquisition, des erreurs numériques et des imprécisions de modélisation (*Figure 4-4*) :

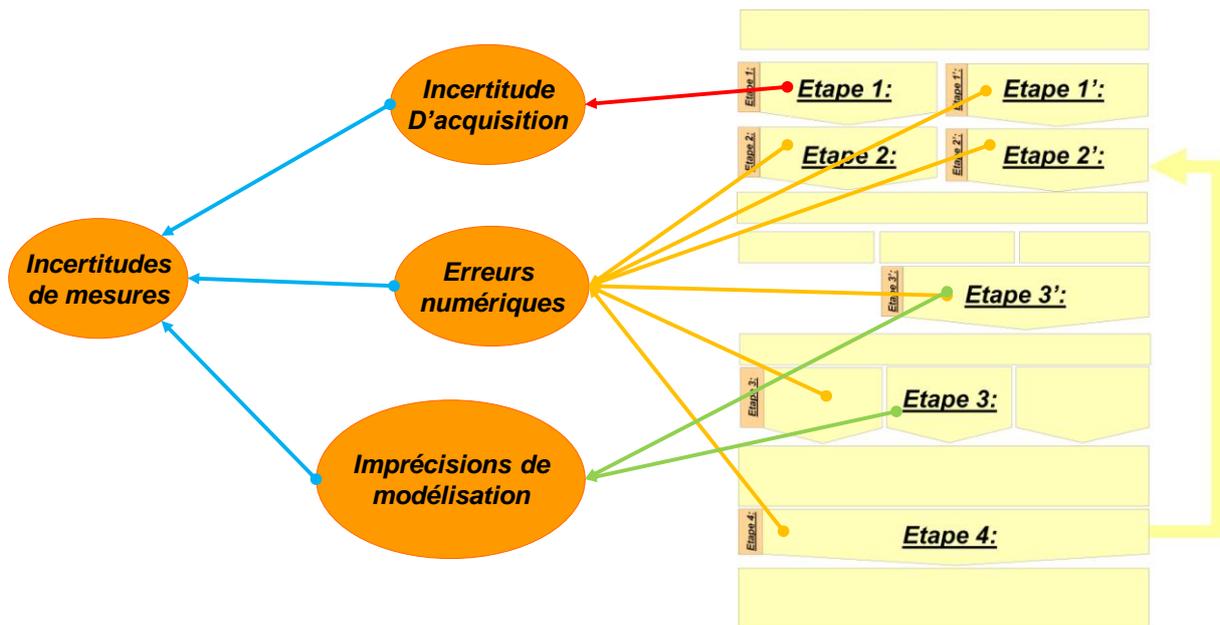


Figure 4-4- Les incertitudes de mesures introduites dans la métrologie virtuelle statistique

- Les incertitudes d'acquisition sont introduites lors de l'acquisition des points de l'engrenage : elles traduisent toutes causes de variation du résultat de l'inspection de l'engrenage (nuage de points brut obtenu après inspection). Dans la démarche proposée, elles sont introduites à étape 1 et se propagent jusqu'à l'étape 4.
- Les erreurs numériques sont introduites lors des calculs et opérations mathématiques. Dans la démarche proposée, elles sont introduites aux étapes 1', 2, 2', 3', 3 et 4. Ces erreurs numériques ont été décrites dans le chapitre 2.
- Les erreurs et imprécisions de modélisation sont dues aux imperfections des différents modèles de comportement proposés. De fait, personne n'est capable de réaliser un modèle ou une description exactement conforme à la réalité (un modèle est une représentation partielle du réel nécessaire à un traitement – la granularité de définition du modèle est fonction des besoins, celles-ci ne pouvant pas tendre vers l'infini ; elle est généralement le

résultat d'un compromis entre traitement performant en exécution et le niveau de précision requis du résultat de traitement). La distance entre les modèles et la réalité représente ces imprécisions liées à la modélisation. Ces imprécisions sont introduites à l'étape 3' - approximation des nuages de points par des surfaces de Bézier et à l'étape 3 - simulation de l'engrènement sans charge basé sur un des trois modèles de comportement cinématique proposé.

Dans la section suivante, nous proposons d'étudier la propagation des incertitudes d'acquisition, soit l'estimation de la sensibilité du mesurande aux incertitudes d'acquisition.

4.2.6 Sensibilité du mesurande aux incertitudes d'acquisition

Pour l'étude de la propagation des incertitudes d'acquisition, deux approches sont identifiables dans la littérature :

- Détermination des incertitudes par des méthodes de simulation,
- Détermination des incertitudes par des méthodes statistiques.

Il existe des ouvrages de référence comme le GUM qui présentent une vue d'ensemble des différents aspects de l'incertitude de mesure, des principes de l'évaluation de l'incertitude et de ses conséquences pour les déclarations de conformité.

Dans notre cas, le processus d'estimation du mesurande ne permet pas d'obtenir une relation explicite entre le résultat de la mesure (distribution de probabilité des caractéristiques cinématiques du pignon) et les écarts géométriques simulés des roues du fait de la nature statistique du mesurande, et de la nature des différents modèles de comportement (géométrique et cinématique) du processus d'estimation. De ce fait, une approche de détermination des incertitudes par des méthodes de simulation est adoptée. Parmi les approches pour la détermination des incertitudes, la méthode de simulation de Monte Carlo est fréquemment utilisée. Elles consistent à réaliser des simulations informatiques des problèmes mathématiques ou physiques, basées sur le tirage de nombres aléatoires. Généralement, on utilise des séries de nombres pseudo-aléatoires générées par des algorithmes spécialisés. Les propriétés de ces séries sont très proches de celles d'une véritable suite aléatoire. Nous proposons donc d'estimer la sensibilité du mesurande aux incertitudes d'acquisition par la démarche suivante (*Figure 4-5*).

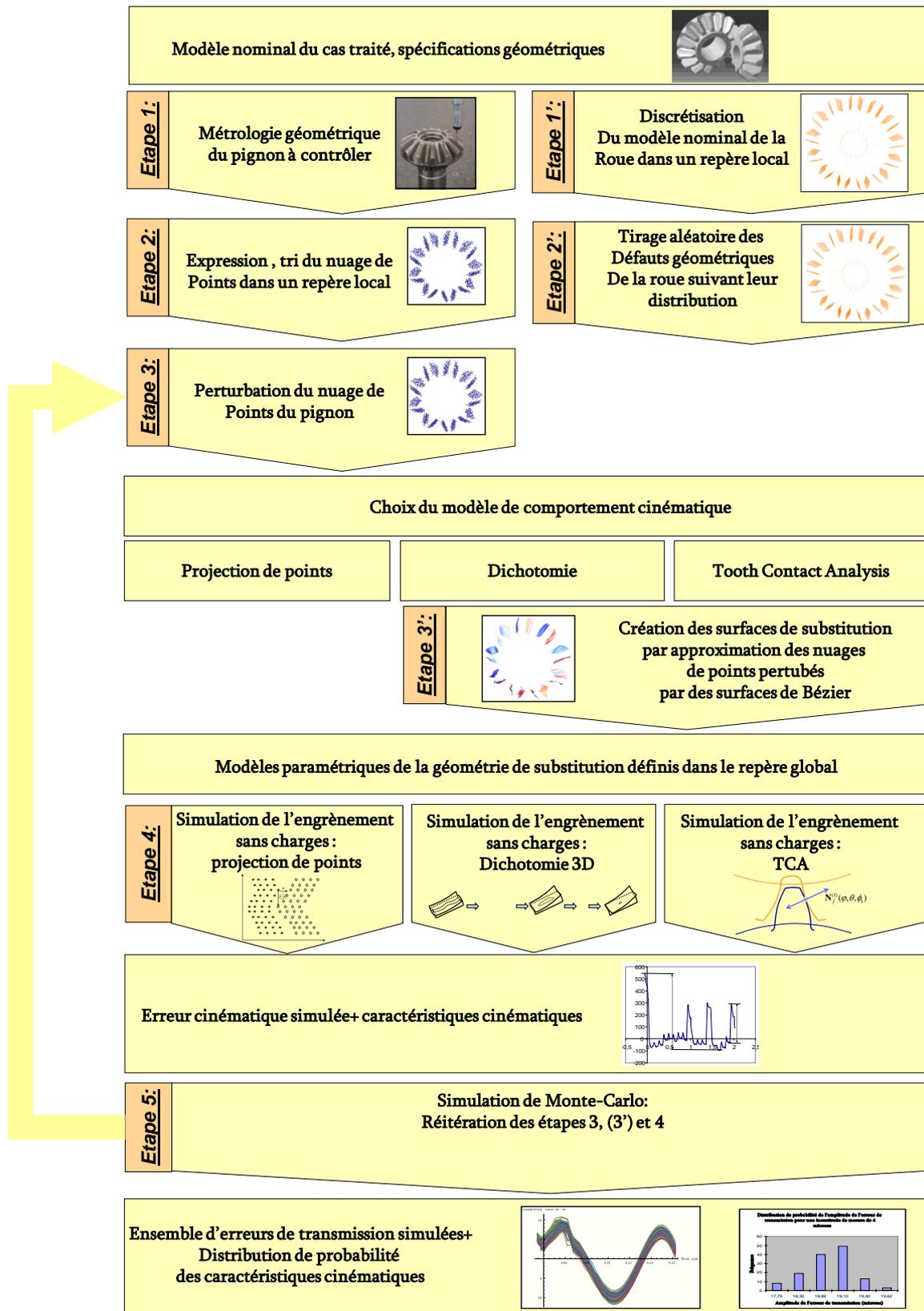


Figure 4-5- Démarche pour l'estimation de l'influence des incertitudes d'acquisition sur les caractéristiques cinématiques

- Etape 1 - Métrologie géométrique du pignon - Le pignon à contrôler est tout d'abord mesurer géométriquement.
- Etape 2 - Expression et tri du nuage de points dans un repère local - le nuage de points obtenu après inspection est trié et filtré, par élimination d'éventuels point aberrants.
- Etape 3 - Perturbation du nuage de points du pignon - le nuage de points est perturbé pour simuler la présence d'incertitudes d'acquisition : cette perturbation revient à introduire un défaut de forme de la valeur des incertitudes d'acquisition, en plus des défauts géométriques réels du pignon mesuré.
- Etape 1' - Discrétisation du modèle nominal de la roue dans un repère local - une représentation discrète du modèle nominal de la roue est obtenue par discrétisation des surfaces actives nominales.
- Etape 2' - Tirage aléatoire des défauts géométriques de la roue suivant leur distribution - Des défauts aléatoires (défauts de forme et défauts de situation entre éléments géométriques) sont introduits (le paramétrage du modèle de substitution intégrant les défauts et leur tirage aléatoire est détaillé au chapitre 3). Un modèle discret de la roue, intégrant les défauts géométriques est obtenu.
- Etape 3' - Création des surfaces de substitution par approximation des nuages de points perturbés par des surfaces de Bézier - A l'issue de l'étape 2' et 3, le modèle de comportement cinématique est choisi, si la « dichotomie 3D » ou la méthode TCA est choisie, alors les nuages de points intégrant les défauts géométriques (pour la roue) et obtenus après perturbation (pour le pignon) sont approximés par des surfaces de Bézier (se référer au chapitre 2 pour la démarche suivie pour l'approximation d'un nuage de points par des surfaces de Bézier).
- Etape 4 - Simulation de l'engrènement sans charge - L'étape 4 consiste à simuler l'engrènement basé sur un des trois modèles de comportement cinématique proposé.
- Etape 5 - Simulation de Monte-Carlo - une simulation de Monte Carlo réitère les étapes 3, éventuellement 3' (si le modèle de comportement retenu est la « dichotomie 3D » ou TCA) et 4.

A l'issue de cette démarche, un ensemble d'erreurs cinématiques est obtenu, et une estimation de la distribution de probabilité des caractéristiques cinématiques (due aux incertitudes d'acquisition) peut être calculée.

La *Figure 4-6* montre le résultat de 137 simulations pour estimer l'influence des incertitudes d'acquisition de 4 microns (correspondant à celle de la machine à mesurer tridimensionnelle utilisée), sur l'amplitude de l'erreur cinématique. Ces incertitudes sont représentées par des défauts de formes de mêmes valeurs. Chaque point du nuage obtenu après métrologie est décalé autour de sa position d'origine, suivant la direction de la normale en ce point. La valeur du décalage est aléatoire. Dans notre cas, il s'agit d'une variable aléatoire obéissant à une loi normale centrée d'écart type égale au sixième de l'incertitude simulée (4/6 microns). Réellement, pour les 137 simulations, 230160 points ont été traités et l'écart type estimé dans ce cas vaut 0.6645 microns (contre 0.6666 en théorie).

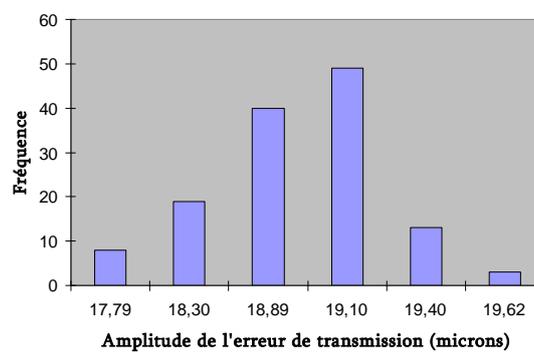


Figure 4-6- Impact d'une incertitude d'acquisition de 4 microns sur l'amplitude de l'erreur cinématique

La dispersion du mesurande représentée par l'estimation de son écart-type vaut 0.633 microns. La propagation des incertitudes d'acquisition le long de l'approche proposée aboutit à une incertitude sur le mesurande sensiblement égale aux incertitudes d'acquisition. Cette approche possède une certaine stabilité aux perturbations (représentées ici par les incertitudes d'acquisition) puisqu'elle ne les augmente pas.

