HAL
open science

Conception de formes aérodynamiques en présence d'écoulements décollés : contrôle et optimisation

Jonathan Chetboun

To cite this version:

Jonathan Chetboun. Conception de formes aérodynamiques en présence d'écoulements décollés : contrôle et optimisation. Optimisation et contrôle [math.OC]. Ecole Polytechnique X, 2010. Français. NNT : . pastel-00550726

HAL Id: pastel-00550726

https://pastel.hal.science/pastel-00550726

Submitted on 29 Dec 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Thèse de Doctorat de l'École Polytechnique

Spécialité

Mathématiques Appliquées

Présentée par

Jonathan CHETBOUN

Pour obtenir le grade de

Docteur de l'École Polytechnique

Sujet de la thèse

Conception de Formes Aérodynamiques en Présence d'Écoulements Décollés : Contrôle et Optimisation

Soutenue le 19 novembre 2010 en présence du jury composé de :

M. Grégoire ALLAIRE	Directeur de thèse
M. François ALOUGES	Président
M. Abderrahmane HABBAL	Examinateur
M. Michel MALLET	Examinateur
M. Mohamed MASMOUDI	Rapporteur
M. Antonio André NOVOTNY	Rapporteur
M. Pierre SAGAUT	Examinateur

Remerciements

Je souhaite exprimer ici mes sincères remerciements à toutes les personnes qui ont contribué à la réalisation de ce travail de thèse.

En premier lieu, à Grégoire Allaire, qui, pendant ces trois ans, a joué le rôle du "directeur de thèse idéal", pour sa très grande culture scientifique, bien sûr, mais aussi pour sa patience, sa sympathie et sa disponibilité. Il a toujours su trouver du temps pour répondre à mes questions, me guider et me donner de précieux conseils, tant sur l'aspect purement mathématique de mes travaux, que dans les domaines plus applicatifs, tout en laissant une grande liberté dans l'orientation de mes recherches.

Ce travail n'aurait pu être mené à bien sans l'aide et les conseils avisés des ingénieurs de Dassault Aviation avec qui j'ai eu le plaisir de collaborer. Merci donc à Sylvain Joly, Vincent Levasseur, Frédéric Chalot, Gilbert Rogé, Sébastien Le Gallo et Jean-Jacques Vallée, qui ont tous, à un moment ou à un autre, contribué à l'avancement de mes travaux. Je souhaite aussi remercier Michel Mallet et Jean-Claude Courty, pour la confiance qu'ils m'ont accordé en me proposant ce sujet de thèse.

Je tiens également à remercier l'ensemble des membres du jury qui ont accepté de juger mon travail. Merci tout d'abord à Mohamed Masmoudi et Antonio André Novotny pour l'honneur qu'ils m'ont fait en acceptant d'être les rapporteurs de cette thèse. J'exprime aussi toute ma reconnaissance à François Alouges pour avoir présidé le jury, ainsi qu'à Abderrahmane Habbal et Pierre Sagaut, pour l'intérêt qu'ils ont porté à mes travaux.

Ces trois ans passés au sein du service d'aérodynamique avancée de Dassault Aviation me laisseront un excellent souvenir. Merci donc à tous les ingénieurs, prestataires, doctorants et stagiaires que j'ai pu rencontrer pendant ma thèse, pour la bonne ambiance de travail qu'ils ont contribué à faire régner, et plus particulièrement à Laurent Daumas, Boris Clémençon, Samuel Nosal, Franciszka Dembinska, Ludovic Martin, Pierre-Elie Normand, Stéphane Galdeano et Lionel Rosenberg.

Pour finir, je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à ma famille pour le soutien sans faille qu'ils m'ont témoigné au cours de toutes ces années d'étude et dont cette thèse est (enfin) l'aboutissement.

Table des matières

1 Introduction **9**
1.1 Contexte et motivations . . . 9
1.2 Contrôle des décollements de couche limite . . . 10
1.3 Présentation des travaux . . . 11
1.4 Communications . . . 15

2 Gradient topologique d'un terme source **17**
2.1 Introduction . . . 17
2.2 Laplacien avec conditions aux limites de Dirichlet . . . 18
2.2.1 Terme source à l'intérieur du domaine . . . 18
2.2.1.1 Résultat principal . . . 18
2.2.1.2 Développement asymptotique proche de la perturbation . . . 20
2.2.1.3 Preuve du théorème 1 . . . 22
2.2.2 Terme source proche du bord du domaine . . . 23
2.2.2.1 Résultat principal . . . 23
2.2.2.2 Développement asymptotique proche de la perturbation . . . 24
2.2.2.3 Preuve du théorème 2 . . . 27
2.2.3 Terme source centré en un point du bord . . . 27
2.2.3.1 Résultat principal . . . 27
2.2.3.2 Développement asymptotique proche de la perturbation . . . 28
2.2.3.3 Preuve du théorème 3 . . . 31
2.2.4 Terme source dépendant de l'état . . . 31
2.2.4.1 Résultat principal . . . 31
2.2.4.2 Développement asymptotique proche de la perturbation . . . 33
2.2.4.3 Preuve du théorème 4 . . . 34
2.3 Laplacien avec conditions aux limites de Neumann . . . 35
2.3.1 Résultat principal . . . 35
2.3.2 Développement asymptotique proche de la perturbation . . . 36
2.3.3 Preuve du théorème 5 . . . 38
2.4 Problème de Stokes . . . 38
2.4.1 Résultat principal . . . 39
2.4.2 Développement asymptotique proche de la perturbation . . . 40
2.4.3 Preuve du théorème 6 . . . 42
2.5 Problème de Navier-Stokes incompressible . . . 43
2.5.1 Résultat principal . . . 44
2.5.2 Développement asymptotique proche de la perturbation . . . 45
2.5.3 Preuve du théorème 7 . . . 47
2.6 Equation de la chaleur . . . 49
2.6.1 Résultat principal . . . 49

2.6.2 Développement asymptotique proche de la perturbation 50
2.6.3 Preuve du théorème 8 51
2.7 Problème discret stationnaire 52
2.8 Problème discret instationnaire 53
2.9 Conclusion 55

3 Implémentation dans un code industriel 57
3.1 Introduction 57
3.2 Gradient topologique et paramétrique 58
3.2.1 Le cas stationnaire 58
3.2.2 Le cas instationnaire 59
3.3 Le code de calcul AETHER 61
3.3.1 Les équations de Navier-Stokes compressibles 61
3.3.2 Symétrisation des équations 62
3.3.3 Approche Galerkin moindres carrés 63
3.3.4 Modélisation de la turbulence 64
3.3.5 Modélisation des générateurs de vortex mécaniques 66
3.4 Le code adjoint 67
3.4.1 Formulation du problème adjoint 67
3.4.2 Dérivation numérique de code 68
3.4.2.1 Différences finies 68
3.4.2.2 Dérivation par méthode complexe 69
3.4.2.3 Différentiation automatique 69
3.4.2.3.1 Le mode direct 69
3.4.2.3.2 Le mode inverse 70
3.4.3 Développements apportés au code adjoint et validation 70
3.4.4 Résolution du problème linéaire adjoint 71
3.4.5 Les différentes formulations du gradient topologique 72
3.4.6 Prise en compte de la géométrie 74
3.5 La boucle d'optimisation paramétrique 75
3.5.1 Description de la boucle 75
3.5.2 Les algorithmes d'optimisation 77
3.6 Conclusion 79

4 Contrôle et optimisation stationnaire 81
4.1 Introduction 81
4.2 Premiers calculs sur une manche en S 81
4.2.1 Présentation du cas 81
4.2.2 Calcul Navier-Stokes moyenné (RANS) 82
4.2.3 Les fonctions coût 83
4.2.4 Résolution du problème adjoint 84
4.2.5 Gradient topologique 85
4.2.5.1 Comparaison des maillages 86
4.2.5.1.1 Création d'un premier VG 87
4.2.5.1.2 Ajout d'un second VG 87
4.2.5.2 Comparaison des formulations du gradient topologique 89
4.2.6 Optimisation paramétrique 90
4.2.6.1 Comparaison avec les différences finies 90
4.2.6.2 Comparaison des algorithmes d'optimisation 92
4.3 Cas industriels de manches en U 95

4.3.1 Présentation des géométries 95
4.3.2 Amélioration d'une configuration existante 96
4.3.2.1 Configuration des calculs 96
4.3.2.2 Résultats de l'optimisation 97
4.3.3 Optimisation complète 99
4.3.3.1 Configuration des calculs 100
4.3.3.2 Résultats de l'optimisation 100
4.4 Conclusion 101

5 Contrôle et optimisation instationnaire 105
5.1 Introduction 105
5.2 Premiers calculs de l'adjoint instationnaire 105
5.2.1 Présentation du cas et calcul Navier-Stokes 106
5.2.2 Comparaison de l'adjoint instationnaire avec l'adjoint stationnaire . . . 106
5.2.3 Calcul de l'adjoint instationnaire pour un écoulement stationnaire 107
5.2.4 Interpolation de solutions 108
5.3 Ecoulement autour d'un cylindre 111
5.3.1 Présentation du cas et calcul Navier-Stokes 111
5.3.2 Gradient topologique instationnaire 112
5.4 Manche en S 114
5.4.1 Calcul Navier-Stokes 114
5.4.2 Gradient topologique instationnaire 115
5.5 Conclusion 118

6 Conclusion 123
6.1 Synthèse des travaux réalisés 123
6.2 Perspectives et travaux en cours 124

A Analyse de problèmes en domaine infini 125
A.1 Laplacien en domaine infini 125
A.1.1 Le cadre fonctionnel 125
A.1.2 Comportement à l'infini 126
A.2 Solutions fondamentales du problème de Stokes 128

Chapitre 1

Introduction

1.1 Contexte et motivations

La conception de formes aérodynamiques fait un appel croissant aux outils de simulation numérique. Dans le but d'aider l'ingénieur dans sa réflexion, l'utilisation de méthodes automatiques d'optimisation tend à se généraliser. Les travaux de thèse faisant l'objet du présent manuscrit s'inscrivent ainsi dans la problématique du contrôle et de l'optimisation en aérodynamique, et plus particulièrement dans le cadre d'écoulements présentant des décollements.

La thématique du contrôle des écoulements est d'un intérêt majeur pour l'industrie aéronautique, [78], [49] [6], [41], [56]. En plus de contribuer à l'amélioration des performances d'une forme aérodynamique de base, l'utilisation de techniques de contrôle participe également à l'émergence de technologies innovantes. Concernant l'amélioration de performances, des résultats importants ont été obtenus pour différents problèmes clés en aérodynamique : contrôle de l'éclatement tourbillonnaire de pointe avant [16], [24], des décollements sur les voilures en incidence ou avec volets braqués, [65], [51], etc. Le contrôle des écoulements peut ainsi permettre d'élargir le domaine de vol et de réduire l'impact environnemental de l'avion (baisse de la consommation en carburant consécutive à une minimisation de la trainée). Au niveau du développement de technologies innovantes, citons l'apparition de nouveaux concepts de gouvernes ou de systèmes d'hypersustentation rendue possible par l'utilisation de dispositifs de contrôle des écoulements, [59]. Dans ce travail, on s'intéresse particulièrement au contrôle des décollements de couche limite. L'application principale envisagée concerne l'écoulement à l'intérieur d'une manche à air coudée pour un drone furtif. Sur un avion militaire à réaction, le moteur est en effet alimenté en air par un système d'entrée d'air et de manche dont la longueur et la forme dépend du dessin global de l'avion. Les contraintes de discrétion radar et infrarouge nécessaires aujourd'hui tendent à dessiner des manches très coudées pour masquer l'entrée du moteur responsable d'une part importante de la signature radar de l'avion. Ce coudage induit des décollements néfastes aux exigences d'homogénéité de l'écoulement arrivant au moteur et impose l'utilisation de moyens de contrôle. La figure 1.1 est une illustration représentant un drone de combat ainsi qu'une manche à air générique en forme de U.

Le contrôle et l'optimisation (en particulier topologique) en mécanique des fluides sont des domaines de recherche des plus actifs, [60], [53], [50], [61], [31], [38], [32]. Les travaux que nous présentons ici s'appuient en partie sur ceux concernant le développement de boucles d'optimisation aérodynamique de formes, où l'écoulement autour de l'avion est simulé par les équations d'Euler [28], [27], [26] ou de Navier-Stokes, [79]. Dans ce contexte, un calcul économe (*i.e.* indépendant du nombre de paramètres d'optimisation) du gradient de la fonction coût (portance, trainée, etc.) est réalisé par l'intermédiaire de la résolution d'un problème adjoint. C'est le même état adjoint que nous utiliserons afin de contrôler de manière optimale les écoulements décollés. Les écoulements dans les manches coudées présentent une grande complexité, avec la présence

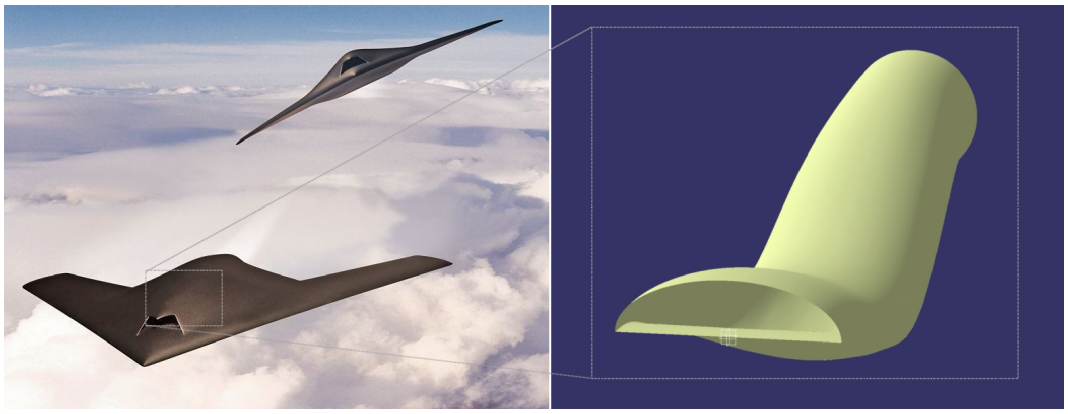

FIGURE 1.1 – Drone de combat et manche à air générique.

possible de plusieurs zones de recirculation interagissant avec une intermittence très forte. Des modélisations numériques basées sur les approches instationnaires peuvent alors être utiles à une meilleure compréhension des phénomènes présents. L'extension des méthodes d'optimisation à ces modélisations instationnaires devient alors nécessaire.

1.2 Contrôle des décollements de couche limite

Lorsqu'un fluide visqueux s'écoule autour d'un objet, le mouvement des particules fluides est entretenu par les forces d'advection et retardé par les forces de viscosité, induisant un frottement à la surface de l'objet. La présence d'un gradient de pression défavorable (*i.e.* la pression augmente dans le sens de l'écoulement) suffisamment important et venant s'ajouter aux forces de viscosité, peut parvenir à équilibrer l'action des forces d'inertie. Au point d'équilibre de ces forces se produit alors un décollement de la couche limite, au dela duquel les particules fluides s'écartent de la paroi de l'obstacle. Dans la région décollée se forme une zone de recirculation, où le mouvement du fluide est caractérisé par des lignes de courant fermées. Le point de décollement présente quant à lui un frottement visqueux nul.

Sur un profil d'aile, l'apparition d'un décollement a pour conséquence une perte de portance et donc une baisse des performances globales de l'avion. Dans le cas d'une manche à air, la présence de zones de recirculation induit de grandes inhomogénéités dans l'écoulement arrivant au moteur, ce qui peut être néfaste pour celui-ci. Il est donc crucial de pouvoir contrôler les décollements. Afin de lutter contre leur apparition, il apparaît comme nécessaire d'augmenter le frottement pariétal, [65]. On peut y parvenir en créant des structures macroscopiques dans l'écoulement permettant un mélange de la couche limite avec l'écoulement externe. C'est de cette façon que fonctionne un générateur de vortex mécanique (VG). Ce terme désigne une petite surface aérodynamique, d'une taille comparable à l'épaisseur de couche limite et de forme généralement rectangulaire ou triangulaire. Fixé à la paroi de l'objet avec une certaine incidence par rapport à l'écoulement externe, un générateur de vortex mécanique va générer de petits tourbillons dans son sillage. Ces tourbillons vont effectuer un transfert de quantité de mouvement de l'écoulement externe vers la zone de proche paroi, ce qui aura pour effet de contrer le décollement. Les générateurs de vortex mécaniques sont des moyens de contrôle passifs des décollements dans le sens où ils engendrent une action permanente et irréversible sur l'écoulement.

D'autres dispositifs de contrôle peuvent néanmoins être utilisés, mais dont le principe d'action sur la physique du décollement reste proche du fonctionnement d'un générateur de vortex mécanique. Les générateurs de vortex fluidiques fonctionnent par jet ou aspiration de

fluide dans la couche limite, de façon continue ou pulsée. Il s'agit dans ce cas d'une stratégie de contrôle active de l'écoulement. Citons également le cas des jets synthétiques, qui sont une évolution des générateurs de vortex fluidiques. Ces actionneurs sont comparables à une membrane vibrant dans une cavité, ce qui a pour effet de produire alternativement un soufflage ou une aspiration. Le débit moyen engendré par un tel dispositif est donc nul. Toutefois, les technologies actuelles ne permettent pas pour le moment l'utilisation de jets synthétiques pulsés pour le contrôle des écoulements rencontrés dans l'industrie aéronautique.

Nous présentons en figure 1.2, 1.3 et 1.4 des illustrations de générateurs de vortex mécaniques. La première photo représente le capot inférieur d'une maquette de manche à air lors d'essais en soufflerie. Quatre générateurs de vortex mécaniques de forme rectangulaire y ont été placés, avec une orientation divergente par rapport à la direction de l'écoulement. Sur la seconde, représentant l'intérieur d'une manche à air coudée et prise également au cours d'essais en soufflerie, deux générateurs de vortex sont visibles au premier plan ainsi qu'une série de huit autres dans le fond de la manche. La dernière photo met en évidence le contrôle par VG de l'écoulement autour d'une aile de Boeing 737. Deux séries de générateurs de vortex sont visibles : 15 sont proches de l'emplanture et 9 sont situés en bout d'aile. Dans ce cas, il s'agit plutôt de contrôler l'apparition éventuelle d'une interaction entre choc et couche limite en régime transonique (phénomène de *buffeting*).

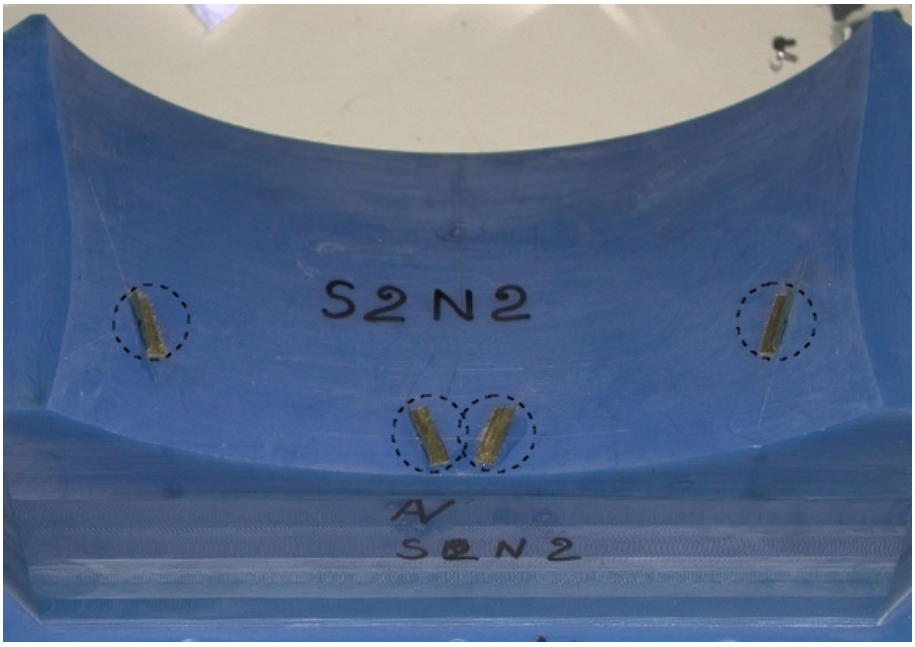

FIGURE 1.2 – Générateurs de vortex sur le capot d'une manche à air pour essais en soufflerie. Les quatre VG sont cerclés.

1.3 Présentation des travaux

Les travaux présentés dans ce manuscrit concernent exclusivement le contrôle de décollements par générateurs de vortex mécaniques. Dans un premier temps, notre but est de déterminer de façon automatique s'il est nécessaire ou non d'ajouter un générateur de vortex à un écoulement de référence. Par la suite, se posera la question du dimensionnement du ou des VG déjà présents ou venant d'être créés. Le cadre de travail est celui de la mécanique des fluides numériques (ou CFD pour *Computational Fluid Dynamics*). Les écoulements que nous considérons seront ainsi simulés à l'aide du code de résolution des équations de Navier-Stokes AETHER

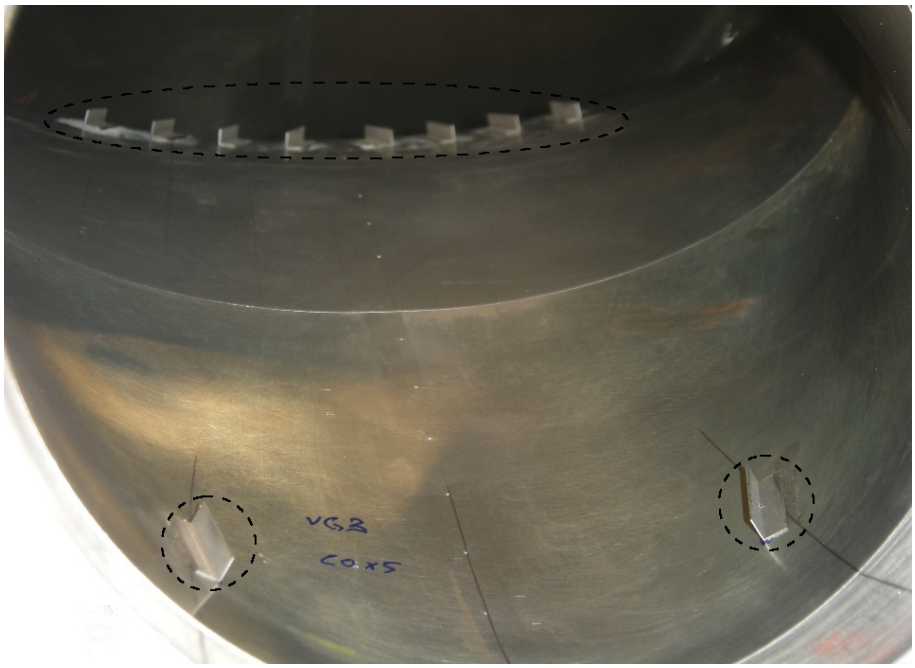

FIGURE 1.3 – Générateurs de vortex à l'intérieur d'une manche à air pour essais en soufflerie. Deux VG sont visibles au premier plan ainsi qu'une série de huit dans le fond de la manche.

développé par Dassault Aviation, dans un cadre stationnaire, mais également en instationnaire. En effet, un décollement turbulent, par exemple à l'intérieur d'une manche à air, présente une complexité importante et donc une meilleure simulation de celui-ci passe par l'utilisation de modélisations instationnaires. Il faut en conséquence développer des méthodes de contrôle et d'optimisation respectant ce cadre.

La présence d'un générateur de vortex mécanique dans un écoulement est modélisée par l'ajout d'un terme source volumique aux équations de Navier-Stokes. Afin de décider s'il peut être pertinent de créer un nouveau VG dans un écoulement de référence (*i.e.* d'ajouter un nouveau terme source), on utilise une méthode de gradient topologique, reposant sur le calcul d'un état adjoint. Le gradient topologique a été introduit à l'origine dans le cadre de l'optimisation de formes en mécanique du solide, [30], [71], [19]. Une idée similaire a également été développée concernant la résolution de problèmes inverses, [20], [8], [7]. Initialement, le calcul du gradient topologique permet de déterminer s'il est optimal de créer un trou dans une structure au cours du processus d'optimisation. Cette méthode a par la suite été appliquée à un grand nombre de domaines : éléctromagnétisme, [69], mécanique des fluides, [9], propagation de fissures dans un matériau, [5], traitement d'image, [13], etc. Le gradient topologique est ici appliqué à la création de terme source modélisant un générateur de vortex mécanique. L'expression de la force représentant le VG étant fixée, c'est un gradient topologique pour la perturbation de la fonction caractéristique de cette dernière que l'on va devoir calculer. Dans le chapitre 2 de ce manuscrit, nous détaillons le calcul de ce gradient topologique pour un certain nombre de problèmes modèles. Afin d'obtenir son expression, la même méthode sera dans tous les cas employée. Soit donc u la solution d'un système d'équations (le plus souvent aux dérivées partielles) muni d'un terme source f que multiplie une fonction caractéristique χ :

$$L(u) = \chi f. \tag{1.1}$$

A ce problème est associée une fonction coût J, qui dépend de la solution $u = u(\chi)$:

$$J(\chi) = j(u(\chi)). \tag{1.2}$$

FIGURE 1.4 – Générateurs de vortex sur l'aile d'un Boeing 737. Les deux séries de 15 et 9 VG sont cerclées.

On considère alors une perturbation χ^δ de la fonction caractéristique du terme source, centrée en un point x_0 et de taille δ. On définit donc le problème perturbé suivant :

$$L(u^\delta) = (\chi + \chi^\delta) f. \tag{1.3}$$

Notre but est alors d'évaluer la sensibilité de la fonction coût J vis à vis de l'introduction de la perturbation χ^δ, c'est à dire d'établir une expression de la forme :

$$\begin{gathered} J(\chi + \chi^\delta) = J(\chi) + \eta(\delta) g(x_0) + o(\eta(\delta)), \\ \lim_{\delta \to 0} \eta(\delta) = 0, \ \eta(\delta) > 0. \end{gathered} \tag{1.4}$$

La quantité $g(x_0)$ est alors appelée gradient topologique. Lorsque la taille δ est suffisamment petite, la fonction coût J sera diminuée si on introduit une perturbation χ^δ aux points de gradient topologique négatifs et au contraire augmentée pour les points de gradient topologique positifs. Afin d'établir cette expression, il sera nécessaire de faire l'analyse asymptotique d'un problème zoomé sur la perturbation ajoutée à l'équation initiale. On introduira également la solution p d'un problème adjoint relatif à la fonction coût j. Le gradient topologique g obtenu sera toujours égal au produit de cet état adjoint p par le terme source f ou au produit de leurs dérivées normales. Les problèmes modèles que nous avons considéré sont de difficulté croissante : laplacien avec conditions de Dirichlet ou de Neumann, problème de Stokes, équations de Navier-Stokes incompressibles, équation de la chaleur. Dans le cas du problème du laplacien, on considérera également les cas ou le terme source ajouté est situé proche du bord du domaine, sur ce bord, ou dépend de la solution u. Dans le chapitre 2, on calculera enfin de façon formelle l'expression du gradient topologique pour des problèmes discrets stationnaires et instationnaires représentatifs des équations de Navier-Stokes compressibles faisant l'objet des simulations numériques par le code AETHER. L'ajustement de la position, de l'orientation et de la taille des générateurs de vortex déjà présents dans un écoulement, ou créés en utilisant le gradient topologique, se fera quant à elle par une méthode classique d'optimisation locale avec gradient, faisant également intervenir la résolution d'un problème adjoint. Au cours du processus, les paramètres initiaux du VG sont modifiés à chaque itération pour atteindre un optimum. La présence d'un certain

nombre de minima locaux empêche en général de réaliser une optimisation globale. Le gradient topologique permet cependant de fournir la position initiale d'un nouevau générateur de vortex, proche d'un optimum global.

L'implémentation du gradient topologique et de l'optimisation paramétrique dans le code industriel de résolution des équations de Navier-Stokes compressibles AETHER fera l'objet du chapitre 3 de cette thèse. Ce code, écrit pour sa majeure partie en Fortran 77 et développé et utilisé quotidiennement chez Dassault Aviation, utilise une méthode d'éléments finis basée sur une formulation Galerkin moindres carrés des équations de Navier-Stokes écrites en variables entropiques. On abordera dans ce chapitre la question de la modélisation de la turbulence dans le code de calcul, par l'intermédiaire d'une approche statistique RANS (pour *Reynolds Averaged Navier-Stokes*). Dans le cas de simulations instationnaires, on utilisera une méthode DES (pour *Detached Eddy Simulation*), modélisation hybride entre le RANS et la LES (*Large Eddy Simulation*). Le modèle de terme source utilisé pour la représentation des générateurs de vortex mécaniques sera également décrit. Ce même chapitre traitera du code de résolution du problème adjoint, dérivé à partir du code Navier-Stokes AETHER. Ce code, dont le développement initial a été réalisé dans le cadre de l'optimisation de formes en régime stationnaire, se base sur une méthode discrète du calcul des sensibilités. Les équations du problème adjoint ne sont en effet pas déduites de manière continue à partir des équations de Navier-Stokes. Le code permettant de calculer l'état adjoint est au contraire directement obtenu par différentiation automatique du code AETHER. Pour cela, c'est le logiciel de différentiation TAPENADE développé par l'INRIA qui a été utilisé. La plupart des développements réalisés au cours de cette thèse ont ainsi porté sur le code AETHER adjoint. Différentes formulations du gradient topologique y ont également été implémentées et testées. La fin du chapitre 3 est consacrée à la description de la boucle d'optimisation automatique utilisée pour le dimensionnement des générateurs de vortex. Cette boucle, écrite en Python, permet l'optimisation paramétrique d'un nombre quelconque de VG. Elle peut utiliser différents algorithmes d'optimisation locale avec gradient, qui seront également décrits dans ce chapitre.

Les chapitres 4 et 5 regroupent l'ensemble des simulations réalisées en utilisant les méthodes d'optimisation développées au cours de la thèse. Dans le chapitre 4, le calcul du gradient topologique et la boucle d'optimisation paramétrique sont tout d'abord testés sur l'écoulement à l'intérieur d'une manche en forme de S simulé dans un cadre stationnaire. Ce cas est relativement simple, dans le sens où l'unique décollement présent à l'intérieur de la manche peut être clairement localisé. Il est donc bien adapté aux premiers tests d'implémentation. On mesurera en particulier l'influence du maillage utilisé sur la convergence du problème linéaire adjoint, ainsi que sur la cartographie de gradient topologique. Différentes formulations de ce dernier seront également évaluées sur cet écoulement. Les divers algorithmes d'optimisation paramétrique à disposition dans notre boucle seront enfin comparés. La suite du chapitre est consacrée à l'optimisation globale du contrôle par générateurs de vortex mécaniques pour des écoulements de types industriels. Les géométries considérées sont celles de manches en forme de U (donc avec deux coudes), représentatives de celles pouvant être retrouvées dans un drone furtif. En alternant des calculs de gradient topologique pour la création de nouveaux générateurs de vortex et des optimisations paramétriques réalisées à l'aide de notre boucle automatique pour effectuer leur dimensionnement, nous produisons ainsi de manière automatique des configurations de contrôle présentant de meilleures performances que celles réalisées "à la main".

Le chapitre 5 est enfin consacré aux simulations réalisées dans le cadre instationnaire. Nous avons étendu le code AETHER adjoint, à l'origine développé uniquement pour les simulations stationnaires, en une version instationnaire. Il a donc été tout d'abord nécessaire de valider cette nouvelle version dans le cadre d'un écoulement laminaire simple. Nous avons ainsi comparé les résultats moyens du code adjoint instationnaire avec ceux produits par la version stationnaire. Le problème adjoint instationnaire étant rétrograde en temps, il nécessite pour

sa résolution d'avoir sauvegardé au préalable l'ensemble des solutions du problème non-linéaire direct (*i.e.* à chaque pas de temps). La résolution du problème adjoint instationnaire pour un écoulement complexe, en plus de présenter un coût important en terme de temps de calcul, demande donc d'importantes ressources informatiques nécessaires au stockage des solutions du problème direct. Dans le but de rendre possible de tels calculs dans un environnement industriel, nous proposons une méthode permettant d'économiser l'espace disque en ne stockant la solution du problème direct qu'en certains pas de temps, puis en reconstruisant les solutions manquantes par interpolation au cours du calcul adjoint. Des premiers calculs du gradient topologique pour le contrôle de décollements simulés en instationnaire au moyen de générateurs de vortex ont également été réalisés. Le contrôle de l'écoulement turbulent autour d'un cylindre, puis celui à l'intérieur de la manche en forme de S déjà considérée dans le cadre stationnaire a été réalisé.

1.4 Communications

Les travaux décrits dans le présent manuscrit ont fait l'objet des communications suivantes :

- *Gradient topologique pour le contrôle de l'écoulement dans une manche à air coudée.* Présentation murale au 21e séminaire de Mécanique des Fluides Numérique, Paris, 26-27 janvier 2009.
- *Contrôle de l'écoulement dans une manche à air coudée : gradient topologique et optimisation paramétrique.* Présentation orale au congrès SMAI 2009, la Colle sur Loup, 25-29 mai 2009.
- *Flow control of curved air ducts using topological derivatives.* Présentation orale au 8th World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization, Lisbonne, Portugal, 1-5 juin 2009. Article publié dans les actes du congrès, [23].
- *Conception de formes aérodynamiques en présence d'écoulements décollés : contrôle et optimisation.* Présentation orale au séminaire scientifique DGA/BEC et ECN/LMF, Val de Reuil, 11-12 juin 2009.
- *Control of steady and unsteady flow separations using topological derivatives.* Présentation orale au Workshop on Advances in Topological Sensitivity Analysis for Computational Modelling, Petrópolis, Brésil, 2-6 août 2010.

Chapitre 2

Gradient topologique d'un terme source

2.1 Introduction

Ce chapitre est consacré au calcul du gradient topologique d'un terme source pour différents problèmes modèles, continus ou discrets. Rappelons que l'application visée est le contrôle d'un écoulement aérodynamique au moyen de générateurs de vortex mécaniques (VG). Notre but est de déterminer où il est optimal d'ajouter de tels dispositifs de contrôle dans un écoulement de référence afin de minimiser une fonction coût donnée. Dans la pratique, l'écoulement est calculé en résolvant les équations de Navier-Stokes compressibles avec turbulence, tandis que les générateurs de vortex sont modélisés par l'ajout d'un terme source volumique aux équations. Comme ces générateurs de vortex sont collés aux parois, le terme source ajouté sera localisé à proximité de la frontière du domaine où les équations sont résolues. En outre, ce terme source étant une fonction quadratique de la vitesse de l'écoulement, il sera strictement nul sur le bord du domaine.

Nous détaillerons dans la suite de ce chapitre le calcul rigoureux du gradient topologique pour les problèmes continus suivant : laplacien avec conditions aux limites de Dirichlet, de Neumann, problème de Stokes, équations de Navier-Stokes incompressibles, équation de la chaleur. Pour le problème du laplacien avec conditions de Dirichlet, nous considérerons les cas où le terme source est localisé à l'intérieur du domaine, proche du bord du domaine, centré en un point du bord et nul au bord ou encore dépendant de la solution. Nous évoquerons également le cas de problèmes discrets représentatifs des équations de Navier-Stokes compressibles, dans le cadre stationnaire ou instationnaire. Dans ces cas précis, un calcul rigoureux du gradient topologique sur le problème continu semble en effet plus difficile à obtenir. Dans tous les cas, afin de calculer le gradient topologique, nous serons amenés à une analyse asymptotique d'un problème localisé au voisinage du support du terme source que nous souhaitons ajouter, ainsi qu'au calcul d'un problème adjoint au problème de départ.

Le gradient topologique a été introduit à l'origine dans le cadre de l'optimisation de formes en mécanique des structures, [30], [71], [19], [35], [39], [64], [43]. Il s'agit dans ce cas d'étudier la sensibilité d'une fonction coût lorsqu'un petit trou est créé dans la structure. Cette idée a, par la suite, été appliquée aux problèmes issus de la mécanique des fluides, [9], [1], [14]. On peut trouver également dans [4] et [18] des exemples de couplage du gradient topologique avec d'autres méthodes d'optimisation de formes, comme par exemple la méthode des lignes de niveaux. Nous souhaitons ici appliquer le calcul du gradient topologique à l'ajout d'un terme source de forme donnée (les générateurs de vortex mécaniques) aux équations de Navier-Stokes. Un calcul de gradient topologique pour une perturbation de terme source peut être trouvé dans

[10], et dans [11] pour des problèmes instationnaires. Afin de calculer le gradient topologique, nous partirons toujours d'un problème muni d'une fonction caractéristique χ du domaine sur lequel est appliqué le terme source de référence, de la solution u de ce problème, ainsi que d'une fonction coût $J(\chi) = j(u(\chi))$. Nous chercherons à évaluer la sensibilité de la fonction coût J vis à vis d'une perturbation χ^δ (de taille δ, centrée en un point x_0 du domaine) de la fonction caractéristique χ du terme source. On cherchera ainsi à obtenir une expression de la forme :

$$\begin{array}{c} J(\chi + \chi^\delta) = J(\chi) + \eta(\delta) g(x_0) + o(\eta(\delta)), \\ \lim_{\delta \to 0} \eta(\delta) = 0, \ \eta(\delta) > 0. \end{array} \tag{2.1}$$

Lorsque le gradient topologique $g(x_0)$ est négatif, cela signifie que, pour une valeur de δ suffisamment petite, la fonction coût J sera diminuée si l'on ajoute un terme source au point x_0. Dans un processus d'optimisation, on cherchera donc à ajouter un terme source aux points où le gradient topologique est le plus négatif. Si le gradient topologique est partout positif, cela signifiera que la fonction coût ne peut plus être diminuée de cette manière.

2.2 Laplacien avec conditions aux limites de Dirichlet

On s'intéresse dans cette section au problème modèle du laplacien avec conditions aux limites de Dirichlet. Le gradient topologique sera successivement calculé pour un terme source à l'intérieur du domaine, proche du bord du domaine, centré sur le bord mais nul au bord et enfin dépendant de la solution du problème. Les problèmes que nous allons considérer sont à rapprocher des problèmes de perturbations singulières de frontières traités dans [25]. Dans toute la suite, C désignera une constante strictement positive indépendante des variables du problème.

2.2.1 Terme source à l'intérieur du domaine

2.2.1.1 Résultat principal

Soit Ω un ouvert régulier de $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 2$). Soit $f \in W^{1,\infty}(\Omega)$ donnée. On cherche u solution du problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta u & = & \chi f & \text{dans} \quad \Omega \\ u & = & 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega, \end{array} \right. \tag{2.2}$$

avec $\chi(x)$ la fonction caractéristique du domaine sur lequel est appliqué le terme source $f(x)$. De façon classique, on cherche la solution u dans l'espace $H_0^1(\Omega)$. Remarquons dès à présent que l'on aurait pu choisir $f \in L^2(\Omega)$, voir $f \in H^{-1}(\Omega)$. L'hypothèse plus forte $f \in W^{1,\infty}(\Omega)$ est cependant nécessaire (quoiqu'elle puisse être un peu affaiblie) car, dans la suite, nous allons avoir besoin de considérer la valeur de f en un point x_0. Or $f \in W^{1,\infty}(\Omega)$ implique en particulier que f est continue. On munit le problème (2.2) de la fonction coût suivante :

$$J(\chi) = \int_\Omega j(u)\, dx, \tag{2.3}$$

avec j une fonction deux fois dérivable par rapport à u satisfaisant pour simplifier aux conditions suivantes (qui ne sont pas optimales du point de vue de la généralité) :

$$\begin{array}{rcll} |j''(u)| & \leq & C & \forall u \in \mathbb{R}, \\ |j'(u)| & \leq & C\,(1 + |u|) & \forall u \in \mathbb{R}, \\ |j(u)| & \leq & C\left(1 + |u|^2\right) & \forall u \in \mathbb{R}. \end{array} \tag{2.4}$$

Notre objectif est d'évaluer la sensibilité de la fonction coût J lorsqu'une perturbation infinitésimale χ^δ est ajoutée à la fonction caractéristique χ du terme source f. On considère ainsi une autre fonction caractéristique χ^δ, de barycentre x_0, dont le support est disjoint de celui de la fonction caractéristique initiale χ :

$$\chi(x)\chi^\delta(x) = 0. \tag{2.5}$$

On peut alors véritablement parler de changement de topologie du support du terme source f et justifier l'emploi du terme gradient topologique. On suppose en outre que l'inclusion χ^δ est une remise à l'échelle d'une inclusion élémentaire B :

$$\chi^\delta(x) = \chi_B\left(\frac{x - x_0}{\delta}\right), \tag{2.6}$$

où χ_B est la fonction caractéristique d'un ouvert borné régulier B de $\mathbb{R}^N$. De manière générale, B peut être pris de forme quelconque. Cependant, afin de fixer les idées, on pourra considérer B comme étant la boule unité de $\mathbb{R}^N$. Le réel $\delta > 0$ représente la taille de la perturbation χ^δ et est destiné à tendre vers 0 dans la suite. Enfin, notons que, dans cette section, la position du centre x_0 de l'inclusion χ^δ est indépendante de δ. Donc, lorsque δ tendra vers 0, l'inclusion χ^δ restera loin du bord $\partial\Omega$ du domaine.

On peut maintenant définir le problème perturbé suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\Delta u^\delta & = & \left(\chi + \chi^\delta\right) f & \text{dans} \quad \Omega \\ u^\delta & = & 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega, \end{array}\right. \tag{2.7}$$

muni de la fonction coût :

$$J(\chi + \chi^\delta) = \int_\Omega j(u^\delta)\, dx. \tag{2.8}$$

La figure 2.1 schématise ce problème perturbé.

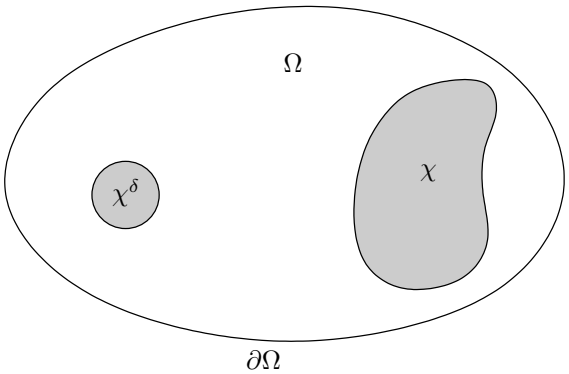

FIGURE 2.1 – Problème perturbé : cas d'une perturbation localisée à l'intérieur du domaine.

L'expression du gradient topologique pour la perturbation χ^δ du terme source f définie par (2.6) est donnée par le résultat suivant :

Théorème 1 *La fonction coût J possède un développement asymptotique de la forme :*

$$J(\chi + \chi^\delta) = J(\chi) + \delta^N |B|\, f(x_0)p(x_0) + \mathcal{O}\left(\delta^{N+1}\right), \tag{2.9}$$

où p est solution du problème adjoint suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\Delta p & = & j'(u) & \textit{dans} \quad \Omega \\ p & = & 0 & \textit{sur} \quad \partial\Omega. \end{array}\right. \tag{2.10}$$

En d'autres termes, le gradient topologique pour l'ajout d'un terme source au point x_0 vaut :

$$g(x_0) = f(x_0)p(x_0). \tag{2.11}$$

Afin de prouver ce théorème, nous allons tout d'abord mener une analyse asymptotique d'un problème proche de la perturbation χ^δ. C'est l'objet de la section suivante.

2.2.1.2 Développement asymptotique proche de la perturbation

Définissons tout d'abord v^δ, la différence entre la solution initiale u et la solution perturbée u^δ :

$$v^\delta = u^\delta - u, \tag{2.12}$$

qui est solution de :

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta v^\delta & = & \chi^\delta f & \text{dans} \quad \Omega \\ v^\delta & = & 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega. \end{array} \right. \tag{2.13}$$

Afin de prouver le théorème 1, nous allons devoir établir une estimation de v^δ. C'est le résultat annoncé par le lemme suivant :

Lemme 1 *Il existe une constante $C > 0$, indépendante de δ, telle que, $\forall \delta > 0$, la fonction v^δ solution du problème (2.13) vérifie :*

$$\left\| v^\delta \right\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \left\{ \begin{array}{lll} C\delta^{N+2} & si & N \geq 3 \\ C\delta^{N+2} \left|\log \delta\right| & si & N = 2. \end{array} \right. \tag{2.14}$$

Afin de prouver ce lemme, on va se ramener à un problème zoomé sur la perturbation χ^δ. On introduit donc le changement de variable $y = \frac{x - x_0}{\delta}$ qui transforme le problème initial (2.13) posé dans Ω en un problème posé dans $\mathbb{R}^N$ à la limite lorsque δ tend vers 0 (car on a supposé ici x_0 indépendant de δ). Soit donc w la solution du problème canonique suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta w & = & \chi_B f(x_0) & \text{dans} \quad \mathbb{R}^N \\ \nabla w & \to & 0 & \text{à l'} \quad \infty. \end{array} \right. \tag{2.15}$$

De façon classique, la solution w de ce problème est à chercher dans l'espace $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ (appelé

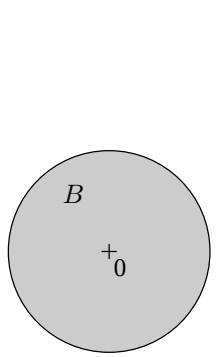

FIGURE 2.2 – Zoom sur une perturbation à l'intérieur du domaine.

espace de Deny-Lions ou de Beppo Levi), dont on trouvera la définition dans l'annexe A.1. De plus, en utilisant l'estimation (A.23), le comportement à l'infini de la fonction w est donné par :

$$|\nabla w(y)| \leq \frac{C}{1 + |y|^{N-1}} \quad \forall y \in \mathbb{R}^N. \tag{2.16}$$

On renvoie le lecteur à l'annexe A.1 pour une analyse précise du problème (2.15).

On se replace maintenant dans le domaine Ω de départ. On définit ainsi la fonction w^δ comme une remise à l'échelle de la fonction w de la manière suivante :

$$w^\delta(x) = \delta^2 w\left(\frac{x - x_0}{\delta}\right), \tag{2.17}$$

et qui est alors solution du problème suivant :

$$-\Delta w^\delta = \chi^\delta f(x_0) \quad \text{dans} \quad \Omega, \tag{2.18}$$

w^δ vérifiant des conditions aux limites non-homogènes mais petites sur le bord $\partial\Omega$.

Remarque 1 En fait, w^δ est le premier terme d'un développement asymptotique de la fonction v^δ et on peut écrire une expression du type :

$$u^\delta(x) = u(x) + \delta^2 w\left(\frac{x - x_0}{\delta}\right) + r^\delta(x). \tag{2.19}$$

Nous ne calculerons pas ici d'estimation du reste r^δ. En effet, ceci est inutile pour obtenir une estimation de la fonction v^δ, comme nous allons le montrer par la suite.

En utilisant l'équation (2.18) dont w^δ est solution, on peut écrire que v^δ est également solution du problème suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\Delta v^\delta & = & \chi^\delta\left(f(x) - f(x_0)\right) - \Delta w^\delta & \text{dans} \quad \Omega \\ v^\delta & = & 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega. \end{array}\right. \tag{2.20}$$

On a alors (en multipliant l'équation par v^δ, puis en intégrant par parties sur Ω et enfin en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz) :

$$\begin{array}{rcl} \left\|\nabla v^\delta\right\|^2_{L^2(\Omega)} & \leq & \left\|\chi^\delta\left(f(x) - f(x_0)\right)\right\|_{L^2(\Omega)} \left\|v^\delta\right\|_{L^2(\Omega)} \\ & + & \left\|\nabla w^\delta\right\|_{L^2(\Omega)} \left\|\nabla v^\delta\right\|_{L^2(\Omega)}. \end{array} \tag{2.21}$$

En utilisant l'inégalité de Poincaré, il vient :

$$\begin{array}{rcl} \left\|\nabla v^\delta\right\|^2_{L^2(\Omega)} & \leq & C\left\|\chi^\delta\left(f(x) - f(x_0)\right)\right\|_{L^2(\Omega)} \left\|\nabla v^\delta\right\|_{L^2(\Omega)} \\ & + & \left\|\nabla w^\delta\right\|_{L^2(\Omega)} \left\|\nabla v^\delta\right\|_{L^2(\Omega)}, \end{array} \tag{2.22}$$

ce qui implique :

$$\left\|\nabla v^\delta\right\|_{L^2(\Omega)} \leq C\left\|\chi^\delta\left(f(x) - f(x_0)\right)\right\|_{L^2(\Omega)} + \left\|\nabla w^\delta\right\|_{L^2(\Omega)} \tag{2.23}$$

et donc en utilisant encore une fois l'inégalité de Poincaré :

$$\left\|v^\delta\right\|_{L^2(\Omega)} \leq C\left(\left\|\chi^\delta\left(f(x) - f(x_0)\right)\right\|_{L^2(\Omega)} + \left\|\nabla w^\delta\right\|_{L^2(\Omega)}\right). \tag{2.24}$$

Pour le premier terme du second membre, on a :

$$\begin{array}{rcl} \left\|\chi^\delta\left(f(x) - f(x_0)\right)\right\|^2_{L^2(\Omega)} & = & \displaystyle\int_\Omega \chi^\delta\left(f(x) - f(x_0)\right)^2 dx \\ & \leq & \displaystyle\int_\Omega \chi^\delta\left(\nabla f(\tilde{x}) \cdot (x - x_0)\right)^2 dx \\ & \leq & C\left\|f\right\|^2_{W^{1,\infty}(\Omega)} \delta^{N+2}, \end{array} \tag{2.25}$$

où on a effectué un développement de Taylor de $f \in W^{1,\infty}(\Omega)$ avec reste exact. Pour le second terme on a :

$$\begin{aligned} \left\|\nabla w^\delta\right\|^2_{L^2(\Omega)} &= \int_\Omega \left|\nabla w^\delta(x)\right|^2 dx \\ &= \delta^{N+2} \int_{\Omega/\delta} |\nabla w(y)|^2 \, dy. \end{aligned} \tag{2.26}$$

Connaissant le comportement à l'infini de ∇w donné en (2.16), on peut écrire :

$$\begin{aligned} \left\|\nabla w^\delta\right\|^2_{L^2(\Omega)} &\leq C\delta^{N+2} \int_{\Omega/\delta} \frac{1}{1+|y|^{2N-2}} \, dy \\ &\leq C\delta^{N+2} \int_1^{1/\delta} \frac{1}{r^{N-1}} \, dr \\ &\leq C\delta^{N+2} \begin{cases} 1 & \text{si} \quad N \geq 3 \\ |\log \delta| & \text{si} \quad N = 2. \end{cases} \end{aligned} \tag{2.27}$$

Les inégalités (2.25) et (2.27) seront utilisées à plusieurs reprises par la suite. Elle permettent en outre de conclure la preuve du lemme 1. En particulier, on a :

$$\left\|v^\delta\right\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \mathcal{O}\left(\delta^{N+1}\right). \tag{2.28}$$

2.2.1.3 Preuve du théorème 1

Ayant obtenu une estimation sur v^δ, on va maintenant pouvoir établir l'expression du gradient topologique. En effet, la fonction coût associée au problème perturbé vaut :

$$\begin{aligned} J(\chi + \chi^\delta) &= \int_\Omega j(u^\delta) \, dx \\ &= \int_\Omega j(u + v^\delta) \, dx \\ &= \int_\Omega \left[j(u) + j'(u)v^\delta + \frac{1}{2} j''(\tilde{u}) v^\delta v^\delta \right] dx \\ &= J(\chi) + \int_\Omega j'(u) v^\delta \, dx + \frac{1}{2} \int_\Omega j''(\tilde{u}) v^\delta v^\delta \, dx, \end{aligned} \tag{2.29}$$

avec $\tilde{u}$ une fonction telle que $\tilde{u}(x) \in \left[u(x), u^\delta(x)\right]$ (intervalle non-ordonné). En utilisant l'hypothèse (2.4) sur j'' et le résultat du lemme 1, on obtient pour le dernier terme :

$$\left| \frac{1}{2} \int_\Omega j''(\tilde{u}) v^\delta v^\delta \, dx \right| \leq C \left\|v^\delta\right\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \mathcal{O}\left(\delta^{N+1}\right). \tag{2.30}$$

Introduisons maintenant l'état adjoint p solution du problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta p = j'(u) & \text{dans} \quad \Omega \\ p = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.31}$$

En multipliant le problème adjoint (2.31) par v^δ et en intégrant par parties sur Ω (v^δ étant nulle sur le bord $\partial\Omega$), on a alors :

$$\int_\Omega \nabla p \cdot \nabla v^\delta \, dx = \int_\Omega j'(u) v^\delta \, dx. \tag{2.32}$$

D'autre part, en multipliant le problème (2.13) par p et en intégrant par parties sur Ω (p étant lui aussi nul sur le bord $\partial\Omega$), on obtient :

$$\int_\Omega \nabla v^\delta \cdot \nabla p \, dx = \int_\Omega \chi^\delta f p \, dx. \tag{2.33}$$

Par hypothèse, f est une fonction de $W^{1,\infty}(\Omega)$. Il en est de même pour p. En effet, comme $\chi f \in L^\infty(\Omega)$, on a $u \in W^{2,q}(\Omega)$, $\forall q < \infty$ et donc $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$. En utilisant l'hypothèse (2.4), on obtient également que $j'(u) \in W^{1,\infty}(\Omega)$ et donc que $p \in W^{3,q}(\Omega)$, $\forall q < \infty$, d'où $p \in W^{2,\infty}(\Omega)$. On peut donc légitimement écrire :

$$\int_\Omega \chi^\delta f p \, dx = \delta^N |B| f(x_0)p(x_0) + \mathcal{O}\left(\delta^{N+1}\right), \tag{2.34}$$

où on a noté $|B|$ la mesure de B.

En combinant les expressions (2.32), (2.33) et (2.34) on obtient alors :

$$\int_\Omega j'(u)v^\delta \, dx = \delta^N |B| f(x_0)p(x_0) + \mathcal{O}\left(\delta^{N+1}\right). \tag{2.35}$$

Ceci donne finalement pour l'expression (2.29) :

$$J(\chi + \chi^\delta) = J(\chi) + \delta^N |B| f(x_0)p(x_0) + \mathcal{O}\left(\delta^{N+1}\right), \tag{2.36}$$

qui est le résultat annoncé par le théorème 1.

Remarque 2 En supposant $f, p \in \mathcal{C}^2(\Omega)$, on peut continuer le développement limité sous l'intégrale de (2.34) et obtenir un reste en δ^{N+2}. On a en effet, puisque x_0 est le barycentre de l'inclusion χ^δ :

$$\begin{aligned} \int_\Omega \chi^\delta f p \, dx = \delta^N |B| f(x_0)p(x_0) \quad &+ \quad \underbrace{\int_\Omega \chi^\delta \nabla f(x_0) \cdot (x - x_0) p(x_0) \, dx}_{=0} \\ &+ \quad \underbrace{\int_\Omega \chi^\delta \nabla p(x_0) \cdot (x - x_0) f(x_0) \, dx}_{=0} \\ &+ \quad \mathcal{O}\left(\delta^{N+2}\right). \end{aligned} \tag{2.37}$$

2.2.2 Terme source proche du bord du domaine

2.2.2.1 Résultat principal

On considère maintenant le cas où l'inclusion χ^δ, de taille δ, est centrée en un point proche du bord $\partial\Omega$, dans le sens où sa position dépend elle même de δ. On reprend donc le même problème que dans la section précédente, muni des mêmes hypothèses. On suppose en outre que l'inclusion χ^δ est donnée par :

$$\chi^\delta(x) = \chi_B\left(\frac{x - x_0 - \delta L}{\delta}\right), \tag{2.38}$$

avec L un vecteur fixé, colinéaire à n, la normale dirigée vers l'intérieur de Ω en $x_0 \in \partial\Omega$. On fait également l'hypothèse simplificatrice Ω convexe. On est alors désormais dans la situation schématisée par la figure 2.3.

L'expression du gradient topologique pour ce nouveau problème est donnée par le théorème suivant :

Théorème 2 *Pour une perturbation χ^δ centrée en un point proche du bord $\partial\Omega$, la fonction coût J possède un développement asymptotique de la forme :*

$$J(\chi + \chi^\delta) = J(\chi) + C\delta^{N+1} f(x_0)\frac{\partial p}{\partial n}(x_0) + \mathcal{O}\left(\delta^{N+2}\right), \tag{2.39}$$

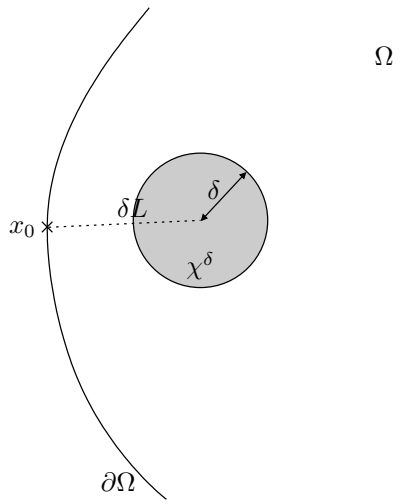

FIGURE 2.3 – Problème perturbé : cas d'une perturbation proche du bord du domaine.

où p est encore solution du problème adjoint (2.31) et C est une constante non-nulle dépendant uniquement de la géométrie de l'inclusion B qui, dans le cas d'une boule entièrement incluse dans Ω, vaut :

$$C = \int_{B\cap\mathbb{R}^N_+} y_N \, dy, \tag{2.40}$$

avec $y_N = (0, \ldots, 0, y_N)$. En d'autres termes, le gradient topologique pour l'ajout d'un terme source proche du bord du domaine vaut :

$$g(x_0) = f(x_0)\frac{\partial p}{\partial n}(x_0). \tag{2.41}$$

La démonstration de ce théorème sera essentiellement la même que dans la section précédente. La principale différence réside dans l'analyse asymptotique du problème proche de la perturbation que nous allons mener dans la section suivante.

