

Distributions propres invariantes sur la paire symétrique $(\mathfrak{gl}(4, \mathbb{R})/\mathfrak{gl}(2, \mathbb{R}) * \mathfrak{gl}(2, \mathbb{R}))$

Nicolas Jacquet

► To cite this version:

Nicolas Jacquet. Distributions propres invariantes sur la paire symétrique $(\mathfrak{gl}(4, \mathbb{R})/\mathfrak{gl}(2, \mathbb{R}) * \mathfrak{gl}(2, \mathbb{R}))$.
Théorie des groupes [math.GR]. Ecole Polytechnique X, 2010. Français. pastel-00561472

HAL Id: pastel-00561472

<https://pastel.archives-ouvertes.fr/pastel-00561472>

Submitted on 1 Feb 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE présentée pour l'obtention du grade de

DOCTEUR DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Discipline : Mathématiques

par

Nicolas Jacquet

Centre de mathématiques Laurent Schwartz, École Polytechnique,
Palaiseau

**Distributions propres invariantes sur la paire
symétrique**

$(\mathfrak{gl}(4, \mathbb{R}), \mathfrak{gl}(2, \mathbb{R}) \times \mathfrak{gl}(2, \mathbb{R}))$

Soutenue publiquement le 7 décembre 2010, devant le jury composé de :

| | | |
|-----------------------|-------------------------------|---------------------|
| M. Erik VAN DEN BAN | Universiteit Utrecht | Rapporteur |
| M. Abderrazak BOUAZIZ | Université de Poitiers | Rapporteur |
| M. Patrick DELORME | Université de la Méditerranée | Examineur |
| M. Michaël PEVZNER | Université de Reims | Examineur |
| M. David RENARD | Ecole Polytechnique | Examineur |
| Mme Pascale HARINCK | Ecole Polytechnique | Directrice de thèse |

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier Pascale Harinck pour son encadrement et de m'avoir permis de mener ce travail de longue haleine à son terme. Je vous remercie de m'avoir guidé et d'avoir relu scrupuleusement de nombreuses fois les multiples versions de mon texte, ce qui a largement contribué à améliorer la qualité de celui-ci.

Je remercie chaleureusement Abderrazak Bouaziz et Erik Van Den Ban qui m'ont fait l'honneur d'accepter la tâche d'être rapporteur et de passer du temps à lire ma thèse. Je tiens aussi à exprimer ma gratitude à Patrick Delorme, Michaël Pevzner et David Renard pour avoir accepté de faire partie du jury.

Je remercie aussi le CMLS pour la qualité de son accueil, mais aussi le CMAP pour lequel j'ai travaillé deux années en tant que moniteur et qui a fait preuve aussi d'une grande bienveillance. Je pense en particulier à Nasséra pour sa constante bonne humeur et sa gentillesse. J'ai aussi une pensée particulière pour Linda avec qui j'ai travaillé avec un très grand plaisir pour le semestre d'accueil. Ce fut ma première expérience d'enseignement dont je garde un excellent souvenir et qui a peut-être joué un rôle dans mes choix actuels.

Ces années de thèse ont été mouvementées à tout point de vue et je tiens à remercier toute ma famille pour son soutien. Merci aussi à mes amis, ceux que je connais déjà depuis fort longtemps, ceux que j'ai rencontrés à l'ENS Cachan et les autres. J'ai aussi une pensée particulière pour Armance qui a été très présente au début de ma thèse.

Il est tant de tourner la page de toute une période de ma vie à travers la conclusion de cette thèse. Je remercie encore une fois tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin, mais aussi ceux qui m'ont opposé des obstacles, car ils m'ont apporté une certaine maturité et m'ont permis de faire mes choix avec certitude.

Introduction

La transformée de Fourier et la formule de Plancherel constituent deux notions fondamentales de l'analyse harmonique. Lorsque l'on interprète en profondeur celles-ci, sur \mathbb{R} ou \mathbb{R}/\mathbb{Z} , nous nous rendons compte qu'elles possèdent une grande richesse mathématique qui intervient dans de nombreuses branches mathématiques. Les fonctions exponentielles $x \mapsto e^{\lambda x}$ sur \mathbb{R} ($\lambda \in i\mathbb{R}$) ou sur \mathbb{R}/\mathbb{Z} ($\lambda \in 2i\pi\mathbb{Z}$) jouent un rôle fondamental dans ces deux formules et l'on remarque qu'elles permettent d'une part, d'obtenir toutes les représentations de dimension un des groupes de Lie \mathbb{R} ou \mathbb{R}/\mathbb{Z} . D'autre part, ce sont des fonctions propres pour $\frac{d}{dx}$ qui engendre l'algèbre des opérateurs différentiels à coefficients constants invariants par translation.

Un premier exemple de généralisation de cette théorie est donnée par la sphère \mathbb{S}^2 qui est un espace homogène sous l'action du groupe de Lie $SO(3)$, isomorphe à $SO(3)/SO(2)$. L'algèbre des opérateurs différentiels invariants sous l'action de $SO(3)$ est engendrée par le laplacien sphérique. Les fonctions propres de cet opérateur sont appelées les harmoniques sphériques. Ces fonctions servent aussi à construire des représentations irréductibles de $SO(3)$. Ainsi, les harmoniques sphériques jouent le rôle de l'exponentielle et ces fonctions interviennent de façon essentielle en électrodynamique et en mécanique quantique.

La théorie des représentations et la décomposition spectrale des opérateurs différentiels apparaissent donc de façon naturelle.

Les généralisations de la transformation de Fourier et de la formule de Plancherel à d'autres espaces ont été largement étudiées, notamment, ces deux dernières décennies sur les espaces symétriques réductifs G/H , où G est un groupe de Lie réductif réel muni d'une involution σ et H un sous-groupe ouvert du sous-groupe formé des points fixés par σ . P. Delorme a prouvé la formule de Plancherel sur G/H en 1996 ([7]). Parallèlement, H. Schlichtkrull et E. P. van den Ban ont prouvé le théorème de Paley-Wiener ([4]) dont ils ont également déduit la formule de Plancherel par des méthodes différentes ([5]).

La formule d'inversion de Fourier qui découle de la formule de Plancherel peut s'écrire de la façon suivante : il existe un ensemble mesuré (Ξ, m) tel que pour presque tout $\xi \in \Xi$, il existe une distribution sphérique Θ_ξ (c'est à dire une distribution H -invariante et solution propre de l'algèbre des opérateurs différentiels G -invariants sur G/H) et des constantes c_ξ telles que pour f une fonction de $\mathcal{C}^\infty(G/H)$ à support compact, on ait

$$f(eH) = \int_{\Xi} c_\xi \Theta_\xi(f) dm(\xi).$$

Les distributions sphériques Θ_ξ sont obtenues en terme de coefficients généralisés de représentations irréductibles de G , elles sont parfaitement décrites dans certains cas particuliers. Lorsque H est un sous-groupe compact maximal de G (espace riemannien G/H), ce sont des fonctions analytiques, les fonctions sphériques d'Harish-Chandra. Dans le cas d'un groupe semi-simple, c'est à dire lorsque $G = G_1 \times G_1$, où G_1 est un groupe de Lie semi-simple et H la diagonale, Harish-Chandra ([12]) a montré que les distributions sphériques sont des fonctions localement intégrables. Il en est de même pour les espaces symétriques du type $G_{\mathbb{C}}/G_{\mathbb{R}}$ où $G_{\mathbb{C}}$ est un groupe réductif complexe et $G_{\mathbb{R}}$ une forme réelle de $G_{\mathbb{C}}$ ([22]). Les espace symétriques de rang 1 montrent les premiers exemples de

distributions sphériques qui ne sont pas données par une fonction localement intégrable ([9]).

Dans le cadre général, les propriétés des distributions sphériques, notamment leur régularité ou support, sont encore mal connues. Une première approche pour cette étude consiste à s'intéresser aux distributions propres invariantes sur l'espace tangent (paire symétrique), l'exponentielle faisant le lien entre l'espace symétrique et son espace tangent en l'identité.

Précisons ce cadre.

Soit G un groupe de Lie réductif réel que l'on munit d'une involution σ . On note H l'ensemble des points fixés par σ . On note respectivement \mathfrak{g} et \mathfrak{h} les algèbres de Lie de G et H et encore σ la différentielle de σ en l'identité. Soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{q}$ la décomposition en sous-espaces propres associée aux valeurs propres 1 et -1 pour σ . Le couple $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ s'appelle une paire symétrique. Le groupe H agit sur \mathfrak{q} par conjugaison et l'ensemble \mathfrak{q}^{reg} des éléments semi-simples réguliers de \mathfrak{q} est un ouvert dense H -stable de \mathfrak{q} tel que la variété \mathfrak{q}^{reg}/H soit lisse. Le rang de la paire $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ est la dimension de cette variété, autrement dit le nombre de réels nécessaires pour caractériser une orbite de \mathfrak{q}^{reg} .

L'algèbre des opérateurs différentiels H -invariants sur \mathfrak{q} à coefficients constants est isomorphe à l'algèbre $\mathbb{C}[\mathfrak{q}_{\mathbb{C}}]^{H_{\mathbb{C}}}$ des polynômes sur $\mathfrak{q}_{\mathbb{C}}$ invariants sous $H_{\mathbb{C}}$. Dans le cas tangent, une distribution propre invariante est donnée par une distribution H -invariante sur \mathfrak{q} pour laquelle il existe un caractère $\chi : \mathbb{C}[\mathfrak{q}_{\mathbb{C}}]^{H_{\mathbb{C}}} \rightarrow \mathbb{C}$ vérifiant pour tout P de $\mathbb{C}[\mathfrak{q}_{\mathbb{C}}]^{H_{\mathbb{C}}}$:

$$\partial(P)T = \chi(P)T.$$

Dans [30], G. Van Dijk donne une table de la dimension de l'espace des distributions propres invariantes pour toutes les paires symétriques de rang un. Lorsque le caractère est nul, la situation de rang un nous apporte des distributions d'un nouveau type, celles à support singulier, c'est-à-dire inclus dans $\mathfrak{q} - \mathfrak{q}^{reg}$. Par exemple, la paire symétrique $(\mathfrak{so}(1, n+1), \mathfrak{so}(1, n))$ a des distributions propres invariantes dont le support est dans le cône nilpotent, qui correspond ici à une hypersurface dont on peut voir une construction dans le paragraphe 6.2 de [24]. La question de l'existence des distributions propres invariantes à support singulier se pose alors naturellement. Dans ce même article, J. Sekiguchi donne une condition suffisante sur une paire symétrique pour qu'elle n'ait pas de distributions propres invariantes à support dans $\mathfrak{q} - \mathfrak{q}^{reg}$.

Par ailleurs, pour un caractère régulier (ces caractères formant un ouvert dense dans l'ensemble des caractères), C. Torossian a montré dans [28] qu'il n'y a pas de distributions propres invariantes à support dans $\mathfrak{q} - \mathfrak{q}^{reg}$.

Dans ce travail, nous étudions la situation tangente $(\mathfrak{gl}(4, \mathbb{R}), \mathfrak{gl}(2, \mathbb{R}) \times \mathfrak{gl}(2, \mathbb{R}))$ de l'espace symétrique $GL(4, \mathbb{R})/GL(2, \mathbb{R}) \times GL(2, \mathbb{R})$. Des résultats partiels concernant les distributions sphériques sur $GL(4, \mathbb{R})/GL(2, \mathbb{R}) \times GL(2, \mathbb{R})$ ont été annoncés par S. Kato et S. Aoki dans ([2]), mais aucune preuve n'est explicitement donnée dans cet article ce qui ne nous a pas permis de comparer précisément nos résultats.

Sur $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(4, \mathbb{R})$ ou $G = GL(4, \mathbb{R})$, on considère l'involution σ définie par

$$\sigma(X) = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix},$$

où I_2 la matrice identité 2×2 . Soit $\mathfrak{h} = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}; A, B \in \mathfrak{gl}(2, \mathbb{R}) \right\}$ l'ensemble des points fixes pour cette involution et $\mathfrak{q} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & Y \\ Z & 0 \end{pmatrix}; Y, Z \in \mathfrak{gl}(2, \mathbb{R}) \right\}$ de telle sorte que $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{q}$. On note $H = GL(2, \mathbb{R}) \times GL(2, \mathbb{R})$.

La paire symétrique $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ satisfait la condition suffisante de J. Sekiguchi.

Nous savons que la restriction d'une distribution propre invariante à \mathfrak{q}^{reg} est une fonction analytique sur \mathfrak{q}^{reg} (théorème 5.3(i) de [24]). Nous nous intéressons à la question suivante. On fixe un caractère régulier χ de $\mathbb{C}[\mathfrak{q}_{\mathbb{C}}]^{H_{\mathbb{C}}}$ et une fonction F satisfaisant la relation

$$\partial(P)F = \chi(P)F \quad \text{sur } \mathfrak{q}^{reg}, \quad \forall P \in \mathbb{C}[\mathfrak{q}_{\mathbb{C}}]^{H_{\mathbb{C}}}.$$

Lorsque F est localement intégrable, à quelles conditions la distribution T_F définie par F est-elle une distribution propre invariante sur \mathfrak{q} ? Ces conditions sont-elles suffisantes?

On note \mathcal{N} le cône des éléments nilpotents de \mathfrak{q} . Nous obtenons des conditions nécessaires et suffisantes pour que T_F définisse une distribution propre invariante sur $\mathcal{U} = \mathfrak{q} - \mathcal{N}$. Nous expliciterons une base de distributions propres invariantes sur \mathcal{U} données par une fonction localement intégrable sur \mathcal{U} et nous ferons quelques commentaires sur l'extension de ces solutions sur \mathfrak{q} .

La première partie est consacrée aux notations et aux rappels de quelques définitions.

La H -invariance des objets considérés nous incite à étudier la structure des orbites semi-simples de \mathfrak{q} (paragraphe 2).

Les H -orbites semi-simples de \mathfrak{q} sont uniquement déterminées par les polynômes $Q(X) = \frac{1}{2}tr(X^2)$ et $S(X) = det(X)$ qui forment une base de l'algèbre $\mathbb{C}[\mathfrak{q}]^H$ des polynômes H -invariants sur \mathfrak{q} , ou encore par les valeurs propres $u(X)$ et $v(X)$ de YZ si $X = \begin{pmatrix} 0 & Y \\ Z & 0 \end{pmatrix}$. Les fonctions u et v satisfont les relations $u + v = Q$ et $uv = S$.

La paire symétrique $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ est de rang 2 et possède 4 classes de conjugaison sous H de sous-espaces de Cartan (c'est-à-dire formé d'éléments semi-simples de \mathfrak{q} , abélien et maximal pour ces propriétés) selon la nature des valeurs propres $u(X)$ et $v(X)$: \mathfrak{a}_{++} , \mathfrak{a}_{+-} et \mathfrak{a}_{--} sur lesquels les fonctions u et v prennent des valeurs réelles de signe constant et \mathfrak{a}_2 sur lequel u et v sont complexes conjuguées. L'ensemble \mathfrak{q}^{reg} est formé des éléments semi-simples X dont les valeurs propres sont deux à deux distinctes ce qui équivaut à la condition $u(X)v(X)(u(X) - v(X)) \neq 0$.

Le paragraphe 2.1 est consacré à la description des sous-espaces de Cartan, des transformations de Cayley et de leurs systèmes de racines. Ceux-ci comportent deux racines positives de multiplicité 1 dont les carrés sont les fonctions $4u$ et $4v$, et deux racines de multiplicité 2 dont le produit est, à une fonction localement constante sur \mathfrak{q}^{reg} près, la fonction $u - v$. Nous verrons apparaître des symétries entre ces sous-espaces de Cartan et nous mettrons en évidence un isomorphisme H -invariant ϖ de \mathfrak{q} qui renverse

l'ordre d'Hirai. La description plus précise des H -orbites semi-simples fait l'objet du paragraphe 2.2.

Les conditions que nous obtenons portent sur le comportement de la fonction F au voisinage des points qui sont à l'intersection d'exactly deux sous espaces de Cartan (c'est un sous-espace vectoriel de dimension un). Ces éléments, appelés semi-réguliers, sont les éléments semi-simples $X \in \mathfrak{q}$ pour lesquels une et une seule des trois valeurs $u(X)$, $v(X)$ ou $u(X) - v(X)$ est nulle. L'algèbre dérivée du centralisateur dans \mathfrak{g} d'un élément semi-régulier non nul nous fournit des sous-paires symétriques de rang un (compatibles avec σ). Le paragraphe 2.3 est consacré à l'étude des éléments semi-réguliers.

Tout élément semi-régulier annulé par une racine de multiplicité 1 (ce qui correspond à la situation $u(X) = 0$ ou bien $v(X) = 0$ avec $u(X) \neq v(X)$) est conjugué sous H à un élément de $\mathfrak{a}_{++} \cap \mathfrak{a}_{+-}$ ou de $\mathfrak{a}_{+-} \cap \mathfrak{a}_{--}$. Soient \mathfrak{z}_1 et \mathfrak{z}_2 les centralisateurs dans \mathfrak{g} de chacun de ces deux espaces. Alors $\mathfrak{m} = \mathfrak{z}_1 + \mathfrak{z}_2$ est une sous-algèbre de Lie σ -stable de \mathfrak{g} et la sous-paire symétrique $(\mathfrak{m}, \mathfrak{m} \cap \mathfrak{h})$ est isomorphe au produit de deux copies H -conjuguées de $(\mathfrak{gl}(2, \mathbb{R}), \mathfrak{gl}(1, \mathbb{R}) \times \mathfrak{gl}(1, \mathbb{R}))$. Les éléments semi-réguliers annulés par une racine de multiplicité 2 (ce qui correspond à la situation $u(X) - v(X) = 0$ et $u(X)v(X) \neq 0$) sont tous H -conjugués à un élément de $\mathfrak{a}_{++} \cap \mathfrak{a}_2$ ou de $\varpi(\mathfrak{a}_{++} \cap \mathfrak{a}_2) = \mathfrak{a}_{--} \cap h_0 \cdot \mathfrak{a}_2$ où $h_0 \in H$, la somme des centralisateurs de chacun de ces espaces est alors égale à \mathfrak{g} .

Précisons maintenant notre démarche. On fixe un caractère régulier χ de $\mathbb{C}[\mathfrak{q}_{\mathbb{C}}]^{H_{\mathbb{C}}}$ et une fonction F de $L^1_{loc}(\mathfrak{q})^H$ satisfaisant, pour tout $P \in \mathbb{C}[\mathfrak{q}_{\mathbb{C}}]^{H_{\mathbb{C}}}$, la relation $\partial(P)F = \chi(P)F$ sur \mathfrak{q}^{reg} . Ainsi la distribution T_F est propre et H -invariante sur \mathfrak{q} si et seulement si, pour tout $f \in \mathcal{D}(\mathfrak{q})$ et tout $P \in \mathbb{C}[\mathfrak{q}_{\mathbb{C}}]^{H_{\mathbb{C}}}$, on a

$$\int_{\mathfrak{q}} [F(X)\partial(P)f(X) - \partial(P)F(X)f(X)]dX = 0.$$

Lorsque F est analytique sur \mathfrak{q} , cette relation est immédiatement vérifiée par simple intégration par parties. Pour étudier cette relation dans un cadre plus général, et plus particulièrement les intégrations par parties, on utilise la formule d'intégration de Weyl qui fait intervenir l'intégrale orbitale de la fonction f , définie et étudiée au cours des paragraphes 3 et 4 et la partie radiale de l'opérateur $\partial(P)$ sur \mathfrak{a} , étudié dans le paragraphe 5.

L'intégrale orbitale $\mathcal{M}(f)$ d'une fonction $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathfrak{q})$ est la fonction H -invariante donnée pour $X \in \mathfrak{q}^{reg}$ par $\mathcal{M}(f)(X) = |\delta(X)| \int_{H/Z_H(X)} f(h \cdot X) d\dot{h}$, où $\delta(X) = u(X) - v(X)$ et $Z_H(X)$ est le centralisateur de X dans H . C'est une fonction de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathfrak{q}^{reg} dont nous souhaitons décrire le comportement au voisinage des points semi-réguliers.

Pour cela, nous généralisons tout d'abord les résultats de T. Tengstrand et J. Faraut concernant les intégrales orbitales sur les hyperboloïdes (espace symétrique de rang 1). Etant donné une forme quadratique \mathcal{Q} sur \mathbb{R}^n , la fonction moyenne $M_{\mathcal{Q}}(f)$ de $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ introduite par J. Faraut dans l'appendice de [11] est l'application $M_{\mathcal{Q}}(f) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^*)$ vérifiant pour tout $F \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, la relation $\int_{\mathbb{R}^n} F \circ \mathcal{Q}(x) f(x) dx = \int_{\mathbb{R}} F(t) M_{\mathcal{Q}}(f)(t) dt$.

Ce même article nous indique le comportement de $M_{\mathcal{Q}}$. Pour $t \in \mathbb{R}^*$, on a

$$M_{\mathcal{Q}}(f)(t) = \phi_0(t) + \eta(t)\phi_1(t),$$

où ϕ_0 et ϕ_1 sont des fonctions de classe \mathcal{C}^∞ à support compact dans \mathbb{R} et η est une fonction singularité définie suivant la signature de la forme quadratique \mathcal{Q} .

Dans le paragraphe 3, nous généralisons ce résultat pour $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)$ en montrant qu'il existe Φ_0 et Φ_1 dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R})$ vérifiant, pour tout $(x, t) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^*$, la relation

$$M_{\mathcal{Q}}(f(x, \cdot))(t) = \Phi_0(x, t) + \eta(t)\Phi_1(x, t),$$

et toute fonction du type $\Phi_0(x, t) + \eta(t)\Phi_1(x, t)$ avec Φ_0 et Φ_1 dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R})$ est l'image $M_{\mathcal{Q}}(f(x, \cdot))(t)$ d'une fonction $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)$ (Théorèmes 3.1.2 et 3.1.3).

Nous considérons également la moyenne $M_{\mathcal{Q}'}(x \mapsto M_{\mathcal{Q}}(f(x, \cdot)))(t', t)$ relative à une forme quadratique \mathcal{Q}' de \mathbb{R}^m (Théorèmes 3.2.1 et 3.2.1).

En adaptant la méthode de descente d'Harish-Chandra à la paire symétrique $(\mathfrak{m}, \mathfrak{m} \cap \mathfrak{h})$, nous en déduisons le comportement des intégrales orbitales simultanément au voisinage des points de $\mathfrak{a}_{++} \cap \mathfrak{a}_{+-} - \{0\}$ et $\mathfrak{a}_{+-} \cap \mathfrak{a}_{--} - \{0\}$ et par conjugaison, aux voisinages des points tels que $u(X) = 0$ ou $v(X) = 0$ et nous obtenons alors le résultat suivant (théorème 4.3.1).

Soit \mathcal{H}_{η}^2 l'espace des fonctions $(t_1, t_2) \in (\mathbb{R}^*)^2 - \text{diag} \mapsto \varphi_0(t_1, t_2) + \log |t_1| \varphi_1(t_1, t_2) + \log |t_2| \varphi_1(t_2, t_1) + \log |t_1| \log |t_2| \varphi_2(t_1, t_2)$ avec $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2 - \text{diag})$ et φ_0, φ_2 symétriques par rapport aux deux variables. Soit $\mathcal{D}(H \cdot \mathfrak{m} \cap \mathfrak{q})$ l'espace des fonctions de classe \mathcal{C}^{∞} à support compact contenu dans $\mathcal{U}_{\mathfrak{m}} = H \cdot \mathfrak{m} \cap \mathfrak{q} = \{X \in \mathfrak{q}; Q^2(X) - 4S(X) > 0\}$. Alors pour tout $f \in \mathcal{D}(H \cdot \mathfrak{m} \cap \mathfrak{q})$ il existe une unique fonction $F_f \in \mathcal{H}_{\eta}^2$ telle que pour $X \in H \cdot \mathfrak{m} \cap \mathfrak{q}^{reg}$, l'on ait $\mathcal{M}(f)(X) = F_f(u(X), v(X))$ et l'application $f \mapsto F_f$ est surjective de $\mathcal{D}(H \cdot \mathfrak{m} \cap \mathfrak{q})$ dans \mathcal{H}_{η}^2 .

Les autres points semi-réguliers correspondent à la situation $u(X) = v(X)$ et sont conjugués à un élément de $\mathfrak{a}_{++} \cap \mathfrak{a}_2$ ou de $h_0 \cdot \mathfrak{a}_2 \cap \mathfrak{a}_{--}$ avec $h_0 \in H$. Soit \mathfrak{z}_3 l'algèbre dérivée du centralisateur d'un élément non nul de $\mathfrak{a}_{++} \cap \mathfrak{a}_2$. La paire symétrique $([\mathfrak{z}_3, \mathfrak{z}_3], [\mathfrak{z}_3, \mathfrak{z}_3] \cap \mathfrak{h})$ est alors isomorphe à $(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \times \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}), \text{diagonale})$ et $(\varpi([\mathfrak{z}_3, \mathfrak{z}_3]), \varpi([\mathfrak{z}_3, \mathfrak{z}_3] \cap \mathfrak{h}))$ est isomorphe à $(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}), \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}))$. Contrairement à la situation précédente, ces deux cas ne peuvent être traités simultanément mais se déduisent l'un de l'autre par l'isomorphisme ϖ de \mathfrak{q} . Nous appliquons cette fois-ci la méthode de descente classique de Harish-Chandra pour l'étude au voisinage de ces points. On se place sur l'ouvert $\mathcal{U}_3 = H \cdot (\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q}) = \{X \in \mathfrak{q}; S(X) > 0 \text{ et } Q(X) > -2\sqrt{S(X)}\}$. On note $\mathcal{H}_{\eta}^{pair}$ l'ensemble des fonctions $(\tau, w) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \mapsto a(\tau, w) + Y(-w)|w|^{1/2}b(\tau, w)$ où a et b sont des fonctions paires par rapport à τ de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \cap \{(\tau, w); \tau^2 > w\})$. Alors, pour tout $f \in \mathcal{D}(\mathcal{U}_3)$, il existe une unique fonction $G_f \in \mathcal{H}_{\eta}^{pair}$ telle que $\mathcal{M}(f)(X) = G_f(\tau, w)$, ceci pour tout $X \in \mathcal{U}_3 \cap \mathfrak{q}^{reg}$ tels que, pour $\frac{Q(X)}{2} + \sqrt{S(X)} = \tau^2$ et $\frac{Q(X)}{2} - \sqrt{S(X)} = w$ avec $\tau^2 > w$. De plus l'application $f \mapsto G_f$ est surjective de $\mathcal{D}(\mathcal{U}_3)$ dans $\mathcal{H}_{\eta}^{pair}$.

Les deux derniers paragraphes sont consacrés à l'étude des distributions propres invariantes sur \mathfrak{q} . On fixe un caractère χ de $\mathbb{C}[\mathfrak{q}_{\mathbb{C}}]^{H_{\mathbb{C}}} = \mathbb{C}[Q, S]$ donné par deux complexes λ_1 et λ_2 vérifiant $\chi(Q) = \lambda_1 + \lambda_2$ et $\chi(S) = (\lambda_1 \lambda_2)^2$ avec $\lambda_1 \lambda_2 (\lambda_1 - \lambda_2) \neq 0$.

Dans le paragraphe 5, nous décrivons les solutions analytiques du système .

$$\partial(P)F = \chi(P)F \quad \text{sur } \mathfrak{q}^{reg}, \quad \text{pour tout } P \in \mathbb{C}[\mathfrak{q}_{\mathbb{C}}]^{H_{\mathbb{C}}}. \quad (1)$$

On fixe un sous-espace de Cartan \mathfrak{a} de \mathfrak{q} dont on note $W_{H_{\mathbb{C}}}(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})$ le quotient du normalisateur de $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$ dans $H_{\mathbb{C}}$ par son centralisateur. Les opérateurs de Dunkl permettent de décrire l'action des composantes radiales des opérateurs $\partial(Q)$ et $\partial(S)$ sur l'espace des fonctions $W_{H_{\mathbb{C}}}(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})$ - invariantes . Plus précisément, le système de racines de \mathfrak{a} dans \mathfrak{g} comporte deux racines positives de multiplicité 1 que l'on note α_1 et α_2 et pour $X \in \mathfrak{a}_{reg}$, on

a $\{\alpha_1^2(X)/4, \alpha_2^2(X)/4\} = \{u(X), v(X)\}$. La fonction H -invariante F sur \mathfrak{q}^{reg} satisfait le système (1) si et seulement pour tout sous-espace de Cartan \mathfrak{a} de \mathfrak{q} , on a

$$(\partial(Q)F)|_{\mathfrak{a} \cap \mathfrak{q}^{reg}} = \delta^{-1} \circ (L_{\alpha_1} + L_{\alpha_2}) \circ \delta(F|_{\mathfrak{a} \cap \mathfrak{q}^{reg}}) = (\lambda_1 + \lambda_2)F|_{\mathfrak{a} \cap \mathfrak{q}^{reg}},$$

$$(\partial(S)F)|_{\mathfrak{a} \cap \mathfrak{q}^{reg}} = \delta^{-1} \circ (L_{\alpha_1} L_{\alpha_2}) \circ \delta(F|_{\mathfrak{a} \cap \mathfrak{q}^{reg}}) = (\lambda_1 \lambda_2)F|_{\mathfrak{a} \cap \mathfrak{q}^{reg}},$$

où $L_{\alpha_i} = \frac{1}{4\alpha_i} \partial(\alpha_i)(\alpha_i \partial(\alpha_i))$. Cet opérateur est la composante radiale de l'opérateur de Laplace de la paire symétrique de rang un $(\mathfrak{so}(2, 1), \mathfrak{so}(1, 1))$ (appendice A de [10]) lorsque la racine α_i est réelle ou imaginaire.

Les racines α_1 et α_2 sont orthogonales, ainsi les opérateurs L_{α_1} et L_{α_2} commutent et le système précédent se ramène l'étude de $\ker(L_{\alpha_j} - \lambda id)$ pour $j = 1, 2$. Via le changement de variable $z = \alpha_j^2$, nous montrons que ses solutions s'expriment à l'aide des solutions d'une part sur \mathbb{C} et d'autre part sur \mathbb{R} de l'équation de type Bessel $(E_{\mathbb{C}})$ $L_c \Phi = 4z \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + 4 \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \lambda \Phi$.

Un système fondamental de l'espace $Sol(L_c, \lambda)$ des solutions de $(E_{\mathbb{C}})$ sur $\mathbb{C} - \mathbb{R}_-$ est donné par une fonction Φ_λ analytique sur \mathbb{C} et une fonction $W_\lambda(z) = w_\lambda(z) + \log(z)\Phi_\lambda(z)$ où $\log(z)$ désigne la détermination principale du logarithme et w_λ est une fonction analytique sur \mathbb{C} . L'espace des solutions $Sol(L, \lambda)$ sur \mathbb{R}^* de l'équation $4t \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + 4 \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \lambda \Phi$ est engendré par les fonctions $\Phi_\lambda(t)$ et $W_\lambda^r(t) = w_\lambda(t) + \log|t|\Phi_\lambda(t)$ avec $t \in \mathbb{R}^*$. On constate en particulier que la solution $W_\lambda(z)$ ne se prolonge pas sur \mathbb{R}^* en $W_\lambda^r(t)$ ce qui joue un rôle important par la suite.

La fonction F solution de (1) s'écrit alors sur chaque composante connexe de \mathfrak{q}^{reg} comme combinaison linéaire de fonctions $\frac{A(u(X))B(v(X))}{u(X) - v(X)}$ et $\frac{A(v(X))B(u(X))}{u(X) - v(X)}$ où (A, B) parcourt $Sol(L, \lambda_1) \times Sol(L, \lambda_2)$ lorsque $u(X)$ et $v(X)$ sont réelles et $Sol(L_c, \lambda_1) \times Sol(L_c, \lambda_2)$ sinon.

Dans le paragraphe 6, nous considérons une solution F du système (1) dont une expression est donnée sur chaque composante connexe \mathcal{C} de \mathfrak{q}^{reg} . Nous cherchons des conditions nécessaires et suffisantes pour que la distribution $T_{\partial(P)F} - \partial(P)T_F$ soit nulle pour tout $P \in S(\mathfrak{q})^H$. Comme dans le cas du groupe ([16]), la formule d'intégration de Weyl permet une étude sur chaque sous-espace de Cartan. Une intégration par parties tenant compte du comportement des intégrales orbitales obtenu précédemment nous permet de dégager des conditions nécessaires qui portent sur le comportement de F au voisinage des points semi-réguliers (i-e des points semi-simples non nuls et non réguliers de $\overline{\mathcal{C}}_1 \cap \overline{\mathcal{C}}_2$ où \mathcal{C}_j est une composante connexe de \mathfrak{q}^{reg}).

Nous étudions tout d'abord les conditions nécessaires successivement sur les ouverts $\mathcal{U}_m = H \cdot \mathfrak{m} \cap \mathfrak{q} = \{X \in \mathfrak{q}; Q^2(X) - 4S(X) > 0\}$, $\mathcal{U}_3 = H \cdot (\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q}) = \{X \in \mathfrak{q}; S(X) > 0 \text{ et } Q^2(X) > -2\sqrt{S(X)}\}$ et $\varpi(\mathcal{U}_3) = H \cdot \varpi(\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q}) = \{X \in \mathfrak{q}; S(X) > 0 \text{ et } Q^2(X) < 2\sqrt{S(X)}\}$ qui forment un recouvrement ouvert de $\mathfrak{q} - \mathcal{N} = \mathcal{U}$.

Sur l'ouvert \mathcal{U}_m , une orbite semi-simple $H \cdot X$ est paramétrée par deux réels $\{t_1, t_2\} = \{u(X), v(X)\}$ et la fonction F s'écrit pour $X \in \mathcal{U}_m \cap \mathfrak{q}^{reg}$ sous la forme

$$F(X) = \frac{\Psi_m(u(X), v(X))}{u(X) - v(X)}$$

où la fonction Ψ_m est symétrique et de classe \mathcal{C}^∞ sur $(\mathbb{R}^*)^2$ privé de la diagonale. La fonction Ψ_m et les intégrales orbitales d'une fonction de $\mathcal{D}(\mathcal{U}_m)$ ont des singularités de type $\log|t_j|$. Les conditions que nous obtenons sont analogues à celles de J. Faraut obtenues pour un hyperboloïde à une nappe [11]).

Soit u une fonction de la forme $u(t) = v(t) + \log|t|w(t)$, où v et w sont de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}^* et admettent, ainsi que leurs dérivées, des limites à droite et à gauche en 0. On pose

$$u^{[1]}(t) = tu'(t) \quad \text{et} \quad u^{[0]}(t) = u(t) - \log|t|u^{[1]}(t),$$

de telle sorte que

$$\lim_{t \rightarrow 0^\pm} u^{[1]}(t) = w(0^\pm) \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow 0^\pm} u^{[0]}(t) = v(0^\pm).$$

On obtient ainsi dans la proposition 6.2.1 les conditions nécessaires de recollement suivantes : pour tout $j \in \{0, 1\}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}^*$, alors

$$(\Psi_m(t, \cdot))^{[j]}(0^+) = (\Psi_m(t, \cdot))^{[j]}(0^-) \quad \text{et} \quad (\Psi_m(\cdot, t))^{[j]}(0^+) = (\Psi_m(\cdot, t))^{[j]}(0^-).$$

Pour f et g deux fonctions d'une variable x complexe, on note

$$S^+(f, g)(x_1, x_2) = f(x_1)g(x_2) + f(x_2)g(x_1)$$

et

$$[f, g](x_1, x_2) = f(x_1)g(x_2) - f(x_2)g(x_1).$$

Les conditions précédentes permettent alors d'obtenir dans le corollaire 6.2.1 que

$$\Psi_m \in \text{Vect}\langle S^+(A, B)(t_1, t_2), \text{signe}(t_1 - t_2)[A, B](t_1, t_2); (A, B) \in \text{Sol}(L, \lambda_1) \times \text{Sol}(L, \lambda_2) \rangle.$$

Sur l'ouvert \mathcal{U}_3 , nous paramétrons les orbites semi-simples régulières de la manière suivante : pour $\tau > \theta > 0$ on note $X_{\tau, \theta}^r$ l'unique élément d'une chambre de Weyl fixée de $\mathfrak{a}_{+,+}$ tel que $u(X_{\tau, \theta}^r) = (\tau + \theta)^2$ et $v(X_{\tau, \theta}^r) = (\tau - \theta)^2$ et pour $(\tau, \theta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, on note $X_{\tau, \theta}$ l'unique élément d'une chambre de Weyl fixée de \mathfrak{a}_2 tel que $u(X_{\tau, \theta}) = (\tau + i\theta)^2 = \overline{v(X_{\tau, \theta})}$.

On définit alors la fonction $(\Psi_m)_r$ paire par rapport à chaque variable et symétrique sur $\{(\tau, \theta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2; \tau^2 \neq \theta^2\}$ par $(\Psi_m)_r(\tau, \theta) = (u - v)(X_{\tau, \theta}^r)F(X_{\tau, \theta}^r) = \Psi_m(u(X_{\tau, \theta}^r), v(X_{\tau, \theta}^r))$ pour $\tau > \theta > 0$ et la fonction Ψ_2 paire en chaque variable sur $(\mathbb{R}_*^*)^2$ par $\Psi_2(\tau, \theta) = (u - v)(X_{\tau, \theta})F(X_{\tau, \theta})$ pour $(\tau, \theta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$.

Nous obtenons dans la proposition 6.2.3 les conditions nécessaires suivantes :

$$\forall \tau \in \mathbb{R}_+^*, \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial \theta}(\Psi_m)_r(\tau, 0^+) - \frac{\partial}{\partial \theta}\Psi_2(\tau, 0^+) = 0 \\ \Psi_2(\tau, 0^+) = 0 \end{cases}.$$

Ces conditions nous permettent d'obtenir dans le corollaire 6.2.2, le résultat suivant : il existe $\Psi^+ \in \text{Vect}\langle S^+(A, B); (A, B) \in \text{Sol}(L, \lambda_1) \times \text{Sol}(L, \lambda_2) \rangle$ et $\Psi_c \in \text{Vect}\langle [A, B]; (A, B) \in \text{Sol}(L_c, \lambda_1) \times \text{Sol}(L_c, \lambda_2) \rangle$ telles que

$$\begin{aligned} &\text{pour } t_1 > t_2 > 0 \text{ alors } \Psi_m(t_1, t_2) = \Psi^+(t_1, t_2) + i\Psi_c(t_1, t_2) \\ &\text{pour } \tau > 0 \text{ et } \theta > 0 \text{ alors } \Psi_2(\tau, \theta) = \Psi_c(u(X_{\tau, \theta}), v(X_{\tau, \theta})) \end{aligned}.$$

Via l'application ϖ , nous pouvons utiliser l'étude effectuée sur \mathcal{U}_3 pour obtenir les conditions de recollement et les fonctions correspondantes sur $\varpi(\mathcal{U}_3)$. La fonction $F \circ \varpi$ est alors solution du système (1) pour le caractère χ^- défini par $-\lambda_1$ et $-\lambda_2$.

Il est intéressant de noter que dans chacun des cas $\mathcal{V} = \mathcal{U}_m$ ou \mathcal{U}_3 , les conditions de recollement se déduisent uniquement de l'étude de l'équation $\partial(Q)T_F = (\lambda_1 + \lambda_2)T_F$ sur \mathcal{V} . En effet, les fonctions solutions obtenues satisfont alors la relation $\partial(S)T_F = (\lambda_1\lambda_2)T_F$ sur \mathcal{V} .

La synthèse des résultats précédents permet de décrire une base de l'espace des distributions propres invariantes sur $\mathcal{U} = \mathfrak{q} - \mathcal{N}$ définies par une fonction localement intégrable sur \mathcal{U} . Celle-ci est donnée par les fonctions suivantes : (voir le théorème 6.2.2)

1. La fonction analytique

$$F_{ana} = \frac{[\Phi_{\lambda_1}, \Phi_{\lambda_2}](u, v)}{u - v}$$

qui s'exprime également sous la forme $f(Q, S)$ où f est analytique sur \mathbb{R}^2 . Cette distribution est propre invariante sur \mathfrak{q} tout entier.

2. La fonction

$$F_{sing} = \frac{[\Phi_{\lambda_1}, w_{\lambda_2}](u, v) + [w_{\lambda_1}, \Phi_{\lambda_2}](u, v) + \log |uv|[\Phi_{\lambda_1}, \Phi_{\lambda_2}](u, v)}{u - v}$$

qui s'exprime également sous la forme $f(Q, S) + \log |S|g(Q, S)$ où f et g sont analytiques sur \mathbb{R}^2 . Cette fonction est localement intégrable sur \mathfrak{q} .

3. Les fonctions du type $F_{A,B}^+ = Y(Q^2 - 4S) \frac{A(u)B(v) + A(v)B(u)}{u - v}$, où Y désigne la fonction d'Heaviside et (A, B) parcourt $\mathcal{Sol}(L, \lambda_1) \times \mathcal{Sol}(L, \lambda_2)$.

Les méthodes que nous utilisons ne nous permettent pas de savoir si les fonctions F_{sing} et $F_{A,B}^+$ se prolongent en des distributions propres invariantes sur \mathfrak{q} tout entier car nous ne connaissons pas le comportement au voisinage de zéro des intégrales orbitales $\mathcal{M}_H(f)$ de $f \in \mathcal{D}(\mathfrak{q})$.

1 Notations et préliminaires

Soit M est une variété différentiable. On note $\mathcal{D}(M)$ l'espace des fonctions de classe C^∞ à support compact et $\mathcal{D}'(M)$ l'espace des distributions sur M . Pour $N \subset M$ et f une fonction définie sur M , on notera $f|_N$ la restriction de f à N . Pour m dans M , on note $T_m(M)$ l'espace tangent à M en m .

Si V est un espace vectoriel, on note $V_{\mathbb{C}}$ son complexifié.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, nous notons $\mathcal{F}(f)$ sa transformée de Fourier définie par

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi x \cdot \xi} f(x) dx.$$

Soit G un groupe algébrique linéaire défini sur \mathbb{R} . On note G l'ensemble de ses points réels et $G_{\mathbb{C}}$ l'ensemble de ses points complexes. Soit \mathfrak{g} l'algèbre de Lie de G .

Pour tout sous-groupe M de G , on note $M_{\mathbb{C}}$ son complexifié dans $G_{\mathbb{C}}$.

Soit M un sous-groupe de G et U une partie de \mathfrak{g} . On note $Z_M(U)$ le centralisateur de U dans M et $N_M(U)$ son normalisateur. De même pour tout sous-espace vectoriel \mathfrak{v} de \mathfrak{g} , on note $\mathfrak{z}_{\mathfrak{v}}(U)$ le centralisateur de U dans \mathfrak{v} et $\mathfrak{n}_{\mathfrak{v}}(U)$ son normalisateur.

Soit V un espace vectoriel réel de dimension finie. On note $S[V]$ (respectivement $S[V_{\mathbb{C}}]$) l'algèbre symétrique de V (respectivement de $V_{\mathbb{C}}$). Cette algèbre peut-être vue comme l'algèbre $\mathbb{R}[V^*]$ des fonctions polynomiales à coefficients réels sur V^* et elle s'identifie également à l'algèbre des opérateurs différentiels à coefficients constants réels sur V . De même, on a $S[V_{\mathbb{C}}] = \mathbb{C}[V^*]$ et cette algèbre s'identifie à l'algèbre des opérateurs différentiels à coefficients constants complexes sur V . On note $S[V]^M$ (respectivement $S[V_{\mathbb{C}}]^M$) la sous algèbre de $S[V]$ (respectivement $S[V_{\mathbb{C}}]$) constituée d'éléments invariants sous l'action de M . Si $u \in S[V]$ (respectivement $S[V_{\mathbb{C}}]$), on note $\partial(u)$ l'opérateur différentiel correspondant.

On notera \log la détermination principale du logarithme définie sur $\mathbb{C} - \mathbb{R}_-$ par $\log(z) = \log|z| + i \text{Arg}(z)$ où l'argument $\text{Arg}(z)$ de z appartient à $] -\pi, \pi[$.

Sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(4, \mathbb{R})$, considérons l'involution

$$\sigma(X) = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix},$$

avec I_n la matrice identité de taille $n \times n$. Soit \mathfrak{h} l'ensemble des points fixes pour cette involution, ainsi on a

$$\mathfrak{h} = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array} \right) / A, B \in \mathfrak{gl}(2, \mathbb{R}) \right\}.$$

On pose $\mathfrak{q} = \{X \in \mathfrak{g} / \sigma(X) = -X\}$, alors

$$\mathfrak{q} = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} 0 & Y \\ \hline Z & 0 \end{array} \right) / Y, Z \in \mathfrak{gl}(2, \mathbb{R}) \right\}.$$

Pour un élément $X \in \mathfrak{g}$, on notera $X^{\mathfrak{h}}$ (respectivement $X^{\mathfrak{q}}$) la projection de X sur \mathfrak{h} (respectivement \mathfrak{q}).

Soit $G = GL(4, \mathbb{R})$. Le groupe $H = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array} \right) / A, B \in GL(2, \mathbb{R}) \right\}$ est alors le sous-groupe des points de G fixes sous l'action de σ .

On notera $g \cdot X$ la conjugaison d'un élément X de \mathfrak{g} par un élément g dans G .

Le groupe H agit par conjugaison sur \mathfrak{q} , plus précisément, pour $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \in H$ et $\begin{pmatrix} 0 & Y \\ Z & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{q}$, on a

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & Y \\ Z & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & AYB^{-1} \\ BZA^{-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

On notera $Sp(X)$ le spectre d'une matrice X .

Un élément X dans \mathfrak{g} est dit semi-simple si et seulement si $\text{ad}(X)$ est semi-simple dans $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$, ce qui revient à dire dans notre cas que X est une matrice semi-simple. On note \mathfrak{q}^{ss} l'ensemble des éléments de \mathfrak{q} semi-simples dans \mathfrak{g} .

L'algèbre de Lie \mathfrak{g} étant de rang 4, il existe des polynômes d_4, \dots, d_{16} sur \mathfrak{g} tels que pour tout $X \in \mathfrak{g}$, l'on ait $\det(t - \text{ad}(X)) = \sum_{j=4}^{16} d_j(X)t^j$. On rappelle que l'ensemble des éléments réguliers de \mathfrak{g} , noté \mathfrak{g}^{reg} , est l'ensemble des éléments X de \mathfrak{g} tels que $d_4(X) \neq 0$.

