

Une méthode MultiMaillages MultiPhysiques parallèle pour accélérer les calculs des procédés incrémentaux

Mohamad Ramadan

▶ **To cite this version:**

Mohamad Ramadan. Une méthode MultiMaillages MultiPhysiques parallèle pour accélérer les calculs des procédés incrémentaux. Matériaux. École Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2010. Français. NNT : . pastel-00536041

HAL Id: pastel-00536041
https://pastel.hal.science/pastel-00536041

Submitted on 15 Nov 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ParisTech
INSTITUT DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES
PARIS INSTITUTE OF TECHNOLOGY

MINES ParisTech

École doctorale n°364 : Sciences Fondamentales et Appliquées

Doctorat ParisTech

T H È S E

pour obtenir le grade de docteur délivré par

l'École nationale supérieure des mines de Paris

Spécialité " Mécanique Numérique "

présentée et soutenue publiquement par

Mohamad RAMADAN

Le 8 octobre 2010

Une méthode MultiMaillages MultiPhysiques parallèle pour accélérer les calculs des procédés incrémentaux

Directeur de thèse : **Lionel FOURMENT**

Jury

M. Hamid ZAHROUNI, Professeur, LPMM, Université de Metz	Rapporteur
M. David DUREISSEIX, Professeur, LaMCoS, INSA de LYON	Rapporteur
M. Hachmi BEN DHIA, Professeur, LMSSMat, Ecole Centrale Paris	Examinateur
M. Alexis GAILLAC, Docteur, Cezus, Areva	Examinateur
M. Hugues DIGONNET, Docteur, CEMEF, Mines ParisTech	Examinateur
M. Lionel Fourment, Docteur HDR, CEMEF, Mines ParisTech	Examinateur

T H È S E

MINES ParisTech
CEMEF- UMR CNRS 7635
1 Rue Claude Daunesse BP 207 06904 Sophia-Antipolis Cedex, France

REMERCIEMENTS

Je tiens à exprimer tout d'abord mes remerciements aux membres du jury, qui ont accepté d'évaluer mon travail de thèse : Hachmi Ben Dhia, Hamid Zahrouni, David Dureisseix, Alexis Gaillac, Lionel Fourment et Hugues Digonnet.

Je voudrais particulièrement remercier le directeur de cette thèse Lionel Fourment pour m'avoir guidé et encadré avec beaucoup de patience.

Merci également à Hugues Digonnet pour son aide et son support précieux.

Je tiens à remercier Thierry Coupez pour ses conseils et ses suggestions.

Je remercie également Pierre Montmitonnet, Luisa Silva, Elisabeth Massoni, Hallen Ben Aissa, Yvan Chastel, Michel Bellet, Jean-Loup Chenot, Jean-Francois Agassant, Katia Mocellin, Pierre-Olivier Bouchard, Rudy Valette, Marc Bernacki, Roland Logé, Yannick Tillier, François Bay, Michel Vincent et tous les chercheurs du CEMEF.

Un remerciement particulier à Patrick Coels pour les longues, riches et précieuses discussions.

Merci également à Marie-Françoise, Sylvie, Genevieve, Nadine, Florence, Brigitte, Sylvie, l'équipe EII et tous les permanents du CEMEF.

Je tiens à remercier tous les members du Club Forgeage Libre (Areva (Cezus), Areva (Sfar Steel), ArcelorMittal(Industeel), Aubert&Duval, Manoir Industries) et l'equipe de Transvalor.

Sans oublier tous les collègues, tout particulièrement Makhlouf, Sami, Mohsen et Gilles.

Pour terminer je souhaite remercier mes parents, mes beaux parents et mon épouse pour leur soutien permanent surtout pendant les périodes difficiles.

Table des matières

Chapitre I : Introduction 1

1.1. Les procédés incrémentaux 2
1.1.1. Simulation numérique des procédés incrémentaux 2
1.1.1.1. Problématique du temps de calcul 3

1.2. Comment réduire le temps de calcul 4
1.2.1. Les méthodes du problème local 4
1.2.1.1.La méthode de Sous-structuration élastique plastique 4
1.2.1.2. La méthode RD (Raffinement-Déraffinement) 5
1.2.1.3.La méthode Multigrilles localisée 6
1.2.2. Les méthodes avec maillage de stockage 7
1.2.3. La méthode Multigrilles 10
1.2.3.1. Quelle accélération peut-on obtenir avec la méthode Multigrilles 11
1.2.3.1.1. Algorithme Bigrilles 11
1.2.3.1.2. Applications numériques 11
1.2.4. Les méthodes MultiMaillages 15

1.3. Notre choix 18

1.4. Organisation de la thèse 18

Chapitre II : La modélisation du problème thermomécanique 20

2.1. Présentation du cas étudié 21

2.2. Modélisation du problème mécanique 23
2.2.1. Equations de base 23
2.2.2. Conditions aux limites 23
2.2.3. Loi de comportement 24
2.2.4. Frottement 25
2.2.5. Bilan des équations mécaniques 25
2.2.6. Formulation faible du problème 25
2.2.7. Discrétisation spatiale 26
2.2.8. Le contact 28
2.2.9. Discrétisation temporelle 29
2.2.10. Le système 30
2.2.11. Résolution par la méthode de Newton-Raphson: 31

2.2.12. Elimination du terme bulle 31

2.3. La modélisation du problème thermique 34
2.3.1. Equations de base 34
2.3.2. Conditions aux limites 34
2.3.3. Formulation Faible du problème thermique 35
2.3.4. Discrétisation spatiale 36
2.3.5. Discrétisation temporelle 36
2.3.5.1.Schémas à un seul pas de temps 37
2.3.6. Le couplage thermomécanique 37

Chapitre III : La méthode MultiMaillages MultiPhysiques 39

3.1. La Méthode MultiMaillages MultiPhysiques 40
3.1.1. Algorithme MultiMaillages MultiPhysiques 40
3.1.1.1.Le problème continu 40
3.1.1.2.Le problème discret 42
3.1.1.3.Algorithme de la méthode MMMP adapté au problème étudié 44
3.1.2. Paramètres de la méthode MMMP 45
3.1.2.1.Zones de déformation 45
3.1.2.2.Adaptation du Maillage Mécanique 45
3.1.2.2.1. Conservation des nœuds dans la zone ZD 45
3.1.2.2.2. Emboîtement des nœuds dans la zone ZFD 46
3.1.2.3.La taille de déraffinement 47

3.2.Génération du Maillage Mécanique 48
3.2.1. Le Mailleur topologique MTC 48
3.2.1.1.Topologie de maillage 48
3.2.1.2.Critère de volume minimal 48
3.2.1.3.Algorithme du Mailleur topologique 49
3.2.1.4.Remaillage de surface et couplage avec le volume 49
3.2.2. Déraffinement emboîté par nœuds 50

3.3. Le transport 52
3.3.1. La méthode d'interpolation inverse 52
3.3.2. Transport sans relocalisation 53
3.3.3. Les variables transportées 54
3.3.4. Résultats 55

3.4. Aspect parallèle 59
3.4.1. Génération parallèle du Maillage Mécanique 59
3.4.2. Le transport parallèle 61
3.4.3. Equilibre des charges 61

3.5. Synthèse 64

3.6. Perspectives 64

Chapitre IV : Résultats 66

4.1. Etude de la précision 67
4.1.1. Calcul d'erreur 67
4.1.1.1. Evaluation de l'erreur en des nœuds déterminés 67
4.1.1.1.1. Nœuds de la zone de déformation 67
4.1.1.1.2. Nœuds de la zone de faible déformation 68
4.1.1.1.3. Nœuds extrêmes 69
4.1.1.2. Evaluation de l'erreur suivant la norme Max 70
4.1.1.3. Evaluation de l'erreur suivant la norme Euclidienne 70
4.1.1.3.1. La vitesse 71
4.1.1.3.2. La vitesse de déformation généralisée 72
4.1.1.3.3. Les coordonnées 73
4.1.1.3.4. La température 74
4.1.1.3.5. La déformation généralisée 75
4.1.1.4. Comparaison avec l'erreur éléments finis 76

4.2. Etude de l'accélération MultiMaillages MultiPhysiques 78
4.2.1. Etude de l'accélération en fonction du nombre d'incréments 78
4.2.2. Etude de l'accélération en fonction du nombre de nœuds 81
4.2.3. Etude de l'accélération en fonction de la configuration 83
4.2.3.1. Application 83

4.3. Résultats de calculs Parallèle 85
4.3.1. Application 1 (maillage de 23 500 nœuds) 85
4.3.1.1. Accélération MultiMaillages en parallèle 85
4.3.1.2. Accélération parallèle en MultiMaillages 87
4.3.2. Application 2 (maillage de 53 500 nœuds) 89
4.3.2.1. Accélération MultiMaillages en parallèle 89
4.3.2.2. Accélération parallèle en MultiMaillages 91
4.4. Synthèse 95

Conclusion Générale 96
Perspectives 97
Bibliographie 98
Résumé 103
Abstract 104

Chapitre I

Introduction

1.1. Les procédés incrémentaux

Dans le domaine de la mise en forme des matériaux, le forgeage est un des procédés les plus utilisés, tout particulièrement lorsque l'on recherche des pièces particulièrement résistantes. En effet, la qualité des pièces obtenues par ce procédé est meilleure que celle obtenue par la plupart des autres procédés de mise en forme. Le forgeage couvre une large gamme de procédés différents tels que le laminage circulaire, l'extrusion, le matriçage…Parmi ceux-ci, nous nous intéressons ici particulièrement à ceux qui ont un caractère incrémental.
On définit les procédés incrémentaux [Groche et al.07] comme ceux où les différentes zones de la pièce à forger subissent plusieurs coups de déformation par le même outillage durant une étape de production. Citons par exemple, le martelage, le laminage circulaire et le forgeage orbital…La caractéristique principale de ce type de procédés est que la zone de déformation est petite relativement au volume total de la pièce, comme on peut le voir sur la Figure 1-1, qui montre le martelage d'une barre. La zone qui se déforme est uniquement la zone de contact avec les outils qui ont une longueur clairement inférieure à celle de la pièce.



Figure 1-1 : Procédé de martelage

Plusieurs facteurs rendent les procédés incrémentaux plus attirants pour les fabricants que les autres procédés de forgeage : leurs outillages sont simples par rapports à d'autres procédés tels que le matriçage où les outils sont complexes et spécifiques, c'est-à-dire ils sont utilisables pour un produit particulier contrairement aux procédés incrémentaux où les mêmes outils peuvent être utilisés pour fabriquer une large gamme de produits, allant des pièces de petites dimensions jusqu'à des grosses pièces qui peuvent atteindre une masse de 100 tonnes. Ces pièces de grandes dimensions sont généralement utilisées dans les domaines nucléaire et aéronautique, ce qui impose une haute qualité de fabrication, surtout aux niveaux de la structure et de la microstructure. Pour satisfaire à ces exigences, des études, mécanique, thermique et microstructurale sont nécessaires, afin de minimiser le nombre de prototypes qui précèdent la fabrication effective de la pièce finale. Différents matériaux modèles tels que le plomb ou la plasticine ont été utilisés pour simuler le procédé avant la fabrication effective jusqu'à l'apparition de la simulation numérique qui est progressivement devenue incontournable.

1.1.1. Simulation numérique des procédés incrémentaux

L'utilisation de la simulation numérique pour le calcul de structure remonte aux années 70 et depuis elle s'est déployée progressivement jusqu'à ce devenir un outil indispensable dans

l'industrie mécanique en général et dans la mise en forme des matériaux en particulier. L'attraction à la simulation numérique est motivée par les avantages qu'elle offre :

1- Elle réduit le coût et le temps de fabrication en remplaçant les essais expérimentaux, tout particulièrement lorsque le matériau est un alliage au prix très élevé, ou que la pièce est de très grandes dimensions.

2- Elle fournit une large gamme qualitative et quantitative d'informations que l'on ne peut pas obtenir par d'autres outils, surtout au niveau de l'histoire de certaines variables comme la déformation généralisée $\bar{\varepsilon}$, qui sont indispensables pour l'étude microstructurale de la pièce fabriquée.

3- Elle permet de prendre en considération l'aspect multiphysiques des procédés simulés ce qui n'est pas faisable par des matériaux modèles ou des approches simplifiées.

La conservation de l'histoire du calcul et la prise en compte de l'aspect mutliphysiques sont deux points primordiaux pour la simulation des procédés incrémentaux et particulièrement pour le procédé de martelage. Ce dernier constitue en effet l'application principale de notre thèse.
Cependant, la simulation numérique a un inconvénient qui est le temps de calcul élevé dans le cas des procédés incrémentaux.

1.1.1.1. Problématique du temps de calcul

Du point de vue de l'analyse numérique, la simulation des procédés incrémentaux ne pose pas de difficultés particulières : à chaque incrément de temps, les déformations sont relativement simples et faciles à simuler avec tout logiciel adapté aux grandes transformations. La difficulté vient des temps de calcul qui résultent du très grand nombre d'opérations à simuler. Le temps de calcul d'une simulation de martelage ou d'un autre procédé incrémental similaire peut prendre des semaines voire des mois. Un exemple de ce type de procédé est l'étirage sur la machine à forger, un procédé incrémental où la pièce est déformée en utilisant 4 outils. Il est représenté sur la Figure 1-2. Il nécessite la simulation de quelques 250 opérations de martelage qui requièrent presque deux semaines de calcul avec le logiciel Forge3® [Chenot89] sur un cluster à 9 processeurs.

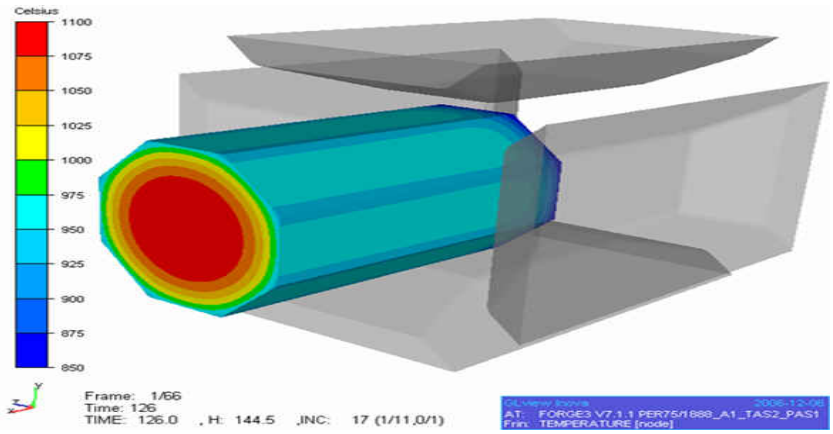


Figure 1-2 : Simulation numérique de l'étirage avec machine à forger ; isovaleurs de température en cours de martelage.

La problématique donc est de réduire le temps de calcul des procédés incrémentaux tout en prenant en considération les deux paramètres que sont leur caractère multiphysiques et le cumul des transformations au cours du procédé.

1.2. Comment réduire le temps de calcul

Pour trouver une méthode qui réduise le temps de calcul et qui soit optimale pour notre cas, on va commencer par regarder les travaux existants dans la littérature. Dans la partie suivante du chapitre, on présentera une partie de ces travaux, que l'on classe suivant 4 catégories :

1- Les méthodes du problème local
2- Les méthodes avec maillage de stockage
3- La méthode Multigrilles
4- Les méthodes MultiMaillages

1.2.1. Les méthodes du problème local

Les méthodes du problème local sont les méthodes qui se basent sur l'idée d'adapter localement le maillage ou le solveur pour réduire le temps de calcul. Autrement dit ces méthodes profitent que la déformation soit localisée. Dans ce qui suit on présente trois de ces méthodes : la méthode de Sous-structuration élastique plastique, la méthode RD (Raffinement-Déraffinement) et la méthode Multigrilles localisée.

1.2.1.1. La méthode de Sous-structuration élastique plastique

La méthode de sous-structuration élastique plastique [Hadoush et al.09] est basée sur l'idée de diviser le maillage en des sous-structures (Figure 1-3) qui sont de types élastique ou plastique. Les sous-structures plastiques sont celles qui entourent l'outil représenté par un cercle, et les élastiques sont constituées par le reste du maillage. Le fait de ne pas faire le calcul plastique dans les « sous-structures » élastiques réduit le temps de calcul. Cette réduction est obtenue par la diminution du temps de l'assemblage des matrices du système, alors que le temps de résolution reste pratiquement le même, ce qui réduit l'efficacité de la méthode lorsque le nombre de degrés de liberté augmente étant donné que le temps d'assemblage devient négligeable. Les auteurs appliquent la méthode sur le procédé de formage incrémental (Figure 1-4) [Hadoush et al.09]. L'accélération obtenue est égale à 2,4.

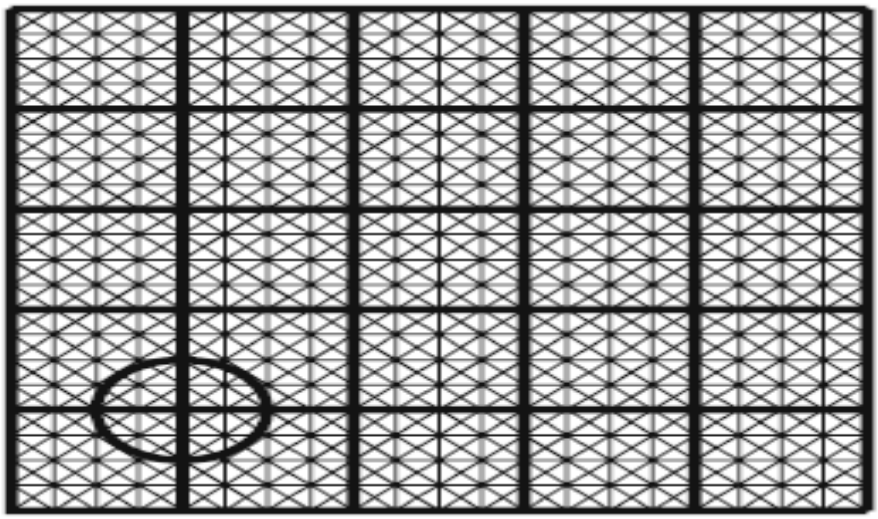


Figure 1-3 : Sous-structuration du maillage [Hadoush et al.09]

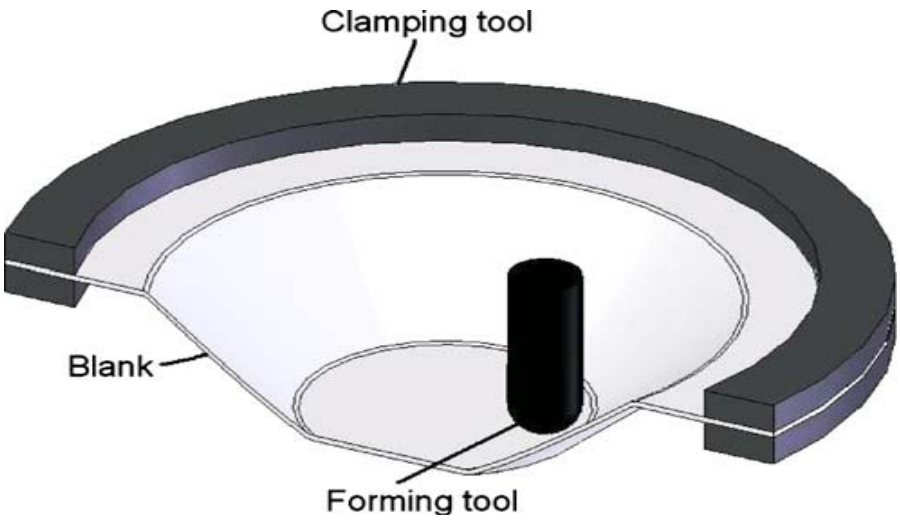


Figure 1-4 : Procédé de formage incrémental [Hadoush et al.08]

1.2.1.2. La méthode RD (Raffinement-Déraffinement)

La méthode de Raffinement-Déraffinement [Hadoush et al.08] consiste à adapter le maillage par rapport à la déformation imposée. Le maillage est raffiné dans la zone déformée et déraffiné dans la zone qui demande moins de précision, comme le montrent les Figures 1-5 et 1-6. Un inconvénient de cette méthode est qu'elle ne conserve pas avec précision l'histoire des variables cumulées en fonction du temps. Lorsque le raffinement de maillage se déplace, les gradients de déformation calculés ne peuvent être stockés avec la même précision sur une partie déraffinée du maillage. Les auteurs appliquent la méthode au même procédé de formage incrémental (Figure 1-4). Ils obtiennent une accélération égale à 2.

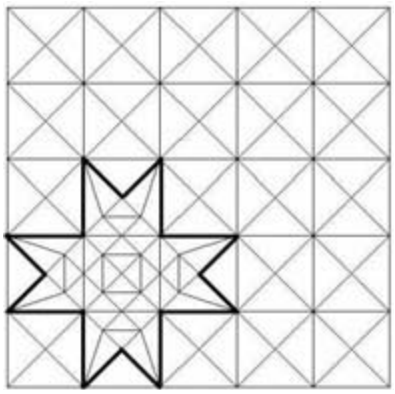


Figure 1-5 : Raffinement de la partie inférieure du coté gauche du maillage et déraffinement du reste du maillage

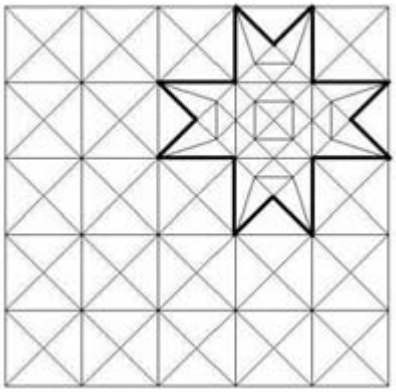


Figure 1-6 : Raffinement de la partie supérieure du coté droite du maillage et déraffinement du reste du maillage

1.2.1.3. La méthode Multigrilles localisée

La méthode Multigrilles localisée dérive de la méthode Multigrilles. Elle est utilisée pour les calculs des phénomènes localisés tels que la propagation des fissures [Rannou et al.07], [Rannou et al.10]. Le maillage de base étant grossier, on définit des grilles de plus en plus fines dans la zone où la déformation est localisée (Figure 1-7). On résout le problème sur les différents niveaux de grilles (Figure 1-8) et on passe d'un niveau à un autre en définissant des opérateurs de transport semblables à ceux d'une méthode Multigrilles normale. La limitation principale d'une telle approche est la difficulté de l'appliquer à des problèmes de plasticité où on utilise généralement des maillages non structurés et des formulations éléments finis devant satisfaire des conditions de compatibilité de sorte que la procédure de raffinement des grilles est beaucoup plus difficile à mettre en œuvre. Une autre limitation est que le maillage principal est un maillage déraffiné, ce qui pose un problème dans les applications couplées dont l'une des physiques n'est pas localisée ; par exemple la thermique, dans le cas de martelage, évolue sur tout le maillage et n'est pas spécialement localisée dans la zone de déformation. Dans ce cas, la résolution thermique serait faite sur le maillage déraffiné ce qui réduirait la précision du calcul.

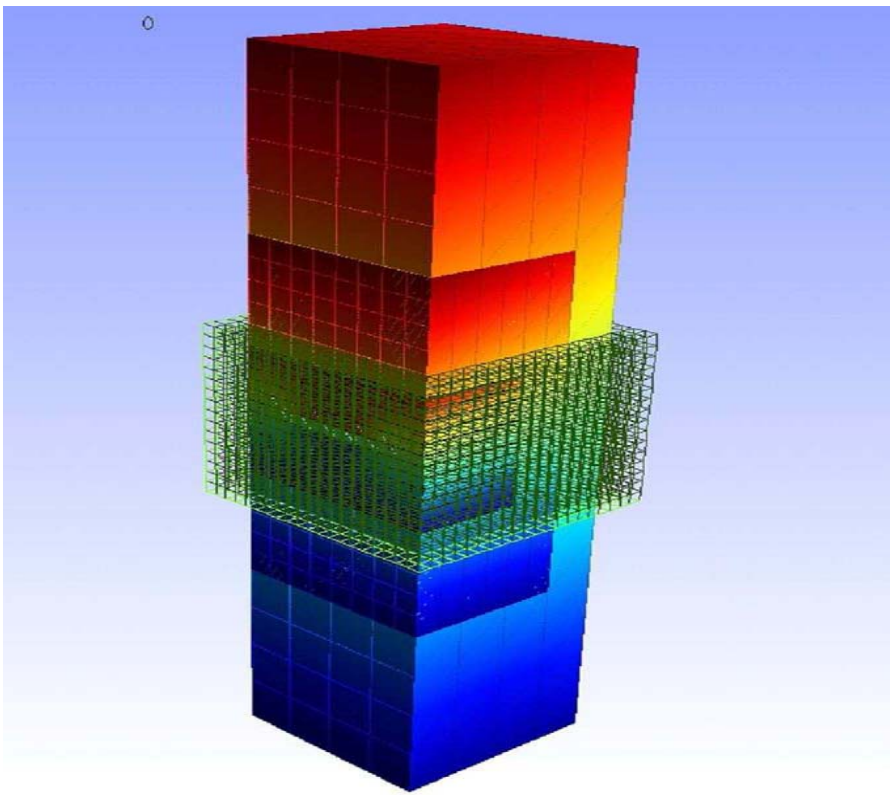


Figure 1-7 : Maillage Multigrilles localisé [Rannou et al.09]

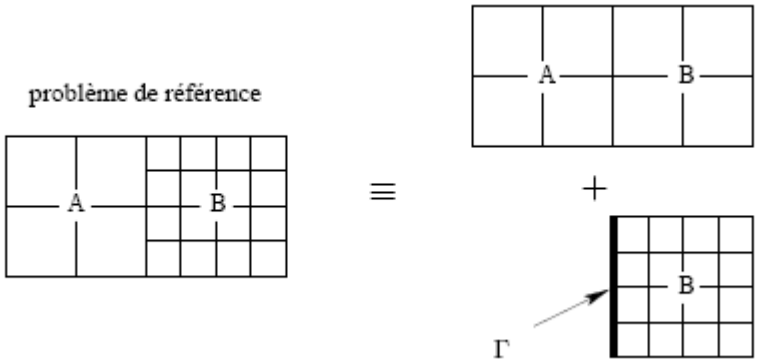


Figure 1-8 : Décomposition du problème en grille fine et grille déraffinée [Rannou et al.07]

1.2.2. Les méthodes avec maillage de stockage

À l'origine, ce type de méthode est proposé pour surmonter le problème de la perte de l'histoire qui se produit lorsqu'on applique les méthodes de déraffinement de maillage pour les procédés incrémentaux. L'idée est d'ajouter un maillage de stockage pour conserver avec précision les variables cumulées en fonction du temps, telles que la déformation généralisée $\bar{\varepsilon}$, lorsque la configuration évolue après déplacement des outils ou du domaine.
La première publication rencontrée utilisant cette idée est [Kim et al.90], pour le procédé de laminage circulaire. Elle consiste à définir deux maillages (Figure 1-9) :

- AMS (Actualy Rotating Mesh System) ou système de maillage effectivement en rotation :

Ce maillage est lié à la pièce. Il est entièrement raffiné et sert à stocker les résultats obtenus par le maillage SMS, tels que les coordonnées des nœuds, l'histoire des variables cumulées…Ce maillage est actualisé (en rotation et en déformation) à partir du champ de vitesses calculé sur le maillage SMS.

- SMS (Spatialy Fixed Mesh System) ou système de maillage spatialement fixe :

Ce maillage est fixe en rotation dans l'espace. Il est adapté à la résolution, c'est à dire qu'il est raffiné dans la zone de contact avec les outils et déraffiné ailleurs. Il est utilisé pour faire le calcul des champs mécaniques dont les résultats seront interpolés sur le maillage AMS.
Le fait d'effectuer le calcul sur le maillage déraffiné (qui a moins de degrés de liberté) produit une accélération des calculs. L'algorithme de la méthode est donné sur la Figure 1-10. Cette approche est aussi utilisée dans [Yea et al.03] pour le même type de procédé.
Bien que cette méthode soit meilleure que les méthodes qui utilisent un seul maillage, on peut remarquer que :
- Le maillage de stockage n'est pas remaillé
- Les variables qui nécessitent d'être calculées avec un maillage uniforme (par exemple la température) ne sont pas obtenues avec précision puisque le calcul est fait sur un maillage déraffiné.
- La zone de déformation (= zone de contact avec les outils) n'est pas la même dans les deux maillages, ce qui produit des erreurs d'interpolation des résultats du maillage fin vers le maillage déraffiné. Notons que c'est cependant la zone qui demande le maximum de précision.

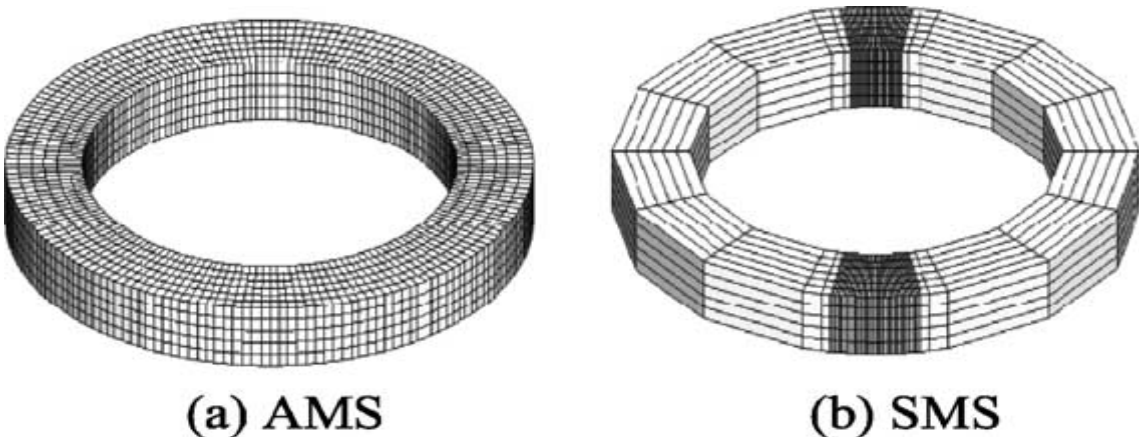


Figure 1-9 : Maillage AMS (a) et SMS (b) [Yea et al.03]

- Calcul de la vitesse sur le maillage fixe
- Interpolation du champ de vitesse sur le maillage tournant
- Mise à jour de la géométrie du maillage AMS
- Mise à jour de la géométrie du maillage SMS à partir de celle du maillage AMS
- Vérification des conditions aux limites sur le maillage SMS

Figure 1-10 : Algorithme de la méthode à deux maillages

Dans [Hu et al.94], on utilise cette méthode [Kim et al.90], en introduisant une amélioration qui est que le maillage déraffiné (SMS) est entièrement inclus dans le maillage fin (AMS). C'est-à-dire que tous les nœuds du maillage déraffiné sont aussi des nœuds du maillage fin. Cette amélioration augmente la précision du calcul, car la zone de déformation est la même pour les deux maillages (Figure 1-11) ce qui élimine les erreurs d'interpolation dans cette zone. Les auteurs appliquent la méthode au laminage circulaire. Cette nouvelle « version » de la méthode est aussi utilisée dans [Lim et al.98] pour le même procédé.

Dans [Keun Moon et al.08], les auteurs proposent de faire un calcul élément fini élastique à l'extérieur de la zone de déformation du maillage fin plutôt qu'une interpolation à partir du maillage déraffiné.

Dans [Barton et al.07] et [Hirt et al.07], les auteurs proposent de transporter les variations des variables entre les deux maillages plutôt que les variables elles-mêmes, pour diminuer l'erreur causée par le transport direct des variables.

$X(t+\Delta t)$ étant le champs des coordonnés sur le maillage fin à l'instant $t+\Delta t$. Le calcul de l'incrément de déplacement $\Delta X(\Delta t)$ est effectué sur le maillage déraffiné :

$$\Delta X = X(t+\Delta t) - X(t) \qquad \textbf{(1-1)}$$

et il est ensuite interpolé sur le maillage fin :

$$\Delta X \xrightarrow{\text{interpolation}} \Delta Y \qquad \textbf{(1-2)}$$

Où ΔY est l'incrément de déplacement sur le maillage de stockage. Puis les coordonnées du maillage de stockage à l'instant $t+\Delta t$ sont calculées :

$$Y(t+\Delta t) = Y(t) + \Delta Y \qquad \textbf{(1-3)}$$

La même procédure est appliquée pour les autres variables. La méthode est appliquée au procédé d'étirage Figure 1-12.

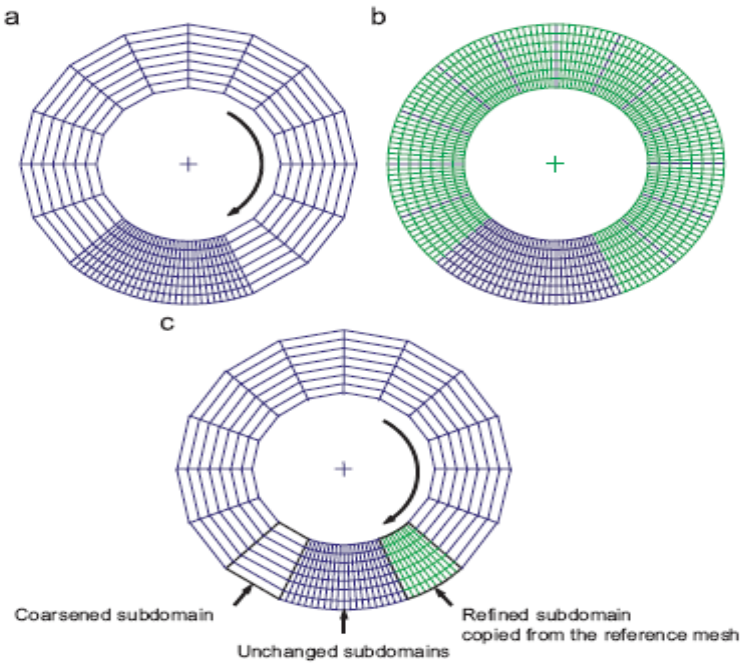


Figure 1-11 : Maillage déraffiné (a) Maillage fin (b) et Maillage déraffiné après remaillage (c).

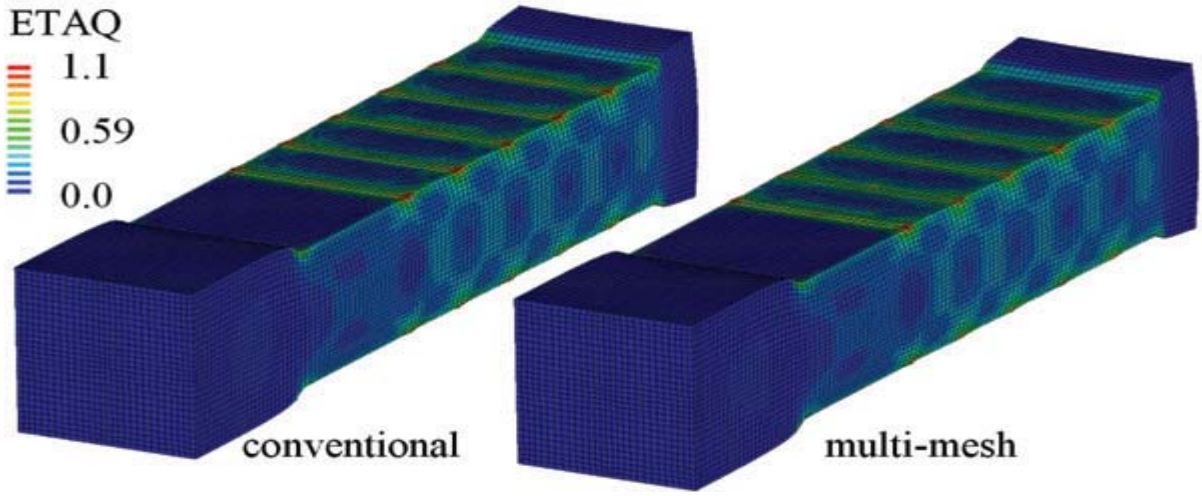


Figure 1-12 : Calculs de la déformation équivalente : calcul MonoMaillage (partie gauche) et calcul avec maillage de stockage (partie droite) [Hirt et al.07]

L'inconvénient principal de ces méthodes est qu'elles ne sont pas parfaitement précises lorsqu'elles sont appliquées à des problèmes ayant un caractère multiphysiques, comme cela est le cas dans l'application de martelage étudiée dans [Hirt et al.07] où il y a un couplage thermomécanique important et la nécessité de calculer avec précision tant la température que la déformation du domaine. La thermique est calculée sur le maillage de calcul, mais ce maillage étant déraffiné, le calcul n'est pas aussi précis que nécessaire. Autrement dit on a sacrifié la précision du calcul thermique pour accélérer le calcul mécanique.

1.2.3. La méthode Multigrilles

La méthode Multigrilles permet de résoudre les systèmes linéaires, souvent avec une grande efficacité. Son utilisation a commencé dans le domaine de la mécanique des fluides, où elle était appliquée à des problèmes discrétisés en différences finies ou volumes finis [Wesseling92], [Wriggers98], [Adams00], [Lambropoulos03], [Carré95] et [Tai03]...Son utilisation dans le domaine de la mécanique du solide, où la discrétisation des problèmes est faite par la méthode des éléments finis, a été plus tardive et moins fréquente mais elle s'est bien développée, [El Hadj87], [Ledain91], [Feng et al.97], [Lee98], [Mocellin et al.01] et [Rey et al.07]. Le principe des méthodes Multigrilles est d'utiliser plusieurs grilles de calcul de tailles décroissantes pour résoudre un système d'équations. Une accélération est obtenue par le fait que les grilles grossières sont plus efficaces que les grilles fines pour réduire les basses fréquences de la solution. La méthode consiste donc à faire quelques itérations sur la grille fine pour lisser les hautes fréquences de la solution, puis à passer à des grilles de plus en plus grossières pour éliminer les basses fréquences de l'erreur.
Avec cette approche, le problème est considéré dans sa globalité, de sorte que l'histoire des calculs est bien conservée en travaillant sur une grille uniformément raffinée. En revanche, on espère que le caractère local de la déformation pourra être traité « automatiquement » et de manière algébrique par le solveur, et que la méthode permettra de converger très rapidement vers la solution dans les zones faiblement déformées, réduisant ainsi le temps total de résolution.

1.2.3.1. Quelle accélération peut-on obtenir avec la méthode Multigrilles

Pour tester l'accélération que l'on peut obtenir par une méthode Multigrilles, on considère une simulation de martelage et on utilise un solveur Multigrilles [Rey07] pour effectuer les calculs. Dans la suite, on présente brièvement l'algorithme du solveur Multigrilles utilisé ; pour plus de détails voir [Rey07].

1.2.3.1.1. Algorithme Bigrilles

La méthode Bigrilles consiste à considérer seulement deux types de grilles, la grille fine qui est la grille de calcul, et la grille grossière. On nomme lissage la réalisation de quelques itérations d'une méthode itérative classique. L'algorithme de la méthode (présenté sur la Figure 1-13) commence par une étape de pré-lissage suivie d'une étape de restriction permettant de passer sur la grille grossière sur laquelle on résout généralement le système par une méthode directe (ou par une méthode itérative, à précision donnée) pour obtenir la correction à appliquer. Le résultat est ensuite prolongé sur la grille fine, avant d'effectuer une étape de post-lissage de cette solution corrigée.

On considère l'équation $A_h X_h = b_h$, les étapes de l'algorithme sont les suivantes:

1. Pré-lissage : $X_h \leftarrow L(X_h, \nu)$

avec L le pré-lisseur, ν le nombre d'itérations de pré-lissage. L est une méthode de résolution itérative

2. Calcul du résidu : $r_h = b_h - A_h X_h$
3. Restriction du résidu : $r_H = p_h^H r_h$

avec p_h^H l'opérateur de restriction (projection sur la grille grossière)

4. Calcul de la correction : $\delta X_H = S(A_H, r_H)$

avec S le solveur sur la grille grossière (une méthode de résolution directe en général)

5. Prolongement de la correction : $\delta X_h = p_H^h \delta X_H$

avec p_H^h l'opérateur de prolongement (interpolation sur la grille fine)

6. Correction : $X_h \leftarrow X_h + \delta X_h$
7. Post-lissage : $X_h \leftarrow L'(X_h, \nu')$

avec L' le post-lisseur et ν' le nombre d'itérations de post-lissage. L' est une méthode de résolution iterative

---

Figure 1-13 : Algorithme Bigrilles

La méthode Multigrilles comporte plusieurs niveaux de grilles grossières. Son algorithme peut être déduit itérativement de celui de la méthode Bigrilles, en le modifiant de manière à résoudre le système sur la grille grossière par une méthode Multigrilles.

1.2.3.1.2. Applications numériques

On considère 5 incréments de la 4ème passe d'une simulation de martelage (Figure 1-14), en 4 opérations. Ses paramètres sont donnés dans le tableau 1-1. Le but est de comparer les

comportements du solveur MG3 (on note MG3 le solveur de résidu minimal préconditionné par la méthode Multigrilles avec 3 niveaux de grilles) et du solveur standard MG0 (on note MG0 le solveur de résidu minimal préconditionné par Choleski incomplet) tous deux construits à partir de la librairie PETSC [Balay et al.97]).

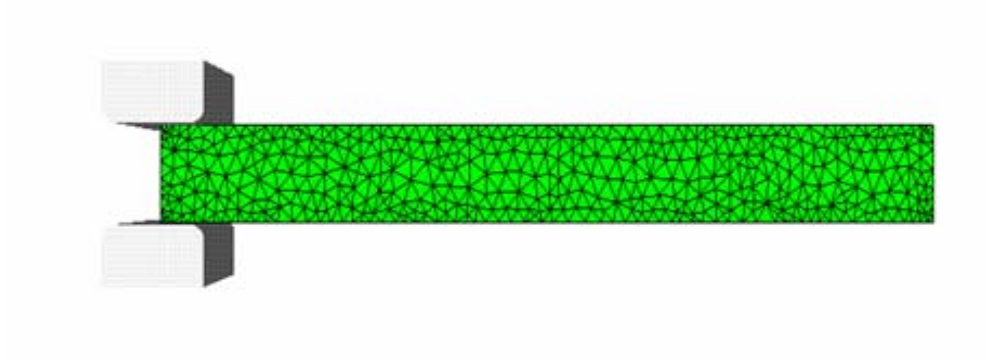


Figure 1-14 : Simulation de martelage

Dimensions du lopin	[2580 ; 171 ; 185] mm
Dimensions des outils	[251; 442 ; 125] mm
Presse	hydraulique
Vitesse	40 mm/s
Pas de temps (fixe)	0,025 s
Nombre d'incréments	5

Tableau 1-1 : Paramètres de la simulation

Les simulations sont réalisées en utilisant 7 maillages différents, respectivement à 3080, 6364, 8705, 19633, 30390, 39580, 52600 nœuds. Les Figures 1-15 à 1-18 montrent les maillages fins, intermédiaires et grossiers, respectivement des simulations 3 080, 8 705, 30 390 et 52 600 nœuds.