2.2.2.2 Développement asymptotique proche de la perturbation

On définit comme précédemment v^δ la différence entre solution initiale u et solution perturbée u^δ. Afin de prouver le théorème 2 nous avons encore besoin du résultat suivant :

Lemme 2 *Il existe une constante $C > 0$, indépendante de δ, telle que, $\forall \delta > 0$, la fonction v^δ, solution du problème (2.13) dans le cas où la perturbation χ^δ est donnée par (2.38), vérifie :*

$$\left\| v^\delta \right\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C\delta^{N+2}. \tag{2.42}$$

Le lemme 2 est l'analogue du lemme 1 de la section précédente dans le cas où la perturbation χ^δ est définie par (2.38). Remarquons que l'estimation est cette fois en δ^{N+2} et non plus en δ^{N+1}. Sa démonstration est quelque peu différente. Commençons par effectuer une rotation du domaine Ω de telle sorte que la normale entrante dans Ω en x_0 soit le vecteur e_N, le dernier vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^N$. Afin de prouver le lemme 2, on effectue encore le changement de variable $y = \frac{x-x_0}{\delta}$ mais cette fois-ci, le bord $\partial\Omega$ du domaine n'est pas envoyé à

l'infini comme dans le cas d'une perturbation loin du bord. On obtient au contraire un problème posé dans $\mathbb{R}^N_+ = \{y = (y_1, \ldots, y_N); y_N \geq 0\}$ à la limite lorsque δ tend vers 0. On définit alors w comme étant solution de :

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta w & = & \chi_B f(x_0) & \text{dans} \quad \mathbb{R}^N_+ \\ w & = & 0 & \text{sur} \quad \partial\mathbb{R}^N_+ \\ \nabla w & \to & 0 & \text{à l'} \quad \infty. \end{array} \right. \tag{2.43}$$

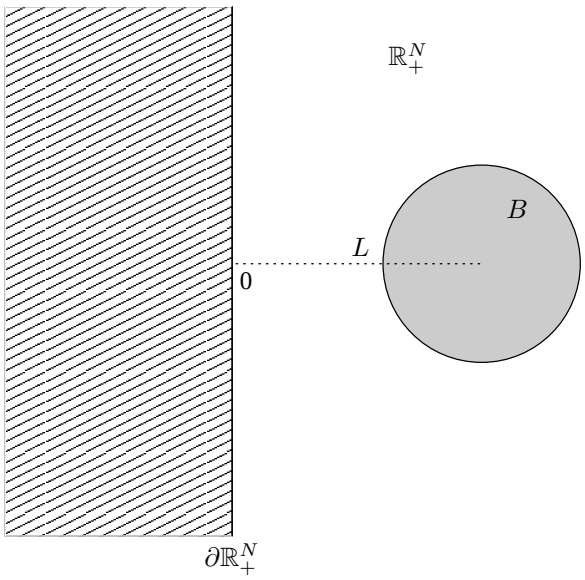

FIGURE 2.4 – Zoom sur une perturbation proche du bord du domaine.

Afin de déterminer le comportement asymptotique de w à l'infini, on commence par prolonger w par imparité dans tout $\mathbb{R}^N$. On définit ainsi le prolongement $\tilde{w}$ comme suit :

$$\tilde{w}(y_1, \ldots, y_N) = w(y_1, \ldots, y_N) \quad \text{pour} \quad y_N \geq 0 \tag{2.44}$$

et :

$$\tilde{w}(y_1, \ldots, y_{N-1}, y_N) = -w(\underbrace{y_1, \ldots, y_{N-1}, -y_N}_{\tilde{y}}) \quad \text{pour} \quad y_N < 0. \tag{2.45}$$

La fonction $\tilde{w}$ ne présente alors pas de saut de dérivée à la traversée de $\partial\mathbb{R}^N_+$ et devient solution du problème suivant posé dans tout $\mathbb{R}^N$:

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta \tilde{w} & = & F(y) & \text{dans} \quad \mathbb{R}^N \\ \nabla \tilde{w} & \to & 0 & \text{à l'} \quad \infty, \end{array} \right. \tag{2.46}$$

où le second membre F est donnée par :

$$F(y) = \left\{ \begin{array}{rll} & \chi_B(y) f(x_0) & \text{dans} \quad \mathbb{R}^N_+ \\ - & \chi_B(\tilde{y}) f(x_0) & \text{dans} \quad \mathbb{R}^N_-. \end{array} \right. \tag{2.47}$$

Le problème (2.46) est similaire au problème (2.15) avec pour seule différence le fait que le second membre F est cette fois une fonction impaire, donc de moyenne nulle. Nous établissons en (A.26) le comportement à l'infini de la solution de ce type de problème. Comme la fonction w est la restriction à $\mathbb{R}^N_+$ de la fonction $\tilde{w}$, son comportement à l'infini est le même que celui de w, à savoir :

$$|\nabla w(y)| \leq \frac{C}{1 + |y|^N} \quad \forall y \in \mathbb{R}^N. \tag{2.48}$$

Comme dans la section précédente, on définit la fonction w^δ remise à l'échelle de la façon suivante :

$$w^\delta(x) = \delta^2 w\left(\frac{x - x_0}{\delta}\right), \tag{2.49}$$

avec w étendue par 0 en dehors de $\mathbb{R}^N_+$. La fonction w^δ est alors solution du problème suivant :

$$-\Delta w^\delta = \chi^\delta f(x_0) \quad \text{dans} \quad \Omega, \tag{2.50}$$

w^δ vérifiant des conditions aux limites non-homogènes mais petites sur le bord $\partial\Omega$.

Remarque 3 L'hypothèse simplificatrice Ω convexe implique que, après rotation, ce domaine soit intégralement inclu dans $\mathbb{R}^N_+$, et ce, quelque soit le point x_0 et quelque soit la normale au point x_0. Lorsque l'on considère la fonction w^δ, définie à partir de w, celle-ci est alors solution du problème (2.50) dans tout Ω et on n'a pas à prendre en compte un éventuel saut de ∇w sur $\partial\mathbb{R}^N_+$ dans (2.50).

Muni de l'estimation (2.48) sur w, on va pouvoir calculer une estimation de v^δ. En effet, en utilisant (2.50), on peut écrire que v^δ est solution du problèmé suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\Delta v^\delta & = & \chi^\delta\left(f(x) - f(x_0)\right) - \Delta w^\delta & \text{dans} \quad \Omega \\ v^\delta & = & 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega. \end{array}\right. \tag{2.51}$$

Comme précédemment, on a alors :

$$\left\|v^\delta\right\|_{L^2(\Omega)} \leq C\left(\left\|\chi^\delta\left(f(x) - f(x_0)\right)\right\|_{L^2(\Omega)} + \left\|\nabla w^\delta\right\|_{L^2(\Omega)}\right). \tag{2.52}$$

Concernant le premier terme du second membre, et de la même façon qu'en (2.25), on a :

$$\left\|\chi^\delta\left(f(x) - f(x_0)\right)\right\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C\delta^{N+2}. \tag{2.53}$$

Pour le second terme, on a cette fois :

$$\begin{array}{rcl} \left\|\nabla w^\delta\right\|^2_{L^2(\Omega)} & = & \displaystyle\int_\Omega \left|\nabla w^\delta(x)\right|^2 dx \\ & = & \delta^{N+2}\displaystyle\int_{\Omega/\delta} \left|\nabla w(y)\right|^2 dy. \end{array} \tag{2.54}$$

Connaissant le comportement à l'infini de ∇w donné cette fois par (2.48), on peut écrire :

$$\begin{array}{rcl} \left\|\nabla w^\delta\right\|^2_{L^2(\Omega)} & \leq & C\delta^{N+2}\displaystyle\int_{\Omega/\delta} \frac{1}{1 + |y|^{2N}}\, dy \\ & \leq & C\delta^{N+2}\displaystyle\int_1^{1/\delta} \frac{1}{r^N}\, dr \\ & \leq & C\delta^{N+2}. \end{array} \tag{2.55}$$

Ces estimations permettent de conclure la preuve du lemme 2, à savoir :

$$\left\|v^\delta\right\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C\delta^{N+2}. \tag{2.56}$$

Remarque 4 Le résultat final est indépendant de la rotation du domaine Ω que nous avons opéré au début de la preuve du lemme 2. De plus, le fait que l'estimation de v^δ est en $\mathcal{O}\left(\delta^{N+2}\right)$ plutot que $\mathcal{O}\left(\delta^{N+1}\right)$ vient du prolongement par imparité de w que nous avons effectué et qui a conduit à un second membre de moyenne nulle dans le problème (2.46).

2.2.2.3 Preuve du théorème 2

Muni du lemme 2, la démonstration du théorème 2 dans le cas d'une perturbation définie par (2.38) se fait de la même façon que dans la section précédente. En effet, la fonction coût associée au problème perturbé vaut encore :

$$J(\chi+\chi^\delta) = J(\chi) + \int_\Omega j'(u)v^\delta\,dx + \frac{1}{2}\int_\Omega j''(\tilde{u})v^\delta v^\delta\,dx, \tag{2.57}$$

avec $\tilde{u}$ une fonction telle que $\tilde{u}(x) \in \left[u(x), u^\delta(x)\right]$ (intervalle non-ordonné). En utilisant l'hypothèse (2.4) sur j'' et le résultat du lemme 2, on obtient pour le dernier terme :

$$\left|\frac{1}{2}\int_\Omega j''(\tilde{u})v^\delta v^\delta\,dx\right| \leq C\left\|v^\delta\right\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \mathcal{O}\left(\delta^{N+2}\right). \tag{2.58}$$

Introduisons maintenant l'état adjoint p solution du problème suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\Delta p & = & j'(u) & \text{dans} \quad \Omega \\ p & = & 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega. \end{array}\right. \tag{2.59}$$

En multipliant le problème adjoint (2.59) par v^δ et en intégrant par parties sur Ω (v^δ étant nulle sur le bord $\partial\Omega$), on a alors :

$$\int_\Omega \nabla p\cdot\nabla v^\delta\,dx = \int_\Omega j'(u)v^\delta\,dx. \tag{2.60}$$

D'autre part, en multipliant le problème (2.13) par p et en intégrant par parties sur Ω (p étant lui aussi nul sur le bord $\partial\Omega$), on obtient :

$$\int_\Omega \nabla v^\delta\cdot\nabla p\,dx = \int_\Omega \chi^\delta f p\,dx. \tag{2.61}$$

Un développement limité de l'expression précédente en $x_0 \in \partial\Omega$ avec $p(x_0) = 0$ et $p \in W^{2,\infty}(\Omega)$ donne :

$$\int_\Omega \chi^\delta f p\,dx = \int_\Omega \chi^\delta f(x_0)\nabla p(x_0)\cdot(x-x_0)\,dx + \mathcal{O}\left(\delta^{N+2}\right). \tag{2.62}$$

En fait, $p = 0$ sur tout $\partial\Omega$, de sorte qu'il ne reste que la dérivée normale de p dans l'expression précédente :

$$\int_\Omega \chi^\delta f p\,dx = \delta^{N+1} f(x_0)\frac{\partial p}{\partial n}(x_0)\underbrace{\int_{B\cap\mathbb{R}^N_+} y_N\,dy}_{:=C} + \mathcal{O}\left(\delta^{N+2}\right), \tag{2.63}$$

avec n la normale entrante dans Ω. Ceci permet de conclure la preuve du théorème 2.

2.2.3 Terme source centré en un point du bord

2.2.3.1 Résultat principal

On considère maintenant le cas où l'inclusion χ^δ est centrée en un point x_0 appartenant au bord du domaine Ω. On suppose de plus que le terme source f est nul sur $\partial\Omega$, avec $f \in W^{2,\infty}(\Omega)$. On se rapproche ainsi du problème industriel du contrôle d'un écoulement aérodynamique par générateurs de vortex mécaniques (qui sont, rappelons-le, modélisés par un terme source centré sur un point du bord, mais nul au bord). On reprend encore une fois les mêmes notations que dans les deux sections précédentes, avec une inclusion χ^δ définie par (2.6) avec $x_0 \in \partial\Omega$. Les définitions de u, u^δ, v^δ ainsi que de la fonction coût J sont encore une fois les mêmes que

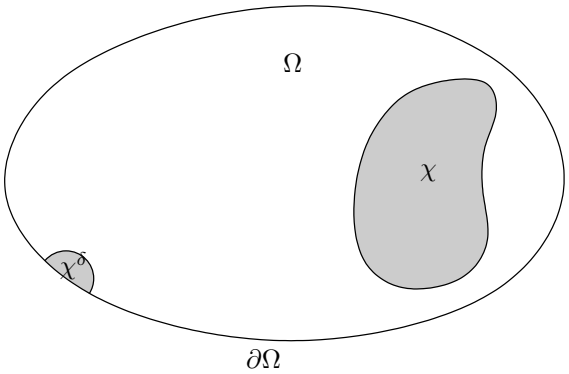

FIGURE 2.5 – Problème perturbé : cas d'une perturbation centrée en un point du bord du domaine.

précédemment. Enfin, on fait encore l'hypothèse simplificatrice Ω convexe. On se trouve donc désormais dans la situation schématisée par la figure 2.5. Notons qu'il n'est pas nécessaire que l'inclusion χ^δ soit coupée en son milieu par le bord $\partial\Omega$.

L'expression du gradient topologique pour ce type de perturbation est alors donnée par le théorème suivant :

Théorème 3 *Pour une perturbation χ^δ centrée en un point $x_0 \in \partial\Omega$ et un terme source nul sur $\partial\Omega$, la fonction coût J possède un développement asymptotique de la forme :*

$$J(\chi + \chi^\delta) = J(\chi) + C\delta^{N+2}\frac{\partial f}{\partial n}(x_0)\frac{\partial p}{\partial n}(x_0) + \mathcal{O}\left(\delta^{N+3}\right), \tag{2.64}$$

où p est solution du même problème adjoint que défini précédemment en (2.31) et C est une constante non-nulle dépendant uniquement de la géométrie de l'inclusion B, qui dans le cas d'une boule vaut :

$$C = \int_{B\cap\mathbb{R}^N_+} y_N^2\, dy, \tag{2.65}$$

avec $y_N = (0, \ldots, 0, y_N)$. En d'autres termes, le gradient topologique pour l'ajout d'un terme source centré en un point du bord et nul au bord vaut :

$$g(x_0) = \frac{\partial f}{\partial n}(x_0)\frac{\partial p}{\partial n}(x_0). \tag{2.66}$$

Remarque 5 L'expression du gradient topologique fait ici intervenir la dérivée normale de f et de p en x_0 ainsi qu'une puissance différente de δ, la taille de l'inclusion. Ce résultat est à comparer au cas d'une perturbation localisée à l'intérieur du domaine qui était considéré dans les deux précédentes sections.

2.2.3.2 Développement asymptotique proche de la perturbation

On définit encore v^δ la différence entre solution initiale u et solution perturbée u^δ. L'estimation de v^δ, nécessaire à la preuve du théorème 3, est donnée par le lemme suivant :

Lemme 3 *Il existe une constante $C > 0$, indépendante de δ, telle que, $\forall\delta > 0$, la fonction v^δ solution du problème (2.13) dans le cas d'une perturbation centrée en un point du bord et nul au bord vérifie :*

$$\left\|v^\delta\right\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C\delta^{N+4}. \tag{2.67}$$

Remarquons que l'estimation est cette fois en δ^{N+4} comparée aux deux cas précédents. Afin de prouver ce résultat, on commence, comme dans la section précédente, par effectuer une rotation du domaine Ω de telle sorte que la normale entrante dans Ω en x_0 soit le vecteur e_N. Puis on effectue le changement de variable $y = \frac{x-x_0}{\delta}$ qui transforme le problème initial posé dans Ω en un problème posé dans $\mathbb{R}^N_+$ à la limite lorsque δ tend vers 0. On est donc dans la situation de la figure 2.6. Remarquons encore qu'il n'est pas nécessaire que B soit coupé par $\partial\mathbb{R}^N_+$ de manière symétrique. Enfin, comme $f(x_0) = 0$, c'est son gradient $\nabla_x f(x_0)$ (par rapport à la variable x de départ) qui va intervenir au second membre du problème proche de la perturbation que l'on considère. On définit alors w comme étant solution de :

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta w & = & \chi_B \nabla_x f(x_0) \cdot y & \text{dans} \quad \mathbb{R}^N_+ \\ w & = & 0 & \text{sur} \quad \partial\mathbb{R}^N_+ \\ \nabla w & \to & 0 & \text{à l'} \quad \infty. \end{array} \right. \tag{2.68}$$

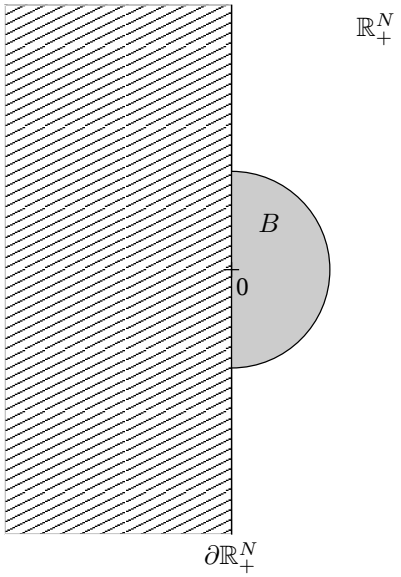

FIGURE 2.6 – Zoom sur une perturbation centrée en un point du bord du domaine.

Afin de détermnier le comportement de w à l'infini, on prolonge cette fonction par imparité dans tout $\mathbb{R}^N$, comme dans le cas d'une perturbation proche du bord de la section précédente. On définit alors la fonction $\tilde{w}$ solution du problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta \tilde{w} & = & F(y) & \text{dans} \quad \mathbb{R}^N \\ \nabla \tilde{w} & \to & 0 & \text{à l'} \quad \infty, \end{array} \right. \tag{2.69}$$

où le second membre F est donné par :

$$F(y) = \left\{ \begin{array}{rll} & \chi_B(y) \nabla_x f(x_0) \cdot y & \text{dans} \quad \mathbb{R}^N_+ \\ - & \chi_B(\tilde{y}) \nabla_x f(x_0) \cdot \tilde{y} & \text{dans} \quad \mathbb{R}^N_-. \end{array} \right. \tag{2.70}$$

En utilisant le résultat (A.26), on établit que le comportement à l'infini de $\tilde{w}$, et donc de w est donné par :

$$|\nabla w(y)| \leq \frac{C}{1 + |y|^N} \quad \forall y \in \mathbb{R}^N. \tag{2.71}$$

On définit maintenant la fonction w^δ définie dans tout Ω à partir de w comme suit :

$$w^\delta(x) = \delta^3 w\left(\frac{x-x_0}{\delta}\right), \tag{2.72}$$

avec w étendue par 0 en dehors de $\mathbb{R}^N_+$. La fonction w^δ est alors solution du problème suivant :

$$-\Delta w^\delta = \chi^\delta \nabla f(x_0)\cdot(x-x_0) \quad \text{dans} \quad \Omega, \tag{2.73}$$

w^δ vérifiant des conditions aux limites non-homogènes mais petites sur le bord $\partial\Omega$.

Remarque 6 On a encore fait ici, comme dans la section précédente, l'hypothèse simplificatrice Ω convexe, de telle sorte que ce domaine soit, après rotation, entièrement inclu dans $\mathbb{R}^N_+$ et donc que la fonction w^δ remise à l'échelle soit solution de (2.73) dans tout Ω.

Muni de ce résultat, on va pouvoir calculer une estimation de v^δ. On utilise l'équation (2.73), pour écrire que v^δ est également solution du problème suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\Delta v^\delta & = & \chi^\delta\left(f(x)-\nabla f(x_0)\cdot(x-x_0)\right)-\Delta w^\delta & \text{dans} \quad \Omega \\ v^\delta & = & 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega. \end{array}\right. \tag{2.74}$$

Comme précédemment, on a alors :

$$\left\|v^\delta\right\|_{L^2(\Omega)} \leq C\left(\left\|\chi^\delta\left(f(x)-\nabla f(x_0)\cdot(x-x_0)\right)\right\|_{L^2(\Omega)} + \left\|\nabla w^\delta\right\|_{L^2(\Omega)}\right). \tag{2.75}$$

Concernant le premier terme du second membre et comme $f(x_0)=0$ avec $f\in W^{2,\infty}(\Omega)$, on a :

$$f(x)-\nabla f(x_0)\cdot(x-x_0) = \mathcal{O}\left(|x-x_0|^2\right), \tag{2.76}$$

ce qui donne :

$$\left\|\chi^\delta\left(f(x)-\nabla f(x_0)\cdot(x-x_0)\right)\right\|^2_{L^2(\Omega)} = \mathcal{O}\left(\delta^{N+4}\right). \tag{2.77}$$

Pour le second terme on a cette fois :

$$\begin{array}{rcl} \left\|\nabla w^\delta\right\|^2_{L^2(\Omega)} & = & \displaystyle\int_\Omega \left|\nabla w^\delta(x)\right|^2 dx \\ & = & \delta^{N+4}\displaystyle\int_{\Omega/\delta} |\nabla w(y)|^2\, dy. \end{array} \tag{2.78}$$

Connaissant le comportement à l'infini de ∇w donné par (2.71), on peut écrire :

$$\begin{array}{rcl} \left\|\nabla w^\delta\right\|^2_{L^2(\Omega)} & \leq & C\delta^{N+4}\displaystyle\int_{\Omega/\delta}\frac{1}{1+|y|^{2N}}\,dy \\ & \leq & C\delta^{N+4}\displaystyle\int_1^{1/\delta}\frac{1}{r^N}\,dr \\ & \leq & C\delta^{N+4}, \end{array} \tag{2.79}$$

ce qui permet ainsi de conclure la preuve du lemme 3.

2.2.3.3 Preuve du théorème 3

Muni de l'estimation sur v^δ donnée par le lemme 3, on va comme précédemment établir l'expression du gradient topologique. La fonction coût associée au problème perturbé vaut encore :

$$J(\chi+\chi^\delta) = J(\chi) + \int_\Omega j'(u)v^\delta\,dx + \frac{1}{2}\int_\Omega j''(\tilde{u})v^\delta v^\delta\,dx, \tag{2.80}$$

avec $\tilde{u}(x) \in \left[u(x), u^\delta(x)\right]$ (intervalle non-ordonné). Pour le dernier terme, on a cette fois :

$$\left|\frac{1}{2}\int_\Omega j''(\tilde{u})v^\delta v^\delta\,dx\right| \leq C\left\|v^\delta\right\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \mathcal{O}\left(\delta^{N+4}\right). \tag{2.81}$$

On introduit encore l'état adjoint p solution du problème :

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\Delta p & = & j'(u) & \text{dans} \quad \Omega \\ p & = & 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega, \end{array}\right. \tag{2.82}$$

ce qui permet d'écrire de nouveau :

$$\int_\Omega j'(u)v^\delta\,dx = \int_\Omega \chi^\delta fp\,dx. \tag{2.83}$$

Comme $f(x_0) = p(x_0) = 0$ et $f, p \in W^{2,\infty}(\Omega)$, on obtient :

$$\int_\Omega \chi^\delta fp\,dx = \int_\Omega \chi^\delta\left[\nabla f(x_0)\cdot(x-x_0)\nabla p(x_0)\cdot(x-x_0) + \mathcal{O}\left(|x-x_0|^3\right)\right]dx. \tag{2.84}$$

En fait, comme f et p sont nuls sur $\partial\Omega$, il ne reste que leurs dérivées normales dans l'expression précédente et on peut écrire :

$$\int_\Omega \chi^\delta fp\,dx = \delta^{N+2}\frac{\partial f}{\partial n}(x_0)\frac{\partial p}{\partial n}(x_0)\underbrace{\int_{B\cap\mathbb{R}^N_+} y_N^2\,dy}_{:=C} + \mathcal{O}\left(\delta^{N+3}\right), \tag{2.85}$$

avec n la normale entrante dans Ω. Ceci permet de conclure la preuve du théorème 3.

2.2.4 Terme source dépendant de l'état

2.2.4.1 Résultat principal

On considère désormais le problème suivant, dont le second membre dépend (éventuellement de façon non-linéaire) de l'état u :

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\Delta u & = & \chi f(x,u) & \text{dans} \quad \Omega \\ u & = & 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega, \end{array}\right. \tag{2.86}$$

avec $f : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable. Dans toute cette section, on fait l'hypothèse qu'il existe une unique solution faible de (2.86) qui appartient à $W^{1,\infty}(\Omega)$. Par régularité elliptique, elle appartient aussi à $W^{2,q}(\Omega)$ pour tout $1 < q < \infty$. Cette hypothèse peut en fait être démontrée dans de nombreux cas différents de non-linéarité f. Pour fixer les idées, nous décrivons un cas particulier de non-linéarité monotone à croissance polynomiale. On peut faire correspondre au problème (2.86) celui de la minimisation de la fonctionnelle suivante :

$$E(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega\left[|\nabla u|^2 - \chi F(x,u)\right]dx, \tag{2.87}$$

avec $\dfrac{\partial F}{\partial u}(x,u) = f(x,u)$. Soit $p \geq 2$. Afin que l'intégrale dans (2.87) existe, on fait l'hypothèse de croissance sur F suivante :

$$C\,|u|^p - C \leq F(x,u) \leq C\,|u|^p\,, \quad \forall x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \quad \text{et} \quad \forall u \in \mathbb{R}. \tag{2.88}$$

On fait de plus les hypothèses sur f :

$$\begin{array}{rcl} |f(x,u)| & \leq & C\,|u|^{p-1} + C, \quad \forall x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \quad \text{et} \quad \forall u \in \mathbb{R}, \\ \left|\dfrac{\partial f}{\partial u}(x,u)\right| & \leq & C\,|u|^{p-2} + C, \quad \forall x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \quad \text{et} \quad \forall u \in \mathbb{R}. \end{array} \tag{2.89}$$

L'hypothèse supplémentaire :

$$\frac{\partial f}{\partial u}(x,u) \leq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \quad \text{et} \quad \forall u \in \mathbb{R}, \tag{2.90}$$

assure quant à elle l'α-convexité de la fonctionnelle E. On obtient la solution u de (2.86) par minimisation de E dans $H_0^1(\Omega) \cap L^p(\Omega)$. Par régularité elliptique, la solution u de (2.86) appartient aussi à $W^{2,q}(\Omega)$ pour tout $1 < q < \infty$. Remarquons enfin que, comme f est continue, on a automatiquement $x \mapsto f(x,u(x)) \in W^{1,\infty}(\Omega)$, tout comme u.

On considère alors le problème perturbé suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta u^\delta & = & \left(\chi + \chi^\delta\right) f(x,u^\delta) & \text{dans} \quad \Omega \\ u^\delta & = & 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega, \end{array} \right. \tag{2.91}$$

où l'inclusion χ^δ est définie comme précédemment par (2.6). On suppose en outre que la norme dans $L^\infty(\Omega)$ de u^δ est indépendante de δ.

L'expression du gradient topologique de la fonction coût J, toujours définie par (2.3), pour ce nouveau problème est alors donnée par le théorème suivant :

Théorème 4 *La fonction coût J possède un développement asymptotique de la forme :*

$$J(\chi + \chi^\delta) = J(\chi) + \delta^N\,|B|\,f(x_0,u(x_0))p(x_0) + \mathcal{O}\left(\delta^{N+\frac{1}{2}}\right), \tag{2.92}$$

où u est solution du problème initial non perturbé (2.86) et p est solution du problème adjoint suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta p & = & j'(u) + \chi\dfrac{\partial f}{\partial u}(x,u)p & \textit{dans} \quad \Omega \\ p & = & 0 & \textit{sur} \quad \partial\Omega. \end{array} \right. \tag{2.93}$$

En d'autres termes, le gradient topologique pour l'ajout d'un terme source f dépendant de l'état u au point x_0 vaut :

$$g(x_0) = f(x_0,u(x_0))p(x_0). \tag{2.94}$$

Remarque 7 Bien que le terme source f du problème perturbé (2.91) dépende de la solution perturbée u^δ, le gradient topologique g et l'état adjoint p ne dépendent eux que de la solution u du problème de départ.

Pour prouver le théorème 4, on commence comme habituellement par une analyse asymptotique d'un problème proche de la perturbation.

2.2.4.2 Développement asymptotique proche de la perturbation

La différence v^δ entre la solution perturbée u^δ et la solution initiale u est solution du problème suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\Delta v^\delta & = & \chi^\delta f(x,u+v^\delta)+\chi\left(f(x,u+v^\delta)-f(x,u)\right) & \text{dans} \quad \Omega \\ v^\delta & = & 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega. \end{array}\right. \tag{2.95}$$

On montre alors le résultat suivant :

Lemme 4 *Il existe une constante $C>0$, indépendante de δ, telle que, $\forall\delta>0$, la fonction v^δ solution du problème (2.95) vérifie :*

$$\left\|v^\delta\right\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \mathcal{O}\left(\delta^{N+1}\right). \tag{2.96}$$

Afin d'estimer v^δ, on se ramène à un problèmé zoomé sur la perturbation centrée en x_0. Le problème que l'on considère est le même que dans la section 2.2.1, à savoir :

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\Delta w & = & \chi_B f(x_0,u(x_0)) & \text{dans} \quad \mathbb{R}^N \\ \nabla w & \to & 0 & \text{à l'} \quad \infty. \end{array}\right. \tag{2.97}$$

La solution w de ce problème possède encore le comportement à l'infini donné par l'estimation (A.23). La fonction remise à l'échelle $w^\delta(x)=\delta^2 w\left(\frac{x-x_0}{\delta}\right)$ vérifie encore quant à elle :

$$-\Delta w^\delta = \chi^\delta f(x_0,u(x_0)) \quad \text{dans} \quad \Omega, \tag{2.98}$$

avec conditions aux limites non-homogènes petites sur le bord $\partial\Omega$.

En utilisant l'équation (2.98), on peut maintenant écrire que v^δ est également solution du problème suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\Delta v^\delta & = & \chi^\delta\left(f(x,u+v^\delta)-f(x_0,u(x_0))\right) & \\ & + & \chi\left(f(x,u+v^\delta)-f(x,u)\right) & \\ & - & \Delta w^\delta & \text{dans} \quad \Omega \\ v^\delta & = & 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega. \end{array}\right. \tag{2.99}$$

On a alors (en multipliant par v^δ et en intégrant par parties sur Ω) :

$$\begin{array}{rcl} \left\|\nabla v^\delta\right\|^2_{L^2(\Omega)} & = & \displaystyle\int_\Omega \chi^\delta\left(f(x,u+v^\delta)-f(x_0,u(x_0))\right)v^\delta\,dx \\ & + & \displaystyle\int_\Omega \chi\left(f(x,u+v^\delta)-f(x,u)\right)v^\delta\,dx \\ & + & \displaystyle\int_\Omega \nabla w^\delta\cdot\nabla v^\delta\,dx. \end{array} \tag{2.100}$$

Or :

$$f(x,u+v^\delta)=f(x,u)+\frac{\partial f}{\partial u}(x,\tilde{u})v^\delta, \tag{2.101}$$

avec $\tilde{u}\in\left[u(x),u^\delta(x)\right]$ (intervalle non-ordonné). D'où :

$$\begin{array}{rcl} \left\|\nabla v^\delta\right\|^2_{L^2(\Omega)} & = & \displaystyle\int_\Omega \chi^\delta\left(f(x,u)-f(x_0,u(x_0))\right)v^\delta\,dx \\ & + & \displaystyle\int_\Omega \left(\chi+\chi^\delta\right)\frac{\partial f}{\partial u}(x,\tilde{u})v^\delta v^\delta\,dx \\ & + & \displaystyle\int_\Omega \nabla w^\delta\cdot\nabla v^\delta\,dx. \end{array} \tag{2.102}$$

En utilisant l'hypothèse (2.90), on a :

$$\int_\Omega \left(\chi + \chi^\delta\right) \frac{\partial f}{\partial u}(x, \tilde{u}) v^\delta v^\delta \, dx \leq 0, \tag{2.103}$$

ce qui implique :

$$\begin{aligned} \left\|\nabla v^\delta\right\|^2_{L^2(\Omega)} &\leq \int_\Omega \chi^\delta \left(f(x,u) - f(x_0, u(x_0))\right) v^\delta \, dx \\ &+ \int_\Omega \nabla w^\delta \cdot \nabla v^\delta \, dx. \end{aligned} \tag{2.104}$$

En utilisant les inégalités de Poincaré et de Cauchy-Schwarz, il vient :

$$\left\|v^\delta\right\|_{L^2(\Omega)} \leq C \left(\left\|\chi^\delta \left(f(x,u) - f(x_0, u(x_0))\right)\right\|_{L^2(\Omega)} + \left\|\nabla w^\delta\right\|_{L^2(\Omega)} \right). \tag{2.105}$$

Les inégalités (2.25) et (2.27) démontrées dans la section 2.2.1 (avec ici $x \mapsto f(x, u(x)) \in W^{1,\infty}(\Omega)$) permettent de conclure comme précédemment que :

$$\left\|v^\delta\right\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C\delta^{N+1}. \tag{2.106}$$

2.2.4.3 Preuve du théorème 4

Comme dans les précédentes sections, on va établir l'expression du gradient topologique en écrivant, à l'aide du lemme 4, que la fonction coût associée au problème perturbé vaut :

$$J(\chi + \chi^\delta) = J(\chi) + \int_\Omega j'(u) v^\delta \, dx + \mathcal{O}\left(\delta^{N+1}\right). \tag{2.107}$$

La définition du problème adjoint est ici différente. Il fait en effet intervenir la dérivée du terme source puisque celui-ci dépend de l'état. On introduit ainsi l'état adjoint p solution du problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta p - \chi \dfrac{\partial f}{\partial u}(x,u) p &=& j'(u) & \text{dans} \quad \Omega \\ p &=& 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega. \end{array} \right. \tag{2.108}$$

Par hypothèse, le coefficient du terme d'ordre 0 est positif et appartient à $L^\infty(\Omega)$, ce qui assure bien l'existence et l'unicité de la solution p de ce problème adjoint. On a alors, en multipliant le problème adjoint (2.108) par v^δ (qui est nulle sur $\partial\Omega$) et en intégrant par parties sur Ω :

$$\int_\Omega \nabla p \cdot \nabla v^\delta \, dx - \int_\Omega \chi \frac{\partial f}{\partial u}(x,u) p v^\delta \, dx = \int_\Omega j'(u) v^\delta \, dx. \tag{2.109}$$

D'autre part, en multipliant le problème (2.95) par l'adjoint p (lui aussi nul sur $\partial\Omega$) et en intégrant par parties sur Ω, on a :

$$\int_\Omega \nabla v^\delta \cdot \nabla p \, dx = \int_\Omega \chi^\delta f(x, u + v^\delta) p \, dx + \int_\Omega \chi \left(f(x, u + v^\delta) - f(x,u)\right) p \, dx, \tag{2.110}$$

ce qui équivaut à :

$$\begin{aligned} \int_\Omega \nabla v^\delta \cdot \nabla p \, dx - \int_\Omega \chi \frac{\partial f}{\partial u}(x,u) v^\delta p \, dx &= \int_\Omega \chi^\delta f(x,u) p \, dx \\ &+ \int_\Omega \chi^\delta \frac{\partial f}{\partial u}(x, \hat{u}_1) v^\delta p \, dx \\ &+ \frac{1}{2} \int_\Omega \chi \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(x, \hat{u}_2) v^\delta v^\delta p \, dx, \end{aligned} \tag{2.111}$$

où $\hat{u}_1(x), \hat{u}_2(x) \in \left[u(x), u^\delta(x)\right]$. Comme $u, u^\delta \in L^\infty(\Omega)$, on a également $\hat{u}_1, \hat{u}_2 \in L^\infty(\Omega)$, avec une norme indépendante de δ. Le premier terme du second membre de (2.111) sera encore celui donnant l'expression du gradient topologique :

$$\int_\Omega \chi^\delta f(x,u)p\,dx = \delta^N\,|B|\,f(x_0,u(x_0))p(x_0) + \mathcal{O}\left(\delta^{N+1}\right). \tag{2.112}$$

Les deux termes restants sont quant à eux petits. En effet, on a pour l'un :

$$\left|\int_\Omega \chi^\delta \frac{\partial f}{\partial u}(x,\hat{u}_1)v^\delta p\,dx\right| \leq \left\|\chi^\delta\right\|_{L^2(\Omega)} \left\|\frac{\partial f}{\partial u}(x,\hat{u}_1)\right\|_{L^\infty(\Omega)} \left\|v^\delta\right\|_{L^2(\Omega)} \|p\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \mathcal{O}\left(\delta^{N+\frac{1}{2}}\right) \tag{2.113}$$

et pour l'autre :

$$\left|\int_\Omega \chi \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(x,\hat{u}_2)v^\delta v^\delta p\,dx\right| \leq \left\|\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(x,\hat{u}_2)\right\|_{L^\infty(\Omega)} \left\|v^\delta\right\|^2_{L^2(\Omega)} \|p\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \mathcal{O}\left(\delta^{N+1}\right). \tag{2.114}$$

Ces estimations, établies en utilisant l'estimation sur v^δ donnée par le lemme 4 ne sont, bien entendu, pas optimales, mais suffisent à conclure que :

$$J(\chi+\chi^\delta) = J(\chi) + \delta^N\,|B|\,f(x_0,u(x_0))p(x_0) + \mathcal{O}\left(\delta^{N+\frac{1}{2}}\right), \tag{2.115}$$

ce qui termine la preuve du théorème 4.

2.3 Laplacien avec conditions aux limites de Neumann

On va considérer dans cette section le problème modèle du laplacien avec conditions aux limites de Neumann. Dans le cas où le terme source est situé à l'intérieur du domaine, le calcul du gradient topologique est exactement le même que dans le cas Dirichlet. Par contre, le cas d'un terme source proche du bord, c'est-à-dire là où la condition aux limites va intervenir, est d'un plus grand intérêt. C'est le problème que nous allons étudier maintenant.

2.3.1 Résultat principal

Soit Ω un ouvert convexe régulier de $\mathbb{R}^N$, de frontière $\partial\Omega$ et f une fonction donnée dans $W^{1,\infty}(\Omega)$. On cherche u solution du problème suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\Delta u & = & \chi f & \text{dans} \quad \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} & = & 0 & \text{sur} \quad \Gamma_N \\ u & = & 0 & \text{sur} \quad \Gamma_D, \end{array}\right. \tag{2.116}$$

avec $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$, Γ_D et Γ_N disjoints et de mesures non-nulles et $\chi(x)$ la fonction caractéristique du domaine sur lequel est appliqué le terme source $f(x)$. La solution u de (2.116) est à chercher dans l'espace V suivant :

$$V = \left\{v \in H^1(\Omega),\ v = 0 \text{ sur } \Gamma_D\right\}. \tag{2.117}$$

La fonction coût J considérée est, quand à elle, la même que celle définie en (2.3) et munie des hypothèses (2.4).

On définit également $u^\delta \in V$ la solution du problème perturbé suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\Delta u^\delta & = & \left(\chi+\chi^\delta\right) f & \text{dans} \quad \Omega \\ \dfrac{\partial u^\delta}{\partial n} & = & 0 & \text{sur} \quad \Gamma_N \\ u^\delta & = & 0 & \text{sur} \quad \Gamma_D, \end{array}\right. \tag{2.118}$$

avec χ^δ la perturbation du support du terme source définie de la même façon qu'en (2.38) et $x_0 \in \Gamma_N$. On a alors le résultat suivant :

Théorème 5 *La fonction coût J possède un développement asymptotique de la forme :*

$$J(\chi + \chi^\delta) = J(\chi) + \delta^N |B| f(x_0)p(x_0) + \mathcal{O}\left(\delta^{N+1}\right), \tag{2.119}$$

où p est solution du problème adjoint suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\Delta p & = & j'(u) & \textit{dans} \quad \Omega \\ \dfrac{\partial p}{\partial n} & = & 0 & \textit{sur} \quad \Gamma_N \\ p & = & 0 & \textit{sur} \quad \Gamma_D. \end{array}\right. \tag{2.120}$$

En d'autres termes, le gradient topologique pour l'ajout d'un terme source au point x_0 vaut :

$$g(x_0) = f(x_0)p(x_0). \tag{2.121}$$

Remarque 8 Bien que l'on considère un terme source proche du bord du domaine, le reste dans le développement asymptotique de la fonction coût J est en $\mathcal{O}\left(\delta^{N+1}\right)$ et non en $\mathcal{O}\left(\delta^{N+2}\right)$ comme dans le cas des conditions aux limites de Dirichlet de la section 2.2.2. De plus, il est évident que c'est la valeur de l'état adjoint p en x_0 et non sa dérivée normale (qui est nulle sur Γ_N) qui intervient dans l'expression du gradient topologique.

La preuve du théorème 5 se base sur le lemme 5 que nous allons énoncer dans le paragraphe suivant.

2.3.2 Développement asymptotique proche de la perturbation

On définit tout d'abord $v^\delta \in V$ la différence entre u^δ et u, qui est solution du problème suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\Delta v^\delta & = & \chi^\delta f & \text{dans} \quad \Omega \\ \dfrac{\partial v^\delta}{\partial n} & = & 0 & \text{sur} \quad \Gamma_N \\ v^\delta & = & 0 & \text{sur} \quad \Gamma_D. \end{array}\right. \tag{2.122}$$

On a alors le résultat suivant :

Lemme 5 *Il existe une constante $C > 0$, indépendante de δ, telle que, $\forall \delta > 0$, la fonction v^δ, différence entre u^δ et u, vérifie :*

$$\left\|v^\delta\right\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C\delta^{N+1}. \tag{2.123}$$

La preuve de ce résultat se fait de la même manière que pour le lemme 2 de la section 2.2.2. On commence par effectuer une rotation du domaine Ω de telle sorte que la normale entrante dans Ω en x_0 soit le vecteur e_N, puis on effectue le changement de variable $y = \frac{x-x_0}{\delta}$ qui transforme le problème de départ en un problème posé dans $\mathbb{R}^N_+$ à la limite lorsque δ tend vers 0. On définit alors w comme étant solution de :

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\Delta w & = & \chi_B f(x_0) & \text{dans} \quad \mathbb{R}^N_+ \\ \dfrac{\partial w}{\partial y_N} & = & 0 & \text{sur} \quad \partial\mathbb{R}^N_+ \\ \nabla w & \to & 0 & \text{à l'} \quad \infty. \end{array}\right. \tag{2.124}$$

On prolonge maintenant w par parité (et non plus par imparité comme dans le cas d'une condition aux limites de Dirichlet) afin d'éliminer un éventuel saut de dérivée à la traversée de $\partial\mathbb{R}^N_+$ dans le problème posé dans tout $\mathbb{R}^N$. On définit ainsi le prolongement $\tilde{w}$ comme suit :

$$\tilde{w}(y_1,\ldots,y_N) = w(y_1,\ldots,y_N) \quad \text{pour} \quad y_N \geq 0 \tag{2.125}$$

et :

$$\tilde{w}(y_1,\ldots,y_{N-1},y_N) = w(\underbrace{y_1,\ldots,y_{N-1},-y_N}_{\tilde{y}}) \quad \text{pour} \quad y_N < 0. \tag{2.126}$$

La fonction $\tilde{w}$ est alors solution du problème suivant posé dans tout $\mathbb{R}^N$:

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta\tilde{w} & = & F(y) & \text{dans} \quad \mathbb{R}^N \\ \nabla\tilde{w} & \to & 0 & \text{à l'} \quad \infty, \end{array} \right. \tag{2.127}$$

où le second membre F est donné par :

$$F(y) = \left\{ \begin{array}{ll} \chi_B(y)f(x_0) & \text{dans} \quad \mathbb{R}^N_+ \\ \chi_B(\tilde{y})f(x_0) & \text{dans} \quad \mathbb{R}^N_-. \end{array} \right. \tag{2.128}$$

Le problème (2.127) est similaire au problème (2.15) avec un second membre F de moyenne non-nulle. Le comportement à l'infini de $\tilde{w}$ est alors donné par (A.23), tout comme celui de w qui est la restriction à $\mathbb{R}^N_+$ de $\tilde{w}$, à savoir :

$$|\nabla w(y)| \leq \frac{C}{1+|y|^{N-1}} \quad \forall y \in \mathbb{R}^N_+. \tag{2.129}$$

Comme dans les sections précédentes, on définit la fonction w^δ remise à l'échelle de la façon suivante :

$$w^\delta(x) = \delta^2 w\left(\frac{x-x_0}{\delta}\right), \tag{2.130}$$

qui est alors solution du problème :

$$-\Delta w^\delta = \chi^\delta f(x_0) \quad \text{dans} \quad \Omega, \tag{2.131}$$

w^δ vérifiant des conditions aux limites non-homogènes petites sur le bord $\partial\Omega$.

Muni de l'estimation (2.129) sur w, on va pouvoir calculer une estimation de v^δ. En effet, en utilisant (2.131), on peut écrire que v^δ est solution du problèmé suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta v^\delta & = & \chi^\delta\left(f(x)-f(x_0)\right) - \Delta w^\delta & \text{dans} \quad \Omega \\ \dfrac{\partial v^\delta}{\partial n} & = & 0 & \text{sur} \quad \Gamma_N \\ v^\delta & = & 0 & \text{sur} \quad \Gamma_D. \end{array} \right. \tag{2.132}$$

En multipliant l'équation par v^δ puis en intégrant par parties sur Ω, on obtient :

$$\begin{array}{rcl} \left\|\nabla v^\delta\right\|^2_{L^2(\Omega)} & = & \displaystyle\int_\Omega \chi^\delta\left(f(x)-f(x_0)\right)v^\delta\,dx \\ & + & \displaystyle\int_\Omega \nabla w^\delta\cdot\nabla v^\delta\,dx \\ & - & \displaystyle\int_{\Gamma_N} \frac{\partial w^\delta}{\partial n} v^\delta\,dx. \end{array} \tag{2.133}$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz ainsi que la continuité de la trace, il vient :

$$\begin{aligned} \left\|\nabla v^\delta\right\|^2_{L^2(\Omega)} &\leq \left\|\chi^\delta\left(f(x)-f(x_0)\right)\right\|_{L^2(\Omega)}\left\|v^\delta\right\|_{L^2(\Omega)} \\ &+ \left\|\nabla w^\delta\right\|_{L^2(\Omega)}\left\|\nabla v^\delta\right\|_{L^2(\Omega)} \\ &+ C\left\|\frac{\partial w^\delta}{\partial n}\right\|_{L^2(\partial\Omega)}\left\|v^\delta\right\|_{H^1(\Omega)}. \end{aligned} \tag{2.134}$$

En utilisant l'extension de l'inégalité de Poincaré dans V, on obtient :

$$\left\|v^\delta\right\|_{L^2(\Omega)} \leq C\left(\left\|\chi^\delta\left(f(x)-f(x_0)\right)\right\|_{L^2(\Omega)} + \left\|\nabla w^\delta\right\|_{L^2(\Omega)} + \left\|\frac{\partial w^\delta}{\partial n}\right\|_{L^2(\partial\Omega)}\right). \tag{2.135}$$

Les deux premiers termes ont déjà été estimés en (2.25) et (2.27). Le dernier terme est quant à lui petit également. En effet :

$$\nabla w^\delta = \mathcal{O}\left(\delta^N\right) \quad \text{sur} \quad \partial\Omega \tag{2.136}$$

et donc :

$$\left\|\frac{\partial w^\delta}{\partial n}\right\|^2_{L^2(\partial\Omega)} = \int_{\partial\Omega}\left(\frac{\partial w^\delta}{\partial n}\right)^2 ds \leq \mathcal{O}\left(\delta^{2N}\right) \leq \mathcal{O}\left(\delta^{N+2}\right). \tag{2.137}$$

2.3.3 Preuve du théorème 5

La preuve de ce résultat est la même que dans les sections précédentes. On a en effet, en utilisant le résultat du lemme 5 et l'hypothèse (2.4) :

$$J(\chi+\chi^\delta) = J(\chi) + \int_\Omega j'(u)v^\delta\,dx + \mathcal{O}\left(\delta^{N+1}\right). \tag{2.138}$$

L'état adjoint $p \in V$ est défini comme solution du problème suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\Delta p &=& j'(u) & \text{dans} \quad \Omega \\ \dfrac{\partial p}{\partial n} &=& 0 & \text{sur} \quad \Gamma_N \\ p &=& 0 & \text{sur} \quad \Gamma_D. \end{array}\right. \tag{2.139}$$

En multipliant le problème adjoint (2.139) par v^δ et en intégrant par parties sur Ω, on a alors :

$$\int_\Omega \nabla p\cdot\nabla v^\delta\,dx = \int_\Omega j'(u)v^\delta\,dx. \tag{2.140}$$

D'autre part, en multipliant le problème (2.122) par p et en intégrant par parties sur Ω, on obtient :

$$\int_\Omega \nabla v^\delta\cdot\nabla p\,dx = \int_\Omega \chi^\delta fp\,dx = \delta^N\left|B\right| f(x_0)p(x_0) + \mathcal{O}\left(\delta^{N+1}\right). \tag{2.141}$$

En combinant ces deux dernières équations on obtient alors le résultat annoncé par le théorème 5.

2.4 Problème de Stokes

Après avoir étudié en détail le problème du laplacien, nous allons nous intéresser dans la suite de ce chapitre à des problèmes de complexité croissante. On considère tout d'abord le problème de Stokes. C'est l'exemple le plus simple de système d'équations intervenant en

mécanique des fluides. Il modélise les écoulements de fluides incompressibles à faible nombre de Reynolds. Comme ce problème est linéaire et qu'on ne considère que le cas d'un terme source loin du bord du domaine et indépendant de la solution, le principe de calcul du gradient topologique est essentiellement le même que pour le problème du laplacien de la section 2.2.1. On trouvera dans [9] un calcul de gradient topologique (pour une perturbation de domaine) dans le cadre des équations de Stokes et de Navier-Stokes incompressibles.

2.4.1 Résultat principal

Soit Ω un ouvert connexe régulier de $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 2$). Etant donné un vecteur $f \in W^{1,\infty}(\Omega)^N$ et une constante $\nu > 0$, on cherche une vitesse u vectorielle et une pression p_u scalaire telles que :

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\nu\Delta u + \nabla p_u & = & \chi f & \text{dans} \quad \Omega \\ \nabla \cdot u & = & 0 & \text{dans} \quad \Omega \\ u & = & 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega, \end{array} \right. \tag{2.142}$$

avec $\chi(x)$ la fonction caractéristique du domaine sur lequel est appliqué le terme source $f(x)$. Dans ce problème, la pression p_u n'est définie qu'à une constante additive près. On fixe cette constante en cherchant p_u à moyenne nulle, c'est-à-dire dans l'espace suivant :

$$L^2_0(\Omega) = \left\{ p \in L^2(\Omega); \int_\Omega p\, dx = 0 \right\}. \tag{2.143}$$

Classiquement, la vitesse u est à chercher dans $H^1_0(\Omega)^N$. En fait, on a même $u \in W^{2,p}(\Omega)^N$ et $p_u \in W^{1,p}(\Omega)$ $\forall p < \infty$. On définit la fonction coût suivante, qui dépend à la fois de u et de p_u :

$$J(\chi) = \int_\Omega j(u, p_u)\, dx, \tag{2.144}$$

avec $j : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois différentiable satisfaisant aux conditions suivantes :

$$\left| \frac{\partial^2 j}{\partial u^2} \right| \leq C, \quad \left| \frac{\partial^2 j}{\partial p_u^2} \right| \leq C \quad \text{et} \quad \left| \frac{\partial^2 j}{\partial u \partial p_u} \right| \leq C, \quad \forall\, (u, p_u) \in \left(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}\right). \tag{2.145}$$

On définit maintenant le problème perturbé suivant, résultant d'une perturbation infinitésimale χ^δ sur la fonction caractéristique χ du terme source f :

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\nu\Delta u^\delta + \nabla p_{u^\delta} & = & \left(\chi + \chi^\delta\right) f & \text{dans} \quad \Omega \\ \nabla \cdot u^\delta & = & 0 & \text{dans} \quad \Omega \\ u^\delta & = & 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega. \end{array} \right. \tag{2.146}$$

L'inclusion χ^δ est comme précédemment une remise à l'échelle d'une inclusion élémentaire B, comme définie en (2.6).

On montre alors le résultat suivant :

Théorème 6 *Pour le problème de Stokes, la fonction coût J possède le développement asymptotique suivant :*

$$J(\chi + \chi^\delta) = J(\chi) + \delta^N\, |B|\, f(x_0) \cdot \mathcal{U}(x_0) + \mathcal{O}\left(\delta^{N+1}\right), \tag{2.147}$$

où le couple $(\mathcal{U}, \mathcal{P}_\mathcal{U})$ est solution du problème adjoint suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\nu\Delta\mathcal{U} + \nabla\mathcal{P}_\mathcal{U} & = & \dfrac{\partial j}{\partial u}(u, p_u) & \textit{dans} \quad \Omega \\ \nabla \cdot \mathcal{U} & = & -\dfrac{\partial j}{\partial p}(u, p_u) + \dfrac{1}{|\Omega|}\displaystyle\int_\Omega \dfrac{\partial j}{\partial p}(u, p_u)\, dx & \textit{dans} \quad \Omega \\ \mathcal{U} & = & 0 & \textit{sur} \quad \partial\Omega. \end{array} \right. \tag{2.148}$$

On retrouve donc l'expression du gradient topologique suivante :

$$g(x_0) = f(x_0) \cdot \mathcal{U}(x_0). \tag{2.149}$$

La preuve de ce résultat suit le même schéma que pour le problème du laplacien que nous avions considéré jusqu'à maintenant.

2.4.2 Développement asymptotique proche de la perturbation

On définit le couple $\left(v^\delta, p_{v^\delta}\right)$ comme étant la différence entre la solution perturbée $\left(u^\delta, p_{u^\delta}\right)$ et la solution initiale (u, p_u) et qui est solution du problème suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\nu\Delta v^\delta + \nabla p_{v^\delta} & = & \chi^\delta f & \text{dans} \quad \Omega \\ \nabla \cdot v^\delta & = & 0 & \text{dans} \quad \Omega \\ v^\delta & = & 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega. \end{array}\right. \tag{2.150}$$

Afin de prouver le théorème 6, nous allons avoir besoin d'une estimation du couple $\left(v^\delta, p_{v^\delta}\right)$. Cette estimation est donnée par le résultat suivant :

Lemme 6 *Il existe une constante $C > 0$, indépendante de δ, telle que, $\forall \delta > 0$, la solution du problème (2.150) vérifie :*

$$\left\|v^\delta\right\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \mathcal{O}\left(\delta^{N+1}\right) \quad \textit{et} \quad \|p_{v^\delta}\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \mathcal{O}\left(\delta^{N+1}\right). \tag{2.151}$$

Afin de prouver ce lemme, on introduit le changement de variable $y = \frac{x-x_0}{\delta}$ qui transforme le problème initial posé dans Ω en un problème posé dans $\mathbb{R}^N$. Soit donc (w, p_w) la solution du problème canonique suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\nu\Delta w + \nabla p_w & = & \chi_B f(x_0) & \text{dans} \quad \mathbb{R}^N \\ \nabla \cdot w & = & 0 & \text{dans} \quad \mathbb{R}^N \\ \nabla w & \to & 0 & \text{à l'} \quad \infty \\ p_w & \to & 0 & \text{à l'} \quad \infty. \end{array}\right. \tag{2.152}$$

Comme le second membre du système (2.152) est à support compact dans $\mathbb{R}^N$ et de moyenne non-nulle, le comportement à l'infini du couple (w, p_w) est le même que celui de la solution fondamentale du problème de Stokes donnée dans l'annexe A.2, à savoir :

$$w(y) \sim \left\{\begin{array}{lll} \dfrac{1}{|y|^{N-2}} & \text{si} & N \geq 3 \\ \log|y| & \text{si} & N = 2, \end{array}\right. \tag{2.153}$$

$$\nabla w(y) \sim \frac{1}{|y|^{N-1}} \tag{2.154}$$

et

$$p_w(y) \sim \frac{1}{|y|^{N-1}}. \tag{2.155}$$

On se replace maintenant dans le domaine Ω de départ en définissant les fonctions remises à l'échelle suivantes :

$$w^\delta(x) = \delta^2 w\left(\frac{x - x_0}{\delta}\right) \tag{2.156}$$

et

$$p_{w^\delta}(x) = \delta p_w\left(\frac{x-x_0}{\delta}\right). \tag{2.157}$$

Le couple $\left(w^\delta, p_{w^\delta}\right)$ est alors solution du système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\nu\Delta w^\delta + \nabla p_{w^\delta} & = & \chi^\delta f(x_0) & \text{dans} \quad \Omega \\ \nabla\cdot w^\delta & = & 0 & \text{dans} \quad \Omega, \end{array}\right. \tag{2.158}$$

avec des conditions aux limites non-homogènes petites sur $\partial\Omega$.

