



Propagation des ondes acoustiques dans les turbomachines à écoulement subsonique

Hakim El Hadjen

► To cite this version:

Hakim El Hadjen. Propagation des ondes acoustiques dans les turbomachines à écoulement subsonique. Acoustique [physics.class-ph]. Arts et Métiers ParisTech, 2010. Français. NNT : 2010ENAM0061 . pastel-00551289

HAL Id: pastel-00551289

<https://pastel.hal.science/pastel-00551289>

Submitted on 3 Jan 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

École doctorale n° 432 : Sciences des Métiers de l'Ingénieur

Doctorat ParisTech

THÈSE

pour obtenir le grade de docteur délivré par

l'École Nationale Supérieure d'Arts et Métiers

Spécialité “ Mécanique ”

présentée et soutenue publiquement par

Hakim EL HADJEN

le 14 décembre 2010

PROPAGATION DES ONDES ACOUSTIQUES DANS LES TURBOMACHINES À ÉCOULEMENT SUBSONIQUE

Directeur de thèse : **Farid BAKIR**

Co-encadrement de la thèse : **Sofiane KHELLADI**

Jury

M. Smaïne KOUIDRI, Professeur des Universités, LIMSI, CNRS

M. Régis MARCHIANO, Maître de Conférences/HDR, IJLRA, UMPC

M. Carlos SANTOLARIA MORROS, Professeur des Universités, Université de Oviedo

M. Sébastien MARTIN, Maître de Conférences, Département de Mathématiques, Paris Sud 11

M. Farid BAKIR, Professeur des Universités, DynFluid, Arts et Métiers Paristech

M. Sofiane KHELLADI, Maître de Conférences, DynFluid, Arts et Métiers Paristech

Rapporteur

Rapporteur

Examineur

Examineur

Examineur

Examineur

T
H
È
S
E

PROPAGATION DES ONDES ACOUSTIQUES DANS LES TURBOMACHINES À ÉCOULEMENT SUBSONIQUE

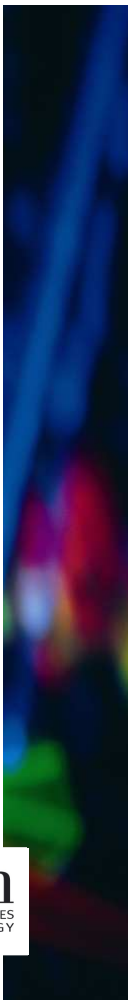
RESUME : De nos jours, les fabricants font face à un nouveau défi : concevoir des turbomachines à la fois performantes et à faible niveau sonore. Il convient donc de prévoir avec précision le champ sonore généré par le fonctionnement de ces machines. Le but de ce travail est de développer un solveur-2D capable de prédire efficacement la propagation des ondes acoustiques (bruit) générées par les turbomachines à écoulement subsonique, la machine étudiée est un ventilateur centrifuge composé d'un rotor et d'un stator. Afin de relever ce défi, le développement d'une méthode numérique d'ordre élevé est plus que nécessaire. La démarche retenue est basée sur la méthode des volumes finis avec approximation par moindres carrés mobiles (FV-MLS) pour résoudre les Equations d'Euler Linéarisées autour d'une solution stationnaire. Une matrice masse est définie afin de préserver l'ordre de notre méthode, une procédure d'intégration du temps implicite est employée avec un solveur de résolution des équations algébriques basé sur la méthode GMRES préconditionnée. La méthode ainsi proposée permet la reconstruction directe des flux en utilisant des pochoirs (stencil) compacts, sans introduire de nouveaux degrés de liberté, ce qui est un réel avantage par rapport aux méthodes déjà existantes.

Mots clés : aéroacoustique, volumes finis d'ordres élevés, Equations d'Euler Linéarisées, approximation par moindres carrés mobiles, matrice masse, turbomachines.

ACOUSTIC WAVE PROPAGATION IN TURBOMACHINERY WITH SUBSONIC FLOW

ABSTRACT: Today, manufacturers are confronted with deal of designing turbomachinery with both high performance and low noise level. It is therefore necessary to accurately predict the sound field generated by these machines. The purpose of this work is to develop 2D-solver able to predict effectively the propagation of acoustics waves (noise) generated by subsonic turbomachinery, the studied machine is a centrifugal fans made up of an impeller and a diffuser. According to this challenge, development of higher order methods is requested, the finite volume method is used with application of Moving Last Square reproducing Kernel approximation to solve Linearized Euler Equations around a known stationary mean flow, here a pseudo mass matrix is defined and used to preserve the residuals order and a fully implicit time integration procedure is employed with suite of nonlinear and differential/Algebraic equation solvers using preconditioned matrix GMRES (Generalized Minimal RESidual) methods. The proposed method allows the direct reconstruction of fluxes using compact stencils, without introducing new degrees of freedom, which is a real advantage over the most popular existing high-order methods.

Keywords : aeroacoustics, high order finite volumes, Linearized Euler Equations, moving least square approximations, mass matrix, turbomachinery.



Remerciements

Ce travail, commencé en octobre 2007 au sein du laboratoire LEMFI (nouvellement appelé DynFluid), a été pour moi d'une extrême richesse tant sur le plan humain que professionnel.

Je remercie vivement Monsieur Farid BAKIR, Professeur des Universités, de m'avoir proposé un sujet dans une thématique aussi intéressante, d'actualité et d'avenir. Je tiens à lui faire part de toute ma reconnaissance pour m'avoir toujours encouragé à aller de l'avant.

Je tiens également à exprimer toute ma reconnaissance à Monsieur Sofiane KHELLADI, Maître de conférences, pour l'aide précieuse qu'il m'a apporté. Ses compétences et sa gentillesse m'ont permis de franchir de nombreux obstacles avec confiance.

Je suis très honoré que Monsieur Smaïne KOUIDRI et Monsieur Régis MARCHIANO aient accepté d'être les rapporteurs de ce travail. Je remercie également vivement Monsieur Carlos SANTOLARIA et Monsieur Sébastien MARTIN qui ont consenti à faire partie du jury.

Que Monsieur Robert REY, Professeur des Universités, trouve ici l'expression de ma profonde gratitude pour m'avoir ouvert les portes de son laboratoire de recherches. Je remercie également Monsieur Ricardo Noguera, Maître de Conférences et Habilité à Diriger des Recherches, pour ses conseils et de m'avoir accueilli le premier jour de mon arrivée à l'ENSAM.

J'ai été ravi de travailler aux côtés de Raphael COMPOS, Jeremy HURALT, Moisés Solis, Djaafer FEDALA, Mohand YOUNSI, Lionel BERGERAT et Hussein NOURI. Mes remerciements s'adressent aussi à Marc Joulin et Farid Oukaci.

J'exprime ma gratitude à mes anciens enseignants, notamment Messieurs : Abderrahmane DJERRADA, Belaïd BRACHEMI, Idir BELAÏDI et Tewfik HAMIDOUCHE qui ont contribué à l'amont de l'aboutissement de ce travail et à tant d'autres.

Je dédie ce travail à mes parents, à ma femme, à mes frères et sœurs, en les remerciant de leur soutien et de la confiance qu'ils n'ont jamais cessé de me témoigner.

Table des matières

Liste des tableaux	iv
Table des figures	v
Nomenclature	1
Introduction générale	4
Contexte et motivations	4
Description du projet	4
Particularités des fluctuations acoustiques par rapport au champ aérodynamique . .	5
Approche directe	5
Les méthodes hybrides	6
Méthodes et schémas numériques	7
Conditions aux limites	8
Méthodologie	9
1 Méthodes numériques usuelles & Equations d'Euler Linéarisées	12
1.1 Méthodes numériques usuelles	12
1.1.1 Méthode des différences finies	12
1.1.2 Méthode des éléments finis	14
1.1.3 Méthode Galerkin Discontinu (GD)	15
1.1.4 Les méthodes spectrales	16
1.1.5 Méthode des volumes finis	17
1.2 Équations d'Euler et leurs linéarisations	22
1.2.1 Forme générale des équations d'Euler	23
1.2.2 Forme conservatrice des équations d'Euler	25
1.2.3 Linéarisation des équations d'Euler autour d'une solution stationnaire 2D .	25
1.2.4 Forme matricielle et diagonalisation	29

2	Résolution numérique des équations d'Euler linéarisées	35
2.1	Formulation et intégration numérique	36
2.2	Discrétisation des flux convectifs	39
2.2.1	Flux numérique centré	39
2.2.2	Flux numérique décentré (UPWIND)	39
2.2.3	Flux Vector splitting de Steger-Warrming	39
2.2.4	Flux numérique de Roe (Flux Diffence Splitting)	40
2.2.5	Flux numérique de Rusanov	40
2.2.6	Flux numérique Local Lax-Friedrichs LLF	41
2.3	Schéma haute résolution en volumes finis avec approximation par moindres carrés mobiles (Finite Volume and Moving Least Square Approximations, FV-MLS) . . .	42
2.3.1	Principe du fonctionnement de la méthode FV-MLS	43
2.3.2	Les Stencils et la distribution des particules	46
2.3.3	Les fonctions <i>noyaux</i> (kernel functions)	47
2.3.4	Cas d'une distribution anisotropique des nœuds	48
2.3.5	Estimation des dérivées	51
2.3.6	Estimation des dérivées de la fonction de forme	52
2.3.7	Reconstruction de la variable $U(x) _I$ à l'ordre N	53
2.4	Conditions aux limites	54
2.4.1	Construction d'une condition aux limites parfaitement réfléchissante pour un écoulement uniforme	54
2.4.2	Construction d'une condition aux limites absorbante pour un écoulement uniforme	56
2.4.3	Construction d'une condition aux limites parfaitement réfléchissante pour un écoulement non uniforme	58
2.4.4	Construction d'une condition aux limites absorbante pour un écoulement non uniforme	59
2.4.5	Construction d'une condition aux limites dite zone éponge pour un écou- lement uniforme	62
2.4.6	Construction d'une condition aux limites absorbantes hybride	62
3	Méthodes explicites	64
3.1	Discrétisation temporelle	64
3.2	Validation des calculs explicites	68
3.2.1	Validation en champ libre	69
3.2.2	Conclusions et remarques concernant la validation	75

4 Méthodes implicites	77
4.1 Définition de la matrice masse	78
4.1.1 Test de cohérence pour la formulation de la matrice masse	80
4.2 Méthodes itératives de type Newton-Krylov	80
4.2.1 Méthode GMRES préconditionnée (Generalized Minimum Residual Method)	83
4.2.2 BICGSTAB (Bi-conjugate Gradient Stabilized)	84
4.2.3 TFQMR (Transpose Free Quasi-Minimal Residual Method)	84
4.3 Critère de contrôle d'erreur	85
4.4 Validation des calculs implicites (avec matrice masse)	88
4.4.1 Propagation d'un pulse (impulsion gaussienne)	88
4.4.2 Propagation d'une source monopolaire en présence d'un écoulement uniforme	90
4.4.3 Problème de diffraction du son entre deux cylindres (Two cylinders scattering problem)	93
5 Application à la propagation des ondes acoustiques dans les turbomachines	97
5.1 Description de la turbomachine étudiée	98
5.2 Analyse aérodynamique de la turbomachine	99
5.2.1 Maillage	99
5.2.2 Modèle de turbulence	100
5.2.3 Modèle numérique	100
5.2.4 Champ de pression statique instantanée dans la machine	101
5.3 Analyse acoustique de la machine	102
5.3.1 Localisation des sources	102
5.3.2 Type de maillage utilisé pour le calcul acoustique	103
5.3.3 Source artificielle (pulse) placée au centre du domaine	104
5.3.4 Source artificielle (monopolaire) placée au centre du domaine	106
5.3.5 Comparaison entre sources (artificielles) monopolaires tournantes et dipolaires tournantes localisées aux bords de fuite des pales du rotor	108
5.3.6 Sources issues d'un calcul CFD, localisées aux bords de fuite des pales du rotor et aux bords d'attaque des pales du stator	113
5.4 Conclusion sur le chapitre	118
Conclusion et perspectives	119
Bibliographie	121
Annexe	132

Liste des tableaux

3.1	les coefficients a_i , b_i et c_i optimisés du schéma RK46-NL	68
3.2	Taux de convergence pour la solution de pression à $t = 25$	76
4.1	Taux de convergence pour la solution de pression à $t = 25$	89
5.1	Caractéristiques aérodynamiques du ventilateur centrifuge	98
5.2	Caractéristiques géométriques du ventilateur centrifuge	98
5.3	Conditions de calculs	101

Table des figures

1	Admission - refoulement dans un turbocompresseur (cf. Liebherr-Aerospace). . . .	9
2	Analogie propagation acoustique/vorticité dans un ventilateur centrifuge type Cross-Flow [1].	10
1.1	Discrétisation du domaine.	13
1.2	Volumes Finis, Cell Centred.	18
1.3	Volumes Finis, "Vertexe centered".	19
1.4	Volumes Finis, cell vertex.	20
2.1	Schéma de Godunov.	36
2.2	Voisinage du point de reconstruction.	44
2.3	Type de stencil, A) stencil compact, B) stencil non compact.	46
2.4	Les courbes de dispersion (à gauche) et de dissipation (à droite) de la méthode FV-MLS au 3ème ordre pour différentes valeurs du paramètre κ_x [2].	48
2.5	Distribution anisotropique des nœuds.	49
2.6	Stencil.	52
2.7	Paroi réfléchissante.	54
2.8	Conditions aux limites hybrides.	63
3.1	Propagation d'un pulse dans un plan.	70
3.2	Evolution de la pression instantanée ($t = 50$) le long de l'axe (X) pour différentes fonctions kernel.	71
3.3	Evolution de la pression instantanée ($t = 50$) le long de l'axe (X) pour différents flux numériques.	72
3.4	L'évolution de la pression instantanée le long de l'axe (X) pour différents ordres et différents maillages.	73
3.5	Pression instantanée de la propagation d'une source monopolaire dans un écoulement uniforme $M=0,5$	74

3.6	U Vitesse instantanée de la propagation d'une source monopolaire dans un écoulement uniforme $M=0,5$	74
3.7	V Vitesse instantanée de la propagation d'une source monopolaire dans un écoulement uniforme $M=0,5$	75
4.1	Matrice masse à l'ordre 4.	78
4.2	Taux de convergence de la propagation d'un pulse pour des calculs avec et sans matrice masse.	89
4.3	Pression instantanée de la propagation d'une source monopolaire dans un écoulement uniforme horizontal, $M=0,5$, maillage 200×200 , $t = 270$	91
4.4	Pression instantanée de la propagation d'une source monopolaire dans un écoulement uniforme horizontal, maillage 200×200 , $M=0,5$, a) $t=60$, b) $t=90$, c) $t=150$, d) $t=210$, e) $t=270$	92
4.5	Evolution de la pression instantanée le long de l'axe (X), maillage (200×200), $M=0,5$	93
4.6	problème de diffraction du son entre deux cylindres.	94
4.7	La pression efficace le long des deux cylindres.	95
4.8	La pression efficace le long de l'axe (X).	96
5.1	Géométrie 2D, 3D du ventilateur utilisé.	99
5.2	Type de maillage utilisé.	100
5.3	Distribution de la pression statique instantanée dans la machine.	101
5.4	Localisation des sources acoustiques.	102
5.5	Type de maillage utilisé pour le calcul acoustique.	103
5.6	Distribution du champ de pression dans la machine à différents instants.	105
5.7	Evolution de la pression en fonction du temps au point M.	106
5.8	Distribution du champ de pression dans la machine à $t=24$	107
5.9	Distribution du champ de pression dans la machine à différents instants.	109
5.10	Distribution du champ de pression dans la machine à différents instants.	111
5.11	Evolution de la pression en fonction du temps en un point donné M pour le monopole et le dipole.	112
5.12	Evolution de la pression statique relative en fonction du temps sur le bord de fuite de la pale du rotor (roue).	113
5.13	Evolution de la pression statique relative en fonction du temps sur le bord de fuite de la pale du rotor (roue).	113
5.14	Evolution de la pression statique relative en fonction du temps sur le bord d'attaque de la pale du diffuseur (stator).	114

5.15	Evolution de la pression statique relative en fonction du temps sur le bord d'attaque de la pale du diffuseur (stator).	114
5.16	Distribution du champ de pression dans la machine à différents instants.	116
5.17	Localisation des points M1, M2, M3, M4.	117
5.18	Evolution de la pression en fonction du temps aux points M1,M2,M3 et M4.	117

Nomenclature

Lettres latines

$\vec{A}$	vecteur de surface
A	air du domaine
A_i	surface de la cellule i
c_0	vitesse du son dans le fluide obtenue dans les conditions isentropique, $c_0^2 = \frac{\delta p}{\delta \rho}$
$ C_i $	volume de la cellule i dans le cas 3D et sa surface dans le cas 2D
E	énergie totale par unité de volume
e	énergie interne massique
$\mathbb{F}$	vecteur des flux $\mathbb{F} = \begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix}$
$\mathbb{F}_{abs}$	flux absorbé
$\mathbb{F}_{ref}$	flux réfléchis
F	flux dans la direction x
G	flux dans la direction y
H	vecteur exprimant les hétérogénéités de l'écoulement moyen
H_{ij}	flux numérique à l'interface des cellules i et j
h	paramètre de dilatation
J	matrice jacobienne
K	énergie cinétique
l_{ij}	longueur d'intersection entre la cellule i et j
N	l'ordre de la méthode
N_c	nombre de cellules
$N(x)$	fonction de forme
$\vec{n}$	vecteur unitaire normal
n_x, n_y	composants du vecteur unitaire suivant x et y

p	pression, loi des gaz parfaits : $p = (\gamma - 1)(E - \frac{1}{2}\rho(u^2 + v^2))$
$p(x)$	polynôme
$\vec{S}$	vecteur source
t	temps
U	vecteur des variable des Equations d'Euler Linéarisées
$U_0(\rho_0, u_0, v_0, p_0)$	solution stationnaire des équations d'Euler (Aérodynamique)
U_{ref}	vecteur des variable réfléchis
U_L	valeur approchée de U à gauche de l'interface de la cellule considérée
U_R	valeur approchée de U à droite de l'interface de la cellule considérée
V	volume du domaine dans le cas 3D ou surface du domaine dans le cas 2D
$\vec{V}$	vecteur vitesse
u, v, w	composantes de la vitesse suivant x, y et z respectivement
$\vec{V}_{ref}$	vecteur vitesse réfléchis
$W(z - y, h)$	fonction Kernel

Lettres grecques

γ	rapport des chaleurs spécifiques dans les conditions normale de température et de pression : $\gamma = 1.4$
ρ	masse volumique
Ω	domaine de calcul
$\delta\Omega$	frontière du domaine Ω
κ	paramètre de forme qui apparait dans l'expression de la fonction Kernel
Δt	pas de temps

Abréviations

BCG	Bi-Conjugate Gradient
Bi-CGSTAB	Bi-Conjugate Gradient Stabilized
CGS	Conjugate Gradient-Squared
CAA	Computational AeroAcoustics
CFD	Computational Fluid Dynamic
EEL	Equations d'Euler Linéarisées
FV-MLS	Finite Volume and Moving Least Square approximations
FWH	Ffowcs Williams and Hawkings

GMRES	Generalized Minimal RESidual
GD	Galerkin Discontinuu
ILU	factorisation incomplète
LLF	Local Lax-Friedrichs
RMS	Root Mean Square
RK46-NL	Runge-Kutta à faible stockage de quatrième ordre à six étapes
TFQMR	Transpose- Free Quasi-Minimal Residual
TVD	Total Variation Diminishing

Introduction générale

Contexte et motivations

Désormais, la survie et la préservation de notre planète nous laisse penser que seule une prise de conscience des problèmes écologiques et l'implication de chacun d'entre nous, peut nous garantir un avenir pour les futures générations. Et plus particulièrement, le secteur industriel est plus que jamais engagé dans ce défi.

L'industrie des turbomachines et plus particulièrement celle fonctionnant en régime subsonique touche de plus en plus de secteurs : nucléaire, transport, aéronautique, climatisation, électroménager, etc. L'accroissement des exigences du consommateur et le durcissement des normes mondiales imposent aux industriels de réduire tout type de pollution, en particulier les nuisances sonores de leurs machines ou des installations dans lesquelles la turbomachine est souvent le composant le plus bruyant. La limitation du niveau de bruit est devenue une clause quasi-systématique des cahiers des charges soumis aux fabricants qui sont désormais face à un nouveau défi : concevoir des turbomachines à la fois performantes et à faible niveau sonore. Il convient donc de prévoir avec précision le champ sonore généré par ces machines et sa propagation.

Un autre défi d'ordre économique touche l'industrie des turbomachines qui est celui de la délocalisation vers les pays à faible coût de main d'œuvre, l'une des ripostes possibles est de maintenir la compétitivité et de proposer des produits à faible pollution sonore, de ce fait, concevoir des turbomachines à faible nuisances sonores qui nécessitent des outils et des procédures de dimensionnement les plus innovantes, peut constituer un argument commercial pour se démarquer de la concurrence et faire face ainsi à ce phénomène de délocalisation.

Description du projet

La prédiction du bruit d'origine aérodynamique fait l'objet de l'aéroacoustique qui est une science qui traite des émissions sonores produites soit par l'écoulement lui-même, comme la turbulence d'un jet libre, soit par l'interaction de celui-ci avec une surface en mouvement, rigide ou

vibrante, telles que les pales de ventilateur, le rotor d'un hélicoptère, les roues de compresseur ou de turbine, etc. La génération du son par un écoulement et sa propagation relèvent du domaine de l'aérodynamique. En effet, les équations de conservation de masse et de quantité de mouvement gouvernent à la fois la dynamique de l'écoulement et les phénomènes acoustiques résultants. Sachant que l'urgence des industriels est de répondre à une clientèle plus exigeante en termes de confort et à des normes plus restrictives en termes d'émission de bruit, désormais l'application de méthodes de calcul aéroacoustique dans le but de comprendre la physique de ces phénomènes est une nécessité. Plusieurs investigations ont été menées jusqu'ici, citons les travaux sur les jets [3, 4, 5, 6, 7], sur le bruit des ventilateurs et des cages d'écureuils [8, 9], sur le bruit de cavité [10, 11], plein d'autres champs sont concernés par cette discipline (hélices, fuselage, habitacle, conduits acoustiques, la détonation acoustique, etc.)

L'aéroacoustique (par Mohring 1983 [12]) englobe 3 catégories de problèmes :

1. la génération du son, lorsqu'elle est provoquée par un écoulement.
2. la génération d'écoulement du fluide par le son.
3. la propagation dans un écoulement de fluide.

Particularités des fluctuations acoustiques par rapport au champ aérodynamique

- Les ondes acoustiques se propagent à la vitesse du son sur de grandes distances et dans toutes les directions spatiales, alors que les perturbations aérodynamiques sont uniquement convectées par l'écoulement [13, 14].
- Les amplitudes des ondes acoustiques sont de l'ordre 10^4 à 10^5 fois inférieures aux amplitudes du champ aérodynamique moyen [13, 14].
- La longueur d'onde acoustique principale est de l'ordre 10^2 fois supérieure aux cisaillements généralement constatés dans les écoulements cisailés [13, 14].

Il existe aujourd'hui plusieurs approches [15, 16] qui permettent de modéliser et de calculer le rayonnement acoustique d'origine aérodynamique, on peut cataloguer les différentes méthodes numériques existantes en deux grandes familles : les méthodes directes et les méthodes hybrides

Approche directe

Elle est sans doute la méthode la plus complète et certainement la plus précise pour calculer le bruit émis par un écoulement, elle consiste à résoudre les équations de Navier-Stokes afin d'obtenir simultanément le champ aérodynamique et acoustique [17, 18, 7], via une DNS, une LES, ou

encore un calcul RANS. Le traitement numérique de ces équations (Navier-Stokes) est cependant très délicat car l'algorithme numérique à élaborer doit être capable à la fois de calculer des fluctuations acoustiques de très faible amplitude par rapport au champ aérodynamique et d'assurer la propagation des ondes acoustiques sur de longues distances sans effet notable de diffusion ni de dispersion, de plus le problème de conditions aux limites spécifique à l'aéroacoustique [19, 20, 21] se pose aussi d'une façon cruciale, les conditions de non réflexion doivent assurer la sortie non seulement des ondes acoustiques mais aussi des tourbillons, sans produire de réflexions parasites trop importantes. Donc cette méthode, par sa complexité, reste limitée à des configurations géométriques simples, elle est donc inutilisable à des fins industrielles tangibles. Pour affranchir ce problème, une autre méthode existe dite hybride.

Les méthodes hybrides

Ces méthodes consistent à découpler les calculs du champ aérodynamique de celui de l'acoustique, elles se basent sur la construction des termes sources à partir du champ aérodynamique et de les faire rayonner en utilisant un opérateur de propagation. On distingue deux catégories de méthodes hybrides :

- Les méthodes utilisant des calculs aérodynamiques stationnaires, à partir desquelles des grandeurs statiques sont estimées. En utilisant les propriétés d'une turbulence homogène, on construit les spectres d'énergie cinétique turbulente qui servent à modéliser les termes sources. Parmi ces méthodes, on peut citer le modèle de Robner [22], le modèle de Goldstein [23], la méthode SNGR (stochastic noise generation and radiation) [24].
- Les méthodes s'appuyant sur des simulations aérodynamiques instationnaires, grâce à la nature instationnaire et donc fluctuante des données aérodynamiques, il est possible de modéliser les termes sources et d'obtenir une évolution spatio-temporelle du rayonnement acoustique. On distingue alors deux classes de résolutions :
 1. Des résolutions s'appuyant sur la résolution des systèmes d'équations (Equations d'Euler Linéarisées [16, 25, 26, 27]) ou la méthode de séparation de Hardin et Pope [28].
 2. Des résolutions basées sur des analogies acoustiques (Lighthill [29, 30], Fowcs Williams et Hawkins [31], Curle [32], Lilley [33] et Philips [34]).

Les modèles à termes sources dépendent de l'opérateur de propagation, plus l'opérateur est complet moins les termes sources contiennent d'informations, c'est le cas des Equations d'Euler Linéarisées qui prennent en compte toutes les interactions linéaires entre les fluctuations acoustiques et le champ aérodynamique moyen. Les opérateurs de propagations sont plus au moins performants pour traiter les interactions des ondes acoustiques avec un écoulement moyen, ainsi, l'analogie de Lighthill [29, 30] fondée sur une équation d'onde, décrit uniquement une propagation dans un milieu homogène au repos dans laquelle l'effet de l'écoulement est remplacé par une

distribution de sources, les travaux de Lilley [33] ont permis de tenir compte de la réfraction, et Curle [32] propose une extension de l'analogie de Lighthill en présence des parois solides. Ces trois analogies restent limitées du fait qu'elles soient fondées sur une équation d'onde qui décrit uniquement une propagation dans un milieu homogène. Par la suite, Ffowcs Williams et Hawkings [31] ont généralisé cette démarche en prenant compte du déplacement des surfaces solides présentes dans l'écoulement. Khelladi et Younsi [35, 9] ont démontré que la modélisation du bruit généré par une turbomachine utilisant l'analogie de FWH n'est pas très efficace, car ne prenant pas en compte le confinement de cette dernière. Les équations d'Euler linéarisées avec termes sources [36, 26, 16] ne sont pas limitées pour des milieux homogènes et peuvent traiter les effets de réfraction et réflexion, contrairement à l'analogie de Lighthill, les EEL traitent à la fois la propagation acoustique, entropie et vorticités ondulaires, ce qui permet l'interaction entre les différentes formes d'ondes. En tenant compte de la complexité des géométries auxquelles nous sommes confrontés dans cette étude, **les EEL restent les plus appropriées.**

Méthodes et schémas numériques

L'étude de l'algorithme permettant de résoudre le problème mathématique auquel nous sommes confrontés (à savoir la résolution des EEL), nous conduit à 3 grandes bases de méthodes numériques les plus documentées et les plus utilisées :

Les différences finies : Cette méthode consiste à remplacer les dérivées partielles par des différences divisées ou combinaisons de valeurs ponctuelles de la fonction en un nombre fini de points discrets ou nœuds du maillage, présente une grande simplicité d'écriture et un faible coût de calcul mais elle demeure limitée à des géométries simples, de ce fait elle n'est pas applicable à notre étude.

Les éléments finis : Cette méthode consiste à approcher, dans un sous-espace de dimension finie, un problème écrit sous forme variationnelle (comme minimisation de l'énergie en général) dans un espace de dimension infinie. La solution approchée est dans ce cas une fonction déterminée par un nombre fini de paramètres comme, par exemple, ses valeurs en certains points ou nœuds du maillage. Elle offre la possibilité de traiter des géométries complexes mais elle présente un grand coût en temps de calcul et en mémoire, cette méthode reste limitée lorsqu'on veut atteindre des ordres élevés.

Une troisième famille de méthodes nous offre la possibilité d'affranchir ces limitations, à savoir **les volumes finis** : cette méthode intègre sur des volumes élémentaires de forme simple, les équations écrites sous forme de loi de conservation. Elle fournit ainsi de manière naturelle des approximations discrètes conservatives et est particulièrement bien adaptée aux équations de la mécanique des fluides. La simplicité de la méthode permet d'envisager différents schémas numériques avec une précision spatiale et/ou temporelle plus au moins importante selon le besoin.

Plusieurs méthodes ont été présentées avec succès pour la résolution des problèmes nécessitant un maillage non-structuré, on peut les cataloguer en 5 grandes familles [37, 38] : méthodes des volumes finis d'ordres élevés (high-order finite volume methods) [39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46], les méthodes essentiellement non-oscillatoires (essentially non-oscillatory ENO and WENO methods) [47, 48, 49, 50, 51, 52, 53], les méthodes de Galerkin Discountinues [54, 55, 56], les méthodes dites "volume spectral" (Spectral Volume method) [57, 58] et les méthodes de la distribution des résiduels (residual distribution or fluctuation splitting methods) [59, 60, 61, 62, 63].

Afin de résoudre ce type de problème, plusieurs schémas numériques ont été proposés, et plusieurs auteurs ont testé leurs fiabilités. Dans les travaux menés à l'INRIA entre 2002 et 2003 [64, 65], il a été démontré que le schéma à flux centré d'ordre 2 est plus précis et plus "stable" que les schémas de Lax-Friedrichs, Steger-Warming, ou celui de Van Leer, (les schémas en volume finis utilisant des flux centrés ont déjà fait leurs preuves pour la résolution des équations de Maxwell [66]). Ces mêmes travaux ont permis de mettre en évidence que l'utilisation d'un schéma volume finis avec flux centrés associé à une discrétisation temporelle de type Leapfrog, non diffusif et stable sous une condition de type CFL sur les équations d'Euler linéarisées autour d'un écoulement uniforme ou stationnaire est très intéressante mais elle présente quelques défauts lorsqu'il s'agit d'écoulement non-uniforme et elle demeure très restrictive et peu applicable aux réalités physiques des problèmes d'écoulement. Dès qu'il s'agit des géométries complexes qui nécessitent un maillage non-structuré, le développement d'une méthode volumes finis d'ordre élevé s'impose. La démarche retenue pour surmonter ce type de problèmes sera basée sur la méthode des volumes finis avec approximation par moindres carrés mobiles (**Finite Volume and Moving Least Square Approximations, FV-MLS**). Cette méthode a été initialement conçue pour le traitement des données et la génération des surfaces à partir d'un maillage de point [67], elle est devenue très populaire dans les méthodes sans maillages (meshfree et SPH). Cette méthode a été appliquée avec succès pour la résolution des problèmes de la dynamique des fluides, notamment pour la discrétisation des équations de Navier-Stokes sur un maillage non-structuré [68, 69, 38]. Récemment, elle a été appliquée avec succès pour la résolution des problèmes en acoustique [70].

Conditions aux limites

Les conditions aux limites sont d'une importance capitale dans une simulation numérique. Pour la construction des frontières absorbantes, il est nécessaire d'appliquer des conditions non réfléchissantes. En CFD et en CAA, ces conditions aux limites sont souvent fondées sur les propriétés mathématiques des équations aux dérivées partielles qui les gouvernent pour sélectionner les informations entrantes dans le domaine de calcul [71] ou sur les solutions asymptotiques [72, 73, 74] ou celles fondées sur l'utilisation des zones éponges [75], une autre méthode de construction de condi-

tions aux limites absorbantes dite PML (Perfectly Matched Layer) a été mise au point et appliquée en aéroacoustique, cette méthode a été initiée par Béranger [76] pour les conditions absorbantes en simulation électromagnétique, elle a été adaptée pour la première fois pour les EEL par Fang Q. Hu [77] ainsi plusieurs études ont suivi en confortant cette méthode sur des EEL [78, 79, 80, 81] et sur les équations de Naviers-Stokes [82]. Dans ce travail, des techniques décentrées amont seront utilisées telles que utilisées par Bernacki et autre [83] avec la méthode Galerkin Discontinue pour sélectionner que les ondes à la sortie des frontières extérieures.

Méthodologie

Ce projet s'inscrit dans la logique de développement d'outil de modélisation de bruit aérodynamique dans les turbomachines engagé au laboratoire DynFluid depuis plusieurs années. L'objectif de ce projet est le développement et la mise en œuvre des modèles scientifiques capables de restituer efficacement les phénomènes aéroacoustiques observés dans les machines à écoulement subsonique installées dans des environnements relativement confinés, . Un intérêt particulier sera porté aux aspects propagatifs de ces phénomènes dont la complexité de ces derniers et le type de géométrie à étudier (voir figure 1 et 2) nous imposent une méthode hybride. **Dans cette étude on s'intéresse à l'élaboration d'un code de calcul 2D à structure parallèle, précis, robuste et utilisable pour des configurations réalistes de domaine en présence d'un écoulement uniforme.**

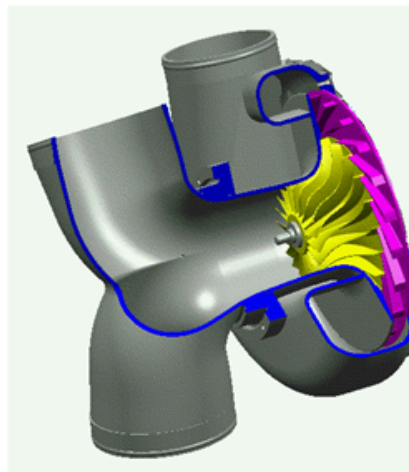


FIGURE 1 – Admission - refoulement dans un turbocompresseur (cf. Liebherr-Aerospace).

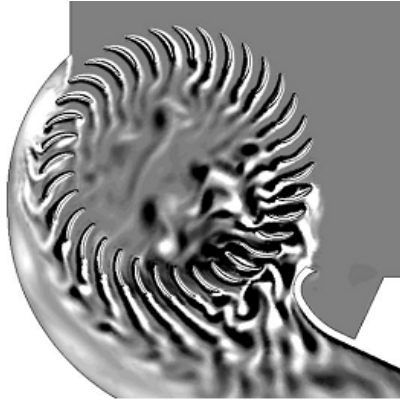


FIGURE 2 – Analogie propagation acoustique/vorticité dans un ventilateur centrifuge type Cross-Flow [1].

Le manuscrit est structuré en cinq chapitres :

Le premier chapitre présente les bases théoriques des méthodes numériques usuelles avec lesquelles un problème exact est approché par un problème discret formulé dans un espace de dimension finie. Dans ce chapitre, le choix de la méthode utilisée, à savoir, les volumes finis est largement justifié par la complexité de la géométrie du domaine de calcul et d'autre part, par le niveau de précision requis. Ici l'air est assimilé à un fluide parfait et sachant que les équations d'Euler décrivent la dynamique d'un gaz non visqueux, la forme générale et la forme conservatrice de ces équations ainsi que leur linéarisation sont présentées.

Le second chapitre est consacré aux schémas numériques employés pour la discrétisation spatiale des Equations d'Euler Linéarisées ainsi qu'aux traitements des conditions aux limites adaptés à l'aéroacoustique. Une discrétisation de type Godunov des problèmes hyperboliques est appliquée et quelques techniques de calcul approché (numérique) des intégrales sont données. Les schémas numériques pour la résolution du système d'équations auquel nous sommes confrontés, doivent être fiables, non-dissipatifs, non-diffusifs et stables. Dans ce chapitre, nous présentons quelques schémas que nous pensons adaptés à l'aéroacoustique, en particulier toute la théorie de la méthode des volumes finis avec approximation par moindres carrés mobiles (Finite Volume and Moving Least Square Approximations, FV-MLS).

Au troisième chapitre, nous présentons les schémas numériques explicites employés pour la discrétisation des dérivées temporelles, les méthodes de Runge-Kutta explicites sont largement utilisées en raison de leurs avantages, notamment leur flexibilité, leur grande limite de stabilité et de facilité de programmation, ce qui nous a amené à utiliser ces méthodes afin de tester la capacité des schémas MLS avec les différents flux numériques et les différents ordres, appliqués à la résolution des EEL pour prédire les différents phénomènes avec la moindre erreur numérique possible. Les résultats obtenus sont présentés et confrontés aux solutions exactes.

Afin d'atteindre des ordres élevés (≥ 3), les difficultés sont accrues. Au chapitre quatre, nous traitons des méthodes implicites imposées par la non adaptation des méthodes explicites sur les systèmes algébro-différentiels auxquels nous sommes désormais confrontés. En effet, pour les schémas d'ordre supérieur ou égal à 3, il est nécessaire de construire et de définir une matrice masse qui nous permet de préserver l'ordre de précision de notre méthode, elle est creuse et très large. Parmi ces méthodes implicites, les BDF (Backward Differentiation Formula) qui sont des méthodes itératives de type Newton-Krylov, la théorie de ces méthodes est donnée dans ce chapitre. Plusieurs cas tests sont ensuite présentés afin de démontrer la grande précision de notre méthode.

Le dernier chapitre est dédié à une application réelle : application de notre méthode sur la prédiction du bruit généré par une turbomachine (ventilateur centrifuge à grande vitesse), particulièrement sur la zone d'interaction entre la roue et le diffuseur qui est essentiellement à l'origine du bruit sonore rayonné par le ventilateur centrifuge.

Méthodes numériques usuelles & Equations d'Euler Linéarisées

1.1 Méthodes numériques usuelles

Très peu d'équations aux dérivées partielles peuvent être résolues de façon exacte par un algorithme (méthode directe). Cependant, plusieurs méthodes permettent de discrétiser un système d'équations, c'est-à-dire, certains problèmes continus peuvent parfois être remplacés par un problème discret dont la solution est connue pour approcher celle du problème continu. Pour cette raison et d'une manière générale, le problème exact est approché par un problème discret formulé dans un espace de dimension finie, ce qui conduit à la résolution d'un système linéaire. Les deux critères principaux de choix d'une de ses approches numériques sont souvent, d'une part la complexité de la géométrie du domaine de calcul et d'autre part le niveau de précision requis. Ces méthodes peuvent être cataloguées sous 5 grandes familles : les différences finies, les éléments finis, la méthode Galerkin Discontinue (GD), les méthodes spectrales et les méthodes volumes finis, chacune de ces méthodes a ses avantages et ses inconvénients.

1.1.1 Méthode des différences finies

La méthode consiste en une discrétisation des opérateurs différentiels sur une grille de pas d'espace fixe, à l'aide de développements de Taylor tronqués. Donc sa mise en œuvre utilise la formulation différentielle du problème en remplaçant chacun des opérateurs différentiels par un quotient aux différences.

Pour illustrer le mode de fonctionnement de la méthode à résoudre, on cite à titre d'exemple, le problème de Dirichlet.

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (1.1)$$

Soit N un entier > 0 et $h = \frac{1}{N+1}$. On définit alors le maillage du carré Ω comme l'ensemble des points $(x_i = ih, y_j = jh)$, $0 \leq i, j \leq N+1$, appelés les nœuds du maillage (voir la figure 1.1).

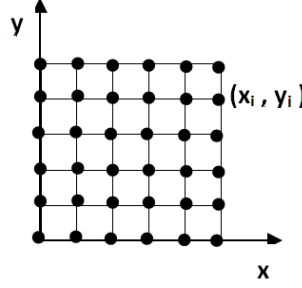


FIGURE 1.1 – Discrétisation du domaine.

La méthode des différences finies consiste à obtenir une approximation de la solution u aux points (x_i, y_j) , $1 \leq i, j \leq N$, elle repose sur la formule de Taylor et on obtient :

$$\begin{cases} -\Delta u(x_i, y_j) = \frac{1}{h^2} [4u_{ij} - u_{i+1,j} - u_{i-1,j} - u_{i,j+1} - u_{i,j-1}] \\ + \frac{h^2}{12} \left[\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_i + \theta_i h, y_j) + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(x_i, y_j + \theta_j h) \right] \end{cases} \quad (1.2)$$

avec $u_{ij} = u(x_i, y_j)$ et $|\theta_i| < 1$, $1 \leq i, j \leq N$.

Les deux principes de base de la méthode consistent :

- négliger le reste du développement dans lequel le coefficient $\frac{h^2}{12}$ est négligeable.
- écrire que l'équation (1.1) est satisfaite en tous les points (x_i, y_j) , $1 \leq i, j \leq N$ du maillage, la quantité $-\Delta u(x_i, y_j)$ étant approchée conformément au principe précédent, par le quotient aux différences :

$$\frac{1}{h^2} [4u_{ij} - u_{i+1,j} - u_{i-1,j} - u_{i,j+1} - u_{i,j-1}].$$

En posant $f_{ij} = f(x_i, y_j)$, on obtient de la sorte N^2 équations aux N^2 inconnues u_{ij} c'est à dire :

$$\frac{1}{h^2} [4u_{ij} - u_{i+1,j} - u_{i-1,j} - u_{i,j+1} - u_{i,j-1}] = f_{ij} \quad (1.3)$$

En tenant compte de la condition aux limites $u = 0$ sur $\partial\Omega$, on aura :

$$u_{0,j} = u_{N+1,j} = u_{i,0} = u_{i,N+1} = 0 \quad (1.4)$$

Le système (1.3) et (1.4) s'écrit alors sous la forme $AU = F$.

Avantages et inconvénients de cette méthode

Cette méthode, par sa grande simplicité d'écriture et sa facilité de mise en œuvre, présente un faible coût de calcul. Elle permet également d'atteindre aisément des ordres de précisions élevés. Mais elle reste limitée à des géométries simples, ce qui rend son application impossible pour notre cas, où l'on est confronté à des géométries complexes.

1.1.2 Méthode des éléments finis

Cette méthode consiste à approcher dans un sous-espace de dimension finie, un problème écrit sous forme variationnelle (comme minimisation de l'énergie en général) dans un espace de dimension infinie. Dans ce cas, la solution approchée est une fonction déterminée par un nombre fini de paramètres, comme par exemple, ses valeurs en certains points ou nœuds du maillage. La formulation variationnelle est obtenue en intégrant le produit scalaire de l'équation par une fonction test. Puis, en effectuant des intégrations par partie on arrive à affaiblir la régularité demandée aux inconnues et/ou à faire apparaître des termes de bord qui correspondent aux conditions aux limites du problème. Pour illustrer ces idées de base de cette méthode, on reprend l'exemple précédent (équation 1.1), en utilisant la formulation variationnelle (faible) de ce problème :

Trouver $u \in V$ tel que :

$$a(u, v) = f(v), \quad \forall u \in V \quad (1.5)$$

$$\begin{cases} a(u, v) = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ f(v) = \int_{\Omega} f v \, dx \, dy \\ V = H_0^1(\Omega) = \{v; v \in H^1(\Omega), v = 0 \text{ sur } \partial\Omega\} \end{cases} \quad (1.6)$$

Où $H^1(\Omega)$ désigne l'espace de Sobolev, $H^1(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega), \forall i = 1 \dots N, \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2\}$. Les espaces L^p sont des espaces de fonctions dont la puissance p — ime de la fonction est intégrable, au sens de Lebesgue.

La méthode des éléments finis permet d'approcher la solution u comme suit :

On construit un sous-espace V_h de dimension finie de l'espace V , puis on définit la solution approchée u_h de la solution u comme la solution du problème suivant :

Trouver $u_h \in V_h$ tel que :

$$a(u_h, v_h) = f(v_h), \quad \forall u_h \in V_h \quad (1.7)$$

On montre alors :

- que le problème (1.7) admet une solution unique u_h ; pour cela, on utilise l'inclusion $V_h \in V$, ce qui permet de se ramener au résultat d'existence et d'unicité de la solution pour le problème continu (1.5).
- que la convergence de la solution approchée u_h vers la solution u est directement liée aux propriétés d'approximation des fonctions $v \in V$ par les fonctions $V_h \in V_h$.

Ainsi, la construction de l'espace V_h constitue " la clé " de la méthode d'approximation variationnelle. L'objet de la méthode des éléments finis est précisément de construire des familles d'espaces V_h qui ont des propriétés d'approximation convenables et qui conduisent à une mise en œuvre satisfaisante.

Avantages et inconvénients de cette méthode

Cette méthode a été initialement développée pour résoudre des problèmes de mécanique des milieux continus à géométrie complexe. Elle présente une facilité de prise en compte des conditions aux limites, mais celle-ci est très délicate à mettre en œuvre lors de la définition des éléments finis utilisés dans la résolution des problèmes d'ordres élevés (>2). Elle présente également un grand coût en temps de calcul et de mémoire.

1.1.3 Méthode Galerkin Discontinu (GD)

La méthode Galerkin Discontinu (GD) repose sur une base de fonctions discontinues d'un élément de maillage à un autre, l'ordre d'interpolation pouvant varier d'une cellule à une autre. De plus, le champ approché peut être discontinu à l'interface entre deux cellules voisines. La méthode peut être interprétée comme une approche éléments finis où aucune continuité entre les éléments n'est imposée, ou comme une généralisation des méthodes volumes finis d'ordres élevés. Cette méthode a été initialement introduite par Reed et Hill en 1973 pour la résolution de l'équation de transport de neutrons [84], un an plus tard Lesaint [85] présente les premiers résultats numériques de cette méthode . Cependant, cette méthode n'est que récemment devenue populaire comme une méthode pour résoudre la dynamique des fluides ou des problèmes électromagnétiques, plus particulièrement cette méthode présente une capacité à appréhender des problèmes en aéroacoustique [86, 87] .

Avantages et inconvénients de cette méthode

Elle fournit un cadre pratique pour le développement des méthodes d'ordres élevés en utilisant des maillages non structurés. La méthode est bien adaptée pour des calculs à grande échelle en fonction du temps dans lequel une grande précision est requise. Une distinction importante entre

la méthode GD et la méthode habituelle des éléments finis, il est à noter : dans la méthode GD, les équations qui en résultent sont locales à l'élément générateur. La solution au sein de chaque élément n'est pas reconstruite par rapport à l'élément voisin. Sa formulation compacte peut être appliquée à proximité des frontières sans traitement spécial, ce qui augmente considérablement la robustesse et la précision de mise en œuvre des conditions aux limites. Toutefois des problèmes récurrents apparaissant dans ce contexte : la diffusivité, les conditions aux limites et le traitement des instabilités de type Kelvin-Helmholtz.