Si $X \in \mathfrak{g}$ admet $\lambda_1, \dots, \lambda_4$ pour valeurs propres, alors on a $d_4(X) = \prod_{\substack{1 \leq i, j \leq 4 \\ i \neq j}} (\lambda_i - \lambda_j)$.

Ainsi, un élément de \mathfrak{g} est régulier si et seulement si toutes ses valeurs propres sont deux à deux distinctes.

Soit l le plus petit entier tel que $d_l|_{\mathfrak{q}} \neq 0$.

Définition 1.0.1. *Un élément X de \mathfrak{q} est \mathfrak{q} -régulier si $d_l(X) \neq 0$. On note \mathfrak{q}^{reg} l'ensemble des éléments \mathfrak{q} -réguliers de \mathfrak{q}*

La matrice $Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \\ \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ a toutes ses valeurs propres deux à deux dis-

tingentes pour $\lambda_1 \lambda_2 \neq 0$ et $\lambda_1 \neq \pm \lambda_2$. Par suite, on a $d_4(Y) \neq 0$ et le résultat suivant est immédiat.

Lemme 1.0.1. *Un élément de \mathfrak{q} est \mathfrak{q} -régulier si et seulement il est régulier dans \mathfrak{g} .*

On appelle sous-espace de Cartan $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{q}$ un sous-espace abélien, formé d'éléments semi-simples et maximal pour cette propriété. On note $\text{car}(\mathfrak{q})$ l'ensemble des sous-espaces de Cartan de \mathfrak{q} .

Soit \mathfrak{a} un sous-espace de Cartan. On note $\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{a}_{\mathbb{C}})$ le système de racines de $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$ dans $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ et lorsque l'on choisit un ordre sur celui-ci, on note $\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{a}_{\mathbb{C}})^+$ le système de racines positives correspondant. Pour $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{a}_{\mathbb{C}})$, on pose

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{\alpha} = \{Y \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \forall X \in \mathfrak{a}, [X, Y] = \alpha(X)Y\},$$

l'espace radiciel correspondant et on note m_{α} la multiplicité de α , la dimension de ce \mathbb{C} -espace vectoriel. On rappelle les résultats classiques suivants qui sont prouvés dans le paragraphe 1 de [21] :

Proposition 1.0.1. (a) *Les énoncés suivants sont équivalents :*

1. X est \mathfrak{q} -régulier.
2. $\mathfrak{z}_{\mathfrak{q}}(X)$ est un sous-espace de Cartan de \mathfrak{q} .
3. Si \mathfrak{a} est un sous-espace de Cartan de \mathfrak{q} contenant X , alors X n'annule aucune racine de $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$.

(b) Tout élément régulier appartient à un unique sous-espace de Cartan de \mathfrak{q} .

Pour \mathfrak{a} un sous-espace de Cartan, on note $W_H(\mathfrak{a}) = \{Ad(h)|\mathfrak{a}; h \in N_H(\mathfrak{a})\} \simeq N_H(\mathfrak{a})/Z_H(\mathfrak{a})$ son groupe de Weyl dans H .

Sur \mathfrak{g} , on définit la forme bilinéaire symétrique ω par

$$\omega(X, X') = \frac{1}{2}tr(XX'), \text{ pour } X \text{ et } X' \text{ dans } \mathfrak{g}.$$

La restriction de ω à $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ coïncide, à un facteur multiplicatif près, avec la forme de Killing. La forme ω ainsi que ses restrictions à $\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}$ et à $\mathfrak{q} \times \mathfrak{q}$ est H -invariante et non dégénérée.

Ainsi pour tout sous-espace de Cartan \mathfrak{a} de \mathfrak{q} , il existe un unique élément de $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$, que l'on notera h_{α} tel que

$$\omega(h_{\alpha}, X) = \alpha(X), \quad \forall X \in \mathfrak{a}.$$

Pour $\mathfrak{a} \in car(\mathfrak{q})$, on note $\langle \mathfrak{a} \rangle$ un représentant de la classe de conjugaison de \mathfrak{a} par l'action de conjugaison de H sur $car(\mathfrak{q})$.

Soit $\mathfrak{a} \in car(\mathfrak{q})$. On définit la partie compacte $\mathfrak{a}_I = \left(\sum_{\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{a}_{\mathbb{C}})} i\mathbb{R}h_{\alpha} \right) \cap \mathfrak{a}$ et la partie déployée $\mathfrak{a}_R = \left(\sum_{\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{a}_{\mathbb{C}})} \mathbb{R}h_{\alpha} \right) \cap \mathfrak{a}$ de \mathfrak{a} de telle sorte que l'on ait $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_R + \mathfrak{a}_I$.

Une racine α est dite réelle (respectivement imaginaire) si $\alpha(\mathfrak{a}) \subset \mathbb{R}$ (respectivement $\alpha(\mathfrak{a}) \subset i\mathbb{R}$), ceci est équivalent à $h_{\alpha} \in \mathfrak{a}_R$ (respectivement $h_{\alpha} \in i\mathfrak{a}_I$).

On définit l'ordre d'Hirai sur les classes modulo H des sous-espaces de Cartan de la manière suivante :

soient \mathfrak{a} et \mathfrak{b} deux sous-espaces de Cartan. On dit que $\langle \mathfrak{a} \rangle \leq \langle \mathfrak{b} \rangle$ si et seulement si il existe $h \in H$ tel que $(h \cdot \mathfrak{a})_R \subset \mathfrak{b}_R$. Lorsque cette inclusion est stricte, on dit alors que $\langle \mathfrak{a} \rangle < \langle \mathfrak{b} \rangle$.

2 Sous-espaces de Cartan, orbites semi-simples et points semi-réguliers

2.1 Sous-espaces de Cartan

2.1.1 Description

On définit les différents sous-espaces de Cartan suivants de \mathfrak{q} :

$$\mathfrak{a}_{+,+} = \left\{ \left(\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & & u_1 & 0 \\ & & 0 & u_2 \\ \hline u_1 & 0 & & \\ 0 & u_2 & & 0 \end{array} \right); (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

$$\mathfrak{a}_{+,-} = \left\{ \left(\left(\begin{array}{cc|cc} & & u_1 & 0 \\ & 0 & 0 & \theta_2 \\ \hline u_1 & 0 & & \\ 0 & -\theta_2 & & 0 \end{array} \right) ; (u_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

$$\mathfrak{a}_{-,-} = \left\{ \left(\left(\begin{array}{cc|cc} & & \theta_1 & 0 \\ & 0 & 0 & \theta_2 \\ \hline -\theta_1 & 0 & & \\ 0 & -\theta_2 & & 0 \end{array} \right) ; (\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

$$\mathfrak{a}_2 = \left\{ \left(\left(\begin{array}{cc|cc} & & \tau & -\theta \\ & 0 & \theta & \tau \\ \hline \tau & -\theta & & \\ \theta & \tau & & 0 \end{array} \right) ; (\theta, \tau) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Lemme 2.1.1. 1. Soit $X = \begin{pmatrix} 0 & Y \\ Z & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{q}^{reg}$.

Si λ est une valeur propre de X alors $\lambda \neq 0$ et $-\lambda$ est aussi une valeur propre de X . On a $Sp(YZ) = \{\lambda^2; \lambda \in Sp(X)\}$.

2. La famille $\langle \text{car}(\mathfrak{q}) \rangle = \{\mathfrak{a}_{+,+}, \mathfrak{a}_{+,-}, \mathfrak{a}_{-,-}, \mathfrak{a}_2\}$ est une famille représentative des classes de conjugaison sous H des sous-espaces de Cartan de \mathfrak{q} .

Preuve :

1. Soient U et V dans \mathbb{C}^2 tels que $\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}$ soit un vecteur propre non nul de X pour la valeur propre λ . On a alors $YV = \lambda U$ et $ZU = \lambda V$. Si $\lambda \neq 0$ alors U et V sont non nuls. Par suite, le vecteur $\begin{pmatrix} U \\ -V \end{pmatrix}$ est un vecteur propre non nul de X pour la valeur propre $-\lambda$.

Comme X est régulier dans \mathfrak{q} , ses valeurs propres sont deux à deux distinctes. D'autre part, si 0 était une valeur propre de X alors, par ce qui précède, elle serait double ce qui est impossible puisque X est régulier. Ainsi, on a $Sp(X) = \{\pm\lambda_1, \pm\lambda_2\}$ où λ_1 et λ_2 sont deux nombres complexes non nuls tels que $\lambda_1 \neq \pm\lambda_2$. En particulier, les matrices X , Y et Z sont inversibles.

Pour $j = 1$ ou 2 , on fixe un vecteur propre non nul $\begin{pmatrix} U_j \\ V_j \end{pmatrix}$ associé à la valeur propre λ_j . Les vecteurs U_1 et U_2 de \mathbb{C}^2 sont non nuls puisque la famille $\left\{ \begin{pmatrix} U_j \\ V_j \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} U_j \\ -V_j \end{pmatrix} \right\}_j$ est une base de \mathbb{C}^4 et ils vérifient $YZU_1 = \lambda_1^2 U_1$ et $YZU_2 = \lambda_2^2 U_2$. On obtient donc la première assertion.

2. Le spectre de YZ est donné par les racines du polynôme $x^2 - \text{tr}(YZ)x + \det(YZ) \in \mathbb{R}[x]$. Ainsi, soit λ_1^2 et λ_2^2 sont réels, soit $\lambda_1^2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ et $\lambda_2 = \pm\bar{\lambda}_1$.

Si λ_1^2 et λ_2^2 sont réels, il existe une matrice $P \in GL(2, \mathbb{R})$ telle que $PYZP^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 \end{pmatrix}$. Notons $\text{sgn}(x)$ le signe de $x \in \mathbb{R}$. On peut donc écrire $PYZP^{-1} = DD'$ où

$$D = \begin{pmatrix} |\lambda_1| & 0 \\ 0 & |\lambda_2| \end{pmatrix} \text{ et } D' = \begin{pmatrix} \text{sgn}(\lambda_1^2)|\lambda_1| & 0 \\ 0 & \text{sgn}(\lambda_2^2)|\lambda_2| \end{pmatrix}.$$

Ainsi, on a

$$\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & D'PZ^{-1} \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & D \\ D' & 0 \end{pmatrix}.$$

et dans ce cas X est H -conjugué à un élément de $\mathfrak{a}_{+,+}$, $\mathfrak{a}_{+,-}$ ou $\mathfrak{a}_{-,-}$.

Si $\lambda_2 = \pm\bar{\lambda}_1$, on écrit $\lambda_1 = \tau + i\theta$ avec $(\theta, \tau) \in \mathbb{R}^2$. Il existe alors une matrice $P \in GL(2, \mathbb{R})$ telle que $PYZP^{-1} = M^2$ avec

$$M = \begin{pmatrix} \tau & -\theta \\ \theta & \tau \end{pmatrix}.$$

On obtient donc

$$\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & MPZ^{-1} \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & M \\ M & 0 \end{pmatrix}.$$

et dans ce cas X est conjugué à un élément de \mathfrak{a}_2 .

Soit \mathfrak{a} est un sous-espace de Cartan de \mathfrak{g} . Il existe alors $X \in \mathfrak{a}^{reg}$ tel que $\mathfrak{a} = \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(X)$. Par ce qui précède, il existe $h \in H$ tel que $h.X$ appartienne à $\mathfrak{a}_{+,+}$, $\mathfrak{a}_{+,-}$, $\mathfrak{a}_{-,-}$ ou \mathfrak{a}_2 . Comme $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(h.X) = h.\mathfrak{a}$, on obtient la deuxième assertion. \square

2.1.2 Systèmes de racines

Nous précisons ci-dessous $\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{a}_{\mathbb{C}})^+$ pour $\mathfrak{a} \in \langle \text{car}(\mathfrak{g}) \rangle$:

$\mathfrak{a}_{+,+}$: Les valeurs propres de ces matrices sont $\pm u_1, \pm u_2$, donc $\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{a}_{\mathbb{C}})^+$ est formé de 4 racines réelles, $\alpha_1 = 2u_1, \alpha_2 = 2u_2$, de multiplicité un et $\beta_1 = u_1 - u_2, \beta_2 = u_1 + u_2$ de multiplicité deux.

$\mathfrak{a}_{+,-}$: Les valeurs propres de ces matrices sont $\pm u_1, \pm i\theta_2$, donc $\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{a}_{\mathbb{C}})^+$ est formé d'une racine réelle $\alpha_1 = 2u_1$ de multiplicité un, d'une racine imaginaire $\alpha_2 = 2i\theta_2$ de multiplicité un et deux racines complexes de multiplicité deux, $\beta_1 = u_1 - i\theta_2$ et $\beta_2 = u_1 + i\theta_2$.

$\mathfrak{a}_{-,-}$: Les valeurs propres de ces matrices sont $\pm i\theta_1, \pm i\theta_2$, donc $\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{a}_{\mathbb{C}})^+$ est formé de 4 racines imaginaires, dont deux sont de multiplicité un, $\alpha_1 = 2i\theta_1$ et $\alpha_2 = 2i\theta_2$, et deux de multiplicité deux $\beta_1 = i(\theta_1 - \theta_2)$ et $\beta_2 = i(\theta_1 + \theta_2)$.

$\mathfrak{a}_2 =$: Les valeurs propres de ces matrices sont $\pm(\tau \pm i\theta)$, donc $\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{a}_{\mathbb{C}})^+$ est formé de deux racines complexes de multiplicité un, $\alpha_1 = 2(\tau + i\theta)$ et $\alpha_2 = 2(\tau - i\theta)$, d'une racine réelle $\beta_2 = 2\tau$ de multiplicité deux, d'une racine imaginaire $\beta_1 = 2i\theta$ de multiplicité deux.

Précisons maintenant les groupes $W_H(\mathfrak{a})$ pour $\mathfrak{a} \in \langle \text{car}(\mathfrak{g}) \rangle$.

On note $K = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ & & 1 & 0 \end{array} \right)$ et on pose

$$\kappa = AdK \quad \text{et} \quad \varrho = Ad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ & & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Sur $\mathfrak{a}_{+,+}$ et $\mathfrak{a}_{-,-}$, l'élément κ échange les racines α_1 et α_2 et l'élément ϱ échange les racines β_1 et β_2 et on obtient alors :

Lemme 2.1.2. 1. $W_H(\mathfrak{a}_{+,+}) = W_H(\mathfrak{a}_{-,-}) = \{\pm I_4, \pm\kappa, \pm\varrho, \pm\kappa\varrho\}$

2. $W_H(\mathfrak{a}_{+,-}) = \{\pm I_4, \pm\varrho\}$

3. $W_H(\mathfrak{a}_2) = \{\pm I_4, \pm\kappa\}$

Preuve : Soit $h = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array} \right) \in N_H(\mathfrak{a}_{+,+})$. Alors, pour tout $X = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & & u_1 & 0 \\ & & 0 & u_2 \\ \hline u_1 & 0 & & \\ 0 & u_2 & & 0 \end{array} \right) \in \mathfrak{a}_{+,+}$ tel que $h \cdot X = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & & v_1 & 0 \\ & & 0 & v_2 \\ \hline v_1 & 0 & & \\ 0 & v_2 & & 0 \end{array} \right)$ on a

$$A \begin{pmatrix} u_1 & 0 \\ 0 & u_2 \end{pmatrix} B^{-1} = B \begin{pmatrix} u_1 & 0 \\ 0 & u_2 \end{pmatrix} A^{-1} = \begin{pmatrix} v_1 & 0 \\ 0 & v_2 \end{pmatrix}$$

et par conséquent, pour $M = A$ ou B , on a $M \begin{pmatrix} u_1^2 & 0 \\ 0 & u_2^2 \end{pmatrix} M^{-1} = \begin{pmatrix} v_1^2 & 0 \\ 0 & v_2^2 \end{pmatrix}$ et par suite, M est diagonale ou KM est diagonale. La première relation implique que, soit A et B sont diagonales et $A^2 = B^2$, soit $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} A$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} B$ sont diagonales et ont même

carré. Maintenant, on remarque que $Z_H(\mathfrak{a}_{+,+}) = \left\{ \left(\begin{array}{cc|cc} a & 0 & & 0 \\ 0 & b & & 0 \\ \hline & & a & 0 \\ & & 0 & b \end{array} \right) \in GL(4, \mathbb{R}) \right\}$, ce

qui donne aisément la première assertion. Les autres assertions se prouvent de même. \square .

2.1.3 Transformations de Cayley

Notons $c_1 = Ad \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1+i}{2} & 0 & \frac{1+i}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1+i}{2} & 0 & \frac{1+i}{2} \end{pmatrix} \right)$ la transformation de Cayley relative à la racine

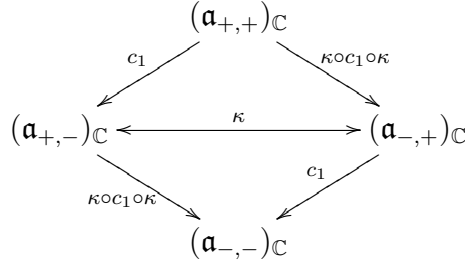
$\alpha_2 = 2u_2$ de $\mathfrak{a}_{+,+}$. On a $c_1 \cdot (\mathfrak{a}_{+,+})_{\mathbb{C}} = (\mathfrak{a}_{+,-})_{\mathbb{C}}$ et c_1 transforme la racine $2u_2$ en $2i\theta_2$ et fixe α_1 .

La transformation de Cayley relative à α_2 est donnée par $c_2 = Ad \left(\begin{pmatrix} \frac{1+i}{2} & 0 & \frac{1+i}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1+i}{2} & 0 & \frac{1+i}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \kappa \circ c_1 \circ \kappa$. De même $c_2 \cdot (\mathfrak{a}_{+,-})_{\mathbb{C}} = (\mathfrak{a}_{-,-})_{\mathbb{C}}$ et c_2 transforme la racine $2u_1$ en $2i\theta_1$.

Notons

$$\mathfrak{a}_{-,+} = \kappa \cdot \mathfrak{a}_{+,-} = \left\{ \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & & \theta_1 & 0 \\ & & 0 & u_2 \\ \hline -\theta_1 & 0 & & \\ 0 & u_2 & & 0 \end{array} \right); \theta_1, u_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

Nous pouvons résumer ce qui précède dans le diagramme (non commutatif) suivant :



La transformation de Cayley relative à la racine $\beta_1 = u_1 - u_2$ de $\mathfrak{a}_{+,+}$ est donnée par

$$c_3 = Ad \left(\begin{array}{cc|cc} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-i}{\sqrt{2}} & & 0 \\ \frac{-i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & & \\ \hline 0 & & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-i}{\sqrt{2}} \\ & & \frac{-i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{array} \right),$$

On a $c_3 \cdot (\mathfrak{a}_{+,+})_{\mathbb{C}} = (\mathfrak{a}_2)_{\mathbb{C}}$ et c_3 transforme la racine $u_1 - u_2$ en $2i\theta$ et fixe la racine β_2 .

La transformation de Cayley relative à la racine $\beta_2 = u_1 + u_2$ est donnée par

$$c_4 = Ad \left(\begin{array}{cc|cc} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} & & 0 \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & & \\ \hline 0 & & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-i}{\sqrt{2}} \\ & & \frac{-i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{array} \right) = \varrho \circ c_3 \circ \varrho.$$

Notons

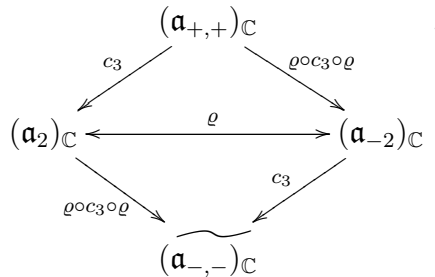
$$\widetilde{\mathfrak{a}}_{-,-} = Ad \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & & 0 \\ 1 & 0 & & \\ \hline 0 & & 1 & 0 \\ & & 0 & -1 \end{array} \right) \mathfrak{a}_{-,-} = \left\{ \left(\begin{array}{cc|cc} & & 0 & \theta_1 \\ & & \theta_2 & 0 \\ \hline 0 & -\theta_2 & & \\ -\theta_1 & 0 & & 0 \end{array} \right); \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

On a $c_4 \cdot (\mathfrak{a}_2)_{\mathbb{C}} = (\widetilde{\mathfrak{a}}_{-,-})_{\mathbb{C}}$ et c_4 transforme la racine 2τ en $2i(\theta_1 + \theta_2)$.

Notons

$$\mathfrak{a}_{-2} = \varrho \cdot \mathfrak{a}_2 = \left\{ \left(\begin{array}{cc|cc} & & \tau & \theta \\ & & \theta & -\tau \\ \hline \tau & -\theta & & \\ -\theta & -\tau & & 0 \end{array} \right); \tau, \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

on obtient le diagramme (non commutatif) suivant :

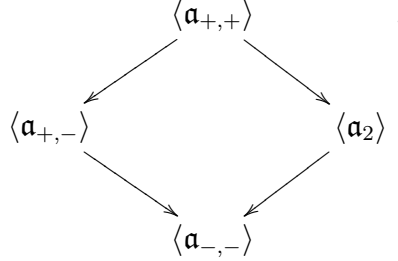


2.1.4 Renversement de l'ordre d'Hirai

L'étude du paragraphe précédent permet de constater que suivant l'ordre d'Hirai, nous avons

$$\langle \mathfrak{a}_{-,-} \rangle < \langle \mathfrak{a}_{+,-} \rangle < \langle \mathfrak{a}_{+,+} \rangle \quad \text{et} \quad \langle \mathfrak{a}_{-,-} \rangle < \langle \mathfrak{a}_2 \rangle < \langle \mathfrak{a}_{+,+} \rangle.$$

ce qui est schématisé par le diagramme suivant :



Nous allons définir un automorphisme de \mathfrak{q} qui renverse l'ordre d'Hirai, c'est-à-dire transforme les sous-espaces de Cartan déployés en sous-espaces de Cartan compacts et vice versa. En particulier, cet automorphisme ne s'exprime pas comme l'action adjointe d'un élément de H .

Soit

$$\varpi : \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{q} \longrightarrow \mathfrak{q} \\ \left(\begin{array}{c|c} 0 & Y \\ Z & 0 \end{array} \right) \longmapsto \left(\begin{array}{c|c} 0 & Y \\ -Z & 0 \end{array} \right) \end{array} \right. .$$

L'automorphisme ϖ est une involution H -équivariante de \mathfrak{q} .

Remarque 2.1.1. On a

1. pour $(X, X') \in \mathfrak{q}^2$, on a $[\varpi(X), \varpi(X')] = -[X, X']$.
2. pour $(X, X') \in \mathfrak{h} \times \mathfrak{q}$, on a $[X, \varpi(X')] = \varpi([X, X'])$, ceci provenant de la H -équivariance de ϖ .

$$3. \varpi(\mathfrak{a}_{+,+}) = \mathfrak{a}_{-,-} \quad \varpi(\mathfrak{a}_{+,-}) = \mathfrak{a}_{-,+} \quad \text{et} \quad \varpi(\mathfrak{a}_2) = Ad \left(\begin{array}{c|c} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right) \mathfrak{a}_2,$$

$$\text{et plus précisément, pour } X_{\tau,\theta} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \tau & -\theta \\ \tau & -\theta & \theta & \tau \\ \hline \theta & \tau & 0 & \end{array} \right) \in \mathfrak{a}_2, \text{ on a}$$

$$\varpi(X_{\tau,\theta}) = Ad \left(\begin{array}{c|c} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right) X_{\theta,\tau}.$$

Ainsi, comme l'automorphisme ϖ est H -équivariant, il laisse stable $car(\mathfrak{q})$ et renverse l'ordre d'Hirai.

Précisons l'action de ϖ sur $\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{a}_{\mathbb{C}})$ pour $\mathfrak{a} \in car(\mathfrak{q})$.

Lemme 2.1.3. Soit \mathfrak{a} un sous-espace de Cartan.

1. Pour $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{a}_{\mathbb{C}})$, alors $\iota\alpha \circ \varpi \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \varpi(\mathfrak{a})_{\mathbb{C}})$.
2. Pour $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{a}_{\mathbb{C}})$, alors $h_{\iota\alpha \circ \varpi} = -\iota\varpi(h_{\alpha})$.

Preuve :

1. Soit $X_{\alpha} \in \mathfrak{g}_{\alpha}^{\mathbb{C}}$. Ainsi pour $X \in \mathfrak{a}$, on a

$$[X, X_{\alpha}^{\mathfrak{h}}] = \alpha(X)X_{\alpha}^{\mathfrak{q}}$$

et

$$[X, X_{\alpha}^{\mathfrak{q}}] = \alpha(X)X_{\alpha}^{\mathfrak{h}}$$

Donc

$$[\varpi(X), X_{\alpha}^{\mathfrak{h}} - \iota\varpi(X_{\alpha}^{\mathfrak{q}})] = \iota\alpha(X)(X_{\alpha}^{\mathfrak{h}} - \iota\varpi(X_{\alpha}^{\mathfrak{q}})).$$

Donc pour tout X dans \mathfrak{a} , on a

$$[X, X_{\alpha}^{\mathfrak{h}} - \iota\varpi(X_{\alpha}^{\mathfrak{q}})] = \iota\alpha \circ \varpi(X)(X_{\alpha}^{\mathfrak{h}} - \iota\varpi(X_{\alpha}^{\mathfrak{q}})).$$

Par conséquent $\iota\alpha \circ \varpi \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \varpi(\mathfrak{a})_{\mathbb{C}})$.

2. On remarque que $\omega \circ \varpi \times \varpi = -\omega$. Donc $\omega(h_{\alpha}, X) = \alpha(X)$ implique que

$$\omega(-\iota\varpi(h_{\alpha}), \varpi(X)) = \iota\alpha(X), \forall X \in \mathfrak{a}.$$

Soit

$$\omega(-\iota\varpi(h_{\alpha}), X) = \iota\alpha \circ \varpi(X), \forall X \in \mathfrak{a}$$

et donc $h_{\iota\alpha \circ \varpi} = -\iota\varpi(h_{\alpha})$. \square

2.2 Orbites semi-simples

Nous allons décrire maintenant les orbites semi-simples de \mathfrak{q} sous l'action de H à l'aide de polynômes de $\mathbb{C}[\mathfrak{q}_{\mathbb{C}}]^{H_{\mathbb{C}}}$.

Pour $X = \begin{pmatrix} 0 & Y \\ Z & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{q}$, on pose

$$Q(X) = \frac{1}{2}tr(X^2) = tr(YZ) = \omega(X, X),$$

$$S(X) = det(X) = det(YZ)$$

et

$$S_0 = Q^2 - 4S$$

Les paires $\{Q, S\}$ ou $\{Q, S_0\}$ forment une base de l'algèbre $\mathbb{C}[\mathfrak{q}_{\mathbb{C}}]^{H_{\mathbb{C}}}$. Nous notons Y la fonction d'Heaviside. Nous posons

$$\delta = \iota^{Y(-S_0)}\sqrt{|S_0|}$$

de telle sorte que $\delta^2 = S_0$ et nous définissons

$$u = \frac{Q + \delta}{2} \quad \text{et} \quad v = \frac{Q - \delta}{2}.$$

Les fonctions u et v sont H -invariantes.

Pour $z \in \mathbb{C}$, on définit la fonction \sqrt{z} par $\sqrt{z} = e^{\frac{1}{2}\log(z)}$ si $z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}_-$ et $\sqrt{z} = \iota\sqrt{|z|}$ si $z \in \mathbb{R}_-$.

Lemme 2.2.1. 1. Soit $X = \begin{pmatrix} 0 & Y \\ Z & 0 \end{pmatrix}$ un élément de \mathfrak{q}^{ss} . Alors $Sp(YZ) = \{u(X), v(X)\}$. Les valeurs propres de X sont $\{\pm\sqrt{u(X)}, \pm\sqrt{v(X)}\}$.

2. L'orbite $H \cdot \begin{pmatrix} 0 & Y \\ Z & 0 \end{pmatrix}$ dépend uniquement des valeurs propres de YZ et on a la bijection suivante :

$$\begin{cases} \{H\text{-Orbites semi-simples de } \mathfrak{q}\} & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \mathcal{O} = H \cdot X & \longmapsto (Q(X), S(X)) \end{cases}$$

3. Nous notons \sim la relation d'équivalence sur \mathbb{C}^2 qui identifie les couples (x, y) et (y, x) . Alors l'application

$$\begin{cases} \{H\text{-Orbites semi-simples de } \mathfrak{q}\} & \longrightarrow \mathbb{C}^2 / \sim \\ \mathcal{O} = H \cdot X & \longmapsto (u(X), v(X)) \end{cases}$$

est injective et d'image $(\mathbb{R}^2 \cup \{(\lambda, \bar{\lambda}); \lambda \in \mathbb{C} - \mathbb{R}\}) / \sim$.

Preuve : Soit $X = \begin{pmatrix} 0 & Y \\ Z & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{q}^{ss}$. L'élément X appartient donc à un sous-espace de Cartan et par le lemme 2.1.1, il est conjugué à un élément de $\mathfrak{a} \in \langle \text{car}(\mathfrak{q}) \rangle$. Par ailleurs, les valeurs propres de YZ sont les racines du polynôme $x^2 - Q(X)x + S(X)$ c'est-à-dire $\{u(X), v(X)\}$.

Or toute H -orbite semi-simple rencontre $\mathfrak{a} \in \langle \text{car}(\mathfrak{q}) \rangle$ et les fonctions considérées sont H -invariantes. Ainsi, le lemme découle de la description de $\mathfrak{a}_{+,+}$, $\mathfrak{a}_{+,-}$, $\mathfrak{a}_{-,-}$ et \mathfrak{a}_2 , l'injectivité des applications se déduit de l'étude de $W_H(\mathfrak{a})$ pour $\mathfrak{a} \in \langle \text{car}(\mathfrak{q}) \rangle$ donnée dans le lemme 2.1.2. \square

Remarque 2.2.1. Soit $X \in \mathfrak{q}^{ss}$.

1. Alors X est conjugué sous H à un élément de

(a) $\mathfrak{a}_{+,+}$ si $u(X) \geq 0$ et $v(X) \geq 0$,

(b) $\mathfrak{a}_{+,-}$ si $u(X)v(X) \leq 0$,

(c) $\mathfrak{a}_{-,-}$ si $u(X) \leq 0$ et $v(X) \leq 0$,

(d) \mathfrak{a}_2 si $u(X)$ et $v(X)$ sont dans $\mathbb{C} - \mathbb{R}^*$ et dans ce cas, on a $\overline{u(X)} = v(X)$.

2. Soit \mathfrak{a} un sous-espace de Cartan contenant X . On note $\pm\alpha_1$ et $\pm\alpha_2$ les racines de \mathfrak{a} de multiplicité 1 et $\pm\beta_1, \pm\beta_2$ les racines de multiplicité 2. On a alors :

$$Q(X) = \frac{\alpha_1(X)^2 + \alpha_2(X)^2}{4} = u(X) + v(X),$$

$$S(X) = \frac{\alpha_1(X)^2 \alpha_2(X)^2}{16} = u(X)v(X),$$

$$S_0(X) = \beta_1(X)^2 \beta_2(X)^2 = (u(X) - v(X))^2.$$

$$\delta(X) = \begin{cases} |\beta_1(X)\beta_2(X)| & \text{si } \mathfrak{a} \text{ est } H\text{-conjugué à } \mathfrak{a}_{+,+}, \mathfrak{a}_{+,-} \text{ ou } \mathfrak{a}_{-,-} \\ \iota|\beta_1(X)\beta_2(X)| & \text{si } \mathfrak{a} \text{ est } H\text{-conjugué à } \mathfrak{a}_2 \end{cases}$$

3. $\mathfrak{q}^{reg} = \{X \in \mathfrak{q}, S(X)S_0(X) \neq 0\}$.

2.3 Points semi-réguliers

Les distributions propres invariantes et les intégrales orbitales sont des fonctions H -invariantes de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathfrak{q}^{reg} . Pour étudier ces objets au voisinage des points de $\mathfrak{q} - \mathfrak{q}^{reg}$, nous nous inspirons de la méthode de descente d'Harish-Chandra qui consiste à ramener cette étude à celle d'objets de même type définis sur des espaces symétriques plus petits construits à partir des centralisateurs des points semi-réguliers.

On rappelle qu'un élément semi-régulier est un élément de \mathfrak{q}^{ss} qui se trouve dans l'intersection d'exactly deux sous-espaces de Cartan. De façon équivalente c'est un élément d'un sous-espace de Cartan qui annule exactement une racine positive.

Ainsi, tout point semi-régulier est conjugué par H à un élément de $\mathfrak{a}_{+,+} \cap \mathfrak{a}_{+,-}$, $\mathfrak{a}_{+,-} \cap \mathfrak{a}_{-,-}$, $\mathfrak{a}_{+,-} \cap \mathfrak{a}_2$ ou $\mathfrak{a}_{-,-} \cap \mathfrak{a}_2$.

Pour $\mathfrak{a} \in car(\mathfrak{q})$, on rappelle que $\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{a}_{\mathbb{C}})^+$ est constitué de deux racines de multiplicité 1 qui sont fortement orthogonales et de deux racines de multiplicité 2, orthogonales mais non fortement orthogonales. Ces différences entre racines de multiplicité 1 et racines de multiplicité 2 interviennent dans l'étude des centralisateurs des points semi-réguliers et seront essentielles lors de l'étude des distributions propres invariantes .

2.3.1 Points semi-réguliers annulés par une racine de multiplicité un

Nous allons construire dans cette partie une paire symétrique $(\mathfrak{m}, \mathfrak{m} \cap \mathfrak{h})$ telle que, si $X \in \mathfrak{q}^{ss}$ est annulé par une racine de multiplicité 1 alors X est H -conjugué à un élément de $\mathfrak{m} \cap \mathfrak{q}$.

Nous rappelons que les racines positives de $\mathfrak{a}_{+,+}$ sont notées $\alpha_1 = 2u_1$, $\alpha_2 = 2u_2$, $\beta_1 = u_1 - u_2$, $\beta_2 = u_1 + u_2$.

Soit $H_1 = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & & 1 & 0 \\ & & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & & \\ 0 & 0 & & 0 \end{array} \right) = \frac{1}{2}h_{\alpha_1}$ et $H_2 = \kappa(H_1) = \frac{1}{2}h_{\alpha_2}$ les coracines respectivement de α_1 et α_2 .

Ainsi

$$\begin{aligned} \mathbb{R}H_1 &= \mathfrak{a}_{+,+} \cap \mathfrak{a}_{+,-} & \mathbb{R}\varpi(H_1) &= \mathfrak{a}_{-,-} \cap \mathfrak{a}_{-,+} \\ \mathbb{R}\kappa(H_1) &= \mathfrak{a}_{+,+} \cap \mathfrak{a}_{-,+} & \mathbb{R}\varpi \circ \kappa(H_1) &= \mathfrak{a}_{-,-} \cap \mathfrak{a}_{+,-}. \end{aligned}$$

On pose

$$\mathfrak{z}_1 = \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(H_1) = \left\{ \left(\begin{array}{cc|cc} a & 0 & x & 0 \\ 0 & b & 0 & y \\ \hline x & 0 & a & 0 \\ 0 & z & 0 & c \end{array} \right); a, b, c, x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\mathfrak{z}_2 = \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\kappa(H_1)) = \left\{ \left(\begin{array}{cc|cc} b & 0 & y & 0 \\ 0 & a & 0 & x \\ \hline z & 0 & c & 0 \\ 0 & x & 0 & a \end{array} \right); a, b, c, x, y, z \in \mathbb{R} \right\} = \kappa(\mathfrak{z}_1)$$

Les algèbres \mathfrak{z}_1 et \mathfrak{z}_2 sont réductives et σ -stables. Pour $j = 1, 2$, on note \mathfrak{c}_j le centre de \mathfrak{z}_j . On a alors :

$$\mathfrak{c}_1 \cap \mathfrak{h} = \mathfrak{c}_2 \cap \mathfrak{h} = \left\{ \left(\begin{array}{cc|cc} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{array} \right); a, b \in \mathbb{R} \right\} \quad \mathfrak{c}_j = \mathfrak{c}_j \cap \mathfrak{h} \oplus \mathbb{R}H_j.$$

On définit alors l'espace \mathfrak{m} par

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{z}_1 + \mathfrak{z}_2.$$

Par ce qui précède, on a $\mathfrak{m} = \mathfrak{c}_1 \cap \mathfrak{h} \oplus [\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_1] \oplus [\mathfrak{z}_2, \mathfrak{z}_2]$ avec

$$[\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_1] = \left\{ \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -c & 0 & y \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z & 0 & c \end{array} \right), y, z, c \in \mathbb{R} \right\}$$

et

$$[\mathfrak{z}_2, \mathfrak{z}_2] = \kappa([\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_1])$$

Pour conserver la symétrie des espaces, on pose

$$A_1 = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad \mathfrak{m}_1 = \mathbb{R}A_1 \oplus [\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_1] \quad \text{et} \quad \mathfrak{m}_2 = \kappa(\mathfrak{m}_1)$$

de sorte que

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_1 \oplus \mathfrak{m}_2$$

- Lemme 2.3.1.** 1. Les algèbres \mathfrak{m}_1 et \mathfrak{m}_2 sont réductives, σ -stables et $[\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2] = \{0\}$,
2. Pour $j = 1, 2$ la paire symétrique $(\mathfrak{m}_j, \mathfrak{m}_j \cap \mathfrak{h})$ est isomorphe à $(\mathfrak{gl}(2, \mathbb{R}), \mathfrak{gl}(1, \mathbb{R}) \times \mathfrak{gl}(1, \mathbb{R}))$,
3. \mathfrak{m} est une sous-algèbre de Lie σ -stable de \mathfrak{g} de dimension 8 et la paire symétrique $(\mathfrak{m}, \mathfrak{m} \cap \mathfrak{h})$ est le produit de deux paires symétriques de rang un, chacune isomorphe à $(\mathfrak{gl}(2, \mathbb{R}), \mathfrak{gl}(1, \mathbb{R}) \times \mathfrak{gl}(1, \mathbb{R}))$, que l'on peut permuter à l'aide de κ . En particulier, la paire symétrique $(\mathfrak{m}, \mathfrak{m} \cap \mathfrak{h})$ est de rang 2.

Preuve : Les algèbres \mathfrak{z}_1 et \mathfrak{z}_2 sont réductives et σ -stables et les éléments A_1 et A_2 sont centraux dans \mathfrak{m} donc \mathfrak{m}_1 et \mathfrak{m}_2 sont réductives et σ -stables. Les racines de $\mathfrak{a}_{+,+}$ étant réelles, on a $\mathfrak{z}_1 = \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}(\mathfrak{a}_{++})} \oplus (\mathfrak{g}_{\alpha_1}^{\mathbb{C}} \cap \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha_1}^{\mathbb{C}} \cap \mathfrak{g})$ et $[\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_1] \subset (\mathfrak{g}_{\alpha_2}^{\mathbb{C}} \cap \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha_2}^{\mathbb{C}} \cap \mathfrak{g})$. Comme les racines α_1 et α_2 sont fortement orthogonales et que les éléments A_1 et $\kappa(A_1)$ sont centraux dans \mathfrak{m} , on obtient $[\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2] = \{0\}$.

Les deux autres assertions sont immédiates. \square .

Pour $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$, on note

$$\text{diag}(a, b, c, d) = \left(\begin{array}{cc|cc} a & 0 & & \\ 0 & b & & 0 \\ \hline & & c & 0 \\ 0 & & 0 & d \end{array} \right).$$

On rappelle que $\kappa = Ad(K)$ avec $K = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & & 0 \\ 1 & 0 & & 0 \\ \hline & & 0 & 1 \\ & & 1 & 0 \end{array} \right)$

Lemme 2.3.2. Soit $N = N_H(\mathfrak{m} \cap \mathfrak{q})$.

1. On a $N = N^0 \cup KN^0$ avec $N^0 = \{diag(a, b, c, d); a, b, c, d \in \mathbb{R}^*\}$.
2. Soit $h \in H$ et $X \in \mathfrak{m} \cap \mathfrak{q}$ tels que $S_0(X) \neq 0$ et $h \cdot X \in \mathfrak{m} \cap \mathfrak{q}$, alors $h \in N$. (Le polynôme $S_0 \in \mathbb{C}[\mathfrak{q}]^H$ est défini dans le paragraphe 2.2).
3. Si $X \in \mathfrak{m} \cap \mathfrak{q}^{reg}$ alors $Z_H(X) = \{diag(\alpha, \beta, \alpha, \beta); \alpha, \beta \in \mathbb{R}^*\}$.

Preuve : Pour $D \in GL(4, \mathbb{R})$ une matrice diagonale, on a immédiatement $D \in N$ et $KD \in N$.

Soient $h = \left(\begin{array}{cc|cc} A & & 0 & \\ \hline 0 & & B & \end{array} \right)$ avec $A, B \in GL(2, \mathbb{R})$ telle que pour $X \in \mathfrak{m} \cap \mathfrak{q}$ on ait $h \cdot X = X' \in \mathfrak{m} \cap \mathfrak{q}$. On écrit $X = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & x & 0 & \\ \hline z & 0 & 0 & y \\ 0 & t & & 0 \end{array} \right)$ et $X' = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & x' & 0 & \\ \hline z' & 0 & 0 & y' \\ 0 & t' & & 0 \end{array} \right)$. Ainsi, on

a

$$A \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} B^{-1} = \begin{pmatrix} x' & 0 \\ 0 & y' \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} A^{-1} = \begin{pmatrix} z' & 0 \\ 0 & t' \end{pmatrix}.$$

Donc

$$A \begin{pmatrix} xz & 0 \\ 0 & yt \end{pmatrix} A^{-1} = B \begin{pmatrix} xz & 0 \\ 0 & yt \end{pmatrix} B^{-1} = \begin{pmatrix} x'z' & 0 \\ 0 & y't' \end{pmatrix}.$$

Si de plus $S_0(X) \neq 0$ alors $xz \neq yt$, ainsi on a aussi $x'z' \neq y't'$. Deux cas se présentent.

Premier cas : si $xz = x'z'$ et $yt = y't'$, alors A et B sont diagonales, donc h est diagonale.

Deuxième cas : si $xz = y't'$ et $yt = x'z'$, alors $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} A$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} B$ sont diagonales, donc Kh est diagonale.

On obtient ainsi les assertions 1. et 2.

Si de plus $h \cdot X = X$ alors le premier cas implique que $h \in N^0$. On en déduit facilement l'assertion 3. \square

Lemme 2.3.3. La famille $\langle car(\mathfrak{m} \cap \mathfrak{q}) \rangle = \{\mathfrak{a}_{+,+}, \mathfrak{a}_{+,-}, \mathfrak{a}_{-,+}, \mathfrak{a}_{-,-}\}$ est une famille représentative des classes de conjugaison sous N^0 des sous-espaces de Cartan de $\mathfrak{m} \cap \mathfrak{q}$.

Preuve : D'après ([29], Partie I, chapitre 1, lemme 3), on a $\mathfrak{m} \cap \mathfrak{g}^{ss} = \mathfrak{m}^{ss}$. Ainsi, comme $(\mathfrak{m}, \mathfrak{m} \cap \mathfrak{h})$ est de rang 2, tout sous-espace de Cartan de \mathfrak{q} contenu dans $\mathfrak{m} \cap \mathfrak{q}$ est un sous-espace de Cartan de $\mathfrak{m} \cap \mathfrak{q}$ et tout sous-espace de Cartan de $\mathfrak{m} \cap \mathfrak{q}$ est un sous-espace de Cartan de \mathfrak{q} .

Soit \mathfrak{a} un sous-espace de Cartan de $\mathfrak{m} \cap \mathfrak{q}$. Il existe $h \in H$ tel que

$$h \cdot \mathfrak{a} \in \langle car(\mathfrak{q}) \rangle.$$

Maintenant, par le deuxième point de la remarque 2.2.1, le polynôme $S_0 \in \mathbb{C}[q]^H$ ne prend que des valeurs positives sur $\mathfrak{m} \cap \mathfrak{q}^{ss}$ et des valeurs négatives sur \mathfrak{a}_2 . On obtient donc

$h \cdot \mathfrak{a} \in \{\mathfrak{a}_{+,+}, \mathfrak{a}_{+,-}, \mathfrak{a}_{-,-}\}$. Par l'assertion 2. du lemme 2.3.2 on obtient $h \in N^0 \cup KN^0$. Comme $\kappa = Ad(K)$ et $\mathfrak{a}_{-,+} = \kappa(\mathfrak{a}_{+,-})$, on en déduit le résultat voulu. \square

Remarque 2.3.1. 1. $\mathfrak{m} \cap \mathfrak{q}^{reg} = \{X \in (\mathfrak{m} \cap \mathfrak{q})^{reg}; S_0(X) \neq 0\}$.

2. Soit $X \in \mathfrak{m} \cap \mathfrak{q}$. Pour $i \in \{1, 2\}$, on note X_i la projection de X sur $\mathfrak{m}_i \cap \mathfrak{q}$. Nous remarquons que

$$\{u(X), v(X)\} = \{Q(X_1), Q(X_2)\}$$

et

$$Q(X) = Q(X_1) + Q(X_2) \quad S(X) = Q(X_1)Q(X_2).$$

Ces propriétés joueront un rôle important lors de l'étude des intégrales orbitales et des distributions propres invariantes sur \mathfrak{q} .

2.3.2 Eléments semi-réguliers annulés par une racine de multiplicité deux

On note $H_3 = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & & 1 & 0 \\ & & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & & \\ 0 & 1 & & 0 \end{array} \right)$ la coracine de β_2 . Ainsi on a $\mathbb{R}H_3 = \mathfrak{a}_{+,+} \cap \mathfrak{a}_2$ et

$$\mathbb{R}\varpi(H_3) = \mathfrak{a}_{-,-} \cap \varpi(\mathfrak{a}_2) = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & & \\ \hline 1 & 0 & 0 & \\ & & 1 & 0 \\ & & 0 & -1 \end{array} \right) \cdot (\mathfrak{a}_2 \cap \widetilde{\mathfrak{a}_{-,-}}).$$

Ainsi, tout élément semi-régulier annulé par une racine de multiplicité 2 est H -conjugué à un élément de $\mathbb{R}H_3$ ou de $\mathbb{R}\varpi(H_3)$.

