ÉCOLE DOCTORALE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

THÈSE

présentée en vue de l'obtention du grade de
Docteur de l'École Polytechnique

« Spécialité : mathématiques appliquées »

par

BENJAMIN GOURSAUD

ÉTUDE MATHÉMATIQUE ET NUMÉRIQUE DE GUIDES D'ONDES OUVERTS NON UNIFORMES, PAR APPROCHE MODALE

Thèse soutenue le 8 décembre 2010 devant le jury composé de :

M^me^	ANNE–SOPHIE BONNET–BENDHIA	Co-directrice de thèse
M.	CHRISTOPHE HAZARD	Co-directeur de thèse
M.	THORSTEN HOHAGE	Rapporteur
M.	FLORIAN MÉHATS	Rapporteur
M.	JEAN–CLAUDE NÉDÉLEC	Examinateur
M.	ANDRÉ NICOLET	Examinateur
M.	KARIM RAMDANI	Examinateur

Remerciements

Je voudrais remercier en premier lieu mes deux directeurs de thèse, Anne–Sophie Bonnet–BenDhia et Christophe Hazard, pour m'avoir proposé ce sujet de thèse et permis de travailler sous leur encadrement. Leurs remarques ont toujours été pertinentes et ils m'ont témoigné leur confiance tout au long de ces trois années de thèse ; je leur suis profondément reconnaissant.

Je remercie les deux rapporteurs de cette thèse, Thorsten Hohage et Florian Méhats, pour leur relecture attentive de mon manuscrit et la perspicacité de leur rapport. Je remercie également Jean–Claude Nédélec, André Nicolet et Karim Ramdani de me faire l'honneur d'être membres de mon jury.

Je tiens à remercier tous les membres du laboratoire POEMS, qu'ils soient à l'ENSTA ou à l'INRIA, ainsi que tous les membres de l'UMA, l'Unité de Mathématiques Appliquées de l'ENSTA, pour m'avoir permis de travailler dans un cadre humain très convivial. Un grand merci notamment à Andrés, avec qui travailler a toujours été un plaisir, à Colin, qui m'a beaucoup aidé pour utiliser MELINA, et à Christophe, toujours disponible pour dépanner lorsqu'un problème informatique survenait. Une pensée particulière à mes deux amis thésards Jérémi et Lauris avec qui j'ai partagé beaucoup de bons moments tout au long de la thèse.

Enfin, je remercie mes proches pour leur soutien permanent durant ces trois années de thèse.

Paris, le 25 novembre 2010.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction **1**

I Le guide d'ondes ouvert uniforme **13**

1 MODES GUIDÉS ET MODES DE RADIATION **17**
1.1 LE CAS D'UN GUIDE 2D À COEFFICIENTS CONSTANTS DANS LE CŒUR 19
1.1.1 Détermination du spectre et des fonctions propres (généralisées) 19
1.1.2 Modes guidés et modes de radiation 24
1.2 LE CAS D'UN GUIDE 3D 25
1.2.1 Propriétés générales sur le spectre de l'opérateur transverse 26
1.2.2 Spectre essentiel, $\Lambda_e(A)$ 27
1.2.3 Spectre discret, $\Lambda_{disc}(A)$, et propriétés 29
1.2.4 Modes guidés et modes de radiation 32

2 MODES À FUITE **35**
2.1 LE CAS D'UN GUIDE 2D À COEFFICIENTS CONSTANTS DANS LE CŒUR 37
2.1.1 Description des modes à fuite 37
2.1.2 Les modes à fuite : les modes guidés lorsqu'ils ont passé la borne inférieure du spectre essentiel 39
2.1.3 Les modes à fuite : les modes d'un guide fermé lorsque celui-ci est plongé dans un milieu homogène infini 41
2.2 LE CAS D'UN GUIDE 2D QUELCONQUE 42
2.2.1 Introduction d'une PML infinie en z ou prolongement analytique dans la variable z 44
2.2.2 Spectre de l'opérateur transformé 48
2.3 LE CAS D'UN GUIDE 3D 58
2.3.1 Introduction d'une PML radiale ou prolongement analytique dans la variable radiale 60
2.3.2 Spectre de l'opérateur transformé 62
2.3.3 Et si on utilisait des PMLs cartésiennes ? 71

3 SIMULATIONS NUMÉRIQUES **83**
3.1 CALCULS NUMÉRIQUES DE MODES À FUITE 85
3.1.1 Du problème continu au problème numérique 85
3.1.2 Illustrations numériques 90
3.2 LES DIFFICULTÉS RENCONTRÉES LORS DU CALCUL DE MODES À FUITE 102
3.2.1 Croissance exponentielle de la résolvante 102
3.2.2 Les PMLs non orthogonales : une solution ? 107
3.3 REPRÉSENTATION MODALE DE LA FONCTION DE GREEN DU GUIDE OUVERT UNIFORME 113
3.3.1 Formule de décomposition 113
3.3.2 Résultats numériques 119
3.4 ANNEXE : COMPLÉTUDE DES FONCTIONS PROPRES (GÉNÉRALISÉES) DE $\widetilde{A}_\alpha$ 125

II La jonction entre deux guides d'ondes ouverts **131**

4 ANALYSE MATHÉMATIQUE **137**
4.1 POSITION DES PROBLÈMES DE RADIATION ET DE DIFFRACTION . . . 141
4.1.1 Conditions de rayonnement modales . . . 141
4.1.2 Cadre fonctionnel . . . 143
4.1.3 Les résultats principaux . . . 146
4.2 REFORMULATION SOUS LA FORME D'UNE ÉQUATION DE LIPPMANN–SCHWINGER 149
4.2.1 Une approche par perturbation . . . 149
4.2.2 Les problèmes découplés . . . 152
4.2.3 Le problème de couplage . . . 155
4.3 UNICITÉ DES PROBLÈMES DE RADIATION ET DE DIFFRACTION . . . 160
4.3.1 Annulation des composantes propagatives . . . 161
4.3.2 Décroissance dans la direction transverse . . . 163
4.3.3 Analyticité dans la variable spectrale . . . 167
4.4 ANNEXE : TRANSFORMATION DE FOURIER GÉNÉRALISÉE . . . 171

5 SIMULATIONS NUMÉRIQUES **183**
5.1 UTILISATION DE PMLS POUR BORNER LE DOMAINE DE CALCUL . . . 185
5.1.1 Introduction de PMLs dans la (les) direction(s) transverse(s) . . . 185
5.1.2 Décomposition modale . . . 187
5.2 CONSTRUCTION DE CONDITIONS AUX LIMITES TRANSPARENTES . . . 188
5.2.1 Introduction de PMLs dans la (les) direction(s) transverse(s) et longitudinale . . . 188
5.2.2 Expression des opérateurs de Dirichlet-to-Neumann . . . 190
5.2.3 Amélioration de la méthode avec des PMLs non orthogonales . . . 198
5.3 UTILISATION D'UNE MÉTHODE MULTIMODALE . . . 205
5.3.1 Explication de la méthode . . . 206
5.3.2 Résultats numériques . . . 209

Conclusion **214**

Annexes **219**

A THÉORIE SPECTRALE **221**
A.1 RÉSULTATS CLASSIQUES DE THÉORIE SPECTRALE . . . 221
A.1.1 Rappels sur les opérateurs dans les espaces de Hilbert . . . 221
A.1.2 Spectre ponctuel, spectre continu, spectre résiduel . . . 223
A.1.3 Spectre discret, spectre essentiel . . . 224
A.1.4 Spectre purement ponctuel, spectre absolument continu, spectre singulièrement continu . . . 226
A.1.5 Complétude des fonctions propres et des fonctions propres généralisées . . . 229
A.2 SPECTRES ESSENTIELS POUR OPÉRATEURS NON AUTOADJOINTS . . . 230
A.2.1 Différentes définitions de spectres essentiels . . . 230
A.2.2 Propriétés permettant de montrer que les différentes définitions coïncident . . . 232
A.2.3 Exemple où les spectres essentiels ne sont pas égaux . . . 233
A.3 PSEUDOSPECTRE D'UN OPÉRATEUR . . . 234

Bibliographie **235**

Introduction

CADRE PHYSIQUE ET MOTIVATION

LA motivation initiale de cette thèse vient de physiciens de l'IEF (Institut d'Électronique Fondamentale, à Orsay), avec lesquels le laboratoire POEMS (Propagation des Ondes, Etudes Mathématiques et Simulation) collaborait dans le cadre d'une ANR nommée SimNanoPhot. Ils cherchent à créer une transition adiabatique entre un microguide optique et une fibre optique. L'objectif est de créer une jonction entre ces deux dispositifs qui permette de minimiser les pertes d'énergie (d'où le terme « adiabatique ») : c'est ce qu'on appelle un « taper » optique. Sur la figure 1, on voit que la jonction entre le microguide à gauche et la fibre optique à droite est réalisée tout d'abord en diminuant la taille du cœur du microguide (la partie en silicium Si, en jaune sur la figure), dans le taper, de telle manière à déconfiner l'onde pour qu'elle soit bien adaptée à la fibre optique, puis une jonction abrupte (sans zone de transition) relie le microguide à la fibre optique.

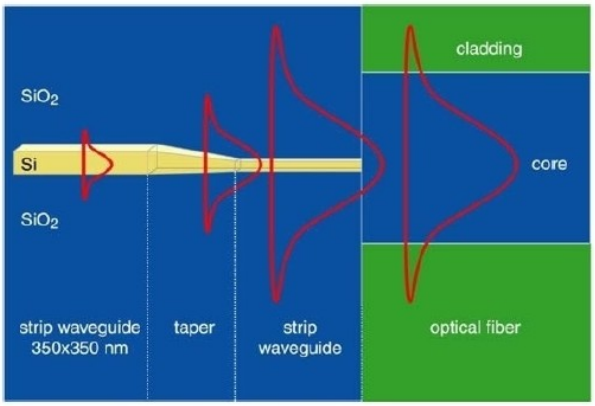

FIGURE 1 – *Schéma de la jonction étudiée par l'IEF entre un microguide optique et une fibre optique.*

Cette étude s'inscrit dans le cadre de la propagation des ondes électromagnétiques dans des *guides d'ondes ouverts*. Voyons ce que signifie ce terme. Un guide d'ondes est un dispositif qui peut être amené (comme son nom l'indique !) à guider les ondes, du fait de ses caractéristiques physiques. On rencontre des guides d'ondes dans de nombreux domaines, comme le montre la liste (non exhaustive) suivante.

- En électromagnétisme, les guides d'ondes permettent de modéliser les guides électromagnétiques, les fibres optiques, ou encore les microguides optiques.
- En élasticité, les guides d'ondes permettent de modéliser les tuyaux, ou autres câbles, barres métalliques présents dans les structures industrielles. À ce titre, l'étude de ces guides d'ondes est indispensable pour le *CND* (contrôle non destructif, ou *NDT* : non destructive testing en anglais) : il s'agit de tester le caractère sain d'une structure complexe en envoyant des ondes et sans la détruire.
- Enfin, en acoustique, les instruments de musique ou les pots d'échappement peuvent être modélisés par des guides d'ondes. Nous pouvons également remarquer qu'une rue peut être vue comme un cas particulier de guide d'ondes.

Nous considérerons, dans tout ce mémoire, qu'un guide d'ondes uniforme (on parle également de guide d'ondes non perturbé ou de guide d'ondes droit) est un milieu qui est invariant dans une direction d'espace. Nous appellerons cette direction la direction de propagation, ou la direction

longitudinale, elle correspondra toujours à la coordonnée x. Un guide d'ondes uniforme remplit un domaine qui sera noté $\mathcal{O} := \mathbb{R} \times \Omega$, où Ω est la section transverse du guide d'ondes.

On distingue alors deux grandes familles de guides d'ondes :

- les *guides d'ondes fermés* pour lesquels la section transverse du guide d'ondes Ω est bornée,
- les *guides d'ondes ouverts* pour lesquels cette section transverse Ω n'est pas bornée.

Comme on peut a priori s'en douter, l'étude des guides d'ondes ouverts est singulièrement plus complexe que celle des guides d'ondes fermés. C'est pourtant de guides d'ondes ouverts dont nous allons parler dans ce mémoire. Nous nous référerons souvent au cas des guides d'ondes fermés, à titre de comparaison.

Bien souvent, un guide d'ondes ouvert est un milieu constitué de deux matériaux, un matériau « intérieur », qui constitue ce qu'on appelle le *cœur* (core en anglais) et un milieu « extérieur », de taille infinie, qui constitue ce qu'on appelle la *gaine* (cladding en anglais). Cette terminologie (cœur, gaine) s'applique à l'origine aux fibres optiques, mais nous l'utiliserons pour tous les types de guides d'ondes ouverts que nous étudierons. Un guide ouvert peut alors être vu comme un guide fermé (le cœur) enrobé dans un milieu infini (la gaine). Bien entendu, dans la nature, les guides d'ondes n'ont pas une section transverse infinie. Les fibres optiques, par exemple, ont une gaine de section bornée. Mais la taille de la gaine est si grande par rapport à celle du cœur et des longueurs d'ondes considérées que la modélisation de telles structures nous conduit à considérer que la gaine est infinie.

Dans ce mémoire, nous allons nous intéresser à l'étude des ondes dans la jonction entre deux guides d'ondes ouverts. Sur la figure 2, nous avons schématisé deux exemples de jonctions, la jonction dite « abrupte » et la jonction dite « épaisse ». Dans la jonction abrupte, la zone de transition est d'épaisseur nulle, au contraire de la jonction épaisse. Dans tous les cas, nous supposerons que la jonction n'occupe qu'une zone bornée de l'espace.

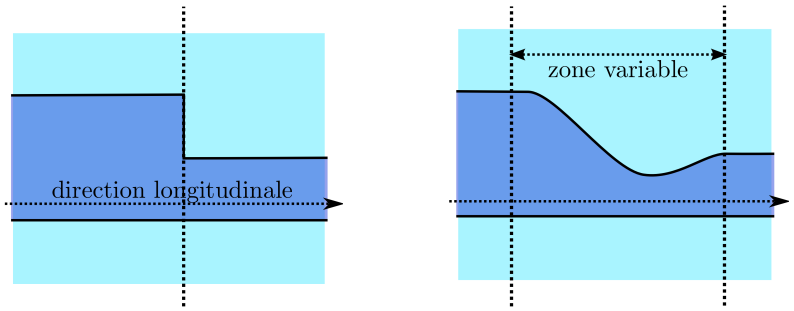

FIGURE 2 – *Un exemple de jonction abrupte (à gauche) et de jonction épaisse (à droite). Les différents niveaux de bleu correspondent à des matériaux différents.*

Dans ce type de géométrie ouverte, le problème délicat est le traitement de l'infini. C'est un problème à la fois théorique (nous avons besoin d'imposer des conditions de rayonnement pour que le problème soit bien posé mathématiquement) et numérique (nous ne pouvons simuler numériquement un domaine infini, il faut trouver un moyen pour borner le domaine de calcul autour de la jonction).

Nous allons nous placer, dans tout le mémoire, dans le cadre du *régime harmonique*. Ce régime, également appelé périodique établi, consiste à utiliser une excitation périodique en temps, de la

forme $\mathrm{e}^{-i\omega t}$. Le système va généralement évoluer de telle manière qu'asymptotiquement (lorsque $t \to +\infty$) la solution des équations sera également périodique en temps, avec la même période. Ce résultat est connu mathématiquement sous le nom du *principe d'amplitude limite*. De manière formelle, cela revient, dans les équations, à remplacer les dépendances en temps par $\mathrm{e}^{-i\omega t}$. Les équations deviennent alors indépendantes du temps.

Remarque 0.1 : *Nous faisons ici un choix en prenant $\mathrm{e}^{-i\omega t}$ (et pas $\mathrm{e}^{i\omega t}$). Cette convention aura une incidence dans toute la suite de la thèse : elle permet de distinguer ce que nous appelons une onde* sortante, *qui « va vers l'infini » (dans les directions spatiales) d'une onde* entrante, *qui, au contraire, « vient de l'infini ».*

Le cas d'un guide d'ondes fermé

Nous allons chercher, dans cette thèse, à utiliser des *méthodes modales* pour traiter le cas du guide d'ondes ouvert. En effet, dans le cas d'un guide d'ondes fermé, l'utilisation des modes du guide d'ondes fournit des outils à la fois théoriques pour montrer le caractère bien posé du problème et numériques pour borner le domaine de calcul autour de la perturbation du guide d'ondes.

Nous allons illustrer ces différents points brièvement dans le cas simple d'un guide fermé 2D. La direction de propagation est x et la direction transverse est z. Le milieu considéré est $\mathcal{O} := \{(x,z) \in \mathbb{R}^2, x \in \mathbb{R}, z \in [0, h(x)]\}$, où $h(x)$ est une fonction telle que, pour $\pm x \geq a$, $h(x) = h^{\pm}$. Ainsi, cette géométrie est celle de la jonction entre deux guides d'ondes fermés, de hauteurs respectives h^- et h^+.

La problème modèle que l'on va chercher à résoudre est le suivant : étant donné une source f à support compact inclus dans $\{(x,z) \in \mathcal{O}, x \in [-a,a]\}$, chercher l'onde φ *sortante* solution des équations suivantes :

$$\begin{aligned} &-\triangle\varphi - k^2\varphi = f \text{ dans } \mathcal{O}, \\ &\varphi(x,0) = \varphi(x,h(x)) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Ce problème est illustré sur la figure 3.

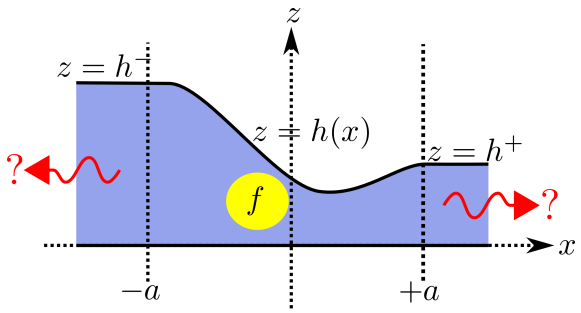

FIGURE 3 – *Le problème de radiation dans un guide fermé.*

Le nombre d'onde k est considéré constant (il vaut ω/c, où ω est la pulsation et c la célérité des ondes dans le milieu).

Les questions qu'on se pose sont de plusieurs natures, à la fois théorique et numérique. Tout d'abord, quel est le sens du terme *sortant* utilisé ci-dessus ? Ceci nous amènera à construire des conditions de rayonnement. Ensuite, les équations de propagation équipées de ces conditions de

rayonnement sont-elles bien posées ? En d'autres termes, y a-t-il existence et unicité de la solution, avec dépendance continue par rapport à la donnée f ? Par ailleurs, comment simuler numériquement le comportement de cette jonction ? Comment restreindre le domaine de calcul autour de la jonction ?

Nous allons voir que l'étude du guide droit (encore appelé guide uniforme) nous permet de répondre à ces différentes questions. En effet, pour $|x| \geq a$, le guide d'ondes est droit. Ceci va nous permettre de décomposer la solution sur ce qu'on appelle les modes du guide droit et ainsi d'imposer des conditions de rayonnement. Par ailleurs, nous verrons que ces mêmes conditions de rayonnement donnent naissance à une méthode numérique pour restreindre le domaine de calcul autour de la jonction.

Considérons un guide d'ondes droit de la forme $\mathbb{R}\times[0,h]$. Les équations dans un tel guide d'ondes, sans source, sont les suivantes :

$$\begin{aligned} &-\triangle\varphi - k^2\varphi = 0 \text{ dans } \mathbb{R}\times[0,h], \\ &\varphi(x,0) = \varphi(x,h) = 0, \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Les caractéristiques du milieu sont invariantes par translation dans la direction x, la direction longitudinale. Ceci nous amène à rechercher des solutions à variables séparées : $\varphi(x,z) = \psi(x)\,u(z)$. Ces solutions particulières sont appelées *modes*. En incorporant cette décomposition dans les équations, on obtient, d'une part :

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2} - \lambda\psi = 0, \forall x \in \mathbb{R},$$

et, d'autre part,

$$\begin{aligned} &-\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}z^2} - k^2u = \lambda u, \forall z \in [0,h], \\ &u(0) = u(h) = 0, \end{aligned}$$

où λ est une constante a priori complexe.

L'équation sur ψ se résout immédiatement : $\psi(x)$ est une combinaison linéaire de $\mathrm{e}^{+i\beta x}$ et de $\mathrm{e}^{-i\beta x}$, où β est le nombre d'ondes longitudinal relié à λ par l'équation $\lambda = -\beta^2$.

Les équations sur u s'interprètent comme la recherche des éléments spectraux (valeurs propres λ, fonctions propres u) de l'opérateur A de $L^2(0,h)$, l'espace des fonctions de carré intégrable, défini par :

$$Au = -\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}z^2} - k^2u, \quad \forall u \in D(A) := H^2(0,h) \cap H_0^1(0,h).$$

Nous utilisons les notations classiques H^2 et H_0^1 pour les espaces de Sobolev. Cet opérateur est appelé opérateur transverse (puisqu'il prend en compte la coordonnée transverse). Nous notons Φ_n les fonctions propres de A, i.e. les fonctions $\Phi_n \neq 0$ de $D(A)$ vérifiant $A\Phi_n = \lambda_n\Phi_n$. Le nombre λ_n est alors appelé valeur propre de l'opérateur A. Comme l'opérateur A est autoadjoint et à résolvante compacte (puisque Ω est borné), les outils de théorie spectrale classiques nous permettent de démontrer que les λ_n forment une suite réelle tendant vers l'infini et que les Φ_n peuvent être choisis de façon à former une base hilbertienne de $L^2(0,h)$. Dans le cas très simple exposé ici, les fonctions propres orthonormalisées sont données par $\Phi_n(z) = 1/\sqrt{2}\sin(\frac{n\pi}{h}\ z)$, et les valeurs propres par $\lambda_n = -k^2 + n^2\pi^2/h^2$, pour $n \geq 1$.

Il n'y a qu'un nombre fini de valeurs propres λ_n pour lesquelles $\lambda_n < 0$. Pour celles-ci, nous posons $\beta_n := \sqrt{-\lambda_n} > 0$. Ainsi, en se souvenant que nous avons considéré une dépendance en temps de la forme $\mathrm{e}^{-i\omega t}$, $\Phi_n(z)\,\mathrm{e}^{i\beta_n x}$ s'interprète comme un mode propagatif vers la droite : il se

propage, sans atténuation, vers les x croissants et $\Phi_n(z)\,\mathrm{e}^{-i\beta_n x}$ comme un mode propagatif vers la gauche : il se propage, sans atténuation, vers les x décroissants.

Par ailleurs, il y a une infinité de valeurs propres λ_n pour lesquelles $\lambda_n > 0$. Pour celles-ci, nous posons $\beta_n = i\sqrt{\lambda_n}$. Ainsi, le mode $\Phi_n(z)\,\mathrm{e}^{i\beta_n x}$ est évanescent vers la droite (exponentiellement décroissant lorsque x augmente) et le mode $\Phi_n(z)\,\mathrm{e}^{-i\beta_n x}$ est évanescent vers la gauche (exponentiellement décroissant lorsque x diminue).

Soit φ une fonction vérifiant les équations du guide uniforme. En utilisant le fait que $\varphi(x,.) \in L^2(0,h)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et que les fonctions propres Φ_n forment une base de $L^2(0,h)$, on obtient

$$\varphi(x,z) = \sum_n \psi_n(x)\Phi_n(z),$$

où $\psi_n(x)$ vérifie

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi_n}{\mathrm{d}x^2} - \lambda_n\psi = 0, \forall x \in \mathbb{R},$$

dont les solutions sont combinaisons linéraires de $\mathrm{e}^{i\beta_n x}$ et $\mathrm{e}^{-i\beta_n x}$. On en déduit que toute fonction φ vérifiant les équations dans un guide d'ondes uniforme se décompose sous la forme suivante :

$$\varphi(x,z) = \sum_n \left(a_n\,\mathrm{e}^{i\beta_n x} + b_n\,\mathrm{e}^{-i\beta_n x}\right)\Phi_n(z).$$

Cette décomposition porte le nom de décomposition sur les modes du guide d'ondes. Cette dernière décomposition nous permet d'expliciter des conditions d'ondes sortantes (ou conditions de rayonnement). En effet, en revenant au problème initial du guide d'ondes perturbé, pour $x \geq a$, le guide est droit, de hauteur h^+. La condition d'onde sortante est alors :

$$\varphi(x,z) = \sum_n a_n^+\,\mathrm{e}^{i\beta_n^+(x-a)}\,\Phi_n^+(z), \quad \forall x \geq a,$$

où les Φ_n^+ sont les fonctions propres associées au guide de droite (de hauteur h^+) et β_n^+ les nombres d'onde associés. En d'autres termes, on représente la solution, pour $x \geq a$, comme une superposition de modes propagatifs et évanescents vers la droite. Le nombre $a_n^+ \in \mathbb{C}$ intervenant dans la décomposition est simplement la projection de $\varphi(a,.)$ sur l'espace propre associé à la fonction propre Φ_n^+ :

$$a_n^+ = (\varphi(a,.),\Phi_n^+)_{L^2(0,h^+)} = \int_0^{h^+} \varphi(a,z)\,\Phi_n^+(z)\,\mathrm{d}z.$$

Nous appliquons la même méthode pour $x \leq -a$ et la condition d'onde sortante consiste à ne prendre en compte, dans la décomposition modale, que les modes propagatifs ou évanescents vers la gauche. On montre alors que le problème relève de l'alternative de Fredholm. En dehors de certaines fréquences, le problème est bien posé : il y a existence, unicité de la solution, avec dépendance continue par rapport à la donnée f.

De plus, nous pouvons tirer profit de cette décomposition modale pour développer des méthodes numériques. Tout d'abord, les conditions de rayonnement permettent de borner le domaine de calcul autour de la perturbation, dans $\mathcal{O}_b := \{(x,z) \in \mathcal{O}, -a \leq x \leq a\}$, en imposant des conditions aux limites transparentes fondées sur des opérateurs de *Dirichlet-to-Neumann* (DtN) sur les frontières $\Sigma_{\pm a} := \{\pm a\} \times [0, h^{\pm}]$: on associe à la donnée de Dirichlet $\varphi(a,.)$ la donnée de Neumann $\partial\varphi/\partial x(a,.)$. Ces conditions s'expriment sous la forme suivante, par exemple pour la condition sur Σ_{+a} :

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}(a,z) = \sum_n (\varphi(a,.),\Phi_n^+)_{L^2(0,h^+)}\,i\beta_n^+\,\Phi_n^+(z).$$

Il suffit de dériver par rapport à x la condition d'onde sortante sur Σ_{+a} pour obtenir l'expression de l'opérateur DtN. En imposant ces conditions aux limites transparentes dans le domaine borné $\mathcal{O}_b$, nous pouvons alors résoudre le problème numériquement, par exemple en utilisant la technique des éléments finis.

On peut, par ailleurs, utiliser la décomposition modale de la solution, y compris dans la perturbation : on décompose le champ dans toute section $\Sigma_x := \{x\} \times [0, h(x)]$ sur les modes locaux du guide droit ayant pour hauteur $h(x)$. Cela donne naissance à la *méthode multimodale*, qui est une alternative à la technique des éléments finis. Elle a prouvé son succès dans le cas des guides d'ondes fermés. Elle permet notamment d'optimiser la forme d'un taper (i.e. un guide d'ondes à section variable) de façon à maximiser la transmission, voir par exemple [HL08] et les références citées dans cet article.

ET DANS LE CAS D'UN GUIDE D'ONDES OUVERT ?

Notre objectif est de généraliser la démarche expliquée ci-dessus au cas d'un guide d'ondes ouvert. La difficulté majeure concerne le caractère non borné de la section transverse. Ainsi, dans le cas d'un guide ouvert uniforme, la résolvante de l'opérateur transverse n'est pas compacte. Ceci a pour incidence que la nature du spectre de l'opérateur transverse est considérablement modifiée : le spectre n'est pas uniquement constitué de valeurs propres : il y a également un spectre continu. Aux valeurs propres sont associés les *modes guidés* et au spectre continu les *modes de radiation*.

La condition de rayonnement revient alors, comme pour les guides fermés, à représenter l'onde sortante comme une superposition de modes guidés et de modes de radiation sortants dans la direction longitudinale. Mais à la différence des guides fermés, cette décomposition ne fait pas intervenir qu'une série, il y a également une intégrale, due à la présence du spectre continu. Nous obtenons une condition du type :

$$\varphi(x,z) = \sum_{n \text{ modes guidés}} a_n^+ \, \mathrm{e}^{i\beta_n^+(x-a)} \, \Phi_{\lambda_n}^+(z) + \int_{\lambda \text{ modes de radiation}} a_\lambda^+ \, \mathrm{e}^{i\beta_\lambda^+(x-a)} \, \Phi_\lambda^+(z) \, \mathrm{d}\lambda, \quad \forall x \geq a.$$

Cette condition de rayonnement a été développée dans [BBCDH09] pour traiter le problème d'une perturbation locale d'un guide d'ondes ouvert uniforme. Elle a également été utilisée dans la thèse d'Axel Tillequin [Til01] notamment pour traiter le cas d'une jonction abrupte entre deux guides d'ondes ouverts uniformes (voir également [BBT00] pour la jonction abrupte entre deux guides d'ondes ouverts et [BBRT00] pour la jonction entre un réseau de plaques et l'espace libre). On ramène, dans ce cas, le problème à une équation sur l'interface entre les deux guides d'ondes. Nous chercherons, dans ce mémoire, à généraliser les deux approches de [BBCDH09] et [Til01] de façon à montrer que le problème de la jonction quelconque (et non nécessairement abrupte) entre deux guides d'ondes ouverts est bien posé.

Du point de vue numérique, la présence du spectre continu est embarrassante. De façon à se ramener en quelque sorte au cas d'un guide d'ondes fermé, on utilisera des PMLs (pour *Perfectly Matched Layer* ou *couche absorbante parfaitement adaptée* en français) pour borner le domaine de calcul dans la (ou les) direction(s) transverse(s).

Précisons brièvement ce que sont les PMLs. Ces objets ont été créés en 1994 par Bérenger, dans l'article [Bér94], comme un outil pour simuler numériquement les équations de Maxwell dans un domaine non borné en régime temporel. Cela consiste à entourer le domaine de simulation par une couche, que l'on appelle PML, qui absorbe les ondes. Cet outil est un concurrent des conditions aux limites absorbantes (on impose au bord du domaine de simulation une condition

qui absorbe les ondes) ou des milieux absorbants (on entoure le domaine physique d'une couche avec un milieu où l'on a ajouté de la dissipation, ce qui absorbe les ondes). Comme les milieux absorbants, les PMLs absorbent les ondes. Ainsi, si la PML est suffisamment grande, l'onde est très bien atténuée dans la PML et il en résulte que la solution dans le domaine de simulation est très proche de la solution exacte dans ce même domaine. Les PMLs ont l'inconvénient, comme les milieux absorbants, de créer une zone non physique qui doit être simulée numériquement (d'où un surcoût éventuel de la méthode numérique), mais elles ont l'avantage de ne créer aucune réflexion parasite à l'interface entre le domaine physique et la PML, contrairement aux milieux absorbants, d'où la dénomination « perfectly matched ». En régime harmonique, les PMLs ont été ré-interprétées en tant que changement de variable complexe (par exemple, pour les équations de Maxwell, voir [CW94] et [TC98]). Pour des problèmes de diffraction, il y a convergence de la solution avec PML vers la solution exacte, en faisant tendre la taille de la PML vers l'infini (voir par exemple [BP07] et [BP08]).

En introduisant des PMLs dans la (ou les) direction(s) transverse(s), nous changeons considérablement la nature du spectre de l'opérateur transverse : il devient à résolvante compacte, comme dans le cas d'un guide fermé, donc son spectre est uniquement constitué de valeurs propres et il n'y a plus de spectre continu. Nous verrons que parmi les nouveaux modes se trouvent ce qu'on appelle les *modes à fuite*. Cette notion est une spécificité des guides ouverts. Rappelons-nous qu'un guide ouvert peut être vu comme un guide fermé que l'on a plongé dans un milieu infini. On peut voir les modes à fuite comme les traces des modes du guide fermé une fois plongé dans le milieu infini (voir par exemple les ouvrages de physique [Vas91], [SL83] ou [Mar74]). En utilisant les modes guidés et les modes à fuite, nous chercherons à généraliser, pour la jonction entre deux guides d'ondes ouverts, les techniques numériques que l'on a vues pour le guide d'ondes fermé non uniforme (DtN, méthode multimodale).

Annonce des festivités

Ce mémoire est composé en deux parties. Dans la première partie (composée des chapitres 1, 2 et 3), nous étudierons le guide d'ondes ouvert uniforme.

Au premier chapitre, nous verrons comment la théorie spectrale nous permet d'associer aux deux composantes du spectre de l'opérateur transverse, les valeurs propres et le spectre continu, deux types de modes, les *modes guidés* et les *modes de radiation*.

Le deuxième chapitre est dédié à l'étude des *modes à fuite*. Nous définirons précisément ces objets, qui ne rentrent pas dans le spectre de l'opérateur transverse et nous verrons qu'un moyen théorique de les mettre en évidence est l'utilisation d'une PML de taille infinie. Dans notre contexte, on verra que l'introduction d'une PML infinie modifie l'opérateur transverse : il n'est plus autoadjoint. Les outils standards de théorie spectrale ne s'appliquent plus à cet opérateur et une attention particulière devra être apportée à l'étude de son spectre. Nous verrons que la notion de spectre essentiel, qui est classique pour des opérateurs autoadjoints, admet plusieurs définitions dans le cas d'opérateurs non autoadjoints. Nous montrerons que toutes ces définitions coïncident dans le cas de l'opérateur transverse avec PML. Nous interpréterons l'effet de la PML de la manière suivante : elle fait tourner le spectre essentiel et elle permet de dévoiler les modes à fuite situés dans le secteur angulaire compris entre le spectre essentiel de l'opérateur sans PML et le spectre essentiel de l'opérateur avec PML infinie (voir la figure 4).

Le chapitre 3 est dédié au calcul numérique des modes guidés et des modes à fuite. Nous verrons que pour calculer les modes à fuite, nous prendrons une PML de taille finie. Du point de vue de la théorie spectrale, ceci a pour incidence de modifier l'opérateur transverse, qui devient à

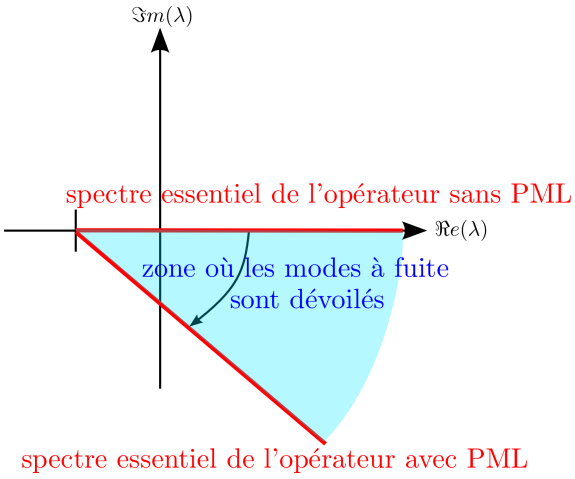

FIGURE 4 – *Illustration de l'effet de l'introduction de la PML de taille infinie sur le spectre de l'opérateur transverse.*

résolvante compacte. Par conséquent, l'opérateur transverse n'a plus que du spectre discret. Dans ce spectre, nous retrouverons les modes guidés, les modes à fuite dévoilés et un ensemble de modes provenant de la « discrétisation » du spectre essentiel qui serait présent si la PML était de taille infinie. Mais, du fait de l'utilisation d'une PML, l'opérateur transverse n'est pas autoadjoint. On verra qu'une conséquence sera l'apparition d'instabilité numérique lors du calcul des valeurs propres. Nous analyserons ce phénomène grâce à l'utilisation du *pseudospectre*. Nous en déduirons alors un conseil à suivre pour le calcul numérique de modes à fuite : placer la PML le plus proche possible du cœur du guide. Ceci nous amènera à développer un nouveau type de PML dans le cas d'une section transverse 2D, qui suit la forme du cœur du guide, lorsque sa géométrie n'est pas canonique (cercle ou rectangle). Nous illustrerons ensuite cette méthode par un exemple d'application : la décomposition modale de la fonction de Green du guide ouvert uniforme.

Ces trois premiers chapitres constituent la première partie de ce mémoire, dédiée à l'étude des modes du guides d'ondes ouvert uniforme. La deuxième partie (constituée des chapitres 4 et 5) sera dédiée à l'étude du problème de la jonction entre deux guides d'ondes ouverts (le problème physique qui intéresse l'IEF dans le cas de l'optique).

Tout d'abord, dans le chapitre 4, nous poserons le problème dans un cadre mathématique. Nous utiliserons les modes guidés et les modes de radiation (définis au chapitre 1) pour construire des conditions de rayonnement, qui seront l'équivalent, pour les guides d'ondes ouverts, des conditions de rayonnement vues pour les guides fermés. Nous montrerons ensuite que le problème, équipé de ces conditions de rayonnement, est bien posé : il y a existence et unicité de la solution, avec dépendance continue par rapport aux données (source, onde incidente). Ceci constitue le premier résultat connu à ce jour dans la littérature sur la jonction de deux guides d'ondes ouverts et fait l'objet d'un article soumis à SIAM Journal of Applied Mathematics [BBGHed].

Au chapitre 5, nous décrirons plusieurs méthodes pour résoudre le problème numériquement, toutes reposant sur l'idée d'utiliser les modes de l'opérateur avec une PML de taille finie. En effet, avec une telle PML, l'opérateur transverse est à résolvante compacte, donc il n'y a plus de spectre continu : les modes forment un ensemble discret. Nous expliquerons comment généraliser les techniques que nous avons présentées brièvement dans le cas d'un guide fermé : nous utiliserons ces modes pour construire des conditions aux limites transparentes, reposant sur des opérateurs de Dirichlet-to-Neumann, ainsi que pour développer une méthode multimodale.

Enfin, nous avons regroupé dans une annexe tous les résultats de théorie spectrale dont nous nous servons.

Le problème modèle étudié dans le mémoire

Dans tout ce mémoire, nous allons étudier l'équation modèle suivante :

$$-\mathrm{div}(\mu\nabla\varphi) - \omega^2\rho\,\varphi = 0,$$

dans un domainte $\mathcal{O} := \mathbb{R} \times \Omega$, où Ω est la section transverse (non bornée), où φ est un champ scalaire et où μ et ρ sont des fonctions représentant les caractéristiques physiques du milieu. Nous posons $c := \sqrt{\mu/\rho}$, qui correspond à une vitesse, et $k := \omega/c$, qui correspond à un nombre d'onde. La pulsation du phénomène physique est ω. L'équation est bidimensionnelle ou tridimensionnelle.

Les fonctions ρ et μ (ainsi que c et k) sont égales à une constante à l'infini dans la (les) direction(s) transverse(s), dans ce qu'on appelle la gaine, leur valeur est alors indicée par ∞. Par ailleurs, nous traiterons souvent le cas où les caractéristiques sont constantes par morceaux : une valeur indicée par ∞ dans la gaine, une valeur indicée par 0 dans le cœur.

Cette équation permet de modéliser les ondes acoustiques dans des guides d'ondes ouverts 2D ou 3D. Dans ce cas, le paramètre μ vaut 1 et $\rho = 1/c^2$, où c correspond à la vitesse du son dans le milieu. Dans le cas d'un milieu stratifié (l'équation devient alors 2D), l'équation permet de modéliser la propagation des ondes SH en élasticité. Le paramètre μ est alors le module de cisaillement et ρ la masse volumique. Toujours dans le cas d'un milieu stratifié (équation 2D), cette même équation permet de modéliser la propagation des ondes électromagnétiques dans la polarisation transverse éléctrique (TE) ou magnétique (TM). Pour la polarisation TE, $\mu = 1$ et $\rho = n^2$, où n dénote l'indice de réfraction du milieu. Pour la polariation TM, $\rho = 1$ et $\mu = 1/n^2$, où n est l'indice de réfraction.

Notations

Nous avons essayé, autant que faire se peut, de garder des notations cohérentes dans tout le mémoire.

Géométrie

Nous notons $\mathcal{O}$ le domaine physique non borné étudié (de dimension 2 ou 3), constituant le guide d'ondes uniforme, dans la première partie, ou la jonction entre deux guides d'ondes, dans la deuxième partie. Ce domaine $\mathcal{O}$ est de la forme suivante : $\mathcal{O} = \mathbb{R} \times \Omega$, où Ω dénote la section transverse, qui est non bornée et de dimension 1 (dans ce cas, nous prenons toujours $\Omega = \mathbb{R}^+$) ou 2 (dans ce cas, nous prenons $\Omega = \mathbb{R}^2$). La direction de propagation est $x \in \mathbb{R}$, la (les) direction(s) transverse(s) vivent dans Ω.

Nous notons $\widetilde{\Omega}$ le domaine transverse avec PMLs, qui est borné. Nous notons $\widetilde{\mathcal{O}}$ le domaine $\mathbb{R} \times \widetilde{\Omega}$.

Nous utilisons des lettres grecques minuscules, φ, ψ, pour les fonctions vivant dans $\mathcal{O}$ (ou $\widetilde{\mathcal{O}}$) et des lettres latines minuscules, u, v, pour les fonctions vivant dans Ω (ou $\widetilde{\Omega}$).

Analyse fonctionnelle, fonctions spéciales

Nous notons, de manière classique, $\mathcal{D}$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact, L^p l'ensemble des fonctions dont la puissance p-ième du module est intégrable, L^∞ l'ensemble des fonctions bornées presque partout, H^s et $W^{n,p}$ les espaces de Sobolev classiques.

Nous notons δ la mesure de Dirac, $\mathcal{D}'$ l'espace des distributions classiques (le dual de $\mathcal{D}$). Nous définissons le dual X' d'un espace X comme l'ensemble des formes antilinéaires continues sur cet espace et nous notons $< ., . >_{X',X}$ le produit de dualité correspondant.

Nous allons avoir besoin d'une définition de racine carrée complexe. Notre définition est la suivante : pour tout $\alpha \in \mathbb{C} \setminus 0$:

$$\sqrt[\alpha\mathbb{R}^+]{\lambda} = \sqrt{|\lambda|}\, \exp\left(i \arg_{\alpha\mathbb{R}^+}(\lambda)/2\right), \quad \text{avec } \theta - 2\pi < \arg_{\alpha\mathbb{R}^+}(\lambda) < \theta,$$

où θ est l'argument de α, dans l'intervalle $]0, 2\pi]$. Ceci signifie que nous plaçons la coupure de la racine carrée sur la demi-droite $\alpha\mathbb{R}^+$. Ainsi, nous pourrons utiliser différentes racines carrées (avec différentes coupures) en utilisant une notation unique.

Nous notons J_n, Y_n les fonctions de Bessel de première espèce et de deuxième espèce, K_n, I_n les fonctions de Bessel modifiées de première espèce et de deuxième espèce et $H_n^{(1)}$, $H_n^{(2)}$ les fonctions de Hankel de premier et de deuxième type.

Paramètres spectraux

La théorie fera apparaître différents opérateurs : A dénote l'opérateur transverse (défini au chapitre 1), A_α l'opérateur transverse avec PML de taille infinie (défini au chapitre 2) et $\widetilde{A}_\alpha$ l'opérateur transverse avec PML de taille finie (défini au chapitre 3). L'indice α réfère alors au paramètre α de la PML.

Nous notons Λ le spectre d'un opérateur, ρ son ensemble résolvant[1]. Les fonctions propres (ou fonctions propres généralisées) sont notées soit Φ_λ soit Φ_n, λ correspondant à la valeur propre ou n au numéro de la valeur propre.

Nous notons $\beta = \sqrt[\mathbb{R}^-]{-\lambda}$ (définition prolongée par $\beta = i\sqrt{\lambda}$ si $\lambda > 0$) le nombre d'onde longitudinal.

Par ailleurs, nous notons $\beta_\infty = \sqrt[i\mathbb{R}^+]{k_\infty^2 + \lambda}$ (resp. $\beta_0 = \sqrt[i\mathbb{R}^+]{k_0^2 + \lambda}$) la constante qui correspond au nombre d'onde transverse dans la gaine (resp. dans le cœur lorsque les paramètres sont constants dans celui-ci).

[1] Le risque de confusion étant minime, nous avons choisi d'utiliser la même notation ρ pour l'ensemble résolvant et un des paramètres physiques.

Première partie

Le guide d’ondes ouvert uniforme

En guise d'introduction à cette première partie, dédiée au guide d'ondes ouvert uniforme, c'est-à-dire non perturbé, nous allons décrire les équations modèles qui y seront traitées. Nous rappelons que le milieu est cylindrique : de la forme $\mathcal{O} := \mathbb{R} \times \Omega$, où Ω est la section transverse, qui est un domaine non borné, c'est la caractéristique des guides ouverts (en opposition aux guides fermés, pour lesquels Ω est borné). Nous notons y et z (ou uniquement z si le milieu considéré est bi-dimensionnel) les coordonnées cartésiennes permettant de décrire Ω, ce sont ce qu'on appelle les *coordonnées transverses*. Nous notons $x \in \mathbb{R}$ la coordonnée cartésienne orthogonale à y et z, c'est la *coordonnée longitudinale*, que nous appellerons également parfois la *coordonnée de propagation*.

On rappelle que l'on considère l'équation de type Helmholtz suivante :

$$-\mathrm{div}(\mu \nabla \varphi) - \omega^2 \rho \, \varphi = 0 \text{ dans } \mathcal{O}, \tag{1}$$

à laquelle on ajoute, éventuellement (i.e. si $\partial\Omega$ existe)[2], une condition aux limites sur $\partial\Omega$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

La constante positive ω correspond à la *pulsation* du phénomène physique que l'on considère. Les fonctions μ et ρ sont réelles, bornées inférieurement et supérieurement par des constantes strictement positives, et ne dépendent que des directions transverses. Nous supposerons également que ces fonctions sont régulières par morceaux.[3] Nous définissons

$$c := \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad \text{et} \quad k := \frac{\omega}{c}, \tag{2}$$

qui, elles aussi, ne dépendent que des directions transverses. La fonction c correspond physiquement à une *vitesse* et la fonction k à un *nombre d'onde*.

Les caractéristiques physiques du milieu sont données par μ et ρ ou c et k. Nous allons supposer que ces caractéristiques sont constantes à l'infini, ce qui se traduit, dans le cas d'un milieu transverse bidimensionnel, par :

$$\text{pour } \sqrt{y^2+z^2} > R, \quad \mu(y,z) = \mu_\infty \quad (\text{resp. } \rho(y,z) = \rho_\infty,\ c(y,z) = c_\infty,\ k(y,z) = k_\infty)\,,$$

et dans le cas d'un milieu transverse unidimensionnel :

$$\text{pour } |z| > h, \quad \mu(z) = \mu_\infty \quad (\text{resp. } \rho(z) = \rho_\infty,\ c(z) = c_\infty,\ k(z) = k_\infty)\,.$$

Ainsi, au delà d'un domaine borné, le milieu est homogène. C'est ce qui caractérise tous les systèmes physiques que nous allons étudier, comme une fibre optique par exemple. Mais cela ne correspond pas à tous les types de guides d'ondes ouverts, comme certains microguides optiques, où le milieu, au lieu d'être homogène, est stratifié à l'infini. Nous définissons également, dans le cas d'un milieu transverse bidimensionnel :

$$c_{\min} := \min_{(y,z)\in\Omega} c(y,z) \quad \text{et} \quad k_{\max} := \max_{(y,z)\in\Omega} k(y,z), \tag{3}$$

et dans le cas d'un milieu transverse unidimenstionnel,

$$c_{\min} := \min_{z\in\Omega} c(z) \quad \text{et} \quad k_{\max} := \max_{z\in\Omega} k(z). \tag{4}$$

Nous définissons la *gaine* (cladding en anglais) comme l'union Ω_∞ de toutes les composantes connexes non bornées du domaine où les paramètres physiques sont égaux à ce qu'ils valent à l'infini : $\mu = \mu_\infty$, $\rho = \rho_\infty$, $c = c_\infty$, $k = k_\infty$. Le *cœur* (core en anglais) est alors $\Omega \setminus \Omega_\infty$, c'est un borné. Cette terminologie est celle qui est utilisée pour les fibres optiques. Nous l'utiliserons

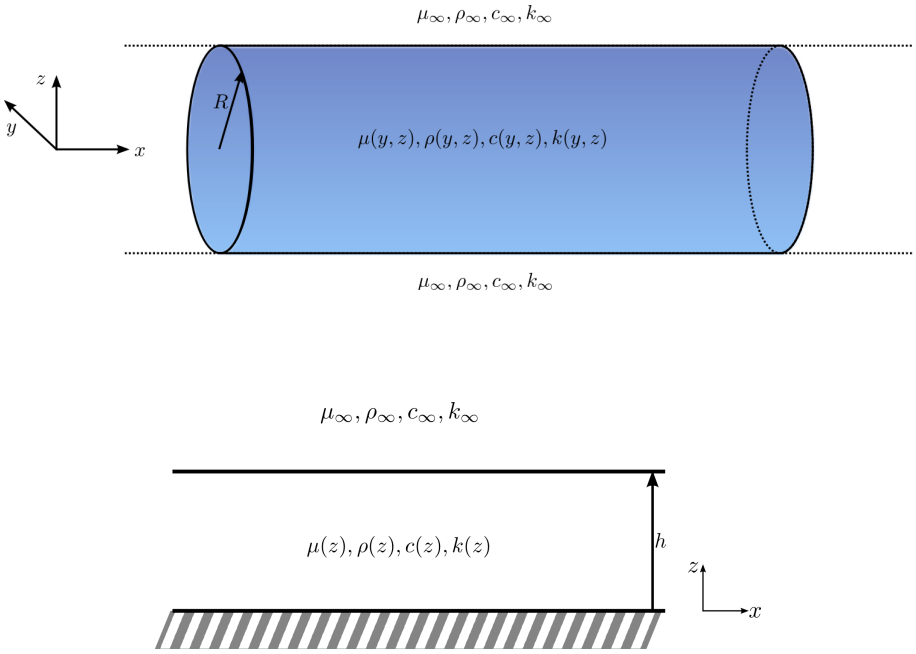

FIGURE 5 – *Géométrie étudiée, dans un cas 3D (en haut), dans un cas 2D (en bas).*

pour tous les guides que nous étudierons. Sur la figure 5, un exemple de géométrie étudiée est représentée, dans le cas 3D.

Exemple 0.1 (Cas d'un guide à coefficients constants dans le cœur) *Dans ce cas, les paramètres physiques sont constants dans le cœur : $\mu = \mu_0$, $\rho = \rho_0$, $c = c_0$, $k = k_0$. Les coefficients prennent donc deux valeurs : une dans le cœur et une dans la gaine. C'est toujours cet exemple que l'on prendra dans les illustrations numériques ou pour faire des calculs explicites.*

Maintenant que les équations sont posées, nous allons pouvoir commencer ! Le premier chapitre de ce mémoire rappellera les notions de modes guidés et de modes de radiation dans un guide d'ondes ouvert. Le deuxième chapitre traitera d'un autre type de modes des guides d'ondes ouverts : les modes à fuite. Nous verrons que ces modes à fuite sont des objets un peu particuliers, qui peuvent être « dévoilés » grâce à l'utilisation de PMLs (Perfectly Matched Layers). Enfin, le troisième chapitre est dédié aux simulations numériques d'un guide d'ondes ouvert uniforme. Nous expliquerons les difficultés rencontrées lors du calcul numérique des modes à fuite grâce à la notion de pseudospectre. Enfin, nous utiliserons les modes pour décomposer la fonction de Green du guide d'ondes ouvert uniforme.

[2]Pour les exemples qui vont nous intéresser dans la suite, $\partial\mathbb{R}^+ = \{0\}$, $\partial\mathbb{R}^2 = \emptyset$.

[3]Nous supposons que μ est dans $W^{1,\infty}(\Omega)$ par morceaux et que ρ est dans $L^\infty(\Omega)$, où $W^{1,\infty}$ et L^∞ désignent les espaces de Sobolev classiques.

MODES GUIDÉS ET MODES DE RADIATION 1

SOMMAIRE

1.1 LE CAS D'UN GUIDE 2D À COEFFICIENTS CONSTANTS DANS LE CŒUR 19
1.1.1 Détermination du spectre et des fonctions propres (généralisées) 19
1.1.2 Modes guidés et modes de radiation 24
1.2 LE CAS D'UN GUIDE 3D 25
1.2.1 Propriétés générales sur le spectre de l'opérateur transverse 26
1.2.2 Spectre essentiel, $\Lambda_e(A)$ 27
1.2.3 Spectre discret, $\Lambda_{disc}(A)$, et propriétés 29
1.2.4 Modes guidés et modes de radiation 32

DANS ce premier chapitre, nous rappelons les notions de mode guidé et de mode de radiation pour un guide d'ondes ouvert.

L'étude des *modes* d'un guide d'ondes prend sa source dans le fait que le milieu est invariant dans la direction de propagation : les caractéristiques physiques (pour nous μ, ρ, c, k) ne dépendent pas de la direction de propagation. Ceci nous amène à chercher, dans le cas d'un guide 3D, une solution à l'équation introduite dans l'introduction de cette partie, équation (1), en séparant les variables :

$$\varphi(x, y, z) = \psi(x)\, u(y, z).$$

La fonction ψ ne dépend que de la direction de propagation et la fonction u que des coordonnées transverses. En incorporant cette expression dans l'équation volumique (1), on obtient :

$$-\mathrm{div}(\mu \nabla u) - \omega^2 \rho\, u = \lambda\, \mu\, u, \text{ dans } \Omega \tag{1.1}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2} - \lambda\, \psi = 0, \text{ dans } \mathbb{R}. \tag{1.2}$$

On ajoute (éventuellement, i.e. si $\partial\Omega$ existe) des conditions aux limites pour u sur $\partial\Omega$. Dans ces équations, λ est une constante, a priori complexe. Dans l'équation (1.1), les opérateurs div et ∇ sont des opérateurs bidimensionnels, ne dépendant que de y et z.

L'équation (1.2) se résout directement : si l'on choisit $\beta \in \mathbb{C}$ tel que

$$\lambda = -\beta^2, \tag{1.3}$$

alors les solutions pour $\psi(x)$ sont les combinaisons linéraires de $\exp(\pm i\beta x)$. Nous appelons β le *nombre d'onde longitudinal*.

Rechercher les solutions u de l'équation (1.1) revient alors à la recherche des éléments propres d'un opérateur que l'on va nommer *opérateur transverse* (puisqu'il ne dépend que des coordonnées transverses). Cet opérateur est l'opérateur A de $L^2(\Omega)$ défini par :

$$Au := -\frac{1}{\mu}\mathrm{div}(\mu\nabla u) - k^2 u, \quad \forall u \in D(A) := \{u \in H^1(\Omega), \mathrm{div}(\mu\nabla u) \in L^2(\Omega), \\ + \text{ éventuellement conditions aux limites sur } \partial\Omega\}.$$

La fonction u est alors une fonction propre (ou une fonction propre généralisée) et λ est dans le spectre de l'opérateur A, que nous notons $\Lambda(A)$ (voir l'annexe A.1 pour un rappel des notions de spectre d'un opérateur).

Remarque 1.1 : *Nous avons choisi ici de nous donner ω, la pulsation du phénomène physique, et d'en déduire les valeurs de λ, donc de β. En d'autres termes, l'opérateur A dépend de ω (par l'intermédiaire de k). Mais nous aurions très bien pu faire l'inverse, c'est-à-dire nous donner β et en déduire les valeurs de ω.*

Dans ce chapitre, nous nous intéressons aux notions de modes guidés et de modes de radiation. Nous allons voir que les premiers sont reliés aux valeurs propres de A, tandis que les seconds sont reliés au spectre continu (ou essentiel) de A. Nous allons tout d'abord, dans la section 1.1, traiter le cas d'un guide 2D à coefficients constants par morceaux, où les calculs sont simples. Puis, nous verrons comment traiter le cas général (section 1.2), ce qui nous amènera à utiliser des arguments standards de théorie spectrale pour des opérateurs autoadjoints.

1.1 LE CAS D'UN GUIDE 2D À COEFFICIENTS CONSTANTS DANS LE CŒUR

Nous allons commencer par traiter le cas simple d'un guide 2D remplissant le demi-espace $\mathcal{O} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$. Les équations sont :

$$-\triangle\varphi - k^2\varphi = 0 \text{ dans } \mathcal{O}, \tag{1.4}$$
$$\varphi(x,0) = 0, \forall x \in \mathbb{R}, \tag{1.5}$$

où le nombre d'onde k est constant dans le cœur :

$$k(z) = \begin{cases} k_0 & \text{si } z < h, \\ k_\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Nous avons vu, en introduction de ce chapitre, que la notion de mode est lié au spectre de l'opérateur transverse. Dans cette section, il s'agit de l'opérateur de $L^2(\mathbb{R}^+)$ défini par :

$$\boxed{Au := -\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}z^2} - k^2 u, \quad \forall u \in D(A) := H^2(\mathbb{R}^+) \cap H_0^1(\mathbb{R}^+).}$$

Dans la suite, nous allons avoir besoin de définir la racine carrée d'un nombre complexe. Pour un nombre réel positif λ, nous utilisons la notation $\sqrt{\lambda}$. Pour pouvoir définir une racine carrée sur $\mathbb{C}$, on a besoin de définir une coupure. La coupure sera pour nous une demi-droite de la forme $\alpha\mathbb{R}^+$, avec $\alpha = r\mathrm{e}^{i\theta}, r > 0, \theta \in]0, 2\pi]$. Ainsi, nous définissons la racine carrée d'un nombre complexe $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \alpha\mathbb{R}^+$ par :

$$\sqrt[\alpha\mathbb{R}^+]{\lambda} = \sqrt{|\lambda|}\, \exp\left(i \arg_{\alpha\mathbb{R}^+}(\lambda)/2\right), \quad \text{avec } \theta - 2\pi < \arg_{\alpha\mathbb{R}^+}(\lambda) < \theta.$$

La fonction $\arg_{\alpha\mathbb{R}^+}$ dénote la fonction argument, avec un argument pris entre $\theta - 2\pi$ et θ.

Pourquoi faisons-nous différents choix de racine carrée ?

- La détermination principale de la racine carrée, avec coupure sur $\mathbb{R}^-$ (donc argument entre $-\pi$ et π), va nous permetre d'avoir une notation simple pour la fonction évanescente. Cela revient à prendre $\alpha = \mathrm{e}^{i\pi}$.
- Nous utiliserons également une autre racine carrée, avec coupure sur $i\mathbb{R}^+$ (donc argument entre $-3\pi/2$ et $\pi/2$), pour avoir une notation unique pour les modes propagatifs et évanescents. Cela revient à prendre $\alpha = \mathrm{e}^{i\pi/2}$.

1.1.1 Détermination du spectre et des fonctions propres (généralisées)

Pour déterminer le spectre de l'opérateur A, nous cherchons les solutions de l'équation suivante : pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$

$$-\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}z^2} - k^2 u = \lambda\, u \text{ dans } \mathbb{R}^+. \tag{1.6}$$

Étant donné $\xi \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, toute solution de cette équation est combinaison linéraire des deux fonctions suivantes :

$$\begin{aligned} c_\lambda(z) &:= \cos\left(\sqrt[\xi\mathbb{R}^+]{k^2+\lambda}\,(z-h)\right), \\ s_\lambda(z) &:= \frac{1}{\sqrt[\xi\mathbb{R}^+]{k^2+\lambda}} \sin\left(\sqrt[\xi\mathbb{R}^+]{k^2+\lambda}\,(z-h)\right), \end{aligned}$$

qui sont des fonctions entières par rapport à $\lambda \in \mathbb{C}$. En effet, $\chi \mapsto \cos(\chi)$ et $\chi \mapsto \sin(\chi)/\chi$ sont des fonctions entières et paires, donc en prenant $\chi = \sqrt[\xi\mathbb{R}^+]{k^2+\lambda}\,(z-h)$, elles ne dépendent pas de la détermination choisie de la racine carrée : on peut prendre n'importe quelle coupure, i.e. n'importe quel $\xi \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Maintenant, introduisons la fonction suivante, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$\Phi_\lambda(z) := c_\lambda(0)\, s_\lambda(z) - s_\lambda(0)\, c_\lambda(z). \tag{1.7}$$

Toute solution u de l'équation (1.6) à laquelle on ajoute la condition

$$u(0) = 0,$$

est alors proportionnelle à Φ_λ. Pour les mêmes raisons que c_λ et s_λ, Φ_λ est une fonction entière vis à vis de $\lambda \in \mathbb{C}$.

Notons

$$\beta_\infty := \sqrt[i\mathbb{R}^+]{k_\infty^2+\lambda} \quad \text{et} \quad \gamma_\infty := \sqrt[\mathbb{R}^-]{-k_\infty^2-\lambda}. \tag{1.8}$$

Remarquons que β_∞ et γ_∞ dépendent du choix de la racine carrée. Les choix que nous avons faits ont pour explication :

- pour γ_∞, on prend la coupure sur $\mathbb{R}^-$, ce qui signifie que l'on a $\Re e(\gamma_\infty) > 0$, pour tout λ en dehors de la coupure, ceci nous permettra de définir la solution évanescente.
- pour β_∞, on prend la coupure sur $i\mathbb{R}^+$, on peut donc en particulier définir β_∞ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ (ceci prendra tout son sens dans la suite puisque nous verrons que le spectre de A est inclus dans $\mathbb{R}$).

Posons

$$\Theta_\lambda(z) := [c_\lambda(z) - i\beta_\infty\, s_\lambda(z)]\ \mathrm{e}^{-i\beta_\infty h}, \tag{1.9}$$
$$\Psi_\lambda(z) := [c_\lambda(z) + i\beta_\infty\, s_\lambda(z)]\ \mathrm{e}^{i\beta_\infty h}, \tag{1.10}$$
$$\Xi_\lambda(z) := [c_\lambda(z) - \gamma_\infty\, s_\lambda(z)]\ \mathrm{e}^{-\gamma_\infty h}. \tag{1.11}$$

Contrairement à Φ_λ, les fonctions Θ_λ, Ψ_λ et Ξ_λ ne sont pas analytiques pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$: à cause de la présence de β_∞, ou de γ_∞, elles présentent une coupure.

Remarquons également que pour $z \geq h$, $\Theta_\lambda(z) = \mathrm{e}^{-i\beta_\infty z}$, $\Psi_\lambda(z) = \mathrm{e}^{i\beta_\infty z}$ et $\Xi_\lambda(z) = \mathrm{e}^{-\gamma_\infty z}$.

Nous voyons que Ξ_λ définit la *solution évanescente* de l'équation (1.6) puisqu'elle est toujours exponentiellement décroissante (sauf sur la coupure, où elle n'est pas définie). En fait, on peut voir Θ_λ, Ψ_λ et Ξ_λ comme des restrictions de la même fonction dépendant de $\lambda \in \mathbb{C}$ dans une surface de Riemann à deux feuillets.

Remarquons également qu'en dehors de la coupure de β_∞ ($\lambda = -k_\infty^2 + it, t \in \mathbb{R}^+$),

$$\Phi_\lambda(z) = \frac{1}{2i\beta_\infty}\left[\Theta_\lambda(0)\,\Psi_\lambda(z) - \Psi_\lambda(0)\,\Theta_\lambda(z)\right]. \tag{1.12}$$

Si l'on cherche des solutions bornées en z, on tombe alors sur deux types de solutions :

- Tout d'abord si l'on cherche des solutions dans $D(A)$, en multipliant l'équation (1.6) par $\overline{u}$ et en intégrant sur $\mathbb{R}^+$, on obtient :

$$\begin{aligned}\lambda\left(\int_0^{+\infty}|u(z)|^2\,\mathrm{d}z\right) &= -\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}z^2}(z)\,\overline{u(z)}\,\mathrm{d}z - \int_0^{+\infty}k^2(z)\,|u(z)|^2\,\mathrm{d}z \\ &= \int_0^{+\infty}\left|\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}(z)\right|^2\,\mathrm{d}z - k_0^2\int_0^h|u(z)|^2\,\mathrm{d}z - k_\infty^2\int_h^{+\infty}|u(z)|^2\,\mathrm{d}z \\ &\geq \min(-k_\infty^2,-k_0^2)\left(\int_0^{+\infty}|u(z)|^2\,\mathrm{d}z\right). \quad (1.13)\end{aligned}$$

On en déduit que λ est réel et que $\lambda \geq \min(-k_\infty^2,-k_0^2)$. Ensuite, en regardant la décomposition (1.12), on voit que forcément $\lambda < -k_\infty^2$. En effet, dans le cas contraire, Φ_λ est oscillante à l'infini, donc elle n'appartient pas à $L^2(\mathbb{R}^+)$. On en déduit que si $k_0 < k_\infty$, alors de telles solutions ne sont pas possibles.

Dans le cas où $k_0 > k_\infty$, on a alors $-k_0^2 \leq \lambda < -k_\infty^2$. On vérifie ensuite que $-k_0^2$ ne peut pas être une solution. En effet, l'équation (1.13) donne alors $\mathrm{d}u/\mathrm{d}z = 0$, donc u serait constant, ce qui n'est pas possible (u ne serait pas dans $D(A)$). Donc $-k_0^2 < \lambda < -k_\infty^2$.

En regardant la décomposition (1.12), on voit que forcément $\Theta_\lambda(0) = 0$ (sinon la solution est exponentiellement croissante à l'infini). La solution est alors proportionnelle à $\Theta_\lambda(z)$, donc exponentiellement décroissante quand $z \to +\infty$. En effet, pour $\lambda < -k_\infty^2$, $\Theta_\lambda(z) = \Xi_\lambda(z)$ est une fonction exponentiellement décroissante.

La relation $\Theta_\lambda(0) = 0 = \Xi_\lambda(0)$ est appelée *relation de dispersion*. Elle s'écrit de manière plus explicite :

$$\boxed{\tan\left(\sqrt{\lambda+k_0^2}\,h\right) = -\sqrt{\frac{\lambda+k_0^2}{-\lambda-k_\infty^2}}, \quad \lambda\in]-k_0^2,-k_\infty^2[.} \quad (1.14)$$

Les solutions λ vérifiant la relation de dispersion sont appelées les *valeurs propres* de l'opérateur A. La fonction Φ_λ correspondante est alors appelée *fonction propre*. L'ensemble des valeurs propres constitue le *spectre ponctuel* de A, noté $\Lambda_p(A)$. Comme ici, toutes les valeurs propres sont isolées et de multiplicité finie, le spectre ponctuel est égal au *spectre discret* : $\Lambda_p(A) = \Lambda_{disc}(A)$. Voir l'annexe A.1 pour plus de détails sur ces différentes notions de spectre.

Les solutions de l'équation de dispersion peuvent être déterminées par une méthode graphique. En utilisant les notations de Marcuse (cf. [Mar74]), l'équation (1.14) se réécrit :

$$\tan u = -u/v$$

avec $u := \sqrt{\lambda+k_0^2}\,h > 0$ et $v := \sqrt{-\lambda-k_\infty^2}\,h > 0$. En notant $V_s := \sqrt{k_0^2-k_\infty^2}h$, on voit que $v^2+u^2 = V_s^2$, ainsi v peut s'exprimer comme une fonction de u. La figure 1.1 permet de déterminer les solutions de l'équation $\tan u = -u/v$, il s'agit des points d'intersection des courbes bleue ($\tan u$) et rouges ($-u/v$). On remarque que ces solutions sont en nombre fini, donné par V_s. Plus V_s augmente, plus le nombre de solutions à l'équation de dispersion est important. Les trois manières de faire croître V_s sont : d'augmenter la fréquence (si ω augmente, $k_0^2-k_\infty^2 = \omega^2(1/c_0^2-1/c_\infty^2)$ augmente), d'augmenter la différence $1/c_0^2-1/c_\infty^2$ et d'augmenter la hauteur du cœur h.

En augmentant V_s, lorsque $V_s = (n+1/2)\pi$, avec $n\in\mathbb{N}$, une nouvelle solution apparaît. La relation $V_s = (n+1/2)\pi$ correspond au cas où $-k_\infty^2$ est solution de $\Theta_\lambda(0) = 0$. Elle se réécrit

$$\exists n\in\mathbb{N}, \quad k_0^2-k_\infty^2 = \left(n+\frac{1}{2}\right)^2\frac{\pi^2}{h^2}. \quad (1.15)$$

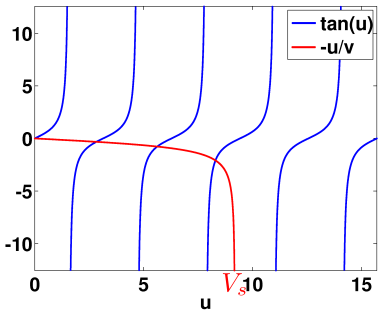

FIGURE 1.1 – *Détermination graphique des valeurs propres grâce à la relation de dispersion.* $V_s = 9.2$.

Les paramètres c_0, c_∞, h étant fixés, nous appelons *fréquences de coupure* les fréquences pour lesquelles (1.15) a lieu. Pour ces fréquences, il y a une solution de l'équation $\Theta_\lambda(0) = 0$, mais la fonction Φ_λ correspondante n'est pas un élément de $L^2(\mathbb{R}^+)$; elle ne peut donc pas être une fonction propre. Nous reviendrons sur ces fréquences de coupure dans la suite.

- Si l'on cherche une solution seulement bornée (i.e. appartenant à $L^\infty(0,+\infty)$ mais n'appartenant pas à $D(A)$), on remarque avec la décomposition (1.12) que $\lambda \in [-k_\infty^2, +\infty[$ (car il faut que $\beta_\infty \in \mathbb{R}$) et Φ_λ est oscillante quand $z \to +\infty$: c'est une superposition de $\mathrm{e}^{i\beta_\infty z}$ et de $\mathrm{e}^{-i\beta_\infty z}$, avec $\beta_\infty \geq 0$. La fonction Φ_λ est alors ce qu'on appelle une *fonction propre généralisée* : elle n'appartient pas à $L^2(\mathbb{R}^+)$. Ces valeurs de λ correspondent au *spectre essentiel*, qui est ici égal au *spectre continu* : $\Lambda_e(A) = \Lambda_c(A) = [-k_\infty^2, +\infty[$.

La structure du spectre est représentée sur la figure 1.2.

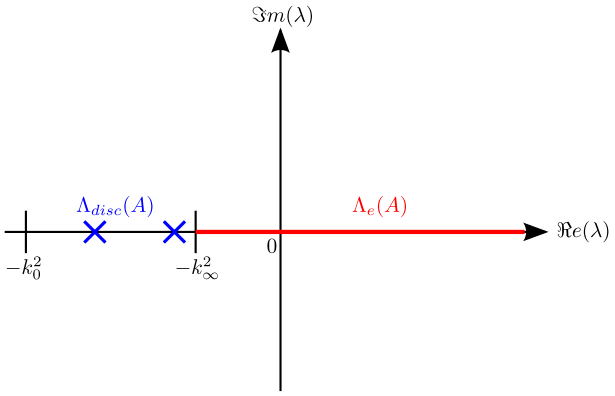

FIGURE 1.2 – *Spectre de l'opérateur* A.

Valeurs propres et spectre continu, les singularités de la résolvante

Nous savons que la résolvante est définie, pour tout λ dans l'ensemble résolvant (noté $\rho(A)$: le complémentaire dans $\mathbb{C}$ du spectre), comme l'opérateur $(A - \lambda I)^{-1}$. Nous allons voir que les valeurs propres correspondent aux *pôles* de la résolvante et que la résolvante admet une *coupure* sur le spectre continu.

Pour cela, nous allons utiliser la représentation intégrale de la résolvante, qui elle-même s'appuie sur ce qu'on appelle la *fonction de Green* de l'opérateur $A - \xi I$, pour $\xi \in \rho(A)$, c'est-à-dire la solution

bornée de l'équation suivante : pour tout $z' \in \mathbb{R}^+$, pour $\xi \in \rho(A)$,

$$-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\mathcal{G}_\xi(z,z') - (k^2+\xi)\,\mathcal{G}_\xi(z,z') = \delta_{z=z'} \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^+), \tag{1.16}$$

$$\mathcal{G}_\xi(0,z') = 0, \tag{1.17}$$

où $\delta_{z=z'}$ dénote la mesure de Dirac au point $z=z'$ et $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^+)$ l'espace de distributions classique (le dual de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^+)$, l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans $\mathbb{R}^+$).

Proposition 1.1 *Pour $\xi \in \rho(A)$, la fonction de Green $\mathcal{G}_\xi(z,z')$ est donnée par :*

$$\mathcal{G}_\xi(z,z') = \begin{cases} \dfrac{1}{W_\xi}\,\Phi_\xi(z)\,\Xi_\xi(z') & \textit{si } z<z', \\ \dfrac{1}{W_\xi}\,\Phi_\xi(z')\,\Xi_\xi(z) & \textit{sinon}, \end{cases}$$

$$\textit{où} \quad W_\xi := \Xi_\xi(0) = \left[c_\xi(0) - \sqrt[\mathbb{R}^-]{-k_\infty^2-\xi}\,s_\xi(0)\right]\mathrm{e}^{-\gamma_\infty h}. \tag{1.18}$$

De plus, pour $\xi \in \rho(A)$, la résolvante $R_\xi(A)$ est donnée par la formule de représentation intégrale suivante : pour tout $z \in \mathbb{R}^+$,

$$R_\xi(A)u(z) = \int_{\mathbb{R}^+} \mathcal{G}_\xi(z,z')u(z')\,\mathrm{d}z'. \tag{1.19}$$

Démonstration. Soit $\xi \in \rho(A)$. Alors en particulier, $\xi + k_\infty^2 \notin \mathbb{R}^+$. La résolution des équations (1.16)-(1.17) ne pose pas de difficulté : d'une part, pour $z<z'$, résoudre au sens des distributions ou résoudre au sens des fonctions revient au même, on obtient alors, comme $\mathcal{G}_\xi(0,z')=0$:

$$\mathcal{G}_\xi(z,z') \text{ est proportionnelle à } \Phi_\xi(z), \quad \text{pour } z<z'.$$

D'autre part, pour $z>z'$, on résout également au sens des fonctions et comme $\mathcal{G}_\xi(.,z')$ doit être bornée (pour tout ξ), on obtient, comme $\xi + k_\infty^2 \notin \mathbb{R}^+$:

$$\mathcal{G}_\xi(z,z') \text{ est proportionnelle à } \Xi_\xi(z), \quad \text{pour } z>z'.$$

Enfin, classiquement, nous avons les conditions suivantes en $z=z'$, dû au fait qu'il y a un Dirac au second membre de (1.16) :

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \searrow 0} \mathcal{G}_\xi(z'-\varepsilon,z') &= \lim_{\varepsilon \searrow 0} \mathcal{G}_\xi(z'+\varepsilon,z'), \\ \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{\partial \mathcal{G}_\xi}{\partial z}(z'-\varepsilon,z') &= \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{\partial \mathcal{G}_\xi}{\partial z}(z'+\varepsilon,z') + 1. \end{aligned}$$

Ceci nous donne l'équation (1.18), en vérifiant que pour tout $z \in \mathbb{R}^+$,

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\Phi_\xi}{\mathrm{d}z}(z)\,\Xi_\xi(z) - \Phi_\xi(z)\,\frac{\mathrm{d}\Xi_\xi}{\mathrm{d}z}(z) &= \frac{\mathrm{d}\Phi_\xi}{\mathrm{d}z}(0)\,\Xi_\xi(0) - \Phi_\xi(0)\,\frac{\mathrm{d}\Xi_\xi}{\mathrm{d}z}(0) \\ &= \Xi_\xi(0) = \left[c_\xi(0) - \sqrt[\mathbb{R}^-]{-k_\infty^2-\xi}\,s_\xi(0)\right]\mathrm{e}^{-\gamma_\infty h}. \end{aligned}$$

Pour $\xi \in \rho(A)$, notons $v(z) = \int_{\mathbb{R}^+} \mathcal{G}_\xi(z,z')\,u(z')\,\mathrm{d}z'$. Par interversion du signe dérivée et du signe intégrale (justifiée par le théorème de convergence dominée de Lebesgue puisque $\mathcal{G}_\xi$ est exponentiellement décroissant par rapport à z pour tout z'), la fonction v vérifie le problème :

$$\begin{aligned} &-\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}z^2}(z) - (k^2(z)+\xi)\,v(z) = u(z), \quad \forall z \in \mathbb{R}^+, \\ &v(0) = 0. \end{aligned}$$

Ceci nous donne la formule (1.19). □

Nous observons le comportement suivant de la résolvante sur le spectre :

- Le spectre ponctuel, $\Lambda_p(A)$ correspond aux pôles de la résolvante (les valeurs de λ pour lesquelles $W_\lambda = 0$, où W_λ est défini par (1.18)). La théorie nous permet d'affirmer (comme A est autoadjoint) que ces pôles sont simples en tant que singularités de la résolvante (cf. annexe A.1).
- Le spectre continu, $\Lambda_c(A) = [-k_\infty^2, +\infty[$ correspond aux valeurs de λ pour lesquelles la résolvante présente une coupure : W_λ n'est pas défini pour $\lambda \in \Lambda_c(A)$, à cause de la coupure de la racine carrée.

1.1.2 Modes guidés et modes de radiation

Maintenant que nous avons déterminé les fonctions propres et les fonctions propres généralisées, voyons comment cela nous permet de définir les notions de modes guidés et de modes de radiation.

Nous avons vu que les modes sont les solutions des équations (1.4)-(1.5) de la forme : $\varphi(x,z) = \psi(x)u(z)$, où u est solution de l'équation aux valeurs propres $Au = \lambda u$ et où $\psi(x) = \exp(\pm i\beta x)$, avec β, le nombre d'onde longitudinal est relié à λ par la relation $\lambda = -\beta^2$. En cherchant u borné, nous avons remarqué que nécessairement $\lambda \in \mathbb{R}$. On choisit alors la détermination suivante de β :

$$\beta := \begin{cases} \sqrt{-\lambda} & \text{si } \lambda \leq 0, \\ i\sqrt{\lambda} & \text{si } \lambda > 0. \end{cases} \tag{1.20}$$

Attention à ne pas confondre β, le nombre d'onde longitudinal, et β_∞ (défini par l'équation (1.8)), qui est un nombre d'onde transverse.

Ainsi, comme on suppose une dépendance harmonique en temps de la forme $\mathrm{e}^{-i\omega t}$,

$\Phi_\lambda(z)\,\mathrm{e}^{i\beta x}\,\mathrm{e}^{-i\omega t}$ est propagatif (si $\beta \geq 0$) ou évanescent (si $\beta \in i\mathbb{R}_*^+$) vers la droite,
$\Phi_\lambda(z)\,\mathrm{e}^{-i\beta x}\,\mathrm{e}^{-i\omega t}$ est propagatif (si $\beta \geq 0$) ou évanescent (si $\beta \in i\mathbb{R}_*^+$) vers la gauche.

Ceci permet de distinguer les modes allant vers la droite ou vers la gauche.

Pour $\lambda \in \Lambda_p(A)$, les *modes guidés* sont alors définis par $\varphi_\lambda^{\rightarrow}(x,z) = \Phi_\lambda(z)\,\mathrm{e}^{i\beta x}$ (allant vers la droite) et $\varphi_\lambda^{\leftarrow}(x,z) = \Phi_\lambda(z)\,\mathrm{e}^{-i\beta x}$ (allant vers la gauche). Ces modes sont *propagatifs* puisqu'ils se propagent (sans atténuation) vers les x croissants (vers la droite) pour $\varphi_\lambda^{\rightarrow}$ et vers les x décroissants (vers la gauche) pour $\varphi_\lambda^{\leftarrow}$.

Ensuite, pour $\lambda \in \Lambda_c(A)$, $\varphi_\lambda^{\rightarrow}(x,z) = \Phi_\lambda(z)\,\mathrm{e}^{i\beta x}$ et $\varphi_\lambda^{\leftarrow}(x,z) = \Phi_\lambda(z)\,\mathrm{e}^{-i\beta x}$ sont ce qu'on appelle des *modes de radiation*. Ils peuvent être propagatifs si $\lambda < 0$: dans ce cas, on a, comme pour les modes guidés, une dépendance du type $\mathrm{e}^{\pm i\beta x}$, avec $\beta \in \mathbb{R}^+$ ou *évanescents* si $\lambda > 0$: dans ce cas, leur dépendance est du type $\mathrm{e}^{\mp\gamma x}$, avec $\gamma = \sqrt{\lambda} \in \mathbb{R}^+$ et $\varphi_\lambda^{\rightarrow}$ est exponentiellement décroissant pour $x \to +\infty$ et $\varphi_\lambda^{\leftarrow}$ est exponentiellement décroissant pour $x \to -\infty$.

Un mode guidé correspond à un mode qui est localisé dans le cœur du guide, un mode de radiation est un mode qui, au contraire, est oscillant à l'infini dans les directions transverses. Sur la figure 1.3, nous illustrons ces caractéristiques : nous représentons un mode guidé, un mode de radiation propagatif et un mode de radiation évanescent, en prenant comme paramètres :

$$\omega = 2\pi\,0.05/1.55, \quad h = 10, \quad n_0 = 2.872, \quad n_\infty = 1.45 \quad \text{et} \quad c(z) = \begin{cases} c_0 = \frac{1}{n_0} & \text{si } z < h, \\ c_\infty = \frac{1}{n_\infty} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ce cas correspond à un milieu stratifié dans le cas de l'optique (guide optique 2D), d'indice de réfraction n_0 dans le cœur et n_∞ dans la gaine, illuminé par une onde de longueur d'onde $1.55\mu\mathrm{m}$ avec une hauteur de guide de $10/0.05\mu\mathrm{m} = 200\mu\mathrm{m}$,[1] dans la polarisation TE, en ne considérant que les modes asymétriques (puisqu'on impose une condition de Dirichlet en $z = 0$).

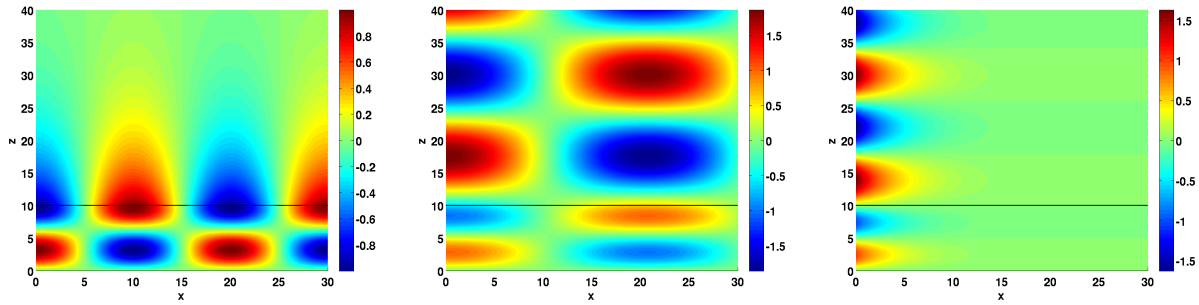

FIGURE 1.3 – *Représentation de la partie réelle d'un mode guidé (à gauche, $\lambda = -0.0984$), d'un mode de radiation propagatif (au milieu, $\lambda = -0.0231$) et d'un mode de radiation évanescent (à droite, $\lambda = 0.0653$) pour un guide 2D. La direction de propagation est x et z est la direction transverse. La ligne horizontale noire correspond à $z = 10$, l'interface entre le cœur et la gaine.*

1.2 Le cas d'un guide 3D

Nous allons maintenant voir comment les deux types de modes que nous avons mis en évidence à la section précédente se généralisent à des situations pour lesquelles on ne peut plus faire les calculs à la main. Dans le cas d'un guide 3D à cœur circulaire, à coefficients constants, les calculs peuvent également être menés explicitement. Nous allons traiter ici le cas d'un guide 3D, avec coefficients non nécessairement constants dans le cœur. Bien entendu, tout ce que nous allons montrer s'adapte également pour un guide d'ondes 2D. L'équation que l'on cherche à résoudre est l'équation (1), posée dans $\mathcal{O} = \mathbb{R}^3$. Ici, Ω, la section du guide, est égale à $\mathbb{R}^2$. L'opérateur transverse est alors l'opérateur A de $L^2(\Omega)$, défini par :

$$\boxed{Au := -\frac{1}{\mu}\mathrm{div}(\mu\nabla u) - k^2 u, \quad \forall u \in D(A) := \{u \in H^1(\mathbb{R}^2), \mathrm{div}(\mu\nabla u) \in L^2(\mathbb{R}^2)\}.}$$

Nous noterons, pour simplifier les notations, $X := L^2(\Omega)$.

Comme on l'a vu, les notions de modes guidés et de modes de radiation sont liées au spectre de A. Nous allons tout d'abord (à la sous-section 1.2.1) donner quelques propriétés du spectre de A, avant d'étudier son spectre essentiel (sous-section 1.2.2) et son spectre discret (sous-section 1.2.3). L'étude du spectre de l'opérateur A est standard, les principaux résultat de théorie spectrale que nous allons utiliser sont rappelés dans l'annexe A.1. Nous notons $(.,.)_X$ le produit scalaire usuel sur $L^2(\Omega)$:

$$(u, v)_X := \int_\Omega u\,\overline{v}\,\mathrm{d}\Omega, \quad \forall u, v \in L^2(\Omega).$$

Nous utiliserons souvent un autre produit scalaire sur $L^2(\Omega)$:

$$(\mu\, u, v)_X = \int_\Omega \mu\, u\,\overline{v}\,\mathrm{d}\Omega, \quad \forall u, v \in L^2(\Omega).$$

[1] L'unité de longueur est de $0.05\mu\mathrm{m}$ puisque nous avons multiplié ω par 0.05. De manière équivalente, on peut dire que l'unité de longueur est de $1\mu\mathrm{m}$ avec une longueur d'onde d'illumination divisée par 0.05.

C'est un produit scalaire car nous supposons qu'il existe des constantes $A > 0$ et $B > 0$ telles que $A < \mu(y, z) < B$ pour tout $y, z \in \mathbb{R}$.

Nous pouvons trouver plus de détails (en particulier sur les modes guidés dans une fibre optique) dans le dernier chapitre du livre [BCM01] écrit par Anne–Sophie Bonnet–BenDhia et Patrick Joly.

1.2.1 Propriétés générales sur le spectre de l'opérateur transverse

Tout d'abord, une propriété générale sur l'opérateur A.

Proposition 1.2 *A est un opérateur fermé, de domaine dense dans $X = L^2(\Omega)$ et autoadjoint pour le produit scalaire $(\mu.,.)_X$.*

Démonstration. Étant donné $k_{\max}$, défini par (3), remarquons que le problème suivant : « étant donné $f \in L^2(\Omega)$, trouver $u \in D(A)$ tel que $Au + (k_{\max}^2 + 1)u = f$ » admet une unique solution. En effet, écrivons la formulation variationnelle de ce problème. Pour cela, nous multiplions par $\mu\overline{v}$ et par l'application de la formule de Green, on obtient le problème suivant :
Trouver $u \in V$ tel que pour tout $v \in V$,

$$\int_\Omega \left(\mu\, \nabla u \cdot \overline{\nabla v} + ((k_{\max}^2 + 1)\mu - \omega^2\rho)\, u\, \overline{v}\right)\, \mathrm{d}\Omega = \int_\Omega \mu\, f\, \overline{v}\, \mathrm{d}\Omega.$$

On vérifie alors que le premier membre de l'équation précédente définit une forme sesquilinéraire continue et coercive. Le théorème de Lax–Milgram permet donc de montrer qu'il y a existence et unicité au problème variationnel. Ensuite, on vérifie, par remontée du problème variationnel au problème fort, que la solution u est bien dans le domaine de A. On a donc montré que $A + (k_{\max}^2 + 1)I$ est inversible, donc en particulier d'image égale à X.

Il est facile de voir que A est symétrique :

$$(\mu\, Au, v)_X = \int_\Omega \left(\mu\, \nabla u \cdot \overline{\nabla v} - \omega^2\, \rho\, u\overline{v}\right)\, \mathrm{d}\Omega = (u, \mu Av)_X, \quad \forall u, v \in D(A).$$

L'application de la proposition A.1 (en annexe) permet alors de conclure que $D(A)$ est dense dans X et que A est autoadjoint, puisque $A + (k_{\max}^2 + 1)I$ est d'image égale à $L^2(\Omega)$ et que A est symétrique. □

Remarque 1.2 : *On en déduit en particulier que le spectre résiduel de A est vide et que le spectre de A est réel.*

Par ailleurs, l'opérateur A étant autoadjoint pour le produit scalaire $(\mu.,.)_X$, nous définissons la forme sesquilinéraire associée à l'opérateur : la forme sesquilinéraire $a(u, v)$ définie par : $a(u, v) = (\mu Au, v)_X$. Par une intégration par partie, on obtient :

$$a(u, v) = \int_\Omega \mu \left(\nabla u \cdot \nabla\overline{v} - k^2 u\overline{v}\right)\, \mathrm{d}\Omega.$$

Le domaine de la forme est ainsi : $V = H^1(\mathbb{R}^2)$.

Soyons maintenant un peu plus précis sur le spectre de A.

Proposition 1.3 *Le spectre de l'opérateur A est inclus dans $[-k_{\max}^2, +\infty[$.*

Démonstration. On utilise le fait que le spectre de A est inclus dans la fermeture de l'image numérique de A, comme A est autoadjoint. Par la formule de Green, on obtient, pour $u \in D(A)$:

$$(\mu\, Au, u)_X = \int_\Omega \left(\mu|\nabla u|^2 - \omega^2\rho|u|^2\right) \mathrm{d}\Omega \geq -\omega^2 \int_\Omega \frac{1}{c^2}\, \mu\, |u|^2 \mathrm{d}\Omega \geq -k_{\max}^2 (\mu\, u, u)_X.$$

$(\mu\, .,.)_X$ définissant un produit scalaire sur X, on en déduit le résultat. □

Nous allons maintenant détailler une description du spectre, en terme de spectre essentiel et de spectre discret. On se référera, si besoin, à l'annexe A.1 pour les définitions et propriétés principales de ces notions de théorie spectrale.

1.2.2 Spectre essentiel, $\Lambda_e(A)$

Nous allons, dans cette sous-section, montrer que le spectre essentiel est égal à $[-k_\infty^2, +\infty[$ puis montrer qu'il n'y a pas de valeurs propres plongées dans le spectre essentiel. Nous retrouvons ainsi le même spectre essentiel que pour l'opérateur 1D étudié à la section 1.1.

L'étude du spectre essentiel est lié aux paramètres « à l'infini » de l'opérateur de A. On rappelle qu'en introduction de cette première partie, nous avons vu qu'à l'extérieur de la boule de centre 0 et de rayon R, l'opérateur A est $-\triangle - k_\infty^2$. Il n'est donc pas étonnant que le spectre essentiel de A soit $[-k_\infty^2, +\infty[$.

Proposition 1.4 *Le spectre essentiel de l'opérateur A, noté $\Lambda_e(A)$, est égal à $[-k_\infty^2, +\infty[$.*

Démonstration. On utilise la caractérisation du spectre essentiel par les suites de Weyl.

Montrons tout d'abord que $\Lambda_e(A) \subset [-k_\infty^2, +\infty[$. Soit $\lambda \in \Lambda_e(A)$. Il existe donc (u_n) une suite de $D(A)$ telle que $\|u_n\|_X = 1$, $u_n \rightharpoonup 0$ (u_n tend faiblement vers 0) et $Au_n - \lambda u_n \to 0$. On cherche tout d'abord à montrer que u_n est bornée dans $H^1(\mathbb{R}^2)$. On a :

$$|(\mu(A-\lambda I)u_n, u_n)_X| \leq \|\mu(A-\lambda I)u_n\|_X \|u_n\|_X \to 0.$$

Donc il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|(\mu(A-\lambda I)u_n, u_n)_X| \leq C$. Ainsi,

$$\int_{\mathbb{R}^2} \mu\, |\nabla u_n|^2 \,\mathrm{d}\Omega \leq \int_{\mathbb{R}^2} (\omega^2\, \rho + \lambda\, \mu)\, |u_n|^2 \,\mathrm{d}\Omega + C.$$

On en déduit que $|\nabla u_n|$ est bornée dans $L^2(\mathbb{R}^2)$, donc que u_n est bornée dans $H^1(\mathbb{R}^2)$ (puisque u_n est déjà par hypothèse bornée dans $L^2(\mathbb{R}^2)$).

Maintenant,

$$(\mu\, Au_n, u_n)_X = (\mu\, (A-\lambda I)u_n, u_n)_X + \lambda\, (\mu\, u_n, u_n)_X. \tag{1.21}$$

Or $(\mu\, (A-\lambda I)u_n, u_n)_X \to 0$, donc $(\mu\, Au_n, u_n)_X - \lambda(\mu\, u_n, u_n)_X \to 0$. Par ailleurs,

$$\begin{aligned}(\mu\, Au_n, u_n)_X &= \int_{\mathbb{R}^2} \mu\, |\nabla u_n|^2 \,\mathrm{d}\Omega - \omega^2 \int_{\mathbb{R}^2} \rho\, |u_n|^2 \,\mathrm{d}\Omega \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \mu\, |\nabla u_n|^2 \,\mathrm{d}\Omega - \omega^2\rho_\infty \int_{\mathbb{R}^2} |u_n|^2 \,\mathrm{d}\Omega + \omega^2 \int_{\mathbb{R}^2} (\rho_\infty - \rho)|u_n|^2 \,\mathrm{d}\Omega. \end{aligned} \tag{1.22}$$

On vérifie alors : en notant Ω_B le domaine borné constitué de la boule de centre 0 et de rayon R, comme $u_n|_{\Omega_B}$ est bornée dans $H^1(\Omega_B)$ et comme u_n tend faiblement vers 0 dans $L^2(\Omega_B)$, par application du théorème de Rellich, on peut extraire de $u_n|_{\Omega_B}$ une sous-suite (que l'on note toujours

u_n) qui converge fortement vers 0 dans $L^2(\Omega_B)$. Ainsi,

$$\int_{\mathbb{R}^2} (\rho_\infty - \rho)|u_n|^2 \,\mathrm{d}\Omega = \int_{y^2+z^2<R} (\rho_\infty - \rho)|u_n|^2 \,\mathrm{d}\Omega \to 0.$$

De même, on montre que

$$((\mu_\infty - \mu)u_n, u_n)_X = \int_{y^2+z^2<R} (\mu_\infty - \mu)|u_n|^2 \,\mathrm{d}\Omega \to 0.$$

Donc, $\lambda(\mu\, u_n, u_n)_X \to \lambda\mu_\infty$. On déduit alors, en faisant le passage à la limite $n \to +\infty$ dans (1.21)-(1.22), que $\lambda \geq -k_\infty^2$.

Montrons ensuite que $[-k_\infty^2, +\infty[\subset \Lambda_e(A)$. Soit $\lambda \in [-k_\infty^2, +\infty[$. L'objectif est de construire une suite de Weyl associée à λ.

Prenons

$$u_n(y,z) = \frac{1}{n} \exp\left(i\sqrt{k_\infty^2 + \lambda}\, y\right) \phi\left(\frac{y}{n}, \frac{z}{n}\right),$$

où ϕ est une fonction de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2_+)$, à support à l'extérieur de la boule de centre 0 et de rayon R telle que $\|\phi\|_X = 1$. On rappelle qu'à l'extérieur de la boule de centre 0 et de rayon R, l'opérateur A est en fait $-\triangle - k_\infty^2$.

On vérife alors, par un changement de variable :

$$\|u_n\|_X^2 = \int_0^\infty \int_0^\infty \left|\phi\left(\frac{y}{n}, \frac{z}{n}\right)\right|^2 \frac{1}{n^2} \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z = \int_0^\infty \int_0^\infty |\phi(y,z)|^2 \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z = 1.$$

De plus, $u_n \in D(A)$ car $u_n \in H^2(\mathbb{R}^2)$ et le support de u_n est à l'extérieur de la boule de centre 0 et de rayon R.

Montrons que $u_n \rightharpoonup 0$. On a, pour tout $v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$, comme le support de $u_n(y,z)$ part à l'infini :

$$(u_n, v)_X = \int_{\mathbb{R}^2} u_n(y,z)\, v(y,z) \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z \to 0.$$

Puis, par densité de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ dans $L^2(\mathbb{R}^2)$, on en déduit que $u_n \rightharpoonup 0$ dans $L^2(\mathbb{R}^2)$.

On vérifie ensuite :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u_n}{\partial y^2} = & -(k_\infty^2 + \lambda)u_n + 2i\frac{\sqrt{k_\infty^2+\lambda}}{n^2} \exp\left(i\sqrt{k_\infty^2+\lambda}\, y\right) \frac{\partial \phi}{\partial y}\left(\frac{y}{n}, \frac{z}{n}\right) \\
& + \frac{1}{n^3} \exp\left(i\sqrt{k_\infty^2+\lambda}\, y\right) \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}\left(\frac{y}{n}, \frac{z}{n}\right), \\
\frac{\partial^2 u_n}{\partial z^2} = & \frac{1}{n^3} \exp\left(i\sqrt{k_\infty^2+\lambda}\, y\right) \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}\left(\frac{y}{n}, \frac{z}{n}\right).
\end{aligned}$$

Ainsi, on vérifie que

$$\begin{aligned}
& Au_n - \lambda u_n = -\triangle u_n - (k_\infty^2 + \lambda)u_n = \\
& \frac{\mathrm{e}^{i\sqrt{k_\infty^2+\lambda}\, y}}{n^2} \left(-2i\sqrt{k_\infty^2+\lambda}\frac{\partial \phi}{\partial y}\left(\frac{y}{n}, \frac{z}{n}\right) - \frac{1}{n}\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}\left(\frac{y}{n}, \frac{z}{n}\right) - \frac{1}{n}\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}\left(\frac{y}{n}, \frac{z}{n}\right)\right) \to 0 \text{ dans } L^2(\mathbb{R}^2).
\end{aligned}$$

□

Nous allons maintenant montrer qu'il n'y a pas de valeurs propres plongées dans le spectre essentiel.

Proposition 1.5 *Pour tout $\lambda > -k_\infty^2$, il n'existe pas de fonction propre $u \in D(A)$, $u \neq 0$, telle que $Au = \lambda u$.*

Démonstration. Pour démontrer ce résultat, nous utilisons le théorème de Rellich (que l'on peut trouver par exemple dans [CK98, lemme 2.11]). Ce théorème affirme que toute solution $u \in L^2(\mathbb{R}^2 \setminus \Omega_B)$ de l'équation de Helmholtz $-\triangle u - \gamma^2 u = 0$, avec Ω_B un borné de $\mathbb{R}^2$ et $\gamma > 0$ est forcément nulle dans le domaine $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega_B$.

Ici, nous prenons $\gamma = \sqrt{k_\infty^2 + \lambda} > 0$ et Ω_B le cœur du guide ouvert. Nous en déduisons que si l'on avait une fonction propre u associée à $\lambda > -k_\infty^2$, alors u serait identiquement nulle dans toute la gaine. Puis, par principe de prolongement unique,[2] on en déduit que u est nulle partout. □

Remarque 1.3 : *Si le milieu n'était pas homogène à l'infini (comme dans le cas d'un micro-guide optique, où le milieu est stratifié à l'infini), il pourrait y avoir des valeurs propres plongées dans le spectre essentiel, voir par exemple [BBM97].*

Remarque 1.4 : *Dans le cas de l'opérateur 1D étudié dans la section 1.1, nous avons vu que $-k_\infty^2$ n'est pas une valeur propre. Dans des cas plus généraux, $-k_\infty^2$ peut être une valeur propre.*

1.2.3 Spectre discret, $\Lambda_{disc}(A)$, et propriétés

Maintenant que nous avons étudié le spectre essentiel, passons au spectre discret. À la section 1.1, nous avons vu que l'on pouvait caractériser les valeurs propres par une relation de dispersion explicite. Dans le cas général, une telle relation de dispersion n'est pas facilement accessible et ce sont les formules dites du min-max qui permettent de démontrer des résultats sur le spectre discret.

Proposition 1.6 *Le spectre discret de l'opérateur A, noté $\Lambda_{disc}(A)$, est constitué d'un nombre fini de valeurs propres, incluses dans $]-k_{\max}^2, -k_\infty^2[$.*

Démonstration. Comme le spectre est inclus dans $[-k_{\max}^2, +\infty[$ et que le spectre essentiel est égal à $[-k_\infty^2, +\infty[$, on en déduit directement que le spectre discret est inclus dans $[-k_{\max}^2, -k_\infty^2[$.

Tout d'abord, $-k_{\max}^2$ ne peut pas être une valeur propre de A. En effet, distinguons deux cas : $k_{\max} = k_\infty$ et $k_{\max} > k_\infty$. Dans le cas où $k_{\max} = k_\infty$, alors on a vu que $k_{\max} \in \Lambda_e(A)$, donc $k_{\max} \notin \Lambda_{disc}(A)$. Supposons maintenant que $k_{\max} > k_\infty$. Alors, en multipliant l'équation aux valeurs propres par $\mu\overline{u}$ et en intégrant par parties, on obtient :

$$\int_\Omega \mu |\nabla u|^2 \, \mathrm{d}\Omega = -\int_\Omega (k_{\max}^2 - k^2) \mu \, |u|^2 \, \mathrm{d}\Omega.$$

Le terme de gauche est toujours positif, le terme de droite est toujours négatif. On en déduit qu'ils sont nuls, donc que $\nabla u = 0$, puis que u est une constante, ce qui ne peut appartenir au spectre discret.

Il ne reste plus qu'à vérifier que les valeurs propres du spectre discret sont en nombre fini. Pour cela, nous allons appliquer le principe du min-max (voir, dans l'annexe, la proposition A.2 pour un énoncé du principe du min-max).

[2] Le principe de prolongement unique est valable pour tout opérateur elliptique, dans notre cas avec $\mu \in W^{1,\infty}(\Omega)$, par morceaux, et tel qu'il existe deux constantes C_1, C_2 telles que pour tout $(y,z) \in \Omega$, $0 < C_1 < \mu(y,z) < C_2 < +\infty$, et avec $\rho \in L^\infty(\Omega)$, voir par exemple [RL09, théorème 4.2].

Notons Ω_B la boule de centre 0 et de rayon R. L'idée est de comparer les valeurs propres de A situées en dessous de la borne inférieure du spectre essentiel de A avec les valeurs propres d'un opérateur à résolvante compacte, que l'on va noter A_B. L'opérateur A_B est défini par :

$$A_B u := -\frac{1}{\mu}\mathrm{div}(\mu\nabla u) - k^2 u, \quad \forall u \in D(A_B) := \{u \in H^1(\Omega_B), \mathrm{div}(\mu\nabla u) \in L^2(\Omega_B), \frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial\Omega_B} = 0\}.$$

Il est alors facile de vérifier que A_B est un opérateur autoadjoint à résolvante compacte (on utilise le fait que l'injection de $H^1(\Omega_B)$ dans $L^2(\Omega_B)$ est compacte (théorème de Rellich)). La théorie spectrale nous assure alors qu'il existe une suite de valeurs propres croissante λ_n^B, qui tend vers $+\infty$ et une base hilbertienne de $L^2(\Omega_B)$ constituée des fonctions propres $u_n^B \in D(A_B)$ de A_B, telles que $A_B u_n^B = \lambda_n^B u_n^B$. Ces valeurs propres λ_n^B sont caractérisées par la formule suivante, dite du min-max :

$$\lambda_n^B = \sup_{V_{n-1}\in\mathcal{V}_{n-1}(L^2(\Omega_B))} \inf_{u\in V_{n-1}^\perp\cap H^1(\Omega_B), u\neq 0} \frac{a_B(u,u)}{(\mu\, u, u)_{L^2(\Omega_B)}},$$

où $\mathcal{V}_{n-1}(L^2(\Omega_B))$ est un sous-espace de $L^2(\Omega_B)$ de dimension $n-1$, $W^\perp$ désigne l'orthogonal de W, i.e. $\{u \in X, (\mu\, u, v)_X = 0, \forall v \in W\}$ et $a_B(u,v)$ est la forme associée à l'opérateur A_B, définie par

$$a_B(u,v) = \int_{\Omega_B} \left(\mu\nabla u \cdot \overline{\nabla v} - \omega^2\, \rho\, u\, \overline{v}\right) \mathrm{d}\Omega.$$

Cette forme est définie sur $H^1(\Omega_B)$.

Maintenant, la formule du min-max appliquée à A donne :

$$\lambda_n(A) = \sup_{V_{n-1}\in\mathcal{V}_{n-1}(L^2(\Omega))} \inf_{u\in V_{n-1}^\perp\cap H^1(\Omega), u\neq 0} \frac{a(u,u)}{(\mu\, u, u)_{L^2(\Omega)}},$$

où $a(u,v)$ est la forme associée à A :

$$a(u,v) = \int_{\Omega} \left(\mu\nabla u \cdot \overline{\nabla v} - \omega^2\, \rho\, u\, \overline{v}\right) \mathrm{d}\Omega,$$

définie sur $H^1(\Omega)$. Considérons V_{n-1} le sous-espace de $L^2(\Omega)$ engendré par les $n-1$ premières valeurs propres de A_B, complétées par 0 dans $\Omega \setminus \Omega_B$. On a :

$$\lambda_n(A) \geq \inf_{u\in W, u\neq 0} \frac{a(u,u)}{(\mu\, u, u)_{L^2(\Omega)}},$$

où $W = V_{n-1}^\perp \cap H^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega), (\mu\, u, u_k^B)_{L^2(\Omega_B)} = 0, \forall k = 1, \ldots, n-1\}$.

On remarque alors que

$$a(u,u) = a_B(u,u) + \mu_\infty \int_{\Omega\setminus\Omega_B} |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}\Omega - \omega^2\rho_\infty \int_{\Omega\setminus\Omega_B} |u|^2 \,\mathrm{d}\Omega.$$

Par définition de λ_n^B, pour tout $u \in W$,

$$a_B(u,u) \geq \lambda_n^B (\mu\, u, u)_{L^2(\Omega_B)}.$$

Au final, on a, pour $u \in W$:

$$a(u,u) \geq \lambda_n^B (\mu\, u, u)_{L^2(\Omega_B)} - k_\infty^2 \int_{\Omega\setminus\Omega_B} \mu\, |u|^2 \,\mathrm{d}\Omega \geq \min(\lambda_n^B, -k_\infty^2)(\mu\, u, u)_{L^2(\Omega)}.$$

On en déduit que $\lambda_n(A) \geq \min(\lambda_n^B, -k_\infty^2)$.

Comme $\lambda_n^B \to +\infty$, alors $\lambda_n(A) = -k_\infty^2$ au delà d'un certain rang. Ceci montre d'après le principe du min-max qu'il n'y a qu'un nombre fini de valeurs propres en dessous de la borne inférieure du spectre essentiel. □

Proposition 1.7 (croissance du nombre de valeurs propres avec la fréquence) *Nous notons $\mathcal{N}(\omega)$ le nombre de valeurs propres strictement inférieures à $-k_\infty^2$. Alors $\mathcal{N}(\omega)$ est une fonction croissante par rapport à ω.*

Démonstration. On applique ici aussi le principe du min-max. Comme $\lambda_n(A)$, défini par la formule du min-max, est toujours inférieur ou égal à $-k_\infty^2$, on a :

$$\lambda_n(A) + k_\infty^2 = \inf_{V_n \in \mathcal{V}_n(V)} \sup_{u \in V_n, u \neq 0} \min\left(0, \frac{a(u,u)}{(\mu\, u, u)_X} + k_\infty^2\right).$$

Remarquons que

$$\frac{a(u,u)}{(\mu\, u, u)_X} + k_\infty^2 = \frac{1}{\int_\Omega \mu |u|^2 \,\mathrm{d}\Omega} \int_\Omega \left(\mu |\nabla u|^2 - \omega^2(\rho - \rho_\infty)|u|^2\right) \,\mathrm{d}\Omega.$$

En fixant la fonction u, on voit que la quantité

$$\min\left(0, \frac{a(u,u)}{(\mu\, u, u)_X} + k_\infty^2\right)$$

est décroissante vis à vis de ω : c'est une fonction du type $\min(0, a - \omega^2 b)$, avec $a > 0$. Donc si b est positif, c'est bien une fonction décroissante et si b est négatif alors $\min(0, a - \omega^2 b) = 0$, qui est bien une fonction décroissante.

Ainsi, la fonction $\omega \mapsto \lambda_n(A) + k_\infty^2$ est décroissante car l'$\inf$ et le $\sup$ d'une famille de fonctions décroissantes sont également des fonctions décroissantes. Or, $\mathcal{N}(\omega)$ est défini par :

$$\mathcal{N}(\omega) = \sup\left\{n \geq 1, \lambda_n(A) + k_\infty^2 < 0\right\}.$$

On en déduit que $\mathcal{N}(\omega)$ est croissant par rapport à ω. □

Ce résultat nous permet de définir la notion de *fréquence de coupure* (cut-off frequency en anglais) : une fréquence de coupure est une fréquence pour laquelle un mode guidé apparaît ou disparaît. La proposition 1.7 nous montre que le nombre de valeurs propres est une fonction croissante par rapport à ω. Ainsi, en augmentant ω, des valeurs propres apparaissent. Les valeurs de ω pour lesquelles cela se produit sont les fréquences de coupure. Cette notion coïncide avec celle que nous avons vue à la section 1.1. En effet, à la section 1.1, une fréquence de coupure est définie comme une fréquence pour laquelle $-k_\infty^2$ est solution de l'équation de dispersion : une valeur propre apparaît de la borne inférieure du spectre essentiel.

Nous appelons le *mode fondamental* la plus petite valeur propre strictement inférieure à la borne inférieure du spectre essentiel.[3]

Proposition 1.8 (Existence du mode fondamental, dans le cas du guide constant par morceaux) *Dans le cas du guide constant par morceaux, nous rappelons que nous notons c_0 la vitesse, constante, dans le cœur. Nous avons l'équivalence suivante (qui donne une condition nécessaire et suffisante pour*

[3]Nous ferons souvent la confusion de vocabulaire entre la notion de mode et la valeur propre associée au mode. En toute rigueur, on devrait dire la valeur propre associée au mode fondamental.

l'existence du mode fondamental), en notant comme à la proposition 1.7 $\mathcal{N}(\omega)$ le nombre de valeurs propres strictement inférieures à $-k_\infty^2$,

$$\mathcal{N}(\omega) \geq 1, \forall \omega \quad \textit{si, et seulement si,} \quad c_0 < c_\infty.$$

En d'autres termes, il faut et il suffit que la vitesse soit plus faible dans le cœur que dans la gaine pour qu'il y ait au moins une valeur propre.

Démonstration. Montrons tout d'abord que si $\mathcal{N}(\omega) \geq 1$, pour tout ω alors $c_0 < c_\infty$. Supposons par l'absurde que $c_0 \geq c_\infty$. Alors, on a vu que le spectre discret de A est vide, ce qui se réécrit $\mathcal{N}(\omega) = 0$.

Montrons maintenant la réciproque. Supposons $c_0 < c_\infty$. On va utiliser le principe du min-max pour la première valeur propre :

$$\lambda_1(A) = \inf_{V_1 \in \mathcal{V}_1(V)} \sup_{u \in V_1, u \neq 0} \frac{(\mu\, Au, u)_{L^2(\Omega)}}{(\mu\, u, u)^2_{L^2(\Omega)}}.$$

On note Ω_B la boule de centre O et de rayon R, qui contient le cœur du guide (là où $k = k_0$, $c = c_0$, $\mu = \mu_0$, $\rho = \rho_0$). Soit $M > R > 0$. Soit u_M défini par :

$$u_M = \begin{cases} 1 & \text{si } r \leq R, \\ \ln\left(\frac{r}{M}\right) / \ln\left(\frac{R}{M}\right) & \text{si } R < r \leq M, \\ 0 & \text{si } r > M. \end{cases}$$

On vérifie alors que $\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u_M|^2 \,\mathrm{d}\Omega = 2\pi / \ln\left(\frac{M}{R}\right)$. Donc, $\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u_M|^2 \,\mathrm{d}\Omega \to 0$ quand $M \to +\infty$. On a par principe du min-max :

$$\lambda_1(A) \leq \frac{(\mu\, Au_M, u_M)_{L^2(\Omega)}}{(\mu\, u_M, u_M)^2_{L^2(\Omega)}} = \frac{1}{\int_{\mathbb{R}^2} \mu\, |u_M|^2 \,\mathrm{d}\Omega} \left(\int_{\mathbb{R}^2} \mu |\nabla u_M|^2 \,\mathrm{d}\Omega - \int_{\mathbb{R}^2} \mu\, k^2\, |u_M|^2 \,\mathrm{d}\Omega \right).$$

En faisant tendre M vers $+\infty$, comme $-k^2 \leq -k_\infty^2$, on a : $\lambda_1(A) < -k_\infty^2$. Ceci implique, par principe du min-max, que $\mathcal{N}(\omega) \geq 1$. □

1.2.4 Modes guidés et modes de radiation

Nous sommes désormais en mesure de faire un bilan sur le spectre de l'opérateur A : il est composé de deux parties :

- Tout d'abord, il existe un nombre fini de valeurs propres de multiplicité finie et isolées dans le spectre, appartenant à $]-k_{\max}^2, -k_\infty^2[$. Ces valeurs propres isolées correspondent aux pôles de la résolvante.
- Ensuite, le spectre essentiel est égal à $[-k_\infty^2, +\infty[$. Il n'y a pas de valeurs propres plongées dans le spectre essentiel, donc le spectre continu est égal à $]-k_\infty^2, +\infty[$ ou à $[-k_\infty^2, +\infty[$ selon que $-k_\infty^2$ est une valeur propre ou pas. La résolvante n'est pas définie sur le spectre essentiel. Elle y admet vraisemblablement une coupure, comme on l'a vu dans le cas de l'opérateur de la section 1.1, même si une telle affirmation est plus difficile à démontrer dans le cas général.

Maintenant revenons à la notion de mode : il s'agit de trouver des solutions à variables séparées de l'équation (1). Nous avons vu que la dépendance en x est de la forme suivante : $\exp(\pm i\beta x)$,

où β, le nombre d'onde longitudinal est relié à λ par la relation $\lambda = -\beta^2$ et λ vit dans $\Lambda(A)$. On choisit, comme dans le cas 1D vu à la section 1.1,

$$\beta := \begin{cases} \sqrt{-\lambda} & \text{si } \lambda \leq 0, \\ i\sqrt{\lambda} & \text{si } \lambda > 0. \end{cases}$$

Pour $\lambda \in \Lambda_p(A)$, la notion de *mode guidé* est la même que précédemment (section 1.1).

Ensuite, pour $\lambda \in \Lambda_c(A)$, il n'y a pas de fonction propre associée à λ. Par contre, on peut définir la notion de *fonction propre généralisée* (voir section A.1.5). Dans le cas 1D, nous avons défini les fonctions propres généralisées comme les fonctions bornées, et n'appartenant pas au domaine de A, vérifiant l'équation $Au = \lambda u$. Ici, l'idée est la même : nous cherchons un espace $X_\uparrow$ qui est plus « gros » que $L^2(\Omega)$ (qui autorise des comportements oscillants au voisinage de l'infini). Les fonctions propres généralisées sont alors les éléments qui vérifient $u \in X_\uparrow, u \neq 0$ et $Au = \lambda u$.[4] Soit $\Phi_\lambda(y,z)$ une fonction propre généralisée associée à $\lambda \in \Lambda_c(A)$. Les modes suivants $\varphi_\lambda^\rightarrow(x,y,z) = \Phi_\lambda(y,z)\,\mathrm{e}^{i\beta x}$ et $\varphi_\lambda^\leftarrow(x,y,z) = \Phi_\lambda(y,z)\,\mathrm{e}^{-i\beta x}$ sont alors des *modes de radiation*. Ils peuvent être propagatifs si $\lambda < 0$: dans ce cas, on a, comme pour les modes guidés, une dépendance du type $\mathrm{e}^{\pm i\beta x}$, avec $\beta \in \mathbb{R}^+$ ou *évanescents* si $\lambda > 0$: dans ce cas, leur dépendance est du type $\mathrm{e}^{\mp\gamma x}$, avec $\gamma = \sqrt{\lambda} \in \mathbb{R}^+$: dans ce cas, $\varphi_\lambda^\rightarrow$ est exponentiellement décroissant pour $x \to +\infty$ et $\varphi_\lambda^\leftarrow$ est exponentiellement décroissant pour $x \to -\infty$.