On utilise alors ce système (2.158) dont $\left(w^\delta, p_{w^\delta}\right)$ est solution pour écrire que le couple $\left(v^\delta, p_{v^\delta}\right)$ est également solution du problème suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\nu\Delta v^\delta + \nabla p_{v^\delta} & = & \chi^\delta\left(f(x)-f(x_0)\right) - \nu\Delta w^\delta + \nabla p_{w^\delta} & \text{dans} \quad \Omega \\ \nabla\cdot v^\delta & = & 0 & \text{dans} \quad \Omega \\ v^\delta & = & 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega. \end{array}\right. \tag{2.159}$$

En multipliant la première équation de ce système par v^δ et en intégrant sur Ω, on obtient :

$$\begin{array}{rcl} -\displaystyle\int_\Omega \nu\Delta v^\delta\cdot v^\delta\,dx + \int_\Omega \nabla p_{v^\delta}\cdot v^\delta\,dx & = & \displaystyle\int_\Omega \chi^\delta\left(f(x)-f(x_0)\right)\cdot v^\delta\,dx \\ & - & \displaystyle\int_\Omega \nu\Delta w^\delta\cdot v^\delta\,dx + \int_\Omega \nabla p_{w^\delta}\cdot v^\delta\,dx. \end{array} \tag{2.160}$$

Après intégration par parties et comme $\nabla\cdot v^\delta = 0$ dans Ω, il vient :

$$\int_\Omega \nu\nabla v^\delta : \nabla v^\delta\,dx = \int_\Omega \chi^\delta\left(f(x)-f(x_0)\right)\cdot v^\delta\,dx + \int_\Omega \nu\nabla w^\delta : \nabla v^\delta\,dx. \tag{2.161}$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient :

$$\begin{array}{rcl} \nu\left\|\nabla v^\delta\right\|^2_{L^2(\Omega)} & \leq & \left\|\chi^\delta\left(f(x)-f(x_0)\right)\right\|_{L^2(\Omega)}\left\|v^\delta\right\|_{L^2(\Omega)} \\ & + & \nu\left\|\nabla w^\delta\right\|_{L^2(\Omega)}\left\|\nabla v^\delta\right\|_{L^2(\Omega)}. \end{array} \tag{2.162}$$

On est donc arrivé au même type d'inégalité que celle obtenue en (2.21) dans le cas du laplacien et qui implique de la même manière :

$$\left\|v^\delta\right\|_{L^2(\Omega)} \leq C\left(\left\|\chi^\delta\left(f(x)-f(x_0)\right)\right\|_{L^2(\Omega)} + \left\|\nabla w^\delta\right\|_{L^2(\Omega)}\right), \tag{2.163}$$

où la viscosité ν a été intégrée dans la constante C. Or, comme précédemment, on a :

$$\left\|\chi^\delta\left(f(x)-f(x_0)\right)\right\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \mathcal{O}\left(\delta^{N+2}\right) \tag{2.164}$$

et en utilisant le comportement de w donné en (2.154), on montre facilement que :

$$\left\|\nabla w^\delta\right\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C\delta^{N+1}, \tag{2.165}$$

ce qui permet finalement de conclure :

$$\left\|v^\delta\right\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C\delta^{N+1}. \tag{2.166}$$

Pour estimer la pression p_{v^δ}, on repart de la formulation variationnelle suivante : $\forall \varphi \in H_0^1(\Omega)$,

$$\begin{aligned} \int_\Omega \nu \nabla v^\delta : \nabla \varphi \, dx - \int_\Omega p_{v^\delta} \nabla \cdot \varphi \, dx &= \int_\Omega \chi^\delta \left(f(x) - f(x_0) \right) \cdot \varphi \, dx \\ &+ \int_\Omega \nu \nabla w^\delta : \nabla \varphi \, dx + \int_\Omega p_{w^\delta} \nabla \cdot \varphi \, dx. \end{aligned} \tag{2.167}$$

Posons maintenant $V = \left\{ v \in H_0^1(\Omega)^N ; \nabla \cdot v = 0 \text{ dans } \Omega \right\}$. On a alors $v^\delta \in V$. On note $V^\perp$ l'orthogonal de V dans $H_0^1(\Omega)^N$. On sait alors que l'opérateur divergence est un isomorphisme de $V^\perp$ dans $L_0^2(\Omega)$, [36]. On peut donc choisir $\varphi \in V^\perp$ tel que $\nabla \cdot \varphi = p_{v^\delta}$ avec de plus $\|\nabla \varphi\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|p_{v^\delta}\|_{L^2(\Omega)}$. Pour un tel choix de la fonction test φ, on a alors :

$$\begin{aligned} \|p_{v^\delta}\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq \left\| \chi^\delta \left(f(x) - f(x_0) \right) \right\|_{L^2(\Omega)} \|\varphi\|_{L^2(\Omega)} \\ &+ C\nu \left\| \nabla w^\delta \right\|_{L^2(\Omega)} \|p_{v^\delta}\|_{L^2(\Omega)} + \|p_{w^\delta}\|_{L^2(\Omega)} \|p_{v^\delta}\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned} \tag{2.168}$$

En utilisant l'inégalité de Poincaré il vient :

$$\|p_{v^\delta}\|_{L^2(\Omega)} \leq C \left\| \chi^\delta \left(f(x) - f(x_0) \right) \right\|_{L^2(\Omega)} + C\nu \left\| \nabla w^\delta \right\|_{L^2(\Omega)} + \|p_{w^\delta}\|_{L^2(\Omega)}. \tag{2.169}$$

On a déjà estimé les termes $\left\| \chi^\delta \left(f(x) - f(x_0) \right) \right\|_{L^2(\Omega)}$ et $\left\| \nabla w^\delta \right\|_{L^2(\Omega)}$ précédemment. Reste à faire de même pour p_{w^δ} :

$$\begin{aligned} \|p_{w^\delta}\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \int_\Omega |p_{w^\delta}(x)|^2 \, dx \\ &= \delta^{N+2} \int_{\Omega/\delta} |p_w(y)|^2 \, dy \\ &\leq C\delta^{N+2} \int_{\Omega/\delta} \frac{1}{1 + |y|^{2N-2}} \, dy \\ &\leq C\delta^{N+2} \int_1^{1/\delta} \frac{1}{r^{N-1}} \, dr \\ &\leq C\delta^{N+2} \begin{cases} 1 & \text{si} \quad N \geq 3 \\ \log \delta & \text{si} \quad N = 2 \end{cases} \\ &\leq C\delta^{N+1}. \end{aligned} \tag{2.170}$$

Ceci permet de conclure l'estimation sur p_{v^δ} suivante :

$$\|p_{v^\delta}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \mathcal{O}\left(\delta^{N+1} \right) \tag{2.171}$$

et termine la preuve du lemme 6.

2.4.3 Preuve du théorème 6

Afin de déterminer l'expression du gradient topologique, on écrit que la fonction coût associée au problème perturbé vaut (à cause de (2.145)) :

$$\begin{aligned} J(\chi + \chi^\delta) &= J(\chi) \\ &+ \int_\Omega \frac{\partial j}{\partial u}(u, p_u) \cdot v^\delta \, dx + \int_\Omega \frac{\partial j}{\partial p}(u, p_u) p_{v^\delta} \, dx \\ &+ \mathcal{O}\left(\left\| v^\delta \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|p_{v^\delta}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\| v^\delta \right\|_{L^2(\Omega)} \|p_{v^\delta}\|_{L^2(\Omega)} \right). \end{aligned} \tag{2.172}$$

On introduit l'état adjoint $(\mathcal{U}, \mathcal{P}_{\mathcal{U}})$ solution de :

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\nu\Delta\mathcal{U} + \nabla\mathcal{P}_{\mathcal{U}} & = & \dfrac{\partial j}{\partial u}(u, p_u) & \text{dans} \quad \Omega \\ \nabla\cdot\mathcal{U} & = & -\dfrac{\partial j}{\partial p}(u, p_u) + \dfrac{1}{|\Omega|}\displaystyle\int_\Omega \dfrac{\partial j}{\partial p}(u, p_u)\,dx & \text{dans} \quad \Omega \\ \mathcal{U} & = & 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega. \end{array}\right. \tag{2.173}$$

Nous avons choisi le second membre de l'équation sur la divergence de $\mathcal{U}$ afin d'être compatible avec la condition de Dirichlet imposée sur $\partial\Omega$. En effet, $\mathcal{U} = 0$ sur $\partial\Omega$ implique $\displaystyle\int_\Omega \nabla\cdot\mathcal{U}\,dx = 0$. En multipliant la première équation par v^δ et en intégrant par parties sur Ω on obtient :

$$\int_\Omega \nu\nabla\mathcal{U} : \nabla v^\delta\,dx = \int_\Omega \frac{\partial j}{\partial u}(u, p_u)\cdot v^\delta\,dx \tag{2.174}$$

car $\nabla\cdot v^\delta = 0$. En multipliant la deuxième équation par p_{v^δ} et en intégrant par parties sur Ω on obtient :

$$\int_\Omega \mathcal{U}\cdot\nabla p_{v^\delta}\,dx = \int_\Omega \frac{\partial j}{\partial p}(u, p_u)p_{v^\delta}\,dx \tag{2.175}$$

car $p_{v^\delta} \in L^2_0(\Omega)$. D'autre part, en multipliant la première équation de (2.150) par $\mathcal{U}$ et en intégrant par parties sur Ω on a :

$$\int_\Omega \nu\nabla v^\delta : \nabla\mathcal{U}\,dx + \int_\Omega \nabla p_{v^\delta}\cdot\mathcal{U}\,dx = \int_\Omega \chi^\delta f\cdot\mathcal{U}\,dx. \tag{2.176}$$

Comme dans le cas du laplacien, l'adjoint $\mathcal{U}$ possède (au moins) la même régularité que u. On a donc en particulier $\mathcal{U} \in W^{1,\infty}(\Omega)^N$, ce qui permet d'écrire :

$$\int_\Omega \chi^\delta f\cdot\mathcal{U}\,dx = \delta^N\,|B|\,f(x_0)\cdot\mathcal{U}(x_0) + \mathcal{O}\left(\delta^{N+1}\right). \tag{2.177}$$

En combinant les quatre dernières expressions, on a donc montré que :

$$\int_\Omega \frac{\partial j}{\partial u}(u, p_u)\cdot v^\delta\,dx + \int_\Omega \frac{\partial j}{\partial p}(u, p_u)p_{v^\delta}\,dx = \delta^N\,|B|\,f(x_0)\cdot\mathcal{U}(x_0) + \mathcal{O}\left(\delta^{N+1}\right). \tag{2.178}$$

En utilisant les estimations précédemment établies sur v^δ et p_{v^δ} dans le lemme 6, on peut donc conclure, en reprennant l'expression (2.172) :

$$J(\chi + \chi^\delta) = J(\chi) + \delta^N\,|B|\,f(x_0)\cdot\mathcal{U}(x_0) + \mathcal{O}\left(\delta^{N+1}\right) \tag{2.179}$$

et terminer ainsi la preuve du théorème 6.

2.5 Problème de Navier-Stokes incompressible

On aborde maintenant l'étude du problème de Navier-Stokes incompressible. La seule différence avec le problème de Stokes traité dans la section précédente se situe au niveau du terme non-linéaire supplémentaire dans l'équation sur la vitesse. Néanmoins, comme nous allons le voir par la suite, c'est le problème linéarisé (*i.e.* le problème de Stokes) qui est considéré lors de l'analyse asymptotique proche de la perturbation. Le calcul du gradient topologique pour ce problème est donc essentiellement le même que celui que nous avons mené dans les sections précédentes.

2.5.1 Résultat principal

On se place à partir de maintenant en dimension d'espace $N = 2$ ou 3. On considère les équations de Navier-Stokes incompressibles :

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\nu\Delta u + (u\cdot\nabla)u + \nabla p_u & = & \chi f & \text{dans} \quad \Omega \\ \nabla\cdot u & = & 0 & \text{dans} \quad \Omega \\ u & = & 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega. \end{array}\right. \tag{2.180}$$

On souhaite se placer dans un cadre où il y a unicité de la solution de ce problème. En effet, lorsque nous allons ajouter une perturbation au problème de départ, nous souhaitons rester dans le même ensemble de solutions et ne pas passer d'une branche de solutions à une autre. Dans ce but, on fait l'hypothèse supplémentaire que le terme source χf est suffisamment petit, soit plus précisément que :

$$\|\chi f\|_{H^{-1}(\Omega)} < \frac{\nu^2}{k}, \tag{2.181}$$

où la constante k, qui dépend du domaine Ω, est définie par :

$$k = \left\{\begin{array}{ll} \dfrac{1}{2}\,|\Omega|^{1/2} & \text{si} \quad N = 2 \\ \dfrac{2\sqrt{2}}{3}\,|\Omega|^{1/6} & \text{si} \quad N = 3. \end{array}\right. \tag{2.182}$$

Dans [34], vol. 2, il est démontré que cette condition est une condition suffisante à l'unicité de la solution au problème (2.180). On se place de plus dans un cadre de régularité des solutions de ce problème en supposant $u \in W^{2,p}(\Omega)^N$ et $p_u \in W^{1,p}(\Omega)$ $\forall p < \infty$. On considère encore la fonction coût suivante, qui est la même que pour le problème de Stokes :

$$J(\chi) = \int_\Omega j(u, p_u)\,dx, \tag{2.183}$$

munie des mêmes hypothèses (2.145) que précédemment.

On définit le problème perturbé suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\nu\Delta u^\delta + (u^\delta\cdot\nabla)u^\delta + \nabla p_{u^\delta} & = & \left(\chi + \chi^\delta\right) f & \text{dans} \quad \Omega \\ \nabla\cdot u^\delta & = & 0 & \text{dans} \quad \Omega \\ u^\delta & = & 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega, \end{array}\right. \tag{2.184}$$

où la perturbation χ^δ est encore définie par (2.6). On suppose que l'hypothèse (2.181) est vérifiée pour toutes les fonctions caractéristiques $\chi + \chi^\delta$ de manière à avoir l'unicité de la solution au problème perturbé (2.184).

On montre alors le résultat suivant :

Théorème 7 *Dans le cas des équations de Navier-Stokes incompressibles, la fonction coût J possède, encore une fois, le développement asymptotique suivant :*

$$J(\chi + \chi^\delta) = J(\chi) + \delta^N\,|B|\,f(x_0)\cdot\mathcal{U}(x_0) + \mathcal{O}\left(\delta^{N+1}\right), \tag{2.185}$$

où le couple $(\mathcal{U}, \mathcal{P}_\mathcal{U})$ est cette fois solution du problème adjoint suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\nu\Delta\mathcal{U} - \left(\nabla\mathcal{U} + (\nabla\mathcal{U})^T\right)u + \nabla\mathcal{P}_\mathcal{U} & = & \dfrac{\partial j}{\partial u}(u, p_u) & \textit{dans} \quad \Omega \\ \nabla\cdot\mathcal{U} & = & -\dfrac{\partial j}{\partial p}(u, p_u) & \\ & + & \dfrac{1}{|\Omega|}\displaystyle\int_\Omega \dfrac{\partial j}{\partial p}(u, p_u)\,dx & \textit{dans} \quad \Omega \\ \mathcal{U} & = & 0 & \textit{sur} \quad \partial\Omega. \end{array}\right. \tag{2.186}$$

On retrouve donc l'expression du gradient topologique suivante :

$$g(x_0) = f(x_0) \cdot \mathcal{U}(x_0). \tag{2.187}$$

2.5.2 Développement asymptotique proche de la perturbation

Le couple $\left(v^\delta, p_{v^\delta}\right)$, différence entre la solution perturbée $\left(u^\delta, p_{u^\delta}\right)$ et solution initiale (u, p_u) est solution du problème suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\nu\Delta v^\delta + (v^\delta \cdot \nabla)u + (u \cdot \nabla)v^\delta + (v^\delta \cdot \nabla)v^\delta + \nabla p_{v^\delta} & = & \chi^\delta f & \text{dans} \quad \Omega \\ \nabla \cdot v^\delta & = & 0 & \text{dans} \quad \Omega \\ v^\delta & = & 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega. \end{array}\right. \tag{2.188}$$

L'estimation du couple $\left(v^\delta, p_{v^\delta}\right)$ est alors la même que pour le problème de Stokes :

Lemme 7 *Il existe une constante $C > 0$, indépendante de δ, telle que, $\forall \delta > 0$, la solution du problème (2.188) vérifie :*

$$\left\|v^\delta\right\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \mathcal{O}\left(\delta^{N+1}\right) \quad \textit{et} \quad \|p_{v^\delta}\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \mathcal{O}\left(\delta^{N+1}\right). \tag{2.189}$$

Nous allons prouver ce résultat en étudiant le comportement asymptotique d'un problème proche de la perturbation. A cette échelle, les termes non-linéaires deviennent négligeables et c'est en fait le linéarisé des équations de Navier-Stokes, c'est-à-dire le problème de Stokes que l'on considère. On définit donc les mêmes w^δ et p_{w^δ} à partir de la solution (w, p_w) du problème (2.152) de la section précédente, pour lesquels on a déjà démontré les estimations suivantes :

$$\left\|\nabla w^\delta\right\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \mathcal{O}\left(\delta^{N+1}\right) \quad \text{et} \quad \|p_{w^\delta}\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \mathcal{O}\left(\delta^{N+1}\right). \tag{2.190}$$

On utilise maintenant le problème (2.158) dont $\left(w^\delta, p_{w^\delta}\right)$ est solution, pour écrire que le couple $\left(v^\delta, p_{v^\delta}\right)$ est également solution du problème suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\nu\Delta v^\delta & + & (v^\delta \cdot \nabla)u + (u \cdot \nabla)v^\delta + (v^\delta \cdot \nabla)v^\delta + \nabla p_{v^\delta} & \\ & = & \chi^\delta\left(f(x) - f(x_0)\right) - \nu\Delta w^\delta + \nabla p_{w^\delta} & \text{dans} \quad \Omega \\ \nabla \cdot v^\delta & = & 0 & \text{dans} \quad \Omega \\ v^\delta & = & 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega. \end{array}\right. \tag{2.191}$$

Afin d'établir les estimations sur v^δ et p_{v^δ} (et de justifier le fait que c'est bien un problème de Stokes que doit vérifier le couple (w^δ, p_{w^δ})), nous allons maintenant utiliser les deux résultats suivants, tirés de [34], vol. 2 :

Lemme 8 *Soit $N = 2$ ou 3. Pour tout $(u, v, w) \in H^1_0(\Omega)^N \times H^1(\Omega)^N \times H^1_0(\Omega)^N$ tel que $\nabla \cdot v = 0$,*

$$\int_\Omega [(v \cdot \nabla)u] \cdot u \, dx = 0 \tag{2.192}$$

et

$$\int_\Omega [(v \cdot \nabla)u] \cdot w \, dx = -\int_\Omega [(v \cdot \nabla)w] \cdot u \, dx. \tag{2.193}$$

Lemme 9 *Soit $N = 2$ ou 3. Pour tout $(u, v, w) \in H_0^1(\Omega)^N \times H^1(\Omega)^N \times H_0^1(\Omega)^N$,*

$$\left| \int_\Omega [(u \cdot \nabla)v] \cdot w \, dx \right| \leq k \left\| \nabla u \right\|_{L^2(\Omega)} \left\| \nabla v \right\|_{L^2(\Omega)} \left\| \nabla w \right\|_{L^2(\Omega)}, \tag{2.194}$$

où la constante k est la même que celle définie en (2.182).

On multiplie maintenant la première équation de (2.191) par v^δ puis on intègre par parties sur Ω pour obtenir :

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_\Omega \nu \nabla v^\delta : \nabla v^\delta \, dx & + & \displaystyle\int_\Omega \left[\left(v^\delta \cdot \nabla \right) u \right] \cdot v^\delta \, dx \quad + \\ \displaystyle\int_\Omega \left[(u \cdot \nabla) \, v^\delta \right] \cdot v^\delta \, dx & + & \displaystyle\int_\Omega \left[\left(v^\delta \cdot \nabla \right) v^\delta \right] \cdot v^\delta \, dx \quad - \\ \displaystyle\int_\Omega p_{v^\delta} \nabla \cdot v^\delta dx & = & \displaystyle\int_\Omega \chi^\delta \left(f(x) - f(x_0) \right) \cdot v^\delta \, dx \quad + \\ \displaystyle\int_\Omega \nu \nabla w^\delta : \nabla v^\delta \, dx & - & \displaystyle\int_\Omega p_{w^\delta} \nabla \cdot v^\delta dx. \end{array} \tag{2.195}$$

Le 3e et le 4e terme sont nuls en utilisant la première partie du lemme 8 tandis que le 5e et le 8e terme sont nuls en utilisant le fait que $\nabla \cdot v^\delta = 0$. On obtient donc simplement :

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_\Omega \nu \nabla v^\delta : \nabla v^\delta \, dx + \int_\Omega \left[\left(v^\delta \cdot \nabla \right) u \right] \cdot v^\delta \, dx & = & \displaystyle\int_\Omega \chi^\delta \left(f(x) - f(x_0) \right) \cdot v^\delta \, dx \\ & + & \displaystyle\int_\Omega \nu \nabla w^\delta : \nabla v^\delta \, dx. \end{array} \tag{2.196}$$

En utilisant cette fois la deuxième partie du lemme 8, ceci devient :

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_\Omega \nu \nabla v^\delta : \nabla v^\delta \, dx & = & \displaystyle\int_\Omega \chi^\delta \left(f(x) - f(x_0) \right) \cdot v^\delta \, dx + \int_\Omega \nu \nabla w^\delta : \nabla v^\delta \, dx \\ & + & \displaystyle\int_\Omega \left[\left(v^\delta \cdot \nabla \right) v^\delta \right] \cdot u \, dx. \end{array} \tag{2.197}$$

En utilisant maintenant le lemme 9 et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient :

$$\begin{array}{rcl} \nu \left\| \nabla v^\delta \right\|_{L^2(\Omega)}^2 & \leq & \left\| \chi^\delta \left(f(x) - f(x_0) \right) \right\|_{L^2(\Omega)} \left\| v^\delta \right\|_{L^2(\Omega)} \\ & + & \nu \left\| \nabla w^\delta \right\|_{L^2(\Omega)} \left\| \nabla v^\delta \right\|_{L^2(\Omega)} \\ & + & k \left\| \nabla v^\delta \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \left\| \nabla u \right\|_{L^2(\Omega)}. \end{array} \tag{2.198}$$

Enfin, on utilise l'inégalité de Poincaré pour arriver à :

$$\begin{array}{rcl} \left(\nu - k \left\| \nabla u \right\|_{L^2(\Omega)} \right) \left\| \nabla v^\delta \right\|_{L^2(\Omega)} & \leq & C \left\| \chi^\delta \left(f(x) - f(x_0) \right) \right\|_{L^2(\Omega)} \\ & + & \nu \left\| \nabla w^\delta \right\|_{L^2(\Omega)}. \end{array} \tag{2.199}$$

Or, en utilisant l'hypothèse (2.181), on a l'estimation suivante de u :

$$\nu \left\| \nabla u \right\|_{L^2(\Omega)} \leq \left\| \chi f \right\|_{H^{-1}(\Omega)} < \frac{\nu^2}{k} \tag{2.200}$$

et donc :

$$C := \left(\nu - k \left\| \nabla u \right\|_{L^2(\Omega)} \right) > 0. \tag{2.201}$$

On utilise une nouvelle fois l'inégalité de Poincaré pour finalement obtenir :

$$\left\| v^\delta \right\|_{L^2(\Omega)} \leq C \left(\left\| \chi^\delta \left(f(x) - f(x_0) \right) \right\|_{L^2(\Omega)} + \left\| \nabla w^\delta \right\|_{L^2(\Omega)} \right). \tag{2.202}$$

En utilisant l'estimation habituelle sur $\chi^\delta\left(f(x)-f(x_0)\right)$ et celle établie dans le cas du problème de Stokes pour ∇w^δ, on peut encore conclure que :

$$\left\|v^\delta\right\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C\delta^{N+1}. \tag{2.203}$$

Remarquons que, d'après (2.199), la même estimation est vérifée par ∇v^δ, ce qui est utile pour établir l'estimation sur p_{v^δ}. En effet, en utilisant les mêmes arguments que pour le problème de Stokes et en utilisant encore le lemme 9 pour estimer les termes non-linéaires supplémentaires, on établit facilement l'estimation suivante sur la pression p_{v^δ} :

$$\begin{aligned} \|p_{v^\delta}\|_{L^2(\Omega)} &\leq C\Big(\left\|\nabla v^\delta\right\|_{L^2(\Omega)} + \left\|\nabla v^\delta\right\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &+ \left\|\chi^\delta\left(f(x)-f(x_0)\right)\right\|_{L^2(\Omega)} + \|p_{w^\delta}\|_{L^2(\Omega)}\Big), \end{aligned} \tag{2.204}$$

et donc, d'après les résultats précédents, on peut conclure :

$$\|p_{v^\delta}\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C\delta^{N+1}. \tag{2.205}$$

2.5.3 Preuve du théorème 7

La fonction coût associée au problème perturbé vaut, comme pour le problème de Stokes :

$$\begin{aligned} J(\chi+\chi^\delta) &= J(\chi) \\ &+ \int_\Omega \frac{\partial j}{\partial u}(u,p_u)v^\delta\,dx + \int_\Omega \frac{\partial j}{\partial p}(u,p_u)p_{v^\delta}\,dx \\ &+ \mathcal{O}\left(\left\|v^\delta\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \|p_{v^\delta}\|^2_{L^2(\Omega)} + \left\|v^\delta\right\|_{L^2(\Omega)}\|p_{v^\delta}\|_{L^2(\Omega)}\right). \end{aligned} \tag{2.206}$$

On introduit l'état adjoint $(\mathcal{U},\mathcal{P}_\mathcal{U})$ solution du problème linéaire suivant :

$$\left\{\begin{aligned} -\nu\Delta\mathcal{U} - \left(\nabla\mathcal{U} + (\nabla\mathcal{U})^T\right)u + \nabla\mathcal{P}_\mathcal{U} &= \frac{\partial j}{\partial u}(u,p_u) && \text{dans} \quad \Omega \\ \nabla\cdot\mathcal{U} &= -\frac{\partial j}{\partial p}(u,p_u) \\ &+ \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \frac{\partial j}{\partial p}(u,p_u)\,dx && \text{dans} \quad \Omega \\ \mathcal{U} &= 0 && \text{sur} \quad \partial\Omega. \end{aligned}\right. \tag{2.207}$$

On a alors, en multipliant la première équation par v^δ et en intégrant par parties sur Ω :

$$\begin{aligned} \int_\Omega \nu\nabla\mathcal{U} : \nabla v^\delta\,dx &- \int_\Omega \left[(\nabla\mathcal{U})\,u\right]\cdot v^\delta\,dx - \int_\Omega \left[(\nabla\mathcal{U})^T u\right]\cdot v^\delta\,dx \\ &= \int_\Omega \frac{\partial j}{\partial u}(u,p_u)\cdot v^\delta\,dx \end{aligned} \tag{2.208}$$

car $\nabla\cdot v^\delta = 0$ dans Ω. Or :

$$\left[(\nabla\mathcal{U})\,u\right]\cdot v^\delta = \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=1}^N \frac{\partial\mathcal{U}_i}{\partial x_j}u_j\right) v_i^\delta = \left[(u\cdot\nabla)\mathcal{U}\right]\cdot v^\delta \tag{2.209}$$

et :

$$\left[(\nabla\mathcal{U})^T u\right]\cdot v^\delta = \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=1}^N \frac{\partial\mathcal{U}_j}{\partial x_i}u_j\right) v_i^\delta = \left[(v^\delta\cdot\nabla)\mathcal{U}\right]\cdot u, \tag{2.210}$$

donc l'expression (2.208) devient :

$$\begin{aligned}\int_\Omega \nu\nabla\mathcal{U} : \nabla v^\delta\, dx &- \int_\Omega [(u\cdot\nabla)\mathcal{U}]\cdot v^\delta, dx - \int_\Omega \left[(v^\delta\cdot\nabla)\mathcal{U}\right]\cdot u\, dx \\ &= \int_\Omega \frac{\partial j}{\partial u}(u,p_u)\cdot v^\delta\, dx.\end{aligned} \tag{2.211}$$

En multipliant maintenant la seconde équation du problème adjoint (2.207) par p_{v^δ} et en intégrant par parties sur Ω on obtient :

$$\int_\Omega \mathcal{U}\cdot\nabla p_{v^\delta}\, dx = \int_\Omega \frac{\partial j}{\partial p}(u,p_u)p_{v^\delta}\, dx \tag{2.212}$$

car $p_{v^\delta}\in L^2_0(\Omega)$.

D'autre part, en multipliant la première équation de (2.188) par $\mathcal{U}$ et après intégration par parties sur Ω, on a :

$$\begin{aligned}\int_\Omega \nu\nabla v^\delta : \nabla\mathcal{U}\, dx &+ \int_\Omega \left[\left(v^\delta\cdot\nabla\right)u\right]\cdot\mathcal{U}\, dx + \int_\Omega \left[(u\cdot\nabla)\, v^\delta\right]\cdot\mathcal{U}\, dx \\ &+ \int_\Omega \left[\left(v^\delta\cdot\nabla\right)v^\delta\right]\cdot\mathcal{U}\, dx + \int_\Omega \nabla p_{v^\delta}\cdot\mathcal{U}\, dx \\ &= \int_\Omega \chi^\delta f\cdot\mathcal{U}\, dx.\end{aligned} \tag{2.213}$$

Ceci équivaut, en utilisant le lemme 8, à :

$$\begin{aligned}\int_\Omega \nu\nabla v^\delta : \nabla\mathcal{U}\, dx &- \int_\Omega \left[\left(v^\delta\cdot\nabla\right)\mathcal{U}\right]\cdot u\, dx - \int_\Omega [(u\cdot\nabla)\,\mathcal{U}]\cdot v^\delta\, dx \\ &+ \int_\Omega \left[\left(v^\delta\cdot\nabla\right)v^\delta\right]\cdot\mathcal{U}\, dx + \int_\Omega \nabla p_{v^\delta}\cdot\mathcal{U}\, dx \\ &= \int_\Omega \chi^\delta f\cdot\mathcal{U}\, dx.\end{aligned} \tag{2.214}$$

On utilise maintenant le lemme 9 et le fait que l'adjoint $\mathcal{U}$ est régulier (il ne dépend pas de δ) pour écrire l'estimation suivante :

$$\left|\int_\Omega \left(v^\delta\cdot\nabla v^\delta\right)\cdot\mathcal{U}\, dx\right| \le k\left\|\nabla v^\delta\right\|^2_{L^2(\Omega)}\|\nabla\mathcal{U}\|_{L^2(\Omega)} \le \mathcal{O}\left(\delta^{N+1}\right) \tag{2.215}$$

et comme :

$$\int_\Omega \chi^\delta f\cdot\mathcal{U}\, dx = \delta^N\,|B|\, f(x_0)\cdot\mathcal{U}(x_0) + \mathcal{O}\left(\delta^{N+1}\right), \tag{2.216}$$

on a donc montré (en combinant cette dernière expression avec (2.211), (2.212) et (2.214)) :

$$\int_\Omega \frac{\partial j}{\partial u}(u,p_u)\cdot v^\delta\, dx + \int_\Omega \frac{\partial j}{\partial p}(u,p_u)p_{v^\delta}\, dx = \delta^N\,|B|\, f(x_0)\cdot\mathcal{U}(x_0) + \mathcal{O}\left(\delta^{N+1}\right). \tag{2.217}$$

En utilisant les estimations précédemment établies sur v^δ et p_{v^δ}, on peut donc conclure la preuve du théorème 7 :

$$J(\chi+\chi^\delta) = J(\chi) + \delta^N\,|B|\, f(x_0)\cdot\mathcal{U}(x_0) + \mathcal{O}\left(\delta^{N+1}\right). \tag{2.218}$$

Remarque 9 La seule différence qui existe entre le problème de Stokes traité dans la section précédente et les équations de Navier-Stokes que nous venons d'aborder est la présence du terme non-linéaire supplémentaire $(u\cdot\nabla)u$ dans l'équation sur la vitesse, terme qui devient négligeable dans le problème local. C'est également un terme dépendant de u et éventuellement

non-linéaire que nous avons introduit dans la section 2.2.4 concernant le cas d'un terme source dépendant de l'état par rapport au cas initial du laplacien de la section 2.2.1. Les termes du type $f'(u)v^\delta$ intervenant dans le calcul du gradient topologique de la section 2.2.4 sont ainsi à mettre en rapport avec les termes $(u \cdot \nabla)v^\delta$ et $(v^\delta \cdot \nabla)u$ intervenant ici. Il n'est donc pas surprenant que le calcul du gradient topologique dans le cas des équations de Navier-Stokes ne diffère pas grandement par rapport à celui du problème de Stokes.

2.6 Equation de la chaleur

On s'intéresse maintenant au calcul du gradient topologique d'un terme source dans le cas d'un problème instationnaire. Rappelons en effet que l'application pratique des calculs que nous menons dans ce chapitre est le problème industriel du contrôle d'un écoulement décollé au moyen de générateurs de vortex mécaniques. Or, en aérodynamique, la présence de zones de recirculations importantes nécessite généralement la mise en œuvre de modélisations instationnaires. Un calcul de gradient topologique pour des problèmes instationnaires (paraboliques et hyperboliques) peut être trouvé dans [11].

2.6.1 Résultat principal

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 2)$ et $T > 0$. On cherche $u(x,t)$ solution du problème suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcll} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u & = & \chi f & \text{dans} \quad \Omega \times [0,T] \\ u & = & 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega \times [0,T] \\ u(x,0) & = & u_0 & \text{dans} \quad \Omega, \end{array}\right. \tag{2.219}$$

où χ est la fonction caractéristique du domaine sur lequel est appliqué le terme source f et u_0 est la donnée initiale. On suppose que le terme source $f \in L^\infty\left([0,T]\,;W^{1,\infty}(\Omega)\right)$ est fonction à la fois de la position x et de la vitesse t. On a existence, unicité et régularité de la solution u de ce problème, c'est-à-dire que $u \in \mathcal{C}\left([0,T];L^2(\Omega)\right) \cap L^2\left([0,T];H_0^1(\Omega)\right)$. On définit de plus la fonction coût suivante :

$$J(\chi) = \int_0^T \int_\Omega j(u)\,dx\,dt, \tag{2.220}$$

avec les hypothèses habituelles (2.4) sur j.

On définit le problème perturbé suivant, résultant de la perturbation par χ^δ de la fonction caractéristique χ du terme source :

$$\left\{\begin{array}{rcll} \dfrac{\partial u^\delta}{\partial t} - \Delta u^\delta & = & \left(\chi + \chi^\delta\right) f & \text{dans} \quad \Omega \times [0,T] \\ u^\delta & = & 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega \times [0,T] \\ u^\delta(x,0) & = & u_0 & \text{dans} \quad \Omega, \end{array}\right. \tag{2.221}$$

où χ^δ est défini de la même manière que précédemment par (2.6).

L'expression du gradient topologique pour ce nouveau problème est alors donnée par le résultat suivant :

Théorème 8 *Dans le cas de l'équation de la chaleur instationnaire, la fonction coût J possède le développement asymptotique suivant :*

$$J(\chi + \chi^\delta) = J(\chi) + \delta^N\,|B| \int_0^T f(x_0,t)p(x_0,t)\,dt + \mathcal{O}\left(\delta^{N+1}\right), \tag{2.222}$$

où p est solution du problème adjoint rétrograde en temps :

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\dfrac{\partial p}{\partial t} - \Delta p & = & j'(u) & \textit{dans} \quad \Omega \times [0,T] \\ p & = & 0 & \textit{sur} \quad \partial\Omega \times [0,T] \\ p(x,T) & = & 0 & \textit{dans} \quad \Omega. \end{array}\right. \tag{2.223}$$

En d'autres termes, le gradient topologique pour l'ajout d'un terme source au point x_0 vaut :

$$g(x_0) = \int_0^T f(x_0,t)p(x_0,t)\,dt. \tag{2.224}$$

2.6.2 Développement asymptotique proche de la perturbation

On définit comme habituellement la différence v^δ entre solution perturbée u^δ et solution initiale u qui est solution du problème suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcll} \dfrac{\partial v^\delta}{\partial t} - \Delta v^\delta & = & \chi^\delta f & \text{dans} \quad \Omega \times [0,T] \\ v^\delta & = & 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega \times [0,T] \\ v^\delta(x,0) & = & 0 & \text{dans} \quad \Omega. \end{array}\right. \tag{2.225}$$

On montre alors le résultat suivant :

Lemme 10 *Il existe une constante $C > 0$, indépendante de δ, telle que, $\forall \delta > 0$, la fonction v^δ solution du problème (2.225) vérifie :*

$$\left\|v^\delta\right\|^2_{L^2(\Omega\times[0,T])} \leq C\delta^{N+1}. \tag{2.226}$$

Afin d'établir ce résultat, on va se ramener comme d'habitude à un problème proche de la perturbation χ^δ. On introduit donc le changement de variable en espace $y = \frac{x-x_0}{\delta}$. En toute logique, on devrait également effectuer un changement de variable en temps, qui serait de la forme $s = \frac{t}{\delta^2}$. Mais à la limite lorsque δ tend vers 0, ce temps deviendrait infini, de sorte qu'après changement de variables c'est en fait un problème stationnaire que l'on considère. Soit donc w la solution du problème canonique stationnaire suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\Delta w & = & \chi_B f(x_0,t) & \text{dans} \quad \mathbb{R}^N \\ \nabla w & \to & 0 & \text{à l'} \quad \infty. \end{array}\right. \tag{2.227}$$

Ici, le temps t apparaissant au second membre de l'équation n'est plus qu'un paramètre fixe et c'est en toute rigueur un ensemble de problèmes posés dans $\mathbb{R}^N$, $\forall t > 0$ que l'on a défini. Le problème (2.227) est en fait le même que celui que nous avons introduit dans le cas du laplacien de la section 2.2.1. Le comportement à l'infini de w est donc celui donné par (A.21) et (A.22) et on définit encore la fonction remise à l'échelle dans $\Omega \times [0,T]$:

$$w^\delta(x,t) = w^\delta(x) = \delta^2 w\left(\frac{x-x_0}{\delta}\right). \tag{2.228}$$

La fonction w^δ est alors solution de :

$$-\Delta w^\delta = \chi^\delta f(x_0,t) \quad \text{dans} \quad \Omega, \quad \forall t > 0, \tag{2.229}$$

w^δ vérifiant des conditions aux limites non-homogènes mais petites sur le bord $\partial\Omega$.

On utilise (2.229) pour écrire que v^δ est également solution du problème suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcll} \dfrac{\partial v^\delta}{\partial t} - \Delta v^\delta & = & \chi^\delta\left(f(x,t) - f(x_0,t)\right) - \Delta w^\delta & \text{dans} \quad \Omega \times [0,T] \\ v^\delta & = & 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega \times [0,T] \\ v^\delta(x,0) & = & 0 & \text{dans} \quad \Omega. \end{array}\right. \tag{2.230}$$

On a alors, en multipliant la première équation par v^δ et en intégrant par parties sur $\Omega \times [0,T]$:

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_0^T \int_\Omega \frac{\partial v^\delta}{\partial t} v^\delta \, dx\, dt + \int_0^T \int_\Omega \left|\nabla v^\delta\right|^2 dx\, dt & = & \displaystyle\int_0^T \int_\Omega \chi^\delta\left(f(x,t) - f(x_0,t)\right) v^\delta \, dx\, dt \\ & + & \displaystyle\int_0^T \int_\Omega \nabla w^\delta \cdot \nabla v^\delta \, dx\, dt. \end{array} \tag{2.231}$$

Or :

$$\int_0^T \int_\Omega \frac{\partial v^\delta}{\partial t} v^\delta \, dx\, dt = \frac{1}{2}\int_0^T \int_\Omega \frac{\partial {v^\delta}^2}{\partial t} \, dx\, dt = \frac{1}{2}\int_\Omega {v^\delta}^2(T) \, dx \geq 0. \tag{2.232}$$

D'où :

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_0^T \int_\Omega \left|\nabla v^\delta\right|^2 dx\, dt & \leq & \displaystyle\int_0^T \int_\Omega \chi^\delta\left(f(x,t) - f(x_0,t)\right) v^\delta \, dx\, dt \\ & + & \displaystyle\int_0^T \int_\Omega \nabla w^\delta \cdot \nabla v^\delta \, dx\, dt. \end{array} \tag{2.233}$$

En utilisant les inégalités de Cauchy-Schwarz et de Poincaré on obtient :

$$\begin{array}{rcl} \left\|v^\delta\right\|_{L^2(\Omega\times[0,T])} & \leq & C\Big(\left\|\chi^\delta\left(f(x,t) - f(x_0,t)\right)\right\|_{L^2(\Omega\times[0,T])} \\ & + & \left\|\nabla w^\delta\right\|_{L^2(\Omega\times[0,T])}\Big). \end{array} \tag{2.234}$$

Pour le premier terme du second membre, on a, en utilisant (2.25) :

$$\left\|\chi^\delta\left(f(x,t) - f(x_0,t)\right)\right\|^2_{L^2(\Omega\times[0,T])} \leq C\delta^{N+2}. \tag{2.235}$$

Et pour le second terme, en utilisant (2.27) :

$$\left\|\nabla w^\delta\right\|^2_{L^2(\Omega\times[0,T])} \leq C\delta^{N+1}, \tag{2.236}$$

ce qui permet de conclure la preuve du lemme 10.

2.6.3 Preuve du théorème 8

La fonction coût associée au problème perturbé vaut :

$$J(\chi + \chi^\delta) = J(\chi) + \int_0^T \int_\Omega j'(u) v^\delta \, dx\, dt + \frac{1}{2}\int_0^T \int_\Omega j''(\tilde{u}) v^\delta v^\delta \, dx\, dt, \tag{2.237}$$

avec $\tilde{u}(x,t) \in \left[u(x,t), u^\delta(x,t)\right]$ (intervalle non-ordonné). Or, en utilisant l'hypothèse (2.4) sur j'' et l'estimation sur v^δ du lemme 10, on a pour le dernier terme :

$$\left|\frac{1}{2}\int_0^T \int_\Omega j''(\tilde{u}) v^\delta v^\delta \, dx\right| \leq C\left\|v^\delta\right\|^2_{L^2(\Omega\times[0,T])} \leq \mathcal{O}\left(\delta^{N+1}\right). \tag{2.238}$$

On introduit maintenant l'état adjoint p solution du problème rétrograde en temps :

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\dfrac{\partial p}{\partial t} - \Delta p & = & j'(u) & \text{dans} \quad \Omega \times [0,T] \\ p & = & 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega \times [0,T] \\ p(x,T) & = & 0 & \text{dans} \quad \Omega. \end{array}\right. \tag{2.239}$$

On a alors, en multipliant l'équation adjointe (2.239) par v^δ et en intégrant par parties sur $\Omega \times [0,T]$:

$$\int_0^T \int_\Omega \frac{\partial v^\delta}{\partial t} p \, dx \, dt + \int_0^T \int_\Omega \nabla p \cdot \nabla v^\delta \, dx \, dt = \int_0^T \int_\Omega j'(u) v^\delta \, dx \, dt \tag{2.240}$$

car $v^\delta(x,0) = p(x,T) = 0$. D'autre part, en multipliant (2.225) par p et en intégrant par parties sur $\Omega \times [0,T]$ on a :

$$\int_0^T \int_\Omega \frac{\partial v^\delta}{\partial t} p \, dx \, dt + \int_0^T \int_\Omega \nabla p \cdot \nabla v^\delta \, dx \, dt = \int_0^T \int_\Omega \chi^\delta f p \, dx \, dt. \tag{2.241}$$

On a supposé $f \in L^\infty\left([0;T]\,;W^{1,\infty}(\Omega)\right)$. Comme dans le cas stationnaire et en utilisant l'hypothèse (2.4) sur j, on sais que l'état adjoint p est au moins aussi régulier que la solution u du problème de départ, c'est-à-dire que $p \in L^\infty\left([0,T]\,;W^{1,\infty}(\Omega)\right)$. On peut donc écrire :

$$\int_0^T \int_\Omega \chi^\delta f p \, dx \, dt = \delta^N \, |B| \int_0^T f(x_0,t) p(x_0,t) + \mathcal{O}\left(\delta^{N+1}\right) \tag{2.242}$$

et obtenir finalement :

$$J(\chi + \chi^\delta) = J(\chi) + \delta^N \, |B| \int_0^T f(x_0,t) p(x_0,t) + \mathcal{O}\left(\delta^{N+1}\right), \tag{2.243}$$

ce qui termine la preuve du théorème 8.

2.7 Problème discret stationnaire

Le principe de calcul du gradient topologique est à chaque fois le même dans tous les cas que nous avons étudié. Il fait en particulier intervenir l'analyse asymptotique d'un problème proche de la perturbation que nous ajoutons. Un telle analyse est difficile à mener dans le cas des équations de Navier-Stokes compressibles, [33], [66]. C'est pour cette raison que nous allons dans cette section nous contenter d'appliquer formellement le principe de calcul du gradient topologique au cas d'un problème quelconque représentatif des équations de Navier-Stokes compressibles une fois discrétisées.

On cherche un vecteur $\boldsymbol{U}$ solution du système d'équations non-linéaires suivant :

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{U}) = \chi \boldsymbol{f}, \tag{2.244}$$

avec χ la "fonction caractéristique" du terme source $\boldsymbol{f}$, ce qui signifie que χ est un vecteur dont les composantes non-nulles sont localisées aux points où le terme source $\boldsymbol{f}$ est appliqué et où $\chi \boldsymbol{f}$ est un produit de vecteurs composante par composante. On munit ce problème d'une fonction coût J définie par :

$$J(\chi) = j(\boldsymbol{U}). \tag{2.245}$$

On définit le problème perturbé suivant, résultant de l'ajout d'une perturbation χ^δ à la "fonction caractéristique" du terme source :

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{U}^\delta) = (\chi + \chi^\delta) \boldsymbol{f}. \tag{2.246}$$

Ici, χ^δ est un vecteur dont les composantes non-nulles sont localisées dans une boule (pour simplifier) de taille δ centrée au point x_0.

La différence $\boldsymbol{V}^\delta$ entre la solution perturbée $\boldsymbol{U}^\delta$ et la solution initiale $\boldsymbol{U}$ vérifie alors le problème suivant :

$$\left(\frac{d\boldsymbol{E}}{d\boldsymbol{U}}(\boldsymbol{U})\right)\boldsymbol{V}^\delta = \chi^\delta \boldsymbol{f} + \boldsymbol{R}, \tag{2.247}$$

où on a noté $\boldsymbol{R}$ le reste dans le développement de Taylor de $\boldsymbol{E}$ et que l'on va supposer petit.

On définit maintenant l'état adjoint $\boldsymbol{P}$, solution du problème suivant :

$$\boldsymbol{P}^T\left(\frac{d\boldsymbol{E}}{d\boldsymbol{U}}(\boldsymbol{U})\right) = \left(\frac{dj}{d\boldsymbol{U}}(\boldsymbol{U})\right). \tag{2.248}$$

On peut alors faire le développement suivant de la fonction coût J :

$$J(\chi + \chi^\delta) = J(\chi) + \left(\frac{dj}{d\boldsymbol{U}}(\boldsymbol{U})\right)\boldsymbol{V}^\delta + \boldsymbol{R}', \tag{2.249}$$

avec encore un reste $\boldsymbol{R}'$, résultant du développement de Taylor de j et que l'on va également supposer petit.

On en déduit donc, en utilisant le problème adjoint (2.248) :

$$J(\chi + \chi^\delta) = J(\chi) + \boldsymbol{P}^T\left(\frac{d\boldsymbol{E}}{d\boldsymbol{U}}(\boldsymbol{U})\right)\boldsymbol{V}^\delta + \boldsymbol{R}', \tag{2.250}$$

qui devient, en utilisant le problème (2.247) sur $\boldsymbol{V}^\delta$:

$$J(\chi + \chi^\delta) = J(\chi) + \boldsymbol{P}^T\chi^\delta\boldsymbol{f} + \boldsymbol{R}, \tag{2.251}$$

où on a regroupé les termes $\boldsymbol{R}'$ et $\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{R}$.

En conclusion, on obtient la formule suivante du gradient topologique pour la perturbation χ^δ centrée au point x_0 :

$$g(x_0) = \boldsymbol{P}^T\chi^\delta\boldsymbol{f}. \tag{2.252}$$

2.8 Problème discret instationnaire

Nous allons dans cette dernière section, et comme nous l'avons déjà fait dans la section précédente pour un problème stationnaire, traiter le cas d'un problème quelconque discret instationnaire. On se donne un système de N équations d'état non-linéaires à résoudre :

$$\left\{\begin{array}{c} \boldsymbol{E}_n(\boldsymbol{U}_n, \boldsymbol{U}_{n-1}, \boldsymbol{U}_{n-2}) = \chi\boldsymbol{f}_n, \quad n = 1, \ldots, N \\ \boldsymbol{U}_0 \quad \text{et} \quad \boldsymbol{U}_{-1} \quad \text{donnés}, \end{array}\right. \tag{2.253}$$

où $\boldsymbol{f}_n$ est un terme source, pouvant dépendre du temps, mais de "fonction caractéristique" χ fixe, au sens où les composantes non-nulles du terme source restent fixes au cours du temps. On a choisit ici d'expliciter le cas où la solution $\boldsymbol{U}_n$ à un pas de temps donné dépend des deux précédentes solutions $\boldsymbol{U}_{n-1}$ et $\boldsymbol{U}_{n-2}$, ce qui est en général le cas lorsque la discrétisation en temps du problème continu de départ est d'ordre deux. On munit ce problème de la fonction coût suivante :

$$J(\chi) = \sum_{n=1}^{N} j_n(\boldsymbol{U}_n). \tag{2.254}$$

On définit le problème perturbé suivant, résultant de l'ajout d'une perturbation χ^δ à la "fonction caractéristique" du terme source :

$$\left\{ \begin{array}{c} \boldsymbol{E}_n(\boldsymbol{U}_n^\delta, \boldsymbol{U}_{n-1}^\delta, \boldsymbol{U}_{n-2}^\delta) = \left(\chi + \chi^\delta\right) \boldsymbol{f}_n, \quad n = 1, \ldots, N \\ \boldsymbol{U}_0^\delta = \boldsymbol{U}_0 \quad \text{et} \quad \boldsymbol{U}_{-1}^\delta = \boldsymbol{U}_{-1}. \end{array} \right. \tag{2.255}$$

Ici encore, χ^δ est un vecteur dont les composantes non-nulles, fixes au cours du temps, sont localisées dans une boule de taille δ centrée en un point x_0. La différence $\boldsymbol{V}_n^\delta$ entre la solution perturbée $\boldsymbol{U}_n^\delta$ et la solution initiale $\boldsymbol{U}_n$ au temps n vérifie alors le système de N équations suivant :

$$\left\{ \begin{array}{c} \left(\frac{\partial \boldsymbol{E}_n}{\partial \boldsymbol{U}_n}\right) \boldsymbol{V}_n^\delta + \left(\frac{\partial \boldsymbol{E}_n}{\partial \boldsymbol{U}_{n-1}}\right) \boldsymbol{V}_{n-1}^\delta + \left(\frac{\partial \boldsymbol{E}_n}{\partial \boldsymbol{U}_{n-2}}\right) \boldsymbol{V}_{n-2}^\delta = \chi^\delta \boldsymbol{f}_n + \boldsymbol{R} \\ \boldsymbol{V}_0^\delta = \boldsymbol{V}_{-1}^\delta = 0, \end{array} \right. \tag{2.256}$$

où on a noté $\boldsymbol{R}$ le reste dans le développement de Taylor de $\boldsymbol{E}_n$ et que l'on va supposer petit.

On définit maintenant l'état adjoint $\boldsymbol{P}_n$, solution du problème rétrograde suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \boldsymbol{P}_N^T \left(\frac{\partial \boldsymbol{E}_N}{\partial \boldsymbol{U}_N}\right) & = & \left(\frac{dj_N}{d\boldsymbol{U}}(\boldsymbol{U}_N)\right) \\ \boldsymbol{P}_{N-1}^T \left(\frac{\partial \boldsymbol{E}_{N-1}}{\partial \boldsymbol{U}_{N-1}}\right) & = & \left(\frac{dj_{N-1}}{d\boldsymbol{U}}(\boldsymbol{U}_{N-1})\right) - \boldsymbol{P}_N^T \left(\frac{\partial \boldsymbol{E}_N}{\partial \boldsymbol{U}_{N-1}}\right) \\ \boldsymbol{P}_n^T \left(\frac{\partial \boldsymbol{E}_n}{\partial \boldsymbol{U}_n}\right) & = & \left(\frac{dj_n}{d\boldsymbol{U}}(\boldsymbol{U}_n)\right) - P_{n+1}^T \left(\frac{\partial \boldsymbol{E}_{n+1}}{\partial \boldsymbol{U}_n}\right) - \boldsymbol{P}_{n+2}^T \left(\frac{\partial \boldsymbol{E}_{n+2}}{\partial \boldsymbol{U}_n}\right) \end{array} \right. \tag{2.257}$$

On a alors le développement suivant de la fonction coût J :

$$J(\chi + \chi^\delta) = J(\chi) + \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{dj_n}{d\boldsymbol{U}}(\boldsymbol{U}_n)\right) \boldsymbol{V}_n^\delta + \boldsymbol{R}', \tag{2.258}$$

avec encore un reste $\boldsymbol{R}'$, résultant du développement de Taylor de j_n et que l'on va également supposer petit.

On en déduit donc, en utilisant le problème adjoint (2.257) :

$$J(\chi + \chi^\delta) = J(\chi) + \sum_{n=1}^{N} \left[\boldsymbol{P}_n^T \left(\frac{\partial \boldsymbol{E}_n}{\partial \boldsymbol{U}_n}\right) + \boldsymbol{P}_{n+1}^T \left(\frac{\partial \boldsymbol{E}_{n+1}}{\partial \boldsymbol{U}_n}\right) + \boldsymbol{P}_{n+2}^T \left(\frac{\partial \boldsymbol{E}_{n+2}}{\partial \boldsymbol{U}_n}\right) \right] \boldsymbol{V}_n^\delta + \boldsymbol{R}', \tag{2.259}$$

soit encore, en réarrangeant les termes sommés :

$$J(\chi + \chi^\delta) = J(\chi) + \sum_{n=1}^{N} \boldsymbol{P}_n^T \left[\left(\frac{\partial \boldsymbol{E}_n}{\partial \boldsymbol{U}_n}\right) \boldsymbol{V}_n^\delta + \left(\frac{\partial \boldsymbol{E}_n}{\partial \boldsymbol{U}_{n-1}}\right) \boldsymbol{V}_{n-1}^\delta + \left(\frac{\partial \boldsymbol{E}_n}{\partial \boldsymbol{U}_{n-2}}\right) \boldsymbol{V}_{n-2}^\delta \right] + \boldsymbol{R}'. \tag{2.260}$$

Cette expression devient finalement, en utilisant le problème (2.256) sur $\boldsymbol{V}_n^\delta$:

$$J(\chi + \chi^\delta) = J(\chi) + \sum_{n=1}^{N} \boldsymbol{P}_n^T \chi^\delta \boldsymbol{f}_n + \boldsymbol{R}. \tag{2.261}$$

En conclusion, on a la formule suivante du gradient topologique instationnaire pour la perturbation χ^δ centrée au point x_0 :

$$g(x_0) = \sum_{n=1}^{N} \boldsymbol{P}_n^T \chi^\delta \boldsymbol{f}_n. \tag{2.262}$$

2.9 Conclusion

Nous avons établi dans ce chapitre l'expression du gradient topologique d'un terme source pour un certain nombre de problèmes modèles différents. Dans tous les cas, le principe de calcul du gradient topologique est le même. Il fait en particulier intervenir la définition d'un problème adjoint au problème de départ ainsi que l'étude asymptotique d'un problème centré sur la perturbation. La solution de ce dernier problème est alors le premier terme du développement de la différence entre solution perturbée et solution non perturbée initiale. On a de plus obtenu que l'expression du gradient topologique dépend uniquement du type de terme source considéré (même expression dans tous les cas pour un terme source intérieur au domaine, mais expression différente pour un terme source proche du bord ou centré sur un point du bord).