On pose

$$\mathfrak{z}_3 = \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(H_3) = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline B & A \end{array} \right); A, B \in \mathfrak{gl}(2, \mathbb{R}) \right\}$$

et

$$\mathfrak{z}_4 = \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\varpi(H_3)) = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline -B & A \end{array} \right); A, B \in \mathfrak{gl}(2, \mathbb{R}) \right\}.$$

Soient \mathfrak{c}_3 et \mathfrak{c}_4 les centres respectifs de \mathfrak{z}_3 et \mathfrak{z}_4 . On a donc : $\mathfrak{z}_3 = \mathfrak{c}_3 \oplus [\mathfrak{z}_3, \mathfrak{z}_3]$ et $\mathfrak{z}_4 = \mathfrak{c}_4 \oplus [\mathfrak{z}_4, \mathfrak{z}_4]$, avec

$$\mathfrak{c}_3 = \mathbb{R}I_4 \oplus \mathbb{R}H_3 \quad \text{et} \quad \mathfrak{c}_4 = \mathbb{R}I_4 \oplus \mathbb{R}\varpi(H_3),$$

$$[\mathfrak{z}_3, \mathfrak{z}_3] = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} A & Y \\ \hline Y & A \end{array} \right); \quad tr(A) = tr(Y) = 0 \right\}$$

et

$$[\mathfrak{z}_4, \mathfrak{z}_4] = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} A & Y \\ \hline -Y & A \end{array} \right); \quad tr(A) = tr(Y) = 0 \right\}.$$

Par suite, nous avons les isomorphismes de paires symétriques suivants :

$$([\mathfrak{z}_3, \mathfrak{z}_3], [\mathfrak{z}_3, \mathfrak{z}_3] \cap \mathfrak{h}) \simeq \left(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \times \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}), \text{diag}(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \times \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})) \right) \simeq \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$$

par l'application $\left(\begin{array}{c|c} A & Y \\ \hline Y & A \end{array} \right) \rightarrow (A + Y, A - Y)$ et

$$([\mathfrak{z}_4, \mathfrak{z}_4], [\mathfrak{z}_4, \mathfrak{z}_4] \cap \mathfrak{h}) \simeq (\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}), \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})).$$

par l'application $\left(\begin{array}{c|c} A & Y \\ \hline -Y & A \end{array} \right) \rightarrow A + \iota Y$.

On a $\mathfrak{q} = \mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q} \oplus \mathfrak{z}_4 \cap \mathfrak{q}$. Cette somme directe permet de voir que l'on ne peut pas effectuer de réduction à un espace plus petit comme au paragraphe précédent. Les espaces vectoriels $\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q}$ et $\mathfrak{z}_4 \cap \mathfrak{q}$ ne sont pas conjugués sous H mais on remarque que $\varpi(\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q}) = \mathfrak{z}_4 \cap \mathfrak{q}$. Ainsi l'étude sur $\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q}$ suffira pour comprendre les phénomènes au voisinage de tous les éléments semi-réguliers annulés par une racine de multiplicité deux.

On note $\tilde{K} = \left(\begin{array}{c|c} I_2 & 0 \\ \hline 0 & -I_2 \end{array} \right)$ et $\tilde{\kappa} = Ad(\tilde{K})$ de telle sorte que $\tilde{\kappa}|_{\mathfrak{q}} = -Id|_{\mathfrak{q}}$.

Lemme 2.3.4. *Soit $N_3 = N_H(\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})$.*

1. *On a $N_3 = N_3^0 \cup \tilde{K}N_3^0$ avec $N_3^0 = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & A \end{array} \right); A \in GL(2, \mathbb{R}) \right\}$.*

2. *La famille $\langle car(\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q}) \rangle = \{\mathfrak{a}_{+,+}, \mathfrak{a}_2\}$ est une famille représentative des classes de conjugaison sous N_3 des sous-espaces de Cartan de $\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q}$.*

Preuve : Si $h = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & A \end{array} \right)$ alors on a immédiatement $h \in N_3$ et $\tilde{K}h \in N_3$.

Si $h = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array} \right) \in N_3$ alors pour tout $Y \in GL(2, \mathbb{R})$, on a $AYB^{-1} = BYA^{-1}$ et donc la matrice $P = B^{-1}A$ vérifie $PYP = Y$ pour tout $Y \in GL(2, \mathbb{R})$. En appliquant ceci à $Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, puis à $Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ on obtient $P = \begin{pmatrix} \epsilon_1 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 \end{pmatrix}$ avec $\epsilon_j = \pm 1$. Comme $A = BP$, la relation $AYB^{-1} = BYA^{-1}$ pour tout $Y \in GL(2, \mathbb{R})$ donne le premier point.

Soit \mathfrak{a} un sous-espace de Cartan de $\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q}$. Il existe $h \in H$ tel que $h \cdot \mathfrak{a} \in \langle car(\mathfrak{q}) \rangle$. Comme le polynôme S prend des valeurs positives sur $\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q}$ et des valeurs négatives sur $\mathfrak{a}_{+,-}$, on a $h \cdot \mathfrak{a} \neq \mathfrak{a}_{+,-}$. Maintenant, si $h \cdot \mathfrak{a} = \mathfrak{a}_{-,-}$, par un raisonnement analogue à ce qui précède, il existerait $P \in GL(2, \mathbb{R})$ telle que pour toute matrice diagonale D l'on ait $PDP = -D$ ce qui n'est pas possible. Ainsi on a $h \cdot \mathfrak{a} \in \{\mathfrak{a}_{+,+}, \mathfrak{a}_2\}$. Par suite \mathfrak{a} et $h \cdot \mathfrak{a}$ sont deux sous-espaces de Cartan H -conjugués de $\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q}$, il existe donc $h_1 \in N_3$ tel que $h_1 \cdot \mathfrak{a} = h \cdot \mathfrak{a}$. On a alors $h_1 h^{-1} \in N_H(h \cdot \mathfrak{a})$ et donc par le lemme 2.1.2 on obtient $h \in N_3$. \square

3 Généralisation de certains résultats sur les intégrales orbitales en rang un

Nous rappelons tout d'abord des résultats d'Harish-Chandra concernant l'intégration sur les fibres. On trouve la démonstration de ces résultats dans le lemme 1 du chapitre 2 première partie de [29] ou dans le chapitre 3 page 192 de [9]

Proposition 3.0.1. *Soient M et N deux variétés C^∞ de dimension m et n . Soit $\psi : M \rightarrow N$ une submersion de classe C^∞ surjective de M sur N . Soient ω_M (resp. ω_N) une m -forme (resp. n -forme) de classe C^∞ sur M (resp. N) non nulle en tout point. On note μ_M et μ_N les mesures de Radon positives respectivement sur M et N associées.*

Alors à tout f dans $\mathcal{D}(M)$ on peut associer de manière unique une fonction $\psi_*(f)$ de $\mathcal{D}(N)$ telle que

$$\int_M f \cdot F \circ \psi d\mu_M = \int_N \psi_*(f) F d\mu_N \quad , \forall F \in \mathcal{D}(N). \quad (2)$$

1. Soit y dans N . Il existe une unique mesure de radon positive μ_y telle que

$$\psi_*(f)(y) = \int_{\psi^{-1}(y)} f d\mu_y.$$

Ceci est appelé l'intégration sur les fibres.

2. L'application ψ_* est une application linéaire continue surjective de $\mathcal{C}_c^r(M)$ dans $\mathcal{C}_c^r(N)$, pour $0 \leq r \leq \infty$ et de $\mathcal{D}(M)$ dans $\mathcal{D}(N)$.

3. La relation (2) est vraie si F est localement intégrable pour μ_N .

4. L'application ψ_* se prolonge aux fonctions μ_M -intégrables f et dans ce cas $\psi_*(f)$ est définie presque partout et μ_N -intégrable. La relation (2) est encore vraie.

De plus si f est à support compact, alors $\psi_*(f)$ est \mathcal{C}^∞ sur tout ouvert Ω tel que f est \mathcal{C}^∞ sur $\psi^{-1}(\Omega)$.

5. Soient D et E des opérateurs différentiels sur M et N compatibles pour ψ (c'est à dire que pour tout f dans $\mathcal{D}(N)$, $D(f \circ \psi) = (Ef) \circ \psi$). On note E^* et D^* leurs adjoints.

Alors $E^* \psi_*(f) = \psi_*(D^* f)$.

3.1 Cas d'une forme quadratique

Soient p et q deux entiers de \mathbb{N}^* . On pose $n = p + q$.

Soit \mathcal{Q} la forme quadratique définie sur \mathbb{R}^n par

$$\mathcal{Q}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^p x_i^2 - \sum_{i=1}^q x_{i+p}^2, \quad x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}.$$

et considérons la submersion surjective

$$\mathcal{Q} : \begin{cases} \mathbb{R}^n - \{0\} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \mathcal{Q}(x) \end{cases} .$$

La proposition précédente permet de définir l'application $\mathcal{Q}_* : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n - \{0\}) \rightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Cette application étudiée par A. Tengstrand dans [25] est appelée fonction moyenne par J. Faraut dans [10] et notée $M_{\mathcal{Q}}$. Dans toute la suite, nous noterons

$$\mathcal{Q}_* = M_{\mathcal{Q}}.$$

D'après le quatrième point de la proposition 3.0.1, l'application $M_{\mathcal{Q}}$ se prolonge en une application continue de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^*) \cap L^1(\mathbb{R})$ que l'on notera encore $M_{\mathcal{Q}}$.

Nous rappelons succinctement les résultats essentiels de $M_{\mathcal{Q}}(f)$ pour $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. On pourra se référer à l'appendice de [10] ou au chapitre 4 de [9] pour les détails.

Pour $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, l'application $M_{\mathcal{Q}}(f) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^*) \cap L^1(\mathbb{R})$ vérifie toujours la relation 2 qui s'écrit, pour tout $F \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} F \circ \mathcal{Q}(x) f(x) dx = \int_{\mathbb{R}} F(t) M_{\mathcal{Q}} f(t) dt. \quad (3)$$

Le comportement de $M_{\mathcal{Q}}(f)(t)$ au voisinage de $t = 0$ se décrit à l'aide d'une fonction η définie sur \mathbb{R}^* qui dépend de la signature (p, q) de \mathcal{Q} . Cette fonction, appelée "fonction singularité" relative à \mathcal{Q} , est définie de la manière suivante (la fonction d'Heaviside est notée Y) :

Si p est impair et q est pair, $\eta(t) = Y(t)t^{\frac{n}{2}-1}$

Si p est pair et q est impair, $\eta(t) = Y(-t)(-t)^{\frac{n}{2}-1}$

Si p et q sont pairs, $\eta(t) = \frac{1}{2} \text{sgn}(t)t^{\frac{n}{2}-1}$

Si p et q sont impairs, $\eta(t) = t^{\frac{n}{2}-1} \log |t|$.

Comme dans le chapitre 4 page 204 de [9], on introduit l'espace

$$\mathcal{H}_\eta = \{t \in \mathbb{R}^* \mapsto \phi_0(t) + \eta(t)\phi_1(t), \phi_0, \phi_1 \in \mathcal{D}(\mathbb{R})\}.$$

Cet espace est muni d'une topologie limite inductive d'espaces de Fréchet (voir [9] page 205).

Théorème 3.1.1. ([9], paragraphe 4, théorème page 205) *L'application $M_{\mathcal{Q}}$ est une surjection continue de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ dans \mathcal{H}_η .*

Soit $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ et f une fonction définie sur $\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$. Pour $x \in \mathbb{R}^{n_1}$, on note f_x la fonction définie sur \mathbb{R}^{n_2} par $f_x(y) = f(x, y)$ et pour $y \in \mathbb{R}^{n_2}$, on note f^y la fonction définie sur \mathbb{R}^{n_1} par $f^y(x) = f(x, y)$.

Soit $m \in \mathbb{N}$. Ainsi pour $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)$, il existe deux fonctions ϕ_0 et ϕ_1 définies sur $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$, telles que pour $x \in \mathbb{R}^m$, on ait $(\phi_0)_x$ et $(\phi_1)_x$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ et

$$M_{\mathcal{Q}} f_x(t) = \phi_0(x, t) + \eta(t)\phi_1(x, t), \quad \forall t \in \mathbb{R}^*.$$

Le but de cette sous-section est de montrer que ϕ_0 et ϕ_1 sont dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R})$. Pour cela, nous reprenons les arguments développés dans le paragraphe 4 de [9] pour étudier la régularité en x des fonctions $(\phi_0)_x$ et $(\phi_1)_x$.

Introduisons la submersion surjective suivante :

$$G : \begin{cases} \mathbb{R}^m \times (\mathbb{R}^n - \{0\}) & \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto (x, \mathcal{Q}(y)) \end{cases}.$$

Lemme 3.1.1. 1. *L'application G_* se prolonge aux fonctions de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)$ et pour $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)$ et $(x, t) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^*$, on a $G_*(f)(x, t) = M_{\mathcal{Q}} f_x(t)$.*

2. *Pour i_1, i_2, \dots, i_m dans \mathbb{N} , $x \in \mathbb{R}^m$ et $t \in \mathbb{R}^*$, on a*

$$\frac{\partial^{i_1}}{\partial x_1^{i_1}} \dots \frac{\partial^{i_m}}{\partial x_m^{i_m}} M_{\mathcal{Q}} f_x(t) = M_{\mathcal{Q}} \left(\left(\frac{\partial^{i_1}}{\partial x_1^{i_1}} \dots \frac{\partial^{i_m}}{\partial x_m^{i_m}} f \right)_x \right) (t).$$

Preuve : La première assertion découle de la définition et des propriétés de $M_{\mathcal{Q}}$ rappelées au début de ce paragraphe.

Pour prouver le deuxième point, il suffit de montrer que, pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$, on a

$$\frac{\partial}{\partial x_i} M_{\mathcal{Q}} f_x = M_{\mathcal{Q}} \left(\left(\frac{\partial}{\partial x_i} f \right)_x \right).$$

Soit e_i le i ème vecteur de la base canonique de \mathbb{R}^m . Soit $x \in \mathbb{R}^m$. On introduit la suite de fonctions

$$f_k = k(f_{x+\frac{1}{k}e_i} - f_x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

Montrons que la suite de fonction $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}^*}$ converge vers $\left(\frac{\partial}{\partial x_i} f \right)_x$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, muni de sa topologie usuelle de limite inductive d'espaces de Fréchet.

Les supports des fonctions f_k et $\left(\frac{\partial}{\partial x_i} f \right)_x$ sont inclus dans un même compact qui est $\text{supp}(f) + [0, 1]e_i$. D'autre part, pour j_1, j_2, \dots, j_n dans \mathbb{N} , on a grâce à l'inégalité de Taylor

$$\left\| \frac{\partial^{j_1}}{\partial y_1^{j_1}} \dots \frac{\partial^{j_n}}{\partial y_n^{j_n}} f_k - \frac{\partial^{j_1}}{\partial y_1^{j_1}} \dots \frac{\partial^{j_n}}{\partial y_n^{j_n}} \left(\left(\frac{\partial}{\partial x_i} f \right)_x \right) \right\|_{\infty} \leq \frac{1}{2k} \left\| \frac{\partial^{j_1}}{\partial y_1^{j_1}} \dots \frac{\partial^{j_n}}{\partial y_n^{j_n}} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} f \right\|_{\infty}.$$

Ainsi toutes les dérivées par rapport à y_1, y_2, \dots, y_n de f_k convergent uniformément vers celles de $\left(\frac{\partial}{\partial x_i} f \right)_x$. Par conséquent la suite de fonctions $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}^*}$ converge vers $\left(\frac{\partial}{\partial x_i} f \right)_x$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

Grâce au théorème 3.1.1 qui donne la continuité de l'application $M_{\mathcal{Q}}$, on a

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} M_{\mathcal{Q}} f_k = M_{\mathcal{Q}} \left(\left(\frac{\partial}{\partial x_i} f \right)_x \right).$$

Par ailleurs pour $t \in \mathbb{R}^*$, on a

$$M_{\mathcal{Q}} f_k(t) = k(M_{\mathcal{Q}} f_{x+\frac{1}{k}e_i}(t) - M_{\mathcal{Q}} f_x(t)).$$

ce qui permet d'obtenir

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} M_{\mathcal{Q}} f_k(t) = \frac{\partial}{\partial x_i} M_{\mathcal{Q}} f_x(t).$$

On obtient donc le résultat voulu. \square

Le comportement de la fonction $(x, t) \mapsto M_{\mathcal{Q}} f_x(t)$ au voisinage de $t = 0$ se déduit du comportement asymptotique en $+\infty$ de sa transformée de Fourier partielle en t . Celle-ci apparaît au travers de la relation suivante qui découle de la relation (2) :

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2i\pi\lambda\mathcal{Q}(y)} f_x(y) dy = \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi\lambda t} M_{\mathcal{Q}} f_x(t) dt = \mathcal{F}(M_{\mathcal{Q}} f_x)(\lambda).$$

Ceci nous permet d'établir le résultat suivant :

Lemme 3.1.2. *Soit f dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)$. Pour tout N dans \mathbb{N} , il existe une fonction $\rho_N(x, \lambda)$ définie sur $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^*$ et une constante strictement positive C_N indépendante de x et λ telles que pour tout x dans \mathbb{R}^m et λ dans \mathbb{R}^* , on ait $|\rho_N(x, \lambda)| \leq \frac{C_N}{|\lambda|^{N+1}}$ et*

$$\mathcal{F}(M_{\mathcal{Q}} f_x)(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2i\pi\lambda\mathcal{Q}(y)} f_x(y) dy = \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}(p-q)\text{sgn}(\lambda)}}{|2\lambda|^{\frac{n}{2}}} \left(\sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} \left(\frac{1}{8i\pi\lambda} \right)^k (\partial\mathcal{Q})^k f_x(0) + \rho_N(x, \lambda) \right).$$

Preuve : Grâce au lemme page 203 de [9] on a :

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2i\pi\lambda\mathcal{Q}(y)} f_x(y) dy = \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}(p-q)\text{sgn}(\lambda)}}{|2\lambda|^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}(f_x)(\xi) e^{\frac{i\pi\mathcal{Q}(\xi)}{2\lambda}} d\xi.$$

En appliquant la formule de Taylor à la fonction $t \mapsto e^{it}$, on a pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}^*$

$$\mathcal{F}(f_x)(\xi) e^{\frac{i\pi\mathcal{Q}(\xi)}{2\lambda}} = \sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} \left(\frac{1}{8i\pi\lambda}\right)^k (-4\pi^2\mathcal{Q}(\xi))^k \mathcal{F}(f_x)(\xi) + R_N(\xi, \lambda) \mathcal{F}(f_x)(\xi),$$

avec $|R_N(\xi, \lambda)| \leq \frac{|\pi\mathcal{Q}(\xi)|^{N+1}}{|2\lambda|^{N+1}(N+1)!}$.

Par ailleurs on a

$$\int_{\mathbb{R}^n} (-4\pi^2\mathcal{Q}(\xi))^k \mathcal{F}(f_x)(\xi) d\xi = (\partial\mathcal{Q})^k f_x(0).$$

On obtient l'expression voulue en prenant $\rho_N(x, \lambda) = \int_{\mathbb{R}^n} R_N(\xi, \lambda) \mathcal{F}(f_x)(\xi) d\xi$, pour $x \in \mathbb{R}^m$ et $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

Pour conclure, il suffit de majorer $\int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{Q}(\xi)|^{N+1} |\mathcal{F}(f_x)(\xi)| d\xi$ indépendamment de x .

Soient $R, T \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $\text{supp}(f) \subset \overline{B(0, R)} \times [-T; T]^n$.

Soit χ une fonction positive à support compact et égale à 1 sur $[-T; T]^n$.

Soit P_N le polynôme défini par $P_N(\xi_1, \dots, \xi_n) = (\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2)^{N+1} (1 + \xi_1^2) \dots (1 + \xi_n^2)$.

Ainsi on a la relation

$$P_N(\xi) \mathcal{F}(f_x)(\xi) = \mathcal{F} \left(P_N \left(\frac{1}{2i\pi} \frac{\partial}{\partial y_1}, \dots, \frac{1}{2i\pi} \frac{\partial}{\partial y_n} \right) f_x \right) (\xi).$$

D'autre part, pour tout ξ dans \mathbb{R}^n et pour tout x dans \mathbb{R}^m , on a

$$\left| \mathcal{F} \left(P_N \left(\frac{1}{2i\pi} \frac{\partial}{\partial y_1}, \dots, \frac{1}{2i\pi} \frac{\partial}{\partial y_n} \right) f_x \right) (\xi) \right| \leq \left\| P_N \left(\frac{1}{2i\pi} \frac{\partial}{\partial y_1}, \dots, \frac{1}{2i\pi} \frac{\partial}{\partial y_n} \right) f \right\|_{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \chi = A_N.$$

Donc

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{Q}(\xi)|^{N+1} |\mathcal{F}(f_x)(\xi)| d\xi &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2)^{N+1} (1 + \xi_1^2) \dots (1 + \xi_n^2) |\mathcal{F}(f_x)(\xi)|}{(1 + \xi_1^2) \dots (1 + \xi_n^2)} d\xi = \\ &\int_{\mathbb{R}^n} \frac{P_N(\xi) |\mathcal{F}(f_x)(\xi)|}{(1 + \xi_1^2) \dots (1 + \xi_n^2)} d\xi \leq A_N \pi^n. \end{aligned}$$

Cette majoration achève la preuve .

□

Nous rappelons la généralisation suivante du théorème de Borel.

Lemme 3.1.3. ([17] Theorem 1.2.6) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Soient $\{\phi_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{N}^k}$ des fonctions de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$ dont les supports sont inclus dans un même compact. Alors il existe ϕ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k)$ telle que :

$$\frac{\partial^\alpha \phi}{\partial t^\alpha}(y, 0) = \phi_\alpha(y), \forall \alpha \in \mathbb{N}^k, y \in \mathbb{R}^m.$$

Preuve : La preuve est donnée pour $k = 1$ dans le théorème 1.2.6 de [17].

Le résultat s'obtient ensuite par récurrence sur k . Supposons que la proposition soit vraie pour k quelconque. Montrons la pour $k + 1$. Soient $\{\phi_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{N}^{k+1}}$ des fonctions de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$ dont les supports sont inclus dans un même compact. Soit $K \in \mathbb{R}_+^*$ tel que le support de toutes ces fonctions soit inclus dans $[-K; K]^m$. Pour tout $l \in \mathbb{N}$, grâce à l'hypothèse de récurrence, il existe $\psi_l \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k)$ telle que

$$\frac{\partial^\beta \psi_l}{\partial t^\beta}(y, 0) = \phi_{(\beta, l)}(y), \forall \beta \in \mathbb{N}^k, y \in \mathbb{R}^m.$$

Montrons que l'on peut supposer que toutes les fonctions $\{\psi_l\}_{l \in \mathbb{N}}$ sont à support dans le même compact.

Soit χ_1 dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$ telle que cette fonction soit à support dans $[-2K; 2K]^m$ et soit égale à 1 sur $[-K; K]^m$. Soit χ_2 dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^k)$ telle que cette fonction soit à support dans $[-1; 1]^k$ et soit égale à 1 sur $[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]^k$. Ainsi on peut considérer les fonctions $(y, t) \mapsto \chi_1(y)\chi_2(t)\phi_l(y, t)$ au lieu de ϕ_l , car elles vérifient les mêmes relations de dérivation et sont toutes à support dans $[-2K, 2K]^m \times [-1; 1]^k$.

Grâce au cas $k = 1$, il existe $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{m+k} \times \mathbb{R})$ telle que pour tout $l \in \mathbb{N}$, $y \in \mathbb{R}^m$ et $t_1, \dots, t_k \in \mathbb{R}$, on ait

$$\frac{\partial^l \phi}{\partial t_{k+1}^l}(y, t_1, \dots, t_k, 0) = \psi_l(y, t_1, \dots, t_k).$$

Par conséquent, pour $\alpha \in \mathbb{N}^{k+1}$ et $y \in \mathbb{R}^m$, on a

$$\frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial t_1^{\alpha_1}} \dots \frac{\partial^{\alpha_k}}{\partial t_k^{\alpha_k}} \frac{\partial^{\alpha_{k+1}} \phi}{\partial t_{k+1}^{\alpha_{k+1}}}(y, 0, \dots, 0, 0) = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial t_1^{\alpha_1}} \dots \frac{\partial^{\alpha_k} \phi_{\alpha_{k+1}}}{\partial t_k^{\alpha_k}}(y, 0, \dots, 0) = \phi_\alpha(y).$$

□.

Théorème 3.1.2. *Pour toute fonction f dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)$, il existe ϕ_0 et ϕ_1 dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R})$ telles que, pour t dans \mathbb{R}^* et x dans \mathbb{R}^m , on ait*

$$M_{\mathcal{Q}} f_x(t) = \phi_0(x, t) + \eta(t)\phi_1(x, t),$$

et

$$\frac{\partial^k \phi_1}{\partial t^k}(x, 0) = \frac{c\pi^{\frac{n}{2}}}{4^k k! \Gamma(\frac{n}{2} + k)} (\partial \mathcal{Q})^k f_x(0), \quad (4)$$

avec

$$c = (-1)^{\frac{q}{2}} \text{ pour } q \text{ pair,}$$

$$c = (-1)^{\frac{p}{2}} \text{ pour } p \text{ pair et } q \text{ impair}$$

$$c = \frac{(-1)^{\frac{q+1}{2}}}{\pi} \text{ pour } p \text{ impair et } q \text{ impair.}$$

Preuve : Soit $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)$. On pose $\phi_k(x) = \frac{c\pi^{\frac{n}{2}}}{4^k k! \Gamma(\frac{n}{2} + k)} (\partial \mathcal{Q})^k f_x(0)$, où la constante c est donné dans l'énoncé du théorème. Ce sont des fonctions de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$ dont les supports sont tous inclus dans le même compact.

Soit $N \in \mathbb{N}$. Nous allons d'abord montrer que la fonction

$$(x, t) \mapsto M_{\mathcal{Q}} f_x(t) - \eta(t) \sum_{k=0}^N \phi_k(x) t^k$$

peut se prolonger en une fonction de $\mathcal{C}^N(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R})$.

Soit $\alpha \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, égale à 1 au voisinage de 0. On pose pour tout $x \in \mathbb{R}^m$ et $t \in \mathbb{R}^*$,

$$\psi_N(x, t) = M_{\mathcal{Q}}f_x(t) - \eta(t)\alpha(t) \sum_{k=0}^N \phi_k(x)t^k.$$

On a alors :

$$M_{\mathcal{Q}}f_x(t) - \eta(t) \sum_{k=0}^N \phi_k(x)t^k - \psi_N(x, t) = (1 - \alpha(t))\eta(t) \sum_{k=0}^N \phi_k(x)t^k.$$

L'expression de droite de cette égalité se prolonge en une fonction de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R})$.

Ainsi, pour obtenir le résultat voulu, il suffit de montrer que ψ_N est dans $\mathcal{C}^N(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R})$.

Par le lemme 3.1.1, on a $\psi_N \in \mathcal{C}^N(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^*)$. Par ailleurs, on a $(\psi_N)_x \in L^1(\mathbb{R})$. Pour obtenir la régularité de $(\psi_N)_x$ en $t = 0$, on étudie le comportement en l'infini de sa transformée de Fourier $\mathcal{F}((\psi_N)_x)$.

Montrons qu'il existe un réel E_N tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^m$ et $\lambda \in \mathbb{R}^*$, on ait

$$|\mathcal{F}((\psi_N)_x)(\lambda)| \leq \frac{E_N}{|\lambda|^{N+\frac{n}{2}+1}}.$$

Comme dans [9] p 206, on remarque que, pour l et k deux entiers tels que $l > k + \frac{n}{2}$, la fonction $t \mapsto \frac{d^l}{dt^l}((1 - \alpha(t))t^k\eta(t))$ est une fonction intégrable sur \mathbb{R} . Ainsi, pour $k \in \{0, \dots, N\}$, la transformée de Fourier de la distribution $t \mapsto (1 - \alpha(t))t^k\eta(t)$ est, en dehors de 0, une fonction g_k localement intégrable sur \mathbb{R}^* et il existe un réel A_N tel que, pour tout $k \in \{0, \dots, N\}$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$, on ait

$$|g_k(\lambda)| \leq \frac{A_N}{|\lambda|^{N+\frac{n}{2}+1}}.$$

Revenons à l'étude de $\mathcal{F}((\psi_N)_x)$.

Pour tout x dans \mathbb{R}^m et $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^*)$, on a

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}((\psi_N)_x)(\lambda)\varphi(\lambda)d\lambda &= \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(M_{\mathcal{Q}}f_x)(\lambda)\varphi(\lambda)d\lambda - \sum_{k=0}^N \phi_k(x) \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(\eta(t)t^k\alpha(t))(\lambda)\varphi(\lambda)d\lambda \\ &= \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(M_{\mathcal{Q}}f_x)(\lambda)\varphi(\lambda)d\lambda - \sum_{k=0}^N \phi_k(x) \int_{\mathbb{R}} \eta(t)t^k\alpha(t)\mathcal{F}(\varphi)(t)dt. \end{aligned}$$

Par l'expression de $\mathcal{F}(M_{\mathcal{Q}}f_x)(\lambda)$ du lemme 3.1.2, on obtient

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}((\psi_N)_x)(\lambda)\varphi(\lambda)d\lambda \\ &= \sum_{k=0}^N \frac{4^k \Gamma(\frac{n}{2} + k) \phi_k(x)}{c\pi^{\frac{n}{2}} (8i\pi)^k} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}(p-q)\text{sgn}(\lambda)}}{|\lambda|^{\frac{n}{2}} \lambda^k} \varphi(\lambda)d\lambda + \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}(p-q)\text{sgn}(\lambda)}}{|2\lambda|^{\frac{n}{2}}} \rho_N(x, \lambda)\varphi(\lambda)d\lambda \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{k=0}^N \phi_k(x) \int_{\mathbb{R}} \eta(t) t^k (\alpha(t) - 1) \mathcal{F}(\varphi)(t) dt - \sum_{k=0}^N \phi_k(x) \int_{\mathbb{R}} \eta(t) t^k \mathcal{F}(\varphi)(t) dt \\
& = \sum_{k=0}^N \frac{4^k \Gamma(\frac{n}{2} + k) \phi_k(x)}{c \pi^{\frac{n}{2}} (8i\pi)^k} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}(p-q)\text{sgn}(\lambda)}}{|2\lambda|^{\frac{n}{2}} \lambda^k} \varphi(\lambda) d\lambda + \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}(p-q)\text{sgn}(\lambda)}}{|2\lambda|^{\frac{n}{2}}} \rho_N(x, \lambda) \varphi(\lambda) d\lambda \\
& \quad - \sum_{k=0}^N \phi_k(x) \int_{\mathbb{R}} g_k(\lambda) \varphi(\lambda) d\lambda - \sum_{k=0}^N \phi_k(x) \int_{\mathbb{R}} \eta(t) t^k \mathcal{F}(\varphi)(t) dt.
\end{aligned}$$

Grâce à la proposition page 206 de [9], on a

$$\int_{\mathbb{R}} \eta(t) t^k \mathcal{F}(\varphi)(t) dt = \frac{4^k \Gamma(\frac{n}{2} + k)}{c \pi^{\frac{n}{2}} (8i\pi)^k} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}(p-q)\text{sgn}(\lambda)}}{|2\lambda|^{\frac{n}{2}} \lambda^k} \varphi(\lambda) d\lambda.$$

On obtient ainsi pour tout φ de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^*)$

$$\int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}((\psi_N)_x)(\lambda) \varphi(\lambda) d\lambda = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}(p-q)\text{sgn}(\lambda)}}{|2\lambda|^{\frac{n}{2}}} \rho_N(x, \lambda) \varphi(\lambda) d\lambda - \sum_{k=0}^N \phi_k(x) \int_{\mathbb{R}} g_k(\lambda) \varphi(\lambda) d\lambda.$$

Par suite, pour tout $x \in \mathbb{R}^m$ et $\lambda \in \mathbb{R}^*$, on a l'égalité

$$\mathcal{F}((\psi_N)_x)(\lambda) = \rho_N(x, \lambda) - \sum_{k=0}^N \phi_k(x) g_k(\lambda).$$

Par le lemme 3.1.2, en posant $E_N = C_N + A_N(\sum_{k=0}^N \|\phi_k\|_{\infty})$, on a la relation suivante, pour tout $x \in \mathbb{R}^m$ et $\lambda \in \mathbb{R}^*$:

$$|\mathcal{F}((\psi_N)_x)(\lambda)| \leq \frac{E_N}{|\lambda|^{N+\frac{n}{2}+1}}. \quad (5)$$

Soient j_1, \dots, j_m des entiers positifs. On applique ce qui précède en remplaçant f_x par $\frac{\partial^{j_1}}{\partial x_1^{j_1}} \dots \frac{\partial^{j_m}}{\partial x_m^{j_m}} f_x$. On obtient alors qu'il existe un réel $E_N^{j_1, \dots, j_m}$ indépendant de x et t tel que pour x dans \mathbb{R}^m et t dans \mathbb{R}^* , on ait

$$|\mathcal{F}(\frac{\partial^{j_1}}{\partial x_1^{j_1}} \dots \frac{\partial^{j_m}}{\partial x_m^{j_m}} (\psi_N)_x)(\lambda)| \leq \frac{E_N^{j_1, \dots, j_m}}{|\lambda|^{N+\frac{n}{2}+1}}. \quad (6)$$

Ainsi, par les propriétés de la transformation de Fourier, la fonction ψ_N se prolonge en une fonction de $\mathcal{C}^N(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R})$. Donc la fonction $(x, t) \mapsto M_{\mathcal{Q}} f_x(t) - \eta(t) \sum_{k=0}^N \phi_k(x) t^k$ est aussi dans $\mathcal{C}^N(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R})$.

Maintenant concluons.

Par le lemme 3.1.3, il existe une fonction ϕ de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R})$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}^m$

$$\frac{\partial^k \phi}{\partial t^k}(x, 0) = k! \phi_k(x).$$

Soit N un entier positif. Pour tout x dans \mathbb{R}^m et t dans \mathbb{R}^* , on a :

$$M_{\mathcal{Q}} f_x(t) - \eta(t) \phi(x, t)$$

$$\begin{aligned}
&= M_{\mathcal{Q}}f_x(t) - \eta(t) \sum_{k=0}^N \frac{\partial^k \phi}{\partial t^k}(x, 0) \frac{t^k}{k!} - \eta(t)t^{N+1} \int_0^1 \frac{\partial^{N+1} \phi}{\partial t^{N+1}}(x, tu) \frac{(1-u)^N}{N!} du \\
&= (M_{\mathcal{Q}}f_x(t) - \eta(t) \sum_{k=0}^N \phi_k(x)t^k) - \eta(t)t^{N+1} \int_0^1 \frac{\partial^{N+1} \phi}{\partial t^{N+1}}(x, tu) \frac{(1-u)^N}{N!} du.
\end{aligned}$$

Par ce qui précède, les deux termes de cette somme sont dans $\mathcal{C}^N(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R})$.

Ainsi la fonction $(x, t) \mapsto M_{\mathcal{Q}}f_x(t) - \eta(t)\phi(x, t)$ est dans $\mathcal{C}^N(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R})$ pour tout entier N , donc dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R})$, avec

$$\frac{\partial^k \phi}{\partial t^k}(x, 0) = \frac{c\pi^{\frac{n}{2}}}{4^k \Gamma(\frac{n}{2} + k)} (\partial \mathcal{Q})^k f_x(0).$$

De plus grâce au lemme 3.1.1, la fonction $(x, t) \mapsto M_{\mathcal{Q}}f_x(t)$ est à support borné tout comme la fonction $(x, t) \mapsto \eta(t)\phi(x, t)$, donc la fonction $(x, t) \mapsto M_{\mathcal{Q}}f_x(t) - \eta(t)\phi(x, t)$ est dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R})$. \square

Soit \mathcal{H}_η^m l'espace des fonctions de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^*$ dans \mathbb{R} défini par

$$\mathcal{H}_\eta^m := \{(x, t) \mapsto \phi_0(x, t) + \eta(t)\phi_1(x, t); \quad \phi_0, \phi_1 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R})\}.$$

Théorème 3.1.3. *L'application*

$$\begin{cases} \mathcal{D}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n) & \rightarrow & \mathcal{H}_\eta^m \\ f & \mapsto & (x, t) \mapsto M_{\mathcal{Q}}f_x(t) \end{cases}$$

est surjective.

Preuve : Soient ϕ_0, ϕ_1 dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R})$.

Par le lemme 3.1.3, il existe g dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)$ telle que :

$$(\partial \mathcal{Q})^k g(x, 0) = \frac{4^k \Gamma(\frac{n}{2} + k)}{c\pi^{\frac{n}{2}}} \frac{\partial^k \phi_1}{\partial t^k}(x, 0).$$

où c est la constante dépendant de la signature de \mathcal{Q} définie dans le théorème 3.1.2.

Par la relation (4) du théorème 3.1.2 il existe ψ_0 et ψ_1 dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R})$ telles que pour x dans \mathbb{R}^m et $t \neq 0$,

$$M_{\mathcal{Q}}g_x(t) = \psi_0(x, t) + \eta(t)\psi_1(x, t), \quad \text{avec} \quad \frac{\partial^k \psi_1}{\partial t^k}(x, 0) = \frac{\partial^k \phi_1}{\partial t^k}(x, 0).$$

On a donc pour x dans \mathbb{R}^m et $t \neq 0$,

$$M_{\mathcal{Q}}g_x(t) - \phi_0(x, t) - \eta(t)\phi_1(x, t) = \psi_0(x, t) + \eta(t)\psi_1(x, t) - \phi_0(x, t) - \eta(t)\phi_1(x, t).$$

On pose pour x dans \mathbb{R}^m et $t \neq 0$, $h(x, t) = \psi_1(x, t) - \phi_1(x, t)$ de telle sorte que

$$\frac{\partial^k h}{\partial t^k}(x, 0) = 0, \quad \text{pour tout entier positif } k$$

Ainsi la fonction $(x, t) \mapsto \eta(t)h(x, t)$ appartient à $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R})$ et donc la fonction $(x, t) \mapsto M_{\mathcal{Q}}g_x(t) - \phi_0(x, t) - \eta(t)\phi_1(x, t)$ se prolonge en une fonction de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R})$.

On rappelle que l'application $G_* : \mathcal{D}(\mathbb{R}^m \times (\mathbb{R}^n - \{0\})) \rightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R})$ définie par $G_*(f)(x, t) = M_{\mathcal{Q}}(f_x)(t)$ est surjective. Il existe donc u dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m \times (\mathbb{R}^n - \{0\}))$ telle que pour tout x dans \mathbb{R}^m et t dans \mathbb{R} ,

$$M_{\mathcal{Q}}u_x(t) = M_{\mathcal{Q}}g_x(t) - \phi_0(x, t) - \eta(t)\phi_1(x, t),$$

On obtient alors le résultat voulu. \square

3.2 Cas de deux formes quadratiques

Nous allons généraliser les résultats obtenus dans la sous-section précédente à la situation suivante.

Soient p_1, p_2, q_1 et q_2 des entiers de \mathbb{N}^* . On pose $n_1 = p_1 + q_1$ et $n_2 = p_2 + q_2$.

Soient \mathcal{Q}_1 la forme quadratique définie sur \mathbb{R}^{n_1} par

$$\mathcal{Q}_1(x_1, \dots, x_{n_1}) = \sum_{i=1}^{p_1} x_i^2 - \sum_{i=1}^{q_1} x_{i+p_1}^2, \quad x_1, \dots, x_{n_1} \in \mathbb{R}$$

et \mathcal{Q}_2 la forme quadratique définie sur \mathbb{R}^{n_2} par

$$\mathcal{Q}_2(y_1, \dots, y_{n_2}) = \sum_{i=1}^{p_2} y_i^2 - \sum_{i=1}^{q_2} y_{i+p_2}^2, \quad y_1, \dots, y_{n_2} \in \mathbb{R}.$$

On considère l'application

$$H : \begin{cases} \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \rightarrow & (\mathcal{Q}_1(x), \mathcal{Q}_2(y)) \end{cases}.$$

La restriction $H|_{\mathbb{R}^{n_1} - \{0\} \times \mathbb{R}^{n_2} - \{0\}}$ est une surjection submersive de $\mathbb{R}^{n_1} - \{0\} \times \mathbb{R}^{n_2} - \{0\}$ dans \mathbb{R}^2 . Par la proposition 3.0.1, l'application H_* se prolonge en une application $M_{\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2}$ de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2})$ dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*) \cap L^1(\mathbb{R}^2)$. Pour $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2})$ la fonction $M_{\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2}f$ vérifie, pour tout $F \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$, la relation suivante

$$\int_{\mathbb{R}_1^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}} F \circ H(x, y) f(x, y) dx dy = \int_{\mathbb{R}^2} F(t_1, t_2) M_{\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2} f(t_1, t_2) dt_1 dt_2. \quad (7)$$

Pour $i \in \{1, 2\}$ on pose η_i la "fonction singularité" relative à \mathcal{Q}_i .

Lemme 3.2.1. *Soit $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2})$. Alors pour $(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$, on a*

$$M_{\mathcal{Q}_1}((M_{\mathcal{Q}_2}f_x)^{t_2})(t_1) = M_{\mathcal{Q}_2}((M_{\mathcal{Q}_1}f_y)_{t_1})(t_2) = M_{\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2}f(t_1, t_2).$$

Preuve : La relation 7 assure que, pour tout $F \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$, on a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} F(t_1, t_2) M_{\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2} f(t_1, t_2) dt_1 dt_2 &= \int_{\mathbb{R}_1^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}} F(\mathcal{Q}_1(x), \mathcal{Q}_2(y)) f(x, y) dx dy = \\ \int_{\mathbb{R}^{n_1}} \int_{\mathbb{R}} F(\mathcal{Q}_1(x), t_2) M_{\mathcal{Q}_2} f_x(t_2) dt_2 dx &= \int_{\mathbb{R}^2} F(t_1, t_2) M_{\mathcal{Q}_1}((M_{\mathcal{Q}_2}f_x)^{t_2})(t_1) dt_1 dt_2, \end{aligned}$$

Ces égalités étant vraies pour toute fonction F de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$, on obtient

$$M_{\mathcal{Q}_1}((M_{\mathcal{Q}_2}f_x)^{t_2})(t_1) = M_{\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2}f(t_1, t_2).$$

De même, on montre que

$$M_{\mathcal{Q}_2}((M_{\mathcal{Q}_1}f_y)_{t_1})(t_2) = M_{\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2}f(t_1, t_2). \quad \square$$

Théorème 3.2.1. *Pour $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2})$, il existe des fonctions ψ_0, ψ_1, ψ_2 et ψ_3 dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ telles que pour $(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$, on ait*

$$M_{\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2} f(t_1, t_2) = \psi_0(t_1, t_2) + \eta_1(t_1)\psi_1(t_1, t_2) + \eta_2(t_2)\psi_2(t_1, t_2) + \eta_1(t_1)\eta_2(t_2)\psi_3(t_1, t_2).$$

Preuve : Le théorème 3.1.2 nous donne l'existence de fonctions ϕ_0 et ϕ_1 dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R})$ telles que pour $(x, t_2) \in \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^*$, on ait

$$M_{\mathcal{Q}_2} f_x(t_2) = \phi_0(x, t_2) + \eta_2(t_2)\phi_1(x, t_2).$$

Ainsi

$$M_{\mathcal{Q}_1}((M_{\mathcal{Q}_2} f_x)^{t_2})(t_1) = M_{\mathcal{Q}_1}((\phi_0)^{t_2})(t_1) + \eta_2(t_2)M_{\mathcal{Q}_1}((\phi_1)^{t_2})(t_1).$$

Grâce au théorème 3.1.2, il existe des fonctions ϕ_2, ϕ_3, ϕ_4 et ϕ_5 dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ telles que pour $(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, on ait

$$M_{\mathcal{Q}_1}((\phi_0)^{t_2})(t_1) = \phi_2(t_1, t_2) + \eta_1(t_1)\phi_3(t_1, t_2)$$

et

$$M_{\mathcal{Q}_1}((\phi_1)^{t_2})(t_1) = \phi_4(t_1, t_2) + \eta_1(t_1)\phi_5(t_1, t_2).$$

Le lemme 3.2.1 permet de conclure. \square

Soit $\mathcal{H}_{\eta_1, \eta_2}$ le sous ensemble des fonctions de $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ dans \mathbb{R} défini par

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\eta_1, \eta_2} = \{ & (t_1, t_2) \mapsto \psi_0(t_1, t_2) + \eta_1(t_1)\psi_1(t_1, t_2) + \eta_2(t_2)\psi_2(t_1, t_2) \\ & + \eta_1(t_1)\eta_2(t_2)\psi_3(t_1, t_2); \quad \psi_0, \psi_1, \psi_2, \psi_3 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)\}. \end{aligned}$$

Proposition 3.2.1. *L'application*

$$\begin{cases} \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}) & \rightarrow & \mathcal{H}_{\eta_1, \eta_2} \\ f & \mapsto & (t_1, t_2) \mapsto M_{\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2} f(t_1, t_2) \end{cases}$$

est surjective.

Preuve : Soient ψ_0, ψ_1, ψ_2 , et $\psi_3 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$. Grâce au théorème 3.1.3, il existe f et g dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R})$ telles que pour $(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$, on ait

$$M_{\mathcal{Q}_1}(f^{t_2})(t_1) = \psi_0(t_1, t_2) + \eta_1(t_1)\psi_1(t_1, t_2)$$

et

$$M_{\mathcal{Q}_1}(g^{t_2})(t_1) = \psi_2(t_1, t_2) + \eta_1(t_1)\psi_3(t_1, t_2).$$

Toujours grâce au théorème 3.1.3, il existe $k \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2})$ telle que pour $(x, t_2) \in \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^*$, on ait

$$M_{\mathcal{Q}_2} k_x(t_2) = f(x, t_2) + \eta_2(t_2)g(x, t_2).$$

Le lemme 3.2.1 permet de conclure. \square

4 Comportement des intégrales orbitales

4.1 Normalisation des intégrales orbitales

L'intégrale orbitale d'une fonction $f \in \mathcal{D}(\mathfrak{q})$ est la fonction définie sur \mathfrak{q}^{reg} comme la moyenne de f sur chaque orbite $H \cdot X$ pour $X \in \mathfrak{q}^{reg}$, ceci pour une mesure H -invariante sur $H \cdot X$ que nous allons maintenant préciser.