« Avec les mains », nous pouvons dire, comme dans le cas 1D présenté à la section 1.1, qu'un mode guidé correspond à un mode qui est localisé dans le cœur du guide et un mode de radiation est un mode qui, au contraire, est oscillant à l'infini dans les directions transverses.

Conclusion sur l'étude spectrale de l'opérateur transverse

Dans ce chapitre, nous avons défini les notions de modes guidés et de modes de radiation. Les modes guidés sont liés aux valeurs propres de l'opérateur transverse alors que les modes de radiation sont liés au spectre continu. Ceci nous donne une famille de solutions particulières des équations dans le guide d'ondes ouvert uniforme. Une question naturelle à se poser est la suivante : est-ce que cette famille de solutions est suffisante pour représenter « n'importe quelle onde » vérifiant les équations dans le guide uniforme ?

Dans le cas d'un guide fermé, c'est-à-dire de section transverse Ω bornée, nous avons vu en introduction que grâce au théorème de Rellich (l'injection de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ est compacte si Ω est borné), on montre que l'opérateur transverse A est à résolvante compacte. Il n'y a donc plus de spectre continu. De plus, la théorie spectrale (voir l'annexe A.1) nous permet alors d'affirmer que l'ensemble des fonctions propres forme une base hilbertienne de $L^2(\Omega)$: toute fonction $u \in L^2(\Omega)$ peut se décomposer sous la forme d'une série de Fourier, par exemple dans le cas d'un milieu transverse 1D :

$$u(z) = \sum_n (u, \Phi_n)_{L^2(\Omega)}\, \Phi_n(z), \tag{1.23}$$

en notant Φ_n les fonctions propres orthonormalisées. Ainsi, comme nous l'avons vu en introduction de ce mémoire, nous pouvons décomposer toute fonction φ vérifiant les équations dans

[4] En fait, l'écriture $Au = \lambda u$, pour $u \in X_\uparrow$ est formelle. De façon rigoureuse, nous définissons $X_\uparrow$ comme l'espace dual d'un espace $X_\downarrow$, qui est plus petit que $L^2(\Omega)$ (qui impose des comportements plus décroissants à l'infini). L'écriture $Au = \lambda u$, pour $u \in X_\uparrow$ signifie alors :

$$\langle u, Av \rangle_{X_\uparrow, X_\downarrow} = \lambda \langle u, v \rangle_{X_\uparrow, X_\downarrow}, \quad \forall v \in X_\downarrow,$$

où $\langle .,. \rangle_{X_\uparrow, X_\downarrow}$ est le produit de dualité entre $X_\uparrow$ et $X_\downarrow$.

le guide comme une série de Fourier sur les modes aller et retour (en utilisant le fait que $\varphi(x,.) \in L^2(\Omega)$ pour tout x) :

$$\varphi(x,z) = \sum_n \Phi_n(y) \left(a_n \, \mathrm{e}^{i\beta_n x} + b_n \, \mathrm{e}^{-i\beta_n x} \right). \tag{1.24}$$

Dans le cas d'un guide ouvert, nous avons vu qu'il y a, en plus d'un spectre discret, un spectre continu. La formule de représentation (1.24) n'est plus valable. En fait, on peut montrer que l'ensemble des fonctions propres et des fonctions propres généralisées forme une base, en un certain sens, de $L^2(\Omega)$, où Ω est la section transverse. Dans la formule de décomposition d'une fonction $u(z)$ sur les fonctions propres et les fonctions propres généralisées Φ_λ (l'analogue de (1.23) pour un guide fermé), il y a maintenant, en plus d'une somme finie sur les fonctions propres, une intégrale faisant intervenir les modes de radiation :

$$u(z) = \sum_{\lambda \in \Lambda_p(A)} \frac{(u,\Phi_\lambda)_{L^2(\Omega)}}{\|\Phi_\lambda\|^2_{L^2(\Omega)}} \Phi_\lambda(z) + \int_{\lambda \in \Lambda_c(A)} \langle \Phi_\lambda, u \rangle \, \Phi_\lambda(z) \, p_\lambda \, \mathrm{d}\lambda. \tag{1.25}$$

Nous voyons alors que le coefficient devant une fonction propre généralisée n'est pas une simple normalisation, comme pour le coefficient devant une fonction propre, puisque les fonctions propres généralisées ne sont pas des éléments de $L^2(\Omega)$. Nous utiliserons cette décomposition et nous expliquerons comment l'obtenir dans le cas de l'opérateur A de la section 1.1, en faisant intervenir ce qu'on appelle la *transformation de Fourier généralisée* associée à l'opérateur A, au chapitre 4. Par contre, d'un point de vue numérique, le fait qu'il y ait un continuum de modes (et non plus un nombre discret de modes comme dans le cas du guide fermé) nous semble problématique. Nous allons chercher, dans la suite, à « discrétiser » ce continuum, c'est-à-dire à nous ramener à une série au lieu d'une intégrale dans la formule (1.25) : pour cela, pour allons introduire la notion de *modes à fuite*.

MODES À FUITE 2

SOMMAIRE

2.1 LE CAS D'UN GUIDE 2D À COEFFICIENTS CONSTANTS DANS LE CŒUR 37
2.1.1 Description des modes à fuite 37
2.1.2 Les modes à fuite : les modes guidés lorsqu'ils ont passé la borne inférieure du spectre essentiel 39
2.1.3 Les modes à fuite : les modes d'un guide fermé lorsque celui-ci est plongé dans un milieu homogène infini 41
2.2 LE CAS D'UN GUIDE 2D QUELCONQUE 42
2.2.1 Introduction d'une PML infinie en z ou prolongement analytique dans la variable z 44
2.2.2 Spectre de l'opérateur transformé 48
2.3 LE CAS D'UN GUIDE 3D 58
2.3.1 Introduction d'une PML radiale ou prolongement analytique dans la variable radiale 60
2.3.2 Spectre de l'opérateur transformé 62
2.3.3 Et si on utilisait des PMLs cartésiennes ? 71

L'ÉTUDE spectrale de l'opérateur transverse a fait apparaître deux types de modes : un nombre fini de modes guidés (éventuellement zéro), qui sont localisés au niveau du cœur du guide ouvert et qui se propagent sans atténuation selon la direction de propagation, et un continuum de modes de radiation, qui sont oscillants dans les directions transverses et qui peuvent être propagatifs ou évanescents dans la direction de propagation. Nous avons également mentionné que les fonctions propres (liées au spectre ponctuel) et les fonctions propres généralisées (liées au spectre continu) forment, en un certain sens, une base de $L^2(\Omega)$, où Ω est la section transverse du guide ouvert. La formule de décomposition sur cette base fait alors intervenir une intégrale sur le spectre continu, ce qui paraît très coûteux à mettre en œuvre dans une méthode numérique.

Nous allons, dans ce chapitre, nous intéresser à un autre type de modes du guide ouvert, qui ne rentre pas dans le spectre de l'opérateur transverse, modes qui sont pourtant liés à cet opérateur. Il s'agit des *modes à fuites* (*leaky modes* en anglais). Nous allons voir que ces modes forment un ensemble discret. L'idée qui nous poursuit est la suivante : nous voulons transformer, dans la formule de décomposition sur la base des fonctions propres et des fonctions propres généralisées, l'intégrale sur le spectre essentiel en une série sur les modes à fuite. En effet, du simple point de

vue de la dénomination des différents modes, les modes de radiation permettent de prendre en compte la radiation dans la gaine (là où les modes guidés permettent de prendre en compte le guidage dans le cœur). Quant aux modes à fuite, ils permettent de mettre en évidence les fuites dans la gaine. Il semble donc que modes de radiation et modes à fuite rendent compte du même phénomène physique. Mais nous verrons, au chapitre suivant, que la transformation de l'intégrale sur le spectre essentiel en une série sur les modes à fuite n'est pas évidente a priori. Avant toute chose, voyons ce que sont exactement ces objets appelés modes à fuite.

De manière à introduire simplement le concept de mode à fuite, nous allons nous poser deux questions « physiques ». Ces deux manières d'introduite le concept de mode à fuite peuvent être trouvées dans des manuels de physique, par exemple dans les références suivantes : [Vas91], [SL83] ou [Mar74].

Une première question naturelle est la suivante : que devient un mode guidé du guide ouvert lorsque celui-ci se rapproche de la borne inférieure du spectre essentiel ? En effet, en diminuant la fréquence ω, on a vu que le nombre de modes guidés diminue (proposition 1.7). Ainsi des modes guidés disparaissent. Mais alors, que deviennent-ils ? Nous allons voir, dans un cas particulier, qu'ils deviennent des modes à fuite.

Une deuxième question est la suivante : que deviennent les modes d'un guide fermé lorsque l'on plonge celui-ci dans un milieu infini (i.e. lorsque le guide devient ouvert) ? En effet, lorsque le guide est fermé, la résolvante de l'opérateur transverse est compacte ; ainsi, il y a un ensemble discret (infini) de modes. Nous allons illustrer sur un cas particulier le fait qu'une trace de ces modes du guide fermé se retrouve dans les modes à fuite du guide ouvert correspondant.

Dans la section 2.1, nous définirons les modes à fuite comme les solutions complexes de la relation de dispersion des modes guidés (sous-section 2.1.1). Ceci nous permettra d'illustrer les deux phénomènes physiques cités ci-dessus (sous-sections 2.1.2 et 2.1.3). Lorsqu'une telle relation de dispersion n'est pas facilement accessible, nous utiliserons une autre définition des modes guidés : ils correspondent aux pôles de la résolvante de l'opérateur transverse. Les modes à fuite apparaissent lorsque l'on cherche les pôles, non pas de la résolvante, mais du prolongement analytique de la résolvante au travers du spectre continu. Nous allons voir dans la section 2.2 (pour un guide 2D) et 2.3 (pour un guide 3D) comment procéder au prolongement analytique de la résolvante ; ceci nous amènera à construire un nouvel opérateur dont les propriétés spectrales seront détaillées. En pratique, nous verrons que nous parviendrons à faire ce prolongement analytique grâce à l'introduction d'une *PML* (*Perfectly Matched Layer* ou couche absorbante parfaitement adaptée en français) d'épaisseur infinie.

Avant de rentrer dans le vif du sujet, il est intéressant de noter que la notion de mode à fuite est en fait similaire à celle de *résonance*. Dans des problèmes de diffraction d'ondes par des obstacles dans des géométries non bornées (voir par exemple [HHK04] et [HHKS07]), ou dans des problèmes de physique quantique (voir par exemple [Sim78]), la recherche des résonances du système physique considéré revient à chercher les pôles du prolongement analytique de la résolvante d'un opérateur autoadjoint. La différence essentielle entre une résonance et un mode à fuite est la suivante : le paramètre temps (t) pour une résonance est remplacé par la direction de propagation (x) pour un mode à fuite. On verra qu'un mode à fuite est toujours atténué lorsque x augmente, tout comme un mode résonant est atténué lorsque le temps augmente.

2.1 Le cas d'un guide 2D à coefficients constants dans le cœur

De façon à appréhender ce qu'est un mode à fuite et ses propriétés, nous allons commencer par traiter le cas d'un guide 2D, avec coefficients constants dans le cœur, où les calculs sont explicites. Nous généraliserons la notion de mode à fuite pour des cas plus complexes en section 2.2 (pour un guide 2D quelconque) et en section 2.3 (pour un guide 3D).

2.1.1 Description des modes à fuite

Dans cette sous-section, nous nous plaçons dans le même cadre que dans la section 1.1. On rappelle qu'il s'agit d'un guide 2D remplissant le demi-espace $\mathcal{O} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$. Les équations sont :

$$\begin{aligned} &-\triangle\varphi - k^2\varphi = 0 \text{ dans } \mathcal{O}, \\ &\varphi(x,0) = 0, \forall x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

où le nombre d'onde k est donné par :

$$k(z) = \begin{cases} k_0 & \text{si } z < h, \\ k_\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Nous avons vu que dans ce cadre, les modes guidés sont solution d'une relation de dispersion, que l'on rappelle ici :

$$\tan\left(\sqrt{\lambda + k_0^2}\, h\right) = -\sqrt{\frac{\lambda + k_0^2}{-\lambda - k_\infty^2}}, \qquad \lambda \in]-k_0^2, -k_\infty^2[.$$

L'idée est de rechercher des solutions complexes à cette équation, en d'autres termes chercher des solutions qui ne sont pas dans l'intervalle $]-k_0^2, -k_\infty^2[$. Pour cela, nous avons besoin de définir une racine carrée complexe. Nous rappelons que nous avons pris la convention d'écrire, pour tout $\alpha \in \mathbb{C} \setminus 0$:

$$\sqrt[\alpha\mathbb{R}^+]{\lambda} = \sqrt{|\lambda|}\, \exp\left(i \arg_{\alpha\mathbb{R}^+}(\lambda)/2\right), \quad \text{avec } \theta - 2\pi < \arg_{\alpha\mathbb{R}^+}(\lambda) < \theta,$$

où θ est l'argument de α, dans l'intervalle $]0, 2\pi]$.

Dans la suite, nous allons chercher des solutions λ de l'équation de dispersion telles que $\Im m(\lambda) < 0$. La recherche de solutions λ telles que $\Im m(\lambda) > 0$ sera discutée ultérieurement. Nous avons besoin d'une définition de racine carrée valable pour tout λ tel que $\Im m(\lambda) < 0$. Pour cela, nous prenons la coupure sur $i\mathbb{R}^+$ (nous pourrions prendre n'importe quelle coupure de la forme $\alpha\mathbb{R}^+$, avec α à partie imaginaire strictement positive) : nous choisissons $\sqrt[i\mathbb{R}^+]{\cdot}$.

La recherche des modes à fuite vient de la recherche des solutions sortantes aux équations suivantes :

$$-\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}z^2} - k^2 u = \lambda\, u \text{ dans } \mathbb{R}^+, \tag{2.1}$$

$$u(0) = 0. \tag{2.2}$$

En d'autres termes, nous cherchons des solutions de la forme $\mathrm{e}^{i(\beta_\infty z - \omega t)}$ pour $z > h$, où β_∞ est défini par (1.8).[1] Ainsi, $\Re e(\beta_\infty) > 0$ pour tout λ tel que $\Im m(\lambda) < 0$, donc $\mathrm{e}^{i(\beta_\infty z - \omega t)}$ est bien

[1] On rappelle la définition de β_∞ :

$$\beta_\infty = \sqrt[i\mathbb{R}^+]{\lambda + k_\infty^2}.$$

une onde qui sort, qui va vers les z croissants. Rappelons-nous qu'au chapitre 1, nous avons défini en (1.9)-(1.10) deux fonctions, Θ_λ et Ψ_λ, solutions de l'équation (2.1), telles que pour $z \geq h$, $\Theta_\lambda(z) = \mathrm{e}^{-i\beta_\infty z}$ et $\Psi_\lambda(z) = \mathrm{e}^{i\beta_\infty z}$.

Ainsi, en imposant à la solution d'être de la forme $\mathrm{e}^{i\beta_\infty z}$ pour $z > h$, nous imposons à la solution recherchée d'être proportionnelle à $\Psi_\lambda(z)$.

On rappelle que pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, toute solution non nulle des équations (2.1)-(2.2) est proportionnelle à la fonction $\Phi_\lambda(z)$, donnée par (1.7) et que pour tout $\lambda \in \mathbb{C} \setminus (-k_\infty^2 + i\mathbb{R}^+)$,

$$\Phi_\lambda(z) = \frac{1}{2i\beta_\infty} \left[\Theta_\lambda(0)\, \Psi_\lambda(z) - \Psi_\lambda(0)\, \Theta_\lambda(z)\right].$$

Ainsi, comme $\Phi_\lambda(z)$ est proportionnelle à $\Psi_\lambda(z)$, l'équation de dispersion devient :

$$\Psi_\lambda(0) = 0, \quad \text{ce qui est équivalent à} \quad \boxed{\tan\left(\sqrt[i\mathbb{R}^+]{\lambda + k_0^2}\, h \right) = i \frac{\sqrt[i\mathbb{R}^+]{\lambda + k_0^2}}{\sqrt[i\mathbb{R}^+]{\lambda + k_\infty^2}}.} \tag{2.3}$$

Les solutions complexes de cette équation sont ce qu'on appelle les *modes à fuite*.

En fait, de manière rigoureuse,[2] pour λ solution de la relation de dispersion, les modes à fuite sont les fonctions $\varphi_\lambda^{\rightarrow}(x,z) = \Phi_\lambda(z)\, \mathrm{e}^{i\beta x}$ et $\varphi_\lambda^{\leftarrow}(x,z) = \Phi_\lambda(z)\, \mathrm{e}^{-i\beta x}$, où β est le nombre d'onde longitudinal. Nous prenons comme définition du nombre d'onde longitudinal

$$\beta := \sqrt[\mathbb{R}^-]{-\lambda},$$

ainsi, la partie réelle de β, ainsi que sa partie imaginaire, sont positives. Si $\lambda > 0$, nous prenons $\beta = i\sqrt{\lambda}$. Cette définition généralise celle qui a été vue au chapitre 1 pour les modes guidés et de radiation : équation (1.20). Le mode $\varphi_\lambda^{\rightarrow}$ est évanescent vers la droite et que le mode $\varphi_\lambda^{\leftarrow}$ est évanescent vers la gauche. C'est une première propriété importante des modes à fuite : ils sont évanescents dans la direction de propagation.

Mais ce caractère évanescent dans la direction de propagation (x) a une contrepartie assez étonnante dans la direction transverse (z). En effet, nous avons vu que $\Phi_\lambda(z)$ est proportionnelle à $\Psi_\lambda(z)$. Or, pour $z \geq h$, $\Psi_\lambda(z) = \mathrm{e}^{i\beta_\infty z}$, où $\beta_\infty = \sqrt[i\mathbb{R}^+]{k_\infty^2 + \lambda}$. Si λ est à partie imaginaire strictement négative, $\Psi_\lambda(z)$ est alors exponentiellement croissante car $\Im m(\beta_\infty) < 0$. Un mode à fuite est ainsi exponentiellement croissant dans la direction transverse ! Ce caractère exponentiellement croissant va à première vue à l'encontre de l'intuition physique. Mais il faut se rappeler que nous sommes en régime harmonique. Ainsi, la croissance exponentielle dans la direction transverse peut s'interpréter comme une accumulation de contributions venant des instants précédents.

Remarque 2.1 : *Nous avons choisi de chercher des modes dans le demi-plan complexe à partie imaginaire négative et nous avons vu que nous avons trouvé des solutions exponentiellement croissantes dans la direction transverse. Que se passe-t-il lorsque l'on cherche des solutions à l'équation de dispersion dans l'autre demi-plan complexe ? Peut-être les modes deviennent-ils décroissants dans la direction transverse... En fait, il n'en est rien. En effet, si nous trouvions une telle solution (exponentiellement décroissante), alors ce serait une fonction propre de l'opérateur A, or on a vu au chapitre 1, que ses valeurs propres sont réelles. Quand on cherche les modes dans l'autre demi plan complexe, nous trouvons les modes à fuite entrants, qui sont en fait les conjugués des modes à fuite sortants. Ces objets sont également exponentiellement croissants dans la direction transverse. Les seuls objets physiques qui nous intéressent sont les modes à fuite sortants, c'est pourquoi dans la suite nous ne nous intéresserons plus qu'aux modes à fuite pour lesquels $\Im m(\lambda) < 0$.*

[2] Nous faisons parfois l'abus de langage suivant : nous confondons, lorsqu'il n'y a pas de confusion possible, le terme mode à fuite avec la valeur λ à laquelle il correspond. Nous faisons de même pour un mode guidé.

Les modes à fuite sont des objets bien particuliers : ils sont exponentiellement croissants dans la direction transverse. Ce caractère exponentiellement croissant est à première vue déstabilisant : on se dit que ce n'est pas « physique ». Notre objectif dans les deux sous-sections qui suivent est de justifier l'injustifiable : de montrer que quelque chose d'exponentiellement croissant est physique ! Nous allons étudier deux situations qui, on l'espère, convaincront le lecteur de l'intérêt physique de ces objets.

2.1.2 Les modes à fuite : les modes guidés lorsqu'ils ont passé la borne inférieure du spectre essentiel

Nous avons dit en introduction que l'on pouvait voir les modes à fuite comme des modes guidés lorsqu'ils ont passé la borne inférieure du spectre essentiel. Nous allons voir comment on peut décrire cela en nous appuyant sur le livre de Marcuse [Mar74, section 1.5]. L'idée consiste à suivre la relation de dispersion des modes guidés lorsque que la valeur propre λ s'approche de la borne inférieure du spectre essentiel, puis à regarder ce qui se passe quand on la dépasse. Dans le livre [Mar74], l'idée est exposée dans le cas d'une condition de Neumann en $z = 0$. Ici, nous adaptons la méthode au cas d'une condition de Dirichlet. Tout d'abord, nous rappelons que la relation de dispersion que nous avons obtenue à la section 1.1 : l'équation (1.14) s'écrit avec les notations de Marcuse :

$$\tan u = -u/v$$

avec $u := \sqrt{\lambda + k_0^2}\, h > 0$ et $v := \sqrt{-\lambda - k_\infty^2}\, h > 0$. En notant $V_s := \sqrt{k_0^2 - k_\infty^2} h$, on voit que $v^2 + u^2 = V_s^2$. Le nombre V_s ne dépend que des caractéristiques physiques du milieu.

L'idée de Marcuse est de regarder ce qui se passe, juste après qu'un des modes ait dépassé la borne inférieure du spectre essentiel, au lieu de chercher une solution de l'équation de dispersion $\tan u = -u/v$, on cherche une solution de $\tan u = u/v$. Sur la figure 2.1, sont représentées les courbes $\tan u$ (en bleu), $-u/v$ (en rouge) et u/v (en violet) en fonction de u pour différentes valeurs de V_s. Les points où les courbes bleue et rouge se croisent correspondent aux modes guidés. On voit que lorsque V_s diminue, alors l'un des modes guidés disparaît. Il disparaît entre $V_s = 8$ et $V_s = 7.8$: il disparaît exactement quand $V_s = \frac{5}{2}\pi$, i.e. quand on est sur une fréquence de coupure. On remarque alors que lorsque l'on dépasse la coupure, si au lieu de chercher une solution de $\tan u = -u/v$, on cherche une solution de $\tan u = u/v$, alors u reste continu. En d'autres termes, si pour $V_s > \frac{5}{2}\pi$, on suit l'abscisse des points d'intersection des courbes bleue et rouge, et pour $V_s < \frac{5}{2}\pi$, on suit l'abscisse des points d'intersection des courbes bleue et violette ; ces abscisses diminuent alors de manière continue. Ainsi, on peut interpréter ceci de la manière suivante : un mode guidé, lorsqu'il dépasse la borne inférieure du spectre continu, devient tel que v change de signe (en passant par zéro quand il est exactement sur la borne inférieure du spectre continu). Ceci signifie que l'on passe d'un régime exponentiellement décroissant dans la gaine (du type $\exp(-\sqrt{-\lambda - k_\infty^2}\, z)$) à un régime exponentiellement croissant (du type $\exp(\sqrt{-\lambda - k_\infty^2}\, z)$), en passant par un régime constant quand on est exactement sur la borne inférieure du spectre essentiel.

On remarque ensuite que l'on ne peut pas suivre indéfiniment les points d'intersection de la courbe violette et de la courbe bleue. Dès $V_s = 7.6$, il n'y a plus de point d'intersection. En fait, ceci vient du fait que v devient maintenant complexe.

Ainsi, quand on peut avoir « à la main » une relation de dispersion, on se rend compte que le comportement à l'infini d'un mode guidé (qui est purement exponentiellement décroissant dans la gaine, i.e. sans oscillation), lorsqu'il a dépassé la borne inférieure du spectre essentiel, devient tout d'abord purement exponentiellement croissant puis la valeur propre quitte l'axe réel.

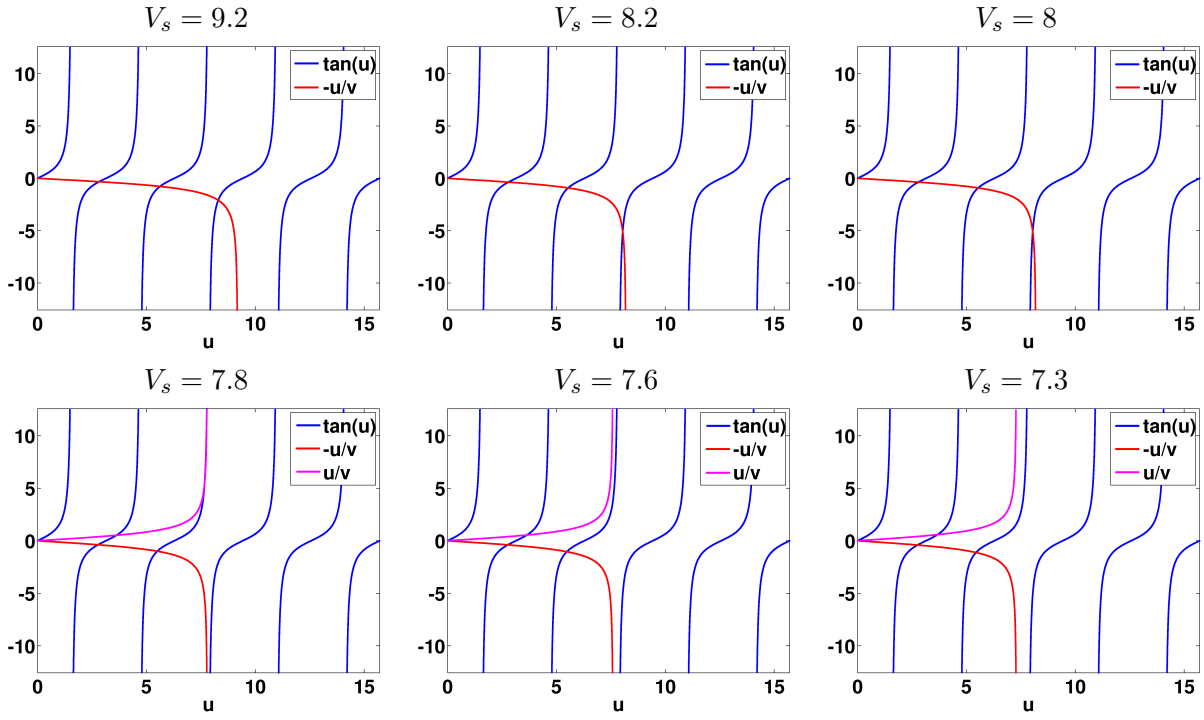

FIGURE 2.1 – *Évolution des modes lorsque V_s diminue. Représentation graphique de la relation de dispersion* $\tan u = -u/v$ *et de la relation* $\tan u = u/v$.

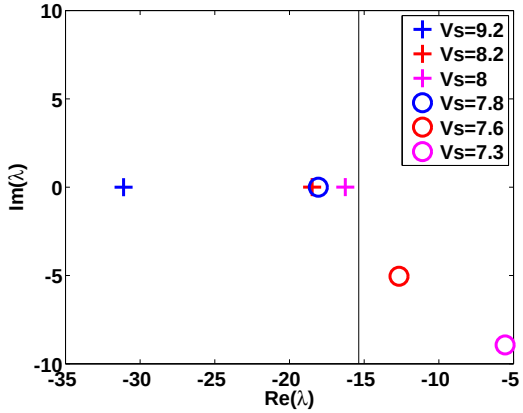

FIGURE 2.2 – *Évolution du mode guidé qui devient mode à fuite lorsque V_s diminue. Représentation de λ lorsque V_s diminue. Paramètres physiques choisis : $k_0 = 10$, $k_\infty = 3.92$. V_s diminue implique ici h diminue. La ligne noire verticale correspond à $-k_\infty^2$: la borne inférieure du spectre essentiel.*

Sur la figure 2.2, nous voyons comment se déplace le mode guidé (qui va devenir mode à fuite) quand il se rapproche de la borne inférieure du spectre essentiel, puis lorsqu'il la dépasse : la valeur propre fait tout d'abord demi-tour (ce qui correspond, pour le mode, à une transition de purement exponentiellement décroissant à purement exponentiellement croissant), puis elle part dans le plan complexe (ce qui correspond au moment où les courbes violette et bleu dans la figure 2.1 n'ont plus de point d'intersection).

Ce type de comportement est assez spécial : on passe d'un comportement exponentiellement décroissant à exponentiellement croissant ! Dans d'autres configurations (transverse 2D par exemple), le mode guidé quitte directement l'axe réel quand il atteint la borne inférieure du spectre essentiel. On verra plus tard (cf. section 5.3) en quoi ce phénomène peut être génant dans une méthode numérique.

Nous avons illustré ici le fait qu'un mode guidé, lorsqu'il disparaît, parce que la fréquence ou la hauteur du guide diminue par exemple (ce qui revient à diminuer V_s), devient un mode à fuite. On peut ainsi interpréter les modes à fuite comme des traces de modes guidés ayant disparu.

2.1.3 Les modes à fuite : les modes d'un guide fermé lorsque celui-ci est plongé dans un milieu homogène infini

Dans l'introduction, nous avons dit que les modes à fuite peuvent être vus comme les modes d'un guide fermé lorsque celui-ci est plongé dans un milieu homogène infini. Nous allons illustrer ce point dans le cas d'un guide 2D avec condition de Neumann en $z = 0$. Nous ne nous sommes intéressés, pour l'instant, qu'au cas d'un guide 2D avec condition de Dirichlet en $z = 0$. Mais, le raisonnement peut se faire également pour une condition de Neumann.

Nous allons nous placer dans le cas où les coefficients sont constants dans le cœur, indicés par 0 dans le coeur et par ∞ dans la gaine. Toute cette étude est extraite du papier [BBGHP09], acte de la conférence des cinquièmes journées du GDR 2501 : « étude de la propagation ultrasonore en vue du contrôle non destructif », qui a eu lieu à Anglet en 2008, où nous avons parlé de la propagation des ondes SH en élasticité. Nous allons comparer, sur un exemple, les modes à fuite du guide ouvert uniforme avec les modes guidés du guide fermé correspondant, i.e. les modes du guide constitué uniquement du cœur en mettant une condition de Neumann $\mathrm{d}u/\mathrm{d}z(h) = 0$ en $z = h$.

- Dans le cas du guide fermé, l'opérateur transverse est autoadjoint et à résolvante compacte, nous savons donc qu'il y a un nombre discret de modes guidés. Le spectre de l'opérateur transverse est alors composé d'une infinité dénombrable de valeurs propres données par :

$$\lambda_n = -k_0^2 + \frac{n^2\pi^2}{h^2}, n \in \mathbb{N}.$$

- Pour le guide ouvert, les modes à fuite (qui sont à partie imaginaire négative) vérifient la relation de dispersion suivante

$$i\mu_\infty \sqrt[i\mathbb{R}^+]{k_\infty^2 + \lambda} = -\mu_0 \sqrt[i\mathbb{R}^+]{k_0^2 + \lambda} \tan\left(\sqrt[i\mathbb{R}^+]{k_0^2 + \lambda}\, h \right). \tag{2.4}$$

  Cette relation de dispersion est l'équivalent de celle que nous avons obtenue en (2.3) dans le cas d'une condition de Neumann à la place d'une condition de Dirichlet en $z = 0$ et dans le cas où l'opérateur n'est pas $\triangle$ mais $\mathrm{div}(\mu\nabla)$.

Pour les applications numériques, nous prenons : $\rho_0 = 7.932\,\mathrm{g/cm^3}$, $\rho_\infty = 2.3\,\mathrm{g/cm^3}$, $c_0 = 3.260\,\mathrm{km/s}$, $c_\infty = 2.6375\,\mathrm{km/s}$. La hauteur du guide fermé h (qui est également la taille du cœur du guide ouvert) est égale à $5\,\mathrm{mm}$. La fréquence est de 1 MHz. Ces valeurs correspondent à une plaque d'acier dans un milieu infini de béton. Dans ce cas, $c_0 > c_\infty$ (ou de manière équivalente $k_0 < k_\infty$) : il n'y a donc pas de modes guidés (voir proposition 1.8).

Sur la figure 2.3, nous observons les valeurs de λ et de β (les nombres d'onde longitudinaux) pour le guide fermé et le guide ouvert.[3] Noter que les axes ne sont pas orthonormés pour la figure représentant λ. Il y a quatre modes propagatifs pour le guide fermé (qui correspondent à $\lambda < 0$ ou, de manière équivalente, $\beta \in \mathbb{R}$). La présence de la gaine infinie de béton modifie très légèrement les modes, essentiellement en ajoutant une petite partie imaginaire aux nombres d'ondes longitudinaux. Ceci a pour conséquence une atténuation dans la direction de propagation (x), mais également une croissance exponentielle dans la direction transverse (z).

Sur la figure 2.4, nous observons ces deux effets sur un mode propagatif du guide fermé. Pour un mode évanescent, l'impact de la gaine infinie est essentiellement l'introduction d'une petite partie réelle au β. Ceci ne change pas fondamentalement le comportement du mode dans la direction longitudinale (x). Par contre, comme dans la situation précédente, il y a une croissance exponentielle dans la direction transverse (z).

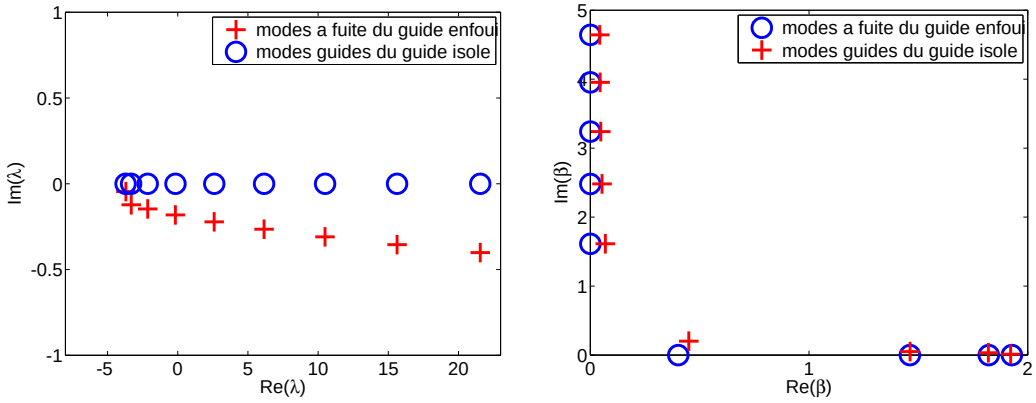

FIGURE 2.3 – *Valeurs de λ (à gauche) et de β (à droite) pour le guide fermé et le guide ouvert correspondant.*

Ainsi, nous avons illustré sur un cas simple l'effet de plonger un guide fermé dans un milieu infini homogène : les modes guidés deviennent des modes à fuite.

2.2 LE CAS D'UN GUIDE 2D QUELCONQUE

Jusqu'à présent, nous avons décrit ce que sont les modes à fuite à partir de la relation de dispersion. Nous allons maintenant traiter des cas où une telle relation de dispersion n'est pas facilement accessible. Pour cela, nous allons être amenés à utiliser une définition plus délicate des modes à fuite. Pour commencer, nous allons tout d'abord traiter le cas d'un guide 2D avec condition de Dirichlet en $z = 0$. Ici, les coefficients physiques (μ, ρ) ne sont pas nécessairement constants dans le cœur (comme c'était le cas à la section 2.1). L'extension pour un guide 3D sera faite en section 2.3. Dans ce cadre, nous rappelons que l'opérateur transverse est alors l'opérateur A de $L^2(\mathbb{R}^+)$

[3] Rappelons que $\lambda = -\beta^2$. Nous choisissons $\beta = \sqrt[\mathbb{R}^-]{-\lambda}$. Pour les modes purement évanescents $\lambda > 0$, nous prenons $\beta = i\sqrt{\lambda}$.

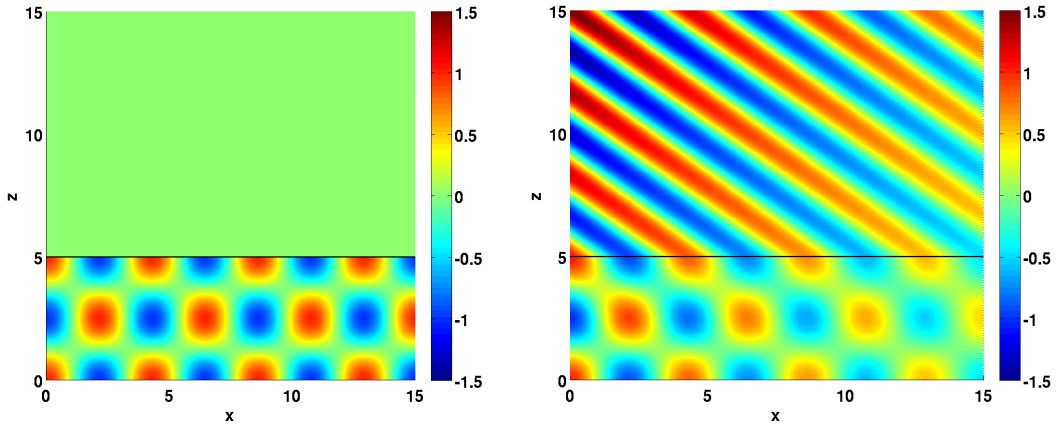

FIGURE 2.4 – *Partie réelle d'un mode propagatif du guide fermé (à gauche) pour* $\lambda = -k_0^2 + (\frac{2\pi}{h})^2 \simeq -2.1356$ *et partie réelle du mode à fuite du guide ouvert correspondant (à droite) :* $\lambda = -2.1350 - 0.1467i$.

défini par :

$$Au = -\frac{1}{\mu}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\mu\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}\right) - k^2 u, \quad \forall u \in D(A) = \left\{u \in H_0^1(\mathbb{R}^+), \mu\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z} \in H^1(\mathbb{R}^+)\right\}.$$

Notons que tout ce que nous faisons ici avec une condition de Dirichlet pourrait se généraliser sans problème au cas d'une condition de Neumann en $z = 0$.

Nous avons vu à la section 2.1 que modes guidés et modes à fuite vérifient tous les deux la même relation de dispersion. La différence est que les modes à fuite sont solutions d'un prolongement complexe de l'équation. Quand nous n'avons pas à disposition une relation de dispersion explicite, l'idée est un peu la même. Nous partons de ce que nous savons des modes guidés : ce sont les pôles de la résolvante de l'opérateur transverse A. Nous rappelons que la résolvante $R_A(\lambda)$ est l'opérateur borné de $L^2(\mathbb{R}^+)$ défini par $(A - \lambda I)^{-1}$. Les modes à fuite sont alors définis comme les pôles, non plus de la résolvante comme pour les modes guidés, mais du prolongement analytique en λ de la résolvante.

Les manières de procéder à ce prolongement analytique sont multiples. Citons, par exemple, [LVLH92] et [HL93] où deux méthodes sont étudiées. Ces articles s'inscrivent dans le cadre de l'étude de résonances, mais comme on l'a vu en introduction de ce chapitre, les notions de résonances et de modes à fuite sont tout à fait similaires. Les deux méthodes présentées, les éléments finis localisés et la méthode de couplage avec la représentation intégrale, sont un moyen de réduire le problème initial en domaine non borné à un domaine borné et permettent d'exhiber le prolongement analytique de la résolvante par rapport à λ. On se ramène, dans les deux cas, à un problème aux valeurs propres non linéraire.

L'idée est ici d'utiliser des *PMLs* (pour *Perfectly Matched Layer* en anglais ou couche absorbante parfaitement adaptée en français). Nous avons vu à la section précédente que les modes à fuite sortants sont de la forme suivante : $\mathrm{e}^{i\beta_\infty z}$ quand $z \to +\infty$. L'idée est de transformer cette fonction exponentiellement croissante en une fonction exponentiellement décroissante : transformer $\mathrm{e}^{i\beta_\infty z}$ en $\mathrm{e}^{i\beta_\infty/\alpha_\infty z}$ avec $\alpha_\infty \in \mathbb{C}$ bien choisi. Nous allons voir que pour cela, nous allons procéder à un prolongement analytique dans la variable z. Or, nous avons vu dans l'introduction de ce mémoire, qu'en régime harmonique, les PMLs peuvent être vues comme un changement de variable complexe (voir les articles [CW94] et [TC98]). Procéder au prolongement analytique en z revient à l'introduction d'une PML dans cette même direction. En faisant ce prolongement analytique dans la variable z, nous verrons que nous faisons apparaître un nouvel opérateur, que nous noterons

A_α. Nous verrons que la résolvante de A_α est le prolongement analytique (en λ) de la résolvante de l'opérateur initial et que certains modes à fuite sont des valeurs propres discrètes de A_α, donc des pôles de la résolvante de A_α. Ainsi, nous nous sommes ramenés à un problème aux valeurs propres *linéraire* (la recherche des valeurs propres de A_α), c'est là un avantage significatif de la méthode des PMLs par rapport aux autres méthodes citées ci-dessus.

2.2.1 Introduction d'une PML infinie en z ou prolongement analytique dans la variable z

De façon assez surprenante, pour procéder au prolongement analytique en λ de la résolvante, nous allons procéder au prolongement analytique dans la variable z de la solution u de l'équation résolvante $R_A(\lambda)f$. Le lien entre ces deux prolongements ne sera pourra être fait qu'ultérieurement.

Le point de départ est l'équation de la résolvante : $u = R_A(\lambda)f$, avec $\lambda \in \rho(A)$, $u \in D(A)$ et $f \in L^2(\mathbb{R}^+)$. En particulier, $\lambda \notin \Lambda_e(A) = [-k_\infty^2, +\infty[$. Supposons de plus que f est à support dans $[0, h]$. Alors, pour $z > h$, l'équation à résoudre est :

$$-\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}z^2}(z) - (k_\infty^2 + \lambda)\, u(z) = 0,$$

dont les solutions sont des combinaisons linéraires de $\exp(\pm\gamma_\infty z)$. On rappelle que nous avons défini $\gamma_\infty = \sqrt[\mathbb{R}^-]{-k_\infty^2 - \lambda}$. Ainsi, γ_∞ n'est pas défini pour $\lambda \in \Lambda_e(A) = [-k_\infty^2, +\infty[$, ce qui est cohérent avec $\lambda \in \rho(A)$. Avec cette définition, $\Re e(\gamma_\infty) \geq 0$, pour tout $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \Lambda_e(A)$. Comme u doit être dans $L^2(\mathbb{R}^+)$, cela impose à $u(z)$ d'être proportionnelle à $\exp(-\gamma_\infty z)$, pour $z > h$.

La propriété fondamentale de la solution u que nous utilisons maintenant est l'analyticité par rapport à la variable z (c'est une exponentielle), pour $z > h$. L'idée consiste alors à considérer son prolongement analytique $\check{u}$ dépendant maintenant de la variable $\check{z}$ complexe.

Bien entendu, comme $\check{u}$ est proportionnelle à $\exp(-\gamma_\infty \check{z})$, $\check{u}$ vérifie au sens complexe l'équation

$$-\frac{\mathrm{d}^2 \check{u}}{\mathrm{d}\check{z}^2}(\check{z}) - (k_\infty^2 + \lambda)\, \check{u}(\check{z}) = 0. \tag{2.5}$$

Ensuite, on choisit un paramétrage d'une courbe dans le plan complexe : $\check{z} = \mathcal{C}(\widetilde{z})$ et on introduit la nouvelle fonction inconnue $\widetilde{u}$ définie par $\widetilde{u}(\widetilde{z}) := \check{u}(\mathcal{C}(\widetilde{z}))$ pour $\widetilde{z} \in \mathbb{R}^+$. En prenant $h_2 \geq h$, nous choisissons $\mathcal{C}(\widetilde{z})$ de telle manière qu'elle vérifie :

$$\mathcal{C}(\widetilde{z}) = \widetilde{z}, \quad \forall \widetilde{z} < h_2.$$

Ceci vient du fait que nous n'avons prolongé analytiquement la solution qu'au delà de h. On a ainsi, par construction :

$$\widetilde{u}(\widetilde{z}) = u(\widetilde{z}), \quad \forall \widetilde{z} < h_2. \tag{2.6}$$

Par dérivation de fonctions composées, l'équation (2.5) devient alors :

$$-\alpha(\widetilde{z})\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\widetilde{z}}\left(\alpha(\widetilde{z})\frac{\mathrm{d}\widetilde{u}}{\mathrm{d}\widetilde{z}}(\widetilde{z})\right) - (k_\infty^2 + \lambda)\, \widetilde{u}(\widetilde{z}) = 0,$$

où

$$\alpha(\widetilde{z}) := \frac{1}{\mathcal{C}'(\widetilde{z})}. \tag{2.7}$$

Comme pour $\widetilde{z} < h_2$, $\mathcal{C}(\widetilde{z}) = \widetilde{z}$, on obtient finalement l'équation suivante pour tout $\widetilde{z} \in \mathbb{R}^+$

$$-\frac{\alpha(\widetilde{z})}{\mu(\widetilde{z})}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\widetilde{z}}\left(\alpha(\widetilde{z})\,\mu(\widetilde{z})\,\frac{\mathrm{d}\widetilde{u}}{\mathrm{d}\widetilde{z}}(\widetilde{z})\right) - (k^2(\widetilde{z}) + \lambda)\,\widetilde{u}(\widetilde{z}) = f(\widetilde{z}). \tag{2.8}$$

Cette dernière équation (2.8) peut s'interpréter comme la recherche des solutions de l'équation $A_\alpha \widetilde{u} - \lambda \widetilde{u} = f$, où A_α est l'opérateur de $L^2(\mathbb{R}^+)$ défini par :

$$A_\alpha \widetilde{u}(\widetilde{z}) := -\frac{\alpha(\widetilde{z})}{\mu(\widetilde{z})}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\widetilde{z}}\left(\alpha(\widetilde{z})\,\mu(\widetilde{z})\,\frac{\mathrm{d}\widetilde{u}}{\mathrm{d}\widetilde{z}}(\widetilde{z})\right) - k^2(\widetilde{z})\,\widetilde{u}(\widetilde{z}),$$
$$\forall \widetilde{u} \in D(A_\alpha) := \left\{\widetilde{u} \in H_0^1(\mathbb{R}^+),\ \alpha\,\mu\,\frac{\mathrm{d}\widetilde{u}}{\mathrm{d}\widetilde{z}} \in H^1(\mathbb{R}^+)\right\}.$$

L'équation (2.8) peut se ré-écrire : $\widetilde{u} = R_{A_\alpha}(\lambda) f$. Or, on rappelle que $u = R_A(\lambda) f$. Souvenons-nous également que $\widetilde{u}|_{[0,h_2]} = u|_{[0,h_2]}$: équation (2.6). Nous avons ainsi montré le résultat suivant : étant donné $f \in L^2(\mathbb{R}^+)$ à support compact, et $\lambda \in \rho(A) \cap \rho(A_\alpha)$, la restriction à un ensemble borné de $R_{A_\alpha}(\lambda) f$ est égale à la restriction au même ensemble borné de $R_A(\lambda) f$. Il reste à déterminer $\rho(A_\alpha)$, c'est l'objet de la sous-section 2.2.2. Nous calculerons en effet le spectre de A_α, ce qui nous permettra de comprendre que la résolvante de A_α est le prolongement analytique (en λ) de la résolvante de l'opérateur transverse A.

Il est important de noter que dans la présentation que nous avons faite, nous ne pouvons faire le prolongement analytique que jusqu'à h, nous ne le faisons pas au-delà puisque, en général, la solution n'est pas analytique à la traversée de $z = h$.

Détaillons maintenant les deux types de chemins que nous allons utiliser dans tout ce mémoire. Dans les applications numériques (cf. chapitres 3 et 5), nous prendrons toujours le cas abrupt.

Exemple 2.1 (cas abrupt) *Un premier choix simple est donné par la formule suivante. Soit $h_2 \geq h$.*

$$\mathcal{C}(\widetilde{z}) := \begin{cases} \widetilde{z} & \text{si } \widetilde{z} < h_2, \\ h_2 + \frac{\widetilde{z}-h_2}{\alpha_\infty} & \text{sinon}, \end{cases} \tag{2.9}$$

avec $\alpha_\infty \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Exemple 2.2 (cas doux) *Un deuxième exemple est un $\mathcal{C}(\widetilde{z})$ plus régulier. Soit $h \leq h_2 < h_3$.*

$$\mathcal{C}(\widetilde{z}) := \begin{cases} \widetilde{z} & \text{si } \widetilde{z} < h_2, \\ \mathcal{C}(\widetilde{z}) & \text{si } h_2 \leq \widetilde{z} < h_3, \\ \frac{\widetilde{z}}{\alpha_\infty} & \text{sinon}, \end{cases} \tag{2.10}$$

avec $\alpha_\infty \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ et tel que $\mathcal{C}(\widetilde{z})$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. On suppose également la partie réelle de $\mathcal{C}(\widetilde{z})$ est strictement croissante et que la partie imaginaire de $\mathcal{C}(\widetilde{z})$ est monotone et telle que sa dérivée est bornée.

Dans tous les cas, $\mathcal{C}(\widetilde{z}) = \widetilde{z}$, pour $\widetilde{z} \leq h_2$: h_2 est donc l'endroit où commence véritablement le changement de variable complexe. La figure 2.5 permet de visualiser dans le plan complexe les deux types de chemins utilisés.

Remarque 2.2 (cas abrupt) **:** *Dans le cas $\mathcal{C}$ abrupt, il y a un défaut de dérivabilité de $\mathcal{C}$ en $\widetilde{z} = h_2$. En fait, on écrit :*

$$\alpha(\widetilde{z}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \widetilde{z} < h_2, \\ \alpha_\infty & \text{sinon}, \end{cases}$$

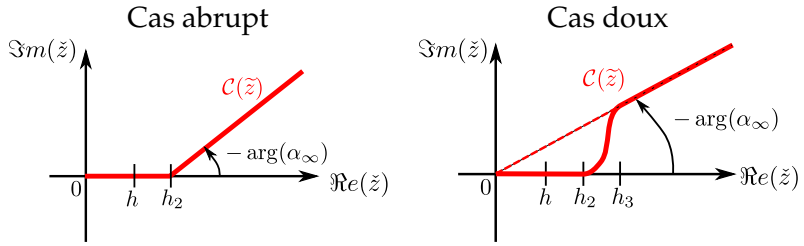

FIGURE 2.5 – *Représentation des chemins $\mathcal{C}(\tilde{z})$ dans les cas abrupt et doux.*

et on interprète les dérivées au sens des distributions. $\mathcal{C}(\tilde{z})$ est alors égal à $\displaystyle\int_0^{\tilde{z}} \frac{\mathrm{d}s}{\alpha(s)}$.

Remarque 2.3 (cas abrupt) **:** *Dans le cas où $\mathcal{C}$ est abrupt, ce qui correspond à α avec un saut, le domaine de A_α n'est pas égal au domaine de A. En effet, en $\tilde{z} = h_2$, on a les relations suivantes :*

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \searrow 0} \widetilde{u}(h_2 - \varepsilon) &= \lim_{\varepsilon \searrow 0} \widetilde{u}(h_2 + \varepsilon), \\ \lim_{\varepsilon \searrow 0} \mu(h_2 - \varepsilon) \frac{\mathrm{d}\widetilde{u}}{\mathrm{d}\tilde{z}}(h_2 - \varepsilon) &= \alpha_\infty \lim_{\varepsilon \searrow 0} \mu(h_2 + \varepsilon) \frac{\mathrm{d}\widetilde{u}}{\mathrm{d}\tilde{z}}(h_2 + \varepsilon). \end{aligned}$$

Dans le cas où α est régulier, $D(A_\alpha) = D(A)$.

Remarque 2.4 : *Sous l'hypothèse $-\pi/2 < \arg_{i\mathbb{R}^+}(\alpha_\infty) < 0$, alors dans tous les cas (abrupt ou doux), $-\pi/2 < \arg_{i\mathbb{R}^+}(\alpha) \leq 0$. Dans le cas abrupt, c'est immédiat, puisque α vaut soit 1 soit α_∞. Dans le cas doux, il suffit de remarquer que la partie réelle et la partie imaginaire de $\mathcal{C}$ sont des fonctions croissantes. Donc la dérivée $\mathcal{C}'$ est incluse dans le secteur $\{\xi \in \mathbb{C}, 0 \leq \arg(\xi) < \pi/2\}$. Le cas $\arg_{i\mathbb{R}^+}(\alpha) = \pi/2$ est exclu car la dérivée de la partie réelle est strictement positive et la dérivée de partie imaginaire ne peut valoir $+\infty$.*

Dans le cas doux, remarquer que le chemin utilisé par Kim et Pasciak (par exemple dans [KP09]) est donné par $\mathcal{C}(\tilde{z}) = \tilde{z}(1 + i\sigma(\tilde{z}))$, où $\sigma(\tilde{z})$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ croissante et positive, valant 0 sur $[0, h]$, valant σ_∞ sur $[h_3, +\infty]$. Le cas que l'on considère ici est un cas un peu plus général.

Résumons-nous. Nous nous sommes donné une fonction $f \in L^2(\mathbb{R}^+)$ à support compact. Nous avons, grâce à un procédé de prolongement analytique dans la variable z de la solution u de l'équation $Au - \lambda u = f$, construit un nouvel opérateur A_α. Ce procédé de prolongement analytique en z peut être interprété comme l'introduction d'une PML infinie : $[h_2, +\infty[$. En effet, nous avons vu que dans $[0, h_2]$, la solution est inchangée : pour $\lambda \in \rho(A) \cap \rho(A_\alpha)$, la restriction à $[0, h_2]$ de $R_{A_\alpha}(\lambda) f$ est égale à la restriction à $[0, h_2]$ de $R_A(\lambda) f$. C'est en ce sens que la PML est parfaitement adaptée, elle ne crée pas de réflexion parasite à l'interface entre le milieu physique et le milieu PML.

Il est intéressant de remarquer que l'on peut voir les PMLs simplement comme un changement de caractéristiques des matériaux. Dans notre cas très simple, nous avons :

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\mu \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}\right) - \omega^2 \rho\, u = \lambda\, \mu\, u \quad \text{qui est devenu} \quad -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\alpha\, \mu \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}\right) - \omega^2 \frac{\rho}{\alpha} u = \lambda \frac{\mu}{\alpha} u.$$

Ceci est général, voir par exemple [TC98] pour les équations de Maxwell. La PML peut être vue comme un matériau fictif. Il est donc facile de la simuler numériquement (il suffit de changer les caractéristiques des matériaux). À la différence des milieux absorbants classiques (qui existent « dans la nature »), les PMLs ne sont pas un milieu physique.

Lien avec la dilatation analytique

La méthode décrite ci-dessus est très liée à ce que des mathématiciens de la physique théorique (Aguilar, Balslev, Combes et Simon) ont développé pour le calcul de résonances pour des systèmes issus de la physique quantique dans les années 1970, c'est-à-dire bien avant l'introduction des PMLs par Bérenger et leur interprétation en terme de changement de variable complexe. Les termes exacts, en anglais, sont ceux d'*analytic dilation* ou d'*analytic dilatation* ou encore de *complex stretching* ou de *complex scaling*. Nous parlerons (en français !) de dilatation analytique. Les papiers originaux définissant la dilatation analytique sont : [AC71] et [BC71]. Cette méthode est également expliquée dans le livre de Reed et Simon [RS80], ou dans celui de Hislop et Sigal [HS95]. Enfin, nous citons deux articles de Simon qui détaillent un peu plus la description : [Sim73] et [Sim78].

L'idée générale est la suivante : étant donné l'opérateur $T = -\triangle$ sur $X = L^2(\mathbb{R}^3)$, nous notons $u(\theta)$ la famille de dilatations unitaire de $L^2(\mathbb{R}^3)$:

$$u(\theta)f(x) = \mathrm{e}^{3\theta/2} f\left(\mathrm{e}^{\theta} x\right), \text{ pour } \theta \in \mathbb{R}, \text{ et pour } x \in \mathbb{R}^3.$$

Nous définissons alors la classe $\mathcal{C}_\alpha$ des potentiels V admissibles :

Définition 2.1 *Soit $\alpha > 0$. Soit V un opérateur non borné sur X. On dit qu'il est de classe $\mathcal{C}_\alpha$ s'il satisfait aux trois conditions suivantes :*

1. *$D(V) = D(T)$, V est symétrique,*
2. *$V : D(T) \to X$ est compact,*
3. *les opérateurs $V(\theta) : D(T) \to X$, définis pour $\theta \in \mathbb{R}$ par : $V(\theta) := u(\theta)Vu(\theta)^{-1}$, ont un prolongement analytique en θ tel que $V(\theta)$ est un opérateur borné de $D(T)$ dans X dans la bande $\{\theta \in \mathbb{C}, |\Im m(\theta)| < \alpha\}$.*

La théorie nous permet de définir un espace $\mathcal{N}_\alpha$ dense dans $X = L^2(\mathbb{R}^3)$, qui est tel que pour toute fonction $\phi \in \mathcal{N}_\alpha$, $u(\theta)\phi$ a un prolongement dans la bande $\{\theta \in \mathbb{C}, |\Im m(\theta)| < \alpha\}$.

On définit l'opérateur hamiltonien $H := T + V$. L'opérateur $H(\theta)$ défini à l'origine pour $\theta \in \mathbb{R}$ par :

$$H(\theta) := u(\theta)Hu(\theta)^{-1} = \mathrm{e}^{-2\theta}T + V(\theta)$$

admet un prolongement analytique dans la bande $\{\theta \in \mathbb{C}, |\Im m(\theta)| < \alpha\}$.

La théorie de Aguilar, Balslev, Combes et Simon définit alors les résonances de la manière suivante :

Définition 2.2 (résonance) *Soit H un hamiltonien. $\lambda \in \mathbb{C}$, tel que $\Im m(\lambda) < 0$, est une* résonance *pour H si, pour tout $\phi \in \mathcal{A}$, un espace dense dans X, $(\phi, R_H(\xi)\phi)_X$ a un prolongement méromorphique de $\Im m(\xi) > 0$ vers une région contenant λ et telle que λ est un pôle de ce prolongement.*

Maintenant, en pratique, si $H = T + V$, avec V appartenant à la classe $\mathcal{C}_\alpha$, alors on prend $\mathcal{A} = \mathcal{N}_\alpha$, qui est bien un espace dense dans X, et le prolongement méromorphique de $(\phi, R_H(\xi)\phi)_X$ est donné par $(\phi, R_{H(\theta)}(\xi)\phi)_X$. En d'autres termes, les résonances sont des valeurs propres de l'opérateur dilaté $H(\theta)$.

Pour pouvoir appliquer cette théorie à notre problème, on devrait faire quelques aménagements. Mais la principale difficulté est qu'on ne peut pas prolonger analytiquement pour tout $z \in \mathbb{R}^+$: comme on l'a déjà montré, a priori on ne peut pas prolonger analytiquement que pour $z \geq h$.

Pour ce type de prolongement analytique, Simon développe ce qu'il appelle un « exterior complex scaling » dans [Sim79], en renvoyant à un article jamais paru pour les démonstrations... Notre description de prolongement analytique ne rentre donc pas directement dans le cadre de la dilatation analytique, qui est faite à l'origine pour des hamiltoniens en physique quantique. Mais il n'en demeure pas moins que la dilatation analytique et les PMLs infinies sont très similaires (l'opérateur A_α que nous avons construit est l'équivalent pour A de l'opérateur $H(\theta)$ pour H) et les propriétés que nous allons démontrer par la suite, concernant le spectre de l'opérateur transformé et le lien qu'il y a avec le spectre de l'opérateur original, sont à rapprocher des propriétés qu'on obtient en faisant de la dilatation analytique sur un hamiltonien en physique quantique.

2.2.2 Spectre de l'opérateur transformé

Nous allons dans cette section déterminer le spectre de l'opérateur dilaté (ou opérateur avec PML infinie) A_α. Ceci nous permettra de comprendre en quoi le processus de prolongement analytique dans la variable z que nous avons utilisé pour construire l'opérateur A_α nous fournit bien un moyen de construire le prolongement analytique en λ de la résolvante $R_A(\lambda)$.

Pour plus de simplicité dans les notations, nous allons enlever les tildes sur les variables z et sur u. Ainsi, A_α est l'opérateur de $L^2(\mathbb{R}^+)$ défini par :

$$A_\alpha u(z) := -\frac{\alpha(z)}{\mu(z)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\alpha(z)\,\mu(z)\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}(z)\right) - k^2(z)\,u(z),$$
$$\forall u \in D(A_\alpha) := \left\{ u \in H_0^1(\mathbb{R}^+),\ \alpha\,\mu\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z} \in H^1(\mathbb{R}^+) \right\}.$$

La difficulté majeure pour déterminer le spectre de A_α est que l'opérateur A_α n'est pas autoadjoint. Nous verrons en effet qu'il admet du spectre complexe.

On rappelle que $\mathcal{C}(z)$ est la paramétrisation du chemin dans le plan complexe. On supposera que ce chemin est donné soit par le cas abrupt, équation (2.9), soit par le cas doux, équation (2.10). On rappelle également que $\alpha = 1/\mathcal{C}'$.

Spectre essentiel

La notion de spectre essentiel pour un opérateur non autoadjoint n'est pas évidente.

Dans le cadre d'un opérateur autoadjoint, on sait définir de trois manières différentes le spectre essentiel :

- le spectre privé du spectre discret,
- l'ensemble des points du spectre qui est stable par perturbation compacte,
- l'ensemble des points du spectre caractérisés par des suites de Weyl.

Ces trois définitions coïncident dans le cas d'un opérateur autoadjoint. Généralement, il en va bien différemment lorsque l'opérateur n'est pas autoadjoint. En annexe, section A.2, nous donnons huit définitions différentes de spectre essentiel (Λ_{ei}, pour $i = 0$ à 7), qui, en général, sont distinctes. Le spectre privé du spectre discret est ainsi Λ_{e5}, l'ensemble des points stables par perturbation compacte Λ_{e4} et l'ensemble des points caractérisés par des suites de Weyl Λ_{e2}. Nous donnons également des propriétés permettant de montrer que ces différentes définitions coïncident, notamment la propriété A.9, que nous allons utiliser pour démontrer le théorème suivant.

Théorème 2.1 (Spectre essentiel de A_α) **:** *Les différentes définitions de spectre essentiel coïncident pour A_α et $\Lambda_{ej}(A_\alpha)$ est égal à : $-k_\infty^2 + \alpha_\infty^2 \mathbb{R}^+$, pour tout $j = 1, \ldots, 7$.*

Nous allons parler, dans la suite, du spectre essentiel de A_α, sans confusion possible, puisque les différentes définitions de spectre essentiel coïncident.

Que pouvons nous tirer de ce théorème ? Il est important de remarquer que le spectre essentiel de A_α est désormais complexe et il a tourné d'un angle de $2\arg_{i\mathbb{R}^+}(\alpha_\infty)$ par rapport au spectre essentiel de l'opérateur A. Partout ailleurs, il n'y a que du spectre discret, i.e. des singularités isolées de $R_{A_\alpha}(\lambda)$. Sur la figure 2.6, nous avons représenté l'effet de la dilatation analytique sur le spectre.

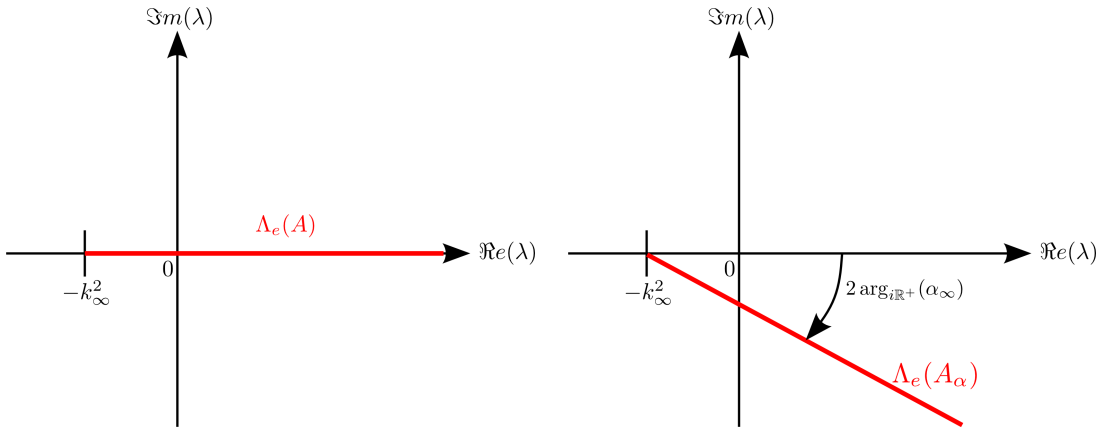

FIGURE 2.6 – *Rotation du spectre essentiel par l'introduction d'une PML de taille infinie.*

Nous pouvons désormais revenir sur la notion de prolongement analytique (en λ) de la résolvante. En effet, nous savons que la résolvante est analytique dans l'ensemble résolvant $\rho(A)$, qui est le complémentaire dans $\mathbb{C}$ du spectre. C'est l'identité de la résolvante qui nous permet d'affirmer cela : pour tout $\xi, \chi \in \rho(A)$,

$$R_A(\xi) - R_A(\chi) = (\xi - \chi) R_A(\xi) R_A(\chi).$$

Par le procédé de dilatation analytique (ou, en d'autres termes, en introduisant une PML de taille infinie), nous avons prolongé analytiquement la solution de l'équation résolvante $Au - \lambda u = f$, pour toute fonction $f \in L^2(\mathbb{R}^+)$ à support dans le cœur $[0, h]$, de telle manière que ce prolongement coïncide avec la solution initiale sur $[0, h_2]$:

$$(R_A(\lambda) f)|_{[0,h_2]} = (R_{A_\alpha}(\lambda) f)|_{[0,h_2]}, \quad \forall \lambda \in \rho(A) \cap \rho(A_\alpha).$$

Et nous venons de voir que l'introduction de la PML infinie a pour conséquence de faire tourner le spectre essentiel. En dehors du spectre essentiel, il ne reste dans le spectre que du spectre discret, i.e. des pôles de la résolvante. En ce sens, nous avons procédé à un prolongement analytique (ou plutôt méromorphique puisqu'il y a des pôles) de la résolvante par rapport à la variable λ en tant qu'opérateur de $L^2_{\text{comp}}(\mathbb{R}^+)$ (puisque f est à support compact) à valeurs dans $L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^+)$ (puisque $R_A(\lambda) f$ et $R_{A_\alpha}(\lambda) f$ ne coïncident que sur un compact).[4]

Dans la zone balayée entre les deux spectres essentiels (le secteur constitué de l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $2\arg_{i\mathbb{R}^+}(\alpha_\infty) < \arg_{i\mathbb{R}^+}(k_\infty^2 + \lambda) \leq 0$), nous allons voir que nous trouvons des valeurs

[4] $L^2_{\text{comp}}(\mathbb{R}^+)$ est défini comme l'ensemble des fonctions $u \in L^2(\mathbb{R}^+)$ à support compact dans $\mathbb{R}^+$ et $L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^+)$ est l'ensemble des fonctions u telles que la restriction de u à tout compact de $\mathbb{R}^+$ est une fonction de $L^2(\mathbb{R}^+)$.

propres discrètes de A_α, c'est-à-dire des pôles de $R_{A_\alpha}(\lambda)$, ou encore des pôles du prolongement analytique de la résolvante de A, c'est la définition que nous avons donnée des modes à fuite.

Remarque 2.5 : *Quand on repense aux modes à fuite dont nous avons parlé dans la section 2.1, il n'est pas étonnant de trouver les modes à fuite dans le secteur* $\{\lambda \in \mathbb{C}, 2\arg_{i\mathbb{R}^+}(\alpha_\infty) < \arg_{i\mathbb{R}^+}(k_\infty^2 + \lambda) \leq 0\}$. *En effet, nous avons vu que les modes à fuite sont de la forme* $\mathrm{e}^{i\beta_\infty z}$ *pour* $z \geq h$. *L'introduction d'une PML de taille infinie modifie le comportement des modes à fuite : ils deviennent proportionnels à* $\mathrm{e}^{i\beta_\infty/\alpha_\infty\, z}$ *dans la PML. Pour que ceux-ci deviennent exponentiellement décroissants (pour qu'ils deviennent des valeurs propres de* A_α*), on voit que nécessairement* $\Im m(\beta_\infty/\alpha_\infty) > 0$ *soit* $2\arg_{i\mathbb{R}^+}(\alpha_\infty) < \arg_{i\mathbb{R}^+}(k_\infty^2 + \lambda)$.

Remarque 2.6 : *Le spectre essentiel de* A_α *est uniquement lié à la PML. Ce n'est pas une quantité intrisèque au problème, contrairement aux modes à fuite.*

Démontrons maintenant le théorème 2.1. Pour cela, on introduit A_α^∞, l'opérateur « à l'infini » :

$$A_\alpha^\infty u := -\left(\alpha_\infty^2 \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}z^2} + k_\infty^2 u\right), \quad \forall u \in D(A_\alpha^\infty) := H^2(\mathbb{R}^+) \cap H_0^1(\mathbb{R}^+).$$

On va utiliser deux lemmes pour démontrer le théorème. Le premier nous donne le spectre de A_α^∞, par des arguments simples de rotation et de translation du spectre du laplacien, et le deuxième lemme nous assure que A_α est une perturbation compacte de A_α^∞ en un certain sens.

Lemme 2.1 (Spectre de A_α^∞) $\quad \Lambda(A_\alpha^\infty) = \Lambda_{ej}(A_\alpha^\infty) = -k_\infty^2 + \alpha_\infty^2 \mathbb{R}^+$, *pour tout* $j = 1, \ldots, 7$.

Démonstration. On sait que le spectre de $-\triangle$ en tant qu'opérateur de $L^2(\mathbb{R}^+)$ à domaine $H^2(\mathbb{R}^+) \cap H_0^1(\mathbb{R}^+)$ est $\mathbb{R}^+$. Comme $A_\alpha^\infty = -\alpha_\infty^2 \triangle - k_\infty^2 I$, on en déduit le résultat. □

Lemme 2.2 *Il existe* $\xi \in \mathbb{C}$ *tel que* $\xi \in \rho(A_\alpha) \cap \rho(A_\alpha^\infty)$. *De plus, pour un tel* ξ, *on a :* $R_{A_\alpha}(\xi) = R_{A_\alpha^\infty}(\xi) + K$, *où* K *est un opérateur compact.*

Démonstration. La première étape consiste à trouver ξ tel que $R_{A_\alpha}(\xi)$ et $R_{A_\alpha^\infty}(\xi)$ existent. Nous allons supposer pour cela que $-\pi/2 < \arg_{i\mathbb{R}^+}(\alpha_\infty) < 0$. Le cas $0 < \arg_{i\mathbb{R}^+}(\alpha_\infty) < \pi/2$ se démontre de la même manière.

On va montrer que $\xi = -k_{\max}^2 + i$ est dans l'ensemble résolvant de A_α et de A_α^∞. Écrivons la formulation variationnelle de l'équation $R_{A_\alpha}(\xi) f = u$. Ceci consiste à multiplier l'équation aux valeurs propres par $\mu/\alpha\overline{v}$ et à intégrer par parties. On obtient : trouver $u \in H_0^1(\mathbb{R}^+)$ tel que pour tout $v \in H_0^1(\mathbb{R}^+)$, on ait :

$$\int_{\mathbb{R}^+} \left(\alpha\, \mu\, \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}\, \frac{\mathrm{d}\overline{v}}{\mathrm{d}z} - \frac{k^2 + \xi}{\alpha}\, \mu\, u\overline{v}\right) \mathrm{d}z = \int_{\mathbb{R}^+} \frac{\mu}{\alpha}\, f\, \overline{v}\, \mathrm{d}z.$$

On cherche alors à pouvoir appliquer le théorème de Lax–Milgram, qui nous assurera l'existence et l'unicité de la solution.

$a(u,v) := \int_{\mathbb{R}^+} \left(\alpha\, \mu\, \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}\, \frac{\mathrm{d}\overline{v}}{\mathrm{d}z} - \frac{k^2+\xi}{\alpha}\, \mu\, u\overline{v}\right) \mathrm{d}z$ est une forme sesquilinéraire continue sur $H_0^1(\mathbb{R}^+)$ et $l(v) := \int_{\mathbb{R}^+} \frac{\mu}{\alpha}\, f\, \overline{v}\, \mathrm{d}z$ est une forme antilinéraire sur $H_0^1(\mathbb{R}^+)$.

Il ne reste plus à montrer que la coercivité de a. Or, pour tout $u \in H_0^1(\mathbb{R}^+)$,

$$a(u,u) = \int_0^{h_2} \mu \left(\left|\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}\right|^2 + (k_{\max}^2 - k^2 - i)|u|^2\right) \mathrm{d}z + \int_{h_2}^{+\infty} \mu_\infty \left(\alpha \left|\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}\right|^2 + \frac{k_{\max}^2 - k_\infty^2 - i}{\alpha}|u|^2\right) \mathrm{d}z$$

La première intégrale admet ses valeurs dans le quart de plan : $\{\xi \in \mathbb{C}, -\pi/2 < \arg_{i\,\mathbb{R}^+}(\xi) < 0\}$. On utilise ensuite la remarque 2.4, qui nous assure (dans le cas abrupt comme dans le cas doux)

que $-\pi/2 < \arg(\alpha) \leq 0$. On en déduit que, la deuxième intégrale est incluse dans le secteur : $\{\xi \in \mathbb{C}, -\pi/2 < \arg_{i\mathbb{R}^+}(\xi) < \pi/2\}$. Ainsi, $a(u,u)$ vit dans le secteur suivant : $\{\xi \in \mathbb{C}, -\pi/2 < \arg_{i\mathbb{R}^+}(\xi) < \pi/2\}$. Les coefficients devant $|\mathrm{d}u/\mathrm{d}z|^2$ et $|u|^2$ dans les intégrales étant en module plus grands qu'une constante strictement positive, on en déduit qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $\Re e(a(u,u)) > C\|u\|^2_{H^1(\mathbb{R}^+)}$, ce qui implique la coercivité.

Par ailleurs, d'après le lemme 2.1, $\xi = -k_{\max}^2 + i \in \rho(A_\alpha^\infty)$.

Maintenant, on veut montrer $R_{A_\alpha}(\xi) = R_{A_\alpha^\infty}(\xi) + K$, où K est un opérateur compact.

Soit (f_n) une suite bornée dans $L^2(\mathbb{R}^+)$. On note $u_n := R_{A_\alpha}(\xi) f_n$ et $u_n^\infty := R_{A_\alpha^\infty}(\xi) f_n$.

On veut montrer que de $w_n := u_n - u_n^\infty$, on peut extraire une sous-suite qui converge fortement dans $L^2(\mathbb{R}^+)$. En fait, on va montrer que w_n converge fortement dans $H^1(\mathbb{R}^+)$.

L'idée générale est d'évaluer la différence des formulations variationnelles associées aux problèmes $(A_\alpha - \xi)u_n = f_n$ et $(A_\alpha^\infty - \xi)u_n^\infty = f_n$ (toujours avec $\xi \in \rho(A_\alpha) \cap \rho(A_\alpha^\infty)$:

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\mu}{\alpha}(A-\xi)u_n - \frac{\mu_\infty}{\alpha_\infty}(A_\infty - \xi)u_n^\infty, v\right)_{L^2(\mathbb{R}^+)} \\
&= \int_{\mathbb{R}^+} \left(\alpha\,\mu\,\frac{\mathrm{d}u_n}{\mathrm{d}z}\,\frac{\mathrm{d}\overline{v}}{\mathrm{d}z} - \frac{\omega^2\rho + \mu\xi}{\alpha} u_n\,\overline{v}\right)\mathrm{d}z - \int_{\mathbb{R}^+}\left(\alpha_\infty\,\mu_\infty\,\frac{\mathrm{d}u_n^\infty}{\mathrm{d}z}\,\frac{\mathrm{d}\overline{v}}{\mathrm{d}z} - \frac{\omega^2\rho_\infty + \mu_\infty\xi}{\alpha_\infty}\,u_n^\infty\,\overline{v}\right)\mathrm{d}z \\
&= \int_{\mathbb{R}^+}\frac{\mu}{\alpha}\,f_n\overline{v}\,\mathrm{d}z - \int_{\mathbb{R}^+}\frac{\mu_\infty}{\alpha_\infty}\,f_n\overline{v}\,\mathrm{d}z.
\end{aligned}$$

On en déduit (en utilisant $w_n = u_n - u_n^\infty$) :

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^+}\alpha\,\mu\,\frac{\mathrm{d}w_n}{\mathrm{d}z}\,\frac{\mathrm{d}\overline{v}}{\mathrm{d}z}\,\mathrm{d}z - \int_{\mathbb{R}^+}\alpha_\infty\,\mu_\infty\,\frac{\mathrm{d}u_n^\infty}{\mathrm{d}z}\,\frac{\mathrm{d}\overline{v}}{\mathrm{d}z}\,\mathrm{d}z + \int_{\mathbb{R}^+}\alpha\,\mu\,\frac{\mathrm{d}u_n^\infty}{\mathrm{d}z}\,\frac{\mathrm{d}\overline{v}}{\mathrm{d}z}\,\mathrm{d}z \\
&\quad - \int_{\mathbb{R}^+}\frac{\omega^2\rho + \mu\xi}{\alpha}\,w_n\,\overline{v}\,\mathrm{d}z + \int_{\mathbb{R}^+}\frac{\omega^2\rho_\infty + \mu_\infty\xi}{\alpha_\infty}\,u_n^\infty\,\overline{v}\,\mathrm{d}z - \int_{\mathbb{R}^+}\frac{\omega^2\rho + \mu\xi}{\alpha}\,u_n^\infty\,\overline{v}\,\mathrm{d}z \\
&\qquad = \int_{\mathbb{R}^+}\left(\frac{\mu}{\alpha} - \frac{\mu_\infty}{\alpha_\infty}\right) f_n\,\overline{v}\,\mathrm{d}z.
\end{aligned}$$

On prend maintenant $v = w_n$, on obtient :

$$a_n = b_n + c_n + d_n,$$

avec

$$\begin{aligned}
a_n &:= \int_{\mathbb{R}^+}\left(\alpha\,\mu\left|\frac{\mathrm{d}w_n}{\mathrm{d}z}\right|^2 - \frac{\omega^2\rho + \mu\xi}{\alpha}\,|w_n|^2\right)\mathrm{d}z, \\
b_n &:= \int_{\mathbb{R}^+}\left(\frac{\mu}{\alpha} - \frac{\mu_\infty}{\alpha_\infty}\right) f_n\overline{w_n}\,\mathrm{d}z, \\
c_n &:= \int_{\mathbb{R}^+}(\alpha_\infty\,\mu_\infty - \alpha\,\mu)\frac{\mathrm{d}u_n^\infty}{\mathrm{d}z}\,\frac{d\overline{w_n}}{dz}\,\mathrm{d}z, \\
d_n &:= \int_{\mathbb{R}^+}\left(\frac{\omega^2\rho + \mu\xi}{\alpha} - \frac{\omega^2\rho_\infty + \mu_\infty\xi}{\alpha_\infty}\right) u_n^\infty\,\overline{w_n}\,\mathrm{d}z.
\end{aligned}$$

D'après la première étape, on a : $|a_n| \geq C\|w_n\|^2_{H^1(\mathbb{R}^+)}$.

On veut montrer que w_n converge fortement dans $L^2(\mathbb{R}^+)$, à l'extraction d'une sous-suite près. Quitte à prendre $f_n - f$, f étant la limite faible de f_n (qui existe puisque f_n est bornée dans

$L^2(\mathbb{R}^+)$ [Bre83, théorème III.27]), on peut se ramener au cas où $f_n \rightharpoonup 0$ dans $L^2(\mathbb{R}^+)$. Nous allons donc le supposer. Et on veut montrer que $w_n \to 0$ dans $H^1(\mathbb{R}^+)$.

Comme $f_n \rightharpoonup 0$ dans $L^2(\mathbb{R}^+)$, u_n et w_n tendent faiblement vers 0 dans $H^1(\mathbb{R}^+)$ et u_n^∞ tend faiblement vers 0 dans $H^2(\mathbb{R}^+)$. En effet, $R_{A_\alpha}(\xi)$ est un opérateur borné de $L^2(\mathbb{R}^+)$ à valeurs dans $D(A_\alpha)$ qui contient $H^1(\mathbb{R}^+)$ et $R_{A_\alpha^\infty}(\xi)$ est un opérateur borné de $L^2(\mathbb{R}^+)$ à valeurs dans $H^2(\mathbb{R}^+) \cap H_0^1(\mathbb{R}^+)$.

Notons Ω_B le support de $\alpha - \alpha_\infty$. Par hypothèse sur α, Ω_B est un compact. On regarde maintenant chacun des termes :

- b_n : L'intégrale sur $\mathbb{R}^+$ a en fait lieu sur le domaine borné Ω_B :

$$b_n = \int_{\Omega_B} \left(\frac{\mu}{\alpha} - \frac{\mu_\infty}{\alpha_\infty} \right) f_n \, \overline{w_n} \, \mathrm{d}z.$$

  La suite (f_n) est bornée dans $L^2(\Omega_B)$ et, par théorème de Rellich, comme $w_n \rightharpoonup 0$ dans $H^1(\Omega_B)$, $w_n \to 0$ dans $L^2(\Omega_B)$. On en déduit donc que $b_n \to 0$.

- c_n : De même que pour b_n, remarquer que c_n s'écrit :

$$c_n = \int_{\Omega_B} (\alpha_\infty \mu_\infty - \alpha\mu) \, \frac{\mathrm{d}u_n^\infty}{\mathrm{d}z} \, \frac{\mathrm{d}\overline{w_n}}{\mathrm{d}z} \, \mathrm{d}z.$$

  Or, $\mathrm{d}u_n^\infty/\mathrm{d}z \to 0$ dans $L^2(\Omega_B)$ car u_n^∞ tend faiblement vers 0 dans $H^2(\Omega_B)$. Par ailleurs, $\mathrm{d}w_n/\mathrm{d}z$ est borné dans $L^2(\Omega_B)$. Donc $c_n \to 0$.

- d_n : On a :

$$d_n = \int_{\Omega_B} \left(\frac{\omega^2\rho + \mu\xi}{\alpha} - \frac{\omega^2\rho_\infty + \mu_\infty\xi}{\alpha_\infty} \right) u_n^\infty \, \overline{w_n} \, \mathrm{d}z$$

  On a de plus : u_n^∞ est borné dans $L^2(\Omega_B)$ et $w_n \to 0$ dans $L^2(\Omega_B)$. Donc $d_n \to 0$.

On en déduit que $a_n \to 0$, puis comme $a_n \geq C\|w_n\|^2_{H^1(\mathbb{R}^+)}$, on en déduit que $\|w_n\|_{H^1(\mathbb{R}^+)} \to 0$. Ceci montre que $R_{A_\alpha}(\xi) = R_{A_\alpha^\infty}(\xi) + K$, où K est un opérateur compact. □

Nous sommes maintenant en mesure donner la preuve du théorème 2.1.

Démonstration. (du théorème 2.1). Du lemme 2.2, et de la proposition A.10 (voir annexe A.2), on déduit que

$$\Lambda_{e4}(R_{A_\alpha}(\xi)) = \Lambda_{e4}(R_{A_\alpha^\infty}(\xi)).$$

Λ_{e4} est en effet le spectre stable par perturbation compacte.

Ensuite, en utilisant le lemme 2.1 et le lemme A.1 (qui donne le lien entre le spectre d'un opérateur et celui de sa résolvante), on en déduit que

$$\Lambda_{e4}(R_{A_\alpha^\infty}(\xi)) = \Lambda(R_{A_\alpha^\infty}(\xi)) = \left\{ \frac{1}{\lambda - \xi}, \lambda \in -k_\infty^2 + \alpha_\infty^2 \mathbb{R}^+ \right\}.$$

Enfin, en utilisant la proposition A.9 (qui permet de démontrer que les différentes définitions de spectres essentiels coïncident), comme $\Lambda(R_{A_\alpha}(\xi)) \setminus \Lambda_{e4}(R_{A_\alpha^\infty}(\xi))$ n'a qu'une composante connexe et qu'elle contient un point de $\rho(R_{A_\alpha}(\xi))$, on en déduit que

$$\Lambda_{ej}(R_{A_\alpha}(\xi)) = \left\{ \frac{1}{\lambda - \xi}, \lambda \in -k_\infty^2 + \alpha_\infty^2 \mathbb{R}^+ \right\}, \quad \forall j = 1, \ldots, 7.$$

Donc, on en déduit, en utilisant encore le lemme A.1, que :

$$\lambda \in \Lambda_{e7}(A) \Leftrightarrow \frac{1}{\lambda - \xi} \in \Lambda_{e7}(R_A(\xi)).$$

Puis,

$$\Lambda_{ej}(A_\alpha) = -k_\infty^2 + \alpha_\infty^2 \mathbb{R}^+, \quad \forall j = 1, \ldots, 7.$$

□

Spectre discret

Passons maintenant à l'étude du spectre discret de l'opérateur A_α. Nous allons, dans cette partie, supposer que $\Im m(\alpha_\infty) < 0$ et $\Re e(\alpha_\infty) > 0$. En d'autres termes, $-\frac{\pi}{2} < \arg_{i\mathbb{R}^+}(\alpha_\infty) < 0$. Nous verrons ultérieurement comment traiter le cas où $0 < \arg_{i\mathbb{R}^+}(\alpha_\infty) < \frac{\pi}{2}$.

Théorème 2.2 (spectre discret de A_α) **:** *Le spectre discret de A_α est composé de deux parties :*

- *le spectre discret de A, inclus dans l'intervalle réel $]-k_{\max}^2, -k_\infty^2[$.*
- *un ensemble dénombrable de valeurs propres, de multiplicité finie et isolées, qui sont incluses dans le secteur $\{\lambda \in \mathbb{C}, 2\arg_{i\mathbb{R}^+}(\alpha_\infty) < \arg_{i\mathbb{R}^+}(k_\infty^2 + \lambda) \leq 0\}$. Pour ces valeurs propres, les fonctions propres sont proportionnelles à l'infini à $\exp(i\beta_\infty \frac{z}{\alpha_\infty})$, où β_∞ est défini en (1.8)*

Démonstration. Soit $\lambda \in \Lambda_{disc}(A_\alpha)$. Nous avons déjà montré que le spectre essentiel de A_α est égal à $-k_\infty^2 + \alpha_\infty^2 \mathbb{R}^+$. Donc nécessairement $\lambda \notin -k_\infty^2 + \alpha_\infty^2 \mathbb{R}^+$.

Considérons $\widetilde{u}$ une fonction propre associée à λ. La fonction $\widetilde{u}$ vérifie l'équation suivante, pour $z > h_3$ (ou $z > h_2$ dans le cas abrupt) :

$$-\frac{\mathrm{d}^2\widetilde{u}}{\mathrm{d}z^2} - \frac{k_\infty^2 + \lambda}{\alpha_\infty^2}\widetilde{u} = 0.$$

Comme $\widetilde{u} \in D(A_\alpha)$, on en déduit que $\widetilde{u}$ est proportionnelle à $\exp(-\gamma_\infty^\alpha z/\alpha_\infty)$ à l'infini, où $\gamma_\infty^\alpha := \sqrt[-\alpha_\infty^2\mathbb{R}^+]{-k_\infty^2 - \lambda}$ (en dehors du spectre essentiel de A_α, $\Re e(\gamma_\infty^\alpha/\alpha_\infty) > 0$, donc $\exp(-\gamma_\infty^\alpha z/\alpha_\infty)$ est exponentiellement décroissante).

L'idée consiste maintenant à utiliser le changement de variable complexe inverse. Posons $u(z) := \widetilde{u}(\mathcal{C}^{-1}(z))$, où $\mathcal{C}^{-1}$ est la fonction réciproque de $\mathcal{C}$. Nous avons ici, pour ne pas alourdir les notations, gardé la même notation $\widetilde{u}$ pour le prolongement à la variable complexe de la fonction $\widetilde{u}$ définie initialement pour une variable réelle. La fonction u de la variable réelle z vérifie les équations suivantes :

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{\mu}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\mu\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}\right) - (k^2 + \lambda)\, u(z) = 0, \quad \forall z \in \mathbb{R}^+, \\ &u(0) = 0, \end{aligned}$$

et, de plus, à l'infini, u est proportionnel à $\exp(-\gamma_\infty^\alpha z)$. La question est maintenant de savoir quand le u ainsi construit est une fonction propre de A. En d'autres termes, quand $\exp(-\gamma_\infty^\alpha z)$ est-il exponentiellement croissant ou décroissant ?

Nous avons alors l'alternative suivante :

$$\text{soit} \quad -3\pi/2 < \arg_{i\mathbb{R}^+}(k_\infty^2+\lambda) < 2\arg_{i\mathbb{R}^+}(\alpha_\infty) \text{ ou } 0 < \arg_{i\mathbb{R}^+}(k_\infty^2+\lambda) < \pi/2, \tag{2.11}$$

$$\text{soit} \quad 2\arg_{i\mathbb{R}^+}(\alpha_\infty) < \arg_{i\mathbb{R}^+}(k_\infty^2+\lambda) \leq 0. \tag{2.12}$$

Les différentes zones sont représentées sur la figure 2.7.

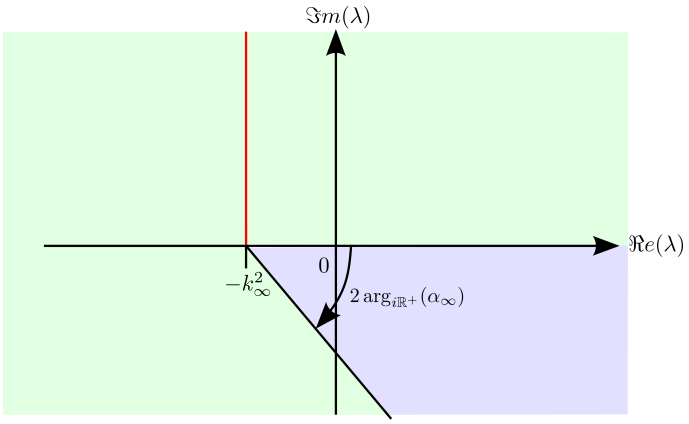

FIGURE 2.7 – *En vert, la zone donnée par l'équation (2.11). En bleu, la zone donnée par l'équation (2.12). La coupure est représentée en rouge.*

Dans le premier cas (2.11), $\Re e(\gamma_\infty^\alpha) > 0$. Ainsi, u construit par prolongement analytique de $\widetilde{u}$ (par le changement de variable complexe $\mathcal{C}^{-1}$) est une fonction propre de l'opérateur A. Or, on a vu que les seules valeurs propres possibles de A sont réelles et dans l'intervalle $]-k_{\max}^2, -k_\infty^2]$. On exclut ensuite la valeur $-k_\infty^2$ car elle appartient au spectre essentiel de A_α. On en déduit alors un premier ensemble de valeurs propres pour A_α : $\Lambda_{disc}(A) \subset \Lambda_{disc}(A_\alpha)$.

Dans le deuxième cas (2.12), $\Re e(\gamma_\infty^\alpha) < 0$. La fonction $\exp(-\gamma_\infty^\alpha z)$ est alors exponentiellement croissante donc la fonction $\widetilde{u}$ ne définit pas une fonction propre de A. Par ailleurs, $-\gamma_\infty^\alpha = i\beta_\infty$. Donc la fonction $\widetilde{u}$ est de la forme suivante, à l'infini : $\exp(i\beta_\infty \frac{z}{\alpha_\infty})$.

Il reste maintenant à regarder ce qui se passe sur la coupure de l'argument : quand $k_\infty^2+\lambda \in i\mathbb{R}^+$. En prolongeant alors la définition de la racine carrée soit d'un côté (quand l'argument tend vers $-3\pi/2$) soit de l'autre côté (quand l'argument tend vers $\pi/2$), nous nous trouvons dans le cas (2.11), donc il ne peut y avoir de valeurs propres sur la coupure de β_∞. □

Corollaire 2.1 *Les deux propositions suivantes sont équivalentes :*

1. $$\lambda \in \Lambda_{disc}(A_\alpha) \setminus \Lambda_{disc}(A).$$

2. $$2\arg_{i\mathbb{R}^+}(\alpha_\infty) < \arg_{i\mathbb{R}^+}(k_\infty^2+\lambda) \leq 0$$
   et il existe u tel que
   $$\left|\begin{array}{l} -\frac{1}{\mu}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\mu\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}\right) - (k^2+\lambda)\,u(z) = 0, \quad \forall z \in \mathbb{R}^+, \\ u(0) = 0, \\ u \text{ est sortant, i.e. } u \text{ est proportionnel à } \exp(i\beta_\infty z) \text{ à l'infini.} \end{array}\right.$$

Démonstration. Nous avons déjà démontré dans la preuve du théorème 2.2 que le sens 1 implique 2. Montrons la réciproque. Soit λ tel que $2\arg_{i\mathbb{R}^+}(\alpha_\infty) < \arg_{i\mathbb{R}^+}(k_\infty^2+\lambda) \leq 0$ (en particulier $\lambda \notin \Lambda(A)$) et soit u tel que $u(0)=0$ et tel que

$$-\frac{1}{\mu}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\mu\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}\right) - (k^2+\lambda)\,u(z) = 0, \quad \forall z \in \mathbb{R}^+,$$

u est sortant, i.e. u est proportionnel à $\exp(i\beta_\infty z)$ à l'infini. Prenons alors $\widetilde{u}(\widetilde{z}) = u(\mathcal{C}(\widetilde{z}))$. On vérifie alors que $\widetilde{u}$ est une fonction propre associée à λ pour l'opérateur A_α, puisque $\widetilde{u}$ est proportionnel à $\exp(i\beta_\infty \widetilde{z}/\alpha_\infty)$ à l'infini, qui est exponentiellement décroissant. □

Remarque 2.7 : *On remarque avec ce corollaire que les valeurs propres appartenant à $\Lambda_{disc}(A_\alpha) \setminus \Lambda_{disc}(A)$ ne dépendent pas de α. Ce sont des objets intrinsèques à l'opérateur A. L'introduction de la PML est donc simplement un moyen de les découvrir.*

Nous sommes maintenant en mesure de donner une définition plus précise des modes à fuite.

Définition 2.3 *Soit $\lambda \in \Lambda_{disc}(A_\alpha) \setminus \Lambda_{disc}(A)$ et soit Φ_λ^α une fonction propre associée. Nous prenons comme définition du nombre d'onde longitudinal $\beta := \sqrt[\mathbb{R}^-]{-\lambda}$, ainsi, la partie réelle de β ainsi que sa partie imaginaire sont positives. Si $\lambda > 0$, nous prenons $\beta = i\sqrt{\lambda}$. Cette définition généralise celle qui a été vue au chapitre 1 pour les modes guidés et de radiation : équation (1.20).*

Nous appelons mode à fuite *le mode $\varphi_\lambda^{\rightarrow}(x,z) = \Phi_\lambda^\alpha(\mathcal{C}^{-1}(z))\,\mathrm{e}^{i\beta x}$ (qui est évanescent vers la droite) ou $\varphi_\lambda^{\leftarrow}(x,z) = \Phi_\lambda^\alpha(\mathcal{C}^{-1}(z))\,\mathrm{e}^{-i\beta x}$ (qui est évanescent vers la gauche).*

Nous retrouvons les propriétés essentielles des modes à fuite que nous avions trouvées à la section 2.1. Les modes à fuite ne sont pas des valeurs propres de l'opérateur transverse A. En conséquence, en tant qu'objets de la variable transverse z, ils n'appartiennent pas à $L^2(\mathbb{R}^+)$, ils sont même exponentiellement croissants. Cette croissance exponentielle dans la direction transverse (z) a une contre-partie dans la direction longitudinale (x). En effet le mode $\varphi_\lambda^{\rightarrow}$ est exponentiellement décroissant lorsque x augmente et le mode $\varphi_\lambda^{\leftarrow}$ est exponentiellement décroissant lorsque x diminue. Ces modes sont donc évanescents dans la direction longitudinale.

Bilan sur le spectre de l'opérateur A_α

Commençons par une remarque sur le spectre de l'opérateur si on prenait α à partie imaginaire positive.

Remarque 2.8 (Et si α_∞ était à partie imaginaire positive ?) **:** *On trouve alors un spectre essentiel, qui est toujours égal à $-\alpha_\infty^2\mathbb{R}^+ - k_\infty^2$. Concernant le spectre discret, on peut refaire toute l'étude qu'on a faite jusque ici, en l'adaptant. Mais il suffit en fait de prendre le conjugué de la caractérisation du corollaire 2.1 des modes à fuite. Soit α_∞ à partie imaginaire négative, comme auparavant, et soit $\lambda \in \Lambda_{disc}(A_\alpha) \setminus \Lambda_{disc}(A)$. En prenant le conjugué de la caractérisation des modes à fuite comme objets sortants, on obtient : $0 \leq \arg_{i\mathbb{R}^+}(k_\infty^2+\overline{\lambda}) < 2\arg_{i\mathbb{R}^+}(\overline{\alpha_\infty})$ et il existe u tel que*

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{\mu}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\mu\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}\right) - (k^2+\overline{\lambda})\,u(z) = 0, \quad \forall z \in \mathbb{R}^+,\\
&u(0) = 0,\\
&u \text{ est entrant, i.e. } u \text{ est proportionnel à } \exp(i\sqrt[i\mathbb{R}^+]{\overline{\lambda}+k_\infty^2}\,z) \text{ à l'infini.}
\end{aligned}$$

Ainsi, si λ est un mode à fuite (sortant), alors $\overline{\lambda}$ est un mode à fuite « entrant ». En d'autres termes, si λ est dans le spectre de A_α, alors $\overline{\lambda}$ est dans le spectre de $A_{\overline{\alpha}}$. Les modes à fuite entrants sont ainsi également

des objets exponentiellement croissants par rapport à la variable z. En pratique, nous ne nous intéressons qu'aux modes à fuite sortants, puisque ce sont eux qui permettent de représenter des ondes sortantes, qui fuient vers l'extérieur.

Sur la figure 2.8, nous avons représenté les différents types de modes et l'effet du prolongement analytique sur ces modes. Lorsque nous introduisons la PML infinie, nous pouvons voir l'effet de

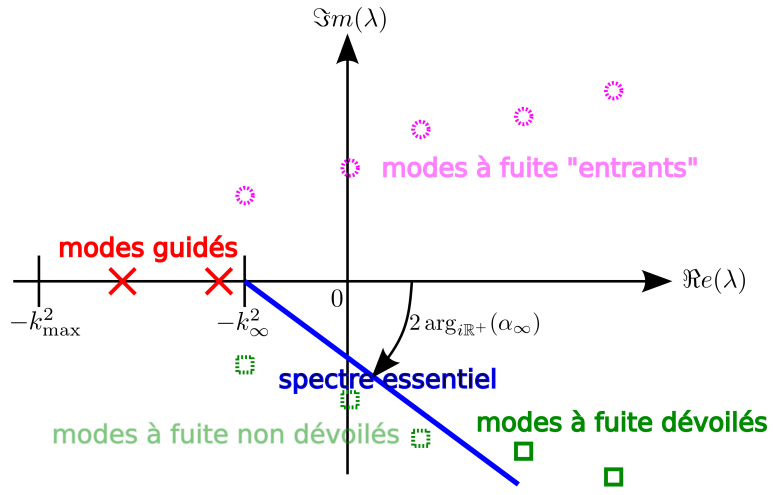

FIGURE 2.8 – *Modes guidés, modes à fuite et spectre essentiel.*

cette PML infinie comme une rotation du spectre essentiel de l'angle $2\arg_{i\mathbb{R}^+}(\alpha_\infty)$.

Dans le secteur $2\arg_{i\mathbb{R}^+}(\alpha_\infty) < \arg_{i\mathbb{R}^+}(k_\infty^2+\lambda) \leq 0$, nous dévoilons, grâce à la PML infinie, un ensemble discret de modes à fuite (les modes dessinés en carrés verts pleins). Par contre, nous ne dévoilons pas les modes à fuite pour lesquels $2\arg_{i\mathbb{R}^+}(\alpha_\infty) > \arg_{i\mathbb{R}^+}(k_\infty^2+\lambda)$ (les carrés verts en pointillés). Nous voyons sur cette figure que les modes à fuite entrants (les ronds violets en pointillés, qui sont les conjugués des modes à fuite) ne sont pas dévoilés non plus, puisque nous avons pris $-\frac{\pi}{2} < \arg_{i\mathbb{R}^+}(\alpha_\infty) < 0$.

Enfin, les modes guidés (le spectre discret de l'opérateur A : les croix rouges) ce sont pas affectés par le prolongement analytique : les valeurs propres discrètes de l'opérateur A sont également des valeurs propres discrètes de l'opérateur A_α. Les fonctions propres correspondantes sont simplement modifiées dans la PML : si $\Phi_\lambda(z)$ est une fonction propre de A alors $\Phi_\lambda(\mathcal{C}(z))$ est une fonction propre de A_α. Par contre, si l'on prenait $|\arg_{i\mathbb{R}^+}(\alpha_\infty)| > \frac{\pi}{2}$, alors les modes guidés ne seraient plus valeurs propres de l'opérateur A_α. En effet, si $\Phi_\lambda(z)$ est une fonction propre de A, alors $\Phi_\lambda(\mathcal{C}(z))$ deviendrait exponentiellement croissante.

En fait, modes guidés, modes à fuite et modes à fuite « entrants » peuvent être vus comme des objets de la même nature. Ce sont tous des solutions des équations

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{\mu}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\mu\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}\right) - (k^2+\lambda)\,u(z) = 0, \quad \forall z \in \mathbb{R}^+, \\ &u(0) = 0. \end{aligned}$$

Pour les modes guidés, on impose à u d'être de la forme $\exp(-\gamma_\infty z)$ à l'infini, pour les modes à fuite d'être de la forme $\exp(i\beta_\infty z)$ et pour les modes à fuite « entrants » de la forme $\exp(i\sqrt[i\mathbb{R}^+]{\lambda+k_\infty^2}\,z)$. Or, ces trois fonctions, en tant que fonction de λ sont des restrictions de la même fonction de la variable complexe λ dans une surface de Riemann à deux feuillets, du fait

de la présence de la racine carrée. L'argument de α, le paramètre de la PML, permet de choisir les modes auxquels on a accès, i.e. ceux qui sont véritablement des valeurs propres de l'opérateur A_α. Sans PML, i.e. en prenant $\alpha = 1$, nous n'avons accès qu'aux modes guidés. En prenant α à argument inclus strictement entre $-\pi/2$ et 0, nous avons toujours accès aux modes guidés et aux modes à fuite que nous avons « dévoilés ». De même en prenant α à argument inclus strictement entre 0 et $\pi/2$, nous avons accès aux modes guidés et aux modes à fuite « entrants » que nous avons « dévoilés ». Sur la figure 2.9, nous représentons les deux feuillets de Riemann où vivent les modes. Nous représentons également les zones auxquelles nous avons accès grâce à la PML dans différentes configurations.

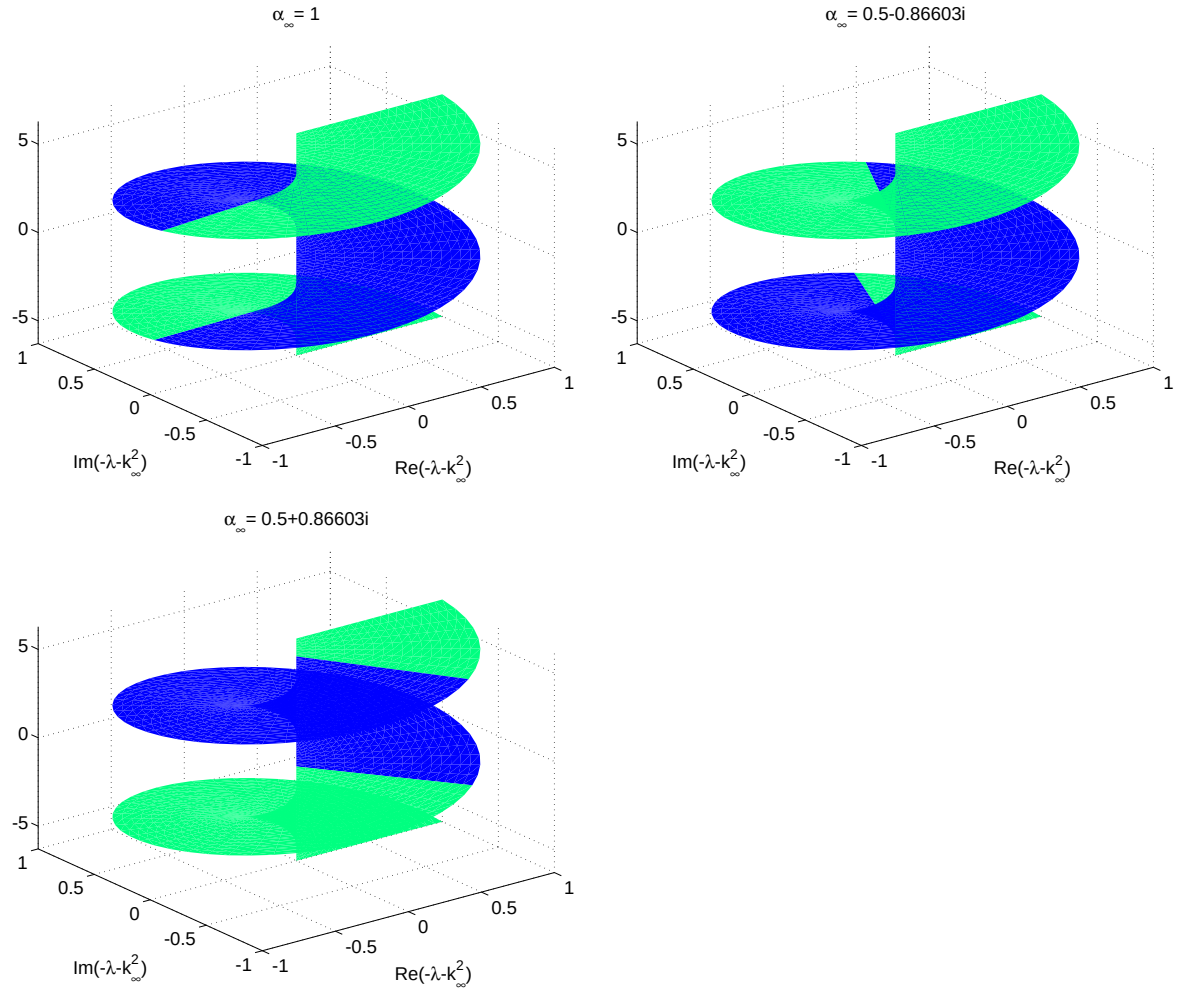

FIGURE 2.9 – *Représentation symbolique de la surface de Riemann à deux feuillets sur laquelle vivent les modes guidés, les modes à fuite et les modes à fuite « entrants ». En bleu, est représentée la zone accessible et en vert la zone non accessible, pour trois valeurs de α_∞. La première figure (en haut à gauche) représente le cas $\alpha_\infty = 1$: ce qui correspond au cas sans PML, on n'a alors accès qu'aux modes guidés. En haut à droite est représenté le cas $\alpha_\infty = \exp(-i\pi/3)$. Ici, nous avons toujours accès aux modes guidés mais aussi aux modes à fuite qui sont dévoilés dans la zone qui était verte dans la première figure et qui est devenue bleue. Par contre, les éventuels modes à fuite dans la zone qui est toujours verte ne sont pas dévoilés. En bas à gauche est représenté le cas $\alpha_\infty = \exp(-i\pi/3)$. Nous avons accès aux modes guidés et aux modes à fuite « entrants » situés dans la zone qui était verte dans la première figure et qui est maintenant bleue. De manière imagée, on peut dire que choisir α correspond à choisir la zone à laquelle on veut accéder. On « coupe » la surface de Riemann là où le bleu et le vert se rejoignent et on « recolle » en ne gardant que le bleu. L'endroit où on recolle correspond au spectre essentiel.*

Terminons cette discussion sur une remarque concernant le comportement dans la direction de propagation x des modes à fuite. On a déjà vu que les modes à fuite sont tous évanescents : $\varphi_\lambda^\rightarrow$ est exponentiellement décroissant lorsque x augmente et $\varphi_\lambda^\leftarrow$ est exponentiellement décroissant lorsque x diminue. Il y a néanmoins, en pratique, deux types de modes à fuite : ceux qui sont « presque » propagatifs : β est alors près d'un nombre réel (ces modes sont très peu évanescents) et les autres, qui sont très évanescents : β est alors proche d'un nombre appartenant à $i\mathbb{R}^+$. Nous verrons, dans les chapitres 3 et 5 (qui traitent du numérique), que ce sont en priorité les modes « presque » propagatifs qu'il faut prendre en compte dans une méthode numérique. C'est la même idée que dans le cas d'un guide fermé : il faut prendre en compte en priorité les modes propagatifs, puis, éventuellement les modes évanescents.

Sur la figure 2.10, nous avons représenté un mode guidé et deux modes à fuite dans le cas du guide 2D avec condition de Dirichlet en $z = 0$ et avec coefficients constants dans le cœur, en prenant comme paramètres

$$h = 20,\ \mu = 1,\ \omega = 2\pi\,\frac{0.05}{1.55},\ n_0 = 2.872,\ n_\infty = 1.45 \quad \text{et} \quad c(z) = \begin{cases} c_0 = \frac{1}{n_0} & \text{si } z < h, \\ c_\infty = \frac{1}{n_\infty} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ce cas correspond à un guide planaire optique, d'indice de réfraction n_0 dans le cœur et n_∞ dans la gaine, illuminé par une onde de longueur d'onde $1.55\mu\mathrm{m}$ avec une hauteur de guide de $20/0.05\mu\mathrm{m} = 400\mu\mathrm{m}$, dans la polarisation TE, en ne considérant que les modes asymétriques (puisque on impose une condition de Dirichlet en $z = 0$). Nous représentons ces modes sans PML (à gauche) et en utilisant une PML abrupte de paramètre $\alpha_\infty = \mathrm{e}^{-i\pi/3}$, avec $h_2 = 2h$.

En haut, nous observons un mode guidé, avec ou sans PML, on se rend compte que comme le mode est localisé dans le cœur, la PML ne change pas grand chose. Au milieu, nous représentons un mode à fuite très évanescent. Sans PML (à gauche), on se rend compte qu'il est croissant dans la direction z, alors qu'avec la PML, il devient décroissant dans la PML. On remarque également que le mode à fuite est très décroissant dans la direction x. En bas, nous représentons un mode à fuite « presque » propagatif. Même s'il est atténué dans la direction x, on voit qu'il l'est beaucoup moins que le mode à fuite précédent. Dans la direction z, le même commentaire que pour le mode à fuite précédent peut être fait : sans la PML, le mode est exponentiellement croissant ; avec la PML, le mode devient un élément de $L^2(\mathbb{R}^+)$.

2.3 Le cas d'un guide 3D

Nous allons maintenant traiter le cas d'un guide 3D. L'idée est d'utiliser, comme dans le cas 2D, une PML pour prolonger analytiquement la résolvante.

Dans le cas du guide 2D, il n'y avait qu'une direction transverse et nous avons prolongé analytiquement la solution dans cette variable, ce qui revenait à introduire une PML infinie. Dans le cas du guide 3D, une question se pose alors : dans quelle(s) direction(s) prolonger analytiquement la solution ? Nous allons explorer deux possibilités : soit prolonger dans la direction radiale $r := \sqrt{y^2 + z^2}$, ce qui revient à utiliser une PML radiale, soit prolonger dans les deux directions transverses y et z, ce qui revient à utiliser des PMLs cartésiennes.

Commençons par détailler le cas d'une PML radiale. Citons l'article de Collino et Monk [CM98] qui décrit les PMLs radiales et comment les implémenter dans une méthode numérique. Dans toute la suite de cette section, nous noterons A l'opérateur transverse. Nous rappelons que cet opérateur est l'opérateur de $L^2(\mathbb{R}^2)$ défini par :

$$Au = -\frac{1}{\mu}\,\mathrm{div}(\mu\nabla u) - k^2 u, \quad \forall u \in D(A) := \{u \in H^1(\mathbb{R}^2), \mathrm{div}(\mu\nabla u) \in L^2(\mathbb{R}^2)\}.$$

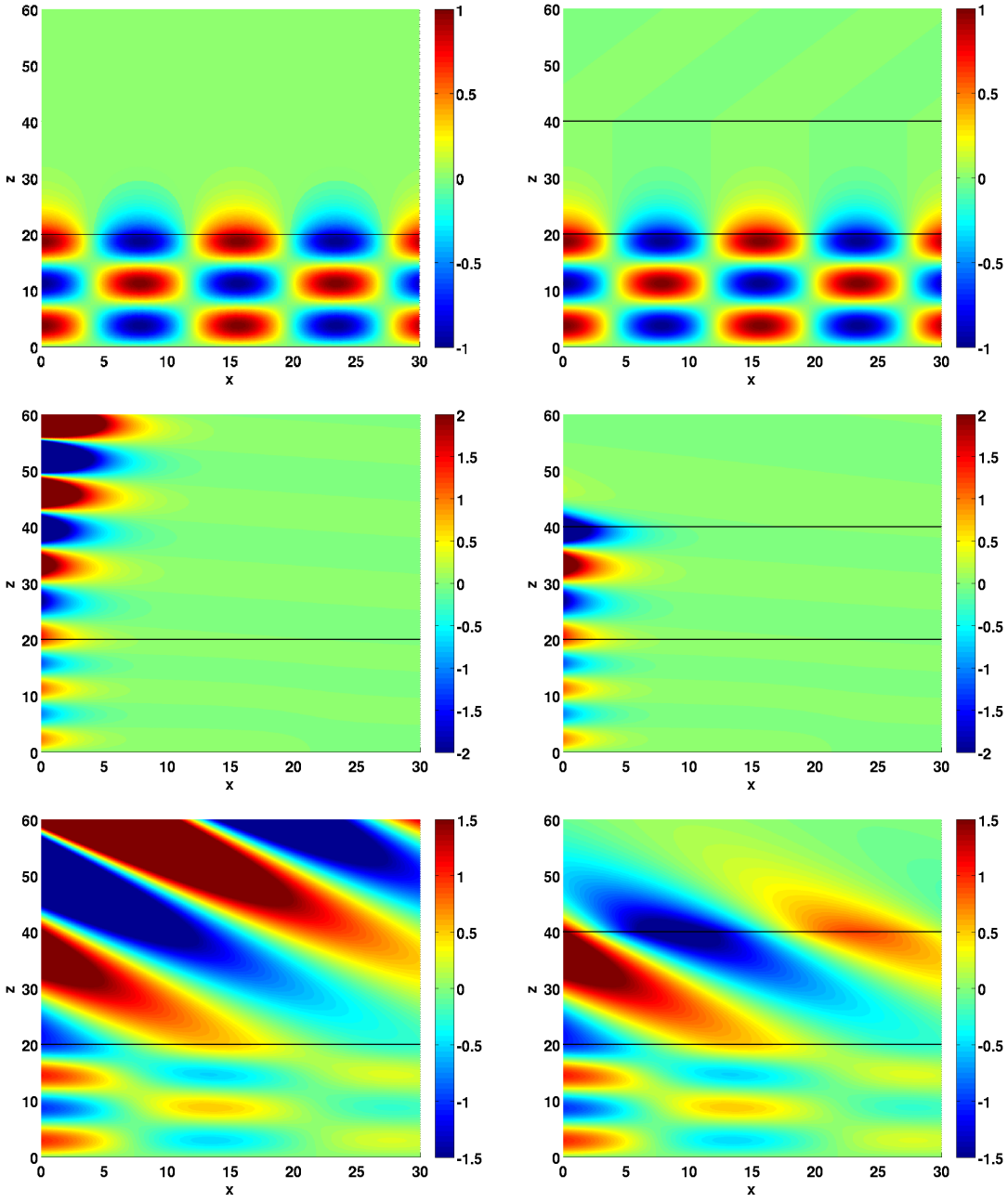

FIGURE 2.10 – *Représentation d'un mode guidé correspondant à* $\lambda = -0.1626$ *(en haut à gauche), du même mode guidé avec PML (en haut à droite), d'un mode à fuite correspondant à* $\lambda = 0.1481 - 0.0601i$ *(au centre à gauche) et du même mode guidé avec PML (au centre à droite), d'un mode à fuite correspondant à* $\lambda = -0.045 - 0.0219i$ *(en bas à gauche) et du même mode guidé avec PML (en bas à droite). La direction de propagation est* x*, la direction transverse est* z*.*

2.3.1 Introduction d'une PML radiale ou prolongement analytique dans la variable radiale

Commençons par voir comment la démarche introduite à la section précédente se généralise pour l'opérateur bidimensionnel.

