ParisTech
INSTITUT DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES
PARIS INSTITUTE OF TECHNOLOGY

MINES ParisTech

École doctorale n°364 : Sciences Fondamentales et Appliquées

Doctorat ParisTech

THÈSE

pour obtenir le grade de docteur délivré par

l'École nationale supérieure des mines de Paris

Spécialité « mécanique numérique »

présentée et soutenue publiquement par

Rachid El khaoulani El idrissi

le 20 Janvier 2010

Prédiction fiable de l'endommagement ductile par la méthode des éléments finis mixtes : endommagement non local et adaptation de maillage

Directeur de thèse : **Pierre-Olivier Bouchard**
Co-encadrement de la thèse : **François Bay**

Jury

M. F.X. Roux, Professeur, ONERA & U.P.M.C.	Président
M. K. Saanouni, Professeur, U.T.T.	Rapporteur
M. N. Moës, Professeur, Centrale Nantes	Rapporteur
M. M. Thonnerieux, Ingénieur, CETIM	Examinateur
M. F. Bay, Professeur, CEMEF, Mines ParisTech	Directeur de thèse
M. P.O. Bouchard, Maitre de conférence, CEMEF, Mines ParisTech	Directeur de thèse

THÈSE

MINES ParisTech
CEMEF - UMR CNRS 7635
Mines ParisTech, Rue Claude Daunesse, 06904 Sophia Antipolis

Je dédie cette thèse de doctorat
à ma famille, à mes parents,
à mes frères et sœurs,
et à ma chère femme

Remerciements

C'est avec mon enthousiasme le plus vif et le plus sincère que je voudrais exprimer ma profonde gratitude, mes remerciements chaleureux et ma reconnaissance :

Aux membres du jury et professeurs pour l'intérêt qu'ils ont porté à mes travaux de thèse : *K. Saanouni* et *N. Moës* d'avoir accepté la lourde tâche de rapporteur et *F.X. Roux* qui m'a fait l'honneur de présider mon jury, je le remercie beaucoup.

A mon directeur de thèse *P.O. Bouchard*, qui a été toujours présent au cours de la réalisation de cette thèse, par ses connaissances du sujet, ses conseils très précieux et sa disponibilité. La qualité finale de mon travail doit beaucoup à nos échanges scientifiques et humains pendant ces trois années.

Au chef du groupe M3P F. Bay pour m'avoir accueilli au sein de son équipe et qui a gardé un œil sur l'avancement de mes travaux. Je remercie également tous les membres de son équipe, ils ont toujours su y faire régner une ambiance sympathique et travailleuse.

A tous les partenaires industriels du *CETIM* et de *Tranvalor M. Thonnerieux*, *R. Spataro* ..., et toute l'équipe du projet *MONALISA* pour nos échanges scientifiques lors des journées cotech et de l'intérêt qu'ils ont manifesté pour mes travaux.

Au professeur *M. Charkani*, qui m'a volontiers apporté son aide à un moment importante de mes études.

A mes amis doctorants, stagiaires, post-docs et permanents du CEMEF pour les divers échanges enrichissants que nous avons eus. Merci à *H. Digonnet* et *J. Bruchon* pour leur aide à développer dans la librairie *CimLib*. Merci à tous mes collègues de bureau. Je saisis l'occasion pour témoigner toute ma fraternité et mon amitié à *Omar*, *Hicham*, *Larbi*, *Emile* et d'autres pour leur gentillesse, leur soutien moral tout au long de la réalisation de ces travaux et pour les inoubliables moments passés ensemble.

A mes parents, je souhaite adresser un remerciement spécial, pour leur dévouement sans égal, leur affection sans limite et leur support sans faille.

A mes frères et sœurs, pour leur soutien, leur humour et leur encouragement permanent.

A mon épouse *Houda*, dont l'écoute, la patience et le support m'ont toujours fait du bien, et qui a toujours su m'alimenter, autant par ses idées que par ses recettes de cuisine traditionnelle marocaine !

Pour terminer, je ne serais peut-être jamais riche mais je conserverai toujours en mémoire le bien que chacun de vous m'a transmis.

Ce mémoire est entièrement écrit en français, et je fais mon dernier mot de remerciements en arabe : ***choukran lakom jamiaen.*** [1]

[1] merci à vous tous

Sommaire

Remerciements **4**

Introduction générale **8**

Plan de la thèse **12**

1 Modélisation des procédés induisant des grandes déformations plastiques **14**
1.1 Introduction . . . 15
1.2 Équations du modèle . . . 15
1.2.1 Équation de l'équilibre dynamique . . . 16
1.3 Loi de comportement . . . 17
1.3.1 Loi de comportement élastique . . . 17
1.3.2 Loi de comportement élastoplastique . . . 19
1.3.3 Évolution de la surface charge : écrouissage . . . 21
1.4 Endommagement . . . 22
1.4.1 Physique de l'endommagement ductile . . . 22
1.4.2 Modèle d'endommagement de Chaboche-Lemaitre . . . 24
1.5 Enrichissement du modèle d'endommagement . . . 28
1.5.1 Effet de fermeture de fissures . . . 28
1.5.2 Limite de triaxialité en compression . . . 30
1.6 Conclusion . . . 32

2 Intégration numérique d'une loi élastoplastique endommageable dans une formulation mixte vitesse-pression **33**
2.1 Introduction . . . 34
2.2 Intégration du problème mécanique global . . . 34
2.2.1 Rappel des équations . . . 34
2.2.2 Formulation faible vitesse pression . . . 35
2.2.3 Discrétisation éléments finis . . . 35
2.3 Intégration de la loi de comportement élastoplastique endommageable . . . 40
2.3.1 Schéma numérique et intégration de la loi constitutive . . . 40
2.3.2 Opérateur tangent cohérent . . . 43
2.3.3 Algorithme d'intégration locale . . . 45
2.4 Validations numériques . . . 46
2.4.1 Élasticité linéaire : cas test de la plaque trouée . . . 46
2.4.2 Élastoplasticité : cylindre sous pression interne . . . 50

2.4.3 Endommagement . . . 53
2.5 Conclusion . . . 58

3 Modèle d'endommagement non local 59
3.1 Introduction . . . 60
3.2 Phénomène d'adoucissement . . . 61
3.3 Phénomène de localisation . . . 61
3.4 Modèles de régularisation . . . 63
3.5 Modèle d'endommagement non local . . . 63
3.5.1 Formulation intégrale . . . 65
3.5.2 Formulation à gradient . . . 66
3.5.3 Approximation éléments finis . . . 67
3.6 Couplage de l'endommagement non local avec la loi de comportement . . . 69
3.7 Modélisation de la rupture ductile : élimination des éléments complètement endommagés . . . 70
3.8 Exemples numériques . . . 73
3.9 Conclusion . . . 78

4 Adaptation anisotrope de maillage au phénomène d'endommagement 79
4.1 Introduction . . . 80
4.2 Métrique . . . 81
4.2.1 Définitions . . . 81
4.2.2 Maillage unité . . . 82
4.2.3 Intersection de métriques . . . 83
4.3 Motivations de l'adaptation anisotrope de maillage . . . 84
4.4 Estimateur d'erreur a posteriori . . . 84
4.5 Majoration locale de l'erreur d'interpolation . . . 85
4.6 Formulation anisotrope de l'erreur locale d'interpolation . . . 87
4.7 Construction de la métrique . . . 88
4.8 Construction de la matrice hessienne . . . 88
4.9 Adaptation de maillage pilotée par une métrique . . . 90
4.10 Schéma d'adaptation . . . 93
4.11 Validations numériques . . . 93
4.11.1 Traction simple d'une éprouvette en 2D . . . 93
4.11.2 Traction uni-axiale d'une éprouvette cylindrique entaillée . . . 102
4.11.3 Écrasement d'un lopin en tonneau . . . 112
4.12 Conclusion . . . 117

5 Méthodes multigrilles 118
5.1 Introduction . . . 119
5.2 Motivations . . . 120
5.3 Méthodes multigrilles . . . 120
5.3.1 Méthodes multigrilles algébriques . . . 121
5.3.2 Méthodes multigrilles géométriques . . . 122
5.4 Algorithme multigrille . . . 129
5.4.1 Algorithme bigrille . . . 129

5.4.2 Algorithme multigrille 130
5.4.3 Cycle multigrille 131
5.5 Préconditionnement MG 132
5.6 Validations numériques 133
5.7 Conclusion 138

Conclusions et perspectives **139**

Bibliographie **141**

Résumé **147**

Abstract **148**

Introduction générale

Un des défis industriels actuel est d'optimiser les procédures de conception afin de répondre à des exigences techniques et économiques de plus en plus fortes. En particulier, les industries automobile, aéronautique, de l'emballage et de l'électroménager ... ont recours de plus en plus à l'assemblage ponctuel de tôles de caractéristiques mécaniques et de revêtements variés. Les procédés d'assemblage ponctuel par déformation plastique (*rivetage*, *clinchage*, *vissage*, *sertissage*) offrent une alternative intéressante aux techniques d'assemblage traditionnelles telles que le soudage ou le collage. En effet, ces procédés présentent des avantages multiples, en termes de fiabilité, de mise en œuvre, d'adaptabilité, et aussi de coût ... Par exemple, les industries automobiles et aéronautiques cherchent à réduire la masse de leurs appareils et utilisent de plus en plus des métaux légers tel que l'aluminium. Ce type de métaux présente de mauvaises caractéristiques en terme de soudabilité, d'où le recours aux procédés d'assemblage par déformation plastique (figures 1 et 2).



FIG. 1 – Assemblage par rivetage sur un fuselage d'avion.

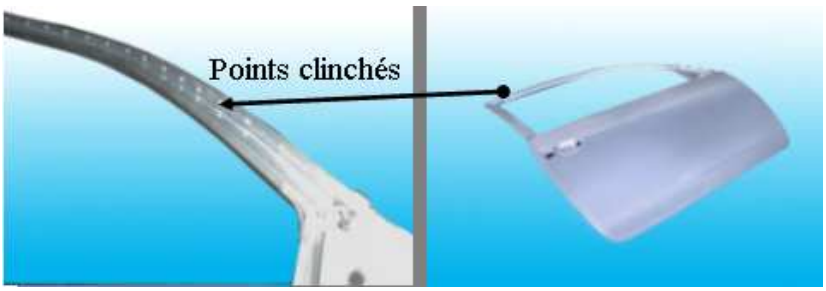


FIG. 2 – Assemblage de tôles par points de clinchage sur la portière d'une voiture.

La maîtrise de ces procédés est nécessaire d'une part pour choisir la technique d'assemblage la plus appropriée selon l'utilisation du produit assemblé, et d'autre part pour innover et proposer des nouvelles configurations mieux adaptées.

Dans cette optique, la simulation numérique est devenue aujourd'hui un outil incontournable pour permettre de concevoir et d'optimiser les pièces industrielles. Le recours à la simulation numérique de procédés d'assemblage par déformation plastique se justifie par la nécessité de compléter les analyses empiriques fondées sur l'expérience et l'intuition des opérateurs, et d'évaluer certains paramètres inaccessibles par la mesure expérimentale. De plus, la simulation numérique permet également des gains très significatifs dans les coûts et les délais de conception. Elle offre la possibilité de simuler à moindre coût plusieurs configurations afin de choisir la plus appropriée.

Dans cette perspective, le *CETIM* [2] en partenariat avec le *CEMEF*[3] et *TRANSVALOR*[4] développent une série de logiciels métiers dédiés à la modélisation de ces techniques d'assemblage dans le cadre du projet MONA LISA (Modélisation et Optimisation Numérique des Assemblages-Logiciel Intégré de Simulation des Assemblages).

La librairie *CimLib*, développée au *CEMEF*, a été choisie comme base initiale pour le développement de ces logiciels. Cette librairie, développée en C++, contient un ensemble de composants et de solveurs numériques qui s'appuient sur des méthodes de type éléments finis et une structure parallèle. De plus, elle est en constante évolution grâce aux multiples contributions des différents chercheurs et ingénieurs au *CEMEF*.

Le modèle de simulation numérique destiné à ces procédés doit modéliser les grandes déformations plastiques à température ambiante ainsi que les autres phénomènes intervenants lors de l'assemblage de tôles. Par exemple, la dégradation des propriétés matériau qui se déclenche lorsque la structure est soumise à ces grandes déformations. Ce processus de dégradation est communément appelé endommagement ductile.

Au début de ce travail de thèse, la librairie *CimLib* ne possédait pas les outils numériques nécessaires au calcul de structures, en particulier, des modèles adaptés à la prédiction de l'endommagement. En effet, cette librairie a été initialement développée pour des applications en mécanique des fluides. L'un des principaux objectifs de ce travail consiste donc à développer et valider au sein de la librairie *CimLib*, de nouvelles méthodes permettant de modéliser le comportement élastoplastique endommageable des matériaux.

[2] Centre technique des industries mécaniques
[3] Centre de Mise en Forme des Matériaux
[4] Entreprise d'édition et de commercialisation de logiciels

L'étude de ces procédés d'assemblage par déformation plastique s'effectue par la simulation du processus de pose et de la tenue mécanique du produit assemblé. Cela permet d'éviter les défauts de fabrication et d'obtenir un produit qui répond aux différentes exigences en service de façon optimale.

D'une part, lors du processus de pose de point d'assemblage, les tôles sont soumises localement à des grandes déformations plastiques irréversibles. Ces déformations peuvent conduire à la détérioration des propriétés matériaux. D'autre part, lorsqu'une structure, obtenue par ce type de procédé, est sollicitée en service, l'endommagement et la rupture éventuelle peuvent provenir du point d'assemblage à cause d'éventuelles concentrations des contraintes, des tôles assemblées, ou de la contribution de ces deux éléments. Dans les deux cas, le modèle numérique nécessite une meilleure comprehension et une modélisation plus fine des phénomènes mis en jeu tels que les déformations plastiques, l'écrouissage, l'endommagement, et la rupture ductile.

L'objectif de ce travail de thèse est donc de prendre en compte ces différents mécanismes et de les implémenter dans la librairie *CimLib*. Ces développements permettent également, à terme, d'élargir le champ d'applications de la librairie *CimLib* à plusieurs procédés de mise en forme par déformation plastique. Par exemple le forgeage à froid, l'emboutissage, l'hydroformage, la semi découpe où la découpe des tôles ...

Le calcul de l'endommagement peut servir à :

- prédire les éventuels défauts de fabrication ainsi que les propriétés mécaniques des produits assemblés ou issus des opérations de formage ;

- limiter l'endommagement, par exemple lors d'opérations d'assemblage par déformation plastique, ou d'une manière plus générale, des produits issus des opérations de formage (emboutissage, forge, hydroformage, ...) ;

- ou encore favoriser l'endommagement ductile dans le cas de certains procédés particuliers. En effet, pour les procédés de mise en forme des métaux tels que le découpage où l'usinage, la rupture est justement l'effet recherché, mais dans des conditions (orientation, emplacement,...) particulières et maîtrisables. Ceci est également vrai pour certains procédés d'assemblage, tel que le procédé de rivetage autopoinçonneur [1].

De même, la prédiction de la tenue mécanique des tôles assemblées et l'optimisation des configurations d'assemblage par le suivi de l'évolution de l'endommagement de l'état sain jusqu'à la rupture peut servir à :

- améliorer la résistance aux sollicitations appliquées en service en modifiant la phase de conception ;

- repousser les limites d'utilisation de ces structures sachant qu'un niveau faible d'endommagement n'affecte pas beaucoup la résistance globale de la structure.

Ce type de simulations numériques a intéressé plusieurs chercheurs ces dernières années [1, 2, 3, 4]. Le *CEMEF* est reconnu sur le plan international à travers ses différents travaux de recherche sur cette problématique, notamment grâce aux développements réalisés dans le logiciel Forge.

Dans cette étude, on se concentre donc sur l'endommagement correspondant à la dégradation des propriétés mécaniques des matériaux causée par des grandes déformations plastiques irréversibles. L'origine de ce type de mécanismes d'endommagement se situe à l'échelle microstructurale. En toute logique l'approche dite "micro-macro" établie à partir d'informations et d'hypothèses sur la microstructure pour revenir ensuite à l'échelle macroscopique par des techniques d'homogénéisation serait la plus appropriée. Cependant, l'utilisation de cette approche dans le cadre d'applications industrielles reste complexe et manque de modèles simplifiés.

L'approche phénoménologique, construite au niveau macroscopique par l'introduction de variables internes pour représenter les phénomènes microstructuraux, conduit à la détermination de modèles plus simples et mieux adaptés aux cas industriels. D'où l'utilisation, dans cette étude, d'une loi de comportement élastoplastique endommageable basée sur cette approche. Plus précisément, une loi constitutive où la déformation plastique et l'endommagement sont couplés est employée.

Il est bien connu que l'approximation éléments finis des modèles mécaniques présentant un caractère adoucissant (dans notre cas l'adoucissement est provoqué par l'endommagement) est fortement dépendante de la discrétisation dans la phase qui précède l'amorçage de rupture (phénomène de localisation de l'endommagement). Cette dépendance a donné lieu au développement de plusieurs types de méthodes de régularisation. Ces méthodes de régularisation ont pour but de limiter cette dépendance tout en améliorant la qualité prédictive du modèle adopté.

La prédiction fiable de l'endommagement par une approche éléments finis nécessite un maillage fin surtout dans les zones de localisation de l'endommagement. Le remaillage adaptatif, basé sur une estimation de l'erreur d'interpolation, est une manière efficace d'améliorer la précision des calculs dans les zones endommagées, tout en évitant des raffinement inutiles dans d'autres zones qui ne présentent pas de gradients mécaniques importants.

Un autre point abordé dans cette étude concerne la réduction du temps de calcul. On s'est, donc, intéressé à l'inversion des systèmes linéaires issus d'une approximation éléments finis qui représente une partie importante du temps cpu de la simulation. Pour cela, nous nous sommes plus particulièrement intéressés aux méthodes multigrilles.

Nos contributions et apports pour répondre à ces problématiques sont décrites dans le plan de thèse suivant.

Plan de la thèse

Cette thèse apporte des contributions dans les trois domaines suivants : le premier concerne la mise au point d'un modèle numérique pour l'intégration d'une loi de comportement élastoplastique endommageable dans une formulation mixte vitesse-pression. Le deuxième traite l'adaptation anisotrope de maillage au phénomène d'endommagement. Le troisième domaine concerne l'accélération de la résolution des grands systèmes linéaires issus d'une approximation éléments finis par les méthodes multigrilles.

Ces points sont abordés dans ce mémoire dans l'ordre suivant :

Dans le premier chapitre, on présente le modèle mathématique des procédés induisant des grandes déformations plastiques irréversibles à température ambiante. D'une part, une formulation mixte vitesse pression est adoptée pour mieux traiter le caractère incompressible de ces déformations. D'autre part, une loi de comportement élastoplastique endommageable est utilisée pour modéliser les phénomènes dissipatifs qui accompagnent ces déformations irréversibles.

Dans le deuxième chapitre nous exposons notre méthodologie pour approcher ces équations. On commence par une description de l'approche éléments finis mixte du problème mécanique global. Ensuite, une attention particulière est portée à l'intégration de la loi de comportement. En effet, l'intégration locale de la loi de comportement non linéaire ne doit pas pénaliser le temps de calcul. Pour ce fait, trois niveaux de couplage numérique de la déformation plastique avec l'endommagement sont présentés. Un module tangent cohérent avec le schéma numérique local est établi.

Dans le troisième chapitre, on met en évidence le caractère adoucissant de la loi de comportement élastoplastique endommageable, et la forte dépendance à la discrétisation spatiale d'une approximation éléments finis avec ce type de comportement. Ensuite, on expose le modèle d'endommagement non local adopté pour régulariser notre approche et améliorer la qualité predictive de l'évolution de l'endommagement jusqu'à la rupture de la structure. Enfin, on s'intéresse à la modélisation de la rupture ductile par la suppression des éléments complètement endommagés du maillage.

On s'intéresse dans le quatrième chapitre à l'adaptation anisotrope de maillage au phénomène de l'endommagement. On commence par rappeler la théorie sous-jacente. En particulier, la méthode d'estimation de l'erreur d'approximation utilisée et sa transcription en information relative à la taille de maille destinée à piloter la génération d'un maillage mieux adapté à la solution. Ensuite, on s'intéresse à l'autre point important, dans l'adaptation anisotrope

de maillage, à savoir la génération du maillage adapté conforme à une métrique prescrite. Enfin, une stratégie d'adaptation anisotrope du maillage est donnée et est validée en 2D et en 3D.

Dans le chapitre cinq, on développe un préconditionneur multigrille géométrique. On expose, en particulier, les aspects techniques liés au déraffinement du maillage non structuré, à la construction des opérateurs de transferts intergrilles et à la mise en œuvre algorithmique.

Plusieurs cas de validations numériques sont présentés au cours de ce manuscrit. Ces validations suivent la progression des développements réalisées dans la librairie *CimLib* au cours de la thèse. Ils visent à montrer que ces développements permettent une prédiction fiable et précise de l'endommagement jusqu'à la rupture.

Chapitre 1

Modélisation des procédés induisant des grandes déformations plastiques

Sommaire

1.1 Introduction 15
1.2 Équations du modèle 15
1.2.1 Équation de l'équilibre dynamique 16
1.3 Loi de comportement 17
1.3.1 Loi de comportement élastique 17
1.3.2 Loi de comportement élastoplastique 19
1.3.3 Évolution de la surface charge : écrouissage 21
1.4 Endommagement 22
1.4.1 Physique de l'endommagement ductile 22
1.4.2 Modèle d'endommagement de Chaboche-Lemaitre 24
1.5 Enrichissement du modèle d'endommagement 28
1.5.1 Effet de fermeture de fissures 28
1.5.2 Limite de triaxialité en compression 30
1.6 Conclusion 32

1.1 Introduction

Dans ce chapitre, on expose le modèle mathématique utilisé pour la simulation des procédés induisant des grandes déformations plastiques irréversibles à temperature ambiante. Par exemple, les procédés d'assemblage de tôles par déformation plastique (ou l'étude de leur tenue mécanique en les soumettant à des sollicitations variées), les procédés de mise en forme à froid des corps solides (emboutissage, forgeage, hydroformage, semi découpe ou découpe des tôles ...).

Une simulation numérique efficace de ces procédés nécessite l'utilisation de lois de comportement capables de modéliser les différents phénomènes dissipatifs irréversibles qui accompagnent ces déformations. Les dégradations des propriétés mécaniques des matériaux, engendrées par des sollicitations sévères, doivent être aussi prises en compte dans la modélisation.

La modélisation des phénomènes dissipatifs est abordée sous un aspect macroscopique, et les variables internes sont utilisées pour représenter les phénomènes microscopiques.

Dans la deuxième partie de ce chapitre, on rappelle les équations mécaniques reliant les variables du problème et les différentes modélisations des conditions aux limites. Dans la troisième, on rappelle les lois de comportement élastique et élastoplastique. Ensuite, on passe en revue et on décrit brièvement les micromécanismes responsables de l'endommagement ductile. On présente plus en détail le modèle élastoplastique endommageable utilisé dans cette étude, et qui s'appuie sur la théorie thermodynamique des phénomènes irréversibles. Dans la quatrième section, nous exposons les enrichissements apportés à ce modèle d'endommagement, notamment, la prise en compte de la nature des sollicitations dans la loi d'évolution de l'endommagement, et l'effet de refermeture de fissures en compression.

1.2 Équations du modèle

Le modèle mathématique du problème est basé sur les équations fondamentales de la mécanique des milieux continus, à savoir l'équation de conservation de la masse et l'équation d'équilibre. Pour que le problème soit correctement posé, des équations relatives aux conditions aux limites sont introduites. Finalement, afin de modéliser les mécanismes régissant la déformation et la transformation du matériau, des équations de loi de comportement sont également ajoutées. Celles-ci permettent, par exemple, de lier les contraintes et les déformations. Nous avons adopté une loi de comportement endommageable afin de tenir compte dans la loi rhéologique des dégradations progressives microscopiques de la structure. Ces détériorations sont notamment favorisées par les mouvement de dislocations au cours de l'écoulement plastique et par une concentration locale des contraintes engendrée par les défauts microstructuraux.

Par ailleurs, nous effectuons une résolution incrémentale basée sur une description Lagrangienne réactualisée. Elle consiste à résoudre successivement le problème posé sur une série d'intervalles $[t, t + \Delta t]$ où Δt est le pas de temps considéré. La nouvelle configuration à l'instant suivant $t + \Delta t$ est calculée à partir de la configuration précédente au temps t. Le pas de temps est choisi suffisamment petit de sorte que l'on puisse adopter l'hypothèse de petites déformations.

1.2.1 Équation de l'équilibre dynamique

On considère une structure occupant un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, d est la dimension spatiale (si d=2, on fait l'hypothèse de déformations planes). La structure est chargée par des distributions données de forces volumiques f, d'efforts imposés T sur son bord $\partial_T\Omega \subset \partial\Omega$ et de vitesses imposées v_0 sur la partie $\partial_v\Omega \subset \partial\Omega$. En négligeant les termes d'inertie, l'équilibre de la structure est décrit par des champs de vitesses v, de contraintes σ et de taux de déformations $\dot{\varepsilon}(v)$ gouvernés par les équations :

$$\dot{\varepsilon}(v) = \frac{1}{2}(\nabla v + (\nabla v)^T) \tag{1.1a}$$

$$div(\sigma) + f = 0 \qquad \text{sur } \Omega \tag{1.1b}$$

$$+ \text{ Loi de comportement} \tag{1.1c}$$

$$+ \text{ Conditions aux limites} \tag{1.1d}$$

Conditions aux limites

Pour que le problème mécanique soit bien posé, on lui ajoute des conditions aux limites sur sa frontière $\partial\Omega$. Cette dernière se décompose en quatres parties disjointes :

$$\partial\Omega = \partial_l\Omega \dot{\cup} \partial_T\Omega \dot{\cup} \partial_v\Omega \dot{\cup} \partial_c\Omega$$

- sur la surface libre $\partial_l\Omega$, le vecteur contrainte est nul : $\sigma_n = \sigma.n = \overrightarrow{0}$;
- sur la frontière $\partial_T\Omega$ le chargement est imposée : $\sigma_n = T$;
- sur la frontière $\partial_v\Omega$ la vitesse est égale à la vitesse imposée : $v = v_0$. Ce cas de figure peut modéliser par exemple un contact bilatéral collant entre un corps rigide (vitesse connue) et un corps déformable ;
- enfin le matériau est en contact avec les outils (appui, système de bridage) au niveau de la surface $\partial_c\Omega$. On définit des conditions de contact et de frottement, on peut distinguer deux types de conditions :
  - une condition de frottement afin de modéliser la force s'exerçant entre les deux corps en contact, et qui s'oppose au mouvement tangentiel relatif entre eux. Il existe différentes lois de frottement mettant en relation diverses grandeurs physiques (contrainte tangentielle, vitesse de glissement, rugosité de la surface de contact ...) qui influencent la force de frottement ($Tresca, Coulomb, \ldots$). Pour plus d'informations, le lecteur pourra se référer à [5, 6].
  - une condition de contact, où l'on distingue généralement quatre configurations :

    Contact bilatéral glissant : dans ce cas, on empêche les nœuds en contact de se décoller. On impose alors :

    $$(v - v_{outil}).n = 0 \tag{1.2}$$

où v_{outil} est la vitesse de l'outil, n est le vecteur normal sortant de $\partial\Omega$.

Contact bilatéral collant : on empêche le décollement et le glissement des nœuds en contact :

$$v - v_{outil} = 0 \tag{1.3}$$

Contact unilatéral glissant : les nœuds en contact peuvent se décoller et on impose : une condition de non pénétration, la contrainte normale de contact doit être forcement compressive, et une condition de complémentarité. Ces conditions sont formulées par la condition de *Signorini* :

$$\begin{cases} (v - v_{outil}).n \geq 0 \\ \sigma_n \leq 0 \\ ((v - v_{outil}).n)\sigma_n = 0 \end{cases} \tag{1.4}$$

où $\sigma_n = \sigma.n.n$ est la contrainte normale de contact.

La dernière équation de (1.4) est la condition de complémentarité. Elle signifie que s'il y a décollement ($(v - v_{outil}).n < 0$) alors la contrainte normale est nulle, et si la contrainte normale est non nulle alors on n'autorise pas le décollement des nœuds en contact $(v - v_{outil}).n = 0$.

Contact unilatéral collant : par rapport au contact unilateral glissant, an ajoute une condition sur la vitesse relative tangentielle :

$$\begin{cases} (v - v_{outil}).n \geq 0 \\ \sigma_n \leq 0 \\ ((v - v_{outil}).n)\sigma_n = 0 \\ \Delta v_t = (v - v_{outil}) - (v - v_{outil}).n = 0 \text{ si } \sigma_n < 0 \end{cases} \tag{1.5}$$

où Δv_t est la composante tangentielle de la différence de vitesse sur les deux corps.

En pratique, les conditions aux limites de contact et de frottement nécessitent un travail numérique conséquent, à titre d'exemple, on renvoie le lecteur aux documents [7, 8, 9] pour les aspects techniques de la gestion de contact.

1.3 Loi de comportement

Dans le cadre de cette étude, on s'intéresse à la simulation des procédés engendrant des grandes déformations des solides à température ambiante. Les lois constitutives de type élastique, élastoplastique ou élastoplastique endommageable sont considérées.

1.3.1 Loi de comportement élastique

L'expérience montre qu'un grand nombre de matériaux solides présentent un comportement élastique réversible, tant que les sollicitations qu'ils subissent sont suffisamment faibles. Dans ce cas, la loi de comportement d'élasticité isotrope est utilisée pour le calcul de structure. Cette loi relie le tenseur du taux de déformations généralisées $\dot{\varepsilon}(v)$ et $\dot{\sigma}$ par la loi de *Hooke* :

$$\dot{\sigma} = C : \dot{\varepsilon}(v) = \lambda tr(\dot{\varepsilon}(v))\delta + 2\mu\dot{\varepsilon}(v) \tag{1.6}$$

où C est le tenseur d'élasticité d'ordre 4, δ est le tenseur identité du second ordre.

Les coefficients de *Lamé* μ et λ peuvent s'exprimer en fonction du module de *Young* E et du coefficient de *Poisson* ν comme suit :

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad ; \quad \lambda = \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)} \tag{1.7}$$

La forme inverse de la loi de *Hooke* s'écrit :

$$\dot{\varepsilon}(v) = C^{-1}.\dot{\sigma} = \frac{1+\nu}{E}\dot{\sigma} - \frac{\nu}{E}tr(\dot{\sigma})\delta \tag{1.8}$$

On introduit le coefficient d'incompressibilité χ, qui nous servira par la suite, par la relation :

$$\chi = \frac{(2\mu + d\lambda)}{d} = \frac{E((d-2)\nu + 1)}{d(1-2\nu)(1+\nu)} \tag{1.9}$$

où d est la dimension spatiale (déformations planes si $d = 2$).

La décomposition du tenseur des contraintes de Cauchy : $\sigma = -p\delta + s$ avec $p = \frac{-1}{d}tr(\sigma)$ est la partie sphérique du tenseur de contraintes (pression hydrostatique), et s est la partie déviatorique ($tr(s) = 0$) du tenseur de contraintes. A partir de la loi de *Hooke*, on peut facilement déduire :

$$div(v) + \frac{\dot{p}}{\chi} = 0 \tag{1.10}$$

Dans le cas des décompositions des tenseurs en partie sphérique et en partie déviatorique, La loi de *Hooke* nous donne :

$$\dot{s} = 2\mu(\dot{\varepsilon} - \frac{tr(\dot{\varepsilon})}{d}\delta) = 2\mu\dot{e} \tag{1.11}$$

où $\dot{e}$ est la partie déviatorique de $\dot{\varepsilon}$

De la même manière, avec cette décomposition, l'équation d'équilibre s'écrit :

$$div(s) - \nabla p + f = 0 \tag{1.12}$$

Remarque 1

L'équation (1.10) peut représenter l'équation de conservation de la masse. En effet, si ν tend vers 0.5 alors le coefficient d'incompressibilité χ tend vers l'infini, et l'équation (1.10) devient alors $div(v) = 0$.

Afin d'avoir un code assez robuste, qui permet des simulations avec un comportement élastique, sans se soucier des valeurs de ν, cette équation doit être intégrée simultanément avec l'équation d'équilibre. Il en résulte la nécessité d'intégrer un système de deux équations et par conséquent l'utilisation d'une formulation variationnelle mixte vitesse-pression (éventuellement déplacement-pression). *Fortin* et *Garon* [10] ont montré l'apparition des instabilités

numériques sur le cas test d'une plaque trouée en élongation en intégrant uniquement l'équation d'équilibre et en considérant un matériau avec un coefficient de Poisson ν très proche de 0.5. Ils ont montré également, que l'intégration de l'équation (1.10) simultanément avec l'équation d'équilibre et en utilisant une formulation mixte déplacement-pression permet d'éviter ces instabilités liées à l'incompressibilité du matériau.

1.3.2 Loi de comportement élastoplastique

La loi de comportement élastoplastique modélise la rhéologie d'un matériau subissant des grandes déformations à froid. Cette loi de comportement met en relation les variables internes pour des déformations permanentes irréversibles qu'un certain solide peut subir sans rupture. Selon l'état des contraintes cette loi peut être considérée :

- élastique tant que la contrainte σ est inférieure à une contrainte donnée σ_0 (contrainte d'écoulement). Dans ce cas, le matériau est considéré purement élastique et les équations de cette loi constitutive sont celles décrites précédemment ;

- élastoplastique avec des déformations plastiques irréversibles. Dans ce cas, et sous l'hypothèse de petites déformations, on considère le tenseur du taux de déformations généralisées $\dot{\varepsilon}$ ainsi que sa décomposition additive en une partie élastique réversible $\dot{\varepsilon}^e$ et une partie plastique irréversible $\dot{\varepsilon}^p$. On obtient alors :

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^e + \dot{\varepsilon}^p \tag{1.13}$$

Les déformations plastiques étant incompressibles, la décomposition du tenseur du taux de déformation en une partie sphérique et une partie déviatorique s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{e} = \dot{e}^e + \dot{e}^p \\ tr(\dot{\varepsilon}) = tr(\dot{\varepsilon}^e) \end{cases} \tag{1.14}$$

La vitesse de déformation plastique équivalente est définie par :

$$\dot{\bar{\varepsilon}} = \sqrt{\frac{2}{3}\dot{e}^p : \dot{e}^p} \tag{1.15}$$

La déformation plastique équivalente s'en déduit par intégration au cours du temps :

$$\bar{\varepsilon} = \int_0^t \dot{\bar{\varepsilon}}(\xi) d\xi \tag{1.16}$$

Critère tridimensionnel de plasticité

Dans le cadre général de la plasticité, on introduit une surface convexe définie dans l'espace des contraintes à partir de laquelle l'écoulement plastique peut se produire. Pour des états de contraintes contenus à l'intérieur de cette surface, le comportement est entièrement élastique. Cette surface est appelée surface de charge. Son équation peut s'écrire de la façon suivante :

$$f(\sigma, X, R) = (\sigma, X)_{eq} - \sigma_0(r, \dot{r}) = (\sigma, X)_{eq} - R(r, \dot{r}) - \sigma_y \tag{1.17}$$

où X est le tenseur d'écrouissage cinématique, R est la fonction d'écrouissage isotrope qui dépend de la variable d'écrouissage isotrope r et de sa dérivée temporelle $\dot{r}$ (cas élasto-viscoplastique). Dans le cas élasto-plastique, $r = \bar{\varepsilon}$ et la fonction d'écrouissage isotrope est insensible à la vitesse de déformation $R = R(\bar{\varepsilon})$.
σ_y est la limite élastique, $(\sigma, X)_{eq}$ est la contrainte équivalente.

Condition de normalité

La condition de normalité d'un écoulement plastique impose que le tenseur des vitesses de déformations plastiques soit colinéaire à la direction de la normale extérieure à la surface de charge, cette condition s'écrit dans le cadre de la plasticité associée comme suit :

$$\dot{e}^{pl} = \lambda^{pl} \frac{\partial f}{\partial \sigma} \tag{1.18}$$

où $\lambda^{pl} \geq 0$ est le multiplicateur plastique.

Conditions d'écoulement plastique tridimensionnel

L'expression de la surface de charge nous permet de définir un critère d'écoulement plastique. Lorsque la déformation est purement élastique, la contrainte équivalente reste inférieure à la limite d'écoulement et cette condition se traduit mathématiquement par $f < 0$. Dès que la contrainte équivalente est égale à la contrainte limite d'écoulement plastique (f= 0), le seuil est atteint et le matériau commence à s'écouler plastiquement $\lambda^{pl} > 0$ à condition que $\dot{f} = 0$ (condition de consistance). Le cas $f = 0$ et $\dot{f} < 0$ correspond à une décharge élastique à partir d'un état plastique initial. Ces conditions se regroupent dans la condition de *Kuhn-Tucker* :

$$\lambda^{pl} \geq 0, \quad f \leq 0, \quad \lambda^{pl} f = 0 \tag{1.19}$$

Il existe de nombreux critères de plasticité qui visent à modéliser le comportement plastique des matériaux. Dans cette étude, nous utilisons le critère de plasticité isotrope de *von Mises*. Il s'exprime en fonction du deuxième invariant du tenseur de contraintes $J_2(\sigma)$ ou encore en fonction de la contrainte équivalente de *von Mises* σ_{eq} de la manière suivante :

$$f = J_2(\sigma) - \sigma_0 = \sqrt{\frac{3}{2} s : s} - \sigma_0 = \sigma_{eq} - \sigma_0 \tag{1.20}$$

La condition de normalité (18) devient :

$$\dot{e}^{pl} = \frac{3\lambda^{pl}}{2\sigma_0} s \tag{1.21}$$

On obtient aussi une relation simple entre le multiplicateur plastique et la vitesse des déformations équivalentes :

$$\dot{\bar{\varepsilon}} = \lambda^{pl} \tag{1.22}$$

En résumé les équations d'une loi constitutive élastoplastique pour un matériau homogène, avec un écrouissage isotrope, et un critère de *von Mises* s'écrivent :

- la décomposition en partie élastique et en partie plastique du déviateur du taux de déformation : $\dot{e} = \dot{e}^e + \dot{e}^{pl}$
- comportement élastique : $\dot{s} = 2\mu\dot{e}^e$
- le critère de *von Mises* : $f(s,\bar{\varepsilon}) = \sqrt{\frac{3}{2}s:s} - \sigma_0(\bar{\varepsilon})$
- équations d'évolution de la déformation plastique : $\dot{e}^{pl} = \frac{3\lambda^{pl}}{2\sigma_0(\bar{\varepsilon})}s\,, \quad \lambda^{pl} = \dot{\bar{\varepsilon}}$
- conditions de chargement : $f \leq 0 \qquad \lambda^{pl} \geq 0 \quad , \quad f\lambda^{pl} = 0$

$\sigma_0(\bar{\varepsilon})$ représente la loi d'écrouissage isotrope du matériau (ici pas de dépendance à la température et pas de dépendance à $\dot{\bar{\varepsilon}}$).

1.3.3 Évolution de la surface charge : écrouissage

La déformation plastique d'un matériau provoque des effets d'écrouissage qui se traduisent géométriquement par des variations de la surface de charge. L'évolution de cette surface est liée au type d'écrouissage considéré :

- *écrouissage isotrope* : la surface de charge subit une dilatation isotrope dans l'espace des contraintes au cours du temps. Cette dilatation s'obtient à partir de l'évolution de la contrainte d'écoulement $\sigma_0(\bar{\varepsilon})$;

- *écrouissage cinématique* : la surface de charge évolue par translation sans changement de taille, le centre de la surface de charge se déplace dans l'espace des contraintes. Ce déplacement s'obtient à partir de l'évolution du tenseur d'écrouissage cinématique X. Dans la littérature, il existe plusieurs modèles d'écrouissage cinématique [11] : les deux principaux sont le modèle linéaire de Prager et le modèle non linéaire de Lemaitre et Chaboche ;

- *écrouissage combiné* : ce type d'écrouissage superpose les deux derniers, la transformation de la surface de charge dans l'espace des contraintes se décrit par déplacement du centre de la surface de charge à l'aide de la variable d'écrouissage cinématique X, et par dilatation de la surface de charge à l'aide de la contrainte d'écoulement plastique.

L'écrouissage isotrope est souvent utilisé dans la modélisation des procédés d'assemblage par déformation plastique [12, 13]. Plus généralement, dans le cas de grandes déformations, l'écrouissage cinématique n'est pas un phénomène prépondérant et peut être négligé [14]. Dans cette étude, on se contente de l'écrouissage isotrope avec une loi d'évolution non linéaire. Plus précisément on utilise une loi de *Swift*(1947) :

$$\sigma_0(r) = K(r + r_0)^n \tag{1.23}$$

K est la consistance du matériau et est assimilée à une contrainte. n est l'exposant d'écrouissage isotrope. r_0 une déformation seuil qui permet de prendre en compte ou pas la limite d'élasticité σ_y dans la loi d'écrouissage.

L'écoulement plastique fait apparaître des microcavités autour des défauts présents dans la matière. Ces cavités peuvent apparaître, par exemple, par décohésion d'une inclusion avec

la matrice ou par rupture fragile de cette inclusion. La croissance des déformations conduit à l'augmentation en nombre et en taille de ces microcavités. A partir d'une certain seuil, elles vont être suffisamment importantes pour modifier le comportement local de la matière. Cela va générer un adoucissement du matériau qui va être en compétition avec le durcissement lié à l'écrouissage. Dans la section suivante, on présente une loi de comportement élastoplastique endommageable qui tient compte de ces adoucissements.

1.4 Endommagement

L'endommagement est généralement classé, selon les matériaux et les cas de chargement, en quatre catégories différentes [15, 16] :

- l'endommagement plastique ductile : il accompagne les grandes déformations plastiques des métaux à température ambiante et comme la plasticité, il est indépendant de la vitesse de chargement. Nous revenons sur les mécanismes de ce type d'endommagement plus loin dans le document ;

- l'endommagement fragile : il est caractérisé par des ruptures de liaisons interatomiques, les microdéfauts se propageant sans déformation plastique remarquable. C'est le cas par exemple de la céramique et du béton ;

- l'endommagement viscoplastique de fluage : il est fonction du temps et correspond, dans le cas des métaux aux températures moyennes et élevées, aux décohésions intergranulaires accompagnant les déformations viscoplastiques ;

- l'endommagement de fatigue : il est dû aux cycles de chargement répétés et on le repère en fonction du nombre de cycles appliqués au matériau.

Dans le présent travail, on s'interesse à la première catégorie, celle de l'endommagement plastique ductile.

1.4.1 Physique de l'endommagement ductile

Au cours de grandes déformations plastiques, le processus de dégradation progressive d'un matériau d'un état sain jusqu'à la rupture macroscopique peut être divisé en trois phénomènes distincts : la germination de microcavités, puis la croissance et la coalescence de celles-ci. Ces phénomènes peuvent être décrits comme suit :

- Germination (figure 1.1) : on trouve dans la plupart des matériaux métalliques une quantité importante de défauts micro-structuraux, telles que les inclusions. Soumis à un état de contraintes, ces défauts engendrent une concentration locale de contraintes. Cette concentration de contraintes peut provoquer à son tour soit la décohésion des inclusions de la matrice (figure 1.1 (b)) soit la rupture des inclusions (figure 1.1 (a)). Ceci mène à la création des micro-cavités entre la matrice et les inclusions, ou entre les deux parties de l'inclusion rompue. Ce mécanisme d'ouverture de micro-cavités est appelé la phase de germination qui est à l'origine de l'endommagement ductile de la structure.

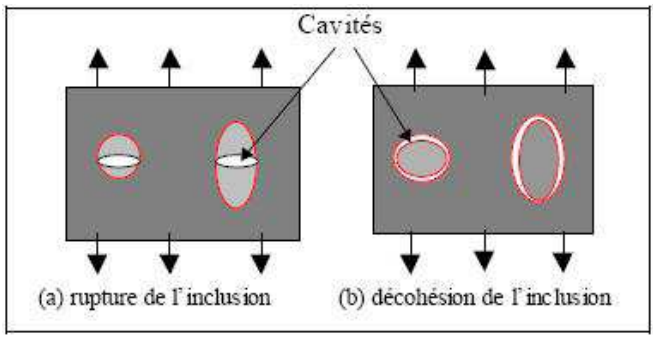


FIG. 1.1 – Schématisation des mécanismes de germination [17].

- Croissance (figure 1.2) : ces micro-cavités voient leur taille croître sous l'effet de la tension hydrostatique et des mouvements de dislocations responsables de l'écoulement plastique. A partir d'une certaine taille, elles vont être suffisamment nombreuses pour modifier le comportement local du solide.

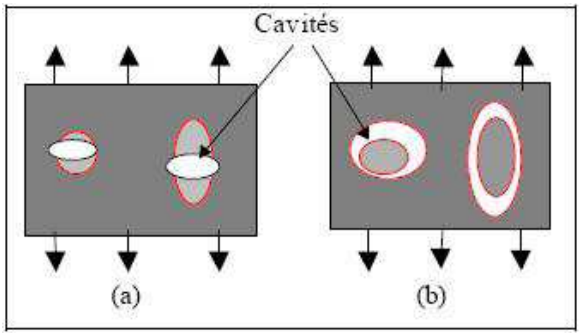


FIG. 1.2 – Schématisation de l'évolution des cavités [17].

- Coalescence (figure 1.3) : lorsque la porosité atteint un seuil critique, on voit apparaître un phénomène d'interaction entre les micro-cavités qui commencent à se réunir. Cela conduit à la formation des macro-fissures qui entraînent la rupture du matériau.

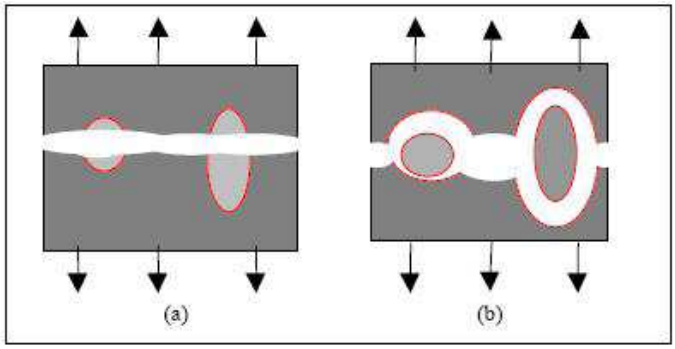


FIG. 1.3 – Schématisation de la coalescence des cavités [17].

Dans cette étude, on fait l'hypothèse d'un endommagement isotrope. on se contente donc d'une variable scalaire w pour représenter l'endommagement.

Nous privilégions de plus une approche macroscopique phénoménologique (modèle d'endommagement de Chaboche-Lemaitre) car celle-ci nous semble la plus adaptée au cadre industriel de notre étude.

1.4.2 Modèle d'endommagement de Chaboche-Lemaitre

La structure endommagée est supposée affectée par une densité homogène de microcavités ou de microfissures. Pour rendre compte de l'influence de ces microdéfauts sur le comportement rhéologique du matériau, on introduit ici le modèle de Chaboche-Lemaitre [15]. Ce modèle est basé sur les notions de contrainte effective et d'équivalence en déformation : le matériau endommagé soumis à une certaine contrainte σ se comporte comme le matériau sain (c'est à dire non endommagé, éventuellement plastifié) soumis à la contrainte effective $\widetilde{\sigma}$. La variable d'endommagement permet de passer de la contrainte usuelle (vraie) à la contrainte effective :

$$\widetilde{\sigma} = \frac{\sigma}{1-w} \tag{1.24}$$

Cadre thermodynamique

L'objet de cette partie est de définir le cadre thermodynamique nécessaire à la description des phénomènes irréversibles au sein des matériaux. Dans cette étude, toutes les modélisations et les développements sont abordés à l'échelle macroscopique.