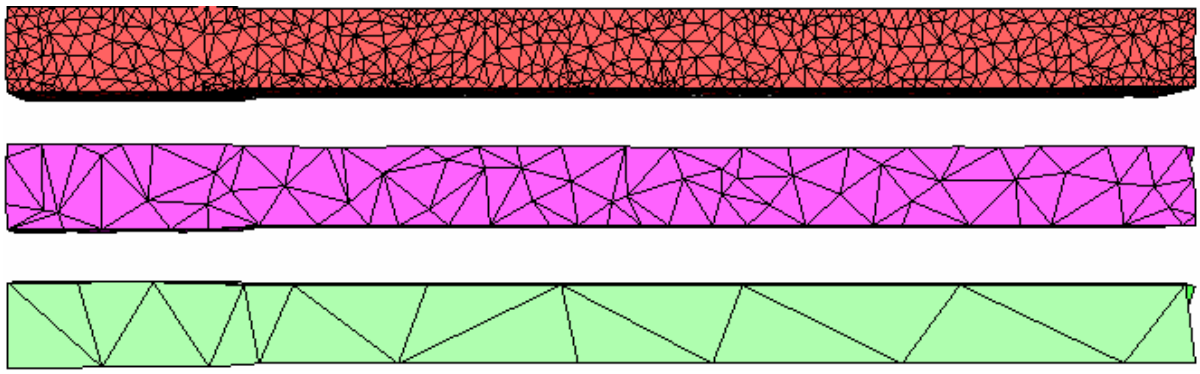


Figure 1-15 : Maillage fin : 3080 noeuds (haut), maillage intermédiaire : 320 noeuds (milieu), maillage grossier : 58 nœuds (bas)

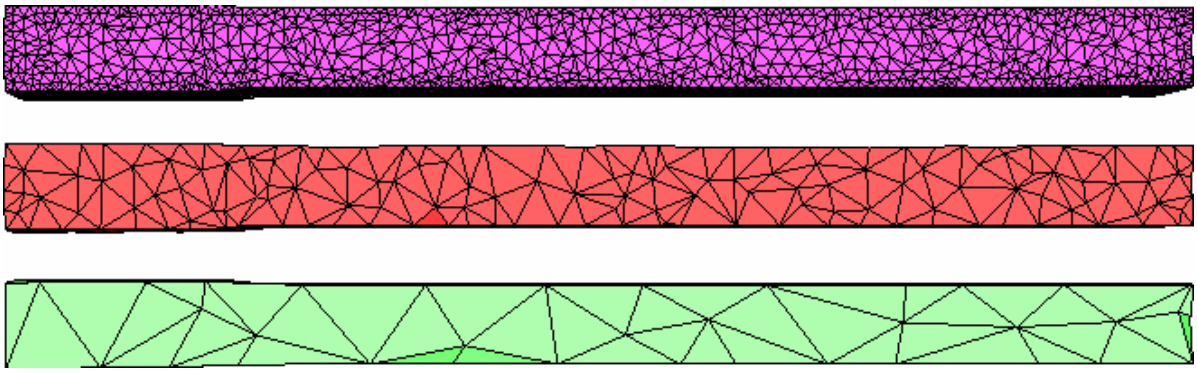


Figure 1-16 : Maillage fin : 8705 noeuds (haut), maillage intermédiaire : 681 noeuds (milieu), maillage grossier : 90 nœuds (bas)

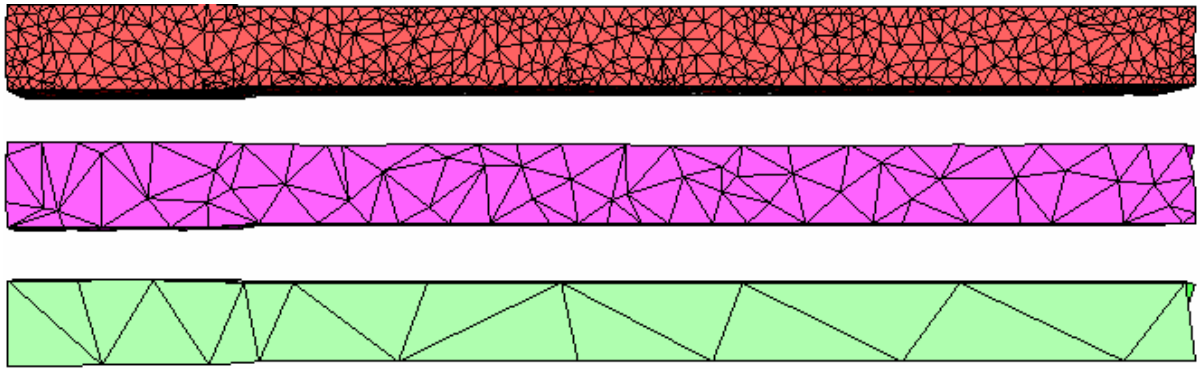


Figure 1-17 : Maillage fin : 30 390 noeuds (haut), maillage intermédiaire : 1976 noeuds (milieu), maillage grossier : 193 nœuds (bas)

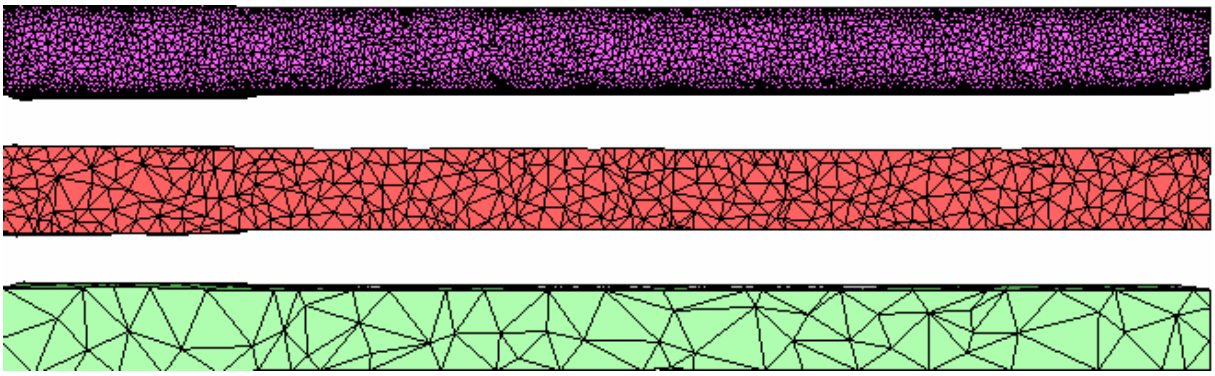


Figure 1-18 : Maillage fin : 53 600 noeuds (haut), maillage intermédiaire : 3185 noeuds (milieu), maillage grossier : 275 nœuds (bas)

La Figure 1-19 montre l'évolution du temps de calcul en fonction du nombre de nœuds. On remarque que la différence entre la courbe bleue, qui représente le temps de calcul du solveur MG0, et la courbe rouge, qui représente le temps de calcul du solveur MG3, augmente avec le nombre de nœuds. Ceci explique l'augmentation des accélérations Multigrilles (données par le tableau 1-2) avec le nombre de nœuds. Elle commence à 1,21 pour un nombre de nœuds égal à 3 080, puis passe à 1,46 pour 19 633 nœuds, et arrive à 2,06 pour 52 600 nœuds.

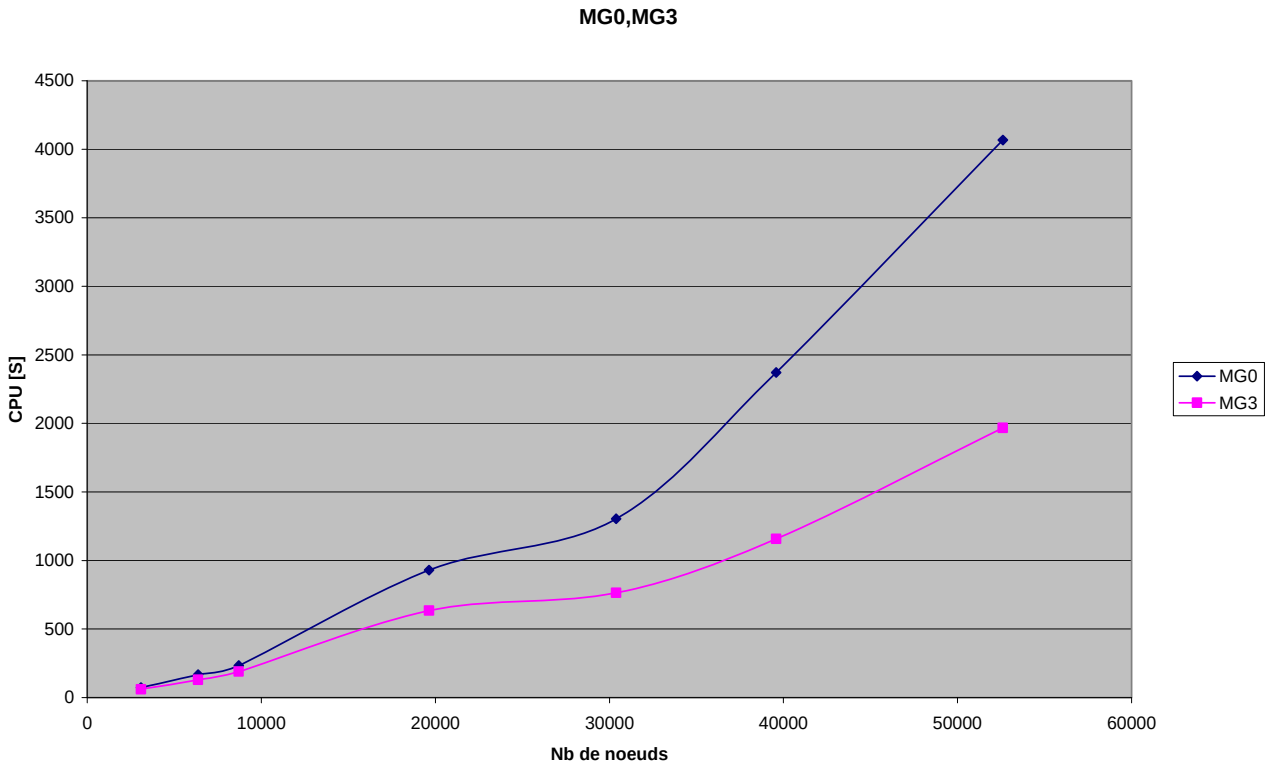


Figure 1-19 : CPU en fonction du nombre de noeuds

Maillage	MG0 CPU [s]	MG3 CPU [s]	Accélération
3080	73	60	1,21
6364	167	129	1,29
8705	234	190	1,23
19633	930	634	1,46
30390	1304	764	1,7
39580	2372	1158	2,04
52600	4068	1968	2,06

Tableau 1-2 : Accélérations Multigrilles

Maillage initial	Maillage intermédiaire	Maillage grossier	Taux 1	Taux 2	Accélération
3080	320	58	9,6	5,5	1,21
6364	587	82	10,8	7,1	1,29
8705	681	90	12,8	7,5	1,23
19633	1352	146	14,5	9,2	1,46
30390	1976	193	15,3	10,2	1,7
39580	2439	229	16,2	10,6	2,04
52600	3185	275	16,5	11,5	2,06

Tableau 1-3 : Taux de déraffinement

Pour comprendre les résultats des accélérations données par la méthode Multigrilles, et qui sont considérés comme peu satisfaisants, on a étudié l'influence du taux de déraffinement τ (c'est-à-dire le nombre de nœuds du maillage fin sur le nombre de nœuds du maillage grossier) qui est souvent considéré un paramètre important dont dépend l'accélération Multigrilles. Des études précédentes [Guillard93] ont montré que la valeur optimale de τ est 8, et que les accélérations Multigrilles diminuent quand la valeur du taux de déraffinement s'en éloigne. Le tableau 1-3 montre les accélérations obtenues et les taux de déraffinement correspondants. On remarque que les valeurs des taux de déraffinement de la grille la plus fine sont assez éloignées de 8 surtout pour les 4 dernières simulations, où l'on s'attendait d'avoir des accélérations plus grandes que celles obtenues. Ce qui peut être une explication des accélérations Multigrilles limitées obtenues.

1.2.4. Les méthodes MultiMaillages

Les méthodes MultiMaillages ont été spécifiquement proposées pour la résolution des problèmes multiphysiques. Elles consistent à résoudre chaque problème physique sur un maillage qui lui est adapté. Autrement dit, elles permettent de prendre en considération l'aspect multiphysiques qui est négligé dans les autres méthodes avec maillage de stockage. Cette méthode est proposée par [Li05]. Le point clef de son travail est la manière de générer les maillages de calcul qui sont construits à partir d'un maillage de base. Ces maillages sont générés en effectuant des raffinements hiérarchiques et emboîtés en se basant sur des estimateurs d'erreurs. Le raffinement est fait en divisant chaque triangle en quatre sous-triangles et chaque côté en 2 sous-côtés (Figure 1-20) :

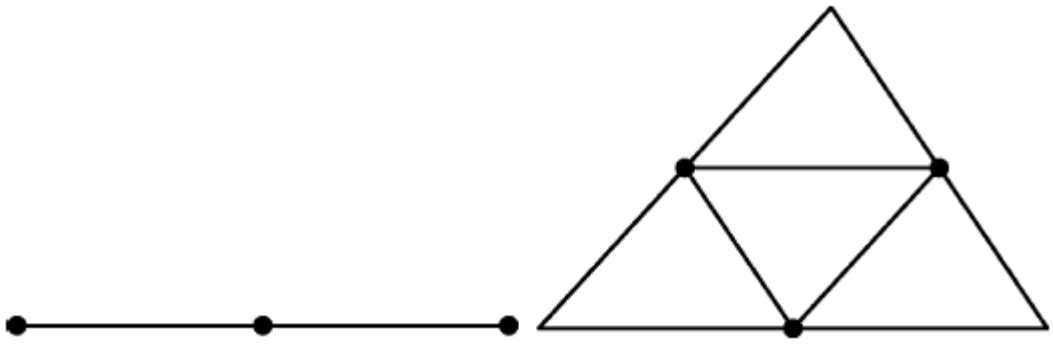


Figure 1-20 : Raffinement d'un côté (partie gauche) et d'un triangle (partie droite) [Li05]

L'application répétée de cette procédure donne une structure d'arbre hiérarchique qui, à partir d'un triangle donne 4 sous-triangles dont chacun contient 4 sous-triangles et ainsi de suite comme le montre la Figure 1-21.

Les points, les côtés et les triangles du maillage sont reliés par des relations d'appartenances qui déterminent à quel triangle appartient chaque côté et à quel côté appartient chaque point. Cette structure de données facilite le calcul des termes couplés, étant donné que la relation entre un élément donné avec l'élément qui le contient ou l'élément qui lui appartient est déjà définie. Une application de cette méthode sur l'écoulement de couette est présentée dans [Di et al.09]. Les auteurs considèrent deux champs principaux, la phase du liquide et la vitesse. L'algorithme MultiMaillages associé à ce problème est donné par la Figure 1-22. Il est constitué de 3 étapes principales :

1- La construction du maillage de base qui est utilisé pour construire les maillages correspondant aux variables du problème.
2- La construction des maillages M_v et M_ϕ et l'initialisation des variables ϕ et v.
3- La boucle sur le nombre d'incréments : résolution du problème couplé et actualisation des maillages M_v et M_ϕ si nécessaire.

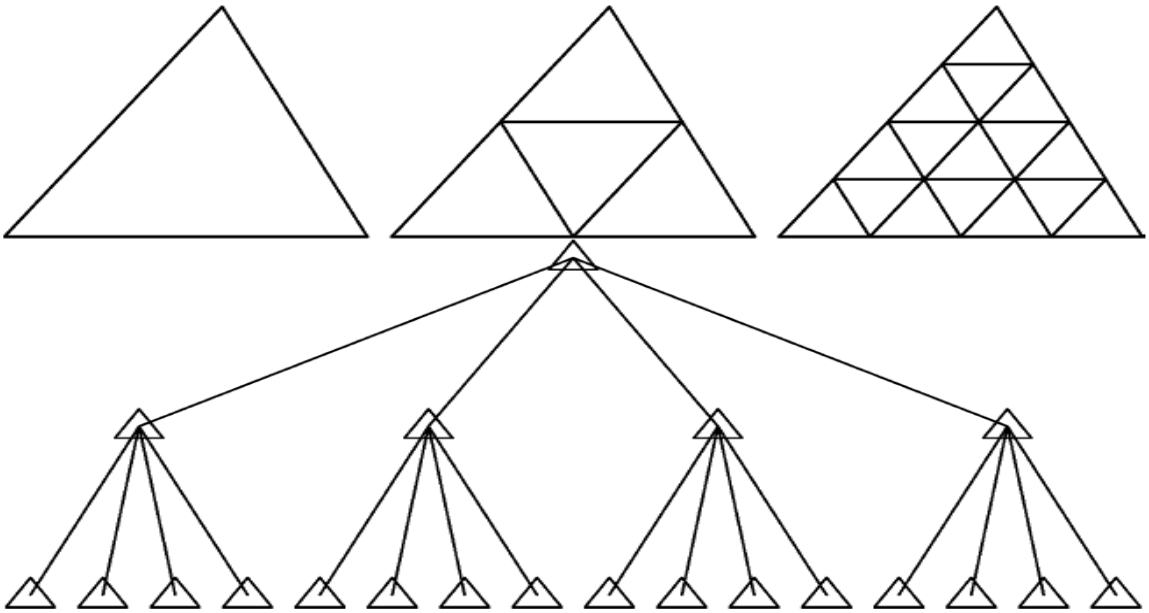


Figure 1-21 : Structure hiérarchique de raffinement [Li05]

- Préparation du maillage de base
- Initialisations et construction de M_v et M_ϕ
- Tant que $t < t_{total}$ (t_{total} est le temps total)
  - Résoudre le problème couplé
  - $t = t + \Delta t$
  - Si M_T et M_ϕ ne sont pas mis à jour après m (valeur constante) pas de temps
    - Actualiser M_T
    - Actualiser M_ϕ

  Fin

Fin

Figure 1-22 : Algorithme de la méthode MultiMaillages présentée dans [Di et al.09]

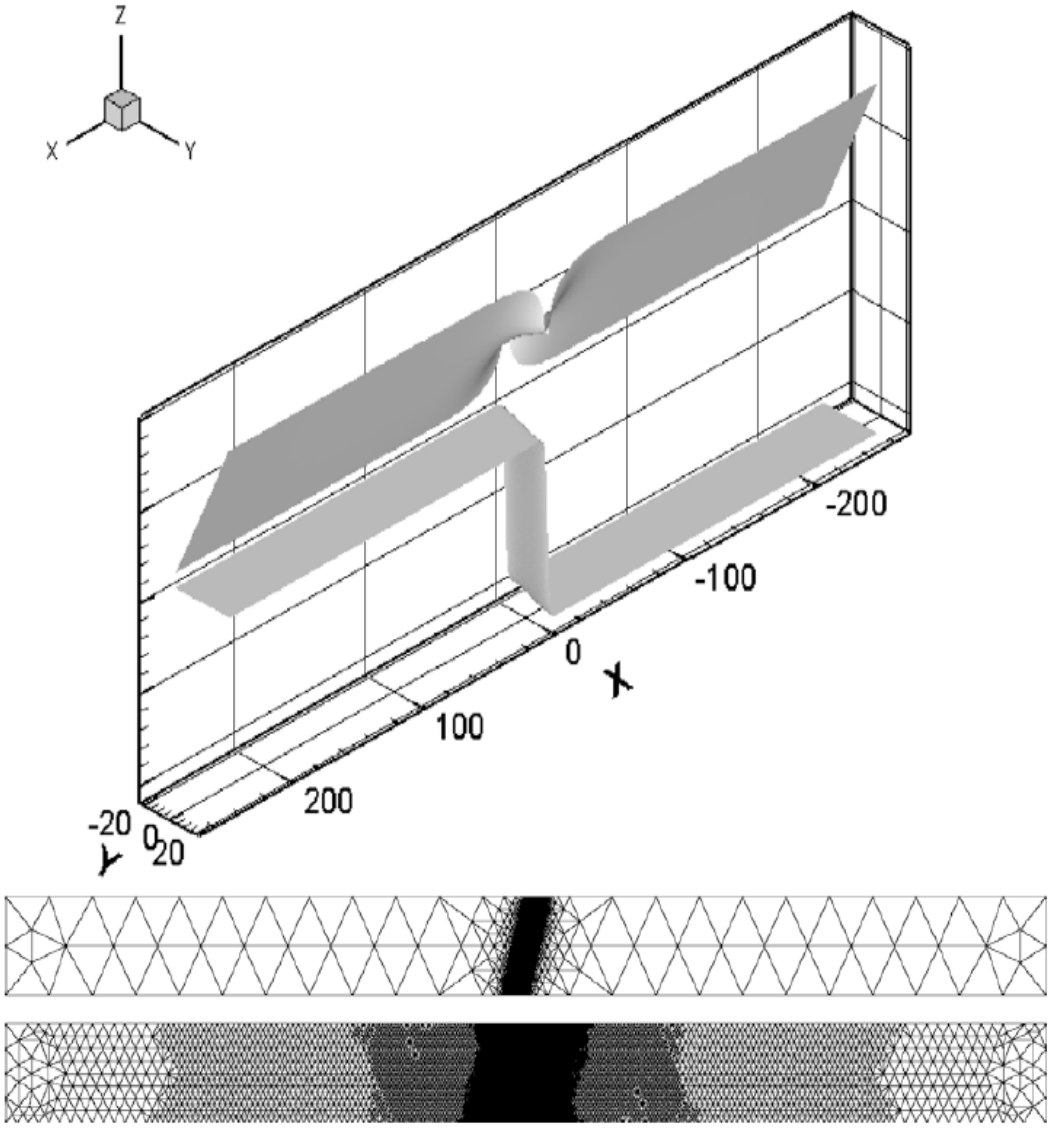


Figure 1-23 : Partie supérieure: profil du champs de phase (haut) profil de la vitesse (bas). Partie inférieure: maillage adapté au champ de phase (haut), maillage adapté au champ de vitesse (bas) [Di et al.09]

Les profils des deux champs (ϕ et v) sont présentés sur la partie supérieure de la Figure 1-23. L'adaptation de chaque maillage (partie inférieure de la Figure 1-23) est basée sur le profil de la variable correspondante. Le champ de phase étant constant à l'extérieure de la zone d'interface (où le changement de phase se fait), les auteurs considèrent une taille de maille déraffinée dans cette zone, et dans la zone d'interface ils considèrent une taille de mailles très fines pour capter les détails du champ de phases. Par contre, pour le champ de vitesses le gradient à l'extérieur de la zone d'interface est plus fort, donc les auteurs effectuent un déraffinement progressif du maillage. On note que les auteurs ne présentent pas l'accélération de calcul obtenue par la méthode. La méthode est aussi utilisée dans [Hu et al.09] où elle est appliquée à la simulation de la formation de dendrites qui se produisent lors du refroidissement d'un métal. Les variables du problème sont le champ de température T et le champ de phase ϕ. Les auteurs utilisent alors deux maillages, un pour la température et un pour le champ de phases. Sur des simulations 2D, les auteurs observent une accélération de 2.

1.3. Notre choix

- La méthode de Sous-structuration plastique élastique est efficace pour les problèmes élasto-plastiques avec des maillages simples en 2D. L'accélération qu'elle offre devient négligeable en 3D lorsque le temps d'assemblage devient négligeable.
- Les méthodes de raffinement de maillage comme la méthode R-D et la méthode Multigrilles localisées ne prennent pas en considération le caractère multiphysiques ni la problématique de la conservation de l'histoire.
- Dans les méthodes avec maillage de stockage, l'aspect multi-physique n'est pas pris en compte.
- La méthode Multigrilles offre de bonnes accélérations, comparables aux meilleures des autres méthodes, mais ne sont pas considérées comme suffisantes, d'autant que sa parallélisation pose encore des difficultés au niveau des opérateurs de transfert entre les grilles et au niveau du solveur direct sur la grille la plus grossière.

En conséquence, seulement la méthode MultiMaillages peut être considérée comme adaptée à la résolution de notre problématique. On adopte alors cette méthode en prenant en considération trois aspects importants :

1- Le fait que les équations de notre problème multiphysiques sont couplées itérativement, et non de manière forte, ce qui nous permet d'utiliser des opérateurs de transport plus simples et peu coûteux, à chaque incrément de calcul seulement.

2- Le fait que nous utilisons des maillages non structurés, ce qui nécessite un mailleur suffisamment flexible pour générer l'ensemble des maillages de calculs optimaux propres à chaque physique.

3- La contrainte de résoudre des équations en parallèle, ce qui impose que toutes ses étapes soient parallélisables.

1.4. Organisation de la thèse

La thèse est constituée de 3 nouveaux chapitres :

Dans le deuxième chapitre, on présente le cas de martelage utilisé pour nos applications, puis on aborde la formulation thermomécanique du problème. On présente la formulation forte du problème mécanique, puis la formulation faible et on fait de même pour le problème thermique. La résolution est aussi présentée ainsi que le couplage thermomécanique.

Le troisième chapitre est consacré à la présentation de la méthode MultiMaillages, que l'on appelle dans la suite de ce manuscrit la *méthode MMMP* (MultiMaillages MultiPhysiques). On présente ainsi le principe de la méthode, son algorithme et ses paramètres que sont les dimensions de la boîte de déformation et la taille de déraffinement. Puis, on détaille les deux étapes principales de la méthode : 1- la génération du maillage Mécanique, on présente alors le mailleur utilisé et le déraffinement emboîtés par nœuds. 2- le transport des champs avec les techniques utilisées pour améliorer le transport et diminuer son coût. Enfin, on présente

l'aspect parallèle de la méthode MMMP : la génération du maillage Mécanique et le transport parallèles ainsi que l'équilibre des charges.

Le dernier chapitre est dédié à la présentation des résultats. Une étude de la précision de la méthode est faite. On étudie l'erreur sur un nombre de nœuds choisis aléatoirement dans les différentes zones du maillage. Puis on effectue une étude plus quantitative de l'erreur en utilisant la norme Max et la norme Euclidienne sur tout le maillage; on compare l'erreur MultiMaillages à celle du calcul élément fini. Ensuite, on étudie les paramètres desquels dépend l'accélération de la méthode MMMP : on montre l'accélération en fonction des incréments, du nombre de nœuds et de la configuration de calcul. Puis on présente l'accélération MultiMaillages en parallèle et l'accélération parallèle en MultiMaillages, et on étudie la scalabilité de la méthode en comparant l'efficacité MultiMaillages, à celle Monomaillage pour des maillages qui ont les mêmes degrés de liberté.

Chapitre II

La modélisation du problème thermomécanique

Bien que la méthode MMMP soit utilisable pour presque tous les procédés incrémentaux, certaines étapes de la méthode, telles que la génération des maillages de calcul, ne sont pas les mêmes pour tous les procédés. Pour cela, il est nécessaire de choisir un procédé spécifique sur lequel appliquer la méthode et étudier ses performances. On a choisi le procédé de martelage [Choi et al.06], [Groche et al.07]. Les paramètres du cas de martelage que l'on va utiliser dans la suite de ce manuscrit sont présentés dans la première partie de ce chapitre, ainsi que les différents maillages que l'on va utiliser dans les calculs. Dans la deuxième partie du chapitre, on présente la modélisation du problème mécanique : les équations de base, les conditions aux limites et la loi de comportement. On présente aussi les discrétisations spatiale et temporelle du problème ainsi que la formulation finale du système à résoudre. Dans la troisième partie, on introduit le modèle thermique et, pareillement à la partie mécanique, on présente les équations de base, les conditions aux limites et les discrétisations spatiale et temporelle du problème. Enfin, on présente le couplage thermomécanique.

2.1. Présentation du cas étudié

Avant de présenter la modélisation thermomécanique de notre problème, on va présenter le cas étudié. On considère un problème de martelage Figure 2-1, dont les paramètres de la simulation sont donnés dans le Tableau 2-1. Les caractéristiques de la pièce sont données dans le Tableau 2-2 et celles de l'outil dans le Tableau 2-3.

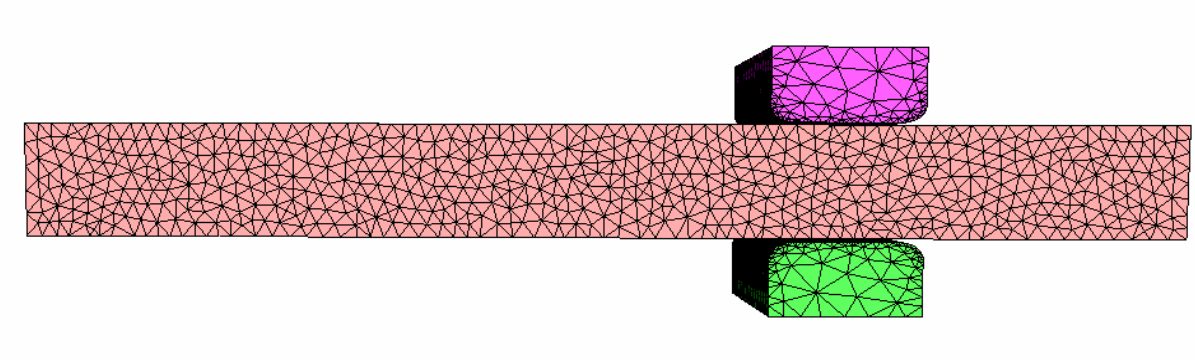


Figure 2-1 : Simulation de martelage

Matériau	Acier
Pas de temps : Δt	0,01 [s]
Nombre d'incréments	75
Masse volumique : ρ	7850 [Kg/ m^3]
Capacité thermique : *c*	778 [m^2/s^2k^{-1}]
Conductivité thermique : *k*	35 500 [$kg.m/s^3k^{-1}$]
Coefficient de frottement : α	0,3
Sensibilité à la température : β	0,00269
Sensibilité à la vitesse de déformation : *m*	0,14542

Tableau 2-1 : Paramètres de la simulation

Largeur	[y]	200 [mm]
Longueur	[x]	2000 [mm]
Hauteur	[z]	200 [mm]

Tableau 2-2 : Caractéristiques de la pièce

Largeur	[y]	252 [mm]
Longueur	[x]	442 [mm]
Hauteur	[z]	125 [mm]
Vitesse outil	[z]	40 [mm/s]

Tableau 2-3 : Caractéristiques de l'outil

On utilise 3 maillages Référence différents :

- Un maillage de 9 000 nœuds (Tableau 2-4) à partir duquel est généré par déraffinement, un maillage mécanique de 2 500 nœuds.

	Nb nœuds	Nb éléments
Maillage Référence	9 000	45 134
Maillage Mécanique	2 500	12 067
Taux de déraffinement	3,6	

Tableau 2-4 : Maillage de 9 000 nœuds

- Un maillage de 23 500 nœuds (Tableau 2-5) auquel correspond un maillage mécanique de 6 300 nœuds.

	Nb noeuds	Nb éléments
Maillage Référence	23 500	129 908
Maillage Mécanique	6 300	31 600
Taux de déraffinement	3,7	

Tableau 2-5 : Maillage de 23 500 noeuds

- Un maillage de 53 500 nœuds (Tableau 2-6) auquel correspond un maillage mécanique de 13 800 nœuds.

	Nb noeuds	Nb éléments
Maillage Référence	53 500	282 682
Maillage Mécanique	13 800	72 128
Taux de déraffinement	3,9	

Tableau 2-6 : Maillages de 53 500 noeuds

2.2. Modélisation du problème mécanique

Dans ce paragraphe on présente les équations qui modélisent la partie mécanique du problème, en commençant par les équations de base, en passant par la discrétisation éléments finis et en arrivant à la résolution du système obtenu.

2.2.1. Equations de base

La formulation mécanique est basée sur deux équations, l'équation de continuité (2-1) et l'équation de mouvement (2-3) :

- L'équation de continuité:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho v) = 0 \qquad \textbf{(2-1)}$$

ρ étant la masse volumique et v la vitesse. La dérivée de la masse volumique est considérée nulle (matériau incompressible dont la déformation élastique est négligée), on obtient alors l'équation d'incompressibilité donnée par l'équation (2-2):

$$div(v) = 0 \qquad \textbf{(2-2)}$$

- L'équation de mouvement:

Les forces de gravité et d'inertie n'étant pas prises en considération (elles sont négligeables pour les procédés étudiés), l'équation d'équilibre est la suivante :

$$div\sigma = 0 \qquad \textbf{(2-3)}$$

Où σ est le tenseur des contraintes.

2.2.2. Conditions aux limites

Ω étant le volume du corps (matériau) à déformer, on définit $\partial\Omega$ comme étant la frontière du domaine. Cette frontière sera découpée en plusieurs sous domaines (2-4) suivant le type de condition imposée :

$$\partial\Omega = \partial\Omega_L + \partial\Omega_c \qquad \textbf{(2-4)}$$

- $\partial\Omega_L$ est la frontière libre, sur cette partie de la frontière la pièce ne subit aucune contrainte, ce qui est traduit par l'équation (2-5) :

$$\sigma n = 0 \qquad \textbf{(2-5)}$$

- Sur la frontière de contact entre les outils et la pièce, on impose deux de types de conditions:
  - Une condition qui assure la non pénétration de la pièce dans l'outil, donnée par les équations de Signorini:

$$\begin{cases}(v - v_{outil}).n \le 0 \\ \sigma_n \le 0 \\ [(v - v_{outil}).n]\sigma_n = 0\end{cases} \quad \textbf{(2-6)}$$

Où v_{out} est la vitesse de l'outil et σ_n la pression de contact ($\sigma_n = \sigma\, n.n$) et n la normale sortante.

- ❖ Une condition de frottement permettant d'exprimer la scission de frottement τ :

$$\tau = \sigma\, n - (\sigma_n)n \quad \textbf{(2-7)}$$

2.2.3. Loi de comportement

Pour modéliser le comportement d'un matériau qui subit une déformation, on lui associe une loi de comportement. Pour les procédés de forgeage, on peut utiliser suivant les circonstances une loi élasto-plastique ou élasto-viscoplastique. Pour plus de détails sur les lois de comportement le lecteur peut se référer à [Terzolo04]. A chaud, la partie élastique de la déformation est négligée, et on utilise généralement une loi viscoplastique. Dans la suite, on retiendra la loi de Norton-Hoff qui relie le déviateur des contraintes *s* au tenseur des vitesses de déformations $\dot{\varepsilon}$ par une expression non linéaire fonction de la vitesse de déformation généralisée $\dot{\bar{\varepsilon}}$, de la consistance du matériau K et de la sensibilité à la vitesse de déformation *m*:

$$s = 2\mathrm{K}(\sqrt{3}\,\dot{\bar{\varepsilon}})^{m-1}\dot{\varepsilon} \quad \textbf{(2-8)}$$

Le déviateur s est défini par l'équation suivante :

$$s = \sigma + pI \quad \textbf{(2-9)}$$

Où , I le tenseur identité et p la pression hydrostatique définie par :

$$p = -\frac{1}{3}Tr(\sigma) \quad \textbf{(2-10)}$$

La consistance K est un paramètre qui peut dépendre de variables internes. Dans le cas des matériaux thermoécrouissable, il est possible d'utiliser un modèle reliant la température à la déformation équivalente selon l'expression suivante :

$$\mathrm{K} = \mathrm{K}_0 e^{-\beta T}(\bar{\varepsilon} + \bar{\varepsilon}_0)^n \quad \textbf{(2-11)}$$

Avec β est le coefficient de sensibilité à la température, n est le coefficient de sensibilité à l'écrouissage, T la température, $\bar{\varepsilon}$ la déformation équivalente ; $\bar{\varepsilon}_0$ et K_0 sont des constantes. La vitesse de déformation généralisée $\dot{\bar{\varepsilon}}$ est définie par :

$$\dot{\bar{\varepsilon}} = \sqrt{\frac{2}{3}\dot{\varepsilon}(v) : \dot{\varepsilon}(v)} \quad \textbf{(2-12)}$$

Le tenseur des vitesses de déformations $\dot{\varepsilon}$ est calculé à partir de la vitesse de la façon suivante :

$$\dot{\varepsilon}(v) = \frac{1}{2}(\nabla v + (\nabla v)^t) \tag{2-13}$$

À partir de la vitesse de déformation généralisée $\dot{\bar{\varepsilon}}$, on calcule la déformation équivalente $\bar{\varepsilon}$, comme étant sa valeur cumulée en fonction du temps soit :

$$\bar{\varepsilon} = \int_0^t \dot{\bar{\varepsilon}} dt \tag{2-14}$$

2.2.4. Frottement

Le frottement est représenté par la scission τ qui se produit au niveau de la zone de contact entre deux corps, lorsqu'une vitesse de glissement relative se produit. Dans le cas considéré, on utilise souvent la loi de Norton (pour plus de détails voir [Bousseta05] et [Bruchon09]), qui relie la scission à la vitesse de glissement de l'outil Δv_g selon l'équation suivante:

$$\tau = -\alpha_f \mathrm{K} \left\| \Delta v_g \right\|^{p_f - 1} \Delta v_g \tag{2-15}$$

Où α_f est le coefficient de frottement et p_f le coefficient de sensibilité à la vitesse de glissement qui est donnée par :

$$\Delta v_g = v - v_{outil} - [(v - v_{outil}).n]\, n \tag{2-16}$$

2.2.5. Bilan des équations mécaniques

Le modèle mécanique peut être donc résumé par les équations de la formulation forte suivante:

$$\begin{cases} div(\sigma) = 0 & \text{sur } \Omega \\ div(v) = 0 & \text{sur } \Omega \\ \tau = -\alpha_f \mathrm{K} \left\| \Delta v_g \right\|^{p_f - 1} \Delta v_g & \text{sur } \partial\Omega_c \\ (v - v_{outil}).n \le 0 & \text{sur } \partial\Omega_c \\ \sigma_n \le 0 & \text{sur } \partial\Omega_c \\ [(v - v_{outil}).n]\sigma_n = 0 & \text{sur } \partial\Omega_c \end{cases} \tag{2-17}$$

2.2.6. Formulation faible du problème

Pour obtenir la formulation faible du problème, on multiplie les équations par des fonctions tests, puis on intègre sur le domaine; on obtient alors un système mixte en vitesse et pression ($(v, p) \in (V^{ca}, P)$) qui s'écrit comme suit :

$$\begin{cases} \forall v^* \in V_0^{ca} & \int_\Omega s : \dot{\varepsilon}(v^*) d\omega - \int_\Omega p div(v^*) d\omega - \int_{\partial\Omega_c} \tau . v^* ds = 0 \\ \forall p^* \in P & \int_\Omega p^* div(v) d\omega = 0 \end{cases} \quad \textbf{(2-18)}$$

Les ensembles V^{ca} (espace des vitesses cinématiquement admissibles), V_0^{ca} (espace des vitesses cinématiquement admissibles à zéro) et P sont définis par :

$$V^{ca} = \left\{ v \in (H^1(\Omega))^3 \quad / \quad (v - v_{outil}).n \le 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega_c \right\} \quad \textbf{(2-19)}$$

$$V_0^{ca} = \left\{ v \in (H^1(\Omega))^3 \quad / \quad v.n \le 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega_c \right\} \quad \textbf{(2-20)}$$

$$P = L^2(\Omega) \quad \textbf{(2-21)}$$

2.2.7. Discrétisation spatiale

Pour résoudre notre problème, par la méthode des éléments finis, on définit deux sous-espaces d'approximation de dimensions finies V_h et P_h, qui contiennent la solution mixte du problème discret ; h la taille de maille. L'existence et l'unicité de la solution nécessite la condition de Brezzi-Babuska [Babuska73]. Elle assure la convergence de la solution (v_h, p_h) vers celle du problème continu (v, p) quant h tend vers 0. Pour la satisfaire, l'élément fini tétraédrique mixte *P1+/P1* (Figure 2-2) est retenu. Il est aussi appelé mini-élément (pour plus de détails sur cet élément voir [Arnold et al.84], [Coupez91], [Jaouen98]), car il est l'élément le plus simple qui vérifie cette condition. Cependant ce choix a deux autres avantages. Le premier est qu'il offre une stabilité numérique due à la condensation de la bulle, qui améliore le conditionnement du système linéaire, et le second est que les éléments tétraédriques linéaires représentent facilement les géométries complexes de la pièce à mailler [Coupez94]. Le champ de vitesse est interpolé linéairement sur le tétraèdre, et est enrichi par un degré de liberté supplémentaire au centre du tétraèdre; la pression est interpolée linéairement.



Figure 2-2 : Mini-élément

Les espaces d'approximation s'écrivent donc de la manière suivante :

$$P_h = \left\{ \; p_h \in C^0(\Omega_h) \;/\; \forall e \in T_h, p_{h/\Omega_h^e} \in P_1(\Omega_h^e) \; \right\} \tag{2-22}$$

$$V_h = L_h \oplus B_h \tag{2-23}$$

$$L_h = \left\{ \; v_h \in (C^0(\Omega_h))^d \;/\; \forall e \in T_h, v_{h/\Omega_h^e} \in (P_1(\Omega_h^e))^d \; \right\} \tag{2-24}$$

$$B_h = \left\{ \; b_h \in (C^0(\Omega_h))^d \;/\; \forall e \in T_h, b_{h/\Omega_{h,i}^e} \in (P_1(\Omega_{h,i}^e))^d \text{ et } b_h = 0 \text{ sur } \partial\Omega_{h,i}^e \; \right\} \tag{2-25}$$

P_1 désigne l'interpolation linéaire, *d* la dimension de l'espace, Ω_h^e est l'élément tétraédrique et $\Omega_{h,i}^e$ (*i*= 1, 4) sont les sous-tétraèdres du tétraèdre Ω_h^e. L'espace B_h est donc celui des fonctions « bulles », linéaires sur chacun des sous-tétraèdres, valant 1 au centre de l'élément et 0 sur ses faces.