On résume dans le tableau 2.1 les différentes expressions de gradient topologique obtenues dans ce chapitre, ainsi que l'estimation des restes dans les développements asymptotiques des fonctions coût.

Type de problème	Terme source	$\eta(\delta)$	Gradient topologique	Estimation du reste
Laplacien Dirichlet	Intérieur	$\delta^N \lvert B \rvert$	$f(x_0)p(x_0)$	$\mathcal{O}\left(\delta^{N+1}\right)$
Laplacien Dirichlet	Proche du bord	$\delta^{N+1} \int_{B\cap\mathbb{R}^N_+} y_N \, dy$	$f(x_0)\dfrac{\partial p}{\partial n}(x_0)$	$\mathcal{O}\left(\delta^{N+2}\right)$
Laplacien Dirichlet	Centré et nul au bord	$\delta^{N+2} \int_{B\cap\mathbb{R}^N_+} y_N^2 \, dy$	$\dfrac{\partial f}{\partial n}(x_0)\dfrac{\partial p}{\partial n}(x_0)$	$\mathcal{O}\left(\delta^{N+3}\right)$
Laplacien Dirichlet	Dépendant de u	$\delta^N \lvert B \rvert$	$f(x_0, u(x_0))p(x_0)$	$\mathcal{O}\left(\delta^{N+\frac{1}{2}}\right)$
Laplacien Neumann	Proche du bord	$\delta^N \lvert B \rvert$	$f(x_0)p(x_0)$	$\mathcal{O}\left(\delta^{N+1}\right)$
Stokes	Intérieur	$\delta^N \lvert B \rvert$	$f(x_0) \cdot \mathcal{U}(x_0)$	$\mathcal{O}\left(\delta^{N+1}\right)$
Navier-Stokes	Intérieur	$\delta^N \lvert B \rvert$	$f(x_0) \cdot \mathcal{U}(x_0)$	$\mathcal{O}\left(\delta^{N+1}\right)$
Chaleur	Intérieur	$\delta^N \lvert B \rvert$	$\int_0^T f(x_0, t)p(x_0, t) \, dt$	$\mathcal{O}\left(\delta^{N+1}\right)$
Discret stationnaire	-	-	$\boldsymbol{P}^T \chi^\delta \boldsymbol{f}$	-
Discret instationnaire	-	-	$\sum_{n=1}^{N} \boldsymbol{P}_n^T \chi^\delta \boldsymbol{f}_n$	-

TABLE 2.1 – Différentes expressions du gradient topologique.

Chapitre 3

Implémentation du gradient topologique et de l'optimisation paramétrique dans un code industriel

3.1 Introduction

Ce chapitre est dédié à l'implémentation des méthodes de contrôle et d'optimisation d'écoulements, développées au cours de cette thèse, dans un code de calcul industriel. Notre objectif est de contrôler de manière optimale un écoulement décollé au moyen de générateurs de vortex mécaniques (VG). Afin de déterminer où il est optimal de créer un nouveau générateur de vortex dans un écoulement de référence, on utilise le gradient topologique dont le calcul rigoureux sur différents problèmes modèles a été réalisé au chapitre 2. D'autre part, dans le but d'optimiser finement les paramètres du générateur de vortex créé en accord avec la cartographie de gradient topologique, on utilise une méthode classique d'optimisation paramétrique avec gradient calculé par résolution d'un problème adjoint. Dans la première partie de ce chapitre, on s'attache donc à rappeler la formulation discrète du gradient topologique ainsi que du gradient par rapport aux paramètres dans le cas stationnaire puis dans le cas instationnaire.

La deuxième partie du chapitre est dédiée à la description du code éléments finis AETHER de résolution des équations de Navier-Stokes compressibles moyennées, développé et utilisé quotidiennement chez Dassault Aviation. Ce code repose sur une formulation Galerkin moindres carrés des équations de Navier-Stokes symétrisées écrites en variables entropiques. Plus de détails sur les méthodes numériques à la base du code AETHER peuvent être trouvés dans [70], [22] et leurs références. On aborde également le problème de la modélisation de la turbulence, cruciale pour la simulation des décollements, que ce soit dans un cadre stationnaire (approche RANS, *Reynolds Averaged Navier-Stokes*) ou instationnaire (approche DES, *Detached Eddy Simulation*). Enfin, on s'intéresse à la modélisation des termes sources modélisant les générateurs de vortex mécaniques.

Dans une troisième partie, on s'attache à décrire le code adjoint, dérivé du code AETHER et développé à l'origine dans le cadre de l'optimisation de formes en régime stationnaire, [79]. Il existe deux manières de développer un code adjoint. Une première façon de procéder est, en partant des équations d'état continues (ici les équations de Navier-Stokes), d'en déduire le système d'équations que doit vérifier l'état adjoint, puis de le discrétiser. Ce n'est pas l'approche qui a été retenue ici. En effet, notre code adjoint se base sur un calcul discret des sensibilités, dans le sens où le système adjoint discret est directement obtenu à partir du code AETHER. On utilise pour cela un outil de différentiation automatique de code, le logiciel TAPENADE développé par l'INRIA. Ainsi, c'est principalement dans le code adjoint que se sont concentrés

tous nos développements numériques. Nous avons donc intégré à ce code le calcul du gradient topologique et du gradient par rapport aux paramètres des générateurs de vortex (position, taille et orientation). Les écoulements décollés pouvant nécessiter l'emploi de modélisations instationnaires ; nous avons donc étendu le code adjoint, à l'origine stationnaire, en une version instationnaire. Nous évoquerons également les aspects liés à la résolution du système linéaire dans le code AETHER adjoint ainsi que la prise en compte de la géométrie de l'objet sur lequel sont calculées les diverses formulations de gradient topologique que nous avons intégré.

Nous consacrons la fin de ce chapitre à la description de la boucle d'optimisation paramétrique de générateurs de vortex, développée elle aussi à partir de la boucle d'optimisation de formes disponible chez Dassault Aviation. L'accent sera mis en particulier sur les différents algorithmes d'optimisation avec gradient à disposition dans cette boucle.

3.2 Gradient topologique et paramétrique

Le calcul du gradient topologique d'un terme source pour un problème discret stationnaire et instationnaire a été traité dans le chapitre 2, sections 2.7 et 2.8. L'objet de cette section est de déterminer de la même manière l'expression du gradient par rapport aux paramètres du terme source.

3.2.1 Le cas stationnaire

Soit un vecteur $\boldsymbol{V}$ solution du système d'équations d'état non-linéaire suivant :

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{V}, \chi \boldsymbol{f}(\boldsymbol{V}, l)) = 0, \tag{3.1}$$

avec $\boldsymbol{E}$ le résidu des équations de Navier-Stokes discrétisées (qui est nul à convergence du calcul non-linéaire, voir section suivante), $\boldsymbol{V}$ l'état du fluide, $\boldsymbol{f}$ le terme source modélisant l'action d'un ou plusieurs générateurs de vortex de "fonction caractéristique" χ et de paramètres (position, taille, orientation) l. Comparée à (2.244), la formulation (3.1) fait dépendre le terme source $\boldsymbol{f}$ de l'état $\boldsymbol{V}$ et du vecteur de paramètres l, et l'intègre dans l'équation d'état $\boldsymbol{E}$. On munit ce problème de la fonction coût suivante :

$$J(\chi, l) = j(\boldsymbol{V}(\chi, l)). \tag{3.2}$$

On se propose de déterminer tout d'abord la dérivée de la fonction coût J par rapport aux paramètres l. De façon classique, on introduit le lagrangien L du problèmé ainsi que le multiplicateur de Lagrange (*i.e.* l'état adjoint) $\boldsymbol{P}$ associé :

$$L(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{P}, l) = j(\boldsymbol{V}) - \boldsymbol{P}^T \boldsymbol{E}(\boldsymbol{V}, \chi \boldsymbol{f}(\boldsymbol{V}, l)). \tag{3.3}$$

De façon immédiate, la stationnarité du lagrangien L par rapport à l'état adjoint $\boldsymbol{P}$ redonne l'équation d'état (3.1), c'est-à-dire :

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{P}}(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{P}, l) = -\boldsymbol{E}(\boldsymbol{V}, \chi \boldsymbol{f}(\boldsymbol{V}, l)) = 0. \tag{3.4}$$

La stationnarité du lagrangien L par rapport à l'état $\boldsymbol{V}$ donne quant à elle l'équation adjointe qui doit être satisfaite par $\boldsymbol{P}$, à savoir :

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{V}}(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{P}, l) = \frac{dj}{d\boldsymbol{V}}(\boldsymbol{V}) - \boldsymbol{P}^T \left(\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial \boldsymbol{V}} + \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial \boldsymbol{f}} \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{V}} \right) (\boldsymbol{V}, \chi \boldsymbol{f}(\boldsymbol{V}, l)) = 0. \tag{3.5}$$

On retrouve ainsi le problème adjoint introduit dans le chapitre 2, section 2.7 en (2.248) :

$$\boldsymbol{P}^T \left(\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial \boldsymbol{V}} + \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial \boldsymbol{f}} \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{V}} \right) (\boldsymbol{V}, \chi \boldsymbol{f}(\boldsymbol{V}, l)) = \frac{dj}{d\boldsymbol{V}}(\boldsymbol{V}). \tag{3.6}$$

Enfin, la dérivée de la fonction coût J par rapport aux paramètres l est donnée par :

$$\frac{\partial J}{\partial l} = \frac{\partial L}{\partial l}(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{P}, l) = -\boldsymbol{P}^T \left(\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial \boldsymbol{f}} \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial l} \right) (\boldsymbol{V}, \chi \boldsymbol{f}(\boldsymbol{V}, l)). \tag{3.7}$$

Ainsi, l'introduction de l'état adjoint $\boldsymbol{P}$ permet, moyennant la résolution du seul problème linéaire supplémentaire (3.6), d'obtenir la dérivée de la fonction coût J par rapport au vecteur de paramètres l, et ce quelque soit la dimension n_l de ce vecteur. Comparé à un calcul de gradient par différences finies par exemple, on évite donc (outre le choix problématique du pas de la différence finie) la résolution de n_l systèmes non-linéaires supplémentaires de la forme (3.1).

Avec les même notations, le gradient topologique g donnant la sensibilité de la fonction coût vis à vis d'une perturbation χ^δ de la "fonction caractéristique" du terme source localisée en un point x_0, s'écrit quant à lui :

$$g(x_0) = \boldsymbol{P}^T \chi^\delta \boldsymbol{f}(\boldsymbol{V}, l). \tag{3.8}$$

Dans cette expression, le point x_0 représente le centre de la perturbation χ^δ du "support" du terme source $\boldsymbol{f}$. Le vecteur de paramètres l comporte lui aussi implicitement le point x_0 auquel est évalué le gradient topologique. Les autres paramètres (la taille et l'orientation du générateur de vortex que l'on souhaite ajouter à l'écoulement) sont eux fixés dans le calcul du gradient topologique.

3.2.2 Le cas instationnaire

On se donne maintenant un ensemble de vecteurs $(\boldsymbol{V}_n,\ n = 1, \ldots, N)$, solution d'un système de N équations d'état non-linéaires :

$$\begin{cases} \boldsymbol{E}_n(\boldsymbol{V}_n, \boldsymbol{V}_{n-1}, \boldsymbol{V}_{n-2}, \chi \boldsymbol{f}(\boldsymbol{V}_n, l)) = 0, \quad n = 1, \ldots, N \\ \qquad \boldsymbol{V}_0 \quad \text{et} \quad \boldsymbol{V}_{-1} \quad \text{donnés.} \end{cases} \tag{3.9}$$

Le vecteur $\boldsymbol{V}_n$ représente l'état au pas de temps t_n. Le fait que l'équation résolue à chaque itération dépend à la fois de $\boldsymbol{V}_{n-1}$ et de $\boldsymbol{V}_{n-2}$ vient du schéma en temps d'ordre deux utilisé dans le code AETHER. Le terme source $\boldsymbol{f}$ dépend lui de la solution courante $\boldsymbol{V}_n$, mais ses paramètres l et son support χ sont fixes au cours de temps. Ce problème est muni de la fonction coût suivante :

$$J(\chi, l) = \sum_{n=1}^{N} j_n(\boldsymbol{V}_n(\chi, l)). \tag{3.10}$$

En général, l'équation d'état $\boldsymbol{E}_n$ et la fonction coût j_n ne dépendent pas de l'itération n mais sont identiques à chaque pas de temps ; seuls changent leurs arguments. En effet, $\boldsymbol{E}_n$ ne dépend pas de n si les forces ou les conditions aux limites ne dépendent pas du temps. De même, j_n ne dépend en général pas de n lorsque l'on veut optimiser une fonction coût moyennée au cours du temps. Néanmoins, cela n'est plus le cas si l'on souhaite par exemple optimiser la configuration finale de l'écoulement. Pour plus de généralité, nous garderons toutefois la dépendance en temps de l'équation d'état $\boldsymbol{E}_n$ et de la fonction coût j_n. Afin de déterminer le gradient de la fonction coût totale J par rapport aux paramètres l, on introduit, comme dans la section précédente, le lagrangien L et l'état adjoint $(\boldsymbol{P}_n,\ n = 1, \ldots, N)$ associé :

$$L(\boldsymbol{V}_n, \boldsymbol{P}_n, l) = \sum_{n=1}^{N} \left[j_n(\boldsymbol{V}_n) - \boldsymbol{P}_n^T \boldsymbol{E}_n(\boldsymbol{V}_n, \boldsymbol{V}_{n-1}, \boldsymbol{V}_{n-2}, \chi \boldsymbol{f}(\boldsymbol{V}_n, l)) \right]. \tag{3.11}$$

Encore une fois, la stationnarité du lagrangien L par rapport à l'état adjoint $\boldsymbol{P}_n,\ n = 1, \ldots, N$ redonne les N équations d'état (3.9).

La stationnarité du lagrangien par rapport à $\boldsymbol{V}_n,\ n = 1, \ldots, N$ donne les équations adjointes satisfaites par $\boldsymbol{P}_n,\ n = 1, \ldots, N$, à savoir :

$$\left\{\begin{array}{rcllll}
0 & = & \dfrac{dj_N}{d\boldsymbol{V}}(\boldsymbol{V}_N) & - & \boldsymbol{P}_N^T & \left(\dfrac{\partial \boldsymbol{E}_N}{\partial \boldsymbol{V}_N}(\boldsymbol{V}_N, \boldsymbol{V}_{N-1}, \boldsymbol{V}_{N-2}, \chi \boldsymbol{f}(\boldsymbol{V}_N, l)) \right. \\
 & & & + & & \left. \dfrac{\partial \boldsymbol{E}_N}{\partial \boldsymbol{f}} \dfrac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{V}_N}(\boldsymbol{V}_N, \boldsymbol{V}_{N-1}, \boldsymbol{V}_{N-2}, \chi \boldsymbol{f}(\boldsymbol{V}_N, l)) \right) \\
0 & = & \dfrac{dj_{N-1}}{d\boldsymbol{V}}(\boldsymbol{V}_{N-1}) & - & \boldsymbol{P}_{N-1}^T & \left(\dfrac{\partial \boldsymbol{E}_{N-1}}{\partial \boldsymbol{V}_{N-1}}(\boldsymbol{V}_{N-1}, \boldsymbol{V}_{N-2}, \boldsymbol{V}_{N-3}, \chi \boldsymbol{f}(\boldsymbol{V}_{N-1}, l)) \right. \\
 & & & + & & \left. \dfrac{\partial \boldsymbol{E}_{N-1}}{\partial \boldsymbol{f}} \dfrac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{V}_{N-1}}(\boldsymbol{V}_{N-1}, \boldsymbol{V}_{N-2}, \boldsymbol{V}_{N-3}, \chi \boldsymbol{f}(\boldsymbol{V}_{N-1}, l)) \right) \\
 & & & - & \boldsymbol{P}_N^T & \left(\dfrac{\partial \boldsymbol{E}_N}{\partial \boldsymbol{V}_{N-1}}(\boldsymbol{V}_N, \boldsymbol{V}_{N-1}, \boldsymbol{V}_{N-2}, \chi \boldsymbol{f}(\boldsymbol{V}_{N-1}, l)) \right) \\
0 & = & \dfrac{dj_n}{d\boldsymbol{V}}(\boldsymbol{V}_n) & - & \boldsymbol{P}_n^T & \left(\dfrac{\partial \boldsymbol{E}_n}{\partial \boldsymbol{V}_n}(\boldsymbol{V}_n, \boldsymbol{V}_{n-1}, \boldsymbol{V}_{n-2}, \chi \boldsymbol{f}(\boldsymbol{V}_n, l)) \right. \\
 & & & + & & \left. \dfrac{\partial \boldsymbol{E}_n}{\partial \boldsymbol{f}} \dfrac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{V}_n}(\boldsymbol{V}_n, \boldsymbol{V}_{n-1}, \boldsymbol{V}_{n-2}, \chi \boldsymbol{f}(\boldsymbol{V}_n, l)) \right) \\
 & & & - & \boldsymbol{P}_{n+1}^T & \left(\dfrac{\partial \boldsymbol{E}_{n+1}}{\partial \boldsymbol{V}_n}(\boldsymbol{V}_{n+1}, \boldsymbol{V}_n, \boldsymbol{V}_{n-1}, \chi \boldsymbol{f}(\boldsymbol{V}_{n+1}, l)) \right) \\
 & & & - & \boldsymbol{P}_{n+2}^T & \left(\dfrac{\partial \boldsymbol{E}_{n+2}}{\partial \boldsymbol{V}_n}(\boldsymbol{V}_{n+2}, \boldsymbol{V}_{n+1}, \boldsymbol{V}_n, \chi \boldsymbol{f}(\boldsymbol{V}_{n+2}, l)) \right).
\end{array}\right. \tag{3.12}$$

On retrouve ici encore le problème adjoint introduit dans le chapitre 2, section 2.8 en (2.257) :

$$\left\{\begin{array}{rcl}
\boldsymbol{P}_N^T \left(\dfrac{\partial \boldsymbol{E}_N}{\partial \boldsymbol{V}_N} + \dfrac{\partial \boldsymbol{E}_N}{\partial \boldsymbol{f}} \dfrac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{V}_N}\right) & = & \dfrac{dj_N}{d\boldsymbol{V}}(\boldsymbol{V}_N) \\
\boldsymbol{P}_{N-1}^T \left(\dfrac{\partial \boldsymbol{E}_{N-1}}{\partial \boldsymbol{V}_{N-1}} + \dfrac{\partial \boldsymbol{E}_{N-1}}{\partial \boldsymbol{f}} \dfrac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{V}_{N-1}}\right) & = & \dfrac{dj_{N-1}}{d\boldsymbol{V}}(\boldsymbol{V}_{N-1}) \\
 & - & \boldsymbol{P}_N^T \left(\dfrac{\partial \boldsymbol{E}_N}{\partial \boldsymbol{V}_{N-1}}\right) \\
\boldsymbol{P}_n^T \left(\dfrac{\partial \boldsymbol{E}_n}{\partial \boldsymbol{V}_n} + \dfrac{\partial \boldsymbol{E}_n}{\partial \boldsymbol{f}} \dfrac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{V}_n}\right) & = & \dfrac{dj_n}{d\boldsymbol{V}}(\boldsymbol{V}_n) \\
 & - & \boldsymbol{P}_{n+1}^T \left(\dfrac{\partial \boldsymbol{E}_{n+1}}{\partial \boldsymbol{V}_n}\right) \\
 & - & \boldsymbol{P}_{n+2}^T \left(\dfrac{\partial \boldsymbol{E}_{n+2}}{\partial \boldsymbol{V}_n}\right).
\end{array}\right. \tag{3.13}$$

Il s'agit d'un système d'équations "rétrograde" en temps, c'est-à-dire que l'on commence d'abord par calculer l'état adjoint $\boldsymbol{P}_N$ au temps final, puis les $\boldsymbol{P}_n$ dans l'ordre décroissant, en remontant en quelque sorte dans le temps "physique". La même méthode pour obtenir les équations adjointes instationnaires discrètes (3.13) est employée dans [63] et [67]. Remarquons également que pour résoudre le système d'équations (3.13), il est nécessaire de disposer de l'ensemble des états $(\boldsymbol{V}_n,\ n = 1, \ldots, N)$ solution du problème direct (3.9). Comme le système adjoint instationnaire est rétrograde en temps, il faut donc avoir stocké au préalable pour le résoudre ces N états ou être capable de les recalculer au cours de la résolution du problème adjoint.

La dérivée de la fonction coût J par rapport aux paramètres l est, quant à elle, donnée par :

$$\frac{\partial J}{\partial l} = \frac{\partial L}{\partial l}(\boldsymbol{V}_n, \boldsymbol{P}_n, l) = -\sum_{n=1}^{N} \boldsymbol{P}_n^T \left(\frac{\partial \boldsymbol{E}_n}{\partial \boldsymbol{f}} \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial l}\right). \tag{3.14}$$

Avec les même notations, le gradient topologique g donnant la sensibilité de la fonction

coût J vis à vis d'une perturbation χ^δ de la "fonction caractéristique", s'écrit :

$$g(x_0) = \sum_{n=1}^{N} \boldsymbol{P}_n^T \chi^\delta \boldsymbol{f}(\boldsymbol{V}_n, l). \tag{3.15}$$

3.3 Le code de calcul AETHER

Le code AETHER (pour *AEro-THERmodynamique*), développé par le service Aérodynamique Avancée et Acoustique (AERAV), est le code de résolution des équations de Navier-Stokes de Dassault Aviation. Il est essentiellement écrit en Fortran 77 et fonctionne sur de nombreuses architectures informatiques (IBM Pwr4, Pwr5 et BlueGene, Bull Itanium, Xeon et Nehalem) avec parallélisation (librairie MPI). Nous en faisons la description dans cette section.

3.3.1 Les équations de Navier-Stokes compressibles

Rappelons tout d'abord les équations fondamentales de la mécanique des fluides résolues par le code. On note, ρ la densité, p la pression, $\boldsymbol{u}$ la vitesse, E l'énergie totale, e l'énergie interne spécifique et T la température absolue. Les équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{u}) & = & 0 \\ \dfrac{\partial (\rho \boldsymbol{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u}) & = & \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \\ \dfrac{\partial \rho E}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho E \boldsymbol{u}) & = & \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{u} - \boldsymbol{q}). \end{array} \right. \tag{3.16}$$

Le tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ est défini par :

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\tau} - p\boldsymbol{I} \tag{3.17}$$

où $\boldsymbol{\tau}$ est le tenseur des contraintes visqueuses, et $-p\boldsymbol{I}$ le tenseur des contraintes dues à la pression. Pour un fluide newtonien et grâce à l'hypothèse de Stokes, on a :

$$\boldsymbol{\tau} = \mu \left(\nabla \boldsymbol{u} + \nabla \boldsymbol{u}^T - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \boldsymbol{u}) \boldsymbol{I} \right). \tag{3.18}$$

L'énergie totale est définie par :

$$E = e + \frac{1}{2} \|\boldsymbol{u}\|^2 \tag{3.19}$$

où $e = C_v T$ est l'énergie interne spécifique, C_v est la chaleur spécifique à volume constant et $\frac{1}{2} \|\boldsymbol{u}\|^2$ est l'énergie cinétique spécifique. A titre indicatif, la valeur de C_v pour l'air, dans les conditions normales de température et de pression, est : $C_v = 710\ J\,kg^{-1}\,K^{-1}$.

Le flux de chaleur vérifie la loi de Fourier :

$$\boldsymbol{q} = -\kappa \nabla T \tag{3.20}$$

où $\kappa = \mu \frac{C_p}{Pr}$ est le coefficient de conductibilité thermique, μ est la viscosité moléculaire, Pr est le nombre de Prandtl laminaire que l'on prendra constant, égal à 0.72 et C_p est la chaleur spécifique à pression constante. Sa valeur pour l'air, dans les conditions normales de température et de pression, est : $C_p = 1\ 005\ J\,kg^{-1}\,K^{-1}$.

La valeur de μ est fixée par la loi de Sutherland qui s'écrit pour l'air :

$$\left\{ \begin{array}{c} \mu = \mu_0 \left(\dfrac{T}{T_0}\right)^{3/2} \dfrac{T_0 + 110.4}{T + 110.4} \\ \mu_0 = 1.78639 \times 10^{-5}\ N\, s\, m^{-2},\ T_0 = 288\ K. \end{array} \right. \tag{3.21}$$

Le gaz est supposé parfait, donc régi par la loi d'état :

$$p = (\gamma - 1)\rho e \tag{3.22}$$

où $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ est le taux de chaleur spécifique. Pour un gaz parfait diatomique, la valeur de γ est constante et égale à 1.4.

3.3.2 Symétrisation des équations

Le système d'équations (3.16), auquel on a ajouté un terme source volumique, peut se mettre sous la forme matricielle suivante :

$$\boldsymbol{U}_{,t} + \boldsymbol{F}_{i,i} = \boldsymbol{F}^d_{i,i} + \mathcal{F} \tag{3.23}$$

avec :

$$\boldsymbol{U} = \rho \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ E \end{array} \right\} \ ;\ \boldsymbol{F}_i = \left\{ \begin{array}{c} \rho u_i \\ \rho u_i u_1 + p\delta_{1i} \\ \rho u_i u_2 + p\delta_{2i} \\ \rho u_i u_3 + p\delta_{3i} \\ \rho u_i E + p u_i \end{array} \right\} \ ;\ \boldsymbol{F}^d_i = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \tau_{1i} \\ \tau_{2i} \\ \tau_{3i} \\ \tau_{ij} u_j - q_i \end{array} \right\} \ ;\ \mathcal{F} = \rho \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_i u_i \end{array} \right\}. \tag{3.24}$$

$\boldsymbol{U}$ est le vecteur représentant les variables conservatives, $\boldsymbol{F}_i$ et $\boldsymbol{F}^d_i$ sont respectivement les flux d'advection et de diffusion dans la direction i et $\mathcal{F}$ le terme source volumique. Les indices $_{,t}$ et $_{,i}$ représentent respectivement la dérivée partielle par rapport à la variable de temps t et par rapport à la variable d'espace x_i. Enfin, un indice répété signifie une somme.

On peut encore réécrire le système (3.24) sous la forme quasi-linéaire suivante :

$$\boldsymbol{U}_{,t} + \boldsymbol{A}_i \boldsymbol{U}_{,i} = \left(\boldsymbol{K}_{ij} \boldsymbol{U}_{,j}\right)_{,i} + \mathcal{F} \tag{3.25}$$

où $\boldsymbol{A}_i = \boldsymbol{F}_{i,U}$ désigne la $i^{ème}$ matrice jacobienne d'advection et $\boldsymbol{K} = [\boldsymbol{K}_{ij}]$ désigne la matrice de diffusion, définie par $\boldsymbol{K}_{ij}\boldsymbol{U}_{,j} = \boldsymbol{F}^d_i$. Les matrices $\boldsymbol{A}_i$ et $\boldsymbol{K}$ ne possèdent aucune propriété de positivité ou de symétrie particulière.

Dans le cas hyperbolique, il est classique de symétriser le système en considérant un changement de variables entropique, [37]. On introduit ici la fonction d'entropie généralisée (entropie mathématique) :

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(\boldsymbol{U}) = -\rho s \tag{3.26}$$

avec $s = C_v \log\left(\frac{p}{\rho^\gamma}\right)$ l'entropie par unité de masse (entropie physique). $\mathcal{H}$ est une fonction strictement convexe de $\boldsymbol{U}$, [45]. Par conséquent, un changement de variables $\boldsymbol{U} \mapsto \boldsymbol{V}$ peut être défini de la façon suivante :

$$\boldsymbol{V} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \boldsymbol{U}} \tag{3.27}$$

où $\boldsymbol{V}$ est le vecteur représentant les variables entropiques. L'utilisation de ce changement de variables transforme le système (3.25) en :

$$\widetilde{\boldsymbol{A}}_0 \boldsymbol{V}_{,t} + \widetilde{\boldsymbol{A}}_i \boldsymbol{V}_{,i} = \left(\widetilde{\boldsymbol{K}}_{ij} \boldsymbol{V}_{,j}\right)_{,i} + \mathcal{F} \tag{3.28}$$

avec

$$\begin{aligned} \widetilde{\boldsymbol{A}}_0 &= \boldsymbol{U}_{,V} \\ \widetilde{\boldsymbol{A}}_i &= \boldsymbol{A}_i \widetilde{\boldsymbol{A}}_0 \\ \widetilde{\boldsymbol{K}}_{ij} &= \boldsymbol{K}_{ij} \widetilde{\boldsymbol{A}}_0. \end{aligned} \tag{3.29}$$

La structure de $\mathcal{H}$ permet de montrer que les matrices $\widetilde{\boldsymbol{A}}_0$, $\widetilde{\boldsymbol{A}}_i$ et $\widetilde{\boldsymbol{K}} = \left[\widetilde{\boldsymbol{K}}_{ij}\right]$ sont symétriques. De plus, $\widetilde{\boldsymbol{A}}_0$ est définie positive et $\widetilde{\boldsymbol{K}}$ est semi-définie positive. Ces propriétés dont hérite la formulation (3.28) représentent un intérêt certain, tant du point de vue de l'analyse mathématique que de la résolution numérique. En plus de ces définitions, il est utile d'exprimer le terme source $\mathcal{F}$ comme le produit d'une matrice de coefficients par le vecteur $\boldsymbol{V}$. On définit donc la matrice $\widetilde{\boldsymbol{C}}$ (non-définie de manière unique) telle que :

$$\widetilde{\boldsymbol{C}}\boldsymbol{V} = -\mathcal{F}. \tag{3.30}$$

3.3.3 Approche Galerkin moindres carrés

On considère un domaine Ω de frontière Γ. Ce domaine est subdivisé en n_{el} éléments Ω_e. La formulation variationelle Galerkin moindres carrés semi-discrétisée associée à (3.28) s'écrit : trouver $\boldsymbol{V}^h \in \mathcal{S}^h$ (espace des fonctions test) tel que pour tout $\boldsymbol{W}^h \in \mathcal{V}^h$:

$$\begin{aligned} \int_\Omega \Big(\boldsymbol{W}^h \cdot \boldsymbol{U}_{,t}(\boldsymbol{V}^h) \quad &- \quad \boldsymbol{W}^h_{,i} \cdot \boldsymbol{F}_i(\boldsymbol{V}^h) + \boldsymbol{W}^h_{,i} \cdot \widetilde{\boldsymbol{K}}_{ij} \boldsymbol{V}^h_{,j} + \boldsymbol{W}^h \cdot \widetilde{\boldsymbol{C}} \boldsymbol{V}^h \Big) \, d\Omega \\ &+ \quad \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_e} \Big(\mathcal{L}\boldsymbol{W}^h \Big) \cdot \boldsymbol{\tau} \Big(\mathcal{L}\boldsymbol{V}^h \Big) \, d\Omega \\ &+ \quad \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_e} \nu^h g^{ij} \boldsymbol{W}^h_{,i} \cdot \widetilde{\boldsymbol{A}}_0 \boldsymbol{V}^h_{,j} \, d\Omega \\ &= \quad \int_\Gamma \boldsymbol{W}^h \cdot \Big(-\boldsymbol{F}_i(\boldsymbol{V}^h) + \boldsymbol{F}^d_i(\boldsymbol{V}^h) \Big) \, n_i \, d\Gamma. \end{aligned} \tag{3.31}$$

On suppose que les fonctions dans les espaces $\mathcal{S}^h$ et $\mathcal{V}^h$ sont continues. La première et la dernière intégrale de (3.31) représentent la formulation Galerkin intégrée par parties. La deuxième intégrale constitue le terme moindres carrés, où on a noté $\mathcal{L}$ l'opérateur Navier-Stokes compressible :

$$\mathcal{L} = \widetilde{\boldsymbol{A}}_0 \frac{\partial}{\partial t} + \widetilde{\boldsymbol{A}}_i \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\widetilde{\boldsymbol{K}}_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) + \widetilde{\boldsymbol{C}}. \tag{3.32}$$

La matrice $\boldsymbol{\tau}$, appelée matrice d'échelle de temps intrinsèque, est symétrique semi-définie positive. Une définition de cette matrice, extension de celle proposée dans [46], peut être trouvée dans [70]. La troisième intégrale est le terme non-linéaire de capture des discontinuités. Le scalaire ν^h est homogène à $\mathcal{L}\boldsymbol{V}^h$ et sa définition, qui est aussi une extension de celle proposée dans [47], peut également être trouvée dans [70]. Le tenseur g^{ij} est quant à lui défini par :

$$\left[g^{ij}\right] = \left[\boldsymbol{\xi}_{,i} \cdot \boldsymbol{\xi}_{,j}\right]^{-1} \tag{3.33}$$

avec $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}(x)$ le changement de variables entre un élément quelconque et l'élément de référence.

Reste à approcher la dérivée en temps $\boldsymbol{U}_{,t}$ de la première intégrale. On utilise pour cela un schéma aux différences finies décentré d'ordre deux :

$$\boldsymbol{U}_{,t}(t_n) = \frac{3}{2}\boldsymbol{U}(t_n) - 2\boldsymbol{U}(t_{n-1}) + \frac{1}{2}\boldsymbol{U}(t_{n-2}) + \mathcal{O}\left(\Delta t^2\right). \tag{3.34}$$

La discrétisation éléments finis de la formulation Galerkin moindres carrés (3.31) implique donc la résolution, à chaque pas de temps t_n, du système d'équations non-linéaires suivant :

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{V}_n, \boldsymbol{V}_{n-1}, \boldsymbol{V}_{n-2}) = 0. \tag{3.35}$$

Dans la pratique, on utilise une interpolation $\mathbb{P}_1$ des fonctions, de sorte que les vecteurs $\boldsymbol{V}_n$ soient de taille $5 \times numnp$ où $numnp$ est le nombre de nœuds du maillage.

Le système non-linéaire (3.35) est résolu de manière itérative par une méthode de type Newton. En effectuant un développement de Taylor de $\boldsymbol{E}$, on aboutit à la résolution du système linéaire suivant :

$$\boldsymbol{M}^i \Delta \boldsymbol{V}^i = -\boldsymbol{R}^i, \tag{3.36}$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \boldsymbol{M}^i & = & \dfrac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial \boldsymbol{V}_n}(\boldsymbol{V}_n^i, \boldsymbol{V}_{n-1}, \boldsymbol{V}_{n-2}) \\ \Delta \boldsymbol{V}^i & = & \boldsymbol{V}_n^{i+1} - \boldsymbol{V}_n^i \\ \boldsymbol{R}^i & = & \boldsymbol{E}(\boldsymbol{V}_n^i, \boldsymbol{V}_{n-1}, \boldsymbol{V}_{n-2}). \end{array} \right. \tag{3.37}$$

$\boldsymbol{R}^i$ est le résidu du système non-linéaire et $\boldsymbol{M}^i$ la matrice jacobienne. C'est en fait une approximation de la matrice $\boldsymbol{M}^i$ qui est utilisée dans le code AETHER plutôt que la jacobienne exacte, voir encore [70]. Même si $\boldsymbol{M}^i$ n'est pas une jacobienne exacte, si l'algorithme converge, c'est-à-dire que $\Delta \boldsymbol{V}^i$ tend vers 0, alors le résidu s'annule à convergence et on obtient bien une solution du système (3.35).

Le système linéaire (3.36) est résolu par un algorithme itératif GMRES (*Generalized Minimal RESidual*) avec préconditionnement symétrique diagonal. Pour les calculs stationnaires, la convergence vers la solution est obtenue par itérations instationnaires avec pas de temps local (déterminé en chaque point à partir de la vitesse locale et d'un nombre de CFL fixé par l'utilisateur).

En conclusion, à convergence d'un calcul stationnaire, on obtient un vecteur de variables entropiques $\boldsymbol{V}$, de taille $5 \times numnp$, qui annule le résidu Navier-Stokes $\boldsymbol{E}$. Il s'agit exactement de l'équation d'état (3.1) dont il était question dans la section 3.2.1. Pour un calcul instationnaire, on dispose, à chaque pas de temps n d'un vecteur d'état $\boldsymbol{V}_n$ solution de (3.35), qui est lui aussi l'exact équivalent du système (3.9) de la section 3.2.2.

3.3.4 Modélisation de la turbulence

Le code AETHER intègre un grand nombre de modèles de turbulence. Nous allons décrire les principaux modèles que nous avons utilisé au cours de cette thèse. Lorsque le nombre de Reynolds caractéristique de l'écoulement considéré dépasse une certaine valeur, l'écoulement, jusqu'ici laminaire, devient turbulent. Tandis qu'un écoulement laminaire est organisé et prédictible, un écoulement turbulent présente d'importantes fluctuations aléatoires. Afin de décrire ces fluctuations caractéristiques de la turbulence, une des approches est d'avoir recours à une description statistique des équations de Navier-Stokes : c'est l'approche RANS (pour *Reynolds Averaged Navier-Stokes*).

Chaque grandeur f est ainsi décomposée en une composante moyenne $\overline{f}$ (la moyenne d'ensemble) et une fluctuation f'. En écoulement compressible, on utilise également une moyenne pondérée par la densité, la moyenne de Favre : $\widetilde{f} = \frac{\overline{\rho f}}{\overline{\rho}}$. Les équations de Navier-Stokes (3.16) une fois moyennées deviennent, [80] :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{\partial \overline{\rho}}{\partial t} + \nabla \cdot (\overline{\rho} \widetilde{\boldsymbol{u}}) & = & 0 \\ \dfrac{\partial (\overline{\rho} \widetilde{\boldsymbol{u}})}{\partial t} + \nabla \cdot (\overline{\rho} \widetilde{\boldsymbol{u}} \otimes \widetilde{\boldsymbol{u}}) & = & \nabla \cdot (\overline{\boldsymbol{\sigma}} - \overline{\rho \boldsymbol{u}' \otimes \boldsymbol{u}'}) \\ \dfrac{\partial \overline{\rho} \widetilde{E}}{\partial t} + \nabla \cdot (\overline{\rho} \widetilde{E} \widetilde{\boldsymbol{u}}) & = & \nabla \cdot (\overline{\boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{u}} - \overline{\boldsymbol{q}} - \overline{\rho E' \boldsymbol{u}'}) \end{array} \right. \tag{3.38}$$

La non-linéarité des équations de Navier-Stokes fait apparaître des inconnues supplémentaires sous la forme de corrélations entre fluctuations. Les corrélations entre les fluctuations

de vitesse $-\overline{\rho \boldsymbol{u}' \otimes \boldsymbol{u}'}$ représentent l'effet de la turbulence sur le champ moyen et sont appelées tensions de Reynolds. Le système à résoudre comporte alors plus d'inconnues que d'équations et il est donc nécessaire d'utiliser des modèles de fermeture.

Il existe différents modèles de turbulence que l'on peut classer en fonction de leurs complexités respectives. Les modèles "au premier ordre" sont basés sur une modélisation du tenseur de Reynolds. Les plus simples utilisent des relations algébriques pour déterminer les quantités turbulentes. D'autres encore nécessitent la résolution d'une ou plusieurs équations d'advection-diffusion supplémentaires. Le plus célèbre de ces modèles est le modèle $k-\varepsilon$ qui sert à déterminer l'énergie cinétique turbulente k et le taux de dissipation ε, [54]. Il repose sur l'approximation de Boussinesq pour la modélisation du tenseur de Reynolds. Le tenseur de Reynolds est exprimé comme le produit du tenseur moyen de déformation par un coefficient μ_t appelé viscosité turbulente :

$$\mathcal{R} = -\overline{\rho \boldsymbol{u}' \otimes \boldsymbol{u}'} = \mu_t \left(\nabla \widetilde{\boldsymbol{u}} + \nabla \widetilde{\boldsymbol{u}}^T - \frac{2}{3}(\nabla \cdot \widetilde{\boldsymbol{u}})\boldsymbol{I} \right) - \frac{2}{3}\overline{\rho} k \boldsymbol{I} \tag{3.39}$$

où k représente l'énergie cinétique turbulente définie par :

$$k = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3} \widetilde{u_i' u_i'}. \tag{3.40}$$

Le dernier terme de l'équation (3.39) assure l'égalité des traces des deux tenseurs. La viscosité turbulente est calculée par :

$$\mu_t = \overline{\rho} C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \tag{3.41}$$

où C_μ est une constante déterminée de façon expérimentale, généralement égale à 0.09. Les deux équations du modèle $k-\varepsilon$ sont :

$$\left\{ \begin{array}{c} \dfrac{\partial \overline{\rho} k}{\partial t} + \nabla \cdot (\overline{\rho} \widetilde{\boldsymbol{u}} k) - \nabla \cdot \left(\left(\overline{\mu} + \dfrac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla k \right) = P_k - \dfrac{2}{3}\overline{\rho} k \nabla \cdot \widetilde{\boldsymbol{u}} - \overline{\rho}\varepsilon \\ \dfrac{\partial \overline{\rho}\varepsilon}{\partial t} + \nabla \cdot (\overline{\rho} \widetilde{\boldsymbol{u}} \varepsilon) - \nabla \cdot \left(\left(\overline{\mu} + \dfrac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \nabla \varepsilon \right) = C_1 \dfrac{\varepsilon}{k} P_k - \dfrac{2}{3}\overline{\rho} C_1 \varepsilon \nabla \cdot \widetilde{\boldsymbol{u}} - \overline{\rho} C_2 \dfrac{\varepsilon^2}{k} \end{array} \right. \tag{3.42}$$

où P_k désigne le terme de production de l'énergie cinétique turbulente k :

$$P_k = \mu_t \left(\nabla \widetilde{\boldsymbol{u}} + \nabla \widetilde{\boldsymbol{u}}^T - \frac{2}{3}(\nabla \cdot \widetilde{\boldsymbol{u}})\boldsymbol{I} \right) : \nabla \widetilde{\boldsymbol{u}}. \tag{3.43}$$

Les constantes σ_k, σ_ε, C_1 et C_2 sont déterminées de façon expérimentale, grâce à l'étude d'écoulements particuliers. On trouve dans la littérature de nombreux jeux de constantes différentes. Néanmoins, les valeurs suivantes sont généralement retenues : $\sigma_k = 1$, $\sigma_\varepsilon = 1.3$, $C_1 = 1.5$ et $C_2 = 1.92$.

Le modèle $k-\varepsilon$ que nous venons de présenter est un modèle dit "haut Reynolds" dans le sens où il n'est valable que dans des zones où l'écoulement est pleinement turbulent. Cependant, proche d'une paroi, les effets visqueux sont dominants et le modèle doit être modifié. Les modèles "bas Reynolds" sont eux basés sur les équations (3.42) mais où certaines constantes sont multipliées par des fonctions d'amortissement. Chez Dassault Aviation, le modèle de référence le plus couramment utilisé est un modèle bicouche : un modèle $k-\varepsilon$ standard est utilisé dans la zone pleinement turbulente alors que dans la zone de proche paroi on utilise une seule équation de transport sur k, ε étant déterminé par une expression algébrique, [48].

Les modèles basés sur l'hypothèse de Boussinesq comme le $k-\varepsilon$ peuvent être mal adaptés à la simulation d'écoulements présentant d'importantes zones de recirculation. En particulier, dans l'hypothèse de Boussinesq, la turbulence est supposée isotrope, et donc les modèles basés sur cette hypothèse vont mal représenter certains phénomènes, comme les tourbillons par

exemple, qui seront trop dissipés. Nous avons donc également utilisé au cours de cette thèse des modèles de type EARSM (pour *Explicit Algebraic Reynolds Stress Model*). Ces modèles réutilisent les deux mêmes équations de transport de la turbulence (par exemple celles du modèle $k-\varepsilon$ dans nos simulations), mais complètent l'approximation de Boussinesq pour décrire le tenseur de Reynolds. Le tenseur de Reynolds est en fait séparé en deux parties : une partie isotrope, correspondant à l'approximation de Boussinesq, plus une partie anisotrope. Les deux équations de transport servent à calculer la partie isotrope du tenseur,l tandis que la partie anisotrope est calculée par des expressions purement algébrique et explicites (sans équation supplémentaire à résoudre). Mentionnons également que les développements actuels portent sur les modèles de fermeture au second ordre, comme les modèles de type RSM (*Reynolds Stress Model*), où l'évolution de chacune des composantes du tenseur de Reynolds est décrite par une équation d'advection-diffusion.

Le modèle $k-\varepsilon$ bicouche et sa variante EARSM a été utilisé dans tous les calculs stationnaires menés au cours de cette thèse. Concernant les calculs instationnaires, la simulation des grandes échelles (ou LES, *Large Eddy Simulation*), bien que disponible dans le code AETHER, [57], est encore coûteuse en temps de calcul. Nous avons donc utilisé un modèle DES (pour *Detached Eddy Simulation*), [21], qui est une méthode hybride LES/RANS : une modélisation de type RANS est utilisée dans les couches limites attachées tandis qu'une méthode LES est utilisée dans les zones où l'écoulement est décollé, moins bien représentées par une simulation RANS.

Dans le code, les équations du champ moyen (3.38) et celles de la turbulence (comme par exemple celles du modèle $k-\varepsilon$ (3.42)), ne sont pas résolues simultanément. Elles sont au contraire couplées de manière faible. A chaque itération, les équations de Navier-Stokes sont résolues par AETHER en utilisant les variables turbulentes issues du pas de temps précédent. Les équations de la turbulence sont ensuite résolues avec les nouvelles valeurs du champ moyen qui viennent d'être calculées.

3.3.5 Modélisation des générateurs de vortex mécaniques

Les générateurs de vortex mécaniques (VG) sont des moyens de contrôle passifs des décollements. Ce sont de petites surfaces aérodynamiques, le plus souvent de forme rectangulaire ou triangulaire, collées à la paroi de l'objet principal. Ces dispositifs, d'une taille comparable à la hauteur de couche limite, créent des tourbillons dans leurs sillages, lesquels permettent, par mélange, de redonner de l'énergie au fluide à l'intérieur de la couche limite, retardant ainsi la tendance au décollement de celle-ci.

Dans nos simulations numériques, les générateurs de vortex ne sont pas maillés mais modélisés par l'ajout d'un terme source aux équations de Navier-Stokes. L'utilisation d'un tel modèle de terme source présente un double avantage. On s'affranchit ainsi du maillage complet de la géométrie du générateur de vortex qui nécessiterait un raffinement excessif. De plus, le modèle va permettre, pour un maillage donné de l'objet autour duquel on veut calculer l'écoulement, de tester toutes les configurations de générateurs de vortex (nombre, position, taille, orientation) que l'on juge d'intérêt.

Le modèle de terme source disponible dans le code AETHER est dérivé de celui présenté dans [76]. D'autres modélisations existent toutefois, comme par exemple celle de [77]. Il modélise des générateurs de vortex de forme rectangulaire. Le terme source $\boldsymbol{f}_{VG}$ ajouté aux équations de Navier-Stokes (3.24) est défini de la façon suivante :

$$\boldsymbol{f}_{VG} = c\, S_{VG}\, \rho\, (\vec{n} \cdot \boldsymbol{u})\, (\vec{b} \times \boldsymbol{u}), \tag{3.44}$$

où c est une constante de modélisation (généralement prise égale à 10), S_{VG} la surface du générateur de vortex, ρ la densité et $\boldsymbol{u}$ la vitesse du fluide. Les vecteurs $\vec{n}$ et $\vec{b}$ se déduisent

quant à eux de l'orientation $\vec{t}$ du VG, conformément à la figure 3.1.

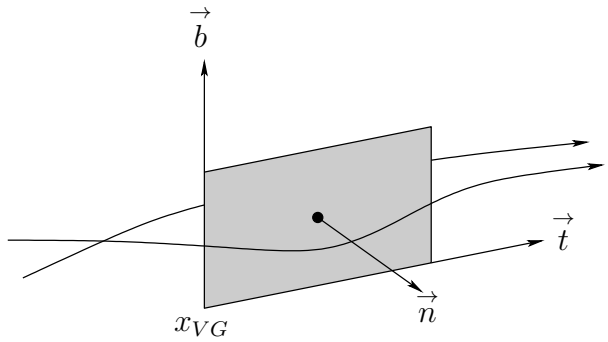

FIGURE 3.1 – Description géométrique d'un générateur de vortex mécanique.

Ainsi, la force $\boldsymbol{f}_{VG}$ ajoutée aux équations est perpendiculaire à la vitesse de l'écoulement et tend à dévier celui-ci dans une direction parallèle au générateur de vortex. Notons que, tout comme $\boldsymbol{u}$, le terme source $\boldsymbol{f}_{VG}$ est strictement nul à la paroi. Dans le code, ce terme source n'est pas appliqué exclusivement aux éléments intersectant la surface décrivant le générateur de vortex. La force $\boldsymbol{f}_{VG}$ est au contraire multipliée par une fonction de pondération k décroissante de la distance au VG définie de la façon suivante :

$$k(x) = e^{-\lambda d^2}, \tag{3.45}$$

avec d la distance au générateur de vortex et λ une constante de modélisation (également prise égale à 10). L'action de la force $\boldsymbol{f}_{VG}$ est donc distribuée de façon homogène sur un petit volume entourant le VG.

3.4 Le code adjoint

Le calcul du gradient topologique ou du gradient paramétrique fait à chaque fois intervenir la résolution d'un problème adjoint aux équations de départ. L'objet de cette section est la description du code calculant l'état adjoint. Rappelons que c'est une approche discrète du calcul de l'adjoint qui est à la base du développement de ce code : le code adjoint est obtenu directemenet à partir d'AETHER par différentiation automatique et non par discrétisation des équations adjointes continues. Mentionnons également le fait que seule la partie Navier-Stokes d'AETHER est pour l'instant différentiée et non la partie calculant la turbulence. D'autres approximations de ce type dans le calcul de l'état adjoint sont comparées dans [29].

3.4.1 Formulation du problème adjoint

Reprenons tout d'abord la formulation du problème adjoint stationnaire introduite au chapitre 2, section 2.7 ainsi qu'à la section 3.2.1 du présent chapitre. Soit un vecteur d'état $\boldsymbol{V}$ solution des équations de Navier-Stokes. C'est le résultat d'un calcul stationnaire mené avec le code AETHER qui annule le résidu Navier-Stokes $\boldsymbol{E}$, c'est-à-dire qui est solution du problème non-linéaire (3.1). On cherche alors l'état adjoint $\boldsymbol{P}$ solution du problème linéaire suivant (équivalent au problème (3.6)) :

$$\left(\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial \boldsymbol{V}} + \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial \boldsymbol{f}}\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{V}}\right)^T \boldsymbol{P} = \left(\frac{dj}{d\boldsymbol{V}}\right)^T. \tag{3.46}$$

Afin de résoudre ce problème, nous devons disposer d'un code calculant la matrice $\left(\frac{d\boldsymbol{E}}{d\boldsymbol{V}}\right) = \left(\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial \boldsymbol{V}} + \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial \boldsymbol{f}}\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{V}}\right)$ et le vecteur $\left(\frac{dj}{d\boldsymbol{V}}\right)$. De plus, pour calculer le gradient paramétrique, nous avons également besoin du terme $\left(\frac{d\boldsymbol{E}}{dl}\right) = \left(\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial \boldsymbol{f}}\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial l}\right)$. Toutes ces dérivées seront obtenues en utilisant le logiciel de différentiation automatique de code TAPENADE de l'INRIA, [42]. Nous développons dans la prochaine section le principe de fonctionnement de la différentiation automatique. Mentionnons toutefois le fait que le calcul de la fonction coût j et de sa dérivée est réalisé par un module extérieur au code AETHER.

Pour un problème instationnaire, on dispose à chaque pas de temps n d'un vecteur d'état $\boldsymbol{V}_n$ annulant le résidu Navier-Stokes, c'est-à-dire solution du problème non-linéaire (3.9). On cherche alors l'état adjoint $\boldsymbol{P}_n$ solution à chaque pas de temps n du problème linéaire suivant (équivalent au problème (3.13)) :

$$\left(\frac{\partial \boldsymbol{E}_n}{\partial \boldsymbol{V}_n} + \frac{\partial \boldsymbol{E}_n}{\partial \boldsymbol{f}}\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{V}_n}\right)^T \boldsymbol{P}_n = \left(\frac{dj_n}{d\boldsymbol{V}}\right)^T - \left(\frac{\partial \boldsymbol{E}_{n+1}}{\partial \boldsymbol{V}_n}\right)^T \boldsymbol{P}_{n+1} - \left(\frac{\partial \boldsymbol{E}_{n+2}}{\partial \boldsymbol{V}_n}\right)^T \boldsymbol{P}_{n+2}. \tag{3.47}$$

En plus des termes intervenant déjà dans le problème adjoint stationnaire, nous devons donc calculer les termes supplémentaires $\left(\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial \boldsymbol{V}_{n-1}}\right)$ et $\left(\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial \boldsymbol{V}_{n-2}}\right)$ qui représentent la dérivée du résidu par rapport aux états des pas de temps précédents. La résolution du problème adjoint instationnaire (3.47) implique de plus d'avoir stocké la solution Navier-Stokes $\boldsymbol{V}_n$ du problème direct à chaque pas de temps. Ceci pose rapidement des difficultés d'ordre informatique. En effet, le stockage de l'état à chaque pas de temps peut vite devenir coûteux en terme de place mémoire. Afin d'économiser de la place mémoire, différentes solutions peuvent être envisagées, voir le chapitre 5. Celle que nous avons testé consiste à ne stocker l'état qu'en certains pas de temps uniquement puis de reconstituer l'ensemble des $\boldsymbol{V}_n$, quelque soit l'instant n, par interpolation.

3.4.2 Dérivation numérique de code

Plusieurs stratégies peuvent être mises en œuvre lorsqu'il s'agit de calculer la dérivée d'une fonction décrite dans un code informatique. On peut en effet calculer une dérivée numérique par différences finies, par méthode complexe, [58] ou, ce qui a été retenu ici, utiliser un outil de différentiation automatique de code, [42]. Pour simplifier, considérons une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que nous souhaitons différentier et détaillons le calcul de sa dérivée pour chacune des trois méthodes.

3.4.2.1 Différences finies

On peut approcher la dérivée $f'(x)$ par une formule de différences finies décentrée :

$$DF_1(x) = \frac{f(x+\varepsilon) - f(x)}{\varepsilon}, \tag{3.48}$$

avec ε le pas de la différence finie. Cette approximation de la dérivée $f'(x)$ est en $\mathcal{O}(\varepsilon)$. Une meilleure approximation est donnée par la formule centrée :

$$DF_2(x) = \frac{f(x+\varepsilon) - f(x-\varepsilon)}{2\varepsilon}, \tag{3.49}$$

qui elle est en $\mathcal{O}\left(\varepsilon^2\right)$. L'avantage des formules de différences finies est qu'elles sont simples à mettre en œuvre informatiquement. Par contre, on est confronté au problème du choix du pas ε : il doit être suffisament petit pour minimiser l'erreur de troncature, sans toutefois risquer de tomber sous la précision machine lorsque l'on calcule les différences du type $f(x+\varepsilon) - f(x)$.

3.4.2.2 Dérivation par méthode complexe

Supposons que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ puisse être étendue en une fonction complexe holomorphe, notée encore $f : (x+iy) \mapsto f(x+iy) = u(x+iy) + iv(x+iy)$. Les équations de Cauchy-Riemann impliquent alors :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{3.50}$$

On peut utiliser la première de ces équations pour estimer simplement la dérivée première des fonctions réelles. En effet, cette équation se réécrit :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{v(x+i(y+\varepsilon)) - v(x+iy)}{\varepsilon}. \tag{3.51}$$

Comme la fonction f que nous considérons est en fait à variable réelle et à valeur réelle, nous sommes dans le cas où $y = 0$, $u(x) = f(x)$ et $v(x) = 0$. On obtient donc :

$$f'(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{Im\left[f(x+i\varepsilon)\right]}{\varepsilon}, \tag{3.52}$$

ce qui donne la formule approchant la dérivée suivante :

$$DC(x) = \frac{Im\left[f(x+i\varepsilon)\right]}{\varepsilon}. \tag{3.53}$$

Cette approximation de la dérivée est en $\mathcal{O}\left(\varepsilon^2\right)$ et ne pose pas de problème quant au choix du pas ε : il peut être pris aussi petit que l'on veut puisque la formule (3.53) n'implique pas le calcul d'une différence. Par contre, l'utilisation d'une telle méthode nécessite d'étendre le code informatique de base en variables complexes. De plus, certaines fonctions doivent être redéfinies pour que leurs extensions complexes soient holomorphes.