1.1.4 Les méthodes spectrales

Ces méthodes n'ont connu un essor qu'à partir des années 70, après que Cooley et Tukey [88] ont proposé en 1965 le premier algorithme (FFT) de résolution rapide des Transformées de Fourier.

Contrairement à la méthode des éléments finis qui est une approche locale (elle se rapproche de la solution comme une combinaison linéaire des fonctions par morceaux qui sont non nulles sur les sous-domaines de petite taille), la méthode spectrale prend sur une approche globale pour laquelle la géométrie du domaine est capitale, elle se rapproche de la solution comme combinaison linéaire de fonctions continues qui sont généralement non nulles sur le domaine de la solution. Ces méthodes reposent sur un changement d'espace, entre l'espace physique du domaine de calcul et un espace de fonction qui sont définies sur tout le domaine de calcul, connues analytiquement et forment une base de représentation convergente des fonctions de l'espace physique [89]. Ainsi une fonction f de l'espace physique peut être exprimée sous la forme :

$$f(x) = \sum_{n=0}^N A_n \Psi_n(x) \quad (1.8)$$

Où $\Psi_n(x)$ seront des fonctions trigonométriques par exemple.

Et A_n : coefficients d'amplitudes.

Avantages et inconvénients de cette méthode

Ces méthodes spectrales sont connues pour leurs propriétés de convergence rapide et de précision. Elles présentent une erreur qui décroît rapidement avec N pour atteindre des taux exponentiels pour les fonctions les plus régulières. Virtuellement, elles sont libres de toute erreur dissipative ou dispersive. Ces méthodes peuvent donc apporter des niveaux de précision supérieurs à toutes autres méthodes mais restent très limitées par la nécessité d'obtenir le jeu de fonctions de base précédent qui dépend de la simplicité et de la régularité du domaine de calcul. Il est impossible d'obtenir des niveaux de résolution différents dans les parties différentes du domaine.

1.1.5 Méthode des volumes finis

La méthode intègre sur des volumes élémentaires de forme simple, les équations écrites sous forme de loi de conservation. Elle fournit ainsi, de manière naturelle, des approximations discrètes conservatives et est particulièrement bien adaptée aux équations de la mécanique des fluides. Sa mise en œuvre est simple avec des volumes élémentaires. L'idée de base de ces méthodes est de diviser le domaine spatial d'existence des équations en cellules appelées volumes finis et de former les équations discrètes à partir de la formulation faible du système de lois de conservation écrite pour chaque cellule.

En résumé, cette méthode s'articule sur trois points clés :

1. Choix des volumes de contrôle (maillage).
2. Type d'approximation dans les volumes.
3. Schémas numériques pour l'évaluation des flux.

Les Volumes de contrôle

Dans la méthode des volumes finis, le domaine de calculs Ω est d'abord divisé en volumes de contrôle disjoints élémentaires, dont l'union recouvre tout le domaine. Appelés également cellules, notées $(c_i)_{1 \leq i \leq nbcell}$. ($nbcell$ est le nombre de cellules).

A partir d'un maillage bien adapté à la géométrie à étudier, il existe différents choix possibles de cellules, ce qui ne change en rien le schéma [65].

Chaque cellule c_i est caractérisée par son centre x_i , et sa frontière ∂c_i . On notera également $|c_i|$ son volume, (son aire en 2D, ou longueur en 1D), s_i l'ensemble des indices des cellules qui sont voisines à c_i , c'est à dire qui ont un segment de frontière en commun. (Dans le cas particulier où la cellule est au bord du domaine de calcul Ω , s_i contiendra des indices de cellules fictives du côté du bord.)

Schéma de type cellules centrées (cell centred)

Dans ce schéma, les variables associées au fluide sont stockées aux centres des éléments du maillage, appelé ici maillage primal. Ici les volumes de contrôle coïncident avec les éléments du maillage. Les inconnues correspondent ici à une valeur moyenne sur le volume de contrôle.

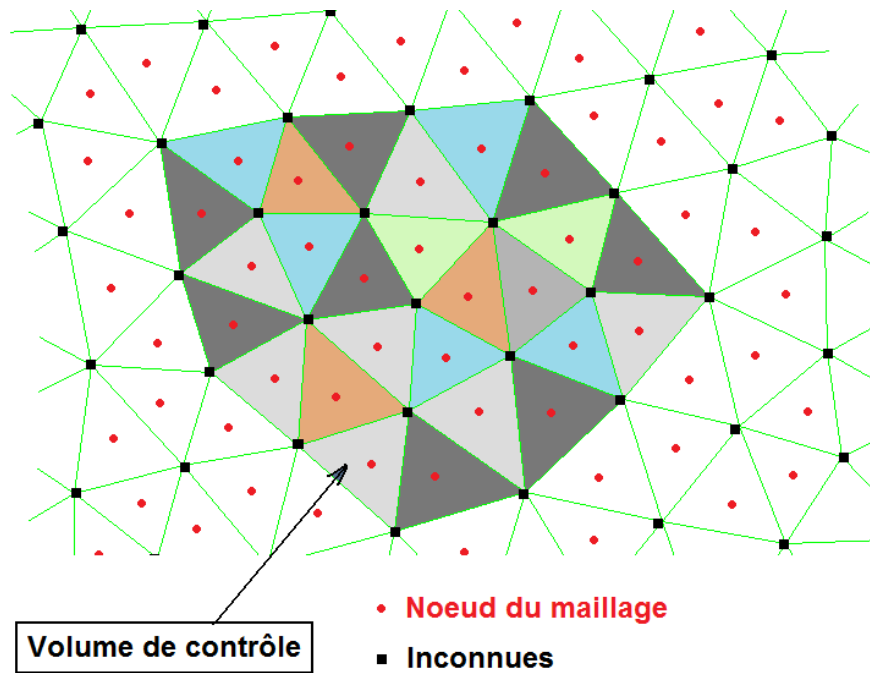


FIGURE 1.2 – Volumes Finis, Cell Centred.

Shéma de type " vertex centred "

Dans l'approche "Vertex Centered" ("Node Centered") les inconnues sont associées aux sommets des éléments du maillage. Le volume de contrôle est alors construit autour de ces nœuds sans recouvrement des cellules voisines (on dit encore qu'elle forme une partition du domaine de calcul). Ce schéma est très souvent utilisé lorsque l'on veut étendre les équations d'Euler aux équations de Navier Stokes car il est bien adapté au calcul des dérivés du second ordre en utilisant les différences centrées.

La construction des cellules ou volumes de contrôles se fait à partir des centres de gravité de chacun des éléments du maillage. On construit ensuite un maillage dual en reliant entre eux les centres de gravités des éléments.

Trois constructions différentes sont très souvent utilisées :

"Centroid dual mesh" : on relie entre eux les Centres de gravités avec un segment de droite.

"Median dual mesh" : aussi appelé formulation INRIA. Un point intermédiaire est introduit au milieu de chaque arête du maillage partant du nœud où sont stockées les variables. Le volume de contrôle est alors créé en joignant par des segments de droite, les nœuds milieux des arêtes et le centre de gravité des éléments du maillage primal l'incluant.

"Dirichlet" : basé sur le diagramme de Voronoi, il permet d'obtenir des volumes de contrôle convexes qui présentent des caractéristiques intéressantes [90]. En contrepartie, sa construction est plus difficile à obtenir.

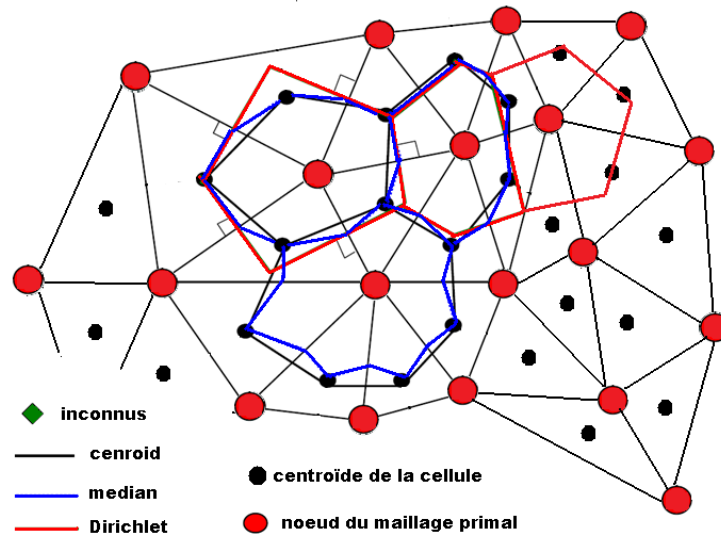


FIGURE 1.3 – Volumes Finis, "Vertexe centered" .

Shéma de type " cell vertex "

Pour cette variante les inconnues sont associées aux nœuds des éléments du maillage initial (primal). Dans ce cas, une interpolation linéaire des flux est possible, aussi cette formulation est du second ordre en espace. Plusieurs possibilités existent :

- Le volume de contrôle peut être formé de l'ensemble des éléments ayant un nœud commun (voir Figure suivante). Dans ce cas, il y a recouvrement entre les différents volumes de contrôle. Les flux sont alors calculés sur les faces de l'enveloppe du volume formé par la réunion des éléments ayant un nœud commun.

- La seconde possibilité consiste à prendre pour un nœud donné tous les éléments le "touchant". Mais dans ce cas, les équations de bilan sont calculées séparément sur chaque élément et les différentes quantités sont redistribuées aux nœuds, ce qui demande une étape supplémentaire dans le traitement du schéma. Ce type de schéma fait actuellement l'objet d'une recherche très active car il peut conduire à des schémas numériques très peu diffusifs et peu sensibles à la distorsion du maillage [91, 92].

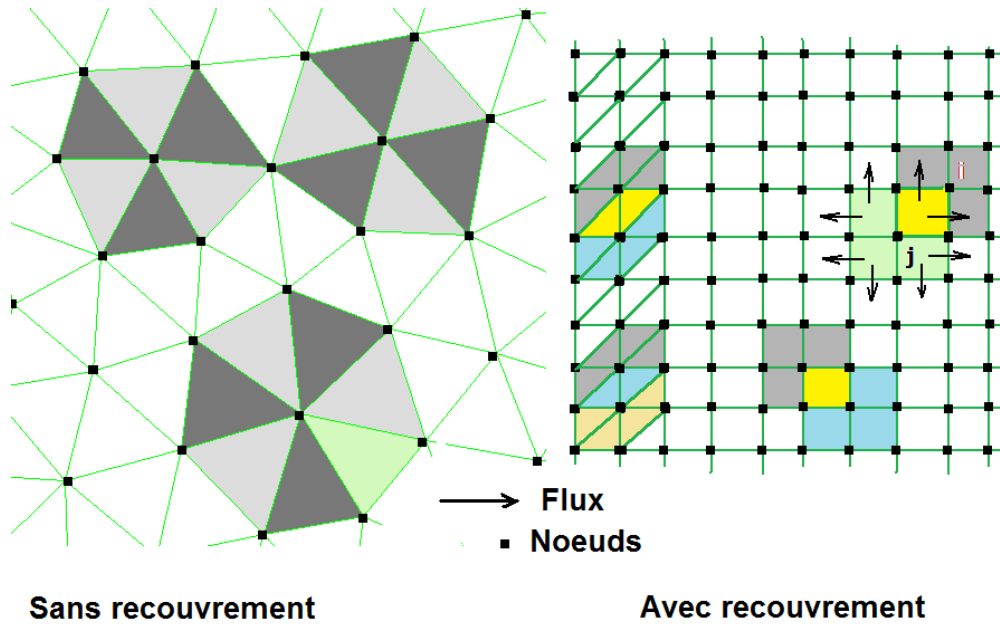


FIGURE 1.4 – Volumes Finis, cell vertex.

Discussion autour du choix du type de volume de contrôle

Le temps de calcul est en général, "à peu près" proportionnel au nombre de faces où sont évalués les flux. Ainsi, dans le cas d'un maillage non structuré (triangulaire), le nombre de flux à calculer étant deux fois plus important dans le cas de la formulation INRIA et les temps de calculs (pour une précision équivalente) sont en général 1.7 fois plus importants dans le cas d'un schéma utilisant la formulation INRIA (median dual mesh) que la formulation barycentrique (cell centered) [93]. De ce point de vue, la méthode "vertex centred" n'est pas recommandée.

L'approche "cell centered" présente plus d'avantages que l'approche "vertex centred", on peut citer à titre d'exemple : la facilité à implémenter les conditions aux limites, le fait aussi que le maillage primal correspond au volume de contrôle, etc. De ce fait notre choix s'oriente vers une étude avec volume de contrôle suivant l'approche "cell centred".

Principe de fonctionnement - Systèmes hyperboliques

Le système hyperbolique auquel on s'intéresse s'écrit :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \nabla \cdot f(U) = 0 \quad (1.9)$$

son intégrale sur chaque cellule c_i , est donnée par :

$$\int_{c_i} \frac{\partial U}{\partial t} dV + \int_{c_i} \nabla \cdot f(U) dV = 0 \quad (1.10)$$

La forme conservative de cette équation est obtenue en appliquant le théorème de la divergence :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{c_i} U dV + \int_{\partial c_i} f(U) \cdot n dS = 0 \quad (1.11)$$

Cette **loi de conservation intégrale** stipule que le taux de variation de la quantité totale d'une substance avec une densité u dans un volume de contrôle fixé c_i est égal au flux total de la substance à travers la frontière ∂c_i .

Dans la méthode des volumes finis, on introduit la notion de moyenne sur chaque cellule que l'on note U_i , en 1D nous avons :

$$U_i = \frac{1}{|c_i|} \int_{c_i} U dx \quad (1.12)$$

La frontière d'une cellule peut être décomposée en l'union des frontières avec ses cellules voisines. L'équation (1.11) s'écrit :

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} = -\frac{1}{|c_i|} \sum_{j \in s_i} \int_{\partial c_i \cap \partial c_j} f(U) \cdot n dx, \forall c_i \in \Omega \quad (1.13)$$

Discrétisation de type Godunov

Godunov, en 1959, a poursuivi cette interprétation dans la discrétisation des équations de la dynamique des gaz, en admettant une représentation de la solution qui soit constante par morceaux, c'est à dire, sur chaque volume de contrôle, avec une valeur égale à la moyenne U_i sur chaque cellule.

Cependant, cette simplification engendre une valeur double de la solution numérique à chaque interface entre les cellules, rendant ainsi le calcul de chaque flux aux interfaces ambigu.

Le second aspect des schémas de Godunov fut alors de remplacer le flux réel aux interfaces par une fonction de **flux numérique** H_{ij} , une fonction Lipschitzienne des deux valeurs du vecteur d'état U , calculées (approchées) "à droite- i " et "à gauche- j " en un point donné de la frontière. Un seul flux est alors calculé en résolvant le problème de Riemann posé en ce point.

Dans l'équation (1.13), le problème en temps n'interfère pas avec le problème en espace, ils sont considérés comme deux problèmes complètement indépendants.

Le problème en espace consiste à approcher le flux intégral sur chaque interface par une fonction de flux discret,

$$H_{ij} l_{ij} \approx \int_{\partial c_i \cap \partial c_j} f(U) \cdot n dx \quad (1.14)$$

L'équation (1.13) est ainsi reformulée comme suit :

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} = -\frac{1}{|c_i|} \sum_{j \in s_i} H_{ij} l_{ij} \quad (1.15)$$

où l_{ij} est la longueur en 2D (surface en 3D) de l'interface entre les cellules c_i et c_j . En 1D sa valeur est unité.

Avantages et inconvénients de cette méthode (volumes finis)

Elle permet de traiter des géométries complexes avec des volumes de forme quelconque, sa mise en œuvre est simple et dispose de plusieurs schémas numériques pour la discrétisation numérique des flux aux interfaces des cellules. Néanmoins, cette méthode présente des difficultés à atteindre des ordres élevés, ce qui est un véritable handicap pour la résolution des problèmes en aéroacoustique. Dans le présent travail, nous présenterons une méthode originale qui nous permettra de monter en ordre de précision pour l'aéroacoustique.

1.2 Équations d'Euler et leurs linéarisations

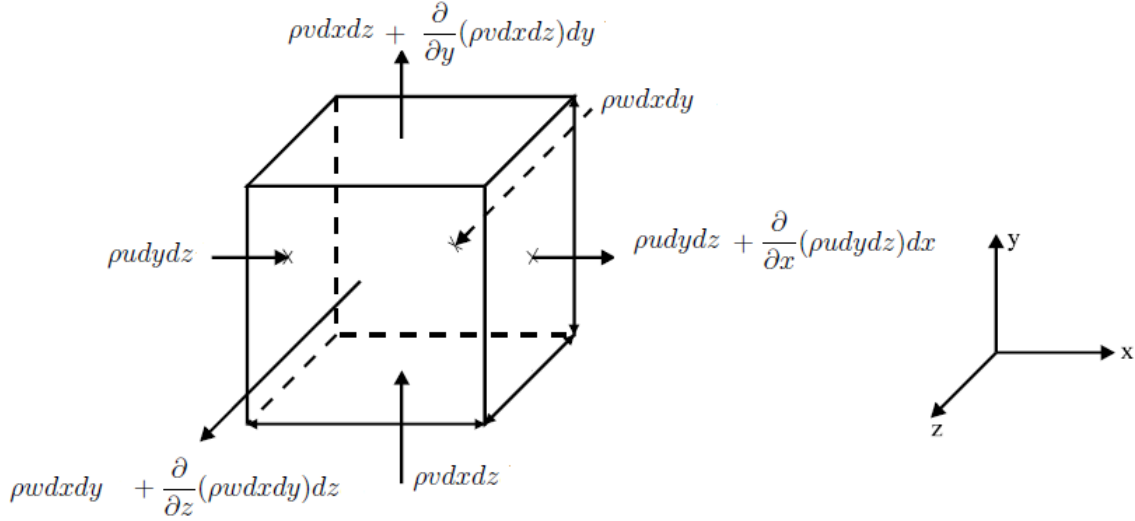
Notre problème consiste à étudier la propagation d'ondes de compression dans un écoulement initial subsonique uniforme et sans effets de transfert de chaleur. On suppose le fluide parfait compressible, ce qui constitue une bonne approximation de l'air. Les équations d'Euler décrivent la dynamique d'un gaz non visqueux, ce qui est une bonne approximation de l'air ambiant en acoustique. Dans ces équations, si l'on réécrit chaque variable (densité, vitesse, pression...) sous la forme d'une somme d'une variable stationnaire (constante dans le temps) et d'une petite fluctuation, on obtient les équations d'Euler en perturbation. Pour les résoudre, il est nécessaire d'estimer dans un premier temps les valeurs de ces variables indépendantes du temps.

Pour un écoulement tridimensionnel, les variables associées au problème à traiter sont au nombre de six : la masse volumique ρ , la pression p , la vitesse (u, v, w) et l'énergie interne massique e . Les équations dont on dispose sont : la conservation de masse, la conservation de quantité de mouvement (3 équations scalaires), la conservation de l'énergie et la loi d'état du fluide.

1.2.1 Forme générale des équations d'Euler

Conservation de masse

On considère un cube "élémentaire" de volume $dV = dxdydz$ et de masse $m = \rho dxdydz$.



La variation de masse peut s'écrire :

$$\begin{aligned}
 dm &= -\frac{\partial \rho}{\partial t} dxdydzdt \\
 &= \rho u dydzdt + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u dydz) dxdt - \rho u dydzdt \\
 &\quad + \rho v dx dzdt + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v dx dz) dydt - \rho v dx dzdt \\
 &\quad + \rho w dx dydt + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w dx dy) dzdt - \rho w dx dydt
 \end{aligned} \tag{1.16}$$

Après simplification, on obtient :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0 \tag{1.17}$$

Conservation de quantité de mouvement

Dans le cas d'une représentation Eulérienne du mouvement, la vitesse du fluide est fonction des coordonnées du point et du temps. L'accélération vaut alors :

$$\vec{\gamma} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \text{grad}(\vec{V})$$

Le théorème fondamental de la dynamique ($\vec{F} = M\vec{\gamma}$) en projection sur les trois axes du repère dans le cas d'un écoulement 3D, nous donne :

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} + \rho w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \\ \rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} + \rho w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \\ \rho \frac{\partial w}{\partial t} + \rho u \frac{\partial w}{\partial x} + \rho v \frac{\partial w}{\partial y} + \rho w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \end{cases} \quad (1.18)$$

Conservation de l'énergie

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u E + p u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v E + p v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w E + p w) = 0 \quad (1.19)$$

avec,

$$E = e + K \quad (1.20)$$

e : énergie interne.

$K = \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2)$: énergie cinétique.

Autre forme d'écriture :

$$\rho \frac{\partial E}{\partial t} + \rho u \frac{\partial E}{\partial x} + \rho v \frac{\partial E}{\partial y} + \rho w \frac{\partial E}{\partial z} = - \left(\frac{\partial p u}{\partial x} + \frac{\partial p v}{\partial y} + \frac{\partial p w}{\partial z} \right) \quad (1.21)$$

Équation d'état du fluide

Pour un gaz parfait, on peut donner l'équation reliant la pression dans le gaz à son énergie interne et sa masse volumique :

$$p = (\gamma - 1)\rho e \quad (1.22)$$

avec, $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ et,

C_p : chaleur spécifique à pression constante.

C_v : chaleur spécifique à volume constant.

Forme vectorielle des équations de conservation

Masse :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\vec{V}) = 0 \quad (1.23)$$

Quantité de mouvement :

$$\rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \rho \vec{V} \cdot \vec{\text{grad}}(V) + \vec{\text{grad}} p = 0 \quad (1.24)$$

Énergie :

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \text{div} \left((\rho E + p) \vec{V} \right) = 0 \quad (1.25)$$

1.2.2 Forme conservatrice des équations d'Euler

Le système des équations d'Euler instationnaires en trois dimensions d'espace sous forme conservative s'écrit dans le cas d'un gaz parfait :

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} = 0 \quad (1.26)$$

avec

$$W = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ E \end{pmatrix}; F = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho uw \\ (\rho E + p)u \end{pmatrix}; G = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ \rho vw \\ (\rho E + p)v \end{pmatrix}; H = \begin{pmatrix} \rho w \\ \rho uw \\ \rho vw \\ \rho w^2 + p \\ (\rho E + p)w \end{pmatrix}$$

Il y a 5 équations et 6 inconnues. On ajoute donc l'équation d'état :

$$p = (\gamma - 1)\rho e = (\gamma - 1) \left[\rho E - \frac{1}{2} \frac{(\rho u)^2 + (\rho v)^2 + (\rho w)^2}{\rho} \right] \quad (1.27)$$

1.2.3 Linéarisation des équations d'Euler autour d'une solution stationnaire 2D

A cause des termes non linéaires qui apparaissent dans les équations d'Euler, on est appelé à linéariser ces équations autour d'une solution stationnaire donnée par le champ aérodynamique, cela s'effectue au cas par cas, selon la nature du problème considéré (en particulier loi d'état du fluide et géométrie du domaine Ω et de sa frontière) et des conditions aux limites. Ces systèmes linéarisés sont utiles par exemple pour étudier l'écoulement de l'air autour du fuselage et des voilures dans les allures à faible vitesse par rapport à celle du son, des circulations de fluides dans les corps poreux ou encore pour "approcher" les modèles comportant des équations de transport ou de diffusion (dans le cas de la magnétohydrodynamique par exemple). Dans notre cas, la propagation des ondes acoustiques dans les turbomachines à écoulement subsonique.

Soit un vecteur $\vec{X}_0 = (\rho_0, u_0, v_0, p_0)$ une solution stationnaire des équations d'Euler (Aérodynamique), telle que :

Masse :

$$\rho_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} + u_0 \frac{\partial \rho_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial \rho_0}{\partial y} + \rho_0 \frac{\partial v_0}{\partial y} = 0 \quad (1.28)$$

Quantité de mouvement :

$$\begin{cases} \rho_0 u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} + \rho_0 v_0 \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial p_0}{\partial x} = 0 \\ \rho_0 u_0 \frac{\partial v_0}{\partial x} + \rho_0 v_0 \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{\partial p_0}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (1.29)$$

Energie :

$$\gamma p_0 \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) + u_0 \frac{\partial p_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial p_0}{\partial y} = 0 \quad (1.30)$$

On peut linéariser les équations d'Euler au voisinage de cette solution stationnaire $\vec{X}_0$ pour étudier les petites perturbations .

Posons,

$$\vec{X}(\vec{x}, t) = \vec{X}_0(\vec{x}, t) + \delta \vec{X}(\vec{x}, t) \quad (1.31)$$

Si l'on pose :

$$W = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ E \end{pmatrix} \quad (1.32)$$

On a alors,

$$\begin{aligned} W(X_0 + \delta X) &= W(X_0) + \frac{\partial W}{\partial X}(X_0) \delta X + \dots \\ (F \circ W)(X_0 + \delta X) &= (F \circ W)(X_0) + \frac{\partial (F \circ W)}{\partial X}(X_0) \delta X + \dots \\ (G \circ W)(X_0 + \delta X) &= (G \circ W)(X_0) + \frac{\partial (G \circ W)}{\partial X}(X_0) \delta X + \dots \end{aligned} \quad (1.33)$$

$\circ$ est une relation mathématique.

Ce qui conduit, au second ordre près, à :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial W}{\partial X}(X_0) \delta X \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial (F \circ W)}{\partial X}(X_0) \delta X \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial (G \circ W)}{\partial X}(X_0) \delta X \right) = 0 \quad (1.34)$$

Dans l'hypothèse de la régularité de la solution W , l'équation 1.34 nous permet d'obtenir :

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \delta \rho \\ \rho_0 \delta u + u_0 \delta \rho \\ \rho_0 \delta v + v_0 \delta \rho \\ \frac{1}{\gamma-1} \delta p + \frac{1}{2} \delta \rho (u_0^2 + v_0^2) + \rho_0 (u_0 \delta u + v_0 \delta v) \end{pmatrix} + \\
 & \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \rho_0 \delta u + u_0 \delta \rho \\ u_0^2 \delta \rho + 2u_0 \rho_0 \delta u + \delta p \\ u_0 \rho_0 \delta v + v_0 \rho_0 \delta u + u_0 v_0 \delta \rho \\ u_0 \left(\frac{\gamma}{\gamma-1} \delta p + \frac{1}{2} \delta \rho (u_0^2 + v_0^2) + \rho_0 (u_0 \delta u + v_0 \delta v) \right) + \delta u \left(\frac{\gamma}{\gamma-1} p_0 + \frac{1}{2} \rho_0 (u_0^2 + v_0^2) \right) \end{pmatrix} + \\
 & \frac{\partial}{\partial y} \begin{pmatrix} \rho_0 \delta v + v_0 \delta \rho \\ u_0 \rho_0 \delta v + v_0 \rho_0 \delta u + u_0 v_0 \delta \rho \\ v_0^2 \delta \rho + 2v_0 \rho_0 \delta v + \delta p \\ v_0 \left(\frac{\gamma}{\gamma-1} \delta p + \frac{1}{2} \delta \rho (u_0^2 + v_0^2) + \rho_0 (u_0 \delta u + v_0 \delta v) \right) + \delta v \left(\frac{\gamma}{\gamma-1} p_0 + \frac{1}{2} \rho_0 (u_0^2 + v_0^2) \right) \end{pmatrix} = 0
 \end{aligned} \tag{1.35}$$

En utilisant des combinaisons entre les lignes, On obtient :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + H = 0 \tag{1.36}$$

avec

$$\begin{aligned}
 U &= \begin{pmatrix} \delta \rho \\ \rho_0 \delta u \\ \rho_0 \delta v \\ \delta p \end{pmatrix}; F = \begin{pmatrix} \rho_0 \delta u + u_0 \delta \rho \\ \rho_0 u_0 \delta u + \delta p \\ \rho_0 v_0 \delta v \\ u_0 \delta p + \gamma p_0 \delta u \end{pmatrix}; G = \begin{pmatrix} \rho_0 \delta v + v_0 \delta \rho \\ \rho_0 u_0 \delta u \\ \rho_0 v_0 \delta v + \delta p \\ v_0 \delta p + \gamma p_0 \delta v \end{pmatrix}; \\
 H &= \begin{pmatrix} 0 \\ (\rho_0 \delta u + u_0 \delta \rho) \frac{\partial u_0}{\partial x} + (\rho_0 \delta v + v_0 \delta \rho) \frac{\partial u_0}{\partial y} \\ (\rho_0 \delta u + u_0 \delta \rho) \frac{\partial v_0}{\partial x} + (\rho_0 \delta v + v_0 \delta \rho) \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ (\gamma-1) \left(\rho_0 v_0 \delta u \frac{\partial u_0}{\partial y} + (\rho_0 v_0 \delta v + \delta p) \frac{\partial v_0}{\partial y} + \rho_0 u_0 \delta v \frac{\partial v_0}{\partial x} + (\rho_0 u_0 \delta u + \delta p) \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

En utilisant le système représenté par (1.28, 1.29 et 1.30), on obtient :

$$H = \begin{pmatrix} 0 \\ \rho_0 \left(\delta u \frac{\partial u_0}{\partial x} + \delta v \frac{\partial u_0}{\partial y} \right) - \frac{\delta \rho}{\rho_0} \frac{\partial p_0}{\partial x} \\ \rho_0 \left(\delta u \frac{\partial v_0}{\partial x} + \delta v \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) - \frac{\delta \rho}{\rho_0} \frac{\partial p_0}{\partial y} \\ (\gamma-1) \left(-\delta u \frac{\partial p_0}{\partial x} - \delta v \frac{\partial p_0}{\partial y} + \delta p \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) \right) \end{pmatrix} \tag{1.37}$$

Le vecteur H exprime les hétérogénéités de l'écoulement moyen, il est nul dans le cas d'un écoulement uniforme.

Cas particuliers des EEL

Propagation dans un milieu au repos

$$X_0 = (\rho_0, 0, 0, p_0) \quad (1.38)$$

Le vecteur des variables U , le vecteur H , les vecteurs flux E et G devient :

$$U = \begin{pmatrix} \delta\rho \\ \rho_0\delta u \\ \rho_0\delta v \\ \delta p \end{pmatrix}; F = \begin{pmatrix} \rho_0\delta u \\ \delta p \\ 0 \\ \gamma p_0\delta u \end{pmatrix}; G = \begin{pmatrix} \rho_0\delta v \\ 0 \\ \delta p \\ \gamma p_0\delta v \end{pmatrix}; H = 0$$

Nous retrouvons ainsi l'équation des ondes :

$$\frac{\partial^2 \delta p}{\partial t^2} - c_0^2 \Delta \delta p = 0 \quad (1.39)$$

Propagation dans un écoulement uniforme

$$X_0 = (\rho_0, u_0, v_0, p_0) = cte \quad (1.40)$$

Le vecteur des variables U , le vecteur H , les vecteurs flux E et G deviennent :

$$U = \begin{pmatrix} \delta\rho \\ \rho_0\delta u \\ \rho_0\delta v \\ \delta p \end{pmatrix}; F = \begin{pmatrix} \rho_0\delta u + u_0\delta\rho \\ \rho_0 u_0\delta u + \delta p \\ \rho_0 v_0\delta v \\ u_0\delta p + \gamma p_0\delta u \end{pmatrix}; G = \begin{pmatrix} \rho_0\delta v + v_0\delta\rho \\ \rho_0 u_0\delta u \\ \rho_0 v_0\delta v + \delta p \\ v_0\delta p + \gamma p_0\delta v \end{pmatrix}; H = 0$$

Cas isentropique

Pour un gaz parfait à chaleurs spécifiques constantes, nous avons : $ds = C_v \left(\frac{dp}{p} - \gamma \frac{d\rho}{\rho} \right)$. Si nous gardons le modèle de petites perturbations (acoustiques) isentropiques autour de U_0 , on obtient une équation supplémentaire : $\delta p = c_0^2 \delta \rho$ avec $c_0^2 = \frac{\gamma p_0}{\rho_0}$.

Le système 1.36 devient :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A_1 \frac{\partial U}{\partial x} + A_2 \frac{\partial U}{\partial y} = 0 \quad (1.41)$$

Avec

$$A_1 = \begin{pmatrix} u_0 & 0 & c_0 \\ 0 & u_0 & 0 \\ c_0 & 0 & u_0 \end{pmatrix}; A_2 = \begin{pmatrix} v_0 & 0 & 0 \\ 0 & v_0 & c_0 \\ 0 & c_0 & v_0 \end{pmatrix};$$

1.2.4 Forme matricielle et diagonalisation

Afin d'utiliser les propriétés mathématiques des équations aux dérivées partielles et obtenir ainsi les informations entrantes et sortantes du domaine géométrique Ω , ce qui nous permet par exemple de construire des conditions aux limites absorbantes, on est ici contraint de donner la forme matricielle des équations d'Euler linéarisées.

Forme matricielle dans le cas d'un écoulement uniforme

Pour le cas de propagation dans un écoulement uniforme le système 1.36 s'écrit :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} = 0 \quad (1.42)$$

On peut aussi l'écrire sous cette forme :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial U} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial U} \frac{\partial U}{\partial y} = 0 \quad (1.43)$$

posons : $A_1 = \frac{\partial F}{\partial U}$ et $A_2 = \frac{\partial G}{\partial U}$.

A_1 et A_2 sont des matrices données par :

$$A_1 = \begin{pmatrix} u_0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & u_0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & u_0 & 0 \\ 0 & \frac{\gamma p_0}{\rho_0} & 0 & u_0 \end{pmatrix}; A_2 = \begin{pmatrix} v_0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & v_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v_0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{\gamma p_0}{\rho_0} & v_0 \end{pmatrix};$$

On définit la matrice J comme suit :

$$J = A_1 n_x + A_2 n_y \quad (1.44)$$

n_x et n_y sont les composantes du vecteur unitaire normal $\vec{n}$ à la frontière du domaine de calcul. En remplaçant les matrices A_1 et A_2 par leur valeur on obtient :

$$J = \begin{pmatrix} u_0 n_x + v_0 n_y & n_x & n_y & 0 \\ 0 & u_0 n_x + v_0 n_y & 0 & n_x \\ 0 & 0 & u_0 n_x + v_0 n_y & n_y \\ 0 & c_0^2 n_x & c_0^2 n_x & u_0 n_x + v_0 n_y \end{pmatrix} \quad (1.45)$$

si l'on pose $\vec{V}_0 = (u_0, v_0)$ alors :

$$J = \begin{pmatrix} \vec{V}_0 \cdot \vec{n} & n_x & n_y & 0 \\ 0 & \vec{V}_0 \cdot \vec{n} & 0 & n_x \\ 0 & 0 & \vec{V}_0 \cdot \vec{n} & n_y \\ 0 & c_0^2 n_x & c_0^2 n_y & \vec{V}_0 \cdot \vec{n} \end{pmatrix} \quad (1.46)$$

J est appelée matrice Jacobienne des EEL.

On verra par la suite l'utilité de cette matrice lors de la construction de la condition aux limites absorbantes.

Diagonalisation de J

Si J est diagonalisable, alors on peut écrire :

$$J = MDM^{-1} \quad (1.47)$$

$D = \text{diag}(d_i)$: matrice diagonale des valeurs propres d_i de J .

M : matrice des vecteurs propres de J .

Valeurs et vecteurs propres

Valeurs propres	Multiplicité	Vecteurs propres
$\vec{V}_0 \cdot \vec{n} - c_0$	1	$(1, -c_0 n_x, -c_0 n_y, c_0^2)$
$\vec{V}_0 \cdot \vec{n} + c_0$	1	$(1, +c_0 n_x, +c_0 n_y, c_0^2)$
$\vec{V}_0 \cdot \vec{n}$	2	$(1, 0, 0, 0), (0, 1, -n_x/n_y, 0)$ si $n_y \neq 0$ $(0, -n_y/n_x, 1, 0)$ si $n_x \neq 0$

Dans ce cas,

$$D = \begin{pmatrix} \vec{V}_0 \cdot \vec{n} - c_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \vec{V}_0 \cdot \vec{n} + c_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \vec{V}_0 \cdot \vec{n} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vec{V}_0 \cdot \vec{n} \end{pmatrix} \quad (1.48)$$

si $n_y \neq 0$, alors :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -c_0 n_x & c_0 n_x & 0 & 1 \\ -c_0 n_y & c_0 n_y & 0 & -n_x/n_y \\ c_0^2 & c_0^2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.49)$$

et

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{n_x}{2c_0} & -\frac{n_y}{2c_0} & \frac{1}{2c_0^2} \\ 0 & \frac{n_x}{2c_0} & \frac{n_y}{2c_0} & \frac{1}{2c_0^2} \\ 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{c_0^2} \\ 0 & n_y^2 & -n_x n_y & 0 \end{pmatrix} \quad (1.50)$$

si $n_x \neq 0$, alors :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -c_0 n_x & c_0 n_x & 0 & -n_y/n_x \\ -c_0 n_y & c_0 n_y & 0 & 1 \\ c_0^2 & c_0^2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.51)$$

et

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{n_x}{2c_0} & -\frac{n_y}{2c_0} & \frac{1}{2c_0^2} \\ 0 & \frac{n_x}{2c_0} & \frac{n_y}{2c_0} & \frac{1}{2c_0^2} \\ 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{c_0^2} \\ 0 & -n_x n_y & n_x^2 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.52)$$

Forme matricielle dans le cas d'un écoulement non uniforme

Pour le cas de propagation dans un écoulement non uniforme, le système (1.35) peut s'écrire :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial \mathbb{A}_1}{\partial x} + \frac{\partial \mathbb{A}_2}{\partial y} = 0 \quad (1.53)$$

Avec,

$$U = \begin{pmatrix} \delta \rho \\ \rho_0 \delta u + u_0 \delta \rho \\ \rho_0 \delta v + v_0 \delta \rho \\ \frac{1}{\gamma - 1} \delta p + \frac{1}{2} \delta \rho (u_0^2 + v_0^2) + \rho_0 (u_0 \delta u + v_0 \delta v) \end{pmatrix} \quad (1.54)$$

$\mathbb{A}_1$ et $\mathbb{A}_2$ sont des matrices données par :

$$\mathbb{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}((\gamma-1)v_0^2 + (\gamma-3)u_0^2) & -u_0(\gamma-3) & -v_0(\gamma-1) & (\gamma-1) \\ -u_0v_0 & v_0 & u_0 & 0 \\ u_0((\frac{\gamma}{2}-1)(u_0^2 + v_0^2) - \frac{c_0^2}{\gamma-1}) & \frac{v_0^2}{2} + \frac{c_0^2}{\gamma-1} + (\frac{3}{2}-\gamma)u_0^2 & -(\gamma-1)u_0v_0 & \gamma u_0 \end{pmatrix};$$

$$\mathbb{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -u_0v_0 & v_0 & u_0 & 0 \\ \frac{1}{2}((\gamma-1)u_0^2 + (\gamma-3)v_0^2) & -u_0(\gamma-1) & -v_0(\gamma-3) & (\gamma-1) \\ v_0((\frac{\gamma}{2}-1)(u_0^2 + v_0^2) - \frac{c_0^2}{\gamma-1}) & -(\gamma-1)u_0v_0 & \frac{u_0^2}{2} + \frac{c_0^2}{\gamma-1} + (\frac{3}{2}-\gamma)v_0^2 & \gamma v_0 \end{pmatrix};$$

Pour tout vecteur $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \end{pmatrix}$, la matrice $J = n_x \mathbb{A}_1 + n_y \mathbb{A}_2$ s'écrit

$$J = \begin{pmatrix} 0 & n_x \\ -u_0v_0n_y + \frac{1}{2}n_x((\gamma-1)v_0^2 + (\gamma-3)u_0^2) & v_0n_y - u_0(\gamma-3)n_x \\ -u_0v_0n_x + \frac{1}{2}n_y((\gamma-1)u_0^2 + (\gamma-3)v_0^2) & v_0n_x - u_0(\gamma-1)n_y \\ (u_0n_x + v_0n_y)((\frac{\gamma}{2}-1)(u_0^2 + v_0^2) - \frac{c_0^2}{\gamma-1}) & n_x(\frac{v_0^2}{2} + \frac{c_0^2}{\gamma-1} + (\frac{3}{2}-\gamma)u_0^2) - n_y(\gamma-1)u_0v_0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} n_y & 0 \\ u_0n_y - v_0(\gamma-1)n_x & (\gamma-1)n_x \\ u_0n_x - v_0(\gamma-3)n_y & (\gamma-1)n_y \\ n_y(\frac{u_0^2}{2} + \frac{c_0^2}{\gamma-1} + (\frac{3}{2}-\gamma)v_0^2) - n_x(\gamma-1)u_0v_0 & \gamma(u_0n_x + v_0n_y) \end{pmatrix} \quad (1.55)$$

Diagonalisation de J

$$J = MDM^{-1} \quad (1.56)$$

$D = \text{diag}(d_i)$: matrice diagonale des valeurs propres d_i de J .

M : matrice des vecteurs propres de J .

Valeurs et vecteurs propres

$$\text{Dans ce cas, } D = \begin{pmatrix} \vec{V}_0 \cdot \vec{n} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \vec{V}_0 \cdot \vec{n} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \vec{V}_0 \cdot \vec{n} + c_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vec{V}_0 \cdot \vec{n} - c_0 \end{pmatrix}$$

Valeurs propres	Multiplicité	Vecteurs propres
$u_0 n_x + v_0 n_y$	2	$(0, -n_y, n_x, v_0 n_x - u_0 n_y),$ $(n_x, u_0 n_x - v_0 n_y, 0, \frac{1}{2}((u_0^2 - v_0^2)n_x + 2u_0 v_0 n_y))$ si $n_x \neq 0$ $(n_y, 0, u_0 n_x - v_0 n_y, \frac{1}{2}((v_0^2 - u_0^2)n_y + 2u_0 v_0 n_x))$ si $n_x = 0$
$u_0 n_x + v_0 n_y + c_0$	1	$(1, u_0 + n_x c_0, v_0 + n_y c_0, \frac{1}{2}(u_0^2 + v_0^2) + c_0(u_0 n_x + v_0 n_y + \frac{c_0}{\gamma - 1}))$
$u_0 n_x + v_0 n_y - c_0$	1	$(1, u_0 - n_x c_0, v_0 - n_y c_0, \frac{1}{2}(u_0^2 + v_0^2) + c_0(-u_0 n_x - v_0 n_y + \frac{c_0}{\gamma - 1}))$

$$D = \begin{pmatrix} u_0 n_x + v_0 n_y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u_0 n_x + v_0 n_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_0 n_x + v_0 n_y + c_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u_0 n_x + v_0 n_y - c_0 \end{pmatrix} \quad (1.57)$$

Si $n_x \neq 0$ alors :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & n_x & 1 \\ -n_y & u_0 n_x + v_0 n_y & u_0 + n_x c_0 \\ n_x & 0 & v_0 + n_y c_0 \\ v_0 n_x - u_0 n_y & \frac{1}{2}((u_0^2 - v_0^2)n_x + 2u_0 v_0 n_y) & \frac{1}{2}(u_0^2 + v_0^2) + c_0(u_0 n_x + v_0 n_y + \frac{c_0}{\gamma - 1}) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ u_0 - n_x c_0 \\ v_0 - n_y c_0 \\ \frac{1}{2}(u_0^2 + v_0^2) + c_0(-u_0 n_x - v_0 n_y + \frac{c_0}{\gamma - 1}) \end{pmatrix} \quad (1.58)$$

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} (\frac{1-\gamma}{2c_0^2}v_0(u_0^2 + v_0^2) + u_0 n_x n_y + v_0 n_y^2) \frac{1}{n_x} & \frac{\gamma-1}{c_0^2} u_0 v_0 \frac{1}{n_x} - n_y & \frac{\gamma-1}{c_0^2} v_0^2 \frac{1}{n_x} + n_x & \frac{1-\gamma}{c_0^2} \frac{v_0}{n_x} \\ (\frac{1-\gamma}{2c_0^2}(u_0^2 + v_0^2) + 1) \frac{1}{n_x} & \frac{\gamma-1}{c_0^2} \frac{u_0}{n_x} & \frac{\gamma-1}{c_0^2} \frac{v_0}{n_x} & \frac{1-\gamma}{c_0^2} \frac{1}{n_x} \\ \frac{\gamma-1}{4c_0^2}(u_0^2 + v_0^2) - \frac{1}{2c_0}(u_0 n_x + v_0 n_y) & \frac{1-\gamma}{2c_0^2} u_0 + \frac{n_x}{2c_0} & \frac{1-\gamma}{2c_0^2} v_0 + \frac{n_y}{2c_0} & \frac{\gamma-1}{2c_0^2} \\ \frac{\gamma-1}{4c_0^2}(u_0^2 + v_0^2) + \frac{1}{2c_0}(u_0 n_x + v_0 n_y) & \frac{1-\gamma}{2c_0^2} u_0 - \frac{n_x}{2c_0} & \frac{1-\gamma}{2c_0^2} v_0 - \frac{n_y}{2c_0} & \frac{\gamma-1}{2c_0^2} \end{pmatrix} \quad (1.59)$$

Si $n_y \neq 0$ alors :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & n_y & 1 \\ -n_y & 0 & u_0 + n_x c_0 \\ n_x & u_0 n_x + v_0 n_y & v_0 + n_y c_0 \\ v_0 n_x - u_0 n_y & \frac{1}{2}((v_0^2 - u_0^2)n_y + 2u_0 v_0 n_x) & \frac{1}{2}(u_0^2 + v_0^2) + c_0(u_0 n_x + v_0 n_y + \frac{c_0}{\gamma - 1}) \\ & 1 & \\ & u_0 - n_x c_0 & \\ & v_0 - n_y c_0 & \\ & \frac{1}{2}(u_0^2 + v_0^2) + c_0(-u_0 n_x - v_0 n_y + \frac{c_0}{\gamma - 1}) & \end{pmatrix} \quad (1.60)$$

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} (\frac{\gamma - 1}{2c_0^2} u_0(u_0^2 + v_0^2) - v_0 n_x n_y - u_0 n_x^2) \frac{1}{n_y} & \frac{1 - \gamma}{c_0^2} u_0^2 \frac{1}{n_y} - n_y & \frac{1 - \gamma}{c_0^2} v_0 u_0 \frac{1}{n_y} + n_x & \frac{\gamma - 1}{c_0^2} \frac{u_0}{n_y} \\ (\frac{1 - \gamma}{2c_0^2} (u_0^2 + v_0^2) + 1) \frac{1}{n_y} & \frac{\gamma - 1}{c_0^2} \frac{u_0}{n_y} & \frac{\gamma - 1}{c_0^2} \frac{v_0}{n_y} & \frac{1 - \gamma}{c_0^2} \frac{1}{n_y} \\ \frac{\gamma - 1}{4c_0^2} (u_0^2 + v_0^2) - \frac{1}{2c_0} (u_0 n_x + v_0 n_y) & \frac{1 - \gamma}{2c_0^2} u_0 + \frac{n_x}{2c_0} & \frac{1 - \gamma}{2c_0^2} v_0 + \frac{n_y}{2c_0} & \frac{\gamma - 1}{2c_0^2} \\ \frac{\gamma - 1}{4c_0^2} (u_0^2 + v_0^2) + \frac{1}{2c_0} (u_0 n_x + v_0 n_y) & \frac{1 - \gamma}{2c_0^2} u_0 - \frac{n_x}{2c_0} & \frac{1 - \gamma}{2c_0^2} v_0 - \frac{n_y}{2c_0} & \frac{\gamma - 1}{2c_0^2} \end{pmatrix} \quad (1.61)$$

Résolution numérique des équations d'Euler linéarisées

Introduction

La majorité des schémas numériques pour la résolution des équations d'Euler utilise la méthode "semi discrète" qui consiste à séparer les discrétisations en temps et en espace. Cette approche autorise une souplesse plus importante dans le choix des algorithmes temporels et spatiaux en permettant notamment de traiter avec des précisions différentes les discrétisations spatiales et temporelles.