En notant N^l et N^b les fonctions de base linéaires et bulle, les champs de vitesse et de pression discrets sont donnés par :

$$x_h(x) = \sum_{k=1}^{Nbnoe} N_k^l(x) X_k \tag{2-26}$$

$$v_h(x) = \sum_{k=1}^{Nbnoe} N_k^l(x) V_k + \sum_{j=1}^{Nbelt} N_j^b(x) B_j \tag{2-27}$$

$$p_h(x) = \sum_{k=1}^{Nbnoe} N_k^l(x) P_k \tag{2-28}$$

Avec *Nbnoe* le nombre de nœuds du maillage et *Nbelt* le nombre d'éléments. N^l est la fonction d'interpolation utilisée pour la vitesse et la pression, et N^b est la fonction d'interpolation du terme bulle. Notre système (2-18) devient:

Trouver $(w_h = v_h + b_h, p_h) \in (V_h^{ca}, P_h)$, tel que $\forall$ que (w_h^*, p_h^*) :

$$\begin{aligned} &\int_\Omega 2\mathrm{K}(\sqrt{3}\,\dot{\bar{\varepsilon}}(w_h))^{m-1}\,\dot{\varepsilon}(w_h) : \dot{\varepsilon}(w_h^*)d\Omega - \int_\Omega p_h div(w_h^*)d\Omega \\ &+ \int_{\partial\Omega_c} \alpha_f \mathrm{K} \left\| \Delta w_{gh} \right\|^{pf-1} \Delta w_{gh}\; w_h^* ds = 0 \end{aligned} \tag{2-29}$$

$$\int_\Omega p_h^* div(w_h) d\Omega = 0 \tag{2-30}$$

Soit :

$$\begin{aligned} &\int_\Omega 2\mathrm{K}(\sqrt{3}\,\dot{\bar{\varepsilon}}(v_h^l + v_h^b))^{m-1}\,\dot{\varepsilon}(v_h^l + v_h^b) : \dot{\varepsilon}(v_h^{l*})d\Omega - \int_\Omega p_h div(v_h^{l*})d\Omega \\ &+ \int_{\partial\Omega_c} \alpha_f \mathrm{K} \left\| \Delta v_{gh} \right\|^{pf-1} \Delta v_{gh} v_h^{l*} ds = 0 \end{aligned} \tag{2-31}$$

$$\int_\Omega 2\mathrm{K}(\sqrt{3}\,\dot{\bar{\varepsilon}}(v_h^l+v_h^b))^{m-1}\dot{\varepsilon}(v_h^l+v_h^b):\dot{\varepsilon}(v_h^{b*})d\Omega-\int_\Omega p_h div(v_h^{b*})d\Omega=0 \quad \textbf{(2-32)}$$

$$\int_\Omega p_h^*(div(v_h^l+v_h^b))d\Omega=0 \quad \textbf{(2-33)}$$

Et en remplaçant (v_h^*, p_h^*) par les fonctions de bases, on obtient:

$$\begin{aligned}&\forall k=1...Nbnoe;\forall i=1...3\\&\int_\Omega 2\mathrm{K}(\sqrt{3}\,\dot{\bar{\varepsilon}}(v_h^l+v_h^b))^{m-1}\dot{\varepsilon}(v_h^l+v_h^b):\dot{\varepsilon}(N_k^l e_i)d\Omega-\int_\Omega p_h div(N_k^l e_i)d\Omega\\&+\int_{\partial\Omega_c}\alpha_f \mathrm{K}\left\|\Delta v_{gh}\right\|^{pf-1}(\Delta v_{gh}.e_i)\,N_k^l ds=0\end{aligned} \quad \textbf{(2-34)}$$

$$\begin{aligned}&\forall e=1...Nbelt;\forall i=1...3\\&\int_\Omega 2\mathrm{K}(\sqrt{3}\,\dot{\bar{\varepsilon}}(v_h^l+v_h^b))^{m-1}\dot{\varepsilon}(v_h^l+v_h^b):\dot{\varepsilon}(N_e^b e_i)d\Omega-\int_\Omega p_h div(N_e^b e_i)d\Omega=0\end{aligned} \quad \textbf{(2-35)}$$

$$\begin{aligned}&\forall k=1...Nbnoe;\\&\int_\Omega N_k^l(div(v_h^l+v_h^b))d\Omega=0\end{aligned} \quad \textbf{(2-36)}$$

Avec e_i le vecteur unitaire dans la direction *i*. On note que dans la seconde équation, le terme de frottement n'apparaît pas puisque la fonction bulle est nulle sur la frontière.

2.2.8. Le contact

Dans ce paragraphe, on présente brièvement la gestion incrémentale du contact utilisé dans Forge3® et Forge++. Pour plus de détails, on oriente le lecteur vers [Mocellin99] et [Bruchon09]. On commence par définir la notion de distance signée δ à l'outil. En tout point *x* du domaine Ω, $\delta(x)$ représente la distance de ce point à la surface de l'outil. On définit alors la convention suivante :

$\delta(x) > 0$ si le point *x* est à l'extérieur de l'outil
$\delta(x) = 0$ si le point *x* appartient à la surface de l'outil
$\delta(x) < 0$ si le point *x* a pénétré dans l'outil

On utilise une formulation nodale du contact [Fourment et al.99] suivant laquelle on impose la condition de contact aux nœuds de la surface. La condition de non pénétration s'écrit alors, de manière discrète:

$$\delta_k \le 0, \forall k \in \partial\Omega_h \quad \textbf{(2-37)}$$

δ_k étant la valeur de $\delta(x)$ au nœud *k.* Les nœuds ne sont pas autorisés à pénétrer dans les outils : soit ils restent en contact avec l'outil, $\delta_k = 0$, soit ils s'éloignent $\delta_k > 0$. On impose alors la condition à $t+\Delta t$

$$\delta_k^{t+\Delta t} \ge 0, \forall k \in \partial\Omega_h \quad \textbf{(2-38)}$$

Où Δt est l'incrément de temps. En effectuant le développement limité à l'ordre 1 en temps on obtient :

$$\delta_k^{t+\Delta t} = \delta_k^t - (v_k - v_{outil}).n_k^t \Delta t + O(\Delta t^2), \forall k \in \partial\Omega_h \quad \textbf{(2-39)}$$

Avec n_k^t la normale sortante à l'outil au nœud *k* et à l'instant *t.*

La condition de contact unilatéral s'écrit alors :

$$h(v_k) = (v_k - v_{outil}).n_k - \frac{\delta_k}{\Delta t} \leq 0, \forall k \in \partial\Omega_h \quad \textbf{(2-40)}$$

En introduisant le multiplicateur de Lagrange λ_k associé à l'inégalité de contact (2-40) (et homogène à la contrainte normale de contact), le problème discrétisé s'écrit :

$$\begin{cases} \forall k = 1...Nbnoe; \forall i = 1...3 \\ \int_\Omega 2K(\sqrt{3}\,\dot{\bar{\varepsilon}}(v_h^l + v_h^b))^{m-1}\dot{\varepsilon}(v_h^l + v_h^b) : \dot{\varepsilon}(N_k^l e_i)d\Omega - \int_\Omega p_h div(N_k^l e_i)d\Omega \\ + \int_{\partial\Omega_c} \alpha_f K \left\| \Delta v_{gh} \right\|^{pf-1} (\Delta v_{gh} e_i)\, N_k^l ds - \lambda_k (n_k \cdot e_i) S_k l_{\partial\Omega_c}(X_k) = 0 \\ \forall e = 1...Nbelt; \forall i = 1...3 \\ \int_\Omega 2K(\sqrt{3}\,\dot{\bar{\varepsilon}}(v_h^l + v_h^b))^{m-1}\dot{\varepsilon}(v_h^l + v_h^b) : \dot{\varepsilon}(N_k^b e_i)d\Omega - \int_\Omega p_h div(N_k^b e_i)d\Omega = 0 \\ \forall k = 1...Nbnoe; \\ \int_\Omega N_k^l (div(v_h^l + v_h^b))d\Omega = 0 \\ \forall k \in \partial\Omega_c, h(v_k) \leq 0 \end{cases} \quad \textbf{(2-41)}$$

Où $l_{\partial\Omega_c}$ est une fonction caractéristique de $\partial\Omega_c$, valant 1 si $X_k \in \partial\Omega_c$ (X_k est la coordonnée du nœud *k*) et 0 autrement ; S_k est la surface associée au nœud *k*, (on l'utilise dans le but de donner un poids plus fort aux nœuds reliés à des faces frontières de plus grande surface) :

$$S_k = \int_{\partial\Omega_c} N_k dS \quad \textbf{(2-42)}$$

En utilisant une méthode de pénalisation pour imposer l'inéquation de contact (dernière équation ci-dessus), on fait disparaître le multiplicateur de Lagrange λ_k .

$$\begin{cases} \forall k = 1...Nbnoe; \forall i = 1...3 \\ \int_\Omega 2K(\sqrt{3}\,\dot{\bar{\varepsilon}}(v_h^l + v_h^b))^{m-1}\dot{\varepsilon}(v_h^l + v_h^b) : \dot{\varepsilon}(N_k^l e_i)d\Omega - \int_\Omega p_h div(N_k^l e_i)d\Omega \\ + \int_{\partial\Omega_c} \alpha_f K \left\| \Delta v_{gh} \right\|^{pf-1} (\Delta v_{gh} e_i)\, N_k^l ds + \rho_c l_{\partial\Omega_c}(X_k)\left[(v_k - v_{outil}).n_k - \frac{\delta_k}{\Delta t} \right]^+ S_k n_k^i = 0 \end{cases} \quad \textbf{(2-43)}$$

Avec ρ_c le coefficient de pénalisation, ($n_k^i = n_k \cdot e_i$) et $f : x \to [x]^+$ est la fonction partie positive qui est égale à *x* si *x* est positive et est nulle si x est négative.

2.2.9. Discrétisation temporelle

Le temps total de la simulation est divisé en N incréments définis par des pas de temps Δt^i :

$$T^{\text{tot}} = \bigcup_{i=0,N-1} [t^{\text{i}}, t^{\text{i}} + \Delta t^{\text{i}}] \quad \textbf{(2-44)}$$

La configuration Ω^t étant connue à l'instant *t*, on peut calculer la solution (v^t, p^t) qui vérifie l'équilibre à cet instant. Le formalisme modélisant l'évolution du domaine au cours du temps est de type lagrangien réactualisé. On calcule alors la configuration à l'instant $t + \Delta t$ à partir de la configuration Ω^t. *x(t)* étant la position d'un point matériel à un instant *t*, l'équation d'évolution du problème s'écrit :

$$v = \frac{dx(t)}{dt} \quad \textbf{(2-45)}$$

Le schéma que l'on adopte pour intégrer cette équation est le schéma d'Euler implicite. On écrit alors:

$$\forall t, x_h^{t+\Delta t} = x_h^t + \Delta t\, v_h^{t+\Delta t} \quad (\Delta t^i = Cte = \Delta t) \quad \textbf{(2-46)}$$

On note que dans certains procédés comme le laminage circulaire, on utilise des schémas d'intégration d'ordre supérieurs afin de prévenir des variations de volume importantes [Traoré01].

2.2.10. Le système

Pour obtenir la solution *(v, p)* à l'instant *t* on résout le système (2-43). La solution obtenue (v^t, p^t) permet d'actualiser la configuration pour passer à la suivante à $t + \Delta t$, et donc à chaque incrément de temps, on résout ce système jusqu'à la simulation complète du procédé. Le système peut être écrit matriciellement de la manière suivante:

$$R(v^l, v^b, p) = \begin{pmatrix} R_l(v^l, v^b, p) \\ R_b(v^l, v^b, p) \\ R_p(v^l, v^b, p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \textbf{(2-47)}$$

Tel que:

$$\begin{aligned} R_l(v^l, v^b, p) &= R_l^l + R_l^p + R_l^c \\ R_b(v^l, v^b, p) &= R_b^b + R_b^p \\ R_p(v^l, v^b, p) &= R_p^l + R_p^b \end{aligned} \quad \textbf{(2-48)}$$

Avec :

$$
\begin{aligned}
R_l^l &= \int_\Omega 2\mathrm{K}(\sqrt{3}\,\dot{\bar{\varepsilon}}(v_h^l + v_h^b))^{m-1}\,\dot{\varepsilon}(v_h^l + v_h^b) : \dot{\varepsilon}(v_h^{l*})d\Omega \\
R_l^p &= -\int_\Omega p div(v_h^{l*})d\Omega \\
R_l^c &= -\int_{\partial\Omega_c} \alpha_f \mathrm{K}\left\|\Delta v_{gh}\right\|^{pf-1}\Delta v_{gh}\, v_h^{l*} ds + \rho_c l_{\partial\Omega_c}(X_k)\left[(v_k - v_{outil}).n_k - \frac{\delta_k}{\Delta t}\right]^+ S_k n_k^i \\
R_b^b &= \int_\Omega 2\mathrm{K}(\sqrt{3}\,\dot{\bar{\varepsilon}}(v_h^l + v_h^b))^{m-1}\,\dot{\varepsilon}(v_h^l + v_h^b) : \dot{\varepsilon}(v_h^{b*})d\Omega \\
R_b^p &= -\int_\Omega p div(v_h^{b*})d\Omega = 0 \\
R_p^l &= \int_\Omega p_h^*(div(v_h^l))d\Omega \\
R_p^b &= \int_\Omega p_h^*(div(v_h^b))d\Omega
\end{aligned}
\qquad \textbf{(2-49)}
$$

2.2.11. Résolution par la méthode de Newton-Raphson:

Pour résoudre le système obtenu, on utilise l'algorithme de Newton-Raphson, l'expression du résidu à l'itération *n* de Newton-Raphson s'écrit $R(v_n, p_n)$ et l'on cherche à obtenir :

$$R(v_n^l + \delta v^l, v_n^b + \delta v^b, p_n + \delta p) = 0 \qquad \textbf{(2-50)}$$

Où $(\delta v^l, \delta v^b, \delta p)$ sont les corrections apportées aux champs. En faisant un développement de Taylor à l'ordre 1, l'expression précédente devient:

$$R(v_n^l + \delta v^l, v_n^b + \delta v^b, p_n + \delta p) = R(v_n^l, v_n^b, p_n) + \frac{\partial R}{\partial v^l}\delta v^l + \frac{\partial R}{\partial v^b}\delta v^b + \frac{\partial R}{\partial p}\delta p \qquad \textbf{(2-51)}$$

On aboutit alors à la résolution du système linéaire suivant:

$$
\begin{pmatrix}
\frac{\partial R_l}{\partial v^l} & \frac{\partial R_l}{\partial v^b} & \frac{\partial R_l}{\partial p} \\
\frac{\partial R_b}{\partial v^l} & \frac{\partial R_b}{\partial v^b} & \frac{\partial R_b}{\partial p} \\
\frac{\partial R_p}{\partial v^l} & \frac{\partial R_p}{\partial v^b} & \frac{\partial R_p}{\partial p}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} \delta v^l \\ \delta v^b \\ \delta p \end{pmatrix}
= -\begin{pmatrix} R_l \\ R_b \\ R_p \end{pmatrix}
\qquad \textbf{(2-52)}
$$

2.2.12. Elimination du terme bulle

Le champ bulle possède la propriété que son gradient est orthogonal à tout tenseur constant *C* sur un élément *e* du maillage [Perchat00]:

$$\int_{\Omega_e} C : \dot{\varepsilon}_h(v^b)d\Omega = 0 \qquad \textbf{(2-53)}$$

On en déduit que :

$$\int_{\Omega_e} \dot{\varepsilon}_h(v^l) : \dot{\varepsilon}_h(v^b) d\Omega = 0 \qquad \textbf{(2-54)}$$

Les deux termes $\frac{\partial R_l}{\partial v^b}$ et $\frac{\partial R_b}{\partial v^l}$ sont donc nuls. D'autre part, le terme $\frac{\partial R_p}{\partial p}$ est nul puisque R_p est indépendant de *p.* Le système devient alors:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial R_l}{\partial v^l} & 0 & \frac{\partial R_l}{\partial p} \\ 0 & \frac{\partial R_b}{\partial v^b} & \frac{\partial R_b}{\partial p} \\ \frac{\partial R_p}{\partial v^l} & \frac{\partial R_p}{\partial v^b} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta v^l \\ \delta v^b \\ \delta p \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} R_l \\ R_b \\ R_p \end{pmatrix} \qquad \textbf{(2-55)}$$

Si on extrait la deuxième ligne du système, le champ de vitesse bulle peut être écrit en fonction du champ de pression:

$$\delta v^b = -(\frac{\partial R_b}{\partial v^b})^{-1} (\frac{\partial R_b}{\partial p} \delta p + R_b) \qquad \textbf{(2-56)}$$

On réinjecte la valeur de δv^b dans la troisième équation du système et on obtient:

$$\frac{\partial R_p}{\partial v^l} \delta v^l - \frac{\partial R_p}{\partial v^b} (\frac{\partial R_b}{\partial v^b})^{-1} \frac{\partial R_b}{\partial p} \delta p = - \left(R_p - \frac{\partial R_p}{\partial v^b} (\frac{\partial R_b}{\partial v^b})^{-1} R_b \right) \qquad \textbf{(2-57)}$$

On définit alors les matrices de raideur:

$$\begin{cases} K^{vv} = \frac{\partial R_l}{\partial v^l} \\ K^{vp} = \frac{\partial R_l}{\partial p} \\ K^{pv} = \frac{\partial R_p}{\partial v^l} \\ K^{pp} = \frac{\partial R_p}{\partial v^b} (\frac{\partial R_b}{\partial v^b})^{-1} \frac{\partial R_b}{\partial p} \end{cases} \qquad \textbf{(2-58)}$$

Avec :

$$\begin{cases} R_v = R_l \\ R_p = R_p - \frac{\partial R_p}{\partial v^b} (\frac{\partial R_b}{\partial v^b})^{-1} R_b \end{cases} \qquad \textbf{(2-59)}$$

Et en posant $\delta v = \delta v^l$, on obtient un système indépendant des termes correspondant à la vitesse de la bulle:

$$\begin{pmatrix} K^{vv} & K^{vp} \\ K^{pv} & -K^{pp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta v \\ \delta p \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} R_v \\ R_p \end{pmatrix} \qquad \textbf{(2-60)}$$

L'élimination du terme bulle permet de stabiliser la matrice de raideur, en donnant une matrice mieux conditionnée par l'ajout des termes non nuls sur la diagonale.

2.3. La modélisation du problème thermique

Dans cette partie on présente la modélisation du problème thermique. On commence par les équations du problème, suivies par les discrétisations, spatiale et temporelle, enfin on présente le couplage thermomécanique.

2.3.1. Equations de base

L'équation de la chaleur s'écrit :

$$\rho c \frac{dT}{dt} + \rho c v.\nabla(T) = -div(q) + f_p \sigma : \dot{\varepsilon} \qquad \textbf{(2-61)}$$

Avec T la température, ρ la densité, c la chaleur massique et f_p la fraction de puissance de déformation transformée en chaleur (comprise entre 0,85 et 0,95).
Le flux q est donné par la loi de Fourrier qui relie le flux au gradient de la température par la conductivité thermique k :

$$q = -k\nabla T \qquad \textbf{(2-62)}$$

Notre formulation étant lagrangienne, les termes de transport s'annulent (la vitesse de transport est nulle) et l'équation de la chaleur devient :

$$\rho c \frac{dT}{dt} - div(k\nabla T) = f_p \sigma : \dot{\varepsilon} \qquad \textbf{(2-63)}$$

2.3.2. Conditions aux limites

Pour boucler notre problème thermique, on a besoin de définir les conditions aux limites. En mise en forme des matériaux, la frontière peut être divisée en quatre parties, qui correspondent à quatre types de conditions aux limites (voir Figure 2-3):

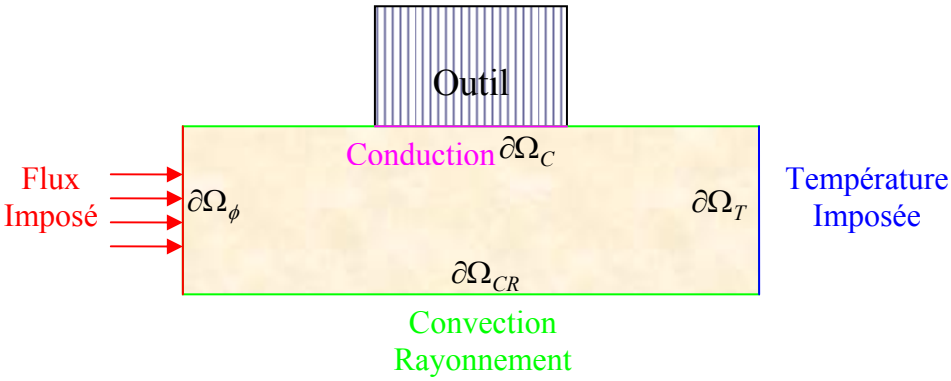


Figure 2-3 : Conditions aux limites thermiques

$$\partial\Omega = \partial\Omega_C + \partial\Omega_{CR} + \partial\Omega_T + \partial\Omega_\phi \qquad \textbf{(2-64)}$$

a- Conduction

Elle représente le transfert de chaleur entre deux corps en contact (surface $\partial\Omega_C$). Cet échange thermique est modélisé par:

$$(-k\nabla T).n = h_c(T - T_{outil}) \quad \textbf{(2-65)}$$

T_{outil} étant la température du corps en contact avec la pièce (dans notre cas, l'outil) et h_c le coefficient d'échange thermique.

b- Convection et rayonnement:

La convection concerne la partie de la pièce étudiée qui est en contact avec un fluide (par exemple l'air) dont la température est différente de celle de la pièce. L'échange de chaleur qui se produit par convection est représenté par:

$$(-k\nabla T).n = h_{conv}(T - T_f) \quad \textbf{(2-66)}$$

Avec h_{conv} le coefficient de transfert par convection et T_f la température du fluide en contact avec la pièce.

Le rayonnement est modélisé par :

$$(-k\nabla T).n = \varepsilon\sigma(T^4 - T_{\Omega_1}^4) \quad \textbf{(2-67)}$$

Avec T_{Ω_1} la température de l'extérieur, σ la constante de Stephan-Bolzman et ε l'émissivité. Les cœfficients de transferts de chaleur, par rayonnement et par convection, peuvent être résumés en un seul coefficient h_{cr} de la manière suivante:

$$h_{cr} = h_{conv} + \varepsilon\sigma(T^2 + T_{\Omega_1}^2)(T + T_{\Omega_1}) \quad \textbf{(2-68)}$$

c- Température imposée:

Ce type de condition consiste à imposer une température sur une partie de la surface frontière ($\partial\Omega_T$) :

$$T = T_{imp} \quad \textbf{(2-69)}$$

d- Flux imposé:

Pareillement au cas de la température imposée, on peut imposer un flux de chaleur sur une partie de la surface ($\partial\Omega_\phi$), typiquement un flux produit par frottement:

$$(-k\nabla T).n = \frac{b}{b + b_{out}}\tau \cdot \Delta v_g \quad \textbf{(2-70)}$$

Où *b* est l'effusivité de la pièce et b_{out} celle de l'outil. L'effusivité est donnée par :

$$b = \sqrt{k\rho c} \quad \textbf{(2-71)}$$

2.3.3. Formulation Faible du problème thermique

Pour obtenir la formulation variationelle du problème thermique, on multiplie l'équation de la chaleur par une fonction test T^* et on intègre sur le domaine Ω :

Trouver $T \in \theta$ telque $\forall T^* \in \theta_0$:

$$\int_\Omega T^* \rho c \frac{dT}{dt} d\Omega - \int_\Omega T^* div(k \nabla T) d\Omega = \int_\Omega T^* f_p \sigma : \dot{\varepsilon} d\Omega \qquad \textbf{(2-72)}$$

Avec :

$$\theta_0 = \left\{ T^* \in H^1(\Omega) / T^* = 0 \ sur \ \partial\Omega_T \right\}$$

$$\theta = \left\{ T \in H^1(\Omega) / T = T_{imp} \ sur \ \partial\Omega_T \right\}$$

En introduisant les conditions aux limites définies précédemment, la formulation faible s'écrit :

$$\begin{aligned} &\int_\Omega T^* \rho c \frac{dT}{dt} d\Omega + \int_\Omega k \nabla T . \nabla T^* d\Omega + \int_{\partial\Omega_{CR}} T^* h_{CR} (T - T_{\Omega_1}) dS + \int_{\partial\Omega_c} T^* h_c (T - T_{outil}) dS \\ &= \int_\Omega T^* f_p \sigma : \dot{\varepsilon} \, d\Omega - \int_{\partial\Omega_\phi} T^* \frac{b}{b + b_{out}} (\tau \cdot \Delta v_g) dS \end{aligned} \qquad \textbf{(2-73)}$$

2.3.4. Discrétisation spatiale

Le champ de température étant connu aux nœuds du maillage à l'instant *t*, la température en un point quelconque du domaine Ω peut être déterminée par interpolation éléments finis:

$$T_h(x,t) = \sum_{k=1}^{Nbnoe} N_k(x) T_k(t) \qquad \textbf{(2-74)}$$

Après discrétisation spatiale et assemblage des matrices, l'équation de la formulation faible se résume en :

$$[C] \frac{dT_h}{dt} + [K] T_h = Q \qquad \textbf{(2-75)}$$

Avec T_h le vecteur de température aux nœuds, *C* la matrice capacité, *K* la matrice de conductivité et *Q* le vecteur de chargement (terme source). *C, K, Q* sont donnés par:

$$C_{ij} = \int_\Omega \rho c N_i N_j d\Omega \qquad \textbf{(2-76)}$$

$$K_{ij} = \int_\Omega k \nabla N_i . \nabla N_j d\Omega + \int_{\partial\Omega_c} h_c N_i N_j dS + \int_{\partial\Omega_{CR}} h_{CR} N_i N_j dS \qquad \textbf{(2-77)}$$

$$Q_i = \int_\Omega (f_p \sigma : \dot{\varepsilon}) N_i d\Omega + \int_{\partial\Omega_c} h_c T_{outil} N_i dS + \int_{\partial\Omega_{CR}} h_{CR} N_i T_{\Omega_1} dS + \int_{\partial\Omega_\phi} N_i \frac{b}{b + b_{out}} (\tau \cdot \Delta v_g) dS \qquad \textbf{(2-78)}$$

2.3.5. Discrétisation temporelle

La discrétisation temporelle est basée sur une méthode des différences finies. On utilise généralement deux types de schémas : à un seul pas de temps et à deux pas de temps. Dans le contexte de ce manuscrit, on se limite au schéma à un seul pas de temps. Pour plus de détails sur les schémas de discrétisation le lecteur peut se référer à [Soyris90].

2.3.5.1. Schémas à un seul pas de temps

Ce type de schémas, fait apparaître t_{n+1} et t_n, les deux temps extrêmes du pas de temps considéré. θ étant un nombre qui varie entre 0 et 1 on écrit :

$$\begin{aligned} Q_\theta &= (1-\theta)Q_n + \theta Q_{n+1} \\ T_\theta &= (1-\theta)T_n + \theta T_{n+1} \\ \dot{T}_\theta &= \frac{T_{n+1}-T_n}{\Delta t} \end{aligned} \qquad \textbf{(2-79)}$$

L'équation (2-75) est alors écrite à l'instant $t_\theta = (1-\theta)t_n + \theta\, t_{n+1}$ et devient: [Zlamal80]

$$[C]\frac{T_{n+1}-T_n}{\Delta t} = (1-\theta)[Q_n - KT_n] + \theta[Q_{n+1} - KT_{n+1}] \qquad \textbf{(2-80)}$$

et de cette manière on peut déterminer T_{n+1} si on connaît T_n.
A partir de cette expression, plusieurs schémas peuvent être construits suivant la valeur de θ :

- Pour $\theta = 1$, on a le schéma implicite

- Pour $\theta = 0$, on obtient le schéma d'Euler explicite

- Pour $\theta = \frac{1}{2}$, on a le schéma de Crank-Nicholson

2.3.6. Le couplage thermomécanique

Notre problème est couplé thermomécaniquement, c'est-à-dire que la thermique dépend de la mécanique et vice-versa. Au niveau de la mécanique, plusieurs paramètres peuvent dépendre de la thermique. Dans le travail présent, on se limite à la consistance du matériau, K, qui est une fonction de la température donnée par (2-11). La thermique, quant à elle, est liée à la mécanique par deux paramètres :
Le terme source de puissance de déformation plastique :

$$f_p \sigma : \dot{\varepsilon} \qquad \textbf{(2-81)}$$

et la puissance dissipée par frottement à l'interface de contact :

$$\frac{b}{b+b_{out}}\tau\, \Delta v_g \qquad \textbf{(2-82)}$$

Le couplage entre les différents problèmes physiques peut être faible ou fort. Lorsqu'il est fort, les équations des différents problèmes doivent être résolues simultanément

[Delalondre08]. Lorsqu'il est faible et que les pas de temps sont petits devant la vitesse d'évolution d'une des deux physiques, les équations des différents problèmes peuvent être résolues successivement à chaque pas de temps. On résout alors le premier problème à l'évolution la plus rapide (ici, le problème mécanique), puis on utilise ses résultats pour calculer les termes du second problème (ici, le problème thermique). On peut alors faire des itérations de point fixe, en corrigeant les coefficients du premier problème à l'aide des nouvelles valeurs calculées, jusqu'à convergence. Dans la pratique, pour les problèmes et les pas de temps considérés, une itération suffit. On passe à l'incrément suivant et on calcule les termes du premier problème qui dépendent du second. On parle alors de « couplage incrémental », dont l'algorithme est donné par la Figure 2-4.

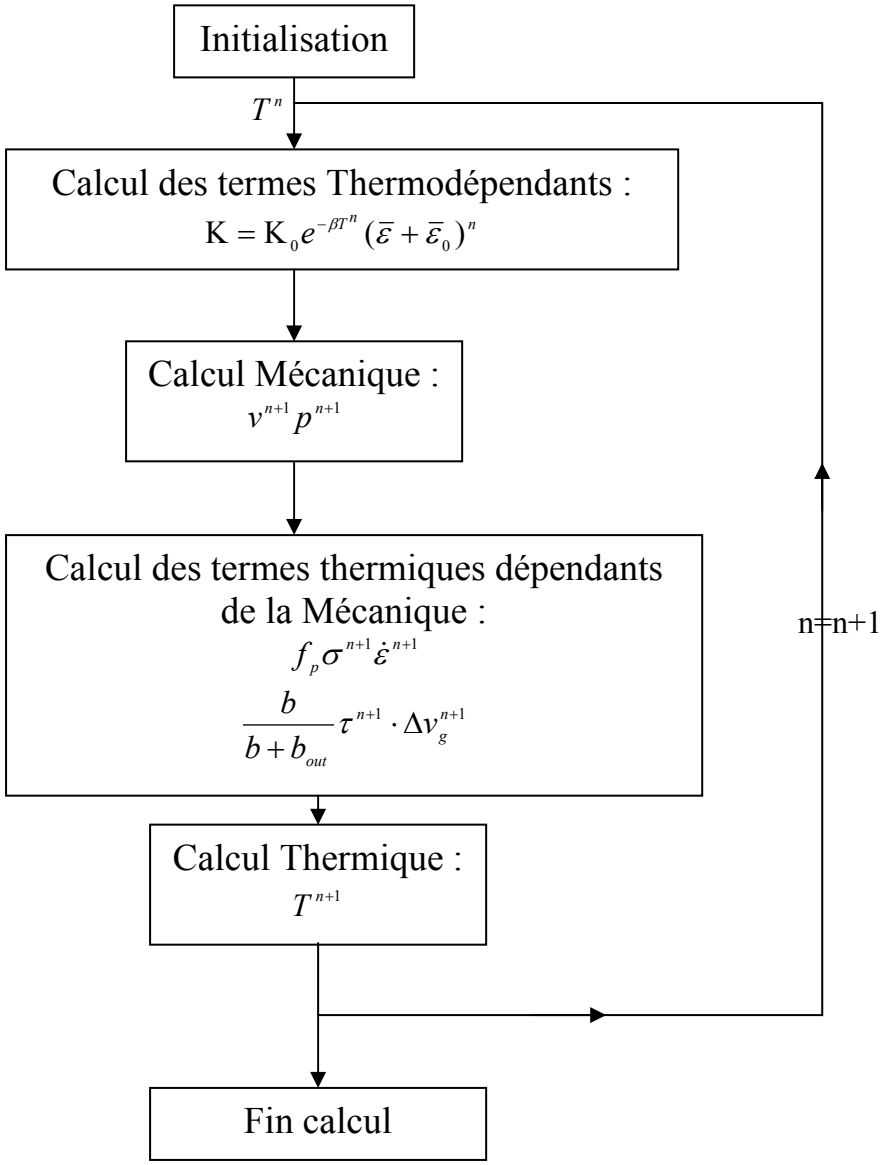


Figure 2-4 : Algorithme de couplage

Chapitre III

La méthode MultiMaillages MultiPhysiques

Comme on l'a vu dans le premier chapitre, la méthode MMMP est la méthode qui parait la plus prometteuse pour notre cas d'étude (celui des procédés incrémentaux) parmi les méthodes que l'on a rencontrées dans la littérature. L'adaptation de cette méthode à ce problème revient à traiter 3 aspects principaux, que sont :

1- La génération des maillages de calcul, et tout particulièrement du maillage mécanique que l'on va déraffiner pour profiter de la particularité de ces procédés qui ont des déformations mécaniques localisées.

2- Le transport, qui est traditionnellement connu comme étant une source d'erreur, ce qui nécessite la mise en œuvre de techniques pour améliorer sa qualité et minimiser l'erreur ou la rendre négligeable.

3- La parallélisation des différentes étapes de la méthode, et l'équilibre des charges sur les différents maillages.

Ce chapitre est divisé en quatre parties. La première présente l'algorithme de la méthode sous formes discrète et continue, ainsi que ses paramètres principaux. Dans la deuxième partie, on présente la génération du maillage de calcul. La troisième partie est consacrée à présenter le transport, on explique alors les techniques utilisées pour améliorer sa qualité et réduire sa durée et on montre des résultats qui valident la précision de la méthode utilisée. Dans la quatrième partie, on présente l'aspect parallèle de la méthode, au niveau du transport, de la génération du Maillage Mécanique et du partitionnement des maillages.

3.1. La méthode MultiMaillages MultiPhysiques

Le principe de la méthode MMMP consiste à ne pas utiliser le même maillage pour tous les problèmes physiques posés sur le même domaine, mais à associer à chaque problème un maillage « optimal » appelé « Maillage de Calcul » et adapté aux caractéristiques propres de cette physique [Li05]. Le nombre de Maillages de Calcul est donc égal au nombre de problèmes résolus simultanément sur le domaine en question. En plus de ces Maillages, nous utilisons un maillage de support, appelé « Maillage Référence ». Il a la propriété d'être plus fin ou aussi fin que tous les autres maillages, en tout point du domaine. Aucun calcul n'est effectué sur le Maillage Référence, trop imposant. En revanche, il est suffisamment raffiné pour recevoir les résultats des différents Maillages de Calcul sans perte d'information. Ce maillage peut être considéré comme la « banque » de données où les Maillages de Calcul déposent leurs résultats. Cette banque « finance » les Maillages de Calcul en leur fournissant les résultats dont ils ont besoin. Nous pouvons aussi considérer la méthode MMMP, comme une technique d'accélération de la méthode de résolution sur le Maillage Référence, en recourant à des projections sur le maillage propre à chaque physique avant toute résolution, puis en procédant ensuite à une interpolation des résultats sur le Maillage Référence. Le principe de la méthode MMMP s'applique aux problèmes couplés, mais plus particulièrement et plus efficacement lorsque le couplage est itératif et incrémental, c'est à dire lorsque les équations des différentes physiques ne sont pas résolues simultanément. Il est possible d'étendre la méthode aux problèmes fortement couplés comme dans [Hu et al.09], sous la condition d'avoir des solveurs suffisamment flexibles pour gérer un nombre de degrés de liberté variable en differents lieux du domaine et pour intégrer les termes de couplages sur plusieurs maillages. Dans le contexte de cette thèse, nous nous intéressons à des problèmes couplés incrémentalement c'est-à-dire dont les résolutions se font d'une manière séparée à chaque incrément de temps.

3.1.1. Algorithme MultiMaillages MultiPhysiques

3.1.1.1. Le problème continu

Pour simplifier, on considère un problème thermomécanique où l'on a seulement deux physiques à résoudre : mécanique et thermique. Les équations correspondantes ont été présentées dans le chapitre 2 : la partie mécanique est donnée par le système (2-18) et la partie thermique par l'équation (2-75). Notre problème thermomécanique se résume de la manière suivante, en fonction des inconnues (v, p, T) recherchées à chaque pas de temps :

$$R(v, p) = 0 \tag{3-1}$$

$$S(T) = 0 \tag{3-2}$$

En prenant en considération l'ensemble des variables du problème, le système s'écrit à nouveau :

$$R(x, \Xi, v, p) = 0 \tag{3-3}$$

$$S(x, \Psi, T) = 0 \tag{3-4}$$

Avec x les coordonnées du domaine, $\Xi = \{T, \bar{\varepsilon}, \chi_{Mec} ...\}$, l'ensemble des variables d'état pour l'équation de la mécanique, où $\chi_{Mec} = \{\dot{\bar{\chi}}_{Mec}, \bar{\chi}_{Mec} ...\}$ représente l'ensemble des variables d'état

supplémentaires que l'on peut rencontrer dans le problème mécanique, telles que des variables de microstructure ou le tenseur des contraintes (lorsque l'élasticité est prise en compte dans la loi de comportement, par exemple…), $\dot{\overline{\chi}}_{Mec}$ est une variable de type « vitesse » de χ_{Mec} alors que $\overline{\chi}_{Mec}$ est l'intégration temporelle de $\dot{\overline{\chi}}_{Mec}$ en fonction du temps; $\Psi = \{\sigma, \dot{\varepsilon}, v, \chi_{Ther} ...\}$ est l'ensemble des variables d'état pour l'équation de la thermique et $\chi_{Ther} = \{\dot{\overline{\chi}}_{Ther}, \overline{\chi}_{Ther} ...\}$ l'ensemble des autres variables d'état que l'on peut rencontrer dans le problème thermique (comme par exemple la proportion de chacune des phases du matériau…), $\dot{\overline{\chi}}_{Ther}$ et $\overline{\chi}_{Ther}$, deux variables appartenant à χ_{Ther} où $\overline{\chi}_{Ther}$ est le résultat de l'intégration temporelle de $\dot{\overline{\chi}}_{Ther}$. L'algorithme de la méthode MMMP commence par l'étape d'initialisation où toutes les variables d'état sont supposées connues sur le Maillage Référence, M_r. Elle est suivie par la construction des Maillages de Calcul, M_t et M_m, qui sont générés à partir de M_r, M_m pour le calcul mécanique et M_t pour le calcul thermique.

Le problème thermomécanique est ainsi posé sur le maillage M_r :

Trouver (v_r, p_r, T_r) tels que:

$$R(x_r, \Xi_r, v_r, p_r) = 0 \quad \textbf{(3-5)}$$

$$S(x_r, \Psi_r, T_r) = 0 \quad \textbf{(3-6)}$$

La résolution du problème mécanique (3-5) est effectuée sur le maillage M_m. Elle est donc précédée par le transport de l'ensemble des variables d'état de M_r sur M_m :

$$\Xi_m = I_r^m \Xi_r \quad \textbf{(3-7)}$$

Où I_r^m est l'opérateur de transport (restriction) de M_r vers M_m.

Le calcul mécanique est ensuite effectué, sur le maillage M_m :

$$R(x_m, \Xi_m, v_m, p_m) = 0 \quad \textbf{(3-8)}$$

Les résultats de ce calcul, (v_m, p_m), sont interpolés vers le maillage M_r où ils sont stockés :

$$v_r = I_m^r v_m \quad \textbf{(3-9)}$$

$$p_r = I_m^r p_m \quad \textbf{(3-10)}$$

Avec I_m^r l'opérateur de transport (interpolation) de M_m vers M_r. Le calcul mécanique étant effectué, les variables d'état couplées mécaniquement sont, soit connues, soit elles peuvent être calculées sur M_r. On peut alors passer au calcul thermique. Il est précédé par un transport des variables d'état du maillage M_r vers le maillage M_t :

$$\Psi_t = I_r^t \Psi_r \quad \textbf{(3-11)}$$

I_r^t étant l'opérateur de transport (restriction) de M_r vers M_t. On effectue alors le calcul thermique sur le maillage M_t :

$$S(x_t, \Psi_t, T_t) = 0 \quad \textbf{(3-12)}$$

Puis on transporte le résultat, la température, T_t, vers le maillage M_r soit :

$$T_r = I_t^r T_t \tag{3-13}$$

Avec I_t^r l'opérateur de transport de M_t vers M_r. Puis on actualise le Maillage Référence et les variables d'état :

$$x_r^{t+\Delta t} = x_r^t + v_r^{t+\Delta t}\Delta t \tag{3-14}$$

$$\bar{\varepsilon}_r^{t+\Delta t} = \bar{\varepsilon}_r^t + \dot{\bar{\varepsilon}}_r(v_r^{t+\Delta t})\Delta t \tag{3-15}$$

$$(\bar{\chi}_{Mec})_r^{t+\Delta t} = (\bar{\chi}_{Mec})_r^t + (\dot{\bar{\chi}}_{Mec})_r^{t+\Delta t}\Delta t \tag{3-16}$$

$$(\bar{\chi}_{Ther})_r^{t+\Delta t} = (\bar{\chi}_{Ther})_r^t + (\dot{\bar{\chi}}_{Ther})_r^{t+\Delta t}\Delta t \tag{3-17}$$

Où $\bar{\varepsilon}(v)$ et $\dot{\bar{\varepsilon}}(v)$ sont respectivement données par les équations (2-12) et (2-14). Enfin on actualise les Maillages Mécanique et Thermique:

$$x_m^{t+\Delta t} = x_m^t + v_m^{t+\Delta t}\Delta t \tag{3-18}$$

$$x_t^{t+\Delta t} = x_t^t + v_t^{t+\Delta t}\Delta t \tag{3-19}$$

Où $v_t^{t+\Delta t}$ est le champ de vitesses transporté de M_r vers M_t :

$$v_t^{t+\Delta t} = I_r^t v_r^{t+\Delta t} \tag{3-20}$$

3.1.1.2. Le problème discret

La discrétisation des deux problèmes thermique et mécanique est respectivement donnée par les équations (2-43) et (2-75) du chapitre II. Le système (3-5) ; (3-6) est alors transformé en :

$$R((x_h)_r, (\Xi_h)_r, (v_h)_r, (p_h)_r) = 0 \tag{3-21}$$

$$S((x_h)_r, (\Psi_h)_r, (T_h)_r) = 0 \tag{3-22}$$

La discrétisation éléments finis nous amène à distinguer deux types de variables :

- Les variables nodales P_1, calculées aux nœuds du maillage et interpolées linéairement que sont la température *T*, la vitesse *v*, la pression *p*, les coordonnées *x* et les variables d'état χ_{Mec}^1 et χ_{Ther}^1.
- Les variables élémentaires P_0, évaluées aux points d'intégration et constantes par élément (avec l'élément linéaire utilisé), que sont la vitesse de déformation généralisée $\dot{\bar{\varepsilon}}$, la déformation généralisée $\bar{\varepsilon}$, le tenseur de la vitesse de déformation $\dot{\varepsilon}$, le tenseur des contraintes σ, χ_{Mec}^0 et χ_{Ther}^0.