3.4.2.3 Différentiation automatique

La méthode de dérivation numérique retenue dans le développement du code AETHER adjoint a été l'utilisation du logiciel de différentiation automatique TAPENADE. Plus précisément, on donne en entrée à TAPENADE le code source de la routine à différentier et celui-ci retourne un code augmenté calculant la dérivée exacte des variables de sortie par rapport aux variables d'entrée. Supposons que notre fonction f à différentier soit définie de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ et composée de p instructions, *i.e.* $f(x) = f_p \circ f_{p-1} \circ \ldots \circ f_1(x)$. Appelons également x_k la valeur des variables après chaque instruction, *i.e.* $x_0 = x$, $x_k = f_k(x_{k-1})$. La jacobienne de la fonction f s'écrit alors :

$$f'(x) = f'_p(x_{p-1}) \cdot f'_{p-1}(x_{p-2}) \cdot \ldots \cdot f'_1(x_0). \tag{3.54}$$

En pratique, la jacobienne $f'(x)$ peut être coûteuse à calculer et à stocker. L'équation (3.54) fait en effet intervenir des multiplications successives de matrices d'une taille de l'ordre de $m \times n$. Plutôt que de calculer la jacobienne $f'(x)$, le logiciel TAPENADE fonctionne selon deux modes de différentiation :

3.4.2.3.1 Le mode direct Dans ce mode, TAPENADE calcule la dérivée directionnelle de f en x dans la direction d soit :

$$f'(x) \cdot d = f'_p(x_{p-1}) \cdot f'_{p-1}(x_{p-2}) \cdot \ldots \cdot f'_1(x_0) \cdot d. \tag{3.55}$$

Le calcul de $f'(x) \cdot d$ se fait ainsi facilement de la droite vers la gauche de l'équation (3.55), c'est-à-dire dans le même ordre que les instructions du programme de départ. Dans la pratique, TAPENADE différentie ligne à ligne les différentes instructions du code source pour calculer la dérivée $f'(x) \cdot d$.

3.4.2.3.2 Le mode inverse Dans ce mode, TAPENADE calcule l'action de la jacobienne transposée $f'^T(x)$ sur un vecteur df de $\mathbb{R}^m$, soit :

$$f'^T(x) \cdot df = f_1'^T(x_0) \cdot f_2'^T(x_1) \cdot \ldots \cdot f_{p-1}'^T(x_{p-2}) \cdot f_p'^T(x_{p-1}) \cdot df. \tag{3.56}$$

Ce calcul s'execute également de la droite vers la gauche puisque les produits matrices $\times$ vecteurs sont bien moins coûteux à réaliser que les produits matrices $\times$ matrices. L'inconvénient est que la différentiation du code source doit alors se faire dans l'ordre inverse des instructions de départ. Ceci implique que TAPENADE doit stocker un certain nombre de variables intermédiaires au cours du calcul de la fonction f pour ensuite les réutiliser lors du calcul de la dérivée $f'^T(x) \cdot df$.

L'avantage principal du mode inverse est qu'il permet de calculer la dérivée par rapport à toutes les variables d'entrée à la fois, alors qu'avec le mode direct on ne dispose que d'une dérivée directionnelle. Cependant, ce mode produit un code source plus difficile à lire que le mode direct, qui lui fonctionne de façon plus intuitive.

3.4.3 Développements apportés au code adjoint et validation

Une version du code adjoint utilisée dans le cadre de l'optimisation de formes en régime stationnaire était disponible au début de nos travaux. Nous avons participé au cours de cette thèse à la poursuite du développement de ce code et à sa validation. Les développements que nous allons décrire ici ont tout d'abord été mis au point sur les routines 2D du code avant d'être transposés sur leurs versions 3D qui ont été utilisées dans les cas d'application présentés dans les chapitres 4 et 5. En particulier, nous avons intégré un équivalent 2D du terme source modélisant l'action des générateurs de vortex. Bien que non physique, ce modèle de terme source nous a permis de tester et de valider notre stratégie de dérivation des différentes routines impactées et de transposer ces développements plus rapidement dans les routines 3D.

L'état adjoint utilisé en optimisation de forme, [79], est solution du même problème que le problème (3.46) introduit ici. Seuls les termes représentant la dérivée du résidu $\boldsymbol{E}$ par rapport au terme source $\boldsymbol{f}$ intervenant dans le calcul de l'adjoint (3.46) et dans le gradient paramétrique (3.7) n'étaient pas intégrés. Un premier travail a donc été de coder ces termes et de les valider. Le calcul du terme source modélisant l'action des générateurs de vortex est découpé en plusieurs endroits du code AETHER. Avant toute chose, AETHER calcule le support k des générateurs de vortex défini en (3.45), qui est fixe tout au long des itérations. Puis, à chaque itération de résolution du problème non-linéaire, on effectue un changement de variable entre les variables entropiques $\boldsymbol{V}$ et les variables primitives $\boldsymbol{Q} = (\rho, \boldsymbol{u}, T)^T$ qui sont à leur tour utilisées dans le calcul de la force $\boldsymbol{f}_{VG}$ défiinie en (3.44). Le terme source $k\boldsymbol{f}_{VG}$ est alors intégré au calcul du résidu $\boldsymbol{E}$. Il est bien entendu hors de question de demander au logiciel de différentiation automatique de différentier d'un seul coup toutes ces étapes. En effet, on ne peut pas donner en entrée de TAPENADE la routine de plus haut niveau d'AETHER et laisser le logiciel gérer toutes les dépendances, entrées-sorties, parallélisations, etc. Nous avons au contraire utilisé TAPENADE en mode direct afin de différentier de façon indépendante chacune des étapes que nous venons de décrire, par rapport aux variables d'état $\boldsymbol{V}$ et par rapport aux paramètres des générateurs de vortex l. La communication entre ces dérivées et la parallélisation est quant à elle codée "à la main".

D'autre part, le code adjoint initial, disponible au début de nos travaux, était seulement stationnaire. Il a donc été nécessaire dans un second temps d'étendre le code en une version instationnaire. Afin de développer cette nouvelle version, il a fallu différentier le résidu $\boldsymbol{E}$ par rapport aux états des pas de temps précédents $\boldsymbol{V}_{n-1}$ et $\boldsymbol{V}_{n-2}$.

Dans le but de valider les termes faisant intervenir les différentes routines différentiées par TAPENADE, on les compare aux formules de différences finies décentrées et centrées données en (3.48) et (3.49). Pour chacun des développements que nous avons intégré au code adjoint,

nous avons ainsi calculé les expressions suivantes :

$$E_1(\varepsilon) = \frac{\left\| \dfrac{f(x+\varepsilon dx) - f(x)}{\varepsilon} - \left[\dfrac{df}{dx}\right]_{tap}(x)dx \right\|}{\left\| \left[\dfrac{df}{dx}\right]_{tap}(x)dx \right\|} \tag{3.57}$$

et

$$E_2(\varepsilon) = \frac{\left\| \dfrac{f(x+\varepsilon dx) - f(x-\varepsilon dx)}{2\varepsilon} - \left[\dfrac{df}{dx}\right]_{tap}(x)dx \right\|}{\left\| \left[\dfrac{df}{dx}\right]_{tap}(x)dx \right\|}, \tag{3.58}$$

où on a noté $\left[\dfrac{df}{dx}\right]_{tap}$ les dérivées obtenues en utilisant TAPENADE. Si ces dernières sont exactes, alors les quantités E_1 et E_2 décroissent respectivement en ε et en ε^2. On présente dans les figures 3.2 à 3.5 la validation des dérivées globales $\left(\dfrac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial \boldsymbol{f}}\dfrac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{V}}\right)$, $\left(\dfrac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial \boldsymbol{f}}\dfrac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial l}\right)$, $\left(\dfrac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial \boldsymbol{V}_{n-1}}\right)$ et $\left(\dfrac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial \boldsymbol{V}_{n-2}}\right)$ que nous avons intégré dans le code adjoint. Le cas test de validation considéré ici concerne l'écoulement autour d'un cylindre en trois dimensions pour un nombre de Mach égal à 0.2. Chaque calcul de résidu $\boldsymbol{E}$ est réalisé à turbulence figée, puisque les modèles de turbulence ne sont pour l'instant pas différentiés dans le code adjoint. Sur les schémas 3.2 à 3.5, on trace donc l'évolution des erreurs E_1 et E_2 en fonction du pas de différences finies ε en échelle logarithmique. On constate une décroissance de ces erreurs avec des pentes d'ordre 1 et d'ordre 2 jusqu'à ce que la valeur de ε entraîne progressivement une annulation de la dérivée calculée par différences finies et une remontée de l'erreur. Remarquons toutefois la présence d'une rupture de pente sur l'erreur E_2 des figures 3.2 et 3.3. Malgré cela, la pente étant correcte avant et après cette anomalie, nous considérons que les routines différentiées correspondantes sont validées.

3.4.4 Résolution du problème linéaire adjoint

La méthode de résolution du problème linéaire (3.46) est la même que celle du système (3.36) du code AETHER : l'algorithme itératif GMRES, [68]. Afin d'obtenir des gradients corrects, ce système linéaire doit être résolu avec une grande précision (on demande généralement une décroissance du résidu de cinq à dix ordres). Il est classiquement reconnu que de tels niveaux de convergence du problème adjoint sont numériquement difficiles à obtenir. C'est pour cette raison que la matrice du problème est doublement préconditionnée : d'abord par un préconditionnement symétrique bloc diagonal, puis par un préconditionnement ILDU (*Incomplete Lower Diagonal Upper*) ou SSOR (*Symetric Successive Over Relaxation*). Ces deux dernières méthodes donnent des résultats globalement équivalents pour la résolution du système linéaire adjoint.

Avec une méthode itérative de type GMRES, la convergence du résidu du système linéaire dépend également de la dimension de l'espace de Krylov qu'il a été possible d'allouer en mémoire. Les tableaux qu'il est nécessaire de stocker sont en effet de l'ordre du nombre de degrés de liberté multiplié par la dimension de l'espace de Krylov. Avec un espace de Krylov trop petit, il est nécessaire d'effectuer des redémarrages de l'algorithme GMRES. Nous avons constaté que la convergence de la méthode était très sensible à ces redémarrages : il arrive que le résidu stagne sur de nombreuses itérations avant de se remettre à diminuer. C'est pour cette raison que, dans

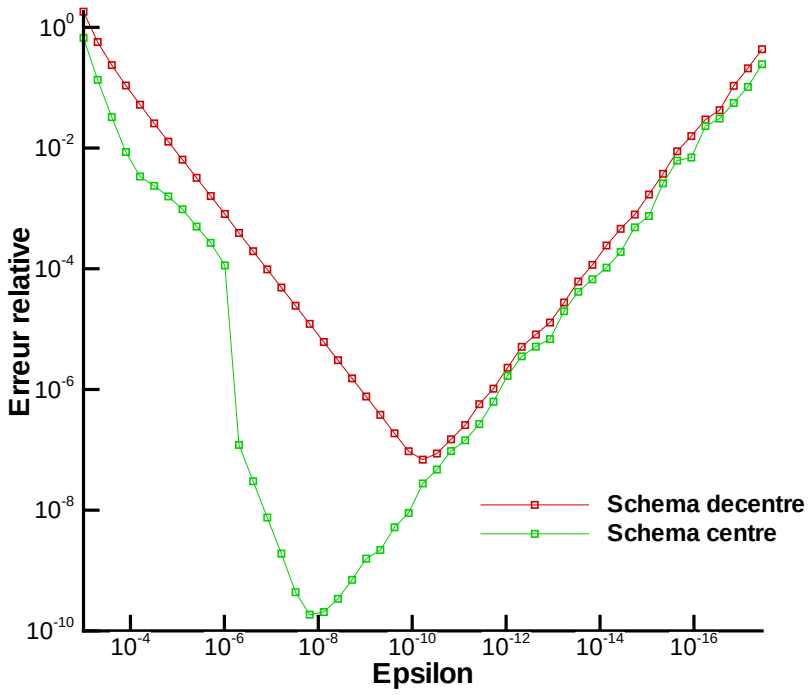

FIGURE 3.2 – Validation du terme $\left(\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial \boldsymbol{f}} \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{V}}\right)$.

la pratique, on essaie d'allouer un espace de Krylov de taille maximale afin d'éviter autant que possible les redémarrages.

3.4.5 Les différentes formulations du gradient topologique

Différentes formulations du gradient topologique dans le cas stationnaire ont été intégrées au code AETHER adjoint. La première est celle établie dans le chapitre 2 section 2.7 et rappelée dans la section 3.2.1 du présent chapitre. Il s'agit simplement du produit scalaire entre l'état adjoint et la force modélisant le générateur de vortex que l'on souhaite ajouter à l'écoulement :

$$g_1 = \boldsymbol{P}^T \chi^\delta \boldsymbol{f}(\boldsymbol{V}, l). \tag{3.59}$$

Afin de calculer ce produit scalaire, il convient donc, pour chaque point du maillage surfacique décrivant l'objet autour duquel l'écoulement est simulé, de calculer la force modélisant un générateur de vortex placé en ce point et d'en faire le produit scalaire avec l'adjoint. Ici, le support de la force noté χ^δ est celui donné par la fonction de pondération k défini en (3.45). Il dépend de la taille, fixée par l'utilisateur, du VG que l'on souhaite ajouter.

Une deuxième formulation du gradient topologique qui a été intégrée au code adjoint consiste à effectuer ce même produit scalaire, mais uniquement sur les éléments intersectant la géométrie du générateur de vortex à ajouter. Le produit scalaire est donc calculé sur un volume plus petit que pour l'expression (3.59). En notant χ^{VG} le volume constitué des éléments intersectant le générateur de vortex, on calcule donc :

$$g_2 = \boldsymbol{P}^T \chi^{VG} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{V}, l). \tag{3.60}$$

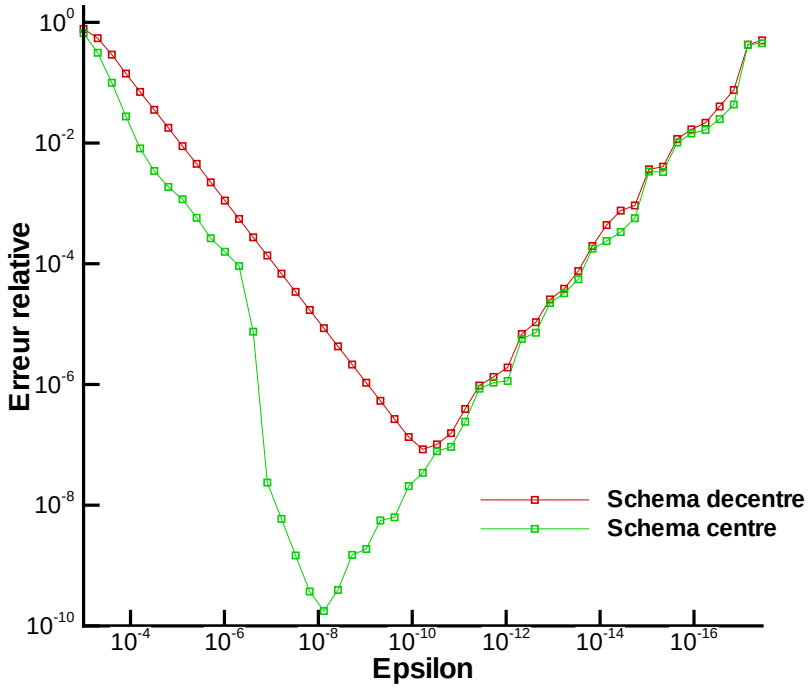

FIGURE 3.3 – Validation du terme $\left(\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial \boldsymbol{f}}\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial l}\right)$.

La troisième formulation est basée sur le fait que, pour un terme source suffisamment loin du bord (ce qui n'est pas strictement le cas ici), le gradient topologique est simplement donné par le produit au centre de la perturbation de la force par l'état adjoint. Pour un terme source modélisant un générateur de vortex de taille donnée que l'on souhaite ajouter, on calcule ainsi le barycentre de la force et on effectue le produit par l'état adjoint en ce point uniquement. En notant x_b ce barycentre, on calcule ainsi :

$$g_3 = \boldsymbol{P}(x_b)\boldsymbol{f}(\boldsymbol{V}, l, x_b). \tag{3.61}$$

Enfin, dans la section 2.2.3 du chapitre 2, on calcule pour le problème modèle du laplacien le gradient topologique pour un terme source centré en un point du bord et nul au bord. C'est exactement le cas de figure qui se présente pour le terme source modélisant un générateur de vortex. Celui-ci est collé à la paroi de l'objet, donc centré en un point du bord du domaine de calcul. De plus, comme la vitesse de l'écoulement $\boldsymbol{u}$ est nulle à la paroi, la force $\boldsymbol{f}_{VG}$ donnée par (3.44) l'est également. La quatrième et dernière formulation du gradient topologique que nous avons codé a donc été celle démontrée dans le théorème 3 du chapitre 2, à savoir :

$$g_4 = \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial n}(x_0)\frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial n}(x_0). \tag{3.62}$$

Il s'agit donc cette fois de calculer, pour chaque nœud de la paroi, la dérivée normale de la force et de l'adjoint, et simplement d'en faire le produit. Remarquons que si la dérivée $\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial n}$ s'annule sur le bord du domaine, il faut alors poursuivre le développement de $\boldsymbol{f}$ à l'ordre suivant. A priori, c'est cette formulation qui s'approcherait le plus du gradient topologique pour le terme source modélisant un générateur de vortex.

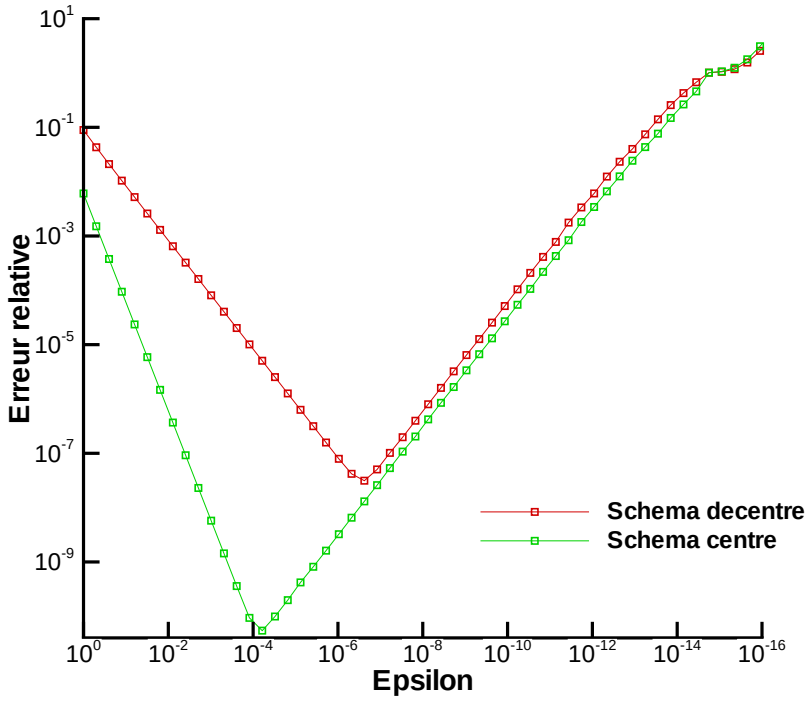

FIGURE 3.4 – Validation du terme $\left(\dfrac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial \boldsymbol{V}_{n-1}}\right)$.

Ces diverses formulations de gradient topologique sont comparées dans le chapitre 4. Elles donnent des cartographies sensiblement équivalentes, bien que les formulations (3.61) et (3.62) donnent des résultats un peu plus "bruités". Dans la pratique, on privilégiera la formulation (3.59).

3.4.6 Prise en compte de la géométrie

Lorsque l'on calcule le gradient topologique d'un générateur de vortex, on fait varier la position du terme source qui le modélise, tout en laissant fixes ses autres paramètres. Le premier paramètre, la taille du VG donnée par sa hauteur et sa longueur, sert en particulier à déterminer le support sur lequel sont calculés les produits scalaires des expressions (3.59) et (3.60) et le barycentre x_b intervenant dans l'expression (3.61). L'orientation du générateur de vortex est également un paramètre fixe dans le calcul du gradient topologique. Dans le code AETHER, cette orientation est donnée par l'utilisateur sous la forme d'un vecteur $\vec{t}$, représenté sur la figure 3.1. En fixant ainsi les coordonnées cartésiennes de ce vecteur pour le calcul complet du gradient topologique, on peut se trouver face à une difficulté. En effet, cette orientation peut ne pas être tangente à la géométrie en tous les points de la paroi de l'objet sur lequel on souhaite ajouter un générateur de vortex. Ceci est en particulier le cas pour un calcul sur la paroi d'une manche à air. De plus, il est plus aisé de donner un angle de VG par rapport à la direction de l'écoulement plutôt que les coordonnées cartésiennes d'un vecteur.

Dans ce but, plutôt que d'avoir à fixer l'orientation $\vec{t}$ en coordonnées cartésiennes, nous avons intégré au calcul du gradient topologique un module de description de la géométrie. La description surfacique 2D de l'objet 3D peut ainsi être paramétrée par deux coordonnées (u, v).

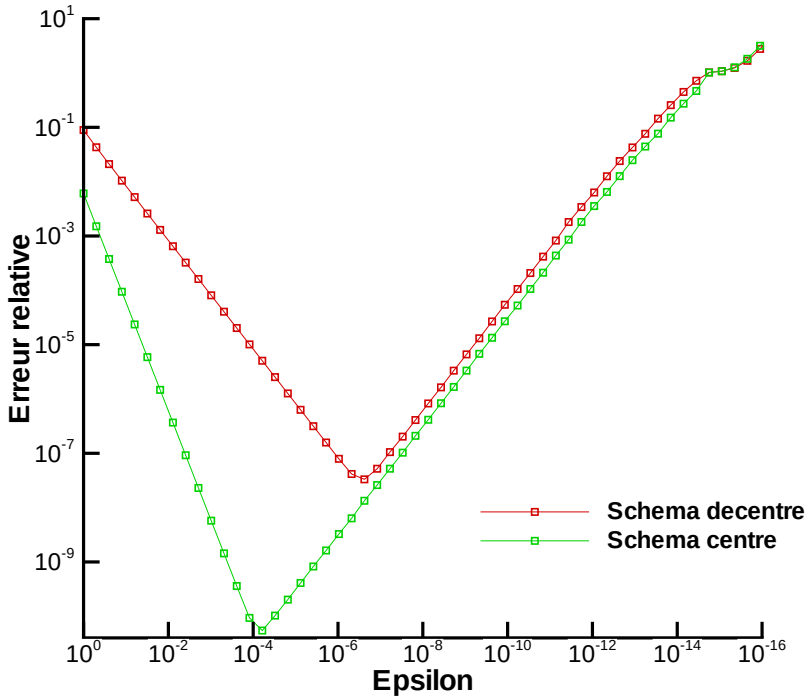

FIGURE 3.5 – Validation du terme $\left(\dfrac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial \boldsymbol{V}_{n-2}}\right)$.

L'orientation du générateur de vortex est alors prise fixe dans les coordonnées (u, v). Celle-ci sera donc toujours tangente à la géométrie et fera un angle à peu près constant avec l'écoulement extérieur qui a pour direction approximative $(u, v) = (1, 0)$.

Ce même module de description de la géométrie est également utilisé dans la boucle automatique d'optimisation paramétrique. En effet, ce sont les coordonnées du générateur de vortex ainsi que son orientation par rapport à la direction $(u, v) = (1, 0)$ qui sont utilisées comme paramètres d'optimisation. Nous décrivons plus en détail le fonctionnement de la boucle d'optimisation paramétrique dans la section suivante.

La figure 3.6 présente la géométrie d'une manche à air coudée en forme de S. Les vecteurs u et v paramétrant la géométrie sont respectivement représentés en jaune et en bleu.

3.5 La boucle d'optimisation paramétrique

3.5.1 Description de la boucle

La boucle d'optimisation paramétrique que nous avons développé dans cette thèse, écrite en Python, se base sur la boucle d'optimisation de formes utilisée chez Dassault Aviation, [79], [26]. Son fonctionnement est néanmoins plus simple puisque l'optimisation des paramètres des générateurs de vortex se fait à géométrie fixée. Cette boucle sert à optimiser de façon automatique les cinq valeurs définissant un générateur de vortex : le couple (u, v) représente la position du VG sur la paroi de l'objet ; l'angle θ donne l'orientation du VG par rapport à la direction référence $(u, v) = (1, 0)$; les deux derniers paramètres, la longueur l et la hauteur h, fixent la taille du VG. Ces cinq paramètres permettent ainsi de décrire complètement un générateur de vortex. La boucle permet également de gérer l'optimisation simultannée de plusieurs VG. Une

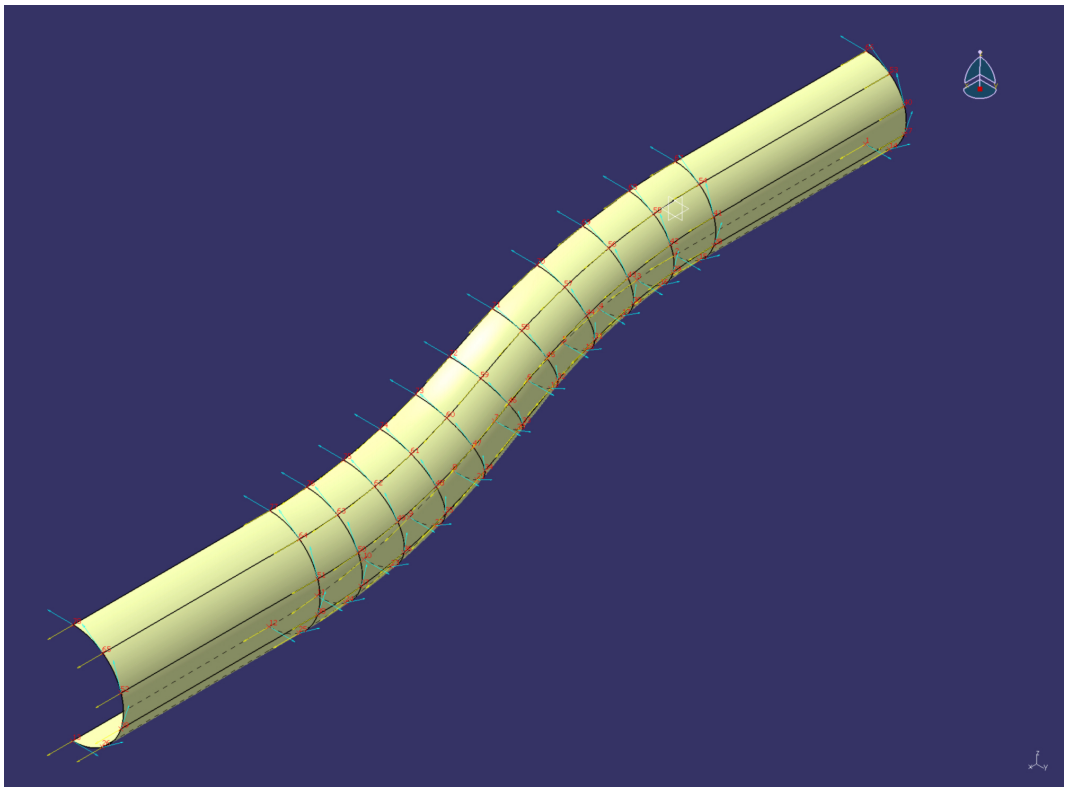

FIGURE 3.6 – Géométrie d'une manche en à air coudée.

fois que les paramètres initiaux de chacun des générateurs de vortex à optimiser sont entrés par l'utilisateur, les modules suivant s'enchaînent de manière automatique :

1. Module géométrique : il se charge du calcul du changement de variables entre les paramètres d'optimisation (u, v, θ) traités par la boucle d'optimisation d'une part et les vecteurs position $\vec{x}$ et orientation $\vec{t}$ du générateur de vortex tels qu'utilisés dans AETHER. Ce module calcule également la matrice jacobienne de ce changement de variable qui sera utilisée dans le code AETHER adjoint.
2. Calcul Navier-Stokes : le calcul de l'écoulement contrôlé à l'aide des générateurs de vortex définis par les variables d'optimisation est réalisé par le code AETHER. La description du code AETHER a fait l'objet de la section 3.3 du présent chapitre.
3. Calcul de la fonction coût : à partir de la solution calculée par AETHER, *i.e.* du vecteur d'état $\boldsymbol{V}$, ce module calcule la fonction coût associée $j(\boldsymbol{V})$ ainsi que sa dérivée $\left(\dfrac{\partial j}{\partial \boldsymbol{V}}\right)$ nécessaire à la résolution du problème adjoint. Un grand nombre de fonctions coût sont disponibles dans ce module. Celles couramment utilisées pour les écoulements de manches à air coudées sont le rendement et le *swirl* calculés dans un plan (généralement le plan de sortie) de la manche. Ces deux fonctions seront définies plus précisément dans le chapitre 4. Pour les écoulements autour de profils d'ailes, les fonctions coûts généralement utilisées sont celles calculant les efforts en pression, plus particulièrement la trainée C_x et la portance C_z. Nous n'avons pas eu de développements à apporter à ce module au cours de cette thèse.
4. Calcul du gradient : le calcul de la dérivée de la fonction coût j par rapport aux variables d'optimisation (u, v, θ, l, h) est réalisé dans le code AETHER adjoint. Comme décrit dans la section 3.4, ce code se charge, à partir du vecteur d'état et de la dérivée de la fonction

coût issus des deux précédentes étapes de la boucle, de résoudre le problème adjoint (3.46). L'état adjoint est ensuite utilisé pour calculer la dérivée de la fonction coût par rapport aux paramètres des générateurs de vortex à l'aide de l'expression (3.7), d'abord en variables cartésiennes, puis en variables d'optimisation à l'aide de la jacobienne du changement de variable calculé par le module géométrique. Comme nous le verrons dans la section suivante, la résolution du problème adjoint peut ne pas être effectuée à chaque cycle de la boucle, suivant que l'optimiseur soit à une étape de calcul d'une direction de descente ou de recherche linéaire.

5. Optimiseur : à partir de la fonction coût et de son gradient, le module optimiseur calcule de nouvelles valeurs des variables d'optimisation. Les principaux algorithmes d'optimisation utilisés dans cette thèse sont décrits dans la section suivante.

La succession de ces cinq modules constitue un cycle de la boucle d'optimisation. En toute rigueur, on devrait poursuivre l'optimisation tant qu'un certain critère d'arrêt de l'optimiseur n'est pas satisfait. Dans la pratique, on se satisfait de quelques (autour de la vingtaine) cycles d'optimisation seulement. Tout d'abord, le temps de calcul conséquent d'une simulation d'écoulement par AETHER ainsi que de la résolution du problème adjoint fait que l'on ne peut pas se permettre un trop grand nombre de cycles. D'autre part, les valeurs initiales des variables d'optimisation sont en général relativement proches d'un minimum local. Pour l'ajout d'un nouveau générateur de vortex, la position correspond au minimum de gradient topologique précédemment calculé. Les autres paramètres du VG sont donnés par les règles classiques utilisées par les aérodynamiciens : sa hauteur est de l'ordre de l'épaisseur de couche limite et sa longueur vaut deux à quatre fois la hauteur. L'orientation du VG par rapport à l'écoulement extérieur est quant à elle d'une trentaine de degrés. Les valeurs des variables d'optimisation sont donc contraintes à varier dans des bornes relativement petites et les plus gros gains observés sur la fonction coût se font généralement en tout début d'optimisation.

3.5.2 Les algorithmes d'optimisation

Les algorithmes d'optimisation disponibles chez Dassault Aviation sont bien adaptés à la problématique de l'optimisation de formes en aérodynamique. La forme intiale donnée à l'optimiseur est en général déjà proche de l'optimum recherché. De plus, les simulations Navier-Stokes 3D étant coûteuses à réaliser, l'évaluation des fonctions (coût et contraintes) peut demander plusieurs heures de calcul. On est donc intéressés à trouver un minimum local en peu d'itérations. D'autre part, les problèmes traités font en général intervenir la prise en compte de contraintes complexes (par exemple minimisation de la trainée d'un profil d'aile, la portance devant rester supérieure à une valeur seuil). Les algorithmes de type SQP (*Sequential Quadratic Programming*) et IPA (*Interior Point Algorithm*) que nous allons évoquer ici sont des méthodes d'optimisation avec gradient (donc efficaces concernant la recherche d'un minimum local) et intégrant le traitement des contraintes (sans terme de pénalisation dont le coefficient peut être problématique à paramétrer). Bien que les optimisations paramétriques de générateurs de vortex que nous présentons dans le chapitre 4 soient sans contraintes (autres que les bornes imposées aux variables d'optimisation), ce sont tout de même les algorithmes IPA et SQP qui ont été utilisés.

Nous allons maintenant décrire brièvement ces deux familles d'algorithmes. Pour plus de détails, on revoie aux références [74], [44], [72], [73]. Intéressons-nous tout d'abord au problème d'optimisation suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Minimiser} & f(x) \\ \text{Soumis à} & \left\{ \begin{array}{lcll} g_i(x) & \leq & 0, & i = 1, \ldots, m \\ h_i(x) & = & 0, & i = 1, \ldots, p \end{array} \right. \end{array} \right. \tag{3.63}$$

où x est un vecteur de $\mathbb{R}^n$ représentant les n variables d'optimisation et f, g_i, h_i sont des fonctions régulières de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. On note $g(x) = [g_1(x), \ldots, g_m(x)]^T$ et $h(x) = [h_1(x), \ldots, h_p(x)]^T$.

En introduisant les variables duales $\lambda \in \mathbb{R}^m$ et $\mu \in \mathbb{R}^p$, on associe au problème (3.63) le lagrangien suivant :

$$l(x, \lambda, \mu) = f(x) + \lambda^T g(x) + \mu^T h(x). \tag{3.64}$$

Les conditions nécessaires d'optimalité de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) impliquent alors que si $x^\star$ est un minimum local du problème (3.63) alors il existe $\lambda^\star \in \mathbb{R}^m$ et $\mu^\star \in \mathbb{R}^p$ tels que :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \nabla f(x^\star) + \nabla g(x^\star)\lambda^\star + \nabla h(x^\star)\mu^\star & = & 0 \\ G(x^\star)\lambda^\star & = & 0 \\ h(x^\star) & = & 0 \\ g(x^\star) & \leq & 0 \\ \lambda^\star & \geq & 0 \end{array} \right. \tag{3.65}$$

où $G(x)$ est la matrice diagonale de coefficients $G_{ii}(x) = g_i(x)$.

Afin d'introduire les méthodes de type SQP, considérons le problème d'optimisation (3.63) sans les contraintes d'inégalités g_i. Les conditions de KKT s'écrivent alors pour ce problème :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \nabla f(x) + \nabla h(x)\mu & = & 0 \\ h(x) & = & 0. \end{array} \right. \tag{3.66}$$

Pour résoudre ce système, une méthode de Newton est appliquée. En effectuant un développement de Taylor en x des fonctions l et h pour calculer une direction de descente d, il vient :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \nabla f(x) + \nabla h(x)\mu + H(x, \mu)d & = & 0 \\ h(x) + \nabla h(x)^T d & = & 0 \end{array} \right. \tag{3.67}$$

où $H(x, \mu)$ est la matrice hessienne (par rapport à x) du lagrangien $l(x, \mu)$. Lorsqu'on utilise une approximation symétrique définie positive S de H, la méthode devient une méthode de quasi-Newton. Dans ces conditions, les équations (3.67) sont en fait les conditions KKT du problème en la variable d suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Minimiser} & \nabla f(x)^T d + \dfrac{1}{2} d^T S d \\ \text{Soumis à} & h(x) + \nabla h(x)^T d = 0. \end{array} \right. \tag{3.68}$$

Ce nouveau problème est un problème d'optimisation quadratique dans la mesure où la fonction objectif est quadratique et les contraintes sont linéaires. Ainsi, pour résoudre le problème d'optimisation de départ, l'approche SQP consiste à résoudre, à chaque itération, le problème (3.68) pour obtenir la direction de descente d.

L'extension au problème général (3.63) se fait en généralisant le problème quadratique (3.68) :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Minimiser} & \nabla f(x)^T d + \dfrac{1}{2} d^T S d \\ \text{Soumis à} & \left\{ \begin{array}{rcl} g(x) + \nabla g(x)^T d & \leq & 0 \\ h(x) + \nabla h(x)^T d & = & 0. \end{array} \right. \end{array} \right. \tag{3.69}$$

Il existe des algorithmes efficaces pour résoudre les problèmes quadratiques de ce type. Sans entrer dans les détails, soulignons également que, lorsqu'il existe des contraintes d'inégalités actives en x (*i.e.* telles que $g_i(x) = 0$), la solution d du problèmé (3.69) ne peut assurer l'admissibilité du prochain itéré. La direction d est alors corrigée en résolvant un deuxième problème d'optimisation quadratique. Ces techniques de résolution sont appelées techniques d'ensembles actifs.

Les méthodes de type IPA reposent quant à elles sur un algorithme de Newton pour la résolution des trois premières équations de (3.65). En effectuant un développement de Taylor autour d'un point admissible (x^k, λ^k, μ^k), on obtient le système suivant d'équations en $(d = x^{k+1} - x^k, \Delta\lambda = \lambda^{k+1} - \lambda^k, \Delta\mu = \mu^{k+1} - \mu^k)$:

$$\begin{bmatrix} H(x^k, \lambda^k, \mu^k) & \nabla g(x^k) & \nabla h(x^k) \\ \Lambda^k \nabla g(x^k)^T & G(x^k) & 0 \\ \nabla h(x^k) & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d \\ \Delta\lambda \\ \Delta\mu \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \nabla f(x^k) + \nabla g(x^k)\lambda^k + \nabla h(x^k)\mu^k \\ G(x^k)\lambda^k \\ h(x^k) \end{bmatrix} \tag{3.70}$$

où Λ^k désigne la matrice diagonale de coefficients $\Lambda^k_{ii} = \lambda^k_i$. Comme pour les méthodes SQP, l'approximation de la matrice hessienne H doit être symétrique définie positive. Par contre, une différence avec ces méthodes est que la condition de complémentarité sur les contraintes d'inégalité (deuxième et cinquième équation de (3.65)) est ici utilisée explicitement. Une autre différence entre les méthodes SQP et IPA se situe au niveau de la solution de départ : elle doit nécessairement appartenir au domaine admissible pour IPA, mais peut ne pas l'être pour SQP.

Ces deux méthodes permettent donc de définir une direction de descente qui prenne en compte les contraintes. Afin de déterminer le pas optimal dans cette direction, on utilise des méthodes de recherche linéaire, comme par exemple celles de Wolfe et Armijo. Elles peuvent nécessiter ou non le recalcul du gradient des observations. Ainsi, à chaque cycle de boucle d'optimisation, la résolution du problème adjoint peut être ou non présente suivant que l'itération en cours soit un calcul de direction de descente ou de recherche linéaire.

3.6 Conclusion

Nous avons décrit dans ce chapitre l'implémentation dans les codes industriels de Dassault Aviation du gradient topologique, permettant de déterminer la position optimale d'un nouveau générateur de vortex à créer dans un écoulement de référence et du gradient paramétrique permettant d'ajuster finement la position, l'orientation et la taille d'un VG existant. Ayant à disposition ces deux outils, nous sommes maintenant en mesure de réaliser une optimisation globale du contrôle d'un écoulement aérodynamique : il suffit simplement de répéter leur utilisation. On part ainsi d'un écoulement de référence, pouvant ou non comporter un ou plusieurs générateurs de vortex. Un ou deux calculs de gradient topologique sont ensuite menés afin de déterminer l'emplacement du nouveau VG à créer (deux calculs sont par exemple nécessaires avec deux orientations différentes par rapport au sens de l'écoulement pour tester l'effet d'un VG convergent ou divergent dans une manche à air ; pour placer un générateur de vortex sur un profil d'aile, il suffit de tester une unique orientation). Une fois le nouveau VG ajouté à l'écoulement, ses paramètres sont optimisés finement à l'aide de la boucle d'optmisation décrite ici. On peut alors mener un nouveau calcul de gradient topologique afin d'ajouter un nouveau générateur de vortex, dont on optimise de nouveau les paramètres, etc. L'optimisation se poursuit jusqu'à ce que la cartographie de gradient topologique ne donne plus d'information pertinente sur la création d'un nouveau VG : ou bien le gradient topologique est globalement positif ou nul, ou bien les zones qu'il désigne comportent déjà un générateur de vortex. On peut également juger que le gain sur la fonction coût devient négligeable pour poursuivre l'optimisation.

Chapitre 4

Contrôle et optimisation stationnaire

4.1 Introduction

L'objet de ce chapitre est l'application des méthodes d'optimisation décrites précédemment au contrôle d'écoulements dans des manches à air coudées. Pour le moment, seule une modélisation stationnaire de l'écoulement est considérée.

Le premier cas d'application détaillé ici concerne le contrôle du décollement dans une manche à air générique en forme de S. Cette géométrie a fait l'objet d'essais en soufflerie à la NASA, [40]. Ce cas relativement simple nous a permis de réaliser un premier test de l'implémentation des gradients topologiques et paramétriques. En particulier, nous évaluerons l'effet du raffinement de maillage sur la convergence du problème adjoint et sur la cartographie de gradient topologique. Les diverses formulations de gradient topologique décrites dans le chapitre 3 section 3.4.5 seront également comparées. Concernant la boucle d'optimisation paramétrique, on comparera la valeur du gradient donné par l'état adjoint et celui calculé par différences finies. Enfin, ce cas test servira également à comparer les algorithmes d'optimisation SQP et IPA décrits dans le chapitre 3 section 3.5.2.

Dans un second temps, nous réaliserons des optimisations complètes du contrôle de l'écoulement dans deux manches à air en forme de U. Les géométries complexes considérées sont représentatives des manches que l'on est susceptible de retrouver dans un drone furtif. Pour la première forme de manche, l'objectif sera d'améliorer une configuration à trois générateurs de vortex mécaniques (VG) placés manuellement. Les paramètres de ces trois VG seront donc tout d'abord optimisés automatiquement, puis on utilisera le gradient topologique afin de créer de nouveaux VG dans la manche. Pour la seconde forme, on dispose là aussi d'une configuration de référence à trois générateurs de vortex placés manuellement. On tentera dans ce cas d'obtenir de façon automatique une configuration présentant de meilleures performances que celle de référence.

4.2 Premiers calculs sur une manche en S

L'objet de cette section est de réaliser les premiers tests d'implémentation du gradient topologique et de la chaîne d'optimisation paramétrique sur un cas simple de manche à air coudée.

4.2.1 Présentation du cas

La géométrie considérée est celle d'une manche à air générique en forme de S, donc présentant un seul coude. Sa ligne moyenne est définie par deux arcs de $\theta_{max}/2 = 30\,^{\circ}$ et de rayons identiques $R = 1\ 020\ mm$. Les coordonnées (x_{lm}, y_{lm}, z_{lm}) de cette ligne moyenne sont

données par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \text{Pour } 0 \leq \theta \leq \dfrac{\theta_{max}}{2} : \\ x_{lm} = R\sin(\theta)\,;\; y_{lm} = 0\,;\; z_{lm} = R\cos(\theta) - R\,; \\ \text{Pour } \dfrac{\theta_{max}}{2} \leq \theta \leq \theta_{max} : \\ x_{lm} = 2R\sin\left(\dfrac{\theta_{max}}{2}\right) - R\sin(\theta_{max} - \theta)\,;\; y_{lm} = 0\,; \\ z_{lm} = 2R\cos\left(\dfrac{\theta_{max}}{2}\right) - R - R\cos(\theta_{max} - \theta). \end{cases} \tag{4.1}$$

Perpendiculairement à la ligne moyenne, la manche est de section circulaire. Le rayon r des sections varie avec l'angle θ et est donné par l'équation suivante, où D_1 et D_2 sont respectivement les diamètres des sections d'entrée et de sortie :

$$\frac{2r}{D_1} = 1 + 3\left(\frac{D_2}{D_1} - 1\right)\left(\frac{\theta}{\theta_{max}}\right)^2 - 2\left(\frac{D_2}{D_1} - 1\right)\left(\frac{\theta}{\theta_{max}}\right)^3. \tag{4.2}$$

Les valeurs utilisées sont $D_1 = 204.2\ mm$ et $D_2 = 254.4\ mm$, ce qui fait de cette manche un conduit divergent de rapport 1.52. L'entrée est placée à une abscisse de 0 mm et la sortie à 1 020 mm. C'est en fait la géométrie de cette manche qui était présentée dans la figure 3.6 du chapitre 3.

Les simulations que nous présentons ci-après sont réalisées sur des demi-maillages avec plan de symétrie en $y = 0$. De plus, les maillages sont munis de manchons d'entrée et de sortie. Ce sont des morceaux de conduites droites placés en amont et en aval de la manche proprement dite. Le manchon d'entrée sert à obtenir une couche limite bien établie en entrée de manche. Sa longueur est déterminée de telle sorte que l'épaisseur de couche limite et la vitesse de l'écoulement en entrée de la manche soient celles données par l'expérience. Le manchon de sortie est quant à lui nécessaire pour que la condition de pression imposée à la limite du domaine de calcul n'interfère pas avec les observations dans le plan de sortie de la manche.

Nous avons à disposition deux maillages de cette géométrie, un maillage grossier comportant approximativement 300 000 nœuds dans le volume et un maillage fin de 800 000 nœuds. Nous présentons dans les figures 4.1 et 4.2 des visualisations des deux maillages surfaciques correspondant munis de leurs manchons d'entrée (en vert) et de sortie (en bleu).

4.2.2 Calcul Navier-Stokes moyenné (RANS)

L'écoulement dans cette manche en S est calculé par AETHER avec le modèle de turbulence $k - \varepsilon$ bicouche. Le nombre de Mach d'entrée est de 0.6 ; la pression statique et la température de référence sont respectivement de 90 474 Pa et 288 K. Une pression de 102 500 Pa est imposée à la sortie du domaine de calcul afin d'obtenir le débit de 7.135 $kg.s^{-1}$ mesuré dans l'expérience NASA. Le nombre de Mach moyen dans le plan de sortie de la manche est approximativement de 0.35. L'écoulement reste subsonique dans tout le domaine. Le nombre de Reynolds basé sur le diamètre de la section d'entrée vaut $Re = 2.6 \times 10^6$.

Les simulations sont réalisées sur 32 processeurs IBM Pwr4. Pour le maillage grossier, la durée d'un calcul Navier-Stokes est d'approximativement 1 heure et demi ; elle est de plus de 4 heures pour le maillage fin.

Les figures 4.3 et 4.4 présentent des visualisations du nombre de Mach dans le plan de symétrie et dans le plan de sortie (à $x = 1\ 020\ mm$) de la manche. L'écoulement présente un franc décollement intervenant à une abscisse d'environ 300 mm. La zone de basse vitesse dans le plan de symétrie est mieux représentée par le maillage fin : sa forme est plus en accord avec l'expérience, [75].

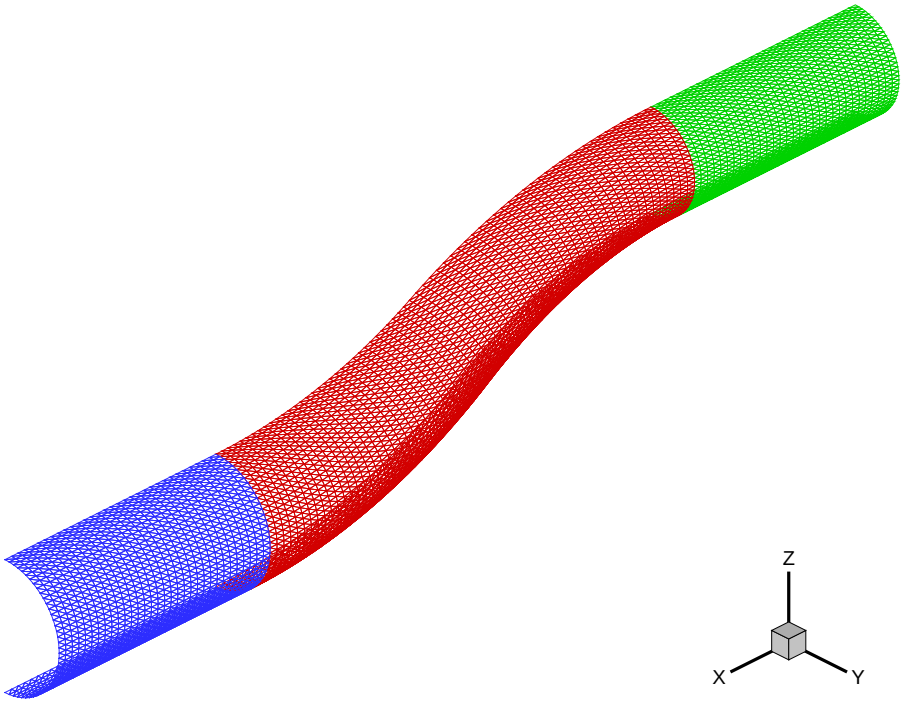

FIGURE 4.1 – Maillage surfacique grossier de la manche à air générique en S.

4.2.3 Les fonctions coût

Afin de mesurer l'homogénéité de l'écoulement arrivant au moteur, différentes quantités sont intéressantes à observer. Généralement, il s'agit du rendement en pression totale, du *swirl* et des distorsions (radiale et circonférentielle) mesurés dans le plan de sortie de la manche. Pour calculer l'état adjoint qui leur est relatif, il est nécessaire d'avoir à disposition les dérivées de ces observations par rapport aux variables d'états (*i.e.* les variables entropiques). A l'heure actuelle, seule la différentiation des fonctions rendement et *swirl* que nous allons maintenant décrire a été réalisée dans le module de calcul des fonctions coût.

Notons Γ le plan d'observation (généralement le plan de sortie de la manche). Le rendement en pression totale R calculé sur Γ vaut :

$$R = \int_\Gamma \frac{P_i}{P_i^{ref}}\, dx. \tag{4.3}$$

Pour rappel, la pression totale P_i vaut :

$$P_i = P_s \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{\gamma/\gamma-1} \tag{4.4}$$

avec P_s la pression statique, M le nombre de Mach et γ le taux de chaleur spécifique, qui vaut 1.4 pour l'air. La pression (uniforme) de référence P_i^{ref} est celle calculée en entrée du domaine de calcul. Maximiser la fonction R permet donc de diminuer les pertes de pression totale engendrées par les décollements à l'intérieur de la manche.

Le *swirl* S permet, quant à lui, de mesurer l'aspect tourbillonaire de l'écoulement dans le plan de sortie de la manche. Il est calculé comme étant le rapport entre la norme de la vitesse

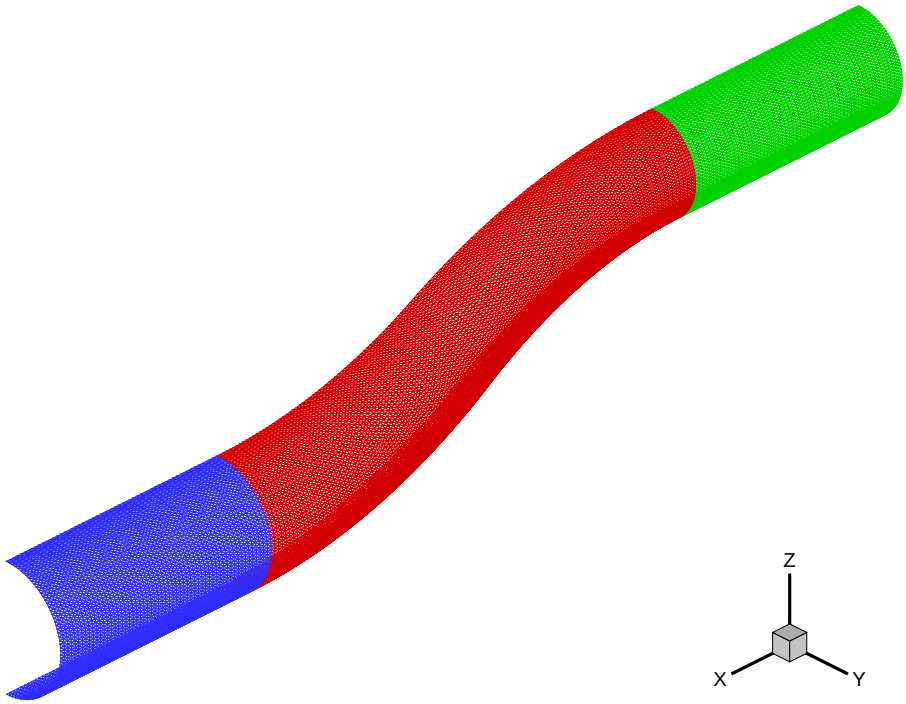

FIGURE 4.2 – Maillage surfacique fin de la manche à air générique en S.

V_{ci} de l'écoulement dans le plan Γ et la norme de la vitesse V_{deb} normale à ce plan :

$$S = \frac{\displaystyle\int_\Gamma \rho \, \|V_{ci}\| \, dx}{\displaystyle\int_\Gamma \rho \, \|V_{deb}\| \, dx} \tag{4.5}$$

avec ρ la densité du fluide. En minimisant la fonction S, on espère ainsi diminuer les extrema de *swirl*, pénalisants pour les moteurs.

En général, les écoulements dans les manches à air coudées que nous avons considéré sont acceptables en terme de rendement en pression. Par contre, les critères de *swirl* imposés par les motoristes sont plus difficiles à satisfaire. C'est pour cette raison que les optimisations présentées dans tout ce chapitre sont faites sur la fonction coût S.

4.2.4 Résolution du problème adjoint

L'état adjoint relatif à la fonction coût *swirl* observée dans le plan de sortie de la manche a été calculé pour les deux maillages à disposition. Comme évoqué au chapitre 3 section 3.4.4, nous avons constaté l'influence du redémarrage de l'algorithme GMRES sur la résolution du système linéaire. Pour chaque maillage, nous avons demandé au code AETHER adjoint de résoudre le problème avec une décroissance du résidu de 10^{-10} et en utilisant un espace de Krylov de dimension 500. Puis, nous avons augmenté cette dimension jusqu'au maximum qu'il a été possible d'allouer en mémoire, c'est-à-dire 5 000 pour le maillage grossier et 2 500 pour le maillage fin. La figure 4.5 présente la convergence du résidu pour les quatre calculs réalisés. L'influence du redémarrage de l'algorithme GMRES peut y être clairement constatée. Pour le maillage

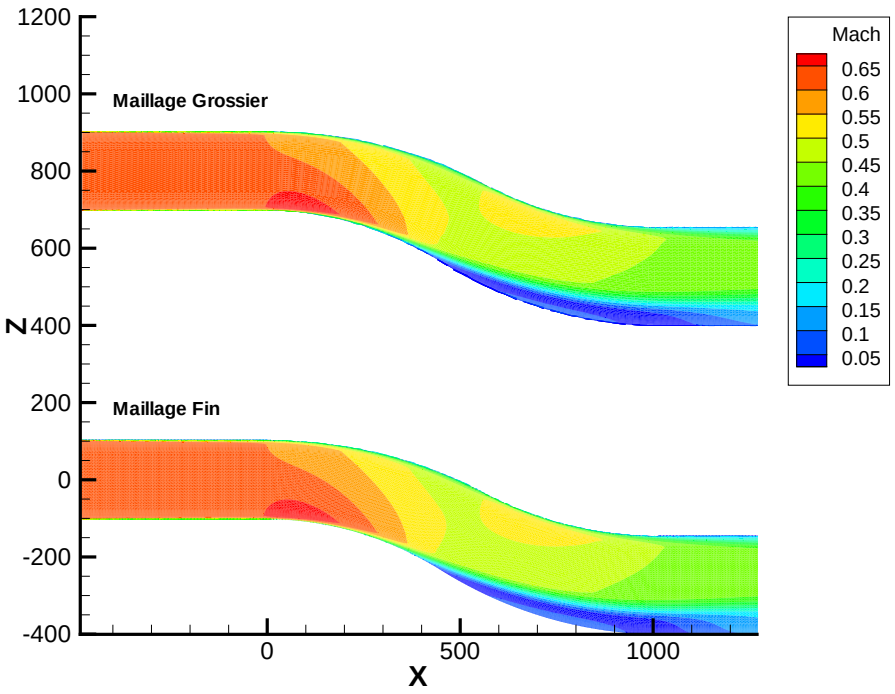

FIGURE 4.3 – Visualisation du nombre de Mach dans le plan de symétrie. En haut : maillage grossier. En bas : maillage fin.

grossier, la convergence est atteinte sans redémarrage lorsque la dimension de l'espace de Krylov est maximale (trait plein rouge) ; lorsque cette dimension passe à 500, cette convergence est beaucoup plus lente, le résidu stagnant sur plusieurs itérations après chaque redémarrage (pointillés rouges). Pour le maillage fin, la convergence est atteinte au bout du cinquième passage de l'algorithme GMRES lorsque la dimension de l'espace de Krylov est maximale (trait plein vert). Là aussi, on constate que le résidu ne diminue pas pendant plusieurs itérations après les redémarrages. Lorsque la dimension de l'espace de Krylov est de 500, il semble impossible de parvenir à une convergence du problème adjoint pour ce maillage (pointillés verts).

Des travaux sont actuellement en cours afin de résoudre ces problèmes, toujours ouverts, concernant la résolution des systèmes linéaires. En particulier, afin de pallier aux difficultés liées au redémarrage de l'algorithme GMRES, une première piste de réflexion consisterait à augmenter la précision numérique du code informatique (passage à la quadruple précision). Des méthodes spécifiques permettant d'améliorer le redémarrage de l'algorithme, comme le *deflated GMRES*, peuvent également être envisagées, [62].

