

Étude du formalisme multifractal pour les fonctions

Mourad Ben Slimane

▶ **To cite this version:**

Mourad Ben Slimane. Étude du formalisme multifractal pour les fonctions. Analyse fonctionnelle [math.FA]. Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1996. Français. NNT : . pastel-00569006

HAL Id: pastel-00569006
https://pastel.hal.science/pastel-00569006

Submitted on 24 Feb 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

NS 20 288 (4)

THÈSE

présentée pour l'obtention du Diplôme de

DOCTEUR
DE
L'ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES

Spécialité : Mathématiques Appliquées

par

Mourad Ben Slimane

SUJET DE LA THESE :

ETUDE DU FORMALISME MULTIFRACTAL POUR LES FONCTIONS

soutenue à Noisy-le-Grand le 20 Septembre 1996

devant le jury composé de :

Président : **Yves MEYER**

Rapporteurs: **Albert COHEN**
Jacques LEVY-VEHEL

Examinateurs: **Jacques PEYRIERE**
Bernard LAPEYRE

Directeur de thèse: **Stéphane JAFFARD**

E.N.P.C.
INV04218

02

Remerciements

Ma plus profonde reconnaissance va tout d'abord à Monsieur Stéphane Jaffard qui a dirigé cette thèse et guidé ainsi mes premiers pas dans la recherche. Je le remercie pour le sujet passionnant qu'il m'a proposé, ses conseils, ses encouragements et la confiance et l'amitié qu'il m'a témoignées.

J'ai également eu la chance de pouvoir bénéficier de la grande culture scientifique de Monsieur Yves Meyer. Je voudrais lui exprimer ici ma vive gratitude pour sa disponibilité, ses conseils et pour l'intérêt encourageant qu'il a manifesté pour ce travail. Je lui suis très reconnaissant de me faire l'honneur de présider le jury.

Grand honneur aussi que celui de compter parmi les membres de ce jury, Monsieur Albert Cohen. Je le remercie très vivement d'avoir rapporté sur ce mémoire et pour les corrections qu'il a apportées à cette thèse.

Monsieur Jacques Lévy Véhel a accepté d'être mon rapporteur. J'apprécie sa compétence et sa sympathie et je le remercie très sincèrement.

Je tiens aussi à remercier chalereusement Messieurs Bernard Lapeyre et Jacques Peyrière qui ont accepté de faire partie du jury.

J'exprime mes sincères remerciements à tous ceux qui m'ont entouré et apporté leur soutien notamment ma famille, mes amis mais aussi mes collègues au CERMICS pour la bonne ambiance qui règne dans le centre. En particulier, merci à nos deux adorables secretaires: Imane et Véronique.

Enfin, je remercie la direction de l'ENPC pour m'avoir accueilli au sein du CERMICS et permis de travailler dans des conditions exceptionnelles.

Résumé

L'objet de cette thèse est l'analyse multifractale des fonctions autosimilaires et l'étude de la validité du formalisme multifractal. Il s'agit d'abord de déterminer la régularité Hölderienne ponctuelle exacte pour des fonctions dont le graphe localement est grossièrement une contraction du graphe complet, à une fonction erreur près; ensuite de calculer les dimensions de Hausdorff des ensembles de points où la fonction présente la même singularité; et enfin de vérifier les conjectures de Frish et Parisi et celle d'Arneodo, Bacry et Muzy, qui relient ces dimensions à des quantités moyennes extraites de la fonction. Nous étudions plusieurs types d'autosimilarités, et montrons (en reformulant parfois) que l'analyse par ondelettes permet d'étudier la validité de ces relations.

Summary

The aim of this thesis is the multifractal analysis of selfsimilar functions and the study of the validity of the multifractal formalism. First, we determine the exact pointwise Hölder regularity for functions such that locally the graph is roughly a contraction of the global graph, modulo an error; then we compute the Hausdorff dimensions of the sets of points which have the same Hölder exponent; and finally we verify the conjectures of Frish and Parisi and the one of Arneodo, Bacry and Muzy, which relate these dimensions to some averaged quantities extracted from the function. We study different types of selfsimilarities, and prove (by reformuling some times) that the wavelet analysis is a good tool to study the validity of these relations.

Table des matières

Introduction 7

1 Analyse Multifractale et Formalisme Multifractal 11

2 Formalisme Multifractal pour les Fonctions Autosimilaires Non Linéaires 19
2.1 Introduction . . . 19
2.2 Existence, uniqueness and global Hölder regularity . . . 25
2.3 Pointwise Hölder regularity . . . 34
2.3.1 Upper bound for pointwise Hölder regularity . . . 34
2.3.2 Lower bound for pointwise Hölder regularity . . . 45
2.4 Computation of the spectrum of singularities . . . 47
2.5 Proof of the Multifractal Formalism . . . 49

3 Formalisme Multifractal pour les Fonctions Autosimilaires Non Isotropes 53
3.1 Introduction . . . 53
3.2 Anisotropic Selfsimilar Functions: existence, uniqueness and global Hölder regularity . . . 54
3.3 Pointwise Hölder regularity . . . 59
3.4 The spectrum of singularities . . . 65
3.4.1 First case: each column of the grid contains at most one $\Re_\omega$ . . . 67
3.4.2 Second case: only one column containing all the $\Re_\omega$, $\omega \in A$ . . . 69
3.5 The failure of the Multifractal Formalism . . . 71
3.6 The Anisotropic Multifractal Formalism . . . 78
3.7 Validity of the Anisotropic M.F for Anisotropic Selfsimilar Functions . . . 86

4 Formalisme Multifractal pour les Fonctions d'Echelles 89
4.1 Introduction . . . 89
4.2 Existence, unicité, support, régularité globale et calcul explicite de la solution 91
4.3 Régularité ponctuelle, spectre des singularités et formalisme multifractal . . 96
4.4 Autosimilarité, chirps logarithmiques et analyse par ondelettes . . . 98
4.4.1 Chirps logarithmiques et analyse par ondelettes . . . 98
4.4.2 Chirps logarithmiques pour les fonctions autosimilaires . . . 99
4.4.3 Autosimilarité des fonctions d'échelle et formalisme multifractal . . . 101
4.5 Formalisme multifractal pour la fonction de de Rham . . . 102

5 Multifractalité et Formalisme Multifractal pour les Fonctions Autosimilaires avec g pas assez régulière **113**
5.1 Introduction 113
5.2 Régularité ponctuelle 116
5.3 Spectre des singularités 121
5.4 Validité du formalisme multifractal 127

Conclusion **131**

Bibliographie **132**

Introduction

Un problème ouvert important est la détection et l'identification des structures qui apparaissent dans les écoulements turbulents. L'énergie associée aux petites échelles n'est pas répartie de façon uniforme dans l'espace (cf [30] et [42]). Cette observation d'une intermittence spatiale du support des transferts d'énergie a conduit plusieurs auteurs à supposer que ce support est multifractal (cf [30]) : la vitesse ϑ de l'écoulement est assez régulière sur de grandes régions et a un comportement singulier sur des petits ensembles. Ces derniers ensembles contiennent une information importante sur la nature, le comportement local et la géométrie de l'écoulement. Le caractère singulier de la vitesse en un point x_0 est décrit par un exposant de singularité $\alpha(x_0)$ qui correspond au fait que le signal ϑ est approximativement $\alpha(x_0)$-Hölderienne

$$| \vartheta(x_0 + h, t) - \vartheta(x_0, t) | \sim |h|^{\alpha(x_0)} \quad \text{quand} \quad |h| \mapsto 0 .$$

Des recherches actives ont été menées pour calculer les singularités et mesurer pour α donné la "taille" $d(\alpha)$ (la dimension fractale ou de Hausdorff) de l'ensemble E^α des points où le signal présente la même singularité α. Il s'agit alors de l'étude multifractale du signal.

L'objet mathématique que l'on cherche à déterminer est le spectre des singularités $d(\alpha)$. Il est clair qu'il est à peu près impossible de le déterminer directement à partir de la définition mathématique de la dimension de Hausdorff, qui conduit à des calculs énormes et numériquement instables. Les physiciens ont alors essayé de le relier à des quantités faisant intervenir des moyennes extraites du signal et numériquement plus stables. Des arguments heuristiques ont permis à Frisch et Parisi de proposer une formule qui relie le spectre $d(\alpha)$ pour α compris entre 0 et 1 à l'ordre de grandeur des L^p-modules de continuités de la vitesse

$$\int_{\mathbf{R}^3} | \vartheta(x + h, t) - \vartheta(x, t) |^p \, dx \sim |h|^{\zeta(p)} \quad \text{quand} \quad |h| \mapsto 0 .$$

La conjecture de Frisch et Parisi fournit le spectre à partir d'une transformée de Legendre de $\zeta(p) - 3$

$$d(\alpha) = \inf (\alpha p - \zeta(p) + 3) .$$

Cette conjecture est appelée le Formalisme Multifractal.

Une formule plus générale a été proposée par Arneodo, Bacry et Muzy (cf [2]) dans laquelle la fonction $\zeta(p)$ a été remplacée par une quantité $\eta(p)$ qui donne des estimations globales sur la transformée en ondelettes du signal

$$\int |C_{a,b}(\vartheta)|^p \, db \sim a^{\eta(p)} \quad \text{quand} \quad a \mapsto 0$$

où rappelons

$$C_{a,b}(\vartheta) = \frac{1}{a^m} \int \vartheta(x) \bar{\psi}(\frac{x-b}{a})\, dx\ .$$

Mathématiquement, la formule d'Arneodo et ses collaborateurs coïncide avec celle de Frisch et Parisi pour les singularités comprises entre 0 et 1, et fournit des résultats numériques plus stables sans doute parce qu'elle fait intervenir des moyennes de la fonction (sa transformée en ondelettes) et non pas ses valeurs ponctuelles; Notons aussi que la cancellation, la localisation spatiale et la régularité des ondelettes permettent de caractériser les singularités ponctuelles d'un signal via la décroissance de sa transformée en ondelettes au voisinage du point. Ainsi, à priori, l'analyse par ondelettes est (comme nous le verrons dans cette thèse) l'outil le plus adapté à l'étude multifractale des signaux.

La plupart des signaux multifractals sont grossièrement des fonctions dont le graphe est localement une contraction du graphe complet, à une erreur près; plus précisément ce sont des fonctions satisfaisant des équations fonctionnelles de type

$$F(x) = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i F(S_i^{-1}(x)) + g(x)$$

avec des $|\lambda_i| < 1$ et S_i des contractions dans un domaine borné Ω. On parle alors de fonctions autosimilaires. Pour l'instant, du côté théorique, la fonction φ qui intervient dans la construction des ondelettes et des fonctions historiques comme celles de Polya (cf [36]) et de Rham (ou Cesaro) (cf [5] et [47]) sont autosimilaires; du côté appliqué, certains physiciens estiment que la turbulence présente certaines autosimilarités (au moins en un sens statistique).

Nous nous intéressons à deux problèmes principaux: l'analyse multifractale des fonctions autosimilaires et l'étude de la validité du formalisme multifractal. Notons que des cas particuliers ont été déjà étudiés: Arneodo et al pour les primitives des mesures de probabilités invariantes sur $\Omega =]0,1[$ avec la condition de séparation dite forte: "$S_i(\overline{\Omega}) \cap S_j(\overline{\Omega}) = \emptyset$ pour $i \neq j$" (cf [3]); Daubechies et Lagarias (cf [24]) pour une certaine famille de fonctions d'échelle $\varphi(x) = \sum_{n=0}^{3} c_n \varphi(2x-n)$ avec $c_0 = \beta$, $c_1 = \frac{1}{2} + \beta$, $c_2 = 1 - \beta$, $c_3 = \frac{1}{2} - \beta$ et $1/2 < \beta < 3/4$; et Jaffard (cf [33]) pour les exposants de Hölder inférieurs à la régularité globale de g, quand les S_i sont des similitudes (donc en quelque sorte linéaires) et vérifient la condition de séparation: "$S_i(\Omega) \cap S_j(\Omega) = \emptyset$ pour $i \neq j$" et g est régulière et bien localisée.

Nous nous proposons dans cette thèse d'étudier la multifractalité et la validité du formalisme multifractal pour les fonctions autosimilaires dans le cas où telles restrictions ne seront plus satisfaites. Le plan de cette thèse est le suivant:

Le premier chapitre contient les diverses notions mathématiques essentielles dans notre étude et montre comment les ondelettes interviennent tout naturellement pour extraire ces informations locales et globales à la fois en temps et en fréquence.

Dans le second chapitre, nous généralisons les résultats de Jaffard dans le cas où les S_i sont des contractions monodimensionnelles non linéaires et en 2 dimensions quand les S_i sont des fonctions analytiques de $z = x + iy$ (cf [7]) : l'estimation, partout, de la taille de la

transformée en ondelettes $C_{a,b}$ de la fonction autosimilaire F permet de déterminer exactement la régularité de F en tout point. Ainsi les ensembles de singularités E^α sont bien caractérisés. Pour calculer leurs dimensions, donc le spectre des singularités, on construit sur ces ensembles une certaine famille de mesures de probabilités invariantes ayant certaines propriétés de "scaling locaux". Ces propriétés permettent de majorer le spectre; de plus l'une de ces mesures fournit la bonne minoration. On montre ainsi que ces fonctions sont multifractales. L'estimation de la taille de $C_{a,b}$ permet également de calculer exactement la fonction $\eta(p)$ et enfin on prouve que le spectre des singularités correspond bien à la transformée de Legendre de $\eta(p) - m$, ou de $\zeta(p) - m$, $m = 1$ pour les contractions monodimensionnelles, 2 pour les contractions analytiques de $z = x + iy$.
Localement nos contractions sont dans un certain sens (précisé dans le Lemme 1 du chapitre 2) "presque linéaires" lorsque qu'on est en 1 dimension, et contractent presque de la même façon en 2 dimensions. Ainsi, grâce à des procédés bien adaptés à l'analyse par ondelettes, le travail reprendra certaines techniques développées dans (cf [33]).

Le troisième chapitre sera consacré à l'étude des fonctions autosimilaires de R^m, $m \geq 2$, avec des contractions non homogènes, c'est à dire des S_i qui contractent de façons différentes selon chaque direction. En prenant des modèles bien précis (cf [6]), nous montrerons que contrairement aux fonctions $\eta(p)$ et $\zeta(p)$, le spectre des singularités $d(\alpha)$ dépend de la disposition géométrique des $S_i(\Omega)$; ces modèles sont multifractals mais le formalisme multifractal échoue. On se propose alors de le reformuler afin qu'il soit compatible avec ce genre d'anisotropie. En pratique, la transformée en ondelettes classique, qui est homogène en fréquence ne parvient pas à détecter les singularités des séries non homogènes, et sera remplacée par une transformée en ondelettes ayant la même anisotropie que celle des fonctions autosimilaires. Ces ondelettes ont été déjà utilisées par Calderón et Torchinsky (cf [12] et [13]), Folland et Stein (cf [29]) afin de caractériser les espaces $\mathcal{H}^p(\mathrm{R}^m)$ non homogènes. En faisant des modifications analogues pour les notions mathématiques qui apparaissent dans le formalisme multifractal, nous fournirons les bonnes caractérisations pour les nouvelles singularités, nous déterminerons le spectre des singularités qui convient pour une famille plus large de fonctions autosimilaires non homogènes et enfin nous prouverons la validité du nouveau formalisme.

Le quatrième chapitre fera l'objet de l'extension des résultats obtenus par Daubechies et Lagarias (cf [24]) à une classe plus large de fonctions d'échelle $\varphi(x) = \sum_{n=0}^{N} c_n \varphi(kx-n)$; Dans [24], les c_n vérifient $\sum_{n=0}^{N} c_n(-1)^n n^l = 0$ pour $l = 0, \ldots, L$ avec $L = N-2$, alors que le filtre de nos fonctions a moins de règles de somme, on a en fait $L < N-2$. Ces fonctions sont autosimilaires avec des contractions ne respectant pas la condition de séparation (c'est à dire que les $S_n(\Omega)$ se recouvrent). On prouvera aussi qu'aux points rationnels, ces fonctions manifestent des comportements oscillatoires que l'on qualifie de chirps logarithmiques. Enfin, nous vérifions que la fonction de de Rham (ou Cesaro) se ramène à une fonction autosimilaire avec une fonction d'erreur g discontinue et nous fournirons une méthode différente de celle de Meyer (cf [47]) pour montrer sa multifractalité et le formalisme multifractal.

Nous nous proposons dans le cinquième chapitre de ce mémoire d'étudier la multifractalité et la validité du fomalisme multifractal pour les exposants de Hölder supérieurs à

la régularité uniforme de la fonction d'erreur g. L'exemple de la fonction de de Rham est un cas résolu dans le chapitre 4. Mais en prenant les deux contractions affines qui transforment l'intervalle $[0,1]$ en $[0,1/2]$ respectivement $[1/2,1]$ et g égale à la fonction $\Lambda(x)$ de la base de Schauder, nous montrerons que les fonctions autosimilaires qui en découlent révèlent plusieurs changements au niveau de l'aspect multifractal et la validité du formalisme multifractal.

Chapitre 1

Analyse Multifractale et Formalisme Multifractal

Suite à des études expérimentales, les physiciens ont mis en évidence l'existence de phénomènes d'intermittence interne (ou intermittence de dissipation) dans la turbulence pleinement développée, et ont eu l'idée d'interpréter ces structures en terme d'une hiérarchie de singularités portées par des ensembles fractals ayant des dimensions différentes. La détermination des singularités est dite analyse multifractale et le calcul des dimensions des ensembles des singularités donne le spectre des singularités. On peut trouver des résultats intéressants concernant l'analyse multifractale des mesures dans [11], [20], [28], [38], [41], [43], [44], [50], [51], [52], [53], [54]...; Nous rappèlerons et utiliserons ce formalisme dans le chapitre 4. Plus récemment, une analyse multifractale a été introduite pour les capacités de Choquet qui sont en fait des fonctions d'ensembles croissantes et régulières mais non additives (cf [40]). Ce dernier formalisme est très important dans le champ de l'analyse des images et surtout pour la détection des contours (cf [14]).
En ce qui concerne les fonctions, des arguments heuristiques ont permis à des physiciens de relier ce spectre à des moyennes spatiales extraites de la vitesse de l'écoulement. Ces relations sont appelées Formalisme Multifractal.

On se propose dans ce chapitre de rappeler ce formalisme ainsi que les diverses notions mathématiques qui y apparaissent, à savoir la régularité Hölderienne ponctuelle, les ensembles des singularités, le spectre des singularités, les L^p-modules de continuités, la transformée en ondelettes et les espaces de Besov. On précisera comment les ondelettes interviennent tout naturellement pour extraire ces informations locales et globales à la fois en temps et en fréquence.

Soit x_0 un point de R^m et F une fonction définie au voisinage de x_0. Alors on cherche les exposants α tels qu'il existe un polynôme P de degré strictement inférieur à α, un voisinage de x_0 et une constante C, tels que l'on ait

$$|F(x) - P(x - x_0)| \leq C|x - x_0|^\alpha \,. \tag{1.1}$$

On dit alors que F est α-Hölderienne au point x_0 et on note $F \in C^\alpha(x_0)$.
Remarquons que le polynôme $P(x - x_0)$ correspond au développement en série de Taylor de F autour du point x_0 jusqu'à l'ordre $[\alpha]$ (s'il existe), où $[\alpha]$ est la partie entière de α.

Si $|x - x_0| \leq 1$ et $\beta \leq \alpha$, on a $|x - x_0|^\alpha \leq |x - x_0|^\beta$; donc $F \in C^\alpha(x_0)$ implique que

$F \in C^{\beta}(x_0)$ et cela explique la définition suivante.

Définition 1 *On définit l'exposant de Hölder ponctuel $\alpha(x_0)$ comme la borne supérieure des α pour lesquels (1.1) est vérifiée. $\alpha(x_0)$ est aussi dit la régularité Hölderienne ponctuelle de F en x_0, ou encore la singularité de F en x_0.*

On dit que F appartient à l'espace de Hölder global $C^{\alpha}(\mathrm{R}^m)$ si (1.1) est vraie pour tout x et x_0 avec une constante C uniforme.

La détermination de l'exposant de Hölder ponctuel fournit une information importante sur le comportement local de la fonction F; Cet exposant peut être très régulier comme pour la fonction de Weierstrass $\sum a^n \cos \pi b^n x$, $0 < a < 1$, $b > 1$ et $ab > 1$, les escaliers du diable, ou le Brownien qui conduisent à $\alpha(x)$ égale à une constante pour tout x; ou au contraire très irrégulier; dans ce dernier cas, on peut s'intéresser à la "taille" des ensembles des points ayant un exposant de Hölder donné.

Définition 2 *Le spectre des singularités de la fonction F est l'application qui à tout α fixé associe la dimension de Hausdorff de l'ensemble E^{α} des points x où $\alpha(x) = \alpha$ (dit ensemble des singularités).*

La dimension de Hausdorff permet de définir la dimension des ensembles de mesure (de Lebesgue) nulle. Soit $E \subset \mathrm{R}^m$ un ensemble non vide (par convention, la dimension de Hausdorff de l'ensemble vide est égale à $-\infty$); Pour tout $\epsilon > 0$ on considère tous les recouvrements dénombrables de E par des boules $B_1, B_2, \ldots, B_n, \ldots$ de diamètre inférieur à ϵ. On considère alors $M_{d,\epsilon}(E) = \inf\{\sum_{n=1}^{\infty} diam(B_n)^d\}$. la borne inférieure étant calculée sur ces recouvrements. Quand ϵ tend vers 0, il y a de moins en moins de recouvrements et donc $M_{d,\epsilon}(E) \nearrow M_d(E)$.
On définit la d-mesure de Hausdorff de E par $M_d(E)$. La dimension de Hausdorff de E est

$$d_H(E) = \sup\{d > 0 : M_d(E) = \infty\} = \inf\{d > 0 : M_d(E) = 0\}.$$

On la note aussi $dim_H(E)$ ou $d(E)$.

D'autres dimensions plus simples ont été introduites, mais donnent moins d'informations. Par exemple la dimension de capacité introduite par Kolmogorov (voir [39]) et définie par

$$d_C(E) = \limsup_{\epsilon \mapsto 0} \frac{\log N_\epsilon(E)}{\log 1/\epsilon}$$

où $N_\epsilon(E)$ est le nombre de cubes d'un pavage P_ϵ de R^m par des cubes de volume ϵ^m, qui contiennent une partie de E, ne permet pas de distinguer entre un ensemble ouvert et sa fermeture. Ceci pose des problèmes.

Si elle est bien définie mathématiquement, la dimension de Hausdorff est cependant difficile à calculer et se prête mal à des estimations numériques. Les physiciens ont alors essayé de relier le spectre des singularités à des quantités faisant intervenir des moyennes extraites du signal et numériquement plus stables. Des arguments heuristiques ont permis à Frisch et Parisi de proposer une formule qui relie le spectre $d(\alpha)$ à l'ordre de grandeur des L^p-modules de continuités

$$\int_{\mathbf{R}^m} | F(x+h) - F(x) |^p \, dx \sim |h|^{\zeta(p)} \quad \text{quand} \quad |h| \mapsto 0 \,, \tag{1.2}$$

c'est à dire

$$\zeta(p) = \liminf_{|h| \mapsto 0} \frac{\log \int_{\mathbf{R}^m} |F(x+h) - F(x)|^p \, dx}{\log |h|}. \tag{1.3}$$

La conjecture de Frisch et Parisi fournit le spectre pour les singularités comprises entre 0 et 1 à partir d'une transformée de Legendre de $\zeta(p) - m$

$$d(\alpha) = \inf_p (\alpha p - \zeta(p) + m) \, . \tag{1.4}$$

L'idée intuitive est la suivante : on décompose l'intégrale (1.2) successivement sur les différents ensembles des singularités E^α; on utilise $|h|^{-d(\alpha)}$ boules de diamètres inférieurs à $|h|$ pour recouvrir E^α. Ainsi la contribution de l'ensemble des singularités E^α à la valeur moyenne de $|F(x+h) - F(x)|^p$ est de l'ordre de grandeur de $|h|^{-d(\alpha)} |h|^{\alpha p} |h|^m$ c'est à dire $|h|^{\alpha p - d(\alpha) + m}$. Quand $|h|$ tend vers 0, le terme dominant est celui dont l'exposant est le plus petit possible, ce qui conduit à

$$\zeta(p) = \inf_\alpha (\alpha p - d(\alpha) + m) \tag{1.5}$$

et si le spectre $d(\alpha)$ est concave, la relation (1.4) en découle.

Arneodo, Bacry et Muzy (cf [2]) ont remarqué que cette conjecture souffre de plusieurs limitations : si le signal étudié est assez régulier (par exemple C^1), alors $\zeta(p) = p$ et ne tient pas compte des singularités qui peuvent exister dans les dérivées d'ordre supérieur. Ils ont alors proposé de remplacer $\zeta(p)$ par une quantité $\eta(p)$ qui donne des estimations globales sur la transformée en ondelettes du signal

$$\int_{\mathbf{R}^m} |C_{a,b}(F)|^p \, db \sim a^{\eta(p)} \quad \text{quand} \quad a \mapsto 0 \, ; \tag{1.6}$$

Cette estimation fournit le sup des exposants s tels que F appartient à l'espace de Besov $B_p^{s/p,\infty}(\mathrm{R}^m)$ dont la caractérisation par la transformée en ondelettes est donné par (cf [45])

$$\int |C_{a,b}(F)|^p db \leq C a^s \quad \text{pour} \quad a \text{ assez petit.} \tag{1.7}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \eta(p) &= \sup\{s \, : \, F \in B_p^{s/p,\infty}(\mathrm{R}^m)\} \\ &= \liminf_{a \mapsto 0} \frac{\log \int |C_{a,b}(F)|^p \, db}{\log a} \, . \end{aligned} \tag{1.8}$$

Définition 3 *Soit ψ une ondelette analysatrice. On appelle transformée d'ondelette d'une fonction F de $L^2(\mathrm{R}^m)$ à l'échelle $a > 0$ et à la position $b \in \mathrm{R}^m$ la quantité*

$$C_{a,b}(F) = \frac{1}{a^m} \int_{\mathbf{R}^m} F(x) \bar{\psi}(\frac{x-b}{a}) \, dx \, . \tag{1.9}$$

L'ondelette analysatrice $\psi(x)$ (cf [45]) est une fonction assez régulière (par rapport à la fonction qu'on veut analyser), localisée (ψ est à décroissance rapide à l'infini ainsi que toutes ses dérivées supérieures) et oscillante (ψ a assez de moments nuls). Cela veut dire que $\psi(x)$ est bien localisée à la fois dans l'espace et dans l'espace de Fourier.

Arneodo et al proposent donc pour tout α positif la relation suivante

$$d(\alpha) = \inf_p (\alpha p - \eta(p) + m) . \tag{1.10}$$

Expliquons le rapport entre $\zeta(p)$ et $\eta(p)$. Pour $s \geq 0$; s non entier, $s = [s] + \sigma$ avec $[s]$ la partie entière de s; et $p \geq 1$, on note $H^{s,p}(\mathrm{R}^m)$ l'espace de Nikol'skij des $F \in L^p(\mathrm{R}^m)$ telles que pour tout multi-indice γ tel que $|\gamma| = [s]$ et $|h|$ assez petit

$$\int |\partial^\gamma F(x+h) - \partial^\gamma F(x)|^p \, dx \leq C|h|^{\sigma p} ; \tag{1.11}$$

On considère

$$\xi(p) = \sup\{s : \ F \in H^{s/p,p}(\mathrm{R}^m)\} .$$

Il est clair que pour $p \geq 1$ et $\zeta(p) < p$, on a $\zeta(p) = \xi(p)$. D'autre part, grâce aux injections

$$\forall \epsilon > 0 \quad H^{s+\epsilon,p}(\mathrm{R}^m) \hookrightarrow B_p^{s,\infty}(\mathrm{R}^m) \hookrightarrow H^{s-\epsilon,p}(\mathrm{R}^m) \tag{1.12}$$

pour $p \geq 1$ et $s > 0$ (cf [1]), on aura

$$\xi(p) = \eta(p) \quad \text{pour } p \geq 1 . \tag{1.13}$$

Ainsi, pour $p \geq 1$, si $\eta(p) < p$ (ou $\zeta(p) < p$) alors $\zeta(p) = \eta(p)$ et les formules (1.4) et (1.10) sont équivalentes pour $0 < \alpha \leq 1$.

Si $\zeta(p) \geq p$, alors (1.3) doit être modifiée comme suit pour qu'elle soit compatible avec (1.11): si elle est égale à p, on doit utiliser la même formule mais avec le gradient de F, et ainsi de suite jusqu'à ce que $\zeta(p)$ soit comprise entre deux entiers multipliés par p. Après ces modifications, la relation

$$d(\alpha) = \inf_p (\alpha p - \xi(p) + m) \tag{1.14}$$

peut être vue comme une généralisation de la conjecture de Frisch et Parisi et coïncide exactement avec celle d'Arneodo et al, grâce à (1.13).

La conjecture d'Arneodo et al est donc plus générale que celle de Frisch et Parisi. A priori elle fournit des résultats numériques plus stables parce qu'elle fait intervenir des moyennes de la fonction (sa transformée en ondelettes) et non pas ses valeurs ponctuelles qui peuvent être entachées d'erreurs. Mais le grand avantage est que comme la fonction $\eta(p)$, la régularité Hölderienne ponctuelle est aussi liée à la transformée en ondelettes. Ce dernier rapport fait intervenir la notion des espaces 2-microlocaux introduits pour étudier la propagation des singularités des solutions de certaines équations aux dérivées partielles non linéaires (cf [8] et [9]); Définissons ces espaces;

Définition 4 *Une distribution tempérée F appartient à l'espace 2-microlocal $C^{\alpha,\alpha'}(x_0)$ si pour $0 < a < 1$ et $|b - x_0| \leq 1$*

$$|C_{a,b}(F)| \leq Ca^\alpha \left(1 + \frac{|b - x_0|}{a}\right)^{-\alpha'} . \tag{1.15}$$

Cette définition (qui utilise la transformée en ondelette continue) ne dépend pas de la base d'ondelette choisie.

Le théorème fondamental qui relie la régularité Hölderienne ponctuelle aux espaces 2-microlocaux a été découvert par Jaffard (cf [34] ou [37]) et s'énonce comme suit

Théorème 1 *Soit ψ une ondelette dans $C^k(\mathrm{R}^m)$, localisée et dont les moments d'ordre inférieur à k s'annulent; Soit $\alpha < k$. Alors on a*

- **(i)** *Si $F \in C^{\alpha}(x_0)$, alors $F \in C^{\alpha,-\alpha}(x_0)$.*
- **(ii)** *Si $F \in C^{\alpha,-\alpha'}(x_0)$ avec $\alpha' < \alpha$, alors $F \in C^{\alpha}(x_0)$.*
- **(iii)** *Si $F \in C^{\alpha,-\alpha}(x_0)$ et $F \in C^{\beta}(\mathrm{R}^m)$ pour un $\beta > 0$, alors il existe un polynôme P de degré au plus α, un voisinage de x_0 et une constante C, tels que*

$$|F(x) - P(x - x_0)| \leq C|x - x_0|^{\alpha} \log\left(\frac{2}{|x - x_0|}\right) \tag{1.16}$$

(en particulier $F \in C^{\alpha-\varepsilon}(x_0)$ $\forall \varepsilon > 0$).

Pour comprendre comment les propriétés des ondelettes interviennent dans ce théorème, on va rappeler la preuve du point **(i)**. Grâce à la cancellation de l'ondelette on a

$$\begin{aligned} |C_{a,b}(F)| &= \frac{1}{a^m}\Big|\int_{\mathbf{R}^m} (F(x) - P(x - x_0))\ \psi(\frac{x-b}{a})\, dx\Big| \\ &\leq \frac{1}{a^m}\int C\ |x - x_0|^{\alpha}\ |\psi(\frac{x-b}{a})|\, dx\,, \end{aligned}$$

en utilisant la localisation de l'ondelette, on majore le dernier terme par

$$\begin{aligned} &\frac{C}{a^m}\int |x - x_0|^{\alpha}\ \frac{1}{(1 + |\frac{x-b}{a}|)^N}\, dx \\ &\leq \frac{C}{a^m}\int (|x - b|^{\alpha} + |b - x_0|^{\alpha})\ \frac{1}{(1 + |\frac{x-b}{a}|)^N}\, dx \\ &\leq C(a^{\alpha} + |b - x_0|^{\alpha})\,. \end{aligned}$$

Pour la preuve des points **(ii)** et **(iii)**, on n'utilise que la régularité et la localisation de l'ondelette et des estimations sur les termes $W(a,x)(F)$ (et leurs dérivées supérieures) qui apparaissent dans la formule de reconstruction

$$\begin{aligned} F(x) &= C_{\psi}\int_{a>0}\int_{b\in\mathbf{R}^m} C_{a,b}(F)\ \psi\left(\frac{x-b}{a}\right)\, db\, \frac{da}{a^{m+1}} \\ &= C_{\psi}\int_{a>0} W(a,x)(F)\, \frac{da}{a^{m+1}} \end{aligned}$$

où C_{ψ} est une constante ne dépendant que de l'ondelette ψ. Cette remarque sera d'une importance capitale lorsque l'objet à analyser sera une série engendrée par une fonction régulière et localisée mais n'ayant pas de moments nuls.

Nous venons de voir que la transformée en ondelette permet pour un signal, d'extraire des informations locales et globales :

- En supposant que le signal F ait une certaine régularité globale positive, les points **(i)** et **(iii)** donnent la valeur exacte de l'exposant de Hölder ponctuel $\alpha(x_0)$

$$\begin{aligned} \alpha(x_0) &= \sup\{\alpha : F \in C^{\alpha,-\alpha}(x_0)\} \\ &= \sup\{\alpha : |C_{a,b}(F)| \leq Ca^{\alpha}\left(1+\tfrac{|b-x_0|}{a}\right)^{\alpha}\} \end{aligned} \tag{1.17}$$

- La transformée en ondelette caractérise aussi certaines "normes" fonctionnelles comme la fonction $\eta(p)$ pour les espaces de Besov (ou $\xi(p)$ pour les espaces de Nikol'skij).

Donc à priori, l'analyse par ondelettes est l'outil idéal pour l'analyse multifractale.

Signalons que les fonctions $\xi(p)$ et $\eta(p)$ peuvent être étendues aux p compris entre 0 et 1; La moyenne qui figure dans (1.11) a un sens pour $0 < p < 1$ et d'autre part la propriété (1.7) pour $0 < p < 1$ caractérise les espaces de Besov-Hardy. Signalons aussi que les critères portant sur la décomposition continue en ondelettes se traduisent sans modification (avec toujours $\alpha < k$ dans le Théorème 1) sur les coefficients "discrets" $C_{j,k}$ en prenant $a = 2^{-j}$ et $b = k2^{-j}$.

Maintenant, le formalisme multifractal est la propriété qui fournit le spectre des singularités à partir des formules (équivalentes) suivantes

$$d(\alpha) = \inf(\alpha p - \zeta(p) + m) \quad \text{pour } \alpha < 1\,; \quad d(\alpha) = \inf(\alpha p - \xi(p) + m) \tag{1.18}$$

et

$$d(\alpha) = \inf(\alpha p - \eta(p) + m)\,. \tag{1.19}$$

En général, le formalisme multifractal n'est pas vrai; En utilisant les critères de régularité ponctuelle et la caractérisation de $\eta(p)$ par les coefficients d'ondelettes, Jaffard a construit deux séries d'ondelettes ayant la même fonction $\eta(p)$ mais des spectres des singularités différents (cf [32]). Ceci prouve que la fonction $\eta(p)$ ne contient pas assez d'information pour déterminer le spectre des singularités. Cependant si la condition $\eta(p) > m\ \forall p$ est satisfaite alors on a $d(\alpha) \leq \inf(\alpha p - \eta(p) + m)$ (cf [32]).

Ainsi le problème de la validité du formalisme multifractal n'est pas trivial, on doit donc chercher des hypothèses convenables sur le signal à partir desquelles le spectre des singularités peut être calculé grâce au formalisme précédent.

Les fonctions autosimilaires constituent une classe de fonctions pour laquelle ce problème est non seulement très intéressant mais en plus accessible : d'une part ces fonctions s'expriment explicitement sous la forme de séries "semblables" aux séries d'ondelettes; ceci facilite en quelque sorte le calcul de l'exposant de Hölder ponctuel $\alpha(x)$ et de la fonction $\eta(p)$; d'autre part, ces fonctions sont définies à partir d'une analogie avec les ensembles (dits autosimilaires) qui sont des unions finies de sous ensembles disjoints se déduisant par similitudes contractantes, comme par exemple le Cantor triadique et la courbe de Von Koch; ces ensembles ont été très étudiés ainsi que les mesures qu'ils portent; ils interviennent dans la modélisation de nombreux phénomènes physiques (cf [2], [27], [31]); grâce à des propriétés de "scaling locaux" (cf [27]), ces mesures permettent un calcul plus simple pour les dimensions de Hausdorff des ensembles des singularités des fonctions autosimilaires.

Signalons enfin que ces dernières permettent de modéliser les structures turbulentes des écoulements.
Voici la définition d'une fonction autosimilaire qui a été prise par Jaffard (cf [32])

Définition 5 *Une fonction $F : \mathrm{R}^m \to \mathrm{R}$ est autosimilaire (d'ordre $k \geq 0$) si:*

- *Il existe un domaine borné Ω et des similitudes contractantes $S_1, \ldots, S_d$ (S_i est le produit d'une isométrie par l'homothétie $x \mapsto \mu_i x$ où $0 < \mu_i < 1$) vérifiant*

$$S_i(\Omega) \subset \Omega \tag{1.20}$$

$$S_i(\Omega) \cap S_j(\Omega) = \emptyset \quad si \quad i \neq j \,. \tag{1.21}$$

- *Il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_d$ tels que $0 < |\lambda_i| < 1 \; \forall i = 1, \ldots, d$ et une fonction g C^k et à décroissance rapide à l'infini ainsi que ses dérivées d'ordre au plus k tels que*

$$F(x) = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i F(S_i^{-1}(x)) \; + \; g(x) \,. \tag{1.22}$$

- *La fonction F n'est pas uniformément C^k dans un fermé non vide de Ω .*

L'autosimilarité décrite dans (1.22) s'interprète par le fait que le graphe de F est localement une contraction de son graphe complet, à une erreur régulière g près; Et Jaffard a prouvé la validité du formalisme multifractal pour cette classe de fonctions pour les exposants de Hölder inférieurs à k (cf [33]).

Notre but dans cette thèse est de faire l'analyse multifractale et d'étudier la validité du formalisme multifractal pour les fonctions "autosimilaires" dans le cas où telles hypothèses ne seront plus satisfaites. Dans le prochain chapitre, nous commençons par généraliser les résultats de Jaffard dans le cas où les S_i sont des contractions monodimensionnelles non linéaires et en 2 dimensions quand les S_i sont des contractions analytiques de la variable complexe $z = x + iy$.

Chapitre 2

Formalisme Multifractal pour les Fonctions Autosimilaires Non Linéaires

Résumé. On montre que le formalisme multifractal est vrai pour les fonctions autosimilaires associées à des contractions non-linéaires. L'idée fondamentale est que localement, ces contractions se comportent "presque comme" des similitudes.

2.1 Introduction

La validité du formalisme multifractal a été vérifiée pour les fonctions autosimilaires définies à la fin du premier chapitre (cf [33]). Chacune des contractions S_i associées est une similitude, c'est à dire produit d'une isométrie par une homothétie $x \mapsto \mu_i x$ où $0 < \mu_i < 1$, donc linéaire en quelque sorte. Dans ce chapitre, on se propose d'étudier le cas non linéaire. On va commencer par une extension très simple des résultats de Jaffard, puis on étudiera des cas beaucoup plus importants.

Soit $F : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ une fonction autosimilaire d'ordre k selon la définition 5

$$F(x) = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i F(S_i^{-1}(x)) \; + \; g(x) \; ; \tag{2.1}$$

Les S_i sont donc des contractions affines, donc de la forme $\mu_i x + a_i$ avec $\mu_i < 1$.

Soit φ une fonction bijective de R ayant des dérivées classiques continues bornées jusqu'à l'ordre k et telle qu'il existe une constante $c > 0$ telle que $|\varphi'(x)| \geq c \; \forall x \in \mathrm{R}$ (on dit alors que φ est un C^k-difféomorphisme de R); Supposons que

$$\mu_i \, \frac{\sup \varphi'(x)}{\inf \varphi'(x)} < 1 \quad \forall i = 1, \ldots, d \tag{2.2}$$

et posons

$$\tilde{\Omega} = \varphi^{-1}(\Omega) \;\; ; \;\; T_i = \varphi^{-1} \circ S_i \circ \varphi \, ;$$

$$\tilde{g} = g \circ \varphi \text{ et } \tilde{F} = F \circ \varphi \, ;$$

Grâce à (2.2), les applications T_i sont alors des contractions non affines de R et vérifient

$$T_i(\tilde{\Omega}) \subset \tilde{\Omega}$$

et la condition de séparation

$$T_i(\tilde{\Omega}) \cap T_j(\tilde{\Omega}) = \emptyset \quad \text{si} \quad i \neq j \ ;$$

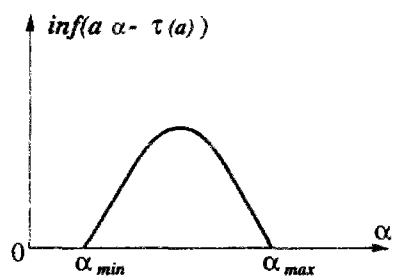
$\tilde{g}$ est C^k et est à décroissance rapide ainsi que ses dérivées d'ordre au plus k;
$\tilde{F}$ n'est pas uniformément C^k dans un fermé non vide de $\tilde{\Omega}$ et satisfait l'équation

$$\tilde{F}(x) = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i \tilde{F}(T_i^{-1}(x)) \ + \ \tilde{g}(x) \ ; \tag{2.3}$$

Donc $\tilde{F}$ est "autosimilaire" sous l'action des contractions non affines T_i.
Le C^k-difféomorphisme φ conserve l'exposant de Hölder ponctuel pour $\alpha < k$ parce que dans ce cas il y a une équivalence triviale entre $F \in C^\alpha(x_0)$ et $\tilde{F} \in C^\alpha(\varphi^{-1}(x_0))$. Il s'ensuit que la fonction $\tilde{F}$ a le même spectre des singularités que celui de F. D'autre part, les espaces de Besov sont stables par composition à droite par le difféomorphisme φ; on a en fait (cf [10], [56] et [57]) l'équivalence entre $F \in B_p^{s,p}(\mathrm{R})$ et $\tilde{F} \in B_p^{s,p}(\mathrm{R})$ pour $0 < s < k$. Ainsi la fonction $\eta(p)$ (respectivement $\zeta(p)$ et $\xi(p)$) est la même pour F et $\tilde{F}$.
Il en résulte donc que le formalisme multifractal est aussi vrai pour la fonction $\tilde{F}$; D'après [33], le spectre des singularités de la fonction "autosimilaire" $\tilde{F}$ est donc concave, il est porté par l'intervalle $[\alpha_{min}, \alpha_{max}]$ avec

$$\alpha_{min} = \inf_{i=1,\ldots,d} \frac{\log|\lambda_i|}{\log \mu_i} \quad \text{et} \quad \alpha_{max} = \sup_{i=1,\ldots,d} \frac{\log|\lambda_i|}{\log \mu_i}$$

et est égal à $\inf_a(a\alpha - \tau(a))$ pour $\alpha \in [\alpha_{min}, \alpha_{max}]$, $\alpha < k$; où $\tau(a)$ est définie implicitement par $\sum_{i=1}^{d} |\lambda_i|^a \mu_i^{-\tau(a)} = 1$.