Le transport des variables nécessite alors d'utiliser deux opérateurs différents. Pour les variables P_1, on le note $(I_r^m)_{P_1}$, et pour les variables P_0, on le note $(I_r^m)_{P_0}$. Le transport (3-7) des variables nécessaires au calcul mécanique se décompose alors en :

$$(\Xi_h^0)_m = (I_r^m)_{P_0}(\Xi_h^0)_r \quad \textbf{(3-23)}$$

$$(\Xi_h^1)_m = (I_r^m)_{P_1}(\Xi_h^1)_r \quad \textbf{(3-24)}$$

Où (Ξ_h^1, Ξ_h^0) représentent respectivement les variables P_1 et P_0 de Ξ, c'est-à-dire (T_h, $(\chi_{Mec}^1)_h$) et ($\bar{\varepsilon}$, $(\chi_{Mec}^0)_h$).

Sur le maillage M_m le problème mécanique discret s'écrit :

$$R((x_h)_m, (\Xi_h)_m, (v_h)_m, (p_h)_m) = 0 \quad \textbf{(3-25)}$$

Une fois ce calcul mécanique réalisé, les résultats $((v_h)_m, (p_h)_m)$ sont transportés vers le maillage M_r :

$$(v_h)_r = (I_m^r)_{P_1}(v_h)_m \quad \textbf{(3-26)}$$

$$(p_h)_r = (I_m^r)_{P_1}(p_h)_m \quad \textbf{(3-27)}$$

Puis, on calcule l'ensemble des variables $(\Psi_h)_r$ sur M_r. Le transport (3-11) des variables qui interviennent dans le calcul thermique est ensuite fait pour chaque type de variable :

$$(\Psi_h^0)_t = (I_r^t)_{P_0}(\Psi_h^0)_r \quad \textbf{(3-28)}$$

$$(\Psi_h^1)_t = (I_r^t)_{P_1}(\Psi_h^1)_r \quad \textbf{(3-29)}$$

Où Ψ_h^0 représente σ_h, $\dot{\varepsilon}_h$ et $(\chi_{Ther}^0)_h$ et Ψ_h^1 représente v_h et $(\chi_{Ther}^1)_h$. Le problème thermique discret s'écrit alors sur le maillage M_t :

$$S((x_h)_t, (\Psi_h)_t, (T_h)_t) = 0 \quad \textbf{(3-30)}$$

Après avoir effectué le calcul thermique sur M_t, on transporte (3-13) la température sur M_r :

$$(T_h)_r = (I_t^r)_{P_1}(T_h)_t \quad \textbf{(3-31)}$$

Enfin, on fait l'actualisation des maillages et des variables d'états, sur le Maillage Référence :

$$(x_h)_r^{t+\Delta t} = (x_h)_r^t + (v_h)_r^{t+\Delta t}\Delta t \quad \textbf{(3-32)}$$

$$(\bar{\varepsilon}_h)_r^{t+\Delta t} = (\bar{\varepsilon}_h)_r^t + (\dot{\bar{\varepsilon}}_h)_r((v_h)_r^{t+\Delta t})\Delta t \quad \textbf{(3-33)}$$

$$((\bar{\chi}_{Mec})_h)_r^{t+\Delta t} = ((\bar{\chi}_{Mec})_h)_r^t + ((\dot{\bar{\chi}}_{Mec})_h)_r^{t+\Delta t}\Delta t \quad \textbf{(3-34)}$$

$$((\bar{\chi}_{Ther})_h)_r^{t+\Delta t} = ((\bar{\chi}_{Ther})_h)_r^t + ((\dot{\bar{\chi}}_{Ther})_h)_r^{t+\Delta t}\Delta t \quad \textbf{(3-35)}$$

Puis sur les Maillages Mécanique et Thermique :

$$(x_h)_m^{t+\Delta t} = (x_h)_m^t + (v_h)_m^{t+\Delta t}\Delta t \quad \textbf{(3-36)}$$

$$(x_h)_t^{t+\Delta t} = (x_h)_t^t + (v_h)_t^{t+\Delta t}\Delta t \quad \textbf{(3-37)}$$

Avec :

$$(v_h)_t^{t+\Delta t} = I_r^t(v_h)_r^{t+\Delta t} \quad \textbf{(3-38)}$$

3.1.1.3. Algorithme de la méthode MMMP adapté au problème étudié

Dans le cadre de cette thèse et pour l'application de martelage considérée, on applique la méthode MMMP en utilisant seulement deux maillages [Ramadan et al.09-1], [Ramadan et al.09-2]. En effet, le Maillage Thermique optimal étant un maillage uniformément raffiné sur l'ensemble du domaine, il peut être confondu avec le Maillage Référence, ($M_r = M_t$), ce qui permet de ne considérer qu'un seul nouveau maillage, le Maillage Mécanique M_m.

- Initialisation
  - Lecture de M_r
  - Construction de M_m
  - Initialisation des variables
- Tant que Nb incrément $\leq$ Nb total d'incrément
  - Pré-Calcul Mécanique : Transport
    - Projection M_r vers M_m
  - Calcul Mécanique
    - Résolution mécanique sur M_m
  - Post-Calcul Mécanique : Transport
    - Interpolation des résultats mécanique de M_m vers M_r
  - Calcul thermique
    - Résolution thermique sur M_r
  - Actualisation
    - Actualisation du maillage M_r
    - Actualisation du maillage M_m à partir de M_r ou génération d'un nouveau maillage M_m

---

Figure 3-1 : Algorithme de la méthode MMMP adapté à notre cas

L'algorithme de la méthode MMMP adapté à notre application est donné sur la Figure 3-1. On commence par l'initialisation. Elle consiste à lire le Maillage Référence M_r, puis à générer le maillage Mécanique M_m et enfin à initialiser les variables. On effectue le transport

des variables nécessaires au calcul mécanique de M_r sur M_m, puis le calcul mécanique sur M_m, avant d'interpoler les résultats mécanique de M_m sur M_r. Ensuite, on effectue le calcule thermique sur M_r. On termine en actualisant le Maillage Référence, la valeur des variables d'état qui lui sont associées, et le Maillage Mécanique. Si nécessaire, en cas de remaillage du Maillage Référence ou de changement de type de conditions aux limites, on génère un nouveau maillage M_m.

3.1.2. Paramètres de la méthode MMMP

Dans le cas des procédés à déformations mécaniques localisées, on définit deux paramètres prinicipaux pour construire le Maillage Mécanique. Il s'agit, des zones de déformation et des techniques d'adaptation du Maillage:

3.1.2.1. Zones de déformation

La particularité principale des procédés ayant des déformations localisées est la faible dimension de la zone déformée durant chaque étape du procédé. Comme le montre la Figure 3-2, dans le cas de martelage, la déformation est localisée dans la zone limitée par les outils, et à l'extérieur de cette zone, elle est quasiment nulle. On considère alors que le maillage se divise en deux zones, une Zone de Déformation, que l'on note ZD, et une Zone de Faible Déformation que l'on note ZFD, et qui contient le reste du maillage. Cette décomposition permet de définir l'adaptation du Maillage Mécanique. Dans la zone ZD, le maillage sera fin afin de capter les détails de la déformation. Dans la zone ZFD, le maillage sera déraffiné, sans affecter la qualité du résultat. La taille de la zone ZD joue un rôle déterminant sur l'accélération des calculs. Ses dimensions dépendent évidemment du procédé. La zone affectée par la déformation n'est pas la même pour tous les procédés, ce qui rend difficile d'établir une règle générale pour la définir. La Figure 3-3 montre la zone ZD définie dans le cas du martelage. Elle se trouve à l'intérieur d'une boîte qui a les mêmes largeur et hauteur que la pièce et qui a comme longueur la largeur des outils augmentée de 20 % des deux cotés. Ce dimensionnement est basé sur des expériences numériques qui ont montré que les calculs mécaniques sur les maillages localement déraffiné de cette manière et uniformément raffinés donnent des résultats identiques. Dans la suite, on adopte, dans toutes les applications présentées, les dimensions de ZD telles que l'on vient de les définir.

3.1.2.2. Adaptation du Maillage Mécanique

Le déraffinement du Maillage Mécanique se fait par déraffinement de la zone ZFD et conservation de la zone ZD.

3.1.2.2.1. Conservation des nœuds dans la zone ZD

La zone de déformation ZD étant relativement petite par rapport au volume total de la pièce, on garde cette zone dans le Maillage Mécanique M_m identique en tous points à celle du Maillage Référence M_r. Ceci signifie que, dans la zone de déformation de M_m, on aura exactement les mêmes nœuds et les mêmes éléments que dans la zone de déformation de M_r. Cette propriété du Maillage Mécanique nous assure un transport exact dans la zone de

déformation, sans aucune erreur sur les variables nodales ou élémentaires (comme on va le voir après).

3.1.2.2.2. Emboîtement des nœuds dans la zone ZFD

La technique utilisée consiste à générer un maillage déraffiné à partir d'un maillage fin sans ajouter de nœuds ni les bouger. C'est-à-dire que le maillage déraffiné est entièrement inclus dans le maillage fin. Un tel déraffinement présente l'avantage d'avoir un transport nodal (du Maillage Référence M_r vers le Maillage Mécanique M_m) exact, sans aucune erreur. Dans l'autre sens c.à.d. de M_m vers M_r, le transport sera encore exact pour les nœuds de M_r appartenant à M_m.

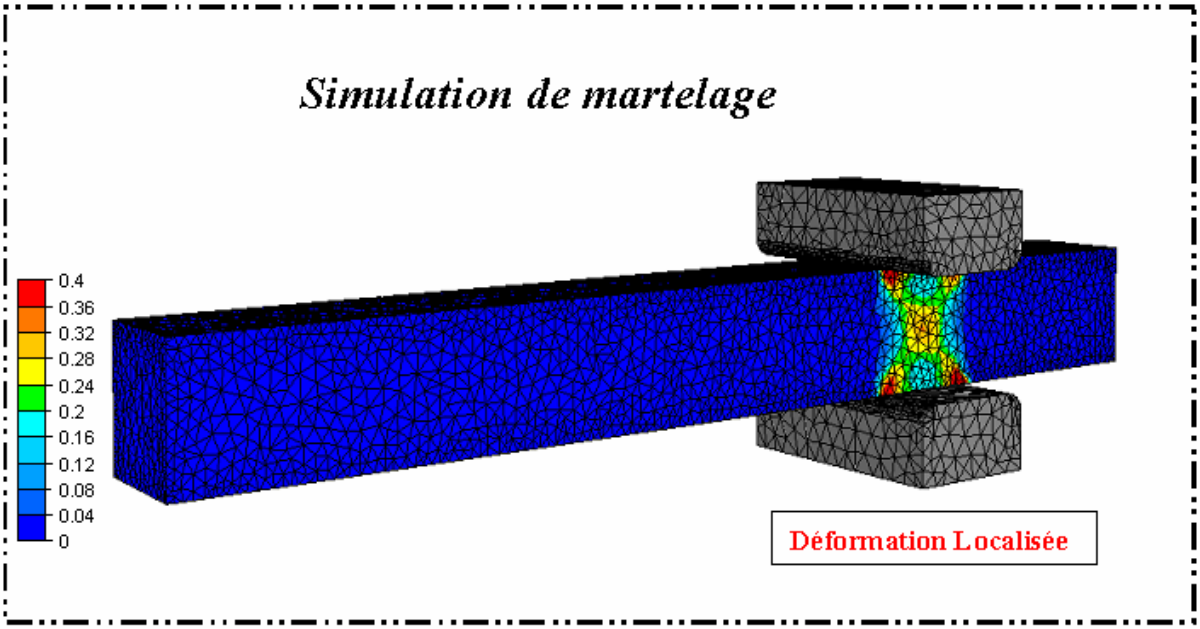


Figure 3-2 : Déformation localisée dans la zone de contact avec les outils, pour la simulation du procédé de martelage. Isovaleurs de $\dot{\bar{\varepsilon}}$

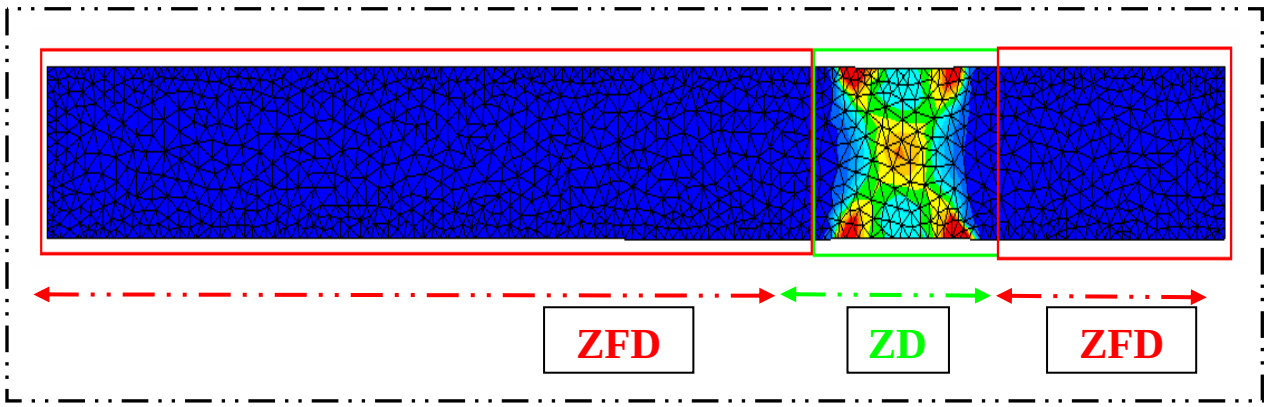


Figure 3-3 : Zone de Déformation (ZD), et Zone de Faible Déformation (ZFD) sur le problème de martelage (vue de face)

3.1.2.3. La taille de déraffinement

Pour construire le Maillage Mécanique, il reste à définir la taille des éléments déraffinés. Ce paramètre est aussi important que la définition des zones de déformation, car il détermine le nombre de degrés de liberté final du Maillage Mécanique et donc l'accélération de la méthode MMMP. Dans un premier temps, on considère un facteur de déraffinement de deux (Figure 3-4).

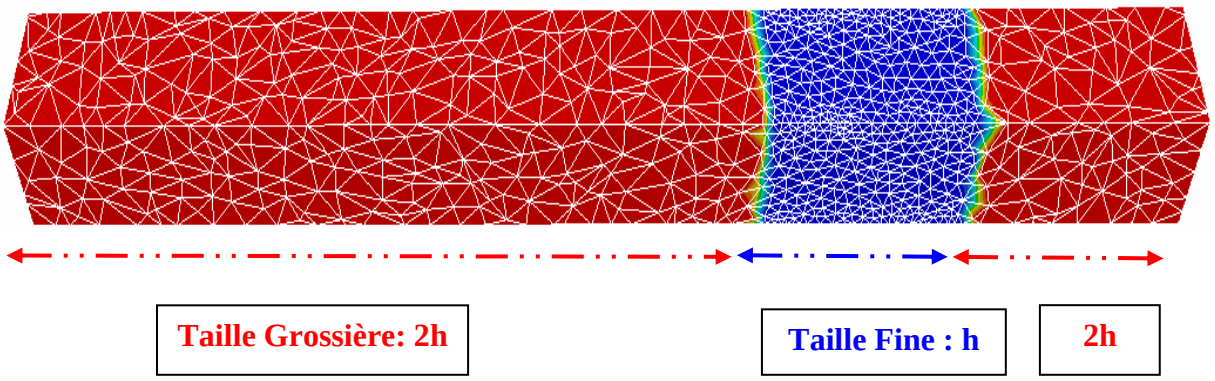


Figure 3-4 : Déraffinement par un facteur de deux dans la ZFD

3.2. Génération du Maillage Mécanique

Dans cette partie, on présente les techniques utilisées pour générer le Maillage Mécanique. On commence par introduire l'algorithme du mailleur, puis on dévoile l'algorithme de déraffinement emboîté par nœuds.

3.2.1. Le Mailleur topologique MTC

Dans la littérature, on peut trouver plusieurs techniques pour la génération de maillages à base de tétraèdres, telles que la méthode frontale [Rassineux95], la méthode de Delaunay et la méthode de type Octree. Pour plus de détails sur ces méthodes, le lecteur peut se référer à [Frey99] et [George01]. Dans ce qui suit, on utilise une méthode basée sur l'amélioration de la topologie du maillage développée par Coupez [Coupez 94], [Coupez 95], [Coupez00], et particulièrement adaptée aux grandes déformations, tout en étant utilisée pour diverses autres applications. À cause des importantes déformations que subit la pièce dans certains procédés de mise en forme, le maillage, obligé de suivre la déformation, dégénère rapidement. Le remaillage est donc indispensable pour continuer les calculs. Le principe de cette méthode est différent des autres techniques, et présente la particularité supplémentaire de coupler les remaillages de la surface et du volume du domaine.
Avant de présenter l'algorithme du « mailleur topologique » pour des éléments tétraédriques, on introduit deux notions importantes: la topologie de maillage et le critère de volume minimal.

3.2.1.1. Topologie de maillage

Un maillage est constitué d'un ensemble d'éléments, chacun étant défini par les numéros des nœuds formant ses sommets. La topologie du maillage est définie par la connectivité des nœuds, le tableau de connexion des éléments qui associe à chaque élément les nœuds constituant ses sommets.
Soit N l'ensemble fini des nœuds d'un domaine Ω, T l'ensemble des éléments dont les sommets appartiennent à N et F l'ensemble des faces de ces éléments tel que :

$$F(T) = \bigcup_{e \in T} \partial\Omega_e \qquad \textbf{(3-39)}$$

Où $\partial\Omega_e$ est la frontière du tétraèdre Ω_e composée de ses quatre faces.
T est une topologie de maillage de Ω si et seulement si :

$$\forall f \in F(T), 1 \leq Card\left\{e \in T \text{ tel que } f \in \partial\Omega_e\right\} \leq 2 \qquad \textbf{(3-40)}$$

Où $Card\{.\}$ est le nombre d'éléments de l'ensemble $\{.\}$.

3.2.1.2. Critère de volume minimal

Soit T une topologie de maillage sur N. *(T,N)* est un maillage de Ω si et seulement si :

$$\sum_{e \in T} \left|\Omega_e\right| = \left|\Omega\right| \qquad \textbf{(3-41)}$$

Où $\left|\Omega_e\right|$ et $\left|\Omega\right|$ sont les volumes respectifs de l'élément e et du domaine Ω.

3.2.1.3. Algorithme du Mailleur topologique

La génération d'un maillage est constituée de deux étapes :

a- On construit une topologie initiale à partir d'une discrétisation de la frontière. Pour cela on connecte, par un opérateur d'étoilement, un nœud à tous les autres nœuds de la frontière, sauf ceux qui appartiennent à une face qui contient ce nœud. Le résultat n'est sûrement pas un maillage (des éléments peuvent traverser la frontière, se superposer …), mais il constitue une topologie de départ pour construire le maillage.
b- On améliore progressivement, par balayage des nœuds et des arrêtes, la topologie courante de la manière suivante :

Pour chaque nœud et chaque arrête :

- ❖ supprimer la topologie locale étoilée par le nœud ou par l'arrête (c'est-à-dire l'ensemble des éléments contenant ce nœud ou cette arrête)
- ❖ remplacer cette sous-topologie par une autre topologie obtenue par l'opérateur d'étoilement comme précisé ci-après.

Parmi les candidats proposés par cet opérateur, on choisit la topologie qui minimise le volume total $\sum_{e\in T}|\Omega_e|$. Si nécessaire, on ajoute un nœud au barycentre de cette sous-topologie et on évalue la sous-topologie obtenue par étoilement à partir de ce barycentre. Plusieurs topologies de maillage peuvent avoir le même volume. Il est donc nécessaire de définir un critère de qualité permettant de choisir la meilleure topologie et de construire un maillage de qualité. Ce critère est le suivant :

$$C(e,h_e) = C_0 \frac{|\Omega_e|}{h_e^3} \qquad \textbf{(3-42)}$$

Avec h_e la longueur moyenne des arrêtes du tétraèdre e et C_0 une constante qui permet de normaliser le facteur de forme à 1 pour un tétraèdre régulier.
La valeur de $C(e,h_e)$ est maximale pour un tétraèdre régulier et est égale à 0 pour un tétraèdre plat. On choisit alors, lors de la procédure d'amélioration topologique, la topologie qui maximise la valeur minimale de $C(e,h_e)$.

3.2.1.4. Remaillage de surface et couplage avec le volume

La technique de remaillage topologique nous permet de remailler simultanément le volume et la surface tout en respectant la géométrie du domaine, ce qui constitue un des avantages de cette technique. L'idée de base consiste à générer une couche d'éléments virtuels connectés aux sommets du maillage surfacique et extérieurs au domaine. Ceci est fait par duplication (virtuelle) des nœuds frontières que l'on relie à leurs images. On obtient alors des tétraèdres virtuels. La construction de cette couche d'éléments virtuels transforme les nœuds frontières en des nœuds volumiques, et on peut alors appliquer les opérations topologiques de volume au maillage surfacique.

3.2.2. Déraffinement emboîté par nœuds

Comme on l'avait dit précédemment la génération du Maillage Mécanique est faite par une procédure de déraffinement emboîté par nœuds. L'effet positif de cette technique sur le transport est montré dans la suite de ce chapitre à travers des exemples numériques. Ici, on s'intéresse à expliquer son algorithme :
Soit M_h un maillage fin (dans notre cas, le Maillage Référence) défini par l'ensemble de ses nœuds I_h et de ses tétraèdres T_h. Le but est de construire un maillage « grossier » M_H (le Maillage Mécanique) tel que pour tous les nœuds i $\in I_H$ (I_H étant l'ensemble des nœuds qui définissent le maillage M_H), $l_H(i) \approx h_d$ où $l_H(i)$ est la longueur moyenne des arrêtes liées aux nœuds i et h_d la taille de (déraffinement) désirée. $T_H(i)$ est l'ensemble des tétraèdres contenant le nœud i, $\varepsilon_H(i)$ l'ensemble des nœuds de $T_H(i)$ (i exclu) et $F_H(i)$ l'ensemble des faces externes de $T_H(i)$ (c'est-à-dire ne contenant pas i), l'algorithme de déraffinement est donné sur la Figure 3-5.

---

1 Initialisation : On initialise M_H par M_h

2 Pour tout nœud $i \in M_H$, on calcule $l_H(i)$

3 Si $i \notin$ ZD alors:

Si $l_H(i) \geq h_d$

- $i \leftarrow i+1$ et on retourne à l'étape 3

Sinon

- Remailler $F_H(i)$ (i exclu)
- Si $T_{nouv}(i)$ est acceptable alors :
  - $I_H = I_H - \{i\}$
  - $T_H = T_H - T_H(i) + T_{nouv}(i)$
  - $i \leftarrow i+1$ et on passe à l'étape 3
- Sinon
  - $i \leftarrow i+1$ et on retourne à l'étape 3

Figure 3-5 : Algorithme du déraffinement emboîté par nœuds

On commence par initialiser le maillage M_H par M_h, de sorte que M_H aurait exactement les mêmes nœuds, éléments et faces que M_h. On calcule la taille moyenne de tous les nœuds. Pour tout nœud i n'appartenant pas à la ZD, si $T_H(i) < h_d$ on remaille le volume défini par $F_H(i)$ en éliminant le nœud i et en utilisant uniquement les nœuds de $\varepsilon_H(i)$. Soit $T_{nouv}(i)$ l'ensemble des tétraèdres de cette nouvelle triangulation. Si $T_{nouv}(i)$ est acceptable, on supprime i et on actualise T_H. Sinon, on revient à l'étape précédente. Le maillage M_H obtenu vérifie la propriété que tous ses nœuds appartiennent au maillage M_h. La Figure 3-6

montre un déraffinement uniforme avec emboîtement par nœuds. La Figure 3-7 montre les deux maillages, fin (Maillage Référence) et déraffiné (Maillage Mécanique), avec la zone bloquée et les zones déraffinées par un déraffinement suivant un facteur deux.

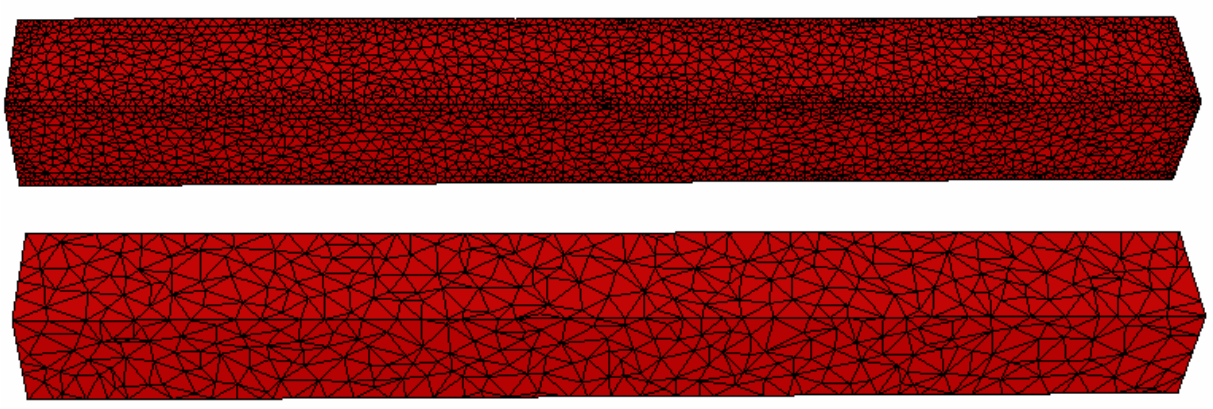


Figure 3-6 : Déraffinement uniforme avec emboîtement par nœuds: maillage fin (haut : 23500 nœuds), maillage déraffiné (bas : 2 641 nœuds)

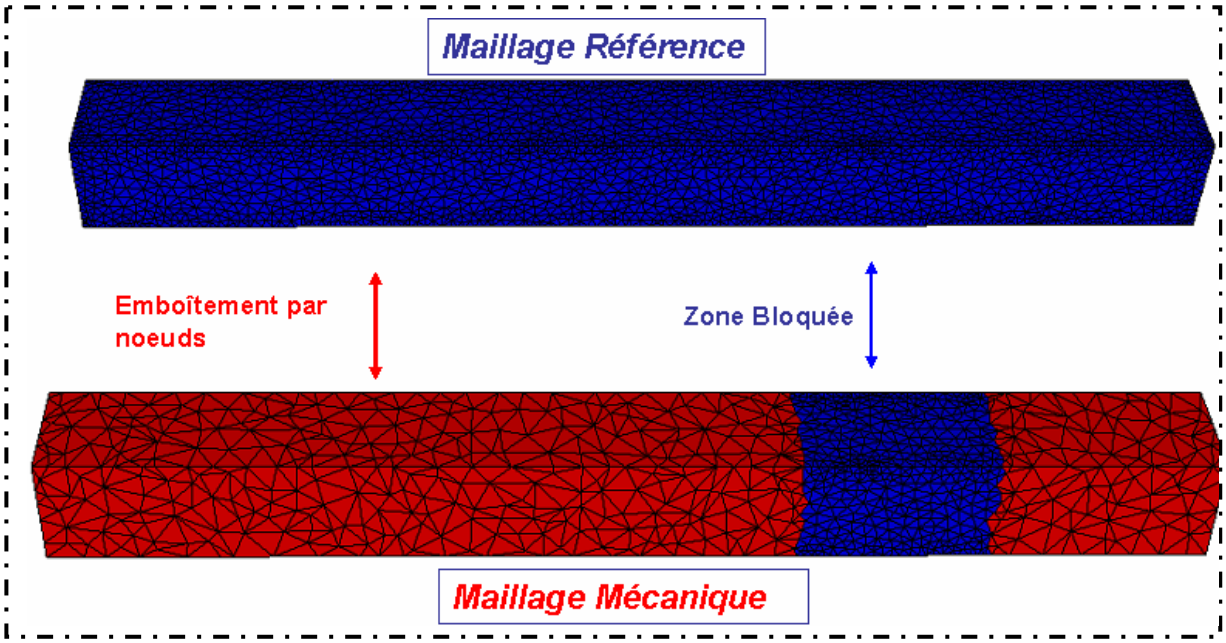


Figure 3-7 : Maillage Référence (partie supérieure), Maillage Mécanique (partie inférieure)

3.3. Le transport

Le transport représente le cœur de la méthode MMMP. Il se fait du Maillage Référence vers les Maillages de Calcul (dans notre cas, le Maillage Mécanique) et inversement. Dans cette partie, on présente le transport utilisé ainsi que les techniques développées pour améliorer sa précision et diminuer son temps de calcul.

3.3.1. La méthode d'interpolation inverse

La méthode de transport adoptée est l'interpolation inverse (Figure 3-8). Elle est composée de deux étapes :

- La localisation : trouver l'élément du maillage de départ contenant le nœud d'arrivée (variable P_1) ou le barycentre de l'élément d'arrivée (variable P_0).
- L'interpolation : calculer la valeur d'arrivée par interpolation sur l'élément de départ.

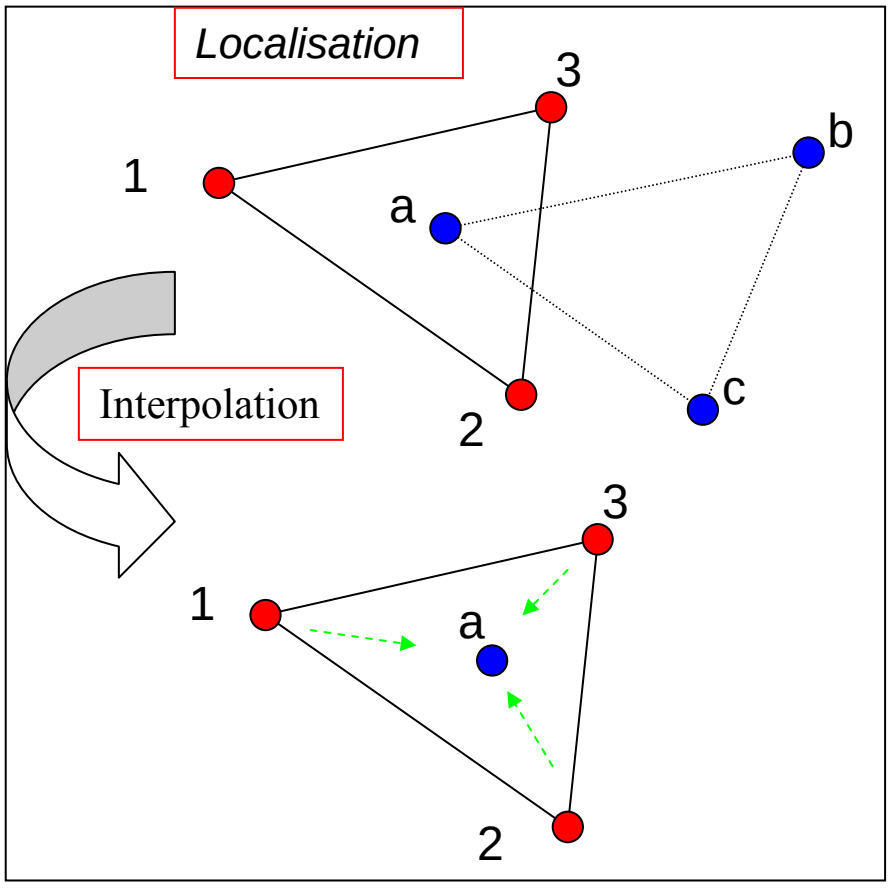


Figure 3-8 : Illustration de la méthode d'interpolation inverse (2D)

a) Cas des variables nodales P_1 :

Supposons que V soit une variable nodale à transporter, a le nœud d'arrivée où on veut l'évaluer, et e l'élément du maillage de départ constitué des nœuds (1, 2, 3, 4) contenant a.

$$X_{Arr}^{a} = \sum_{k=1}^{4} X_{Dep}^{k} N_k(\xi_a) \quad \textbf{(3-43)}$$

Avec ξ_a les coordonnées barycentriques de *a* dans l'élément *e*. La valeur d'arrivée V_{Arr}^{a} est calculée comme suit :

$$V_{Arr}^{a} = \sum_{k=1}^{4} V_{Dep}^{k} N_k(\xi_a) \quad \textbf{(3-44)}$$

Avec V_{Dep}^{k} les valeurs nodales de l'élément de départ.

b) Cas des variables élémentaires P0

Dans le cas des variables calculées aux points de Gauss, c'est-à-dire P_0, la procédure de transport est plus simple. Après avoir trouvé l'élément de départ contenant le barycentre de l'élément d'arrivée, on associe à l'élément d'arrivée la valeur de l'élément de départ, soit :

$$V_{Arr}^{e'} = V_{Dep}^{e} \quad \textbf{(3-45)}$$

Avec, *e* l'élément de départ, *e*' l'élément d'arrivée, V_{Dep}^{e} la valeur de l'élément de départ.

3.3.2. Transport sans relocalisation

Le transport étant fait à chaque incrément de temps, dans deux sens (de M_r vers M_m et de M_m vers M_r), le temps de transport est à prendre en compte. Par rapport au temps total de l'incrément de calcul, il peut représenter jusqu'à 10 % du coût, ce qui signifie que l'efficacité de la méthode MultiMaillages MultiPhysiques est affectée. Pour réduire ces temps, on optimise la technique de transport en n'effectuant pas la localisation des nœuds et éléments du maillage d'arrivée à chaque incrément de temps, mais une seule fois lors du premier transport et ensuite après chaque remaillage. Les informations (élément d'appartenance et coordonnées barycentriques) issues de cette localisation sont conservées et utilisées dans les transports suivants. Cette méthode est rendue possible par le fait que tous les maillages sont actualisés à partir du même champ de vitesses calculé sur M_m, puis transporté sur M_r :

Soit $x_r^t \in M_r^t$, il existe un élément e_m^r de M_m^t et ξ_r^t tel que :

À l'instant *t*,
$$x_r^t = \sum_{\substack{k=1 \\ k \in e_m^r}}^{4} X_m^{k,t} N^k(\xi_r^t) \quad \textbf{(3-46)}$$

Alors étant donné que :

$$v_r^{t+\Delta t} = I_m^r v_m^{t+\Delta t} \quad \textbf{(3-47)}$$

C'est-à-dire que $v_r^{t+\Delta t}$ est le transporté de $v_m^{t+\Delta t}$ par interpolation inverse, on a :

$$v_r^{t+\Delta t} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \in e_m^r}}^{4} V_m^{k,t+\Delta t} N^k(\xi_r^t) \quad \textbf{(3-48)}$$

Et comme :

$$\forall x \in M_r,\ x_r^{t+\Delta t} = x_r^t + v_r^{t+\Delta t} \Delta t \quad \textbf{(3-49)}$$

Il vient (en combinant 3-46 et 3-48):

$$x_r^{t+\Delta t} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \in e_m^r}}^{4} X_m^{k,t} N^k(\xi_r^t) + \Delta t \sum_{\substack{k=1 \\ k \in e_m^r}}^{4} V_m^{k,t+\Delta t} N^k(\xi_r^t) \quad \textbf{(3-50)}$$

$$x_r^{t+\Delta t} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \in e_m^r}}^{4} (X_m^{k,t} + \Delta t V_m^{k,t+\Delta t}) N^k(\xi_r^t) \quad \textbf{(3-51)}$$

Or

$$\forall X \in M_m,\ X_m^{k,t+\Delta t} = X_m^{k,t} + \Delta t V_m^{k,t+\Delta t} \quad \textbf{(3-52)}$$

Donc:

$$x_r^{t+\Delta t} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \in e_m^r}}^{4} X_m^{k,t+\Delta t} N^k(\xi_r^t) \quad \textbf{(3-53)}$$

En conséquence, la localisation de tout nœud du maillage M_r dans le maillage M_m à l'instant t reste la même à l'instant $t + \Delta t$, et par récurrence tout au long de la simulation avec M_r et M_m. Le rapport entre le temps d'une opération de transport faite sans relocalisation et avec relocalisation est de l'ordre de 10^{-3}, ce qui signifie que le temps de transport avec la technique 'sans relocalisation' devient négligeable. La réduction globale du temps de transport dépend du nombre d'incréments séparant deux remaillages (pour dégénérescence de M_r ou pour changement de la zone ZD). Pour le quantifier, on peut dire que le pourcentage de réduction du temps de transport est égal au pourcentage des incréments qui ne subissent pas un remaillage, donc si on fait des remaillages sur 5 % des incréments de calcul on réduit par 95% le temps de transport, qui devient inferieur à 1 % du temps total de la simulation, et donc négligeable.

3.3.3. Les variables transportées

D'une manière générale, le transport des variables nodales est d'assez bonne qualité, même s'il est partiellement diffusif, car il se fait par une interpolation P_1. Dans le cas d'un transport d'un maillage fin vers un maillage déraffiné (exemple de M_r vers M_m), la qualité est meilleure que dans le sens opposé ; dans les deux cas l'erreur est faible. Dans le cas des variables élémentaires, le transport par l'interpolation inverse induit une erreur qui n'est pas négligeable. Pour l'améliorer, on a combiné 3 techniques :

I- Blocage de la zone de déformation.

II- Déraffinement emboité par nœuds.

III- Le transport P0 indirect qui consiste à ne pas transporter les variables P0 directement mais à les recalculer sur le maillage d'arrivée à partir des variables P_1, comme on va le voir dans la suite pour $\bar{\varepsilon}$.

- Variables Nodales P_1 :

Pour les variables nodales, le transport du Maillage Référence vers le Maillage Mécanique est exact pour tous les nœuds du maillage. En effet, tous les nœuds des Maillages de Calcul sont des nœuds du Maillage Référence. Dans notre application, la variable ainsi transportée est la température. Dans l'autre sens, le transport est exact dans la Zone de Déformation et pour tous

les nœuds de la Zone de Faible Déformation qui appartiennent aux deux maillages. Pour le reste des nœuds, le transport se fait par interpolation, mais il porte sur des valeurs faibles et lisses (les gradients sont très faibles) de la vitesse et de la pression.
Le tableau 3.1 résume les variables nodales transportées.

Sens du transport	Variables	Z D	Z F D	
			Nœuds $\in$ aux 2 Maillages	Nœuds $\in$ à un seul Maillage
M_r vers M_m	Température	Exact	Exact	Exact
M_m vers M_r	Vitesse	Exact	Exact	Interpolation P_1
M_m vers M_r	Pression	Exact	Exact	Interpolation P_1

Tableau 3-1 : Résumé des variables transportées et du type de transport effectif

- Variables élémentaires P_0 :

Le transport des variables P_0 est également exact dans la Zone de Déformation. Dans la Zone de Faible Déformation, il se fait par interpolation inverse dans les deux sens mais comme précédemment il porte aussi sur des valeurs incrémentales très faibles et lisses. Dans l'application considérée, la seule variable P_0 à transporter serait $\bar{\varepsilon}$. Pour minimiser l'erreur de transport, on peut choisir de transporter $\dot{\bar{\varepsilon}}$ et de réactualiser ensuite la valeur de $\bar{\varepsilon}$ sur M_r. Le transport serait exact dans la zone ZD et les erreurs commises dans la zone ZFD porteraient sur les valeurs très faibles puisque par définition de la ZFD, $\dot{\bar{\varepsilon}}$ y est faible. Dans la pratique, on ne transporte même pas $\dot{\bar{\varepsilon}}$. On préfère le recalculer à partir du champ de vitesses, comme suit :
A l' instant $t+\Delta t$, on connait, $v_r^{t+\Delta t}$ (3-25), on peut donc calculer $\dot{\bar{\varepsilon}}(v_r^{t+\Delta t})$ soit :

$$\dot{\bar{\varepsilon}}(v_r^{t+\Delta t}) = \sqrt{\frac{2}{3}\dot{\varepsilon}_r^{t+\Delta t} : \dot{\varepsilon}_r^{t+\Delta t}} \qquad \textbf{(3-54)}$$

Avec :

$$\dot{\varepsilon}_r^{t+\Delta t} = \frac{1}{2}(\nabla v_r^{t+\Delta t} + (\nabla v_r^{t+\Delta t})^t) \qquad \textbf{(3-55)}$$

Puis on calcule $\bar{\varepsilon}$:

$$\bar{\varepsilon}_r^{t+\Delta t} = \bar{\varepsilon}_r^t + \Delta t \dot{\bar{\varepsilon}}_r^{t+\Delta t} \qquad \textbf{(3-56)}$$

Ceci qui permet d'éviter tout transport P_0 pour l'application retenue, et ainsi de minimiser le nombre de variables à transporter. Cette manière de faire n'est pas parfaitement générale, mais elle peut constituer une alternative dans la plupart des situations rencontrées.

3.3.4. Résultats

Pour tester le transport, on considère le problème de martelage présenté dans le paragraphe 2.1. On effectue un déplacement de l'outil de 30 mm, ce qui correspond à une déformation de 15 % en utilisant le maillage de 23 500 nœuds. L'objectif est de comparer le transport MultiMaillages au transport traditionnel. On considère un maillage uniformément raffiné qui

représente M_r. On considère alors deux maillages déraffinés adaptés à la simulation de martelage, M_{Trad} et M_m. M_{Trad} est déraffiné par la technique habituelle, sans contraintes d'emboîtement, en imposant que la taille de maille soit multipliée par deux dans la zone ZFD ; M_m est déraffiné comme présenté précédemment avec blocage des nœuds et emboîtement. On effectue les calculs sur les maillages M_m et M_{Trad}. On transporte les résultats du dernier incrément de calcul sur le maillage M_r. La Figure 3-9 montre le transport de la pression de M_m vers M_r, et la Figure 3-10 celui de M_{Trad} vers M_r. Le premier est excellent et le résultat transporté est exactement le même que celui sur le maillage de départ. En utilisant le déraffinement traditionnel, le transport est moins bon, et on peut voir clairement les différences entre le résultat projeté sur M_r et sur M_{Trad}. Pour comparer le transport des variables P0, on considère la vitesse de déformation généralisée $\dot{\bar{\varepsilon}}$. La Figure 3-11 montre les résultats sur les deux maillages M_m et M_r, et comme dans le cas de la pression, les résultats sont exactement les mêmes; on a l'impression que le résultat sur M_r est une copie du résultat sur M_m. D'autre part, en ce qui concerne le transport de $\dot{\bar{\varepsilon}}$ de M_{Trad} vers M_r (Figure 3-12), on peut remarquer que le transport a causé une diffusion de l'information.