4.2.7 Discussions

Dans cette section, nous avons proposé une nouvelle caractéristique spécifiée issue de la métrologie virtuelle et statistique des pignons. Cette caractéristique, plus proche du fonctionnel et donc des intentions du concepteur, qu'une caractéristique géométrique ou qu'une unique valeur d'une caractéristique cinématique peut aider à réduire les incertitudes de corrélation entre l'intention du concepteur et la spécification. Cette démarche n'est pas sans inconvénients : c'est avant tout une démarche statistique qui requiert un certain nombre de simulations. Le nombre de simulations est d'autant plus important que la précision souhaitée est grande. Il est important de

noter que les résultats obtenus dépendent des outils mathématiques et modèles utilisés (modèles de comportement, modèles géométriques, modèles de représentation des défauts, méthodes numériques pour l'analyse de l'engrènement, types d'approches stochastiques, etc...) et donc introduisent des imprécisions de modélisation dans l'estimation du résultat de la mesure. Comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent, les modèles proposés ne permettent pas une représentation totalement fidèle de la réalité, ils sont entachés d'imprécisions. Le chiffrage de ces imprécisions reste une perspective de ces travaux.

4.3 Caractérisation des modèles de spécification via les incertitudes

Dans la section précédente, nous avons proposé une nouvelle caractéristique spécifiée : la distribution de probabilité des écarts cinématiques d'engrènement qui est une image plus fidèle du fonctionnel. Nous en avons conclu d'une manière qualitative que cette nouvelle caractéristique spécifiée réduisait l'incertitude de corrélation. Afin d'assurer la conformité du produit (probabilité de respect de l'exigence fonctionnelle par exemple), il est nécessaire de limiter les caractéristiques de chaque composant du produit. Ces caractéristiques ne sont pas l'image parfaite de l'intention du concepteur. Il existe donc des incertitudes de corrélation entre les caractéristiques spécifiées (notées CS_i) et les exigences fonctionnelles (EF_i).

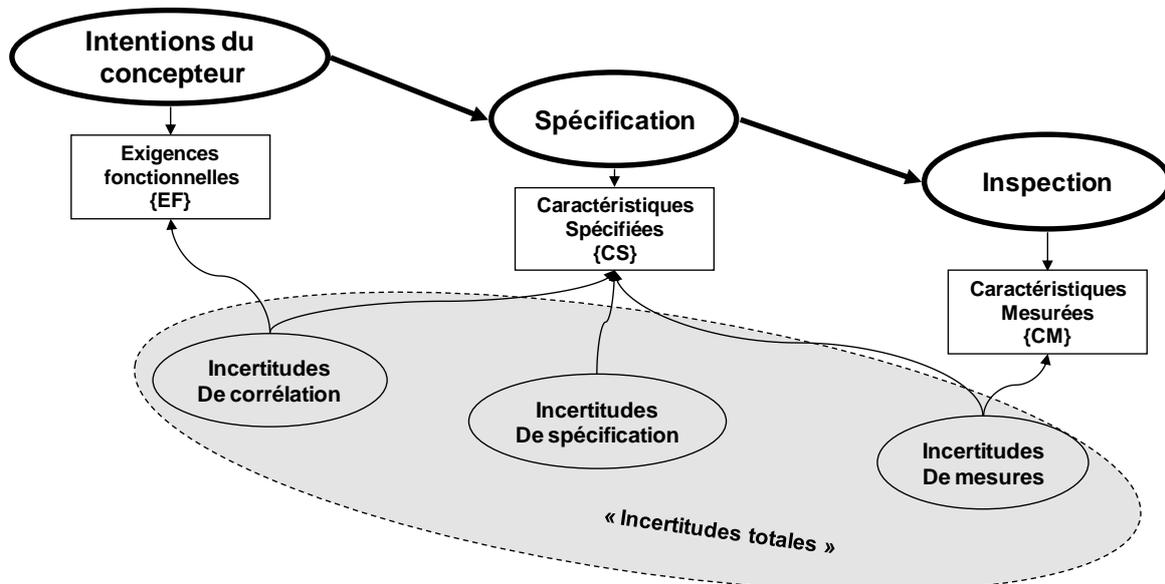


Figure 4-7-Incertitudes totales entre exigence fonctionnelles et caractéristiques mesurées.

Cette incertitude, ainsi que les incertitudes de spécification et de mesure impactent la décision à prendre sur la conformité du produit. Ainsi nous proposons de caractériser quantitativement différents modèles de spécification via :

- les incertitudes de corrélation,
- les incertitudes de mesures.

Par la suite, cette démarche de caractérisation est illustrée en considérant l'erreur de pas comme caractéristique spécifiée (car son influence est importante sur l'erreur cinématique), et en estimant la pertinence de 4 modèles de spécification au regard des incertitudes évoquées plus haut.

Modèles de spécification de l'erreur de pas :

Dans cette étude, la caractéristique spécifiée est l'erreur individuelle de pas. Elle correspond à l'écart angulaire d'une dent mesurée, par rapport à sa position angulaire nominale, autour de l'axe de rotation de l'élément considéré. L'erreur de pas peut être calculée à partir de la mesure de l'angle α_{pi} mesuré entre deux flancs consécutifs (indiqués i et $i+1$ par exemple). Si z_1 est le nombre de dents du pignon, l'erreur individuelle de pas de la i ème dent du pignon est donnée par :

$$epp_i = \alpha_{pi} - \frac{2\pi}{z_1} \quad (4.4)$$

Le **Tableau 4-4** et la **Figure 4-8** illustrent l'expression via le langage GeoSpelling de la spécification.

Définition de la surface non idéale S_A
Partition S_A élément non idéal nominalement cylindrique
Définition de l'alésage associé F_2
Association F_2 , élément idéal, type Cylindre. <u>Contraintes</u> : Distance signée minimale $(S_A, F_2) \geq 0$ <u>Objectif à maximiser</u> : Diamètre de F_2
Définition de la surface non idéale S_d
Partition S_d , élément non idéal, nominalement en développante de cercle sphérique
Définition de la surface en développante de cercle sphérique associée F_1
Association F_1 , élément idéal, type développante de cercle sphérique <u>Contrainte</u> : Coaxialité entre F_2 et l'axe de F_1 <u>Objectif à minimiser</u> : Dépend du critère d'association
Définition de la surface non idéale S'_d
Partition S'_d , élément non idéal, nominalement en développante de cercle sphérique
Définition de la surface en développante de cercle sphérique associée F'_1
Association F'_1 , élément idéal, type développante de cercle sphérique <u>Contrainte</u> : Coaxialité entre F_2 et l'axe de F'_1 <u>Objectif à minimiser</u> : Dépend du critère d'association
Définition de la caractéristique tolérancée α_{pi} :
Evaluation α_{pi} : Angle entre deux flancs, autour de l'axe de F_2 .
Définition de la condition :
$\alpha_{inf} \leq \alpha_{pi} \leq \alpha_{sup}$

Tableau 4-4- Expression GeoSpelling de l'erreur angulaire entre deux flancs

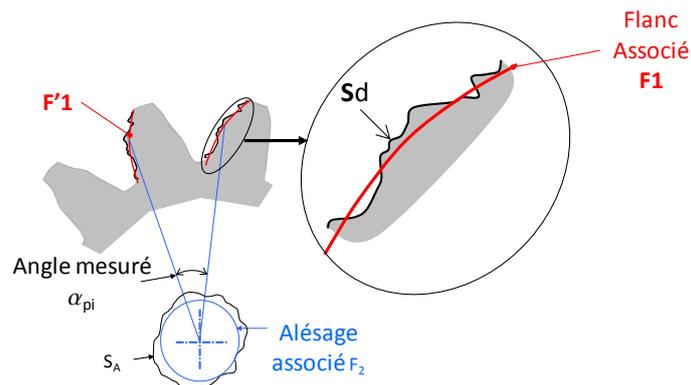


Figure 4-8- Illustration graphique de l'expression geospelling de l'angle mesuré α_{pi}

L'angle mesuré α_{pi} entre deux flancs peut être défini de différentes manières :

- par une approche dimensionnelle : un seul point est considéré au milieu de chaque flanc. α_{pi} est l'angle entre les deux surfaces nominalement en développante de cercle

« associées » aux deux points considérés, c'est-à-dire qui contiennent chacun des points. Dans ce cas, l'opération d'**extraction** d'un point de l'élément non idéal, nominalement en développante de cercle sphérique remplace les opérations de partition et d'association.

- par une approche géométrique : la surface non idéale de chacun des flancs est considérée et une surface idéale en développante de cercle y est associée selon un critère d'association. L'angle α_{pi} entre deux flancs consécutifs est donné par l'angle formé entre deux surfaces associées, autour de l'axe de l'alésage associé F_2 .

La valeur des angles α_{pi} dépendra du modèle utilisé et du critère d'association dans le cas d'une approche géométrique.

Nous proposons la caractérisation quantitative des modèles de spécification via les incertitudes en comparant quatre modèles de spécification de l'erreur de pas :

- Un modèle de spécification dimensionnelle : l'erreur de pas est définie à partir d'un point pris au milieu de chaque flanc.
- Trois modèles de spécification géométrique : l'erreur de pas est définie à partir des éléments idéaux en développante de cercle sphérique associé selon trois critères d'association : le critère des moindres carrés, le critère du minmax, et le critère de Tchebycheff.

L'association d'un élément idéal à un nuage de points par le critère des moindres carrés est un problème d'optimisation : l'objectif est de minimiser la somme des écarts au carré entre la surface et le nuage de points.

L'association d'un élément idéal à un nuage de points par le critère minmax est un problème d'optimisation : l'objectif est de minimiser la distance maximale entre la surface et le nuage de points.

L'association d'un élément idéal à un nuage de points par le critère Tchebycheff est un problème d'optimisation sous contrainte: l'objectif est de minimiser la distance maximale entre la surface et le nuage de points, en garantissant que l'ensemble des distances signées nuage-surface soient positive (c'est-à-dire que la surface soit tangente extérieure matière au nuage de points).

4.3.1 Caractérisation des modèles de spécifications via les incertitudes de corrélation

La caractérisation quantitative de chaque modèle de spécification via les incertitudes de corrélation est traitée dans cette section.

Dans un premier temps, nous avons proposé de formaliser les incertitudes de corrélation par les relations de causalité suivantes (Chapitre 1) :

- Incertitudes de corrélation nulles, signifierait :
Si les spécifications portées sur les caractéristiques de chacun des composants du produit sont respectées, alors les exigences portées sur les caractéristiques fonctionnelles sont garanties et réciproquement.
- Incertitudes de corrélation non nulles signifierait que la causalité n'est plus valable :
Si les spécifications portées sur les caractéristiques de chacun des composants du produit sont respectées, alors les exigences portées sur les caractéristiques fonctionnelles ne sont pas forcément garanties, et réciproquement.

Autrement dit, les incertitudes de corrélation augmentent le risque de la prise de décision relative au contrôle de conformité du produit : un produit déclaré bon suite au contrôle de l'ensemble des spécifications pourrait être mauvais au regard des exigences fonctionnelles et réciproquement. La formalisation des incertitudes de corrélation nécessitent la formalisation des relations entre l'intention du concepteur et les caractéristiques spécifiées du produit. Ce type de relation entre les fonctions et les paramètres de conception a été formalisé dans le domaine de « Design Theories » qui consiste à raisonner sur la science de la conception. Dans les années 1960, la conception a commencé à être théorisée pour devenir le domaine des « Design Theories » et des « Design Methodologies ».

Une approche majeure est celle de la conception axiomatique (axiomatic design) de N. SUH [Suh 1990]. Cette approche a fait école au niveau de la recherche. Suh considère le processus de conception comme un cheminement séquentiel et itératif entre quatre espaces : le domaine client, le domaine fonctionnel, le domaine physique et le domaine des processus de mise en œuvre. Ce cheminement est représenté dans un formalisme matriciel.

L'équation matricielle présente un exemple de matrice de cheminement entre le domaine fonctionnel (Functional Requirements Space, FRS) qui comprend les fonctions du système, et le domaine physique qui comprend ses paramètres de conception (Design Parameter Space, DPS). Les

performances fonctionnelles, tout comme les paramètres de conception, sont associés à des dimensions mesurables. Pour une performance fonctionnelle DF_i , le coefficient A_{ij} exprime la contribution du paramètre de conception DP_j à la valeur de DF_i .

$$\begin{pmatrix} DF_1 \\ DF_2 \\ \vdots \\ DF_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1m} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \vdots & A_{nm} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} DP_1 \\ DP_2 \\ \vdots \\ DP_m \end{pmatrix} \quad A_{ij} = \frac{\partial DF_i}{\partial DP_j}$$

L'approche de la conception axiomatique a pour but essentiel la mesure de la qualité d'un système en termes d'aptitude à la reconception et à la mise en œuvre. Pour juger de la qualité d'une conception, N. SUH prend en considération deux axiomes : l'axiome d'indépendance et l'axiome d'information. L'axiome d'indépendance stipule qu'une conception optimale ne doit pas entraîner de couplage dans la réalisation des fonctions (indépendance) au travers de la structure. Une conception acceptable doit éviter que l'amélioration d'une fonction ne puisse se faire sans la dégradation d'une autre.

L'axiome d'information stipule qu'une conception est globalement optimale si elle nécessite un minimum d'information. L'information dont il est question ici représente les instructions nécessaires à assurer l'adéquation entre le niveau de satisfaction attendu d'une fonction et la performance fournie par le système.

Une autre approche générale est celle de la conception systématique (Systematic Design) de PAHL et BEITZ [Pahl et al 1984]. Une typologie des fonctions techniques d'un système/produit basée sur les flux y est proposée ainsi qu'une méthode de reconception. Par contre la formalisation des liens entre exigences et paramètres de conception n'est que peu détaillée.

La problématique du lien entre exigences et paramètres de conception a été essentiellement abordée dans les travaux de N. SUH (Axiomatic Design) et Y. AKAO (QFD), et l'aspect propagation des variations y a été développé via la prise en compte de la variabilité du concept et par conséquent de l'imprécision concernant ses paramètres de conception, de la projection de ces paramètres de conception sur l'espace des performances au travers des calculs d'ingénierie (simulations, éléments finis, etc...) et au delà de la projection de ces performances au travers du modèle de préférences pour estimer une utilité globale.