Dans le cadre de la thermodynamique des phénomènes irréversibles, la méthode de l'état local considère que l'état thermodynamique d'un milieu continu en un point et à un instant donné est complètement défini par la connaissance de la valeur à cet instant d'un certain nombre de variables, dites variables d'état [15, 18, 19]. Ces variables sont donc représentatives de l'histoire complète du matériau et leur seule valeur instantanée suffit à la description du milieu continu à un instant donné. On distingue deux types de variables d'état : les variables d'état externes, et les variables internes qui mesurent l'effet des micromécanismes sur le comportement observable du matériau.

Dans le cas des phénomènes dissipatifs, ces variables internes sont représentatives de l'histoire du système. Le modèle de comportement que nous développons est constitué de trois variables internes présentées dans le tableau suivant (tableau 1.1) :

Mécanismes	Variables internes	Variables associées
Élasticité	$\varepsilon^e = \varepsilon - \varepsilon^p$	σ
Écrouissage isotrope	r	R
Endommagement isotrope	w	Y

TAB. 1.1 – les variables d'état et leurs variables et mécanismes associés.

Ces variables suffisent à définir l'état d'un système, et ce à travers la connaissance d'un potentiel thermodynamique. Parmi les choix possibles, nous opterons pour le potentiel thermodynamique énergie libre $\psi = \psi(\varepsilon^e, r, w)$. Ce potentiel est une fonction convexe de toutes les variables d'état, et permet de définir des forces thermodynamiques associées à chacune des variables d'état.

On peut faire (Lemaitre et Chaboche [15]) l'hypothèse d'une partition de l'énergie libre en une partie élastique et une partie plastique (ce qui implique par exemple que les propriétés élastiques ne sont pas influencées par l'écoulement plastique) :

$$\rho\psi(\varepsilon^e, r, w) = \rho\psi_e(\varepsilon^e, w) + \rho\psi_p(r, w) \tag{1.25}$$

L'hypothèse de découplage entre les effets d'écrouissage et les effets d'élasticité associés à l'endommagement permet d'écrire :

$$\rho\psi = \rho\psi_e(\varepsilon^e, w) + \rho\psi_p(r) \tag{1.26}$$

où ψ_e et ψ_p sont respectivement le potentiel élastique et le potentiel plastique.

Le potentiel élastique endommageable peut être obtenu à partir de l'équation (1.24) et du potentiel élastique du matériau vierge. Le potentiel tenant compte de l'endommagement s'exprime alors comme suit :

$$\rho\psi_e(\varepsilon^e, w) = \frac{1}{2}(1-w)\varepsilon^e : C : \varepsilon^e \tag{1.27}$$

La loi d'élasticité endommageable s'en déduit :

$$\sigma = \rho\frac{\partial\psi_e(r)}{\partial\varepsilon^e} = (1-w)C : \varepsilon^e \tag{1.28}$$

La variable thermodynamique R, associée à la variable scalaire d'écrouissage isotrope r, est donnée par :

$$R = \rho\frac{\partial\psi_p(r)}{\partial r} \tag{1.29}$$

La force thermodynamique associée à l'endommagement s'obtient par :

$$\begin{aligned} Y = \rho\frac{\partial \psi_e}{\partial w} &= -\frac{1}{2}\varepsilon^e : C : \varepsilon^e \\ &= -\frac{1}{2(1-w)^2}\sigma : C^{-1} : \sigma \\ &= -\frac{1}{2E(1-w)^2}\left[(1+\nu)\sigma : \sigma - \nu(tr\sigma)^2\right] \\ &= \frac{-s:s}{4\mu(1-w)^2} + \frac{-p^2}{2\chi(1-w)^2} \end{aligned} \tag{1.30}$$

L'inégalité de *Clausius-Duhem*, qui exprime le second principe de la thermodynamique impose que la dissipation mécanique soit positive :

$$\sigma : \dot{\varepsilon}^p - R\dot{r} - Y\dot{w} \geq 0 \tag{1.31}$$

Les déformations plastiques peuvent se produire sans endommagement, de même l'endommagement peut se développer sans écoulement plastique macroscopique appréciable, Cela implique les deux relations séparées suivantes :

$$\sigma : \dot{\varepsilon}^p - R\dot{r} \geq 0 \quad \text{et} \quad -Y\dot{w} \geq 0 \tag{1.32}$$

$-Y$ étant une forme quadratique définie positive, le second principe impose donc $\dot{w} \geq 0$.

Lois d'évolution des variables internes

Les lois d'évolution des variables internes sont obtenues par dérivation du potentiel de dissipation. Lemaitre et Chaboche [15] ont proposé un potentiel de dissipation qui découple les phénomènes dissipatifs liés à la plasticité et ceux liés à l'endommagement.

$$F(s, r, w, Y) = f(s, r, w) + f_w(Y, w) \tag{1.33}$$

où f(s,r,w) s'exprime, à partir de la définition de la variable d'endommagement, par :

$$\begin{aligned} f(\tilde{s}, r) &= J_2(\tilde{\sigma}) - \sigma_0(r) \\ &= \tfrac{1}{1-w} J_2(\sigma) - \sigma_0(r) \\ &= \tfrac{1}{1-w}\sqrt{\tfrac{3}{2}s:s} - \sigma_0(r) \\ &= f(s, r, w) \end{aligned} \tag{1.34}$$

L'expression de $f_w(Y, w)$ est postulée par Lemaitre et Chaboche [15] :

$$f_w = \frac{1}{1-w}\frac{s_0}{b+1}\left(\frac{-Y}{s_0}\right)^{b+1} \tag{1.35}$$

où s_0 et b sont des paramètres matériau.

Ensuite, les lois d'évolutions des variables internes peuvent être obtenues facilement :

$$\dot{e}^{pl} = -\lambda^{pl}\frac{\partial f}{\partial(-\sigma)} = \frac{3\lambda^{pl}}{2(1-w)^2\sigma_0}s, \quad \dot{\bar{\varepsilon}} = \frac{\lambda^{pl}}{(1-w)} \tag{1.36}$$

$$\dot{r} = -\lambda^{pl}\frac{\partial f}{\partial R} = \lambda^{pl}, \qquad r = (1-w)\bar{\varepsilon} \tag{1.37}$$

$$\dot{w} = -\lambda^{pl}\frac{\partial f_w}{\partial Y} = \frac{\lambda^{pl}}{1-w}\left(\frac{-Y}{s_0}\right)^b = \left(\frac{-Y}{s_0}\right)^b \dot{\bar{\varepsilon}} \tag{1.38}$$

Seuil d'endommagement

Pour compléter la définition de la variable d'endommagement, nous introduisons deux scalaires. Le premier est la valeur de déformation plastique équivalente à partir de laquelle l'endommagement commence à apparaître $\bar{\varepsilon}_d$. En effet, en dessous d'un certain seuil, il n'y a pas d'influence de la germination des microcavités sur les propriétés mécaniques. L'introduction de $\bar{\varepsilon}_d$ permet de tenir compte de cette observation. Le deuxième scalaire est l'endommagement critique à rupture w_c qui correspond à la valeur d'endommagement à partir de laquelle il y a rupture de l'élément volumique représentatif (EVR). Dès que l'endommagement atteint cette valeur critique, l'EVR peut être considéré comme rompu, c'est-à-dire $w = 1$

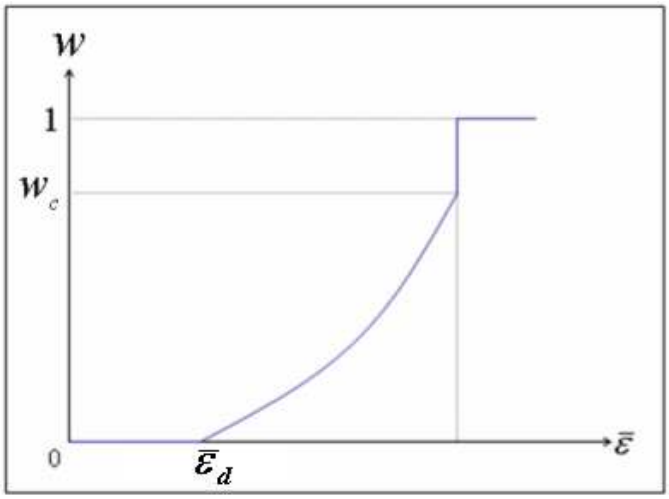


FIG. 1.4 – Représentation de la loi d'évolution considérée de l'endommagement.

Remarque 2

L'écoulement plastique provoque des déformations irréversibles et incompressibles. De plus, elles sont beaucoup plus importantes que les déformations élastiques. Il en résulte un problème mécanique quasi incompressible.

L'approximation éléments finis avec une formulation réduite en déplacement (ou en vitesse) de ce problème peut conduire au verrouillage volumique (volumetric locking). En effet, la condition d'incompressibilité impose une déformation à volume constant, et cela peut se traduire par un champ de déplacement nul. Le lecteur peut se référer à [20] pour une démonstration dans le cas d'une discrétisation éléments finis $Q1$. D'autre auteurs [21] ont utilisé le cas test d'une plaque rectangulaire en déformation plane, et une loi constitutive élastoplastique avec écrouissage linéaire isotrope. Ils ont montré la carence de l'approximation par éléments finis linéaires $P1$ en déplacement à capturer la striction habituelle au centre de l'éprouvette.

Comme nous l'avons dit dans la remarque précédente, afin d'éviter les problèmes de verrouillage numérique liés à l'incompressibilité des déformations, nous utilisons une formulation à deux champs : en plus de la vitesse, la pression est considérée comme une inconnue du problème mécanique. L'équation (1.10) associée à la variable de pression dans le cas de l'élasticité linéaire, s'exprime avec une loi de comportement élastoplastique endommageable, comme suit :

$$div(v) + \frac{\dot{p}}{\chi(1-w)} + \frac{\dot{w}}{\chi(1-w)^2}p = 0 \tag{1.39}$$

Cette équation est intégrée simultanément avec l'équation d'équilibre, la vitesse et la pression sont les inconnues du système. Les aspects numériques de l'approximation éléments finis pour ce système sont abordés dans le chapitre suivant.

1.5 Enrichissement du modèle d'endommagement

Le modèle d'endommagement décrit précédemment permet une prédiction précise de l'évolution de l'endommagent pour des sollicitations de traction simples. Néanmoins, ce modèle nécessite quelques améliorations pour traiter des cas avec des chargements plus complexes. Pour ce faire, deux modifications ont été proposées : l'introduction de l'effet de fermeture de fissure en compression [22, 23, 24], et l'introduction d'une limite de triaxialité en dessous de laquelle l'endommagement n'évolue pas [25, 26].

1.5.1 Effet de fermeture de fissures

L'évolution de l'endommagement dépend fortement de la nature du chargement appliqué à la structure. En effet, lorsque la matière est sollicitée par une charge de compression, les microcavités et les micro-fissures se referment partiellement ce qui entraîne un retour de consistance de matériau ainsi qu'un ralentissement de la croissance de l'endommagement. Il est important donc de distinguer l'évolution de l'endommagement en traction de celui en compression. Le modèle d'endommagement de *Chaboche et Lemaitre*, présenté précédemment, ne fait pas cette distinction. *Andrade et al* [27] ont montré, sur un cas de compression d'une éprouvette en tonneau, que ce modèle ne permet pas une prédiction précise de la zone d'amorçage de fissure.

Nous avons donc enrichi ce modèle par une approche développée initialement par *Ladevèze* afin de tenir compte de la nature des sollicitations dans l'évolution de l'endommagement. Pour ce faire, on introduit une distinction du comportement du matériau en traction et en compression. En effet, dans le cas de la compression uniaxiale, la relation entre le tenseur des contraintes de *Cauchy* et le tenseur des contraintes effectives s'écrit :

$$\widetilde{\sigma} = \frac{\sigma}{1 - hw} \tag{1.40}$$

où h est un paramètre qui caractérise l'effet de fermeture des fissures, avec $0 \leq h \leq 1$. Une valeur typique de ce paramètre est $h = 0.2$ pour les métaux [22]. Dans le cas de la traction, on suppose que $h = 1$, la relation (1.40) peut être utilisée sans se soucier de la nature des sollicitations. Elle sera utilisée dans tout le reste de ce manuscrit.

Dans le cas de sollicitations complexes tridimensionnelles, la nature des sollicitations peut varier d'une direction à l'autre. Une décomposition du tenseur des contraintes dans ces directions principales s'impose pour dissocier les parties en traction et les parties en compression.

On considère la décomposition additive du tenseur des contraintes en partie de traction pure et en partie de compression pure $\sigma = \sigma_+ + \sigma_-$.

$$\sigma_+ = \sum_{i=1}^{3} < \sigma_i > e_i \otimes e_i, \quad \sigma_- = -\sum_{i=1}^{3} < -\sigma_i > e_i \otimes e_i, \quad \text{avec } < x >= \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ 0 \quad x < 0 \end{cases} \tag{1.41}$$

où les σ_i sont les contraintes principales. $e_i, i = 1, 2, 3$ est une base orthonormale du repère principal. En tenant compte de cette décomposition, et de la distinction de l'expression de la contrainte effective en compression et en traction, l'expression du taux de restitution d'énergie élastique Y devient :

$$Y = \frac{-1}{2E(1-w)^2}\left[(1+\nu)\sigma_+ : \sigma_+ - \nu < tr\sigma >^2\right] - \frac{h}{2E(1-hw)^2}\left[(1+\nu)\sigma_- : \sigma_- - \nu < -tr\sigma >^2\right] \tag{1.42}$$

1.5.2 Limite de triaxialité en compression

La triaxialité des contraintes est le rapport entre la contrainte hydrostatique et la contrainte équivalente de *von Mises* :

$$T_x = \frac{-p}{J_2(\sigma)} \tag{1.43}$$

Elle apparaît explicitement dans la définition du taux de restitution d'énergie élastique :

$$Y = \frac{-\sigma_{eq}^2}{2E(1-w)^2}\left[\frac{2}{3}(1+\nu) + 3(1-2\nu)T_x^2\right] \tag{1.44}$$

En conséquence, elle influence fortement la vitesse de croissance de l'endommagement. Des travaux expérimentaux, menés par *Bridgman* [25], ont mis en évidence l'existence d'un seuil de triaxialité négatif en dessous duquel la rupture ne se produit pas. Ces résultats ont également été confirmés plus récemment par les travaux de (*Bao et Wierzbicki*) [26]. Cette limite de triaxialité est égale à $-1/3$ et par conséquent l'équation d'évolution de l'endommagement devient :

$$\dot{w} = \begin{cases} \dfrac{\lambda^{pl}}{1-w}\left(\dfrac{-Y}{S_0}\right)^b \delta_{\{\overline{\varepsilon}\geq\overline{\varepsilon}_d\}} & \text{si } T_x \geq 0 \\ \dfrac{\lambda^{pl}}{1-hw}\left(\dfrac{-Y}{S_0}\right)^b \delta_{\{\overline{\varepsilon}\geq\overline{\varepsilon}_d\}} & \text{si } \dfrac{-1}{3} < T_x \leq 0 \\ 0 & \text{si } T_x \leq \dfrac{-1}{3} \end{cases} \tag{1.45}$$

où $\delta_{\{\overline{\varepsilon}\geq\overline{\varepsilon}_d\}} = \begin{cases} 1 & \text{si } \overline{\varepsilon} \geq \overline{\varepsilon}_d \\ 0 & \text{si } \overline{\varepsilon} < \overline{\varepsilon}_d \end{cases}$

Le tableau suivant regroupe les équations de la loi de comportement élastoplastique endommageable que nous avons exposée précédemment et qui est adoptée dans cette étude.

- la décomposition en partie élastique et en partie plastique du déviateur du taux de déformation

$$\dot{e} = \dot{e}^e + \dot{e}^{pl}$$

- comportement élastique couplé à l'endommagement

$$\dot{s} = 2\mu(1 - hw)\dot{e}^e - \frac{h\dot{w}}{1 - hw}s$$

- le critère de plasticité de *von Mises*

$$f(s, r, w) = \frac{1}{1 - hw}\sqrt{\frac{3}{2}s : s} - \sigma_0(r)$$

- écrouissage isotrope

$$\sigma_0(r) = K(r_0 + r)^n$$

- équations d'évolution

$$\dot{e}^{pl} = \frac{3\lambda^{pl}}{2(1 - hw)^2\sigma_0(r)}s \qquad r = (1 - hw)\bar{\varepsilon} \qquad \lambda^{pl} = (1 - hw)\dot{\bar{\varepsilon}}$$

$$\dot{w} = \frac{\lambda^{pl}}{1 - hw}\left(\frac{-Y}{S_0}\right)^b \delta_{\{\bar{\varepsilon} \geq \bar{\varepsilon}_d\}}\delta_{\{\frac{-1}{3} < T_x\}} \qquad 0 \leq w < w_c \text{ or } w = 1$$

- conditions de chargement

$$f \leq 0 \qquad \lambda^{pl} \geq 0 \qquad f\lambda^{pl} = 0$$

1.6 Conclusion

Nous avons rappelé les équations de la simulation des procédés induisant des grandes déformations plastiques. Le problème est formulé en système d'équations à deux inconnues, les champs de vitesse et de pression. Ce choix est justifié par l'apparition des instabilités lorsque les déformations provoquées sont incompressibles ou quasi incompressibles. Ces instabilités sont liées à l'approximation éléments finis en formulation réduite en vitesse.

Nous avons exposé une loi de comportement élastoplastique endommageable exprimée en partie sphérique et en partie déviatorique. Une loi d'évolution de l'endommagement couplée avec la déformation plastique, et basée sur un potentiel de dissipation postulé par Chaboche et Lemaitre a été présentée. Ce modèle d'endommagement nous semble présenter des caractéristiques suffisantes pour représenter correctement le phénomène de l'endommagement ductile. Il s'agit d'une approche phénoménologique et macroscopique particulièrement adaptée à l'étude de problèmes industriels.

Les enrichissements apportés à la loi d'évolution de l'endommagement visent à élargir son utilisation à des configurations comportant des sollicitations non monotones et multiaxiales.

Chapitre 2

Intégration numérique d'une loi élastoplastique endommageable dans une formulation mixte vitesse-pression

Sommaire

2.1 Introduction 34
2.2 Intégration du problème mécanique global 34
2.2.1 Rappel des équations 34
2.2.2 Formulation faible vitesse pression 35
2.2.3 Discrétisation éléments finis 35
2.3 Intégration de la loi de comportement élastoplastique endommageable 40
2.3.1 Schéma numérique et intégration de la loi constitutive 40
2.3.2 Opérateur tangent cohérent 43
2.3.3 Algorithme d'intégration locale 45
2.4 Validations numériques 46
2.4.1 Élasticité linéaire : cas test de la plaque trouée 46
2.4.2 Élastoplasticité : cylindre sous pression interne 50
2.4.3 Endommagement 53
2.5 Conclusion 58

2.1 Introduction

La résolution numérique des équations non linéaires du problème mécanique est basée sur une approche incrémentale et un algorithme itératif de *Newton*. Partant de la configuration initiale, on obtient une suite de configurations équilibrées jusqu'à la configuration finale. La détermination de ces configurations équilibrées est réalisée par une intégration spatiale du problème mécanique global par la méthode des éléments finis mixtes, et une intégration numérique locale de la loi constitutive.

L'intégration locale permet de déterminer l'évolution non linéaire des variables, elle nécessite :

- un schéma de discrétisation temporelle et un algorithme d'intégration numérique permettant la détermination des variables de la loi de comportement au cours de la simulation ;

- une matrice tangente consistante avec ce schéma, de manière à obtenir une résolution des équations de conservation qui soit aussi efficace que possible.

Dans la deuxième section de ce chapitre, on expose la méthode des éléments finis mixtes pour la résolution du problème mécanique global. On rappelle les étapes du passage d'un système d'équations aux dérivées partielles jusqu'au système linéaire à inverser.
Dans la troisième section, on s'intéresse aux aspects numériques liés à l'intégration de la loi de comportement élastoplastique endommageable, notamment, le choix du schéma numérique, le module tangent cohérent avec ce schéma, et l'algorithme d'intégration. La quatrième section est dédiée aux validations de ces développements.

2.2 Intégration du problème mécanique global

L'intégration spatiale des équations différentielles du problème est réalisée par la méthode des éléments finis. Dans le cadre de la modélisation des grandes déformations, cette méthode numérique peut rencontrer des difficultés pour traiter la quasi-incompressibilité de l'écoulement plastique de la matière. Pour y remédier, nous utilisons une formulation mixte vitesse-pression.

2.2.1 Rappel des équations

Le problème mécanique complet traitant la quasi-incompressibilité des déformations élastoplastiques comprend l'équation d'équilibre, à laquelle il faut rajouter l'équation associée au champ variable de pression. Le système obtenu, d'inconnues la vitesse et la pression, s'écrit :

$$\begin{cases} div(s) - \nabla p = 0 \\ -div(v) - \frac{1}{\chi(1-hw)}\dot{p} - \frac{h\dot{w}}{\chi(1-hw)^2}p = 0 \end{cases} \tag{2.1}$$

L'évolution des contraintes obéit à la loi constitutive élastoplastique endommageable, exposée au chapitre précédent.

2.2.2 Formulation faible vitesse pression

On obtient la formulation faible du système d'équation (2.1) en multipliant par des fonctions tests et en intégrant selon une formule de *Green*. La formulation mixte vitesse pression s'écrit :

Trouver $(v, p) \in V \times L^2(\Omega)$ tels que :

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega s(v) : \dot{\varepsilon}(u) - \int_\Omega p div(u) = \int_{\partial_f \Omega} (\sigma n).u \quad \forall u \in V^0 \\ \\ \displaystyle -\int_\Omega q div(v) - \int_\Omega q \left(\frac{1}{\chi(1-hw)} \dot{p} + \frac{h\dot{w}}{\chi(1-hw)^2} p \right) = 0 \quad \forall q \in L^2(\Omega) \\ \\ V = \{v \in (H^1(\Omega))^3; v = v^0 \text{ sur } \partial_v \Omega\},\ V^0 = \{v \in (H^1(\Omega))^3; v = 0 \text{ sur } \partial_v \Omega\} \end{cases} \tag{2.2}$$

$$L^2(\Omega) = \{u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \ / \ \int_\Omega u^2 < \infty\}$$
$$H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) \ / \ \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)\ i = 1 \dots d\}$$

2.2.3 Discrétisation éléments finis

La discrétisation éléments finis consiste à ramener le problème variationnel défini sur des espaces fonctionnels continus V et $L^2(\Omega)$ sur des sous-espaces d'approximation de dimension finie $\mathcal{V}_h$, $\mathcal{V}_h^0$ et $\mathcal{Q}_h$. Les définitions de ces sous-espaces sont données plus loin dans cette section.

Le domaine Ω est approché par Ω_h qui est discrétisé en une triangulation $(\mathcal{T}_h)_h$: $\Omega_h = \bigcup_{m=1}^{nt} T_m$ où nt est le nombre d'éléments de la triangulation.

Le paramètre h (destiné à tendre vers zéro) désignant le plus grand diamètre des éléments de $\mathcal{T}_h$, et on suppose que la famille $\mathcal{T}_h$ est régulière au sens suivant : le quotient du diamètre d'un élément quelconque $T \in \mathcal{T}_h$ par le diamètre du cercle inscrit est majoré par une constante indépendante de h.

En exprimant (2) dans ces espaces de dimension finie, on obtient la formulation mixte discrète suivante :

Trouver $(v_h, p_h) \in V_h \times Q_h$ tels que :

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{\Omega_h} s(v_h) : \dot{\varepsilon}(u_h) - \int_\Omega p_h div(u_h) = \int_{\partial_f \Omega_h} T_h.u_h \quad \forall u_h \in V_h^0 \\ \\ \displaystyle -\int_\Omega q_h div(v_h) - \int_{\Omega_h} q_h \left(\frac{1}{\chi(1-hw)} \dot{p}_h + \frac{h\dot{w}}{\chi(1-hw)^2} p_h \right) = 0 \quad \forall q_h \in Q_h \end{cases} \tag{2.3}$$

A chaque élément de la triangulation on associe des fonctions d'interpolation pour approcher les inconnues du problème v_h et p_h. Il est bien connu que, contrairement aux problèmes éléments finis avec une seule inconnue, les problèmes mixtes introduisent une contrainte supplémentaire sur la compatibilité des espaces d'approximation. En effet l'existence et l'unicité de la solution discrète (v_h, p_h) ainsi que sa convergence vers la solution continue, ne sont

garantis que si ces espaces d'approximation vérifient la condition de compatibilité de *Brezzi-Babûska* discrète, qui s'écrit :

$$\exists \beta > 0 \quad \inf_{q_h \in Q_h} \sup_{v_h \in V_h} \frac{\int_{\Omega_h} p_h div(v_h)}{\| u_h \| . \| q_h \|} \geq \beta \tag{2.4}$$

Cette condition de compatibilité exclut certains choix d'espaces d'interpolation qui sembleraient naturels (par exemple : $P1/P0$ ou $P1/P1$).

Les éléments les plus répandus satisfaisant cette condition sont le mini élément ($P1^+/P1$), l'élément de *Taylor-Hood* ($P2/P1$) [28] et l'élément de *crouzeix-raviart* ($P2^+/P1discontinue$). Dans notre cas, nous utilisons l'élément mixte de plus petit degré $P1^+/P1$ (figure 2.1).

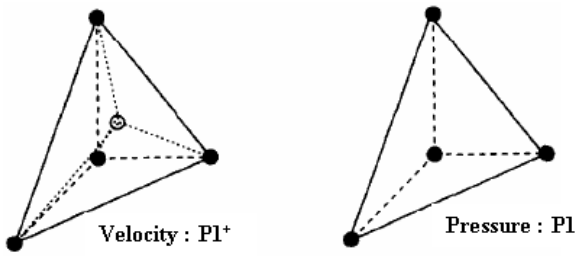


FIG. 2.1 – Représentation de l'élément : $P1^+/P1$.

Cet élément a été introduit par Arnold, Brezzi et Fortin [29] pour des écoulements de Stokes incompressibles. C'est un élément $P1/P1$ dont on enrichit l'interpolation de la vitesse par l'ajout d'un degré de liberté associé au centre de gravité sur chaque élément du maillage. Ces degrés de liberté supplémentaires définissent une fonction bulle qui s'annule sur la frontière de chaque élément du maillage.

Afin d'avoir le même ordre d'intégration pour les fonctions bulle que pour les vitesses et les pressions, chaque tétraèdre T_m est décomposé en quatre tétraèdres différents (figure 2.2) T_{mk} $k = 1, .., 4$ (dont les sommets de chaque sous-tétraèdre sont le centre de gravité et 3 nœuds du tétraèdre T_m).

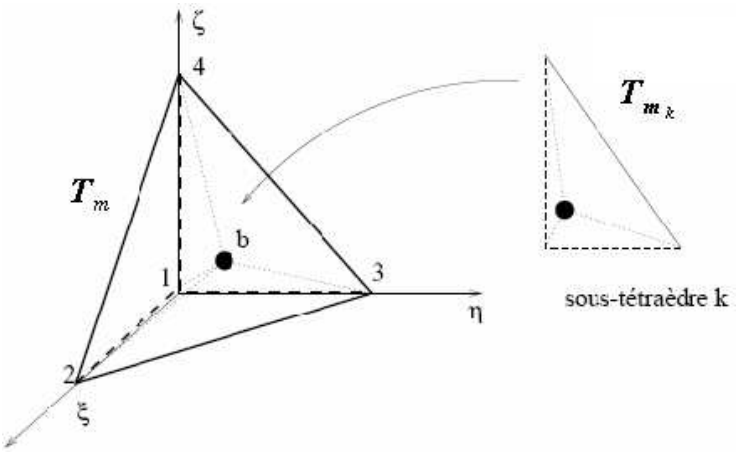


FIG. 2.2 – Décomposition du tétraèdre en 4 sous tétraèdres.

Ensuite, on interpole la fonction bulle par des fonctions linéaires par sous-éléments en utilisant des fonctions de forme valant 1 au centre de gravité b et 0 sur le bord de l'élément. Ces fonctions, notées N_{m_k} $k = 1 \dots (d+1)$, sont définies de la manière suivante [30] :

$$
\begin{aligned}
&N_{m_1} = 4\xi \text{ sur le sous élément } (1,3,4,b)\\
&N_{m_2} = 4\eta \text{ sur le sous élément } (1,4,2,b)\\
&N_{m_3} = 4\zeta \text{ sur le sous élément } (1,2,3,b)\\
&N_{m_4} = 4(1-\xi-\eta-\zeta) \text{ sur le sous élément } (2,3,4,b)
\end{aligned}
$$

Les fonctions de base associées aux nœuds internes ont un support qui se limite à un élément. Les degrés de liberté correspondants ne sont liés à aucun autre degré de liberté que ceux de l'élément considéré. Cela nous permet donc d'éliminer par condensation les degrés de liberté de la bulle au niveau élémentaire avant l'assemblage.

En pratique la condensation se fait grâce à la décomposition : $v_h = u_h \oplus u_b$; une partie associée à l'interpolation linéaire des valeurs aux sommets de l'élément u_h et une partie bulle au centre de l'élément u_b. Nous introduisons donc les espaces d'interpolation suivants :

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{B}_h = \{u \in (C^0(\Omega_h))^3, u|_{\partial T_m} = 0 \,\forall m = 1,..,nt,\ u|_{T_{mi}} \in (P1(T_{mi}))^3, i = 1,..,4\}\\
&\mathcal{V}_h = \{u \in (C^0(\Omega_h))^3\,,\ u \in (P_1(T_m))^3\,,\ u|_{\partial_v\Omega_h} = v^0\ \forall m = 1,..,nt\}\\
&\mathcal{V}_h^0 = \{u \in (C^0(\Omega_h))^3\,,\ u \in (P_1(T_m))^3\,,\ u|_{\partial_v\Omega_h} = 0\ \forall m = 1,..,nt\}\\
&\mathcal{Q}_h = \{p \in C^0(\Omega_h) : p \in P_1(T_m)\ \forall m = 1,..,nt\}
\end{aligned}
$$

Le problème variationnel discret devient alors :
Trouver $(v_h^l, v_h^b, p_h) \in \mathcal{V}_h \times \mathcal{B}_h \times \mathcal{Q}_h$ telles que :

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{\Omega_h} s(v_h^l + v_h^b) : \dot{\varepsilon}(u_h^l) - \int_{\Omega_h} p_h div(u_h^l) = \int_{\partial_T \Omega_h} T_h.u_h^l \qquad \forall u_h^l \in \mathcal{V}_h^0 \\ \displaystyle\int_{\Omega_h} s(v_h^l + v_h^b) : \dot{\varepsilon}(u_h^b) - \int_{\Omega_h} p_h div(u_h^b) = \int_{\partial \Omega_h} (\sigma n).u_h^b \qquad \forall u_h^b \in \mathcal{B}_h \\ \displaystyle -\int_{\Omega_h} q_h div(v_h^l + v_h^b) - \int_{\Omega_h} q_h \left(\frac{1}{\chi(1-hw)} \dot{p}_h + \frac{h\dot{w}}{\chi(1-hw)^2} p_h \right) = 0 \quad \forall q_h \in \mathcal{Q}_h \end{cases} \tag{2.5}$$

A partir de la définition de l'espace d'interpolation des fonctions bulles $\mathcal{B}_h$, on peut facilement déduire les deux propriétés fondamentales de la fonction bulle v_h^b suivantes :

- Les fonctions bulles s'annulent sur les arêtes du maillage, elles s'annulent donc sur $\partial\Omega_h$, il s'ensuit :
$$\int_{\partial_f \Omega_h} T_h.u_h^b = 0$$

- Le champ bulle possède la propriété que son gradient est orthogonal à tout tenseur constant par élément, ce qui donne :
$$\int_{\Omega_h} \nabla v_h^l : \nabla u_h^b = 0$$

Ces deux propriétés permettent de découpler les champs inconnus v_h^l et v_h^b de la formulation variationnelle discrète, cette formulation devient alors :
Trouver $(v_h^l, v_h^b, p_h) \in \mathcal{V}_h \times \mathcal{B}_h \times \mathcal{Q}_h$ telles que :

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{\Omega_h} s(v_h^l) : \dot{\varepsilon}(u_h^l) - \int_{\Omega_h} p_h div(u_h^l) = \int_{\partial_T \Omega_h} T_h.u_h^l \quad \forall u_h^l \in \mathcal{V}_h^0 \\ \displaystyle\int_{\Omega_h} s(v_h^b) : \dot{\varepsilon}(u_h^b) - \int_{\Omega_h} p_h div(u_h^b) = 0 \qquad \forall u_h^b \in \mathcal{B}_h \\ \displaystyle -\int_{\Omega_h} q_h div(v_h^l + v_h^b) - \int_{\Omega_h} q_h \left(\frac{1}{\chi(1-hw)} \dot{p}_h + \frac{h\dot{w}}{\chi(1-hw)^2} p_h \right) = 0 \quad \forall q_h \in \mathcal{Q}_h \end{cases} \tag{2.6}$$

En appliquant une procédure classique de la méthode des éléments finis, à partir de la dernière formulation discrète, on calcule les contributions élémentaires, ensuite, on les assemble pour construire le système matriciel du problème. La contribution élémentaire peut s'écrire synthétiquement sous la forme algébrique suivante :

$$\left\{\begin{array}{lll} R_e^v(v_h^l, p_h) & = R_e^{vv} + 0 & + R_e^{vp} - f_e^v = 0 \\ R_e^b(v_h^b, p_h) & = 0 + R_e^{bb} & + R_e^{bp} = 0 \\ R_e^p(v_h^l, v_h^b, p_h) & = R_e^{pv} + R_e^{pb} & + R_e^{pp} = 0 \end{array}\right. \tag{2.7}$$

Le problème discret (2.7) est non linéaire, l'algorithme itératif de *Newton Raphson* est utilisé pour son intégration. Afin de construire les contributions locales dans les problèmes linéarisés, on introduit :

$$K_e^{xy} = \frac{\partial R_e^{xy}}{\partial z} \tag{2.8}$$

où x et y évoluent dans $\{v, b, p\}$, et z évolue dans (v_h^l, v_h^b, p_h)

La solution (v_h^l, v_h^b, p_h) du problème discret non linéaire est modifiée, à chaque itération de *Newton Raphson*, par une correction $(\delta v^l, \delta v^b, \delta p)$. Cette correction est la solution d'un système algébrique global obtenu par assemblage des contributions élémentaires. Ce système matriciel global peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\left[\begin{array}{ccc} K^{vv} & 0 & K^{vp} \\ 0 & K^{bb} & K^{bp} \\ K^{pv} & K^{pb} & K^{pp} \end{array}\right] \left(\begin{array}{c} \delta v^l \\ \delta v^b \\ \delta p \end{array}\right) = - \left(\begin{array}{c} R^v \\ R^b \\ R^p \end{array}\right) \tag{2.9}$$

Les fonctions bulles sont associées à des nœuds internes sur chaque élément du maillage. De plus les fonctions de forme associées aux nœuds internes ont un support qui se limite à un élément, et sont donc nulles sur le bord de chaque élément. Les degrés de liberté correspondants ne sont liés à aucun autre degré de liberté que ceux de l'élément considéré. Cela nous permet donc d'éliminer par condensation les degrés de liberté de la bulle au niveau élémentaire avant l'assemblage. Localement nous avons :

$$\delta v_e^b = -(K_e^{bb})^{-1} \left[R_e^b + K_e^{bp} \delta p_e\right] \tag{2.10}$$

Cette condensation locale permet de réduire les contributions du sous système associé à chaque élément à :

$$\left(\begin{array}{cc} K_e^{vv} & k_e^{vp} \\ K_e^{pv} & K_e^{pp} - C_e \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} \delta v_e^l \\ \delta p_e \end{array}\right) = - \left(\begin{array}{c} R_e^v \\ R_e^p - G_e \end{array}\right) \tag{2.11}$$

où $C_e = K_e^{bp}(K_e^{bb})^{-1} K_e^{bp}$ est la matrice de condensation locale de la bulle, et $G_e = R_e^{bp}(R_e^{bb})^{-1} R_e^b$ est le second membre associé à la même condensation.

Les degrés de liberté associés au terme de la bulle sont totalement éliminés du système algébrique global. La contribution dans le problème global de la bulle est évaluée localement par condensation. On obtient alors une formulation mixte en vitesse/pression avec seulement des inconnues nodales, les trois composantes du champs de vitesse et celle de la pression :

$$\begin{pmatrix} K^{vv} & k^{vp} \\ K^{pv} & K^{pp} - C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta v^l \\ \delta p \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} R^v \\ R^p - G \end{pmatrix} \tag{2.12}$$

On se ramène ainsi à la résolution d'un problème discret ayant les mêmes degrés de liberté sans les fonctions bulles. L'enrichissement de l'espace d'approximation par des fonctions bulles nulles sur la frontière de chaque élément permet d'assurer la condition de *Brezzi-Babûska* sans pour autant modifier la taille du problème global sans l'enrichissement.

La linéarisation du problème mécanique par l'algorithme de *Newton* nécessite le calcul de la différentielle de la fonctionnelle du système. En utilisant la notation indicielle, nous obtenons pour la partie non linéaire :

$$\begin{aligned} [\frac{\partial s}{\partial v}\delta v] : \dot{\varepsilon}(u) &= \frac{\partial s_{ij}}{\partial v_m}\delta v_m \dot{\varepsilon}_{ij}(u) \\ &= \frac{\partial s_{ij}}{\partial \dot{\varepsilon}_{kl}(v)} \frac{\partial \dot{\varepsilon}_{kl}(v)}{\partial v_m}\delta v_m \dot{\varepsilon}_{ij}(u) \\ &= L_{ij,kl}\dot{\varepsilon}_{kl}(\delta v)\dot{\varepsilon}_{ij}(u) \\ &= L : (\dot{\varepsilon}(u) \otimes \dot{\varepsilon}(\delta v)) \end{aligned} \tag{2.13}$$

où L est le module tangent déviatorique, un tenseur d'ordre 4 (16 composantes en $2D$, 81 composantes en $3D$), défini par :

$$L_{ij,kl} = \frac{\partial s_{ij}}{\partial \dot{\varepsilon}_{kl}(u)} \tag{2.14}$$

Pour compléter la définition du problème mécanique (2.9), il est nécessaire de calculer ce module tangent déviatorique, c'est à dire la dérivée du déviateur des contraintes par rapport au taux de déformation en chaque point d'intégration.

Nous exposons dans la suite l'intégration de la loi de comportement ainsi que le calcul de ce module tangent.

2.3 Intégration de la loi de comportement élastoplastique endommageable

Dans cette section on s'intéresse à l'intégration de la loi de comportement décrite au chapitre 1. Cette intégration est nécessaire pour déterminer l'évolution non linéaire des variables pendant un incrément de temps $[t_n, t_{n+1}]$. Les variables $(\dot{e}^p_n, w_n, s_n)$ sont connues à l'instant t_n. Connaissant e_{n+1} calculé à partir de la vitesse à l'itération précédente, l'intégration numérique consiste à déterminer $(\dot{e}^p_{n+1}, w_{n+1}, s_{n+1})$.

2.3.1 Schéma numérique et intégration de la loi constitutive

De nombreuses méthodes numériques ont été développées pour l'intégration locale de la loi de comportement élastoplastique. Les premières sont : la méthode du prédicteur tangent retour

radial [31], la méthode de la normale moyenne [31], et la méthode du prédicteur élastique retour radial [31].

Ces schémas ont été généralisés par une méthode dite θ-méthode ou point milieu généralisé.

Dans ce manuscrit, nous utilisons la θ-méthode avec $\theta = 1$, ce qui correspond à un schéma d'Euler implicite, ainsi que la méthode du prédicteur élastique retour radial. Cette dernière est la plus précise parmi les trois méthodes citées précédemment [31] ; de plus c'est un schéma inconditionnellement stable. Ce schéma permet donc :

$$\dot{s} = (1-\theta)\dot{s}_n + \theta\dot{s}_{n+1} = \frac{s_{n+1} - s_n}{\Delta t} \tag{2.15}$$

La formule du trapèze appliquée à $\dot{s} = 2\mu(1-hw)\dot{e}^e - \frac{\dot{w}}{1-hw}s$ conduit à :

$$\begin{aligned} s_{n+1} - s_n \quad &= 2\mu(1-hw_n)\Delta t\theta\dot{e}_{n+1} - \left[\frac{3\Delta t\theta\mu\lambda^{pl}_{n+1}}{(1-hw_{n+1})\sigma_0(r_{n+1})} + \frac{\theta h\dot{w}_{n+1}}{1-hw_{n+1}}\right]s_{n+1} \\ &-2\mu(1-hw_{n+1})\Delta t(1-\theta)\dot{e}_n + \left[\frac{3\Delta t(1-\theta)\mu\lambda^{pl}_n}{(1-hw_n)\sigma_0(r_n)} - \frac{(1-\theta)h\dot{w}_n}{1-hw_n}\right]s_n \end{aligned} \tag{2.16}$$

En remplaçant θ par sa valeur, on obtient :

$$s_{n+1} = \frac{s_n + 2\mu(1-hw_{n+1})\Delta t\dot{e}_{n+1}}{1 + \left(\frac{3\mu\Delta t\lambda^{pl}_{n+1}}{(1-hw_{n+1})\sigma_0(r_{n+1})} + \frac{\Delta th\dot{w}_{n+1}}{1-hw_{n+1}}\right)} \tag{2.17}$$

A cette équation on ajoute la condition de consistance plastique, et les expressions discrètes du multiplicateur plastique et de la variable d'endommagement. Cela permet d'écrire le système suivant, d'inconnues s_{n+1}, w_{n+1} et λ^{pl}_{n+1} (ou $\dot{\bar{\varepsilon}}_{n+1}$)

$$\begin{cases} s_{n+1} = \dfrac{s_n + 2\mu(1-hw_{n+1})\Delta t\dot{e}_{n+1}}{1 + \left(\frac{3\mu\Delta t\lambda^{pl}_{n+1}}{(1-hw_{n+1})\sigma_0(r_{n+1})} + \frac{\Delta th\dot{w}_{n+1}}{1-hw_{n+1}}\right)} \\ s_{n+1} : s_{n+1} = \dfrac{2}{3}(1-hw_{n+1})^2\sigma_0^2(r_{n+1}) \\ w_{n+1} - w_n = \Delta t\dot{w}_{n+1} \\ \lambda^{pl}_{n+1} = (1-hw_{n+1})\dot{\bar{\varepsilon}}_{n+1} \end{cases} \tag{2.18}$$

En injectant la première équation du système (2.18) dans la seconde, et en prenant la racine carrée, nous aboutissons au système suivant :

$$\boxed{\begin{cases} (1-hw_{n+1} + \Delta th\dot{w}_{n+1})\sigma_0(r_{n+1}) + 3\mu\Delta t\lambda^{pl}_{n+1} - B_0 = 0 \\ w_{n+1} - w_n = \Delta t\dot{w}_{n+1} \end{cases}} \tag{2.19}$$

où $B_0^2 = \frac{3}{2} s_{n+1}^T : s_{n+1}^T$
avec $s_{n+1}^T = s_n + 2\mu(1 - hw_{n+1})\Delta t \dot{e}_{n+1}$ représente le prédicteur élastique.

On peut obtenir aussi par substitution :

$$\boxed{\begin{cases} f_1 = \left(1 - hw_{n+1} + \Delta th\left(\frac{-Y_{n+1}}{S_0}\right)^b \dot{\bar{\varepsilon}}_{n+1}\delta_{\{\bar{\varepsilon}_{n+1} \geq \bar{\varepsilon}_d\}}\right)\sigma_0(r_{n+1}) + 3\mu(1 - hw_{n+1})\Delta t\dot{\bar{\varepsilon}}_{n+1} - B_0 = 0 \\ f_2 = w_{n+1} - w_n - \Delta t\left(\frac{-Y_{n+1}}{S_0}\right)^b \dot{\bar{\varepsilon}}_{n+1}\delta_{\{\bar{\varepsilon}_{n+1} \geq \bar{\varepsilon}_d\}} = 0 \end{cases}} \tag{2.20}$$

où $r_{n+1} = (1 - hw_{n+1})(\dot{\bar{\varepsilon}}_n + \Delta t\dot{\bar{\varepsilon}}_{n+1})$

Ce système d'inconnues (w_{n+1} et $\dot{\varepsilon}_{n+1}$) est non linéaire. Il est résolu et est linéarisé par un schéma itératif de Newton. Cela nécessite le calcul de la matrice Jacobienne à partir des dérivées des deux équations par rapport aux deux inconnues.

$$\frac{\partial f_1}{\partial \dot{\bar{\varepsilon}}_{n+1}} = -h\frac{\partial f_2}{\partial \dot{\bar{\varepsilon}}_{n+1}}\sigma_0 + (1 - hw_{n+1} + \Delta th\dot{w}_{n+1})(1 - hw_{n+1})\Delta t\frac{\partial \sigma_0(r_{n+1})}{\partial r_{n+1}} + 3\mu(1 - hw_{n+1})\Delta t \tag{2.21}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial w_{n+1}} = -h\frac{\partial f_2}{\partial w_{n+1}}\sigma_0 - (1 - hw_{n+1} + \Delta th\dot{w}_{n+1})h\bar{\varepsilon}_{n+1}\frac{\partial \sigma_0(r_{n+1})}{\partial r_{n+1}} - 3\mu\Delta th\dot{\bar{\varepsilon}}_{n+1} + \frac{3\mu\Delta th}{B_0}\dot{e}_{n+1} : s_{n+1}^T \tag{2.22}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial \dot{\bar{\varepsilon}}_{n+1}} = -\Delta t\left(\frac{-Y}{S_0}\right)^b - \frac{b}{S_0}\left(\frac{-Y}{S_0}\right)^{b-1}\frac{\Delta t(1 - hw_{n+1})\sigma_0(r_{n+1})\dot{\bar{\varepsilon}}_{n+1}}{3\mu}\frac{\partial \sigma_0(r_{n+1})}{\partial r_{n+1}} \tag{2.23}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial w_{n+1}} = 1 - \Delta t\dot{\bar{\varepsilon}}_{n+1}\frac{b}{S0}\left(\frac{-Y}{S0}\right)^{b-1}\left[\frac{\sigma_0(r_{n+1})\bar{\varepsilon}_{n+1}}{3\mu}\frac{\partial \sigma_0(r_{n+1})}{\partial r_{n+1}} + \frac{hp_{n+1}^2}{\kappa(1 - hw_{n+1})^3}\dot{\bar{\varepsilon}}_{n+1}\right] \tag{2.24}$$

Ensuite λ_{n+1}^{pl} est obtenu par :

$$\lambda_{n+1}^{pl} = (1 - hw_{n+1})\dot{\bar{\varepsilon}}_{n+1} \tag{2.25}$$

Le déviateur des contraintes est donné par :

$$\boxed{\begin{aligned} s_{n+1} &= \frac{s_n + 2\mu(1 - hw_{n+1})\Delta t\dot{e}_{n+1}}{1 + \left[\frac{3\mu\Delta t\lambda_{n+1}^{pl}}{(1 - hw_{n+1})\sigma_0} + \frac{\Delta th\dot{w}_{n+1}}{1 - hw_{n+1}}\right]\delta_{\{\lambda_{n+1}^{pl} > 0\}}} \\ &= (1 - hw_{n+1})\sigma_0\frac{s_n + 2\mu(1 - hw_{n+1})\Delta t\dot{e}_{n+1}}{B_0} \end{aligned}} \tag{2.26}$$

Niveaux de couplage numérique

L'intégration de la loi de comportement s'effectue à chaque itération de *Newton* de la résolution du problème global. Cette intégration doit être précise pour respecter au mieux les équations de la loi constitutive et ne doit pas être coûteuse en temps cpu pour ne pas pénaliser le temps de la résolution globale. Dans cette optique, nous avons étudié trois niveaux de couplage numérique entre la déformation plastique et l'endommagement. Nous avons défini ces modes de couplage comme suit :

1. le premier niveau de couplage est appelé : **couplage fort**. Il consiste à résoudre le système non linéaire (2.20) avec ses deux inconnues (l'endommagement et le taux de déformation plastique). Cette intégration s'effectue à chaque point d'intégration pour toute itération de Newton pour calculer la correction du problème mécanique global ;

2. le deuxième niveau est appelé : **couplage intermédiaire**. Le système (2.20) est réduit à une seule équation avec le taux de déformation plastique comme inconnue. La valeur précédente de la variable d'endommagement est utilisée pour la réduction de ce système. Ensuite, la valeur de l'endommagement est actualisée à partir de la solution de ce système réduit ;

3. le troisième niveau est appelé **couplage faible**. Il est similaire au couplage intermédiaire hormis la mise à jour de l'endommagement qui est effectuée à la fin de l'incrément de temps et non pas à chaque itération de Newton.