Le système des équations d'Euler linéarisées auquel nous nous intéressons est hyperbolique et conservatif en la variable U . Pour rappel, le système d'équations à résoudre s'écrit :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} + H = S \quad (2.1)$$

avec S le terme source et

$$U = \begin{pmatrix} \delta \rho \\ \rho_0 \delta u \\ \rho_0 \delta v \\ \delta p \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} \delta \rho u_0 + \rho_0 \delta u \\ \delta p + \rho_0 u_0 \delta u \\ \rho_0 v_0 \delta v \\ u_0 \delta p + \gamma p_0 \delta u \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} \delta \rho v_0 + \rho_0 \delta v \\ \rho_0 v_0 \delta u \\ \delta p + \rho_0 v_0 \delta v \\ v_0 \delta p + \gamma p_0 \delta v \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

$$H = \begin{pmatrix} 0 \\ (\rho_0 \delta u + u_0 \delta \rho) \frac{\partial u_0}{\partial x} + (\rho_0 \delta v + v_0 \delta \rho) \frac{\partial u_0}{\partial y} \\ (\rho_0 \delta u + u_0 \delta \rho) \frac{\partial v_0}{\partial x} + (\rho_0 \delta v + v_0 \delta \rho) \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ (\gamma - 1) \delta p \nabla u_0 - (\gamma - 1) \delta u \nabla p_0 \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

Sachant que dans notre étude, on est confronté à des géométries complexes, cela nous impose de les représenter par un maillage non structuré et pour traiter des problèmes d'aéroacoustique, des schémas numériques d'ordres élevés s'imposent. Cela explique le choix de schéma en **volumes finis** avec une discrétisation spatiale de type "cell centred" (voir chapitre 1).

2.1 Formulation et intégration numérique

Il s'agit de calculer les flux discrets H_{ij} introduits dans l'équation (2.9), cela approche les intégrales de surface aux interfaces des cellules en fonction des valeurs aux points de collocation $(U_i)_{1 \leq i \leq nbcell}$ à un instant donné.

La fonction de flux discret doit être :

1. Définie continue.
2. Conservative : c'est à dire $H_{ij} = -H_{ji}$, cela veut dire qu'à l'interface entre deux cellules, le flux sortant de l'une est égal au flux pénétrant l'autre.
3. Consistante.

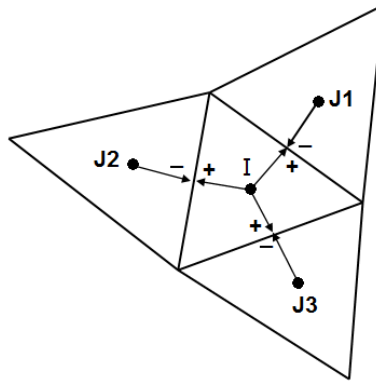


FIGURE 2.1 – Schéma de Godunov.

L'intégrale du flux sur une surface donnée est approchée par une somme discrète des flux calculés (approchés) en un ou plusieurs points, judicieusement choisis de cette surface (figure 2.1), selon le degré de précision que l'on veut atteindre. Typiquement aux méthodes de type Godunov, le flux en chacun de ces points est calculé à partir des deux valeurs de la variable d'état, U_L et U_R , approchées des deux cotés de ce point. Celles ci sont calculées à partir des valeurs de (U_i) sur un certain nombre de points de collocation.

Dans cette étude, le problème à résoudre peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \nabla \mathcal{F} = S \quad (2.4)$$

son intégrale sur chaque cellule c_i , est donnée comme suit :

$$\int_{c_I} \frac{\partial U}{\partial t} dV + \int_{c_I} \nabla \mathcal{F} dV = \int_{c_I} S dV \quad (2.5)$$

en appliquant le théorème de la divergence :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{c_I} U dV + \int_{\partial c_I} \mathcal{F} \cdot n dA = \int_{c_I} S dV \quad (2.6)$$

en faisant la moyenne sur chaque cellule :

$$U_i = \frac{1}{|c_I|} \int_{c_I} U dV \quad (2.7)$$

La frontière d'une cellule peut être décomposée en l'union des frontières avec ses cellules voisines. L'équation (2.6) s'écrit :

$$|c_I| \frac{\partial U_I}{\partial t} = \int_{c_I} S dV - \sum_{j \in s_i} \int_{\partial c_i \cap \partial c_j} \mathcal{F} \cdot n dA \quad (2.8)$$

En 2D, l'équation (2.8) devient :

$$A_I \frac{\partial U_I}{\partial t} = \int_{A_I} S dA - \sum_{j=1}^{N_I} \int_l \mathbb{F} \cdot n dl \quad (2.9)$$

Avec $\mathbb{F} = \begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix}$

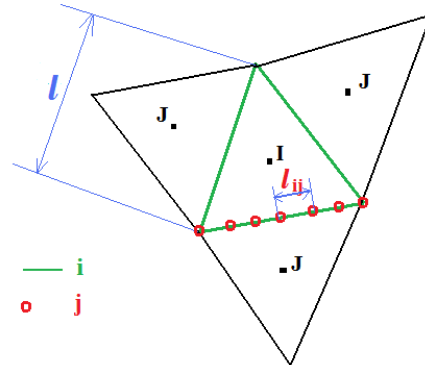
L'intégrale numérique de l'équation (2.9) est donné par :

$$A_I \frac{\partial U_I}{\partial t} = \sum_{i=1}^{N_I} \sum_{j=1}^{p_I} [-\mathbb{F} \cdot n]_{ij} l_{ij} \mathcal{W}_{ij} + S_I \quad (2.10)$$

p_I : nombre des points à l'interface.

N_I : nombre d'interfaces par cellule.

$\mathcal{W}_{ij}$: coefficients de quadrature.



Rappelons les formules de Newton-Cotes pour le calcul numérique d'un intégrale, c'est-à-dire, le calcul approché de :

$$\int_a^b f(x) dx$$

La fonction f est connue à des points équidistants x_i , pour $i = 0, \dots, n$. Les formules de degré n sont définies ainsi :

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^n \mathcal{W}_i f(x_i)$$

où $x_i = ih + x_0$, les $\mathcal{W}_i$ sont appelés les coefficients de quadrature.

Le tableau suivant résume quelques techniques de calcul numérique de cette intégrale [108] :

Degré	Methodes(Nom commun)	formule	Erreur
1	Méthode des trapèzes	$\frac{h}{2}(f_0 + f_1)$	$-\frac{h^3}{12}f^{(2)}$
2	Méthode de Simpson $\frac{1}{3}$	$\frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2)$	$-\frac{h^5}{90}f^{(4)}$
3	Méthode de Simpson $\frac{3}{8}$	$\frac{3h}{8}(f_0 + 3f_1 + 3f_2 + f_3)$	$-\frac{3h^5}{80}f^{(4)}$
4	Méthode de Bode	$\frac{2h}{45}(7f_0 + 32f_1 + 12f_2 + 32f_3 + 7f_4)$	$-\frac{8h^7}{945}f^{(6)}$
6	Méthode de Weddle	$\frac{3h}{10}(f_0 + 5f_1 + f_2 + 6f_3 + f_4 + 5f_5 + f_6)$	$-\frac{h^7}{140}f^{(6)}$

2.2 Discrétisation des flux convectifs

Les schémas numériques pour la résolution du système d'équations auquel nous sommes confrontés, doivent être fiables, non-dissipatifs, non-diffusifs et stables.

Dans cette section, nous présentons quelques schémas que nous pensons adaptés à l'aéroacoustique, ils peuvent être classés en trois grandes familles :

1. Schémas centrés
2. Schéma décentrés , UPWIND (Flux Vector Splitting, Godunov et Rosanov)
3. Schéma haute résolution (MLS) couplé à l'un des schémas ci-dessus.

2.2.1 Flux numérique centré

Ce schéma permet de calculer le flux $\mathbb{F}_{ij}$ à l'interface entre une maille de gauche contenant un état moyen U_L et une maille de droite contenant un état moyen U_R .

$$\mathbb{F}_{ij}(U) \cdot \vec{n}_{ij} = \frac{1}{2} [\mathbb{F}_{ij}(U_L) + \mathbb{F}_{ij}(U_R)] \cdot \vec{n}_{ij} \quad (2.11)$$

$\mathbb{F}_{ij}(U)$ est le flux transféré de la cellule i vers j.

Le vecteur des flux $\mathbb{F}(U)$ est :

$$\mathbb{F}(U) = \begin{pmatrix} F(U) \\ G(U) \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

2.2.2 Flux numérique décentré (UPWIND)

Ce type de schémas prend en compte les propriétés des équations d'Euler, en particulier les directions de propagations des ondes dans le milieu. Parmi ces schémas on retrouve Flux Vector splitting de Steger-Warrming, Local Lax-Friedrichs, Roe et celui de Rusanov

2.2.3 Flux Vector splitting de Steger-Warrming

Le flux de Steger-Warrming [94] prend en compte la direction de propagation de l'information, il repose sur la matrice Jacobienne "splittée" :

$$J_n = J_n^+ + J_n^- , \quad J_n^\pm = M D_n^\pm M^{-1}$$

D_n est la matrice diagonale des valeurs propres de J_n .

M matrice des vecteurs propres.

Finalement :

$$\mathbb{F}_{ij}(U) \cdot n_{ij} = J_n^+ U_R + J_n^- U_L \quad (2.13)$$

U_R et U_L sont utilisés pour sélectionner les valeurs de U à droite et à gauche de l'interface.

2.2.4 Flux numérique de Roe (Flux Diffence Splitting)

Le Solveur de Roe [95] consiste à réécrire les lois de conservation linéarisées en utilisant la matrice Jacobienne $J_n(U)$, puis approcher cette matrice par une matrice à coefficients constants $\tilde{J}_n(U_L, U_R)$, dépendant des états gauche et droit à l'interface des volumes de contrôle (U_L, U_R).

$$\mathbb{F}_{ij}(U) \cdot n_{ij} = \frac{1}{2} [\mathbb{F}_{ij}(U_L) + \mathbb{F}_{ij}(U_R)] \cdot n_{ij} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^4 \tilde{\alpha}_k |\tilde{\lambda}_k| \tilde{r}_k \quad (2.14)$$

Avec $(\tilde{\lambda}_k, k = 1 \text{ à } 4)$ et $(\tilde{r}_k, k = 1 \text{ à } 4)$ sont respectivement, les valeurs et vecteurs propres de la matrice Jacobienne approchée $\tilde{J}_n(U_L, U_R)$.

Pour les équations d'Euler (non linéarisées) les différents paramètres du flux de Roe sont donné ci-dessous.

$$\tilde{\lambda}_1 = \tilde{v} \cdot n - \tilde{c}, \quad \tilde{\lambda}_2 = \tilde{\lambda}_3 = \tilde{v} \cdot n, \quad \tilde{\lambda}_4 = \tilde{v} \cdot n + \tilde{c}$$

$$(\tilde{r}_1, \tilde{r}_2, \tilde{r}_3, \tilde{r}_4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ \tilde{u} - \tilde{c}n_x & -\tilde{c}n_y & \tilde{u} & \tilde{u} + \tilde{c}n_x \\ \tilde{v} - \tilde{c}n_y & \tilde{c}n_x & \tilde{v} & \tilde{v} + \tilde{c}n_y \\ \tilde{H} - \tilde{c}\tilde{v} \cdot n & \tilde{c}(\tilde{v}n_x - \tilde{u}n_y) & \frac{1}{2}(\tilde{u}^2 + \tilde{u}^2) & \tilde{H} + \tilde{c}\tilde{v} \cdot n \end{pmatrix}$$

l'intensité des ondes ($\alpha_k, k = 1 \text{ à } 4$) est donné par :

$$\tilde{\alpha}_1 = \frac{1}{2\tilde{c}^2} [\Delta(p) - \tilde{\rho}\tilde{c}(\Delta(u)n_x + \Delta(v)n_y)]$$

$$\tilde{\alpha}_2 = \frac{\tilde{\rho}}{\tilde{c}} [\Delta(v)n_x + \Delta(u)n_y]$$

$$\tilde{\alpha}_3 = \frac{1}{\tilde{c}^2} [\Delta(p) - \tilde{c}^2 \Delta(\tilde{\rho})]$$

$$\tilde{\alpha}_4 = \frac{1}{2\tilde{c}^2} [\Delta(p) + \tilde{\rho}\tilde{c}(\Delta(u)n_x + \Delta(v)n_y)]$$

avec :

$$\tilde{u} = \frac{u_R\sqrt{\rho_R} + u_L\sqrt{\rho_L}}{\sqrt{\rho_R} + \sqrt{\rho_L}}, \quad \tilde{v} = \frac{v_R\sqrt{\rho_R} + v_L\sqrt{\rho_L}}{\sqrt{\rho_R} + \sqrt{\rho_L}}, \quad \tilde{H} = \frac{H_R\sqrt{\rho_R} + H_L\sqrt{\rho_L}}{\sqrt{\rho_R} + \sqrt{\rho_L}},$$

$$\tilde{\rho} = \sqrt{\rho_L\rho_R}, \quad \tilde{c}^2 = (\gamma - 1) \left[\tilde{H} - \frac{1}{2}(\tilde{u}^2 + \tilde{u}^2) \right]$$

2.2.5 Flux numérique de Rusanov

Un des schémas les plus simples pour lequel il n'est pas nécessaire de résoudre le problème de Riemann est le schéma de Rusanov [96]. Le flux est alors simplement calculé par :

$$\mathbb{F}_{ij}(U) \cdot n_{ij} = \frac{1}{2}[\mathbb{F}_{ij}(U_L) + \mathbb{F}_{ij}(U_R)] \cdot n_{ij} - \frac{1}{2}\lambda_{ij}^{max}[U_L + U_R] \quad (2.15)$$

Où λ_{ij}^{max} est une estimation de la plus grande vitesse de propagation des ondes. Dans sa forme d'origine Rusanov a proposé d'estimer λ_{ij}^{max} de la manière suivante :

$$\lambda_{ij}^{max} = \frac{1}{2}[|\lambda_i^{max}| + |\lambda_j^{max}|]$$

$|\lambda_i^{max}|$ est alors la plus grande vitesse de propagation de l'état gauche (associé à l'élément d'indice i) et $|\lambda_j^{max}|$ est la plus grande vitesse de propagation des ondes de l'état droit(associé à l'élément d'indice j).

Dans la pratique, il n'est pas nécessaire de calculer les valeurs propres de la matrice Jacobienne du flux. Il est en général usuel de prendre la vitesse maximale de propagation donnée par $u + c$, où u est la vitesse du fluide et c la vitesse locale du son.

2.2.6 Flux numérique Local Lax-Friedrichs LLF

Cette discrétisation reprend le même principe de Rozanov, ici $|\lambda^{max}|$ est le rayon spectral de la matrice Jacobienne J_n .

$$\mathbb{F}_{ij}(U) \cdot n_{ij} = \frac{1}{2}[\mathbb{F}_{ij}(U_L) + \mathbb{F}_{ij}(U_R)] \cdot n_{ij} - \frac{1}{2}|\lambda^{max}|[U_L + U_R] \quad (2.16)$$

2.3 Schéma haute résolution en volumes finis avec approximation par moindres carrés mobiles (Finite Volume and Moving Least Square Approximations, FV-MLS)

Dans une étude menée par l'INRIA [64, 65], il a été mis en évidence que l'utilisation des schémas numériques à flux centrés d'ordre deux pour l'étude de petites perturbations autour d'un écoulement uniforme, pouvait être très intéressante mais elle demeure très restrictive et peu applicable aux réalités physiques des problèmes d'écoulement. Dès qu'il s'agit des géométries complexes qui nécessitent un maillage non-structuré, le développement d'une méthode volumes finis d'ordre élevé s'impose. La démarche retenue pour surmonter ce type de problème sera basée sur la méthode des volumes finis avec approximation par moindres carrés mobiles (Finite Volume and Moving Least Square Approximations, FV-MLS) pour la résolution des EEL.

Développement de Taylor en 2D

Le développement de Taylor de U au voisinage de (I) , où (I) fait référence au centre de la cellule considérée, est donné par :

$$\begin{aligned} U(\mathbf{x})|_I = U_I + (x - x_I) \frac{\partial U_I}{\partial x} + (y - y_I) \frac{\partial U_I}{\partial y} + (x - x_I)(y - y_I) \frac{\partial^2 U_I}{\partial x \partial y} + \\ \frac{1}{2}(x - x_I)^2 \frac{\partial^2 U_I}{\partial x^2} + \frac{1}{2}(y - y_I)^2 \frac{\partial^2 U_I}{\partial y^2} + \dots \end{aligned} \quad (2.17)$$

Avec (x, y) : coordonnées cartésiennes du point $\mathbf{x}$.

La forme générale du développement de Taylor en 2D

La forme générale du développement de Taylor pour un ordre donné est :

$$U(\mathbf{x})|_I = \sum_{\alpha=0}^N \left(\frac{1}{\alpha!} \underbrace{\left[(x - x_I) \frac{\partial}{\partial x} + (y - y_I) \frac{\partial}{\partial y} \right]^\alpha}_{(B)} U_I \right) \quad (2.18)$$

ici N est l'ordre du développement. (B) est de forme polynomiale de type :

$$(a + b)^\alpha = \sum_{\beta=0}^{\alpha} C_{\beta}^{\alpha} a^{\alpha-\beta} b^{\beta} \quad (2.19)$$

où $C_{\beta}^{\alpha} = \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}$

dans l'équation (2.19) :

$$a^{\alpha-\beta}b^\alpha = (x - x_I)^{\alpha-\beta}(y - y_I)^\alpha \frac{\partial^\alpha \mathbf{U}_I}{\partial x^{\alpha-\beta} \partial y^\beta} \quad (2.20)$$

au final, la forme générale du développement de Taylor de $\mathbf{U}$ au voisinage de (I) est donnée par :

$$\mathbf{U}(\mathbf{x})|_I = \mathbf{U}_I + \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=0}^{\alpha} \frac{1}{\beta!(\alpha-\beta)!} (x - x_I)^{\alpha-\beta} (y - y_I)^\alpha \frac{\partial^\alpha \mathbf{U}_I}{\partial x^{\alpha-\beta} \partial y^\beta} + o(N) \quad (2.21)$$

La principale difficulté d'évaluation de $\mathbf{U}(\mathbf{x})|_I$ réside dans l'estimation des dérivées d'ordre supérieur. La méthode FV-MLS permet de surmonter cette difficulté en utilisant une approximation par moindres carrés mobiles. Cette approche est quelque peu différente de l'approche habituelle, elle commence à partir d'un ordre élevé et une représentation très régulière de la solution obtenue au moyen d'une approximation par moindres carrés mobiles [67]. Elle est en générale bien adaptée pour les maillages non structurés et la discrétisation des équations elliptiques/paraboliques et des termes spatiaux d'ordres élevés [69]. Pour les équations avec un caractère essentiellement hyperbolique, la représentation globale se répartit localement (au niveau des cellules) dans une reconstruction polynomiale par morceaux, ce qui permet d'utiliser les schémas de type Godunov pour des problèmes hyperboliques (par exemple : solveurs de Riemann) [69].

2.3.1 Principe du fonctionnement de la méthode FV-MLS

Ici la méthode MLS est utilisée pour la reconstruction des flux aux frontières des cellules pour la résolution des Equations d'Euler Linéarisées. Afin d'accroître l'ordre, un développement de Taylor de la variable est effectué à l'intérieur de chaque cellule. Ensuite, l'approximation des dérivées d'ordre supérieur nécessaires pour calculer la reconstruction sont obtenues par une approche MLS.

On considère une fonction $\mathbf{U}(\mathbf{x})$ définie dans le domaine Ω , la méthode MLS permet de reconstruire (d'approximer) la fonction $\mathbf{U}(\mathbf{x})$ en un point donné $\mathbf{x}_I$ à partir des valeurs ponctuelles de $\mathbf{U}(\mathbf{x})$ au voisinage de ce point.

On définit un périmètre $\Omega_{\mathbf{x}}$ autour de $\mathbf{x}_I$ nommé stencil (pochoir) qui englobe $n_{\mathbf{x}}$ point où les valeurs ponctuelles de $\mathbf{U}(\mathbf{x})$ sont données, la taille de ce stencil est caractérisée par sa longueur de lissage h_I (figure 2.2).

On définit également une base polynomiale de rang $m = C_n^{n+q}$, avec n : dimension du problème et q : ordre de la méthode MLS.

Pour une base polynomiale cubique par exemple, nous avons :

$$p^T(\mathbf{x}) = (1 \quad x \quad y \quad xy \quad x^2 \quad y^2 \quad x^2y \quad xy^2 \quad x^3 \quad y^3)^T \quad (2.22)$$

Où (x, y) sont les coordonnées cartésiennes du point $\mathbf{x}$

On définit l'approximation locale en un point $\mathbf{x}$ voisin de $\mathbf{x}_I$ par :

$$U(\mathbf{x}) \approx \hat{U}(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}_I} = \sum_{i=1}^m p_i(\mathbf{x}) a_i(\mathbf{z}) \Big|_{\mathbf{z}=\mathbf{x}} = p^T(\mathbf{x}) a(\mathbf{z}) \Big|_{\mathbf{z}=\mathbf{x}} \quad (2.23)$$

$a(\mathbf{z}) \Big|_{\mathbf{z}}$ est un ensemble de paramètres à déterminer de façon à minimiser la fonction d'erreur J .

$$J(a(\mathbf{z}) \Big|_{\mathbf{z}=\mathbf{x}}) = \int_{\mathbf{y} \in \Omega_{\mathbf{x}}} w(\mathbf{z} - \mathbf{y}, h) \Big|_{\mathbf{z}=\mathbf{x}} \left[U(\mathbf{y}) - p^T(\mathbf{y}) a(\mathbf{z}) \Big|_{\mathbf{z}=\mathbf{x}} \right]^2 d\Omega_{\mathbf{x}} \quad (2.24)$$

$W(\mathbf{z} - \mathbf{y}, h) \Big|_{\mathbf{z}}$ est la fonction **noyau** (fonction kernel) avec un support compact ($\Omega_{\mathbf{x}}$) centré en $\mathbf{z} = \mathbf{x}$, h est le paramètre de dilatation, il mesure la taille du domaine $\Omega_{\mathbf{x}}$.

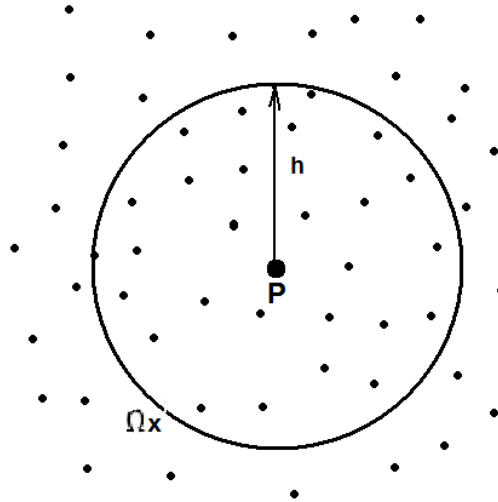


FIGURE 2.2 – Voisinage du point de reconstruction.

Dans la littérature, les fonctions noyaux (**kernel**) les plus utilisées sont exponentielles ou spline [69, 97]

La minimisation de J en tenant compte des paramètres $a(\mathbf{z}) \Big|_{\mathbf{z}}$ conduit à l'expression suivante :

$$\int_{\mathbf{y} \in \Omega_{\mathbf{x}}} p(\mathbf{y}) w(\mathbf{z} - \mathbf{y}, h) \Big|_{\mathbf{z}=\mathbf{x}} U(\mathbf{y}) d\Omega_{\mathbf{x}} = M(\mathbf{x}) a(\mathbf{z}) \Big|_{\mathbf{z}=\mathbf{x}} \quad (2.25)$$

La matrice $M(\mathbf{x})$ de dimension $m \times m$ est définie par :

$$M(\mathbf{x}) = \int_{y \in \Omega_{\mathbf{x}}} p(\mathbf{y}) w(\mathbf{z} - \mathbf{y}, h) \Big|_{\mathbf{z}=\mathbf{x}} p^T(\mathbf{y}) d\Omega_{\mathbf{x}} = P_{\Omega_{\mathbf{x}}}^T W(\mathbf{x}) P_{\Omega_{\mathbf{x}}} \quad (2.26)$$

Donc, l'ensemble des paramètres $a(z)$ qui minimisent la fonction J sont donnés par :

$$a_i(\mathbf{z}) \Big|_{\mathbf{z}=\mathbf{x}} = M^{-1}(\mathbf{x}) P_{\Omega_{\mathbf{x}}} W(\mathbf{x}) U_{\Omega_{\mathbf{x}}} \quad (2.27)$$

Où le vecteur $U_{\Omega_{\mathbf{x}}}$ contient les valeurs ponctuelles de la fonction à reproduire $U(\mathbf{x})$, en chaque particule n_x contenue dans l'espace $\Omega_{\mathbf{x}}$.

$$U_{\Omega_{\mathbf{x}}} = \begin{pmatrix} U(\mathbf{x}_1) & U(\mathbf{x}_2) & \cdots & U(\mathbf{x}_{n_x}) \end{pmatrix}$$

$$P_{\Omega_{\mathbf{x}}} = \begin{pmatrix} p(\mathbf{x}_1) & p(\mathbf{x}_2) & \cdots & p(\mathbf{x}_{n_x}) \end{pmatrix}$$

$$W(\mathbf{x}) = \text{diag}\{w_i(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)_i\} = \begin{pmatrix} W_1(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & W_2(\mathbf{x} - \mathbf{x}_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & W_{n_x}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{n_x}) \end{pmatrix}$$

de l'équation (2.23) et (2.27) on obtient

$$\widehat{U}(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}_I} = P^T(\mathbf{x}) M^{-1}(\mathbf{x}) P_{\Omega_{\mathbf{x}}} W(\mathbf{x}) U_{\Omega_{\mathbf{x}}} \quad (2.28)$$

On pose :

$$C(\mathbf{x}) = M^{-1}(\mathbf{x}) P_{\Omega_{\mathbf{x}}} W(\mathbf{x})$$

Donc, les valeurs interpolées de la fonction u en x sont obtenues en introduisant une fonction de forme :

$$N^T(\mathbf{x}) = P^T(\mathbf{x}) M^{-1}(\mathbf{x}) P_{\Omega_{\mathbf{x}}} W(\mathbf{x}) \quad (2.29)$$

On conclut :

$$\widehat{U}(\mathbf{x}) = N^T(\mathbf{x}) U_{\Omega_{\mathbf{x}}} = \sum_{j=1}^{n_x} N_j(\mathbf{x}) U(\mathbf{x}_j) \quad (2.30)$$

$N_j(\mathbf{x})$ est la fonction de forme associée à la particule j .

Important : Afin d'améliorer le conditionnement, la base polynomiale est localement centrée et réduite. En d'autres termes, si les fonctions de forme sont évaluées en $\mathbf{x}_I$, la base polynomiale est évaluée en $\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_I}{h}$ [69].

$$\hat{U}(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}_I} = p^T \left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_I}{h} \right) \underbrace{M^{-1}(\mathbf{x}) P_{\Omega_{\mathbf{x}}} W(\mathbf{x}) U_{\Omega_{\mathbf{x}}}}_{a(\mathbf{x})} = N^T(\mathbf{x}) U_{\Omega_{\mathbf{x}}} = \sum_{j=1}^{n_{\mathbf{x}}} N_j(\mathbf{x}) U(\mathbf{x}_j) \quad (2.31)$$

2.3.2 Les Stencils et la distribution des particules

On associe chaque particule $\mathbf{x}_I$ à un paramètre de dilatation h_I , qui caractérise la taille du stencil.

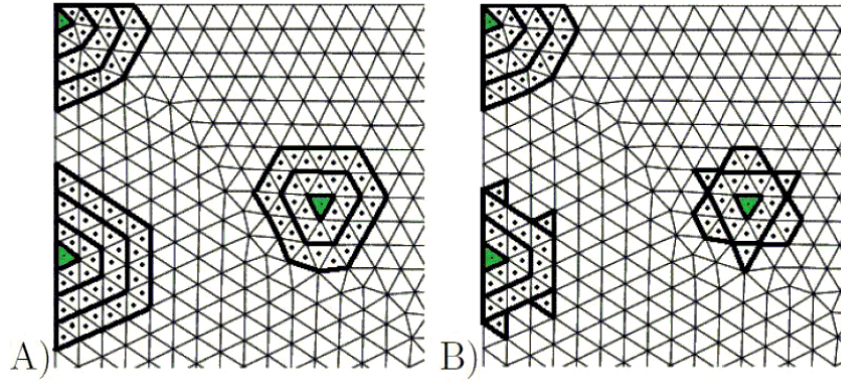


FIGURE 2.3 – Type de stencil, A) stencil compact, B) stencil non compact.

La figure (2.3) présente le stencil utilisé pour le calcul de la fonction de forme (à l'ordre 5) au centroïde de la cellule. D'une manière générale, pour plus d'efficacité dans les calculs, le stencil doit être le plus compact possible. Le stencil ainsi défini doit vérifier les points suivants :

- Que l'union des stencils recouvre tout le domaine du calcul [98].
- Le nombre de cellule englobées dans chaque stencil N_{x_I} soit optimisé ($N_{min} \leq N_{x_I} \leq N_{max}$), de façon à obtenir une meilleure stabilité et minimiser les effets dissipatifs, ce nombre optimal N_{x_I} est fonction de l'ordre de précision du schéma et de la dimension m du polynôme

$N_{max} = N_{min} + p$, avec p : un nombre de point additionnel à déterminer, de façon à obtenir un équilibre barycentrique autour de la cellule considérée.

Si p est très grand, on observera des effets dissipatifs et si p est égal à zéro, cela impliquera des instabilités, dans notre cas p compris entre 5 et 15 est le plus approprié.

N_{min} doit garantir l'inversibilité de la matrice de moment M ainsi calculée en tout point, cette matrice ne doit pas être singulière, ce qui implique N_{x_I} doit être $\geq m$.

$$N_{min} = C_{dim}^{ordre+dim}$$

Pour avoir des conditions optimales, les paramètres N_{x_I} doivent être égaux et bien déterminés en aval (avant) des calculs. C'est par la suite qu'on déterminera la longueur de lissage pour chaque stencil en fonction du nombre et de l'emplacement des points pris dans le voisinage. Cette dernière sera déduite comme proportionnelle à la distance entre le centre du stencil ($\mathbf{x}_I$) et le point le plus éloigné englobé dans ce stencil.

$$h_I = k \max_{1 \leq j \leq n_I} (||\mathbf{x}_I - \mathbf{x}_j||)$$

avec k une constante à définir en fonction de la taille du stencil et de la forme de la fonction noyau (Kernel).

2.3.3 Les fonctions *noyaux* (kernel functions)

Dans la littérature, on retrouve plusieurs fonctions **kernel**, les splines, les Gaussian et les exponentielles... D'après Monaghan [99], une fonction Kernel $W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j, h)$ doit être :

1. Positive
2. A support compact dans le stencil afin de garantir une interaction zéro avec les particules en dehors du stencil.
3. Normale : $\int_{\Omega} W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j, h) dy = 1$.
4. Décroissante quand $||\mathbf{x} - \mathbf{x}_j||$ augmente.
5. $W(\mathbf{x}, h)$ tend vers la fonction de Dirac $\delta(\mathbf{x})$ quand h tend vers zéro.

Par exemple, la fonction Kernel (cubic spline) a été utilisée dans les travaux de Luis Cueto-Felgueroso et autres [69, 68]

$$W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j, h) = \frac{1}{h} \begin{cases} 1 - \frac{3}{2}s^2 + \frac{3}{4}s^3 & s \leq 1 \\ \frac{1}{4}(2-s)^3 & 1 < s \leq 2 \\ 0 & s \geq 2 \end{cases} \quad (2.32)$$

$$\text{Avec } s = \frac{||\mathbf{x} - \mathbf{x}_j||}{h}$$

Dans cette présente étude, la fonction **kernel** exponentielle semble être la plus appropriée, elle est définie en 1D comme suit

$$W(\mathbf{x}, \mathbf{x}^*, \kappa) = \frac{e^{-\left(\frac{s}{c}\right)^2} - e^{-\left(\frac{d_m}{c}\right)^2}}{1 - e^{-\left(\frac{d_m}{c}\right)^2}}$$

Avec $s = |\mathbf{x} - \mathbf{x}^*|$, $d_m = \max(|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*|)$, $c = \frac{d_m}{2\kappa}$, $\mathbf{x}^*$ est le point de référence (le point autour duquel le stencil varie), dans notre cas, c'est le centroïde de chaque cellule, κ est le paramètre de forme. La fonction **kernel** 2D s'obtient en multipliant deux fonctions 1D :

$$W_j(\mathbf{x}, \mathbf{x}^*, \kappa_x, \kappa_y) = W_j(\mathbf{x}, \mathbf{x}^*, \kappa_x) W_j(\mathbf{y}, \mathbf{y}^*, \kappa_y) \quad (2.33)$$

La figure suivante (2.4) montre les caractéristiques de dispersion et de dissipation du schéma FV-MLS pour différentes valeurs de κ .

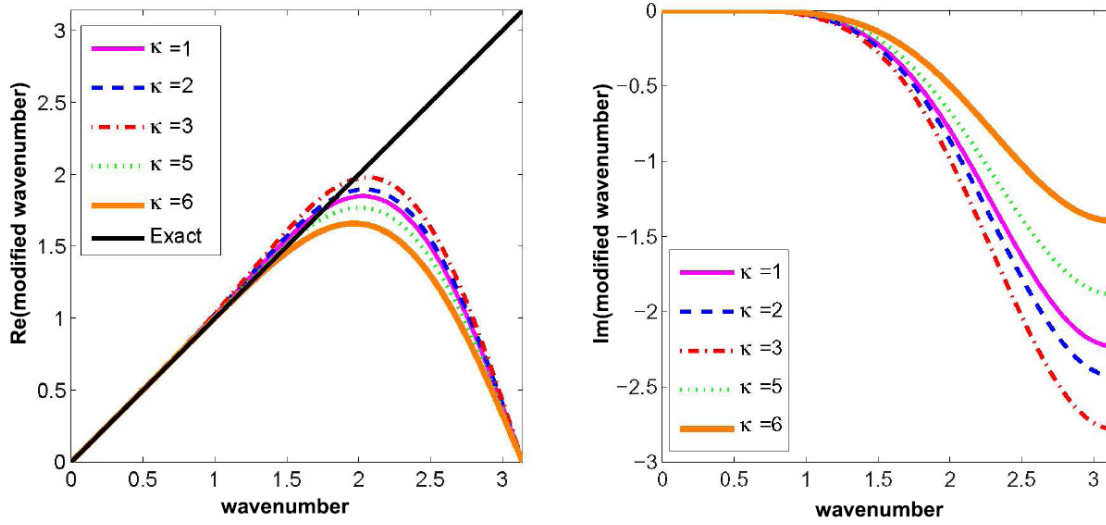


FIGURE 2.4 – Les courbes de dispersion (à gauche) et de dissipation (à droite) de la méthode FV-MLS au 3ème ordre pour différentes valeurs du paramètre κ_x [2].

Dans la figure (2.4), il est montré que les caractéristiques de dispersion et de dissipation de la méthode FV-MLS sont fortement liées au choix du paramètre κ_x . Pour EEL, une valeur de κ_x compris entre 2,5 et 3,18 semble être un bon choix. Elle garantit le bon conditionnement de la matrice des moments M et un compromis acceptable de dispersion et de dissipation.

2.3.4 Cas d'une distribution anisotropique des nœuds

Dans le cas d'une distribution des nœuds fortement directionnels, les fonctions Kernel telles que la cubique spline conduit à un mauvais conditionnement de la matrice des moments, donc à un schéma instable. De ce fait, il est préférable d'utiliser le produit tensoriel de la fonction Kernel plutôt que les radiales. Il est plus facile d'effectuer différentes longueurs de lissages pour chaque direction coordonnée et ensuite inclure les propriétés de directivité des nœuds dans le pochoir (stencil). La forme générale du produit tensoriel de la fonction Kernel est donnée comme suit :

$$W^D(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_I, h) = \prod_{i=1}^D W^D(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_I, h_i) \quad (2.34)$$

W est la fonction Kernel 1D

Pour la dimension 2 ($D = 2$), $\mathbf{x}^T = (x, y)$, $\mathbf{x}_I^T = (x_I, y_I)$ et $h^T = (h_x, h_y)$

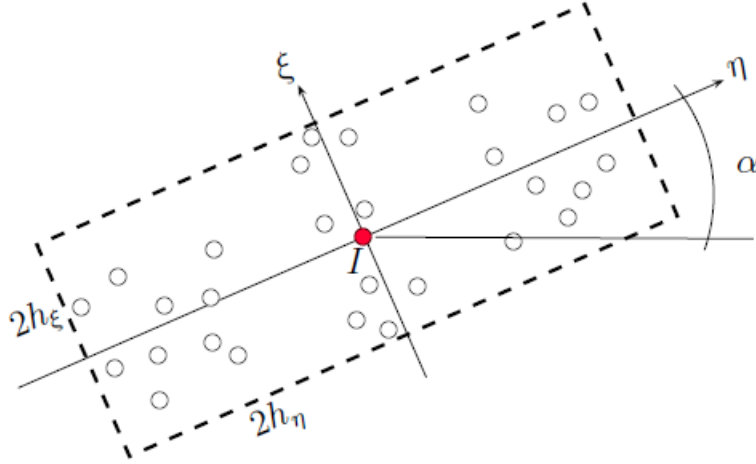


FIGURE 2.5 – Distribution anisotrope des nœuds.

Dans le cas bidimensionnel, les supports sont rectangulaires et sont définis par la longueur de leurs cotés ($L_1 = 4h_1$, $L_2 = 4h_2$) et par l'angle de rotation α défini en appliquant l'analogie des moments d'inertie, en tenant compte des directions principales du tenseur :

$$I = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} \\ I_{xy} & I_{yy} \end{pmatrix} \quad (2.35)$$

Avec

$$I_{xx} = \sum_{j=1}^{N_x} (x_j - x_I)^2 \quad (2.36)$$

$$I_{xy} = \sum_{j=1}^{N_x} (x_j - x_I)(y_j - y_I) \quad (2.37)$$

et

$$I_{yy} = \sum_{j=1}^{N_x} (y_j - y_I)^2 \quad (2.38)$$

α est donné par :

$$\alpha = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{2I_{xy}}{I_{xx} - I_{yy}} \right) \quad (2.39)$$

$\begin{pmatrix} \eta \\ \xi \end{pmatrix}$ est définie au référentiel local comme suit :

$$\begin{pmatrix} \eta \\ \xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (2.40)$$

Par souci de compacité, considérons $A = \cos \alpha$ et $B = \sin \alpha$, tels que :

$$\begin{pmatrix} \eta \\ \xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (2.41)$$

Après que les coordonnées des points du pochoir (stencil) ont été transformées, la fonction de forme $N(\mathbf{x})$ et ses dérivées sont calculées dans le nouveau repère en employant les longueurs de lissages :

$$h_\eta = k_1 \max(|\eta_j - \eta_I|), \quad j = 1, \dots, n_{x_I} \quad (2.42)$$

$$h_\xi = k_2 \max(|\xi_j - \xi_I|), \quad j = 1, \dots, n_{x_I} \quad (2.43)$$

k_1 et k_2 sont des constantes comprises entre 0,6 et 0,7 dans le cas de la fonction Kernel cubique spline [69].

Le produit tensoriel de la fonction Kernel correspondant est donné comme suit :

$$W(\tilde{\mathbf{x}} - \tilde{\mathbf{x}}_I, \tilde{h}) = W(\eta - \eta_I, h_\eta) W(\xi - \xi_I, h_\xi) \quad (2.44)$$

La fonction de forme est calculée en utilisant l'équation (2.44) et $\tilde{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \eta \\ \xi \end{pmatrix}$ est exprimé dans le nouveau repère. Tandis que les fonctions de forme dans l'espace transformé sont égales aux fonctions de forme dans l'espace physique, les dérivées doivent ensuite être remises (rotation) à l'espace physique. Par exemple, la dérivée d'ordre 1 est donnée par :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial N}{\partial x} \\ \frac{\partial N}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial N}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N}{\partial \xi} \end{pmatrix} \quad (2.45)$$

la dérivée d'ordre 2 est donnée par :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 N}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 N}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 N}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 N}{\partial \eta^2} & \frac{\partial^2 N}{\partial \eta \partial \xi} \\ \frac{\partial^2 N}{\partial \eta \partial \xi} & \frac{\partial^2 N}{\partial \xi^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} \quad (2.46)$$

La forme générale est donné par :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^\alpha N}{\partial x^{(\alpha-\beta)} \partial y^\beta} &= \sum_{\gamma=0}^{\alpha-\beta} C_\gamma^{\alpha-\beta} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^{(\alpha-\beta-\gamma)} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^\gamma \\ &\times \sum_{\lambda=0}^{\beta} C_\lambda^\beta \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^{(\beta-\lambda)} \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^\lambda \frac{\partial^\alpha N}{\partial \eta^{(\alpha-\gamma-\lambda)} \partial \xi^{(\gamma+\lambda)}} \end{aligned} \quad (2.47)$$

Dans notre cas, on a : $\frac{\partial \eta}{\partial x} = A$, $\frac{\partial \xi}{\partial x} = -B$, $\frac{\partial \eta}{\partial y} = B$ et $\frac{\partial \xi}{\partial y} = A$ avec $A = \cos \alpha$ et $B = \sin \alpha$
Après simplification, on obtient :

$$\frac{\partial^\alpha N}{\partial x^{(\alpha-\beta)} \partial y^\beta} = \sum_{\gamma=0}^{\alpha-\beta} \sum_{\lambda=0}^{\beta} (-1)^\gamma C_\gamma^{\alpha-\beta} C_\lambda^\beta A^{(\alpha-\beta-\gamma+\lambda)} B^{\beta-\lambda+\gamma} \frac{\partial^\alpha N}{\partial \eta^{(\alpha-\gamma-\lambda)} \partial \xi^{(\gamma+\lambda)}} \quad (2.48)$$

Où : $C_\gamma^{\alpha-\beta} = \frac{(\alpha-\beta)!}{\gamma!(\alpha-\beta-\gamma)!}$ et $C_\lambda^\beta = \frac{\beta!}{\lambda!(\beta-\lambda)!}$

2.3.5 Estimation des dérivées

La représentation générale de $U(\mathbf{x})$, qui est approchée ou reconstruite, est recherchée dans l'espace engendré par un ensemble de fonctions de base $N(\mathbf{x})$ associées aux nœuds, telles que $U(\mathbf{x})$ est une fonction continue de forme :

$$U(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n_x} N_j(\mathbf{x}) U_j \quad (2.49)$$

L'équation (2.49) stipule que l'approximation en un point $\mathbf{x}$ au voisinage de I , est calculée en utilisant les nœuds n_x environnants.

Dans une grille non structurée triangulaire, si l'on considère I le centroïde de la cellule active i et J le centroïde des cellules n_x environnantes, cela conduit à la construction d'un pochoir (stencil) autour de I . (voir figure (2.6))

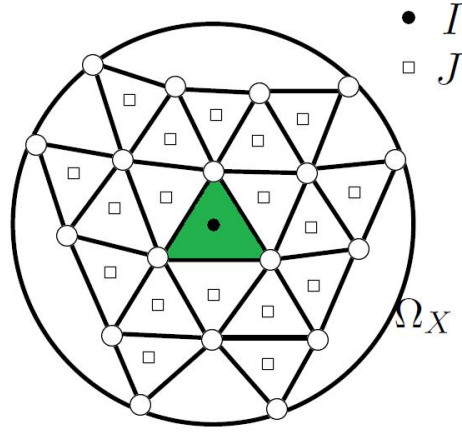


FIGURE 2.6 – Stencil.