Ce résultat se généralise sans aucune difficulté aux fonctions "autosimilaires" non linéaires en dimension supérieure construites comme auparavant.

Maintenant, on peut poser la question suivante: quelles conditions doivent satisfaire des contractions non linéaires (i.e qui ne sont pas des similitudes) T_i $(i = 1, \ldots, d)$ de R^m, vérifiant pour $\tilde{\Omega}$ un ouvert borné $T_i(\tilde{\Omega}) \subset \tilde{\Omega}$ et la condition de séparation, pour qu'il existe un C^k-difféomorphisme φ sur R^m (notons que pour $k = 1$, il suffit de trouver φ uniformément bilipschitzienne sur R^m et "C^1-difféomorphisme presque partout" dans le

sens que c'est un C^1-difféomorphisme sur un ouvert de R^m de complémentaire négligeable pour la mesure de Lebesgue) et des similitudes contractantes S_i de telle façon que l'on ait

$$T_i = \varphi^{-1} \circ S_i \circ \varphi \text{ pour tous les } i \, .$$

Pour simplifier ce problème, on va supposer que T_1 et T_2 sont deux contractions non affines définies seulement sur $I = [0,1]$, et vérifient $T_1(I) \subset I$, $T_2(I) \subset I$ et la condition de séparation $T_1(I) \cap T_2(I) = \emptyset$. Le sens de l'autosimilarité devient alors

$$F(x) = \begin{cases} \lambda_j F(T_j^{-1}(x)) + g(x) & \text{si } x \in T_j(\Omega) \\ g(x) & \text{si } x \notin \bigcup_{j=1,2} T_j(\Omega) \, ; \end{cases} \tag{2.4}$$

avec $\Omega =]0,1[$. Ce sens correspond bien à l'autosimilarité décrite dans (1.22) pour le cas des similitudes lorsque g est à support compact dans $\bar{\Omega}$. De ce fait, on aura uniquement besoin des valeurs de la fonction g sur I, et l'hypothèse de la décroissance rapide de g à l'infini sera par contre remplacée par le fait que g devrait être à support compact dans I.

La réponse (condition nécessaire et suffisante) à la question précédente pour $k = 1$ est fournie par la proposition suivante

Proposition 1 *On suppose que T_1 et T_2 sont de classe C^1 et strictement monotones sur I. On pose*

$$I_1 = T_1([0,1]) \; ; \; I_2 = T_2([0,1])$$

et

$$\mathcal{T} = I \setminus (T_1(]0,1[) \cup T_2(]0,1[)) \, ;$$

S'il existe une constante $C \geq 1$ telle que pour tout x appartenant à l'intérieur (topologique) de $\mathcal{T}$ que l'on note $\overset{o}{\mathcal{T}}$, tout $n \in \mathrm{N}$ et tout n-uplet $(i_1, \ldots, i_n) \in \{1,2\}^n$

$$C^{-1} |I_{i_1}| \ldots |I_{i_n}| \leq |(T_{i_1} \circ \ldots \circ T_{i_n})'(x)| \leq C |I_{i_1}| \ldots |I_{i_n}| \tag{2.5}$$

(où $|I_i|$ représente la longueur de I_i); alors il existe φ uniformément bilipschitzienne sur I et "C^1-difféomorphisme presque partout" sur I, et des similitudes contractantes S_i telles que

$$T_j = \varphi^{-1} \circ S_j \circ \varphi \text{ pour } j = 1,2 \, .$$

Preuve :
Evidemment, la condition (2.5) est possible, il suffit pour cela de prendre l'exemple précédent avec $\mu_i = |I_i|$).
La preuve de cette proposition découle d'une construction géométrique et du théorème du point fixe. Sans perdre la généralité, on peut supposer que T_1 et T_2 sont strictement croissantes et que $T_1(1) < T_2(0)$ (vu la condition de séparation). Pour construire les contractions affines S_i, on doit distinguer les quatre cas géométriques suivants: $T_1(0) > 0$ et $T_2(1) < 1$; $T_1(0) = 0$ et $T_2(1) < 1$; $T_1(0) > 0$ et $T_2(1) = 1$; $T_1(0) = 0$ et $T_2(1) = 1$.
On se contente de donner la preuve pour le premier cas, les autres cas sont analogues.

On pose $\mu_1 = |I_1|$ et $\mu_2 = |I_2|$; et on prend a_1 et a_2 tels que

$$\begin{cases} a_1 & > 0 \\ \mu_2 + a_2 & < 1 \\ \mu_1 + a_1 & < a_2 \end{cases} \tag{2.6}$$

Tels a_1 et a_2 existent: on munit le plan affine R^2 des coordonnées (x, y) et on considère les droites D_1, D_2 et D_3 d'équations respectives $x = 0$, $y = 1 - \mu_2$ et $y = x + \mu_1$; On pose $A = D_1 \cap D_2 = (0, 1 - \mu_2)$, $B = D_1 \cap D_3 = (0, \mu_1)$ et $C = D_2 \cap D_3 = (1 - \mu_1 - \mu_2, 1 - \mu_2)$. L'ensemble des points (a_1, a_2) vérifiant le système (2.6) est l'union de l'intérieur du triangle plein (ABC) avec le segment $]B, C[$.

Maintenant les contractions affines

$$S_1(x) = \mu_1 x + a_1 \text{ et } S_2(x) = \mu_2 x + a_2$$

vérifient pour $\Omega =]0, 1[$

$$S_i(\Omega) \subset \Omega \text{ et } S_1(\Omega) \cap S_2(\Omega) = \emptyset .$$

Passons maintenant à la construction de la fonction bilipschitzienne φ; on va utiliser le théorème du point fixe; On considère une fonction W de classe C^1 sur $[0, 1]$ telle que

$$W(0) = 0 \, , \; W(1) = 1 \, ; \tag{2.7}$$

et

$$\left\{ \begin{array}{lcll} W(T_1(0)) & = & S_1(W(0)) & = & a_1 \\ W(T_1(1)) & = & S_1(W(1)) & = & a_1 + \mu_1 \\ W(T_2(0)) & = & S_2(W(0)) & = & a_2 \\ W(T_2(1)) & = & S_2(W(1)) & = & a_2 + \mu_2. \end{array} \right. \tag{2.8}$$

On suppose aussi qu'il existe une constante $c \geq 1$ telle que

$$c^{-1} \leq W'(x) \leq c \quad \forall x \in [0, 1] \, . \tag{2.9}$$

On pose

$$E = \{ f : [0, 1] \to \mathrm{R} \, ; \; f \text{ continue et } f = W \text{ dans } \mathcal{T} \} \, .$$

E muni de la distance

$$d(f, g) = \sup_{x \in [0,1]} |f(x) - g(x)|$$

induite par $C([0, 1], \mathrm{R})$ est complet car il est fermé. E est aussi non vide.
On définit un opérateur P sur E par

$$(Pf)(x) = \left\{ \begin{array}{ll} f(x) & \text{si } \; x \in \mathcal{T} \\ S_i(f(T_i^{-1}(x))) & \text{si } \; x \in I_i. \end{array} \right.$$

P est bien défini grâce à (2.8).
P est un opérateur contractant sur E; en effet si f et g appartiennent à E, on a pour $x \in \mathcal{T}$:

$$|Pf(x) - Pg(x)| = 0$$

et pour $x \in I_i$:

$$\begin{array}{rcl} |Pf(x) - Pg(x)| & = & \mu_i \, |f(T_i^{-1}(x)) - g(T_i^{-1}(x))| \\ & \leq & \mu_i \, d(f, g) \, ; \end{array}$$

Il en résulte que

$$d(Pf, Pg) \leq \sup(\mu_1, \mu_2) \;\; d(f, g) \, .$$

Donc, grâce au théorème du point fixe, il existe une unique fonction $\omega \in E$ telle que $P\omega = \omega$. On a donc $\omega = W$ dans $\mathcal{T}$ et $\omega = S_i \circ \omega \circ T_i^{-1}$ sur chaque I_i.

Si $n \in \mathrm{N}$ et $(i_1, \ldots, i_n) \in \{1,2\}^n$ alors pour x appartenant à l'intérieur (topologique) de $T_{i_1} \circ \ldots \circ T_{i_n}(\mathcal{T})$ que l'on note $\overset{o}{\mathcal{T}}_{i_1,\ldots,i_n}$, on a

$$\omega(x) = a_{i_1} + \mu_{i_1} a_{i_2} + \mu_{i_1}\mu_{i_2} a_{i_3} + \ldots + \mu_{i_1} \ldots \mu_{i_{n-1}} a_{i_n} + \mu_{i_1} \ldots \mu_{i_n} W((T_{i_1} \circ \ldots \circ T_{i_n})^{-1}(x))$$

ω est donc de classe C^1 dans $\overset{o}{\mathcal{T}}_{i_1,\ldots,i_n}$ et y est strictement croissante.
ω étant continue sur $[0,1]$ donc par densité ω est une bijection bicontinue de $[0,1]$.
Maintenant, dans chaque $\overset{o}{\mathcal{T}}_{i_1,\ldots,i_n}$, on a

$$\omega'(x) = \frac{\mu_{i_1} \ldots \mu_{i_n}}{(T_{i_1} \circ \ldots \circ T_{i_n})'((T_{i_1} \circ \ldots \circ T_{i_n})^{-1}(x))} W'((T_{i_1} \circ \ldots \circ T_{i_n})^{-1}(x)) \; ;$$

Donc, grâce à la propriété (2.9) de la Proposition 1, on obtient

$$c^{-1}C^{-1} \leq \omega'(x) \leq cC \; .$$

ω est donc uniformément bilipschitzienne dans chaque composante connexe de $\overset{o}{\mathcal{T}}_{i_1,\ldots,i_n}$, et grâce à la bicontinuité, la croissance de ω et la densité de l'union de tous les "trous" $\overset{o}{\mathcal{T}}_{i_1,\ldots,i_n}$ dans $[0,1]$, on conclut que ω est uniformément bilipschitzienne dans $[0,1]$.
Maintenant, La la fonction $\varphi = \omega$ convient pour la Proposition 1.

On se propose dans ce qui suit d'étudier des fonctions autosimilaires associées à des contractions qui ne font pas partie du cas précédent. On montre que si les dérivées premières des contractions T_1 et T_2 sont majorées et minorées par des constantes comprises entre 0 et 1, et si les dérivées secondes sont bornées, alors on a une relation qui "ressemble" à (2.5), dans laquelle le produit $|I_{i_1}| \ldots |I_{i_n}|$ sera remplacé par la longueur de l'intervalle $I_{i_1,\ldots,i_n} = T_{i_1} \circ \ldots \circ T_{i_n}(I)$ que l'on note $T_i(I)$, ou encore la constante C sera remplacée par C^n et x prendra n'importe quelle valeur de $[0,1]$. Bien sûr, le difféomorphisme φ ne peut pas exister dans ce cas parce que C^n tend vers l'infini, mais en remarquant que localement la composition de ces contractions se comportent "presque" comme des similitudes et en supposant de plus que les dérivées d'ordre $3, \ldots, k+1$ des contractions T_1 et T_2 sont bornées, on parvient à faire l'analyse multifractale et montrer la validité du formalisme multifractal pour les fonctions "autosimilaires" associées grâce à des procédés bien adaptés à l'analyse par ondelettes, non seulement dans le cas monodimensionnel mais également en 2 dimensions lorsque ces contractions sont en plus $\mathbb{C}$ analytiques.

Avant de passer aux hypothèses, il faut d'abord noter que contrairement au cadre linéaire (c'est à dire celui des similitudes contractantes), les contractions non-linéaires n'ont pas généralement un sens sur R^m tout entier. Ainsi, on se restreindra à des contractions définies seulement sur un domaine borné Ω. De ce fait, on aura uniquement besoin des valeurs de la fonction g sur $\bar{\Omega}$, et l'hypothèse de la décroissance rapide de g à l'infini sera par contre remplacée par le fait que g devrait être à support compact dans $\bar{\Omega}$, qui avec l'hpothèse que les $T_j(\bar{\Omega})$ soient inclus strictement dans Ω, assurent une certaine régularité uniforme pour la fonction autosimilaire associée F. Le sens de l'autosimilarité correspond bien alors avec (2.4).

On suppose donc que les contractions T_1 et T_2 sont de classe C^{k+1} dans l'intervalle $I = [0,1]$ (respectivement C^{k+2} analytiques dans un ouvert borné Ω du plan complexe $\mathbb{C}$) et satisfont :

-

$$T_j(I) \subset]0,1[\qquad \forall \quad j = 1,2 \tag{2.10}$$

$$T_1(I) \cap T_2(I) = \emptyset \tag{2.11}$$

- il existe des constantes χ, ρ et C telles que

$$0 < \chi \leq |T_j'(x)| \leq \rho < 1 \quad \forall j = 1,2 \quad \text{et} \quad x \in I \tag{2.12}$$

et

$$| T_j^{(l)}(x) | \leq C \quad \forall j = 1,2 \; ; \; l = 2, \ldots, k+1 \quad \text{et} \quad x \in I \tag{2.13}$$

On suppose aussi que g est à support compact dans I. On suppose enfin que F n'est pas uniformément C^k sur une certaine partie non vide et fermée de $]0,1[$.
Les conditions pour le cas 2 dimensionnel sont identiques à celles du cas monodimensionnel ($k+1$ doit être remplacé par $k+2$) et à partir de maintenant, les lettres x et I peuvent être remplacées par z et la fermeture de Ω, et le long de ce chapitre, les résultats seront analogues pour les deux cas. Signalons aussi que le fait de ne prendre que deux contractions n'a aucun effet sur la suite, mais cela permet d'alléger les notations.

Grâce à Hutchinson (cf [31]), il existe un unique compact non vide K tel que

$$K = T_1(K) \cup T_2(K) \, .$$

Pour $i = (i_1, \ldots, i_n) \in \{1,2\}^n$, on note I_i l'intervalle $T_{i_1} \circ \ldots \circ T_{i_n}(I)$. Alors on a

$$\begin{aligned} K &= \{x \in I : (T_{i_1} \circ \ldots \circ T_{i_n})^{-1}(x) \in I_1 \cup I_2 \, , \quad \forall (i_1, \ldots, i_n) \in \{1,2\}^n\} \\ &= \bigcap_{n=1}^{\infty} \Big(\bigcup_{|i|=n} I_i \Big) \, . \end{aligned}$$

De la condition de séparation (2.11), il existe bijection π de $\{1,2\}^{\mathbb{N}}$ dans K, donnée par

$$\begin{aligned} \pi(i_1, \ldots, i_n, \ldots) &= \lim_{n \to \infty} T_{i_1} \circ \ldots \circ T_{i_n}(t) \\ &= \bigcap_{n=1}^{\infty} I_{(i_1, \ldots, i_n)} \, . \end{aligned}$$

La valeur de $\pi(i_1, \ldots, i_n, \ldots)$ est indépendante de t, et on appelle la séquence $(i_1, \ldots, i_n, \ldots)$ le code de $\pi(i_1, \ldots, i_n, \ldots)$.

Dans la prochaine section, on va étudier l'existence et l'unicité de la solution l'équation (2.4), puis on caculera sa régularité uniforme.

Dans la troisième section, on détermine l'exposant de Hölder $\alpha(x)$ de F en tout point.

Dans la quatrième section, on calcule le spectre des singularités.

Finalement, dans la cinquième section, on prouve la validité du formalisme multifractal.

2.2 Existence, uniqueness and global Hölder regularity

We begin by the study of the existence and uniqueness for the solution of the equation

$$F(x) = \begin{cases} \lambda_j F(T_j^{-1}(x)) \ + \ g(x) & \text{if } x \in I_j \\ g(x) & \text{if } x \notin I_1 \bigcup I_2 \end{cases} \tag{2.14}$$

which by the convention $F(T_i^{-1}(x)) = 0$ if $x \notin I_i$ coincide with the usual equation

$$F(x) = \sum_{i=1}^{2} \lambda_i F(T_i^{-1}(x)) \ + \ g(x). \tag{2.15}$$

Let now

$$B_j = \{i \ : \ 2^{-j} \leq \mid I_i \mid < 2.2^{-j}\} \ ; \tag{2.16}$$

$$\alpha_{min} = \liminf_{j\to\infty} \inf_{i\in B_j} \frac{\log \mid \lambda_i \mid}{\log \mid I_i \mid} \quad \text{and} \quad \alpha_{max} = \limsup_{j\to\infty} \sup_{i\in B_j} \frac{\log \mid \lambda_i \mid}{\log \mid I_i \mid} \ ,$$

with $\lambda_i = \lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_n}$ for $i = (i_1, \dots, i_n)$.

We will prove the following theorem

Theorem 1 *The selfsimilar equation* (2.14) *has a unique solution which is a bounded function supported in I and given by the series*

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{(i_1,\dots,i_n)} \lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_n} \, g\left(T_{i_n}^{-1} \dots T_{i_1}^{-1}(x)\right). \tag{2.17}$$

(where here by convention $g(T_{i_n}^{-1} \dots T_{i_1}^{-1}(x)) = 0$ if $x \notin I_{i_1,\dots,i_n}$.)

If furthermore $0 < \alpha_{min} \leq k$, then $F \in C^{\alpha_{min}-\varepsilon}(\mathrm{R})$, $\forall \varepsilon > 0$ (respectively $F \in C^{\alpha_{min}-\varepsilon}(\mathrm{R}^2)$ $\forall \varepsilon > 0$).

Proof:
Iterating (2.14), we obtain for $x \in I_{j_1,\dots,j_N}$,

$$F(x) = \sum_{n=0}^{N-1} \lambda_{j_1} \dots \lambda_{j_n} \, g\left(T_{j_n}^{-1} \circ \dots \circ T_{j_1}^{-1}(x)\right) \ + \ \lambda_{j_1} \dots \lambda_{j_N} \, F\left(T_{j_N}^{-1} \circ \dots \circ T_{j_1}^{-1}(x)\right) \ .$$

So, if x is in the "hole" $I_{j_1,\dots,j_N} \setminus (I_{j_1,\dots,j_N,1} \bigcup I_{j_1,\dots,j_N,2})$, then $T_{j_N}^{-1} \circ \dots \circ T_{j_1}^{-1}(x) \in I \setminus (I_1 \bigcup I_2)$ and thus $F(T_{j_N}^{-1} \circ \dots \circ T_{j_1}^{-1}(x)) = g(T_{j_N}^{-1} \circ \dots \circ T_{j_1}^{-1}(x))$, hence

$$F(x) = \sum_{n=0}^{N} \lambda_{j_1} \dots \lambda_{j_n} \, g\left(T_{j_n}^{-1} \circ \dots \circ T_{j_1}^{-1}(x)\right) \ .$$

And finally, if $x \in K$ then

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_{i_1(x)} \dots \lambda_{i_n(x)} \ g\left(T_{i_n(x)}^{-1} \dots T_{i_1(x)}^{-1}(x)\right) \ ,$$

where $(i_1(x), \ldots, i_n(x), \ldots)$ is the code of x.
Whence, F is well defined and unique; bounded since $|\lambda_1| < 1$ and $|\lambda_2| < 1$, supported in I, and satisfies (2.14).
Remark that by the convention $g(T_{i_n}^{-1} \ldots T_{i_1}^{-1}(x)) = 0$ if $x \notin I_{i_1,\ldots,i_n}$, we can write

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{(i_1,\ldots,i_n)} \lambda_{i_1} \ldots \lambda_{i_n}\, g\left(T_{i_n}^{-1} \ldots T_{i_1}^{-1}(x)\right) \quad \text{for any} \quad x \in \mathrm{R}\,;$$

and with the convention $F(T_{i_n}^{-1} \ldots T_{i_1}^{-1}(x)) = 0$ if $x \notin I_{i_1,\ldots,i_n}$, we can also write for any integer N:

$$\begin{aligned} F(x) \;=\; & \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{(i_1,\ldots,i_n)} \lambda_{i_1} \ldots \lambda_{i_n}\, g\left(T_{i_n}^{-1} \circ \ldots \circ T_{i_1}^{-1}(x)\right) \\ & + \sum_{(i_1,\ldots,i_N)} \lambda_{i_1} \ldots \lambda_{i_N}\, F\left(T_{i_N}^{-1} \circ \ldots \circ T_{i_1}^{-1}(x)\right) . \end{aligned} \tag{2.18}$$

The fundamental idea is that locally our non-linear contractions T_i can be uniformly approximated by similitudes in the following sense (see [50] and [53]):

Lemma 1 *There exists a constant $\mathcal{D} \geq 1$ such that*

$$\mathcal{D}^{-1} \mid I_i \mid^{-1} \leq |(T_i^{-1})'(x)| \leq \mathcal{D} \mid I_i \mid^{-1} \quad \forall x \in I_i\,, i \in \{1,2\}^n \; and \; n \in \mathbf{N}$$

where $|I_i|$ denotes the diameter of I_i and $T_i = T_{i_1} \circ \ldots \circ T_{i_n}$.

Proof:
We have

$$\mid I_i \mid = \sup_{x,y \in I} |T_i(x) - T_i(y)|\,;$$

Using the mean value theorem, we get

$$|x-y| \inf_{u \in I} |T_i'(u)| \leq |T_i(x) - T_i(y)| \leq |x-y| \sup_{u \in I} |T_i'(u)|.$$

Let

$$m_i = \inf_{t \in I_i} |(T_i^{-1})'(t)| \quad \text{and} \quad M_i = \sup_{t \in I_i} |(T_i^{-1})'(t)|\,;$$

Then

$$\inf_{u \in I} |T_i'(u)| = M_i^{-1} \quad \text{and} \quad \sup_{u \in I} |T_i'(u)| = m_i^{-1}\,;$$

Hence

$$M_i^{-1} \mid I \mid \leq \mid I_i \mid \leq m_i^{-1} \mid I \mid\,. \tag{2.19}$$

For the complex case, we can assume that $|\Omega| = 1$, so in the two cases

$$M_i^{-1} \leq \mid I_i \mid \leq m_i^{-1}\,. \tag{2.20}$$

Let now $\phi : I_1 \cup I_2 \to \mathrm{R}$ be the function defined by $\phi(x) = \log|(T_j^{-1})'(x)|$ for $x \in I_j$. Thanks to the asumption (2.12) and the fact that T_1'' and T_2'' are bounded, ϕ is uniformly Lipschitz on each I_j.

Let C_ϕ be the uniform Lipschitz constant of ϕ ($C_\phi \leq max_{j=1,2} \sup_{u\in I_j} \frac{|T_j''(u)|}{|T_j'(u)|^3}$) and set

$$S_N\phi(x) = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{|i|=n} \phi(T_i^{-1}(x))$$

(with the convention $\phi(T_i^{-1}(x)) = 0$ if $x \notin I_i$).
For x and $y \in I_{\mathbf{i}}$ with $\mathbf{i} = (\mathbf{i}_1, \ldots, \mathbf{i}_N)$

$$\begin{aligned} |\, S_N\phi(x) - S_N\phi(y)\,| &\leq \sum_{n=0}^{N-1} |\phi(T^{-1}_{(\mathbf{i}_1,\ldots,\mathbf{i}_n)}(x)) - \phi(T^{-1}_{(\mathbf{i}_1,\ldots,\mathbf{i}_n)}(y))| \\ &\leq C_\phi \sum_{n=0}^{N-1} |T^{-1}_{(\mathbf{i}_1,\ldots,\mathbf{i}_n)}(x) - T^{-1}_{(\mathbf{i}_1,\ldots,\mathbf{i}_n)}(y)| \\ &\leq C_\phi \sum_{n=0}^{N-1} |I_{\mathbf{i}_{n+1}\ldots\mathbf{i}_N}| \end{aligned}$$

but $T^{-1}_{(\mathbf{i}_1,\ldots,\mathbf{i}_n)}(x)$ and $T^{-1}_{(\mathbf{i}_1,\ldots,\mathbf{i}_n)}(y)$ belong to $I_{\mathbf{i}_{n+1}\ldots\mathbf{i}_N}$, so

$$\begin{aligned} |\, S_N\phi(x) - S_N\phi(y)\,| &\leq C_\phi \sum_{n=0}^{N-1} \rho^{N-n} \quad \text{(because of (2.12))} \\ &\leq \frac{C_\phi \rho}{1-\rho} < \infty . \end{aligned}$$

Hence

$$|\, S_N\phi(x) - S_N\phi(y)\,| \leq \frac{C_\phi \rho}{1-\rho} \qquad \forall \quad N \in \mathrm{N}^*, |\,\mathbf{i}\,| = N \text{ and } x, y \in I_{\mathbf{i}} . \tag{2.21}$$

But

$$\begin{aligned} S_N\phi(x) &= \sum_{n=0}^{N-1} \phi(T^{-1}_{(\mathbf{i}_1,\ldots,\mathbf{i}_n)}(x)) \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \log\left(|(T^{-1}_{\mathbf{i}_{n+1}})'(T^{-1}_{(\mathbf{i}_1,\ldots,\mathbf{i}_n)}(x))|\right) \\ &= \log\left(\prod_{n=0}^{N-1} |(T^{-1}_{\mathbf{i}_{n+1}})'(T^{-1}_{(\mathbf{i}_1,\ldots,\mathbf{i}_n)}(x))|\right) \\ &= \log\left(|(T_{\mathbf{i}}^{-1})'(x)|\right) \end{aligned}$$

hence

$$S_N\phi(x) - S_N\phi(y) = \log \frac{|(T_{\mathbf{i}}^{-1})'(x)|}{|(T_{\mathbf{i}}^{-1})'(y)|} .$$

Thus, since m_i and M_i are reached, we deduce from (2.21) that

$$\frac{M_i}{m_i} \leq e^{\frac{C_\phi \rho}{1-\rho}} . \tag{2.22}$$

Finally (2.20) and (2.22) imply Lemma 1 with $\mathcal{D} = e^{\frac{C_\phi \rho}{1-\rho}}$.

As a consequence of Lemma 1 and the mean value theorem, we have the following Lemma (often called Distortion Lemma)

Lemma 2 *There exists a positif number $\mathcal{D}$ such that for any branchs $i = (i_1, \ldots, i_n)$ and $j = (j_1, \ldots, j_m)$*

$$\mathcal{D}^{-1} \mid I_i \mid \mid I_j \mid \leq \mid I_{ij} \mid \leq \mathcal{D} \mid I_i \mid \mid I_j \mid ,$$

(with ij the branch $(i_1, \ldots, i_n, j_1, \ldots, j_m)$.)

Let us now prove that F is $C^{\alpha_{min}-\varepsilon}(\mathrm{R})$ for any $\varepsilon > 0$. For that we will use the Littlewood-Paley characterization.

We split F as a sum

$$F(x) = \sum_{j \geq 0} F_j(x) \quad \text{where} \quad F_j(x) = \sum_{i \in B_j} \lambda_i g(T_i^{-1}(x)) ,$$

(recall that B_j is defined by equation (2.16).)

Let ψ be a function in the Schwartz class such that

$$\hat{\psi}(\xi) = 0 \quad \text{for} \quad \mid \xi \mid \leq 1 \quad \text{and} \quad \mid \xi \mid \geq 8$$

$$\hat{\psi}(\xi) = 1 \quad \text{for} \quad 2 \leq \mid \xi \mid \leq 4 .$$

Let $\psi_l(x) = 2^l \psi(2^l x)$, $\omega_{l,j} = F_j * \psi_l$ and $h_{i,l} = (g \circ T_i^{-1}) * \psi_l$.

We recall that a function F belongs to $C^r(\mathrm{R})$ if and only if

$$\mid F * \psi_l(x) \mid \leq C 2^{-rl} \ \forall x \in \mathrm{R} .$$

We have

$$|h_{i,l}(x)| = \mid \int g(T_i^{-1}(y)) \ \psi_l(x-y)\, dy \mid .$$

Denote by $P_k g_x(h)$ the Taylor expansion of order k of g at x:

$$P_k g_x(h) = \sum_{q \leq k} \frac{g^{(q)}(x)}{q!} h^q . \tag{2.23}$$

It follows from the cancellation and the localization of ψ, and the fact that g is supported in I that for $x \in I_i$

$$|h_{i,l}(x)| = 2^l \mid \int_{I_i} \left(g(T_i^{-1}(y)) - P_{k-1}(g \circ T_i^{-1})_x(y-x) \right) \ \psi(2^l(x-y))\, dy \mid .$$

g being a C^k function, then

$$|h_{i,l}(x)| \leq 2^l \int |\psi(2^l(x-y))| \left(\sup_{u\in[x,y]} |(g \circ T_i^{-1})^{(k)}(u)| \right) |x-y|^k \, dy \, .$$

We will use the following result

Lemma 3 *There exists a constant $C > 0$ such that*

$$| T_i^{(l)}(x) | \leq C|I_i| \quad \forall i \in \{1,2\}^n \, , \; n \in \mathbf{N} \, ; \; l = 2, \ldots, k+1 \quad \textit{and} \quad x \in I \, ,$$

and

$$| (T_i^{-1})^{(l)}(x) | \leq C|I_i|^{-l} \quad \forall i \in \{1,2\}^n \, , \; n \in \mathbf{N} \, ; \; l = 2, \ldots, k+1 \quad \textit{and} \quad x \in I_i \, .$$

Proof:
For $i = (i_1, \ldots, i_n)$ and $x \in I$

$$T_i'(x) = T_{i_1}'(T_{i_2,\ldots,i_n}(x)) \, T_{i_2}'(T_{i_3,\ldots,i_n}(x)) \, \ldots T_{i_{n-1}}'(T_{i_n}(x)) \, T_{i_n}'(x)$$

so

$$\begin{aligned} T_i''(x) \;=\; & T_{i_1}''(T_{i_2,\ldots,i_n}(x)) \cdot (T_{i_2,\ldots,i_n}'(x))^2 \\ & + \sum_{p=2}^{n-1} T_{i_1,\ldots,i_{p-1}}'(T_{i_p,\ldots,i_n}(x)) \cdot T_{i_p}''(T_{i_{p+1},\ldots,i_n}(x)) \cdot (T_{i_{p+1},\ldots,i_n}'(x))^2 \\ & + T_{i_1,\ldots,i_{n-1}}'(T_{i_n}(x)) \cdot T_{i_n}''(x) \end{aligned}$$

It follows from Lemma 1 that

$$\begin{aligned} |T_i''(x)| \;\leq\; & C|I_{i_2,\ldots,i_n}|^2 \\ & + C \sum_{p=2}^{n-1} |I_{i_1,\ldots,i_{p-1}}| \cdot |I_{i_{p+1},\ldots,i_n}|^2 \\ & + C|I_{i_1,\ldots,i_{n-1}}| \end{aligned}$$

but

$$\sum_{p=2}^{n-1} |I_{i_1,\ldots,i_{p-1}}| \cdot |I_{i_{p+1},\ldots,i_n}|^2 \;\leq\; \sum_{p=2}^{n-1} C|I_{i_1,\ldots,i_{p-1}}| \cdot |I_{i_p}| \cdot |I_{i_{p+1},\ldots,i_n}| \cdot |I_{i_{p+1},\ldots,i_n}|$$

which by Lemma 2 will be bounded by

$$\begin{aligned} \sum_{p=2}^{n-1} C|I_{i_1,\ldots,i_n}| \cdot |I_{i_{p+1},\ldots,i_n}| \;&\leq\; C|I_{i_1,\ldots,i_n}| \sum_{p=2}^{n-1} \rho^{n-p} \\ &\leq\; C|I_{i_1,\ldots,i_n}| \, ; \end{aligned}$$

hence

$$|T_i''(x)| \leq C|I_i| \, .$$

Now, for $l = 3$,

$$\begin{aligned}
T_i^{(3)}(x) &= T_{i_1}^{(3)}(T_{i_2,\dots,i_n}(x)) \cdot (T'_{i_2,\dots,i_n}(x))^3 \\
&\quad + T''_{i_1}(T_{i_2,\dots,i_n}(x)) \cdot 2T''_{i_2,\dots,i_n}(x) \cdot T'_{i_2,\dots,i_n}(x) \\
&\quad + \sum_{p=2}^{n-1} T''_{i_1,\dots,i_{p-1}}(T_{i_p,\dots,i_n}(x)) \cdot T'_{i_p,\dots,i_n}(x) \cdot T''_{i_p}(T_{i_{p+1},\dots,i_n}(x)) \cdot (T'_{i_{p+1},\dots,i_n}(x))^2 \\
&\quad + \sum_{p=2}^{n-1} T'_{i_1,\dots,i_{p-1}}(T_{i_p,\dots,i_n}(x)) \cdot T^{(3)}_{i_p}(T_{i_{p+1},\dots,i_n}(x)) \cdot T'_{i_{p+1},\dots,i_n}(x) \cdot (T'_{i_{p+1},\dots,i_n}(x))^2 \\
&\quad + \sum_{p=2}^{n-1} T'_{i_1,\dots,i_{p-1}}(T_{i_p,\dots,i_n}(x)) \cdot T''_{i_p}(T_{i_{p+1},\dots,i_n}(x)) \cdot 2T''_{i_{p+1},\dots,i_n}(x) \cdot T'_{i_{p+1},\dots,i_n}(x) \\
&\quad + T'''_{i_1,\dots,i_{n-1}}(T_{i_n}(x)) \cdot T'_{i_n}(x) \cdot T''_{i_n}(x) \\
&\quad + T''_{i_1,\dots,i_{n-1}}(T_{i_n}(x)) \cdot T^{(3)}_{i_n}(x) \, ;
\end{aligned}$$

It follows that

$$\begin{aligned}
|T_i^{(3)}(x)| &\leq C|I_{i_2,\dots,i_n}|^3 \\
&\quad + C|I_{i_2,\dots,i_n}| \cdot |I_{i_2,\dots,i_n}| \\
&\quad + C \sum_{p=2}^{n-1} |I_{i_1,\dots,i_{p-1}}| \cdot |I_{i_p,\dots,i_n}| \cdot |I_{i_{p+1},\dots,i_n}|^2 \\
&\quad + C \sum_{p=2}^{n-1} |I_{i_1,\dots,i_{p-1}}| \cdot |I_{i_{p+1},\dots,i_n}|^3 \\
&\quad + C \sum_{p=2}^{n-1} |I_{i_1,\dots,i_{p-1}}| \cdot |I_{i_{p+1},\dots,i_n}|^2 \\
&\quad + C|I_{i_1,\dots,i_{n-1}}| \\
&\quad + C|I_{i_1,\dots,i_{n-1}}| \, ;
\end{aligned}$$

so we conclude that

$$|T_i^{(3)}(x)| \leq C|I_i| \, .$$

Now, it is easily seen that this result holds for $l \geq 4$: remark that any $\sum_{p=2}^{n-1} \dots$ will be bounded by $|I_i|$ and that C does not depend on $|i|$ because we can say that intuitively we have 8 indexes i_1, $(i_2, \dots, i_n)$, $(i_1, \dots, i_{p-1})$, $(i_p, \dots, i_n)$, i_p, $(i_{p+1}, \dots, i_n)$, $(i_1, \dots, i_{n-1})$ and i_n.

Now, let $x \in I_i$; we have

$$(T_i^{-1})'(x) = \frac{1}{T'_i(T_i^{-1}(x))}$$

so

$$\begin{aligned}
(T_i^{-1})''(x) &= -\frac{T''_i(T_i^{-1}(x)) \cdot (T_i^{-1})'(x)}{(T'_i(T_i^{-1}(x)))^2} \\
&= -T''_i(T_i^{-1}(x)) \cdot ((T_i^{-1})'(x))^3
\end{aligned}$$

thus, using the first part of Lemma 3

$$\begin{aligned} |(T_i^{-1})''(x)| &\leq C|I_i| \cdot |I_i|^{-3} \\ &\leq C|I_i|^{-2} . \end{aligned}$$

For $l = 3$;

$$\begin{aligned} (T_i^{-1})^{(3)}(x) &= -T_i^{(3)}(T_i^{-1}(x)) \cdot ((T_i^{-1})'(x))^4 \\ &\quad -3T_i''(T_i^{-1}(x)) \cdot (T_i^{-1})''(x) \cdot ((T_i^{-1})'(x))^2 \end{aligned}$$

hence

$$\begin{aligned} |(T_i^{-1})^{(3)}(x)| &\leq C|I_i| \cdot |I_i|^{-4} \\ &\quad +C|I_i| \cdot |I_i|^{-2} \cdot |I_i|^{-2} \end{aligned}$$

so

$$|(T_i^{-1})^{(3)}(x)| \leq C|I_i|^{-3} .$$

The proof for $l \geq 4$ is similar, and C does not depend on i nor $|i|$.

Lemma 1 implies that for $i \in B_j$ and $u \in I_i$

$$\mathcal{D}^{-1}2^{j-1} \leq \mathcal{D}^{-1}|I_i|^{-1} \leq |(T_i^{-1})'(u)| \leq \mathcal{D} \mid I_i \mid^{-1} \leq \mathcal{D}2^j . \tag{2.24}$$

Thanks to the second part of Lemma 3 and the fact that g is C^k and supported in I, we get

$$\begin{aligned} |(g \circ T_i^{-1})^{(k)}(u)| &\leq C|I_i|^{-k} \\ &\leq C2^{kj} ; \end{aligned}$$

Therefore

$$\mid h_{i,l}(x) \mid \leq C2^{kj}2^l \int |\psi(2^l(x-y))| \, |x-y|^k \, dy .$$

Hence for $j \leq l$

$$\mid h_{i,l}(x) \mid \leq C2^{kj}2^{-kl} .$$

Whence, for $j \leq l$

$$\sum_{i \in B_j : x \in I_i} \mid h_{i,l}(x) \mid \leq C \sum_{i \in B_j : x \in I_i} \mid \lambda_i \mid 2^{k(j-l)} .$$

Lemma 4 *Let $x_i = T_i(0)$; L large enough and set $B_j(x) = \{ i \in B_j \ : \ | x - x_i | \leq L2^{-j} \}$. The cardinality of $B_j(x)$ is bounded independently of x and j by CL (CL^2 for the complex case).*

Proof:
Thanks to the separation condition (2.11), we can suppose that the intervals I_i for $i \in B_j(x)$ are disjoint and are all included in the interval of lenght $\sim L2^{-j}$, centered on x. Thus

$$2^{-j} \, card \, B_j(x) \leq CL2^{-j}.$$

Hence Lemma 4.

Using Lemma 4 and the fact that for $x \in I_i$, $|x - x_i| \leq C2^{-j}$, we obtain for $j \leq l$

$$\begin{aligned} \sum_{i \in B_j : x \in I_i} | h_{i,l}(x) | &\leq C(\sup_{i \in B_j} | \lambda_i |) 2^{k(j-l)} \\ &\leq C 2^{(-\alpha_{min}+\varepsilon)j} 2^{k(j-l)} . \end{aligned}$$

Thus

$$\begin{aligned} \sum_{0 \leq j \leq l} \sum_{i \in B_j : x \in I_i} | h_{i,l}(x) | &\leq C 2^{-kl} \sum_{0 \leq j \leq l} 2^{(-\alpha_{min}+\varepsilon+k)j} \\ &\leq C 2^{(-\alpha_{min}+\varepsilon)l} . \end{aligned}$$

Now, if $x \notin I_i$; it follows from the localization and cancellation of ψ, that $\psi = \Psi^{(k+1)}$ where Ψ has fast decay so that

$$\begin{aligned} | h_{i,l}(x) | &= 2^l 2^{-(k+1)l} | \int_{I_i} (g \circ T_i^{-1})^{(k+1)}(y) \, \Psi(2^l(x-y)) \, dy | \\ &\leq 2^l 2^{-(k+1)l} \int_{I_i} 2^{(k+1)j} \frac{C_N}{(1 + 2^l|x-y|)^N} \, dy ; \end{aligned}$$

So since $|x - y| \geq dist(x, I_i)$ and $j \leq l$, then

$$| h_{i,l}(x) | \leq C_N \frac{2^{-kl} 2^{jk}}{(1 + 2^j dist(x, I_i))^N}$$

but by argument similar to [33], we have for N large enough

$$\sum_{i \in B_j} \frac{1}{(1 + 2^j dist(x, I_i))^N} \leq C ,$$

hence as above, we get

$$\sum_{0 \leq j \leq l} \sum_{i \in B_j : x \notin I_i} | h_{i,l}(x) | \leq C 2^{(-\alpha_{min}+\varepsilon)l} .$$

On the other hand, for $j > l$, we have for any $x \in \mathrm{R}$

$$\begin{aligned} | \omega_{l,j}(x) | &\leq C \sup | F_j(x) | \\ &\leq C \sup_{i \in B_j} | \lambda_i | \\ &\leq C 2^{(-\alpha_{min}+\varepsilon)j} , \end{aligned}$$

thus

$$\sum_{j > l} | \omega_{l,j}(x) | \leq C 2^{(-\alpha_{min}+\varepsilon)l} .$$

Whence for any $\varepsilon > 0$ and $x \in \mathrm{R}$

$$| F * \psi_l(x) | \leq C 2^{-(\alpha_{min}-\varepsilon)l} . \tag{2.25}$$

And so $F \in C^{\alpha_{min}-\varepsilon}(\mathrm{R})$ for any $\varepsilon > 0$.