Soit p la dimension de \mathfrak{q} . Comme la forme bilinéaire symétrique H -invariante ω restreinte à $\mathfrak{q} \times \mathfrak{q}$ est non dégénérée, la densité μ donnée sur \mathfrak{q} par

$$\mu(\xi_1, \dots, \xi_p) = |\det(\omega(\xi_i, \xi_j)_{i,j})|^{\frac{1}{2}}$$

définit une mesure H -invariante sur \mathfrak{q} que l'on note dZ .

Soit $X \in \mathfrak{q}^{reg}$ et $\mathfrak{a} = Z_{\mathfrak{q}}(X)$. On note

$$\Pi = \left| \prod_{\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{a}_{\mathbb{C}})^+} \alpha^{m_{\alpha}} \right|$$

Par le lemme 1.20 et le théorème 1.27 de [21], il existe une unique mesure H -invariante sur $H/Z_H(X)$ normalisée de telle sorte que, pour tout $f \in D(\mathfrak{q})$, l'on ait

$$\int_{H \cdot \mathfrak{a}} f(Z) dZ = \frac{1}{|W_H(\mathfrak{a})|} \int_{\mathfrak{a}^{reg}} \left(\int_{H/Z_H(X)} f(h \cdot X) dh \right) \Pi(X) dX.$$

On rappelle que la fonction δ , définie dans le paragraphe 2.2, vérifie

$$|\delta(X)| = \left| \prod_{\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{a}_{\mathbb{C}})^+} \alpha^{m_{\alpha}-1}(X) \right| \quad \text{et} \quad \delta^2 = S_0.$$

Définition 4.1.1. *Pour $f \in \mathcal{D}(\mathfrak{q})$, on définit son intégrale orbitale sur \mathfrak{q}^{reg} par*

$$\mathcal{M}_H(f)(X) = |\delta(X)| \int_{H/Z_H(X)} f(h \cdot X) dh.$$

La normalisation des intégrales orbitales choisie ci-dessus coïncide, à une fonction localement constante sur \mathfrak{q}^{reg} près, avec celle de J. Faraut dans [10] pour les espaces hyperboliques et celles de Harish-Chandra pour les algèbres de Lie réductives réelles ([29] partie I, paragraphe 3).

Par ailleurs, nous verrons que la fonction δ joue un rôle essentiel dans le calcul des composantes radiales des opérateurs différentiels H -invariants à coefficients constants sur \mathfrak{q} et la normalisation choisie est particulièrement bien adaptée pour l'étude ultérieure des distributions propres invariantes sur \mathfrak{q} .

Lemme 4.1.1. ([21] Théorème 1.23). *Soit $f \in \mathcal{D}(\mathfrak{q})$. Alors, pour tout $\mathfrak{a} \in \text{car}(\mathfrak{q})$, la fonction $\mathcal{M}_H f|_{\mathfrak{a}^{reg}}$ est de classe C^{∞} et à support borné dans \mathfrak{a}^{reg} .*

Définition 4.1.2. *Par le lemme 2.2.1, pour $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \cup \{(\lambda, \bar{\lambda}); \lambda \in \mathbb{C}\}$ il existe une unique H -orbite semi-simple $\mathcal{O}(\lambda_1, \lambda_2)$ de \mathfrak{q} telle que pour tout $X \in \mathcal{O}(\lambda_1, \lambda_2)$, l'on ait $\{u(X), v(X)\} = \{\lambda_1, \lambda_2\}$.*

Si F est une fonction H -invariante sur \mathfrak{q}^{reg} , on définit la fonction F_m sur $(\mathbb{R}^*)^2 - diag$ et F_2 sur $(\mathbb{R}^*)^2$ par

$$F_m(t_1, t_2) = F(X) \text{ où } X \in \mathcal{O}(t_1, t_2)$$

et

$$F_2(\tau, \theta) = F(X_{\tau, \theta}) \text{ où } X_{\tau, \theta} = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & & \tau & -\theta \\ & & \theta & \tau \\ \hline \tau & -\theta & & \\ \theta & \tau & & 0 \end{array} \right) \in \mathfrak{a}_2$$

Pour $f \in \mathcal{D}(\mathfrak{q})$, on notera pour simplifier $\mathcal{M}f_m = (\mathcal{M}_H(f))_m$ et $\mathcal{M}f_2 = (\mathcal{M}_H(f))_2$.

Avec les notations précédentes, la formule d'intégration de Weyl s'écrit sous la forme suivante :

Lemme 4.1.2. Soit $\Phi \in L^1_{loc}(\mathfrak{q})^H$ et $f \in \mathcal{D}(\mathfrak{q})$. On a la formule d'intégration suivante :

$$\begin{aligned} & \int_{\mathfrak{q}} \Phi(X) f(X) dX \\ &= \int_{t_1 > t_2} (|\delta| \Phi)_m(t_1, t_2) \mathcal{M}f_m(t_1, t_2) dt_1 dt_2 + 8 \int_{\substack{\tau > 0 \\ \theta > 0}} (|\delta| \Phi)_2(\tau, \theta) \mathcal{M}f_2(\tau, \theta) (\tau^2 + \theta^2) d\theta d\tau. \end{aligned}$$

Preuve : Avec la normalisation des mesures choisies précédemment, la formule d'intégration de Weyl s'écrit :

$$\int_{\mathfrak{q}} \Phi(X) f(X) dX = \sum_{\mathfrak{a} \in \langle \text{car}(\mathfrak{q}) \rangle} \frac{1}{|W_H(\mathfrak{a})|} \int_{\mathfrak{a}} \Phi(X) \mathcal{M}_H(f)(X) \prod_{\alpha \in \Delta^+} \alpha(X) |dX.$$

Plaçons-nous sur $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_{++}$. Un élément de $\mathfrak{a}_{+,+}$ s'écrit $X_{u_1, u_2} = u_1 H_1 + u_2 \kappa(H_1)$. Comme la base $\{H_1, \kappa(H_1)\}$ est orthonormale, on obtient donc

$$\frac{1}{|W_H(\mathfrak{a})|} \int_{\mathfrak{a}} \Phi(X) \mathcal{M}_H(f)(X) \prod_{\alpha \in \Delta^+} \alpha(X) |dX = \frac{1}{8} \int_{\mathbb{R}^2} \Phi(X_{u_1, u_2}) \mathcal{M}_H(f)(X_{u_1, u_2}) |4u_1 u_2 (u_1^2 - u_2^2)| du_1 du_2.$$

Comme les fonctions considérées sont H -invariantes, un simple changement de variables permet d'obtenir

$$\frac{1}{|W_H(\mathfrak{a})|} \int_{\mathfrak{a}} \Phi(X) \mathcal{M}_H(f)(X) \prod_{\alpha \in \Delta^+} \alpha(X) |dX = \int_{t_1 > t_2 > 0} |t_1 - t_2| \Phi_m(t_1, t_2) \mathcal{M}f_m(t_1, t_2) dt_1 dt_2.$$

Un raisonnement analogue sur $\mathfrak{a}_{+,-}$ et $\mathfrak{a}_{-,-}$ conduit à

$$\sum_{\mathfrak{a} \in \langle \text{car}(\mathfrak{m} \cap \mathfrak{q}) \rangle} \frac{1}{|W_H(\mathfrak{a})|} \int_{\mathfrak{a}} \Phi(X) \mathcal{M}_H(f)(X) \prod_{\alpha \in \Delta^+} \alpha(X) |dX = \int_{t_1 > t_2} (|\delta| \Phi)_m(t_1, t_2) \mathcal{M}f_m(t_1, t_2) dt_1 dt_2.$$

Pour \mathfrak{a}_2 , on considère la base H_3 et $H_4 = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & & 0 & -1 \\ & & 1 & 0 \\ \hline 0 & -1 & & \\ 1 & 0 & & 0 \end{array} \right)$ qui est orthogonale

et de volume 2 pour ω . Ainsi, on a

$$\frac{1}{|W_H(\mathfrak{a}_2)|} \int_{\mathfrak{a}_2} \Phi(X) \mathcal{M}_H(f)(X) \prod_{\alpha \in \Delta^+} \alpha(X) |dX = 2 \int_{\mathbb{R}^2} \Phi(X_{\tau, \theta}) \mathcal{M}_H(f)(X_{\tau, \theta}) |4\tau\theta| (\tau^2 + \theta^2) d\tau d\theta$$

$$= 8 \int_{\substack{\tau > 0 \\ \theta > 0}} (|\delta|\Phi)_2(\tau, \theta) \mathcal{M}f_2(\tau, \theta) (\tau^2 + \theta^2) d\tau d\theta$$

□.

La suite de cette partie est consacrée à l'étude du comportement des intégrales orbitales $\mathcal{M}_H f$ au voisinage des points semi-réguliers de \mathfrak{q} .

4.2 Méthode de descente

Nous rappelons tout d'abord des résultats de S. Sano ([23] paragraphe 2) concernant les décompositions radicielles.

On note τ la conjugaison de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ relative à la forme réelle \mathfrak{g} . Soit $\mathfrak{a} \in \text{Car}(\mathfrak{q})$. On a alors la décomposition suivante de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$:

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{z}_{\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}}(\mathfrak{a}) \oplus \mathfrak{a}_{\mathbb{C}} \oplus \mathfrak{n}_{\mathbb{C}} \quad \text{où} \quad \mathfrak{n}_{\mathbb{C}} = \sum_{\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{a}_{\mathbb{C}})} \mathfrak{g}_{\alpha}^{\mathbb{C}}.$$

Il existe une base $(T_j)_{1 \leq j \leq 12}$ de $\mathfrak{n}_{\mathbb{C}} \cap \mathfrak{h}$ vérifiant les propriétés suivantes : pour tout $j \in \{1, \dots, 12\}$, il existe $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{a}_{\mathbb{C}})^+$ telle que $T_j = X_j + \sigma(X_j)$ où $X_j \in \mathfrak{g}_{\alpha}^{\mathbb{C}}$ si α est réelle ou imaginaire et $X_j \in \mathfrak{g}_{\alpha}^{\mathbb{C}} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha\tau}^{\mathbb{C}}$ si α est complexe. On pose $\gamma(T_j) = X_j - \sigma(X_j)$ si α est réelle ou complexe et $\gamma(T_j) = \iota(X_j - \sigma(X_j))$ si α est imaginaire. La famille $\gamma(T_j)$ est alors une base de $\mathfrak{n}_{\mathbb{C}} \cap \mathfrak{q}$.

Si $X \in \mathfrak{a}$, alors $\text{ad}(X)$ induit un morphisme de $\mathfrak{n}_{\mathbb{C}} \cap \mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{n}_{\mathbb{C}} \cap \mathfrak{q}$. On note $\det(\text{ad}(X)|_{\mathfrak{h}/\mathfrak{z}_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{a})})^{\mathfrak{q}/\mathfrak{a}}$ le déterminant de $\text{ad}(X)$ dans la base choisie précédemment. Par un calcul analogue à celui de S. Sano ([23] proposition 2.1), on obtient alors

$$\left| \det(\text{ad}(X)|_{\mathfrak{h}/\mathfrak{z}_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{a})})^{\mathfrak{q}/\mathfrak{a}} \right| = \left| \prod_{\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{a}_{\mathbb{C}})^+} \alpha(X)^{m_{\alpha}} \right|.$$

On considère maintenant $\mathfrak{l} = \mathfrak{m}$ ou $\mathfrak{l} = \mathfrak{z}_3$. On a alors $\text{car}(\mathfrak{l} \cap \mathfrak{q}) = \{\mathfrak{a} \in \text{car}(\mathfrak{q}), \mathfrak{a} \subset \mathfrak{l} \cap \mathfrak{q}\}$. Si $\mathfrak{a} \in \text{car}(\mathfrak{q} \cap \mathfrak{l})$ on remarque que $\mathfrak{z}_{\mathfrak{l} \cap \mathfrak{h}}(\mathfrak{a}) = \mathfrak{z}_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{a})$. On peut décomposer $\mathfrak{l}_{\mathbb{C}}$ de manière analogue à $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$, ce qui permet d'obtenir

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{l} \cap \mathfrak{h} \oplus (\mathfrak{r}_{\mathbb{C}} \cap \mathfrak{h}) \quad \text{et} \quad \mathfrak{q} = \mathfrak{l} \cap \mathfrak{q} \oplus (\mathfrak{r}_{\mathbb{C}} \cap \mathfrak{q}),$$

où $\mathfrak{r}_{\mathbb{C}} = \sum_{\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}) - \Delta(\mathfrak{l}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{a}_{\mathbb{C}})} \mathfrak{g}_{\alpha}^{\mathbb{C}}$. La famille formée des T_j (respectivement $\gamma(T_j)$) associés à une racine $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{a}_{\mathbb{C}})^+ - \Delta(\mathfrak{l}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{a}_{\mathbb{C}})^+$ définit une base de $\mathfrak{r}_{\mathbb{C}} \cap \mathfrak{h}$ (respectivement de $\mathfrak{r}_{\mathbb{C}} \cap \mathfrak{q}$). Si $X \in \mathfrak{a}$, alors $\text{ad}(X)$ induit un morphisme de $\mathfrak{r}_{\mathbb{C}} \cap \mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{r}_{\mathbb{C}} \cap \mathfrak{q}$. On note $\det(\text{ad}(X)|_{\mathfrak{h}/\mathfrak{l} \cap \mathfrak{h}})^{\mathfrak{q}/\mathfrak{l} \cap \mathfrak{q}}$ son déterminant dans les bases choisies et on a

$$\left| \det(\text{ad}(X)|_{\mathfrak{h}/\mathfrak{l} \cap \mathfrak{h}})^{\mathfrak{q}/\mathfrak{l} \cap \mathfrak{q}} \right| = \left| \prod_{\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{a}_{\mathbb{C}})^+ - \Delta(\mathfrak{l}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{a}_{\mathbb{C}})^+} \alpha(X)^{m_{\alpha}} \right|.$$

Lemme 4.2.1. *On pose*

$$\mathfrak{l} \cap \mathfrak{q} = \{X \in \mathfrak{l} \cap \mathfrak{q}, \left| \det(\text{ad}(X)|_{\mathfrak{h}/\mathfrak{l} \cap \mathfrak{h}})^{\mathfrak{q}/\mathfrak{l} \cap \mathfrak{q}} \right| \neq 0\}$$

et on définit

$$\gamma : \begin{cases} H \times \mathfrak{l} \cap \mathfrak{q} & \rightarrow & \mathfrak{q} \\ (h, X) & \mapsto & h \cdot X \end{cases} .$$

Alors, l'application γ est submersive en tout point de $H \times \mathfrak{l} \cap \mathfrak{q}$.

Preuve. Pour $(h, X) \in H \times \mathfrak{l} \cap \mathfrak{q}$, $(A, X') \in \mathfrak{h} \times \mathfrak{l} \cap \mathfrak{q}$ et $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\gamma(h \exp(tA), X + tX') = Ad(h)(X + tX' + t[A, X] + t^2Y)$$

avec $Y \in \mathfrak{q}$. Par suite la différentielle de γ en un point $(h, X) \in H \times \mathfrak{l} \cap \mathfrak{q}$ est donnée par $d_{(h, X)}\gamma(A, X') = Ad(h)(X' + [A, X])$. Comme $[X, \mathfrak{l} \cap \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{l} \cap \mathfrak{q}$ et $[X, \mathfrak{r}_{\mathbb{C}} \cap \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{r}_{\mathbb{C}} \cap \mathfrak{q}$, la discussion précédente donne le lemme. \square .

4.3 Etude de $\mathcal{M}_H(f)$ pour $f \in \mathcal{D}(H \cdot \mathfrak{m} \cap \mathfrak{q})$

Nous rappelons que N désigne le normalisateur de $\mathfrak{m} \cap \mathfrak{q}$ dans H . Nous souhaitons exprimer $\mathcal{M}_H(f)$ pour $f \in \mathcal{D}(H \cdot \mathfrak{m} \cap \mathfrak{q})$ en terme de l'intégrale orbitale $\mathcal{M}_N(g)$ d'une fonction $g \in \mathcal{D}(\mathfrak{m} \cap \mathfrak{q})$. Pour cela, nous allons utiliser les résultats d'intégration sur les fibres de la proposition 3.0.1 relativement à la submersion surjective $\gamma : H \times \mathfrak{m} \cap \mathfrak{q} \rightarrow H \cdot \mathfrak{m} \cap \mathfrak{q}$ obtenue dans le paragraphe précédent pour $\mathfrak{l} = \mathfrak{m}$.

Précisons tout d'abord les fibres de γ . Par le lemme 4.2.1 et la remarque 2.2.1, pour tout $X \in \mathfrak{m} \cap \mathfrak{q}$, on a $\delta^2(X) = S_0(X) = \left| \det(\text{ad}(X)|_{\mathfrak{h}/\mathfrak{m} \cap \mathfrak{h}}^{\mathfrak{q}/\mathfrak{m} \cap \mathfrak{q}}) \right|$ et donc $\mathfrak{m} \cap \mathfrak{q} = \{X \in \mathfrak{m} \cap \mathfrak{q}; S_0(X) \neq 0\}$. Par le lemme 2.3.2, pour $X \in \mathfrak{m} \cap \mathfrak{q}$, on a donc

$$\gamma^{-1}(X) = \{(h, h^{-1} \cdot X); h \in N\}.$$

et la surjection $\gamma_* : \mathcal{D}(H \times \mathfrak{m} \cap \mathfrak{q}) \rightarrow \mathcal{D}(H \cdot \mathfrak{m} \cap \mathfrak{q})$ est donnée ici par :

$$\gamma_*(\phi)(h \cdot X) = \delta(X)^{-2} \int_N \phi(hu^{-1}, u \cdot X) du \quad \text{pour } h \cdot X \in H \cdot \mathfrak{m} \cap \mathfrak{q}$$

Vue la normalisation des intégrales orbitales choisie, pour $\phi \in \mathcal{D}(H \times \mathfrak{m} \cap \mathfrak{q})$ et $h \cdot X \in H \cdot \mathfrak{m} \cap \mathfrak{q}$, on pose :

$$\pi_*(\phi)(h \cdot X) = \delta(X) \gamma_*(\phi)(h \cdot X) = \delta(X)^{-1} \int_N \phi(hu^{-1}, u \cdot X) du$$

L'application π_* est surjective de $\mathcal{D}(H \times \mathfrak{m} \cap \mathfrak{q})$ sur $\mathcal{D}(H \cdot \mathfrak{m} \cap \mathfrak{q})$ puisque γ_* l'est.

Nous notons p la projection de $H \times \mathfrak{m} \cap \mathfrak{q}$ sur $\mathfrak{m} \cap \mathfrak{q}$ qui est une surjection submersive. Ainsi, par le lemme 3.0.1, pour $\phi \in \mathcal{D}(H \times \mathfrak{m} \cap \mathfrak{q})$ et $X \in \mathfrak{m} \cap \mathfrak{q}$, on a

$$p_*(\phi)(X) = \int_H \phi(h, X) dh.$$

et p_* est une surjection de $\mathcal{D}(H \times \mathfrak{m} \cap \mathfrak{q})$ dans $\mathcal{D}(\mathfrak{m} \cap \mathfrak{q})$.

L'intégrale orbitale sur $\mathfrak{m} \cap \mathfrak{q}$ d'une fonction $f \in \mathcal{D}(\mathfrak{m} \cap \mathfrak{q})$ est définie, pour $X \in \mathfrak{m} \cap \mathfrak{q}^{reg}$, par :

$$\mathcal{M}_N(f)(X) := \int_{N/Z_H(X)} f(h \cdot X) dh$$

Cette normalisation est compatible avec celle définie en début de paragraphe puisque, d'une part, $Z_N(X) = Z_H(X) \subset N$ par le lemme 2.3.2. et d'autre part, pour tout $\mathfrak{a} \in \text{car}(\mathfrak{m} \cap \mathfrak{q})$, le système de racines $\Delta(\mathfrak{m}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{a}_{\mathbb{C}})$ ne contient que des racines de multiplicité un.

On remarque également que $\delta(X) = |\delta(X)|$ pour $X \in \mathfrak{m} \cap \mathfrak{q}$.

Proposition 4.3.1. *Pour $\phi \in \mathcal{D}(H \times \mathfrak{m} \cap \mathfrak{q})$ et $X \in \mathfrak{m} \cap \mathfrak{q}^{\text{reg}}$, on a*

$$\mathcal{M}_H(\pi_*(\phi))(X) = \mathcal{M}_N(p_*(\phi))(X).$$

Preuve : En utilisant que H et $Z_H(X)$ sont unimodulaires, on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_H(\pi_*(\phi))(X) &= \delta(X) \int_{H/Z_H(X)} \pi_*(\phi)(h \cdot X) dh = \int_{H/Z_H(X)} \int_N \phi(hu^{-1}, u \cdot X) dudh \\ &= \int_{H/Z_H(X)} \int_{N/Z_H(X)} \int_{Z_H(X)} \phi(hv^{-1}u^{-1}, u \cdot v \cdot X) dvdudh \\ &= \int_{H/Z_H(X)} \int_{N/Z_H(X)} \int_{Z_H(X)} \phi(hv^{-1}u^{-1}, u \cdot X) dvdudh. \\ &= \int_{H/Z_H(X)} \int_{N/Z_H(X)} \int_{Z_H(X)} \phi(hvu^{-1}, u \cdot X) dvdudh \\ &= \int_H \int_{N/Z_H(X)} \phi(hu^{-1}, u \cdot X) dudh = \mathcal{M}_N(p_*(\phi))(X). \quad \square \end{aligned}$$

Nous allons maintenant exprimer l'intégrale orbitale $\mathcal{M}_N(f)$ pour $f \in \mathcal{D}(\mathfrak{m} \cap \mathfrak{q})$ en terme d'une application moyenne $M_{Q_1, Q_2}(g)$ définie dans le paragraphe 3.2 où $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^4)$ dépend de f .

On reprend les notations du paragraphe 2.3.1, en particulier, on écrit $\mathfrak{m} = \mathfrak{z}_1 + \mathfrak{z}_2 = \mathfrak{m}_1 \oplus \mathfrak{m}_2$. On pose $Z_1 = Z_H(H_1) = \{\text{diag}(a, b, a, d) \in GL(4, \mathbb{R})\}$ et $Z_2 = \kappa(Z_1)$.

Lemme 4.3.1. *Si $X \in \mathfrak{m} \cap \mathfrak{q}^{\text{reg}}$ alors, on a les isomorphismes de groupes suivants :*

$$N^0/Z_H(X) \simeq Z_1/Z_H(X) \times Z_2/Z_H(X) \simeq \{\text{diag}(1, 1, 1, d); d \in \mathbb{R}^*\} \times \{\text{diag}(1, 1, c, 1); c \in \mathbb{R}^*\}$$

Preuve : Par le lemme 2.3.2, on a $Z_H(X) = \{\text{diag}(\alpha, \beta, \alpha, \beta) \in GL(4, \mathbb{R})\}$. Les isomorphismes donnés sont alors clairs. \square .

On note q la forme quadratique définie sur \mathbb{R}^2 par $q(x, y) = x^2 - y^2$ et $O(q) = \{h_{\epsilon, u} = \begin{pmatrix} \epsilon chu & shu \\ shu & \epsilon chu \end{pmatrix}; \epsilon = \pm 1, u \in \mathbb{R}\}$ le sous-groupe de $GL(2, \mathbb{R})$ qui préserve q .

On définit l'isomorphisme ψ de \mathbb{R}^2 dans $\mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{q}$ par

$$\psi(x, y) = \left(\begin{array}{cc|cc} & & 0 & 0 \\ & & 0 & x+y \\ \hline 0 & 0 & & \\ 0 & x-y & & 0 \end{array} \right)$$

de telle sorte que $Q \circ \psi = q$.

Lemme 4.3.2. *Pour $g \in \mathcal{D}(\mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{q})$ et $X_1 \in (\mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{q})^{reg}$, on a*

$$\int_{Z_1/Z_{Z_1}(X_1)} g(u \cdot X_1) du = M_{Q \circ \psi}(g \circ \psi)(Q(X_1)).$$

Preuve : Pour $X_1 \in (\mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{q})^{reg}$, le groupe $Z_{Z_1}(X_1) = \{diag(\alpha, \beta, \alpha, \beta) \in GL(4, \mathbb{R})\}$ est indépendant de X_1 . On le note C_1 . La formule d'intégration de Weyl sur $\mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{q}$ assure que, pour tout $F \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a

$$\begin{aligned} \int_{\mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{q}} F \circ Q(X_1) g(X_1) dX_1 &= \int_{\mathbb{R}_+} 2xF(x^2) \int_{Z_1/C_1} g(u \cdot \psi(x, 0)) du dx \\ &+ \int_{\mathbb{R}_+} 2yF(-y^2) \int_{Z_1/C_1} g(u \cdot \psi(0, y)) du dy. \end{aligned}$$

Par ailleurs, on a $\int_{\mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{q}} g(X_1) F \circ Q(X_1) dX_1 = \int_{\mathbb{R}^2} g \circ \psi(x, y) F(x^2 - y^2) dx dy = \int_{\mathbb{R}} M_{Q \circ \psi} g \circ \psi(t) F(t) dt$ ce qui donne le résultat voulu. \square .

De même, l'application $\kappa \circ \psi$ définit un isomorphisme de \mathbb{R}^2 dans $\mathfrak{m}_2 \cap \mathfrak{q}$ tel que $Q \circ \kappa \circ \psi = q$ et on obtient un résultat similaire sur $\mathfrak{m}_2 \cap \mathfrak{q}$.

Pour $g \in \mathcal{D}(\mathfrak{m} \cap \mathfrak{q})$ on définit l'application \tilde{g} sur $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ par

$$\tilde{g}(u, v) = g(\psi(u) + \kappa \circ \psi(v))$$

Corollaire 4.3.1. *Pour $g \in \mathcal{D}(\mathfrak{m} \cap \mathfrak{q})$ et $X = X_1 + X_2 \in (\mathfrak{m}_1 \oplus \mathfrak{m}_2) \cap \mathfrak{q}^{reg}$, on a*

$$\mathcal{M}_{N^0}(g)(X) = \int_{Z_1/Z_H(X) \times Z_2/Z_H(X)} g(u_1 \cdot X_1 + u_2 \cdot X_2) du_1 du_2 = M_{q, q} \tilde{g}(Q(X_1), Q(X_2))$$

Preuve : Ceci se déduit immédiatement du lemme précédent et du lemme 3.2.1. \square

Corollaire 4.3.2. *Soit $f \in \mathcal{D}(H \cdot \mathfrak{m} \cap \mathfrak{q})$. Alors, il existe $f_0 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)$ à support dans $\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2; q(u) \neq q(v)\}$, telle que, pour $X = X_1 + X_2 \in \mathfrak{m} \cap \mathfrak{q}^{reg}$, on ait*

$$\mathcal{M}_H(f)(X) = M_{q, q} f_0(Q(X_1), Q(X_2)) + M_{q, q} f_0(Q(X_2), Q(X_1))$$

Preuve : Comme l'application π_* est surjective, il existe $\phi \in \mathcal{D}(H \times \mathfrak{m} \cap \mathfrak{q})$ telle que $f = \pi_*(\phi)$. Par la proposition 4.3.1, pour tout $X \in \mathfrak{m} \cap \mathfrak{q}^{reg}$, on a $\mathcal{M}_H(f)(X) = \mathcal{M}_N(p_*(\phi))(X) = \mathcal{M}_{N^0}(p_*(\phi))(X) + \mathcal{M}_{N^0}(p_*(\phi))(\kappa(X))$. Le corollaire précédent permet de conclure en prenant $f_0 = p_*(\phi)$. \square

Par la définition 4.1.2, pour tout $(t_1, t_2) \in (\mathbb{R}^*)^2 - diag$, on note $\mathcal{M}f_{\mathfrak{m}}(t_1, t_2) = \mathcal{M}_H(f)(X_{t_1, t_2})$ où $X_{t_1, t_2} \in \mathfrak{m} \cap \mathfrak{q}$ vérifie $\{u(X_{t_1, t_2}), v(X_{t_1, t_2})\} = \{t_1, t_2\}$.

On introduit alors l'espace de fonctions suivant :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\eta^2 &= \{(t_1, t_2) \in (\mathbb{R}^*)^2 - diag \mapsto \varphi_0(t_1, t_2) + \log |t_1| \varphi_1(t_1, t_2) \\ &+ \log |t_2| \varphi_1(t_2, t_1) + \log |t_1| \log |t_2| \varphi_2(t_1, t_2); \quad \varphi_0, \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2 - diag); \\ &\varphi_0, \varphi_2 \text{ sont symétriques par rapport aux deux variables}\}. \end{aligned}$$

Théorème 4.3.1. *1. Pour tout $f \in \mathcal{D}(H \cdot \mathfrak{m} \cap \mathfrak{q})$, on a $\mathcal{M}f_{\mathfrak{m}} \in \mathcal{H}_\eta^2$*

2. L'application

$$\begin{cases} \mathcal{D}(H \cdot \mathfrak{m} \cap \mathfrak{q}) & \rightarrow \mathcal{H}_\eta^2 \\ f & \mapsto \mathcal{M}f_{\mathfrak{m}} \end{cases}$$

est surjective.

Preuve : Soit $f \in \mathcal{D}(H \cdot \mathfrak{m} \cap \mathfrak{q})$. Montrons d'abord que $\mathcal{M}f_{\mathfrak{m}}$ est dans \mathcal{H}_η^2 .

Par le corollaire 4.3.2, il existe $f_0 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)$, à support dans $\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2; q(u) \neq q(v)\}$, telle que pour $X = X_1 + X_2 \in (\mathfrak{m}_1 \oplus \mathfrak{m}_2) \cap \mathfrak{q}^{reg}$ avec $t_1 = Q(X_1)$ et $t_2 = Q(X_2)$, on ait

$$\mathcal{M}f_{\mathfrak{m}}(t_1, t_2) = \mathcal{M}_H(f)(X) = M_{q,q}f_0(t_1, t_2) + M_{q,q}f_0(t_2, t_1).$$

Grâce au théorème 3.2.1 et compte-tenu du support de f_0 , on obtient alors $\mathcal{M}f_{\mathfrak{m}} \in \mathcal{H}_\eta^2$.

Montrons maintenant la surjectivité de l'application.

Soit $F \in \mathcal{H}_\eta^2$. Il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$|t_1 - t_2| < \sqrt{\varepsilon} \Rightarrow F(t_1, t_2) = 0.$$

D'après la proposition 3.2.1, il existe $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)$ tel que pour $(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$, on ait

$$M_{q,q}f(t_1, t_2) = F(t_1, t_2),$$

soit

$$M_{q,q}\left(\frac{f}{2}\right)(t_2, t_1) + M_{q,q}\left(\frac{f}{2}\right)(t_1, t_2) = F(t_1, t_2).$$

puisque les fonctions considérées sont symétriques par rapport aux deux variables.

Grâce au corollaire 4.3.1, la fonction $g \in \mathcal{D}(\mathfrak{m} \cap \mathfrak{q})$ définie par $g(X_1 + X_2) = \frac{1}{2}f(\psi^{-1}(X_1), \kappa \circ \psi^{-1}(X_2))$ pour $X_j \in \mathfrak{m}_j \cap \mathfrak{q}$, vérifie, pour tout $X = X_1 + X_2 \in \mathfrak{m} \cap \mathfrak{q}^{reg}$,

$$\mathcal{M}_{N^0}g(X) = \frac{1}{2}M_{q,q}f(Q(X_1), Q(X_2)) \quad \mathcal{M}_{N^0}g \circ \kappa(X) = \frac{1}{2}M_{q,q}f(Q(X_2), Q(X_1)).$$

Ainsi, on obtient

$$\mathcal{M}_N g(X) = F(Q(X_1), Q(X_2)).$$

Maintenant, on fixe une fonction χ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $\chi|_{[-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}]} = 1$ et $\chi|_{\mathbb{R} - [-\varepsilon, \varepsilon]} = 0$.

La fonction $(1 - \chi \circ S_0)g$ appartient cette fois-ci à $\mathcal{D}(\mathfrak{m} \cap \mathfrak{q})$ et vérifie

$$\mathcal{M}_N((1 - \chi \circ S_0)g)(X) = (1 - \chi((t_1 - t_2)^2))F(t_1, t_2) = F(t_1, t_2),$$

pour $X = X_1 + X_2$ tel que $Q(X_1) = t_1$ et $Q(X_2) = t_2$. Par la surjectivité de p_* , il existe $\phi \in \mathcal{D}(H \times \mathfrak{m} \cap \mathfrak{q})$ telle que $(1 - \chi \circ S_0)g = p_*(\phi)$ et par la proposition 4.3.1 on a $\mathcal{M}_H(\pi_*(\phi))(X) = \mathcal{M}_N(p_*(\phi))(X) = F(t_1, t_2)$ ce qui achève la preuve. \square

4.4 Etude de $\mathcal{M}_H(f)$ pour $f \in \mathcal{D}(H \cdot \mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})$

Maintenant, nous exprimons $\mathcal{M}_H(f)$ pour $f \in \mathcal{D}(H \cdot \mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})$ en terme de l'intégrale orbitale $\mathcal{M}_{N_3}(g)$ d'une fonction $g \in \mathcal{D}(\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})$ où N_3 désigne le normalisateur de $\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q}$ dans H .

Notons $\gamma_3 : H \times \mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q} \rightarrow H \cdot \mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q}$ la submersion surjective obtenue dans le lemme 4.2.1 pour $\mathfrak{l} = \mathfrak{z}_3$. On rappelle (lemme 2.3.4) que $N_3 = N_3^0 \cap \tilde{K} N_3^0$ avec $\tilde{K} = \left(\begin{array}{c|c} I_2 & 0 \\ \hline 0 & -I_2 \end{array} \right)$ et $N_3^0 = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & A \end{array} \right); A \in GL(2, \mathbb{R}) \right\}$.

Lemme 4.4.1. 1. On garde les notations du paragraphe 4.2 et pour $X \in \mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q}$, on pose $\nu_3(X) = |\det(\text{ad}(X)|_{\mathfrak{h}/\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{h}})|$.

Si $X = \left(\begin{array}{c|c} 0 & Y \\ \hline Y & 0 \end{array} \right) \in \mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q}$ alors on a

$$\nu_3(X) = 4(\text{tr}Y)^2 |\det(Y)|.$$

En particulier, on a $\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q} = \{X = \left(\begin{array}{c|c} 0 & Y \\ \hline Y & 0 \end{array} \right); \text{tr}Y \det Y \neq 0\}$.

2. Soit $(\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+ = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} 0 & Y \\ \hline Y & 0 \end{array} \right); (\text{tr}Y)^2 \det(Y) > 0 \right\}$. Alors

$$H \cdot \mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q} = H \cdot (\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+.$$

3. Si $h \cdot (\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+ \cap (\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+ \neq \emptyset$ alors $h \in N_3$.

Preuve :

Par le lemme 4.2.1 et la remarque 2.2.1, pour $\mathfrak{a} \in \langle \text{car}(\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q}) \rangle$ et $X \in \mathfrak{a}$, on a

$$\nu_3(X) = \left| \prod_{\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{a}_{\mathbb{C}})^+ - \Delta((\mathfrak{z}_3)_{\mathbb{C}}, \mathfrak{a}_{\mathbb{C}})^+} \alpha(X)^{m_{\alpha}} \right| = 4(\text{tr}Y)^2 |\det Y|$$

et l'assertion 1. s'en déduit par densité des éléments semi-simples.

Soit $X = \left(\begin{array}{c|c} 0 & Y \\ \hline Y & 0 \end{array} \right) \in \mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q}$. Si $\det(Y) > 0$ alors $X \in (\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+$ sinon la matrice Y possède deux valeurs propres non nulles de signe contraire. En particulier, il existe $P \in GL(2, \mathbb{R})$ telle que $PYP^{-1} = \begin{pmatrix} u_1 & 0 \\ 0 & u_2 \end{pmatrix}$ avec $u_1 u_2 < 0$. On a alors

$$\varrho \left(\left(\begin{array}{c|c} P & 0 \\ \hline 0 & P \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{c|c} 0 & Y \\ \hline Y & 0 \end{array} \right) \right) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \begin{matrix} u_1 & 0 \\ 0 & -u_2 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} u_1 & 0 \\ 0 & -u_2 \end{matrix} & 0 \end{array} \right),$$

où $\varrho = Ad \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \end{array} \right)$ ce qui donne l'assertion 2.

Soit $X \in (\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+$ et $h \in H$ tels que $h \cdot X \in (\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+$.

Si X est régulier dans \mathfrak{q} alors, par le lemme 2.3.4, il existe $h_0 \in N_3$ tel que $\mathfrak{z}_6(h_0 \cdot X) = \mathfrak{a}$ avec $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_{+,+}$ ou $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_2$. Comme $h \cdot X$ est également régulier et l'action adjointe d'un élément de H ne modifie pas la nature réelle ou complexe des racines, il existe $h_1 \in N_3$ tel que $\mathfrak{z}_6(h_1 h \cdot X) = \mathfrak{a}$. Ainsi, on a $h_1 h h_0^{-1} \in N_H(\mathfrak{a})$. Comme $X \in (\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+$, le lemme 2.1.2 assure que $h_1 h h_0^{-1} \in N_3$ et donc $h \in N_3$.

Si X n'est pas régulier, on écrit $X = \left(\begin{array}{c|c} 0 & Y \\ \hline Y & 0 \end{array} \right)$ et les deux valeurs propres de Y sont égales. Ainsi, la décomposition de Jordan de Y s'écrit sous la forme

$$Y = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix} + Y_n,$$

où Y_n est une matrice nilpotente et u est un réel non nul.

En notant $h = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array} \right)$, la décomposition de Jordan de $h \cdot X$ est alors donnée par

$$h \cdot X = u \left(\begin{array}{c|c} 0 & AB^{-1} \\ \hline BA^{-1} & 0 \end{array} \right) + h \cdot \left(\begin{array}{c|c} 0 & Y_n \\ \hline Y_n & 0 \end{array} \right).$$

Comme $h \cdot X$ est dans \mathfrak{z}_3 qui est une sous algèbre de Lie réductrice de \mathfrak{g} , alors grâce au lemme 3 du chapitre 1 de la première partie de [29], la décomposition précédente est la décomposition de Jordan de $h \cdot X$ dans \mathfrak{z}_3 et donc $u \left(\begin{array}{c|c} 0 & AB^{-1} \\ \hline BA^{-1} & 0 \end{array} \right)$ est dans \mathfrak{z}_3 .

Ainsi, on a $AB^{-1} = BA^{-1}$. Par suite, il existe P dans $GL(2, \mathbb{R})$ et $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ dans $\{\pm 1\}$ tels que

$$AB^{-1} = P \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Ainsi

$$h \cdot X = \left(\begin{array}{c|c} 0 & AYA^{-1}P \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 \end{pmatrix} P^{-1} \\ \hline P \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 \end{pmatrix} P^{-1}AYA^{-1} & 0 \end{array} \right).$$

Comme $h \cdot X$ est dans $(\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+$ alors

$$0 < \det(AYA^{-1}P \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 \end{pmatrix} P^{-1}) = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \det(Y).$$

Comme $X \in (\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+$, on a $\det(Y) > 0$ et donc $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$. On obtient alors $h \in N_3$, d'où l'assertion 3. \square

Remarque 4.4.1. Pour $X = \left(\begin{array}{c|c} 0 & Y \\ \hline Y & 0 \end{array} \right) \in \mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q}$, on a

$$Q(X) = (\operatorname{tr} Y)^2 - 2\det Y, \quad S(X) = (\det Y)^2, \quad S_0(X) = (\operatorname{tr} Y)^2((\operatorname{tr} Y)^2 - 4\det Y)$$

On obtient donc

$$(\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})^{reg} = \left\{ X = \left(\begin{array}{c|c} 0 & Y \\ \hline Y & 0 \end{array} \right); (\operatorname{tr} Y)^2 - 4\det Y \neq 0 \right\} \text{ et } \mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q}^{reg} = \mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q} \cap (\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})^{reg}.$$

Nous souhaitons préciser le comportement des intégrales orbitales au voisinage des points H -conjugués à $\mathfrak{a}_{+,+} \cap \mathfrak{a}_2 \subset (\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+$. Pour cette étude, nous considérons la submersion surjective

$$\pi_3 : H \times (\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+ \rightarrow H \cdot (\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+.$$

Par le lemme 4.4.1, pour $h \cdot X \in H \cdot (\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+$, on a $\pi_3^{-1}(h \cdot X) = \{(hu^{-1}, u \cdot X); u \in N_3\}$. Le lemme 3.0.1 permet de définir l'application surjective $(\pi_3)_* : \mathcal{D}(H \times (\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+) \rightarrow \mathcal{D}(H \cdot (\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+)$ qui est donnée par

$$(\pi_3)_*(\varphi)(h \cdot X) = \nu_3(X)^{-1} \int_{N_3} \varphi(hu^{-1}, u \cdot X) du$$

pour $\varphi \in \mathcal{D}(H \times (\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+)$ et $(h, X) \in H \times (\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+$.

Lemme 4.4.2. *Pour $\tau \in \mathbb{R}$ et $X' \in [\mathfrak{z}_3, \mathfrak{z}_3] \cap \mathfrak{q}$, tel que $\tau H_3 + X'$ soit dans $\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q}^{reg}$, on a :*

$$Z_H(\tau H_3 + X') = Z_{N_3^0}(X').$$

Preuve : On note $X = \tau H_3 + X' = \left(\begin{array}{c|c} 0 & Y \\ \hline Y & 0 \end{array} \right)$. Montrons dans un premier temps que $Z_H(X)$ est inclus dans N_3^0 .

Soit $h \in Z_H(X)$. Comme X est régulier, par le lemme 2.3.4, il existe $h_1 \in N_3$ tel que $X_1 = h_1 \cdot X$ soit un élément de $\mathfrak{a}_{+,+}$ ou de \mathfrak{a}_2 . Si $X_1 \in \mathfrak{a}_2$ alors X_1 et donc X appartiennent à $(\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+$ et le lemme 4.4.1 donne $h \in N_3$. Si $X_1 \in \mathfrak{a}_{+,+}$ alors $h_1 h h_1^{-1} \in Z_H(X_1) \subset N_3$ par le lemme 2.3.2 et donc, on a également $h \in N_3$.

Maintenant, par régularité de X , on a également $tr(Y) \neq 0$ et donc Y et $-Y$ ne sont pas conjugués ce qui implique que $h \in N_3^0$.

Pour h dans N_3^0 on a

$$h \cdot (\tau H_3 + X') = \tau H_3 + h \cdot X'.$$

Ainsi h est dans $Z_H(X)$ si et seulement si h est dans $Z_{N_3^0}(X')$. \square

On introduit la fonction δ_3 définie sur $\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q}$ par :

$$\delta_3(\tau H_3 + X') = i^{Y(-Q(X'))} \sqrt{2|Q(X')|}.$$

où $\tau \in \mathbb{R}$ et $X' \in [\mathfrak{z}_3, \mathfrak{z}_3] \cap \mathfrak{q}$.

Remarque 4.4.2. 1. *Pour $\mathfrak{a} \in \text{car}(\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})$ et $X \in \mathfrak{a}$, on a*

$$|\delta_3(X)| = \left| \prod_{\alpha \in \Delta^+(\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})} \alpha^{m_\alpha - 1}(X) \right|.$$

2. *Si $X' = \left(\begin{array}{c|c} 0 & Y' \\ \hline Y' & 0 \end{array} \right) \in [\mathfrak{z}_3, \mathfrak{z}_3] \cap \mathfrak{q}$ alors $Q(X') = -2\det Y'$*

Ainsi, l'intégrale orbitale sur $(\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+$ d'une fonction $f \in \mathcal{D}((\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+)$, est donnée pour $X \in (\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+^{reg}$, par :

$$\mathcal{M}_{N_3}(f)(X) = |\delta_3(X)| \int_{N_3/Z_{N_3}(X)} f(h \cdot X) dh.$$

On note p_3 la projection de $H \times (\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+$ sur $(\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+$. C'est une surjection submersive et le lemme 3.0.1 permet de définir l'application surjective $(p_3)_*$ de $\mathcal{D}(H \times (\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+)$ dans $\mathcal{D}((\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+)$ par

$$(p_3)_*(\phi)(X) = \int_H \phi(h, X) dh,$$

pour $\phi \in \mathcal{D}(H \times (\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+)$ et $X \in (\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+$.

Compte-tenu de la normalisation des intégrales orbitales choisie, on introduit l'application $(\tilde{p}_3)_*$ définie sur $\mathcal{D}(H \times (\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+)$ par

$$(\tilde{p}_3)_*(\phi)(X) = \frac{|\delta(X)|}{|\delta_3(X)|\nu_3(X)} (p_3)_*(\phi)(X),$$

qui est aussi une surjection de $\mathcal{D}(H \times (\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+)$ dans $\mathcal{D}((\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+)$.