En reprenant l'équation (2.21), lors du développement de Taylor, toutes les dérivées peuvent être calculées en utilisant l'équation (2.49).

$$\frac{\partial^\alpha \mathbf{U}_I}{\partial x^{\alpha-\beta} \partial y^\beta} \approx \sum_{k=1}^{n_x} \frac{\partial^\alpha N_k(\mathbf{x}_I)}{\partial x^{(\alpha-\beta)} \partial y^\beta} U_k \quad (2.50)$$

2.3.6 Estimation des dérivées de la fonction de forme

En accord avec l'équation (2.31) la fonction de forme est donnée par :

$$N^T(\mathbf{x}) = \mathbf{P}^T \left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_I}{h} \right) \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{P}_{\Omega_x} \mathbf{W}(\mathbf{x}) \quad (2.51)$$

on donne,

$$\mathbf{C}(\mathbf{x}) = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{P}_{\Omega_x} \mathbf{W}(\mathbf{x}) \quad (2.52)$$

d'où,

$$N^T(\mathbf{x}) = \mathbf{P}^T \left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_I}{h} \right) \mathbf{C}(\mathbf{x}) \quad (2.53)$$

Les dérivées d'ordre élevé de $N^T(\mathbf{x})$ au centioïde de I sont données par :

$$\frac{\partial^\alpha N^T(\mathbf{x}_I)}{\partial x^{(\alpha-\beta)} \partial y^\beta} = \frac{\partial^\alpha p^T(\mathbf{0})}{\partial x^{(\alpha-\beta)} \partial y^\beta} \mathbf{C}(\mathbf{x}) + p^T(\mathbf{0}) \frac{\partial^\alpha \mathbf{C}(\mathbf{x}_I)}{\partial x^{(\alpha-\beta)} \partial y^\beta} \quad (2.54)$$

Avec $\alpha = 0$ à m et $\beta = 0$ à α , m les ordres de dérivation. Dans l'équation (2.54), les dérivées d'ordre > 2 du polynôme p sont simples à calculer contrairement à celles de la matrice $\mathbf{C}(\mathbf{x})$. Pour des ordres > 2 , les dérivées de la matrice $\mathbf{C}(\mathbf{x})$ sont négligeables par rapport à celles du polynôme p [69], l'équation (2.54) devient :

$$\frac{\partial^\alpha N^T(\mathbf{x}_I)}{\partial x^{(\alpha-\beta)} \partial y^\beta} \approx \frac{\partial^\alpha p^T(\mathbf{0})}{\partial x^{(\alpha-\beta)} \partial y^\beta} C(\mathbf{x}) \quad (2.55)$$

La première et la seconde dérivée de C sont données en annexe.

2.3.7 Reconstruction de la variable $U(\mathbf{x})|_I$ à l'ordre N

Afin de renforcer la conservation de la variable U_I , des termes de corrections sont introduits lors du développement de Taylor (2.21), on obtient l'équation suivante :

$$\begin{aligned} U(\mathbf{x})|_I &= U_I + (x - x_I) \frac{\partial U_I}{\partial x} + (y - y_I) \frac{\partial U_I}{\partial y} \\ &+ \sum_{\alpha=2}^N \sum_{\beta=0}^{\alpha} \frac{1}{\beta!(\alpha-\beta)!} [(x - x_I)^{\alpha-\beta} (y - y_I)^\alpha - \Phi_{\alpha\beta}] \frac{\partial^\alpha U_I}{\partial x^{\alpha-\beta} \partial y^\beta} + o(N) \end{aligned} \quad (2.56)$$

Où, $\Phi_{\alpha\beta} = \frac{I_{x^{(\alpha-\beta)} y^\beta}}{A_I}$ sont termes de corrections et

$I_{x^\alpha y^\beta} = \int_{A_I} (x - x_I)^{\alpha-\beta} (y - y_I)^\beta dA_I$ est calculée en utilisant une méthode "symmetric quadrature", présenté par Wandzura [100]

2.4 Conditions aux limites

Le traitement des conditions aux limites se pose de façon cruciale puisqu'il doit minimiser les réflexions parasites aux frontières du domaine de calcul pour une condition absorbante.

Pour implémenter des conditions aux limites parfaitement réfléchissantes, le problème ne se pose pas, il suffit juste de considérer la frontière se comportant comme un " miroir " pour que le problème devient géométrique. Par contre, pour la construction des frontières absorbantes, il est nécessaire d'appliquer des conditions non réfléchissantes. Plusieurs méthodes ont été présentées pour ce type de problème, citons :

- La méthode dite PML (Perfectly Matched Layer) qui a été mise au point pour la première fois par Bérenger pour les conditions absorbantes en simulation électromagnétique [76], puis adaptées pour les EEL par Fang Q. Hu [77].
- Les méthodes fondées sur l'utilisation des zones éponges [75]
- Les méthodes fondées sur les solutions asymptotiques [72, 73, 74].

Dans notre étude, une méthode basée sur les propriétés mathématiques des équations aux dérivées partielles qui les gouvernent pour sélectionner les informations entrantes dans le domaine de calcul [71] est en premier lieu implémentée, puis une seconde fondée sur l'utilisation des zones éponges [75] sera testée.

2.4.1 Construction d'une condition aux limites parfaitement réfléchissante pour un écoulement uniforme

On suppose que la paroi est parfaitement réfléchissante et qu'elle se comporte comme un miroir. (Voir figure 2.7)

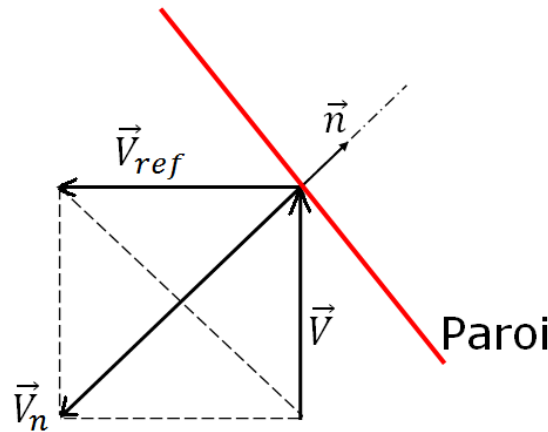


FIGURE 2.7 – Paroi réfléchissante.

Soit $U = \begin{pmatrix} \delta\rho \\ \rho_0\delta u \\ \rho_0\delta v \\ \delta p \end{pmatrix}$ le vecteur des variables.

U_{ref} le vecteur des variables réfléchies.

Seules les variables vectorielles sont réfléchies, donc, $\delta\rho_{ref} = \delta\rho$ et $\delta p_{ref} = \delta p$.

$\vec{V}_{ref} = R\vec{V}$ avec $\vec{V} = \begin{pmatrix} \delta u \\ \delta v \end{pmatrix}$ vecteur vitesse acoustique et R une matrice de passage à définir.

Détermination de la matrice de passage R

Soit $\vec{V}_n$ le vecteur normal à la surface réfléchissante. D'après la figure (2.7) :

$$\vec{V}_n = -2(\vec{V} \cdot \vec{n}) \cdot \vec{n} \quad (2.57)$$

$\vec{n}$: vecteur unitaire sortant normal à la surface réfléchissante.

$\vec{V} \cdot \vec{n}$: projection du vecteur vitesse $\vec{V}$ sur la normale définie par $\vec{n}$ telle que : $\|\vec{V}_n\| = 2(\vec{V} \cdot \vec{n})$.

Le signe $(-)$ est dû à la direction de $\vec{n}$.

D'autre part nous avons :

$$\vec{V}_n = \vec{V}_{ref} - \vec{V} \quad (2.58)$$

donc

$$\vec{V}_{ref} = \vec{V}_n + \vec{V} \quad (2.59)$$

En remplaçant chaque variable par sa valeur, on obtient après quelques manipulations :

$$\vec{V}_{ref} = \begin{pmatrix} 1 - 2n_x^2 & -2n_x n_y \\ -2n_x n_y & 1 - 2n_y^2 \end{pmatrix} \vec{V} \quad (2.60)$$

d'où

$$R = \begin{pmatrix} 1 - 2n_x^2 & -2n_x n_y \\ -2n_x n_y & 1 - 2n_y^2 \end{pmatrix} \quad (2.61)$$

On obtient finalement,

$$U_{ref} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - 2n_x^2 & -2n_x n_y & 0 \\ 0 & -2n_x n_y & 1 - 2n_y^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{U} \quad (2.62)$$

Posons,

$$\mathbb{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - 2n_x^2 & -2n_x n_y & 0 \\ 0 & -2n_x n_y & 1 - 2n_y^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.63)$$

Finalement le flux entrant s'écrit de la manière suivante :

$$(\mathbb{F}_{ij}(U_R) \cdot \vec{n}_{ij})_{ref} = \mathbb{F}(\mathbb{R} \cdot U) \cdot \vec{n}_{ij} \quad (2.64)$$

2.4.2 Construction d'une condition aux limites absorbante pour un écoulement uniforme

Soit $\mathbb{F}(U)$ le vecteur des flux, tel que :

$$\mathbb{F}(U) = \begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix} \quad (2.65)$$

Pour rappel, le flux $\mathbb{F}(U)$ exprime la quantité de U transférée par les frontières du domaine.

La matrice Jacobienne J peut se décomposer en une partie positive J^+ et une partie négative J^- .

Dans l'étude de Dolean et Lanteri [71], la partie négative J^- est désignée pour sélectionner les informations entrant le domaine du calcul, de ce fait, dans notre cas le flux absorbant sera uniquement fonction de la partie positive J^+ .

Sur une frontière parfaitement absorbante, toute la quantité de U est transmise à travers la frontière. Ceci peut s'exprimer par :

$$\mathbb{F}_{abs}(U) \cdot \vec{n} = J^+ \cdot \vec{U} \quad (2.66)$$

$\mathbb{F}_{abs}(U)$: est le flux absorbé.

J^+ : valeur positive de la matrice jacobienne J .

Détermination de J^+

Comme présenté ci-dessus,

$$J = MDM^{-1} \quad (2.67)$$

On définit D^+ comme,

$$J^+ = MD^+M^{-1} \quad (2.68)$$

Avec, D^+ matrice diagonale de la valeur absolue des valeurs propres de la matrice J :

$$D^+ = \text{diag}(|d_i|) \quad (2.69)$$

Dans le cas des EEL perturbées autour d'un écoulement uniforme :

$$D^+ = \begin{pmatrix} |\vec{V}_0 \cdot \vec{n} - c_0| & 0 & 0 & 0 \\ 0 & |\vec{V}_0 \cdot \vec{n} + c_0| & 0 & 0 \\ 0 & 0 & |\vec{V}_0 \cdot \vec{n}| & 0 \\ 0 & 0 & 0 & |\vec{V}_0 \cdot \vec{n}| \end{pmatrix} \quad (2.70)$$

si l'on pose :

$$\begin{aligned} L_1 &= |\vec{V}_0 \cdot \vec{n} - c_0| \\ L_2 &= |\vec{V}_0 \cdot \vec{n} + c_0| \\ L_3 &= L_4 = |\vec{V}_0 \cdot \vec{n}| \end{aligned} \quad (2.71)$$

alors,

$$J^+ = \begin{pmatrix} L_3 & \frac{n_x}{2c_0}(-L_1 + L_2) & \frac{n_y}{2c_0}(-L_1 + L_2) & \frac{-1}{c_0^2}L_3 + \frac{1}{2c_0}(L_1 + L_2) \\ 0 & \frac{n_x^2}{2}(L_1 + L_2) + n_y^2L_4 & \frac{n_xn_y}{2}(L_1 + L_2 - 2L_4) & \frac{n_x}{2c_0}(-L_1 + L_2) \\ 0 & \frac{n_xn_y}{2}(L_1 + L_2 - 2L_4) & \frac{n_y^2}{2}(L_1 + L_2) + n_x^2L_4 & \frac{n_y}{2c_0}(-L_1 + L_2) \\ 0 & \frac{n_xc_0}{2}(-L_1 + L_2) & \frac{n_yc_0}{2}(-L_1 + L_2) & \frac{1}{2}(L_1 + L_2) \end{pmatrix} \quad (2.72)$$

2.4.3 Construction d'une condition aux limites parfaitement réfléchissante pour un écoulement non uniforme

Comme dans le cas précédent, on suppose que la paroi est parfaitement réfléchissante et qu'elle se comporte comme un miroir. (Voir figure 2.7)

$$\text{Soit } U = \begin{pmatrix} \delta\rho \\ \rho_0\delta u + u_0\delta\rho \\ \rho_0\delta v + v_0\delta\rho \\ \frac{1}{\gamma-1}\delta p + \frac{1}{2}\delta\rho(u_0^2 + v_0^2) + \rho_0(u_0\delta u + v_0\delta v) \end{pmatrix} \text{ le vecteur des variables}$$

U_{ref} le vecteur des variables réfléchies.

Seules les variables vectorielles sont réfléchies, donc, $\delta\rho_{ref} = \delta\rho$ et $\delta p_{ref} = \delta p$.

De l'équation (2.60), on a :

$$\begin{aligned} \delta u_{fic} &= (1 - 2n_x^2)\delta u - 2n_x n_y \delta v \\ \delta v_{fic} &= -2n_x n_y \delta u + (1 - 2n_y^2)\delta v \end{aligned}$$

On obtient finalement

$$U_{fic} = \begin{pmatrix} \delta\rho \\ \rho_0((1 - 2n_x^2)\delta u - 2n_x n_y \delta v) + u_0\delta\rho \\ \rho_0(-2n_x n_y \delta u + (1 - 2n_y^2)\delta v) + v_0\delta\rho \\ \frac{1}{\gamma-1}\delta p + \frac{1}{2}\delta\rho(u_0^2 + v_0^2) + \rho_0 u_0((1 - 2n_x^2)\delta u - 2n_x n_y \delta v) + \rho_0 v_0((1 - 2n_y^2)\delta v - 2n_x n_y \delta u) \end{pmatrix} \quad (2.73)$$

$$U_{fic} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2n_x(n_x u_0 + n_y v_0) & 1 - 2n_x^2 & -2n_x n_y & 0 \\ 2n_y(n_x u_0 + n_y v_0) & -2n_x n_y & 1 - 2n_y^2 & 0 \\ 2(n_x u_0 + n_y v_0)^2 & -2n_x(n_x u_0 + n_y v_0) & -2n_y(n_x u_0 + n_y v_0) & 1 \end{pmatrix} \vec{U} \quad (2.74)$$

Posons,

$$\mathbb{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2n_x(n_x u_0 + n_y v_0) & 1 - 2n_x^2 & -2n_x n_y & 0 \\ 2n_y(n_x u_0 + n_y v_0) & -2n_x n_y & 1 - 2n_y^2 & 0 \\ 2(n_x u_0 + n_y v_0)^2 & -2n_x(n_x u_0 + n_y v_0) & -2n_y(n_x u_0 + n_y v_0) & 1 \end{pmatrix} \quad (2.75)$$

2.4.4 Construction d'une condition aux limites absorbante pour un écoulement non uniforme

Comme dans le cas d'un écoulement uniforme nous avons :

$$\mathbb{F}_{abs}(U) \cdot \vec{n} = J^+ \cdot \vec{U}$$

avec

$$\mathbb{F}(U) = \begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix}$$

Détermination de J^+

Comme présenté ci-dessus,

$$J = MDM^{-1} \quad (2.76)$$

On définit D^+ comme,

$$J^+ = MD^+M^{-1} \quad (2.77)$$

avec, D^+ matrice diagonale de la valeur absolue des valeurs propres de la matrice J :

$$D^+ = \text{diag}(|d_i|)$$

$$D^+ = \begin{pmatrix} |\vec{V}_0 \cdot \vec{n}| & 0 & 0 & 0 \\ 0 & |\vec{V}_0 \cdot \vec{n}| & 0 & 0 \\ 0 & 0 & |\vec{V}_0 \cdot \vec{n} + c_0| & 0 \\ 0 & 0 & 0 & |\vec{V}_0 \cdot \vec{n} - c_0| \end{pmatrix} \quad (2.78)$$

afin de simplifier les écritures, posons :

$$L_1 = |\vec{V}_0 \cdot \vec{n}|, L_3 = |\vec{V}_0 \cdot \vec{n} + c_0|, L_4 = |\vec{V}_0 \cdot \vec{n} - c_0|$$

$$a = \frac{\gamma - 1}{c_0^2}, b = u_0^2 + v_0^2, d = u_0 n_x + v_0 n_y$$

$$J^+ = \begin{pmatrix} J^+_{11} & J^+_{12} & J^+_{13} & J^+_{14} \\ J^+_{21} & J^+_{22} & J^+_{23} & J^+_{24} \\ J^+_{31} & J^+_{32} & J^+_{33} & J^+_{34} \\ J^+_{41} & J^+_{42} & J^+_{43} & J^+_{44} \end{pmatrix} \quad (2.79)$$

Dans le cas où $n_x \neq 0$

$$\begin{aligned}
J^+_{11} &= \left(\frac{-1}{2}a \cdot b + 1\right)L_1 + \frac{1}{4}a \cdot b(L_3 + L_4) - \frac{1}{2c_0}d(L_3 - L_4) \\
J^+_{12} &= a \cdot u_0 L_1 - \frac{1}{2}a \cdot u_0(L_3 + L_4) + \frac{1}{2c_0}n_x(L_3 - L_4) \\
J^+_{13} &= a \cdot v_0 L_1 - \frac{1}{2}a \cdot v_0(L_3 + L_4) + \frac{1}{2c_0}n_y(L_3 - L_4) \\
J^+_{14} &= \frac{1}{2}a(L_3 + L_4 - 2L_1) \\
J^+_{21} &= \left(-d \cdot n_y^2 + \frac{1}{2}a \cdot b \cdot v_0 n_y - \frac{1}{2}a \cdot b \cdot d + d\right)\frac{1}{n_x}L_1 + \left(\frac{-1}{2}d \cdot n_x + \frac{1}{4}a \cdot b \cdot u_0\right)(L_3 + L_4) + \left(\frac{1}{4}a \cdot b \cdot c_0 n_x - \frac{1}{2c_0}d \cdot u_0\right)(L_3 - L_4) \\
J^+_{22} &= (n_y^2 n_x - a \cdot u_0 v_0 n_y + a \cdot u_0 \cdot d)\frac{1}{n_x}L_1 + \left(\frac{1}{2}n_x^2 - \frac{1}{2}a \cdot u_0^2\right)(L_3 + L_4) + \left(\frac{-1}{2}a \cdot u_0 \cdot c_0 n_x + \frac{1}{2c_0}u_0 n_x\right)(L_3 - L_4) \\
J^+_{23} &= \left(-n_y n_x^2 - a \cdot v_0^2 n_y + a \cdot d \cdot v_0\right)\frac{1}{n_x}L_1 + \left(\frac{1}{2}n_x n_y - \frac{1}{2}a \cdot u_0 v_0\right)(L_3 + L_4) + \left(\frac{1}{2c_0}u_0 n_y - \frac{1}{2}a \cdot c_0 v_0 n_x\right)(L_3 - L_4) \\
J^+_{24} &= (a \cdot v_0 n_y - a \cdot d)\frac{1}{n_x}L_1 + \frac{1}{2}a \cdot u_0(L_3 + L_4) + \frac{1}{2}a \cdot c_0 n_x(L_3 - L_4) \\
J^+_{31} &= \left(d \cdot n_y - \frac{1}{2}a \cdot b \cdot v_0\right)L_1 + \left(\frac{-1}{2}d \cdot n_y + \frac{1}{4}a \cdot b \cdot v_0\right)(L_3 + L_4) + \left(\frac{1}{4}a \cdot b \cdot c_0 n_y - \frac{1}{2c_0}v_0 \cdot d\right)(L_3 - L_4) \\
J^+_{32} &= (a \cdot u_0 v_0 - n_x n_y)L_1 + \left(\frac{1}{2}n_x n_y - \frac{1}{2}a \cdot u_0 v_0\right)(L_3 + L_4) + \left(\frac{1}{2c_0}v_0 n_x - \frac{1}{2}a \cdot u_0 c_0 n_y\right)(L_3 - L_4) \\
J^+_{33} &= (n_x^2 + a \cdot v_0^2)L_1 + \left(\frac{1}{2}n_y^2 - \frac{1}{2}a \cdot v_0^2\right)(L_3 + L_4) + \left(\frac{-1}{2}a \cdot v_0 c_0 n_y + \frac{1}{2c_0}v_0 n_y\right)(L_3 - L_4) \\
J^+_{34} &= -a \cdot v_0 L_1 + \frac{1}{2}a \cdot v_0(L_3 + L_4) + \frac{1}{2}a \cdot c_0 n_y(L_3 - L_4) \\
J^+_{41} &= \left(-u_0 \cdot d \cdot n_y^2 \frac{1}{n_x} + v_0 u_0 n_y \frac{1}{n_x} + v_0 d n_y + \frac{1}{2}b - v_0^2 - \frac{1}{4}ab^2\right)L_1 + \left(\frac{-1}{2a}d^2 + \frac{1}{8}a \cdot b^2\right)(L_3 + L_4) + \left(\frac{1}{4}b \cdot d \cdot c_0 - \frac{1}{4c_0}b \cdot d\right)(L_3 - L_4) \\
J^+_{42} &= \left(-v_0 n_y n_x + u_0 n_y^2 + \frac{1}{2}a \cdot b \cdot u_0\right)L_1 + \left(\frac{1}{2a}d \cdot n_x - \frac{1}{4}a \cdot b \cdot u_0\right)(L_3 + L_4) + \left(\frac{1}{4c_0}b \cdot n_x - \frac{1}{2}u_0 c_0 d\right)(L_3 - L_4) \\
J^+_{43} &= \left(v_0 n_x^2 - u_0 n_x n_y + \frac{1}{2}a \cdot b \cdot v_0\right)L_1 + \left(\frac{1}{2a}d \cdot n_y - \frac{1}{4}a \cdot b \cdot v_0\right)(L_3 + L_4) + \left(\frac{1}{4c_0}b \cdot n_y - \frac{1}{2}d \cdot c_0 v_0\right)(L_3 - L_4) \\
J^+_{44} &= \frac{-1}{2}a \cdot b \cdot L_1 + \frac{1}{4}a \cdot b(L_3 + L_4) + \frac{1}{2}d \cdot c_0(L_3 - L_4)
\end{aligned}$$

Dans le cas où $n_y \neq 0$

$$J^+_{11} = \left(\frac{-1}{2}a \cdot b + 1\right)L_1 + \frac{1}{4}a \cdot b(L_3 + L_4) - \frac{1}{2c_0}d(L_3 - L_4)$$

$$\begin{aligned}
J^+_{12} &= a \cdot u_0 L_1 + \left(\frac{1}{2c_0} n_x - \frac{1}{2} a \cdot u_0\right)(L_3 + L_4) \\
J^+_{13} &= a \cdot v_0 L_1 - \frac{1}{2} a \cdot v_0 (L_3 + L_4) + \frac{1}{2c_0} n_y (L_3 - L_4) \\
J^+_{14} &= -a \cdot L_1 + \frac{1}{2} a (L_3 + L_4) \\
J^+_{21} &= (d \cdot n_x - \frac{1}{2} a \cdot b \cdot u_0) L_1 + \left(\frac{1}{4} a \cdot b \cdot u_0 - \frac{1}{2} d \cdot n_x\right)(L_3 + L_4) + \left(\frac{1}{4} a \cdot b \cdot c_0 n_x - \frac{1}{2c_0} d \cdot u_0\right)(L_3 - L_4) \\
J^+_{22} &= (n_y^2 + a \cdot u_0^2) L_1 + \left(\frac{1}{2c_0} u_0 n_x - \frac{1}{2} a \cdot u_0^2\right)(L_3 + L_4) + \left(\frac{-1}{2} a \cdot u_0 c_0 n_x + \frac{1}{2} n_x^2\right)(L_3 - L_4) \\
J^+_{23} &= (-n_y n_x + a \cdot u_0 v_0) L_1 + \left(\frac{1}{2} n_x n_y - \frac{1}{2} a \cdot u_0 v_0\right)(L_3 + L_4) + \left(\frac{1}{2c_0} u_0 n_y - \frac{1}{2} a \cdot c_0 v_0 n_x\right)(L_3 - L_4) \\
J^+_{24} &= -a \cdot u_0 L_1 + \frac{1}{2} a \cdot u_0 (L_3 + L_4) + \frac{1}{2} a \cdot c_0 n_x (L_3 - L_4) \\
J^+_{31} &= (-d \cdot n_x^2 + \frac{1}{2} a \cdot b \cdot u_0 n_x - \frac{1}{2} a \cdot b \cdot d + d) \frac{1}{n_y} L_1 + \left(\frac{-1}{2} d \cdot n_y + \frac{1}{4} a \cdot b \cdot v_0\right)(L_3 + L_4) + \left(\frac{1}{4} a \cdot b \cdot c_0 n_y - \frac{1}{2c_0} d \cdot v_0\right)(L_3 - L_4) \\
J^+_{32} &= (-n_y^2 - a \cdot u_0^2 + a \cdot d \cdot u_0 n_y) \frac{1}{n_y} L_1 + \left(\frac{1}{2} v_0 n_x - \frac{1}{2} a \cdot v_0 u_0\right)(L_3 + L_4) + \left(\frac{1}{2} n_y n_x - \frac{1}{2} a \cdot u_0 c_0 n_y\right)(L_3 - L_4) \\
J^+_{33} &= (n_y n_x^2 - a \cdot v_0 u_0 n_x + a \cdot d \cdot v_0) \frac{1}{n_y} L_1 + \left(\frac{1}{2} n_y^2 - \frac{1}{2} a \cdot v_0^2\right)(L_3 + L_4) + \left(\frac{-1}{2} a \cdot v_0 c_0 n_y + \frac{1}{2c_0} v_0 n_y\right)(L_3 - L_4) \\
J^+_{34} &= (a \cdot u_0 n_x - a \cdot d) \frac{1}{n_y} L_1 + \frac{1}{2} a \cdot v_0 (L_3 + L_4) + \frac{1}{2} a \cdot c_0 n_y (L_3 - L_4) \\
J^+_{41} &= (-v_0 \cdot d \cdot n_x^2 + u_0 d \cdot n_x n_y^2 + u_0 v_0 n_x - \frac{1}{4} a b^2 n_x + \frac{1}{2} b \cdot n_x - u_0^2 n_y^2) \frac{1}{n_y} L_1 + \left(\frac{-1}{4c_0} b \cdot d + \frac{1}{8} a \cdot b^2\right)(L_3 + L_4) + \left(\frac{1}{4} b \cdot d \cdot c_0 - \frac{1}{2a} d^2\right)(L_3 - L_4) \\
J^+_{42} &= (-v_0 n_y n_x + u_0 n_y^2 + \frac{1}{2} a \cdot b \cdot u_0 \frac{n_x}{n_y}) L_1 + \left(\frac{1}{4c_0} b \cdot n_x - \frac{1}{4} a \cdot b \cdot u_0\right)(L_3 + L_4) + \left(\frac{1}{2a} d \cdot n_x - \frac{1}{2} u_0 c_0 d\right)(L_3 - L_4) \\
J^+_{43} &= (v_0 n_x^2 - u_0 n_x n_y + \frac{1}{2} b \cdot v_0 \frac{n_x}{n_y}) L_1 + \left(\frac{1}{2a} d \cdot n_y - \frac{1}{4} a \cdot b \cdot v_0\right)(L_3 + L_4) + \left(\frac{1}{4c_0} b \cdot n_y - \frac{1}{2} d \cdot c_0 v_0\right)(L_3 - L_4) \\
J^+_{44} &= \frac{-1}{2} a \cdot b \cdot \frac{n_x}{n_y} L_1 + \frac{1}{4} a \cdot b (L_3 + L_4) + \frac{1}{2} d \cdot c_0 (L_3 - L_4)
\end{aligned}$$

2.4.5 Construction d'une condition aux limites dite zone éponge pour un écoulement uniforme

La construction des conditions aux limites absorbantes (non réfléchissantes) en CAA est très délicate en raison de la forte sensibilité de précision des petites ondes de réflexions parasites au champ lointain. Les approches fondées sur la théorie des caractéristiques ne sont pas adaptées pour des problèmes de la CAA, d'autres approches, telles que les couches parfaitement assorties (PML) [77] et les conditions limites radial [73] sont plus indiquées et largement débattues dans la littérature pour les schémas de différences finies.

Bernaki et autre [83] utilisent des techniques décentrées amont pour ne sélectionner que les ondes à la sortie des frontières extérieures. Intuitivement, cela signifie que l'ensemble de l'énergie est dissipée aux frontières, mais, malheureusement, rien ne prouve que l'énergie soit effectivement dissipée et rien ne prouve aussi qu'aucune onde de réflexions parasites ne persiste.

Pour surmonter cet inconvénient, nous joignons à la procédure ci-dessus une grille d'élongation (stretching zone) [2], cette dernière transfère l'énergie de l'onde de plus en plus vers les modes à nombre d'ondes plus élevés et le schéma numérique supprime ce contenu à haute fréquence. Grâce à ce processus, l'essentiel de l'énergie de l'onde se dissipe avant d'atteindre les frontières. Cela devient évident en regardant la figure (2.4), où les propriétés de dispersion et de dissipation de la méthode FV-MLS sont affichées. Ces propriétés sont liées à la partie réelle et complexe du nombre d'onde numérique. Pour un nombre d'onde élevé la méthode numérique introduit davantage de dissipation.

En zone de grille d'élongation (stretching zone), il est possible d'utiliser la méthode MLS comme un filtre. Le processus de filtrage se développe par l'application d'une reconstruction MLS des variables, à savoir :

$$\bar{U} = \sum_{j=1}^{n_{xI}} U(\mathbf{x}) N_j(\mathbf{x}) \quad (2.80)$$

Où U est la variable reconstruite, $\bar{U}$ est la variable filtrée et $N(\mathbf{x})$ est la fonction de forme MLS. Cette reconstruction est réalisée à l'aide d'une fonction Kernel avec les paramètres de forme favorisant des comportements dissipatifs que ceux utilisés pour l'approximation des variables. La valeur de ces paramètres détermine la gamme de fréquences à filtrer.

2.4.6 Construction d'une condition aux limites absorbantes hybride

Afin de s'assurer de la sortie totale des ondes aux frontières et qu'aucune onde parasite ne persiste, nous conjugons les deux techniques déjà citées précédemment, à savoir, la mise en place d'une zone de grille d'élongation (zone éponge) et une bordure absorbante basée sur les propriétés mathématiques des équations différentielles ordinaires de telle manière à dissiper l'énergie des

ondes dans cette zone. Si éventuellement des ondes arrivent à franchir cette zone éponge, sachant qu'elles ressortiront avec de très faibles amplitudes (énergies), la bordure absorbante s'assurera de la sortie totale de ses ondes (figure 2.8)

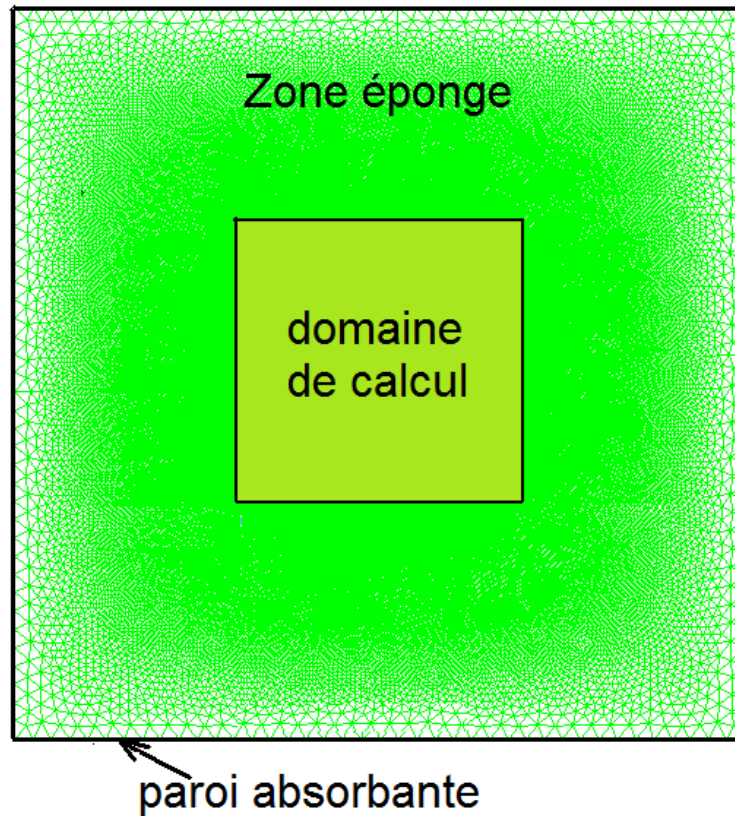


FIGURE 2.8 – Conditions aux limites hybrides.

Méthodes explicites

3.1 Discrétisation temporelle

La forme semi-discrète du problème à résoudre a été précisée dans la section relative à la discrétisation spatiale (équation 2.10). Les flux convectifs sur les interfaces du maillage sont considérés comme étant des fonctions données de l'ensemble des inconnues U_i , ce qui permet d'écrire l'équation (2.10) sous la forme compacte :

$$\frac{dU}{dt} = f(U) \quad (3.1)$$

Pour construire des schémas aux différences pour la loi d'évolution (équation 3.1), on se donne un état U^n relatif au temps t^n , et un pas de temps Δt permettant d'arriver au temps t^{n+1} , $t^{n+1} = t^n + \Delta t$ et on cherche U^{n+1} au nouveau pas de temps.

En intégrant la relation (3.1), on obtient :

$$\frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(U) dt \quad (3.2)$$

Le choix d'un schéma numérique est reporté sur la recherche d'une formule de quadrature pour le nombre de droite de l'équation (3.2).

Trois cas de figure sont possibles :

1. utiliser le point de départ t^n
2. utiliser le point d'arrivée t^{n+1} ,
3. utiliser une méthode plus précise comme la formule de trapèze par exemple,

Dans le premier cas, on obtient un schéma dit d'Euler explicite :

$$\frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} = f(U^n) \quad (3.3)$$

Le second cas, on obtient un schéma d'Euler implicite :

$$\frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} = f(U^{n+1}) \quad (3.4)$$

Le troisième cas conduit au schéma de Crank-Nicolson :

$$\frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} = \frac{1}{2}[f(U^n) + f(U^{n+1})] \quad (3.5)$$

Notons la grande simplicité opératoire de la relation (3.3), alors que les deux autres nécessitent la résolution d'un problème non linéaire dont l'inconnue est U^{n+1} . Les trois schémas sont à un pas de temps, puisqu'on couple seulement les pas de temps t^n et t^{n+1} .

Schéma Leapfrog

Pour obtenir des méthodes d'ordres de précision élevés, on peut augmenter le nombre de pas. Dans ce cas, la solution au point t^{n+1} sera fonction des solutions aux p pas précédents avec $p > 1$. La construction de ces schémas peut se faire en utilisant la dérivation numérique et la précision du schéma sera donnée par la précision de cette dérivation. Ainsi, pour un schéma à l'ordre 2, on peut combiner les expressions ci-dessous (développement de Taylor) :

$$y(x^{n+1}) = y(x^n) + hy^{(1)}(x^n) + \frac{hr}{2}y^{(2)}(x^n) + \dots$$

$$y(x^{n-1}) = y(x^n) - hy^{(1)}(x^n) + \frac{hr}{2}y^{(2)}(x^n) + \dots$$

pour aboutir au schéma "saute-mouton" (leap-frog) :

$$\frac{y^{n+1} - y^{n-1}}{2h} = \Phi(x^n, y^n) \quad (3.6)$$

Pour cette étude, l'équation discrète que nous obtenons sur chaque cellule et pour tout instant $t^n = n \cdot \Delta t$ avec $n \in \mathbb{Z}$, Δt est le pas de temps, $t^n \in [0, T]$ et U^n l'approximation numérique de U à l'instant t^n , s'écrit :

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^{n-1}}{2 \cdot \Delta t} = \frac{1}{A_i} \cdot \sum_j l_{ij} \mathbb{F}_{ij}(U^n) \cdot \vec{n}_{ij} \quad (3.7)$$

A_i est la surface de la cellule i

l_{ij} est l'intersection des cellule i avec j

Schémas de type Runge-Kutta

Les méthodes à un pas de temps de type Runge-Kutta [101] sont souvent les méthodes préférées pour l'approximation des problèmes de mécanique des fluides [102].

L'objectif de cette méthode est d'approcher l'intégrale qui apparaît dans le terme de droite de l'équation (3.2), c'est-à-dire :

$$\frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(U) dt \quad (3.8)$$

Une idée naturelle est d'utiliser une formule du point milieu :

$$\frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(U) dt \approx f\left(U\left(t^n + \frac{\Delta t}{2}\right)\right) \quad (3.9)$$

et de calculer au mieux $U\left(t^n + \frac{\Delta t}{2}\right)$, par exemple, en utilisant le schéma d'Euler explicite (équation 3.3), ce qui conduit au schéma d'Euler modifié :

$$U^{n+1/2} = U^n - \frac{\Delta t}{2} f(U^n) \quad (3.10)$$

$$U^{n+1} = U^n - \Delta t f(U^{n+1/2}) \quad (3.11)$$

L'approche se généralise à "s" étapes en recherchant pour calculer l'intégrale (3.8) une formule de quadrature du type :

$$\int_0^{\theta_i} \phi(t) dt \approx \sum_{j=1}^s a_{ij} \phi(\theta_j), \quad i = 1, \dots, s \quad (3.12)$$

$$\int_0^1 \phi(t) dt \approx \sum_{j=1}^s b_j \phi(\theta_j) \quad (3.13)$$

Ainsi, on dispose de relations classiques pour augmenter l'ordre des schémas de Runge-Kutta. Ces méthodes sont largement utilisées pour discrétiser la dérivée du temps en raison de leurs avantages, notamment la flexibilité, les grandes limites de stabilité et de la facilité de programmation, les propriétés de ces méthodes sont largement étudiées par Butcher [103]. Il a trouvé la forme générale des relations telles que les coefficients permettant à la méthode d'avoir un certain ordre de précision.

Hu et autres [104], ont montré que la dissipation et la dispersion des méthodes Runge-Kutta dépendent de leurs coefficients, ils ont été optimisés pour l'équation d'onde convective, obtenant des méthodes dites (Low Dissipation and Dispersion Runge-kutta methods LDDRK). Pour le traitement des problèmes de propagation des ondes, ces méthodes sont plus efficaces par rapport aux autres méthodes classiques.

Sigal et Shu [105] ont démontré qu'il est plus adéquat d'utiliser la méthode TVD Runge-Kutta (Total Variation Diminishing) pour la résolution des problèmes hyperboliques. Cette méthode a déjà été initiée par Shu et Osher [49].

Schéma TVD Runge-Kutta d'ordre 3

Dans la section précédente, il a été montré que l'équation différentielle ordinaire (équation 2.10) peut s'écrire :

$$\frac{dU_i}{dt} = R(U_i) \quad (3.14)$$

Dans notre cas, la dérivée temporelle est donnée par TVD-Runge-Kutta d'ordre 3, proposée par Shu and Osher [49] comme suit :

$$U_i^{(0)} = U_i^{(n)}$$

$$U_i^{(1)} = U_i^{(n)} + \Delta t R(U_i^{(n)})$$

$$U_i^{(2)} = \frac{3}{4}U_i^{(n)} + \frac{1}{4}U_i^{(1)} + \frac{1}{4}\Delta t R(U_i^{(1)})$$

$$U_i^{(3)} = \frac{1}{3}U_i^{(n)} + \frac{2}{3}U_i^{(2)} + \frac{2}{3}\Delta t R(U_i^{(2)})$$

$$U_i^{(n+1)} = U_i^{(3)}$$

Schémas de type Runge-Kutta à faible stockage de quatrième ordre à six étapes RK46-NL

Ce schéma est basé sur la formulation initiale de Williamson [106], cette formulation a été optimisée par Berland et autres [107] (RK46-NL), assurant le quatrième ordre de précision. Le schéma semble être le plus approprié pour notre cas car il présente une gamme de stabilité importante, il est donné comme suit :

$$\Phi_I^{(i)} = a_i \Phi_I^{(i-1)} + \frac{\Delta t}{V_I} R(U_I^{(i-1)}, t_i) \quad (3.15)$$

$$U_I^{(i)} = U_I^{(i-1)} + b_i \Phi_I^{(i)} \quad (3.16)$$

Avec i variant de 1 à 6, Δt le pas d'intégration, $U_I^{(n)} = U_I^{(0)}$, $U_I^{(n+1)} = U_I^{(6)}$, $\Phi_I^{(0)} = 0$ et $t_i = (n + c_i)\Delta t$, a_i , b_i et c_i sont les coefficients optimisés du schéma RK46-NL donnés dans le tableau suivant :

i	a_i	b_i	c_i
1	0,0	0,032918605146	0,0
2	0,737101392796	0,823256998200	0,032918605146
4	1,634740794341	0,381530948900	0,249351723343
4	0,744739003780	0,200092213184	0,466911705055
5	1,469897351522	1,718581042715	0,582030414044
6	2,813971388035	0,27	0,847252983783

Tableau 3.1 – les coefficients a_i , b_i et c_i optimisés du schéma RK46-NL

3.2 Validation des calculs explicites

Les différentes équations de propagation, décrites au chapitre 2 et plus en détail les équations d'Euler linéarisées sont utilisées dans cette section de validation. Ainsi, ce chapitre traite de la validation et l'application de ces méthodes en champs libre en présence d'un écoulement 2D uniforme subsonique.

Rappelons la forme des équations à résoudre (EEL)

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} + H = S \quad (3.17)$$

avec S le terme source et

$$U = \begin{pmatrix} \delta \rho \\ \rho_0 \delta u \\ \rho_0 \delta v \\ \delta p \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} \delta \rho u_0 + \rho_0 \delta u \\ \delta p + \rho_0 u_0 \delta u \\ \rho_0 v_0 \delta v \\ u_0 \delta p + \gamma p_0 \delta u \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} \delta \rho v_0 + \rho_0 \delta v \\ \rho_0 v_0 \delta u \\ \delta p + \rho_0 v_0 \delta v \\ v_0 \delta p + \gamma p_0 \delta v \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

$$H = \begin{pmatrix} 0 \\ (\rho_0 \delta u + u_0 \delta \rho) \frac{\partial u_0}{\partial x} + (\rho_0 \delta v + v_0 \delta \rho) \frac{\partial u_0}{\partial y} \\ (\rho_0 \delta u + u_0 \delta \rho) \frac{\partial v_0}{\partial x} + (\rho_0 \delta v + v_0 \delta \rho) \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ (\gamma - 1) \delta p \nabla u_0 - (\gamma - 1) \delta u \nabla p_0 \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

Pour l'écoulement uniforme $H = 0$.

Dans le domaine de la dynamique des fluides, une analyse adimensionnelle est souvent utilisée pour décrire les variables inconnues. En raison des liens étroits qui existent entre la dynamique des fluides et l'aéroacoustique, la plupart des calculs aéroacoustiques sont également effectués avec des

variables adimensionnelles. Cette analyse est caractérisée par trois paramètres adimensionnels : la longueur L^* , la densité ρ^* et la vitesse $\vec{u}^*$ définis par :

$$L^* = \frac{L}{L_{ref}}, \rho^* = \frac{\rho}{\rho_{ref}}, \vec{u}^* = \frac{\vec{u}}{U_{ref}}$$

Avec L , ρ et $\vec{u}$ sont les variables physiques, L_{ref} , ρ_{ref} et U_{ref} les variables de référence, une fois que ces trois paramètres adimensionnels sont définis, tous les autres paramètres adimensionnels s'en déduisent, ainsi on a :

La vitesse du son adimensionnelle c_0^* définie :

$$c_0^* = \frac{c_0}{U_{ref}} = \frac{1}{M}$$

avec M nombre de mach.

La pression adimensionnelle p^* est donnée comme suit :

$$p^* = \frac{(c_0^2)^2 \rho^*}{\gamma} = \frac{1}{\gamma M^2}$$

Le temps et la fréquence adimensionnelles sont données par :

$$t^* = \frac{t U_{ref}}{L_{ref}}, f^* = \frac{f L_{ref}}{U_{ref}}$$

La fréquence adimensionnelle f^* est aussi appelée nombre de Strouhal St , il est très important pour des études en aéroacoustique, un grand nombre de phénomènes aéroacoustiques à caractères tonals, tels que le bruit tonal généré par un écoulement autour d'un cylindre ou le bruit tonal de cavité, ils sont fonction de la variable de Strouhal. On préfère les variables sans dimension pour s'affranchir du système d'unités et pour manipuler des grandeurs voisines de l'unité.

3.2.1 Validation en champ libre

Dans cette section, les différentes simulations nous permettent de tester la capacité des schémas MLS avec les différents flux numériques et les différents ordres, appliqués à la résolution des EEL pour prédire les différents phénomènes avec la moindre erreur numérique possible. Les résultats ainsi obtenus avec une discrétisation temporelle de type RK46-NL sont confrontés à la solution exacte.

L'intérêt principal de ces cas tests réside dans le fait que nous connaissons de manière analytique la solution exacte de chaque cas test.

La source dans tous les cas tests est localisée au centre du domaine ($x_s = 0, y_s = 0$) et nous imposons des conditions aux limites absorbantes, déjà décrites au chapitre précédent.

Propagation d'un pulse (impulsion gaussienne)

Le premier cas test traite de la propagation d'un pulse (impulsion gaussienne), le domaine est d'une longueur et d'une largeur adimensionnelles sur un maillage (200x200) pour l'étude de la fonction **kernel** et les différents flux numériques.

Le pulse est inséré au centre du domaine et généré par les conditions initiales isentropiques suivantes :

$$\begin{cases} \delta\rho = \exp\left(-\ln(2)\frac{(x-x_s)^2+(y-y_s)^2}{9}\right) \\ \delta u = 0 \\ \delta v = 0 \\ \delta p = \exp\left(-\ln(2)\frac{(x-x_s)^2+(y-y_s)^2}{9}\right) \end{cases} \quad (3.20)$$

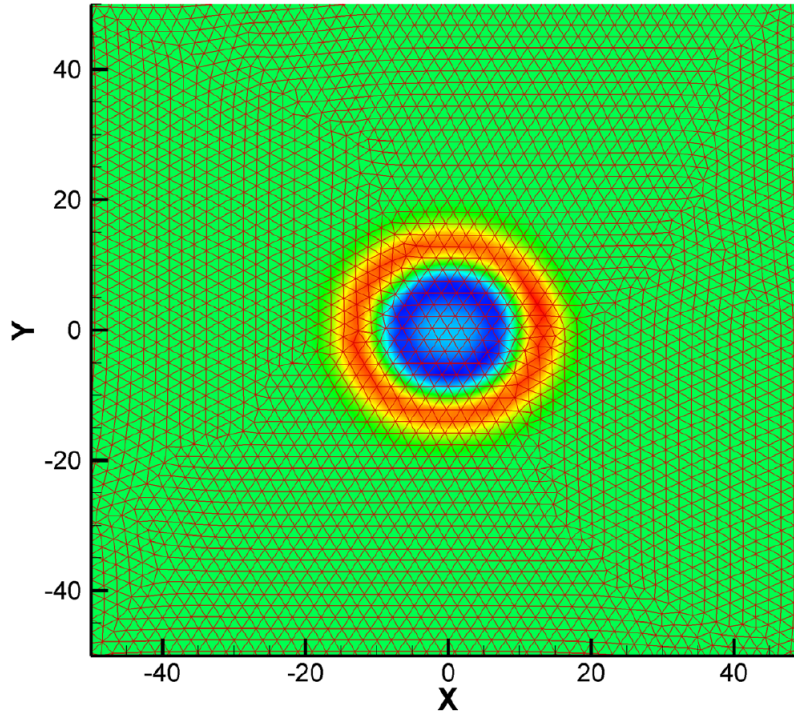


FIGURE 3.1 – Propagation d'un pulse dans un plan.