2.3.2 Opérateur tangent cohérent

Dans cette partie, on s'intéresse au calcul de l'opérateur tangent donné par (2.14). Pour s'assurer d'une convergence efficace, il est important d'utiliser un opérateur tangent consistant avec le schéma d'intégration de la loi de comportement [32, 33]. Nous développons donc une expression analytique de l'opérateur tangent cohérent avec le schéma d'intégration présenté à la section précédente. On commence par les dérivations suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial s_{n+1}}{\partial \dot{\varepsilon}_{n+1}} &= \frac{\partial s_{n+1}}{\partial \dot{e}_{n+1}} \frac{\partial \dot{e}_{n+1}}{\partial \dot{\varepsilon}_{n+1}} \\ &= \frac{\partial s_{n+1}}{\partial \dot{e}_{n+1}} \left(I_4 - I_2 \otimes I_2\right) \end{aligned} \tag{2.27}$$

où $(I_4)_{ij,kl} = \delta_{ik}\delta_{jl}$, $(I_2 \otimes I_2)_{ij,kl} = \delta_{ij}\delta_{kl}$

Pour continuer le calcul de l'opérateur tangent, nous avons besoin de rappeler quelques dérivations par rapport à $\dot{e}_{n+1}$

$$\frac{\partial \sigma_0}{\partial \dot{e}_{n+1}} = \frac{\partial \sigma_0(r)}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial \dot{e}_{n+1}} = \Delta t \frac{\partial \sigma_0(r)}{\partial r} \frac{\partial \lambda^{pl}_{n+1}}{\partial \dot{e}_{n+1}} \tag{2.28}$$

$$\frac{\partial \dot{w}_{n+1}}{\partial \dot{e}_{n+1}} = \frac{\dot{w}_{n+1}}{\lambda^{pl}_{n+1}} \frac{\partial \lambda^{pl}_{n+1}}{\partial \dot{e}_{n+1}} \tag{2.29}$$

$$\frac{\partial B_0}{\partial \dot{e}_{n+1}} = \frac{3\mu\Delta t}{\sigma_0} s_{n+1} \tag{2.30}$$

$$\lambda^{pl}_{n+1} = \frac{B_0 - (1 - hw_{n+1} + \Delta th\dot{w}_{n+1})\sigma_0}{3\mu\Delta t} \tag{2.31}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \lambda^{pl}_{n+1}}{\partial \dot{e}_{n+1}} &= \tfrac{1}{3\mu\Delta t}\left(\tfrac{\partial\, B_0}{\partial \dot{e}_{n+1}} - (1 - w_{n+1} + \Delta th\dot{w}_{n+1})\tfrac{\partial \sigma_0}{\partial \dot{e}_{n+1}} - \Delta th\sigma_0 \tfrac{\partial \dot{w}_{n+1}}{\partial \dot{e}_{n+1}}\right) \\
&= \frac{1}{\sigma_0} s_{n+1} - \left(\frac{B_0 - 3\mu\Delta t\lambda_{n+1}}{3\mu\sigma_0}\frac{\partial \sigma_0}{\partial r} + \frac{\sigma_0 h\dot{w}_{n+1}}{3\mu\lambda_{n+1}}\right)\frac{\lambda^{pl}_{n+1}}{\partial \dot{e}_{n+1}} \\
&= \frac{3\mu\lambda_{n+1}}{3\mu\sigma_0\lambda_{n+1} + (B_0 - 3\mu\Delta t\lambda_{n+1})\lambda_{n+1}\frac{\partial \sigma_0}{\partial r} + \sigma_0^2 h\dot{w}_{n+1}} s_{n+1}
\end{aligned} \tag{2.32}$$

Ces dérivations sont ensuite utilisées pour la dérivation de s_{n+1} par rapport à $\dot{e}_{n+1}$:

$$\begin{aligned}
\tfrac{\partial s_{n+1}}{\partial \dot{e}_{n+1}} &= 2\mu(1 - hw_{n+1})^2\Delta t\frac{\sigma_0}{B_0}\mathbf{I}_4 - \frac{\sigma_0(1 - w_{n+1})}{B_0} s_{n+1} \otimes \frac{\partial\left(\frac{3\mu\Delta t\lambda^{pl}_{n+1}}{(1-w_{n+1})\sigma_0} + \frac{\Delta th\dot{w}_{n+1}}{1-w_{n+1}}\right)}{\partial \dot{e}_{n+1}} \\
&= 2\mu(1 - hw_{n+1})^2\Delta t\frac{\sigma_0}{B_0}\mathbf{I}_4 - \frac{\sigma_0}{B_0} s_{n+1} \otimes \frac{\partial\left(\frac{3\mu\Delta t\lambda^{pl}_{n+1}}{\sigma_0} + \Delta th\dot{w}_{n+1}\right)}{\partial \dot{e}_{n+1}} \\
&= 2\mu(1 - hw_{n+1})^2\Delta t\frac{\sigma_0}{B_0}\mathbf{I}_4 - \frac{\sigma_0}{B_0} s_{n+1} \otimes \left(\frac{3\mu\Delta t}{\sigma_0}\frac{\partial \lambda^{pl}_{n+1}}{\partial \dot{e}_{n+1}} - \frac{3\mu\Delta t\lambda^{pl}_{n+1}}{\sigma_0^2}\frac{\partial \sigma_0}{\partial \dot{e}_{n+1}} + \Delta th\frac{\partial \dot{w}_{n+1}}{\partial \dot{e}_{n+1}}\right) \\
&= 2\mu(1 - hw_{n+1})^2\Delta t\frac{\sigma_0}{B_0}\mathbf{I}_4 - \frac{\sigma_0}{B_0}\Delta t s_{n+1} \otimes \frac{\partial \lambda^{pl}_{n+1}}{\partial \dot{e}_{n+1}}\left(\frac{3\mu}{\sigma_0} - \frac{3\mu\Delta t\lambda^{pl}_{n+1}}{\sigma_0^2}\frac{\partial \sigma_0(r)}{\partial r} + \frac{h\dot{w}_{n+1}}{\lambda^{pl}_{n+1}}\right) \\
&= 2\mu(1 - hw_{n+1})^2\Delta t\frac{\sigma_0}{B_0}\mathbf{I}_4 - \Delta t s_{n+1} \otimes \frac{\partial \lambda^{pl}_{n+1}}{\partial \dot{e}_{n+1}}\left(\frac{3\mu\lambda^{pl}_{n+1} + \sigma_0 h\dot{w}_{n+1}}{B0\lambda^{pl}_{n+1}} - \frac{3\mu\Delta t\lambda^{pl}_{n+1}}{\sigma_0 B_0}\frac{\partial \sigma_0(r)}{\partial r}\right) \\
&= 2\mu(1 - hw_{n+1})^2\Delta t\frac{\sigma_0}{B_0}\mathbf{I}^4 - 2\mu\Delta t c s_{n+1} \otimes s_{n+1}
\end{aligned} \tag{2.33}$$

où

$$c = \left(\frac{3\mu\lambda^{pl}_{n+1} + \sigma_0 h\dot{w}_{n+1}}{2B_0\lambda^{pl}_{n+1}} - \frac{3\mu\Delta t\lambda^{pl}_{n+1}}{2B_0\sigma_0}\frac{\partial\sigma_0}{\partial r} \right) \left(\frac{3\lambda^{pl}_{n+1}}{3\mu\sigma_0\lambda^{pl}_{n+1} + (B_0 - 3\mu\Delta t\lambda^{pl}_{n+1})\lambda^{pl}_{n+1}\frac{\partial\sigma_0}{\partial r} + \sigma_0^2 h\dot{w}_{n+1}} \right) \tag{2.34}$$

En résumé, l'expression de la matrice tangente est donnée par :

$$\boxed{L = 2\mu(1 - hw_{n+1})^2\Delta t\frac{\sigma_0}{B_0}\left(I_4 - \frac{1}{d}I_2 \otimes I_2\right) - 2\mu\Delta t c s_{n+1} \otimes s_{n+1}} \tag{2.35}$$

La matrice tangente bulle $L^b = \frac{\partial s(v^b)}{\partial\dot{\varepsilon}(v^b)}$ est nécessaire pour calculer les contributions locales des termes de la bulle (2.10) et (2.11) dans le système global (2.12). Aliaga [34] a montré que cette matrice est égale à la partie linéaire de la matrice tangente (2.35) :

$$\boxed{L^b = 2\mu(1 - hw_{n+1})^2\Delta t\frac{\sigma_0}{B_0}\left(I_4 - \frac{1}{d}I_2 \otimes I_2\right)} \tag{2.36}$$

2.3.3 Algorithme d'intégration locale

On considère la $i^{ième}$ itération de Newton-Raphson pour passer de l'incrément n à l'incrément $n+1$. $\dot{\varepsilon}(v_i)$ est calculée à partir de la vitesse à l'itération précédente. La détermination des autres variables s'effectue comme suit :

- on calcule : $\dot{e} = \dot{\varepsilon}(v_i) - \frac{1}{d}tr\dot{\varepsilon}(v_i)I$
- on calcule : $B_0^i = \sqrt{\frac{2}{3}[s_n + 2\mu\Delta t(1 - hw_{n+1}^{i-1})\dot{e}^i_{n+1}] : [s_n + 2\mu\Delta t(1 - hw_{n+1}^{i-1})\dot{e}^i_{n+1}]}$
- prédicteur élastique correcteur plastique :
  - si $(1 - hw^i_{n+1})\sigma(r^{i-1}_{n+1}) > B^i_0$ la déformation est purement élastique :
    $\dot{\bar{\varepsilon}}^i_{n+1} = 0$ et $w^i_{n+1} = w^{i-1}_{n+1}$
  - sinon, correcteur plastique-endommagement :
    on calcule $\dot{\bar{\varepsilon}}^i_{n+1}$ et w^i_{n+1} avec une des méthodes de couplage décrites précédemment.
- on calcule le multiplicateur plastique : $\lambda^{pl^i}_{n+1} = (1 - hw^i_{n+1})\dot{\bar{\varepsilon}}^i_{n+1}$
- on calcule s^i_{n+1}, L_i et L^b_i par leurs expressions (2.26), (2.35) et (2.36) ;
- finalement, connaissant s^i_{n+1}, L_i et L^b_i
  p^{i+1}_{n+1} et v^{i+1}_{n+1} sont obtenus à partir de la résolution du problème mécanique global.

Remarque

Toutes les relations que nous avons établies pour une loi élasto-plastique endommageable, sont valables :

- dans le cas de l'élasticité linéaire : on considère que la déformation est purement élastique, on retrouve bien la loi de *Hooke* reliant le tenseur des contraintes et celui des déformations : $s_{n+1} = s_n + 2\mu\Delta t\dot{e}_{n+1}$.
  On retrouve aussi l'expression du module tangent : $L = 2\mu\Delta t(I_4 - \frac{1}{d}I_2 \otimes I_2)$ qu'on peut obtenir directement par dérivation de la loi de *Hooke* ;

- dans le cas élasto-plastique avec écrouissage isotrope : en mettant ($w = 0$ et $\dot{w} = 0$), on retrouve les équations de l'élasto-plasticité avec écrouissage isotrope rappelées au chapitre précédent ainsi que l'expression du module tangent cohérent avec le schéma d'intégration pour une approche éléments finis mixte vitesse pression [31].

Les développements présentés précédemment pour la loi constitutive élastoplastique endommageable ont été intégrés à la librairie *CimLib* afin de l'adapter au calcul de structure avec endommagement.

La démarche de validation mise en place a consisté à valider les résultats numériques dans le cadre de l'élasticité linéaire, puis pour l'élastoplasticité avant de passer à l'endommagement.

2.4 Validations numériques

Avant d'aborder la validation pour la loi de comportement élastoplastique endommageable, nous avons effectué des validations dans le cas de l'élasticité linéaire (par exemple, comparaison de la solution approchée et la solution analytique dans le cas test d'une plaque trouée en traction uni-axiale). Ensuite, nous avons procédé à des validations, dans le cadre de l'élasto-plasticité, en faisant des comparaisons de la solution analytique et de la solution numérique.

2.4.1 Élasticité linéaire : cas test de la plaque trouée

On considère le problème 2D d'une plaque mince trouée au centre et soumise à un chargement de traction uni-axiale. La plaque est rectangulaire et le trou est un cercle de centre (0,0) et de rayon 1. Afin de comparer l'approximation numérique et la solution analytique, on considère que cette plaque est une partie d'une plaque infinie en traction uni-axiale. Nous disposons ainsi de la solution analytique pour les équations de l'élasticité linéaire dans la plaque finie par restriction de celle de la plaque infinie donnée par (2.37) et (2.38).

Le tenseur des contraintes d'une plaque infinie en traction uni-axiale est donné par :

$$\begin{aligned}
\sigma_r(r,\theta) &= \frac{\sigma_\infty}{2}[(1 - \frac{a^2}{r^2}) - (1 - 4\frac{a^2}{r^2} + 3\frac{a^4}{r^4})\cos(2\theta)] \\
\sigma_\theta(r,\theta) &= \frac{\sigma_\infty}{2}[(1 + \frac{a^2}{r^2}) + (1 + 3\frac{a^4}{r^4})\cos(2\theta)] \\
\sigma_{r\theta}(r,\theta) &= \frac{\sigma_\infty}{2}[1 + 2\frac{a^2}{r^2} - 3\frac{a^4}{r^4}]\sin(2\theta)
\end{aligned} \tag{2.37}$$

Le champ des déplacements d'une plaque infinie en traction uni-axiale s'écrit :

$$u_r = \frac{1}{4\mu}[r(2\nu - 1 + cos(2\theta)) + \frac{a^2}{r}(1 + 4(1-\nu)cos(2\theta)) - \frac{a^2}{r^3}cos(2\theta)]$$
$$u_\theta = \frac{1}{4\mu}(2(2\nu - 1)\frac{a^2}{r} - r - \frac{a^4}{r^3})sin(2\theta) \tag{2.38}$$

(r, θ) sont les coordonnées polaires d'un point du domaine, a est le rayon du trou, et σ_∞(en MPa) est le chargement imposé.

La plaque infinie est supposée soumise à deux forces opposées de traction sur ses deux côtés droit et gauche. Les autres bords, c'est à dire le côté haut, le côté bas et le bord du trou sont supposés libres. La plaque est supposée rester dans le domaine de l'élasticité avec un module d'Young $E = 210000\,MPa$, le coefficient de $Poisson$ $\nu = 0.3$, et la contrainte extérieure appliquée $\sigma_\infty = 500\,MPa$. La nature du problème permet de réduire l'étude par symétrie sur un quart de la plaque.

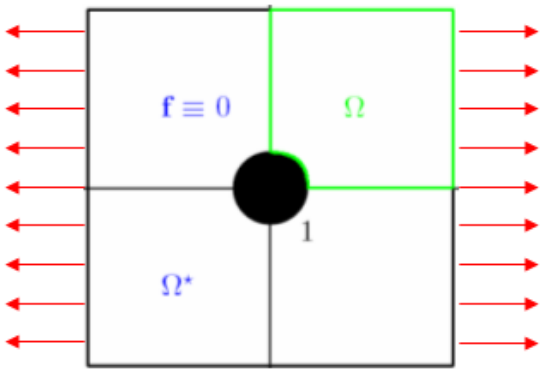


FIG. 2.3 – Plaque mince en traction uni-axiale.

Un changement de variable et une restriction de la solution sur la plaque infinie nous permet d'obtenir une restriction analytique sur le maillage de la plaque finie.

Une solution numérique par notre approximation éléments finis mixte a été calculée. Les valeurs de la restriction analytique sur les bords de la plaque finie ont été utilisées comme conditions aux limites sur les déplacements.

Nous disposons donc d'une solution numérique et analytique des équations de l'élasticité linéaire sur la plaque finie. Les figures (2.4), (2.5) et (2.6) présentent les composantes du tenseur des contraintes analytiques et numériques sur les bords de la plaque. Ces résultats montrent que notre approximation éléments finis permet d'avoir une bonne précision pour les problèmes d'élasticité linéaire.

Le maillage triangulaire utilisé contient 63203 nœuds et 125405 éléments.

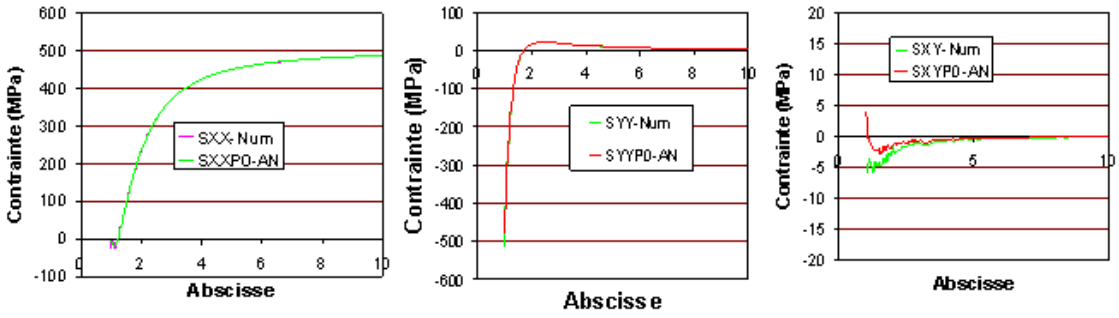


FIG. 2.4 – Les composantes σ_{xx}, σ_{yy} et σ_{xy} du tenseur de contraintes analytique $(P0 - AN)$ et numérique (Num) sur l'axe OX.

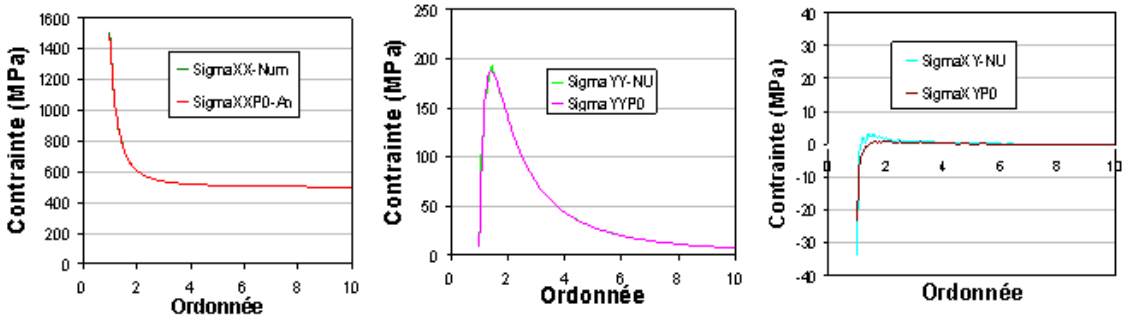


FIG. 2.5 – Les composantes σ_{xx}, σ_{yy} et σ_{xy} du tenseur de contraintes analytique $(P0 - AN)$ et numérique (Num) sur l'axe OY.

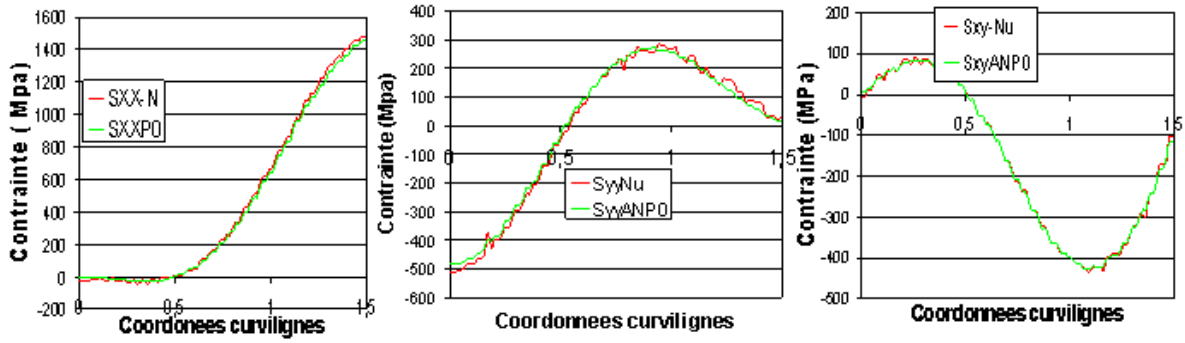


FIG. 2.6 – Les composantes σ_{xx}, σ_{yy} et σ_{xy} du tenseur de contraintes analytique $(P0)$ et numérique (Nu) au bord du trou.

Étude de l'erreur

On s'intéresse à l'étude de l'estimation d'erreur due à la discrétisation par la méthode des éléments finis. Soient v et v_h respectivement le champ des déplacements exact et éléments finis solutions du problème. l'erreur ponctuelle éléments finis s'écrit :

$$e_h^u = v - v_h$$

De la même manière on définit l'erreur au centre de chaque élément sur le champ de contraintes :

$$e_h^\sigma = \sigma - \sigma_h$$

on utilise la norme L^2 de l'erreur :

$$||v||_{L^2} = (\int_\Omega v^2)^{\frac{1}{2}}$$

Estimation d'erreur

Dans le cas d'une approximation éléments finis de degré k et d'une solution exacte u suffisamment régulière ($u \in H^{k+1}(\Omega)$), on a la majoration de l'erreur en norme $L^2(\Omega)$ suivante :

$$||u - P_h u||_{L^2(\Omega)} < Ch^{k+1}$$

où h est la longueur du plus grand côté d'éléments du maillage, C est une constante indépendante de h et où $P_h u$ est l'interpolé polynômial de degré k de u.

La résolution du problème a été effectuée sur plusieurs maillages triangulaires uniformes de la plaque. La figure (2.7) présente les variations de l'erreur d'approximation pour les champs de déplacements et de contraintes en fonction de la taille de maille.

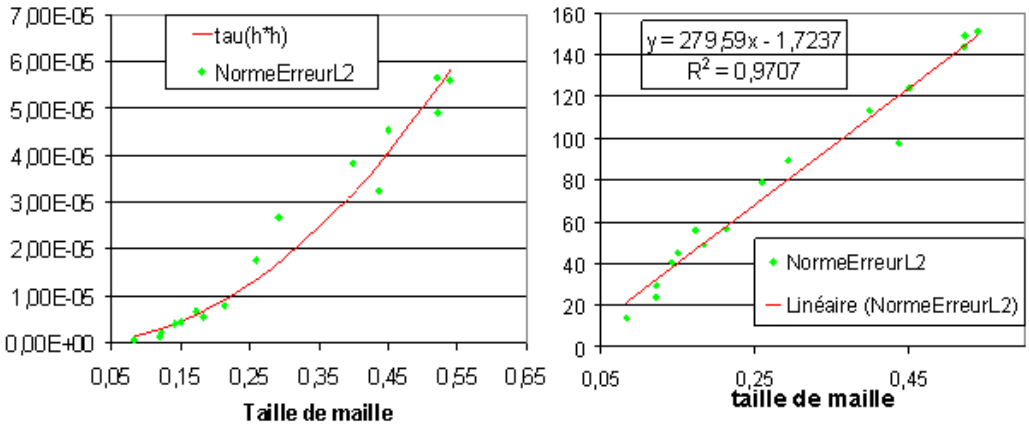


FIG. 2.7 – À gauche (resp à droite) la courbe représente la norme $L^2(\Omega)$ de l'erreur totale des déplacements (resp contraintes) en fonction de la taille de maille.

Commentaire

La courbe représentant l'erreur des contraintes et sa régression linéaire sont bien corrélées avec un coefficient de détermination très proche de 1, cette erreur décroît donc linéairement en fonction de la taille de maille. Pour les déplacements on remarque que l'erreur décroît comme une fonction $o(h^2)$, où h est la taille de maille. On conclut que l'allure générale de la norme de l'erreur commise pour l'approximation des déplacements et des contraintes concorde bien avec les résultats analytiques.

2.4.2 Élastoplasticité : cylindre sous pression interne

La validation de l'approche éléments finis avec une loi élastoplastique a été effectuée sur le cas test d'un cylindre infini sous pression interne [35].

Cylindre sous pression interne

Soit un cylindre infini d'axe Oz, homogène, de rayon intérieur $a = 100mm$, de rayon extérieur $b = 300mm$. Le matériau qui le constitue est élastique parfaitement plastique, à élasticité linéaire isotrope ($E = 200000MPa; \nu = 0.3; \sigma_e = 500MPa$), ayant pour critère de plasticité le critère de *von Mises*.

On soumet le cylindre à une pression intérieure normale uniforme $p_i = 500MPa$, la paroi extérieure et les extrémités du cylindre sont supposées libres.

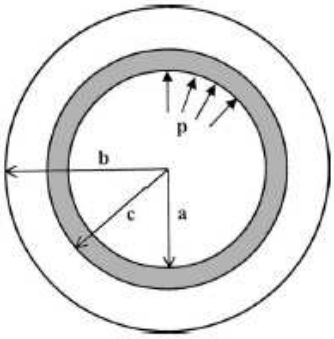


FIG. 2.8 – Géométrie, chargement appliqué et zone plastifiée d'un cylindre soumis à une pression interne.

Un élément du cylindre ne peut que se mouvoir radialement à cause de la symétrie de la charge et de la géométrie. Cela implique que la seule composante non nulle du déplacement est u_r (il s'agit donc d'un problème de déformations planes). La plastification commence à partir de la face intérieure, se développe à partir de cette face, et occupe un volume $a < r < r_c$, où r_c est une fonction de p_i (2.41). La zone $r_c < r < b$ est élastique. La solution analytique (champs des contraintes (2.39 et 2.43) et des déplacements(2.40 et 2.44) en coordonnées cylindrique est donnée par [36] :

Solution dans la région élastique $(r_c \leq r \leq b)$

Le tenseur des contraintes,

$$\sigma_{rr} = \frac{p_c r_c^2}{b^2 - r_c^2}(1 - \frac{b^2}{r^2}), \qquad \sigma_{\theta\theta} = \frac{p_c r_c^2}{b^2 - r_c^2}(1 + \frac{b^2}{r^2}), \qquad \sigma_{zz} = 2\nu\frac{p_c r_c^2}{b^2 - r_c^2}; \tag{2.39}$$

Le champ des déplacements,

$$u_r = \frac{1+\nu}{E}\frac{p_c r_c^2}{b^2 - r_c^2}(1 - 2\nu + \frac{b^2}{r^2})r, \qquad u_\theta = 0, \qquad u_z = 0; \tag{2.40}$$

les deux paramètres r_c et $p_c = p(r = r_c)$ s'expriment en fonction des données du problème par les relations suivantes :

$$p_i = \frac{\sigma_e}{\sqrt{3}}[(1 - \frac{r_c^2}{b^2}) + 2ln\frac{r_c}{a}] \tag{2.41}$$

$$p_c = \frac{\sigma_e}{\sqrt{(3)}}(1 - \frac{r_c^2}{b^2}) \tag{2.42}$$

Solution dans la région plastique $(a \leq r \leq r_c)$

le tenseur des contraintes,

$$\sigma_{rr} = \frac{\sigma_e}{\sqrt{3}}(-1+\frac{r_c^2}{b^2}-2ln\frac{r_c}{r}), \qquad \sigma_{\theta\theta} = \frac{\sigma_e}{\sqrt{3}}(1+\frac{r_c^2}{b^2}-2ln\frac{r_c}{r}), \qquad \sigma_{zz} = \frac{\sigma_e}{\sqrt{3}}(\frac{r_c^2}{b^2}-2ln\frac{r_c}{r}) \tag{2.43}$$

Le champs des déplacements,

$$u_r = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sigma_e}{E}\frac{r_c^2}{r}, \qquad u_\theta = 0, \qquad u_z = 0; \tag{2.44}$$

Le problème étant monodimensionnel suivant r, on a effectué la résolution numérique seulement sur une portion : $(h = 2mm, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, a \leq r \leq b)$

Résultats

La simulation numérique a été effectuée avec un maillage de 36356 tétraèdres. Les figures suivantes (Fig. 2.9) et (Fig. 2.10) présentent les différents résultats ainsi obtenus.

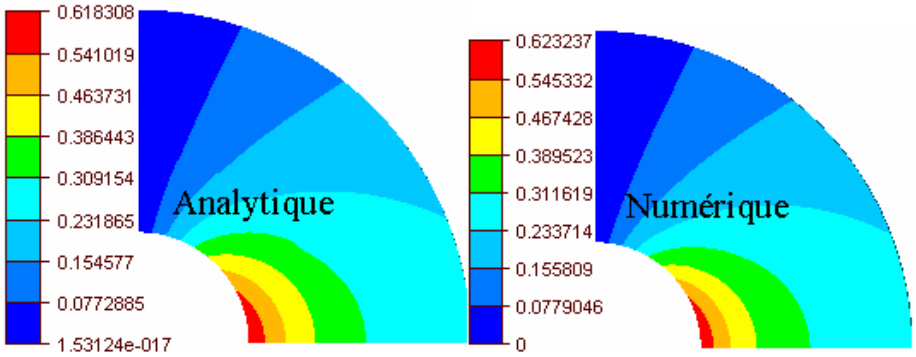


FIG. 2.9 – Les isovaleurs de la composante u_x des déplacements obtenues par solution analytique (à gauche) et par approximation EF (à droite)

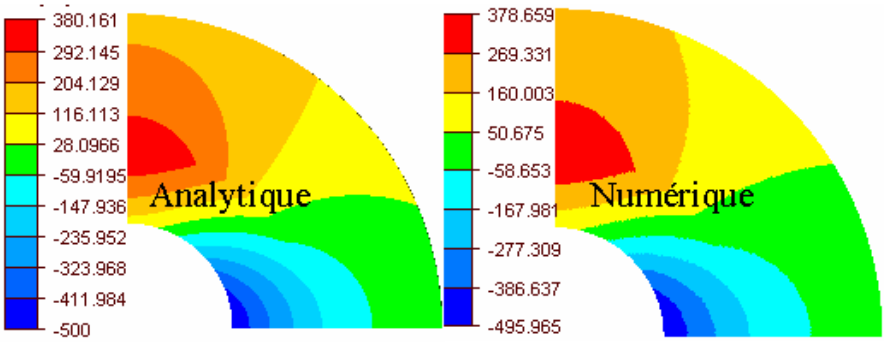


FIG. 2.10 – Les isovaleurs de la composante σ_{xx} des champs de contraintes obtenues solution analytique (à gauche) et par approximation EF (à droite)

La comparaison des cartes des isovaleurs de la composante u_x du champ de déplacements et de la composante σ_{xx} du champ de contraintes montre que notre approximation éléments finis est assez précise pour les champs de contrainte et de déplacement.

Rayon de plastification

Le rayon de plastification analytique est défini par l'équation (2.41). En résolvant cette équation, le rayon de plastification analytique obtenu est : $r_c = 168.99\,mm$.

Dans notre approximation éléments finis les contraintes sont définies par élément, le test de plastification se fait donc pour chaque élément. Dans les éléments dont la distance entre leur centre de gravité et le point $O(0,0)$ est inférieur à $168\,mm$ la condition de plastification $r < r_c$ est vérifiée, par contre si cette distance est supérieure à $171\,mm$ la condition de déformation élastique $r_c < r$ est vérifiée, on est alors dans la zone élastique. Les résultats numériques concordent donc bien avec la solution analytique. La figure (Fig. 2.11) montre la zone plastique obtenue sur le maillage.

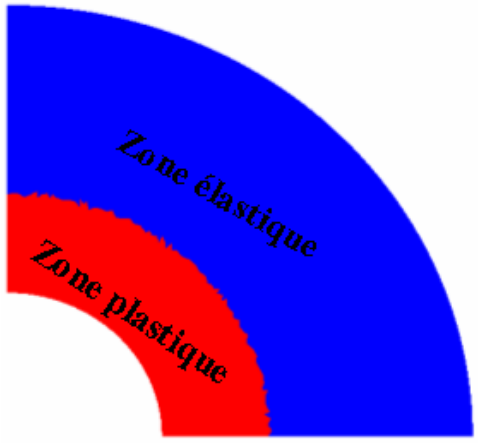


FIG. 2.11 – les zones plastique et élastique définies par la simulation numérique ; $168 \leq r_c \leq 171$

Les résultats sont concluants pour l'élasticité et pour l'élastoplasticité. Cela présente une première validation des développements exposés précédemment et de leur implémentation informatique. Ces validations ont permis d'avoir une assurance pour le passage à la loi constitutive élastoplastique endommageable. Nous verrons dans le reste du manuscrit des cas de validation pour l'endommagent.

2.4.3 Endommagement

Nous verrons dans le chapitre suivant que l'approximation éléments finis avec endommagement nécessite des améliorations supplémentaires pour avoir une prédiction réelle de l'évolution de l'endommagement (régularisation du phénomène de localisation). On se limite dans cette partie de validation à la comparaison des trois niveaux de couplage définis précédemment sur un cas de traction simple.

Cas test de traction simple

On considère un cas de traction simple d'une plaque plane figure 2.12. Le contact entre la plaque et les outils est considéré bilatéral collant. On impose à la plaque un déplacement vertical $u = 0.875mm$ dans un intervalle de temps $[0, 0.875s]$ avec un pas de temps uniforme $\Delta t = 0.005s$. On considère un maillage triangulaire uniforme de la plaque avec une taille de maille $h = 0.12mm$.

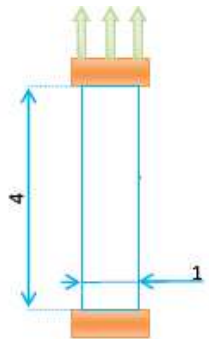


FIG. 2.12 – Géométrie (mm) et conditions aux limites

La plaque est constituée d'un alliage d'aluminium avec les paramètres matériau présentés dans le tableau 1 :

Description	Symbole	Valeur
Masse volumique	ρ	$2700 kg/m^3$
Module d'élasticité	E	$70000\ MPa$
Coefficient de Poisson	ν	0.3
Écrouissage isotrope	$\sigma_0(r)$	$596(10^{-4}+r)^{0.31}\ MPa$
Endommagement critique à rupture	w_c	1
Seuil de déformation	$\overline{\varepsilon}_d$	0
Paramètre d'endommagement (exposant)	b	1
Paramètre d'endommagement (dénominateur)	S_0	$2.25\ MPa$

TAB. 2.1 – Propriétés matériau pour un alliage d'aluminium [14] .

Comparaison des trois niveaux de couplage

La simulation numérique du cas de traction a été effectuée en utilisant les trois niveaux de couplage définis précédemment. La figure 2.13 représente les courbes force-déplacement obtenues dans les trois cas.

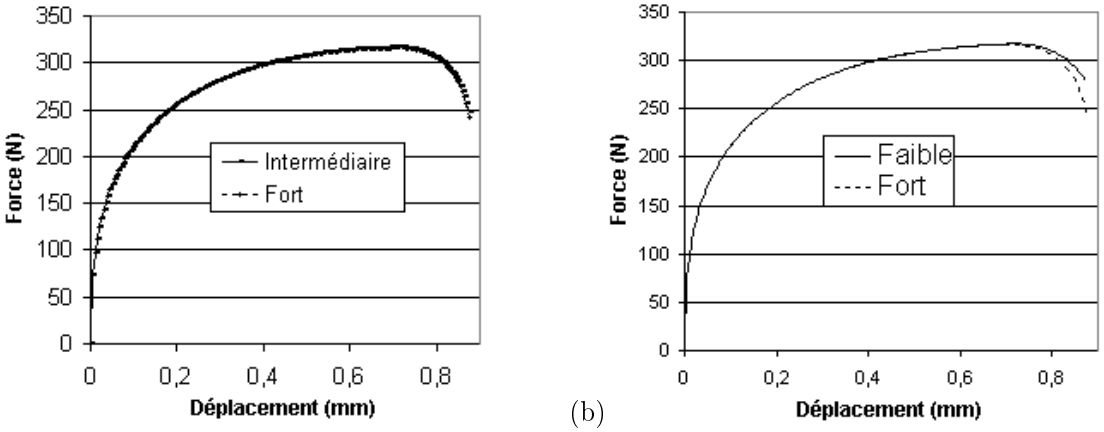


FIG. 2.13 – Les courbes force-déplacement : (a) comparaison entre les niveaux de couplage fort et intermédiaire, et (b) entre les niveaux de couplage fort et faible.

L'évolution de l'endommagement en fonction de la déformation plastique au centre de l'éprouvette est représentée sur les figures (2.14) et (2.15).

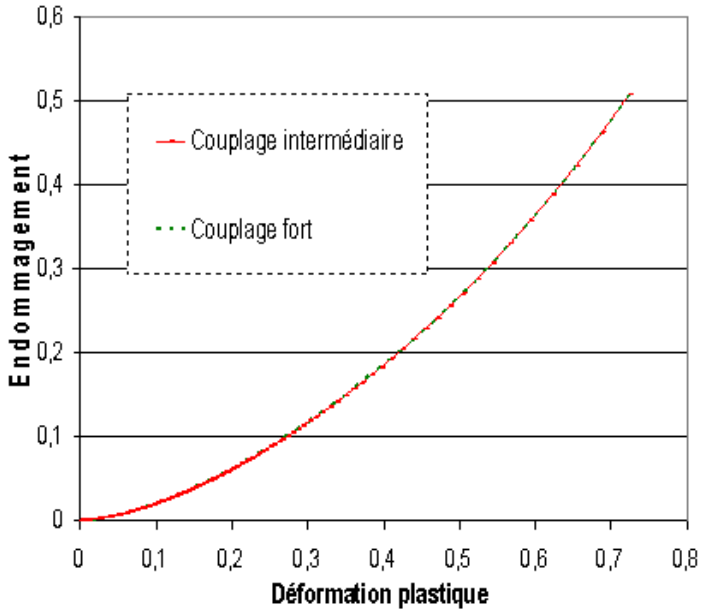


FIG. 2.14 – Variation de l'endommagement en fonction de la déformation plastique au centre de l'éprouvette : comparaison entre les niveaux de couplage fort et intermédiaire.

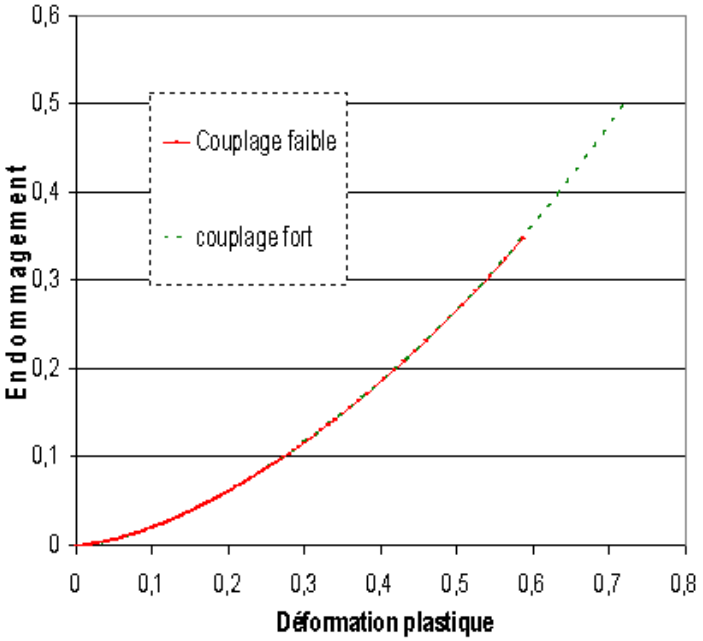


FIG. 2.15 – Variation de l'endommagement en fonction de la déformation plastique au centre de l'éprouvette : comparaison entre les niveaux de couplage fort et faible.

Les niveaux de couplage fort et intermédiaire donnent des résultats assez proches, et les courbes force-déplacement et endommagement-déformation plastique, obtenues pour ces deux

niveaux de couplage, sont pratiquement identiques. Au contraire, on note une légère différence avec les courbes obtenues par le niveau faible de couplage. En effet, la comparaison de l'évolution de l'endommagement en fonction de la déformation plastique pour les niveaux de couplage fort et faible au centre de l'éprouvette (figure 2.15) montre que l'évolution de l'endommagement est moins rapide avec un couplage faible. Cela se traduit par un adoucissement moins important avec le niveau de couplage faible, et conduit donc à une chute des contraintes moins rapide avec ce niveau de couplage (figure 2.13 (b)).

sensibilité à la discrétisation temporelle

Afin d'évaluer l'éventuelle sensibilité à la discrétisation temporelle des différents niveaux de couplage, nous avons effectué les mêmes simulations avec deux pas de temps différents Δt_1 et Δt_2 pour chaque niveau de couplage. La figure 2.16 représente les courbes force-déplacement obtenues avec $\Delta t_2 = \Delta t_1/2 = 5.10^{-3}s$.

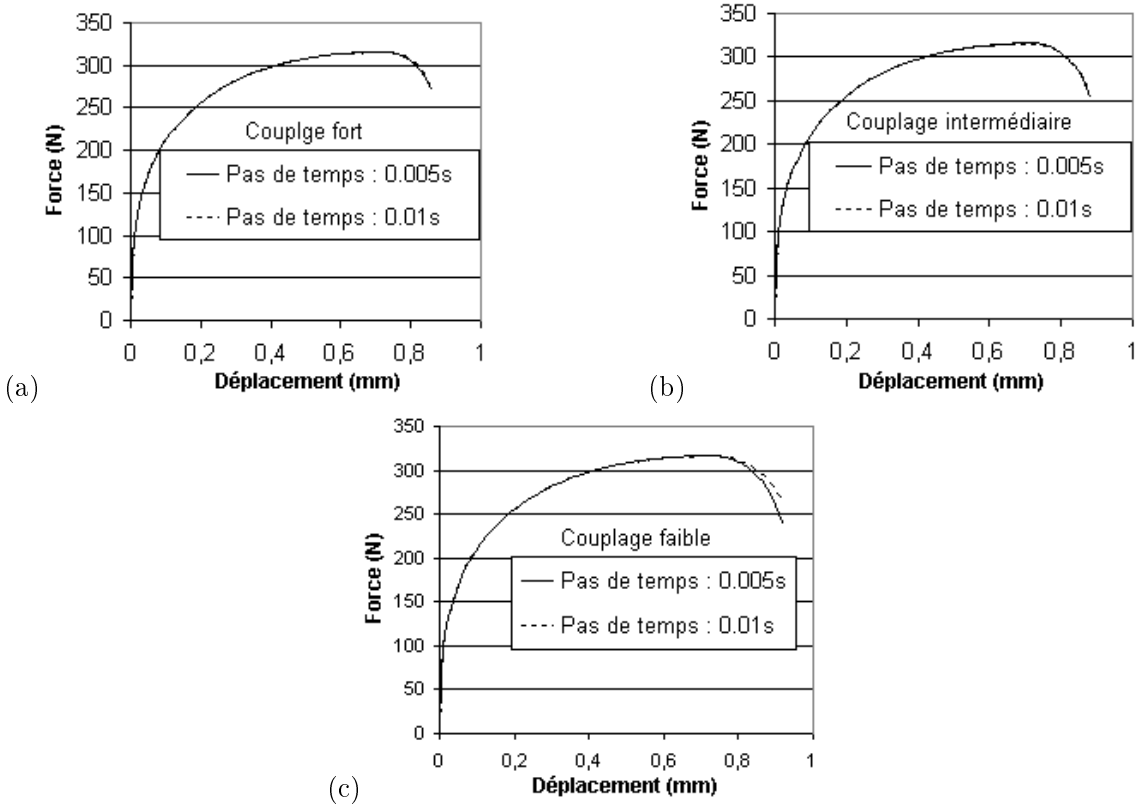


FIG. 2.16 – Les courbes force-déplacement obtenues avec deux pas de temps différents ($\Delta t_1 = 1.10^{-2}s$) and ($\Delta t_2 = 5.10^{-3}s$) pour les trois niveaux de couplage.

On peut noter (figure 2.16) que les niveaux de couplage fort et intermédiaire sont insensibles à la discrétisation temporelle. Au contraire, avec le niveau de couplage faible on remarque une dépendance significative à la discrétisation temporelle à la fin de l'essai numérique où l'adoucissement influence fortement la courbe force-déplacement. Afin d'éviter cela,

un pas de temps suffisamment petit est nécessaire lors de l'utilisation de ce niveau de couplage.

Commentaires

Le couplage faible est sensible au pas de discrétisation temporelle. En effet, la variable d'endommagement n'est mise à jour qu'à la fin de chaque incrément de temps. L'utilisation d'un pas de temps élevé conduit à une sous-estimation de l'évolution de l'endommagement au cours d'un incrément. Cela se traduit sur la courbe force-déplacement par un adoucissement moins important, avec le pas de temps supérieur (Δt_1), avant la phase critique. L'utilisation de ce type de couplage requiert donc un pas de temps suffisamment petit.

Ce niveau de couplage reste cependant moins coûteux en temps de calcul, et plus facile à implémenter.

Le couplage fort nécessite une intégration locale sur chaque élément (pour la discrétisation éléments finis P^{1+}/P^1) d'un système d'équations non linéaires avec deux inconnues. Cela implique une intégration plus coûteuse par rapport à la résolution d'une seule équation avec les deux autres niveaux de couplage.

Le niveau de couplage intermédiaire est considéré comme une solution alternative. Il permet de pallier aux inconvénients des deux autres niveaux de couplage. En effet, d'une part, l'hypothèse simplificatrice d'intégrer une seule équation permet de réduire le temps de calcul de l'intégration locale par rapport au niveau de couplage fort. D'autre part, la mise à jour de la variable d'endommagement à chaque itération de *Newton-Raphson* améliore la précision de l'approximation de la loi de comportement par rapport au niveau de couplage faible. Il est moins sensible à la discrétisation temporelle, et ne nécessite pas un pas de temps très petit pour avoir des résultats précis.

2.5 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons développé des outils numériques nécessaires pour le calcul de structure avec endommagement dans la librairie *CimLib*. Ces développements se scindent en deux parties : l'intégration de la loi de comportement non linéaire et la résolution globale de l'équilibre mécanique par la méthode des éléments finis.