For the complex case, set $z = x_1 + \mathbf{i}x_2$, with $\mathbf{i}^2 = -1$, $T_i(z) = U_i(x_1, x_2) + \mathbf{i}V_i(x_1, x_2)$ and $\Phi_i(x_1, x_2) = (U_i(x, x_2), V_i(x, x_2))$; Since T_i is complex analytic then $\Phi_i = (U_i, V_i)$ is C^1 on R^2 and has the properties that

$$\partial_{x_1} U_i = \partial_{x_2} V_i\,,\ \partial_{x_2} U_i = -\partial_{x_1} V_i \tag{2.26}$$

$$T_i'(z) = \partial_{x_1} T_i(z) = \partial_{x_1} U_i(x_1, x_2) + \mathbf{i}\partial_{x_1} V_i(x_1, x_2) \tag{2.27}$$

and

$$T_i'(z) = -\mathbf{i}\partial_{x_2} T_i(z) = -\mathbf{i}(\partial_{x_2} U_i(x_1, x_2) + \mathbf{i}\partial_{x_2} V_i(x_1, x_2))\,; \tag{2.28}$$

The same arguments give us

$$\sum_{i \in B_j\,:\, z \in \Omega_i} \mid h_{i,l}(z) \mid \leq C 2^{(-\alpha_{min}+\varepsilon)l}\,,$$

and

$$\sum_{j>l} \mid \omega_{l,j}(z) \mid \leq C 2^{(-\alpha_{min}+\varepsilon)l}\,.$$

For $z \notin \Omega_i$,

$$|h_{i,l}(z)| = 2^{2l} \Big| \int_{\Omega_i} g(\Phi_i^{-1}(y_1, y_2))\, \psi(2^l((x_1, x_2) - (y_1, y_2)))\, dy_1\, dy_2 \Big|\,.$$

It follows from the localization and cancellation of ψ, that there exist $(\Psi_\alpha)_\alpha$ well localized such that $\psi = \sum_{\alpha \in \{1,2\}^{k+2}} \partial^\alpha \Psi_\alpha$; Hence

$$|h_{i,l}(z)| \leq 2^{2l} 2^{-(k+2)l} \Big| \int_{\Omega_i} \sum_{\alpha \in \{1,2\}^{k+2}} \partial^\alpha (g \circ \Phi_i^{-1})(y_1, y_2)\, \Psi(2^l((x_1, x_2) - (y_1, y_2)))\, dy_1\, dy_2 \Big|\,.$$

And by similar argument, we deduce that

$$\sum_{0 \leq j \leq l} \sum_{i \in B_j\,:\, z \notin \Omega_i} \mid h_{i,l}(z) \mid \leq C 2^{(-\alpha_{min}+\varepsilon)l}\,.$$

Whence $F \in C^{\alpha_{min}-\varepsilon}(\mathrm{R}^2)$, $\forall \varepsilon > 0$.

2.3 Pointwise Hölder regularity

We will now compute the Hölder regularity of F at every point.

Proposition 2 *If $x \notin K$ then F is C^k in a neighbourhood of x.*

Proof:
Let $x_0 \notin K$; if $x_0 \notin I$ then $F = g = 0$ in a neighbourhood of x_0;
If $x_0 \in I$ then there exist N and $i = (i_1, \ldots, i_N) \in \{1,2\}^N$ such that $x_0 \in I_i \setminus \bigcup_{i' \in \{1,2\}} I_{ii'}$; in this neighbourhood of x_0, $F(x) = \sum_{n=0}^{N} \lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_n}\, g((T_{i_1} \circ \cdots \circ T_{i_n})^{-1}(x)) \in C^k(x)$.

Now we give the value of the pointwise regularity $\alpha(x)$ for any point x of K.

Theorem 2 *Suppose that $\alpha_{min} > 0$. Let $x \in K$ and define*

$$a(x) = \liminf_{n \to \infty} \frac{\log |\lambda_{i_1(x)} \ldots \lambda_{i_n(x)}|}{\log |I_{i_1(x) \ldots i_n(x)}|} ;$$

If $a(x) < k$ then

$$\alpha(x) = a(x) ; \tag{2.29}$$

(this is the case for any $x \in K$ when $\alpha_{max} < k$).

Proof:
We divide the proof into two steps:

2.3.1 Upper bound for pointwise Hölder regularity

We shall first prove the upper bound for $\alpha(x)$ using the wavelet transform size characterization (the so-called two-microlocal condition) in Théorème 1 **(i)** of the first chapter.

Let $\psi(x)$ be a wavelet, set

$$\psi_{a,b}(x) = \frac{1}{a}\psi(\frac{x-b}{a})$$

and let $C_{a,b}(F)$ be the wavelet transform of F. From the functional equation (2.18) satisfied by F, we get

$$C_{a,b}(F) = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{|i|=n} \lambda_i \int_{I_i} \psi_{a,b}(t) g(T_i^{-1}(t))\, dt \;+\; \sum_{|i|=N} \lambda_i \int_{I_i} \psi_{a,b}(t) F(T_i^{-1}(t))\, dt$$

thus

$$\begin{aligned} C_{a,b}(F) = & \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{|i|=n} \lambda_i \int_I \psi_{a,b}(T_i(t)) g(t) T_i'(t)\, dt \\ & + \sum_{|i|=N} \lambda_i \int_I \psi_{a,b}(T_i(t)) F(t) T_i'(t)\, dt\, . \end{aligned} \tag{2.30}$$

To estimate the size of the wavelet transform, we will give asymptotic developments for the composition of a wavelet by a contraction T_i. These developments will be well adapted with the wavelet analysis.

Lemma 5 *Let ψ be an even real compactly supported wavelet with enough smoothness and vanishing moments. Let $b \in I_i$ and $0 < a < |I_i|$, then*

$$\begin{aligned}\psi_{a,b}(T_i(t)) &= |(T_i^{-1})'(b)|\ \psi_{a|(T_i^{-1})'(b)|,T_i^{-1}(b)}(t) \\ &+ \sum_{p=1}^{k-1}\sum_{l=2p}^{k-1+p} a^{l-p}\, A_i^{(p,l)}(b)\ \psi^{(p,l)}_{a|(T_i^{-1})'(b)|,T_i^{-1}(b)}(t) \qquad (2.31) \\ &+ (R_{a,b}^{i,k})(t)\end{aligned}$$

where $\psi^{(p,l)}(t) = t^l\psi^{(p)}(t)$ is a compactly supported wavelet;

$$A_i^{(p,l)}(b) = \frac{1}{p!}\ [(T_i^{-1})'(b)]^{1+l} \sum_{\substack{2\le q_1,\dots,q_p\le k \\ q_1+\dots+q_p=l}} \prod_{m=1}^{p} \frac{T_i^{(q_m)}(T_i^{-1}(b))}{q_m!}\ ,$$

$$|A_i^{(p,l)}(b)| \le C|I_i|^{p-l-1}\ ;$$

and $(R_{a,b}^{i,k})(t)$ is a function supported in $|\ t - T_i^{-1}(b)\ | \le Ca|I_i|^{-1}$ such that

$$|(R_{a,b}^{i,k})(t)| \le Ca^{k-1}|I_i|^{-k} \quad \forall t \qquad (2.32)$$

and

$$\|(R_{a,b}^{i,k})(t)\|_{L^1(\mathbb{R})} \le Ca^k|I_i|^{-k-1}\ . \qquad (2.33)$$

Proof:
The support of $\psi_{a,b}(T_i(t))$ is given by $|\ T_i(t) - b\ | \le C'a$. Since $b \in I_i$, then the mean value theorem and Lemma 1 imply that $|\ t - T_i^{-1}(b)\ | \le Ca|I_i|^{-1}$.

For $k = 1$,

$$\begin{aligned}\psi_{a,b}(T_i(t)) &= \frac{1}{a}\psi\left(\frac{T_i(t) - T_i(T_i^{-1}(b))}{a}\right) \\ &= \frac{1}{a}\psi\left(\frac{T_i'(T_i^{-1}(b))(t - T_i^{-1}(b)) + O_i^{(2)}(|t - T_i^{-1}(b)|^2)}{a}\right)\end{aligned}$$

where

$$O_i^{(2)}(|t - T_i^{-1}(b)|^2) \le |t - T_i^{-1}(b)|^2\ \sup|T_i''|$$

which by Lemma 3 is bounded by $Ca^2|I_i|^{-1}$. Thus $O_i^{(2)}(|t - T_i^{-1}(b)|^2) = O(a^2|I_i|^{-1})$.

Hence

$$\begin{aligned}\psi_{a,b}(T_i(t)) &= \frac{1}{a}\psi\left(\frac{T_i'(T_i^{-1}(b))(t - T_i^{-1}(b))}{a} + O(a|I_i|^{-1})\right) \\ &= \frac{1}{a}\psi\left(\frac{T_i'(T_i^{-1}(b))(t - T_i^{-1}(b))}{a}\right) + \frac{1}{a}O_\psi^{(1)}(O(a|I_i|^{-1}))\end{aligned}$$

where $O_\psi^{(1)}(u) \le |u|\sup|\psi'|$; thus since ψ is even then

$$\psi_{a,b}(T_i(t)) = |(T_i^{-1})'(b)|\,\psi_{a|(T_i^{-1})'(b)|,T_i^{-1}(b)}(t) + (R_{a,b}^{i,1})(t)$$

with $(R^{i,1}_{a,b})(t) = O(|I_i|^{-1})$. And since $(R^{i,1}_{a,b})(t)$ is supported in $\mid t - T_i^{-1}(b) \mid \leq Ca|I_i|^{-1}$, then

$$\|(R^{i,1}_{a,b})(t)\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq Ca|I_i|^{-2}.$$

Hence Lemma 5 for $k = 1$.

Now, for $k \geq 2$

$$\begin{aligned}\psi_{a,b}(T_i(t)) &= \frac{1}{a}\psi\left(\frac{T_i(t) - T_i(T_i^{-1}(b))}{a}\right)\\ &= \frac{1}{a}\psi\left(\frac{1}{a}\left[\sum_{q=1}^{k}\frac{1}{q!}T_i^{(q)}(T_i^{-1}(b))\ (t - T_i^{-1}(b))^q + O_i^{(k+1)}(|t - T_i^{-1}(b)|^{k+1})\right]\right),\end{aligned}$$

where $O_i^{(k+1)}(|t - T_i^{-1}(b)|^{k+1}) \leq |t - T_i^{-1}(b)|^{k+1} \sup|T_i^{(k+1)}|$ which by Lemma 3 is equal to $O(a^{k+1}|I_i|^{-k})$. Thus

$$\begin{aligned}\psi_{a,b}(T_i(t)) &= \frac{1}{a}\psi\left(\frac{1}{a}\sum_{q=1}^{k}\frac{1}{q!}T_i^{(q)}(T_i^{-1}(b))\ (t - T_i^{-1}(b))^q + O(a^k|I_i|^{-k})\right)\\ &= \frac{1}{a}\psi\left(\frac{t - T_i^{-1}(b)}{a(T_i^{-1})'(b)}\right)\\ &\quad + \frac{1}{a}\sum_{p=1}^{k-1}\frac{1}{p!}\psi^{(p)}\left(\frac{t - T_i^{-1}(b)}{a(T_i^{-1})'(b)}\right)\left[\frac{1}{a}\sum_{q=2}^{k}\frac{1}{q!}T_i^{(q)}(T_i^{-1}(b))\ (t - T_i^{-1}(b))^q + O(a^k|I_i|^{-k})\right]^p\\ &\quad + \frac{1}{a}\ O_\psi^{(k)}\left(\left[\frac{1}{a}\sum_{q=2}^{k}\frac{1}{q!}T_i^{(q)}(T_i^{-1}(b))\ (t - T_i^{-1}(b))^q + O(a^k|I_i|^{-k})\right]^k\right)\end{aligned}$$

where $O_\psi^{(k)}(u) \leq |u| \sup|\psi^{(k)}|$;
Since $|T_i^{(q)}(T_i^{-1}(b))\ (t - T_i^{-1}(b))^q| \leq C|I_i|a^q|I_i|^{-q}$, then

$$\begin{aligned}&\left[\frac{1}{a}\sum_{q=2}^{k}\frac{1}{q!}T_i^{(q)}(T_i^{-1}(b))\ (t - T_i^{-1}(b))^q + O(a^k|I_i|^{-k})\right]\\ &\leq C\sum_{q=2}^{k}a^{q-1}|I_i|^{-(q-1)} + Ca^k|I_i|^{-k}\\ &\leq Ca|I_i|^{-1}\end{aligned}$$

because $a < |I_i|$. Hence

$$\begin{aligned}\frac{1}{a}\ O_\psi^{(k)}\left(\left[\frac{1}{a}\sum_{q=2}^{k}\frac{1}{q!}T_i^{(q)}(T_i^{-1}(b))\ (t - T_i^{-1}(b))^q + O(a^k|I_i|^{-k})\right]^k\right) &= \frac{1}{a}O(a^k|I_i|^{-k})\\ &= O(a^{k-1}|I_i|^{-k}).\end{aligned}$$

Remark that

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{a}\left[\frac{1}{a}\sum_{q=2}^{k}\frac{1}{q!}T_i^{(q)}(T_i^{-1}(b))\ (t-T_i^{-1}(b))^q + O(a^k|I_i|^{-k})\right]^p \\
&= \frac{1}{a}\frac{1}{a^p}\left[\sum_{q=2}^{k}\frac{1}{q!}T_i^{(q)}(T_i^{-1}(b))\ (t-T_i^{-1}(b))^q\right]^p + O(a^{k-1}|I_i|^{-k}) \\
&= \frac{1}{a}\frac{1}{a^p}\sum_{2\le q_1,\ldots,q_p\le k}\prod_{m=1}^{p}T_i^{(q_m)}(T_i^{-1}(b))\ \frac{(t-T_i^{-1}(b))^{q_m}}{q_m!} + O(a^{k-1}|I_i|^{-k}) \\
&= \frac{1}{a}\frac{1}{a^p}\sum_{\substack{2\le q_1,\ldots,q_p\le k\\ q_1+\ldots+q_p<k+p}}\prod_{m=1}^{p}T_i^{(q_m)}(T_i^{-1}(b))\ \frac{(t-T_i^{-1}(b))^{q_m}}{q_m!} \\
&\quad + \frac{1}{a}\frac{1}{a^p}\sum_{\substack{2\le q_1,\ldots,q_p\le k\\ q_1+\ldots+q_p\ge k+p}}\prod_{m=1}^{p}T_i^{(q_m)}(T_i^{-1}(b))\ \frac{(t-T_i^{-1}(b))^{q_m}}{q_m!} \\
&\quad + O(a^{k-1}|I_i|^{-k})
\end{aligned}$$

and that for any $1 \le p \le k-1$ and any $2 \le q_1, \ldots, q_p \le k$ such that $q_1 + \ldots + q_p \ge k+p$,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{a}\frac{1}{a^p}\prod_{m=1}^{p}|T_i^{(q_m)}(T_i^{-1}(b))|\ \frac{|t-T_i^{-1}(b)|^{q_m}}{q_m!} &\le C\frac{1}{a}\frac{1}{a^p}\prod_{m=1}^{p}|I_i|a^{q_m}|I_i|^{-q_m} \\
&\le C\frac{1}{a}\frac{1}{a^p}|I_i|^p a^{q_1+\ldots+q_p}|I_i|^{-(q_1+\ldots+q_p)} \\
&\le C\frac{1}{a}\left(\frac{a}{|I_i|}\right)^{q_1+\ldots+q_p-p} \\
&\le C\frac{1}{a}\left(\frac{a}{|I_i|}\right)^{k}
\end{aligned}$$

Hence $\psi_{a,b}(T_i(t))$ is equal to

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{a}\psi\left(\frac{t-T_i^{-1}(b)}{a(T_i^{-1})'(b)}\right) \\
&+\sum_{p=1}^{k-1}\frac{1}{a}\sum_{l=2p}^{k-1+p}\frac{1}{a^p}(t-T_i^{-1}(b))^l\psi^{(p)}\left(\frac{t-T_i^{-1}(b)}{a(T_i^{-1})'(b)}\right)\frac{1}{p!}\sum_{\substack{2\le q_1,\ldots,q_p\le k\\ q_1+\ldots+q_p=l}}\prod_{m=1}^{p}\frac{T_i^{(q_m)}(T_i^{-1}(b))}{q_m!} \\
&+(R_{a,b}^{i,k})(t)
\end{aligned}$$

with $(R_{a,b}^{i,k})(t)$ a function supported in $|\ t-T_i^{-1}(b)\ | \le Ca|I_i|^{-1}$ and bounded by $Ca^{k-1}|I_i|^{-k}$, thus

$$\|(R_{a,b}^{i,k})(t)\|_{L^1(\mathbb{R})} \le Ca^k|I_i|^{-k-1}\ .$$

For $p = 1, \ldots, k-1$ and $2p \leq l \leq k-1+p$, set

$$\psi^{(p,l)}(t) = t^l \psi^{(p)}(t)$$

and

$$A_i^{(p,l)}(b) = \frac{1}{p!} \left[(T_i^{-1})'(b)\right]^{1+l} \sum_{\substack{2 \leq q_1, \ldots, q_p \leq k \\ q_1 + \ldots + q_p = l}} \prod_{m=1}^{p} \frac{T_i^{(q_m)}(T_i^{-1}(b))}{q_m!} .$$

Hence (2.31) and

$$|A_i^{(p,l)}(b)| \leq C |I_i|^{p-l-1} .$$

Whence Lemma 5.

We will now show that we have similar result for the complex case; Let ψ be a radial wavelet of R^2 with compact support and enough smoothness and cancellation. Let $b = b_1 + \mathbf{i}b_2 \in \Omega_j$ and $0 < a < |\Omega_j|$ and denote by $\psi_{a,b}(z)$ the function

$$\psi_{a,b}(z) = \frac{1}{a^2} \psi \left(\frac{(u,v) - (b_1, b_2)}{a} \right) \quad \text{for} \quad z = u + \mathbf{i}v .$$

Set $d = T_j^{-1}(b) = d_1 + \mathbf{i}d_2$, $\delta = (d_1, d_2)$, $\xi = (u, v)$ and let $D\Phi_j = D(U_j, V_j)$ be the differential of Φ_j (recall that $\Phi_j(x, y) = T_j(x + \mathbf{i}y)$), then

$$\begin{aligned}
\psi_{a,b}(T_j(z)) &= \frac{1}{a^2} \psi \left(\frac{\Phi_j(u,v) - (b_1, b_2)}{a} \right) \\
&= \frac{1}{a^2} \psi \left(\frac{\Phi_j(\xi) - \Phi_j(\delta)}{a} \right) \\
&= \frac{1}{a^2} \psi \left(\frac{D\Phi_j(\delta).(\xi - \delta) + O_j^{(2)}(\|\xi - \delta\|^2)}{a} \right) \\
&= \frac{1}{a^2} \psi \left(\frac{D\Phi_j(\delta).(\xi - \delta) + O(a^2 |\Omega_j|^{-1})}{a} \right) \\
&= \frac{1}{a^2} \psi \left(\frac{D\Phi_j(\delta).(\xi - \delta)}{a} \right) + \frac{1}{a^2} O_\psi^{(1)}(a |\Omega_j|^{-1}) \\
&= \frac{1}{a^2} \psi \left(\frac{D\Phi_j(\delta).(\xi - \delta)}{a} \right) + (R_{a,b}^{j,1})(z)
\end{aligned}$$

with $(R_{a,b}^{j,1})(z) = O(a^{-1} |\Omega_j|^{-1})$, so

$$\|(R_{a,b}^{j,1})(z)\|_{L^1(\mathbf{R}^2)} \leq C a |\Omega_j|^{-3} .$$

It is easy to show that properties (2.26), (2.27) and (2.28) imply that

$$\frac{|z - T_j^{-1}(b)|}{|(T_j^{-1})'(b)|} = |T_j'(d)| \, \|\xi - \delta\| = \|D\Phi_j(\delta).(\xi - \delta)\| ;$$

Thus, since ψ is radial then

$$\psi_{a,b}(T_j(z)) = |(T_j^{-1})'(b)|^2 \ \psi_{a|(T_j^{-1})'(b)|,T_j^{-1}(b)}(z) + (R_{a,b}^{j,1})(z) \ .$$

For $k = 2$,

$$\psi_{a,b}(T_j(z)) \ = \ \frac{1}{a^2}\,\psi\left(\frac{D\Phi_j(\delta).(\xi-\delta) + 1/2\, D^2\Phi_j(\delta).(\xi-\delta)^2 + O_j^{(3)}(\|\xi-\delta\|^3)}{a}\right)$$

where $O_j^{(3)}(\|\xi-\delta\|^3) \leq \|\xi-\delta\|^3 \sup\|D^3\Phi_j\| = O(a^3|\Omega_j|^{-2})$. Hence,

$$\begin{aligned}\psi_{a,b}(T_j(z)) \ &= \ \frac{1}{a^2}\,\psi\left(\frac{D\Phi_j(\delta).(\xi-\delta)}{a}\right)\\ &\quad + \frac{1}{a^2}\,\langle \nabla\psi\left(\frac{D\Phi_j(\delta).(\xi-\delta)}{a}\right) \ , \ \frac{D^2\Phi_j(\delta).(\xi-\delta)^2}{2a} + O(a^2|\Omega_j|^{-2})\rangle\\ &\quad + O(|\Omega_j|^{-2})\end{aligned}$$

where $\nabla\psi$ denotes the gradient of ψ and $\langle,\rangle$ the inner product.
Thanks to the fact that ψ is radial, we obtain

$$\begin{aligned}\psi_{a,b}(T_j(z)) \ &= \ \tfrac{1}{a^2}\,\psi\left(\tfrac{\xi-\delta}{a|(T_j^{-1})'(b)|}\right)\\ &\quad + 1/2\ \tfrac{1}{a^2}\partial_x\psi\left(\tfrac{\xi-\delta}{a|(T_j^{-1})'(b)|}\right)\ \tfrac{1}{a}\,\partial_x^2 U_j(\delta).(u-d_1)^2\\ &\quad + \tfrac{1}{a^2}\partial_x\psi\left(\tfrac{\xi-\delta}{a|(T_j^{-1})'(b)|}\right)\ \tfrac{1}{a}\,\partial_x\partial_y U_j(\delta).(u-d_1)(v-d_2)\\ &\quad + 1/2\ \tfrac{1}{a^2}\partial_x\psi\left(\tfrac{\xi-\delta}{a|(T_j^{-1})'(b)|}\right)\ \tfrac{1}{a}\,\partial_y^2 U_j(\delta).(v-d_2)^2\\ &\quad + 1/2\ \tfrac{1}{a^2}\partial_y\psi\left(\tfrac{\xi-\delta}{a|(T_j^{-1})'(b)|}\right)\ \tfrac{1}{a}\,\partial_x^2 V_j(\delta).(u-d_1)^2\\ &\quad + \tfrac{1}{a^2}\partial_y\psi\left(\tfrac{\xi-\delta}{a|(T_j^{-1})'(b)|}\right)\ \tfrac{1}{a}\,\partial_x\partial_y V_j(\delta).(u-d_1)(v-d_2)\\ &\quad + 1/2\ \tfrac{1}{a^2}\partial_y\psi\left(\tfrac{\xi-\delta}{a|(T_j^{-1})'(b)|}\right)\ \tfrac{1}{a}\,\partial_y^2 V_j(\delta).(v-d_2)^2\\ &\quad + O(|\Omega_j|^{-2}).\end{aligned}$$

Hence the following Lemma

Lemma 6 *Let ψ be a radial wavelet of R^2 with compact support and enough smoothness and cancellation. Let $b = b_1 + \mathrm{i}b_2 \in \Omega_j$ and $0 < a < |\Omega_j|$ and denote by $\psi_{a,b}(z)$ the function*

$$\psi_{a,b}(z) = \frac{1}{a^2}\psi\left(\frac{(u,v)-(b_1,b_2)}{a}\right) \quad \textit{for} \quad z = u + \mathrm{i}v\,.$$

Then

$$\begin{aligned}\psi_{a,b}(T_j(z)) &= |(T_j^{-1})'(b)|^2\ \psi_{a|(T_j^{-1})'(b)|,T_j^{-1}(b)}(z)\\ &+ \sum_{\alpha}\sum_{p}\sum_{l} a^{l-p} A_j^{(\alpha,p,l)}(b)\ \psi^{(\alpha,p,l)}_{a|(T_j^{-1})'(b)|,T_j^{-1}(b)}(z) \qquad (2.34)\\ &+ (R^{j,k}_{a,b})(z)\end{aligned}$$

where the $\psi^{(\alpha,p,l)}(z)$ are compactly supported wavelets; and $(R^{j,k}_{a,b})(z)$ is a function supported in $|\, z - T_j^{-1}(b)\,| \leq Ca|\Omega_j|^{-1}$ such that

$$|(R^{j,k}_{a,b})(z)| \leq Ca^{k-2}|\Omega_j|^{-k} \qquad (2.35)$$

and

$$\|(R^{j}_{a,b})^{(k)}(z)\|_{L^1(\mathbf{R}^2)} \leq Ca^{k}|\Omega_j|^{-k-2}\,. \qquad (2.36)$$

Now, let $C^{(p,l)}_{a,b}(F)$ be the $\psi^{(p,l)}$-wavelet transform of F. Using Lemma 5 and equation (2.30), the ψ-wavelet transform of F will satisfy the following equation

$$\begin{aligned}C_{a,b}(F) = &\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{|i|=n} \lambda_i\, |(T_i^{-1})'(b)|\ C_{a|(T_i^{-1})'(b)|,T_i^{-1}(b)}(gT_i')\\ &+ \sum_{|i|=N} \lambda_i\, |(T_i^{-1})'(b)|\ C_{a|(T_i^{-1})'(b)|,T_i^{-1}(b)}(FT_i')\\ &+ \sum_{p=1}^{k-1}\sum_{l=2p}^{k-1+p} a^{l-p} \sum_{n=0}^{N-1}\sum_{|i|=n} \lambda_i\, A_i^{(p,l)}(b)\ C^{(p,l)}_{a|(T_i^{-1})'(b)|,T_i^{-1}(b)}(gT_i')\\ &+ \sum_{p=1}^{k-1}\sum_{l=2p}^{k-1+p} a^{l-p} \sum_{|i|=N} \lambda_i\, A_i^{(p,l)}(b)\ C^{(p,l)}_{a|(T_i^{-1})'(b)|,T_i^{-1}(b)}(FT_i')\\ &+ \sum_{n=0}^{N-1}\sum_{|i|=n} \lambda_i \int (R^i_{a,b})^{(k)}(t)\, g(t)\, T_i'(t)\, dt\\ &+ \sum_{|i|=N} \lambda_i \int (R^i_{a,b})^{(k)}(t)\, F(t)\, T_i'(t)\, dt\end{aligned} \qquad (2.37)$$

For the complex case, using Lemma 6, we get an equation similar to the previous one ($|(T_i^{-1})'(b)|$ will be replaced by $|(T_i^{-1})'(b)|^2$, T_i' by $|T_i'|^2$ and the indexes (p,l) by the (α,p,l)).

Now, define

$$\Lambda_j(x) = \sup_{i \in B_j(x)} | \lambda_i |$$

and

$$L_j(x) = \sum_{l=1}^{j} \Lambda_l(x) 2^{-A(j-l)} \quad \text{with} \quad A > \alpha_{max} .$$

And let us first estimate the order of the magnitude of the λ_i for $i \in B_j$.

Lemma 7

$$\liminf_{j\to\infty} \frac{\log L_j(x)}{-j \log 2} = \liminf_{j\to\infty} \frac{\log \Lambda_j(x)}{-j \log 2} = \liminf_{j\to\infty} \inf_{i \in B_j(x)} \frac{\log |\lambda_i|}{\log | I_i |}$$
$$= \liminf_{n\to\infty} \frac{\log |\lambda_{i_1(x)} \dots \lambda_{i_n(x)}|}{\log |I_{i_1(x) \dots i_n(x)}|}$$

and $\forall x \in \mathrm{R}$ *and* $i \in B_j$

$$| \lambda_i | \leq C L_j(x) (1 + 2^j | x - x_i |)^A . \tag{2.38}$$

Proof:
Clearly because $L_j(x) \geq \Lambda_j(x)$, it suffices to show that

$$\liminf_{j\to\infty} \frac{\log L_j(x)}{-j \log 2} \geq \liminf_{j\to\infty} \frac{\log \Lambda_j(x)}{-j \log 2} ;$$

this holds because $2^{-Al} \leq \Lambda_l(x)$. Now, inequality (2.38) is trivial for $i \in B_j(x)$ because $\lambda_i \leq \Lambda_j(x) \leq L_j(x)$. And for $i \notin B_j(x)$, let $\bar{i}$ be the largest subbranch such that $|x - x_i| \sim |I_{\bar{i}}|$ and $|\lambda_i| \leq \Lambda_l(x)$ with l such that $|I_{\bar{i}}| \sim 2^{-l}$, (because all the $|\lambda_j|$ are < 1), so that

$$|\lambda_i| \leq L_j(x) \frac{\Lambda_l(x)}{L_j(x)} \leq L_j(x) 2^{A(j-l)} \leq L_j(x) (C 2^j |x - x_i|)^A$$

hence Lemma 7.

We are now ready to estimate the size of the wavelet transform near each point of K. We shall prove the following proposition:

Proposition 3 *Let* $x \in K$, $J \in \mathbf{N}$ *large enough such that* $\Lambda_J(x) \geq \frac{1}{2} L_J(x)$, *then there exists a branch* $j^0 = (j_1^0, \dots, j_n^0)$ *in* $B_J(x)$, $b \in I_{j^0}$ *and* $a \sim 2^{-J}$ *such that*

$$|b - x| \leq Ca$$

and

$$| C_{a,b}(F) | \geq C \Lambda_J(x) .$$

Proof:
Let j^0 be a branch of $B_J(x)$ for which $\Lambda_J(x) = \sup_{i\in B_J(x)} |\lambda_i|$ is reached (j^0 exists because of Lemma 4) and $a \sim 2^{-J}$.

We can write equation (2.37) differently

$$C_{a,b}(F) = \sum_{j=0}^{J-1}\sum_{i\in B_j} \lambda_i\, |(T_i^{-1})'(b)|\; C_{a|(T_i^{-1})'(b)|,T_i^{-1}(b)}(gT_i') \tag{2.39}$$

$$+ \sum_{i\in B_J} \lambda_i\, |(T_i^{-1})'(b)|\; C_{a|(T_i^{-1})'(b)|,T_i^{-1}(b)}(FT_i') \tag{2.40}$$

$$+ \sum_{p=1}^{k-1}\sum_{l=2p}^{k-1+p} a^{l-p} \sum_{j=0}^{J-1}\sum_{i\in B_j} \lambda_i\, A_i^{(p,l)}(b)\; C^{(p,l)}_{a|(T_i^{-1})'(b)|,T_i^{-1}(b)}(gT_i') \tag{2.41}$$

$$+ \sum_{p=1}^{k-1}\sum_{l=2p}^{k-1+p} a^{l-p} \sum_{i\in B_J} \lambda_i\, A_i^{(p,l)}(b)\; C^{(p,l)}_{a|(T_i^{-1})'(b)|,T_i^{-1}(b)}(FT_i') \tag{2.42}$$

$$+ \sum_{j=0}^{J-1}\sum_{i\in B_j} \lambda_i \int (R^{i,k}_{a,b})(t)\, g(t)\, T_i'(t)\, dt \tag{2.43}$$

$$+ \sum_{i\in B_J} \lambda_i \int (R^{i,k}_{a,b})(t)\, F(t)\, T_i'(t)\, dt\,. \tag{2.44}$$

We will show that the wavelet transform of F is large near the branch j^0. For that we shall first estimate the part of the term (2.40) corresponding to the branch $i = j^0$: by asumption, F is not uniformly C^k on a non-empty closed subset $\tilde{K}$ of $]0,1[$; thus thanks to the characterization of the Hölder regularity by the wavelet transform, there exist $a_n \to 0$, $b_n \in \tilde{K}$ and $C_n \to +\infty$ such that

$$| C_{a_n,b_n}(F) | \geq C_n a_n^k\,. \tag{2.45}$$

Take $b = T_{j^0}(b_n)$ for n large enough and $a = a_n|T'_{j^0}(b_n)|$; then

$$a \sim 2^{-J}\,;$$

$$| x - b | \leq |x - x_{j^0}| + |x_{j^0} - b| \leq L2^{-J} + |I_{j^0}| \leq C2^{-J} \leq Ca$$

and

$$| C_{a|(T_{j^0}^{-1})'(b)|,T_{j^0}^{-1}(b)}(F) | \geq C_n a^k |(T_{j^0}^{-1})'(b)|^k\,. \tag{2.46}$$

On the other hand,

$$|(T_{j^0}^{-1})'(b)|\; | C_{a|(T_{j^0}^{-1})'(b)|,T_{j^0}^{-1}(b)}(FT'_{j^0}) | = \frac{1}{a} \left| \int \psi\left(\frac{t - T_{j^0}^{-1}(b)}{a(T_{j^0}^{-1})'(b)}\right)\; F(t)\; T'_{j^0}(t)\, dt \right|$$

$$= \frac{1}{a} \left| \int \psi\left(\frac{t - T_{j^0}^{-1}(b)}{a(T_{j^0}^{-1})'(b)}\right)\; F(t)\; \left(T'_{j^0}(T_{j^0}^{-1}(b)) + O^{(2)}_{j^0}(|t - T_{j^0}^{-1}(b)|)\right)\, dt \right|$$

with

$$\begin{aligned} O^{(2)}_{j^0}(|t-T^{-1}_{j^0}(b)|) &\leq (\sup|T''_{j^0}(u)|)\ |t-T^{-1}_{j^0}(b)| \\ &\leq C|I_{j^0}|\ |t-T^{-1}_{j^0}(b)| \\ &\leq C|T'_{j^0}(T^{-1}_{j^0}(b))|\ |t-T^{-1}_{j^0}(b)|\ . \end{aligned}$$

Thus

$$|(T^{-1}_{j^0})'(b)|\ |\ C_{a|(T^{-1}_{j^0})'(b)|,T^{-1}_{j^0}(b)}(FT'_{j^0})\ | \geq \frac{1}{a|(T^{-1}_{j^0})'(b)|}\ |\int \psi\left(\frac{t-T^{-1}_{j^0}(b)}{a(T^{-1}_{j^0})'(b)}\right)\ F(t)\,dt|$$

$$-C\frac{1}{a|(T^{-1}_{j^0})'(b)|}\int |\ \psi\left(\frac{t-T^{-1}_{j^0}(b)}{a(T^{-1}_{j^0})'(b)}\right)|\ \ |F(t)|\ |t-T^{-1}_{j^0}(b)|\,dt\ .$$

It follows from (2.46) and the fact that F is bounded and $a|(T^{-1}_{j^0})'(b)| \sim 1$ that

$$|(T^{-1}_{j^0})'(b)|\ |\ C_{a|(T^{-1}_{j^0})'(b)|,T^{-1}_{j^0}(b)}(FT'_{j^0})\ | \geq C_n a^k |(T^{-1}_{j^0})'(b)|^k - C\ .$$

Thus for n large enough

$$|\lambda_{j^0}|\ |(T^{-1}_{j^0})'(b)|\ |C_{a|(T^{-1}_{j^0})'(b)|,T^{-1}_{j^0}(b)}(FT'_{j^0})| \geq \frac{C_n}{2}\Lambda_J(x)\ . \tag{2.47}$$

Now, let us estimate the righthand side of (2.39). For $i \in B_j$ (here we take $i \in B_j(b)$) and $0 \leq j \leq J-1$

$$\begin{aligned} &|(T^{-1}_i)'(b)|\ |\ C_{a|(T^{-1}_i)'(b)|,T^{-1}_i(b)}(gT'_i)\ | \\ &= \frac{1}{a}\ |\int \psi\left(\frac{t-T^{-1}_i(b)}{a(T^{-1}_i)'(b)}\right)\ g(t)\ T'_i(t)\,dt| \\ &= \frac{1}{a}\ |\int \psi\left(\frac{t-T^{-1}_i(b)}{a(T^{-1}_i)'(b)}\right)\ \Big(g(t)\ T'_i(t) - P_{k-1}(gT'_i)_{T^{-1}_i(b)}(t-T^{-1}_i(b))\Big)\,dt|. \end{aligned}$$

Using the mean value theorem, the previous term will be bounded by

$$\frac{1}{a}\int |\psi\left(\frac{t-T^{-1}_i(b)}{a(T^{-1}_i)'(b)}\right)|\ \left(\sup_{u\in[t,T^{-1}_i(b)]}|(gT'_i)^{(k)}(u)|\right)\ |t-T^{-1}_i(b)|^k\,dt\ ;$$

It follows from the formula $(gT'_i)^{(k)}(u) = \sum_{q=0}^k C^q_k\ g^{(k-q)}(u)\ T^{(q+1)}_i(u)$, Lemmas 1 and 3 and the fact that g has compact support, that $|(gT'_i)^{(k)}(u)| \leq C\,|I_i|$; so $|(T^{-1}_i)'(b)|\ |\ C_{a|(T^{-1}_i)'(b)|,T^{-1}_i(b)}(gT'_i)\ |$ is bounded by

$$\frac{C}{a|(T^{-1}_i)'(b)|}\int |\psi\left(\frac{t-T^{-1}_i(b)}{a(T^{-1}_i)'(b)}\right)|\ \ |t-T^{-1}_i(b)|^k dt \leq C\,a^k 2^{kj}\ .$$

Thus for $0 \leq j \leq J-1$

$$\sum_{i \in B_j} |\lambda_i| \; |(T_i^{-1})'(b)| \; \mid C_{a|(T_i^{-1})'(b)|,T_i^{-1}(b)}(gT_i') \mid \leq C \sum_{i \in B_j(b)} \mid \lambda_i \mid a^k 2^{kj}$$

which by Lemma 4 and the second part of Lemma 7 will be bounded by $Ca^k 2^{kj} L_j(b)$. Therefore, it follows from the first part of Lemma 7 and the asumption $a(x) < k$, that

$$\begin{aligned} \sum_{j \leq J-1} \sum_{i \in B_j} |\lambda_i| \; |(T_i^{-1})'(b)| \; \mid C_{a|(T_i^{-1})'(b)|,T_i^{-1}(b)}(gT_i') \mid &\leq Ca^k \sum_{j \leq J-1} 2^{kj} L_j(b) \\ &\leq Ca^k 2^{kJ} L_J(b) \\ &\leq CL_J(b) \end{aligned} \tag{2.48}$$

Consider now the term (2.40) (for which we exclude $i = j^0$); since $a|(T_i^{-1})'(b)| \sim 1$, F is bounded and the fact that we consider only the indexes $i \in B_J(b)$, then

$$\sum_{\substack{i \in B_J \\ i \neq j^0}} |\lambda_i| \; |(T_i^{-1})'(b)| \; |C_{a_i(T_i^{-1})'(b)|,T_i^{-1}(b)}(FT_i')| \leq CL_J(b) \; . \tag{2.49}$$

Let us now estimate the terms (2.41) and (2.42); thanks to the property $|A_i^{(p,l)}| \leq |I_i|^{p-l-1}$, the previous arguments give us

$$\begin{aligned} &\sum_{p=1}^{k-1} \sum_{l=2p}^{k-1+p} a^{l-p} \sum_{\substack{i \in B_J \\ i \neq j^0}} |\lambda_i| \; |A_i^{(p,l)}(b)| \; |C^{(p,l)}_{a|(T_i^{-1})'(b)|,T_i^{-1}(b)}(FT_i')| \\ &\leq C \sum_{p=1}^{k-1} \sum_{l=2p}^{k-1+p} a^{l-p} L_J(b) a^{p-l-1} a \\ &\leq CL_J(b) \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} &\sum_{p=1}^{k-1} \sum_{l=2p}^{k-1+p} a^{l-p} \sum_{j=0}^{J-1} \sum_{i \in B_j} |\lambda_i| \; |A_i^{(p,l)}(b)| \; |C^{(p,l)}_{a|(T_i^{-1})'(b)|,T_i^{-1}(b)}(gT_i')| \\ &\leq C \sum_{p=1}^{k-1} \sum_{l=2p}^{k-1+p} a^{l-p} \sum_{j=0}^{J-1} \sum_{i \in B_j(b)} |\lambda_i| \; |I_i|^{p-l} \; |(T_i^{-1})'(b)| \; |C^{(p,l)}_{a|(T_i^{-1})'(b)|,T_i^{-1}(b)}(gT_i')| \\ &\leq C \sum_{p=1}^{k-1} \sum_{l=2p}^{k-1+p} a^{l-p} \sum_{j=0}^{J-1} L_j(b) \; |I_i|^{p-l} \; a^k 2^{kj} \\ &\leq C \sum_{p=1}^{k-1} \sum_{l=2p}^{k-1+p} a^{k+l-p} \sum_{j=0}^{J-1} L_j(b) 2^{j(k+l-p)} \end{aligned}$$

$$\leq C\sum_{p=1}^{k-1}\sum_{l=2p}^{k-1+p} a^{k+l-p}L_J(b)2^{J(k+l-p)}$$
$$\leq CL_J(b)\ .$$

On the other hand, since F is bounded, then

$$\sum_{p=1}^{k-1}\sum_{l=2p}^{k-1+p} a^{l-p}|\lambda_{j^0}|\ |A_{j^0}^{(p,l)}(b)|\ |C^{(p,l)}_{a|(T_{j^0}^{-1})'(b)|,T_{j^0}^{-1}(b)}(FT'_{j^0})| \leq C\sum_{p=1}^{k-1}\sum_{l=2p}^{k-1+p} a^{l-p}\Lambda_J(x)a^{p-l-1}a$$
$$\leq C\Lambda_J(x)\ .$$

For the term (2.43), we bound it by

$$\sum_{j=0}^{J-1}\sum_{i\in B_j(b)}|\lambda_i|\int|(R^{i,k}_{a,b})(t)|\,|T_i'(t)|\,dt$$
$$\leq C\sum_{j=0}^{J-1}\sum_{i\in B_j(b)}|\lambda_i|\ \|(R^{i,k}_{a,b})(t)\|_{L^1(\mathbb{R})}2^{-j}$$

which by (2.33) and Lemma 7 will be bounded by

$$C\sum_{j=0}^{J-1}L_j(b)a^k2^{(k+1)j}2^{-j}\leq CL_J(b)\ .$$

For the term (2.44), we use the boundedness of F to estimate it by

$$C\sum_{i\in B_J(b)}|\lambda_i|a^k2^{(k+1)J}2^{-J}\leq CL_J(b)\ .$$

From the previous estimations, we get

$$|\ C_{a,b}(F)-\ \lambda_{j^0}\ |(T_{j^0}^{-1})'(b)|\ C_{a|(T_{j^0}^{-1})'(b)|,T_{j^0}^{-1}(b)}(FT'_{j^0})\ |\leq CL_J(b)\ .$$

Choose C_n large enough, then (2.47) yields

$$|C_{a,b}(F)|\geq\frac{1}{2}|\lambda_{j^0}|\ |(T_{j^0}^{-1})'(b)|\ \ |\ C_{a|(T_{j^0}^{-1})'(b)|,T_{j^0}^{-1}(b)}(FT'_{j^0})\ |\ . \tag{2.50}$$

Whence (2.47) and (2.50) yield Proposition 3. And thanks to Théorème 1 (i) of the first chapter, this Propsition yiels the upper bound for the Hölder exponent.