De ces deux exemples on peut tirer deux conclusions :

- La méthode de transport utilisée est bien diffusive avec des maillages non emboîtés
- Avec les techniques d'emboîtement et de conservation de la ZD, cette diffusion est nulle dans la zone ZD et quasi-nulle dans la zone ZFD.

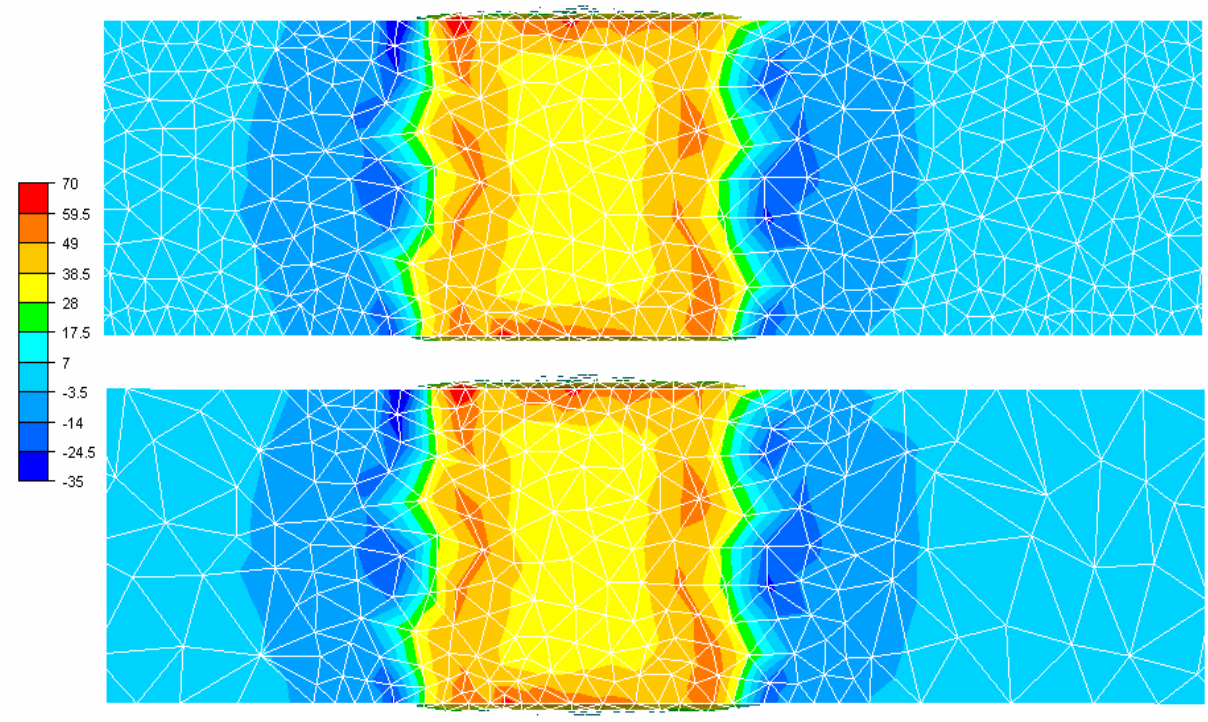


Figure 3-9 : Transport de la Pression, du Maillage déraffiné M_m (bas) vers le Maillage fin M_r (haut)

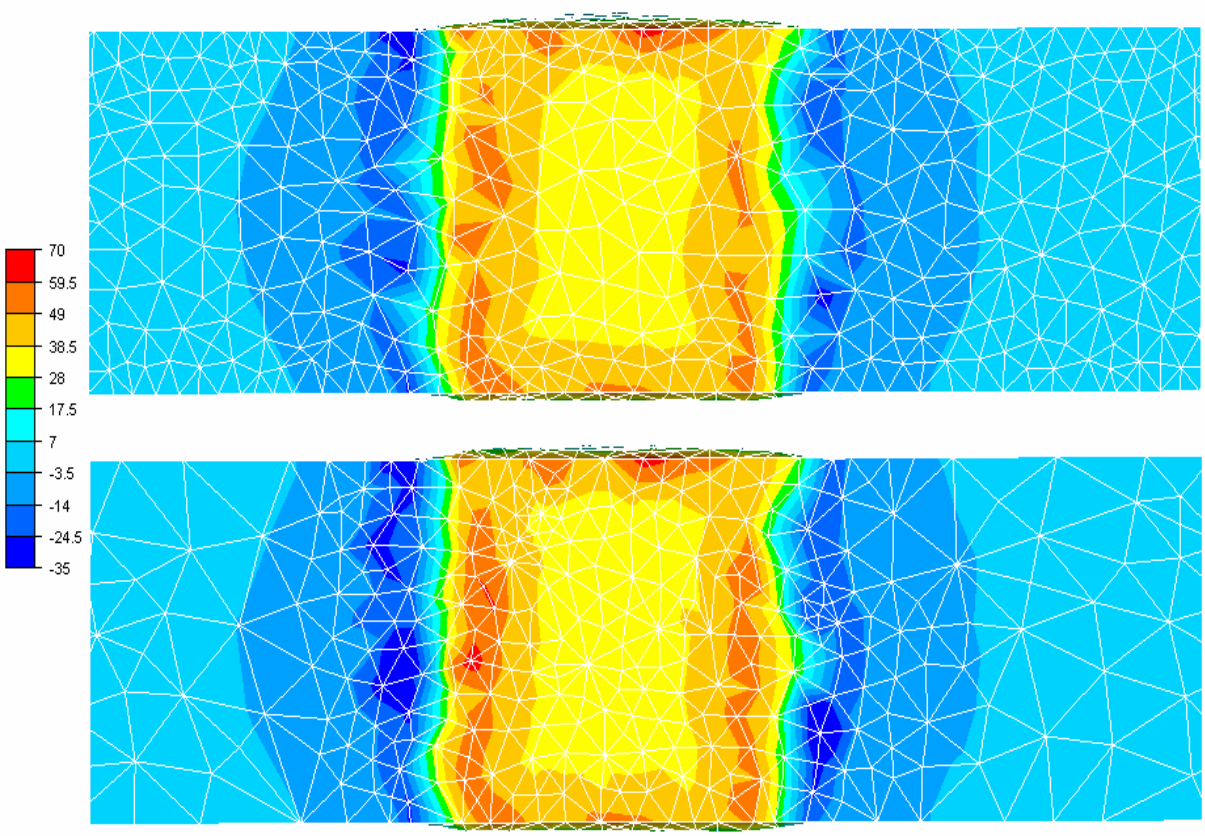


Figure 3-10 : Transport de la pression, du Maillage M_{Trad} déraffiné (traditionnellement) (bas) vers le Maillage fin M_r (haut)

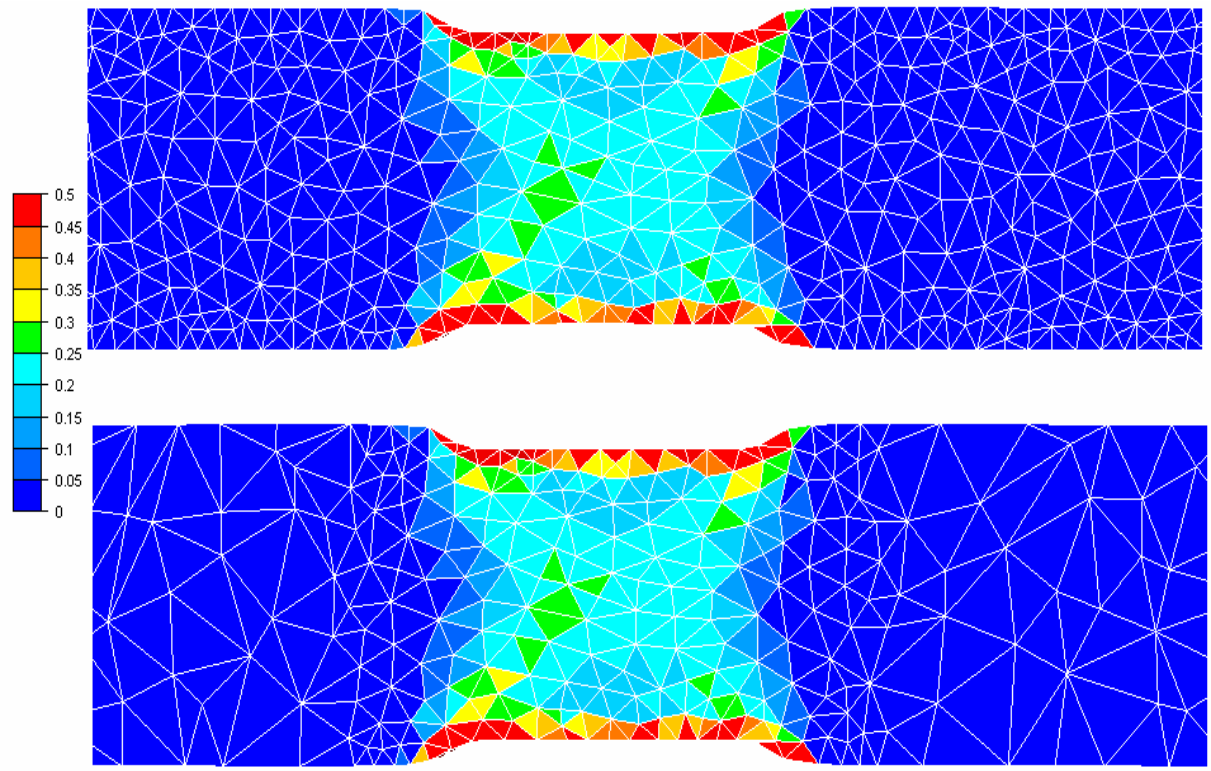


Figure 3-11 : Transport de la vitesse de déformation généralisée, du Maillage M_m (bas) vers le Maillage fin M_r (haut)

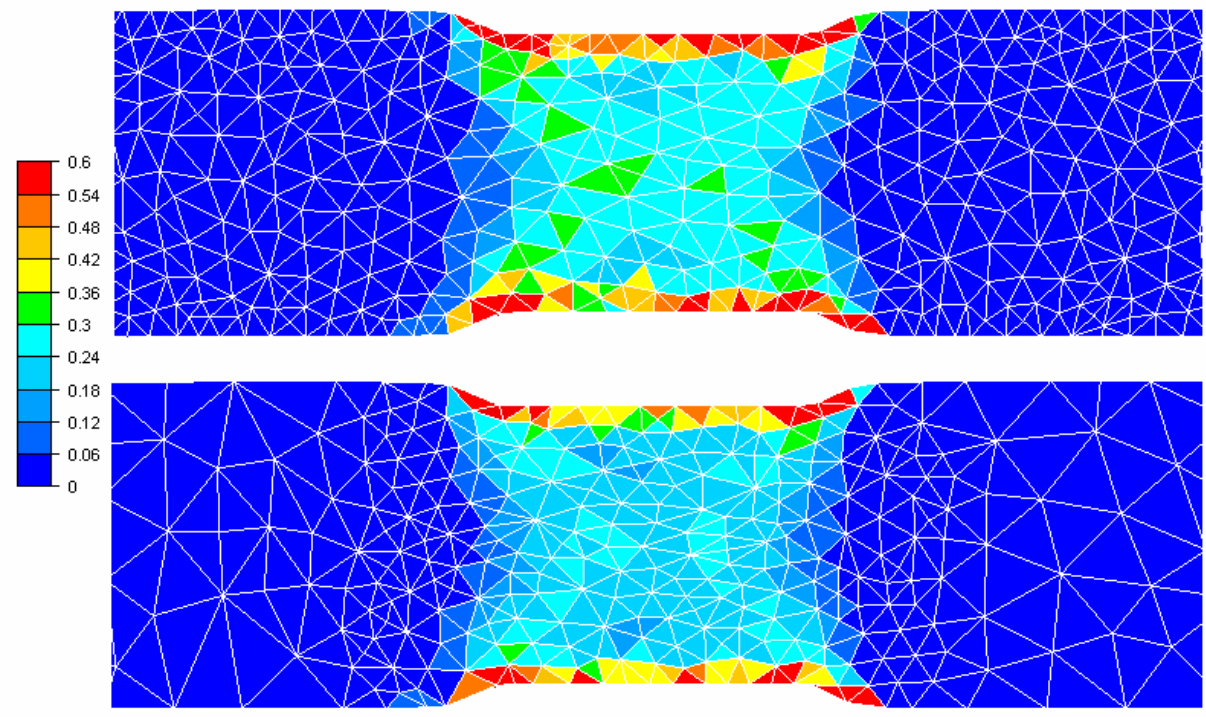


Figure 3-12 : Transport de la vitesse de déformation généralisée, du Maillage M_{Trad} déraffiné (traditionnellement) (bas) vers le Maillage fin M_r (haut)

3.4. Aspect parallèle

Dans cette partie, on présente la parallélisation des différents ingrédients de la méthode MultiMaillages MultiPhysiques. On commence par présenter la génération du Maillage Mécanique, suivie du transport et on termine par l'équilibre des charges.

3.4.1. Génération parallèle du Maillage Mécanique

Un des points forts du mailleur MTC est qu'il fonctionne en parallèle suivant une série d'itérations de remaillage et de repartitionnement. Il commence par diviser le domaine global en un ensemble de sous-domaines indépendants, affectés chacun à un processeur, de manière à équilibrer la charge des processeurs et à minimiser les interfaces. Ces dernières sont les zones qui séparent les sous-domaines.

---

1. Partitionnement du domaine global :

Equilibrer les charges et minimiser les interfaces

2. Remaillage :

Tant que (il reste des opérations à faire) :

Pour (Chaque processeur *p* faire) :

Effectuer indépendamment les opérateurs de remaillage sur chaque processeur sans toucher aux interfaces

Fin Pour

Repartitionner :

Décaler les nœuds des interfaces vers l'intérieur des sous-domaines

Fin Tant que

Figure 3-13 : Algorithme de parallélisation du mailleur MTC

La stratégie de parallélisation (Figure 3-13) proposée par [Digonnet01], [Digonnet et al.07-1], [Coupez et al.00], [Coupez00], consiste à distribuer les opérateurs de remaillage sur les différents sous domaines, de manière à ne pas avoir à effectuer des opérations communes à deux sous-domaines. Cela se fait en bloquant les interfaces durant l'étape de remaillage. Celle-ci est donc réalisée d'une manière indépendante sur chaque sous-domaine. Le remaillage est suivi d'une étape de repartitionnement (en parallèle) qui consiste à déplacer les interfaces de manière à transformer une partie des nœuds d'interface en des nœuds internes, et ainsi permettre au mailleur de remailler ces nœuds durant la prochaine itération. Cette

procédure de remaillage-repartitionnement se répète jusqu'à l'obtention d'un maillage complètement remaillé et équilibré. On note que le temps de remaillage-repartitionnement diminue progressivement étant donné que le nombre d'élément à remailler diminue à chaque itération. L'avantage de cette stratégie est que le remaillage s'effectue à l'intérieur d'un sous-domaine, indépendamment des autres sous-domaines, ce qui signifie que l'on n'a pas besoin d'échanger des informations entre les différents sous-domaines (sauf à l'étape du repartitionnement parallèle). La procédure de remaillage parallèle est illustrée par la Figure 3-14, où on voit les itérations successives de remaillage en partant d'un maillage déraffiné jusqu'à obtenir un maillage fin partout.

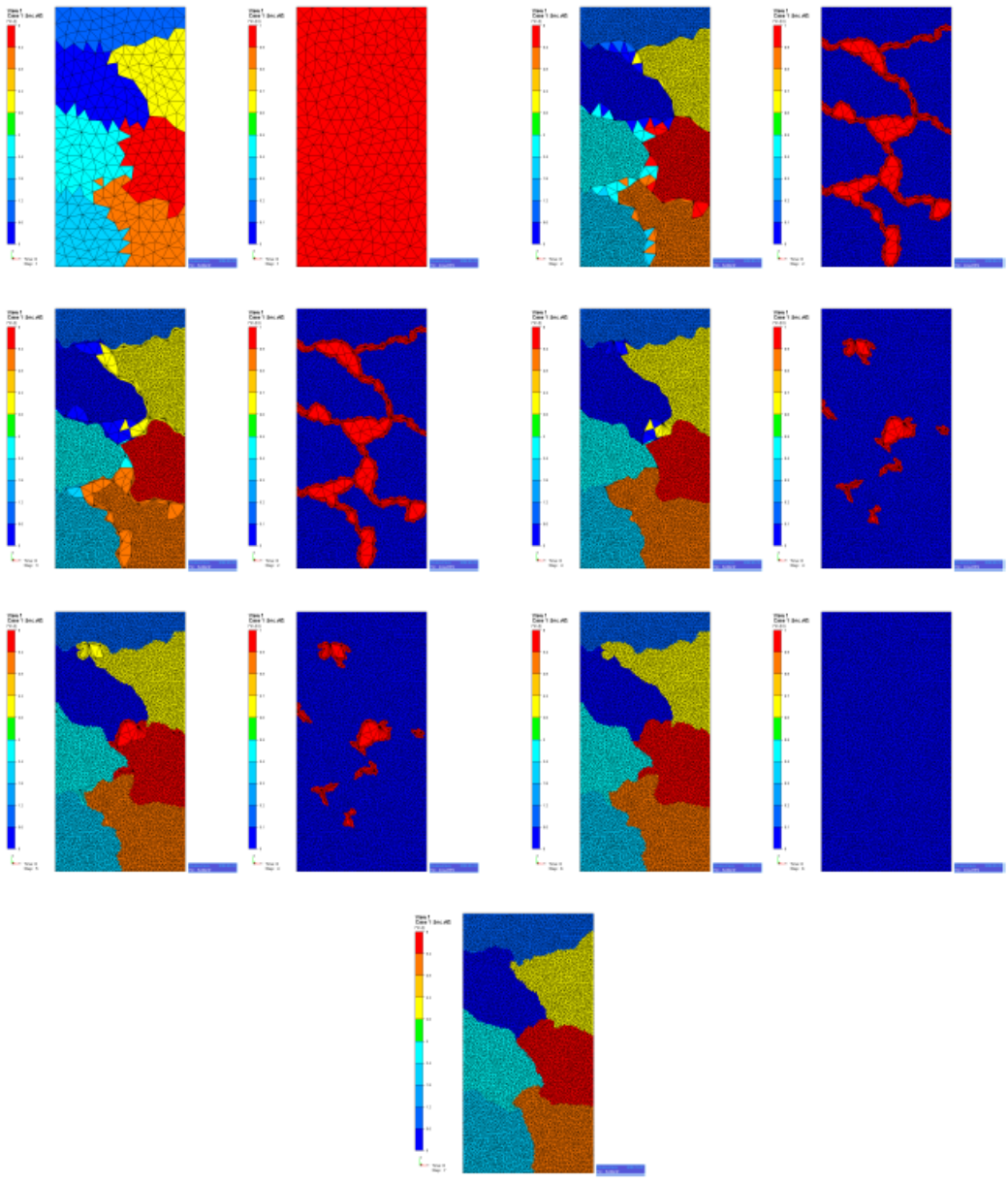


Figure 3-14 : Différentes étapes de la procédure de remaillage parallèle basée sur le principe de blocage des interfaces et du remaillage local (à gauche, maillage et partitionnement sur 7 processeurs, à droite en rouge, indication des éléments n'ayant pas encore été remaillés)

3.4.2. Le transport parallèle

Le transport des variables entre deux maillages [Digonnet et al.07-2] par interpolation inverse est constitué de deux étapes que sont la localisation et l'interpolation. La localisation utilise une procédure de recherche hiérarchique des éléments contenant un point donné. Dans certains cas, cette recherche ne suffit pas, par exemple si le nœud d'arrivée se trouve légèrement à l'extérieur du domaine du maillage de départ, ce qui est possible si les frontières des maillages ne se superposent pas parfaitement. On utilise alors une seconde recherche, basée sur un calcul plus précis de la distance, et qui est généralement plus coûteux. Dans le contexte du transport parallèle, on rencontre une seconde situation où la recherche hiérarchique n'arrive pas à localiser certains nœuds. C'est le cas des nœuds appartenant à une partition autre que celle du nœud à localiser. La Figure 3-15 illustre le cas extrême où les partitions sont presque opposées. L'algorithme de transport fait alors appel à la seconde procédure d'une manière presque systématique et devient très coûteux, ce coût pouvant représenter jusqu'à 20 % du temps total de la simulation. Ce problème est surmonté en utilisant le transport sans relocalisation présenté précédemment. Le temps de transport est alors réduit à moins de 1% du temps total de la simulation.

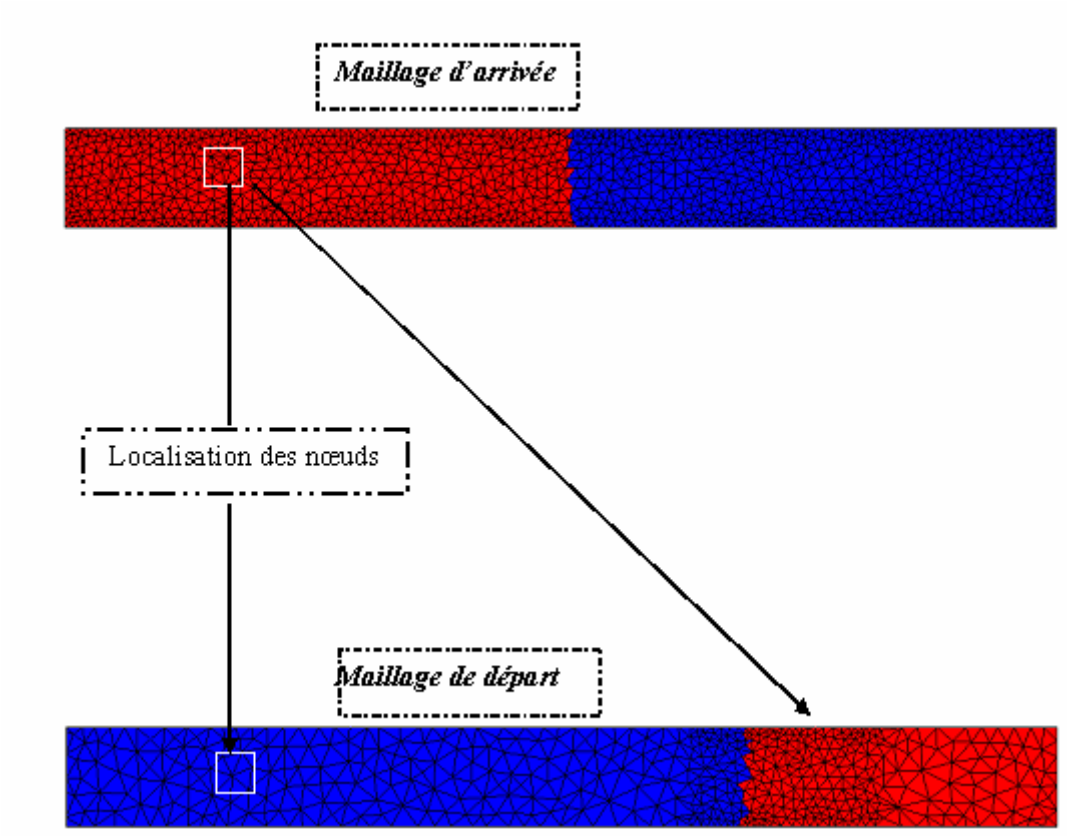


Figure 3-15 : Partitions opposées sur les maillages de départ et d'arrivée

3.4.3. Equilibre des charges

Le partitionnement d'un maillage, qui consiste à distribuer les charges de calcul sur les différents processeurs, est un paramètre important des performances en parallèle dont dépend largement l'accélération. Dans notre cas, la simulation contient plusieurs maillages, et ces maillages sont liés topologiquement. Ceci nous met face à deux choix de partitionnement :

- Soit on garde le même partitionnement sur les deux maillages. Le partitionnement du Maillage Mécanique n'est donc pas équilibré, puisque l'on ne prend pas en considération la présence d'une zone de taille plus fine. En revanche, on évite les problèmes de nœuds n'appartenant pas aux mêmes partitionnements lors du transport (Figure 3-16)

- Soit on effectue un nouveau partitionnement du Maillage Mécanique. On obtient alors un maillage bien équilibré, mais dont tous les éléments n'appartiennent pas aux mêmes partitions que sur le Maillage Référence (Figure 3-17).

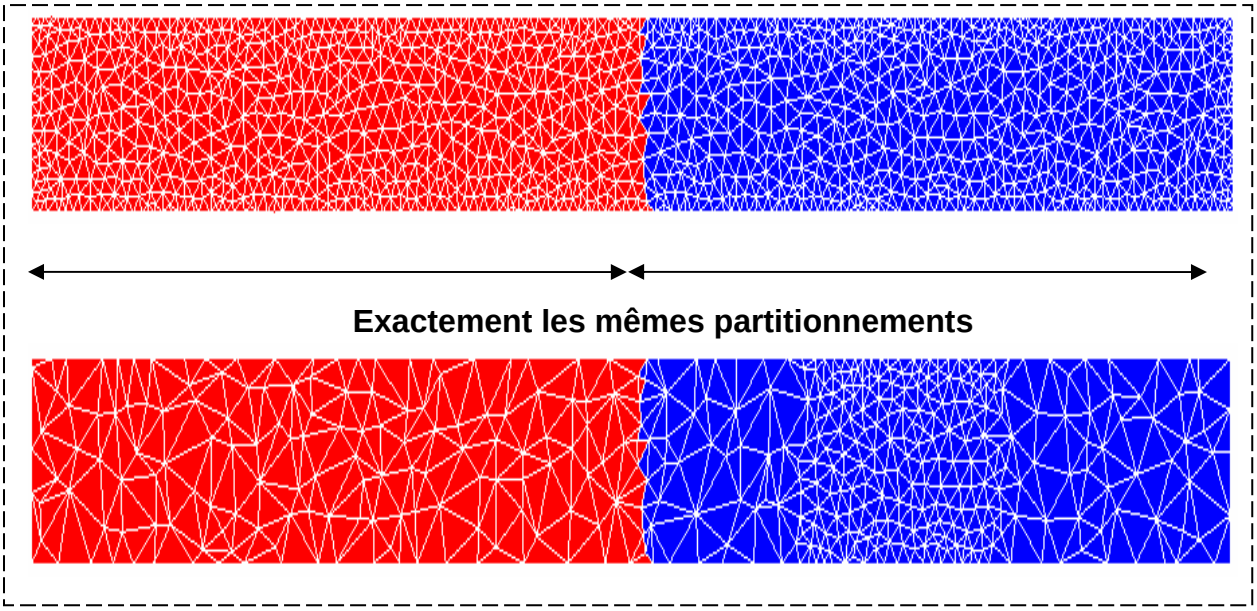


Figure 3-16 : Partitions identiques sur le Maillage Référence (partie supérieure) et le Maillage Mécanique (partie inférieure)

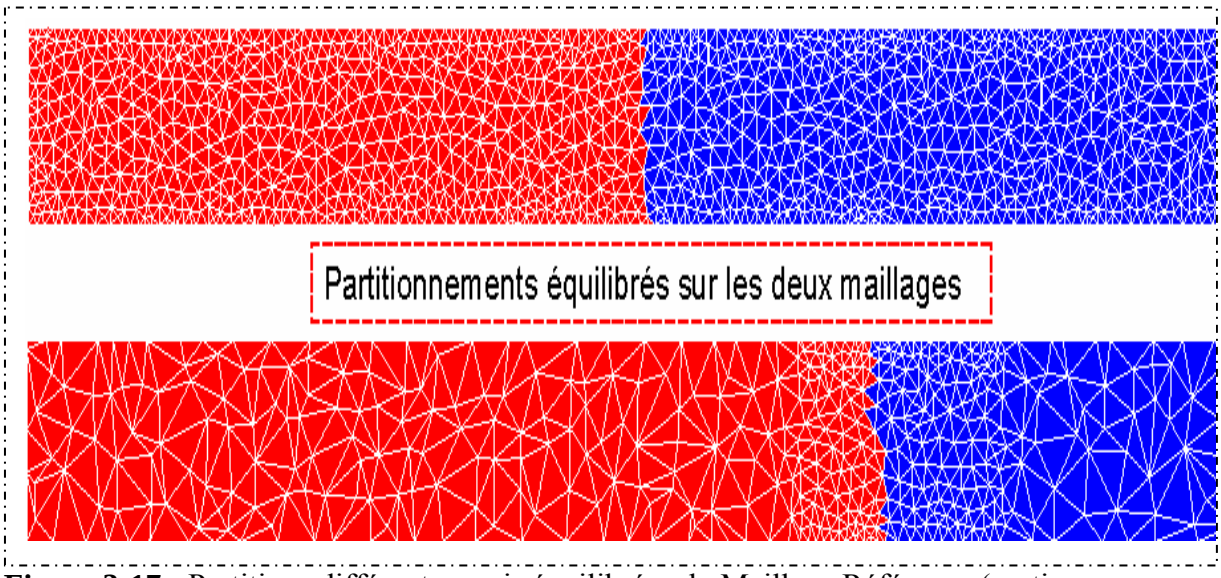


Figure 3-17 : Partitions différentes mais équilibrées du Maillage Référence (partie supérieure) et du Maillage Mécanique (partie inférieure)

La première stratégie nous donne une diminution du temps de transport, mais le fait d'avoir une mauvaise distribution des charges sur le Maillage Mécanique cause une augmentation du

temps de calcul et une perte d'efficacité parallèle. Dans ce cas, le temps perdu sur le Maillage Mécanique dépasse largement le temps que l'on peut gagner au niveau du transport. On a donc adopté la deuxième stratégie.

3.5. Synthèse

Pour réduire le temps de calcul des procédés multiphysiques en général et incrémentaux en particuliers, on utilise une méthode MultiMaillages Multiphysiques. Elle consiste à utiliser, pour chaque physique, le maillage qui lui est optimal et un maillage complémentaire pour le stockage des résultats.

Dans le contexte de ce travail, on a appliqué la méthode MultiMaillages Multiphysiques en utilisant deux maillages : un maillage fin pour effectuer le calcul thermique et le stockage et un maillage déraffiné pour faire le calcul mécanique. Le Maillage Mécanique est adapté aux procédés qui ont des déformations localisées. Ce maillage a deux propriétés principales : la zone de déformation est exactement la même que celle du maillage de stockage et la zone de faible déformation est déraffinée en préservant la propriété d'emboitement par nœuds des maillages.

Le transport entre les différents maillages est fait par la méthode d'interpolation inverse. La particularité de la construction du Maillage Mécanique (zone de déformation bloquée et déraffinement emboîté par nœuds) assurent un transport précis entre les maillages. Pour diminuer le coût du transport qui représente presque 10 % du temps total en séquentiel et 20 % en parallèle, on a utilisé une technique de transport sans relocalisation, le temps de transport est devenu alors inférieur à 1 %.

Pour le partitionnement du Maillage Mécanique, on a adopté la stratégie d'équilibrer les charges sur le Maillage Mécanique indépendamment du maillage de stockage. De cette manière, l'augmentation du temps de calcul résultant du transport entre partitions disjointes est inférieure à celle causée par le déséquilibre des charges.

3.6. Perspectives

En tant que perspectives plusieurs idées peuvent être abordées pour améliorer le travail actuel :

Actuellement la dimension de la zone de déformation a la dimension de l'outil augmentée de 20 %. Cependant ce choix (adapté pour le procédé de martelage) peut être différent pour d'autres procédés. Il est donc important de mettre en place une procédure flexible pour adapter la taille de la ZD en fonction des paramètres de l'application considérée. De même, pour la taille de déraffinement qui est actuellement égale à 2 fois la taille de la zone fine, elle peut être changée en fonction des procédés. La solution optimale pour adapter la zone de déformation et la taille de déraffinement serait d'utiliser un estimateur d'erreur, qui déterminerait la taille optimale de chaque élément, et d'effectuer ensuite le déraffinement du Maillage Mécanique en fonction de ces tailles.

Le deuxième volet d'amélioration concerne le transport. Ce dernier étant fait par la méthode d'interpolation inverse on peut étudier d'autres types de transport. Par exemple, au niveau du

transport P_0, on peut utiliser une méthode basée sur le lissage par patch tel que la méthode SPR (Super Convergent Patch Recovery) [Zienkiewicz et al.92].

Le solveur mécanique utilisé actuellement est le Résidu conjugué préconditioné par Cholsky Incomplet. On peut donc penser à étudier le couplage de la Méthode MultiMaillages MultiPhysiques avec des solveurs plus performants, tels que le solveur Multigrilles, en espérant ajouter l'accélération Multigrilles à l'accélération MultiMaillages.

Pour améliorer la qualité du maillage et pour certains procédés, on peut envisager de coupler la méthode MultiMaillages MultiPhysiques à la formulation ALE, et de cette manière réduire le temps de calcul et améliorer la qualité du maillage au cours du temps.

Chapitre IV

Résultats

Après avoir présenté la modélisation thermomécanique de notre problème dans le deuxième chapitre et la méthode MMMP dans le troisième chapitre, on passe à l'étape d'applications afin de valider le choix de cette méthode et de découvrir les accélérations qu'elle peut nous offrir.

Dans la première partie du chapitre, on étudie la précision de la méthode pour être sûr que nous ne sommes pas entrain de sacrifier la qualité de notre calcul en voulant l'accélérer, d'autant que dans les travaux de la littérature sur la méthode MultiMaillages et les méthodes qui lui ressemblent, on ne trouve pas d'études précises qui quantifient l'erreur ; les auteurs se limitent à comparer les isovaleurs obtenues avec cette méthode à celles de référence, ce qui n'est pas suffisant de notre point de vue pour juger la précision des méthodes. Pour cela, on a décidé de faire une étude quantitative de l'erreur de la méthode MMMP sur les variables principales du calcul, comme la vitesse, les coordonnées et la température, suivant la norme max et la norme euclidienne. Enfin, on quantifie cette erreur en la comparant à l'erreur élément fini, et on montre qu'elle est du même ordre.

Dans la deuxième partie, on étudie l'accélération de la méthode MultiMaillages en comparant le temps de calcul obtenu à celui de référence obtenu par un calcul MonoMaillage. Cette accélération dépend de plusieurs paramètres, que l'on étudiera afin d'évaluer les potentialités et limites de la méthode.

Enfin, on passe au calcul parallèle, un des aspects les plus importants de notre étude, d'autant que les méthodes existantes dans la littérature n'abordent pas cet aspect. On étudie l'accélération qu'offre la méthode en parallèle, son comportement avec l'augmentation du nombre de processeurs. On compare ensuite ce comportement à celui du calcul MonoMaillage, et on montre qu'ils sont identiques pour des maillages qui ont le même nombre de degrés de liberté.

4.1. Etude de la précision

Les deux critères principaux à prendre en considération dans la modélisation numérique sont la précision et le temps de calcul. Ces deux paramètres sont généralement liés. Souvent lorsqu'on réduit le temps de calcul, la précision diminue, et vice versa. Pour cette raison, il est primordial de vérifier l'effet de la méthode MMMP sur la précision des calculs. Dans ce qui suit, on présente une étude de la précision sur plusieurs variables (nodales et élémentaires) de la simulation.

4.1.1. Calcul d'erreur

On considère l'application de martelage avec le maillage de 23 500 nœuds (voir paragraphe 2.1). L'étude de la précision est faite en comparant les résultats de la méthode MMMP à ceux d'un calcul MonoMaillage (calcul fait sur le maillage le plus fin seulement). Afin d'évaluer facilement la précision, on utilise le Maillage Référence de la méthode MMMP pour effectuer le calcul MonoMaillage (de sorte que les résultats à comparer appartiennent à des maillages identiques). On étudie l'erreur de trois manières :

- En des nœuds déterminés.
- Sur tout le maillage, suivant la norme Max.
- Sur tout le maillage, suivant la norme Euclidienne.

4.1.1.1. Evaluation de l'erreur en des nœuds déterminés

On calcule l'erreur en des nœuds des différentes zones du maillage: deux nœuds dans la zone de déformation (N_1, N_2 : Figure 4-1), deux nœuds dans la zone de faible déformation (N_5, N_6 : Figure 4-2) et deux nœuds extrêmes (N_3, N_4 : Figure 4-3). L'erreur est calculée suivant la norme Max :

$$E = \left| \frac{f_{Multi} - f_{Mono}}{f_{Max}} \right| \qquad \textbf{(4-1)}$$

Où f_{Mono} est la valeur obtenue par le calcul MonoMaillage, f_{Multi} la valeur obtenue par le calcul MultiMaillages et f_{Max} la valeur Max du champ considéré sur l'ensemble du domaine.

4.1.1.1.1. Nœuds de la zone de déformation

Les nœuds considérés sont montrés sur la Figure 4-1. Le Tableau 4-1 présente les valeurs de l'erreur sur le nœud N_1 appartenant à une arête du domaine dans la zone de contact. L'erreur sur la température est égale à 10^{-4} %. Sur la composante v_x de la vitesse, elle est égale à 10^{-4} %, et sur la vitesse de déformation généralisée, elle est égale à10^{-3} %. Pour le nœud N_2 de la surface et situé entre les outils, les valeurs de l'erreur sont donnés par le Tableau 4-2. L'erreur sur la température est égale à 10^{-4} %, sur la composante v_x de la vitesse, elle est égale à 10^{-3} %, et sur la vitesse de déformation généralisée, elle est égale à 10^{-2} %. Ces résultats montrent que, dans la zone de déformation, l'erreur sur les champs considérés est

négligeable, et que la précision du calcul est excellente (ce à quoi l'on s'attendait puisque les maillages sont identiques).

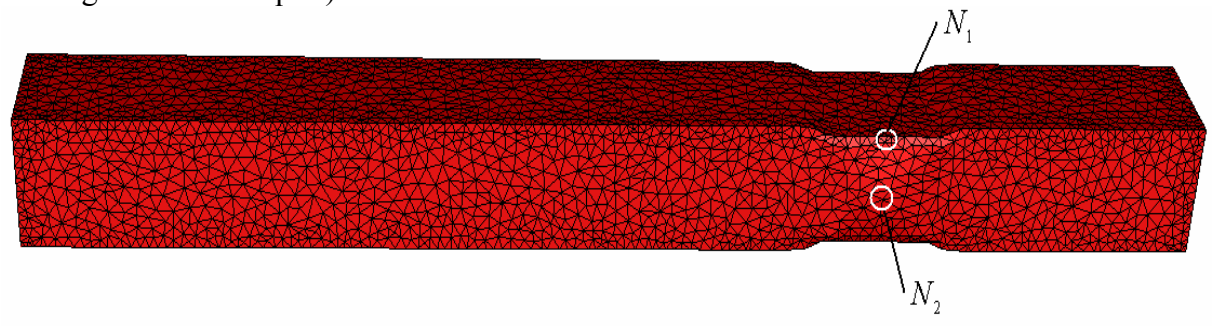


Figure 4-1 : Nœuds dans la Zone de Déformation

	Référence	MMMP	Valeur Max	Erreur
Température	1199,7	1199,7	1250	10^{-6}
v_x	0,005	0,005	18	10^{-6}
$\dot{\bar{\varepsilon}}$	0,7	0,7	3	10^{-5}

Tableau 4-1 : Erreur relative : Nœud N_1

	Référence	MMMP	Valeur Max	Erreur
Température	1249,7	1249,7	1250	10^{-6}
v_x	0,06	0,06	18	10^{-5}
$\dot{\bar{\varepsilon}}$	0,25	0,25	3	10^{-4}

Tableau 4-2 : Erreur relative : Nœud N_2

4.1.1.1.2. Nœuds de la zone de faible déformation

On considère deux nœuds appartenant à cette zone de faible déformation (Figure 4-2). Les résultats pour le nœud N_5 appartenant à une arrête de la barre sont donnés dans le Tableau 4-3, et pour le nœud N_6 appartenant à la surface perpendiculaire au déplacement des outils dans le Tableau 4-4. Les valeurs de l'erreur sur la vitesse v_x et $\dot{\bar{\varepsilon}}$ sont légèrement plus grandes que dans la zone de déformation, ce qui n'est pas surprenant parce que dans cette zone le maillage Mécanique est déraffiné, mais la précision reste très satisfaisante et pratiquement négligeable. L'erreur sur la température reste la même que celle obtenue sur les nœuds de la zone de déformation.

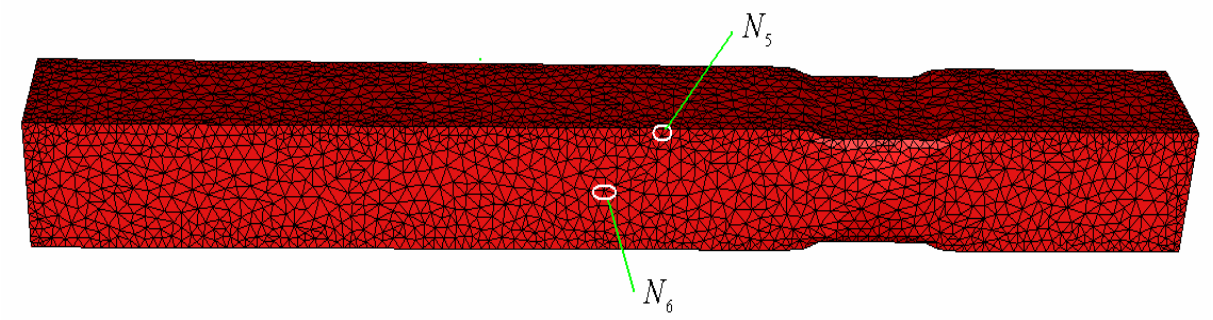


Figure 4-2 : Nœuds dans la Zone de Faible Déformation

	Référence	MMMP	Valeur Max	Erreur
Température	1249,5	1249,5	1250	10^{-9}
v_x	-14,6	-14,6	18	10^{-4}
$\dot{\bar{\varepsilon}}$	0,001	0,002	3	10^{-4}

Tableau 4-3 : Erreur relative : Nœud N_5

	Référence	MMMP	Valeur Max	Erreur
Température	1249,6	1249,6	1250	10^{-6}
v_x	-14,6	-14,6	18	10^{-3}
$\dot{\bar{\varepsilon}}$	0,002	0,002	3	10^{-5}

Tableau 4-4 : Erreur relative : Nœud N_6

4.1.1.1.3. Nœuds extrêmes

Pour tester l'erreur aux extrémités du maillage, on considère deux nœuds N_3, N_4 aux points extrêmes de la barre (Figure 4-3). On décide de calculer l'erreur sur les coordonnées *X, Y, Z* (Tableau 4-5, Tableau 4-6) dans le but d'évaluer la précision sur la géométrie de la barre. L'erreur sur *X* est égale à 10^{-3} %, sur *Y* à 10^{-2} % et sur *Z* à 10^{-2} %. Ces résultats indiquent qu'au niveau de la géométrie, la précision de la méthode MMMP est excellente ; en d'autres termes, la géométrie de la pièce forgée est bien conservée.