Nous avons présenté une formulation variationnelle mixte vitesse pression et l'approximation éléments finis par une discrétisation $P1^+/P1$ satisfaisant la condition de compatibilité.

Nous avons exposé l'intégration numérique locale de la loi de comportement, et nous avons établi une matrice tangente déviatorique cohérente avec le schéma numérique. Ces développements ont été intégrés à la librairie *CimLib* pour l'adapter au calcul de structure avec des lois de comportement élastoplastiques endommageables.

Les développements effectués ont été initialement validés dans le cadre de l'élasticité linéaire. Le cas test de la plaque trouée a permis l'étude de l'erreur d'approximation par comparaison avec la solution analytique. La corrélation avec les résultats théoriques s'est avérée très bonne.

La validation dans le cas d'une loi élastoplastique a été effectuée sur le cas test d'un tube infini sous pression interne. La comparaison de la solution analytique et la solution approchée par éléments finis a prouvé l'efficacité et la précision de notre modèle pour ce type de comportement.

Ces validations dans le cadre de l'élasticité et de l'élastoplasticité ont été concluantes et ont permis d'avoir une assurance pour le passage aux lois de comportement endommageables.

La prédiction de l'endommagement par une approximation éléments finis nécessite une régularisation des phénomènes d'adoucissement et de localisation induits par l'endommagement. Avant d'aborder ces aspects dans le chapitre suivant, nous avons réalisé et présenté une étude comparative de trois niveaux de couplage numérique lors de l'intégration de la loi constitutive. Cette étude a montré que l'utilisation du niveau simplifié, couplage faible, n'est possible que si le pas temps est suffisamment petit.

Chapitre 3

Modèle d'endommagement non local

Sommaire

3.1 Introduction 60
3.2 Phénomène d'adoucissement 61
3.3 Phénomène de localisation 61
3.4 Modèles de régularisation 63
3.5 Modèle d'endommagement non local 63
3.5.1 Formulation intégrale 65
3.5.2 Formulation à gradient 66
3.5.3 Approximation éléments finis 67
3.6 Couplage de l'endommagement non local avec la loi de comportement 69
3.7 Modélisation de la rupture ductile : élimination des éléments complètement endommagés 70
3.8 Exemples numériques 73
3.9 Conclusion 78

3.1 Introduction

Il est bien connu que l'approximation par la méthode des éléments finis pour des matériaux avec des lois de comportements présentant un caractère adoucissant est fortement dépendante de la discrétisation spatiale dans la phase post-critique. Cette dépendance provient du fait que la mise en œuvre de ces modèles adoucissants par la méthode des éléments finis conduit à des systèmes d'équations mal posés. En effet, à partir d'un certain seuil d'adoucissement, une bifurcation apparaît et le système d'équations perd alors l'unicité de la solution. C'est-à-dire, que l'on perd le caractère elliptique des équations du problème d'équilibre dans le cas statique et le caractère hyperbolique dans le cas dynamique [37].

La simulation des procédés induisant des grandes déformations plastiques, par la méthode des éléments finis, se heurte à ce phénomène à cause du caractère adoucissant de la loi de comportement endommageable. On observe par exemple une forte localisation de la déformation dans des bandes de cisaillement différentes de celles obtenues expérimentalement.

En mise en forme, il existe de nombreux procédés pour lesquels il est important de modéliser correctement la phase adoucissante, et ce, jusqu'à la rupture. Les procédés de découpe, d'usinage où encore de rivetage autopoinçonneur [1] nécessitent ainsi une modélisation fine de l'endommagement et de la rupture pour obtenir la pièce (ou l'assemblage) finale.

Pour étendre le champ d'application de nos développements et garantir des simulations éléments finis fiables jusqu'à la rupture, nous avons substitué le modèle d'endommagement standard par un modèle d'endommagement non local.

Dans la deuxième et la troisième partie de ce chapitre, on met en évidence le caractère adoucissant de la loi de comportement élastoplastique endommageable. Ensuite, on explique comment l'approximation éléments finis de ce type de comportement conduit à la dépendance des résultats au maillage choisi.

Dans la quatrième partie, on passe en revue quelques modèles de régularisation proposés dans la littérature. Ensuite, dans la cinquième partie, on expose le modèle de régularisation non locale avec une présentation comparative des modèles non locaux à formulation intégrale et à formulation à gradient. Dans la sixième partie on rappelle le couplage de l'endommagement non local avec la loi de comportement. La septième partie est dédiée à la modélisation de la rupture ductile par la suppression des éléments complètement endommagés du maillage.

Enfin, dans la dernière partie, on présente des résultats numériques pour prouver l'efficacité de la méthode de régularisation adoptée. Ces tests permettent de valider simultanément le modèle d'endommagement présenté au premier chapitre, et les développements décrits au deuxième chapitre avec leur intégration dans une approximation éléments finis mixtes.

3.2 Phénomène d'adoucissement

Dans les équations de la loi de comportement élastoplastique endommageable décrites précédemment, l'endommagement affecte directement et simultanément l'ensemble des propriétés mécaniques d'élasticité et de plasticité. La forte croissance de l'endommagement conduit donc à la chute de la rigidité du matériau et à la perte de la capacité de charge de la structure.

De plus, dans le cas d'une approximation éléments finis linéaire des équations du problème mécanique global (utilisée dans la plupart des codes industriels), l'intégration numérique de la loi de comportement est effectuée par élément. Cela mène à une évaluation par élément de la variable d'endommagement. Cette évaluation conduit à un adoucissement local. En effet, les éléments ayant un niveau élevé d'endommagement perdent leur capacité de charge.

3.3 Phénomène de localisation

Le phénomène de localisation de la déformation et de l'endommagement est le plus souvent associé à un processus d'adoucissement, par exemple suite au développement de l'endommagement. Le contrôle de ces localisations est un point essentiel pour assurer l'objectivité des résultats et la qualité prédictive des modèles utilisés.

D'un point de vue mécanique, lors d'une approximation éléments finis pour des problèmes induisant des grandes déformations plastiques, les déformations ont tendance à se localiser dans des bandes de cisaillement, et la largeur de ces bandes reste d'environ un élément. La taille de la zone de localisation diminue donc au fur et à mesure que le maillage devient fin (figure : 3.1). Avec le raffinement du maillage, on ne peut pas améliorer la qualité de la prédiction du modèle d'endommagement standard, parce que la taille de la zone de localisation devient alors de plus en plus faible et conduit à l'apparition prématurée de la fissure macroscopique.

D'un point de vue énergétique, les éléments de la bande de cisaillement possèdent une rigidité plus faible que leurs voisins du fait d'un endommagement plus élevé. La réponse globale n'implique plus alors que cette bande d'éléments. La dissipation se localise donc dans un volume entièrement déterminé par le choix du maillage. En conséquence, l'énergie dissipée par la rupture est d'autant plus faible que la taille de la discrétisation spatiale est petite.

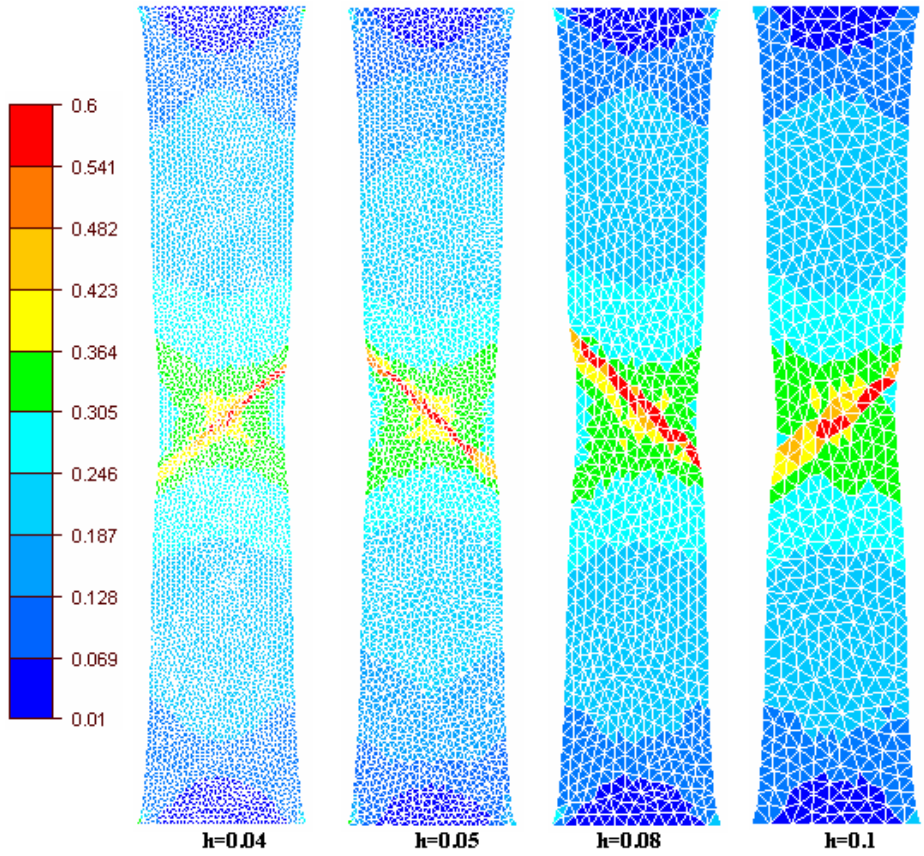


FIG. 3.1 – Isovaleurs de la déformation plastique cumulée pour des tailles de maille homogènes $h = 0.04$, $h = 0.05$, $h = 0.08$ et $h = 0.1$ mm.

En conséquence, une forte dépendance de l'approximation éléments finis avec le modèle d'endommagement standard par rapport à la discrétisation spatiale est observée.

Dans la littérature, l'exemple unidimensionnel d'une poutre sujette à une traction uniaxiale est largement utilisé pour démontrer la dépendance de l'approximation éléments finis par rapport à la taille de la discrétisation [14, 38, 39]. Dans cet exemple, on démontre facilement que la réponse globale de la poutre, à partir d'un seuil de chargement, varie en fonction de la taille de la discrétisation.

Il faut donc pouvoir modéliser correctement le phénomène de concentration des déformations et de l'endommagement indépendamment de la discrétisation spatiale considérée. Pour ce faire, il existe plusieurs modélisations qui introduisent, de manière plus ou moins artificielle, une longueur caractéristique afin de régulariser la taille de la zone de concentration.

3.4 Modèles de régularisation

Pour pallier aux problèmes numériques, liés à l'approximation éléments finis avec un comportement adoucissant, et régulariser le phénomène de localisation franche de la déformation plastique et de l'endommagement, plusieurs méthodes ont été utilisées dans la littérature. Les modèles de régularisation les plus couramment utilisés sont :

- *modèles non locaux* : ces modèles tentent de limiter la dépendance au maillage en utilisant une variable non locale "régularisée". De nombreux travaux présentent des formulations à variables régularisées. On peut citer les modèles où la variable non locale est le gradient de déformation plastique cumulée [40, 41] ou le taux de restitution de l'énergie élastique [42] ou encore la variable d'endommagement [14, 43, 44, 45, 46]. Dans ce dernier cas, la non localité de la variable régularisée affecte la contrainte via un couplage comportement/endommagement. Les auteurs qui ont utilisé cette méthode de régularisation ont conclu que l'introduction de la non localité réduisait remarquablement la sensibilité de la solution éléments finis envers le maillage ;

- *modèles micropolaires* : l'utilisation de ces modèles a été explorée en particulier par *de Borst* [47]. Ces modèles semblent spécialement convenir aux matériaux granulaires ;

- *modèles à gradients d'ordre supérieur* : ils consistent à introduire dans le modèle constitutif les gradients des variables jusqu'à un certain ordre. Les interprétations physiques des grandeurs obtenues et la théorie d'existence et d'unicité des solutions aux problèmes aux limites augmentent avec l'ordre du gradient retenu [38, 48, 49] ;

- *modèles viscoplastiques* : ces modèles consistent à introduire un terme de viscosité pour régulariser la solution éléments finis [50]. Il se pose alors le problème du choix le mieux adapté de la valeur de viscosité. En effet, une faible viscosité ne permet pas de régulariser le phénomène de localisation alors que l'ajout d'un terme de viscosité important modifie le comportement initial du matériau.

Pour notre part, nous avons opté pour le modèle de régularisation non local. Le phénomène adoucissant à l'origine de la localisation franche est, dans notre cas, l'endommagement. Pour cette raison, nous avons utilisé une variable d'endommagement non locale pour contrôler la dissipation à rupture et régulariser le phénomène de localisation.

La variable d'endommagement n'est plus considérée comme une grandeur locale mais une grandeur intégrée sur le voisinage du point considéré, alors que les autres grandeurs (déformations ...) restent définies de manière classique.

3.5 Modèle d'endommagement non local

De nombreux travaux présentent des formulations à variables non locales "régularisées". Plus précisément, deux types de méthodes non locales ont été développées. Les modèles à formulation intégrale, qui utilisent une définition moyenne pondérée de la variable associée à l'adoucissement, et les modèles à formulation à gradient, qui utilisent des gradients de va-

riables, explicitement ou implicitement, dans les équations constitutives [14, 44, 51, 52].

Au premier chapitre, la variable d'endommagement a été introduite pour décrire l'influence des défauts microstructuraux sur la loi de comportement des matériaux dans le cadre de la théorie des milieux continus. Cela implique un certain niveau de régularité de la variable d'endommagement. La variation de la variable d'endommagement doit être limitée, au moins, à l'échelle des grains [53].

Comme nous l'avons signalé précédemment, le raffinement du maillage tend à localiser davantage les déformations et l'endommagement dans des zones de plus en plus petites avec le modèle d'endommagement standard. La taille de cette zone peut devenir donc beaucoup plus petite que celle des caractéristiques microstructurales des matériaux. Cela conduit à une discontinuité importante et à une violation de l'hypothèse faite sur la régularité de la variable d'endommagement. Le comportement non physique du modèle peut être une conséquence directe de cette incohérence.

D'où l'idée d'utiliser une variable non locale définie par pondération dans une zone déterminée par la taille moyenne des grains (figure : 3.2). Cette taille moyenne est appelée longueur caractéristique, notée l_c.

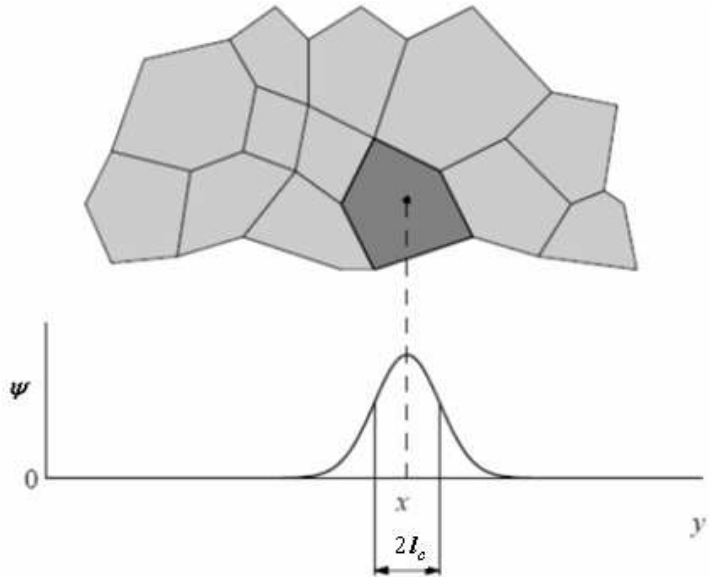


FIG. 3.2 – Moyenne pondérée pour une microstructure irrégulière [53].

En outre, puisque la taille moyenne des grains n'est pas connue, et pour tenir compte de la variation des tailles de grains dans un matériau, on utilise une fonction poids régulière pour lisser la variable locale.

On introduit la variable d'endommagement $\overline{w}(x)$ non locale par une pondération de la variable d'endommagement locale w sur le domaine Ω comme suit :

$$\overline{w}(x) = \frac{1}{\Psi(x)} \int_{\Omega} \psi(x,y) w(y) dy \tag{3.1}$$

où $\psi(x,y)$ est une fonction poids qui définit l'influence du point situé à la position y sur la

valeur du champ non local en x. Cette fonction est supposée homogène et isotrope, c'est-à-dire qu'elle ne dépend que de la distance $\|x-y\|$ séparant les points x et y : $\psi(x,y) = \psi(\|x-y\|)$. Dans la littérature, cette fonction est souvent définie comme une Gaussienne :

$$\psi(x,y) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} l_c^3} exp(-\frac{\|x-y\|^2}{2l_c^2}) \tag{3.2}$$

La longueur caractéristique l_c apparaît explicitement dans la fonction poids. Elle détermine la zone qui contribue réellement dans l'évaluation de la variable non locale. De plus, si $l_c \longrightarrow 0$ alors la variable non locale est identique à la variable locale : $\overline{w} = w$

Ensuite, la fonction $\Psi(x)$ est définie par :

$$\Psi(x) = \int_\Omega \psi(x,y) dy \tag{3.3}$$

Cette fonction permet d'avoir : $\overline{w} = w$ dans le cas où le champ local w est uniforme dans l'ensemble du domaine Ω.

La longueur caractéristique est un paramètre matériau qui, comme l'a souligné Bazant [54], ne peut pas être mesurée directement, mais peut être déterminée par l'analyse inverse. Des techniques d'identification de la longueur caractéristique par analyse inverse, en comparant les résultats numériques et expérimentaux, sont décrites par exemple dans [55]. Ces techniques sont basées sur la minimisation d'une fonction coût représentant la corrélation entre les courbes force/déplacement numérique où expérimentale sur des essais de traction.

3.5.1 Formulation intégrale

Les modèles non locaux à formulation intégrale conduisent à une évaluation directe de la variable non locale à partir de son expression (3.1). En pratique, la fonction poids est définie telle que la valeur de la variable non locale est obtenue sur un voisinage du point considéré. La fonction cloche à support compact a été, par exemple, utilisée par Fayolle [14]. Cette fonction est définie par :

$$\psi(x,y) = \begin{cases} \dfrac{105}{32\pi l_c^3}\left(1 - \dfrac{\|x-y\|^2}{2l_c^2}\right)^2 & \text{si } \|x-y\| \leq l_c \\ \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \tag{3.4}$$

La valeur de la variable non locale, en chaque point d'intégration, est une moyenne pondérée des valeurs locales dans un voisinage donné. Cela nécessite d'une part, la recherche des points voisins sur lesquels le champ non local sera évalué, et d'autre part une intégration numérique de l'expression (3.1) sur ce voisinage.

De plus, pour s'assurer que la variable non locale est obtenue par une pondération sur un voisinage du point d'intégration qui ne se réduit pas à ce point lui même, la longueur caractéristique doit vérifier la condition suivante :

$$l_c \geq 2h \tag{3.5}$$

Le lecteur peut se référer à [14] pour plus de détails sur les aspects techniques de l'implémentation numérique de cette méthode.

3.5.2 Formulation à gradient

A partir de l'expression intégrale de la variable d'endommagement non locale $\overline{w}(x)$ (3.1), et du développement en série de *Taylor* de la fonction $w(y)$, on obtient :

$$\overline{w}(x) = w(x) + c(l_c)\triangle w(x) + d(l_c)\triangle^2 w(x) + \dots \tag{3.6}$$

où $\triangle = \sum_i \partial^2/\partial x_i^2$ est l'opérateur Laplacien, $\triangle^2 = \sum_{i,j} \partial^4/\partial x_i^2 \partial x_j^2$

$$c(l_c)_i = \frac{1}{2!\Psi}\int_\Omega \psi(x,y)(y_i - x_i)^2 dy \qquad i = 1\dots d \tag{3.7}$$

$$d(l_c)_{ij} = \frac{1}{4!\Psi}\int_\Omega \psi(x,y)(y_i - x_i)^2(y_j - x_j)^2 dy \qquad i = 1\dots d;\ j = 1\dots d \tag{3.8}$$

Les termes de dérivées d'ordre impair dans (3.6) disparaissent à cause du caractère isotrope de la fonction poids.

En négligeant les termes d'ordre supérieur ou égal à quatre, on obtient la **formulation à gradient explicite** suivante :

$$\overline{w}(x) = w(x) + c(l_c)\triangle w(x) \tag{3.9}$$

Cette nomination "gradient explicite" vient du fait que le champ non local dépend explicitement des expressions du champ local et de ses dérivées.

En appliquant l'opérateur Laplacien à l'équation (3.9) et en multipliant par $c(l_c)$, puis en soustrayant le résultat de l'équation (3.9), on obtient :

$$\overline{w}(x) - c(l_c)\triangle\overline{w}(x) = w(x) + [d(l_c) - c(l_c)^2]\triangle^2 w(x) + \dots \tag{3.10}$$

On considère la fonction poids de *Green* (Zauderer, 1989) définie par :

$$\psi(x,y) = \frac{1}{4\pi\|x-y\|l_c^2} exp(-\frac{\|x-y\|}{l_c}) \tag{3.11}$$

On peut démontrer [51] que les coefficients de toutes les dérivations d'ordre supérieur dans le côté droit de la relation (3.10) sont nulles, à commencer par $d(l_c) - c(l_c)^2 = 0$, et que $c(l_c) = l_c^2$. Par conséquent, sans négliger les termes de dérivation d'ordre supérieur, on obtient la **formulation à gradient implicite** suivante :

$$\overline{w}(x) - c(l_c)\triangle\overline{w}(x) = w(x) \qquad \text{où } c(l_c) = l_c^2 \tag{3.12}$$

Cette formulation à gradient implicite est équivalente donc à une formulation intégrale avec une fonction poids de *Green* définie par (3.11).

Afin d'assurer l'unicité de la solution de l'équation (3.12), des conditions aux limites sur la variable $\overline{w}$ ou sur sa dérivée normale, ou encore une combinaison des deux, doivent être imposées. Étant donné que des conditions sur les valeurs de $\overline{w}$ seront difficiles à justifier physiquement, les conditions de Neumann homogènes sont imposées :

$$\nabla\overline{w}(x).\overrightarrow{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \tag{3.13}$$

où $\overrightarrow{n}$ est la normale sortante du domaine.

Ces conditions aux limites garantissent que la valeur de l'endommagement total sur le domaine est identique pour les deux variables :

$$\int_{\Omega} \overline{w}(x)dx = \int_{\Omega} w(x)dx \tag{3.14}$$

□

Analyse

Dans les formulations à gradient établies au dessus, (3.9) et (3.12), la longueur caractéristique l_c apparaît comme un simple paramètre qui caractérise la diffusion de ces formulations. En conséquence, contrairement aux modèles non locaux à formulation intégrale, elle n'influence pas le temps calcul de la variable non locale.

La formulation à gradient implicite (3.12) a été obtenue sans négliger les termes de dérivations d'ordre supérieur. La variable non locale est donc calculée à partir de la variable locale dans tout le domaine. Par contre, dans la formulation à gradient explicite, la variable non locale dépend seulement de la valeur de la variable locale et de ses gradients au même point (3.9). En conséquence, la variable non locale est calculée uniquement à partir des valeurs de la variable locale dans un voisinage infinitésimal du point considéré. La formulation à gradient explicite est donc faiblement non locale.

La formulation à gradient explicite est efficace pour des problèmes statiques avec une faible localisation. Par contre, elle n'est pas adaptée ni aux problèmes dynamiques ni à l'étude des phénomènes de rupture. En effet, elle ne permet pas une régularisation suffisante des phénomènes de localisation à cause de son caractère faiblement non local [39].

La formulation à gradient implicite est une formulation intégrale avec une fonction de pondération de *Green*.

La formulation intégrale donne plus de flexibilité sur le choix de la fonction poids. Cependant, elle est plus coûteuse en terme de temps de calcul à cause de la recherche des points voisins pour l'évaluation de la variable non locale. De plus, elle est plus contraignante sur la taille de maille $l_c \geq 2h$ (3.5) pour qu'elle soit efficace. Dans le cadre de la formulation à gradient implicite, la condition $l_c \geq h$ est suffisante, comme nous le verrons par la suite (3.23).

Cette analyse comparative a justifié notre choix de la formulation à gradient implicite dans cette étude.

3.5.3 Approximation éléments finis

La variable d'endommagement régularisée est solution de l'équation de régularisation implicite suivante :

$$\begin{cases} \overline{w}(x) - l_c^2 \triangle \overline{w}(x) = w(x) \ \text{ dans } \Omega \\ \\ \nabla \overline{w}(x).\overrightarrow{n} = 0 \ \text{ sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{3.15}$$

Formulation variationnelle faible

L'approximation numérique de (3.15) est faite par la méthode des éléments finis. On applique cette méthode à la formulation faible de cette équation obtenue par une formule

d'intégration de *Green*. Le problème faible s'écrit :

Trouver $\overline{w} \in H^1(\Omega)$ telle que :

$$l_c^2 \int_\Omega \nabla \overline{w} \nabla v + \int_\Omega \overline{w} v = \int_{\partial\Omega} wv \qquad \forall v \in H^1(\Omega) \tag{3.16}$$

Formulation variationnelle approchée

Le problème variationnel est ramené sur un espace de dimension finie V_h défini par :

$$V_h = \{v \in C^0(\overline{\Omega}), \forall T_h \in \mathcal{T}_h, v|_{T_h} \in P^1\}$$

P^1 l'espace des polynômes de degré plus petit ou égal à 1.

V_h est un sous-espace vectoriel de dimension finie (noté N_h) de $H^1(\Omega)$, donc il s'agit d'un espace de Hilbert pour la norme induite par l'espace $H^1(\Omega)$.

En exprimant (3.16) dans cet espace de dimension finie, on obtient la formulation discrète suivante :

Trouver $\overline{w}_h \in V_h$ telle que :

$$l_c^2 \int_{\Omega_h} \nabla \overline{w}_h \nabla v_h + \int_{\Omega_h} \overline{w}_h v_h = \int_{\partial\Omega_h} w_h v_h \qquad \forall v_h \in V_h \tag{3.17}$$

L'espace V_h étant de dimension finie N_h, il admet une base, notée $(u^{(1)}, \ldots, u^{(N_h)})$ avec $u^{(i)}(j) = \delta_{ij}$ $\forall (i,j) \in \{1, \ldots, N_h\}^2$. On cherche alors $\overline{w}_h$ sous forme d'une combinaison linéaire des éléments de cette base, i.e. sous la forme :

$$\overline{w} \simeq \overline{w}_h = \sum_{k=1}^{N_h} \overline{w}_k u^{(k)} \tag{3.18}$$

L'inconnue du problème est le vecteur $\overline{w}_h(\overline{w}_1, \ldots, \overline{w}_{N_h})$.

En utilisant les fonctions $u^{(i)}; i \in \{1, \ldots, N_h\}$ de l'espace V_k, le problème approché peut s'écrire sous forme matricielle, comme suit :

$$l_c^2 \sum_i \overline{w}_k A_{ij} + \sum_i \overline{w}_k B_{ij} = C_j \qquad \forall j = 1 \ldots N_h \tag{3.19}$$

où A est la matrice de raideur,

$$A_{ij} = \int_{\Omega_h} \nabla u^{(i)} \nabla u^{(j)}; \tag{3.20}$$

B la matrice de masse,

$$B_{ij} = \int_{\Omega_h} u^{(i)} u^{(j)}; \tag{3.21}$$

et C le second membre,

$$C_j = \int_{\Omega_h} w u^{(j)}; \tag{3.22}$$

Le calcul effectif du système linéaire se fait par une boucle sur les éléments du maillage. Sur chaque élément, on calcule la matrice de raideur locale, la matrice de masse locale, et

le second membre local. On assemble ensuite ces termes calculés convenablement dans les matrices globales en utilisant le tableau des connectivités du maillage.

La matrice du système global ainsi obtenue est symétrique définie positive, et les algorithmes itératifs de type Krylov se prêtent bien à sa résolution.

Une condition supplémentaire pour la stabilité de l'approximation éléments finis de l'équation du gradient à formulation implicite est :

$$l_c \geq h \tag{3.23}$$

Cette condition est généralement introduite dans des études de diffusion thermique. Elle permet d'éviter le phénomène du choc thermique qui se caractérise par des oscillations spatiales du champ de température [34].

□

3.6 Couplage de l'endommagement non local avec la loi de comportement

La variable d'endommagement non locale $\overline{w}$ intervient dans les relations d'évolution ainsi que dans le couplage comportement/endommagement. On obtient donc :

- la contrainte effective :

$$\widetilde{\sigma} = \frac{\sigma}{1 - h\overline{w}} \tag{3.24}$$

- le critère de plasticité de *von Mises*

$$f(\sigma, R, w) = \frac{J_2(\sigma)}{1 - \overline{w}} - \sigma_0(r) \leq 0 \tag{3.25}$$

- le taux de déformations plastiques :

$$\dot{\varepsilon}^p = \dot{e}^p = \frac{3\lambda^{pl}}{(1 - h\overline{w})^2 \sigma_0(r)} s \tag{3.26}$$

- l'évolution de la variable d'endommagement local w :

$$\dot{w} = \frac{\lambda^{pl}}{1 - h\overline{w}} \left(\frac{-Y}{S_0} \right)^b \tag{3.27}$$

L'ensemble des variables internes étant couplé à la variable d'endommagement régularisée (solution d'une forme variationnelle faible de l'équation de régularisation implicite), cette dernière doit être strictement croissante et majorée par 1. D'un autre coté, la variable locale w n'est pas majorée par 1.

La variable non locale ne dérive pas d'une relation incrémentale, son évolution n'est pas nécessairement croissante. L'occurrence d'un endommagement décroissant au cours du chargement étant physiquement inacceptable, une condition additionnelle est ajoutée pour garantir

une dissipation mécanique positive à tout instant. Le signe positif de cette dissipation est garanti par la condition supplémentaire suivante :

$$\dot{\overline{w}} \geq 0 \tag{3.28}$$

En pratique, on réalise une approximation éléments finis linéaire de l'équation du gradient implicite pour calculer la variable non locale. Cette variable est donc calculée aux nœuds du maillage. Ensuite, elle est extrapolée aux points d'intégration pour effectuer le couplage avec la loi de comportement. La condition précédente sur l'évolution de l'endommagement est imposée comme suit :

$$\overline{w}_{n+1} > \overline{w}_n \text{ sur chaque incrément de temps } [t_n, t_{n+1}] \tag{3.29}$$

3.7 Modélisation de la rupture ductile : élimination des éléments complètement endommagés

On considère qu'un élément est complètement endommagé lorsque l'endommagement a atteint sa valeur critique en tous ses points d'intégration. Le couplage endommagement/comportement impose que cet élément complètement endommagé possède une raideur nulle et ne contribue plus à la raideur de la structure. En effet, les contraintes qu'on y calcule sont nulles puisque la surface qui résiste effectivement à la charge est nulle. Par conséquent les forces internes nodales élémentaires sont nulles également. Ce phénomène conduit à des perturbations numériques à cause de l'expression de la matrice tangente lors de la rupture.

D'un point de vue général, la transition d'une représentation continue, à l'aide d'un modèle d'endommagement, à une représentation discontinue permettant de représenter la rupture de la matière reste une question ouverte.

Il existe de nombreuses techniques pour modéliser la rupture. La plus précise consiste à modéliser explicitement ou implicitement la fissure dans le maillage. La représentation explicite de la fissure nécessite un maillage très raffiné en pointe de fissure ainsi qu'un remailleur automatique performant pour modéliser la propagation de fissure [56, 57]. La fissure peut également être représentée de manière implicite, sans modification de maillage, en enrichissant les éléments qui sont traversés par la fissure. C'est ce qui est fait dans la méthode X-FEM (eXtended Finite Element Method) [58], où la fissure est représentée par une fonction level set et où les éléments contenant la fissure sont enrichis pour prendre en compte le saut de déplacement engendré par la fissure. De plus, il est aussi possible d'enrichir par des champs singuliers les éléments contenant la pointe de la fissure pour améliorer la convergence [59].

Dans le domaine de la mise en forme des matériaux, la rupture ductile ne nécessite pas une modélisation aussi fine de la rupture. La méthode dite "kill element" est généralement suffisante.

Cette méthode modélise la rupture par l'élimination des éléments complètement endommagés, elle conduit donc à l'enlèvement de matière de la structure considérée. Dans le cadre

de notre travail, on s'intéresse davantage à l'amorçage de rupture, et plus précisément, à l'endroit et à l'instant de son apparition. De plus, comme nous le verrons dans le chapitre suivant, l'utilisation de l'adaptation du maillage au phénomène d'endommagement permet d'avoir une taille de maille assez petite pour les éléments fortement endommagés, c'est-à-dire dans les zones d'apparition des éventuelles fissures. Cela permet de réduire la perte de matière causée par l'élimination des éléments.

En pratique, l'élimination des éléments consiste à enlever, du maillage initial, les éléments complètement endommagés et les nœuds n'appartenant qu'à des éléments complètement endommagés. Une fois que ces deux informations (informatiquement deux tableaux) sont déterminées, l'appel de l'algorithme "kill element" doit permettre l'élimination de ces éléments et de ces nœuds du maillage. Il doit aussi effectuer le transport de toutes les informations (champs, informations liées à la structure de données de la partition, ...) associées au maillage initial sur le nouveau maillage.

L'intégration de ce processus dans la librairie parallèle *CimLib* doit être adaptée à la stratégie de parallélisation utilisée dans cette librairie. Cette stratégie s'appuie sur une partition du maillage éléments finis en plusieurs sous-domaines. Ensuite, chaque processeur gère les données associées à un sous-domaine de la partition et la globalité du problème est traitée par des échanges d'informations entre les processeurs. Cela induit une structure de données spécifique à cette librairie.

La mise en place de l'algorithme "kill element" nécessite donc une attention particulière de façon à pouvoir conserver les informations sur les objets partagés entre plusieurs sous domaines, tels que les arêtes et les nœuds.

Les éléments ainsi que les nœuds appartiennent à un unique processeur par définition. Un élément dans un sous domaine peut avoir un de ces nœuds dans un autre sous-domaine. La renumérotation des nœuds partagés doit être échangée entre les sous-domaines avant de redéfinir les connectivités.

Le processus de "kill element", que nous avons implémenté dans la *CimLib*, s'effectue par l'exécution successive des étapes suivantes :

- Préalablement, une phase de communication est effectuée entre les processeurs. On échange les informations sur les nœuds (les numéros) qui seront partagées entre plusieurs sous-domaines (au moins deux).

- La renumérotation se fait localement sur l'ensemble des objets utilisés dans la définition du maillage. Une fois que l'échange préalable est effectué, sur chaque processeur, on renumérote les éléments, les nœuds, et enfin, on redéfinit les tableaux de connectivités.

- Transport des champs : le nouveau maillage doit hériter toutes les informations du maillage initial, notamment les champs doivent être correctement définis sur le nouveau maillage. Contrairement à une procédure de remaillage proprement dite où le transport du champ s'appuie sur des méthodes d'interpolation, ici le problème est relativement

simple car tous les éléments (resp. nœuds) du nouveau maillage étaient des éléments (resp. nœuds) de l'ancien maillage. Il suffit donc de préserver les informations sur ces éléments (resp. nœuds). Lorsqu'un élément (resp. un nœud) prend le numéro d'un autre élément (resp. nœud), il faut qu'il prenne toutes les données associées à cet élément (resp. ce nœud).

- Redéfinition des frontières du domaine : l'apparition de la fissure laisse apparaître des nouvelles frontières du domaine, qu'il est important de redéfinir, notamment pour la gestion du contact.

Nous avons ici une illustration d'élimination des éléments et des nœuds pour un calcul effectué sur 5 processeurs :

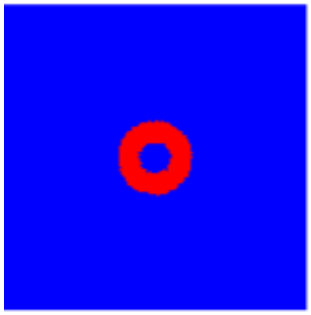
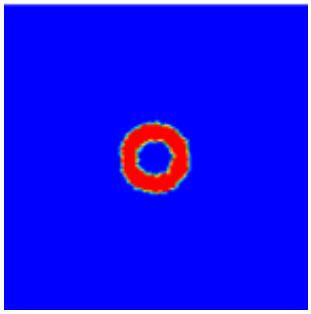
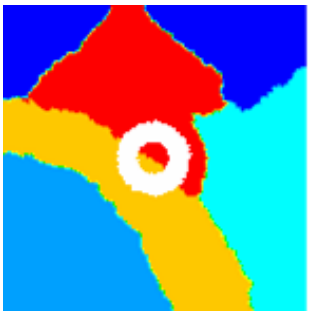
(a)  (b)  (c) 

FIG. 3.3 – (a) les éléments à éliminer du maillage : la zone coloriée en rouge, (b) les nœuds à éliminer : la zone coloriéee en rouge, et (c) le nouveau maillage : chaque couleur correspond à un sous-domaine (sans répartition).

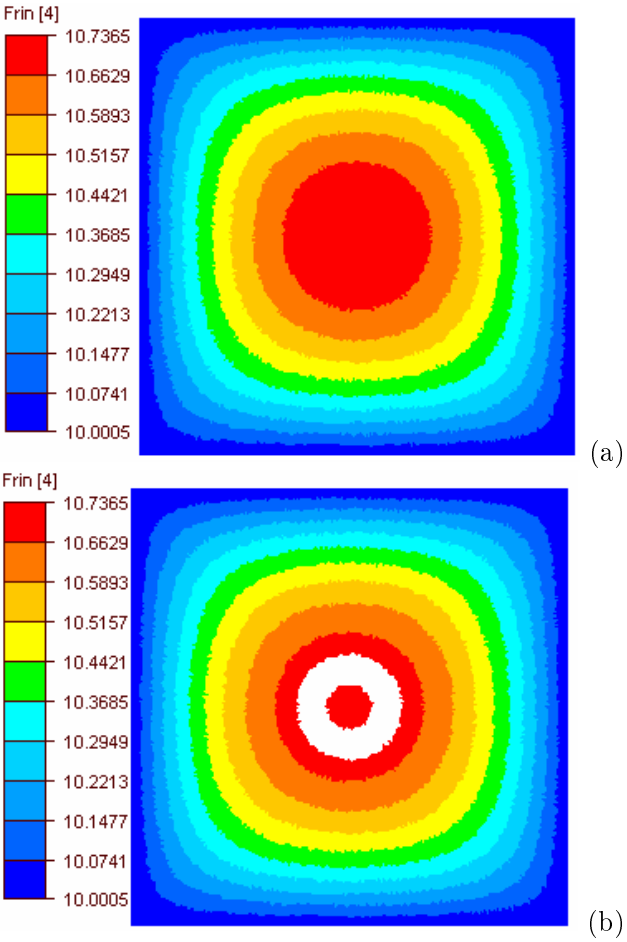


FIG. 3.4 – (a) Un champ défini sur le maillage initial, (b) le même champ transporté sur le nouveau maillage après l'opération de "kill element".

L'algorithme implémenté doit encore être amélioré pour éviter des configurations particulières. Par exemple, l'apparition d'éléments reliés au maillage par un seul nœud, ou la gestion d'éléments entièrement détachés du maillage. Ces éléments ayant des mouvements de corps rigide peuvent ralentir voir empêcher la convergence dans la suite du calcul mécanique.

3.8 Exemples numériques

Dans cette section, on présente des simulations numériques pour la prédiction de l'évolution de l'endommagement. Une attention particulière sera portée à la capacité de la méthode non locale du gradient implicite, présentée précédemment et implémentée dans la *CimLib*, à calculer de manière fiable et robuste l'endommagement dans notre approche éléments finis.

Traction simple d'une éprouvette en 2D

On reprend le cas de traction simple 2D présenté dans le chapitre précédent. On considère une taille caractéristique $l_c = 0.06mm$. On impose à la plaque un déplacement vertical de $u = 0.88mm$ dans un intervalle de temps $[0, 0.88s]$ avec un pas de temps uniforme $\Delta t = 0.005s$. On garde les mêmes paramètres matériaux utilisés au chapitre précédent et on utilise le niveaux de couplage numérique intermédiaire entre l'endommagement et la déformation plastique (chapitre 2).

On considère quatre maillages triangulaires uniformes de la plaque : $h_1 = 0.01mm$ (100454 éléments), $h_2 = 0.02mm$ (24806 éléments), $h_3 = 0.03mm$ (11137 éléments), $h_4 = 0.04mm$ (6139 éléments).

La figure 3.5 représente les courbes force/déplacement obtenues pour ces quatre maillages.

Pour ce cas de traction simple, on définit l'énergie dissipée au cours de l'essai comme l'intégrale du produit de l'effort par le déplacement imposé. La courbe force-déplacement est donc un indicateur naturel de l'évolution de l'énergie dissipée au cours du chargement. Elle est utilisée ici pour juger de la sensibilité à la discrétisation spatiale de l'énergie dissipée à rupture.

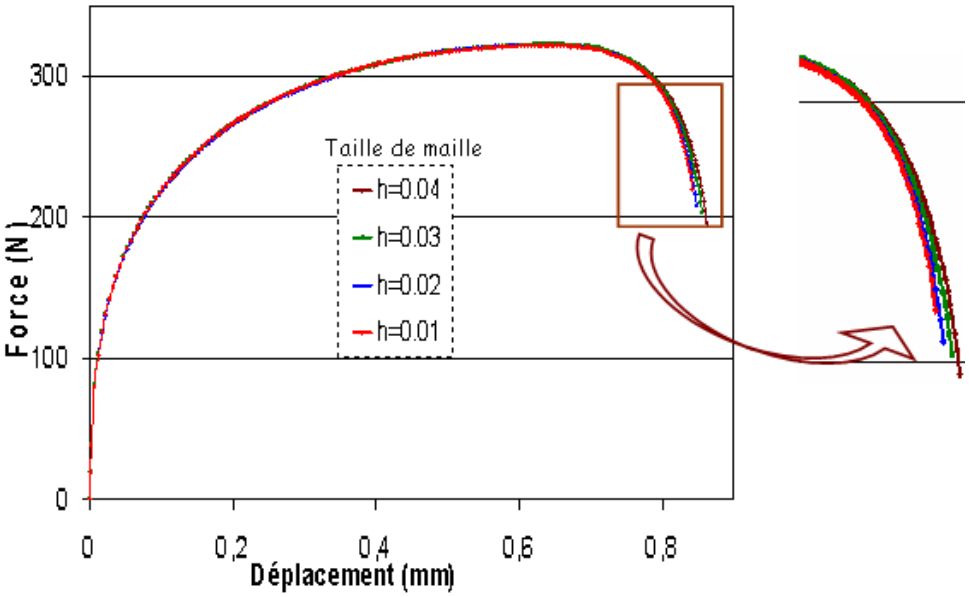


FIG. 3.5 – La courbe force déplacement pour les quatre tailles de maille et le modèle d'endommagement non local

On constate que les quatre maillages conduisent pratiquement aux mêmes courbes force-déplacement. Sur chacune des courbes, un comportement élastoplastique non influencé par l'endommagement est bien représenté au début de l'essai.

Puis, l'influence de l'endommagement sur le comportement global du matériau se traduit par le phénomène d'adoucissement. Cela explique la décroissance de la force de réaction de la structure obtenue sur chacune des courbes.

Vers la fin de la simulation, la création des macro-défauts et l'amorçage de la rupture du matériau sont bien illustrés sur chacune des courbes. En effet, dans cette phase, l'endommagement atteint des valeurs élevées et la coalescence s'y déclenche. Ce qui provoque une chute brutale de la résistance de la structure et par conséquent de la contrainte et de la force de réaction globale.

Nous pouvons noter, que l'utilisation d'un maillage très fin $h = 0.01\,mm$ n'a pas donné lieu à l'apparition prématurée de la rupture. De plus, la décroissance de la taille de maille entraîne une convergence des courbes vers celle obtenue avec le maillage le plus fin. Les réponses globales force/déplacement tendent donc vers une solution de référence (obtenue par le maillage le plus fin).

Ces analyses et comparaisons des courbes force-déplacement montrent donc une bonne aptitude de notre modèle éléments finis à évaluer la dissipation d'énergie à rupture.

□

L'endommagement est la cause principale du caractère adoucissant de la loi de comportement. Par conséquent, il l'est aussi pour le phénomène de la localisation franche remarquée avec le modèle d'endommagent standard. Les isovaleurs de l'endommagement et de la déformation plastique au cours de la simulation, notamment lors de la phase post-critique juste avant la rupture macroscopique sont aussi des indicateurs importants sur l'efficacité de la méthode de régularisation et sur la validation de la prédiction de l'endommagement.

Les figures 3.6 et 3.7 présentent respectivement la carte des isovaleurs pour l'endommagement et la déformation généralisée pour les 4 maillages précédents.

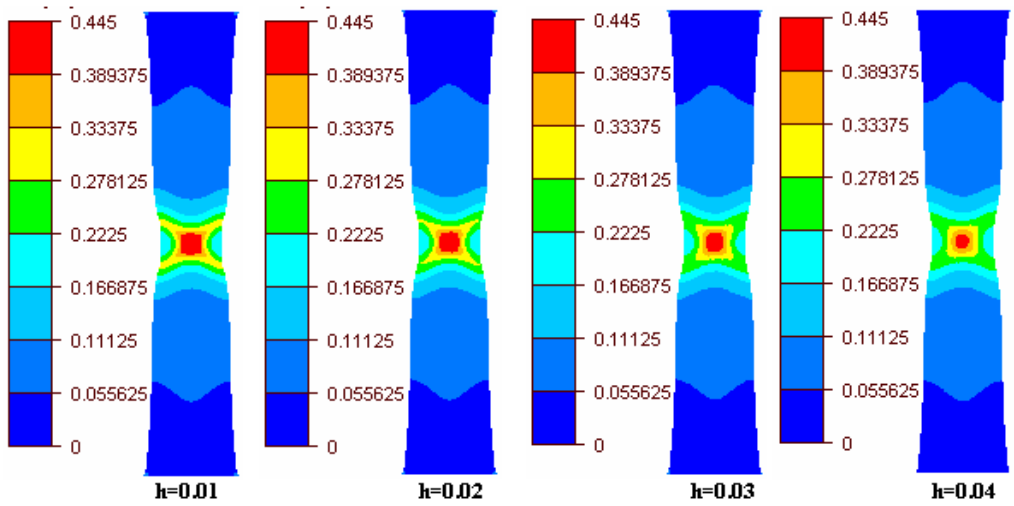


FIG. 3.6 – Les isovaleurs de de la variable d'endommagement à un déplacement imposé $u = 0.88\ mm$ obtenues pour les différents maillages.

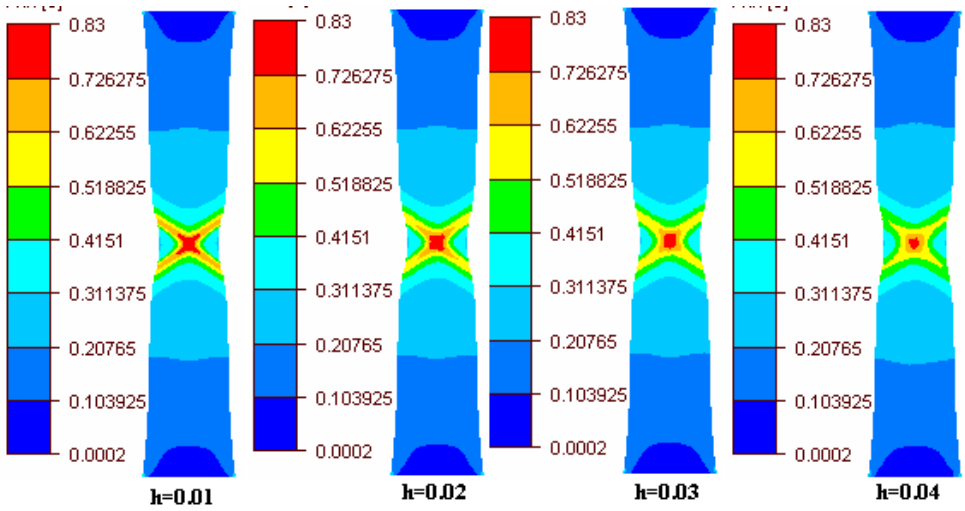


FIG. 3.7 – Les isovaleurs des déformations plastiques à un déplacement imposé $u = 0.88\ mm$ obtenus pour les différents maillages.