Proposition 4.4.1. *Pour $\phi \in \mathcal{D}(H \times (\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+)$ et $X \in (\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+^{reg}$, on a*

$$\mathcal{M}_H((\pi_3)_*(\phi))(X) = \mathcal{M}_{N_3}((\tilde{p}_3)_*(\phi))(X).$$

Preuve : Soit $X \in (\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+^{reg}$. Par le lemme 4.4.2, on a $Z_H(X) = Z_{N_3}(X)$. Ainsi, en utilisant que H et $Z_H(X)$ sont unimodulaires, on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_H((\pi_3)_*(\phi))(X) &= |\delta(X)| \int_{H/Z_H(X)} (\pi_3)_*(\phi)(h \cdot X) d\dot{h} = \int_{H/Z_H(X)} \frac{|\delta(X)|}{\nu_3(X)} \int_{N_3} \phi(hu^{-1}, u \cdot X) dud\dot{h} \\ &= \int_{H/Z_H(X)} \frac{|\delta(X)|}{\nu_3(X)} \int_{N_3/Z_H(X)} \int_{Z_H(X)} \phi(hv^{-1}u^{-1}, u \cdot v \cdot X) dvd\dot{u}d\dot{h} \\ &= \int_{H/Z_H(X)} \frac{|\delta(X)|}{\nu_3(X)} \int_{N_3/Z_H(X)} \int_{Z_H(X)} \phi(hv^{-1}u^{-1}, u \cdot X) dvd\dot{u}d\dot{h} \\ &= \int_{H/Z_H(X)} \frac{|\delta(X)|}{\nu_3(X)} \int_{N_3/Z_H(X)} \int_{Z_H(X)} \phi(hvu^{-1}, u \cdot X) dvd\dot{u}d\dot{h} \\ &= \int_H \frac{|\delta(X)|}{\nu_3(X)} \int_{N_3/Z_H(X)} \phi(hu^{-1}, u \cdot X) d\dot{u}dh = \int_{N_3/Z_H(X)} \frac{|\delta(X)|}{\nu_3(X)} \int_H \phi(hu^{-1}, u \cdot X) dh d\dot{u} \\ &= \int_{N_3/Z_H(X)} \frac{|\delta(X)|}{\nu_3(X)} \int_H \phi(h, u \cdot X) dh d\dot{u} = \int_{N_3/Z_H(X)} \frac{|\delta(X)|}{\nu_3(X)} (p_3)_*(\phi)(u \cdot X) d\dot{u} = \mathcal{M}_{N_3}((\tilde{p}_3)_*(\phi))(X). \end{aligned}$$

□

Remarque 4.4.3. *Soit $F \in \mathcal{D}(\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})$. Comme $N_3 = N_3^0 \cup \tilde{K}N_3^0$ et $Ad(\tilde{K})|_{\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q}} = -Id|_{\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q}}$, pour $X \in (\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+^{reg}$, on a*

$$\int_{N_3/Z_H(X)} F(l \cdot X) d\dot{l} = \int_{N_3^0/Z_H(X)} F(l \cdot X) d\dot{l} + \int_{N_3^0/Z_H(X)} F(-l \cdot X) d\dot{l}$$

Par ailleurs, grâce au lemme 4.4.2, en posant $X = \tau H_3 + X'$ avec $\tau \in \mathbb{R}$ et $X' \in [\mathfrak{z}_3, \mathfrak{z}_3] \cap \mathfrak{q}$, on a

$$\int_{N_3^0/Z_H(X)} F(l \cdot X) d\dot{l} = \int_{N_3^0/Z_H(X')} F(\tau H_3 + l \cdot X') d\dot{l}.$$

Maintenant, pour $g \in \mathcal{D}(\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})$, nous allons exprimer l'intégrale orbitale $\mathcal{M}_{N_3}(g)(\tau H_3 + X')$ en terme d'une application moyenne $M_Q(\tilde{g}_\tau)$ définie dans le paragraphe 3.1 où $\tilde{g} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^4)$ dépend de g .

L'espace $[\mathfrak{z}_3, \mathfrak{z}_3] \cap \mathfrak{q}$ est isomorphe à $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ par $i_1 \left(\left(\begin{array}{c|c} 0 & Y \\ \hline Y & 0 \end{array} \right) \right) = Y$. Le groupe N_3^0 est isomorphe à $GL(2, \mathbb{R})$ et pour $A \in GL(2, \mathbb{R})$, $Y \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$, on a $A \cdot Y = i_1 \left(\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & A \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{c|c} 0 & Y \\ \hline Y & 0 \end{array} \right) \right)$. De plus, la restriction de Q à $[\mathfrak{z}_3, \mathfrak{z}_3] \cap \mathfrak{q}$ est la forme quadratique N_3^0 -invariante donnée par $Q \left(\left(\begin{array}{c|c} 0 & Y \\ \hline Y & 0 \end{array} \right) \right) = -2\det(Y)$ pour $Y \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$.

Notons q_3 la forme quadratique définie sur \mathbb{R}^3 par $q_3(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ et ψ_3 l'isomorphisme de \mathbb{R}^3 dans $[\mathfrak{z}_3, \mathfrak{z}_3] \cap \mathfrak{q}$ défini par

$$\psi_3(x, y, z) = \left(\begin{array}{cc|cc} & & x & y+z \\ & 0 & y-z & -x \\ \hline x & y+z & & \\ y-z & -x & & 0 \end{array} \right)$$

de telle sorte que $Q \circ \psi_3 = 2q_3$.

Lemme 4.4.3. *Pour tout $g \in \mathcal{D}([\mathfrak{z}_3, \mathfrak{z}_3] \cap \mathfrak{q})$ et pour tout $X \in ([\mathfrak{z}_3, \mathfrak{z}_3] \cap \mathfrak{q})^{reg}$, on a*

$$|\delta_3(X)| \int_{N_3^0/Z_{N_3^0}(X)} g(l \cdot X) dl = M_{q_3}(g \circ \psi_3) \left(\frac{Q}{2}(X) \right)$$

Preuve : Ce résultat s'obtient comme le lemme 4.3.2 en écrivant la formule d'intégration de Weyl pour la paire symétrique $(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \times \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}), \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}))$. \square

Pour $g \in \mathcal{D}(\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})$ on définit la fonction \tilde{g} sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ par

$$\tilde{g}(\tau, u) = g(\tau H_3 + \psi_3(u))$$

Corollaire 4.4.1. *Soit $g \in \mathcal{D}(\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})$ et $X = \tau H_3 + X' \in (\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})^{reg}$. On note $w = \frac{Q(X')}{2}$. On a alors :*

$$\mathcal{M}_{N_3}(g)(X) = M_{q_3}(\tilde{g}_\tau + \tilde{g}_{-\tau})(w).$$

Preuve : Par la remarque 4.4.3, pour $X = \tau H_3 + X' \in (\mathbb{R}H_3 \oplus [\mathfrak{z}_3, \mathfrak{z}_3]) \cap \mathfrak{q}^{reg}$, on a

$$\mathcal{M}_{N_3}g(X) = |\delta_3(X)| \int_{N_3^0/Z_H(X)} g(\tau H_3 + l \cdot X') dl + |\delta_3(-X)| \int_{N_3^0/Z_H(X)} g(-\tau H_3 - l \cdot X') dl$$

Comme $Q(X') = Q(-X')$, le résultat découle du lemme précédent. \square

Corollaire 4.4.2. *Soit $f \in \mathcal{D}(H \cdot (\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+)$. Alors il existe une fonction $f_1 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^4)$ paire par rapport à la première variable et à support contenu dans $\{(\tau, u) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^3; 2\tau^2 - q_3(u) > 0\}$, telle que pour tout $(\tau, X') \in \mathbb{R} \times [\mathfrak{z}_3, \mathfrak{z}_3] \cap \mathfrak{q}$ vérifiant $\tau H_3 + X' \in (\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+^{reg}$, on ait*

$$\mathcal{M}_H(f)(\tau H_3 + X') = M_{q_3}(f_1)_\tau(Q(X')/2).$$

Preuve : Comme l'application $(\pi_3)_*$ est surjective, il existe $\phi \in \mathcal{D}(H \times (\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+)$ telle que $f = (\pi_3)_*(\phi)$. On note $g = (\tilde{p}_3)_*(\phi)$ de sorte que $\mathcal{M}_H(f)(X) = \mathcal{M}_{N_3}(g)(X)$.

Soit f_1 la fonction définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ par $f_1(\tau, u) = \tilde{g}(\tau, u) + \tilde{g}(-\tau, u)$. Comme g est à support contenu dans $(\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+$, la fonction \tilde{g} est à support contenu dans $\{(\tau, u) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^3; 2\tau^2 - q_3(u) > 0\}$. Par le corollaire précédent, on a $\mathcal{M}_H(f)(\tau H_3 + X') = M_{q_3}(f_1)_\tau(Q(X')/2)$ et f_1 vérifie les propriétés demandées. \square

Soit $(\tau, w) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ tel que $\tau^2 > w$. Par le lemme 2.2.1 et la remarque 2.2.1, il existe une unique H -orbite régulière $\mathcal{O} = H \cdot X(\tau, w)$ avec $X(\tau, w) = \tau H_3 + X' \in \mathfrak{q}^{reg} \cap (\mathbb{R}H_3 \oplus [\mathfrak{z}_3, \mathfrak{z}_3])_+$ tel que $Q(X(\tau, w)) = 2(\tau^2 + w)$ et $S(X(\tau, w)) = (\tau^2 - w)^2$. Ainsi, pour $f \in \mathcal{D}(H \cdot (\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+)$, on définit la fonction G_f sur $(\mathbb{R}^*)^2$ par

$$G_f(\tau, w) = \begin{cases} \mathcal{M}_H(f)(X(\tau, w)) & \text{si } \tau^2 > w \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Par le corollaire 4.4.2, la fonction G_f est paire par rapport à τ .

Remarque 4.4.4. *Pour $w > \tau^2 > 0$, on a immédiatement $H \cdot X(\tau, w) = H \cdot X(\sqrt{w}, \tau^2)$ et donc, dans ce cas, on obtient*

$$\mathcal{M}_H(f)(X(\tau, w)) = G_f(\sqrt{w}, \tau^2).$$

On introduit l'espace de fonctions suivant :

$$\mathcal{H}_\eta^{pair} = \{(\tau, w) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \mapsto a(\tau, w) + Y(-w)|w|^{1/2}b(\tau, w); \quad a, b \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \cap \{(\tau, w); \tau^2 > w\});$$

$$a, b \text{ paires par rapport à } \tau\}.$$

Théorème 4.4.1. 1. *Pour tout $f \in \mathcal{D}(H \cdot (\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+)$, on a $G_f \in \mathcal{H}_\eta^{pair}$*

2. *L'application*

$$\begin{cases} \mathcal{D}(H \cdot (\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+) & \rightarrow \mathcal{H}_\eta^{pair} \\ f & \mapsto G_f \end{cases}$$

est surjective.

Preuve : Soit $f \in \mathcal{D}(H \cdot (\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+)$. Montrons d'abord que G_f est dans \mathcal{H}_η^{pair} .

Grâce au corollaire 4.4.2, il existe $f_1 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^4)$ paire par rapport à la première variable et à support contenu dans $\{(\tau, u) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^3; 2\tau^2 - q_3(u) > 0\}$, telle que pour $X = \tau H_3 + X' \in (\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+^{reg}$ avec $\tau \in \mathbb{R}$ et $X' \in [\mathfrak{z}_3, \mathfrak{z}_3] \cap \mathfrak{q}$ vérifiant $Q(X')/2 = w$, on ait

$$G_f(\tau, w) = \mathcal{M}_H(f)(X) = M_{q_3}(f_1)_\tau(w).$$

Grâce au théorème 3.1.3 et compte-tenu du support de f_1 , on obtient alors $G_f \in \mathcal{H}_\eta^{pair}$.

Montrons maintenant la surjectivité de l'application.

Soit $G \in \mathcal{H}_\eta^{pair}$. Il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\tau^2 < \varepsilon \text{ ou } \tau^2 - w < \varepsilon \implies G(\tau, w) = 0.$$

Grâce au théorème 3.1.3, il existe $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3)$ tel que pour $\tau, w \in \mathbb{R}^*$, on ait

$$M_{q_3}(g_\tau)(w) = G(\tau, w),$$

soit

$$M_{q_3}\left(\frac{1}{2}g_\tau\right)(w) + M_{q_3}\left(\frac{1}{2}g_{-\tau}\right)(w) = G(\tau, w).$$

Grâce au corollaire 4.4.1, la fonction $g_0 \in \mathcal{D}(\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})$ définie par $g_0(\tau H_3 + X') = (g(\tau, \psi_3^{-1}(X')) + g(-\tau, \psi_3^{-1}(X')))$ vérifie

$$\mathcal{M}_{N_3}(g_0)(\tau H_3 + X') = G(\tau, Q(X')/2).$$

Soit χ une fonction de classe \mathcal{C}^∞ qui vaut zéro sur $] -\infty; \frac{\varepsilon}{2}]$ et 1 sur $[\varepsilon; +\infty[$. Pour $X = \tau H_3 + X' \in (\mathbb{R}H_3 + [\mathfrak{z}_3, \mathfrak{z}_3]) \cap \mathfrak{q}$, on pose

$$\phi_1(X) = \tau^2 \text{ et } \phi_2(X) = \tau^2 - Q(X')/2.$$

Soit θ la fonction définie pour $X = \tau H_3 + X' \in (\mathbb{R}H_3 + [\mathfrak{z}_3, \mathfrak{z}_3]) \cap \mathfrak{q}$ par

$$\theta(X) = \phi_1(X)\phi_2(X) = \chi(\tau^2)\chi(\tau^2 - Q(X')/2).$$

Cette fonction est N_3 -invariante et pour $\tau^2 \leq \frac{\varepsilon}{2}$ ou $\tau^2 - Q(X')/2 \leq \frac{\varepsilon}{2}$, on a $\theta(X) = 0$ et pour $\tau^2 \geq \varepsilon$ et $\tau^2 - Q(X')/2 \geq \varepsilon$, on a $\theta(X) = 1$. Ainsi θg_0 est à support dans $(\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+$ et vérifie pour $Q(X')/2 = w$ la relation

$$\mathcal{M}_{N_3}(\theta g_0)(X) = \chi(\tau^2)\chi(\tau^2 - w)G(\tau, w) = G(\tau, w).$$

Par surjectivité de l'application $(\tilde{p}_3)_*$, il existe $\phi \in \mathcal{D}(H \times (\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+)$ telle que $\theta g_0 = (\tilde{p}_3)_*(\phi)$ et par la proposition 4.4.1, on a $\mathcal{M}_H((\pi_3)_*(\phi))(X) = \mathcal{M}_{N_3}((\tilde{p}_3)_*(\phi))(X) = G(\tau, w)$, ce qui achève la preuve. \square

5 Opérateurs différentiels et solutions propres

La forme H -invariante et non dégénérée $\omega(X, X') = \frac{1}{2}tr(XX')$ induit un isomorphisme de $S(\mathfrak{q}_{\mathbb{C}})^{H_{\mathbb{C}}}$ dans $\mathbb{C}[\mathfrak{q}_{\mathbb{C}}]^{H_{\mathbb{C}}} = \mathbb{C}[Q, S]$.

Nous souhaitons étudier les distributions propres invariantes sur \mathfrak{q} , c'est-à-dire les distributions H -invariantes T sur \mathfrak{q} solution du système

$$(E_\chi) \begin{cases} \partial(Q)T = \chi(Q)T \\ \partial(S)T = \chi(S)T \end{cases},$$

où χ est un caractère de $\mathbb{C}[Q, S] = \mathbb{C}[\mathfrak{q}_{\mathbb{C}}]^{H_{\mathbb{C}}}$.

Comme $\mathbb{C}[\mathfrak{q}_{\mathbb{C}}]^{H_{\mathbb{C}}}$ est isomorphe à $\mathbb{C}[\mathfrak{a}_{+,+}]^{W_H(\mathfrak{a}_{+,+})}$, un tel caractère est déterminé par $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2$ avec

$$\begin{cases} \chi(Q) = \lambda_1 + \lambda_2 \\ \chi(S) = \lambda_1 \lambda_2 \end{cases}.$$

Un tel caractère est dit régulier si $\lambda_1 \lambda_2 (\lambda_1 - \lambda_2) \neq 0$

Dans toute la suite, on fixe un caractère régulier χ associé à (λ_1, λ_2) et on étudie uniquement les distributions invariantes, propres pour ce caractère.

La restriction d'une telle distribution T à \mathfrak{q}^{reg} est une fonction Φ analytique et H -invariante ([24] théorème 5.3 (i)).

Soit \mathfrak{a} un sous-espace de Cartan. Nous rappelons que la partie radiale sur \mathfrak{a} d'un opérateur différentiel D défini sur \mathfrak{q}^{reg} , que l'on notera $\Delta_{\mathfrak{a}}(D)$, est l'opérateur différentiel défini sur \mathfrak{a}^{reg} vérifiant pour toute fonction f de $\mathcal{C}^\infty(\mathfrak{q})^H$, la relation

$$\Delta_{\mathfrak{a}}(D)(f|_{\mathfrak{a}^{reg}}) = (Df)|_{\mathfrak{a}^{reg}}.$$

Ainsi, la fonction Φ satisfait sur \mathfrak{a}^{reg} le système

$$(E_\chi)(\mathfrak{a}^{reg}) \begin{cases} \Delta_{\mathfrak{a}}\partial(Q)\Phi = (\lambda_1 + \lambda_2)\Phi \\ \Delta_{\mathfrak{a}}\partial(S)\Phi = \lambda_1\lambda_2\Phi \end{cases}.$$

Dans cette partie, nous allons déterminer, pour tout sous-espace de Cartan \mathfrak{a} de \mathfrak{g} , les parties radiales de $\partial(Q)$ et $\partial(S)$. Nous déterminerons ensuite les solutions sur \mathfrak{a}^{reg} du système $(E_\chi)(\mathfrak{a}^{reg})$.

5.1 Parties radiales

Soit \mathfrak{a} un sous-espace de Cartan. Pour $\xi \in \mathfrak{a}$ et k une fonction $W_{H_{\mathbb{C}}}(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})$ -invariante de $\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{a}_{\mathbb{C}})$ dans \mathbb{C} , on note $T_\xi(k)$ l'opérateur de Dunkl défini par

$$T_\xi(k) = \partial_\xi + \sum_{\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{a}_{\mathbb{C}})^+} k_\alpha \alpha(\xi) \frac{1 - r_\alpha}{\alpha},$$

avec $r_\alpha = id_{\mathfrak{a}} - \frac{2\alpha}{\alpha(h_\alpha)} h_\alpha$.

Pour $\xi \in \mathfrak{a}$, l'opérateur $T_\xi(k)$ est bien définie sur $\mathbb{C}[\mathfrak{a}]$ et sur $\mathcal{C}^\infty(\mathfrak{a})$.

Nous rappelons tout d'abord quelques propriétés remarquables de ces opérateurs de Dunkl dont les preuves sont précisées dans [8] et [15].

Pour $\xi, \xi' \in \mathfrak{a}$, on a $[T_\xi(k), T_{\xi'}(k)] = 0$. Ainsi l'application $\xi \mapsto T_\xi(k)$ de \mathfrak{a} dans l'ensemble des opérateurs de $\mathcal{C}^\infty(\mathfrak{a}^{reg})$ s'étend en un homomorphisme injectif de $S(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})$ dans l'ensemble des opérateurs de $\mathcal{C}^\infty(\mathfrak{a}^{reg})$. On note $T_p(k)$ l'image de $p \in S(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})$ par cette application.

Lorsque $p \in S(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})^{W_{H_{\mathbb{C}}}(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})}$, l'opérateur $T_p(k)$ est un opérateur différentiel sur l'espace des fonctions $W_{H_{\mathbb{C}}}(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})$ -invariantes sur \mathfrak{a} . On note $D_p(k)$ la restriction de $T_p(k)$ à l'espace des fonctions $W_{H_{\mathbb{C}}}(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})$ -invariantes sur \mathfrak{a} .

Soit $Res_{\mathfrak{a}}$ l'homomorphisme de restriction de $\mathbb{C}[\mathfrak{q}_{\mathbb{C}}]^{H_{\mathbb{C}}}$ dans $\mathbb{C}[\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}]^{W_{H_{\mathbb{C}}}(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})}$ donné par :

$$Res_{\mathfrak{a}} \begin{cases} \mathbb{C}[\mathfrak{q}_{\mathbb{C}}]^{H_{\mathbb{C}}} & \rightarrow & \mathbb{C}[\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}]^{W_{H_{\mathbb{C}}}(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})} \\ P & \mapsto & P|_{\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}} \end{cases}.$$

Comme la restriction de ω $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}} \times \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$ est encore non dégénérée, elle induit un isomorphisme de $S(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})^{W_{H_{\mathbb{C}}}(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})}$ dans $\mathbb{C}[\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}]^{W_{H_{\mathbb{C}}}(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})}$ et on notera également $Res_{\mathfrak{a}}$ l'homomorphisme de restriction de $S(\mathfrak{q}_{\mathbb{C}})^{H_{\mathbb{C}}}$ dans $S(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})^{W_{H_{\mathbb{C}}}(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})}$ que l'on déduit.

On a alors

Théorème 5.1.1. ([26]paragraphe 1.1) Soit $P \in S(\mathfrak{q})^H$ et k la fonction définie sur $\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{a}_{\mathbb{C}})$ par $k_{\alpha} = \frac{m_{\alpha}}{2}$. Alors l'action de $\Delta_{\mathfrak{a}}\partial(P)$ coïncide avec celle de $D_{Res_{\mathfrak{a}}(P)}(k)$ sur l'espace des fonctions $W_{H_{\mathbb{C}}}(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})$ -invariantes sur \mathfrak{a} .

Dans toute la suite, nous considérons la fonction k définie par $k_{\alpha} = \frac{m_{\alpha}}{2}$, pour α parcourant $\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{a}_{\mathbb{C}})$. On pose

$$I(k) = \prod_{\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{a}_{\mathbb{C}})^+} \alpha^{2k_{\alpha}} = \prod_{\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{a}_{\mathbb{C}})^+} \alpha^{m_{\alpha}}.$$

Remarque 5.1.1. On a $|I(k - \frac{1}{2})| = |\delta|$ et $|I(k)| = \Pi$

Théorème 5.1.2. ([20] proposition 3.9(1)). Pour $p \in S(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})^{W_{H_{\mathbb{C}}}(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})}$, on a

$$D_p(1 - k) = I(k - \frac{1}{2}) \circ D_p(k) \circ I(\frac{1}{2} - k) = \delta \circ D_p(k) \circ \delta^{-1}.$$

Preuve : Le résultat d'Opdam donne la première égalité, la deuxième en découle car les fonctions $\frac{\delta}{|\delta|}$ et $\frac{I(k - \frac{1}{2})}{|I(k - \frac{1}{2})|}$ sont localement constantes sur \mathfrak{a}^{reg} . . \square

Pour $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{a}_{\mathbb{C}})$, on pose

$$L_{\alpha} := \frac{1}{4\alpha} \partial h_{\alpha} (\alpha \partial h_{\alpha}) = \frac{1}{4} \partial h_{\alpha}^2 + \frac{1}{\alpha} \partial h_{\alpha}.$$

Nous rappelons que l'on note α_1 et α_2 les deux racines positives de multiplicité un de \mathfrak{a} .

Proposition 5.1.1. On a

$$\Delta_{\mathfrak{a}}\partial(Q) = \delta^{-1} \circ (L_{\alpha_1} + L_{\alpha_2}) \circ \delta = I(1/2 - k) \circ (L_{\alpha_1} + L_{\alpha_2}) \circ I(k - 1/2)$$

$$\Delta_{\mathfrak{a}}\partial(S) = \delta^{-1} \circ (L_{\alpha_1} L_{\alpha_2}) \circ \delta = I(1/2 - k) \circ (L_{\alpha_1} L_{\alpha_2}) \circ I(k - 1/2).$$

Preuve : La première assertion est due à Dunkl ([8] et [15] théorème 1.6) et s'obtient par un simple calcul que nous reprenons ci-dessous pour obtenir la deuxième assertion.

Pour $P \in S(\mathfrak{q})^H$, on note $p = Res_{\mathfrak{a}}(P)$. Grâce aux théorèmes précédents, sur l'espace des fonctions $W_{H_{\mathbb{C}}}(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})$ -invariantes sur $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$, on a les égalités suivantes :

$$\Delta_{\mathfrak{a}}\partial(P) = \delta^{-1} \circ D_p(1 - k) \circ \delta = I(\frac{1}{2} - k) \circ D_p(1 - k) \circ I(k - \frac{1}{2}).$$

Par ailleurs, on a

$$T_{\xi}(1 - k) = \partial_{\xi} + \frac{1}{2} \alpha_1(\xi) \frac{1 - r_{\alpha_1}}{\alpha_1} + \frac{1}{2} \alpha_2(\xi) \frac{1 - r_{\alpha_2}}{\alpha_2}.$$

Or, on a

$$Res_{\mathfrak{a}}(Q) = \frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}{4} \text{ et } Res_{\mathfrak{a}}(S) = \frac{\alpha_1^2 \alpha_2^2}{16}.$$

Comme $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$ et $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ sont en dualité par rapport à la forme ω et $\omega(h_{\alpha_i}, \cdot) = \alpha_i$ pour $i \in \{1, 2\}$, alors on a

$$Res_{\mathfrak{a}}(Q) = \frac{h_{\alpha_1}^2 + h_{\alpha_2}^2}{4} \text{ et } Res_{\mathfrak{a}}(S) = \frac{h_{\alpha_1}^2 h_{\alpha_2}^2}{16}.$$

Comme α_1 et α_2 sont deux racines orthogonales et $\alpha_i(h_{\alpha_i}) = Q(h_{\alpha_i}) = 4$, pour $i \in \{1, 2\}$, on obtient

$$T_{h_{\alpha_i}}(1 - k) = \partial h_{\alpha_i} + 2 \frac{1 - r_{\alpha_i}}{\alpha_i},$$

Ainsi

$$T_{h_{\alpha_i}^2}(1 - k) = \partial h_{\alpha_i}^2 + 2\partial h_{\alpha_i} \circ \frac{1 - r_{\alpha_i}}{\alpha_i} + 2 \frac{1 - r_{\alpha_i}}{\alpha_i} \circ \partial h_{\alpha_i} + 4 \left(\frac{1 - r_{\alpha_i}}{\alpha_i} \right)^2.$$

On a, d'une part

$$\left(\frac{1 - r_{\alpha_i}}{\alpha_i} \right)^2 = 0,$$

et d'autre part,

$$r_{\alpha_i} \circ \partial h_{\alpha_i} = \partial(r_{\alpha_i}(h_{\alpha_i})) \circ r_{\alpha_i} = -\partial h_{\alpha_i} \circ r_{\alpha_i}.$$

Donc, on obtient

$$T_{h_{\alpha_i}^2}(1 - k) = \partial h_{\alpha_i}^2 + \frac{2}{\alpha_i} \partial h_{\alpha_i} + \frac{2}{\alpha_i} \partial h_{\alpha_i} \circ r_{\alpha_i} + 2\partial h_{\alpha_i} \circ \frac{1 - r_{\alpha_i}}{\alpha_i}.$$

Par suite, on a les égalités suivantes :

$$D_{h_{\alpha_1}^2 + h_{\alpha_2}^2}(1 - k) = \partial h_{\alpha_1}^2 + \frac{4}{\alpha_1} \partial h_{\alpha_1} + \partial h_{\alpha_2}^2 + \frac{4}{\alpha_2} \partial h_{\alpha_2} = 4(L_{\alpha_1} + L_{\alpha_2}).$$

et

$$\begin{aligned} D_{h_{\alpha_1}^2 h_{\alpha_2}^2}(1 - k) &= T_{h_{\alpha_1}^2}(1 - k) T_{h_{\alpha_2}^2}(1 - k) \Big|_{\mathbb{C}[\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}]^{W_{H_{\mathbb{C}}}(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})}} \\ &= 4T_{h_{\alpha_1}^2}(1 - k) L_{\alpha_2} \Big|_{\mathbb{C}[\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}]^{W_{H_{\mathbb{C}}}(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})}} = 16L_{\alpha_1} L_{\alpha_2} = 16L_{\alpha_2} L_{\alpha_1}, \end{aligned}$$

puisque les racines α_1 et α_2 sont orthogonales. D'où le résultat. \square

5.2 Solutions du système $E_{\chi}(\mathfrak{a}^{reg})$

Soit Φ une fonction H -invariante et analytique sur \mathfrak{q}^{reg} solution du système (E_{χ}) sur \mathfrak{q}^{reg} . Par H -invariance, la fonction Φ est uniquement déterminée par ses restrictions à \mathfrak{a}^{reg} pour $\mathfrak{a} \in \langle \text{car}(\mathfrak{q}) \rangle$ et par le théorème 5.1.1 et la proposition 5.1.1, pour tout $\mathfrak{a} \in \langle \text{car}(\mathfrak{q}) \rangle$, la fonction H -invariante $(|\delta|\Phi)|_{\mathfrak{a}^{reg}}$ est solution du système suivant :

$$(S_{\mathfrak{a}^{reg}, \chi}) \begin{cases} (L_{\alpha_1} + L_{\alpha_2}) \tilde{\Psi} = (\lambda_1 + \lambda_2) \tilde{\Psi} \\ L_{\alpha_1} L_{\alpha_2} \tilde{\Psi} = \lambda_1 \lambda_2 \tilde{\Psi} \end{cases} \quad \text{sur } \mathfrak{a}^{reg}.$$

Pour $j = 1, 2$, précisons les opérateurs L_{α_j} sur $\mathfrak{a} \in \langle \text{car}(\mathfrak{q}) \rangle$:

- Sur $\mathfrak{a}_{+,+}$, pour $j \in \{1, 2\}$, on a $\alpha_j = 2u_j$, donc $\partial h_{\alpha_j} = 2 \frac{\partial}{\partial u_j}$ et $L_{\alpha_j} = \frac{\partial^2}{\partial u_j^2} + \frac{1}{u_j} \frac{\partial}{\partial u_j}$.
- Sur $\mathfrak{a}_{+,-}$, on a $\alpha_1 = 2u_1$, donc $\partial h_{\alpha_1} = 2 \frac{\partial}{\partial u_1}$ et $L_{\alpha_1} = \frac{\partial^2}{\partial u_1^2} + \frac{1}{u_1} \frac{\partial}{\partial u_1}$
et $\alpha_2 = 2\nu u_2$, donc $\partial h_{\alpha_2} = -2\nu \frac{\partial}{\partial u_2}$ et $L_{\alpha_2} = -\left(\frac{\partial^2}{\partial u_2^2} + \frac{1}{u_2} \frac{\partial}{\partial u_2} \right)$.
- Sur $\mathfrak{a}_{-,-}$, pour $j \in \{1, 2\}$, on a $\alpha_j = 2\nu u_j$, donc $\partial h_{\alpha_j} = -2\nu \frac{\partial}{\partial u_j}$ et $L_{\alpha_j} = -\left(\frac{\partial^2}{\partial u_j^2} + \frac{1}{u_j} \frac{\partial}{\partial u_j} \right)$.

- Sur \mathfrak{a}_2 , pour $\alpha = 2(\tau \pm i\theta)$, on a $\partial h_\alpha = \frac{\partial}{\partial \tau} \mp i \frac{\partial}{\partial \theta}$ et

$$L_\alpha = \frac{1}{4} \left(\frac{\partial}{\partial \tau} \mp i \frac{\partial}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{1}{2(\tau \pm i\theta)} \left(\frac{\partial}{\partial \tau} \mp i \frac{\partial}{\partial \theta} \right).$$

On introduit l'opérateur différentiel de Bessel d'une variable complexe

$$L_c = 4 \left(z \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

et son analogue réel

$$L = 4 \left(t \frac{d^2}{dt^2} + \frac{d}{dt} \right).$$

L'opérateur L correspond à la partie radiale de l'opérateur de Laplace pour la paire symétrique $(\mathfrak{so}(2, 1), \mathfrak{so}(1, 1))$ et s'obtient à partir de $\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial u} \right)$ par le changement de variable $t = u^2$.

L'équation $L_c y = \lambda y$ est de type Fuchs en 0 et ses solutions s'expriment à l'aide des fonctions de Bessel. Plus précisément, on rappelle le résultat suivant :

Proposition 5.2.1. ([19] paragraphe 16.32 et [9] appendice A (4)) Pour $\lambda \in \mathbb{C}$, on pose

$$\Phi_\lambda(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{(\lambda z)^n}{4^n (n!)^2},$$

$$w_\lambda(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{a(n)(\lambda z)^n}{4^n (n!)^2},$$

où $a(x) = -2 \frac{\Gamma'(x+1)}{\Gamma(x+1)}$.

1. Un système fondamental de solutions de $L_c y = \lambda y$ sur $\mathbb{C} - \mathbb{R}_-$ est donnée par la fonction analytique complexe Φ_λ et la fonction $W_\lambda(z) = w_\lambda(z) + \log(z)\Phi_\lambda(z)$ où \log désigne la détermination principale du logarithme sur $\mathbb{C} - \mathbb{R}_-$.
2. Un système fondamental de solutions de $L y = \lambda y$ est donnée par la fonction analytique réelle $\Phi_\lambda(t)$ et la fonction $W_\lambda^r(t) = w_\lambda(t) + \log|t|\Phi_\lambda(t)$

Pour $\lambda \in \mathbb{C}^*$, on pose

$$\text{Sol}(L, \lambda) = \{y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^*, \mathbb{C}); Ly = \lambda y\}$$

et

$$\text{Sol}(L_c, \lambda) = \{y : \mathbb{C} - \mathbb{R}_- \rightarrow \mathbb{C}, \text{analytique}; L_c y = \lambda y\}.$$

Nous allons exprimer les solutions du système $(S_{\mathfrak{a}^{reg}, \chi})$ pour $\mathfrak{a} \in \langle \text{car}(\mathfrak{q}) \rangle$ en terme des fonctions Φ_λ et W_λ données dans la proposition précédente.

Considérons tout d'abord le cas $\mathfrak{a} \in \{\mathfrak{a}_{+,+}, \mathfrak{a}_{+,-}, \mathfrak{a}_{-,-}\}$. Par H -invariance des fonctions considérées, il est naturel d'introduire les opérateurs différentiels

$$L_i := 4 \left(t_i \frac{\partial^2}{\partial t_i^2} + \frac{\partial}{\partial t_i} \right),$$

pour $i \in \{1, 2\}$. La description précédente des opérateurs L_{α_i} permet d'obtenir le lemme suivant :

Lemme 5.2.1. Soit $\mathfrak{a} \in \{\mathfrak{a}_{+,+}, \mathfrak{a}_{+,-}, \mathfrak{a}_{-,-}\}$. Si $\tilde{\Psi}$ est une solution analytique $W_H(\mathfrak{a})$ -invariante de $(S_{\mathfrak{a}^{reg}, \chi})$ alors il existe une fonction Ψ analytique sur $\{(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2 / (t_1 - t_2)t_1t_2 \neq 0\}$, telle que :

1. $\Psi(t_1, t_2) = \Psi(t_2, t_1)$,
2.
$$\begin{cases} (L_1 + L_2)\Psi(t_1, t_2) = (\lambda_1 + \lambda_2)\Psi(t_1, t_2) \\ L_1L_2\Psi(t_1, t_2) = \lambda_1\lambda_2\Psi(t_1, t_2) \end{cases},$$
3. Pour tout $X \in \mathfrak{a}^{reg}$, alors $\tilde{\Psi}(X) = \Psi(u(X), v(X))$

Proposition 5.2.2. Les solutions Ψ de classe \mathcal{C}^2 sur $\{(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2 / (t_1 - t_2)t_1t_2 \neq 0\}$ du système

$$\begin{cases} [(L_1 + L_2)\Psi](t_1, t_2) = (\lambda_1 + \lambda_2)\Psi(t_1, t_2) \\ L_1L_2\Psi(t_1, t_2) = \lambda_1\lambda_2\Psi(t_1, t_2) \end{cases}.$$

sont sur chaque composante connexe de $\{(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2 / (t_1 - t_2)t_1t_2 \neq 0\}$ des combinaisons linéaires des fonctions

$$(t_1, t_2) \mapsto A(t_1)B(t_2) \quad \text{et} \quad (t_1, t_2) \mapsto A(t_2)B(t_1),$$

où A et B parcourent respectivement $\mathcal{S}ol(L, \lambda_1)$ et $\mathcal{S}ol(L, \lambda_2)$.

Preuve : Soit Ψ une solution du système considéré. Pour $i \in \{1, 2\}$, on a donc

$$(L_i^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)L_i + \lambda_1\lambda_2id)\Psi = 0.$$

Par conséquent, la fonction Ψ appartient à

$$\ker(L_i^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)L_i + \lambda_1\lambda_2id) = \ker(L_i - \lambda_1id) \oplus \ker(L_i - \lambda_2id),$$

pour $i \in \{1, 2\}$. En utilisant le système fondamental de solution pour L_1 décrit dans la proposition 5.2.1 (2.), il existe donc une famille $(g_j)_{j \in \{1, \dots, 4\}}$ de fonctions définies sur \mathbb{R} telles que

$$\Psi(t_1, t_2) = g_1(t_2)\Phi_{\lambda_1}(t_1) + g_2(t_2)W_{\lambda_1}^r(t_1) + g_3(t_2)\Phi_{\lambda_2}(t_1) + g_4(t_2)W_{\lambda_2}^r(t_1).$$

En inversant la matrice correspondant au wronskien de $t_1 \mapsto \Phi_{\lambda_i}(t_1)$ et $t_1 \mapsto W_{\lambda_i}^r(t_1)$, pour $i \in \{1, 2\}$, on en déduit que les fonctions g_1, g_2, g_3 et g_4 sont de classe \mathcal{C}^2 sur $\{(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2 / (t_1 - t_2)t_1t_2 \neq 0\}$.

En revenant au système de départ et tenant compte la liberté des fonctions $t_1 \mapsto \Phi_{\lambda_i}(t_1)$ et $t_1 \mapsto W_{\lambda_i}^r(t_1)$, pour $i \in \{1, 2\}$, on en déduit que g_1 et g_2 sont dans $\mathcal{S}ol(L, \lambda_2)$ et que g_3 et g_4 sont dans $\mathcal{S}ol(L, \lambda_1)$. \square

Etudions maintenant le cas particulier de \mathfrak{a}_2 .

Un élément de \mathfrak{a}_2 s'écrit $X_{\tau, \theta} = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & & \tau & -\theta \\ & & \theta & \tau \\ \hline \tau & -\theta & & \\ \theta & \tau & & 0 \end{array} \right)$ avec $(\tau, \theta) \in \mathbb{R}^2$.

On note \mathfrak{a}_2^+ la chambre de Weyl de \mathfrak{a}_2^{reg} formée des $X_{\tau, \theta}$ tels que $\tau > 0$ et $\theta > 0$. Ainsi une fonction $W_H(\mathfrak{a}_2)$ -invariante solution de $S_{\mathfrak{a}_2^{reg}, \chi}$ est uniquement déterminée par sa restriction à \mathfrak{a}_2^+ et vérifie le même système sur \mathfrak{a}_2^+ que l'on notera $S_{\mathfrak{a}_2^+, \chi}$.

Pour $i = 1, 2$, on note

$$L_{c,i} := 4 \left(z_i \frac{\partial^2}{\partial z_i^2} + \frac{\partial}{\partial z_i} \right).$$

Proposition 5.2.3. *Si $\tilde{\Psi}$ est une solution analytique de $(S_{\mathfrak{a}_2^+, X})$ alors il existe un ouvert connexe U de \mathbb{C}^2 contenant $\{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2; z_1 = \bar{z}_2 \text{ et } \text{Im}(z_1) > 0\}$ et une fonction $\Psi_c : U \rightarrow \mathbb{C}$ analytique sur U telle que :*

1.
$$\begin{cases} [(L_{c,1} + L_{c,2})\Psi_c](z_1, z_2) = (\lambda_1 + \lambda_2)\Psi_c(z_1, z_2) \\ L_{c,1}L_{c,2}\Psi_c(z_1, z_2) = \lambda_1\lambda_2\Psi_c(z_1, z_2) \end{cases} \quad \text{sur } U,$$
2. Pour $\tau > 0$ et $\theta > 0$ alors on a $\tilde{\Psi}(X_{\tau,\theta}) = \Psi_c((\tau + i\theta)^2, (\tau - i\theta)^2)$.

Preuve :

On note $D_+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y > 0\}$. Par le lemme 2.2.1, pour tout $(x, y) \in D_+$, il existe une unique H -orbite \mathcal{O} de \mathfrak{q}^{reg} telle que $\mathcal{O} \cap \mathfrak{a}_2 \neq \emptyset$ et pour tout $X \in \mathcal{O}$ alors $\{u(X), v(X)\} = \{x + iy, x - iy\}$. Ainsi l'application

$$\gamma : \begin{array}{l} \mathfrak{a}_2^+ \rightarrow D_+ \\ X_{\tau,\theta} \mapsto (\tau^2 - \theta^2, 2\theta\tau) \end{array}$$

est un difféomorphisme analytique d'inverse analytique donné par

$$\gamma^{-1} : \begin{array}{l} D_+ \rightarrow \mathfrak{a}_2^+ \\ (x, y) \mapsto X_{\tau,\theta} \text{ avec } \tau = \text{Re}(\sqrt{x + iy}) \text{ et } \theta = \text{Im}(\sqrt{x + iy}) \end{array}$$

où la fonction racine $\sqrt{z} = e^{\frac{1}{2}\log(z)}$ est définie sur $\mathbb{C} - \mathbb{R}_-$.

On définit la fonction Ψ_0 sur D_+ par

$$\Psi_0(x, y) = \tilde{\Psi} \circ \gamma^{-1}(x, y)$$

Ainsi la fonction Ψ_0 est analytique réelle sur D_+ . En notant $L_0 = (x + iy) \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right)$, elle satisfait le système suivant sur D_+ :

$$(S_0(D_+)) \begin{cases} (L_0 + \bar{L}_0)[\Psi_0(x, y)] = (\lambda_1 + \lambda_2)\Psi_0(x, y) \\ L_0\bar{L}_0[\Psi_0(x, y)] = \lambda_1\lambda_2\Psi_0(x, y) \end{cases}.$$

La fonction Ψ_0 est développable en série entière au voisinage de tout point de D_+ . Ainsi, pour tout $(x_0, y_0) \in D_+$, il existe une famille $(a_{m,n})_{(m,n) \in \mathbb{N}^2}$ de nombres complexes et $R > 0$ tels que :

a) la famille $(a_{m,n}r^{m+n})_{(m,n) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable pour tout $r < R$

b) pour $|x - x_0| < R$ et $|y - y_0| < R$ alors $\Psi_0(x, y) = \sum_{m,n \geq 0} a_{m,n}(x - x_0)^m(y - y_0)^n$, cette expression étant indépendante de l'ordre de sommation des termes ([18] théorème 2.2.6).

Par suite, il existe une famille $(b_{m,n})_{(m,n) \in \mathbb{N}^2}$ de nombres complexes telle que, pour tout $r < R$, la famille $(b_{m,n}r^{m+n})_{(m,n) \in \mathbb{N}^2}$ soit sommable et, en posant $z = x + iy$ et $z_0 = x_0 + iy_0$, pour $|z - z_0| < R$, on a

$$\Psi_0(x, y) = \sum_{m,n \geq 0} b_{m,n}(z - z_0)^m(\overline{z - z_0})^n.$$

Ceci permet de définir la fonction Ψ_c sur le disque de centre (z_0, \bar{z}_0) et de rayon R dans \mathbb{C}^2 en posant

$$\Psi_c(z_1, z_2) = \sum_{m,n \geq 0} b_{m,n} (z_1 - z_0)^m (z_2 - \bar{z}_0)^n.$$

Cette construction est licite au voisinage de tout point (z_0, \bar{z}_0) tels que $(\operatorname{Re}(z_0), \operatorname{Im}(z_0)) \in D_+$. Ainsi, par prolongement analytique ([18] théorème 2.2.6 et remarque qui suit le théorème 2.2.7), il existe un ouvert connexe U de \mathbb{C}^2 contenant $\{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2; z_1 = \bar{z}_2 \text{ et } \operatorname{Im}(z_1) > 0\}$ et une fonction $\Psi_c : U \rightarrow \mathbb{C}$ analytique sur U telle que pour tout $z = x + iy$ avec $y > 0$, l'on ait

$$\Psi_c(z, \bar{z}) = \Psi_0(x, y) = \tilde{\Psi} \circ \gamma^{-1}(x, y),$$

ce qui s'écrit encore

$$\tilde{\Psi}(X_{\tau, \theta}) = \Psi_c((\tau + i\theta)^2, (\tau - i\theta)^2),$$

pour $\tau > 0$ et $\theta > 0$.

Maintenant, la fonction Ψ_0 satisfait le système $(S_0(D_+))$. Ainsi par construction de Ψ_c , pour $(x, y) \in D_+$, on a

$$[(L_{c,1} + L_{c,2})\Psi_c](x + iy, x - iy) = (L_0 + \bar{L}_0)\Psi_0(x, y) = (\lambda_1 + \lambda_2)\Psi_0(x, y) = (\lambda_1 + \lambda_2)\Psi_c(x + iy, x - iy)$$

et

$$[(L_{c,1}L_{c,2})\Psi_c](x + iy, x - iy) = (L_0\bar{L}_0)\Psi_0(x, y) = (\lambda_1\lambda_2)\Psi_0(x, y) = (\lambda_1\lambda_2)\Psi_c(x + iy, x - iy).$$

Maintenant, si R est une fonction analytique sur U alors, pour $m, n \in \mathbb{N}$ et $(z, \bar{z}) \in U$, on a

$$\left(\frac{\partial^m}{\partial z_1^m} \frac{\partial^n}{\partial z_2^n} R \right) (z, \bar{z}) = \frac{\partial^m}{\partial z^m} \frac{\partial^n}{\partial \bar{z}^n} (z \rightarrow R(z, \bar{z}))$$

Ainsi, par le théorème 2.2.6 de [18], si $R(z, \bar{z}) = 0$ pour tout $(z, \bar{z}) \in U$, alors $R = 0$ sur U . On obtient donc que Ψ_c est solution du système

$$\begin{cases} [(L_{c,1} + L_{c,2})\Psi_c](z_1, z_2) = (\lambda_1 + \lambda_2)\Psi_c(z_1, z_2) \\ L_{c,1}L_{c,2}\Psi_c(z_1, z_2) = \lambda_1\lambda_2\Psi_c(z_1, z_2) \end{cases}$$

sur U . Ceci achève la preuve du lemme. \square .

Proposition 5.2.4. *Les solutions Ψ_c analytiques sur U du système*

$$\begin{cases} (L_{c,1} + L_{c,2})\Psi_c(z_1, z_2) = (\lambda_1 + \lambda_2)\Psi_c(z_1, z_2) \\ (L_{c,1}L_{c,2})\Psi_c(z_1, z_2) = (\lambda_1\lambda_2)\Psi_c(z_1, z_2) \end{cases}$$

sont des combinaisons linéaires des fonctions

$$(z_1, z_2) \mapsto A(z_1)B(z_2) \quad \text{et} \quad (z_1, z_2) \mapsto A(z_2)B(z_1),$$

où A et B parcourent respectivement $\mathcal{S}ol(L_c, \lambda_1)$ et $\mathcal{S}ol(L_c, \lambda_2)$.

La preuve de cette proposition est identique à celle de la proposition 5.2.2.