2.3.2 Lower bound for pointwise Hölder regularity

Using definition (1.1), we will show the lower bound for the Hölder exponent $\alpha(x)$. Let $x\in K$; for $\beta<a(x)$, define

$$P_{[\beta]}F_x(h)=\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i\in B_j}\lambda_iP_{[\beta]}(g\circ T_i^{-1})_x(h)\ ;$$

as in (2.23). Thanks to Lemmas 3 and 4

$$\mid P_{[\beta]}F_x(h) \mid \leq \sum_{j=0}^{\infty} L_j(x)2^{j[\beta]}$$

and since $\beta < a(x)$, then the first part of Lemma 7 implies that $PF_x(h)$ converges.

Let J such that $2^{-J} \leq |h| < 2.2^{-J}$ and let N be the largest integer such that $x+h \in I_{i_1(x),\ldots,i_N(x)}$. So $|h| = |x+h-x| \leq |I_{i_1(x),\ldots,i_N(x)}|$ and $x+h \notin I_{i_1(x),\ldots,i_N(x),i_{N+1}(x)}$;
Now, remark that if $(l-H)_i$, $(m-H)_i$ and $(r-H)_i$ denote the left, middle and right "holes" in I_i, i.e.

$$I_i = (l-H)_i \cup I_{i,1} \cup (m-H)_i \cup I_{i,2} \cup (r-H)_i$$

then it follows by argument similar to the one given in the proof of Lemma 1 that $\forall v \in \{l,m,r\}$, $x \in (v-H)_i$, $i \in \{1,2\}^n$ and $n \in \mathbf{N}$

$$\mathcal{D}^{-1} \mid (v-H)_i \mid^{-1} \leq |(T_i^{-1})'(x)| \leq \mathcal{D} \mid (v-H)_i \mid^{-1} ;$$

Thus, Lemma 1 yields that

$$\mid (v-H)_i \mid \geq \mathcal{D}^{-2} \mid I_i \mid \quad \forall v \in \{l,m,r\} \ , i \in \{1,2\}^n \text{ and } n \in \mathbf{N} ; \tag{2.51}$$

Now, it follows from (2.10) that $|h| \geq |(l-H)_{i_1(x),\ldots,i_N(x),i_{N+1}(x)}|$ if $h<0$, and $|h| \geq \mid (r-H)_{i_1(x),\ldots,i_N(x),i_{N+1}(x)} \mid$ if $h>0$; Thus, using (2.51), we obtain

$$|h| \geq \mathcal{D}^{-2}|I_{i_1(x),\ldots,i_N(x),i_{N+1}(x)}|$$

so

$$\begin{aligned} |h| &\geq \mathcal{D}^{-2}\mathcal{D}^{-1}|I_{i_1(x),\ldots,i_N(x)}|\,|I_{i_{N+1}(x)}| \\ &\geq \mathcal{D}^{-3}\chi|I_{i_1(x),\ldots,i_N(x)}| \, . \end{aligned}$$

Hence if J' is such that $2^{-J'} \leq |I_{i_1(x),\ldots,i_N(x)}| < 2.2^{-J'}$, then $J'-J \leq C$, with C a constant. Now, we can write

$$\begin{aligned} F(x+h) - P_{[\beta]}F_x(h) &= \sum_{j<J'} \sum_{\{i \in B_j : x \in I_i\}} \lambda_i \left(g(T_i^{-1}(x+h)) - P_{[\beta]}(g \circ T_i^{-1})_x(h) \right) \\ &+ \sum_{\{i \in B_{J'} : x \in I_i\}} \lambda_i F(T_i^{-1}(x+h)) \\ &- \sum_{j \geq J'} \sum_{i \in B_j} \lambda_i P_{[\beta]}(g \circ T_i^{-1})_x(h) \, . \end{aligned}$$

For each j of the series of the first term, there is a finite terms (because of Lemma 4), thus if j_0 is such that $L_j(x) \leq 2^{-j(a(x)-\epsilon)}$ for all $j \geq j_0$, then using the mean value theorem and Lemma 3, the first term will be bounded by

$$\begin{aligned} C \sum_{j<J'} L_j(x)|h|^{[\beta]+1}2^{j([\beta]+1)} &\leq C \mid h \mid^{[\beta]+1} \sum_{j<j_0} L_j(x)2^{j([\beta]+1)} \\ &+ C|h|^{[\beta]+1} \sum_{j_0 \leq j < J'} 2^{-\beta j}2^{j([\beta]+1)} \\ &\leq C|h|^{[\beta]+1} + C|h|^{[\beta]+1}2^{-\beta J'}2^{J'([\beta]+1)} \\ &\leq C|h|^{\beta} \end{aligned}$$

because $J' - J \leq C$.

It follows from the fact that F is bounded that the second term is bounded by $C\Lambda_{J'}(x)$, so by $C2^{-J'(\beta-\epsilon)}$ (because of the first part of Lemma 7), hence by $C|h|^{\beta-\varepsilon}$.

The third term is bounded by

$$\begin{aligned}\sum_{j\geq J'}\sum_{i\in B_j(x)} \mid \lambda_i \mid \sum_{q=0}^{[\beta]} |I_i|^{-q} \mid h \mid^q &\leq \sum_{j\geq J'} L_j(x) \sum_{q=0}^{[\beta]} 2^{qj}2^{-qJ} \\ &\leq C\sum_{j\geq J'} 2^{-\beta j}2^{[\beta]j}2^{-[\beta]J} \\ &\leq C2^{-\beta J'} \\ &\leq C \mid h \mid^{\beta}\end{aligned}$$

The proof of Theorem 2 is now achieved.

2.4 Computation of the spectrum of singularities

To determine the spectrum of singularities, we will construct special probability measures supported by the sets of singularities, and then use the following Lemma (see [27]):

Lemma 8 *Let M_s be the Hausdorff measure of dimension s and $B(x,r)$ the ball of diameter $2r$ centered on x. Let ν be a probability measure on R^m, $A \subset \mathrm{R}^m$ and C such that $0 < C < \infty$*

- *If* $\limsup_{r\to 0} \dfrac{\nu(B(x,r))}{r^s} < C \quad \forall x \in A$ *then* $M_s(A) \geq \frac{\nu(A)}{C}$.
- *If* $\limsup_{r\to 0} \dfrac{\nu(B(x,r))}{r^s} > C \quad \forall x \in A$ *then* $M_s(A) \leq \frac{2^s}{C}$.

Let μ be the probability measure on $[0,1]$ which associates the weight $\mid \lambda_{i_1\ldots i_n} \mid \Lambda^{-n}$ (with $\Lambda = |\lambda_1| + |\lambda_2|$) for each interval $I_{i_1\ldots i_n}$. This measure is supported by K and satisfies

- (A_1) There exists a constant $C \geq 1$ such that for any branchs $i = (i_1, \ldots, i_l)$ and $j = (j_1, \ldots, j_p)$

$$C^{-1}\mu(I_{i_1\ldots i_l})\mu(I_{j_1\ldots j_p}) \leq \mu(I_{i_1\ldots i_l j_1\ldots j_p}) \leq C\mu(I_{i_1\ldots i_l})\mu(I_{j_1\ldots j_p}) \quad \text{(here } C = 1\text{)}$$

We will denote the previous property by $\mu(I_{i,j}) \approx \mu(I_i)\,\mu(I_j)$.

On the other hand, we have

- (A_2)

$$\mid I_{i,j} \mid \approx \mid I_i \mid \mid I_j \mid \quad \text{(because of the Distortion Lemma)}$$

and

- (A_3)

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log\left(\sup_{|i|=n} \mid I_i \mid\right) < 0\,.$$

By subadditivity argument, Brown, Michon and Peyrière (see [11], [49] and [52]); Collet, Lebowitz and Porzio (see [20]) proved that asumptions (A_1) and (A_2) imply that the sequence $C_n(x,y) := \frac{1}{n}\log\left(\sum_{|i|=n}\mu(I_i)^{x+1} \mid I_i \mid^{-y}\right)$ has a finite limit $C(x,y)$ for any $(x,y)\in \mathrm{R}^2$, that $C(x,y)$ is C^2 and $D^2C(.,.)\neq 0$. It results that the sequence

$$\tilde{C}_n(x,y) := \frac{1}{n}\log\left(\sum_{|i|=n}|\lambda_i|^{x+1} \mid I_i \mid^{-y}\right)$$

goes to

$$\tilde{C}(x,y) := C(x,y) + (x+1)\log\Lambda$$

for any $(x,y)\in \mathrm{R}^2$, besides $\tilde{C}(x,y)$ is C^2 and $D^2\tilde{C}(.,.)\neq 0$ on R^2.

Consider the set $\Delta = \{(x,y)\in \mathrm{R}^2 \ : \ \tilde{C}(x,y) < 0\}$. Δ is not empty because of (A_3). On the other hand, since $\tilde{C}(x,y)$ is convex, nonincreasing as a function of x (because the $|\lambda_j|$ are < 1) and nondecreasing as a function of y, the set Δ, if it contains a point (a,b), also contains the whole quadrant $\{(a+x, b-y) \ : \ x\geq 0 \text{ and } y\geq 0\}$. It results that there exists a function $\varphi : \mathrm{R}\to\overline{\mathrm{R}}$ nondecreasing and concave (thus almost everywhere differentiable) such that the interior of Δ is identical to the set $\{(x,y)\in \mathrm{R}^2 \ : \ y < \varphi(x-0)\}$. Moreover, $\tilde{C}(t,\varphi(t)) = 0, \forall t\in \mathrm{R}$. Thus the implicit function theorem yields that for t such that $D_2\tilde{C}(t,\varphi(t))\neq 0$, φ is C^1.

In [49], Michon proved that for every $(x,y)\in \mathrm{R}^2$, there exists a probability measure $\mu_{x,y}$ on the tree $\{1,2\}^{\mathbf{N}}$ such that for any branchs i and j:

$$\mu_{x,y}(i,j) \approx \mu_{x,y}(i)\ \mu_{x,y}(j) \tag{2.52}$$

and

$$\mu_{x,y}(i) \approx \mu(I_i)^{x+1} \mid I_i \mid^{-y} e^{-|i|C(x,y)} . \tag{2.53}$$

Thanks to the bijection π between the tree $\{1,2\}^{\mathbf{N}}$ and K, denote by $\tilde{\mu}_{x,y}$ the associated probability measure supported in K. Hence for any branchs i and j

$$\tilde{\mu}_{x,y}(I_{ij}) \approx \tilde{\mu}_{x,y}(I_i)\tilde{\mu}_{x,y}(I_j) \tag{2.54}$$

and

$$\tilde{\mu}_{x,y}(I_i) \approx |\lambda_i|^{x+1} \mid I_i \mid^{-y} e^{-|i|\tilde{C}(x,y)} . \tag{2.55}$$

This measure is called a Gibbs measure and was studied by Rand (see [53]). The Gibbs measure will be used in Lemma 8 in order to compute the Hausdorff dimension of the sets of singularities for our selfsimilar function F.

Proposition 4 *Let $\alpha < k$ and $d(\alpha)$ be the Hausdorff dimension of the set E^α of points x where $\alpha(x) = \alpha$; Then $d(\alpha)$ is concave, equals to $-\infty$ outside $[\alpha_{min}, \alpha_{max}]$, and on this interval for $\alpha = \varphi'(q)$ (hence a-a $\alpha\in[\alpha_{min},\alpha_{max}]$)*

$$d(\alpha) = \inf_{p\in\mathbf{R}}(\alpha p - \varphi(p-1)) .$$

Proof:
Let $x \in K$ such that $\alpha(x) = \alpha$, $r > 0$, $s > 0$, $p \in \mathrm{R}$ and j such that $2^{-j} \leq r < 2.2^{-j}$. We have

$$\frac{\tilde{\mu}_{p-1,\varphi(p-1)}(B(x,r))}{r^s} \sim \sum_{i \in B_j(x)} \frac{\tilde{\mu}_{p-1,\varphi(p-1)}(I_i)}{|I_i|^s}$$

$$\sim \sup_{i \in B_j(x)} \frac{\tilde{\mu}_{p-1,\varphi(p-1)}(I_i)}{|I_i|^s} \quad \text{(because the cardinality of } B_j(x) \leq C)$$

$$\sim \sup_{i \in B_j(x)} |\lambda_i|^p |I_i|^{-\varphi(p-1)-s} \quad \text{(because of (2.55) and the fact that } \tilde{C}(t,\varphi(t)) = 0) \ .$$

Suppose that $s > -\varphi(p-1) + p\alpha$ then Theorem 2 implies that

$$\limsup_{r \to 0} \frac{\tilde{\mu}_{p-1,\varphi(p-1)}(B(x,r))}{r^s} = +\infty$$

thus, using the second point of Lemma 8, we get $M_s(E^\alpha) = 0$.
Hence

$$d(\alpha) \leq \alpha p - \varphi(p-1), \forall p \in \mathrm{R}$$

so

$$d(\alpha) \leq \inf_{p \in \mathbf{R}} (\alpha p - \varphi(p-1)) \ .$$

And in order to prove Proposition 4, we have to find p such that $\tilde{\mu}_{p-1,\varphi(p-1)}(E^\alpha) > 0$.
Using the same proof as in [52] pages 5 and 6, we can show that for $\alpha = \varphi'(p)$ and

$$\tilde{E}_\alpha = \{x \in [0,1[: \lim_{\substack{n \to \infty \\ |i|=n, x \in I_i}} \frac{\log|\lambda_i|}{\log|I_i|} = \alpha\} \ ,$$

we have

$$\tilde{\mu}_{p-1,\varphi(p-1)}(\tilde{E}_\alpha) > 0 \ .$$

Whence this result with the fact that $\tilde{E}_\alpha \subset E^\alpha$ yield the desired proposition.

2.5 Proof of the Multifractal Formalism

We shall prove that

$$d(\alpha) = \inf(\alpha p - \eta(p) + 1)$$

where $\eta(p)$ is the function defined in (1.8). To give the order of the magnitude of $\eta(p)$, we have to estimate the size of the wavelet transform everywhere. For $i = (i_1, \ldots, i_n)$, consider

$$I_i(a) = I_i +]-a, a[$$

and

$$C_i = I_{(i_1,\ldots,i_{n-1})}(a) - I_{(i_1,\ldots,i_{n-1},i_n)}(a) \ .$$

If $i \in B_j$ and $a \leq |\ I_i\ |$ *then* $|\ I_i(a)\ | \sim |\ I_i\ |$, $|\ C_i\ | \leq |\ I_i\ |$ and inequalities (2.47) and (2.50) show that there exists $a \sim 2^{-j}$ and a point b of $I_i(a)$ for which the order of magnitude of $C_{a,b}(F)$ is $\Lambda_j(b)$.

We can also deduce the following lemma from (2.18) and an argument similar to the proof of Proposition 3.

Lemma 9 *If* $i \in B_j$, $a \sim \mid I_i \mid$ *and* $b \in I_i(a)$ *then* $|C_{a,b}(F)| \leq CL_j(b)$.
If $a \leq \mid I_i \mid$ *and* $b \in C_i$ *then* $|C_{a,b}(F)| \leq Ca^k |I_i|^{-k} L_j(b)$.

On the other hand, remark that

$$\frac{d}{db} C_{a,b} = \frac{1}{a} \tilde{C}_{a,b}$$

where $\tilde{C}_{a,b}$ is the wavelet transform due to ψ', and

$$\frac{d}{da} C_{a,b} = -\frac{1}{a} \check{C}_{a,b} + \frac{1}{a} C_{a,b}$$

where $\check{C}_{a,b}$ is the wavelet transform due to $x\psi'$.

We deduce that there exists an interval of lenght $\sim a$ on which the order of magnitude of $C_{a,b}(F)$ is $\Lambda_j(b)$. Thus if we denote by A_j the interval $[\frac{1}{2}2^{-j}, 2^{-j}]$, then for each branch $i \in B_j$ there exists a ball of radius $\sim 2^{-j}$ in the time frequency half-space $\mathrm{R}^+ \times \mathrm{R}$, located near x_i and in frequency in the interval A_j and where

$$\mid C_{a,b}(F) \mid \geq C' \mid \lambda_i \mid .$$

Lemma 9 and the previous remark yield

$$C' \sum_{i \in B_j} 2^{-2j} |\lambda_i|^p \leq \int_{A_j \times \mathbf{R}} |C_{a,b}(F)|^p da\, db \tag{2.56}$$

$$\leq C \sum_{i \in B_j} 2^{-2j} |\lambda_i|^p + O\left(2^{-j} \sum_{|I_i| \geq 2.2^{-j}} \mid I_i \mid |\lambda_i|^p 2^{-kpj} \mid I_i \mid^{-kp} \right)$$

$$\leq C 2^{-j} \left[\sum_{i \in B_j} 2^{-j} |\lambda_i|^p + O\left(\sum_{|I_i| \geq 2.2^{-j}} 2^{-kpj} |\lambda_i|^p \mid I_i \mid^{1-kp} \right) \right] \tag{2.57}$$

where $O(.)$ is positive.

We have

$$0 = \tilde{C}(p-1, \varphi(p-1)) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log \left(\sum_{|i|=n} |\lambda_i|^p \mid I_i \mid^{-\varphi(p-1)} \right)$$

so we can write

$$\log \left(\sum_{|i|=n} |\lambda_i|^p \mid I_i \mid^{-\varphi(p-1)} \right) = o(\frac{1}{n})$$

thus

$$\sum_{|i|=n} |\lambda_i|^p \mid I_i \mid^{-\varphi(p-1)} = e^{o(\frac{1}{n})} .$$

Define

$$G(j) = \sum_{i \in B_j} |\lambda_i|^p \mid I_i \mid^{-\varphi(p-1)} ;$$

It follows from (2.12) that for $i \in B_j$,

$$j\frac{\log 2}{\log \chi^{-1}} - \frac{\log 2\mathcal{D}}{\log \chi^{-1}} < |i| \leq j\frac{\log 2}{\log \rho^{-1}} + \frac{\log \mathcal{D}}{\log \rho^{-1}} \tag{2.58}$$

(where $|i| = n$ for $i = (i_1, \ldots, i_n)$); Hence

$$C' e^{o(\frac{1}{j})} \leq G(j) \leq Cj e^{o(\frac{1}{j})} . \tag{2.59}$$

Therefore

$$\begin{aligned} 2^{-j} \sum_{i \in B_j} 2^{-j} |\lambda_i|^p &\sim 2^{-j} 2^{-(1+\varphi(p-1))j} \sum_{i \in B_j} |\lambda_i|^p |I_i|^{-\varphi(p-1)} \\ &= 2^{-j} 2^{-(1+\varphi(p-1))j} G(j) \\ &\leq Cj e^{o(\frac{1}{j})} 2^{-j} 2^{-(1+\varphi(p-1))j} \end{aligned} \tag{2.60}$$

and

$$2^{-j} \sum_{i \in B_j} 2^{-j} |\lambda_i|^p \geq C' e^{o(\frac{1}{j})} 2^{-j} 2^{-(1+\varphi(p-1))j} . \tag{2.61}$$

The term

$$2^{-j} O\left(\sum_{|I_i| \geq 2.2^{-j}} |\lambda_i|^p 2^{-kpj} \mid I_i \mid^{1-kp} \right) \tag{2.62}$$

is positive and bounded by

$$\begin{aligned} & C 2^{-j} 2^{-kpj} \sum_{|I_i| \geq 2.2^{-j}} |\lambda_i|^p |I_i|^{1-kp} \\ &= C 2^{-j} 2^{-kpj} \sum_{l \leq j-2} \sum_{2^{-l-1} \leq |I_i| < 2^{-l}} |\lambda_i|^p |I_i|^{1-kp} \\ &\sim C 2^{-j} 2^{-kpj} \sum_{l \leq j-2} 2^{-l(1-kp+\varphi(p-1))} \sum_{2^{-l-1} \leq |I_i| < 2^{-l}} |\lambda_i|^p |I_i|^{-\varphi(p-1)} \\ &\leq C 2^{-j} 2^{-kpj} \sum_{l \leq j} 2^{-l(1-kp+\varphi(p-1))} G(l) \end{aligned}$$

thus if $\varphi(p-1) + 1 < kp$ then (2.62) is bounded by $Cj e^{o(\frac{1}{j})} 2^{-(1+\varphi(p-1))j} 2^{-j}$.

Hence

$$C' 2^{-j} e^{o(\frac{1}{j})} 2^{-(1+\varphi(p-1))j} \leq \int_{A_j \times \mathbf{R}} |C_{a,b}|^p da\, db \leq Cj 2^{-j} e^{o(\frac{1}{j})} 2^{-(1+\varphi(p-1))j} . \tag{2.63}$$

For the complex case, if $\varphi(p-1) + 2 < kp$ then

$$C' 2^{-j} e^{o(\frac{1}{j})} 2^{-(2+\varphi(p-1))j} \leq \int_{A_j \times \mathbf{R}^2} |C_{a,b}|^p da\, db \leq Cj 2^{-j} e^{o(\frac{1}{j})} 2^{-(2+\varphi(p-1))j} . \tag{2.64}$$

Whence the following proposition:

Proposition 5 *If $\varphi(p-1)+1 < kp$ then $\eta(p) = \varphi(p-1)+1$.*
For the complex case, if $\varphi(p-1)+2 < kp$ then $\eta(p) = \varphi(p-1)+2$.

Proof:
Using (2.63) and the fact that $\lim_{j\to\infty} \frac{o(\frac{1}{j})}{j} = 0$, we obtain

$$\limsup_{a\to 0} a^{-(1+\varphi(p-1))} e^{o(\frac{1}{\log a})} \int_{\mathbf{R}} |C_{a,b}|^p \, db \geq C' > 0 \tag{2.65}$$

and

$$\limsup_{a\to 0} \frac{a^{-(1+\varphi(p-1))}}{|\log a|} e^{o(\frac{1}{\log a})} \int_{\mathbf{R}} |C_{a,b}|^p \, db \leq C < +\infty \, . \tag{2.66}$$

Finally we have the following Theorem:

Theorem 3 *Let (T_j) be a system of d contractions defined on a bounded open domain Ω in a one dimensional line (respectively the complex plane $\mathbb{C}$) and satisfying the asumptions (2.10), (2.11), (2.12) and (2.13). Let g be a C^k function supported in $\bar{\Omega}$ and F be the unique (selfsimilar) function satisfying*

$$F(x) = \begin{cases} \lambda_j F(T_j^{-1}(x)) + g(x) & \text{if } x \in T_j(\Omega) \\ g(x) & \text{if } x \notin \bigcup_j T_j(\Omega) \, ; \end{cases}$$

Suppose that $\alpha_{min} > 0$ and that there exists $x_0 \in \Omega$ such that $F \notin C^k(x_0)$; then for $x \in K$ such that $\liminf_{n\to\infty} \frac{\log|\lambda_{i_1(x)}\ldots\lambda_{i_n(x)}|}{\log|\Omega_{i_1(x)\ldots i_n(x)}|} < k$

$$\alpha(x) = \liminf_{n\to\infty} \frac{\log|\lambda_{i_1(x)}\ldots\lambda_{i_n(x)}|}{\log|\Omega_{i_1(x)\ldots i_n(x)}|} \, ;$$

For $\alpha < k$, $\alpha \in [\alpha_{min}, \alpha_{max}]$

$$d(\alpha) = \inf_{p\in\mathbf{R}} (\alpha p - \varphi(p-1)) \, .$$

Set $m = 1$ for the one dimensional case and 2 for the complex case. If g is C^k then for p such that $\varphi(p-1)+m < kp$, $\eta(p) = \varphi(p-1)+m$.
Moreover, let p_0 such that $\varphi(p_0-1)+m = kp_0$ and α_0 the value of the inverse Legendre transform of $\varphi(p-1)$ at p_0, then for $\alpha < k$, $\alpha \in [\alpha_{min}, \alpha_{max}]$ such that $\alpha = \varphi'(p-1)$ and $\alpha \leq \alpha_0$ (thus a-a $\alpha \leq \alpha_0$)

$$d(\alpha) = \inf(\alpha p - \eta(p) + m) = \inf(\alpha p - \xi(p) + m) \, .$$

Whence the multifractal formalism is valid.

Chapitre 3

Formalisme Multifractal pour les Fonctions Autosimilaires Non Isotropes

Résumé On montre que le formalisme multifractal dépend des propriétés d'isotropie de l'autosimilarité.

3.1 Introduction

Dans le second chapitre, on a étendu la validité du formalisme multifractal pour des fonctions autosimilaires associées à certaines contractions non linéaires. En dimension 2, ces contractions contractent localement presque de la même façon. On se propose dans ce chapitre d'étudier des autosimilarités qui ne possèdent pas cette propriété. Nous montrerons que contrairement aux fonctions $\eta(p)$ et $\zeta(p)$, le spectre des singularités $d(\alpha)$ dépend de la disposition géométrique des $S_i(\Omega)$; que les fonctions autosimilaires associées sont multifractales mais le formalisme multifractal échoue. En pratique, la transformée en ondelettes classique, qui est homogène en fréquence ne parvient pas à détecter les singularités des séries non homogènes, et sera remplacée par une transformée en ondelettes ayant la même anisotropie; La norme euclidienne utilisée dans la définition (1.1) de la régularité Hölderienne ponctuelle sera également remplacée par une "norme" (plus exactement une pseudo-norme) qui tient compte de l'anisotropie. En faisant des modifications analogues pour les notions mathématiques qui interviennent dans le formalisme multifractal, nous déterminerons le bon spectre et vérifierons la validité du nouveau formalisme multifractal. Le plan de ce chapitre est le suivant.

Dans la prochaine section, on prouve l'existence et l'unicité de la solution de l'équation (1.22) pour les contractions non homogènes et on calcule sa régularité uniforme.

Dans la troisième section, on signale que les relations entre les estimations de la taille de la transformée en ondelettes et la régularité Hölderienne ne sont pas compatibles avec les séries non homogènes; elles donnent en effet un minorant et un majorant qui sont différents. On se restreint alors à des modèles précis pour bien estimer les incréments de la fonction et déterminer ainsi la valeur exacte de l'exposant de Hölder ponctuel.

Dans la quatrième section, on calcule le spectre des singularités pour ces modèles et on

montre que contrairement aux fonctions autosimilaires homogènes, ce spectre dépend de la disposition géométrique des $S_j(\Omega)$.

Dans la cinquième section, on calcule $\zeta(p)$ et $\eta(p)$ et on prouve l'échec du formalisme multifractal.

Dans la sixième section, on remplace la norme euclidienne utilisée dans la définition de la régularité Hölderienne par une autre "norme" qui sera compatible avec l'anisotropie; en faisant des modifications analogues pour les notions qui apparaissent dans le formalisme multifractal, on montre comment on peut obtenir des bonnes caractérisations pour la nouvelle régularité Hölderienne en termes de conditions sur la taille de la transformée en ondelettes anisotrope.

Finalement, dans la septième section, on prouve la validité du nouveau formalisme multifractal pour une classe plus large de fonctions autosimilaires non homogènes.

3.2 Anisotropic Selfsimilar Functions: existence, uniqueness and global Hölder regularity

For the convenience of the notations, we consider only the case $m = 2$ although the statements and proofs extend to the general case without any difficulties. Let s and t be two integers with $s < t$. We choose a finite subset A of $\{0, 1, \ldots, s-1\} \times \{0, 1, \ldots, t-1\}$ and for each pair $\omega = (i, j) \in A$, we consider the affine map $S_\omega : \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}^2$, given by

$$S_\omega(x_1, x_2) = \left(\frac{x_1}{s} + \frac{i}{s}, \frac{x_2}{t} + \frac{j}{t}\right) .$$

We construct a kind of anisotropic Sierpinski carpet K as follows: we divide the unit square $\Re = [0, 1]^2$ into a uniform grid of rectangles of height $1/t$ and width $1/s$; Each S_ω maps the unit square $\Re$ into the rectangle

$$\Re_\omega = [\frac{i}{s}, \frac{i+1}{s}] \times [\frac{j}{t}, \frac{j+1}{t}].$$

K will be the unique non-empty compact set (see [31]) satisfying

$$K = \bigcup_{\omega \in A} S_\omega(K). \tag{3.1}$$

We have

$$\begin{aligned} K &= \{x \in \Re \ : \ (S_{\omega_1} \circ \cdots \circ S_{\omega_n})^{-1}(x) \in \bigcup_{\omega \in A} \Re_\omega \quad \forall (\omega_1, \ldots, \omega_n) \in A^n\} \\ &= \bigcap_{n=0}^{\infty} (\bigcup_{|\omega|=n} \Re_\omega) \end{aligned}$$

where

$$\Re_\omega = (S_{\omega_1} \circ \cdots \circ S_{\omega_n})(\Re) \quad \text{for} \quad \omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n) .$$

There is a natural onto application π from $A^{\mathbf{N}}$ to K given by

$$\begin{aligned} \pi(\omega_1, \ldots, \omega_n, \ldots) &= \lim_{n \to \infty} S_{\omega_1} \circ \cdots \circ S_{\omega_n}(v) \quad \text{(for any } v \in \Re) \\ &= \bigcap_n \Re_{(\omega_1, \ldots, \omega_n)}. \end{aligned}$$

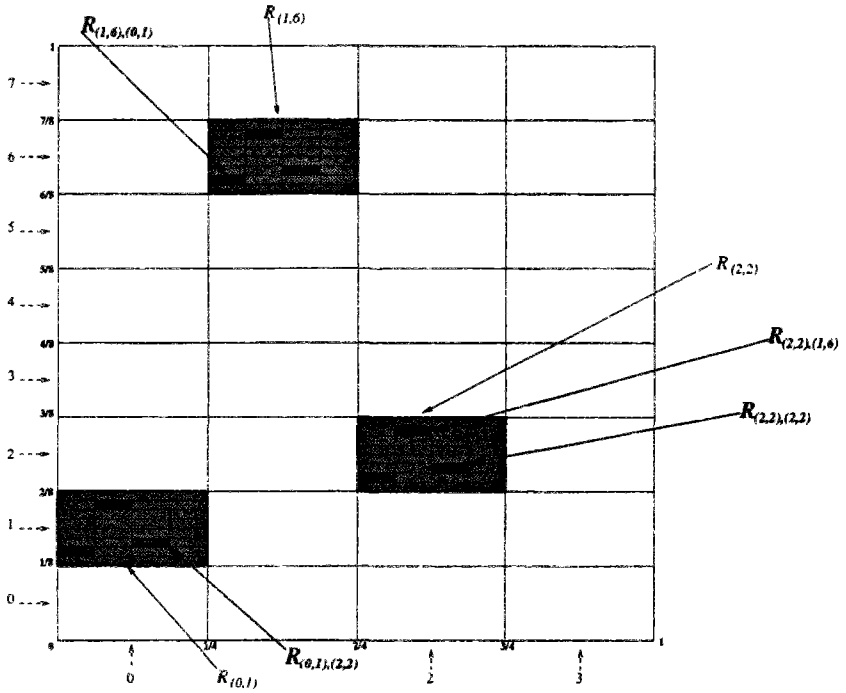


FIG. 3.1 – *The two first steps of the construction of the Sierpinski Carpet associated to the subdivision* $A = \{(0,1),(2,2),(1,6)\}$, $s = 4$ *and* $t = 8$

π will be a bijection in the case where the "separated open set condition"

$$\Re_\omega \cap \Re_{\omega'} = \emptyset \quad \text{if} \quad \omega \neq \omega' \tag{3.2}$$

holds.

Let g be a C^k function with all derivatives of order less than k having fast decay. We will call a "selfsimilar" function adapted to the subdivision A, a function F satisfying:

$$F(x) = \sum_{\omega \in A} \lambda_\omega F(S_\omega^{-1}(x)) \; + \; g(x). \tag{3.3}$$

Note that since the S_ω^{-1} have a sense for any $x \in \mathrm{R}^2$, then the $F(S_\omega^{-1}(x))$ are well defined, and so we don't make any convention on their values.

Remark: If $s = t$ then the maps S_ω are similitudes and this case was studied by Jaffard (see [33]) which proved the validity of the multifractal formalism for the associated selfsimilar functions.

Iterating (3.3), we obtain for any N:

$$\begin{aligned} F(x) \;\; = \;\; & \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{(\omega_1,\ldots,\omega_n)} \lambda_{\omega_1} \cdots \lambda_{\omega_n} \; g\left(S_{\omega_n}^{-1} \cdots S_{\omega_1}^{-1}(x)\right) \\ & + \sum_{(\omega_1,\ldots,\omega_N)} \lambda_{\omega_1} \cdots \lambda_{\omega_N} \; F\left(S_{\omega_N}^{-1} \cdots S_{\omega_1}^{-1}(x)\right). \end{aligned} \tag{3.4}$$

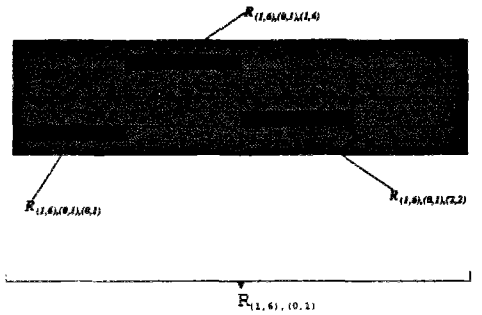


FIG. 3.2 – *A zoom in for the third step of the construction of the Sierpinski Carpet associated to the subdivision* $A = \{(0,1),(2,2),(1,6)\}$, $s = 4$ *and* $t = 8$

We will now show the existence and the uniqueness in $L^1(\mathrm{R}^2)$ of the solution of (3.3) under some hypothesis on the λ_ω and then we will determine its global Hölder regularity.

Define

$$|\lambda|_{max} = max_{\omega\in A}|\lambda_\omega| \quad , \quad |\lambda|_{min} = min_{\omega\in A}|\lambda_\omega| \; ;$$

$$\alpha_{min} = -\frac{\log|\lambda|_{max}}{\log t} \quad \text{and} \quad \alpha_{max} = -\frac{\log|\lambda|_{min}}{\log t} \; .$$

Proposition 6 *Suppose that* $\sum_{\omega\in A} \mid \lambda_\omega \mid < st$, *then the functional equation (3.3) has a unique solution in* $L^1(\mathrm{R}^2)$ *given by the non-homogeneous series*

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{(\omega_1,\ldots,\omega_n)} \lambda_{\omega_1}\cdots\lambda_{\omega_n}\, g\left(S_{\omega_n}^{-1}\cdots S_{\omega_1}^{-1}(x)\right). \tag{3.5}$$

If furthermore $t^{-k} < |\lambda|_{max} < 1$, *then* $F \in C^{\alpha_{min}}(\mathrm{R}^2)$.

Proof:

Distribution (3.5) verifies (3.3), its L^1 norm is bounded by

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{(\omega_1,\ldots,\omega_n)} \mid \lambda_{\omega_1}\cdots\lambda_{\omega_n} \mid \int \mid g(S^{-1}_{(\omega_1,\ldots,\omega_n)}(x)) \mid \, dx \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{(\omega_1,\ldots,\omega_n)} \mid \lambda_{\omega_1}\cdots\lambda_{\omega_n} \mid \int_{\Re_\omega} \mid g(S^{-1}_{(\omega_1,\ldots,\omega_n)}(x)) \mid \, dx \\
&\leq C \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{(\omega_1,\ldots,\omega_n)} \mid \lambda_{\omega_1}\cdots\lambda_{\omega_n} \mid Area(\Re_{(\omega_1,\ldots,\omega_n)}) \\
&\leq C \sum_{n=0}^{\infty} s^{-n}t^{-n}\left(\sum_{\omega\in A}|\lambda_\omega|\right)^n \\
&\leq C'.
\end{aligned}$$

For the uniqueness of the solution of (3.3) in $L^1(\mathrm{R}^2)$, remark that if there was two solutions, it follows from the fact that (3.4) holds for any N that their difference is a

distribution supported by K and is a solution of the homogeneous equation

$$F = \sum_{\omega \in A} \lambda_\omega F \circ S_\omega^{-1}. \tag{3.6}$$

But

$$\| F \circ S_\omega^{-1} \|_{L^1(\mathbf{R}^2)} = s^{-1}t^{-1} \| F \|_{L^1(\mathbf{R}^2)}$$

hence if $\sum_{\omega \in A} | \lambda_\omega | < st$, equation (3.6) has zero as a solution in $L^1(\mathrm{R}^2)$.

Let us now prove that $F \in C^{\alpha_{\min}}(\mathrm{R}^2)$. For that we will use the Littlewood-Paley characterization. We split F as a sum

$$F(x) = \sum_{j \geq 0} F_j(x) \quad \text{where} \quad F_j(x) = \sum_{\omega \in A^j} \lambda_\omega g(S_\omega^{-1}(x)).$$

Let ψ be a function in the Schwartz class such that

$$\hat{\psi}(\xi) = 0 \quad \text{for} \quad | \xi | \leq 1 \quad \text{and} \quad | \xi | \geq 2s$$

$$\hat{\psi}(\xi) = 1 \quad \text{for} \quad 2 \leq | \xi | \leq s.$$

Set $\psi_l(x) = s^{2l}\psi(s^l x)$, $W_{l,j} = F_j * \psi_l$ and $h_{\omega,l} = (g \circ S_\omega^{-1}) * \psi_l$.
Recall that a function F belongs to $C^r(\mathrm{R}^2)$ if and only if

$$| F * \psi_l(x) | \leq C s^{-rl} \ \forall x \in \mathrm{R}^2.$$

We have

$$h_{\omega,l}(x) = s^{2l} \int g(S_\omega^{-1}(y)) \ \psi(s^l(x-y))\, dy.$$

Let $P_{k-1}g_x(y)$ be the Taylor expansion of g at the order $k-1$ at the point x, i.e

$$P_{k-1}g_x(y) = \sum_{|\gamma| \leq k-1} \frac{\partial^\gamma g(x)}{\gamma!} y^\gamma.$$

It follows from the properties of g and ψ, and the fact that S_ω^{-1} is affine in each direction that for $\omega \in A^j$,

$$h_{\omega,l}(x) = s^{2l} \int_{\mathbf{R}^2} \left(g(S_\omega^{-1}(y)) - P_{k-1}(g \circ S_\omega^{-1})_x(y-x) \right) \ \psi(s^l(x-y))\, dy \ ;$$

Thus using the mean value theorem, we obtain

$$|h_{\omega,l}(x)| \ \leq \ s^{2l} \int \left(\sup_{u \in [x,y]} \sum_{|\alpha|=k} |\partial^\alpha (g \circ S_\omega^{-1})(u)| \right) \ |x-y|^k \ \psi(s^l(x-y)\, dy \ ;$$

Now, because the derivatives of g of order k have fast decay, we obtain for N large enough

$$\begin{aligned}
|\partial^\alpha (g \circ S_\omega^{-1})(u)| &\leq C_N \frac{t^{kj}}{(1+|S_\omega^{-1}(u)|)^N} \\
&\leq C_N \frac{t^{kj}(1+|S_\omega^{-1}(u)-S_\omega^{-1}(x)|)^N}{(1+|S_\omega^{-1}(x)|)^N} \\
&\leq C_N \frac{t^{kj}\ (1+s^j|u_1-x_1|+t^j|u_2-x_2|)^N}{(1+|S_\omega^{-1}(x)|)^N} \\
&\leq C_N \frac{t^{kj}\ (1+s^j|x_1-y_1|+t^j|x_2-y_2|)^N}{(1+|S_\omega^{-1}(x)|)^N}
\end{aligned}$$

hence $|h_{\omega,l}(x)|$ is bounded by

$$\begin{aligned}
&\frac{C_N\, s^{2l} t^{kj}}{(1+|S_\omega^{-1}(x)|)^N} \int |x-y|^k\ |\psi(s^l(x-y))|\ (1+s^j|x_1-y_1|+t^j|x_2-y_2|)^N\, dy \\
&\leq \frac{C_N\, s^{2l} t^{kj}}{(1+|S_\omega^{-1}(x)|)^N} \int |x-y|^k\ |\psi(s^l(x-y))|\ (1+s^j|x_1-y_1|+t^j|x_2-y_2|)^N\, dy\ ;
\end{aligned}$$

So, for $j \leq \sigma l$ with $\sigma = \log s / \log t$

$$\begin{aligned}
|h_{\omega,l}(x)| &\leq C_N \frac{s^{-kl} t^{kj}}{(1+|S_\omega^{-1}(x)|)^N} \\
&\leq C_N \frac{s^{-kl} t^{kj}}{(1+|S_\omega^{-1}(x)-S_\omega^{-1}(S_\omega(0))|)^N}\ .
\end{aligned}$$

Thus

$$|W_{l,j}(x)| \leq C_N |\lambda|_{max}^j s^{-kl} t^{kj} \sum_{\omega \in A^j} \frac{1}{(1+s^j|x_1-(S_\omega(0))_1|+t^j|x_2-(S_\omega(0))_2|)^N}$$

where $(S_\omega(0))_1$ and $(S_\omega(0))_2$ are the coordinates of $S_\omega(0)$.
We have the following lemma

Lemma 10 *Let D large enough and denote by $B_{j,D}(x)$ the set of $\omega \in A^j$ such that*

$$|x_1-(S_\omega(0))_1| \leq Ds^{-j}$$

and

$$|x_2-(S_\omega(0))_2| \leq Dt^{-j}$$

The cardinality of $B_{j,D}(x)$ is bounded independently of x and j by $4D^2$.

Proof:
The $\Re_\omega$ for $\omega \in B_{j,D}(x)$ are disjoints, thus they are all included in the rectangle

$$R_j = [x_1 - Ds^{-j}, x_1 + Ds^{-j}] \times [x_2 - Dt^{-j}, x_2 + Dt^{-j}]$$

hence

$$s^{-j}t^{-j}\ card\ B_{j,D}(x)\ \leq 4D^2 s^{-j}t^{-j}$$

whence Lemma 10.