Pour chaque maillage, on retrouve une répartition physique d'endommagement et de la déformation plastique : l'endommagement est localisé au centre de l'éprouvette et les déformations illustrent la formation des bandes de cisaillement.

On retrouve une distribution d'endommagement et de déformation plastique qualitativement identique pour chacun des maillages. Des bandes de cisaillement bien marquées apparaissent au centre de l'éprouvette avec pratiquement la même taille.

□

Pour affiner l'analyse des isovaleurs, un zoom sur les déformations plastiques au centre de l'éprouvette est réalisé (figure 3.8).

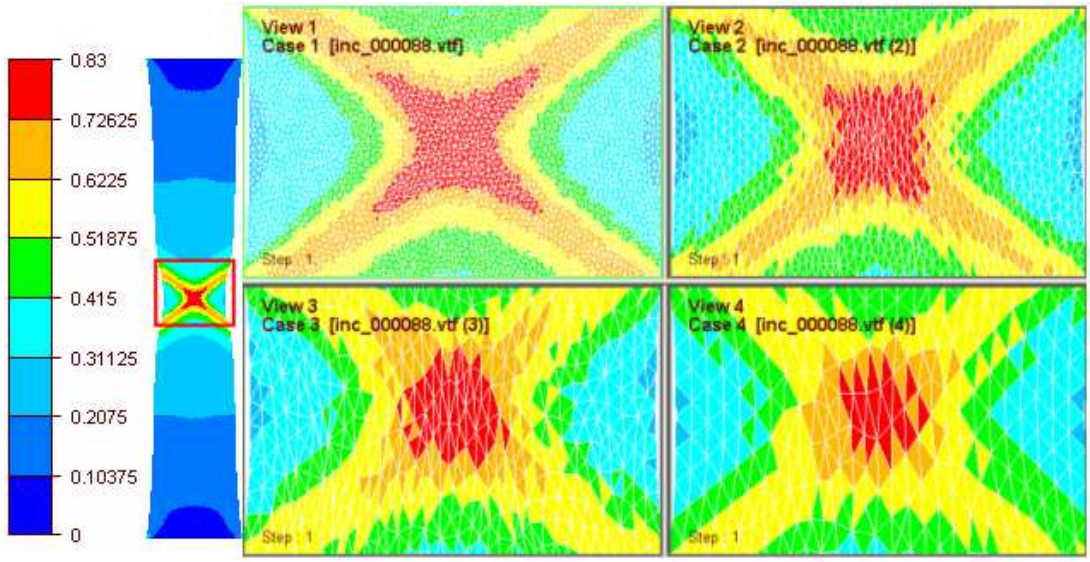


FIG. 3.8 – Zoom au centre de l'éprouvette : isovaleurs des déformations plastiques à un déplacement imposé $u = 0.88\ mm$ obtenues pour les différents maillages.

Contrairement au modèle d'endommagement standard où l'écoulement plastique est très localisé dans une seule rangée d'éléments (figure 3.1), la taille de la zone de concentration de l'écoulement plastique ne se réduit pas à une bande ayant la taille des éléments dans la phase post-critique. De plus, on remarque (figure 3.8) que plus la taille de maille est petite plus le nombre d'éléments dans la bande de cisaillement augmente. En conséquence :

- la largeur de la bande est moins sensible à la variation de la taille de maille ;
- le phénomène de localisation franche avec le raffinement du maillage ne peut plus se produire.

Toutes ces validations, présentées sur la méthode de régularisation non locale, ne signifient pas pour autant que la solution obtenue ne dépende pas du maillage, ce qui n'est d'ailleurs pas recherché. En effet, les variables thermodynamiques sont calculées à partir des variables approchées par la méthode des éléments finis du problème mécanique globale (dans notre cas la vitesse et la pression). Ces variables ne sont indépendantes de la taille de maille qu'une fois la convergence en maillage atteinte. Cependant des phénomènes non physiques, par exemple :

- l'apparition prématurée de la fissure macroscopique avec le raffinement du maillage ;
- la forte dépendance de la taille de la zone de concentration de la déformation plastique et de l'endommagement ;
- la mauvaise évaluation de la dissipation à rupture ;

ont pu être évitées.

3.9 Conclusion

L'approximation éléments finis avec un comportement élastoplastique endommageable est fortement dépendante de la discrétisation spatiale dans la phase post-critique. Pour pallier à ce problème, nous avons présenté et implémenté une méthode de régularisation non locale basée sur le gradient implicite de la variable d'endommagement.

La rupture ductile est modélisée par une technique de "kill element" supprimant les éléments pour lesquels l'endommagement a atteint sa valeur critique.

La validation a été réalisée sur un exemple où la localisation est très marquée en bandes de cisaillement. Cet exemple nous a permis, dans un premier temps, de mettre en évidence les problèmes liés à l'approximation éléments finis par le modèle d'endommagement standard. Ensuite, Les analyses des courbes force/déplacement, des isovaleurs de l'endommagement et de la déformation plastique, obtenues par le modèle régularisé, ont permis de montrer l'apport de ce modèle à la régularisation du problème. Elles ont montré que ce modèle permet :

- de s'affranchir du phénomène de localisation franche et de l'apparition prématurée de la rupture avec le raffinement du maillage ;
- d'éviter la forte dépendance, par rapport au maillage choisi, de la taille de la zone de concentration de la déformation plastique et de l'endommagement ;
- d'avoir une évaluation objective vis à vis de la discrétisation spatiale de la dissipation à rupture.

La méthode de régularisation du gradient implicite assure donc la fiabilité de notre approximation éléments finis à prédire l'évolution de l'endommagement jusqu'à la rupture de la structure.

Chapitre 4

Adaptation anisotrope de maillage au phénomène d'endommagement

Sommaire

4.1 Introduction 80
4.2 Métrique 81
4.2.1 Définitions 81
4.2.2 Maillage unité 82
4.2.3 Intersection de métriques 83
4.3 Motivations de l'adaptation anisotrope de maillage 84
4.4 Estimateur d'erreur a posteriori 84
4.5 Majoration locale de l'erreur d'interpolation 85
4.6 Formulation anisotrope de l'erreur locale d'interpolation 87
4.7 Construction de la métrique 88
4.8 Construction de la matrice hessienne 88
4.9 Adaptation de maillage pilotée par une métrique 90
4.10 Schéma d'adaptation 93
4.11 Validations numériques 93
4.11.1 Traction simple d'une éprouvette en 2D 93
4.11.2 Traction uni-axiale d'une éprouvette cylindrique entaillée 102
4.11.3 Écrasement d'un lopin en tonneau 112
4.12 Conclusion 117

4.1 Introduction

Plusieurs travaux ont été publiés sur l'adaptation de maillage au phénomène d'endommagement [60, 61, 62, 63]. Cependant, les stratégies proposées ne sont pas encore satisfaisantes. En particulier, des stratégies d'adaptation anisotrope de maillage au phénomène d'endommagement ne sont pas encore développées.

L'adaptation anisotrope de maillage est largement utilisée dans la simulation numérique des problèmes de la mécanique des fluides. Dans ce chapitre, on se propose de l'étendre au modèle de prédiction de l'endommagement développé aux chapitres précédents.

Les performances des méthodes des éléments finis sont étroitement liées à la qualité du maillage. Le raffinement du maillage améliore la qualité de l'approximation. Cependant, il est accompagné par une croissance de la taille du problème. En effet, à chaque raffinement uniforme, on multiplie le nombres de nœuds par 8 en 3D. Le coût de calcul et la place mémoire nécessaires ne permettent généralement pas ce raffinement uniforme du maillage. Dans ce cas, comment peut-on améliorer un maillage initial afin de pouvoir réaliser des simulations numériques suffisamment précises pour le phénomène étudié (dans notre cas l'endommagement) avec un coût de calcul minimal ? En effet, dans la plupart des cas, le premier maillage n'est pas assez riche pour avoir assez de précision sur le phénomène étudié.

Dans certaines configurations, il est possible de connaître les régions où va se développer le phénomène d'endommagement, et de générer un maillage a priori adapté à cette évolution. Mais cette méthodologie ne permet pas d'avoir des maillages optimaux du fait que les zones endommagées peuvent se déplacer au cours de la simulation numérique, et que le gradient d'endommagement peut varier différemment dans chaque direction de l'espace.

Une alternative intéressante est l'adaptation de maillage au cours de la simulation. Dans la plupart des cas, l'adaptation de maillage est basée sur des estimateurs d'erreurs qui détectent automatiquement le comportement du phénomène physique étudié, même s'il n'est pas connu a priori. Cela permet de ne raffiner le maillage que dans des zones utiles et de déraffiner ailleurs.

Dans la littérature, on distingue plusieurs méthodes pour adapter les maillages : la r-adaptation, la p-adaptation et la h-adaptation ainsi que des combinaisons de celles-ci, principalement la hp-adaptation. La r-adaptation opère uniquement par relocalisation des nœuds et laisse inchangées les connectivités du maillage. La p-adaptation consiste à enrichir le degré des fonctions d'interpolation afin d'améliorer la qualité de l'approximation surtout dans les zones de fortes variations de la solution. La h-adaptation consiste à modifier le maillage, notamment sa finesse locale et éventuellement son étirement. Cette dernière se scinde en deux types : une adaptation de maillage par raffinement/déraffinement des éléments et une adaptation par modification de maillage afin qu'il respecte une taille prescrite. Ces modifications du maillage peuvent être locales [64, 65, 66], comme elles peuvent être effectuées par reconstruction entière du maillage [67, 68].

La h-adaptation avec modification du maillage s'avère la plus efficace. De plus, elle permet de mieux respecter l'éventuelle anisotropie imposée par la taille prescrite. Cette méthode d'adaptation est retenue dans cette étude.

Dans le contexte de la h-adaptation, nous avons besoin d'un indicateur local de l'erreur d'approximation de manière à définir les zones qui doivent être raffinées ou déraffinées. Pour ce faire, la meilleure approche est celle des estimations d'erreur a posteriori. Plusieurs approches ont été développées pour ces estimateurs [69, 70, 71]. Dans notre étude, on se concentre

sur un estimateur d'erreur anisotrope basé sur l'erreur d'interpolation [72, 73, 74, 75]. Cet estimateur repose sur une majoration anisotrope de l'erreur d'interpolation permettant de relier l'erreur à la longueur des éléments dans chaque direction de l'espace. Il fournit les informations nécessaires à l'adaptation anisotrope du maillage.

Une autre étape importante, dans l'adaptation anisotrope de maillage, est la génération du maillage à partir des indications fournies par l'estimateur d'erreur sur les tailles des éléments. Pour cela nous utilisons le générateur de maillage *MTC*, qui permet de générer le maillage adapté par une méthode d'optimisation locale du maillage initial.

Dans la deuxième partie de ce chapitre, on rappelle les notions élémentaires associées à une métrique. Ensuite, une majoration de l'erreur locale d'interpolation est donnée. Une formulation anisotrope de cette erreur ainsi que la construction de la métrique anisotrope sont ensuite exposées. Puis, on s'intéresse à l'évaluation numérique de la matrice hessienne nécessaire pour la définition de la métrique. Dans la neuvième partie, on s'intéresse à la génération du maillage adapté à partir d'une métrique prescrite. La dernière partie est dédiée à la validation de notre stratégie d'adaptation anisotrope de maillage sur des exemples en deux et trois dimensions de l'espace.

4.2 Métrique

L'adaptation de maillage adoptée dans cette étude utilise les techniques modernes de génération de maillage qui reposent sur la notion de métrique. Cette métrique substitue la métrique euclidienne pour mesurer les distances, les volumes ainsi que la qualité des éléments du maillage. Elle peut être calculée de manières différentes, ce qui offre la possibilité de tenir compte dans la génération du maillage des caractéristiques des équations à résoudre ou de l'erreur commise lors de l'approximation de ces équations ou encore de la géométrie du domaine à discrétiser.

4.2.1 Définitions

Métrique : On appelle métrique une matrice carrée $\mathcal{M} \in \mathbb{R}^{d\times d}$ symétrique définie positive, où d représente la dimension de l'espace.

Produit scalaire : Le produit scalaire de deux vecteurs u et v pour une métrique $\mathcal{M}$ est définit par :

$$\langle u, v\rangle_{\mathcal{M}} = {}^t u\mathcal{M}v \tag{4.1}$$

On définit alors la norme associée à ce produit scalaire par :

$$\|u\|_{\mathcal{M}} = \sqrt{{}^t u\mathcal{M}u} \tag{4.2}$$

Ainsi, la distance entre deux points A et B s'écrit :

$$d_{\mathcal{M}}(A,B) = l_{\mathcal{M}}(\overrightarrow{AB}) = \|\overrightarrow{AB}\|_{\mathcal{M}} = \sqrt{{}^t\overrightarrow{AB}\mathcal{M}\overrightarrow{AB}} \tag{4.3}$$

En remarquant que le tenseur métrique $\mathcal{M}$ peut varier d'un point à l'autre, on introduit la notion de longueur moyenne d'une arête du maillage par :

$$l_{\mathcal{M}}(\overrightarrow{AB}) = \int_0^1 \sqrt{{}^t\overrightarrow{AB}\mathcal{M}(A + t\overrightarrow{AB})\overrightarrow{AB}}dt \tag{4.4}$$

Diagonalisation :

Le tenseur $\mathcal{M}$ est diagonalisable parce qu'il est symétrique. Il peut alors se décomposer sous la forme :

$$\mathcal{M} = \mathcal{R}\Lambda\mathcal{R}^{-1} \tag{4.5}$$

où $\mathcal{R}$ est une matrice de rotation formée des vecteurs propres de $\mathcal{M}$ et Λ est une matrice diagonale formée des valeurs propres de $\mathcal{M}$. La matrice $\mathcal{M}$ étant définie positive, toutes ses valeurs propres λ_i $(i = 1 \dots d)$ sont strictement positives. Il existe des scalaires $h_i \neq 0$ $(i = 1 \dots d)$ tels que $(\lambda_i) = 1/h_i^2$ $i = 1 \dots d$. En conclusion $\mathcal{M}$ peut s'écrire sous la forme :

$$\mathcal{M} = \mathcal{R} \begin{pmatrix} \frac{1}{h_1^2} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{h_d^2} \end{pmatrix} \mathcal{R}^{-1} \tag{4.6}$$

On peut alors interpréter une métrique $\mathcal{M}$ comme étant la donnée de d directions principales et d'une taille de maille h_i dans chaque direction principale.

4.2.2 Maillage unité

Maillage unité :

La génération d'un maillage à l'aide d'une métrique s'effectue de manière à ce que toutes les arêtes soient de longueur unité dans la métrique. Un tel maillage sera appelé maillage unité. En pratique, la longueur des arêtes vérifie :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} < l_{\mathcal{M}}(e) < \sqrt{2} \quad \text{pour toutes les arêtes } e \text{ du maillage} \tag{4.7}$$

Représentation géométrique :

Une métrique peut être représentée géométriquement par sa boule unité. Soit P un sommet du maillage $\mathcal{T}_h$ du domaine Ω et soit $\mathcal{M}$ une métrique définie au point P. Alors, la boule unité dans la métrique $\mathcal{M}$ de centre P est le lieu géométrique des points satisfaisant la relation :

$$\mathcal{B} = \{M \in \Omega : \|MP\|_{\mathcal{M}} = 1\} \tag{4.8}$$

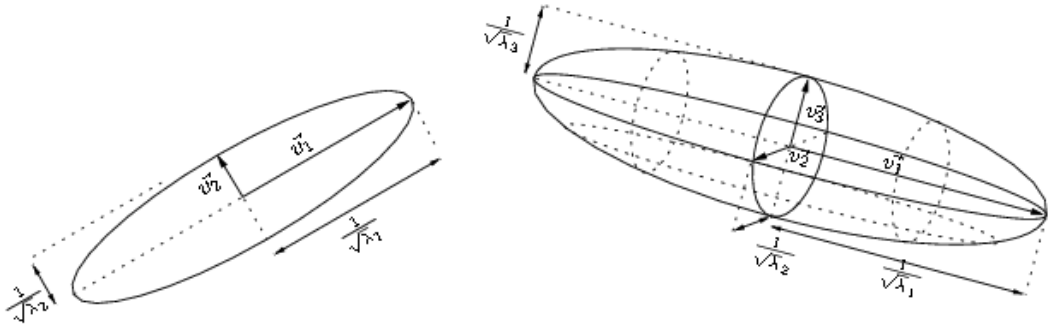


FIG. 4.1 – Représentation d'une boule unité d'une métrique. Les $\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}$ représentent les tailles de maille et les v_i sont les directions principales de la métrique [76].

Cet ensemble de points décrit une ellipse en 2D et un ellipsoïde en 3D (figure 4.1). Les axes principaux sont donnés par les vecteurs propres de $\mathcal{M}$ et les rayons de chaque axe par la racine carrée de l'inverse des valeurs propres de $\mathcal{M}$ associées.

4.2.3 Intersection de métriques

Étant données deux métriques $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ définies au même point P, le but est d'avoir une métrique au point P qui combine les caractéristiques de ces métriques. Plus précisément, on souhaite construire une métrique respectant les prescriptions sur la taille pour les deux métriques. Dans la littérature, il existe plusieurs manières de définir cette intersection :

- *Intersection par réduction simultanée :* en se basant sur la représentation géométrique des deux métriques $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$, on peut définir l'intersection comme étant la plus grande ellipse contenue dans l'intersection des deux ellipses représentatives. Cette métrique est obtenue par [74] :

$$\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2 = {}^t\mathcal{R}^{-1} \begin{pmatrix} max(\lambda_1, \mu_1) & 0 & 0 \\ 0 & max(\lambda_2, \mu_2) & 0 \\ 0 & 0 & max(\lambda_3, \mu_3) \end{pmatrix} \mathcal{R}^{-1} \qquad (4.9)$$

  où $\mathcal{R}$ est une matrice de passage envoyant la base canonique dans celle associée à la réduction simultanée des deux métriques et où les réels λ_i et μ_i sont les valeurs propres associées aux métriques $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$.

- *Intersection préservant des directions particulières :* il se peut que l'on souhaite préserver les informations directionnelles associées à l'une des deux métriques, par exemple $\mathcal{M}_1$. Dans ce cas, on définit l'intersection comme suit :

$$\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2 = \alpha \mathcal{M}_1 \quad \text{avec } \alpha = max(\frac{\mu_1}{\lambda_1}, \frac{\mu_2}{\lambda_2}, \frac{\mu_3}{\lambda_3}, 1) \qquad (4.10)$$

  où les μ_i et λ_i sont respectivement les valeurs propres de $\mathcal{M}_1$ et de $\mathcal{M}_2$.

- *Intersection par pondération :* On peut tout simplement définir l'intersection des deux métriques par une métrique moyenne [77] : $\frac{\mathcal{M}_1+\mathcal{M}_2}{2}$. Cette métrique a l'avantage d'être

facile à calculer et ne nécessite pas la diagonalisation des deux métriques. Cependant, si on prend deux métriques dont les prescriptions de tailles sont différentes dans des directions opposées alors une métrique pratiquement isotrope est obtenue.

Nous avons adopté l'intersection par pondération dans cette étude. D'une part, parce qu'elle est la plus facile à calculer. D'autre part, car comme nous le verrons par la suite, les deux métriques que nous utilisons ne sont pas de nature très différentes.

4.3 Motivations de l'adaptation anisotrope de maillage

L'endommagement évolue préférentiellement dans la direction perpendiculaire à la contrainte principale maximale. Cette évolution dans des directions préférentielles crée une anisotropie en terme de gradient d'endommagement. Pour avoir la même précision par une approximation éléments finis dans toutes les directions de l'espace, le maillage doit donc prendre en compte cette anisotropie, ou alors raffiner le maillage d'une manière isotrope avec une taille de maille mieux adaptée à la direction ayant le plus fort gradient de l'endommagement. La deuxième solution peut conduire à des raffinements de maillage dans des directions où les variations sont très faibles, cela conduit donc à l'augmentation de temps cpu sans pour autant améliorer la précision. C'est pourquoi, dans la suite de ce travail, nous nous concentrons sur une adaptation anisotrope du maillage.

4.4 Estimateur d'erreur a posteriori

Les estimateurs d'erreur a posteriori sont des indicateurs d'erreur qui peuvent être locaux et qui ne tiennent compte que de la solution approchée du problème. Ils permettent, d'une part d'évaluer la qualité de la solution approchée. D'autre part, ils fournissent une distribution de l'erreur, en particulier, ils permettent d'identifier les régions du domaine sources d'erreurs importantes. Ces informations sur la distribution de l'erreur sont exploitées par la procédure d'adaptation de maillage. Plus précisément, on se sert de cette information pour faire évoluer le maillage de manière à ce que l'erreur soit à la fois plus petite qu'un ordre de précision fixé, et équidistribuée sur les éléments du maillage.

On considère u, une solution exacte d'une EDP sur un domaine Ω. On note u_h son approximation par la méthode des éléments finis. Dans une procédure d'adaptation de maillage, on adapte la taille et la forme des éléments du maillage pour contrôler l'erreur d'approximation. Pour cela, on a besoin de calculer la norme de cette erreur $e_h = u - u_h$. Un des objectifs principaux de l'estimateur d'erreur a posteriori est de fournir une borne supérieure de cette erreur qui soit entièrement calculable à partir de la solution numérique.

Plusieurs approches ont été développées pour les estimateurs d'erreur a posteriori. Dans notre étude, on utilise une approche indirecte basée sur l'erreur d'interpolation.

Soit $\Pi_h u$ une interpolation de la solution u sur l'espace des éléments finis. Dans le cadre des problèmes elliptiques, nous avons d'après le lemme de *Céa* [78] la majoration suivante :

$$\|u - u_h\| \leq c\|u - \Pi_h u\| \tag{4.11}$$

où c est une constante dépendante de l'EDP considérée.

Cette relation (4.11) affirme qu'à une constante près, l'erreur d'approximation est majorée par l'erreur d'interpolation. De plus des expériences numériques ont montré que le lien entre l'erreur d'approximation et l'erreur d'interpolation est plus fort que celui donné par le lemme de *Céa* [79]. De ce fait, l'étude de l'erreur d'approximation peut être réductible à l'étude de l'erreur d'interpolation.

4.5 Majoration locale de l'erreur d'interpolation

Dans cette étude on se concentre sur l'interpolation linéaire continue P^1. Soit $\Pi_h u$ une interpolation linéaire de la solution u sur chaque élément K du maillage et exacte aux sommets du maillage. Soit H_u la matrice hessienne de u. Une majoration de l'erreur d'interpolation, sur chaque élément du maillage K, peut s'écrire :

$$\|u - \Pi_h u\|_{\infty,K} \leq c \max_{x\in K} \max_{v\in K} \langle v, |H_u(x)| v\rangle \tag{4.12}$$

où $c = \frac{1}{2}\left(\frac{d}{1+d}\right)^2$ est une constante qui dépend de la dimension de l'espace d.

Preuve :

Ici on rappelle une démonstration de cette majoration, très utile pour la suite, dans le cas 3D. On considère un tétraèdre $K = [a, b, c, d]$ tel que son diamètre ne tend pas vers zéro.

Nous voulons majorer l'erreur $e = u - \Pi_h u$ sur K. Supposons que le point x où le maximum est atteint est plus près de a que de b, c, ou d.

En utilisant le développement en série de *Taylor* avec un reste intégral de $e = u - \Pi_h u_h$ au sommet a du tétraèdre $K = [a, b, c, d]$, on obtient :

$$(u-\Pi_h u)(a) = (u-\Pi_h u)(x) + \langle \overrightarrow{xa}, \nabla(u-\Pi_h u)(x)\rangle + \int_0^1 (1-t)\langle \overrightarrow{ax}, H_u(x+t\overrightarrow{xa})\overrightarrow{ax}\rangle dt \tag{4.13}$$

De plus, u et son interpolé linéaire $\Pi_h u$ coïncident sur les sommets de K, et $\nabla(u - \Pi_h u)(x) = 0$, on obtient alors :

$$|(e)(x)| = \left| \int_0^1 (1-t)\langle \overrightarrow{ax}, H_u(x+t\overrightarrow{xa})\overrightarrow{ax}\rangle dt \right| \tag{4.14}$$

On distingue les trois configurations possibles, à savoir :

- *cas 1* : le point x est strictement à l'intérieur de K ;
- *cas 2* : le point x est sur une face de K et n'appartient pas à une arrête de K ;
- *cas 3* : le point x appartient à une arête de K.

On traite ces cas séparément. On considère le *cas 1 :*

Soit a' le point d'intersection de la droite ax avec la face de K opposée à a. Il existe donc un réel λ tel que $\overrightarrow{ax} = \lambda\overrightarrow{aa'}$. De plus $\lambda \leq 3/4$ puisque x est plus proche de a que des autres sommets de K. On obtient donc :

$$|(e)(x)| = \left| \int_0^1 (1-t)\lambda^2\langle \overrightarrow{aa'}, H_u(x+t\overrightarrow{xa})\overrightarrow{aa'}\rangle dt \right| \tag{4.15}$$

Puis,

$$\begin{aligned} |(e)(x)| &\leq \frac{9}{16} \max_{y \in aa'} \left| \langle \overrightarrow{aa'}, H_u(y) \overrightarrow{aa'} \rangle \right| \int_0^1 (1-t)dt \\ &\leq \frac{9}{32} \max_{y \in aa'} \left| \langle \overrightarrow{aa'}, H_u(y) \overrightarrow{aa'} \rangle \right| \\ &\leq \frac{9}{32} \max_{y \in K} \left| \langle \overrightarrow{aa'}, H_u(y) \overrightarrow{aa'} \rangle \right| \end{aligned} \tag{4.16}$$

Il s'en suit,

$$\|u - \Pi_h u\|_{\infty,K} \leq \frac{9}{32} \max_{y \in K} \left| \langle \overrightarrow{aa'}, H_u(y) \overrightarrow{aa'} \rangle \right| \tag{4.17}$$

La matrice hessienne H_u est symétrique, elle est donc diagonalisable :

$$|H_u| = \mathcal{R}|\Lambda|\mathcal{R}^{-1} = \mathcal{R} \begin{pmatrix} |\lambda_1| & 0 & 0 \\ 0 & |\lambda_2| & 0 \\ 0 & 0 & |\lambda_3| \end{pmatrix} \mathcal{R}^{-1} \tag{4.18}$$

où $\mathcal{R}$ est une matrice des vecteurs propres et les scalaires λ_1, λ_2, et λ_3 sont les valeurs propres de H_u.

On peut donc écrire la majoration suivante :

$$\begin{aligned} \|u - \Pi_h u\|_{\infty,K} &\leq \frac{9}{32} \max_{y \in K} \langle \overrightarrow{aa'}, |H_u(y)| \overrightarrow{aa'} \rangle \\ &\leq \frac{9}{32} \max_{y \in K} \max_{v \in K} \langle v, |H_u(y)| v \rangle \end{aligned} \tag{4.19}$$

Le cas 2 : on peut supposer que a est un sommet de la face contenant x. On note a' le point d'intersection de la droite ax avec l'arête opposée à a dans K. Puisque x est plus proche de a, le réel λ vérifiant $ax = \lambda aa'$ est plus petit que $\frac{2}{3}$. En utilisant la relation (4.14), on obtient :

$$\begin{aligned} |(e)(x)| &\leq \frac{4}{9} \max_{y \in aa'} \left| \langle \overrightarrow{aa'}, H_u(y) \overrightarrow{aa'} \rangle \right| \int_0^1 (1-t)dt \\ &\leq \frac{2}{9} \max_{y \in K} \left| \langle \overrightarrow{aa'}, H_u(y) \overrightarrow{aa'} \rangle \right| \end{aligned} \tag{4.20}$$

Ou encore

$$\|u - \Pi_h u\|_{\infty,K} \leq \frac{2}{9} \max_{y \in K} \max_{v \in K} \langle v, |H_u(y)| v \rangle \tag{4.21}$$

Le cas 3 : on peut supposer que a est un sommet de l'arête contenant x, disons l'arête ab. Il existe un réel λ tel que $\overrightarrow{ax} = \lambda \overrightarrow{ab}$. De plus $\lambda \leq \frac{1}{2}$ puisque x est plus proche de a. En utilisant la relation (4.14), on obtient :

$$\begin{aligned} |(e)(x)| &\leq \frac{1}{4} \max_{y \in ab} \left| \langle \overrightarrow{ab}, H_u(y) \overrightarrow{ab} \rangle \right| \int_0^1 (1-t)dt \\ &\leq \frac{1}{8} \max_{y \in K} \left| \langle \overrightarrow{ab}, H_u(y) \overrightarrow{ab} \rangle \right| \end{aligned} \tag{4.22}$$

Ou encore :

$$\|u - \Pi_h u\|_{\infty,K} \leq \frac{1}{8} \max_{y \in K} \max_{v \in K} \langle v, |H_u(y)| v \rangle \tag{4.23}$$

Puisque $\frac{1}{8} \leq \frac{2}{9} \leq \frac{9}{32}$, et $\frac{9}{32} = \frac{1}{2}(\frac{3}{4})^2$. Les relations (4.19), (4.21) et (4.23) conduisent à la majoration annoncée :

$$\|u - \Pi_h u\|_{\infty,K} \leq \frac{9}{32} \max_{y \in K} \max_{v \in K} \langle v, |H_u(y)| v \rangle \tag{4.24}$$

Remarque : La démonstration est faite en $1D$ et $2D$. En effet,
Les *cas 2* et *cas 3* sont les deux configurations possibles en $2D$ et $\frac{2}{9} = \frac{1}{2}(\frac{2}{3})^2$.
Le *cas 3* est une démonstration pour le cas unidimensionnel $1D$ puisque $\frac{1}{8} = \frac{1}{2}(\frac{1}{2})^2$

□

A partir de cette majoration de l'erreur d'interpolation sur chaque élément du maillage, nous établissons, dans la section suivante, un lien entre l'erreur d'interpolation commise sur un élément et la longueur de ses arêtes. A partir de ce lien, on formule une condition sur la longueur des arêtes pour contrôler l'erreur sur l'élément dans chaque direction. Cette condition est traduite ensuite en métrique qui servira pour générer le maillage adapté.

4.6 Formulation anisotrope de l'erreur locale d'interpolation

la majoration (4.12) de l'erreur d'interpolation n'est pas facilement exploitable car le terme de droite ne peut pas être évalué numériquement. Dans un premier temps, on va faire intervenir les arêtes du maillage dans la majoration de l'erreur d'interpolation afin de supprimer le maximum associé aux vecteurs inclus dans K. En exprimant les vecteurs de K sous forme d'une combinaison linéaire des arêtes de K, on peut faire apparaître les arêtes de l'élément K dans l'inégalité (4.12). Pour tout élément K du maillage on a la majoration de l'erreur d'interpolation suivante :

$$\|u - \Pi_h u\|_{\infty,K} \leq c \max_{x \in K} \max_{e \in E_K} \langle e, |H_u(x)| e \rangle \tag{4.25}$$

où E_K est l'ensemble des arêtes de l'élément K et $|H_u(x)|$ est la valeur absolue du hessien de la variable u (définie par (4.18)).

$H_u(x)$ n'étant pas connu, on suppose que l'on sait exhiber sur K un tenseur de métrique $\overline{\mathcal{M}}(K)$ vérifiant :

$$\max_{x \in K} \langle e, |H_u(x)| e \rangle \leq \langle e, \overline{\mathcal{M}}(K) e \rangle, \text{ pour tout } e \in E_K \tag{4.26}$$

On obtient alors la majoration suivante :

$$\|u - \Pi_h u\|_{\infty,K} \leq c \max_{e \in E_K} \langle e, \overline{\mathcal{M}}(K) e \rangle \tag{4.27}$$

Ensuite, l'erreur d'interpolation ϵ commise sur l'élément K est estimée par :

$$\epsilon = c \max_{e \in E_K} < e, \overline{\mathcal{M}}(K) e > \tag{4.28}$$

Il suffit donc d'imposer aux arêtes de l'élément K la condition suivante :

$$\epsilon = c < e, \overline{\mathcal{M}}(K) e > \text{ pour toute arête } e \text{ de } K \tag{4.29}$$

Cette relation signifie que l'erreur d'interpolation commise sur un élément K est proportionnelle au carré de la plus grande longueur des arêtes de K, dans la métrique $\overline{\mathcal{M}}(K)$. La génération d'un maillage dont la longueur des arêtes est bien maîtrisée permet donc de contrôler l'erreur d'interpolation sur le maillage.

Comme nous l'avons dit précédemment, les arêtes sont de longueur unité dans un maillage généré à partir d'une métrique. On considère donc la métrique $\mathcal{M}$ définie par :

$$\mathcal{M}(K) = \frac{c}{\epsilon}\overline{\mathcal{M}}(K) \tag{4.30}$$

On aura donc la condition de longueur unité

$$< e, \mathcal{M}(K)e >= 1 \Leftrightarrow (l_{\mathcal{M}(K)}(e))^2 = 1 \text{ pour tout } e \text{ de } K \tag{4.31}$$

L'erreur d'interpolation sera donc majorée par ϵ sur l'élément K si la longueur de chacune de ses arêtes est égale à 1 dans la métrique $\mathcal{M}(K)$.

L'évaluation du tenseur $\mathcal{M}$ fait l'objet de la section suivante.

4.7 Construction de la métrique

Soient ϵ le seuil de l'erreur d'interpolation tolérée, et h_{min} (resp. h_{max}) la longueur minimale (resp. maximale) autorisée pour les arêtes du maillage d'après les équations précédentes. En chaque sommet du maillage, on définit un tenseur de métrique de la manière suivante :

$$\mathcal{M} = \mathcal{R}\tilde{\Lambda}\mathcal{R}^{-1}, \quad \tilde{\Lambda} = diag(|\tilde{\lambda_i}|) \text{ et } \tilde{\lambda_i} = min\left(max\left(\frac{c|\lambda_i|}{\epsilon}, \frac{1}{h_{max}^2}\right), \frac{1}{h_{min}^2}\right) \tag{4.32}$$

où $\mathcal{R}$ est la matrice des vecteurs propres de la matrice hessienne H_u, et $|\Lambda| = diag(|\lambda_i|)$ la matrice diagonale des valeurs absolues des valeurs propres de H_u.

Dans chaque direction principale de $\mathcal{M}$ (vecteur propre de la matrice hessienne), une taille de maille $1/\sqrt{\tilde{\lambda_i}}$ est définie. La métrique ainsi construite est anisotrope. Cette métrique servira au mailleur pour générer le maillage adapté.

Sur le maillage obtenu l'erreur d'interpolation sera majorée par ϵ sur chacun des éléments si l'on est pas contraint par la taille minimale h_{min}. L'introduction de cette limite de taille de maille permet d'éviter que trop d'éléments ne soient générés dans les régions proches des singularités [74].

La construction de la métrique (4.32) requiert l'évaluation de la matrice hessienne H_u à chaque sommet du maillage. Nous rappelons dans la section suivante quelques techniques pour l'évaluation numérique de cette dérivée seconde de la solution exacte.

4.8 Construction de la matrice hessienne

Dans la majoration de l'erreur d'interpolation (4.12) intervient le hessien de la solution exacte, et par conséquent, on le retrouve dans la construction de la métrique (4.32).

La solution exacte étant inconnue, on approche la matrice hessienne H_u de la solution exacte à l'aide de la solution discrète u_h. Dans le cas d'une approximation éléments finis

linéaire de type $P1$ Lagrange, on peut trouver dans la littérature plusieurs méthodes de reconstruction de cette matrice hessienne :

- une reconstruction par les moindres carrés [74]. Il s'agit d'écrire un développement de *Taylor* à l'ordre deux autour d'un sommet à partir des nœuds voisins, ce qui donne des équations avec les coefficients de la matrice hessienne comme inconnues. Le système linéaire obtenu est, ensuite, résolu par moindres carrés ;

- une reconstruction par projection de la dérivée seconde de u sur l'espace des fonctions linéaires par élément. Cette technique conduit à une expression simple de la matrice hessienne en chaque sommet S du maillage :

$$H_{i,j}(S) = \frac{\int_{\Omega_S} \frac{\partial u_h}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi_S}{\partial x_j}}{\int_{\Omega_S} \varphi_S} \tag{4.33}$$

  où Ω_S représente l'ensemble des éléments ayant le sommet S en commun et φ_S est la fonction d'interpolation du sommet S. Toutefois, cette méthode ne converge pas vers la matrice hessienne [79] ;

- une reconstruction par double projection locale L^2. La convergence de cette méthode n'est pas garantie, mais donne des bons résultats en pratique.

La dernière reconstruction de la matrice hessienne a été retenue. Cette méthode utilise un opérateur de projection L^2 dans P^k pour reconstruire le gradient d'une fonction. Le procédé est, ensuite, appliqué au gradient reconstruit pour obtenir une approximation de la matrice hessienne.

Soit S un sommet du maillage. Dans un premier temps on reconstruit un gradient linéaire ∇u_h à partir de u_h par projection L^2 dans P^1. Cette reconstruction est une sommation pondérée sur les éléments du patch Ω_S, ensuite, divisée par le volume (l'aire en 2D) du patch [74, 80] :

$$\Pi_h(\nabla u_h)(S) = \frac{1}{\sum\limits_{K \in \Omega_S} vol(K)} \left(\sum_{K \in \Omega_S} vol(K) \nabla (u_{h/K}) \right) \tag{4.34}$$

On peut alors appliquer à nouveau le même procédé à chaque composante du gradient reconstruit donné par la relation (4.34). On obtient l'expression suivante pour la matrice hessienne :

$$(H_u)_{ij}(S) = \frac{1}{\sum\limits_{K \in \Omega_S} vol(K)} \left(\sum_{K \in \Omega_S} vol(K) \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\left(\Pi_h \frac{\partial u_h}{\partial x_i} \right)_{/K} \right) \right) \right) \tag{4.35}$$

□

Nous utilisons donc un estimateur d'erreur a posteriori anisotrope basé sur une approximation discrète du hessien de la solution. A partir de cet estimateur d'erreur, nous construisons une carte discrète de métriques anisotropes servant à piloter l'algorithme d'adaptation

de maillage. Cela permet d'équi-répartir sur les éléments du nouveau maillage l'erreur dans chaque direction.

La procédure de génération du maillage adapté à partir de ce champ de métriques fait l'objet de la section suivante.

4.9 Adaptation de maillage pilotée par une métrique

Il existe différentes méthodes de génération de maillage automatique non structuré. En 3D, on distingue principalement quatre techniques : la méthode frontale, la méthode par arbre, la méthode de triangulation de *Delaunay* et la méthode par optimisation topologique. La génération d'un maillage anisotrope à l'aide d'une métrique prescrite consiste d'abord à substituer les mesures euclidiennes des longueurs des arêtes et les volumes des éléments par celles obtenues dans cette métrique. Ensuite, un maillage conforme avec des éléments équilatéraux et des arêtes avec des longueurs proches de l'unité est généré. L'adaptation de maillage anisotrope peut donc être effectuée par toutes les différentes techniques de génération de maillage. Malheureusement, en pratique, il existe peut de mailleur anisotrope performant surtout pour des configurations tridimensionnelles.

D'un point de vue technologie de maillage, il existe deux types de génération de maillage adaptés : soit par modifications locales du maillage courant à l'aide des opérateurs d'insertion, de suppression ou de déplacement des nœuds, et des opérateurs de bascule de faces ou d'arêtes [64, 65, 66] ; soit par une reconstruction complète d'un nouveau maillage du domaine en accord avec la métrique spécifiée à chaque adaptation [67, 68].

Dans notre cas, on utilise le mailleur MTC. L'adaptation de maillage dans ce logiciel est basée sur une méthode d'optimisation locale du maillage. Le principe de cette méthode consiste à effectuer des améliorations locales progressives d'une topologie initiale du maillage jusqu'à l'obtention d'un maillage valide. Plus précisément, la génération d'un maillage conforme à une métrique donnée s'effectue par l'introduction d'un critère de forme et de taille des éléments à l'aide de cette métrique. Cela favorise la création d'éléments de la taille et de la forme voulue. Ensuite, le maillage est optimisé itérativement au moyen d'opérateurs de modification locale de maillage.

Les modifications de maillage peuvent se décomposer en une combinaison d'améliorations locales autour des nœuds et autour des arêtes.

La figure 4.2 montre les éventuels topologies de maillage qu'on peut obtenir par optimisation topologique autour d'un sommet S. Le maillage initial de la cavité autour du nœud S (figure 4.2(a)) peut être modifié : soit par élimination des nœuds S et S_6 (figure 4.2 (b)), Soit par élimination du nœud S_6 et déplacement du nœud S vers l'isobarycentre des sommets de la cavité.

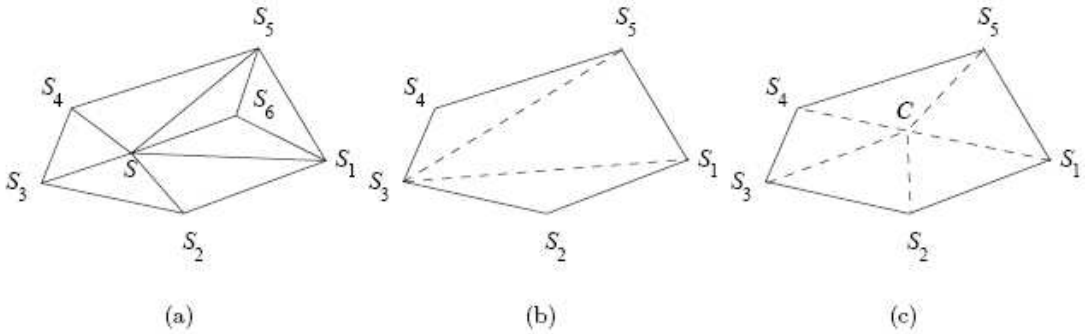


FIG. 4.2 – Opérations topologiques autour d'un nœud [77].

La figure 4.3 montre les éventuels maillages que l'on peut obtenir par optimisation topologique autour d'une arête SS'. Le maillage initial autour de cette arête peut être modifié : soit par élimination du nœud S_3 (figure 4.3, (b)), soit par élimination du nœud S_3 et bascule d'arête (figure 4.3, (c)), soit par l'insertion d'un nouveau sommet au milieu de l'arête $[SS']$ (figure 4.3, (d)).

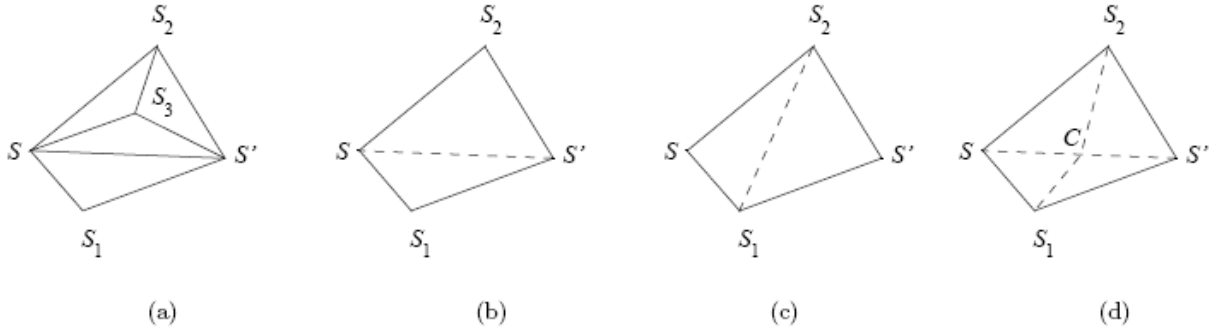


FIG. 4.3 – Opérations topologiques autour d'une arête [77].

Reste à définir un moyen pour choisir une topologie de maillage d'une cavité (groupe d'éléments voisins d'un nœud ou d'une arête) plutôt qu'une autre. En effet, parmi deux topologies de maillage différentes d'une cavité donnée, il est nécessaire de privilégier celle dont les éléments sont de meilleure qualité.

Critère de forme anisotrope et critère de taille

On considère un critère de qualité, pour contrôler la taille et la forme des éléments du maillage. Ce critère, noté $q(T)$, peut être défini par [77] :

$$q(T) = Q_F(T).Q_S(T) \tag{4.36}$$

$Q_F(T)$ est le critère de forme de l'élément T, il est défini par :

$$Q_F(T) = c_0 \frac{|T|_{\mathcal{M}(T)}}{h^d_{\mathcal{M}(T)}} \tag{4.37}$$

où c_0 est un coefficient de normalisation assurant une qualité égale à 1 au tétraèdre équilatéral dans $\mathcal{M}(T)$, et où d est la dimension spatiale

La métrique $\mathcal{M}$ associée à l'élément T est la moyenne des métriques de ses sommets $S_0 \dots S_d$:

$$\mathcal{M}(T) = \frac{1}{d+1} \sum_{i=m}^{d} \mathcal{M}(S_i) \tag{4.38}$$

Dans cette métrique, le volume de l'élément T s'écrit simplement :

$$|T|_{\mathcal{M}(T)} = |T| \sqrt{det(\mathcal{M}(T))} \tag{4.39}$$

La taille moyenne :

$$h_{\mathcal{M}(T)} = \left(\frac{2}{d(d+1)} \sum_{(i,j)\in T} \|S_i - S_j\|^2_{M(T)} \right)^2 \tag{4.40}$$

$Q_S(T)$ est le critère de taille de l'élément T dans la métrique $\mathcal{M}(T)$. Il est défini par :

$$Q_S(T) = min(\frac{1}{h_{\mathcal{M}(T)}}, h_{\mathcal{M}(T)})^d \tag{4.41}$$

L'algorithme d'adaptation de maillage par optimisation topologique améliore progressivement le maillage jusqu'à l'obtention d'un maillage qui respecte au mieux ce critère de qualité.

À partir de ce critère de qualité, une relation d'ordre entre les topologies de maillage peut être définie comme suit :

Définition : soient deux topologies $\mathcal{T}_1 = (T_1^i)_{1\leq i\leq I_1}$ et $\mathcal{T}_2 = (T_2^i)_{1\leq i\leq I_2}$ classées par critère de qualité croissant ($q(T_1^i) < q(T_1^{i+1})\ \forall i \in [1, I_1]$ et $q(T_2^j) < q(T_2^{j+1})\ \forall j \in [1, I_2]$). On définit la relation d'ordre "$<$" entre ces deux topologies de maillage à partir du plus petit élément différent :

$$\mathcal{T}_1 < \mathcal{T}_2 \Leftrightarrow \exists 1 \leq i_0 \leq min(I_1, I_2) \text{ tel que } : q(T_1^i) = q(T_2^i)\ \forall i < i_0 \text{ et } q(T_1^{i_0}) < q(T_2^{i_0}) \tag{4.42}$$

Cette relation d'ordre définit la meilleure topologie comme étant celle qui maximise la qualité du plus mauvais élément. De plus, elle peut être appliquée à tout sous ensemble d'éléments, en particulier pour comparer les topologies de maillage des cavités autour des nœuds et autour des arêtes.