LAW et ANTONSSON [Law et al 1996] par exemple utilisent la « Method of Imprecision » pour effectuer une projection de l'espace structurel des paramètres de conception (Design Variable Space, DVS) sur l'espace fonctionnel des performances (Performance Variable Space, PVS).

A partir de ce bref état de l'art, nous proposons de formaliser la corrélation en nous basant sur le formalisme Axiomatic Design : en effet, les (EF_i) , (DF_i) ou (FR_i) sont les exigences fonctionnelles définies par le concepteur (écarts cinématiques de l'engrenage) et paramètres de conception sont les caractéristiques spécifiées (CS_j) ou (DP_j) . Ainsi la corrélation entre les exigences fonctionnelles et les caractéristiques spécifiées pourrait être formalisée par l'équation suivante :

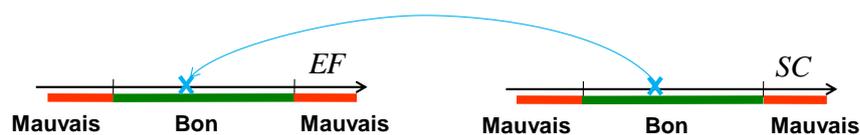
$$\{EF\}_m \approx [B]_{m,p} \{CS\}_p$$

Avec:

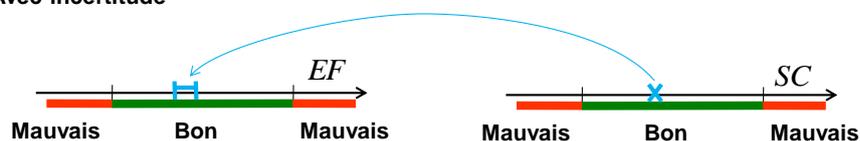
- $\{EF\}_m$ le vecteur des m exigences fonctionnelles indépendantes
- $\{CS\}_p$ le vecteur des p caractéristiques spécifiées
- $B_{ij} = \frac{\partial EF_i}{\partial CS_j}$ sont les coefficients de « sensibilité ».

La matrice B représente l'interrelation linéaire entre les exigences fonctionnelles et les caractéristiques spécifiées. Dans un premier temps, nous proposons de modéliser les incertitudes de corrélation par des intervalles de confiance IC_{ij} des coefficients B_{ij} .

A - Sans incertitude



B - Avec incertitude



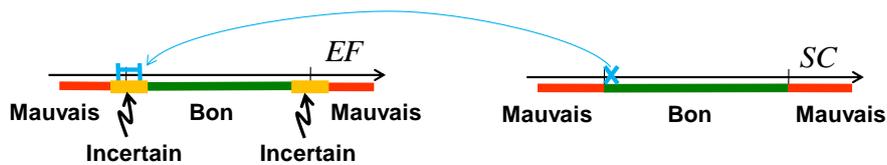
C - Avec incertitude

D - Avec incertitude


Figure 4-9- Illustration graphique de l'impact d'une incertitude de corrélation

Dans le cas où l'incertitude de corrélation est nulle ($IC = 0$), à une valeur de la caractéristique spécifiée correspond une valeur de l'exigence fonctionnelle. S'il n'y a pas eu d'erreur commise lors de l'allocation des tolérances, la causalité respect de la spécification / respect de l'exigence est valide (Figure 4-9 A). Dans le cas où l'incertitude de corrélation est non nulle ($IC \neq 0$), à une valeur de la caractéristique spécifiée correspond un intervalle de l'exigence fonctionnelle (Figure 4-9 B) ; cet intervalle est caractérisé par l'intervalle de confiance relatif à la relation caractéristique spécifiée / exigence fonctionnelle. Dans le cas où la valeur de caractéristique spécifiée est proche d'une des limites de la tolérance et s'il n'y a pas eu d'erreur commise lors de l'allocation des tolérances, l'intervalle de l'exigence fonctionnelle englobe l'une des limites (Figure 4-9 C) la causalité respect de la spécification / respect de l'exigence n'est plus valide, il existe une zone incertaine relative au respect de l'exigence. Dans ce cas, la prise de décision de conformité du produit à partir du respect ou non des spécifications n'est pas pertinente, elle est entachée de cette incertitude de corrélation. Si la prise de décision est relative au respect ou non de l'exigence, l'incertitude de corrélation engendre une zone incertaine au niveau de la caractéristique spécifiée (Figure 4-9 D). Cette notion de zone incertaine impactée par les incertitudes a été approfondie au niveau des incertitudes de mesure dans les travaux de Weckenmann [Weckenmann 2007] et de la norme DIN EN ISO 14253-1.

Exemple simple :

Pour assurer l'assemblabilité d'un arbre dans un alésage, l'exigence fonctionnelle est le jeu entre arbre et alésage : $\{EF\} = \text{jeu}$ et les caractéristiques spécifiées sont les diamètres de l'alésage et de l'arbre. Le jeu étant égal à la différence des diamètres on peut écrire :

$$\{EF\} = [1^{\pm 0}] \{CS\}$$

Pour limiter le débit de fuite entre un arbre et un alésage, l'exigence fonctionnelle est le débit de fuite : $\{EF\} = \text{débit}$, les caractéristiques spécifiées sont les diamètres de l'alésage et de l'arbre. Le débit de fuite est corrélé à la différence des diamètres. On peut écrire :

$$\{EF\} = [1^{\pm \delta}] \{CS\}$$

La valeur δ correspond à l'incertitude de corrélation.

Cependant cette relation n'est pas forcément linéaire et sa linéarisation introduit des imprécisions supplémentaires. De fait, nous proposons une seconde approche dans laquelle la formalisation des incertitudes de corrélation est définie entre le mesurande de l'exigence fonctionnelle et l'exigence fonctionnelle (*Figure 4-10*).

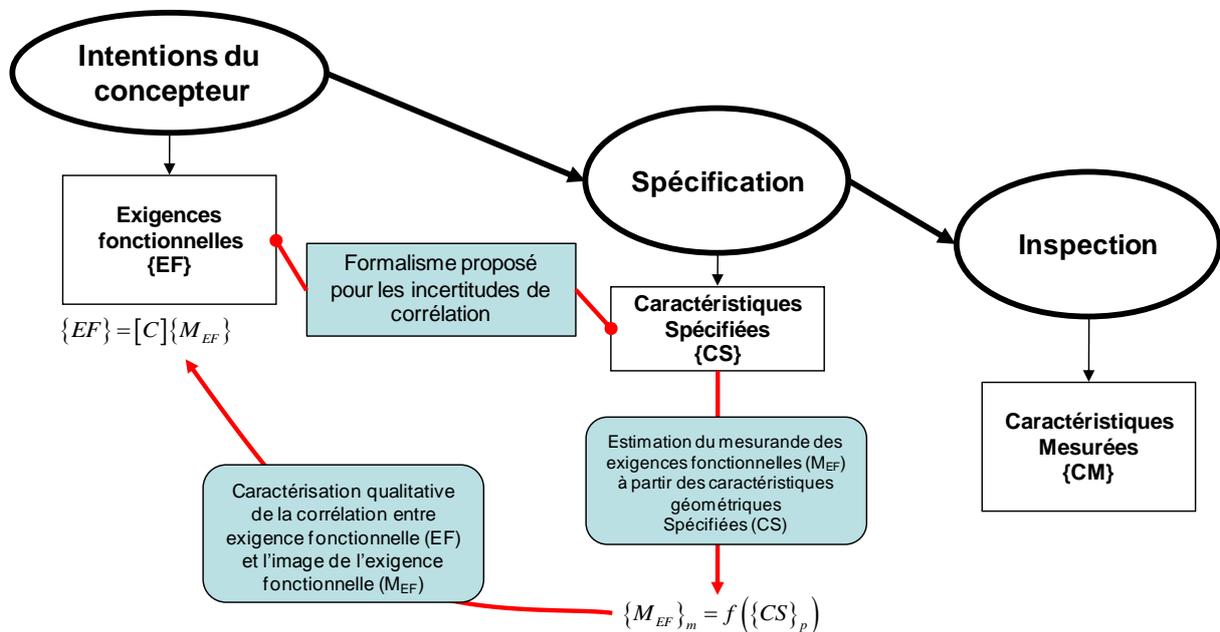


Figure 4-10- Caractérisation de la corrélation entre exigences fonctionnelles et leurs mesurandes.

Le mesurande de l'exigence fonctionnelle (noté M_{EF}) n'est pas la mesure de l'exigence fonctionnelle mais une estimation de cette dernière basée sur les caractéristiques spécifiées (SC). M_{EF} est l'image de la valeur de l'exigence fonctionnelle calculable ou estimable à partir des valeurs des caractéristiques spécifiées. M_{EF} est déterminée à partir de p caractéristiques spécifiées via les modèles déterministes entre les EF et les CS ou les outils de simulation permettant de calculer les EF à partir des CS.

$$\{M_{EF}\}_m = f(\{CS\}_p)$$

Avec :

- $\{M_{EF}\}_m$ le vecteur des mesurandes de l'exigence fonctionnelles indépendantes, (ou « image » de l'exigence fonctionnelle).
- $\{CS\}_p$ le vecteur des caractéristiques spécifiées cinématiques.
- f fonction non explicite dans notre cas.

Ainsi, la corrélation entre les exigences fonctionnelles et ses mesurandes est formalisée par l'expression suivante :

$$\{EF\}_m \approx [C]\{M_{EF}\}_m$$

Avec :

- $C_{ij} = \frac{\partial EF_i}{\partial M_{EF_j}}$ les coefficients de la matrice C, affectés des intervalles de confiance IC_{ij} représentant les incertitudes de corrélation.

Cette formalisation de la corrélation entre les exigences fonctionnelles et ses mesurandes (images) par une représentation matricielle permet d'avoir un regard critique vis-à-vis d'une corrélation parfaite : sans incertitudes de corrélation et sans imprécisions de modèles, la matrice C est la matrice identité :

$$\{EF\}_m = [ID]\{M_{EF}\}_m$$

Avec :

- ID la matrice identité

Cette seconde proposition permet de modéliser les incertitudes de corrélation, quelque soit la nature des relations entre les exigences fonctionnelles et les caractéristiques spécifiées. La section suivante expose la démarche suivie pour la caractérisation des modèles de spécification via les incertitudes de corrélation dans le cas d'engrenage.

Démarche de caractérisation des modèles de spécification via les incertitudes de corrélation:

Nous proposons la démarche suivante (*Figure 4-11*) :

- Etape 1 - Création du modèle de substitution intégrant les écarts géométriques aléatoires pour le pignon et la roue - Les défauts (défauts de forme et défaut de situation entre éléments géométriques) sont générés aléatoirement suivant leur loi de distribution. Le modèle de substitution du pignon et de la roue est représenté par un

ensemble de surfaces de Bézier intégrant ces défauts : ce modèle représente la géométrie réelle de l'engrenage.

- Etape 2 - Acquisition virtuelle : discrétisation des surfaces de substitution du pignon et de la roue - Les modèles de substitution du pignon et de la roue sont discrétisés : l'acquisition virtuelle des modèles de substitution du pignon et de la roue est réalisée
- Etape 3 - Traitement des modèles de substitution dans un repère global et simulation de l'engrènement sans charge - Les modèles de substitution sont exprimés dans un repère global pour permettre la simulation de l'engrènement des géométries images de la géométrie réelle définie à l'étape 1. L'engrènement peut être simulé via les trois modèles de comportement cinématique proposés au chapitre 2.
- Etape 4 - Métrologie virtuelle: évaluation des caractéristiques spécifiées pour chaque modèle de spécification - La métrologie virtuelle pour le pignon et la roue est réalisée suivant les 4 modèles de spécification étudiés. Les erreurs individuelles et cumulées de pas pour le pignon et la roue sont ensuite calculées à partir du résultat de la métrologie virtuelle de l'erreur de pas.
- Etape 5 - Construction du modèle de substitution n'intégrant que l'erreur de pas pour le pignon uniquement - Un modèle de substitution du pignon est généré à partir des erreurs de pas mesurées à l'étape 4. En conséquent, il y a 4 modèles de substitution : un pour chaque modèle de spécification.
- Etape 6 - Traitement des modèles de substitution dans un repère global et simulation de l'engrènement sans charge - Les modèles de substitution sont exprimés dans un repère global pour permettre la simulation de l'engrènement des géométries n'intégrant que l'erreur de pas définis à l'étape 5. L'engrènement peut être simulé via les trois modèles de comportement cinématique proposés au chapitre 2.
- Etape 7 - Simulation de Monte-Carlo: Réitération des étapes 1, 2, 3, 4, 5, 6 - Une simulation de Monte Carlo réitère toutes les étapes précédentes. A l'issu de cette simulation, un ensemble de caractéristiques spécifiées (erreurs de pas) et d'erreur cinématiques simulées (caractéristiques cinématiques issues de l'étape 3 et 6) est obtenu.
- Etape 8 - Estimation de la corrélation pour chaque modèle de spécification - La matrice de corrélation C ainsi que les intervalles de confiance IC_{ij} modélisant les incertitudes de corrélation sont estimés.

Remarquons qu'à l'étape 5, seul le modèle de substitution basé sur la métrologie du pignon est créé et à l'étape 6, ce dernier engrène virtuellement avec le modèle de substitution « réel » de la roue. De cette manière, la caractérisation de la corrélation et des incertitudes de corrélation n'est faite que sur le pignon, ce qui permet d'avoir un regard critique par rapport à ce modèle.