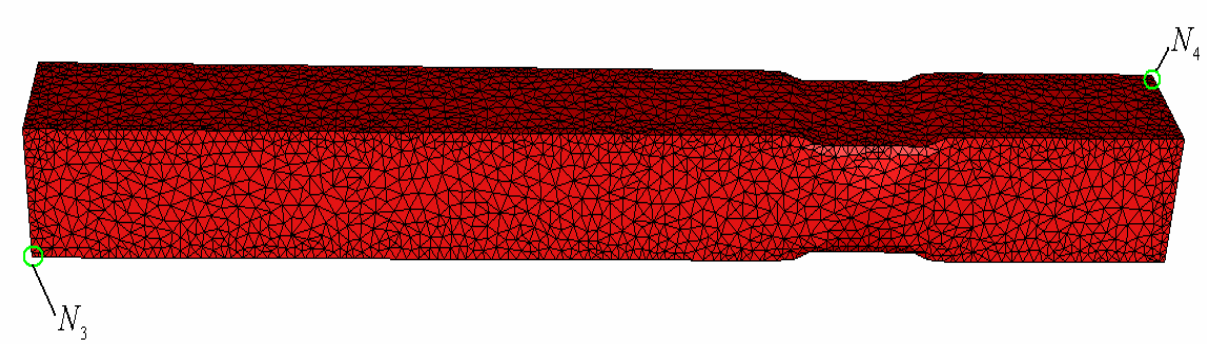


Figure 4-3 : Nœuds extrêmes

	Référence	MMMP	Valeur Max	Erreur
X	2010	2010	2010	10^{-6}
Y	-97,8	-97,8	112	10^{-4}
Z	-115,4	-115,4	116	10^{-4}

Tableau 4-5 : Erreur relative : Nœud N_3

	Référence	MMMP	Valeur Max	Erreur
X	10,2	10,2	2010	10^{-5}
Y	99,9	99,9	112	10^{-4}
Z	84,1	84,1	116	10^{-4}

Tableau 4-6 : Erreur relative : Nœud N_4

4.1.1.2. Evaluation de l'erreur suivant la norme Max

On s'intéresse à l'erreur selon sa norme Max sur tout le maillage. Pour une variable nodale, l'erreur est donnée par :

$$E_{Max}^{P1} = \frac{\underset{i=1}{\overset{NbNoeuds}{Max}} \left| f_{Multi}^{P1}(i) - f_{Mono}^{P1}(i) \right|}{\underset{i=1}{\overset{NbNoeuds}{Max}} \left| f_{Mono}^{P1}(i) \right|} \quad \textbf{(4-2)}$$

Pour une variable élémentaire l'erreur est donnée par :

$$E_{Max}^{P0} = \frac{\underset{i=1}{\overset{NbElements}{Max}} \left| f_{Multi}^{P0}(i) - f_{Mono}^{P0}(i) \right|}{\underset{i=1}{\overset{NbElements}{Max}} \left| f_{Mono}^{P0}(i) \right|} \quad \textbf{(4-3)}$$

Les valeurs de l'erreur Max sur *T, X, Z,* v_z, v_x, $\dot{\bar{\varepsilon}}$, $\bar{\varepsilon}$ sont données dans le Tableau 4-7. Ces valeurs sont des moyennes des valeurs calculées au cours des incréments de temps. Pour la température, l'erreur est égale à 8.10^{-3} %, ce qui montre que la précision du calcul thermique est excellente. L'erreur sur *Z* est égale à 8.10^{-2} % et sur *X* à 4.10^{-3} %. La précision sur la géométrie est donc très bonne.

Variables	Erreur Max
T	8.10^{-5}
X	4.10^{-5}
Z	8.10^{-4}
v_z	4.10^{-2}
v_x	4.10^{-2}
$\dot{\bar{\varepsilon}}$	4.10^{-2}
$\bar{\varepsilon}$	4.10^{-2}

Tableau 4-7 : Erreur relative : Max

Sur les composantes de la vitesse, de la vitesse de déformation généralisée et de la déformation généralisée, l'erreur est de l'ordre de 4 %. Bien que cette valeur soit supérieure à l'erreur obtenue sur la température et sur les coordonnées, elle est satisfaisante parce qu'elle représente la valeur maximale de l'erreur que l'on peut rencontrer, et que cette valeur ne représente l'erreur qu'en un seul nœud. Par ailleurs, on note qu'avec le temps, un décalage se produit entre les maillages Référence et de Calcul, ce qui amplifie la valeur de l'erreur qui n'est plus calculée en des points parfaitement coïncidents.

4.1.1.3. Evaluation de l'erreur suivant la norme Euclidienne

Dans ce paragraphe, on étudie la valeur de l'erreur suivant la norme euclidienne, afin de quantifier la précision de manière globale et moyenne. Pour une variable nodale, l'erreur est donnée par:

$$E_{L^2}^{P1} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{NbNoeuds} (f_{Multi}^{P1}(i) - f_{Mono}^{P1}(i))^2}{\sum_{i=1}^{NbNoeuds} (f_{Mono}^{P1}(i))^2}} \quad \textbf{(4-4)}$$

Et pour une variable élémentaire, l'erreur est donnée par:

$$E_{L^2}^{P0} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{NbElements} (f_{Multi}^{P0}(i) - f_{Mono}^{P0}(i))^2}{\sum_{i=1}^{NbElements} (f_{Mono}^{P0}(i))^2}} \quad \textbf{(4-5)}$$

Le calcul de la précision est fait sur les variables suivantes v_x, v_z, $\dot{\bar{\varepsilon}}$, X, Z, T et $\bar{\varepsilon}$. Dans chaque cas, on calcule l'erreur en norme euclidienne tous les 5 incréments (la simulation totale comporte de 75 incréments), dans le but d'étudier son évolution en fonction du temps.

4.1.1.3.1. La vitesse

L'importance de la vitesse en tant que variable réside dans le fait qu'elle est la base pour calculer toutes les autres variables d'état mécanique. Les courbes de l'évolution de l'erreur (pour les composantes v_x et v_z) sont données sur la Figure 4-4. Les moyennes sont respectivement égales à 0,3% et 0,4%. Elles sont donc 10 fois plus faible que suivant la norme Max, ce qui signifie que la précision du calcul MMMP est très bonne. Les isovaleurs de v_x et v_z issues du dernier incrément du calcul MonoMaillage (haut) et du calcul MultiMaillages (bas) sont données respectivement sur la Figure 4-5 et la Figure 4-6. Les allures des vitesses sont bien superposées tout le long du maillage, ce qui constitue une traduction visuelle de la précision du calcul MultiMaillages.

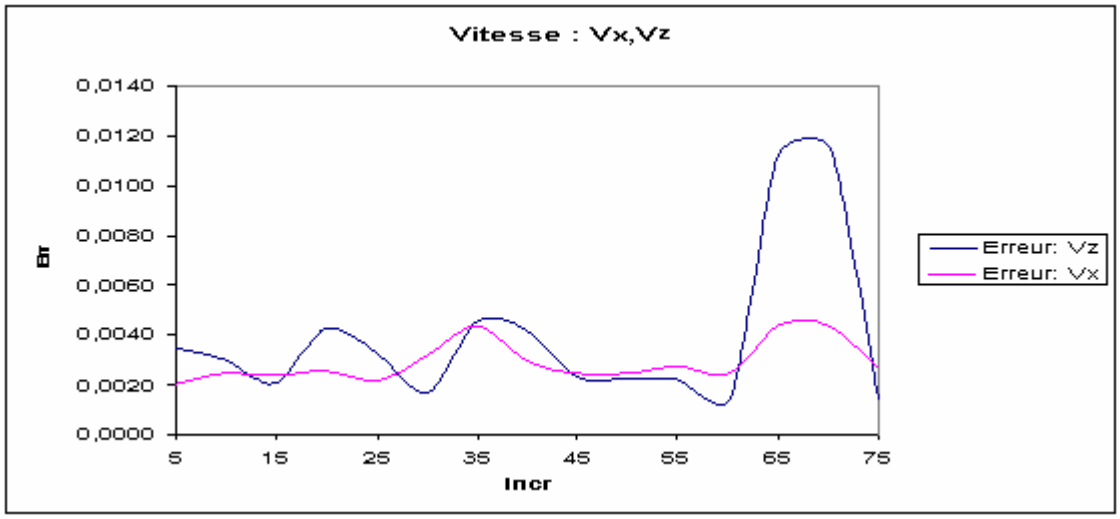


Figure 4-4 : Vitesse : v_x, v_z : Erreur relative Euclidienne en fonction des incréments de temps



Figure 4-5 : Vitesse : v_x , vue de face: calcul MonoMaillage (haut), calcul MultiMaillages (bas), au dernier incrément

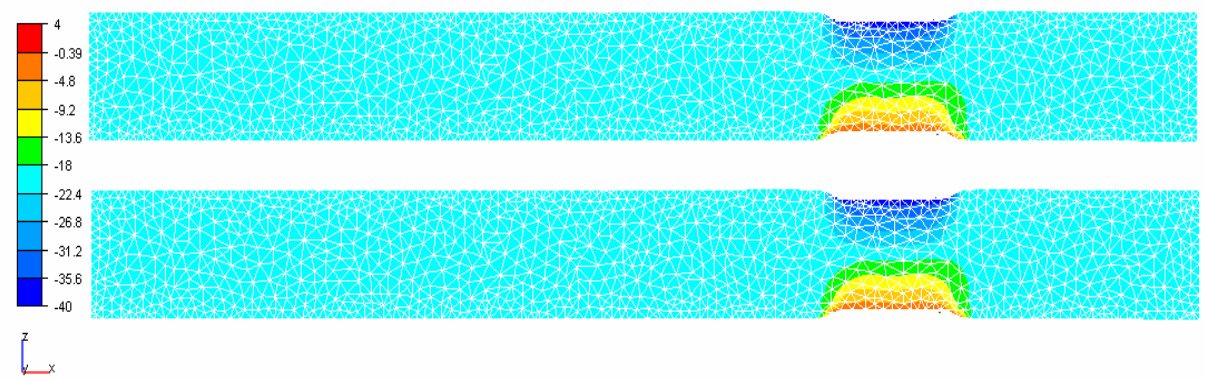


Figure 4-6 : Vitesse : v_z , vue de face: calcul MonoMaillage (haut), calcul MultiMaillages (bas) au dernier incrément

4.1.1.3.2. La vitesse de déformation généralisée

Pour tester la précision de notre méthode sur les variables élémentaires, on choisit la vitesse de déformation généralisée $\dot{\bar{\varepsilon}}$. La valeur moyenne de l'erreur vaut 0,008 soit 0,8%. La Figure 4-7 montre la courbe de l'évolution de l'erreur en fonction du nombre d'incréments.

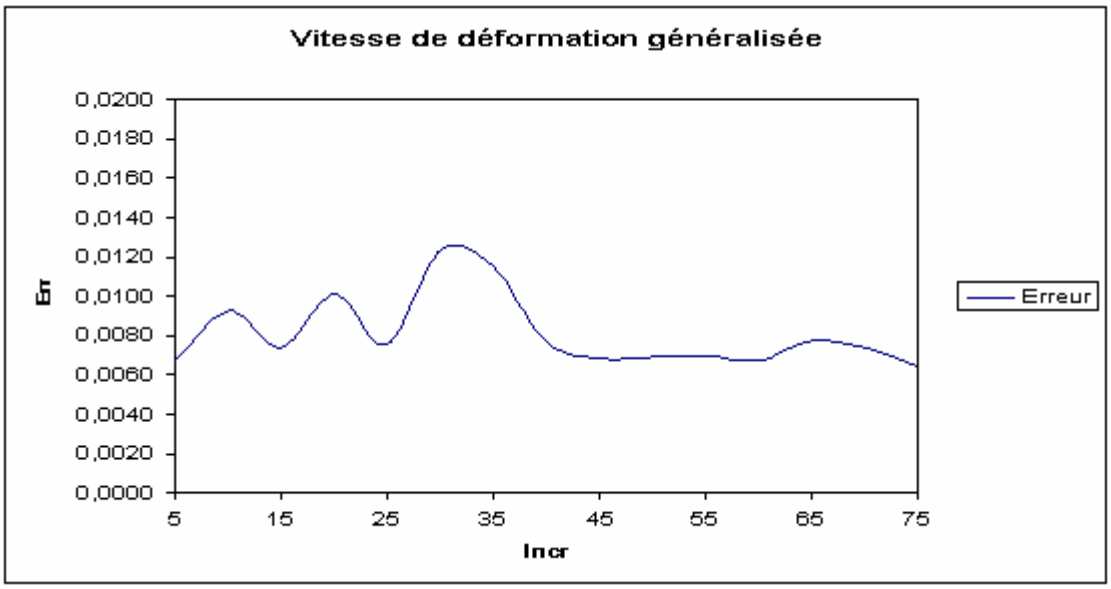


Figure 4-7 : $\dot{\bar{\varepsilon}}$: Erreur relative Euclidienne en fonction des incréments

On peut remarquer que l'erreur évolue peu avec le temps, et reste inférieure à 1% (et donc 4 fois plus faible que suivant l'erreur Max), ce qui est considéré comme un excellent résultat. Cette précision de calcul est visualisée sur la Figure 4-8 qui montre les isovaleurs de $\dot{\bar{\varepsilon}}$ issues du dernier incrément, du calcul MonoMaillage (haut) et du calcul MultiMaillages (bas), où on observe exactement les mêmes isovaleurs entre le calcul de MMMP et le calcul MonoMaillage.

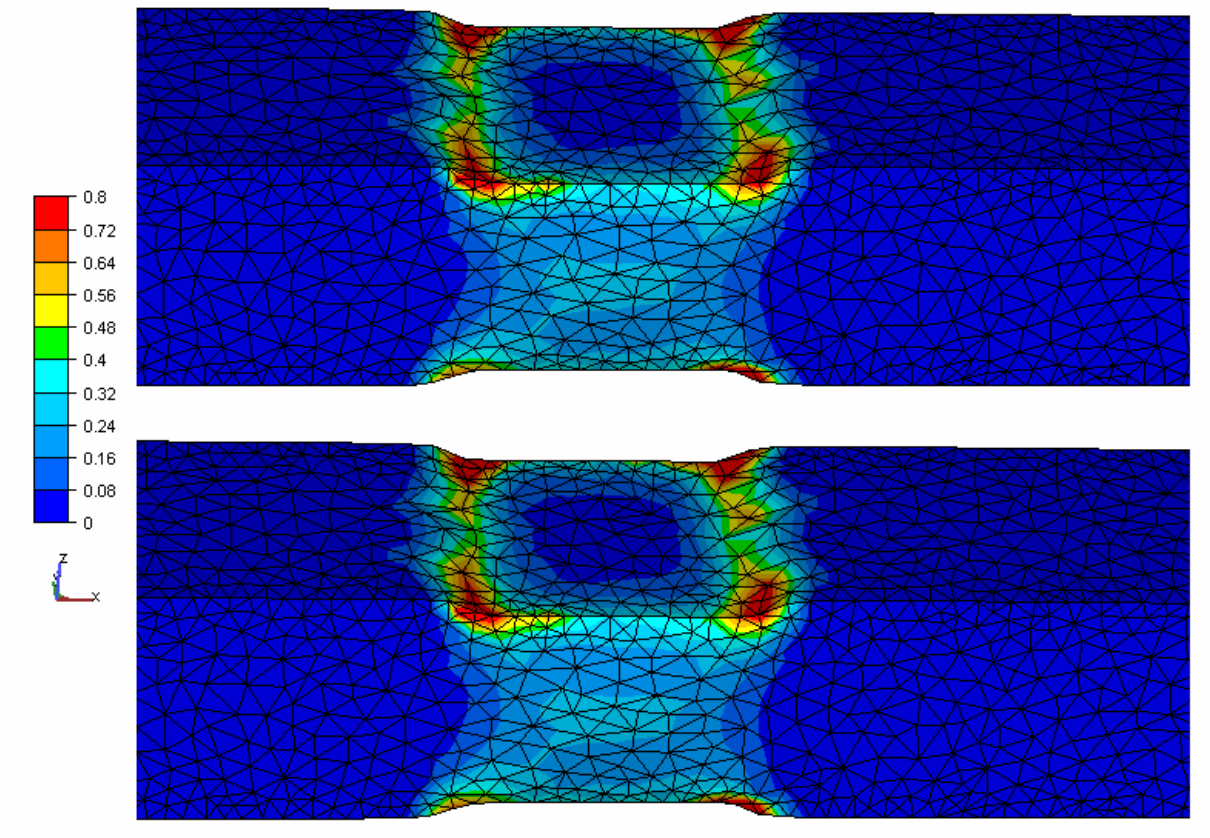


Figure 4-8 : $\dot{\bar{\varepsilon}}$ vue en perspective: calcul MonoMaillage (haut), calcul MultiMaillages (bas), au dernier incrément

4.1.1.3.3. Les coordonnées

Les coordonnées peuvent être considérées comme des indicateurs de l'exactitude du calcul MultiMaillages au niveau géométrique, et ces variables nous disent si la géométrie de la pièce est correctement calculée. La Figure 4-9 montre les courbes de l'erreur pour X et Z. La moyenne sur X est égale à 10^{-3} %. Elle est inférieure à celle sur Z qui est égale à 3.10^{-2} %. Ces deux valeurs offrent une bonne précision géométrique ainsi qu'une bonne conservation de la géométrie de la pièce.

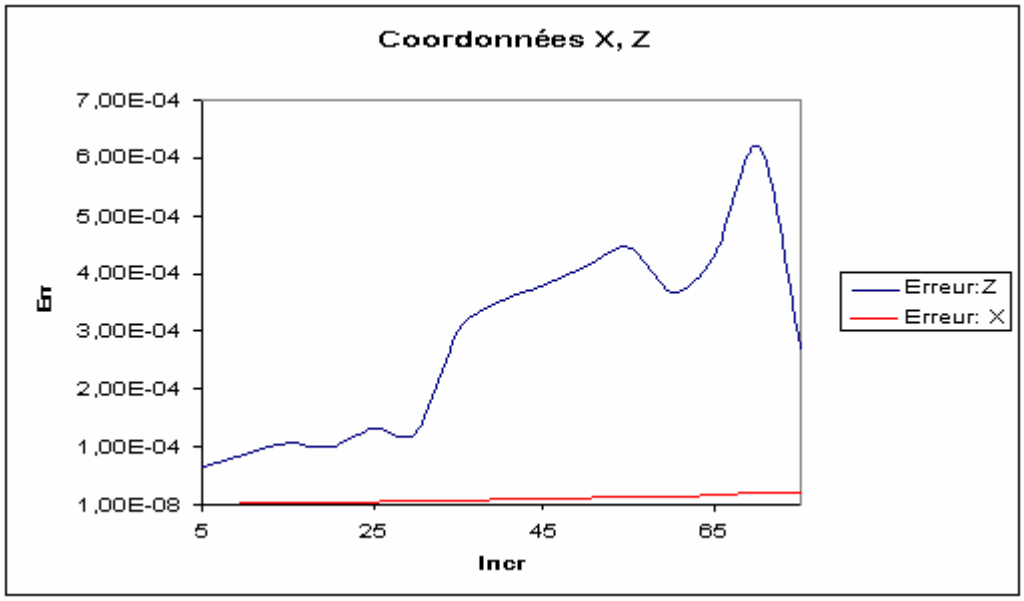


Figure 4-9 : Coordonnées *X*, *Z* : Erreur relative Euclidienne en fonction des incréments

4.1.1.3.4. La température

La température constitue un cas particulier de variable, étant donné que dans les deux cas le calcul thermique est fait sur le même maillage. La courbe de l'erreur en fonction du temps est donnée sur la Figure 4-10. Après le premier incrément, l'erreur augmente légèrement mais reste inférieure à 10^{-4} %. Sa valeur moyenne vaut 7.10^{-5}. On peut conclure que la précision du calcul thermique est excellente. Les isovaleurs de la température issues du dernier incrément sont données sur la Figure 4-11 (MonoMaillage (haut) et MultiMaillages (bas)), elles se superposent parfaitement.

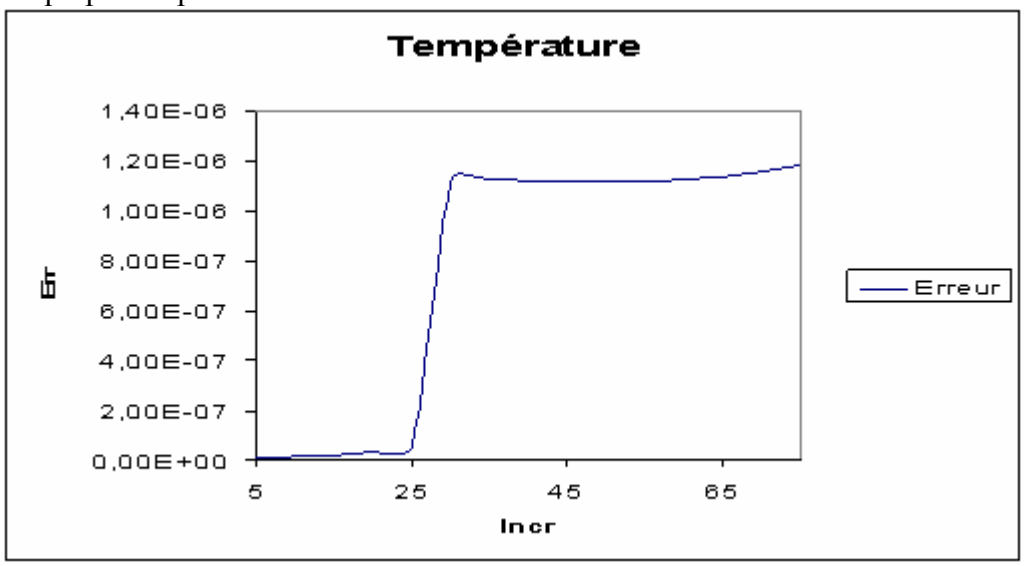


Figure 4-10 : Température : Erreur relative Euclidienne en fonction des incréments

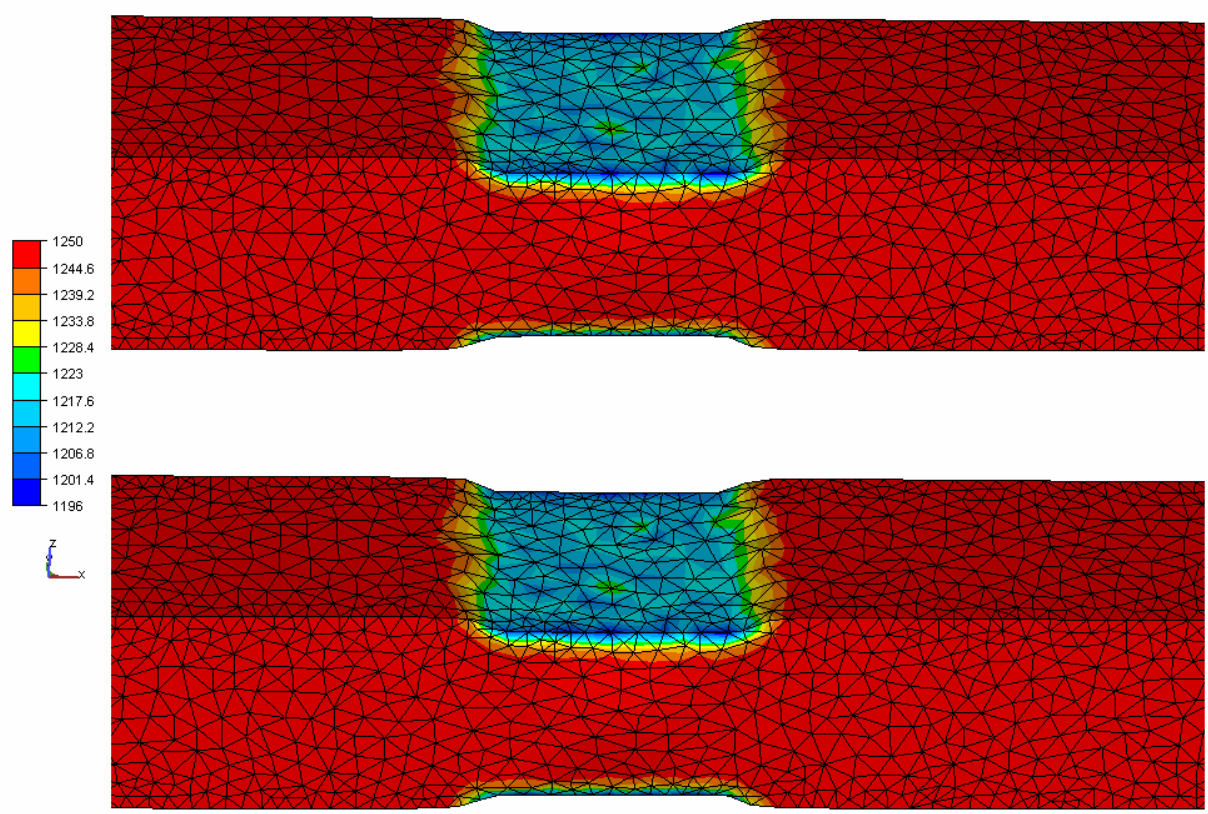


Figure 4-11 : Température vue en perspective: calcul MonoMaillage (haut), calcul MultiMaillages (bas), au dernier incrément

4.1.1.3.5. La déformation généralisée

Cette variable peut être considérée comme un indicateur de l'erreur sur les variables cumulées en fonction du temps. La Figure 4-12 représente l'évolution de l'erreur, qui varie très peu, et dont la valeur moyenne est égale à 0,7%, qui est une valeur négligeable; la précision sur ce type de variable est excellente. La Figure 4-13 montre les isovaleurs de la déformation généralisée (dans la zone ZD) issues du dernier incrément de calcul, obtenue par les calculs, MonoMaillage (haut) et MultiMaillages (bas); les deux figures sont exactement les mêmes.

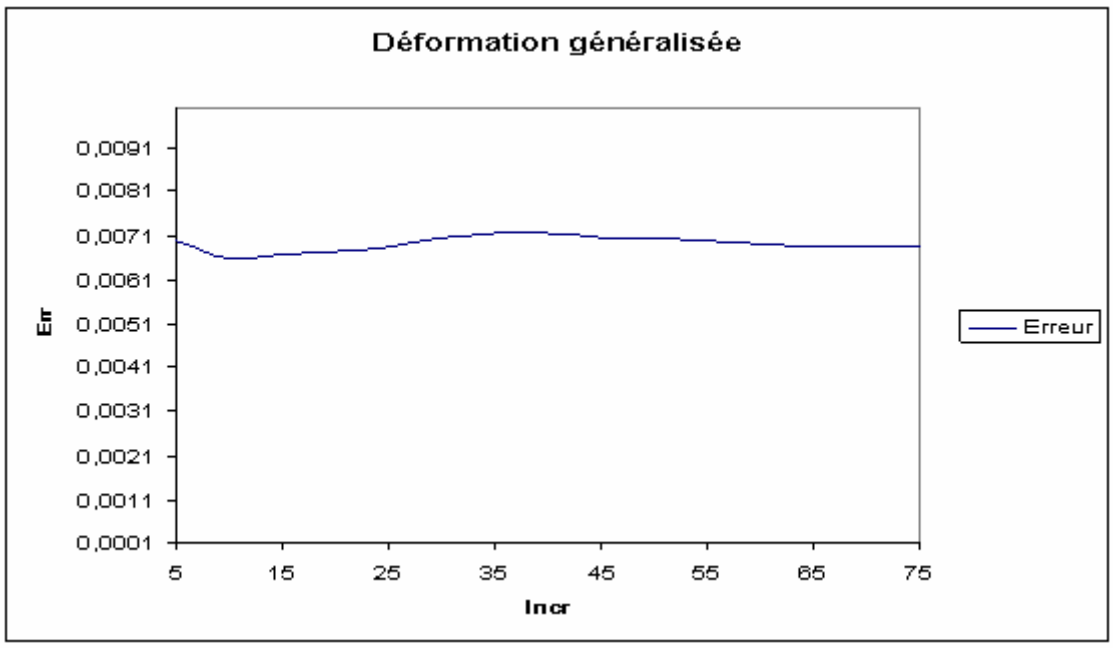


Figure 4-12 : $\bar{\varepsilon}$: Erreur relative Euclidienne en fonction des incréments

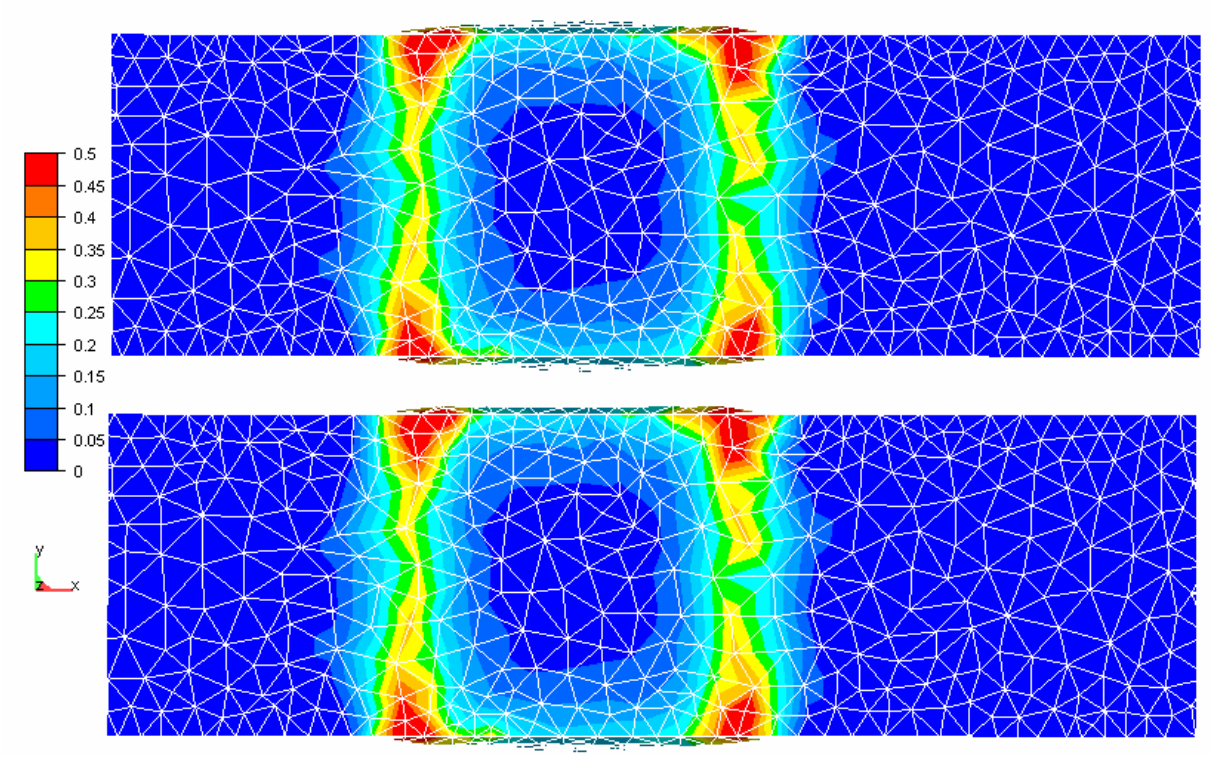


Figure 4-13 : $\bar{\varepsilon}$ vue de dessus : calcul MonoMaillage (haut), calcul MultiMaillages (bas), au dernier incrément

4.1.1.4. Comparaison avec l'erreur éléments finis

Pour juger de manière plus objective de la qualité de ces résultats, il est important de se faire une idée de l'erreur éléments finis pour ce type de problème. Une manière simple est de considérer uniquement les valeurs maximales calculées, en comparant les résultats

MonoMaillage à ceux calculés sur un maillage uniformément plus fin, avec 53 500 nœuds (présenté au paragraphe 2.1). L'erreur est alors donnée par :

$$E_{EF} = \frac{\left| f_{53500}^{Max} - f_{23500}^{Max} \right|}{Max(f_{53500}^{Max}, f_{23500}^{Max})} \qquad \textbf{(4-6)}$$

Sur la composante v_x de la vitesse l'erreur est égale à 0,9 %, sur $\bar{\varepsilon}$ à 7 % et sur la l'abscisse X à 0,01%. En comparant ces valeurs à celles du calcul MultiMaillages (Tableau 4-8), on trouve que l'erreur du calcul MultiMaillages suivant la norme Max est du même ordre que celle du calcul élément fini et même inférieure. On peut donc considérer que la méthode MMMP donne des résultats objectivement identiques au calcul MonoMaillage.

Variables	**Erreur Max : MMMP**	**Erreur Euclidienne : MMMP**	**Erreur Max : Éléments finis**
X	4.10^{-5}	10^{-5}	10^{-4}
v_x	0,04	0,003	0,009
$\bar{\varepsilon}$	0,04	0,007	0,07

Tableau 4-8 : Comparaison Erreur MultiMaillages – Erreur élément fini

4.2. Etude de l'accélération MultiMaillages MultiPhysiques

Cette partie est consacrée à l'étude de la performance de la méthode MMMP en séquentiel. On s'intéresse à l'accélération en fonction du nombre d'incréments, du nombre de degrés de liberté et de la configuration. On considère la simulation de martelage présentée dans le paragraphe 2.1. Pour calculer l'accélération MultiMaillages, on effectue un calcul MonoMaillage de problèmes mécanique et thermique. L'accélération est égale au rapport du temps de calcul MonoMaillage sur le temps de calcul MultiMaillages.

4.2.1. Etude de l'accélération en fonction du nombre d'incréments

On s'intéresse au comportement de la MMMP en fonction du nombre d'incréments, c'est-à-dire à ses variations en fonction du temps. On considère les deux maillages de 23 500 nœuds et de 53 500 nœuds présentés dans le paragraphe 2.1. Les maillages Mécanique et Référence à 23 500, sont respectivement montrés sur les figures 4-14 à 4-17 à l'incrément 1 et 75, et ceux de la simulation à 53 500 nœuds sur les figures 4-18 à 4-21. On peut clairement voir la déformation du maillage à l'incrément 75. Les courbes d'évolution du temps de calcul en fonction du nombre d'incréments pour les deux simulations sont données sur la Figure 4-22. On remarque que pour les deux simulations l'écart entre les pentes des deux courbes augmente avec le nombre d'incréments, ce qui signifie que les accélérations MultiMaillages augmentent en fonction du temps. Ce résultat apparaît également sur la Figure 4-23 qui montre l'accélération MultiMaillages en fonction des incréments. Pour le maillage de 23 500 nœuds l'accélération passe de 4,1 (au premier incrément) à 7,1 (à l'incrément 75). Pour le maillage de 53 500 nœuds, elle évolue de 8,1 à 12,1. Ce résultat est relativement surprenant parce que l'on s'attend à avoir une accélération constante au cours du temps. Une étude plus fine montre qu'au cours de la déformation le calcul MonoMaillage rencontre plus de difficultés à converger que le calcul MultiMaillages. Autrement, le nombre d'itérations non linéaires augmente davantage dans le calcul MonoMaillage que dans le calcul MultiMaillages.