L'optimisation locale du maillage consiste à faire croître localement la qualité des éléments. Pour cela, on effectue une combinaison d'optimisation autour des nœuds et autour des arêtes. Ces optimisations locales s'effectuent à l'aide des opérations topologiques (figures 4.2 et 4.3) et de la relation d'ordre "$<$" entre les topologies de maillage. Plus précisément, ces optimisations locales consistent à remailler de petites cavités formées d'un groupe d'éléments voisins d'un nœud ou d'une arête avec l'objectif d'augmenter la qualité des éléments du maillage. Une description détaillée de la génération et de l'adaptation du maillage par une méthode d'optimisation topologique du maillage se trouve dans [64, 81].

4.10 Schéma d'adaptation

Comme nous l'avons dit précédemment, une approche incrémentale basée sur une formulation Lagrangienne réactualisée est utilisée. À chaque incrément i. Le schéma d'adaptation de maillage, que nous adoptons dans cette étude, consiste à créer le maillage pour l'incrément $i+1$ à partir du maillage actuel et de la solution éléments finis associée. En effet, à partir de l'estimateur d'erreur d'interpolation une carte discrète de métriques est définie sur les sommets du maillage (section 4.7). Ensuite, cette métrique est utilisée par le mailleur pour générer le maillage adapté (section 4.9). L'idée de ce schéma d'adaptation de maillage est de contrôler la génération d'un nouveau maillage de telle sorte que l'erreur estimée sur le maillage courant, à l'incrément i, soit uniformément répartie sur le maillage à l'incrément $i+1$.

Le schéma d'adaptation, que nous avons mis en place, s'écrit comme suit :

(i) calcul de la solution sur le maillage actuel ;

(ii) vérification du critère de remaillage. Si oui aller à (iii), sinon aller à (iv) ;

(iii) adaptation de maillage :
- évaluation de la matrice hessienne aux sommets du maillage (section 4.8),
- calcul d'un champ de métriques issu de la matrice hessienne (section 4.7) ;
- génération du nouveau maillage respectant le champ de métriques (mailleur MTC),
- transport des champs variables sur le nouveau maillage.

(iv) passage à l'incrément suivant.

4.11 Validations numériques

la validation de la stratégie d'adaptation de maillage pour le phénomène d'endommagement est effectuée sur des cas test où la solution analytique n'est pas connue. Le suivi simultané de l'évolution du maillage et de l'endommagement est utilisé pour juger de la pertinence de cette stratégie. Par exemple, le maillage s'adapterait-il automatiquement pour prendre en compte le phénomène de localisation de l'endommagement à la phase post critique et au moment de l'apparition de la rupture.

Ces validations portent aussi sur la méthode de régularisation (chapitre 3), en particulier, l'empêchement de l'apparition du phénomène de localisation franche avec le raffinement du maillage. Enfin, l'apport des enrichissements apportés au modèle d'endommagement de Lemaitre (chapitre 1) est mis en évidence sur un cas test de compression.

La métrique considérée dans les simulations ci-dessous est l'intersection des deux métriques, l'une obtenue à partir de la variable d'endommagement et l'autre à partir de la variable taux d'endommagement. D'une part, la métrique associée à la variable taux d'endommagement indique mieux les zones qui vont s'endommager, elle permet donc d'avoir un maillage raffiné dans ces zones. D'autre part, la métrique associée à la variable d'endommagement est utilisée pour garder un maillage suffisamment fin dans les zones endommagées.

4.11.1 Traction simple d'une éprouvette en 2D

On reprend le cas de traction simple 2D présenté précédemment. On considère une taille caractéristique $l_c = 0.06mm$. On impose à la plaque un déplacement vertical croissant. On

garde les mêmes paramètres matériaux utilisés au chapitre précédent.

On commence la simulation par un maillage triangulaire uniforme avec $h = 0.04mm$.

On fixe $h_{max} = 0.1mm$, $h_{min} = 0.005mm$ (le ratio maximum entre les arêtes d'un élément est $\frac{h_{max}}{h_{min}} = 20$), et l'erreur maximale tolérée $\epsilon = 1.10^{-3}$.

On suit simultanément l'évolution de l'endommagement et du maillage au cours de la simulation. Les figures (4.4, 4.5 et 4.6) représentent la carte des isovaleurs de l'endommagement et le maillage à différents stades de la simulation numérique. Sur chaque figure, on peut remarquer que le maillage et raffiné dans les zones fortement endommagées et déraffiné ailleurs.

Les figures (4.7, 4.8, 4.9, 4.10, 4.11 et 4.12) montrent l'évolution automatique du maillage au centre de l'éprouvette au cours de la simulation. On remarque que :

- initialement (avant le développement de l'endommagement dans cette zone) le maillage est uniforme (figure 4.7) ;
- ensuite le maillage se raffine dans cette zone et commence à former les bandes de cisaillement (figure 4.8) ;
- après, le maillage forme les bandes de cisaillement avec des éléments plus fins autour de ces bandes (figure 4.9) ;
- au voisinages des bandes, les éléments du maillage sont étirés dans la direction tangentielle (directions de faible gradient d'endommagement), et ils sont rétrécis dans la direction normale (directions d'évolution de l'endommagement) (voir figure 4.10, 4.11, 4.12) ;
- enfin, la rupture apparaît à l'intersection des deux bandes de cisaillement au centre de l'éprouvette (figure 4.12) ;

En résumé, le maillage suit automatiquement l'évolution de l'endommagement. Il est raffiné au voisinage des zones fortement endommagées, cela permet d'avoir une évaluation précise de la variable d'endommagement. Il n'est raffiné que dans les zones endommagées "zones utiles". De plus le raffinement est anisotrope, cela permet d'optimiser le coût de la simulation.

Dans cette simulation la taille de maille minimale a été fixée à $h_{min} = 0.005mm$, le nombre maximal de nœuds au cours de la simulation est égal à 3233 nœuds, alors qu'un maillage uniforme de la plaque avec cette taille de maillage contient environ 197759 nœuds.

La stratégie d'adaptation anisotrope de maillage au phénomène d'endommagement est automatique. Elle permet d'augmenter la précision pour la prédiction de l'endommagement avec un temps de calcul minimal.

L'utilisation simultanée de l'adaptation de maillage et de la méthode de régularisation non locale permet d'effectuer des simulations avec une taille de maille suffisamment petite. Ce qui est d'ailleurs nécessaire autour des zones de localisation de la déformation plastique et de l'endommagement. D'une part, l'adaptation de maillage permet de ne raffiner que ces zones et évite la croissance du coût de la simulation. D'autre part, la méthode de régularisation empêche l'apparition du phénomène de localisation franche et préserve la qualité prédictive du modèle.

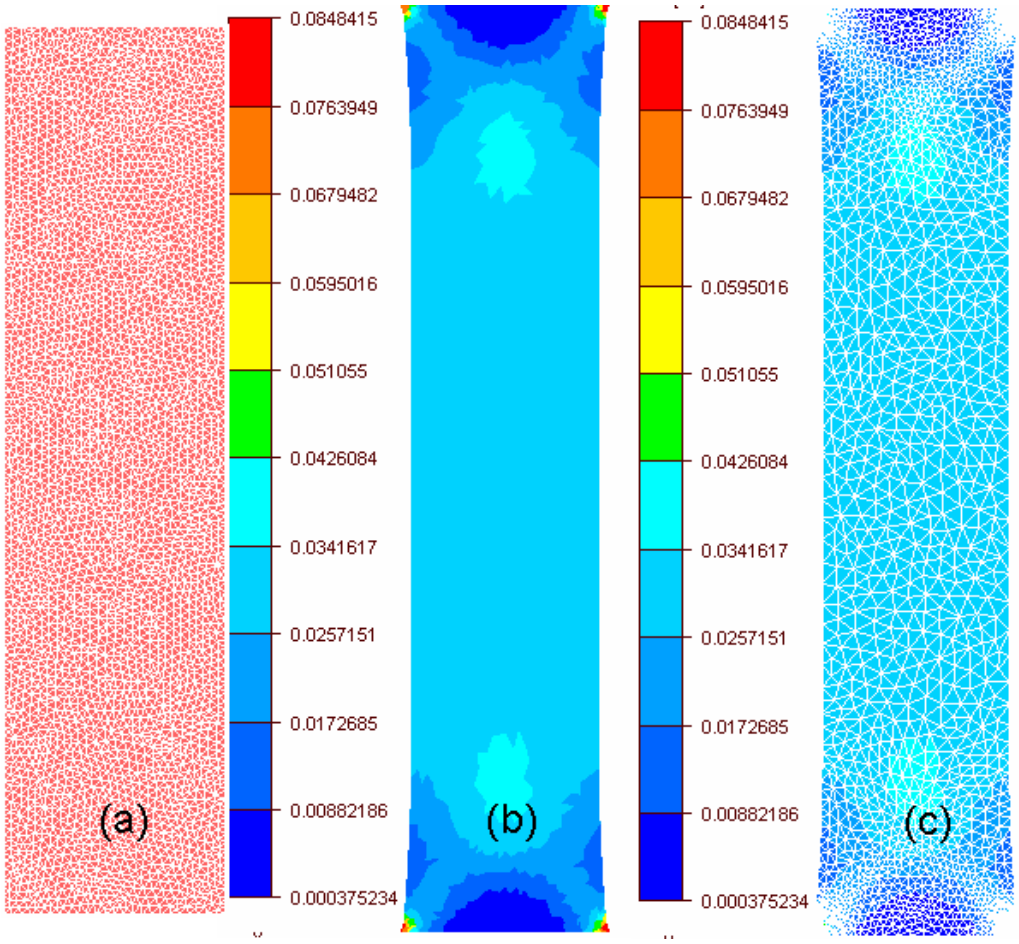


FIG. 4.4 – (a) le maillage initial, (b) la carte des isovaleurs de l'endommagement et (c) la carte des isovaleurs de l'endommagement et le maillage au milieu de la simulation.

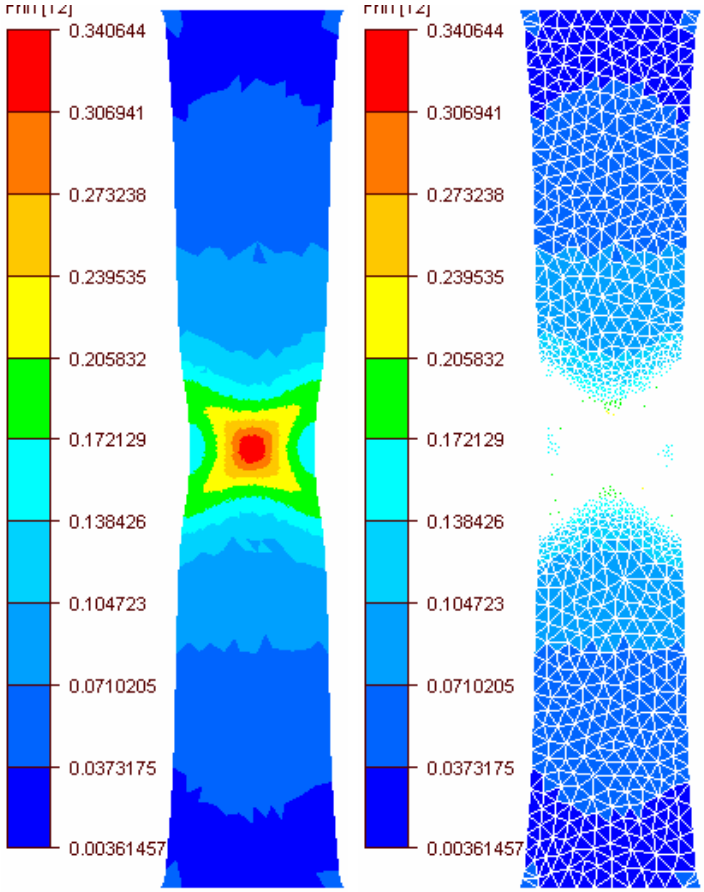


FIG. 4.5 – La carte des isovaleurs de l'endommagement ; la carte des isovaleurs de l'endommagement et le maillage anisotrope obtenu par un déplacement imposé $u = 0.84mm$.

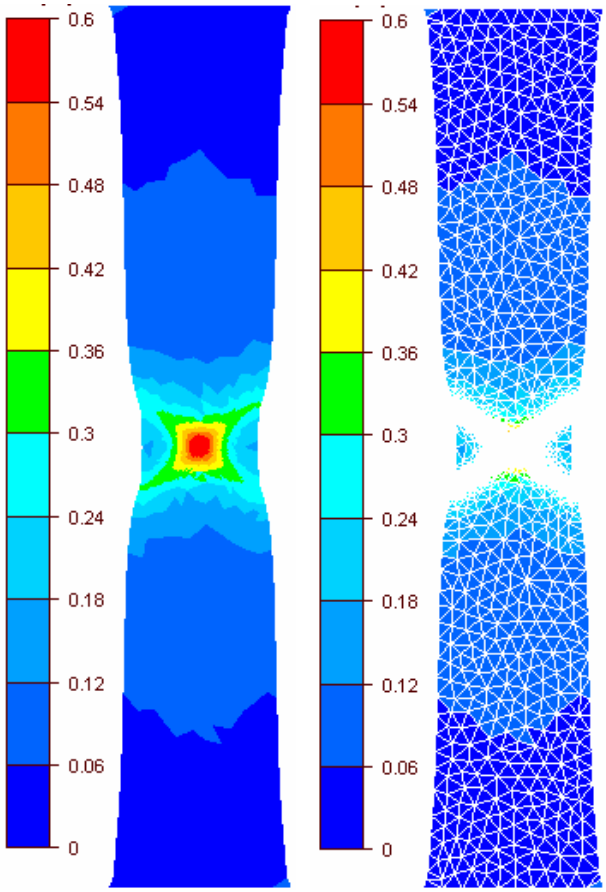


FIG. 4.6 – La carte des isovaleurs de l'endommagement ; la carte des isovaleurs de l'endommagement et le maillage anisotrope obtenu par un déplacement imposé $u = 0.868mm$.

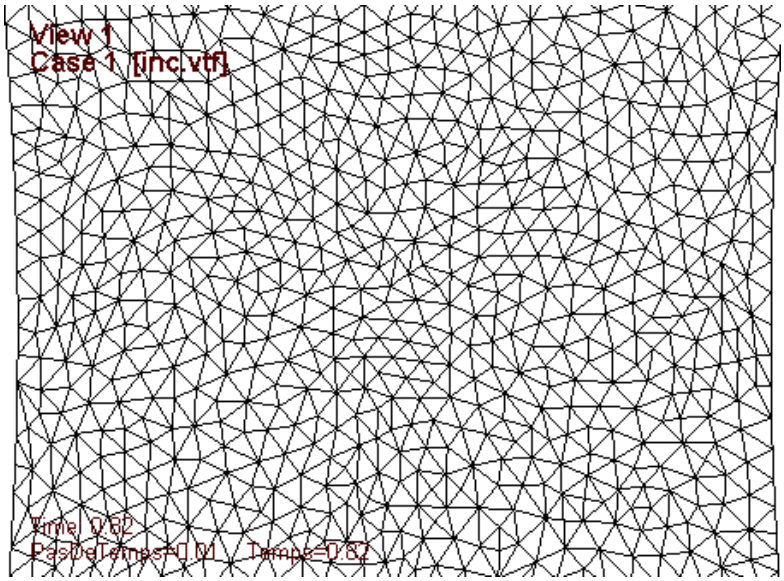


FIG. 4.7 – Zoom sur le maillage au centre de l'éprouvette à déplacement imposé $u = 0.82mm$

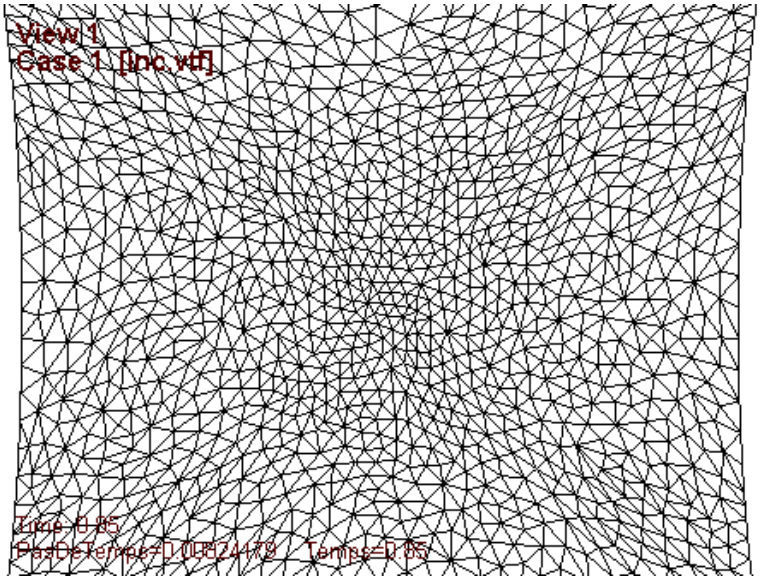


FIG. 4.8 – Zoom sur le maillage au centre de l'éprouvette à déplacement imposé $u = 0.85mm$

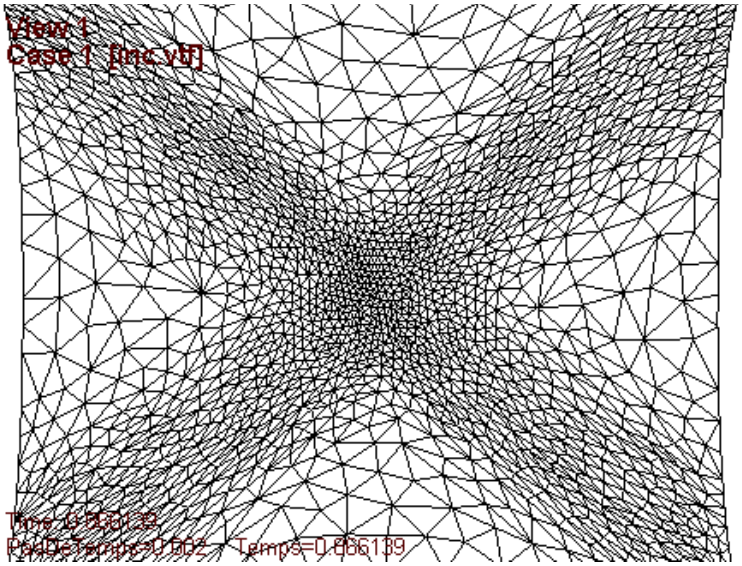


FIG. 4.9 – Zoom sur le maillage au centre de l'éprouvette à déplacement imposé $u = 0.866mm$

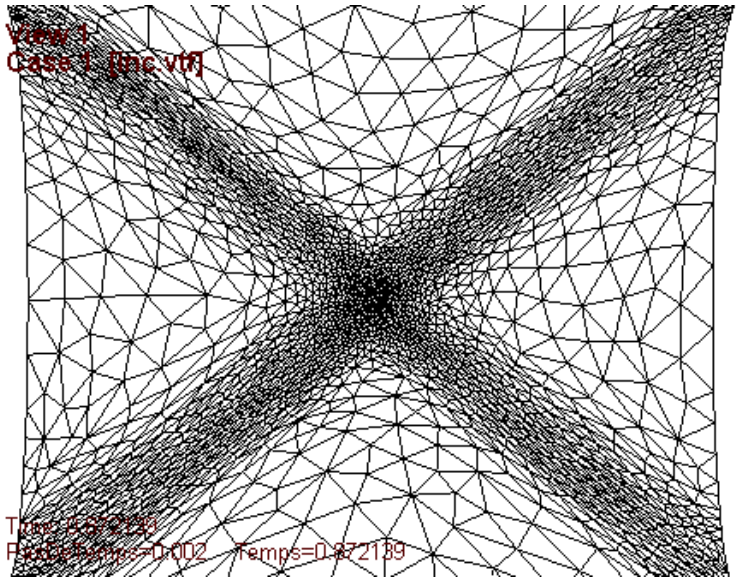


FIG. 4.10 – Zoom sur le maillage au centre de l'éprouvette à déplacement imposé $u = 0.872mm$

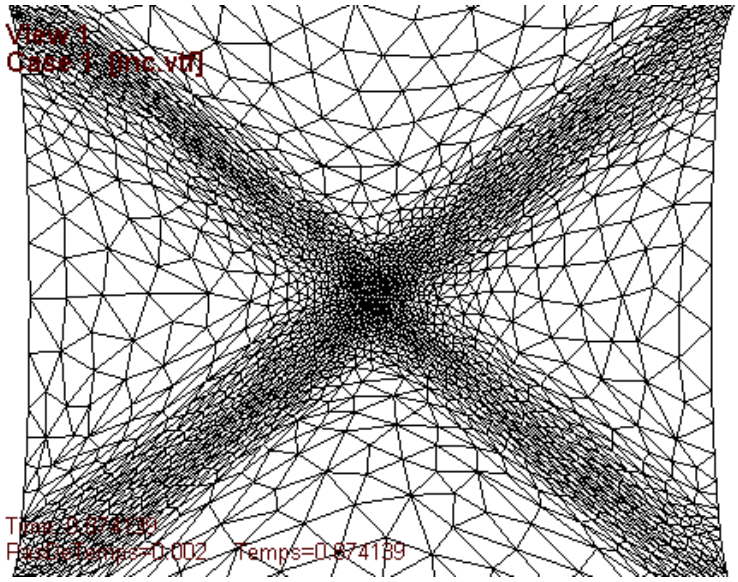


FIG. 4.11 – Zoom sur le maillage au centre de l'éprouvette à déplacement imposé $u = 0.874mm$

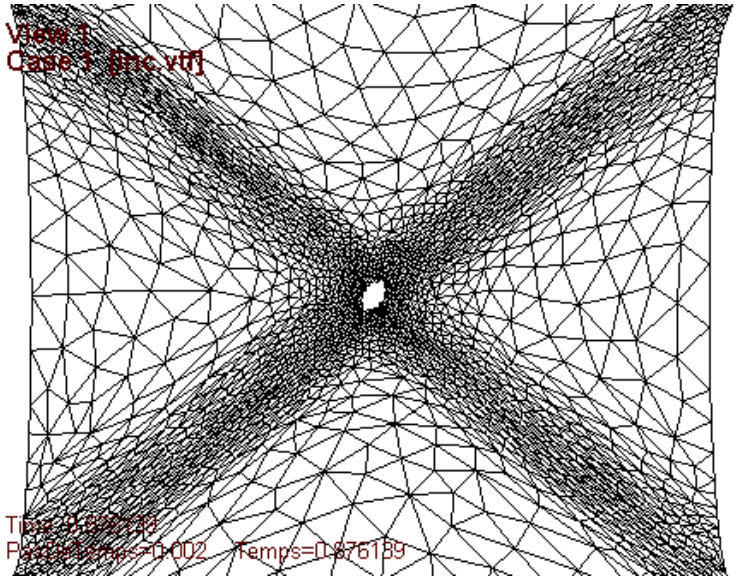


FIG. 4.12 – Zoom sur le maillage au centre de l'éprouvette à déplacement imposé $u = 0.876mm$

Afin de tester la robustesse et la qualité de prédiction de l'évolution de l'endommagement jusqu'à la rupture du modèle développé, nous effectuons la simulation jusqu'à la rupture complète de la plaque en utilisant la technique "kill element".

Les figures 4.12 et 4.13 montrent que la rupture apparaît au centre de l'éprouvette et progresse en direction inclinée. Ce mode de rupture est en parfait accord avec celui observé expérimentalement (figure 4.14).

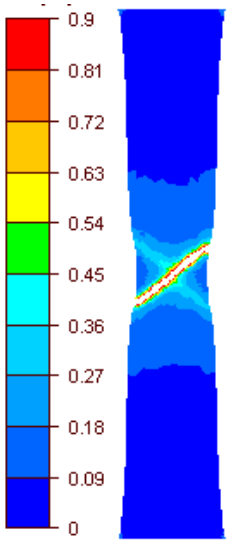


FIG. 4.13 – Mode de rupture d'une plaque plane et la carte des isovaleurs de l'endommagement

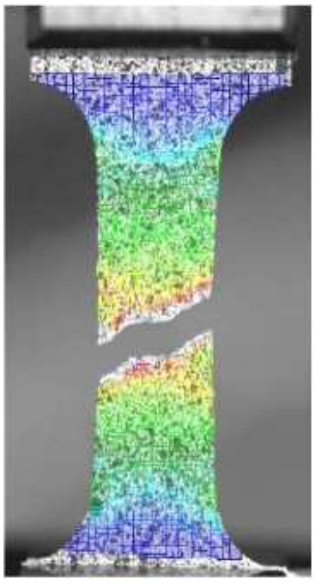


FIG. 4.14 – Mode de rupture d'une éprouvette mince en alliage d'aluminium [82]

4.11.2 Traction uni-axiale d'une éprouvette cylindrique entaillée

L'essai de traction uni-axiale d'une éprouvette cylindrique entaillée est largement utilisé expérimentalement pour étudier la rupture ductile des matériaux. Cet essai permet également de calibrer les paramètres des modèles d'endommagement couplés en fonction de la triaxialité des contraintes. En effet, le rayon de l'entaille permet de faire varier ce paramètre qui joue un rôle important sur l'endommagement ductile.

Dans cet essai, une éprouvette cylindrique entaillée est soumise à un déplacement vertical croissant (avec bords latéraux libres). La géométrie de l'éprouvette, les conditions aux limites et la discrétisation éléments finis adoptées sont présentées sur la figure 4.15.

Les configurations axisymétriques ne sont pas gérées par la version actuelle de la *CimLib*. On considère donc une modélisation 3D sur un huitième du lopin (figure 4.15). Des conditions aux limites appropriées sont imposées sur les plans de symétries.

Le domaine est discrétisé en tétraèdres. Le maillage initial comporte 7054 nœuds, on fixe $h_{max} = 1.5mm$, $h_{min} = 0.15mm$ (le ratio maximum entre les arêtes d'un élément est $\frac{h_{max}}{h_{min}} = 10$), et l'erreur maximale tolérée $\epsilon = 2.10^{-3}$.

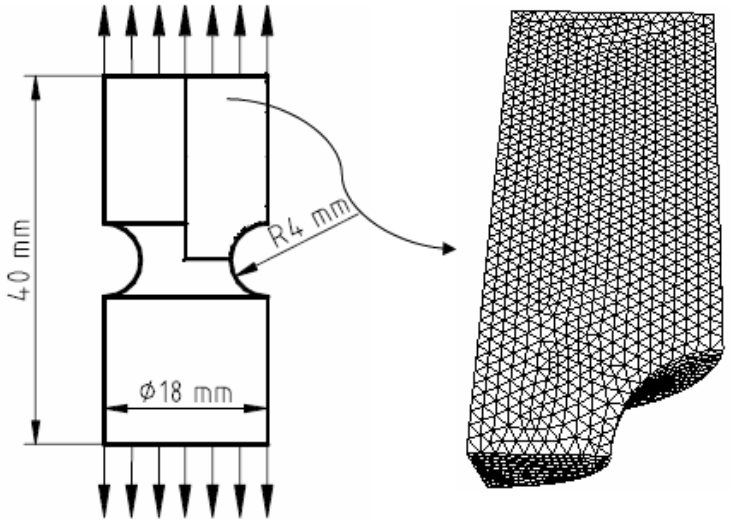


FIG. 4.15 – Géométrie (mm), conditions aux limites et discrétisation éléments finis

L'éprouvette est constituée d'un alliage d'aluminium avec les paramètres matériaux présentés dans le tableau suivant :

Description	Symbole	Valeur
Masse volumique	ρ	$2700 kg/m^3$
Module d'élasticité	E	$69004\, MPa$
Coefficient de Poisson	ν	0.3
Écrouissage isotrope	$\sigma_0(r)$	$589(10^{-4}+r)^{0.216}\, MPa$
Endommagement critique à rupture	w_c	0.95
Seuil de déformation	$\overline{\varepsilon}_d$	0
Paramètre d'endommagement (exposant)	b	1
Paramètre d'endommagement (dénominateur)	S_0	$1.25\, MPa$
Longueur caractéristique	l_c	$0.05\, mm$
Paramètre de fermeture des fissures	h	1

TAB. 4.1 – Propriétés matériau pour un alliage d'aluminium [27].

L'évolution de l'endommagement dans le lopin est représentée sur la figure 4.16. On peut remarquer sur cette figure qu'au premier stade (déplacement imposé, $u = 0.2mm$), l'endommagement est maximum au niveau de la surface de la zone entaillée. Ensuite, la zone la plus endommagée se déplace progressivement vers le centre de l'éprouvette avec la croissance du déplacement imposé. Vers la fin de la simulation (déplacement imposé, $u = 0.6mm$) l'endommagement se localise au centre de l'éprouvette. La simulation numérique prédit donc l'amorçage de rupture au centre de l'éprouvette, ce qui est en accord avec les observations expérimentales [83].

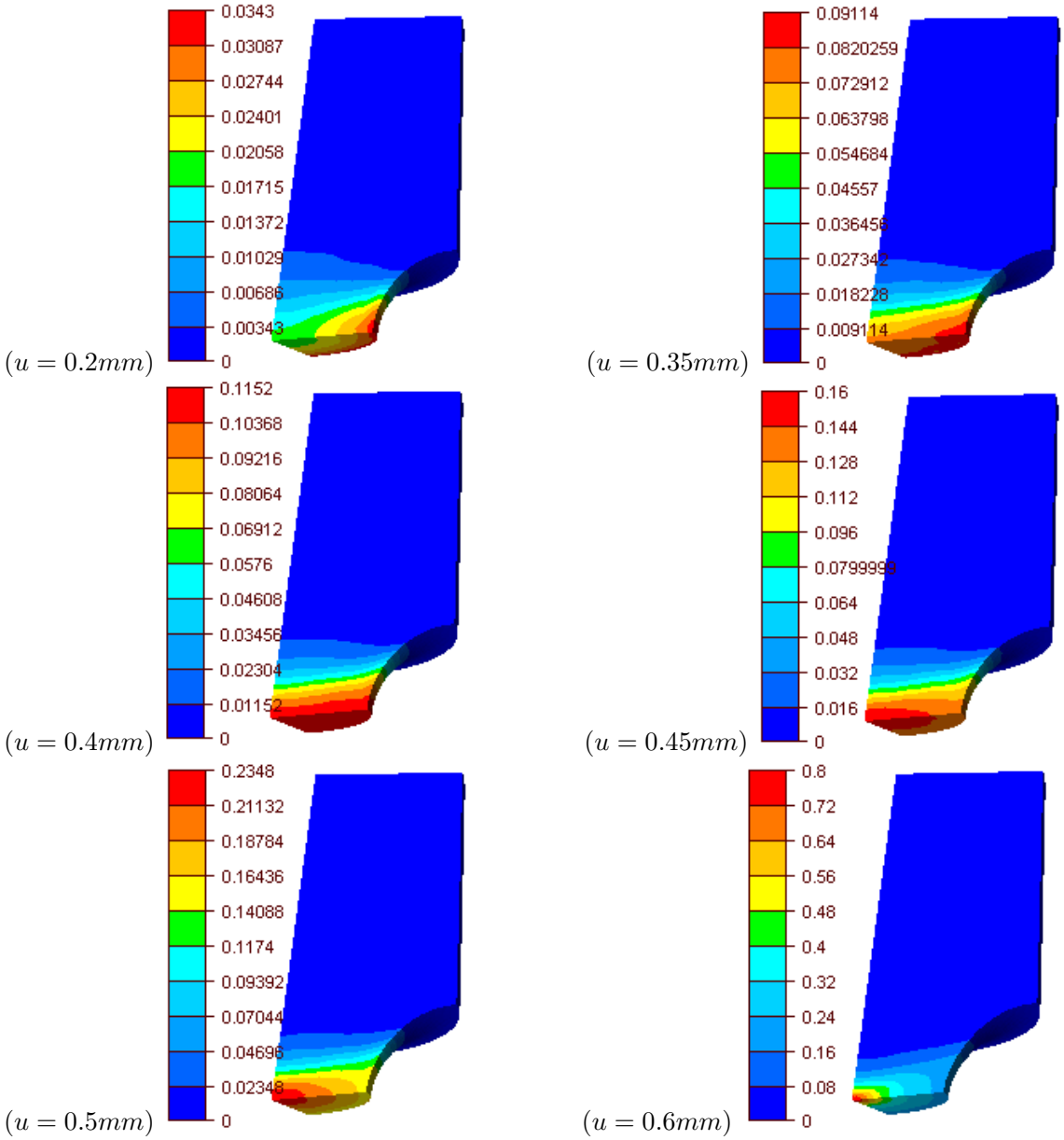


FIG. 4.16 – La carte des isovaleurs de l'endommagement pour plusieurs niveaux de déplacement imposé.

L'évolution du maillage au cours de la simulation est illustrée sur la figure 4.17. On peut remarquer que :

- le maillage est raffiné dans la zone entaillée, c'est à dire la zone endommagée, et est déraffiné ailleurs. De plus, les éléments sont plus étirés dans le sens de faible gradient d'endommagement (direction horizontale) ;
- le maillage est plus raffiné dans les zones de fortes variations de l'endommagement. En effet, à déplacement imposé ($u = 0.2mm$) le maillage est plus fin vers la surface de l'entaille, et vers la fin (déplacement imposé $u = 0.6mm$) les éléments les plus fins se trouvent au voisinage du centre ;
- la zone raffinée devient de plus en plus petite avec le phénomène de localisation de l'endommagement.

En résumé, comme le cas précédent 2D, nous avons une adaptation anisotrope automatique de maillage au phénomène d'endommagement pour ce cas 3D. Pour les mêmes raisons qu'en 2D, notre stratégie d'adaptation de maillage permet donc d'augmenter la précision pour la prédiction de l'endommagement avec un temps de calcul minimal pour des configurations tridimensionnelles.

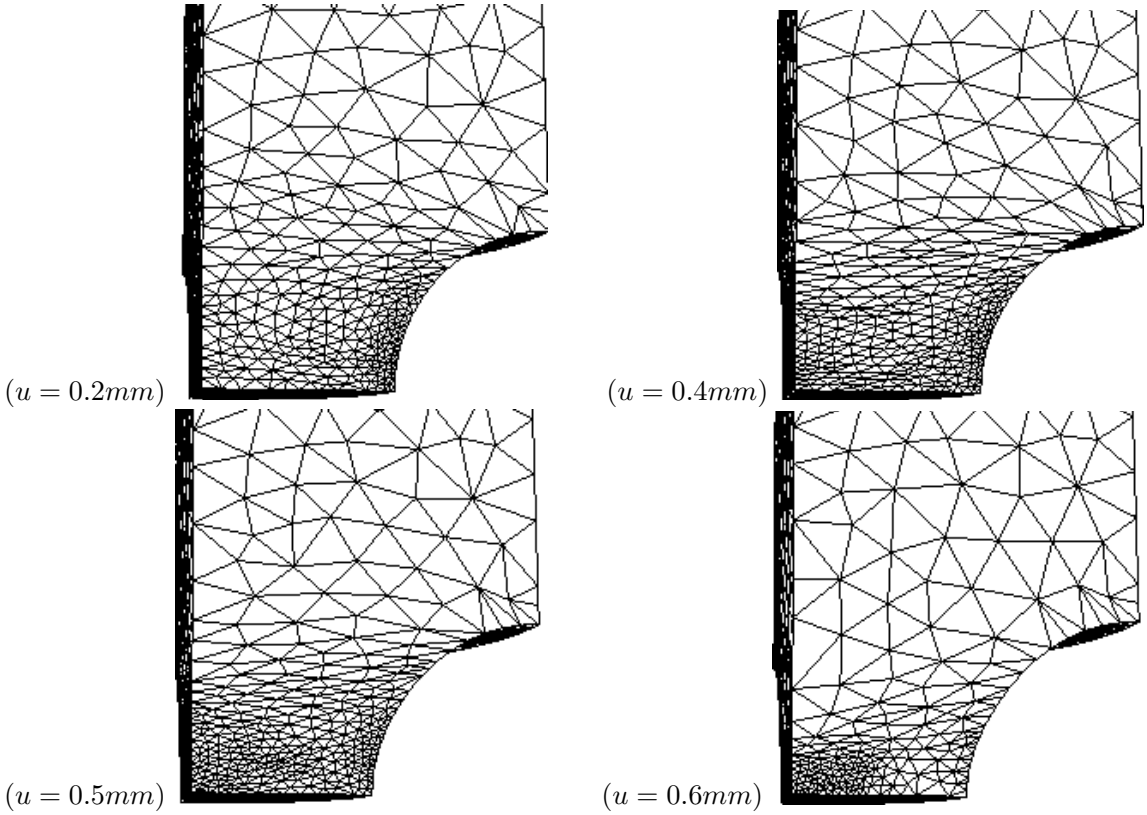


FIG. 4.17 – évolution du maillage au cours de la simulation.

Comme pour le cas 2D, on teste la robustesse et la qualité de prédiction de l'évolution de l'endommagement jusqu'à la rupture par la simulation jusqu'à la rupture du lopin.

Vers la fin de la simulation et lors de l'apparition de la fissure au centre du lopin, les symétries considérées précédemment (figure 4.15) ne sont plus valables, on considère donc un quart du lopin (figure 4.18).

Le domaine est discrétisé en tétraèdres. Le maillage initial comporte 5026 nœuds, on fixe $h_{max} = 1.5mm$, $h_{min} = 0.15mm$ (le ratio maximum entre les arêtes d'un élément est $\frac{h_{max}}{h_{min}} = 10$), et l'erreur maximale tolérée $\epsilon = 2.10^{-3}$.

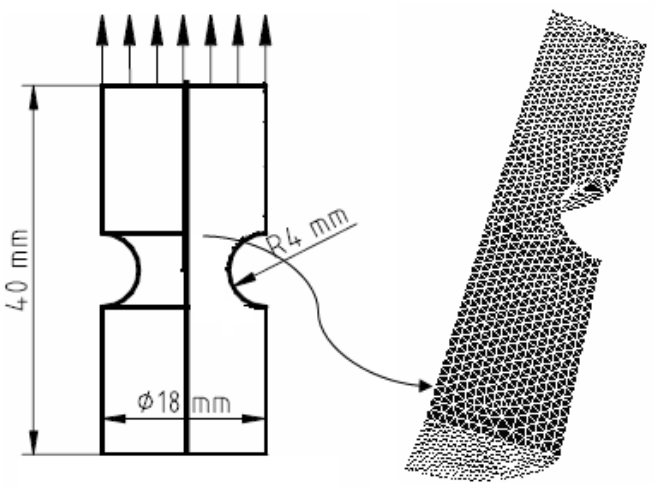


FIG. 4.18 – Géométrie (mm), conditions aux limites et discrétisation éléments finis.

Les figures (4.19, 4.20 et 4.21) présentent l'évolution de l'endommagement et du maillage au cours de la simulation. À l'instar de la simulation sur un huitième du lopin, l'adaptation automatique et anisotrope du maillage au phénomène d'endommagement est clairement illustrée sur ces figures. De plus, ces figures montrent bien la capacité de notre stratégie d'adaptation du maillage à anticiper le raffinement anisotrope local dans les zones concernées par l'évolution de l'endommagement. Cela permet, en particulier, d'avoir une propagation de la rupture que dans des zones où le maillage est raffiné (figures 4.20 et 4.21).

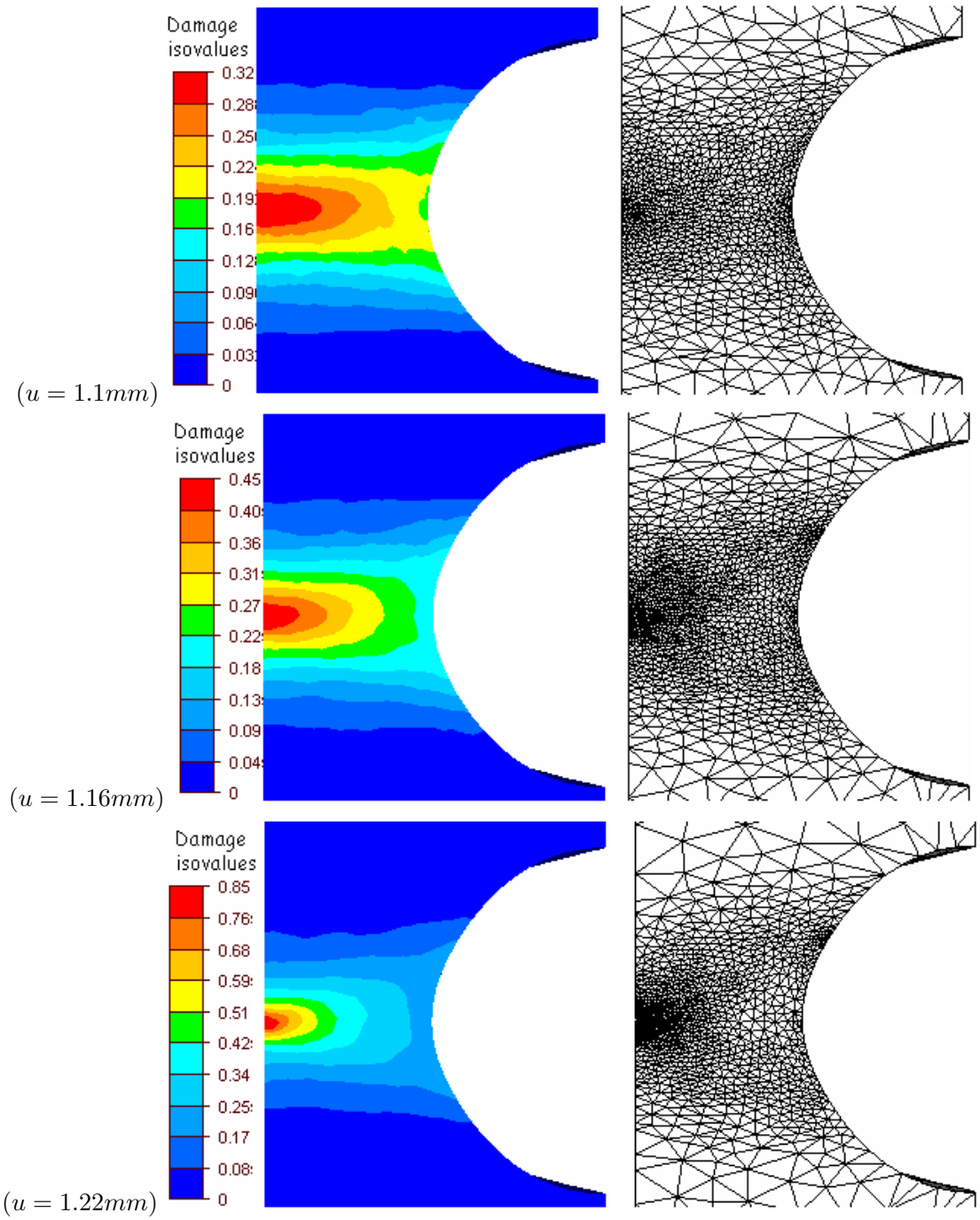


FIG. 4.19 – La carte des isovaleurs de l'endommagement et le maillage pour plusieurs niveaux de déplacement imposé.

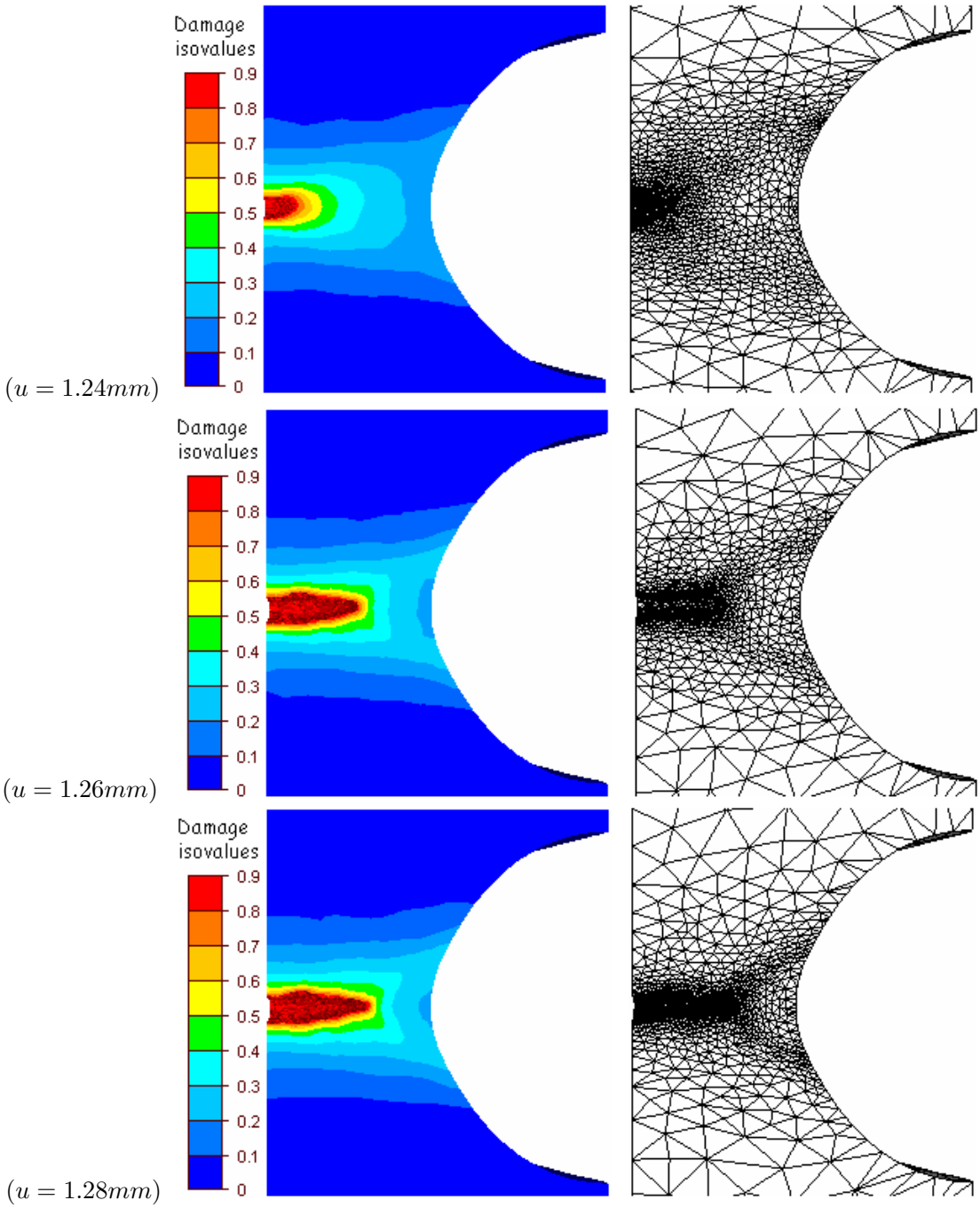


FIG. 4.20 – La carte des isovaleurs de l'endommagement et le maillage pour plusieurs niveaux de déplacement imposé.