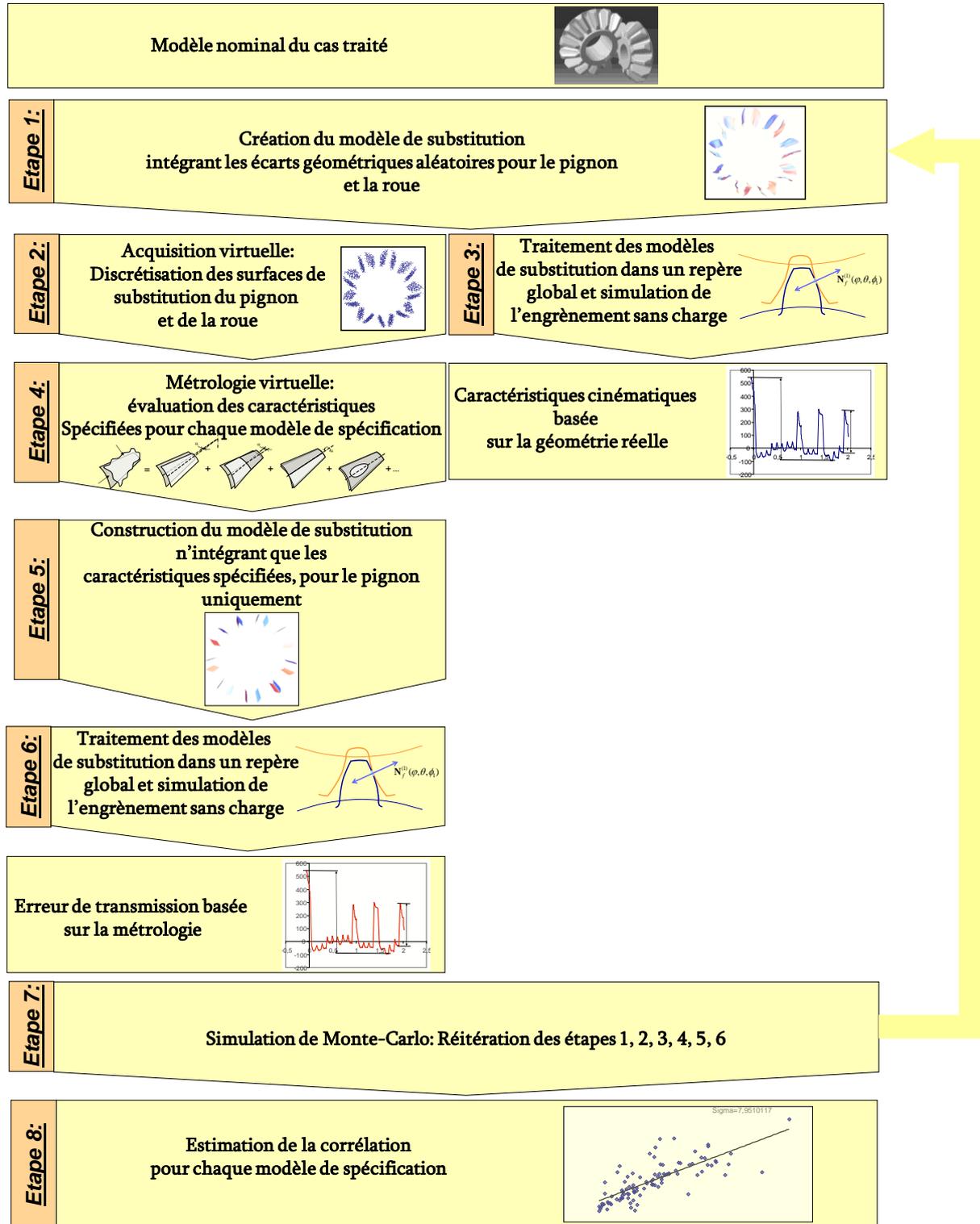


Figure 4-11- Démarche proposée pour l'analyse de la corrélation

Illustration de la caractérisation de la corrélation :

Nous proposons de caractériser les incertitudes de corrélation par les analyses suivantes :

- Analyse 1 - Etude de la corrélation entre les exigences fonctionnelles (EF) et les mesurandes de l'exigence fonctionnelle (M_{EF}) -
 - Cette première étude est composée de deux analyses :
 - Analyse 1-1 - Etude de la corrélation entre **l'amplitude de l'erreur de transmission basée sur la géométrie « réelle » (EF_1)** et **l'amplitude de l'erreur de transmission basée sur la géométrie issue de la métrologie virtuelle n'intégrant que l'erreur de pas (M_{EF1})**
 - Analyse 1-2 - Etude de la corrélation entre **l'écart dent à dent de l'erreur de transmission basée sur la géométrie « réelle » (EF_2)** et **l'écart dent à dent de l'erreur de transmission basée sur la géométrie issue de la métrologie virtuelle n'intégrant que l'erreur de pas (M_{EF2})**.
 - Pour chaque étude, une régression linéaire des moindres carrés, les intervalles de confiance à 5% modélisant les incertitudes de corrélation et les coefficients de détermination sont calculés
 - L'objectif est de calculer la matrice C (seconde approche de caractérisation des incertitudes de corrélation basée sur Axiomatic Design)
 - Cette étude est réalisée pour chaque modèle de spécification.
 - Ces deux premières études permettent d'évaluer la pertinence des modèles de spécifications au regard des incertitudes de corrélation.
- Analyse 2 - Etude de la corrélation entre les exigences fonctionnelles (EF) et les caractéristiques spécifiées (CS)-
 - Cette seconde étude est composée de deux analyses :
 - Analyse 2-1 Etude de la corrélation entre **l'amplitude de l'erreur de transmission basée sur la géométrie « réelle » (EF_1)** et **l'erreur cumulée de pas (CS_1) obtenue à l'issue de la métrologie virtuelle**.
 - Analyse 2-2 Etude de la corrélation entre **l'écart dent à dent de l'erreur de transmission basée sur la géométrie « réelle » (EF_2)** et **l'erreur individuelle de pas (CS_2) obtenue à l'issue de la métrologie virtuelle**.

- Pour chaque étude, une régression linéaire des moindres carrés, les intervalles de confiance à 5% modélisant les incertitudes de corrélation et les coefficients de détermination sont calculés
- L'objectif est de calculer la matrice B (première approche de caractérisation des incertitudes de corrélation basé sur Axiomatic Design)
- Cette étude est réalisée pour chaque modèle de spécification.
- Ces études permettent de critiquer les approches de caractérisation des incertitudes de corrélation.

La caractérisation des incertitudes de corrélation est obtenue sur un échantillon de 100 engrenages pour chaque étude, et pour trois classes de qualité ISO d'engrenages : 10, 7 et 4.

Résultats :

Notons :

- EF_{i-j} l'exigence fonctionnelle i pour la classe j
- $M_{EF_{i-j},critère}$ le mesurande de l'exigence fonctionnelle i basé sur le critère d'association « *critère* » pour la classe j
- $CS_{i-j,critère}$ la caractéristique géométrique spécifiée i basée sur le critère d'association « *critère* » pour la classe j
- Abréviation des critères : **1pt** pour l'approche dimensionnelle 1 point, **mc** pour le critère des moindres carrés, **mm** pour le critère minmax, **tch** pour tchebycheff.

La *Figure 4-12* montre le résultat pour l'analyse 1-1, critère de Tchebycheff, classe 10.

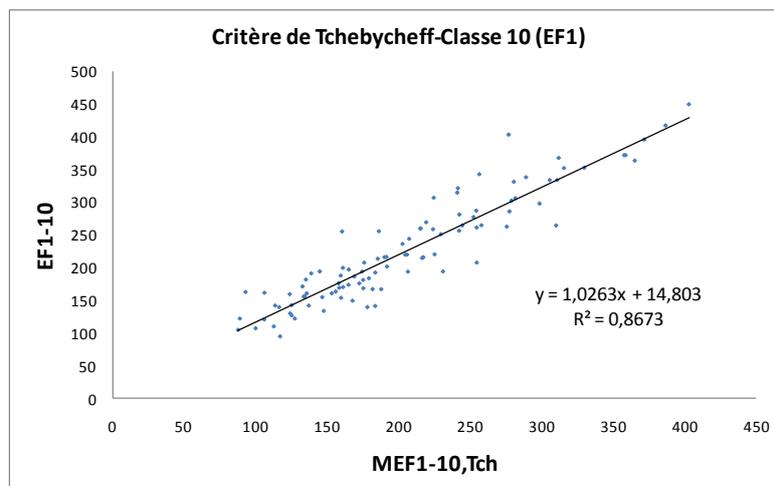


Figure 4-12-Corrélation entre EF_i et M_{EF_i} , critère de Tchebycheff, classe 10

De même, le résultat de l'analyse 1-2, critère de Tchebycheff, classe 10 est montré à la **Figure 4-13**.

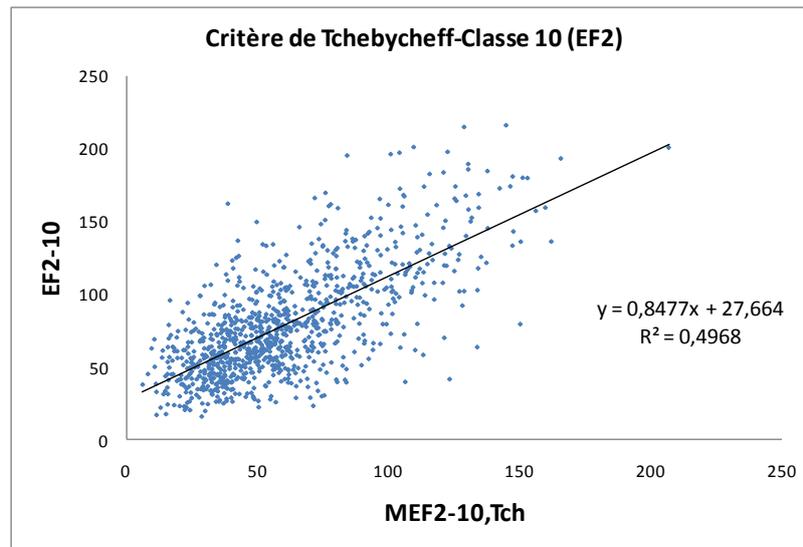


Figure 4-13- Corrélation entre EF_2 et M_{EF_2} , critère de Tchebycheff, classe 10

La figure ci-dessus fait apparaître un échantillon de 1100 individus (100 engrenages testés, dont l'engrènement est simulé sur 11 dents)

Pour cet exemple, la relation de corrélation peut s'écrire :

$$\begin{aligned} EF_{1-10} &= 1,03^{\pm 0,08} \cdot M_{EF_{1-10},tch} + 14,8^{\pm 17,48} \\ EF_{2-10} &= 0,85^{\pm 0,05} \cdot M_{EF_{2-10},tch} + 27,66^{\pm 3,56} \end{aligned} \quad (4.5)$$

La variation des paramètres est obtenue en calculant leurs intervalles de confiance à 5%.

Le résultat de la régression met en évidence un écart par rapport au modèle théorique. Cet écart peut être décomposé en deux parties :

- Le coefficient directeur de la droite de régression, qui indique la pertinence du modèle proposé, au regard du modèle « réel ». Il peut être considéré comme un coefficient de sensibilité, qui permet de quantifier l'impact d'une variation de la caractéristique basé sur la métrologie, sur la caractéristique issue de la géométrie « réelle ».
- L'ordonnée à l'origine qui peut être considérée comme un biais par rapport au modèle théorique. La seule caractéristique spécifiée prise en compte est l'erreur angulaire de pas. Nous ne considérons qu'une unique décomposition vectorielle des écarts. En réalité, d'autres écarts ont leur influence sur l'erreur cinématique comme les défauts de formes, les erreurs d'inclinaison de profil, les écarts d'excentricité, etc. peut justifier une sur (ou sous) estimation de l'exigence fonctionnelle.

La formule (4.5) peut ainsi être décomposée en deux parties : le coefficient directeur, considéré comme un coefficient de sensibilité qui montre l'influence d'une variation d'une caractéristique

spécifiée, ou cinématique basée sur la métrologie, sur la caractéristique basée sur la géométrie réelle, et l'ordonnée à l'origine considérée comme un biais. Par rapport au formalisme de représentation de la corrélation proposé dans cette section, nous venons compléter la modélisation de corrélation par une matrice supplémentaire représentant ce biais. Ainsi, nous proposons le formalisme suivant :

$$\begin{pmatrix} EF_1 \\ EF_2 \end{pmatrix} = C \cdot \begin{pmatrix} M_{EF1} \\ M_{EF2} \end{pmatrix} + A_{M_{EF}} \quad (4.6)$$

ou

$$\begin{pmatrix} EF_1 \\ EF_2 \end{pmatrix} = B \cdot \begin{pmatrix} CS_1 \\ CS_2 \end{pmatrix} + A_{CS}$$

Avec :

- C la matrice de sensibilité pour la corrélation entre les mesures des exigences fonctionnelles (M_{EF}) et les exigences fonctionnelles (EF)
- $A_{M_{EF}}$ la matrice « biais » pour la corrélation entre M_{EF} et EF.
- B la matrice de sensibilité pour la corrélation entre les caractéristiques spécifiées (CS) et les exigences fonctionnelles (EF)
- A_{CS} la matrice représentant le biais pour la corrélation entre CS et EF.

Ainsi pour l'exemple traité précédemment, la corrélation est formalisée par l'expression suivante :

$$\begin{pmatrix} EF_{1-10} \\ EF_{2-10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,03^{\pm 0,08} & - \\ - & 0,85^{\pm 0,05} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} M_{EF1-10,tch} \\ M_{EF2-10,tch} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 14,8^{\pm 17,48} \\ 27,66^{\pm 3,56} \end{pmatrix}$$

Les intervalles de confiance sur les coefficients des matrices modélisent les incertitudes de corrélation.

Les coefficients de détermination (R^2) permettent d'apprécier la qualité de la corrélation.