Nous partons de l'équation de la résolvante : $u = R_A(\lambda)f$, avec f à support dans le cœur et $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \Lambda(A)$. Nous notons r et θ les coordonnées radiales et angulaires. Pour r suffisamment grand ($r > R$), l'équation de la résolvante est ainsi :

$$-\triangle u - (k_\infty^2 + \lambda)\, u = 0.$$

Comme nous cherchons la solution dans $L^2(\mathbb{R}^2)$, elle est de la forme suivante, pour $r > R$:

$$u(r,\theta) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n K_n(\gamma_\infty r)\exp(in\theta),$$

où $a_n \in \mathbb{C}$, $\gamma_\infty = \overset{-}{\sqrt{-k_\infty^2 - \lambda}}^{\mathbb{R}}$ et K_n est la fonction de Bessel modifiée de deuxième espèce, qui a le comportement suivant à l'infini :

$$K_n(r) \sim \frac{\pi}{2r}\exp(-r) \text{ quand } r \to +\infty.$$

Les fonctions K_n sont entières (analytiques dans tout le plan complexe).

L'idée est maintenant de prolonger analytiquement cette solution dans la variable radiale r. On considère alors $\check{u}$ la fonction qui dépend maintenant de la variable complexe $\check{r}$:

$$\check{u}(\check{r},\theta) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n K_n(\gamma_\infty \check{r})\exp(in\theta).$$

Bien entendu, $\check{u}$ vérifie :

$$-\frac{1}{\check{r}}\frac{\partial}{\partial\check{r}}\left(\check{r}\frac{\partial\check{u}}{\partial\check{r}}\right) - \frac{1}{\check{r}^2}\frac{\partial^2\check{u}}{\partial\theta^2} - (k_\infty^2 + \lambda)\,\check{u} = 0. \tag{2.13}$$

On choisit ensuite une paramétrisation d'une courbe dans le plan complexe : $\check{r} = \mathcal{C}(\widetilde{r})$ avec $\widetilde{r} \in \mathbb{R}$, et on pose $\widetilde{u}(\widetilde{r},\theta) := \check{u}(\mathcal{C}(\widetilde{r}),\theta)$. Comme pour le problème 1D, on prend $R_2 \geq R$ et un chemin $\mathcal{C}(\widetilde{r})$ qui vérifie :

$$\mathcal{C}(\widetilde{r}) = \widetilde{r}, \quad \forall \widetilde{r} < R_2.$$

Ainsi,

$$\widetilde{u}(\widetilde{r},\theta) = u(\widetilde{r},\theta), \quad \forall \widetilde{r} < R_2.$$

En effet, a priori la solution n'est pas analytique à l'interface entre le cœur et gaine. On ne prolonge analytiquement la solution que dans la gaine.

En utilisant la formule de dérivation des fonctions composées, l'équation (2.13) pour $\widetilde{r} > R_2$ devient :

$$-\frac{\gamma\alpha}{\widetilde{r}}\frac{\partial}{\partial\widetilde{r}}\left(\frac{\alpha\widetilde{r}}{\gamma}\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial\widetilde{r}}\right) - \frac{\gamma^2}{\widetilde{r}^2}\frac{\partial^2\widetilde{u}}{\partial\theta^2} - (k_\infty^2 + \lambda)\,\widetilde{u} = 0,$$

où

$$\alpha(\widetilde{r}) := \frac{1}{\mathcal{C}'(\widetilde{r})} \quad \text{et} \quad \gamma(\widetilde{r}) := \frac{\widetilde{r}}{\mathcal{C}(\widetilde{r})}. \tag{2.14}$$

On obtient finalement l'équation suivante pour $\widetilde{u}(\widetilde{r},\theta)$, pour tout $\widetilde{r}\in\mathbb{R}^+$, pour tout $\theta\in[0,2\pi[$:

$$-\frac{\gamma\alpha}{\mu\widetilde{r}}\frac{\partial}{\partial\widetilde{r}}\left(\mu\frac{\alpha\widetilde{r}}{\gamma}\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial\widetilde{r}}\right)-\frac{\gamma^2}{\mu\widetilde{r}^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\mu\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial\theta}\right)-(k^2+\lambda)\,\widetilde{u}=f.$$

Ce problème peut s'interpréter comme la recherche de $\widetilde{u}(\widetilde{r},\theta)$ solution de l'équation $A_\alpha\widetilde{u}-\lambda\widetilde{u}=f$, où A_α est l'opérateur de $L^2(\mathbb{R}^2)$ défini par :

$$\begin{aligned}A_\alpha\widetilde{u}&:=-\frac{\gamma\alpha}{\mu\widetilde{r}}\frac{\partial}{\partial\widetilde{r}}\left(\mu\frac{\alpha\widetilde{r}}{\gamma}\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial\widetilde{r}}\right)-\frac{\gamma^2}{\mu\widetilde{r}^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\mu\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial\theta}\right)-k^2\widetilde{u},\\ \forall u\in D(A_\alpha)&:=\left\{\widetilde{u}\in H^1(\mathbb{R}^2),\frac{\gamma\alpha}{\mu\widetilde{r}}\frac{\partial}{\partial\widetilde{r}}\left(\mu\frac{\alpha\widetilde{r}}{\gamma}\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial\widetilde{r}}\right)+\frac{\gamma^2}{\mu\widetilde{r}^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\mu\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial\theta}\right)\in L^2(\mathbb{R}^2)\right\}.\end{aligned}\quad(2.15)$$

Remarque 2.9 : *De façon plus compacte, on peut réécrire l'opérateur A_α sous la forme suivante :*

$$A_\alpha\widetilde{u}\ :=\ -\frac{\gamma\alpha}{\mu}\mathrm{div}\,(\mu\,\mathbb{H}\,\nabla\widetilde{u})\ -\ k^2\widetilde{u},\forall u\ \in\ D(A_\alpha)\ :=\ \left\{\widetilde{u}\in H^1(\mathbb{R}^2),\mathrm{div}\,(\mu\,\mathbb{H}\,\nabla\widetilde{u})\in L^2(\mathbb{R}^2)\right\},$$

où $\mathbb{H}$ est la matrice définie par :

$$\mathbb{H}:=\begin{pmatrix}\frac{\alpha}{\gamma}&0\\0&\frac{\gamma}{\alpha}\end{pmatrix}.$$

Pour cela, il faut comprendre que les opérateurs div *et ∇ sont exprimés ici en en coordonnées polaires (par rapport à $\widetilde{r}$ et θ).*

Comme pour les modes à fuite du problème transverse 1D, nous allons étudier deux types de PML, nommés abrupt et doux.

Exemple 2.3 (cas abrupt) *Soit $R_2\geq R$. Le premier chemin $\mathcal{C}$ que nous allons utiliser est*

$$\mathcal{C}(\widetilde{r}):=\begin{cases}\widetilde{r}&\text{si }\widetilde{r}<R_2,\\ R_2+\frac{\widetilde{r}-R_2}{\alpha_\infty}&\text{sinon},\end{cases}$$

avec $\alpha_\infty\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$.

Exemple 2.4 (cas doux) *Le deuxième exemple de chemin $\mathcal{C}(\widetilde{z})$ est plus régulier. Soit $R\leq R_2<R_3$.*

$$\mathcal{C}(\widetilde{r})=\begin{cases}\widetilde{r}&\text{si }\widetilde{r}<R_2,\\ \mathcal{C}(\widetilde{r})&\text{si }R_2\leq\widetilde{r}<R_3,\\ \frac{\widetilde{r}}{\alpha_\infty}&\text{sinon},\end{cases}$$

avec $\alpha_\infty\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ et tel que $\mathcal{C}(\widetilde{r})$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. On suppose également (comme dans le cas 1D) que la partie réelle de $\mathcal{C}(\widetilde{r})$ est une fonction strictement croissante et que la partie imaginaire de $\mathcal{C}(\widetilde{r})$ est une fonction monotone et telle que sa dérivée est bornée.

Remarque 2.10 (cas abrupt) **:** *Dans le cas $\mathcal{C}$ abrupt, il y a un problème de dérivabilité de $\mathcal{C}$ en $\widetilde{r}=R_2$. En fait, on écrit :*

$$\alpha(\widetilde{r})=\begin{cases}1&\text{si }\widetilde{r}<R_2,\\ \alpha_\infty&\text{sinon},\end{cases}$$

et on interprète les dérivées au sens des distributions. $\mathcal{C}(\widetilde{r})$ est alors égal à $\displaystyle\int_0^{\widetilde{r}}\frac{\mathrm{d}s}{\alpha(s)}$.

Remarque 2.11 : *Sous l'hypothèse $-\pi/2 < \arg_{i\mathbb{R}^+}(\alpha_\infty) < 0$, alors nous avons les résultats suivants (dans le cas abrupt comme dans le cas doux) : $\arg_{i\mathbb{R}^+}(\alpha)$ et $\arg_{i\mathbb{R}^+}(\gamma)$ sont tous les deux compris dans l'intervalle $]-\pi/2, 0]$.*

Dans le cas abrupt, c'est immédiat. Dans le cas doux, ce sont les hypothèses sur la partie réelle et la partie imaginaire de C qui permettent de conclure, comme dans le cas 1D.

Comme dans le cas 1D, nous avons ainsi procédé à un prolongement analytique de la solution de l'équation résolvante, ici par rapport à la variable radiale. Cela introduit un nouvel opérateur A_α. Nous allons voir, dans la sous-section suivante, que, comme dans le cas 1D, le spectre essentiel de cet opérateur est une rotation du spectre essentiel de l'opérateur initial (sans PML). Ceci nous permet de comprendre (comme dans le cas 1D) l'introduction de la PML infinie comme un moyen de procéder au prolongement analytique (ou méromorphique) de la résolvante en λ.

2.3.2 Spectre de l'opérateur transformé

Nous allons nous placer dans le cas où $-\pi/2 < \arg_{i\mathbb{R}^+}(\alpha_\infty) \leq 0$.

Par ailleurs, dans cette partie, pour alléger les notations, nous allons omettre les signe tilde sur r. L'opérateur A_α est ainsi défini par :

$$A_\alpha u := -\frac{\gamma\alpha}{\mu r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\mu\frac{\alpha r}{\gamma}\frac{\partial u}{\partial r}\right) - \frac{\gamma^2}{\mu r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) - k^2 u,$$
$$\forall u \in D(A_\alpha) := \left\{u \in H^1(\mathbb{R}^2), \frac{\gamma\alpha}{\mu r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\mu\frac{\alpha r}{\gamma}\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{\gamma^2}{\mu r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) \in L^2(\mathbb{R}^2)\right\}.$$

Spectre essentiel

Nous allons utiliser les mêmes arguments que dans le cas de l'opérateur transverse 1D. Nous allons voir que l'opérateur A_α n'est pas autoadjoint (nous verrons en effet qu'il a du spetre complexe), donc la notion de spectre essentiel n'est pas évidente. Nous renvoyons à l'annexe, section A.2, pour un résumé des différentes notions de spectres essentiels dans le cas d'un opérateur non nécessairement autoadjoint. Le résultat principal est le suivant.

Théorème 2.3 (Spectre essentiel de A_α) **:** *Les différentes définitions de spectres essentiels coïncident pour l'opérateur A_α et $\Lambda_{ej}(A_\alpha)$ est égal à : $-k_\infty^2 + \alpha_\infty^2\mathbb{R}^+$, pour tout $j = 1, \ldots, 7$.*

Pour démontrer ce théorème, on introduit A_α^∞, l'opérateur « à l'infini » :

$$A_\alpha^\infty u := -\left(\alpha_\infty^2\triangle u + k_\infty^2 u\right), \quad \forall u \in D(A_\alpha^\infty) := H^2(\mathbb{R}^2).$$

Nous utilisons les mêmes techniques que dans le cadre 1D transverse. On va utiliser deux lemmes pour démontrer le théorème 2.3. Le premier nous donne le spectre de A_α^∞ :

Lemme 2.3 (Spectre de A_α^∞) $\quad \Lambda(A_\alpha^\infty) = \Lambda_{ej}(A_\alpha^\infty) = -k_\infty^2 + \alpha_\infty^2\mathbb{R}^+$, *pour tout $j = 1, \ldots, 7$.*

Démonstration. On sait que le spectre de $-\triangle$ en tant qu'opérateur de $L^2(\mathbb{R}^2)$ est $\mathbb{R}^+$. Comme $A_\alpha^\infty = -\alpha_\infty^2\triangle - k_\infty^2 I$, on en déduit le résultat. □

Le deuxième lemme nous montre que les résolvantes de A_α et de A_α^∞ ne diffèrent que d'un opérateur compact.

Lemme 2.4 *Il existe $\xi \in \mathbb{C}$ tel que $\xi \in \rho(A_\alpha) \cap \rho(A_\alpha^\infty)$. De plus, pour un tel ξ, on a : $R_{A_\alpha}(\xi) = R_{A_\alpha^\infty}(\xi) + K$, où K est un opérateur compact.*

Démonstration. La première étape consiste à trouver $\xi \in \mathbb{C}$ tel que $\xi \in \rho(A_\alpha) \cap \rho(A_\alpha^\infty)$. Écrivons $(\mu/\alpha\gamma\,(A_\alpha - \xi)u, v)_{L^2(\mathbb{R}^2)}$:

$$\left(\frac{\mu}{\alpha\gamma}(A_\alpha - \xi)u, v\right)_{L^2(\mathbb{R}^2)} = \int_{\mathbb{R}^2} \mu \left(\frac{\alpha}{\gamma}\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial \overline{v}}{\partial r} + \frac{\gamma}{\alpha}\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{1}{r}\frac{\partial \overline{v}}{\partial \theta} - \frac{k^2+\xi}{\gamma\alpha}\, u\,\overline{v}\right) r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta.$$

Nous voulons trouver ξ tel que cette forme sesquilinéraire soit continue et coercive. Le fait qu'elle soit continue et sesquilinéaire est immédiat. La difficulté concerne son caractère coercif. Pour cela, nous regardons les valeurs prises par α/γ, γ/α et $-(k^2+\xi)/(\gamma\alpha)$. Nous voulons trouver un ξ tel que toutes ces valeurs soient strictement dans le même demi-plan $\{\zeta \in \mathbb{C}, \Re e(\zeta) > 0\}$, ceci montrera le caractère coercif de la forme considérée, puisque ces valeurs sont également plus grandes, en module, qu'une constante strictement positive.

Nous allons utiliser alors la remarque 2.11 : $\arg_{i\mathbb{R}^+}(\alpha)$ et $\arg_{i\mathbb{R}^+}(\gamma)$ sont tous les deux compris dans l'intervalle $]-\pi/2, 0]$. Nous prenons alors un nombre $\varepsilon > 0$ tel que $\arg_{i\mathbb{R}^+}(\alpha)$ et $\arg_{i\mathbb{R}^+}(\gamma)$ sont tous les deux compris dans l'intervalle $]-\pi/2+\varepsilon, 0]$. On en déduit les estimations suivantes :

$$\begin{aligned}
&\frac{-\pi}{2} + \varepsilon < \arg_{i\mathbb{R}^+}\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right) < \frac{\pi}{2} - \varepsilon,\\
&\frac{-\pi}{2} + \varepsilon < \arg_{i\mathbb{R}^+}\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right) < \frac{\pi}{2} - \varepsilon,\\
&-\pi + 2\varepsilon < \arg_{i\mathbb{R}^+}(\gamma\alpha) \leq 0.
\end{aligned}$$

Comme k^2 est réel et varie dans un borné, nous pouvons trouver $\xi \in \mathbb{C}$ tel que

$$\frac{-\pi}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \arg_{i\mathbb{R}^+}(-(k^2+\xi)) \leq \frac{-\pi}{2} + \frac{3\varepsilon}{2},$$

on a alors

$$\frac{-\pi}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \arg_{i\mathbb{R}^+}\left(\frac{-(k^2+\xi)}{\gamma\alpha}\right) < \frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ainsi les valeurs prises par α/γ, γ/α et $-(k^2+\xi)/(\gamma\alpha)$ sont toutes strictement dans le demi-plan $\{\zeta \in \mathbb{C}, \Re e(\zeta) > 0\}$.

On a ainsi montré que la forme est coercive. Par ailleurs, pour un tel ξ, la résolvante $R_{A_\alpha^\infty}(\xi)$ existe bien, d'après le lemme 2.3. En effet, $R_{A_\alpha^\infty}(\xi)$ existe pour tout $\xi \notin -k_\infty^2 + \alpha_\infty^2\mathbb{R}^+$.

La deuxième étape consiste à montrer que $R_{A_\alpha}(\xi) = R_{A_\alpha^\infty}(\xi) + K$, où K est un opérateur compact. Soit (f_n) une suite bornée dans $L^2(\mathbb{R}^2)$. On pose $u_n := R_{A_\alpha}(\xi)f_n$ et $u_n^\infty := R_{A_\alpha^\infty}(\xi)f_n$.

On veut montrer que de $w_n := u_n - u_n^\infty$, on peut extraire une sous-suite qui converge fortement dans $L^2(\mathbb{R}^2)$. En fait, on va montrer que w_n converge fortement dans $H^1(\mathbb{R}^2)$.

L'idée est d'évaluer la différence des formulations variationnelles associées aux problèmes $(A_\alpha - \xi)u_n = f_n$ et $(\,A_\alpha^\infty - \xi)u_n^\infty = f_n$:

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\mu}{\gamma\alpha}\,(A_\alpha - \xi)u, v\right)_{L^2(\mathbb{R}^2)} =\\
&\qquad \int_{\mathbb{R}^2}\left(-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\mu\, r\,\frac{\alpha}{\gamma}\,\frac{\partial u}{\partial r}\right)\overline{v} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\mu\,\frac{\gamma}{\alpha}\,\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)\overline{v} - \frac{\omega^2\rho + \mu\xi}{\gamma\alpha}\,u\,\overline{v}\right) r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\\
&\qquad\qquad = \int_{\mathbb{R}^2}\left(\mu\,\frac{\alpha}{\gamma}\,\frac{\partial u}{\partial r}\,\frac{\partial\overline{v}}{\partial r} + \mu\,\frac{\gamma}{\alpha r^2}\,\frac{\partial u}{\partial\theta}\,\frac{\partial\overline{v}}{\partial\theta} - \frac{\omega^2\rho+\mu\xi}{\gamma\alpha}\,u\,\overline{v}\right) r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta.
\end{aligned}$$

De même,

$$\left(\frac{\mu_\infty}{\alpha_\infty^2}\,(A_\alpha^\infty-\xi)u,v\right)_{L^2(\mathbb{R}^2)}=\int_{\mathbb{R}^2}\left(\mu_\infty\,\frac{\partial u}{\partial r}\,\frac{\partial\overline{v}}{\partial r}+\mu_\infty\,\frac{1}{r^2}\,\frac{\partial u}{\partial\theta}\,\frac{\partial\overline{v}}{\partial\theta}-\frac{\omega^2\rho_\infty+\mu_\infty\xi}{\alpha_\infty^2}\,u\,\overline{v}\right)\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta.$$

On a alors :

$$\begin{aligned}\left(\frac{\mu}{\gamma\alpha}\,(A_\alpha-\xi)u_n,v\right)_{L^2(\mathbb{R}^2)}-\left(\frac{\mu_\infty}{\alpha_\infty^2}\,A_\alpha^\infty-\xi)u_n^\infty,v\right)_{L^2(\mathbb{R}^2)}=&\\ \int_{\mathbb{R}^2}\left(\mu\,\frac{\alpha}{\gamma}\,\frac{\partial u_n}{\partial r}\,\frac{\partial\overline{v}}{\partial r}-\mu_\infty\,\frac{\partial u_n^\infty}{\partial r}\,\frac{\partial\overline{v}}{\partial r}\right)\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta&\\ +\int_{\mathbb{R}^2}\left(\mu\,\frac{\gamma}{\alpha r^2}\,\frac{\partial u_n}{\partial\theta}\,\frac{\partial\overline{v}}{\partial\theta}-\mu_\infty\,\frac{1}{r^2}\,\frac{\partial u_n^\infty}{\partial\theta}\,\frac{\partial\overline{v}}{\partial\theta}\right)\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta&\\ -\int_{\mathbb{R}^2}\left(\frac{\omega^2\rho+\mu\xi}{\gamma\alpha}\,u_n\,\overline{v}-\frac{\omega^2\rho_\infty+\mu_\infty\xi}{\alpha_\infty^2}\,u_n^\infty\,\overline{v}\right)\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta&\\ =\int_{\mathbb{R}^2}\left(\frac{\mu}{\gamma\alpha}\,f_n\,\overline{v}-\frac{\mu_\infty}{\alpha_\infty^2}\,f_n\,\overline{v}\right)\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta.&\end{aligned}$$

Donc, en prenant $v=w_n$, on obtient :

$$a_n=b_n+c_n+d_n+e_n,$$

avec

$$\begin{aligned}a_n&:=\int_{\mathbb{R}^2}\left(\mu\,\frac{\alpha}{\gamma}\,\frac{\partial w_n}{\partial r}\,\frac{\partial\overline{w_n}}{\partial r}+\mu\,\frac{\gamma}{\alpha r^2}\,\frac{\partial w_n}{\partial\theta}\,\frac{\partial\overline{w_n}}{\partial\theta}-\frac{\omega^2\rho+\mu\xi}{\gamma\alpha}\,w_n\,\overline{w_n}\right)\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta,\\ b_n&:=\int_{\mathbb{R}^2}\left(\left(\frac{\mu}{\gamma\alpha}-\frac{\mu_\infty}{\alpha_\infty^2}\right)\,f_n\,\overline{w_n}\right)\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta,\\ c_n&:=\int_{\mathbb{R}^2}\left(\left(\mu_\infty-\mu\frac{\alpha}{\gamma}\right)\,\frac{\partial u_n^\infty}{\partial r}\,\frac{\partial\overline{w_n}}{\partial r}\right)\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta,\\ d_n&:=\int_{\mathbb{R}^2}\left(\left(\mu_\infty\frac{1}{r^2}-\mu\frac{\gamma}{\alpha r^2}\right)\,\frac{\partial u_n^\infty}{\partial\theta}\,\frac{\partial\overline{w_n}}{\partial\theta}\right)\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta,\\ e_n&:=\int_{\mathbb{R}^2}\left(\left(\frac{\omega^2\rho+\mu\xi}{\gamma\alpha}-\frac{\omega^2\rho_\infty+\mu_\infty\xi}{\alpha_\infty^2}\right)\,u_n^\infty\,\overline{w_n}\right)\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta.\end{aligned}$$

D'après la première étape, on a : $|a_n|\geq C\|w_n\|^2_{H^1(\mathbb{R}^2)}$.

On suit ensuite la même démarche que dans le cas 1D. On peut supposer, sans perte de généralité, que f_n tend faiblement vers 0 dans $L^2(\mathbb{R}^2)$. On veut montrer que w_n tend fortement vers 0 dans $L^2(\mathbb{R}^2)$, à l'extraction d'une sous-suite près. On va le montrer en fait dans $H^1(\mathbb{R}^2)$.

Comme $f_n\rightharpoonup 0$ dans $L^2(\mathbb{R}^2)$, à l'extraction d'une sous-suite près, u_n et w_n tendent faiblement vers 0 dans $H^1(\mathbb{R}^2)$ et u_n^∞ tend faiblement vers 0 dans $H^2(\mathbb{R}^2)$.

On distingue alors deux cas :

1. Quand la PML est douce, nous notons Ω_B le support de $\alpha-\alpha_\infty$. Alors Ω_B est alors un compact et $\gamma=\alpha_\infty$ sur $\mathbb{R}^2\setminus\Omega_B$. Nous allons utiliser des arguments similaires au cas 1D : injections compactes d'espaces de Sobolev.

2. Quand la PML est abrupte, à l'extérieur du support de $\alpha - \alpha_\infty$, $\gamma \neq \alpha_\infty$. On a seulement, $\gamma(r) \to \alpha_\infty$ quand $r \to +\infty$. Ce cas est donc plus difficile à traiter. Nous allons alors utiliser le fait que le poids dans l'intégrale des différents termes tend vers 0 quand $r \to +\infty$.

1. Traitons tout d'abord le cas 1 : quand la PML est douce.

   - b_n : L'intégrale sur $\mathbb{R}^2$ se réduit à une intégrale sur le domaine borné Ω_B :

   $$b_n = \int_{\Omega_B} \left(\left(\frac{\mu}{\gamma\alpha} - \frac{\mu_\infty}{\alpha_\infty^2} \right) f_n \, \overline{w_n} \right) r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta.$$

   f_n est une suite bornée dans $L^2(\Omega_B)$ et par théorème de Rellich, $w_n \to 0$ dans $L^2(\Omega_B)$. Donc, $b_n \to 0$.

   - c_n : De même que pour b_n, on a :

   $$c_n = \int_{\Omega_B} \left(\left(\mu_\infty - \mu \frac{\alpha}{\gamma} \right) \frac{\partial u_n^\infty}{\partial r} \, \frac{\partial \overline{w_n}}{\partial r} \right) r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta.$$

   u_n^∞ est bornée dans $H^2(\Omega_B)$, donc $\partial u_n^\infty / \partial r \to 0$ dans $L^2(\Omega_B)$ et $\partial w_n / \partial r$ est bornée dans $L^2(\Omega_B)$, on en déduit que $c_n \to 0$.

   - d_n : On a :

   $$d_n = \int_{\Omega_B} \left(\left(\mu_\infty - \mu \frac{\gamma}{\alpha} \right) \frac{1}{r} \, \frac{\partial u_n^\infty}{\partial \theta} \, \frac{1}{r} \, \frac{\partial \overline{w_n}}{\partial \theta} \right) r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta.$$

   u_n^∞ est bornée dans $H^2(\Omega_B)$, donc $1/r \, \partial u_n^\infty / \partial \theta \to 0$ dans $L^2(\Omega_B)$ et $1/r \, \partial w_n / \partial \theta$ est bornée dans $L^2(\Omega_B)$, on en déduit que $d_n \to 0$.

   - e_n : On a :

   $$e_n = \int_{\Omega_B} \left(\left(\frac{\omega^2 \rho + \mu \xi}{\gamma\alpha} - \frac{\omega^2 \rho_\infty + \mu_\infty \xi}{\alpha_\infty^2} \right) u_n^\infty \, \overline{w_n} \right) r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta.$$

   u_n^∞ est bornée dans $L^2(\Omega_B)$ et $w_n \to 0$ dans $L^2(\Omega_B)$, donc $e_n \to 0$.

   Ainsi, on montre que $a_n \to 0$, puis comme $|a_n| \geq C \|w_n\|^2_{H^1(\mathbb{R}^2)}$, on en déduit que $\|w_n\|_{H^1(\mathbb{R}^2)} \to 0$.

2. Traitons maintenant le cas où la PML est abrupte. L'idée est de décomposer à chaque fois l'intégrale sur Ω_B, où Ω_B est un compact et où les mêmes arguments que dans le cas doux peuvent être utilisés, et sur $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega_B$, où l'on utilise le fait que le poids dans l'intégrale tend vers 0 quand $r \to \infty$.

   - b_n : Rappelons l'expression de b_n :

   $$b_n = \int_{\mathbb{R}^2} \left(\left(\frac{\mu}{\gamma\alpha} - \frac{\mu_\infty}{\alpha_\infty^2} \right) f_n \, \overline{w_n} \right) r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta.$$

   En dehors d'un borné suffisamment grand, on vérifie que :

   $$\frac{\mu}{\gamma\alpha} - \frac{\mu_\infty}{\alpha_\infty^2} = \frac{\mu_\infty R_2}{\alpha_\infty^2 r} \, (\alpha_\infty - 1)$$

   On note $B(0, s)$ la boule de centre 0 et de rayon $s > 0$.
   Soit $\varepsilon > 0$. On veut montrer qu'il existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n > n_0$, $|b_n| < \varepsilon$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\left| \int_{\mathbb{R}^2 \setminus B(0,s)} \left(\left(\frac{\mu}{\gamma\alpha} - \frac{\mu_\infty}{\alpha_\infty^2} \right) f_n \, \overline{w_n} \right) \, r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta \right| \leq \sup_{\mathbb{R}^2 \setminus B(0,s)} \left| \frac{\mu}{\gamma\alpha} - \frac{\mu_\infty}{\alpha_\infty^2} \right| \int_{\mathbb{R}^2 \setminus B(0,s)} |f_n \, \overline{w_n}| \, \, r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta.$$

Or, on a vu que

$$\sup_{\mathbb{R}^2 \setminus B(0,s)} \left| \frac{\mu}{\gamma\alpha} - \frac{\mu_\infty}{\alpha_\infty^2} \right|$$

tend vers 0 quand $s \to \infty$ comme $1/s$ et

$$\int_{\mathbb{R}^2 \setminus B(0,s)} |f_n \, \overline{w_n}| \, \, r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta$$

est bornée car w_n et f_n sont dans $L^2(\mathbb{R}^2)$. On en déduit que

$$\left| \int_{\mathbb{R}^2 \setminus B(0,s)} \left(\left(\frac{\mu}{\gamma\alpha} - \frac{\mu_\infty}{\alpha_\infty^2} \right) f_n \, \overline{w_n} \right) \, r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta \right| \leq \frac{M}{s} \, \, \forall n.$$

Ainsi, on a

$$\exists R^*, \, \forall s > R^*, \, \forall n, \, \left| \int_{\mathbb{R}^2 \setminus B(0,s)} \left(\left(\frac{\mu}{\gamma\alpha} - \frac{\mu_\infty}{\alpha_\infty^2} \right) f_n \, \overline{w_n} \right) \, r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta \right| \leq \varepsilon.$$

Par ailleurs, pour tout s,

$$\left| \int_{B(0,s)} \left(\left(\frac{\mu}{\gamma\alpha} - \frac{\mu_\infty}{\alpha_\infty^2} \right) f_n \, \overline{w_n} \right) \, r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta \right|$$

peut aussi être rendu plus petit que ε car f_n est bornée dans $L^2(B(0,s))$ et $w_n \to 0$ dans $L^2(B(0,s))$.
Donc au final, en choisissant $s > R^*$, puis n suffisamment grand, on a :

$$\left| \int_{\mathbb{R}^2} \left(\left(\frac{\mu}{\gamma\alpha} - \frac{\mu_\infty}{\alpha_\infty^2} \right) f_n \, \overline{w_n} \right) \, r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta \right| \leq 2\varepsilon.$$

- c_n : La même démarche que pour b_n s'applique. En dehors d'un borné (suffisamment grand), on a :

$$\mu_\infty - \mu\frac{\alpha}{\gamma} = \mu_\infty R_2(1 - \, \alpha_\infty)\frac{1}{r}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On montre que

$$\left| \int_{\mathbb{R}^2 \setminus B(0,s)} \left(\left(\mu_\infty - \mu\frac{\alpha}{\gamma} \right) \frac{\partial u_n^\infty}{\partial r} \, \frac{\partial \overline{w_n}}{\partial r} \right) \, r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta \right| \leq \sup_{\mathbb{R}^2 \setminus B(0,s)} \left| \mu_\infty - \mu\frac{\alpha}{\gamma} \right| \int_{\mathbb{R}^2 \setminus B(0,s)} \left| \frac{\partial u_n^\infty}{\partial r} \, \frac{\partial \overline{w_n}}{\partial r} \right| \, r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta.$$

Le premier terme tend vers 0 comme $1/s$, le deuxième terme est borné car u_n^∞ et w_n sont dans $H^1(\mathbb{R}^2)$. On a ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour s suffisamment grand,

$$\left| \int_{\mathbb{R}^2 \setminus B(0,s)} \left(\left(\mu_\infty - \mu \frac{\alpha}{\gamma} \right) \frac{\partial u_n^\infty}{\partial r} \frac{\partial \overline{w_n}}{\partial r} \right) r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta \right| \leq \varepsilon.$$

Ensuite,

$$\left| \int_{B(0,s)} \left(\left(\mu_\infty - \mu \frac{\alpha}{\gamma} \right) \frac{\partial u_n^\infty}{\partial r} \frac{\partial \overline{w_n}}{\partial r} \right) r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta \right| \leq \varepsilon.$$

pour n suffisamment grand, puisque u_n^∞ est bornée dans $H^2(B(0,s))$, donc $\frac{\partial u_n^\infty}{\partial r} \to 0$ dans $L^2(B(0,s))$ et $\frac{\partial w_n}{\partial r}$ est bornée dans $L^2(B(0,s))$. Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $n \geq n$,

$$\left| \int_{\mathbb{R}^2} \left(\left(\mu_\infty - \mu \frac{\alpha}{\gamma} \right) \frac{\partial u_n^\infty}{\partial r} \frac{\partial \overline{w_n}}{\partial r} \right) r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta \right| \leq 2\varepsilon.$$

- d_n : On vérifie que : $\mu_\infty - \mu \frac{\gamma}{\alpha}$ se comporte à l'infini comme $1/r$.
  Soit $\varepsilon > 0$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\left| \int_{\mathbb{R}^2 \setminus B(0,s)} \left(\left(\mu_\infty \frac{1}{r^2} - \mu \frac{\gamma}{\alpha r^2} \right) \frac{\partial u_n^\infty}{\partial \theta} \frac{\partial \overline{w_n}}{\partial \theta} \right) r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta \right|$$
$$\leq \sup_{\mathbb{R}^2 \setminus B(0,s)} \left| \mu_\infty - \mu \frac{\gamma}{\alpha} \right| \int_{\mathbb{R}^2 \setminus B(0,s)} \left| \frac{1}{r} \frac{\partial u_n^\infty}{\partial \theta} \frac{1}{r} \frac{\partial \overline{w_n}}{\partial \theta} \right| r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta$$

Le premier terme tend vers 0 comme $1/s$, le deuxième est borné car u_n^∞ et w_n sont dans $H^1(\mathbb{R}^2)$. On a ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour s suffisamment grand,

$$\left| \int_{\mathbb{R}^2 \setminus B(0,s)} \left(\left(\mu_\infty \frac{1}{r^2} - \mu \frac{\gamma}{\alpha r^2} \right) \frac{\partial u_n^\infty}{\partial \theta} \frac{\partial \overline{w_n}}{\partial \theta} \right) r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta \right| \leq \varepsilon.$$

Ensuite,

$$\left| \int_{B(0,s)} \left(\left(\mu_\infty - \mu \frac{\gamma}{\alpha} \right) \frac{1}{r} \frac{\partial u_n^\infty}{\partial \theta} \frac{1}{r} \frac{\partial \overline{w_n}}{\partial \theta} \right) r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta \right| \leq \varepsilon.$$

pour n suffisamment grand, puisque u_n^∞ est bornée dans $H^2(B(0,s))$, donc $\frac{1}{r}\frac{\partial u_n^\infty}{\partial \theta} \to 0$ dans $L^2(B(0,s))$ et $\frac{1}{r}\frac{\partial w_n}{\partial \theta}$ est bornée dans $L^2(B(0,s))$. Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $n \geq n$,

$$\left| \int_{\mathbb{R}^2} \left(\left(\mu_\infty - \mu \frac{\gamma}{\alpha} \right) \frac{1}{r} \frac{\partial u_n^\infty}{\partial \theta} \frac{1}{r} \frac{\partial \overline{w_n}}{\partial \theta} \right) r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta \right| \leq 2\varepsilon.$$

- e_n : On vérifie que : $\frac{\omega^2\rho + \mu\xi}{\gamma\alpha} - \frac{\omega^2\rho_\infty + \mu_\infty\xi}{\alpha_\infty^2}$ se comporte à l'infini comme $1/r$.
  Soit $\varepsilon > 0$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\left| \int_{\mathbb{R}^2 \setminus B(0,s)} \left(\left(\frac{\omega^2\rho + \mu\xi}{\gamma\alpha} - \frac{\omega^2\rho_\infty + \mu_\infty\xi}{\alpha_\infty^2} \right) u_n^\infty \, \overline{w_n} \right) r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta \right|$$
$$\leq \sup_{\mathbb{R}^2 \setminus B(0,s)} \left| \frac{\omega^2\rho + \mu\xi}{\gamma\alpha} - \frac{\omega^2\rho_\infty + \mu_\infty\xi}{\alpha_\infty^2} \right| \int_{\mathbb{R}^2 \setminus B(0,s)} |u_n^\infty \, \overline{w_n}| \, r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta$$

Le premier terme tend vers 0 comme $1/s$, le deuxième est borné car u_n^∞ et w_n sont dans $L^2(\mathbb{R}^2)$. On a ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour s suffisamment grand,

$$\left| \int_{\mathbb{R}^2 \setminus B(0,s)} \left(\left(\frac{\omega^2\rho + \mu\xi}{\gamma\alpha} - \frac{\omega^2\rho_\infty + \mu_\infty\xi}{\alpha_\infty^2} \right) u_n^\infty \, \overline{w_n} \right) r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta \right| \leq \varepsilon.$$

Ensuite,

$$\left| \int_{B(0,s)} \left(\left(\frac{\omega^2\rho + \mu\xi}{\gamma\alpha} - \frac{\omega^2\rho_\infty + \mu_\infty\xi}{\alpha_\infty^2} \right) u_n^\infty \, \overline{w_n} \right) r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta \right| \leq \varepsilon.$$

pour n suffisamment grand, puisque u_n^∞ est bornée dans $H^1(B(0,s))$, donc $u_n^\infty \to 0$ dans $L^2(B(0,s))$ et w_n est bornée dans $L^2(B(0,s))$. Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $n \geq n$,

$$\left| \int_{\mathbb{R}^2} \left(\left(\frac{\omega^2\rho + \mu\xi}{\gamma\alpha} - \frac{\omega^2\rho_\infty + \mu_\infty\xi}{\alpha_\infty^2} \right) u_n^\infty \, \overline{w_n} \right) r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta \right| \leq 2\varepsilon.$$

Ainsi, comme dans le cas doux, on montre que $a_n \to 0$, puis comme $|a_n| \geq C\|w_n\|^2_{H^1(\mathbb{R}^2)}$, on a $\|w_n\|_{H^1(\mathbb{R}^2)} \to 0$.

Dans le cas doux comme dans le cas abrupt, on en déduit que $R_{A_\alpha}(\xi) = R_{A_\alpha^\infty}(\xi) + K$, où K est un opérateur compact. □

Nous sommes maintenant en mesure de prouver le théorème 2.3, en appliquant la même démonstration que dans le cas 1D.

Spectre discret

Rappelons que nous nous plaçons dans le cas où $-\frac{\pi}{2} < \arg_{i\mathbb{R}^+}(\alpha_\infty) < 0$. Nous montrons le résultat suivant, qui est tout à fait similaire au résultat que nous avions pour le cas 1D :

Théorème 2.4 (spectre discret de A_α) **:** *Le spectre discret de A_α est composé de deux parties :*

- *le spectre discret de A, inclus dans l'intervalle réel $]-k_{\max}^2, -k_\infty^2[$.*
- *un ensemble dénombrable de valeurs propres, de multiplicité finie et isolées, qui sont incluses dans le secteur $\{\lambda \in \mathbb{C}, 2\arg_{i\mathbb{R}^+}(\alpha_\infty) < \arg_{i\mathbb{R}^+}(k_\infty^2 + \lambda) \leq 0\}$. Pour ces valeurs propres, les fonctions propres sont de la forme suivante, quand $r \to +\infty$:*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \, H_n^{(1)}\left(\beta_\infty \, \mathcal{C}(r)\right) \, \exp(in\theta),$$

où β_∞ est défini en (1.8) et $a_n \in \mathbb{C}$.

Démonstration. Soit $\lambda \in \Lambda_{disc}(A_\alpha)$. Nous allons suivre la même démarche que dans cas 1D (théorème 2.2). Nous considérons $\widetilde{u}(r,\theta)$ une fonction propre de A_α. Nous voulons donner une représentation sous forme de série de $\widetilde{u}$ pour r grand. Nous distinguons deux cas : PML douce et abrupte, le cas d'une PML douce étant plus simple.

- Dans le cas d'une PML douce, $\widetilde{u}(r,\theta)$ vérifie pour $r > R_3$:

$$-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial r}\right) - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial \theta^2} - \frac{k_\infty^2+\lambda}{\alpha_\infty^2}\,\widetilde{u} = -\triangle \widetilde{u} - \frac{k_\infty^2+\lambda}{\alpha_\infty^2}\,\widetilde{u} = 0.$$

  Comme $\widetilde{u}$ est dans $D(A_\alpha)$, en particulier $\widetilde{u} \in L^2(\mathbb{R}^2)$, on en déduit que pour $r > R_3$:

$$\widetilde{u}(r,\theta) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n K_n\left(\frac{\gamma_\infty^\alpha r}{\alpha_\infty}\right)\exp(in\theta),$$

  où on rappelle que $\gamma_\infty^\alpha := \sqrt[+]{-k_\infty^2-\lambda}^{\mathbb{R}^+_{-\alpha_\infty^2}}$ (en dehors du spectre essentiel de A_α, $\Re e(\gamma_\infty^\alpha/\alpha_\infty) > 0$ donc $K_n\left(\gamma_\infty^\alpha r/\alpha_\infty\right)$ est exponentiellement décroissant).

- Dans le cas d'une PML abrupte, on se place pour $r > R_2$. Mais le même comportement que dans le cas d'une PML douce est un peu plus difficile à obtenir, puisque $\widetilde{u}$ ne vérifie pas une équation du type $-\triangle\widetilde{u} - (k_\infty^2+\lambda)/\alpha_\infty^2\,\widetilde{u} = 0$, pour $r > R_2$. L'idée est de repasser par la variable complexe $\check{r} = \mathcal{C}(r)$ et de considérer la fonction $\check{u}(\check{r},\theta)$, qui dépend de la variable complexe $\check{r}$. Elle vérifie :

$$-\frac{1}{\check{r}}\frac{\partial}{\partial \check{r}}\left(\check{r}\frac{\partial \check{u}}{\partial \check{r}}\right) - \frac{1}{\check{r}^2}\frac{\partial^2 \check{u}}{\partial \theta^2} - (k_\infty^2+\lambda)\,\check{u} = 0.$$

  Ainsi, on a :

$$\check{u}(\check{r},\theta) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n I_n\left(\gamma_\infty^\alpha\,\check{r}\right)\exp(in\theta) + c_n K_n\left(\gamma_\infty^\alpha\,\check{r}\right)\exp(in\theta),$$

  où $b_n, c_n \in \mathbb{C}$ et I_n et K_n sont les fonctions de Bessel modifiées de première et deuxième espèces. En remplaçant $\check{r}$ par sa valeur $\mathcal{C}(r)$, on a :

$$\widetilde{u}(r,\theta) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n I_n\left(\gamma_\infty^\alpha\,\mathcal{C}(r)\right)\exp(in\theta) + c_n K_n\left(\gamma_\infty^\alpha\,\mathcal{C}(r)\right)\exp(in\theta).$$

  Pour tout $\lambda \notin -k_\infty^2 + \alpha_\infty^2\mathbb{R}^+$, il existe $R^\star > 0$, tel que pour tout $r > R^\star$, $\Re e(\gamma_\infty^\alpha \mathcal{C}(r)) > 0$ (car $\mathcal{C}(r) \sim r/\alpha_\infty$ quand $r \to +\infty$ et $\Re e(\gamma_\infty^\alpha r/\alpha_\infty) > 0, \forall \lambda \notin -k_\infty^2 + \alpha_\infty^2\mathbb{R}^+$), donc pour que $\widetilde{u}$ soit dans $D(A_\alpha)$ (pour qu'il ne soit pas croissant à l'infini), $\widetilde{u}$ est de la forme suivante, pour $r > R^\star$:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n K_n\left(\gamma_\infty^\alpha\,\mathcal{C}(r)\right)\exp(in\theta). \tag{2.16}$$

Dans tous les cas (abrupt ou doux), le comportement de la solution est donné par (2.16), pour tout $\lambda \notin -k_\infty^2 + \alpha_\infty^2\mathbb{R}^+$ et pour $r \to +\infty$.

L'idée consiste maintenant à utiliser le changement de variable complexe inverse pour reconstruire une fonction propre de A, comme dans le cas 1D. Considérons $u(r,\theta) = \widetilde{u}(\mathcal{C}^{-1}(r),\theta)$, $\mathcal{C}^{-1}$ étant la fonction réciproque de $\mathcal{C}$. La fonction u vérifie :

$$-\frac{1}{\mu}\mathrm{div}(\mu\nabla u) - (k^2+\lambda)\,u = 0, \quad \text{dans } \mathbb{R}^2.$$

De plus, d'après l'équation (2.16), (au moins formellement) u est de la forme suivante pour $r \to +\infty$:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n K_n(\gamma_\infty^\alpha\, r)\exp(in\theta).$$

Comme dans le cas 1D, l'idée est maintenant de regarder quand la fonction $K_n(\gamma_\infty^\alpha\, r)$ est exponentiellement croissante et quand elle est exponentiellement décroissante. Nous avons, comme dans le cas 1D, l'alternative suivante :

$$\text{soit} \quad -3\pi/2 < \arg_{i\mathbb{R}^+}(k_\infty^2+\lambda) < 2\arg_{i\mathbb{R}^+}(\alpha_\infty) \text{ ou } 0 < \arg_{i\mathbb{R}^+}(k_\infty^2+\lambda) < \pi/2, \tag{2.17}$$

$$\text{soit} \quad 2\arg_{i\mathbb{R}^+}(\alpha_\infty) < \arg_{i\mathbb{R}^+}(k_\infty^2+\lambda) \leq 0. \tag{2.18}$$

Les différentes zones sont représentées sur la figure 2.11.

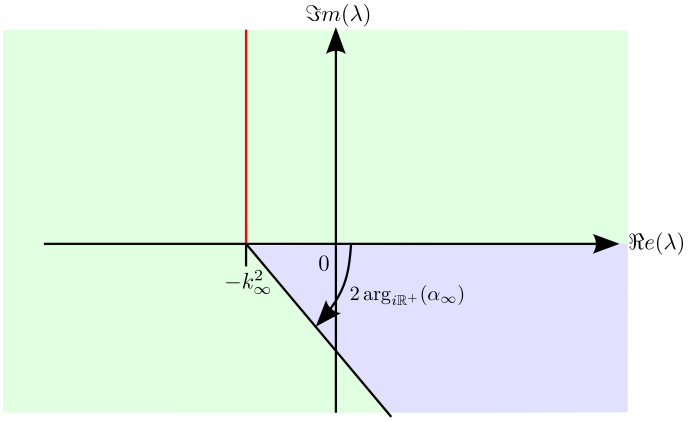

FIGURE 2.11 – *En vert, la zone donnée par l'équation (2.17). En bleu, la zone donnée par l'équation (2.18). La coupure est représentée en rouge.*

Dans le premier cas (2.17), $\Re e(\gamma_\infty^\alpha) > 0$. Ainsi, pour tout n, $K_n(\gamma_\infty^\alpha\, r)$ est exponentiellement décroissante et le u construit par prolongement analytique de $\widetilde{u}$ (par le changement de variable complexe $\mathcal{C}^{-1}$) est une fonction propre de l'opérateur A. Notamment, la série

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n K_n(\gamma_\infty^\alpha\, r)\exp(in\theta)$$

est convergente et u est décroissante à l'infini. Or, on a vu que les seules valeurs propres possibles de A sont réelles et dans l'intervalle $]-k_{\max}^2, -k_\infty^2]$. On exclut ensuite la valeur $-k_\infty^2$ car elle appartient au spectre essentiel de A_α. On en déduit que dans ce cas, nécéssairement $\lambda \in \Lambda_{disc}(A)$.

Dans le deuxième cas (2.18), $\Re e(\gamma_\infty^\alpha) < 0$. Pour tout n, la fonction $K_n(\gamma_\infty^\alpha\, r)$ est exponentiellement croissante et la série

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n K_n(\gamma_\infty^\alpha\, r)\exp(in\theta)$$

n'a pas de sens quand $r \to +\infty$. Par ailleurs, $K_n(\gamma_\infty^\alpha\, \mathcal{C}(r)) = H_n^{(1)}(\beta_\infty\, \mathcal{C}(r))$. Donc la fonction $\widetilde{u}$ est de la forme suivante, à l'infini :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n\, H_n^{(1)}\left(\beta_\infty\, \mathcal{C}(r)\right)\, \exp(in\theta).$$

Il reste maintenant à regarder ce qui se passe sur la coupure de l'argument : quand $k_\infty^2+\lambda \in i\mathbb{R}^+$. En prolongeant alors la définition de la racine carrée soit d'un côté (quand l'argument tend vers $-3\pi/2$) soit de l'autre côté (quand l'argument tend vers $\pi/2$), nous nous trouvons dans le cas (2.17), donc il ne peut y avoir de valeurs propres sur la coupure de β_∞. □

De la même manière que dans le cas 1D (corollaire 2.1), nous pouvons voir les modes à fuite comme des objets vérifiant

$$-\frac{1}{\mu}\mathrm{div}(\mu\nabla u) - (k^2+\lambda)\,u = 0,$$

avec u sortant, i.e. u se décompose (formellement puisque toutes les composantes sont exponentiellement croissantes quand $r \to +\infty$), quand $r \to +\infty$, de la façon suivante :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n H_n^{(1)}\left(\beta_\infty\, r\right)\exp(in\theta).$$

Nous définissons alors les modes à fuite de la façon suivante (comme dans le cas 1D) :

Définition 2.4 *Soit $\lambda \in \Lambda_{disc}(A_\alpha) \setminus \Lambda_{disc}(A)$ et soit Φ_λ^α une fonction propre associée. Nous utilisons la même définition que dans le cas 1D du nombre d'onde longitudinal : $\beta := \sqrt[\mathbb{R}^-]{-\lambda}$, ainsi, la partie réelle et la partie imaginaire de β sont positives. Si $\lambda > 0$, on pose $\beta_\infty = i\sqrt{\lambda}$. Nous appelons* mode à fuite *le mode $\varphi_\lambda^{\rightarrow}(x,r,\theta) = \Phi_\lambda^\alpha(\mathcal{C}^{-1}(r),\theta)\,\mathrm{e}^{i\beta x}$ (évanescent vers la droite) ou $\varphi_\lambda^{\leftarrow}(x,r,\theta) = \Phi_\lambda^\alpha(\mathcal{C}^{-1}(r),\theta)\,\mathrm{e}^{-i\beta x}$ (évanescent vers la gauche).*

Ainsi, comme dans le cas 1D, les modes à fuite sont des objets qui sont exponentiellement croissants dans les directions transverses (puisque de la forme $H_n^{(1)}(\beta_\infty r)$ avec $-\pi < \arg_{i\mathbb{R}^+}(k_\infty^2+\lambda) \leq 0$). Mais ce sont également des objets évanescents dans la direction longitudinale : $\varphi_\lambda^{\rightarrow}$ est exponentiellement décroissant vers les x positifs et $\varphi_\lambda^{\leftarrow}$ est exponentiellement décroissant vers les x négatifs.

Comme dans le cas 1D, la PML infinie est simplement un moyen de dévoiler les modes à fuite : de rendre exponentiellement décroissant quelque chose qui était exponentiellement croissant. Si nous avions pris un argument positif pour α_∞, nous aurions trouvé des modes à fuite « entrants » (ayant une dépendance radiale de la forme $H_n^{(1)}(\sqrt[i\mathbb{R}^+]{\overline{\lambda}+k_\infty^2}\,r)$ pour $r \to +\infty$).

La structure du spectre repésentée sur la figure 2.8, présentée pour le cas de l'opérateur transverse 1D, s'applique ici également : en introduisant la PML infinie, nous avons fait tourner le spectre essentiel et dans la zone ainsi balayée, nous avons dévoilé des modes à fuite. De même, comme pour le cas 1D, les modes guidés, les modes à fuite et les modes à fuite « entrants » sont solutions des mêmes équations. La seule condition qui change est qu'à l'infini, on impose un comportement radial de la forme $K_n(\gamma_\infty r)$ pour les modes guidés, de la forme $H_n^{(1)}(\beta_\infty r)$ pour les modes à fuite et de la forme $H_n^{(1)}(\sqrt[i\mathbb{R}^+]{\overline{\lambda}+k_\infty^2}\,r)$ pour les modes à fuite « entrants ». Or ces trois fonctions, tout comme $\exp(\gamma_\infty z)$, $\exp(i\beta_\infty z)$ et $\exp(\sqrt[i\mathbb{R}^+]{\overline{\lambda}+k_\infty^2}\,z)$, sont des restrictions de la même fonction de λ dans une surface de Riemann à deux feuillets. Pour chaque n, l'interprétation de la figure 2.9 est donc également valable.

2.3.3 Et si on utilisait des PMLs cartésiennes ?

Nous avons jusqu'ici introduit les modes à fuite pour le problème transverse bidimensionnel en utilisant des PMLs radiales : nous avons cherché à prolonger analytiquement dans la direction radiale transverse $r = \sqrt{y^2+z^2}$. Dans cette sous-section, nous allons utiliser des PMLs cartésiennes. En d'autres termes, nous allons prolonger analytiquement la solution dans les directions transverses y et z. La figure 2.12 représente schématiquement les différences entre les PMLs radiales et cartésiennes.

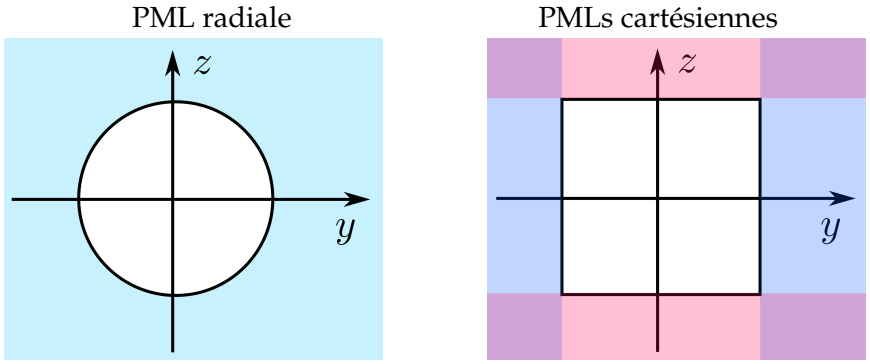

FIGURE 2.12 – *Schéma représentatif des PMLs radiale et cartésiennes. Avec une PML radiale, le domaine physique (i.e. le domaine où on ne procède pas à la dilatation analytique, en blanc sur le dessin) est un cercle et la dilatation analytique se fait dans la direction radiale (dans tout le domaine en bleu). Avec des PMLs cartésiennes, le domaine physique (en blanc) est un rectangle. La dilatation analytique se fait dans les directions y (domaine en bleu) et z (domaine en rouge). Dans le domaine en violet, on fait à la fois la dilatation analytique en y et en z.*

Introduction des PMLs cartésiennes ou prolongement analytique dans les directions y et z

Précisons tout d'abord comment nous procédons au prolongement analytique dans les directions y et z. On part de l'équation $Au - \lambda u = f$, avec f à support dans la boule de centre 0 et de rayon R. Nous avons vu que l'équation, pour y et z suffisamment grands ($y^2 + z^2 > R^2$), devient :

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - (k_\infty^2 + \lambda)\, u = 0. \tag{2.19}$$

En supposant que l'on peut procéder à un prolongement analytique, l'équation (2.19) devient en prenant $\check{u}$ dépendant des variables complexes $\check{y}$ et $\check{z}$:

$$-\frac{\partial^2 \check{u}}{\partial \check{y}^2} - \frac{\partial^2 \check{u}}{\partial \check{z}^2} - (k_\infty^2 + \lambda)\, \check{u} = 0. \tag{2.20}$$

Ensuite (on commence à en avoir l'habitude), on paramétrise des chemins dans le plan complexe : $\check{y} = \mathcal{C}_y(\widetilde{y})$, $\check{z} = \mathcal{C}_z(\widetilde{z})$.

On note

$$\alpha^y = \frac{1}{\mathcal{C}_y'} \quad \text{et} \quad \alpha^z = \frac{1}{\mathcal{C}_z'}. \tag{2.21}$$

Par dérivation de fonctions composées, en notant $\widetilde{u}(\widetilde{y}, \widetilde{z}) = \check{u}(\mathcal{C}_y(\widetilde{y}), \mathcal{C}_z(\widetilde{z}))$, l'équation (2.20) devient, pour $\widetilde{y}^2 + \widetilde{z}^2 > R^2$:

$$-\alpha^y \frac{\partial}{\partial \widetilde{y}} \left(\alpha^y \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial \widetilde{y}} \right) - \alpha^z \frac{\partial}{\partial \widetilde{z}} \left(\alpha^z \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial \widetilde{z}} \right) - (k_\infty^2 + \lambda)\, \widetilde{u} = 0.$$

L'équation pour tout $\widetilde{y} \in \mathbb{R}$ et tout $\widetilde{z} \in \mathbb{R}$ est :

$$-\frac{1}{\mu}\alpha^y \frac{\partial}{\partial \widetilde{y}} \left(\alpha^y\, \mu\, \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial \widetilde{y}} \right) - \frac{1}{\mu}\alpha^z \frac{\partial}{\partial \widetilde{z}} \left(\alpha^z\, \mu\, \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial \widetilde{z}} \right) - (k^2 + \lambda)\, \widetilde{u} = f.$$

On se ramène ainsi à la recherche des fonctions $\widetilde{u} \in L^2(\mathbb{R}^2)$ solutions de $A_\alpha \widetilde{u} - \lambda \widetilde{u} = f$, où A_α est l'opérateur de $L^2(\mathbb{R}^2)$ défini par :

$$A_\alpha \widetilde{u} := -\frac{1}{\mu}\alpha^y \frac{\partial}{\partial \widetilde{y}}\left(\alpha^y\,\mu\,\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial \widetilde{y}}\right) - \frac{1}{\mu}\alpha^z \frac{\partial}{\partial \widetilde{z}}\left(\alpha^z\,\mu\,\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial \widetilde{z}}\right) - k^2\,\widetilde{u},$$
$$\forall \widetilde{u} \in D(A_\alpha) := \left\{\widetilde{u} \in L^2(\mathbb{R}^2), \frac{\partial}{\partial \widetilde{y}}\left(\alpha^y\,\mu\,\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial \widetilde{y}}\right) \in L^2(\mathbb{R}^2), \frac{\partial}{\partial \widetilde{z}}\left(\alpha^z\,\mu\,\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial \widetilde{z}}\right) \in L^2(\mathbb{R}^2)\right\}. \quad (2.22)$$

Remarque 2.12 : *Nous pouvons réécrire A_α sous la forme suivante :*

$$A_\alpha \widetilde{u} \;:=\; -\frac{\alpha^y\alpha^z}{\mu}\mathrm{div}\,(\mu\,\mathbb{H}\,\nabla\widetilde{u}) \;-\; k^2\widetilde{u}, \forall u \;\in\; D(A_\alpha) \;:=\; \left\{\widetilde{u} \in H^1(\mathbb{R}^2), \mathrm{div}\,(\mu\,\mathbb{H}\,\nabla\widetilde{u}) \in L^2(\mathbb{R}^2)\right\},$$

où $\mathbb{H}$ est la matrice définie par :

$$\mathbb{H} := \begin{pmatrix} \dfrac{\alpha^y}{\alpha^z} & 0 \\ 0 & \dfrac{\alpha^z}{\alpha^y} \end{pmatrix}.$$

Pour cela, nous devons prendre les définitions des opérateurs div *et ∇ en coordonnées cartésiennes (par rapport à y et z).*

Les deux choix de chemins que nous faisons dans tout ce mémoire sont les suivants :

Exemple 2.5 (cas abrupt) *Pour $s \in \{y, z\}$, soit $R_2^s \geq R$. Le cas de la PML abrupte est donné par :*

$$\mathcal{C}_s(\widetilde{s}) = \begin{cases} \widetilde{s} & \text{si } |\widetilde{s}| < R_2^s, \\ R_2^s + \frac{\widetilde{s}-R_2^s}{\alpha_\infty^s} & \text{sinon}, \end{cases} \quad (2.23)$$

avec $\alpha_\infty^s \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Exemple 2.6 (cas doux) *Pour $s \in \{y, z\}$, soit $R \leq R_2^s < R_3^s$. Le cas de la PML douce est donné par :*

$$\mathcal{C}_s(\widetilde{s}) = \begin{cases} \widetilde{s} & \text{si } |\widetilde{s}| < R_2^s, \\ \mathcal{C}_s(\widetilde{s}) & \text{si } R_2^s \leq |\widetilde{s}| < R_3^s, \\ \frac{\widetilde{s}}{\alpha_\infty^s} & \text{sinon}, \end{cases} \quad (2.24)$$

avec $\alpha_\infty^s \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ et tel que $\mathcal{C}_s(\widetilde{s})$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. On suppose que la partie réelle de $\mathcal{C}_s(\widetilde{s})$ est une fonction strictement croissante et que la partie imaginaire de $\mathcal{C}_s(\widetilde{s})$ est monotone et telle que sa dérivée est bornée.

Remarque 2.13 : *Pour $s \in \{y, z\}$, sous l'hypothèse $-\pi/2 < \arg_{i\mathbb{R}^+}(\alpha_\infty^s) < 0$, alors nous avons le résultat suivant (dans le cas abrupt comme dans le cas doux) :* $\arg_{i\mathbb{R}^+}(\alpha^s)$ *est inclus dans l'intervalle* $]-\pi/2, 0]$.

Dans le cas abrupt, c'est immédiat. Dans le cas doux, ce sont les hypothèses sur la partie réelle et la partie imaginaire de $\mathcal{C}^s$ qui permettent de conclure, comme dans le cas 1D.

Nous allons maintenant détailler le spectre de l'opérateur A_α. Nous verrons que le spectre essentiel de A_α ne peut pas être calculé par les mêmes techniques que celles utilisées dans le cas 1D ou 2D avec PML radiale.

Spectre de l'opérateur transformé

Nous nous plaçons dans le cas où $-\pi/2 < \arg_{i\mathbb{R}^+}(\alpha_\infty^y) < 0$ et $-\pi/2 < \arg_{i\mathbb{R}^+}(\alpha_\infty^z) < 0$.

Spectre essentiel

Dans l'article de Kim et Pasciak [KP10], le spectre essentiel d'un opérateur avec PMLs cartésiennes est déterminé, en utilisant ce qu'on appelle, dans ce mémoire, les PMLs douces.

Nous allons rappeler, en l'adaptant, la démonstration de l'article, puisqu'elle ne fait pas appel aux mêmes arguments que dans le cas de la PML radiale. Le résultat que l'on obtient est le suivant :

Théorème 2.5 (Spectre essentiel de l'opérateur A_α) **:** *Dans le cas de la PML douce, les différentes définitions de spectres essentiels de l'opérateur A_α coïncident et*

$$\Lambda_{ej}(A_\alpha) = \left\{\lambda \in \mathbb{C}, 2\min(\arg\alpha_\infty^y, \arg\alpha_\infty^z) \leq \arg(k_\infty^2+\lambda) \leq 2\max(\arg\alpha_\infty^y, \arg\alpha_\infty^z)\right\}, \quad \forall j = 1,\dots,7.$$

Nous notons arg *l'argument entre $-3\pi/2$ et $\pi/2$:* $\arg = \arg_{i\mathbb{R}^+}$.

Le spectre essentiel n'est plus forcément une demi-droite, comme dans le cas 1D ou 2D avec PML radiale. En général (quand $\arg_{i\mathbb{R}^+}(\alpha_\infty^y) \neq \arg_{i\mathbb{R}^+}(\alpha_\infty^z)$), c'est un secteur angulaire.

Nous allons voir en quoi la démonstration que l'on va donner ne s'applique qu'au cas de la PML douce. Dans toute la suite, nous supposerons que les PMLs sont douces. Pour démontrer ce théorème, nous introduisons l'opérateur « à l'infini » A_α^∞ de $L^2(\mathbb{R}^2)$ défini par :

$$A_\alpha^\infty \widetilde{u} := \alpha^y \frac{\partial}{\partial\widetilde{y}}\left(\alpha^y \frac{\partial\widetilde{u}}{\partial\widetilde{y}}\right) - \alpha^z \frac{\partial}{\partial\widetilde{z}}\left(\alpha^z \frac{\partial\widetilde{u}}{\partial\widetilde{z}}\right) - k_\infty^2\widetilde{u},$$
$$\forall \widetilde{u} \in D(A_\alpha^\infty) := \left\{\widetilde{u} \in L^2(\mathbb{R}^2), \frac{\partial}{\partial\widetilde{y}}\left(\alpha^y \frac{\partial\widetilde{u}}{\partial\widetilde{y}}\right) \in L^2(\mathbb{R}^2), \frac{\partial}{\partial\widetilde{z}}\left(\alpha^z \frac{\partial\widetilde{u}}{\partial\widetilde{z}}\right) \in L^2(\mathbb{R}^2)\right\}.$$

Cet opérateur « à l'infini » n'est ici pas isotrope et fait intervenir α^y et α^z (et non leurs valeurs à l'infini), contrairement au cas de la PML radiale. Ainsi, la détermination du spectre de cet opérateur est une difficulté en soi. Nous allons montrer le résultat suivant :

Proposition 2.1 *Dans le cas de la PML douce, le spectre de A_α^∞ est égal à*

$$\left\{\lambda \in \mathbb{C}, 2\min(\arg\alpha_\infty^y, \arg\alpha_\infty^z) \leq \arg(k_\infty^2+\lambda) \leq 2\max(\arg\alpha_\infty^y, \arg\alpha_\infty^z)\right\},$$

où nous avons noté arg *l'argument entre $-3\pi/2$ et $\pi/2$:* $\arg = \arg_{i\mathbb{R}^+}$.

Nous ne pouvons pas appliquer, comme dans le cas 1D ou 2D radial, un argument de compacité pour démontrer ce résultat : A_α^∞ n'est pas la perturbation compacte (en un certain sens) d'un opérateur « simple ». Nous allons utiliser une autre technique : nous allons interpréter A_α^∞ comme le produit tensoriel de deux opérateurs et le spectre de A_α^∞ nous sera alors donné par le théorème suivant :

Théorème 2.6 : *Soit A et B des générateurs de semigroupes holomorphes bornés sur un espace de Hilbert X. Soit $D(A)$ et $D(B)$ les domaines respectivement des opérateurs A et B. Si C est la fermeture de l'opérateur $A\otimes I + I\otimes B$, défini sur $D(A)\otimes D(B)$, alors C génère un semigroupe holomorphe borné et*

$$\Lambda(C) = \Lambda(A) + \Lambda(B).$$

Démonstration. Voir le théorème XIII.35 dans [RS80]. □

Pour utiliser le théorème 2.6, nous avons besoin de montrer que les opérateurs A et B, qui interviennent dans le théorème sont des générateurs de semigroupes holomorphes bornés. Pour cela, nous utilisons le théorème suivant :

Théorème 2.7 : *Soit T un opérateur m-sectoriel sur un espace de Hilbert X. Alors, T est le générateur d'un semigroupe holomorphe borné.*

Démonstration. Voir le théorème IX.1.24 dans [Kat76]. □

Rappelons qu'un opérateur T est m-sectoriel si son image numérique est contenue dans un cône de la forme : $S_\delta := \{\lambda \in \mathbb{C}, |\arg(\lambda)| \leq \delta|\}$, où $\delta \in [0, \pi/2[$ et si $\mathbb{C} \setminus S_\delta \cap \rho(T) \neq \emptyset$ (voir section A.1.1).

Nous définissons les deux opérateurs de $L^2(\mathbb{R})$ suivants :

$$\begin{aligned} A_y u &:= -\alpha^y \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\alpha^y \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}\right), \quad \forall u \in D(A_y) := \left\{u \in L^2(\mathbb{R}), \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\alpha^y \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}\right) \in L^2(\mathbb{R})\right\}, \\ A_z u &:= -\alpha^z \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\alpha^z \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}\right), \quad \forall u \in D(A_z) := \left\{u \in L^2(\mathbb{R}), \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\alpha^z \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}\right) \in L^2(\mathbb{R})\right\}. \end{aligned}$$

Les deux lemmes qui suivent permettent, d'une part, de déterminer le spectre des opérateurs A_y et A_z et, d'autre part, de montrer qu'il existe $\beta \in \mathbb{R}^+$ et $\eta \in \mathbb{C}$ tels que $\eta A_y + \beta I$ et $\eta A_z + \beta I$ sont m-sectoriels.

Lemme 2.5 *Le spectre de A_y est confondu avec son spectre essentiel (quelle que soit la définition du spectre essentiel) et il est égal à $(\alpha^y_\infty)^2\,\mathbb{R}^+$. De même, le spectre de A_z est confondu avec son spectre essentiel et il est donné par : $(\alpha^z_\infty)^2\mathbb{R}^+$.*

Démonstration. Nous pouvons montrer, comme à la sous-section 2.2.2, que le spectre essentiel de A_y est $(\alpha^y_\infty)^2\,\mathbb{R}^+$ et que le spectre essentiel de A_z est $(\alpha^z_\infty)^2\mathbb{R}^+$.

Nous montrons maintenant que le spectre discret de A_y (et de A_z) est vide. Faisons-le pour A_y. Soit u une fonction propre de A_y associée à une valeur propre λ. Considérons $\breve{u}$ la fonction de la variable complexe $\breve{y}$ telle que $\breve{y} = \mathcal{C}_y(y)$. La fonction $\breve{u}$ vérifie :

$$-\frac{\mathrm{d}^2\breve{u}}{\mathrm{d}\breve{y}^2} + \lambda\breve{u} = 0.$$

Ainsi, en notant $\sqrt{\lambda} = \sqrt[(\alpha^y_\infty)^2\,\mathbb{R}^+]{\lambda}$ la racine carrée en prenant la coupure sur le spectre essentiel de A_y, on a :

$$\breve{u}(\breve{y}) = C_1 \exp(i\sqrt{\lambda}\,\breve{y}) + C_2 \exp(-i\sqrt{\lambda}\,\breve{y}).$$

En revenant à la fonction $u(y) = \breve{u}(\mathcal{C}_y(y))$, ceci donne : pour tout $y \in \mathbb{R}$,

$$u(y) = C_1 \exp(i\sqrt{\lambda}\,\mathcal{C}_y(y)) + C_2 \exp(-i\sqrt{\lambda}\,\mathcal{C}_y(y)).$$

Pour $|y| > R_3^y$, on obtient alors :

$$u(y) = C_1 \exp\left(i\sqrt{\lambda}\,\frac{y}{\alpha^z_\infty}\right) + C_2 \exp\left(-i\sqrt{\lambda}\,\frac{y}{\alpha^z_\infty}\right).$$

Ceci impose que $C_1 = 0$ et que $C_2 = 0$, en regardant $y > R_3^y$ et $y < -R_3^y$. □

Lemme 2.6 *Dans le cas de la PML douce, il existe $\beta \in \mathbb{R}^+, \eta \in \mathbb{C}$ tels que $\eta A_y + \beta I$ et $\eta A_z + \beta I$ sont m-sectoriels.*

Démonstration. Nous traitons le cas de l'opérateur A_y. On va montrer qu'il existe deux constantes $C_1 > 0$ et $C_2 > 0$ telles que $\Re e(Tu,u)_{L^2(\mathbb{R})} \geq C_1 \|u\|^2_{H^1(\mathbb{R})}$ et $\left| \Im m(Tu,u)_{L^2(\mathbb{R})} \right| \leq C_2 \|u\|^2_{H^1(\mathbb{R})}$, où $T = \eta A_y + \beta I$.

Calculons $\Re e(\eta A_y u, u)_{L^2(\mathbb{R})}$, pour $u \in D(A_y)$:

$$\Re e\left(\eta\, A_y u, u\right)_{L^2(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} \Re e\left(\eta\,(\alpha^y)^2\right) \left|\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}\right|^2 \mathrm{d}y - \Re e\left(\int_{\mathbb{R}} \eta\,\alpha^y\, \frac{\mathrm{d}\alpha^y}{\mathrm{d}y}\, \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}\, \overline{u}\, \mathrm{d}y\right).$$

Or,

$$\int_{\mathbb{R}} \Re e\left(\eta\,(\alpha^y)^2\right) \left|\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}\right|^2 \mathrm{d}y \geq \inf\left(\Re e\left(\eta(\alpha^y)^2\right)\right) \left\|\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}\right\|^2_{L^2(\mathbb{R})}.$$

De plus,

$$\begin{aligned}
\pm\Re e\left(\int_{\mathbb{R}} \eta\,\alpha^y\, \frac{\mathrm{d}\alpha^y}{\mathrm{d}y}\, \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}\, \overline{u}\, \mathrm{d}y\right) &\geq -\left|\int_{\mathbb{R}} \eta\,\alpha^y\, \frac{\mathrm{d}\alpha^y}{\mathrm{d}y}\, \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}\, \overline{u}\, \mathrm{d}y\right| \\
&\geq -\sup\left(\left|\eta\,\alpha^y\, \frac{\mathrm{d}\alpha^y}{\mathrm{d}y}\right|\right) \int_{\mathbb{R}} \left|\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}\, \overline{u}\right| \mathrm{d}y \\
&\geq -\sup\left(\left|\eta\,\alpha^y\, \frac{\mathrm{d}\alpha^y}{\mathrm{d}y}\right|\right) \left\|\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}\right\|_{L^2(\mathbb{R})} \|u\|_{L^2(\mathbb{R})} \\
&\geq -\sup\left(\left|\eta\,\alpha^y\, \frac{\mathrm{d}\alpha^y}{\mathrm{d}y}\right|\right) \frac{1}{2}\left(\gamma \left\|\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}\right\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + \frac{1}{\gamma}\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R})}\right), \forall \gamma > 0.
\end{aligned}$$

La dernière inégalité vient de l'identité arithmético-géométrique.

Nous posons

$$c_1 := \inf\left(\Re e\left(\eta\,(\alpha^y)^2\right)\right) \quad \text{et} \quad c_2 := \sup\left(\left|\eta\,\alpha^y\, \frac{\mathrm{d}\alpha^y}{\mathrm{d}y}\right|\right) > 0.$$

Nous utilisons ici la remarque 2.13. Ainsi, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $-\pi + 2\varepsilon < \arg_{i\mathbb{R}^+}((\alpha^y)^2) \leq 0$, en prenant $\eta = \exp(i(\pi/2 - \varepsilon))$, on a alors : $c_1 > 0$.

On obtient ainsi :

$$\Re e\left(\eta\, A_y u, u\right)_{L^2(\mathbb{R})} \geq \left(c_1 - \frac{c_2}{2}\gamma\right) \left\|\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}\right\|^2_{L^2(\mathbb{R})} - \frac{c_2}{2\gamma}\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R})}, \forall \gamma > 0.$$

Calculons maintenant : $\left|\Im m(\eta\, A_y u, u)_{L^2(\mathbb{R})}\right|$, pour $u \in D(A_y)$:

$$\left|\Im m\left(\eta\, A_y u, u\right)_{L^2(\mathbb{R})}\right| \leq \left|\int_{\mathbb{R}} \Im m\left(\eta\,(\alpha^y)^2\right) \left|\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}\right|^2 \mathrm{d}y\right| + \left|\Im m\left(\int_{\mathbb{R}} \eta\,\alpha^y\, \frac{d\alpha^y}{\mathrm{d}y} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} \overline{u} dy\right)\right|$$

Or,

$$\left|\int_{\mathbb{R}} \Im m\left(\eta\,(\alpha^y)^2\right) \left|\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}\right|^2 dy\right| \leq \sup\left(\left|\Im m\left(\eta\,(\alpha^y)^2\right)\right|\right) \|\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}\|^2_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Nous posons

$$c_3 := \sup\left(\left|\Im m\left(\eta\,(\alpha^y)^2\right)\right|\right) > 0.$$

De plus,

$$\left|\Im m\left(\int_{\mathbb{R}} \eta\,\alpha^y\, \frac{\mathrm{d}\alpha^y}{\mathrm{d}y}\, \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}\, \overline{u}\, \mathrm{d}y\right)\right| \leq \frac{c_2}{2}\left(\gamma_2 \left\|\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}\right\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + \frac{1}{\gamma_2}\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R})}\right), \forall \gamma_2 > 0.$$

Ainsi,

$$\left|\Im m\left(\eta\, A_y u, u\right)_{L^2(\mathbb{R})}\right| \leq \left(c_3 + \frac{c_2}{2}\gamma_2\right) \left\|\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}\right\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + \frac{c_2}{2\gamma_2}\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R})}, \forall \gamma_2 > 0.$$

Ensuite, en prenant $\beta \in \mathbb{R}^+$, on a :

$$\begin{aligned}
\Re e\left(\left(\eta\, A_y + \beta I\right) u, u\right)_{L^2(\mathbb{R})} &\geq \left(c_1 - \frac{c_2}{2}\gamma\right) \left\|\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}\right\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + \left(\beta - \frac{c_2}{2\gamma}\right) \|u\|^2_{L^2(\mathbb{R})}, \forall \gamma > 0. \\
\left|\Im m\left(\left(\eta\, A_y + \beta I\right) u, u\right)_{L^2(\mathbb{R})}\right| &\leq \left(c_3 + \frac{c_2}{2}\gamma_2\right) \left\|\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}\right\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + \frac{c_2}{2\gamma_2}\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R})}, \forall \gamma_2 > 0.
\end{aligned}$$

En prenant γ suffisamment petit puis β suffisamment grand, on a :

$$\Re e\left(\left(\eta\, A_y + \beta I\right) u, u\right)_{L^2(\mathbb{R})} \geq \left(c_1 - \frac{c_2}{2}\gamma\right) \|u\|^2_{H^1(\mathbb{R})}$$

et

$$\left|\Im m\left(\left(\eta\, A_y + \beta I\right) u, u\right)_{L^2(\mathbb{R})}\right| \leq \max\left(c_3 + \frac{c_2}{2}\gamma_2, \frac{c_2}{2\gamma_2}\right) \|u\|^2_{H^1(\mathbb{R})}.$$

Ainsi, on a démontré qu'il existe une constante C telle que pour tout $u \in D(A_y)$

$$\Re e\left(\left(\eta\, A_y + \beta I\right) u, u\right)_{L^2(\mathbb{R})} > C \left|\Im m\left(\left(\eta\, A_y + \beta I\right) u, u\right)_{L^2(\mathbb{R})}\right|.$$

On a ainsi montré que $T = \eta A_y + \beta I$ est m-sectoriel. On a pris $\eta = \exp(i(\pi/2 - \varepsilon))$ et $\beta \in \mathbb{R}^+$ suffisamment grand. On peut démontrer, en utilisant le même η et β suffisamment grand que $\eta A_z + \beta I$ est m-sectoriel. Puis, il est facile de voir qu'on peut prendre le même β pour que $\eta A_y + \beta I$ et $\eta A_z + \beta I$ soient simultanément m-sectoriels. □

Remarque 2.14 : *Dans le cas de la PML abrupte, on ne peut pas généraliser cette démonstration. Le problème vient du fait qu'on ne sait pas montrer que $\eta A_y + \beta I$ est m-sectoriel quand α^y n'est pas une fonction régulière.*

Nous sommes maintenant en mesure de prouver la proposition 2.1.

Démonstration. (proposition 2.1). D'après le théorème 2.6, comme nous savons que $\eta A_y + \beta I$ et $\eta A_z + \beta I$ sont m-sectoriels (lemme 2.6), ils génèrent des semigroupes holomorphes bornés, donc l'opérateur

$$C := (\eta A_y + \beta I) \otimes I + I \otimes (\eta A_z + \beta I) = \eta(A_y \otimes I + I \otimes A_z) + 2\beta I$$

a pour spectre

$$\Lambda(C) = (\eta\Lambda(A_y) + \beta) + (\eta\Lambda(A_z) + \beta) = \eta\left(\Lambda(A_y) + \Lambda(A_z)\right) + 2\beta.$$

L'opérateur A^∞_α est la fermeture de l'opérateur

$$T := (A_y \otimes I + I \otimes A_z) - k^2_\infty I = \frac{1}{\eta}(C - 2\beta I) - k^2_\infty I,$$

en effet A^∞_α est défini sur $L^2(\mathbb{R}^2)$ et T sur $L^2(\mathbb{R}) \otimes L^2(\mathbb{R}) = L^2(\mathbb{R}^2)$ et le domaine de T est $H^2(\mathbb{R}) \otimes H^2(\mathbb{R})$, qui est dense dans $H^2(\mathbb{R}^2)$, le domaine de A^∞_α, dans le cas d'une PML douce. On en déduit alors que $\Lambda(A^\infty_\alpha) = \Lambda(A_y) + \Lambda(A_z) - k^2_\infty$. En utilisant le lemme 2.5, on obtient ainsi le spectre de A^∞_α :

$$\Lambda(A^\infty_\alpha) = \left\{\lambda \in \mathbb{C}, 2\min(\arg\alpha^y_\infty, \arg\alpha^z_\infty) \leq \arg(\lambda + k^2_\infty) \leq 2\max(\arg\alpha^y_\infty, \arg\alpha^z_\infty)\right\}.$$

□

Pour démontrer le théorème 2.5, nous avons besoin de la proposition suivante.

Proposition 2.2 *Il existe $\xi \in \rho(A_\alpha) \cap \rho(A_\alpha^\infty)$. De plus, pour un tel ξ, $R_{A_\alpha}(\xi) = R_{A_\alpha^\infty}(\xi) + K$, où K est un opérateur compact.*

Démonstration. Nous suivons la même démarche que celle que nous avons déjà appliquée à deux reprises (dans le cas 1D et dans le cas 2D avec PML radiale). Nous cherchons tout d'abord $\xi \in \mathbb{C}$ tel que $R_{A_\alpha}(\xi)$ et $R_{A_\alpha^\infty}(\xi)$ existent. On a :

$$\Big(\frac{\mu}{\alpha^y\alpha^z}(A_\alpha - \xi)u, v\Big)_{L^2(\mathbb{R}^2)} = \int_{\mathbb{R}^2} \mu \left(\frac{\alpha^y}{\alpha^z}\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial \overline{v}}{\partial y} + \frac{\alpha^z}{\alpha^y}\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial \overline{v}}{\partial z} - \frac{k^2+\xi}{\alpha^y\alpha^z}\, u\, \overline{v}\right) \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z.$$

Nous utilisons maintenant le résultat de la remarque 2.13. On prend $\varepsilon > 0$ tel que $\frac{-\pi}{2} + \varepsilon < \arg_{i\mathbb{R}^+}(\alpha^s_\infty) \leq 0$, pour $s \in \{y, z\}$. Nous vérifions ensuite :

$$\begin{aligned}
&\frac{-\pi}{2} + \varepsilon < \arg_{i\mathbb{R}^+}\left(\frac{\alpha^y}{\alpha^z}\right) < \frac{\pi}{2} - \varepsilon,\\
&\frac{-\pi}{2} + \varepsilon < \arg_{i\mathbb{R}^+}\left(\frac{\alpha^z}{\alpha^y}\right) < \frac{\pi}{2} - \varepsilon,\\
&-\pi + 2\varepsilon < \arg_{i\mathbb{R}^+}\left(\alpha^y\alpha^z\right) \leq 0.
\end{aligned}$$

Comme k^2 évolue dans un borné, on peut alors choisir ξ en module suffisamment grand de telle manière que

$$\frac{-\pi}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \arg_{i\mathbb{R}^+}(-(k^2+\xi)) < \frac{-\pi}{2} + 3\frac{\varepsilon}{2},$$

on a alors

$$\frac{-\pi}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \arg_{i\mathbb{R}^+}\left(\frac{-(k^2+\xi)}{\alpha^y\alpha^z}\right) < \frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ainsi les valeurs prises par α^y/α^y, α^z/α^z et $-(k^2+\xi)/(\alpha^y\alpha^z)$ sont toutes strictement dans le même demi-plan (le demi-plan $\{\zeta \in \mathbb{C}, \Re e(\zeta) > 0\}$. Par ailleurs, elles sont toutes supérieures, en module, à une constante strictement positive. Ceci nous montre que la forme sesquilinéaire associée à $\mu/(\alpha^y\alpha^z)\,(A_\alpha - \xi)$ est coercive. On en déduit que $\xi \in \rho(A_\alpha)$. Ensuite nous vérifions qu'un tel ξ est également dans l'ensemble résolvant de A_α^∞, d'après la proposition 2.1.

La deuxième étape consiste à montrer que $R_{A_\alpha}(\xi) = R_{A_\alpha^\infty}(\xi) + K$, où K est un opérateur compact. Soit (f_n) une suite bornée dans $L^2(\mathbb{R}^2)$. On pose $u_n := R_{A_\alpha}(\xi) f_n$ et $u_n^\infty := R_{A_\alpha^\infty}(\xi) f_n$.

On veut montrer que de $w_n := u_n - u_n^\infty$, on peut extraire une sous-suite qui converge fortement dans $L^2(\mathbb{R}^2)$. En fait, on va montrer, à l'extraction d'une sous-suite près, que w_n converge fortement dans $H^1(\mathbb{R}^2)$.

L'idée est, encore une fois, d'évaluer la différence des formulations variationnelles associées aux problèmes $(A_\alpha - \xi)u_n = f_n$ et $(\, A_\alpha^\infty - \xi)u_n^\infty = f_n$ (toujours avec $\xi \in \rho(A_\alpha) \cap \rho(A_\alpha^\infty)$) :

$$\Big(\frac{\mu}{\alpha^y\alpha^z}(A_\alpha - \xi)u, v\Big)_{L^2(\mathbb{R}^2)} = \int_{\mathbb{R}^2} \left(\mu\,\frac{\alpha^y}{\alpha^z}\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial \overline{v}}{\partial y} + \mu\,\frac{\alpha^z}{\alpha^y}\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial \overline{v}}{\partial z} - \mu\,\frac{k^2+\xi}{\alpha^y\alpha^z}\, u\, \overline{v}\right) \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z.$$

De même,

$$\Big(\frac{\mu_\infty}{\alpha^y\alpha^z}(A_\alpha^\infty - \xi)u, v\Big)_{L^2(\mathbb{R}^2)} = \int_{\mathbb{R}^2} \left(\mu_\infty\,\frac{\alpha^y}{\alpha^z}\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial \overline{v}}{\partial y} + \mu_\infty\,\frac{\alpha^z}{\alpha^y}\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial \overline{v}}{\partial z} - \mu_\infty\,\frac{k^2+\xi}{\alpha^y\alpha^z}\, u\, \overline{v}\right) \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z.$$

On vérifie alors, de la même manière que dans le cas 1D ou que dans le cas 2D avec PML radiale douce (en prenant $v = w_n$), que si on suppose que $f_n \rightharpoonup 0$ dans $L^2(\mathbb{R}^2)$, alors on en déduit que $\|w_n\|_{H^1(\mathbb{R}^2)} \to 0$, puisque $\mu - \mu_\infty$ est à support compact. Ainsi, on montre que $R_{A_\alpha}(\xi) = R_{A_\alpha^\infty}(\xi) + K$, où K est un opérateur compact. □

Ainsi, en appliquant la même démarche que dans le cas 1D, nous démontrons le théorème 2.5.

Remarque 2.15 : *Et dans le cas PML abrupte ? Nous avons vu que nous ne savons pas démontrer que $\eta\, A_y + \beta I$ est m-sectoriel. Nous conjecturons tout de même que le résultat sur le spectre essentiel de A_α est valable.*

Spectre discret

Rappelons que nous nous plaçons dans le cas où $-\pi/2 < \arg_{i\mathbb{R}^+}(\alpha_\infty^y) < 0$ et $-\pi/2 < \arg_{i\mathbb{R}^+}(\alpha_\infty^z) < 0$.

Théorème 2.8 (spectre discret de A_α) **:** *Dans le cas PML douce, le spectre discret de A_α est composé de deux parties :*

- *le spectre discret de A, inclus dans l'intervalle réel $]-k_{\max}^2, -k_\infty^2[$.*
- *un ensemble dénombrable de valeurs propres, de multiplicité finie et isolées, qui sont incluses dans le secteur $\{\lambda \in \mathbb{C}, 2\max(\arg_{i\mathbb{R}^+}(\alpha_\infty^y), \arg_{i\mathbb{R}^+}(\alpha_\infty^z)) < \arg_{i\mathbb{R}^+}(k_\infty^2 + \lambda) \leq 0\}$.*

Démonstration. Nous adoptons une démarche similaire au cas 1D ou 2D avec PML radiale. Soit $\lambda \in \Lambda_{disc}(A_\alpha)$ et soit $\widetilde{u}$ une fonction propre associée. Regardons l'équation aux valeurs propres vérifiée par $\widetilde{u}$, pour $|z| > R_3^z$:

$$-\alpha^y \frac{\partial}{\partial y}\left(\alpha^y \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial y}\right) + (\alpha_\infty^z)^2 \frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial z^2} - (k_\infty^2 + \lambda)\,\widetilde{u} = 0.$$

On obtient, en appliquant la transformation de Fourier par rapport à z

$$\mathcal{F}_z\widetilde{u}(y,\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}^2} \widetilde{u}(y,z)\exp(i\xi z)\,\mathrm{d}z :$$

$$-\alpha^y \frac{\partial}{\partial y}\left(\alpha^y \frac{\partial \mathcal{F}_z\widetilde{u}}{\partial y}\right) + (\alpha_\infty^z)^2\,\xi^2\,\mathcal{F}_z\widetilde{u} - (k_\infty^2 + \lambda)\,\mathcal{F}_z\widetilde{u} = 0.$$

Pour $|y| > R_3^y$, on a :

$$-(\alpha_\infty^y)^2 \frac{\partial^2 \mathcal{F}_z\widetilde{u}}{\partial y^2} + (\alpha_\infty^z)^2\,\xi^2\,\mathcal{F}_z\widetilde{u} - (k_\infty^2 + \lambda)\,\mathcal{F}_z\widetilde{u} = 0.$$

Comme on cherche une fonction qui doit être au moins L^2 par rapport à y, on a alors, pour $|y| > R_3^y$: $\mathcal{F}_z\widetilde{u}$ est proportionnelle à

$$\exp\left(-\,{}^{(\alpha_\infty^y)^2\mathbb{R}^-}\!\sqrt{-k_\infty^2 - \lambda + \xi^2(\alpha_\infty^z)^2}\,\frac{|y|}{\alpha_\infty^y}\right).$$

Or, $\mathcal{F}_z u(y,\xi) := \mathcal{F}_z \widetilde{u}(\mathcal{C}_y^{-1}(y),\xi)$ vérifie le problème suivant : pour $|z| > R_3^z$ et pour tout $y \in \mathbb{R}$:

$$-\frac{\partial^2 \mathcal{F}_z u}{\partial y^2} + (\alpha_\infty^z)^2\,\xi^2\,\mathcal{F}_z u - (k_\infty^2+\lambda)\,\mathcal{F}_z u = 0.$$

De plus, pour $|y| > R_3^y$, $\mathcal{F}_z u(y,\xi)$ est proportionnelle à :

$$\widehat{v}_z(y,\xi) := \exp\left(-\sqrt[(\alpha_\infty^y)^2\mathbb{R}^-]{-k_\infty^2-\lambda+\xi^2(\alpha_\infty^z)^2}\,|y|\right).$$

On regarde maintenant quand $\widehat{v}_z(y,\xi)$ est exponentiellement croissant ou décroissant. On obtient l'alternative suivante :

- Si $2\arg_{i\mathbb{R}^+}(\alpha_\infty^y) < \arg_{i\mathbb{R}^+}(\lambda+k_\infty^2) < 0$, alors pour $\xi = 0$, $\widehat{v}_z(y,\xi)$ est exponentiellement croissant.
- Si $\arg_{i\mathbb{R}^+}(\lambda+k_\infty^2) < 2\arg_{i\mathbb{R}^+}(\alpha_\infty^y)$ ou $\arg_{i\mathbb{R}^+}(\lambda+k_\infty^2) > 0$, alors pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, $\widehat{v}_z(y,\xi)$ est exponentiellement décroissant. Ainsi, $u := \widetilde{u}(\mathcal{C}_y^{-1}(y),z)$ est L^2 par rapport à y.

En utilisant maintenant la transformation de Fourier par rapport à la variable y, notée $\mathcal{F}_y$, en notant

$$\widehat{v}_y(\xi,z) := \exp\left(-\sqrt[(\alpha_\infty^z)^2\mathbb{R}^-]{-k_\infty^2-\lambda+\xi^2(\alpha_\infty^y)^2}\,|z|\right),$$

on obtient l'alternative suivante :

- Si $2\arg_{i\mathbb{R}^+}(\alpha_\infty^z) < \arg_{i\mathbb{R}^+}(\lambda+k_\infty^2) < 0$, alors en $\xi = 0$, $\widehat{v}_y(\xi,z)$ est exponentiellement croissant.
- Si $\arg_{i\mathbb{R}^+}(\lambda+k_\infty^2) < 2\arg_{i\mathbb{R}^+}(\alpha_\infty^z)$ ou $\arg_{i\mathbb{R}^+}(\lambda+k_\infty^2) > 0$, alors $u := \widetilde{u}(y,\mathcal{C}_z^{-1}(z))$ est L^2 par rapport à z.

Ainsi, si $\widetilde{u}$ est une fonction propre de A_α, on a l'alternative suivante :

- Pour $\arg_{i\mathbb{R}^+}(\lambda+k_\infty^2) < 2\min(\arg_{i\mathbb{R}^+}(\alpha_\infty^y),\arg_{i\mathbb{R}^+}(\alpha_\infty^z))$ ou $\arg_{i\mathbb{R}^+}(\lambda+k_\infty^2) > 0$, alors $u := \widetilde{u}(\mathcal{C}_y^{-1}(y),\mathcal{C}_z^{-1}(z))$ est une fonction propre de A. Or ceci ne peut se produire que pour $\lambda \in \Lambda_p(A) \subset]-k_{\max}^2,-k_\infty^2]$. On remarque ensuite que $-k_\infty^2 \notin \Lambda_{disc}(A_\alpha)$ puisque $-k_\infty^2 \in \Lambda_e(A_\alpha)$.
- Pour $2\max(\arg_{i\mathbb{R}^+}(\alpha_\infty^y),\arg_{i\mathbb{R}^+}(\alpha_\infty^z)) < \arg_{i\mathbb{R}^+}(k_\infty^2+\lambda) \leq 0$, alors $u := \widetilde{u}(\mathcal{C}_y^{-1}(y),\mathcal{C}_z^{-1}(z))$ ne définit pas une fonction propre de A.

Ceci donne les deux parties du spectre discret de A_α. □

Remarque 2.16 : *Nous avons vu que dans le secteur* $2\max(\arg_{i\mathbb{R}^+}(\alpha_\infty^y),\arg_{i\mathbb{R}^+}(\alpha_\infty^z)) < \arg_{i\mathbb{R}^+}(k_\infty^2+\lambda) \leq 0$, *on peut trouver des valeurs propres de* A_α, *qui ne sont pas valeurs propres de* A, *comme dans le cas 1D ou 2D avec PML radiale. Mais avec les PMLs cartésiennes, il est difficile de caractériser ces éléments de manière intrinsèque comme des objets sortants.*

La figure 2.13 représente l'allure du spectre de l'opérateur A_α. Nous voyons que la différence essentielle avec une PML radiale concerne le spectre essentiel (!). Avec une PML radiale, le spectre essentiel était une demi-droite. Avec les PMLs cartésiennes, c'est en général un secteur angulaire (si $\arg_{i\mathbb{R}^+}(\alpha_\infty^y) \neq \arg_{i\mathbb{R}^+}(\alpha_\infty^z)$).

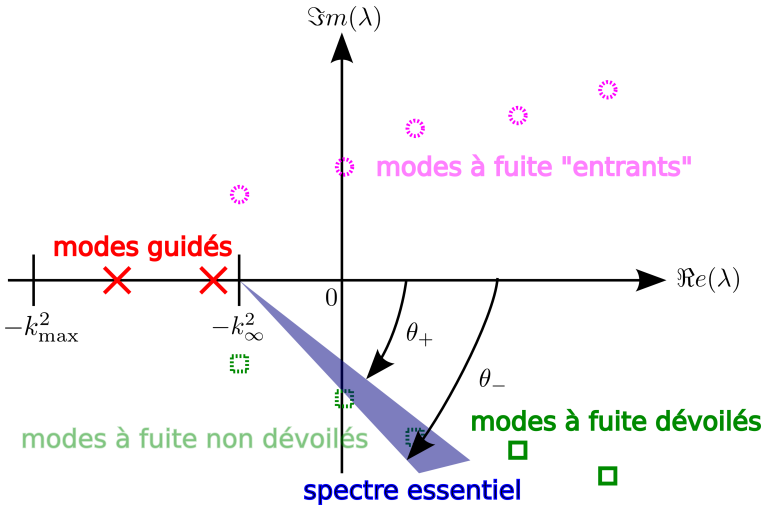

FIGURE 2.13 – *Modes guidés, modes à fuite et spectre essentiel, avec PMLs cartésiennes.* $\theta_- := \min(\arg_{i\mathbb{R}^+}(\alpha^y_\infty), \arg_{i\mathbb{R}^+}(\alpha^z_\infty))$, $\theta_+ := \max(\arg_{i\mathbb{R}^+}(\alpha^y_\infty), \arg_{i\mathbb{R}^+}(\alpha^z_\infty))$.

CONCLUSION SUR LES MODES À FUITE

Nous avons défini les modes à fuite comme les pôles du prolongement analytique en λ de la résolvante. Nous avons vu qu'un moyen de procéder à ce prolongement analytique de la résolvante est d'introduire une PML de taille infinie dans la gaine. Les modes à fuites deviennent alors des valeurs propres de l'opérateur transverse avec PML infinies. Nous allons nous intéresser au chapitre suivant au calcul numérique de ces modes. Nous allons voir que l'idée consiste à prendre une PML de taille finie, au lieu d'une PML de taille infinie.

SIMULATIONS NUMÉRIQUES 3

SOMMAIRE

3.1 CALCULS NUMÉRIQUES DE MODES À FUITE 85
3.1.1 Du problème continu au problème numérique 85
3.1.2 Illustrations numériques 90
3.2 LES DIFFICULTÉS RENCONTRÉES LORS DU CALCUL DE MODES À FUITE 102
3.2.1 Croissance exponentielle de la résolvante 102
3.2.2 Les PMLs non orthogonales : une solution ? 107
3.3 REPRÉSENTATION MODALE DE LA FONCTION DE GREEN DU GUIDE OUVERT UNIFORME 113
3.3.1 Formule de décomposition 113
3.3.2 Résultats numériques 119
3.4 ANNEXE : COMPLÉTUDE DES FONCTIONS PROPRES (GÉNÉRALISÉES) DE $\widetilde{A}_\alpha$ 125

AU chapitre précédent, nous avons détaillé la notion de mode à fuite. Nous avons vu que ces modes apparaissent lorsque l'on cherche des solutions complexes de la relation de dispersion, lorsque celle-ci est disponible. Plus généralement, nous avons défini ces objets comme les pôles du prolongement analytique en λ de la résolvante $R_A(\lambda)$. Nous avons vu qu'un moyen de procéder à ce prolongement analytique est d'utiliser une PML de taille infinie. Dans ce chapitre, nous nous intéressons au calcul numérique de ces modes à fuite.

Nous allons voir que pour cela, l'idée consiste simplement à utiliser une PML de taille finie (contrairement au chapitre précédent où la PML était de taille infinie) et à discrétiser les équations. Nous illustrerons cette méthode dans la section 3.1 par quelques exemples numériques. Nous verrons notamment comment calculer des modes à fuite dans des structures hélicoïdales. Nous verrons ensuite, à la section 3.2, que des difficultés apparaissent lorsque nous cherchons à calculer des modes à fuite. Nous expliquerons le phénomène de pollution numérique des résultats grâce à la notion de pseudospectre et nous donnerons notre remède pour éviter au maximum la pollution numérique : placer la PML aussi proche du cœur que possible. Dans des géométries 2D non canoniques, nous verrons que cela nous a donné l'idée de créer une nouvelle sorte de PML, ce que nous avons appelé des PMLs non orthogonales, qui permettent de s'adapter à la forme

du cœur. Nous illustrerons notre propos avec quelques exemples numériques sur ces nouvelles PMLs. Enfin, à la section 3.3, nous montrerons une utilisation possible des modes à fuite pour la représentation sous forme de série de la fonction de Green du guide ouvert uniforme.

3.1 CALCULS NUMÉRIQUES DE MODES À FUITE

Dans cette section, nous allons chercher à calculer numériquement les modes à fuite. Nous avons vu que ce sont des valeurs propres d'un opérateur A_α, avec PML. Nous allons tirer parti de cela pour les calculer numériquement.

3.1.1 Du problème continu au problème numérique

Lorsque le problème que l'on considère est très simple (par exemple le problème vu aux sous-section 1.1 et 2.1.1), nous avons une relation de dispersion, qui nous permet de déterminer les modes à fuite par la recherche des zéros d'une certaine fonction. On peut alors appliquer un algorithme de type Newton pour déterminer les racines de l'équation de dispersion. Par ailleurs, nous avons une formule analytique pour les fonctions propres. Cette première méthode nous permettra d'avoir une solution de référence, notamment dans le cas où Ω (la section transverse) est 1D.

Lorsque la géométrie n'est pas simple, nous n'avons pas de relation de dispersion « à la main », il est donc nécessaire de trouver une alternative. L'idée est très simple : elle consiste à prendre une PML de taille finie, au lieu de prendre une PML de taille infinie comme dans le chapitre 2. Il est en effet nécessaire d'avoir un domaine de calcul borné pour pouvoir faire des simulations numériques. Ainsi on passe de la recherche des valeurs propres de l'opérateur A_α, avec PML infinie, à celle d'un opérateur $\widetilde{A}_\alpha$, avec PML finie. En prenant une PML de taille finie, nous introduisons une erreur dans le calcul des modes, mais si la PML est suffisamment grande, les modes à fuites qui sont exponentiellement décroissants dans la PML seront suffisamment absorbés par la PML. L'erreur introduite par la troncature de la PML sera donc faible. Ensuite, une deuxième étape consiste à discrétiser l'équation aux valeurs propres obtenue avec la PML de taille finie. Nous utiliserons pour cela la technique des éléments finis, qui sont fondés sur la formulation variationnelle de l'équation aux valeurs propres. Cette technique de calcul des modes à fuite n'est pas originale, loin s'en faut ! On peut citer par exemple [KP09], [HHK04] [HHKS07] pour le calcul de résonances (comme on l'a vu au chapitre précédent, les résonances et les modes à fuite sont deux notions tout à fait similaires), ou encore [AZNG08] pour le calcul de modes à fuite.

Une technique concurrente des PMLs pour calculer les modes à fuite est la technique des couches absorbantes, qui repose globalement sur la même idée : on entoure la zone physique d'intérêt par une couche qui va absorber les ondes, et ainsi, si la zone est suffisamment grande, on espère que l'erreur introduite par la réflexion au bout de la couche absorbante sera faible. Cette technique est utilisée par exemple dans [CL08]. Nous avons vu au chapitre précédent que les PMLs sont sans réflexion parasite à l'interface entre le milieu physique et la PML. Ce n'est pas le cas pour les couches absorbantes. Pour contrecarrer cet effet des couches absorbantes, il est nécessaire de prendre une absorption qui augmente petit à petit lorsque l'on avance dans la couche absorbante ; il n'est pas possible par exemple de prendre l'équivalent d'une PML abrupte, puisque dans ce cas, une trop grande erreur serait créée à l'interface avec le milieu physique. Nous avons préféré utiliser les PMLs car, d'une part, comme on le verra, des résultats de convergence avec les PMLs existent et, d'autre part, leur utilisation est simple, surtout en prenant le cas de PMLs abruptes (c'est toujours ce que l'on fera pour les illustrations numériques).

Enfin, citons les travaux de Hohage, Schmidt et Zschiedrich sur la *pole condition* (condition de pôle en français), cf. [HSZ03b, HSZ03a]. Cette condition de pôle permet de discriminer l'onde sortante en fonction de la position des pôles de la transformée de Laplace de la solution. Cette condition peut être dérivée dans une méthode numérique et ainsi permettre de calculer des résonances, voir [HN09].

Première étape : de la PML de taille infinie à la PML de taille finie

Quand nous tronquons la PML, nous devons imposer une condition au bout de la PML. Le plus simple est d'imposer une condition de Dirichlet ou de Neumann homogène. Nous pouvons également envisager d'autres conditions. À ce sujet, citons le papier [SLHC01] où c'est une condition de périodicité qui est utilisée en fin de PML, parce que c'est la condition qui rentre facilement dans le code de calcul des auteurs de ce papier. En ce qui nous concerne, nous allons souvent utiliser une condition de Neumann car c'est une condition naturelle et nous n'aurons rien à rajouter dans l'espace d'approximation pour la formulation variationnelle.

Explicitons maintenant l'opérateur $\widetilde{A}_\alpha$, avec PML de taille finie. Partons de l'opérateur A_α avec PML infinie. Commençons par le cas d'un opérateur 1D. Dans le cas où cet opérateur est celui de la section 2.2 (i.e. avec condition de Dirichlet homogène en 0 mais nous pourrions très bien prendre une condition de Neumann homogène en 0), nous notons $h_\star$ la coordonnée de la frontière extérieure de la PML. Ainsi la PML remplit le segment $]h_2, h_\star[$. Nous notons $\widetilde{\Omega}$ le domaine physique sur lequel vit l'opérateur $\widetilde{A}_\alpha$: $\widetilde{\Omega} :=]0, h_\star[$. Nous rappelons que nous considérons toujours indifféremment deux types de PML, le type abrupt et le type doux sachant que pour les applications numériques, c'est toujours le type abrupt (plus facile à implémenter) qui sera choisi. En prenant une condition de Neumann homogène en $z = h_\star$, l'opérateur avec PML finie est l'opérateur $\widetilde{A}_\alpha$ de $L^2(0, h_\star)$ défini par :

$$\widetilde{A}_\alpha u := -\frac{\alpha}{\mu}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\alpha\,\mu\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}\right) - k^2 u,$$
$$\forall u \in D(\widetilde{A}_\alpha) := \left\{ u \in H^1(0,h_\star), \alpha\,\mu\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z} \in H^1(0,h_\star), u(0) = 0, \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}(h_\star) = 0 \right\}.$$

Quand la géométrie transverse est bidimensionnelle (cas de la section 2.3), nous noterons $R_\star$ le « bout » de la PML. Ainsi, la PML sera la couronne $B(0,R_\star) \setminus B(0,R_2)$ dans le cas de la PML radiale et la zone $]-R_\star, -R_2[\cup]R_2, R_\star[\times]-R_\star, -R_2[\cup]R_2, R_\star[$ dans le cas de PMLs cartésiennes. Nous notons $\widetilde{\Omega}$ le domaine physique sur lequel vit l'opérateur $\widetilde{A}_\alpha$: $\widetilde{\Omega}$ est la boule de centre 0 et de rayon $R_\star$, $B(0,R_\star)$, dans le cas de la PML radiale et $\widetilde{\Omega} :=]-R_\star, R_\star[\times]-R_\star, R_\star[$ dans le cas de PMLs cartésiennes. Les définitions des opérateurs $\widetilde{A}_\alpha$ avec PML radiale ou cartésienne de taille finie se déduisent aisément des définitions des opérateurs A_α avec PMLs radiale (2.15) ou cartésiennes (2.22), en mettant une condition de type Neumann homogène ou Dirichlet homogène en bout de PML.

En prenant une PML de taille finie, nous avons changé la structure du spectre de l'opérateur sous-jacent. En effet, nous avons le résultat suivant.

Théorème 3.1 : *L'opérateur $\widetilde{A}_\alpha$ est à résolvante compacte.*

Démonstration. Nous n'allons traiter que le cas 1D. Les cas bidimensionnels se montrent de la même manière. Regardons la formulation variationnelle associée à l'équation $(\widetilde{A}_\alpha - \lambda)u = f$. Pour cela, multiplions l'équation par $\mu/\alpha\,\overline{v}$ et intégrons par parties. On obtient alors la formulation variationnelle suivante : trouver $u \in \widetilde{V}$ tel que pour tout $v \in \widetilde{V}$, on ait :

$$\int_0^{h_\star} \left(\alpha\,\mu\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}\,\frac{\mathrm{d}\overline{v}}{\mathrm{d}z} - \mu\frac{k^2+\lambda}{\alpha}u\,\overline{v}\right)\mathrm{d}z = \int_0^{h_\star}\frac{\mu}{\alpha}\,f\,\overline{v}\,\mathrm{d}z,$$

où $\widetilde{V} = \{u \in H^1(0,h_\star), u(0) = 0\}$. En prenant $\lambda = -k_{\max}^2 + i$, par les mêmes arguments que dans le lemme 2.2, on vérifie que l'on se trouve dans le cadre d'application du théorème de Lax–Milgram : il y a donc existence et unicité de la solution u et continuité par rapport aux données : $\|u\|_{H^1(0,h_\star)} \leq C\|f\|_{L^2(0,h_\star)}$. On en déduit que la résolvante $R_{\widetilde{A}_\alpha}(\lambda)$ est compacte, par injection compacte de $H^1(0,h_\star)$ dans $L^2(0,h_\star)$. □

Ainsi, le spectre de $\widetilde{A}_\alpha$ est constitué exclusivement de spectre discret. Dans [KP09], Kim et Pasciak démontrent, dans le cas de PMLs douces, que le spectre de $\widetilde{A}_\alpha$ se rapproche de celui de A_α lorsque la taille de la PML augmente. La figure 3.1 permet ainsi de se représenter comment est transformé le spectre en prenant une PML de taille finie. Les modes guidés et les modes à fuite « dévoilés » (i.e. le spectre discret de A_α) sont faiblement perturbés. La différence majeure concerne le spectre essentiel de A_α qui est « discrétisé ». Mais lorsque la taille de la PML augmente, alors la branche correspondant à la « discrétisation du continuum » (les ronds bleus à droite sur la figure 3.1) se densifie et quand la taille est infinie, on retrouve le spectre essentiel de A_α. Nous distinguerons alors trois types de modes :

- les modes guidés approchés,
- les modes à fuite approchés,
- les modes venant de la discrétisation du spectre continu.

Nous verrons que, numériquement, une telle distinction sera assez facile à faire dans le cas d'un opérateur 1D mais beaucoup plus délicate dans le cas d'un opérateur 2D.

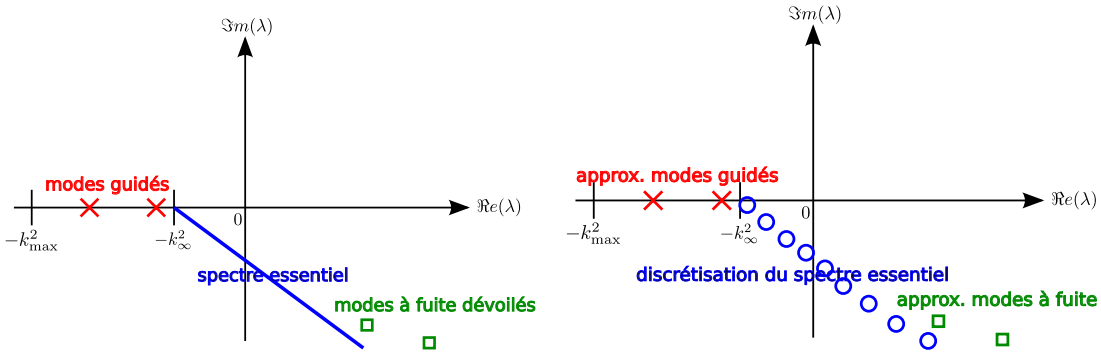

FIGURE 3.1 – *Représentation de la transformation du spectre lorsque l'on passe d'une PML infinie (à gauche) à une PML de taille finie (à droite).*

Pour généraliser ce que l'on fait dans le cas d'un guide fermé, on aimerait obtenir une propriété de base pour les fonctions propres de l'opérateur $\widetilde{A}_\alpha$. En effet, avec une telle propriété, on pourrait représenter n'importe quelle fonction qui est dans $L^2(\widetilde{\Omega})$ comme une série sur fonctions propres de $\widetilde{A}_\alpha$, puisque nous avons montré que l'opérateur $\widetilde{A}_\alpha$ est à résolvante compacte (théorème 3.1), donc que son spectre est discret. Ainsi, comme dans le cas du guide fermé, on pourrait représenter toute onde vivant dans le guide avec PMLs comme un superposition de modes guidés, de modes à fuite et de modes résultant de la discrétisation du spectre continu. Nous aurions ainsi atteint notre but, que nous avons exposé en conclusion du chapitre 1 : transformer l'intégrale sur les modes de radiation en une série. Mais contrairement à ce que nous avions annoncé, nous ne prendrions pas que les modes à fuite : la série ferait intervenir les modes à fuite dévoilés et les modes résultant de la discrétisation du spectre continu. A priori, il semble qu'il faille prendre en

compte en priorité les modes à fuite, puisqu'on a vu qu'ils permettent de rendre compte de la physique du phénomène, qu'ils ne sont pas liés à la PML, qu'ils ont une existence intrinsèque au guide d'ondes ouvert. Au contraire, les modes liés à la discrétisation du continuum ne sont liés qu'à la PML et, par conséquent, il paraît moins important de les prendre en compte. Nous verrons que, numériquement, la distinction entre les différents modes est en général difficile à faire et il semble, par conséquent, qu'il faille traiter les différents types de modes indifféremment.

La différence majeure avec le cas d'un guide fermé est que l'opérateur $\widetilde{A}_\alpha$, tout comme l'opérateur A_α (avec PML infinie), n'est pas autoadjoint. Par conséquent, nous n'avons pas à disposition le théorème spectral qui nous permet d'affirmer, comme pour un opérateur autoadjoint à résolvante compacte (ce qui est le cas pour un guide d'ondes fermé), que les fonctions propres forment une base Hilbertienne. Nous avons ainsi, grâce aux PMLs, transformé une difficulté (la présence d'un spectre continu) en une autre difficulté (le caractère non autoadjoint de l'opérateur transverse). En annexe de ce chapitre (section 3.4), nous expliquons en quoi démontrer la propriété de complétude des fonctions propres [1] est difficile dans le cas de l'opérateur $\widetilde{A}_\alpha$. Désormais, nous n'allons plus nous intéresser à la notion de complétude ou de de base des fonctions propres. Nous allons simplement nous poser la question suivante : comment décomposer ? Nous allons pour cela mettre en exergue une propriété importante de l'opérateur $\widetilde{A}_\alpha$: la *bi-orthogonalité*.