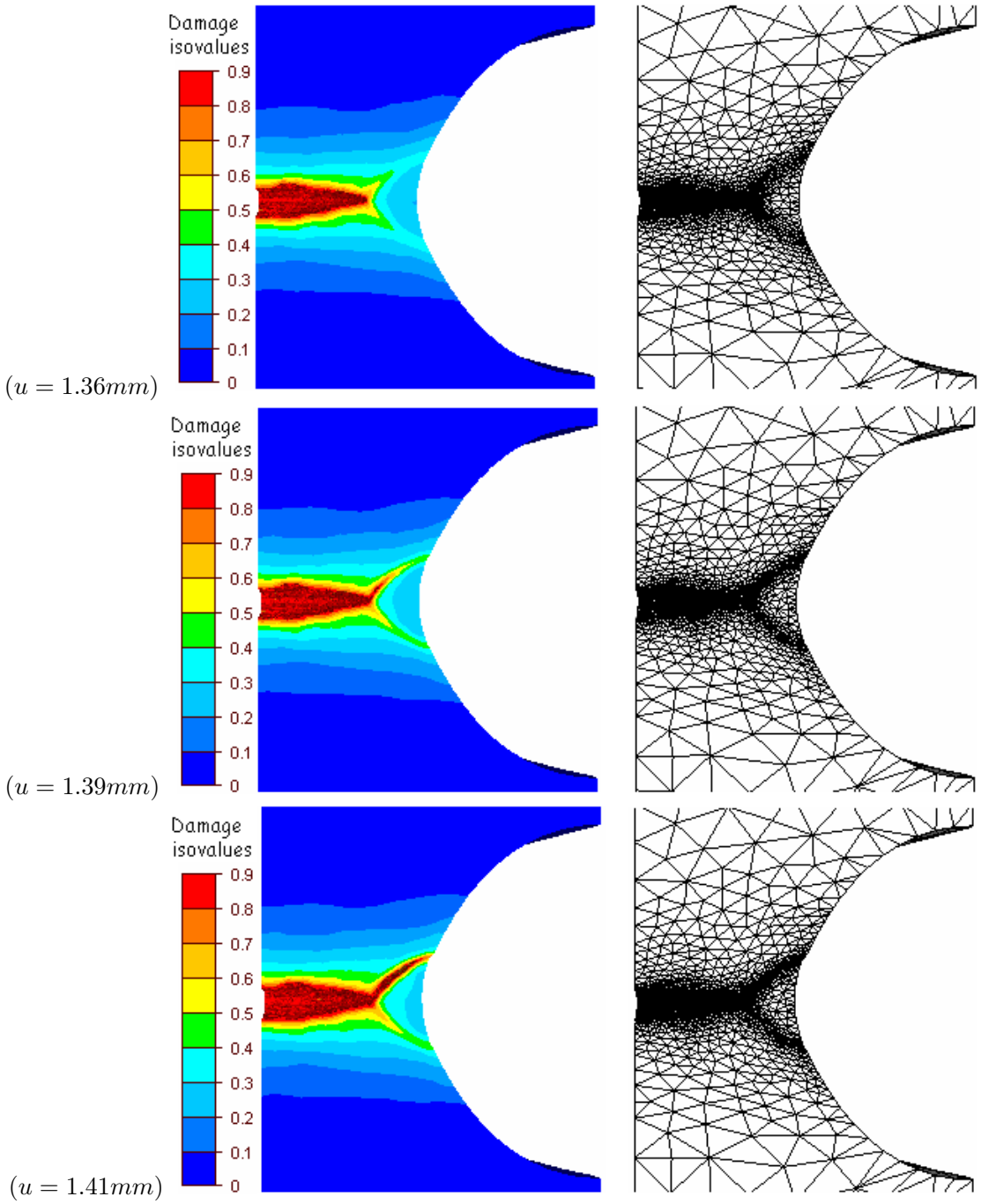


FIG. 4.21 – La carte des isovaleurs de l'endommagement et le maillage pour plusieurs niveaux de déplacement imposé.

La figure 4.22 montre qu'on obtient une rupture en mode "cup-and-cone". La forme de cette rupture correspond bien aux observations expérimentales (figure 4.23).

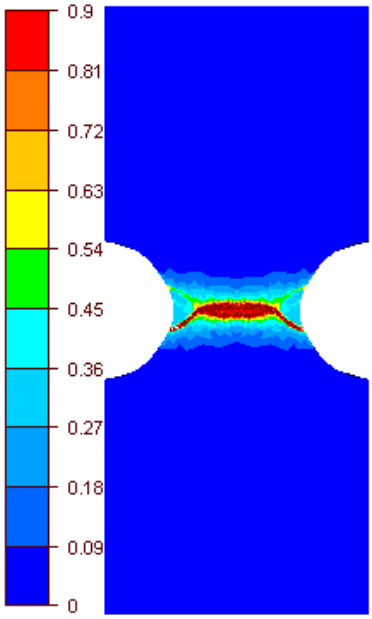


FIG. 4.22 – Mode de rupture d'un lopin entaillé et carte des isovaleurs de l'endommagement avec adaptation du maillage.

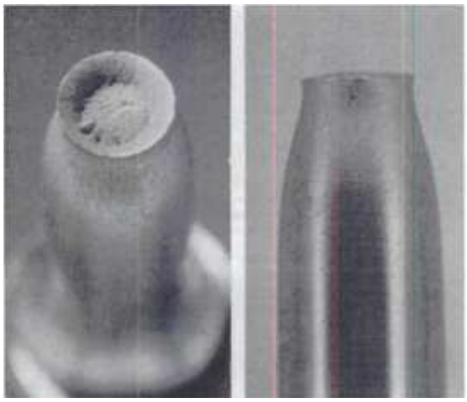


FIG. 4.23 – Photo d'une rupture en "cup-and-cone" par une éprouvette cylindrique en aluminium [84]

Nous effectuons la même simulation avec un maillage adapté a priori. Le maillage est raffiné dans la zone entaillée et déraffiné ailleurs (figure 4.24). Lors du remaillage au cours de la simulation on garde la même taille de maille dans le domaine. La figure (figure 4.25) montre la forme de la rupture ainsi obtenue.

Contrairement à une simulation avec le schéma d'adaptation que nous avons développé, le mode rupture en forme "cup-and-cone" n'est pas reproduit.

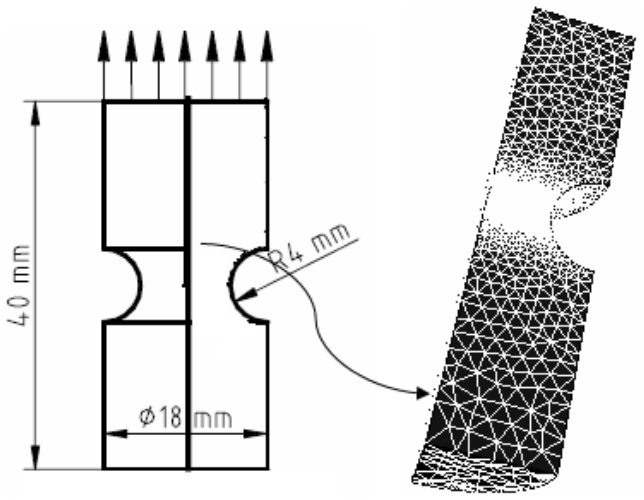


FIG. 4.24 – Géométrie (mm), conditions aux limites et maillage (11784 nœuds).

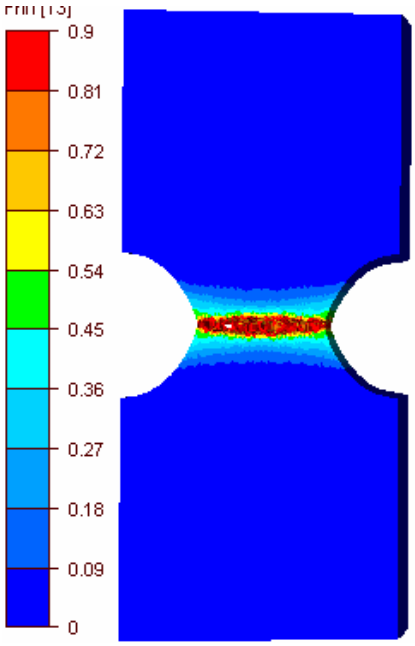


FIG. 4.25 – Mode de rupture d'un lopin entaillé et carte des isovaleurs de l'endommagement sans adaptation du maillage.

4.11.3 Écrasement d'un lopin en tonneau

L'écrasement d'un lopin, en forme de tonneau, est l'un des cas test les plus utilisés pour étudier la mise en forme des matériaux par des procédés de compression (forgeage, matriçage, ...). Ce cas permet de reproduire l'état de contrainte/déformation observé dans ces types de procédés.

Ce cas test présente des résultats intéressants concernant la zone d'amorçage de la rupture. En général, l'amorçage de la rupture se produit sur la surface externe du lopin, au niveau de la hauteur moyenne. *Andrade et al.* [27] ont montré, par exemple, que le modèle d'endommagement de Lemaitre standard prédit une évolution importante de l'endommagement au centre du lopin. Ceci est en désaccord avec les observations expérimentales. En effet, *Gouveia et al.* [85] ont constaté que l'apparition de la fissure se situe sur la collerette au niveau de la hauteur moyenne.

Dans notre cas, ce cas test est utilisé, d'une part, pour montrer que le modèle d'endommagement de Lemaitre présenté au chapitre 1 permet une prédiction précise de l'évolution de l'endommagement et de la zone d'apparition de la rupture pour ce type de configurations. D'autre part, pour illustrer l'adaptation anisotrope de maillage au phénomène d'endommagement sur ce cas $3D$.

Nous effectuons une simulation en $3D$ sur un quart du lopin. La géométrie, les conditions aux limites et la discrétisation éléments finis sont présentés sur la figure 4.26.

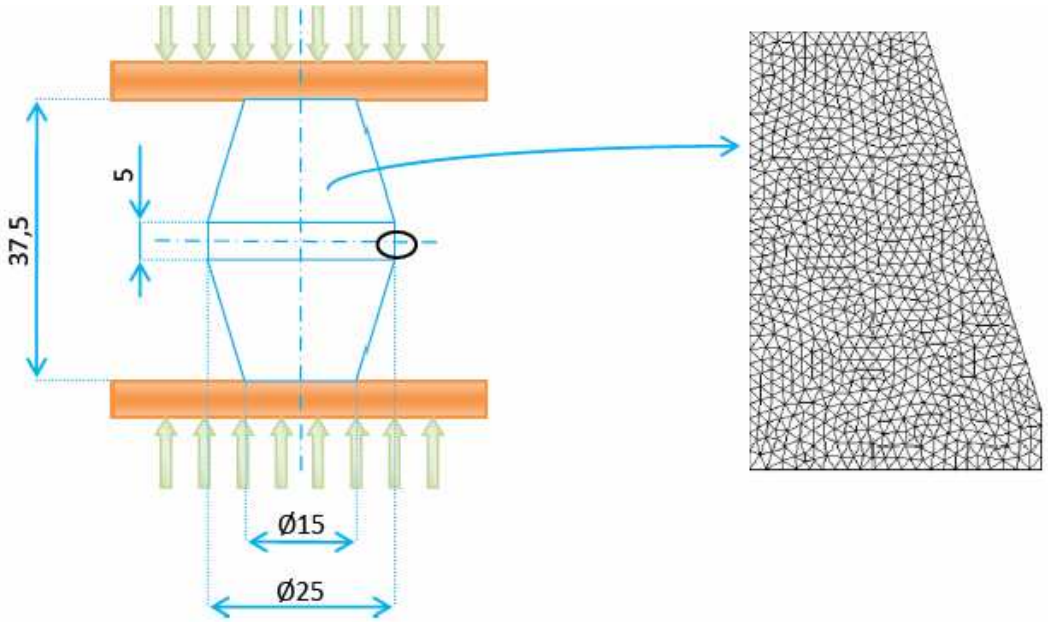


FIG. 4.26 – Géométrie (mm) et conditions aux limites [14]

Le lopin est discrétisé en tétraèdres. Le maillage initial contient 7092 nœuds, on fixe

$h_{max} = 1.5mm$, $h_{min} = 0.1mm$ (le ratio maximum entre les arêtes d'un élément est $\frac{h_{max}}{h_{min}} = 15$), et l'erreur maximale tolérée $\epsilon = 1.10^{-2}$.

On impose au lopin un déplacement vertical jusqu'à la réduction de 65% de sa hauteur totale. La valeur du paramètre de fermeture de fissures en compression est fixée à $h = 0.02$. Le lopin est constitué de plomb UNS L52905 avec les paramètres matériaux présentés dans le tableau suivant :

Description	Symbole	Valeur
Masse volumique	ρ	$11340kg/m^3$
Module d'élasticité	E	$18000\,MPa$
Coefficient de Poisson	ν	0.4
Écrouissage isotrope	$\sigma_0(r)$	$66.66(0.0133 + r)^{0.10158}\,MPa$
Endommagement critique à rupture	w_c	1
Seuil de déformation	$\overline{\varepsilon}_d$	0
Paramètre d'endommagement (exposant)	b	1
Paramètre d'endommagement (dénominateur)	S_0	$1.5\,MPa$
Longueur caractéristique	l_c	$0.05\,mm$

TAB. 4.2 – Propriétés matériau pour un alliage de plomb UNS L52905 [14].

Les figures 4.27, 4.28 et 4.30 présentent les isovaleurs de l'endommagement à des niveaux différents de l'écrasement de l'éprouvette. La zone qui se situe en dessous du poinçon est en forte compression et le taux de triaxialité des contraintes est inférieur à la limite fixée au premier chapitre ($-1/3$). Cela explique le fait que l'endommagement n'évolue pas dans cette zone.

Pour un niveau bien avancé d'écrasement du lopin, l'endommagement est concentré au niveau du bombé, et les résultats sont bien conformes à ceux de la littérature [27, 85].

Une adaptation anisotrope de maillage au phénomène d'endommagement est bien illustrée au cours de la simulation. Le maillage est raffiné dans les zones de forte variation de l'endommagement et est déraffiné ailleurs. De plus, les éléments sont étirés dans les directions de faible gradient d'endommagement.

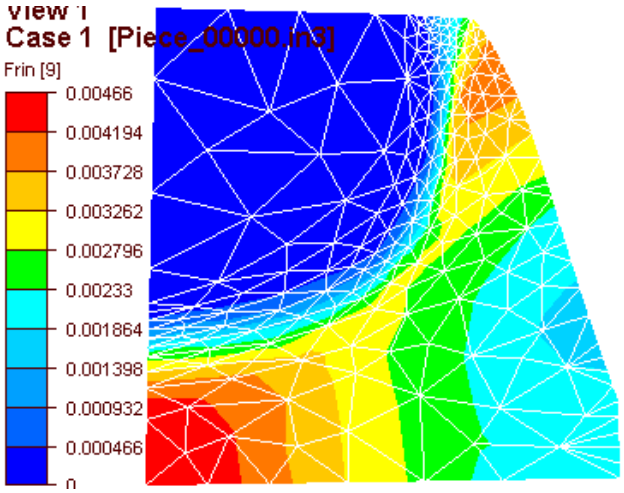


FIG. 4.27 – Carte des isovaleurs de l'endommagement à 25.6% de réduction de la hauteur de l'éprouvette.

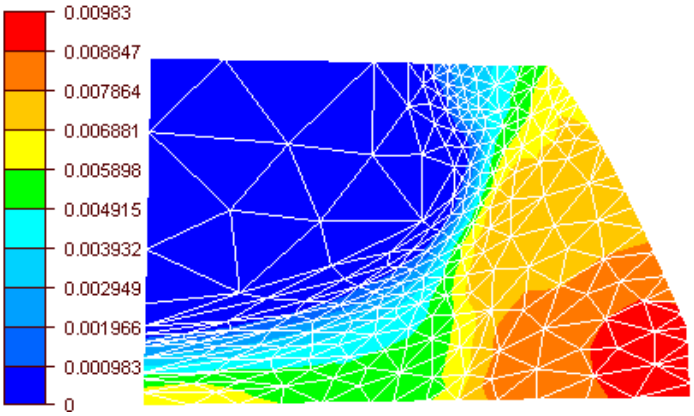


FIG. 4.28 – Carte des isovaleurs de l'endommagement à 47% de réduction de la hauteur de l'éprouvette.

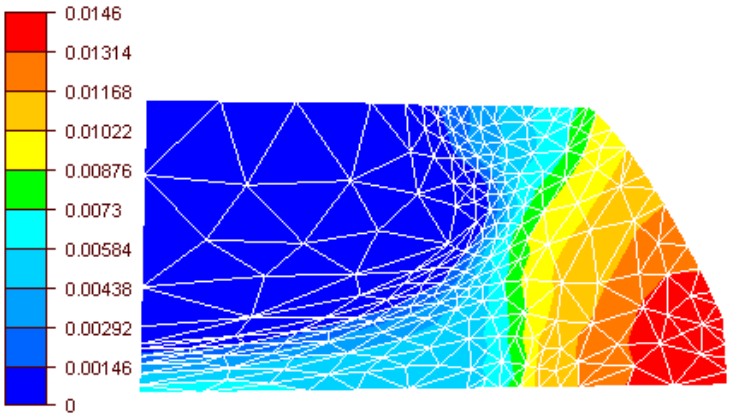


FIG. 4.29 – Carte des isovaleurs de l'endommagement à 55.46% de réduction de la hauteur de l'éprouvette.

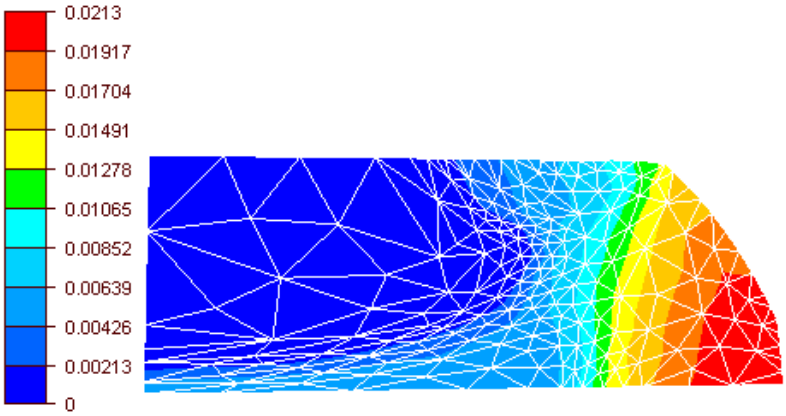


FIG. 4.30 – Carte des isovaleurs de l'endommagement à 64% de réduction de la hauteur de l'éprouvette.

Remarques :

- Les maillages obtenus par la stratégie d'adaptation avec l'estimateur d'erreur d'interpolation montrent l'efficacité de ce dernier à fournir une bonne indication des zones de fortes variations de l'endommagement. Cela conduit à un raffinement automatique autour de la zone de localisation de l'endommagement et de la déformation plastique. Il en résulte une réduction notable des degrés de libertés, donc une diminution du temps de calcul de la simulation et une amélioration de la précision de la variable d'endommagement.

- L'apport de l'adaptation anisotrope de maillage pour la simulation jusqu'à la rupture de la structure permet de garantir une meilleure prédictibilité de l'évolution de l'endommagement et de la forme de rupture.

- L'adaptation du maillage au phénomène d'endommagement permet une meilleure prédiction de l'évolution de l'endommagement dans la structure. Mais, elle peut conduire à la génération d'éléments de taille très petite, notamment à cause du fort gradient d'endommagement créé par le phénomène de localisation. L'utilisation du modèle d'endommagement non local (éventuellement une autre méthode de régularisation), est nécessaire pour éviter l'apparition prématurée de la rupture à cause du phénomène d'adoucissement que nous avons évoqué au chapitre 3.

4.12 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons développé un schéma d'adaptation anisotrope de maillage au phénomène d'endommagement. Nous avons décrit les deux étapes principales de cette adaptation, à savoir : la construction d'une métrique à partir de l'erreur d'interpolation et de la matrice hessienne et la génération d'un maillage adapté suivant un champ de métrique anisotrope.

La métrique considérée est l'intersection de deux métriques : l'une obtenue à partir de la variable d'endommagement et l'autre à partir de la variable taux d'endommagement. D'une part, la métrique associée à la variable taux d'endommagement indique mieux les zones qui vont s'endommager, elle permet donc d'avoir un maillage raffiné dans ces zones. D'autre part, la métrique associée à la variable d'endommagement est utilisée pour garder un maillage suffisamment fin dans les zones endommagées.

La génération du maillage anisotrope adapté est effectuée par le mailleur *MTC*. L'adaptation de maillage dans ce logiciel s'effectue par l'introduction d'un critère de taille et de forme de mailles à partir de la métrique prescrite. Ensuite, il procède à des améliorations locales progressives du maillage courant jusqu'à l'obtention d'un maillage conforme à cette métrique.

La validation de notre stratégie d'adaptation a été effectuée sur des configurations 2D et 3D. Elle a permis d'illustrer l'efficacité de cette stratégie à optimiser le maillage vis-à-vis du phénomène de l'endommagement. En effet, nous avons montré que cette stratégie d'adaptation anisotrope de maillage permet de détecter automatiquement les zones critiques vis-à-vis de l'endommagement dans le matériau. Elle conduit à un maillage adapté, raffiné dans les zones présentant de fortes variations d'endommagement et déraffiné ailleurs. De plus, les éléments de maillage sont étirés dans la direction de faibles gradients d'endommagement et sont rétrécis dans les directions de variations importantes.

En conclusion, l'adaptation anisotrope de maillage, basée sur l'erreur d'interpolation, améliore le rapport précision/coût de notre modèle de prédiction de l'endommagement.

Chapitre 5

Méthodes multigrilles

Sommaire

5.1 Introduction 119
5.2 Motivations 120
5.3 Méthodes multigrilles 120
5.3.1 Méthodes multigrilles algébriques 121
5.3.2 Méthodes multigrilles géométriques 122
5.4 Algorithme multigrille 129
5.4.1 Algorithme bigrille 129
5.4.2 Algorithme multigrille 130
5.4.3 Cycle multigrille 131
5.5 Préconditionnement MG 132
5.6 Validations numériques 133
5.7 Conclusion 138

5.1 Introduction

Dans le cadre de la prédiction de l'endommagement jusqu'à la rupture de la structure, la réduction du problème étudié par symétrie n'est pas souvent appropriée, car la croissance et la localisation de l'endommagement peuvent mettre en cause certaines symétries de ce problème (comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent sur la simulation jusqu'à la rupture d'une éprouvette cylindrique entaillée).

De plus, le raffinement du maillage, afin d'améliorer la précision de l'approximation EF, ne conduit pas seulement à la croissance de la taille du problème mais aussi à l'augmentation du coût de calcul, en particulier, celui de l'inversion des systèmes linéaires. En effet, l'approximation par la méthode des éléments finis des EDP mène à des matrices dont le conditionnement croît comme le carré de l'inverse du pas de la discrétisation lorsque l'on raffine le maillage [86].

Par conséquent, on peut se retrouver avec un grand système linéaire mal conditionné à inverser. L'utilisation des méthodes itératives monogrilles pour cette inversion peut conduire à une augmentation importante du nombre d'itérations. Il s'en suit une croissance du temps cpu nécessaire pour cette inversion.

Les méthodes multigrilles présentent une alternative intéressante pour ce type de problème. Elles ont un taux de convergence asymptotique en $o(n)$ où n est le nombre de degrés de liberté. Cette performance vient du fait que le nombre d'itérations nécessaires à l'inversion du système est indépendant de la taille de ce dernier.

Dans ce chapitre, on se propose de mettre en œuvre un préconditionneur multigrille géométrique. Ce préconditionneur permettra une résolution efficace des grands systèmes linéaires issus d'une discrétisation éléments finis d'une EDP sur un domaine Ω.

On rappelle tout d'abord les motivations des méthodes multigrilles. Ensuite, on s'intéresse aux aspects techniques de ces méthodes qui sont divisées en partie construction et partie résolution. Dans la troisième partie de ce chapitre, on rappelle brièvement les techniques de construction pour les méthodes multigrilles algébriques (AMG), puis, on développe notre méthode de génération d'une hiérarchie de maillages non structurés nécessaire pour les méthodes multigrilles géométriques (GMG). Dans la quatrième partie, on donne l'algorithme bigrille et son extension à un algorithme multigrille. La dernière section est consacrée à l'évaluation des performances du préconditionneur développé.

5.2 Motivations

Soit un grand système mal conditionné, obtenu à partir d'une discrétisation éléments finis d'une EDP définie sur un domaine Ω.

$$Ax = b \tag{5.1}$$

où A est une matrice inversible de $\mathbb{R}^{n\times n}$ et $b \in \mathbb{R}^n$

Les méthodes de résolution de ce système se regroupent en deux classes :

- les méthodes directes basées sur une factorisation de la matrice A (élimination de Gauss, Cholesky, décomposition LU etc). Ces méthodes ont l'avantage d'être précises et stables numériquement, mais leur complexité, en terme de coût de calcul et d'espace mémoire, restreint leur usage à des systèmes de petite taille ;

- les méthodes itératives monogrilles basées sur une approximation successive de la solution de ce système linéaire. On distingue les méthodes itératives de relaxation (Jacobi, Gauss-Seidel, SOR, ...), et les méthodes qui reposent sur une projection sur l'espace de Krylov $K_k(A, r_0) = Vect(r_0, Ar_0, ..., A^k r_0)$ où r_0 est un vecteur donné. On trouve aussi des méthodes itératives multiniveaux ou multigrilles.

L'approximation par la méthode des éléments finis des EDP conduit à des matrices dont le conditionnement croît comme le carré de l'inverse du pas de discrétisation lorsque l'on raffine le maillage. Cela conduit à une augmentation du nombre d'itérations avec les algorithmes monogrilles. Il s'en suit une croissance du temps cpu nécessaire pour l'inversion de ces matrices.

Pour pallier à ce problème plusieurs techniques de préconditionnement ont été développées. Parmi ces techniques, le préconditionneur diagonal, le préconditionnement SOR (Successive Over-Relaxation), le préconditionnement ILU(k) basé sur une factorisation incomplète LU, le préconditionnement basé sur une factorisation de Cholesky incomplète, ou encore le préconditionneur Jacobi par bloc ....

Ces techniques consistent à résoudre un système équivalant au système initial avec une matrice mieux conditionnée. Malheureusement, l'efficacité de ces techniques pour les systèmes de très grande taille reste limitée.

En résumé, le raffinement du maillage peut conduire à un grand système linéaire mal conditionné et son inversion avec un algorithme monogrille de relaxation ou de type Krylov peut amener à un temps de calcul inacceptable pour l'inversion de ce système. D'où l'idée de se servir d'un maillage (ou de plusieurs maillages) moins fin pour accélérer l'inversion de ce système. Cette approche s'appelle méthode multigrille.

5.3 Méthodes multigrilles

La particularité des méthodes multigrilles réside dans l'emploi, comme leur nom l'indique, de plusieurs niveaux de calcul afin d'accélérer l'inversion d'un système linéaire sur le niveau le plus fin. Leur construction est basée sur l'observation suivante : de simples méthodes itératives comme Jacobi ou Gauss-Seidel réduisent rapidement les hautes fréquences de l'erreur alors

que les composantes de basse fréquence sont amorties très lentement. Mais, ces fréquences peuvent être réduites plus rapidement par le même type de méthode sur un niveau réduit.

La mise en œuvre des méthodes multigrilles contient deux phases indépendantes :

- une phase de construction qui consiste à créer a priori une hiérarchie de niveaux de grilles. En fonction de la méthode d'obtention de ces différents niveaux, on distingue deux familles de méthodes multigrilles : une approche géométrique basée sur une hiérarchie de maillages (GMG), et une approche algébrique basée sur l'analyse matricielle (AMG). Après avoir construit la hiérarchie de niveaux, on construit les opérateurs de prolongement et de restriction qui permettent le passage intergrilles et les matrices associées aux différents niveaux considérés. Nous revenons plus en détail sur cette étape, dans les sous-sections de ce chapitre 5.3.1 pour les AMG et 5.3.2 pour les GMG.

- une phase de résolution qui consiste à mettre en place un algorithme itératif pour la résolution du système sur le niveau fin. Cet algorithme utilise les sous-problèmes définis sur les différents niveaux grossiers. Généralement, on effectue au niveau le plus fin un nombre faible d'itérations par un algorithme itératif, appelé "lisseur". Puis, le problème résiduel est reformulé sur un niveau plus grossier par restriction, on lisse à nouveau avant de restreindre le problème résiduel sur un niveau plus grossier, et ainsi de suite, jusqu'au niveau le plus grossier où on effectue une résolution du problème résiduel obtenu. On procède, ensuite, à des opérations prolongement pour transférer la correction obtenue au niveau le plus grossier sur le niveau le plus fin. Des opérations de post lissage sont généralement utilisées pour éliminer les imprécisions de la correction sur les niveaux les plus grossiers. Nous revenons sur cette étape, qui est identique pour les GMG et les AMG, dans la quatrième section de ce chapitre.

Avant de donner l'algorithme de résolution effectif du système linéaire, on s'intéresse d'abord à la phase de construction avec les deux approches AMG et GMG.

5.3.1 Méthodes multigrilles algébriques

Les méthodes AMG consistent à construire automatiquement une série de systèmes de taille décroissante. Cette construction est basée sur la réduction d'un système linéaire à partir de la matrice de ce système. Plus précisément, à partir des coefficients de la matrice, on déduit les degrés de dépendance entre les composantes de l'erreur après quelques itérations. Cette erreur correspond aux vecteurs propres de la matrice du système avec de petites valeurs propres associées. En d'autres termes, le lissage permet de réduire rapidement les hautes fréquences de l'erreur lorsque l'on décompose celle-ci dans la base des vecteurs propres de la matrice du système, les autres modes sont éliminés sur des grilles plus grossières.

Déraffinement algébrique

Tout d'abord, on construit le graphe pondéré associé à la matrice du système : si a_{ij} est non nul avec j différent de i, le nœud i est connecté au nœud j par une arête de poids $|a_{ij}|$. Puis, on définit un critère qui permet de déterminer l'ensemble des nœuds, noté S_i, fortement connectés à un nœud donné i. Cet ensemble peut être défini par [87] :

$$S_i = \{j \text{ telle que } |a_{ij}| \geq \varepsilon \max_{k \neq l} a_{kl}|.\} \tag{5.2}$$

où $\varepsilon \in]0,1[$ est un paramètre à ajuster.

Ensuite, on détermine un ensemble de nœuds C qui vont représenter les variables au niveau grossier. Les nœuds restants sont regroupés dans un autre ensemble noté F.

L'idée de déraffinement est de construire un ensemble maximal de nœuds C tel que deux nœuds de cet ensemble ne soient pas fortement connectés entre eux.

Le déraffinement est effectué par un procédé itératif ; à chaque nœud du graphe est affecté un poids qui mesure le nombre de voisins fortement connectés. Le nœud de plus grand poids est placé dans l'ensemble C et ses voisins dans l'ensemble F. Ce nœud et ses voisins sont éliminés du graphe et le poids des nœuds restants est réévalué. On applique ce procédé de manière itérative jusqu'à ce que tous les nœuds soient répartis.

Opérateurs de transfert

Une fois le déraffinement réalisé, on peut définir l'opérateur de prolongement P. Pour cela, on introduit pour chaque nœud i de F un ensemble C_i qui contient des nœuds de C voisins de i. Différentes techniques peuvent être, ensuite, employées pour la détermination des coefficients d'interpolation [88, 89]. On peut, par exemple, définir le prolongement d'un vecteur e comme suit :

$$(Pe)_i = \begin{cases} e_i \text{ si } i \in C \\ \displaystyle\sum_{j \in C_i} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \text{ si } i \in F \end{cases} \tag{5.3}$$

L'opérateur de restriction R est obtenu par la transposée de l'opérateur de prolongement P. C'est-à-dire :

$$R = {}^tP \tag{5.4}$$

Enfin, la matrice au niveau grossier, notée A_H, est définie par la relation de Galerkin :

$$A_H = {}^tP A_h P \tag{5.5}$$

où A_h est la matrice associée au niveau fin.

Le principal avantage des méthodes AMG réside dans le fait d'éviter les éventuelles complexités géométriques des problèmes traités. On évite notamment la reconstruction d'un maillage pour chaque niveau de grille. Cependant, la théorie de convergence des méthodes AMG est basée sur des arguments heuristiques et est limitée à la classe dite M-matrices. Ce qui limite leur utilisation.

5.3.2 Méthodes multigrilles géométriques

Les méthodes GMG consistent à utiliser une hiérarchie de maillages décroissante pour accélérer la résolution d'un problème sur un maillage fin. Des matrices associées au même

problème sur le maillage fin sont construites pour chaque maillage, et les opérateurs intergrilles sont construits à partir des considérations géométriques.

Déraffinement du maillage

La mise en œuvre de la méthode GMG nécessite la génération d'une hiérarchie de maillages par déraffinement successif d'un maillage initial fin. Les maillages grossiers à générer doivent respecter la géométrie du domaine. Ce problème peut être considéré comme une génération de maillage contrôlée par une métrique. La question devient alors : comment peut-on déterminer un champ de métriques permettant le déraffinement du maillage ?

Le principe de génération de maillages à l'aide d'un champ de métriques consiste à créer un maillage dont les éléments sont équilatéraux dans ce champ de métrique et dont la longueur de chaque arête est égale à 1 [90]. À partir de ce principe, on peut définir un champ de métriques associé à un maillage donné.

Métrique associée à un simplexe

Soit K un élément du maillage, la métrique $\mathcal{M}(K)$ associée à l'élément K est la métrique par laquelle l'élément K est équilatéral et dont la longueur des arêtes vérifie :

$$(l_{\mathcal{M}(K)}(e))^2 = 1 \text{ pour toutes les arêtes } e \text{ de } K \tag{5.6}$$

Cette condition fournit un système de trois équations linéaires en 2D (six en 3D) dont les inconnues sont les coefficients de la métrique $\mathcal{M}(K)$.

La solution de ce système linéaire est donnée par le résultat suivant : la métrique $\mathcal{M}(K)$ vérifiant la condition (5.6) est donnée par l'expression suivante :

$$\mathcal{M}(K) = C. \left(\sum_{i,j=1_{i<j}}^{d+1} x_{ij}{}^t x_{ij} \right)^{-1} \tag{5.7}$$

où x_{ij} est le vecteur reliant les sommets i et j. C'est-à-dire : $x_{ij} = x_i - x_j$ de l'élément K, et $C = (d+1)/2$.

On renvoie le lecteur à [91] pour une démonstration de ce résultat.

L'adaptation de maillage à l'aide d'un champ de métriques nécessite que ce champ soit défini aux nœuds du maillage. Reste donc à définir un champ de métriques nodal. Pour cela, nous effectuons une interpolation des métriques définies par élément.

Interpolation de métriques éléments aux nœuds

Le champ de métriques aux nœuds, nécessaire à l'adaptation du maillage, est obtenue par interpolation des métriques associées aux éléments en faisant une moyenne. Soit Ω_S l'ensemble des éléments ayant le sommet S en commun. On définit une métrique au sommet S par :

$$\mathcal{M}(S) = \frac{1}{card(\Omega_S)} \sum_{K \in \Omega_S} \mathcal{M}(K) \tag{5.8}$$

Métrique de déraffinement

La métrique naturelle associée au maillage courant ayant été obtenue, il s'agit maintenant de construire à partir de cette métrique un maillage déraffiné de la même géométrie. Pour cela on modifie la métrique naturelle, puis, on construit un maillage conforme à la métrique modifiée.

Une méthode simple consiste à modifier la métrique de la manière suivante : à chaque nœud i, le nouveau maillage de la zone autour de ce nœud i doit être déraffiné de manière uniforme dans toutes les directions. De plus, on veut que la taille des mailles soit le double de la taille des mailles actuelles. La métrique modifiée est alors définie comme étant la métrique qui a les mêmes vecteurs propres que la métrique calculée mais des valeurs propres 4 fois plus petites (nous avons vu au chapitre 4 que les valeurs propres sont le carré des inverses des longueurs des mailles).

Cette stratégie de déraffinement de maillage est uniforme. Il existe des techniques de déraffinement anisotrope de maillage qui permettent de ne déraffiner le maillage que dans les directions perpendiculaires au plus grand étirement des éléments. Ces techniques sont basées sur la diagonalisation de la métrique dans son repère principal. Ensuite, le coefficient de déraffinement est donné suivant la taille de maille dans chaque direction [91].

En résumé, le procédé de déraffinement s'effectue en exécutant successivement les étapes suivantes :

- construction d'un champ de métriques naturelles associé aux éléments du maillage à déraffiner. C'est-à-dire le champ de métriques pour lequel les éléments sont équilatéraux avec des longueurs d'arêtes égales à 1 ;
- interpolation de ce champ de métriques aux nœuds ;
- modification de ce champ de métriques pour obtenir la métrique qui servira au déraffinement du maillage. Généralement, on multiplie la taille de maille par deux dans chaque direction de l'espace ;
- adaptation du maillage à ce nouveau champ de métriques.

Dans une simulation, où l'adaptation de maillage est effectuée à l'aide d'une métrique (par exemple une métrique calculée à partir d'une estimation de l'erreur, chapitre 4), les maillages déraffinés s'obtiennent directement par modification de cette métrique. Ceci permet d'éviter le calcul de la métrique naturelle et de l'interpoler aux nœuds.

Comme pour l'adaptation de maillage (Chapitre 4), le générateur de maillage MTC est utilisé pour le déraffinement du maillage. Il permet donc de générer un maillage déraffiné conforme à un champ de métriques prescrit.

Le mailleur MTC permet d'adapter le maillage sans créer de nouveaux nœuds. Cela peut servir à créer une hiérarchie de maillages emboîtés nœuds. Nous avons cependant préféré ne pas activer cette option pour avoir des maillages déraffinés de meilleure qualité.

On définit le facteur de déraffinement, noté C_R par :

$$C_R = \frac{\text{Nombre de nœuds du maillage fin}}{\text{Nombre de nœuds du maillage grossier}} \tag{5.9}$$

Le tableau 1 montre le temps cpu [1] et le coefficient de réduction du nombre de nœuds lors de la construction d'une hiérarchie de maillages déraffinés successivement. Cette séquence de maillages a été obtenue par trois appels de l'algorithme de déraffinement.

Maillages	Nombre de nœuds	Facteur de déraffinement	Temps cpu(s) de déraffinement
Maillage initial	199796		36.4
Premier maillage déraffiné	50728	3.94	9
Deuxième maillage déraffiné	13163	3,85	2
Troisième maillage déraffiné	3440	3.82	

TAB. 5.1 – Déraffinement de maillage en 2D : nombre de nœuds, facteur de déraffinement et temps cpu de déraffinement.

Les figures (5.1, 5.2, 5.3 et 5.4) montrent une hiérarchie de maillages déraffinés successivement.

[1] Les caractéristiques de la machine utilisée : Pentium(R) 4 ; bicœur 3.4GHz ; 2G0 de RAM

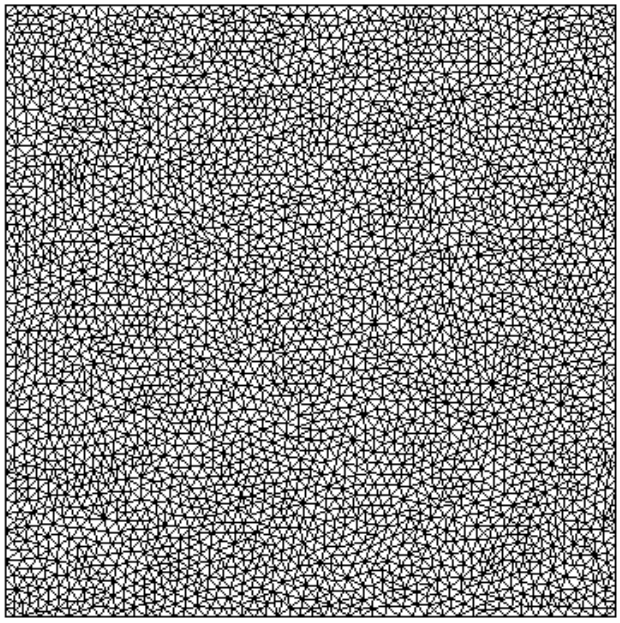


FIG. 5.1 – Maillage du carré unité avec 3442 nœuds.

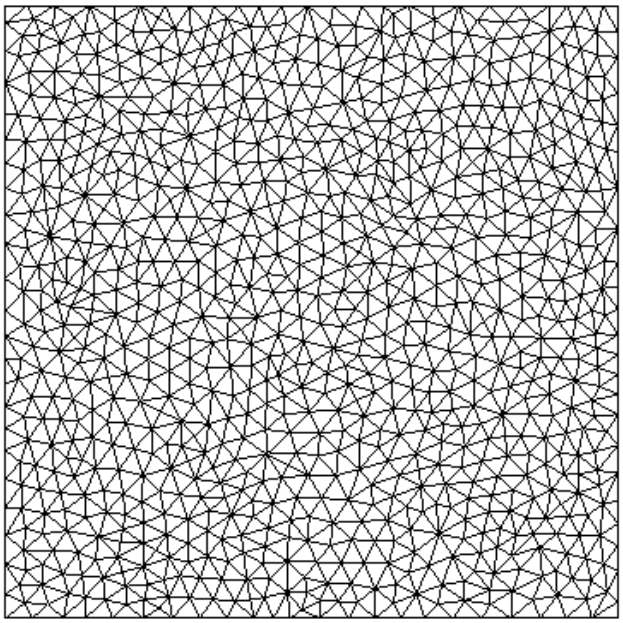


FIG. 5.2 – Maillage du carré unité avec 911 nœuds.

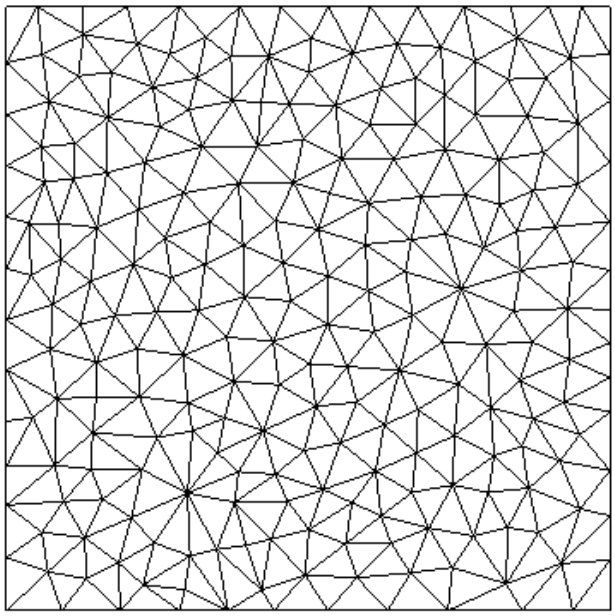


FIG. 5.3 – Maillage du carré unité avec 240 nœuds.

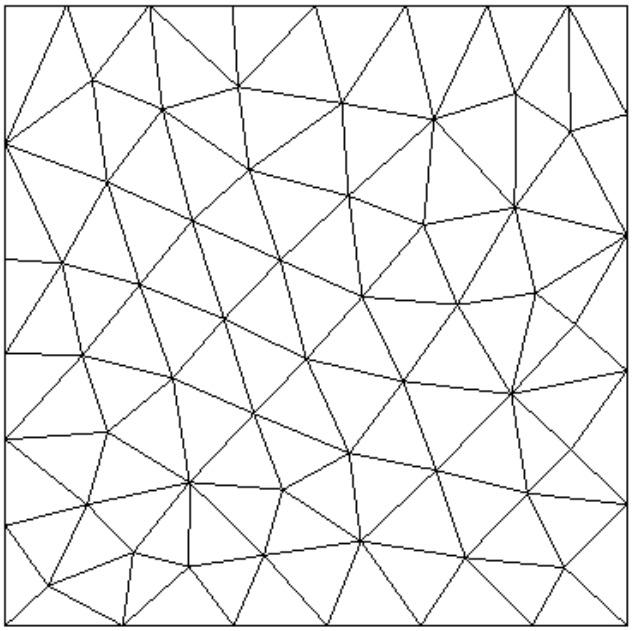


FIG. 5.4 – Maillage du carré unité avec 67 nœuds.

Opérateurs de transfert

L'opérateur de prolongement P est défini par interpolation linéaire des nœuds du maillage fin dans les éléments du maillage grossier. La figure 5.5 décrit cette interpolation en 2D.

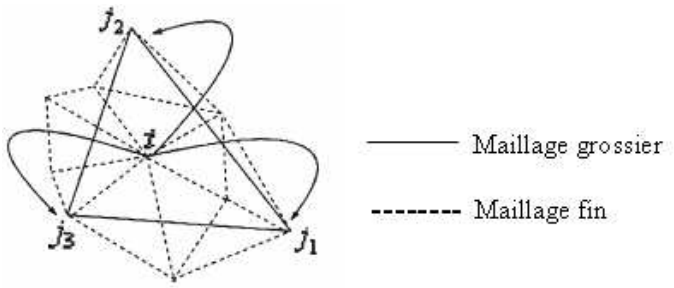


FIG. 5.5 – Élément (J_1, J_2, J_3) du maillage grossier pour l'interpolation au nœud I du maillage fin [92].

Pour chaque nœud i du maillage fin, on cherche le tétraèdre (j_1, j_2, j_3, j_4) (triangle en $2D$) du maillage grossier qui contient ce nœud. Ensuite, on définit la $i^{ième}$ ligne de la matrice de prolongement à partir des coordonnées barycentriques $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ du nœud i dans cet élément. On obtient donc la définition suivante :

$$P_{ij} = \begin{cases} \alpha_k \text{ si } j = j_k \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \tag{5.10}$$

La matrice de restriction R est généralement obtenue par la transposée de la matrice de prolongement. C'est-à-dire :

$$R_{ij} = P_{ji} \tag{5.11}$$

Ces deux matrices de transfert sont creuses, elles ont au plus quatre coefficients non nuls par lignes.

Construction des matrices associées aux maillages déraffinés

La construction de la matrice associée à un maillage déraffiné, noté A_H, peut être effectuée : soit à partir de la discrétisation éléments finis de L'EDP considérée sur ce maillage déraffiné, soit par un "procédé de Galerkin", comme dans le cas des méthodes AMG. Dans ce dernier cas, cette matrice est obtenue par : $A_H = \mathcal{R}_h^H A_h \mathcal{P}_H^h$. Où $\mathcal{R}_h^H, \mathcal{P}_H^h$ sont les opérateurs de restriction et de prolongement entre le maillage fin et le maillage grossier et où A_h est la matrice associée au maillage fin.

5.4 Algorithme multigrille

Le principe de l'algorithme multigrille est d'effectuer la résolution d'un grand système linéaire à l'aide d'une suite de systèmes de taille décroissante pour accélérer la convergence. Le rôle des sous systèmes est de propager l'information rapidement à travers le domaine de calcul, alors que les imprécisions locales de la correction du niveau grossier sont éliminées sur le niveau fin.

La définition de cet algorithme itératif est donnée sur deux niveaux. Ensuite, l'extension sur plusieurs niveaux par récurrence définit l'algorithme multigrille.

5.4.1 Algorithme bigrille

L'algorithme bigrille est un algorithme itératif, qui consiste à effectuer la résolution d'un système défini sur un niveau fin à l'aide d'un autre système défini sur un niveau grossier. Une itération de cet algorithme est une combinaison des opérations de lissage sur le niveau fin et de correction sur le niveau grossier.

On note $S^{\nu}(A_h, u_h, b_h)$ l'opération de lissage qui modifie un vecteur u_h, par ν itérations, du système dont la matrice est A_h et le second membre est b_h.