Les résultats de l'analyse 1 et 2 sont les suivants :

Analyse 1 - Etude de la corrélation entre les exigences fonctionnelles (EF) et les mesurandes de l'exigence fonctionnelle (M_{EF})

- **Classe 10 :**

$$\begin{pmatrix} EF_{1-10} \\ EF_{2-10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,99^{\pm 0,12} & - \\ - & 0,73^{\pm 0,07} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} M_{EF1-10,1pt} \\ M_{EF2-10,1pt} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 37,6^{\pm 24,65} \\ 37,7^{\pm 4,14} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} R_{1-10,1pt}^2 \\ R_{2-10,1pt}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,72 \\ 0,32 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} EF_{1-10} \\ EF_{2-10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,02^{\pm 0,12} & - \\ - & 0,75^{\pm 0,07} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} M_{EF1-10,mc} \\ M_{EF2-10,mc} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 34,8^{\pm 23,57} \\ 37,1^{\pm 4,14} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} R_{1-10,mc}^2 \\ R_{2-10,mc}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,75 \\ 0,33 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} EF_{1-10} \\ EF_{2-10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,05^{\pm 0,10} & - \\ - & 0,77^{\pm 0,07} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} M_{EF1-10,mm} \\ M_{EF2-10,mm} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 23,19^{\pm 21,02} \\ 34,5^{\pm 4,15} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} R_{1-10,mm}^2 \\ R_{2-10,mm}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,81 \\ 0,35 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} EF_{1-10} \\ EF_{2-10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,03^{\pm 0,08} & - \\ - & 0,85^{\pm 0,05} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} M_{EF1-10,tch} \\ M_{EF2-10,tch} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 14,8^{\pm 17,48} \\ 27,6^{\pm 3,56} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} R_{1-10,tch}^2 \\ R_{2-10,tch}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,87 \\ 0,50 \end{pmatrix}$$

- **Classe 7 :**

$$\begin{pmatrix} EF_{1-7} \\ EF_{2-7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1^{\pm 0,17} & - \\ - & 0,72^{\pm 0,07} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} M_{EF1-7,1pt} \\ M_{EF2-7,1pt} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 28,07^{\pm 19,07} \\ 25,7^{\pm 2,58} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} R_{1-7,1pt}^2 \\ R_{2-7,1pt}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,57 \\ 0,33 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} EF_{1-7} \\ EF_{2-7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,05^{\pm 0,17} & - \\ - & 0,75^{\pm 0,06} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} M_{EF1-7,mc} \\ M_{EF2-7,mc} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 24,43^{\pm 18,54} \\ 24,44^{\pm 2,58} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} R_{1-7,mc}^2 \\ R_{2-7,mc}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,58 \\ 0,34 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} EF_{1-7} \\ EF_{2-7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,20^{\pm 0,15} & - \\ - & 0,75^{\pm 0,06} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} M_{EF1-7,mm} \\ M_{EF2-7,mm} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6,34^{\pm 16,2} \\ 23,54^{\pm 2,53} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} R_{1-7,mm}^2 \\ R_{2-7,mm}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,72 \\ 0,37 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} EF_{1-7} \\ EF_{2-7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,75^{\pm 0,08} & - \\ - & 0,66^{\pm 0,04} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} M_{EF1-7,tch} \\ M_{EF2-7,tch} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 37,66^{\pm 11} \\ 24,01^{\pm 2,05} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} R_{1-7,tch}^2 \\ R_{2-7,tch}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,78 \\ 0,48 \end{pmatrix}$$

• **Classe 4 :**

$$\begin{pmatrix} EF_{1-4} \\ EF_{2-4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,66^{\pm 0,22} & - \\ - & 0,47^{\pm 0,06} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} M_{EF1-4,1pt} \\ M_{EF2-4,1pt} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 48,36^{\pm 16,53} \\ 28,78^{\pm 1,96} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} R_{1-4,1pt}^2 \\ R_{2-4,1pt}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,26 \\ 0,16 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} EF_{1-4} \\ EF_{2-4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,67^{\pm 0,22} & - \\ - & 0,47^{\pm 0,07} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} M_{EF1-4,mc} \\ M_{EF2-4,mc} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 48,83^{\pm 16,30} \\ 28,84^{\pm 1,95} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} R_{1-4,mc}^2 \\ R_{2-4,mc}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,26 \\ 0,16 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} EF_{1-4} \\ EF_{2-4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,90^{\pm 0,19} & - \\ - & 0,49^{\pm 0,06} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} M_{EF1-4,mm} \\ M_{EF2-4,mm} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 28,36^{\pm 14,55} \\ 27,7^{\pm 1,95} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} R_{1-4,mm}^2 \\ R_{2-4,mm}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,50 \\ 0,19 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} EF_{1-4} \\ EF_{2-4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,78^{\pm 0,13} & - \\ - & 0,54^{\pm 0,05} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} M_{EF1-4,tch} \\ M_{EF2-4,tch} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 27,9^{\pm 11,73} \\ 25,14^{\pm 1,74} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} R_{1-4,tch}^2 \\ R_{2-4,tch}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,60 \\ 0,30 \end{pmatrix}$$

• **Toutes classes confondues :**

$$\begin{pmatrix} EF_{1-tout} \\ EF_{2-tout} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,04^{\pm 0,06} & - \\ - & 0,84^{\pm 0,03} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} M_{EF1-tout,1pt} \\ M_{EF2-tout,1pt} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 25,84^{\pm 8,13} \\ 23,73^{\pm 1,57} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} R_{1-tout,1pt}^2 \\ R_{2-tout,1pt}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,80 \\ 0,44 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} EF_{1-tout} \\ EF_{2-tout} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,05^{\pm 0,06} & - \\ - & 0,86^{\pm 0,03} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} M_{EF1-tout,mc} \\ M_{EF2-tout,mc} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 25,30^{\pm 7,85} \\ 23,39^{\pm 1,57} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} R_{1-tout,mc}^2 \\ R_{2-tout,mc}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,81 \\ 0,45 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} EF_{1-tout} \\ EF_{2-tout} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.08^{\pm 0.05} & - \\ - & 0,87^{\pm 0.03} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} M_{EF1-tout,mm} \\ M_{EF2-tout,mm} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 17.41^{\pm 6.8} \\ 21.86^{\pm 1.57} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} R_{1-tout,mm}^2 \\ R_{2-tout,mm}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.87 \\ 0.47 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} EF_{1-tout} \\ EF_{2-tout} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.99^{\pm 0.04} & - \\ - & 0,85^{\pm 0.027} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} M_{EF1-tout,tch} \\ M_{EF2-tout,tch} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 13.87^{\pm 7.78} \\ 19.98^{\pm 4.18} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} R_{1-tout,tch}^2 \\ R_{2-tout,tch}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.88 \\ 0.56 \end{pmatrix}$$

Analyse 2 - Etude de la corrélation entre les exigences fonctionnelles (EF) et les caractéristiques spécifiées (CS)-

• **Classe 10 :**

$$\begin{pmatrix} EF_{1-10} \\ EF_{2-10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,93^{\pm 0,18} & - \\ - & 0,43^{\pm 0,07} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} CS_{1-10,1pt} \\ CS_{2-10,1pt} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 83,36^{\pm 29,67} \\ 44,86^{\pm 2,54} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} R_{1-10,1pt}^2 \\ R_{2-10,1pt}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,52 \\ 0,12 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} EF_{1-10} \\ EF_{2-10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,95^{\pm 0,18} & - \\ - & 0,46^{\pm 0,07} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} CS_{1-10,mc} \\ CS_{2-10,mc} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 82,91^{\pm 28,88} \\ 44,31^{\pm 2,57} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} R_{1-10,mc}^2 \\ R_{2-10,mc}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,53 \\ 0,13 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} EF_{1-10} \\ EF_{2-10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,07^{\pm 0,14} & - \\ - & 0,42^{\pm 0,07} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} CS_{1-10,mm} \\ CS_{2-10,mm} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 54,38^{\pm 23,51} \\ 44,28^{\pm 2,62} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} R_{1-10,mm}^2 \\ R_{2-10,mm}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,71 \\ 0,12 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} EF_{1-10} \\ EF_{2-10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,07^{\pm 0,08} & - \\ - & 0,57^{\pm 0,05} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} CS_{1-10,tch} \\ CS_{2-10,tch} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 34,55^{\pm 15,09} \\ 37,24^{\pm 2,37} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} R_{1-10,tch}^2 \\ R_{2-10,tch}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,88 \\ 0,29 \end{pmatrix}$$

• **Classe 7 :**

$$\begin{pmatrix} EF_{1-7} \\ EF_{2-7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,96^{\pm 0,24} & - \\ - & 0,56^{\pm 0,09} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} CS_{1-7,1pt} \\ CS_{2-7,1pt} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 59,18^{\pm 19,43} \\ 30,78^{\pm 1,64} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} R_{1-7,1pt}^2 \\ R_{2-7,1pt}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,39 \\ 0,13 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} EF_{1-7} \\ EF_{2-7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,94^{\pm 0,24} & - \\ - & 0,56^{\pm 0,09} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} CS_{1-7,mc} \\ CS_{2-7,mc} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 61,64^{\pm 19,16} \\ 31,02^{\pm 1,65} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} R_{1-7,mc}^2 \\ R_{2-7,mc}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,38 \\ 0,12 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} EF_{1-7} \\ EF_{2-7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.12^{\pm 0.21} & - \\ - & 0,54^{\pm 0.08} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} CS_{1-7,mm} \\ CS_{2-7,mm} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 41.65^{\pm 17.77} \\ 30.45^{\pm 1.65} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} R_{1-7,mm}^2 \\ R_{2-7,mm}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.54 \\ 0.14 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} EF_{1-7} \\ EF_{2-7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.87^{\pm 0.079} & - \\ - & 0,69^{\pm 0.05} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} CS_{1-7,tch} \\ CS_{2-7,tch} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 40.27^{\pm 9.1} \\ 24.69^{\pm 1.29} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} R_{1-7,tch}^2 \\ R_{2-7,tch}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.83 \\ 0.43 \end{pmatrix}$$

• **Classe 4 :**

$$\begin{pmatrix} EF_{1-4} \\ EF_{2-4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.68^{\pm 0.28} & - \\ - & 0,35^{\pm 0.1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} CS_{1-4,1pt} \\ CS_{2-4,1pt} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 60.8^{\pm 15.11} \\ 28.44^{\pm 1.25} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} R_{1-4,1pt}^2 \\ R_{2-4,1pt}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.18 \\ 0.043 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} EF_{1-4} \\ EF_{2-4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.69^{\pm 0.28} & - \\ - & 0,38^{\pm 0.1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} CS_{1-4,mc} \\ CS_{2-4,mc} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 60.94^{\pm 14.74} \\ 28.27^{\pm 1.25} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} R_{1-4,mc}^2 \\ R_{2-4,mc}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.20 \\ 0.047 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} EF_{1-4} \\ EF_{2-4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.18^{\pm 0.21} & - \\ - & 0,41^{\pm 0.09} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} CS_{1-4,mm} \\ CS_{2-4,mm} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 28.66^{\pm 12.51} \\ 27.27^{\pm 1.25} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} R_{1-4,mm}^2 \\ R_{2-4,mm}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.56 \\ 0.07 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} EF_{1-4} \\ EF_{2-4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.02^{\pm 0.13} & - \\ - & 0,60^{\pm 0.07} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} CS_{1-4,tch} \\ CS_{2-4,tch} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 24.12^{\pm 9.39} \\ 23.54^{\pm 1.13} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} R_{1-4,tch}^2 \\ R_{2-4,tch}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.72 \\ 0.24 \end{pmatrix}$$

• **Toutes classes confondues :**

$$\begin{pmatrix} EF_{1-tout} \\ EF_{2-tout} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.10^{\pm 0.08} & - \\ - & 0,65^{\pm 0.04} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} CS_{1-tout,1pt} \\ CS_{2-tout,1pt} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 49.29^{\pm 9.18} \\ 31.14^{\pm 1.008} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} R_{1-tout,1pt}^2 \\ R_{2-tout,1pt}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.69 \\ 0.24 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} EF_{1-tout} \\ EF_{2-tout} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.11^{\pm 0.08} & - \\ - & 0,69^{\pm 0.04} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} CS_{1-tout,mc} \\ CS_{2-tout,mc} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 50.08^{\pm 9.03} \\ 30.87^{\pm 1.01} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} R_{1-tout,mc}^2 \\ R_{2-tout,mc}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.70 \\ 0.24 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} EF_{1-tout} \\ EF_{2-tout} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.16^{\pm 0.06} & - \\ - & 0,63^{\pm 0.04} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} CS_{1-tout,mm} \\ CS_{2-tout,mm} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 35.49^{\pm 7.41} \\ 30.42^{\pm 1.03} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} R_{1-tout,mm}^2 \\ R_{2-tout,mm}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.81 \\ 0.25 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} EF_{1-tout} \\ EF_{2-tout} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.08^{\pm 0.04} & - \\ - & 0,72^{\pm 0.03} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} CS_{1-tout,tch} \\ CS_{2-tout,tch} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 23.23^{\pm 5.29} \\ 25.94^{\pm 0.91} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} R_{1-tout,tch}^2 \\ R_{2-tout,tch}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.91 \\ 0.43 \end{pmatrix}$$

Interprétation :

Les résultats de l'analyse de la corrélation nous permettent de dégager quels points essentiels :

- Le choix du modèle de spécifications à une grande influence sur la corrélation : en effet l'évaluation des caractéristiques spécifiées basée sur l'utilisation du critère de Tchebycheff aboutit à la meilleure corrélation : les coefficients de détermination et donc de corrélation sont les plus grands. Il est important de rappeler que la simulation de l'engrènement à lieu sans charges dans notre étude, et donc que potentiellement, le contact entre dents se fait du coté extérieur à la matière puisqu'il n'y a ni pénétration des corps, ni déformations. - L'approche dimensionnelle basée sur un point donne les résultats les moins bons. Cette remarque semble logique puisque l'image de la fonctionnalité n'est évaluée que très localement (un point pris au centre de chaque dent) alors que l'engrènement se fait sur une zone plus étendue.
- Les résultats donnés par les moindres carrés sont proches de ceux donnés par l'approche un point : dans notre cas, l'engrenage considéré est constitué d'un pignon avec une correction de profil : il possède un bombé longitudinal qui permet de localiser le contact à chaque instant. Nous supposons que ce bombé est à l'origine de cette similitude. Dans des travaux futurs, il serait intéressant de mener cette étude de la corrélation sur d'autres géométries ne possédant pas de bombé.