Nous pouvons visualiser grâce à la figure (3.1), le comportement logique de la perturbation à l'intérieur du domaine. En effet, le pulse s'étend dans toutes les directions du plan à la vitesse du son.

Influence de la fonction kernel sur les résultats

Les résultats obtenus (figure 3.2) sur un calcul à l'ordre 3 avec un maillage (200 x 200) et en implémentant deux fonctions kernel (exponentielle et la cubic spline), montrent que l'exponentielle

donne les meilleurs résultats comparant à la cubic spline. Il apparaît clairement, grâce à ce cas test que la fonction **kernel** utilisée est d'une importance capitale sur la qualité de nos résultats, de ce fait, implémenter d'autres fonctions kernel sera parmi les objectifs de nos futures recherches.

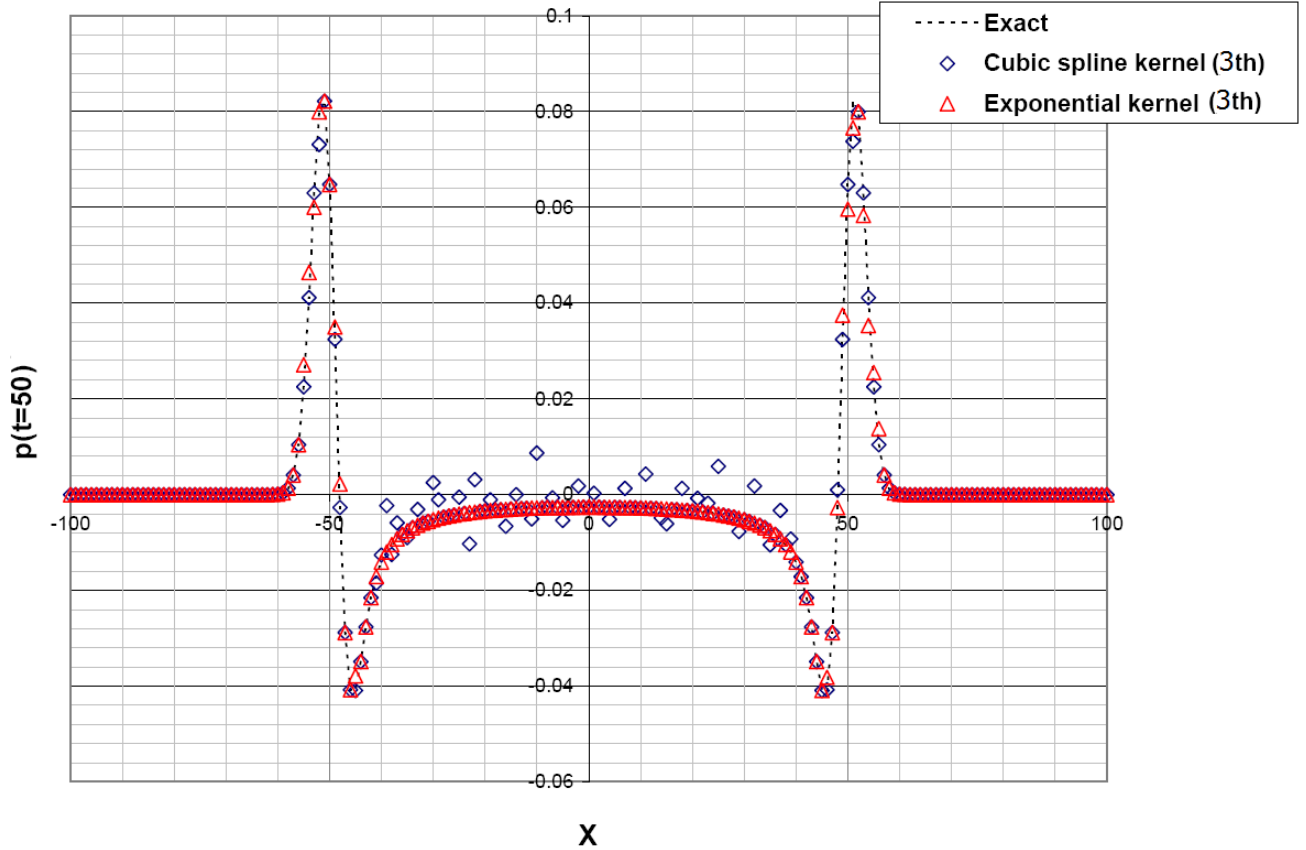


FIGURE 3.2 – Evolution de la pression instantanée ($t = 50$) le long de l'axe (X) pour différentes fonctions kernel.

Influence des différents flux numériques sur les résultats

Ce cas test nous permet de comparer les différents flux numériques utilisés pour la résolution des EEL par la méthode FV-MLS d'ordre 3.

Nous pouvons vérifier (figure 3.3) que dans le cas d'un maillage (200 x 200), les valeurs numériques obtenues sont proches de la solution exacte. Toutefois, le résultat obtenu avec le Flux Vecteur Splitting (Steger Warming) présente une dissipation, ce qui rend l'utilisation de ce flux moins bénéfique, contrairement aux autres flux (Roe, Rusanov et LLF) qui présentent de meilleurs résultats. Sachant que l'utilisation d'un flux centré est instable pour des problèmes de propagation en écoulement uniforme [64, 65].

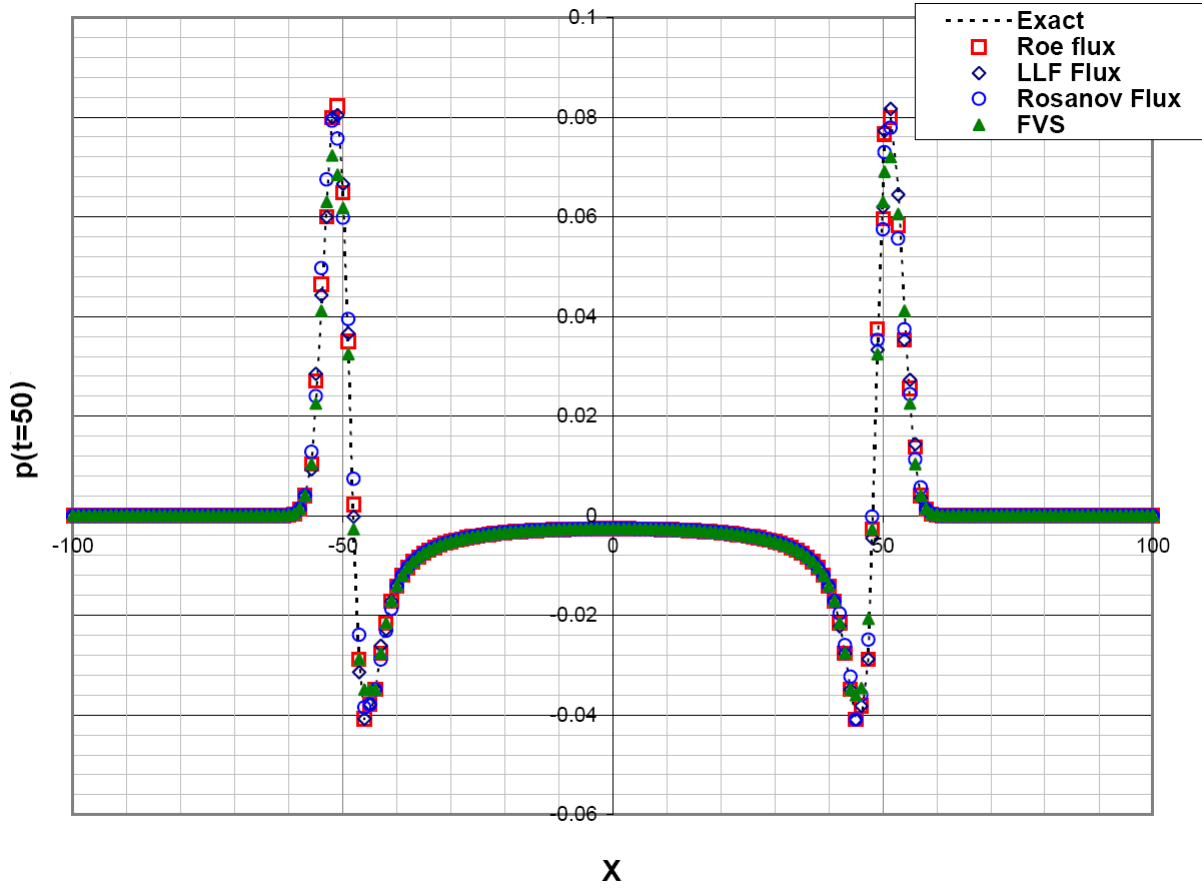


FIGURE 3.3 – Evolution de la pression instantanée ($t = 50$) le long de l'axe (X) pour différents flux numériques.

Propagation d'une source monopolaire en présence d'un écoulement uniforme

Une source monopolaire (équivalente à une quantité de masse injectée dans le domaine) est ici implémentée par un vecteur S dans l'équation (3.17) [16]. Son intérêt principal réside dans le fait que nous connaissons de manière analytique la solution exacte et le but de ce cas test est de tester à la fois les différents ordres de notre méthode selon le nombre de mailles et notre condition aux limites absorbantes.

$$S_p = \frac{1}{2} \exp \left(-\ln(2) \frac{(x - x_s)^2 + (y - y_s)^2}{2} \right) \sin(\omega t) \times [1, 0, 0, 1]^T \quad (3.21)$$

Avec ω la fréquence angulaire donnée par : $\omega = 2\pi/30$. La longueur d'onde $\lambda = 30$ unités.

$$S_p \text{ est adimensionné par : } \begin{cases} \rho_\infty c_\infty / \Delta x \\ 0 \\ 0 \\ \rho_\infty c_\infty^3 / \Delta x \end{cases} \quad \text{avec } \begin{cases} \rho_\infty = 1 \\ p_\infty = \frac{1}{\gamma_\infty} \\ \gamma_\infty = 1,4 \\ c_\infty = \sqrt{\frac{\gamma_\infty p_\infty}{\rho_\infty}} \end{cases}$$

Cette source est générée au centre du domaine en présence d'un écoulement uniforme horizontal de vitesse à Mach $M = 0,5$.

La figure (3.4) représente l'évolution de la pression instantanée ($t = 180$) le long de l'axe (X), avec différents nombres de mailles pour des ordres élevés.

On constate que pour un même ordre, le nombre des mailles influence sur la qualité des résultats, plus le nombre des mailles est important, plus la précision est appréciable, et sur un même maillage plus l'ordre est important, meilleure est la précision. Ces résultats illustrent que la solution numérique donnée par notre schéma est réaliste sur un maillage de 40000 mailles, plus précise pour 90000 mailles et meilleure pour 160000 mailles.

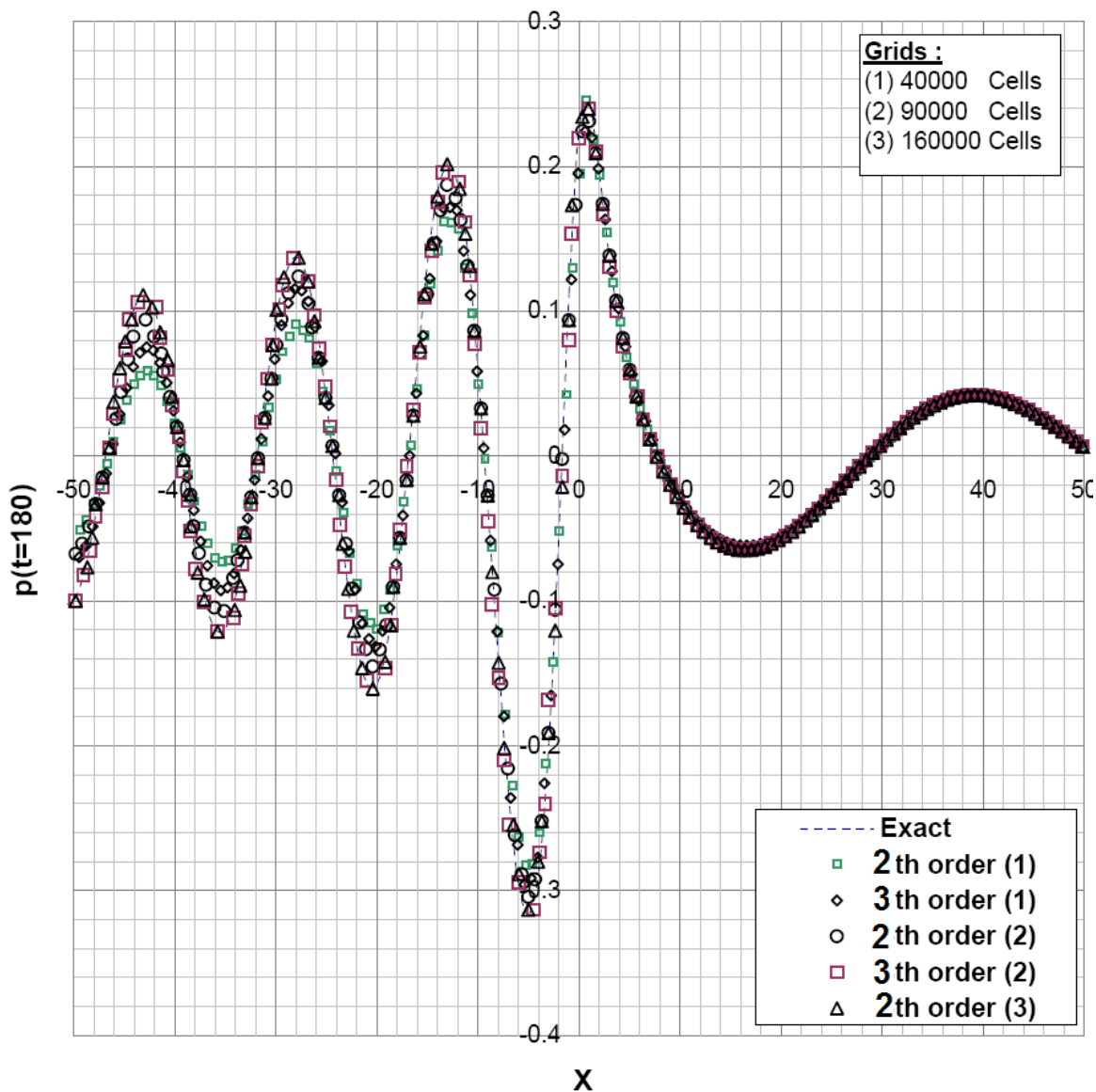


FIGURE 3.4 – L'évolution de la pression instantanée le long de l'axe (X) pour différents ordres et différents maillages.

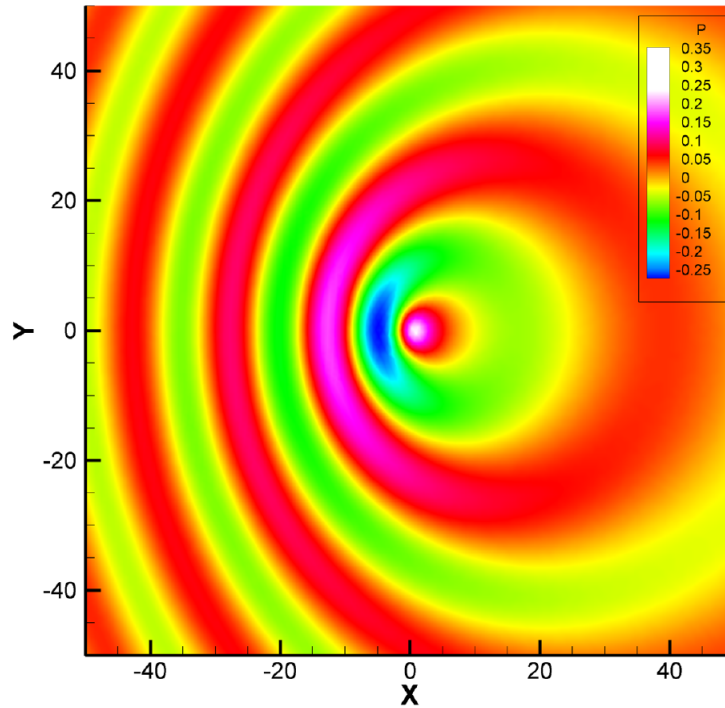


FIGURE 3.5 – Pression instantanée de la propagation d’une source monopolaire dans un écoulement uniforme $M=0,5$.

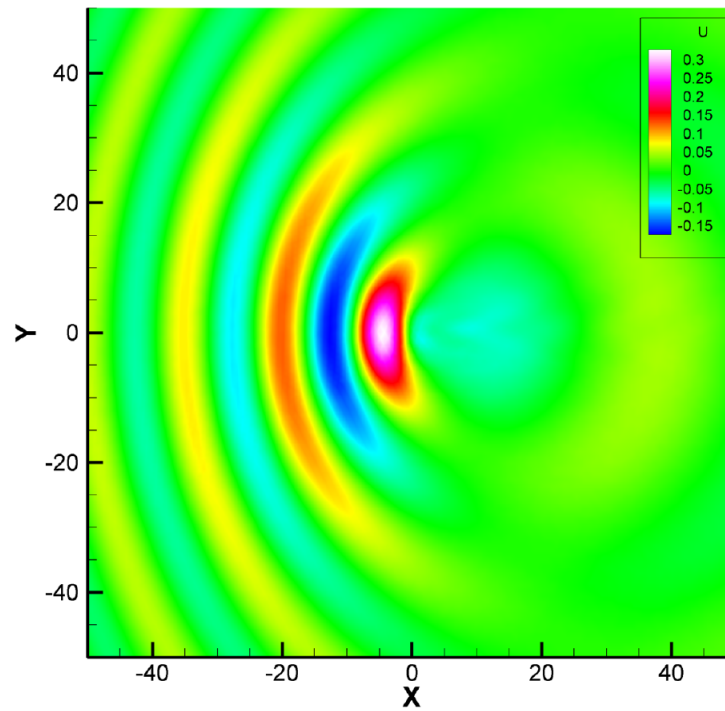


FIGURE 3.6 – U Vitesse instantanée de la propagation d’une source monopolaire dans un écoulement uniforme $M=0,5$.

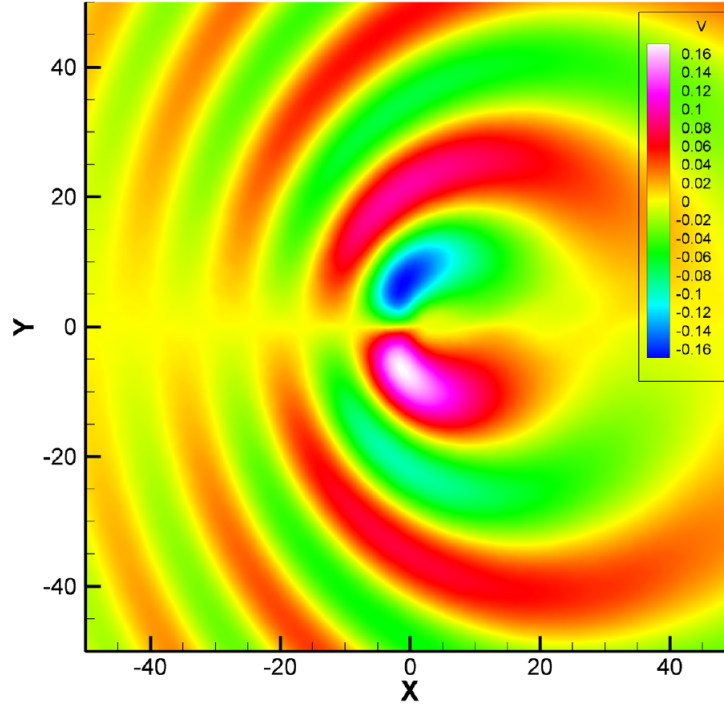


FIGURE 3.7 – V Vitesse instantanée de la propagation d'une source monopolaire dans un écoulement uniforme $M=0,5$.

Les figures (3.5, 3.6, 3.7) nous renseignent sur la bonne implémentation des conditions aux limites absorbantes, étant convectées horizontalement par un écoulement, toutes les ondes sont absorbées par la paroi.

3.2.2 Conclusions et remarques concernant la validation

Nous avons bien vérifié que l'augmentation en ordre améliorait la précision des résultats. Néanmoins, rien n'indique que les ordres atteints sont réellement les ordres espérés. Une étude de l'ordre de précision de notre schéma est plus qu'indispensable. Pour des ordres ≥ 3 nous soupçonnons une perte de précision, au cas où ces soupçons s'avèrent fondés, l'introduction d'une matrice masse telle qu'utilisée en éléments finis ou avec Galerkin discontinus devient indispensable.

Afin d'estimer l'ordre de précision de notre solveur, il est impératif d'examiner l'évolution de la norme L_2 de l'erreur (L_2e) en fonction du nombre de mailles de la grille. Il est bien connu que le logarithme de la norme L_2 de l'erreur varie linéairement avec le logarithme de la taille unidimensionnelle de la grille.

La norme L_2 de l'erreur de pression et l'ordre de convergence de la solution numérique sont donnés par :

$$L_2e = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N_c} \int_{A_i} (p - p_{ex})^2 dA}{A}} \quad (3.22)$$

$$ordre = \frac{\log\left(\frac{L_2erreur_1}{L_2erreur_2}\right)}{\log\sqrt{\left(\frac{N_{c2}}{N_{c1}}\right)}} \quad (3.23)$$

Avec,

N_c le nombre de cellules de la grille, A_i l'air de la cellule i , A l'air du domaine, p la pression calculée et p_{ex} la solution exacte de la pression.

Le tableau suivant montre le taux de convergence de notre méthode pour la solution de pression à $t = 25$ dans le cas du problème de propagation d'un pulse (impulsion gaussienne), sur un domaine d'une longueur et d'une largeur adimensionnelles (maillage 100x100), en utilisant une méthode explicite de type RK46-NL et l'intégration numérique des flux dans l'équation (2.10) est approximée par la règle de Weddle d'ordre 8 [108].

Grille	$L_2e - o(2)$	order	$L_2e - o(3)$	order	$L_2e - o(4)$	order	$L_2e - o(5)$	order
2020	4,666E-03	-	4,964E-03	-	3,920E-03	-	3,613E-03	-
3588	2,663E-03	1,95	2,085E-03	3,02	1,540E-03	3,25	1,462E-03	3,15
4548	2,093E-03	2,03	1,488E-03	2,85	1,068E-03	3,09	1,019E-03	3,04
8102	1,141E-03	2,10	5,823E-04	3,25	4,088E-04	3,33	3,827E-04	3,39
15470	5,735E-04	2,13	2,175E-04	3,05	1,468E-04	3,17	1,401E-04	3,11

Tableau 3.2 – Taux de convergence pour la solution de pression à $t = 25$

Ces résultats donnés à $t = 25$ avant que l'onde atteigne les frontières du domaine montre que l'ordre de précision maximum qu'on peut atteindre est de 3, cela est dû au type de méthode utilisée qui consiste à discrétiser le domaine de calcul en un ensemble de volumes de contrôle dans lequel les équations de conservation sont résolues.

Méthodes implicites

Pour les discrétisation de type Godunov des problèmes hyperboliques, le premier terme de l'équation (2.6) est discrétisé selon l'équation (2.7), c'est-à-dire par :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int U dA = \frac{\partial}{\partial t} U A$$

De manière plus rigoureuse on obtient en suivant la démarche de discrétisation en volumes finis :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int U dA = \frac{\partial}{\partial t} U[M] A$$

La matrice masse $[M]$ qui apparaît dans l'expression a une définition qui diffère de celle classiquement obtenue dans la méthode des éléments finis [109]. Elle "établit un lien" entre la valeur moyenne dans le volume de contrôle et les "valeurs ponctuelles" du point de collocation et de ses voisins. Pour les schémas employant une procédure de reconstruction dans les volumes de contrôle, la matrice masse est obtenue en calculant la moyenne du polynôme sur ce volume.

Dans le cas du schéma "Cell centered", la valeur moyenne dans le volume de contrôle et la valeur ponctuelle au centre de gravité coïncide au second ordre près, ce qui permet de découpler le système d'équations à résoudre, tout au moins lorsque la précision requise du schéma n'est pas très élevée.

Une alternative à ce problème est de toujours utiliser le concept de valeur moyenne. Ce qui nécessite, lors de la procédure de reconstruction, l'utilisation des valeurs moyennes et non pas les valeurs ponctuelles (voir par exemple Barth [110, 42]).

Venkatakrisnan [111] a montré sur l'exemple simple de l'équation d'advection que pour les schémas d'ordre supérieur ou égal à 3, il est nécessaire de construire la matrice masse $[M]$ ou bien d'utiliser une reconstruction à partir des moyennes.

$[M]$ est une matrice creuse très large, voir figure (4.1). Notre problème à résoudre est un système algébro-différentiel qui peut s'écrire sous la forme :

$$F(t, U, [M]\dot{U}) = 0 \quad (4.1)$$

Les méthodes explicites utilisées précédemment pour les systèmes différentiels ordinaires ne sont pas adaptées aux systèmes algébro-différentiels (4.1) auxquels nous sommes confrontés. Il est impératif avant tout d'utiliser une méthode numérique implicite.

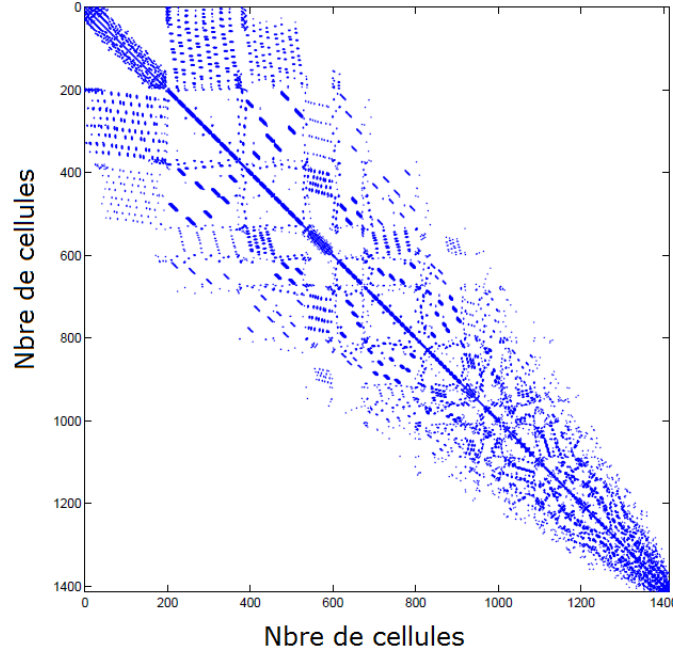


FIGURE 4.1 – Matrice masse à l'ordre 4.

4.1 Définition de la matrice masse

Dans la reconstruction de $U(\mathbf{x})$, on a :

$$U(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n_x} N_j(\mathbf{x})U_j \quad (4.2)$$

$\mathbf{x} = (x, y)$ est le vecteur position.

En remplaçant $U(\mathbf{x})$ dans le premier terme de l'équation (2.6), on obtient :

$$\begin{aligned} \int_V \frac{\partial U}{\partial t} dV &= \int_V \frac{\partial}{\partial t} \left[\sum_{j=1}^{n_x} N_j(\mathbf{x})U_j \right] dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_V \left[\sum_{j=1}^{n_x} N_j(\mathbf{x})U_j \right] dV \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \sum_{j=1}^{n_x} \left[\int_V N_j(\mathbf{x}) dV \right] U_j \end{aligned} \quad (4.3)$$

La fonction de forme $N_j(\mathbf{x})$ est indépendante du temps, donc :

$$\int_V \frac{\partial U}{\partial t} dV = \sum_{j=1}^{n_x} \left[\int_V N_j(\mathbf{x}) dV \right] \frac{\partial U_j}{\partial t} \quad (4.4)$$

on définit la matrice masse par :

$$M = \frac{1}{V} \left[\int_V N^T dV \right] \quad (4.5)$$

Le système à résoudre donné par l'équation (4.1) peut s'écrire :

$$\int_V \frac{\partial U}{\partial t} |_{i=I} dV = V_i \sum_{j=1}^{n_x} \mu_{ij} \frac{\partial U_j}{\partial t} \quad (4.6)$$

avec :

$$\mu_{ij} = \frac{1}{V_i} \int_{V_i} N_j(\mathbf{x}) dV \quad (4.7)$$

i varie de 1 jusqu'au nombre de cellules et j varie de 1 jusqu'au nombre de cellules voisines à la cellule considérée (cellule I).

En utilisant le développement de Taylor sur la fonction de forme :

$$\begin{aligned} \mu_{ij} = \frac{1}{V_i} \left[\int_V N_j(\mathbf{x}_i) + (x - x_i) \frac{\partial N_j(\mathbf{x}_i)}{\partial x} + (y - y_i) \frac{\partial N_j(\mathbf{x}_i)}{\partial y} + (x - x_i)(y - y_i) \frac{\partial^2 N_j(\mathbf{x}_i)}{\partial x \partial y} + \right. \\ \left. \frac{1}{2}(x - x_i)^2 \frac{\partial^2 N_j(\mathbf{x}_i)}{\partial x^2} + \frac{1}{2}(y - y_i)^2 \frac{\partial^2 N_j(\mathbf{x}_i)}{\partial y^2} + \dots \right] dV \end{aligned} \quad (4.8)$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \mu_{ij} = N_j(\mathbf{x}_i) + \frac{1}{V_i} \left[I_x \frac{\partial N_j(\mathbf{x}_i)}{\partial x} + I_y \frac{\partial N_j(\mathbf{x}_i)}{\partial y} + I_{xy} \frac{\partial^2 N_j(\mathbf{x}_i)}{\partial x \partial y} + \frac{1}{2} I_{x^2} \frac{\partial^2 N_j(\mathbf{x}_i)}{\partial x^2} + \right. \\ \left. \frac{1}{2} I_{y^2} \frac{\partial^2 N_j(\mathbf{x}_i)}{\partial y^2} + \dots \right] dV \end{aligned} \quad (4.9)$$

nous proposons une forme générale de l'équation (4.9) comme suit :

$$\mu_{ij} = N_j(\mathbf{x}_i) + \frac{1}{V_i} \sum_{\alpha=1}^{\infty} \sum_{\beta=1}^{\alpha} \frac{1}{\beta!(\alpha-\beta)!} I_{x^{\alpha-\beta}y^{\beta}} \frac{\partial^{\alpha} N_j(\mathbf{x}_i)}{\partial x^{(\alpha-\beta)} \partial y^{\beta}} \quad (4.10)$$

Avec :

$$I_{x^{\alpha}y^{\beta}} = \int_{V_i} (x - x_i)^{\alpha} (y - y_i)^{\beta} dV \quad (4.11)$$

4.1.1 Test de cohérence pour la formulation de la matrice masse

L'une des propriétés de la fonction de forme sur un support $\Omega_{\mathbf{x}}$ donné est : $\sum_{j=1}^{n_x} N_j(\mathbf{x}) = 1$. Si on appelle μ_{d_i} la somme des éléments de la matrice masse dans un support centré sur i , dans ce cas :

$$\begin{aligned}\mu_{d_i} &= \sum_{j=1}^{n_x} \mu_{ij} = \sum_{j=1}^{n_x} \frac{1}{V} \int_{V_i} N_j(\mathbf{x}) dV \\ &= \frac{1}{V} \int_{V_i} \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{n_x} N_j(\mathbf{x}) \right)}_{=1} dV = 1\end{aligned}\quad (4.12)$$

L'équation (4.12) peut être considérée comme propriété de la matrice masse obtenue par la fonction de forme basée sur la méthode MLS, ceci est un excellent test de consistance de l'équation (4.10)

4.2 Méthodes itératives de type Newton-Krylov

Les méthodes explicites utilisées précédemment pour les systèmes différentiels ordinaires ne sont pas adaptées aux systèmes algébro-différentiels (4.1) auxquels nous sommes confrontés. Il est impératif avant tout d'utiliser une méthode numérique implicite. Ce type de méthode possède, dans sa formulation, un bouclage numérique qui est nécessaire pour appréhender les problèmes algébro-différentiels.

On trouve dans la littérature trois grandes familles de méthodes numériques qui font progresser la solution d'un pas de temps à l'autre : les méthodes BDF (Backward Differentiation Formula), les méthodes de Runge-Kutta implicites et les méthodes Gear.

Selon Bernan et autres [112], parmi ces trois méthodes, la plus populaire c'est les BDF qui reposent sur l'approximation suivante de la dérivée des variables à intégrer à l'instant t_n :

$$[\dot{U}(t_n)] = \frac{1}{h} \sum_{i=0}^q \alpha_{n,i} [U_{n-i}] \quad (4.13)$$

Avec :

q ordre de la méthode,

h pas d'intégration ($t_{n+1} - t_n$),

n indice représentant l'instant auquel sont calculées les variables.

Les coefficients $\alpha_{n,i}$ dépendent du pas d'intégration et de l'ordre de la méthode. Ces méthodes remplacent, dans le système d'équations, la dérivée des variables à intégrer par l'expression discrétisée. Ensuite, le système algébrique obtenu où les inconnues sont $[U_n]$ est résolu par une méthode du type Newton.

L'application de la méthode BDF (4.13) à nos équations algébro-différentiels (Differential Algebraic Equations DAE) (4.1) résulte en un système algébrique non linéaire à résoudre pour chaque étape :

$$G(U_n) = F\left(t_n, U_n, \frac{[M]}{h} \sum_{i=0}^q \alpha_{n,i} [U_{n-i}]\right) = 0 \quad (4.14)$$

En utilisant une méthode de Newton pour la résolution du système (4.14), nous arrivons à un système linéaire pour chaque Newton - correction de la forme :

$$J[U_{n(m+1)} - U_{n(m)}] = -G(U_{n(m)}) \quad (4.15)$$

Avec $U_{n(m)}$ la m-ième approximation de U_n

J est le Jacobien de F , qui dans notre cas est approximé par :

$$J = \frac{\partial G}{\partial U} = \frac{\partial F}{\partial U} + \alpha \frac{\partial F}{\partial \dot{U}} \quad (4.16)$$

Avec $\alpha = \alpha_{n,0}/h_n$.

Dans une approche classique, on doit construire et stocker la matrice Jacobienne J , généralement assez imposante et creuse, ce qui pose d'énormes problèmes au niveau des calculateurs.

Il est possible de remédier à ce problème en utilisant une méthode de Newton-Krylov [113]. Il s'agit d'une méthode de Newton dans laquelle les systèmes linéaires sont résolus par une méthode itérative, plus souvent : GMRES [114] (Generalized Minimal Résidual), BiCGSTAB[115](Bi-Conjugate Gradient Stabilized) ou TFQMR[116] (Transpose- Free Quasi-Minimal Residual). Ces méthodes, aussi appelées "Jacobian free" dans la littérature anglophone, demandent seulement le produit Jacobien-vecteur sans stocker la matrice Jacobienne :

$$J(U^{(n)})v = \frac{[F(t, U + \sigma v, \dot{U} + \alpha \sigma v) - F(t, U, \dot{U})]}{\sigma}$$

Avec : $\sigma = \|v\|$

Ce produit peut être aussi obtenue par une méthode différence finie :

$$J(U^{(n)})v \approx \frac{F(U^{(n)} + \varepsilon v) - F(U^{(n)})}{\varepsilon} \quad (4.17)$$

Ces méthodes itératives se sont montrées efficaces dans de nombreuses applications [117], [118], [119] et ont l'avantage de traiter des maillages fortement non structurés avec des matrices qui peuvent ne pas être symétriques mais cette efficacité est fortement liée aux choix du preconditionneur de la matrice qui joue un rôle fondamental dans la vitesse de convergence d'une méthode de Krylov .

En général, le Jacobien J est non symétrique et chaque étape de Newton nécessite la résolution du système linéaire non symétrique suivante :

$$J \cdot \delta = b \quad (4.18)$$

Notons δ^* la solution de l'équation (4.18) et δ_0 est une première estimation de δ .

Et comme cela est énoncé, on considère une méthode itérative fondée sur une recherche de la solution en restriction à un sous-espace de Krylov, cette méthode cherche une approximation de la solution δ^* du système (4.18) sur $\delta_0 + K(J, r_0, k)$, où $K(J, r_0, k)$ est un sous-espace de Krylov.

Parmi plusieurs solveurs qui traitent des équations algébriques, IDA (Implicit Differential Algebraic solver) [120] qui est une variante du célèbre code DASPK [121, 122], semble être le mieux adapté à notre étude. En effet, ce code est basé sur une méthode de type Newton-Krylov, à savoir, la méthode BDF (Backward Differentiation Formula) dans laquelle les systèmes linéaires sont résolus par une des trois méthodes citées précédemment (GMRES, BiCGSTAB, TFQMR). Comme caractéristique principale de ce code, la méthode d'intégration de temps avec un ordre variable (de 1 à 5) et une stratégie de critères de sélection d'un pas de temps et de l'ordre pour chaque étape afin de décider du rejet ou de l'acceptation d'une étape.

Préconditionneurs

Préconditionner un système linéaire, c'est le remplacer par un système équivalent avec une matrice de conditionnement plus petite, de sorte que la convergence soit plus rapide. Le principe de base consiste à remplacer le système (4.18) par :

$$P^{-1}J\delta = P^{-1}b \quad (4.19)$$

où P est la matrice de preconditionnement associée au système preconditionné (4.19). On parlera alors de preconditionnement à gauche.

Il existe aussi un preconditionnement à droite :

$$JP^{-1}\tilde{\delta} = b \quad (4.20)$$

avec $\delta = P^{-1}\tilde{\delta}$.

La troisième option c'est un preconditionnement à gauche et à droite. Il s'agira d'avoir deux matrices inversibles P_G et P_D et d'écrire le système (4.18) sous la forme

$$P_G^{-1}JP_D^{-1}\tilde{\delta} = P_G^{-1}b \quad (4.21)$$

avec $\delta = P_D^{-1}\tilde{\delta}$.

Plusieurs techniques de préconditionnement se combinent avec les solveurs basés sur des méthodes itératives, l'une des façons les plus simples de définir le préconditionneur est la factorisation incomplète de la matrice J , cela résulte à une décomposition de la forme $R = J - LU$, avec L (matrice triangulaire inférieure à diagonale unité) et U (matrice triangulaire supérieure) ont la même non-zéro structure, R est le résiduel de la factorisation.

Dans notre cas, seul un préconditionnement à gauche est autorisé par le code IDA [120] et pour notre étude, on s'est servi de la factorisation incomplète de degré zéro (notée ILU(0)) pour laquelle les valeurs de la matrice résidu R sont nulles à tous les endroits où la matrice J est non nulle, elle consiste à chercher ces deux matrices L et U telles que L et U soient nulles à tous les endroits où J est nulle. Un algorithme général pour construire une factorisation incomplète est d'effectuer une élimination de Gauss comme suit : à chaque étape k , calculer $m_{ik} = J_{ik}^{(k)} / J_{kk}^{(k)}$ seulement si $J_{kk} \neq 0$ pour $i = k + 1, \dots, n$ (n étant la dimension de la matrice J). Calculer alors $J_{ij}^{k(+1)}$ pour $j = k + 1, \dots, n$ seulement si $J_{ij} \neq 0$.

Cette factorisation peut s'effectuer éventuellement avec plusieurs niveaux de remplissage p $ILU - p$, un solveur de type Newton-GMRES combiné avec ILU-préconditionné a déjà été utilisé pour le calcul des écoulements aérodynamiques subsoniques, transsoniques et supersoniques en 2ème, 3ème et 4ème ordres de précision [117] [123].

4.2.1 Méthode GMRES préconditionnée (Generalized Minimum Residual Method)

Considérons le système linéaire (4.18) préconditionné par la matrice P donnée par l'équation (4.19)

Par définition, l'algorithme GMRES préconditionné est la méthode GMRES [114] appliquée au système (4.19)

Etant donné un vecteur u_0 , on définit le résidu préconditionné par :

$$r_0 = P^{-1}(b - J\delta_0).$$

En présence de préconditionnement, l'espace de Krylov correspond à :

$$K_k = \kappa_k(P^{-1}J, r_0) = [r_0, P^{-1}Jr_0, (P^{-1}J)^2r_0, \dots, (P^{-1}J)^{k-1}r_0].$$

L'algorithme GMRES appliqué à un système préconditionné, consiste à chercher, à l'étape k , une approximation δ_k de la solution dans $\delta_0 + K_k$ minimisant le résidu préconditionné,

$$\|r_k\| = \|P^{-1}(b - J(\delta_k))\| = \min_{v \in K_k} \|P^{-1}(b - J(\delta_0 + v))\|$$

Algorithme GMRES préconditionné (avec redémarrage)

1. Evaluer le résidu initial $r_0 = P^{-1}(b - J\delta_0)$, $\beta = \|r_0\|_2$ et poser $v_1 = r_0/\beta$.
2. Pour $j = 1, \dots, k$, faire :
3. Calculer $w = P^{-1}Jv_j$
4. Pour $i = 1, \dots, j$, faire :
5. $h_{ij} = (w, v_i)$
6. $w = w - h_{ij}v_j$
7. Fin de la boucle sur i
8. Calculer $h_{j+1,j} = \|w\|_2$ et $v_{j+1} = w/h_{j+1,j}$
9. Fin de la boucle sur j
10. Poser $V_k = [v_1, \dots, v_k]$ et $\bar{H}_k = [h_{i,j}]$ la matrice de dimension $(k+1) \times (k)$
11. Résoudre le problème de moindre carrés $\min_{y \in \mathbb{R}^k} \|\beta e_1 - \bar{H}_k y\|_2$ et poser $\delta_k = \delta_0 + V_k y_k$
12. Si le critère de convergence n'est pas satisfait, poser $\delta_0 = \delta_k$ et revenir à l'étape 1

4.2.2 BICGSTAB (Bi-conjugate Gradient Stabilized)

Plusieurs tentatives ont été faites afin d'étendre le succès de l'algorithme du gradient conjugué aux cas non symétriques. Parmi ces extensions : le Bi-conjugate Gradient BCG [124], [125]. Cette méthode fait intervenir la matrice J^T , ce qui implique une augmentation du nombre du produit matrice-vecteur, engendrant une convergence erratique (imprévisible). Afin de remédier à ces inconvénients, Sonneveld [126] a proposé la méthode CGS (Conjugate Gradient-Squared) qui calcule le carré du BCG polynôme sans faire appel à J^T . Donc lorsque BCG converge, CGS converge plus vite, mais cette méthode ne résout pas le comportement erratique de la convergence [127] [115].

Dans le souci d'améliorer la convergence de BCG, VAN DER VORST [115] a introduit le Bi-CGSSTAB, cette méthode a été définie par la suite par Gutknecht [128] afin de manipuler des matrices plus complexes et obtenir une meilleure convergence.

4.2.3 TFQMR (Transpose Free Quasi-Minimal Residual Method)

En 1993, Freund [116] propose une nouvelle version de CGS appelée TFQMR, qui quasi minimise le résiduel par les vecteurs générés par les itérations de la méthode CGS. Cette méthode présente un coût de calcul plus faible et un meilleur comportement de la convergence, par contre la vitesse de convergence reste la même.

4.3 Critère de contrôle d'erreur

L'un des caractères de la méthode décrite précédemment pour la résolution de notre problème avec plus d'efficacité et de fiabilité est l'adaptation d'un pas de temps et un ordre de la méthode variables.

Dans cette section, une stratégie de critère de sélection d'un pas de temps et de l'ordre pour chaque étape suivante telle que présentée dans la code IDA [120] est décrite afin de décider du rejet ou de l'acceptation d'une étape.

Il existe deux sources d'erreurs qui résument cette stratégie :

La première erreur est celle de la troncature locale LTE, et la seconde est l'erreur d'interpolation [112].

Dans le processus du contrôle d'erreurs, on utilise la norme $\| \cdot \|_{WRMS}$ (Weighted Root-Mean Square), en fixant une tolérance absolue ($ATOL$) et une tolérance relative ($RTOL$), la tolérance $\frac{1}{W_i}$ représente une tolérance dans la composante U_i , donnée par :

$$W_i = \frac{1}{RTOL \cdot |U_i| + ATOL_i}$$

(un vecteur dont la norme est de 1 est considérée comme petite)

Le critère d'arrêt pour les itérations (Newton iteration) est assuré pour chaque itération $m > 1$ par la condition du taux de convergence linéaire suivante :

$$R > 0,9$$

Le test de convergence à la m-ième itération est donc :

$$S \| U_{n(m)} - U_{n(m-1)} \| < 0,33$$

Avec

$$S = R/[R - 1]$$

$$R = \frac{U_{n(m)} - U_{n(m-1)}}{U_{n(1)} - U_{n(0)}}$$

Où $U_{n(m)} - U_{n(m-1)}$ est la correction à l'itération $m = 1, 2, \dots$

au cours de l'intégration du système, l'erreur de troncature locale LTE est estimée à chaque n-ième pas de temps et satisfait à la condition suivante :

$$\| LTE \|_{WRMS} \leq 1$$

LTE varie d'une manière asymptotique avec h^{q+1} au pas de temps h et à l'ordre q , de la même façon que la différence prédicteur-correcteur $\Delta_n \equiv U_n - U_{n(0)}$, donc il existe une constante C telle que :

$$LTE = C\Delta_n + \theta(h^{q+2})$$

Donc la norme de LTE est estimée par $C \parallel \Delta_n \parallel$

A cette erreur de troncature s'ajoute l'erreur d'interpolation qui doit être bornée par 1 [112]. Le premier terme de la norme de cette erreur est borné par $\bar{C} \parallel \Delta_n \parallel$ pour une autre constante $\bar{C}$, ce qui nous conduit à définir le **test d'erreur locale** par :

$$\max\{|C|, \bar{C}\} \parallel \Delta_n \parallel \leq 1. \quad (4.22)$$

Une fois ces deux critères d'erreur satisfaits, se pose le problème de l'ordre qui sera implémenté à l'étape suivante.

A chaque ordre $\acute{q}$ égal à q , à $q - 1$ si $(q > 1)$, à $q - 2$ si $(q > 2)$, ou à $q + 1$ si $(q < 5)$, il existe des constantes $C(\acute{q})$ telles que l'erreur de troncature à l'ordre $\acute{q}$ satisfait la relation suivante :

$$LTE(\acute{q}) = C(\acute{q}) \parallel \phi(\acute{q} + 1) \parallel + \theta(h^{\acute{q}+2})$$

Avec $\phi(k)$, la différence divisée modifiée de l'ordre k . Donc l'erreur de troncature locale est estimée par $ELTE(\acute{q}) = C(\acute{q}) \parallel \phi(\acute{q} + 1) \parallel$ pour la sélection du pas de temps.