Théorème 3.2 : *Soit deux valeurs propres distinctes : $\lambda_n \neq \lambda_m$, alors nous avons la relation de bi-orthogonalité suivante :*

$$(\Phi_n, \Phi_m^*)_{L^2(\widetilde{\Omega})} = 0$$

où l'on a noté Φ_n la fonction propre associée à la valeur propre λ_n et où Φ_m^* dénote la fonction propre associée à la valeur propre $\overline{\lambda_m}$ de l'adjoint de $\widetilde{A}_\alpha$, noté $\widetilde{A}_\alpha^*$. Dans le cas 1D,

$$(\Phi_n, \Phi_m^*)_{L^2(\widetilde{\Omega})} = \int_0^{h_\star} \frac{\mu}{\alpha}\, \Phi_n\, \Phi_m \,\mathrm{d}z. \tag{3.1}$$

Dans le cas 2D avec PML radiale,

$$(\Phi_n, \Phi_m^*)_{L^2(\widetilde{\Omega})} = \int_{B(0,R_\star)} \frac{\mu}{\alpha\gamma}\, \Phi_n\, \Phi_m\, r \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta. \tag{3.2}$$

Dans le cas 2D avec PMLs cartésiennes,

$$(\Phi_n, \Phi_m^*)_{L^2(\widetilde{\Omega})} = \int_{-R_\star}^{R_\star}\int_{-R_\star}^{R_\star} \frac{\mu}{\alpha^y\alpha^z}\, \Phi_n\, \Phi_m \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z. \tag{3.3}$$

Démonstration. Nous savons que $\widetilde{A}_\alpha\Phi_n = \lambda_n\Phi_n$ et $\widetilde{A}_\alpha^*\Phi_m^* = \overline{\lambda_m}\Phi_m^*$. Nous avons ainsi, d'une part, $(\widetilde{A}_\alpha\Phi_n, \Phi_m^*)_{L^2(\widetilde{\Omega})} = \lambda_n(\Phi_n, \Phi_m^*)_{L^2(\widetilde{\Omega})}$. D'autre part, $(\widetilde{A}_\alpha\Phi_n, \Phi_m^*)_{L^2(\widetilde{\Omega})} = (\Phi_n, \widetilde{A}_\alpha^*\Phi_m^*)_{L^2(\widetilde{\Omega})} = \lambda_m(\Phi_n, \Phi_m^*)_{L^2(\widetilde{\Omega})}$. On en déduit, comme $\lambda_n \neq \lambda_m$, que $(\Phi_n, \Phi_m^*)_{L^2(\widetilde{\Omega})} = 0$.

Il nous reste maintenant à calculer l'adjoint de A_α. Nous allons traiter le cas de l'opérateur 1D avec condition de Dirichlet en $z = 0$ et de Neumann en $z = h_\star$. Les autres cas se traitent de la

[1] La complétude est une notion beaucoup plus faible que celle de base de Riesz, et non suffisante pour justifier que l'on peut décomposer sur les fonctions propres. Mais cette notion plus faible est déjà difficile à démontrer.

même manière. Pour l'instant, calculons formellement $(A_\alpha u, v)_X$.

$$\begin{aligned}(A_\alpha u, v)_X &= \int_0^{h_\star} \left\{ -\frac{\alpha}{\mu}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\alpha\mu\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}\right)\overline{v} - k^2 u\overline{v} \right\}\mathrm{d}z \\ &= \int_0^{h_\star} \left\{ \alpha\,\mu\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{\alpha}{\mu}\overline{v}\right) - k^2\,u\,\overline{v} \right\}\mathrm{d}z - \left[\alpha^2\,\overline{v}\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}\right]_0^{h_\star} \\ &= \int_0^{h_\star} \left\{ -u\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\alpha\,\mu\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{\alpha}{\mu}\overline{v}\right)\right) - k^2\,u\,\overline{v} \right\}\mathrm{d}z - \left[\alpha^2\,\overline{v}\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}\right]_0^{h_\star} + \left[\alpha\,\mu\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{\alpha}{\mu}\overline{v}\right)u\right]_0^{h_\star}.\end{aligned}$$

On en déduit que l'adjoint de A_α est l'opérateur A_α^* défini par :

$$\begin{aligned}A_\alpha^* v\,(z) &:= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\overline{\alpha(z)}\,\mu(z)\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{\overline{\alpha(z)}}{\mu(z)}\,v(z)\right)\right) - k^2(z)\,v(z), \\ \forall v \in D(A_\alpha^*) &:= \left\{ v \in L^2(0,h_\star), \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\overline{\alpha}\,\mu\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{\overline{\alpha}}{\mu}\,v\right)\right) \in L^2(0,h_\star), v(0)=0, \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z}(h_\star)=0 \right\}.\end{aligned}$$

Ainsi, si Φ_m est une fonction propre de $\widetilde{A}_\alpha$ associée à λ_m, $\mu/\overline{\alpha}\,\overline{\Phi_m}$ est une fonction propre de $\widetilde{A}_\alpha^*$ associée à $\overline{\lambda_m}$. L'expression de $(\Phi_n, \Phi_m^*)_{L^2(\widetilde{\Omega})}$ en découle. La même démarche dans le cas des opérateurs 2D donne les relations (3.2) et (3.3). □

Ainsi, quand un mode est simple et que $(\Phi_n, \Phi_n^*)_{L^2(\widetilde{\Omega})} \neq 0$, alors l'expression de la projection sur le sous-espace propre est simplement :

$$\boxed{P_{\lambda_n} v = \frac{(v, \Phi_n^*)_{L^2(\widetilde{\Omega})}}{(\Phi_n, \Phi_n^*)_{L^2(\widetilde{\Omega})}}\,\Phi_n.}$$

Lorsque le mode est multiple et qu'il y a des blocs de Jordan, i.e. la multiplicité algébrique n'est pas égale à la multiplicité géométrique, on doit utiliser une chaîne de Jordan. En pratique, nous supposerons que les modes sont simples. Mais une question demeure : peut-on avoir $(\Phi_n, \Phi_n^*)_{L^2(\widetilde{\Omega})} = 0$? Dans les exemples numériques que l'on va traiter, cela n'arrivera pas, mais cette question reste ouverte.

Deuxième étape : discrétisation de l'équation aux valeurs propres

La deuxième étape consiste à utiliser notre technique de discrétisation préférée pour discrétiser l'équation aux valeurs propres : $\widetilde{A}_\alpha u = \lambda\,u$. En ce qui nous concerne, nous utiliserons la technique des éléments finis : on part de la formulation variationnelle de l'équation aux valeurs propres, qui s'écrit, dans le cas 1D : trouver $u \in \widetilde{V}$ tel que pour tout $v \in \widetilde{V}$,

$$\int_{\widetilde{\Omega}} \mu \left(\alpha\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}\,\frac{\mathrm{d}\overline{v}}{\mathrm{d}z} - \frac{k^2}{\alpha}\,u\,\overline{v} \right)\mathrm{d}z = \lambda \int_{\widetilde{\Omega}} \frac{\mu}{\alpha}\,u\,\overline{v}\,\mathrm{d}z,$$

où $\widetilde{V} = \{u \in H^1(0,h_\star), u(0)=0\}$. Dans le cas 2D radial, la formulation variationnelle s'écrit : trouver $u \in \widetilde{V}$ tel que pour tout $v \in \widetilde{V}$,

$$\int_{\widetilde{\Omega}} \mu \left(\mathbb{H}\,\nabla u \cdot \nabla\overline{v} - \frac{k^2}{\gamma\alpha}\,u\,\overline{v} \right) r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \lambda \int_{\widetilde{\Omega}} \frac{\mu}{\gamma\alpha}\,u\,\overline{v}\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta,$$

où $\widetilde{V} = H^1(B(0,R_\star))$ et où ∇ désigne le gradient en coordonnées radiales et $\mathbb{H}$ est la matrice définie par :

$$\mathbb{H} := \begin{pmatrix} \dfrac{\alpha}{\gamma} & 0 \\ 0 & \dfrac{\gamma}{\alpha} \end{pmatrix}.$$

Enfin, dans le cas 2D cartésien, la formulation variationnelle s'écrit : trouver $u \in \widetilde{V}$ tel que pour tout $v \in \widetilde{V}$,

$$\int_{\widetilde{\Omega}} \mu \left(\mathbb{H}\,\nabla u \cdot \nabla \overline{v} - \frac{k^2}{\alpha^y \alpha^z}\, u\, \overline{v} \right) \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z = \lambda \int_{\widetilde{\Omega}} \frac{\mu}{\alpha^y \alpha^z}\, u\, \overline{v}\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z,$$

où $\widetilde{V} = H^1(]-R_\star, R_\star[\times]-R_\star, R_\star[)$ et où ∇ est le gradient en coordonnées cartésiennes et

$$\mathbb{H} := \begin{pmatrix} \dfrac{\alpha^y}{\alpha^z} & 0 \\ 0 & \dfrac{\alpha^z}{\alpha^y} \end{pmatrix}.$$

Après discrétisation par éléments finis, on arrive classiquement à une formulation matricielle sous la forme :

$$\mathbb{A}_\alpha u = \lambda\, \mathbb{B}_\alpha u.$$

Nous sommes ainsi confrontés à un problème aux valeurs propres généralisé. Un propriété importante des matrices $\mathbb{A}_\alpha$ et $\mathbb{B}_\alpha$ est qu'elles sont symétriques mais non hermitiennes, à cause de la présence des PMLs. Ainsi, pour calculer les valeurs propres, nous avons besoin d'un solveur qui peut prendre en compte ces caractéristiques des matrices. Ce n'est par exemple pas le cas du solveur `eigs` de Matlab (la matrice $\mathbb{B}_\alpha$ a besoin d'être hermitienne). Avec Matlab, nous pouvons utiliser `eig` pour des matrices pleines de petite taille. Pour des matrices plus grandes, nous avons utilisé le solveur JDQZ, qui repose sur une méthode de Jacobi-Davidson (voir [SvdV96] et [FSvdV98]).

Cette deuxième étape dans le calcul numérique des modes à fuite converge : les valeurs propres et les fonctions propres trouvées numériquement convergent vers celles de l'opérateur $\widetilde{A}_\alpha$, lorsque le pas du maillage diminue (voir [KP09]).

3.1.2 Illustrations numériques

Tous les résultats numériques ont été obtenus avec MATLAB pour le calcul des valeurs propres (solveur JDQZ ou `eig` pour petites matrices) et MELINA, un code de calcul éléments finis développé conjointement au laboratoire POEMS (Propagation des Ondes, Études Mathématiques et Simulation), le laboratoire où a été effectuée la thèse, et au laboratoire IRMAR (Institut de Recherche Mathématiques de Rennes).[2]

Nous allons, dans cette sous-section, analyser quelques résultats de calcul de modes à fuite (dans des situations de plus en plus complexes), en passant sous silence les difficultés qui peuvent survenir. Ces difficultés seront mises en exergue et étudiées à la section suivante (section 3.2).

Cas 1D

Nous allons tout d'abord présenter des illustrations numériques sur le cas où l'opérateur transverse est unidimensionnel. Comme déjà annoncé, toutes les illustrations numériques sont faites

[2] Voir le site Internet dédié à MELINA : `http://anum-maths.univ-rennes1.fr/melina/`.

dans le cas de coefficients constants dans le cœur et avec une PML abrupte. Nous allons imposer une condition de Neumann homogène en $z = 0$, ce qui correspond à ne regarder que les modes symétriques. Mais nous aurions très bien pu prendre une condition de Dirichlet (on aurait obtenu les modes asymétriques). Les cas que nous allons présenter correspondent d'une part à des cas de guides planaires optiques : modes symétriques TE et TM et d'autre part à un cas de guide planaire élastique : modes SH symétriques. Plus précisément, nous avons pris, pour les modes SH, les paramètres suivants, qui correspondent à une plaque d'acier dans du béton : $\rho_0 = 7.932$, $\rho_\infty = 2.3$, $c_0 = 3.260$, $c_\infty = 2.6375$ et $\omega = 2\pi$. Pour les cas d'optique, nous avons pris $\omega = 2\pi\, 0.05/1.55$ et des indices $n_0 = 2.872$, $n_\infty = 1.45$. Pour les modes TE, cela revient à prendre $\mu = 1$ et $c = 1/n$; pour les modes TM, $c = 1/n$ et $\rho = 1$. Pour toutes les simulations, nous prenons un cœur de taille $h = 5$, $h_2 = h + h/2$ et $h_\star = h_2 + h$. Par ailleurs, nous prenons une PML de paramètre $\alpha_\infty = \exp(-i\pi/3)$ et nous avons discrétisé avec des éléments finis P1 avec une taille de maille égale à $h/200$.

Les résultats sont représentés sur les figures 3.2 (pour les spectres) et 3.3 (pour un mode à fuite dans chaque configuration). Sur la figure 3.2, dans les trois cas présentés, nous arrivons à faire la distinction entre des éventuels modes guidés (pour lesquels la partie réelle est entre $-k_0^2$ et $-k_\infty^2$ et la partie imaginaire très faible en valeur absolue), des modes resultant de la discrétisation du spectre continu (qui sont disposés en gros sur une demi droite partant de $-k_\infty^2$ allant presque à la verticale) et des modes à fuite (tout le reste : des modes qui semblent s'organiser sur une courbe partant également de $-k_\infty^2$ et allant dans une direction plutôt à l'horizontale). Nous retrouvons ainsi les trois types de modes présentés sur la figure 3.1.

Nous notons déjà une différence essentielle entre le cas TE ou TM présenté, d'une part, et le cas SH présenté, d'autre part. Dans le cas TE ou TM, il y a au moins un mode guidé (car $c_0 < c_\infty$, cf. théorème 1.8) alors que dans le cas SH, il n'y a pas de mode guidé (puisque $c_0 > c_\infty$).

Sur la figure 3.2, on constate que le comportement des modes à fuite est différent selon si on est dans le cas TE, d'une part, ou dans le cas TM ou SH, d'autre part. En effet, dans le cas TE, les valeurs propres correspondant aux modes à fuite semblent avoir une partie imaginaire plus importante (en valeur absolue). Cette différence de comportement se retrouve également sur la figure 3.3. En effet, on voit une croissance dans la direction transverse beaucoup plus importante dans le cas TE que dans le cas TM ou SH. Cela n'est pas étonnant, puisque dans la zone $h < z < h_2$, la dépendance en z des modes est du type $\exp(i\beta_\infty z)$, où $\beta_\infty = \sqrt[i\mathbb{R}^+]{k_\infty^2 + \lambda}$. Si λ a une partie imaginaire plus grande en valeur absolue, alors le mode est davantage exponentiellement croissant dans cette zone $h < z < h_2$.

Par ailleurs, on voit une autre différence entre les modes TE et TM considérés et le mode SH considéré. Les modes TE et TM sont très fortement évanescents dans la direction x, contrairement au mode SH (il est quand même un peu évanescent mais beaucoup moins), c'est ce qu'on a appelé, dans le chapitre précédent, un mode « presque propagatif ». Cela s'explique également par la simple position de λ dans le plan complexe. En effet, la dépendance en x est de la forme $\exp(i\beta x)$, où $\beta = \sqrt[\mathbb{R}^-]{-\lambda}$ (dans le cas où $\lambda > 0$, on prolonge la définition en posant $\beta = i\sqrt{\lambda}$). Ainsi, si λ est « presque » réel négatif, alors le mode correspondant est « presque propagatif » : il est très peu évanescent, c'est le cas du mode SH présenté.

Ainsi, dans le cas 1D, nous pouvons expliquer de nombreux comportement des modes par la simple position des valeurs propres dans le plan complexe. Il est donc instructif de savoir comment sont distribuées les valeurs propres. Pour cela, dans le cas 1D ici présenté, la relation de dispersion permet d'obtenir un comportement asymptotique pour la position des valeurs propres. Nous reprenons ici, en les adaptant, les travaux des articles [ZL08], [ZL06], [RZ02]. Nous obtenons le résultat suivant, pour le cas des modes symétriques, i.e. avec une condition de Neumann homogène en $z = 0$.

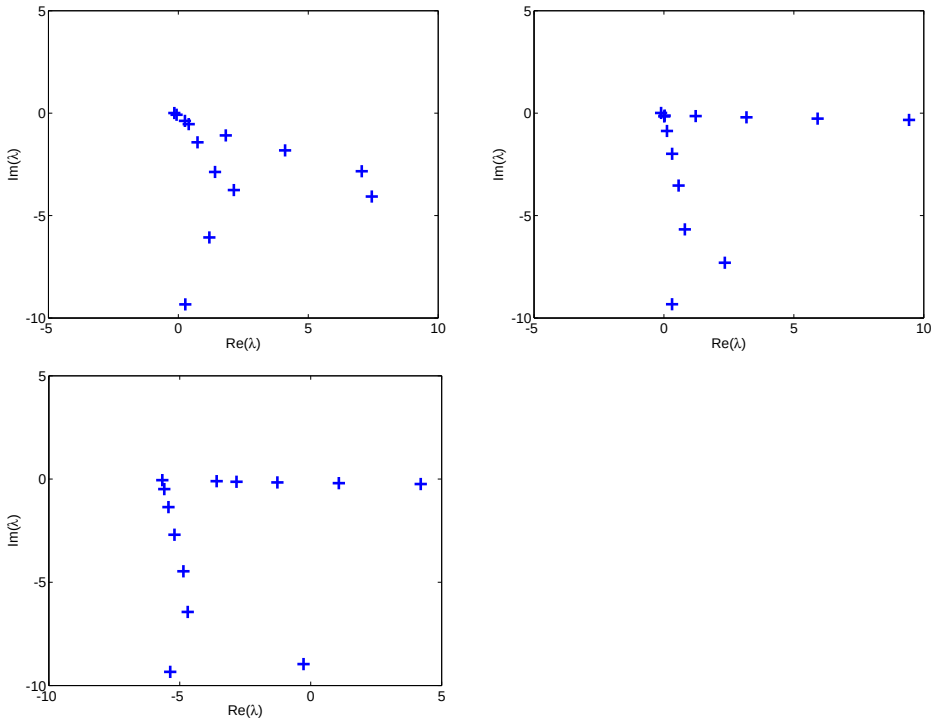

FIGURE 3.2 – *Représentation du spectre dans le cas TE (en haut à gauche), TM (en haut à droite) et SH (en bas).*

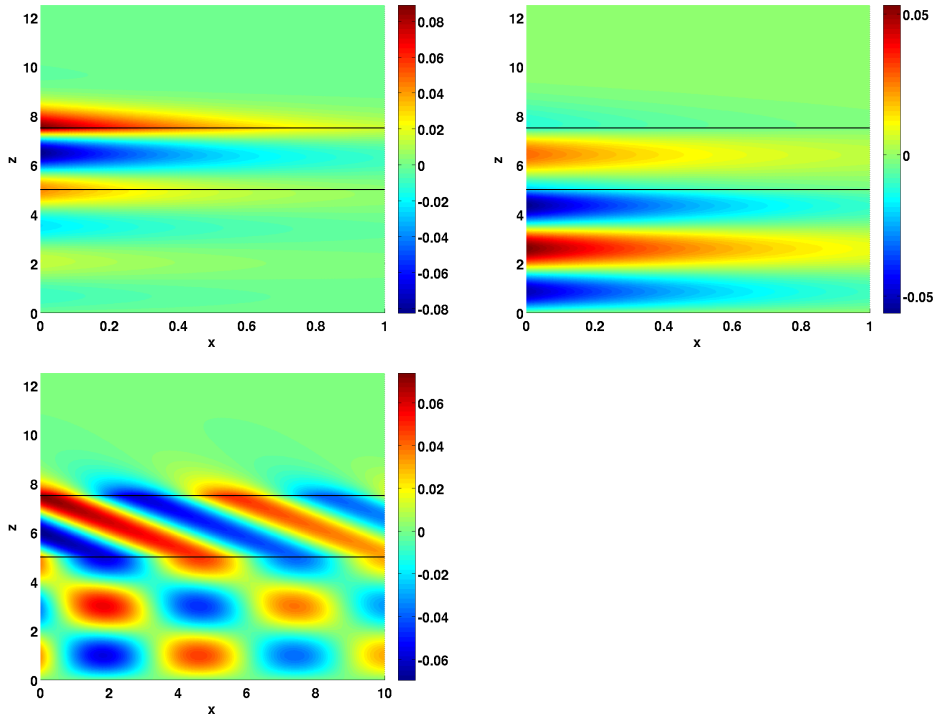

FIGURE 3.3 – *Représentation d'un des modes à fuite dans trois configurations : cas TE :* $\lambda = 4.1075 - 1.8174i$*, cas TM :* $\lambda = 3.1771 - 0.2024i$ *et cas SH :* $\lambda = -1.2717 - 0.1620i$*. Les lignes horizontales en* $z = h = 5$ *et* $z = h_2 = 7.5$ *correspondent respectivement à l'interface cœur / gaine et à l'interface domaine physique / PML.*

Proposition 3.1 *Le comportement asymptotique des modes à fuite symétriques est donné par :*

- *Dans le cas où $\mu_0 \neq \mu_\infty$,*

$$\Re e(\lambda_n) \sim \frac{n^2\pi^2}{h^2} \quad \textit{et} \quad \Im m(\lambda_n) \sim \frac{-n\pi}{2h^2} \ln\left(\left|\frac{\mu_\infty + \mu_0}{\mu_0 - \mu_\infty}\right|\right). \tag{3.4}$$

- *Dans le cas où $\mu_0 = \mu_\infty$, en supposant que $k_0 \neq k_\infty$,*

$$\Re e(\lambda_n) \sim \frac{n^2\pi^2}{h^2} \quad \textit{et} \quad \Im m(\lambda_n) \sim -\frac{-n\pi}{h^2} \ln(n\pi). \tag{3.5}$$

Démonstration. La relation de dispersion des modes à fuite du guide symétrique : équation (2.4) se réécrit de la façon suivante :

$$\exp(2i\beta_0 h) = \frac{1+T}{1-T},$$

où $T = (\mu_\infty\beta_\infty)/(\mu_0\beta_0)$, $\beta_\infty = \sqrt[i\mathbb{R}^+]{k_\infty^2 + \lambda}$ et $\beta_0 = \sqrt[i\mathbb{R}^+]{k_0^2 + \lambda}$.

- Dans le cas où $\mu_0 \neq \mu_\infty$, on a alors $\ln\left(\frac{1+T}{1-T}\right) \to \ln\left(\frac{\mu_\infty+\mu_0}{\mu_0-\mu_\infty}\right)$. On en déduit une asymptotique de β_0 :

$$i\beta_0 h \sim \frac{1}{2}\ln\left(\left|\frac{\mu_\infty + \mu_0}{\mu_0 - \mu_\infty}\right|\right) + i(n+\gamma)\pi, \quad n \in \mathbb{N},$$

où γ est défini par $\gamma = 0$ si $\mu_0 \geq \mu_\infty$ et $\gamma = 1/2$ sinon. Ceci nous donne le comportement asymptotique (3.4).

- Dans le cas où $\mu_0 = \mu_\infty$, $T = \frac{\beta_\infty}{\beta_0}$. On ne peut pas appliquer directement la même méthode que précédemment, on doit un peu travailler sur l'équation de dispersion. Celle-ci se réécrit :

$$\exp(2i\beta_0 h) = \frac{\beta_0 + \beta_\infty}{\beta_0 - \beta_\infty}.$$

On définit : $V = \sqrt[i\mathbb{R}^+]{k_0^2 - k_\infty^2}$. Noter que $V > 0$ quand il y a des modes guidés (c'est-à-dire quand $k_0 > k_\infty$), sinon il est imaginaire pur. Asymptotiquement ($|\lambda| \to +\infty$), on a :

$$\beta_\infty = \beta_0\sqrt{1 - \frac{V^2}{\beta_0^2}} \sim \beta_0\left(1 - \frac{V^2}{2\beta_0^2} + \dots\right).$$

Donc,

$$\frac{\beta_0 + \beta_\infty}{\beta_0 - \beta_\infty} \sim \frac{4\beta_0^2}{V^2}.$$

Au premier ordre, l'équation de dispersion s'écrit :

$$\left(\mathrm{e}^{i\beta_0 h}\right)^2 \sim \left(\frac{2\beta_0 h}{Vh}\right)^2.$$

On en déduit que

$$\pm i\frac{Vh}{2} \sim -i\,\beta_0\,h\,\mathrm{e}^{-i\beta_0 h}.$$

On fait alors appel à la fonction réciproque de $z \mapsto z\,\mathrm{e}^z$, appelée fonction $\mathrm{LambertW}$, dont les principales propriétés peuvent être trouvées dans [CJK97]. Ainsi, $-i\beta_0 h \sim \mathrm{LambertW}(\pm iVh/2, p)$, où p est le numéro de la branche de la fonction LambertW que l'on

utilise. On utilise ensuite l'asymptotique de la fonction $\mathrm{LambertW}$ suivante, qui est valable aussi bien pour $|z|$ grand, $|z|$ petit ou $|p|$ grand (voir [CJK97]) :

$$\mathrm{LambertW}(z,p) \sim \ln(z) + 2i\pi p - \ln(\ln(z) + 2i\pi p).$$

En utilisant cette asymptotique pour p grand, (avec $z = \pm iVh/2$), on trouve :

$$i\beta_0 h \sim -\ln\left(\frac{|V|h}{2}\right) - i\xi - 2i\pi p + \ln\left(\ln\left(\frac{|V|h}{2}\right) - i\xi + 2i\pi p\right).$$

On a noté $\xi = \arg_{\mathbb{R}^-}(\pm iVh/2)$. Au premier ordre, en supposant V fini, on a alors :

$$i\beta_0 h \sim \ln(|k+\gamma|\pi) + i(k+\gamma)\pi.$$

On a noté $-i\xi - 2i\pi p = i(k+\gamma)\pi$, avec $\gamma = 1/2$ quand V est imaginaire pur et $\gamma = 0$ sinon. On en déduit ensuite l'asymptotique recherchée (3.5).

□

Notons qu'on observe bien un changement de comportement dans la partie imaginaire de λ, selon si $\mu_0 = \mu_\infty$ ou $\mu_0 \neq \mu_\infty$. En effet, dans le cas où $\mu_0 = \mu_\infty$, la partie imaginaire est plus grande en valeur absolue. C'est bien ce qu'on observe numériquement : c'est ce qui explique la différence de comportement des modes à fuite dans la direction transverse entre le cas TE, d'une part, et les cas TM et SH, d'autre part.

Ainsi, grâce à l'asymptotique présentée, nous comprenons le comportement des modes à fuite. Nous pouvons également obtenir une asymptotique pour les modes de l'opérateur $\widetilde{A}_\alpha$, i.e. non seulement les modes à fuite, mais également les modes résultant de la discrétisation du spectre essentiel de A_α.

Proposition 3.2 *Nous trouvons les deux asymptotiques suivantes pour les modes de $\widetilde{A}_\alpha$:*

- *une première asymptotique qui correspond aux modes à fuite, décrite à la proposition 3.1,*
- *une deuxième asymptotique : des modes distribués asymptotiquement sur la demi-droite : $-k_\infty^2 + \xi\,\mathbb{R}^+$, où $\xi = [(h_2 - h) + (h_\star - h_2)/\alpha_\infty]^{-2}$, ces derniers correspondant à la discrétisation du spectre essentiel de A_α.*

Démonstration. On considère que λ est à partie imaginaire négative. L'idée de la preuve est la même que pour la proposition 3.1. Il s'agit de travailler sur la relation de dispersion. La première étape consiste donc à trouver la relation de dispersion avec PML bornée. Cette relation de dispersion s'écrit, dans le cas d'une condition de Neumann en $z = 0$ et en $z = h_\star$, voir la remarque 3.5 en annexe de ce chapitre (section 3.4) :

$$\mu_\infty \beta_\infty \tan\left(\beta_\infty(h_2 - h) + \frac{\beta_\infty}{\alpha_\infty}(h_\star - h_2)\right) + \mu_0\beta_0 \tan(\beta_0 h) = 0, \tag{3.6}$$

où l'on a posé $\beta_\infty = \sqrt[i\mathbb{R}^+]{k_\infty^2 + \lambda}$ et $\beta_0 = \sqrt[i\mathbb{R}^+]{k_0^2 + \lambda}$.

On cherche des solutions telles que $\lambda_n = |\lambda_n| e^{i\theta_n}$ avec $\theta_n \to \theta^*$ (angle convergent) et $|\lambda_n| \to \infty$.

En remarquant que

$$\tan(z) = \frac{\sin(z)}{\cos(z)} = -i\frac{e^{2iz} - 1}{e^{2iz} + 1},$$

on voit que si $\Im m(z) \to \pm\infty$, alors $\tan(z) \to \pm i$.

On en déduit que $\Im m(\beta_0 h)$ ou $\Im m(\beta_\infty(h_2 - h) + \beta_\infty/\alpha_\infty(h_\star - h_2))$ tendent en valeur absolue vers l'infini. Mais on ne peut pas avoir les deux en même temps, sinon on aurait : $\mu_\infty\beta_\infty = \pm\mu_0\beta_0$.

On peut donc distinguer deux cas :

- Soit $\Im m(\beta_\infty(h_2 - h) + \beta_\infty/\alpha_\infty(h_\star - h_2)) \to \infty$. Dans ce cas, $\arg(\beta_0 h) \to 0$. La direction asymptotique de ces modes est donc la demi-droite $\mathbb{R}^+$. L'équation de dispersion se simplifie alors :
$$i\mu_\infty\beta_\infty + \mu_0\beta_0 \tan(\beta_0 h) = 0.$$
C'est l'équation de dispersion des modes à fuite. On retrouve alors les modes de la proposition 3.1.

- Soit $\Im m(\beta_0 h) \to -\infty$. Dans ce cas, $\arg(\beta_\infty(h_2 - h) + \beta_\infty/\alpha_\infty(h_\star - h_2)) \to 0$. Donc, ces modes ont pour direction asymptotique la demi-droite : $-k_\infty^2 + \xi\,\mathbb{R}^+$ où $\xi = [(h_2 - h) + (h_\star - h_2)/\alpha_\infty]^{-2}$.

□

Remarque 3.1 : *La position des modes résultant de la discrétisation du spectre essentiel n'est pas exactement la demi-droite $-k_\infty^2 + \alpha_\infty^2\mathbb{R}^+$ du spectre essentiel. Mais quand $h_\star \to +\infty$ ou $h_2 \to h$, alors on retombe sur la demi-droite $-k_\infty^2 + \alpha_\infty^2\mathbb{R}^+$.*

Cas 2D

Dans tous les cas 2D ici présentés, nous avons utilisé MELINA pour calculer les matrices éléments finis, en utilisant les élements finis P2.

La structure du spectre dans le cas 1D était assez simple. Nous allons voir que les choses sont sensiblement différentes quand le problème transverse est bidimensionnel, même dans des cas où la géométrie est simple.

Un cas académique : un cylindre de paramètres μ_0, ρ_0 plongé dans un milieu μ_∞, ρ_∞

Nous allons commencer par un cas simple, pour se rendre compte que, même dans ces conditions, les choses sont plus compliquées que dans le cas 1D. Nous prenons les paramètres suivants : $\mu_0 = 84.29$, $\mu_\infty = 16$, $\rho_0 = 7.9312$, $\rho_\infty = 2.3$ (ce qui correspond aux mêmes paramètres adimensionnés que dans le cas SH pour le 1D). Nous prenons une pulsation $\omega = 4$. Le cylindre est de rayon $R = 4$. Nous utilisons une PML radiale abrupte de paramètre : $\alpha_\infty = 0.5 - 0.5i$, avec $R_2 = 6$ et $R_\star = 10$.

Dans ce cas, on a également une relation de dispersion pour les modes à fuite.

Proposition 3.3 *Dans le cas du cylindre de rayon R, les modes à fuite vérifient la relation de dispersion suivante :*
$$-\mu_0\,\beta_0\,\frac{J_{n+1}(\beta_0 R)}{J_n(\beta_0 R)} + \mu_\infty\,\beta_\infty\,\frac{H_{n+1}^{(1)}(\beta_\infty R)}{H_n^{(1)}(\beta_\infty R)} + \frac{\mu_0 - \mu_\infty}{R}n = 0, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{3.7}$$
où $\beta_0 = \sqrt[i\mathbb{R}^+]{k_0^2 + \lambda}$ et $\beta_\infty = \sqrt[i\mathbb{R}^+]{k_\infty^2 + \lambda}$ et où les fonctions J_n et $H_n^{(1)}$ désignent respectivement la fonction de Bessel de première espèce et la fonction de Hankel du premier type.

Démonstration. L'équation aux valeurs propres pour les modes à fuite s'écrit

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,\mu\,\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{\mu}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}+(\omega^2\rho+\mu\lambda)\,u=0,$$

avec u sortant. On cherche une solution à variables séparées : $u(r,\theta)=F(r)\,\mathrm{e}^{in\theta}$, on obtient :

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\,\mu\,\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}r}\right)-\frac{\mu n^2}{r^2}F+(\omega^2\rho+\mu\lambda)\,F=0$$

L'équation du cœur admet pour base de solutions les fonctions de Bessel de première espèce et de deuxième espèce : $J_n(\beta_0 r)$ et $Y_n(\beta_0 r)$. On cherche une solution pour le coeur qui a une valeur finie en $r=0$, cette solution est proportionnelle à : $J_n(\beta_0 r)$. Dans la gaine, on cherche une solution sortante donc du type $H_n^{(1)}(\beta_\infty r)$. Reste à exprimer les conditions de raccord en $r=R$ (interface entre le coeur et la gaine) : F et $\mu\,\mathrm{d}F/\mathrm{d}r$ sont continus en $r=R$. Donc si dans le coeur on a $F(r)=AJ_n(\beta_0 r)$, dans la gaine on a : $F(r)=A\frac{J_n(\beta_0 R)}{H_n^{(1)}(\beta_\infty R)}H_n^{(1)}(\beta_\infty r)$ et la condition sur la dérivée nous donne :

$$A\,\mu_0\,\beta_0\,\frac{\mathrm{d}J_n}{\mathrm{d}r}(\beta_0 R)=A\,\mu_\infty\,\frac{J_n(\beta_0 R)}{H_n^{(1)}(\beta_\infty R)}\,\beta_\infty\,\frac{\mathrm{d}H_n^{(1)}}{\mathrm{d}r}(\beta_\infty R).$$

On utilise ensuite les propriétés bien connues des fonctions de Bessel et de Hankel (cf. [AS65]) :

$$\begin{aligned}\frac{z}{J_n(z)}\frac{\mathrm{d}J_n(z)}{\mathrm{d}z} &= -\frac{zJ_{n+1}(z)}{J_n(z)}+n,\\ \frac{z}{H_n^{(1)}(z)}\frac{\mathrm{d}H_n^{(1)}(z)}{\mathrm{d}z} &= -\frac{zH_{n+1}^{(1)}(z)}{H_n^{(1)}(z)}+n,\end{aligned}$$

ce qui nous donne l'équation de dispersion. □

Nous remarquons, en regardant la relation de dispersion, qu'il y a une infinité de solution de l'équation (3.7) pour chaque $n\in\mathbb{Z}$. Ainsi, on s'attend à ce que la structure du spectre soit plus compliquée que dans le cas 1D.

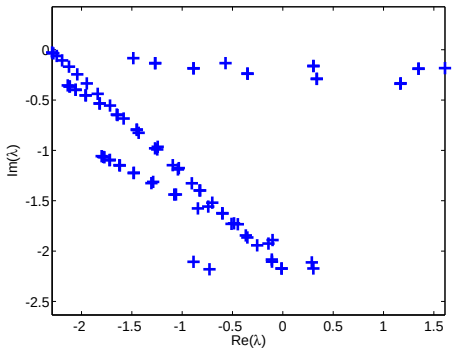

FIGURE 3.4 – *Spectre dans le cas du cylindre : les cent valeurs propres les plus proches de $\lambda=0$ trouvées par le solveur JDQZ.*

Sur la figure 3.4, nous voyons que la struture du spectre est plus complexe que, par exemple, sur la figure 3.2 (cas 1D). On devine quand même des modes venant plutôt de la discrétisation d'un continuum et des modes à fuite, même si cette distinction n'est pas évidente. Sur la figure 3.5 ,

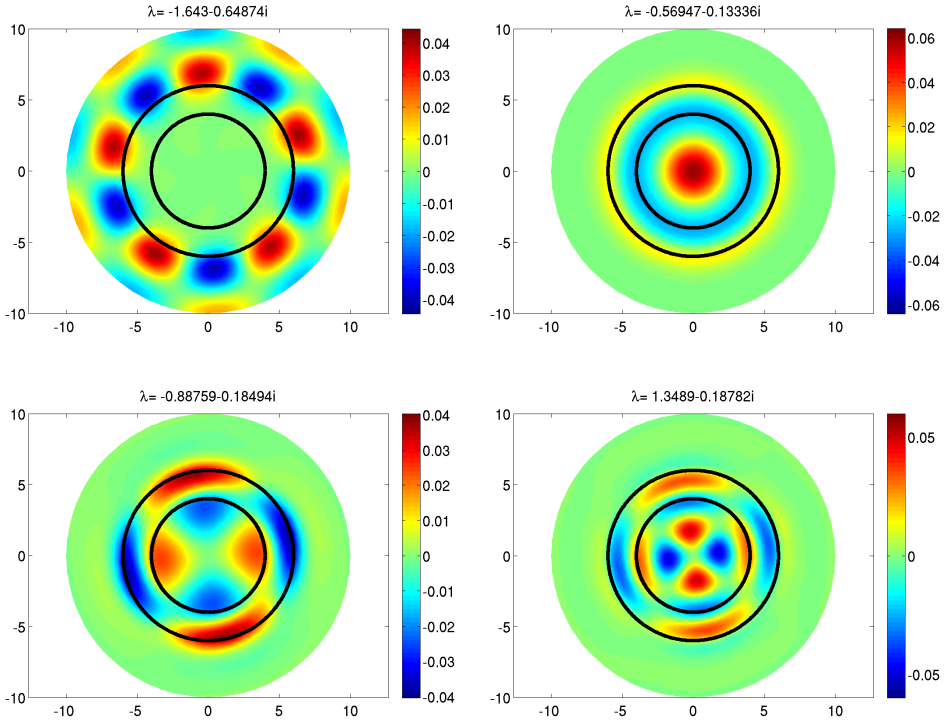

FIGURE 3.5 – *Représentation des parties réelles de fonctions propres dans le cas du cylindre. En haut à gauche, une fonction propre liée à la discrétisation de la PML. Les trois autres fonctions propres correspondent à des modes à fuite.*

nous voyons tout d'abord une fonction propre liée à la discrétisation du continuum : la fonction vit essentiellement dans la PML. Les trois autres fonctions propres correspondent à des modes à fuite, puisque les fonctions vivent essentiellement dans la zone physique $r < R_2$. Noter que la figure en haut à droite correspond à $n = 0$ (pas d'oscillation dans la variable angulaire θ), les figures en bas à gauche et en bas à droite à $n = 1$ (une oscillation dans la variable angulaire θ).

Guides d'onde hélicoïdaux

La propagation d'ondes dans des structures hélicoïdales (« twistées ») est d'un grand intérêt pour des applications pratiques. On peut citer par exemple [NZAG07] (pour les équations de Maxwell) et [Tre08] [TL10] (pour les ondes élastiques). À titre d'illustration (pour montrer que les PMLs peuvent être utilisées également pour calculer des modes à fuite dans des situations plus complexes que celles rentrant strictement dans le cadre des guides d'onde ouverts décrits dans ce mémoire), nous nous sommes intéressés au calcul de modes à fuite dans des guides hélicoïdaux. Nous allons toujours traiter notre équation modèle, l'équation de Helmholtz généralisée :

$$-\mathrm{div}\,(\mu\nabla\varphi) - \omega^2\,\rho\,\varphi = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^3,$$

où φ est scalaire, μ et ρ sont les caractéristiques physiques, valant respectivement μ_0, ρ_0 dans le guide et μ_∞, ρ_∞ dans la matrice environnante. Mais, contrairement à tout ce que nous avons fait jusqu'à présent, la géométrie est maintenant hélicoïdale, il n'y a donc pas invariance par translation dans la direction x. Pour se ramener à ce cas, on procède au changement de coordonnées

suivant :

$$\begin{aligned} \widetilde{x} &= x, \\ \widetilde{r} &= r, \\ \widetilde{\theta} &= \theta + \tau x, \end{aligned}$$

où τ est le paramètre correspondant à la torsion du guide et où on rappelle que $r = \sqrt{y^2+z^2}$. On obtient alors l'équation suivante :

$$-\widetilde{\mathrm{div}}\left(\widetilde{\mu}\,\widetilde{\mathbb{H}}\,\widetilde{\nabla}\widetilde{\varphi}\right) - \omega^2\,\widetilde{\rho}\,\widetilde{\varphi} = 0. \tag{3.8}$$

Dans cette équation, $\widetilde{\mathrm{div}}$ et $\widetilde{\nabla}$ représentent la divergence et le gradient en coordonnées cylindriques $(\widetilde{x},\widetilde{r},\widetilde{\theta})$:

$$\widetilde{\mathrm{div}}\begin{pmatrix} u_{\widetilde{x}} \\ u_{\widetilde{r}} \\ u_{\widetilde{\theta}} \end{pmatrix} = \frac{\partial u_{\widetilde{x}}}{\partial \widetilde{x}} + \frac{1}{\widetilde{r}}\frac{\partial}{\partial \widetilde{r}}(\widetilde{r}\,u_{\widetilde{r}}) + \frac{1}{\widetilde{r}}\frac{\partial u_{\widetilde{\theta}}}{\partial \widetilde{\theta}} \quad \text{et} \quad \widetilde{\nabla} u = \begin{pmatrix} \partial u/\partial \widetilde{x} \\ \partial u/\partial \widetilde{r} \\ 1/\widetilde{r}\,\partial u/\partial \widetilde{\theta} \end{pmatrix}$$

et la matrice $\widetilde{\mathbb{H}}$ est définie par :

$$\widetilde{\mathbb{H}} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \tau\widetilde{r} \\ 0 & 1 & 0 \\ \tau\widetilde{r} & 0 & 1+\tau^2\widetilde{r}^2 \end{pmatrix}.$$

Par soucis de simplicité, nous allons omettre les signes tilde désormais. Maintenant, dans les nouvelles coordonnées, la géométrie est invariante par translation dans la direction x. Comme nous cherchons des modes d'une telle structure, nous cherchons des solutions ayant une dépendance en x de la forme $\mathrm{e}^{i\beta x}$. On cherche en fait $\varphi(x,r,\theta) = \mathrm{e}^{i\beta x}\,u(r,\theta)$. En faisant cela, on n'a plus, comme dans le chapitre 1, la structure autoadjointe de l'opérateur transverse. En effet, l'équation vérifiée par u est la suivante :

$$-\frac{1}{\mu}\,\mathrm{div}_{2D}(\mu\,\widetilde{\mathbb{H}}_{2D}\,\nabla_{2D}u) - 2\mu\,\tau\,i\beta\,\frac{\partial u}{\partial\theta} + \beta^2 u - \ k^2 u = 0, \tag{3.9}$$

où

$$\widetilde{\mathbb{H}}_{2D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1+\tau^2 r^2 \end{pmatrix},$$

et div_{2D} et ∇_{2D} correspondent aux opérateurs divergence et gradient bidimensionnels en coordonnées polaires (r,θ). On a ainsi un problème qui fait intervenir à la fois β et β^2. Pour le ré-écrire comme un problème aux valeurs propres, on pose $U = (i\beta u, u)^T$ et on se ramène au problème suivant :

$$\begin{pmatrix} -2\tau\frac{\partial\cdot}{\partial\theta} & -\frac{1}{\mu}\mathrm{div}(\mu\,\widetilde{\mathbb{H}}_{2D}\,\nabla_{2D}\cdot) - k^2\cdot \\ 1 & 0 \end{pmatrix} U = i\beta\,U.$$

L'opérateur agissant sur U n'a a priori pas de caractère autoadjoint. Mais il est quand même possible de calculer numériquement des modes à fuite d'une telle structure. Pour cela, nous allons placer des PMLs radiales, autour de la structure. Nous n'allons traiter que le cas d'une PML abrupte dans la suite. Cela revient à considérer une variable $\widehat{r}$ complexe définie par :

$$\widehat{r} := \begin{cases} r & \text{dans le milieu physique } (r < R_2), \\ R_2 + \frac{r-R_2}{\alpha_\infty} & \text{dans la PML } (r \geq R_2). \end{cases} \tag{3.10}$$

Les autres coordonnées ne sont pas affectées : $\widehat{\theta} = \theta$ et $\widehat{x} = x$. Comme on l'a vu au chapitre 2, l'introduction de PMLs revient à complexifier l'équation (3.8), puis à paramétriser un chemin (ici on choisit $\widehat{r} \in \mathbb{C}$ paramétrisé par (3.10)). Ainsi, l'équation (3.8) devient :

$$-\frac{\gamma\alpha}{\mu}\mathrm{div}(\mu\,\widehat{\mathbb{H}}\,\nabla\widehat{\varphi}) - k^2\widehat{\varphi} = 0$$

où

$$\widehat{\mathbb{H}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\gamma\alpha} & 0 & \tau\frac{r}{\gamma\alpha} \\ 0 & \frac{\alpha}{\gamma} & 0 \\ \tau\frac{r}{\gamma\alpha} & 0 & \frac{\gamma}{\alpha}(1+\tau^2\frac{r^2}{\gamma^2}) \end{pmatrix}$$

et α et γ sont donnés par l'équation (2.14), ce qui peut s'écrire de façon explicite dans le cas d'une PML abrupte :

$$\begin{aligned} \alpha(r) &= \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\widehat{r}} = \begin{cases} 1 & \text{dans le milieu physique } (r < R_2), \\ \alpha_\infty & \text{dans la PML } (r \geq R_2), \end{cases} \\ \gamma(r) &= \frac{r}{\widehat{r}} = \begin{cases} 1 & \text{dans le milieu physique } (r < R_2, \\ \frac{\alpha_\infty r}{\alpha_\infty R_2 + r - R_2} & \text{dans la PML } (r \geq R_2). \end{cases} \end{aligned}$$

Ensuite, on cherche une dépendance en x de la forme en $\mathrm{e}^{i\beta x}$, on obtient donc l'équation :

$$-\frac{\gamma\alpha}{\mu}\,\mathrm{div}_{2D}(\mu\,\widehat{\mathbb{H}}_{2D}\,\nabla_{2D}u) - 2\tau\,i\beta\frac{\partial u}{\partial\theta} + \beta^2 u - \,k^2 u = 0, \tag{3.11}$$

où

$$\widehat{\mathbb{H}}_{2D} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{\gamma} & 0 \\ 0 & \frac{\gamma}{\alpha}(1+\tau^2\frac{r^2}{\gamma^2}) \end{pmatrix}$$

et div_{2D} et ∇_{2D} sont les opérateurs divergence et gradient 2D polaires (en r, θ). Pour résoudre numériquement l'équation (3.11), on dédouble les inconnues : on pose $U = (i\beta u, u)$ et on se ramène à un calcul de valeurs propres :

$$\begin{pmatrix} -2\tau\frac{\partial\cdot}{\partial\theta} & -\frac{\gamma\alpha}{\mu}\,\mathrm{div}_{2D}(\mu\,\widehat{\mathbb{H}}_{2D}\,\nabla_{2D}\cdot) - k^2\cdot \\ 1 & 0 \end{pmatrix} U = i\beta\,U.$$

En écrivant la formulation variationnelle de cette équation aux valeurs propres, on peut ainsi calculer numériquement des modes à fuite dans un guide hélicoïdal.

Un premier exemple académique consiste à calculer les modes à fuite du guide cylindrique étudié précédemment, mais dans des coordonnées hélicoïdales. C'est un moyen de valider le code.

Sur la figure 3.6, nous voyons que certains modes se dédoublent quand on passe de $\tau = 0$ à $\tau = 0.01$. Les modes pour lesquel cela a lieu sont les modes à fuite, les autres modes sont des modes résultant d'un continuum (et qui ne nous intéressent pas ici). Ce phénomène est bien connu (cf. [JD96]). Nous allons l'expliquer facilement à l'aide de la relation de dispersion. En fait, le mode est double quand $\tau = 0$ et quand τ devient non nul, il y a dédoublement du mode et décalage du mode de la quantité $\pm n\tau$, où n est le numéro intervenant dans la relation de dispersion (3.7) : le nombre d'oscillations dans la variable angulaire θ. Dans le cas où il n'y a pas de « twist », l'équation aux valeurs propres pour les modes à fuite s'écrit

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,\mu\,\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{\mu}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} + (\omega^2\rho - \mu\beta^2)\,u = 0,$$

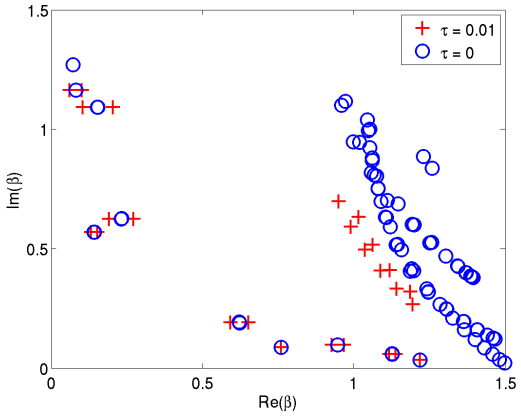

FIGURE 3.6 – *Représentation des nombres d'onde longitudinaux (β) dans le cas du cylindre, avec ou sans « twist ».*

On cherche une solution à variables séparées : $u(r,\theta) = F(r)\,\mathrm{e}^{in\theta}$, on obtient :

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\,\mu\,\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}r}\right) - \frac{\mu n^2}{r^2}F + (\omega^2\rho - \mu\beta^2)\,F = 0.$$

En prenant n ou $-n$, on obtient la même équation. Ainsi, chaque mode est double (pour $n \neq 0$).

Dans les coordonnées hélicoïdales, l'équation aux valeurs propres pour les modes à fuite s'écrit

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,\mu\,\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{\mu}{r^2}(1+\tau^2r^2)\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} + 2i\beta\,\tau\,\mu\frac{\partial u}{\partial\theta} + (\omega^2\rho - \mu\beta^2)\,u = 0,$$

Si on prend une dépendance de la forme $u(r,\theta) = F(r)\,\mathrm{e}^{in\theta}$, on obtient :

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\,\mu\,\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}r}\right) - \frac{\mu n^2}{r^2}F + (\omega^2\rho - \mu(\tau n+\beta)^2)\,F = 0.$$

On voit alors que la différence avec l'équation sans « twist » consiste uniquement à changer β en $\tau n + \beta$. Noter ainsi que plus n est grand, plus le décalage est important.

Terminons par un exemple un peu plus proche des applications. Il s'agit de la simulation d'un toron 6+1. Ces structures sont présentes dans le génie civil, par exemple un câble d'acier constitué de plusieurs fils. Nous allons nous concentrer sur un cas d'application (on reprend le cas de [TL10]) où il y a un brin central et six brins périphériques enroulés autour du brin central. Les paramètres choisis sont les mêmes que pour le cas du cylindre : $\mu_0 = 84.29$, $\mu_\infty = 16$, $\rho_0 = 7.9312$, $\rho_\infty = 2.3$, $\omega = 4$. La géométrie est la suivante : il y a un cylindre central de taille $a = 2.7$ et six brins périphériques de taille $0.967\,a$. On va distinguer deux situations : quand $\tau = 0$ (sans « twist ») et quand $\tau = 2\pi/240 = 0.0262$ (en $L = 240$, la structure a fait un tour). Noter que la géométrie n'est pas la même avec ou sans « twist » : le « twist » a tendance à écraser les brins périphériques. Nous devons déjà faire attention pour la création du maillage de façon à prendre en compte ce phénomène. Ensuite, nous prenons une PML de paramètres $R_2 = 11$, $R_\star = 15$ et $\alpha_\infty = 0.5 - 0.5i$.

Sur la figure 3.7, on voit que, comme dans le cas du cylindre, le fait de « twister » fait bouger les modes. Sur la figure 3.8, le premier mode présenté (en haut) ne bouge pas : le nombre d'onde longitudinal est presque le même, ainsi que la fonction propre, à une constante multiplicative près. Nous pouvons interpréter cela par analogie avec le cas du cylindre car ce mode correspond à un nombre d'oscillations dans la variable angulaire nul : $n = 0$. Il est donc logique que ce mode soit insensible au « twist ». Le deuxième mode présenté (en bas) bouge davantage, à la fois en ce qui concerne le nombre d'onde longitudinal et la fonction propre (puisqu'il correspond à un nombre d'oscillations dans la variable angulaire non nul : $n = 2$).

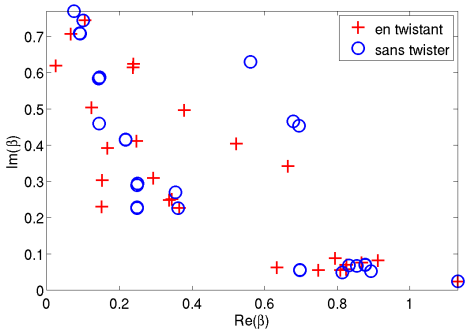

FIGURE 3.7 – *Représentation des nombres d'onde longitudinaux (β), avec ou sans « twsist », dans le cas du toron 6+1.*

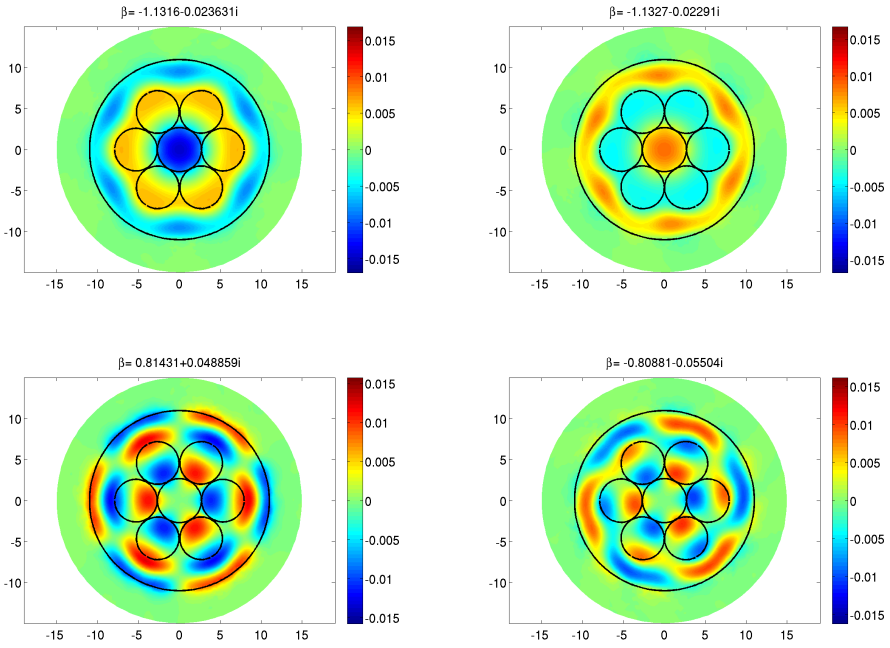

FIGURE 3.8 – *Représentation de la partie réelle de deux modes à fuite : à gauche sans « twist », à droite avec « twist », dans le cas du toron 6+1.*

3.2 Les difficultés rencontrées lors du calcul de modes à fuite

Dans cette section, nous allons nous concentrer sur les difficultés numériques qui peuvent survenir lors du calcul des modes à fuite. Nous ne sommes pas les seuls à avoir été confrontés à ce genre de difficultés, on peut citer par exemple l'article [KP09] où les difficultés que nous rencontrons sont exposées. Notons également que nous avons présenté ces difficultés, ainsi que le remède que nous proposons, lors d'un exposé à la conférence WAVES 2009 : la neuvième conférence internationale sur les aspects mathématiques et numériques de la propagation des ondes.

3.2.1 Croissance exponentielle de la résolvante

De manière à comprendre les phénomènes, nous allons nous concentrer sur le cas simple des modes symétriques d'un guide planaire optique avec la polarisation TE, dans le cas où les coefficients sont constants dans le cœur. Il n'y a qu'une dimension transverse (z) et les paramètres sont donnés par :

$$\omega = 2\pi\, 0.05/1.55, \quad h = 5, \quad n_0 = 2.872, \quad n_\infty = 1.45 \quad \text{et} \quad c(z) = \begin{cases} c_0 = \frac{1}{n_0} & \text{si } z < h, \\ c_\infty = \frac{1}{n_\infty} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ce cas correspond à un milieu stratifié dans le cas de l'optique (guide optique 2D), d'indice de réfraction n_0 dans le cœur et n_∞ dans la gaine, illuminé par une onde de longueur d'onde $1.55\mu\mathrm{m}$ avec une hauteur de guide de $5/0.05\mu\mathrm{m} = 100\mu\mathrm{m}$, dans la polarisation TE, en ne considérant que les modes symétriques (puisqu'on impose une condition de Neumann en $z = 0$). Nous utilisons une PML abrupte. Le paramètre que nous allons faire bouger est la position de la PML (h_2) ; les autres paramètres ne bougent pas. Nous prenons $h_\star$ tel que $h_\star - h_2 = 10$ (la taille de la PML est toujours la même) et $\alpha_\infty = \exp(-i\pi/3)$.

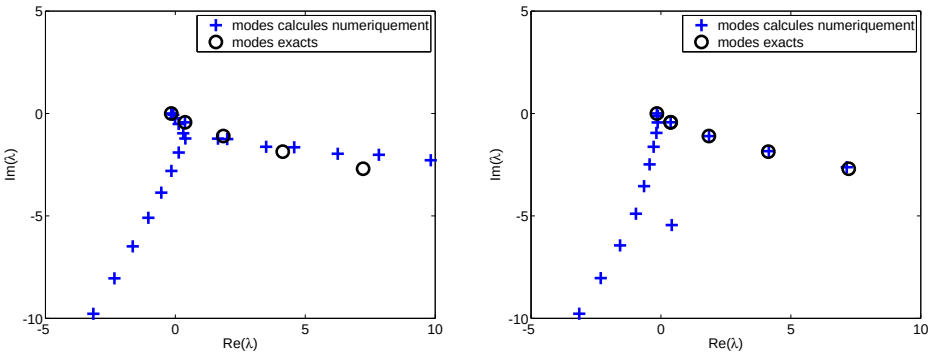

FIGURE 3.9 – *Spectre calculé dans deux configurations : à gauche dans le cas où $h_2 = 2h$, à droite dans le cas où $h_2 = 6/5\, h$.*

Sur la figure 3.9, nous présentons deux résultats de calcul de spectre, le premier (à gauche) dans un cas où la PML est assez loin du cœur ($h_2 = 2h$), le second (à droite) dans un cas où la PML est, au contraire, assez près du cœur ($h_2 = 6/5\, h$). Les modes exacts (les ronds noirs) sont calculés avec la relation de dispersion, ce sont les solutions de référence. On remarque sur cette figure que dans le cas où la PML est loin, les modes à fuite sont beaucoup moins bien calculés que dans le cas où la PML est près.

Comment comprendre un tel comportement ? L'idée est de faire appel au pseudospectre (voir la section A.3 en annexe pour quelques rappels concernant le pseudospectre d'un opérateur ou la référence [TE05] pour plus de détails). C'est une notion qui permet de quantifier la norme de la résolvante : le ε-pseudospectre est l'ensemble des points dans le plan complexe où la norme de la résolvante est plus grande que $1/\varepsilon$. Ainsi, le pseudospectre contient le spectre (formellement, la norme de la résolvante est infinie sur le spectre). Nous allons considérer un opérateur à résolvante compacte (c'est le cas de notre opérateur $\widetilde{A}_\alpha$), ainsi son spectre est uniquement discret. Nous allons voir que dans le cas de notre opérateur, $\widetilde{A}_\alpha$, la norme de la résolvante peut être très importante dans des régions où il n'y a pas de valeurs propres et que c'est ce qui crée la pollution numérique de nos résultats.

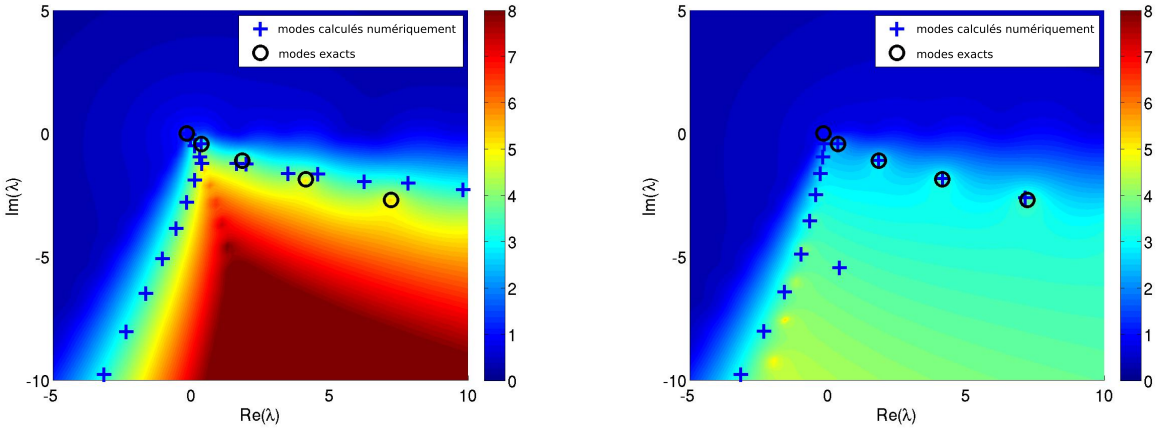

FIGURE 3.10 – *Représentation du spectre calculé et du pseudospectre (théorique) de l'opérateur $\widetilde{A}_\alpha$, dans deux configurations : PML loin du cœur ($h_2 = 2h$) à gauche et PML près du cœur ($h_2 = 6/5\,h$) à droite. Le pseudospectre est représenté en échelle logarithmique : l'échelle de couleur correspond à $\log_{10} \|R_{\widetilde{A}_\alpha}(\lambda)\|$.*

Sur la figure 3.10, nous avons représenté le spectre de l'opérateur (dans les deux mêmes configurations que sur la figure 3.9) ainsi qu'une estimation de la norme de la résolvante. Commençons par faire quelques remarques sur le calcul du pseudospectre. Comment avons-nous pu ainsi estimer le pseudospectre ? Nous avons utilisé des techniques présentées dans [Tre00]. L'idée est d'utiliser non plus une discrétisation par éléments finis mais une discrétisation spectrale de type Chebyshev : celle-ci est plus précise, mais également beaucoup plus gourmande, notamment les matrices sont pleines (si bien que ce type de discrétisation ne semble réalisable qu'en 1D). Ensuite, pour calculer le pseudospectre, nous utilisons l'algorithme donné dans [TE05]. L'idée est la suivante : le pseudospectre d'une matrice $\mathbb{A}$, dans le cas où la norme choisie est la norme euclidienne, est donné par (voir annexe A.3) :

$$\Lambda_\varepsilon(\mathbb{A}) = \{\lambda \in \mathbb{C}, s_{\min}(\mathbb{A} - \lambda I) < \varepsilon\}\,,$$

où $s_{\min}(\mathbb{A})$ dénote la plus petite valeur singulière de $\mathbb{A}$. On rappelle que les valeurs singulières de $\mathbb{A}$ sont les racines carrées des valeurs propres de $\mathbb{A}^*\mathbb{A}$. Pour calculer les valeurs singulières, nous utilisons la décomposition de Schur. Ainsi, calculer le pseudospectre en un point λ du plan complexe revient à calculer la plus petite valeur singulière de $(\mathbb{A}-\lambda I)^*(\mathbb{A}-\lambda I)$. En faisant cela sur une grille (en λ), on estime le pseudospectre dans toute la zone balayée. Dans la suite, on suppose que la méthode spectrale est très précise, puis que le calcul des valeurs singulières également, ce qui nous permet d'affirmer que le pseudospectre ainsi calculé est une bonne estimation du pseudospectre de l'opérateur continu $\widetilde{A}_\alpha$.

Maintenant que ces remarques préliminaires sur le calcul du pseudospectre sont faites, qu'observe-t-on sur la figure 3.10 ? Nous voyons très clairement que la norme de la résolvante est beaucoup plus importante dans le cas où la PML est placée loin du cœur. Nous allons voir que c'est génant pour le calcul de valeurs propres. Pour cela, nous allons utiliser une autre caractérisation du pseudospectre (voir annexe A.3) :

$$\Lambda_\varepsilon(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}, \exists E \text{ un opérateur borné tel que } \lambda \in \Lambda(A+E) \text{ et } \|E\| < \varepsilon\}\,.$$

En d'autres termes, le pseudospectre de A est l'ensemble des points qui sont dans le spectre d'une perturbation de A. Cette caractérisation du pseudospectre nous permet de comprendre pourquoi quand la norme de la résolvante est grande, le calcul de valeurs propres peut être perturbé. En effet, la discrétisation des équations introduit une erreur. Ainsi, on ne calcule plus exactement les valeurs propres de $\widetilde{A}_\alpha$, mais les valeurs propres d'une perturbation de $\widetilde{A}_\alpha$. On en déduit qu'on va trouver des valeurs propres dans le pseudospectre de $\widetilde{A}_\alpha$, et non pas exactement sur son spectre. Mais alors, si la norme de la résolvante est importante dans certaines zones, le solveur de valeurs propres va trouver des valeurs propres numériques dans ces zones, même s'il n'y a pas de valeur propre du point de vue continu.

Lorsque l'opérateur dont on veut calculer les valeurs propres est normal (c'est-à-dire lorsqu'il commute avec son adjoint), alors on montre que la norme de la résolvante se comporte comme $1/|\lambda - \lambda_0|$ au voisinage de λ_0 un pôle de la résolvante (voir annexe A.3). En d'autres termes, le pseudospectre est localisé autour des valeurs propres de l'opérateur et le solveur de valeurs propres trouve des valeurs propres proches des « vraies » valeurs propres. Mais lorsque l'opérateur n'est pas normal, un tel comportement de la résolvante n'a pas nécessairement lieu et le solveur de valeurs propres peut trouver des valeurs propres parasites si la norme de la résolvante est grande dans une zone où il n'y a pas de « vraies » valeurs propres ou il peut également mal calculer les valeurs propres si la zone où la norme de la résolvante est grande n'est pas bien localisée au voisinage de ces valeurs propres.

Sur la figure 3.10, il semblerait que le solveur de valeurs propres s'arrête à une norme de la résolvante égale à peu près à 10^4 : il ne peut aller au-delà. En effet, il trouve des valeurs propres dans des zones où la norme de la résolvante vaut à peu près cette valeur. Cela se caractérise par une partie imaginaire des valeurs propres calculées plus faible que celle des vrais modes à fuite. Dans ce contexte, il paraît essentiel de chercher à minimiser, autant que faire se peut, la norme de la résolvante. Il semblerait que le fait de placer la PML près du cœur arrange les choses. Pourquoi cela ? En fait, dans le cas très simple que nous présentons ici, nous arrivons à montrer qu'il y a une croissance exponentielle de la norme de la résolvante en fonction du paramètre $h_2 - h$, i.e. la distance entre la PML et le cœur. C'est l'objet du théorème suivant.

Théorème 3.3 : *Soit ξ dans le secteur $\{\zeta \in \mathbb{C}, 2\arg_{i\mathbb{R}^+}(\alpha_\infty) < \arg_{i\mathbb{R}^+}(\zeta + k_\infty^2) < 0\}$, avec $-\pi/2 < \arg_{i\mathbb{R}^+}(\alpha_\infty) < 0$. Nous notons, comme d'habitude, $\beta_0 = \sqrt[i\mathbb{R}^+]{k_0^2+\xi}$ et $\beta_\infty = \sqrt[i\mathbb{R}^+]{k_\infty^2+\xi}$.*

Nous avons tout d'abord le premier résultat suivant, concernant la norme de la résolvante de A_α (l'opérateur avec PML infinie) :

$$\|R_{A_\alpha}(\xi)\|_{L^2(\mathbb{R}^+)} \geq C(\xi)\sqrt{\mathrm{e}^{-2\Im m(\beta_\infty)(h_2-h)} - 1}, \tag{3.12}$$

où $C(\xi) := \left\{-2\,\Im m(\beta_\infty)\left[4|\beta_0|^4 h + \left|\frac{\mu_\infty\beta_\infty}{\mu_0}\right|^2\left(\frac{2}{h} + |\beta_0|^4\frac{8h^3}{15}\right)\right]\right\}^{-1/2}.$

Par ailleurs, pour l'opérateur $\widetilde{A}_\alpha$ (avec PML de taille finie) : on obtient :

$$\|R_{\widetilde{A}_\alpha}(\xi)\|_{L^2(0,h_\star)} \geq f(\xi)/g(\xi) \tag{3.13}$$

où

$$\begin{aligned} f(\xi) &:= \left\{ \frac{-1}{2\Im m(\beta_\infty)} \left(\mathrm{e}^{-2\Im m(\beta_\infty)(d-h)} - 1 \right) + |B_\infty|^2 \frac{1}{2\Im m(\beta_\infty)} \left(\mathrm{e}^{2\Im m(\beta_\infty)(d-h)} - 1 \right) \right. \\ &\quad \left. + 2\,\Re e \left[\frac{\overline{B_\infty}}{2i\,\Re e(\beta_\infty)} \left(\mathrm{e}^{2i\,\Re e(\beta_\infty)(h_2-h)} - 1 \right) \right] \right\}^{1/2}, \\ g(\xi) &:= \left\{ 4|A_0|^2|\beta_0|^4 h + |B_0|^2 \left(\frac{2}{h} + |\beta_0|^4 \frac{8h^3}{15} \right) \right\}^{1/2}, \end{aligned}$$

et $B_\infty := \mathrm{e}^{2i\frac{\beta_\infty}{\alpha_\infty}(h_\star - h_2)}\, \mathrm{e}^{2i\beta_\infty(h_2-h)}$, $A_0 := 1 + B_\infty$, $B_0 := i\beta_\infty\,(1 - B_\infty)\,\mu_\infty/\mu_0$.

Démonstration. On sait que la norme L^2 d'un opérateur B est égale à

$$\|B\|_{L^2} = \sup_{f \in L^2} \frac{\|Bf\|_{L^2}}{\|f\|_{L^2}}.$$

L'idée est maintenant de chercher $u = R_A(\xi) f$ tel que $\|u\|_{L^2}/\|f\|_{L^2}$ fait apparaître la croissance exponentielle recherchée. Nous allons dans toute cette preuve utiliser A pour l'opérateur A_α ou $\widetilde{A}_\alpha$ (pour l'opérateur A_α, il suffira de prendre $h_\star = +\infty$).

Nous allons considérer f à support dans le cœur ($0 \le z \le h$). Ainsi, dans la zone $h \le z \le h_2$, on a :

$$u(y) = A_\infty\, \mathrm{e}^{i\beta_\infty(z-h)} + B_\infty\, \mathrm{e}^{-i\beta_\infty(z-h)},$$

avec A_∞, B_∞ à déterminer. On en déduit que

$$\|u\|^2_{L^2(0,h_\star)} \ge \|u\|^2_{L^2(h,h_2)} = \int_0^{h_2-h} \left| A_\infty\, \mathrm{e}^{i\beta_\infty z} + B_\infty\, \mathrm{e}^{-i\beta_\infty z} \right|^2 \mathrm{d}z.$$

On va chercher à montrer que B_∞ est petit, ainsi, la croissance exponentielle de $\|u\|_{L^2(0,h_\star)}/\|f\|_{L^2(0,h_\star)}$ viendra du terme $\|u\|_{L^2(h,h_2)}$. Calculons plus précisément $\|u\|^2_{L^2(h,h_2)}$. On a :

$$\left| A_\infty\, \mathrm{e}^{i\beta_\infty z} + B_\infty\, \mathrm{e}^{-i\beta_\infty z} \right|^2 = |A_\infty|^2 \mathrm{e}^{-2\Im m(\beta_\infty)z} + |B_\infty|^2 \mathrm{e}^{2\Im m(\beta_\infty)z} + 2\Re e(A_\infty \overline{B_\infty} \mathrm{e}^{2i\Re e(\beta_\infty)z}).$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} \|u\|^2_{L^2(h,h_2)} &= \frac{|A_\infty|^2}{2\Im m(\beta_\infty)} \left(1 - \mathrm{e}^{-2\Im m(\beta_\infty)(h_2-h)} \right) + \frac{|B_\infty|^2}{2\Im m(\beta_\infty)} \left(\mathrm{e}^{2\Im m(\beta_\infty)(h_2-h)} - 1 \right) \\ &\quad + 2\Re e \left(A_\infty \overline{B_\infty} \frac{1}{2i\Re e(\beta_\infty)} \left(\mathrm{e}^{2i\Re e(\beta_\infty)(h_2-h)} - 1 \right) \right). \end{aligned}$$

Maintenant, nous allons chercher à calculer B_∞ par rapport à A_∞. Pour cela, comme dans la PML ($h_2 < z \le h_\star$), $f = 0$, on a, en utilisant les conditions de transmission en $z = h_2$: $[u]_{h_2} = 0$ et $[\alpha\mu \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}]_{h_2} = 0$:

$$u(z) = A_\infty\, \mathrm{e}^{i\beta_\infty(h_2-h)}\, \mathrm{e}^{i\frac{\beta_\infty}{\alpha_\infty}(z-h_2)} + B_\infty\, \mathrm{e}^{-i\beta_\infty(h_2-h)}\, \mathrm{e}^{-i\frac{\beta_\infty}{\alpha_\infty}(z-h_2)}, \quad \text{pour } h_2 < z \le h_\star.$$

La condition aux limites en $z = h_\star$ (condition de Neumann homogène) nous donne :

$$B_\infty = A_\infty\, \mathrm{e}^{2i\frac{\beta_\infty}{\alpha_\infty}(h_\star - h_2)}\, \mathrm{e}^{2i\beta_\infty(h_2-h)}.$$

Dans le cas d'une PML infinie, cela impose $B_\infty = 0$.

Enfin, il reste à calculer $\|f\|_{L^2(0,h_\star)}$. Nous avons pris f à support dans le cœur. Comment choisir f ? On sait que u vérifie une condition de Neumann homogène en $z = 0$. L'idée est de choisir un u à l'expression simple dans $[0, h]$, afin que f ait également une expression simple. Nous choisissons u comme combinaison linéaire de ϕ_1 et ϕ_2, où ϕ_1 est la fonction constante égale à 1 (qui permet de traiter la condition de Neumann en 0) et ϕ_2 est une fonction quadratique : $\phi_2(z) = -h/2 + z^2/(2h)$. Ainsi, $\mathrm{d}\phi_2/\mathrm{d}z(0) = 0$, $\phi_2(h) = 0$ et $\mathrm{d}\phi_2/\mathrm{d}z(h) = 1$. On écrit u comme une combinaison linéaire de ces deux fonctions : $u = A_0\phi_1 + B_0\phi_2$. L'équation dans la zone $0 \le z \le h$ donne :

$$-\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}z^2} - \beta_0^2 u = -\frac{B_0}{h} - \beta_0^2 \left[A_0 + B_0 \left(\frac{-h}{2} + \frac{z^2}{2h} \right) \right] = f \quad \text{dans } 0 \le z \le h.$$

Ceci nous permet d'estimer $\|f\|_{L^2(0,h_\star)}$. On obtient en utilisant (à deux reprises) le fait que $|a+b|^2 \le 2|a|^2 + 2|b|^2$:

$$\begin{aligned} \|f\|^2_{L^2(0,h_\star)} = \|f\|^2_{L^2(0,h)} &\le 2\frac{|B_0|^2}{h} + 2|\beta_0|^4 \int_0^h \left| A_0 + B_0 \left(\frac{-h}{2} + \frac{z^2}{2h} \right) \right|^2 \mathrm{d}z \\ &\le 2\frac{|B_0|^2}{h} + 4|\beta_0|^4 |A_0|^2 h + |\beta_0|^4 |B_0|^2 \int_0^h \left(-h + \frac{z^2}{h} \right)^2 \mathrm{d}z \\ &\le 4|A_0|^2|\beta_0|^4 h + |B_0|^2 \left(\frac{2}{h} + |\beta_0|^4 \frac{8h^3}{15} \right). \end{aligned}$$

Par ailleurs, comme u et $\mu\,\mathrm{d}u/\mathrm{d}z$ sont continus en $z = h$, cela nous donne :

$$\begin{aligned} A_0 &= A_\infty + B_\infty, \\ \mu_0 B_0 &= \mu_\infty i\beta_\infty (A_\infty - B_\infty). \end{aligned}$$

Nous avons maintenant tous les outils pour estimer la norme de la résolvante :

$$\|R_A(\xi)\|_{L^2(0,h_\star)} \ge \|u\|_{L^2(h,h_2)} / \|f\|_{L^2(0,h)}.$$

En combinant tous les résultats, on obtient l'estimation (3.13). Dans le cas où la PML est infinie, on a $B_\infty = 0$, $A_0 = A_\infty$ et $B_0 = i\mu_\infty\beta_\infty/\beta_0\, A_\infty$. On obtient ainsi l'estimation (3.12). □

Dans le cas où la PML est infinie, on voit alors clairement apparaître la croissance exponentielle de la norme de la résolvante par rapport à $-\Im m(\beta_\infty)(h_2 - h)$. Dans le cas d'une PML finie, c'est un peu moins clair. Mais dans les zones du plan complexe qui nous intéressent, on peut négliger B_∞ devant A_∞.[3] On se ramène ainsi au cas où la PML est infinie.

Le message de toute cette étude est que la norme de la résolvante en λ évolue en gros comme

$$\mathrm{e}^{-\Im m\left({}^{i\mathbb{R}^+}\sqrt{k_\infty^2 + \lambda} \right)(h_2 - h)}.$$

Ainsi, plus λ est à partie imaginaire en valeur absolue importante et plus la distance entre la PML et le coeur $(h_2 - h)$ est grande, plus la norme de la résolvante est grande et ceci de manière exponentielle. On en déduit que les valeurs propres qui ont une partie imaginaire non négligeable seront mal calculées si la PML est placée loin. On a vu que dans le cas 1D, les modes à fuite TE ont

[3] En fait B_∞ est de l'ordre de A_∞ lorsque l'on se situe sur la demi-droite $-k_\infty^2 + [(h_2 - h) + (h_\star - h_2)/\alpha_\infty]^{-2}\,\mathbb{R}^+$, ce qui ne doit pas laisser insensible le lecteur attentif. Hé oui ! c'est là où asymptotiquement se trouvent les modes liés à la discrétisation du spectre continu.

une partie imaginaire plus importante que les modes TM ou SH. Les modes à fuite TE sont donc a priori moins bien calculés que les modes à fuite TM ou SH. C'est ce qu'on vérifie en pratique. Il est, dans tous les cas, essentiel de placer la PML le plus près possible du cœur pour minimiser cette source d'erreur dans le calcul des modes à fuite. On peut comprendre ce phénomène « avec les mains » : on a vu que les modes à fuite sont exponentiellement croissants dans la gaine. Si on laisse cette croissance exponentielle devenir trop importante (en plaçant la PML loin), alors l'utilisation d'une méthode numérique induit nécessairement des erreurs, qui seront amplifiées, et les modes seront mal calculés. Nous avons vu au chapitre 2 qu'a priori nous ne pouvons pas « faire rentrer » la PML dans le cœur, puisque la solution de l'équation aux valeurs propres n'est pas analytique en général à la traversée de l'interface cœur / gaine. Dans le cas 1D, pour minimiser la croissance de la résolvante, il suffit alors de coller la PML au cœur. Dans le cas 2D, c'est plus délicat, en fonction de la géométrie. Nous allons voir qu'une solution pourrait être l'utilisation de ce qu'on appelle des PMLs non orthogonales, qui suivent le contour du cœur. C'est l'objet de la sous-section suivante.

3.2.2 Les PMLs non orthogonales : une solution ?

Nous allons présenter comment développer un nouveau type de PML, qui permet de rapprocher la PML du cœur dans des géométries 2D. Les PMLs classiques permettent d'encadrer le cœur dans un cercle (pour les PMLs radiales) ou un rectangle (pour les PMLs cartésiennes). Dans les deux cas, la frontière entre le domaine physique et la PML est orthogonale à la direction dans laquelle on procède à la dilatation analytique. Par exemple, dans le cas d'une PML radiale, on dilate analytiquement dans la direction radiale et la frontière entre le domaine physique et la PML est un cercle. Les PMLs que nous allons développer ci-après sont non orthogonales, dans le sens où cette frontière est non nécessairement orthogonale à la direction dans laquelle on procède à la dilatation analytique. Nous appellerons ainsi ces nouveaux objets *PMLs non orthogonales*. Notons que cette étude, sur les PMLs non orthogonales, a fait l'objet d'une conférence (conférence ICTCA 2009 : « 9th International Conference on Theorical and Computational Acoustics), donnée par Andrés Prieto.

Nous allons faire la présentation dans le cas d'une PML abrupte mais tout se généralise pour une PML douce.

Commençons par traiter le cas d'une PML cartésienne. Considérons le cas d'une PML dans la direction z. Une PML classique consiste, comme on l'a vu au chapitre 2, à complexifier la coordonnée z, puis à prendre un chemin dans le plan complexe du type :

$$\mathcal{C}^z(z) = \int_0^z \frac{\mathrm{d}s}{\alpha^z(s)}, \quad \text{où} \quad \alpha^z(z) = \begin{cases} 1 & \text{si } z < R_2^z, \\ \alpha_\infty^z & \text{sinon.} \end{cases}$$

Une PML non orthogonale consiste à prendre :

$$\mathcal{C}^z(y,z) = \int_0^z \frac{\mathrm{d}s}{\alpha^z(y,s)}, \quad \text{où} \quad \alpha^z(y,z) = \begin{cases} 1 & \text{si } z < R_2^z(y), \\ \alpha_\infty^z & \text{sinon.} \end{cases}$$

La différence réside dans le fait que la frontière entre le domaine physique et la PML n'est plus une droite $z = R_2^z$, mais une courbe $z = R_2^z(y)$, comme on peut le voir sur la figure 3.11. Notons $\check{z} = \mathcal{C}^z(y,z)$ la coordonnée complexifiée. On suppose, pour simplifier ici, que l'on n'introduit pas de PML dans la direction y : $\check{y} = y$. On a vu, au chapitre précédent, que l'introduction d'une PML consiste, formellement, à modifier dans l'équation toutes les variables z par $\check{z}$ (une variable complexe), puis à procéder au changement de variable $\check{z} = \mathcal{C}^z(y,z)$. Dans le cas d'une PML standard,

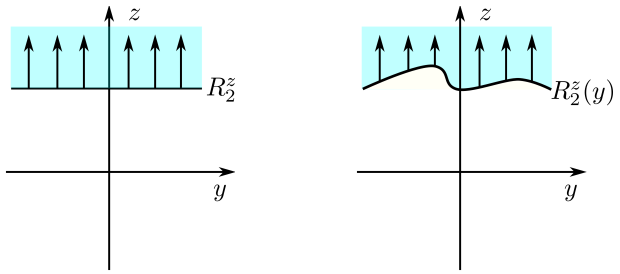

FIGURE 3.11 – *Différence entre une PML cartésienne orthogonale (à gauche) et une PML cartésienne non orthogonale (à droite). En bleu est représentée la zone PML, en blanc la zone physique. Les flèches représentent la direction dans laquelle on procède à la dilatation analytique.*

l'introduction de la PML revient alors, formellement, à remplacer dans les équations les $\partial/\partial\check{z}$ par $\alpha^z\,\partial/\partial z$. Dans le cas d'une PML non orthogonale, c'est un peu plus compliqué. On a :

$$\begin{pmatrix}\partial/\partial y\\ \partial/\partial z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & \partial\mathcal{C}^z/\partial y\\ 0 & 1/\alpha^z\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\partial/\partial\check{y}\\ \partial/\partial\check{z}\end{pmatrix}.$$

On en déduit que

$$\begin{pmatrix}\partial/\partial\check{y}\\ \partial/\partial\check{z}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -\alpha^z\,\partial\mathcal{C}^z/\partial y\\ 0 & \alpha^z\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\partial/\partial y\\ \partial/\partial z\end{pmatrix}.$$

Donc, non seulement on doit changer l'opérateur $\partial/\partial\check{z}$ par $\alpha^z\partial/\partial z$, mais l'opérateur $\partial/\partial\check{y}$ devient : $\partial/\partial y - \alpha^z\,(\partial\mathcal{C}^z/\partial y)\,\partial/\partial z$.

Nous allons nous intéresser plus particulièrement aux PMLs radiales. Dans ce cas, l'idée est la même : on considère une frontière entre le domaine physique et la PML paramétrisée par une courbe polaire $R_2(\theta)$. Dans le cas standard, $R_2(\theta) = R_2$ est une constante. On voit ainsi qu'une limitation de ce nouveau type de PML est que le domaine physique est étoilé par rapport à 0. Plus précisément, on prend

$$\mathcal{C}(r,\theta) = \int_0^r \frac{\mathrm{d}s}{\alpha(s,\theta)}, \quad \text{où} \quad \alpha(r,\theta) := \begin{cases}1 & \text{si } r < R_2(\theta),\\ \alpha_\infty & \text{sinon,}\end{cases} \quad \text{et on pose} \quad \gamma(r,\theta) := \frac{r}{\mathcal{C}(r,\theta)}.$$

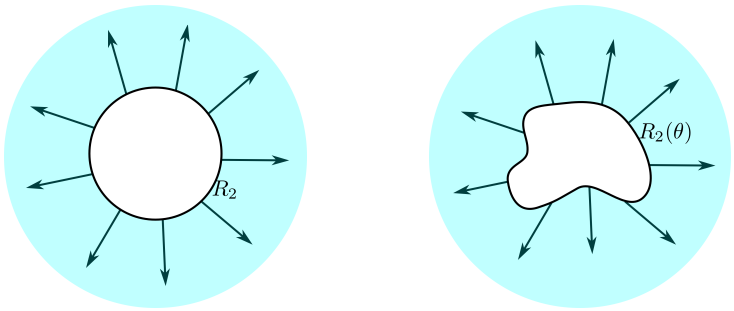

FIGURE 3.12 – *Différence entre une PML radiale orthogonale (à gauche) et une PML radiale non orthogonale (à droite). En bleu est représentée la zone PML, en blanc la zone physique. Les flèches représentent la direction dans laquelle on procède à la dilatation analytique.*

Sur la figure 3.12, nous représentons schématiquement les différences entre une PML radiale classique et une PML radiale non orthogonale. Notons $\check{r} = \mathcal{C}(r,\theta)$ la coordonnée complexifiée. Nous

ne modifions pas la coordonnée θ : $\check{\theta} = \theta$. Le gradient en coordonnées radiales s'exprime de la façon suivante :

$$\nabla = \begin{pmatrix} \partial/\partial r \\ 1/r\,\partial/\partial\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\alpha & 0 \\ \alpha_\theta & 1/\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial/\partial\check{r} \\ 1/\check{r}\,\partial/\partial\check{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\alpha & 0 \\ \alpha_\theta & 1/\gamma \end{pmatrix} \check{\nabla}$$

où $\alpha_\theta := \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \mathcal{C}}{\partial\theta}$. Dans le cas d'une PML abrupte,

$$\alpha_\theta = \begin{cases} 0 & \text{si } r < R_2(\theta), \\ \frac{1}{r}R_2'(\theta)\left(1 - \frac{1}{\alpha_\infty}\right) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Donc,

$$\check{\nabla} = \mathbb{M}\nabla \quad \text{où} \quad \mathbb{M} := \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ -\alpha\,\gamma\,\alpha_\theta & \gamma \end{pmatrix}.$$

On en déduit que l'équation suivante : $-1/\mu\,\mathrm{div}(\mu\nabla u)u - k^2 u = \lambda u$ devient :

$$-\frac{\alpha\gamma}{\mu}\,\mathrm{div}(\mu\,\mathbb{H}\,\nabla u) - k^2 u = \lambda u \tag{3.14}$$

où div et ∇ sont les opérateurs divergence et gradient en coordonnées radiales et où

$$\mathbb{H} := \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{\gamma}\left(1 + (\gamma\alpha_\theta)^2\right) & -\gamma\,\alpha_\theta \\ -\gamma\,\alpha_\theta & \frac{\gamma}{\alpha} \end{pmatrix}.$$

En effet, en coordonnées radiales,

$$\int_{\mathbb{R}^2} \mu\,\check{\nabla}u\cdot\check{\nabla}v\,\check{r}\,\mathrm{d}\check{r}\,\mathrm{d}\check{\theta} - \int_{\mathbb{R}^2}\mu\,k^2\,u\,v\,\check{r}\,\mathrm{d}\check{r}\,\mathrm{d}\check{\theta} = \int_{\mathbb{R}^2}\mu\,\mathbb{M}\nabla u\cdot\mathbb{M}\nabla v\,\frac{1}{\gamma\alpha}\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta - \int_{\mathbb{R}^2}\mu\,k^2\,\frac{1}{\gamma\alpha}\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta.$$

On en déduit le résultat puisque

$$\mathbb{H} = \frac{1}{\gamma\alpha}\mathbb{M}^T\mathbb{M}.$$

L'implémentation numérique de ces nouvelles PMLs est très facile : il ne pose pas davantage de difficultés que les PMLs standards. Nous écrivons la formulation variationnelle de l'équation aux valeurs propres (3.14) et nous nous ramenons à un problème aux valeurs propres matriciel que nous résolvons de la même manière que dans le cas de PMLs standards.

À titre d'illustration, nous avons fait des tests numériques sur le cas d'un guide 3D, avec coefficients constants dans le cœur, dans le cas où l'interface entre le cœur et la gaine est donné par la frontière suivante : $R(\theta) = \frac{4}{5} + \frac{1}{2}\,\sin(2\theta)\,\cos(2\theta)$, où $\theta \in [0, 2\pi[$ (forme de fleur à quatre pétales). Nous utilisons une PML radiale standard positionnée à $R_2 = 1.5$ et une PML radiale non orthogonale, collée au coeur, avec $\alpha_\infty = 0.8 - 0.4i$. Les paramètres sont les suivants (ils correspondent au cas SH pour un guide d'ondes 2D) : $\mu_0 = 84.29, \mu_\infty = 16$, $\rho_0 = 7.9312, \rho_\infty = 2.3$ et nous prenons une pulsation $\omega = 10$.

Nous avons représenté, sur la figure 3.13, les valeurs propres calculées avec les PMLs standard et non orthogonale. Nous ne distinguons que quatre modes à fuite, les valeurs propres pour lesquelles les croix bleues et les ronds rouges sont presque confondus, le reste provenant de la discrétisation du continuum. Pour ces quatre valeurs propres, nous observons que les deux méthodes (PML standard et PML non standard) donnent des résultats similaires. Il est légitime de se demander quelle est a priori la meilleure approximation. Rien ne permet ici de discriminer l'une ou l'autre méthode.

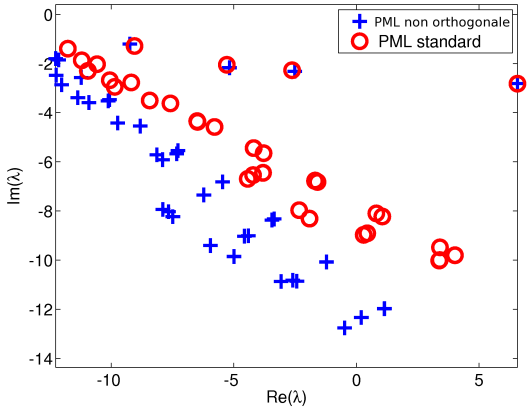

FIGURE 3.13 – *Valeurs propres obtenues dans le cas de la « fleur », avec PML radiale standard ($R_2 = 1.5$) et PML radiale non orthogonale collée au cœur.*

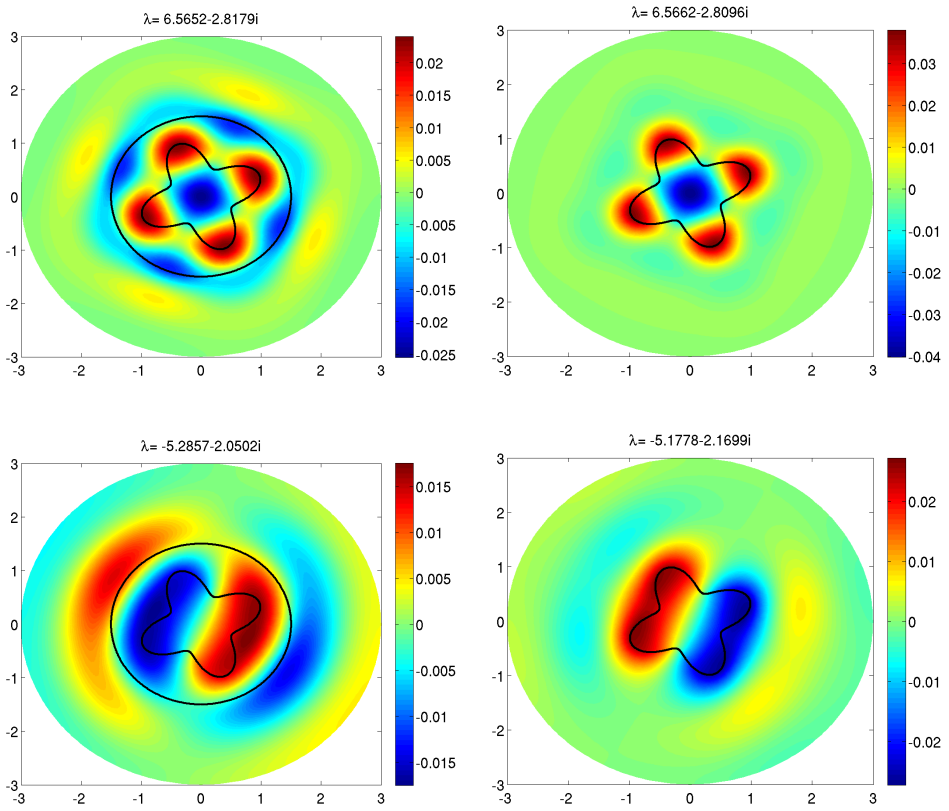

FIGURE 3.14 – *Deux modes calculés avec PML radiale standard avec $R_2 = 1.5$ (à gauche) et PML radiale non orthogonale collée au cœur (à droite).*

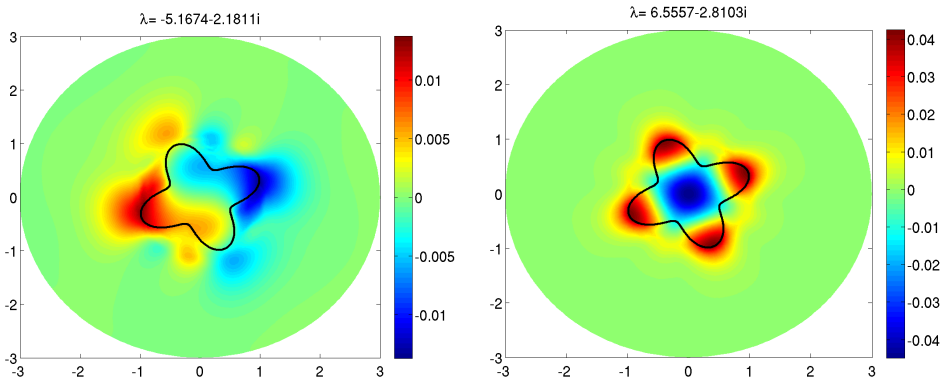

FIGURE 3.15 – *Représentation de deux modes calculés avec PML non orthogonale collée au cœur dans le cas où* $\alpha_\infty = 0.4 - 0.8i$.

Sur la figure 3.14, nous avons représenté deux exemples de modes à fuite calculés d'une part avec PML standard et d'autre part avec PML non orthogonale. Nous remarquons que dans le cœur, l'allure de la fonction propre est très similaire quelle que soit la PML choisie.

Enfin, sur la figure 3.15, nous avons représenté les mêmes fonctions propres avec une PML non orthogonale, en changeant le paramètre de la PML : on prend maintenant $\alpha_\infty = 0.4 - 0.8i$. Nous avons pris un paramètre plus absorbant : $|\arg_{i\mathbb{R}^+}(\alpha_\infty)|$ est plus grand. Nous observons alors que le calcul n'est plus bon du tout. Il y a des instabilités créées par la PML. À quoi est-ce dû ? Pour comprendre le phénomène, nous allons démontrer la proposition suivante :

Proposition 3.4 *Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $v \in \mathbb{C}$, avec $\|v\| = 1$,*

$$\Re e(\overline{v} \cdot \mathbb{H} v) \geq C$$

si pour tout (r, θ) dans le domaine PML,

$$\frac{|R_2'(\theta)|}{r} < \left|\frac{\alpha_\infty}{\gamma\alpha_\infty - \gamma}\right| \left|\frac{\cos(a)}{\sin(a-b)}\right|, \tag{3.15}$$

où $a := \arg(\frac{\gamma}{\alpha})$ et $b := \arg(\gamma\alpha_\theta)$ (en prenant, par exemple, l'argument entre $-\pi$ et π).

Démonstration. Comme la matrice $\mathbb{H}$ est symétrique, nous avons : pour tout $v \in \mathbb{C}^2$, avec $\|v\| = 1$, $\Re e(\overline{v} \cdot \mathbb{H} v) = \overline{v} \cdot \Re e(\mathbb{H}) v$. Nous allons donc travailler avec la matrice $\Re e(\mathbb{H})$, qui est symétrique réelle. Nous devons vérifier que ses valeurs propres sont positives. Il suffit pour cela de montrer qu'un de ses coefficients diagonaux est positif et que son déterminant est positif. Il est facile de voir que $\Re e(\gamma/\alpha) > 0$. Reste à calculer le déterminant de $\Re e(\mathbb{H})$. Notons $a = \arg(\frac{\gamma}{\alpha})$ et $b = \arg(\gamma\alpha_\theta)$. On vérifie alors :

$$\det(\Re e(\mathbb{H})) = \left[\cos(a) + |\gamma\alpha_\theta|^2 \cos(2b - a)\right] \cos(a) - |\gamma\alpha_\theta|^2 \cos^2(b) = \cos^2(a) - |\gamma\alpha_\theta|^2 \sin^2(a - b).$$

La condition $\det(\Re e(\mathbb{H})) > 0$ impose donc :

$$|\gamma\alpha_\theta| < \left|\frac{\cos(a)}{\sin(a-b)}\right|.$$

En remplaçant l'expression de α_θ on obtient l'équation (3.15). □

Dans le cas où $\alpha_\infty = 0.4 - 0.8i$, (au contraire du cas où $\alpha_\infty = 0.8 - 0.4i$) la relation (3.15) n'est pas vérifiée partout dans la PML, comme on peut le voir sur la figure 3.16. Sur cette figure, nous avons représenté le critère $|\gamma\alpha_\theta| - \left|\frac{\cos(a)}{\sin(a-b)}\right|$, qui doit être négatif pour assurer la coercivité de la matrice $\mathbb{H}$ (c'est équivalent au critère (3.15)), dans la zone PML (en complétant par zéro dans la zone physique). Nous observons du orange voire du rouge dans la figure de droite, ce qui signifie que le critère (3.15) n'est pas respecté. Cela implique que la matrice $\mathbb{H}$ n'est pas coercive et nous obervons alors que la méthode de discrétisation (les éléments finis) ne converge pas et ne permet pas de trouver la solution.

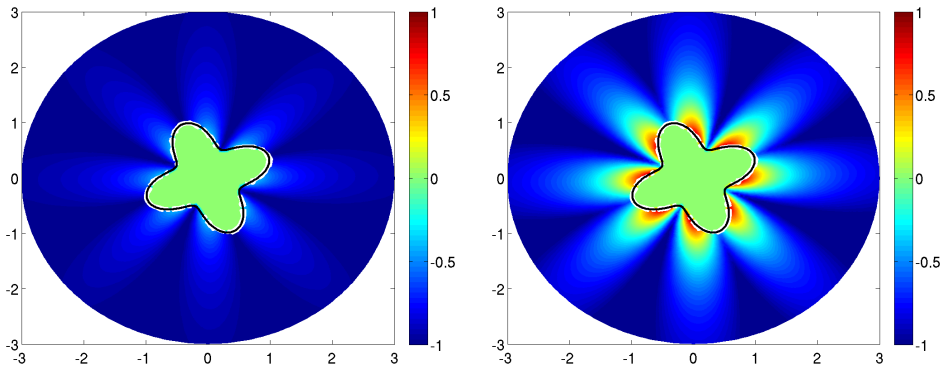

FIGURE 3.16 – *Représentation du critère :* $|\gamma\alpha_\theta| - \left|\frac{\cos(a)}{\sin(a-b)}\right|$ *(qui doit être négatif pour assurer la coercivité de la matrice* $\mathbb{H}$*) dans les cas* $\alpha_\infty = 0.8 - 0.4i$ *(à gauche) et* $\alpha_\infty = 0.4 - 0.8i$ *(à droite).*

La relation (3.15) impose en quelque sorte que le coefficient de la PML (α_∞) ne soit pas trop absorbant ($|\arg_{i\mathbb{R}^+}(\alpha_\infty)|$ faible) si l'on prend une PML telle que $R_2'(\theta)$ est important : il y a un compromis à faire entre, d'une part, l'absorption de la PML et, d'autre part, la non-orthogonalité de la PML.

Concluons sur ce nouveau type de PMLs. Comme ces PMLs peuvent s'adapter au contour du cœur, ce nouveau type de PMLs semble tout à fait adapté pour le calcul de modes à fuite dans des géométries très allongées par exemple. Elles pourraient permettre de diminuer la zone à mailler et seraient plus intéressantes d'un point de vue du coût numérique. Un travail reste à mener pour montrer que nous avons convergence (lorsque la taille de la PML augmente) de ce nouveau type de PMLs vers la solution exacte. Une attention particulière doit être portée quant au paramètre α_∞ de la PML : nous avons vu qu'on ne peut avoir une PML à la fois très absorbante et telle que $R_2'(\theta)$ est important. Notons que dans le cas de PMLs cartésiennes, la même restriction s'applique : nous ne pouvons avoir à la fois une PML trop absorbante et trop « penchée » (nous verrons ceci plus en détail au chapitre 5, proposition 5.1).

Enfin, remarquons que ce nouveau type de PMLs pourrait être employé dans d'autres configurations que pour le calcul de modes à fuite dans des géométries complexes. On peut penser par exemple au problème de diffraction par un obstacle complexe (on entend par complexe, non cubique ou non sphérique), où ce nouveau type de PMLs en prenant une taille de PML assez faible et une PML collée à l'obstacle pourrait être utilisé comme une solution non exacte mais à faible coût, qui pourrait ensuite servir de préconditionneur pour des méthodes plus sophistiquées, comme les équations intégrales par exemple. Par ailleurs, nous allons voir au chapitre 5 que nous avons également utilisé ce nouveau type de PMLs pour la simulation d'un guide ouvert perturbé. Les PMLs non orthogonales nous permet ici de suivre la forme du guide d'ondes, qui évolue le long de l'axe de propagation.

3.3 Représentation modale de la fonction de Green du guide ouvert uniforme

Nous allons voir dans cette section comment les modes à fuite peuvent être utilisés pour représenter, à faible coût, la fonction de Green du guide ouvert uniforme.

L'idée est la suivante. Il est bien connu (cf. [LM10]) que dans le cas d'un guide fermé, nous pouvons décomposer sa fonction de Green à l'aide des modes du guide, la décomposition prenant la forme suivante, dans le cas de l'équation de Helmholtz

$$-\triangle \mathcal{G} - k^2 \mathcal{G} = \delta_{x',z'}$$

où $\delta_{x',z'}$ dénote la mesure de Dirac en (x', z'), le point source :

$$\mathcal{G}(x, z; x', z') = -\sum_n \frac{1}{2i\beta_n} \Phi_n(z') \, \Phi_n(z) \, \mathrm{e}^{i\beta_n |x-x'|}, \tag{3.16}$$

où les Φ_n sont les fonctions propres orthonormalisées de l'opérateur transverse et les β_n sont les nombres d'onde longitudinaux définis par $\beta_n = \sqrt{-\lambda_n}$ pour $\lambda_n < 0$ et $\beta_n = i\sqrt{\lambda_n}$ pour $\lambda_n \geq 0$ et où λ_n est la valeur propre associée à la fonction propre Φ_n. Cette décomposition est possible car le spectre de l'opérateur transverse est discret et que les fonctions propres de l'opérateur transverse forment une base de L^2 (puisque ce dernier est autoadjoint).

L'idée, pour obtenir une telle décomposition dans le cas d'un guide ouvert, est de borner le domaine de calcul dans la (ou les) direction(s) transverse(s) avec une (des) PML(s) de taille finie. Ainsi, on passe de l'opérateur transverse A (du premier chapitre) avec du spectre continu à l'opérateur $\widetilde{A}_\alpha$ (du troisième chapitre) à résolvante compacte, dont le spectre est exclusivement discret. Nous avons signalé que nous ne savons pas montrer dans le cas général que les fonctions propres et les fonctions propres généralisées de $\widetilde{A}_\alpha$ forment une famille complète, donc a priori rien ne justifie que l'on puisse décomposer sur les fonctions propres (et les fonctions propres généralisées).[4] Mais nous allons le faire quand même ! Nous allons voir également comment on pourrait justifier la décomposition que nous employons sans utiliser de propriété de complétude des fonctions propres et fonctions propres généralisées (sous-section 3.3.1). Enfin, nous allons voir qu'en faisant une telle décomposition, on obtient une formule de représentation de la fonction de Green très efficace numériquement et assez précise (sous-section 3.3.2).

3.3.1 Formule de décomposition

Établissons tout d'abord la formule de décomposition en faisant l'hypothèse forte que l'on peut décomposer la fonction de Green sur les fonctions propres de l'opérateur $\widetilde{A}_\alpha$. Nous supposons de plus que tous ces modes sont simples, pour simplifier l'écriture de la décomposition. Nous allons faire la présentation dans le cas d'un guide 2D. L'extension à un guide 3D ne pose aucune difficulté supplémentaire.

Cette étude a été menée pour l'écriture du papier [BBGHP09], acte de la conférence des cinquièmes journées du GDR 2501 : « étude de la propagation ultrasonore en vue du contrôle non destructif ».

Étant donnée une source ponctuelle située en (x', z'), les équations vérifiées par la fonction de

[4] Voir la section annexe de ce chapitre (section 3.4) à ce sujet.

Green $\mathcal{G}(x,z;x',z')$ du guide ouvert 2D que l'on considère dans la suite sont les suivantes :

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\,\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial z}\right)-\frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial x^2}-k^2(z)\,\mathcal{G}=\delta_{x=x',z=z'} \quad \text{dans } \mathcal{O}=\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+,\\
&\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial z}(x,0;x',z')=0.\\
&\mathcal{G} \text{ est sortante.}
\end{aligned}
$$

Nous utilisons, par simplicité, la même notation $\mathcal{G}$ pour la fonction de Green une fois que la PML a été introduite. Nous avons imposé une condition de Neumann en $z=0$, mais nous aurions très bien pu imposer une condition de Dirichlet, cela ne change en rien la description faite ici.

De manière à borner le domaine de calcul dans la direction transverse, nous plaçons une PML dans la direction z. Nous postulons que la solution se prolonge analytiquement en dehors des inhomogénéités (ici, pour $z>h$ et $z>z'$). Le choix de prolonger dans le demi-plan complexe des nombres complexes à partie imaginaire positive ou négative revient alors à choisir l'onde sortante ou entrante. En effet, la solution sortante est exponentiellement décroissante quand la variable z est prolongée dans le demi-plan complexe des nombres complexes à partie imaginaire positive et la solution entrante est exponentiellement décroissante quand la variable z est prolongée dans le demi-plan complexe des nombres complexes à partie imaginaire négative. Quand on tronque la PML (en imposant une condition de Neumann ou de Dirichlet homogène en fin de PML), si l'on a choisi de prolonger analytiquement dans le bon demi-plan complexe (ce qui revient, avec les PMLs que l'on utilise, à choisir α_∞ à partie réelle strictement positive et à partie imaginaire strictement négative), on sélectionne la solution sortante. Après ajout d'une PML de taille finie dans la direction z, les équations deviennent :

$$
\begin{aligned}
&-\frac{\alpha}{\mu}\frac{\partial}{\partial z}\left(\alpha\,\mu\,\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial z}\right)-\frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial x^2}-k^2(z)\,\mathcal{G}=\delta_{x=x',z=z'} \quad \text{dans } \widetilde{\mathcal{O}}=\mathbb{R}\times[0,h_\star], && (3.17)\\
&\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial z}(x,0;x',z')=0, && (3.18)\\
&\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial z}(x,h_\star;x',z')=0. && (3.19)\\
&\mathcal{G} \text{ est sortante.} && (3.20)
\end{aligned}
$$

Nous avons imposé une condition de Neumann en $z=h_\star$ (en bout de PML), mais nous aurions très bien pu imposer une condition de Dirichlet. Le sens de sortant signifie ici : propagatif ou évanescent vers la droite pour $x>x'$ et vers la gauche pour $x<x'$.

On suppose que l'on peut décomposer la fonction de Green sur les modes :

$$
\mathcal{G}(x,z;x',z')=\sum_n a_n(x;x',z')\,\Phi_n(z)
$$

où les Φ_n sont les fonctions propres de $\widetilde{A}_\alpha$ associées aux valeurs propres λ_n, le couple (Φ_n,λ_n) vérifiant :

$$
\begin{aligned}
&-\frac{\alpha}{\mu}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\alpha\,\mu\,\frac{\mathrm{d}\Phi_n}{\mathrm{d}z}\right)-(k^2(z)+\lambda_n)\,\Phi_n=0,\\
&\frac{\mathrm{d}\Phi_n}{\mathrm{d}z}(0)=0,\\
&\frac{\mathrm{d}\Phi_n}{\mathrm{d}z}(h_\star)=0.
\end{aligned}
$$

La fonction a_n vérifie donc, pour tout $x \neq x'$:

$$\frac{\mathrm{d}^2 a_n}{\mathrm{d}x^2} - \lambda_n \, a_n = 0.$$

Nous utilisons maintenant le fait que nous cherchons une solution $\mathcal{G}$ sortante : ce qui impose que a_n est de la forme suivante : pour $\pm(x - x') > 0$,

$$a_n(x; x', z') = A_n^{\pm}(z') \, \mathrm{e}^{i\beta_n |x - x'|},$$

où β_n est le nombre d'onde longitudinal : $\beta_n = \sqrt[\mathbb{R}^-]{-\lambda_n}$ (et si $\lambda_n \in \mathbb{R}^+$, $\beta_n = i\sqrt{\lambda_n}$) : β_n est ainsi à partie réelle et à partie imaginaire positives puisque les valeurs propres λ_n sont à partie imaginaire négative.

Il reste à déterminer $A_n^{\pm}(z')$. Pour cela, écrivons l'équation (3.17) au sens des distributions (les distributions sont ici les formes antilinéaires continues). Soit $\phi \in \mathcal{D}(\widetilde{\mathcal{O}})$. On a :

$$\left\langle -\frac{\alpha}{\mu}\frac{\partial}{\partial z}\left(\alpha\,\mu\,\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial z}\right) - \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial x^2} - k^2 \mathcal{G}, \phi \right\rangle = \overline{\phi(x', z')}$$

Par définition, ceci signifie :

$$\left\langle \mathcal{G}, -\frac{\partial}{\partial z}\left(\overline{\alpha}\,\mu\,\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\overline{\alpha}}{\mu}\phi\right)\right) - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - k^2 \phi \right\rangle = \overline{\phi(x', z')}$$

Or, rappelons-nous que nous cherchons $\mathcal{G}$ sous la forme suivante :

$$\mathcal{G} = \left\{ \begin{array}{ll} \mathcal{G}^- = \sum_n A_n^-(z') \, \Phi_n(z) \, \mathrm{e}^{i\beta_n(x'-x)} & \text{si } x < x', \\ \mathcal{G}^+ = \sum_n A_n^+(z') \, \Phi_n(z) \, \mathrm{e}^{i\beta_n(x-x')} & \text{si } x > x'. \end{array} \right.$$

Ceci implique :

$$\begin{aligned} \int_{x<x'} \mathcal{G}^- \left[-\frac{\partial}{\partial z}\left(\alpha\,\mu\,\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\alpha}{\mu}\overline{\phi}\right)\right) - \frac{\partial^2 \overline{\phi}}{\partial x^2} - k^2 \overline{\phi} \right] \mathrm{d}x \, \mathrm{d}z \\ + \int_{x>x'} \mathcal{G}^+ \left[-\frac{\partial}{\partial z}\left(\alpha\,\mu\,\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\alpha}{\mu}\overline{\phi}\right)\right) - \frac{\partial^2 \overline{\phi}}{\partial x^2} - k^2 \overline{\phi} \right] \mathrm{d}x \, \mathrm{d}z = \overline{\phi(x', z')} \end{aligned}$$

Par deux intégrations par parties, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{x<x'} \underbrace{\left(-\frac{\alpha}{\mu}\frac{\partial}{\partial z}\left(\alpha\,\mu\,\frac{\partial \mathcal{G}^-}{\partial z}\right) - \frac{\partial^2 \mathcal{G}^-}{\partial x^2} - k^2 \mathcal{G}^- \right)}_{=0} \overline{\phi} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}z \\ + \int_{x>x'} \underbrace{\left(-\frac{\alpha}{\mu}\frac{\partial}{\partial z}\left(\alpha\,\mu\,\frac{\partial \mathcal{G}^+}{\partial z}\right) - \frac{\partial^2 \mathcal{G}^+}{\partial x^2} - k^2 \mathcal{G}^+ \right)}_{=0} \overline{\phi} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}z \\ + \int_{x=x'} \left(\frac{\partial \mathcal{G}^-}{\partial x}\overline{\phi} - \frac{\partial \overline{\phi}}{\partial x}\mathcal{G}^- - \frac{\partial \mathcal{G}^+}{\partial x}\overline{\phi} + \frac{\partial \overline{\phi}}{\partial x}\mathcal{G}^+ \right) \mathrm{d}z = \overline{\phi(x', z')}. \end{aligned}$$

Nous allons maintenant utiliser cette dernière expression avec des ϕ particuliers pour obtenir la décomposition voulue.

Nous faisons comme premier choix de fonction test : $\overline{\phi} = \frac{\mu}{\alpha}\,\Phi_n(z)\,\chi(z)\,\psi(x)$ tel que $\chi(z)$ et $\psi(x)$ sont des fonctions respectivement de $\mathcal{D}(0,h_\star)$ et de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ avec $\chi(z')=1$, $\psi(x')=1$ et $\mathrm{d}\psi/\mathrm{d}x(x')=0$ de telle manière que $\phi\in\mathcal{D}(\widetilde{\mathcal{O}})$. On obtient alors pour tout $z\in[0,h_\star]$,

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}(x',z)=0 \quad \text{et} \quad \mp\frac{\partial\mathcal{G}^{\pm}}{\partial x}(x',z,x',z')=-\sum_m i\beta_m A_m(z')\Phi_m(z),$$

donc

$$-\frac{\mu(z')}{\alpha(z')}\Phi_n(z')=\sum_m i\beta_m(A_m^-(z')+A_m^+(z'))\int_0^{h_\star}\frac{\mu}{\alpha}\,\Phi_n\,\Phi_m\,\chi\,\mathrm{d}z,$$

ce pour tout $\chi\in\mathcal{D}(0,h_\star)$ tel que $\chi(z')=1$. On obtient donc (en utilisant le théorème de Lebesgue de convergence dominée en faisant tendre χ vers la fonction constante égale à 1) :

$$-\frac{\mu(z')}{\alpha(z')}\Phi_n(z')=\sum_m i\beta_m(A_m^-+A_m^+)\int_0^{h_\star}\frac{\mu}{\alpha}\,\Phi_n\,\Phi_m\,\mathrm{d}z. \tag{3.21}$$

Comme deuxième choix de fonction test, nous prenons : $\overline{\phi}=\frac{\mu}{\alpha}\,\Phi_n(z)\,\chi(z)\,\psi(x)$ tel que χ et ψ sont des fonctions respectivement de $\mathcal{D}(0,h_\star)$ et de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ avec $\chi(z')=1$, $\psi(x')=0$ et $\mathrm{d}\psi/\,\mathrm{d}x(x')=1$ de telle manière que $\phi\in\mathcal{D}(\widetilde{\mathcal{O}})$. On obtient alors pour tout $z\in[0,h_\star]$:

$$\phi(x',z)=0 \quad \text{et} \quad \mathcal{G}^{\pm}(x',z,x',z')=\sum_m A_m(z')\Phi_m(z),$$

donc

$$0=\sum_m(A_m^- - A_m^+)\int_0^{h_\star}\frac{\mu}{\alpha}\,\Phi_n\,\Phi_m\,\chi\,\mathrm{d}z.$$

Puis, de la même manière que précédemment, en faisant tendre χ vers 1 :

$$0=\sum_m(A_m^- - A_m^+)\int_0^{h_\star}\frac{\mu}{\alpha}\,\Phi_n\,\Phi_m\,\mathrm{d}z. \tag{3.22}$$

En supposant toutes les valeurs propres simples, et en utilisant la bi-orthogonalité des fonctions propres (cf. théorème 3.2) et les équations (3.21)-(3.22), on obtient alors la décomposition suivante de la fonction de Green :

$$\boxed{\mathcal{G}(x,z;x',z')=-\sum_n\frac{1}{2i\beta_n}\,\frac{1}{\int_0^{h_\star}\frac{\mu(z)}{\alpha(z)}\,\Phi_n^2(z)\,\mathrm{d}z}\,\frac{\mu(z')}{\alpha(z')}\Phi_n(z')\,\Phi_n(z)\,\mathrm{e}^{i\beta_n|x-x'|}.} \tag{3.23}$$

Nous remarquons que cette formule est en tous points similaire à la formule dans le cas d'un guide fermé (formule (3.16)), à la différence que la bi-orthogonalité est utilisée au lieu de l'orthogonalité des fonctions propres généralisées.