Thanks to this Lemma and an argument similar to [33],

$$\frac{1}{(1+s^j|x_1-(S_\omega(0))_1|+t^j|x_2-(S_\omega(0))_2|)^N} \leq C\,,$$

hence

$$|W_{l,j}(x)| \leq Cs^{-kl}t^{kj}|\lambda|^j_{max}\,.$$

Hypothesis $t^{-k} < |\lambda|_{max}$ implies that for $\sigma = \log s/\log t$

$$\begin{aligned}\sum_{0\leq j\leq \sigma l}|W_{l,j}(x)| &\leq Cs^{-kl}t^{k\sigma l}|\lambda|^{\sigma l}_{max}\\ &= C|\lambda|^{\sigma l}_{max}\\ &= Cs^{-l\alpha_{min}}.\end{aligned}$$

On the other hand, for $j \geq \sigma l$

$$\begin{aligned}|W_{l,j}(x)| &\leq C\sup_x|F_j(x)|\\ &\leq C|\lambda|^j_{max}\end{aligned}$$

consequently

$$\begin{aligned}\sum_{j\geq\sigma l}|W_{l,j}(x)| &\leq C\sum_{j\geq\sigma l}|\lambda|^j_{max}\\ &\leq C|\lambda|^{\sigma l}_{max}\\ &= Cs^{-l\alpha_{min}}.\end{aligned}$$

Hence

$$|\,F*\psi_l(x)\,|\leq Cs^{-l\alpha_{min}}\,. \tag{3.7}$$

Whence Proposition 6.

3.3 Pointwise Hölder regularity

We want to compute the Hölder regularity of F at every point.

Proposition 7 *If $x \notin K$ then F is C^k in a neighbourhood of x.*

Proof:
It suffices to show that for any α such that $|\alpha| \leq k$, the series $\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{\omega\in A^j}\lambda_\omega\partial^\alpha(g\circ S_\omega^{-1})$ converges uniformly in a neighbourhhood of x.
This series is in modulus bounded by

$$\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{\omega\in A^j}|\lambda_\omega|\frac{t^{kj}}{(1+s^j|x_1-(S_\omega(0))_1|+t^j|x_2-(S_\omega(0))_2|)^N}$$

but, since $x \notin K$, $|x_1 - (S_\omega(0))_1| \geq C$ or $|x_2 - (S_\omega(0))_2| \geq C$, thus

$$\sum_{\omega \in A^j} |\lambda_\omega| \frac{t^{kj}}{(1 + s^j|x_1 - (S_\omega(0))_1| + t^j|x_2 - (S_\omega(0))_2|)^N} \leq C t^{(k - \alpha_{min} - N\sigma)j}.$$

Choosing N large enough, Proposition 7 holds.

Let us now compute the Hölder exponent $\alpha(x)$ of F at each point x of K; recall that

$$\alpha(x) = \sup\{\beta : \quad F \in C^\beta(x)\}. \tag{3.8}$$

For technical reasons, we will restrict to a function g which is supported in the square $\Re$. So the associated selfsimilar function (which satisfies (3.3)) will be also supported in $\Re$, and satisfies

$$F(x) = \begin{cases} \lambda_\omega F(S_\omega^{-1}(x)) + g(x) & \text{if } x \in \Re_\omega \\ g(x) & \text{if } x \notin \bigcup_{\omega \in A} \Re_\omega \end{cases}. \tag{3.9}$$

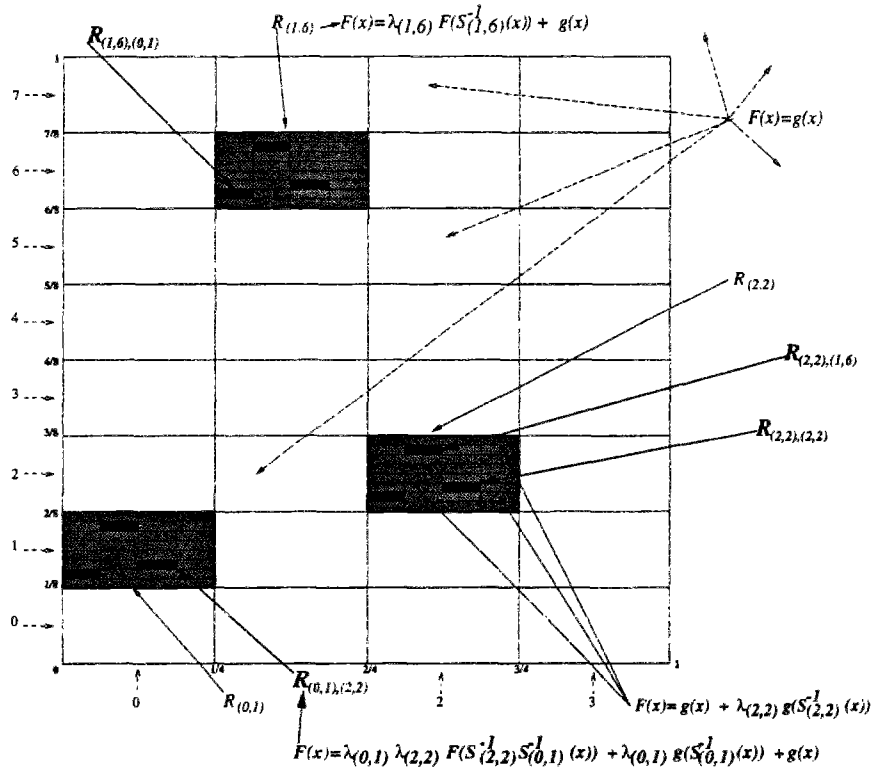


FIG. 3.3 – *The two first steps of the construction of the "selfsimilar" function adapted to the subdivision* $A = \{(0,1),(2,2),(1,6)\}$, $s = 4$ *and* $t = 8$ *and a function* g *supported in* $\Re$

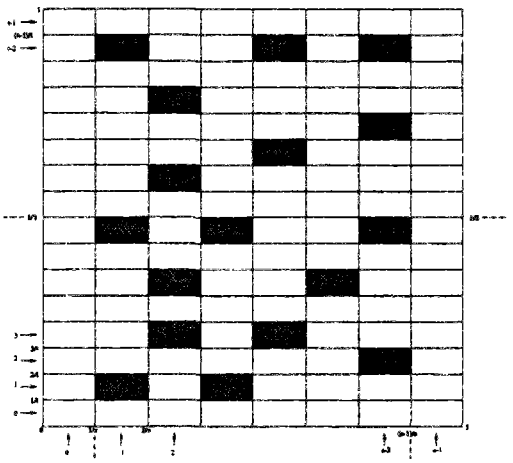


FIG. 3.4 – *The condition (3.10) for the construction of the "selfsimilar" function*

Now, we will assume the "separated open set condition" (3.2) for the subdivision A, and that

$$\forall \omega \in A\,, \quad \Re_\omega \subset [1/s, (s-1)/s] \times [1/t, (t-1)/t]\,. \tag{3.10}$$

Define for $x \in K$, $\omega(=\omega(x)) \in A^{\mathbf{N}}$ by $\omega = \pi^{-1}(x)$.

If $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \ldots)$ with $\omega_l = (i_l, j_l) \in A$ then $x = \left(\sum_{l=1}^{\infty} \frac{i_l}{s^l}, \sum_{l=1}^{\infty} \frac{j_l}{t^l}\right)$.

For notational convenience, set

$$\omega(n,x) = (\omega_1, \ldots, \omega_n)\ ;\ \lambda_{\omega(n,x)} = \lambda_{\omega_1} \cdots \lambda_{\omega_n}$$

and

$$S_{\omega(n,x)} = S_{\omega_1} \circ \cdots \circ S_{\omega_n}.$$

Now let

$$a_n(x) = \frac{\log |\lambda_{\omega(n,x)}|}{\log t^{-n}}$$

and

$$a(x) = \liminf_{n \mapsto \infty} a_n(x).$$

Proposition 8 *Let g supported in $\Re$; let F be a "selfsimilar" function adapted to a subdivision A satisfying the "separated open set condition" and the condition (3.10). If $x \in K$ and $a(x)$ is not integer and $a(x) < k$, then*

$$\alpha(x) \geq a(x)\,.$$

Proof:

Let $\epsilon > 0$, there exists n_0 so that $a_n(x) > a(x) - \epsilon$ for all $n \geq n_0$, implying

$$|\lambda_{\omega(n,x)}| \leq t^{-n(a(x)-\epsilon)}.$$

Let $h \in \mathrm{R}^2$, $|h| < t^{-n_0}$ and $n \in \mathrm{N}$ such that $t^{-n-2} \leq |h| < t^{-n-1}$, then thanks to the "separated open set condition" and condition (3.10), we get

$$\omega(n, x+h) = \omega(n, x).$$

Let $P_a g_x(h)$ be the Taylor expansion of g at the order $a = [a(x)]$ at the point x (where [a(x)] denotes the integer part of $a(x)$)

$$P_a g_x(h) = \sum_{|\gamma| \leq a} \frac{\partial^\gamma g(x)}{\gamma!} h^\gamma.$$

Consider

$$PF_x(h) = \sum_{l=0}^{\infty} \lambda_{\omega(l,x)} P_a(g \circ S^{-1}_{\omega(l,x)})_x(h) \ ;$$

$PF_x(h)$ is well defined.

Using (3.4), we obtain

$$\begin{aligned} F(x+h) - PF_x(h) &= \sum_{l=0}^{n-1} \lambda_{\omega(l,x)} \left[g\left(S^{-1}_{\omega(l,x)}(x+h)\right) - P_a(g \circ S^{-1}_{\omega(l,x)})_x(h) \right] \\ &+ \lambda_{\omega(n,x)} \, F\left(S^{-1}_{\omega(n,x)}(x+h)\right) \\ &- \sum_{l \geq n} \lambda_{\omega(l,x)} \, P_a(g \circ S^{-1}_{\omega(l,x)})_x(h). \end{aligned}$$

It follows from the mean value theorem that the first term is in modulous bounded by

$$\begin{aligned} C \sum_{l=0}^{n-1} |\lambda_{\omega(l,x)}| \, t^{l(a+1)} \, |h|^{a+1} &\leq C|h|^{a+1} \sum_{l=0}^{n_0-1} |\lambda_{\omega(l,x)}| \, t^{l(a+1)} + C|h|^{a+1} \sum_{l=n_0}^{n-1} |\lambda_{\omega(l,x)}| \, t^{l(a+1)} \\ &\leq C'|h|^{a+1} + C|h|^{a+1} \sum_{l=n_0}^{n-1} t^{-l(a(x)-\epsilon)} \, t^{l(a+1)} \\ &\leq C'|h|^{a+1} + C|h|^{a+1} \, t^{n(a+1-a(x)+\epsilon)} \\ &\leq C''|h|^{a(x)-\epsilon}. \end{aligned}$$

Thanks to the boundedness of F, the second term will be bounded by $C|\lambda_{\omega(n,x)}|$, so by $Ct^{-n(a(x)-\epsilon)}$ i.e by $C|h|^{a(x)-\epsilon}$.

And the third term is bounded by

$$\begin{aligned} \sum_{l \geq n} |\lambda_{\omega(l,x)}| \sum_{|\gamma| \leq a} t^{l|\gamma|} \, |h|^{|\gamma|} &\leq \sum_{l \geq n} |\lambda_{\omega(l,x)}| \, t^{la} \, |h|^a \\ &\leq C|h|^a \sum_{l \geq n} t^{-l(a(x)-\epsilon)} \, t^{la}. \end{aligned}$$

which is bounded by $C'|h|^{a(x)-\epsilon}$ for $0 < \epsilon < a(x) - a$, $(a(x) > a$ because $a(x)$ is not integer).

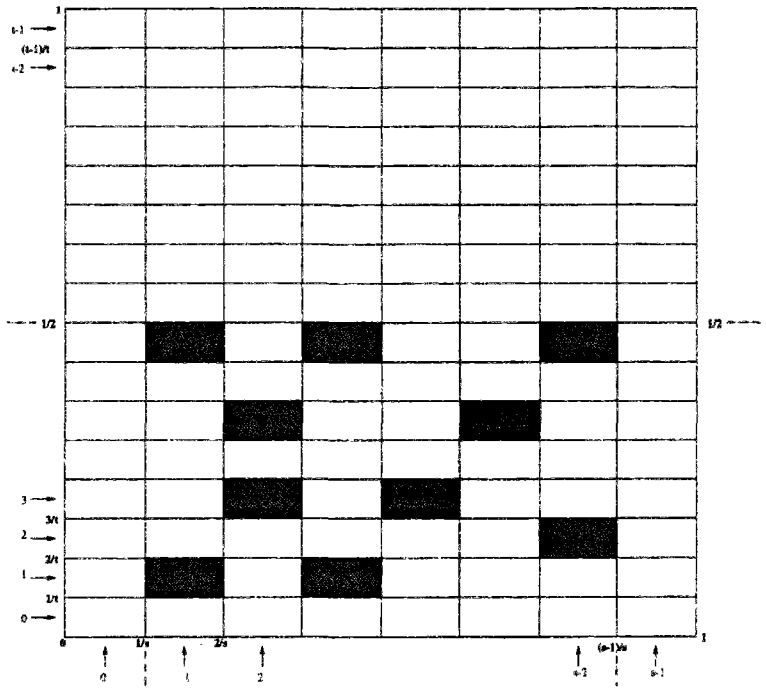


FIG. 3.5 - *The condition (3.11) for the construction of the "selfsimilar" function*

Whence Proposition 8.

We shall now give an upper bound for the pointwise regularity $\alpha(x)$ of the "selfsimilar" function adapted to the subdivision A. Unfortunately, it is very difficult to use the relationships between the two-microlocalization condition (1.15) in (i) of Théorème 1 to compute the exact Hölder exponent : the reason is that unlike the wavelet transform which is homogeneous in frequency, the contractions which appear in the non-homogeneous selfsimilar function have different rates in each direction. We can only prove that $\alpha(x) \leq \sigma^{-1}a(x)$ which is much larger than the lower bound $a(x)$. Thus, we must come back to Definition 1 of the first chapter to determine the exact value of the pointwise Hölder regularity. Obviously, this is not easy, so we will restrict to our couterexamples for the multifractal formalism. We take $g(x) = \Lambda(x_1)\Lambda(x_2)$ with $\Lambda(u) = min(u, 1-u)$ if $u \in [0,1]$ and 0 else. Here g is C^1 (in the sense that it is uniformly Lipschitz). We suppose that the λ_ω are positive and that

$$\forall \omega \in A, \quad \Re_\omega \subset [1/s, (s-1)/s] \times [1/t, 1/2] \tag{3.11}$$

or

$$\forall \omega \in A, \quad \Re_\omega \subset [1/s, (s-1)/s] \times [1/2, (t-1)/t]. \tag{3.12}$$

Remark: in the sixth section, we will prove that if we take anisotropic contractions in the wavelet transform, then we can find good relationships between estimates of the size of the wavelet transform and the "anisotropic Hölder regularity".

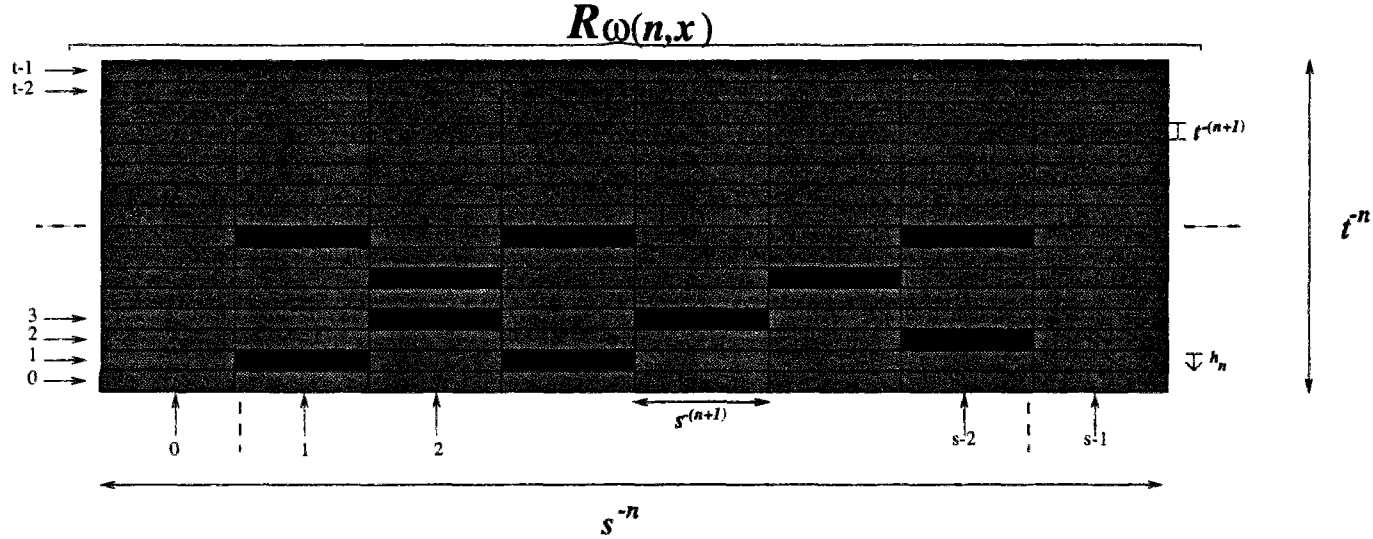


FIG. 3.6 – *A geometric justification for the property* $\omega(n, x + h_n) = \omega(n, x)$

Proposition 9 *Let* F *be the* L^1 *solution of*

$$F(x) = \sum_{\omega \in A} \lambda_\omega F(S_\omega^{-1}(x)) \; + \; \Lambda(x_1)\Lambda(x_2)$$

with $\sum_{\omega \in A} |\lambda_\omega| < st$ *and the asumptions (3.2) and (3.11) or (3.12). Then for* $x \in K$ *and* $a(x) \leq 1$, *we have*

$$\alpha(x) \leq a(x).$$

Proof:
Let $\delta > 0$; In the case of the asumption (3.11), we choose $h_n = (0, -t^{-(n+1)})$ with n large enough so that $\lambda_{\omega(n,x)} \geq t^{-n(a(x)+\delta)}$.
Since $\omega(n, x + h_n) = \omega(n, x)$, then

$$\begin{aligned} F(x + h_n) - F(x) &= \sum_{l=0}^{n-1} \lambda_{\omega(l,x)} \left[g\left(S_{\omega(l,x)}^{-1}(x + h_n)\right) - g\left(S_{\omega(l,x)}^{-1}(x)\right)\right] \\ &+ \lambda_{\omega(n,x)} \left[F\left(S_{\omega(n,x)}^{-1}(x + h_n)\right) - F\left(S_{\omega(n,x)}^{-1}(x)\right)\right]. \end{aligned}$$

Set $y_l = S_{\omega(l,x)}^{-1}(x) = (y_{l,1}, y_{l,2})$ for $l = 0, \ldots, n$. We have

$$y_l \in \Re_{\omega_{l+1}(x)} \subset [1/s, (s-1)/s] \times [1/t, 1/2]$$

and

$$S_{\omega(l,x)}^{-1}(x + h_n) = y_l + (0, -t^{l-(n+1)});$$

so for $0 \leq l \leq n-1$

$$g\left(S_{\omega(l,x)}^{-1}(x + h_n)\right) - g\left(S_{\omega(l,x)}^{-1}(x)\right) \;=\; g(y_l + (0, -t^{l-(n+1)})) - g(y_l)$$

$$\begin{aligned} &= \Lambda(y_{l,1})\left(\Lambda(y_{l,2}-t^{l-(n+1)})-\Lambda(y_{l,2})\right) \\ &= \Lambda(y_{l,1})\left(y_{l,2}-t^{l-(n+1)}-y_{l,2}\right) \quad \text{(because of (3.11))} \\ &= -t^{l-(n+1)}\Lambda(y_{l,1}). \end{aligned}$$

$y_n + (0,-t^{-1}) \notin \bigcup_{\omega\in A}\Re_\omega$ thus $F(y_n+(0,-t^{-1})) = g((y_n+(0,-t^{-1}))$ and from (3.3)

$$F(y_n) = \lambda_{\omega_{n+1}(x)}F(y_{n+1}) + g(y_n).$$

Thus

$$\begin{aligned} F\left(S^{-1}_{\omega(n,x)}(x+h_n)\right) - F\left(S^{-1}_{\omega(n,x)}(x)\right) &= F(y_n+(0,-t^{-1})) - F(y_n) \\ &= \Lambda(y_{n,1})\left(\Lambda(y_{n,2}-t^{-1})-\Lambda(y_{n,2})\right) - \lambda_{\omega_{n+1}(x)}F(y_{n+1}) \\ &= -t^{-1}\,\Lambda(y_{n,1}) - \lambda_{\omega_{n+1}(x)}F(y_{n+1}). \end{aligned}$$

And since F is positive then

$$\begin{aligned} |F(x+h_n)-F(x)| &= \sum_{l=0}^{n-1}\lambda_{\omega(l.x)}\,\Lambda(y_{l,1})\,t^{l-(n+1)} \\ &+ \lambda_{\omega(n,x)}\left(t^{-1}\,\Lambda(y_{n,1}) + \lambda_{\omega_{n+1}(x)}F(y_{n+1})\right) \end{aligned}$$

but $\Lambda(y_{n,1}) \geq 1/s$, thus

$$\begin{aligned} |F(x+h_n)-F(x)| &\geq s^{-1}t^{-1}\lambda_{\omega(n,x)} \\ &\geq Ct^{-n(a(x)+\delta)} \\ &\geq C|h_n|^{a(x)+\delta}. \end{aligned}$$

In the case of the asumption (3.12), we choose $h_n = (0, t^{-(n+1)})$ and the proof is identical.

The lower and upper bounds for $\alpha(x)$ yield the following theorem

Theorem 4 *Let F be the L^1 solution of*

$$F(x) = \sum_{\omega\in A}\lambda_\omega F(S_\omega^{-1}(x)) \;+\; \Lambda(x_1)\Lambda(x_2)$$

with $\sum_{\omega\in A}|\lambda_\omega| < st$ and the asumptions (3.2) and (3.11) or (3.12). Then for $x \in K$ and $a(x) < 1$

$$\alpha(x) = a(x).$$

3.4 The spectrum of singularities

We want now to determine the Hausdorff dimension of the set of points x where $\alpha(x)$ is equal to a given $\alpha \in]0,1[$.

For technical reasons, we shall assume another separation condition

$$\text{if} \quad \omega = (i,j) \in A \quad \text{then} \quad (i\pm 1, j) \notin A. \tag{3.13}$$

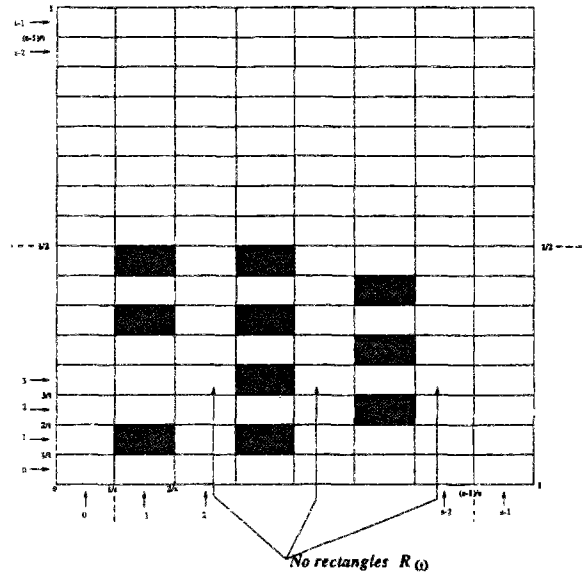


FIG. 3.7 – *The condition (3.13) for the construction of the "selfsimilar" function*

This condition requires that if column i of the grid contains points of K, the two adjacent columns do not.

On the sets of singularities E^α, we will concentrate a suitable family of probability measures with certain scaling properties and then use the Lemma 8 to estimate the dimension of these sets: each measure gives us an upper bound and one of them will give the equality.

For $q \in \mathrm{R}$, define $\tau(q)$ by $\sum_{\omega\in A} \lambda_\omega^q s^{\tau(q)} = 1$; i.e $\tau(q) = -\log(\sum_{\omega\in A} \lambda_\omega^q)/\log s$. Set $P_\omega(q) = \lambda_\omega^q s^{\tau(q)}$ and let μ_q be a probability measure on K such that

$$\forall(\omega_1,\ldots,\omega_n) \in A^{\mathbf{N}},\ \mu_q(\Re_{\omega_1,\ldots,\omega_n}) = P_{\omega_1}(q)\ldots P_{\omega_n}(q).$$

The construction of such measure by induction is straightforward (see [31], [38] or [51]).

For $r > 0$ and $\omega = (\omega_1,\ldots,\omega_n,\ldots) \in A^{\mathbf{N}}$ with $\omega_n = (i_n, j_n) \in A$, define the approximate square $Q(\omega, r)$ with approximate side r by

$$\begin{aligned} Q(\omega,r) &= \left[\frac{i_1}{s}+\cdots+\frac{i_{k_1(r)}}{s^{k_1(r)}},\ \frac{i_1}{s}+\cdots+\frac{i_{k_1(r)}}{s^{k_1(r)}}+\frac{1}{s^{k_1(r)}}\right] \\ &\quad\times\left[\frac{j_1}{t}+\cdots+\frac{j_{k_2(r)}}{t^{k_2(r)}},\ \frac{j_1}{t}+\cdots+\frac{j_{k_2(r)}}{t^{k_2(r)}}+\frac{1}{t^{k_2(r)}}\right] \end{aligned}$$

where $k_1(r)$ and $k_2(r)$ are the unique integers such that

$$s^{-(k_1(r)+1)} < r \le s^{-k_1(r)} \quad \text{and} \quad t^{-(k_2(r)+1)} < r \le t^{-k_2(r)}.$$

In [51], we have

$$\mu_q(Q(\omega,r)) = \prod_{l=1}^{k_1(r)} [\sum_{(i_l,j)\in A} P_{(i_l,j)}(q)] \prod_{l=1}^{k_2(r)} \frac{P_{\omega_l}(q)}{\sum_{(i_l,j)\in A} P_{(i_l,j)}(q)}. \tag{3.14}$$

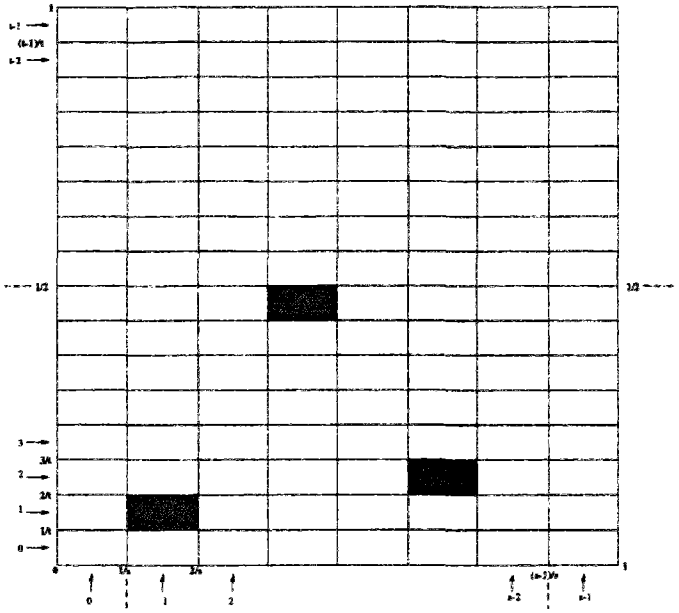


FIG. 3.8 – *First case: each column of the grid contains at most one* $\Re_\omega$

By considering the two cases below, we will show that the spectrum of singularities depends on the geometrical arrangement of the $\Re_\omega$, $\omega \in A$.

3.4.1 First case: each column of the grid contains at most one $\Re_\omega$

Proposition 10 *Assume that each column of the grid contains at most one* $\Re_\omega$. *Let* $\alpha < 1$ *and* $d(\alpha)$ *be the Hausdorff dimension of the set* E^α *of points* x *where* $\alpha(x) = \alpha$. *Then* $d(\alpha)$ *is concave, equals to* $-\infty$ *outside* $[\alpha_{min}, \alpha_{max}]$ *and on this interval*

$$d(\alpha) = \inf_q (q\sigma^{-1}\alpha - \tau(q))$$

and it is analytic.

Proof:

In this case (3.14) implies that for $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n, \ldots) \in A^{\mathbb{N}}$ and $r > 0$

$$\begin{aligned} \mu_q(Q(\omega, r)) &= \prod_{l=1}^{k_1(r)} P_{\omega_l}(q) \qquad (3.15) \\ &= s^{k_1(r)\tau(q)} \prod_{l=1}^{k_1(r)} \lambda_{\omega_l}^q . \end{aligned}$$

Thus

$$\frac{\log \mu_q(Q(\omega, r))}{\log r} = \tau(q) \frac{k_1(r)}{\log r} \log s + q \frac{\log \prod_{l=1}^{k_1(r)} \lambda_{\omega_l}}{\log r} .$$

Since $\frac{k_1(r)}{\log r}\log s \mapsto -1$ as $r \searrow 0$, then

$$\liminf_{r\searrow 0}\frac{\log \mu_q(Q(\omega,r))}{\log r} = -\tau(q) + q\sigma^{-1}a(\pi(\omega)).$$

Denote by $B(x,r)$ the ball of center x and diameter $2r$. In [38] and [51], the following lemma was proved

Lemma 11 *If $\omega \in A^{\mathbb{N}}$ and $n \in \mathbb{N}$, then*

$$B(\pi(\omega), s^{-n}) \cap K \subset Q(\omega, s^{-n}) \subset B(\pi(\omega), (s+t)s^{-n}).$$

Thanks to the previous Lemma

$$\liminf_{r\searrow 0}\frac{\log \mu_q(B(\pi(\omega),r))}{\log r} = \liminf_{r\searrow 0}\frac{\log \mu_q(Q(\omega,r))}{\log r} \tag{3.16}$$

whence

$$\limsup_{r\searrow 0}\frac{\mu_q(B(\pi(\omega),r))}{r^{-\tau(q)+q\sigma^{-1}a(\pi(\omega))+\epsilon}} = +\infty \quad \forall \epsilon > 0. \tag{3.17}$$

Let $E^\alpha = \{x : \alpha(x) = \alpha\}$; We can assume that $\alpha_{max} \leq 1$, so Theorem 4 implies that for $\alpha < 1$, $E^\alpha = \{\pi(\omega) : a(\pi(\omega)) = \alpha\}$. Equation (3.17) and the second part of Lemma 8 imply that

$$d(\alpha) \leq q\sigma^{-1}\alpha - \tau(q) \quad \forall q \in \mathbb{R}$$

so

$$d(\alpha) \leq \inf_q(q\sigma^{-1}\alpha - \tau(q)).$$

We will now prove that the previous infimum is reached. For that we will look for the good measure that will give the equality.

We can easily show that $\tau(q)$ is strictly concave and analytic, so for $\beta \in]-\frac{\log\lambda_{max}}{\log s}, -\frac{\log\lambda_{min}}{\log s}[$, there exists a unique $q \in \mathbb{R}$ such that $\beta = \tau'(q)$. Hence for $\alpha \in]\alpha_{min}, \alpha_{max}[$ there exists a unique $q \in \mathbb{R}$ such that $\sigma^{-1}\alpha = \tau'(q)$.

With the probability $\tilde{\mu}_q = \mu_q \circ \pi$, the $X_j = \log P_{\omega_j}(q)$ are a sequence of i.i.d random variables; the strong law of large number implies that for $\tilde{\mu}_q - a.a\ \omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n, \ldots) \in A^{\mathbb{N}}$

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\log P_{\omega_j}(q) &\mapsto \sum_{\omega'\in A} P_{\omega'}(q)\,\log P_{\omega'}(q) \quad as\ n \mapsto \infty \\ &= \tau(q)\log s - q\tau'(q)\log s \end{aligned} \tag{3.18}$$

because

$$\begin{aligned}\sum_{\omega'\in A} P_{\omega'}(q)\,\log P_{\omega'}(q) &= \sum_{\omega'\in A}\lambda_{\omega'}^q s^{\tau(q)}\,(q\log\lambda_{\omega'} + \tau(q)\log s) \\ &= \tau(q)\log s + q\frac{\sum_{\omega'\in A}\lambda_{\omega'}^q\log\lambda_{\omega'}}{\sum_{\omega'\in A}\lambda_{\omega'}^q} \\ &= \tau(q)\log s - q\tau'(q)\log s.\end{aligned}$$

Thus for $\tilde{\mu}_q - a.a\ \omega \in A^{\mathbb{N}}$

$$\frac{\log \mu_q(Q(\omega,r))}{\log r} = \frac{k_1(r)}{\log r}\frac{1}{k_1(r)}\sum_{j=1}^{k_1(r)} \log P_{\omega_j}(q) \mapsto q\sigma^{-1}\alpha - \tau(q) \quad as\ r \searrow 0.$$

It follows from Lemma 11 that for $\tilde{\mu}_q - a.a\ \omega \in A^{\mathbb{N}}$

$$\lim_{r\searrow 0} \frac{\log \mu_q(B(\pi(\omega),r))}{\log r} = q\sigma^{-1}\alpha - \tau(q). \tag{3.19}$$

Take $E = \{\pi(\omega) \ : \ \lim_{r\searrow 0} \frac{\log \mu_q(B(\pi(\omega),r))}{\log r} = q\sigma^{-1}\alpha - \tau(q)\}$; then (3.19) implies that $\mu_q(E) = 1$ and Lemma 8 yields that the Hausdorff dimension of E is equal to $q\sigma^{-1}\alpha - \tau(q)$. But for $\alpha < 1, \quad \alpha \in]\alpha_{min}, \alpha_{max}[\ , E \subset E^{\alpha}$, whence $d(\alpha) \geq q\sigma^{-1}\alpha - \tau(q)$.

We conclude that $d(\alpha) = \inf_q(q\sigma^{-1}\alpha - \tau(q))$.

3.4.2 Second case: only one column containing all the $\Re_\omega$, $\omega \in A$

Proposition 11 *Assume that there is only one column containing all the $\Re_\omega$, $\omega \in A$. Then for $\alpha < 1$, $d(\alpha)$ is concave, equals to $-\infty$ outside $[\alpha_{min}, \alpha_{max}]$ and on this interval*

$$d(\alpha) = \inf_q(q\alpha - \sigma\tau(q))$$

and it is analytic.

Proof:

In this case, we have

$$\begin{aligned} \mu_q(Q(\omega,r)) &= \prod_{l=1}^{k_2(r)} P_{\omega_l}(q) \\ &= s^{k_2(r)\tau(q)} \prod_{l=1}^{k_2(r)} \lambda_{\omega_l}^q. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Thus

$$\frac{\log \mu_q(Q(\omega,r))}{\log r} = \tau(q)\ \frac{k_2(r)}{\log r}\ \log s\ +\ q\ \frac{\log \prod_{l=1}^{k_2(r)} \lambda_{\omega_l}}{\log r}.$$

Since $\frac{k_2(r)}{\log r} \log t \mapsto -1$ as $r \searrow 0$, then

$$\liminf_{r\searrow 0} \frac{\log \mu_q(Q(\omega,r))}{\log r} = -\sigma\tau(q) + qa(\pi(\omega))$$

and thanks to Lemma 11

$$\liminf_{r\searrow 0} \frac{\log \mu_q(B(\pi(\omega),r))}{\log r} = \liminf_{r\searrow 0} \frac{\log \mu_q(Q(\omega,r))}{\log r} \tag{3.21}$$

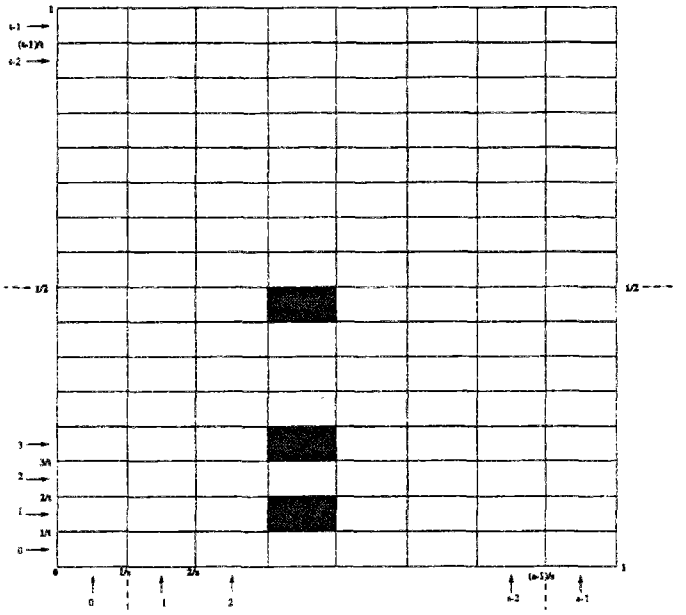


FIG. 3.9 – *Second case: only one column containing all the* $\Re_\omega$, $\omega \in A$

whence

$$\limsup_{r \searrow 0} \frac{\mu_q(B(\pi(\omega), r))}{r^{-\sigma\tau(q)+q\alpha(\pi(\omega))+\epsilon}} = +\infty \quad \forall \epsilon > 0. \tag{3.22}$$

It follows from Lemma 11 and (3.22) that

$$d(\alpha) \leq q\alpha - \sigma\tau(q) \quad \forall q \in \mathrm{R}$$

i.e

$$d(\alpha) \leq \inf_q (q\alpha - \sigma\tau(q)).$$

On the other hand, for $\alpha < 1$, $\alpha \in]\alpha_{min}, \alpha_{max}[$, there exists a unique $q \in \mathrm{R}$ such that $\alpha = \sigma\tau'(q)$, thus for $\tilde{\mu}_q - a.a\ \omega \in A^{\mathbf{N}}$

$$\frac{\log \mu_q(Q(\omega, r))}{\log r} = \frac{k_2(r)}{\log r} \frac{1}{k_2(r)} \sum_{j=1}^{k_2(r)} \log P_{\omega_j}(q) \mapsto q\alpha - \sigma\tau(q) \quad as\ r \searrow 0$$

whence by argument similar to the one of the first case, we deduce that

$$d(\alpha) = \inf_q (q\alpha - \sigma\tau(q)).$$

Remark: The spectrum of singularities of the second case is different from the one of the first case, whereas for an homogeneous selfsimilar function (i.e if $s = t$) the spectrum of singularity and the L^p-mean Hölder index $\zeta(p)$ are the same in the two cases; this means that they don't depend on the choice of the $\Re_\omega$. We will now prove that unlike $d(\alpha)$, the L^p-mean Hölder index $\zeta(p)$ does not depend on the geometrical arrangement of the chosen $\Re_\omega$ and so the multifractal formalism will fail.

3.5 The failure of the Multifractal Formalism

We will now prove that the equivalent formulas (1.18) and (1.19) for $\alpha < 1$, that have been proposed for the computation of the spectrum of singularities $d(\alpha)$ fail for the two previous cases.

In order to compute $\zeta(q) = \liminf_{|h|\mapsto 0} \frac{\log \int |F(x+h)-F(x)|^q \, dx}{\log |h|}$, we need to find good upper and lower bounds for $S_p(h) = \int |F(x+h) - F(x)|^p \, dx$.

Lemma 12 *Let $p > 0$ such that $\sigma\tau(p) + 1 + \sigma < p$. For any $\epsilon > 0$, there exist $C > 0$ and a sequence of $h_N \neq (0,0)$ with $\lim_{N\mapsto\infty} |h_N| = 0$ so that*

$$S_p(h_N) \geq C|h_N|^{\sigma\tau(p)+1+\sigma+\epsilon} .$$

Proof:
For $n \in \mathbf{N}^*$ and $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n) \in A^n$, let $\Delta_\omega = \Re_\omega \setminus \bigcup_{\omega' \in A} \Re_{\omega\omega'}$ where the notation $\Re_{\omega\omega'}$ denotes the rectangle $\Re_{(\omega_1,\ldots,\omega_n,\omega')}$. Set $\Delta_\emptyset = \Re \setminus \bigcup_{\omega' \in A} \Re_{\omega'}$.