- Les coefficients directeurs de la droite de régression sont les plus proches de 1 pour le critère de Tchebycheff : l'erreur de pas évaluée comme l'angle entre deux surfaces associées selon le critère de Tchebycheff constitue une assez bonne image de l'amplitude de l'erreur cinématique réelle. Les coefficients de détermination dans ce cas confortent ce propos.
- La corrélation se dégrade très fortement avec la qualité de l'engrenage : plus l'engrenage est de bonne qualité (« petite » classe ISO), plus faible sont les coefficients de corrélation. Ceci nous laisse penser que d'autres écarts ont une influence croissante avec la qualité de l'engrenage : la tolérance sur le défaut de forme croît par rapport à la tolérance sur l'erreur de pas, défaut d'excentricité etc. Cela nous amène à penser que pour les engrenages de classes de qualité basse (bonne qualité), il est nécessaire de prendre en compte d'autres écarts géométriques que l'erreur de pas.
- Dans le cas de l'amplitude de l'erreur de transmission, la corrélation est raisonnable. Par contre, en ce qui concerne l'écart dent à dent, la prise en compte de l'erreur de pas seule n'est pas pertinente. Il serait nécessaire de prendre en compte d'autre écart géométrique comme notamment le défaut de forme.

Critique :

Les résultats présentés ci dessus sont entachés d'imprécisions inhérentes à la fonction f . De fait, personne n'est capable de réaliser un modèle exactement conforme à la réalité (un modèle est une représentation partielle du réel nécessaire à un traitement). La granularité de définition du modèle est fonction des besoins, celle-ci ne pouvant pas tendre vers l'infini. Elle est généralement le résultat d'un compromis entre traitement performant en exécution et le niveau de précision requis du résultat du traitement. De ce fait, l'estimation des incertitudes de corrélation est et sera entachée de ces imprécisions. Cette critique ouvre deux perspectives : l'évaluation de l'impact des incertitudes liées à la fonction f sur l'estimation de l'incertitude de corrélation et l'évaluation de l'impact des points sur l'estimation de l'incertitude de corrélation. Nous pouvons proposer deux pistes : la première est de déterminer les coefficients de régression à partir d'intervalles représentant les incertitudes liées à la fonction f ; la seconde est d'utiliser des techniques comme le Bootstrap pour estimer l'impact des points.

La prise de décision relative au contrôle de conformité est entachée d'incertitudes :

- Les incertitudes de corrélation dont nous proposons une caractérisation quantitative
- Les incertitudes de spécification : nous caractérisons quatre modèles de spécification dont le protocole de mesurage est défini dans le **Tableau 4-4** ainsi que les critères d'association mis en œuvre. Nous considérerons qu'une unique interprétation des modèles de spécification est possible et par conséquent, que les incertitudes de spécification sont nulles.
- Les incertitudes de mesures. Nous nous proposons de caractériser les modèles de spécifications via les incertitudes de mesures. La section suivante détaille cette approche.

4.3.2 Caractérisation des modèles de spécification via les incertitudes de mesures.

Les caractéristiques spécifiées (erreurs de pas) et le mesurande de l'exigence fonctionnelle sont estimés via un processus mathématique (création des géométries de substitution, métrologie virtuelle, simulation de l'engrènement, ...) basé sur les nuages de points de l'engrenage. Chaque point est en réalité entaché d'une incertitude provenant de l'acquisition des points par la machine à mesurer. La propagation des incertitudes d'acquisition sur les caractéristiques spécifiées (CS) d'une part, et le mesurande de l'exigence fonctionnelle (M_{EF}) d'autre part permet d'estimer quantitativement les incertitudes de mesures entachant ces caractéristiques. Les méthodes de propagation sont principalement de deux types [Mailhe 2007] :

- La propagation analytique qui évalue, par le calcul formel, la variance des caractéristiques spécifiées géométriques et cinématiques à partir de la variance des points mesurés. Cette propagation n'est pas exploitable dans nos travaux car la fonction réponse liant les points de l'engrenage aux caractéristiques spécifiées géométriques et cinématiques n'est pas explicite.
- La propagation par la Méthode de Monte Carlo (MCM) (Voir Chapitre 3, Paragraphe 3.5.2) est adaptée à notre étude.

Ainsi, afin de caractériser les modèles de spécification via les incertitudes de mesure, nous proposons de propager les incertitudes d'acquisition sur les caractéristiques spécifiées par la Méthode de Monte Carlo. Nous proposons l'approche suivante (**Figure 4-14**) :

- Etape 1 - Création du modèle de substitution intégrant les écarts géométriques aléatoires pour le pignon et la roue - Les défauts (défauts de forme et défaut de situation entre éléments géométriques) sont générés aléatoirement suivant leur loi de distribution. Le modèle de substitution du pignon et de la roue est représenté par un ensemble de surface de Bézier intégrant ces défauts : ce modèle représente la géométrie réelle de l'engrenage. Il s'agit d'un engrenage de classe ISO 7 pour l'exemple traité.
- Etape 2 - Acquisition virtuelle : discrétisation des surfaces de substitution du pignon et de la roue - Le modèle de substitution du pignon est discrétisé : l'acquisition virtuelle des modèles de substitution du pignon est réalisée.
- Etape 3 - Simulation des incertitudes d'acquisition: perturbation du nuage de points du pignon - Chaque point constituant le nuage du pignon est perturbé par rapport à sa position initiale : il est déplacé aléatoirement dans une sphère de diamètre 4 microns, qui correspondent à l'estimation des incertitudes d'acquisition de la Machine à Mesurer Tridimensionnelle du laboratoire.
- Etape 4 - Métrologie virtuelle: évaluation des caractéristiques spécifiées pour chaque modèle de spécification - La métrologie virtuelle pour le pignon et la roue est réalisée suivant les 4 modèles de spécification étudié. Les erreurs individuelles et cumulées de pas pour le pignon et la roue sont ensuite calculées à partir du résultat de la métrologie virtuelle de l'erreur de pas.
- Etape 5 - Construction du modèle de substitution n'intégrant que l'erreur de pas pour le pignon uniquement - Un modèle de substitution du pignon est généré à partir des erreurs de pas mesurées à l'étape 4. En conséquent, il y a 4 modèles de substitution : un pour chaque modèle de spécification.
- Etape 6 - Traitement des modèles de substitution dans un repère global et simulation de l'engrènement sans charge - Les modèles de substitution sont exprimés dans un repère global pour permettre la simulation de l'engrènement des géométries n'intégrant que l'erreur de pas définis à l'étape 5. L'engrènement peut être simulé via les trois modèles de comportement cinématique proposés au chapitre 2.
- Etape 7 - Simulation de Monte-Carlo: Réitération des étapes 3, 4, 5, 6 - Une simulation de Monte Carlo réitère les étapes 3, 4, 5, 6. A l'issue de cette simulation, un ensemble de caractéristiques spécifiées (erreurs de pas) et d'erreurs cinématiques simulées est obtenu.

- Etape 8 - Estimation des incertitudes de mesures - Les incertitudes de mesures de l'erreur de pas d'une part, et des mesurandes de l'exigence fonctionnelle d'autre part sont estimées via leur variance.

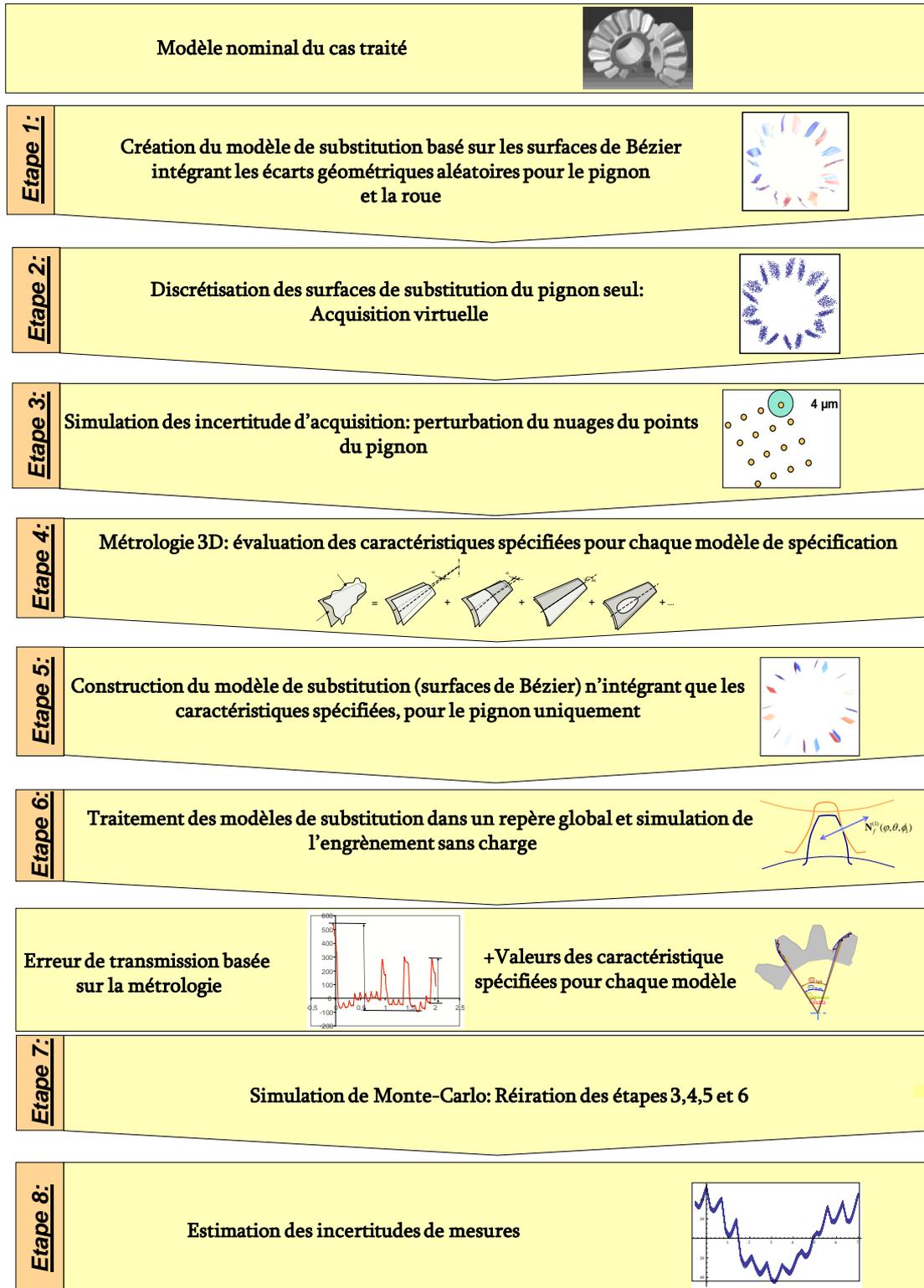


Figure 4-14-Démarche pour la caractérisation des modèles des spécifications via les incertitudes de mesure

Cette étude a été menée sur un échantillon de 100 engrenages de classe ISO 7. La *Figure 4-15* montre l'impact des incertitudes d'acquisition sur l'erreur cinématique basée sur la métrologie virtuelle.

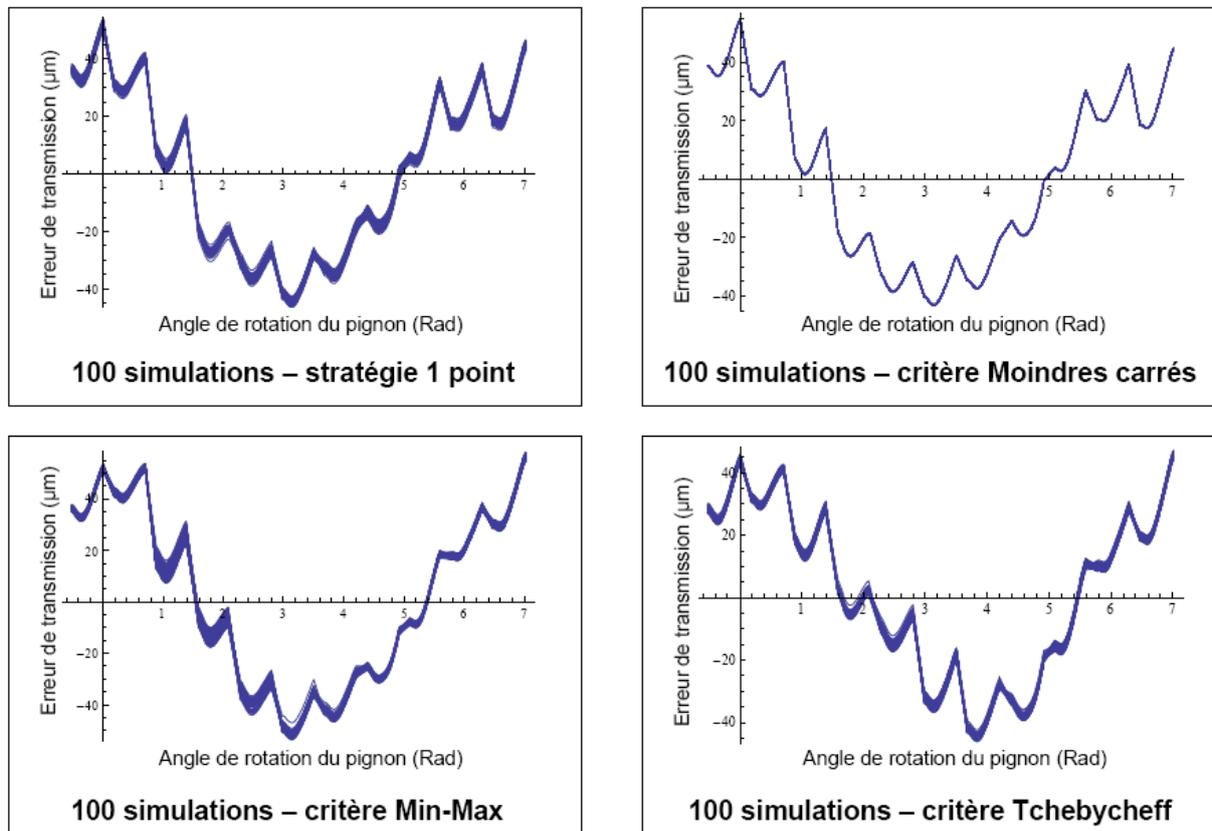


Figure 4-15- impact des incertitudes d'acquisition sur l'erreur cinématique basée sur la métrologie.