4.2.5 Gradient topologique

L'écoulement dans la manche à air générique en forme de S que nous considérons est relativement simple. Il présente un unique décollement, logiquement localisé à l'amorce du coude. Cet écoulement va donc permettre de tester le calcul du gradient topologique, qui devrait indiquer clairement une zone à l'amont du décollement pour la création de générateurs de vortex mécaniques.

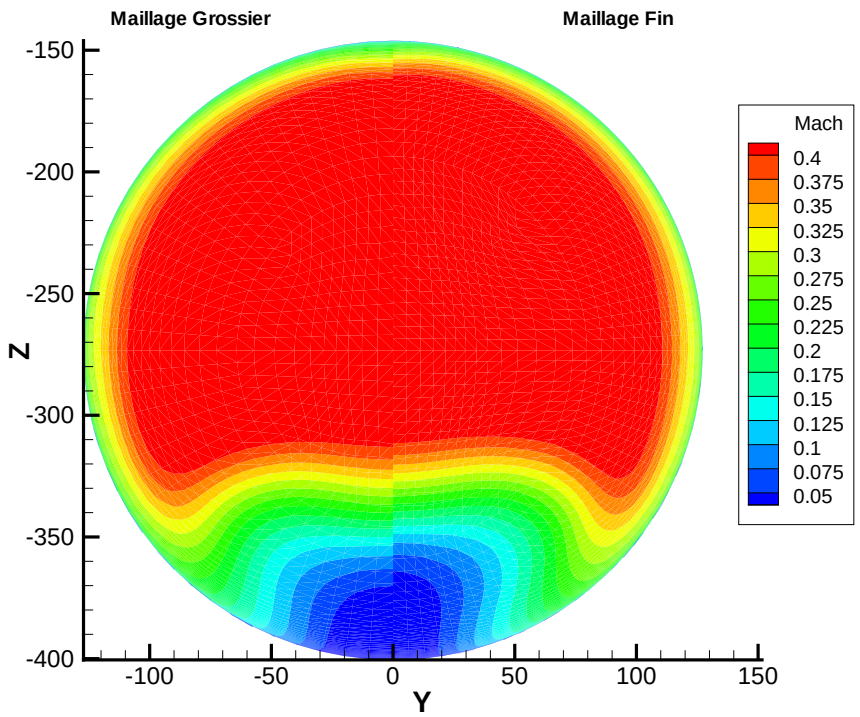

FIGURE 4.4 – Visualisation du nombre de Mach dans le plan de sortie. A gauche : maillage grossier. A droite : maillage fin.

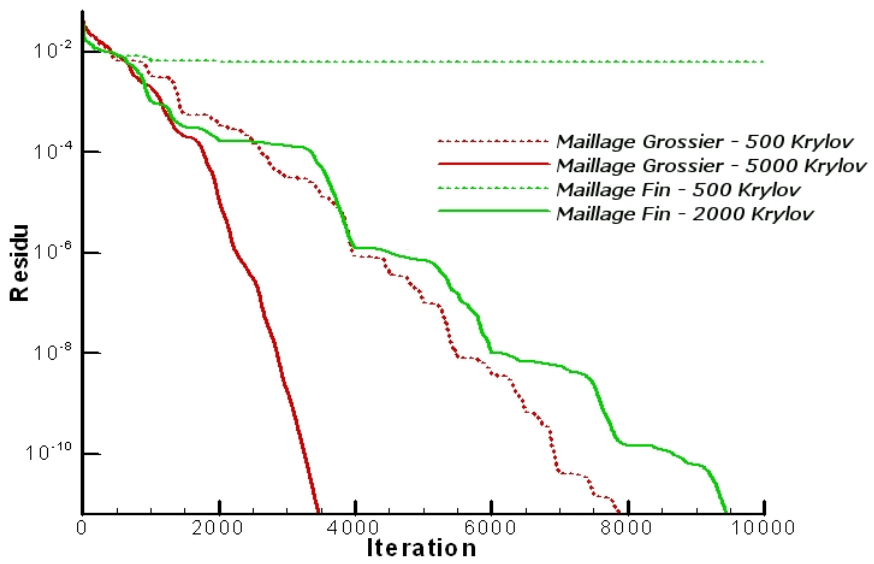

FIGURE 4.5 – Convergence du problème adjoint. En rouge : maillage grossier. En vert : maillage fin.

4.2.5.1 Comparaison des maillages

Un premier calcul de gradient topologique est réalisé sur les deux maillages à disposition en utilisant la formulation (3.59) introduite au chapitre 3 section 3.4.5. Les paramètres du

générateur de vortex à ajouter sont les suivants : il possède une longueur de 5 mm, une hauteur de 2 mm (pour une hauteur de couche limite en amont du décollement d'une dizaine de mm) et une orientation de 45 $^\circ$. Comme décrit précédemment, cette orientation est fixe dans le plan (u, v), tangent en chaque point de la géométrie. Si on se réfère à la figure 3.6 du chapitre 3, on peut constater que le repère (u, v) au niveau du décollement est dans le même sens que le repère cartésien (x, y). Une orientation de 45 $^\circ$ en (u, v) correspond ainsi à un générateur de vortex divergent à cet endroit.

Il faut garder à l'esprit que le gradient topologique donne une information sur la création d'un générateur de vortex de taille infinitésimale. Toutefois, dans les simulations numériques, cette taille doit être fixée. La hauteur de 2 mm considérée ici et qui correspond à environ 1/5e de l'épaisseur de couche limite semble être raisonnable pour décrire un VG petit mais produisant tout de même un effet quantifiable sur l'écoulement. Une longueur équivalente à deux ou trois fois la hauteur du générateur de vortex est quant à elle classiquement admise par les aérodynamiciens.

4.2.5.1.1 Création d'un premier VG Les figures 4.6 et 4.7 présentent la cartographie de gradient topologique pour l'ajout d'un premier générateur de vortex, respectivement sur le maillage à 300 000 et sur le maillage à 800 000 nœuds. Pour chaque figure, les cercles correspondent à une simulation Navier-Stokes par AETHER de l'écoulement contrôlé par un générateur de vortex effectivement placé dans la manche. Nous pouvons ainsi mesurer la capacité du gradient topologique à désigner la position optimale de création du VG, c'est-à-dire celle où la fonction coût (ici le *swirl*) sera la plus diminuée. Visuellement, pour chaque maillage, la zone de gradient topologique négatif est bien située en amont du décollement, *i.e.* au début du coude. De plus, dans chaque cas, on obtient bien une diminution de la fonction coût dans la zone de gradient topologique négative (en bleu et en vert, localisations VG1, VG2 et VG3) et une augmentation dans la zone de gradient topologique positive (en rouge, localisations VG4 et VG5).

De façon plus précise, et concernant le maillage grossier, il convient de remarquer que le point de gradient topologique minimum ne correspond pas au plus fort gain sur la fonction coût. En effet, la localisation VG2 de la figure 4.6 correspond à une diminution de *swirl* de 8.1% tandis que la localisation VG1, qui est celle de gradient topologique minimum, n'entraine qu'une diminution de 7.4%. Ce défaut n'est plus présent sur le maillage fin de la figure 4.7. Une anomalie reste toutefois visible : même pour le maillage fin, les valeurs de *swirl* des localisations VG2 et VG3 ne sont pas en accord avec le classement prévu par le gradient topologique.

Les cartographies de gradient topologique des figures 4.6 et 4.7 étant similaires pour les deux maillages, ce test permet plutôt de mesurer l'influence de la discrétisation du générateur de vortex dans la résolution du problème direct. L'effet de maillage est également clairement visible dans l'écoulement de référence non contrôlé des figures 4.3 et 4.4. La différence constatée entre ces deux calculs implique déjà un écart sur le *swirl* de 2.6%. Néanmoins, le gradient topologique a tout de même permis de clairement désigner la zone où il est avantageux de créer un générateur de vortex (en bleu et vert) et celle ou cela ne l'est plus (en rouge). On peut donc considérer que son implémentation est validée par ce cas test, et ce malgré l'absence de la dérivée du modèle de turbulence dans le calcul de l'état adjoint.

4.2.5.1.2 Ajout d'un second VG Pour chaque maillage, un générateur de vortex a été placé au point de gradient topologique minimum (localisations VG1 des figures 4.6 et 4.7), puis un nouveau calcul de gradient topologique a été mené afin de déterminer la position optimale d'un second VG. Les paramètres du second VG à créer sont les mêmes que pour le premier (taille de 5×2 mm, orientation de 45 $^\circ$). Les figures 4.8 et 4.9 correspondent aux cartographies de gradient topologique pour l'ajout d'un second générateur de vortex sur chacun des maillages.

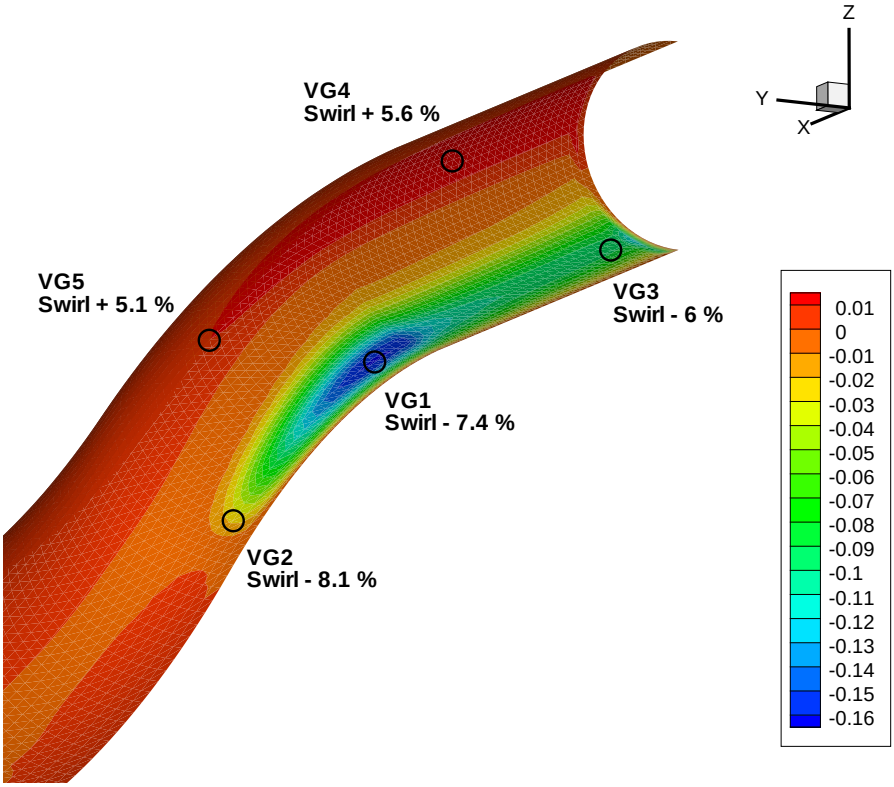

FIGURE 4.6 – Cartographie de gradient topologique sur le maillage grossier. Ajout d'un premier VG.

Sur ces figures, le cercle plein représente la position du premier générateur de vortex. Les autres cercles correspondent aux simulations Navier-Stokes avec un deuxième générateur de vortex. Les variations de *swirl* sont indiquées par rapport à la configuration avec un seul VG. Cette fois, les cartographies sont différentes sur les deux maillages, mais leurs "topologies" sont néanmoins similaires. Les différentes zones de gradient topologique négatives et positives sont localisées aux mêmes endroit dans les deux cas, bien qu'elles n'aient pas les mêmes formes.

Pour le maillage grossier, les résultats sont décevants : la fonction coût augmente quel que soit l'emplacement du deuxième générateur de vortex testé. Par contre, pour le maillage fin, les résultats des calculs Navier-Stokes sont parfaitement en accord avec la cartographie de gradient topologique. On observe ainsi une diminution de *swirl* de 1.2% pour la localisation 2VG1 correspondant au minimum de gradient topologique, tandis que le *swirl* augmente respectivement de 2.3% et de 1.8% pour les localisation 2VG2 et 2VG3 de gradients topologiques positifs. La diminution de fonction coût pour l'ajout du second générateur de vortex placé de manière optimale est toutefois moins importante que pour le premier. La principale action sur le décollement semble en effet résulter du placement du premier VG.

En comparant les figures 4.8 et 4.9, on peut, une fois encore, clairement constater l'influence du maillage sur la modélisation des générateurs de vortex dans le problème direct. Sur ces figures, la localisation optimale 2VG1 est en effet la même, mais, dans un cas, l'ajout du générateur de vortex en ce point conduit à une diminution de la fonction coût et dans l'autre à une augmentation. Enfin, on peut également constater que la cartographie de gradient topologique pour l'ajout du second VG suggère de contrôler le décollement plutôt sur sa largeur : la localisation optimale VG1 du premier générateur de vortex et celle 2VG1 du second sont situées aux mêmes abscisses, mais à des positions azimutales différentes.

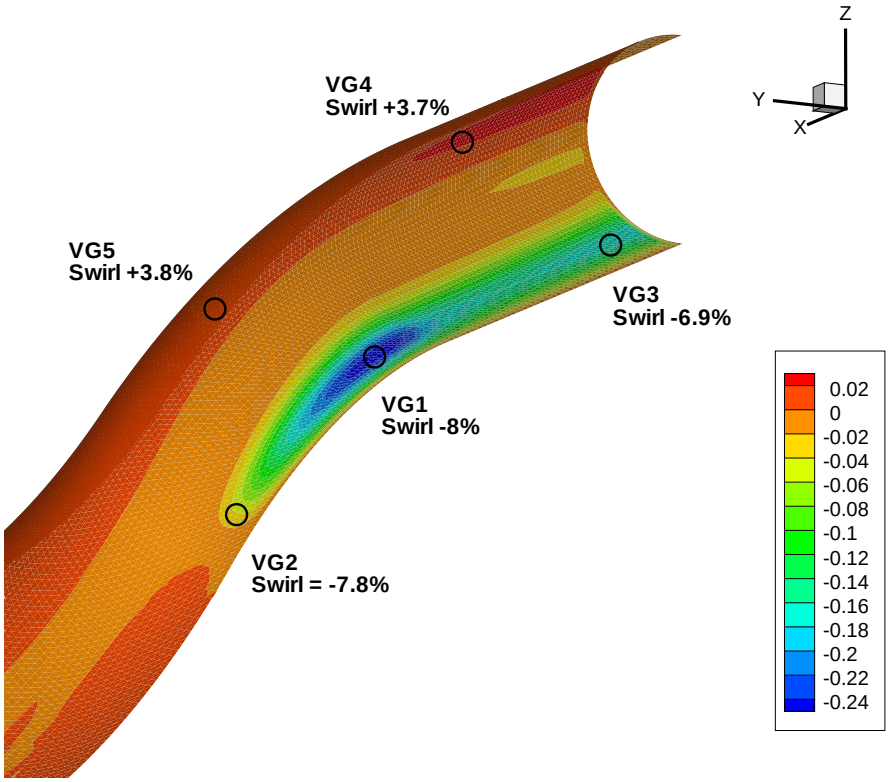

FIGURE 4.7 – Cartographie de gradient topologique sur le maillage fin. Ajout d'un premier VG.

4.2.5.2 Comparaison des formulations du gradient topologique

Nous comparons maintenant les différentes formulations de gradient topologique implémentées dans le code AETHER adjoint et que nous avons décrit dans la section 3.4.5 du chapitre 3. Le maillage utilisé est le maillage fin comportant 800 000 nœuds. Les figures 4.10 à 4.13 présentent la cartographie de gradient topologique pour chaque formulation et pour la création d'un premier générateur de vortex dont les paramètres sont les mêmes que ceux de la section précédente (taille de 5×2 mm et orientation de 45°).

Pour chaque figure, la zone de gradient topologique négatif est la même. Le générateur de vortex doit bien toujours être créé en amont du décollement. Pour les formulations g_1 et g_2, qui correspondent à un calcul de produit scalaire entre le terme source $\boldsymbol{f}$ et l'état adjoint $\boldsymbol{P}$ sur plusieurs éléments du maillage, la cartographie de gradient topologique est davantage lissée que pour les formulations g_3 et g_4. Pour ces dernières, le gradient topologique est calculé comme un produit entre $\boldsymbol{f}$ et $\boldsymbol{P}$ ou entre leurs dérivées normales en un point uniquement. Les cartographies qui en résultent présentées dans les figures 4.12 et 4.13 apparaissent donc plus bruitées.

Pour une raison de robustesse nécessaire dans les cas d'applications industriels, la formulation g_1 sera donc privilégiée. C'est d'ailleurs avec cette formulation que sont calculés tous les gradients topologiques présentés dans la suite de ce chapitre. Toutefois, les formulations g_3 et g_4 ne nécessitant le calcul de la force $\boldsymbol{f}$ ou de sa dérivée normale qu'en un point (au contraire des formulations g_1 et g_2 où la force est calculée sur un volume), leur emploi peut s'avérer intéressant en terme de temps de calcul, d'autant plus que les cartographies de gradient topologique produites sont qualitativement équivalentes.

Mentionnons enfin que le fait que les formulations g_1 et g_2 fassent intervenir un produit scalaire calculé sur un petit volume entourant le générateur de vortex est à rapprocher de la

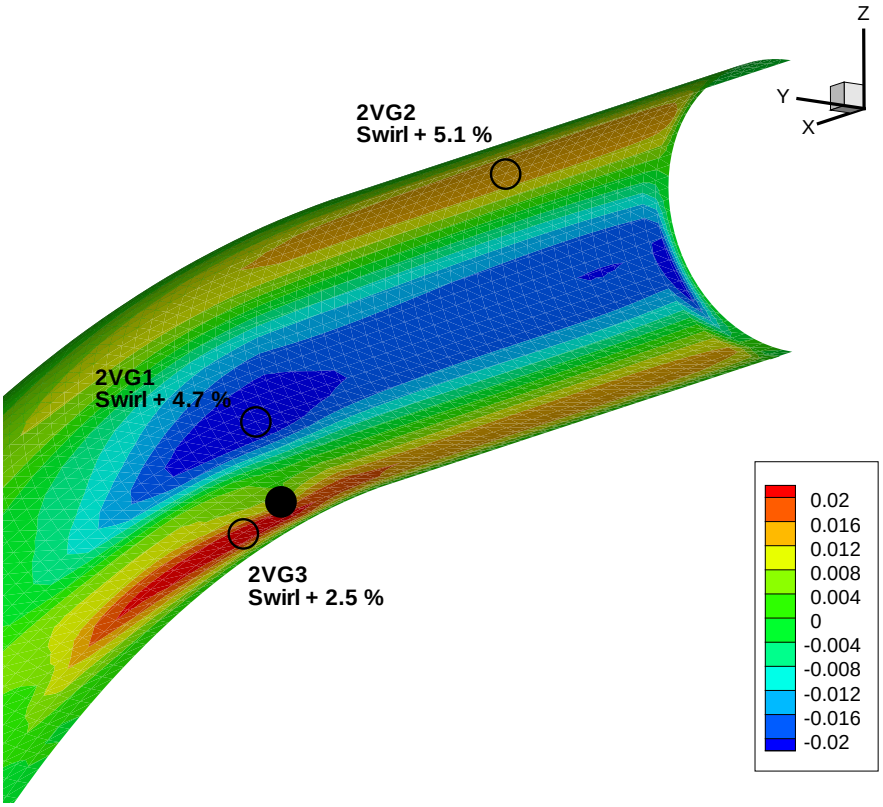

FIGURE 4.8 – Cartographie de gradient topologique sur le maillage grossier. Ajout d'un second VG.

notion de filtre en optimisation topologique, [17], [15].

4.2.6 Optimisation paramétrique

Cette section est dédiée à la validation de la chaîne d'optimisation paramétrique de générateurs de vortex décrite dans la section 3.5 du chapitre 3. Cette chaîne permet d'optimiser de façon automatique la position, la taille et l'orientation d'un nombre quelconque de générateurs dans un écoulement.

4.2.6.1 Comparaison avec les différences finies

Dans la section 3.4.3 du chapitre 3, nous avons déjà validé l'implémentation des différents termes ajoutés au code adjoint et nécessaires au calcul du gradient paramétrique (3.7). On s'intéresse maintenant à la validation globale du gradient calculé par la boucle d'optimisation avec adjoint. Nous allons donc comparer ce dernier avec le gradient calculé par la version différences finies de la boucle. Rappelons qu'une telle validation est nécessaire puisque le problème adjoint résolu est incomplet : le modèle de turbulence n'y est en effet pas différentié.

En mode différences finies, la boucle fonctionne essentiellement telle que décrite dans la section 3.5 du chapitre 3, à la différence évidente que le calcul du problème adjoint est omis. Pour calculer la dérivée de la fonction coût par rapport à un paramètre donné, on effectue alors deux cycles de la boucle d'optimisation. Le premier cycle permet de calculer la valeur de référence de la fonction coût. Au cours du deuxième cycle, le paramètre du générateur de vortex est perturbé d'une valeur ε fixée par l'utilisateur. Après le calcul Navier-Stokes, on dispose alors de la valeur de la fonction coût résultant de cette perturbation. Ainsi, pour calculer le gradient

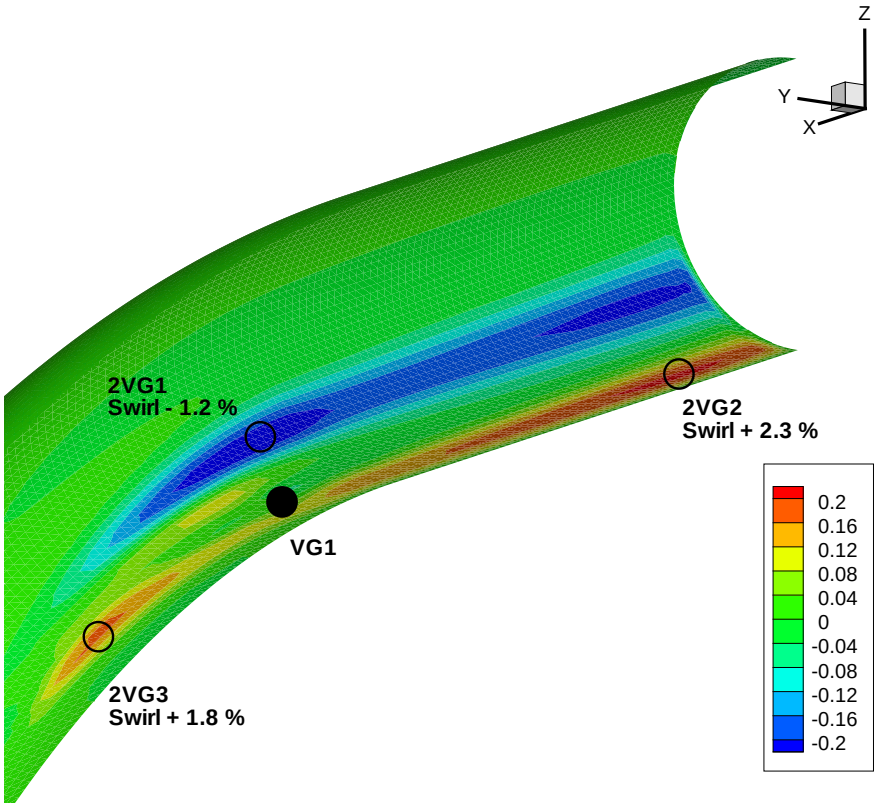

FIGURE 4.9 – Cartographie de gradient topologique sur le maillage fin. Ajout d'un second VG.

de la fonction coût par rapport aux cinq paramètres d'un générateur de vortex (position en u et en v sur la géométrie, orientation, longueur et hauteur) on effectue six cycles de boucle.

Nous avons comparé les valeurs des gradients issus du calcul adjoint et du calcul par différences finies pour un générateur de vortex placé dans la manche en S et pour le maillage grossier comportant 300 000 nœuds. La fonction coût considérée est le *swirl* observé dans le plan de sortie de la manche au carré. Les calculs Navier-Stokes sont réalisés par le code AETHER avec le modèle de turbulence $k-\varepsilon$ bicouche. Les paramètres du VG sont les suivants : position $(u, v) = (0.1, 0.1)$, orientation $\theta = 45\,^{\circ}$ et taille de 5×2 mm. Ces paramètres correspondent à un générateur de vortex placé dans le bas de la manche, juste en amont du décollement, avec une orientation divergente par rapport au plan de symétrie. Les valeurs du paramètre ε du calcul différences finies sont les suivantes : $\varepsilon = 0.001$ pour les deux paramètres de position, $0.5\,^{\circ}$ pour l'angle, 0.05 mm pour la longueur du VG et 0.02 mm pour sa hauteur. Pour chaque paramètre, la valeur du pas de différences finies est ainsi lié à l'ordre de grandeur de la variable considérée. Nous donnons dans le tableau 4.1 les dérivées de la fonction coût par rapport à chaque paramètre calculées par méthode adjointe et par différences finies.

L'accord entre les deux gradients est globalement bon. Le signe de chaque composante et l'ordre de grandeur sont semblables pour les deux méthodes de calcul. Toutefois, les valeurs ne sont pas exactement similaires. La raison principale reste toujours le fait que le modèle de turbulence ne soit pas différentié dans notre code adjoint. Remarquons également que l'écart relatif entre les deux gradients calculés est d'autant plus grand que l'impact du paramètre est réduit (faible valeur de la dérivée pour l'angle et la longueur du générateur de vortex et grande erreur relative entre les deux calculs). Les deux gradients étant toutefois comparables, nous n'avons pas non plus cherché à calculer le gradient par différences finies pour des valeurs différentes du pas ε (qui pourrait également expliquer les différences de valeurs). En définitive,

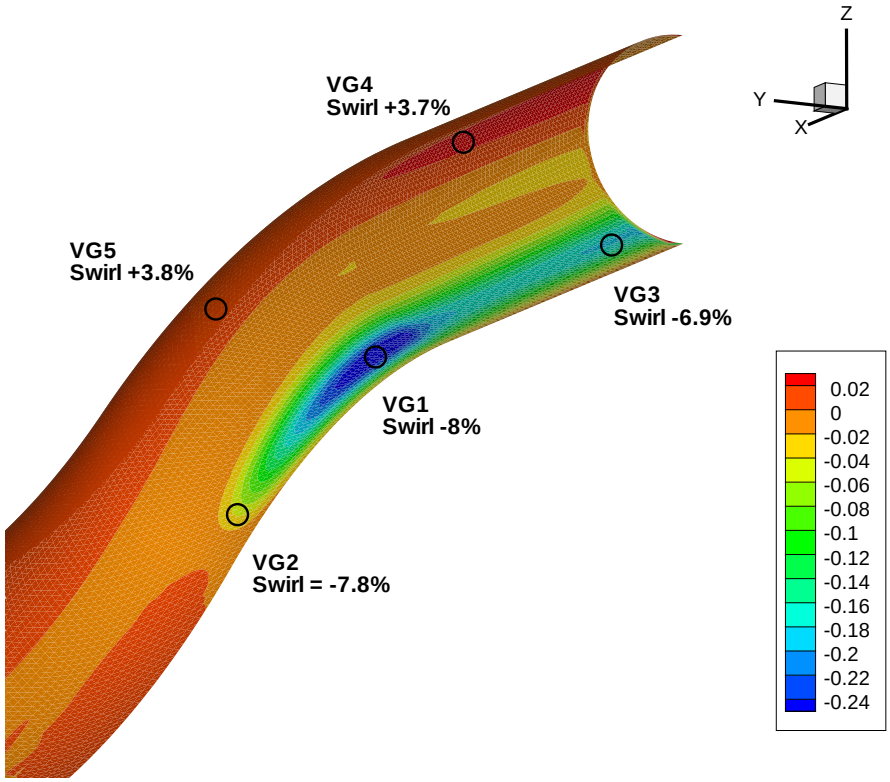

FIGURE 4.10 – Cartographie de gradient topologique pour la formulation $g_1 = \boldsymbol{P}^T \chi^\delta \boldsymbol{f}(\boldsymbol{V}, l)$.

nous considérons que ce test permet tout de même de valider le gradient par rapport aux paramètres des générateurs de vortex calculé par notre code adjoint.

4.2.6.2 Comparaison des algorithmes d'optimisation

Les algorithmes SQP et IPA disponibles chez Dassault Aviation et ayant fait l'objet de la section 3.5.2 du chapitre 3 ont été testés sur le problème de l'optimisation des paramètres d'un générateur de vortex placé dans la manche en S. Le maillage utilisé est encore une fois le maillage grossier à 300 000 nœuds. La position initiale du générateur de vortex est celle correspondant au minimum de gradient topologique calculé dans le paragraphe 4.2.5.1.1 du présent chapitre. En coordonnées cartésiennes, celle-ci est $(x, y, z) = (87.7, 31.7, -101.8)$, ce qui correspond à $(u, v) = (0.1, 0.16)$ en terme de paramètres sur la géométrie. L'orientation et la taille initiales du VG sont celles avec lesquelles le gradient topologique a été précédemment

Paramètre	Adjoint	Différences finies
Position u	0.9472	0.7782
Position v	-6.6756	-5.7759
Angle θ	-0.0126	-0.0042
Longueur	0.0678	0.0257
Hauteur	0.2827	0.2368

TABLE 4.1 – Comparaison des gradients issus des méthodes adjointes et différences finies

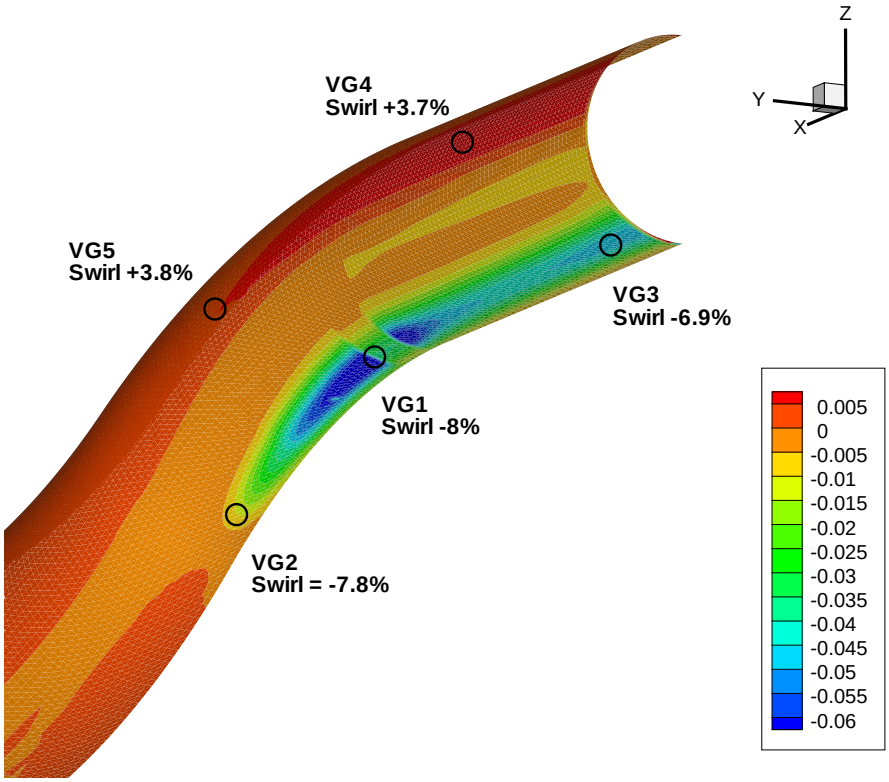

FIGURE 4.11 – Cartographie de gradient topologique pour la formulation $g_2 = \boldsymbol{P}^T \chi^{VG} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{V}, l)$.

calculé, à savoir $\theta = 45\,^\circ$ et $l \times h = 5 \times 2\ mm$. En coordonnées cartésiennes, cette orientation correspond à un vecteur $\vec{t} = (0.72, 0.68, 0.14)$. Les calculs Navier-Stokes sont réalisés avec le modèle de turbulence $k - \varepsilon$ bicouche et la fonction coût est encore une fois le *swirl* observé dans le plan de sortie de la manche au carré. Les cinq paramètres du générateur de vortex sont contraints à évoluer au cours de l'optimisation entre les bornes suivantes :

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \leq & u & \leq & 0.3 \\ 0 & \leq & v & \leq & 0.45 \\ 0 & \leq & \theta & \leq & 90 \\ 1 & \leq & l & \leq & 20 \\ 1 & \leq & h & \leq & 10. \end{array} \tag{4.6}$$

Les optimisations présentées ci-après ont été réalisées sur 64 processeurs Bull Itanium. Elles sont limitées à 30 cycles de boucle chacune. Rappelons qu'un cycle correspond à une évaluation de la fonction coût (donc à un calcul Navier-Stokes) mais pas forcément à un calcul du gradient. Certains cycles sont en effet consacrés à la recherche linéaire du pas de descente, et peuvent nécessiter ou non un calcul de gradient par résolution du problème adjoint. Pour l'optimiseur SQP, les recherches linéaires s'effectuent sans calcul du gradient, au contraire de l'optimiseur IPA (recherche linéaire par la méthode de Wolfe). Sur les figures 4.14 et 4.15 ne sont représentés que les cycles d'optimisation (c'est-à-dire ceux une fois la recherche linéaire effectuée). Pour l'optimisation avec l'algorithme SQP, on obtient quatre cycles d'optimisation, contre dix pour l'algorithme IPA. Sur ces figures est également tracée l'évolution du *swirl* (normalisée par sa valeur initiale) et des cinq variables d'optimisation. Les temps de calculs les plus importants sont dus au code AETHER et à sa version adjointe. Un calcul Navier-Stokes dure environ 45 minutes et un calcul de gradient par adjoint environ 25 minutes. Pour

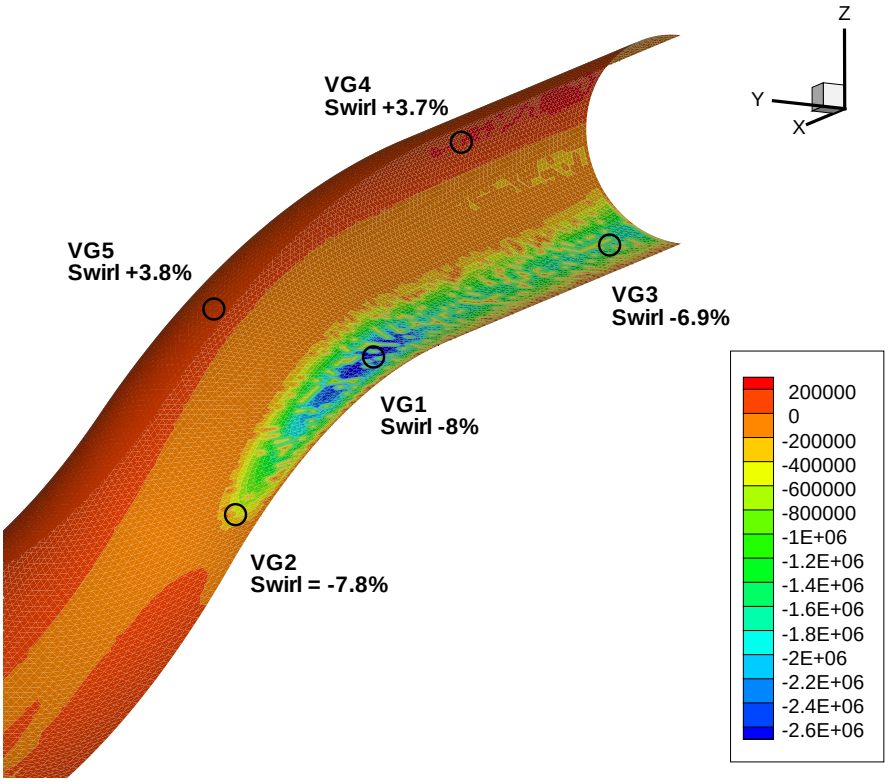

FIGURE 4.12 – Cartographie de gradient topologique pour la formulation $g_3 = \boldsymbol{P}(x_b)\boldsymbol{f}(\boldsymbol{V}, l, x_b)$.

l'algorithme SQP, la durée totale d'exécution de l'optimisation est d'environ un jour, contre un jour et demi pour l'algorithme IPA (qui demande davantage d'évaluations du gradient).

Les résultats des figures 4.14 et 4.15 montrent un comportement qualitativement similaire des deux optimiseurs. A la fin de l'optimisation, les cinq paramètres ont globalement évolué dans le même sens pour les deux optimisations. L'optimum trouvé par l'algorithme SQP possède toutefois une fonction coût sensiblement inférieure à celui trouvé par IPA ; la diminution de *swirl* est ainsi de 3.7% pour SQP contre 2.4% pour IPA. La position du générateur de vortex évolue assez peu au cours de l'optimisation, ce qui semble logique puisque la position initiale correspond au minimum de gradient topologique. Son orientation initiale de 45 ° passe à la valeur plus classique pour les aérodynamiciens d'environ 30 ° . La taille du VG est, elle, diminuée. Sa longueur finale est autour de 3.5 mm et sa hauteur autour de 1.5 mm.

Le comportement équivalent des deux optimiseurs constaté ici n'est pas surprenant. En effet, les algorithmes utilisés sont particulièrement performants pour les problèmes d'optimisation avec contraintes complexes. Or, les optimisations paramétriques de générateurs de vortex réalisées ici sont au contraire sans autres contraintes que les bornes sur chaque paramètre. D'autre part, les gains sur la fonction coût sont assez minimes, puisque la position de départ du générateur de vortex déterminée à l'aide du gradient topologique est déjà proche d'un minimum local. L'essentiel de l'effet sur le *swirl* a déjà été obtenu par la seule création du générateur de vortex, le gain supplémentaire semble seulement dû à l'optimisation de l'orientation et de la taille du VG.

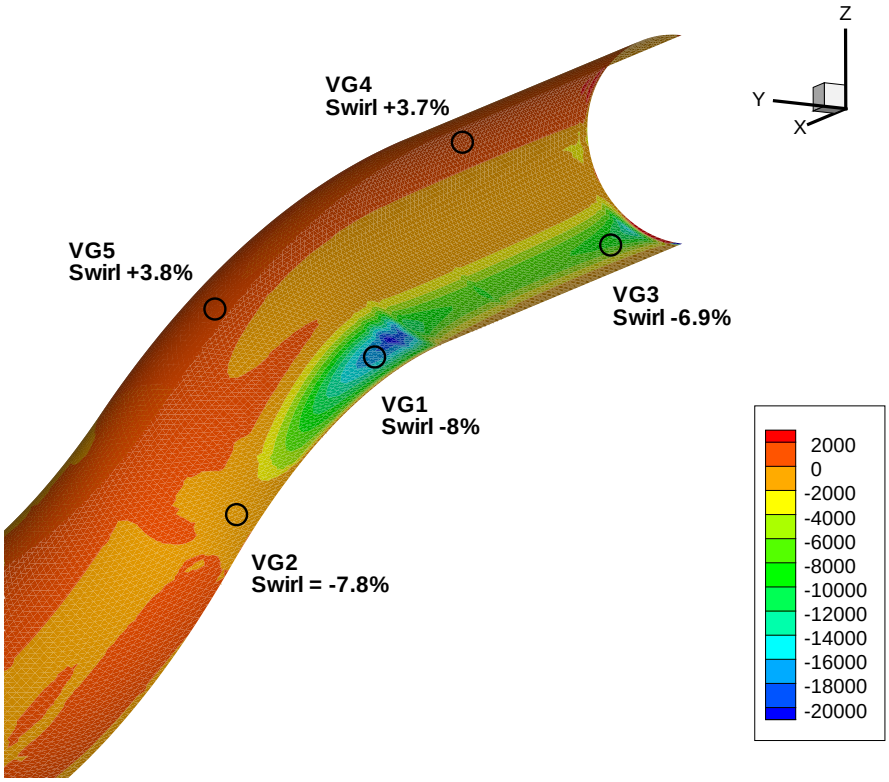

FIGURE 4.13 – Cartographie de gradient topologique pour la formulation $g_4 = \dfrac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial n}(x_0)\dfrac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial n}(x_0)$.

4.3 Cas industriels de manches en U

Une fois que l'implémentation du gradient topologique et de la chaîne d'optimisation paramétrique a été validée sur le cas simple de la manche en S, nous sommes en mesure de réaliser des optimisations complètes du contrôle par générateurs de vortex mécaniques de configurations industrielles. Comme évoqué en conclusion du chapitre 3, il suffit pour cela de calculer un gradient topologique pour une ou plusieurs orientations afin de déterminer la position optimale de création d'un nouveau VG, d'optimiser finement ses paramètres en utilisant la boucle d'optimisation automatique, puis de recommencer l'opération.

4.3.1 Présentation des géométries

Les géométries considérées dans cette section sont plus complexes que la manche en S présentée jusqu'ici. Il s'agit de manches à air en forme de U, donc possédant deux coudes, représentatives de celles que l'on pourrait retrouver dans un drone furtif. Une telle forme permet de masquer géométriquement le réacteur situé en sortie de manche et responsable d'une part importante de la signature radar de l'aéronef. Les deux géométries étudiées possèdent des sections d'entrée aplaties et des sections de sortie circulaires. Pour des raisons de confidentialité, nous ne pourrons donner davantage de détails sur ces géométries. A titre d'illustration, nous présentons tout de même l'allure générale de ce type de manche sur la figure 4.16.

Les maillages utilisés pour les simulations sont des demi-géométries avec condition de symétrie en $y = 0$. Ils possèdent, pour les mêmes raisons que pour la manche en S, des manchons droits d'entrée et de sortie. Pour le cas de la manche faisant l'objet de la section 4.3.2, le maillage volumique possède approximativement 1.6 millions de nœuds contre 1.3 millions pour celle de la

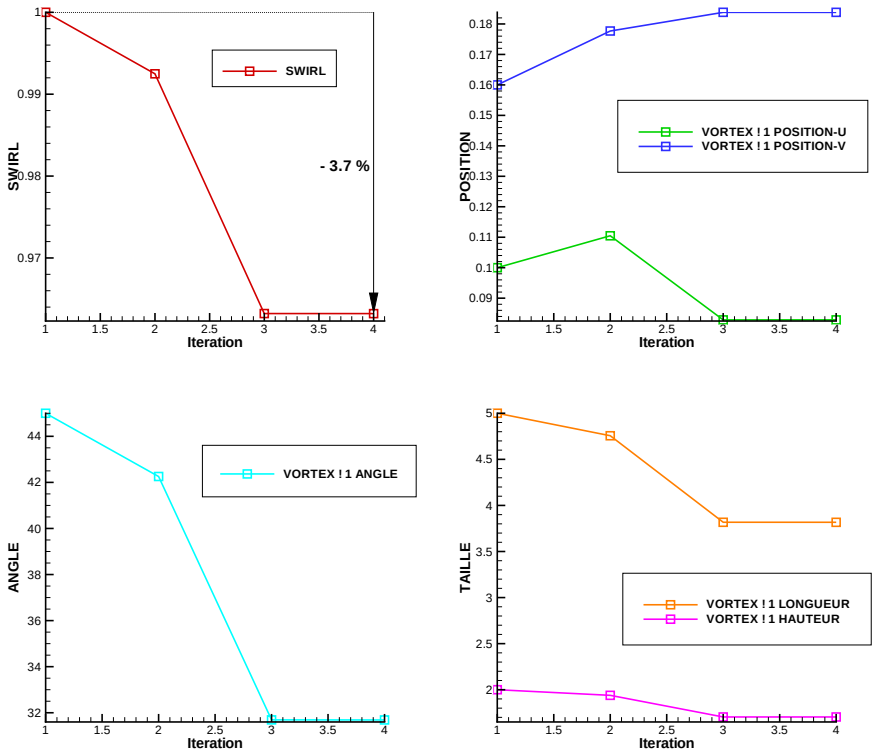

FIGURE 4.14 – Optimisation d'un générateur de vortex par l'algorithme SQP. Evolution du *swirl* (en haut à gauche), de la position (en haut à droite), de l'orientation (en bas à gauche) et de la taille (en bas à droite) du VG.

section 4.3.3. Nous présentons en figure 4.17 le maillage surfacique correspondant à la géométrie de la figure 4.16.

4.3.2 Amélioration d'une configuration existante

Pour cette première optimisation, le point de départ est une configuration à trois générateurs de vortex déjà présents dans la manche. La configuration fournie a été au préalable optimisée manuellement à l'aide d'un certain nombre de calculs (plusieurs dizaines en fait) permettant d'affiner les paramètres des trois VG. L'objectif est maintenant d'utiliser les outils développés au cours de cette thèse afin d'améliorer cette configuration de base (en utilisant la chaîne automatique d'optimisation paramétrique), puis de déterminer s'il est pertinent d'y ajouter de nouveaux générateurs de vortex (à l'aide du gradient topologique).

Cette optimisation a été réalisée dans le cadre d'une coopération européenne. Le but recherché est donc de participer à la définition d'une configuration de générateurs de vortex performante en se basant sur les études déjà réalisées par ailleurs. Une optimisation ayant pour point de départ la géométrie non contrôlée sera également présentée dans la section 4.3.3 et permettra de poursuivre plus en avant l'évaluation de nos méthodes d'optimisation.

4.3.2.1 Configuration des calculs

L'écoulement est calculé par le code AETHER en utilisant le modèle de turbulence EARSM $k - \varepsilon$ bicouche. Ce modèle de turbulence est préconisé chez Dassault Aviation pour les calculs industriels de manches à air coudées. Le nombre de Mach d'entrée est de 0.65, la

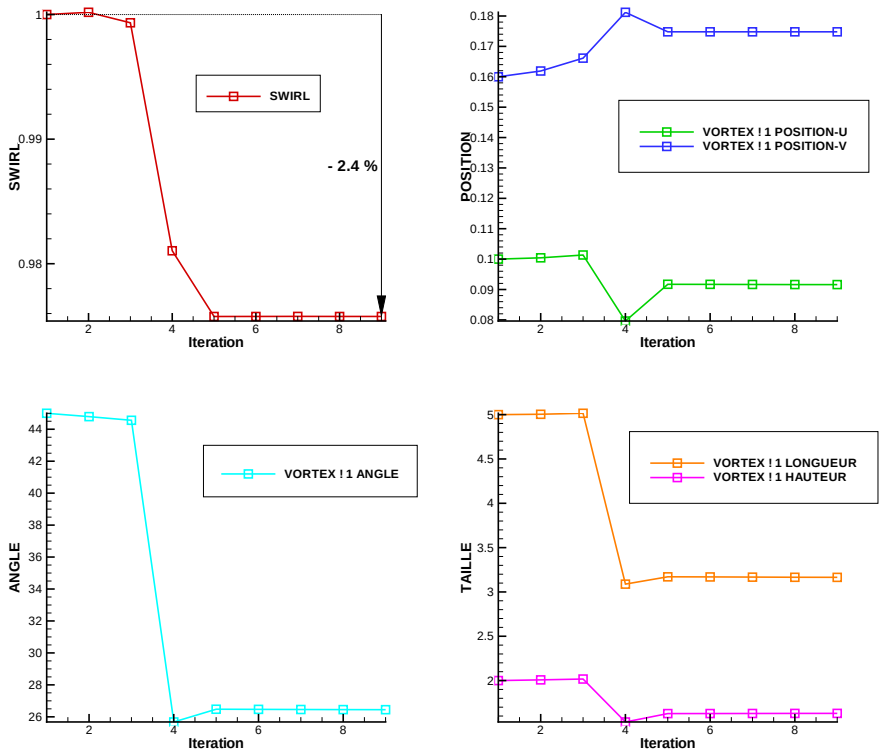

FIGURE 4.15 – Optimisation d'un générateur de vortex par l'algorithme IPA. Evolution du *swirl* (en haut à gauche), de la position (en haut à droite), de l'orientation (en bas à gauche) et de la taille (en bas à droite) du VG.

pression de référence de 67 000 Pa, la température de référence de 265.7 K et la pression de sortie de 70 500 Pa. Les simulations sont réalisées sur 128 processeurs Bull Itanium. La durée d'un calcul Navier-Stokes est d'approximativement 4 heures. Les problèmes adjoint sont quant à eux résolus avec une diminution du résidu de 10^{-5}. Leur durée est d'un peu plus d'une heure sur le même calculateur.

4.3.2.2 Résultats de l'optimisation

Une première optimisation paramétrique de la configuration de base comportant trois générateurs de vortex a été réalisée (donc pour 15 paramètres d'optimisation). Cette optimisation porte sur le *swirl* calculé dans le plan de sortie de la manche. Elle comporte 30 cycles de boucle et a été réalisée à l'aide de l'algorithme IPA sur 128 processeurs Bull Itanium. La durée totale d'exécution de cette optimisation paramétrique est d'un peu moins d'une semaine. Au terme de cette optimisation, la position des trois générateurs de vortex n'a pas évolué. Seules les orientations et les tailles des différents VG ont été sensiblement modifiées, ce qui a tout de même conduit à une diminution de la fonction coût de 4%.

A partir de cette configuration à trois générateurs de vortex optimisés, nous avons calculé deux cartographies de gradient topologique pour un VG possédant une orientation de $\pm 30\,^{\circ}$ par rapport à la direction de l'écoulement (*i.e.* divergent ou convergent par rapport au plan de symétrie). Sur les figures 4.18 et 4.19, nous présentons les cartographies correspondantes ainsi que la position des trois générateurs de vortex déjà présents dans la manche. Le gradient topologique suggère clairement de créer le quatrième VG en amont de ceux déjà existant, proche du plan de symétrie et avec une orientation de $+30\,^{\circ}$ (minimum de gradient topologique dans

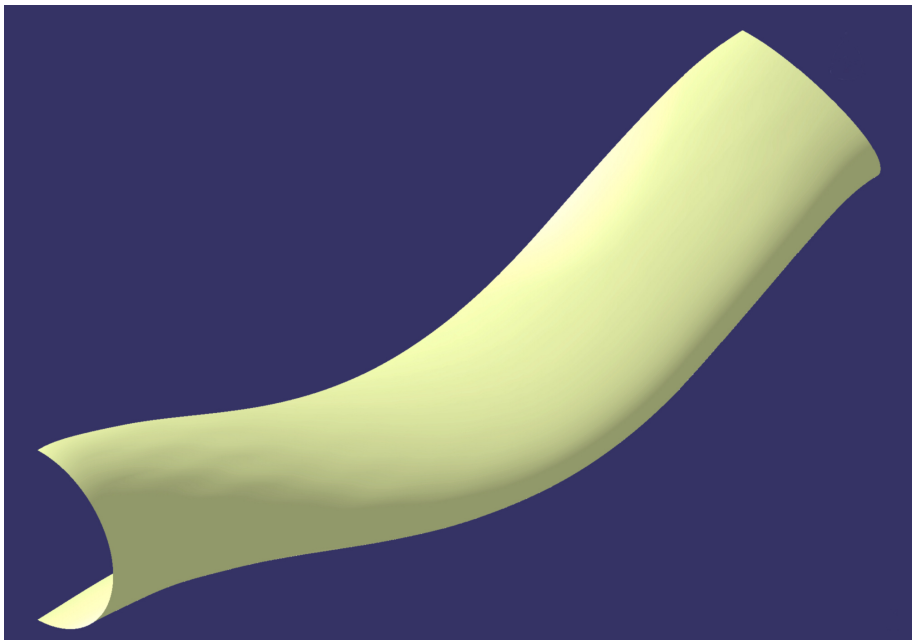

FIGURE 4.16 – Géométrie d'une manche à air générique en forme de U.

la zone bleue de la figure 4.18). Un nouveau générateur de vortex est donc créé au point de gradient topologique minimum, avec une hauteur égale à 1/5e de l'épaisseur de couche limite et une longueur quatre fois plus grande. Sa position, sa taille et son orientation sont ensuite localement optimisées en utilisant la chaîne d'optimisation paramétrique. Pour cette optimisation, on effectue 15 cycles de boucle pour un temps de calcul total d'environ 3 jours. Les bornes sur chacun des paramètres sont les suivantes : la position est autorisée à varier dans la zone de gradient topologique négatif, l'orientation peut varier de $\pm 20\,^{\circ}$, la longueur et la hauteur peuvent évoluer entre 0 et quatre fois la valeur de départ.

Une fois l'optimisation paramétrique du nouveau générateur de vortex effectuée, on recommence l'opération : deux cartographies de gradient topologique sont calculées (correspondant à deux orientations différentes), un nouveau VG est créé dans l'écoulement au point de gradient topologique minimum, puis ses cinq paramètres sont optimisés automatiquement. En tout, six générateurs de vortex supplémentaires ont été créés de cette manière, en plus des trois déjà présents dans la configuration de base. Nous présentons en figure 4.20 l'évolution du *swirl* (normalisé par la valeur correspondant à la configuration de base) au cours de l'optimisation globale. Sur ce schéma, chaque itération correspond à la création d'un nouveau générateur de vortex au minimum de gradient topologique ou à une optimisation des paramètres du VG précédemment créé. La diminution totale du *swirl* est d'environ 8%. Lors des itérations 3 et 9, correspondant à la création du quatrième et du septième VG, la fonction coût augmente : ceci est dû au fait que les générateurs de vortex nouvellement créés sont de taille trop importante. Rappelons en effet que le gradient topologique permet de déterminer où il est pertinent de créer un VG de taille infinitésimale. Mais dans les simulations numériques, cette taille doit être arbitrairement fixée (dans notre cas, la hauteur est fixée à 1/5e de l'épaisseur de couche limite pour une longueur quatre fois plus grande). Il peut arriver que ces paramètres soient trop grands : l'optimisation paramétrique se charge alors de les réduire. Toutefois, au bout des deux étapes (création du générateur de vortex + optimisation de ses paramètres), on obtient toujours une diminution de la fonction coût.

Le gain relativement modeste de 8% sur la fonction coût s'explique par le fait que le *swirl* est déjà fortement diminué par les trois générateurs de vortex de la configuration de base.

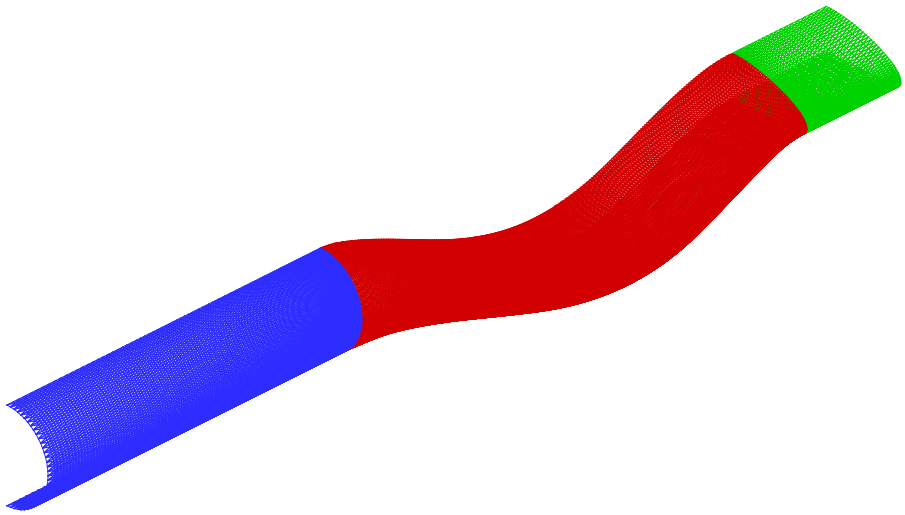

FIGURE 4.17 – Maillage surfacique d'une manche à air générique en forme de U (en rouge) munie de ses manchons d'entrée (en vert) et de sortie (en bleu).

Nous présentons en effet sur la figure 4.21 la cartographie de *swirl* (toujours normalisé par la valeur correspondant à la configuration de base à trois VG) ainsi que les lignes de courant dans le plan de sortie pour la manche sans VG, la configuration de base et la configuration optimisée (à 9 VG). On peut clairement voir disparaître le tourbillon responsable de la majeure partie du *swirl* à l'aide des trois premiers VG. Pour information, la manche sans générateur de vortex présente un *swirl* supérieur de 15.7% à celui correspondant à la configuration de base. L'optimisation permet d'homogénéiser davantage la cartographie et fait ainsi disparaître la zone de *swirl* minimum (visible en bleu au centre de la figure 4.21) qui était encore présente.

Nous présentons enfin en figure 4.22 l'emplacement des 9 générateurs de vortex de la configuration optimisée. Ceux de la configuration de base y apparaissent en rouge et ceux créés au cours de l'optimisation en noir. Les cercles en pointillé représentent les VG situés sous la manche. Deux des générateurs de vortex nouvellement créés sont situés en amont et proches de ceux de la configuration de base. Même si leur effet va intéragir avec les trois VG situés en aval, leur position peut sembler raisonnable. Par contre, la position des quatre autres générateurs de vortex produits par l'optimisation aurait été bien plus difficile à déterminer par avance. Ils sont en effet situés à l'entrée de la manche, donc très éloignés de la zone d'observation du *swirl*. Ils contribuent pourtant au gain global sur celui-ci, comme constaté dans la figure 4.20. C'est dans ce cadre que l'on peut mesurer l'apport de nos méthodes d'optimisation automatique. Elles permettent en effet d'explorer des configurations de contrôle que l'opérateur humain aurait pu difficilement intuiter. Soulignons enfin le fait que, bien que parfois leur taille ait été diminuée, aucun VG créé par gradient topologique n'a été supprimé par l'optimisation paramétrique (qui autorise une taille de VG nulle). Pour conclure, cette première application des méthodes d'optimisation développées dans le cadre de cette thèse à un cas industriel a permis l'amélioration d'une configuration de générateurs de vortex déjà performante, et ce de manière automatique.