We have

$$S_p(h) = \int_{\Delta_\emptyset} |F(x+h) - F(x)|^p \, dx + \sum_{\omega \in A} \int_{\Re_\omega} |F(x+h) - F(x)|^p \, dx.$$

By iteration, we get for any integer N

$$S_p(h) = \sum_{n=0}^{N} \sum_{\omega \in A^n} \int_{\Delta_\omega} |F(x+h) - F(x)|^p \, dx + \sum_{\omega \in A^{N+1}} \int_{\Re_\omega} |F(x+h) - F(x)|^p \, dx.$$

Consider

$$\Delta'_{h,\omega} = \{x \in \Delta_\omega \ : \ x + h \in \bigcup_{\omega' \in A} \Delta_{\omega\omega'}\} ;$$

Take $h_N = (0, t^{-(N+2)})$ in the case where asumption (3.11) holds (and $h_N = (0, -t^{-(N+2)})$ for asumption (3.12)), then

$$S_p(h_N) \geq \sum_{n=1}^{N} \sum_{\omega \in A^n} \int_{\Delta'_{h_N,\omega}} |F(x+h_N) - F(x)|^p \, dx.$$

For $x \in \Delta'_{h_N,\omega}$ with $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n) \in A^n$, we have $\omega(n, x+h_N) = \omega(n,x) = \omega$, hence

$$\begin{aligned} |F(x+h_N) - F(x)|^p &= |\sum_{j=0}^{n} \lambda_{(\omega_1,\ldots,\omega_j)} \, g(S^{-1}_{(\omega_1,\ldots,\omega_j)}(x+h_N)) \\ &\quad + \lambda_{\omega(n+1,x+h_N)} \, g(S^{-1}_{(\omega_1,\ldots,\omega_n,\omega_{n+1}(x+h_N))}(x+h_N)) \\ &\quad - \sum_{j=0}^{n} \lambda_{(\omega_1,\ldots,\omega_j)} \, g(S^{-1}_{(\omega_1,\ldots,\omega_j)}(x))|^p. \end{aligned}$$

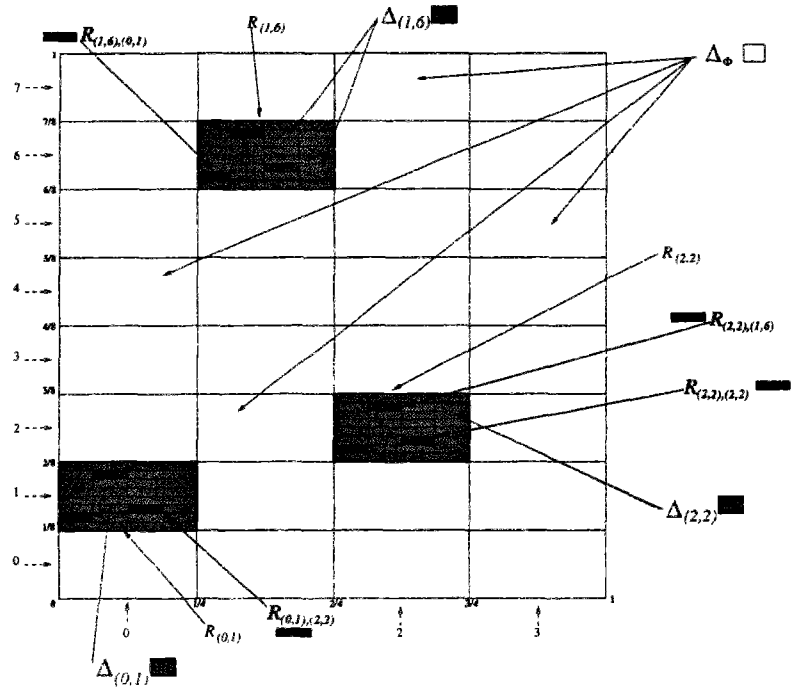


FIG. 3.10 – Δ_ω *for* $\omega \in A = \{(0,1),(2,2),(1,6)\}$, $s = 4$ *and* $t = 8$

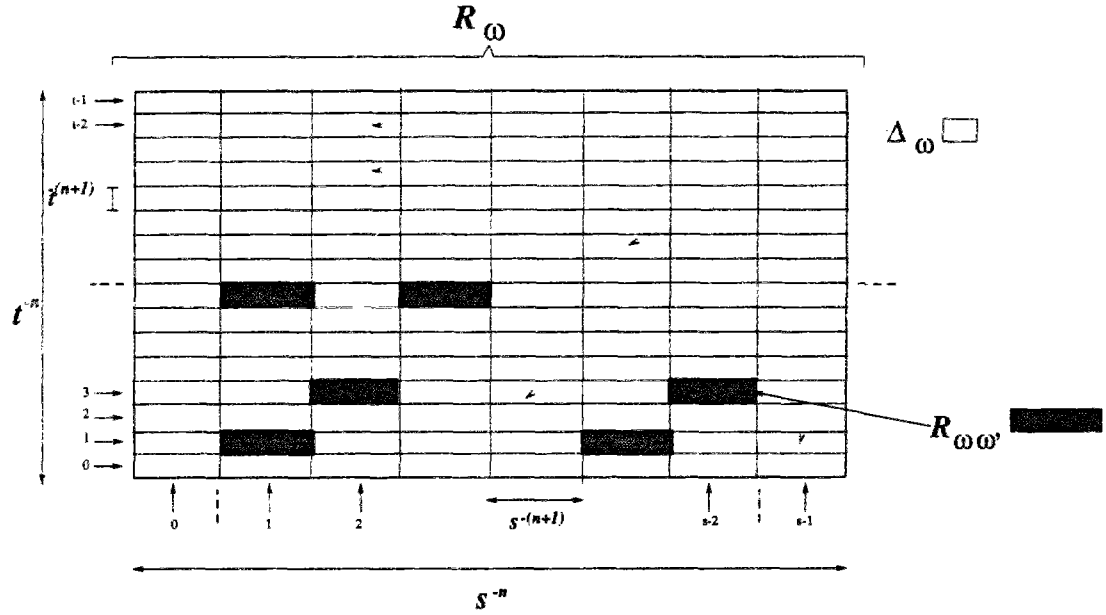


FIG. 3.11 – Δ_ω, $\Re_\omega$, $\Re_{\omega,\omega'}$

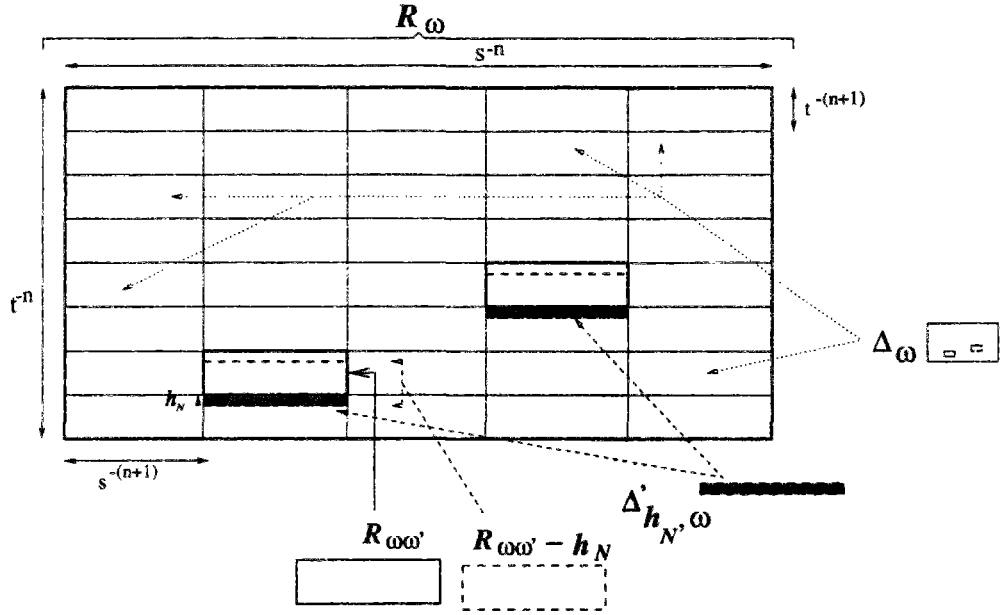


FIG. 3.12 - Δ_ω, $\Re_\omega$, $\Re_{\omega,\omega'}$, $\Delta'_{h_N,\omega}$ *in the case of asumption (3.11)*

If $j \leq n-1$ then

$$\begin{aligned}
&g(S^{-1}_{(\omega_1,\ldots,\omega_j)}(x+h_N)) \;-\; g(S^{-1}_{(\omega_1,\ldots,\omega_j)}(x)) \\
&= \Lambda\left((S^{-1}_{(\omega_1,\ldots,\omega_j)}(x+h_N))_1\right)\left[\Lambda\left((S^{-1}_{(\omega_1,\ldots,\omega_j)}(x+h_N))_2\right) - \Lambda\left((S^{-1}_{(\omega_1,\ldots,\omega_j)}(x))_2\right)\right] \\
&\geq s^{-1}[(S^{-1}_{(\omega_1,\ldots,\omega_j)}(x+h_N))_2 - (S^{-1}_{(\omega_1,\ldots,\omega_j)}(x))_2] \\
&\geq s^{-1}t^j t^{-(N+2)}.
\end{aligned}$$

And for $j = n$, $S^{-1}_{(\omega_1,\ldots,\omega_n)}(x) \in \Delta_\emptyset$ and $S^{-1}_{(\omega_1,\ldots,\omega_n)}(x+h_N) \in \Delta_{\omega_{n+1}(x+h_N)}$, so since $h_N = (0, t^{-(N+2)})$ and $n \leq N$ then $S^{-1}_{(\omega_1,\ldots,\omega_n)}(x) \in [1/s, 1/2] \times [0, 1/2]$, hence

$$g(S^{-1}_{(\omega_1,\ldots,\omega_n)}(x+h_N)) \;-\; g(S^{-1}_{(\omega_1,\ldots,\omega_n)}(x)) \geq s^{-1}t^n t^{-(N+2)}.$$

And since the λ_ω and g are positive, then if $r(n,p) = 1$ if $p \geq 1$ and $(n+1)^{p-1}$ if $0 < p < 1$, we get for $x \in \Delta'_{h_N,\omega}$ with $\omega \in A^n$

$$\begin{aligned}
|F(x+h_N) - F(x)|^p \;&\geq\; \left(\sum_{j=0}^{n} \lambda_{(\omega_1,\ldots,\omega_j)}\left[g(S^{-1}_{(\omega_1,\ldots,\omega_j)}(x+h_N)) \;-\; g(S^{-1}_{(\omega_1,\ldots,\omega_j)}(x))\right]\right)^p \\
&\geq\; \sum_{j=0}^{n} \lambda^p_{(\omega_1,\ldots,\omega_j)}\, s^{-p} t^{jp} t^{-(N+2)p}\, r(n,p).
\end{aligned}$$

Hence

$$S_p(h_N) \;\geq\; \sum_{n=1}^{N} \sum_{\omega\in A^n} (Area\Delta'_{h_N,\omega}) \sum_{j=0}^{n} \lambda^p_{(\omega_1,\ldots,\omega_j)}\, s^{-p} t^{jp} |h_N|^p\, r(n,p)$$

$$\geq \sum_{n=1}^{N} \sum_{\omega \in A^n} s^{-n} |h_N| \sum_{j=0}^{n} \lambda^p_{(\omega_1,\ldots,\omega_j)} s^{-p} t^{jp} |h_N|^p \, r(n,p).$$

Let a denotes the cardinality of A. It follows from the equality

$$\sum_{\omega \in A^n} \sum_{j=0}^{n} t^{jp} \, \lambda^p_{(\omega_1,\ldots,\omega_j)} = \sum_{j=0}^{n} t^{jp} a^{n-j} (\sum_{\omega \in A} \lambda^p_\omega)^j$$

that

$$S_p(h_N) \geq C_p |h_N|^{p+1} \sum_{n=1}^{N} s^{-n} r(n,p) \sum_{j=0}^{n} t^{jp} a^{n-j} (\sum_{\omega \in A} \lambda^p_\omega)^j \, .$$

If

$$t^p \sum_{\omega \in A} \lambda^p_\omega > a \tag{3.23}$$

we obtain

$$S_p(h_N) \geq C_p |h_N|^{p+1} \sum_{n=1}^{N} s^{-n} r(n,p) t^{np} (\sum_{\omega \in A} \lambda^p_\omega)^n$$

and if

$$s^{-1} t^p \sum_{\omega \in A} \lambda^p_\omega > 1 \tag{3.24}$$

we get

$$\begin{aligned} S_p(h_N) &\geq C_p |h_N|^{p+1} s^{-N} r(N,p) t^{Np} (\sum_{\omega \in A} \lambda^p_\omega)^N \\ &\geq C_p |h_N|^{p+1} |h_N|^{\sigma} |h_N|^{-p} |h_N|^{\sigma\tau(p)+\epsilon} \\ &\geq C_p |h_N|^{\sigma\tau(p)+1+\sigma+\epsilon}. \end{aligned}$$

Remark that $\sigma\tau(p) + 1 + \sigma < p$ is equivalent to $t^{-1} s^{-1} t^p \sum_{\omega \in A} \lambda^p_\omega > 1$ and thus yields (3.24), and since the cardinality of A is smaller than st, it yields (3.23).
Whence, for $p > 0$ such that $\sigma\tau(p) + 1 + \sigma < p$, we obtain

$$\zeta(p) (= \liminf_{|h| \mapsto 0} \frac{\log S_p(h)}{\log |h|}) \leq \sigma\tau(p) + 1 + \sigma \, . \tag{3.25}$$

Now, we shall prove that $\sigma\tau(p) + 1 + \sigma$ is the exact value of $\zeta(p)$. For that we will prove the upper bound for $S_p(h)$; We can assume that $|\lambda|_{min} > 1/t$, (i.e the Hölder regularity of any point is smaller than 1).

Lemma 13 *Let $p > 0$ such that $\sigma\tau(p) + 1 + \sigma < p$. Then for any $\epsilon > 0$, there exists $C > 0$ such that for $|h|$ small enough*

$$S_p(h) \leq C |h|^{\sigma\tau(p)+1+\sigma-\epsilon} \, .$$

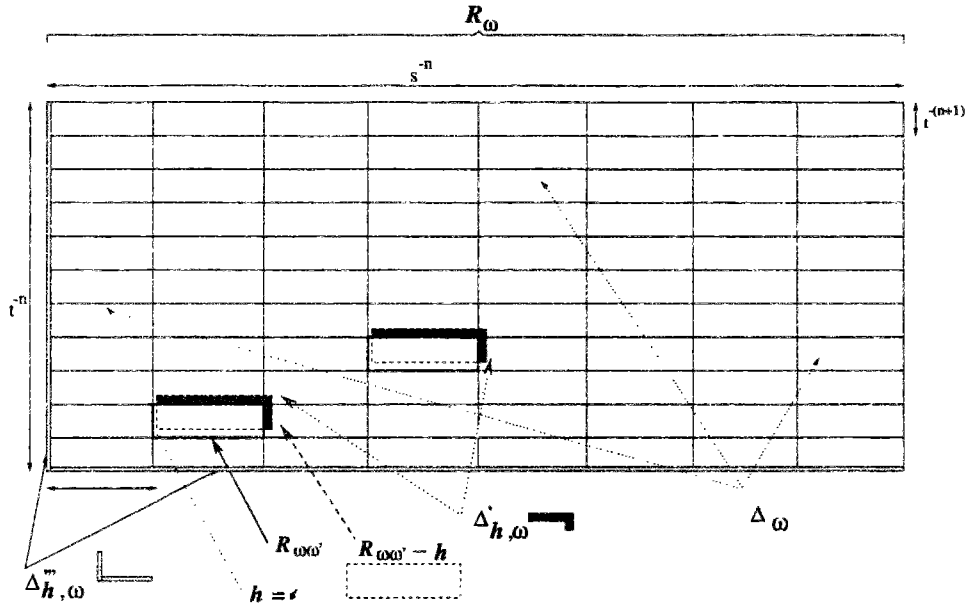


FIG. 3.13 – Δ_ω, $\Re_\omega$, $\Re_{\omega,\omega'}$, $\Delta'_{h,\omega}$, $\Delta'''_{h,\omega}$, $\Delta''_{h,\omega} = \Delta_\omega \setminus (\Delta'_{h,\omega} \bigcup \Delta'''_{h,\omega})$

Proof:
Let $t^{-(N+2)} \leq |h| < t^{-(N+1)}$; for $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$, define

$$\Delta''_{h,\omega} = \{x \in \Delta_\omega \ : \ x + h \in \Delta_\omega\} ;$$

and

$$\Delta'''_{h,\omega} = \{x \in \Delta_\omega \ : \ x + h \in \Delta_{\omega_1,\ldots,\omega_{n-1}}\} .$$

We have $\Delta''_{h,\omega} \bigcup \Delta'''_{h,\omega} = \Delta_\omega \setminus \Delta'_{h,\omega}$, so

$$\begin{aligned} S_p(h) \ = \ & \sum_{n=0}^{N} \sum_{\omega \in A^n} \int_{\Delta'_{h,\omega}} |F(x+h) - F(x)|^p \, dx \\ & + \sum_{n=0}^{N} \sum_{\omega \in A^n} \int_{\Delta''_{h,\omega}} |F(x+h) - F(x)|^p \, dx \\ & + \sum_{n=0}^{N} \sum_{\omega \in A^n} \int_{\Delta'''_{h,\omega}} |F(x+h) - F(x)|^p \, dx \\ & + \sum_{\omega \in A^{N+1}} \int_{\Re_\omega} |F(x+h) - F(x)|^p \, dx. \end{aligned}$$

For $x \in \Delta''_{h,\omega}$ with $\omega \in A^n$

$$|F(x+h) - F(x)|^p = | \sum_{j=0}^{n} \lambda_{(\omega_1,\ldots,\omega_j)} \left[g(S^{-1}_{(\omega_1,\ldots,\omega_j)}(x+h)) - g(S^{-1}_{(\omega_1,\ldots,\omega_j)}(x)) \right] |^p \ .$$

Consider $r'(n,p) = 1$ if $0 < p < 1$ and $(n+1)^{p-1}$ if $p \geq 1$.
Thanks to the fact that g is C^1 (uniformly Lipschitz)

$$|F(x+h) - F(x)|^p \leq \sum_{j=0}^{n} r'(n,p) |\lambda_{(\omega_1,\ldots,\omega_j)}|^p t^{jp} |h|^p \ .$$

Thus

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N} \sum_{\omega \in A^n} \int_{\Delta''_{h,\omega}} |F(x+h) - F(x)|^p \, dx &\leq C \sum_{n=0}^{N} \sum_{\omega \in A^n} \sum_{j=0}^{n} r'(n,p) |\lambda_{(\omega_1,\ldots,\omega_j)}|^p t^{jp} |h|^p s^{-n} t^{-n} \\ &= |h|^p \sum_{n=0}^{N} r'(n,p) s^{-n} t^{-n} \sum_{j=0}^{n} t^{jp} a^{n-j} (\sum_{\omega \in A} \lambda_\omega^p)^j, \end{aligned}$$

hence if (3.23) holds then the previous term will be bounded by

$$|h|^p \sum_{n=0}^{N} r'(n,p) s^{-n} t^{-n} t^{np} (\sum_{\omega \in A} \lambda_\omega^p)^n \ ;$$

and if $\sigma\tau(p) + 1 + \sigma < p$, then it will be estimated by $C|h|^{\sigma\tau(p)+1+\sigma-\varepsilon}$.

We will now estimate the term $\sum_{\omega \in A^{N+1}} \int_{\Re_\omega} |F(x+h) - F(x)|^p \, dx$; for that, remark that $\omega(N, x+h) = \omega(N,x) = (\omega_1, \ldots, \omega_N)$, so

$$\begin{aligned} |F(x+h) - F(x)| &\leq |\sum_{l=0}^{N-1} \lambda_{(\omega_1,\ldots,\omega_l)} \left(g(S^{-1}_{(\omega_1,\ldots,\omega_l)}(x+h)) - g(S^{-1}_{(\omega_1,\ldots,\omega_l)}(x)) \right)| \\ &+ |\lambda_{(\omega_1,\ldots,\omega_N)}| \left(|F(S^{-1}_{(\omega_1,\ldots,\omega_N)}(x+h))| + |F(S^{-1}_{(\omega_1,\ldots,\omega_N)}(x))| \right). \end{aligned}$$

From the fact that g is C^1 and F is bounded, the previous quantity will be bounded by

$$C|h| \sum_{l=0}^{N-1} |\lambda_{(\omega_1,\ldots,\omega_l)}| t^l + C|\lambda_{(\omega_1,\ldots,\omega_N)}|.$$

Thanks to the asumption $|\lambda|_{min} > 1/t$, we get

$$|F(x+h) - F(x)| \leq C|h| \, N \, |\lambda_{(\omega_1,\ldots,\omega_N)}| \, t^N + C|\lambda_{(\omega_1,\ldots,\omega_N)}| \ ;$$

hence

$$|F(x+h) - F(x)|^p \leq C' N^p |\lambda_{(\omega_1,\ldots,\omega_N)}|^p.$$

Hence

$$\begin{aligned} \sum_{\omega \in A^{N+1}} \int_{\Re_\omega} |F(x+h) - F(x)|^p \, dx &\leq C N^p s^{-N} t^{-N} \sum_{\omega \in A^{N+1}} |\lambda_{(\omega_1,\ldots,\omega_N)}|^p \\ &\leq C|h|^{\sigma\tau(p)+1+\sigma-\epsilon}. \end{aligned}$$

Let us now estimate the term $\sum_{n=0}^{N}\sum_{\omega\in A^n}\int_{\Delta'_{h,\omega}}|F(x+h)-F(x)|^p\,dx$. By analogous arguments, for $x\in\Delta'_{h,\omega}$ and $\omega\in A^n$, $|F(x+h)-F(x)|^p$ will be bounded by

$$C_p\left(|\lambda_{(\omega,\omega_{n+1}(x+h))}|^p|g(S^{-1}_{(\omega,\omega_{n+1}(x+h))}(x+h))|^p+\sum_{j=0}^{n}r'(n,p)|\lambda_{(\omega_1,\ldots,\omega_j)}|^p t^{jp}|h|^p\right);$$

thus

$$\begin{aligned}&\sum_{n=0}^{N}\sum_{\omega\in A^n}\int_{\Delta'_{h,\omega}}|F(x+h)-F(x)|^p\,dx\\&\leq C\sum_{n=0}^{N}\sum_{\omega\in A^n}\int_{\Delta'_{h,\omega}}|\lambda_{(\omega,\omega_{n+1}(x+h))}|^p|g(S^{-1}_{(\omega,\omega_{n+1}(x+h))}(x+h))|^p\,dx \qquad (3.26)\\&+C|h|\sum_{n=0}^{N}s^{-n}\sum_{\omega\in A^n}\sum_{j=0}^{n}r'(n,p)|\lambda_{(\omega_1,\ldots,\omega_j)}|^p t^{jp}|h|^p \qquad (3.27)\end{aligned}$$

Whence, the term (3.27) is smaller than $C|h|^{\sigma\tau(p)+1+\sigma-\epsilon}$. Now, for the term (3.26), we have

$$\begin{aligned}&\int_{\Delta'_{h,\omega}}|\lambda_{(\omega,\omega_{n+1}(x+h))}|^p|g(S^{-1}_{(\omega,\omega_{n+1}(x+h))}(x+h))|^p\,dx\\&\leq Cs^{-n}t^{-n}|\lambda_\omega|^p\int_{\Delta_{h,n}}|g\left(S^{-1}_{\omega_{n+1}(S_\omega(y)+h)}(y+(s^nh_1,t^nh_2))\right)|^p\,dy\end{aligned}$$

with

$$\Delta_{h,n}=S_\omega^{-1}(\Delta'_{h,\omega})=\{y\in\Delta_\emptyset\,:\,y+(s^nh_1,t^nh_2)\in\bigcup_{\omega'\in A}\Delta_{\omega'}\}\,.$$

And by integrating the previous integral respectively on

$$\{y\in\Delta_{h,n}\,:\,S^{-1}_{\omega_{n+1}(S_\omega(y)+h)}(y+(s^nh_1,t^nh_2))\in[0,\tfrac{1}{2}]\times[0,\tfrac{1}{2}]\};$$

$$\{y\in\Delta_{h,n}\,:\,S^{-1}_{\omega_{n+1}(S_\omega(y)+h)}(y+(s^nh_1,t^nh_2))\in[0,\tfrac{1}{2}]\times[\tfrac{1}{2},1]\};$$

$$\{y\in\Delta_{h,n}\,:\,S^{-1}_{\omega_{n+1}(S_\omega(y)+h)}(y+(s^nh_1,t^nh_2))\in[\tfrac{1}{2},1]\times[0,\tfrac{1}{2}]\};$$

and

$$\{y\in\Delta_{h,n}\,:\,S^{-1}_{\omega_{n+1}(S_\omega(y)+h)}(y+(s^nh_1,t^nh_2))\in[\tfrac{1}{2},1]\times[\tfrac{1}{2},1]\};$$

we can easily show that

$$\int_{\Delta'_{h,\omega}}|\lambda_{(\omega,\omega_{n+1}(x+h))}|^p|g(S^{-1}_{(\omega,\omega_{n+1}(x+h))}(x+h))|^p\,dx\leq Cs^{-n}t^{-n}|\lambda_\omega|^p t^{np}|h|^p;$$

and thus the term (3.26) is bounded by $C|h|^{\sigma\tau(p)+1+\sigma}$.
Finally, by a change of variable, $\Delta'''_{h,\omega}$ will be analogous to $\Delta'_{h,\omega}$, and so by similar arguments, the part of $S_p(h)$ corresponding to $\Delta'''_{h,\omega}$ will be bounded by $C|h|^{\sigma\tau(p)+1+\sigma}$.
Lemmas 12 and 13 yield the following proposition

Proposition 12 *Assume that* $|\lambda|_{min} > 1/t$. *Let* $p_0 > 0$ *such that* $\sum_{\omega\in A}(t\lambda_\omega)^{p_0} = st$ *(i.e* $\sigma\tau(p_0) + 1 + \sigma = p_0$*); then for* $p > p_0$, *we have* $\sigma\tau(p) + 1 + \sigma < p$ *and so*

$$\zeta(p) = \sigma\tau(p) + 1 + \sigma\ .$$

If we define $f(\alpha)$ by

$$f(\alpha) = \inf_{p>p_0}(\alpha p - \zeta(p) + 2) \tag{3.28}$$

then for $\alpha = \sigma\tau'(q)$ with $q > p_0$, the infimum in the previous Legendre transform is attained for q, and

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \alpha q - \sigma\tau(q) + 1 - \sigma \\ &> \alpha q - \sigma\tau(q) \\ &\geq \inf_p(\alpha p - \sigma\tau(p)). \end{aligned}$$

Thus, in the second case,

$$d(\alpha) < f(\alpha).$$

So the multifractal formalism doesn't hold.

In the first case, since the cardinality of A is smaller than s, then for any $0 < p \leq 1$, $t^{-1}s^{-1}t^p\sum_{\omega\in A}\lambda_\omega^p < 1$; hence $p_0 > 1$ and so for $\alpha = \sigma\tau'(q)$ with $q > p_0$, we get

$$\begin{aligned} \inf_{p>p_0}(\alpha p - \zeta(p) + 2) &\geq \sigma d(\alpha) + 1 - \sigma \\ &> d(\alpha) \end{aligned}$$

because $d(\alpha) \leq dimK = \frac{\log a}{\log s} < 1$. So the multifractal formalism fails too.

Remark: Even the version of the multifractal formalism studied by Daubechies and Lagarias in [24], which says that $\zeta(p)$ is the Legendre transform of $d(\alpha) - 2$, fails for the previous two cases. Indeed, for the first case, since $d(\alpha) = \inf_q(q\sigma^{-1}\alpha - \tau(q))$ and $\tau(q)$ is concave and continue, then $\sigma\tau(q) = \inf_\alpha(q\alpha - \sigma d(\alpha))$; thus for $p > 1$ such that $\sigma\tau(p) + 1 + \sigma < p$, (3.25) implies that

$$\zeta(p) \leq \inf_\alpha(q\alpha - \sigma d(\alpha) + 1 + \sigma),$$

but $d(\alpha) < 1$, so

$$\zeta(p) < \inf_\alpha(q\alpha - d(\alpha) + 2)\ .$$

Identically for the second case.

3.6 The Anisotropic Multifractal Formalism

We have shown that the multifractal formalism fails for the two previous cases: the Euclidean norm used in the definition of the pointwise regularity does not interact in a good way with the anisotropic contractions.
We propose instead an "homogeneous norm" that was used by Calderón and Torchinsky

on one side (see [12] and [13]), Folland and Stein on the other one (see [29]) to develop a theory of anisotropic $\mathcal{H}^p$ spaces.
We begin by defining the homogeneous norm and describing some of its basic properties, for proofs and more details we refer to [29].

For $r > 0$, consider the dilation group of anisotropic linear transformation of R^m

$$A_r(x_1, \ldots, x_m) = (r^{d_1}x_1, \ldots, r^{d_m}x_m)$$

where $1 = d_1 \leq d_2 \leq \ldots \leq d_m$. We define the homogeneous norm of $x \in \mathrm{R}^m$ by: $\rho(x) = 0$ if $x = 0$, and for $x \neq 0$, $\rho(x)$ is the unique value of r for which $|A_r^{-1}(x)| = 1$, $|x|$ denoting the Euclidean norm of x. The function ρ is continuous and homogeneous in the sense that

$$\rho(A_r(x)) = r\rho(x). \tag{3.29}$$

Remark that in the isotropic case $d_1 = 1 = d_2 = \ldots = d_m$ and $\rho(x)$ coincides with the Euclidean norm.

Lemma 14 *There exist positive constants C_1, C_2 and γ such that*

$$C_1|x| \leq \rho(x) \leq C_2|x|^{1/d_m} \quad \textit{whenever} \quad \rho(x) \leq 1 \tag{3.30}$$

$$C_1^{1/d_m}|x|^{1/d_m} \leq \rho(x) \leq C_2^{d_m}|x| \quad \textit{whenever} \quad \rho(x) \geq 1 \tag{3.31}$$

$$\rho(x+y) \leq \gamma(\rho(x) + \rho(y)) \quad \forall x, y \in \mathrm{R}^m \tag{3.32}$$

$$|\rho(x+y) - \rho(x)| \leq \gamma\rho(y) \quad \forall x, y \in \mathrm{R}^m\,;\, \rho(y) \leq \rho(x)/2 \tag{3.33}$$

$$(1+\rho(y))^{-s} \leq \gamma^s(1+\rho(x))^{-s}(1+\rho(x-y))^s \quad \forall x, y \in \mathrm{R}^m \textit{ and } s > 0. \tag{3.34}$$

The ρ-Mean Value Theorem: there exist $C > 0$ and $\nu > 0$ such that for all function f of class $C^{(1)}$ on R^m and all $x, y \in \mathrm{R}^m$

$$|f(x+y) - f(x)| \leq C\sum_{j=1}^{m} \rho(y)^{d_j} \sup_{\rho(h) \leq \nu\rho(y)} |\partial_{x_j} f(x+h)|.$$

We adopt the following multiindex notation for higher order derivatives. For $I = (i_1, \ldots, i_m) \in \mathrm{N}^m$, we set $\partial^I = \partial_{x_1}^{i_1} \ldots \partial_{x_m}^{i_m}$ and $x^I = x_1^{i_1} \ldots x_m^{i_m}$. Further we set $|I| = i_1 + \ldots + i_m$ and $d(I) = d_1 i_1 + \ldots + d_m i_m$. Thus $|I|$ is the order of the differential operator ∂^I, while $d(I)$ is its degree of homogeneity, or, as we shall say, its homogeneous degree. We shall denote by Δ the additive sub-semigroup of R generated by $0, d_1, \ldots$ and d_m. In other words, Δ is the set of all numbers $d(I)$ as I ranges over N^m. We observe that $\mathrm{N} \subset \Delta$ since $d_1 = 1$.
Let now P be a polynomial i.e $P = \sum_I a_I x^I$, $a_I \in \mathrm{R}$. We define its homogeneous degree to be $max\{d(I) : a_I \neq 0\}$. There is a version of Taylor's theorem with remainder for the homogeneous norm ρ.

The ρ-Taylor Inequality: suppose $\delta \in \Delta \ \ (\delta > 0)$, and $k = [\delta]$. There is a constant $C_\delta > 0$ such that for all functions f of class $C^{(k+1)}$ on R^m and all $x, y \in \mathrm{R}^m$,

$$|f(x+y) - P_x(y)| \leq C_\delta \sum_{|I| \leq k+1,\, d(I) > \delta} \rho(y)^{d(I)} \sup_{\rho(h) \leq \nu^{k+1}\rho(y)} |\partial^I f(x+h)|$$

where P_x is the Taylor polynomial of f at x of homogeneous degree δ.

We will now replace the Euclidean norm by the homogeneous one in the terminology that appear in the formulation of the multifractal formalism, in order to be adapted to the anisotropy. We will also modify the wavelet transform. Then we will show that the anisotropic wavelet transform gives "good" characterizations for the new pointwise regularity for a large class of anisotropic selfsimilar functions.

Definition 1 *Let $\alpha > 0$ and $x_0 \in \mathrm{R}^m$; by definition a function $F : \mathrm{R}^m \to \mathrm{R}$ belongs to $C^\alpha_\rho(x_0)$ if there exists a polynomial P of homogeneous degree smaller than α such that*

$$|F(x) - P(x - x_0)| \leq C\rho(x - x_0)^\alpha. \tag{3.35}$$

The ρ-Hölder exponent of F at x is defined by

$$\alpha_\rho(x) = \sup\{\beta : \quad F \in C^\beta_\rho(x)\}. \tag{3.36}$$

And we say that F belongs to $C^\alpha_\rho(\mathrm{R}^m)$ if (3.35) holds for any x and x_0 in R^m with uniform constant C.

Let us now define the anisotropic wavelet transform.
Let ψ in the L.Schwartz class $S(\mathrm{R}^m)$, supported in $|x| \leq 1$, and with vanishing moments; and let φ be another function of $S(\mathrm{R}^m)$ whose Fourier transform $\hat{\varphi}$ has compact support disjoint of the origin and has the property that for all $x \neq 0$,

$$\int_0^\infty \hat{\varphi}(A_r x)\hat{\psi}(A_r x)\, dr/r = 1. \tag{3.37}$$

Let $\bar{x} = (2^{d_1}, \ldots, 2^{d_m})$; $\bar{\varphi}(x) = \varphi(x - \bar{x})$; $\quad \bar{\psi}(x) = \psi(x + \bar{x})$, and for $a > 0$ set

$$\bar{\varphi}_a(x) = \frac{1}{a^Q}\bar{\varphi}(A_a^{-1}x) \ \text{ where } \ Q = d_1 + \ldots + d_m.$$

Given a tempered distribution F, $a > 0$ and $b \in \mathrm{R}^m$, the anisotropic wavelet transform of F is defined by

$$C_\rho(a, b)(F) = (F * \bar{\varphi}_a)(b) = \frac{1}{a^Q}\int F(x)\bar{\varphi}(A_a^{-1}(x - b))\, dx. \tag{3.38}$$

F is reconstructed from its anisotropic wavelet transform by (see [12])

$$F(x) = \int_{a>0}\int_{\mathrm{R}^m} C_\rho(a, b)(F)\bar{\psi}_a(x - b)\, db\, da/a \tag{3.39}$$

i.e

$$F(x) = \frac{1}{a^{Q+1}}\int_{a>0}\int_{\mathrm{R}^m} C_\rho(a, b)(F)\bar{\psi}(A_a^{-1}(x - b))\, db\, da$$

One of the fondamental properties of the anisotropic wavelet transform is that it characterizes the ρ-Hölder regularity by conditions analogous to those of the classic wavelet transform for the isotropic case.

Proposition 13 *1. $F \in C^s_\rho(\mathrm{R}^m)$ if and only if*

$$|C_\rho(a,b)(F)| \leq Ca^s. \tag{3.40}$$

2. If $F \in C^s_\rho(x_0)$ then

$$|C_\rho(a,b)(F)| \leq Ca^s \left(1 + \frac{\rho(b-x_0)}{a}\right)^s. \tag{3.41}$$

3. If (3.41) holds and if $F \in C^\beta_\rho(\mathrm{R}^m)$ for $\beta > 0$, there exists a polynomial P such that if $\rho(x-x_0) \leq 1/2$,

$$|F(x) - P(x-x_0)| \leq C\rho(x-x_0)^s \log\left(\frac{1}{\rho(x-x_0)}\right). \tag{3.42}$$

Proof:

1. If $F \in C^s_\rho(\mathrm{R}^m)$

$$\begin{aligned} |C_\rho(a,b)(F)| &= \frac{1}{a^Q}\left|\int F(x)\bar{\varphi}(A_a^{-1}(x-b))\,dx\right| \\ &= \frac{1}{a^Q}\left|\int F(x)\varphi(A_a^{-1}(x-b)-\bar{x})\,dx\right| \\ &= \frac{1}{a^Q}\left|\int F(x+A_a\bar{x})\varphi(A_a^{-1}(x-b))\,dx\right|; \end{aligned}$$

Since $\hat{\varphi}$ has compact support disjoint of the origin then

$$\begin{aligned} |C_\rho(a,b)(F)| &= \frac{1}{a^Q}\left|\int (F(x+A_a\bar{x}) - P(x+A_a\bar{x}-b))\varphi(A_a^{-1}(x-b))\,dx\right| \\ &\leq \frac{1}{a^Q}\int C\ \rho(x+A_a\bar{x}-b)^s|\varphi(A_a^{-1}(x-b))|\,dx \end{aligned}$$

which by property (3.32) will be bounded by

$$\begin{aligned} &C\frac{1}{a^Q}\int \gamma^s(\rho(A_a\bar{x})+\rho(x-b))^s|\varphi(A_a^{-1}(x-b))|\,dx \\ &\leq C\frac{1}{a^Q}\int (\rho(A_a\bar{x})^s+\rho(x-b)^s)|\varphi(A_a^{-1}(x-b))|\,dx \\ &\leq Ca^s + C\frac{a^s}{a^Q}\int \rho(A_a^{-1}(x-b))^s|\varphi(A_a^{-1}(x-b))|\,dx \\ &\leq 2Ca^s. \end{aligned}$$

Conversely, F is expressed in terms of $C_\rho(a,b)(F)$ as in (3.39). Let

$$W(a,x) = \frac{1}{a^Q}\int_{\mathbf{R}^m} C_\rho(a,b)(F)\bar{\psi}(A_a^{-1}(x-b))\,db.$$

If (3.40) holds then

$$|W(a,x)| \leq Ca^s \tag{3.43}$$

and

$$|\partial^I W(a,x)| \leq Ca^{s-d(I)}. \tag{3.44}$$

Let $x_0 \in \mathrm{R}^m$, and set $\delta = max\{d(I) : d(I) < s\}$ and $PW_a(x-x_0)$ the Taylor polynomial of $W(a,.)$ at x_0 of homogeneous degree δ

$$PW_a(x-x_0) = \sum_{I\,:\,d(I)\leq\delta} \frac{\partial^I W(a,x_o)}{I!}(x-x_0)^I$$

and $P(x-x_0)$ the one of F, then

$$\begin{aligned} |F(x)-P(x-x_0)| &= |\int_{a>0} (W(a,x)-PW_a(x-x_0))\,da/a| \\ &\leq \int_0^{\rho(x-x_0)} (|W(a,x)|+|PW_a(x-x_0)|)\,da/a \\ &\quad + \int_{\rho(x-x_0)}^{\infty} |W(a,x)-PW_a(x-x_0)|\,da/a. \end{aligned}$$

It follows from (3.43) and (3.44) that the first term is bounded by

$$\int_0^{\rho(x-x_0)} \left(Ca^s + \sum_{I\,:\,d(I)<s} Ca^{s-d(I)}|(x-x_0)^I| \right) da/a$$

but from the definition of ρ

$$|(x-x_0)^I| \leq \rho(x-x_0)^{d(I)}$$

hence the previous term is estimated by

$$\begin{aligned} &C\int_0^{\rho(x-x_0)} \left(a^{s-1} + \sum_{I\,:\,d(I)<s} Ca^{s-d(I)-1}\rho(x-x_0)^{d(I)} \right) da \\ &\leq C\rho(x-x_0)^s. \end{aligned}$$

Let $l = [\delta]$, since $W(a,.)$ is of class $C^{(l+1)}$, then using the ρ-Taylor inequality, the second term will be bounded by

$$\begin{aligned} &\int_{\rho(x-x_0)}^{\infty} C_\delta \sum_{|J|\leq l+1\,,\,d(J)>\delta} \rho(x-x_0)^{d(J)} \sup_{\rho(h)\leq\nu^{l+1}\rho(x-x_0)} |\partial^J W(a,.)(x_0+h)|\,da/a \\ &\leq C_\delta \sum_{|J|\leq l+1\,,\,d(J)>\delta} \rho(x-x_0)^{d(J)} \int_{\rho(x-x_0)}^{\infty} a^{s-d(J)}\,da/a \\ &\leq C\rho(x-x_0)^s. \end{aligned}$$

2. If $F \in C^s_\rho(x_0)$, then

$$\begin{aligned}
|C_\rho(a,b)(F)| &= \frac{1}{a^Q}\Big|\int (F(x+A_a\bar{x}) - P(x+A_a\bar{x}-x_0))\varphi(A_a^{-1}(x-b))\,dx\Big| \\
&\le \frac{1}{a^Q}\int C\ \rho(x+A_a\bar{x}-x_0)^s|\varphi(A_a^{-1}(x-b))|\,dx \\
&\le C\frac{1}{a^Q}\int (\rho(A_a\bar{x})^s + \rho(x-x_0)^s)|\varphi(A_a^{-1}(x-b))|\,dx \\
&\le Ca^s + C\frac{1}{a^Q}\gamma^s\int (\rho(b-x_0)^s + \rho(x-b)^s)|\varphi(A_a^{-1}(x-b))|\,dx \\
&\le Ca^s + C\rho(b-x_0)^s + Ca^s \\
&\le Ca^s\left(1+\frac{\rho(b-x_0)}{a}\right)^s.
\end{aligned}$$

3. Conversely if (3.41) holds and if $F \in C^\beta_\rho(\mathrm{R}^m)$ for an $\beta > 0$, then

$$\begin{aligned}
|W(a,x)| &\le \frac{1}{a^Q}\int Ca^s\left(1+\frac{\rho(b-x_0)}{a}\right)^s|\bar{\psi}(A_a^{-1}(x-b))|\,db \\
&\le \frac{1}{a^Q}\int Ca^s\left(1+\frac{\rho(x-b)}{a}\right)^s|\bar{\psi}(A_a^{-1}(x-b))|\,db \\
&\quad + C\frac{1}{a^Q}\rho(x-x_0)^s\int |\bar{\psi}(A_a^{-1}(x-b))|\,db.
\end{aligned}$$

Hence

$$|W(a,x)| \le Ca^s\left(1+\frac{\rho(x-x_0)}{a}\right)^s \tag{3.45}$$

and similarly

$$|\partial^I W(a,x)| \le Ca^{s-d(I)}\left(1+\frac{\rho(x-x_0)}{a}\right)^s. \tag{3.46}$$

Thus

$$\begin{aligned}
|F(x)-P(x-x_0)| \le\ & \int_0^{\rho(x-x_0)^{s/\beta}} |W(a,x)|\,da/a \\
& + \int_{\rho(x-x_0)^{s/\beta}}^{\rho(x-x_0)} |W(a,x)|\,da/a \\
& + \int_0^{\rho(x-x_0)} |PW_a(x-x_0)|\,da/a \\
& + \int_{\rho(x-x_0)}^{\infty} |W(a,x)-PW_a(x-x_0)|\,da/a.
\end{aligned}$$

Using (3.43) (with s remplaced by β), the first term will be bounded by

$$C\int_0^{\rho(x-x_0)^{s/\beta}} a^\beta\,da/a$$

so by $C\rho(x-x_0)^s$.

(3.45) implies that the second term is estimated by

$$\begin{aligned}
&\int_{\rho(x-x_0)^{s/\beta}}^{\rho(x-x_0)} C(a^s+\rho(x-x_0)^s)\,da/a \\
&\leq 2C\rho(x-x_0)^s \int_{\rho(x-x_0)^{s/\beta}}^{\rho(x-x_0)} da/a \\
&\leq C\rho(x-x_0)^s \log\frac{1}{\rho(x-x_0)}
\end{aligned}$$

also, from (3.46) the third term will be bounded by

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\rho(x-x_0)} C \sum_{I\,:\,d(I)<s} a^{s-d(I)}\left(1+\frac{0}{a}\right)^s \rho(x-x_0)^{d(I)}\,da/a \\
&\leq C\rho(x-x_0)^s
\end{aligned}$$

and we use the Taylor inequality to estimate the fourth term by

$$\begin{aligned}
&\int_{\rho(x-x_0)}^{\infty} C_\delta \sum_{|J|\leq l+1\,,\,d(J)>\delta} \rho(x-x_0)^{d(J)} \sup_{\rho(h)\leq\nu^{l+1}\rho(x-x_0)} |\partial^J W(a,.)(x_0+h)|\,da/a \\
&\leq C_\delta \sum_{|J|\leq l+1\,,\,d(J)>\delta} \rho(x-x_0)^{d(J)} \int_{\rho(x-x_0)}^{\infty} a^{s-d(J)} \sup_{\rho(h)\leq\nu^{l+1}\rho(x-x_0)} \left(1+\frac{\rho(h)}{a}\right)^s da/a \\
&\leq C \sum_{|J|\leq l+1\,,\,d(J)>\delta} \rho(x-x_0)^{d(J)} \int_{\rho(x-x_0)}^{\infty} a^{s-d(J)}\,da/a \\
&\leq C\rho(x-x_0)^s.
\end{aligned}$$

Whence (3.42).