Une justification de la formule sans utiliser la complétude des fonctions propres de l'opérateur transverse

La décomposition que l'on a obtenu précédemment est formelle. L'hypothèse sous-jacente est que l'on peut décomposer la fonction de Green sur les fonctions propres de l'opérateur $\widetilde{A}_\alpha$. Malheureusement (voir l'annexe de ce chapitre, section 3.4), cet opérateur n'est pas autoadjoint et, a

priori, il n'est pas évident que l'on puisse décomposer « n'importe quelle fonction » sur les fonctions propres.

Nous allons chercher à contourner la difficulté. En effet, la fonction de Green, ce n'est pas « n'importe quelle fonction » ! Elle vérifie une certaine équation et c'est de cela dont nous allons tirer parti. Notre description ci-dessous est formelle, elle ne rentre pas dans les détails techniques. Ce paragraphe n'a pour but que d'ouvrir une perspective pour justifier plus rigoureusement des décompositions sur les fonctions propres de l'opérateur $\widetilde{A}_\alpha$.

La technique consiste à faire une transformation de Fourier en x (dans la direction longitudinale) dans le guide puis, par application du théorème des résidus pour calculer la transformée de Fourier inverse et par des techniques de déformation de contours dans le plan complexe, nous obtenons la décomposition voulue. Nous nous sommes inspirés, pour cela, de travaux pour l'étude de singularités dans des géométries comportant des coins. En procédant à un changement de variable, du type $t = \ln r$, le problème dans une géométrie contenant un coin se ramène à un problème dans une demi-bande, tout à fait similaire à un problème dans un guide d'ondes. Citons par exemple les livres [KMR97] et [NBP94] où ces techniques sont détaillées.

Commençons par appliquer la transformation de Fourier en x et notons $\widehat{\mathcal{G}}(\xi, z; x', z')$ la transformée de Fourier de $\mathcal{G}(x, z; x, z')$:

$$\widehat{\mathcal{G}}(\xi, z; x', z') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{G}(x, z; x, z')\, \mathrm{e}^{-i\xi x}\, \mathrm{d}x.$$

Celle-ci vérifie :

$$\left(-\frac{\alpha}{\mu} \frac{\partial}{\partial z} \left[\alpha\, \mu\, \frac{\partial}{\partial z} \right] - k^2(z) + \xi^2 \right) \widehat{\mathcal{G}}(\xi, z; x', z') = \frac{\mathrm{e}^{-i\xi x'}}{\sqrt{2\pi}}\, \delta_{z=z'} \quad \text{dans } \mathbb{R} \times [0, h_\star].$$

Formellement, on a alors, si $-\xi^2 \notin \Lambda(\widetilde{A}_\alpha)$:

$$\widehat{\mathcal{G}} = (\widetilde{A}_\alpha + \xi^2)^{-1}\, \frac{\mathrm{e}^{-i\xi x'}}{\sqrt{2\pi}}\, \delta_{z=z'}.$$

Traitons pour l'instant le cas où $x' = 0$. Le cas $x' \neq 0$ se traite en changeant l'origine (en remplaçant x par $x - x'$).

Si au lieu d'avoir une distribution de Dirac δ, on avait une fonction $f(x, z)$, alors, en notant $\widehat{f}(\xi, z)$ la transformée de Fourier de f par rapport à x, on aurait

$$\widehat{\mathcal{G}} = (\widetilde{A}_\alpha + \xi^2)^{-1} \widehat{f}(\xi, z).$$

On en déduit, en appliquant la transformation de Fourier inverse :

$$\mathcal{G} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} (\widetilde{A}_\alpha + \xi^2)^{-1} \widehat{f}(\xi, z)\, \mathrm{e}^{i\xi x}\, \mathrm{d}\xi.$$

Pour calculer cette intégrale, l'idée est de déformer le contour d'intégration (initialement $\mathbb{R}$), de manière à appliquer le théorème des résidus. Choisissons pour l'instant $x > 0$. L'autre cas ($x < 0$) se traite de manière symétrique. Nous prenons un contour, pour $R > 0$, de la forme : $[-R, R] \cup \mathcal{C}_R$, où $\mathcal{C}_R$ est le demi-cercle paramétrisé par $\theta \in [0, \pi] \mapsto R\exp(i\theta)$. Nous prenons le demi-cercle supérieur pour que, dans l'intégrale, le terme $\mathrm{e}^{i\xi x}$ soit évanescent sur le demi-cercle (et non exponentiellement croissant).

Le contour que l'on choisit est représenté sur la figure 3.17. Nous avons représenté également les singularités de $\widetilde{A}_\alpha + \xi^2$, qui ne sont autres que les nombres d'onde longitudinaux $\pm\beta_n$, donnés par

$\beta_n = \sqrt[\mathbb{R}^-]{-\lambda_n}$, où les λ_n sont les valeurs propres de l'opérateur $\widetilde{A}_\alpha$. Le cas présenté correspond à un cas numérique de modes SH avec une PML de taille finie. Il n'y a pas de modes guidés, tous les modes sont tels que $\Re e(\beta_n) > 0$ et $\Im m(\beta_n) > 0$. Les singularités en rouge correspondent aux singularités qu'il faut prendre en compte pour assurer un caractère sortant (ce sont les β_n, qui sont entourées par le contour d'intégration), en bleu sont les symétriques (qui correspondent aux composantes entrantes, et qui ne sont pas entourées par le contour d'intégration : ce sont les $-\beta_n$).

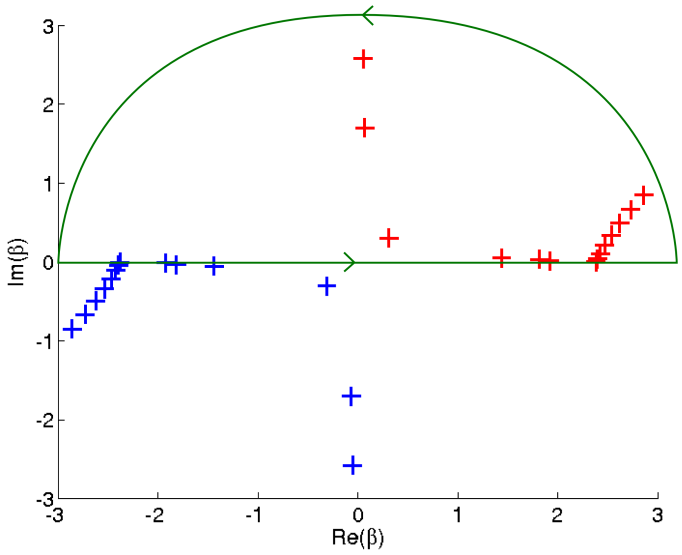

FIGURE 3.17 – *Contour d'intégration pour le calcul des résidus. En rouge sont représentées les singularités de la résolvante que l'on prend en compte, en bleu celles qu'on ne prend pas en compte.*

Par application du théorème des résidus, $(\widetilde{A}_\alpha + \xi^2)^{-1}$ étant méromorphe, puis en faisant tendre R vers $+\infty$, la contribution du demi-cercle $\mathcal{C}_R$ s'annulant quand $R \to +\infty$, on obtient :

$$\mathcal{G} = 2i\pi \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{\beta \text{ pôles}} \mathrm{Res}((\widetilde{A}_\alpha + \xi^2)^{-1} \widehat{f}(\xi, z)\, \mathrm{e}^{i\xi x}, \beta),$$

où $\mathrm{Res}(g, \beta)$ dénote le résidu de g en β.

Maintenant, l'objectif est de calculer $\mathrm{Res}((\widetilde{A}_\alpha + \xi^2)^{-1} \widehat{f}(\xi, z)\, \mathrm{e}^{i\xi x}, \beta)$. On sait que les pôles de la résolvante sont les valeurs propres de $\widetilde{A}_\alpha$. Ces valeurs propres sont toutes de multiplicité finie, d'après le théorème 3.1 (l'opérateur $\widetilde{A}_\alpha$ étant à résolvante compacte). Par ailleurs, on sait que l'on peut développer la résolvante au voisinage d'une singularité isolée en série de Laurent et que le terme « -1 » est l'opposé du projecteur spectral (cf. annexe A.1 équation (A.12)). Or, ici, nous regardons les singularités en termes de β et non de $\lambda = -\beta^2$. On a donc le développement suivant de $(\widetilde{A}_\alpha + \xi^2)^{-1}$:

$$(\widetilde{A}_\alpha + \xi^2)^{-1} = \frac{-1}{-\xi^2 - \lambda} P_\lambda + \text{autres termes} = \frac{-1}{(\beta - \xi)(\beta + \xi)} P_\lambda + \text{autres termes}.$$

Dans les autres termes, il y a un opérateur holomorphe en $-\xi^2$ et éventuellement des termes d'ordre $-2, -3, \ldots$. Nous supposons que toutes les valeurs propres sont simples et qu'il n'y a pas

de bloc de Jordan, ainsi ces contributions d'ordre $-n$, pour $n \geq 2$ sont nulles.[5] On en déduit que

$$\mathrm{Res}((\widetilde{A}_\alpha + \xi^2)^{-1} \widehat{f}(\xi, z)\, \mathrm{e}^{i\xi x}, \beta) = \frac{1}{2\beta}\, P_\lambda(\widehat{f})\, \mathrm{e}^{i\beta x}.$$

Ensuite, l'expression de P_λ nous est donnée par le théorème 3.2 (en utilisant la bi-orthogonalité) :

$$P_{\lambda_n} v(z) = \frac{1}{\int_0^{h_\star} \frac{\mu(z)}{\alpha(z)}\, \Phi_n^2(z)\, \mathrm{d}z} \left(\int_0^{h_\star} \frac{\mu(z')}{\alpha(z')}\, v(z')\, \Phi_n(z')\, \mathrm{d}z' \right) \Phi_n(z).$$

Formellement, en remplaçant f par une mesure de Dirac[6], on obtient, pour $x > 0$:

$$\mathcal{G}(x, z; x', z') = -\sum_n \frac{1}{2i\beta_n}\, P_{\lambda_n}(\delta_{z=z'})\, \mathrm{e}^{i\beta_n x} = -\sum_n \frac{1}{2i\beta_n}\, \frac{1}{\int_0^{h_\star} \frac{\mu(z)}{\alpha(z)}\, \Phi_n^2(z)\, \mathrm{d}z}\, \frac{\mu(z')}{\alpha(z')}\, \Phi_n(z')\, \Phi_n(z)\, \mathrm{e}^{i\beta_n x}.$$

En se rappelant que le cas où $x' \neq 0$ se traite en remplaçant x par $x - x'$, on retrouve la décomposition (3.23) pour $(x - x') > 0$. Pour $(x - x') < 0$, la même démarche s'applique (en prenant en compte les modes $-\beta_n$).

Cette dernière méthode a l'avantage de nous donner la décomposition modale de la fonction de Green sans hypothèse de base pour les fonctions propres, ce qui semble difficile à démontrer. Par ailleurs, elle permet également d'obtenir des estimations d'erreur lorsque l'on tronque la série (3.23). En effet, reprenons l'étude précédente avec un terme source f et $x > 0$. Si, au lieu d'intégrer sur le contour de la figure 3.17, on intègre sur un contour du type $[-R, R] \cup [R, R + i\gamma] \cup [R + i\gamma, -R + i\gamma] \cup [-R + i\gamma, -R]$ (voir figure 3.18), par application du théorème des résidus sur ce contour et en faisant tendre R vers $+\infty$ (les intégrales sur $[R, R+i\gamma]$ et $[-R+i\gamma, -R]$ tendant vers 0 lorsque $R \to +\infty$), on obtient :

$$\sqrt{2\pi}\, \mathcal{G} - \int_{-\infty+i\gamma}^{+\infty+i\gamma} (\widetilde{A}_\alpha + \xi^2)^{-1} \widehat{f}(\xi, z)\, \mathrm{e}^{i\xi x}\, \mathrm{d}\xi \\ = 2i\pi \sum_{\beta \text{ pôles tels que } 0<\Im m(\beta)<\gamma} \mathrm{Res}((\widetilde{A}_\alpha + \xi^2)^{-1} \widehat{f}(\xi, z)\, \mathrm{e}^{i\xi x}, \beta),$$

On choisit γ de telle façon qu'aucun nombre d'onde β ne vérifie $\Im m(\beta) = \gamma$.

L'idée est ensuite d'estimer le terme $\int_{-\infty+i\gamma}^{+\infty+i\gamma} (\widetilde{A}_\alpha + \xi^2)^{-1} \widehat{f}(\xi, z)\, \mathrm{e}^{i\xi x}\, \mathrm{d}\xi$. En utilisant des résultats de [KMR97] ou [NBP94], nous déduisons que ce terme appartient à $L^2_\gamma(\mathbb{R})$ par rapport à x ; si l'on a par exemple un second membre f de classe $\mathcal{C}^\infty$ et à support compact.[7]

En conclusion sur cette méthode, nous dirons qu'elle nous semble prometteuse pour justifier des décompositions sur les fonctions propres de $\widetilde{A}_\alpha$, sans hypothèse de base pour celles-ci. Au chapitre 5, nous utiliserons également de telles décompositions pour développer des conditions aux limites transparentes dans le cas de la jonction entre deux guides d'ondes ouverts. Par contre, à ce stade, la justification n'est pour l'instant pas rigoureuse.

3.3.2 Résultats numériques

Dans cette sous-section, nous allons montrer comment la décomposition (3.23) de la fonction de Green permet d'obtenir de bons résultats numériques. Tout d'abord, une question d'ordre pratique se pose : quels modes prendre en compte ? Bien entendu, nous n'allons pas prendre tous les

[5] En effet, quand la multiplicité algébrique est égale à la multiplicité géométrique, i.e. quand il n'y a pas de blocs de Jordan, on montre que le quasi-nilpotent D_λ est nul, voir l'annexe, section A.1.

[6] Ce point reste à éclaircir, mais comme nous l'avons mentionné ci-dessus, la démarche présentée est formelle.

[7] $L^2_\gamma(\mathbb{R})$ est l'ensemble des fonctions $v(x)$ telles que $\mathrm{e}^{\gamma x} v(x) \in L^2(\mathbb{R})$.

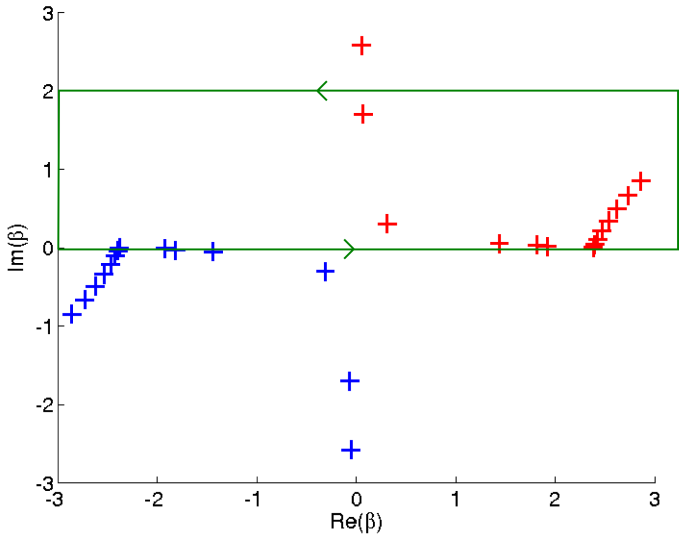

FIGURE 3.18 – *Deuxième contour d'intégration utilisé pour obtenir une estimation d'erreur lorsque l'on tronque la série intervenant dans la formule de représentation de la fonction de Green.*

modes, il faudra tronquer la série. À l'origine, nous ne voulions prendre en compte que les modes guidés (s'il y en a) et les modes à fuite les moins évanescents dans la direction longitudinale. Nous négligions ainsi les modes résultant du spectre continu, ceux-ci n'ayant a priori pas de signification physique, puisqu'ils sont uniquement liés à la PML. Mais si l'on suit l'étude précédente, on est amené à prendre en compte tous les modes (guidés, à fuite et résultant du continuum, sans les distinguer) tels que $\Im m(\beta) < \text{seuil}$ car on sait évaluer l'erreur commise. En fait, nous allons voir que dans le cas 2D présenté, nous pouvons faire la distinction entre les différents types de modes et nous n'allons utiliser que les modes à fuite (et pas les modes résultant de la discrétisation du continuum). Au contraire, dans le cas 3D présenté, la distinction n'est pas facile à faire et notre critère sera alors celui-ci : $\Im m(\beta) < \text{seuil}$. Ainsi, nous négligeons les modes très évanescents dans la direction x. On s'attend donc à ce que la formule soit bonne dès que l'on a $|x - x'|$ suffisamment grand.

Maintenant, une question se pose : à quoi comparer les résultats ? La fonction de Green, même dans le cas d'un guide 2D, n'est pas connue explicitement. Pour avoir une solution de référence, nous avons fait un calcul par éléments finis de la fonction de Green, en bornant le domaine de calcul par des PMLs cartésiennes, à la fois dans la (ou les) direction(s) transverse(s) et dans la direction longitudinale. Les PMLs tout autour de la zone physique permettent ainsi de prendre en compte le caractère sortant des ondes (dans toutes les directions).

La difficulté est la suivante : comment simuler un Dirac ? En fait, nous allons isoler une petite partie autour de la source, dans un domaine $\mathcal{O}_i$, dans lequel nous allons résoudre une équation en champ diffracté (en soustrayant la fonction de Green du milieu homogène, que l'on connait explicitement). Par ailleurs, dans $\mathcal{O}_e := \mathcal{O}_b \setminus \mathcal{O}_i$, où $\mathcal{O}_b$ est le domaine de calcul (borné dans toutes les directions), l'équation vérifiée par la fonction de Green est une équation sans second membre, donc facile à résoudre. Il reste ensuite à écrire les conditions de raccord sur $\Gamma := \overline{\mathcal{O}_i} \cap \overline{\mathcal{O}_e}$.

Nous allons expliciter cette démarche dans le cas 2D (où la présentation est plus simple) mais la même démarche s'applique également dans le cas d'un guide 3D. Voir la figure 3.19 pour un schéma représentant les différents domaines.

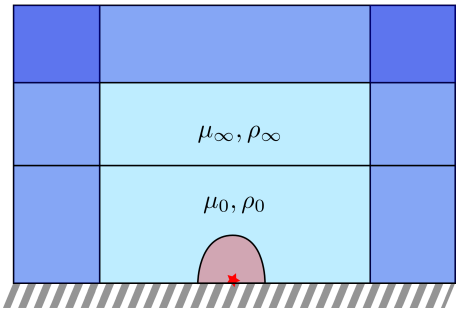

FIGURE 3.19 – *Exemple de géométrie pour la simulation par éléments finis. En rouge, le domaine $\mathcal{O}_i$, en bleu le domaine $\mathcal{O}_e$. L'étoile rouge correspond à la position de la source (du Dirac). On utilise des PMLs cartésiennes. Le bleu foncé correspond aux zones PMLs.*

On résout le problème suivant sur $\mathcal{O}_i$:

$$-\frac{\partial^2 u_d}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u_d}{\partial z^2} - k_0^2 u_d = 0.$$

Sur $\mathcal{O}_e$, le problème est le suivant :

$$-\frac{\alpha_x}{\mu}\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\,\alpha_x\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{\alpha_z}{\mu}\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\,\alpha_z\frac{\partial u}{\partial z}\right) - k^2 u = 0.$$

Par ailleurs, nous imposons les conditions de bord sur $\partial\mathcal{O}_b$ (de type Dirichlet ou Neumann homogène). Il reste à imposer les conditions de transmission suivantes sur $\Gamma := \overline{\mathcal{O}_i} \cap \overline{\mathcal{O}_e}$:

$$\begin{aligned} u &= u_d + g, \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= \frac{\partial u_d}{\partial n} + \frac{\partial g}{\partial n}, \end{aligned}$$

où g dénote la fonction de Green du milieu homogène, dont on connaît une formule explicite. En écrivant la formulation variationnelle de ces équations et en discrétisant par éléments finis, cela nous donne notre solution de référence.

Voyons maintenant sur un exemple. Nous prenons l'exemple de l'article [BBGHP09], qui correspond aux ondes élastiques SH d'une plaque d'acier plongée dans un milieu infini de béton. Nous prenons également une condition de Neumann en $z = 0$, ce qui revient à ne considérer que les modes symétriques. Pour les applications numériques, nous prenons : $\rho_0 = 7.932\,\mathrm{g/cm^3}$, $\rho_\infty = 2.3\,\mathrm{g/cm^3}$, $c_0 = 3.260\,\mathrm{km/s}$, $c_\infty = 2.6375\,\mathrm{km/s}$. La hauteur du guide fermé h (qui est également la taille du cœur du guide ouvert) est égale à $5\,\mathrm{mm}$. La fréquence est de 1 MHz. Cela correspond à prendre (modulo un adimensionnement) : $\rho_0 = 7.932, \rho_\infty = 2.3, \mu_0 = 84.29, \mu_\infty = 15, \omega = 2\pi$.

Ces valeurs correspondent au cas d'un guide d'ondes constitué d'une plaque d'acier dans un milieu infini de béton. Nous avons déjà remarqué qu'en fait ce n'est pas un vrai guide d'ondes, puisque $c_0 > c_\infty$ (il n'y a pas de modes guidés).

Les résultats sont sur la figure 3.20. Nous ne représentons ici que la zone physique. Nous ne décomposons que sur les modes à fuite (il n'y a pas de modes guidés et nous négligeons l'importance des modes résultant de la discrétisation du continuum ici). Nous pouvons visualiser les différents β correspondant à notre situation sur la figure 3.17, mais également sur la figure 2.3. Nous prenons successivement les différents modes à fuite, en commençant par ceux qui sont très peu évanescents dans la direction longitudinale (i.e. tels que β est presque réel, il y en a quatre) et en rajoutant un qui est très évanescent dans la direction longitudinale (i.e. tel que β est presque

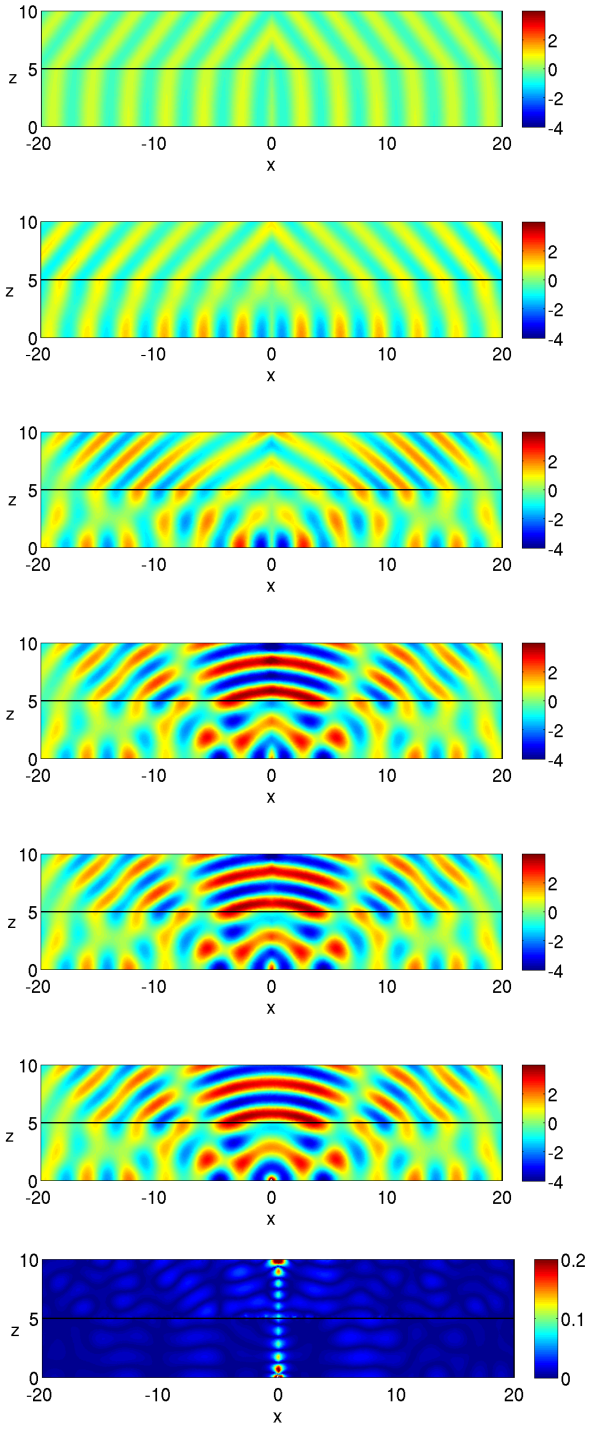

FIGURE 3.20 – *Du haut vers le bas : partie réelle de la décomposition de la fonction de Green 2D avec 1,2,3,4,5 modes à fuite, partie réelle de la solution de référence (calculs élements finis) et erreur ponctuelle entre la solution de référence et la décomposition avec cinq modes à fuite :* $|u - u_{ref}|/\|u_{ref}\|_{L^\infty(\mathcal{O}_e)}$*, où* u *est la solution avec cinq modes et* u_{ref} *est la solution de référence.*

imaginaire pur). Les modes sont ici calculés grâce à la relation de dispersion (équation (2.4)), les fonctions propres sont connues de façon analytique. On s'aperçoit qu'en prenant uniquement cinq modes, la représentation est déjà très bonne, sauf à la verticale de la source, comme on s'y attendait.

Enfin, nous pouvons faire le même genre de décomposition pour un guide 3D. Nous avons considéré un guide constitué d'un cœur de section carrée (avec paramètres μ_0, ρ_0) plongé dans un milieu infini (μ_∞, ρ_∞). Nous prenons les mêmes caractéristiques physiques que dans le cas 2D étudié : $\rho_0 = 7.932, \rho_\infty = 2.3, \mu_0 = 84.29, \mu_\infty = 15$. En particulier, dans ce cas également, il n'y a pas de modes guidés. Nous fixons $\omega = 2.5$. Ici, contrairement au cas 2D, les modes ne sont pas connus analytiquement. Nous les calculons numériquement, avec des PMLs cartésiennes (en y et z), de paramètres $\alpha_\infty^y = \alpha_\infty^z = \exp(-i\pi/3)/2$. Dans ce cadre, comme on l'a vu, la nature du spectre est parfois difficile à analyser, en particulier il est difficile de distinguer les modes résultant du continuum des modes à fuite. Nous avons donc choisi, comme critère, de prendre tous les modes tels que $\Im m(\beta) < 1$. Cela revient à prendre en compte 185 modes, dans le cas présenté. Ceci constitue un nombre de modes considérablement plus important que dans le cas 2D présenté précédemment mais c'est logique, puisque la nature du spectre est considérablement plus riche. La figure 3.21 illustre ce dernier point.

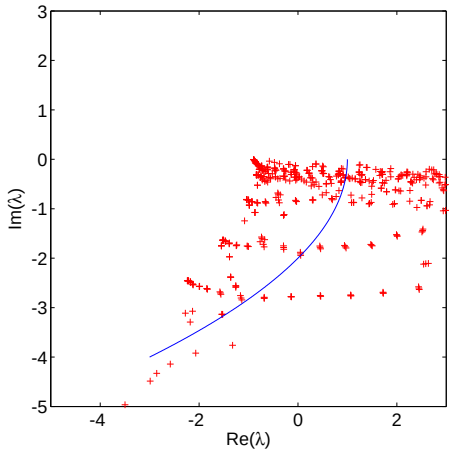

FIGURE 3.21 – *Spectre de l'opérateur $\widetilde{A}_\alpha$ dans le cas d'un guide 3D avec PMLs cartésiennes en y et z. La ligne bleue correspond au critère $\Im m(\beta) = 1$. Les modes que l'on prend en compte sont les modes situés au dessus et à gauche de cette ligne.*

Sur la figure 3.22, on ne représente que la zone physique dans différents plans de coupe. On s'aperçoit également que la représentation est mauvaise à la verticale à la source (i.e. dans le plan $x = 1$, l'erreur est bien plus grande que dans le plan $x = 3$).

Nous voyons ainsi qu'hormis à la verticale de la source, la formule de décomposition de la fonction de Green d'un guide ouvert sur les fonctions propres de $\widetilde{A}_\alpha$ est efficace : elle suppose simplement d'avoir calculé les valeurs propres et les fonctions propres de l'opérateur $\widetilde{A}_\alpha$. La mauvaise représentation à la verticale de la source n'est pas inhérente au caractère ouvert du guide, ni aux PMLs. Dans la formule (3.16), en guide fermé, le même problème survient.

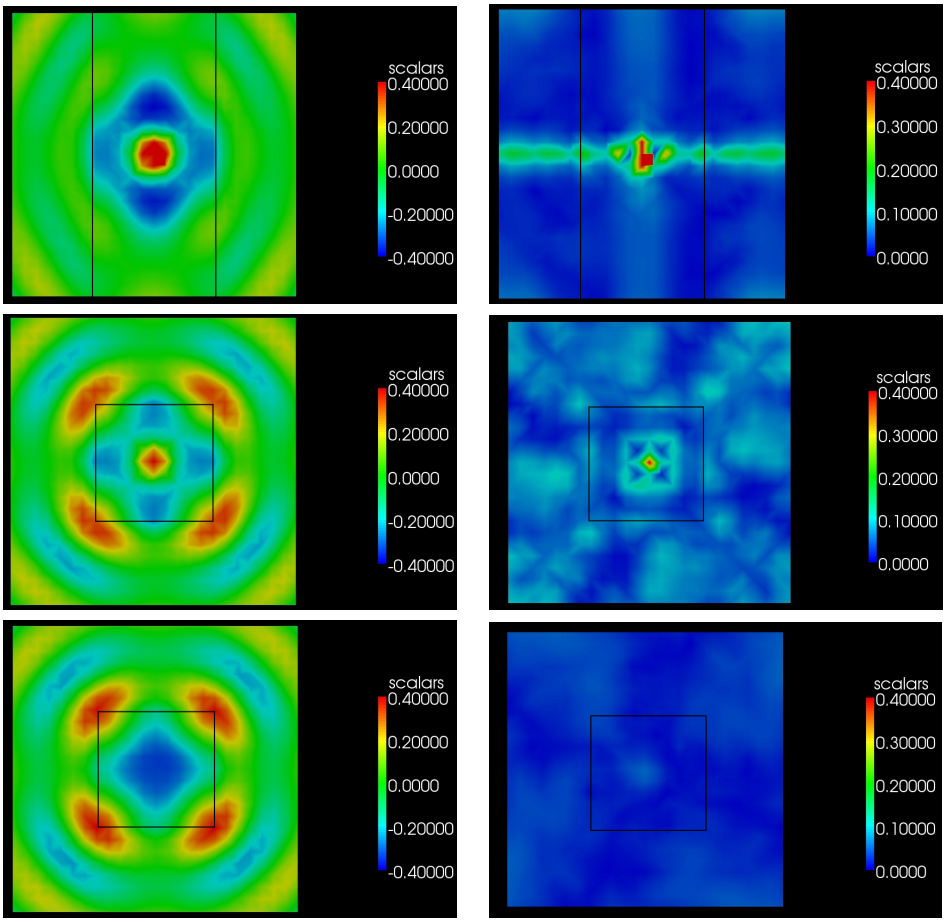

FIGURE 3.22 – *À gauche, représentation de la partie réelle de la représentation modale de la fonction de Green du guide 3D en utilisant tous les modes tels que $\Im m(\beta) < 1$ dans les plans $z = 0$ (en haut), $x = 1$ (milieu) et $x = 3$ (en bas) et erreur ponctuelle (module de la différence entre la solution de référence, calculée avec PMLs, et la formule de représentation modale). Les lignes noires délimitent le cœur et la gaine.*

3.4 Annexe : complétude des fonctions propres (généralisées) de $\widetilde{A}_\alpha$

Dans cette section annexe, nous tentons de démontrer que les fonctions propres de l'opérateur $\widetilde{A}_\alpha$ forment une base de $L^2(\widetilde{\Omega})$. Nous montrons les difficultés auxquelles nous sommes confrontés, qui sont liées au fait que l'opérateur n'est pas autoadjoint.

Tout d'abord, il faut remarquer que lorsqu'un opérateur T n'est pas autoadjoint, il peut y avoir des blocs de Jordan, i.e. pour $\lambda \in \Lambda_{disc}(T)$, une valeur propre simple (de multiplicité géométrique égale à 1), l'image de P_λ où P_λ est le projecteur spectral associé à T et à la valeur propre λ, défini en annexe par (A.10), peut s'exprimer dans une certaine base sous la forme :

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix}.$$

Notons $(u_0, u_1, \dots, u_n)$ cette base. C'est ce qu'on appelle une *chaîne de Jordan* : u_0 est une fonction propre et $u_1, \dots, u_n$ sont des *fonctions propres généralisées*. De manière équivalente, nous pouvons définir la notion de fonction propre généralisée de la façon suivante :

Définition 3.1 *Soit λ une valeur propre d'un opérateur T. On dit que u est une* fonction propre généralisée *de T, associée à λ, si $u \neq 0$ et s'il existe $m \geq 2$, tel que*

$$(T - \lambda I)^m u = 0.$$

Attention à ne pas confondre cette notion de fonction propre généralisée avec celle que nous avons déjà utilisée au chapitre 1, définie en annexe section A.1.5.

Maintenant que cette notion a été vue, nous allons chercher à décomposer sur la famille constituée de l'ensemble des fonctions propres et des fonctions propres généralisées. Cette décomposition n'est pas évidente a priori. Une des premières choses à vérifier est la *complétude* des fonctions propres et des fonctions propres généralisées de notre opérateur, en d'autres termes, nous voulons vérifier que $\overline{\{\mathrm{Vect}(X_k)\}_k} = \overline{\{P_{\lambda_k} X\}_k} = X$, où X est l'espace de Hilbert considéré (pour nous $L^2(\widetilde{\Omega})$) et X_k sont les chaînes de Jordan associées aux valeurs propres λ_k de notre opérateur). Quand on a cette propriété de complétude, cela ne signifie pas qu'on peut décomposer n'importe quelle fonction de X sur les fonctions propres et les fonctions propres généralisées, mais c'est déjà un premier pas ! Pour pouvoir décomposer, nous aurions besoin d'une notion de base, par exemple, nous aurions besoin de montrer que les $\{X_k\}_k$ forment une base de Riesz de X, i.e. $X = \bigoplus_k \mathrm{Vect}(X_k)$ et il existe deux constantes $C_1 > 0$ et $C_2 > 0$ telles que pour tout $u \in X$,

$$C_1 \|u\|_X^2 \leq \sum_k \|P_{\lambda_k} u\|_X^2 \leq C_2 \|u\|_X^2.$$

Bien entendu, la notion de base de Riesz implique la notion de complétude mais la réciproque est fausse. Mais cherchons déjà à montrer que nous avons la complétude, ce qui n'est déjà pas une mince affaire...

Un théorème classique pour montrer la complétude des fonctions propres et des fonctions propres généralisées d'un opérateur non autoadjoint est le théorème de Keldysh (voir [GGK93]).

Théorème 3.4 (Keldysh) **:** *Soit T un opérateur compact, autoadjoint* d'ordre fini, *i.e. tel qu'il existe $p < +\infty$ tel que*

$$\sum_n |\lambda_n(T)|^p < +\infty, \tag{3.24}$$

où $\lambda_n(T)$ sont les valeurs propres de T. Soit K_1, K_2 deux opérateurs compacts tel que l'opérateur B défini par

$$B = (I + K_1)\, T\, (I + K_2) \tag{3.25}$$

est injectif. Alors, la famille des fonctions propres et des fonctions propres généralisées de B est complète. De plus, pour tout $\varepsilon > 0$, les valeurs propres de B, sauf peut-être un nombre fini d'entre elles, sont contenues dans les secteurs $|\arg(\lambda)| < \varepsilon$ et $|\arg(\lambda) - \pi| < \varepsilon$.

Nous avons pris la définition de l'argument avec coupure sur $i\mathbb{R}^+$.

Remarque 3.2 : *On peut remplacer (3.25) par*

$$B = (I + K_1)^{-1}\, T\, (I + K_2)^{-1}.$$

On voudrait appliquer ce théorème pour la résolvante de $\widetilde{A}_\alpha$. Mais « avec les mains », nous allons voir qu'il est illusoire de pouvoir l'appliquer, puisque l'on ne va pas vérifier la dernière propriété, concernant la disposition des valeurs propres. En effet, en regardant la figure 3.1, nous voyons que les valeurs propres de $\widetilde{A}_\alpha$ sont disposées selon plusieurs branches : une branche pour la discrétisation du spectre essentiel et une ou plusieurs branches pour l'approximation des modes à fuite. Ces branches n'ayant pas a priori la même direction asymptotique à l'infini, il est impossible que les valeurs propres de la résolvante de $\widetilde{A}_\alpha$ satisfassent la dernière propriété du théorème de Keldysh. Dans un cas particulier, nous allons voir de façon plus précise que les modes à fuite et les modes résultant de la discrétisation du spectre essentiel n'ont pas la même direction asymptotique (cf. proposition 3.2).

Ainsi, le théorème de Keldysh ne semble pas être le bon outil pour démontrer la complétude. Nous allons alors chercher à utiliser un autre théorème pour cela. Ce théorème se trouve dans [DS63, Section XI. Corollaire 31].

Théorème 3.5 : *Soit T un opérateur non borné à domaine dense dans un espace de Hilbert X tel que en un point λ de l'ensemble résolvant de T, la résolvante $R_T(\lambda)$ est un opérateur de Hilbert–Schmidt. Soit $\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_5$ cinq arcs différentiables ne s'intersectant pas, ayant une direction limite à l'infini et tels qu'aucune paire adjacente d'arcs ne forme un angle à l'infini plus grand que $\pi/2$. Si $R_T(\lambda)$ vérifie : $\|R_T(\lambda)\|_X = O(|\lambda|^{-1})$ quand $\lambda \to \infty$ le long de chaque arc $\mathcal{C}_i$, alors le système constitué des fonctions propres et des fonctions propres généralisées de T est complet.*

$$\sum_n \|Tu_n\|^2 < \infty,$$

où (u_n) est une base orthonormale de l'espace de Hilbert sur lequel l'opérateur T est défini (voir annexe A.1.1).

Remarque 3.3 : *Dans le théorème 3.5, la propriété $R_T(\lambda)$ est un opérateur de Hilbert–Schmidt à rapprocher de la propriété (3.24) dans le théorème de Keldysh 3.4. En effet, en prenant comme choix particulier de base orthonormale la base des fonctions propres de l'opérateur compact et autoadjoint $R_T(\lambda)\, R_T(\lambda)^*$, la condition « $R_T(\lambda)$ est de Hilbert–Schmidt » se réduit à :*

$$\sum_n s_n^2 < +\infty,$$

où les s_n sont les valeurs singulières *de $R_T(\lambda)$, i.e. les racines carrées des valeurs propres de $R_T(\lambda)\, R_T(\lambda)^*$.*

Remarque 3.4 : *Voici sur la figure 3.23, un exemple d'illustration pour les cinq arcs $\mathcal{C}_i$, qui interviennent dans le théorème 3.5.*

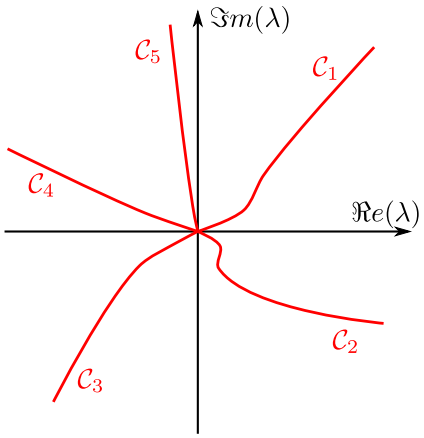

FIGURE 3.23 – *Exemple de arcs $\mathcal{C}_i$ pour le théorème 3.5.*

Nous allons maintenant montrer que nous pouvons appliquer ce théorème dans un cas particulier : celui où l'opérateur $\widetilde{A}_\alpha$ est monodimensionnel et où nous imposons une condition de Neumann en $z = 0$ et en $z = h_\star$ (bien entendu, une condition de Dirichlet ne change strictement rien à l'affaire) et sous d'autres conditions qui seront spécifiées par la suite. Pour cela, nous allons tout d'abord montrer que la résolvante est un opérateur de Hilbert–Schmidt, cela grâce à la représentation intégrale de la résolvante.

Proposition 3.5 (Représentation intégrale de $R_{\widetilde{A}_\alpha}(\xi)$) *Soit $\xi \in \rho(\widetilde{A}_\alpha)$. Soit $\widetilde{\mathcal{G}}_\xi^\alpha$ la fonction de Green de l'opérateur $\widetilde{A}_\alpha - \xi I$. Elle est donnée par :*

$$\widetilde{\mathcal{G}}_\xi^\alpha(z,z') = \begin{cases} \dfrac{\mu(z')}{\alpha(z')}\, \dfrac{1}{\widetilde{W}_\xi^\alpha}\, \Phi_\xi^+(z')\, \Phi_\xi^-(z) & \text{si } z < z', \\ \dfrac{\mu(z')}{\alpha(z')}\, \dfrac{1}{\widetilde{W}_\xi^\alpha}\, \Phi_\xi^-(z')\, \Phi_\xi^+(z) & \text{sinon,} \end{cases}$$

$$\text{où} \quad \widetilde{W}_\xi^\alpha := -\mu_0\, \frac{\mathrm{d}\Phi_\xi^+}{\mathrm{d}z}(0)\, \Phi_\xi^-(0), \quad (3.26)$$

et où Φ_ξ^- est la solution (définie à une constante multiplicative près) de :

$$\begin{aligned} -\frac{\alpha}{\mu}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\alpha\mu\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}u\right) - (k^2+\xi)\, u &= 0 \quad \text{dans } [0,h_\star], \\ \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}(0) &= 0. \end{aligned}$$

et Φ_ξ^+ est la solution (définie à une constante multiplicative près) de :

$$\begin{aligned} -\frac{\alpha}{\mu}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\alpha\mu\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}u\right) - (k^2+\xi)\, u &= 0 \quad \text{dans } [0,h_\star], \\ \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}(h_\star) &= 0. \end{aligned}$$

La résolvante $R_{\widetilde{A}_\alpha}(\xi)$ est donnée par la formule de représentation intégrale : pour tout $z \in [0, h_\star]$

$$R_{\widetilde{A}_\alpha}(\xi)\, u(z) = \int_0^{h_\star} \widetilde{\mathcal{G}}_\xi^\alpha(z, z')\, u(z')\, \mathrm{d}z'. \tag{3.27}$$

Démonstration. Calculons tout d'abord la fonction de Green de l'opérateur $\widetilde{A}_\alpha - \xi I$, c'est-à-dire la solution bornée de l'équation suivante : pour tout $z' \in [0, h_\star]$, pour $\xi \in \rho(\widetilde{A}_\alpha)$,

$$\begin{aligned}
-\frac{\alpha}{\mu}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\alpha\mu\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\widetilde{\mathcal{G}}_\xi^\alpha(z,z')\right) - (k^2+\xi)\,\widetilde{\mathcal{G}}_\xi^\alpha(z,z') &= \delta_{z=z'} \quad \text{dans } \mathcal{D}'(0,h_\star), && (3.28)\\
\frac{\mathrm{d}\widetilde{\mathcal{G}}_\xi^\alpha}{\mathrm{d}z}(0,z') &= 0, && (3.29)\\
\frac{\mathrm{d}\widetilde{\mathcal{G}}_\xi^\alpha}{\mathrm{d}z}(h_\star,z') &= 0. && (3.30)
\end{aligned}$$

La résolution des équations (3.28)-(3.30) ne pose pas de difficulté : d'une part, pour $z < z'$, $\widetilde{\mathcal{G}}_\xi^\alpha(z,z')$ est proportionnelle à $\Phi_\xi^-(z)$. D'autre part, pour $z > z'$, $\widetilde{\mathcal{G}}_\xi^\alpha(z,z')$ est proportionnelle à $\Phi_\xi^+(z)$. Enfin, nous avons les conditions en $z = z'$ suivantes :

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon\searrow 0} \widetilde{\mathcal{G}}_\xi^\alpha(z'-\varepsilon,z') &= \lim_{\varepsilon\searrow 0} \widetilde{\mathcal{G}}_\xi^\alpha(z'+\varepsilon,z'),\\
\lim_{\varepsilon\searrow 0}\left(\alpha(z'-\varepsilon)\,\mu(z'-\varepsilon)\,\frac{\mathrm{d}\widetilde{\mathcal{G}}_\xi^\alpha}{\mathrm{d}z}(z'-\varepsilon,z')\right) &= \lim_{\varepsilon\searrow 0}\left(\alpha(z'+\varepsilon)\,\mu(z'+\varepsilon)\,\frac{\mathrm{d}\widetilde{\mathcal{G}}_\xi^\alpha}{\mathrm{d}z}(z'+\varepsilon,z')\right) + \frac{\mu(z')}{\alpha(z')}.
\end{aligned}$$

Ceci nous donne l'équation (3.26), en vérifiant que pour tout $z \in \mathbb{R}^+$,

$$\alpha\,\mu\,\Phi_\xi^+\,\frac{\mathrm{d}\Phi_\xi^-}{\mathrm{d}z} - \alpha\,\mu\,\Phi_\xi^-\,\frac{\mathrm{d}\Phi_\xi^+}{\mathrm{d}z} = \text{constante}.$$

Ensuite, la formule (3.27) s'en déduit facilement par intervertion des signes dérivée et intégrale. □

Remarque 3.5 : *À la différence de la représentation intégrale de l'opérateur A (proposition 1.1), notons qu'il n'y a pas de coupure, dans le cas de l'opérateur $\widetilde{A}_\alpha$, dans le terme $\widetilde{W}_\xi^\alpha$. Cela est relié au fait qu'il n'y a pas de spectre continu, puisque l'opérateur $\widetilde{A}_\alpha$ est à résolvante compacte.*

Dans le cas où les coefficients sont constants par morceaux, et dans le cas d'une PML abrupte, l'équation $\widetilde{W}_\lambda^\alpha = 0$ donne la relation de dispersion, avec PML bornée. Elle s'écrit de façon détaillée, pour les valeurs λ telles que $\Im m(\lambda) < 0$, sous la forme suivante :

$$\mu_\infty\beta_\infty \tan\left(\beta_\infty(h_2-h) + \frac{\beta_\infty}{\alpha_\infty}(h_\star - h_2)\right) + \mu_0\beta_0 \tan(\beta_0 h) = 0, \tag{3.31}$$

où l'on a posé $\beta_\infty = \sqrt[i\mathbb{R}^+]{k_\infty^2+\lambda}$ et $\beta_0 = \sqrt[i\mathbb{R}^+]{k_0^2+\lambda}$.

À partir de la représentation intégrale de la résolvante, nous pouvons établir le résultat suivant :

Corollaire 3.1 *Pour $\xi \in \rho(\widetilde{A}_\alpha)$, la résolvante $R_{\widetilde{A}_\alpha}(\xi)$ est un opérateur de Hilbert–Schmidt.*

Démonstration. Il suffit de remarquer que $\widetilde{\mathcal{G}}_\xi^\alpha \in L^\infty(0,h_\star)\times L^\infty(0,h_\star)$, puisque c'est le cas pour $\Phi_\xi^\pm$. Puis, comme nous sommes sur un domaine borné, on en déduit que $\widetilde{\mathcal{G}}_\xi^\alpha \in L^2(0,h_\star)\times L^2(0,h_\star)$. En prenant (e_n) une base orthonormale de $L^2(0,h_\star)$. Alors,

$$\widetilde{\mathcal{G}}_\xi^\alpha(z,z') = \sum_{n,m} a_{n,m}\, e_n(z)\, e_m(z'),$$

avec $\sum_{n,k}|a_{n,k}|^2<\infty$. Donc,

$$R_{\widetilde{A}_\alpha}(\xi)e_k(s) = \sum_{n,m} a_{n,m}\int_0^{h_\star} e_n(s)\, e_m(s')\, e_k(s')\,\mathrm{d}s' = \sum_n a_{n,k}\, e_n(s).$$

D'où,

$$\sum_k \|R_{\widetilde{A}_\alpha}(\xi)e_k\|^2_{L^2(0,h_\star)} = \sum_k \int_0^{h_\star} |\sum_n a_{n,k}\, e_n(s)|^2\,\mathrm{d}s \le \sum_{n,k}|a_{n,k}|^2<\infty.$$

Ceci montre que $R_{\widetilde{A}_\alpha}(\xi)$ est un opérateur de Hilbert–Schmidt. □

Nous sommes maintenant en mesure de montrer que le système constitué des fonctions propres et des fonctions propres généralisées de l'opérateur $\widetilde{A}_\alpha$ est complet, dans un cadre très restrictif. La difficulté consiste à montrer l'estimation de la résolvante sur les cinq arcs $\mathcal{C}_i$ intervenant dans le théorème 3.5.

Proposition 3.6 *Dans le cas d'un opérateur $\widetilde{A}_\alpha$ monodimensionnel, dans le cas où la PML est douce et s'il existe des constantes $0<\gamma<2c_1/c_2$ et $\gamma_2>0$ telles que*

$$c_1 - \frac{c_2}{2}\gamma > \max\left(c_3+\frac{c_2}{2}\gamma_2, \frac{c_2}{2\gamma_2}\right),$$

où

$$c_1 := \inf\left(\Re e\left(\eta\,\alpha^2\right)\right),\quad c_2 := \sup\left(\left|\eta\,\alpha\,\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}z}\right|\right),\quad \textit{et}\quad c_3 := \sup\left(\left|\Im m\left(\eta\,\alpha^2\right)\right|\right),$$

pour une certaine constante complexe $\eta\in\mathbb{C}$ telle que $|\eta|=1$, alors le système constitué des fonctions propres et des fonctions propres généralisées de l'opérateur $\widetilde{A}_\alpha$ est complet.

Démonstration. L'idée est d'appliquer le théorème 3.5 à l'opérateur $\widetilde{A}_\alpha$. Nous avons vu que cet opérateur est un opérateur de Hilbert–Schmidt. Il reste à vérifier qu'il existe $\mathcal{C}_1,\dots,\mathcal{C}_5$ cinq arcs différentiables ne s'intersectant pas, ayant une direction limite à l'infini et tels qu'aucune paire adjacente d'arcs ne forme un angle à l'infini plus grand que $\pi/2$ et tels que $\|R_{\widetilde{A}_\alpha}(\lambda)\|_{L^2(0,h_\star)} = O(|\lambda|^{-1})$ quand $\lambda\to\infty$ le long de chaque arc $\mathcal{C}_i$. Pour cela, nous allons utiliser la propriété suivante :

$$\|R_{\widetilde{A}_\alpha}(\lambda)\|_{L^2(0,h_\star)} \le \frac{1}{\mathrm{dist}(\lambda,\overline{\mathrm{conv}(\Gamma(\widetilde{A}_\alpha))}}, \tag{3.32}$$

où $\overline{\mathrm{conv}(E)}$ dénote l'adhérence de l'enveloppe convexe de E, pour E un ensemble et $\Gamma(T)$ est l'image numérique de l'opérateur T (cf. annexe A.3). Si l'on arrive à montrer que l'image numérique de notre opérateur est strictement incluse dans un quart de plan, alors l'estimation (3.32) nous permet alors de construire les cinq arcs $\mathcal{C}_i$ avec les propriétés voulues.

Nous nous ramenons ainsi à l'estimation de l'image numérique de $\widetilde{A}_\alpha$. L'évaluation de cette image numérique n'est pas non plus chose évidente. Nous allons nous placer dans le cas où α est régulier (PML douce) : ainsi nous pouvons adapter la démontration du lemme 2.6, où l'image numérique

d'un opérateur 1D avec PML douce est faite. Nous allons nous placer dans le cas où $\mu = 1$ dans la présentation qui suit, mais elle s'adapte en prenant $\mu \neq 1$, il suffit de changer les produits scalaires $(\cdot,\cdot)_X$ par $(\mu\,\cdot,\cdot)_X$ (et les normes qui en découlent). Dans le lemme 2.6, nous démontrons que l'image numérique est strictement incluse dans un demi-plan. Ici, nous avons besoin d'être plus précis, de façon à démontrer que l'image numérique est strictement incluse dans un quart de plan.

Nous cherchons à adapter la démonstration du lemme 2.6. Nous posons :

$$c_1 := \inf\left(\Re e\left(\eta\,\alpha^2\right)\right), \quad c_2 := \sup\left(\left|\eta\,\alpha\,\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}z}\right|\right) > 0, \quad \text{et} \quad c_3 := \sup\left(\left|\Im m\left(\eta\,\alpha^2\right)\right|\right) > 0,$$

avec $\eta \in \mathbb{C}$ tel que $|\eta| = 1$ choisi de telle manière que $c_1 > 0$. Puis, en choisissant γ suffisamment petit (pour que $c_1 - \frac{c_2}{2}\gamma > 0$) et β suffisamment grand, on a :

$$\Re e\left(\left(\eta\widetilde{A}_\alpha + \beta I\right)u, u\right)_{L^2(0,h_\star)} \geq \left(c_1 - \frac{c_2}{2}\gamma\right)\|u\|^2_{H^1(0,h_\star)},$$

et pour tout $\gamma_2 > 0$,

$$\left|\Im m\left(\left(\eta\widetilde{A}_\alpha + \beta I\right)u, u\right)_{L^2(0,h_\star)}\right| \leq \max\left(c_3 + \frac{c_2}{2}\gamma_2, \frac{c_2}{2\gamma_2}\right)\|u\|^2_{H^1(0,h_\star)}.$$

On vérifie alors que

$$\Re e\left(\left(\eta\widetilde{A}_\alpha + \beta I\right)u, u\right)_{L^2(0,h_\star)} > \frac{c_1 - \frac{c_2}{2}\gamma}{\max\left(c_3 + \frac{c_2}{2}\gamma_2, \frac{c_2}{2\gamma_2}\right)}\left|\Im m\left(\left(\eta\widetilde{A}_\alpha + \beta I\right)u, u\right)_{L^2(0,h_\star)}\right|.$$

Ainsi l'image numérique de $\eta\widetilde{A}_\alpha + \beta I$ est strictement incluse dans un quart de plan si on a : $c_1 - \frac{c_2}{2}\gamma > \max\left(c_3 + \frac{c_2}{2}\gamma_2, \frac{c_2}{2\gamma_2}\right)$. Il en est alors de même pour $\widetilde{A}_\alpha$. □

Remarque 3.6 : *Les hypothèses de cette proposition sont très fortes, très restrictives : l'idée pour satisfaire les critères est de prendre α_∞ avec un argument pas très grand, de telle manière que c_1 soit plus grand que c_3 ainsi qu'une PML très douce de telle manière que c_2 soit petit ($\mathrm{d}\alpha/\mathrm{d}z$ petit). Nous voulions simplement remarquer que nous pouvons conclure quant à la complétude dans certains cas particuliers, même quand l'application du théorème de Keldysh n'est pas possible.*

Et quoi qu'il en soit, la complétude ne suffit pas ! En effet, pour pouvoir décomposer n'importe quelle fonction sur les fonctions propres (et fonctions propres généralisées), nous avons besoin d'une propriété de base. Dans beaucoup de situations, il est difficile de montrer ne serait-ce que la complétude. Citons par exemple le cas de l'élasticité : la complétude des modes de Lamb n'est pas prouvée. Cela n'empêche pas la communauté mécanique d'utiliser ces modes pour décomposer des champs. Nous faisons de même dans ce mémoire, notamment à la section 3.3 et au chapitre 5.

Deuxième partie

La jonction entre deux guides d'ondes ouverts

La première partie de ce mémoire était dédiée au guide d'ondes ouvert uniforme. Nous avons notamment étudié les différents modes d'un tel guide, qui apparaissent en cherchant les solutions à variables séparées. La théorie spectrale fait apparaître deux types de modes : les modes guidés (qui correspondent au spectre pontuel) et les modes de radiation (qui correspondent au spectre continu). Nous avons également discuté de la notion de modes à fuite, nous avons vu qu'un moyen de les faire apparaître est l'utilisation de PMLs.

Dans cette partie, nous allons nous intéresser au problème de la jonction entre deux guides d'ondes ouverts. On rappelle que la motivation initiale de la thèse est l'étude d'une jonction entre une fibre optique et un microguide optique, tous deux étant modélisés par des guides d'ondes ouverts, mais qu'une telle jonction entre deux guides d'ondes se rencontre dans d'autres domaines, par exemple en acoustique (jonctions de pipelines enfouis) ou en élasticité (câble enfoui dont la section évolue), pour n'en citer que quelques uns.

Plus précisément, nous nous intéressons toujours à l'équation de type Helmholtz suivante :

$$-\mathrm{div}(\mu\nabla\varphi) - \omega^2\rho\,\varphi = 0,$$

dans un domaine $\mathcal{O} := \mathbb{R}\times\Omega$, , où Ω est toujours un domaine non borné de dimension 1 (pour une guide 2D) et de dimension 2 (pour un guide 3D). Les fonctions μ et ρ sont les caractéristiques physiques et nous définissons toujours c et k par l'équation (2). Les caractéristiques physiques sont des fonctions bornées inférieurement et supérieurement par des constantes strictement positives et elles dépendent des coordonnées transverse(s) et longitudinale, mais qui sont telles que pour un certain $a>0$, et pour $\pm x \geq a$, elles ne dépendent plus que des coordonnées transverses : dans le cas d'un milieu transverse bidimensionnel :

$$\text{pour } \pm x \geq a, \quad \mu(x,y,z) = \mu^{\pm}(y,z) \\ \left(\text{resp. } \rho(x,y,z) = \rho^{\pm}(y,z),\ c(x,y,z) = c^{\pm}(y,z),\ k(x,y,z) = k^{\pm}(y,z)\right),$$

et dans le cas d'un milieu transverse unidimensionnel :

$$\text{pour } \pm x \geq a, \quad \mu(x,z) = \mu^{\pm}(z) \\ \left(\text{resp. } \rho(x,z) = \rho^{\pm}(z),\ c(x,z) = c^{\pm}(z),\ k(x,z) = k^{\pm}(z)\right).$$

Par ailleurs, les caractéristiques physiques ont une valeur constante à l'infini dans les directions transverses : il existe $b>0$ tel que, dans le cas d'un milieu transverse bidimensionnel,

$$\text{pour } \sqrt{y^2+z^2} \geq b, \text{ pour tout } x\in\mathbb{R}, \quad \mu(x,y,z) = \mu_\infty \\ \left(\text{resp. } \rho(x,y,z) = \rho_\infty,\ c(x,y,z) = c_\infty,\ k(x,y,z) = k_\infty\right),$$

et dans le cas d'un milieu transverse unidimensionnel,

$$\text{pour } |z| \geq b, \text{ pour tout } x\in\mathbb{R}, \quad \mu(x,z) = \mu_\infty \\ \left(\text{resp. } \rho(x,z) = \rho_\infty,\ c(x,z) = c_\infty,\ k(x,z) = k_\infty\right).$$

Par extension des définitions données dans le cas d'un guide uniforme, nous définissons la *gaine* comme l'union $\mathcal{O}_\infty$ des composantes connexes non bornées dans la (ou les) direction(s) transverse(s) où les paramètres physiques valent ce qu'ils valent à l'infini et le *cœur* comme le complémentaire de la gaine : $\mathcal{O}\setminus\mathcal{O}_\infty$.

Ainsi pour $\pm x \geq a$, nous sommes retombés dans le cas de guides d'ondes uniformes et nous pourrons alors utiliser les notions de modes développées dans la première partie. La zone $|x|\leq a$

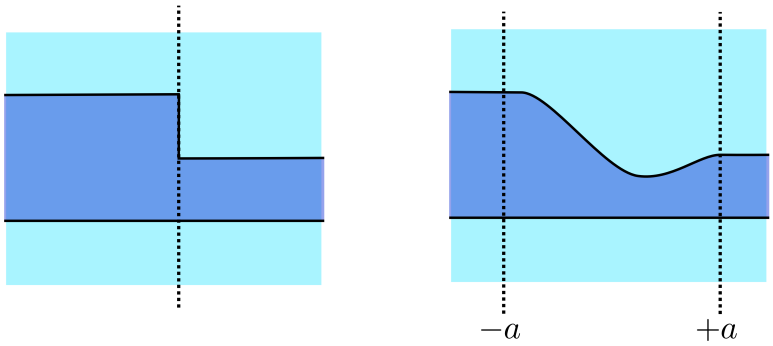

FIGURE 6 – *Exemples de jonction abrupte (à gauche) et épaisse (à droite). Les différents niveaux de bleu correspondent à des matériaux différents (le cœur en bleu foncé, la gaine en bleu clair).*

constitue ainsi la jonction entre les deux guides d'ondes. Sur la figure 6, nous avons représenté deux types de jonctions : le type abrupt (lorsque $a \to 0$) et le type épais ($a > 0$).

Nous allons étudier deux problèmes : un problème de *diffraction* et un problème de *radiation*. Le problème de diffraction peut s'énoncer avec les mains de la façon suivante : on envoie une onde incidente, par exemple un mode guidé du guide de gauche, et on regarde comment cette onde est réfléchie dans le guide d'entrée, comment elle est transmise dans le guide de sortie et comment elle est radiée dans la gaine. Le problème de radiation consiste à regarder comment une source localisée génère une onde qui se propage dans chacun des deux guides et une onde radiée dans la gaine. La figure 7 représente un exemple de problème de diffraction et un exemple de problème de radiation dans la jonction entre deux guides d'ondes ouverts.

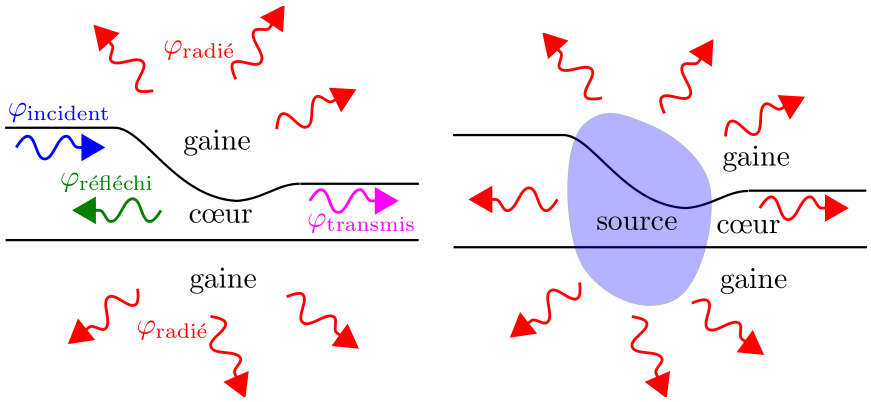

FIGURE 7 – *Schéma représentant un exemple de problème de diffraction (à gauche) et un exemple de problème de radiation (à droite) dans la jonction entre deux guides d'ondes ouverts.*

Dans le chapitre 4, nous donnerons une expression précise des problèmes de radiation et de diffraction. Notamment, nous verrons que nous serons amenés à utiliser des conditions de rayonnement qui reposent sur la décomposition du champ sur les modes guidés et les modes de radiation (étudiés au chapitre 1) du guide de gauche pour $x \leq -a$ et du guide de droite pour $x \geq a$. Nous démontrerons ensuite le caractère bien posé du problème, équipé de ces conditions de rayonnement modales (existence et unicité de la solution, avec dépendance continue par rapport aux données : source ou/et onde incidente).

Le chapitre 5, quant à lui, est dédié aux simulations numériques d'une telle jonction. Nous ver-

rons que pour borner le domaine de calcul dans la (ou les) direction(s) transverse(s), nous utiliserons des PMLs. Puis, utilisant le calcul des modes avec PMLs (détaillé au chapitre 3), nous expliquerons comment obtenir des conditions aux limites transparentes, grâce à des opérateurs de Dirichlet-to-Neumann, pour borner le domaine de calcul dans la direction longitudinale. Enfin, nous étudierons l'utilisation d'une méthode multimodale.

ANALYSE MATHÉMATIQUE 4

SOMMAIRE

4.1 POSITION DES PROBLÈMES DE RADIATION ET DE DIFFRACTION 141
4.1.1 Conditions de rayonnement modales 141
4.1.2 Cadre fonctionnel 143
4.1.3 Les résultats principaux 146
4.2 REFORMULATION SOUS LA FORME D'UNE ÉQUATION DE LIPPMANN–SCHWINGER . 149
4.2.1 Une approche par perturbation 149
4.2.2 Les problèmes découplés 152
4.2.3 Le problème de couplage 155
4.3 UNICITÉ DES PROBLÈMES DE RADIATION ET DE DIFFRACTION 160
4.3.1 Annulation des composantes propagatives 161
4.3.2 Décroissance dans la direction transverse 163
4.3.3 Analyticité dans la variable spectrale 167
4.4 ANNEXE : TRANSFORMATION DE FOURIER GÉNÉRALISÉE 171

DANS ce chapitre, nous allons mener une étude théorique du problème de la jonction entre deux guides d'ondes ouverts. Plus précisément, les questions que l'on se pose sont les suivantes : quel type de condition de rayonnement utiliser dans une telle géométrie ? Et les équations équipées de telles conditions de rayonnement sont-elles bien posées (existence, unicité de la solution et continuité par rapport aux données : source, onde incidente) ?

Dans le cas d'un milieu homogène à l'infini (par exemple dans le cas de la diffraction d'un objet borné dans l'espace libre), c'est la condition de Sommerfeld qui joue le rôle de condition de rayonnement :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} - ik\varphi = \underset{r\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{r^{(d-1)/2}}\right),$$

où d est la dimension en espace (2 ou 3). Dans le cas d'un guide d'ondes ouvert, le milieu n'est pas homogène à l'infini, et une telle condition n'est plus valide.

L'étude que l'on mène ici rentre dans le cadre de la diffraction d'ondes harmoniques en temps par des inhomogénéités non localisées en espace. En effet, on peut voir le cœur du guide, comme une

inhomogénéité du milieu à l'infini, la gaine. Dans la littérature, une catégorie de tels milieux porte le nom de *milieux rugueux* (ou *rough surfaces* en anglais). Ce type de milieux a connu un grand intérêt dans le domaine des mathématiques appliquées récemment, voir par exemple [CWM05] et [LR10]. Ainsi, la jonction entre deux guides d'ondes ouverts rentre a priori dans ce cadre. Mais dans tout ce qui a été fait dans la littérature à ce sujet, il n'y a pas d'onde guidée par cette surface et l'onde diffractée est supposée décroissante dans la (les) direction(s) de la surface rugueuse, ce qui correspond pour nous à la direction longitudinale. Ceci permet d'imposer des conditions de rayonnement dans la (ou les) direction(s) transverse(s) : on représente l'onde diffractée comme une superposition d'ondes planes (propagatives ou évanescentes) sortantes dans la (ou les) direction(s) transverse(s). Mais dans un guide d'ondes ouvert, il y a en général (voir les conditions au chapitre 1) des ondes guidées, non décroissantes dans la direction longitudinale. L'approche des surfaces rugueuses ne peut donc pas être utilisée ici.

Cependant, dans la littérature, de nombreuses solutions ont été proposées pour traiter la possibilité d'ondes guidées. Dans le cadre d'un milieu stratifié, Xu [Xu92, Xu95] décompose le champ diffracté en une somme finie d'ondes guidées et une onde « libre » (free wave) et impose sur chacun des termes une condition de Sommerfeld avec le nombre d'onde approprié. Ciraolo et Magnanini [Cir08, CM09] utilisent une condition de rayonnement similaire. Duran, Jerez–Hanckes, Muga et Nédélec [DMN06, JHN10] proposent de diviser le milieu en deux régions (loin et près du cœur) et d'imposer dans chacune de ces régions une condition de type Sommerfeld. Il est probable que toutes ces conditions sont équivalentes et permettent de démontrer que les équations dans un guide d'ondes ouvert localement perturbé sont bien posées. Cependant, il semble que dans ce cas (un guide d'ondes ouvert uniforme localement perturbé, qui est une situation particulière par rapport au cas qui nous intéresse ici, à savoir la jonction entre deux guides d'ondes : on peut voir en effet un guide d'ondes perturbé comme une jonction entre les deux mêmes guides d'ondes), les preuves d'unicité que l'on trouve dans la littérature [Xu92, Cir08] ne sont pas complètes, puisqu'elles ne traitent pas des composantes évanescentes de l'onde diffractée.

L'idée ici est d'utiliser la *condition de rayonnement modale* développée dans [BBCDH09] pour traiter le cas d'une perturbation locale d'un guide d'ondes ouvert uniforme. Cette condition de rayonnement reprend l'idée utilisée pour les milieux rugueux, mais en renversant les rôles de la (des) direction(s) transverse(s) et longitudinale. On représente ici l'onde diffractée comme une superposition de modes guidés et de modes de radiation qui sont sortants dans la direction longitudinale. Cette décomposition de l'onde renvoie alors aux notions de modes guidés et de modes de radiation d'un guide ouvert uniforme, que nous avons traitées au chapitre 1. Nous verrons que la condition de rayonnement s'exprime alors à l'aide de la *transformation de Fourier généralisée* associée à l'opérateur transverse. Nous verrons qu'avec cette condition de rayonnement, le problème (de diffraction ou de radiation) dans la jonction entre deux guides d'ondes ouverts est bien posé, ceci constituant, à notre connaissance, la première preuve dans ce contexte.

Dans ce chapitre, par soucis de simplicité, nous n'allons traiter qu'un problème 2D. De plus, nous supposerons que la géométrie est symétrique par rapport à l'axe longitudinal. Ainsi, le problème peut être défini dans le demi-plan $\mathcal{O} := \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$. La coordonnée longitudinale est $x \in \mathbb{R}$ et la coordonnée transverse $z \in \mathbb{R}^+$. Nous notons $\Gamma := \mathbb{R} \times \{0\}$ l'axe de symétrie. La propagation des ondes est décrite par la fonction réelle et bornée $k(x, z)$ (le nombre d'onde), qui est supposée être une perturbation localisée d'une fonction de référence $k_\star(x, z)$, dans le sens où

$$k(x, z) - k_\star(x, z) \text{ est à support compact inclus dans } [-a, +a] \times [0, b],$$

où a et b sont des nombres positifs et où $k_\star$ est donné par :

$$k_\star(x, z) := k^\pm(z) \text{ si } x \in \mathbb{R}^\pm \quad \text{où} \quad k^\pm(z) := \begin{cases} k_0 & \text{si } 0 \leq z < h^\pm, \\ k_\infty & \text{si } z \geq h^\pm. \end{cases}$$

De plus, nous supposerons que $0 < k_\infty < k_0$, ce qui assure l'existence d'ondes guidées (cf. proposition 1.8 du chapitre 1). La figure 4.1 représente les deux types de géométries : k correspond au cas d'une jonction épaisse et $k_\star$ au cas d'une jonction abrupte entre deux guides d'ondes ouverts semi-infinis, qui sont constitués des mêmes matériaux, mais dont les hauteurs des cœurs (h^- pour le guide d'ondes de gauche et h^+ pour le guide d'ondes de droite) sont différentes. Dans le cas de la jonction abrupte, nous définissons $\Sigma := \{0\} \times \mathbb{R}^+$ l'interface entre les deux guides d'ondes.

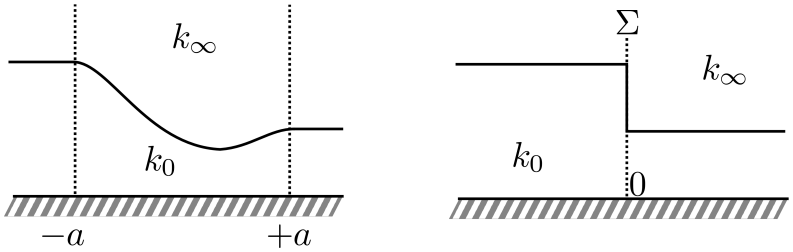

FIGURE 4.1 – *À gauche : jonction épaisse : $k(x,z)$. À droite : jonction abrupte : $k_\star(x,z)$.*

Nous nous intéressons dans ce chapitre à deux problèmes : un problème de radiation et un problème de diffraction. Le problème de radiation s'exprime de la façon suivante : considérant une excitation f à support compact, trouver φ solution de

$$\begin{aligned} &-\triangle\varphi - k^2\varphi = f \text{ dans } \mathcal{O}, \\ &\varphi = 0 \text{ sur } \Gamma, \end{aligned}$$

telle que φ est *sortante*. Le problème de diffraction est le suivant : étant donné une onde incidente φ_0, trouver φ solution de

$$\begin{aligned} &-\triangle\varphi - k^2\varphi = 0 \text{ dans } \mathcal{O}, \\ &\varphi = 0 \text{ sur } \Gamma, \end{aligned}$$

telle que φ est *sortante* pour $x \geq a$ et telle que $\varphi - \varphi_0$ est sortante pour $x \leq -a$.

Nous donnerons une définition précise de ces problèmes à la section 4.1. Tout d'abord, nous verrons quel sens donner au mot *sortant* à la sous-section 4.1.1 : de chaque côté de la jonction (i.e. dans le guide d'ondes de gauche $x \leq -a$, ou de droite $x \geq a$), nous utiliserons la condition de rayonnement modale adaptée au guide d'ondes considéré, qui s'exprime à l'aide de la transformation de Fourier généralisée correspondante. À la sous-section 4.1.2, nous introduirons l'espace fonctionnel dans lequel nous cherchons la solution. Les problèmes de radiation et de diffraction pourront ensuite être explicités à la sous-section 4.1.3, ainsi que les deux principaux résultats de cette étude : les théorèmes 4.1 (concernant le caractère bien posé du problème de radiation) et le théorème 4.2 (pour le problème de diffraction).

L'idée de la preuve de ces théorèmes est de considérer la jonction épaisse comme une perturbation de la jonction abrupte (section 4.2). Ceci nous amène à réécrire notre problème comme une équation de Lippmann–Schwinger. Ainsi, nous pouvons utiliser l'alternative de Fredholm si l'on montre que le problème dans la jonction abrupte est bien posé. L'analyse de la jonction abrupte utilise et généralise des résultats développés, d'une part, dans [BBCDH09] pour un guide d'ondes ouvert uniforme et, d'autre part, dans [Til01] ou [BBT00] pour la jonction abrupte entre deux guides d'ondes ouverts (et généralisés dans [BBRT00] pour la jonction entre un réseau de plaques et l'espace libre). L'idée est de décomposer le champ en deux parties. La première représente la solution dans les deux demi-guides d'ondes (pour $x \leq 0$ et pour $x \geq 0$) découplés.

L'étude de cette première partie est l'objet de la sous-section 4.2.2 et s'inspire de [BBCDH09]. La deuxième partie du champ est le terme correctif qui prend en compte le couplage entre les deux demi-guides d'ondes. Celui-ci se ramène à une équation de couplage sur l'interface entre les deux demi-guides d'ondes (nommée ci-dessus Σ). Le terme de couplage est étudié à la sous-section 4.2.3, en généralisant des résultats de [Til01].

Enfin, l'unicité du problème de diffraction ou de radiation est prouvée à la section 4.3. L'idée générale de la preuve s'inspire de celle de [BBCDH09]. La première étape (étudiée à la sous-section 4.3.1) consiste à montrer que, sans excitation et sans onde incidente, le flux d'énergie à travers n'importe quelle section transverse infinie située à l'extérieur de la jonction est nul, ce qui implique que, dans la représentation du champ à l'aide des modes, les composantes associées aux modes propagatifs sont nulles. Cette première étape s'inspire d'idées de [CWZ98], où le flux d'énergie est défini au contraire au travers d'une section parallèle à la direction longitudinale. Ensuite, l'idée consiste à utiliser un argument d'analyticité pour démontrer que les autres composantes (i.e. celles liées aux modes évanescents) s'annulent également. Cette méthode a été développée dans [Wed91] pour démontrer l'abscence de valeurs propres immergées dans le spectre essentiel du propagateur acoustique pour un milieu stratifié, en utilisant la transformation de Fourier dans la direction longitudinale. Puis elle a été reformulée dans [BBCDH09] pour la transformation de Fourier généralisée dans la direction transverse. Néanmoins, l'utilisation de cet argument dans le cas d'une jonction entre deux guides d'ondes ouverts est beaucoup plus délicate que dans le cas d'une perturbation locale d'un guide d'ondes ouvert uniforme (le cas étudié dans [BBCDH09]), puisque nous utilisons deux transformations de Fourier généralisées, liées aux deux guides d'ondes. Nous avons pour cela besoin d'un résultat préliminaire de décroissance dans la direction transverse (sous-section 4.3.2), puis l'argument d'analyticité est développé dans la sous-section 4.3.3.

Nous concluons ce chapitre par quelques commentaires sur la méthode : quelles généralisations semblent réalisables ? Quelles sont nos conjectures sur d'autres problèmes ? Enfin, la section 4.4 donne tout le cadre mathématique précis pour définir la transformation de Fourier généralisée. Notamment nous expliquons comment généraliser une telle transformation à un espace de distribution, type espace de Schwartz. Cette partie, technique, est reporté à la fin du chapitre et reprend essentiellement des résultats développés dans [Haz09]. Sa lecture n'est pas indispensable pour la compréhension du reste.

Tout ce chapitre fait l'objet d'un article soumis à SIAM Journal of Applied Mathematics [BBGHed], ainsi que d'un poster présenté au CANUM 2010 (40e Congrès National d'Analyse Numérique).

4.1 Position des problèmes de radiation et de diffraction

Il s'agit dans cette première section de poser le cadre fonctionnel et de fixer les conditions de rayonnement qui vont nous permettre de montrer le caractère bien posé des problèmes de radiation et de diffraction dans la jonction entre deux guides d'ondes ouverts.

4.1.1 Conditions de rayonnement modales

L'idée pour construire les conditions de rayonnement modales est simple : nous savons que pour $|x| \geq a$, la géométrie est celle d'un guide d'ondes droit. Nous allons tirer parti de cette information pour décomposer la solution sur les modes (guidés et de radiation) du guide droit, ce qui nous permettra de distinguer les ondes allant vers la droite et vers la gauche.

À la fin du chapitre 1, nous avons vu que, dans un guide droit, les fonctions propres et les fonctions propres généralisées de l'opérateur transverse, que l'on note A, forment une base de $L^2(\Omega)$, où Ω est la section transverse (ici $\mathbb{R}^+$), « en un certain sens ». En annexe de ce chapitre (section 4.4), nous démontrons ce résultat dans le cas du guide d'ondes 2D considéré ici. Nous résumons ici les principaux résultats qui nous seront utiles dans la suite. Nous avons vu, à la section 1.1, que les fonctions propres et les fonctions propres généralisées de l'opérateur transverse forment une famille $\Phi_\lambda(z)$, où λ vit dans le spectre de l'opérateur transverse A, constitué d'un nombre fini de valeurs propres (le spectre pontuel $\Lambda_p(A)$) et du spectre continu $\Lambda_c(A) = [-k_\infty^2, +\infty[$. Une propriété importante pour ces fonctions $\Phi_\lambda(z)$ est qu'elles sont entières par rapport à λ (analytiques dans tout le plan complexe). Le fait que les fonctions propres et les fonctions propres généralisées forment une famille complète peut être reformulé à l'aide de la *transformation de Fourier généralisée* associée à l'opérateur transverse A, i.e. l'opérateur de « décomposition » sur la famille $\{\Phi_\lambda, \lambda \in \Lambda(A)\}$, donné par

$$\mathcal{F}_A u(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^+} u(z)\, \Phi_\lambda(z)\, \mathrm{d}z, \quad \forall \lambda \in \Lambda(A),$$

pour tout $u \in L^2(\mathbb{R}^+)$ à support compact. Par un argument de densité (cf. proposition 4.11 à la section annexe 4.4 de ce chapitre), on montre que cette transformation $\mathcal{F}_A$ se prolonge en une transformation unitaire de $L^2(\mathbb{R}^+)$, dans un espace spectral de la forme $L^2(\Lambda(A); \mathrm{dmes})$, l'espace des fonctions de module carré intégrables pour la mesure

$$\mathrm{dmes} = \sum_{\lambda \in \Lambda_p(A)} p_\lambda\, \delta_\lambda + p_\lambda\, \mathrm{d}\lambda|_{\Lambda_c(A)},$$

où δ_λ est la mesure de Dirac au point $\lambda \in \Lambda_p(A)$, $\mathrm{d}\lambda|_{\Lambda_c(A)}$ est la mesure de Lebesgue restreinte au spectre continu $\Lambda_c(A)$ et p_λ est un poids (voir équation (4.34)).

La transformation inverse $\mathcal{F}_A^{-1}$ apparaît comme l'opérateur de « recomposition » sur la famille $\{\Phi_\lambda, \lambda \in \Lambda(A)\}$: pour tout $\widehat{u}_\lambda \in L^2(\Lambda(A); \mathrm{dmes})$,

$$\mathcal{F}_A^{-1}\widehat{u} = \int_{\Lambda(A)} \widehat{u}_\lambda\, \Phi_\lambda(z)\, \mathrm{dmes}(\lambda) = \sum_{\lambda \in \Lambda_p(A)} p_\lambda\, \widehat{u}_\lambda\, \Phi_\lambda + \int_{\Lambda_c(A)} \widehat{u}_\lambda\, \Phi_\lambda\, p_\lambda\, \mathrm{d}\lambda.$$

En prenant $\widehat{u} = \mathcal{F}_A u$, cette formule nous donne la formule de décomposition de toute fonction $u \in L^2(\mathbb{R}^+)$ sur les fonctions propres et les fonctions propres généralisées de A : la famille $\{\Phi_\lambda, \lambda \in \Lambda(A)\}$.

La propriété essentielle de la transformation $\mathcal{F}_A$ est qu'elle diagonalise l'opérateur A. En effet, $Au = \mathcal{F}_A^{-1} \lambda \mathcal{F}_A u$, pour tout $u \in D(A) = H^2(\mathbb{R}^+) \cap H_0^1(\mathbb{R}^+)$. Ainsi, si on applique (formellement

pour l'instant car en général $\varphi(x,.) \notin D(A)$) la transformation $\mathcal{F}_A$ aux équations dans un guide droit (ce qui est le cas pour $\pm x \geq a$), on obtient :

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\mathcal{F}_A\varphi(x,\lambda) + \lambda\,\mathcal{F}_A\varphi(x,\lambda) = 0.$$

On en déduit que

$$\mathcal{F}_A\varphi(x,\lambda) = \widehat{a}_\lambda\,\mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda}\,(x\mp a)} + \widehat{b}_\lambda\,\mathrm{e}^{\sqrt{\lambda}\,(x\mp a)}.$$

Puis, en appliquant la transformation de Fourier inverse, on a : pour tout $\pm x \geq a$:

$$\varphi(x,z) = \sum_{\lambda\in\Lambda_p(A)} \left(\widehat{a}_\lambda\,\mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda}\,(x\mp a)} + \widehat{b}_\lambda\,\mathrm{e}^{\sqrt{\lambda}\,(x\mp a)}\right) p_\lambda^\pm\,\Phi_\lambda(z) + \int_{\lambda\in\Lambda_c(A)} \left(\widehat{a}_\lambda\,\mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda}\,(x\mp a)} + \widehat{b}_\lambda\,\mathrm{e}^{\sqrt{\lambda}\,(x\mp a)}\right) \Phi_\lambda(z)\,p_\lambda^\pm\,\mathrm{d}\lambda. \quad (4.1)$$

Cette formule n'est rien d'autre que la formule de décomposition sur les modes guidés (lorsque $\lambda \in \Lambda_p(A)$) et les modes de radiation (lorsque $\lambda \in \Lambda_c(A)$).

Dans (4.1), nous avons besoin de définir une racine carrée au sens complexe, puisque nous prenons la racine carrée de λ, qui peut être positif ou négatif. Dans tout ce chapitre, nous prenons la définition suivante de la racine carrée :

$$\sqrt{\lambda} = \sqrt[i\mathbb{R}^+]{\lambda},$$

ce qui signifie que nous avons placé la coupure sur $i\mathbb{R}^+$ et que $\sqrt{\lambda} = |\lambda|^{1/2}\,\mathrm{e}^{i\arg\lambda/2}$, où $\arg(\lambda) = \arg_{i\mathbb{R}^+}(\lambda)$ est dans l'intervalle $]-3\pi/2, \pi/2[$. Ainsi, la racine carrée d'un nombre négatif appartient à $-i\mathbb{R}^+$. Ceci nous permet de distinguer les ondes propagatives et évanescentes allant vers la gauche ou vers la droite. Rappelons-nous que dans tout ce mémoire, nous supposons une dépendance en temps de la forme $\mathrm{e}^{-i\omega t}$. Lorsque $\lambda \leq 0$, le mode $\Phi_\lambda(z)\,\mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda}(x\mp a)}$ est propagatif vers la droite et le mode $\Phi_\lambda(z)\,\mathrm{e}^{\sqrt{\lambda}(x\mp a)}$ est propagatif vers la gauche. Lorsque $\lambda > 0$, le mode $\Phi_\lambda(z)\,\mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda}(x\pm a)}$ est évanescent vers la droite et le mode $\Phi_\lambda(z)\,\mathrm{e}^{\sqrt{\lambda}(x\mp a)}$ est évanescent vers la gauche.

Remarque 4.1 : *Le nombre $\sqrt{\lambda} = \sqrt[i\mathbb{R}^+]{\lambda}$ est relié au nombre d'onde longitudinal β défini par $\beta = \sqrt[\mathbb{R}^-]{-\lambda}$ (et prolongé par $\beta = i\sqrt{\lambda}$ pour $\lambda > 0$) par la relation :*

$$\beta = i\sqrt[i\mathbb{R}^+]{\lambda}, \quad \textit{pour tout } \lambda \textit{ tel que } \Im m(\lambda) \leq 0.$$

La condition de rayonnement consiste alors simplement à imposer à l'onde d'être sortante dans la direction longitudinale : toutes les composantes spectrales de l'onde sont propagatives (si $\lambda \leq 0$) ou évanescentes (si $\lambda > 0$) vers la droite pour $x \geq a$: ce qui revient à annuler $\widehat{b}_\lambda$ pour $x \geq a$. De même, toutes les composantes spectrales sont propagatives (si $\lambda \leq 0$) ou évanescentes (si $\lambda > 0$) vers la gauche pour $x \leq -a$, ce qui revient à annuler $\widehat{a}_\lambda$ pour $x \leq -a$.

Comme la jonction fait intervenir deux guides d'ondes a priori différents : un guide d'ondes que l'on va appeler $-$ (celui de gauche, pour $x \leq -a$) et un guide d'ondes $+$ (celui de droite, pour $x \geq a$), nous utiliserons l'exposant $\pm$ pour tout ce qui est relatif au guide d'ondes $\pm$. Notamment, nous noterons $\mathcal{F}^+$ la transformation de Fourier généralisée adaptée au demi-guide de droite et $\mathcal{F}^-$ celle qui est adaptée au demi-guide de gauche. Noter que comme nous nous plaçons dans le cas où $k_\infty^- = k_\infty^+$, nous noterons k_∞ cette quantité. Nous noterons également $\Lambda_c = \Lambda_c(A^+) = \Lambda_c(A^-)$, $\Lambda_p^\pm = \Lambda_p(A^\pm)$ et $\Lambda^\pm = \Lambda(A^\pm)$.

Nous sommes maintenant en mesure de donner la définition de notre condition de rayonnement modale.

Définition 4.1 *Nous dirons que φ satisfait la condition de rayonnement $(\mathcal{R}^{\pm})$ s'il existe une fonction $\widehat{\alpha}^{\pm} : \Lambda^{\pm} \to \mathbb{C}$ telle que*

$$\boxed{\mathcal{F}^{\pm}\varphi(x,\lambda) = \widehat{\alpha}^{\pm}_{\lambda}\, \mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda}\,(|x|-a)} \quad \textit{pour } \pm x \geq a \textit{ et } \lambda \in \Lambda^{\pm}.}$$

Remarque 4.2 : *Nous sommes volontairement imprécis à ce niveau sur l'espace fonctionel dans lequel vit $\widehat{\alpha}^{\pm}_{\lambda}$. Cela va être précisé à la sous-section suivante.*

La figure 4.2 représente schématiquement la condition de rayonnement utilisée, qui impose un caractère sortant dans la direction longitudinale.

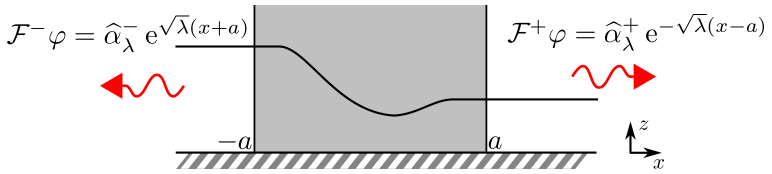

FIGURE 4.2 – *Schéma représentant la condition de rayonnement utilisée.*

Remarque 4.3 : *Nous avons vu que la décomposition (4.1) est formelle, puisqu'a priori $\varphi(x,.) \notin D(A)$. En annexe (section 4.4), on montre que la transformation de Fourier généralisée s'étend à un espace de distributions (similaire à l'espace de Schwartz pour la transformation de Fourier standard). Cette extension nous permet de justifier la décomposition que nous utilisons ici dès lors que $\widehat{\varphi}_{\lambda}(x)$ est une fonction de λ. Nous verrons que c'est effectivement le cas (cf. remarque 4.4).*

4.1.2 Cadre fonctionnel

Maintenant que les conditions de rayonnement ont été énoncées, voyons dans quel espace fonctionnel nous allons chercher les solutions des problèmes de radiation et de diffraction. Tout d'abord, remarquons qu'a priori, $\varphi(x,.) \notin L^2(\mathbb{R}^+)$. En effet, dans le cas d'un milieu homogène ($k_0 = k_\infty$), nous savons que le champ diffracté décroît comme $1/\sqrt{r}$, où $r = \sqrt{x^2+z^2}$. Ainsi, pour pouvoir appliquer la transformation de Fourier généralisée, nous avons besoin d'étendre la transformation de Fourier généralisée à un espace plus gros que $L^2(\mathbb{R}^+)$. Cette extension est décrite en annexe de ce chapitre : section 4.4. On montre que la transformation de Fourier généralisée $\mathcal{F}^{\pm}$ s'étend à un isomorphisme entre un espace de distributions physiques, noté $\mathcal{S}'_{A^{\pm}}(\mathbb{R}^+)$, et un espace de distributions spectrales, noté $\widehat{\mathcal{S}}'_{A^{\pm}}(\Lambda^{\pm})$, tous les deux similaires à l'espace de Schwartz $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Pour la construction de ces espaces de distributions, une condition s'impose : on ne doit pas se situer sur une fréquence de coupure du guide d'ondes. Nous supposerons donc que l'on n'est ni sur une fréquence de coupure du demi-guide de gauche ni sur une fréquence de coupure du demi-guide de droite. Ceci impose :

$$k_0^2 - k_\infty^2 \neq \left(n+\frac{1}{2}\right)^2 \frac{\pi^2}{(h^{\pm})^2}, \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}. \tag{4.2}$$

Nous supposerons que pour $\pm x \geq 0$, $\varphi(x,.)$ est dans l'espace de distributions $\mathcal{S}'_{A^{\pm}}(\mathbb{R}^+)$, pour pouvoir lui appliquer la transformation de Fourier généralisée. Mais ceci ne nous suffira pas ! Nous allons chercher maintenant à être un peu plus précis sur l'espace fonctionnel dans lequel nous allons chercher $\varphi(x,.)$. Notre point de départ est le suivant : nous savons que la quantité suivante :

$$\Im m\left(\int_{\mathbb{R}^+} \frac{\partial \varphi}{\partial |x|}(x,z)\, \overline{\varphi(x,z)}\, \mathrm{d}z\right)$$

correspond au flux d'énergie longitudinal sortant à travers la section $\{x\} \times \mathbb{R}^+$. Nous allons imposer à notre solution de vérifier que le flux d'énergie à travers n'importe quelle section verticale soit fini. Mais en fait nous allons avoir besoin d'une hypothèse un peu plus forte (pour des raisons techniques qui apparaîtront dans la suite) : nous allons imposer

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \left| \int_{\mathbb{R}^+} \frac{\partial \varphi}{\partial |x|}(x,z)\, \overline{\varphi(x,z)}\, \mathrm{d}z \right| < +\infty.$$

Bien entendu, cette dernière hypothèse implique que les flux d'énergie à travers n'importe quelle section verticale sont finis. Supposons, pour un instant (ce sera pleinement justifié par la suite), que l'on ait une formule de Parseval. On obtient alors en utilisant la condition de rayonnement $(\mathcal{R}^\pm)$: comme $\mathcal{F}^\pm\varphi(\pm a,\lambda) = \widehat{\alpha}^\pm_\lambda$ et $(\partial/\partial|x|)\mathcal{F}^\pm\varphi(\pm a,\lambda) = -\sqrt{\lambda}\,\widehat{\alpha}^\pm_\lambda$,

$$\int_{\mathbb{R}^+} \frac{\partial \varphi}{\partial |x|}(\pm a,z)\, \overline{\varphi(\pm a,z)}\, \mathrm{d}z = \int_{\Lambda^\pm} \frac{\partial \mathcal{F}^\pm\varphi}{\partial |x|}(\pm a,\lambda)\, \overline{\mathcal{F}^\pm\varphi(\pm a,\lambda)}\, \mathrm{dmes}^\pm(\lambda) = \int_{\Lambda^\pm} -\sqrt{\lambda}\, |\widehat{\alpha}^\pm_\lambda|\, \mathrm{dmes}^\pm(\lambda).$$

Il apparaît alors naturel de chercher $\widehat{\alpha}^\pm_\lambda$ dans l'espace suivant :

$$\boxed{\widehat{V}^\pm := \left\{ \widehat{u}_\lambda : \Lambda^\pm \to \mathbb{C},\ |\lambda|^{1/4}\, \widehat{u}_\lambda \in L^2(\Lambda^\pm; \mathrm{dmes}^\pm) \right\}.}$$

Faisons quelques remarques sur cet espace $\widehat{V}^\pm$. C'est un espace de Hilbert équipé du produit scalaire suivant

$$(\widehat{u},\widehat{v})_{\widehat{V}^\pm} := \int_{\Lambda^\pm} \sqrt{|\lambda|}\, \widehat{u}_\lambda\, \overline{\widehat{v}_\lambda}\, \mathrm{dmes}^\pm(\lambda).$$

Par ailleurs, cet espace est inclus dans l'espace de distributions spectrales $\widehat{\mathcal{S}}'_{A^\pm}(\Lambda^\pm)$. Il est donc licite d'appliquer la transformation de Fourier généralisée inverse à n'importe quel élément de $\widehat{V}^\pm$. Nous définissons alors $V^\pm := (\mathcal{F}^\pm)^{-1}\widehat{V}^\pm$. L'espace $V^\pm$ est alors également un espace de Hilbert avec comme produit scalaire :

$$(u,v)_{V^\pm} := (\mathcal{F}^\pm u, \mathcal{F}^\pm v)_{\widehat{V}^\pm}.$$

Tout ceci nous amène à chercher $\widehat{\alpha}^\pm$ dans l'espace $\widehat{V}^\pm$. En d'autres termes, cela revient à imposer : $\varphi(x,.) \in V^\pm$ pour tout $\pm x \geq a$. Nous allons en fait imposer cette condition dans tout le domaine (et pas uniquement en dehors de la perturbation) : nous allons imposer à la solution φ de vérifier la condition suivante : $\varphi(x,.) \in V^\pm$ pour tout $\pm x \geq 0$.

Remarque 4.4 : *Noter que si $\widehat{u}_\lambda \in \widehat{V}^\pm$, alors $\widehat{u}_\lambda$ est une fonction de λ. Ainsi, la décomposition modale (4.1) est pleinement justifiée (voir la section annexe 4.4).*

Voici maintenant une propriété qui nous donne davantage de renseignement sur les éléments de $V^\pm$.

Proposition 4.1 *Nous avons les injections continues suivantes :*

$$H^{1/2}(\mathbb{R}^+) \subset V^\pm \subset H^{1/2}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+).$$

Plus précisément, si $u \in V^\pm$, alors il existe $u^{\mathrm{a}} \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+)$ avec $\lim_{z\to+\infty} u^{\mathrm{a}}(z) = 0$ et $u^{\mathrm{b}} \in H^{1/2}(\mathbb{R}^+)$ tels que $u = u^{\mathrm{a}} + u^{\mathrm{b}}$.

Démonstration. Nour reproduisons ici une démonstration présente dans [Til01]. On utilise la théorie de l'interpolation des opérateurs autoadjoints positifs. Cette théorie est développée dans le livre de Lions et Magenes [LM68]. Le point de départ est un opérateur autoadjoint positif, que l'on va noter M, sur un espace de Hilbert E, qui vérifie, pour $\delta > 0$

$$(Mu, u)_E \geq \delta \|u\|_E^2, \quad \forall u \in D(M).$$

Pour nous, l'espace E est $L^2(\mathbb{R}^+)$ et l'opérateur M est $A^\pm + (k_0^\pm)^2 + \delta$. Le domaine de M, $D(M)$, est alors égal au domaine de $A^\pm$. La théorie nous dit alors que le domaine de $M^{1/2}$ est le domaine de la forme sesquilinéaire associée à l'opérateur M, i.e. pour notre opérateur $H_0^1(\mathbb{R}^+)$. Par ailleurs, le domaine de l'opérateur à n'importe quelle puissance $\alpha \in [0, 1]$ peut-être défini comme suit :

$$D(M^\alpha) = \left\{ u \in E, \|(I + M^{\alpha/2})u\|_E^2 < +\infty \right\}.$$

Dans notre cas, en utilisant la proposition 4.11 (voir l'annexe 4.4), on a alors :

$$\begin{aligned} D(M^{1/4}) &= \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}^+), \|(I + M^{1/4})u\|_{L^2(\mathbb{R}^+)} < +\infty \right\} \\ &= \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}^+), \| \left(1 + \gamma^{1/4}\right) \mathcal{F}^\pm u(\lambda)\|_{L^2(\Lambda^\pm;\mathrm{dmes}^\pm)} < +\infty \right\}, \end{aligned}$$

où $\gamma = \lambda + (k_0^\pm)^2 + \delta$.

Par ailleurs, comme $D(M) \subset H^2(\mathbb{R}^+)$ et $E = L^2(\mathbb{R}^+)$, on a alors $D(M^{1/4}) \subset H^{1/2}(\mathbb{R}^+)$.

Rappelons nous que la norme sur $V^\pm$ est définie par :

$$\|u\|_{V^\pm}^2 = \| |\lambda|^{1/4} \mathcal{F}^\pm u(\lambda) \|_{L^2(\Lambda^\pm;\mathrm{dmes}^\pm)}.$$

Or,

$$\exists C > 0 \text{ telle que } \forall \lambda \in \Lambda^\pm, \quad |\lambda|^{1/4} \leq C(\lambda + (k_0^\pm)^2 + \delta)^{1/4}. \tag{4.3}$$

Donc, $\|u\|_{V^\pm}^2 \leq C\|u\|_{D(M^{1/4})}$. Par conséquent $D(M^{1/4})$ est inclus dans $V^\pm$.

On recherche maintenant une inclusion dans l'autre sens. Pour cela, on cherche une inégalité du type (4.3) mais dans l'autre sens, ce qui n'est pas possible directement à cause de $\lambda = 0$. On utilise alors une fonction de troncature $\widehat{\chi}$ valant 1 au voisinage de 0 et 0 en dehors d'un voisinage de 0 (cf. figure 4.3). On écrit alors, pour $u \in V^\pm$,

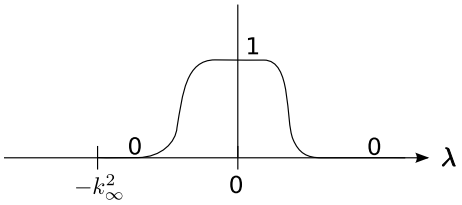

FIGURE 4.3 – *Fonction de troncature $\widehat{\chi}$.*

$$\mathcal{F}^\pm u(\lambda) = \widehat{u}_\lambda^{\mathrm{a}} + \widehat{u}_\lambda^{\mathrm{b}}, \text{ où } \widehat{u}_\lambda^{\mathrm{a}} := \widehat{\chi}(\lambda)\mathcal{F}^\pm u(\lambda) \text{ et } \widehat{u}_\lambda^{\mathrm{b}} := (1 - \widehat{\chi}(\lambda))\mathcal{F}^\pm u(\lambda).$$

Par le théorème de Riemann-Lebesgue (proposition 4.15, voir l'annexe 4.4), comme $\widehat{u}_\lambda^{\mathrm{a}}$ est une fonction intégrable (on peut le voir en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $|\lambda|^{-1/2}$ étant intégrable en 0), $(\mathcal{F}^\pm)^{-1}(\widehat{u}^{\mathrm{a}})$ est une fonction continue et qui tend vers 0 à l'infini.

Par ailleurs, sur le support de $\widehat{u}_\lambda^{\mathrm{b}}$, comme on a enlevé un voisinage de 0, il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $\lambda \in supp(\widehat{u}_\lambda^{\mathrm{b}})$, $(\lambda + (k_0^\pm)^2 + \delta)^{1/4} \leq C|\lambda|^{1/4}$. Donc, $(\mathcal{F}^\pm)^{-1}(\widehat{u}^{\mathrm{b}}) \in D(M^{1/4})$. Puis, comme $D(M^{1/4})$ est inclus dans $H^{1/2}(\mathbb{R}^+)$, on en déduit que $(\mathcal{F}^\pm)^{-1}(\widehat{u}^{\mathrm{b}}) \in H^{1/2}(\mathbb{R}^+)$. □

Remarque 4.5 : *Si nous décomposons $\varphi(x,z)$ de la même manière que dans la propriété 4.1 : $\varphi = \varphi^{\mathrm{a}} + \varphi^{\mathrm{b}}$, alors on a $\varphi^{\mathrm{b}}(x,.) \in H^{1/2}(\mathbb{R}^+)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, et φ^{a} correspond à la contributions des modes autour de $\lambda = 0$, i.e. les modes qui se propagent dans une direction proche de la verticale.*

Dans les conditions de rayonnement modale $(\mathcal{R}^-)$ et $(\mathcal{R}^+)$, nous imposons un comportement sortant dans la direction longitudinale. Mais nous n'imposons rien dans la direction transverse. Il est naturel d'imposer également un certain comportement dans la direction transverse, c'est le cas avec la condition $\varphi(x,.) \in V^{\pm}$ pour tout $\pm x \geq 0$.

Finalement, remarquons que l'égalité de Parseval utilisée ci-dessus est pleinement justifiée. La condition de rayonnement modale nous assure que $\partial \mathcal{F}^{\pm}\varphi/\partial x \in (\widehat{V}^{\pm})'$, où $(\widehat{V}^{\pm})'$ est l'espace dual de $\widehat{V}^{\pm}$ (i.e. l'ensemble de toutes les formes continues et *antilinéaires* sur $\widehat{V}^{\pm}$), défini par

$$(\widehat{V}^{\pm})' := \left\{ \widehat{u}_\lambda : \Lambda^{\pm} \to \mathbb{C},\ |\lambda|^{-1/4}\widehat{u}_\lambda \in L^2(\Lambda^{\pm}; \mathrm{dmes}^{\pm}) \right\}.$$

Cet espace $(\widehat{V}^{\pm})'$ est inclus dans l'espace des distributions spectrales $\widehat{\mathcal{S}}'_{A^{\pm}}(\Lambda^{\pm})$. Nous pouvons donc appliquer la transformation de Fourier généralisée inverse : $\partial\varphi/\partial x \in (V^{\pm})'$, où $(V^{\pm})' := (\mathcal{F}^{\pm})^{-1}(\widehat{V}^{\pm})'$ et l'égalité de Parseval utilisée est simplement l'effet de $(\mathcal{F}^{\pm})^{-1}$ sur le produit de dualité entre $(\widehat{V}^{\pm})'$ et $\widehat{V}^{\pm}$:

$$\langle \widehat{u}, \widehat{v} \rangle_{(\widehat{V}^{\pm})', \widehat{V}^{\pm}} = \langle (\mathcal{F}^{\pm})^{-1}\widehat{u}, (\mathcal{F}^{\pm})^{-1}\widehat{v} \rangle_{(V^{\pm})', V^{\pm}} \quad \text{pour tout } \widehat{u} \in (\widehat{V}^{\pm})' \text{ et } \widehat{v} \in \widehat{V}^{\pm}.$$

Nous équipons les espaces $(\widehat{V}^{\pm})'$ et $(V^{\pm})'$ des normes suivantes :

$$\|u\|_{(V^{\pm})'} = \|\mathcal{F}^{\pm}u\|_{(\widehat{V}^{\pm})'} = \|\lambda^{-1/4}\mathcal{F}^{\pm}u\|_{L^2(\Lambda^{\pm};\mathrm{dmes}^{\pm})}, \quad \forall u \in (V^{\pm})'.$$

Nous somme désormais en mesure de définir les espaces fonctionnels dans lesquels nous allons chercher la solution.

Définition 4.2 *Soit $\mathcal{O}^{\pm} := \mathbb{R}^{\pm} \times \mathbb{R}^+$ le domaine correspondant au demi-guide de gauche ou de droite pour la jonction abrupte. Nous définissons*

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{H}^{\pm} & := & \left\{ \varphi \in H^1_{\mathrm{loc}}(\mathcal{O}^{\pm}),\ \varphi(x,.) \in V^{\pm} \text{ pour tout } \pm x \geq 0 \right\}, \\ \mathcal{H} & := & \left\{ \varphi \in H^1_{\mathrm{loc}}(\mathcal{O}),\ \varphi|_{\mathcal{O}^-} \in \mathcal{H}^- \text{ et } \varphi|_{\mathcal{O}^+} \in \mathcal{H}^+ \right\}. \end{array}$$

Remarque 4.6 : *Nous allons rechercher la solution dans $\mathcal{H}$. Remarquer que cet espace dépend de la position de $\Sigma = \{0\} \times \mathbb{R}^+$, l'interface entre les deux demi-guides d'ondes. Ce n'est pas complètement satisfaisant, puisque cette position a un caractère non intrinsèque à notre problème posé dans la jonction épaisse. Cependant, nous conjecturons que $V^- = V^+$. En effet, un résultat similaire a été démontré, dans un cas plus simple, dans la thèse d'Axel Tillequin [Til01].*

4.1.3 Les résultats principaux

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer précisément les problèmes de radiation et de diffraction dont nous allons montrer le caractère bien posé.

Le problème de radiation est le suivant : étant donné une source $f \in L^2(\mathcal{O})$ qui est supposée à

support compact, inclus dans $[-a,+a]\times[0,b]$,

$$(P_{\text{rad}}) \quad \begin{cases} \text{trouver } \varphi \in \mathcal{H} \text{ tel que} \\ -\Delta\varphi - k^2\,\varphi = f \quad \text{dans } \mathcal{O}, \\ \varphi|_\Gamma = 0, \\ \varphi \text{ vérifie } (\mathcal{R}^-) \text{ et } (\mathcal{R}^+). \end{cases}$$

La figure 4.4 représente schématiquement le problème de radiation que l'on se pose.

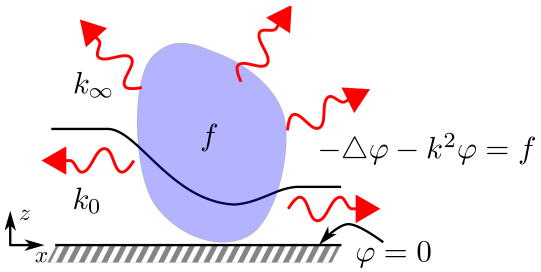

FIGURE 4.4 – *Schéma représentant le problème de radiation.*

Le problème de diffraction est un peu plus compliqué à énoncer. La question qu'il reste à résoudre est la suivante : quels types d'ondes incidentes pouvons-nous prendre en compte ? Nous allons considérer le cas d'une onde incidente venant de la gauche, par exemple une onde guidée du guide de gauche $\Phi_\lambda^-(z)\,\mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda}x}$, pour $\lambda\in\Lambda_p^-$, ou de manière générale une superposition de modes guidés et de radiation propagatifs. Ceci nous amène à choisir l'onde incidente φ_0 sous la forme suivante :

$$\varphi_0(x,z) = (\mathcal{F}^-)^{-1}\left(\mathcal{F}^-(u_0)(\lambda)\,\mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda}x}\right), \quad \text{avec } u_0\in V^- \text{ telle que le support de } \mathcal{F}^-(u_0) \text{ est inclus dans } \Lambda^-\cap\mathbb{R}^-. \tag{4.4}$$

Le fait que le support de $\mathcal{F}^-(u_0)$ soit dans $\mathbb{R}^-$ vient du fait que l'on ne considère que des superpositions de modes propagatifs (sinon, l'expression $\mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda}x}$ n'a pas nécessairement de sens pour $x\to-\infty$ ou $\lambda\to+\infty$). De plus, nous autorisons les modes guidés isolés comme onde incidente, mais nous n'autorisons pas les modes de radiation isolés (en effet, en section 4.4, nous montrons que la transformée de Fourier généralisée d'un mode de radiation fait intervenir un Dirac et les Diracs ne sont pas dans V^-), nous autorisons uniquement des superpositions continues de modes de radiation propagatifs, i.e. des faisceaux de modes de radiation propagatifs. Sur la figure 4.5, nous représentons deux exemples d'ondes incidentes : le premier exemple est un mode guidé, le deuxième exemple est un faisceau de modes de radiation propagatifs : nous prenons, étant donnés $-k_\infty^2<\alpha<\beta<0$,

$$\mathcal{F}^-u_0(\lambda) = \exp\left(-\frac{1}{1-(2(\lambda-\alpha)/(\beta-\alpha)-1)^2}\right).$$

Cette fonction est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et à support compact inclus dans $[\alpha,\beta]$.

Maintenant que nous avons détaillé la forme de l'onde incidente, nous sommes capable d'énoncer le problème de diffraction : étant donné φ_0 de la forme donnée par l'équation (4.4), le problème

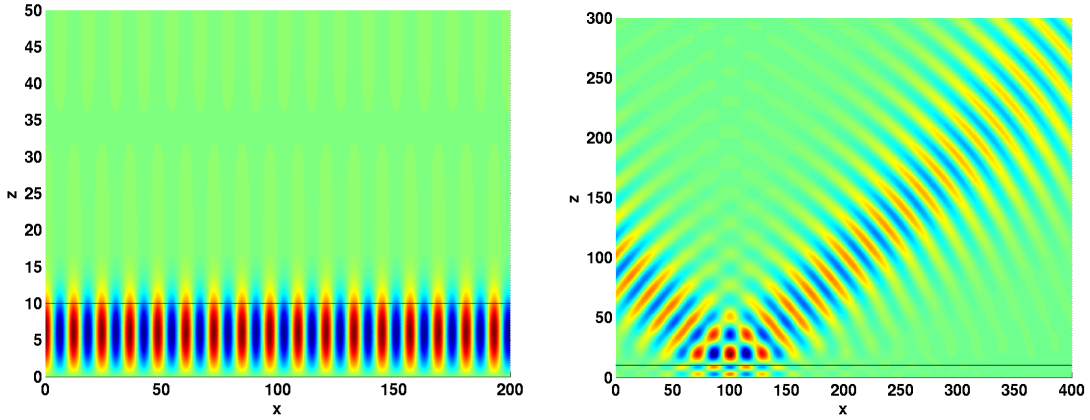

FIGURE 4.5 – *Différents types d'onde incidente : un mode guidé (à gauche), un faisceau de modes de radiation propagatifs (à droite). La ligne horizontale en noir correspond à la frontière cœur / gaine.*

de diffraction est le suivant :

$$(P_{\text{dif}}) \quad \begin{cases} \text{trouver } \varphi \in \mathcal{H} \text{ tel que} \\ -\Delta\varphi - k^2\,\varphi = 0 \quad \text{dans } \mathcal{O}, \\ \varphi|_\Gamma = 0, \\ \varphi - \varphi_0 \text{ vérifie } (\mathcal{R}^-) \text{ et } \varphi \text{ vérifie } (\mathcal{R}^+). \end{cases}$$

La figure 4.6 représente schématiquement le problème de diffraction.

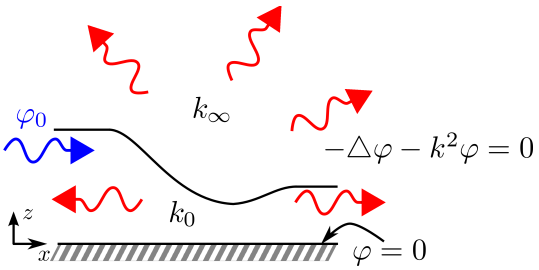

FIGURE 4.6 – *Schéma représentant le problème de diffraction.*

Les deux principaux résultats de ce chapitre sont les théorèmes suivants.

Théorème 4.1 : *Sous la condition (4.2), pour tout $f \in L^2(\mathcal{O})$ dont le support est inclus dans $[-a,+a]\times[0,b]$, le problème (P_{rad}) est bien posé : il y a une unique solution $\varphi \in \mathcal{H}$ qui dépend continûment de f, dans le sens où il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^\pm$,*

$$\|\varphi(x,.)\|_{V^\pm} \leq C\,\|f\|_{L^2(\mathcal{O})}, \tag{4.5}$$

et pour chaque domaine borné $\mathcal{O}_{\text{b}} \subset \mathcal{O}$, il existe une constante $C(\mathcal{O}_{\text{b}}) > 0$ telle que

$$\|\varphi\|_{H^1(\mathcal{O}_{\text{b}})} \leq C(\mathcal{O}_{\text{b}})\,\|f\|_{L^2(\mathcal{O})}. \tag{4.6}$$

Théorème 4.2 : *Sous la condition (4.2), pour toute onde incidente φ_0 donnée par (4.4), le problème (P_{dif}) est bien posé : il y a une unique solution $\varphi \in \mathcal{H}$ qui dépend continûment de φ_0, dans le sens où il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^\pm$,*

$$\|\varphi(x,.)\|_{V^\pm} \leq C\,\|\,u_0\|_{V^-}, \tag{4.7}$$

et pour chaque domaine borné $\mathcal{O}_{\rm b} \subset \mathcal{O}$, il existe une constante $C(\mathcal{O}_{\rm b}) > 0$ telle que

$$\|\varphi\|_{H^1(\mathcal{O}_{\rm b})} \leq C(\mathcal{O}_{\rm b})\, \|u_0\|_{V^-}. \tag{4.8}$$

4.2 Reformulation sous la forme d'une équation de Lippmann–Schwinger

4.2.1 Une approche par perturbation

Pour traiter les problèmes de radiation $(P_{\rm rad})$ et de diffraction $(P_{\rm dif})$, posés dans la géométrie de la jonction épaisse entre deux guides d'ondes ouverts, la stratégie adoptée est de considérer ces problèmes (où le nombre d'onde est donnée par $k(x,z)$) comme des perturbations de problèmes similaires posés dans la géométrie d'une jonction abrupte entre les deux mêmes guides d'ondes (où le nombre d'onde est $k_\star(x,z)$), voir la figure 4.1.