Pour chaque modèle de spécifications, l'écart type de l'amplitude de l'erreur de transmission, des écarts dent à dent et de l'erreur de pas sont calculés :

	Approche un point	Moindre carrés	Minmax	Tchebycheff
Amplitude	1,28	0,097	1,38	0,97
Ecart dent à dent	1,33	0,074	1,59	1,05
erreur de pas	0,97	0,065	0,69	0,82

Figure 4-16-Ecart type des caractéristiques cinématiques et géométriques pour chaque modèle de spécification

Au vu des résultats, il est possible d'affirmer que :

- Les incertitudes de mesures des caractéristiques spécifiées géométriques et cinématiques estimées à partir d'un modèle de spécification basé sur l'approche dimensionnelle « 1point » et le critère « minmax » sont les plus grandes.

- Les incertitudes de mesures des caractéristiques spécifiées géométriques et cinématiques estimées à partir d'un modèle de spécification basé sur le critère des moindres carrés sont les plus faibles.

4.4 Conclusion partielle

Dans le but de caractériser et réduire les incertitudes entachant la prise de décision relative au contrôle de conformité, nous avons proposé une nouvelle caractéristique spécifiée de nature statistique : la distribution de probabilité des écarts cinématiques d'engrènement. Cette première partie caractérise de manière qualitative les incertitudes relatives à la prise de décision.

Afin de caractériser quantitativement et de réduire les incertitudes entachant la prise de décision relative au contrôle de conformité (probabilité de respect de l'exigence fonctionnelle par exemple), nous avons proposé de caractériser différents modèles de spécification via :

- Les incertitudes de corrélation qui traduisent la non corrélation entre les caractéristiques spécifiées et l'exigence fonctionnelle. Les incertitudes de corrélation sont modélisées via des intervalles de confiance des interrelations entre exigences fonctionnelles et mesurande de l'exigence fonctionnelle,
- Les incertitudes de mesure par propagation des incertitudes d'acquisition à l'erreur de pas et au mesurande des exigences fonctionnelles.

Cette caractérisation nous a permis de tirer les conclusions générales suivantes :

- Les incertitudes de corrélation sont plus faibles pour l'amplitude de transmission que pour l'écart dent à dent en ne considérant que l'erreur de pas. Ce qui nous amène à penser que la prise en compte d'une seconde caractéristique spécifiée doit être retenue pour l'estimation de l'écart dent à dent (défauts de formes).
- Pour la caractérisation des modèles de spécification via les incertitudes de corrélation, le critère de Tchebycheff offre les incertitudes les plus faibles, et une relation la plus proche du modèle théorique.
- Pour la caractérisation des modèles de spécification via les incertitudes de mesures, le critère des moindres carrés offre les incertitudes de mesures les plus faibles.
- L'approche dimensionnelle « 1 point » offre les temps de métrologie les plus courts.

Conclusion générale

Tout produit manufacturier est soumis à des variations de ces caractéristiques nominales ou cibles qui peuvent être inhérentes aux procédés et processus de fabrication, aux incertitudes sur les caractéristiques des matériaux et à l'environnement d'utilisation de celui-ci. Ces variations impactent les performances du produit. Ainsi, il est nécessaire de développer des outils :

- pour comprendre et prédire l'impact de ces variations (une modélisation et une simulation « réalistes » jouent un rôle essentiel pour l'analyse des systèmes complexes comme les produits manufacturiers et en particulier les engrenages),
- pour décider et agir sur le tolérancement (les simulations réalistes sont des outils d'aide à la prise de décision stratégique pour réduire les cycles de conception, optimiser les procédés industriels et permettre d'estimer les risques avant toute prise de décision).

La prise en compte des variations est essentielle dans la phase de développement d'un produit. L'objectif de l'activité de tolérancement est de définir les limites acceptables des variations des caractéristiques permettant d'assurer un certain niveau de qualité ou de robustesse à un coût optimal. L'analyse ou la synthèse des tolérances est une importante étape du processus de conception qui impacte énormément la conception du processus de fabrication, la fabrication et le contrôle du produit et son coût.

Ces travaux de thèse ont visé à contribuer la maîtrise de l'incertain / des variabilités en phase de conception de produit à denture / engrenage. Ils ont porté plus particulièrement sur la maîtrise des variations géométriques et des incertitudes avec comme point central le modèle de spécification et comme objet d'étude les engrenages. En effet, la motivation des travaux, concernant la partie analyse, est la flexibilisation des approches pour supporter différentes représentations des modèles de spécification et la motivation des travaux concernant les incertitudes est la réduction de celles-ci en caractérisant et proposant des modèles de spécification. De ce fait, ces travaux se sont focalisés sur les points suivants :

- la modélisation de la géométrie de substitution incluant les défauts de forme, d'orientation et de position des éléments géométriques de l'engrenage. Cette

modélisation basée sur les travaux de J. Bruyère est flexibilisée : trois modèles sont proposés :

- Une modélisation vectorielle des défauts géométriques.
- Une modélisation par zone des défauts géométriques.
- Une modélisation hybride (vectorielle et par zone) des défauts géométriques.
- la modélisation mathématique des spécifications. Les spécifications sont représentées par des intervalles qui limitent les écarts géométriques tirés aléatoirement suivant leur distribution. Dans le cas d'une modélisation vectorielle, les spécifications portent sur les paramètres vectoriels représentant les écarts de position et de situation des éléments géométriques. Dans le cas d'une modélisation par zone, les spécifications portent sur les points des surfaces actives, ensuite approximés par des surfaces de Bézier.
- la modélisation sans charge de l'engrènement et les outils de simulations associés. Nous proposons trois modèles de l'engrènement sans charges :
 - La simulation de l'engrènement sans charge basée sur la méthode TCA proposée par Litvin et reprise par J. Bruyère. Elle est basée sur une représentation paramétrique de la géométrie de substitution de l'engrenage et peut être utilisé sur toute géométrie d'engrenage pouvant être exprimée analytiquement.
 - La simulation de l'engrènement sans charge basée sur le modèle de comportement 2D dans le plan d'action. Ce modèle repose sur une géométrie de substitution discrète de l'engrenage en développante de cercle intégrant les défauts géométriques. Elle permet l'estimation rapide de l'engrènement sans charge. Elle n'est exploitable que pour les géométries s'appuyant sur un plan d'action.
 - La simulation de l'engrènement sans charge basée sur le modèle de comportement 3D (« Dichotomie 3D »). Cette approche est basée sur une représentation analytique de la géométrie de substitution de l'engrenage et est adaptable à tout type de géométrie d'engrenage pouvant être exprimée analytiquement. Elle offre une meilleure convergence que la méthode TCA mais les temps de calculs sont en contre partie plus longs à précision souhaitée équivalente.
- l'adaptation d'une approche d'analyse des tolérances intégrant les trois points précédents. L'estimation de l'impact des variations géométriques sur les caractéristiques fonctionnelles est basée sur l'utilisation de la simulation de Monte Carlo.

- la proposition d'une nouvelle caractéristique spécifiée de nature statistique. Cette caractéristique permet la prise en compte de la méconnaissance de la géométrie de la roue, dont les défauts sont modélisés par un vecteur aléatoire, engrenant avec le pignon contrôlé. La sensibilité de ce nouveau mesurande aux incertitudes d'acquisition est estimée.
- la caractérisation quantitative de modèles de spécification via les incertitudes. Cette caractérisation est menée en estimant :
 - Les incertitudes de corrélation dont nous proposons un formalisme basé sur Axiomatic Design. Nous proposons deux approches :
 - La caractérisation des incertitudes de corrélation entre les exigences fonctionnelles et leurs mesurandes basés sur les caractéristiques spécifiées.
 - La caractérisation des incertitudes de corrélation entre les exigences fonctionnelles et les caractéristiques spécifiées.
 - Les incertitudes de mesures : elles sont estimées quantitativement par propagation des incertitudes d'acquisition via simulation de Monte Carlo.

Nous émettons des critiques relatives à cette proposition :

- La modélisation géométrique des surfaces de substitution proposée permet de prendre en compte une partie des défauts de forme du 1^{er} ordre, une extension de celle permettant une modélisation plus fine des défauts de forme serait souhaitable. Il serait ainsi possible d'étudier la signature de certains défauts de forme inhérents aux procédés comme la rectification sur le comportement de l'engrenage. Ces défauts sont en partie à l'origine des nuisances sonores émises par une transmission par engrenage. A ce sujet, une perspective serait de tester les représentations modales qui présentent une très fine granularité de modélisation, par contre, ce type de représentation risque de poser des problèmes pour la simulation numérique de l'engrènement. De plus, pour être cohérente avec les pratiques industrielles, la modélisation géométrique doit être adaptable aux différents types de géométrie et de spécifications, être en adéquation avec les stratégies de contrôle, et intégrer les dépendances statistiques des variations dues aux procédés de fabrication dans le cas des engrenages.
- La modélisation du comportement de l'engrènement développée est sans charge. Pour être abordable industriellement, la simulation des comportements avec défauts nécessite la prise en compte de modèles de comportement « réaliste » et « allégés », très

performants en exécution tout en fournissant le niveau de précision requis. Dans le cas des engrenages, une modélisation « réaliste » du comportement de l'engrènement nécessiterait la prise en compte des déformées inhérentes aux actions mécaniques, elle devrait être dynamique. Une approche d'analyse des tolérances sous charge de l'engrenage permettrait une étude globale plus réaliste. Les modèles proposés par Philippe VELEX couplés à des approches probabilistes évoluées sont une perspective intéressante. En effet, pour être opérationnelle industriellement, les approches probabilistes doivent prendre en compte les différents types d'incertitudes, elles doivent être peu coûteuses en temps tout en fournissant une bonne estimation du ppm (le nombre de pièces non-conformes par millions de pièces produites). Actuellement, un étudiant de Studenarbeit étudie les approches probabilistes FORM / SORM et Krigeage afin de réduire le temps d'estimation du ppm.

- Les imprécisions du modèle de comportement ont un impact sur l'activité de tolérancement et sur l'incertitude de corrélation. La procédure proposée d'évaluation de ces incertitudes ne tient pas compte de ces imprécisions. Une esquisse de solution a été testée en considérant les résultats des simulations n'ont pas comme des valeurs mais comme des intervalles. Cette piste nécessite une plus grande investigation. De plus, l'estimation des incertitudes de corrélation est réalisée à partir d'un échantillon ; le tirage de cet échantillon impacte forcément l'estimation, il serait pertinent d'évaluer cet impact ; une première piste est d'utiliser la technique du BOOTSTRAP (méthode d'inférence statistique basée sur le re-échantillonnage) pour évaluer la variance des intervalles de confiance représentant ces incertitudes de corrélation.

Ces critiques ouvrent différentes perspectives à ces travaux. Il est très important d'y ajouter comme perspective :

- la propagation des incertitudes totales (corrélation + spécification + mesure) sur l'exigence fonctionnelle. Cette étude devra permettre une estimation de l'impact des incertitudes totales sur la prise de décision de conformité du produit.

Bibliographie

- [ANSI/AGMA 2009-B01] “Bevel Gear Classification, Tolerances, and Measuring Methods”, 2005
- [AGMA 390.03a] AGMA 390.03a- Gear Handbook, Materials and Measuring Methods for Bevel, Hypoid, Fine Pitch Wormgearing and Racks Only as Unassembled Gears.
- [Ballot 1995] E. BALLOT, « Lois de comportement géométrique des mécanismes pour le tolérancement », thèse de doctorat, Ecole Normale Supérieure de Cachan, Avril 1995.
- [Baudouin 2007] C. BAUDOUIIN. « Contribution à la qualification d'un processus de fabrication par une approche dimensionnelle : application au pignon conique forgé dit "net shape" ». Thèse, ENSAM Metz, France, 2007.
- [Baudouin 2008] C. BAUDOUIIN, R. BIGOT, S. LELEU, P. MARTIN. “Gear geometric control software: approach by entities”, International Journal of Advanced Manufacturing Technology, Vol. 38, pp120-129, 2008.
- [Berman 2005] Y. OSTROVSKY-BERMAN, L. JOSKOWICZ, « Tolerance envelopes of planar mechanical parts with parametric tolerances », Computer-Aided Design, Volume 37, Issue 5 , Pages 531-544, 2005.
- [Berviller 2006] L. BERVILLER, R. BIGOT, P. MARTIN. « Technological information concerning the integrated design of net-shape forged parts », International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 41, pages 247-257.
- [Bigot 2005] R. BIGOT, L. BERVILLER, J. BRUYERE, C. BAUDOUIIN, J.Y. DANTAN, « La conception de produits forgés net shape », Communication du CFM, 2005 , Troyes.
- [Bourdet 1973] P. BOURDET, « Chaînes de côtes de fabrication : le modèle », L'ingénieur et le technicien de l'enseignement, 1973.