The proof of Proposition 13 is now achieved.

Now we will make similar modifications for the Besov spaces.

Definition 2 *Suppose $s\in\mathrm{R}$ and $p>0$, we say that F belongs to the homogeneous anisotropic Besov space $B^{s,\infty}_{\rho,p}(\mathrm{R}^m)$ if for a small enough*

$$\int |C_\rho(a,b)(F)|^p db \leq Ca^{sp}; \tag{3.47}$$

This definition does not depend on the choice of the wavelet φ nor ψ: let Φ and Ψ be two other functions satisfying the same properties, since the supports of $\widehat{\varphi}$ and $\widehat{\Phi}$ are disjoint of the origin then there exist two positive numbers α and β such that $\varphi_t * \Phi_l = 0$ for $t/l\notin[\alpha,\beta]$. Thanks to the property (3.37)

$$F*\bar{\Phi}_l \;=\; F*\bar{\Phi}_l * \int_0^\infty \varphi_t * \psi_t\,dt/t$$

$$
\begin{aligned}
&= F * \bar{\Phi}_l * \int_0^{\infty} \varphi_{lt} * \psi_{lt}\, dt/t \\
&= \int_{\alpha}^{\beta} F * \varphi_{lt} * \bar{\Phi}_l * \psi_{lt}\, dt/t \\
&= \int_{\alpha}^{\beta} F * \bar{\varphi}_{lt}(. - A_{lt}\bar{x}) * \bar{\Phi}_l * \psi_{lt}\, dt/t\,;
\end{aligned}
$$

hence

$$
\|F * \bar{\Phi}_l\|_{L^p(\mathbf{R}^m)} \leq \|\bar{\Phi}\|_{L^1} \|\psi\|_{L^1} \int_{\alpha}^{\beta} \|F * \bar{\varphi}_{lt}\|_{L^p(\mathbf{R}^m)}\, dt/t\,,
$$

whence using the Young inequality in the multiplicative group R_+^*, we obtain

$$
\begin{aligned}
\|l^{-s}\|F * \bar{\Phi}_l\|_{L^p(\mathbf{R}^m)}\|_{L^\infty(\mathbf{R}_+^*)} &\leq C \int_{\alpha}^{\beta} t^s\, dt/t\ \|l^{-s}\|F * \bar{\varphi}_l\|_{L^p(\mathbf{R}^m)}\|_{L^\infty(\mathbf{R}_+^*)} \\
&\leq C\|l^{-s}\|F * \bar{\varphi}_l\|_{L^p(\mathbf{R}^m)}\|_{L^\infty(\mathbf{R}_+^*)}.
\end{aligned}
$$

Now, we set

$$
\eta_p(p) = \sup\{\tau \ :\ F \in B_{p,p}^{\tau/p,\infty}(\mathrm{R}^m)\}\,. \tag{3.48}
$$

We also modify the definition of the Hausdorff dimension and Hausdorff measure in order to be adapted to the anisotropy as follows (see [55]).

Definition 3 *Let $E \subset \mathrm{R}^m$ and R_ε the set of all coverings of E by sets of ρ-diameter at most ε. Let*

$$
(\rho - M)_{d,\varepsilon}(E) \ = \ \inf_{r \in R_\varepsilon} \sum_{E_i \in r} ((\rho - \mathrm{diam})\, E_i)^d;
$$

then, by definition the d-dimensional ρ-Hausdorff measure of E is

$$
(\rho - M)_d(E) \ = \ \limsup_{\varepsilon \to 0} (\rho - M)_{d,\varepsilon}(E)\,.
$$

The ρ-Hausdorff dimension of E is

$$
d_\rho(E) \ = \ \inf\{d \ :\ (\rho - M)_d(E) = 0\} = \ \sup\{d \ :\ (\rho - M)_d(E) = +\infty\}\,.
$$

Finally we call the anisotropic multifractal formalism the property that the ρ-Hausdorff dimension $d_\rho(\alpha)$ of the set of points x where $\alpha_\rho(x) = \alpha$ is equal to the Legendre transform of $\eta_\rho(q) - Q$

$$
d_\rho(\alpha) = \inf(\alpha q - \eta_\rho(q) + Q). \tag{3.49}
$$

Now we will introduce the class of anisotropic selfsimilar functions for which the anisotropic multifractal formalism will be proved to be valid. This new class will contain the family of "selfsimilar" functions of the two previous cases.

3.7 Validity of the Anisotropic M.F for Anisotropic Selfsimilar Functions

Let $1 = d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_m$; $\mu_1 < 1, \ldots, \mu_L < 1$ and $V_1 \in \mathrm{R}^m, \ldots, V_L \in \mathrm{R}^m$; Consider the m anisotropic contractions on R^m: $S_i(x) = A_{\mu_i}(x) + V_i$. Let Ω be a bounded open set of R^m and $k > 0$; Assume that (1.20) and (1.21) hold and let g be a C^k_ρ function such that all its derivatives of order less than k have fast decay. We will call a $(d_1, \ldots, d_m)$-k-selfsimilar function, a function F satisfying:

$$F(x) = \sum_{i=1}^{L} \lambda_i \, F(S_i^{-1}(x)) \;\; + \;\; g(x) \tag{3.50}$$

such that F is not uniformly C^k_ρ in a certain non-empty closed subset of Ω.

The "selfsimilar" functions given in the first part of this chapter are $(1, \frac{\log t}{\log s})$-1-selfsimilar. Let

$$\alpha_{min} = \inf_{j=1,\ldots,L} \frac{\log \mid \lambda_j \mid}{\log \mu_j} \quad \text{and} \quad \alpha_{max} = \sup_{j=1,\ldots,L} \frac{\log \mid \lambda_j \mid}{\log \mu_j}. \tag{3.51}$$

We will study the existence of the solutions of (3.50) in the anisotropic $\mathcal{H}^p_\rho(\mathrm{R}^m)$ spaces defined by Calderón as follows.

Definition 4 *Let for $a > 0$ the maximal function associated with F be*

$$M_a(x) = \sup_{\rho(b) \leq ra} |C_\rho(a, x + b)(F)|.$$

For $0 < p \leq \infty$

$$F \in \mathcal{H}^p_\rho(\mathrm{R}^m) \quad \textit{if} \quad M_a(x) \in L^p(\mathrm{R}^m).$$

This property of $M_a(x)$ is independent of the choice of φ and a. We define the $\mathcal{H}^p_\rho(\mathrm{R}^m)$ norm of F as the norm of $M_a(x)$ in $L^p(\mathrm{R}^m)$.

A k-atom ϕ is a bounded function with compact support and with vanishing moments of all orders less than or equal to k. The p-norm of the atom ϕ is defined as

$$\|\phi\|_p = \inf M |B|^{1/p} \tag{3.52}$$

where M is a bound for $|\phi|$ and $|B|$ is the measure of a ball $B = \{x : \rho(x - x_0) \leq r\}$ (which is an ellipse in the euclidean space) containing the support of ϕ. If $0 < p \leq 1$ and $k \geq Q/p - 1$, then $\phi \in \mathcal{H}^p_\rho(\mathrm{R}^m)$ and

$$\|\phi\|_{\mathcal{H}^p_\rho(\mathrm{R}^m)} \leq C \|\phi\|_p \tag{3.53}$$

where the constant C depends on k and the choice of the norm in $\mathcal{H}^p_\rho(\mathrm{R}^m)$.

In the case where the solution will be a function, we will compute its global and pointwise anisotropic Hölder regularity and then we will show that the anisotropic multifractal formalism holds.

We are now ready to state our main results.

Proposition 14 *Suppose that* $\sum_{j=1}^{L} \mid \lambda_j \mid \mu_j^Q < 1$; *in this case (3.50) has a unique distribution solution, which is an* L^1 *function and given by the non-homogeneous series*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{(i_1,\ldots,i_n)} \lambda_{i_1} \ldots \lambda_{i_n} g\left(S_{i_n}^{-1} \ldots S_{i_1}^{-1}(x)\right). \tag{3.54}$$

If furthermore $0 < \alpha_{min} < k$, *this function belongs to* $C_\rho^{\alpha_{min}}(\mathrm{R}^m)$.

Suppose that $\sum_{j=1}^{L} \mid \lambda_j \mid \mu_j^Q \geq 1$; *in that case (3.50) may have several distribution solutions; let* $p < 1$ *such that* $\sum_{j=1}^{L} \mid \lambda_j \mid^p \mu_j^Q < 1$; *if* g *is* C_ρ^k *with* $k > Q/p - 1$, *and if the moments of* g *of order less than* k *vanish, (3.54) converges in the anisotropic Hardy real space* $\mathcal{H}_\rho^p(\mathrm{R}^m)$, *so that (3.50) has at least one solution in that space of distributions. Furthermore, these results are optimal.*

Proposition 15 *Let* K *be the unique non-empty compact set satisfying* $K = \bigcup_{j=1}^{L} S_j(K)$.
If $x \notin K$, F *is* C_ρ^k *in a neighbourhood of* x.

Proposition 16 *Suppose that* $\alpha_{min} > 0$. *Let* T *be the tree constructed in the "time-frequency half-space": the root is conventionally the point* $(0,1) \in \mathrm{R}^m \times \mathrm{R}^+$, *this root is linked to the* L *first nodes, which are the* $(S_j(0), \mu_j)$, *each point* $(S_j(0), \mu_j)$ *is linked to the* $(S_j S_k(0),\ \mu_j \mu_k), \ldots$
Let $x \in K$ *and* $B_j(x)$ *be the set of branches* $(i_1, \ldots, i_n)$ *of the tree such that*

$$\rho(S_{i_1} \cdots S_{i_n}(0) - x) \leq \mu_{i_1} \ldots \mu_{i_n}$$

and

$$2^{-j} \leq \mu_{i_1} \cdots \mu_{i_n} < 2^{-(j-1)}.$$

Then

$$\alpha_\rho(x) = \liminf_{j \to \infty} \inf_{i \in B_j(x)} \frac{Log|\lambda_i|}{Log\mu_i}. \tag{3.55}$$

Proposition 17 *Define a function* τ *by the equation* $\sum_{j=1}^{L} |\lambda_j|^a \mu_j^{-\tau(a)} = 1$. *Let* $\alpha < k$ *and define* $d_\rho(\alpha)$ *as the* ρ*-Hausdorff dimension of the set of points* x *where* $\alpha_\rho(x) = \alpha$. *Then* $d_\rho(\alpha)$ *equals* $-\infty$ *outside* $[\alpha_{min}, \alpha_{max}]$, *and on this interval,*

$$d_\rho(\alpha) = \inf_a (a\alpha - \tau(a)). \tag{3.56}$$

Proposition 18 *Let* F *be a* $(d_1, \ldots, d_m)$*-*k*-selfsimilar and let* q *such that* $\tau(q) \leq kq - Q$. *Then*

$$\eta_\rho(q) = \tau(q) + Q.$$

Theorem 5 *Let* F *be a* $(d_1, \ldots, d_m)$*-*k*-selfsimilar. If* $\alpha_{min} > 0$, *the function* $d_\rho(\alpha)$ *equals* $-\infty$ *outside the interval* $[\alpha_{min}, \alpha_{max}]$ *and is analytic and concave on this interval. Its maximal value* $d_{\rho,max}$ *satisfies*

$$\sum \mu_i^{d_{\rho,max}} = 1.$$

Let α_0 be the value for which this maximum is attained.

If g is C^∞_ρ; if $\alpha \leq \alpha_0$, $d_\rho(\alpha)$ can be obtained by computing the Legendre transform of $\eta_\rho(q) - Q$.

If g is C^k_ρ, let p_0 be defined by $\tau(p_0) + Q = kp_0$ and let α_1 be the Legendre transform at p_0 of the function $\tau(q)$ (i.e $\alpha_1 = \tau'(p_0)$); if $\alpha \leq \alpha_1$ then for $\alpha \leq \alpha_1$, $d_\rho(\alpha)$ can be obtained by computing the Legendre transform of $\eta_\rho(q) - Q$.

Notice that in order to show that F belongs to $\mathcal{H}^p_\rho$, we split F as a sum $F = \sum_{j\geq 1} F_j$ where F_j is the series (3.54) restricted to the indexes $i \in I_j$ such that $2^{-j} \leq \mu_i < 2^{-(j-1)}$ and that the regularity and the cancellation that we requested for g is consistent with the atomic decomposition of the F_j; thus the $\mathcal{H}^p_\rho$ norm of F_j, using (3.52), (3.53) and the fact that $a + b \leq (a^p + b^p)^{1/p}$ for $a > 0$, $b > 0$ and $0 < p \leq 1$, is bounded by

$$\begin{aligned} \|\sum_{i\in I_j} \lambda_i g \circ S_i^{-1}\|_{\mathcal{H}^p_\rho} &\leq \left(\sum_{i\in I_j} \|\lambda_i g \circ S_i^{-1}\|^p_{\mathcal{H}^p_\rho}\right)^{1/p} \\ &\leq C\left(\sum_{i\in I_j} \|\lambda_i g \circ S_i^{-1}\|_p\right)^{1/p} \\ &\leq C\left(\sum_{i\in I_j} |\lambda_i|^p \mu_i^Q\right)^{1/p} \end{aligned}$$

this quantity is exponentially decreasing with j, so that F belongs to $\mathcal{H}^p_\rho$.

The solution F given by the series (3.54) looks like an anisotropic wavelet decomposition. The proofs of Propositions 14, 15, 16 17 and 18, and Theorem 5 follow from the properties of the homogeneous norm ρ, Proposition 13 and arguments similar to those of Jaffard's paper [33]; in all situations Q served as a substitute for the space dimension m: the anisotropic wavelet transform of F satisfies a functional equation similar to (3.50)

$$\begin{aligned} C_\rho(a,b)(F) &= \sum_{j=1}^{J} \sum_{2^{-j}\leq\mu_i<2.2^{-j}} \lambda_i C_\rho(\frac{a}{\mu_i}, S_i^{-1}(b))(g) \\ &\quad + \sum_{2^{-J}\leq\mu_i<2.2^{-J}} \lambda_i\, C_\rho(\frac{a}{\mu_i}, S_i^{-1}(b))(F), \end{aligned}$$

hence, we prove that its order of the magnitude near the tree is large, more precisely, near $(S_{i_1} \dots S_{i_n}(0), \mu_{i_1} \dots \mu_{i_n})$, it is $\sim |\lambda_{i_1}| \dots |\lambda_{i_n}|$.

The dimensions of the singularities will be obtained by constructing invariant measures on the sets of singularities and using the analogous of Lemma 8 for the "norm" ρ (the ball Euclidean $B(x,r)$ will be replaced by the ρ-ball $(\rho - B)(x,r)$ which is an ellipse of axis of lenghts $2r$, $2r^{d_2}, \dots$ and $2r^{d_m}$, centered on x.

For the proof of the anisotropic mulifractal formalism, we show that for q such that $\tau(q) \leq kq - Q$

$$\int |C_\rho(a,b)(F)|^q db \sim a^{Q+\tau(q)}\,.$$

Chapitre 4

Formalisme Multifractal pour les Fonctions d'Echelles

Résumé. On montre que le formalisme multifractal s'applique aussi pour une large classe de fonctions d'échelle. Celles ci sont autosimilaires sous l'effet de contractions ne vérifiant pas la condition de séparation. On vérifie aussi le caractère "presque-oscillant" pour ces fonctions en certains points. Enfin, on donne une méthode différente de celle de Meyer pour l'analyse multifractale de la fonction d'échelle de de Rham (ou Cesaro); Celle ci peut se transformer en une fonction autosimilaire avec une fonction d'erreur discontinue. On prouve également la validité du formalisme multifractal.

4.1 Introduction

Le formalisme multifractal a été prouvé pour des fonctions autosimilaires satisfaisant des équations d'autosimilarité de type

$$F(x) = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i F(S_i^{-1}(x)) + g(x)$$

avec $|\lambda_i| < 1$, S_i des contractions sur un domaine borné Ω de R^m vérifiant la condition de séparation

$$S_i(\Omega) \cap S_j(\Omega) = \emptyset \tag{4.1}$$

et g une fonction assez régulière et à support compact dans $\bar{\Omega}$ (cf [4], [7] et [33]).

Ce formalisme a été étendu pour des cas où les $S_j(\Omega)$ se recouvrent; plus précisément pour les fonctions d'échelle $\varphi(x) = \sum_{n=0}^{N} c_n \varphi(kx - n)$ avec $k = 2$, $N = 3$, $c_0 = \beta \in]1/2, 3/4[$, $c_1 = \frac{1}{2} + \beta$, $c_2 = 1 - \beta$ et $c_3 = \frac{1}{2} - \beta$ (voir [24]). Le filtre de ces fonctions satisfait les règles de somme $\sum_{n=0}^{N} c_n (-1)^n n^l = 0$ pour $l = 0, \ldots, N-2$. Dans ce chapitre, on se propose d'étendre la validité de ce formalisme dans le cas où on n'a pas assez de règles de somme.

On s'intéresse dans un premier temps à des fonctions F_ρ, $0 < \rho < 1$, $\rho \neq 1/2$, de $L^1(\mathrm{R})$, satisfaisant l'équation fonctionnelle :

$$F_\rho(x) = \rho F_\rho(2x) + \rho F_\rho(2x-1) + (1-\rho) F_\rho(2x-2) + (1-\rho) F_\rho(2x-3) \tag{4.2}$$

et la condition de normalisation

$$\int F_p(x)\,dx = 1\,. \tag{4.3}$$

Rappelons que ces fonctions font partie d'une large classe de fonctions, solutions dans $L^1(\mathrm{R})$ des équations d'échelle

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{N} c_n \varphi(kx - n) \tag{4.4}$$

avec

$$\int \varphi(x)\,dx = 1 \tag{4.5}$$

et interviennent dans la construction des ondelettes à support compact (cf [19]).

Dans [22] et [23], Daubechies et Lagarias ont étudié l'existence, le support, la régularité globale en termes de conditions sur les c_n (voir Théorème 2 et Proposition 19 dans ce chapitre) et ont trouvé des renseignements sur la minoration de la régularité ponctuelle en certains points. D'autres types de régularité ont été étudiés dans [17] et [18]. Signalons que si l'on omet la condition $\varphi \in L^1(\mathrm{R})$, alors l'espace des solutions de l'équation d'échelle (4.4) aura une dimension infinie. La condition $\varphi \in L^1(\mathrm{R})$ nous permet de prouver que la dimension d'un tel espace est au plus égale à 1 et, lorsque cela est le cas, φ sera définie de façon unique par la condition de normalisation (4.5); celle ci implique que $\sum_{n=0}^{N} c_N = k$ et ceci permet de prouver que φ est supportée par l'intervalle $[0, \frac{N}{k-1}]$.
La solution $\varphi(x)$ sera représentée en termes d'un produit infini de matrices (k matrices $M_0, \ldots, M_{k-1}$) dont les coefficients sont les c_n. La représentation dépend du développement k-adique de x (pour $x \in [0,1]$), on obtient en fait (cf [23]) pour $x \in \sum_{l=1}^{\infty} i_l(x) k^{-l}$ (avec $i_l \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$)

$$\varphi(x) = \lim_{n \to \infty} < (M_{i_1(x)} \ldots M_{i_n(x)})^t\, e, (\varphi(0), \ldots, \varphi(k-1)) >$$

avec $e = (1, 0, \ldots, 0) \in \mathrm{R}^k$, M_i^t désigne la matrice transposée de M_i et $<,>$ le produit scalaire. Pour le cas qui nous intéresse, $k = 2$, $N = 3$ et on a

$$M_0 = \begin{pmatrix} c_0 & 0 & 0 \\ c_2 & c_1 & c_0 \\ 0 & c_3 & c_2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M_1 = \begin{pmatrix} c_1 & c_0 & 0 \\ c_3 & c_2 & c_1 \\ 0 & 0 & c_3 \end{pmatrix}.$$

La régularité globale de φ résulte de certaines estimations uniformes sur la norme de tout produit fini de telles matrices.
L'inconvénient de la majorité de ces équations est que leur solution ne possède pas une forme analytique explicite. Ce problème résulte du fait que le produit infini de matrices n'est pas en général explicite.
Dans [24], Daubechies et Lagarias ont choisit des c_n de telle façon que dans une certaine base de R^3, M_0^t soit diagonale et M_1^t triangulaire. Ce choix permet de calculer tout produit des matrices M_0 et M_1, et de contrôler ainsi l'accroissement de la fonction d'échelle associée afin de déterminer la fonction $\zeta(q)$ et l'exposant de Hölder ponctuel pour tout $x \in [0,1]$. Ce dernier dépendra nécessairement de la proportion des codes binaires 0 et 1

dans le développement binaire de x. Si en plus on a "suffisamment" de règles de somme ($\sum_{n=0}^{N} c_n(-1)^n n^l = 0$ pour $l = 0, \ldots, N-2$) alors on peut trouver des relations entre le graphe de φ sur $[1,2]$, $[2,3]$ et son graphe sur $[0,1]$. D'autre part, la dimension de Hausdorff des ensembles des points dont la proportion des codes binaires 0 et 1 dans leur développement binaire existe et admet une limite p ($0 \leq p \leq 1$) est connue (cf [26]); Ainsi, Daubechies et Lagarias ont pu vérifier le formalisme multifractal (cf [24]). De telles règles sont d'une importance capitale, elles permettent en fait, comme Daubechies nous l'avait signalé (dans [21]) de transformer la fonction d'échelle en une fonction autosimilaire dans le sens de Jaffard (i.e celui de la définition 5 du premier chapitre) et de retrouver le formalisme multifractal. Les fonctions F_ρ n'ont pas assez de règles de somme, toutefois on vérifie que telles relations sont aussi possibles.

Signalons que pour $\rho = 1/2$, (4.2) et (4.3) admettent une solution unique donnée par la fonction

$$F_{\frac{1}{2}}(x) = \begin{cases} x/2 & \text{si} \quad x \in [0,1] \\ 1/2 & \text{si} \quad x \in [1,2] \\ (3-x)/2 & \text{si} \quad x \in [2,3] \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

$F_{\frac{1}{2}}$ étant uniformément Lipschitzienne donc le formalisme multifractal n'a aucun sens dans ce cas.

Dans la prochaine section, on vérifie l'existence et l'unicité de la solution de l'équation (4.2) pour $\rho \neq 1/2$, sous la condition de normalisation (4.3) et on donne sa régularité globale et son support. La solution F_ρ sera supportée par l'intervalle $[0,3]$; ainsi en posant $\Omega =]0,3[$ et $S_j(x) = \frac{1}{2}x + \frac{j}{2}$, pour $j = 0,1,2$ et 3, F_ρ sera autosimilaire avec des $S_j(\Omega)$ qui se recouvrent. Puis, on donnera explicitement cette solution et on montrera les relations entre son graphe sur $[1,2]$, $[2,3]$ et $[0,1]$.

Dans la troisième section, on calcule la régularité ponctuelle et le spectre des singularités et on prouve le formalisme multifractal.

Dans la quatrième section, on signale le rôle important des règles de somme dans l'autosimilarité des fonctions d'échelle et la vérification du formalisme multifractal. On vérifie aussi qu'aux points rationnels, la solution admet des chirps logarithmiques après avoir présenté ces notions et rappelé leur caractérisation par les ondelettes.

Dans la cinquième section, on vérifie que la fonction d'échelle de de Rham n'a pas aussi suffisamment de règles de somme. On montre qu'elle est autosimilaire avec une fonction d'erreur g discontinue, on étudie sa multifractalité en utilisant une méthode différente de celle de Meyer (cf [47]) et enfin on prouve la validité du formalisme multifractal.

4.2 Existence, unicité, support, régularité globale et calcul explicite de la solution

Pour $\rho \neq 1/2$, les matrices M_0 et M_1 associées à l'équation d'échelle (4.2) s'écrivent

$$M_0 = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 \\ 1-\rho & \rho & \rho \\ 0 & 1-\rho & 1-\rho \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M_1 = \begin{pmatrix} \rho & \rho & 0 \\ 1-\rho & 1-\rho & \rho \\ 0 & 0 & 1-\rho \end{pmatrix}.$$

On considère les vecteurs $e_1 = (1,1,1)$, $e_2 = ((\rho-1)^2, \rho(\rho-1), \rho^2)$ et $e_3 = (1,0,0)$, et on note P la matrice de passage de la base canonique de R^3 dans la base (e_1, e_2, e_3).

La matrice de l'endomorphisme associé à M_0^t est diagonale dans la base (e_1, e_2, e_3), et est donnée par

$$P^{-1} M_0^t P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho \end{pmatrix}.$$

Celle de l'endomorphisme associé à M_1^t est triangulaire supérieure et est égale à

$$P^{-1} M_1^t P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \rho^2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1-\rho \end{pmatrix}.$$

Un calcul facile nous fournit

$$P^{-1} (M_{i_1} \dots M_{i_n})^t P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \rho^2 \sum_{k=1}^{n} i_k \prod_{l=1}^{k-1} \lambda_{i_l} \\ 0 & 0 & -i_n \prod_{k=1}^{n-1} \lambda_{i_k} \\ 0 & 0 & \prod_{k=1}^{n} \lambda_{i_k} \end{pmatrix}.$$

avec $\lambda_0 = \rho$ et $\lambda_1 = 1-\rho$.

D'aprés la remarque de [23] page 1048, en posant E_1 le sous espace vectoriel de R^3 orthogonal à e_1, la restriction de la matrice $P^t M_j (P^t)^{-1}$ ($j = 0$ ou 1) au sous espace $P^t E_1$, que l'on notera $P^t M_j (P^t)^{-1} / P^t E_1$ est obtenue en éliminant la première ligne et la première colonne de $P^t M_j (P^t)^{-1}$ (donc en éliminant la première ligne et la première colonne de $P^{-1} M_j^t P$ puis en transposant). Ce qui donne

$$P^t M_0 (P^t)^{-1} / P^t E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \rho \end{pmatrix} \text{ et } P^t M_1 (P^t)^{-1} / P^t E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1-\rho \end{pmatrix}.$$

De la même manière, on obtient

$$P^t M_{i_1} \dots M_{i_n} (P^t)^{-1} / P^t E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -i_n \prod_{k=1}^{n-1} \lambda_{i_k} & \prod_{k=1}^{n} \lambda_{i_k} \end{pmatrix}.$$

Donc la norme de la matrice $P^t M_{i_1} \dots M_{i_n} (P^t)^{-1} / P^t E_1$ est $\sim \prod_{k=1}^{n} \lambda_{i_k}$.

On va utiliser les résultats suivants (voir [22] page 1395 et [23] pages 1037-1038, 1043 et 1053)

Théorème 2 *Supposons que les coefficients c_n, $n = 0, \dots, N$ satisfaient $\sum_{n=0}^{N} c_n = 2$ et $\sum_{n=0}^{N} (-1)^n n^l c_n = 0$ pour $l = 0, 1, \dots, L$.*
Pour chaque $m = 1, \dots, L+1$, on pose E_m le sous espace vectoriel de R^N orthogonal à $Vect\{u_1, \dots, u_m\}$ où $u_j = (1, 2^{j-1}, \dots, N^{j-1})$. Supposons qu'il existe $\frac{1}{2} \leq \lambda < 1$, $0 \leq l \leq L$ ($l \in \mathrm{N}$) et $C > 0$ tels que, pour toute suite binaire $(i_j)_{j \in \mathbf{N}^*}$, et tout $m \in \mathrm{N}^*$,

$$\| M_{i_1} \dots M_{i_m} / E_{l+1} \| \leq C \lambda^m 2^{-ml}. \tag{4.6}$$

Alors

- *Il existe une solution f continue non triviale et appartenant à L^1, pour l'équation d'échelle $f(x) = \sum_{n=0}^{N} c_n f(2x-n)$;*

- *f est à support compact dans $[0, \frac{N}{k-1}]$, $f(x)+f(x+1)+\ldots+f(x+N-1)=1$ pour tout $x \in [0,1]$, et f est l fois continûment dérivable*

- *Si $\lambda > \frac{1}{2}$, alors la dérivée d'ordre l, $f^{(l)}$ appartient à $C^{-\frac{\log\lambda}{\log 2}}(\mathrm{R})$;*
  Si $\lambda = \frac{1}{2}$, alors $f^{(l)}$ satisfait

$$|f^{(l)}(x+t) - f^{(l)}(x)| \leq C|t||\log|t||.$$

Proposition 19 *L'estimation (4.6) est équivalente à la propriété suivante: il existe $m \in \mathrm{N}^*$ et une matrice $N \times N$, B de déterminant non nul, tels que*

$$\max_{\substack{i_j=0 \text{ ou } 1 \\ j=1,\ldots,m}} \| \bar{M}_{i_1} \ldots \bar{M}_{i_m} / BE_{L+1} \| \leq 2^{-ml}$$

avec $\bar{M}_i = BM_iB^{-1}$.

Ces résultats s'étendent aussi pour les équations d'échelle $f(x) = \sum_{n=0}^{N} c_n f(kx-n)$ pour $k \neq 2$.

Comme $\| P^t M_{i_1} \ldots M_{i_n} (P^t)^{-1} / P^t E_1 \| \sim \prod_{k=1}^{n} \lambda_{i_k}$, alors, d'après la Proposition 19 et le Théorème 2, il existe une unique fonction continue $F = F_\rho$ appartenant à $L^1(\mathrm{R})$ et satisfaisant (4.2) et (4.3).

De plus F est Hölderienne d'exposant de Hölder $\alpha_{min} = min\{\frac{|\log\rho|}{\log 2}, \frac{|\log(1-\rho)|}{\log 2}\}$. Par conséquent, en prenant $\Omega = [0,3]$, on peut dire que F est autosimilaire avec des $S_j(\Omega)$ ne vérifiant pas la condition de séparation. On a par ailleurs, pour tout $x \in [0,1]$

$$F(x) + F(x+1) + F(x+2) = 1 \,. \tag{4.7}$$

On va chercher une forme analytique explicite pour la fonction F. Pour $x \in [0,1]$, on considère la décomposition dyadique

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} i_k(x) 2^{-k}$$

et on définit l'opérateur de shift τ par

$$\tau x = \sum_{k=2}^{\infty} i_k(x) 2^{-k+1} \,.$$

Observons que

$$\tau x = S_{i_1(x)}^{-1}(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in [0,1/2] \\ 2x-1 & \text{si } x \in [1/2,1]. \end{cases}$$

On pose

$$V(x) = (F(x), F(x+1), F(x+2)) \,.$$

Il vient alors

$$V(x) = M_{i_1(x)} \, V(\tau x)$$

donc par itération, on aura pour tout $n \in \mathrm{N}$,

$$V(x) = M_{i_1(x)} \ldots M_{i_n(x)} \, V(\tau^n x) \,.$$

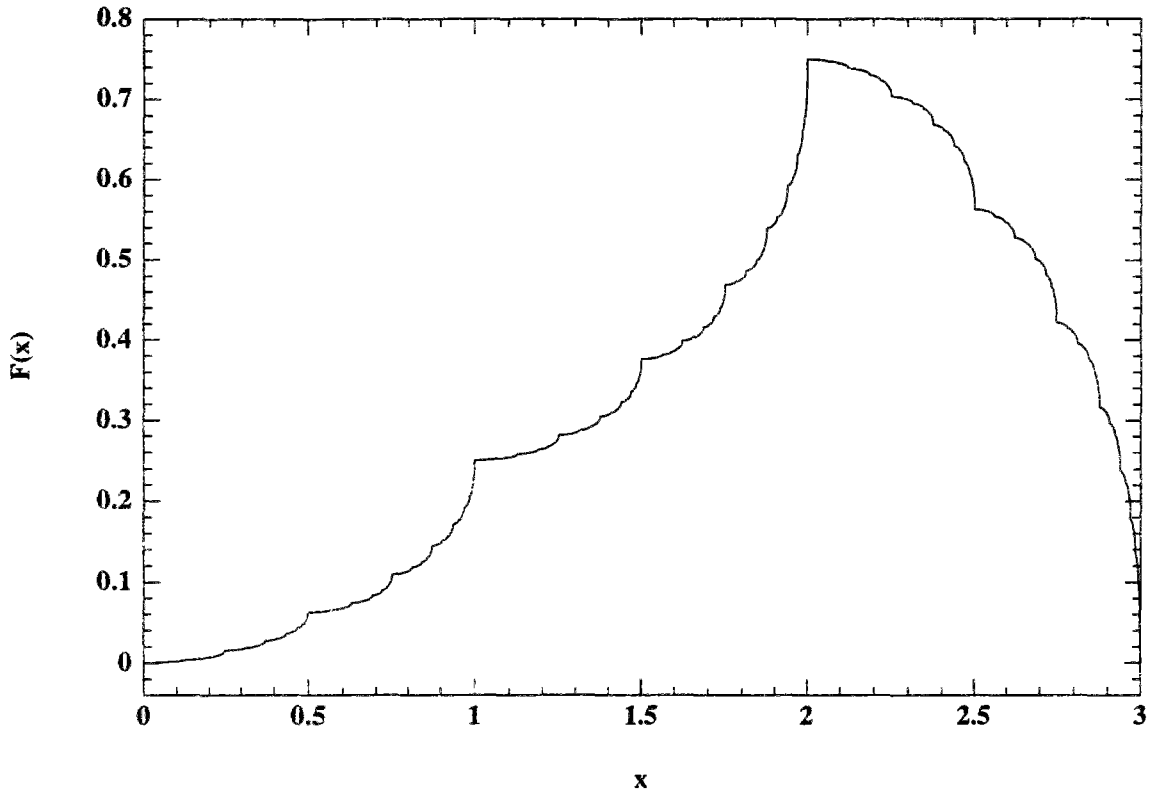


FIG. 4.1 – *Le graphe de F_ρ pour $\rho = 0.25$*

On a

$$\begin{aligned} F(x) &= < e_3, V(x) > \\ &= < e_3, \lim_n M_{i_1(x)} \dots M_{i_n(x)}\, V(0) > \\ &= \lim_n < (M_{i_1(x)} \dots M_{i_n(x)})^t\, e_3, V(0) > \\ &= \lim_n < \rho^2 \sum_{k=1}^{n} i_k \prod_{l=1}^{k-1} \lambda_{i_l}\, e_1 - i_n \prod_{k=1}^{n-1} \lambda_{i_k}\, e_2 + \prod_{k=1}^{n} \lambda_{i_k}\, e_3, V(0) > \ . \end{aligned}$$

Grâce au fait que λ_0 et λ_1 sont compris entre 0 et 1 et à la propriété (4.7), on obtient

$$\forall x \in [0,1], \quad F(x) = \rho^2 \sum_{k=1}^{\infty} i_k(x) \prod_{l=1}^{k-1} \lambda_{i_l}(x)\ . \tag{4.8}$$

Regardons maintenant les relations entre le graphe de F sur $[1,2]$, $[2,3]$ et son graphe sur $[0,1]$. Pour $x \in [0,1]$, comme F est supportée par $[0,3]$, l'équation (4.2) donne

$$F(\frac{x+1}{2}) = \rho F(x+1) + \rho F(x)$$

donc

$$F(x+1) = \frac{1}{\rho}F(\frac{x+1}{2}) - F(x) .$$

Or si $x = \sum_{l=1}^{\infty} i_l(x)2^{-l}$ alors

$$\begin{aligned} \frac{x+1}{2} &= \frac{1}{2} + \sum_{l=1}^{\infty} i_l(x)2^{-(l+1)} \\ &= \frac{1}{2} + \sum_{l=2}^{\infty} i_{l-1}(x)2^{-l} \end{aligned}$$

donc

$$i_1(\frac{x+1}{2}) = 1 \text{ et } i_l(\frac{x+1}{2}) = i_{l-1}(x) \text{ pour } l \geq 2$$

par conséquent

$$F(\frac{x+1}{2}) = \rho^2 \left(1 + i_1(x)\lambda_1 + i_2(x)\lambda_1\lambda_{i_1(x)} + \ldots + i_k(x)\lambda_1\lambda_{i_1(x)}\ldots\lambda_{i_{k-1}(x)} + \ldots\right)$$

soit donc

$$F(\frac{x+1}{2}) = \rho^2 + (1-\rho)F(x). \tag{4.9}$$

Par conséquent,

$$F(x+1) = \rho + \frac{1}{\rho}(1-\rho)F(x) - F(x)$$

donc

$$F(x+1) = \rho + \frac{1-2\rho}{\rho}F(x) . \tag{4.10}$$

Et on conclut grâce à (4.7) que

$$F(x+2) = 1 - \rho - \frac{1-\rho}{\rho}F(x) . \tag{4.11}$$

Remarquons que pour $x \in [0,1]$, $\frac{1}{\rho}F(x)$ est la primitive de la mesure de probabilité binomiale μ construite sur $[0,1]$ par le procédé itératif suivant : à l'étape $n = 0$, on affecte à l'intervalle $[0,1]$ le poids 1; à l'étape $n = 1$, on attribue un poids $\lambda_0 = \rho$ à l'intervalle $[0,1/2]$ et le poids $\lambda_1 = 1 - \rho$ à l'intervalle $[1/2,1]$; à l'étape n, on divise $[0,1]$ en 2^n intervalles égaux en longueur, on repère chacun de ces 2^n intervalles par une séquence symbolique $(i_1,\ldots,i_n)$ où $i_k = 0$ ou 1 selon que l'intervalle considéré soit l'un des 2^{k-1} intervalles à gauche ($i_k = 0$) ou l'un des 2^{k-1} intervalles à droite ($i_k = 1$) de la décomposition des 2^k intervalles obtenus à l'étape k, on attribue alors un poids $\lambda_{i_1}\ldots\lambda_{i_n}$ à l'intervalle $I_{i_1,\ldots,i_n} = [\sum_{k=1}^{n} i_k 2^{-k}, \sum_{k=1}^{n} i_k 2^{-k} + 2^{-n}]$.

4.3 Régularité ponctuelle, spectre des singularités et formalisme multifractal

Dans cette section, on fournit la valeur exacte de la régularité ponctuelle, le spectre des singularités et la preuve du formalisme multifractal. Il y a plusieurs façons de faire ceci : on peut se ramener au cas des fonctions autosimilaires classiques et en déduire directement le résultat mais comme $\frac{1}{\rho}F(x)$ est la primitive d'une mesure de probabilité binomiale, nous préférons faire appel au formalisme multifractal pour les mesures et appliquer les résultats de certains auteurs à notre cas; l'autosimilarité de F sera utilisée dans la troisième section afin d'analyser la présence de chirps logarithmiques.

On pose

$$\begin{aligned} a(x) &= \liminf_{n\to\infty} \frac{\log \lambda_{i_1(x)} \cdots \lambda_{i_n(x)}}{\log 2^{-n}} \\ &= \liminf_{n\to\infty} \left(\frac{\sum_{l=1}^n i_l(x)}{n} \frac{|\log(1-\rho)|}{\log 2} + (1 - \frac{\sum_{l=1}^n i_l(x)}{n}) \frac{|\log \rho|}{\log 2} \right) ; \end{aligned}$$

On a le théorème suivant

Théorème 3 *Soit $0 < \rho < 1$, $\rho \neq \frac{1}{2}$ et F la solution de l'équation (4.2) sous la condition de normalisation (4.3). Alors pour $x \in [0,1]$ tel que $a(x) \leq 1$, on a*

$$\alpha(x+2) = \alpha(x+1) = \alpha(\frac{x+1}{2}) = \alpha(x) = a(x) . \tag{4.12}$$

En plus, pour $\alpha \in [\alpha_{min}, 1]$

$$d(\alpha) = \inf_q (\alpha q - \sigma(q))$$

avec $\sigma(q) = -\frac{\log(\rho^q + (1-\rho)^q)}{\log 2}$.
Et pour $\alpha \in]\alpha_{min}, -(\rho \log \rho + (1-\rho)\log(1-\rho))/\log 2]$,

$$d(\alpha) = \inf_{q>1} (\alpha q - \zeta(q) + 1)$$

et le formalisme multifractal s'applique.

Preuve :
On va d'abord rappeler le formalisme multifractal pour les mesures et montrer le rapport avec le formalisme multifractal des fonctions.
Pour $x \in [0,1]$, on note $I_n(x)$ l'unique intervalle dyadique de longueur 2^{-n} contenant x, c'est à dire l'intervalle $[\sum_{l=1}^n i_l(x)2^{-l}, \sum_{l=1}^n i_l(x)2^{-l} + 2^{-n}[$ et on définit la régularité ponctuelle de la mesure μ en x par :

$$\alpha_\mu(x) = \lim_n \frac{\log \mu(I_n(x))}{\log |I_n(x)|} \quad \text{(si cette limite existe)} .$$

Posons

$$E_\mu(\alpha) = \{x \in [0,1] \ : \ \alpha_\mu(x) = \alpha\}$$

et

$$\sigma(q) = \lim_n \frac{\log \sum_k (\mu([k2^{-n}, (k+1)2^{-n}]))^q}{\log 2^{-n}} .$$

Alors le formalisme multifractal pour les mesures dit que :

$$d_H(E_\mu(\alpha)) = \inf_q(\alpha q - \sigma(q)) .$$

Brown, Michon et Peyrière (cf [11]); Collet, Lebowitz et Porzio (cf [20]); et Mandelbrot et Riedi (cf [44] et [54]), ont montré la validité de ce formalime pour les mesures multinomiales. Par ailleurs, si f désigne la primitive de la mesure μ, c'est à dire

$$f(x) = \int_0^x d\mu = \mu([0,x]),$$

alors pour $\alpha \leq 1$, on a l'équivalence triviale

$$x \in E_\mu(\alpha) \Longleftrightarrow \alpha_f(x) = \alpha .$$

Si $d(\alpha)$ désigne le spectre des singularités de f, il s'ensuit alors que pour $\alpha \leq 1$

$$d(\alpha) = \inf_q(\alpha q - \sigma(q)) . \tag{4.13}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} \sum_k \left(\mu([k2^{-n},(k+1)2^{-n}])\right)^q &= \sum_k |f(k2^{-n}) - f((k+1)2^{-n})|^q \\ &\sim 2^n \int |f(x+2^{-n}) - f(x)|^q \, dx ; \end{aligned}$$

Par conséquent, si $1 + \sigma(q) < q$ alors

$$\zeta(q) = 1 + \sigma(q) .$$

Pour notre mesure, on a

$$\alpha_\mu(x) = \liminf_n \frac{\log(1-\rho)^{\sum_{l=1}^n i_l(x)} \rho^{n-\sum_{l=1}^n i_l(x)}}{\log 2^{-n}} = a(x) ;$$

Soit donc $\alpha(x) = a(x)$ si $a(x) \leq 1$.
Ainsi (4.12) découle de (4.10) et (4.11) et du fait que $a(\frac{x+1}{2}) = a(x)$.