Considérons le problème suivant, posé dans la géométrie de la jonction abrupte : étant donné une source $f_\star \in L^2(\mathcal{O})$, à support compact inclus dans $[-a,+a]\times[0,b]$,

$$(P_\star) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } \varphi_\star \in \mathcal{H} \text{ tel que} \\ -\Delta\varphi_\star - k_\star^2\,\varphi_\star = f_\star \quad \text{dans } \mathcal{O}, \\ \varphi_\star|_\Gamma = 0, \\ \varphi_\star - \varphi_0 \text{ vérifie } (\mathcal{R}^-) \text{ et } \varphi_\star \text{ vérifie } (\mathcal{R}^+). \end{array} \right.$$

Ce problème va nous permettre de traiter à la fois les problèmes de radiation $(P_{\rm rad})$ et de diffraction $(P_{\rm dif})$. La figure 4.7 représente schématiquement le problème $(P_\star)$.

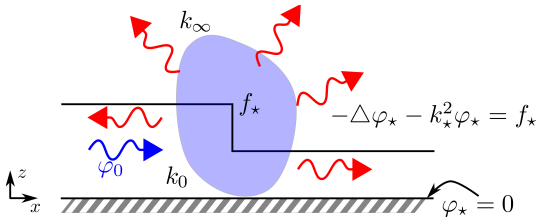

FIGURE 4.7 – *Schéma représentant le problème $(P_\star)$, qui combine les problèmes de diffraction (onde incidente φ_0) et de radiation (terme source $f_\star$) dans la géométrie de la jonction abrupte.*

Toute la suite de cette section va nous permettre de démontrer le théorème suivant.

Théorème 4.3 : *Sous la condition (4.2), pour toute source $f_\star \in L^2(\mathcal{O})$ à support contenu dans $[-a,+a]\times[0,b]$ et pour toute onde incidente φ_0 donnée par (4.4), le problème $(P_\star)$ est bien posé : il y a une unique solution $\varphi_\star \in \mathcal{H}$ qui dépend continûment de $f_\star$ et de φ_0, dans le sens où il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^\pm$,*

$$\|\varphi_\star(x,.)\|_{V^\pm} \leq C\, \left(\|f_\star\|_{L^2(\mathcal{O})} + \|u_0\|_{V^-} \right), \tag{4.9}$$

et pour tout domaine borné $\mathcal{O}_{\rm b} \subset \mathcal{O}$, il existe une constante $C(\mathcal{O}_{\rm b}) > 0$ telle que

$$\|\varphi_\star\|_{H^1(\mathcal{O}_{\rm b})} \leq C(\mathcal{O}_{\rm b})\, \left(\|f_\star\|_{L^2(\mathcal{O})} + \|u_0\|_{V^-} \right). \tag{4.10}$$

Le théorème 4.3 nous assure alors l'existence d'un opérateur continu $T_\star$ qui, à toute source $f \in L^2(\mathcal{O})$ à support compact inclus dans $[-a,+a]\times[0,b]$ et à toute onde incidente de la forme (4.4),

associe l'unique solution $\varphi_\star \in \mathcal{H}$ solution de $(P_\star)$: $\varphi_\star = T_\star(f_\star, \varphi_0)$. Maintenant, nous sommes en mesure de réécrire le problème de radiation $(P_{\rm rad})$ sous la forme suivante :

$$\left\{\begin{array}{l} \text{trouver } \varphi \in \mathcal{H} \text{ tel que} \\ -\Delta\varphi - k_\star^2\,\varphi = f + (k^2 - k_\star^2)\varphi \quad \text{dans } \mathcal{O}, \\ \varphi|_\Gamma = 0, \\ \varphi \text{ vérifie } (\mathcal{R}^-) \text{ et } (\mathcal{R}^+). \end{array}\right.$$

Ainsi, φ est la solution du problème $(P_\star)$ avec la source $f_\star = f + (k^2 - k_\star^2)\varphi$ et l'onde incidente $\varphi_0 = 0$. Posons maintenant $\mathcal{O}_0$ un domaine borné contenant le support de la perturbation, i.e. le support de $(k^2 - k_\star^2)$, et considérons l'opérateur $K_\star$ de $L^2(\mathcal{O}_0)$ défini par

$$K_\star\psi := \{T_\star((k^2 - k_\star^2)\psi, 0)\}|_{\Omega_0}, \quad \forall\psi \in L^2(\mathcal{O}_0).$$

Nous pouvons désormais affirmer que si φ est solution du problème $(P_{\rm rad})$, alors sa restriction à $\mathcal{O}_0$ (que l'on note toujours φ par soucis de simplicité des notations) est solution de l'équation de type Lippmann–Schwinger suivante :

$$(I - K_\star)\,\varphi = T_\star(f, 0) \quad \text{dans } L^2(\mathcal{O}_0). \tag{4.11}$$

En fait, la réciproque est également vraie, comme le montre le corollaire suivant.

Corollaire 4.1 *Pour toute source $f \in L^2(\mathcal{O})$ à support dans $[-a, +a] \times [0, b]$, le problème $(P_{\rm rad})$ est équivalent à l'équation de type Lippmann–Schwinger (4.11).*

Démonstration. Nous avons vu que toute solution de $(P_{\rm rad})$ est solution de l'équation de Lippmann–Schwinger (4.11). Reste à montrer la réciproque. Soit φ une solution de (4.11). Alors, φ peut s'étendre à tout le domaine $\mathcal{O}$, en posant $\psi = T_\star(f, 0) + K_\star\varphi$. En effet, ψ est une extension de φ qui est une solution du problème $(P_{\rm rad})$. □

Nous sommes maintenant en mesure de donner la preuve des théorèmes 4.1 et 4.2.

Démonstration. (théorèmes 4.1 et 4.2). Pour le théorème 4.1, en utilisant le corollaire 4.1, on remarque qu'il est suffisant de montrer que l'équation de Lippmann–Schwinger (4.11) a une unique solution. En effet, l'alternative de Fredholm peut être appliquée à cette équation, puisque $K_\star$ est un opérateur compact de $L^2(\mathcal{O}_0)$. En effet, en utilisant le théorème 4.3, $K_\star\varphi \in H^1(\mathcal{O}_0)$ et il existe une constante $C > 0$ telle que $\|K_\star\varphi\|_{H^1(\mathcal{O}_0)} \leq C\|\varphi\|_{L^2(\mathcal{O}_0)}$. Ainsi, comme $\mathcal{O}_0$ est borné, l'injection compacte de $H^1(\mathcal{O}_0)$ dans $L^2(\mathcal{O}_0)$ permet de conclure que $K_\star$ est compact. Les propriétés de stabilité (4.5) et (4.6) sont simplement des conséquences des propriétés de stabilité (4.9) et (4.10) et de la continuité de $(I - K)^{-1}$ avec $\varphi_0 = 0$.

La même méthode peut être appliquée pour le théorème 4.2. Le problème $(P_{\rm dif})$ est équivalent à l'équation de type Lippmann–Schwinger suivante

$$(I - K_\star)\,\varphi = T_\star(0, \varphi_0) \quad \text{dans } L^2(\mathcal{O}_0).$$

Ensuite, comme ci-dessus, l'alternative de Fredholm s'applique. Les propriétés de stabilité (4.5) et (4.6) sont des conséquences des propriétés (4.9) et (4.10) et de la continuité de $(I - K)^{-1}$ avec $f = 0$.

Il reste à montrer qu'il y a unicité de la solution du problème $(P_{\rm rad})$ et du problème $(P_{\rm dif})$. C'est l'objet de la section 4.3. Remarquer que la preuve d'unicité est la même pour les deux problèmes $(P_{\rm rad})$ et $(P_{\rm dif})$: dans le cas du problème $(P_{\rm rad})$, on prend une source $f = 0$ et dans le cas du problème $(P_{\rm dif})$, on prend une onde incidente $\varphi_0 = 0$. Dans les deux cas, nous sommes amenés à résoudre les mêmes équations. □

Voyons maintenant comment nous allons démontrer le théorème 4.3. L'idée est de décomposer le champ de la manière suivante : $\varphi_\star = \varphi_1 + \varphi_2$. La première composante, φ_1, est le champ généré par la même source $f_\star$ et sans onde incidente dans les deux demi-guides d'ondes droits totalement découplés : on impose une condition de Dirichlet homogène sur $\Sigma = \{0\} \times \mathbb{R}^+$, l'interface entre les deux demi-guides d'ondes (on pourrait imposer une autre condition, comme une condition de Neumann homogène) et on traite chacun des problèmes, notés (P_1^-) et (P_1^+), dans les deux demi-guides d'ondes séparément. La deuxième composante, φ_2, est le terme correctif permettant de tenir compte du couplage entre les deux demi-guides d'ondes et de l'onde incidente. Nous utilisons cette décomposition du champ puisqu'elle nous permet d'utiliser des résultats déjà démontrés dans l'article [BBCDH09] concernant le guide d'ondes droit et dans la thèse d'Axel Tillequin [Til01] (ou l'article [BBT00]) pour le traitement du terme correctif.

On rappelle que $\mathcal{O}^\pm = \mathbb{R}^\pm \times \mathbb{R}^+$. Nous définissons $\Gamma^\pm := \mathbb{R}^\pm \times \{0\}$. Pour toute fonction ψ, nous définissons $\psi^\pm := \psi|_{\mathcal{O}^\pm}$. Les problèmes satisfaits par φ_1^- et φ_1^+ sont les problèmes (P_1^-) (pour φ_1^-) et (P_1^+) (pour φ_1^+), où le problème $(P_1^\pm)$ est défini de la façon suivante :

$$(P_1^\pm) \quad \begin{cases} \text{trouver } \varphi_1^\pm \in \mathcal{H}^\pm \text{ tel que} \\ -\Delta\varphi_1^\pm - k^\pm(z)^2\,\varphi_1^\pm = f_\star^\pm \quad \text{dans } \mathcal{O}^\pm, \\ \varphi_1^\pm|_{\Gamma^\pm} = 0, \\ \varphi_1^\pm|_\Sigma = 0, \\ \varphi_1^\pm \text{ vérifie } (\mathcal{R}^\pm). \end{cases}$$

La figure 4.8 représente schématiquement les problèmes $(P_1^\pm)$. L'objet de la sous-section 4.2.2 est

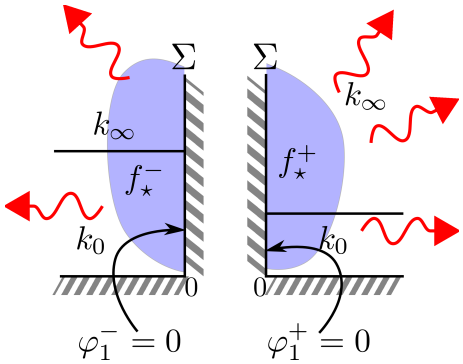

FIGURE 4.8 – *Schéma représentant les problèmes découplés* $(P_1^\pm)$.

de démontrer que le problème $(P_1^\pm)$ est bien posé et d'étudier quelques propriétés de la solution, dont nous aurons besoin par la suite.

Maintenant, voyons comment définir le problème (P_2) vérifié par φ_2, le terme correctif. Nous avons les conditions de transmission suivante sur Σ, puisque $\varphi_\star \in H^1_{\text{loc}}(\mathcal{O})$ avec $\triangle\varphi_\star \in L^2_{\text{loc}}(\mathcal{O})$:

$$[\varphi_\star]_\Sigma = 0 \quad \text{et} \quad \left[\frac{\partial\varphi_\star}{\partial x}\right]_\Sigma = 0,$$

où nous avons défini $[\psi]_\Sigma := (\psi^+)|_\Sigma - (\psi^-)|_\Sigma$ le saut à travers Σ pour toute fonction ψ. On en déduit le problème vérifié par φ_2 :

$$(P_2) \quad \begin{cases} \text{trouver } \varphi_2 \text{ tel que } \varphi_2^\pm \in \mathcal{H}^\pm \text{ vérifie} \\ -\Delta\varphi_2^\pm - k^\pm(z)^2\,\varphi_2^\pm = 0 \quad \text{dans } \mathcal{O}^\pm, \\ \varphi_2^\pm|_{\Gamma^\pm} = 0, \\ [\varphi_2]_\Sigma = 0 \text{ et } \left[\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\right]_\Sigma = -\left[\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right]_\Sigma, \\ \varphi_2^- - \varphi_0 \text{ vérifie } (\mathcal{R}^-) \text{ et } \varphi_2^+ \text{ vérifie } (\mathcal{R}^+). \end{cases}$$

La figure 4.9 représente schématiquement le problème (P_2). Dans la sous-section 4.2.3, nous dé-

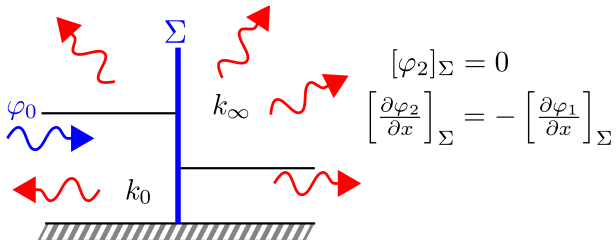

FIGURE 4.9 – *Schéma représentant le problème de couplage* (P_2).

montrons que ce problème est bien posé et nous prouvons quelques propriétés de la solution, qui seront nécessaires pour la suite.

Une fois que nous avons démontré que les problèmes $(P_1^\pm)$ et (P_2) sont bien posés (propositions 4.2 et 4.5), la preuve du théorème 4.3 est immédiate. De plus, nous avons une décomposition unique de la solution $\varphi_\star$ du problème $(P_\star)$: $\varphi_\star = \varphi_1 + \varphi_2$, où $\varphi_1^\pm$ est l'unique solution de $(P_1^\pm)$ et φ_2 est l'unique solution de (P_2).

4.2.2 Les problèmes découplés

Comme nous l'avons déjà mentionné, dans cette section, nous allons utiliser des résultats de l'article [BBCDH09] concernant le problème de radiation dans un guide ouvert droit pour traiter le problème $(P_1^\pm)$, par un argument de symétrie par rapport à Σ.

Proposition 4.2 *Sous la condition (4.2), pour tout $f_\star^\pm \in L^2(\mathcal{O}^\pm)$, à support inclus dans $[-a,a]\times[0,b]\cap\mathcal{O}^\pm$, le problème $(P_1^\pm)$ est bien posé : il y a une unique solution $\varphi_1^\pm \in \mathcal{H}^\pm$ qui admet la représentation intégrale suivante :*

$$\varphi_1^\pm(x,z) = \int_{\mathcal{O}^\pm} \left(\int_{\Lambda^\pm} \gamma_\lambda^\pm(x,x')\, \Phi_\lambda^\pm(z)\, \Phi_\lambda^\pm(z')\, \mathrm{dmes}^\pm(\lambda) \right) f_\star^\pm(x',z')\, \mathrm{d}x'\, \mathrm{d}z', \tag{4.12}$$

où

$$\gamma_\lambda^\pm(x,x') := \frac{1}{2\sqrt{\lambda}}\, \mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda}|x-x'|} - \frac{1}{2\sqrt{\lambda}}\, \mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda}|x+x'|}. \tag{4.13}$$

De plus, la solution dépend continûment de $f_\star^\pm$, dans le sens où il existe une constante $C>0$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^\pm$,

$$\|\varphi_1^\pm(x,.)\|_{V^\pm} \leq C\, \|f_\star^\pm\|_{L^2(\mathcal{O}^\pm)}, \tag{4.14}$$

et pour tout domaine borné $\mathcal{O}_\mathrm{b} \subset \mathcal{O}^\pm$, il existe une constante $C(\mathcal{O}_\mathrm{b})>0$ telle que

$$\|\varphi_1^\pm\|_{H^1(\mathcal{O}_\mathrm{b})} \leq C(\mathcal{O}_\mathrm{b})\, \|f_\star^\pm\|_{L^2(\mathcal{O}^\pm)}. \tag{4.15}$$

Démonstration. Dans l'article [BBCDH09] (propositions 3.1 et 3.3), on montre que le problème de radiation dans un guide d'ondes ouvert droit admet une unique solution. Notons $\varphi_\mathrm{ref}^\pm$ la solution de ce problème avec la source $f_\star^\pm$. Cette solution admet la représentation intégrale suivante :

$$\varphi_\mathrm{ref}^\pm(x,z) = \int_{\mathcal{O}^\pm} G^\pm(x,z;x',z')\, f_\star^\pm(x',z')\, \mathrm{d}x'\, \mathrm{d}z',$$

où $G^{\pm}(x,z;x',z')$ est la fonction de Green du guide d'ondes ouvert droit, qui peut être exprimée à l'aide des fonctions propres (généralisées) :

$$G^{\pm}(x,z;x',z') := \int_{\Lambda^{\pm}} \frac{1}{2\sqrt{\lambda}}\, \mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda}|x-x'|}\, \Phi_{\lambda}^{\pm}(z)\, \Phi_{\lambda}^{\pm}(z')\, \mathrm{dmes}^{\pm}(\lambda).$$

Par principe des images, comme nous avons une condition de Dirichlet homogène sur Σ, on déduit que le problème $(P_1^{\pm})$ est bien posé et que son unique solution est donnée par :

$$\varphi_1^{\pm}(x,z) = \varphi_{\mathrm{ref}}^{\pm}(x,z) - \varphi_{\mathrm{ref}}^{\pm}(-x,z).$$

Cette expression nous donne (4.12), la représentation intégrale de $\varphi_1^{\pm}$.

Dans [BBCDH09], on montre que $\varphi_{\mathrm{ref}}^{\pm}(x,.) \in V^{\pm}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et que des estimations similaires à (4.14)-(4.15) sont valables pour $\varphi_{\mathrm{ref}}^{\pm}$. Par principe des images, nous déduisons que ces estimations sont également valables pour $\varphi_1^{\pm}$, ce qui permet de conclure. □

Remarque 4.7 : *Remarquer que l'expression de la fonction de Green du guide ouvert uniforme est l'équivalent des formules vues au chapitre 3 : équation (3.16) pour le cas d'un guide fermé et équation (3.23) pour le cas d'un guide ouvert avec PML. La différence essentielle est que dans les formules développées dans le chapitre 3, il n'y a pas de spectre continu donc l'intégrale devient une série.*

Dans la section suivante (concernant l'unicité des problèmes (P_{rad}) et (P_{dif})), nous allons avoir besoin de quelques propriétés supplémentaires pour la solution du problème $(P_1^{\pm})$. Nous les regroupons dans la proposition suivante.

Proposition 4.3 *La solution $\varphi_1^{\pm}$ du problème $(P_1^{\pm})$ vérifie les propriétés suivantes :*

- *$\varphi_1^{\pm}$ admet le comportement asymptotique suivant, quand $z \to +\infty$ et uniformément en x dans un domaine borné :*

$$\varphi_1^{\pm} = O\left(\frac{|x|}{z^{3/2}}\right), \quad \frac{\partial \varphi_1^{\pm}}{\partial x} = O\left(\frac{1}{z^{3/2}}\right) \quad \textit{et} \quad \frac{\partial \varphi_1^{\pm}}{\partial z} = O\left(\frac{1}{z^{1/2}}\right).$$

- $\varphi_1^{\pm} \in L^{\infty}(\mathcal{O}^{\pm})$.
- *$\forall x \in \mathbb{R}^{\pm}, \partial\varphi_1^{\pm}/\partial x(x,.) \in (V^{\pm})'$ et, de plus, nous avons l'estimation suivante : il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^{\pm}$,*

$$\left\| \frac{\partial \varphi_1^{\pm}}{\partial x}(x,.) \right\|_{(V^{\pm})'} \leq C \, \|f_{\star}^{\pm}\|_{L^2(\mathcal{O}^{\pm})}. \tag{4.16}$$

- *Pour tout $x \in \mathbb{R}^{\pm}$, les fonctions $\mathcal{F}^{\pm}\varphi_1^{\pm}(x,\lambda)$ et $(\partial/\partial x)\mathcal{F}^{\pm}\varphi_1^{\pm}(x,\lambda)$, en tant que fonctions de λ, se prolongent en des fonctions analytiques dans $\mathbb{C} \setminus i\mathbb{R}^{+}$.*

Démonstration. Pour le premier point, les deux dernières estimations sont énoncées dans l'article [BBCDH09] pour le guide droit uniforme. Par principe des images, c'est également vrai pour le demi-guide droit. Reste le premier comportement asymptotique. A priori, nous n'avons que $\varphi_{\mathrm{ref}}^{\pm} = O(z^{-1/2})$, où $\varphi_{\mathrm{ref}}^{\pm}$ est la solution dans le guide droit uniforme, comme dans la proposition 4.2. Mais en utilisant le fait que $\varphi_1^{+}(0,z) = 0$, on obtient qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour z suffisamment grand et pour tout x dans un domaine borné,

$$\left|\varphi_1^{+}(x,z)\right| \leq |x| \sup_{t\in[0,x]} \left|\frac{\partial \varphi_1^{+}}{\partial x}(t,z)\right| \leq C\frac{|x|}{z^{3/2}}.$$

Bien entendu, la même démarche s'applique pour φ_1^-.

Pour le deuxième point, nous allons montrer tout d'abord que $\varphi_{\rm ref}^\pm$, la solution dans le guide droit uniforme est L^∞. Pour cela, on montre tout d'abord par régularité intérieure que $\varphi_{\rm ref}^\pm$ est $H^2_{\rm loc}$. On en déduit alors (voir [Ada75]) que $\varphi_{\rm ref}^\pm$ est localement L^∞ car continue. Ensuite, la représentation intégrale de $\varphi_{\rm ref}^\pm$ nous montre que pour $|x| \to +\infty$, le terme $\mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda}|x-x'|}$ nous assure que $\varphi_{\rm ref}^\pm$ est bornée. Enfin, il reste à vérifier que pour x dans un borné et pour $z \to +\infty$, $\varphi_{\rm ref}^\pm$ est bornée : c'est le comportement asymptotique déjà cité pour le premier point qui nous permet de conclure. Bien entendu, par principe des images, on en déduit le résultat pour $\varphi_1^\pm$.

Pour le troisième point, remarquer que la demonstration de la proposition 3.3 de [BBCDH09] peut être généralisée pour montrer que $\partial\varphi_1^\pm/\partial x(x,.) \in (V^\pm)'$ avec de plus l'estimation (4.16). On la reproduit ici. On va en fait montrer que $\left(\mathcal{F}^\pm \partial\varphi_1^\pm/\partial x\right)(x,.) \in (\widehat{V}^\pm)'$. Remarquons tout d'abord que nous pouvons intervertir signes dérivées et intégrales car on intègre sur un compact :

$$\left(\mathcal{F}^\pm \frac{\partial\varphi_1^\pm}{\partial x}\right)(x,\lambda) \;=\; \int_{x'\in\mathbb{R}^\pm} \frac{\partial\gamma_\lambda^\pm}{\partial x}(x,x')\,\widehat{f}_\star^\pm(x',\lambda)\,\mathrm{d}x',$$

où $\widehat{f}_\star^\pm = \mathcal{F}^\pm f_\star^\pm$.

Par ailleurs,

$$\frac{\partial\gamma_\lambda^\pm}{\partial x}(x,x') = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda}|x'|}\cosh\left(\sqrt{\lambda}x\right), & \text{si } |x|<|x'|,\\ \mp\sinh\left(\sqrt{\lambda}x'\right)\mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda}|x|}, & \text{sinon.}\end{cases}$$

De l'expression de $\partial\gamma_\lambda^\pm/\partial x$, on déduit que pour tout $\lambda\in\Lambda^\pm$, $\left|\partial\gamma_\lambda^\pm/\partial x(x,x')\right| \le 1$.

Le support de $f_\star$ étant borné (il est inclus dans $[-a,a]\times[0,b]$), on obtient via l'inégalité de Cauchy-Schwarz, en notant $X^- = [-a,0]$ et $X^+ = [0,a]$,

$$\left|\left(\mathcal{F}^\pm \frac{\partial\varphi_1^\pm}{\partial x}\right)(\lambda)\right|^2 \le a\|\widehat{f}_\star^\pm(.,\lambda)\|^2_{L^2(X^\pm)}.$$

On cherche maintenant à évaluer

$$\left\|\left(\mathcal{F}^\pm \frac{\partial\varphi_1^\pm}{\partial x}\right)(\lambda)\right\|^2_{(\widehat{V}^\pm)'} = \int_{\Lambda^\pm} |\lambda|^{-1/2}\left|\left(\mathcal{F}^\pm \frac{\partial\varphi_1^\pm}{\partial x}\right)(\lambda)\right|^2 \mathrm{dmes}^\pm(\lambda),$$

on obtient :

$$\int_{\Lambda^\pm} |\lambda|^{-1/2}\left|\left(\mathcal{F}^\pm \frac{\partial\varphi_1^\pm}{\partial x}\right)(\lambda)\right|^2 \mathrm{dmes}^\pm(\lambda) \;\le\; a\int_{\Lambda^\pm} |\lambda|^{-1/2}\|\widehat{f}_\star^\pm(.,\lambda)\|^2_{L^2(X^\pm)}\;\mathrm{dmes}^\pm(\lambda).$$

Il reste à montrer que

$$\int_{\Lambda^\pm} |\lambda|^{-1/2}\|\widehat{f}_\star^\pm(.,\lambda)\|^2_{L^2(X^\pm)}\;\mathrm{dmes}^\pm(\lambda) < +\infty.$$

On procède ensuite comme dans l'article [BBCDH09, proposition 3.3] : on découpe l'intégrale sur $\Lambda^\pm$ en deux parties : $(-\varepsilon,\varepsilon)$ et $\Lambda^\pm\setminus(-\varepsilon,\varepsilon)$. Sur $\Lambda^\pm\setminus(-\varepsilon,\varepsilon)$, on a :

$$\int_{\Lambda^\pm\setminus(-\varepsilon,\varepsilon)} |\lambda|^{-1/2}\|\widehat{f}_\star^\pm(.,\lambda)\|^2_{L^2(X^\pm)}\;\mathrm{dmes}^\pm(\lambda)$$
$$\le \varepsilon^{-1/2}\int_{\Lambda^\pm}\|\widehat{f}_\star^\pm(.,\lambda)\|^2_{L^2(X^\pm)}\;\mathrm{dmes}^\pm(\lambda) \le \varepsilon^{-1/2}\|f_\star^\pm\|^2_{L^2(\mathcal{O}^\pm)}.$$

Sur $(-\varepsilon,\varepsilon)$, $\Phi_\lambda^\pm(z)$ est uniformément bornée en z, donc il existe deux constantes $C>0$ et $C'>0$ telles que

$$|\widehat{f}_\star^\pm(x',\lambda)| = \left|\int_{\mathbb{R}^+} f_\star(x',z')\,\Phi_\lambda^\pm\,\mathrm{d}z'\right| \leq C\int_{\mathbb{R}^+}|f(x',z')|\,\mathrm{d}z' \leq C'\|f_\star(x',.)\|_{L^2(\mathbb{R}^+)}.$$

Donc

$$\|\widehat{f}_\star^\pm(.,\lambda)\|^2_{L^2(X^\pm)} = \int_{x'\in X^\pm}|\widehat{f}_\star^\pm(x',\lambda)|^2\,\mathrm{d}x' \leq C'^2 a\|f_\star^\pm\|^2_{L^2(\mathcal{O}^\pm)},$$

et

$$\int_{(-\varepsilon,\varepsilon)}|\lambda|^{-1/2}\|\widehat{f}_\star^\pm(.,\lambda)\|^2_{L^2(X^\pm)}\ \mathrm{dmes}^\pm(\lambda) \leq C'^2 a\|f_\star^\pm\|^2_{L^2(\mathcal{O}^\pm)}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}|\lambda|^{-1/2}\,p_\lambda^\pm\,\mathrm{d}\lambda.$$

Ceci achève la preuve.

Enfin, pour le quatrième point, remarquer que l'équation (4.12) est équivalente à :

$$\mathcal{F}^\pm\varphi_1^\pm(x,\lambda) = \int_{\mathcal{O}^\pm}\gamma_\lambda^\pm(x,x')\,\Phi_\lambda^\pm(z)\,f_\star^\pm(x',z')\,\mathrm{d}x'\,\mathrm{d}z'.$$

D'une part, $\Phi_\lambda^\pm(z)$ est analytique (par rapport à λ) dans $\mathbb{C}$, d'autre part, $\gamma_\lambda^\pm(x,x')$ est analytique dans $\mathbb{C}\setminus i\mathbb{R}^+$ (voir la définition de $\gamma_\lambda^\pm$ (4.13) et d'après le choix que nous avons fait pour la racine carrée). On en déduit le résultat, puisque $f_\star^\pm$ est à support compact. Le même argument peut être développé pour $(\partial/\partial x)\mathcal{F}^\pm\varphi_1^\pm$. □

4.2.3 Le problème de couplage

Commençons par montrer l'existence d'une solution au problème de couplage. Nous allons exhiber une solution. Supposons que $u := \varphi_2|_\Sigma$ est connu. Noter que cette quantité a un sens puisque $[\varphi_2]_\Sigma = 0$. Comme dans la sous-section 4.1.1 sur les conditions de rayonnement modales, la résolution des équations vérifiées par $\varphi_2^\pm$ et les conditions de rayonnement modales $(\mathcal{R}^\pm)$ nous amènent à considérer :

$$\varphi_2^- - \varphi_0 = (\mathcal{F}^-)^{-1}\left(\mathcal{F}^-(u-u_0)\,\mathrm{e}^{+\sqrt{\lambda}x}\right)\ \text{et}\ \varphi_2^+ = (\mathcal{F}^+)^{-1}\left(\mathcal{F}^+u\,\mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda}x}\right), \tag{4.17}$$

où nous rappelons que l'onde incidente φ_0 est définie par (4.4). Il reste maintenant à vérifier l'équation $\left[\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\right]_\Sigma = -\left[\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right]_\Sigma$, qui impose l'équation suivante pour $u=\varphi_2|_\Sigma$:

$$(\mathcal{F}^-)^{-1}\left(\sqrt{\lambda}\,\mathcal{F}^-u\right) + (\mathcal{F}^+)^{-1}\left(\sqrt{\lambda}\,\mathcal{F}^+u\right) = \left[\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right]_\Sigma + 2\,(\mathcal{F}^-)^{-1}\left(\sqrt{\lambda}\,\mathcal{F}^-u_0\right). \tag{4.18}$$

Proposition 4.4 *L'équation (4.18) admet une unique solution dans l'espace fonctionnel $V^-\cap V^+$, qui dépend continûment des données : en effet, il existe une constante $C>0$ telle que*

$$\|u\|_{V^\pm} \leq C\left(\left\|\frac{\partial\varphi_1^-}{\partial x}(0,.)\right\|_{(V^-)'} + \left\|\frac{\partial\varphi_1^+}{\partial x}(0,.)\right\|_{(V^+)'} + \|u_0\|_{V^-}\right). \tag{4.19}$$

Remarquons qu'en utilisant la proposition 4.3 (équation (4.16)), nous pouvons remplacer l'estimation (4.19) par l'estimation suivante : il existe une constante $C>0$ telle que

$$\|u\|_{V^\pm} \leq C\ \ \left(\|f_\star\|_{L^2(\mathcal{O})} + \|u_0\|_{V^-}\right). \tag{4.20}$$

Démonstration. Dans la thèse d'Axel Tillequin ([Til01] ou l'article [BBT00]), cette propriété est prouvée. Nous rappelons ici la démonstration, puisqu'elle est simple : elle relève du théorème de Lax–Milgram. Comme $u = \varphi_2|_\Sigma$, u est dans l'espace $V^- \cap V^+$. Écrivons la formulation variationnelle associée à l'équation (4.18), en notant $\widehat{u}_\lambda^\pm = \mathcal{F}^\pm u(\lambda)$: trouver $u \in V^- \cap V^+$ tel que pour tout $v \in V^- \cap V^+$,

$$a^-(u,v) + a^+(u,v) = \ell(v)$$

où

$$\begin{aligned} a^\pm(u,v) &:= \int_{\Lambda^\pm} \sqrt{\lambda}\, \widehat{u}_\lambda^\pm\, \overline{\widehat{v}_\lambda^\pm}\, \mathrm{dmes}^\pm(\lambda), \quad \forall u, v \in V^\pm, \\ \ell(v) &:= \int_\Sigma \left(\frac{\partial \varphi_1^+}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_1^-}{\partial x} \right) \overline{\psi}\, \mathrm{d}z + 2 \int_{\Lambda^-} \sqrt{\lambda}\, \mathcal{F}^- u_0(\lambda)\, \overline{\mathcal{F}^- v(\lambda)}\, \mathrm{dmes}^\pm(\lambda), \quad \forall v \in V^\pm. \end{aligned}$$

De manière rigoureuse, les intégrales ci-dessus devraient être écrites comme des crochets de dualité entre $(\widehat{V}^\pm)'$ et $\widehat{V}^\pm$.

Nous pouvons alors vérifier que le théorème de Lax–Milgram s'applique : $V^- \cap V^+$ est un espace de Hilbert muni du produit scalaire :

$$(u,v)_{V^-\cap V^+} = (u,v)_{V^-} + (u,v)_{V^+}.$$

Par ailleurs, $a^- + a^+$ est une forme sesquilinéaire continue et coercive sur $V^- \cap V^+$. En effet, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a facilement :

$$|a^\pm(u,v)| \leq \|u\|_{V^\pm} \|v\|_{V^\pm}.$$

Puis,

$$\begin{aligned} |a^-(u,v) + a^+(u,v)| &\leq \|u|_{V^-}\|v|_{V^-} + \|u|_{V^+}\|v|_{V^+} \\ &\leq (\|u|_{V^-} + \|v|_{V^+})\,(\|u|_{V^-} + \|v|_{V^+}) \leq 2\|u|_{V^-\cap V^+}\|v|_{V^-\cap V^+}. \end{aligned}$$

Donc, $a^- + a^+$ est une forme sesquilinéaire continue. De plus, en notant $\widehat{u}_\lambda^\pm = \mathcal{F}^\pm u(\lambda)$,

$$\begin{aligned} 2|a(u,u)| &\geq \left|\Re e\left(a^-(u,u) + a^+(u,u)\right)\right| + \left|\Im m\left(a^-(u,u) + a^+(u,u)\right)\right| \\ &\geq \int_{\Lambda^-\cap\mathbb{R}^+} \sqrt{\lambda}\, |\widehat{u}_\lambda^-|^2\, \mathrm{dmes}^-(\lambda) + \int_{\Lambda^+\cap\mathbb{R}^+} \sqrt{\lambda}\, |\widehat{u}_\lambda^+|^2\, \mathrm{dmes}^+(\lambda) \\ &+ \int_{\Lambda^-\cap\mathbb{R}^-} \sqrt{\lambda}\, |\widehat{u}_\lambda^-|^2\, \mathrm{dmes}^-(\lambda) + \int_{\Lambda^+\cap\mathbb{R}^-} \sqrt{\lambda}\, |\widehat{u}_\lambda^+|^2\, \mathrm{dmes}^+(\lambda) \\ &\geq \|u|_{V^-}^2 + \|u|_{V^+}^2 \geq \|u|_{V^-\cap V^+}^2. \end{aligned}$$

Donc, $a^- + a^+$ est donc coercive. Enfin, le second membre de la formulation variationnelle est une forme linéaire continue sur V qui vérifie :

$$|\ell(v)| \leq C \left[\left\| \frac{\partial \varphi_1^+}{\partial x}(0,.) \right\|_{(V^+)'} \|\psi\|_{V^+} + \left(\left\| \frac{\partial \varphi_1^-}{\partial x}(0,.) \right\|_{(V^-)'} + \|u_0\|_{V^-} \right) \|\psi\|_{V^-} \right],$$

pour tout $v \in V^- \cap V^-$, ce qui montre que ℓ est continu. L'application du théorème de Lax–Milgram donne l'existence et l'unicité de la solution u avec l'estimation (4.19). □

Remarque 4.8 : *Le fait que l'équation sur l'interface Σ entre les deux demi-guides relève du théorème de Lax–Milgram justifie a posteriori notre choix des espaces V^- et V^+.*

Noter que si nous avions une équation vectorielle (par exemple les équations de Maxwell au lieu de l'équation de Helmholtz), si l'on cherche à appliquer la même méthode pour obtenir une équation sur Σ, celle-ci ne relève pas du théorème de Lax–Milgram. Ceci pose un problème pour la généralisation de notre méthode à des cas vectoriels.

Jusqu'à maintenant, nous avons cherché à construire une solution au problème (P_2). Nous avons défini, de manière formelle, φ_2 par l'équation (4.17) où u est la solution unique (dans $V^+ \cap V^-$) de l'équation (4.18). Le lemme suivant démontre que φ_2 est alors bien une solution de (P_2). Notamment, on démontre que φ_2 est dans le bon cadre fonctionnel.

Lemme 4.1 *φ_2 est solution du problème (P_2). De plus, φ_2 dépend continûment des données : il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^{\pm}$,*

$$\|\varphi_2(x,.)\|_{V^\pm} \leq C \, \left(\|f_\star\|_{L^2(\mathcal{O})} + \|u_0\|_{V^-} \right), \tag{4.21}$$

et pour tout domaine borné $\mathcal{O}_{\rm b} \subset \mathcal{O}^\pm$, il existe une constante $C(\mathcal{O}_{\rm b}) > 0$ telle que

$$\|\varphi_2\|_{H^1(\mathcal{O}_{\rm b})} \leq C(\mathcal{O}_{\rm b}) \, \left(\|f_\star\|_{L^2(\mathcal{O})} + \|\varphi_0\|_{V^-} \right). \tag{4.22}$$

Démonstration. Nous allons traiter le cas de φ_2^+, mais la même méthode s'applique pour φ_2^- avec des changements mineurs. Sur Λ^+, $|\mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda}|x|}| \leq 1$, donc pour $x \in \mathbb{R}^+$, $\|\varphi_2^+(x,.)\|_{V^+} \leq \|u\|_{V^+}$ On en déduit que $\varphi_2^+(x,.) \in V^+$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, et cela donne également les estimations (4.21), grâce à l'équation (4.20). On en déduit également que $\varphi_2^+ \in L^2_{\rm loc}(\mathcal{O}^+)$, puisque $V^+ \subset H^{1/2}_{\rm loc}(\mathbb{R}^+)$ (cf. proposition 4.1).

On cherche maintenant à montrer que φ_2^+ vérifie les équations de (P_2) dans $\mathcal{O}^+$. L'équation (4.17) se réécrit de manière plus explicite :

$$\varphi_2^+(x,z) = \int_{\Lambda^+} \mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda}x} \, \mathcal{F}^+ u(\lambda) \, \Phi_\lambda^+(z) \, \mathrm{dmes}^\pm(\lambda), \quad \forall x > 0.$$

Cette expression peut être dérivée par rapport à x et z, en permutant les signes dérivée et intégrale, grâce au caractère exponentiellement décroissant de $\mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda}x}$ lorsque $\lambda \to +\infty$ (en utilisant le théorème de convergence dominée de Lebesgue). Ceci nous montre que φ_2^+ est de classe $\mathcal{C}^1$ dans $]0,+\infty] \times [0,+\infty]$ et de classe $\mathcal{C}^\infty$ dans les deux domaines $]0,+\infty] \times [0,h]$ (le cœur) et $]0,+\infty] \times [h,+\infty]$ (la gaine) et vérifie :

$$-\triangle \varphi_2^+ - k^+(z)^2 \, \varphi_2^+ = 0, \quad \text{dans } \mathcal{O}^+, \tag{4.23}$$

$$\varphi_2^+ = 0 \quad \text{sur } \Gamma^+. \tag{4.24}$$

Le problème est maintenant de comprendre en quel sens $\varphi_2^+ = u$ sur Σ. Nous ne savons pas encore que $\varphi_2^+ \in H^1_{\rm loc}(\mathcal{O}^+)$, nous savons uniquement que $\varphi_2^+ \in L^2_{\rm loc}(\mathcal{O}^+)$. Pour $x > 0$, définissons $\mathcal{O}_x :=]x,+\infty[\times [0,+\infty[$ et $\Sigma_x := \{x\} \times [0,+\infty[$. En utilisant les équations vérifiées par φ_2^+ (4.23)-(4.24) et la formule de Green, on a :

$$\int_{\mathcal{O}_x} \varphi_2^+ \, \overline{(-\triangle \psi - k^+(z)^2 \, \psi)} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}z = \int_{\Sigma_x} \varphi_2^+ \, \overline{\frac{\partial \psi}{\partial x}} \, \mathrm{d}z - \int_{\Sigma_x} \frac{\partial \varphi_2^+}{\partial x} \, \overline{\psi} \, \mathrm{d}z,$$

pour tout $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\mathcal{O}^+})$ à support compact et tel que $\psi|_{\Sigma \cup \Gamma} = 0$.

La question est maintenant : quelle est la limite de cette expression lorsque $x \to 0$? Tout d'abord, l'intégrale sur $\mathcal{O}_x$ converge vers la même intégrale sur $\mathcal{O}^+$, puisque $\varphi_2^+ \in L^2_{\rm loc}(\mathcal{O}^+)$. Ensuite, les intégrales sur Σ_x peuvent être interprétées comme des crochets de dualité entre $(\widehat{V}^\pm)'$ et $\widehat{V}^\pm$. Tout d'abord, on a : $\lim_{x \to 0^+} \varphi_2^+(x,.) = u$ dans V^+, puisque

$$\lim_{x \to 0^+} \|\varphi_2^+(x,.) - u\|_{V^+} = \lim_{x \to 0^+} \|(\mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda}x} - 1)\mathcal{F}^+ u\|_{\widehat{V}^+} = 0$$

par convergence dominée. D'autre part, nous avons :

$$\left\| \frac{\partial \varphi_2^+}{\partial x}(x,.) \right\|_{(\widehat{V}^+)'} = \left\| -\sqrt{\lambda}\, \mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda}x}\, \mathcal{F}^+ u \right\|_{(\widehat{V}^+)'} \leq \left\| |\lambda|^{1/2} \mathcal{F}^+ u \right\|_{(\widehat{V}^+)'} = \|\mathcal{F}^+ u\|_{\widehat{V}^+} = \|u\|_{V^+}.$$

En utilisant la proposition 4.1, on a $\|\psi(x,.)\|_{V^+} \leq C \|\psi(x,.)\|_{H^{1/2}(\mathbb{R}^+)} \to 0$ lorsque $x \to 0^+$. On en déduit que pour tout $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\mathcal{O}^+})$ à support compact et tel que $\psi|_{\Sigma \cup \Gamma} = 0$,

$$\int_{\mathcal{O}^+} \varphi_2^+ \, \overline{(-\triangle \psi - k^+(z)^2\, \psi)}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}z = \left\langle \overline{\frac{\partial \psi}{\partial x}}|_\Sigma, \overline{u} \right\rangle_{(V^+)', V^+}.$$

On rappelle que nous avons pris comme définition du dual l'ensemble des formes antilinéaires continues. Ainsi, φ_2^+ est une solution au sens des distributions de (4.23)-(4.24) avec la condition $\varphi_2^+ = u$ sur Σ. Comme $u \in H^{1/2}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+)$ (cf. proposition 4.1), des arguments standards de régularité pour les équations elliptiques (voir par exemple [Neč67]) montrent que $\varphi_2^+ \in H^{1/2}_{\mathrm{loc}}(\mathcal{O}^+)$ et satisfait la condition de stabilité (4.22). □

Nous sommes désormais en mesure de démontrer que le problème (P_2) est bien posé.

Proposition 4.5 *Le problème (P_2) admet une unique solution φ_2 qui dépend continûment des données, au sens où les estimations (4.21) et (4.22) sont vérifiées.*

Démonstration. Jusqu'à maintenant, nous avons exhibé une solution au problème (P_2). Il reste à vérifier que cette solution est unique. Pour cela, nous résolvons les équations vérifiées par $\varphi_2^\pm$ sans onde incidente ($\varphi_0 = 0$) et sans terme source sur Σ ($[\partial\varphi_1/\partial x]_\Sigma = 0$). Nous résolvons ces équations homogènes au sens des distributions, i.e. dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^\pm) \otimes \mathcal{S}'_{A^\pm}(\mathbb{R}^+)$. En appliquant la transformation de Fourier généralisée, on obtient, en notant $\widehat{\varphi}_2^\pm = \mathcal{F}^\pm \varphi_2$:

$$-\frac{\partial^2 \widehat{\varphi}_2^\pm}{\partial x^2} + \lambda\, \widehat{\varphi}_2^\pm = 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^\pm) \otimes \widehat{\mathcal{S}}'_{A^\pm}(\Lambda^\pm).$$

On sait alors que la solution de cette équation est donnée par :

$$\widehat{\varphi}_2^\pm(x,\lambda) = \widehat{\sigma}_\lambda^\pm\, \mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda}x} + \widehat{\eta}_\lambda^\pm\, \mathrm{e}^{\sqrt{\lambda}x}.$$

C'est le fait que $\widehat{\varphi}_2^\pm$ est une fonction de λ qui nous permet d'affirmer cela (voir l'annexe 4.4, nous avons déjà utilisée ceci à la remarque 4.4 pour justifier l'équation (4.1)).

Les conditions de rayonnement modales $(\mathcal{R}^\pm)$ imposent alors :

$$\widehat{\varphi}_2^\pm(x,\lambda) = \mathcal{F}^\pm u(\lambda)\, \mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda}|x|}, \quad \forall \pm x \geq 0, \forall \lambda \in \Lambda^\pm,$$

où $u = \varphi_2|_\Sigma \in V^- \cap V^+$ est la solution unique de l'équation (4.18) avec un second membre nul. On en déduit que $u = 0$, puis que $\varphi_2 = 0$. □

Dans la section suivante, comme pour les problèmes découplés, nous allons avoir besoin de quelques propriétés de la solution au problème (P_2), qui sont regroupées dans la proposition suivante.

Proposition 4.6 *La solution φ_2 du problème (P_2) satisfait les propriétés suivantes :*

- *Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $x \neq 0$, pour tout $z \in \mathbb{R}^+$,*

$$|\varphi_2(x,z)| \leq C\left(1 + \frac{1}{|x|^{1/2}}\right), \ \left|\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(x,z)\right|, \leq C\left(1 + \frac{1}{|x|^{3/2}}\right) \ \textit{et} \ \left|\frac{\partial \varphi_2}{\partial z}(x,z)\right| \leq C\left(1 + \frac{1}{|x|^{3/2}}\right).$$

- $\varphi_2 \in L^\infty(\mathcal{O}) + L^2(\mathcal{O})$.

Démonstration. Nous allons démontrer les propriétés pour φ_2^+ puisque la présentation est plus simple dans ce cas mais la même démarche peut être appliquée pour φ_2^-.

Pour le premier point, soit $x \neq 0$. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, et en utilisant l'expression de φ_2^+ (4.17), nous avons :

$$|\varphi_2^+(x,z)|^2 \leq \left(\int_{\Lambda^+} |\lambda|^{1/2}\, |\mathcal{F}^+u(\lambda)|^2 \,\mathrm{dmes}^+(\lambda)\right)\left(\int_{\Lambda^+} |\lambda|^{-1/2}\, |\Phi_\lambda^+(z)|^2 \left|\mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda}|x|}\right|^2 \,\mathrm{dmes}^+(\lambda)\right).$$

La première intégrale vaut $\|u\|_{V^+}^2$ par définition. Il reste à montrer que la seconde est bornée par $C(1+1/|x|^{1/2})$, avec $C>0$, une constante indépendante de x et de z. Pour cela, nous allons utiliser des estimations de $|\Phi_\lambda^+(z)|^2\, p_\lambda^+$, qui sont regroupées dans un lemme technique (lemme 4.7) dont la preuve est reportée en annexe de ce chapitre. Tout d'abord, remarquer que la contribution de Λ_p^+ est bornée car $\Phi_\lambda^+(z)$ est exponentiellement décroissant par rapport à z et $|\mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda}|x|}| = 1$. Sur Λ_c, a priori, des problèmes d'intégrabilité peuvent apparaître en $\lambda = 0$ et $\lambda = +\infty$. Nous décomposons alors l'intégrale en deux morceaux : sur les modes propagatifs : $\lambda \in [-k_\infty^2, 0]$, nous avons $|\Phi_\lambda^+(z)|^2\, p_\lambda^+ \leq C/\sqrt{\lambda + k_\infty^2}$ pour tout $z \in \mathbb{R}^+$ et sur les modes évanescents : $\lambda \in]0, +\infty[$, $|\Phi_\lambda^+(z)|^2\, p_\lambda^+ \leq C$ pour tout $z \in \mathbb{R}^+$ (cf. lemme 4.7). Ainsi,

$$|\varphi_2^+(x,z)|^2 \leq C\, \|u\|_{V^+}^2 \left(\int_{-k_\infty^2}^0 \frac{1}{\sqrt{|\lambda|\,(\lambda + k_\infty^2)}}\,\mathrm{d}\lambda + \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-2\sqrt{\lambda}|x|}}{\sqrt{|\lambda|}}\,\mathrm{d}\lambda\right).$$

La première intégrale est bornée. La deuxième vaut $1/|x|$. En effet, grâce au changement de variable $\gamma = \sqrt{\lambda}$, on a :

$$\int_0^{+\infty} |\lambda|^{-1/2}\, \mathrm{e}^{-2\sqrt{\lambda}|x|}\,\mathrm{d}\lambda = 2\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-2\gamma|x|}\,\mathrm{d}\gamma = \frac{1}{|x|}.$$

Ainsi, nous obtenons l'estimation pour $|\varphi_2(x,z)|$. Pour $\partial\varphi_2^\pm/\partial x$ et $\partial\varphi_2^\pm/\partial z$, remarquer tout d'abord que nous pouvons intervertir les signes dérivée et intégrale pour $x \neq 0$ grâce au terme exponentiellement décroissant (lorsque $\lambda \to +\infty$) $\mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda}|x|}$. D'où,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\varphi_2^+}{\partial x}(x,z) &= \int_{\Lambda^+} \mathcal{F}^+u(\lambda)\, \frac{\partial}{\partial x}\left(\mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda}|x|}\right)\, \Phi_\lambda^+(z)\ \mathrm{dmes}^+(\lambda),\\
\frac{\partial\varphi_2^+}{\partial z}(x,z) &= \int_{\Lambda^+} \mathcal{F}^+u(\lambda)\, \mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda}|x|}\, \frac{\partial\Phi_\lambda^+}{\partial z}(z)\ \mathrm{dmes}^+(\lambda).
\end{aligned}$$

L'idée est ensuite la même : par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\partial\varphi_2^+}{\partial x}(x,z)\right|^2 &\leq \|u\|_{V^+}^2 \left(\int_{\Lambda^+} |\lambda|^{1/2}\, |\Phi_\lambda^+(z)|^2 \left|\mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda}|x|}\right|^2 \,\mathrm{dmes}^+(\lambda)\right),\\
\left|\frac{\partial\varphi_2^+}{\partial z}(x,z)\right|^2 &\leq \|u\|_{V^+}^2 \left(\int_{\Lambda^+} |\lambda|^{-1/2} \left|\frac{\partial\Phi_\lambda^+}{\partial z}(z)\right|^2 \left|\mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda}|x|}\right|^2 \,\mathrm{dmes}^+(\lambda)\right).
\end{aligned}$$

Comme ci-dessus, les modes propagatifs (modes guidés et modes de radiation propagatifs) donnent une contribution bornée. Puis, pour les modes évanescents, utiliser le fait que $|\Phi_\lambda^+(z)|^2\, p_\lambda^+ \leq C$ et $|\partial\Phi_\lambda^+(z)/\partial z|^2\, p_\lambda^+ \leq C\lambda$ (cf. lemme 4.7). Dans les deux cas, nous obtenons l'estimation voulue avec le changement de variable $\gamma = \sqrt{\lambda}$ et en procédant à deux intégrations par parties :

$$\int_0^{+\infty} \sqrt{\lambda}\, \mathrm{e}^{-2\sqrt{\lambda}|x|}\,\mathrm{d}\lambda = 2\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-2\gamma|x|}\,\gamma^2\,\mathrm{d}\gamma = \frac{1}{2|x|^3}.$$

Ceci permet de prouver le premier point de la proposition.

Pour le deuxième point, l'idée est d'isoler les modes pour lesquels la variable spectrale λ est près de 0 : nous décomposons $\varphi_2^+ = \varphi_2^{\rm a}(x,z) + \varphi_2^{\rm b}(x,z)$ où

$$\varphi_2^{\rm a}(x,z) := (\mathcal{F}^+)^{-1}\left(\widehat{\chi}(\lambda)\,\widehat{u}_\lambda^+\,{\rm e}^{-\sqrt{\lambda}|x|}\right), \quad \text{et} \quad \varphi_2^{\rm b}(x,z) := (\mathcal{F}^+)^{-1}\left((1-\widehat{\chi}(\lambda))\,\widehat{u}_\lambda^+\,{\rm e}^{-\sqrt{\lambda}|x|}\right),$$

où $\widehat{\chi}(\lambda)$ est une fonction de troncature valant 1 pour $\lambda \in [-k_0^2, \alpha]$, avec $\alpha > 0$ et valant 0 pour tout $\lambda > \beta$, avec $\beta > \alpha$. Cette décomposition est à rapprocher de celle utilisée dans la proposition 4.1 pour montrer que n'importe quel élément de $V^\pm$ peut se décomposer comme la somme d'une fonction de $H^{1/2}(\mathbb{R}^+)$ et d'une fonction continue et tendant vers 0 à l'infini. Dans la décomposition utilisée ici, $\varphi_2^{\rm a}$ est la contribution des composantes spectrales propagatives et des composantes au voisinage de $\lambda = 0$. Ainsi, en appliquant la même méthode que celle que nous avons appliquée pour le premier point à φ_2^+, nous obtenons : $\varphi_2^{\rm a} \in L^\infty(\mathcal{O}^\pm)$. En effet, aucun problème ne peut provenir de $\lambda = +\infty$ (ce qui enlève la partie en $1/x$). Montrons maintenant que $\varphi_2^{\rm b} \in L^2(\mathcal{O}^+)$:

$$\begin{aligned}\|\varphi_2^{\rm b}\|^2_{L^2(\mathcal{O}^+)} &= \int_{\mathcal{O}^+} |\varphi_2^{\rm b}(x,z)|^2\,{\rm d}x\,{\rm d}z = \int_{\Lambda^+}\int_{\mathbb{R}^+} \left|(1-\widehat{\chi}(\lambda))\,\widehat{u}_\lambda^+\,{\rm e}^{-\sqrt{\lambda}|x|}\right|^2 {\rm d}x\,{\rm dmes}^+(\lambda)\\ &\le \int_\alpha^{+\infty} \left|\widehat{u}_\lambda^+\right|^2 \left(\int_{\mathbb{R}^+} {\rm e}^{-2\sqrt{\lambda}|x|}\,{\rm d}x\right) p_\lambda^+\,{\rm d}\lambda \le C\int_\alpha^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\left|\widehat{u}_\lambda^+\right|^2 p_\lambda^+\,{\rm d}\lambda \le C\|u\|^2_{V^+}.\end{aligned}$$

Cela montre que $\varphi_2^{\rm b} \in L^2(\mathcal{O}^+)$. □

4.3 Unicité des problèmes de radiation et de diffraction

Nous avons montré dans les preuves des théorèmes 4.1 et 4.2 que ceux-ci relèvent de l'alternative de Fredholm. Montrer l'unicité de ces problèmes suffit donc pour démontrer leur caractère bien posé. Nous avons vu, par ailleurs, que les preuves d'unicité pour $(P_{\rm rad})$ et $(P_{\rm dif})$ sont les mêmes. Dans la suite, par soucis de simplicité, nous nous réfèrerons uniquement au problème $(P_{\rm rad})$.

Théorème 4.4 : *Le problème $(P_{\rm rad})$ admet au plus une solution.*

Détaillons les différentes étapes de la preuve de ce théorème. Nous prenons une solution φ au problème $(P_{\rm rad})$ homogène, i.e. avec un terme source $f = 0$. Nous voulons montrer que $\varphi = 0$. Pour cela, nous allons en fait montrer que pour tout $\pm x \ge a$ et pour tout $\lambda \in \Lambda^\pm$, $\mathcal{F}^\pm\varphi(x,\lambda) = 0$. Ceci nous permet d'affirmer que tout $\pm x \ge a$ et pour tout $z \in \mathbb{R}^+$, $\varphi(x,z) = 0$. Puis par principe de prolongement unique, nous en déduirons que $\varphi = 0$ partout (dans $\mathcal{O}$).

La démontration se décompose en trois étapes principales. Tout d'abord, à la sous-section 4.3.1, grâce à un argument de flux d'énergie, nous montrons que pour tout $\pm x \ge a$ et pour tout $\lambda \in \Lambda^\pm \cap \mathbb{R}^-$, $\mathcal{F}^\pm\varphi(x,\lambda) = 0$. Ceci signifie que les composantes propagatives de φ sont nulles pour $\pm x \ge a$. Nous voulons maintenant montrer que les composantes évanescentes sont nulles elles aussi. L'originalité de notre démontration réside dans ce point. Dans la sous-section 4.3.2, nous tirons profit du fait que les composantes propagatives sont nulles pour montrer que $\varphi|_\Sigma$ et $\partial\varphi/\partial x|_\Sigma$ sont des éléments de $L^1(\mathbb{R}^+)$, ce qui constitue un préambule nécessaire pour la suite. Puis, dans la sous-section 4.3.3, nous montrons que $\mathcal{F}^\pm\varphi(x,\lambda)$, en tant que fonction de $\lambda \in \Lambda_c$, se prolonge par continuité en une fonction analytique (vis-à-vis de λ) dans le demi-plan complexe à partie imaginaire négative.

Dans toute la suite, nous prenons φ une solution du problème homogène $(P_{\rm rad})$. Nous réécrivons

le problème sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \text{trouver } \varphi \in \mathcal{H} \text{ tel que} \\ -\Delta\varphi - k_\star^2\,\varphi = (k^2 - k_\star^2)\varphi \quad \text{dans } \mathcal{O}, \\ \varphi|_\Gamma = 0, \\ \varphi \text{ vérifie } (\mathcal{R}^-) \text{ et } (\mathcal{R}^+). \end{cases}$$

Ainsi, nous sommes confronté à un problème $(P_\star)$ avec un terme source $f_\star = (k^2 - k_\star^2)\varphi$ et une onde incidente $\varphi_0 = 0$. Grâce aux résultats que nous avons vus à la section précédente (section 4.2), nous savons que φ se décompose de manière unique en $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, où $\varphi_1^\pm$ est la solution dans le demi-guide découplé $\pm$ avec comme terme source $f_\star^\pm$ et où φ_2 est la solution du problème de couplage correspondant, avec comme onde incidente $\varphi_0 = 0$.

4.3.1 Annulation des composantes propagatives

Remarquons tout d'abord que nous obtiendrions très rapidement le résultat voulu si nous savions que la solution φ appartenait à $H^1(S)$, où S est la bande $[-a,a]\times\mathbb{R}^+$. En effet, en multipliant l'équation volumique par $\overline{\varphi}$ et en intégrant par parties, on obtiendrait :

$$\int_S \left(|\nabla\varphi|^2 - k^2|\varphi|^2\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z = \int_0^{+\infty} -\frac{\partial\varphi}{\partial x}(-a,z)\,\overline{\varphi(-a,z)}\,\mathrm{d}z + \int_0^{+\infty}\frac{\partial\varphi}{\partial x}(a,z)\,\overline{\varphi(a,z)}\,\mathrm{d}z.$$

Puis, en prenant la partie imaginaire, on aurait :

$$\Im m\left(\int_0^{+\infty} -\frac{\partial\varphi}{\partial x}(-a,z)\,\overline{\varphi(-a,z)}\,\mathrm{d}z\right) + \Im m\left(\int_0^{+\infty}\frac{\partial\varphi}{\partial x}(a,z)\,\overline{\varphi(a,z)}\,\mathrm{d}z\right) = 0.$$

Comme nous l'avons déjà vu à la section 4.1.2, grâce à l'identité de Parseval et aux conditions de rayonnement, on a :

$$\begin{aligned}\Im m\left(\int_0^{+\infty} \pm\frac{\partial\varphi}{\partial x}(\pm a,z)\,\overline{\varphi(\pm a,z)}\,\mathrm{d}z\right) &= \Im m\left(\int_{\Lambda^\pm} -\sqrt{\lambda}\,|\widehat{\alpha}_\lambda^\pm|^2\,\mathrm{dmes}^\pm(\lambda)\right) \\ &= \int_{\Lambda^\pm\cap\mathbb{R}^-}\sqrt{|\lambda|}\,|\widehat{\alpha}_\lambda^\pm|^2\,\mathrm{dmes}^\pm(\lambda) < +\infty.\end{aligned}$$

Ainsi, on en déduirait que $\widehat{\alpha}_\lambda^\pm = 0$, pour tout $\lambda\in\Lambda^\pm\cap\mathbb{R}^-$. En utilisant les conditions de rayonnement modales $(\mathcal{R}^\pm)$, on aurait alors : pour tout $|x|\geq a$, pour tout $\lambda\in\Lambda^\pm\cap\mathbb{R}^-$, $\mathcal{F}^\pm\varphi(x,\lambda) = 0$.

Mais, malheureusement, $\varphi\notin H^1(S)$. Par conséquent, comme dans l'article [BBCDH09], au lieu d'intégrer sur toute la bande $S = [-a,a]\times\mathbb{R}^+$, on intègre sur le domaine $[-a,a]\times[0,R]$, ce qui est autorisé puisque $\varphi\in H^1_{\mathrm{loc}}(\mathcal{O})$. Puis, l'idée est de faire tendre R vers $+\infty$. Ici, des difficultés supplémentaires apparaissent par rapport au cas de l'article [BBCDH09], à cause du comportement de φ en $x = 0$. Mais les propositions 4.3 et 4.6 vont nous permettre de montrer la proposition suivante.

Proposition 4.7 *Si φ est solution du problème (P_{rad}) homogène, alors les composantes propagatives de φ s'annulent, pour $|x|\geq a$: pour tout $\lambda\in\Lambda^\pm\cap\mathbb{R}^-$, $\mathcal{F}^\pm\varphi(x,\lambda) = 0$.*

Démonstration. En multipliant l'équation volumique par $\overline{\varphi}$, en intégrant par parties sur le domaine $[-a,a]\times[0,R]$ et en prenant la partie imaginaire, nous obtenons :

$$\begin{aligned}\Im m\left(\int_{-a}^{a}\frac{\partial\varphi}{\partial z}(x,R)\,\overline{\varphi(x,R)}\,\mathrm{d}x\right) - \Im m\left(\int_0^R\frac{\partial\varphi}{\partial x}(-a,z)\,\overline{\varphi(-a,z)}\,\mathrm{d}z\right) \\ + \Im m\left(\int_0^R\frac{\partial\varphi}{\partial x}(a,z)\,\overline{\varphi(a,z)}\,\mathrm{d}z\right) = 0.\end{aligned}$$

Comme $\partial\varphi/\partial x(\pm a,z)\in(V^{\pm})'$ et $\varphi(\pm a,z)\in V^{\pm}$, nous avons :

$$\lim_{R\to+\infty}\Im m\left(\int_0^R \pm\frac{\partial\varphi}{\partial x}(\pm a,z)\,\overline{\varphi(\pm a,z)}\,\mathrm{d}z\right)=\int_{\Lambda^{\pm}\cap\mathbb{R}^-}\sqrt{|\lambda|}\,|\widehat{\alpha}_\lambda^{\pm}|^2\,\mathrm{dmes}^{\pm}(\lambda)<+\infty.$$

Nous appelons $E_{\pm a}(\varphi)$ cette dernière quantité. $E_{\pm a}(\varphi)$ correspond au flux d'énergie longitudinal sortant, traversant la section $\{\pm a\}\times\mathbb{R}^+$. Il reste à montrer que

$$\Im m\left(\int_{-a}^{a}\frac{\partial\varphi}{\partial z}(x,R)\,\overline{\varphi(x,R)}\,\mathrm{d}x\right)\underset{R\to+\infty}{\longrightarrow}0.$$

Pour cela, nous utilisons la décomposition $\varphi=\varphi_1+\varphi_2$ et nous notons :

$$\Im m\left(\int_{-a}^{a}\frac{\partial\varphi}{\partial z}(x,R)\,\overline{\varphi(x,R)}\,\mathrm{d}x\right)=I_{1,1}(R)+I_{2,2}(R)+I_{1,2}(R)+I_{2,1}(R),$$

où

$$I_{i,j}(R):=\Im m\left(\int_{-a}^{a}\frac{\partial\varphi^i}{\partial z}(x,R)\,\overline{\varphi^j(x,R)}\,\mathrm{d}x\right),\quad\forall i,j\in\{1,2\}.$$

Ci-dessous, nous montrons que chacune de ces quatre intégrales tend vers 0 quand $R\to+\infty$. Pour $I_{1,1}(R)$, cela provient directement des propriétés de $\varphi_1^{\pm}$ énoncées dans la proposition 4.3 (premier point). Pour $I_{2,2}(R)$, nous utilisons le fait que $\varphi_2^{\pm}=(\mathcal{F}^{\pm})^{-1}\left(\mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda}|x|}\mathcal{F}^{\pm}u\right)$. Ainsi, pour tout $x\in\mathbb{R}^{\pm}$,

$$\lim_{R\to+\infty}\Im m\left(\int_0^R\frac{\partial\varphi_2^{\pm}}{\partial x}(x,z)\,\overline{\varphi_2^{\pm}(x,z)}\,\mathrm{d}z\right)=\int_{\Lambda^{\pm}\cap\mathbb{R}^-}\sqrt{|\lambda|}\,|u_\lambda^{\pm}|^2\,\mathrm{dmes}^{\pm}(\lambda),$$

cette dernière quantité étant indépendante de x. De plus, en utilisant les équations vérifiées par φ_2^+, nous avons :

$$\Im m\left(\int_0^a\frac{\partial\varphi_2^+}{\partial z}(x,R)\,\overline{\varphi_2^+(x,R)}\,\mathrm{d}x\right)-\Im m\left(\int_0^R\frac{\partial\varphi_2^+}{\partial x}(-a,z)\,\overline{\varphi_2^+(-a,z)}\,\mathrm{d}z\right)$$
$$+\Im m\left(\int_0^R\frac{\partial\varphi_2^+}{\partial x}(0,z)\,\overline{\varphi_2^+(0,z)}\,\mathrm{d}z\right)=0.$$

En faisant tendre R vers $+\infty$, nous obtenons

$$\Im m\left(\int_0^a\frac{\partial\varphi_2}{\partial z}(x,R)\,\overline{\varphi_2(x,R)}\,\mathrm{d}x\right)\underset{R\to+\infty}{\longrightarrow}0.$$

Bien entendu, nous pouvons démontrer le même résultat pour l'autre partie intervenant dans $I_{2,2}(R)$, ainsi, $I_{2,2}(R)\to0$. Il reste les termes croisés $I_{1,2}(R)$ et $I_{2,1}(R)$. En utilisant les propositions 4.3 (premier point) et 4.6 (premier point), nous obtenons : il existe une constante $C>0$ telle que pour tout $x\neq0$, pour tout R suffisamment grand,

$$\left|\frac{\partial\varphi_2}{\partial z}(x,R)\,\overline{\varphi_1(x,R)}\right|\leq C\left(1+\frac{1}{|x|^{3/2}}\right)\frac{|x|}{R^{3/2}}$$
$$\text{et}\quad\left|\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}(x,R)\,\overline{\varphi_2(x,R)}\right|\leq C\left(1+\frac{1}{|x|^{1/2}}\right)\frac{1}{R^{1/2}}.$$

Par conséquent, $I_{1,2}(R)\to0$ et $I_{2,1}(R)\to0$. Puis, $E_{-a}(u)+E_a(u)=0$. Une fois que nous avons ce résultat, nous concluons de la même manière que dans l'introduction de cette sous-section. □

4.3.2 Décroissance dans la direction transverse

Dans cette sous-section, notre objectif est de démontrer la proposition suivante :

Proposition 4.8 *Si φ est solution du problème (P_{rad}) homogène, alors $\varphi|_\Sigma \in L^1(\mathbb{R}^+)$ et $\partial\varphi/\partial x|_\Sigma \in L^1(\mathbb{R}^+)$.*

Pour montrer cette proposition, nous allons avoir besoin d'une série de lemmes. Tout d'abord, grâce au résultat de la sous-section précédente, il est facile de démontrer le lemme suivant.

Lemme 4.2 *Si φ est solution du problème (P_{rad}) homogène, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une constante $C_n > 0$ telle que*

$$\left|\frac{\partial^n \varphi}{\partial x^n}(x,z)\right| \leq \frac{C_n}{(|x|-a)^{n+1/2}}, \quad \forall z \in \mathbb{R}^+, \forall |x| \geq a, \tag{4.25}$$

Démonstration. Nous utilisons la décomposition sur les modes de $\partial^n\varphi^\pm/\partial x^n$, en utilisant la condition de rayonnement $(\mathcal{R}^\pm)$ et le fait que les composantes propagatives sont nulles :

$$\forall x \geq \pm a, \quad \left|\frac{\partial^n \varphi^\pm}{\partial x^n}(x,z)\right| = \left|\int_{\mathbb{R}^+} \alpha_\lambda^\pm\, \lambda^{n/2}\, \mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda}(|x|-a)}\, \Phi_\lambda^\pm(z)\, p_\lambda^\pm \,\mathrm{d}\lambda\right|.$$

Ensuite, en utilisant les mêmes arguments que dans la preuve de la proposition 4.6 (utilisation de l'égalité de Cauchy-Schwarz et majoration de $|\Phi_\lambda^\pm(z)\, p_\lambda^\pm|$), nous obtenons le résultat voulu, puisqu'il ne reste que les composantes évanescentes, en utilisant :

$$\int_0^{+\infty} \lambda^{n-1/2}\, \mathrm{e}^{-2\sqrt{\lambda}(|x|-a)}\,\mathrm{d}\lambda = \frac{2(2n)!}{[2(|x|-a)]^{2n+1}}.$$

□

Remarquer que ce résultat, pour $n = 0$, donne le même comportement que l'onde diffractée dans un milieu homogène : elle décroît comme $1/\sqrt{x}$ quand $x \to +\infty$. Pourtant, il ne nous reste que des modes évanescents, mais ceux-ci sont de moins en moins bien décroissants quand $\lambda \to 0^+$. Cependant, nous obtenons un comportement plus décroissant pour les dérivées par rapport à x de φ, ce que nous allons utiliser dans la suite.

La transformation de Fourier généralisée, qui permet de diagonaliser la partie transverse de l'équation de Helmholtz $(-\partial^2/\partial z^2 - k(z)^2)$, nous a permis d'avoir des renseignements sur le comportement de la solution dans la direction longitudinale. L'idée est maintenant de renverser le point de vue : nous allons utiliser la transformation de Fourier généralisée adaptée à la partie longitudinale de l'équation afin d'obtenir des renseignements sur le comportement de la solution dans la direction transverse. Jusqu'à la fin de cette sous-section, nous nous placons au-dessus de la perturbation : $z \geq b$. La transformation recherchée n'est alors rien d'autre que la transformation de Fourier standard, c'est elle qui permet de diagonaliser le laplacien. Si nous avions eu $k_\infty^- \neq k_\infty^+$, alors la transformation n'aurait pas été pas la transformation de Fourier standard (voir la conclusion de ce chapitre). Nous notons

$$\widehat{\varphi}_\xi := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x,z)\, \mathrm{e}^{-i\xi x}\,\mathrm{d}x$$

la transformée de Fourier de φ par rapport à x. Attention à ne pas confondre les notations entre la transformation de Fourier standard (variable de Fourier $\xi \in \mathbb{R}$) et la transformation de Fourier

généralisée (variable spectrale $\lambda \in \Lambda^{\pm}$). Dans toute la suite de cette sous-section, nous n'utiliserons plus que la transformation de Fourier standard (et elle n'intervient qu'ici). Par ailleurs, de manière plus rigoureuse, la transformation de Fourier est ici à interpréter au sens des distributions (i.e. dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, l'espace des distributions de Schwartz). Grâce au résultat du lemme 4.2, nous démontrons le lemme suivant.

Lemme 4.3 *Si φ est solution du problème $(P_{\rm rad})$ homogène, alors pour $z \geq b$,*

$$\xi\,\widehat{\varphi}_\xi(z) = \begin{cases} A(\xi)\,\mathrm{e}^{-\sqrt{\xi^2-k_\infty^2}(z-b)} & \text{pour } |\xi| \geq k_\infty, \\ B(\xi)\,\mathrm{e}^{i\sqrt{k_\infty^2-\xi^2}(z-b)} + D(\xi)\,\mathrm{e}^{-i\sqrt{k_\infty^2-\xi^2}(z-b)} & \text{pour } |\xi| < k_\infty, \end{cases} \tag{4.26}$$

où A, B et D sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$, sauf peut-être en $\xi = 0$ (B et D sont continues en $\xi = 0$) et elles sont nulles ainsi que toutes leurs dérivées par rapport à ξ en $\pm k_\infty$. De plus, quand $|\xi| \to +\infty$, $(\partial^m/\partial\xi^m)A(\xi) = O(|\xi|^{-n})$, pour tout $m, n \in \mathbb{N}$.

Démonstration. En utilisant (4.25) et le fait que $\varphi(.,z)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$, pour tout $z \geq b$ (car elle vérifie l'équation de Helmholtz homogène), nous obtenons $x^{n-1}\partial^n\varphi/\partial x^n(.,z) \in L^1(\mathbb{R})$, pour tout $n \geq 1$, pour tout $z \geq b$. Ainsi, sa transformée de Fourier vérifie (en utilisant le théorème de Riemann-Lebesgue) : $(\partial^{n-1}/\partial\xi^{n-1})(\xi^n\widehat{\varphi}_\xi(z))$, est une fonction continue et qui tend vers 0 à l'infini, pour tout $n \geq 1$. Puisque $\partial\varphi/\partial x$ vérifie l'équation de Helmholtz homogène avec le nombre d'onde k_∞, pour $z \geq b$, nous obtenons la décomposition (4.26). Remarquer qu'il ne peut pas y avoir de composantes exponentiellement croissantes (du type $\mathrm{e}^{+\sqrt{\xi^2-k_\infty^2}(z-b)}$) car φ est une distribution tempérée. En effet, elle appartient à $L^2(\mathcal{O}) + L^\infty(\mathcal{O})$, puisque nous pouvons décomposer la solution sous la forme $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, où $\varphi_1^{\pm} \in L^\infty(\mathcal{O}^{\pm})$ (proposition 4.3, deuxième point) et $\varphi_2 \in L^2(\mathcal{O}) + L^\infty(\mathcal{O})$ (proposition 4.6, deuxième point).

Montrons maintenant les propriétés de A, B et D. Comme pour tout $z \geq b$, $\widehat{\varphi}_\xi(z)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ par rapport à ξ sauf peut-être en $\xi = 0$, A, B et D sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sauf peut-être en $\xi = 0$.

Par ailleurs, nous savons que $\xi\,\widehat{\varphi}_\xi$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ en $\xi = \pm k_\infty$. Or,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}(\xi\,\widehat{\varphi}_\xi(z)) = A'(\xi)\,\mathrm{e}^{-\sqrt{\xi^2-k_\infty^2}(z-b)} - A(\xi)\,\frac{\xi}{\sqrt{\xi^2-k_\infty^2}(z-b)}\,\mathrm{e}^{-\sqrt{\xi^2-k_\infty^2}(z-b)}.$$

En évaluant cette formule en $\xi = \pm k_\infty$, pour obtenir un résultat de classe $\mathcal{C}^\infty$, nous avons forcément : $A(\pm k_\infty) = 0$. En itérant le processus, nous obtenons : $A^{(n)}(\pm k_\infty) = 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Puis, en prenant la formule (4.26) pour $|\xi| < k_\infty$, nous avons également :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}(\xi\,\widehat{u}_\xi(z)) = \left(B'(\xi) - \frac{\xi\,B(\xi)}{i\sqrt{k_\infty^2-\xi^2}(z-b)}\right)\mathrm{e}^{i\sqrt{k_\infty^2-\xi^2}(z-b)} + \left(D'(\xi) + \frac{\xi\,D(\xi)}{i\sqrt{k_\infty^2-\xi^2}(z-b)}\right)\mathrm{e}^{-i\sqrt{k_\infty^2-\xi^2}(z-b)}.$$

En évaluant cette formule en $\xi = \pm k_\infty$, pour obtenir un résultat de classe $\mathcal{C}^\infty$, nous obtenons : $B(\pm k_\infty) = D(\pm k_\infty)$. Mais nous savons également que $\pm k_\infty\,\widehat{u}_{\pm k_\infty} = A(\pm k_\infty) = 0 = B(\pm k_\infty) + D(\pm k_\infty)$. Donc, $B(\pm k_\infty) = D(\pm k_\infty) = 0$. En itérant le processus, nous obtenons $B^{(n)}(\pm k_\infty) = D^{(n)}(\pm k_\infty) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Pour finir, comme pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\xi^n\widehat{u}_\xi(b) \to 0$ quand $|\xi| \to +\infty$, on en déduit que $A(\xi)$ tend vers 0 plus rapidement que n'importe quel polynôme en $1/|\xi|$. Puis, comme $(\partial/\partial\xi)(\xi^n\widehat{u}_\xi(b)) \to 0$ quand $|\xi| \to +\infty$, on obtient le résultat pour $A'(\xi)$ et de même pour toutes les dérivées. □

Grâce à ce lemme, nous pouvons décomposer la solution sous la forme suivante : pour tout $n \geq 1$:

$$\frac{\partial^n \varphi}{\partial x^n}(x,z) = \varphi_{\mathrm{e}}^{(n)}(x,z) + \varphi_{\mathrm{p}}^{(n)}(x,z),$$

où $\varphi_{\mathrm{e}}^{(n)}$ et $\varphi_{\mathrm{p}}^{(n)}$ correspondent respectivement à la contribution des modes évanescents et propagatifs dans la direction transverse, dont les expressions sont données par :

$$\begin{aligned}
\varphi_{\mathrm{e}}^{(n)}(x,z) &:= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{|\xi|>k_\infty} \xi^{n-1}\, A(\xi)\, \mathrm{e}^{-\sqrt{\xi^2-k_\infty^2}(z-b)}\, \mathrm{e}^{ix\xi}\, \mathrm{d}\xi, \\
\varphi_{\mathrm{p}}^{(n)}(x,z) &:= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{|\xi|<k_\infty} \xi^{n-1} \left(B(\xi)\, \mathrm{e}^{i\sqrt{k_\infty^2-\xi^2}(z-b)} + D(\xi)\, \mathrm{e}^{-i\sqrt{k_\infty^2-\xi^2}(z-b)} \right) \mathrm{e}^{ix\xi}\, \mathrm{d}\xi.
\end{aligned}$$

Nous allons maintenant regarder le comportement de chacune de ces deux quantités. Commençons par les composantes évanescentes.

Lemme 4.4 *Les composantes évanescentes de φ dans la représentation avec la transformation de Fourier par rapport à x, où φ est la solution du problème (P_{rad}) homogène, vérifient : pour tout $n, p, q \in \mathbb{N}$, il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$\left| \varphi_{\mathrm{e}}^{(n)}(x,z) \right| \leq C|x|^{-p}(z-b)^{-q}, \quad \forall x \neq 0, \forall z > b.$$

Démonstration. Grâce aux propriétés de A (voir le lemme 4.3), remarquer que

$$f_n(\xi,z) := \xi^{n-1}\, A(\xi)\, \mathrm{e}^{-\sqrt{\xi^2-k_\infty^2}(z-b)}, \quad \text{pour } |\xi| > k_\infty$$

peut être prolongée par 0 pour $|\xi| < k_\infty$ de telle manière que c'est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. De plus, elle décroît plus vite que n'importe quelle puissance de $1/|\xi|$, lorsque $|\xi| \to +\infty$, ainsi que ses dérivées par rapport à ξ. Ainsi, en faisant plusieurs intégrations par parties, nous obtenons :

$$\varphi_{\mathrm{e}}^{(n)}(x,z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{i}{x} \right)^p \int_{|\xi|>k_\infty} \frac{\partial^p f_n}{\partial \xi^p}(\xi,z)\, \mathrm{e}^{ix\xi}\, \mathrm{d}\xi, \quad \forall p \in \mathbb{N}.$$

En remarquant que pour tout $q \in \mathbb{N}$, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\left| \frac{\partial^p f_n}{\partial \xi^p}(\xi,z) \right| \leq C(\xi^2 - k_\infty^2)^{q/2}\, \mathrm{e}^{-\sqrt{\xi^2-k_\infty^2}(z-b)},$$

on a

$$\left| \varphi_{\mathrm{e}}^{(n)}(x,z) \right| = \frac{C}{|x|^p} \int_{|\xi|>k_\infty} (\xi^2 - k_\infty^2)^{q/2}\, \mathrm{e}^{-\sqrt{\xi^2-k_\infty^2}(z-b)}\, \mathrm{d}\xi.$$

En procédant au changement de variable $\gamma = \sqrt{\xi^2 - k_\infty^2}$ et par plusieurs intégrations par parties successives, nous arrivons au résultat. □

S'il n'y avait que les composantes évanescentes, le comportement donné par le lemme 4.4 nous permettrait de montrer la proposition 4.8. Notre objectif est donc maintenant de montrer que les composantes propagatives dans la décomposition de Fourier sont nulles. Voilà comment nous allons procéder. Nous allons utiliser un argument de phase stationnaire en regardant dans une direction oblique le comportement des composantes propagatives. Comme nous connaissons les comportements de $\partial^n \varphi / \partial x^n$: équation (4.25) et de $\varphi_{\mathrm{e}}^{(n)}$: lemme 4.4, qui sont uniformes par rapport à z, cela va nous permettre de montrer que les composantes propagatives sont nulles.

Commençons par appliquer la phase stationnaire (voir [Vai89] par exemple) aux composantes propagatives.

Lemme 4.5 *Pour $\alpha \in]0,+\infty[$ et $n \geq 2$, nous avons les comportements asymptotiques suivants, quand $x \to +\infty$:*

$$\int_{|\xi|<k_\infty} \xi^{n-1}\, B(\xi)\, \mathrm{e}^{i\sqrt{k_\infty^2-\xi^2}(\alpha x-b)}\, \mathrm{e}^{i\xi x}\, \mathrm{d}\xi \quad \sim \quad P(\xi_B)\, \xi_B^{n-1}\, B(\xi_B)\, \frac{1}{\sqrt{x}}, \tag{4.27}$$

$$\int_{|\xi|<k_\infty} \xi^{n-1}\, D(\xi)\, \mathrm{e}^{-i\sqrt{k_\infty^2-\xi^2}(\alpha x-b)}\, \mathrm{e}^{i\xi x}\, \mathrm{d}\xi \quad \sim \quad \overline{P(\xi_B)}\, (-\xi_B)^{n-1}\, D(-\xi_B)\, \frac{1}{\sqrt{x}}, \tag{4.28}$$

où

$$P(\xi_B) := \sqrt{\frac{2\pi}{|\frac{1}{\xi_B}(1+\frac{1}{\alpha^2})|}}\, \mathrm{e}^{-i\pi/4}\, \mathrm{e}^{ix(1+\alpha^2)\xi_B}\, \mathrm{e}^{-i\alpha\xi_B b} \quad \textit{et} \quad \xi_B := \frac{k_\infty}{\sqrt{1+\alpha^2}}. \tag{4.29}$$

Démonstration. Nous n'allons traiter que le cas de l'équation (4.27). Bien entendu, les mêmes arguments permettent de démontrer (4.28). La difficulté pour appliquer le théorème de la phase stationnaire réside dans le fait que la phase $\phi_B(\xi) := \xi + \alpha\sqrt{k_\infty^2-\xi^2}$ n'est pas de classe $\mathcal{C}^\infty$ dans tout le domaine d'intégration (en $\xi = \pm k_\infty$). De plus,

$$f_n^B(\xi) := \xi^{n-1}\, B(\xi)\, \mathrm{e}^{-i\sqrt{k_\infty^2-\xi^2}b}$$

n'est pas non plus de classe $\mathcal{C}^\infty$ dans tout le domaine d'intégration (en $\xi = 0$). Pour remédier à cela, nous écrivons $f_n^B(\xi) = \chi_B(\xi)\, f_n^B(\xi) + \widetilde{\chi}_B(\xi))\, f_n^B(\xi)$, où χ_B est une fonction de troncature de classe $\mathcal{C}^\infty$ égale à 1 dans un voisinage de ξ_B, le point stationnaire de la phase $\phi_B(\xi)$, qui est donné par (4.29), et égale à 0 en dehors d'un voisinage de ξ_B (en particulier au voisinage de 0 et de $\pm k_\infty$), et où $\widetilde{\chi}_B = 1 - \chi_B$. Tout d'abord, un argument de phase non stationnaire permet de montrer que

$$\int_{|\xi|<k_\infty} \widetilde{\chi}_B(\xi)\, f_n^B(\xi)\, \mathrm{e}^{i\phi_B(\xi)x}\, \mathrm{d}\xi = \frac{1}{x}\int_{|\xi|<k_\infty} \frac{\widetilde{\chi}_B(\xi)\, f_n^B(\xi)}{i\,\phi_B'(\xi)}\, x\, i\, \phi_B'(\xi)\, \mathrm{e}^{i\phi_B(\xi)x}\, \mathrm{d}\xi.$$

Puis, noter que puisque $n \geq 2$, $\widetilde{\chi}_B(\xi)\, f_n^B(\xi)/i\phi_B'(\xi)$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1(-k_\infty, k_\infty)$ et qui s'annule ainsi que toutes ses dérivées sur le bord du domaine d'intégration. Par une intégration par parties, nous obtenons :

$$\int_{|\xi|<k_\infty} \widetilde{\chi}_B(\xi)\, f_n^B(\xi)\, \mathrm{e}^{i\phi_B(\xi)x}\, \mathrm{d}\xi = \frac{-1}{x}\int_{|\xi|<k_\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\left(\frac{\widetilde{\chi}_B(\xi)\, f_n^B}{i\,\phi_B'}\right)\, \mathrm{e}^{i\phi_B(\xi)x}\, \mathrm{d}\xi,$$

ce qui donne un comportement de ce terme quand $|x| \to +\infty$ au moins aussi décroissant que $C/|x|$.

Puis, nous pouvons appliquer le théorème de la phase stationnaire à

$$\int_{|\xi|<k_\infty} \chi_B(\xi)\, f_n^B(\xi)\, \mathrm{e}^{i\phi_B(\xi)x}\, \mathrm{d}\xi.$$

Ceci nous donne le comportement asymptotique recherché : équation (4.27). □

Nous sommes désormais en mesure de démontrer la proposition 4.8.

Démonstration. (proposition 4.8). Comme nous l'avons déjà mentionné, les comportement asymptotiques (4.27) et (4.28) nous permettent de montrer que les composantes propagatives s'annulent. En effet, ces deux termes ont un équivalent quand $x \to +\infty$ de la forme $1/\sqrt{x}$. Or, $\partial^n\varphi/\partial x^n(x,\alpha x)$ et $\varphi_{\mathrm{e}}^{(n)}(x,\alpha x)$ sont négligeables devant $1/\sqrt{x}$ quand $x \to \infty$, en vertu des équations (4.25) et du

lemme 4.4. Ainsi, on en déduit que pour $n \geq 2$, $\varphi_{\rm p}^{(n)}(x, \alpha x) = o(1/\sqrt{x})$. Ceci induit que, pour tout $n \geq 2$, pour tout $\alpha \in]0, +\infty[$,

$$P(\xi_B)\, \xi_B^{n-1}\, B(\xi_B) + \overline{P(\xi_B)}\, (-\xi_B)^{n-1}\, D(-\xi_B) = 0.$$

On en déduit que $B(\xi) = 0$ pour tout $\xi \in]0, k_\infty[$ et $D(\xi) = 0$ pour tout $\xi \in]-k_\infty, 0[$. Puis, en prenant $\alpha \in]-\infty, 0[$ et $x \to -\infty$, on obtient de la même manière : $B(\xi) = 0$ pour tout $\xi \in]-k_\infty, 0[$ et $D(\xi) = 0$ pour tout $\xi \in]0, k_\infty[$. Puisque B et D sont continus, on a alors $B = D = 0$: les composantes propagatives s'annulent pour $n \geq 1$. De l'équation (4.26), on déduit que

$$\widehat{\varphi}_\xi(z) = \kappa(z)\, \delta_0 + \frac{A(\xi)}{\xi}\, \mathrm{e}^{-\sqrt{\xi^2 - k_\infty^2}(z-b)},$$

où δ_0 est la mesure de Dirac en $\xi = 0$, $\kappa(z)$ est une fonction de z et $A(\xi)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et s'annule sur $[-k_\infty, k_\infty]$. Ainsi,

$$\varphi(x, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \kappa(z) + \varphi_{\rm e}^{(0)}(x, z).$$

L'équation (4.25) impose alors que $\kappa(z) = 0$. Puisqu'il n'y a que les composantes évanescentes, le comportement donné par le lemme 4.4 nous permet alors de démontrer le résultat de la proposition 4.8. □

4.3.3 Analyticité dans la variable spectrale

Dans cette sous-section, nous allons montrer la proposition suivante :

Proposition 4.9 *Si φ est solution du problème $(P_{\rm rad})$ homogène, alors pour tout $\pm x \geq a$, $\mathcal{F}^\pm\varphi(x, \lambda)$, en tant que fonction de $\lambda \in \Lambda_c$, se prolonge par continuité en une fonction analytique (par rapport à λ) dans $\mathcal{Q} := \{\xi \in \mathbb{C}, \Re e(\xi) > -k_\infty^2, \Im m(\xi) < 0\}$.*

La figure 4.10 représente le spectre et l'ensemble $\mathcal{Q}$.

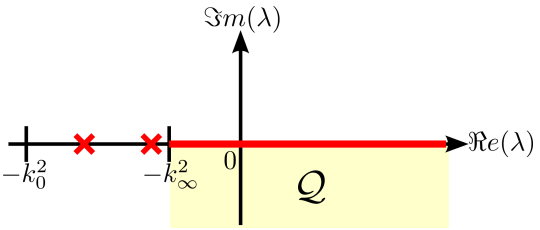

FIGURE 4.10 – *Représentation du spectre (en rouge, spectre ponctuel : les croix, spectre continu : le trait continu) et de $\mathcal{Q}$ (en jaune).*

Pour démontrer ce résultat, nous allons utiliser le résultat de la proposition 4.8. Puis, combinant les résultats des propositions 4.7 et 4.9, nous allons être en mesure de démontrer le résultat principal de cette section : le théorème 4.4.

Démonstration. (proposition 4.9). Nous utilisons pour cela la décomposition de la solution $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$. Pour φ_1, nous avons vu à la proposition 4.3 que $\mathcal{F}^\pm\varphi_1$ se prolonge par continuité en une fonction analytique dans $\mathbb{C} \setminus i\mathbb{R}^+$, donc en particulier dans $\mathcal{Q}$.

Maintenant, qu'en est-il de $\mathcal{F}^\pm\varphi_2$? Nous savons que $\mathcal{F}^\pm\varphi_2 = \mathcal{F}^\pm u\, \mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda}|x|}$. Ainsi, les propriétés d'analyticité recherchées pour $\mathcal{F}^\pm\varphi_2$ sont liées à celles de $\mathcal{F}^\pm u$. Dans la suite, nous allons traiter

le cas de $\widehat{u}_\lambda^+ = \mathcal{F}^+ u(\lambda)$. Bien entendu, la même procédure peut être appliquée pour $\widehat{u}_\lambda^- = \mathcal{F}^- u(\lambda)$. Nous savons que u est solution de (4.18), ce que nous pouvons réécrire :

$$\sqrt{\lambda}\,\widehat{u}_\lambda^+ + \mathcal{F}^+(\mathcal{F}^-)^{-1}\sqrt{\lambda}\,\mathcal{F}^-(\mathcal{F}^+)^{-1}\widehat{u}_\lambda^+ = \mathcal{F}^+\left[\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right]_\Sigma. \tag{4.30}$$

Remarquer que $\mathcal{F}^+\left[\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right]_\Sigma = \widehat{v}_\lambda^+ - \mathcal{F}^+(\mathcal{F}^-)^{-1}\widehat{v}_\lambda^-$ où

$$\widehat{v}_\lambda^\pm := \int_{\mathcal{O}^\pm} \frac{\partial\gamma_\lambda^\pm}{\partial x}(0,x')\,\Phi_\lambda^\pm(z')\,\left[k^2(x',z') - k_\star^2(x',z')\right]\varphi(x',z')\,\mathrm{d}x'\,\mathrm{d}z'.$$

Nous pouvons intervertir les signes dérivée et intégrale puisque nous intégrons sur un compact. Dans la proposition 4.3, on montre que $\widehat{v}_\lambda^\pm$ se prolonge par continuité en une fonction analytique dans $\mathcal{Q}$. Nous voulons démontrer que $\widehat{u}_\lambda^+$ a la même propriété. En regardant l'équation (4.30), nous voyons que les termes suivants interviennent : $\mathcal{F}^+(\mathcal{F}^-)^{-1}\widehat{v}_\lambda^-$ et/ou $\mathcal{F}^+(\mathcal{F}^-)^{-1}\sqrt{\lambda}\,\mathcal{F}^-(\mathcal{F}^+)^{-1}\widehat{u}_\lambda^+$. Dans les deux cas, apparaissent les opérateurs $\mathcal{F}^-(\mathcal{F}^+)^{-1}$ et $\mathcal{F}^+(\mathcal{F}^-)^{-1}$. Nous allons avoir besoin d'un résultat permettant de transférer des propriétés d'analyticité entre $\mathcal{F}^-$ et $\mathcal{F}^+$. Ce résultat est le suivant :

Lemme 4.6 *Pour tout $w \in L^1(\mathbb{R}^+)$, pour tout $\lambda \in \Lambda_c$,*

$$\mathcal{F}^+ w(\lambda) = \sigma_\lambda\,\mathcal{F}^- w(\lambda) + \widetilde{\mathcal{F}} w(\lambda),$$

où σ_λ et $\widetilde{\mathcal{F}}w(\lambda)$ se prolongent par continuité en des fonctions analytiques (par rapport à λ) dans $\mathcal{Q}$.

Nous reportons la preuve de ce lemme après la démonstration de la proposition 4.9. Notons que dans les hypothèses de ce lemme, la fonction w appartient à $L^1(\mathbb{R}^+)$, nous allons voir que c'est la raison pour laquelle nous avions besoin de démontrer la proposition 4.8 à la sous-section précédente.

Traitons pour commencer le terme $\mathcal{F}^+(\mathcal{F}^-)^{-1}\widehat{v}_\lambda^-$. Remarquer que $(\mathcal{F}^-)^{-1}\widehat{v}_\lambda^- = \partial\varphi_1^-/\partial x|_\Sigma \in L^1(\mathbb{R}^+)$ (cf. proposition 4.3, premier point). Ainsi, en utilisant le lemme 4.6, on obtient :

$$\mathcal{F}^+(\mathcal{F}^-)^{-1}\widehat{v}_\lambda^- = \sigma_\lambda\,v_\lambda^- + \widetilde{\mathcal{F}}\,\frac{\partial\varphi_1^-}{\partial x}|_\Sigma.$$

Grâce aux propriétés de σ_λ et de $\widetilde{\mathcal{F}}$, nous déduisons que $\mathcal{F}^+(\mathcal{F}^-)^{-1}\widehat{v}_\lambda^-$ se prolonge par continuité en une fonction analytique dans $\mathcal{Q}$.

Regardons maintenant le terme $\mathcal{F}^+(\mathcal{F}^-)^{-1}\sqrt{\lambda}\,\mathcal{F}^-(\mathcal{F}^+)^{-1}\widehat{u}_\lambda^+$. Nous suivons la même procédure. Nous avons : $(\mathcal{F}^-)^{-1}\sqrt{\lambda}\,\mathcal{F}^-(\mathcal{F}^+)^{-1}\widehat{u}_\lambda^+ = \partial\varphi_2^-/\partial x|_\Sigma \in L^1(\mathbb{R}^+)$ grâce à la proposition 4.8. Donc en utilisant le lemme 4.6, nous obtenons :

$$\mathcal{F}^+(\mathcal{F}^-)^{-1}\sqrt{\lambda}\,\mathcal{F}^-(\mathcal{F}^+)^{-1}\widehat{u}_\lambda^+ = \sigma_\lambda\sqrt{\lambda}\,\mathcal{F}^-(\mathcal{F}^+)^{-1}\widehat{u}_\lambda^+ + \widetilde{\mathcal{F}}\,\frac{\partial\varphi_2^-}{\partial x}|_\Sigma.$$

De même, $(\mathcal{F}^+)^{-1}\widehat{u}_\lambda^+ = \varphi|_\Sigma \in L^1(\mathbb{R}^+)$. Ainsi, en utilisant le lemme 4.6,

$$\mathcal{F}^-(\mathcal{F}^+)^{-1}\widehat{u}_\lambda^+ = \frac{1}{\sigma_\lambda}\,\widehat{u}_\lambda^+ - \frac{1}{\sigma_\lambda}\,\widetilde{\mathcal{F}}\varphi|_\Sigma.$$

On en déduit que l'équation (4.30) se réécrit : comme $\partial\varphi/\partial x = \partial\varphi_1^-/\partial x + \partial\varphi_2^-/\partial x$ sur Σ,

$$2\sqrt{\lambda}\,\widehat{u}_\lambda^+ = \sqrt{\lambda}\,\widetilde{\mathcal{F}}\varphi|_\Sigma - \widetilde{\mathcal{F}}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x}|_\Sigma + \widehat{v}_\lambda^+ - \sigma_\lambda\,v_\lambda^-.$$

Le second membre de cette équation se prolonge par continuité en une fonction analytique dans $\mathcal{Q}$ (en utilisant les propriétés de σ_λ et de $\widetilde{\mathcal{F}}$). Nous en déduisons qu'il en est de même pour $\widehat{u}_\lambda^+$. Ceci achève la preuve. □

Démonstration. (lemme 4.6).

Le premier point consiste à montrer que pour $\lambda \in \Lambda_c$, la fonction propre généralisée Φ_λ^+ peut être vue comme une perturbation de la fonction propre généralisée Φ_λ^- :

$$\Phi_\lambda^+(z) = \sigma_\lambda\, \Phi_\lambda^-(z) + \widetilde{\Phi}_\lambda(z), \tag{4.31}$$

où σ_λ est une fonction qui se prolonge par continuité en une fonction analytique dans $\mathcal{Q}$ et où $\widetilde{\Phi}_\lambda(z)$ est une onde *entrante* : elle se prolonge de Λ_c dans $\mathcal{Q}$ en une fonction analytique vis-à-vis de λ et en une fonction exponentiellement décroissante par rapport à z quand $z \to +\infty$: de la forme $d_\lambda\, \mathrm{e}^{-i\beta_\infty z}$, où l'on rappelle que $\beta_\infty = \sqrt{\lambda + k_\infty^2}$.

Pour démontrer ce premier point, nous allons utiliser la décomposition des fonctions propres généralisées (1.12), vue au chapitre 1. Les fonctions $\Theta_\lambda^\pm$ et $\Psi_\lambda^\pm$ sont définies par (1.9)-(1.10). On en déduit l'équation (4.31) avec

$$\sigma_\lambda \;:=\; \frac{\Theta_\lambda^+(0)}{\Theta_\lambda^-(0)} \quad \text{et} \quad \widetilde{\Phi}_\lambda := \Phi_\lambda^+(z) - \sigma_\lambda\, \Phi_\lambda^-(z).$$

Montrons maintenant les propriétés de σ_λ. Nous allons montrer qu'il existe deux constantes $C_1 > 0, C_2 > 0$ telles que pour tout $\lambda \in \mathcal{Q} \cup \Lambda_c$,

$$C_1 < |\Theta_\lambda^\pm(0)| < C_2. \tag{4.32}$$

Pour tout $\lambda \in \Lambda_c$, l'équation (4.32) vient du fait que nous excluons la possibilité d'avoir $\Theta_\lambda^\pm(0) = 0$. En effet, nous avons supposé que nous ne nous situons ni sur une fréquence de coupure du demi-guide de gauche ni sur une du demi-guide de droite.

Dans $\mathcal{Q}$, $\Theta_\lambda^\pm(0)$ est une fonction analytique qui ne s'annule pas. En effet, dans le cas contraire, la décomposition (1.12) nous permettrait de montrer que $\Phi_\lambda^\pm$ est proportionnelle à $\Theta_\lambda^\pm$. Mais $\Theta_\lambda^\pm$ est exponentiellement décroissant par rapport à z pour tout $\lambda \in \mathcal{Q}$. Ainsi, λ serait une valeur propre de $A^\pm$, ce qui n'est possible que pour $\lambda \in \Lambda_p^\pm$, qui n'intersecte pas $\mathcal{Q}$.

Ainsi, nous déduisons de l'équation (4.32) que σ_λ se prolonge par continuité en une fonction analytique dans $\mathcal{Q}$.

Traitons maintenant $\widetilde{\Phi}_\lambda(z)$. On a : $\widetilde{\Phi}_\lambda(z)$ est analytique pour tout $\lambda \in \mathcal{Q}$. De plus, pour $z \geq \max(h^-, h^+)$, la définition de $\widetilde{\Phi}_\lambda(z)$ se simplifie :

$$\widetilde{\Phi}_\lambda(z) = \frac{\Theta_\lambda^+(0)}{2i\beta_\infty} \left(\frac{\Psi_\lambda^-(0)}{\Theta_\lambda^-(0)} - \frac{\Psi_\lambda^+(0)}{\Theta_\lambda^+(0)} \right) \mathrm{e}^{-i\beta_\infty z},$$

ce qui permet de montrer que $\widetilde{\Phi}_\lambda(z)$ est une onde entrante.

La deuxième étape consiste à définir $\widetilde{\mathcal{F}}$:

$$\widetilde{\mathcal{F}} w(\lambda) := \int_{\mathbb{R}^+} w(z)\, \widetilde{\Phi}_\lambda(z)\, \mathrm{d}z, \quad \forall \lambda \in \Lambda_c.$$

Comme $w \in L^1(\mathbb{R}^+)$, en utilisant le théorème de convergence dominée de Lebesgue, nous vérifions que $\widetilde{\mathcal{F}} w$ se prolonge par continuité dans $\mathcal{Q}$. Puis, pour $\lambda \in \mathcal{Q}$, comme $\widetilde{\Phi}_\lambda(z)$ est une onde entrante (exponentiellement décroissante par rapport à z), nous déduisons que $\widetilde{\mathcal{F}} w$ est analytique dans $\mathcal{Q}$. Ceci achève la preuve du lemme. □

Remarquer que c'est grâce au caractère L^1 de w que l'on a continuité de $\widetilde{\mathcal{F}}w(\lambda)$ sur $\Lambda_c \cup \mathcal{Q}$.

Nous sommes maintenant en mesure de donner la preuve du résultat principal de cette section : le théorème 4.4.

Démonstration. (théorème 4.4). Soit $\pm x \geq a$. En utilisant le résultat de la section 4.3.1, nous avons : $\mathcal{F}^{\pm}\varphi(x,\lambda) = 0, \forall \lambda \in \Lambda^{\pm} \cap \mathbb{R}^-$. Puis, en utilisant celui de la section 4.3.3, nous avons : $\mathcal{F}^{\pm}\varphi(x,\lambda)$, en tant que fonction de $\lambda \in \Lambda_c$, se prolonge par continuité en une fonction analytique dans $\mathcal{Q}$. Ainsi, en utilisant le principe de réflexion de Schwarz pour les fonctions analytiques (cf. [Con78, section IX.1]), comme $\mathcal{F}^{\pm}\varphi(x,\lambda)$ est réelle sur $\Lambda_c \cap \mathbb{R}^-$ (puisque qu'elle est nulle), nous déduisons que $\mathcal{F}^{\pm}\varphi(x,\lambda)$ se prolonge dans $\{\zeta \in \mathbb{C}, \Re e(\zeta) > -k_\infty^2\} \setminus \mathbb{R}^+$ et que ce prolongement est analytique par rapport à λ. Puis, en appliquant le principe des zéros isolés, nous déduisons que $\mathcal{F}^{\pm}\varphi(x,\lambda)$ est égal à 0 dans tout le domaine $\{\zeta \in \mathbb{C}, \Re e(\zeta) > -k_\infty^2\} \setminus \mathbb{R}^+$. Enfin, par continuité, nous avons : $\mathcal{F}^{\pm}\varphi(x,\lambda)$ s'annule pour tout $\lambda \in \Lambda_c$.

Ainsi, nous avons démontré que pour tout $|x| \geq a$, pour tout $z \in \mathbb{R}^+$, $\varphi(x,z) = 0$. Par principe de prolongement unique (voir par exemple [CK98, lemme 8.5] où le cadre fonctionnel n'est pas le même qu'ici mais le résultat reste valide dans notre configuration), nous déduisons que $\varphi = 0$. □

Remarque 4.9 : *Dans la démonstration (ci-dessus) du théorème 4.4, nous avons utilisé le fait que les zéros réels d'une fonction analytique dans $\mathcal{Q}$ et continue sur $\overline{\mathcal{Q}}$ forment un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}$ de mesure nulle. Noter qu'ils peuvent contenir un point d'accumulation. Penser par exemple à $\cos(1/\lambda)$, qui a un point d'accumulation de zéros en 0. C'est une situation un peu différente de ce dont on a l'habitude avec les fonctions analytiques : les zéros d'une fonction analytique non nulle dans un ouvert n'ont pas de point d'accumulation. La différence réside dans le fait que les zéros sont soit sur le bord ou soit à l'intérieur du domaine d'analyticité.*

GÉNÉRALISATIONS POSSIBLES DE LA DÉMARCHE

Nous avons montré le caractère bien posé du problème de diffraction et de radiation dans la jonction entre deux guides d'ondes ouverts, dans le cas particulier où les guides d'ondes sont bidimensionnels. Pour simplifier les équations, nous avons imposé une condition de Dirichlet en $z = 0$ (sur Γ). Mais, moyennant aménagements (notamment en construisant précisément la transformation de Fourier généralisée adaptée et son extension aux espaces de distributions), il nous semble que l'on peut généraliser l'approche pour des problèmes 2D ou 3D plus généraux, du type $\mathrm{div}(\mu\nabla)$.

Par contre, il semble que l'approche ne se généralise pas directement pour des problèmes vectoriels. Si au lieu de l'équation de Helmholtz, nous avons les équations de Maxwell, par exemple, l'équivalent de l'équation (4.18) ne relève plus du théorème de Lax–Milgram.

Nous avons vu, à la remarque remarque 4.6, que nous conjecturons que $V^- = V^+$. Cela vient du fait que $k_\infty^- = k_\infty^+$. Dans le cas où $k_\infty^- \neq k_\infty^+$, nous sommes confronté à un dioptre et nous pensons que $V^- \neq V^+$ et que $V^- \cap V^+ = H^{1/2}(\mathbb{R}^+)$ (voir la thèse d'Axel Tillequin [Til01] où cela est démontré dans un cas plus simple où la transformation de Fourier généralisée n'est en fait que la symétrisée de la tranformation de Fourier standard, autrement appelée transformation de Fourier cosinus). Par ailleurs, dans le cas où $k_\infty^- \neq k_\infty^+$, nous devons modifier la sous-section 4.3.2 car nous ne pouvons plus utiliser une transformation de Fourier standard dans la direction x, nous devons utiliser une transformation de Fourier généralisée également dans la direction x. Enfin, le cas $k_0^- \neq k_0^+$ ne pose pas de difficulté supplémentaire par rapport à ce qui a été fait ici, cela ne change strictement rien à la démonstration.

À titre de remarque, voyons ce qui se passe dans le cas de guides fermés. Comme nous l'avons déjà vu en introduction de la thèse, nous pouvons développer le même genre de conditions de rayonnement modales, la différence essentielle réside dans le fait que le spectre de l'opérateur transverse est exclusivement discret. Cela implique une différence essentielle par rapport aux guides ouverts. Nous n'avons plus la propriété d'analyticité (de la sous-section 4.3.3) et donc même si le problème relève toujours de l'alternative de Fredholm, l'unicité n'est pas assurée. Par contre, les composantes propagatives de la solution du problème homogène sont toujours nulles, par le même genre d'arguments sur les flux d'énergie (sous-section 4.3.1). Mais il peut rester des composantes évanescentes. Cela est du au fait qu'il peut y avoir des modes piégés par la structure (voir par exemple [ELV94]). Dans le cas d'un guide d'ondes ouvert, de tels modes piégés sont impossibles.

Enfin, notons que toute cette étude théorique pourrait donner naissance à une méthode numérique. Cette méthode numérique a été développée, pour la jonction abrupte notamment, dans la thèse d'Axel Tillequin [Til01]. Mais il s'avère qu'elle n'est pas très efficace numériquement, puisqu'elle repose sur la transformation de Fourier généralisée et que le calcul des intégrales a semblé difficile. Nous avons donc décidé d'utiliser d'autres méthodes pour calculer numériquement la solution, c'est l'objet du chapitre suivant.

4.4 Annexe : Transformation de Fourier généralisée

Dans cette section, nous détaillons comment obtenir la transformation de Fourier généralisée et comment l'étendre à un espace de distributions. Cette section, assez technique, peut être passée en première lecture.

Nous nous reposons sur les résultats de la section 1.1, concernant l'expression des fonctions propres et des fonctions propres généralisées, ainsi que la représentation intégrale de la fonction de Green. Tout d'abord, voyons comment ces fonctions propres et fonctions propres généralisées forment une famille complète de $L^2(\mathbb{R}^+)$, en un certain sens.

Complétude des fonctions propres et des fonctions propres généralisées

La première étape consiste à déterminer la mesure spectrale associée à l'opérateur A, voir l'annexe A.1 pour la définition ce qu'on appelle mesure spectrale.

Pour déterminer la mesure spectrale associée à l'opérateur A, nous utilisons la représentation intégrale de la résolvante (voir propriété 1.1) et la formule de Stone (cf. annexe A.1).

Proposition 4.10 *La mesure spectrale E associée à l'opérateur A est donnée par l'expression suivante : pour tout $u \in L^2_{\mathrm{comp}}(\mathbb{R}^+)$,*

$$\mathrm{d}\|E_\lambda u\|_X^2 = \sum_{\lambda\in\Lambda_p(A)} |(\Phi_\lambda, u)_X|^2\, p_\lambda\, \delta_\lambda + |\,\langle \Phi_\lambda, u\rangle_X\,|^2\, p_\lambda\, \mathrm{d}\lambda|_{\Lambda_c(A)}. \tag{4.33}$$

où δ_λ est la mesure de Dirac au point λ et $\mathrm{d}\lambda|_{\Lambda_c(A)}$ est la restriction de la mesure de Lebesgue à $\Lambda_c(A)$ et

où p_λ désigne un poids, donné par :

$$p_\lambda := \begin{cases} \dfrac{1}{\|\Phi_\lambda\|_X^2} = \dfrac{2\left[k_0^2+\lambda\right]}{h+\sqrt{-k_\infty^2-\lambda}} & \textit{si } \lambda \in \Lambda_p(A), \\ \dfrac{\sqrt{k_\infty^2+\lambda}}{\pi\left\{c_\lambda^2(0)+[k_\infty^2+\lambda]s_\lambda^2(0)\right\}} & \textit{si } \lambda \in \Lambda_c(A). \end{cases} \tag{4.34}$$

On rappelle que pour $u, v \in X$, on note $(u,v)_X$ le produit scalaire de l'espace de Hilbert X. On rappelle également qu'ici $X = L^2(\Omega)$, où $\Omega = \mathbb{R}^+$. Nous définissons alors deux espaces fonctionnels liés à $L^2(\Omega)$, l'un est inclus dans $L^2(\Omega)$, l'autre contient $L^2(\Omega)$ (ils jouent les rôles respectivement de $X_\downarrow$ et de $X_\uparrow$ de la section A.1.5) :

- $L^2_{\mathrm{comp}}(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions de $L^2(\Omega)$ dont le support est compact,
- $L^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions u telles que $u|_K$ appartient à $L^2(K)$, pour tout K compact inclus dans Ω.

Si $u \in L^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ et $v \in L^2_{\mathrm{comp}}(\Omega)$, alors nous notons :

$$\langle u, v\rangle_X \ = \int_\Omega u(z)\,\overline{v(z)}\,\mathrm{d}z.$$

Démonstration. Pour $\lambda \in \Lambda_p(A) = \Lambda_{disc}(A)$, on sait que la formule de Stone (voir en annexe, formule (A.23)) nous dit que $E(\{\lambda\}) = P_\lambda$, le projecteur spectral associé à λ, un point isolé du spectre. Ainsi, si λ est de multiplicité 1, on a

$$E(\{\lambda\})u = \frac{(\Phi_\lambda, u)_X}{\|\Phi_\lambda\|_X^2}\Phi_\lambda.$$

On vérifie ensuite que

$$\|\Phi_\lambda\|_X^2 = \frac{h+\sqrt{-k_\infty^2-\lambda}}{2\left[k_0^2+\lambda\right]}.$$

Si λ est de multiplicité strictement supérieure à 1, il suffit de faire la somme sur différentes fonctions propres linéairement indépendantes associées à cette valeur propre.

Pour $\lambda \in \Lambda_c(A) = \Lambda_e(A)$, remarquons que (en utilisant formule de représentation de fonction de Green (1.19))

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \mathcal{G}_{\lambda+i\varepsilon}(z,z') \ = \ \begin{cases} \dfrac{1}{\Theta_\lambda(0)}\,\Phi_\lambda(z)\,\Theta_\lambda(z') & \text{si } z < z', \\ \dfrac{1}{\Theta_\lambda(0)}\,\Phi_\lambda(z')\,\Theta_\lambda(z) & \text{sinon,} \end{cases}$$

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \mathcal{G}_{\lambda-i\varepsilon}(z,z') \ = \ \begin{cases} \dfrac{1}{\Psi_\lambda(0)}\,\Phi_\lambda(z)\,\Psi_\lambda(z') & \text{si } z < z', \\ \dfrac{1}{\Psi_\lambda(0)}\,\Phi_\lambda(z')\,\Psi_\lambda(z) & \text{sinon.} \end{cases}$$

La relation (1.12) donne ainsi :

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \left\{\mathcal{G}_{\lambda+i\varepsilon}(z,z') - \mathcal{G}_{\lambda-i\varepsilon}(z,z')\right\} = 2i\,\beta_\infty \frac{\Phi_\lambda(z)\,\Phi_\lambda(z')}{\Psi_\lambda(0)\,\Theta_\lambda(0)}.$$

Remarquons que $\Psi_\lambda(0)\,\Theta_\lambda(0) = |\Psi_\lambda(0)|^2 = |\Theta_\lambda(0)|^2 = c_\lambda^2(0) + [k_\infty^2 + \lambda]\, s_\lambda^2(0)$.

La formule de Stone (A.23) permet ainsi d'affirmer que pour tout $u \in L^2_{\rm comp}(\mathbb{R}^+)$, pour tout intervalle $J = [a,b] \subset \Lambda_e(A)$,

$$\begin{aligned}
\|E(J)u\|_X^2 &= \frac{1}{2i\pi} \lim_{\eta \searrow 0} \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{a-\eta}^{b+\eta} \left([R_A(\lambda + i\varepsilon) - R_A(\lambda - i\varepsilon)]\, u, u \right)_X \, \mathrm{d}\lambda \\
&= \frac{1}{2i\pi} \int_{\lambda \in [a,b]} \int_{z \in \mathbb{R}^+} \int_{z' \in \mathbb{R}^+} \left(\frac{2i\beta_\infty}{c_\lambda^2(0) + [k_\infty^2 + \lambda] s_\lambda^2(0)} \Phi_\lambda(z) \Phi_\lambda(z')\, u(z') \right) \mathrm{d}z'\, \overline{u(z)}\, \mathrm{d}z\, \mathrm{d}\lambda \\
&= \int_{\lambda \in [a,b]} \frac{\beta_\infty}{c_\lambda^2(0) + [k_\infty^2 + \lambda] s_\lambda^2(0)} |\, \langle \Phi_\lambda, \overline{u} \rangle_X \,|^2 \mathrm{d}\lambda.
\end{aligned}$$

Les passages à la limite $\eta \searrow 0$ et $\varepsilon \searrow 0$ sont justifiés par le théorème de convergence dominée puisque $u \in L^2_{\rm comp}(\mathbb{R}^+)$.