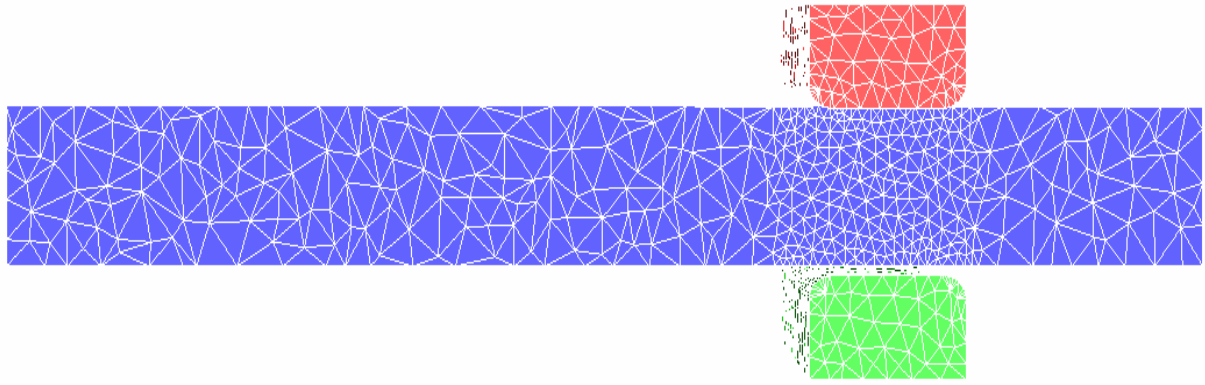


Figure 4-14 : Maillage Mécanique (6 300 nœuds) vue de face à l'incrément 1

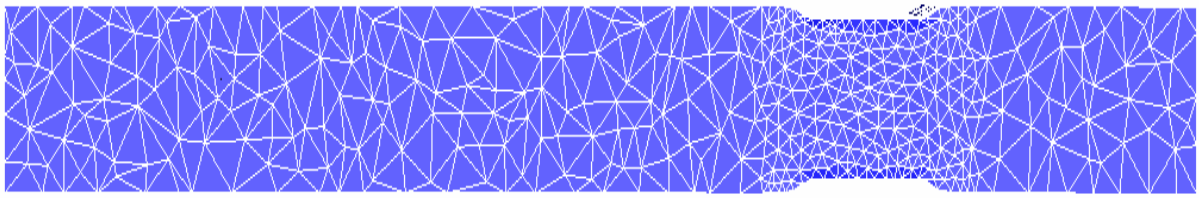


Figure 4-15 : Maillage Mécanique (6 300 nœuds) à l'incrément 75

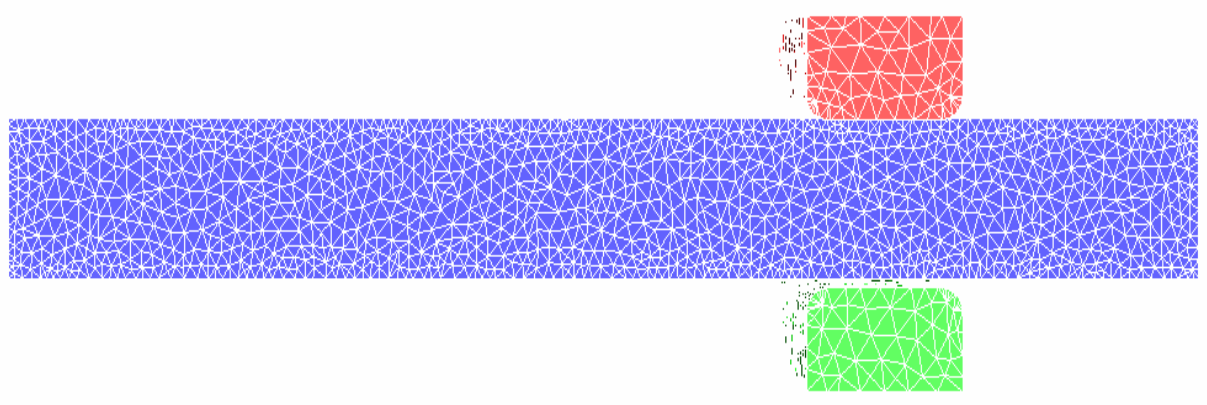


Figure 4-16 : Maillage Référence (23 500 nœuds) à l'incrément 1

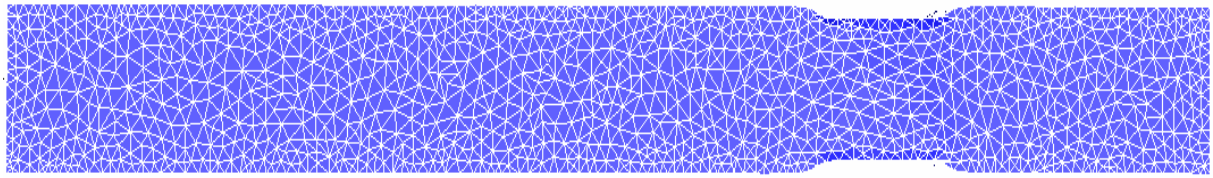


Figure 4-17 : Maillage Référence (23 500 nœuds) à l'incrément 75

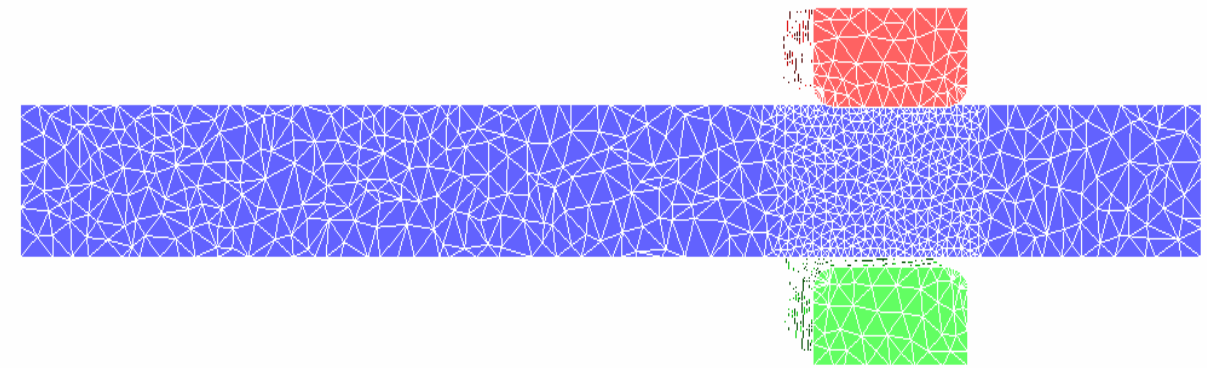


Figure 4-18 : Maillage Mécanique (13 800 nœuds) à l'incrément 1

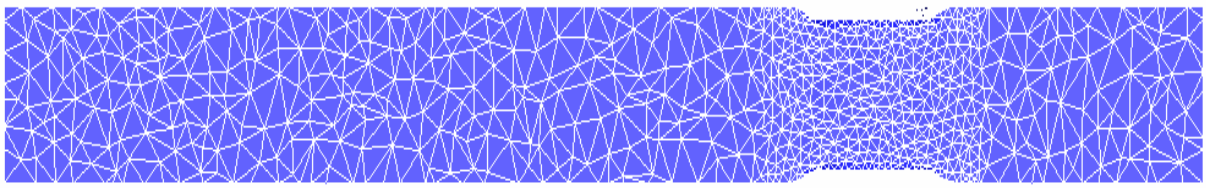


Figure 4-19 : Maillage Mécanique (13 800 nœuds) à l'incrément 75

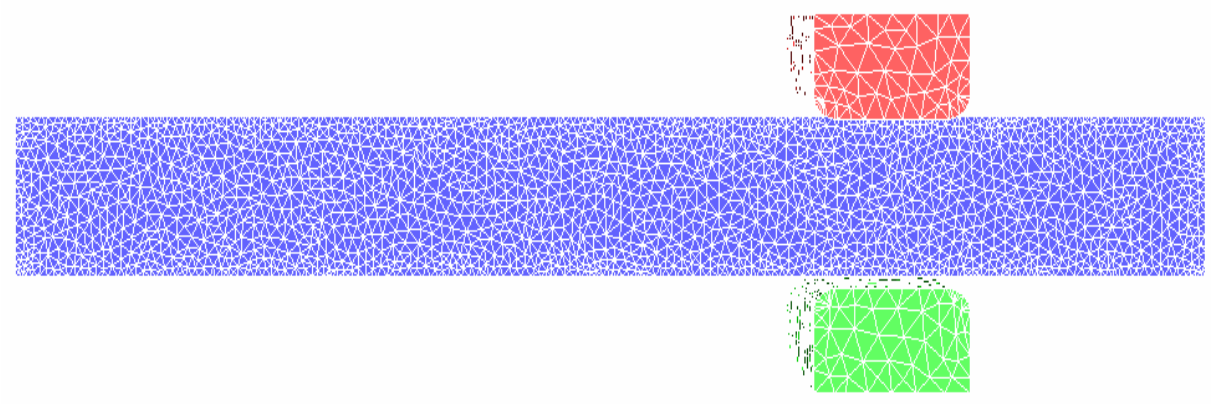


Figure 4-20 : Maillage Référence (53 500 nœuds) à l'incrément 1

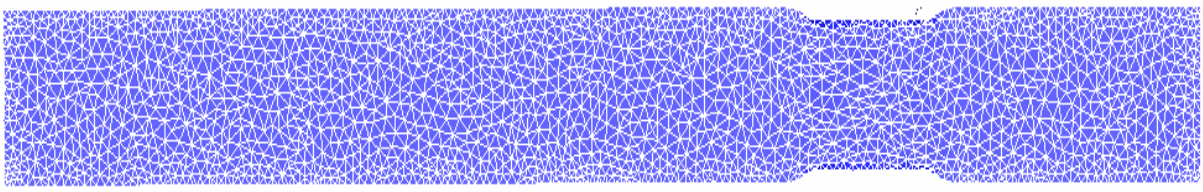


Figure 4-21 : Maillage Référence (53 500 nœuds) à l'incrément 75

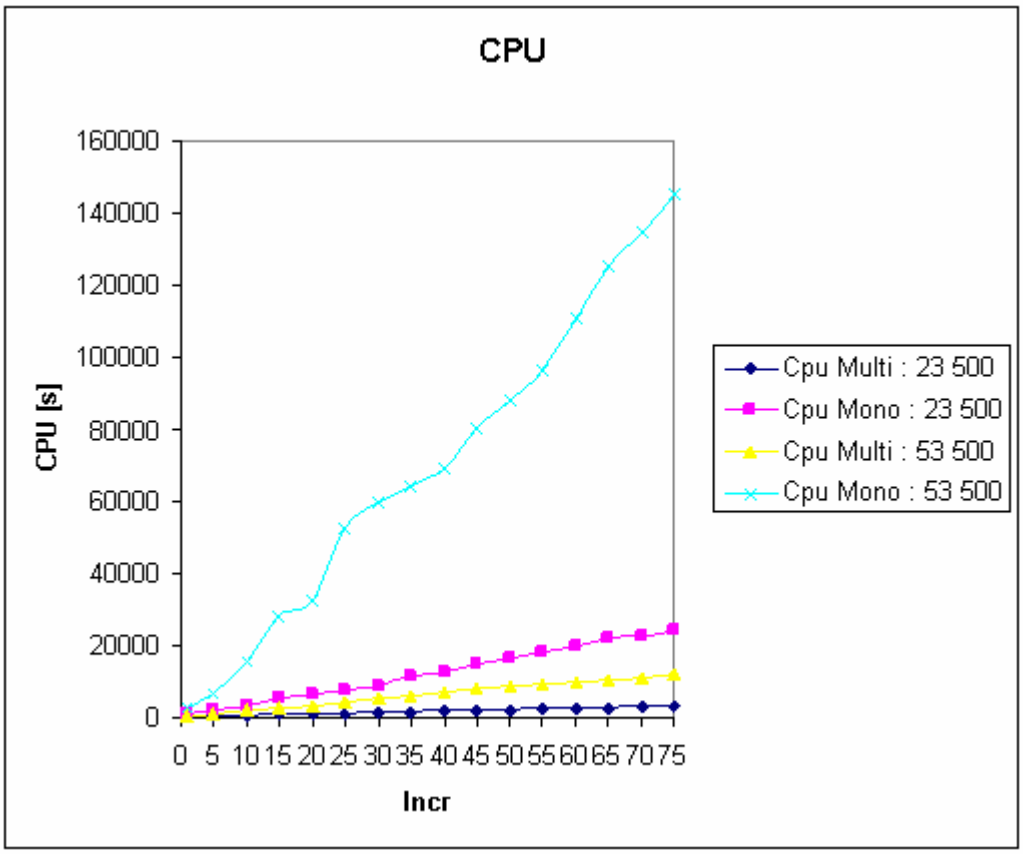


Figure 4-22 : Cpu en fonction des incréments

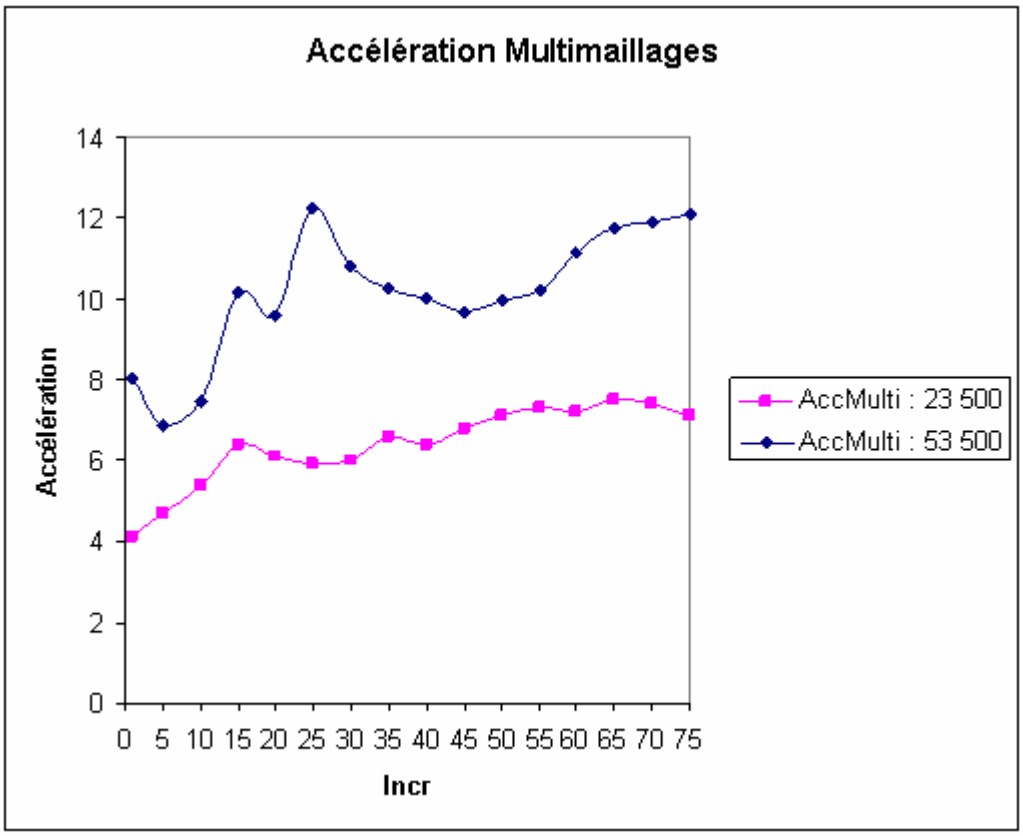


Figure 4-23 : Accélération MultiMaillages en fonction des incréments

4.2.2. Etude de l'accélération en fonction du nombre de nœuds

Pour étudier l'effet du nombre de degrés de liberté sur l'accélération MultiMaillages, on considère les 3 maillages (9 000 nœuds, 23 500 nœuds, 53 500) présentés dans le Tableau 4-9 et dont les taux de déraffinement sont respectivement égaux à 3,6, 3,7, 3,9. Les courbes de l'évolution du temps de calcul en fonction du nombre de nœuds sont données sur la Figure 4-24 et la courbe de l'accélération MultiMaillages en fonction du nombre de nœuds sur la Figure 4-25. Les accélérations (Tableau 4-10) sont excellentes; elles montrent bien la force de la méthode MMMP et ce de plusieurs points de vue. D'abord, on remarque que la méthode MMMP offre une accélération même pour un maillage qui a un faible nombre de degrés de liberté (9 000 nœuds). L'accélération obtenue est égale à 3,5, ce qui est rarement obtenu avec d'autres méthodes pour un aussi faible nombre de degrés de liberté. Ceci montre la robustesse de la MMMP. Sur le maillage de 53 500 nœuds, qui est une taille caractéristique des maillages utilisés dans l'industrie, l'accélération est de 12,1. C'est une accélération excellente qui montre la capacité de la méthode MMMP dans les applications.
Une autre remarque, tirée de la courbe d'accélération Figure 4-25, est que l'accélération MultiMaillages augmente avec l'augmentation du nombre de degrés de liberté. Nous ne nous y attendons pas étant donné que les maillages ont pratiquement les mêmes taux de déraffinement et donc, que du point de vue algébrique, l'accélération devrait être constante. Ce comportement s'explique par la non linéarité du problème : plus le maillage est fin, plus le solveur non linéaire a du mal à converger, ce qui se traduit par une augmentation du nombre d'itérations non linéaires et donc par une augmentation de l'accélération MultiMaillages.

Maillages Références	Maillages Mécaniques	Taux de déraffinement
9 000	2500	3,6
23 500	6 300	3,7
53 500	13 800	3,9

Tableau 4-9 : Maillages et taux de déraffinement

Maillages	Accélération
9 000	3,5
23 500	7,1
53 500	12.1

Tableau 4-10 : Accélération MultiMaillages

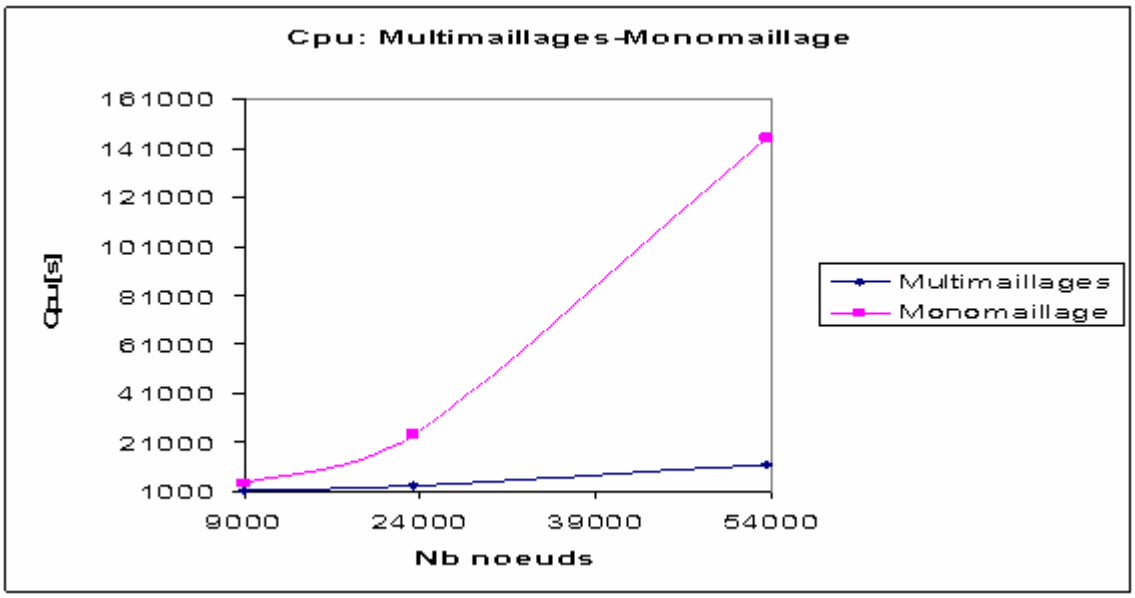


Figure 4-24 : Cpu en fonction du nombre de nœuds

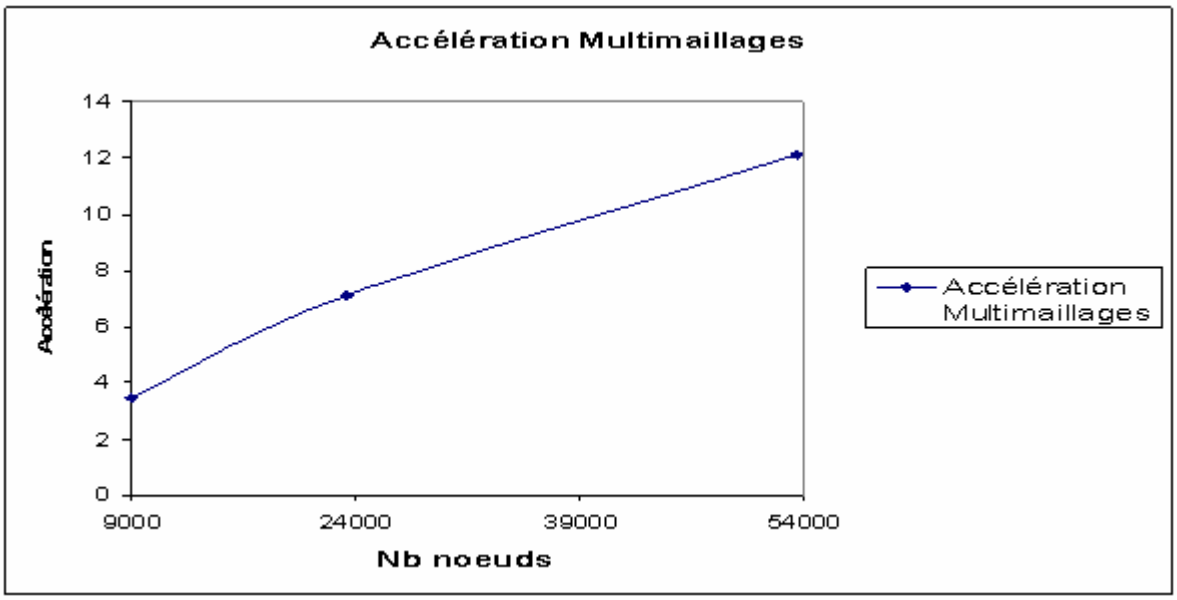


Figure 4-25 : Accélération en fonction du nombre de nœuds

4.2.3. Etude de l'accélération en fonction de la configuration

Comme on l'a vu, l'accélération de la méthode MultiMaillages est fortement liée au taux de déraffinement du maillage mécanique. Or pour un procédé comme le martelage, ce taux n'est pas constant au cours du temps ; il change en fonction de la configuration de calcul. En fait notre approche étant lagrangienne, le maillage se déforme avec le temps et devient de plus en plus étiré, ce qui signifie que le rapport de la longueur de la zone de déformation sur la longueur totale de la pièce : $\frac{\text{longueur de la Zone ZD}}{\text{longueur du maillage}}$ diminue. Autrement dit, la zone qui contient des éléments déraffinés augmente en pourcentage. En conséquence le rapport du nombre de nœuds du Maillage Référence sur le nombre de nœuds du Maillage Mécanique augmente et par suite l'accélération MultiMaillages augmente.

4.2.3.1. Application

Pour tester l'effet de la configuration de calcul sur l'accélération, on considère une simulation de martelage ayant les paramètres définis au paragraphe 2.1. On effectue 10 incréments de déformation en utilisant un maillage déformé, et donc différent de ceux du paragraphe 2.1, et que l'on a extrait du dernier coup de martelage d'une simulation en 4 passes à partir du maillage de 53 500 nœuds défini au paragraphe 2.1. La longueur du maillage de début de calcul est égale à 2000 [mm] et celle en fin de calcul est de 2550 [mm]. Le taux de déraffinement (Tableau 4-11) du maillage de fin de calcul vaut 4,8. Il est clairement supérieur à celui du début de calcul qui est égal à 3,9. Les maillages Référence et Mécanique de la configuration de fin de calcul sont montrés sur la Figure 4-26. L'accélération de calcul obtenue (Tableau 4-12) est excellente. Elle égale à 18,1, presque le double de l'accélération obtenue en début de calcul pour le même nombre d'incréments, et qui vaut 9,2. Ce résultat est une autre preuve de la performance de la méthode MMMP.
On note que dans certaines applications industrielles de martelage, la différence de longueur entre le début et la fin de calcul dépasse largement celle du cas considéré dans ce paragraphe. Par conséquence, l'accélération que l'on peut obtenir est supérieure à celle obtenue actuellement.

Configurations de calcul	Maillage de Référence	Maillage Mécanique	Taux de Déraffinement
Début Calcul	53 500	13 800	3,9
Fin Calcul	66 300	13 900	4,8

Tableau 4-11 : Maillages de Référence et Mécanique dans les deux configurations : début et fin de calcul

Configurations de calcul	Taux de Déraffinement	Accélération MultiMaillages
Début Calcul	3,9	9,2
Fin Calcul	4,8	18,1

Tableau 4-12 : Accélération MultiMaillages dans les deux configurations : début et fin de calcul

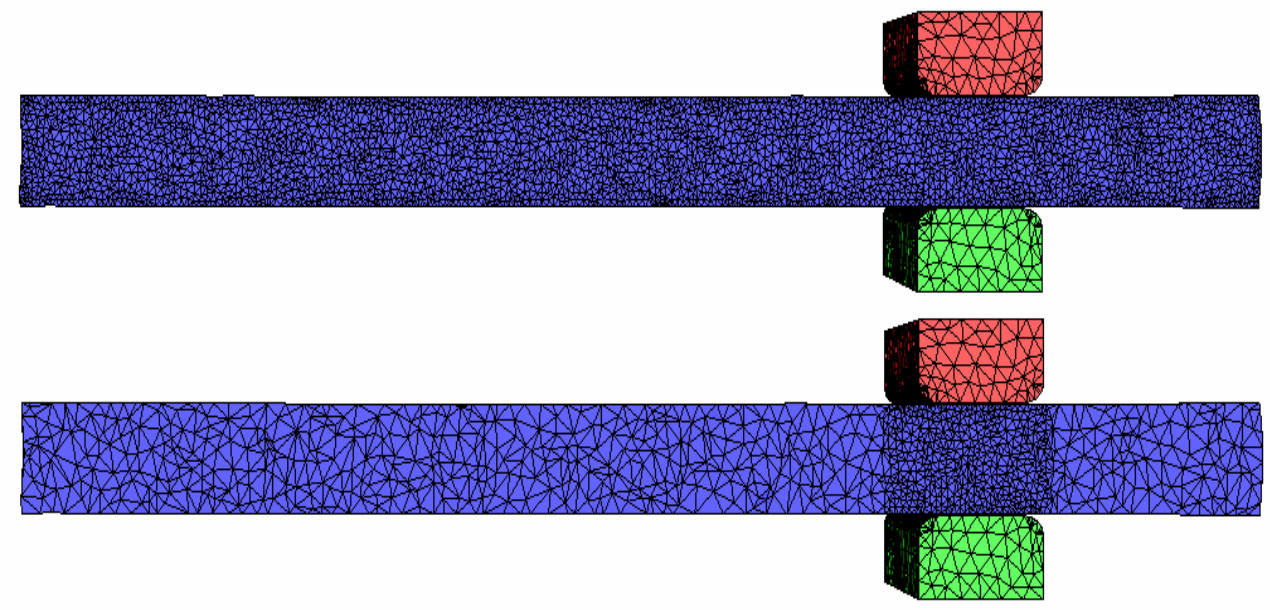


Figure 4-26 : Maillages Référence et Mécanique de la configuration fin de calcul

4.3.Résultats de calculs Parallèle

On s'intéresse au comportement parallèle de la méthode MultiMaillages. On définit alors deux types d'accélération :

- L'accélération MultiMaillages en parallèle, qui est le rapport du temps de calcul MonoMaillage (effectué sur *p* processeurs) sur le temps de calcul MultiMaillages (effectué sur le même nombre de processeurs).

- L'accélération parallèle en MultiMaillages qui représente le rapport du temps de calcul MultiMaillages (effectué sur un seul processeur) sur le temps de calcul MultiMaillages (effectué sur *p* processeurs).

On considère la simulation présentée dans le paragraphe 2.1 et les deux maillages à 23 500 et 53 500 nœuds. On décide de faire chacun de ces deux calculs en utilisant plusieurs processeurs (2 processeurs, 4 processeurs,…) afin d'évaluer ces deux accélérations.

4.3.1. Application 1 (maillage de 23 500 nœuds)

4.3.1.1. Accélération MultiMaillages en parallèle

Le premier cas est celui du maillage de 23 500 nœuds. Les figures 4-27 à 4-29 montrent les partitionnements des maillages, Référence et Mécanique, respectivement sur 2, 4 et 8 processeurs. Le Tableau 4-13 détaille les temps de calcul en fonction du nombre de processeurs. Les courbes d'évolution des temps de calcul MonoMaillage et MultiMaillages, sont présentées sur la Figure 4-30. Les points de départ des deux courbes sont clairement décalés, mais l'écart entre les deux courbes diminue lors du passage de un à plusieurs processeurs. L'accélération décroît avec le nombre de processeurs, comme le montre le Tableau 4-14 et la Figure 4-31. Elle vaut 7,1 sur un processeur, se réduit à 5,5 sur 2 processeurs, 4,9 sur 4 processeurs et 5,3 sur 8 processeurs. Comme on va le voir dans la suite, ce comportement est lié à un décalage de la scalabilité de la méthode MMMP.

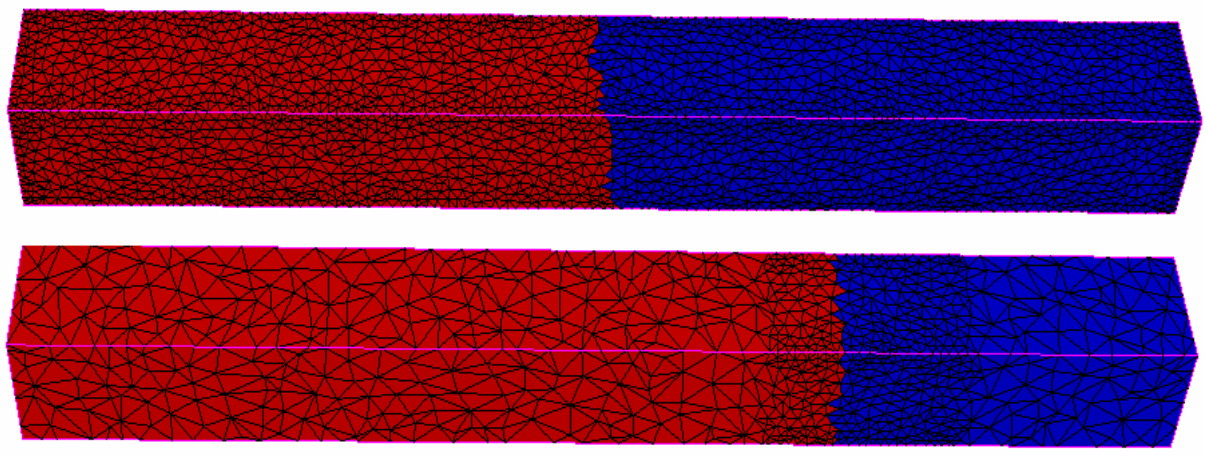


Figure 4-27 : Partitionnement sur 2 processeurs : Maillage Référence 23 500 nœuds (haut), Maillage Mécanique 6 300 nœuds (bas)

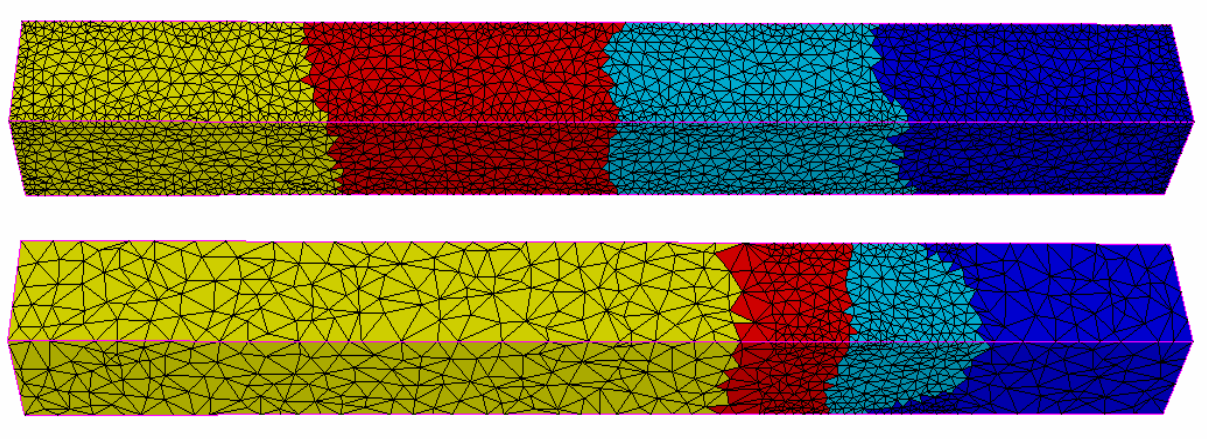


Figure 4-28 : Partitionnement sur 4 processeurs : Maillage Référence 23 500 nœuds (haut), Maillage Mécanique 6 300 nœuds (bas)

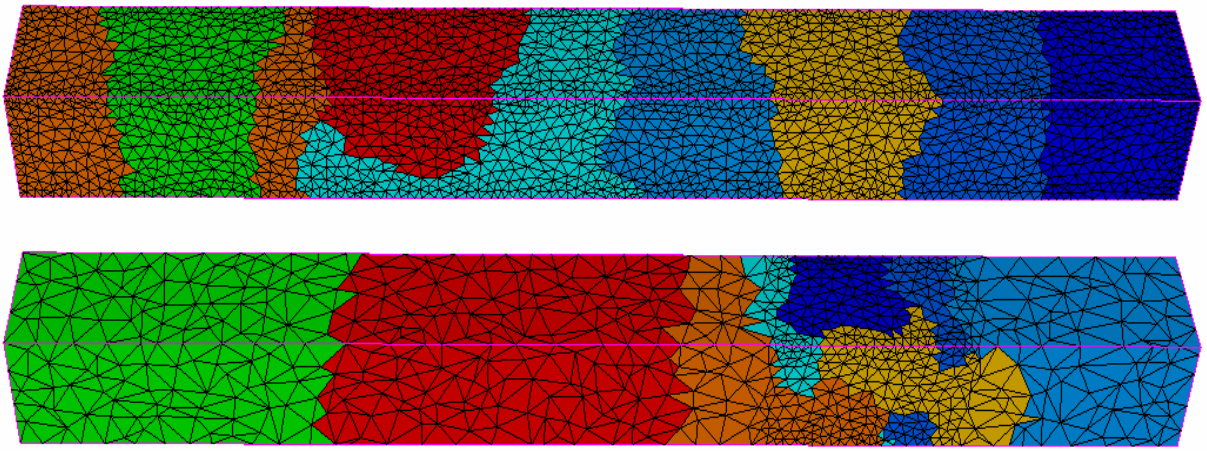


Figure 4-29 : Partitionnement sur 8 processeurs : Maillage Référence 23 500 nœuds (haut), Maillage Mécanique 6 300 nœuds (bas)

Nb processeurs	Cpu MultiMaillages [s]	Cpu MonoMaillage [s]
1	3405	24224
2	2084	11533
4	1540	7618
8	963	5152

Tableau 4-13 : Cpu parallèle (MultiMaillages et MonoMaillage): 23 500 nœuds

Nb processeurs	Accélération MultiMaillages Parallèle
1	7,1
2	5,5
4	4,9
8	5,3

Tableau 4-14 : Accélération MultiMaillages en parallèle : 23 500 nœuds

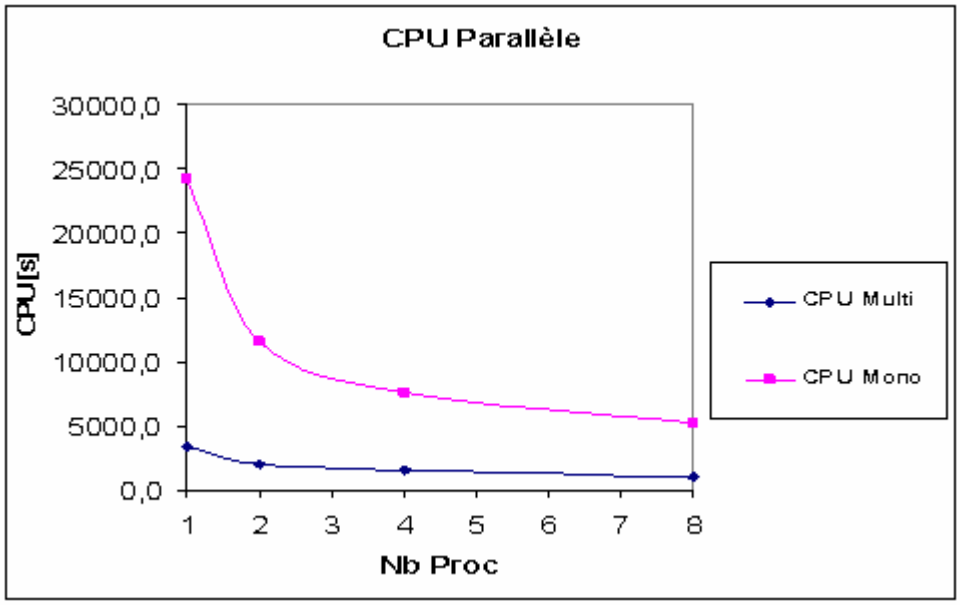


Figure 4-30 : Cpu parallèle (MultiMaillages et MonoMaillage): 23 500 nœuds

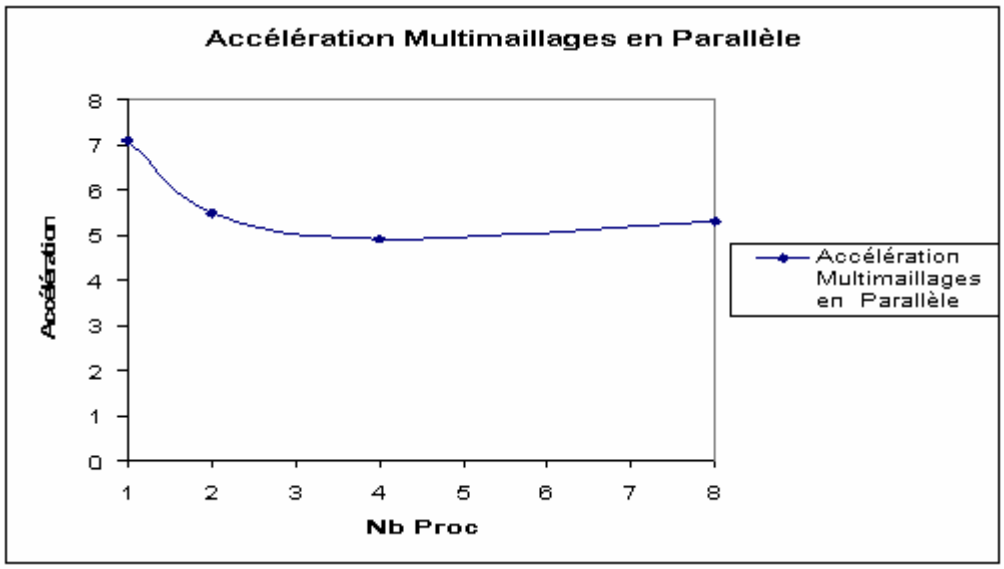


Figure 4-31 : Accélération MultiMaillages en parallèle : 23 500 nœuds

4.3.1.2. Accélération parallèle en MultiMaillages

Les accélérations parallèles en MultiMaillages et en MonoMaillage sont données sur le Tableau 4-15. En MultiMaillages, sur deux processeurs, elle est égale à 1,6, sur 4 processeurs à 2,2 et sur 8 processeurs à 3,5. Pour le calcul MonoMaillage, l'accélération est égale à 2,1 sur 2 processeurs, à 3,2 sur 4 processeurs et à 3,5 sur 8 processeurs. Cette moindre accélération parallèle en MultiMaillages (Figure 4-32) s'explique par la différence du nombre de degrés de liberté des calculs mécaniques. Le calcul MonoMaillage est effectué sur un maillage de 23 500 nœuds alors que le calcul MultiMaillages est réalisé sur un maillage de 6 300 nœuds. Or l'efficacité de la parallélisation dépend du nombre de degrés de liberté, puisque le temps passé dans les communications entre les processeurs est d'autant plus important devant le temps total que le nombre de degrés de liberté est faible. Autrement dit le rapport

($\frac{\text{Temps de résolution}}{\text{Temps de communication}}$) diminue avec le nombre de degrés de liberté et donc lorsque l'on passe d'un calcul MonoMaillage à un calcul MultiMaillages. Ceci est confirmé par la Figure 4-33 qui montre les courbes d'efficacité parallèle MultiMaillages et MonoMaillage. On observe que l'efficacité MonoMaillage est clairement supérieure à celle MultiMaillages.
En sus, dans le cas MonoMaillage et sur deux processeurs, on observe un phénomène de mémoire cache, qui explique la valeur de l'efficacité supérieure à 1 (Tableau 4-16).

Nb processeurs	Accélération MultiMaillages en parallèle	Accélération MonoMaillage en parallèle
2	1,6	2,1
4	2,2	3,2
8	3,5	4,7

Tableau 4-15 : Accélération parallèle en (MultiMaillages et MonoMaillage): 23 500 nœuds

Proc	Efficacité parallèle MultiMaillages	Efficacité parallèle MonoMaillage
2p	0,8	1,05
4p	0,6	0,8
8p	0,4	0,6

Tableau 4-16 : Efficacité parallèle en (MultiMaillages et MonoMaillage): 23 500 nœuds

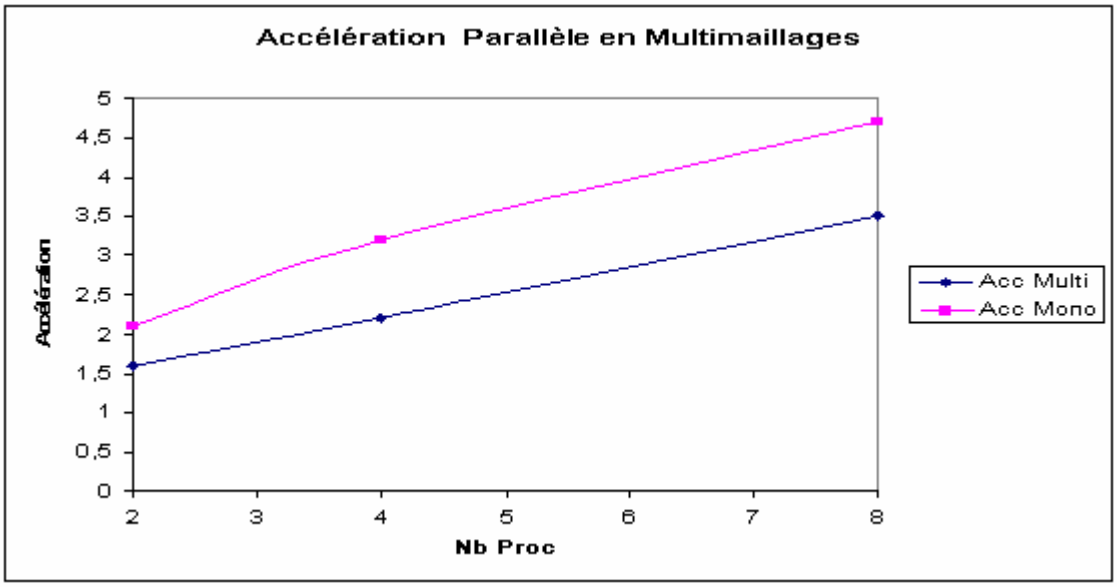


Figure 4-32 : Accélération parallèle en (MultiMaillages et MonoMaillage)

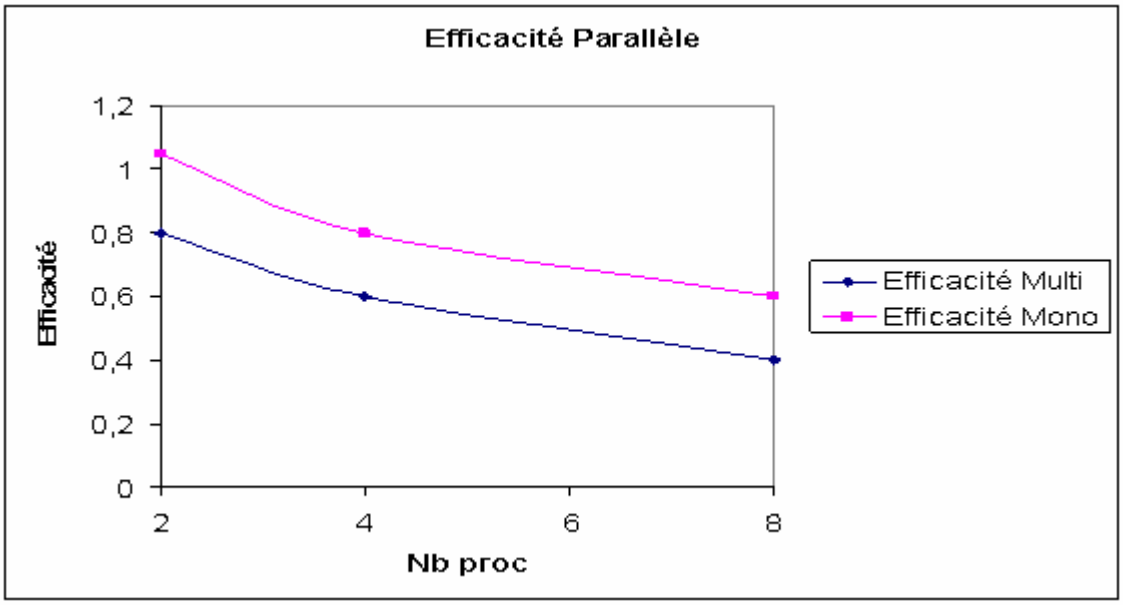


Figure 4-33 : Efficacité parallèle MultiMaillages et MonoMaillage 23 500 nœuds

4.3.2. Application 2 (maillage de 53 500 nœuds)

4.3.2.1. Accélération MultiMaillages en parallèle

Le deuxième cas considéré est celui du maillage à 53 000 nœuds. On considère alors 20 incréments de temps (jusqu'à la dégénérescence du maillage). Les données sont celles présentées dans le paragraphe 2.1. Le calcul est lancé respectivement sur 2 processeurs, 4 processeurs, 8 processeurs, 16 processeurs, 32 processeurs et 64 processeurs. Le Tableau 4-17 donne les temps de calcul en fonction du nombre de processeurs. Sur la Figure 4-34, on voit l'évolution du temps de calcul entre 1 et 64 processeurs, et la Figure 4-35 offre un zoom de cette courbe entre 8 et 64 processeurs. Pareillement au cas précédent, on observe que l'écart entre les courbes MonoMaillage et MultiMaillages décroît avec l'augmentation du nombre de processeurs, traduisant une diminution de l'accélération MultiMaillages en parallèle, comme le montre le Tableau 4-18 et la Figure 4-36. Entre 8 et 16 processeurs le temps de calcul de la méthode MMMP est pratiquement constant. Entre 32 et 64 processeurs, il croît. L'accélération MultiMaillages en parallèle varie entre 1,4 et 7,2 (Tableau 4-18). Comme dans le cas du maillage de 23 500 nœuds, la chute de l'accélération est due à la taille du maillage Mécanique qui est ici égale à 13 800 nœuds. Cependant on remarque que, même avec cette chute d'accélération, la méthode MultiMaillages offre une accélération sur un grand nombre de processeurs, d'une valeur de 1,4 sur 64 processeurs. La performance de la MMMP peut être considérée d'une autre manière, en remarquant que le temps de calcul MultiMaillages sur 8 processeurs est inférieur à celui MonoMaillage sur 64, en d'autres termes, le calcul MultiMaillages sur 8 processeurs est 1,6 fois plus rapide que le calcul MonoMaillage sur 64 processeurs.