4.3.3 Optimisation complète

Dans la section précédente, nous nous sommes attachés à améliorer une configuration de générateurs de vortex déjà performante en utilisant les méthodes d'optimisation que nous avons

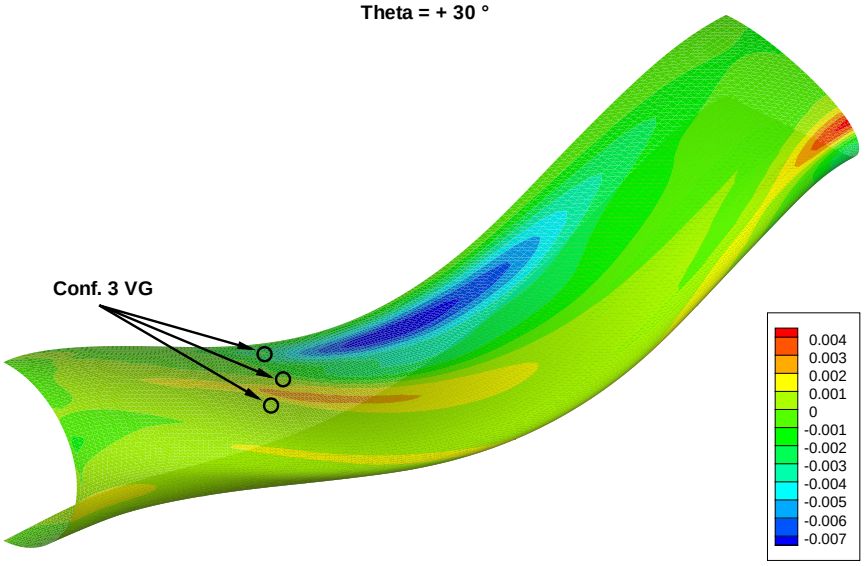

FIGURE 4.18 – Gradient topologique pour la création d'un quatrième générateur de vortex et possédant une orientation de $+30\,^{\circ}$.

développé. Concernant la géométrie dont il est question maintenant, nous avons également à disposition une configuration à trois générateurs de vortex positionnés manuellement. Cette configuration de référence est le fruit de nombreux calculs permettant de déterminer le nombre de dispositifs de contrôle ainsi que leurs paramètres. Contrairement à ce qui a été fait précédemment, on ne cherche pas à améliorer cette configuration de référence mais plutôt à essayer, en partant d'une géométrie sans générateurs de vortex, de trouver de manière automatique une configuration présentant de meilleures performances.

4.3.3.1 Configuration des calculs

La configuration des calculs présentés ici est quasiment la même que dans la section précédente. Les calculs Navier-Stokes sont réalisés à l'aide du modèle de turbulence EARSM $k-\varepsilon$ bicouche. Le Mach d'entrée est encore de 0.65, la pression de référence de 67 000 Pa, la température de référence de 276.6 K et la pression de sortie de 71 000 Pa. Le maillage étant plus petit que précédemment (1.3 millions contre 1.6 millions de nœuds), les temps de calculs sont plus courts : environ 3 heures pour les calculs Navier-Stokes et 1 heure pour les calculs d'adjoint.

La fonction coût considérée est encore une fois le *swirl* intégré dans le plan de sortie de la manche. Les calculs de gradient topologique se font pour des orientations de $\pm 45\,^{\circ}$ par rapport à la direction de l'écoulement. Les optimisations paramétriques sont désormais réalisées avec l'algorithme SQP. Puisque cet optimiseur ne demande pas le calcul du gradient lors des étapes de recherche linéaire, nous nous permettons d'effectuer désormais 20 cycles d'optimisation après chaque création d'un nouveau générateur de vortex. La durée totale de chacune des optimisations paramétriques est encore d'approximativement 3 jours.

4.3.3.2 Résultats de l'optimisation

Nous présentons en figure 4.23 l'évolution du *swirl* (normalisé par la valeur correspondant à la géométrie sans générateurs de vortex) au cours du processus d'optimisation. Les trois premiers générateurs de vortex placés par le processus d'optimisation permettent de quasiment

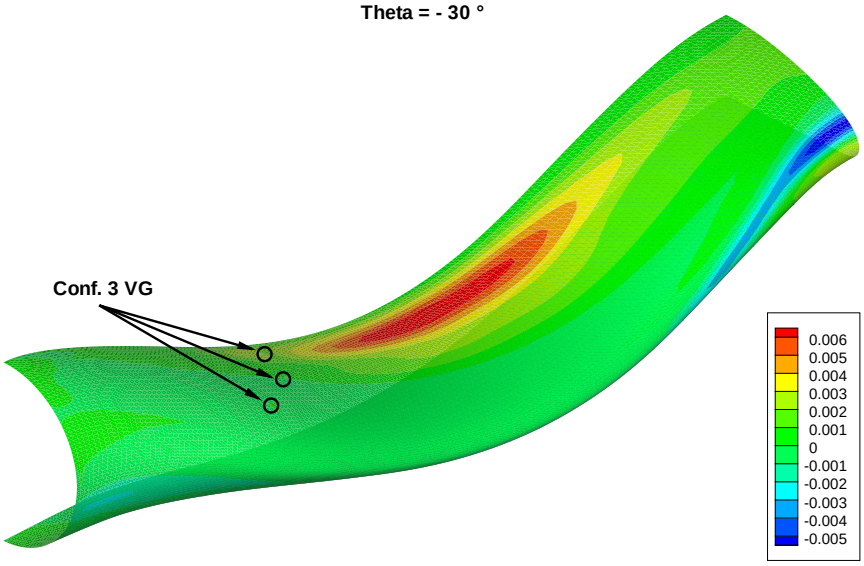

FIGURE 4.19 – Gradient topologique pour la création d'un quatrième générateur de vortex et possédant orientation de $-30\,^{\circ}$.

retrouver la valeur de *swirl* de la configuration de référence. Soulignons une fois encore le fait que cette configuration de référence est le résultats de nombreux calculs et du savoir-faire de l'aérodynamicien alors que la configuration produite par le processus d'optimisation l'est de manière automatique. Au bout du quatrième VG, on obtient une fonction coût plus basse encore : le gain global sur le *swirl* est de 17.4% contre 11% pour la configuration de référence. Les VG créés de manière automatique sont situés à des positions différentes que ceux de référence, mais sont surtout en moyenne deux fois plus petits.

La figure 4.24 compare enfin les cartographies de *swirl* dans le plan de sortie de la manche pour les trois configurations. La configuration optimisée semble encore une fois produire une cartographie plus homogénéisée : les zones de fort *swirl* y sont moins étendues.

4.4 Conclusion

Au cours de ce chapitre, nous avons tout d'abord validé l'implémentation de nos méthodes d'optimisation sur un cas simple de manche à air coudée en forme de S. Ces méthodes ont par la suite été testées avec succès dans le cadre du contrôle de manches à air de type industrielles en forme de U. Nous avons ainsi produit de manière automatique des configurations de contrôle présentant de meilleures performances en terme de *swirl* que celles trouvées manuellement. Nuançons toutefois ce bilan en soulignant le fait que nous ne considérons qu'une seule fonction coût au cours de ces optimisations. Le rendement des configurations produites est à chaque fois tout à fait acceptable, mais il serait souhaitable de pouvoir optimiser également les valeurs de distorsion, critères non différentiés à l'heure actuelle.

Nous avons cherché à appliquer nos méthodes d'optimisation à d'autres cas d'écoulements décollés que ceux présentés ici. Pour certains types de géométries, le problème majeur rencontré est l'impossibilité de parvenir à la convergence du problème adjoint, et ce quelque soit la taille du maillage et par conséquent de l'espace de Krylov utilisée. Cette non-convergence semble venir du fait que, dans ces cas précis, les calculs non-linéaires sont eux-même difficile à converger en simulation stationnaire. Pour de tels écoulements, le recours à une modélisation instationnaire semble être justifié. Le chapitre suivant porte ainsi sur l'extension du calcul de l'état adjoint et

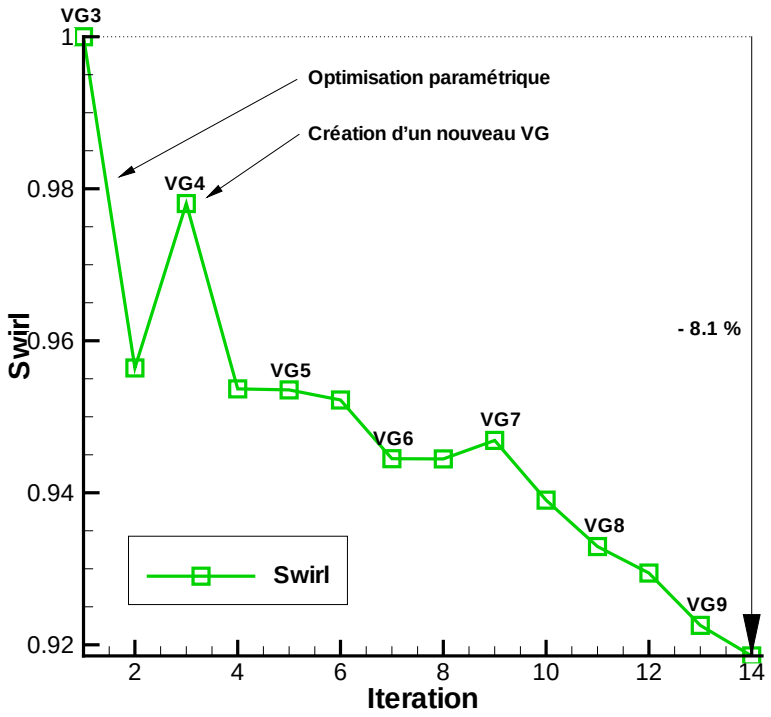

FIGURE 4.20 – Evolution du *swirl* au cours de l'optimisation. Création et optimisation successive de 6 générateurs de vortex.

du gradient topologique au cas instationnaire.

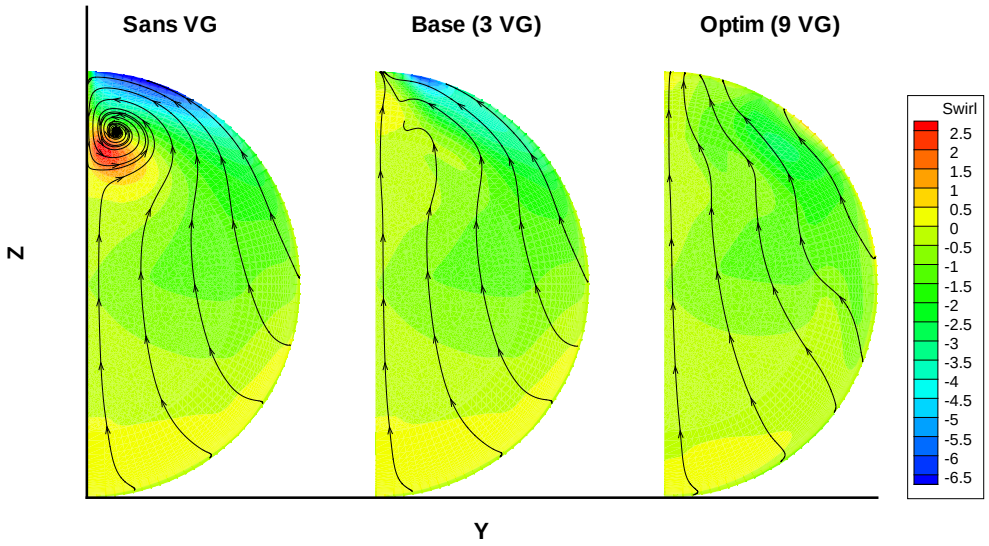

FIGURE 4.21 – Cartographie de *swirl* et lignes de courant dans le plan de sortie de la manche. Configuration sans VG (à gauche), de base (au centre) et optimisée (à droite)

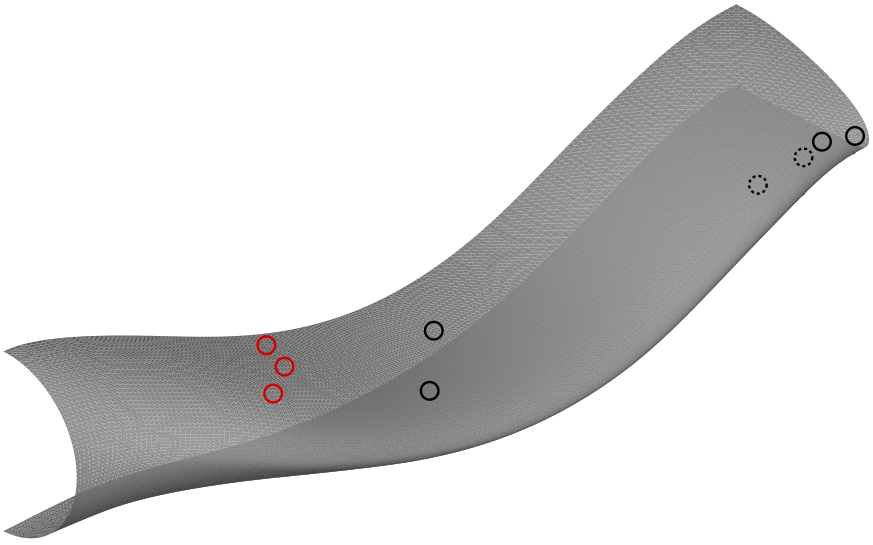

FIGURE 4.22 – Configuration optimisée à 9 générateurs de vortex. Les VG de la configuration de base sont en rouge et ceux créés au cours de l'optimisation en noir.

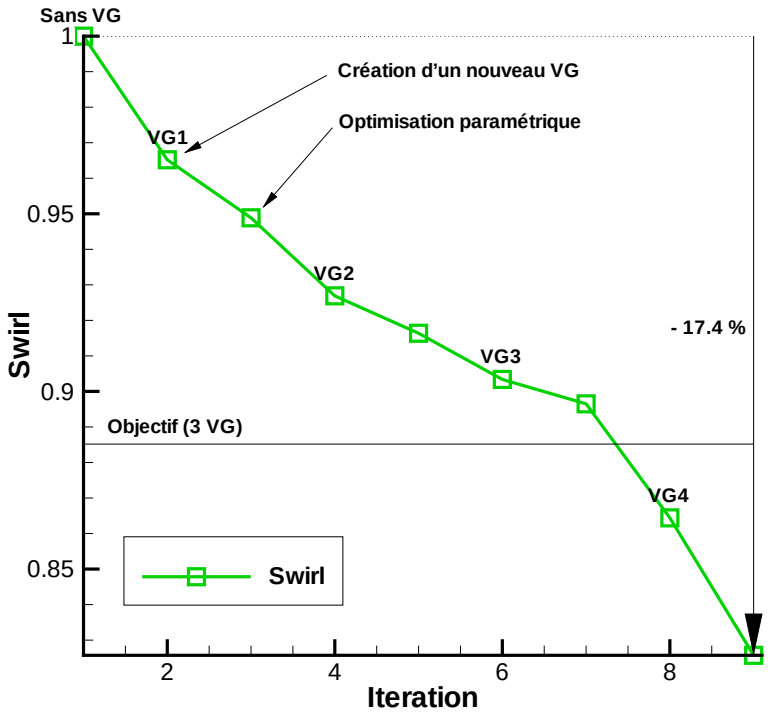

FIGURE 4.23 – Evolution du *swirl* au cours de l'optimisation. Création et optimisation successive de 4 générateurs de vortex.

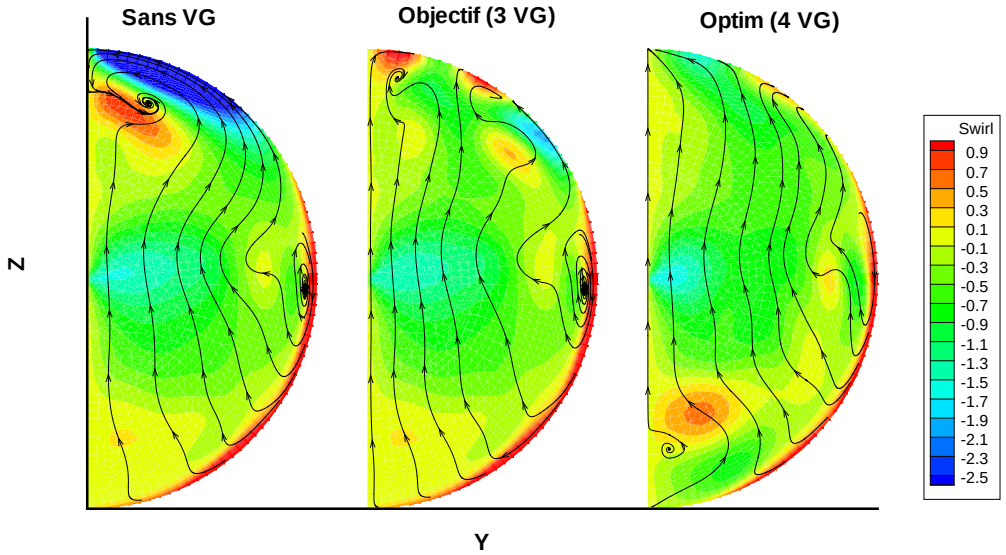

FIGURE 4.24 – Cartographie de *swirl* et lignes de courant dans le plan de sortie de la manche. Configuration sans VG (à gauche), de référence (au centre) et optimisée (à droite)

Chapitre 5

Contrôle et optimisation instationnaire

5.1 Introduction

Nous présentons dans ce chapitre les optimisations d'écoulements décollés menées dans le cadre instationnaire. En plus d'améliorer la prédiction de quantités déjà calculables par les simulation RANS, le recours à une modélisation instationnaire permet d'accéder à des valeurs dynamiques caractéristiques de l'écoulement. On peut par exemple penser aux critères particulièrement dimensionnants que sont les valeurs maximales de distorsions instationnaires mesurées dans le plan de sortie d'une manche à air coudée. L'emploi de simulations instationnaires dans un contexte industriel tendant à se généraliser, il sera à l'avenir utile de disposer de méthodes d'optimisations également instationnaires. C'est dans ce but que le code AETHER adjoint et le calcul du gradient topologique, à l'origine stationnaires, ont été étendus en des versions instationnaires.

Le code adjoint instationnaire nouvellement développé a tout d'abord été testé sur le cas simple d'un écoulement laminaire autour d'un cylindre. En particulier, l'état adjoint moyenné calculé en instationnaire sera comparé au résultat donné par le code adjoint stationnaire. Nous évaluerons également le comportement du code instationnaire sur le cas d'un écoulement stationnaire. L'interpolation des solutions stockées au cours du calcul non-linéaire et permettant d'économiser de la place mémoire, sera également testée sur ce cas simple.

Le gradient topologique pour la création de générateurs de vortex mécaniques (VG) en instationnaire sera par la suite calculé sur deux cas turbulents d'écoulements décollés. Dans le premier cas, on cherchera à minimiser la trainée d'un cylindre en régime turbulent. Puis, le cas de la manche en S sera de nouveau considéré pour la minimisation du *swirl*, mais cette fois dans un contexte instationnaire. Seul le gradient topologique et non l'optimisation paramétrique a été évalué en instationnaire. En effet, le temps de calcul élevé des simulations que nous présentons ne permet pas d'en réaliser un nombre important dans le cadre d'une boucle d'optimisation. Afin de vérifier si la création d'un générateur de vortex à une position donnée par le gradient topologique permet effectivement de diminuer la fonction coût, il suffit au contraire de ne réaliser qu'un seul calcul instationnaire.

5.2 Premiers calculs de l'adjoint instationnaire

Nous testons dans cette section la version instationnaire du code adjoint qui a été nouvellement développée sur le cas d'un écoulement simple en régime laminaire.

5.2.1 Présentation du cas et calcul Navier-Stokes

On considère l'écoulement autour d'un cylindre de diamètre 1 m et de 10 m de longueur. Le nombre de Mach d'entrée est de 0.2 et la viscosité du fluide est ajustée de telle sorte que le nombre de Reynolds de l'écoulement, calculé à partir du diamètre du cylindre, soit de 100. Le régime est donc laminaire. Une visualisation du maillage utilisé est présentée en figure 5.1. Celui-ci possède approximativement 75 000 nœuds.

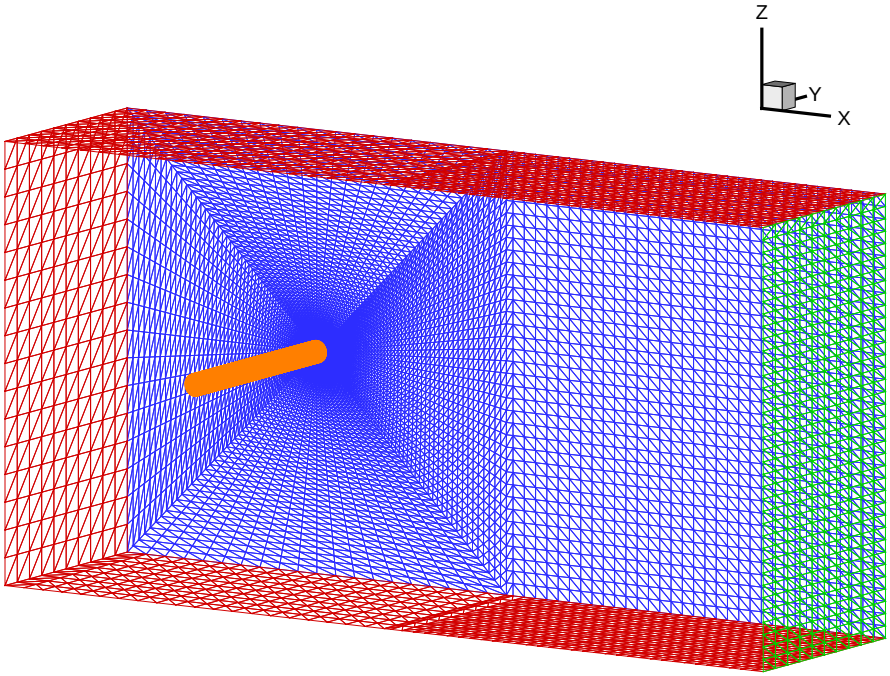

FIGURE 5.1 – Maillage pour le calcul de l'écoulement laminaire autour d'un cylindre.

L'écoulement autour du cylindre est calculé à l'aide du code AETHER en mode laminaire, c'est-à-dire sans modèle de turbulence. Le pas de temps du calcul instationnaire est $\Delta t = 0.1$ s. La durée de simulation est de 500 pas de temps, *i.e.* de 50 s. La solution de ce calcul Navier-Stokes est sauvegardée à chaque pas de temps en vue du calcul adjoint instationnaire (rétrograde en temps). Nous présentons en figure 5.2 une visualisation instantannée du nombre de Mach dans l'écoulement. Les allées de Von Kármán y sont clairement visibles dans le sillage du cylindre. Les figures suivantes comparent les résultats du calcul instationnaire avec ceux d'un calcul stationnaire. Sur la figure 5.3 est visualisé le nombre de Mach moyen du calcul instationnaire et sur la figure 5.4, la même quantité est observée pour le calcul stationnaire. Les différences notables entre les deux calculs montrent bien, déjà sur ce cas simple, l'apport que peut avoir une modélisation instationnaire de l'écoulement par rapport au seul calcul stationnaire.

5.2.2 Comparaison de l'adjoint instationnaire avec l'adjoint stationnaire

Afin d'évaluer le code nouvellement développé, nous avons comparé le résultat d'un calcul adjoint instationnaire avec son équivalent stationnaire. La fonction coût considérée est ici le coefficient de portance C_z (où seules les forces de pression sont prises en compte dans le calcul de la résultante aérodynamique). Nous présentons en figure 5.5 l'évolution de la norme (spatiale)

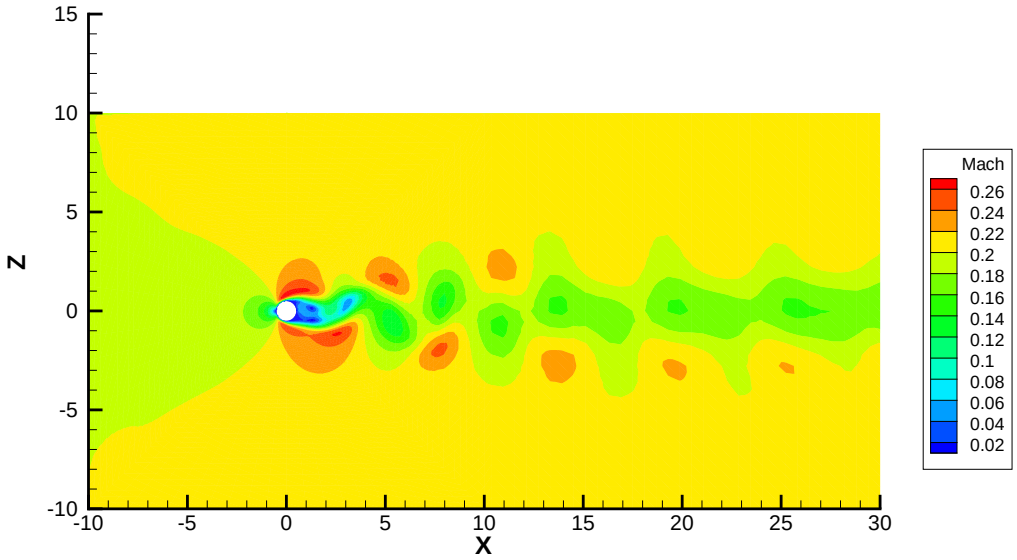

FIGURE 5.2 – Visualisation instantannée du nombre de Mach de l'écoulement autour du cylindre en régime laminaire.

de l'état adjoint au cours du calcul. L'axe des abscisses représente ici le temps pour le problème adjoint instationnaire, qui est, rappelons-le, rétrograde : la progression du numéro d'itération sur ce graphe représente donc une remontée dans le temps "physique" relatif au problème direct. L'aspect instationnaire du calcul de l'état adjoint est nettement visible. On peut également distinguer une phase transitoire du calcul, d'une durée inférieure à la centaine d'itérations, avant que la norme de l'adjoint ne devienne périodique en temps. Cette périodicité semble raisonnable puisque le calcul direct est également périodique.

L'état adjoint moyen résultant du calcul instationnaire est comparé avec l'adjoint du calcul stationnaire dans les figures 5.6 et 5.7. Sur ces deux figures, la norme des cinq composantes de l'adjoint est visualisée en chaque point du maillage. Qualitativement, les deux cartographies sont comparables (les niveaux sont les mêmes), bien que des différences restent visibles. En effet, il n'y a pas de raison que les deux calculs adjoints soient parfaitement similaires puisque, pour le problème direct, des différences existent déjà entre l'écoulement moyen instationnaire de la figure 5.3 et celui stationnaire de la figure 5.4. La grande similitude entre l'état adjoint stationnaire et l'état adjoint instationnaire moyen représente toutefois une première validation du code nouvellement développé.

5.2.3 Calcul de l'adjoint instationnaire pour un écoulement stationnaire

Nous avons cherché à évaluer le comportement du code adjoint instationnaire dans le cas où l'écoulement, bien que calculé en instationnaire, n'évolue pas au cours du temps. Pour cela, on considère de nouveau l'écoulement autour du cylindre présenté dans la section précédente, mais où le nombre de Reynolds a été augmenté à une valeur de 10^5. Un premier calcul stationnaire a été réalisé à l'aide du code AETHER. La solution obtenue a ensuite été utilisée comme condition initiale d'un calcul instationnaire de 500 itérations avec, une fois encore, un pas de temps $\Delta t = 0.1\ s$. Le pas de temps est ici volontairement pris trop grand par rapport à la

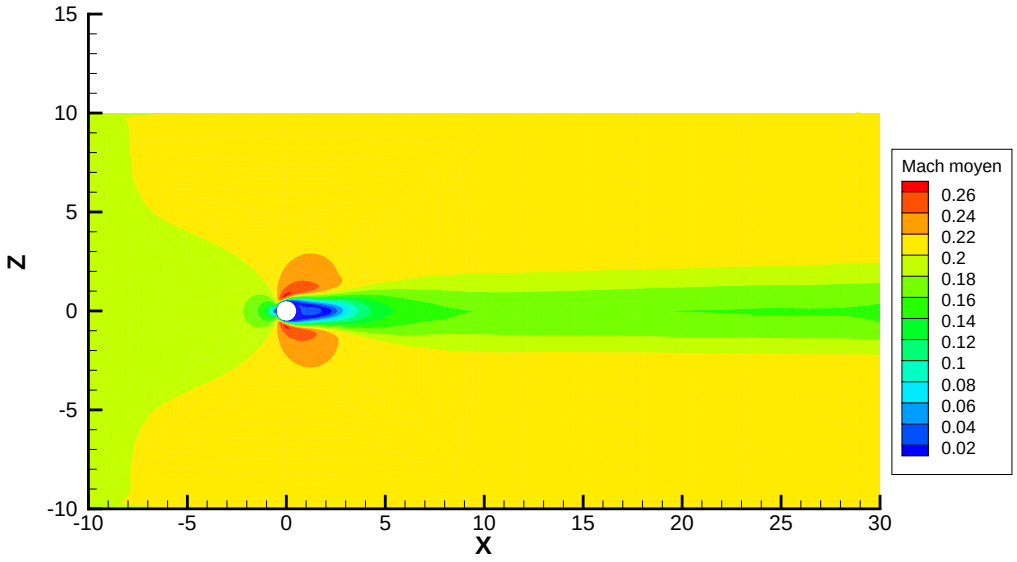

FIGURE 5.3 – Nombre de Mach moyen du calcul instationnaire.

période des phénomènes instationnaires censés se développer à un tel nombre de Reynolds ; les solutions obtenues à chaque itération du calcul instationnaire sont en tous points identiques à la solution initiale calculée en stationnaire.

Comme précédemment, l'état adjoint relatif au coefficient de portance C_z a été calculé à partir de la solution stationnaire d'une part et de l'ensemble des 500 solutions du calcul instationnaire d'autre part. Bien que le résultat du calcul instationnaire soit en réalité stationnaire, il n'est pas acquis qu'il en soit de même pour le calcul adjoint. En effet, la présence de la condition initiale du problème adjoint (qui est une condition finale en temps "physique") implique que celui-ci possède inévitablement une phase transitoire. Les résultats de simulations montrent que cette phase transitoire est en fait réduite à quelques itérations seulement du calcul instationnaire adjoint. De plus, l'état adjoint du calcul instationnaire obtenu au bout de trois itérations est exactement le même que l'état adjoint du calcul stationnaire. Ce cas test très simple permet donc de valider le comportement du code adjoint instationnaire lorsque l'écoulement calculé n'évolue pas au cours du temps.

5.2.4 Interpolation de solutions

Comme nous l'avons déjà souligné, le calcul de l'état adjoint instationnaire nécessite d'avoir stocké au préalable les solutions du calcul direct à chaque pas de temps. Dans un contexte industriel, cet impératif peut vite devenir prohibitif en terme d'espace mémoire : le stockage de 1 000 solutions d'un calcul Navier-Stokes sur un maillage d'un million de nœuds représente en effet une centaine de gigaoctets. Afin d'économiser de la place mémoire, plusieurs solutions sont envisageables. On peut par exemple choisir de ne stocker à chaque pas de temps que la différence entre la solution courante et la solution précédente puis de filtrer cette quantité. Une autre solution consisterait à construire au fur et à mesure du calcul direct une interpolation de la solution en chaque point et de ne stocker ainsi qu'un certain nombre de coefficients permettant de reconstruire la solution à chaque pas de temps.

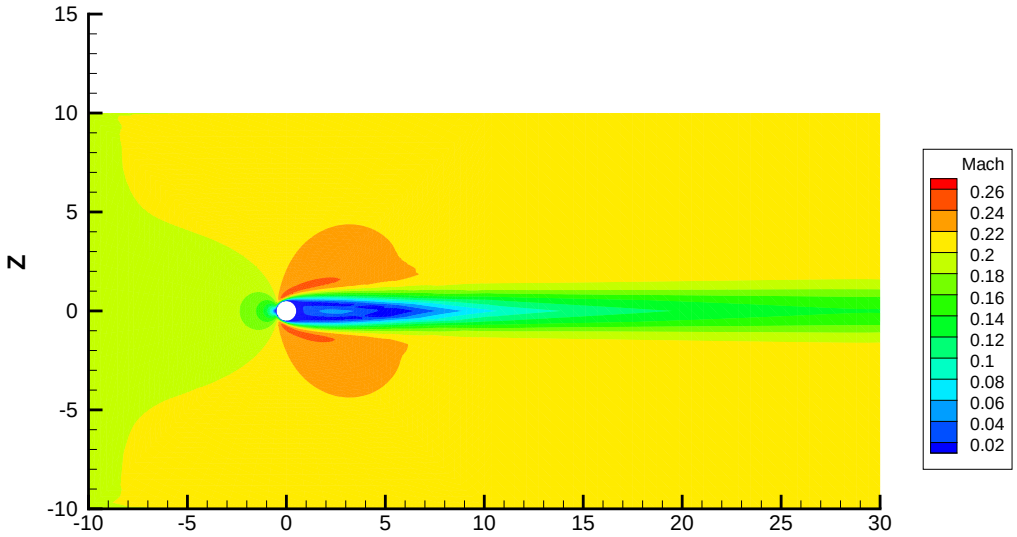

FIGURE 5.4 – Nombre de Mach du calcul stationnaire.

La stratégie que nous avons testé ici est bien plus simple à mettre en œuvre. Elle consiste à ne stocker la solution qu'en certains pas de temps uniquement et à reconstruire les solutions manquantes au cours du calcul adjoint par interpolation. Cette interpolation doit cependant se faire soigneusement afin que l'ordre du schéma en temps du problème adjoint soit conservé. Reprenons en effet le problème résolu à chaque itération n du calcul adjoint instationnaire :

$$\left(\frac{\partial \boldsymbol{E}_n}{\partial \boldsymbol{V}_n}\right)^T \boldsymbol{P}_n = \left(\frac{dj_n}{d\boldsymbol{V}}\right)^T - \left(\frac{\partial \boldsymbol{E}_{n+1}}{\partial \boldsymbol{V}_n}\right)^T \boldsymbol{P}_{n+1} - \left(\frac{\partial \boldsymbol{E}_{n+2}}{\partial \boldsymbol{V}_n}\right)^T \boldsymbol{P}_{n+2}, \tag{5.1}$$

avec $\boldsymbol{E}_n$ le résidu du problème direct, $\boldsymbol{V}_n$ le vecteur d'état, $\boldsymbol{P}_n$ l'état adjoint et j_n la fonction coût. En explicitant le schéma d'ordre deux utilisé dans le code AETHER et en omettant par souci de simplicité la dérivée en temps présente dans le terme moindres carrés de (3.31), ceci peut s'écrire :

$$\frac{3}{2}\boldsymbol{P}_n - 2\boldsymbol{P}_{n+1} + \frac{1}{2}\boldsymbol{P}_{n+2} + \left(\frac{\partial \widetilde{\boldsymbol{E}}_n}{\partial \boldsymbol{V}_n}\right)^T \boldsymbol{P}_n = \left(\frac{dj_n}{d\boldsymbol{V}}\right)^T, \tag{5.2}$$

avec $\widetilde{\boldsymbol{E}}_n$ le "reste" du résidu $\boldsymbol{E}_n$ après développement. On obtient donc le même schéma en temps pour le problème adjoint que pour le problème direct. Si on veut calculer l'état adjoint à un temps intermédiaire pour lequel la solution du problème direct n'est pas disponible, et si l'on souhaite préserver l'ordre en temps de (5.2), on doit donc procéder à une interpolation quadratique de la solution inconnue à partir de celles sauvegardées.

Cette stratégie d'économie du stockage des solutions du problème direct a été implémentée dans le code AETHER adjoint instationnaire et testée sur l'écoulement laminaire déjà traité dans la section 5.2.1. L'état adjoint instationnaire de référence a été calculé à partir de l'ensemble des 500 solutions stockées au cours de chaque pas de temps du calcul direct, puis il a été de nouveau calculé sur le même intervalle de temps mais à partir d'un nombre de solutions de plus en plus restreint. Sur la figure 5.8, nous comparons l'évolution de la norme de l'état adjoint instationnaire pour les différents calculs réalisés. Le calcul dénommé *Interp. 2* est réalisé

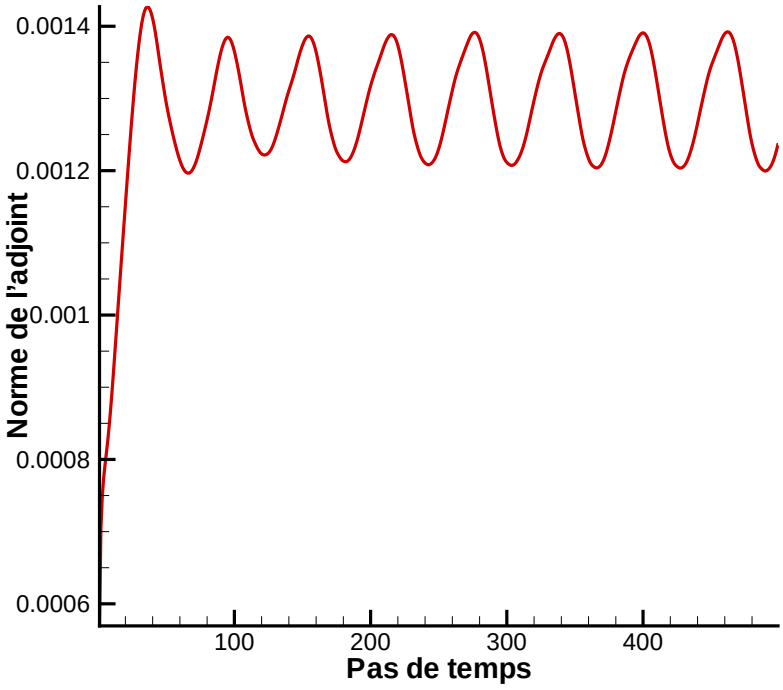

FIGURE 5.5 – Evolution de la norme de l'adjoint instationnaire.

à partir de solutions stockées tous les deux pas de temps (250 solutions au total), le calcul *Interp. 5* à partir de solutions stockées tous les cinq pas de temps (100 solutions) et le calcul *Interp. 10* à partir de solutions stockées tous les dix pas de temps (50 solutions). Ainsi, pour le calcul *Interp. 2*, on procède à une interpolation de la solution du problème direct pour une itération du problème adjoint sur deux, pour quatre itérations sur cinq pour le calcul *Interp. 5* et pour neuf itérations sur dix pour le calcul *Interp. 10*. Comme on pouvait s'y attendre, plus le nombre d'interpolations des solutions du problème direct est grand, plus le calcul de l'adjoint instationnaire s'écarte du calcul exact de référence. A l'issu de la simulation, le calcul *Interp. 2* donne toutefois les mêmes résultats que le calcul exact : on aurait donc pu se contenter de ne stocker qu'une solution sur deux lors de la résolution du problème direct instationnaire. On peut également constater que, pour une durée de simulation courte, un nombre important d'interpolations est admissible : l'évolution de l'état adjoint au bout de 150 itérations pour les quatre calculs réalisés est comparable.

En conclusion, soulignons que, pour le cas présenté ici, le pas de temps du calcul instationnaire est grand et le temps de simulation long (50 s). Dans les applications industrielles, lorsque le pas de temps est relativement petit et que la solution du problème direct évolue peu d'une itération à une autre, l'utilisation de l'interpolation dans le calcul de l'état adjoint instationnaire peut être tout à fait envisageable et ainsi mener à des gains importants en terme de place mémoire nécessaire.

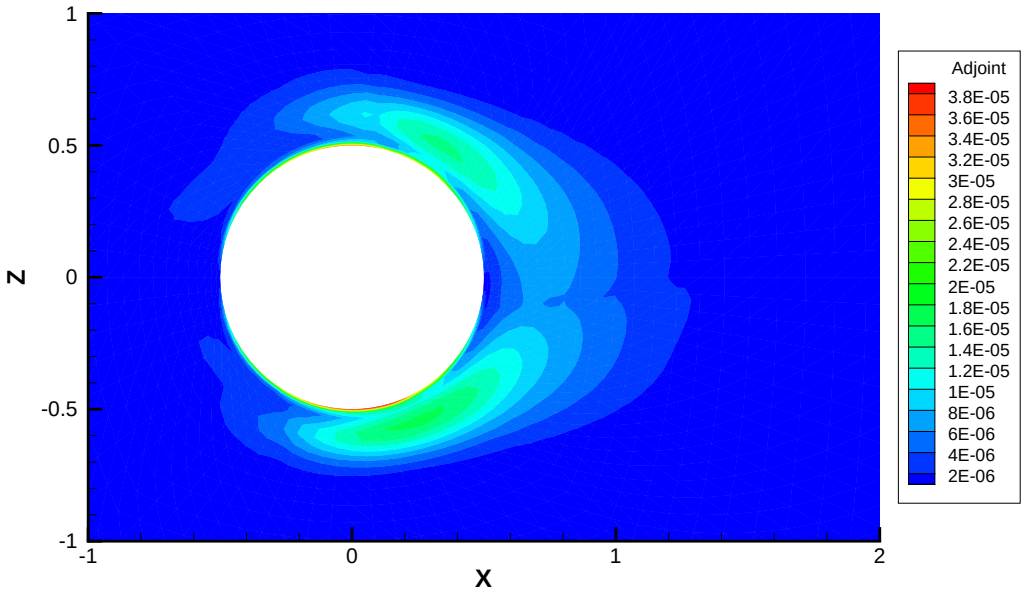

FIGURE 5.6 – Etat adjoint moyen du calcul instationnaire.

5.3 Ecoulement autour d'un cylindre

5.3.1 Présentation du cas et calcul Navier-Stokes

L'objectif de cette section est d'utiliser le calcul du gradient topologique instationnaire pour contrôler un écoulement turbulent simple au moyen de générateurs de vortex mécaniques. La géométrie considérée est un cylindre possédant un diamètre de 10 mm et une longueur de 8 mm. Une coupe du maillage utilisé est présentée en figure 5.9. Celui-ci possède approximativement 200 000 nœuds.

Les conditions utilisées par le code AETHER pour le calcul Navier-Stokes sont les suivantes : le nombre de Mach d'entrée est de 0.2, la pression statique et la température de référence sont respectivement de 104 200 Pa et 290 K. Les plans d'équation $y = 0$ et $y = 8$ sont des plans de symétrie. Un calcul Navier-Stokes instationnaire a été réalisé en utilisant le modèle de turbulence DES (pour *Detached Eddy Simulation*) $k - \varepsilon$. Le pas de temps choisi est $\Delta t = 2 \times 10^{-6}$ s pour un total de 3 500 itérations. Ce calcul est divisé en deux parties. Au cours des 1 000 premières itérations, l'écoulement uniforme initial se destabilise progressivement : c'est la partie transitoire du calcul. Pour les 2 500 itérations suivantes, le régime instationnaire de l'écoulement est pleinement établi. C'est sur cette période de 2 500 itérations, correspondant à une durée de 5×10^{-2} s que va être calculé le gradient topologique instationnaire pour le contrôle de l'écoulement par générateurs de vortex mécaniques. Ainsi, afin de pouvoir calculer l'état adjoint instationnaire, la solution du calcul Navier-Stokes est stockée à chacune des 2 500 itérations. Le temps de calcul de la simulation instationnaire ainsi réalisée est d'environ 6 heures sur 64 processeurs Bull Itanium.

La figure 5.10 présente une visualisation instantannée du nombre de Mach ainsi que les lignes de courant de l'écoulement dans le plan $y = 4$. La présence d'un tourbillon dans le sillage du cylindre y est clairement visible.

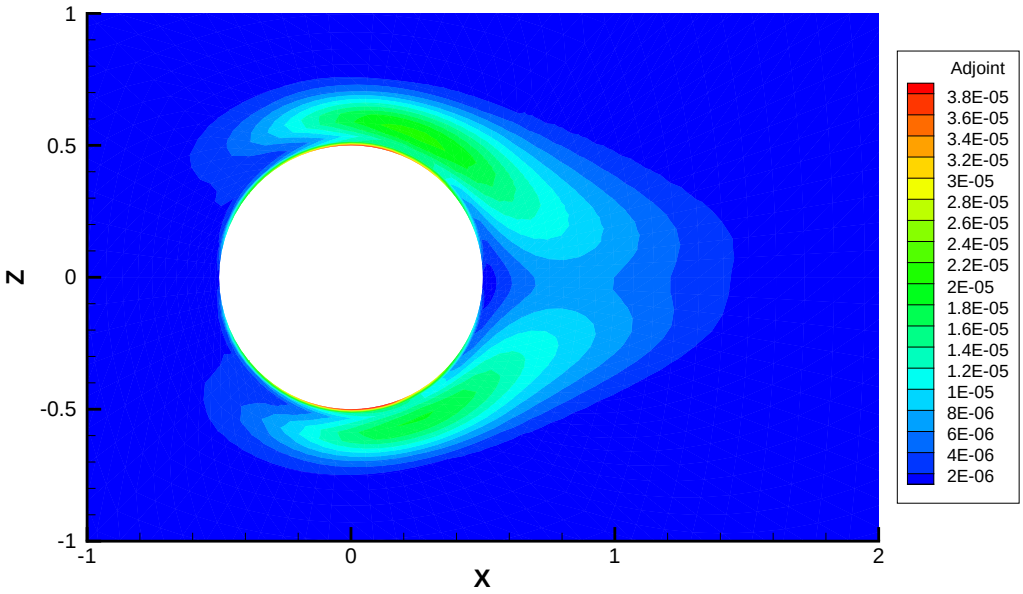

FIGURE 5.7 – Etat adjoint du calcul stationnaire.

5.3.2 Gradient topologique instationnaire

L'état adjoint et le gradient topologique instationnaires ont été calculés à partir de l'ensemble des 2 500 solutions du calcul DES précédemment réalisé. La fonction coût que l'on cherche à minimiser et qui est donc prise en compte pour le calcul de l'adjoint est le coefficient de trainée C_x (seules les forces de pression sont encore une fois considérées). Cette fonction est calculée à chaque itération puis sommée : c'est donc la trainée moyenne du cylindre pendant toute la durée de la simulation qui est ici observée. Le gradient topologique est calculé pour l'ajout simultané de deux générateurs de vortex placés de manière symétrique par rapport au plan d'équation $z = 0$. Les paramètres des VG à ajouter sont les suivants : leur hauteur, de l'ordre de grandeur de l'épaisseur de couche limite en amont du décollement constatée à l'issue du calcul Navier-Stokes, est de 0.25 mm pour une longueur de 1 mm et une orientation par rapport à la direction de l'écoulement de 30 $^\circ$. Le temps de calcul de l'état adjoint et du gradient topologique instationnaires pour ce cas est de plus de 2 jours sur 64 processeurs IBM Pwr5.

Nous présentons en figure 5.11 l'évolution de la norme spatiale de l'état adjoint au cours du calcul instationnaire. Celle-ci atteint un maximum après 1 500 itérations puis semble se stabiliser en moyenne vers la fin du calcul. La durée totale de simulation n'est toutefois ici pas suffisamment importante pour en tirer des conclusions sur l'évolution en temps de cette norme. Nous avons en effet constaté certaines instabilités dans les simulations adjointes instationnaires pour les écoulements turbulents. Dans certains cas, la norme de l'état adjoint ne semble même jamais se stabiliser (cf. le cas de la manche en S de la section 5.4). Même si une période transitoire ainsi qu'un comportement oscillant de l'état adjoint instationnaire semblent naturels, on pourrait espérer que celui-ci se stabilise en moyenne si le calcul se poursuit. Le comportement en temps de l'état adjoint est de plus particulièrement crucial pour le calcul du gradient topologique instationnaire. Si la norme de l'état adjoint ne se stabilise pas et continue d'augmenter indéfiniment, le gradient topologique observé reflètera davantage la position optimale d'un générateur de vortex à un instant donné plutot qu'une position permettant un

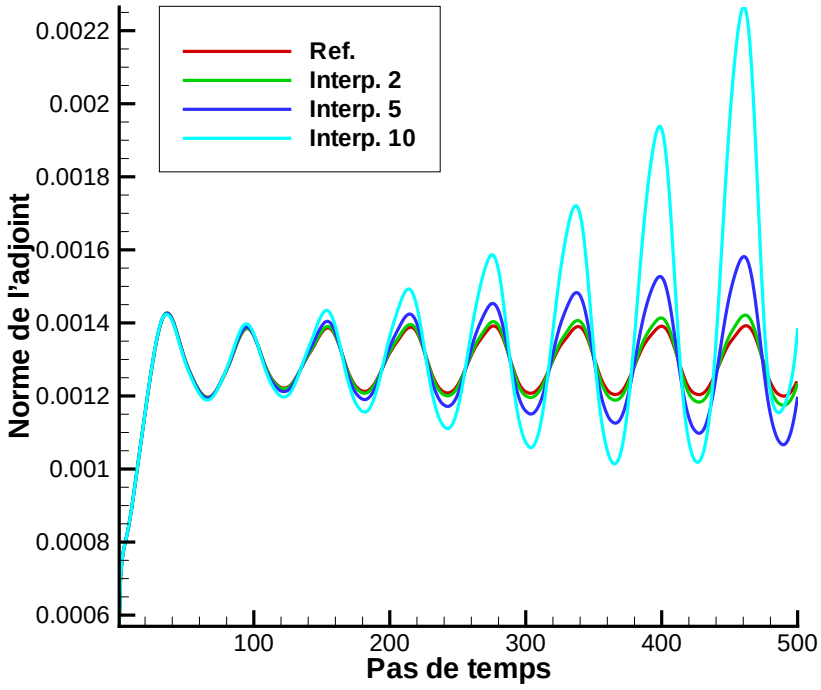

FIGURE 5.8 – Evolution de la norme de l'adjoint instationnaire. Calcul de référence en rouge et calculs avec interpolations des solutions du problème direct en vert, bleu et cyan.

gain moyen sur la fonction coût pour toute la durée de l'observation. Comme en témoigne la figure 5.11, ce n'est toutefois pas le comportement observé ici. Ceci est d'autant plus vrai que le gradient topologique n'évolue pas au cours des 500 dernières itérations du calcul.

La figure 5.12 présente ainsi la cartographie de gradient topologique au terme des 2 500 itérations du calcul adjoint instationnaire réalisé. Une zone de gradient topologique négatif (en bleu sur la figure) apparaît clairement en amont du décollement. Une zone positive, bien que d'amplitude inférieure est également visible. Une telle dissymétrie droite-gauche peut paraître surprenante au premier abord. Rappelons toutefois que le bord du cylindre est constitué de plans de symétries. Or, l'orientation de 30 ° imposée dans le calcul du gradient topologique coïncide ici avec un vecteur dont les composantes en x et y sont positives sur la partie supérieure du cylindre. Par conséquent, un unique générateur de vortex placé sur la gauche du cylindre correspond en fait à une paire de VG convergents : le VG "virtuel" situé de l'autre côté du plan $y = 8$ possède en effet une orientation symétrique. Un générateur de vortex placé sur la droite de la figure correspond quant à lui à une paire de VG divergents. Or, les tourbillons générés dans un cas ou dans l'autre ne possèdent pas le même comportement. Dans le cas de générateurs de vortex convergents, les tourbillons créés se rapprochent et s'auto-entretiennent : ils tendent ainsi à rester plus longtemps attachés à la paroi et ont un effet plus important sur le décollement de la couche limite. Dans le cas divergent, les tourbillons s'éloignent et disparaissent plus rapidement ; l'effet de retardement du décollement obtenu est moindre.

Cette différence, que l'on peut constater sur la cartographie de gradient topologique de la figure 5.12, se retrouve également dans les simulations Navier-Stokes instationnaires réalisées à posteriori avec VG sur le cylindre. Un générateur de vortex placé à la localisation VG1 de la figure 5.12 correspondant au minimum de gradient topologique conduit ainsi à une réduction

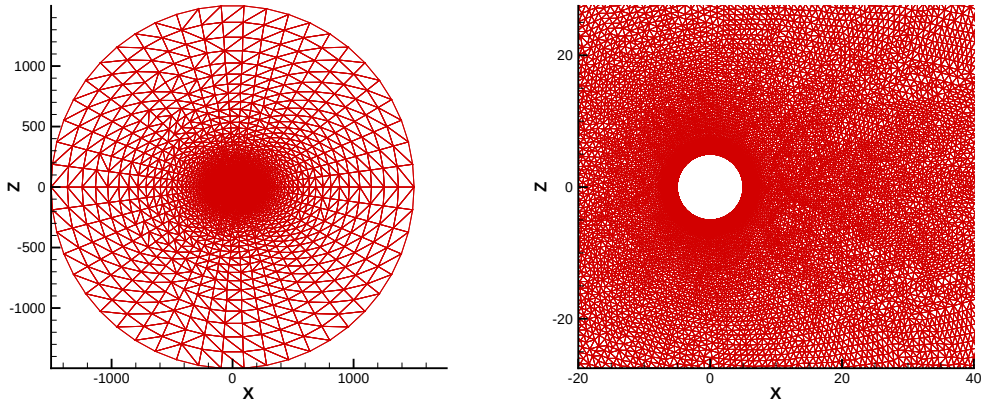

FIGURE 5.9 – Vue d'une coupe du maillage utilisé pour les calculs turbulents. Maillage complet à gauche et zoom sur le cylindre et son proche sillage à droite.

moyenne de la trainée de 11.4% par rapport au cas non contrôlé. Une anomalie entre la cartographie de gradient topologique et le calcul avec générateur de vortex reste toutefois présente. La localisation VG2, qui concorde pourtant avec une zone de gradient topologique sensiblement positive (donc où la fonction coût devrait augmenter), produit tout de même une diminution du C_x de 2.2%, bien moindre toutefois que pour la position VG1. Cet effet du positionnement des générateurs de vortex sur le cylindre est également visible sur la figure 5.13 présentant l'évolution du coefficient de trainée C_x au cours des simulations Navier-Stokes instationnaires sans (en rouge) et avec VG (en vert pour la localisation VG1 et bleu pour la localisation VG2).

Le calcul de gradient topologique instationnaire réalisé ici présente des résultats suffisamment intéressants pour envisager son utilisation dans le cas d'un écoulement complexe de manche à air coudée. C'est ce qui sera fait dans la section suivante.

5.4 Manche en S

La dernière application présentée concerne le calcul du gradient topologique sur la manche en forme de S déjà traitée dans le chapitre 4 mais désormais dans un cadre instationnaire.

5.4.1 Calcul Navier-Stokes

Pour les calculs Navier-Stokes instationnaires, le maillage fin introduit dans la section 4.2.1 du chapitre 4 est symétrisé : le maillage volumique total comporte ainsi plus de 1.6 millions de nœuds. Les conditions du calcul sont les mêmes que celle présentées dans la section 4.2.2. La solution d'un calcul RANS réalisé avec le modèle de turbulence $k - \varepsilon$ bicouche est utilisée comme initialisation du calcul instationnaire. Une première simulation DES avec un pas de temps $\Delta t = 2 \times 10^{-5}$ s et d'une durée de 5 000 itérations est ensuite menée afin que le régime instationnaire de l'écoulement se développe pleinement. Puis un second calcul de 2 500 itérations est réalisé avec toujours le même pas de temps, au cours duquel la solution Navier-Stokes est stockée à chaque itération en vue du calcul de l'état adjoint. L'execution de ce second calcul DES instationnaire est d'une durée approximative de 12 heures sur 128 processeurs Bull Itanium. A l'issu du calcul, l'ensemble des solutions stockées représente plusieurs centaines de gigaoctets en espace mémoire.