Ainsi, pour tout $u \in L^2_{\rm comp}(\mathbb{R}^+)$, on obtient la formule souhaitée (4.33). □

Ainsi, nous sommes en mesure d'énoncer la complétude des fonctions propres et des fonctions propres généralisées sous la forme suivante : pour tout $u \in L^2_{\rm comp}(\mathbb{R}^+)$,

$$u(z) = \sum_{\lambda \in \Lambda_p(A)} \frac{(u, \Phi_\lambda)_X}{\|\Phi_\lambda\|_X^2} \Phi_\lambda(z) + \int_{\lambda \in \Lambda_c(A)} \langle \Phi_\lambda, \overline{u} \rangle_X \, \Phi_\lambda(z)\, p_\lambda \, \mathrm{d}\lambda.$$

Dans cette formule, les valeurs propres sont comptées avec leur multiplicité, i.e. si une valeur propre λ est de multiplicité m, on prend en compte dans la formule m fois λ, avec m fonctions propres linéairement indépendantes.

La formule précédente permet de justifier la décomposition sur les modes guidés et les modes de radiation. Si $\varphi(x,z)$, vivant dans le guide ouvert uniforme, i.e. solution des équations

$$\begin{aligned}
&-\triangle \varphi - k^2 \varphi = 0, \text{ dans } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \,, \\
&\varphi(x,0) = 0, \text{ pour tout } x \in \mathbb{R},
\end{aligned}$$

est telle que $\varphi(x,.) \in L^2_{\rm comp}(\mathbb{R}^+)$, alors on peut décomposer φ sous la forme suivante :

$$\varphi(x,z) = \sum_{\lambda \in \Lambda_p(A)} \left(\widehat{a}_\lambda \, \mathrm{e}^{i\beta x} + \widehat{b}_\lambda \, \mathrm{e}^{-i\beta x} \right) \Phi_\lambda(z) + \int_{\lambda \in \Lambda_c(A)} \left(\widehat{a}_\lambda \, \mathrm{e}^{i\beta x} + \widehat{b}_\lambda \, \mathrm{e}^{-i\beta x} \right) \Phi_\lambda(z) \, \mathrm{d}\lambda. \qquad (4.35)$$

Dans cette équation, β, le nombre d'onde longitudinal, est défini par l'équation 1.20. Nous avons une superposition de modes allers et retours (i.e. propagatifs ou évanescents vers la gauche et vers la droite). Maitenant, une question se pose : que se passe-t-il si $\varphi(x,.) \notin L^2_{\rm comp}(\mathbb{R}^+)$? Nous allons voir que la formule de décomposition reste valable. Pour cela, nous allons introduire la transformation de Fourier généralisée associée à l'opérateur transverse A.

Démontrons avant cela le lemme technique auquel nous avons fait référence dans la démonstration de la proposition 4.6.

Lemme 4.7 *Soit $\lambda \in \Lambda_c$. Alors, en posant $\beta_\infty = \sqrt{\lambda + k_\infty^2}$, on a :*

$$\left| \Phi_\lambda^\pm(z) \right|^2 p_\lambda^\pm \leq \frac{1}{\pi \beta_\infty}, \quad \textit{et} \quad \left| \frac{\partial \Phi_\lambda^\pm}{\partial z}(z) \right|^2 p_\lambda^\pm \leq \frac{2\lambda + k^\pm(z)^2 + k_\infty^2}{\pi \beta_\infty}.$$

Démonstration. Nous utilisons la décomposition des fonctions propres généralisées vue au chapitre 1 : équation (1.12), qui est valable pour tout $\lambda \in \Lambda_c$. Nous utilisons également l'expression suivante de $p_\lambda^\pm$: $p_\lambda^\pm := \beta_\infty/(\pi|\Theta_\lambda^\pm(0)|^2)$, qui n'est autre qu'une réécriture de l'équation (4.34), vue au chapitre 1. Remarquer par ailleurs que $|\Theta_\lambda^\pm(0)| = |\Psi_\lambda^\pm(0)|$. Ainsi,

$$\left|\Phi_\lambda^\pm(z)\right|^2 p_\lambda^\pm \;\leq\; \frac{\left(|\Psi_\lambda^\pm(z)| + |\Theta_\lambda^\pm(z)|\right)^2}{4\pi\beta_\infty} \leq \frac{\left(2\sqrt{1+\frac{\lambda+k_\infty^2}{\lambda+k^\pm(z)^2}}\right)^2}{4\pi\beta_\infty} \leq \frac{1}{\pi\beta_\infty}.$$

D'autre part,

$$\frac{\partial\Phi_\lambda^\pm}{\partial z}(z) = \frac{1}{2i\beta_\infty}\left(\Theta_\lambda^\pm(0)\frac{\partial\Psi_\lambda^\pm}{\partial z}(z) - \Psi_\lambda^\pm(0)\frac{\partial\Theta_\lambda^\pm}{\partial z}(z)\right),$$

où

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\Theta_\lambda^\pm}{\partial z}(z) &= \left[-\sqrt{\lambda+k_\pm^2(z)}\,\sin\left(\sqrt{\lambda+k_\pm^2(z)}(z-h^\pm)\right) - i\beta_\infty\,\cos\left(\sqrt{\lambda+k_\pm^2(z)}(z-h^\pm)\right)\right]\mathrm{e}^{-i\beta_\infty h^\pm},\\
\frac{\partial\Psi_\lambda^\pm}{\partial z}(z) &= \left[-\sqrt{\lambda+k_\pm^2(z)}\,\sin\left(\sqrt{\lambda+k_\pm^2(z)}(z-h^\pm)\right) + i\beta_\infty\,\cos\left(\sqrt{\lambda+k_\pm^2(z)}(z-h^\pm)\right)\right]\mathrm{e}^{i\beta_\infty h^\pm}.
\end{aligned}$$

D'où,

$$\left|\frac{\partial\Phi_\lambda^\pm}{\partial z}(z)\right|^2 p_\lambda^\pm \;\leq\; \frac{\left(|\frac{\partial\Psi_\lambda^\pm}{\partial z}(z)| + |\frac{\partial\Theta_\lambda^\pm}{\partial z}(z)|\right)^2}{4\pi\beta_\infty} \leq \frac{\left(2\sqrt{\lambda+k_\infty^2+\lambda+k^\pm(z)^2}\right)^2}{4\pi\beta_\infty}.$$

□

Transformation de Fourier généralisée

Tout ce travail sur la transformation de Fourier généralisée est extrait de l'article de Christophe Hazard [Haz09]. La transformation de Fourier généralisée associée à un opérateur autoadjoint est un outil qui est bien connu, voir par exemple [Wei87].

À partir de l'expression de la mesure spectrale vue à la propriété 4.10, nous pouvons définir la transformation de Fourier généralisée associée à l'opérateur A. Cette transformation est en fait l'opérateur de décomposition sur la famille des fonctions propres et des fonctions propres généralisées $\{\Phi_\lambda, \lambda \in \Lambda(A)\}$.

Définition 4.3 (transformation de Fourier généralisée) *Nous définissons $\mathcal{F}_A$ la transformation de Fourier généralisée associée à l'opérateur A :*

$$\mathcal{F}_A u(\lambda) := \langle\Phi_\lambda, \overline{u}\rangle_X = \int_{\mathbb{R}^+} u(z)\,\Phi_\lambda(z)\,\mathrm{d}z, \quad \forall\lambda\in\Lambda(A), \forall u \in L^2_{\mathrm{comp}}(\mathbb{R}^+). \tag{4.36}$$

Nous noterons parfois $\widehat{u}_\lambda$ la quantité $\mathcal{F}_A u(\lambda)$. Définissons maintenant la mesure mes par :

$$\mathrm{dmes} := \sum_{\lambda\in\Lambda_p(A)} p_\lambda\,\delta_\lambda + p_\lambda\,\mathrm{d}\lambda|_{\Lambda_c(A)}, \tag{4.37}$$

où δ_λ est la mesure de Dirac au point λ et $\mathrm{d}\lambda|_{\Lambda_c(A)}$ est la mesure de Lebesgue restreinte à $\Lambda_c(A)$ et p_λ est défini en (4.34). Nous sommes maintenant en mesure de prolonger la transformation de Fourier généralisée définie en (4.36).

Proposition 4.11 *La transformation de Fourier généralisée $\mathcal{F}_A$ définie en (4.36) se prolonge par densité en une application unitaire de $L^2(\mathbb{R}^+)$ dans $L^2(\Lambda(A);\mathrm{dmes})$.*

$\mathcal{F}_A$ diagonalise l'opérateur A dans le sens où pour toute fonction mesurable f,

$$f(A)u = \mathcal{F}_A^{-1}\, f(\lambda)\, \mathcal{F}_A u, \qquad \forall u \in D(f(A)) = \mathcal{F}_A^{-1}\left(L^2(\Lambda(A);(1+|f(.)|^2)\mathrm{dmes})\right), \tag{4.38}$$

où $f(\lambda)$ est l'opérateur de multiplication par $f(\lambda)$.

La transformation inverse $\mathcal{F}_A^{-1}$ est égale à l'adjoint $\mathcal{F}_A^*$ du fait du caractère unitaire de la transformation. $\mathcal{F}_A^{-1}$ est l'opérateur de recomposition sur la famille $\{\Phi_\lambda, \lambda \in \Lambda(A)\}$ dans le sens où pour tout $v \in L^2(\Lambda(A);\mathrm{dmes})$,

$$\mathcal{F}_A^{-1}(\widehat{v})(z) \;=\; \int_{\lambda\in\Lambda(A)} \widehat{v}_\lambda\, \Phi_\lambda(z)\, \mathrm{dmes}(\lambda). \tag{4.39}$$

Dans l'expression (4.39), l'intégrale est à entendre comme une intégrale impropre puisque $\widehat{u}$ n'appartient qu'à $L^2(\Lambda(A);\mathrm{dmes})$ a priori : on devrait écrire :

$$\mathcal{F}_A^{-1}(\widehat{v})(z) = \sum_{\lambda\in\Lambda_p(A)} p_\lambda\, \widehat{v}(\lambda)\, \Phi_\lambda(z) + \lim_{\varepsilon\searrow 0, R\to+\infty} \int_{-k_\infty^2+\varepsilon}^{R} \widehat{v}(\lambda)\, \Phi_\lambda(z)\, p_\lambda\, \mathrm{d}\lambda.$$

De même, pour toute fonction $u \in L^2(\mathbb{R}^+)$, on écrira :

$$\int_{\mathbb{R}^+} u(z)\, \Phi_\lambda(z)\, \mathrm{d}z = \lim_{R\to+\infty} \int_0^R u(z)\, \Phi_\lambda(z)\, \mathrm{d}z,$$

qui est une intégrale impropre.

Démonstration. Nous reprenons la démonstration de [Haz09]. De l'expression (4.33), nous déduisons, en utilisant le théorème spectral, que pour toute fonction f mesurable, pour tout $u, v \in L^2_{\mathrm{comp}}(\mathbb{R}^+)$, tel que $u \in D(f(A)) = \left\{u \in X, \int_{\mathbb{R}} |f(\lambda)|^2 (\mathrm{d}E_\lambda u, u) < +\infty\right\}$,

$$\begin{aligned}(f(A)\, u, v)_{L^2(\mathbb{R}^+)} &= \int_{\mathbb{R}^+}\int_{\Lambda(A)} f(\lambda)\, \langle \Phi_\lambda, \overline{u}\rangle\, \Phi_\lambda(z)\, \overline{v(z)}\, \mathrm{dmes}\, \mathrm{d}z \\ &= (f(\lambda)\mathcal{F}_A u, \mathcal{F}_A v)_{L^2(\Lambda(A);\mathrm{dmes})}.\end{aligned}$$

En prenant $f(\lambda) = 1$, on voit que $\mathcal{F}_A$ est une isométrie de $L^2_{\mathrm{comp}}(\mathbb{R}^+)$ dans $L^2(\Lambda(A);\mathrm{dmes})$. Par densité de $L^2_{\mathrm{comp}}(\mathbb{R}^+)$ dans $L^2(\mathbb{R}^+)$, on montre alors que $\mathcal{F}_A$ se prolonge en une isométrie de $L^2(\mathbb{R}^+)$ dans $L^2(\Lambda(A);\mathrm{dmes})$. La formule (4.38) vient alors de la formule :

$$(f(A)u, v)_{L^2(\mathbb{R}^+)} = (f(\lambda)\mathcal{F}_A u, \mathcal{F}_A v)_{L^2(\Lambda(A);\mathrm{dmes})}, \tag{4.40}$$

qui est valable pour tout $u \in D(f(A))$, pour tout $v \in L^2(\mathbb{R}^+)$.

L'adjoint $\mathcal{F}^*$ est défini par :

$$(\mathcal{F}_A^*\widehat{u}, v)_{L^2(\mathbb{R}^+)} = (\widehat{u}, \mathcal{F}_A v)_{L^2(\Lambda(A);\mathrm{dmes})} = \int_{\Lambda(A)} \widehat{u}(\lambda) \int_{\mathbb{R}^+} \overline{v(z)}\, \Phi_\lambda(z)\, \mathrm{d}z\, \mathrm{dmes}(\lambda).$$

En permutant les deux intégrales (ce qui est justifié si $\widehat{u}$ a un support compact qui ne contient pas $-k_\infty^2$ car p_λ a une singularité dans le cas où $\lambda = -k_\infty^2$ est solution de la relation de dispersion, i.e. pour les fréquences de coupure définies à l'équation (1.15)), on obtient alors l'équation (4.39), qui est valable pour tout $v \in L^2(\Lambda(A);\mathrm{dmes})$.

Il reste à montrer que l'image de $\mathcal{F}_A$ est $L^2(\Lambda(A);\mathrm{dmes})$ tout entier. Prenons une fonction $\widehat{u}$ orthogonale à l'image de $\mathcal{F}_A$. Soit f une fonction bornée. On a :

$$(f(\lambda)\,\widehat{u},\mathcal{F}_A v)_{L^2(\Lambda(A);\mathrm{dmes})} = (\widehat{u},\overline{f(\lambda)}\mathcal{F}_A v)_{L^2(\Lambda(A);\mathrm{dmes})}. \tag{4.41}$$

Noter ensuite que $\mathcal{F}_A\overline{f(A)}v = \mathcal{F}_A\mathcal{F}_A^*\overline{f(\lambda)}\mathcal{F}_A v$, d'après l'équation (4.38). $\mathcal{F}_A\mathcal{F}_A^*$ est la projection orthogonale sur l'image de $\mathcal{F}_A$. Puis, en utilisant (4.40), on a :

$$\|\mathcal{F}_A\overline{f(A)}v\|^2_{L^2(\Lambda(A);\mathrm{dmes})} = \|\overline{f(A)}v\|^2_{L^2(\mathbb{R}^+)} = \|\overline{f(\lambda)}\mathcal{F}_A v\|^2_{L^2(\Lambda(A);\mathrm{dmes})}.$$

On en déduit que $\mathcal{F}_A\overline{f(A)}v = \overline{f(\lambda)}\mathcal{F}_A v$. En remplaçant dans (4.41), on en déduit :

$$(f(\lambda)\,\widehat{u},\mathcal{F}_A v)_{L^2(\Lambda(A);\mathrm{dmes})} = (\widehat{u},\mathcal{F}_A\overline{f(A)}v)_{L^2(\Lambda(A);\mathrm{dmes})} = 0$$

puisque $\widehat{u}$ est orthogonale à l'image de $\mathcal{F}_A$. Ainsi, $f(\lambda)\widehat{u}$ est orthogonale à l'image de $\mathcal{F}_A$, pour toute fonction f bornée. En prenant $v = \overline{\Phi_\lambda(z)}\chi_B(z)$, où $\chi_B(z)$ est la fonction indicatrice d'un ensemble borné $B \subset \mathbb{R}^+$, on a : $(\mathcal{F}_A v)(\lambda) > 0, \forall\lambda \in \Lambda$. En prenant ensuite $f_n = \overline{\widehat{u}(\lambda)}\,\chi_{\{\lambda,|\widehat{u}(\lambda)|<n\}}(\lambda)$ (qui est bien une fonction bornée), on a :

$$(f_n(\lambda)\,\widehat{u},\mathcal{F}_A v)_{L^2(\Lambda(A);\mathrm{dmes})} = \int_{\{\lambda\in\Lambda(A),|\widehat{u}(\lambda)|<n\}} |\widehat{u}(\lambda)|^2(\mathcal{F}_A v)(\lambda)\,\mathrm{dmes}(\lambda).$$

On en déduit que $\widehat{u}(\lambda) = 0$, pour tout $\lambda \in \Lambda(A)$ tel que $|\widehat{u}(\lambda)| < n$. Puis, comme la mesure de l'ensemble $\{\lambda \in \Lambda(A), |\widehat{u}(\lambda)| \geq n\}$ tend vers 0, on en déduit que $\widehat{u} = 0$, puis que l'image de $\mathcal{F}_A$ est $L^2(\Lambda(A);\mathrm{dmes})$. □

Remarque 4.10 : *La transformation de Fourier standard n'est autre qu'un cas particulier de transformation de Fourier généralisée. C'est en fait la transformation de Fourier généralisée associée à l'opérateur $-\triangle$ sur $\mathbb{R}^n$.*

Nous avons, grâce à la proposition 4.11, montré que la formule de complétude des fonctions propres et des fonctions propres généralisées s'écrit : pour tout $u \in L^2(\mathbb{R}^+)$,

$$u = \mathcal{F}_A^{-1}\mathcal{F}_A u = \sum_{\lambda\in\Lambda_p(A)} \frac{\mathcal{F}_A u(\lambda)}{\|\Phi_\lambda\|_X^2}\Phi_\lambda + \int_{\lambda\in\Lambda_c(A)} \mathcal{F}_A u(\lambda)\,\Phi_\lambda\,p_\lambda\,\mathrm{d}\lambda.$$

Ainsi, nous pouvons décomposer sur les modes guidés et les modes de radiation avec l'équation (4.35) toute fonction φ vivant dans le guide ouvert uniforme, qui est telle que $\varphi(x,.) \in L^2(\mathbb{R}^+)$. Nous allons maintenant voir que l'on peut étendre la transformation de Fourier généralisée à un espace de distributions $\mathcal{S}'_A(\mathbb{R}^+)$ similaire à l'espace de distribution de Schwartz $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ pour la transformation de Fourier standard. Ceci nous permettra de justifier la décomposition (4.35) pour des fonctions qui ne sont pas dans $L^2(\mathbb{R}^+)$. Cette généralisation est importante, puisqu'a priori, dans un problème à géométrie ouverte, comme celui qu'on considère dans ce chapitre, les fonctions que l'on manipule ne sont pas nécessairement dans $L^2(\mathbb{R}^+)$ pour toute section verticale. Penser par exemple au cas homogène, le champ diffracté décroît comme $1/\sqrt{r}$, où $r = \sqrt{x^2+z^2}$, or ceci n'est pas dans $L^2(\mathbb{R}^+)$ (par rapport à z) pour toute section verticale.

La construction de cet espace est l'objet du papier [Haz09]. Nous rappelons ici simplement les résultats essentiels. La première étape consiste à remarquer que la transformation de Fourier généralisée, tout comme la transformation de Fourier standard, échange la régularité d'une fonction dans la variable physique avec la décroissance à l'infini de la transformée dans la variable spectrale et vice versa.

Relation entre la décroissance à l'infini et la régularité

Tout d'abord, l'équation (4.38) en prenant $f(A) = A^n$ permet de montrer le résultat suivant : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u \in D(A^n) \text{ si, et seulement si, } (1+|\lambda|^n)\mathcal{F}_A u \in L^2(\Lambda(A);\mathrm{dmes}).$$

Or, la condition $u \in D(A^n)$ peut se réécrire :

$$u \in D(A^n) \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} u|_{]0,h[} \in H^2(0,h) \text{ et } u|_{]h,+\infty[} \in H^2(h,+\infty), \\ \\ \dfrac{\mathrm{d}^{2j}u}{\mathrm{d}z^{2j}}(0) = 0, \text{ pour tout } j = 0,\dots,n-1, \\ \\ \left[\left(\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}+k^2\right)^j u\right]_h = \left[\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}+k^2\right)^j u\right]_h = 0, \text{ pour tout } j = 0,\dots,n-1. \end{array} \right.$$

Nous notons $[f]_h := \lim_{\varepsilon \searrow 0} f(h+\varepsilon) - f(h-\varepsilon)$ le saut de f en h.

Nous avons ainsi montré comment la régularité en variable physique se transforme en décroissance à l'infini dans la variable de Fourier. La propriété suivante démontre la réciproque :

Proposition 4.12 *En supposant que l'on n'est pas sur une fréquence de coupure, définie par (1.15), nous avons l'équivalence suivante : pour tout $u \in L^2(\mathbb{R}^+)$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$z^n u(z) \in L^2(\mathbb{R}^+) \text{ si, et seulement si, } D_\lambda^n \mathcal{F}_A|_{\Lambda_c(A)} u \in L^2(\Lambda(A);\mathrm{dmes}),$$

où D_λ est défini par : $D_\lambda \widehat{u} := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}(\beta_\infty \widehat{u})$.

On rappelle que sur le spectre continu, $\beta_\infty = \sqrt[i\mathbb{R}^+]{\lambda + k_\infty^2} = \sqrt{\lambda + k_\infty^2}$.

Démonstration. Voir l'article [Haz09]. □

Extension de la transformation de Fourier généralisée à un espace de distributions

Nous sommes maintenant en mesure de construire l'espace de distributions. Tout d'abord, notons tout de suite que la construction de cet espace $\mathcal{S}'_A(\mathbb{R}^+)$ est valide lorsqu'on se place en dehors des fréquences de coupure. En effet, nous aurons besoin d'appliquer la proposition 4.12.

Nous commençons par définir les espaces $\mathcal{S}_{n,m}$, pour $n, m \in \mathbb{N}$:

$$\mathcal{S}_{n,m} := \{u \in L^2(\mathbb{R}^+),\ u \in D(A^n),\ x^m A^n u \in L^2(\mathbb{R}^+)\}.$$

On définit alors l'espace $\mathcal{S}_A(\mathbb{R}^+)$:

$$\mathcal{S}_A(\mathbb{R}^+) := \bigcap_{n,m\in\mathbb{N}} \mathcal{S}_{n,m}.$$

$\mathcal{S}_A(\mathbb{R}^+)$ est l'espace des fonctions tests (similaire à l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$). On peut caractériser $\mathcal{S}_A(\mathbb{R}^+)$ comme l'espace des fonctions infiniment dérivables sur $(0,h)$ et sur $(h,+\infty)$, à décroissance rapide à l'infini ($\lim_{z\to+\infty} \mathrm{d}^n/\mathrm{d}z^n(z^m u(z)) = 0$ pout tout $m, n \in \mathbb{N}$) et satisfaisant les conditions :

$$\frac{\mathrm{d}^{2n}u}{\mathrm{d}z}(0) = 0 \quad \text{et} \quad \left[\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}+k^2\right)^n u\right]_h = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}+k^2\right)^n u\right]_h = 0, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Nous montrons ensuite la propriété suivante :

Proposition 4.13 *L'espace $\mathcal{S}_A(\mathbb{R}^+)$ vérifie les propriétés suivantes :*

$\mathcal{S}_A(\mathbb{R}^+)$ *est un espace nucléaire,* $\mathcal{S}_A(\mathbb{R}^+) \subset L^2(\mathbb{R}^+)$, $\mathcal{S}_A(\mathbb{R}^+)$ *est dense dans* $L^2(\mathbb{R}^+)$,
$\mathcal{S}_A(\mathbb{R}^+) \subset D(A)$ *et* $A\mathcal{S}_A(\mathbb{R}^+) \subset \mathcal{S}_A(\mathbb{R}^+)$,

où à chaque fois que nous notons une inclusion, les inclusions sont continues.

Démonstration. Voir l'article [Haz09]. □

L'espace des distributions est alors défini comme l'espace dual $\mathcal{S}'_A(\mathbb{R}^+)$ de $\mathcal{S}_A(\mathbb{R}^+)$. Ce qu'on appelle espace dual ici est l'espace des formes *antilinéraires* continues (et non pas linéraires). Si l'on identifie $L^2(\mathbb{R}^+)$ à son dual (possible via le théorème de Riesz), on a alors la chaîne d'inclusions :

$$\mathcal{S}'_A(\mathbb{R}^+) \subset L^2(\mathbb{R}^+) \subset \mathcal{S}_A(\mathbb{R}^+). \tag{4.42}$$

Le produit de dualité entre $\mathcal{S}'_A(\mathbb{R}^+)$ et $\mathcal{S}_A(\mathbb{R}^+)$, que l'on note $\langle .,. \rangle$, est ainsi une extension du produit scalaire sur $L^2(\mathbb{R}^+)$ $(.,.)_{L^2(\mathbb{R}^+)}$:

$$\langle u, v \rangle = (u, v)_{L^2(\mathbb{R}^+)}, \ \forall u \in L^2(\mathbb{R}^+), v \in \mathcal{S}_A(\mathbb{R}^+).$$

L'opérateur A peut ainsi être appliqué à un élément de $\mathcal{S}'_A(\mathbb{R}^+)$ grâce à la relation :

$$\langle Au, v \rangle = \langle u, Av \rangle \,, \ \forall u \in \mathcal{S}'_A(\mathbb{R}^+), v \in \mathcal{S}_A(\mathbb{R}^+).$$

Question : qu'y a-t-il dans $\mathcal{S}'_A(\mathbb{R}^+)$? Beaucoup de choses ! En particulier, toutes les restrictions à $\mathbb{R}^+$ des distributions tempérées de $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ dont l'ordre est inférieur à 2 dans un voisinage de h.

On a ainsi détaillé les distributions physiques. En appliquant la transformation de Fourier généralisée, on obtient les distributions spectrales : on définit :

$$\widehat{\mathcal{S}}_A(\Lambda(A)) := \mathcal{F}_A \mathcal{S}_A(\mathbb{R}^+),$$

et $\widehat{\mathcal{S}}'_A(\Lambda(A))$ son espace dual. On note

$$\langle u, v \rangle_z := \langle u, v \rangle_{\mathcal{S}'_A(\mathbb{R}^+), \mathcal{S}_A(\mathbb{R}^+)}$$

le produit de dualité entre une distribution physique $u \in \mathcal{S}'_A(\mathbb{R}^+)$ et une fonction test physique $v \in \mathcal{S}_A(\mathbb{R}^+)$ et

$$\langle \widehat{u}, \widehat{v} \rangle_\lambda := \langle \widehat{u}, \widehat{v} \rangle_{\widehat{\mathcal{S}}'_A(\Lambda(A)), \widehat{\mathcal{S}}_A(\Lambda(A))}$$

le produit de dualité entre une distribution spectrale $\widehat{u} \in \widehat{\mathcal{S}}'_A(\Lambda(A))$ et une fonction test spectrale $\widehat{v} \in \widehat{\mathcal{S}}_A(\Lambda(A))$. On peut ainsi définir la transformée de Fourier généralisée d'un élément de $\mathcal{S}'_A(\mathbb{R}^+)$ grâce à la relation :

$$\langle \mathcal{F}_A u, \widehat{v} \rangle_\lambda = \left\langle u, \mathcal{F}_A^{-1} \widehat{v} \right\rangle_z \,, \ \forall u \in \mathcal{S}'_A(\mathbb{R}^+), \forall \widehat{v} \in \widehat{\mathcal{S}}_A(\Lambda(A)).$$

En d'autres termes, $\widehat{\mathcal{S}}_A(\Lambda(A)) = \mathcal{F}_A \mathcal{S}'_A(\mathbb{R}^+)$. Les inclusions (4.42) sont transposées dans l'espace de Fourier :

$$\widehat{\mathcal{S}}'_A(\Lambda(A)) \subset L^2(\Lambda(A); \mathrm{dmes}) \subset \widehat{\mathcal{S}}_A(\Lambda(A)).$$

Question : qu'y-a-t-il dans $\widehat{\mathcal{S}}_A(\Lambda(A))$ et dans $\widehat{\mathcal{S}}'_A(\Lambda(A))$? D'après les résultats du paragraphe précédent, on a :

$$\widehat{\mathcal{S}}_A(\Lambda(A)) = \bigcap_{n,m \in \mathbb{N}} \widehat{\mathcal{S}}_{n,m},$$

où $\widehat{\mathcal{S}}_{n,m}$ est défini par : $\widehat{\mathcal{S}}_{n,m} := \mathcal{F}_A \mathcal{S}_{n,m}$, ce qui peut se réécrire :

$$\widehat{\mathcal{S}}_{n,m} = \left\{ \widehat{u}_\lambda \in L^2(\Lambda(A); \mathrm{dmes}),\ \lambda^n \widehat{u}_\lambda \in L^2(\Lambda(A); \mathrm{dmes}) \text{ et } D^m_\lambda(\lambda^n \widehat{u}_\lambda|_{\Lambda_c(A)}) \in L^2(\Lambda_c(A); p_\lambda \mathrm{d}\lambda) \right\}.$$

On montre alors le résultat suivant :

Proposition 4.14 *$\widehat{u} \in \widehat{\mathcal{S}}_A(\Lambda(A))$ si et seulement si $\widehat{u}|_{\Lambda_p(A)} \in \mathbb{C}^N$ (où N est le nombre de valeurs propres) et il existe $\widetilde{u} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ tel que*

$$\widehat{u}(\lambda) = \frac{1}{\beta_\infty}\, \widetilde{u}\,(\beta_\infty)\,,\ \forall \lambda \in \Lambda_c(A).$$

Démonstration. Voir l'article [Haz09]. □

Les éléments de $\widehat{\mathcal{S}}'_A(\Lambda(A))$ sont donc semblables aux distributions tempérées (distributions de Schwartz) sur $]-k_\infty^2, +\infty[$: toute distributon de $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ dont le support est inclus dans $]-k_\infty^2, +\infty[$, complétée par n'importe quelles valeurs sur $\Lambda_p(A)$ est un élément de $\widehat{\mathcal{S}}'_A(\Lambda(A))$.

Exemples de transformées de Fourier généralisées

Une fonction propre $\Phi_{\lambda_0}(z)$ a pour transformée de Fourier généralisée : $\mathcal{F}_A(\Phi_{\lambda_0}) = \|\Phi_{\lambda_0}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^+)}$.

Une fonction propre généralisée $\Phi_{\lambda_0}(z)$ a pour transformée de Fourier généralisée : $\mathcal{F}_A(\Phi_{\lambda_0}) = \delta_{\lambda_0}$.

Aparté : Propriétés de Riemann-Lebesgue

Grâce aux définitions de $\mathcal{S}_A(\mathbb{R}^+)$ et de $\widehat{\mathcal{S}}_A(\Lambda(A))$, nous pouvons démontrer les propriétés de Riemann-Lebesgue suivantes pour $\mathcal{F}_A$ et $\mathcal{F}_A^{-1}$.

Proposition 4.15 (propriétés de type Riemann-Lebesgue) *On a les propriétés de Riemann-Lebesgue suivantes :*

$$u \in L^1(\mathbb{R}^+) \ \Rightarrow\ \mathcal{F}_A(u)(\lambda) \text{ est continue et tend vers } 0 \text{ à l'infini, pour } \lambda \in \Lambda_c(A). \quad (4.43)$$

$$\widehat{u} \in L^1(\Lambda_c(A); p_\lambda \mathrm{d}\lambda) \ \Rightarrow\ (\mathcal{F}_A^{-1})_c(\widehat{u})(z) \text{ est continue et tend vers } 0 \text{ à l'infini, pour } z \in \mathbb{R}^+. \quad (4.44)$$

On a noté $(\mathcal{F}_A^{-1})_c(\widehat{u}) = (\mathcal{F}_A^{-1})(\widehat{u}|_{\Lambda_c(A)})$.

Démonstration. On généralise la démonstration donnée dans [RS75] avec la transformée de Fourier pour la transformée de Fourier généralisée. On commence par la propriété (4.43). Soit $u \in \mathcal{S}_A(\mathbb{R}^+)$. Alors, $\widehat{u}_\lambda \in \widehat{\mathcal{S}}_A(\Lambda(A))$. En particulier, $\widehat{u}_\lambda$ est continu et tend vers 0 à l'infini, pour $\lambda \in \Lambda_c(A)$.

De plus,

$$|\widehat{u}_\lambda| = \int_{\mathbb{R}^+} \Phi_\lambda(z)\, u(z)\, \mathrm{d}z \leq \left(\sup_{z \in \mathbb{R}^+} |\Phi_\lambda(z)| \right) \|u\|_{L^1(\mathbb{R}^+)},$$

Ceci nous prouve que $\|\widehat{u}_\lambda\|_\infty \leq C\|u\|_{L^1(\mathbb{R}^+)}$, où $\|\widehat{u}_\lambda\|_\infty = \sup \mathrm{ess}_\lambda |\widehat{u}_\lambda|$.

Par ailleurs, $\mathcal{S}_A(\mathbb{R}^+)$ est dense dans $L^1(\mathbb{R}^+)$ car $\mathcal{D}(0,h) \subset \mathcal{S}_A(\mathbb{R}^+)$ et $\mathcal{D}(h,+\infty) \subset \mathcal{S}_A(\mathbb{R}^+)$ sont denses respectivement dans $L^1(0,h)$ et $L^1(h,+\infty)$.

Via le théorème de prolongement unique (bounded linear transformation theorem ou BLT theorem), on en déduit que la transformation de Fourier généralisée se prolonge uniquement de $L^1(\mathbb{R}^+)$ dans l'ensemble des fonctions continues et s'annulant à l'infini.

Pour la propriété (4.44), c'est le même cheminement. Si $\widehat{u} \in \widehat{\mathcal{S}}_A(\Lambda_c(A))$, alors $(\mathcal{F}_A^{-1})_c(\widehat{u}) \in \mathcal{S}_A(\mathbb{R}^+)$, donc en particulier $(\mathcal{F}_A^{-1})_c(\widehat{u})$ est continu et tend vers 0 à l'infini.

On a aussi

$$\|(\mathcal{F}_A^{-1})_c(\widehat{u})\|_\infty \leq \int_{\Lambda_c(A)} |\widehat{u}_\lambda||\Phi_\lambda(z)|\, p_\lambda \,\mathrm{d}\lambda \leq C\|\widehat{u}_\lambda\|_{L^1(\Lambda_c(A);p_\lambda \mathrm{d}\lambda)}$$

De plus, d'après la propriété les propriétés vues dans la section sur Fourier généralisé, $\widehat{\mathcal{S}}_A(\Lambda_c(A))$ est dense dans $L^1(\Lambda_c(A); p_\lambda \mathrm{d}\lambda)$. On conclut avec le BLT theorem. □

Décomposition sur les modes dans l'espace de distribution

Revenons maintenant à notre problème dans le guide d'ondes ouvert, que nous écrivons au sens des distributions :

$$-\triangle\varphi - k^2\varphi = 0 \text{ dans } \mathcal{D}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{S}'_A(\mathbb{R}^+).$$

En appliquant la transformation de Fourier généralisée, en notant $\widehat{\varphi}_\lambda(x) = \mathcal{F}_A(\varphi(x,.))(\lambda)$, on obtient :

$$-\frac{\partial^2 \widehat{\varphi}_\lambda}{\partial x^2} + \lambda\, \widehat{\varphi}_\lambda = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}) \otimes \widehat{\mathcal{S}}'_A(\Lambda(A)). \tag{4.45}$$

La résolution de cette équation au sens des distributions n'est pas évidente. Mais en prenant la restriction de $\widehat{\varphi}$ à $\Lambda(A) \setminus \{0\}$ (i.e. en prenant des fonctions tests qui s'annulent au voisinage de $\lambda = 0$), on peut définir, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\widehat{a}_\lambda(x) &:= \left(\frac{\partial \widehat{\varphi}}{\partial x}(x,\lambda) + \sqrt[i\mathbb{R}^+]{\lambda}\, \widehat{\varphi}(x,\lambda)\right) \exp(-\sqrt[i\mathbb{R}^+]{\lambda}\, x), \\
\widehat{b}_\lambda(x) &:= \left(\frac{\partial \widehat{\varphi}}{\partial x}(x,\lambda) - \sqrt[i\mathbb{R}^+]{\lambda}\, \widehat{\varphi}(x,\lambda)\right) \exp(+\sqrt[i\mathbb{R}^+]{\lambda}\, x).
\end{aligned}$$

On a utilisé la détermination de la racine carrée avec coupure sur $i\mathbb{R}^+$, ainsi $\sqrt[i\mathbb{R}^+]{\lambda}$ est défini pour tout $\lambda \in \Lambda(A) \subset \mathbb{R}^+$. On ne peut pas définir $\widehat{a}_\lambda(x)$ et $\widehat{b}_\lambda(x)$ au voisinage de $\lambda = 0$ car $\sqrt[i\mathbb{R}^+]{\lambda}$ n'est pas une fonction dérivable en 0. On déduit de l'équation $-\partial^2\widehat{\varphi}/\partial x^2 + \lambda\,\widehat{\varphi} = 0$, que $\partial\widehat{a}_\lambda/\partial x = 0$ et $\partial\widehat{b}_\lambda/\partial x = 0$. On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et en dehors de $\lambda = 0$,

$$\widehat{\varphi}_\lambda(x) = \widehat{\sigma}_\lambda \exp(-\sqrt[i\mathbb{R}^+]{\lambda}\, x) + \widehat{\eta}_\lambda \exp(\sqrt[i\mathbb{R}^+]{\lambda}\, x), \tag{4.46}$$

où $\widehat{\sigma}_\lambda$ et $\widehat{\eta}_\lambda$ sont des distributions quelconques de $\widehat{\mathcal{S}}'_A(\Lambda(A))$. Cette dernière formule donne ensuite $u(x,z)$ par application de la transformation de Fourier généralisée inverse. Nous avons ainsi une formule de décomposition sur les modes guidés et les modes de radiation pour toute fonction u vivant dans le guide d'ondes ouvert uniforme si cette fonction est telle que sa transformée de Fourier généralisée est nulle au voisinage de $\lambda = 0$.

Mais si ce n'est pas le cas ? On ne sait pas résoudre l'équation (4.45) dans le cas général. Mais si l'on sait que pour tout x, $\widehat{\varphi}_\lambda(x)$ est une fonction de λ (et non pas une distribution), alors l'équation (4.46) est valable pour tout $\lambda \in \Lambda(A)$, y compris en $\lambda = 0$. En effet, nous avons montré, dans ce qui précède, que :

$$\widehat{\varphi}_\lambda(x) = \widehat{\sigma}_\lambda \exp(-\sqrt[i\mathbb{R}^+]{\lambda}\, x) + \widehat{\eta}_\lambda \exp(\sqrt[i\mathbb{R}^+]{\lambda}\, x) + \widehat{\psi}_\lambda(x)$$

où $\widehat{\psi}_\lambda(x)$ est une distribution à support dans $\mathbb{R} \times \{0\}$. Mais comme $\widehat{\varphi}_\lambda(x)$ est une fonction de λ, $\widehat{\psi}_\lambda(x) = 0$. Ainsi, par application de la transformation de Fourier généralisée inverse, nous obtenons une formule de décomposition sur les modes guidés et les modes de radiation.

Pour résumer, lorsque $\varphi(x,.) \notin L^2(\mathbb{R}^+)$, nous avons :

$$\widehat{\varphi}_\lambda(x) = \widehat{\sigma}_\lambda \exp(-\sqrt[i\mathbb{R}^+]{\lambda}\, x) + \widehat{\eta}_\lambda \exp(\sqrt[i\mathbb{R}^+]{\lambda}\, x)$$

dans deux cas : quand $\widehat{\varphi}_\lambda(x)$ s'annule au voisinage de $\lambda = 0$ et quand $\widehat{\varphi}_\lambda(x)$ est une fonction de λ, et non une distribution (ce qui peut arriver, par exemple la transformée de Fourier généralisée d'une fonction propre généralisée est un Dirac). C'est cette dernière condition ($\widehat{\varphi}_\lambda(x)$ est une fonction de λ) que nous utilisons dans tout le chapitre 4 (remarque 4.4, démontration de la proposition 4.5).

SIMULATIONS NUMÉRIQUES 5

SOMMAIRE

5.1 UTILISATION DE PMLS POUR BORNER LE DOMAINE DE CALCUL 185
5.1.1 Introduction de PMLs dans la (les) direction(s) transverse(s) 185
5.1.2 Décomposition modale 187
5.2 CONSTRUCTION DE CONDITIONS AUX LIMITES TRANSPARENTES 188
5.2.1 Introduction de PMLs dans la (les) direction(s) transverse(s) et longitudinale 188
5.2.2 Expression des opérateurs de Dirichlet-to-Neumann 190
5.2.3 Amélioration de la méthode avec des PMLs non orthogonales 198
5.3 UTILISATION D'UNE MÉTHODE MULTIMODALE 205
5.3.1 Explication de la méthode 206
5.3.2 Résultats numériques 209

L'OBJECTIF, dans ce chapitre, est de résoudre numériquement le problème de diffraction (ou de radiation) dans la jonction entre deux guides d'ondes. Ce problème est posé dans une géométrie non bornée. Il est donc nécessaire, comme on l'a vu au chapitre précédent, d'imposer une condition de rayonnement afin que le problème soit bien posé. Cette condition de rayonnement a pour rôle de sélectionner les ondes sortantes (et d'éliminer les ondes entrantes).

Dans le cas d'un milieu homogène à l'infini, c'est la condition de Sommerfeld qui joue ce rôle. Numériquement, cette condition peut être approchée et elle donne alors naissance à ce qu'on appelle les conditions aux limites absorbantes. Ainsi, on peut borner le domaine de calcul par un cercle (en 2D) ou une sphère (en 3D) sur laquelle on impose une condition qui approxime la condition de Sommerfeld, par exemple $\partial\varphi/\partial n - ik\varphi = 0$. Dans le cas d'un guide fermé, nous avons vu, en introduction de ce mémoire, que la décomposition sur les modes permet d'expliciter des conditions d'ondes sortantes, qui peuvent être utilisées dans des méthodes numériques, pour développer des conditions aux limites transparentes, fondées sur des opérateurs de Dirichlet-to-Neumann.

Comme on l'a vu au chapitre précédent, la condition d'onde sortante qui généralise celle des guides fermés utilise la décomposition sur les modes guidés et les modes de radiation, c'est la

condition de rayonnement modale ($\mathcal{R}^{\pm}$) (cf. définition 4.1). Cela pourrait donner lieu à une méthode numérique pour borner le domaine de calcul dans la direction de propagation, mais nous avons vu, lors de la conclusion du chapitre précédent, que celle-ci serait coûteuse car elle fait intervenir la transformation de Fourier généralisée.

L'idée est ici plutôt d'utiliser les PMLs (d'épaisseur finie) pour borner le domaine de calcul dans les directions transverses, comme dans le chapitre 3. Cette méthode a le très grand avantage d'être très simple d'utilisation. Les PMLs absorbent les ondes et sont « perfectly matched » à l'interface entre le domaine physique et la PML. Ainsi, en prenant une couche PML suffisamment grande, les ondes sont bien atténuées dans la PML et en imposant une condition en fin de couche PML de type Dirichlet homogène ou Neumann homogène, la solution calculée dans la zone physique correspond bien à la « vraie » solution physique. Nous décrivons l'introduction de PMLs dans les directions transverses à la section 5.1. Ainsi, le problème que l'on s'attachera à résoudre est celui où le guide est entouré d'une couche PML dans les directions transverses.

Quitte à utiliser des PMLs, il est légitime de se poser la question suivante : pourquoi ne pas utiliser des PMLs dans toutes les directions, y compris dans la direction longitudinale (et pas uniquement dans les directions transverses) ? C'est en effet une possibilité. Les PMLs permettent alors de prendre en compte le caractère sortant des ondes, dans toutes les directions (longitudinale et transverses). Cette technique nous donnera les solutions de référence pour les deux autres méthodes que nous utiliserons.

La première de ces méthodes est la construction de conditions aux limites transparentes pour borner le domaine de calcul dans la direction longitudinale. Ces conditions aux limites transparentes font intervenir des opérateurs de Dirichlet-to-Neumann (DtN) et permettent de poser un problème dans un domaine borné équivalent au problème initial dans la géométrie non bornée. Les opérateurs de Dirichlet-to-Neumann sont fondés sur les fonctions propres de l'opérateur transverse, avec PMLs de taille finie, opérateur que nous avons noté $\widetilde{A}_\alpha$ au chapitre 3. L'étude de ces opérateurs de Dirichlet-to-Neumann est l'objet de la section 5.2. Nous verrons que nous serons amenés à utiliser des PMLs non orthogonales, qui suivent la forme du guide d'ondes, de façon à toujours avoir une PML proche du cœur.

La deuxième méthode, appelée méthode multimodale, consiste à décomposer localement le champ dans chaque section transverse du guide perturbé sur les modes du guide droit correspondant, i.e. le guide dont les paramètres physiques sont invariants dans la direction de propagation et dont les valeurs sont celles de la section locale. Cette méthode a été étudiée intensivement pour les guides fermés, i.e. quand la section transverse du guide est bornée (voir par exemple [FP01] et [HL08]). Une tentative de généralisation d'une telle méthode pour le guide ouvert avec PMLs dans les directions transverses est l'objet de la section 5.3.

Dans tout ce chapitre, il n'y a pas de preuves. Il s'agit de présenter quelques pistes de méthodes numériques et des difficultés auxquelles nous avons été confrontées.

5.1 UTILISATION DE PMLS POUR BORNER LE DOMAINE DE CALCUL

5.1.1 Introduction de PMLs dans la (les) direction(s) transverse(s)

Nous rappelons que le problème que l'on considère est le suivant[1] : étant donné φ_0 une onde incidente (typiquement un mode guidé du guide de gauche se propageant vers la droite), trouver φ solution de

$$\begin{aligned} &-\mathrm{div}(\mu\nabla\varphi) - \omega^2\rho\,\varphi = 0 \text{ dans } \mathcal{O}, \\ &+ \text{ condition aux limites sur } \partial\mathcal{O}, \end{aligned}$$

où $\mathcal{O} = \mathbb{R}\times\Omega$ et où Ω est la section transverse, non bornée, tel que φ (resp. $\varphi - \varphi_0$) soit sortant quand $x \to +\infty$ (resp. quand $x \to -\infty$). Nous rappelons que μ et ρ sont des fonctions des coordonnées longitudinale et transverse(s), et que pour $\pm x \geq a$, le guide d'ondes est droit (μ et ρ ne dépendent plus que de la (des) coordonnée(s) transverse(s)).

L'introduction des PMLs dans la (ou les) direction(s) transverse(s) se fait comme dans la première partie. Nous rappelons ici brièvement les différentes étapes, sans les détailler davantage, puisque cela a déjà été fait au chapitre 2. On se place tout d'abord au delà de l'inhomogénéité (là où les paramètres physiques sont égaux à leur valeur à l'infini) : dans les cas que nous traitons, cela correspond à $z > b$ (en 2D) ou $\sqrt{y^2+z^2} > b$ (en 3D). Ainsi l'équation devient simplement :

$$-\triangle\varphi - k_\infty^2\varphi = 0. \tag{5.1}$$

L'idée est ensuite de prolonger analytiquement φ à une fonction $\breve{\varphi}$, qui dépend maintenant de variables complexifiées dans la (ou les) coordonnée(s) transverse(s). La fonction $\breve{\varphi}$ vérifie alors (5.1), mais dans un sens complexe. Ensuite, nous choisissons une paramétrisation d'un chemin dans le plan complexe pour la (ou les) variable(s) complexifiée(s). Cette paramétrisation permet alors de réécrire l'équation (5.1) sous une autre forme, ne dépendant plus que de variables réelles. C'est ce qui donne l'équation dans la PML.

Remarque 5.1 : *La méthode des PMLs est justifiée par le fait que la solution se prolonge analytiquement en dehors des inhomogénéités. A priori, rien ne justifie que l'on puisse prolonger analytiquement la solution ailleurs, donc a priori, nous ne pouvons pas mettre de PML à l'intérieur des inhomogénéités.*

Quand on tronque la PML (en imposant une condition de Neumann ou de Dirichlet homogène en fin de PML), si l'on a choisi de prolonger analytiquement dans le bon demi-plan complexe (ce qui revient, avec nos choix de PMLs douces ou abruptes, à prendre α_∞ avec un argument strictement inclus entre $-\pi/2$ et 0), nous postulons que l'on sélectionne la solution sortante. En effet, nous plaçons la PML dans un milieu homogène et on peut raisonnablement penser que la PML fonctionne correctement. Numériquement, ceci a été validé par le fait que la solution n'est pas modifiée en changeant les paramètres de la PML : taille, position et paramètre d'absorption.

Nous notons $\widetilde{\mathcal{O}} := \mathbb{R}\times\widetilde{\Omega}$ le domaine avec PMLs de taille finie dans la direction transverse. Dans nos applications, le domaine $\widetilde{\Omega}$ est de la forme suivante : $\widetilde{\Omega} =]0, h_\star[$ pour un guide bidimensionnel et, pour un guide tridimensionnel, $\widetilde{\Omega} = B(0, R_\star)$ (la boule de centre 0 et de rayon $R_\star$) avec une PML radiale et $\widetilde{\Omega} =]-R_\star, R_\star[\times]-R_\star, R_\star[$ avec PMLs cartésiennes.

Nous rappelons ici comment l'application de la méthode que nous venons d'énoncer modifie les équations dans les trois cadres d'application que nous regardons : en 2D, en 3D avec une PML radiale et en 3D avec des PMLs cartésiennes.

[1] Nous ne considérons ici qu'un problème de diffraction. Le problème de radiation se traite exactement de la même manière.

- Dans le cas d'un problème bidimensionnel, le problème est le suivant : trouver $\varphi(x,z)$ vérifiant

$$-\alpha\frac{\partial}{\partial z}\left(\alpha\,\mu\,\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\,\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)-\omega^2\rho\,\varphi=0 \text{ dans } \widetilde{\mathcal{O}}, \tag{5.2}$$

où α est le paramètre de la PML défini au chapitre 2 par l'équation (2.7). En pratique, nous utiliserons une PML abrupte, α est alors donné par :

$$\alpha(z)=\left\{\begin{array}{ll}1 & \text{si } z<h_2,\\ \alpha_\infty & \text{sinon,}\end{array}\right.$$

où $h_2\geq b$. On rappelle que pour $z>b$, les paramètres physiques sont égaux à leur valeur à l'infini. Nous ajoutons à cette équation une condition en $z=0$. Cela peut être une condition de Dirichlet : $\varphi=0$ (si l'on s'intéresse aux modes antisymétriques) ou de Neumann : $\partial\varphi/\partial z=0$ (si on s'intéresse aux modes symétriques). Nous imposons également une condition de Dirichlet ($\varphi=0$) ou de Neumann ($\partial\varphi/\partial z=0$) en bout de PML : en $z=h_\star$. Dans les applications, nous prendrons une condition de Neumann à la fois en $z=0$ et en $z=h_\star$. Enfin, nous devons imposer à la solution (φ) d'être sortante pour $x>a$, i.e. d'être propagative ou évanescente vers la droite (dans le sens des x croissants) et nous imposons à $\varphi-\varphi_0$ d'être sortante pour $x<-a$, i.e. d'être propagative ou évanescente vers la gauche (dans le sens des x décroissants). Ce caractère sortant des ondes n'est pas évident a priori à prendre en compte. Nous le ferons de deux manières : en utilisant une PML dans la direction longitudinale, d'une part, et en utilisant une décomposition sur les modes du guide avec PMLs, d'autre part.

- Le problème tridimensionnel avec une PML radiale est le suivant : trouver $\varphi(x,r,\theta)$ tel que

$$-\frac{\gamma\alpha}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\mu\,\frac{\alpha\gamma}{r}\,\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)-\frac{\gamma^2}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\mu\,\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\,\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)-\omega^2\rho\,\varphi=0 \text{ dans } \widetilde{\mathcal{O}}, \tag{5.3}$$

où les quantités α et γ on été définies par l'équation (2.14). Dans le cas d'une PML abrupte (le cas que nous allons utiliser en pratique),

$$\alpha(r)=\left\{\begin{array}{ll}1 & \text{si } r<R_2,\\ \alpha_\infty & \text{sinon,}\end{array}\right. \qquad \gamma(r)=\left\{\begin{array}{ll}1 & \text{si } r<R_2,\\ \frac{\alpha_\infty r}{\alpha_\infty R_2+r-R_2} & \text{sinon,}\end{array}\right.$$

avec $R_2\geq b$ et où la constante b est telle que pour $\sqrt{y^2+z^2}>b$, les paramètres physiques sont égaux à leur valeur à l'infini. Nous imposons également une condition de type Dirichet ou Neumann en bout de PML (en $r=R_\star$) et une condition d'onde sortante quand $x\to\pm\infty$.

- Le problème tridimensionnel avec PMLs cartésiennes est le suivant : trouver $\varphi(x,y,z)$ tel que

$$-\alpha^z\frac{\partial}{\partial z}\left(\alpha^z\,\mu\,\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)-\alpha^y\frac{\partial}{\partial y}\left(\alpha^y\,\mu\,\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\,\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)-\omega^2\rho\,\varphi=0 \text{ dans } \widetilde{\mathcal{O}}, \tag{5.4}$$

où α^s pour $s\in\{y,z\}$ est le paramètre de la PML défini par l'équation (2.21). Dans le cas d'une PML abrupte,

$$\alpha^s(s)=\left\{\begin{array}{ll}1 & \text{si } s<h_2^s,\\ \alpha_\infty^s & \text{sinon,}\end{array}\right.$$

où $h_2^s\geq b$. Nous imposons également une condition de type Dirichet ou Neumann en bout de PML et une condition d'onde sortante quand $x\to\pm\infty$.

Désormais ce sont ces problèmes (avec PMLs dans les directions transverses) que l'on va s'attacher à résoudre numériquement.

5.1.2 Décomposition modale

Dans toute la suite, nous allons chercher à utiliser les modes du guide d'ondes droit avec PMLs. Pourquoi cela ? Nous avons vu, au chapitre 3, que ces modes peuvent être classés dans trois catégories : modes guidés, modes à fuite et modes résultant de la discrétisation du continuum. Ces derniers sont exclusivement liés à la PML et n'ont par conséquent pas de sens physique. Au contraire, modes guidés et modes à fuite ont une existence intrinsèque au guide d'ondes ouvert, qui n'est pas liée à la PML. Le calcul de coefficients de transmission ou de réflexion de tels modes présente donc a priori un intérêt physique. Par ailleurs, l'utilisation des modes présente un intérêt numérique, puisqu'elle va nous permettre de construire des conditions aux limites transparentes, en nous appuyant sur des opérateurs de Dirichlet-to-Neumann, ainsi que de développer une méthode multimodale.

Présentons la décomposition modale que nous allons utiliser dans tout ce chapitre. Nous allons faire la présentation dans le cas d'un guide 2D, mais elle s'applique également dans le cas d'un guide 3D. Plaçons-nous dans un guide droit avec une PML (de taille finie) dans la direction transverse. Et imaginons que l'on puisse décomposer la solution φ sur les fonctions propres de l'opérateur $\widetilde{A}_\alpha$, i.e. l'opérateur avec une PML de taille finie. La solution φ admet alors la décomposition suivante :

$$\varphi(x,z) = \sum_n \left(a_n \, \mathrm{e}^{i\beta_n x} + b_n \, \mathrm{e}^{-i\beta_n x} \right) \Phi_n(z), \tag{5.5}$$

où Φ_n est fonction propre de l'opérateur transverse associé au guide, avec PMLs de taille finie (l'opérateur noté $\widetilde{A}_\alpha$ au chapitre 3) et où β_n est le nombre d'onde longitudinal correspondant, défini par $\beta_n = \sqrt[\mathbb{R}^-]{-\lambda_n}$ (définition prolongée pour $\lambda_n > 0$ par $\beta_n = i\sqrt{\lambda_n}$) où λ_n est la valeur propre associée à la fonction propre Φ_n. Notons que β_n est ainsi dans le quart de plan $\Im m(\beta_n) \geq 0$, $\Re e(\beta_n) \geq 0$ car les valeurs propres λ_n sont toutes à partie imaginaire négative ou nulle (si l'on choisit α le paramètre de la PML de telle manière que l'on dévoile les modes à fuite « sortants »[2]). Avec notre choix de β_n et en se rappelant de la dépendance en temps choisie dans tout ce mémoire ($\mathrm{e}^{-i\omega t}$), $\Phi_n(z)\,\mathrm{e}^{i\beta_n x}$ s'interprète comme un mode propagatif (si β_n est réel) ou évanescent (sinon) vers la droite et $\Phi_n(z)\,\mathrm{e}^{-i\beta_n x}$ comme un mode propagatif ou évanescent vers la gauche. Ceci va nous permettre de trier les composantes sortantes et entrantes.

Dans le cas d'un guide d'ondes fermé non absorbant (le cas présenté en introduction de ce mémoire), cette décomposition est justifiée par le fait que l'opérateur transverse est autoadjoint et à résolvante compacte, donc toute fonction appartenant à $L^2(\Omega)$, où Ω est la section transverse, peut se décomposer sur les fonctions propres. Dans notre cadre, l'opérateur transverse avec PML bornée est également à résolvante compacte, comme on l'a vu au théorème 3.1, mais rien n'assure a priori que les fonctions propres forment une base de $L^2(\widetilde{\Omega})$.[3] En fait, dans la section suivante, il n'est sans doute pas nécessaire d'avoir une propriété de base de $L^2(\widetilde{\Omega})$ pour les fonctions propres, nous avons simplement besoin de pouvoir décomposer la solution des équations. C'est peut-être trop demander à la famille des fonctions propres d'être une base de $L^2(\widetilde{\Omega})$. Une alternative, qui reste à explorer, pourrait être l'utilisation de la technique exposée au chapitre 3 pour la décomposition de la fonction de Green du guide ouvert uniforme (section 3.3). Il s'agit d'appliquer une transformation de Fourier dans la direction longitudinale (x), puis, en appliquant la transformation de Fourier inverse, de déformer le contour d'intégration de façon à procéder à un calcul de résidus. En utilisant cette technique, peut-être pouvons-nous réussir à montrer que la décompo-

[2] En effet, au chapitre 2, nous démontrons que c'est le cas pour le spectre essentiel et le spectre discret (donc pour tout le spectre de l'opérateur A_α, avec PML infinie) puis, au chapitre 3, nous rappelons que le spectre de l'opérateur $\widetilde{A}_\alpha$ (avec PML de taille finie) est « proche » du spectre de A_α (avec PML infinie).

[3] Voir la discussion que nous avons eue à ce sujet au chapitre 3 (dans la section annexe 3.4).

sition modale (5.5) est valable pour la solution φ des équations. Quoi qu'il en soit, dans toute la suite, nous allons supposer qu'une telle décomposition est possible.

5.2 Construction de conditions aux limites transparentes

5.2.1 Introduction de PMLs dans la (les) direction(s) transverse(s) et longitudinale

Nous avons utilisé des PMLs pour borner le domaine de calcul dans la (ou les) direction(s) transverse(s). Mais le domaine de calcul est toujours infini dans la direction longitudinale. Il paraît naturel d'utiliser également des PMLs pour borner le domaine dans cette direction. Formellement, on peut dire alors que ces PMLs vont permettre de prendre en compte le caractère sortant des ondes dans cette direction. Voyons comment on peut justifier cela par une étude modale. On utilise le fait que pour $\pm x \geq a$, le guide est droit. Nous allons faire la présentation dans le cas d'un guide 2D, mais elle s'applique également dans le cas d'un guide 3D.

Plaçons-nous dans un guide droit avec une PML (de taille finie) dans la direction transverse. Nous utilisons alors la décomposition de la solution (5.5). Comme la partie réelle et la partie imaginaire de β_n sont positives, $\mathrm{e}^{i\beta_n x}$ se prolonge analytiquement en une fonction exponentiellement décroissante pour tout x à partie réelle et à partie imaginaire strictement positive. Il est alors facile de sélectionner l'onde sortante dans la direction x en utilisant une autre PML, dans la direction longitudinale, cette fois. En effet, en prenant α_∞^x avec un argument strictement inclus dans $]-\pi/2, 0[$, $\mathrm{e}^{i\beta_n x}$, qui devient $\mathrm{e}^{i\beta_n/\alpha_\infty^x x}$ dans la PML, est évanescent dans la PML (lorsque $x \to +\infty$) puisque β_n est à partie réelle et à partie imaginaire positives. Au contraire, la fonction $\mathrm{e}^{-i\beta_n x}$, qui devient $\mathrm{e}^{-i\beta_n/\alpha_\infty^x x}$ dans la PML, est exponentiellement croissante quand $x \to +\infty$. La nouvelle PML (dans la direction longitudinale), interdisant l'onde exponentiellement croissante dans la PML, nous permet ainsi de sélectionner l'onde sortante.

Remarque 5.2 : *Dans certains domaines (acoustique avec écoulement cf. [BBBL05], élasticité cf. [BFJ03, SAC07, Bar09]), une attention particulière doit être apportée pour l'utilisation de PMLs dans la direction longitudinale dans des guides d'ondes. En effet, il existe des* modes inverses, *i.e. des modes propagatifs dans la direction x (avec un nombre d'onde longitudinal β réel) pour lesquels la vitesse de groupe et la vitesse de phase sont opposées. La vitesse de phase est égale à ω/β tandis que la vitesse de groupe est égale à $\partial\omega/\partial\beta$: c'est elle qui donne le sens de propagation des modes propagatifs. Lorsque l'on utilise une PML dans la direction longitudinale sur un mode inverse, alors celle-ci sélectionne en fonction du signe de la vitesse de phase donc le « mauvais » mode : le mode que l'on devrait sélectionner est exponentiellement croissant dans la PML.*

Dans notre cadre, il n'y a pas de tels modes. Les seuls modes propagatifs sont les modes guidés (ou plus précisément des approximations des modes guidés, approximation due à la PML de taille finie dans la direction transverse, cf. chapitre 3) et ces modes ne sont pas inverses[4].

Maintenant, rentrons un peu plus dans le détail de la formulation du problème avec PMLs à la fois dans les directions transverse et longitudinale. Nous imposons une condition de Neumann homogène en bout de PML (à la fois en x et en z). Nous notons $\mathcal{O}_b$ le domaine $\mathcal{O}_b :=]-a, a[\times\widetilde{\Omega} =]-a, a[\times]0, h_\star[$ et nous notons PML^+ (resp. PML^-) la couche PML à droite (resp. à gauche) de $\mathcal{O}_b$: $PML^+ :=]a, a+d[\times]0, h_\star[$ (resp. $PML^- :=]-a-d, -a[\times]0, h_\star[$) avec $d > 0$. Nous notons

[4] En effet, en utilisant la formule du min-max, on montre facilement que la fonction $\omega \mapsto \beta_n$ est une fonction croissante et positive, ce qui démontre que les vitesses de phase et de groupe sont de même signe.

également $\Sigma_{\pm a}$ la frontière $\{\pm a\} \times \widetilde{\Omega}$. Voir la figure 5.1 pour une représentation de la géométrie utilisée.

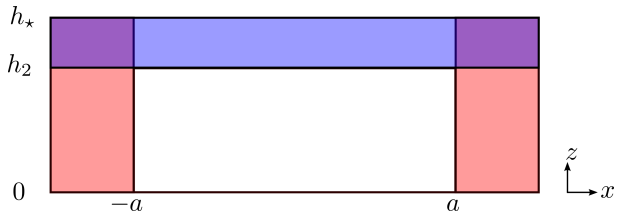

FIGURE 5.1 – *Géométrie pour le problème de diffraction 2D avec PMLs en x et en z. Les PMLs en x sont représentées en rouge, la PML en z est représentée en bleu. En violet, il y a à la fois une PML en x et en z.*

Nous notons α^x le paramètre de la PML en x et α^z celui de la PML en z. Nous allons utiliser des PMLs abruptes :

$$\alpha^x = \begin{cases} 1 & \text{si } -a < x < a, \\ \alpha^x_\infty & \text{sinon,} \end{cases} \qquad \alpha^z = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \le z < h_2, \\ \alpha^z_\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

La difficulté pour traiter le problème de diffraction est que dans le domaine PML^- (contrairement au domaine PML^+), ce n'est pas φ qui est sortant mais $\varphi - \varphi_0$. Pour cette raison, nous devons traiter les domaines $\mathcal{O}_b \cup PML^+$ et PML^- séparément.

Dans $\mathcal{O}_b \cup PML^+$, en multipliant les équations par $\frac{1}{\alpha^x\alpha^z}\overline{\psi}$ et en intégrant par parties, on obtient :

$$\int_{\mathcal{O}_b \cup PML^+} \left(\frac{\alpha^x}{\alpha^z}\,\mu\,\frac{\partial\varphi}{\partial x}\,\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial x} + \frac{\alpha^z}{\alpha^x}\,\mu\,\frac{\partial\varphi}{\partial z}\,\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial z} - \frac{\omega^2\rho}{\alpha^x\alpha^z}\,\varphi\,\overline{\psi} \right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}z + \int_{\Sigma_{-a}} \frac{\mu}{\alpha^z}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x}\,\overline{\psi}\,\mathrm{d}z = 0.$$

Dans PML^-, en multipliant les équations par $\frac{1}{\alpha^x\alpha^z}\overline{\psi}$ et en intégrant par parties, on obtient :

$$\int_{PML^-} \left(\frac{\alpha^x}{\alpha^z}\,\mu\,\frac{\partial\varphi_d}{\partial x}\,\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial x} + \frac{\alpha^z}{\alpha^x}\,\mu\,\frac{\partial\varphi_d}{\partial z}\,\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial z} - \frac{\omega^2\rho}{\alpha^x\alpha^z}\,\varphi_d\,\overline{\psi} \right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}z - \int_{\Sigma_{-a}} \frac{\mu\alpha^x}{\alpha^z}\,\frac{\partial\varphi_d}{\partial x}\,\overline{\psi}\,\mathrm{d}z = 0,$$

où $\varphi_d := \varphi - \varphi_0$. On utilise alors les conditions de raccord sur Σ_{-a} (α^x valant 1 dans $\mathcal{O}_b$) :

$$\begin{aligned} \varphi_d|_{\Sigma_{-a}} &= \varphi|_{\Sigma_{-a}} - \varphi_0|_{\Sigma_{-a}}, \\ \mu\,\alpha^x_\infty\,\frac{\partial\varphi_d}{\partial x}|_{\Sigma_{-a}} &= \mu\,\frac{\partial\varphi}{\partial x}|_{\Sigma_{-a}} - \mu\,\frac{\partial\varphi_0}{\partial x}|_{\Sigma_{-a}}. \end{aligned}$$

En faisant la somme des deux équations variationnelles, on obtient la formulation variationnelle suivante : trouver $\varphi \in H^1(\mathcal{O}_b \cup PML^+)$ et $\varphi_d \in H^1(PML^-)$ tels que $\varphi_d|_{\Sigma_{-a}} = \varphi|_{\Sigma_{-a}} - \varphi_0|_{\Sigma_{-a}}$ et tels que pour tout $\psi \in H^1(PML^- \cup \mathcal{O}_b \cup PML^+)$, on ait :

$$\begin{aligned} &\int_{\mathcal{O}_b \cup PML^+} \left(\frac{\alpha^x}{\alpha^z}\,\mu\,\frac{\partial\varphi}{\partial x}\,\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial x} + \frac{\alpha^z}{\alpha^x}\,\mu\,\frac{\partial\varphi}{\partial z}\,\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial z} - \frac{\omega^2\rho}{\alpha^x\alpha^z}\,\varphi\,\overline{\psi} \right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}z \\ &\quad + \int_{PML^-} \left(\frac{\alpha^x}{\alpha^z}\,\mu\,\frac{\partial\varphi_d}{\partial x}\,\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial x} + \frac{\alpha^z}{\alpha^x}\,\mu\,\frac{\partial\varphi_d}{\partial z}\,\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial z} - \frac{\omega^2\rho}{\alpha^x\alpha^z}\,\varphi_d\,\overline{\psi} \right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}z = -\int_{\Sigma_{-a}} \frac{\mu}{\alpha^z}\,\frac{\partial\varphi_0}{\partial x}\,\overline{\psi}\,\mathrm{d}z. \end{aligned}$$

C'est cette formulation variationnelle que nous allons discrétiser pour obtenir nos solutions de référence.

5.2.2 Expression des opérateurs de Dirichlet-to-Neumann

Dans le cas des guides d'ondes fermés non dissipatifs (le cas présenté en introduction de ce mémoire), une alternative à l'utilisation de PMLs dans la direction longitudinale est l'utilisation de conditions aux limites transparentes, fondées sur des opérateurs de Dirichlet-to-Neumann (DtN), pour borner le domaine de calcul. Nous avons brièvement expliqué comment obtenir ces opérateurs de DtN dans l'introduction du mémoire. Un intérêt de ces conditions est qu'elles évitent d'avoir à mailler une zone non physique supplémentaire. De plus, elles peuvent être utilisées, même en présence de modes inverses, contrairement aux PMLs. Dans cette section, nous allons chercher à construire de telles conditions aux limites transparentes pour le cas du guide d'ondes entouré de PML.

Ces conditions aux limites transparentes sont fondées sur la construction d'opérateurs dits de Dirichlet-to-Neumann (DtN), puisqu'ils associent à la donnée de Dirichlet sur une section du guide Σ ($\varphi|_\Sigma$) sa donnée de Neumann ($\partial\varphi/\partial n|_\Sigma$). Ces opérateurs de Dirichlet-to-Neumann ont été utilisés initialement dans l'espace libre, puis dans des guides d'ondes fermés. Nous pouvons citer les travaux de Givoli et Keller [KG89], [Giv92], [GK90], de Fix et Marin [FM78], de Golstein (pour des guides d'ondes fermés) [Gol82] et de Lenoir et Tounsi (dans le cadre de l'hydrodynamique) [LT88].

Dans le cas qui nous intéresse, rappelons que l'équation que l'on cherche à résoudre est posée dans $\widetilde{\mathcal{O}}$: dans le cas d'un guide 2D, c'est l'équation (5.2), dans le cas d'un guide 3D avec une PML radiale, c'est l'équation (5.3) et dans le cas d'un guide 3D avec PMLs cartésiennes, c'est l'équation (5.4). On ajoute des conditions de type Dirichlet ou Neumann sur $\partial\widetilde{\mathcal{O}}$ et une condition d'onde sortante : φ est sortant pour $x > a$ et $\varphi - \varphi_0$ est sortant pour $x < -a$. Ce sont les conditions aux limites transparentes que nous allons développer ici qui vont rendre compte de ce caractère sortant.

Dans la suite, nous allons faire la présentation dans le cas d'un guide 2D mais tout se généralise sans problème pour un guide d'ondes 3D. Les conditions transparentes que nous allons construire sont fondées sur le fait que pour $\pm x \geq a$, la géométrie est celle d'un guide droit. Nous utilisons alors la décomposition de la solution (5.5).

Regardons ce que se passe pour $x \geq a$. En utilisant la condition d'onde sortante, on obtient :

$$\varphi(x,z) = \sum_n a_n \, \mathrm{e}^{i\beta_n^+(x-a)} \, \Phi_n^+(z), \text{ pour } x \geq a,$$

où les Φ_n^+ sont les fonctions propres de l'opérateur transverse associé au demi-guide de droite (pour $x \geq a$), avec PMLs de taille finie et où les β_n^+ sont les nombres d'onde longitudinaux correspondants. On en déduit que

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}(a,z) = \sum_n a_n \, i\beta_n^+ \, \Phi_n^+(z).$$

Donnons maintenant une expression explicite. Notons $\Sigma_a := \{a\} \times \widetilde{\Omega}$, où $\widetilde{\Omega}$ est le domaine transverse avec une PML de taille finie ; en 2D, $\widetilde{\Omega} =]0, h_\star[$. Le coefficient a_n est la projection de $\varphi|_{\Sigma_a}$ sur le sous-espace propre associée à la fonction propre Φ_n^+, que l'on va noter $P_n^+\varphi|_{\Sigma_a}$. Nous avons vu, au chapitre 3, que cette projection s'exprime à l'aide de la *bi-orthogonalité* (voir théorème 3.2) :

$$a_n = P_n^+\varphi|_{\Sigma_a} = \frac{1}{\int_0^{h_\star} \frac{\mu(z)}{\alpha(z)} \, \Phi_n^+(z)^2 \, \mathrm{d}z} \int_0^{h_\star} \frac{\mu(z)}{\alpha(z)} \, \varphi|_{\Sigma_a}(z) \, \Phi_n^+(z) \, \mathrm{d}z.$$

Ainsi, on en déduit que la donnée de Neumann sur la section Σ_a ($\partial\varphi/\partial x|_{\Sigma_a}$) est reliée à la donnée de Dirichlet ($\varphi|_{\Sigma_a}$) par l'intermédiaire d'un opérateur T_a, appelé opérateur de Dirichlet-to-Neumann, dont l'expression est :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}|_{\Sigma_a} = T_a\,\varphi|_{\Sigma_a} = \sum_n (P_n^+ \varphi|_{\Sigma_a})\, i\beta_n^+\, \Phi_n^+ \\ = \sum_n \left(\frac{1}{\frac{\mu(z)}{\alpha(z)}\,\Phi_n^+(z)^2\,\mathrm{d}z} \right) \left(\int_0^{h_\star} \frac{\mu(z)}{\alpha(z)}\,\varphi|_{\Sigma_a}(z)\,\Phi_n^+(z)\,\mathrm{d}z \right) i\beta_n^+\,\Phi_n^+.$$

Nous pouvons faire le même raisonnement pour $x \leq -a$. On a, par application de la condition d'onde sortante :

$$\varphi(x,z) - \varphi_0(x,z) = \sum_n b_n\,\mathrm{e}^{-i\beta_n^-(x+a)}\,\Phi_n^-(z), \text{ pour } x \leq -a,$$

où les Φ_n^- sont les fonctions propres de l'opérateur transverse associé au demi-guide de gauche (pour $x \leq -a$), avec PMLs de taille finie et où les β_n^- sont les nombres d'onde longitudinaux correspondants. En notant $\Sigma_{-a} := \{-a\} \times \widetilde{\Omega}$, on a alors :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}|_{\Sigma_{-a}} - \frac{\partial \varphi_0}{\partial x}|_{\Sigma_{-a}} = -\sum_n b_n\, i\beta_n^-\,\Phi_n^-.$$

Nous choisissons l'onde incidente comme une superposition de modes propagatifs ou évanescents vers la droite :

$$\varphi_0(x,z) = \sum_n a_n^0\,\mathrm{e}^{i\beta_n^-(x+a)}\,\Phi_n^-(z).$$

Ainsi,

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial x}|_{\Sigma_{-a}} = \sum_n a_n^0\, i\beta_n^-\,\Phi_n^-$$

et, en notant $P_n^-\varphi|_{\Sigma_{-a}}$ la projection de $\varphi|_{\Sigma_{-a}}$ sur le sous-espace propre associé à Φ_n^-, on a :

$$b_n + a_n^0 = P_n^-\varphi|_{\Sigma_{-a}} = \frac{1}{\int_0^{h_\star} \frac{\mu(z)}{\alpha(z)}\,\Phi_n^-(z)^2\,\mathrm{d}z} \int_0^{h_\star} \frac{\mu(z)}{\alpha(z)}\,\varphi|_{\Sigma_{-a}}\,\Phi_n^-(z)\,\mathrm{d}z.$$

On en déduit, en notant T_{-a} l'opérateur de Dirichlet-to-Neumann sur la section Σ_{-a}, défini par :

$$T_{-a}u = \sum_n (P_n^- u)\, i\beta_n^-\,\Phi_n^- = \sum_n \left(\frac{1}{\int_0^{h_\star} \frac{\mu(z)}{\alpha(z)}\,\Phi_n^-(z)^2\,\mathrm{d}z} \right) \left(\int_0^{h_\star} \frac{\mu(z)}{\alpha(z)}\,u(z)\,\Phi_n^-(z)\,\mathrm{d}z \right) i\beta_n^-\,\Phi_n^-,$$

que

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial x}|_{\Sigma_{-a}} = -2\,T_{-a}\,\varphi_0|_{\Sigma_{-a}} + T_{-a}\,\varphi|_{\Sigma_{-a}}.$$

Ainsi, les conditions d'ondes sortantes sont prises en compte dans par les opérateurs de Dirichlet-to-Neumann. En pratique, ces opérateurs seront tronqués (nous n'utiliserons qu'un nombre fini de modes). Désormais, implicitement, ces opérateurs sont tronqués.

Le problème posé dans le domaine infini $\widetilde{\mathcal{O}}$ se réduit, à l'aide des conditions d'ondes sortantes, à

un problème posé dans un domaine borné $\mathcal{O}_b =]-a,a[\times]0,h_\star[$: trouver $\varphi(x,z)$ vérifiant

$$\begin{aligned}
&-\alpha\frac{\partial}{\partial z}\left(\alpha\,\mu\,\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\,\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)-\omega^2\rho\,\varphi=0 \text{ dans } \mathcal{O}_b,\\
&\frac{\partial\varphi}{\partial z}|_{\Gamma_0}=0,\\
&\frac{\partial\varphi}{\partial z}|_{\Gamma_\star}=0,\\
&-\frac{\partial\varphi}{\partial x}|_{\Sigma_{-a}}=-2\,T_{-a}\,\varphi_0|_{\Sigma_{-a}}+T_{-a}\,\varphi|_{\Sigma_{-a}},\\
&\frac{\partial\varphi}{\partial x}|_{\Sigma_a}=T_a\,\varphi|_{\Sigma_a}.
\end{aligned}$$

Nous avons noté $\Gamma_0 :=]-a,a[\times\{0\}$ et $\Gamma_\star :=]-a,a[\times\{h_\star\}$ les frontières horizontales du domaine de calcul.

Nous pouvons ensuite utiliser les éléments finis pour résoudre ce problème. La formulation variationnelle dans le cas 2D s'écrit : trouver $\varphi\in H^1(\mathcal{O}_b)$, tel que pour tout $\psi\in H^1(\mathcal{O}_b)$,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{O}_b}\left(\alpha\,\mu\,\frac{\partial\varphi}{\partial z}\,\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial z}+\frac{\mu}{\alpha}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x}\,\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial x}-\frac{\omega^2\rho}{\alpha}\,\varphi\,\overline{\psi}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z-\int_{\Sigma_{-a}}\frac{\mu}{\alpha}\,(T_{-a}\,\varphi)\,\overline{\psi}\,\mathrm{d}z-\int_{\Sigma_a}\frac{\mu}{\alpha}\,(T_a\,\varphi)\,\overline{\psi}\,\mathrm{d}z\\
=-2\int_{\Sigma_{-a}}\frac{\mu}{\alpha}\,(T_{-a}\,\varphi_0)\,\overline{\psi}\,\mathrm{d}z. \quad (5.6)
\end{aligned}$$

En toute rigueur, les expressions qui font intervenir les opérateurs de Dirichlet-to-Neumann sont des crochets de dualité. Par exemple, à la place de

$$\int_{\Sigma_a}\frac{\mu}{\alpha}\,(T_a\,\varphi)\,\overline{\psi}\,\mathrm{d}z,$$

on devrait écrire :

$$\left\langle\frac{\mu}{\alpha}\,T_a\,\varphi|_{\Sigma_a}\,,\,\psi|_{\Sigma_a}\right\rangle_{H^{-1/2}(\Sigma_a),H^{1/2}(\Sigma_a)}.$$

Dans la formulation variationnelle (5.6), la partie volumique est standard : elle fait intervenir une matrice de masse et une matrice de rigidité, qui sont creuses. La partie non standard vient des opérateurs DtN. Les termes faisant intervenir les opérateurs DtN sont de la forme suivante :

$$\begin{aligned}
\int_{\Sigma_a}\frac{\mu}{\alpha}\,(T_a\,\varphi)\,\overline{\psi}\,\mathrm{d}z=\sum_n\left(i\beta_n^+\right)\left(\int_0^{h_\star}\frac{\mu(z)}{\alpha(z)}\,\Phi_n^+(z)^2\,\mathrm{d}z\right)^{-1}\\
\times\left(\int_0^{h_\star}\frac{\mu(z)}{\alpha(z)}\,\varphi(a,z)\,\Phi_n^+(z)\,\mathrm{d}z\right)\left(\int_0^{h_\star}\frac{\mu(z)}{\alpha(z)}\,\overline{\psi(a,z)}\,\Phi_n^+(z)\,\mathrm{d}z\right).
\end{aligned}$$

On rappelle que la série est tronquée. Nous verrons dans la partie numérique les modes que nous prendrons en compte. Ces termes sont mixtes : ils sont « spectraux » et « variationnels ». En effet, nous utilisons une discrétisation éléments finis standard, que l'on appellera « variationnelle » pour discrétiser φ et ψ, et une discrétisation à l'aide des fonctions propres, que l'on appellera « spectrale ». En pratique, on calcule ces termes comme le produit de quatre matrices, dans l'ordre :

- une matrice variationnelle $\times$ spectrale dont le terme général est de la forme :

$$\int_0^{h_\star}\frac{\mu(z)}{\alpha(z)}\,\varphi(a,z)\,\Phi_n^+(z)\,\mathrm{d}z,$$

- une matrice spectrale $\times$ spectrale dont les seuls termes non nuls sont les termes diagonaux qui sont égaux à $i\beta_n^+$,
- une autre matrice spectrale $\times$ spectrale, diagonale, dont le terme diagonal (n,n) est égal à

$$\left(\int_0^{h_\star} \frac{\mu(z)}{\alpha(z)}\,\Phi_n^+(z)^2\,\mathrm{d}z\right)^{-1},$$

- une matrice spectrale $\times$ variationnelle dont le terme général est de la forme :

$$\int_0^{h_\star} \frac{\mu(z)}{\alpha(z)}\,\overline{\psi(a,z)}\,\Phi_n^+(z)\,\mathrm{d}z.$$

Notons que l'utilisation des opérateurs DtN vient troubler la structure creuse du système linéraire : on remplit les degrés de liberté se situant sur les frontières Σ_a et Σ_{-a}.

Avant d'illustrer la méthode sur des exemples numériques, mentionnons une question, qui se pose naturellement : le problème est-il bien posé ? Pour démontrer une telle propriété, la méthode classique est de montrer que le problème variationnel (5.6) est du type coercif + compact. Ainsi, l'alternative de Fredholm permet de déduire que le problème est bien posé en dehors de certaines fréquences propres du système. En fait, il est facile de voir que le terme

$$a(\varphi,\psi) := \int_{\mathcal{O}_b} \left(\alpha\,\mu\,\frac{\partial\varphi}{\partial z}\,\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial z} + \frac{\mu}{\alpha}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x}\,\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial x}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z + \int_{\mathcal{O}_b} \left(\varphi\,\overline{\psi}\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z$$

est coercif : $|a(\varphi,\varphi)| \geq C\|\varphi\|^2_{H^1(\mathcal{O}_b)}$, en utilisant le fait que $-\pi/2 < \arg_{i\mathbb{R}^+}(\alpha) \leq 0$. Ensuite, le terme

$$b(\varphi,\psi) := \int_{\mathcal{O}_b} \left(\left(\frac{\omega^2\rho}{\alpha}+1\right)\varphi\,\overline{\psi}\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z$$

est compact : il existe un opérateur compact de $H^1(\mathcal{O}_b)$, que l'on va appeler K, tel que $b(\varphi,\psi) = (K\varphi,\psi)_{H^1(\mathcal{O}_b)}$, par injection canonique de $H^1(\mathcal{O}_b)$ dans $L^2(\mathcal{O}_b)$.

Mais il reste maintenant à établir de la coercivité ou de la compacité sur les termes venant des opérateurs DtN. Et c'est ici que les choses se compliquent. En effet, il est difficile de donner le signe de ces termes a priori. Dans le cas d'un guide fermé non dissipatif, quand il n'y a pas de PML, en choisissant les fonctions propres orthonormalisées, les termes faisant intervenir les opérateurs DtN se réduisent à (par exemple, pour le terme sur Σ_a) :

$$\sum_n (i\beta_n^+)\left(\int_0^{h_\star} \varphi(a,z)\,\Phi_n^+(z)\,\mathrm{d}z\right)\left(\int_0^{h_\star} \overline{\psi(a,z)}\,\Phi_n^+(z)\,\mathrm{d}z\right).$$

Les β_n^+ sont alors soit positifs (pour un nombre fini d'entre eux : les modes propagatifs), soit imaginaires purs (à partie imaginaire positive, pour les modes évanescents), et on peut choisir les fonctions propres $\Phi_n^+(z)$ réelles. On en déduit que la partie faisant intervenir les modes évanescents peut être incorporée dans le terme coercif, puisque

$$-\sum_{n\ \text{évanescents}} (i\beta_n^+)\left(\int_0^{h_\star} \varphi(a,z)\,\Phi_n^+(z)\,\mathrm{d}z\right)\left(\int_0^{h_\star} \overline{\varphi(a,z)}\,\Phi_n^+(z)\,\mathrm{d}z\right) \geq 0.$$

Ensuite, la partie faisant intervenir les modes propagatifs peut rentrer dans le terme compact puisqu'il n'y a qu'un nombre fini de modes propagatifs.

Dans notre cas, on ne peut pas facilement reproduire la démonstration. Les termes faisant intervenir les opérateurs DtN n'ont pas de signe a priori : les β_n sont complexes, ainsi que les fonctions propres Φ_n.

Par contre si l'on considère le problème avec des opérateurs DtN tronqués (i.e. en ne prenant qu'un nombre fini de termes dans la série), alors le problème relève bien de l'alternative de Fredholm, car, comme pour les modes propagatifs dans le cas du guide fermé, le terme faisant intervenir les opérateurs DtN est compact puisque l'on ne décompose que sur un nombre fini de modes.

Résultats numériques

Tous les résultats que nous allons présenter ont été obtenus avec le code de calcul MELINA[5], en utilisant des éléments finis P2.

Le cas d'un guide 2D

Nous allons commencer par un exemple 2D, correspondant aux ondes élastiques SH d'une plaque d'acier plongée dans un milieu infini de béton. Nous prenons une condition de Neumann en $z = 0$, ce qui revient à ne considérer que les modes symétriques. Pour les applications numériques, nous prenons : $\rho_0 = 7.932\,\mathrm{g/cm^3}$, $\rho_\infty = 2.3\,\mathrm{g/cm^3}$, $c_0 = 3.260\,\mathrm{km/s}$, $c_\infty = 2.6375\,\mathrm{km/s}$. La hauteur du guide fermé h (qui est également la taille du cœur du guide ouvert) varie entre 8 et $3\,\mathrm{mm}$. Nous allons considérer que le guide est droit de hauteur $h = 8$ pour $x < 0$ et qu'il est également droit, de hauteur $h = 3$, pour $x > 30$. Nous allons donc placer les frontières transparentes sur lesquelles nous appliquons les opérateurs DtN en $x = 0$ et en $x = 30$. La fréquence est de 1 MHz. Il s'agit des mêmes caractéristiques que celles utilisées dans la sous-section 3.3.2 pour le calcul de la fonction de Green. Cela correspond à prendre (modulo un adimentionnement) : $\rho_0 = 7.932, \rho_\infty = 2.3, \mu_0 = 84.29, \mu_\infty = 15, \omega = 2\pi$. Nous positionnons une PML abrupte dans la direction z à la hauteur $h_2 = 10$, de paramètre $\alpha_\infty = \mathrm{e}^{-i\pi/6}$.

Dans ce cas-ci, il n'y a pas de mode guidé, puisque $c_0 > c_\infty$ (voir théorème 1.8). Nous prenons alors comme onde incidente un des modes à fuite qui est « presque propagatif » (i.e. un mode très peu évanescent dans la direction longitudinale : β est « presque » réel).

La figure 5.2 représente le spectre (calculé numériquement) de l'opérateur transverse en entrée (hauteur de la plaque d'acier : 8) et en sortie (hauteur de la plaque d'acier : 3). Nous avons choisi de ne garder, pour les opérateurs DtN, que cinq modes à la fois en entrée du guide et en sortie du guide, ce sont les modes entourés en bleu. Il s'agit de cinq modes à fuite, qui sont dans le cas du guide d'entrée ($h = 8$) des modes « presque » propagatifs, c'est-à-dire ceux à prendre en compte a priori en priorité. Nous avons choisi de prendre en compte en sortie ($h = 3$) les modes que l'on obtient en suivant la relation de dispersion pour les cinq modes choisis en entrée. En effet, en faisant varier continûment h, les modes varient continûment, il est ainsi possible de les suivre. Nous allons revoir ce point à la section 5.3. Noter qu'en sortie, il n'y a que deux modes à fuite « presque » propagatifs (pour lesquels λ est très près d'un réel négatif), les autres sont des modes « presque » purement évanescents (pour lesquels λ est très près d'un réel positif). Par ailleurs, comme onde incidente, nous prenons un des cinq modes pris en compte pour l'opérateur DtN du guide d'entrée.

Dans ce cas 2D (donc 1D en transverse), nous avons une formule explicite pour les fonctions

[5] Voir le site Internet dédié à MELINA : `http://anum-maths.univ-rennes1.fr/melina/`.

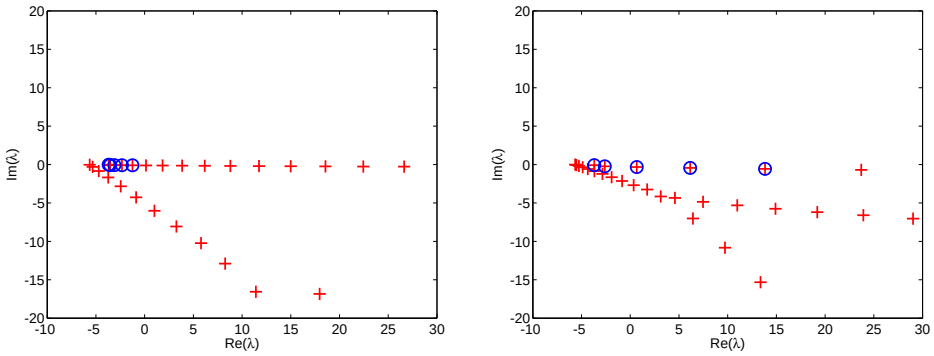

FIGURE 5.2 – *Spectres calculés pour l'opérateur transverse du guide d'entrée (à gauche, $h = 8$) et de sortie (à droite, $h = 3$). Les modes entourés en bleu correspondent aux cinq modes pris en compte pour les opérateurs DtN.*

propres Φ_n, qui ne dépend que des valeurs propres λ_n. En pratique, dans le code de calcul MELINA, c'est cette formule explicite qui est utilisée pour les termes DtN. Par ailleurs, les valeurs propres sont calculées très précisément, grâce à la relation de dispersion. Nous pouvons donc affirmer que les erreurs de calcul des valeurs propres et des fonctions propres sont très faibles.

Les résultats sont sur la figure 5.3. Nous observons une bonne adéquation entre les résultats avec PMLs (solution de référence) et avec opérateurs DtN en ce qui concerne la frontière $x = 0$ (en entrée). Par contre, il y a une grande erreur en $x = 30$ (en sortie). A quoi est-ce dû ?

La première idée qui vient est que l'on ne prend pas suffisamment de modes dans les opérateurs DtN. Nous avons lancé la simulation en prenant 10 modes à fuite (au lieu de 5 précédemment). Le résultat est sur la figure 5.4. Nous ne notons pas de réelle amélioration des résultats en sortie.

Encore une fois, nous expliquons ce phénomène par la croissance exponentielle des modes à fuite. En entrée, la PML est près du cœur, donc les modes à fuite ne sont pas exponentiellement croissants sur une trop grande distance. Par contre, en sortie, la PML est placée loin du cœur, ce qui induit une croissance exponentielle des modes à fuite très importante et des erreurs numériques, comme on peut le voir sur la figure 5.3. Ces erreurs sont localisées dans la gaine, là où les modes à fuite sont exponentiellement croissants. L'objectif va être, encore une fois, de placer la PML le plus près possible : cela va être possible par l'utilisation d'une PML non orthogonale, qui va suivre le contour du cœur. Nous allons étudier ce point à la sous-section suivante.

Le cas d'un guide 3D

Avant de passer à l'utilisation de PMLs non orthogonales, voyons un exemple 3D. Nous prenons les mêmes caractéristiques physiques que dans le cas 2D : $\rho_0 = 7.932, \rho_\infty = 2.3, \mu_0 = 84.29, \mu_\infty = 15$. Nous prenons $\omega = 2$. Et nous considérons un guide (ρ_0, μ_0) de section carrée dont la taille du côté varie de 20 à 6, plongé dans un milieu infini $(\rho_\infty, \mu_\infty)$. Nous plaçons des PMLs abruptes cartésiennes de paramètres $\alpha_\infty^y = \alpha_\infty^z = \mathrm{e}^{-i\pi/3}/2$ tout autour du guide, de telle manière que la PML soit collée au guide d'entrée.

Sur la figure 5.5, nous avons représenté le spectre pour le guide d'ondes en entrée. Nous voyons que ce spectre est beaucoup plus compliqué que dans le cas 2D (1D transverse). La distinction entre les modes à fuite et les modes résultant de la discrétisation du continuum n'est pas évidente, comme nous l'avons déjà vu au chapitre 3. On prend une quinzaine de modes à fuite en compte (il est numériquement difficile d'en prendre beaucoup plus), ce sont ceux qui sont entourés en bleu sur la figure. Ces modes correspondent tous à des modes « presque propagatifs » (qui sont peu

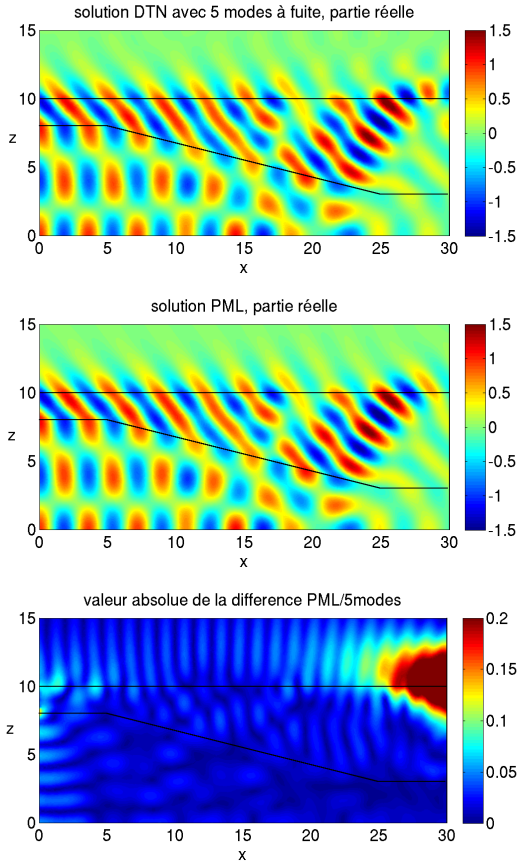

FIGURE 5.3 – *Guide d'ondes 2D. De haut en bas : partie réelle de la solution calculée avec DtN (en utilisant 5 modes), partie réelle de la solution de référence, module de l'erreur ponctuelle entre les deux solutions.*

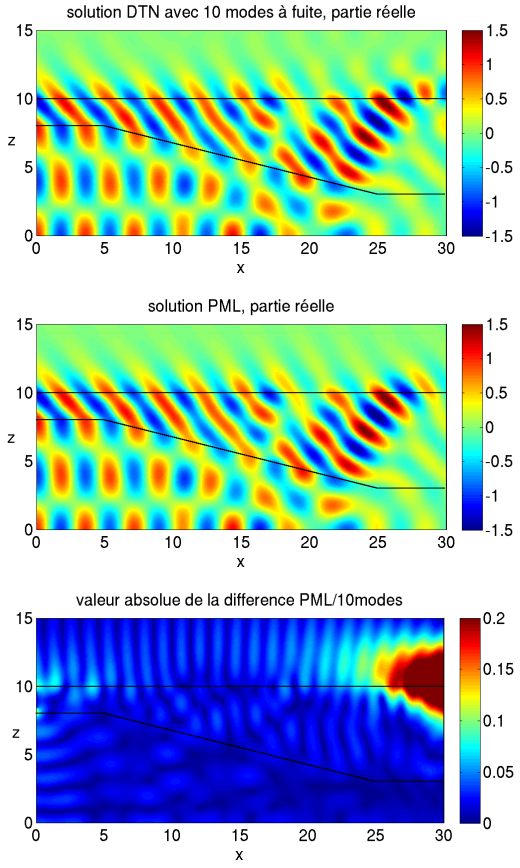

FIGURE 5.4 – *Guide d'ondes 2D. De haut en bas : partie réelle de la solution calculée avec DtN (en utilisant 10 modes), partie réelle de la solution de référence, module de l'erreur ponctuelle entre les deux solutions.*

évanescents dans la direction longitudinale) pour le guide d'entrée. Nous prenons comme onde incidente un des modes pris en compte pour l'opérateur DtN du guide d'entrée.

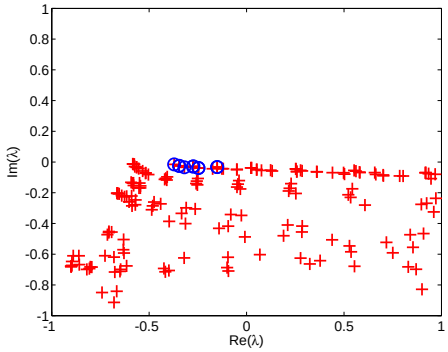

FIGURE 5.5 – *Spectre calculé pour l'opérateur transverse du guide d'entrée, dans le cas du guide 3D. Les modes entourés en bleu correspondent aux modes pris en compte pour les opérateurs DtN.*

Ici, nous n'avons pas de formule analytique pour les fonctions propres. Les fonctions propres sont donc calculées numériquement, tout comme les fonctions propres. Sur la figure 5.6, nous voyons le résultat : une coupe du guide dans la direction x. Nous voyons, comme pour le cas 2D, qu'il y a une erreur assez importante. Encore une fois, nous l'interprétons par le fait que la PML est située loin du cœur en sortie. Que nous utilisions une formule analytique pour les modes (un calcul exact, comme pour le guide 2D présenté) ou une formule numérique (un calcul numérique, comme dans le cas du guide 3D présenté), nous sommes confrontés aux mêmes difficultés : lorsque la PML est située loin du cœur, des erreurs numériques surviennent, du fait de la forme exponentiellement croissante des modes à fuite. Dans le cas d'un calcul numérique des modes à fuite, une difficulté supplémentaire apparaît par rapport au calcul analytique : les modes à fuite sont mal calculés lorsque la PML est placée loin du cœur, comme on l'a vu au chapitre 3. Pour remédier à ces problèmes, nous allons, dans la sous-section suivante, utiliser une PML non orthogonale, qui suit la forme du cœur.

5.2.3 Amélioration de la méthode avec des PMLs non orthogonales

Nous allons ici reprendre l'idée développée à la sous-section 3.2.2, c'est-à-dire l'utilisation de PMLs non orthogonales, pour suivre le contour du cœur et éviter au maximum la croissance exponentielle des modes à fuite. À la sous-section 3.2.2, ces PMLs étaient utilisées pour le calcul de modes à fuite d'un guide uniforme lorsque le cœur a une forme non standard (ni rectangulaire ni circulaire). Ici, les PMLs non orthogonales vont être utilisées pour suivre le contour du cœur d'un guide non uniforme, lorsque celui-ci évolue le long de l'axe de propagation. On espère ainsi que nous allons réduire les erreurs numériques que nous avons observées à la sous-section précédente, lorsque nous utilisons des opérateurs DtN avec une PML située loin du cœur.

Nous allons tout d'abord voir comment l'introduction d'une telle PML non orthogonale modifie les équations dans le cas d'un guide 2D, puis nous ferons l'extension au cas d'un guide 3D avec PMLs cartésiennes non orthogonales. Nous n'allons faire la présentation que dans le cas d'une PML abrupte, puisque c'est ce type de PML que nous utilisons en pratique, mais tous les résultats se généralisent pour des PMLs douces.

En deux dimensions, le paramètre $\alpha(z)$ de la PML, qui était donné, dans le cas de la PML abrupte

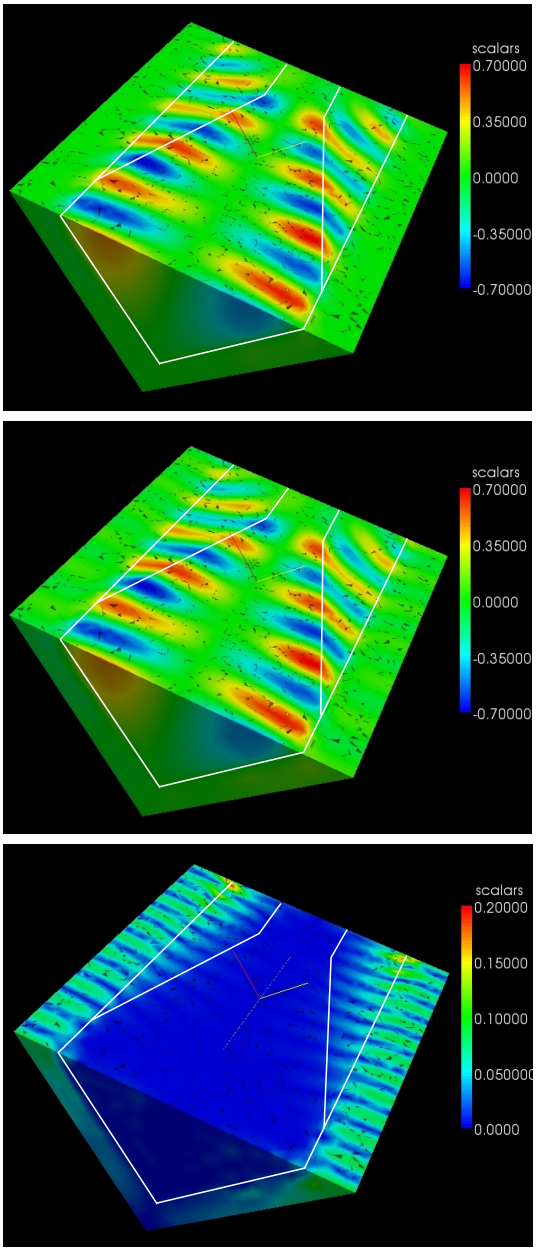

FIGURE 5.6 – *Guide d'ondes 3D. De haut en bas : partie réelle de la solution calculée avec DtN, partie réelle de la solution de référence, module de l'erreur ponctuelle entre les deux solutions.*

par :

$$\alpha(z) = \begin{cases} 1 & \text{si } z < h_2, \\ \alpha_\infty & \text{sinon,} \end{cases}$$

devient $\alpha(x,z)$, donné par :

$$\alpha(x,z) = \begin{cases} 1 & \text{si } z < h_2(x), \\ \alpha_\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Nous allons voir brièvement comment l'introduction d'une telle PML modifie les équations. Nous partons de l'équation volumique :

$$-\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\,\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\,\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) - \omega^2 \rho\,\varphi = 0 \text{ dans } \mathcal{O} = \mathbb{R}\times\Omega.$$

On complexifie la variable transverse : z devient $\check{z}$. On prend $\check{x} = x$, ce qui revient à dire qu'on ne procède à la dilatation analytique que dans la direction transverse. La solution $\check{\varphi}(\check{x},\check{z})$, dépendant des nouvelles variables $\check{x}$ et $\check{z}$ vérifie alors la même équation, au sens complexe. Puis, on paramétrise un chemin dans le plan complexe de la forme suivante : $\check{z} = \mathcal{C}(x,z)$ (au lieu de $\check{z} = \mathcal{C}(z)$ pour une PML standard). En pratique (avec une PML abrupte), l'expression du chemin est :

$$\mathcal{C}(x,z) = \int_0^z \frac{\mathrm{d}s}{\alpha(x,s)}.$$

On en déduit alors que

$$\begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \left(\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial x}\right) \\ 0 & \frac{1}{\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial/\partial \check{x} \\ \partial/\partial \check{z} \end{pmatrix},$$

puis que

$$\begin{pmatrix} \partial/\partial \check{x} \\ \partial/\partial \check{z} \end{pmatrix} = \mathbb{J} \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \quad \text{où } \mathbb{J} := \begin{pmatrix} 1 & -\alpha\left(\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial x}\right) \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Ainsi, l'équation volumique, qui était, pour $z > h$:

$$-\frac{\partial}{\partial \check{x}}\left(\mu_\infty \frac{\partial \check{\varphi}}{\partial \check{x}}\right) - \frac{\partial}{\partial \check{z}}\left(\mu_\infty \frac{\partial \check{\varphi}}{\partial \check{z}}\right) - \omega^2 \rho_\infty \check{\varphi} = 0,$$

devient dans la PML, en revenant dans les coordonnées (x,z), i.e. en prenant $\varphi(x,z) = \check{\varphi}(x,\mathcal{C}(x,z))$:

$$-\alpha\,\mathrm{div}\,(\mu_\infty\,\mathbb{H}\,\nabla\varphi) - \omega^2\rho_\infty\varphi = 0,$$

où la matrice $\mathbb{H}$ est donnée par :

$$\mathbb{H} := \frac{1}{\det(\mathbb{J})}\,\mathbb{J}^T\,\mathbb{J} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha} & -\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial x} \\ -\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial x} & \alpha\left(1 + \left(\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial x}\right)^2\right) \end{pmatrix}.$$

Notons que le paramètre $\partial\mathcal{C}/\partial x$ est en fait donné, dans la PML, par :

$$\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial x} = h_2'(x)\left(1 - \frac{1}{\alpha_\infty}\right).$$

Puis, en remarquant que dans la zone physique $\check{z} = z$, on a, pour tout x, pour tout z,

$$-\alpha\,\mathrm{div}\,(\mu\,\mathbb{H}\,\nabla\varphi) - \omega^2\rho\,\varphi = 0.$$

En imposant une condition de Neumann homogène en bout de PML (en $z = h_\star$), on obtient la formulation variationnelle suivante, en prenant toujours $\mathcal{O}_b =]-a, a[\times]0, h_\star[$: trouver $\varphi \in H^1(\mathcal{O}_b)$, tel que pour tout $\psi \in H^1(\mathcal{O}_b)$,

$$\int_{\mathcal{O}_b} \left(\mu\, \mathbb{H}\, \nabla\varphi \cdot \nabla\overline{\psi} - \frac{\omega^2 \rho}{\alpha}\, \varphi\, \overline{\psi} \right) \mathrm{d}x\, \mathrm{d}z - \int_{\Sigma_{-a}} \frac{\mu}{\alpha}\, (T_{-a}\, \varphi)\, \overline{\psi}\, \mathrm{d}z - \int_{\Sigma_a} \frac{\mu}{\alpha}\, (T_a\, \varphi)\, \overline{\psi}\, \mathrm{d}z = -2 \int_{\Sigma_{-a}} \frac{\mu}{\alpha}\, (T_{-a}\, \varphi_0)\, \overline{\psi}\, \mathrm{d}z. \quad (5.7)$$

Comme dans le cas des PMLs non orthogonales utilisées à la sous-section 3.2.2, nous avons une restriction sur ce nouveau type de PMLs : elles ne peuvent pas être à la fois trop absorbantes et trop « penchées » :

Proposition 5.1 *Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $v \in \mathbb{C}$, avec $\|v\| = 1$,*

$$\Re e(\overline{v} \cdot \mathbb{H} v) \geq C$$

si pour tout (x, z) dans le domaine PML,

$$|h_2'(x)| < \left| \frac{\alpha_\infty}{\alpha_\infty - 1} \right| \left| \frac{\cos(a)}{\sin(a-b)} \right|, \quad (5.8)$$

où $a := \arg(\frac{1}{\alpha})$ et $b := \arg(\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial x})$ (en prenant, par exemple, l'argument entre $-\pi$ et π).

Démonstration. Il suffit de suivre la même démonstration que pour la proposition 3.4. □

Ainsi, pour assurer la coercivité de la forme suivante (ce qui assure que la méthode numérique converge) :

$$\int_{\mathcal{O}_b} \left(\mu\, \mathbb{H}\, \nabla\varphi \cdot \nabla\overline{\psi} + \varphi\, \overline{\psi} \right) \mathrm{d}x\, \mathrm{d}z,$$

nous devons vérifier (5.8).

Voyons maintenant comment ce type de PMLs peut également être utilisé dans un cadre 3D, avec PMLs cartésiennes. Nous allons l'utiliser pour le guide d'ondes 3D présenté à la sous-section précédente, à section carrée, qui évolue le long de l'axe de propagation. L'utilisation de PMLs cartésiennes non orthogonales revient à prendre : pour $s \in \{y, z\}$,

$$\check{s} = \mathcal{C}^s(x, s) = \int_0^s \frac{\mathrm{d}t}{\alpha(x, t)}, \quad \text{où} \quad \alpha^s(x, s) = \begin{cases} 1 & \text{si } s < R_2^s(x), \\ \alpha_\infty^s & \text{sinon.} \end{cases}$$

En utilisant la même démarche que pour le cas 2D et en remarquant que

$$\begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \left(\frac{\partial \mathcal{C}^y}{\partial x}\right) & \left(\frac{\partial \mathcal{C}^z}{\partial x}\right) \\ 0 & \frac{1}{\alpha^y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\alpha^z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial/\partial \check{x} \\ \partial/\partial \check{y} \\ \partial/\partial \check{z} \end{pmatrix},$$

puis que

$$\begin{pmatrix} \partial/\partial \check{x} \\ \partial/\partial \check{y} \\ \partial/\partial \check{z} \end{pmatrix} = \mathbb{J} \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \quad \text{où } \mathbb{J} := \begin{pmatrix} 1 & -\alpha^y \left(\frac{\partial \mathcal{C}^y}{\partial x}\right) & -\alpha^z \left(\frac{\partial \mathcal{C}^z}{\partial x}\right) \\ 0 & \alpha^y & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^z \end{pmatrix},$$

on voit que l'équation volumique, qui était :

$$-\mathrm{div}\,(\mu\, \nabla\varphi) - \omega^2 \rho\, \varphi \text{ dans } \mathcal{O}$$

devient :

$$-\alpha^y\,\alpha^z\,\mathrm{div}\,(\mu\,\mathbb{H}\,\nabla\varphi) - \omega^2\rho\,\varphi = 0 \text{ dans } \mathcal{O}_b,$$

où la matrice $\mathbb{H}$ est donnée par

$$\mathbb{H} := \frac{1}{\det(\mathbb{J})}\,\mathbb{J}^T\,\mathbb{J} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha^z\alpha^z} & -\frac{1}{\alpha^z}\frac{\partial \mathcal{C}^y}{\partial x} & -\frac{1}{\alpha^y}\frac{\partial \mathcal{C}^z}{\partial x} \\ -\frac{1}{\alpha^z}\frac{\partial \mathcal{C}^y}{\partial x} & \frac{\alpha^y}{\alpha^z}\left(1+\left(\frac{\partial \mathcal{C}^y}{\partial x}\right)^2\right) & \left(\frac{\partial \mathcal{C}^y}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \mathcal{C}^z}{\partial x}\right) \\ -\frac{1}{\alpha^y}\frac{\partial \mathcal{C}^z}{\partial x} & \left(\frac{\partial \mathcal{C}^y}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \mathcal{C}^z}{\partial x}\right) & \frac{\alpha^z}{\alpha^y}\left(1+\left(\frac{\partial \mathcal{C}^z}{\partial x}\right)^2\right) \end{pmatrix}.$$

Dans la PML,

$$\frac{\partial \mathcal{C}^s}{\partial x} = (R_2^s)'(x)\left(1-\frac{1}{\alpha_\infty^s}\right).$$

En rajoutant les opérateurs DtN en entrée et en sortie du guide, on aboutit à la formulation variationnelle de ce problème : trouver $\varphi \in H^1(\mathcal{O}_b)$, tel que pour tout $\psi \in H^1(\mathcal{O}_b)$,

$$\int_{\mathcal{O}_b}\left(\mu\,\mathbb{H}\,\nabla\varphi\cdot\nabla\overline{\psi} - \frac{\omega^2\rho}{\alpha^y\alpha^z}\,\varphi\,\overline{\psi}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z - \int_{\Sigma_{-a}}\frac{\mu}{\alpha^y\alpha^z}\,(T_{-a}\,\varphi)\,\overline{\psi}\,\mathrm{d}z - \int_{\Sigma_a}\frac{\mu}{\alpha^y\alpha^z}\,(T_a\,\varphi)\,\overline{\psi}\,\mathrm{d}z$$
$$= -2\int_{\Sigma_{-a}}\frac{\mu}{\alpha^y\alpha^z}\,(T_{-a}\,\varphi_0)\,\overline{\psi}\,\mathrm{d}z, \quad (5.9)$$

où $\mathcal{O}_b =]-a, a[\times\widetilde{\Omega}$ est le domaine de calcul.

Résultats numériques

Voyons maintenant, sur les deux exemples numériques présentés à la sous-section précédente, comment l'introduction de PMLs non orthogonales améliore les résulats. Sur la figure 5.7, nous avons le résultat pour le guide 2D et sur la figure 5.8, le résultat pour le guide 3D, en prenant le même nombre de modes et la même onde incidente que dans le cas d'une PML standard. La solution de référence est obtenue en plaçant une PML standard dans la direction x et une (des) PML(s) non orthogonale(s) dans la (les) direction(s) transverse(s). On observe, dans les deux cas, une nette amélioration des résultats, surtout là où la PML était située loin du cœur auparavant.

Lorsque nous utilisions une PML droite, la solution n'était pas mauvaise dans le cœur. C'est seulement dans la gaine que les erreurs sont concentrées, quand la PML est située loin du cœur. Nous pourrions croire qu'un tel phénomène n'est pas grave (la solution est bonne localement). Mais la figure 5.9 (ou le tableau 5.1) nous montre que le fait que la solution soit mauvaise dans la gaine impacte le calcul des coefficients de transmission. Le coefficient de transmission est calculé de la façon suivante, étant donné φ la solution numérique :

$$\int_0^{h_\star}\frac{\mu(z)}{\alpha(z)}\,\varphi(a,z)\,\Phi_n(z)\,\mathrm{d}z,$$

où les Φ_n sont les fonctions propres considérées (pour n allant de 1 à 5). Nous voyons que sur la figure de droite (lorsque la PML est non orthogonale et suit la forme du guide), les croix et les ronds coïncident davantage que sur la figure de gauche (quand la PML est doite, et donc loin du cœur en sortie). Ceci signifie que le calcul des coefficients de transmission est meilleur lorsqu'on utilise une PML non orthogonale qui suit la forme du guide.

Par ailleurs, quand les modes sont calculés numériquement (pas de formule analytique à disposition), les modes seront mieux calculés dans ce cas car la PML est située près du cœur (cf. chapitre 3). Tout ceci nous amène à conclure qu'il est fortement recommandé, dans les configurations testées, d'utiliser des PMLs qui suivent la forme du cœur, de façon à limiter au maximum les erreurs numériques qui peuvent être liées au caractère exponentiellement croissant des modes à fuite.