Dans cette étude, le choix de l'ordre est basé sur la nécessité que les normes scalaires des dérivées $\parallel h^k U^{(k)} \parallel$ soient monotones décroissantes avec k , pour k proche de q . Cette norme est à nouveau estimée par :

$$\parallel h^{\acute{q}+1} U^{\acute{q}+1} \parallel \approx T(\acute{q}) \equiv (\acute{q} + 1)ELTE(\acute{q})$$

la sélection de l'étape/ordre commence par le test de monotonicité qui se fait avant même le test de d'erreur locale ; à savoir, l'ordre est remis à $\acute{q} = q - 1$ dans les cas où :

- si $q = 2$ et $T(1) \leq T(2)/2$,
- si $q > 2$ et $\max\{T(q - 1), T(q - 2)\} \leq T(q)$.

Sinon $\acute{q} = q$. Ensuite le test d'erreur locale (4.22) est effectué. Dans le cas où ce test est négatif, l'étape est à refaire à l'ordre $q \leftarrow \acute{q}$, le dernier est basé sur le h^{q+1} comportement asymptotique de $ELTE(q)$ avec un facteur de sécurité η donné par :

$$\eta = \frac{\acute{h}}{h} = 0,9/[2ELTE(q)]^{1/(q+1)}$$

La valeur de η est ajustée entre 0,25 et 0,9 avant de mettre $h \leftarrow \acute{h} = \eta h$.

Si le test est négatif pour la seconde fois alors $\eta = 0,25$, pour le 3ème et les échecs précédents : $q = 1$ et $\eta = 0,25$.

Une fois que le test d'erreur est satisfaisant, le pas/ordre peut être ajusté pour l'étape suivante :

Pas de changement dans le cas où :

- * $\dot{q} = q - 1$ depuis le premier test
- * $q = 5$,
- * q a augmenté lors du pas précédent.

Dans d'autres cas :

Si la dernière $q + 1$ étape est considérée à un ordre constant $q < 5$ et un pas de temps constant, dans ce cas l'ordre est initialisé à $q + 1$.

Si $q = 1$ alors :

- * q est initialisé à 2 si $T(2) < T(1)/2$

Si $q > 1$ alors :

- * q est initialisé à $q - 1$ si $T(q - 1) \leq \min\{T(q), T(q + 1)\}$;
- * sinon q est initialisé à $q + 1$ si $T(q + 1) < T(q)$;
- * q reste inchangé dans d'autre cas, donc $T(q - 1) < T(q) \leq T(q + 1)$.

Dans chaque cas, le nouveau pas de temps $\dot{h}$ est :

$$\eta = \frac{\dot{h}}{h} = 1/[2ELTE(q)]^{1/(q+1)}.$$

La valeur de η est ajustée selon les cas suivants :

- a)** Si $\eta > 2$, alors η est initialisé à 2
- b)** Si $\eta \leq 1$, alors η est limité par : $0,5 \leq \eta \leq 0,9$
- c)** si $1 < \eta < 2$, alors η est initialisé à 1.

En dernière étape, h est initialisé à $\dot{h} = \eta h$.

4.4 Validation des calculs implicites (avec matrice masse)

Avant de passer à la partie validation, certains points techniques concernant les aspects de mise en œuvre devraient être discutés. Il est bien connu que si l'on veut préserver l'ordre de précision du schéma volumes finis, toutes les intégrations numériques internes intermédiaires où des différentielles doivent être estimées au moins avec le même ordre d'exactitude. De ce point de vue, nous avons utilisé pour cette étude, les approximations suivantes :

- les flux numériques sont donnés par solver de Roe.
- L'intégration numérique des flux dans l'équation (2.10) est approximée par la règle de Weddle d'ordre 8 [108]
- $I_{x^j+i_y^i}$ est calculé en utilisant une méthode (symmetric quadrature) de Wandzura [100] d'ordre 7 dans les équations (2.56) et (4.10)
- La limite supérieure de la somme dans l'équation (4.10) est arrêtée à l'ordre 7, En conséquence, pour l'estimation des éléments de la matrice masse, les dérivées de la fonction de forme sont poussées jusqu'au 7ème ordre, donc un minimum de $(7 + 1) \times (7 + 2)/2 = 36$ cellules sont utilisés dans le stencil (pochoir) qui entourent la cellule active.

4.4.1 Propagation d'un pulse (impulsion gaussienne)

Ce cas test traite de la propagation d'un pulse (impulsion gaussienne) dans un écoulement uniforme, le domaine est d'une longueur et d'une largeur adimensionnelles sur un maillage (100x100).

Le pulse est inséré au centre du domaine et généré par les conditions initiales suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta\rho = \exp\left(-\ln(2)\frac{(x-x_s)^2+(y-y_s)^2}{9}\right) \\ \delta u = 0 \\ \delta v = 0 \\ \delta p = \exp\left(-\ln(2)\frac{(x-x_s)^2+(y-y_s)^2}{9}\right) \end{array} \right. \quad (4.23)$$

Le tableau suivant montre le taux de convergence de notre méthode pour la solution de pression à $t = 25$.

Contrairement aux calculs explicites (voir tableau 4.1), les calculs implicites avec matrice masse (tableau 4.1 et la figure 4.2) sont beaucoup plus exactes, ici l'ordre de la méthode est conservé.

Grille	$L_2e - o(2)$	order	$L_2e - o(3)$	order	$L_2e - o(4)$	order	$L_2e - o(5)$	order
2020	5,321E-03	-	5,888E-03	-	1,914E-03	-	1,347E-03	-
3588	3,064E-03	1,92	2,458E-03	3,04	5,842E-04	4,13	3,216E-04	4,99
4548	2,405E-03	2,04	1,740E-03	2,91	3,601E-04	4,08	1,822E-04	4,79
8102	1,314E-03	2,09	7,349E-04	2,99	1,171E-04	3,89	3,827E-05	5,41
15470	5,989E-04	2,43	3,017E-04	2,75	3,371E-05	3,85	7,414E-06	5,08

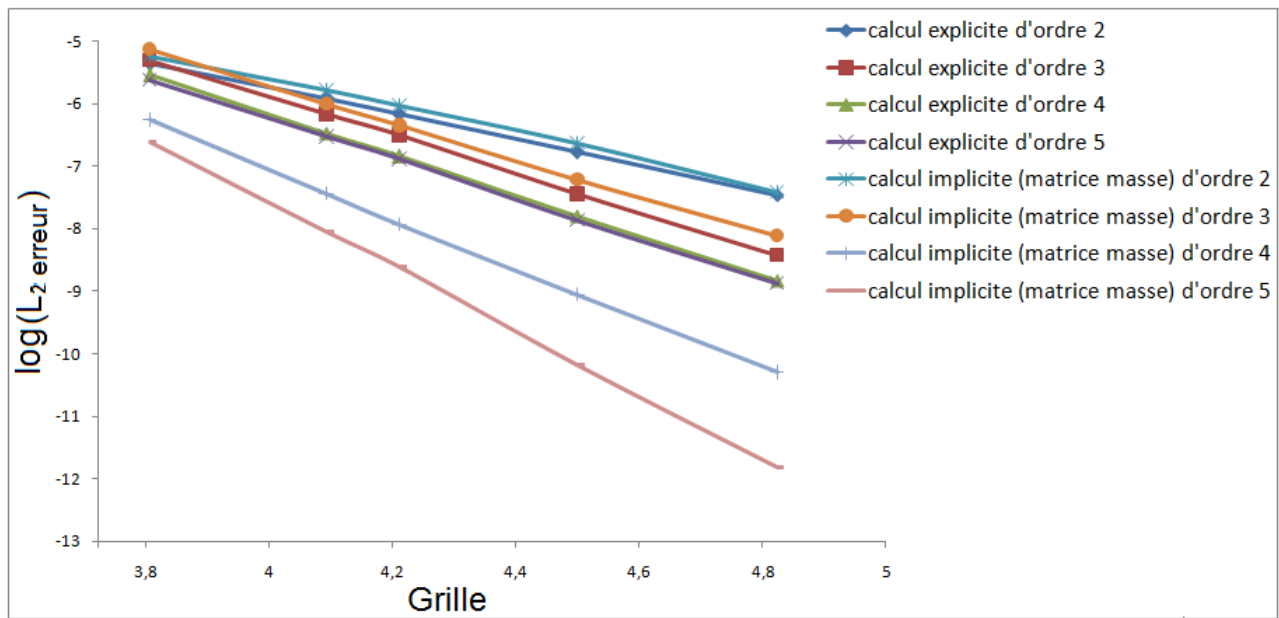
Tableau 4.1 – Taux de convergence pour la solution de pression à $t = 25$ 

FIGURE 4.2 – Taux de convergence de la propagation d'un pulse pour des calculs avec et sans matrice masse.

4.4.2 Propagation d'une source monopolaire en présence d'un écoulement uniforme

Comme ce fut le cas lors des calculs explicites, une source monopolaire est ici implémentée par un vecteur S dans l'équation (3.17) [16].

Cette source est générée au centre du domaine en présence d'un écoulement uniforme horizontal de vitesse à Mach $M = 0,5$, elle est définie :

$$S_p = \frac{1}{2} \exp \left(-\ln(2) \frac{(x - x_s)^2 + (y - y_s)^2}{2} \right) \sin(\omega t) \times [1, 0, 0, 1]^T \quad (4.24)$$

avec ω la fréquence angulaire donnée par : $\omega = 2\pi/30$. La longueur d'onde $\lambda = 30$ unités.

$$S_p \text{ est adimensionné par : } \begin{cases} \rho_\infty c_\infty / \Delta x \\ 0 \\ 0 \\ \rho_\infty c_\infty^3 / \Delta x \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \rho_\infty = 1 \\ p_\infty = \frac{1}{\gamma_\infty} \\ \gamma_\infty = 1,4 \\ c_\infty = \sqrt{\frac{\gamma_\infty p_\infty}{\rho_\infty}} \end{cases}$$

Le domaine de calcul est un carré de 200 unités de chaque côté ($X = \pm 100$ et $Y = \pm 100$). Afin d'éviter les réflexions parasites aux frontières, une couche absorbante (zone éponge) construite avec une grille non structurée a été ajoutée et placée autour du domaine de calcul jusqu'à $X = \pm 300$ et $Y = \pm 300$.

La grille utilisée pour la résolution de ce problème est montrée par la figure (4.5), pour construire cette grille, 800 nœuds régulièrement espacés à la périphérie du domaine de calcul sont utilisés et 160 nœuds à la périphérie des frontières extérieures. Les paramètres de filtre de forme de la couche absorbante sont $\kappa_x = \kappa_y = 8$ [2].

Un calcul d'ordre 5 est utilisé pour cet exemple. Deux ondes acoustiques se propagent en amont et en aval de la source et en raison de l'effet de l'écoulement moyen, la longueur d'onde apparente est modifiée et elle est différente en amont ($\lambda_1 = (1 - M_x)\lambda$) et en aval ($\lambda_2 = (1 + M_x)\lambda$) de la source.

Le profil de pression le long de l'axe $Y = 0$ au temps $t = 270$ est reproduit dans la figure (4.3) et dans la figure (4.4), les pressions isocontours pour les différents temps t adimensionnels sont affichés.

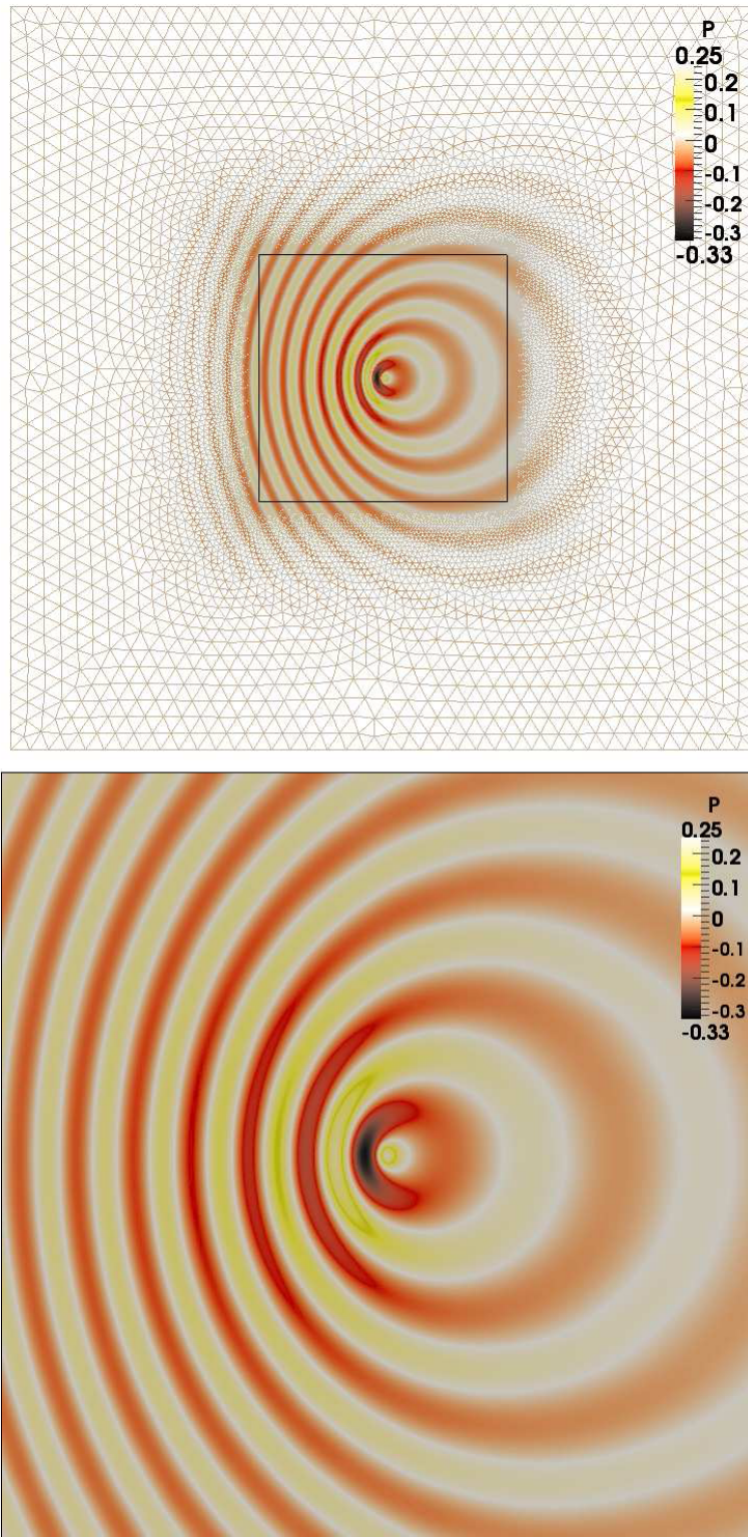


FIGURE 4.3 – Pression instantanée de la propagation d’une source monopolaire dans un écoulement uniforme horizontal, $M=0,5$, maillage 200×200 , $t = 270$.

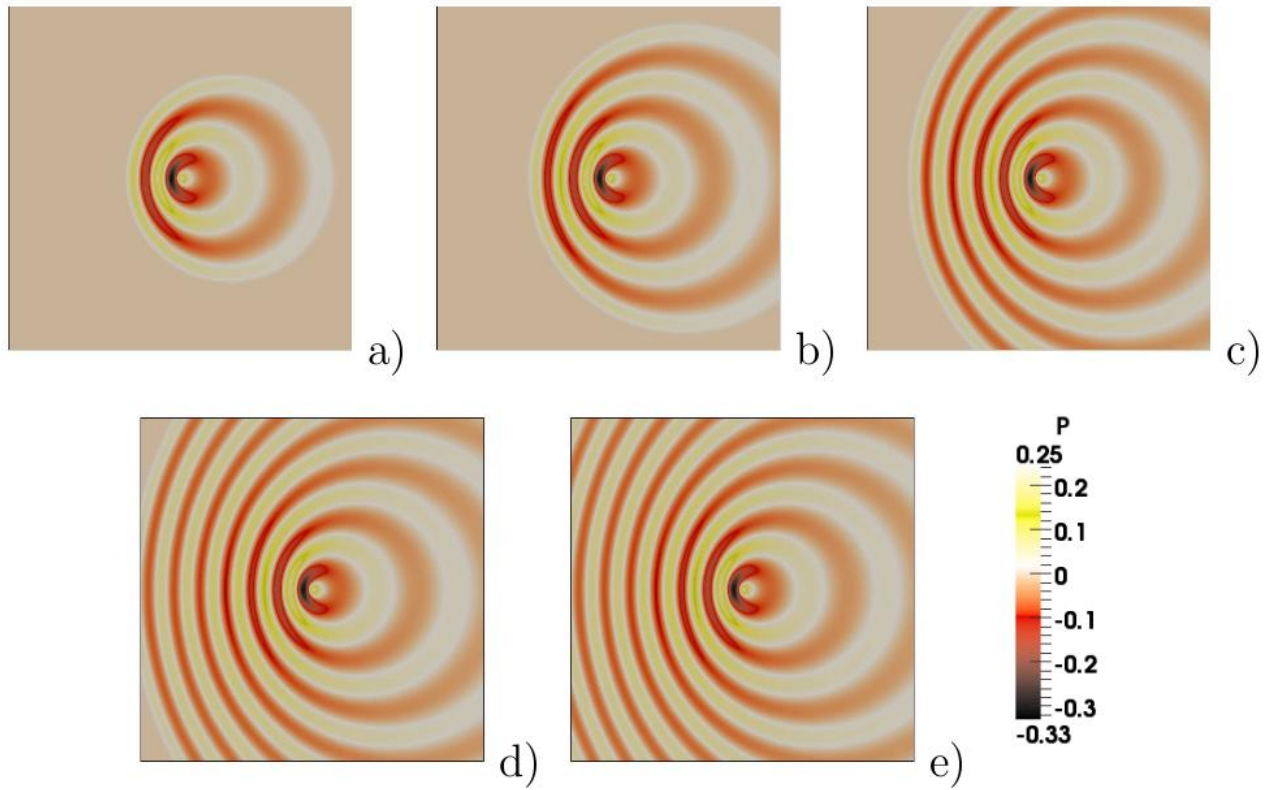


FIGURE 4.4 – Pression instantanée de la propagation d’une source monopolaire dans un écoulement uniforme horizontal, maillage 200×200 , $M=0,5$, a) $t=60$, b) $t=90$, c) $t=150$, d) $t=210$, e) $t=270$.

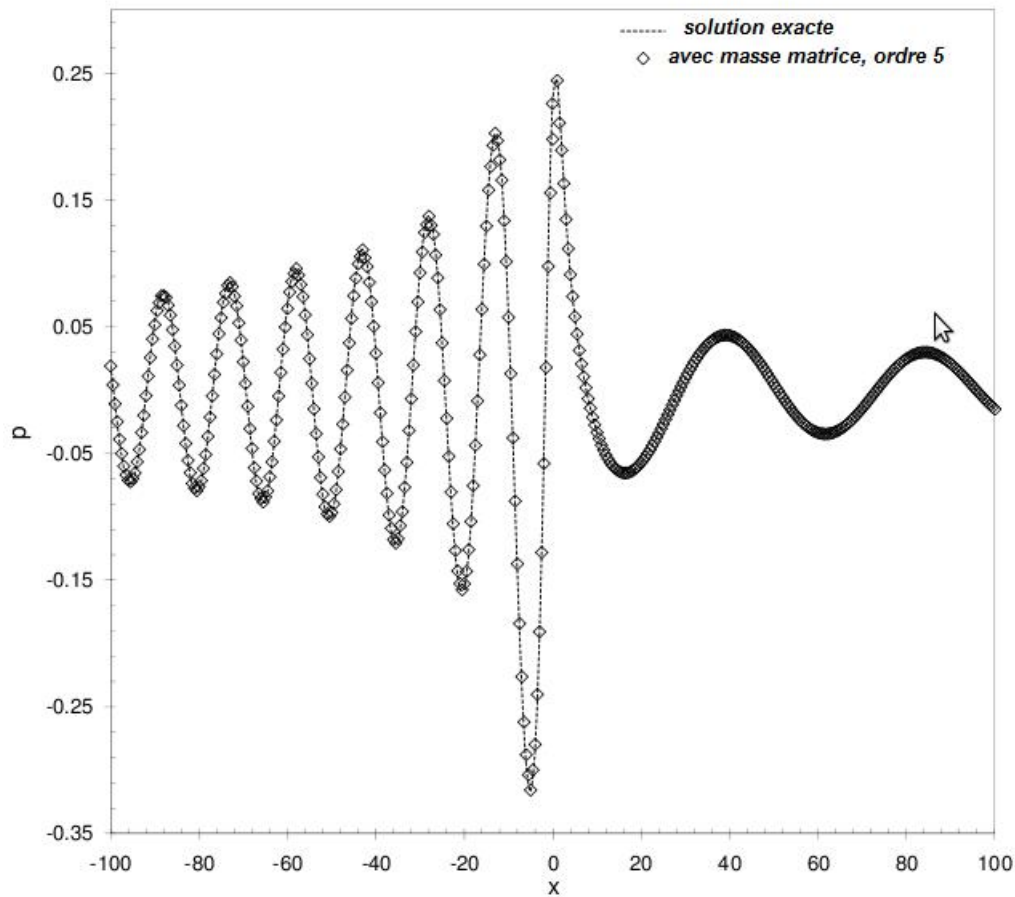


FIGURE 4.5 – Evolution de la pression instantanée le long de l'axe (X), maillage (200 x 200), $M=0,5$.

Afin de vérifier la stabilité des conditions aux limites, nous laissons les calculs se poursuivre jusqu'à 180 périodes, ce temps correspond au temps que va mettre l'onde pour atteindre les frontières extérieures. En comparant le champ de pression avec celui correspondant à $t = 270$ (9 périodes), on constate qu'il n'y a pas de changement dans la solution. L'onde acoustique est complètement dissipée par la zone tampon (figure 4.3).

4.4.3 Problème de diffraction du son entre deux cylindres (Two cylinders scattering problem)

Ce cas peut être considéré comme l'un des problèmes les plus difficiles dans la validation des calculs en CAA. Il s'agit de la diffraction du son généré par une source acoustique dépendante du temps par deux cylindres circulaires. Ce problème est présenté dans [129] comme fournissant un critère rigoureux de la capacité des codes d'ordres élevés en CAA pour gérer des géométries complexes.

La source est localisée à $x_0 = y_0 = 0$, elle est définie par :

$$S_p = \exp \left(-\ln(2) \frac{(x - x_s)^2 + (y - y_s)^2}{b^2} \right) \sin(\omega t) \times [1, 0, 0, 1]^T \quad (4.25)$$

Avec ω , la fréquence angulaire $\omega = 8\pi$, $b = 0,2$, $T = 0,25$ et la longueur d'onde $\lambda = 0,25$.

$$S_p \text{ est adimensionné par : } \begin{cases} \rho_\infty c_\infty / \Delta x \\ 0 \\ 0 \\ \rho_\infty c_\infty^3 / \Delta x \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \rho_\infty = 1 \\ p_\infty = \frac{1}{\gamma_\infty} \\ \gamma_\infty = 1,4 \\ c_\infty = \sqrt{\frac{\gamma_\infty p_\infty}{\rho_\infty}} \end{cases}$$

Le domaine de calcul global, y compris la zone tampon (2 unités d'épaisseur), est un rectangle de dimension 22 x 12, les deux cylindres ont un diamètre : $D_{cylindre1} = 1$ et $D_{cylindre2} = 0,5$, elles sont situées respectivement à $(-4, 0)$ et $(4, 0)$ de la source, voir la figure ci-dessous (4.6).

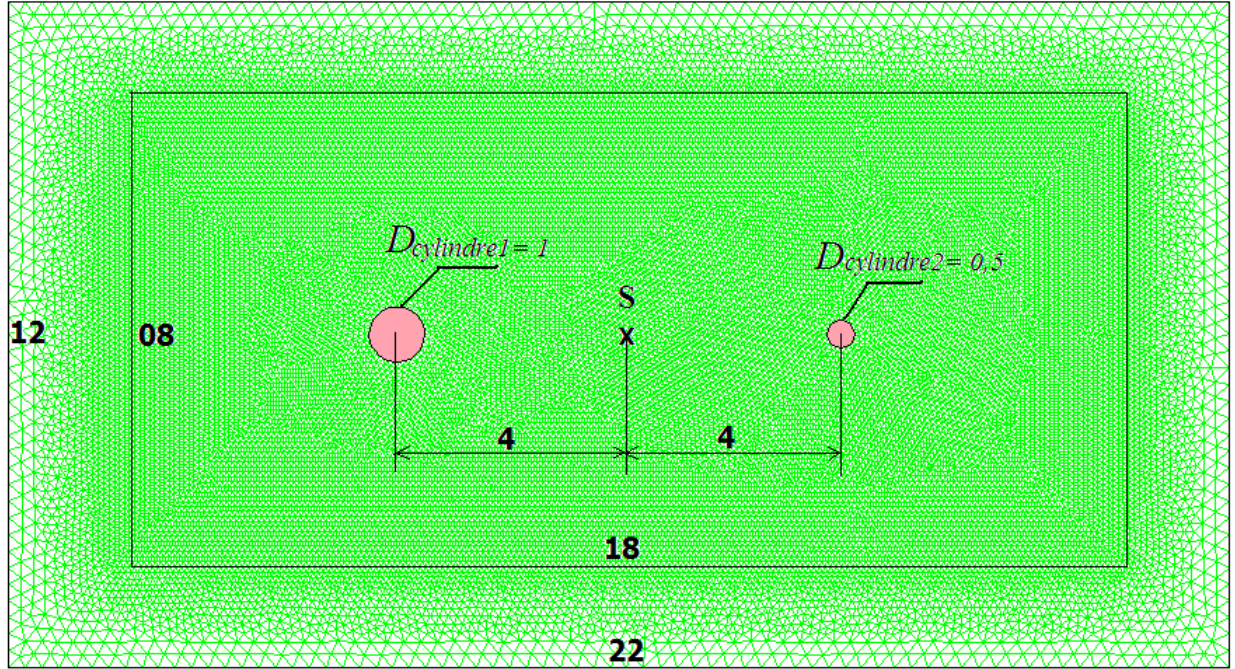


FIGURE 4.6 – problème de diffraction du son entre deux cylindres.

Pour éviter les réflexions parasites causées par le front de l'onde émise pendant les premiers temps, la source est rapportée aux 4 premières périodes à l'aide d'une fonction cubique $\phi(t)$ donnée par :

$$\phi(t) = \min \left(1, \left(\frac{t}{16T} \right)^3 \right) \quad (4.26)$$

La grille est faite de manière à obtenir près de 10 cellules par longueur d'onde. Un pas de temps constant de 0,001 est utilisé avec 40000 étapes correspondant à 160 cycles. Un calcul d'ordre 5 (FV-MLS solveur avec matrice masse) est utilisé pour cet exemple.

Les valeurs efficaces des pressions effectivement calculées, notées P_{RMS} (Root Mean Square), sont calculées au cours des 16 dernières périodes sur les deux surfaces des deux cylindres et le long de la ligne ($y = 0$), elles sont comparées aux solutions analytiques, voir les figures (4.7 et 4.8).

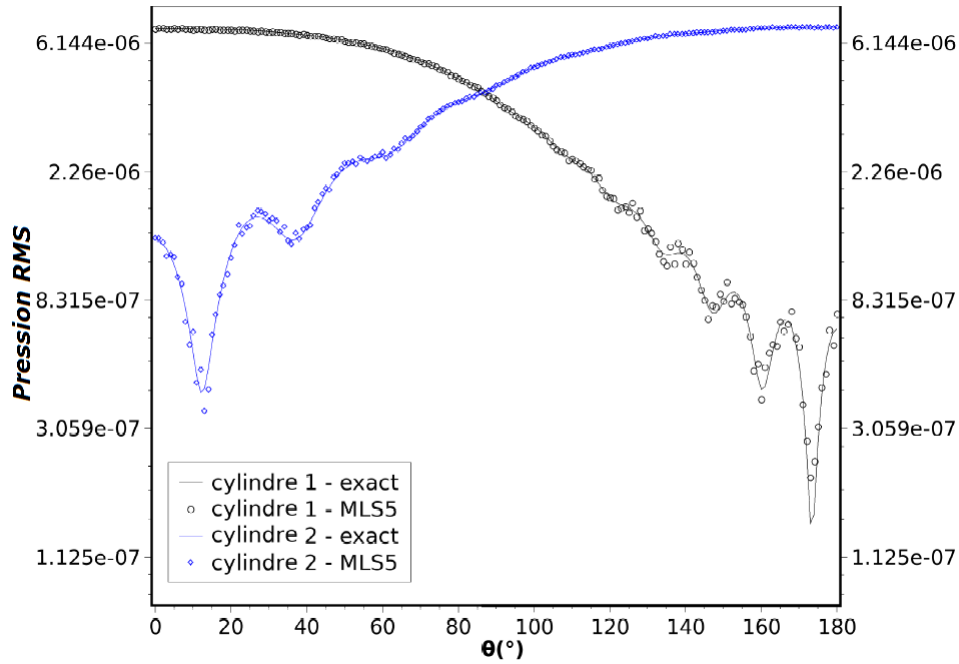


FIGURE 4.7 – La pression efficace le long des deux cylindres.

Avec cette grille de résolution, les figures (4.7 et 4.8) montrent, en général, une bonne correspondance entre les calculs et la solution exacte. Des écarts sont observés pour les valeurs des pressions efficaces inférieures à $2e-6$ (figure 4.7).

Dans la figure (figure 4.8), on observe aussi le même phénomène. L'interpolation spatiale de la pression efficace utilisée pour le post-traitement peut être la cause de ces écarts. En effet, la grille utilisée est non structurée et le solveur utilisé est basé sur un volume de contrôle centré sur la cellule, par conséquent, afin d'obtenir des données au niveau des nœuds ou d'un point arbitraire sur la grille nous avons besoin de localiser les cellules environnantes et de faire l'interpolation. Dans ce cas, nous employons, la méthode dite : inverse distance weighting interpolation.

$$U_p = \frac{\sum_{j=1}^{N_c} \frac{U_j}{d_j}}{\sum_{j=1}^{N_c} \frac{1}{d_j}} \quad (4.27)$$

où, U_p est la variable d'interpolation, U_j est la variable calculée, d_j est la distance entre le

point d'interpolation et le barycentre de cellules, N_c est le nombre des cellules environnantes. En utilisant une méthode d'interpolation plus précise devrait améliorer le résultat.

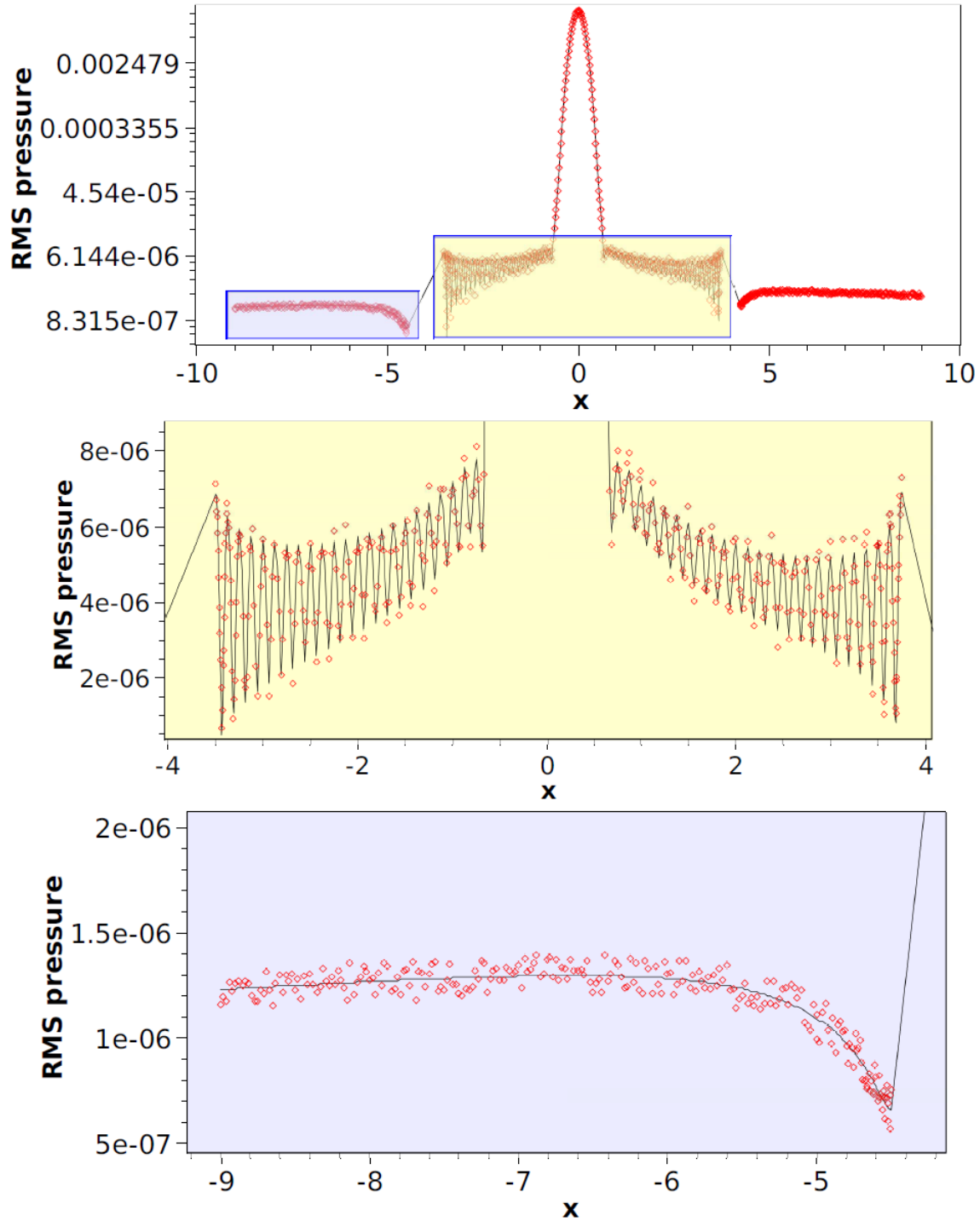


FIGURE 4.8 – La pression efficace le long de l'axe (X).

Application à la propagation des ondes acoustiques dans les turbomachines

Au cours des dernières années, une attention particulière a été accordée à l'étude des phénomènes instationnaires liés à la complexité des interactions au sein de l'interface rotor-stator de turbomachines. Nous trouvons dans la littérature de nombreuses études expérimentales et théoriques qui ont contribué à une meilleure compréhension de la nature des fluctuations des flux et le champ acoustique liées à ces interactions. Ils sont énumérés dans les œuvres de Khelladi [8]. Le ventilateur centrifuge fait partie des turbomachines qui ont été largement adoptées par les établissements publics et les industries électroniques en raison de leur grande capacité de débit massique et leur compacité, mais leur niveau sonore élevé constitue un critère important de sélection pour les manufacturiers.

Lorsque le régime d'écoulement est nettement subsonique, l'essentiel du bruit d'origine aérodynamique émis par une machine tournante est de nature dipolaire et provient des efforts instationnaires qui s'exercent sur les pales du rotor. Le bruit du ventilateur centrifuge est généralement dominé par des tonalités produites par le passage des pales. Dans ce contexte, le bruit de raies est associé aux efforts ayant la périodicité de la rotation. Ceci est une conséquence d'une forte interaction au niveau de l'interaction du rotor et des pales du diffuseur.

Les résultats obtenus par Khelladi [35], confirment l'importance de l'interaction entre la roue et le diffuseur. Cette interaction est à l'origine du bruit sonore rayonné par le ventilateur centrifuge qui correspond à la fréquence de passage des pales (Blade Passage Frequency) et ses harmoniques.

Ainsi notre étude théorique est scindée en deux parties, aérodynamique et aéroacoustique. L'approche aérodynamique est basée sur la résolution des équations de la conservation de quantité de mouvement pour la détermination des caractéristiques aérodynamiques instationnaires nécessaires aux calculs aéroacoustiques.

5.1 Description de la turbomachine étudiée

Les ventilateurs centrifuges constitués d'une roue, d'un diffuseur et d'un canal de retour, sont largement utilisés dans les appareils domestiques (électroménagers) tels que les aspirateurs. Même dans des encombrements réduits, grâce aux vitesses relativement élevées (environ 35000 tr/min) de ce type de machines, ils permettent de créer de fortes dépressions pour de faible débit.

L'écoulement interne fortement instationnaire et tridimensionnel, présente localement des vitesses pouvant atteindre 250 m/s , le faible rendement de ces machines (de l'ordre 30%) est principalement dû à la désorganisation de l'écoulement à l'interface rotor-diffuseur, à la jonction diffuseur-canal de retour [8, 130, 131].

Les caractéristiques aérodynamiques et géométriques de ce ventilateur sont données, respectivement, dans les tableaux 5.1 et 5.2.

Caractéristiques	Valeurs
Hauteur (H)	1300 (m)
Débit (Q)	$35 \times 10^{-3} (m^3 s^{-1})$
Vitesse de rotation (N)	34560 (tr/min)
Vitesse spécifique ($N_{sq} = \frac{N\sqrt{Q}}{H^{\frac{3}{4}}}$)	29

Tableau 5.1 – Caractéristiques aérodynamiques du ventilateur centrifuge

Description	Roue	Diffuseur
Rayon d'entrée d'aubage $R_e(mm)$	18	52, 7
Envergure de l'aubage à l'entrée $b_e(mm)$	13	6, 48
Angle d'entrée d'aubage $\beta_e(deg.)$	64	85
Angle d'inclinaison de l'arrêt d'entrée : $\theta_e(deg.)$	85, 8	0
Rayon de sortie d'aubage $R_s(mm)$	52	66, 1
Envergure de l'aubage à la sortie $b_s(mm)$	5, 4	8, 43
Angle de sortie d'aubage $\beta_s(deg.)$	64	71, 6
Angle d'inclinaison de l'arrêt de sortie : $\theta_s(deg.)$	0	0
Nombre de pales Z	9	17
Epaisseur de la pale $e(mm)$	0, 8	0, 9

Tableau 5.2 – Caractéristiques géométriques du ventilateur centrifuge

Pour les besoins de cette étude, on considère uniquement la roue et le diffuseur figure (5.1) . La roue, flasquée, est composée de 9 pales à angles d'aubages constants, le diffuseur qui a pour fonction de transformer l'énergie cinétique fournie par la roue en énergie de pression, est composé de 17 aubages caractérisés par une faible différence entre les rayons d'entrée et de sortie.

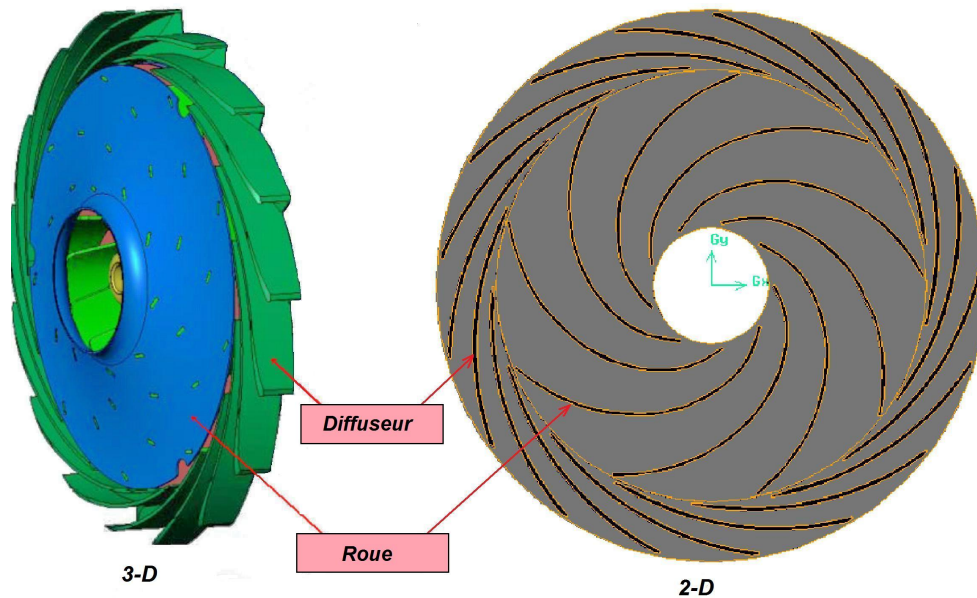


FIGURE 5.1 – Géométrie 2D, 3D du ventilateur utilisé.

5.2 Analyse aérodynamique de la turbomachine

Les simulations numériques ont été réalisées avec une méthode de volumes finis en utilisant le code Fluent [132] par une méthode RANS qui présente l'avantage d'être actuellement adaptée à la simulation des géométries complexes, elle donne une estimation satisfaisante des caractéristiques aérodynamiques moyennes [8].

5.2.1 Maillage

En CFD, le maillage est une étape délicate et cruciale lors de la modélisation. En effet, un élément de maille inadapté dans un domaine de calcul peut compromettre l'ensemble de la simulation numérique et entraîner la divergence systématique du solveur. Pour notre cas on a utilisé un maillage triangulaire non structuré (figure 5.2) de 189136 éléments.

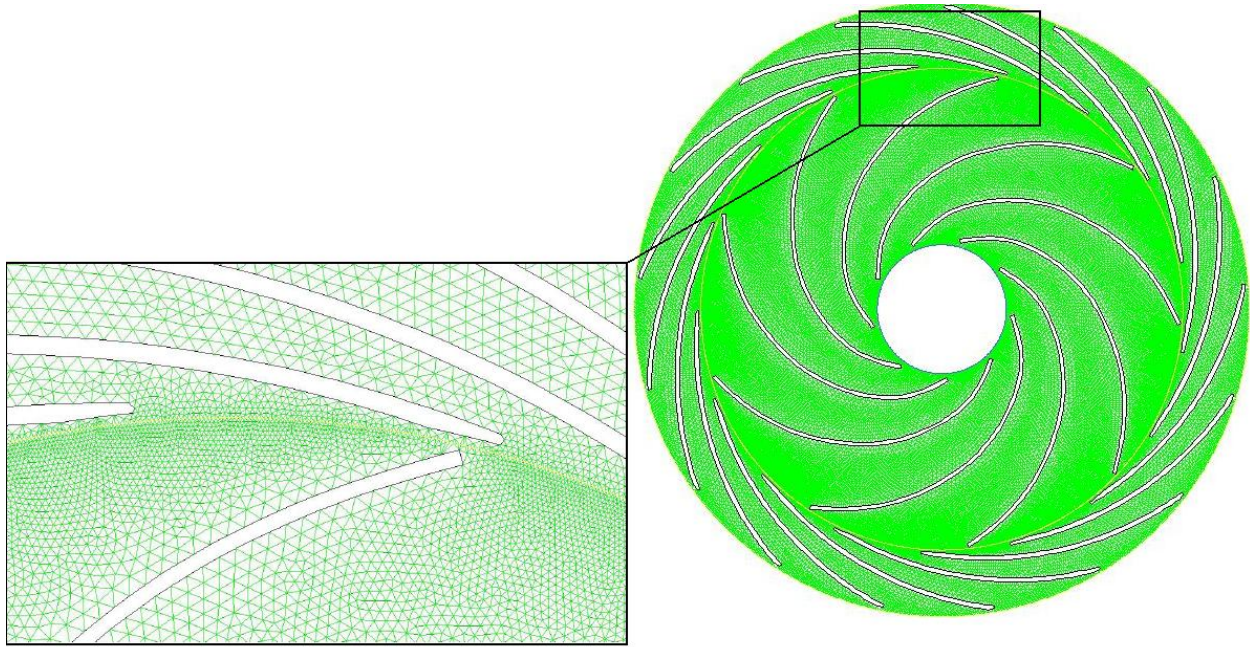


FIGURE 5.2 – Type de maillage utilisé.

5.2.2 Modèle de turbulence

Les modèles standard à deux équations, tels que les modèles $k - \epsilon$ et $k - \omega$ et leurs variantes, sont aujourd'hui très utilisés dans les codes par rapport aux modèles algébriques. Toutefois, un des principaux problèmes de ces modèles standards est leur incapacité à prévoir le déclenchement et l'amplitude du décollement de la couche limite, surtout dans les conditions défavorables de gradient de pression. Le modèle $k - \omega SST$ (Shear-Stress Transport) [133] a été conçu pour donner une représentation précise des phénomènes de séparation par la prise en compte des effets de transport dans la formulation de la viscosité turbulente. La performance de ce modèle ont été démontré dans un memorandum technique de la NASA de Bardina et autres [134] et a été jugé comme étant le plus précis de sa catégorie pour les applications aérodynamiques. De ce fait, le modèle $k - \omega SST$ a été utilisé dans cette étude.

5.2.3 Modèle numérique

Des calculs instationnaires ont été menés en considérant le fluide étudié (Air) comme incompressible (densité $1.225 kg/m^3$) dans les conditions normales de température ($25^\circ C$) et de pression ($101325 Pa$). Le présent calcul a été effectué en utilisant un résidu maximum inférieur ou égal à 10^{-6} . Les conditions générales de calcul sont résumées dans le tableau suivant (5.2.3).

Caractéristiques	Description	Valeurs
Dimension	2D	-
Fluide	Air	masse volumique $1,225 \text{ kg/m}^3$
Domaine de simulation	roue+diffuseur	9 et 17 pales
Vitesse de rotation	-	$N = 34560 \text{ tr/min}$
Modèle de turbulence	2 équations	$k - \omega SST$
Equation de l'énergie	résolue	-
Condition d'entrée	vitesse	$38,17 \text{ m/s}$
Condition de sortie	pression statique relative	$25,1 \text{ mbar}$
Rugosité des parois	lisse	0 mm
Résidu moyen	-	10^{-6}

Tableau 5.3 – Conditions de calculs

5.2.4 Champ de pression statique instantanée dans la machine

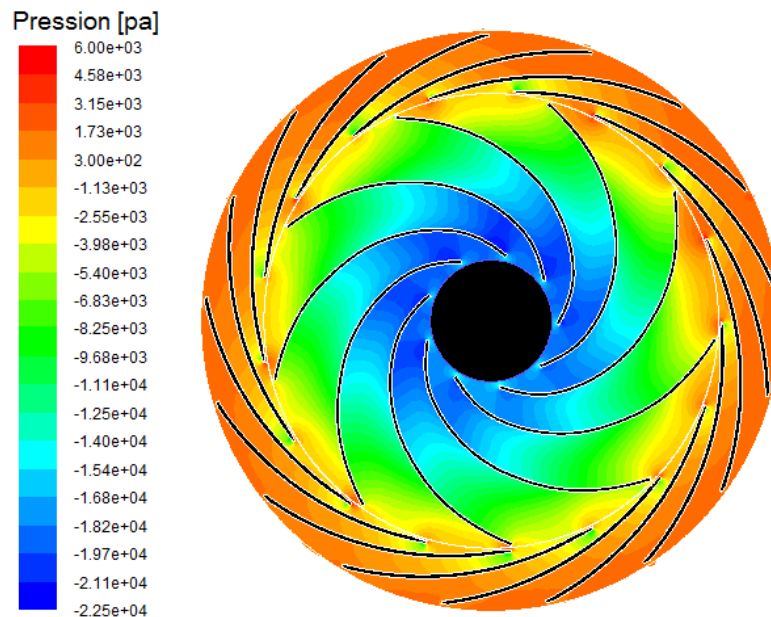


FIGURE 5.3 – Distribution de la pression statique instantanée dans la machine.