Nous présentons dans les figures 5.14 et 5.15 des visualisations de l'écoulement dans la manche au cours du calcul instationnaire. Sur la figure 5.14 apparaît le nombre de Mach ins-

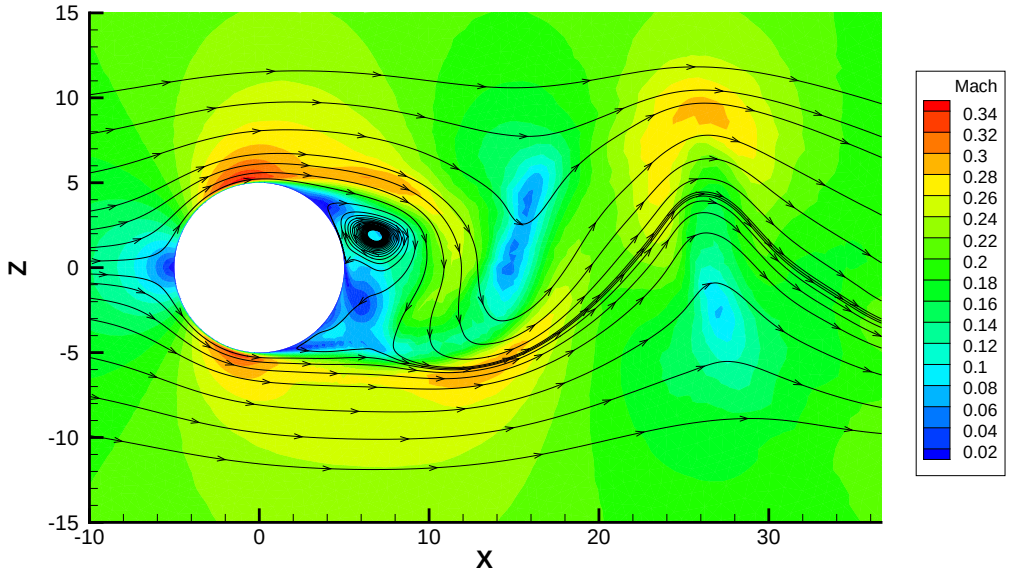

FIGURE 5.10 – Nombre de Mach et lignes de courant instantannés de l'écoulement autour du cylindre en régime turbulent.

tantanné dans le plan de symétrie $y = 0$. Les grandes structures tourbillonaires de l'écoulement sont quant à elles représentées sur la figure 5.15 par des iso-surfaces de critère Q, défini comme la différence entre taux de rotation et taux de cisaillement : $Q = -\frac{1}{2}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$. Cette figure permet ainsi de visualiser les structures tourbillonaires importantes se développant dans l'écoulement.

5.4.2 Gradient topologique instationnaire

A partir des 2 500 solutions du calcul Navier-Stokes stockées, nous avons calculé, à l'aide du code adjoint instationnaire, le gradient topologique pour la minimisation du *swirl* moyen observé dans le plan de sortie de la manche. Le gradient topologique est donné pour l'ajout d'une paire de générateurs de vortex placés de façon symétrique par rapport au plan d'équation $y = 0$. Les VG à ajouter possèdent les mêmes paramètres que pour le calcul stationnaire du chapitre 4. Leur taille est de 5×2 mm et leur orientation est divergente de $45\,^\circ$ par rapport au plan de symétrie de la manche. Par souci d'économie du temps de calcul, le gradient topologique n'est calculé que dans une zone en amont du décollement, et dans le bas de la manche uniquement. Le problème adjoint instationnaire est quant à lui bien résolu sur le maillage entier. La durée totale de ce calcul d'optimisation instationnaire est de plus d'une dizaine de jours sur 128 processeurs Bull Itanium.

Nous présentons en figure 5.16 l'évolution de la norme de l'adjoint au cours des itérations du calcul instationnaire. Sur la figure 5.17 peut également être visualisée une cartographie de l'état adjoint, dans le plan de symétrie $y = 0$ de la manche, au cours des 500 premières itérations. Pour chacune des six cartographies présentées, la valeur de l'adjoint a été ramenée entre 0 et 1. Cette figure permet ainsi de constater graphiquement la "remontée" au cours des itérations de l'information portée par l'état adjoint, du plan de sortie de la manche où est observé le *swirl*, vers la zone de décollement. En effet, pour une équation d'advection pure, le problème adjoint, rétrograde en temps, est également un problème d'advection, mais avec une vitesse

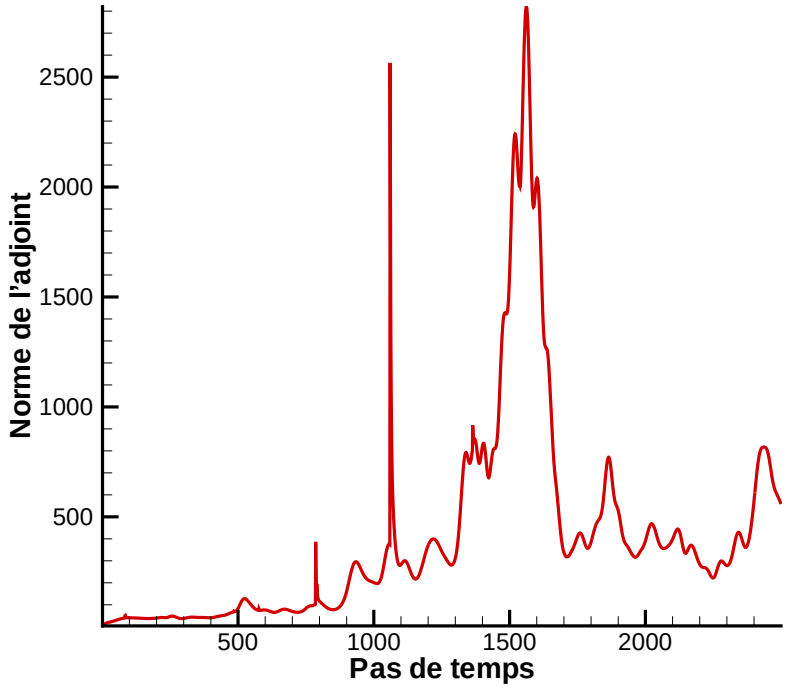

FIGURE 5.11 – Evolution de la norme de l'adjoint instationnaire pour l'écoulement turbulent autour d'un cylindre.

inverse. Il est donc naturel de voir l'adjoint s'écouler de la sortie de la manche vers son entrée. Dans les itérations suivantes, le maximum de la norme de l'état adjoint reste localisé au niveau du décollement. Mentionnons également le fait que les difficultés de convergence du problème linéaire adjoint rencontrées dans le cas stationnaire sont ici absentes. A chaque itération, la matrice du problème linéaire à résoudre comprend en effet davatage de termes sur sa diagonale (présence du terme $\frac{3}{2}\boldsymbol{P}_n$ dans l'équation (5.2)). L'algorithme itératif GMRES que l'on utilise est alors plus performant que dans le cas stationnaire.

Comme mentionné dans le cas du cylindre de la section précédente, l'observation de la figure 5.16 montre que la norme spatiale de l'état adjoint augmente et ne semble pas se stabiliser. Plusieurs raisons peuvent expliquer ce comportement. Le pas de temps considéré, raisonnable pour le calcul Navier-Stokes, est peut être trop grand pour assurer la stabilité du calcul adjoint. Une autre hypothèse serait que la durée de la simulation réalisée ici soit trop courte : dans le cas du cylindre en écoulement turbulent, on observe en effet que la norme de l'état adjoint augmente jusqu'à un maximum avant de se mettre à diminuer et à osciller autour d'une valeur moyenne. Il se pourrait enfin que la différentiation de la turbulence, non réalisée pour le moment dans le code adjoint, ait davantage d'importance dans la stabilisation du calcul adjoint instationnaire que dans le cas stationnaire. Le coût informatique, que ce soit en terme de temps de calcul ou d'espace mémoire nécessaire, pour la résolution du problème adjoint instationnaire de cet écoulement de type industriel nous a empêché d'explorer pour le moment toutes ces hypothèses.

On peut toutefois constater, sur la figure 5.16 à droite, que la norme de l'état adjoint semble osciller pendant quelques centaines d'itérations avant l'itération 1 000. Nous avons donc examiné le gradient topologique associé au bout de 1 000 itérations. Sa cartographie est présentée en figure 5.18. On constate la présence de deux zones de signes différents côte à côte et en

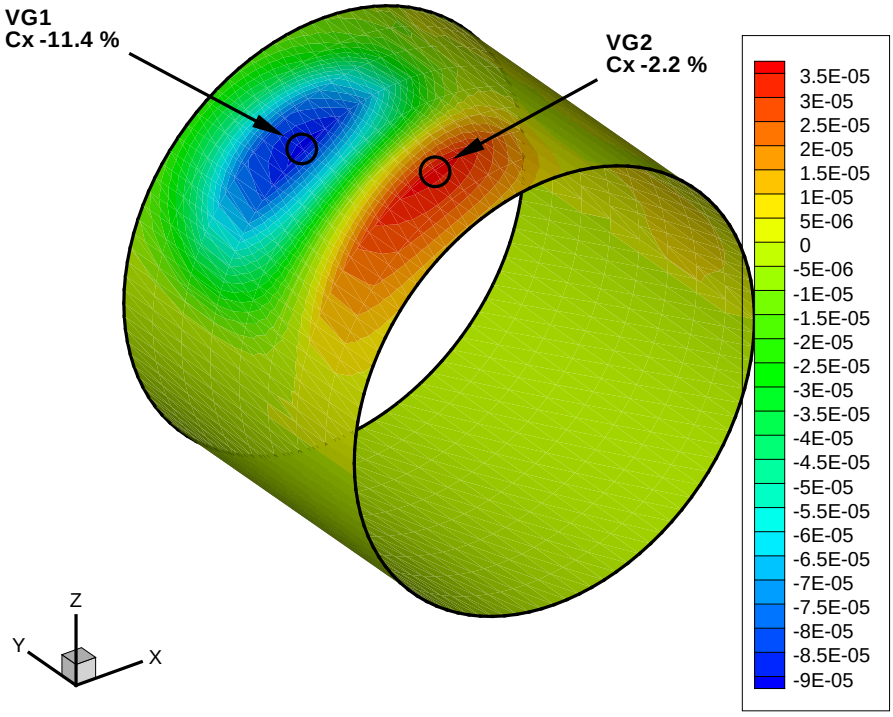

FIGURE 5.12 – Cartographie de gradient topologique instationnaire sur le cylindre en écoulement turbulent.

amorce du coude. Des calculs Navier-Stokes instationnaires d'une durée de 1 000 itérations ont été réalisés avec des générateurs de vortex placés dans chacune des deux zones. Pour la localisation VG1, correspondant au minimum de gradient topologique, on observe une diminution de *swirl* de 9.2%. Le même défaut que dans le cas du cylindre est toutefois encore présent. Pour la localisation VG2 de gradient topologique positif, la fonction coût diminue également mais dans des proportions plus faibles, puisque le gain n'est que de 3.6%. Bien que ce premier calcul de gradient topologique instationnaire dans le cas d'un écoulement complexe ne donne pas entière satisfaction, il permet cependant de différentier deux positions potentielles de générateurs de vortex pourtant très proches. Les deux localisations testées sont en effet situées à la même abscisse x, mais la localisation VG1, plus éloignée du plan de symétrie $y = 0$ que la localisation VG2, donne de biens meilleurs résultats sur le *swirl*. Nous présentons également en figure 5.19 l'évolution du *swirl* au cours des simulations Navier-Stokes instationnaires réalisées avec et sans générateurs de vortex. On peut remarquer que l'effet du placement des VG sur la valeur de *swirl* ne s'observe qu'à partir de 300 itérations environ après le début de la simulation : c'est le temps nécessaire pour que l'écoulement modifié par le dispositif de contrôle situé près de l'entrée de la manche atteigne le plan d'observation en sortie.

Même si les résultats de ce premier calcul d'adjoint et de gradient topologique pour un écoulement complexe de manche ne sont pas tout à fait satisfaisants, ils permettent toutefois d'envisager l'utilisation des méthodes d'optimisation que nous avons développé dans le cadre de cette thèse pour les simulations instationnaires. Toutefois, le comportement en temps de l'état adjoint instationnaire doit encore être investigué.

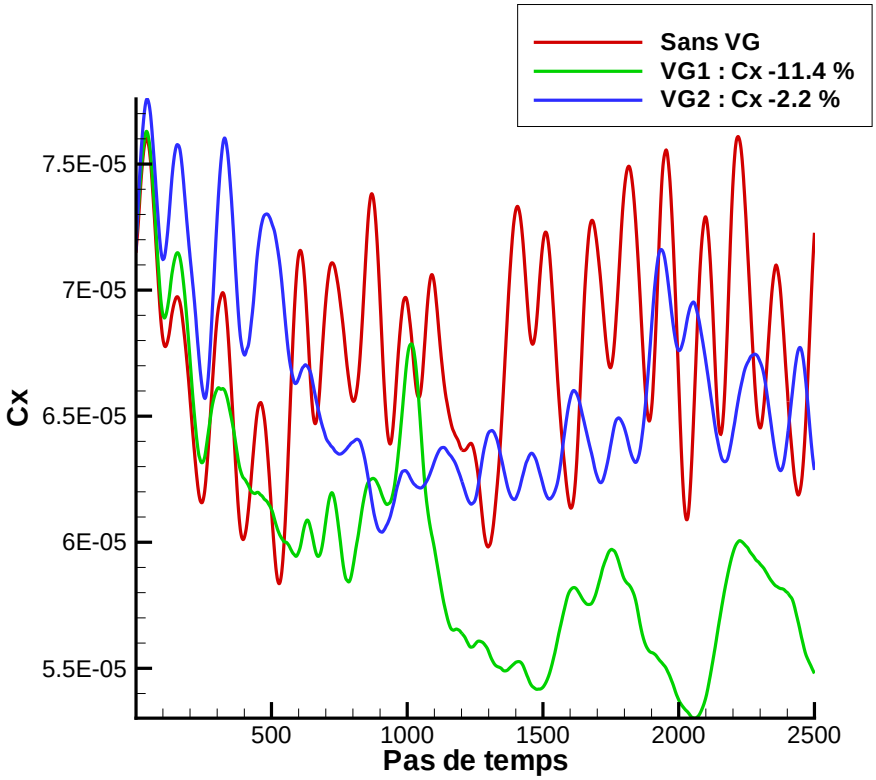

FIGURE 5.13 – Evolution du coefficient de trainée au cours des simulations Navier-Stokes instationnaires de l'écoulement autour du cylindre. Cas sans contrôle (en rouge) et avec générateurs de vortex (en vert et bleu).

5.5 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre les premiers résultats d'optimisations instationnaires réalisées à l'aide des outils développés au cours de cette thèse. Après avoir comparé le code adjoint instationnaire avec sa version stationnaire sur des cas simples d'écoulements laminaires, le gradient topologique pour le contrôle d'écoulements décollés à l'aide de générateurs de vortex mécaniques a été calculé pour deux écoulements instationnaires.

Les résultats présentés méritent d'être examinés plus en détails. Toutefois, même si le temps de calcul de l'état adjoint et du gradient topologique instationnaires peuvent sembler excessifs, celui-ci est encore compatible avec les contraintes d'un environnement industriel. En outre, la stratégie d'interpolation des solutions du problème direct que nous avons présenté peut être mise en œuvre afin d'économiser de l'espace mémoire. On peut donc tout à fait envisager dans un avenir proche l'utilisation progressive de méthodes instationnaires d'optimisation pour les écoulements complexes rencontrés dans l'industrie aéronautique.

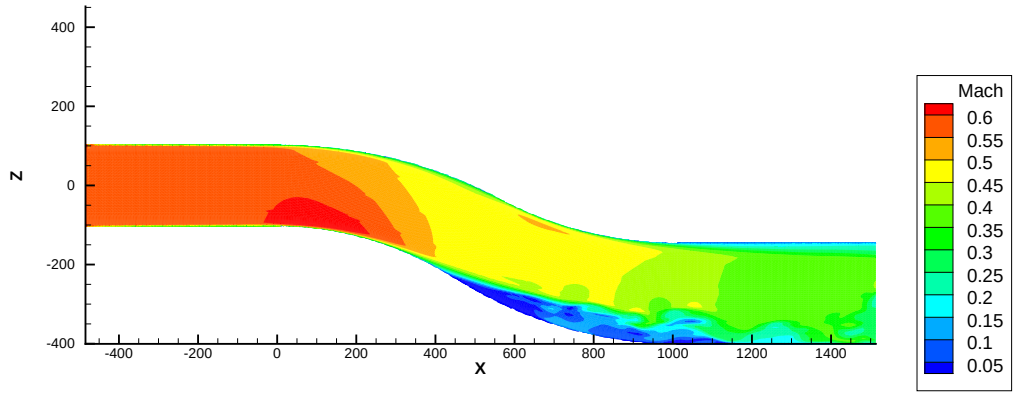

FIGURE 5.14 – Visualisation du nombre de Mach instantanné dans le plan de symétrie de la manche.

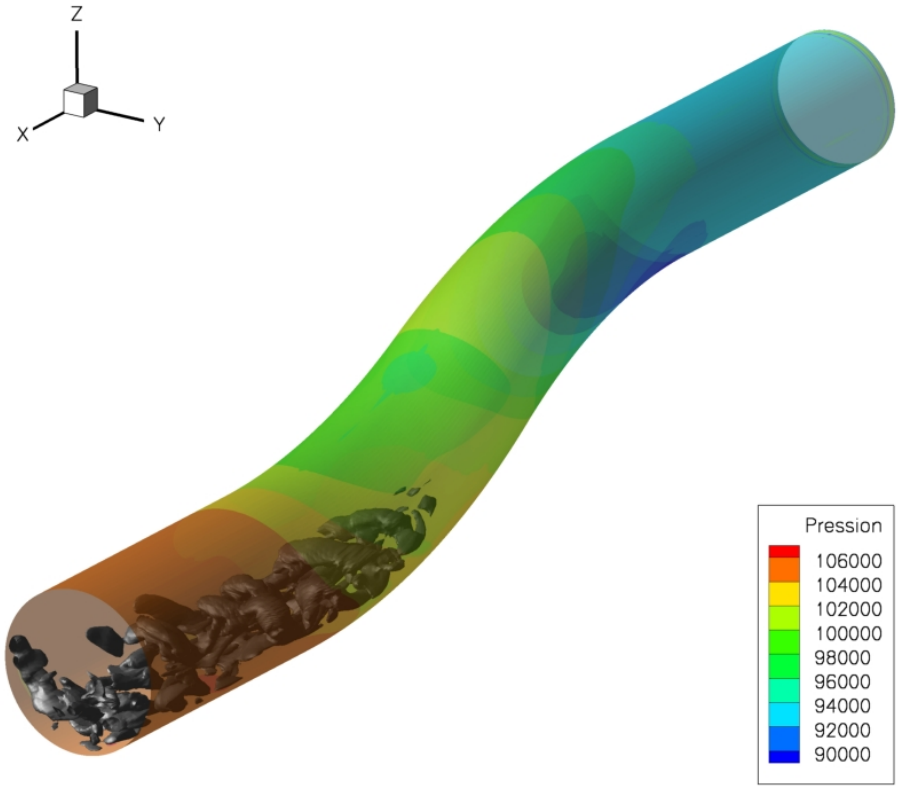

FIGURE 5.15 – Iso-surfaces de critère Q. Les valeurs de la pression sont visualisées sur la paroi de la manche.

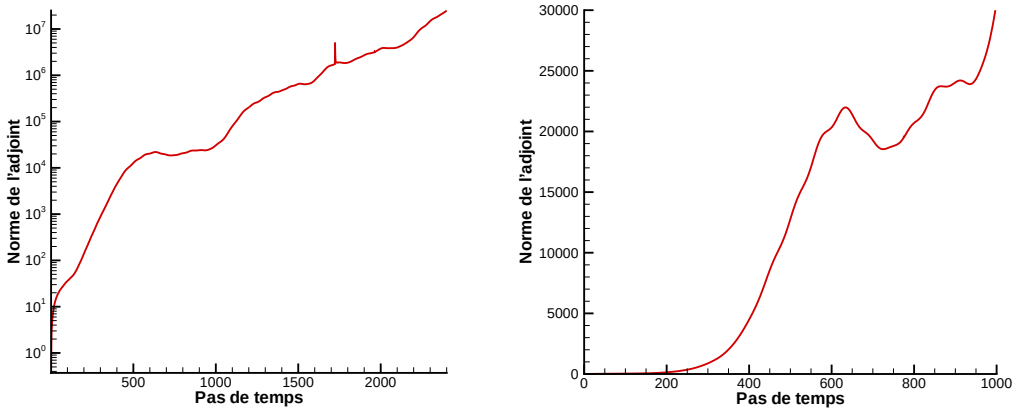

FIGURE 5.16 – Evolution de la norme de l'état adjoint instationnaire. A droite : zoom sur les 1 000 premières itérations.

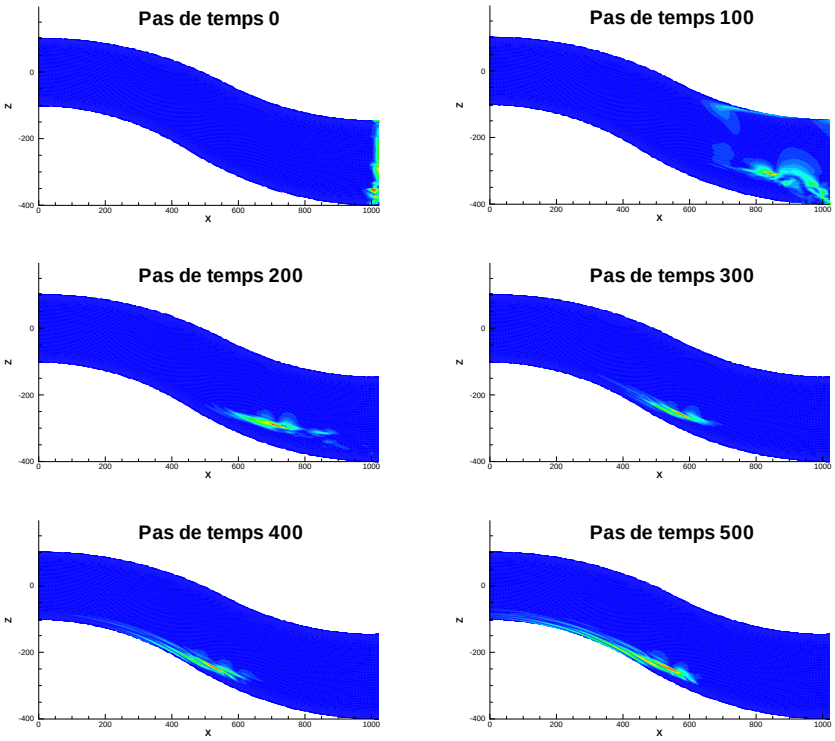

FIGURE 5.17 – Visualisation de l'état adjoint instationnaire dans le plan de symétrie de la manche au cours des 500 premières itérations.

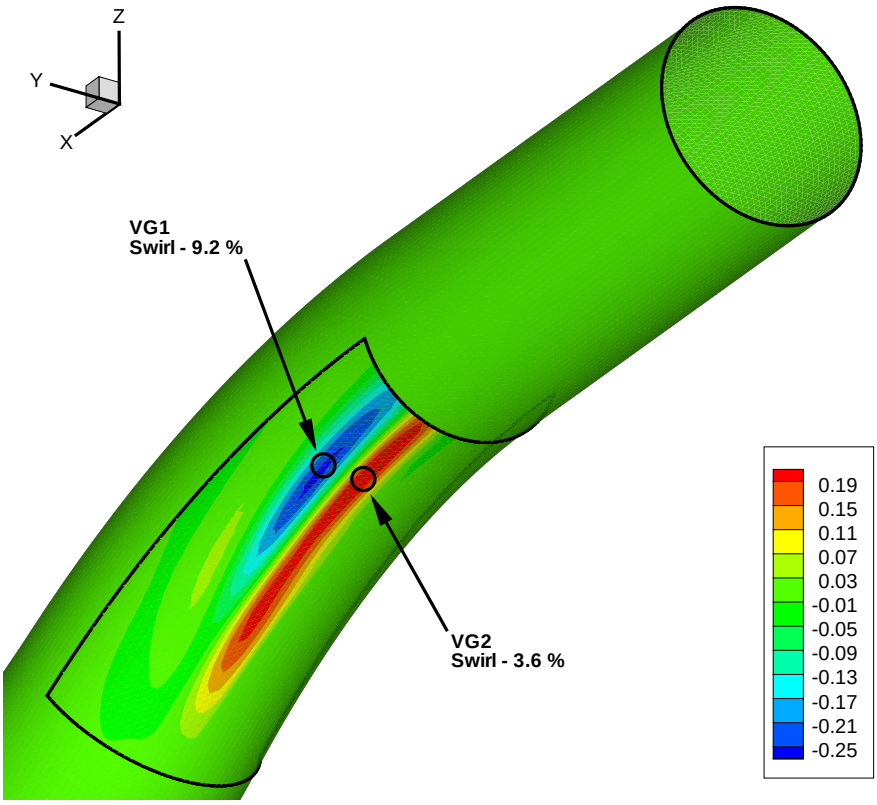

FIGURE 5.18 – Cartographie de gradient topologique instationnaire dans la manche en forme de S.

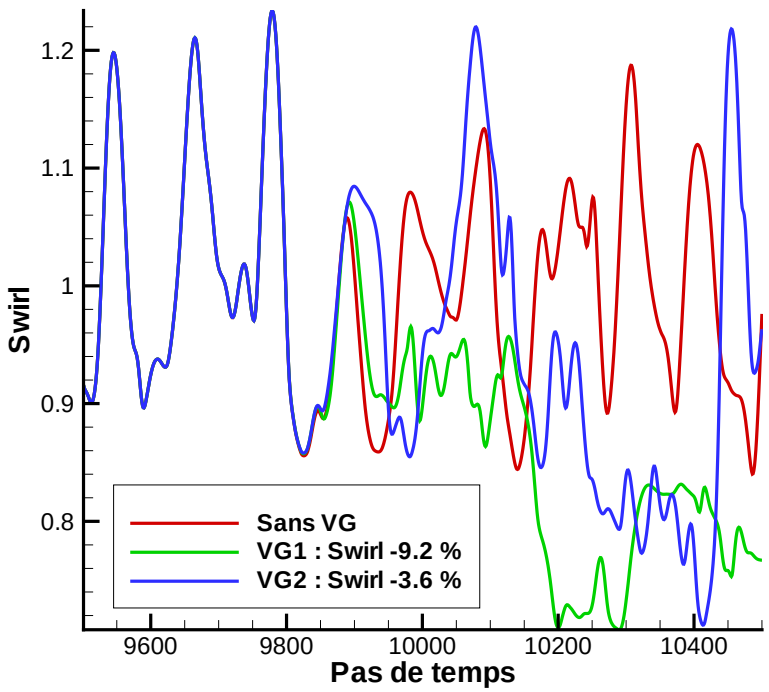

FIGURE 5.19 – Evolution du *swirl* au cours des simulations Navier-Stokes instationnaires de l'écoulement dans la manche en S. Cas sans contrôle (en rouge) et avec générateurs de vortex (en vert et bleu).

Chapitre 6

Conclusion

6.1 Synthèse des travaux réalisés

Les travaux menés au cours de cette thèse avaient pour but de proposer des méthodes de contrôle optimal pour les écoulements décollés, dans un cadre stationnaire et instationnaire, en particulier pour les écoulements de manches à air coudées. Les dispositifs de contrôle considérés sont des générateurs de vortex mécaniques (VG) modélisés par l'ajout de termes sources aux équations de Navier-Stokes. Dans un premier temps, et afin de créer un nouveau VG dans un écoulement de référence, nous avons utilisé une méthode de gradient topologique. Le dimensionnement des générateurs de vortex ainsi créés ou déjà présents dans l'écoulement a quant à lui été réalisé à l'aide d'une procédure classique d'optimisation paramétrique.

L'expression du gradient topologique pour la création d'un terme source a tout d'abord été calculée pour un certain nombre de problèmes modèles, dépendant ou non du temps, continus ou discrets. Cette expression fait en particulier intervenir la résolution d'un problème adjoint aux équations de départ. Le gradient topologique a ainsi été implémenté dans le code industriel AETHER adjoint stationnaire de Dassault Aviation. Une meilleure simulation des écoulements décollés passant par l'utilisation de modélisations instationnaires, le code adjoint stationnaire de départ a donc été étendu en une version permettant de prendre en compte cet aspect. Une boucle d'optimisation automatique des paramètres d'un nombre quelconque de générateurs de vortex a également été créée.

Les méthodes d'optimisation développées dans le cadre de cette thèse ont tout d'abord été testées et validées sur un cas simple de manche à air coudée en forme de S. Elles ont ensuite été appliquées au contrôle de l'écoulement à l'intérieur de manches à air de type industrielles présentant plusieurs coudes. En alternant des calculs de gradient topologique pour la création de nouveaux générateurs de vortex, puis des optimisations paramétriques pour leur dimensionnement, nous avons ainsi défini de manière automatique des stratégies de contrôle égalant ou dépassant en performance celles déterminées manuellement par les ingénieurs. Les outils développés dans le cadre stationnaire peuvent donc dès à présent être utilisés par les aérodynamiciens au cours de la conception d'une forme de manche à air coudée.

En fin de thèse, nous avons réalisé des premiers calculs d'adjoint et de gradient topologique pour des simulations instationnaires, en utilisant le code nouvellement développé. Les cas du contrôle de l'écoulement turbulent autour d'un cylindre, puis à l'intérieur d'une manche à air coudée ont été considérés. En outre, une méthode simple permettant d'économiser de la place mémoire pour le stockage des solutions du problème direct a été proposée et implémentée. Bien que les résultats produits restent encore à approfondir, les simulations réalisées nous permettent d'envisager l'utilisation prochaine de méthodes d'optimisation instationnaire pour les écoulements complexes rencontrés en milieu industriel.

6.2 Perspectives et travaux en cours

Les travaux réalisés au cours de cette thèse permettent d'envisager de nombreuses perspectives. Tout d'abord, nous n'avons considéré ici que le cas du contrôle de décollements au moyen de générateurs de vortex mécaniques. Toutefois, les méthodes d'optimisation proposées sont suffisamment générales pour nous permettre d'envisager l'emploi d'autres moyens de contrôle. L'effet d'un générateur de vortex fluidique par exemple, peut également être modélisé par l'ajout d'un terme source aux équations de Navier-Stokes. Les méthodes développées peuvent donc s'adapter sans peine à ce dispositif de contrôle. Si par contre l'on fait le choix d'une modélisation d'un soufflage ou d'une aspiration par l'intermédiaire d'une condition aux limites, un gradient topologique approprié devra de nouveau être calculé.

Nous pouvons également envisager l'application de nos méthodes à d'autres écoulements que ceux de manches à air coudées. Le développement de fonctions coût adaptées pourra par exemple permettre de contrôler, à l'aide de générateurs de vortex, le phénomène de *buffeting* pouvant apparaître sur un profil d'aile en régime transonique.

Nous n'avons considéré dans nos travaux que la minimisation d'une seule fonction coût. L'extension du gradient topologique et de l'optimisation paramétrique au contexte multi-objectif doit ainsi être investigué. De plus, l'utilisation conjointe de méthodes d'optimisation de formes avec nos méthodes de contrôle peut être envisagée. Les deux boucles d'optimisation de formes et de paramètres des générateurs de vortex étant développées à partir d'un noyau commun, ceci pourrait être facilement réalisé.

A l'avenir, les plus grands défis concerneront l'emploi de méthodes d'optimisation pour les écoulements instationnaires dans un contexte industriel. Une difficulté majeure reste la nécessité de stocker l'ensemble des solutions du problème non-linéaire pour pouvoir calculer l'état adjoint instationnaire. D'autres stratégies d'économie de la place mémoire que celle proposée ici pourraient cependant être envisagées. On pourra également s'inspirer de méthodes d'optimisation utilisant un état adjoint incomplet, et donc requérant moins d'espace en mémoire, [55]. Enfin, l'apparition de nouvelles méthodes pour l'assimilation de données en météorologie se passant du calcul de l'état adjoint peut constituer une piste de travail possible, [12].

Dans l'immédiat, il apparaît nécessaire de poursuivre les travaux visant à fiabiliser la résolution du problème adjoint. Dans le cadre stationnaire, des efforts sont à l'heure actuelle menés afin d'améliorer la méthode itérative de résolution du système linéaire, par exemple par l'emploi de stratégies innovantes pour le redémarrage de l'algorithme GMRES, [62]. Au niveau des simulations instationnaires, les premiers résultats réalisés demandent à être approfondis, en particulier concernant l'évolution en temps de l'état adjoint. Dans tous les cas, la différentiation des modèles de turbulence dans le code adjoint ainsi que la mesure de son influence sur la précision des gradients calculés reste à réaliser.

Annexe A

Analyse de problèmes en domaine infini

A.1 Laplacien en domaine infini

La première partie de cette annexe porte sur l'étude du problème de laplacien en domaine infini, dont le problème (2.15) du chapitre 2 était un exemple. Soit f une fonction de $L^2\left(\mathbb{R}^N\right)$ dont le support est inclu dans une boule B de $\mathbb{R}^N$. On cherche u solution du problème suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\Delta u & = & f & \text{dans} \quad \mathbb{R}^N \\ \nabla u & \to & 0 & \text{à l'} \quad \infty. \end{array}\right. \tag{A.1}$$

A.1.1 Le cadre fonctionnel

On introduit l'espace de Hilbert suivant (appelé espace de Deny-Lions ou de Beppo Levi) :

$$\mathcal{D}^{1,2}\left(\mathbb{R}^N\right) = \overline{\mathcal{D}\left(\mathbb{R}^N\right)}^{\|\nabla\cdot\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}}. \tag{A.2}$$

Il s'agit du complété, au sens de la norme L^2 du gradient, de l'espace des fonction $\mathcal{C}^\infty$ à support compact de $\mathbb{R}^N$. Cet espace peut également être caractérisé par (voir [52]) :

$$\mathcal{D}^{1,2}\left(\mathbb{R}^N\right) = \left\{\phi \in H^1_{loc}\left(\mathbb{R}^N\right); \nabla\phi \in L^2\left(\mathbb{R}^N\right)^N\right\}. \tag{A.3}$$

On a également (voir [3]) :

$$\mathcal{D}^{1,2}\left(\mathbb{R}^N\right) = \left\{\phi \in L^{2N/(N-2)}\left(\mathbb{R}^N\right); \nabla\phi \in L^2\left(\mathbb{R}^N\right)^N\right\} \text{ si } N \geq 3 \tag{A.4}$$

et

$$\mathcal{D}^{1,2}\left(\mathbb{R}^N\right) = \left\{\phi; \frac{\phi}{(r+1)\log(r+2)} \in L^2\left(\mathbb{R}^2\right); \nabla\phi \in L^2\left(\mathbb{R}^2\right)^2\right\} \text{ si } N = 2. \tag{A.5}$$

Nous allons montrer que l'espace $\mathcal{D}^{1,2}\left(\mathbb{R}^N\right)$ est bien adapté à la résolution du problème (A.1). En effet, la formulation variationnelle de ce problème est de trouver une fonction $u \in \mathcal{D}^{1,2}\left(\mathbb{R}^N\right)$, telle que :

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_{\mathbb{R}^N} f v \, dx, \quad \forall v \in \mathcal{D}^{1,2}\left(\mathbb{R}^N\right). \tag{A.6}$$

Afin que ce problème possède une solution unique, vérifions les hypothèse du théorème de Lax-Milgram. Il est clair que la forme bilinéaire $a : (u,v) \to \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \cdot \nabla v \, dx$ est continue et coercive

sur $\mathcal{D}^{1,2}\left(\mathbb{R}^N\right) \times \mathcal{D}^{1,2}\left(\mathbb{R}^N\right)$: c'est par définition le produit scalaire de $\mathcal{D}^{1,2}\left(\mathbb{R}^N\right)$. La question de la continuité de la forme linéaire $l : v \to \int_{\mathbb{R}^N} fv\,dx$ est plus délicate, puisqu'on ne contrôle que le gradient de v dans $\mathcal{D}^{1,2}\left(\mathbb{R}^N\right)$. Nous distinguons alors deux cas :

1. Cas d'un dipôle. Si la fonction f est à moyenne nulle, *i.e.* $\int_B f\,dx = 0$, alors il existe un vecteur $\vec{g} \in H_0^1(B)^N$ tel que $\nabla\cdot\vec{g} = f$. On a alors :

$$\left|\int_{\mathbb{R}^N} fv\,dx\right| = \left|\int_{\mathbb{R}^N} \nabla\cdot\vec{g}\;v\,dx\right| = \left|-\int_{\mathbb{R}^N} \vec{g}\cdot\nabla v\,dx\right| \leq \left\|\vec{g}\right\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \|\nabla v\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}, \tag{A.7}$$

   ce qui donne bien la continuité de l sur $\mathcal{D}^{1,2}\left(\mathbb{R}^N\right)$.

2. Cas général. On suppose maintenant $\int_B f\,dx \neq 0$. Il convient de distinguer, encore une fois, deux cas :
   (a) Cas $N \geq 3$. En utilisant (A.4), on peut écrire (puisque f est à support compact inclu dans B) :

$$\left|\int_{\mathbb{R}^N} fv\,dx\right| \leq \|f\|_{L^{2N/(N+2)}(\mathbb{R}^N)} \|v\|_{L^{2N/(N-2)}(\mathbb{R}^N)} \leq C(B)\,\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \|\nabla v\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}. \tag{A.8}$$

   (b) Cas $N = 2$. En utilisant cette fois (A.5), on peut écrire :

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{R}^2} fv\,dx\right| &= \left|\int_{\mathbb{R}^2} f(r+1)\log(r+2)\frac{v}{(r+1)\log(r+2)}\,dx\right| \\ &\leq \|f(r+1)\log(r+2)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \left\|\frac{v}{(r+1)\log(+2)}\right\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \\ &\leq C\,\|f(r+1)\log(r+2)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \|\nabla v\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}.\end{aligned} \tag{A.9}$$

   Ceci prouve dans tous les cas la continuité de l sur $\mathcal{D}^{1,2}\left(\mathbb{R}^N\right)$ et donc l'existence et l'unicité de la solution au problème (A.1).

A.1.2 Comportement à l'infini

Les propriétés (A.4) et (A.5) impliquent un certain comportement à l'infini de la solution u au problème (A.1). Néanmoins, comme le second membre f de (A.1) est à support compact dans $\mathbb{R}^N$, ce comportement peut être explicité en utilisant les expressions de la solution fondamentale du laplacien. En effet, rappelons tout d'abord les expressions suivantes :

$$\begin{aligned}\Delta\left[\frac{-1}{(N-2)S_N}\frac{1}{|x|^{N-2}}\right] &= \delta_0 \quad \text{si} \quad N \geq 3 \\ \Delta\left[\frac{1}{2\pi}\log|x|\right] &= \delta_0 \quad \text{si} \quad N = 2,\end{aligned} \tag{A.10}$$

où δ_0 est la masse de Dirac à l'origine et S_N la surface de la sphère unité de $\mathbb{R}^N$. La solution u de (A.1) s'exprime comme le produit de convolution de la solution fondamentale (A.10) avec le second membre f. On a ainsi, pour $N \geq 3$:

$$u(x) = \frac{-1}{(N-2)S_N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{|x-y|^{N-2}} f(y)\,dy. \tag{A.11}$$

Remarquons que l'on peut faire le développement suivant :

$$\begin{aligned} |x-y|^2 &= |x|^2 - 2x\cdot y + |y|^2 \\ &= |x|^2\left(1 - 2\frac{x}{|x|}\cdot\frac{y}{|x|} + \frac{|y|^2}{|x|^2}\right). \end{aligned} \tag{A.12}$$

Comme c'est le comportement de u à l'infini qui nous intéresse, on cherche en fait un développement lorsque $|x|$ est grand, ce qui mène à :

$$|x-y| = |x|\left[1 - \frac{x}{|x|}\cdot\frac{y}{|x|} + \mathcal{O}\left(\frac{|y|^2}{|x|^2}\right)\right] \tag{A.13}$$

et qui implique :

$$|x-y|^{2-N} = |x|^{2-N}\left[1 - (2-N)\frac{x}{|x|}\cdot\frac{y}{|x|} + \mathcal{O}\left(\frac{|y|^2}{|x|^2}\right)\right]. \tag{A.14}$$

En remplaçant dans l'intégrale (A.11) on obtient alors :

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{-1}{(N-2)S_N}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{1}{|x|^{N-2}}\left[1 + (N-2)\frac{x}{|x|}\cdot\frac{y}{|x|} + \mathcal{O}\left(\frac{|y|^2}{|x|^2}\right)\right] f(y)\,dy \\ &= \frac{-1}{(N-2)S_N}\frac{1}{|x|^{N-2}}\int_{\mathbb{R}^N} f(y) + (N-2)\frac{x}{|x|}\cdot\frac{y}{|x|}f(y) + \mathcal{O}\left(\frac{|y|^2}{|x|^2}\right) f(y)\,dy. \end{aligned} \tag{A.15}$$

On distingue alors deux cas. Si la fonction f n'est pas à moyenne nulle, alors le comportement à l'infini de u est donné par :

$$u(x) \sim \frac{1}{|x|^{N-2}}, \tag{A.16}$$

où la notation $\sim$ donne un équivalent à l'infini, sans préciser la constante (non-nulle !). Si la fonction f est à moyenne nulle, alors le premier terme de l'intégrale dans (A.15) est nul et on obtient finalement que le comportement à l'infini de u est donné par :

$$u(x) \sim \frac{1}{|x|^{N-1}}. \tag{A.17}$$

Pour $N = 2$, on procède de la même façon, considérant toujours que $|x|$ est grand :

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2}\log(|x-y|)\,f(y)\,dy \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2}\log\left(|x|\left[1 - \frac{x}{|x|}\cdot\frac{y}{|x|} + \mathcal{O}\left(\frac{|y|^2}{|x|^2}\right)\right]\right) f(y)\,dy \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2}\left[\log(|x|) - \frac{x}{|x|}\cdot\frac{y}{|x|} + \mathcal{O}\left(\frac{|y|^2}{|x|^2}\right)\right] f(y)\,dy. \end{aligned} \tag{A.18}$$

Si la fonction f n'est pas à moyenne nulle, alors le comportement à l'infini de u est donné par :

$$u(x) \sim \log|x|, \tag{A.19}$$

Si la fonction f est à moyenne nulle, le premier terme de l'intégrale de (A.18) après développement sera encore nul et on va pouvoir conclure comme pour le cas $N \geq 3$:

$$u(x) \sim \frac{1}{|x|}. \tag{A.20}$$

En conclusion, si f n'est pas à moyenne nulle, le comportement à l'infini de u est, quelque soit $N \geq 2$, donné par :

$$u(x) \sim \begin{cases} \dfrac{1}{|x|^{N-2}} & \text{si} \quad N \geq 3 \\ \log|x| & \text{si} \quad N = 2, \end{cases} \tag{A.21}$$

et pour son gradient :

$$\nabla u(x) \sim \frac{1}{|x|^{N-1}}. \tag{A.22}$$

En fait, la solution u de (A.1) n'est pas singulière à l'origine, de telle sorte qu'il existe une constante $C > 0$ telle que, quelque soit $x \in \mathbb{R}^N$:

$$|\nabla u(x)| \leq \frac{C}{1 + |x|^{N-1}}. \tag{A.23}$$

Si f est à moyenne nulle, ces équivalents deviennent, quelque soit $N \geq 2$:

$$u(x) \sim \frac{1}{|x|^{N-1}}, \tag{A.24}$$

et pour le gradient de u :

$$\nabla u(x) \sim \frac{1}{|x|^{N}}. \tag{A.25}$$

On peut également écrire, quelque soit $x \in \mathbb{R}^N$:

$$|\nabla u(x)| \leq \frac{C}{1 + |x|^{N}}. \tag{A.26}$$

A.2 Solutions fondamentales du problème de Stokes

On se contente de rappeller brièvement dans ce paragraphe les expressions des solutions fondamentales du problème de Stokes (voir [2], [9], [52]). On note e_k le k^{ème} vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^N$. Les solutions de :

$$\begin{cases} -\nu\Delta u_k + \nabla p_{u_k} &= \delta_0 e_k \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}^N \\ \nabla \cdot u_k &= 0 \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}^N \end{cases} \tag{A.27}$$

sont données par :

$$\begin{cases} u_k^j &= \begin{cases} \dfrac{1}{2S_N\nu}\left[\dfrac{1}{N-2}\dfrac{\delta_j^k}{|x|^{N-2}} + \dfrac{x_k x_j}{|x|^N}\right] & \text{si} \quad N \geq 3 \\ \dfrac{1}{4\pi\nu}\left[-\log|x|\,\delta_j^k + \dfrac{x_k x_j}{|x|^2}\right] & \text{si} \quad N = 2 \end{cases} \\ p_{u_k} &= \dfrac{x_k}{S_N\,|x|^N}. \end{cases} \tag{A.28}$$

Bibliographie

[1] M. Abdelwahed, M. Hassine, and M. Masmoudi. Optimal shape design for fluid flow using topological perturbation technique. *J. Math. Anal. Appl.*, 356 :548–563, 2009.

[2] G. Allaire. *Homogénéisation des équations de Stokes et de Navier-Stokes.* PhD thesis, Université Paris 6, 1989.

[3] G. Allaire. Continuity of the darcy's law in the low-volume fraction limit. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, 18 :475–499, 1991.

[4] G. Allaire, F. Jouve, and A.M. Toader. Structural optimization using sensitivity analysis and a level-set method. *J. Comp. Phys.*, 194 :363–393, 2004.

[5] G. Allaire, F. Jouve, and N. Van Goethem. Damage evolution in brittle materials by shape and topological sensitivity analysis. Technical Report 676, Ecole Polytechnique, 2010.

[6] B.G. Allan and L.R. Owens. Numerical modeling of flow control in a boundary-layer-ingesting offset inlet diffuser at transonic Mach numbers. In *AIAA 2006-845*, 2006.

[7] H. Ammari. *An introduction to mathematics of emerging biomedical imaging.* Springer, 2008.

[8] H. Ammari and H. Kang. Reconstruction of small inhomogeneities from boundary measurements. In *Lecture notes in mathematics*, volume 1846. Springer, 2000.

[9] S. Amstutz. The topological asymptotic for Navier-Stokes equations. *ESAIM Control. Optim. Calc. Var.*, 11 :401–425, 2005.

[10] S. Amstutz. Sensitivity analysis with respect to a local perturbation of the material property. *Asymptotic Anal.*, 49 :87–108, 2006.

[11] S. Amstutz, T. Takahashi, and B. Vexler. Topological sensitivity analysis for time-dependent problems. *ESAIM Control. Optim. Calc. Var.*, 14 :427–455, 2008.

[12] D. Auroux and J. Blum. Back and forth nudging algorithm for data assimilation problems. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 340 :873–878, 2005.

[13] L.J. Belaid, M. Jaoua, M. Masmoudi, and L. Siala. Image restoration and edge detection by topological asymptotic expansion. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 342 :313–318, 2006.

[14] A. Ben Abda, M. Hassine, M. Jaoua, and M. Masmoudi. Topological sensitivity analysis for the location of small cavities in Stokes flow. *SIAM J. Control Optim.*, 48 :2871–2900, 2009.

[15] M.P. Bendsøe and O. Sigmund. *Topology optimization. Theory, methods and applications.* Springer-Verlag, 2003.

[16] I. Boué. *Contrôle actif des écoulements tourbillonnaires de pointe avant à grande incidence.* PhD thesis, Université de Poitiers, 2004.

[17] B. Bourdin. Filters in topology optimization. *Internat. J. Numer. Methods Engrg.*, 50 :2143–2158, 2001.

[18] M. Burger, B. Hackl, and W. Ring. Incorporating topological derivatives into level set methods. *J. Comp. Phys.*, 194 :344–362, 2004.

[19] J. Cea, S. Garreau, P. Guillaume, and M. Masmoudi. The shape and topological optimizations connection. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg*, 188 :713–726, 2000.

[20] D.J. Cedio-Fengya, S. Moskow, and M.S. Vogelius. Identification of conductivity imperfections of small diameter by boundary measurements. Continuous dependence and computational reconstruction. *Inverse Problems*, 14 :553–595, 1998.

[21] F. Chalot, V. Levasseur, M. Mallet, G. Petit, and N. Reau. LES and DES simulations for aircraft design. In *AIAA 2007-0723*, 2007.

[22] F. Chalot, M. Mallet, and M. Ravachol. A comprehensive finite element Navier-Stokes solver for low- and high-speed aircraft design. In *AIAA 94-0814*, 1994.

[23] J. Chetboun and G. Allaire. Flow control of curved air ducts using topological derivatives. In H.C. Rodrigues et al. eds., editor, *Proceedings of the 8th World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2009. ISBN :978-989-20-1554-5.

[24] J.C. Courty, J.P. Rosenblum, G. Petit, W.L. Siauw, Y.T. Jiang, and E.K. Goh. The future of flight control : DSO/Dassault Aviation collaborative studies on micro flow control. In *New challenges in aerospace technology and maintenance conference*, 2004.

[25] M. Dambrine and G. Vial. A multiscale correction method for local singular perturbations of the boundary. *ESAIM Mathematical Modelling and Numerical Modelling*, 41 :111–127, 2006.

[26] L. Daumas. *Optimisation aérodynamique dans le cadre de la conception multidisciplinaire en contexte aéronautique.* PhD thesis, Université Montpellier 2, 2005.

[27] L. Daumas, Q.V. Dinh, S. Kleinveld, and G. Rogé. A CAD-based supersonic business jet optimization. In *ECCOMAS*, 2004.

[28] Q.V. Dinh, G. Rogé, C. Sevin, and B. Stoufflet. Shape optimization in computational fluid dynamics. *European Journal of Finite Elements*, 5 :569–594, 1996.

[29] R. Dwight and J. Brezillon. Effect of various approximations of the discrete adjoint on gradient-based optimization. In *AIAA 2006-690*, 2006.

[30] H.A. Eschenauer, V.V. Kobelev, and A. Schumacher. Bubble method for topology and shape optimization of structures. *Structural Optimization*, 8 :42–51, 1994.

[31] A. Evgrafov. Topology optimization of slightly compressible fluids. *Z. Angew. Math. Mech.*, 86 :46–62, 2006.

[32] A. Evgrafov, G. Pingen, and K. Maute. Topology optimization of fluid domains : kinetic theory approach. *Z. Angew. Math. Mech.*, 88 :129–141, 2008.

[33] E. Feireisl. Shape optimization in viscous compressible fluids. *Appl. Math. Optim.*, 47 :59–78, 2003.

[34] G. Galdi. *An introduction to the mathematical theory of the Navier-Stokes equations.* Springer-Verlag, 1998.

[35] S. Garreau, P. Guillaume, and M. Masmoudi. The topological asymptotic for PDE systems : the elasticity case. *SIAM J. Control Optim.*, 39 :1756–1778, 2001.

[36] V. Girault and P.A. Raviart. *Finite element methods for Navier-Stokes equations.* Springer, 1986.

[37] E. Godlewski and P.A. Raviart. *Numerical approximation of hyperbolic systems of conservation laws.* Springer, 1996.

[38] J.K. Guest and J.H. Prévost. Topology optimization of creeping fluid flows using a Darcy-Stokes finite element. *Int. J. Numer. Meth. Engng*, 66 :461–484, 2006.

[39] P. Guillaume and K. Sid Idris. The topological asymptotic expansion for the Dirichlet problem. *SIAM J. Control Optim.*, 41 :1042–1072, 2002.

[40] G.J. Harloff, B.A. Reichert, and S.R. Wellborn. Navier-Stokes analysis and experimental data comparison of compressible flow in a diffusing s-duct. In *AIAA 92-2699*, 1992.

[41] N.A. Harrison, J. Anderson, J.L. Fleming, and W.F. Ng. Computational analysis of active flow control of a boundary layer ingesting serpentine inlet diffuser. In *AIAA 2006-874*, 2006.

[42] L. Hascoët. TAPENADE : a tool for automatic differentiation of programs. In *ECCOMAS 2004-906*, 2004.

[43] M. Hassine, S. Jan, and M. Masmoudi. From differential calculus to 0-1 topological optimization. *SIAM J. Control Optim.*, 45 :1965–1987, 2007.

[44] J.N. Herskovits. An interior point technique for non-linear optimization. Technical Report 1808, INRIA, 1992.

[45] T.J.R. Hughes, L.P. Franca, and M. Mallet. A new finite element formulation for computational fluid dynamics : I. Symmetric forms of the compressible Euler and Navier-Stokes equations and the second law of thermodynamics. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 54 :223–234, 1986.

[46] T.J.R. Hughes and M. Mallet. A new finite element formulation for computational fluid dynamics : III. The generalized streamline operator for multidimensional advective-diffusive systems. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 58 :305–328, 1986.

[47] T.J.R. Hughes and M. Mallet. A new finite element formulation for computational fluid dynamics : IV. A discontinuity-capturing operator for multidimensional advective-diffusive systems. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 58 :329–339, 1986.

[48] C. Kasbarian. *Etude numérique pour les problèmes d'advection-diffusion - Application à la modélisation d'écoulements turbulents compressibles.* PhD thesis, Université Lyon 1, 1995.

[49] V. Kibens and W. Bower. An overview of active flow control applications at the Boeing company. In *AIAA 2004*, 2004.

[50] A. Klarbring, J. Petersson, B. Torstenfelt, and M. Karlsson. Topology optimization of flow network. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 192 :3909–3932, 2003.

[51] A. Kourta, J.C. Courty, G. Petit, and J.P. Rosenblum. Control of separated boundary layer on subsonic airfoil using vortex generator jet devices. In *ASME Joint U.S.-European Fluids Engineering Summer Meeting*, 2006.

[52] O.A. Ladyzhenskaya. *The mathematical theory of viscous incompressible flow.* Gordon and Breach, 1969.

[53] E. Laporte and P. Le Tallec. *Numerical methods in sensitivity analysis and shape optimization.* Birkhäuser, 2003.

[54] B.E. Launder and D.B. Spalding. The numerical computation of turbulent flows. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 3 :269–289, 1974.

[55] E. Leclerc, P. Sagaut, and B. Mohammadi. On the use of incomplete sensitivities for feedback control of laminair vortex shedding. *Computers & Fluids*, 35 :1432–1443, 2006.

[56] B.J. Lee and M.S. Liou. Re-design of boundary-layer-ingesting offset inlet via passive flow control. In *AIAA 2010-842*, 2010.

[57] V. Levasseur. *Simulation des grandes échelles en éléments finis stabilisés : une approche variationnelle multi-échelles.* PhD thesis, Université Paris 6, 2007.

[58] J. Martins, I. Kroo, and J. Alonso. An automated method for sensitivity analysis using complex variables. In *AIAA 2000-0689*, 2000.

[59] M. Meunier and J. Dandois. Simulations of novel hight-lift configurations equipped with passive and active means of separation control. In *AIAA 2008-4080*, 2008.

[60] B. Mohammadi and O. Pironneau. *Applied shape optimization for fluids.* Oxford University Press, 2001.

[61] B. Mohammadi and O. Pironneau. Shape optimization in fluid mechanics. *Annual review of fluid mechanics*, 36 :255–279, 2004.

[62] R.B. Morgan. GMRES with deflated restarting. *Journal on scientific computing*, 24 :20–37, 2002.

[63] S. Nadarajah and A. Jameson. Optimum shape design for unsteady flows with time-accurate continuous and discrete adjoint methods. *AIAA Journal*, 45 :1478–1491, 2007.

[64] A.A. Novotny, R.A. Feijóo, C. Padra, and E. Taroco. Topological sensitivity analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192 :803–829, 2003.

[65] G. Petit. *Contrôle de décollement par fente pulsée et générateurs de vortex fluides.* PhD thesis, Université de Toulouse, 2005.

[66] P.I. Plotnikov and J. Sokolowski. Domain dependence of solutions to compressible Navier-Stokes equations. *SIAM J. Control Optim.*, 45 :1147–1539, 2006.

[67] M. Rumpfkeil and D. Zingg. A general framework for the optimal control of unsteady flows with applications. In *AIAA*, 2007.

[68] Y. Saad and M.H. Schultz. GMRES : A generalized minimal residual algorithm for solving non-symmetric linear systems. *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, 7 :856–869, 1986.

[69] B. Samet, S. Amstutz, and M. Masmoudi. The topological asymptotic for the Helmholtz equation. *SIAM J. Control Optim.*, 42 :1523–1544, 2003.

[70] F. Shakib. *Finite element analysis of the compressible Euler and Navier-Stokes equations.* PhD thesis, Université Paris 6, 1989.

[71] J. Sokolowski and A. Zochowski. On the topological derivative in shape optimization. *SIAM J. Control Optim.*, 37 :1251–1272, 1999.

[72] P. Spellucci. Non-linear (local) optimization : the state of the art. *Journal of Computational Technologies*, 2001.

[73] A.L. Tits, A. Wächter, S. Bakhtiari, T.J. Urban, and C.T. Lawrence. A primal-dual interior point method for non-linear programming with strong global and local convergence properties. *SIAM J. Optim.*, 14 :173–199, 2003.

[74] A.L. Tits and J. Zhou. Fast feasible direction methods with engineering applications. Technical Report TR 91-20, Systems research center, University of Maryland, 1991.

[75] A.L. Vuillerme, S. Deck, and R. Chevrier. Numerical simulations of the flow inside an s-shaped intake diffuser. In *EUCASS*, 2005.

[76] K. Waithe. Source term model for vortex generator vanes in a Navier-Stokes computer code. In *AIAA 2004-1236*, 2004.

[77] F. Wallin and L.E. Eriksson. A tunning-free body-force vortex generator model. In *AIAA 2006-873*, 2006.

[78] A.E. Washburn, S.A. Gorton, and S.G. Anders. Snapshot of active flow control research at Nasa Langley. In *AIAA 2002-3155*, 2002.

[79] A. Whittaker. *Méthode automatique d'optimisation de formes intégrant un état adjoint spécifique relatif aux équations d'état et de déformation du milieu extérieur.* PhD thesis, Ecole normale supérieure de Cachan, 2003.

[80] D.C. Wilcox. *Turbulence modeling for CFD*. DCW Industries, 1993.