- [Bourdet 1988] A. CLEMENT, P. BOURDET, « A study of optimal-criteria identification based on the small displacement screw model. », *Annales du CIRP-Manufacturing Technology*, Volume 37, Issue 1, 1988, pages 503-506.
- [Bruyère 2006] J. BRUYERE. « Contribution à l'optimisation de la conception des engrenages coniques à denture droite. Analyse et synthèse de la géométrie et des tolérances ». Thèse, ENSAM Metz, France, 2006.
- [Cattiaux-Huillard 1999] L. CATTIAUX-HUILLARD, J.C. FIOROT, P. SABLONNIERE, « Optimal rational symmetrical full circle parametrization », *Primeca*, 1999.
- [Cloutier 1967] L.-J. CLOUTIER et G.V. TORDION « Méthode générale d'analyse du contact des engrenages du type WILDHABER-NOVIKOV aux axes quelconque. », *Bulletin de la Société d'Etude de l'Industrie de l'engrenage*, 51, 1967.
- [Dantan 2007] J.Y. DANTAN, J. BRUYERE, C. BAUDOIN, L. MATHIEU. "Geometrical specification for gear-Expression, metrology and analysis", *CIRP Annals, Manufacturing Technology*, Vol. 56/1/07, pp517-520, 2007.
- [Dean 2000] T. A. DEAN, "The net-shape forming of gears", *Materials & Design*, Volume 21, Issue 4, Pages 271-278, 2000.
- [DIN EN ISO 14253-1] DIN EN ISO 14253 Part 1, 1999; Geometrical Product Specifications (GPS) – Inspection by measurement of workpieces and measurement equipment – Part 1: Decision rules for proving conformance or non-conformance with specifications.
- [Driot 2001] N. DRIOT, E. RIGAUD, J. SABOT, J. LIAUDET-PIERRET. "Allocation of gear tolerances to minimize gearbox noise variability". *Acta-acustica*, Vol. 87, pp 67-76, 2001.
- [Gaunet 2001] D. GAUNET « 3D Functional Tolerancing and Annotation : CATIA tools for Geometrical Product Specification », 7th CIRP International Seminar on Computer Aided Tolerancing, ENS Cachan, France, 2001.
- [Goch 1982] G. GOCH, « Theorie der prüfung gekrümmter werkstück-obertflächen in der koordinatenme Btechnik », Doctor ingenieur genehmigt dissertation, Hochschule der bundewehr, Hambourg.
- [Goch 2003] G. GOCH, « Gear metrology », keynote papers, *Annals of the CIRP*, Vol.52, 1-37, 2003.

- [GUM 1995] « Evaluation of measurement data - Guide to the expression of uncertainty in measurement. »
- [Guenther 2006] A. GUENTHER. "Evaluation of runout deviation at bevel gears based on pitch measurements", CIRP Annals, Vol. 55/1/06, pp539-542, 2006.
- [Henriot 1983] Traité théorique et pratique des engrenages, volume 2. 2d. DUNOD, 1983. ISBN: 2-04-015526-0.
- [Henzold 1993] G. HENZOLD, « Comparison of Vectorial Tolerancing and Conventional Tolerancing », International Forum on Dimensional Tolerancing and Metrology, CRTD- vol 27 , pages 147-160, 1993.
- [ISO 1328-1] ISO 1328-1, « Engrenages cylindriques-Système ISO de précision, Partie 1 : Définitions et valeurs admissibles des écarts pour les flancs homologues de la denture », 1995.
- [ISO/TS 17450-1] ISO/TS 17450-1, « Spécification géométrique des produits (GPS) - Concepts généraux -Partie 1: Modèle pour la spécification et la vérification géométriques. »
- [ISO/TS 17450-2] ISO/TS 17450-2, « Spécification géométrique des produits (GPS) - Concepts généraux — Partie 2: Opérateurs et incertitudes. »
- [ISO/TR 10064-1] ISO/TR 10064-1- Engrenages cylindriques- Code pratique de réception. Partie 1 : Contrôle relatif aux flancs homologues de la denture.
- [Joskowicz 1998] E. SACKS, L. JOSKOWICZ, « Parametric kinematic tolerance analysis of general planar systems », Computer-Aided Design, Volume 30, Issue 9 , page 707-714, 1998.
- [Joskowicz 1998] L. JOSKOWICZ, E. SACKS, V. SRINIVASAN, « Kinematic tolerance analysis », Computer-Aided Design, Volume 29, Issue 2 , Pages 147-157, 1997.
- [Leon 1991] J.C. LEON « Modélisation et construction de surfaces pour la CFAO », Editions Hermes, Paris, 1991, ISBN : 2-88601-273-9.
- [Levenberg 1944] K. LEVENBERG, « A method for the solution of certain problems in least-squares », Quarterly, Applied Mathematics 2, pages 164-168, 1944.
- [Litvin 1986] F.L. LITVIN « Modern theory of gearing and applications », Publications scientifiques du deuxième Congrès Mondial des Engrenages, Paris, 3-5 Mars 1986.

- [Litvin 1992] F.L. LITVIN « New developments on theory of gearing », Publications scientifiques du troisième Congrès Mondial des Engrenages et des Transmissions, pages 25-32, Paris, Mars 1992.
- [Litvin 2000] F.L. LITVIN, Q. LIAN, A.L. KAPELEVICH « Asymmetric modified spur gear drives : reduction of noise, localisation of contact, simulation of meshing and stress analysis. », Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 188 : 363-390, 2000.
- [Litvin 2004] F.L. LITVIN. “Gear Geometry and Applied Theory”. PTR Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 2004.
- [Ma 2007] C. MA, L. JIANG, “Some research on Levenberg-Marquardt method for the non-linear equations”, Applied mathematics and Computation, Volume 184, issue 2, pages 1032-1040, 15 Janvier 2007.
- [Mailhe 2007] J. MAILHE. « Contribution à la vérification des pièces mécaniques par calibre virtuel sur critère statistique », Thèse, IUT d’Aix en Provence, France, 2007.
- [Marquardt 1963] D. MARQUARDT, “An algorithm for least-squares estimation of non-linear parameters, SIAM, Applied Mathematics, 11, pages 431-441, 1963.
- [Mathieu 2004] L. MATHIEU, A. BALLU, « A model for a Coherent and Complete Tolerancing Process », CIRP, 2004
- [Mathieu 2007] L. MATHIEU, « Contribution à la maîtrise des variations géométriques des produits le long de leur cycle de vie », Thèse d’habilitation à diriger des recherches, LURPA, 2007.
- [MohammadKhani-Shali 2007] S. MOHAMMADKHANI-SHALI, « Contribution à l’étude de la redondance dans les ponts : Analyses des mécanismes de défaillance par surfaces de réponse », Thèse, ENPC, 2007.
- [Nigam 1995] S. D. NIGAM, J.U. TURNER, « Review of statistical approaches to tolerance analysis », Computer-Aided Design , Volume 17, Issue1 , pages 6-15, Janvier 1995.
- [Nougier 2001] J.P. NOUGIER, « Méthodes de calcul numérique, Systèmes d’équations », Hermes, Paris, ISBN : 2-7462-0278-6, vol. 1.

- [Pfeifer 2001] T. PFEIFER, S. KUROKAWA, S. MEYER. "Derivation of parameters of global form deviations for 3-dimensionnal surfaces in actual manufacturing processes", *Measurement*, Vol. 29/3/01, pp179-200, 2001.
- [Pillet 2005] M. PILLET, P.A. ADRAGNA, « Monographie sur le tolérancement inertiel », rédigée dans le cadre du projet INTERREG III, *Tolérancement des systèmes assemblés*. 2005.
- [Popiel 2006] T. POPIEL, L. NOAKES, « C² spherical Bézier splines », *Computer Aides Geometric Design*, pages 261-275, 2006.
- [Priel 1999] M. PRIEL, *Incertitudes de mesure et tolérances*, Septembre 1999.
- [Radouani 2003] M. RADOUANI, « Contribution à la validation du modèle des chaînes de cotes », Thèse, Ecole Normale Supérieure de Cachan, France.
- [Requicha 1983] A.A.G. REQUICHA, « Toward a Theory of Geometrical Tolerancing », *The International Journal of Robotics Research*, Vol2, Issue 4, pages 45-60, 1983.
- [Sacks 1998] E. SACKS, L. JOSKOWICZ, « Parametric kinematic tolerance analysis of general planar systems », *Computer-Aided Design*, Volume 30, Issue 9 , page 707-714, 1998.
- [Srinivasan 1993] V. SRINIVASAN, « Recent efforts in mathematization of ASME/ANSI v14.5m » In *Proceedings of the 3rd CIRP, Seminar on Computer Aided Tolerancing*, pages 223-232. Eyrolles, 1993.
- [Srinivasan 1999] V. SRINIVASAN, «On interpreting Key Characteristics», *Proceeding of the 1999 ASME Design Engineering Technical Conferences*, Las Vegas, Nevada, 12-15 Septembre 1999.
- [Srinivasan 2001] V. SRINIVASSAN, "An integrated view of geometrical product specification and verification", *CIRP Seminar on Computer Aided Tolerancing*, 2001.
- [Suh 1990] N. P. SUH. «The principles of design», Oxford University Press, New York, 1990.
- [Thiebaut 2001] F. THIEBAUT, « Contribution à la définition d'un moyen unifié de gestion de la géométrie réaliste basé sur le calcul des lois de comportement des mécanismes », thèse de doctorat, Ecole Normale Supérieure de Cachan, Décembre 2001.

- [Turner 1993] J.U. TURNER « A feasibility space approach for automated tolerancing », Journal of Engineering for Industry, Volume 115, Pages 341-346, 1993.
- [Ueng 1998] W.D. UENG, J.Y. LAI, J.L. Doong, « Sweep-surface reconstruction from three-dimensional measured data », Computer-Aided Design, Volume 30, Issue 10, Septembre 1998, Pages 791-805.
- [Valex 1995] P. VELEX. « Dynamique de l'engrenage ». Thèse d'habilitation à diriger des recherches, INSA Lyon, 1995.
- [Vignes 1980] J. VIGNES, « Algorithmes numériques. Analyse et mise en œuvre 2, Equations et systèmes non linéaires, Technip, Paris, 1980, ISBN : 2-7108-0365-8, vol. 2.
- [Weckenmann 2007] A. WECKENMANN, M. WALZ, W. MÜLLER, J. EICHENBERG. "Evaluation of the economical benefit of measurement systems in industrial applications". 10th CIRP Conference on Computer Aided Tolerancing, Specification and Verification for Assemblies, Erlangen, Germany, 2007.
- [Werner 1998] A. WERNER, K. SKALSKI, S. PISZCZATOWSKI, W. SWIESZKOWSKI, Z. LECHNIAK, « Reverse engineering of free-form surfaces », Journal of Materials Processing Technology, Issue 76, pages 128-132, 1998.
- [Wirst 1991] A. WIRTZ, « Vectorial tolerancing for production quality control and functional analysis in design », CIRP International Working Seminar on Tolerancing, PennState, pages 77-84, 1991.
- [Wirst 1993] A. WIRTZ, Chr. GÄCHTER, D. WIPF « Form Unambiguously Defined Geometry to the Perfect Quality Control Loop », CIRP Annals – Manufacturing Technology, Volume 42, Issue 1, Pages 615-618, 1993
- [Yau 1995] H.T. YAU, « Reverse engineering of engine intake ports by digitization and surface approximation », Pergamon, 1995.

Modèles et outils d'analyse des variabilités en phase de conception des produits à denture.

RESUME :

Cette thèse s'inscrit dans la problématique de la maîtrise de l'incertain / des variabilités en phase de conception de produit à denture / engrenage. Ces travaux ont porté plus particulièrement sur la maîtrise des variations géométriques et des incertitudes avec comme point central le modèle de spécification et comme objet d'étude les engrenages. En effet, la motivation des travaux, concernant la partie analyse, est la flexibilisation des approches pour supporter différentes représentations des modèles de spécification et la motivation des travaux concernant les incertitudes est la réduction de celles-ci en caractérisant et proposant des modèles de spécification.

Concernant l'analyse des tolérances, deux formulations du comportement d'engrènement, deux modélisations discrète ou paramétrique de la géométrie et plusieurs méthodes de résolution ont été proposées et expérimentées. Elles permettent l'analyse de tolérances formulées d'une manière vectorielle, par zone ou hybride, par simulation de Monte Carlo.

Concernant les incertitudes, une formalisation des incertitudes de corrélation a été proposée à partir de l'approche Axiomatic Design en définissant cette incertitude comme l'intervalle de confiance des coefficients de sensibilité de la matrice. Ainsi, plusieurs modèles de spécification ont été caractérisés au regard de ces incertitudes et celles de mesure afin d'avoir une vue globale des incertitudes entachant la prise de décision de conformité du produit.

Mots clés : Engrenages, Analyse des tolérances, Incertitudes, Spécification géométrique, Modèle de comportement cinématique, Incertitudes de mesure et de corrélation.

Models and tools for the gear variation management during the design stage.

ABSTRACT:

With the improvement in technology and tightening of performance requirements, the cost and the required precision of assemblies increase as well. There is a strong need for increased attention to tolerance design in order to decrease the uncertainties of tolerancing decisions which can profoundly impact the quality and cost of a gear. Therefore, the objective of this PhD research is the management of geometrical variations and uncertainties focusing on specification models. This research concerning the tolerance analysis was motivated to incorporate and increase the flexibility of the approaches to support different representations of specification models. Also, the uncertainties were reduced by characterizing and proposing specification models.

Concerning tolerance analysis, two meshing behavior formulations, two geometrical models (discrete or parametric) and several numerical methods have been proposed and tested. They allow analysis of vectorial tolerance, tolerance by zone, or hybrid formulation, using Monte Carlo Simulation.

Concerning the uncertainties, correlation uncertainty formalization has been proposed. It is based on the Axiomatic Design approach, by defining this uncertainty as a confidence interval of the sensibility matrix coefficients. Thus, several specification models have been characterized regarding these uncertainties (correlation uncertainties) and measurement uncertainties to have a global view of uncertainties which affect the conformity decision.

Keywords : Gears, Tolerance Analysis, Uncertainties, Geometrical Specification, Kinematic Behavior Model, Measurement and correlation uncertainties.