La figure (5.3) montre la distribution de la pression statique instantanée. Nous constatons la présence d'un fort gradient de pression à l'entrée du diffuseur, c'est dans ces zones que l'intensité de turbulence est la plus importante, la pression est maximale lorsqu'une pale de la roue se rapproche d'une pale du diffuseur. Les 17 pics de pression sont localisés aux bords d'attaque des pales du diffuseur.

5.3 Analyse acoustique de la machine

En raison de la dissymétrie azimutale du ventilateur centrifuge, le dipôle global n'est pas symétrique par rapport à l'axe de rotation. Le résultat obtenu par Khelladi et autres [35] montre que la contribution du dipôle du diffuseur au dipôle global est plus importante que celle de la roue, l'effet du dipôle de la roue sur le dipôle global se limite aux zones proches de la l'axe de rotation, le niveau acoustique dû au diffuseur est nettement plus important que celui de la roue. Ainsi, dans cette étude, nous ne prenons que partiellement en compte l'effet de la roue en présentant seulement les sources en rotation, les effets de reflexion du son par les pales du rotor ne sont pas pris en compte.

5.3.1 Localisation des sources

Les positions des sources sont directement prélevées sur la grille utilisée lors du calcul aérodynamique sous Fluent, elles sont localisées en chaque intersection du maillage avec les pales du rotor et du stator, voir la figure (5.4)

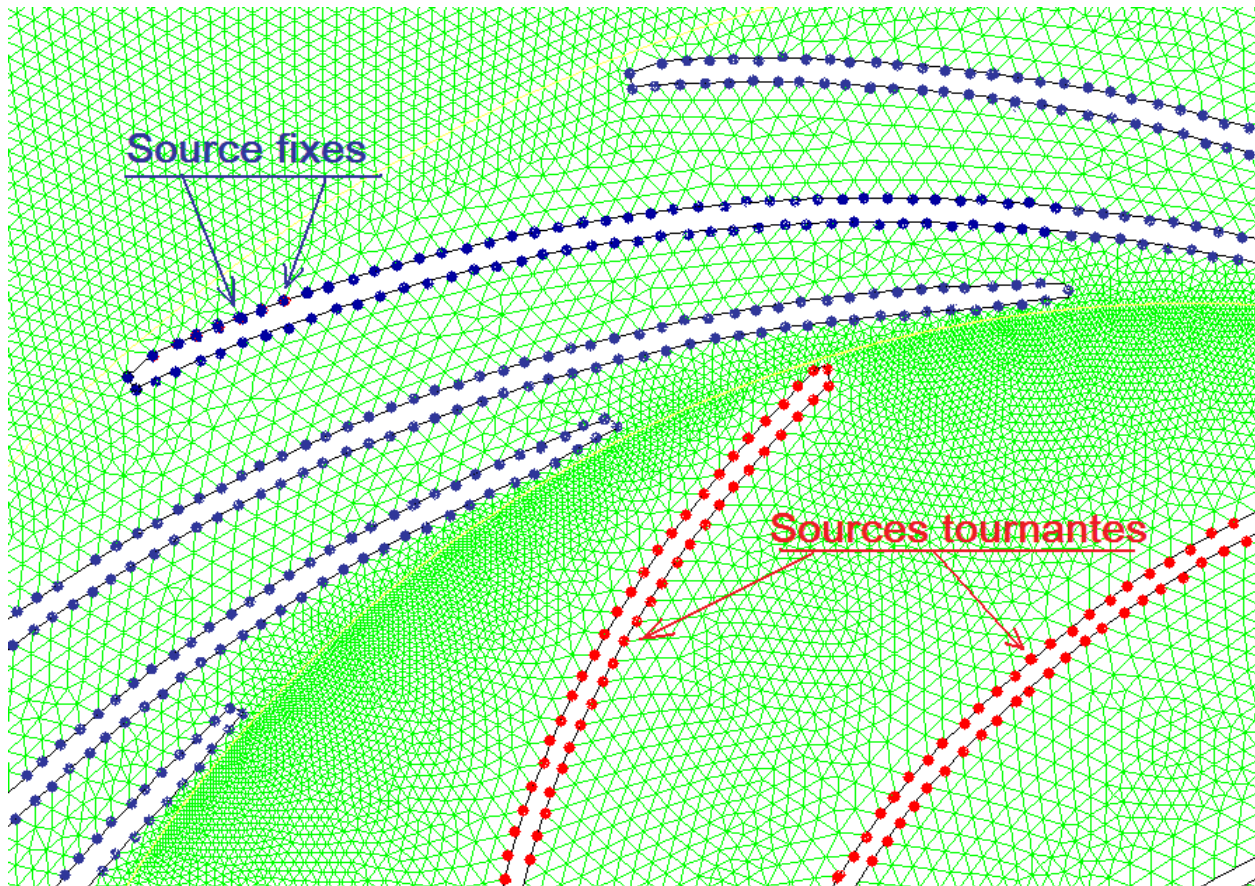


FIGURE 5.4 – Localisation des sources acoustiques.

5.3.2 Type de maillage utilisé pour le calcul acoustique

Le maillage utilisé pour cette application est triangulaire, raffiné en zones d'interactions entre le rotor et le stator (figure 5.5), le nombre total d'éléments qui constitue le domaine de calcul est de 78484.

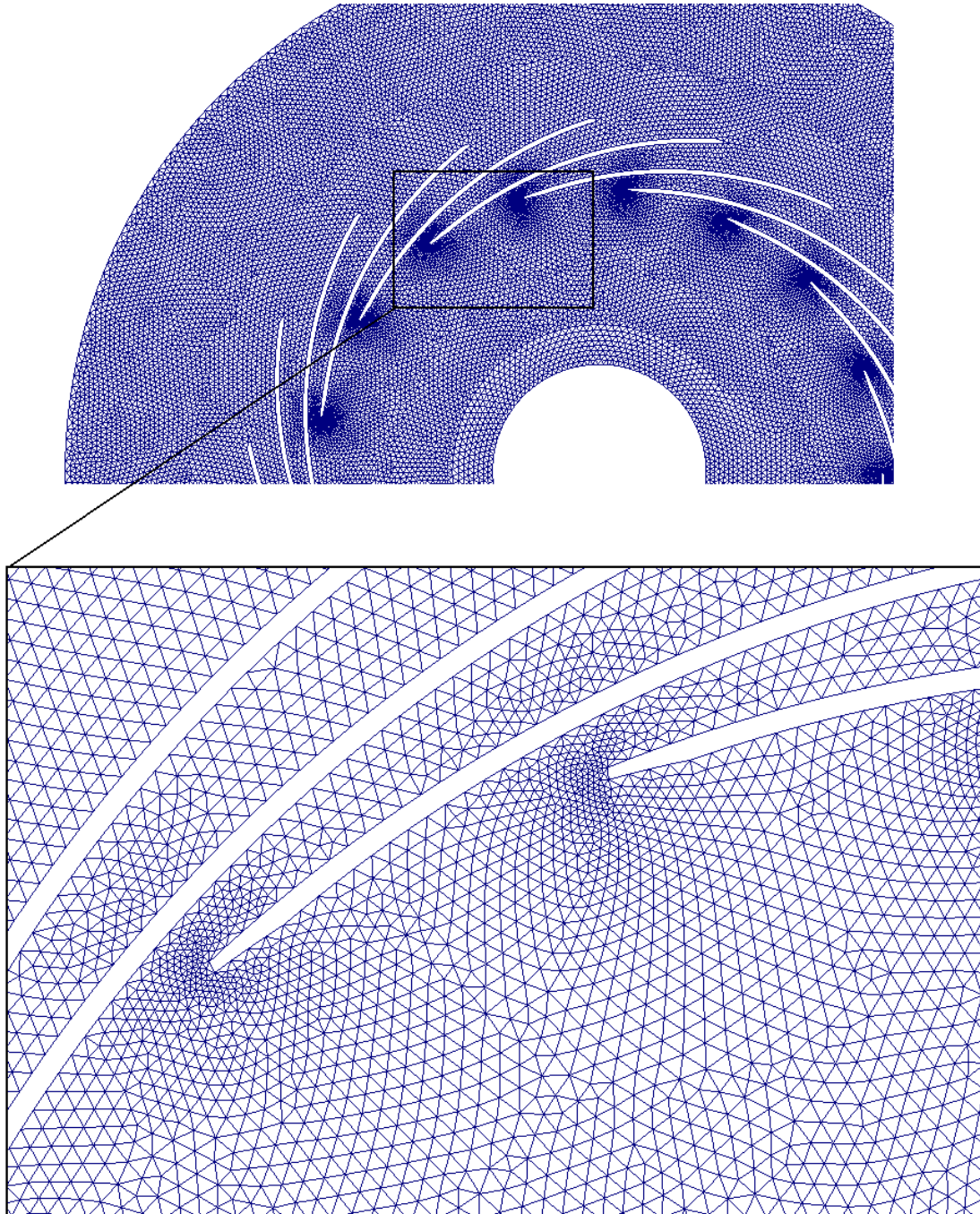


FIGURE 5.5 – Type de maillage utilisé pour le calcul acoustique.

Compte tenu des résultats obtenus par Khelladi [35] qui confirment l'importance de l'interaction entre la roue et le diffuseur qui est à l'origine du bruit sonore rayonné par le ventilateur centrifuge qui correspond à la fréquence de passage des pales (Blade Passage Frequency) et ses harmoniques, **dans cette application, seules les sources localisées aux bords de fuite des pales du rotor et aux bords d'attaque des pales du stator sont prises en compte.**

Pour les besoins de cette étude, avant de traiter ce cas réel, il est nécessaire de procéder par la mise en évidence de tous les aspects propagatifs qui peuvent caractériser ce type de machine, la démarche retenue est la suivante :

1. Source artificielle (pulse) sera placée au centre du domaine
2. Source artificielle (monopolaire) sera placée au centre du domaine
3. Sources (artificielles) monopolaires tournantes localisées aux bords de fuite du rotor
4. Sources (artificielles) dipolaires tournantes localisées aux bords de fuite du rotor
5. Sources issues du calcul Fluent tournantes localisées aux bords de fuite du rotor et aux bords d'attaque du stator

5.3.3 Source artificielle (pulse) placée au centre du domaine

Le pulse est inséré au centre du domaine et généré par les conditions initiales isentropiques suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta\rho = \exp\left(-\ln(2)\frac{(x-x_s)^2+(y-y_s)^2}{9}\right) \\ \delta u = 0 \\ \delta v = 0 \\ \delta p = \exp\left(-\ln(2)\frac{(x-x_s)^2+(y-y_s)^2}{9}\right) \end{array} \right. \quad (5.1)$$

L'objectif de ce cas est de mettre en évidence l'effet d'écran acoustique joué par le stator, pour cette raison, il est nécessaire d'étudier deux configurations de stator, une à 10 pales et une autre à 17 pales, ce cas s'inscrit dans la logique des résultats déjà obtenus par Khelladi [135] , qui dans son étude a démontré qu'en réduisant le nombre de pales (de 17 à 10) afin d'augmenter la section de passage et réduire par conséquent les gradients de pressions et de vitesse lui a permis d'améliorer le rendement aérodynamique de la machine de 15%, mais cela a détérioré les performances acoustiques de la machine.

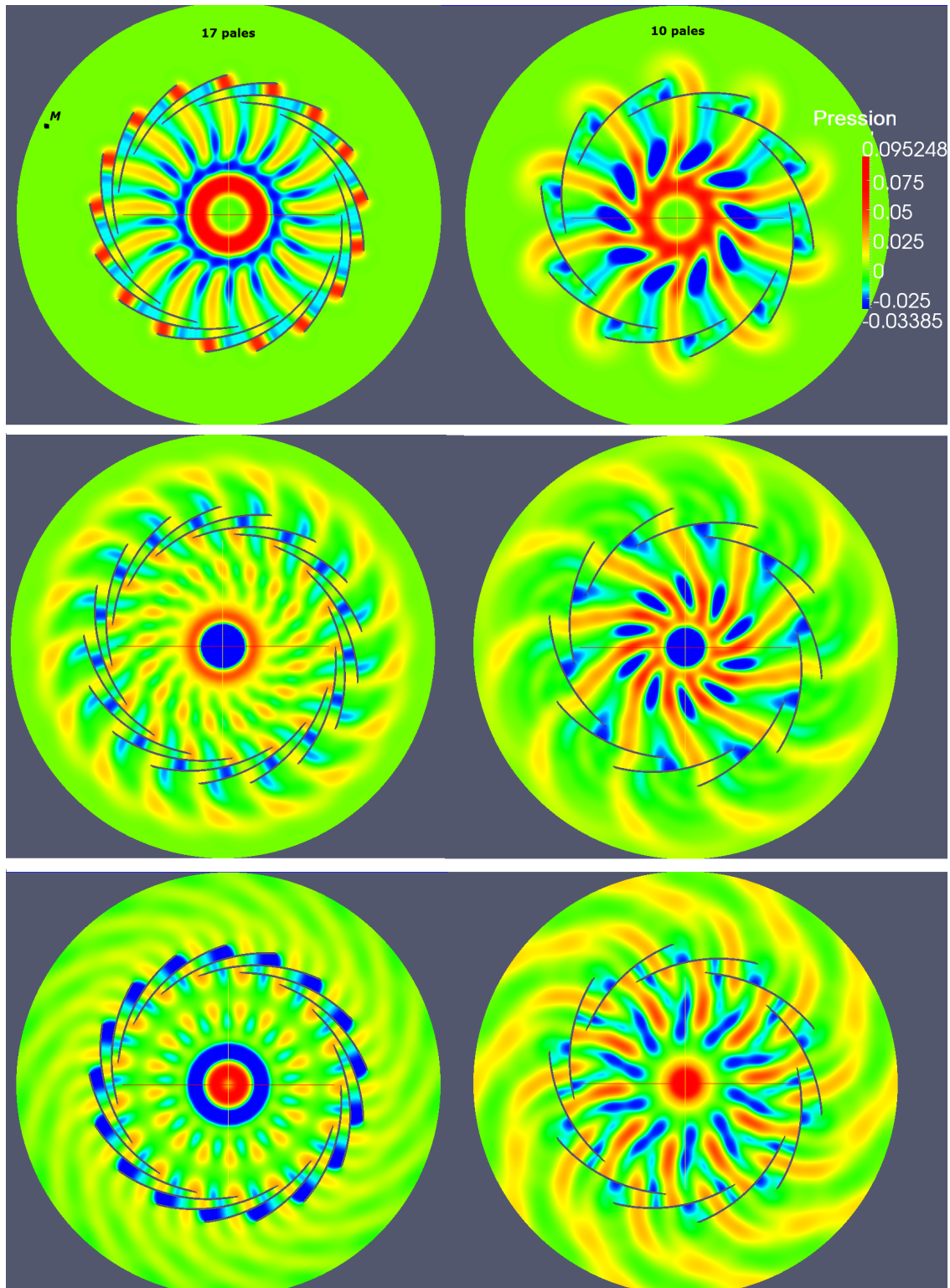


FIGURE 5.6 – Distribution du champ de pression dans la machine à différents instants.

La figure (5.6) nous renseigne sur le champ de pression à différents instants pour les deux cas, on peut tirer les conclusions suivantes :

La réflexion des ondes par le stator est nettement plus importante dans la configuration à 17 pales, ce qui a pour conséquence le confinement de ces ondes à l'intérieur, ce qui explique aussi la sortie de ces ondes de la zone stator plus rapidement pour la configuration à 10 pales, ceci nous laisse penser que le bruit généré par la configuration à 10 pales est plus important que celle à 17 pales. De ce fait, une comparaison de l'évolution de la pression acoustique en fonction du temps à un point donné (point M sur la figure 5.6) est ici présentée (figure 5.7) pour réconforter l'hypothèse d'effet d'écran acoustique.

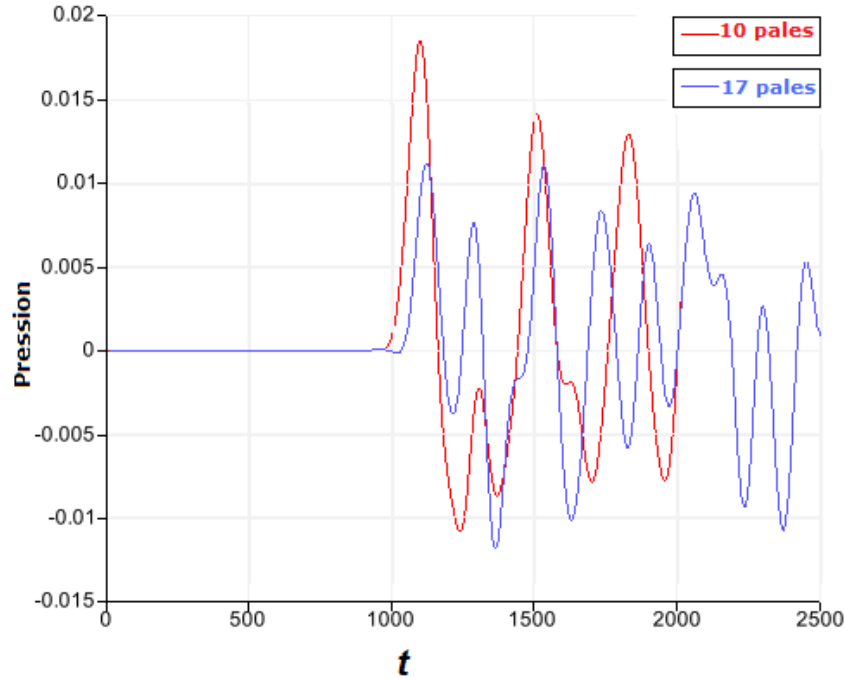


FIGURE 5.7 – Evolution de la pression en fonction du temps au point M.

Effectivement, les amplitudes engendrées en configuration à 10 pales sont nettement plus importantes, ce qui confirme l'effet d'écran acoustique joué par les pales du stator.

5.3.4 Source artificielle (monopolaire) placée au centre du domaine

Une source monopolaire est ici implémentée par un vecteur S dans l'équation (3.17) [16].

Cette source est générée au centre du domaine, elle est définie :

$$S_p = \frac{1}{2} \exp \left(-\ln(2) \frac{(x - x_s)^2 + (y - y_s)^2}{2} \right) \sin(\omega t) \times [1, 0, 0, 1]^T \quad (5.2)$$

avec ω la fréquence angulaire donnée par : $\omega = 2\pi/30$, la longueur d'onde $\lambda = 30$ unités.

$$S_p \text{ est adimensionné par : } \begin{cases} \rho_\infty c_\infty / \Delta x \\ 0 \\ 0 \\ \rho_\infty c_\infty^3 / \Delta x \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \rho_\infty = 1 \\ p_\infty = \frac{1}{\gamma_\infty} \\ \gamma_\infty = 1,4 \\ c_\infty = \sqrt{\frac{\gamma_\infty p_\infty}{\rho_\infty}} \end{cases}$$

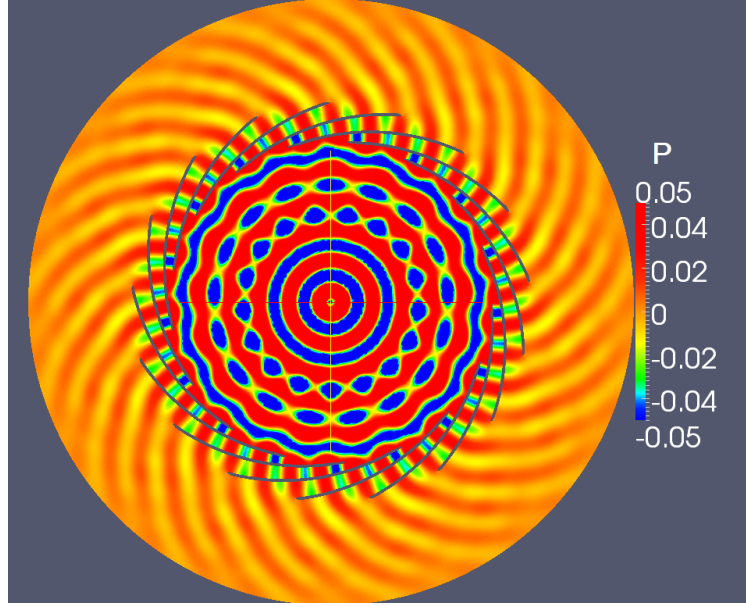


FIGURE 5.8 – Distribution du champ de pression dans la machine à $t=24$.

De cette figure (5.8), on constate que le bruit s'amplifie ou s'annule en fonction de l'interaction entre les ondes réfléchies par les pales du stator et les ondes émises par la source, le bruit global reste de nature monopolaire.

5.3.5 Comparaison entre sources (artificielles) monopolaires tournantes et dipolaires tournantes localisées aux bords de fuite des pales du rotor

Le but de cette comparaison est de s'assurer de la bonne implémentation du vecteur source.

Cas 1 : le vecteur source est porté par l'équation de masse et d'énergie $\vec{S} \begin{cases} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{cases}$

Cas 2 : le vecteur source est porté par l'équation de la quantité de mouvement $\vec{S} \begin{cases} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{cases}$

Sources (artificielles) monopolaires tournantes (cas 1)

Cette source est générée aux bords de fuite des pales du rotor et définie comme suit :

$$S_p = \frac{1}{2} \exp \left(-\ln(2) \frac{(x - x_s)^2 + (y - y_s)^2}{2} \right) \sin(\omega t) \times [1, 0, 0, 1]^T \quad (5.3)$$

avec ω la fréquence angulaire donnée par : $\omega = 2\pi/30$, la longueur d'onde $\lambda = 30$ unités.

$$S_p \text{ est adimensionné par : } \begin{cases} \rho_\infty c_\infty / \Delta x \\ 0 \\ 0 \\ \rho_\infty c_\infty^3 / \Delta x \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \rho_\infty = 1 \\ p_\infty = \frac{1}{\gamma_\infty} \\ \gamma_\infty = 1,4 \\ c_\infty = \sqrt{\frac{\gamma_\infty p_\infty}{\rho_\infty}} \end{cases}$$

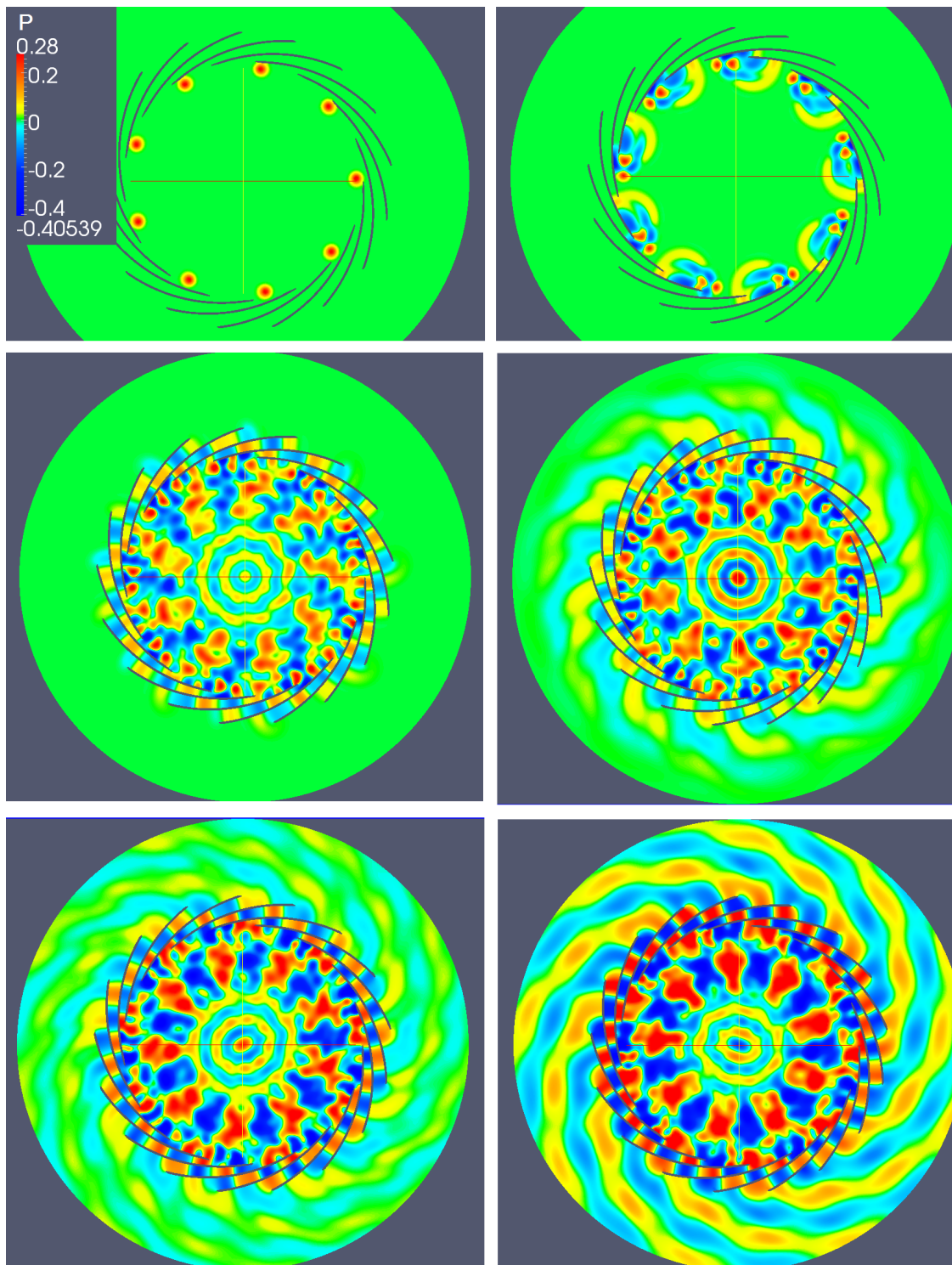


FIGURE 5.9 – Distribution du champ de pression dans la machine à différents instants.

Sources (artificielles) dipolaires tournantes (cas 2)

Par analogie aux équations de Ffoks Williams-Hawkings [31], les équations de la conservation de la quantité de mouvement sont données par :

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial x_j} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} - \sigma_{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j} \delta(f) \quad (5.4)$$

L'écoulement est uniforme, absence de force de cisaillement $\Rightarrow \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0$

L'équation 5.4 devient :

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial x_j} = \underbrace{\sigma_{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j}}_{S_{ij}} \delta(f) \quad (5.5)$$

Par définition σ_{ij} est donné par :

$$\sigma_{ij} = \tau_{ij} - p \delta_{ij} \quad (5.6)$$

Dans notre cas, $\tau_{ij} = 0$ (fluide non visqueux)

$$\Rightarrow \sigma_{ij} = -p \delta_{ij} \quad (5.7)$$

De 5.5 et 5.7

$$\Rightarrow S_{ij} = -p \delta_{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j} \delta(f) \quad (5.8)$$

La forme vectorielle de l'équation 5.8 est :

$$\vec{S}_{ij} = -p \delta_{ij} \delta(f) \vec{S}_j \quad (5.9)$$

$$\text{Avec } \vec{S}_j = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}} \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{cases} = \begin{cases} n_x \\ n_y \end{cases}$$

Pour notre cas, cette source est générée aux bords de fuite des pales du rotor et définie comme suit :

$$S_p = \frac{1}{2} \exp \left(-\ln(2) \frac{(x - x_s)^2 + (y - y_s)^2}{2} \right) \sin(\omega t) \times [0, n_x, n_y, 0]^T \quad (5.10)$$

$$S_p \text{ est adimensionné par : } \begin{cases} \rho_\infty c_\infty / \Delta x \\ 0 \\ 0 \\ \rho_\infty c_\infty^3 / \Delta x \end{cases} \quad \text{avec } \begin{cases} \rho_\infty = 1 \\ p_\infty = \frac{1}{\gamma_\infty} \\ \gamma_\infty = 1,4 \\ c_\infty = \sqrt{\frac{\gamma_\infty p_\infty}{\rho_\infty}} \end{cases}$$

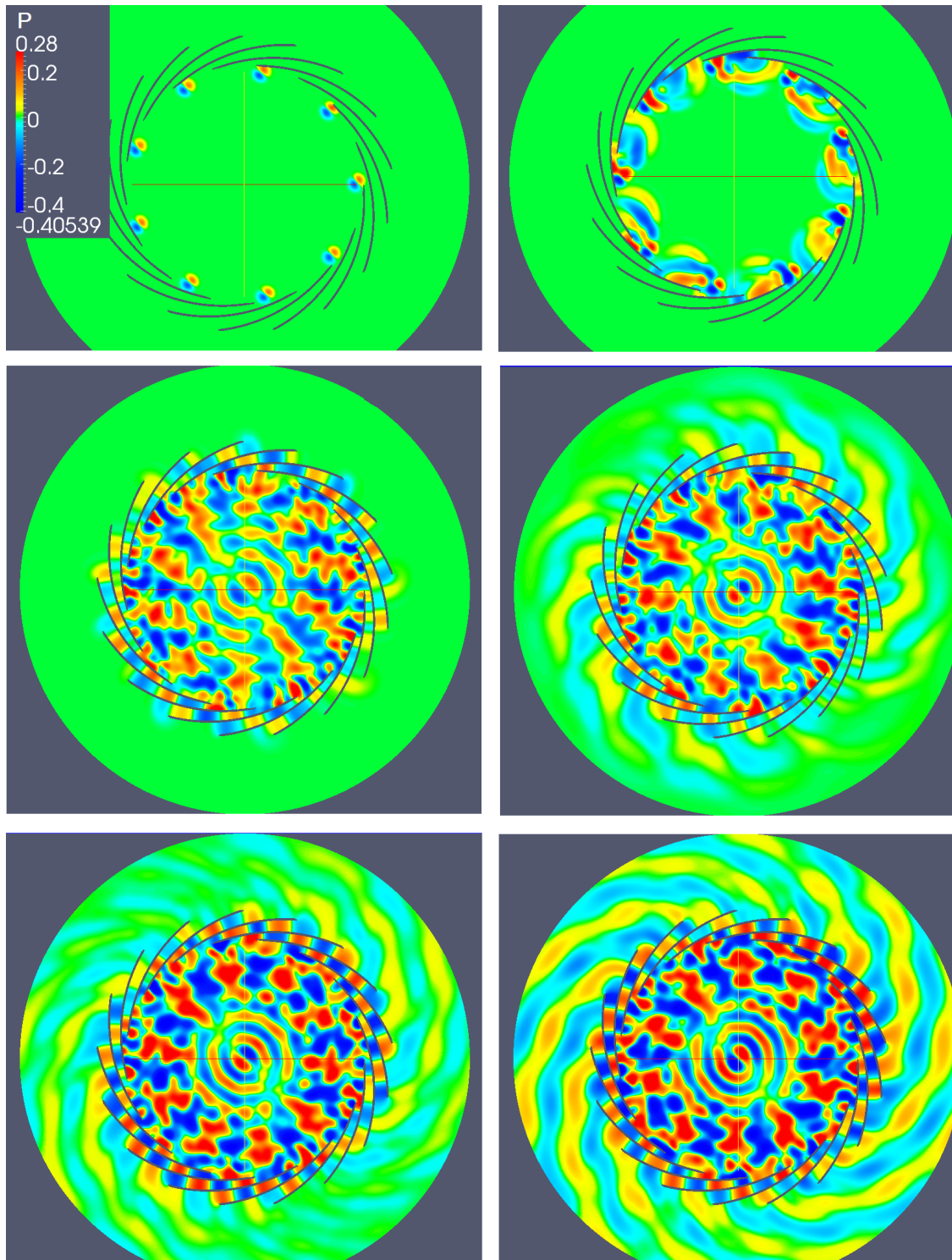


FIGURE 5.10 – Distribution du champ de pression dans la machine à différents instants.

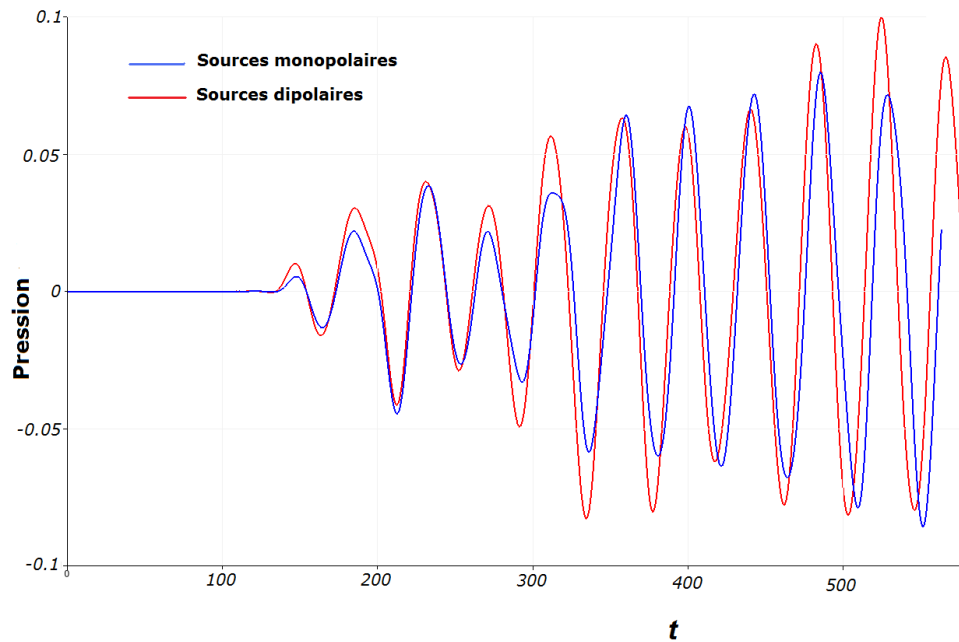


FIGURE 5.11 – Evolution de la pression en fonction du temps en un point donné M pour le monopole et le dipole.

On constate que le bruit global obtenu est de nature monopolaire dans le cas où les termes sources introduits dans les EEL sont construits à partir des fluctuations de pression et de masse volumique (figure 5.9), alors qu'on sait que le bruit global généré par un ventilateur centrifuge est de nature dipolaire [35], donc les termes sources introduits dans les EEL doivent être construits à partir des fluctuations de vitesse (figure 5.10).

Dans la figure (5.11) les amplitudes de pression obtenues sont plus grandes dans le cas où les termes sources introduits dans les EEL ont été construit à partir des fluctuations de vitesses, car les interactions des ondes acoustiques avec l'écoulement moyen sont déjà incluses dans l'opérateur de propagation.

5.3.6 Sources issues d'un calcul CFD, localisées aux bords de fuite des pales du rotor et aux bords d'attaque des pales du stator

I. Acquisition des données d'entrées (aérodynamiques) nécessaires à l'étude acoustique

L'évolution des pressions statiques relatives aux bords de fuite des pales du rotor et aux bords d'attaque des pales du stator est donnée par les figures (5.12, 5.13, 5.14, 5.15).

Lors du calcul du champ de pression sous Fluent, le pas de temps $\Delta t = 10^{-5} s$ qui correspond aux :

- Nombres de point inter-aubes stator $P_{stat} = \frac{\text{temps d'un tour}}{\Delta t \times \text{nbre de pales}} = \frac{0,0017361}{0,00001 \times 17} = 10,21 \text{ points}$
- Nombres de point inter-aubes rotor $P_{rot} = \frac{\text{temps d'un tour}}{\Delta t \times \text{nbre de pales}} = \frac{0,0017361}{0,00001 \times 9} = 19,29 \text{ points}$

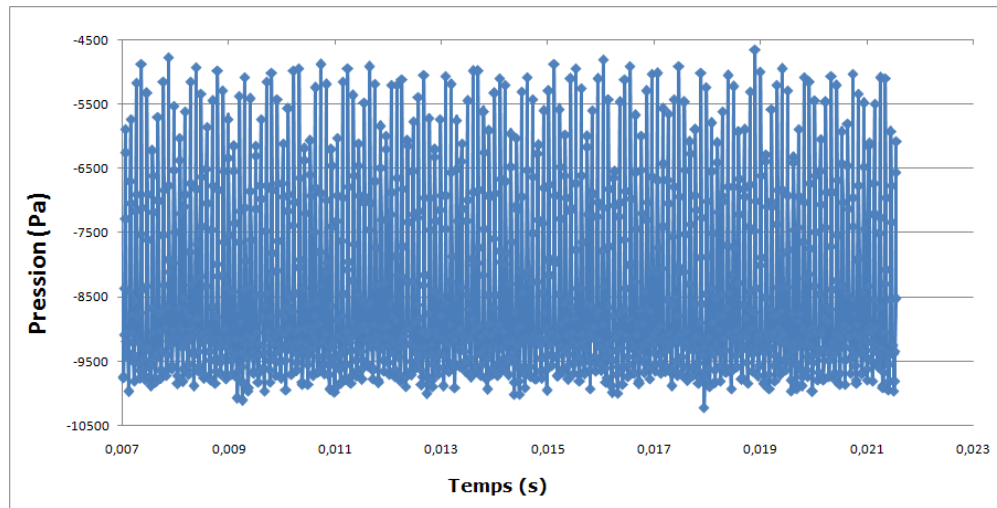


FIGURE 5.12 – Evolution de la pression statique relative en fonction du temps sur le bord de fuite de la pale du rotor (roue).

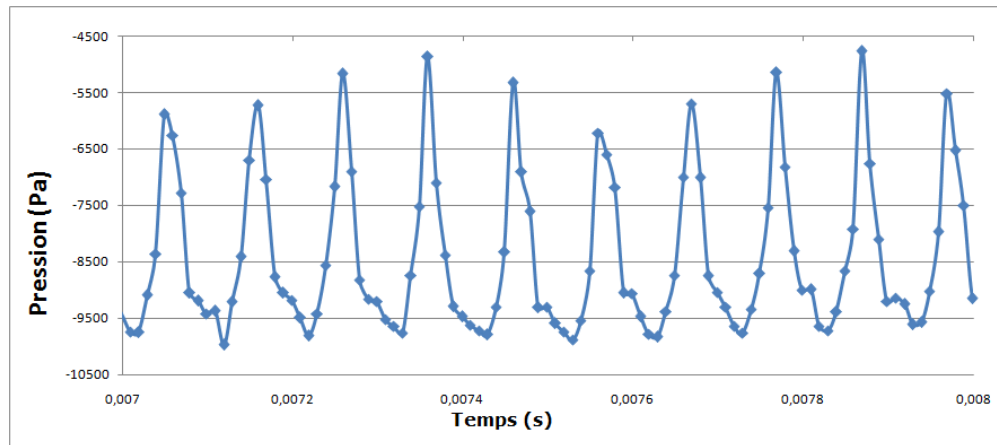


FIGURE 5.13 – Evolution de la pression statique relative en fonction du temps sur le bord de fuite de la pale du rotor (roue).

Les pics de pressions sur le tracé de la pression statique relative (5.12 et 5.13) en bord de fuite de la pale du rotor correspond à la fréquence du passage de cette dernière devant celle du stator, en d'autres termes, chaque $10,21 \times 10^{-5}$ secondes la pale du rotor passe devant une pale du stator, ceci engendre un pic de pression.

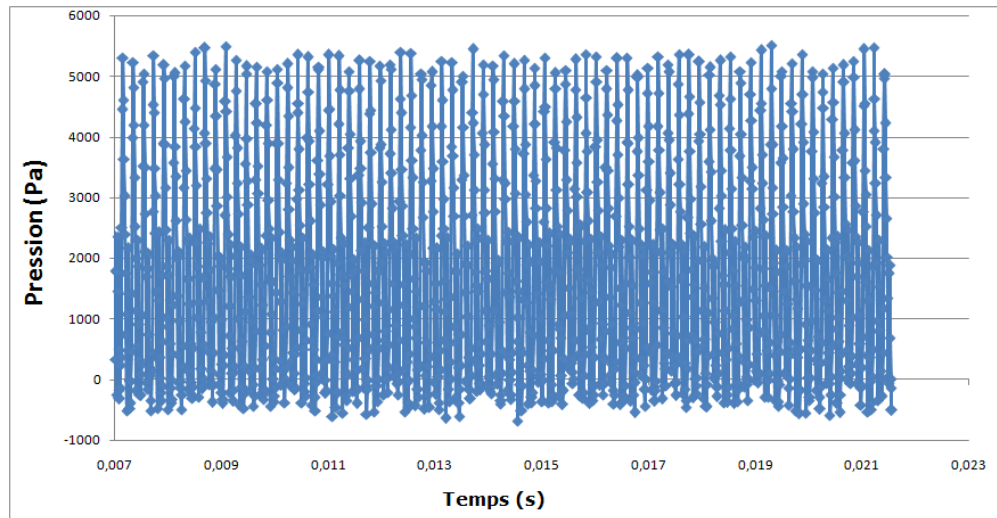


FIGURE 5.14 – Evolution de la pression statique relative en fonction du temps sur le bord d'attaque de la pale du diffuseur (stator).

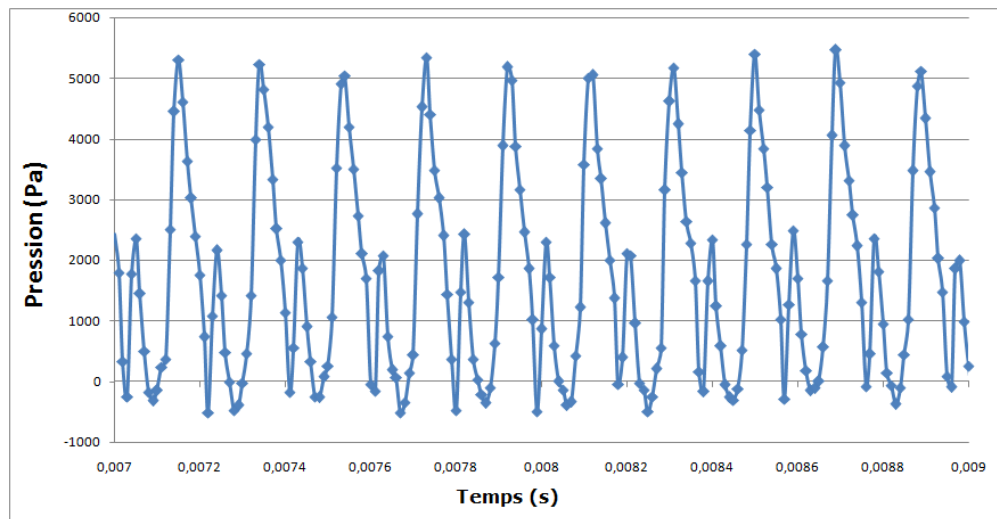


FIGURE 5.15 – Evolution de la pression statique relative en fonction du temps sur le bord d'attaque de la pale du diffuseur (stator).

Idem pour le stator, les pics de pressions sur le tracé de la pression statique relative (figures 5.14 et 5.15) en bord d'attaque de la pale du stator correspond aussi à la fréquence du passage des pales du rotor devant celles du stator.

N.B : Toutes les pales ont le même tracé (la même évolution de la pression statique relative) en fonction du temps avec un décalage $\frac{2\pi}{9}$ les unes par rapport à celles qui la juxtaposent.

II. Implémentation des termes source et étude acoustique de la machine

- 17 sources dipolaires à positions fixes, localisées aux bords d'attaque du stator
- 9 sources dipolaires tournantes, localisées aux bords de fuite des pales du rotor
- les effets des pales du rotor ne sont pas pris en compte
- Par analogie aux équations de FWH, les termes sources sont construits à partir des équations de la quantité de mouvement

$$S_{p_i}(x, y, t) = e^{-\frac{\ln(2)}{2}[(x-x_{s_i}(x,y,t))^2+(y-y_{s_i}(x,y,t))^2]} p_i(t) [0, n_x, n_y, 0]^T \quad (5.11)$$

Avec :

i : identifiant de chaque pale,

$(x_s(x, y, t), y_s(x, y, t))$: la position de chaque source,

$p_i(t)$: pressions statiques issues de calcul CFD (Fluent),

(n_x, n_y) : les composants du vecteur radial unitaire aux sources.