Algorithme 1 : L'algorithme bigrille : MG

Soient deux grilles $\Omega_h \supset \Omega_H$, les opérateurs de restriction et de prolongation $\mathcal{R}_h^H, \mathcal{P}_H^h$ entre ces grilles. A_h la matrice associée au niveau fin, A_H la matrice associée au niveau grossier. Un algorithme itératif de lissage "lisseur" et un algorithme de résolution sur la grille grossière. L'algorithme bigrille $\mathrm{MG}(A_h, u_h, b_h, 2, \nu_1, \nu_2, 0)$ est défini par :

Entrées : $A_h, \mathcal{R}_h^H, \mathcal{P}_H^h, b_h, \nu_1, \nu_2$, u_h (une initialisation de la solution sur le niveau fin)
Sorties : u_h vérifiant : $A_h u_h = b_h$.
tant que *le résidu n'est pas optimal* **faire**
  $u_h = S^{\nu_1}(A_h, u_h, b_h)$;
  $r_h = b_h - A_h u_h$;
  $r_H = \mathcal{R}_h^H r_h$;
  $e_H = A_H^{-1} r_H$;
  $e_h = \mathcal{P}_H^h e_H$;
  $u_h = u_h + e_h$;
  $u_h = S^{\nu_2}(A_h, u_h, b_h)$;
  $r_h = b_h - A_h u_h$;
fin

La figure 5.6 illustre les opérations effectuées à chaque itération de l'algorithme (Algorithme 1) bigrille.

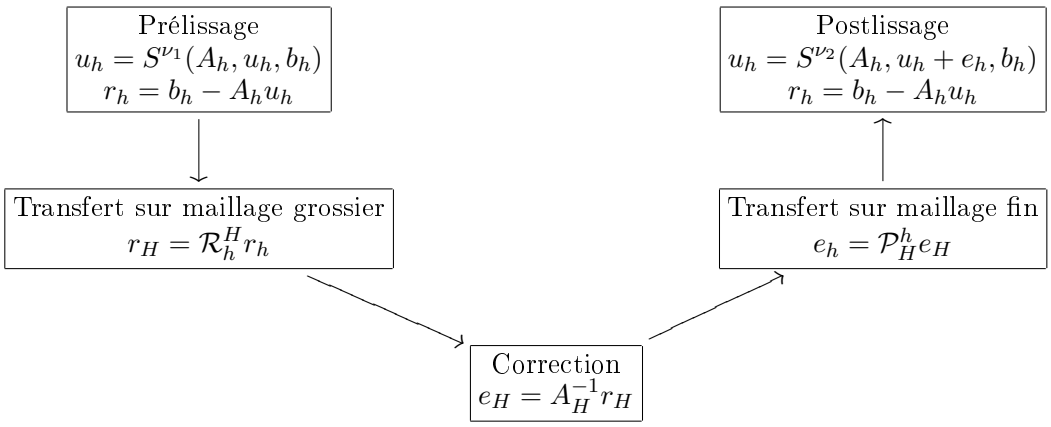


FIG. 5.6 – Représentation schématique d'une itération de la méthode bigrille.

On peut vérifier facilement que la matrice associée à une itération de l'algorithme bigrille (Algorithme 1) s'écrit comme suit :

$$MG_2 = S_h^{\nu_2}(I_h - \mathcal{P}_H^h A_H^{-1} \mathcal{R}_h^H A_h) S_h^{\nu_1} \tag{5.12}$$

où I_h est la matrice identité.

La preuve de l'efficacité de l'algorithme bigrille se fait à partir de l'analyse du spectre de cette matrice. Dans [93] l'auteur a montré que le rayon spectral de cette matrice est indépendant de la taille de maille h. En pratique, cela se traduit par une convergence de cet algorithme en un nombre petit d'itérations, indépendamment de la taille de maille choisie.

5.4.2 Algorithme multigrille

L'algorithme multigrille correspond à l'application récursive de l'algorithme bigrille. En effet, lors de la correction sur la grille grossière on peut de nouveau utiliser une méthode bigrille, en définissant un problème sur une grille encore plus grossière, et ainsi de suite pour finalement résoudre un système linéaire sur la grille la plus grossière de taille suffisamment petite.

En partant de l'algorithme bigrille, on définit de façon récursive l'algorithme multigrille. Soient :

$\mathcal{T}_l$ $(l = 0 \dots m-1)$, une hiérarchie de m maillages telle que $\mathcal{T}_l$ soit un déraffinement de $\mathcal{T}_{l+1} \forall l \in \{0, \dots, m-2\}$ et $\mathcal{T}_{m-1}$ est le maillage fin du domaine (dans le cas des AMG, on considère une hiérarchie de sous-graphes).

$\mathcal{R}_{l+1}^l$ $(l = 0 \dots m-2)$ les opérateurs de restriction du niveau $l+1$ au niveau l, $\mathcal{P}_l^{l+1}$ $(l = 0 \dots m-2)$ les opérateurs de prolongement du niveau l au niveau $l+1$.

La matrice du système à résoudre $A_{m-1} = A_h$ est donnée, la matrice A_l, $(l = 1 \dots m-2)$ correspond à la discrétisation du problème sur le maillage $\mathcal{T}_l$ ou calculée par un procédé de Galerkin $A_l = \mathcal{R}_l^{l+1} A_{l+1} \mathcal{P}_{l+1}^l$.

Une itération de l'algorithme multigrille $\mathrm{MG}(A_h, u_h, b_h, m, \nu_1, \nu_2, \gamma)$ est définie par :

Algorithme 2 : Itération de l'algorithme multigrille

si *l=0* **alors**
  $u_l = A_l^{-1} b_l$;
fin
sinon
  $u_l = S^{\nu_1}(A_l, u_l, b_l)$;
  $r_l = b_l - A_l u_l$;
  $r_{l-1} = \mathcal{R}_l^{l-1} r_l$;
  pour *i=1* **à** γ **faire**
    $e_{l-1} = \mathrm{MG}(A_{l-1}, 0, r_{l-1}, \nu_1, \nu_2, \gamma)$;
  fin
  $e_l = \mathcal{P}_{l-1}^{l} e_{l-1}$;
  $u_l = u_l + e_l$;
  $u_h = S^{\nu_2}(A_l, u_h, b_h)$;
fin

La matrice associée à une itération de l'algorithme multigrille peut être définie récursivement comme suit :
Pour $l = 1$ soit $MG_1 = 0$ pour $l = 2, \ldots, m-1$

$$MG_l^{\gamma} = S_l^{\nu_2} \left(I_l - \mathcal{P}_{l+1}^{l} (I_{l+1} - MG_{l-1}^{\gamma}) A_H^{-1} \mathcal{R}_l^{l+1} A_l \right) S_l^{\nu_1} \tag{5.13}$$

où I_l est la matrice identité au niveau l. MG_l^{γ} est la matrice définissant une itération multigrille pour le niveau l.

5.4.3 Cycle multigrille

Lors de la mise en œuvre de l'algorithme multigrille, on distingue plusieurs stratégies pour définir les itérations :

- La première est la récursivité de la méthode à deux grilles. On teste le résidu après chaque cycle bigrille, tant qu'il n'est pas optimal on refait un autre cycle. Ce cas correspond à l'algorithme 1.

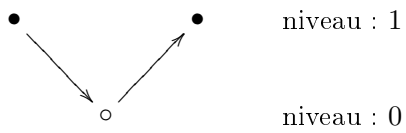


FIG. 5.7 – Schématisation d'une itération bigrille.

Avec les notations suivantes : ↘ restriction, ↗ prolongement, ∘ résolution, • lissage et calcul du résidu.

- La seconde est appelée V-cycles. On commence sur la grille la plus fine, on passe sur la grille au niveau inférieur après lissage. On descend ainsi jusqu'au niveau 0 où enfin on

résout le système pour avoir la dernière approximation de l'erreur. Cette donnée permet de remonter jusqu'au niveau fin en prolongeant à chaque niveau la correction de niveau inférieur suivi par un postlissage. Si l'approximation est satisfaisante on la conserve sinon on réitère un V-cycle (figure 5.8). Ce cas correspond à $\gamma = 1$ dans l'algorithme 2.

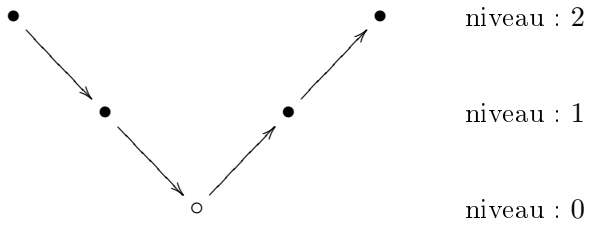


FIG. 5.8 – Schématisation d'une itération V-cycle sur 3 niveaux

- On peut également n'interpoler la correction sur une grille donnée qu'après avoir effectué deux cycles sur la grille immédiatement plus grossière, ce que l'on appelle la stratégie des W-cycles (figure 5.9). Ce cas correspond à $\gamma = 2$ dans l'algorithme 2.

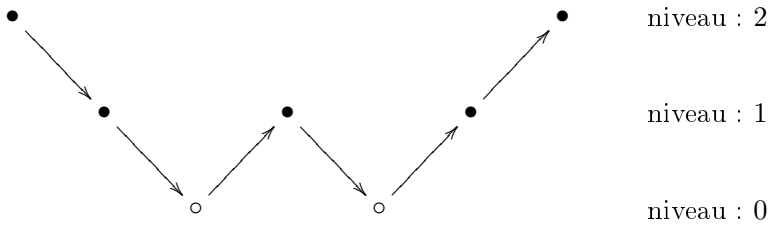


FIG. 5.9 – Schématisation d'une itération W-cycle sur 3 niveaux.

5.5 Préconditionnement MG

A l'origine, les méthodes multigrilles ont été conçues en tant que solveur itératif. Toutefois, l'expérience a montré qu'elles sont plus efficaces en tant que préconditionneur d'une méthode de type Krylov [94]. Elles ont été utilisées par plusieurs auteurs comme telles [95, 96, 97, 98]. Le même choix a été fait dans notre cas, nous avons donc développé un préconditionneur multigrille dans la librairie *CimLib*.

Nous avons adapté l'algorithme multigrille, noté MG, de la bibliothèque PETSc (Portable and Extensible Toolkit for Scientific Computation) [99]. Cet algorithme nécessite les matrices associées à chaque niveau, les opérateurs de prolongement et restriction entre les différents niveaux, les algorithmes de lissage et le nombre d'itérations de pré et de post lissage, le solveur sur la grille grossière, le type et le nombre de cycles à effectuer pour calculer la matrice MG de préconditionnement.

5.6 Validations numériques

Dans cette section, on compare les performances du préconditionneur GMG, que nous avons développé, avec le meilleur préconditionneur disponible dans la version actuelle de la librairie *CimLib*, à savoir le préconditionneur $ILU(4)$ basé sur une factorisation incomplète LU où le nombre 4 fait référence à la bande de remplissage lors de la factorisation. On considère volontairement un cas test simplifié pour illustrer les performances de la méthode.

On considère un écoulement laminaire d'un fluide incompressible visqueux sous l'action d'un gradient de pression $\Delta p = 1\,Pa$. La géométrie et les conditions aux limites pour la simulation numérique de cet écoulement sont représentées sur la figure 5.10.

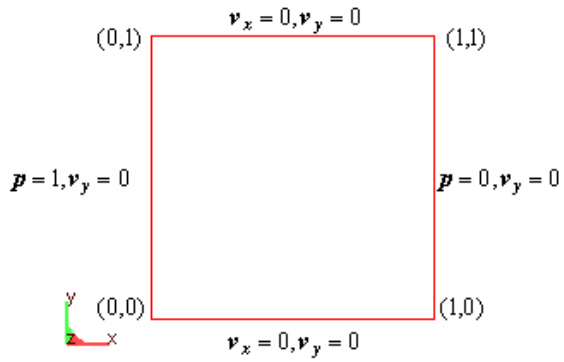


FIG. 5.10 – Géométrie et conditions aux limites, adhésion aux parois et un gradient de pression, $\Delta p = 1\,Pa$, entre l'entrée ($x = 0$) et la sortie ($x = 1$).

Les équations de Stokes régissant cet écoulement peuvent s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{cases} div(2\eta\dot{\varepsilon}(v) - pI) = 0 \\ div(v) = 0 \\ CL \end{cases} \tag{5.14}$$

où $\eta = 1\,Pa\,s$ est la viscosité dynamique du fluide.

Ce système est approché par la méthode des éléments finis mixtes avec une discrétisation $P1^+/P1$. Cette approche conduit à un système linéaire symétrique, que nous résolvons par l'algorithme de résidu conjugué préconditionné.

Ce cas test a été choisi car nous avons constaté que le système linéaire, issu de son approximation éléments finis, est difficile à inverser. Cela vient du fait que le champ de vitesse a un profil parabolique non trivial (figure 5.11).

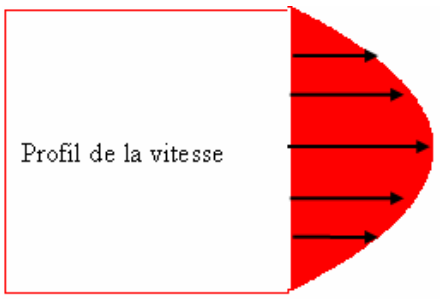


FIG. 5.11 – Profil parabolique de la vitesse à la sortie .

Afin de comparer l'efficacité des préconditionneurs, bigrille GMG et $ILU(4)$, et étudier leur comportement, nous effectuons la résolution sur des maillages différents en utilisant ces deux préconditionneurs. On fixe le résidu de convergence à 10^{-7} et le nombre maximal d'itérations à 3000.

Dans le cas du préconditionneur bigrille GMG, on considère les paramètres suivants : $\nu_1 = \nu_2 = 1$, un seul cycle bigrille, le lisseur Jacobi par bloc et la décomposition LU pour la résolution sur la grille grossière.

Le tableau 5.2 présente les performances obtenues par chacun des deux préconditionneurs.

Nombre de degrés de liberté	Temps cpu(s)		Speed up	Nombre d'itérations		Résidu final	
	GMG	ILU(4)		GMG	ILU(4)	GMG	ILU(4)
599388	39	530	13.589	11	1167	$2.\ 10^{-9}$	$5.6\ 10^{-7}$
470049	29.3	338.22	11.543	11	951	$1.7\ 10^{-9}$	$4.7\ 10^{-7}$
295446	17.69	190.3	10,757	12	847	$3.6\ 10^{-9}$	$4.\ 10^{-7}$
152184	6.9	62.2	9.014	11	517	$4.7\ 10^{-9}$	$2.3\ 10^{-7}$
118431	5.2	40.29	7.748	11	420	$2.9\ 10^{-9}$	$1.8\ 10^{-7}$
76356	3.1	19.46	6.277	12	322	$2.4\ 10^{-9}$	$1.3\ 10^{-7}$
39489	1.36	6.45	4.742	12	204	$1.5\ 10^{-9}$	$9.5\ 10^{-8}$
10320	0.36	0.89	2.472	12	93	$2.7\ 10^{-9}$	$3\ 10^{-8}$

TAB. 5.2 – Comparaison des préconditionneurs GMG et ILU(4) : temps cpu, nombre d'itérations et le résidu final.

À partir du tableau 5.2, on note les remarques suivantes :

- Le préconditionneur bigrille permet une convergence en un petit nombre d'itérations ;
- le nombre d'itérations augmente avec la taille du système avec le préconditionneur monogrille $ILU(4)$, alors qu'il reste quasiment constant avec le préconditionneur bigrille GMG ;
- la performance du préconditionneur bigrille par rapport à celle de $ILU(4)$ augmente avec la taille du système.

Le taux de convergence avec le préconditionneur monogrille $ILU(4)$ tend à diminuer avec l'augmentation de la taille du système à résoudre, alors que le préconditionneur bigrille GMG permet une convergence en un nombre pratiquement fixe d'itérations et donc une performance identique indépendamment de la taille du problème.

À partir du tableau 5.2, on représente sur la figure 5.12 les variations du temps cpu en fonction des degrés de liberté avec la résolution pour les deux préconditionneurs GMG et ILU(4).

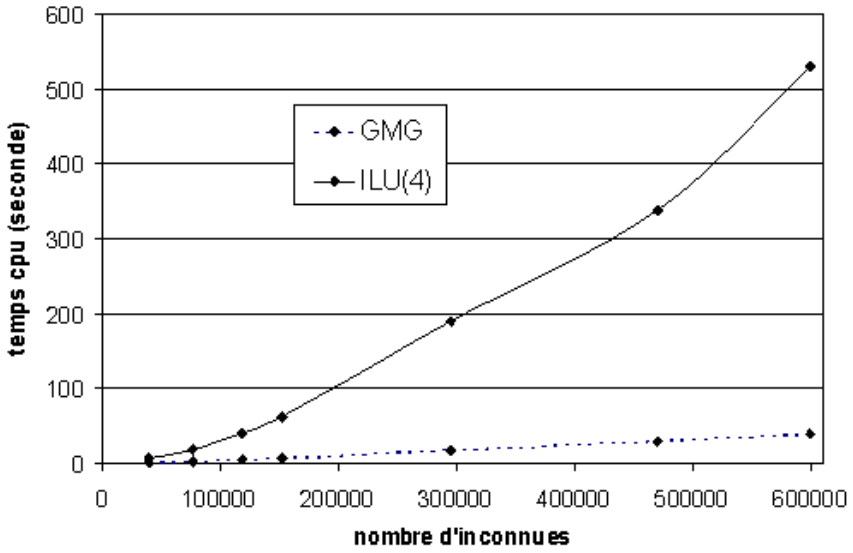


FIG. 5.12 – Le temps cpu en fonction des degrés de liberté avec la résolution pour les préconditionneurs : un cycle bigrille GMG, ILU(4).

La figure 5.13 montre que la courbe représentant le temps cpu en fonction des degrés de liberté et sa régression linéaire sont bien corrélées avec un coefficient de détermination très proche de 1. Cette complexité quasi-linéaire de l'algorithme avec le préconditionneur bigrille vient certainement du fait que le nombre d'itérations avec ce préconditionneur reste petit indépendamment de la taille du problème.

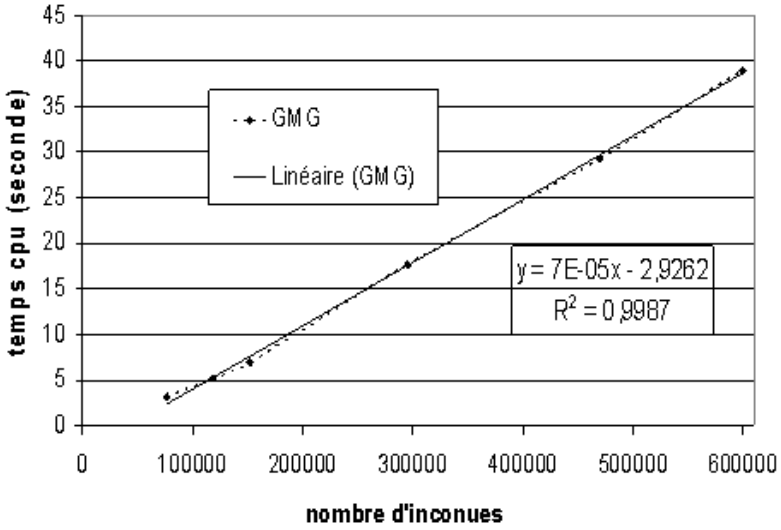


FIG. 5.13 – Le temps cpu de la résolution avec le préconditionneur associé à un cycle bigrille GMG, en fonction des degrés de liberté et sa régression linéaire.

Contrairement au préconditionneur monogrille $ILU(4)$, le préconditionneur bigrille nécessite le déraffinement du maillage et la construction de l'opérateur de prolongement. Le temps cpu de ces deux opérations doit être ajouté au temps cpu de résolution avec le préconditionneur bigrille GMG.

Le tableau 5.3 présente le coût de déraffinement et de la construction de l'opérateur de prolongement pour les différents maillages utilisés dans la comparaison précédente.

Nombre de degrés de liberté (grille fine)	Nombre de degrés de liberté (grille grossière)	Temps cpu(s) de déraffinement	Temps cpu(s) de construction de P
599388	152184	36.4	3.1
470049	118431	28.6	2.3
295446	76356	18.48	1.8
152184	39489	9.28	0.73
118431	30789	6.86	0.5
76356	19923	4.47	0.41
39489	10320	2.05	0.17
10320	2733	0.06	0.04

TAB. 5.3 – Les temps cpu(s) de déraffinement des maillages et de la construction de l'opérateur de prolongement.

Même en ajoutant ces temps cpu additionnels, la méthode bigrille GMG reste bien plus performante.

Dans le cas d'un problème non linéaire, la linéarisation par l'algorithme de Newton conduit à l'inversion de plusieurs systèmes sur le même maillage. De plus, dans une résolution incrémentale, on ne remaille pas à chaque incrément. Le coût de déraffinement, qui peut être non négligeable (tableau 5.3), aura moins d'influence sur les performances du préconditionneur bigrille GMG.

Nous sommes bien conscients de la nécessité d'autres cas de validation numérique afin de mieux évaluer l'efficacité du préconditionneur associé à un cycle GMG. Le temps imparti à ce thème ne nous a pas permis de réaliser cela. Pour cette raison, on se restreint à ce cas de validation.

5.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons développé les outils nécessaires à la mise en œuvre des méthodes GMG. Nous avons apporté, à la librairie *CimLib*, les enrichissements suivants :

- construction d'une hiérarchie de maillages par un procédé de déraffinement automatique de maillage à l'aide de la notion de métrique ;
- construction des opérateurs de transfert par interpolation linéaire entre maillages ;
- mise en place d'un préconditionneur multigrille géométrique en utilisant la librairie *PETSc*.

L'efficacité numérique du préconditionneur multigrille GMG a été évaluée par des comparaisons avec des préconditionneurs monogrilles. De plus, nous avons montré, sur un cas bidimensionnel, que le préconditionneur bigrille GMG permet d'avoir une complexité quasi-linéaire en fonction des degrés de liberté.

Les résultats obtenus sont encourageants et montrent que le préconditionnement par la matrice associée à un cycle de l'algorithme multigrille peut être optimale pour les méthodes de type Krylov. Une telle approche pourra s'avérer très utile pour la simulation des procédés d'assemblage dans la mesure où les temps de calculs peuvent être très important pour des configurations 3D. Cependant, des validations supplémentaires sont encore nécessaires.

Conclusions et perspectives

Ce travail a permis d'enrichir la librairie *CimLib* par des modèles fiables pour la prédiction de l'évolution de l'endommagement jusqu'à la rupture ductile. Cette librairie peut désormais servir pour simuler numériquement les procédés d'assemblage par déformations plastiques et les procédés de mise en forme des matériaux à froid.

Une formulation mixte vitesse-pression est utilisée pour traiter la quasi-incompressibilité des matériaux soumis à de grandes déformations plastiques au cours de ces procédés. Une loi de comportement élastoplastique endommageable, où l'endommagement est couplé avec la déformation plastique, est utilisée pour modéliser les grandes déformations plastiques ainsi que la dégradation des propriétés du matériau.

Les outils d'intégration numérique locale de cette loi de comportement non linéaire, dans une discrétisation éléments finis mixtes $P1^+/P1$ du problème mécanique, ont été développés et validés.

Le modèle d'endommagement non local basé sur une formulation à gradient implicite a été utilisé pour la régularisation du phénomène de localisation lié à l'approximation éléments finis avec une loi adoucissante. De plus, cette méthode de régularisation permet d'éviter la forte dépendance à la discrétisation spatiale et d'obtenir une évaluation objective de l'énergie dissipée à rupture. Elle assure donc la fiabilité de notre approche à prédire l'évolution de l'endommagement jusqu'à la rupture.

Cependant, Cette méthode de régularisation fait intervenir une longueur caractéristique l_c. Cette longueur caractéristique joue un rôle prépondérant sur l'évaluation de la variable non locale. L'identification de ce paramètre matériau est donc cruciale pour l'utilisation des modèles non locaux dans des cas concrets.

Généralement, cette identification s'effectue par des méthodes d'analyse inverse basées sur des techniques de minimisation de l'erreur souvent sur la base d'une unique observable (la courbe force/déplacement). Étant donné le nombre important de paramètres à identifier (les paramètres de la loi de comportement et la longueur caractéristique), cette méthode ne permet pas une identification unique de l'ensemble des paramètres. Une étude plus approfondie est nécessaire pour déterminer de façon fiable ces paramètres matériaux, en particulier la longueur caractéristique.

Afin d'améliorer la précision de l'approximation éléments finis avec un coût de calcul minimal, une stratégie d'adaptation anisotrope de maillage au phénomène d'endommagement a été adoptée. Cette stratégie, basée sur l'estimation de l'erreur d'interpolation, détecte auto-

matiquement les zones critiques vis-à-vis de l'endommagement dans le matériau. Elle conduit à un maillage adapté, raffiné dans les zones présentant de fortes variations d'endommagement et déraffiné ailleurs.

L'utilisation de cette adaptation de maillage lors de la prédiction de l'endommagement jusqu'à la rupture a mis en évidence son apport sur l'amélioration de la qualité predictive de notre modèle. Elle permet une meilleure prédictibilité de l'évolution de l'endommagement et de la forme de rupture.

La rupture ductile est représentée à l'aide de la méthode "kill element". Cette méthode a été intégrée à la structure parallèle de la librairie *CimLib*. L'utilisation de cette méthode dans une simulation avec une adaptation de maillage conduit à la suppression d'éléments de faible volume. La rupture est donc modélisée avec une perte de volume tolérée. Cependant, des techniques différentes pourraient être envisagées pour modéliser la rupture de manière plus précise, en particulier la méthode X-FEM.

Dans le but d'accélérer le temps de calcul, notamment sur des grands cas industriels irréductibles par symétries, un préconditionneur multigrille géométrique (GMG) a été mis en place. Les premières validations numériques ont montré l'efficacité de ce préconditionneur. Cependant, ce préconditionneur GMG n'est pas encore adapté à la structure parallèle de la librairie *CimLib*. En effet, les opérateurs de transfert intergrilles restent à être parallélisés. De plus, le préconditionneur GMG n'est pas encore intégré dans les solveurs *CimLib* pour son exploitation dans une simulation quelconque.

Ainsi, les développements réalisés dans le cadre de cette thèse vont permettre de modéliser avec précision le comportement de matériaux élastoplastiques endommageables au cours des procédés d'assemblage par déformation plastique et d'études de tenue mécanique. Certains travaux en cours, liés notamment à la gestion de contact multicorps dans la librairie *CimLib*, doivent être finalisés pour atteindre cet objectif.

En conclusion, les objectifs fixés au départ de cette thèse sont atteints. La librairie *CimLib* peut être utilisée pour prédire précisément et efficacement l'évolution de l'endommagement et l'avènement de la rupture.

Bibliographie

[1] Bouchard P. O., Laurent T., and Tollier L. Numerical modeling of self-pierce riveting-from riveting process modeling down to structural analysis. J. Mater. Process. Tech., 202, 290–300, 2008.

[2] Chenot J. L. and Massoni E. Finite element modelling and control of new metal forming processes. Int. J. Mach. Tool. Manufact., 46, 1194–1200, 2002.

[3] Saanouni K. Virtual metal forming including the ductile damage occurrence : Actual state of the art and main perspectives. J. Mat. Process. Techno., 177, 19–25, 2006.

[4] Saanouni K. On the numerical prediction of the ductile fracture in metal forming. Engng. Fract. Mech., 75(11), 3545–3559, 2008.

[5] Chenot J. L., Fourment L., and Mocellin K. Numerical treatment of contact and friction in FE simulation of forming processes. J. Mat. Process. Techno., 125-126, 45–52, 2002.

[6] Lazzarotto L., Dubar L., Dubois A., Ravassard P., and Oudin J. Identification of coulomb's friction coefficient in real contact conditions applied to a wire drawing process. Wear, 211, 54–63, 1997.

[7] Fourment L., Chenot J. L., and Mocellin K. Numerical formulations algorithms for solving contact problems in metal forming simulation. Int. J. Numer. Meth. Eng., 46, 1435–1462, 1999.

[8] Barboza J. A. P. Traitement du contact entre corps déformables et calcul parallèle pour la simulation 3D du forgeage multicorps. Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2004.

[9] Terzolo L. Vers une prédiction de la durée de vie des outils de forge à chaud par la detection numérique du régime thermique de l'usure abrasuve. Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2004.

[10] Fortin A. and Garon A. Les éléments finis : de la théorie à la pratique.

[11] Lemaitre J. and Chaboche J. L. Mechanics of solids materials. Cambridge University Press, U.K., 1994.

[12] Porcaro R., Hanssen A., Aalberg A., and Langseth M. Joining of aluminium using self-piercing riveting : testing, modelling and analysis. Int. J. Crash, 9, 141–154, 2004.

[13] Abe Y., Kato T., and Mori K. Joinability of aluminium alloy and mild steel sheets by self-piercing rivet. J. Mat. Process. Techno., 177, 417–421, 2006.

[14] Fayolle S. Etude de la modélisation de la pose et de la tenue mecanique des assemblages par déformation plastique application au rivetage auto-poinçonneur. Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2008.

[15] Lemaitre J. and Chaboche J. L. Mécanique des matériaux solides. Dunod, Paris, 2001.

[16] Stainier C. Modélisation numérique du comportement irréversible des métaux ductiles soumis à des grandes déformation avec endommagement. Thèse de doctorat, Université de liège, 1996.

[17] Mariage J. F. Simulation numérique de l'endommagement ductile en formage de pièces massives. Thèse de doctorat, Université de Technologie de Troyes, 2003.

[18] Germain P. Cours des mécaniques des milieux continus. Masson, Paris, 1973.

[19] Germain P., Nguyen Q. S., and Suquet P. Continuum thermodynamics. J. Appl. Mechs., 50, 1010–1020, 1983.

[20] Christ D. A mixed finite element formulation for incompressibility using linear displacement and pressure interpolations. PhD thesis, ruhr-university bochum, Faculty for Civil Engineering, 2003.

[21] Agelet de Saracibar C., Chiumenti M., Valverde Q., and Cervera M. On the orthogonal subgrid scale pressure stabilization of finite deformation J2 plasticity. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 195, 1224–1251, 2006.

[22] Lemaitre J. A course on damage mechanics. Springer, Berlin, New York, 1996.

[23] Ladevèze P. On an anisotropic damage theory. Failure criteria of structured media, pages 355–363, 1983.

[24] Ladevèze P. and Lamaitre J. Damage effective stress in quasi unilateral conditions. Congress Theor. Appl. Mech., Lyngby, Denmark, 1984.

[25] Bridgman P. W. Studies in large plastic flow and fracture. Harvard University Press, Cambridge, 1964.

[26] Bao Y. and Wierzbicki T. On the cut-off value of negative triaxiality for fracture. Engng. Fract. Mech., 72, 1049–1069, 2005.

[27] Andrade Pires F. M., César de Sá J. M. A., Costa Sousa L., and Natal Jorge R. M. Numerical modelling of ductile plastic damage in bulk metal forming. Int. J. Mech. Sci., 45, 273–294, 2003.

[28] Taylor C. and Hood P. Navier-stokes equation using mixed interpolation. Finite element in flow problem Oden ed. UAH Press, 1974.

[29] Arnold D. N., Brezzi F., and Fortin M. A stable finite element for stokes equations. Calcolo, 21, 337–344, 1984.

[30] Coupez T. Stable satabilized finite element for 3d forming calculation. CEMEF,communication interne, 1995.

[31] Gay C. Contribution à la simulation numérique tridimensionnelle du forgeage à froid. Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, 1995.

[32] Simo J. C. and Taylor R. L. Consistent tangent operators for rate-independent elatoplasticity. Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., 48, 101–118, 1985.

[33] Nategaal J. C. On the implementation of inelastic constitutive equations with special reference to large deformation problems. Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., 33, 469–484, 1982.

[34] Aliaga C. Simulation numérique par éléments finis en 3D du comportement thermomécanique au cours du traitement thermique d'aciers : application à la trempe des pièces forgées ou coulées. Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2000.

[35] Gao X. L. Elasto-plastic analysis of an internally pressurized thick-walled cylinder using a strain gradient plasticity theory. Int. Jou. of Sol. and Struct., 40, 6445–6455, 2003.

[36] Commend S., Truty A., and Zimmermann T. Stabilized finite elements applied to elasto-plasticity : I. mixed displacement-pressure formulation. Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., 193, 3559–3586, 2004.

[37] Besson J. Local approach to fracture. Ecole des Mines de Paris, Paris, France, 2004.

[38] Sornin S. Sur les formulations élastoplastiques non-locales en gradient d'endommagement. Thèse de doctorat, Université de technologie de troyes, 2007.

[39] Peerlings R. H. J., Geers M. G. D., de Borst R., and Brekelmans W. A. M. A critical comparaison of nonlocal and gradient-enhanced softening continua. Int. J. Solids Struct., 38, 7723–7746, 2001.

[40] Geers M. G. D., Ubachs R., and Engelen R. A. B. Strongly non-local gradient-enhanced finite strain elastoplasticity. Int. J. Num. Meth. Eng., 56, 2039–2068, 2003.

[41] Peerlings R. H. J., de Borst R., Brekelmans W. A. M., and Geers M. G. D. Localisation issues in local and nonlocal continuum approaches to fracture. Europ. J. Mech. A-Solids., 21, 175–189, 2002.

[42] Liebe T., Steinmann P., and Benallal A. Theoretical and computational aspects of a thermodynamically consistent framework for geometrically linear gradient damage. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 190, 6555–6576, 2001.

[43] Bazant Z. P. and Pijaudier-Cabot G. Nonlocal continuum damage, localisation instability and convergence. J. Appl. Mech., 55, 287–293, 1988.

[44] Nedjar B. Elastoplastic-damage modelling including the gradient of damage : formulation and computational aspects. Int. J. Solids Struc., 38, 5421–5451, 2001.

[45] César de Sá J. M. A., Areias P. M. A., and Zheng C. Damage identification for anisotropic sheet-metals using a non-local damage model. Int. J. Damage Mech., 13, 35–57, 2004.

[46] Areias P. M. A., César de Sá J. M. A., and Antonio C. A. C. A gradient model for finite strain elstoplasticity coupled with damage. Finite Elements in Analysis and Design, 39, 1191–1235, 2003.

[47] de Borst R. and Sluys L. J. Localisation in cosserat continuum under static and dynamic loading conditions. Meth. Appl. Mech. Eng., 90, 805–827, 1991.

[48] Mindin R. and Eshel N. On first strain gradient theories in linear elasticity. Int. J. Solids Struct., 4, 109–124, 1968.

[49] Germain P. Cours des mécaniques des milieux continus. Masson Paris, 1973.

[50] Needleman A. Material rate dependence and mesh sensitivity in localization problems. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 67, 69–86, 1988.

[51] Engelen R. A. B., Geers M. G. D., and Baaijens F. P. T. Nonlocal implicit gradient-enhanced elasto-plasticity for the modelling of softening behaviou. Int. J. Plast, 19, 403–433, 2003.

[52] Jirasek M. Nonlocal models for damage and fracture : comparison of approaches. Int. J. Solids Struct., 35(31-32), 4133–4145, 1998.

[53] Peerlings R. H. J. Enhanced damage modelling for fracture and fatigue. PhD thesis, Technische Universiteit Eindhoven, 1999.

[54] Bazant Z. P. and Jirásek M. Nonlocal integral formulations of plasticity and damage : survey of progress. ASCE J. Engrg. Mech, 128(11), 1119–1149, 2002.

[55] Brunet M., Morestin F., and Walter H. Damage identification for anisotropic sheet-metals using a non-local damage model. Int. J. Damage Mech., 13, 35–57, 2004.

[56] Bouchard P. O., Bay F., and Chastel Y. Numerical modelling of crack propagation : automatic remeshing and comparison of different criteria. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 192, 3887–3908, 2003.

[57] Bouchard P. O., Bay F., Chastel Y., and Tovena I. Crack propagation modelling using an advanced remeshing technique. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 189, 723–742, 2000.

[58] Moës N., Dolbowz J., and Belytschko T. A finite element method for crack growth without remeshing. Int. J. Numer. Meth. Engng., 46, 131–150, 1999.

[59] Chahine E., Laborde P., and Renard Y. A quasi-optimal convergence result for fracture mechanics with XFEM. C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I, 342, 527–532, 2006.

[60] Borouchaki H., Laug P., Cherouat A., and Saanouni K. Adaptive remeshing in large plastic strain with damage. Int. J. Numer. Meth. Engng, 63, 1–36, 2005.

[61] Rodriguez-Ferran A. and Huerta A. Error estimation and adaptivity for non-local damage models. Int. J. Sol. Struct., 37, 7501–7528, 2000.

[62] Svedberg T. and Runesson K. An adaptive finite element algorithm for gradient theory of plasticity with coupling to damage. Int. J. Sol. Struct., 37, 7481–7499, 2000.

[63] Rodriguez-Ferran A., Erbos I., and Huerta A. Adaptive analysis based on error estimation for non local damage models. Rev. Euro. Elem. Finis, 10, 193–207, 2001.

[64] Coupez T. Génération de maillage et adaptation de maillage par optimization locale. Rev. Eur. Élém. Finis, 9(4), 403–423, 2000.

[65] Tam A., Ait-Ali-Yahia D., Robichaud M. P., Moore M., Kozel V., and Hasbashi W. G. Anisotropic mesh adaptation for 3d flows on structured and unstructured grids. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 189, 1205–1230, 2000.

[66] Pain C. C., Humpleby A. P., de C. R. E., Oliveira, and Goddard A. J. H. Tetrahedral mesh optimisation and adaptivity for steady-state and transient finite elementcalculations. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 190, 37771–3796, 2001.

[67] George P. L. Automatic 3d mesh generation conforming a prescribed size map. Mississippi State University, U.S.A., pages 21–32, 1998.

[68] Peraire J., Peiro J., and Morgan K. Adaptive remeshing for three-dimensional compressible flow computations. J. Comp. Phys., 103, 269–285, 1992.

[69] Verfürth R. A review of a posteriori error estimation and adaptive mesh-refinement techniques. Wiley-Teubner, New York, 1996.

[70] Zienkiewicz O. C. and Zhu J. Z. The superconvergent patch recovry and a posteriori error estimates. part I. the recovry technique. Int. J. Numer. Meth. Eng., 33, 1331–1364, 1992.

[71] Bank R. E. and Smith R. K. A posteriori error estimates based on hierarchical bases. SIAM J. Numer. Anal., 30(4), 921–935, 1993.

[72] Borouchaki H., Chapelle D., George P. L., Laug P., and Frey P. Estimateurs d'erreur géométriques et adaptation de maillage, dans maillage et adaptation. P. L. George ed., Traité Mécanique et Ingéniérie des Matériaux, Série Méthodes Numériques, Hermès Science, Paris, 279-310, 2001.

[73] Vallet M. G. Génération de maillages anisotropes et adaptatifs. Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie Paris VI, 1992.

[74] Alauzet F. Adaptation de maillage anisotrope en trois dimension. Applications aux simulations instationnaires en Mécanique des fluides. Thèse de doctorat, Université Monpellier II, 2003.

[75] Hamide M., Massoni E., and Bellet M. Adaptive mesh technique for thermal-metallurgical numerical simulation of arc welding processes. Int. J. Num. Meth. Engng., 73, 624–641, 2008.

[76] Alauzet F. and Frey P. Estimateur d'erreur géométrique et métriques anisotropes pour l'adaptation de maillage. Partie I : aspects théoriques, Rapport Techninique, INRIA, Mars, 2003.

[77] Gruau C. Génération de métriques pour adaptation anisotrope de maillages, applications à la mise en forme des matériaux. Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2004.

[78] Ciarlet P. G. Error estimates for elliptic problems. in Handbook of Numerical Analysis, Eds, North Holland, volume II of Finite Element methods (Part 1), pages 17–352, 1991.

[79] Pichelin E., Fortin M., and Boivin S. Etude numérique d'estimations d'erreur à postériori. Rev. Eur. Élém. Finis, 9(4), 467–486, 2000.

[80] Hamide M. Modélisation numérique du soudage à l'arc des aciers. Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2008.

[81] Coupez T. Mesh generation and adaptive remeshing by a local optimisation principale. NAFEMS world congress, pages 1051–1060, 1997.

[82] Lange C. Étude physique et modélisation numérique des procédé de sertissage de piece de carrosserie. Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2006.

[83] Hancock J. W. and Mackenzie A. C. On the mechanics of ductile fracture in high-strength steels subjected to multi-axial stress-states. J. Mech. Phys. Solids, 24, 147–169, 1976.

[84] Lemaignan C. La rupture des matériaux. EDP Sciences, 2003.

[85] Gouveia B. P. P., Rodrigues J. M. C., and Martins P. A. F. Fracture predicting in bulk metal forming. Int. J. Mech. Sci., 38(4), 361–372, 1996.

[86] Baranger J., Brezinski C., and Carasso C. Analyse numérique. coll. Enseignement des sciences num. 38, Editions Hermès, Hermann (Paris), 1991.

[87] Ruge J. and Stüben K. Algebraic multigrid. S. F. Mc. Cormick, Editor, Multigrid Methods Frontiers in Applied Mathematics, SIAM, Philadelphia, 5, 73–130, 1987.

[88] Chang Q., Shu Wong Y., and Fu H. On the algebraic multigrid method. J. Comp. Phys., 125, 279–292, 1996.

[89] Stüben K. A review of algebraic multigrid. Numer. Linear Algebra Appl., 128, 281–309, 2001.

[90] George P. L. and Borouchaki H. Triangulation de delaunay et maillage, applications aux éléments finis. Hermés, Paris, 1997.

[91] Mesri Y. Gestion et contrôle des maillages non structurés anisotropes, applications en aérodynamique. Thèse de doctorat, Université de nice sophia antipolis, 2007.

[92] Rey B. Methode multigrilles pour les grandes deformations et simulation numerique du procede de roulage. Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2007.

[93] Désidéri J. A. Modèles discrets et schémas itératifs-application aux algorithmes multigrilles et multidomaines. Editions Hermès, Paris, 1998.

[94] Vuik C., Wesseling P., and Zeng S. Krylov subspace and multigrid methods applied to the incompressible navier-stokes equations. Proceedings of the Seventh Copper Mountain Conference on Multigrid Methods, Copper Mountain, pages 737–753, 1995.

[95] Rey B., Mocellin K., and Fourment L. A node-nested galerkin multigrid method for metal forging simulation. Comput. Visual. Sci., 11(1), 17–25, 2008.

[96] Pereira F. H., Verardi S. L. L., and Nabeta S. I. A fast algebraic multigrid preconditioned conjugate gradient solver. App. Math. Comp., 179, 344–351, 2006.

[97] Iwamura C., Costa F. S., Sbarski I., Easton A., and Li N. An efficient algebraic multigrid preconditioned conjugate gradient solver. Comput. Methods Appl. Mech. Eng., 192, 2299–2328, 2003.

[98] Adams M. F. and Taylor R. L. Parallel multigrid solvers for 3d unstructured finite element problems in large deformation elascity and plasticity. Int. J. Num. Meth. Engng., 48, 1241–1262, 2000.

[99] Balay S., Gropp W. D., McInnes L. C., and Smith B. F. Efficient management of parallelism in object oriented numerical software libraries. Mod. Softw. Tools Sci. Comput., pages 163–202, 1997.

Résumé

L'objectif de cette thèse est le développement d'un modèle numérique fiable et précis pour prédire l'évolution de l'endommagement jusqu'à la rupture dans une structure soumise à des grandes déformations plastiques. Ces développements contribuent à l'enrichissement d'une librairie EF parallèle appelée *CimLib*.

Pour mieux traiter l'incompressibilité des déformations plastiques, une approximation éléments finis mixtes vitesse-pression avec une discrétisation stabilisée $P1^+/P1$ est utilisée pour la résolution des équations mécaniques. L'intégration d'une loi de comportement élastoplastique endommageable dans cette approximation a été largement abordée. L'évolution de l'endommagement obéit à un modèle de Lemaitre enrichi, où les phénomènes dissipatifs sont couplés et qui prend en compte la nature des sollicitations et l'effet de refermeture des fissures en compression.

L'approximation éléments finis avec un comportement adoucissant est fortement dépendante de la discrétisation spatiale dans la phase post-critique. Pour pallier à ce problème, nous avons adopté une méthode de régularisation non locale du gradient implicite. Nous avons choisi un exemple où la localisation est très marquée en bande de cisaillement pour montrer la fiabilité de notre modèle à prédire l'évolution de l'endommagement jusqu'à la rupture de la structure.

Un autre axe principal de cette thèse est l'adaptation anisotrope de maillage au phénomène d'endommagement. Une stratégie d'adaptation anisotrope de maillage pilotée par un estimateur de l'erreur d'interpolation a été utilisée afin d'améliorer la précision pour l'endommagement avec un temps de calcul minimal. L'apport de l'adaptation de maillage permet de garantir une meilleure prédiction de l'évolution de l'endommagement jusqu'à la rupture. Son utilisation nous a permis de retrouver numériquement des modes de rupture observés expérimentalement.

Dans le cadre de grands cas industriels irréductibles, par exemple à cause de la croissance de l'endommagement, le temps de calcul peut devenir pénalisant. Nous nous sommes donc intéressé à l'accélération de la résolution des grands systèmes linéaires issus d'une approximation éléments finis par les méthodes multigrilles. Un préconditionneur multigrille géométrique a été mis en place. Les premières validations ont montré que ce préconditionneur permet d'avoir une complexité quasi-linéaire en fonction des degrés de liberté.

Le modèle numérique ainsi développé peut servir à la simulation des procédés de pose de points d'assemblage des tôles par déformations plastiques, à l'étude de leur tenue mécanique en les soumettant à des sollicitations variées, et à la simulation des procédés de mises en forme à froid des corps solides (emboutissage, forgeage, hydroformage, semi découpe ou découpe des tôles ...).

Mots-clés : Endommagement ductile, Modèles non locaux, Éléments finis mixtes, Estimation d'erreur, Adaptation anisotrope de maillage, Méthodes multigrilles.

Abstract

The aim of this thesis is to develop an accurate numerical model to predict damage growth and failure in ductile solids. These developments are done within a parallel finite element library called *CimLib*.

To deal with the incompressibility of plastic deformations, a mixed velocity-pressure finite element approximation with a stabilized discretization $P1^+/P1$ is used to solve mechanical equations. The numerical analysis of an elastic-plastic damage law in this approximation has been widely discussed. An enhanced Lemaitre damage evolution law is considered. Coupled dissipative phenomena, influence of stress triaxiality ratio, and crack-closure effects under compressive conditions are taken into account in this formulation.

A nonlocal damage approach, based on an implicit gradient formulation, is used. This nonlocal approach enables to avoid the localization phenomenon and the associated mesh dependency. The well-known physical plastic strain localization in shear bands is modelled to prove that the proposed approach gives reliable and physical results.

An another main focus of this thesis is the anisotropic mesh adaptation to the damage phenomenon. An anisotropic adaptive meshing scheme has been applied to increase the accuracy of the damage variable with minimum computing time. Moreover the numerical tests have proven that this mesh adaptation strategy allows our approach to predict accurately the expected damaged and fractured areas.

The last contribution of this work is the implementation of a geometric multigrid preconditioner in order to allow an efficient computation for large linear systems from a FE approximation. The first validations have shown a quasi-linear growth of the cpu-time as a function of the number of degrees of freedom.

The developed numerical model can be used to simulate sheet metal joining processes based on material plastic deformation and to study their mechanical strength. In the future, these developments will also useful for other cold metal forming processes, such as forging, stamping, cutting ...

Keywords : Ductile damage, Non local models, Mixed finite elements, A posteriori error estimation, Anisotropic mesh adaptation, Multigrid methods.