5.2.1 Actions sur les intégrales orbitales

Nous concluons cette partie en donnant l'action des opérateurs différentiels sur les intégrales orbitales.

Lemme 5.2.2. *Soit $f \in \mathcal{D}(\mathfrak{q})$ et $\mathfrak{a} \in \text{car}(\mathfrak{q})$. On note toujours α_1 et α_2 les racines positives de multiplicité 1 de \mathfrak{a} . On a alors :*

$$(\mathcal{M}_H(\partial(Q)f)|_{\mathfrak{a}^{reg}}) = (L_{\alpha_1} + L_{\alpha_2})(\mathcal{M}_H(f)|_{\mathfrak{a}^{reg}})$$

et

$$(\mathcal{M}_H(\partial(S)f)|_{\mathfrak{a}^{reg}}) = (L_{\alpha_1}L_{\alpha_2})(\mathcal{M}_H(f)|_{\mathfrak{a}^{reg}}).$$

Preuve : Ceci découle immédiatement de la normalisation de $\mathcal{M}_H(f)$ et de la proposition 5.1.1 \square .

On reprend les notations de la définition 4.1.2, c'est-à-dire si $X \in \mathfrak{m} \cap \mathfrak{q}^{reg}$ alors $\mathcal{M}_H(f)(X) = \mathcal{M}f_{\mathfrak{m}}(u(X), v(X))$ et si $X = X_{\tau, \theta} \in \mathfrak{a}_2$ alors $\mathcal{M}_H(f)(X_{\tau, \theta}) = \mathcal{M}f_2(\tau, \theta)$. On note $\alpha = 2(\tau + i\theta)$ et $\bar{\alpha}$ les racines positives de multiplicité 1 de \mathfrak{a}_2 . On obtient alors :

Corollaire 5.2.1. *Soit $f \in \mathcal{D}(\mathfrak{q})$ alors on a*

$$\mathcal{M}(\partial(Q)f)_{\mathfrak{m}} = (L_1 + L_2)\mathcal{M}f_{\mathfrak{m}} \text{ et } \mathcal{M}(\partial(S)f)_{\mathfrak{m}} = L_1L_2\mathcal{M}f_{\mathfrak{m}}$$

et

$$\mathcal{M}(\partial(Q)f)_2 = (L_{\alpha} + L_{\bar{\alpha}})\mathcal{M}f_2 \text{ et } \mathcal{M}(\partial(S)f)_2 = L_{\alpha}L_{\bar{\alpha}}\mathcal{M}f_2.$$

6 Distributions propres invariantes de $L_{loc}^1(\mathcal{U})^H$ et perspectives sur $L_{loc}^1(\mathfrak{q})^H$

On note \mathcal{N} l'ensemble des éléments nilpotents de \mathfrak{q} et on pose $\mathcal{U} = \mathfrak{q} - \mathcal{N}$.

Le but de cette partie est de décrire l'ensemble des distributions invariantes sur \mathcal{U} , propres pour un caractère régulier χ de $\mathbb{C}[\mathfrak{q}]^H$ fixé, données par une fonction Φ localement intégrable H -invariante sur \mathcal{U} .

On rappelle que pour T une distribution H -invariante propre sur \mathcal{U} solution du système

$$(E_{\chi}) \begin{cases} \partial(Q)T = \chi(Q)T \\ \partial(S)T = \chi(S)T \end{cases} .$$

alors la restriction de T à l'ensemble $\mathcal{U}^{reg} = \mathfrak{q}^{reg}$ est une fonction analytique sur \mathfrak{q}_{reg} (théorème 5.3(i) de [24]).

Nous allons décrire les conditions nécessaires et suffisantes sur $\Phi \in L_{loc}^1(\mathcal{U})^H$ satisfaisant le système (E_{χ}) sur \mathfrak{q}^{reg} pour que la distribution T_{Φ} définie sur $\mathcal{D}(\mathcal{U})$ par

$$\langle T_{\Phi}, f \rangle = \int_{\mathfrak{q}} \Phi(X)f(X)dX$$

soit propre invariante sur \mathcal{U} .

Par hypothèse sur Φ , pour $P \in \mathbb{C}[\mathfrak{q}]^H$ et $f \in \mathcal{D}(\mathcal{U})$, on a $\langle T_{\partial(P)\Phi}, f \rangle = \chi(P)\langle T_\Phi, f \rangle$ ainsi T_Φ est propre sur \mathcal{U} pour le caractère χ si et seulement si pour tout $P \in \mathbb{C}[\mathfrak{q}]^H$ et $f \in \mathcal{D}(\mathcal{U})$, on a

$$\int_{\mathfrak{q}} [(\partial(P)\Phi)f - \Phi(\partial(P)f)](X)dX = 0$$

La formule d'intégration de Weyl permet un travail sur chaque sous-espace de Cartan de $\langle \text{car}(\mathfrak{q}) \rangle$. Compte-tenu du comportement des intégrales orbitales au voisinage des points semi-réguliers obtenu dans la partie 4 et de la description de $(|\delta|\Phi)|_{a_{reg}}$ (voir le lemme 5.2.1 et les propositions 5.2.2, 5.2.3 et 5.2.4), une intégration par parties sur chaque sous-espace de Cartan conduira aux conditions voulues sur Φ . Ces conditions sont analogues aux conditions de recollement obtenues dans le cas des algèbres réductives par Harish-Chandra et T. Hirai ([12] et [16]) et de celles de J. Faraut obtenues pour un hyperboloïde à une nappe [11]).

Elles traduisent le comportement de Φ au voisinage des points semi-réguliers. Grâce à l'application ϖ définie dans le paragraphe 2.1.4 qui renverse l'ordre d'Hirai et la H -invariance des fonctions considérées, on ramène l'étude de Φ au voisinage des points de $\mathfrak{a}_{+,+} \cap \mathfrak{a}_{+,-}$ et $\mathfrak{a}_{+,+} \cap \mathfrak{a}_2$. Tout comme pour l'étude des intégrales orbitales, ces deux cas nécessitent une méthode spécifique.

6.1 Voisinages invariants des éléments semi-réguliers

On rappelle que ϖ désigne l'isomorphisme H -équivariant de \mathfrak{q} donné par $\varpi \left(\begin{array}{c|c} 0 & Y \\ \hline Z & 0 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & Y \\ \hline -Z & 0 \end{array} \right)$. Cet isomorphisme renverse l'ordre d'Hirai sur $\text{car}(\mathfrak{q})$. Par l'étude du paragraphe 2.3, tout élément semi-régulier appartient à $H \cdot \mathfrak{m} \cap \mathfrak{q}$, ou à $H \cdot (\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+$ ou à $H \cdot \varpi((\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+)$. Par l'étude du paragraphe 4, ces ensembles sont ouverts puisqu'image d'un ouvert par une application submersive.

On rappelle que les polynômes Q , S et S_0 sont donnés par $Q(X) = \frac{1}{2}\text{tr}(X^2)$, $S(X) = \det(X)$ et $S_0 = Q^2 - 4S$.

Lemme 6.1.1. *Nous avons :*

1.

$$H \cdot \mathfrak{m} \cap \mathfrak{q} = \{X \in \mathfrak{q}, S_0(X) > 0\}$$

2.

$$H \cdot (\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+ = H \cdot \mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q} = \{X \in \mathfrak{q}, S(X) > 0, Q(X) > -2\sqrt{|S(X)|}\}$$

3.

$$H \cdot \varpi((\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+) = \{X \in \mathfrak{q}, S(X) > 0, Q(X) < 2\sqrt{|S(X)|}\}.$$

4.

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &= H \cdot \mathfrak{m} \cap \mathfrak{q} \cup H \cdot (\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+ \cup H \cdot \varpi((\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+) \\ &= \{X \in \mathfrak{q}, Q(X) \neq 0 \text{ ou } S_0(X) \neq 0\}. \end{aligned}$$

Preuve : Soit $X \in \mathfrak{q}$ et soit $X = X_s + X_n$ sa décomposition de Jordan. En particulier $[X_s, X_n] = 0$ et donc $X^2 = X_s^2 + X_n(X_n + 2X_s)$ où $X_n(X_n + 2X_s)$ est nilpotent et commute à X_s^2 . On obtient donc $Q(X) = Q(X_s)$. Il est immédiat que $S(X) = S(X_s)$ et par suite $S_0(X) = S_0(X_s)$.

Par ailleurs, par la remarque 2.2.1, on a $S_0(\mathfrak{m} \cap \mathfrak{q}) \subset \mathbb{R}_+$ et $S_0(\mathfrak{a}_2) \subset \mathbb{R}_-$, le polynôme S prend des valeurs positives sur $\mathfrak{a}_{+,+}$, $\mathfrak{a}_{-,-}$ et \mathfrak{a}_2 et des valeurs négatives sur $\mathfrak{a}_{+,-}$, le polynôme Q prend des valeurs positives sur $\mathfrak{a}_{+,+}$ et négatives sur $\mathfrak{a}_{-,-}$.

1. L'inclusion $H \cdot \mathfrak{m} \cap \mathfrak{q} \subset \{X \in \mathfrak{q}, S_0(X) > 0\}$ est immédiate.

Maintenant soit X dans \mathfrak{q} tel que l'on ait $S_0(X) > 0$. Soit $X = X_s + X_n$ sa décomposition de Jordan. Puisque $S_0(X_s) = S_0(X) > 0$, il existe $h \in H$ et $\mathfrak{a} \in \text{car}(\mathfrak{m} \cap \mathfrak{q}) >$ tel que $h \cdot X_s \in \mathfrak{a}$. Si $X_n = 0$ alors on obtient $X \in H \cdot \mathfrak{m} \cap \mathfrak{q}$. Si $X_n \neq 0$ alors X_s est semi-régulier et donc $h \cdot X_s \in \mathbb{R}H_1$ ou $\mathbb{R}\varpi(H_1)$. Comme $h \cdot X_n$ commute à $h \cdot X_s$, on obtient $h \cdot X_n \in \mathfrak{m} \cap \mathfrak{q}$ par définition de $\mathfrak{m} \cap \mathfrak{q}$. Comme $\mathfrak{m} \cap \mathfrak{q} = \{X \in \mathfrak{m} \cap \mathfrak{q}; S_0(X) \neq 0\}$, on obtient donc $X \in H \cdot \mathfrak{m} \cap \mathfrak{q}$.

2. Par le lemme 4.4.1, on a $H \cdot \mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q} = H \cdot (\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+$ et $(\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+ = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} 0 & Y \\ \hline Y & 0 \end{array} \right); (tr(Y))^2 det(Y) > 0 \right\}$.

Montrons d'abord que

$$H \cdot (\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+ \subset \{X \in \mathfrak{q}, S(X) > 0, Q(X) > -2\sqrt{|S(X)|}\}.$$

Comme ces deux ensembles sont H -invariants, il suffit de montrer que $(\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+$ est inclus dans $\{X \in \mathfrak{q}, S(X) > 0, Q(X) > -2\sqrt{|S(X)|}\}$.

Si $X = \left(\begin{array}{c|c} 0 & Y \\ \hline Y & 0 \end{array} \right) \in (\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+$ alors $S(X) = det(Y)^2 > 0$. On note λ_1 et λ_2 les valeurs propres de Y . Elles sont soit réelles soit complexes conjuguées et par hypothèse, on a $(\lambda_1 + \lambda_2)^2 \lambda_1 \lambda_2 > 0$. Ainsi, on obtient la relation $Q(X) = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 > -2|\lambda_1 \lambda_2| = -2\sqrt{S(X)}$.

Montrons l'inclusion inverse. Soit X dans \mathfrak{q} tel que $S(X) > 0$ et $Q(X) > -2\sqrt{|S(X)|}$. Soit $X = X_s + X_n$ sa décomposition de Jordan. On a donc $S(X_s) > 0$ et $Q(X_s) > -2\sqrt{|S(X_s)|}$. Ainsi, il existe $h \in H$ et $\mathfrak{a} \in \{\mathfrak{a}_{+,+}, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_{-,-}\}$ tels que $h \cdot X_s \in \mathfrak{a}$. Si $Q(X_s) \geq 0$ alors $\mathfrak{a} \in \{\mathfrak{a}_{+,+}, \mathfrak{a}_2\}$. Si $Q(X_s) < 0$ alors $S_0(X_s) < 0$ et donc $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_2$. Ainsi, on a toujours $h \cdot X_s \in \mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q}$.

Si $X_n = 0$ on obtient alors $h \cdot X \in \mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q}$. Si $X_n \neq 0$ alors X_s est semi-régulier et donc $h \cdot X_s \in \mathbb{R}H_3$. Comme $h \cdot X_n$ commute à $h \cdot X_s$, il appartient à $\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q}$ par définition de $\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q}$. On conclut donc $h \cdot X \in \mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q}$.

3. On a

$$H \cdot \varpi((\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+) = \varpi(H \cdot (\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+) = \varpi(\{X \in \mathfrak{q}, S(X) > 0, Q(X) > -2\sqrt{|S(X)|}\}).$$

Comme $S(\varpi(X)) = S(X)$ et $Q(\varpi(X)) = -Q(X)$ la dernière assertion est immédiate.

4. Soit $X \in \mathcal{U}$. Alors X_s est non nul et les valeurs $Q(X) = Q(X_s)$ et $S_0(X) = S_0(X_s)$ ne sont pas simultanément nulles. Supposons que $S_0(X)$ soit non nul. Si $S_0(X) > 0$, alors X est dans $H \cdot \mathfrak{m} \cap \mathfrak{q}$.

Si $S_0(X) < 0$, alors on a $Q(X)^2 - 4S(X) < 0$ ce qui donne $S(X) > 0$ et $(Q(X) - 2\sqrt{S(X)})(Q(X) + 2\sqrt{S(X)}) < 0$. Comme $Q(X) - 2\sqrt{S(X)} < Q(X) + 2\sqrt{S(X)}$, on obtient $Q(X) - 2\sqrt{S(X)} < 0 < Q(X) + 2\sqrt{S(X)}$, ce qui implique que X est dans $H \cdot (\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+ \cap H \cdot \varpi((\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+)$.

Si $S_0(X) = 0$, alors $Q(X)$ est non nul et on a $S(X) = Q(X)^2/4 > 0$ et $Q(X) = \pm 2\sqrt{S(X)}$. Nécessairement X est dans $H \cdot \varpi((\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+)$ ou $H \cdot (\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+$.

La réciproque est immédiate. \square

6.2 Conditions de recollement

Nous rappelons les notations suivantes introduites dans le paragraphe 2.2 et la définition 4.1.2,

Si $X = \begin{pmatrix} 0 & Y \\ Z & 0 \end{pmatrix}$ alors $u(X)$ et $v(X)$ désignent les valeurs propres de YZ et elles caractérisent la H -orbite de X lorsque X est semi-simple.

Si F est une fonction H -invariante sur \mathfrak{q}^{reg} , les fonctions $F_{\mathfrak{m}}$ définie sur $(\mathbb{R}^*)^2 - diag$, et F_2 définie sur $(\mathbb{R}^*)^2$ vérifient $F(X) = F_{\mathfrak{m}}(u(X), v(X))$ si $X \in \mathfrak{m} \cap \mathfrak{q}^{reg}$ et pour $X_{\tau, \theta} =$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & & \tau & -\theta \\ & & \theta & \tau \\ \hline \tau & -\theta & & \\ \theta & \tau & & 0 \end{array} \right) \in \mathfrak{a}_2 \text{ alors } F(X_{\tau, \theta}) = F_2(\tau, \theta).$$

Pour $f \in \mathcal{D}(\mathfrak{q})$, on note $(\mathcal{M}_H f)_{\mathfrak{m}} = \mathcal{M}f_{\mathfrak{m}}$ et $(\mathcal{M}_H f)_2 = \mathcal{M}f_2$.

Dans tout ce paragraphe, on se placera sous les hypothèses suivantes.

Soit $\Phi \in L_{loc}^1(\mathcal{U})^H$ une solution du système (E_{χ}) sur \mathfrak{q}^{reg} . Pour conserver les propriétés de symétrie et anti-symétrie des fonctions, on exprime le système (E_{χ}) à l'aide de la base $\{Q, S_0\}$ de $\mathbb{C}[\mathfrak{q}]^H$.

On note $\tilde{\Psi} = (|\delta|\Phi)|_{\mathfrak{q}^{reg}}$. Par l'étude du paragraphe précédent, pour chaque $\mathfrak{a} \in car(\mathfrak{q})$, la fonction $\tilde{\Psi}|_{\mathfrak{a}^{reg}}$ est une fonction analytique $W_H(\mathfrak{a})$ -invariante solution du système

$$(S_{\mathfrak{a}^{reg}, X}) \begin{cases} (L_{\alpha_1} + L_{\alpha_2})\tilde{\Psi} = (\lambda_1 + \lambda_2)\tilde{\Psi} \\ (L_{\alpha_1} - L_{\alpha_2})^2\tilde{\Psi} = (\lambda_1 - \lambda_2)^2\tilde{\Psi} \end{cases} \quad \text{sur } \mathfrak{a}^{reg},$$

où α_1 et α_2 désignent les racines positives de multiplicité 1 de \mathfrak{a} .

Par le lemme 5.2.1 et la proposition 5.2.3, il existe une fonction $\Psi_{\mathfrak{m}}$ analytique sur $\{(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2 / (t_1 - t_2)t_1t_2 \neq 0\}$ et symétrique par rapport aux deux variables telle que

$$\begin{cases} [(L_1 + L_2)\Psi_{\mathfrak{m}}](t_1, t_2) = (\lambda_1 + \lambda_2)\Psi_{\mathfrak{m}}(t_1, t_2) \\ [(L_1 - L_2)^2\Psi_{\mathfrak{m}}](t_1, t_2) = (\lambda_1 - \lambda_2)^2\Psi_{\mathfrak{m}}(t_1, t_2) \end{cases},$$

et une fonction Ψ_c analytique sur un ouvert U connexe de \mathbb{C}^2 contenant $\{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2; z_1 = \bar{z}_2 \text{ et } Im(z_1) > 0\}$ telle que

$$\begin{cases} [(L_{c,1} + L_{c,2})\Psi_c](z_1, z_2) = (\lambda_1 + \lambda_2)\Psi_c(z_1, z_2) \\ [(L_{c,1} - L_{c,2})^2\Psi_c](z_1, z_2) = (\lambda_1 - \lambda_2)^2\Psi_c(z_1, z_2) \end{cases} \quad \text{sur } U,$$

avec pour tout $X \in \mathfrak{q}^{reg}$:

$$\tilde{\Psi}(X) = \begin{cases} \Psi_{\mathfrak{m}}(u(X), v(X)) & \text{si } X \in H \cdot \mathfrak{m} \cap \mathfrak{q}^{reg} \\ \Psi_c(u(X), v(X)) & \text{si } X \in H \cdot \mathfrak{a}_2^+ \end{cases},$$

Plus précisément, l'élément $X = X_{\tau, \theta}$ appartient à \mathfrak{a}_2^+ si et seulement si $\tau > 0$ et $\theta > 0$, et dans ce cas on a $\tilde{\Psi}(X_{\tau, \theta}) = \Psi_c((\tau + i\theta)^2, (\tau - i\theta)^2)$.

Pour $(\tau, \theta) \in (\mathbb{R}^*)^2$, on note $\Psi_2(\tau, \theta) = \tilde{\Psi}(X_{\tau, \theta})$. Par invariance de $\tilde{\Psi}$ sous l'action du groupe de Weyl $W_H(\mathfrak{a}_2)$, la fonction Ψ_2 est paire par rapport à chaque variable.

Définition 6.2.1. 1. Soient f et g deux fonctions des variables $(t_1, t_2) \in (\mathbb{R}^*)^2 - \text{diag}$. Soit D un opérateur différentiel sur \mathbb{R}^2 tel que Df et Dg existent. On notera, lorsque l'intégrale considérée converge

$$I_{\mathfrak{m}}(D, f, g) = \int_{t_1 > t_2} (f(Dg) - (Df)g)(t_1, t_2) dt_1 dt_2$$

2. Soient f et g deux fonctions des variables $(\tau, \theta) \in (\mathbb{R}^*)^2$. Soit D un opérateur différentiel sur \mathbb{R}^2 tel que Df et Dg existent. On notera, lorsque l'intégrale considérée converge

$$I_2(D, f, g) = \int_{\mathbb{R}^2} (\tau^2 + \theta^2)(f(Dg) - (Df)g)(\tau, \theta) d\tau d\theta$$

Par la formule d'intégration de Weyl (lemme 4.1.2) et l'action des opérateurs différentiels sur les intégrales orbitales (corollaire 5.2.1), on a

$$\begin{aligned} \langle \partial(Q)T_{\Phi}, f \rangle - \langle T_{\partial(Q)\Phi}, f \rangle &= \langle T_{\Phi}, \partial(Q)f \rangle - \langle T_{\partial(Q)\Phi}, f \rangle \\ &= I_{\mathfrak{m}}(L_1 + L_2, \Psi_{\mathfrak{m}}, \mathcal{M}f_{\mathfrak{m}}) + 2I_2(L_{\alpha} + L_{\bar{\alpha}}, \Psi_2, \mathcal{M}f_2), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \langle \partial(S_0)T_{\Phi}, f \rangle - \langle T_{\partial(S_0)\Phi}, f \rangle &= \langle T_{\Phi}, \partial(S_0)f \rangle - \langle T_{\partial(S_0)\Phi}, f \rangle \\ &= I_{\mathfrak{m}}((L_1 - L_2)^2, \Psi_{\mathfrak{m}}, \mathcal{M}f_{\mathfrak{m}}) + 2I_2((L_{\alpha} - L_{\bar{\alpha}})^2, \Psi_2, \mathcal{M}f_2). \end{aligned}$$

Ainsi, T_{Φ} est une distribution propre invariante sur \mathcal{U} pour le caractère χ si et seulement si, pour tout $f \in \mathcal{D}(\mathcal{U})$, les fonctions $\Psi_{\mathfrak{m}}$ et Ψ_2 satisfont les relations suivantes :

$$(\mathcal{R}ec) \begin{cases} I_{\mathfrak{m}}(L_1 + L_2, \Psi_{\mathfrak{m}}, \mathcal{M}f_{\mathfrak{m}}) + 2I_2(L_{\alpha} + L_{\bar{\alpha}}, \Psi_2, \mathcal{M}f_2) = 0 \\ I_{\mathfrak{m}}((L_1 - L_2)^2, \Psi_{\mathfrak{m}}, \mathcal{M}f_{\mathfrak{m}}) + 2I_2((L_{\alpha} - L_{\bar{\alpha}})^2, \Psi_2, \mathcal{M}f_2) = 0 \end{cases}$$

Dans les paragraphes suivants, nous allons étudier ces relations successivement pour $f \in \mathcal{D}(H \cdot \mathfrak{a}_2 \cap \mathfrak{q})$, puis $f \in \mathcal{D}(H \cdot (\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+)$ et enfin $f \in \mathcal{D}(H \cdot \varpi((\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+))$.

6.2.1 Recollement sur $H \cdot \mathfrak{a}_2 \cap \mathfrak{q}$

Par le lemme 6.1.1, si $f \in \mathcal{D}(H \cdot \mathfrak{a}_2 \cap \mathfrak{q})$ alors le support de f est contenu dans $\{X \in \mathfrak{q}; S_0(X) > 0\}$. Comme $H \cdot \mathfrak{a}_2 \subset \{X \in \mathfrak{q}; S_0(X) \leq 0\}$, la fonction $\mathcal{M}f_2$ est identiquement nulle.

D'autre part, par le théorème 4.3.1, l'application $f \mapsto \mathcal{M}f_{\mathfrak{m}}$ est surjective de $\mathcal{D}(H \cdot \mathfrak{m} \cap \mathfrak{q})$ dans \mathcal{H}_{η}^2 . Ainsi, les relations de recollement (*Rec*) pour $f \in \mathcal{D}(H \cdot \mathfrak{m} \cap \mathfrak{q})$ sont équivalentes à

$$I_{\mathfrak{m}}(L_1 + L_2, \Psi_{\mathfrak{m}}, F) = 0 \text{ et } I_{\mathfrak{m}}((L_1 - L_2)^2, \Psi_{\mathfrak{m}}, F) = 0, \text{ pour tout } F \in \mathcal{H}_{\eta}^2.$$

Pour simplifier les notations, on pose dans tout ce paragraphe $\Psi = \Psi_{\mathfrak{m}}$.

Une fonction de \mathcal{H}_{η}^2 s'écrit sous la forme

$$a(t_1, t_2) + \log |t_1| b(t_1, t_2) + \log |t_2| b(t_2, t_1) + \log |t_1| \log |t_2| c(t_1, t_2),$$

où a et c sont symétriques par rapport aux deux variables et a, b et c sont dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2 - \text{diag})$.

D'autre part, par le lemme 5.2.1 et la proposition 5.2.2, sur chaque composante connexe de $(\mathbb{R}^*)^2 - \text{diag}$, la fonction Ψ s'écrit comme somme de fonctions de la forme

$$(A(t_1) + \log |t_1| B(t_1))(C(t_2) + \log |t_2| D(t_2)),$$

où A, B, C et D sont des fonctions analytiques sur \mathbb{R} .

Pour exprimer les conditions de recollement, nous introduisons les notations suivantes.

Soit $\mathcal{E}_{\text{sing}}$ l'espace des fonctions u de la forme $u(t) = v(t) + \log |t| w(t)$, où v et w sont de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}^* et admettent, ainsi que leurs dérivées, des limites à droite et à gauche en 0. Pour une fonction f continue sur \mathbb{R}^* , on notera lorsqu'elles existent $f(0^+)$ et $f(0^-)$ ses limites à droite et à gauche en 0.

Pour $u \in \mathcal{E}_{\text{sing}}$, on pose

$$u^{[1]}(t) = tu'(t) \quad \text{et} \quad u^{[0]}(t) = u(t) - \log |t| u^{[1]}(t),$$

de telle sorte que

$$\lim_{t \rightarrow 0^{\pm}} u^{[1]}(t) = w(0^{\pm}) \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow 0^{\pm}} u^{[0]}(t) = v(0^{\pm}).$$

Ainsi, pour $L = 4(t \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t})$ et pour h et u dans $\mathcal{E}_{\text{sing}}$, on a

$$h(t)(Lu)(t) - (Lh)(t)u(t) = 4 \frac{d}{dt} [h^{[0]}u^{[1]} - h^{[1]}u^{[0]}] = 4 \frac{d}{dt} [t(u'h - uh')(t)].$$

De plus, on a

$$\lim_{t \rightarrow 0^{\pm}} (u^{[1]}h^{[0]} - u^{[0]}h^{[1]})(t) = (u^{[1]}h^{[0]} - u^{[0]}h^{[1]})(0^{\pm}) = \lim_{t \rightarrow 0^{\pm}} (t(u'h - uh')(t)).$$

Pour f et g deux fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur un ouvert U de \mathbb{R}^2 , on définit les opérateurs K par

$$K_x(f, g)(x, y) = x \left(f \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x} g \right) (x, y) \quad \text{et} \quad K_y(f, g)(x, y) = y \left(f \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} g \right) (x, y).$$

Lorsque les variables de f et g sont notées (t_1, t_2) , on posera $K_j = K_{t_j}$.

On rappelle que, pour $j \in \{1, 2\}$, on note $L_j = 4(t_j \frac{\partial^2}{\partial t_j^2} + \frac{\partial}{\partial t_j})$. Ainsi on a

$$f(L_j g) - (L_j f)g = 4 \frac{\partial}{\partial t_j} K_j(f, g).$$

Par ailleurs, pour f une fonction définie sur $\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$ où $(n_1, n_2) \in (\mathbb{N}^*)^2$, et $(x, y) \in \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$, on note f_x la fonction définie sur \mathbb{R}^{n_2} par $f_x(y) = f(x, y)$ et f^y la fonction définie sur \mathbb{R}^{n_1} par $f^y(x) = f(x, y)$.

Remarque 6.2.1. Soit $F \in \mathcal{H}_\eta^2$. Par la description de \mathcal{H}_η^2 et les hypothèses sur Ψ , les fonctions F_{t_1} et Ψ_{t_1} pour $t_1 \in \mathbb{R}^*$ et les fonctions F^{t_2} et Ψ^{t_2} pour $t_2 \in \mathbb{R}^*$ appartiennent à \mathcal{E}_{sing} .

En particulier, pour tout $t \in \mathbb{R}^*$ et $j \in \{0, 1\}$, les limites $(\Psi_t)^{[j]}(0^\pm)$ et $(\Psi^t)^{[j]}(0^\pm)$ existent.

Par ailleurs, pour tout $t \in \mathbb{R}^*$ et $j \in \{0, 1\}$, les fonctions $x \mapsto (F_t)^{[j]}(x)$ et $x \mapsto (F^t)^{[j]}(x)$ sont continues en 0.

Remarque 6.2.2. Pour $F \in \mathcal{H}_\eta^2$, on a

$$K_1(\Psi, F)(t_1, t_2) = ((\Psi^{t_2})^{[0]}(F^{t_2})^{[1]} - (\Psi^{t_2})^{[1]}(F^{t_2})^{[0]})(t_1)$$

et

$$K_2(\Psi, F)(t_1, t_2) = ((\Psi_{t_1})^{[0]}(F_{t_1})^{[1]} - (\Psi_{t_1})^{[1]}(F_{t_1})^{[0]})(t_2).$$

Remarque 6.2.3. 1. Les fonctions Ψ et F étant symétriques, pour tout $(t_1, t_2) \in (\mathbb{R}^*)^2 - \text{diag}$ et pour $j \in \{0, 1\}$, elles vérifient les relations

$$(F_{t_1})^{[j]}(t_2) = (F^{t_2})^{[j]}(t_1) \quad \text{et} \quad (\Psi_{t_1})^{[j]}(t_2) = (\Psi^{t_2})^{[j]}(t_1)$$

et donc on a

$$K_1(\Psi, F)(t_1, t_2) = K_2(\Psi, F)(t_2, t_1).$$

2. Comme F est une fonction bornée, nulle au voisinage de tout élément diagonal de \mathbb{R}^2 , il en est de même des fonctions $K_j(\Psi, F)$ pour $j \in \{1, 2\}$.

Lemme 6.2.1. Pour tout $F \in \mathcal{H}_\eta^2$, les fonctions $t \mapsto K_2(\Psi, F)(t, 0^\pm)$ sont intégrables sur \mathbb{R} et on a

$$I_m(L_1 + L_2, \Psi, F) = 4 \int_{\mathbb{R}} [K_2(\Psi, F)(t, 0^-) - K_2(\Psi, F)(t, 0^+)] dt.$$

Preuve : On a

$$\begin{aligned} I_m(L_1 + L_2, \Psi, F) &= \int_{t_1 > t_2} (\Psi(L_1 + L_2)F - F(L_1 + L_2)\Psi)(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \\ &= \int_{t_1 > t_2} ([\Psi L_1 F - F L_1 \Psi] + [\Psi L_2 F - F L_2 \Psi])(t_1, t_2) dt_1 dt_2. \end{aligned}$$

Soit $k \in \{1, 2\}$. Montrons que $\Psi L_k F - F L_k \Psi = 4 \frac{\partial}{\partial t_k} K_k(\Psi, F)$ est intégrable sur \mathbb{R}^2 .

Pour une fonction f de classe \mathcal{C}^2 sur un ouvert de \mathbb{R}^* , nous avons l'égalité

$$L(\log |t|f(t)) = 8f'(t) + 4\log |t|(f'(t) + tf''(t)).$$

Ainsi, pour chaque composante connexe \mathcal{C} de $(\mathbb{R}^*)^2 - \text{diag}$, il existe des fonctions $G_{i,j} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2 - \text{diag})$ où $0 \leq i, j \leq 2$ telles que, pour $(t_1, t_2) \in \mathcal{C}$, on ait

$$\Psi L_k F - F L_k \Psi = \sum_{0 \leq i, j \leq 2} G_{i,j}(t_1, t_2)(\log |t_1|)^i (\log |t_2|)^j.$$

Par suite, la fonction $\Psi L_k F - F L_k \Psi = 4 \frac{\partial}{\partial t_k} K_k(\Psi, F)$ est intégrable sur \mathbb{R}^2 . Les propriétés sur le support de F (remarque 6.2.3 (2.)) et le théorème de Fubini assurent l'intégrabilité des fonctions $K_2(\Psi, F)(t, 0^\pm)$.

On obtient donc

$$\begin{aligned} I_m(L_1 + L_2, \Psi, F) &= \int_{t_1 > t_2} [\Psi L_1 F - F L_1 \Psi](t_1, t_2) dt_1 dt_2 + \int_{t_1 > t_2} [\Psi L_2 F - F L_2 \Psi](t_1, t_2) dt_1 dt_2 \\ &= 4 \int_{t_1 > t_2} \frac{\partial}{\partial t_1} K_1(\Psi, F)(t_1, t_2) dt_1 dt_2 + 4 \int_{t_1 > t_2} \frac{\partial}{\partial t_2} K_2(\Psi, F)(t_1, t_2) dt_1 dt_2. \end{aligned}$$

Par ailleurs, on a (théorème de Fubini et propriétés sur le support de F)

$$\int_{t_1 > t_2 > 0} \frac{\partial}{\partial t_1} K_1(\Psi, F)(t_1, t_2) dt_1 dt_2 = 0,$$

et donc, on obtient

$$\begin{aligned} &\int_{t_1 > t_2} \frac{\partial}{\partial t_1} K_1(\Psi, F)(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \\ &= \int_{t_1 > 0 > t_2} \frac{\partial}{\partial t_1} K_1(\Psi, F)(t_1, t_2) dt_1 dt_2 + \int_{0 > t_1 > t_2} \frac{\partial}{\partial t_1} K_1(\Psi, F)(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \\ &= - \int_{-\infty}^0 K_1(\Psi, F)(0^+, t) dt + \int_{-\infty}^0 K_1(\Psi, F)(0^-, t) dt, \end{aligned}$$

Grâce à la remarque 6.2.3 (symétrie des fonctions Ψ et F) , on a

$$K_1(\Psi, F)(t_1, t_2) = K_2(\Psi, F)(t_2, t_1).$$

ce qui implique

$$\int_{t_1 > t_2} \frac{\partial}{\partial t_1} K_1(\Psi, F)(t_1, t_2) dt_1 dt_2 = - \int_{-\infty}^0 K_2(\Psi, F)(t, 0^+) dt + \int_{-\infty}^0 K_2(\Psi, F)(t, 0^-) dt.$$

De même on obtient la relation

$$\int_{t_1 > t_2} \frac{\partial}{\partial t_2} K_2(\Psi, F)(t_1, t_2) dt_1 dt_2 = - \int_0^{+\infty} K_2(\Psi, F)(t, 0^+) dt + \int_0^{+\infty} K_2(\Psi, F)(t, 0^-) dt.$$

On en conclut la relation suivante

$$I_m(L_1 + L_2, \Psi, F) = 4 \int_{\mathbb{R}} [K_2(\Psi, F)(t, 0^-) - K_2(\Psi, F)(t, 0^+)] dt. \quad \square$$

Proposition 6.2.1. *Les trois assertions suivantes sont équivalentes :*

1. Pour tout $F \in \mathcal{H}_\eta^2$, on a $I_m(L_1 + L_2, \Psi, F) = 0$,
2. Pour $j \in \{0, 1\}$ et $t_1 \in \mathbb{R}^*$ alors $(\Psi_{t_1})^{[j]}(0^+) = (\Psi_{t_1})^{[j]}(0^-)$.
3. Pour tout $f \in \mathcal{D}(H \cdot \mathfrak{m} \cap \mathfrak{q})$ et pour tout $t \in \mathbb{R}^*$, on a

$$K_2(\Psi, \mathcal{M}f_m)(t, 0^+) = K_2(\Psi, \mathcal{M}f_m)(t, 0^-).$$

Remarque 6.2.4. *Grâce à la remarque 6.2.3, on constate que*

1. le point 2. de la proposition précédente est équivalent à l'assertion suivante :
(2'.) pour $j \in \{0, 1\}$ et $t_2 \in \mathbb{R}^*$ alors $(\Psi^{t_2})^{[j]}(0^+) = (\Psi^{t_2})^{[j]}(0^-)$.
2. le point 3. de la proposition précédente est équivalent à l'assertion suivante :
(3'.) pour tout $f \in \mathcal{D}(H \cdot \mathfrak{m} \cap \mathfrak{q})$ et pour tout $t \in \mathbb{R}^*$, on a

$$K_1(\Psi, \mathcal{M}f_m)(0^+, t) = K_1(\Psi, \mathcal{M}f_m)(0^-, t).$$

Preuve de la proposition 6.2.1 : Soit $F \in \mathcal{H}_\eta^2$.

Supposons que $I_m(L_1 + L_2, \Psi, F) = 0$ pour tout $F \in \mathcal{H}_\eta^2$. Grâce au lemme 6.2.1, ceci s'écrit donc

$$\int_{\mathbb{R}} [K_2(\Psi, F)(t, 0^-) - K_2(\Psi, F)(t, 0^+)] dt = 0,$$

ce qui s'écrit également, grâce à la remarque 6.2.2

$$\int_{\mathbb{R}} [(F_{t_1})^{[1]}(0)((\Psi_{t_1})^{[0]}(0^-) - (\Psi_{t_1})^{[0]}(0^+)) - (F_{t_1})^{[0]}(0)((\Psi_{t_1})^{[1]}(0^-) - (\Psi_{t_1})^{[1]}(0^+))] dt_1 = 0.$$

Nous allons appliquer cette égalité à des fonctions test pour obtenir les relations voulues sur Ψ .

Soit $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^*)$ quelconque. Il existe $\varepsilon \in]0, 1[$ tel que $\text{supp}(\chi) \subset [-\varepsilon^{-1}, -\varepsilon] \cup [\varepsilon, \varepsilon^{-1}]$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $\text{supp}(\varphi) \subset [\frac{\varepsilon}{2}, 2\varepsilon^{-1}]$ et $\varphi \equiv 1$ sur $[\varepsilon; \varepsilon^{-1}]$.

On définit la fonction A sur \mathbb{R}^2 par $A(t_1, t_2) = \chi(|t_1 - t_2|)(\varphi(t_1) + \varphi(t_2)) + \chi(-|t_1 - t_2|)(\varphi(-t_1) + \varphi(-t_2))$. Ainsi on a $A \in \mathcal{H}_\eta^2$.

Pour $t_1 \in \mathbb{R}$, on a $(A_{t_1})^{[1]}(0^\pm) = 0$ et $(A_{t_1})^{[0]}(0^\pm) = A(t_1, 0)$.

De plus pour $t_1 \in \mathbb{R}_+$, on a

$$A(t_1, 0) = \chi(t_1)\varphi(t_1) = \chi(t_1)$$

et pour $t_1 \in \mathbb{R}_-$, on a

$$A(t_1, 0) = \chi(-|t_1|)\varphi(-t_1) = \chi(t_1).$$

On obtient donc

$$I_m(L_1 + L_2, \Psi, A) = 4 \int_{\mathbb{R}} \chi(t_1)((\Psi_{t_1})^{[1]}(0^+) - (\Psi_{t_1})^{[1]}(0^-)) dt_1 = 0.$$

Cette dernière égalité est vraie pour toute fonction $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ à support dans \mathbb{R}^* , on en déduit donc la première conclusion

$$(\Psi_{t_1})^{[1]}(0^+) = (\Psi_{t_1})^{[1]}(0^-), \forall t_1 \in \mathbb{R}^*.$$

Maintenant, pour (t_1, t_2) dans $(\mathbb{R}^*)^2$, on pose $C(t_1, t_2) = (\log |t_1| + \log |t_2|)A(t_1, t_2)$. Ainsi, la fonction C appartient à \mathcal{H}_η^2 .

Par ailleurs, pour $t_1 \in \mathbb{R}^*$ on a $(C_{t_1})^{[1]}(0^\pm) = A(t_1, 0) = \chi(t_1)$ et $(C_{t_1})^{[0]}(0^\pm) = \log |t_1| \chi(t_1)$.

De plus comme $(\Psi_{t_1})^{[1]}(0^+) = (\Psi_{t_1})^{[1]}(0^-)$, alors

$$I_m(L_1 + L_2, \Psi, C) = 4 \int_{\mathbb{R}} (\chi(t_1)((\Psi_{t_1})^{[0]}(0^+) - (\Psi_{t_1})^{[0]}(0^-))) dt_1.$$

Nous concluons comme précédemment que

$$(\Psi_{t_1})^{[0]}(0^+) - (\Psi_{t_1})^{[0]}(0^-) = 0, \forall t_1 \in \mathbb{R}^*.$$

Nous obtenons ainsi l'implication (1) \Rightarrow (2).

On suppose maintenant que pour $j \in \{0, 1\}$ et $t_1 \in \mathbb{R}^*$ alors

$$(\Psi_{t_1})^{[j]}(0^+) = (\Psi_{t_1})^{[j]}(0^-).$$

Par la remarque 6.2.2, pour $F \in \mathcal{H}_\eta^2$, on a alors immédiatement

$$K_2(\Psi, F)(t_1, 0^+) = K_2(\Psi, F)(t_1, 0^-), \quad ; \forall t_1 \in \mathbb{R}^*.$$

Ce qui donne l'assertion (3).

L'implication (3) \Rightarrow (1) est immédiate par l'expression de $I_m(L_1 + L_2, \Psi, F)$ donnée au lemme 6.2.1 et la surjectivité l'application $f \mapsto \mathcal{M}f_m$ de $\mathcal{D}(H \cdot \mathfrak{m} \cap \mathfrak{q})$ dans \mathcal{H}_η^2 . Ceci achève la preuve de la proposition. \square .

Définition 6.2.2. 1. Pour f et g deux fonctions d'une variable x réelle ou complexe, on note

$$S^+(f, g)(x_1, x_2) = f(x_1)g(x_2) + f(x_2)g(x_1)$$

et

$$[f, g](x_1, x_2) = f(x_1)g(x_2) - f(x_2)g(x_1).$$

2. Si $(f_j)_{j \in J}$ est une famille finie d'un espace vectoriel, on note $\text{Vect}\langle f_j; j \in J \rangle$ le sous-espace vectoriel engendré par la famille $(f_j)_{j \in J}$.

Corollaire 6.2.1. La fonction Ψ satisfait l'une des conditions équivalentes de la proposition 6.2.1 si et seulement si

$$\Psi \in \text{Vect}\langle S^+(A, B)(t_1, t_2), \text{signe}(t_1 - t_2)[A, B](t_1, t_2); (A, B) \in \mathcal{S}ol(L, \lambda_1) \times \mathcal{S}ol(L, \lambda_2) \rangle.$$

Preuve : Le lemme 5.2.1 permet d'écrire la fonction Ψ sous les formes suivantes :
 Pour $t_1 > t_2 > 0$, alors on a

$$\Psi(t_1, t_2) = f_1^+(t_1)\Phi_{\lambda_1}(t_2) + f_2^+(t_1)W_{\lambda_1}^r(t_2) + g_1^+(t_1)\Phi_{\lambda_2}(t_2) + g_2^+(t_1)W_{\lambda_2}^r(t_2),$$

où pour $i \in \{1, 2\}$, on a $(f_i^+, g_i^+) \in \mathcal{Sol}(L, \lambda_2) \times \mathcal{Sol}(L, \lambda_1)$.

Pour $t_1 > 0 > t_2$, on a

$$\Psi(t_1, t_2) = f_1^-(t_1)\Phi_{\lambda_1}(t_2) + f_2^-(t_1)W_{\lambda_1}^r(t_2) + g_1^-(t_1)\Phi_{\lambda_2}(t_2) + g_2^-(t_1)W_{\lambda_2}^r(t_2),$$

où pour $i \in \{1, 2\}$, on a $(f_i^-, g_i^-) \in \mathcal{Sol}(L, \lambda_2) \times \mathcal{Sol}(L, \lambda_1)$.

La condition $(\Psi_{t_1})^{[1]}(0^+) = (\Psi_{t_1})^{[1]}(0^-)$ implique que

$$f_2^+(t_1) + g_2^+(t_1) = f_2^-(t_1) + g_2^-(t_1), \forall t_1 \in \mathbb{R}_+^*.$$

Comme $\mathcal{Sol}(L, \lambda_2) \cap \mathcal{Sol}(L, \lambda_1) = \{0\}$, alors, pour tout $t_1 \in \mathbb{R}_+^*$ on a

$$f_2^+(t_1) = f_2^-(t_1), \forall t_1 \in \mathbb{R}_+^* \text{ et } g_2^+(t_1) = g_2^-(t_1), \forall t_1 \in \mathbb{R}_+^*.$$

On pose alors $f_2(t_1) = f_2^+(t_1) = f_2^-(t_1)$ et $g_2(t_1) = g_2^+(t_1) = g_2^-(t_1)$.

De même la condition $(\Psi_{t_1})^{[0]}(0^+) = (\Psi_{t_1})^{[0]}(0^-)$ implique que

$$\begin{cases} f_1(t_1) := f_1^+(t_1) = f_1^-(t_1), \forall t_1 \in \mathbb{R}_+^* \\ g_1(t_1) := g_1^+(t_1) = g_1^-(t_1), \forall t_1 \in \mathbb{R}_+^* \end{cases}.$$

Ainsi sur $\{(t_1, t_2), t_1 > t_2, t_1 > 0\}$, nous avons

$$\Psi(t_1, t_2) = f_1(t_1)\Phi_{\lambda_1}(t_2) + f_2(t_1)W_{\lambda_1}^r(t_2) + g_1(t_1)\Phi_{\lambda_2}(t_2) + g_2(t_1)W_{\lambda_2}^r(t_2).$$

En raisonnant de la même manière pour le recollement sur $\{(t_1, t_2), t_1 > t_2, t_2 < 0\}$ en utilisant les relations

$$(\Psi^{t_2})^{[j]}(0^+) = (\Psi^{t_2})^{[j]}(0^-), j \in \{0, 1\},$$

nous avons aussi sur cet ensemble l'égalité

$$\Psi(t_1, t_2) = f_1(t_1)\Phi_{\lambda_1}(t_2) + f_2(t_1)W_{\lambda_1}^r(t_2) + g_1(t_1)\Phi_{\lambda_2}(t_2) + g_2(t_1)W_{\lambda_2}^r(t_2).$$

Comme Ψ est symétrique par rapport aux deux variables, on peut donc l'écrire comme combinaison linéaire des fonctions $\mathbf{1}_{t_1 \leq t_2} A(t_1)B(t_2) + \mathbf{1}_{t_1 > t_2} A(t_2)B(t_1)$ avec (A, B) ou (B, A) dans $\mathcal{Sol}(L, \lambda_1) \times \mathcal{Sol}(L, \lambda_2)$. On en déduit aisément le corollaire. \square

Proposition 6.2.2. *Soit $\Psi \in \text{Vect}\langle S^+(A, B)(t_1, t_2), \text{signe}(t_1 - t_2)[A, B](t_1, t_2); (A, B) \in \mathcal{Sol}(L, \lambda_1) \times \mathcal{Sol}(L, \lambda_2) \rangle$.*

Alors, pour tout $F \in \mathcal{H}_\eta^2$, on a la relation

$$I_m((L_1 - L_2)^2, \Psi, F) = 0.$$

Preuve : Nous allons montrer que les intégrales $I_m(L_1 - L_2, (L_1 - L_2)\Psi, F)$ et $I_m(L_1 - L_2, \Psi, (L_1 - L_2)F)$ existent et sont nulles. Ceci donnera le résultat voulu puisque, dans ce cas, on aura

$$I_m((L_1 - L_2)^2, \Psi, F) = I_m(L_1 - L_2, (L_1 - L_2)\Psi, F) + I_m(L_1 - L_2, \Psi, (L_1 - L_2)F) = 0.$$

On procède comme dans la preuve du lemme 6.2.1.