Processeurs	MultiMaillages [s]	MonoMaillage [s]
1	3427	32922
2	1850	11637
4	1055	7645
8	722	4484
16	727	3219
32	485	1349
64	803	1134

Tableau 4-17 : Accélération MultiMaillages en parallèle : 53 500 nœuds

Processeurs	Accélération MultiMaillages en parallèle
1	9,6
2	6,3
4	7,2
8	6,2
16	4,4
32	2,8
64	1,4

Tableau 4-18 : Accélération MultiMaillages en parallèle : 53 500 nœuds

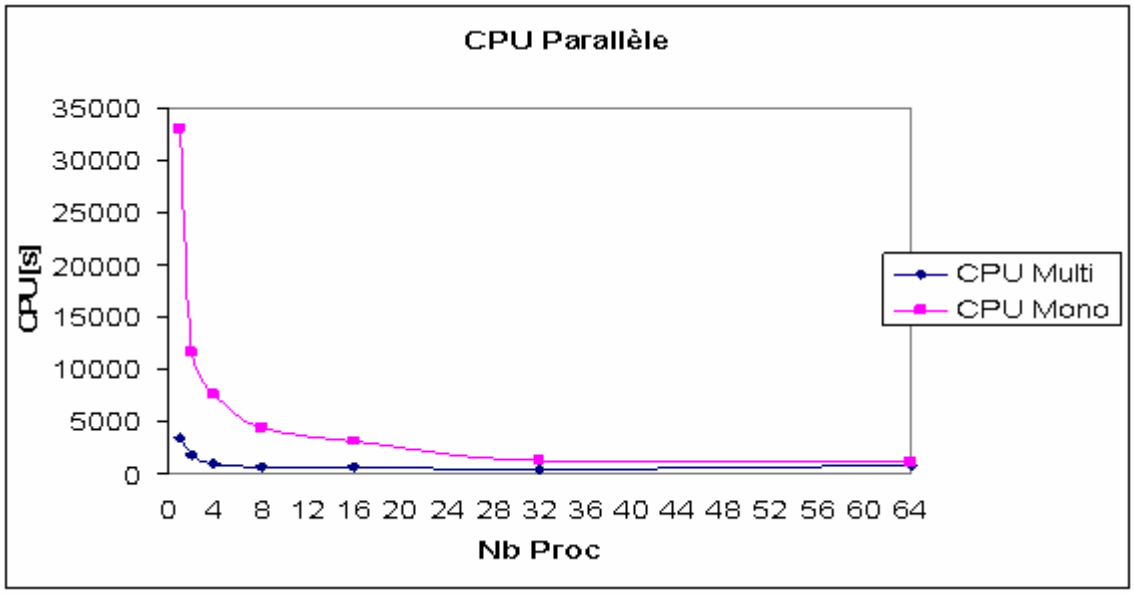


Figure 4-34 : Cpu parallèle (MultiMaillages et MonoMaillage): 53 500 nœuds

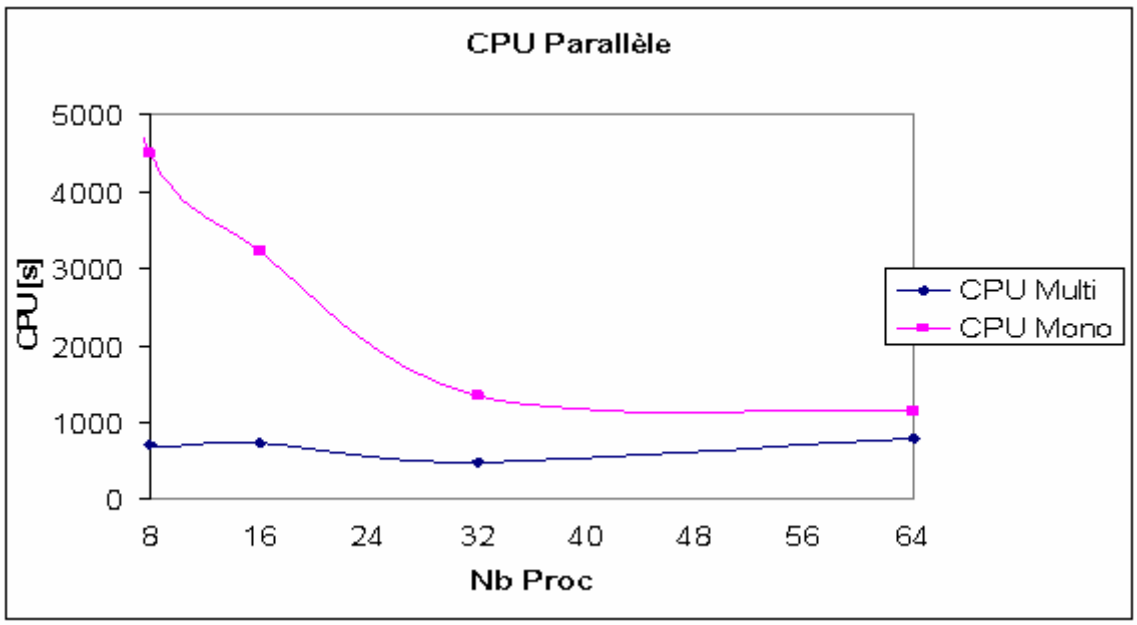


Figure 4-35 : Cpu parallèle (MultiMaillages et MonoMaillage): 8-64 processeurs 53 500 nœuds

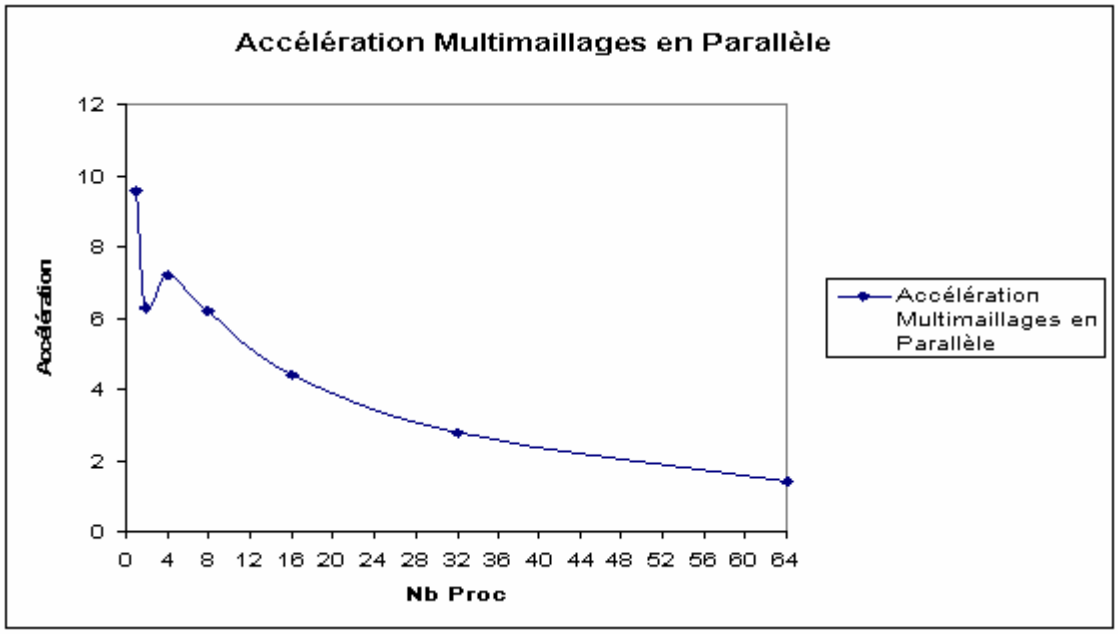


Figure 4-36 : Accélération MultiMaillages en parallèle : 53 500 nœuds

4.3.2.2. Accélération parallèle en MultiMaillages

Les accélérations parallèles en MultiMaillages et en MonoMaillage sont données dans le Tableau 4-19 et leurs courbes d'évolutions en fonction du nombre de processeurs sur la Figure 4-37. L'accélération parallèle en MultiMaillages sur deux processeurs est égale à 1,9, sur 4 processeurs elle vaut 3,2 et sur 8 processeurs elle est égale à 4,7. Pareillement au cas de 23 500 nœuds, on remarque qu'en MonoMaillage, elle est plus grande qu'en MultiMaillages, comme le montre aussi la courbe d'efficacité parallèle de la Figure 4-38. Par contre, en MMMP l'accélération parallèle du maillage à 53 500 nœuds est meilleure que celle du maillage à 23 500 nœuds, ce qui confirme l'hypothèse que la chute de l'accélération parallèle

est causée par celle du nombre de degrés de liberté du maillage mécanique. Pour mieux comprendre ce comportement de la méthode MultiMaillages, on compare l'accélération parallèle obtenue en MultiMaillages pour le maillage de 53 500 nœuds avec 14 000 nœuds sur le maillage mécanique à celle obtenue en MonoMaillage sur un maillage de 14 000 nœuds. Les valeurs des accélérations parallèles sont données sur la Figure 4-39 ; on peut clairement remarquer que les courbes sont quasiment identiques. Ceci montre que le comportement parallèle de la méthode MultiMaillages est identique à celui d'un calcul MonoMaillage mais sur un maillage correspondant à la taille du maillage mécanique. Les chutes d'accélération parallèle en MultiMaillages se réduisent avec l'augmentation du nombre de degrés de liberté du maillage mécanique, ce qui signifie aussi que l'accélération parallèle de la MMMP est « optimal » et que les différentes étapes sont parfaitement parallélisées et scalables. Cela signifie également que l'on ne peut gagner sur les deux tableaux, à la fois en réduisant le nombre de degrés de liberté du maillage mécanique et en conservant l'efficacité parallèle du Maillage Référence.

Proc	Accélération parallèle en MultiMaillages	Accélération parallèle en MonoMaillage
2p	1,9	2,8
4p	3,2	4,3
8p	4,7	7,3
16p	4,7	10,2
32p	7,1	24,4
64p	4,3	29,1

Tableau 4-19 : Accélération parallèle en MultiMaillages et en MonoMaillage : 53 500 nœuds

Proc	Efficacité parallèle MultiMaillages	Efficacité parallèle MonoMaillage
2p	0,9	1,4
4p	0,8	1,1
8p	0,6	0,9
16p	0,3	0,6
32p	0,2	0,8
64p	0,1	0,4

Tableau 4-20 : Efficacité parallèle en MultiMaillages et en MonoMaillage : 53 500 nœuds

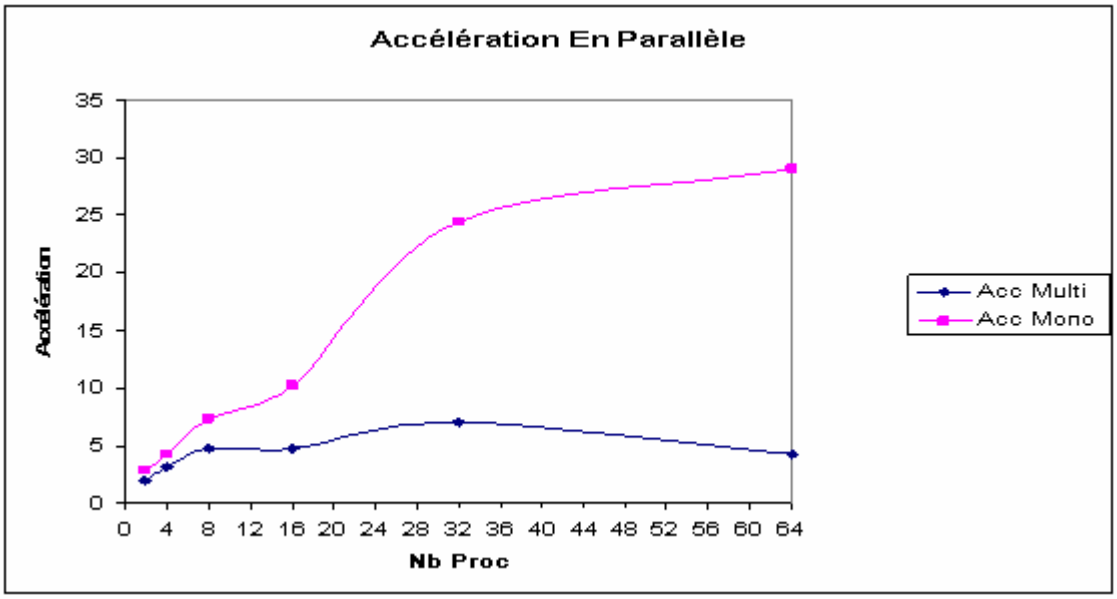


Figure 4-37 : Accélération parallèle en (MultiMaillages et MonoMaillage) : 53 500 nœuds

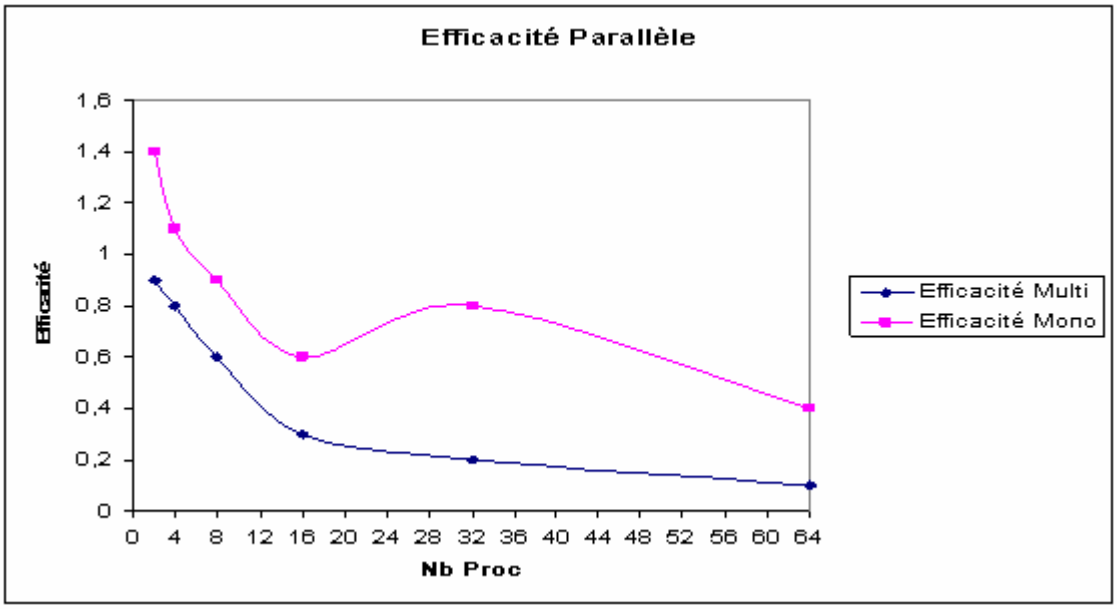


Figure 4-38 : Efficacité parallèle (MultiMaillages et MonoMaillage) 53 500 nœuds

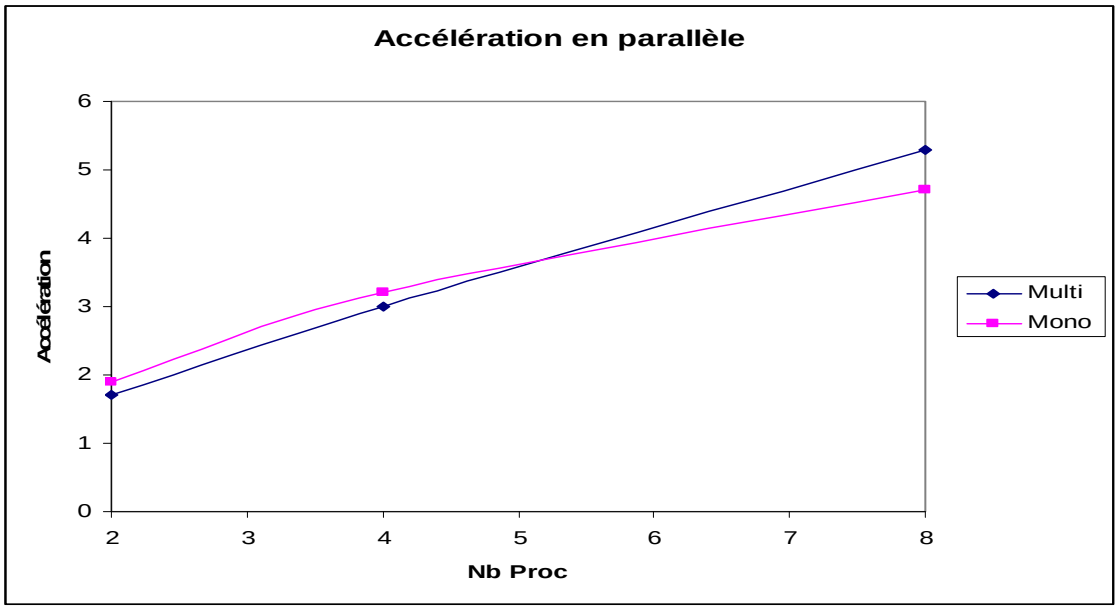


Figure 4-39 : Accélération parallèle en (MultiMaillages 14 000 nœuds et MonoMaillage 14 000 nœuds)

4.4. Synthèse

L'étude de l'erreur du calcul MultiMaillages a montré une très bonne précision de la méthode. La valeur de l'erreur est en effet inférieure à celle du calcul élément fini.

La performance de la méthode MultiMaillages se décline suivant plusieurs niveaux. D'abord la méthode offre une accélération même sur des maillages ayant peu de degrés de liberté, avec une accélération de 3,5 sur 9000 nœuds. Ensuite, pour des maillages de 53 500 nœuds et qui sont caractéristiques des cas industriels, l'accélération est excellente et vaut 12,1. L'accélération MultiMaillages dépend de la taille du maillage et augmente avec le nombre de degrés de liberté. Elle dépend aussi de la configuration de calcul. Plus on avance dans le temps, plus l'accélération augmente. En passant de la configuration de début de calcul avec un maillage de 53 500 nœuds à celle de fin de calcul avec un maillage de 66 300 nœuds l'accélération passe de 9,2 à 18,1. Cette accélération peut encore augmenter davantage dans certaines applications industrielles où le maillage est davantage étiré.

L'efficacité de la méthode MMMP s'étend aussi au calcul parallèle, mais avec une chute d'accélération par rapport au calcul séquentiel, ce qui est attendu étant donné que le calcul mécanique est effectué sur un maillage qui a (plus ou moins) 4 fois moins de nœuds que celui du calcul MonoMaillage. En considérant 20 incréments de calcul et un maillage de 53 500 nœuds, l'accélération MultiMaillages passe de 9,6 sur 1 processeur à 6,3 sur 2 processeurs et devient égale à 4,4 sur 16 processeurs. Avec l'augmentation du nombre de processeurs l'accélération MultiMaillages diminue tout en offrant toujours une accélération de calcul, même en arrivant à un nombre de processeurs égale à 64 on observe une accélération.

Conclusion générale

Parmi de nombreuses méthodes utilisées dans la littérature pour réduire le temps de calcul des procédés multiphysiques incrémentaux, on a retenu la méthode MultiMaillages MultiPhysiques parce qu'elle nous offre deux avantages principaux (que l'on ne trouve pas simultanément dans les autres méthodes) que sont la sauvegarde précise de l'histoire des variables du matériau et la prise en considération de l'aspect Multiphysiques.

Pour valider la précision de la méthode, on a utilisé deux stratégies :

- La première, en comparant les isovaleurs obtenues par la méthode MMMP à celles obtenues par le calcul MonoMaillage ; elle a montré une superposition parfaite des résultats.

- La deuxième en comparant l'erreur de la méthode MMMP (évaluée sur un nombre déterminé de nœuds puis d'une manière globale suivant les normes Max et Euclidienne) à l'erreur élément fini. L'erreur Multimaillages se montre inférieure ou égale à l'erreur élément fini, ce qui nous permet de conclure que l'erreur liée à l'utilisation de la méthode MultiMaillages MultiPhysiques est négligeable.

L'accélération MMMP est excellente. Elle dépend de trois paramètres que sont le nombre de degrés de liberté, le nombre d'incréments et le type de la configuration. Elle augmente avec l'augmentation du nombre de degrés de liberté, et son efficacité s'avère même sur des petits maillages avec une accélération de 3,5 sur un maillage de 9000 nœuds. Cette accélération devient égale à 12,1 sur un maillage de 53 500 nœuds. L'accélération MultiMaillages dépend aussi de la configuration du calcul et augmente avec l'avancement de la simulation dans le temps. Par exemple l'accélération de 12,1 sur le maillage de 53 500 nœuds au début du calcul, devient égale à 18,1 en fin de calcul.

En passant au calcul parallèle, l'accélération produite par la méthode MultiMaillages chute un peu, ce qui n'est pas surprenant étant donné que le calcul mécanique est effectué sur un maillage qui a moins de degrés de liberté. Ceci est mis en évidence par une comparaison entre le comportement parallèle d'un calcul MonoMaillage et celui d'un calcul MultiMaillages dont le maillage Mécanique a le même nombre de degrés de liberté que celui du calcul MonoMaillage. On observe que les comportements sont identiques et donc que la méthode MMMP est parfaitement scalable (autant que la méthode de base). Un autre point fort de la méthode MMMP est sa capacité à nous offrir des accélérations de calcul même sur un très grand nombre de processeurs.

En bref, la méthode MMMP offre toujours des accélérations, quel que soit la configuration, la géométrie, le nombre de degrés de liberté et le nombre de processeurs.

Perspectives

Une première perspective de ce travail est l'application de la méthode à d'autres procédés incrémentaux, tels que le laminage circulaire, étant donné que tous les ingrédients nécessaires à ces applications sont disponibles. Il est seulement nécessaire d'introduire quelques adaptations en effectuant une étude des dimensions de la zone réellement déformée lors du contact avec les outils de manière à définir les zones de déformation. Ensuite, on peut appliquer la méthode à d'autres procédés à déformation localisée tels que le laminage [Philippe09].

Dans notre travail, nous avons appliqué la méthode MMMP à un problème qui couple deux physiques. Il serait intéressant de l'appliquer à des problèmes qui couplent davantage de physiques, comme par exemple la thermique, la mécanique et l'évolution de la microstructure du matériau.

Au niveau de la génération du maillage mécanique, on peut envisager de déraffiner le maillage suivant un estimateur d'erreur [Bousseta et al.06], ce qui serait plus pratique pour les procédés dont la déformation n'est pas localisée dans une zone connue a priori. Toutefois, la plupart des estimateurs utilisés dans la littérature produisent une erreur a posteriori, alors qu'ici les zones de déformations doivent être connues a priori, ce qui nécessitera donc des adaptations de la méthode et/ou des estimateurs.

Un autre point important est la possibilité de coupler la méthode MMMP avec la formulation ALE [Guerdoux07], afin de combiner les avantages des deux méthodes, que sont le gain en temps de calcul et l'amélioration de la qualité du maillage. Ce type de couplage pourrait être appliqué à des procédés comme le FSW (Soudage par Frottement-Malaxage) [Guerdoux et al.09] et le laminage [Philippe09].

Dans les applications de notre thèse et compte tenu du procédé étudié, on n'a pas utilisé de maillages ayant un nombre de degrés de liberté dépassant 66 000, le maximum rencontré dans la pratique. Notre étude a montré que l'accélération MultiMaillages augmente avec le nombre de degrés de liberté. Il serait donc intéressant d'effectuer des études avec des maillages de plus grandes tailles (500 000 nœuds et plus) afin de découvrir les limites de la méthode et d'étudier le comportement parallèle de la méthode avec un plus grand nombre de processeurs (dans le contexte applicatif retenu, on s'est limité à 64 processeurs, nombre à partir duquel les performances parallèles chutent grandement).

Bibliographie

[Adams et al.00] **M. F. Adams, R. L. Taylor**, « Parallel multigrid solvers for 3D unstructured finite element problems in large deformation elascity and plasticity », *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol.48, n°8, pp.1241-1262, 2000

[Arnold et al.84] **D.N. Arnold, F. Brezzi, M. Fortin**, « A stable finite element for the Stokes equations ». *Calcolo*, vol.21, n°4, pp.337-344, 1984

[Babuska73] **I. Babuška**, « The finite element method with penalty ». *Mathematics of Computation*, vol.27, n°122, pp.221-228, 1973

[Balay et al.97] **S. Balay, W.D. Gropp, L.C. McInnes, B.F. Smith**, « Efficient Management of Parallelism in Object Oriented Numerical Software Libraries ». *Modern Software Tools in Scientific Computing*, Birkhauser Press, pp.163-202, 1997

[Barton et al.07] **G. Barton, X.Li, G.Hirt** « Finite-Element Modeling of Multi-pass Forging of Nickel-base Alloys using a Multi-mesh Method ». *Materials Science Forum*, vol.539-543 pp.2503-2508, 2007

[Bousseta et al.06] **R. Boussetta, T. Coupez, L. Fourment**, « Adaptive remeshing based on a posteriori error estimation for forging simulation ». *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol.195, pp.6626–6645, 2006

[Bousseta05] **R. Boussetta**, « Estimateurs d'erreur et remaillage adaptatif : application à la simulation 3D des procédés de mise en forme des matériaux ». *Thèse de doctorat*, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, Sophia Antipolis, 2005

[Bruchon09] **J. Bruchon, H. Digonnet, T. Coupez,** « Using a signed distance function for the simulation of metal forming processes : Formulation of the contact condition and mesh adaptation. From a Lagrangian approach to an Eulerian approach ». *International journal for numerical methods in engineering*, vol.78, n°8, pp. 980-1008, 2009

[Carré95] **G. Carre**, « Simulation numérique d'écoulements turbulents compressibles et stationnaires par méthodes multigrille ». *Thèse de doctorat*, Université de Nice-Sophia Antipolis, 1995

[Chenot89] **J.L. Chenot**, « Three dimensional finite element modeling of forging process ». *Computational Plasticity*, pp.793-816, 1989

[Choi et al.06] **S.K. Choi, M.S. Chun, C.J. Van Tyne, Y.H. Moon**, « Optimization of open die forging of round shapes using FEM analysis ». *Journal of Materials Processing Technology*, vol.172, n°1, pp.88–95, 2006

[Coupez et al.00] **T. Coupez, H. Digonnet, R. Ducloux**, « Parallel meshing and remeshing ». *Applied Mathematical Modelling*, vol.25, n°2, pp.153-175, 2000

[Coupez91] **T. Coupez**, « Grandes déformations et remaillage automatique ». *Thèse de doctorat*, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, Sophia Antipolis, 1991

[Coupez94] **T.Coupez**, « A mesh improvement method for 3d automatic remeshing ». *In N.P. Weatherill et al., editor, Numerical Grid Generation in Computational Fluid Dynamics and Related Fields*, pp.615-626. Pineridge Press, 1994

[Coupez95] **T.Coupez**, « Automatic remeshing in three-dimensional moving mesh fnite element analysis of industrial forming ». *Numerical Methods in Industrial Forming Processes - NUMIFORM 95*, pp. 407-412. A.A. Balkema, 1995

[Coupez00] **T. Coupez,** « Génération de maillage et adaptation de maillage par optimisation locale ». *Revue européenne des éléments finis,* vol.9, pp. 403-423, 2000

[Delalondre08] **F. Delalondre**, « Modélisation et étude 3D des phénomènes de cisaillement adiabatiques dans les procédés de mise en forme à grande vitesse ». *Thèse de doctorat,* Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, Sophia Antipolis, 2008

[Di et al.09] **Y. Di, X.P. Wang**, « Precursor simulations in spreading using a multi-mesh adaptive finite element method ». *Journal of Computational Physics*, vol.228, n°5, pp.1380-1390, 2009

[Digonnet et al.07-1] **H. Digonnet, L. Silva, T. Coupez**, « Cimlib: A Fully Parallel Application For Numerical Simulations Based On Components Assembly ». *Materials Processing and Design, Modeling, Simulation and Applications, NUMIFORM 07, Proceedings of the 9th International Conference on Numerical Methods in Industrial Forming Processes. AIP Conference Proceedings*, vol.908, pp.269-274, 2007

[Digonnet et al.07-2] **H. Digonnet, M. Bernacki, L. Silva, T. Coupez**, « Adaptation de maillage en parallèle, application à la simulation de la mise en forme des matériaux ». *Acte du 18ème Congrès Français de Mécanique*, 2007

[Digonnet01] **H. Digonnet**, « Repartitionnement dynamique, mailleur parallèle et leurs applications à la simulation numérique en mise en forme des matériaux ». *Thèse de doctorat*, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, Sophia Antipolis, 2001

[El Hadj87] **M. El Hadj**, « Application des méthodes multi-grilles aux calculs des structures élastiques et visco-plastiques ». *Thèse de doctorat*, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, Sophia Antipolis, 1987

[Feng et al.97] **Y.T. Feng, D. Peric, D.R.J. Owen**, « A multi-grid enhanced GMRES algorithm for elasto-plastic problems ». *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol.42, n°8, pp.1441-1462, 1998

[Fourment et al.99] **L. Fourment, J. L. Chenot, K. Mocellin**, « Numerical formulations and algorithms for solving contact problems in metal forming simulation ». *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol.46, n°9, pp.1435 – 1462, 1999

[Frey et al.99] **P.J. Frey, P.L. George**, « Maillages : Applications aux éléments Finis ». *Hermes Science Publications*, 1999

[George01] **P. L. George**, « Maillage et adaptation ». *LAVOISIER*, 2001

[Groche et al.07] **P. Groche, D. Fritsche, E.A. Tekkaya, J.M. Allwood, G. Hirt, R. Neugebauer**, « Incremental Bulk Metal Forming ». *Cirp Annals-Manufacturing Technology*, vol.56, n°2, pp.635-656, 2007

[Guerdoux et al.09] **S. Guerdoux, L. Fourment**, « A 3D numerical simulation of different

phases of friction stir welding ». *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering*, vol.17, n°7, pp.075001, 2009

[Guerdoux07] **S. Guerdoux**, « Simulation numérique du procédé de soudage par frottement-malaxage ». *Thèse de doctorat*, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, Sophia Antipolis, 2007

[Guillard93] **H. Guillard**, « Node-nested multigrid with Delaunay coarsening ». *Rapport de recherche INRIA*, n°1898, 1993

[Hadoush et al.08] **A. Hadoush, A. H. van den Boogaard**, « Time reduction in implicit single point incremental sheet forming simulation by refinement-derefinement », *International Journal of Material Forming*, vol.1, n°1, pp.1167-1170, 2008

[Hadoush et al.09] **A. Hadoush, A. H. van den Boogaard**, « Substructuring in the implicit simulation of single point incremental sheet forming ». *International Journal of Material Forming*, vol.2, n°3, pp181-189, 2009

[Hirt et al.07] **G. Hirt, R. Kopp, O. Hofmann, M. Franzke, G. Barton,** « Implementing a high accuracy Multi-Mesh Method for incremental Bulk Metal Forming ». *Cirp Annals-Manufacturing Technology*, vol.56, n°1, pp.313-316, 2007

[Hu et al.94] **Z.M. Hu, I. Pillinger, P. Hartley, S. McKenzie, P.J. Spence**, « Three dimensional finite-element modeling of ring rolling ». *Journal of Materials Processing Technology*, vol.45, n°1-4, pp.143–148, 1994

[Hu et al.09] **X. Hu, R. Li, T. Tang**, « A multi-mesh adaptive finite element approximation to phase field models ». *Communications in Computational Physics*, vol.5, n°5, pp.1012-1029, 2009

[Jaouen98] **O. Jaouen**, « Modélisation tridimensionnelle par éléments finis pour l'analyse thermomécanique du refroidissement des pièces coulées ». *Thèse de doctorat*, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, Sophia Antipolis, 1998

[Keun Moon et al.08] **H. Keun Moon, M. Cheol Lee, M. Soo Joun,** « Predicting polygonal-shaped defects during hot ring rolling using a rigid-viscoplastic finite element method ». *International Journal of Mechanical Sciences*, vol.50, pp.306–314, 2008

[Kim et al.90] **N.S. Kim, S. Machida, S. Kobayashi**, «Ring rolling process simulation by the three dimensional finite element method ». *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, vol.30, n°4, pp.569–577, 1990

[Lambropoulos04] **N.K. Lambropoulos, D.G. Koubogiannis, K.C. Giannakoglou**, « Acceleration of a Navier–Stokes equation solver for unstructured grids using agglomeration multigrid and parallel processing ». *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol.193, n°9-11, pp.781-803, 2004

[Le Dain91] **M.A. Le Dain**, « Méthodes multigrille et H-adaptation : application au calcul de structures élastiques bidimensionnelles ». *Thèse de doctorat*, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, Sophia Antipolis, 1991

[Lee98] **C.O. Lee**, « Multigrid methods for the pure traction problem of linear elasticity: mixed formulation ». *SIAM Journal on Numerical Analysis*, vol.35, n°1, pp.121-145, 1998

[Li05] **R. Li**, « On multi-mesh h-adaptive methods ». *Journal of Scientific*

Computing, vol.24, n°3, pp.321-341, 2005

[Lim et al.98] **T. Lim, I. Pillinger, P. Hartley**, « A finite-element simulation of profile ring rolling using a hybrid mesh model ». *Journal of Materials Processing Technology*, vol.80-81, n°1, pp.199–205, 1998

[Mocellin et al.01] **K. Mocellin, L. Fourment, T. Coupez, J.L Chenot**, « Toward large scale F.E. computation of hot forging process using iterative solvers, parallel computation and multigrid algorithms ». *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol.52, n°5-6, pp.473-488, 2001

[Mocellin99] **K. Mocellin**, « Contribution à la simulation numérique tridimensionnelle du forgeage à chaud. Etude du contact et calcul multigrille ». *Thèse de doctorat*, Ecole Nationale supérieure des Mines de Paris, Sophia Antipolis, 1999

[Philippe09] **S. Philippe**, « Développement d'une formulation Arbitrairement Lagrangienne Eulérienne (ALE) pour la simulation tridimensionnelle du laminage de produits plats » *Thèse de doctorat*, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, Sophia Antipolis, Sophia Antipolis, 2009

[Perchat00] **E. Perchat**, « MINI-Élément et factorisations incomplètes pour la parallélisation d'un solveur de Stokes 2D. Application au forgeage ». *Thèse de doctorat*, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, Sophia Antipolis, 2000

[Ramadan et al.09-1] **M. Ramadan, L. Fourment, H. Digonnet**, « A parallel two mesh method for speeding-up processes with localized deformations: application to cogging ». *International Journal of Material Forming*, vol.2, n°1, pp.581-584, 2009

[Ramadan et al.09-2] **M. Ramadan, L. Fourment, H. Digonnet**, « Une méthode Bimaillages parallèle pour accélérer le temps de calcul des procédés incrémentaux ». *Acte du 9ème Colloque National en Calcul des Structures*, vol.1, pp. 999-104, 2009

[Rannou et al.07] **J. Rannou, A. Gravouil, M.C. Baïetto-Dubourg**, « Éléments finis étendus multi-grilles avec raffinement local pour la mécanique de la rupture ». *Acte du 8ème Colloque National en Calcul des Structures*, vol.1, pp.69-74, 2007

[Rannou et al.10] **J. Rannou, N. Limodin, J. Réthoré, A. Gravouil, W. Ludwig, M.C. Baïetto-Dubourg, J.Y. Buffière, A. Combescure, F. Hild, S. Roux**, « Three dimensional experimental and numerical multiscale analysis of a fatigue crack ». *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol.199, n°21-22, pp.1307-1325, 2010

[Rassineux95] **A. Rassineux**, « Maillage automatique tridimensionnel par une technique frontale pour la méthode des éléments finis ». *Thèse de doctorat*, Université de Nancy, 1995

[Rey07] **B. Rey**, **«** Méthode multigrilles pour les grandes déformations et simulation numérique du procédé de roulage ». *Thèse de doctorat*, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, Sophia Antipolis, 2007

[Rey et al.07] **B. Rey, K. Mocellin, L. Fourment**, « A node-nested Galerkin multigrid method for metal forging simulation ». *Computing and Visualization in Science*, vol.11, n°1, pp.17-25, 2008

[Soyris90] **N. Soyris**, « Modélisation tridimentionnelle du couplage thermique en

forgeage à chaud ». *Thèse de doctorat,* Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, Sophia Antipolis, 1990

[Tai03] **C.H. Tai, Y. Zhao**, « Parallel unsteady incompressible viscous flow computations using an unstructured multigrid method ». *Journal of Computational Physics*, vol.192, n°1, pp.277-311, 2003

[Terzolo04] **L. Terzolo**, « Vers une prédiction de la durée de vie des outils de forge à chaud par la modélisation numérique du régime thermique et de l'usure abrasive ». *Thèse de doctorat,* Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, Sophia Antipolis, 2004

[Traoré01] **K. Traoré**, « Simulation thermomécanique du laminage circulaire: développement d'une formulation quasi-eulérienne tridimensionnelle sur une architecture parallèle ». *Thèse de doctorat*, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, Sophia Antipolis, 2001

[Wesseling92], **P. Wesseling**, « An introduction to multigrid method ». Wiley, Chichester, 1992

[Wriggers98] **P. Wriggers, A. Boersma**, « A parallel algebraic multigrid solver for problems in solid mechanics discretized by finite elements ». *Computers and Structures*, vol.69, n°1, pp.129-137, 1998

[Yea et al.03] **Y. Yea, Y. Ko, N. Kim, J. Lee,** « Prediction of spread, pressure distribution and roll force in ring rolling process using rigid–plastic finite element method ». *Journal of Materials Processing Technology,* vol.140, pp.478-486, 2003

[Yea et al.03] **Y. Yea, Y. Ko, N. Kim, J. Lee,** « Prediction of spread, pressure distribution and roll force in ring rolling process using rigid–plastic finite element method ». *Journal of Materials Processing Technology,* vol.140, pp.478-486, 2003

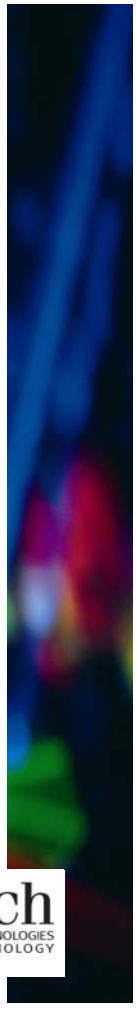
[Zienkiewicz et al.92-1] **O.C. Zienkiewicz, J.Z. Zhu**, « The superconvergent patch recovery (SPR) and adaptive finite element refinement ». *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol.101, n°1-3, pp.207-224, 1992

[Zlamal80] **M. Zlamal,** « Finite element method in physical and technical applications ». *Computer Physics Communications*, vol.20, n°1, pp.37-42, 1980

Une méthode MultiMaillages MultiPhysiques parallèle pour accélérer les calculs des procédés multiphysiques incrémentaux

RESUME : L'objectif de notre travail est de réduire le temps de calcul des procédés multiphysiques incrémentaux, tout en conservant avec précision l'histoire du calcul et en prenant en compte l'aspect multiphysiques. Notre choix est tombé sur la méthode MultiMaillages MultiPhysiques (MMMP). Le principe de la méthode consiste à utiliser pour chaque physique un Maillage de Calcul qui lui est optimal, et à considérer un Maillage Référence pour le stockage des résultats. Étant donné que l'application principale de notre travail de thèse est le procédé de martelage qui est un procédé couplé thermomécaniquement, on a appliqué la méthode MMMP à ce procédé en considérant 2 maillages : un maillage pour le calcul mécanique et un autre pour le calcul thermique que l'on a aussi utilisé comme Maillage Référence. La particularité du procédé de martelage est que la déformation plastique est localisée dans la zone de contact avec les outils, et à l'extérieure de cette zone la déformation est négligeable. Le maillage Mécanique est généré en se basant sur cette particularité : il est divisé en deux zones, une zone qui a une taille de mailles fine, c'est la zone de déformation (zone de contact avec les outils) et une autre, constituée par le reste du maillage c'est-à-dire là où se passe presque rien. ; dans cette zone on a considéré une taille déraffinée égale à deux fois la taille fine. Pour améliorer la qualité du transport qui est fait par la méthode d'interpolation inverse on a utilisé trois techniques : La première consiste à grader la zone de déformation dans le Maillage Mécanique telle qu'elle est dans le Maillage Référence, la deuxième consiste à déraffiner la zone de faible déformation par un déraffinement emboîté par nœuds, c'est à dire en éliminant des nœuds sons ajouter ou bouger les nœuds existants et la troisième concerne les variables élémentaires telles que la déformation généralisée et consiste à ne pas transporter cette variable mais à la recalculer sur le maillage d'arrivée à partir de la vitesse. Le coût élevé du transport est réduit à moins de 1 % du temps total par une technique de transport sans relocalisation qui consiste à faire la localisation du maillage d'arrivée dans le maillage de départ uniquement au premier incrément et utiliser cette localisation pour les autres incréments. Le partitionnement du Maillage Mécanique est fait indépendamment du Maillage Référence, ce qui améliore l'efficacité parallèle de la méthode. L'accélération MMMP est excellente, elle varie entre 4 et 18 en fonction du nombre de degrés de liberté, du nombre d'incréments et de la configuration de calcul. En parallèle elle chute un peu puisque le Maillage Mécanique du calcul Multimaillages a moins de degrés de liberté que le Maillage du calcul Monomaillage, cependant la méthode continue à nous offrir des accélérations même sur un très grand nombre de processeurs.

Mots clés : Multi-Maillages, Multi-Physiques, Problèmes Couplés, Forgeage, Martelage, Remaillage, Calcul Parallèle, Remaillage Parallèle



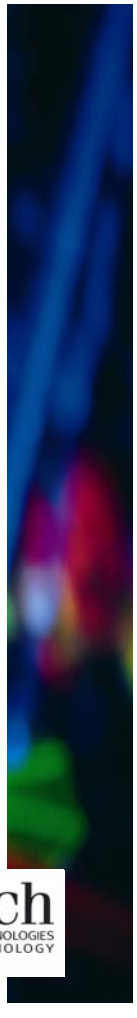
MINES ParisTech

ParisTech
INSTITUT DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES
PARIS INSTITUTE OF TECHNOLOGY

A Parallel MultiMesh MultiPhysics method for speeding-up incremental multiphysics processes

ABSTRACT : The aim of our work is to reduce the computational time of multiphysical incremental processes, while maintaining accurate history of the calculation and taking into consideration the multiphysical aspect. We choose the MultiMesh MultiPhysics method (MMMP). The principle of the method consists on using for each physic a specific mesh which is called Computational Mesh that takes into consideration the characteristics of this physic. Besides the Computational Meshes we consider a Reference Mesh that we use to store results. Since the main application of our thesis is the cogging process which is a thermomechanical coupled process, we apply the MMMP method to this process by considering two meshes : a Mechanical Mesh for the mechanical calculation and another one for the thermal calculation, which serves simultaneously as a Reference Mesh. The particularity of the cogging process is that the plastic deformation is localized in the contact zone with the tools and out of this zone the deformation is negligible. Based on this particularity we generate the Mechanical Mesh : it is divided into two zones, the first one is the deformation zone which has a fine mesh size while the second one is the rest of the mesh, it is called the weak deformation zone and it has a mesh size equal to the double of the fine mesh size. To improve the quality of the data transfer that we perform using the inverse interpolation method, we use three techniques : The first one consists on blocking the deformation zone which means that we have exactly the same nodes and elements on the Reference Mesh and the Mechanical Mesh. The second one is to coarsen the weak deformation zone by a nodes nested coarsening which means that the coarsening is done by eliminating nodes without adding nodes or moving the existing ones. The third, concerns the P_0 variables such as generalized deformation, it consists on recalculating these variables on the Reference Mesh instead of transferring them. The high cost of the data transfer is reduced to less than 1% by a technique of transfer without-relocalization which is based on performing the localization of the arrival mesh in the departure mesh, only at the first increment and using this localization for the remaining increments. The partitioning of the Mechanical Mesh is made independently of the Reference Mesh, which improves the parallel efficiency of the method. The MMMP acceleration is excellent, it varies between 4 and 18 depending on the number of degrees of freedom, the number of increments and the configuration of calculation. In parallel computation, it drops a bit as the Mechanical Mesh of the MultiMesh calculation has less degrees of freedom from the mesh of the MonoMesh calculation, however, the method continues to offer accelerations even on a very large number of processors.

Keywords : Multi-Mesh, Multi-physics, Coupled Problems, Forging, Cogging, Remeshing, Parallel Calculations, Parallel Remeshing



MINES ParisTech

ParisTech
INSTITUT DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES
PARIS INSTITUTE OF TECHNOLOGY