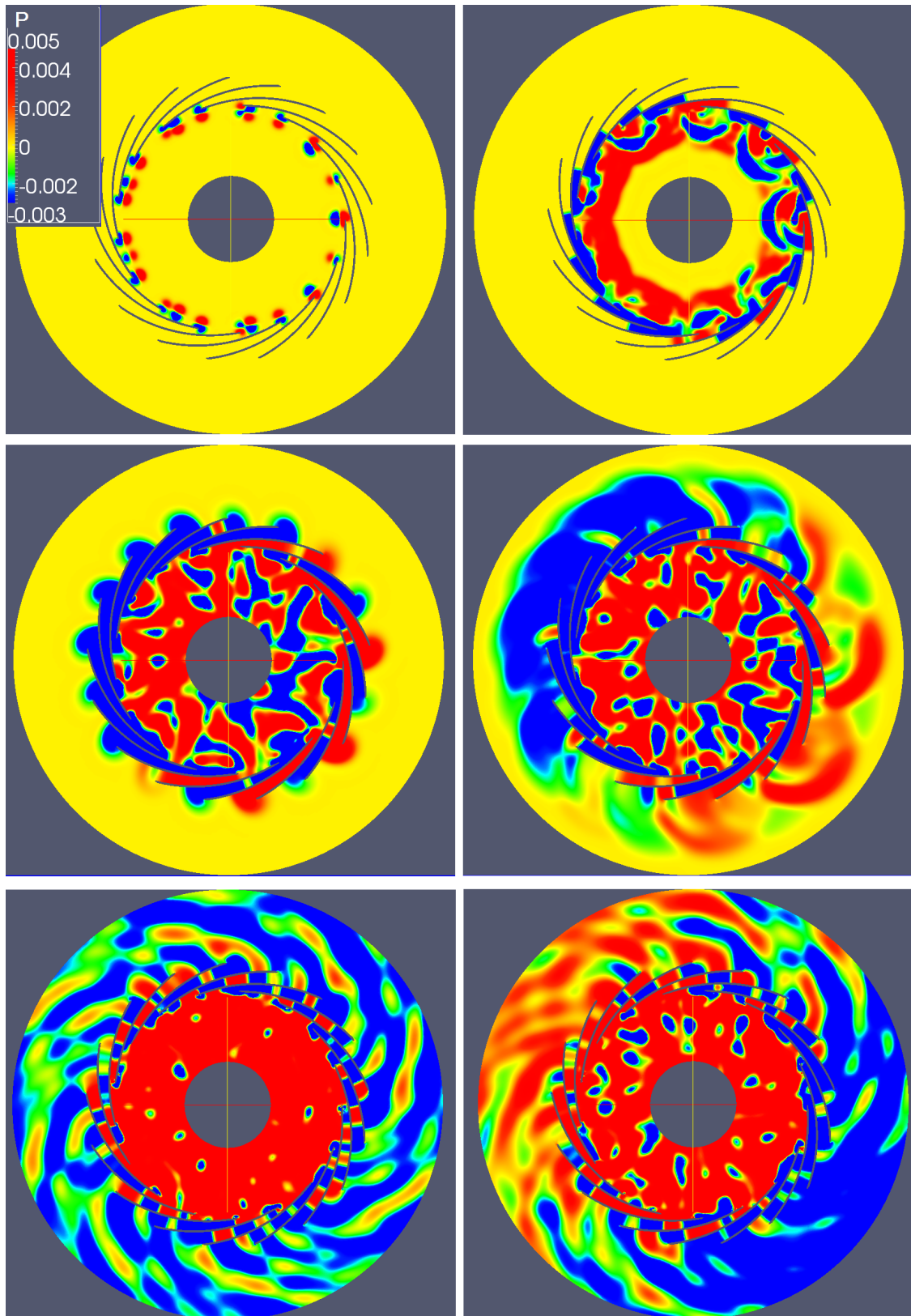


FIGURE 5.16 – Distribution du champ de pression dans la machine à différents instants.

Dans la figure (5.16), on constate qu'aucune symétrie de la distribution du champs acoustique dans la machine n'est à relever, les différentes évolutions de la pression acoustique sur les points M1, M2, M3 et M4 (qui sont sur un même rayon, voir figure 5.17) confirment ce constat.

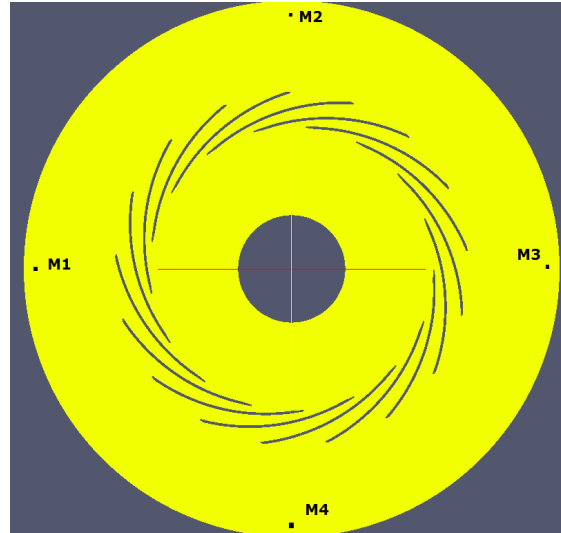


FIGURE 5.17 – Localisation des points M1, M2, M3, M4.

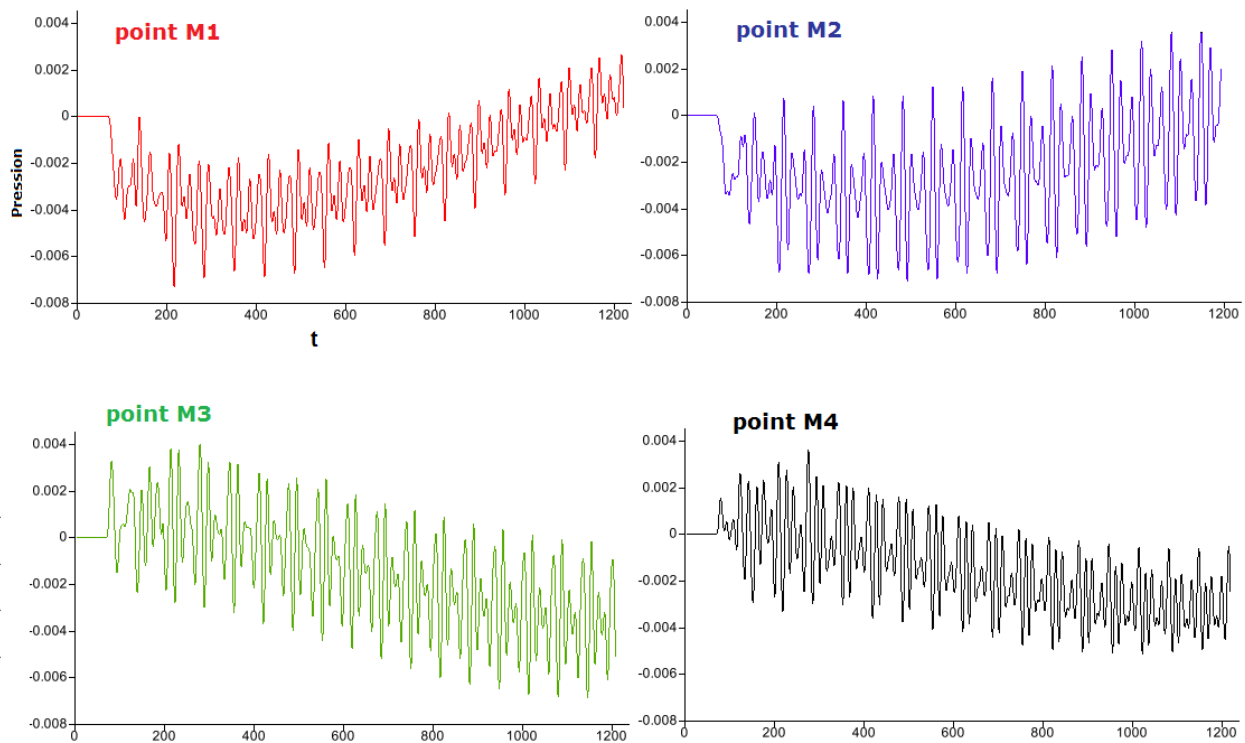


FIGURE 5.18 – Evolution de la pression en fonction du temps aux points M1,M2,M3 et M4.

En effet, la figure (5.18) confirme bien qu'on obtient un signal acoustique différent en chaque point.

5.4 Conclusion sur le chapitre

Dans l'étude menée par Khelladi [35], il a été démontré que la différence entre le niveau du bruit global obtenu par l'analogie de Ffowcs Williams-Hawkings et celui obtenu par des mesures expérimentales est de l'ordre de 10 dB (sur une valeur maximale de 110 dB) dans la direction radiale et de 5 dB dans la direction axiale. Ceci est dû principalement à la non prise en compte du confinement de la turbomachine étudiée en considérant les surfaces acoustiquement transparentes (négligence des effets de réflexions), de ce fait, l'analogie de Ffowcs Williams-Hawkings n'est pas adaptée à notre type de machine. Les différents cas présentés dans ce chapitre nous ont permis de mettre en évidence l'atténuation du bruit par l'effet d'écran acoustique joué par les pales du stator, la répartition du champ acoustique dans le domaine est pour la première fois ici présentée et ainsi confirme la dissymétrie de la distribution de ce champ acoustique.

Conclusion et perspectives

Au sein de notre unité de recherche, plusieurs travaux ont été menés et plusieurs modèles développés pour la prédiction du bruit d'origine aérodynamique, notamment la modélisation du bruit à large bande rayonné par les ventilateurs subsoniques [136, 137] et la modélisation aéroacoustique des ventilateurs centrifuges par la méthode FWH [135] mais sans toutefois réussir à développer un outil capable de restituer efficacement le bruit généré par une turbomachine car les modélisations aéroacoustiques proposées supposent une propagation en champ libre. Tenir compte des éléments d'installation dans la propagation, notamment la réflexion du bruit par les surfaces rigides et sa réfraction par l'écoulement moyen, est une difficulté supplémentaire à laquelle on doit répondre par le biais de techniques numériques ou analytiques.

Dans l'état actuel des connaissances et des moyens des calculs disponibles, la stratégie la plus adaptée pour modéliser le bruit généré par les turbomachines est l'utilisation des modèles hybrides, qui reste toutefois délicate car des petites erreurs au niveau de l'opérateur de propagation ou des termes sources peuvent conduire à des écarts importants sur le champ rayonné. L'étude bibliographique a montré le manque d'outil et de solveur capable de prédire efficacement le champ acoustique généré par une turbomachine. Compte tenu de la complexité des géométries auxquelles nous sommes confrontés et la nature instationnaire de notre problème, notre choix s'est porté sur une résolution s'appuyant sur les Equations d'Euler Linéarisées.

L'approche numérique qui a été retenue dans cette étude est la méthode des volumes finis, c'est une méthode qui permet de traiter des géométries complexes avec des volumes de formes quelconques, simple à mettre en œuvre et disposant de plusieurs schémas numériques pour la discrétisation numérique des flux aux interfaces des cellules, afin de s'affranchir de la difficulté des ordres élevés, toute la théorie de la méthode des volumes finies avec approximation par moindres carrés mobiles (FV-MLS) a été présentée et employée.

La construction des conditions aux limites absorbantes (non réfléchissantes) en CAA est très délicate en raison de la forte sensibilité de précision des petites ondes de réflexions parasites qui peuvent exister. Afin de s'assurer de la sortie totale des ondes aux frontières et qu'aucune onde parasite ne persiste, nous avons conjugué deux techniques, qui sont la mise en place d'une zone de grille d'élongation (zone éponge) et une bordure absorbante basée sur les propriétés mathématiques

des équations différentielles ordinaires.

Nous avons entrepris différentes simulations (cas tests en champs libre en présence d'un écoulement 2D uniforme subsonique), elles nous ont permis de tester la capacité des schémas MLS avec les différents flux numériques et les différents ordres appliqués à la résolution des EEL pour prédire les différents phénomènes avec la moindre erreur numérique possible. Les résultats ainsi obtenus avec une discrétisation temporelle de type RK46-NL (méthodes explicites) ont été confrontés à la solution exacte. Nous avons pu constater que le résultat obtenu avec le Flux Vecteur Splitting (Steger Warming) présente une dissipation ce qui rend l'utilisation de ce flux moins bénéfique contrairement aux autres flux de Roe, Rusanov et LLF qui présentent de meilleurs résultats. Grâce à ces cas tests, nous avons pu mettre en évidence que pour un même ordre, le nombre de mailles influence sur la qualité des résultats, plus le nombre de mailles est important, plus la précision est appréciable, et sur un même maillage plus l'ordre est important, meilleur est la précision.

Nous avons bien vérifié que l'augmentation en ordre améliorerait les résultats mais malheureusement pour des ordres > 2 , nous avons constaté une perte de précision, l'ordre n'est pas conservé, ceci est dû principalement à la discrétisation de type Godunov que nous avons employée. Afin de remédier à cet inconvénient, l'introduction d'une matrice masse telle qu'utilisée en éléments finis ou avec Galerkin discontinus nous a été indispensable. Après avoir défini cette matrice masse très large et creuse, notre système initialement différentiel ordinaire est devenu algèbro-différentiel et les méthodes explicites déjà utilisées ne sont plus adaptées à notre nouveau problème, de ce fait l'utilisation d'une méthode implicite nous a été indispensable, notre choix a été porté sur les méthodes BDF (Backward Differentiation Formula) qui sont des méthodes itératives de type Newton-Krylov.

Parmi plusieurs solveurs, plus ou moins adaptés à notre cas, nous avons utilisé IDA (Implicit Differential Algebraic solver) exprimé en langage C++ et qui est une variante du solveur DASPK. Comme caractéristique principale, la méthode d'intégration de temps est à l'ordre variable (de 1 à 5) avec adaptation du pas de temps (une stratégie de critères de sélection d'un pas de temps et de l'ordre pour chaque étape suivante est décrite afin de décider du rejet ou de l'acceptation d'une étape). Pour la résolution du système linéaire auquel nous sommes confrontés, nous avons utilisé une méthode de Newton-Krylov dans laquelle les systèmes linéaires sont résolus par une méthode itérative GMRES (Generalized Minimal Résidual). Dans ce code (IDA), seul un préconditionnement à gauche est autorisé.

La validation de notre méthode avec calculs implicites a été menée avec succès, nous avons pu démontrer que même pour des ordres élevés, cet ordre reste conservé. La stabilité de notre méthode pour les conditions aux limites a été validée avec succès. La simulation de l'un des problèmes les plus difficiles dans la validation des calculs en CAA (diffraction du son généré par une source acoustique dépendante du temps de par deux cylindres circulaires) a été présenté pour confirmer une fois de plus la capacité de notre code à gérer des géométries complexes et démontrer sa stabilité et sa robustesse numérique.

Une application à la propagation des ondes acoustiques dans les turbomachines a été menée avec succès, la machine étudiée est un ventilateur centrifuge, notre choix a été motivé par le fait que ce type de machine est largement adopté par les établissements publics et les industries électroniques en raison de leur grande capacité de débit massique et leur compacité. Leur niveau sonore élevé constitue un critère important de sélection pour les manufacturiers. Compte tenu des résultats obtenus par Khelladi [33] qui confirment l'importance de l'interaction entre la roue et le diffuseur qui est à l'origine du bruit sonore rayonné par le ventilateur centrifuge, notre étude s'est focalisée essentiellement sur des sources localisées aux bords de fuites des pales du rotor et aux bords d'attaques des pales du stator. Ces mêmes sources sont issues du champ aérodynamique instationnaire obtenu grâce à une simulation RANS sous le code Fluent. Le premier résultat obtenu rentre dans la démarche du contrôle de l'écoulement afin de minimiser la production sonore, elle nous a permis de mettre en évidence l'effet d'écran acoustique joué par les pales du stator, dans cette étude la répartition du champ acoustique dans le domaine du calcul a été présentée tout en prenant en compte les éléments d'installation dans la propagation, notamment la réflexion du bruit par les pales du stator.

Perspectives

Dans ce travail, nous nous sommes attachés à la mise en œuvre d'une méthode hybride s'appuyant sur les Equations d'Euler Linéarisées à partir du champ aérodynamique fourni par un calcul RANS (Fluent) qui donne une estimation satisfaisante des caractéristiques aérodynamiques moyennes. Une approche LES peut donner d'excellents résultats et améliorer ainsi les données d'entrées à l'analyse acoustique. Toutefois l'expression des termes sources peut être discutée. A défaut de mettre en œuvre un maillage mobile (sliding mesh), nous nous sommes contentés de donner un aspect rotatif des sources, la mise en place d'une telle méthode nécessite beaucoup de temps et d'investigation.

Les caractéristiques de dispersion et de dissipation de la méthode FV-MLS sont fortement liées au choix du paramètre de forme de la fonction Kernel (κ). Une étude complète de ce paramètre serait de bonne augure afin de confirmer la bonne stabilité de cette méthode.

Notre code est restrictif au cas des écoulements uniformes, afin de prendre en compte les effets de l'écoulement (cisaillement par exemple) il sera nécessaire d'étendre ce code au cas des écoulements non uniformes, dès lors une extension en 3D serait envisageable.

Au rythme actuel du développement des moyens informatiques, il serait possible d'entrevoir dans un futur proche des simulations à grande échelle (LES) qui autorisent l'étude de l'écoulement pour des nombres de Reynolds élevés et qui calculent les plus grosses structures de la turbulence qui sont principalement responsables de la génération du bruit, ainsi nous obtiendrons un champ acoustique directement exploitable par la résolution des équations de Navier-Stokes.

Bibliographie

- [1] Yong Cho and Young J. Moon. Discrete Noise Prediction of Variable Pitch Cross-Flow Fans by Unsteady Navier-Stokes Computations. *Journal of Fluids Engineering*, 125 :543–550, 2003.
- [2] X. Nogueira, L. Cueto-Felgueroso, I. Colominas, S. Kelladi, F. Navarrina, and M. Casteleiro. Resolution of computational aeroacoustics problem on unstructured grids with high-order finite volume scheme. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 234 :2089–2097, 2009.
- [3] C. Bogey and C. Bailly. Investigation of sound sources in subsonic jets using LES data. *AIAA Paper 2005-2885*, 1-18, 2005.
- [4] C. Bogey and C. Bailly. LES of a high Reynolds high subsonic jet : effects of the inflow conditions on flow and noise. *9th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference and Exhibit, Hilton Head, South Carolina, AIAA Paper 2003-3170*, 2003.
- [5] S. Barré, C. Bogey, and C. Bailly. Computation of the Noise Radiated by Jets with Laminar/Turbulent Nozzle-Exit Conditions. *Proceedings of the 12th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, Cambridge, Massachusettes, AIAA 2006-2443*, 2006.
- [6] V. Fleury, C. Bailly, M. Michard, D. Juvé, and E. Jondeau. Space-Time Correlations in Two Subsonic Jets using Dual PIV measurements. *AIAA Journal*, 46 :1081–1087, 2008.
- [7] Daniel J. Bodony and Sanjiva K. Lele. Current Status of Jet Noise Predictions Using Large Eddy Simulation. *AIAA JOURNAL*, 46 :364–380, 2008.
- [8] S. Khelladi, S. Kouidri, F. Bakir, and R. Rey. Flow Study in the Impeller-Diffuser Interface of a Vaned Centrifugal Fan. *Journal of Fluids Engineering*, 127 :495–502, 2005.
- [9] M. Younsi, F. Bakir, S. Kouidri, and R. Rey. Numerical and Experimental Study of Unsteady Flow in a Centrifugal Fan. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part A : Journal of Power and Energy*, 221 :1025–1036, 2007.
- [10] X. Gloerfelt, C. Bogey, and C. Bailly. Numerical investigation of the coexistence of multiple tones in flow-induced cavity noise. *AIAA Paper 2003-3234*, 2003.

- [11] D. Ricot, V. Maillard, and C. Bailly. Numerical simulation of the unsteady flow past a cavity and application to the sunroof buffeting. *7th AIAA/CEAS AeroAcoustics Conference, Maastricht, The Netherlands, AIAA Paper 2001-2112, 1-11*, 2001.
- [12] W. Möhring, E. A. Müller, and F. Obermeier. Problems in flow acoustics. *Reviews of modern physics ISSN 0034-6861*, 55 :707–724, 1983.
- [13] O. Marsden, C. Bogey, and C. Bailly. High-order curvilinear simulations of flows around non-Cartesian bodies. *J. Comput. Acoust*, 13 :731–748, 2005.
- [14] J.E. Ffowcs Williams. Hydrodynamic noise. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 01 :197–222, 1969.
- [15] W. De Roeck, M. M. Baelmans, and W. Desmet. Aerodynamic-Acoustic Splitting Technique for Computational Aeroacoustics Applications at Low Mach Numbers. *AIAA JOURNAL*, 46 :463–475, 2008.
- [16] Christophe Bailly and Daniel Juve. Numerical Solution of Acoustic Propagation Problems Using Linearized Euler Equations. *AIAA JOURNAL*, 38 :22–29, 2000.
- [17] C. Bogey. Calcul direct du bruit aérodynamique et validation de modèles acoustiques hybrides. *Thèse doctorat, Ecole Centrale de Lyon*, 2000.
- [18] R. R. Mankbadi, S.H. Shih, D.R. Hixon, and L. A. Povinelli. Direct Computation of Sound Radiation by Jet Flow Using Large-Scale Equations. Technical report, NASA Technical Memorandum 106877, 1995.
- [19] C.K.W. Tam and Z. Dong. Radiation and outflow boundary conditions for direct computation of acoustic and flow disturbances in a nonuniform mean flow. *AIAA Paper 95-007*, 1995.
- [20] Mirela Caraeni and Laszlo Fuchs. Investigation of Nonreflective Boundary Conditions for Computational Aeroacoustics. *AIAA JOURNAL*, 44 :1932–1940, 2006.
- [21] Richard D. Sandberg and Neil D. Sandham. Nonreflecting Zonal Characteristic Boundary Condition for Direct Numerical Simulation of Aerodynamic Sound. *AIAA JOURNAL*, 44 :402–405, 2006.
- [22] H. S. Ribner. Quadrupole correlations governing the pattern of jet noise. *Journal. Fluid and Mechanics*, 38 :1–24, 1969.
- [23] M. E. Goldstein and B. M. Rosenbaum. Emission of sound from turbulence convected by a parallel flow in the presence of solid boundaries. Technical report, NASA TN D-7118, 1973.
- [24] W. Bechara, C. Bailly, P. Lafon, and S. M. Candel. Stochastic Approach to Noise Modeling for Free Turbulent Flows. *AIAA Journal*, 32 :455–463, 1994.

- [25] Malika Remaki and Wagdi G. Habashi. A discontinuous Galerkin method-HLLC solver for the Euler equations. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 43 :1391–1405, 2003.
- [26] C. Bogey, C. Bailly, and D. Juve. Computation of Flow Noise Using Source Terms in Linearized Euler’s Equations. *AIAA JOURNAL*, 40 :235–243, 2002.
- [27] G. Arambatzis, P. Vavilis, L. Touloupoulos, and John A. Ekaterinaris. Implicit High-Order Time-Marching Schemes for the Linearized Euler Equations. *AIAA JOURNAL*, 45 :1819–1826, 2007.
- [28] J.C. Hardin and D.S. Pope. An acoustic/viscous splitting technique for computational aeroacoustics. *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, 6 :323–340, 1994.
- [29] M. J. Lighthill. On sound generated aerodynamically, I. general theory. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 211 :564–587, 1952.
- [30] M. J. Lighthill. On sound generated aerodynamically, II. turbulence as a source of sound. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 222 :1–32, 1954.
- [31] J.E. Ffowcs Williams and D.L. Hawkings. Sound Generation by Turbulence and Surfaces in Arbitrary Motion. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 264 :321–342, 1969.
- [32] N. Curle. The Influence of Solid Boundaries upon Aerodynamic Sound. *Proceedings of the Royal Society*, 231 :505–514, 1955.
- [33] G.M. Lilley. On the noise from jets. Technical report, AGARD CP-131, Technical report, 1972.
- [34] O. M. Phillips. On the generation of sound by supersonic turbulent shear layers. *Journal . Fluid and Mechanics*, 9 :1–28, 1960.
- [35] S. Khelladi, S. Koudri, F. Bakir, and R. Rey. Predicting tonal noise from a high rotational speed centrifugal fan. *Journal of Sound and Vibration*, 313 :113–133, 2008.
- [36] Mattias Billson ; Lars-Erik Eriksson and Lars Davidson. Acoustic Source Terms for the Linearized Euler Equations in Conservative Form. *AIAA JOURNAL*, 43 :752–759, 2005.
- [37] Z.J. Wang. Evaluation of high-order spectral volume method for benchmark computational aeroacoustic problems. *AIAA-2003-0880*, 43 :337–348, 2005.
- [38] Luis Cueto-Felgueroso and Ignasi Colominas. High-order Finite Volume Methods and Multiresolution Reproducing Kernels. *Arch Comput Methods Eng DOI 10.1007/s11831-008-9017-y*, 2008.
- [39] S. K. Godunov. A difference method for numerical calculation of discontinuous solutions of the equations of hydrodynamics. *Mat. Sb. (N.S.)*, 47 :271–306, 1959.

- [40] T.J. Barth and D.C. Jespersen. The design and application of upwind schemes on unstructured meshes. *AIAA Paper 89-0366*, 1989.
- [41] T.J. Barth and P.O. Frederickson. Higher-order solution of the Euler equations on unstructured grids using quadratic reconstruction. *AIAA paper 90-0013*, 1990.
- [42] T.J. Barth. Recent developments in high-order k-exact reconstruction on unstructured meshes. *AIAA paper 93-0668*, 1993.
- [43] B. Van Leer. Towards the ultimate conservative difference scheme. IV. A new approach to numerical convection. *J ComputPhys*, 135 :229–248, 1997.
- [44] C. F. Ollivier-Gooch and M. Van Altena. A High-order Accurate Unstructured Mesh Finite-Volume Scheme for the Advection-Diffusion Equation. *J Comput Phys*, 181 :729–752, 2002.
- [45] A. Nejat, C. F Ollivier-Gooch, and K. Michalak. Accuracy assessment methodology for a high-order unstructured finite volume solver. *Proceedings of the 18th AIAA computational fluid dynamics conference, Miami, USA*, 2007.
- [46] C. Ollivier-Gooch, A. Nejat, and K. Michalak. On Obtaining High-Order Finite-Volume Solutions to the Euler Equations on Unstructured Meshes. *In 18th AIAA computational fluid dynamics conference, Miami, FL*, 2007.
- [47] A. Harten, B. Engquist, S. Osher, and Sukumar R. Chakravarthy. Uniformly high-order accurate essentially non-oscillatory schemes III. *journal of computational physics*, 131 :3–47, 1997.
- [48] A. Harten and S. Chakravarthy. Multi-dimensional ENO schemes for general geometries. Technical report, ICASE Report No. 91-76, 1991.
- [49] C.W. Shu and S. Osher. Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock-capturing schemes. *Journal of Computational Physics*, 77 :439–471, 1988.
- [50] X.D. Liu, S. Osher, and T. Chan. Weighted essentially nonoscillatory schemes. *J Comput Phys*, 115 :200–212, 1994.
- [51] G-S. Jiang and C-W. Shu. Efficient implementation of weighted ENO schemes. *journal of computational physics*, 126 :202–228, 1996.
- [52] O. Friedrich. Weighted Essentially Non-Oscillatory Schemes for the Interpolation of Mean Values on Unstructured Grids. *journal of computational physics*, 144 :194–212, 1998.
- [53] Changqing Hu and Chi-Wang Shu. Weighted essentially non-oscillatory schemes on triangular meshes. Technical report, NASA/CR-1998-208459 ICASE Report No. 98-32, 1998.
- [54] Bernardo Cockburn and Chi Wang Shu. The Runge-Kutta local projection discontinuous Galerkin finite element method for conservation laws V : multi-dimensional systems. Technical report, NASA Contractor Report 20173 7. ICASE Report No. 97-43, 1997.

- [55] F. Bassi and S. Rebay. A higher-order accurate discontinuous finite element method for the numerical solution of the compressible Navier-Stokes equations. *Journal of Computational Physics*, 131 :267–279, 1997.
- [56] Bernardo Cockburn and Chi-Wang Shu. Runge-Kutta discontinuous Galerkin methods for convection-dominated problems. Technical report, NAS A/CR-2000-210624. ICASE Report No. 2000-46, 2000.
- [57] Z. J. Wang and Y. Liu. Spectral (Finite) Volume Method for Conservation Laws on Unstructured Grids III : One Dimensional Systems and Partition Optimization. *Journal of Scientific Computing*, 20 :137–157, 2004.
- [58] Z.J. Wang, L. Zhang, and Y. Liu. Spectral (finite) volume method for conservation laws on unstructured grids IV : extension to two-dimensional systems. *Journal of Computational Physics*, 194 :716–741, 2004.
- [59] R. Abgrall and T.J. Barth. Weighted residual distribution schemes for conservation laws via adaptive quadrature. *SIAM J Sci Comput*, 24 :732–769, 2002.
- [60] R. Abgrall and F. Marpeau. Residual distribution schemes on quadrilateral meshes. *Journal of Scientific Computing*, 30 :131–175, 2007.
- [61] H. Deconinck, H. Paillère, R. Struijs, and Philip L. Roe. Multidimensional upwind schemes based on fluctuation-splitting for systems of conservation laws. *Computational Mechanics*, 11 :323–340, 1993.
- [62] P. De Palma, G. Pascasio, D.T. Rubino, and M. Napolitano. Residual distribution schemes for advection and advection-diffusion problems on quadrilateral cells. *Journal of Computational Physics*, 218 :159–199, 2006.
- [63] M. Ricchiuto, A. Csik, and H. Deconinck. Residual distribution for general time dependant conservation laws. *Journal of Computational Physics*, 209 :249–289, 2005.
- [64] M. Bernacki. Schémas en volumes finis avec flux centrés : application à l’aéroacoustique. Technical report, ISRN INRIA RR-4506-FR, 2002.
- [65] M. Bernacki and Serge Piperno. Schémas en volumes finis avec flux centrés pour la propagation des ondes en aéroacoustique. Technical report, ISRN INRIA -RR-4699-FR, 2003.
- [66] Malika Remaki. Méthodes numériques pour les équations de Maxwell instationnaires en milieu hétérogène. *Thèse doctorat, Ecole National des Ponts et Chaussees*, 1999.
- [67] P. Lancaster and K. Salkauskas. Surfaces generated by moving least squares methods. *Math Comput*, 155 :141–158, 1981.
- [68] L. Cueto-Felgueroso, I. Colominas, J. Fe, F. Navarrina, and M Casteleiro. High-order finite volume schemes on unstructured grids using moving least-squares reconstruction. application to shallow water dynamics. *International journal for numerical methods in engineering*, 65 :295–331, 2006.

- [69] L. Cueto-Felgueroso, I. Colominas, X. Nogueira, F. Navarrina, and M. Casteleiro. Finite volume solvers and Moving Least-Squares approximations for the compressible Navier-Stokes equations on unstructured grids. *International journal for numerical methods in engineering*, 196 :4712–4736, 2007.
- [70] S. Khelladi, S. Martin, X. Noguiera, and F. Bakir. Higher-Order Preserving Methods for Unsteady Finite Volume Solvers Based on Reproducing Kernels : Application to Aeroacoustic Problems. *16th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, AIAA 2010-3817*, 2010.
- [71] Victoria Dolean and Stéphane Lanteri. A domain decomposition approach to finite volume solutions of the Euler equations on unstructured triangular meshes. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 37 :625–656, 2001.
- [72] Kevin W. Thompson. Time dependent boundary conditions for hyperbolic systems. *Journal of Computational Physics*, 68 :1–24, 1987.
- [73] K. W. Tam. Christopher and Jay C. Webb. Dispersion-Relation-Preserving Finite Difference Schemes for Computational Acoustics. *Journal of Computational Physics*, 107 :262–281, 1993.
- [74] T. J. Poinso and S. K. Lelef. Boundary conditions for direct simulations of compressible viscous flows. *Journal of Computational Physics*, 101 :104–129, 1992.
- [75] Daniel J. Bodony. Analysis of sponge zones for computational fluid mechanics. *Journal of Computational Physics*, 212 :681–702, 2006.
- [76] Jean-Pierre Berenger. A Perfectly Matched Layer for the Absorption of Electromagnetic Waves. *Journal of Computational Physics*, 114 :185–200, 1994.
- [77] Fang Q. Hu. On Absorbing Boundary Conditions for Linearized Euler Equations by a Perfectly Matched Layer. *journal of computational physics*, 129 :201–219, 1996.
- [78] Fang Q. Hu. A Stable, Perfectly Matched Layer for Linearized Euler Equations in Unsplit Physical Variables. *Journal of Computational Physics*, 173 :455–480, 2001.
- [79] Fang Q. Hu. A Perfectly Matched Layer absorbing boundary condition for linearized Euler equations with a non-uniform mean flow. *Journal of Computational Physics*, 208 :469–492, 2005.
- [80] Fang Q. Hu. Development of PML absorbing boundary conditions for computational aeroacoustics : A progress review. *Computers & Fluids*, 37 :336–348, 2007.
- [81] A. Rahmouni. Un modèle PML bien posé pour les équations d’Euler linéarisées. *Comptes rendus de l’Académie des sciences. Paris*, 331 :159–164, 2000.
- [82] A. Kourta and R. Sauvage. Conditions aux limites absorbantes sur des frontières libres. *Comptes rendus de l’Académie des sciences. Paris. Série Iib, Mécanique*, 329 :857–864, 2001.

- [83] M. Bernacki, S. Lanteri, and S Piperno. Time-domain parallel simulation of heterogeneous wave propagation on unstructured grids using explicit, non-diffusive, discontinuous Galerkin methods. *J. Computational Acoustics*, 14(1) :57–82, 2006.
- [84] W. Reed and T. Hill. Triangular mesh methods for the neutron transport equation. Technical report, Technical Report LA-UR-73-479, Los Alamos Scientific Laboratory, 1973.
- [85] P. Lesaint and P. Raviart. On a finite element method for solving the neutron transport equation, in Mathematical Aspects of Finite Element Methods, in Partial Differential Equations. *C. deBoor, ed., Academic Press, New York*, pages 89–145, 1974.
- [86] H. Atkins. Continued development of the discontinuous Galerkin method for computational aeroacoustic applications. Technical report, Tech. Report Va 23681-0001, NASA, Langley Research Center Hampton, 1997.
- [87] Marc Bernacki., Loula Fezoui., Stéphane Lanteri., and Serge Piperno. Parallel discontinuous Galerkin unstructured mesh solvers for the calculation of three-dimensional wave propagation problems. *Applied Mathematical Modelling*, Volume 30 :744–763, 2006.
- [88] J. W. Cooley and John W. Tukey. An Algorithm for the Machine Calculation of. Complex Fourier Series. *Math. Comput*, 19 :297–301, 1965.
- [89] C. Canuto, M.Y. Hussaini, A. Quarteroni, and T.A. Zang. *Spectral methods in fluid dynamics*. Springer, New York, 1988.
- [90] TJ. Barth. Aspects of unstructured grids and Finite volume solvers for the Euler and Navier-Stokes Equations. *Lecture Series 1994-05 in Computational Fluid Dynamics, March 21-25*, 1994.
- [91] H. Paillere. *Multidimensional Upwind Residual Distribution Schemes for the Euler and Navier-Stokes Equations on Unstructured Grids*. PhD thesis, Université libre de Bruxelles, 1995.
- [92] D.R Lindquist and M.B Giles. A comparison of numerical schemes on triangular and quadrilateral meshes. *In Lecture Notes in Physics*, 323 :369–373, 1989.
- [93] T. Buffard. Analyse de quelques méthodes de volumes finis non structurés pour la résolution des équations d’Euler. *Thèse doctorat, Université Paris VI*, 1994.
- [94] Joseph L. Steger and R. F. Warming. Flux vector splitting of the inviscid gasdynamic equations with application to finite-difference methods. *Journal of Computational Physics*, 40 :263–293, 1981.
- [95] P. L. Roe. Approximate Riemann Solvers, Parameter Vectors, and Difference Schemes. *journal of computational physics*, 135 :250–258, 1997.
- [96] V.V Rusanov. Calculation of interaction of Non Steady Shock Waves with Obstacles. *Journal of Comp Math. Phys*, 1 :267–279, 1961.

-
- [97] Thomas Most and Christian Bucher. New concepts for moving least squares : An interpolating non-singular weighting function and weighted nodal least squares. *Engineering analysis with boundary elements*, 32 :461–470, 2008.
 - [98] W. K. Liu, S. Li, and T. Belytschko. Moving Least Square Reproducing Kernel Methods (I) Methodology and Convergence. Technical report, Technical Report No. Tech-ME-95-3-XX. First Draft, 1995.
 - [99] J.J. Monaghan. Smoothed particle hydrodynamics. *Ann. Rev. Astron. Astrophys*, 30 :543–574, 1992.
 - [100] S. Wandzura and H. Xiao. Symmetric quadrature rules on a triangle. *Computers and Mathematics with Applications*, 45 :1829 –1840, 2003.
 - [101] J.C. Butcher and G. Wanner. Runge Kutta methods : some historical notes. *Journal of Applied Numerical Mathematics*, 22 :113–151, 1996.
 - [102] C Hirsch. *Numerical Computational of Internal and External Flows*. John Wiley and Sons, 1988.
 - [103] J C. Butcher. *The Numerical Analysis of ordinary Differential Equations*. John Wiley and Sons, 1987.
 - [104] F Q. Hu, M.Y. Hussaini, and J. Manthey. Low-Dissipation and Low-Dispersion Runge Kutta schemes for Computational Acoustics. *Journal . Comp . Physics*, 124 :177 – 191, 1996.
 - [105] Sigal Gottlieb and Chi-Wang Shu. Total Variation Diminishing Runge-Kutta schemes. *Mathematics of Computation*, 67 :73 – 85, 1998.
 - [106] J.H Williamson. Low-storage Runge-Kutta schemes. *journal of computational phsics*, 35 :48–56, 1980.
 - [107] J. Berland, C. Bogey, and C. Bailly. Low-dissipation and low-dispersion fourth-order Runge-Kutta algorithm. *Computer and Fluids*, 35(10) :1459–1463, 2006.
 - [108] W.G. Bickley. Formulae for numerical integration. *The Mathematical Gazette*, 23(256), 1939.
 - [109] V. Venkatakrishnan. Implicit Schemes and Parallel Computing in unstructured grid CFD. Technical report, ICASE Report 95-28, NASA Langley Research Center, 1995.
 - [110] TJ. Barth. Aspects of unstructured grids and finite volume solvers for the Euler and Navier-Stokes Equations. Technical report, Lecture Series 1994-05 in Computational Fluid Dynamics, March 21-25, 1994.
 - [111] V. Venkatakrishnan and D.J Mavriplis. Implicit Method for the Computation of Unsteady Flows on Unstructured Grids. *Journal of Computational Physics*, 127 :380–397, 1996.
 - [112] K. E. Brenan, S. L. Campbell, and L. R. Petzold. *Numerical Solution of Initial-Value Problems in Differential-Algebraic Equations*. SIAM, Philadelphia, Pa, 1996.

-
- [113] C. T. Kelley. *Iterative Methods for Linear and Nonlinear Equations*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 1995.
- [114] Y. Saad and M. H. Schultz. GMRES : A Generalized Minimal Residual Algorithm for Solving Nonsymmetric Linear Systems. *SIAM J, Sci, Stat, Comput*, 7 :856–869, 1986.
- [115] H. A. Van Der Vorst. A fast and smoothly converging variant of bi-CG for the solution of nonsymmetric linear systems. *SIAM J, Sci, Stat, Comput*, 13 :631–644, 1992.
- [116] R. W. Freund. A transpose-free quasi-minimal residual algorithm for non-hermitian linear systems. *SIAM J, Sci, Stat, Comput*, 14 :470–482, 1993.
- [117] Amir Nejat and Carl Ollivier-Gooch. A high-order accurate unstructured finite volume Newton-Krylov algorithm for inviscid compressible flows. *Journal . Comp . Physics*, 227 :2582–2609, 2008.
- [118] T.F. Chan, E. Gallopoulos, V. Simoncini, T. Szeto, and C.H. Tong. A quasi-minimal residual variant of the Bi-CGSTAB algorithm for nonsymmetric systems. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 15 :338 –347, 1994.
- [119] G. S. Chen, John M. Christenson, and D. Y. Yang. Application of preconditioned Transpose Free Quasi-Minimal Residual method for two-group reactor kinetics. *Ann. Nuc. Energy*, 24 :339–359, 1997.
- [120] A.C. Hindmarsh, P.N. Brown, K.E. Grant, S.L. Lee, R. Serban, D.E. Shumaker, and C.S. Woodward. Sundials : Suite of nonlinear and differential/ algebraic equation solvers. *CM Transactions on Mathematical Software*, 31 :363–396, 2005.
- [121] P.N. Brown, A.C. Hindmarsh, and L.R. Petzold. Using Krylov methods in the solution of large-scale differential-algebraic systems. *SIAM J. Sci. Comput*, 15 :1467–1488, 1994.
- [122] P.N. Brown, A.C. Hindmarsh, and L.R. Petzold. Consistent initial condition calculation for differential-algebraic systems. *SIAM J. Sci. Comput*, 19 :1495–1512,, 1998.
- [123] Amir Nejat and Carl Ollivier-Gooch. Effect of discretization order on preconditioning and convergence of a high-order unstructured Newton-GMRES solver for the Euler equations. *Journal of Computational Physics*, 227 :2366–2386, 2008.
- [124] C. Lanczos. Solution of linear equations by minimized iterations. *J. Res. Natl. Bur. Stand*, 49 :33–53, 1952.
- [125] R. Fletcher. *Conjugate gradient methods for indefinite systems*, chapter Conjugate gradient methods for indefinite systems, pages 73–89. Springer Berlin / Heidelberg, 1976.
- [126] P. Sonneveld. CGS, a fast Lanczos-type solver for nonsymmetric linear systems. *J. Sci. Stat. Comput*, 10 :36–52, 1989.
- [127] W. D. Joubert and T. A. Manteuffel. *Iterative methods for nonsymmetric linear systems*, chapter Iterative methods for nonsymmetric linear systems, pages 149 – 171. Academic Press Professional, Inc. San Diego, CA, USA, 1990.

- [128] M. H. Gutknecht. Variants of BICGSTAB for matrices with complex spectrum. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 14 :1020 – 1033, 1993.
- [129] NASA. Fourth computational aeroacoustics (CAA) workshop on benchmark problems. Technical report, NASA/CP- 2004-212954, 2004.
- [130] MZ. Chen and XH. Wu. Vortex simulation of rotor / stator interaction in turbomachinery. *American Society of Mechanical Engineers*, 121 :358–364, 1999.
- [131] T. Sano, Y. Yoshida, Y. Tsujimoto, Y. Nakamura, and T. Matsushima. Numerical study of rotating stall in a pump vaned diffuser. *Journal of Fluid Engineering*, 124 :363–370, 2002.
- [132] FLUENT. Copyright 2005 fluent inc.
- [133] F.R. Menter. Zonal two equation $k - \omega$ turbulence models for aerodynamic flows. *AIAA, Paper 93-2906*, 1993.
- [134] J. E. Bardina, P. G. Huang, and T. J . Coakley. Turbulence modeling, validation, testing and developments. Technical report, NASA Technical Memorandum 110446, 1997.
- [135] S. Khelladi. Contribution à la modélisation aéroacoustique des ventilateurs centrifuges à grande vitesse. *Thèse doctorat, Arts et Métiers ParisTech*, 2005.
- [136] J. Hurault. Métrologie instationnaire embarquée pour la modélisation du bruit à large bande dans les turbomachines. *Thèse doctorat, Arts et Métiers ParisTech*, 2010.
- [137] D. Fedala. Modélisation du bruit à large bande rayonné par un profil isolé- application aux turbomachines. *Thèse doctorat, Arts et Métiers ParisTech*, 2007.

Annexe

Expressions des dérivées de la matrice C

Dans cette annexe, on donne les expressions des dérivées de la matrice C nécessaire pour le calcul des fonctions de forme MLS et leurs dérivées.

Les expressions des dérivées premières sont comme suit :

$$\frac{\partial C(\mathbf{x})}{\partial x} = C(\mathbf{x}_I)W^{-1}(\mathbf{x}_I)\frac{\partial W(\mathbf{x}_I)}{\partial x}\left(I - P_{\Omega_{x_I}}^T C(\mathbf{x})\right) \quad (A.1)$$

$$\frac{\partial C(\mathbf{x})}{\partial y} = C(\mathbf{x}_I)W^{-1}(\mathbf{x}_I)\frac{\partial W(\mathbf{x}_I)}{\partial y}\left(I - P_{\Omega_{x_I}}^T C(\mathbf{x})\right) \quad (A.2)$$

Les expressions des dérivées secondes sont comme suit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 C(\mathbf{x})}{\partial x^2} &= \frac{\partial C(\mathbf{x})}{\partial x}W^{-1}(\mathbf{x}_I)\frac{\partial W(\mathbf{x}_I)}{\partial x}\left(I - P_{\Omega_{x_I}}^T C(\mathbf{x})\right) \\ &\quad - C(\mathbf{x}_I)\frac{\partial W(\mathbf{x}_I)}{\partial x}W^{-2}(\mathbf{x}_I)\frac{\partial W(\mathbf{x}_I)}{\partial x}\left(I - P_{\Omega_{x_I}}^T C(\mathbf{x})\right) \\ &\quad + C(\mathbf{x}_I)W^{-1}(\mathbf{x}_I)\frac{\partial^2 W(\mathbf{x})}{\partial x^2}\left(I - P_{\Omega_{x_I}}^T C(\mathbf{x})\right) \\ &\quad - C(\mathbf{x}_I)W^{-1}(\mathbf{x}_I)\frac{\partial W(\mathbf{x}_I)}{\partial x}P_{\Omega_{x_I}}^T \frac{\partial C(\mathbf{x})}{\partial x} \end{aligned} \quad (A.3)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 C(\mathbf{x})}{\partial y^2} &= \frac{\partial C(\mathbf{x})}{\partial y} W^{-1}(\mathbf{x}_I) \frac{\partial W(\mathbf{x}_I)}{\partial y} \left(I - P_{\Omega_{x_I}}^T C(\mathbf{x}) \right) \\
&\quad - C(\mathbf{x}_I) \frac{\partial W(\mathbf{x}_I)}{\partial y} W^{-2}(\mathbf{x}_I) \frac{\partial W(\mathbf{x}_I)}{\partial y} \left(I - P_{\Omega_{x_I}}^T C(\mathbf{x}) \right) \\
&\quad + C(\mathbf{x}_I) W^{-1}(\mathbf{x}_I) \frac{\partial^2 W(\mathbf{x})}{\partial y^2} \left(I - P_{\Omega_{x_I}}^T C(\mathbf{x}) \right) \\
&\quad - C(\mathbf{x}_I) W^{-1}(\mathbf{x}_I) \frac{\partial W(\mathbf{x}_I)}{\partial y} P_{\Omega_{x_I}}^T \frac{\partial C(\mathbf{x}_I)}{\partial y}
\end{aligned} \tag{A.4}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 C(\mathbf{x})}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial C(\mathbf{x})}{\partial y} W^{-1}(\mathbf{x}_I) \frac{\partial W(\mathbf{x}_I)}{\partial x} \left(I - P_{\Omega_{x_I}}^T C(\mathbf{x}) \right) \\
&\quad - C(\mathbf{x}_I) \frac{\partial W(\mathbf{x}_I)}{\partial y} W^{-2}(\mathbf{x}_I) \frac{\partial W(\mathbf{x}_I)}{\partial x} \left(I - P_{\Omega_{x_I}}^T C(\mathbf{x}) \right) \\
&\quad + C(\mathbf{x}_I) W^{-1}(\mathbf{x}_I) \frac{\partial^2 W(\mathbf{x})}{\partial x \partial y} \left(I - P_{\Omega_{x_I}}^T C(\mathbf{x}) \right) \\
&\quad - C(\mathbf{x}_I) W^{-1}(\mathbf{x}_I) \frac{\partial W(\mathbf{x}_I)}{\partial x} P_{\Omega_{x_I}}^T \frac{\partial C(\mathbf{x}_I)}{\partial y}
\end{aligned} \tag{A.5}$$