Par hypothèse sur Ψ et définition de \mathcal{H}_η^2 , pour $g = \Psi$ ou F , il existe des fonctions $(g_{i,j})_{0 \leq i,j \leq 1}$ de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}^2 telles que, pour $(t_1, t_2) \in (\mathbb{R}^*)^2 - \text{diag}$, l'on ait

$$g(t_1, t_2) = \sum_{0 \leq i,j \leq 1} g_{i,j}(t_1, t_2) (\log |t_1|)^i (\log |t_2|)^j.$$

Comme, pour toute fonction f de classe \mathcal{C}^2 sur un ouvert de \mathbb{R}^* , pour tout $t \in \mathbb{R}^*$, on a $L(\log |t|f(t)) = 8f'(t) + 4 \log |t|(f'(t) + tf''(t))$, les fonctions $L_k \Psi$ et $L_k F$, pour $k = 1, 2$ ont une expression du même type. Ainsi, si g désigne l'une des fonctions Ψ , F , $(L_1 - L_2)\Psi$ ou $(L_1 - L_2)F$, les fonctions $(t_1, t_2) \mapsto (g_{t_1})^{[j]}(t_2)$ sont continues en tout point $(t, 0)$ pour $t \in \mathbb{R}^*$.

Comme F est nulle en dehors d'un compact de $\mathbb{R}^2 - \text{diag}$, pour $(g, h) = ((L_1 - L_2)\Psi, F)$ ou $(\Psi, (L_1 - L_2)F)$, la fonction $g(L_k h) - (L_k g)h = 4 \frac{\partial}{\partial t_k} K_k(g, h)$ est donc intégrable sur \mathbb{R}^2 en reprenant la preuve du lemme 6.2.1. Le même raisonnement que dans la preuve du lemme 6.2.1 donne aussi

$$\begin{aligned} I_m(L_1 - L_2, g, h) &= 4 \int_{-\infty}^0 [K_1(g, h)(0^-, t) - K_1(g, h)(0^+, t)] dt \\ &\quad - 4 \int_0^{+\infty} [K_2(g, h)(t, 0^-) - K_2(g, h)(t, 0^+)] dt. \end{aligned}$$

Comme Ψ et F sont symétriques, l'une des deux fonctions g ou h est symétrique et l'autre est antisymétrique. Ainsi, pour $(t_1, t_2) \in (\mathbb{R}^*)^2 - \text{diag}$, on a

$$K_1(g, h)(t_1, t_2) = -K_2(g, h)(t_2, t_1).$$

et on obtient

$$I_m(L_1 - L_2, g, h) = 4 \int_{\mathbb{R}} [K_2(g, h)(t, 0^+) - K_2(g, h)(t, 0^-)] dt.$$

La remarque 6.2.2 et les propriétés de g et h décrites précédemment donnent $K_2(g, h)(t, 0^+) = K_2(g, h)(t, 0^-)$. Ainsi, on obtient

$$I_m(L_1 - L_2, \Psi, (L_1 - L_2)F) = I_m(L_1 - L_2, (L_1 - L_2)\Psi) = 0$$

ce qui achève la preuve. \square

6.2.2 Recollement sur $H \cdot (\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+$

Nous étudions dans ce paragraphe les conditions nécessaires et suffisantes pour que les fonctions Ψ_m et Ψ_2 vérifient les relations (*Rec*) pour tout $f \in \mathcal{D}(H \cdot (\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+)$.

Les éléments réguliers de $H \cdot (\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+$ sont conjugués par H à un élément de $\mathfrak{a}_{+,+}$ ou de \mathfrak{a}_2 . La H -orbite d'un élément semi-simple de $\mathfrak{a}_{+,+}$ est caractérisée par deux réels positifs t_1 et t_2 , paramétrisation utilisée dans le paragraphe précédent et celle d'un élément semi-simple de \mathfrak{a}_2 par deux nombres complexes conjugués $(\tau + i\theta)^2$ et $(\tau - i\theta)^2$.

Ici, nous utiliserons la paramétrisation suivante des éléments de $\mathfrak{a}_{+,+}$ plus cohérente avec celle de \mathfrak{a}_2 . Pour $(\tau, \theta) \in \mathbb{R}^2$, on note

$$X_{\tau,\theta}^r = \left(\begin{array}{cc|cc} & & \tau + \theta & 0 \\ & 0 & 0 & \tau - \theta \\ \hline \tau + \theta & 0 & & \\ 0 & \tau - \theta & & 0 \end{array} \right),$$

de telle sorte que $\mathfrak{a}_{+,+} = \{X_{\tau,\theta}^r, (\tau, \theta) \in \mathbb{R}^2\}$. Avec ces notations, la H -orbite de $X_{\tau,\theta}^r$ est donc l'orbite caractérisée par les deux réels positifs $(\tau + \theta)^2$ et $(\tau - \theta)^2$ et on a $|\delta|(X_{\tau,\theta}^r) = 4|\tau\theta|$.

Pour $f \in \mathcal{D}(H \cdot (\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+)$ et Ψ_m fixée précédemment, on définit les fonctions $(\mathcal{M}f_m)_r$ et $(\Psi_m)_r$ sur $\{(\tau, \theta) \in (\mathbb{R}^*)^2; \tau^2 \neq \theta^2\}$ par

$$\begin{aligned} (\mathcal{M}f_m)_r(\tau, \theta) &= \mathcal{M}_H(f)(X_{\tau,\theta}^r) = \mathcal{M}f_m((\tau + \theta)^2, (\tau - \theta)^2) \\ (\Psi_m)_r(\tau, \theta) &= \tilde{\Psi}(X_{\tau,\theta}^r) = \Psi_m((\tau + \theta)^2, (\tau - \theta)^2) \end{aligned}.$$

Comme $\tilde{\Psi}$ et $\mathcal{M}_H(f)$ sont invariantes par le groupe de Weyl $W_H(\mathfrak{a}_{+,+})$, les fonctions $(\Psi_m)_r$ et $(\mathcal{M}f_m)_r$ sont symétriques et paires en chaque variable.

Pour $\Phi = \frac{\tilde{\Psi}}{|\delta|}$, la formule d'intégration de Weyl (lemme 4.1.2) donne alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{|W_H(\mathfrak{a}_{+,+})|} \int_{\mathfrak{a}_{+,+}} \Phi(X) \mathcal{M}_H(f)(X) \prod_{\alpha \in \Delta^+} \alpha(X) |dX| &= \int_{\mathbb{R}^2} \Phi(X_{\tau,\theta}^r) \mathcal{M}_H(f)(X_{\tau,\theta}^r) |4\tau\theta| |\tau^2 - \theta^2| d\tau d\theta \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} (\Psi_m)_r(\tau, \theta) (\mathcal{M}f_m)_r(\tau, \theta) |\tau^2 - \theta^2| d\tau d\theta = \int_{t_1 > t_2 > 0} \Psi_m(t_1, t_2) \mathcal{M}f_m(t_1, t_2) dt_1 dt_2. \end{aligned}$$

Définition 6.2.3. Soient f et g deux fonctions des variables $(\tau, \theta) \in \{(x, y) \in (\mathbb{R}^*)^2, x^2 \neq y^2\}$. Soit D un opérateur différentiel sur \mathbb{R}^2 tel que Df et Dg existent. On notera, lorsque l'intégrale considérée converge

$$I_m^r(D, f, g) = \int_{\mathbb{R}^2} |\tau^2 - \theta^2| (f(Dg) - (Df)g)(\tau, \theta) d\tau d\theta.$$

Sur chaque sous-espace de Cartan \mathfrak{a} , les composantes radiales des opérateurs $\partial(Q)$ et $\partial(S_0)$ sont données en terme des opérateurs $L_\gamma = \frac{1}{4\gamma} \partial h_\gamma (\gamma \partial h_\gamma)$ (proposition 5.1.1) où γ est une racine positive de multiplicité 1 de \mathfrak{a} .

Sur $\mathfrak{a}_{+,+}$, les racines positives de multiplicité 1 sont données par $\alpha_1(X_{\tau,\theta}^r) = 2(\tau + \theta)$ et $\alpha_2(X_{\tau,\theta}^r) = 2(\tau - \theta)$. Par ailleurs, les racines positives de multiplicité 1 de \mathfrak{a}_2 sont données par $\alpha(X_{\tau,\theta}) = 2(\tau + i\theta)$ et sa conjuguée $\bar{\alpha}$. Ainsi, les opérateurs L_γ , pour $\gamma(X) = 2(\tau + \epsilon\theta)$ avec $\epsilon = \pm 1$ si $X = X_{\tau,\theta}^r \in \mathfrak{a}_{+,+}$ et $\epsilon = \pm i$ si $X = X_{\tau,\theta} \in \mathfrak{a}_2$, s'expriment de la manière suivante

$$L_\gamma = \frac{1}{4(\tau + \epsilon\theta)} \left(\frac{\partial}{\partial \tau} + \bar{\epsilon} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \left((\tau + \epsilon\theta) \left(\frac{\partial}{\partial \tau} + \bar{\epsilon} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \right).$$

Grâce aux lemme 5.2.2 et corollaire 5.2.1 on obtient donc :

Lemme 6.2.2. Pour $f \in \mathcal{D}(H \cdot (\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+)$, on a

$$I_m(L_1 + L_2, \Psi_m, \mathcal{M}f_m) = I_m(L_{\alpha_1} + L_{\alpha_2}, (\Psi_m)_r, (\mathcal{M}f_m)_r)$$

et

$$I_m((L_1 - L_2)^2, \Psi_m, \mathcal{M}f_m) = I_m^r((L_{\alpha_1} - L_{\alpha_2})^2, (\Psi_m)_r, (\mathcal{M}f_m)_r).$$

Ainsi les relations de recollement (*Rec*) s'écrivent pour $f \in \mathcal{D}(H \cdot (\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+)$,

$$\begin{cases} I_m^r(L_{\alpha_1} + L_{\alpha_2}, (\Psi_m)_r, (\mathcal{M}f_m)_r) + 2I_2(L_\alpha + L_{\bar{\alpha}}, \Psi_2, \mathcal{M}f_2) = 0 \\ I_m^r((L_{\alpha_1} - L_{\alpha_2})^2, (\Psi_m)_r, (\mathcal{M}f_m)_r) + 2I_2((L_\alpha - L_{\bar{\alpha}})^2, \Psi_2, \mathcal{M}f_2) = 0 \end{cases}$$

Pour étudier ces relations, on introduit les notations suivantes. Pour g et h deux fonctions de classe \mathcal{C}^2 sur un ouvert U de \mathbb{R}^2 , on définit les opérateurs R_τ et R_θ par

$$R_\tau(g, h)(\tau, \theta) = \left(g \frac{\partial h}{\partial \tau} - \frac{\partial g}{\partial \tau} h \right) (\tau, \theta) \text{ et } R_\theta(g, h)(\tau, \theta) = \left(g \frac{\partial h}{\partial \theta} - \frac{\partial g}{\partial \theta} h \right) (\tau, \theta).$$

Soit $\gamma(X) = 2(\tau + \epsilon\theta)$ avec $\epsilon = \pm 1$ si $X = X_{\tau, \theta}^r \in \mathfrak{a}_{+,+}$ et $\epsilon = \pm i$ si $X = X_{\tau, \theta} \in \mathfrak{a}_2$. On a alors $\partial h_\gamma = \left(\frac{\partial}{\partial \tau} + \bar{\epsilon} \frac{\partial}{\partial \theta} \right)$ et donc $g(\partial h_\gamma h) - (\partial h_\gamma g)h = R_\tau(g, h) + \bar{\epsilon} R_\theta(g, h)$.

Ainsi, pour $(\tau, \theta) \in U$ avec $\tau^2 \neq \epsilon^2 \theta^2$, on obtient

$$|\tau^2 - \epsilon^2 \theta^2| [g(L_\gamma h) - (L_\gamma g)h](\tau, \theta) = \frac{1}{4} \left(\frac{\partial}{\partial \tau} + \bar{\epsilon} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \left(|\tau^2 - \epsilon^2 \theta^2| [R_\tau(g, h) + \bar{\epsilon} R_\theta(g, h)] \right) (\tau, \theta),$$

et donc, on a les relations suivantes

$$\begin{aligned} & |\tau^2 - \theta^2| (g(L_{\alpha_1} + L_{\alpha_2})(h) - h(L_{\alpha_1} + L_{\alpha_2})(g)) (\tau, \theta) \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial \tau} (|\tau^2 - \theta^2| R_\tau(g, h)) (\tau, \theta) + \frac{\partial}{\partial \theta} (|\tau^2 - \theta^2| R_\theta(g, h)) (\tau, \theta) \right], \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & |\tau^2 + \theta^2| (g(L_\alpha + L_{\bar{\alpha}})(h) - h(L_\alpha + L_{\bar{\alpha}})(g)) (\tau, \theta) \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial \tau} ((\tau^2 + \theta^2) R_\tau(g, h)) (\tau, \theta) - \frac{\partial}{\partial \theta} ((\tau^2 + \theta^2) R_\theta(g, h)) (\tau, \theta) \right], \end{aligned}$$

Nous rappelons maintenant les propriétés des fonctions $(\Psi_m)_r$, Ψ_2 , $(\mathcal{M}f_m)_r$ et $\mathcal{M}f_2$ que nous utiliserons.

Par le théorème 4.4.1, pour tout $f \in \mathcal{D}(H \cdot (\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+)$, il existe une unique fonction $G_f = a(\tau, w) + |w|^{1/2} b(\tau, w) \in \mathcal{H}_\eta^{pair}$ où a et b sont paires par rapport à la première variable et appartiennent à $\mathcal{D}(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \cap \{(\tau, w); \tau^2 > w\})$, telle que, pour $\tau\theta \neq 0$, on ait

$$(\mathcal{M}f_m)_r(\tau, \theta) = \mathcal{M}_H(f)(X_{\tau, \theta}^r) = G_f(\tau, \theta^2) = a(\tau, \theta^2) \text{ pour } \tau^2 - \theta^2 > 0$$

$$(\mathcal{M}f_m)_r(\tau, \theta) = \mathcal{M}_H(f)(X_{\theta, \tau}^r) = G_f(\theta, \tau^2) = a(\theta, \tau^2) \text{ pour } \tau^2 - \theta^2 < 0$$

et

$$\mathcal{M}f_2(\tau, \theta) = \mathcal{M}_H(f)(X_{\tau, \theta}) = G_f(\tau, -\theta^2) = a(\tau, -\theta^2) + |\theta| b(\tau, -\theta^2).$$

De plus, l'application $\begin{cases} \mathcal{D}(H \cdot (\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+) & \rightarrow \mathcal{H}_\eta^{pair} \\ f & \mapsto G_f \end{cases}$ est surjective.

Remarque 6.2.5. La fonction $(\mathcal{M}f_m)_r$ est symétrique et paire en chaque variable. Elle se prolonge en une fonction de classe \mathcal{C}^∞ à support compact contenu dans $\{(\tau, \theta) \in \mathbb{R}^2; \tau^2 \neq \theta^2\}$. La fonction $\mathcal{M}f_2$ se prolonge en une fonction continue à support compact contenu dans $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ et pour tout $D \in \mathbb{C}[\frac{\partial}{\partial \tau}, \frac{\partial}{\partial \theta}]$ et $\tau \neq 0$, les limites $(D\mathcal{M}f_2)(\tau, 0^\pm)$ existent.

La fonction $(\Psi_m)_r(\tau, \theta)$ est symétrique et paire en chaque variable. Grâce au lemme 5.2.1, pour $\tau > \theta > 0$, elle est somme de fonctions de la forme

$$[A((\tau + \theta)^2) + \log(\tau + \theta)^2 B((\tau + \theta)^2)][C((\tau - \theta)^2) + \log(\tau - \theta)^2 D((\tau - \theta)^2)],$$

où A , B , C et D sont analytiques sur \mathbb{R} .

La fonction Ψ_2 est paire en chaque variable et la proposition 5.2.2 permet d'écrire Ψ_2 sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ comme somme de fonctions de la forme

$$[A_c((\tau + i\theta)^2) + \log(\tau + i\theta)^2 B_c((\tau + i\theta)^2)][C_c((\tau - i\theta)^2) + \log(\tau - i\theta)^2 D_c((\tau - i\theta)^2)],$$

où A_c , B_c , C_c et D_c sont analytiques sur \mathbb{C} .

Remarque 6.2.6. En particulier, pour tout $D \in \mathbb{C}[\frac{\partial}{\partial \tau}, \frac{\partial}{\partial \theta}]$ et $\tau \neq 0$, les limites $D(\Psi_m)_r(\tau, 0^+)$, $D(\Psi_m)_r(0^+, \tau)$ et $(D\Psi_2)(\tau, 0^\pm)$ existent.

Lemme 6.2.3. Soit $f \in \mathcal{D}(H \cdot (\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+)$. On a les relations suivantes

$$I_m^r(L_{\alpha_1} + L_{\alpha_2}, (\Psi_m)_r, (\mathcal{M}f_m)_r) = -4 \int_0^{+\infty} \tau^2 R_\theta((\Psi_m)_r, (\mathcal{M}f_m)_r)(\tau, 0^+) d\tau$$

et

$$I_2(L_\alpha + L_{\bar{\alpha}}, \Psi_2, \mathcal{M}f_2) = 2 \int_0^{+\infty} \tau^2 R_\theta(\Psi_2, \mathcal{M}f_2)(\tau, 0^+) d\tau.$$

Preuve. Par les remarques 6.2.5 et 6.2.6, pour $R = R_\tau$ ou R_θ et $D \in \mathbb{C}[\frac{\partial}{\partial \tau}, \frac{\partial}{\partial \theta}]$, la fonction $D[|\tau^2 - \theta^2| R((\Psi_m)_r, (\mathcal{M}f_m)_r)]$ se prolonge en une fonction de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}_+^2 à support compact contenu dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}_+^2 - \text{diag})$. Par parité en τ et θ de $(\Psi_m)_r$ et $(\mathcal{M}f_m)_r$, cette fonction est intégrable sur \mathbb{R}^2 . Ainsi, on a

$$\begin{aligned} & I_m^r(L_{\alpha_1} + L_{\alpha_2}, (\Psi_m)_r, (\mathcal{M}f_m)_r) \\ &= 2 \int_{\substack{\tau > 0 \\ \theta > 0}} \left(\frac{\partial}{\partial \tau} (|\tau^2 - \theta^2| R_\tau((\Psi_m)_r, (\mathcal{M}f_m)_r))(\tau, \theta) \right. \\ & \quad \left. + \frac{\partial}{\partial \theta} (|\tau^2 - \theta^2| R_\theta((\Psi_m)_r, (\mathcal{M}f_m)_r))(\tau, \theta) \right) d\tau d\theta \\ &= -2 \int_0^{+\infty} \theta^2 R_\tau((\Psi_m)_r, (\mathcal{M}f_m)_r)(0^+, \theta) d\theta - 2 \int_0^{+\infty} \tau^2 R_\theta((\Psi_m)_r, (\mathcal{M}f_m)_r)(\tau, 0^+) d\tau. \end{aligned}$$

Comme les fonctions $(\Psi_m)_r$ et $(\mathcal{M}f_m)_r$ sont symétriques en (τ, θ) , on obtient

$$I_m^r(L_{\alpha_1} + L_{\alpha_2}, (\Psi_m)_r, (\mathcal{M}f_m)_r) = -4 \int_0^{+\infty} \tau^2 R_\theta((\Psi_m)_r, (\mathcal{M}f_m)_r)(\tau, 0^+) d\tau,$$

ce qui donne la première égalité.

De même, par les remarques 6.2.5 et 6.2.6, les fonctions $\frac{\partial}{\partial \tau}[(\tau^2 + \theta^2)R_\tau(\Psi_2, \mathcal{M}f_2)]$ et $\frac{\partial}{\partial \theta}[(\tau^2 + \theta^2)R_\theta(\Psi_2, \mathcal{M}f_2)]$ sont paires en chaque variable et intégrables sur \mathbb{R}^2 et on a

$$\begin{aligned} & I_2(L_\alpha + L_{\bar{\alpha}}, \Psi_2, \mathcal{M}f_2) \\ &= 2 \int_{\substack{\tau > 0 \\ \theta > 0}} \frac{\partial}{\partial \tau} ((\tau^2 + \theta^2)R_\tau(\Psi_2, \mathcal{M}f_2))(\tau, \theta) d\tau d\theta \\ & - 2 \int_{\substack{\tau > 0 \\ \theta > 0}} \frac{\partial}{\partial \theta} ((\tau^2 + \theta^2)R_\theta(\Psi_2, \mathcal{M}f_2))(\tau, \theta) d\tau d\theta. \end{aligned}$$

Comme $\mathcal{M}f_2$ est nulle au voisinage des points $(0, \theta) \in \{0\} \times \mathbb{R}^*$, on en déduit la deuxième relation. \square

Proposition 6.2.3. *Les trois assertions suivantes sont équivalentes :*

1. Pour tout $f \in \mathcal{D}(H \cdot (\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+)$, on a

$$I_m(L_1 + L_2, \Psi_m, \mathcal{M}f_m) + 2I_2(L_\alpha + L_{\bar{\alpha}}, \Psi_2, \mathcal{M}f_2) = 0.$$

2. Pour tout $\tau > 0$, on a

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \theta}(\Psi_m)_r(\tau, 0^+) - \frac{\partial}{\partial \theta}\Psi_2(\tau, 0^+) = 0 \\ \Psi_2(\tau, 0^+) = 0 \end{cases}.$$

3. Pour tout $f \in \mathcal{D}(H \cdot (\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+)$ et pour tout $\tau > 0$, on a

$$R_\theta((\Psi_m)_r, (\mathcal{M}f_m)_r)(\tau, 0^+) - R_\theta(\Psi_2, \mathcal{M}f_2)(\tau, 0^+) = 0.$$

Preuve : On suppose l'assertion 1. vérifiée. Par les lemmes 6.2.2 et 6.2.3, pour tout $f \in \mathcal{D}(H \cdot (\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+)$, on a donc

$$- \int_0^{+\infty} \tau^2 R_\theta((\Psi_m)_r, (\mathcal{M}f_m)_r)(\tau, 0^+) d\tau + \int_0^{+\infty} \tau^2 R_\theta(\Psi_2, \mathcal{M}f_2)(\tau, 0^+) d\tau = 0.$$

Par surjectivité de l'application $f \mapsto G_f$ de $\mathcal{D}(H \cdot (\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+)$ dans \mathcal{H}_η^{pair} (théorème 4.4.1), l'assertion 1. est donc équivalente à

$$\int_0^{+\infty} \tau^2 [a(\tau, 0) \left(\frac{\partial}{\partial \theta}(\Psi_m)_r - \frac{\partial \Psi_2}{\partial \theta} \right)(\tau, 0^+) + b(\tau, 0) \Psi_2(\tau, 0^+)] d\tau = 0$$

ceci pour tout a et b dans $\mathcal{D}((\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}) \cap \{(\tau, w); \tau^2 > w\})$ paires par rapport à la première variable.

Soit $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^*)$ quelconque. Il existe $\varepsilon \in]0, 1[$ tel que $\text{supp}(\chi)$ soit inclus dans $[\varepsilon, \varepsilon^{-1}]$. Soit $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $\phi \equiv 1$ sur $[-\varepsilon^2/2; \varepsilon^2/2]$ et $\phi \equiv 0$ sur $\mathbb{R} - [-\varepsilon^2; \varepsilon^2]$.

En prenant la fonction $a(t, w)$ nulle et $b(t, w)$ définie par $b(t, w) = \frac{\chi(t) + \chi(-t)}{t^2} (1 - \phi(t^2 - w))\phi(w)$, on obtient $b(\tau, 0) = \frac{1}{\tau^2}\chi(\tau)$ pour $\tau > 0$ et donc

$$\int_0^{+\infty} \chi(\tau)\Psi_2(\tau, 0^+)d\tau = 0.$$

Cette dernière égalité étant vraie pour toute fonction χ de $\mathcal{D}(\mathbb{R}_+^*)$, alors

$$\Psi_2(\tau, 0^+) = 0, \quad \forall \tau \in \mathbb{R}_+^*.$$

Maintenant, en prenant la fonction $a(t, w) = \frac{\chi(t) + \chi(-t)}{t^2} (1 - \phi(t^2 - w))\phi(w)$ et la fonction $b(t, w)$ nulle, nous obtenons alors

$$\int_0^{+\infty} \chi(\tau) \left(\frac{\partial(\Psi_m)_r}{\partial\theta}(\tau, 0^+) - \frac{\partial\Psi_2}{\partial\theta}(\tau, 0^+) \right) d\tau = 0.$$

Cette dernière égalité est vraie pour toute fonction χ de $\mathcal{D}(\mathbb{R}_+^*)$, ainsi on a

$$\frac{\partial(\Psi_m)_r}{\partial\theta}(\tau, 0^+) - \frac{\partial\Psi_2}{\partial\theta}(\tau, 0^+) = 0.$$

Ceci donne l'implication 1. \Rightarrow 2..

Maintenant on suppose que

$$\Psi_2(\tau, 0^+) = 0 \text{ et } \frac{\partial(\Psi_m)_r}{\partial\theta}(\tau, 0^+) - \frac{\partial\Psi_2}{\partial\theta}(\tau, 0^+) = 0.$$

Soit $f \in \mathcal{D}(H \cdot (\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+)$. Nous avons les relations

$$(\mathcal{M}f_m)_r(\tau, 0^+) = \mathcal{M}f_2(\tau, 0^+), \quad \frac{\partial}{\partial\theta}(\mathcal{M}f_m)_r(\tau, 0^+) = 0,$$

et

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\mathcal{M}f_2(\tau, 0^+) \text{ est finie.}$$

Les hypothèses sur Ψ_2 et Ψ_m donne alors

$$\begin{aligned} & R_\theta(\Psi_2, \mathcal{M}f_2)(\tau, 0^+) - R_\theta((\Psi_m)_r, (\mathcal{M}f_m)_r)(\tau, 0^+) \\ &= -\frac{\partial\Psi_2}{\partial\theta}(\tau, 0^+)\mathcal{M}f_2(\tau, 0^+) + \frac{\partial(\Psi_m)_r}{\partial\theta}(\tau, 0^+)(\mathcal{M}f_m)_r(\tau, 0^+) = 0, \end{aligned}$$

d'où l'implication 2. \Rightarrow 3..

L'implication 3. \Rightarrow 1. est immédiate par les lemmes 6.2.2 et 6.2.3. Ceci achève la preuve. \square

Nous décrivons maintenant l'espace des fonctions Ψ_m et Ψ_2 satisfaisant les assertions de la proposition 6.2.3.

Pour $k \in \{1, 2\}$, on note

$$A_{1,\lambda_k}(z) = \Phi_{\lambda_k}(z) \quad \text{et} \quad A_{2,\lambda_k}(z) = W_{\lambda_k}(z) = w_{\lambda_k}(z) + \log(z)\Phi_{\lambda_k}(z),$$

le système fondamental de solutions de $L_c y = \lambda_k y$ sur $\mathbb{C} - \mathbb{R}_-$ (proposition 5.2.1).

La restriction de ces fonctions à \mathbb{R}_+^* est un système fondamental de solution de $Ly = \lambda_k y$ sur \mathbb{R}_+^* c'est-à-dire, pour $t > 0$, on a $W_{\lambda_k}^r(t) = W_{\lambda_k}(t)$. On omettra l'exposant "r" dans la suite de ce paragraphe.

Lemme 6.2.4. *Sur \mathbb{R}_+^* , la famille de fonctions $\{(A_{i,\lambda_1} A_{j,\lambda_2})(t)\}_{1 \leq i, j \leq 2}$ est libre.*

Preuve : Soit $\alpha_{i,j} \in \mathbb{C}$ tels que, pour tout $t > 0$, l'on ait $\sum_{1 \leq i, k \leq 2} \alpha_{i,j} A_{i,\lambda_1}(t) A_{j,\lambda_2}(t) = 0$. Cette relation s'écrit aussi

$$[\alpha_{1,1} \Phi_{\lambda_1} \Phi_{\lambda_2} + \alpha_{1,2} \Phi_{\lambda_1} w_{\lambda_2} + \alpha_{2,1} w_{\lambda_1} \Phi_{\lambda_2} + \alpha_{2,2} w_{\lambda_1} w_{\lambda_2}](t)$$

$$+ \log(t) [(\alpha_{1,2} + \alpha_{2,1}) \Phi_{\lambda_1} \Phi_{\lambda_2} + \alpha_{2,2} (\Phi_{\lambda_1} w_{\lambda_2} + w_{\lambda_1} \Phi_{\lambda_2})](t) + \log(t)^2 \alpha_{2,2} \Phi_{\lambda_1} \Phi_{\lambda_2}(t) = 0.$$

Les fonctions Φ_{λ_k} et w_{λ_k} sont continues en 0. Ainsi, en prenant la limite en 0 après avoir divisé successivement par $\log(t)^2$ puis par $\log(t)$ l'expression considérée, on obtient aisément $\alpha_{2,2} = \alpha_{1,2} + \alpha_{2,1} = 0$. Par suite, on a

$$\alpha_{1,1} \Phi_{\lambda_1} \Phi_{\lambda_2} + \alpha_{1,2} [\Phi_{\lambda_1} w_{\lambda_2} - w_{\lambda_1} \Phi_{\lambda_2}] = 0.$$

Comme $w_{\lambda_1}(0) = w_{\lambda_2}(0) = 2\gamma$ où γ est la constante d'Euler et $\Phi_{\lambda_1}(0) = \Phi_{\lambda_2}(0) = 1$, on obtient

$$\alpha_{1,1} = 0.$$

Par ailleurs, comme $w_{\lambda_k}(t) = 2\gamma + (1 + 2\gamma) \frac{\lambda_k t}{4} + o_{t \rightarrow 0^+}(t)$ et $\Phi_{\lambda_k}(t) = 1 + \frac{\lambda_k t}{4} + o_{t \rightarrow 0^+}(t)$, on a

$$\Phi_{\lambda_1}(t) w_{\lambda_2}(t) - \Phi_{\lambda_2}(t) w_{\lambda_1}(t) = \frac{t}{4} (\lambda_2 - \lambda_1) + o_{t \rightarrow 0^+}(t).$$

ce qui donne

$$\alpha_{1,2} = 0. \quad \square$$

Corollaire 6.2.2. *Les fonctions Ψ_m et Ψ_2 satisfont l'une des conditions équivalentes de la proposition 6.2.3 si et seulement si il existe $\Psi^+ \in \text{Vect}\langle S^+(A, B); (A, B) \in \text{Sol}(L, \lambda_1) \times \text{Sol}(L, \lambda_2) \rangle$ et $\Psi_c \in \text{Vect}\langle [A, B]; (A, B) \in \text{Sol}(L_c, \lambda_1) \times \text{Sol}(L_c, \lambda_2) \rangle$ telles que*

$$\begin{aligned} &\text{pour } t_1 > t_2 > 0 \text{ alors } \Psi_m(t_1, t_2) = \Psi^+(t_1, t_2) + \imath \Psi_c(t_1, t_2) \\ &\text{pour } \tau > 0 \text{ et } \theta > 0 \text{ alors } \Psi_2(\tau, \theta) = \Psi_c((\tau + \imath\theta)^2, (\tau - \imath\theta)^2) \end{aligned}$$

Preuve : Par la proposition 5.2.4, il existe des nombres complexes $\alpha_{i,j}$ et $\beta_{i,j}$ tels que $\Psi_c(z_1, z_2) = \sum_{1 \leq i, j \leq 2} \alpha_{i,j} A_{i,\lambda_1}(z_1) A_{j,\lambda_2}(z_2) + \beta_{i,j} A_{i,\lambda_1}(z_2) A_{j,\lambda_2}(z_1)$. Ainsi, pour $\tau > 0$, la condition $\Psi_2(\tau, 0) = 0$ implique que,

$$\sum_{1 \leq i, j \leq 2} (\alpha_{i,j} + \beta_{i,j}) A_{i,\lambda_1}(\tau^2) A_{j,\lambda_2}(\tau^2) = 0.$$

Par le lemme précédent, on obtient donc $\alpha_{i,j} + \beta_{i,j} = 0$ pour $1 \leq i, j \leq 2$ et par suite

$$\Psi_c(z_1, z_2) = \sum_{1 \leq i, j \leq 2} \alpha_{i,j} (A_{i,\lambda_1}(z_1) A_{j,\lambda_2}(z_2) - A_{i,\lambda_1}(z_2) A_{j,\lambda_2}(z_1)).$$

Etudions à présent les conséquences de la condition $\frac{\partial}{\partial \theta}(\Psi_m)_r(\tau, 0^+) - \frac{\partial}{\partial \theta} \Psi_2(\tau, 0^+) = 0$.

Par la proposition 5.2.2, il existe des nombres complexes $a_{i,j}$ et $b_{i,j}$ tels que pour $\tau > \theta \geq 0$, on ait :

$$\begin{aligned} (\Psi_m)_r(\tau, \theta) &= \sum_{1 \leq i, j \leq 2} a_{i,j} A_{i,\lambda_1}((\tau + \theta)^2) A_{j,\lambda_2}((\tau - \theta)^2) \\ &\quad + \sum_{1 \leq i, j \leq 2} b_{i,j} A_{i,\lambda_1}((\tau - \theta)^2) A_{j,\lambda_2}((\tau + \theta)^2). \end{aligned}$$

On obtient donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta}(\Psi_m)_r(\tau, 0^+) &= 2 \sum_{1 \leq i, j \leq 2} a_{i,j} \tau (A'_{i,\lambda_1}(\tau^2) A_{j,\lambda_2}(\tau^2) - A_{i,\lambda_1}(\tau^2) A'_{j,\lambda_2}(\tau^2)) \\ &\quad + 2 \sum_{1 \leq i, j \leq 2} b_{i,j} \tau (-A'_{i,\lambda_1}(\tau^2) A_{j,\lambda_2}(\tau^2) + A_{i,\lambda_1}(\tau^2) A'_{j,\lambda_2}(\tau^2)) \\ &= 2\tau \sum_{1 \leq i, j \leq 2} (a_{i,j} - b_{i,j}) (A'_{i,\lambda_1}(\tau^2) A_{j,\lambda_2}(\tau^2) - A_{i,\lambda_1}(\tau^2) A'_{j,\lambda_2}(\tau^2)) \end{aligned}$$

et

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \Psi_2(\tau, 0^+) = 4i\tau \sum_{1 \leq i, j \leq 2} \alpha_{i,j} (A'_{i,\lambda_1}(\tau^2) A_{j,\lambda_2}(\tau^2) - A_{i,\lambda_1}(\tau^2) A'_{j,\lambda_2}(\tau^2)).$$

La condition $\frac{\partial}{\partial \theta}(\Psi_m)_r(\tau, 0^+) - \frac{\partial}{\partial \theta} \Psi_2(\tau, 0^+) = 0$ donne donc, pour $t > 0$

$$\sum_{1 \leq i, j \leq 2} (a_{i,j} - b_{i,j} - 2i\alpha_{i,j}) (A'_{i,\lambda_1} A_{j,\lambda_2} - A_{i,\lambda_1} A'_{j,\lambda_2})(t) = 0.$$

En dérivant cette expression, on obtient

$$\sum_{1 \leq i, j \leq 2} (a_{i,j} - b_{i,j} - 2i\alpha_{i,j}) (A''_{i,\lambda_1} A_{j,\lambda_2} - A_{i,\lambda_1} A''_{j,\lambda_2})(t) = 0.$$

Ainsi, pour $L = 4(t \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t})$ et pour tout $t > 0$, nous avons

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{1 \leq i, j \leq 2} (a_{i,j} - b_{i,j} - 2i\alpha_{i,j}) ([L A_{i,\lambda_1}] A_{j,\lambda_2} - A_{i,\lambda_1} [L A_{j,\lambda_2}])(t) \\ &= \sum_{1 \leq i, j \leq 2} (a_{i,j} - b_{i,j} - 2i\alpha_{i,j}) (\lambda_1 - \lambda_2) A_{i,\lambda_1} A_{j,\lambda_2}(t). \end{aligned}$$

Le lemme 6.2.4 donne alors

$$a_{i,j} - b_{i,j} - 2i\alpha_{i,j} = 0 \text{ pour } 1 \leq i, j \leq 2.$$

Ainsi, pour $t_1 > t_2 > 0$, on obtient

$$\Psi_m(t_1, t_2) = \sum_{1 \leq i, j \leq 2} a_{i,j} A_{i,\lambda_1}(t_1) A_{j,\lambda_2}(t_2) + b_{i,j} A_{i,\lambda_1}(t_2) A_{j,\lambda_2}(t_1)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{1 \leq i, j \leq 2} \frac{a_{i,j} + b_{i,j}}{2} (A_{i,\lambda_1}(t_1)A_{j,\lambda_2}(t_2) + A_{i,\lambda_1}(t_2)A_{j,\lambda_2}(t_1)) \\
&+ \sum_{1 \leq i, j \leq 2} \frac{a_{i,j} - b_{i,j}}{2} (A_{i,\lambda_1}(t_1)A_{j,\lambda_2}(t_2) - A_{i,\lambda_1}(t_2)A_{j,\lambda_2}(t_1)) \\
&= \sum_{1 \leq i, j \leq 2} \frac{a_{i,j} + b_{i,j}}{2} (A_{i,\lambda_1}(t_1)A_{j,\lambda_2}(t_2) + A_{i,\lambda_1}(t_2)A_{j,\lambda_2}(t_1)) + \iota \Psi_c(t_1, t_2).
\end{aligned}$$

On obtient ainsi les expressions de Ψ_2 et Ψ_m voulues. La réciproque est immédiate par simple calcul. \square

Proposition 6.2.4. *On suppose qu'il existe $\Psi^+ \in \text{Vect}\langle S^+(A, B); (A, B) \in \text{Sol}(L, \lambda_1) \times \text{Sol}(L, \lambda_2) \rangle$ et $\Psi_c \in \text{Vect}\langle [A, B]; (A, B) \in \text{Sol}(L_c, \lambda_1) \times \text{Sol}(L_c, \lambda_2) \rangle$ telles que*

$$\begin{aligned}
&\text{pour } t_1 > t_2 > 0 \text{ alors } \Psi_m(t_1, t_2) = \Psi^+(t_1, t_2) + \iota \Psi_c(t_1, t_2) \\
&\text{pour } \tau > 0 \text{ et } \theta > 0 \text{ alors } \Psi_2(\tau, \theta) = \Psi_c((\tau + \iota\theta)^2, (\tau - \iota\theta)^2)
\end{aligned}$$

Alors, pour tout $f \in \mathcal{D}(H \cdot (\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+)$, on a

$$I_m((L_1 - L_2)^2, \Psi_m, \mathcal{M}f_m) + 2I_2((L_\alpha - L_{\bar{\alpha}})^2, \Psi_2, \mathcal{M}f_2) = 0.$$

Preuve : Soit $f \in \mathcal{D}(H \cdot (\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+)$. Il existe deux fonctions a et b de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \cap \{(\tau, w); \tau^2 > w\})$ paires en la première variable telles que :

pour $\tau > \theta \geq 0$, alors $(\mathcal{M}f_m)_r(\tau, \theta) = a(\tau, \theta^2)$

et pour $\tau > 0$ et $\theta \geq 0$ alors $\mathcal{M}f_2(\tau, \theta) = a(\tau, -\theta^2) + \theta b(\tau, -\theta^2)$.

On procède comme dans la preuve du lemme 6.2.3. On rappelle que $I_m((L_1 - L_2)^2, \Psi_m, \mathcal{M}f_m) = I_m^r(((L_{\alpha_1} - L_{\alpha_2})^2, (\Psi_m)_r, (\mathcal{M}f_m)_r)$.

On considère tout d'abord $D = L_{\alpha_1} - L_{\alpha_2}$ et $(g, h) = ((\Psi_m)_r, D(\mathcal{M}f_m)_r)$ ou $(D(\Psi_m)_r, (\mathcal{M}f_m)_r)$.

Par l'expression des L_{α_j} pour $j = 1, 2$, on a d'une part

$$L_{\alpha_1} - L_{\alpha_2} = \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\theta}{\tau^2 - \theta^2} \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\tau}{\tau^2 - \theta^2} \frac{\partial}{\partial \theta},$$

et d'autre part, pour A et B deux fonctions de classe \mathcal{C}^2 sur un ouvert U de \mathbb{R}^2 et pour $(\tau, \theta) \in U$ avec $\tau^2 \neq \theta^2$, on a la relation suivante

$$\begin{aligned}
&|\tau^2 - \theta^2| (A(L_{\alpha_1} - L_{\alpha_2})(B) - A(L_{\alpha_1} - L_{\alpha_2})(B))(\tau, \theta) \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (|\tau^2 - \theta^2| R_\tau(A, B))(\tau, \theta) + \frac{\partial}{\partial \tau} (|\tau^2 - \theta^2| R_\theta(A, B))(\tau, \theta) \right].
\end{aligned}$$

Les remarques 6.2.5 et 6.2.6 assurent l'intégrabilité des deux fonctions $\frac{\partial}{\partial \tau} (|\tau^2 - \theta^2| R_\theta(g, h))(\tau, \theta)$ et $\frac{\partial}{\partial \theta} (|\tau^2 - \theta^2| R_\tau(g, h))(\tau, \theta)$ sur \mathbb{R}_+^2 . Comme $D(\mathcal{M}f_m)_r$ et $D(\Psi_m)_r$ sont impaires en chaque variable, la fonction $g(Dh) - (Dg)h$ est paire en chaque variable. On obtient alors

$$I_m^r(L_{\alpha_1} - L_{\alpha_2}, g, h) = 2 \int_{\substack{\tau > 0 \\ \theta > 0}} \left(\frac{\partial}{\partial \tau} (|\tau^2 - \theta^2| R_\theta(g, h))(\tau, \theta) \right)$$

$$+ \frac{\partial}{\partial \theta} (|\tau^2 - \theta^2| R_\tau(g, h))(\tau, \theta) d\tau d\theta.$$

puis, en utilisant la symétrie des fonctions g et h ,

$$\begin{aligned} I_m^r(L_{\alpha_1} - L_{\alpha_2}, g, h) &= -2 \int_0^{+\infty} \theta^2 R_\theta(g, h)(0^+, \theta) d\theta - 2 \int_0^{+\infty} \tau^2 R_\tau(g, h)(\tau, 0^+) d\theta \\ &= -4 \int_0^{+\infty} \tau^2 R_\tau(g, h)(\tau, 0^+) d\theta \end{aligned}$$

Pour $\tau > \theta \geq 0$ on a $(\mathcal{M}f_m)_r(\tau, \theta) = a(\tau, \theta^2)$. Ainsi la fonction $h = (L_{\alpha_1} - L_{\alpha_2})(\mathcal{M}f_m)_r$ vérifie $h(\tau, 0^+) = \frac{\partial}{\partial \tau} h(\tau, 0^+) = 0$ pour tout $\tau > 0$ et donc $I_m^r(L_{\alpha_1} - L_{\alpha_2}, (\Psi_m)_r, (L_{\alpha_1} - L_{\alpha_2})(\mathcal{M}f_m)_r) = 0$. On en déduit l'égalité suivante.

$$\begin{aligned} I_m^r((L_{\alpha_1} - L_{\alpha_2})^2, (\Psi_m)_r, (\mathcal{M}f_m)_r) &= I_m^r(L_{\alpha_1} - L_{\alpha_2}, (L_{\alpha_1} - L_{\alpha_2})(\Psi_m)_r, (\mathcal{M}f_m)_r) \\ &= -4 \int_0^{+\infty} \tau^2 [(L_{\alpha_1} - L_{\alpha_2})(\Psi_m)_r(\tau, 0^+) \frac{\partial}{\partial \tau} a(\tau, 0) - \frac{\partial}{\partial \tau} [(L_{\alpha_1} - L_{\alpha_2})(\Psi_m)_r](\tau, 0^+) a(\tau, 0)] d\tau. \end{aligned}$$

Considérons maintenant $D = L_\alpha - L_{\bar{\alpha}}$ et $(g, h) = (\Psi_2, D\mathcal{M}f_2)$ ou $(g, h) = (D\Psi_2, \mathcal{M}f_2)$.