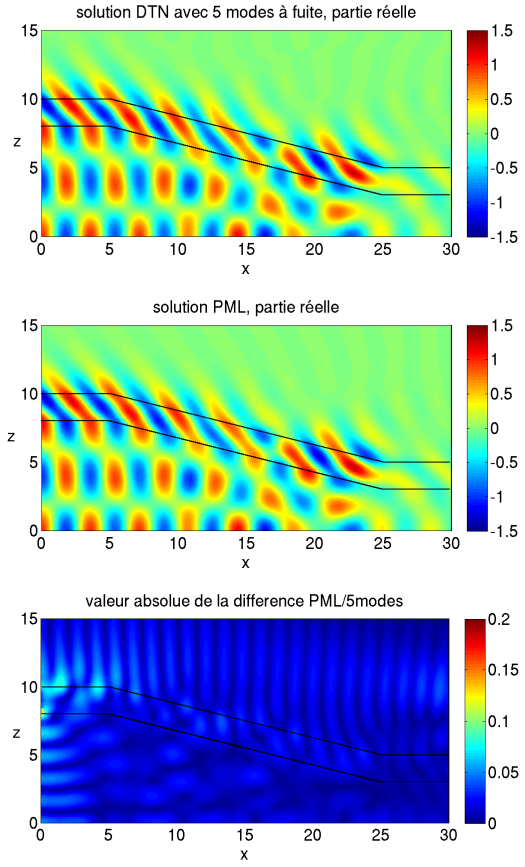

FIGURE 5.7 – *Guide d'ondes 2D. De haut en bas : partie réelle de la solution calculée avec DtN, partie réelle de la solution de référence, module de l'erreur ponctuelle entre les deux solutions. Ici, nous utilisons des PMLs non orthogonales.*

	PML droite		PML non orthogonale	
	DtN	PML (référence)	DtN	PML (référence)
mode 1	-13.46 -19.40i	-15.10 -18.88i	-13.91 -18.39i	-15.44 -18.10i
mode 2	-11.26 + 25.23i	-10.78 + 25.98i	-10.01 + 26.15 i	-9.82 + 26.54i
mode 3	2.115 -1.940i	1.491 -1.965i	0.971 -1.973 i	1.083 -1.873i
mode 4	-1.478 + 1.672i	-0.768 + 1.686i	-0.464 + 1.397 i	-0.352 + 1.434i
mode 5	1.369 -1.065i	0.660 -1.382i	9.902E-02 -1.574 i	4.996E-03 -1.632i

TABLE 5.1 – *Coefficients de transmission pour 5 modes dans le cas d'une PML droite et d'une PML non orthogonale.*

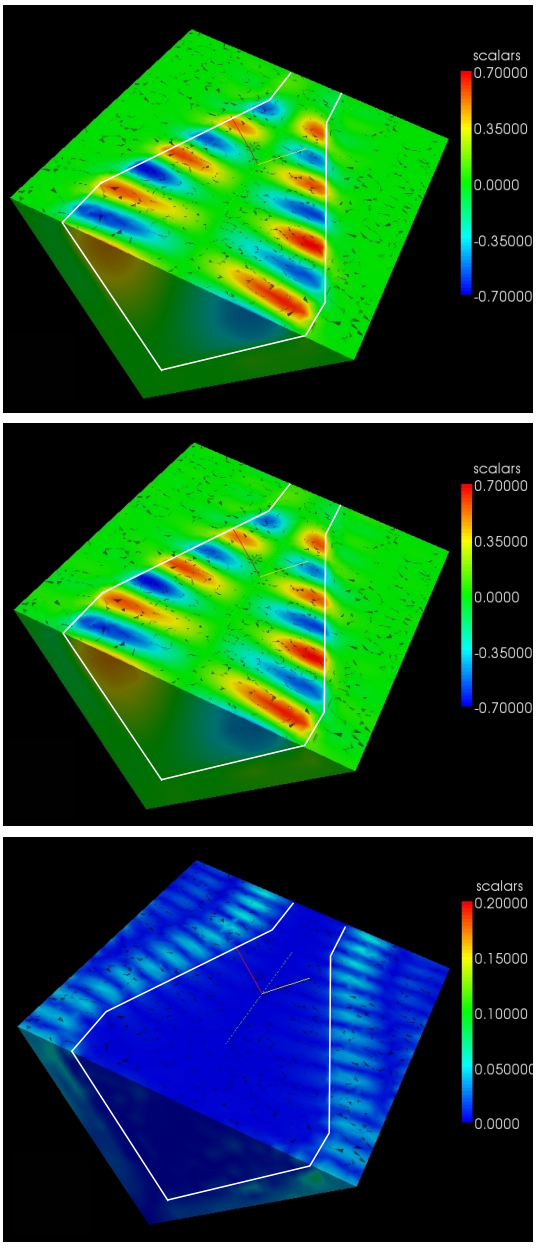

FIGURE 5.8 – *Guide d'ondes 3D. De haut en bas : partie réelle de la solution calculée avec DtN, partie réelle de la solution de référence, module de l'erreur ponctuelle entre les deux solutions. Ici, nous utilisons des PMLs non orthogonales collées au cœur du guide.*

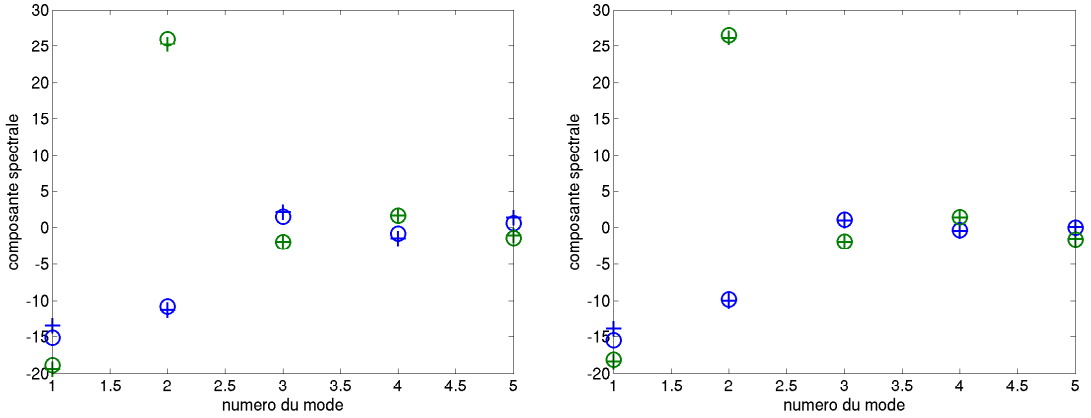

FIGURE 5.9 – *Coefficients de transmission pour 5 modes (partie réelle en bleu, partie imaginaire en vert) dans le cas d'une PML droite (figure de gauche) et d'une PML non orthogonale (figure de droite). Les croix correspondent au calcul avec DtN, les ronds au calcul avec PMLs (solution de référence).*

5.3 UTILISATION D'UNE MÉTHODE MULTIMODALE

Dans cette section, nous allons étendre l'idée développée pour les opérateurs DtN, à savoir l'utilisation des fonctions propres de l'opérateur transverse. Pour les opérateurs DtN, nous avons utilisé cette décomposition sur deux frontières verticales $\Sigma_{\pm a} = \{\pm a\} \times \widetilde{\Omega}$, où $\widetilde{\Omega}$ est le domaine physique transverse avec PML de taille finie, du type $\widetilde{\Omega} =]0, h_\star[$ pour un guide 2D. Cela nous a permis de borner le domaine de calcul. Ici, l'idée est d'utiliser la décomposition « partout » : dans tout le domaine de calcul, et pas uniquement sur les frontières $\Sigma_{\pm a}$. Plus précisément, nous décomposons le champ, dans chaque section $\Sigma_x = \{x\} \times \widetilde{\Omega}$, sur les modes du guide droit correspondant, i.e. le guide dont les paramètres physiques sont invariants dans la direction de propagation et dont les valeurs sont celles de la section Σ_x. L'objectif est d'obtenir une méthode, appelée méthode multimodale, plus efficace, plus rapide que les éléments finis. En effet, on espère qu'un petit nombre de modes suffit pour bien représenter le champ.

Initialement, la méthode multimodale a été étudiée pour les guides d'ondes fermés. Nous nous référons principalement à l'article [HL08], qui traite le cas d'un guide d'ondes acoustiques 2D fermé et perturbé. Nous nous sommes directement inspirés de la formulation du problème donnée dans cet article pour la généraliser au cas d'un guide d'ondes ouvert 2D perturbé, où l'on borne la direction transverse par une PML. Nous pouvons citer également [FP01] pour un article plus ancien traitant de cette méthode multimodale. L'extension de cette méthode multimodale à des guides ouverts, en utilisant des modes à fuite a été aussi étudiée par Adrien Pelat dans sa thèse ([Pel09], voir également l'article [PFP09]). Il s'agit, dans sa thèse, de calculer le champ acoustique dans des rues, qui sont modélisées comme des guides d'ondes ouverts. Dans ce cas, il n'y a pas de modes guidés. Enfin, notons que Christophe Hazard a exposé les travaux présentés ci-après lors de la conférence ICU (International Congress on Ultrasonics) qui a eu lieu en 2009. L'acte de la conférence est [BBGHP10].

Dans la suite, nous allons uniquement traiter le cas d'un guide d'ondes 2D.

5.3.1 Explication de la méthode

Le point de départ est la formulation variationnelle que nous avons établie à la section précédente, avec les PMLs dans la direction transverse et avec les opérateurs de Dirichlet-to-Neumann pour borner le domaine de calcul dans la direction longitudinale : équation (5.6). En fait, comme nous allons utiliser une représentation modale de la solution et que nous avons vu qu'il est préférable de placer la PML près du cœur, nous allons directement nous placer dans le cas d'une PML non orthogonale, qui suit la forme du cœur du guide perturbé. Ainsi, la formulation variationnelle que nous considérons est donnée par (5.7).

L'idée sous-jacente à la méthode multimodale est la suivante : on postule que les fonctions propres de l'opérateur $\widetilde{A}_\alpha$ (avec une PML de taille finie) forment une base de $L^2(0, h_\star)$. Ainsi, dans un guide droit, on peut décomposer le champ sous la forme suivante :

$$\varphi(x,z) = \sum_n a_n(x)\, \Phi_n(z),$$

où les $\Phi_n(z)$ sont les fonctions propres de l'opérateur transverse du guide droit. Dans un guide perturbé, on écrit la décomposition suivante :

$$\varphi(x,z) = \sum_n a_n(x)\, \Phi_n(x,z), \tag{5.10}$$

où les $\Phi_n(x,z)$ sont les fonctions propres de l'opérateur transverse du guide droit ayant pour section $\Sigma_x = \{x\} \times \widetilde{\Omega}$ et dont les paramètres physiques μ et ρ sont invariants dans la direction longitudinale et sont égaux à leur valeur sur Σ_x. Le paramètre $a_n(x)$ est alors la composante spectrale correspondant à la fonction propre $\Phi_n(x,z)$. En écrivant la décomposition (5.10), nous avons implicitement supposé que les $\Phi_n(x,z)$ sont des fonctions régulières lorsque x varie.

Ainsi, au lieu d'utiliser une discrétisation tout éléments finis, on utilise ici une discrétisation mixte : éléments finis en x, spectrale en z. Dans le cas d'un guide fermé, on peut montrer la convergence de la méthode en utilisant le fait que les fonctions propres sont une base de $L^2(\Omega)$, où Ω est la section transverse (cf. [HL08]). Dans notre cadre, comme nous ne savons pas démontrer un tel résultat sur les fonctions propres, nous ne savons pas non plus montrer que la méthode multimodale converge. Nous allons simplement illustrer son implémentation sur deux cas simples.

En pratique

Cette partie technique peut être passée en première lecture. Elle explique, dans les détails, comment nous avons implémenté la méthode multimodale. Nous l'avons écrite en MATLAB.

En pratique, nous procédons d'abord à un changement de variable. Nous supposons que l'interface entre le cœur et la gaine est donnée par une fonction $z = h(x)$ et nous collons la PML non orthogonale à cette interface : $h_2(x) = h(x)$. Et nous procédons au changement de variable $\widetilde{z} = z/h(x)$. En faisant cela, on se ramène à une géométrie dans un guide droit. Par contre, nous changeons l'opérateur. Par soucis de simplicité dans les notations, nous omettons les tildes, désormais z correspond à la coordonnée une fois le changement de variable effectué. Le changement de variable modifie le problème (5.7), qui devient : trouver $\varphi \in H^1(\mathcal{O}_b)$, tel que pour tout $\psi \in H^1(\mathcal{O}_b)$,

$$\int_{\mathcal{O}_b} \left(\mu\, \mathbb{H}\, \nabla\varphi \cdot \nabla\overline{\psi} - \frac{\omega^2\, \rho\, h}{\alpha}\, \varphi\, \overline{\psi} \right) \mathrm{d}x\, \mathrm{d}z - \int_{\Sigma_{-a}} \frac{\mu\, h}{\alpha}\, (T_{-a}\, \varphi)\, \overline{\psi}\, \mathrm{d}z - \int_{\Sigma_a} \frac{\mu\, h}{\alpha}\, (T_a\, \varphi)\, \overline{\psi}\, \mathrm{d}z$$
$$= -2 \int_{\Sigma_{-a}} \frac{\mu\, h}{\alpha}\, (T_{-a}\, \varphi_0)\, \overline{\psi}\, \mathrm{d}z.$$

où la matrice $\mathbb{H}$ est donnée par :

$$\mathbb{H} := \begin{pmatrix} \frac{h}{\alpha} & -\hat{z}\, h'(x) \\ -\hat{z}\, h'(x) & \frac{\alpha}{h}\left(1 + (\hat{z}\, h'(x))^2\right) \end{pmatrix}$$

et où $\hat{z} = \mathcal{C}(z)$ est donné par l'expression suivante :

$$\hat{z} = \begin{cases} z & \text{si } z < 1, \\ 1 + \frac{z-1}{\alpha_\infty} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Nous verrons par la suite que nous procédons de la sorte pour scinder les intégrales sur le domaine $\mathcal{O}_b$ (2D) en produit de deux intégrales 1D.

En incorporant la décomposition

$$\varphi(x,z) = \sum_{n_1} a_{n_1}(x)\, \Phi_{n_1}(x,z),$$

en discrétisant les composantes spectrales par éléments finis :

$$a_{n_1}(x) = \sum_{i_1} A_{i_1,n_1}\, p_{i_1}(x),$$

où p_i sont des fonctions de base P1, et en choisissant

$$\overline{\psi(x,z)} = p_{i_2}(x)\, \Phi_{n_2}(x,z),$$

on obtient alors un système linéaire à résoudre pour déterminer les composantes A_{i_1,n_1}.

Dans le cas d'un guide fermé acoustique (le cas de l'article [HL08]), les fonctions propres sont, dans les coordonnées sans changement de variable sur z : $\Phi_n(x,z) = \cos(n\pi\ \ h(x)\, z)$. En faisant le changement de variable $z \leftarrow z/h(x)$, on a alors :

$$\Phi_n(x, z/h(x)) = \cos(n\pi\, z).$$

Ainsi, dans les nouvelles coordonnées, les fonctions de base, que l'on note toujours Φ_n, ne dépendent que de z :

$$\frac{\partial \Phi_n}{\partial x} = 0.$$

Ceci permet de simplifier considérablement les calculs. De plus, toutes les intégrales sur z peuvent être connues analytiquement. Ce n'est pas le cas pour le guide ouvert ! Nous avons besoin de calculer numériquement les intégrales faisant intervenir les fonctions propres. Pour cela, nous avons choisi d'écrire :

$$\Phi_n(x,z) = \sum_{k,l} \Phi_n(x_k, z_l)\, q_k(x)\, r_l(z),$$

où q_k et r_l sont des fonctions de base éléments finis P1. On aboutit, en ne prenant qu'un nombre fini de fonctions propres, à un système linéaire du type :

$$(\mathbb{A} + \mathbb{B})\, U = F,$$

où U est le vecteur des composantes A_{i_1,n_1} (le vecteur des inconnues). En supposant que le domaine $\mathcal{O}_b$ a la forme suivante $X \times Z$, la matrice $\mathbb{A}$ a pour coefficient $(i_2,n_2),(i_1,n_1)$:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{A}_{(i_2,n_2),(i_1,n_1)} = \sum_{k_1,l_1,k_2,l_2} \Phi_{n_1}(x_{k_1},z_{l_1})\,\Phi_{n_2}(x_{k_2},z_{l_2}) \quad & \left[\left(\int_X h\,p_{i_1}\,p_{i_2}\,q'_{k_1}\,q'_{k_2}\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_Z \frac{\mu}{\alpha}\,r_{l_1}\,r_{l_2}\,\mathrm{d}z\right)\right. \\
+ \quad & \left(\int_X h\,p_{i_1}\,p'_{i_2}\,q'_{k_1}\,q_{k_2}\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_Z \frac{\mu}{\alpha}\,r_{l_1}\,r_{l_2}\,\mathrm{d}z\right) \\
+ \quad & \left(\int_X h\,p'_{i_1}\,p_{i_2}\,q_{k_1}\,q'_{k_2}\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_Z \frac{\mu}{\alpha}\,r_{l_1}\,r_{l_2}\,\mathrm{d}z\right) \\
+ \quad & \left(\int_X h\,p'_{i_1}\,p'_{i_2}\,q_{k_1}\,q_{k_2}\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_Z \frac{\mu}{\alpha}\,r_{l_1}\,r_{l_2}\,\mathrm{d}z\right) \\
- \quad & \left(\int_X h'\,p_{i_1}\,p_{i_2}\,q_{k_1}\,q'_{k_2}\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_Z \mu\,\hat{z}\,r'_{l_1}\,r_{l_2}\,\mathrm{d}z\right) \\
- \quad & \left(\int_X h'\,p_{i_1}\,p'_{i_2}\,q_{k_1}\,q_{k_2}\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_Z \mu\,\hat{z}\,r'_{l_1}\,r_{l_2}\,\mathrm{d}z\right) \\
- \quad & \left(\int_X h'\,p_{i_1}\,p_{i_2}\,q'_{k_1}\,q_{k_2}\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_Z \mu\,\hat{z}\,r_{l_1}\,r'_{l_2}\,\mathrm{d}z\right) \\
- \quad & \left(\int_X h'\,p'_{i_1}\,p_{i_2}\,q_{k_1}\,q_{k_2}\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_Z \mu\,\hat{z}\,r_{l_1}\,r'_{l_2}\,\mathrm{d}z\right) \\
+ \quad & \left(\int_X \frac{1}{h}\,p_{i_1}\,p_{i_2}\,q_{k_1}\,q_{k_2}\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_Z \alpha\,\mu\,r'_{l_1}\,r'_{l_2}\,\mathrm{d}z\right) \\
+ \quad & \left(\int_X \frac{h'^2}{h}\,p_{i_1}\,p_{i_2}\,q_{k_1}\,q_{k_2}\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_Z \alpha\,\mu\,\hat{z}^2\,r'_{l_1}\,r'_{l_2}\,\mathrm{d}z\right) \\
- \quad & \left.\left(\int_X \omega^2\,h\,p_{i_1}\,p_{i_2}\,q_{k_1}\,q_{k_2}\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_Z \frac{\rho}{\alpha}\,r_{l_1}\,r_{l_2}\,\mathrm{d}z\right)\right].
\end{aligned}
$$

On voit ici que les intégrales 2D se scindent en produit de deux intégrales 1D, comme annoncé, c'est l'intérêt du changement de variable $z \leftarrow z/h(x)$.

La matrice $\mathbb{B}$ est la matrice faisant intervenir les opérateurs DtN. Elle a pour coefficient $(i_1,n_1),(i_2,n_2)$:

$$
\begin{aligned}
-h(-a)\sum_n \quad & \frac{i\beta_n(-a)}{\sum_{l_1,l_2}\Phi_n(-a,z_{l_1})\,\Phi_n(-a,z_{l_2})\int_Z \frac{\mu}{\alpha}\,r_{l_1}\,r_{l_2}\,\mathrm{d}z} \\
\times \quad & \left(\sum_{l_1,l_2}\Phi_{n_1}(-a,z_{l_1})\,\Phi_n(-a,z_{l_2})\int_Z \frac{\mu}{\alpha}\,r_{l_1}\,r_{l_2}\,\mathrm{d}z\right) \\
\times \quad & \left(\sum_{l_1,l_2}\Phi_{n_2}(-a,z_{l_1})\,\Phi_n(-a,z_{l_2})\int_Z \frac{\mu}{\alpha}\,r_{l_1}\,r_{l_2}\,\mathrm{d}z\right) p_{i_1}(-a)\,p_{i_2}(-a) \\
-h(a)\sum_n \quad & \frac{i\beta_n(a)}{\sum_{l_1,l_2}\Phi_n(a,z_{l_1})\,\Phi_n(a,z_{l_2})\int_Z \frac{\mu}{\alpha}\,r_{l_1}\,r_{l_2}\,\mathrm{d}z} \\
\times \quad & \left(\sum_{l_1,l_2}\Phi_{n_1}(a,z_{l_1})\,\Phi_n(a,z_{l_2})\int_Z \frac{\mu}{\alpha}\,r_{l_1}\,r_{l_2}\,\mathrm{d}z\right) \\
\times \quad & \left(\sum_{l_1,l_2}\Phi_{n_2}(a,z_{l_1})\,\Phi_n(a,z_{l_2})\int_Z \frac{\mu}{\alpha}\,r_{l_1}\,r_{l_2}\,\mathrm{d}z\right) p_{i_1}(a)\,p_{i_2}(a).
\end{aligned}
$$

Quant au second membre, on prend une onde incidente de la forme suivante : $\varphi_0(x,y) = \Phi_{n_0}(-a,z)\,\mathrm{e}^{i\beta_{n_0}(x+a)}$. En utilisant la bi-orthogonalité, on en déduit que le coefficient (i_2,n_2) de F est :

$$-2i\beta_{n_0}(-a)h(-a)\left(\sum_{l_1,l_2}\Phi_{n_0}(-a,y_{l_1})\,\Phi_{n_2}(-a,y_{l_2})\int_Z\frac{\mu}{\alpha}\,r_{l_1}\,r_{l_2}\,\mathrm{d}z\right)p_{i_2}(-a).$$

Puis, en utilisant encore la bi-orthogonalité, seul le coefficient $n_2 = n_0$ a une contribution non nulle.

5.3.2 Résultats numériques

En pratique, nous devons déterminer les valeurs propres et les fonctions propres de l'opérateur transverse pour toute section Σ_x. La méthode que nous avons choisie ici consiste à suivre la relation de dispersion avec PML de taille finie (relation de dispersion donnée en remarque 3.5) pour quelques valeurs propres. Ceci nous permet d'avoir les valeurs propres pour toute section. Puis, une formule analytique, ne dépendant que de la géométrie et des valeurs propres est utilisée pour les fonctions propres. Cette technique est ici applicable puisque nous nous plaçons dans le cadre simple d'un guide 2D avec coefficients constants dans le cœur. Dans des situations plus complexes, il faudrait mettre en œuvre une méthode plus générale. Mais nous rappelons que nous n'avons codé ici qu'une version naïve, non optimale de la méthode multimodale, simplement à titre d'illustration de la méthode sur un cas simple.

Un premier exemple numérique

Commençons par regarder ce que donne la méthode multimodale sur le même exemple que celui que nous avons étudié à la section précédente. Nous nous plaçons dans la même configuration et nous utilisons les mêmes cinq modes à fuite que pour les opérateurs DtN dans la méthode multimodale.

Sur la figure 5.10, nous observons la solution, à comparer aux solutions obtenues avec les conditions aux limites transparentes et avec les PMLs (figure 5.7). Nous observons le même comportement global, même si la solution n'est pas exactement la même. Mais la discrétisation est très pauvre ici en z : nous n'utilisons que cinq modes.

Sur la figure 5.11, nous représentons les composantes spectrales (le terme $a_n(x)$ devant chaque mode n). Qu'observe-t-on ? Pour $x < 5$, le guide est droit : c'est le guide d'entrée. Le mode en rouge est le mode incident. Nous voyons des oscillations car il y a superposition de modes aller et retour. De même, pour $x > 25$, le guide est droit : c'est le guide de sortie. Nous observons alors que tous les modes sont évanescents dans la direction x : les composantes spectrales diminuent toutes. Seuls les modes en vert et bleu diminuent plus lentement : ce sont des modes que l'on a appelé « presque propagatifs ».

Un autre exemple numérique

Nous allons maintenant traiter un autre exemple. Il s'agit d'un guide optique planaire dans la polarisation TM , d'indice de réfraction $n_0 = 2.872$ dans le cœur et $n_\infty = 1.45$ dans la gaine, illuminé par une onde de longueur d'onde $1.55\mu\mathrm{m}$. La hauteur h du guide varie de de 7 à 4 (avec une unité de longueur de $0.05\mu\mathrm{m}$). Nous utilisons une PML abrupte collée au cœur du guide, de paramètre $\alpha_\infty = \mathrm{e}^{-i\pi/6}/4$ et de taille $2h$. Nous prenons une PML assez grande et avec un

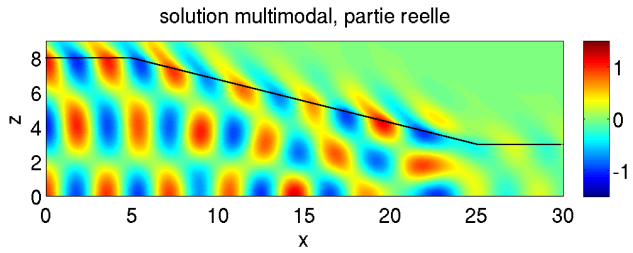

FIGURE 5.10 – *Partie réelle de la solution obtenue avec la méthode multimodale, en utilisant 5 modes. Cas du guide SH.*

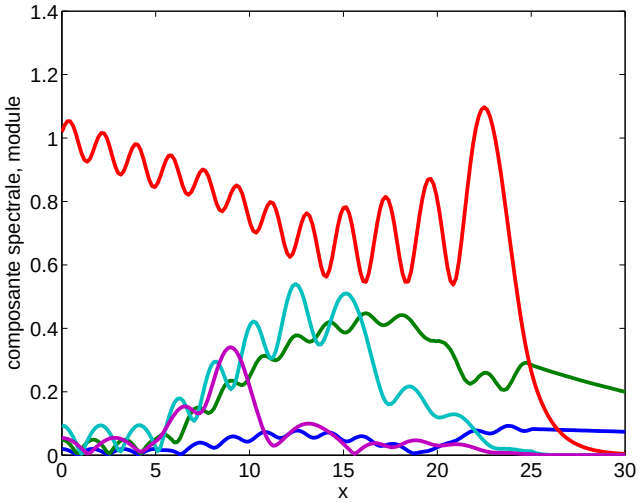

FIGURE 5.11 – *Valeur absolue des composantes spectrales. Cas du guide SH.*

paramètre très absorbant ($|\alpha_\infty| = 1/4$) de telle manière que le mode fondamental (qui correspond à la plus petite valeur propre réelle) soit toujours bien absorbé dans la PML. En effet, en diminuant h, la hauteur du guide, nous avons vu, à la sous-section 2.1.2, que les modes guidés se déplacent vers la borne inférieure du spectre essentiel ($-k_\infty^2$) et disparaissent lorsqu'ils la dépassent. Lorsque la valeur propre est près de $-k_\infty^2$, la fonction propre est quasiment constante dans la gaine. Il est alors nécessaire de prendre une PML suffisamment grande et absorbante pour bien atténuer la fonction propre dans la PML. Nous avons choisi ces paramètres de telle manière que le mode fondamental soit toujours bien atténué dans la PML, même pour $h = 4$.

Sur la figure 5.12, nous représentons l'évolution des valeurs propres dans le plan complexe en partant d'une hauteur de cœur de $h = 9.3$ à une hauteur de $h = 3.3$ en suivant la relation de dispersion avec PML bornée (relation de dispersion donnée en remarque 3.5). Qu'observe-t-on ? Nous voyons qu'un mode violet « part » des modes venant de la discrétisation du spectre continu et « devient » un mode à fuite. Par ailleurs, en zoomant sur la figure autour de $-k_\infty^2$, la borne inférieure du spectre essentiel (figure 5.13), on observe qu'un mode guidé « devient » un mode issu de la discrétisation du spectre continu (mode en vert sur la figure).

On se rappelle (sous-section 2.1.2) qu'on avait interprété les modes à fuite comme des modes guidés lorsqu'ils dépassent la borne inférieure du spectre essentiel. On avait, à cette occasion, remarqué un comportement singulier pour les modes guidés (dans le cas 1D transverse étudié ici) : les modes guidés passaient d'un régime exponentiellement décroissant pur à exponentiellement croissant pur (sans oscillation) en passant par un régime constant (exactement quand la valeur propre λ vaut $-k_\infty^2$). Ceci se manifestait, lorsque l'on suivait la trajectoire de la valeur propre dans le plan complexe par un demi-tour au moment où $\lambda = -k_\infty^2$ (quand on est sur une fréquence de coupure). Puis, en continuant de suivre la relation de dispersion, la valeur propre quittait l'axe réel (et devenait un mode à fuite).

En suivant la relation de dispersion avec PML bornée, on remarque que le passage d'un mode guidé à un mode à fuite est différent : le mode guidé devient d'abord un mode venant de la discrétisation du spectre continu, puis il devient un mode à fuite, comme le montrent les figures 5.12 et 5.13.

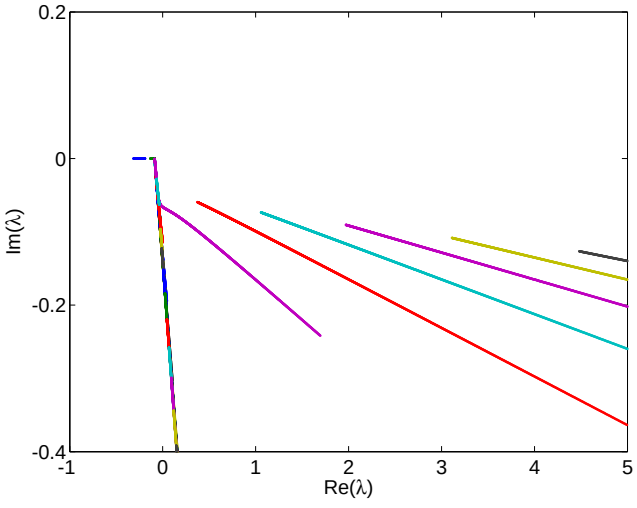

FIGURE 5.12 – *Évolution du spectre, $h = 9.3$ à $h = 3.3$.*

Nous remarquons que, dans ce cadre (lorsqu'il y a des modes guidés), la détermination du spectre dans toute section Σ_x est un point délicat, même dans le cas 2D très simple ici présenté. En effet,

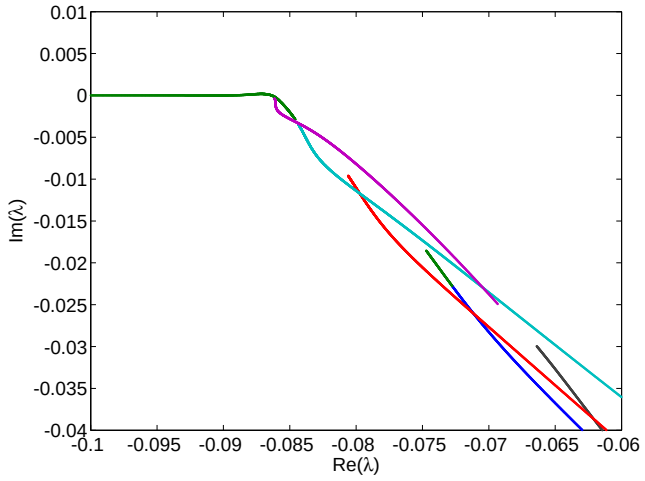

FIGURE 5.13 – *Évolution du spectre, $h = 9.3$ à $h = 3.3$. Zoom autour de la borne inférieure du spectre continu.*

lorsqu'un mode guidé devient un mode à fuite, il faut faire particulièrement attention à ne pas le « perdre » lorsqu'on le « suit » avec la relation de dispersion.

Sur la figure 5.14, nous avons représenté la partie réelle de la solution obtenue pour un guide d'ondes localement perturbé, en utilisant 12 modes dans la méthode multimodale, qui correspondent, respectivement, à 2 modes guidés, 5 modes à fuite et 5 modes résultant de la discrétisation du spectre continu pour le guide droit avec une hauteur de $h = 7$. Nous avons pris les cinq modes à fuite ainsi que les cinq modes résultant du spectre continu pour lesquels le nombre d'onde longitudinal β a la partie imaginaire la plus faible. Nous avons choisi ici de prendre en compte des modes résultant du spectre continu pour deux raisons : pour ne pas « oublier » le mode à fuite qui apparaît (en venant des modes résultant du spectre continu) lorsque la hauteur du guide diminue et parce qu'un des modes guidé devient un mode résultant du spectre continu. Initialement, nous ne voulions utiliser que les modes à fuite, pensant qu'ils étaient les seuls à même de rendre compte de la physique, les modes résultant du spectre continu n'étant liés qu'à la PML. Dans la simulation précédente, comme il n'y avait pas de mode guidé, il n'y avait pas le phénomène de passage d'une catégorie de mode à une autre. Ici, c'est différent et de ce fait, nous sommes amenés à prendre en compte les modes résultant du spectre continu.

Sur la figure 5.15, nous représentons les modules des composantes spectrales. Nous observons qu'il y a deux modes guidés dans le guide d'entrée et de sortie (ici, ce sont les mêmes guides en entrée et en sortie) : un mode bleu (le mode incident) et un mode vert : ce sont les modes pour lesquels le module de la composante spectrale est constante pour $x > 35$ (quand le guide est droit, dans le guide de sortie). De même que dans le cas précédent, nous obervons des oscillations pour le mode incident (en bleu) dans le guide de gauche (pour $x < 15$) : il y a superposition de modes aller et retour. Enfin, nous observons que les autres composantes spectrales n'ont un rôle que dans le support de la perturbation, ce qui est logique puisque les modes correspondants sont évanescents dans la direction de propagation.

Conclusion sur les expériences numériques

En conclusion sur la méthode multimodale, nous dirons que nous n'avons pas été particulièrement convaincu. Nous en avons codé une version naïve, qui est très coûteuse, alors que l'intérêt de la méthode est a priori d'être plus efficace qu'une discrétisation standard, type éléments finis.

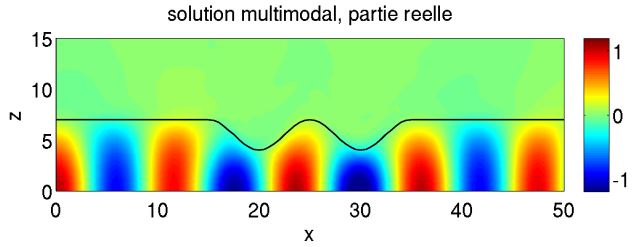

FIGURE 5.14 – *Partie réelle de la solution obtenue avec la méthode multimodale, en utilisant 12 modes. Cas du guide TM.*

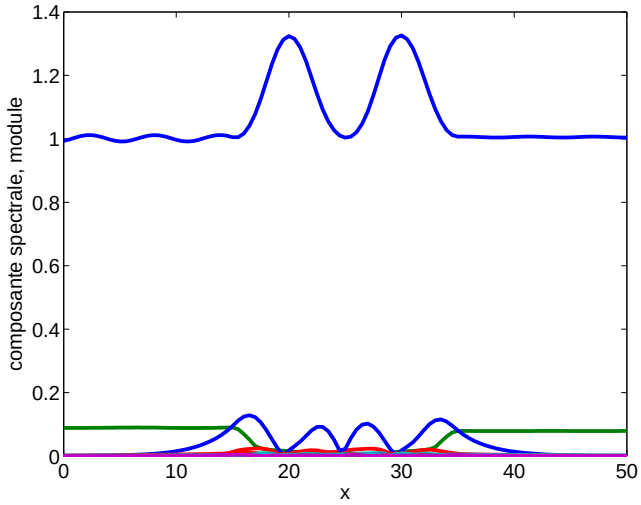

FIGURE 5.15 – *Valeur absolue des composantes spectrales. Cas du guide TM.*

Bien entendu, la version codée n'est pas optimale et on pourrait sans doute gagner beaucoup en temps de calcul. Mais nous avons vu que la méthode multimodale fait apparaître des difficultés liées précisément au fait qu'on utilise des modes.

En effet, nous avons remarqué, sur un exemple, qu'un mode guidé devient d'abord un mode résultant du spectre continu puis un mode à fuite lorsque l'on diminue la taille du guide. Il semble qu'il faille utiliser les modes résultant du spectre continu pour tenir compte du phénomène de passage d'une catégorie de mode à une autre.

Lorsqu'on se place sur une fréquence de coupure, un des modes guidés est théoriquement constant dans la gaine. Que l'on mette ou que l'on ne mette pas de PML ne change pas ce comportement : le prolongement analytique d'une constante reste une constante. Il n'y a donc pas moyen d'absorber un tel mode avec une PML et, vraisemblablement, ce mode est mal calculé. Lorsqu'un de ces modes guidés est excité (i.e. lorsque sa composante spectrale n'est pas négligeable), il est alors légitime de se demander si la solution calculée avec la méthode multimodale correspond à la réalité. Cette question est toujours ouverte.

Enfin, une question demeure : quels modes prendre en compte dans la méthode multimodale ? L'idée originelle était de prendre en compte les modes guidés et quelques modes à fuite (ceux qui sont le moins évanescents dans la direction de propagation). Ces modes sont en effet physiques, ils ne sont pas liés à la PML, contrairement aux modes résultant de la discrétisation du spectre continu, qui sont uniquement liés à la PML. Dans le cas 2D ici présenté la distinction entre les modes à fuite et les modes résultant du spectre continu est assez facile à faire, même si ce n'est pas toujours évident, puisqu'on a pu observer qu'il y a des passages d'une catégorie de mode à une autre. Il n'est donc a priori pas sûr que cette distinction soit utile en pratique, d'autant que si l'on pense à des situations plus complexes, la distinction entre les différents type de modes n'est vraiment pas facile à faire. Il semble en fait qu'il faille être plus pragmatique et prendre en compte tous les modes (y compris ceux qui résultant de la discrétisation du spectre continu), avec un critère qui peut être par exemple : $\Im m(\beta) < \text{seuil}$. Nous ne prenons ainsi en compte que les modes les moins évanescents dans la direction longitudinale (i.e. ceux qui ont la durée de vie la plus longue).

Conclusion

Dans ce mémoire, l'objectif était l'étude à la fois théorique et numérique de la jonction entre deux guides d'ondes ouverts.

Nous avons montré un résultat théorique original au chapitre 4 concernant le caractère bien posé du problème de radiation ou de diffraction dans une telle géométrie. Pour cela, nous avons utilisé des conditions de rayonnement modales, qui sont fondées sur la représentation de la solution dans un guide droit comme une superposition de modes guidés (correspondant au spectre discret de l'opérateur transverse) et de modes de radiation (correspondant au spectre continu, ou essentiel, de l'opérateur transverse). Les notions de modes guidés et de modes de radiation sont l'objet du chapitre 1.

La décomposition de la solution fait intervenir une somme finie sur les modes guidés et une superposition continue (une intégrale) sur les modes de radiation. Cette intégrale semble très difficile à manipuler numériquement. Nous avons donc choisi, pour traiter le même problème numériquement, de placer une PML pour borner le domaine de calcul dans la (ou les) direction(s) transverse(s). Par ce procédé, nous modifions profondément la nature de l'opérateur transverse dans le cas d'un guide droit, qui devient à résolvante compacte (donc avec un spectre uniquement discret) et non autoadjoint. Nous faisons apparaître un nouveau type de modes : les modes à fuite (cf. chapitre 2), auxquels viennent s'ajouter des modes provenant de la discrétisation du spectre essentiel que l'on aurait si la PML était de taille infinie (cf. chapitres 2 et 3). Nous avons vu que le calcul numérique de ces modes peut être très délicat, du fait de la nature exponentiellement croissante des modes à fuite dans la gaine. Notre conseil est donc de placer la PML le plus près possible du cœur du guide, de façon à éviter au maximum cette croissance exponentielle et à maintenir un calcul précis. Ceci nous a amené à développer un nouveau type de PMLs, les PMLs non orthogonales, qui permettent de coller la PML à la frontière cœur/gaine dans des géométries non canoniques (voir chapitre 3). Nous utilisons ensuite ces différents modes au chapitre 5 pour simuler la jonction entre deux guides d'ondes ouverts, d'une part en créant des conditions aux limites transparentes, fondées sur des opérateurs de Dirichlet-to-Neumann (pour borner le domaine de calcul dans la direction de propagation), d'autre part dans une méthode multimodale.

Présentons maintenant quelques perspectives et quelques pistes de généralisations qui semblent possibles. Concernant la partie théorique de ce mémoire (le caractère bien posé du problème de radiation ou de diffraction), nous avons vu, à la fin du chapitre 4, qu'il nous semble que l'approche développée ici peut être généralisée pour des problèmes plus généraux que celui présenté, dans la mesure où l'équation de propagation est une équation de type Helmholtz : $-\mathrm{div}(\mu\nabla\varphi) - \omega^2\rho\,\varphi = f$. L'outil essentiel dans toute cette démarche est la transformation de Fourier généralisée, qu'il convient d'étendre à un espace de distributions type distributions de Schwartz. Cependant, nous avons vu que l'approche n'est pas directement généralisable pour des problèmes vectoriels, type Maxwell par exemple.

Du point de vue numérique, nous avons vu que l'idée sous-jacente à l'utilisation de PMLs dans la (ou les) direction(s) transverse(s) est formellement la suivante : transformer l'intégrale sur les modes de radiation en une série sur les modes à fuite. En fait, les différents exemples numériques étudiés dans ce mémoire (décomposition modale de la fonction de Green, opérateurs de Dirichlet-to-Neumann, méthode multimodale) nous amènent à penser qu'il faut, en plus des modes à fuite, prendre également en compte les modes provenant de la discrétisation du spectre essentiel. De plus, il nous semble, à l'issue de cette thèse, que l'utilisation des modes à fuite est pertinente lorsque ceux-ci s'apparentent à des modes guidés, i.e. quand ils sont très peu croissants dans la gaine. Dans le cas contraire, les modes sont, d'une part, très évanescents dans la direction longitudinale (ils ont donc une durée de vie très courte) et, d'autre part, très délicats à manipuler numériquement, du fait de leur caractère exponentiellement croissant.

Par ailleurs, justifier une telle décomposition du champ n'est pas chose facile. Pour adapter ce

que nous savons pour les guides fermés au cas des guides ouverts, nous voudrions montrer que les fonctions propres (et les fonctions propres généralisées) de l'opérateur avec PML de taille finie (l'opérateur noté $\widetilde{A}_\alpha$ dans tout le mémoire) forment une base de $L^2(\widetilde{\Omega})$. Démontrer une telle propriété n'est pas évident. Dans le cas d'un guide d'ondes fermé (i.e. d'un opérateur transverse autoadjoint et à résolvante compacte) la théorie spectrale nous donne ce résultat immédiatement. Dans le cas de l'opérateur $\widetilde{A}_\alpha$ (à résolvante compacte mais non autoadjoint), cette question reste ouverte. La complétude des fonctions propres (et des fonctions propres généralisées), qui est une propriété moins forte que la propriété de base de $L^2(\widetilde{\Omega})$ mentionnée ci-dessus, est déjà une question difficile en soi et qui demeure ouverte. Mais peut-être est-il inutile de chercher à démontrer ces propriétés sur les fonctions propres et les fonctions propres généralisées. Au chapitre 3, nous avons vu qu'une piste pour justifier la décomposition de la fonction de Green du guide uniforme à l'aide des fonctions propres et des fonctions propres généralisées est d'utiliser des techniques de déformation de contour dans le plan complexe. En fait, nous ne cherchons pas à décomposer n'importe quelle fonction de $L^2(\widetilde{\Omega})$ sur les fonctions propres et les fonctions propres généralisées de $\widetilde{A}_\alpha$, nous cherchons à décomposer la fonction de Green, qui vérifie les équations de propagation. C'est sans doute la raison pour laquelle rechercher une propriété de base est trop exigeant. Peut-être pouvons-nous adapter cette technique pour justifier l'expression des opérateurs de Dirichlet-to-Neumann et obtenir des estimations d'erreur lorsque l'on tronque la série en ne prenant qu'un certain nombre de modes (ceux pour lesquels $\Im m(\beta) < \text{seuil}$). Cette question demeure pour l'instant ouverte.

Dans ce mémoire, nous n'avons traité que l'équation de Helmholtz. Mais pour des problèmes vectoriels type Maxwell ou élasticité, les méthodes numériques étudiées dans ce mémoire (DtN, méthode multimodale), qui sont fondées sur les modes du guide d'ondes ouvert avec PMLs, peuvent être implémentées de la même manière que dans le cas scalaire présenté dans ce mémoire.

Annexes

THÉORIE SPECTRALE

A

A.1 RÉSULTATS CLASSIQUES DE THÉORIE SPECTRALE

Nous commençons par rappeler quelques notions standards de théorie spectrale. Dans toute cette sous-section, A est un opérateur défini sur un espace de Hilbert, que l'on va noter X, à valeurs dans ce même espace de Hilbert X. Nous noterons $(.,.)_X$ un produit scalaire sur X et $\|.\|_X$ la norme associée à ce produit scalaire : $\|u\|_X := \sqrt{(u,u)_X}$ pour tout $u \in X$. Les principales références d'où les résultats que l'on va énoncer sont tirés sont [EE87], [HS95] et [RS72].

A.1.1 Rappels sur les opérateurs dans les espaces de Hilbert

Nous notons $D(A)$ le *domaine* de l'opérateur A. Nous définissons $\mathrm{Ker}(A)$ le *noyau* de A : $\{v \in D(A), Av = 0\}$ et $\mathrm{Im}(A)$ l'*image* de A : $\{Av, v \in D(A)\}$.

L'opérateur A est dit *borné* (ou continu) s'il existe $C > 0$ tel que

$$\forall u \in X, \|Au\|_X \leq C\|u\|_X.$$

Un opérateur est *non borné* si aucune constante C ne convient. Nous définissons le *graphe* de A : $\mathrm{Gr}(A)$:

$$\mathrm{Gr}(A) := \{\{u, Au\}, u \in D(A)\}.$$

Un opérateur A est dit *fermé* si $\mathrm{Gr}(A)$ est un sous-espace dense dans $X \times X$. Un opérateur fermé tel que $D(A) = X$ est nécessairement borné. Un opérateur sera dit à *domaine dense* si $D(A)$ est dense dans X.

Définissons un cas particulier d'opérateur borné, qui est très important. L'opérateur A est dit *compact* de X si pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée de X, on peut extraire de $(Ax_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite convergente. Un tel opérateur transforme les suites faiblement convergentes en suites fortement convergentes : $u_n \rightharpoonup u$ dans X implique $Au_n \to Au$ dans X.

Nous pouvons généraliser cette définition : un opérateur B est dit *A-compact* si $D(A) \subset D(B)$ et pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $D(A)$, bornée pour la norme du graphe de A (pour $\|\cdot\|_X + \|A\cdot\|_X$), il existe une sous-suite convergente de $(Bu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans X.

Définissons maintenant une catégorie particulière d'opérateurs compacts : les opérateurs de *Hilbert–Schmidt*. Un opérateur T est de Hilbert–Schmidt si, étant donné une base orthonormale (x_n) de X, la quantité suivante :

$$\|T\|^2 = \sum_n \|Tx_n\|_X^2$$

est finie. On vérifie que la quantité $\|T\|$ ne dépend pas de la base orthonormale choisie.

Soit maintenant un opérateur à domaine dense. L'*adjoint* de l'opérateur A est l'opérateur A^* : $D(A^*) \subset X \to X$ défini par :

$$D(A^*) := \{v \in X, \exists C > 0, \forall u \in X, |(Au, v)_X| \leq C\|u\|_X\}, \text{ tel que}$$
$$(Au, v)_X = (u, A^*v)_X, \forall u \in D(A), \forall v \in D(A^*).$$

Pour pouvoir définir l'adjoint, il est nécessaire d'avoir la propriété de domaine dense. Nous le supposerons donc. Par théorème de Riesz, on peut également définir le domaine de A^* par :

$$\{v \in X, \exists w \in X, \forall u \in X, (Au, v)_X = (u, w)_X\}.$$

Un opérateur est dit *autoadjoint* si $A^* = A$, ce qui signifie deux choses :

- $D(A) = D(A^*)$,
- $Au = A^*u, \forall u \in D(A)$.

Une caractérisation utile des opérateurs autoadjoints est la suivante :

Proposition A.1 (caractérisation des opérateurs autoadjoints) *Soit A un opérateur fermé* symétrique, *c'est-à-dire tel que :*

$$(Au, v)_X = (u, Av)_X, \forall u, v \in D(A).$$

S'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{Im}(A + \lambda I) = X$, alors $D(A)$ est dense dans X et A est autoadjoint.

Dans le cas d'un opérateur A autoadjoint pour le produit scalaire $(.,.)_X$, nous noterons $a(.,.)$ la forme bilinéaire (ou sesquilinéraire si l'on prend un produit scalaire sur $\mathbb{C}$) associée à cet opérateur, i.e.

$$a(u, v) = (Au, v)_X, \forall u, v \in D(A).$$

Dans nos cas d'application, la forme ainsi créée peut être étendue sur un espace plus gros que $D(A)$, de telle manière que la forme soit fermée (cf. [Kat76]). On notera V cet espace. Et on aura de plus : $D(A) \subset V \subset X$, avec injections denses et continues.

On dit qu'un opérateur est *normal* si $AA^* = A^*A$. Un opérateur autoadjoint est un cas particulier d'opérateur normal. Nous allons, dans la suite, énoncer des propriétés des opérateurs autoadjoints. La plupart d'entre elles peuvent être généralisées (moyennant aménagements) pour des opérateurs normaux.

Nous définissons plusieurs notions :

- La *nullité* (nullity en anglais) $\mathrm{nul}(A)$ de A est la dimension de $\mathrm{Ker}(A)$,
- La *déficience* (deficiency en anglais) $\mathrm{def}(A)$ de A est la codimension de $\mathrm{Im}(A)$ dans X.
- L'*indice* (index en anglais) est défini par : $\mathrm{ind}(A) := \mathrm{nul}(A) - \mathrm{def}(A)$. Si ind est utilisé, alors nul et def sont implicitement finis.

Nous définissons maintenant l'ensemble résolvant et le spectre :

- l'*ensemble résolvant* $\rho(A)$ de A est défini comme l'ensemble des points du plan complexe où $A - \lambda I$ est inversible, ce qui peut s'exprimer :

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}, \mathrm{Im}(A - \lambda I) \text{ est fermée}, \ \mathrm{nul}(A - \lambda I) = \mathrm{def}(A - \lambda I) = 0\}, \tag{A.1}$$

- le *spectre* de A, noté $\Lambda(A)$ est le complémentaire dans $\mathbb{C}$ de l'ensemble résolvant, i.e. l'ensemble des points du plan complexe où $A - \lambda I$ n'est pas inversible.

Lorsque $\lambda \in \rho(A)$, nous notons $R_A(\lambda)$, et appelons la *résolvante* de A au point λ, l'opérateur inverse de $A - \lambda I$. C'est un opérateur borné, par application du théorème de l'application ouverte (ou du graphe fermé, [Bre83, théorème II.7]) en supposant que A est fermé, ce que nous supposerons.

On montre que $\mathbb{C} = \Lambda(A) \oplus \rho(A)$, $\rho(A)$ est un fermé de $\mathbb{C}$ et $\Lambda(A)$ est un ouvert de $\mathbb{C}$. On montre également que si l'opérateur A est autoadjoint, alors son spectre est réel.

On définit l'*image numérique* de A, notée $\Gamma(A)$, par :

$$\Gamma(A) := \{(Au, u)_X, \forall u \in X, \|u\|_X = 1\}.$$

On montre que $\Gamma(A)$ est un ensemble convexe. On montre que si A est borné ou si A est autoadjoint (mais non nécessairement borné), alors $\Lambda(A) \subset \overline{\Gamma(A)}$.

Un opérateur A est *m-sectoriel* si son image numérique est contenue dans un cône de la forme : $S_\delta := \{\lambda \in \mathbb{C}, |\arg(\lambda)| \leq \delta|\}$, où $\delta \in [0, \pi/2[$ et si $\mathbb{C} \setminus S_\delta \cap \rho(A) \neq \emptyset$.

Nous définissons le *rayon spectral* d'un opérateur A (spectral radius en anglais), noté $\mathrm{spr}(A)$, par :

$$\mathrm{spr}(A) := \sup_{\lambda \in \Lambda(A)} |\lambda|.$$

Nous avons la caractérisation suivante du rayon spectral :

$$\mathrm{spr}(A) = \lim_{n \to +\infty} \|A^n\|^{1/n}.$$

Un opérateur est dit *quasinilpotent* si son rayon spectral est nul.

Nous allons maintenant voir trois décompositions différentes du spectre. La première est générale (elle s'applique à des opérateurs non nécéssairement autoadjoints), les deux autres s'appliquent à des opérateurs autoadjoints. Enfin, nous rappellerons un résultat important pour les opérateurs autoadjoints : la complétude des fonctions propres et des fonctions propres généralisées.

A.1.2 Spectre ponctuel, spectre continu, spectre résiduel

A est un opérateur fermé de domaine dense, non nécessairement autoadjoint. Nous définissons :

- le *spectre ponctuel* $\Lambda_p(A)$:

$$\begin{aligned} \Lambda_p(A) &:= \{\lambda \in \mathbb{C}, \mathrm{nul}(A - \lambda I) > 0\} && \text{(A.2)} \\ &= \{\lambda \in \mathbb{C}, A - \lambda I \text{ n'est pas injectif}\}, && \text{(A.3)} \end{aligned}$$

- le *spectre continu* $\Lambda_c(A)$:

$$\begin{aligned} \Lambda_c(A) &:= \{\lambda \in \mathbb{C}, \mathrm{Im}(A - \lambda I) \text{ n'est pas fermée}, \ \mathrm{nul}(A - \lambda I) = \mathrm{def}(A - \lambda I) = 0\} && \text{(A.4)} \\ &= \{\lambda \in \mathbb{C}, A - \lambda I \text{ est injectif et } \mathrm{Im}(A - \lambda I) \text{ est dense dans } X\}, && \text{(A.5)} \end{aligned}$$

- le *spectre résiduel* $\Lambda_r(A)$:

$$\begin{aligned} \Lambda_r(A) &:= \{\lambda \in \mathbb{C}, \mathrm{nul}(A - \lambda I) = 0, \ \mathrm{def}(A - \lambda I) > 0\} && \text{(A.6)} \\ &= \{\lambda \in \mathbb{C}, A - \lambda I \text{ est injectif et } \mathrm{Im}(A - \lambda I) \text{ n'est pas dense dans } X\}. && \text{(A.7)} \end{aligned}$$

Ceci nous donne une décomposition du spectre :

$$\Lambda(A) = \Lambda_p(A) \oplus \Lambda_c(A) \oplus \Lambda_r(A). \tag{A.8}$$

Si $\lambda \in \Lambda_p(A)$, alors λ est appelée une *valeur propre* de A. Une fonction $u \in D(A)$, $u \neq 0$ tel que $Au = \lambda u$ est alors une *fonction propre*. Nous appelons *sous-espace géométrique* le sous-espace $\mathrm{Ker}(A - \lambda I)$ et *multiplicité géométrique* le nombre $\mathrm{nul}(A - \lambda I)$.

On montre également que $\lambda \in \Lambda_r(A)$ si, et seulement si, $\lambda \notin \Lambda_p(A)$ et $\overline{\lambda} \in \Lambda_p(A^*)$. Dans le cas d'un opérateur A autoadjoint, on vérifie alors que le spectre résiduel est vide.

A.1.3 Spectre discret, spectre essentiel

A est un opérateur autoadjoint fermé et de domaine dense. Voir la section A.2.1 pour des généralisations de ce qu'on va dire ici pour des opérateurs non autoadjoints.

Nous définissons :

- le *spectre discret* $\Lambda_{disc}(A)$ comme l'ensemble des valeurs propres de multiplicité géométrique finie et isolées dans le spectre,
- le *spectre essentiel* $\Lambda_e(A)$ comme le complémentaire dans le spectre de $\Lambda_{disc}(A)$.

Ainsi, on vérifie que $\Lambda_{disc}(A) \subset \Lambda_p(A)$ et que $\Lambda_e(A)$ est un fermé de $\mathbb{C}$. De plus, on a la décomposition du spectre suivante :

$$\Lambda(A) = \Lambda_{disc}(A) \oplus \Lambda_e(A). \tag{A.9}$$

Donnons tout d'abord quelques détails sur le spectre discret. En toute généralité, considérons un opérateur A non nécessairement autoadjoint et λ un point du spectre, isolé. Soit $\mathcal{C}_\lambda$ un contour dans le plan complexe qui entoure cette valeur λ. Alors définissons :

$$P_\lambda := \frac{-1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}_\lambda} R_A(\xi)\, \mathrm{d}\xi. \tag{A.10}$$

On vérifie que P_λ ne dépend pas du contour choisi $\mathcal{C}_\lambda$ et définit une projection, appelée *projection spectrale* (ou projection de Riesz). En fait, nous pouvons définir un calcul fonctionnel holomorphe : pour f holomorphe dans un ouvert contenant $\mathcal{C}$, un contour englobant tout le spectre de A, nous pouvons définir $f(A)$ par

$$f(A) := \frac{-1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}} f(\xi)\, R_A(\xi)\, \mathrm{d}\xi. \tag{A.11}$$

Nous pouvons développer la résolvante en série de Laurent au voisinage de λ, λ étant toujours un point isolé du spectre : dans le cas général où A n'est pas nécessairement autoadjoint, on obtient :

$$R_A(\xi) = \frac{-1}{\xi - \lambda} P_\lambda - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(\xi - \lambda)^{n+1}} D_\lambda^n + \sum_{n=0}^{+\infty} (\xi - \lambda)^n S_\lambda^{n+1}, \tag{A.12}$$

où

$$D_\lambda := (A - \lambda I) P_\lambda = \frac{-1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}_\lambda} (\xi - \lambda)\, R_A(\xi)\, \mathrm{d}\xi, \tag{A.13}$$

$$S_\lambda := \lim_{\xi \to \lambda} R(\xi)(I - P) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}_\lambda} \frac{1}{\xi - \lambda}\, R_A(\xi)\, \mathrm{d}\xi. \tag{A.14}$$

On montre alors que D_λ et S_λ sont des opérateurs bornés et que D_λ est quasinilpotent. On définit alors le *sous-espace algébrique* comme l'espace $P_\lambda X$ et la *multiplicité algébrique* comme la dimension du sous-espace algébrique.

De manière générale (A non autoadjoint), on montre que si λ est une valeur propre, le sous-espace géométrique est inclus dans le sous-espace algébrique. Quand le sous-espace géométrique est strictement inclus dans le sous-espace algébrique, alors il y a un *bloc de Jordan*. Pour voir de quoi il s'agit, prenons une valeur propre λ de multiplicité géométrique égale à 1 et de multiplicité algébrique strictement supérieure à 1. L'image de P_λ où P_λ est le projecteur spectral associé à A et à la valeur propre λ, défini par (A.10), peut s'exprimer dans une certaine base sous la forme :

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix}.$$

Notons $(u_0, u_1, \ldots, u_n)$ cette base. C'est ce qu'on appelle une *chaîne de Jordan* : u_0 est une fonction propre et $u_1, \ldots, u_n$ sont des *fonctions propres généralisées*.[1]

Si la multiplicité algébrique est finie, alors D_λ est nilpotent, λ est un pôle de la résolvante et λ est une valeur propre. Sinon, λ est une singularité essentielle de la résolvante et λ peut être ou ne pas être une valeur propre.

Pour un opérateur autoadjoint, $P_\lambda, D_\lambda, S_\lambda$ sont symétriques et bornés, donc autoadjoints. Or un opérateur quasinilpotent normal est forcément nul (cf. [Kat76]) donc $D_\lambda = 0$. Ainsi, toutes les valeurs propres isolées sont des pôles simples de la résolvante et on montre que les sous-espaces géométrique et algébrique coïncident.

De manière générale, si la valeur propre λ est telle que ses multiplicités géométrique et algébrique coïncident (i.e. s'il n'y a pas de bloc de Jordan associé à λ), alors l'opérateur quasinilpotent D_λ associé est nul.

Exemple A.1 *Un opérateur compact n'a que du spectre discret (sauf peut-être en 0). Un opérateur à résolvante compacte n'a que du spectre discret.*

Nous terminons nos remarques sur le spectre discret par le principe du min-max, qui permet de caractériser les valeurs propres qui sont inférieures à la borne inférieure du spectre essentiel pour les opérateurs autoadjoints bornés inférieurement, c'est-à-dire les opérateurs autoadjoints pour lesquels l'image numérique est bornée inférieurement.

Proposition A.2 (principe du min-max) *Nous définissons $\mathcal{N}(A)$ le nombre de valeurs propres (comptées avec ordre de multiplicité) strictement inférieures à la borne inférieure du spectre essentiel $\Lambda_e(A)$. Nous définissons $\lambda_n(A)$ par l'une des deux formules suivantes :*

$$\lambda_n(A) = \inf_{V_n \in \mathcal{V}_n(V)} \sup_{u \in V_n, u \neq 0} \frac{a(u,u)}{\|u\|_X^2}, \tag{A.15}$$

$$\lambda_n(A) = \sup_{V_{n-1} \in \mathcal{V}_{n-1}(X)} \inf_{u \in V_{n-1}^\perp \cap V, u \neq 0} \frac{a(u,u)}{\|u\|_X^2}, \tag{A.16}$$

où $\mathcal{V}_m(Y)$ désigne un sous-espace de Y de dimension m et $W^\perp$ désigne l'orthogonal de W, i.e. $\{u \in X, (u,v)_X = 0, \forall v \in W\}$. $a(.,.)$ est la forme bilinéaire associée à l'opérateur A et V est le domaine de la forme bilinéaire (ou sesquilinéraire) $a(.,.)$ associée à A.

[1] Attention à ne pas confondre cette notion de fonction propre généralisée avec celle qui est définie en section A.1.5.

Nous avons le résultat suivant :

- *$\lambda_n(A)$ est strictement inférieur à la borne inférieure du spectre essentiel si, et seulement si, $\mathcal{N}(A) \geq n$ et dans ce cas, les $\lambda_k(A), k = 1, \ldots, n$ sont les n premières valeurs propres.*
- *$\lambda_n(A)$ est égal à la borne inférieure du spectre essentiel si, et seulement si, $\mathcal{N}(A) < n$ et dans ce cas, $\lambda_k(A)$ est égal à la borne inférieure du spectre essentiel pour tout $k \geq n$.*

Nous définissons maintenant la notion de suite de Weyl, qui nous permettra de caractériser le spectre essentiel.

Définition A.1 (suite de Weyl) *Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une* suite de Weyl *de A associée à λ si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à $D(A)$ et satisfait*

$$\|u_n\|_X = 1, \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \rightharpoonup 0 \quad \textit{et} \quad (A - \lambda I)u_n \to 0 \textit{ dans } X.$$

Remarque A.1 : *Quand l'espace n'est pas un espace de Hilbert mais uniquement un espace de Banach, la notion de suite de Weyl est généralisée et porte le nom de* suite singulière *([EE87, p. 43]) : une suite singulière est une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de X telle que*

$$\|u_n\|_X = 1, \forall n \in \mathbb{N}, \quad (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \textit{ n'a pas de sous-suite convergente} \quad \textit{et} \quad (A - \lambda I)u_n \to 0 \textit{ dans } X.$$

Terminons par deux propriétés qui permettent de caractériser le spectre essentiel.

Proposition A.3 (critère de Weyl) *Soit A un opérateur autoadjoint fermé de domaine dense. $\lambda \in \Lambda_e(A)$ si, et seulement si, on peut construire une suite de Weyl de A associée à λ.*

Proposition A.4 (théorème de Weyl) *Soit A et K deux opérateurs autoadjoints fermés tels que K est A-compact. Alors $A + K$ est fermé et*

$$\Lambda_e(A) = \Lambda_e(A + K).$$

Par ailleurs, le spectre essentiel est l'ensemble des points qui est stable par perturbation compacte, ce qui signifie :

$$\Lambda_e(A) = \bigcap_{B\in\mathcal{K}(X)} \Lambda(A + B),$$

où $\mathcal{K}(X)$ est l'ensemble des opérateurs compacts sur X.

En conclusion, rappelons les trois caractérisations du spectre essentiel, dans le cadre des opérateurs autoadjoints :

- le spectre privé du spectre discret,
- l'ensemble des points du spectre qui est stable par perturbation compacte,
- l'ensemble des points du spectre caractérisés par des suites de Weyl.

A.1.4 Spectre purement ponctuel, spectre absolument continu, spectre singulièrement continu

Nous considérons A un opérateur autoadjoint (fermé et de domaine dense). Les principales références concernant la décomposition du spectre que l'on va étudier ici sont [DL84], [Kat76, p. 354] et [RS72, p. 263].

Nous commençons par définir la notion de famille spectrale.

Définition A.2 (famille spectrale) *Soit X un espace de Hilbert. E défini de l'ensemble des boréliens de $\mathbb{R}$ à valeurs dans l'ensemble des projections orthogonales sur X est une* famille spectrale *(ou résolution de l'identité) si :*

$$E(\emptyset) = 0, \quad E(\mathbb{R}) = I, \tag{A.17}$$

$$E(\bigcup_{j=1}^{\infty} J_j) = \sum_{j=1}^{\infty} E(J_j), \forall J_j \text{ boréliens de } \mathbb{R} \text{ disjoints}. \tag{A.18}$$

On montre alors que l'on a : $E(J_1 \cap J_2) = E(J_1)E(J_2), \forall J_1, J_2$ boréliens de $\mathbb{R}$.

Définition A.3 (mesure réelle associée à une mesure spectrale) *À partir d'une mesure spectrale E et à partir d'un vecteur $u \in X$, on peut définir une mesure réelle positive par :*

$$\mathrm{mes}_{u,E}(J) = (E(J)u, u)_X, \forall J \text{ borélien de } \mathbb{R}.$$

Comme pour les mesures scalaires, on définit une fonction E_λ, pour $\lambda \in \mathbb{R}$, au lieu d'une mesure $E(J)$, pour J borélien. On peut considérer (formellement) que $E_\lambda = E(J)$, où $J =]-\infty, \lambda[$.

On montre alors qu'étant donnée une mesure spectrale E, il est possible de définir des intégrales spectrales de la forme :

$$\int_{\mathbb{R}} f(\lambda)\,\mathrm{d}E_\lambda \tag{A.19}$$

pour toute fonction f mesurable. A priori, seul $\mathrm{d}(E_\lambda u, u)_X$ est défini pour tout $u \in X$, puis par principe de polarisation, $\mathrm{d}(E_\lambda u, v)_X$, pour tout $u, v \in X$. La formule (A.19) n'est donc qu'une notation. En prenant ensuite $f(\lambda) = \lambda$, on définit un opérateur A autoadjoint par

$$(Au, v)_X = \int_{\mathbb{R}} \lambda\,\mathrm{d}(E_\lambda u, v)_X, \quad \forall u\ D(A) = \left\{ u \in X, \int_{\mathbb{R}} \lambda^2\,\mathrm{d}(E_\lambda u, u)_X < +\infty \right\}, \forall v \in X. \tag{A.20}$$

$\int_{\mathbb{R}} \lambda\,\mathrm{d}E_\lambda$ est ce qu'on appelle la représentation spectrale de l'opérateur A.

À toute mesure spectrale nous avons associé un opérateur autoadjoint. Le théorème spectral ci-dessous permet de montrer la réciproque : à tout opérateur autoadjoint, on peut associer une mesure spectrale.

Théorème A.1 (théorème spectral) **:** *Soit A un opérateur autoadjoint (borné ou non borné) défini sur X un espace de Hilbert. Alors, il existe une unique mesure spectrale E associée à A telle que :*

$$Au = \int_{\mathbb{R}} \lambda\,\mathrm{d}E_\lambda u, \quad \forall u \in D(A) = \left\{ u \in X, \int_{\mathbb{R}} \lambda^2\,\mathrm{d}(E_\lambda u, u) < +\infty \right\}. \tag{A.21}$$

De plus, pour toute fonction f mesurable, on a :

$$f(A)u = \int_{\mathbb{R}} f(\lambda)\,\mathrm{d}E_\lambda u, \quad \forall u \in D(f(A)) = \left\{ u \in X, \int_{\mathbb{R}} |f(\lambda)|^2\,\mathrm{d}(E_\lambda u, u) < +\infty \right\}. \tag{A.22}$$

La formule (A.22) permet de définir un calcul spectral. Ce calcul spectral est différent du calcul spectral holomorphe défini (A.11). Avec la formule (A.22), f n'a besoin que d'être mesurable. Mais avec la formule (A.11), l'opérateur n'est pas nécessairement autoadjoint.

On montre que le support de E est le spectre de A. L'intégrale sur $\mathbb{R}$ peut donc être remplacée par une intégrale sur $\Lambda(A)$. La formule de Stone (ci-dessous) permet de déterminer la mesure spectrale correspondante à un opérateur autoadjoint donné :

Théorème A.2 (formule de Stone) **:** *Soit A un opérateur autoadjoint (borné ou non borné) défini sur X un espace de Hilbert. Alors, pour $J = [a, b]$, pour $u \in X$,*

$$\|E(J)u\|_X^2 = \frac{1}{2i\pi} \lim_{\eta \searrow 0} \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{a-\eta}^{b+\eta} \left([R_A(\lambda + i\varepsilon) - R_A(\lambda - i\varepsilon)]\, u, u \right)_X \, \mathrm{d}\lambda. \tag{A.23}$$

Remarque A.2 : *Il suffit de changer les bornes de l'intégrale : $a - \eta$ en $a + \eta$ ou/et $b + \eta$ en $b - \eta$ pour obtenir $\|E(I)u\|_X^2$ pour $J =]a, b]$, $J = [a, b[$ ou $J =]a, b[$.*

Remarque A.3 : *Lorsque l'on cherche à évaluer $E(\{\lambda\})$ pour λ un élément isolé du spectre, alors la formule de Stone nous montre que $E(\{\lambda\}) = P_\lambda$, P_λ étant le projecteur spectral défini par la formule (A.10).*

Rappelons maintenant un résultat de théorie de la mesure (cf. [RS72]) :

Proposition A.5 (décomposition des mesures réelles) *Soit* mes *une mesure sur $\mathbb{R}$. Alors, elle peut être décomposée de manière unique en :*

$$\mathrm{mes} = \mathrm{mes}_{pp} + \mathrm{mes}_{ac} + \mathrm{mes}_{sc},$$

où les mesures $\mathrm{mes}_{pp}, \mathrm{mes}_{ac}$ et mes_{sc} sont caractérisées par :

- mes_{pp} *est une* mesure purement ponctuelle *:*

$$\forall J \text{ borélien}, \mathrm{mes}_{pp}(J) = \sum_{x \in J} \mathrm{mes}_{pp}(\{x\}).$$

- mes_{ac} *est une* mesure absolument continue *par rapport à la mesure de Lebesgue, notée $\mathrm{d}x$:*

$$\exists f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}) \left(\text{i.e. } \int_a^b |f(x)|\, \mathrm{d}x < +\infty, \forall a, b \in \mathbb{R} \right), \forall g \in L^1(\mathbb{R}; \mathrm{dmes}_{ac}), \quad \int g \, \mathrm{dmes}_{ac} = \int gf \, \mathrm{d}x.$$

- mes_{sc} *est une* mesure singulièrement continue *par rapport à la mesure de Lebesgue, notée $\mathrm{d}x$:*

$$\forall J \text{ borélien}, \forall x \in J, \mathrm{mes}_{sc}(\{x\}) = 0, \quad \text{et} \quad \exists S \text{ borélien tel que } \int_{\mathbb{R} \setminus S} \mathrm{d}x = 0, \text{ et } \mathrm{mes}_{sc}(S) = 0.$$

On montre alors (cf. [RS72]) que l'on a la décomposition suivante $X = X_{pp} \oplus X_{ac} \oplus X_{sc}$, où

$$X_{pp} := \{u \in X, \mathrm{mes}_{u,E} \text{ est purement ponctuelle}\}, \tag{A.24}$$
$$X_{ac} := \{u \in X, \mathrm{mes}_{u,E} \text{ est absolument continue}\}, \tag{A.25}$$
$$X_{sc} := \{u \in X, \mathrm{mes}_{u,E} \text{ est singulièrement continue}\}. \tag{A.26}$$

Voir la définition A.3 pour $\mathrm{mes}_{u,E}$. Chacun de ces sous-espaces est stable par A. On définit alors :

- le *spectre purement ponctuel* : $\Lambda_{pp}(A) := \Lambda(A|_{X_{pp}})$,
- le *spectre absolument continu* : $\Lambda_{ac}(A) := \Lambda(A|_{X_{ac}})$,
- le *spectre singulièrement continu* : $\Lambda_{sc}(A) := \Lambda(A|_{X_{sc}})$.

Ceci nous donne une nouvelle décomposition du spectre :

$$\Lambda(A) = \Lambda_{pp}(A) \oplus \Lambda_{ac}(A) \oplus \Lambda_{sc}(A). \tag{A.27}$$

Nous pouvons démontrer que $\Lambda_p(A) \subset \Lambda_{pp}(A)$. En fait, $\Lambda_{pp}(A) = \overline{\Lambda_p(A)}$ (cf. [RS72, p. 231]).

Exemple A.2 *Un opérateur compact (ou à résolvante compacte) autoadjoint n'a que du spectre purement ponctuel. La formule (A.21) devient alors :*

$$Au = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n P_{\lambda_n} u, \quad \forall u \in D(A) = \left\{ u \in X, \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^2 \|P_{\lambda_n} u\|_X^2 < +\infty \right\},$$

où les P_{λ_n} sont les projecteurs spectraux associées aux valeurs propres non nulles. Ceci donne une diagonalisation de l'opérateur A. On a aussi :

$$X = \left(\bigoplus_{n=1}^{+\infty} \mathrm{Ker}(A - \lambda_n I) \right) \bigoplus \mathrm{Ker}(A).$$

Il existe donc une base hilbertienne de X constituée des fonctions propres de A.

A.1.5 Complétude des fonctions propres et des fonctions propres généralisées

Tout ce que nous allons raconter ici sera simplement formel. Les détails, pour un opérateur A autoadjoint quelconque, peuvent être trouvés dans le livre [BSU96].

L'idée est la suivante : nous savons grâce au théorème spectral que

$$I = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}E_\lambda \quad \text{et} \quad A = \int_{\mathbb{R}} \lambda \, \mathrm{d}E_\lambda. \tag{A.28}$$

Nous voulons réécrire ces formules sous la forme suivante :

$$I = \int_{\mathbb{R}} P_\lambda \, \mathrm{dmes}_\lambda \quad \text{et} \quad A = \int_{\mathbb{R}} \lambda \, P_\lambda \, \mathrm{dmes}_\lambda, \tag{A.29}$$

où P_λ est un opérateur de projection sur les éventuelles fonctions propres et sur ce qu'on appelle des fonctions propres généralisées et mes est une mesure réelle.

Le fait que l'on puisse écrire cette décomposition est ce qu'on appelle la *complétude des fonctions propres et des fonctions propres généralisées*. Nous pouvons écrire « n'importe quoi » comme une somme (continue) de fonctions propres et de fonctions propres généralisées.

La question est maintenant : qu'est-ce qu'une fonction propre généralisée ? Pour définir une fonction propre généralisée, nous définissons un espace de Hilbert $X_\downarrow \subset X$, telle que l'injection de $X_\downarrow$ dans X est continue et tel que $X_\downarrow$ est dense dans X. Nous définissons ensuite $X_\uparrow$ le dual de X. Si nous pensons à X comme un espace de type $L^2(\Omega)$, ce qui sera notre cas, on peut voir « avec les mains » $X_\downarrow$ comme un espace tel que ses membres sont des fonctions de $L^2(\Omega)$ auxquelles on demande plus de décroissance à l'infini que dans $L^2(\Omega)$. Pour $X_\uparrow$, on impose, au contraire, moins de décroissance à l'infini que dans $L^2(\Omega)$. Ainsi, en identifiant X et son dual, nous avons la chaîne d'inclusions suivante :

$$X_\downarrow \subset X \subset X_\uparrow.$$

Le produit de dualité $\langle ., . \rangle_{X_\uparrow, X_\downarrow}$ entre $X_\uparrow$ et $X_\downarrow$ est alors une extension du produit scalaire sur X :

$$\langle u, v \rangle_{X_\uparrow, X_\downarrow} = (u, v)_X, \forall u \in X, \forall v \in X_\downarrow.$$

Les *fonctions propres généralisées* sont alors les éléments qui vérifient $u \in X_\uparrow, u \neq 0$ et

$$\langle u, Av \rangle_{X_\uparrow, X_\downarrow} = \lambda \langle u, v \rangle_{X_\uparrow, X_\downarrow}, \forall v \in X_\downarrow.$$

Les fonctions propres sont ainsi des cas particuliers de fonctions propres généralisées, puisque $X \subset X_\uparrow$.

De manière générale, la structure du spectre peut être très particulière. Il peut contenir du spectre singulièrement continu par exemple, qui est un objet un peu particulier. Il peut également y avoir des changements de multiplicité du spectre. Le fait de pouvoir passer de (A.28) à (A.29) n'est donc pas évident. Un cas particulier est donné dans l'article [HL07a].[2]

Terminons cette discussion par le cas d'un opérateur autoadjoint compact ou à résolvante compacte, où la complétude des fonctions propres est immédiate :

Exemple A.3 (Complétude des fonctions propres pour un opérateur autoadjoint compact ou à résolvante compacte) *Dans le cas d'un opérateur autoadjoint compact ou à résolvante compacte, il n'y a que du spectre purement ponctuel. La formule de décomposition (A.29) est alors immédiate : elle a été vue à l'exemple A.2 :*

$$I = \sum_{\lambda_n \in \Lambda(A)} P_{\lambda_n} \quad \textit{et} \quad A = \sum_{\lambda_n \in \Lambda(A)} \lambda_n P_{\lambda_n}$$

A.2 Spectres essentiels pour opérateurs non autoadjoints

A.2.1 Différentes définitions de spectres essentiels

Soit X un espace de Hilbert et A un opérateur fermé à domaine dense. Rappelons déjà ce qui se passe pour un opérateur autoadjoint. On peut définir de différentes manières le spectre essentiel :

- le spectre privé du spectre discret,
- l'ensemble des points du spectre qui est stable par perturbation compacte,
- l'ensemble des points du spectre caractérisés par des suites de Weyl.

On montre que ces trois définitions coïncident. Généralement, ce n'est pas le cas lorsque l'opérateur n'est pas autoadjoint.

Définition A.4 *Nous définissons huit définitions différentes du spectre essentiel :*

- $\Lambda_{e0}(A) := \mathbb{C} \setminus \{\lambda \in \mathbb{C}, \mathrm{Im}(A - \lambda I)$ *est fermée,* $\mathrm{def}(A - \lambda I) < +\infty\}$,
- $\Lambda_{e1}(A) := \mathbb{C} \setminus \{\lambda \in \mathbb{C}, \mathrm{Im}(A - \lambda I)$ *est fermée,* $\mathrm{def}(A - \lambda I) < +\infty$ *ou* $\mathrm{nul}(A - \lambda I) < +\infty\}$,
- $\Lambda_{e2}(A) := \mathbb{C} \setminus \{\lambda \in \mathbb{C}, \mathrm{Im}(A - \lambda I)$ *est fermée,* $\mathrm{nul}(A - \lambda I) < +\infty\}$,
- $\Lambda_{e3}(A) := \mathbb{C} \setminus \{\lambda \in \mathbb{C}, \mathrm{Im}(A - \lambda I)$ *est fermée,* $\mathrm{ind}(A - \lambda I) < +\infty\}$,
- $\Lambda_{e4}(A) := \mathbb{C} \setminus \{\lambda \in \mathbb{C}, \mathrm{Im}(A - \lambda I)$ *est fermée,* $\mathrm{ind}(A - \lambda I) = 0\}$,
- $\Lambda_{e5}(A) := \mathbb{C} \setminus \{\lambda \notin \Lambda_{e4}(A), \lambda$ *est un point isolé de* $\Lambda(A)\}$,
- $\Lambda_{e6}(A) := \mathbb{C} \setminus$ *union de toutes les composantes de* $\mathbb{C} \setminus \Lambda_{e1}(A)$ *qui intersectent* $\rho(A)$,
- $\Lambda_{e7}(A) := \Lambda(A) \setminus \Lambda_{\mathrm{disc}}(A)$.

[2] Les opérateurs A intervenant dans le chapitre 1 rentrent dans le cadre de cet article, ce qui permet de démontrer la complétude des fonctions propres et des fonctions propres généralisées pour ces opérateurs.

Remarque A.4 : *Λ_{e0} et Λ_{e2} sont les spectres essentiels de Gustafson et de Weidmann [GW69]. Λ_{e1} est le spectre essentiel de Kato [Kat76]. Λ_{e3} est le spectre essentiel de Wolf [GL71, Sch66, Wol59a, Wol59b], Λ_{e4} est le spectre essentiel de Schechter [GL71, GW69, Sch65, Sch66], Λ_{e5} est le spectre essentiel de Browder [GW69, Nus70, Sch66], Λ_{e6} est la dernière définition de spectre essentiel d'Edmunds et Evans [EE87], et Λ_{e7} est la définition de Reed et Simon [HS95, RS80].*

Citons maintenant un théorème qui montre des inclusions entre ces différentes définitions.

Théorème A.3 : *Tous les ensembles $\Lambda_{ek},\ k = 0, \ldots, 7$ sont fermés et de plus nous avons les inclusions suivantes : (qui sont en général strictes)*

$$\Lambda_{e1}(A) \subset \Lambda_{e2}(A) \subset \Lambda_{e0}(A) \cup \Lambda_{e2}(A) = \Lambda_{e3}(A) \subset \Lambda_{e4}(A) \subset \Lambda_{e5}(A) = \Lambda_{e6}(A) = \Lambda_{e7}(A) \subset \Lambda(A).$$

Démonstration. Voir les théorèmes I.3.18 et I.3.25 dans [EE87] pour montrer que ce sont des ensembles fermés. Voir [GW69] pour le fait que les inclusions sont strictes en général. L'égalité $\Lambda_{e5}(A) = \Lambda_{e6}(A)$ est démontrée dans le théorème IX.1.5 dans [EE87]. Voir le lemme B.1 de l'annexe B de [HL07b] pour l'égalité $\Lambda_{e6}(A) = \Lambda_{e7}(A)$. □

Remarque A.5 (Spectre continu) **:** *Si $\lambda \in \Lambda_c(A)$ alors $\mathrm{Im}(A - \lambda I)$ n'est pas fermée. Ainsi, $\Lambda_c(A) \subset \Lambda_{e1}(A)$.*

Remarque A.6 (Spectre résiduel) **:** *Le spectre résiduel $\Lambda_r(A)$ est inclus dans $\Lambda_{e4}(A)$. En effet, pour voir cela, remarquer que le spectre résiduel est caractérisé par $\{\lambda \in \mathbb{C}, \mathrm{nul}(A-\lambda I) = 0, \mathrm{def}(A-\lambda I) > 0\}$.*

Nous allons commencer par un lemme qui renseigne sur les liens qu'il y a entre le spectre d'un opérateur quelconque A et celui de sa résolvante.

Lemme A.1 (Liens entre le spectre d'un opérateur et le spectre de sa résolvante) *Soit A un opérateur fermé et à domaine dense. Soit $\xi \in \rho(A)$. Nous avons les équivalences suivantes :*

$$\lambda \in \Lambda(A) \Leftrightarrow \frac{1}{\lambda - \xi} \in \Lambda(R_A(\xi)). \tag{A.30}$$

$$\lambda \in \Lambda_{e7}(A) \Leftrightarrow \frac{1}{\lambda - \xi} \in \Lambda_{e7}(R_A(\xi)). \tag{A.31}$$

Démonstration. Pour le premier point, l'identité de la résolvante :

$$R_A(\xi) - R_A(\chi) = (\xi - \chi) R_A(\xi) R_A(\chi)$$

nous permet de montrer que

$$\begin{aligned} I = (\xi - \chi)\Big(R_A(\xi) + (\chi - \xi) R_A(\xi) R_A(\chi) - \frac{1}{\chi - \xi} I - R_A(\chi)\Big) \\ = (\xi - \chi)\Big(R_A(\xi) - \frac{1}{\chi - \xi} I\Big)\Big(I + (\chi - \xi) R_A(\xi)\Big). \end{aligned}$$

Ainsi, si ξ et χ sont dans l'ensemble résolvant de A alors $\frac{1}{\chi - \xi}$ est dans l'ensemble résolvant de $R_A(\xi)$. Réciproquement, si $\xi \in \rho(A)$ et $\frac{1}{\chi - \xi} \in \rho(R_A(\xi))$, alors $\chi \in \rho(A)$.

Démontrons maintenant le deuxième point. Soit $f \in X$. Soit $\xi \in \rho(A)$. Il existe donc $u \in D(A), u \neq 0$ tel que $f = (A - \xi I)u \in X, f \neq 0$.

On en déduit :

$$u \in D(A), u \neq 0, (A - \xi I)u = (\lambda - \xi)u \quad \Leftrightarrow \quad f \in X, f \neq 0, f = (\lambda - \xi) R_\xi(A) f.$$

Par ailleurs, on vérifie aisément que λ est isolé dans $\rho(A)$ si, et seulement si, $\frac{1}{\lambda-\xi}$ est isolé dans $\rho(R_A(\xi))$. Et λ est de multiplicité finie pour A si, et seulement si, $\frac{1}{\lambda-\xi}$ est de multiplicité finie pour $R_A(\xi)$. On en déduit que

$$\lambda \in \Lambda_{disc}(A) \Leftrightarrow \frac{1}{\lambda-\xi} \in \Lambda_{disc}(R_A(\xi)),$$

puis le résultat voulu. □

Nous allons maintenant énoncer les principaux résultats concernant tous ces spectres essentiels. Ce premier résultat permet de donner une autre caractérisation de Λ_{e4} : ce qui est stable par perturbation compacte.

Proposition A.6 (Invariance par perturbation compacte) *Soit A un opérateur fermé de domaine dense. Alors,*

$$\Lambda_{e4}(A) = \bigcap_{B\in\mathcal{K}(X)} \Lambda(A+B),$$

où $\mathcal{K}(X)$ est l'ensemble des opérateurs compacts sur X, l'espace de Hilbert sur lequel l'opérateur A est défini.

Démonstration. Voir le théorème IX.1.4 dans [EE87]. □

Enfin, nous pouvons caractériser $\Lambda_{e2}(A)$ avec les suites de Weyl :

Proposition A.7 (Spectre essentiel caractérisé par les suites de Weyl) *Soit A un opérateur fermé de domaine dense. $\lambda \in \Lambda_{e2}(A)$ si, et seulement si, il existe une suite de Weyl de A associée à λ.*

Démonstration. Voir le théorème IX.1.3 dans [EE87]. □

Ainsi, nous avons retrouvé les trois définitions de spectre essentiel que l'on connait pour les opérateurs autoadjoints. Mais pour des opérateurs non autoadjoints nous n'avons pas l'équivalence entre ces définitions, nous avons uniquement des inclusions.

A.2.2 Propriétés permettant de montrer que les différentes définitions coïncident

Le premier résultat concerne les opérateurs bornés.

Proposition A.8 *Soit A un opérateur borné. On a alors :*

- *Si $\Lambda_{e1}(A)$ est dénombrable, alors $\Lambda(A)$ est dénombrable et*

$$\Lambda_{ej}(A) = \Lambda(A) \setminus \Lambda_{disc}(A), \quad \forall j = 1, \ldots, 7.$$

- *Si B est un opérateur compact, si l'intérieur de $\Lambda(A)$ est vide, et si chaque composante de $\mathbb{C} \setminus \Lambda(A)$ contient un point de $\rho(A+B)$, alors*

$$\Lambda_{e5}(A) = \Lambda_{e5}(A+B).$$

Démonstration. Voir le théorème IV.5.33 dans [Kat76] et le lemme XII.4.3 de [RS80]. □

La proposition qui vient est très importante, elle permet de démontrer que n'importe quelle définition du spectre essentiel coïncide avec la définition Λ_{e7}.

Proposition A.9 *Soit A un opérateur fermé de domaine dense. Si, pour $j \in \{1, \dots, 7\}$, chaque composante connexe de $\mathbb{C} \setminus \Lambda_{ej}(A)$ contient un point de $\rho(A)$, alors*

$$\Lambda_{ej}(A) = \Lambda(A) \setminus \Lambda_{\mathrm{disc}}(A).$$

Démonstration. Pour $j = 5, 6, 7$, voir la proposition A.3. Pour $j = 1$, voir la section I.4 dans [EE87], en se rappelant que nul et def sont constants sur chaque composante connexe de $\mathbb{C} \setminus \Lambda_{e1}(A)$ sauf sur les valeurs propres isolées de multiplicité algébrique finie (voir la section IV.5.6 dans [Kat76]) et en utilisant le fait que l'ensemble résolvant est caractérisé par

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}, \mathrm{Im}(A - \lambda I) \text{ est fermée}, \mathrm{nul}(A - \lambda I) = \mathrm{def}(A - \lambda I) = 0\}.$$

Pour $j = 2, 3, 4$, utiliser la même procédure, sachant que $\Lambda_{e1}(A) \subset \Lambda_{ej}(A)$ et que chaque composante connexe de $\mathbb{C} \setminus \Lambda_{ej}(A)$ est incluse dans une composante connexe de $\mathbb{C} \setminus \Lambda_{e1}(A)$. □

Nous finissons par une propriété qui permet d'affirmer que le spectre essentiel (plus précisément Λ_{ej}, pour $j = 1 \dots 4$) d'un opérateur perturbé par un opérateur compact est égal au spectre essentiel de l'opérateur non perturbé.

Proposition A.10 (théorème de Weyl) *Soit A un opérateur fermé de domaine dense et soit B un opérateur A-compact. Alors $A + B$ est un opérateur fermé et*

$$\Lambda_{ej}(A) = \Lambda_{ej}(A + B), \quad \forall j = 1, \dots, 4.$$

Démonstration. Voir le théorème IX.2.1 dans [EE87]. □

A.2.3 Exemple où les spectres essentiels ne sont pas égaux

Cet exemple est tiré de l'exemple IX.2.2 dans [EE87] (aussi étudié dans [RS80], exemple XIII.4.1). On montre ici que $\Lambda_{e5}(A)$ n'est pas invariant par perturbations A-compactes.

Soit $X = l^2(\mathbb{Z})$ et $\{e_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ la base canonique de X. Soit A l'opérateur borné défini par

$$Ae_0 = 0, \qquad Ae_j = e_{j-1},\ j \neq 0.$$

On vérifie alors que $\|A\| = 1$, donc $\Lambda(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| \leq 1\}$. On a également $\mathrm{nul}(A - \lambda I) = 1$ si $0 \leq |\lambda| < 1$, donc $\{\lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| < 1\} \subset \Lambda_{e5}$.

Soit B l'opérateur compact de rang 1 défini par

$$Be_0 = e_{-1}, \qquad Be_j = 0,\ j \neq 0.$$

B est compact et donc A-compact puisque A est un opérateur borné. De plus, $A+B$ est l'opérateur

$$(A + B)e_j = e_{j-1},\ j \in \mathbb{Z}.$$

Ainsi, $A + B$ est un opérateur unitaire de X donc son spectre est sur le cercle unité. On a : $\Lambda(A + B) = \{\lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| = 1\}$. Ainsi, $\Lambda_{e5}(A + B) \neq \Lambda_{e5}(A)$.

Il est donc faux en général que $\Lambda_{e5}(A)$ est invariant par une perturbation A-compacte.

A.3 PSEUDOSPECTRE D'UN OPÉRATEUR

Nous rappelons dans cette sous-section les résultats principaux que nous utilisons à propos du pseudospectre. La référence à ce sujet est le livre de L.N. Trefethen et M. Embree [TE05].

Définition A.5 *Soit A un opérateur fermé sur X un espace de Hilbert. Soit $\varepsilon > 0$. Nous définissons le* ε-pseudospectre $\Lambda_\varepsilon(A)$ *de A de trois manières :*

$$\left\{\lambda \in \mathbb{C}, \|R_A(\lambda)\|_X > \frac{1}{\varepsilon}\right\}, \tag{A.32}$$

$$\{\lambda \in \mathbb{C}, \exists E \text{ un opérateur borné tel que } \lambda \in \Lambda(A+E) \text{ et } \|E\|_X < \varepsilon\}, \tag{A.33}$$

$$\{\lambda \in \Lambda(A) \text{ ou } \exists u \in D(A), \|u\|_X = 1, \|Au - \lambda u\|_X < \varepsilon\}. \tag{A.34}$$

Une fonction $u \in D(A)$, telle que $\|u\|_X = 1$ et $\|Au - \lambda u\|_X < \varepsilon$ est appelée une ε-pseudofonction propre *et le λ correspondant est une* ε-pseudovaleur propre*.*

A priori les trois définitions sont différentes mais on montre que ces définitions sont équivalentes. La deuxième definition permet de comprendre l'intérêt du pseudospectre, si nous modifions légèrement l'opérateur (nous lui ajoutons une petite perturbation), alors en cherchant le spectre de cet opérateur perturbé, nous allons le trouver dans le pseudospectre de l'opérateur non perturbé.

Dans le cas de matrices, et dans le cas où la norme est la norme euclidienne, nous pouvons caractériser le pseudospectre avec les valeurs singulières de la matrice :

$$\Lambda_\varepsilon(\mathbb{A}) = \{\lambda \in \mathbb{C}, s_{\min}(\mathbb{A} - \lambda) < \varepsilon\},$$

où $s_{\min}(\mathbb{B})$ est la plus petite valeur singulière de la matrice $\mathbb{B}$. On rappelle qu'une valeur singulière est la racine carrée d'une valeur propre de l'opérateur autoadjoint $\mathbb{B}^*\mathbb{B}$.

Détaillons maintenant quelques propriétés du pseudospectre.

Proposition A.11 (propriétés du pseudospectre) *Nous avons les propriétés suivantes :*

$$\forall \varepsilon > 0, \Lambda(A) \subset \Lambda_\varepsilon(A), \tag{A.35}$$

$$\bigcap_{\varepsilon > 0} \Lambda_\varepsilon(A) = \Lambda(A). \tag{A.36}$$

Proposition A.12 (estimation de la norme de la résolvante) *Soit A un opérateur fermé sur X un espace de Hilbert. Nous avons les estimations suivantes :*

$$\|R_A(\lambda)\|_X \geq \frac{1}{\operatorname{dist}(\lambda, \Lambda(A))}, \tag{A.37}$$

$$\|R_A(\lambda)\|_X \leq \frac{1}{\operatorname{dist}(\lambda, \overline{\operatorname{conv}(\Gamma(A))})}, \tag{A.38}$$

où dist *est la distance dans le plan complexe, où nous prenons la convention $\|R_A(\lambda)\|_X = \infty$ pour $\lambda \in \Lambda(A)$ et où $\overline{\operatorname{conv}(\Gamma(A)}$ est la fermeture de l'enveloppe convexe de l'image numérique de A.*

Pour un opérateur normal (i.e. pour lequel $AA^* = A^*A$), nous avons en fait l'égalité suivante :

$$\|R_A(\lambda)\|_X = \frac{1}{\operatorname{dist}(\lambda, \Lambda(A))},$$

De cette expression, on voit alors que le pseudospectre est localisé autour du spectre, ce qui n'est pas forcément le cas pour un opérateur non normal. Dans le cas général, ce n'est plus vrai et la norme de la résolvante peut être très grande en des endroits éloignés du spectre.

BIBLIOGRAPHIE

[AC71] J. Aguilar and J.M. Combes. A class of analytic perturbations for one-body Schrödinger Hamiltonians. *Communications in Mathematical Physics*, 22(4) :269–279, 1971.

[Ada75] R. A. Adams. *Sobolev spaces*. Academic press New York, 1975.

[AS65] M. Abramowitz and I.A. Stegun. *Handbook of mathematical functions : with formulas, graphs, and mathematical tables*. Courier Dover Publications, 1965.

[AZNG08] Y.O. Agha, F. Zolla, A. Nicolet, and S. Guenneau. On the use of PML for the computation of leaky modes. *COMPEL*, 27(1) :95–109, 2008.

[Bar09] V. Baronian. *Couplage des méthodes modale et éléments finis pour la diffraction des ondes élastiques guidées. Application au Contrôle Non Destructif*. PhD thesis, 2009.

[BBBL05] E. Bécache, A.S. Bonnet-BenDhia, and G. Legendre. Perfectly matched layers for the convected Helmholtz equation. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 42(1) :409–433, 2005.

[BBCDH09] A.S. Bonnet-BenDhia, L. Chorfi, G. Dakhia, and C. Hazard. Diffraction by a defect in an open waveguide : a mathematical analysis based on a modal radiation condition. *SIAM J. Appl. Math.*, 70(3) :677–693, 2009.

[BBGHP09] A.S. Bonnet-BenDhia, B. Goursaud, C. Hazard, and A. Prieto. Finite element computation of leaky modes in stratified waveguides. *Ultrasonic Wave Propagation in Non Homogeneous Media*, pages 73–86, 2009.

[BBGHP10] A.S. Bonnet-BenDhia, B. Goursaud, C. Hazard, and A. Prieto. A multimodal method for non-uniform open waveguides. *Physics Procedia*, 3(1) :497–503, 2010.

[BBGHed] A.S. Bonnet-BenDhia, B. Goursaud, and C. Hazard. Mathematical analysis of the junction of two acoustic open waveguides. *SIAM J. Appl. Math.*, submitted.

[BBM97] A.S. Bonnet-BenDhia and F. Mahé. A guided mode in the range of the radiation modes for a rib waveguide. *Journal of Optics*, 28 :41–43, 1997.

[BBRT00] A.S. Bonnet-Bendhia, K. Ramdani, and A. Tillequin. Diffraction par un obstacle situé dans un réseau de plaques semi-infinies. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, 331(12) :977–982, 2000.

[BBT00] A.S. Bonnet-BenDhia and A. Tillequin. A generalized mode matching method for the junction of open waveguides. *Proceedings of the Fifth International Conference on Mathematical and Numerical Aspects of Wave Propagation*, pages 399–403, 2000.

[BC71] E. Balslev and J.M. Combes. Spectral properties of many-body Schrödinger operators with dilatation-analytic interactions. *Communications in Mathematical Physics*, 22(4) :280–294, 1971.

[BCM01] G. Bao, L. Cowsar, and W. Masters. *Mathematical modeling in optical science*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2001.

[Bér94] J.P. Bérenger. A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves. *Journal of Computational Physics*, 114(2) :185–200, 1994.

[BFJ03] E. Bécache, S. Fauqueux, and P. Joly. Stability of perfectly matched layers, group velocities and anisotropic waves. *Journal of Computational Physics*, 188(2) :399–433, 2003.

[BP07] J.H. Bramble and J.E. Pasciak. Analysis of a finite PML approximation for the three dimensional time-harmonic Maxwell and acoustic scattering problems. *Mathematics of Computation*, 76(258) :597–614, 2007.

[BP08] J.H. Bramble and J.E. Pasciak. Analysis of a finite element PML approximation for the three dimensional time-harmonic Maxwell problem. *Mathematics of Computation*, 77(261) :1–10, 2008.

[Bre83] H. Brezis. *Analyse fonctionnelle : théorie et applications*. Masson, 1983.

[BSU96] Y.M. Berezansky, Z.G. Sheftel, and G.F. Us. *Functional analysis, Vol.II*. Birkhäuser Verlag, 1996.

[Cir08] G. Ciraolo. A method of variation of boundaries for waveguide grating couplers. *Applicable Analysis*, 87(9) :1019–1040, 2008.

[CJK97] R.M. Corless, D.J. Jeffrey, and D.E. Knuth. A sequence of series for the Lambert W function. In *Proceedings of the 1997 international symposium on Symbolic and algebraic computation*, pages 197–204. ACM, 1997.

[CK98] D.L. Colton and R. Kress. *Inverse acoustic and electromagnetic scattering theory*. Springer Verlag, 1998.

[CL08] M. Castaings and M. Lowe. Finite element model for waves guided along solid systems of arbitrary section coupled to infinite solid media. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 123 :696, 2008.

[CM98] F. Collino and P. Monk. The perfectly matched layer in curvilinear coordinates. *SIAM, Journal on Scientific Computing*, 19(6) :2061–2090, 1998.

[CM09] G. Ciraolo and R. Magnanini. A radiation condition for uniqueness in a wave propagation problem for 2-D open waveguides. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 32(10) :1183–1206, 2009.

[Con78] J.B. Conway. *Functions of one complex variable I*. Springer, 1978.

[CW94] W.C. Chew and W.H. Weedon. A 3-D perfectly matched medium from modified Maxwell's equations with stretched coordinates. *Microwave and Optical Technology Letters*, 7(13) :599–604, 1994.

[CWM05] S.N. Chandler-Wilde and P. Monk. Existence, uniqueness, and variational methods for scattering by unbounded rough surfaces. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 37(2) :598–618, 2005.

[CWZ98] S.N. Chandler-Wilde and B. Zhang. Electromagnetic scattering by an inhomogeneous conducting or dielectric layer on a perfectly conducting plate. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 454(1970) :519–542, 1998.

[DL84] R. Dautray and J.L. Lions. *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques. V : Spectre des opérateurs*. Masson, 1984.

[DMN06] M. Duran, I. Muga, and J.C. Nedelec. The Helmholtz equation in a locally perturbed half-plane with passive boundary. *IMA Journal of Applied Mathematics*, 71(6) :853–876, 2006.

[DS63] N. Dunford and J.T. Schwartz. *Linear operators : Part II : Spectral Theory : Self Adjoint Operators in Hilbert Space*. Wiley-interscience, 1963.

[EE87] D.E. Edmunds and W.D. Evans. *Spectral theory and differential operators*. Oxford University Press, USA, New York, 1987.

[ELV94] D.V. Evans, M. Levitin, and D. Vassiliev. Existence theorems for trapped modes. *Journal of Fluid Mechanics*, 261 :21–31, 1994.

[FM78] G.J. Fix and S.P. Marin. Variational methods for underwater acoustic problems* 1. *Journal of Computational Physics*, 28(2) :253–270, 1978.

[FP01] S. Félix and V. Pagneux. Sound propagation in rigid bends : A multimodal approach. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 110(3) :1329–1337, 2001.

[FSvdV98] D.R. Fokkema, G.L.G. Sleijpen, and H.A. van der Vorst. Jacobi-Davidson style QR and QZ algorithms for the reduction of matrix pencils. *SIAM J. Sc. Comput.*, 20(1) :94–125, 1998.

[GGK93] I. Gohberg, S. Goldberg, and M.A. Kaashoek. *Classes of linear operators*. Birkhäuser Boston, 1993.

[Giv92] D. Givoli. *Numerical methods for problems in infinite domains*. Elsevier, 1992.

[GK90] D. Givoli and J.B. Keller. Non-reflecting boundary conditions for elastic waves. *Wave motion*, 12(3) :261–279, 1990.

[GL71] B. Gramsch and D. Lay. Spectral mapping theorems for essential spectra. *Mathematische Annalen*, 192(1) :17–32, 1971.

[Gol82] C.I. Goldstein. A Finite Element Method for Solving Helmholtz Type Equations in Waveguides and Other Unbounded Domains. *Mathematics of Computation*, 39(160) :309–324, 1982.

[GW69] K. Gustafson and J. Weidmann. On the essential spectrum. *J. Math. Anal. Appl*, 25(6) :121–127, 1969.

[Haz09] C. Hazard. A distribution framework for the generalized Fourier transform associated with a Sturm-Liouville operator ; en ligne http ://hal.inria.fr/inria-00371350/fr/. Technical report, Rapport de Recherche INRIA n° 6885, 2009.

[HHK04] S. Hein, T. Hohage, and W. Koch. On resonances in open systems. *Journal of Fluid Mechanics*, 506 :255–284, 2004.

[HHKS07] S. Hein, T. Hohage, W. Koch, and J. Schöberl. Acoustic resonances in a high-lift configuration. *Journal of Fluid Mechanics*, 582 :179–202, 2007.

[HL93] C. Hazard and M. Lenoir. Determination of scattering frequencies for an elastic floating body. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 24(6) :1458–1514, 1993.

[HL07a] C. Hazard and F. Loret. Generalized eigenfunction expansions for conservative scattering problems with an application to water waves. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh : Section A Mathematics*, 137(05) :995–1035, 2007.

[HL07b] D. Hundertmark and Y.R. Lee. Exponential decay of eigenfunctions and generalized eigenfunctions of a non-self-adjoint matrix Schrödinger operator related to NLS. *Bulletin London Mathematical Society*, 39(5) :709–720, 2007.

[HL08] C. Hazard and E. Luneville. An improved multimodal approach for non-uniform acoustic waveguides. *IMA Journal of Applied Mathematics*, 73(4) :668–690, 2008.

[HN09] T. Hohage and L. Nannen. Hardy space infinite elements for scattering and resonance problems. *SIAM Journal of Numerical Analysis*, 47(2) :972–996, 2009.

[HS95] P.D. Hislop and I.M. Sigal. *Introduction to spectral theory : With applications to Schrödinger operators*. Springer, 1995.

[HSZ03a] T. Hohage, F. Schmidt, and L. Zschiedrich. Solving time-harmonic scattering problems based on the pole condition. II :Convergence of the PML method. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 35 :547–560, 2003.

[HSZ03b] T. Hohage, F. Schmidt, and L. Zschiedrich. Solving time-harmonic scattering problems based on the pole condition. I :Theory. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 35 :183–210, 2003.

[JD96] O. Onipede Jr and S.B. Dong. Propagating waves and end modes in pretwisted beams. *Journal of Sound and Vibration*, 195(2) :313–330, 1996.

[JHN10] C. Jerez-Hanckes and J.C. Nédélec. Asymptotics for Helmholtz and Maxwell solutions in 3-D open waveguides. Technical report, Research Report 2010-07, Seminar for Applied Mathematics, ETH Zurich ; en ligne ftp ://ftp.sam.math.ethz.ch/pub/sam-reports/reports/reports2010/2010-07.pdf, 2010.

[Kat76] T. Kato. *Perturbation Theory for Linear Operators*. Springer Verlag, 1976.

[KG89] J.B. Keller and D. Givoli. Exact non-reflecting boundary conditions. *Journal of Computational Physics*, 82(1) :172–192, 1989.

[KMR97] V. Kozlov, V.G. Maz'ya, and J. Rossmann. *Elliptic boundary value problems in domains with point singularities*. AMS Bookstore, 1997.

[KP09] S. Kim and J.E. Pasciak. The computation of resonances in open systems using a perfectly matched layer. *Math. Comp*, 78(267) :1375–1398, 2009.

[KP10] S. Kim and J.E. Pasciak. Analysis of the spectrum of a Cartesian perfectly matched layer (PML) approximation to acoustic scattering problems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 361(2) :420–430, 2010.

[LM68] J.L. Lions and E. Magenes. *Problèmes aux limites non homogènes et applications*, volume 1. Dunod, Paris, 1968.

[LM10] E. Lunéville and J.F. Mercier. Finite element simulations of multiple scattering in acoustic waveguides. *Waves in Random and Complex Media*, 2010.

[LR10] A. Lechleiter and S. Ritterbusch. A variational method for wave scattering from penetrable rough layers. *IMA Journal of Applied Mathematics*, 75(3) :366–391, 2010.

[LT88] M. Lenoir and A. Tounsi. The localized finite element method and its application to the two-dimensional sea-keeping problem. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 25(4) :729–752, 1988.

[LVLH92] M. Lenoir, M. Vullierme-Ledard, and C. Hazard. Variational formulations for the determination of resonant states in scattering problems. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 23(3) :579–608, 1992.

[Mar74] D. Marcuse. *Theory of dielectric optical waveguide*. Academic Press, New York, 1974.

[NBP94] S.A. Nazarov and BA B.A. Plamenevsky. *Elliptic problems in domains with piecewise smooth boundaries*. Walter de Gruyter, 1994.

[Neč67] J. Nečas. *Les Méthodes directes en théorie des équations elliptiques*. Masson, 1967.

[Nus70] R.D. Nussbaum. Spectral mapping theorems and perturbation theorems for Browder's essential spectrum. *Transactions of the American Mathematical Society*, 150(2) :445–455, 1970.

[NZAG07] A. Nicolet, F. Zolla, Y.O. Agha, and S. Guenneau. Leaky modes in twisted microstructured optical fibers. *Waves in Random and Complex Media*, 17(4) :559–570, 2007.

[Pel09] A. Pelat. *Approche modale de la propagation acoustique dans les guides d'ondes ouverts et application à l'acoustique urbaine*. PhD thesis, 2009.

[PFP09] A. Pelat, S. Félix, and V. Pagneux. On the use of leaky modes in open waveguides for the sound propagation modeling in street canyons. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 126 :2864, 2009.

[RL09] J. Le Rousseau and G. Lebeau. Introduction aux inégalités de Carleman pour les opérateurs elliptiques et paraboliques. Applications au prolongement unique et au contrôle des équations paraboliques ; en ligne http ://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00351736/ . Technical report, 2009.

[RS72] M. Reed and B. Simon. *Methods of modern mathematical physics. I : Functional Analysis*. Academic Press New York, 1972.

[RS75] M. Reed and B. Simon. *Methods of modern mathematical physics. II : Fourier analysis, selfadjointness*. Academic Press New York, 1975.

[RS80] M. Reed and B. Simon. *Methods of modern mathematical physics. IV. Analysis of Operators*. Academic Press New York, 1980.

[RZ02] H. Rogier and D.D. Zutter. Berenger and leaky modes in optical fibers terminated with a perfectly matched layer. *Journal of Lightwave Technology*, 20(7) :1141–1148, 2002.

[SAC07] E.A. Skelton, S.D.M. Adams, and R.V. Craster. Guided elastic waves and perfectly matched layers. *Wave Motion*, 44(7–8) :573–592, 2007.

[Sch65] M. Schechter. Invariance of essential spectrum. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 13 :365–367, 1965.

[Sch66] M. Schechter. On the essential spectrum of an arbitrary operator. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 13 :205–215, 1966.

[Sim73] B. Simon. Resonances in N-body quantum systems with dilatation analytic potentials and the foundations of time-dependent perturbation theory. *The Annals of Mathematics*, 97(2) :247–274, 1973.

[Sim78] B. Simon. Resonances and complex scaling : A rigorous overview. *International Journal of Quantum Chemistry*, 14(4) :529–542, 1978.

[Sim79] B. Simon. The definition of molecular resonance curves by the method of exterior complex scaling. *Physics Letters A*, 71(2-3) :211–214, 1979.

[SL83] A.W. Snyder and J.D. Love. *Optical Waveguide Theory*. Chapman and Hall, London, 1983.

[SLHC01] E. Silberstein, P. Lalanne, J.P. Hugonin, and Q. Cao. Use of grating theories in integrated optics. *Journal of the Optical Society of America A*, 18(11) :2865–2875, 2001.

[SvdV96] G.L.G. Sleijpen and H.A. van der Vorst. A Jacobi-Davidson iteration method for linear eigenvalue problems. *SIAM J. Matrix Anal. Appl. (SIMAX)*, 17 :401–425, 1996.

[TC98] FL. Teixeira and W.C. Chew. Analytical derivation of a conformal perfectly matched absorber for electromagnetic waves. *Microwave and Optical Technology Letters*, 17(4) :231–236, 1998.

[TE05] L.N. Trefethen and M. Embree. *Spectra and pseudospectra : the behavior of nonnormal matrices and operators*. Princeton Univ Pr, 2005.

[Til01] A. Tillequin. *Une méthode de raccordement modal généralisée pour les problèmes de jonction de guides d'ondes*. PhD thesis, 2001.

[TL10] F. Treyssède and L. Laguerre. Investigation of elastic modes propagating in multi-wire helical waveguides. *Journal of Sound and Vibration*, 329 :1702–1716, 2010.

[Tre00] L.N. Trefethen. *Spectral methods in MATLAB*. Society for Industrial Mathematics, 2000.

[Tre08] F. Treyssède. Elastic waves in helical waveguides. *Wave motion*, 45(4) :457–470, 2008.

[Vai89] B.R. Vainberg. *Asymptotic methods in equations of mathematical physics*. Gordon and Breach, New York, 1989.

[Vas91] C. Vassalo. *Optical Waveguide Concepts*. Elsevier, 1991.

[Wed91] R. Weder. *Spectral and scattering theory for wave propagation in perturbed stratified media*. Springer, 1991.

[Wei87] J. Weidmann. *Spectral theory of ordinary differential operators*. Springer-Verlag, 1987.

[Wol59a] F. Wolf. On the essential spectrum of partial differential boundary problems. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 12(2) :211–228, 1959.

[Wol59b] F. Wolf. On the invariance of the essential spectrum under a change of the boundary conditions of partial differential operators. *Indag. Math*, 21 :142–147, 1959.

[Xu92] Y. Xu. Scattering of acoustic waves by an obstacle in a stratified medium. *Partial Differential Equations with Real Analysis Ed. H. Begehr, A. Jeffrey, Pitman Research Notes in Mathematics Series 263*, pages 147–168, 1992.

[Xu95] Y. Xu. Radiation condition and scattering problem for time-harmonic acoustic waves in a stratified medium with a nonstratified inhomogeneity. *IMA Journal of Applied Mathematics*, 54(1) :9–29, 1995.

[ZL06] J. Zhu and Y.Y. Lu. Leaky modes of slab waveguides-asymptotic solutions. *Journal of Lightwave Technology*, 24(3) :1619–1623, 2006.

[ZL08] J. Zhu and Y.Y. Lu. Asymptotic solutions of the leaky modes and PML modes in a Pekeris waveguide. *Wave Motion*, 45(3) :207–216, 2008.

Titre Étude mathématique et numérique de guides d'ondes ouverts non uniformes, par approche modale

Résumé Cette thèse s'inscrit dans le cadre de l'étude, à la fois théorique et numérique, de la diffraction d'une onde harmonique par la jonction entre deux guides d'ondes ouverts.
Nous démontrons que ce problème est bien posé. Pour cela, nous utilisons des conditions de rayonnement modales, qui sont fondées sur la représentation de la solution dans un guide droit à l'aide des *modes guidés* (liés au spectre ponctuel de l'opérateur transverse) et des *modes de radiation* (liés au spectre continu de l'opérateur transverse).
Cette représentation semble difficile à mettre en œuvre dans une méthode numérique, à cause du continuum des modes de radiation. Comme alternative, nous utilisons des *PMLs* (Perfectly Matched Layers) pour borner le domaine de calcul dans les directions transverses, ce qui modifie singulièrement la nature de l'opérateur transverse : il perd son caractère autoadjoint et son spectre devient exclusivement discret. Parmi ses nouveaux modes, se trouvent désormais des *modes à fuite*, dont les propriétés sont étudiées. Nous expliquons en quoi la perte du caractère autoadjoint implique que le calcul des modes peut être délicat. Nous expliquons ensuite comment utiliser ces nouveaux modes (formant maintenant un ensemble discret) dans des méthodes numériques pour la jonction entre deux guides d'ondes ouverts (conditions aux limites transparentes fondées sur des opérateurs de Dirichlet-to-Neumann, méthode multimodale).

Mots-clés guide d'ondes ouvert, équation de Helmholtz, mode à fuite, condition de rayonnement, couche absorbante parfaitement adaptée (PML)

Title Mathematical and numerical study of non uniform open waveguides, modal approach

Abstract This thesis deals with the theoretical and numerical study of the scattering of a time-harmonic wave by the junction between two open waveguides.
We demonstrate that such a problem is well-posed. For this aim, we use modal radiating conditions, which are based on the representation of the solution in a straight waveguide thanks to the *guided modes* (which are linked to the point spectrum of the transverse operator) and the *radiation modes* (which are linked to the continuous spectrum of the transverse operator).
This representation of the solution seems to be intractable in a numerical method, because of the presence of the continuum of the radiation modes. Alternatively, we use *PMLs* (Perfectly Matched Layers) in order to set the problem in a bounded domain in the transverse directions, which severely modifies the nature of the transverse operator: it loses its selfadjointness and its spectrum becomes exclusively discret. A new category of modes appears: the *leaky modes*, whose properties are studied. We explain that the loss of the selfadjointness implies that the calculation of the modes is intricate. These new modes (which form a discret set) are used into numerical methods for the junction between two open waveguides (transparent boundary conditions using Dirichlet-to-Neumann operators, multimodal method).

Keywords open waveguide, Helmholtz equation, leaky mode, radiating condition, Perfectly Matched Layer (PML)