De même que précédemment, on a

$$L_\alpha - L_{\bar{\alpha}} = -i \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial}{\partial \theta} - i \frac{\theta}{\tau^2 + \theta^2} \frac{\partial}{\partial \tau} - i \frac{\tau}{\tau^2 + \theta^2} \frac{\partial}{\partial \theta},$$

et pour A et B deux fonctions de classe \mathcal{C}^2 sur un ouvert U de \mathbb{R}^2 et pour $(\tau, \theta) \in U$ avec $\tau^2 \neq \theta^2$, on a la relation suivante

$$\begin{aligned} &(\tau^2 + \theta^2) (A(L_\alpha - L_{\bar{\alpha}})(B) - A(L_\alpha - L_{\bar{\alpha}})(B))(\tau, \theta) \\ &= \frac{-i}{2} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} ((\tau^2 + \theta^2) R_\tau(A, B))(\tau, \theta) + \frac{\partial}{\partial \tau} ((\tau^2 + \theta^2) R_\theta(A, B))(\tau, \theta) \right]. \end{aligned}$$

Les remarques 6.2.5 et 6.2.6 et les propriétés de parité des fonctions considérées assurent l'intégrabilité des deux fonctions $\frac{\partial}{\partial \tau} ((\tau^2 + \theta^2) R_\theta(g, h))(\tau, \theta)$ et $\frac{\partial}{\partial \theta} ((\tau^2 + \theta^2) R_\tau(g, h))(\tau, \theta)$ sur \mathbb{R}^2 ce qui permet d'obtenir

$$I_2(D, g, h) = 2i \int_0^{+\infty} \tau^2 R_\tau(g, h)(\tau, 0^+) d\tau + 2i \int_0^{+\infty} \theta^2 R_\theta(g, h)(0^+, \theta) d\theta.$$

Pour $(\tau, \theta) \in \mathbb{R}_+^2$, on a $\mathcal{M}f_2(\tau, \theta) = a(\tau, -\theta^2) + \theta b(\tau, -\theta^2)$ avec $a, b \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \cap \{(\tau, w); \tau^2 > w\})$. En particulier, on a $R_\theta(g, h)(0^+, \theta) = 0$ pour $\theta > 0$ et par suite

$$I_2(D, g, h) = 2i \int_0^{+\infty} \tau^2 R_\tau(g, h)(\tau, 0^+) d\tau.$$

Par hypothèse, il existe une fonction $\Psi_c \in \text{Vect}\{[A, B]; (A, B) \in \text{Sol}(L_c, \lambda_1) \times \text{Sol}(L_c, \lambda_2)\}$ telle que, pour $\tau > 0$ et $\theta > 0$ alors $\Psi_2(\tau, \theta) = \Psi_c((\tau + i\theta)^2, (\tau - i\theta)^2)$.

On a donc $\Psi_2(\tau, 0^+) = \frac{\partial}{\partial \tau} \Psi_2(\tau, 0^+) = 0$ ce qui donne $R_\tau(\Psi_2, (L_\alpha - L_{\bar{\alpha}})\mathcal{M}f_2)(\tau, 0^+) = 0$, et par suite

$$\begin{aligned} I_2((L_\alpha - L_{\bar{\alpha}})^2, \Psi_2, \mathcal{M}f_2) &= I_2(L_\alpha - L_{\bar{\alpha}}, (L_\alpha - L_{\bar{\alpha}})\Psi_2, \mathcal{M}f_2) \\ &= 2i \int_0^\infty \tau^2 [(L_\alpha - L_{\bar{\alpha}})\Psi_2(\tau, 0^+) \frac{\partial}{\partial \tau} a(\tau, 0) - \frac{\partial}{\partial \tau} [(L_\alpha - L_{\bar{\alpha}})\Psi_2](\tau, 0^+) a(\tau, 0)] d\tau. \end{aligned}$$

Par hypothèse, la fonction Ψ_m est donnée par $\Psi_m(t_1, t_2) = (\Psi^+ + \iota\Psi_c)(t_1, t_2)$ pour $t_1 > t_2 > 0$ avec $\Psi^+ \in Vect(S^+(A, B); (A, B) \in \mathcal{S}ol(L, \lambda_1) \times \mathcal{S}ol(L, \lambda_2))$.

Par ailleurs, on a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} (L_{\alpha_1} - L_{\alpha_2})(\Psi_m)_r &= ((L_1 - L_2)\Psi_m)_r = ((L_1 - L_2)\Psi^+)_r + \iota((L_{1,c} - L_{2,c})\Psi_c)_r \\ (L_\alpha - L_{\bar{\alpha}})\Psi_2(\tau, \theta) &= ((L_{1,c} - L_{2,c})\Psi_c)((\tau + \iota\theta)^2, (\tau - \iota\theta)^2) \text{ pour } (\tau, \theta) \in \mathbb{R}_+^*. \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient

$$\begin{aligned} (L_{\alpha_1} - L_{\alpha_2})(\Psi_m)_r(\tau, 0^+) &= \iota(L_\alpha - L_{\bar{\alpha}})\Psi_2(\tau, 0^+) \\ \frac{\partial}{\partial \tau} [(L_{\alpha_1} - L_{\alpha_2})(\Psi_m)_r](\tau, 0^+) &= \iota \frac{\partial}{\partial \tau} [(L_\alpha - L_{\bar{\alpha}})\Psi_2](\tau, 0^+). \end{aligned}$$

Grâce aux expressions obtenues précédemment de $I_m^r((L_{\alpha_1} - L_{\alpha_2})^2, (\Psi_m)_r, (\mathcal{M}f_m)_r)$ et $I_2((L_\alpha - L_{\bar{\alpha}})^2, \Psi_2, \mathcal{M}f_2)$, on en déduit

$$I_m^r((L_{\alpha_1} - L_{\alpha_2})^2, (\Psi_m)_r, (\mathcal{M}f_m)_r) + 2I_2((L_\alpha - L_{\bar{\alpha}})^2, \Psi_2, \mathcal{M}f_2) = 0. \quad \square$$

6.2.3 Recollement sur $H \cdot \varpi((\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+)$

En utilisant l'isomorphisme ϖ et les résultats du paragraphe précédent, nous étudions à présent les conditions nécessaires et suffisantes pour que les fonctions Ψ_m et Ψ_2 vérifient les relations (*Rec*) pour tout $f \in \mathcal{D}(H \cdot \varpi((\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+))$.

Pour $P \in \mathbb{C}[Q, S]$ et $f \in \mathcal{D}(\mathcal{U})$, on a de manière immédiate

$$\begin{aligned} \langle \partial(P)T_\Phi, f \rangle - \langle T_{\partial(P)\Phi}, f \rangle &= \int_{\mathfrak{q}} [\Phi(X)\partial(P)f(X) - \partial(P)\Phi(X)f(X)] dX \\ &= \int_{\mathfrak{q}} [\Phi \circ \varpi(X)(\partial(P)f) \circ \varpi(X) - (\partial(P)\Phi) \circ \varpi(X)f \circ \varpi(X)] dX. \end{aligned}$$

Par ailleurs, pour toute application g de classe \mathcal{C}^∞ sur un ouvert de \mathfrak{q} , on a

$$\partial(Q)(g \circ \varpi) = -\partial(Q)(g) \circ \varpi$$

et

$$\partial(S)(g \circ \varpi) = \partial(S)(g) \circ \varpi.$$

Ainsi, comme Φ est solution du système (E_χ) sur \mathfrak{q}^{reg} , la fonction $\Phi \circ \varpi$ est solution du système (E_{χ^-}) sur \mathfrak{q}^{reg} où χ^- est le caractère de $\mathbb{C}[Q, S_0]$ déterminé par $\chi^-(Q) = -\chi(Q) = -(\lambda_1 + \lambda_2)$ et $\chi^-(S_0) = \chi(S_0) = (\lambda_1 - \lambda_2)^2$.

D'autre part, comme $|\delta|$ est ϖ -invariant, on a $|\delta|(\Phi \circ \varpi) = (|\delta|\Phi) \circ \varpi = \tilde{\Psi} \circ \varpi$.

On remarque que les fonctions u et v caractérisant les orbites semi-simples (avec $u + v = Q$ et $uv = S$) satisfont les relations suivantes :

$$\begin{cases} u \circ \varpi(X) = -v(X) \text{ pour } X \in \mathfrak{m} \cap \mathfrak{q}^{reg} \\ \begin{cases} u \circ \varpi(X_{\tau,\theta}) = u(X_{\theta,\tau}) \\ v \circ \varpi(X_{\tau,\theta}) = v(X_{\theta,\tau}) \end{cases} \text{ pour } X_{\tau,\theta} \in \mathfrak{a}_2^{reg} \end{cases} .$$

Ainsi, on obtient

$$\begin{cases} \check{\Psi} \circ \varpi(X) = \Psi_{\mathfrak{m}}(-v(X), -u(X)) = \Psi_{\mathfrak{m}}(-u(X), -v(X)) \text{ pour } X \in \mathfrak{m} \cap \mathfrak{q}^{reg} \\ \check{\Psi} \circ \varpi(X_{\tau,\theta}) = \check{\Psi}(X_{\theta,\tau}) = \Psi_2(\theta, \tau) = \Psi_2(\pm\theta, \pm\tau), \text{ pour } X_{\tau,\theta} \in \mathfrak{a}_2. \end{cases}$$

On introduit alors les fonctions $\check{\Psi}_{\mathfrak{m}}$ et $\check{\Psi}_2$ définies par

$$\begin{cases} \check{\Psi}_{\mathfrak{m}}(t_1, t_2) = \Psi_{\mathfrak{m}}(-t_1, -t_2) & \text{pour } (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } (t_1 - t_2)t_1t_2 \neq 0 \\ \check{\Psi}_2(\tau, \theta) = \Psi_2(\theta, \tau) & \text{pour } (\tau, \theta) \in (\mathbb{R}^*)^2 \end{cases}$$

de telle sorte que $(|\delta|\Phi \circ \varpi)_{\mathfrak{m}} = \check{\Psi}_{\mathfrak{m}}$ et $(|\delta|\Phi \circ \varpi)_2 = \check{\Psi}_2$.

Par ailleurs, pour tout $f \in \mathcal{D}(\mathfrak{q})$, on a $\mathcal{M}_H(f \circ \varpi) = \mathcal{M}_H(f) \circ \varpi$ et $f \in \mathcal{D}(H \cdot \varpi((\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+))$ si et seulement si $f \circ \varpi \in \mathcal{D}(H \cdot (\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+)$. On obtient alors le résultat suivant :

Corollaire 6.2.3. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. La fonction Φ , solution du système (E_{χ}) sur \mathfrak{q}^{reg} , vérifie $\langle \partial(P)T_{\Phi}, f \rangle - \langle T_{\partial(P)\Phi}, f \rangle = 0$ pour tout $f \in \mathcal{D}(H \cdot \varpi((\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+))$ et $P \in \mathbb{C}[Q, S_0]$,
2. Les fonctions $\Psi_{\mathfrak{m}}$ et Ψ_2 vérifient les relations $(\mathcal{R}ec)$ pour tout $f \in \mathcal{D}(H \cdot \varpi((\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+))$,
3. Les fonctions $\check{\Psi}_{\mathfrak{m}}$ et $\check{\Psi}_2$ vérifient les relations $(\mathcal{R}ec)$ pour tout $f \in \mathcal{D}(H \cdot (\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+)$.

La proposition 6.2.3 permet alors d'obtenir le résultat suivant :

Corollaire 6.2.4. *Les trois assertions suivantes sont équivalentes :*

1. Pour tout $f \in \mathcal{D}(H \cdot \varpi((\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+))$, on a

$$I_{\mathfrak{m}}(L_1 + L_2, \Psi_{\mathfrak{m}}, \mathcal{M}f_{\mathfrak{m}}) + 2I_2(L_{\alpha} + L_{\bar{\alpha}}, \Psi_2, \mathcal{M}f_2) = 0.$$

2. Pour tout $\tau > 0$, on a

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \theta}(\check{\Psi}_{\mathfrak{m}})_r(\tau, 0^+) - \frac{\partial}{\partial \theta}\check{\Psi}_2(\tau, 0^+) = 0 \\ \check{\Psi}_2(\tau, 0^+) = 0 \end{cases} .$$

3. Pour tout $f \in \mathcal{D}(H \cdot \varpi((\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+))$ et pour tout $\tau > 0$, on a

$$R_{\theta}((\check{\Psi}_{\mathfrak{m}})_r, (\mathcal{M}(f \circ \varpi)_{\mathfrak{m}})_r)(\tau, 0^+) - R_{\theta}(\check{\Psi}_2, \mathcal{M}(f \circ \varpi)_2)(\tau, 0^+) = 0.$$

Comme la fonction $\Phi \circ \varpi$ est solution du système (E_{χ^-}) sur \mathfrak{q}^{reg} , on obtient alors grâce au corollaire 6.2.2 et à la proposition 6.2.4 :

Corollaire 6.2.5. *1. Les fonctions $\Psi_{\mathfrak{m}}$ et Ψ_2 satisfont l'une des conditions équivalentes du corollaire 6.2.4 précédent si et seulement si il existe $\Psi_{\chi^-}^+ \in \text{Vect}\langle S^+(A, B); (A, B) \in \text{Sol}(L, -\lambda_1) \times \text{Sol}(L, -\lambda_2) \rangle$ et $\Psi_{c, \chi^-} \in \text{Vect}\langle [A, B]; (A, B) \in \text{Sol}(L_c, -\lambda_1) \times \text{Sol}(L_c, -\lambda_2) \rangle$ telles que*

$$\begin{cases} \text{pour } t_1 > t_2 > 0 \text{ alors } \Psi_{\mathfrak{m}}(-t_1, -t_2) = \check{\Psi}_{\mathfrak{m}}(t_1, t_2) = \Psi_{\chi^-}^+(t_1, t_2) + \imath \Psi_{c, \chi^-}(t_1, t_2) \\ \text{pour } \tau > 0 \text{ et } \theta > 0 \text{ alors } \Psi_2(\theta, \tau) = \check{\Psi}_2(\tau, \theta) = \Psi_{c, \chi^-}((\tau + \imath\theta)^2, (\tau - \imath\theta)^2) \end{cases} .$$

2. Dans ce cas, pour tout $f \in \mathcal{D}(H \cdot \varpi((\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+))$, on a

$$I_{\mathfrak{m}}((L_1 - L_2)^2, \Psi_{\mathfrak{m}}, \mathcal{M}f_{\mathfrak{m}}) + 2I_2((L_{\alpha} - L_{\bar{\alpha}})^2, \Psi_2, \mathcal{M}f_2) = 0.$$

6.2.4 Recollement sur \mathcal{U}

La synthèse des résultats des trois paragraphes précédents nous permet de donner maintenant les conditions nécessaires et suffisantes pour que les fonctions Ψ_m et Ψ_2 vérifient les relations (*Rec*) pour tout $f \in \mathcal{D}(\mathcal{U})$. Nous gardons les notations $\check{\Psi}_m$ et $\check{\Psi}_2$ du paragraphe précédent.

Commençons par rechercher les fonctions Ψ_2 compatibles avec les résultats des corollaires 6.2.2 et 6.2.5.

Proposition 6.2.5. *La fonction Ψ_2 satisfait, pour tout $\tau \in \mathbb{R}^*$, les relations*

$$\begin{cases} \Psi_2(\tau, 0^+) = 0 \\ \check{\Psi}_2(\tau, 0^+) = \Psi_2(0^+, \tau) = 0 \end{cases}$$

si et seulement si il existe $\Psi_c \in Vect\langle [\Phi_{\lambda_1}, \Phi_{\lambda_2}], [\Phi_{\lambda_1}, W_{\lambda_2}] + [W_{\lambda_1}, \Phi_{\lambda_2}] \rangle$ telle que, pour tout $(\tau, \theta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, on ait

$$\Psi_2(\tau, \theta) = \Psi_c((\tau + i\theta)^2, (\tau - i\theta)^2).$$

Preuve : Par le corollaire 6.2.2, la condition $\Psi_2(\tau, 0^+) = 0$ implique qu'il existe Ψ_c dans $Vect\langle [A, B]; (A, B) \in Sol(L_c, \lambda_1) \times Sol(L_c, \lambda_2) \rangle$ telle que, pour tout $(\tau, \theta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, on ait

$$\Psi_2(\tau, \theta) = \Psi_c((\tau + i\theta)^2, (\tau - i\theta)^2).$$

Ainsi, on veut déterminer les fonctions Ψ_c de cette forme telles que, pour tout $\tau > 0$, on ait

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \Psi_c((\theta + i\tau)^2, (\theta - i\tau)^2) = 0.$$

On remarque que lorsque A et B sont des fonctions analytiques sur \mathbb{C} , alors, pour $\tau > 0$, on a

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} [A, B]((\theta + i\tau)^2, (\theta - i\tau)^2) = 0.$$

Pour $\tau > 0$, on a $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \log((\theta + i\tau)^2) = \log(\tau^2) + i\pi$ et $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \log((\theta - i\tau)^2) = \log(\tau^2) - i\pi$. Ainsi, en posant $z = (\theta + i\tau)^2$, pour $\tau > 0$, on obtient

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} [A, \log(\cdot)B](z, \bar{z}) = - \lim_{\theta \rightarrow 0^+} [\log(\cdot)A, B](z, \bar{z}) = -2i\pi A(-\tau^2)B(-\tau^2)$$

et

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} [\log(\cdot)A, \log(\cdot)B](z, \bar{z}) = 0.$$

Ainsi, la fonction Ψ_2 paire par rapport à chaque variable, définie sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ par $\Psi_2(\tau, \theta) = [\Phi_{\lambda_1}, \Phi_{\lambda_2}]((\tau + i\theta)^2, (\tau - i\theta)^2)$ vérifie donc la condition $\check{\Psi}_2(\tau, 0^+) = 0$.

Considérons $\Psi_c = \alpha_{12}[\Phi_{\lambda_1}, W_{\lambda_2}] + \alpha_{21}[W_{\lambda_1}, \Phi_{\lambda_2}] + \alpha_{22}[W_{\lambda_1}, W_{\lambda_2}]$. On a donc

$$\begin{aligned} \Psi_c &= \alpha_{12}([\Phi_{\lambda_1}, w_{\lambda_2}] + [\Phi_{\lambda_1}, \log(\cdot)\Phi_{\lambda_2}]) + \alpha_{21}([w_{\lambda_1}, \Phi_{\lambda_2}] + [\log(\cdot)\Phi_{\lambda_1}, \Phi_{\lambda_2}]) \\ &+ \alpha_{22}([w_{\lambda_1}, w_{\lambda_2}] + [\log(\cdot)\Phi_{\lambda_1}, w_{\lambda_2}] + [w_{\lambda_1}, \log(\cdot)\Phi_{\lambda_2}] + [\log(\cdot)\Phi_{\lambda_1}, \log(\cdot)\Phi_{\lambda_2}]) \end{aligned}$$

et par suite

$$\check{\Psi}_2(\tau, 0^+) = -2i\pi(\alpha_{12} - \alpha_{21})\Phi_{\lambda_1}(-\tau^2)\Phi_{\lambda_2}(-\tau^2)$$

$$-2i\pi\alpha_{22}(w_{\lambda_1}(-\tau^2)\Phi_{\lambda_2}(-\tau^2) - w_{\lambda_2}(-\tau^2)\Phi_{\lambda_1}(-\tau^2)) = 0.$$

On rappelle que $w_{\lambda_k}(t) = 2\gamma + (1 + 2\gamma)\frac{\lambda_k t}{4} + o_{t \rightarrow 0^-}(t)$ et $\Phi_{\lambda_k}(t) = 1 + \frac{\lambda_k t}{4} + o_{t \rightarrow 0^-}(t)$ ce qui donne

$$\alpha_{12} - \alpha_{21} = \alpha_{22} = 0,$$

et donc $\Psi_c = \alpha_{1,2}([\Phi_{\lambda_1}, W_{\lambda_2}] + [W_{\lambda_1}, \Phi_{\lambda_2}])$.

Finalement, les conditions $\Psi_2(\tau, 0^+) = \check{\Psi}_2(\tau, 0^+) = 0$ implique $\Psi_c \in \text{Vect}\langle[\Phi_{\lambda_1}, \Phi_{\lambda_2}], [\Phi_{\lambda_1}, W_{\lambda_2}] + [W_{\lambda_1}, \Phi_{\lambda_2}]\rangle$. La réciproque est immédiate. \square

Remarque 6.2.7. Pour $\lambda \in \mathbb{C}^*$, les solutions fondamentales Φ_λ et $W_\lambda = w_\lambda + \log(\cdot)\Phi_\lambda$ de $\text{Sol}(L_c, \lambda)$ vérifient, pour tout $z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$,

$$\Phi_\lambda(-z) = \Phi_{-\lambda}(z) \quad \text{et} \quad w_\lambda(-z) = w_{-\lambda}(z).$$

Par suite, pour $(z_1, z_2) \in (\mathbb{C} - \mathbb{R})^2$, on a les relations suivantes

$$\begin{aligned} [\Phi_{-\lambda_1}, \Phi_{-\lambda_2}](z_1, z_2) &= [\Phi_{\lambda_1}, \Phi_{\lambda_2}](-z_1, -z_2), \\ ([\Phi_{-\lambda_1}, W_{-\lambda_2}] + [W_{-\lambda_1}, \Phi_{-\lambda_2}])(z_1, z_2) \\ &= ([\Phi_{\lambda_1}, w_{\lambda_2}] + [w_{\lambda_1}, \Phi_{\lambda_2}])(-z_1, -z_2) + \log(z_1 z_2)[\Phi_{\lambda_1}, \Phi_{\lambda_2}](-z_1, -z_2). \end{aligned}$$

Ainsi, pour $\Psi_c \in \text{Vect}\langle[\Phi_{\lambda_1}, \Phi_{\lambda_2}], [\Phi_{\lambda_1}, W_{\lambda_2}] + [W_{\lambda_1}, \Phi_{\lambda_2}]\rangle$, la fonction Ψ_2 paire en chaque variable définie sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ par $\Psi_2(\tau, \theta) = \Psi_c((\tau + i\theta)^2, (\tau - i\theta)^2)$ vérifie

$$\check{\Psi}_2(\tau, \theta) = \Psi_{c, \chi^-}((\tau + i\theta)^2, (\tau - i\theta)^2)$$

où $\Psi_{c, \chi^-} \in \text{Vect}\langle[A, B]; (A, B) \in \text{Sol}(L_c, -\lambda_1) \times \text{Sol}(L_c, -\lambda_2)\rangle$ satisfait $\Psi_{c, \chi^-}(z_1, z_2) = -\Psi_c(-z_1, -z_2)$ sur $(\mathbb{C} - \mathbb{R})^2$. Le résultat du lemme précédent est donc compatible avec celui du corollaire 6.2.5.

Définition 6.2.4. On définit la fonction $\mathcal{S}_{\lambda_1, \lambda_2}$ sur $(\mathbb{C}^*)^2$ par

$$\mathcal{S}_{\lambda_1, \lambda_2}(z_1, z_2) = ([\Phi_{\lambda_1}, w_{\lambda_2}] + [w_{\lambda_1}, \Phi_{\lambda_2}])(z_1, z_2) + \log|z_1 z_2|[\Phi_{\lambda_1}, \Phi_{\lambda_2}](z_1, z_2)$$

de telle sorte que

1. $\mathcal{S}_{\lambda_1, \lambda_2}(z, \bar{z}) = ([\Phi_{\lambda_1}, W_{\lambda_2}] + [W_{\lambda_1}, \Phi_{\lambda_2}])(z, \bar{z}) = ([\Phi_{\lambda_1}, w_{\lambda_2}] + [w_{\lambda_1}, \Phi_{\lambda_2}])(z, \bar{z}) + \log|z|^2[\Phi_{\lambda_1}, \Phi_{\lambda_2}](z, \bar{z})$, pour tout $z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$.
2. $\mathcal{S}_{\lambda_1, \lambda_2}(t_1, t_2) = ([\Phi_{\lambda_1}, W_{\lambda_2}^r] + [W_{\lambda_1}^r, \Phi_{\lambda_2}^r])(t_1, t_2) = ([\Phi_{\lambda_1}, w_{\lambda_2}] + [w_{\lambda_1}, \Phi_{\lambda_2}])(t_1, t_2) + \log|t_1 t_2|[\Phi_{\lambda_1}, \Phi_{\lambda_2}](t_1, t_2)$, pour tout $(t_1, t_2) \in (\mathbb{R}^*)^2$.

Théorème 6.2.1. Les fonctions Ψ_m et Ψ_2 vérifient les conditions $(\mathcal{R}ec)$ pour tout $f \in \mathcal{D}(\mathcal{U})$ si et seulement si il existe $\Psi^+ \in \text{Vect}\langle S^+(A, B); (A, B) \in \text{Sol}(L, \lambda_1) \times \text{Sol}(L, \lambda_2)\rangle$ et $\Psi^- \in \text{Vect}\langle[\Phi_{\lambda_1}, \Phi_{\lambda_2}], \mathcal{S}_{\lambda_1, \lambda_2}\rangle$ telles que, pour tout $(t_1, t_2) \in (\mathbb{R}^*)^2 - \text{diag}$ et $(\tau, \theta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, on ait les relations

$$\Psi_m(t_1, t_2) = \Psi^+(t_1, t_2) + \text{isigne}(t_1 - t_2)\Psi^-(t_1, t_2)$$

et

$$\Psi_2(\tau, \theta) = \Psi^-((\tau + i\theta)^2, (\tau - i\theta)^2).$$

Preuve : On suppose tout d'abord que Ψ_m et Ψ_2 vérifient les conditions ($\mathcal{R}ec$) pour tout $f \in \mathcal{D}(\mathcal{U})$. Par la proposition 6.2.2 et le corollaire 6.2.4, on a $\Psi_2(\tau, 0^+) = \Psi_2(0^+, \tau) = 0$ pour tout $\tau \in \mathbb{R}^*$. La proposition 6.2.5 donne alors l'existence de $\Psi^- \in Vect\langle [\Phi_{\lambda_1}, \Phi_{\lambda_2}], \mathcal{S}_{\lambda_1, \lambda_2} \rangle$ telle que pour tout $(\tau, \theta) \in (\mathbb{R}^*)^2$, on ait $\Psi_2(\tau, \theta) = \Psi^-((\tau + i\theta)^2, (\tau - i\theta)^2)$. Par les corollaires 6.2.1 et 6.2.2 et les propriétés de symétries de Ψ_m , il existe $\Psi^+ \in Vect\langle S^+(A, B); (A, B) \in \mathcal{S}ol(L, \lambda_1) \times \mathcal{S}ol(L, \lambda_2) \rangle$ telle que, pour tout $(t_1, t_2) \in (\mathbb{R}^*)^2 - diag$, on ait $\Psi_m(t_1, t_2) = \Psi^+(t_1, t_2) + isigne(t_1 - t_2)\Psi^-(t_1, t_2)$. Maintenant les propriétés des fonctions $[\Phi_{\lambda_1}, \Phi_{\lambda_2}]$ et $\mathcal{S}_{\lambda_1, \lambda_2}$ montrent que les fonctions Ψ_m et Ψ_2 satisfont alors les propriétés du corollaire 6.2.5.

Réciproquement, on suppose que les fonctions Ψ_m et Ψ_2 sont données par $\Psi_m(t_1, t_2) = \Psi^+(t_1, t_2) + isigne(t_1 - t_2)\Psi^-(t_1, t_2)$, pour tout $(t_1, t_2) \in (\mathbb{R}^*)^2 - diag$ et par $\Psi_2(\tau, \theta) = \Psi^-((\tau + i\theta)^2, (\tau - i\theta)^2)$, pour tout $(\tau, \theta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ où $\Psi^+ \in Vect\langle S^+(A, B); (A, B) \in \mathcal{S}ol(L, \lambda_1) \times \mathcal{S}ol(L, \lambda_2) \rangle$ et $\Psi^- \in Vect\langle [\Phi_{\lambda_1}, \Phi_{\lambda_2}], \mathcal{S}_{\lambda_1, \lambda_2} \rangle$. Ainsi, les résultats des paragraphes précédents assurent que les fonctions Ψ_m et Ψ_2 satisfont les relations ($\mathcal{R}ec$) pour toute fonction g dont le support est contenu soit dans $H \cdot \mathfrak{m} \cap \mathfrak{q}$ (corollaire 6.2.1 et proposition 6.2.2), soit dans $H \cdot (\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+$ (corollaire 6.2.2 et proposition 6.2.4), ou encore dans $H \cdot \varpi((\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+)$ (corollaire 6.2.5).

Soit $f \in \mathcal{D}(\mathcal{U})$. Comme $\mathcal{U} = H \cdot \mathfrak{m} \cap \mathfrak{q} \cup H \cdot (\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+ \cup H \cdot \varpi((\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+)$, le théorème de partition de l'unité assure l'existence de fonctions φ_m , φ_3 et φ_3^- de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathfrak{q} telles que

- (a) $Support(\varphi_m) \subset H \cdot \mathfrak{m} \cap \mathfrak{q}$, $Support(\varphi_3) \subset H \cdot (\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+$, et $Support(\varphi_3^-) \subset H \cdot \varpi((\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+)$,
- (b) $\mathbf{1}_{supp(f)} \leq \varphi_m + \varphi_3 + \varphi_3^- \leq 1$.

Ainsi, on a $f = \varphi_m f + \varphi_3 f + \varphi_3^- f$ et par suite Ψ_m et Ψ_2 satisfont les relations ($\mathcal{R}ec$) pour la fonction f par ce qui précède. \square

Remarque 6.2.8. *L'expression de la fonction Ψ_2 dépendait jusqu'à présent du choix de la détermination du logarithme choisie pour décrire le système fondamental de solutions de $Sol_{L_c, \lambda}$ à travers la fonction Ψ_c . L'expression obtenue pour Ψ_2 dans le théorème ci-dessus en terme de la fonction $\mathcal{S}_{\lambda_1, \lambda_2}$ montre qu'elle est indépendante de ce choix.*

Soient Ψ_m et Ψ_2 satisfaisant les hypothèses du théorème précédent. Les fonctions $\tilde{\Psi}$ et $\Phi = \frac{\tilde{\Psi}}{|\delta|}$ s'expriment alors de la manière suivante en terme des fonctions u et v , qui caractérisent les orbites semi-simples. On rappelle que ces fonctions satisfont les relations suivantes :

$$u(X) + v(X) = Q(X) = \frac{1}{2}tr(X^2), \quad u(X)v(X) = S(X) = det(X) \text{ et } u(X) - v(X) = \delta(X).$$

Comme pour $X \in \mathfrak{m} \cap \mathfrak{q}$, on a $u(X) - v(X) = \delta(X) = |\delta(X)| \geq 0$ et pour $X \in \mathfrak{a}_2$, on a $|\delta|(X) = -\delta(X)$ et $u(X) = v(X)$, nous obtenons l'expression suivante :

$$\tilde{\Psi}(X) = \begin{cases} \Psi^+(u(X), v(X)) + i\Psi^-(u(X), v(X)) & \text{si } X \in \mathfrak{m} \cap \mathfrak{q}^{reg} \\ \Psi^-(u(X), v(X)) & \text{si } X \in \mathfrak{a}_2^+ \end{cases},$$

Par ailleurs, pour tout $X \in \mathfrak{q}^{reg}$, on a

$$\mathcal{S}_{\lambda_1, \lambda_2}(u(X), v(X)) = ([\Phi_{\lambda_1}, w_{\lambda_2}] + [w_{\lambda_1}, \Phi_{\lambda_2}])(u(X), v(X)) + (\log |S(X)|)[\Phi_{\lambda_1}, \Phi_{\lambda_2}](u(X), v(X)).$$

On introduit alors les fonctions suivantes

$$F_{ana} := \frac{[\Phi_{\lambda_1}, \Phi_{\lambda_2}](u, v)}{u - v},$$

$$F_{sing} := \frac{[\Phi_{\lambda_1}, w_{\lambda_2}](u, v) + [w_{\lambda_1}, \Phi_{\lambda_2}](u, v)}{u - v} + \log |uv| \frac{[\Phi_{\lambda_1}, \Phi_{\lambda_2}](u, v)}{u - v}$$

et

$$F_{A,B}^+ := Y(S_0) \frac{S^+(A, B)(u, v)}{u - v},$$

avec $(A, B) \in \{(\Phi_{\lambda_1}, \Phi_{\lambda_2}), (\Phi_{\lambda_1}, W_{\lambda_2}^r), (W_{\lambda_1}^r, \Phi_{\lambda_2}), (W_{\lambda_1}^r, W_{\lambda_2}^r)\}$ (On rappelle que le polynôme $S_0 = Q^2 - 4S$ est à valeurs réelles sur \mathfrak{q} et $S_0(X) \geq 0$ si et seulement si $X \in H \cdot \mathfrak{m} \cap \mathfrak{q}$.)

Théorème 6.2.2. 1. Les fonctions F_{ana} , F_{sing} et $F_{A,B}^+$, avec $(A, B) \in \{(\Phi_{\lambda_1}, \Phi_{\lambda_2}), (\Phi_{\lambda_1}, W_{\lambda_2}^r), (W_{\lambda_1}^r, \Phi_{\lambda_2}), (W_{\lambda_1}^r, W_{\lambda_2}^r)\}$ sont localement intégrables sur \mathcal{U} .

2. Ces fonctions forment une base des distributions propres invariantes sur \mathcal{U} données par une fonction de $L_{loc}^1(\mathcal{U})^H$.

Preuve : Soit F l'une des fonctions F_{ana} , F_{sing} ou $F_{A,B}^+$. Il suffit de montrer que, pour toute fonction f positive de $\mathcal{D}(\mathcal{U})$, l'intégrale $\int_{\mathfrak{q}} f |F|$ est finie. En notant, comme précédemment $\tilde{\Psi} = |\delta|F$, ceci revient à montrer grâce à la formule d'intégration de Weyl que, pour toute fonction f positive de $\mathcal{D}(\mathcal{U})$, la somme $\Sigma(f) = \int_{t_1 > t_2} |\Psi_{\mathfrak{m}}|(t_1, t_2) \mathcal{M}f_{\mathfrak{m}}(t_1, t_2) dt_1 dt_2 + 8 \int_{\substack{\tau > 0 \\ \theta > 0}} |\Psi_2|(\tau, \theta) \mathcal{M}f_2(\tau, \theta) (\tau^2 + \theta^2) d\theta d\tau$ est finie.

Par partition de l'unité, il existe des fonctions $f_{\mathfrak{m}}$, f_3 et g_3 de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathfrak{q} de support inclus respectivement dans $H \cdot \mathfrak{m} \cap \mathfrak{q}$, $H \cdot (\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+$ et $H \cdot \varpi((\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+)$ telles que $f = f_{\mathfrak{m}} + f_3 + g_3$. La convergence des intégrales $\Sigma(g)$ pour $g = f_{\mathfrak{m}}$, f_3 ou g_3 découle des remarques 6.2.1, 6.2.5 et 6.2.6 (voir preuves des lemmes 6.2.1 et 6.2.3) ce qui donne la première assertion.

La deuxième assertion est alors une conséquence immédiate du théorème 6.2.1. \square

6.3 Perspectives sur les distributions propres invariantes de $L_{loc}^1(\mathfrak{q})^H$

Nous allons donner d'abord un lemme qui nous permettra de préciser la régularité des fonctions trouvées dans le théorème 6.2.2.

Lemme 6.3.1. Les fonctions F_{ana} et F_{sing} s'expriment sous la forme suivante :

$$F_{ana} = f_{ana}(Q, S_0) \quad \text{et} \quad F_{sing} = f_s(Q, S_0) + \log |S| g_s(Q, S_0)$$

où les fonctions f_{ana} , f_s et g_s sont holomorphes sur \mathbb{C} .

Preuve : Soient f et g deux fonctions holomorphes sur \mathbb{C} dont la série entière en zéro est de rayon de convergence infini. Alors, pour $(x, h) \in \mathbb{C}^2$, on a

$$f(x+h)g(x-h) - f(x-h)g(x+h) = h \int_{-1}^1 (f'(x+th)g(x-th) - f(x+th)g'(x-th))dt.$$

Ainsi, la fonction $(x, h) \mapsto \frac{f(x+h)g(x-h) - f(x-h)g(x+h)}{h}$ est holomorphe sur \mathbb{C}^2 . D'autre part, cette fonction est paire par rapport à h , donc elle admet un développement en série entière sur \mathbb{C}^2 de la forme $\sum_{0 \leq k, l} a_{k, l} x^k h^{2l}$.

Maintenant, pour $X \in \mathfrak{q}$, on considère $x = \frac{Q}{2}(X)$ et $h = \frac{\delta}{2}(X)$ de telle sorte que $u(X) = x + h$ et $v(X) = x - h$. On obtient alors

$$\frac{[f, g](u, v)}{\delta} = \sum_{0 \leq k, l} \frac{a_{k, l}}{2^{k+2l}} Q^k \delta^{2l} = \sum_{0 \leq k, l} \frac{a_{k, l}}{2^{k+2l}} Q^k S_0^l.$$

Les définitions de F_{ana} et F_{sing} donnent alors le résultat voulu . \square

Remarque 6.3.1. *La fonction $\delta = u - v$ correspond à un choix de racine carré du polynôme $S_0 = Q^2 - 4S$. Le lemme précédent exprime les fonctions F_{ana} et F_{sing} uniquement en terme des polynômes Q et S . Ces fonctions sont donc indépendantes du choix de cette racine carré.*

Corollaire 6.3.1. *L'espace des distributions propres invariantes sur \mathfrak{q} définies par une fonction analytique sur \mathfrak{q} est engendré par F_{ana} .*

Preuve : Comme les opérateurs $\partial(Q)$ et $\partial(S)$ sont polynomiaux, une simple intégration par parties sur \mathfrak{q} assure que F_{ana} définit bien une distribution propre invariante sur \mathfrak{q} . Le résultat voulu est alors immédiat. \square

Proposition 6.3.1. *La fonction F_{sing} est dans $L_{loc}^1(\mathfrak{q})^H$.*

Preuve : Il suffit de montrer que $\log |S|$ est localement intégrable sur \mathfrak{q} . Ainsi il suffit de montrer que pour toute fonction positive χ dans $\mathcal{D}(\mathfrak{q})$, l'intégrale $\int_{\mathfrak{q}} |\log |S|| \chi$ est finie.

On a la décomposition $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}_1 \oplus \mathfrak{q}_2$, où

$$\mathfrak{q}_1 = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} 0 & A \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right); A \in M_2(\mathbb{R}) \right\} \quad \text{et} \quad \mathfrak{q}_2 = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline B & 0 \end{array} \right); B \in M_2(\mathbb{R}) \right\}.$$

Soient \mathcal{Q}_1 (respectivement \mathcal{Q}_2) la forme quadratique définie sur \mathfrak{q}_1 (respectivement \mathfrak{q}_2) par

$$\mathcal{Q}_1 \left(\left(\begin{array}{c|c} 0 & A \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) \right) = \det(A) \quad \left(\text{respectivement} \quad \mathcal{Q}_2 \left(\left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline B & 0 \end{array} \right) \right) = \det(B) \right).$$

Ainsi on a

$$\begin{aligned} \int_{\mathfrak{q}} |\log |S(X)|| \chi(X) dX &= \int_{\mathfrak{q}_1 \times \mathfrak{q}_2} |\log |\mathcal{Q}_1(X_1)| + \log |\mathcal{Q}_2(X_2)|| \chi(X_1 + X_2) dX_1 dX_2 \\ &\leq \int_{\mathfrak{q}_1 \times \mathfrak{q}_2} (|\log |\mathcal{Q}_1(X_1)|| + |\log |\mathcal{Q}_2(X_2)||) \chi(X_1 + X_2) dX_1 dX_2 \end{aligned}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} (|\log |t_1|| + |\log |t_2||) M_{\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2} \chi(t_1, t_2) dt_1 dt_2,$$

grâce à la relation 7 et au lemme 3.2.1.

Comme les formes quadratiques \mathcal{Q}_1 et \mathcal{Q}_2 sont de signature $(2, 2)$, alors le théorème 3.2.1 permet d'affirmer que $M_{\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2} \chi(t_1, t_2)$ s'écrit sous la forme

$$\chi(t_1, t_2) = a(t_1, t_2) + |t_1|b(t_1, t_2) + |t_2|c(t_1, t_2) + |t_1 t_2|d(t_1, t_2),$$

où a , b , c et d sont dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$. Ainsi la dernière intégrale est convergente. D'où le résultat. \square

La méthode de descente utilisée pour l'étude de l'intégrale orbitale $\mathcal{M}_H(f)$ d'une fonction f de $\mathcal{D}(\mathfrak{q})$ ne permet pas de décrire le comportement de $\mathcal{M}_H(f)$ au voisinage de 0.

Ainsi, il ne nous est pas possible de préciser l'intégrabilité sur \mathfrak{q} ou non des fonctions de la forme $F_{A,B}^+$ avec $(A, B) \in \{(\Phi_{\lambda_1}, \Phi_{\lambda_2}), (\Phi_{\lambda_1}, W_{\lambda_2}^r), (W_{\lambda_1}^r, \Phi_{\lambda_2}), (W_{\lambda_1}^r, W_{\lambda_2}^r)\}$.

Pour la même raison, les intégrations par parties effectuées dans le paragraphe 6.2 ne sont pas forcément licites pour $f \in \mathcal{D}(\mathfrak{q})$. Par suite, bien que la fonction F_{sing} soit localement intégrable sur \mathfrak{q} , nous ne pouvons pas affirmer que cette fonction définit une distribution propre invariante sur \mathfrak{q} tout entier.

Références

- [1] S. Aoki et S. Kato, "On Invariant Eigendistributions on $U(p, q)/U(r) \times U(p - r, q)$ ", Proc. Japan Acad., Vol 67 Serie A, 1991, p. 203-207.
- [2] S. Aoki et S. Kato, "Matching conditions for invariant eigendistributions on some semi-simple symmetric spaces", Lie theory and its applications in physics V : Proceedings of the Fifth international workshp, World Scientific Publishinc, 2004, p 74-83.
- [3] E.P. van den Ban, M. Flensted-Jensen, H. Schlichtkrull, "Harmonic Analysis on semisimple symmetric spaces. A survey of some general results," Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, Vol. 61, 1997, p. 191-217.
- [4] E.P. van den Ban, H. Schlichtkrull, "A Paley-Wiener theorem for reductive symmetric spaces", Annals of Math. 164 (3), 2006, p. 879-909.
- [5] E.P. van den Ban, H. Schlichtkrull, "The Plancherel decomposition for a reductive symmetric space II", Invent. Math. 161 (3), 2005, p. 567-628.
- [6] A. Bouaziz, "Intégrales orbitales sur les algèbres de Lie réductives", Invent. math., Vol. 115, 1994, p.163-207.
- [7] P. Delorme, "Formule de Plancherel pour les espaces symétriques réductifs", Annals of Math., second series, Vol. 147, numéro 2, 1998, p 417-452.
- [8] C.F. Dunkl, "Differential difference operators associated to reflection groups", Trans. Amer. Math. Soc., Vol. 331, 1989, p.167-183.
- [9] J. Faraut et K. Harzallah, "Deux cours d'analyse harmonique", Progress in Mathematics, Vol. 69, Birkaüser Boston Inc., Boston, MA, 1987, Papers from the Tunis summer school held in Tunis, August 27-September 15, 1984.
- [10] J. Faraut, "Distributions sphériques sur les espaces hyperboliques," J.Math.Pures.Appl., Vol. 58, 1979, p 359-444.
- [11] J. Faraut, "Noyaux sphériques sur un hyperboloïde à une nappe," Lecture Notes in Math., Vol 497, Springer-Verlag, Berlin and New-York, 1973.

- [12] Harish-Chandra, "Invariant distributions on Lie algebras," Amer. J. Math., Vol. 86, 1964, p. 271-309.
- [13] Harish-Chandra, "Harmonic analysis on real reductive group III. The Maass-Selberg relations and the Plancherel formula," Annals of math., Vol. 104, 1976, p. 1-55.
- [14] P. Harinck, "Fonctions orbitales sur $G_{\mathbb{C}}/G_{\mathbb{R}}$. Formule d'inversion des intégrales orbitales et formule de Plancherel," J. Fonct. Anal., Vol. 153, 1998, p. 52-107.
- [15] G.J. Heckman "A remark on the Dunkl differential-difference operators," Proc. of the Bowdoin conference on harmonic analysis on reductive groups, 1989.
- [16] T. Hiraï, "Invariant eigendistribution of Laplace operators on real simple Lie groups. I. Case of $SU(p, q)$ " Japan J. of Math., Vol. 40, 1970, p. 1-68.
- [17] L. Hörmander, "The analysis of linear partial differential operators I. Distribution theory and Fourier analysis", Classics in Math., Springer 1990.
- [18] L. Hörmander, "An introduction to complex analysis in several variables," North-Holland Mathematical Library, Third Edition
- [19] E.L. Ince, "Ordinary Differential Equations," Dover Publications, Inc., 1956.
- [20] E.M. Opdam, "Dunkl operators, Bessel functions and the discriminant of a finite Coxeter group", Compositio Mathematica, tome 85, n^o3, 1993, p.333-373.
- [21] J. Orloff, "Orbital integrals on symmetric spaces, Noncommutative harmonic analysis and Lie groups" (Marseille-Luminy, 1985), Lecture Notes in Math., Vol 1243, Springer, Berlin, 1987, p. 198-239.
- [22] S. Sano, "Distributions sphériques invariantes sur l'espace semi-simple et son c-dual", Lect. Notes Math., vol. 1243, Springer-Verlag, Berlin, New-York, 1985.
- [23] S. Sano, "Distributions sphériques invariantes sur les espaces symétriques semi-simples G_c/G ", Journal of Math. of Kyoto University, vol. 31, 2 1991, p 377-417.
- [24] J. Sekiguchi, "Invariant spherical hyperfunctions on the tangent space of a symmetric space", Algebraic groups and related topics, Advanced Studies in Pure Mathematics, vol. 6, 1985, p. 83-126.
- [25] A. Tengstrand, "Distributions invariant under an orthogonal group of arbitrary signature", Math. Scand. 8 (1960), 201-218.
- [26] C. Torossian, "Intégrales Orbitales et distributions sphériques singulières pour les espaces symétriques de rang 1" Exposé du vendredi 4 Novembre 2004 au groupe de Recherche *Analyse Harmonique Invariante sur les Espaces Symétriques Réductifs*.
- [27] C. Torossian, "Deux résultats autour du théorème de restriction de Chevalley," Journal of Lie Theory, Vol 7, 2007, p.583-590.
- [28] C.Torossian, "Un théorème d'unicité pour les distributions sphériques sur l'espace tangent à un espace symétrique". Proceedings of the Japan Academy, Vol. 10 Serie A, 1996, p. 230-232.
- [29] V. S. Varadarajan, "Harmonic Analysis on Real Reductive Groups," Lecture Notes in Mathematics, Vol 576, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 1977.
- [30] G. Van Dijk, "Invariant eigendistributions on the tangent space of a rank one semisimple symmetric space," Math. Ann., Vol. 268, 1984, p. 405-416.