D'autre part, on a

$$\sigma(q) = \lim_n \frac{\log \sum_{|i|=n} |\lambda_i|^q}{\log 2^{-n}} = \lim_n \frac{\log(\rho^q + (1-\rho)^q)^n}{\log 2^{-n}} = -\frac{\log(\rho^q + (1-\rho)^q)}{\log 2} ;$$

Par conséquent, $1 + \sigma(q) < q$ pour tout $q > 1$ et on en déduit grâce aux relations (4.10) et (4.11) que

$$\zeta(q) = 1 - \frac{\log(\rho^q + (1-\rho)^q)}{\log 2} \quad \forall q > 1. \tag{4.14}$$

Finalement, le Théorème 3 découle du fait que pour $\alpha_{min} < \alpha \leq 1$, $\inf_q(\alpha q + \frac{\log(\rho^q + (1-\rho)^q)}{\log 2})$ est atteint en $\left[\log\left(\frac{-\log(2^\alpha(1-\rho))}{\log(2^\alpha \rho)}\right)\right] / \left[\log \frac{\rho}{1-\rho}\right]$ qui est supérieur à 1 seulement pour $\alpha \in]\alpha_{min}, -(\rho \log \rho + (1-\rho)\log(1-\rho))/\log 2]$.

4.4 Autosimilarité, chirps logarithmiques et analyse par ondelettes

4.4.1 Chirps logarithmiques et analyse par ondelettes

Rappelons qu'une fonction $f(x)$ d'une variable réelle est Hölderienne d'exposant α en x_0 s'il existe un polynôme P de degré au plus α tel qu'on ait au voisinage de x_0

$$| f(x_0 + h) - P(h) | \leq C | h |^{\alpha} .$$

Cette majoration, ne permet pas de décrire les oscillations de $| f(x_0 + h) - P(h) |$.
Des comportements très oscillatoires ont été étudiés dans [37] et [48], lorsque par exemple

$$f(x_0 + h) - P(h) \sim h^{\alpha} \sin \frac{1}{h^{\beta}} ;$$

l'indice α étant l'exposant de Hölder en x_0 tandis que β mesure la rapidité des oscillations qui vont s'accélérer quand h tend vers 0.
Une situation moins oscillante apparaît lorsque f est "approximativement autosimilaire" au voisinage de x_0, plus précisément lorsque (si $\alpha < 1$)

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \lambda^{-\alpha}(f(x_0 + \lambda h) - f(x_0)) + O(|h|^{\alpha})$$

avec $\lambda < 1$. Cette égalité implique bien sûr que

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = |h|^{\alpha} G_{\pm}(\log \pm h) + O(|h|^{\alpha})$$

où le $\pm$ désigne le signe de h et G_+ et G_- sont des fonctions $\log \lambda$ périodiques.
Introduisons donc la définition suivante

Définition 6 *On dit qu'une fonction f a un chirp logarithmique d'ordre α en x_0 , de périodicité $\log \lambda$ et de régularité $r \geq 0$, s'il existe un polynôme P de degré au plus α et deux fonctions G_+ et G_- appartenant à l'espace de Hölder C^r, périodiques de période $\log \lambda$ et bornées telles que*

$$f(x_0 + h) - P(h) = |h|^{\alpha} G_{\pm}(\log \pm h) + O(|h|^{\alpha})$$

ou de façon équivalente, si

$$f(x_0 + h) - P(h) = \lambda^{-\alpha}(f(x_0 + \lambda h) - P(\lambda h)) + O(|h|^{\alpha}) .$$

Dans [35], Jaffard a établi des conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence de chirps logarithmiques, portant sur la transformée en ondelettes de la fonction. De plus il a trouvé une formule qui fournit explicitement les coefficients de Fourier des fonctions G_+ et G_- aux points où les fonctions autosimilaires ont des chirps: soit $\alpha > 0$, considérons une ondelette $\psi \in C^{[\alpha]+1}(\mathrm{R})$ telle que pour tout $0 \leq l \leq [\alpha] + 1$, $|\psi^{(l)}(x)| \leq \frac{C}{(1+|x|)^{[\alpha]+2}}$ et $\int x^l \psi(x)\, dx = 0$ et de plus (par exemple) ψ paire, ou impaire, ou $\hat{\psi}(\xi) = 0$ pour $\xi \leq 0$ (et ψ non identiquement nulle). Voici les énoncés des théorèmes de Jaffard ([35]).

Théorème 4 *Si f a un chirp logarithmique d'ordre α en x_0 , de périodicité $\log\lambda$ et de régularité r, alors la transformée en ondelettes de F vérifie*

$$C_{a,b}(f) = a^\alpha H(\log a, \frac{b-x_0}{a}) + O(a^\alpha + |b-x_0|^\alpha) \tag{4.15}$$

avec $H(x,y)$ $\log\lambda$ périodique en la première variable,

$$|H(x,y)| \leq C(1+|y|)^{\alpha-r} \tag{4.16}$$

et

$$|H(x,y) - H(x',y)| \leq C|x-x'|^r(1+|y|)^\alpha \ . \tag{4.17}$$

Réciproquement, supposons qu'il existe $\beta < \alpha$ tel que

$$C_{a,b}(f) = a^\alpha H(\log a, \frac{b-x_0}{a}) + O(a^\alpha(1+\frac{|b-x_0|}{a})^\beta) \tag{4.18}$$

avec $H(x,y)$ satisfaisant (4.16) et (4.17). Alors f a un chirp logarithmique d'ordre α en x_0, de périodicité $\log\lambda$ et de régularité $r-\varepsilon$, $\forall\varepsilon > 0$.

4.4.2 Chirps logarithmiques pour les fonctions autosimilaires

Soit maintenant f une fonction k-autosimilaire sur $[0,1]$, i.e vérifiant

$$f(x) = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i f(S_i^{-1}(x)) \ + \ g(x) \tag{4.19}$$

avec $|\lambda_i| < 1$ pour $i = 1,\ldots,d$, S_i des applications affines de $[0,1]$ dans $[0,1]$ de rapports de contraction μ_i, telles que

$$S_i(]0,1[) \cap S_j(]0,1[) = \quad \text{si} \quad i \neq j$$

et g est C^k à support compact dans $[0,1]$. On suppose en plus que f n'est pas C^k en un point x_0.
Alors les points où f n'est pas C^k appartiennent au compact K invariant par les S_i ($K = \bigcup S_i(K)$).
Chaque point de ce compact peut s'écrire

$$x = \lim_{n\mapsto\infty} S_{i_1} \circ \ldots \circ S_{i_n}(t)$$

où t est un point quelconque de $[0,1]$. On peut donc coder x par la suite $(i_1,\ldots,i_n,\ldots)$, ou encore par le nombre

$$X = X(x) = \sum_n i_n d^{-n}$$

dont le développement d-adique est précisément la suite i_n.

Théorème 5 *Soit f une fonction k-autosimilaire et x un point codé par un rationnel; $(i_1,\ldots,i_m,l_1,\ldots,l_{p(x)},l_1,\ldots,l_{p(x)},\ldots)$; Notons*

$$\lambda(x) = \lambda_{l_1}\ldots\lambda_{l_{p(x)}}$$

et

$$\mu(x) = \mu_{l_1} \dots \mu_{l_{p(x)}} .$$

Alors f a un chirp logarithmique d'ordre $\alpha = \frac{\log \lambda(x)}{\log \mu(x)}$ en x, de périodicité $\log \mu(x)$ et de régularité k.

Notons que la détection des chirps découle directement de l'équation fonctionnelle (4.19).

Dans ce qui suit, nous appliquons les résultats de Jaffard pour la solution $F = F_\rho$ de l'équation (4.2) (sous la condition de normalisation (4.3)) afin de détecter ses chirps logarithmiques. Pour cela on va d'abord la transformer en une fonction 1-autosimilaire.

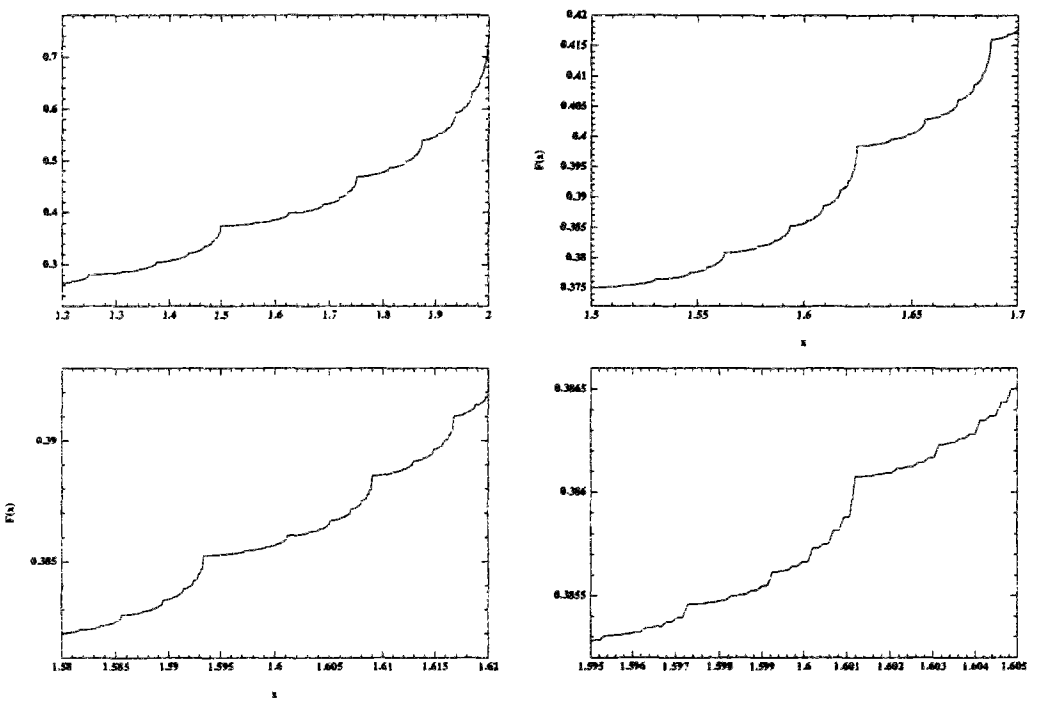


FIG. 4.2 – *Graphe et autosimilarité de $F_{0.25}$ autour de* 1.6

Pour $x \in [0, 1/2]$, l'équation (4.2) s'écrit

$$F(x) = \rho F(2x) . \tag{4.20}$$

Pour $x \in [1/2, 1]$, on a grâce à (4.9)

$$F(x) = (1-\rho)F(2x-1) + \rho^2 . \tag{4.21}$$

On a $F(0) = 0$ et $F(1) = \rho$, on définit alors une fonction continue $\tilde{F}$ qui s'annule en 0 et 1 par $\tilde{F}(x) = F(x) - \rho x$ pour $x \in [0, 1]$ et 0 ailleurs.
En réécrivant (4.20) et (4.21) pour $\tilde{F}$, on aura

$$\tilde{F}(x) = \begin{cases} \rho\tilde{F}(2x) + (2\rho^2 - \rho)x & \text{si} \quad x \in [0, 1/2] \\ (1-\rho)\tilde{F}(2x-1) - (2\rho^2 - \rho)x + 2\rho^2 - \rho & \text{si} \quad x \in [1/2, 1] \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

En posant

$$\Omega =]0,1[\ ;$$

$$S_j(x) = \frac{1}{2}x + \frac{j}{2} \text{ pour } j = 0,1\ ;$$

et

$$g(x) = \begin{cases} (2\rho^2 - \rho)x & \text{si} \quad x \in [0,1/2] \\ -(2\rho^2 - \rho)x + 2\rho^2 - \rho & \text{si} \quad x \in [1/2,1] \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

On aura alors

$$\tilde{F}(x) = \sum_{j=0}^{1} \lambda_j \tilde{F}(S_j^{-1}(x)) \ + \ g(x)\ ,$$

avec

$$S_i(\Omega) \subset \Omega \text{ pour } j = 0,1\ ;$$
$$S_0(\Omega) \cap S_1(\Omega) = \emptyset$$

et g est une fonction uniformément Lipschitzienne et à support compact dans $[0,1]$.

$\tilde{F}$ est donc une fonction 1-autosimilaire. Par conséquent, en tout point x codé par un rationnel, $\tilde{F}$ a un chirp logarithmique d'ordre $\alpha = \frac{-\log\lambda(x)}{p(x)\log 2}$ en x, de périodicité $-p(x)\log 2$ et de régularité 1.

Vu que $\tilde{F}$ est égale à F modulo un monôme, il en résulte des relations (4.10) et (4.11) qu'en tout point rationnel x tel que $a(x) \leq 1$ (ainsi que ses translatés de 1 et 2) F a un chirp logarithmique d'ordre $\alpha = \frac{-\log\lambda(x)}{p(x)\log 2}$, de périodicité $-p(x)\log 2$ et de régularité 1. C'est à dire qu'on a pour $|h|$ assez petit

$$F(x+h) - F(x) = \lambda(x)[F(x + 2^{-p(x)}h) - F(x)] + O\left(|h|^{-\frac{\log\lambda(x)}{\log 2^{p(x)}}}\right)\ .$$

4.4.3 Autosimilarité des fonctions d'échelle et formalisme multifractal

On vient de voir que modulo un monôme, la fonction d'échelle F_ρ est 1-autosimilaire. Ainsi elle vérifie le formalisme multifractal sur une partie de l'intervalle $[\alpha_{min}, 1]$.

Dans [21], Daubechies nous a signalé que toute fonction d'échelle dont les coefficients c_n vérifient les $L+1$ règles de somme

$$\sum_{n=0}^{N} c_n(-1)^n n^l = 0 \text{ pour } l = 0,\ldots,L\ ,$$

peut se transformer en une fonction autosimilaire $N-L-1$ dimensionnelle; c'est-à dire que les λ_j seront des matrices $N-L-1 \times N-L-1$ et la fonction d'erreur devient une fonction vectorielle de R^{N-L-1}. Ainsi, si $L = N-2$ alors modulo un polynôme de degré $N-2$, la fonction d'échelle devient $(N-2)$-autosimilaire dans le sens classique et le formalisme multifractal pour $\alpha < N-2$ en résulte.

Toutefois, il faut remarquer que la famille d'exemples F_ρ fait partie du cas $L < N-2$, en effet $L = 0$ et $N = 3$, alors qu'on n'a eu aucune difficulté pour transformer F_ρ en une fonction autosimilaire et de vérifier le formalisme multifractal.

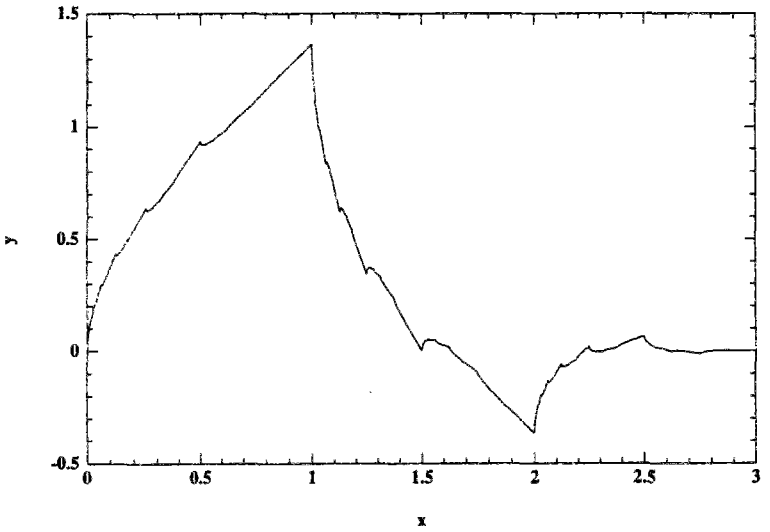


FIG. 4.3 – *Le graphe de φ pour $\beta = 0.683$*

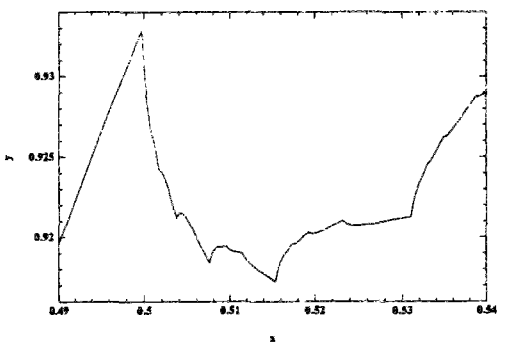


FIG. 4.4 – *Graphe et autosimilarité de φ sur* $[0.49, 0.54]$

Nous allons maintenant prouver que ceci est presque aussi le cas pour la fonction de de Rham (ou Cesaro) qui vérifie

$$F(x) = F(3x) + \frac{1}{3}[F(3x-1) + F(3x+1)] + \frac{2}{3}[F(3x-2) + F(3x+2)] \qquad (4.22)$$

avec toujours $F \in L^1$ et $\int F(x)\,dx = 1$. On montre en fait que cette fonction est autosimilaire, mais avec une fonction d'erreur discontinue.

4.5 Formalisme multifractal pour la fonction de de Rham

La fonction de de Rham (ou de Cesaro) a été introduite dans le but de construire des fonctions continues nulle part dérivables (cf [15] et [25]).
On se propose de montrer que cette fonction est multifractale et de vérifier le formalisme multifractal.

Pour cela, on va tout d'abord, en posant $f(x) = F(x-1)$, se rendre à l'équation d'échelle classique. f satisfait alors

$$f(x) = \sum_{n=0}^{4} c_n f(3x-n) \tag{4.23}$$

avec $c_0 = c_4 = \frac{2}{3}$, $c_1 = c_3 = \frac{1}{3}$ et $c_2 = 1$.

On a une seule règle de somme qui s'écrit sous la forme $c_0 + c_3 = c_1 + c_4 = c_2 = 1$.

Considérons les trois matrices

$$M_0 = \begin{pmatrix} 2/3 & 0 \\ 1/3 & 1 \end{pmatrix}, \; M_1 = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1/3 \\ 0 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

Considérons aussi les vecteurs $e_1 = (1,1)$ et $e_2 = (1,0)$ et notons P la matrice de passage de la base canonique de R^2 dans la base (e_1, e_2).

On a

$$P^{-1}M_0^tP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \; P^{-1}M_1^tP = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P^{-1}M_2^tP = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Un raisonnement par récurrence nous permet d'établir que pour tout $(i_1, \ldots, i_n) \in \{0,1,2\}^n$

$$P^{-1}\left(M_{i_1} \ldots M_{i_n}\right)^t P e_1 = e_1$$

et

$$\begin{aligned} P^{-1}\left(M_{i_1} \ldots M_{i_n}\right)^t P e_2 &= -\frac{1}{3}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\prod_{l=1}^{k}\lambda_{i_l}\right)\bar{i}_{k+1}e_1 \\ &\quad + \left(\prod_{k=1}^{n-1}\lambda_{i_k}\right)e_2 \end{aligned}$$

avec $\lambda_0 = \lambda_2 = \frac{2}{3}$ et $\lambda_1 = -\frac{1}{3}$; $\bar{0} = 0$, $\bar{1} = -2$ et $\bar{2} = -1$.

Ce qui donne

$$\begin{aligned} P^{-1}\left(M_{i_1} \ldots M_{i_n}\right)^t P e_2 &= -\frac{1}{3}\sum_{k=0}^{n-1} 3^{-k}2^{N_k(0)+N_k(2)}(-1)^{N_k(1)}\bar{i}_{k+1}e_1 \\ &\quad + 3^{-n}2^{N_n(0)+N_n(2)}(-1)^{N_n(1)}e_2 \,, \end{aligned}$$

avec $N_k(i)$ $(i = 0,1,2)$ le nombre des indices valant i, dans le n-uplet $(i_1, \ldots, i_n)$.

En utilisant alors la Proposition 19 et le Théorème 2, on prouve que f est à support dans $[0,2]$ et qu'elle est Hölderienne d'exposant de Hölder $\alpha_{min} = \log(3/2)/\log 3 = 1 - \frac{\log 2}{\log 3} \simeq 0,36907...$, et que $f(x) + f(x+1) = 1$ pour tout $x \in [0,1]$.

Il en résulte que la fonction de de Rham $F \in C^{\log\frac{3}{2}/\log 3}(\mathrm{R})$ et est à support compact dans $[-1,1]$ et que $F(x) + F(x-1) = 1$ pour tout $x \in [0,1]$. Ainsi, on peut remplacer F par sa restriction à $[0,1]$ pour l'analyse multifractale.

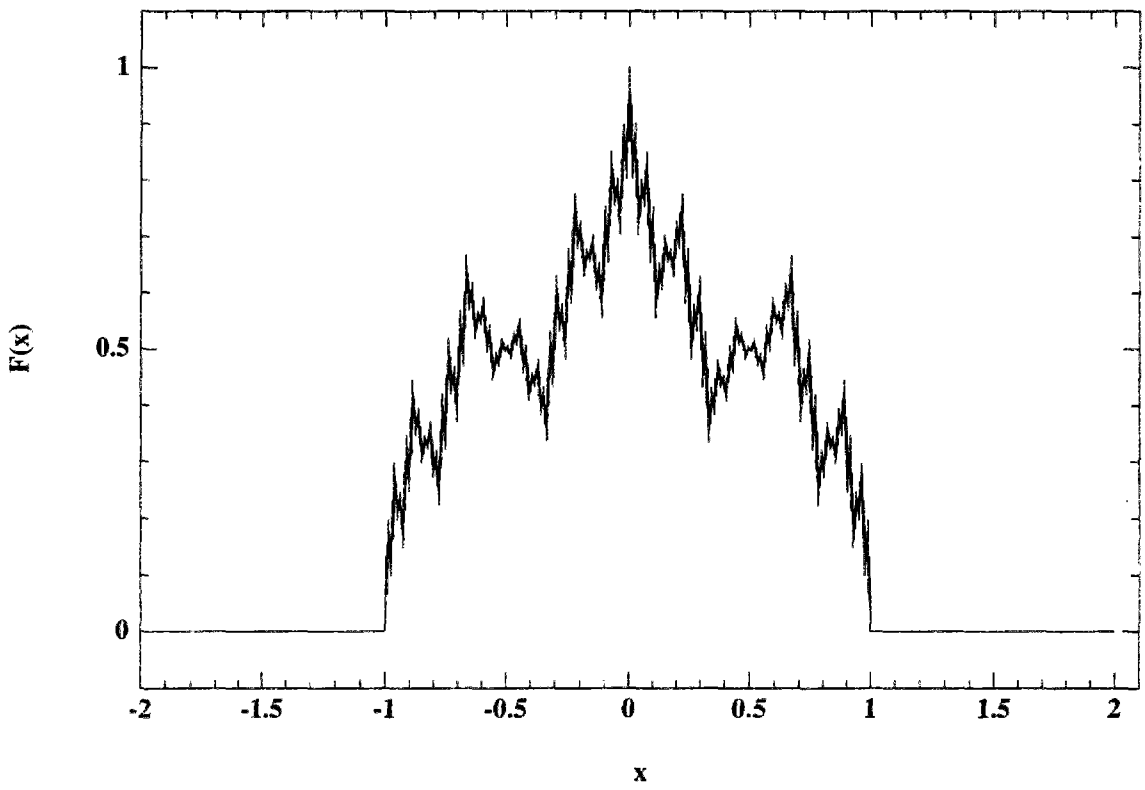


FIG. 4.5 – *Le graphe de la fonction de de Rham.*

Ces résultats sur le support ainsi que l'équation fonctionnelle satisfaite par f nous permettent aussi d'écrire

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}f(3x) & \text{si} \quad x \in [0, \frac{1}{3}] \\ -\frac{1}{3}f(3x-1) + \frac{2}{3} & \text{si} \quad x \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \\ \frac{2}{3}f(3x-2) + \frac{1}{3} & \text{si} \quad x \in [\frac{2}{3}, 1] \end{cases}$$

que l'on peut aussi écrire sous la forme

$$f(x) = \sum_{j=0}^{2} \lambda_j f(S_j^{-1}(x)) \; + \; g(x) \; , \tag{4.24}$$

avec

$$S_j(x) = \frac{1}{3}x + \frac{j}{3} \quad \text{pour} \quad j = 0, 1, 2 \; ;$$

et

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in [0, 1/3] \\ 2/3 & \text{si} \quad x \in [1/3, 2/3] \\ 1/3 & \text{si} \quad x \in [2/3, 1] \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

f est alors du type autosimilaire, respectant la condition de séparation, **mais** la fonction d'erreur g n'est même pas continue.

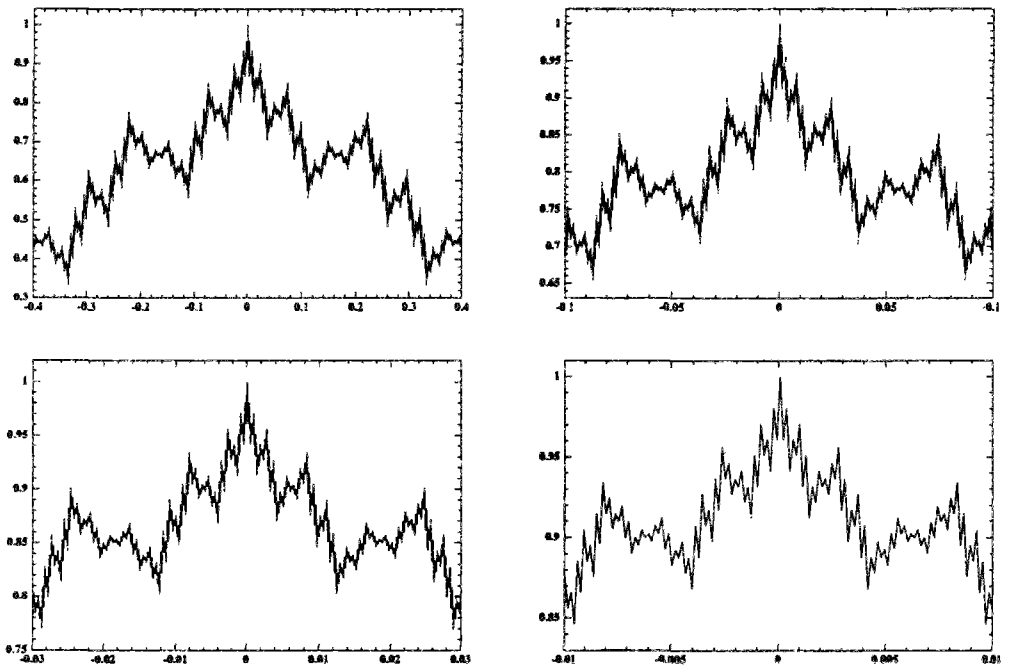


FIG. 4.6 – *Graphe et autosimilarité de la fonction de de Rham autour de* 0

On essaye alors l'argument utilisé pour les fonctions F_p : on a $f(0) = 0$ mais $f(1) = 1 \neq 0$, on définit alors une fonction $\tilde{f}(x)$ qui s'annule en 1 aussi, par $\tilde{f}(x) = f(x) - x$.
Il vient donc

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}\tilde{f}(3x) + x & \text{si} \quad x \in [0, \frac{1}{3}] \\ -\frac{1}{3}\tilde{f}(3x-1) - x + 1 & \text{si} \quad x \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \\ \frac{2}{3}f(3x-2) + 2x - 1 & \text{si} \quad x \in [\frac{2}{3}, 1] \end{cases}$$

$\tilde{f}$ est aussi du type autosimilaire, avec toujours une fonction d'erreur discontinue.

On vient donc de prouver que malgré le "manque" de règles de somme, on peut transformer la fonction d'échelle de de Rham en une fonction de type autosimilaire satisfaisant la condition de séparation, mais avec une fonction d'erreur discontinue.

Signalons que la fonction de de Rham a une forme analytique explicite, en effet, pour $x \in [0, 1]$, on considère la décomposition triadique

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} i_k(x) 3^{-k}$$

et on définit l'opérateur de shift τ par

$$\tau x = \sum_{k=2}^{\infty} i_k(x) 3^{-k+1} .$$

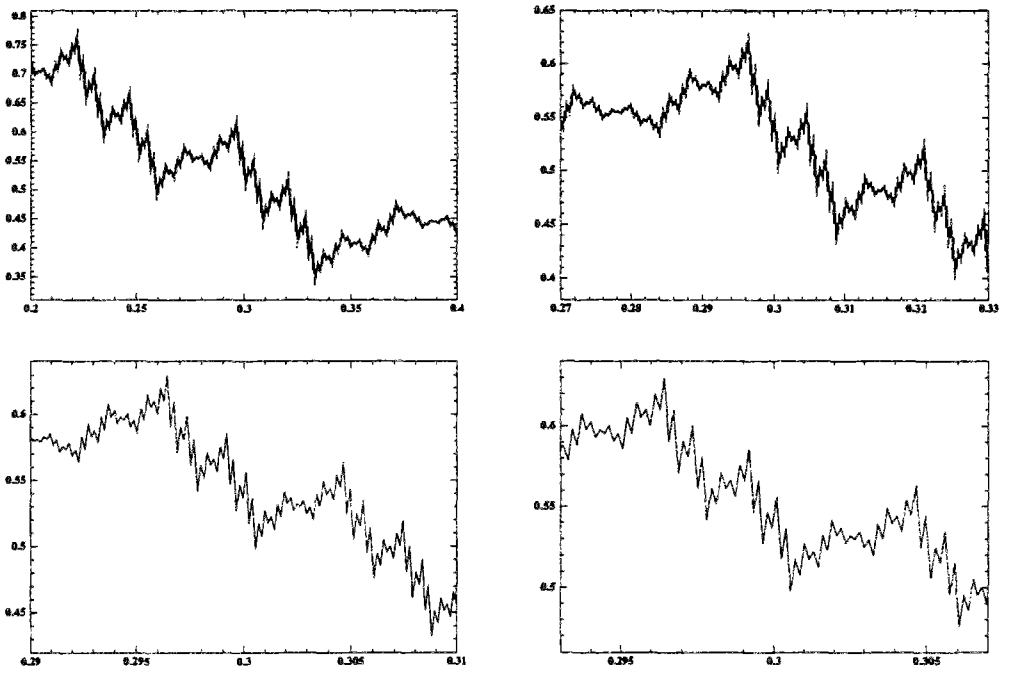


FIG. 4.7 – *Graphe et autosimilarité de la fonction de de Rham autour de* 0.3

Observons que

$$\tau x = S_{i_1(x)}^{-1}(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } x \in [0,1/3] \\ 3x-1 & \text{si } x \in [1/3,2/3] \\ 3x-2 & \text{si } x \in [2/3,1]. \end{cases}$$

On pose

$$V(x) = (f(x), f(x+1)) .$$

Il vient alors

$$V(x) = M_{i_1(x)}\, V(\tau x)$$

donc il en résulte par itération que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$V(x) = M_{i_1(x)} \dots M_{i_n(x)}\, V(\tau^n x) .$$

Ainsi pour $x \in [0,1]$

$$\begin{aligned} F(x-1) &= f(x) = < e_2, V(x) > \\ &= < e_2, \lim_n M_{i_1(x)} \dots M_{i_n(x)}\, V(0) > \\ &= \lim_n < (M_{i_1(x)} \dots M_{i_n(x)})^t\, e_2, V(0) > \\ &= -\frac{1}{3} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\prod_{l=1}^{k} \lambda_{i_l(x)} \right) \bar{i}_{k+1}(x) \qquad (4.25) \\ &= -\frac{1}{3} \sum_{k=0}^{\infty} 3^{-k} 2^{N_{k,x}(0)+N_{k,x}(2)} (-1)^{N_{k,x}(1)} \bar{i}_{k+1}(x) \; ; \qquad (4.26) \end{aligned}$$

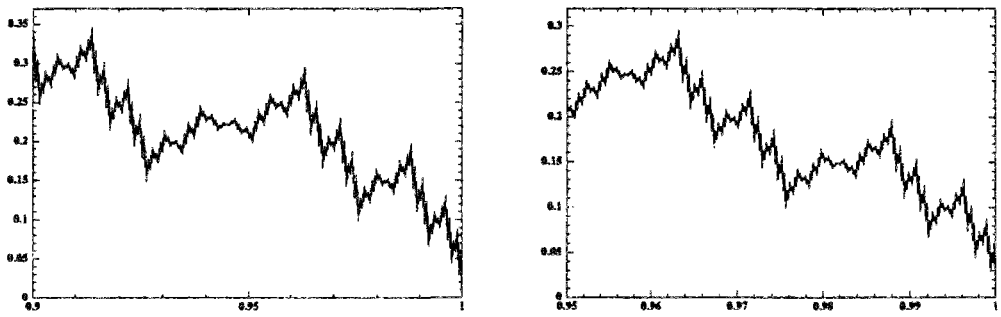


FIG. 4.8 – *Graphe et autosimilarité de la fonction de de Rham près de 1*

où $N_{k,x}(i)$ désigne le nombre d'indices valant i dans les k premiers termes du code triadique de x.

On voit clairement que pour $x \in [0,1]$,

$$\begin{aligned} F(x-1) = f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\prod_{l=1}^{k} \lambda_{i_l(x)} \right) g((S_{i_1} \circ \ldots \circ S_{i_k})^{-1}(x)) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\prod_{l=1}^{k} \lambda_{i_l(x)} \right) g(\tau^k x) \,. \end{aligned} \tag{4.27}$$

Ce résultat était prévisible, car il s'agit en fait de l'expression de toute fonction autosimilaire. D'autre part, en utilisant soit la propriété (4.25) ou de nouveau (4.27), on peut vérifier que lorsque x et $x+t$ ont les mêmes n premiers termes du code, alors

$$\begin{aligned} F(x+t) - F(x) &= -[F(x+t-1) - F(x-1)] \\ &= -\lambda_{i(n,x)}[F(\tau^n(x+t)-1) - F(\tau^n x - 1)] \,. \end{aligned} \tag{4.28}$$

En utilisant le fait que $|\lambda_{i(n,x)}| = (\frac{1}{3})^{N_n(1)}(\frac{2}{3})^{N_n(0)+N_n(2)}$ et que $N_n(0)+N_n(1)+N_n(2) = n$, on aura (voir [23] p:1069) pour $x \in [0,1]$ tel que $r_x(1) := \lim_{n\mapsto\infty} \frac{N_{n,x}(1)}{n}$ existe,

$$|F(x+t) - F(x)| = |F(x+t-1) - F(x-1)| \leq C|t|^{b(x)-\varepsilon} \,,$$

avec

$$b(x) = 1 - \frac{\log 2}{\log 3}(1 - r_x(1)) = \alpha_{min} + r_x(1)\frac{\log 2}{\log 3} \,. \tag{4.29}$$

Cela veut dire que pour un tel x

$$\alpha(x) \geq b(x) \,.$$

D'autre part, pour majorer l'exposant de Hölder, on doit minorer le terme $|F(x+t) - F(x)|$; le développement triadique de x peut contenir des chaines très longues de 0, 1 ou 2, de telle façon que $|t|$ doit être très petit devant 3^{-n} pour que x et $x+t$ ont les mêmes n premiers termes du code. Pour cela, on pose pour $J \in \mathbb{N}$, $l_J^1(x)$ (respectivement $l_J^{0,2}(x)$) la longueur de la chaine (non interrompue) de 1 (respectivement de 0 ou 2) précédant (et

incluant) $i_J(x)$. On prend x tel que $\lim_j \frac{l_j^{0,2}(x)}{j} = 0 = \lim_j \frac{l_j^1(x)}{j}$ et on fixe $\delta > 0$, il existe alors j' tel que pour $j \geq j'$

$$\frac{l_j^{0,2}(x)}{j} \leq \delta \quad \text{et} \quad \frac{l_j^1(x)}{j} \leq \delta .$$

Par ailleurs, si

$$a_J(x) = \frac{\log|\lambda_{i(J,x)}|}{\log 3^{-J}} \quad \text{et} \quad a(x) = \liminf a_J(x) ;$$

alors pour tout j, il existe $j'' \geq j$ tel que $a_{j''}(x) < a(x) + \delta$, soit donc

$$|\lambda_{i(j'',x)}| > 3^{-j''(a(x)+\delta)} .$$

On pose $\tilde{j} = \bar{j} - l_{\bar{j}}^{0,2}(x)$ avec $\bar{j} = j'' - l_{j''}^1(x)$; on aura $i_{\tilde{j}}(x) = 1$ et $i_{\tilde{j}+1}(x) = 0$ ou 2. De plus si on se restreint à $j \geq j_1 = (1-\delta)^{-1}j'$, alors $j'' \geq j \geq j_1 \geq j'$ et $\bar{j} = j'' - l_{j''}^1(x) \geq j''(1-\delta) \geq j'$, et donc $l_{\bar{j}}^{0,2}(x) \leq \delta\bar{j}$. Il en résulte que

$$\tilde{j} \geq j'' - \delta j'' - \delta\bar{j} \geq (1-2\delta)j'' ;$$

Par conséquent

$$|\lambda_{i(\tilde{j},x)}| \geq |\lambda_{i(j'',x)}| > 3^{-j''(a(x)+\delta)} \geq 3^{-(a(x)+\delta)(1-2\delta)^{-1}\tilde{j}} .$$

Si $i_{\tilde{j}+1}(x) = 0$, on prend $h_j = \frac{2}{3}3^{-\tilde{j}}$, on a alors $i(\tilde{j}, x+h_j) = i(\tilde{j}, x)$ et par conséquent

$$\begin{aligned} |F(x+h_j) - F(x)| &= |F(x+h_j-1) - F(x-1)| \\ &= |\lambda_{i(\tilde{j},x)}| \; |F(y_{\tilde{j}} + \frac{2}{3} - 1) - F(y_{\tilde{j}} - 1)| \end{aligned}$$

avec $y_{\tilde{j}} = S^{-1}_{i(\tilde{j},x)}(x)$.

Mais $i_{\tilde{j}+1}(x) = 0$ implique que $y_{\tilde{j}} = \frac{1}{3}y_{\tilde{j}+1}$. Donc

$$\begin{aligned} |F(x+h_j) - F(x)| &= |\lambda_{i(\tilde{j},x)}| \; |F(\frac{1}{3}y_{\tilde{j}+1} + \frac{2}{3} - 1) - F(\frac{1}{3}y_{\tilde{j}+1} - 1)| \\ &= |\lambda_{i(\tilde{j},x)}| \; |\frac{2}{3}F(y_{\tilde{j}+1} - 1) + \frac{1}{3} - \frac{2}{3}F(y_{\tilde{j}+1} - 1)| \\ &= \frac{1}{3}|\lambda_{i(\tilde{j},x)}| \\ &\geq C|h_j|^{a(x)+\delta'} . \end{aligned}$$

On aura le même résultat en prenant $h_j = -\frac{2}{3}3^{-\tilde{j}}$, si $i_{\tilde{j}+1}(x) = 2$.

Comme le fait que $r_x(\mathbf{i})$ pour $\mathbf{i} = 0, 1, 2$ existe implique que $\lim_j \frac{l_j^1(x)}{j} = 0$ et $\lim_j \frac{l_j^{0,2}(x)}{j} = 0$, alors on a le Théorème suivant

Théorème 6 *Pour $x \in [0,1]$ tel que $r_x(\mathbf{i})$ pour $\mathbf{i} = 0, 1, 2$, on a*

$$\alpha(x-1) = \alpha(x) = \alpha_{min} + r_x(1)\frac{\log 2}{\log 3} = 1 - \frac{\log 2}{\log 3}(1 - r_x(1)) .$$

Remarquons aussi que lorsque $r_x(1) = 0$, on a $\alpha(x-1) = \alpha(x) = \alpha_{min}$; et que lorsque $r_x(1) = 1$ (par exemple les points de la forme $3^{-j}(l + \frac{1}{2})$), on a $\alpha(x-1) = \alpha(x) = 1$. Donc ce Théorème nous affirme que la fonction de de Rham est multifractale: il y a tout un intervalle $[\alpha_{min}, 1]$ de singularités supérieures à la régularité globale α_{min}.
Pour un point normal, c'est à dire tel que $r_x(0) = r_x(1) = r_x(2) = \frac{1}{3}$, $\alpha(x-1) = \alpha(x) = \alpha_{min} + \frac{1}{3}\frac{\log 2}{\log 3} \simeq 0,57938....$

Ce Théorème nous permet aussi de minorer le spectre des singularités de F. Pour cela, il suffit de calculer la dimension de Hausdorff de l'ensemble des points x tels que $r_x(1)$ existe, et vaut une certaine valeur $r(1)$.
Il y a une réponse élémentaire à ceci dans un théorème établi par G.Eggleston [26] dont l'énoncé dans le cas triadique est le suivant

Théorème 7 *Etant donnés trois nombres positifs $r(0)$, $r(1)$ et $r(2)$ tels que $r(0)+r(1)+r(2) = 1$; alors la dimension de Hausdorff de l'ensemble $E_{(r(0),r(1),r(2))}$ des points x tels que $r_x(i)$ existe, et vaut $r(i)$, $i = 0, 1, 2$ est*

$$-\frac{1}{\log 3}\left(r(0)\log r(0) + r(1)\log r(1) + r(2)\log r(2)\right).$$

En utilisant ce Théorème et celui d'avant, on aura en posant pour $\alpha \in [\alpha_{min}, 1]$, $r_\alpha(1) = \frac{\log 3}{\log 2}(\alpha - \alpha_{min})$

$$d(\alpha) \geq -\sup_{0\leq a\leq 1-r_\alpha(1)} \frac{a\log a + (1-a-r_\alpha(1))\log(1-a-r_\alpha(1)) + r_\alpha(1)\log r_\alpha(1)}{\log 3}.$$

Ce sup est atteint au point $a_\alpha := \frac{1-r_\alpha(1)}{2}$ qui est bien dans $[0, 1-r_\alpha(1)]$, il en résulte donc que

$$\begin{aligned} d(\alpha) \geq\ & -\frac{1}{\log 3}\left(\frac{\log 3}{\log 2} - \alpha\frac{\log 3}{\log 2}\right)\log\left(\frac{\log 3}{2\log 2} - \alpha\frac{\log 3}{2\log 2}\right) \\ & -\frac{1}{\log 3}\left(\alpha\frac{\log 3}{\log 2} - \frac{\log 3}{\log 2} + 1\right)\log\left(\alpha\frac{\log 3}{\log 2} - \frac{\log 3}{\log 2} + 1\right). \end{aligned}$$

Soit donc

$$d(\alpha) \geq -\frac{1}{\log 2}(1-\alpha)\log\left(\frac{\log 3}{2\log 2}(1-\alpha)\right) - \frac{1}{\log 2}\left(\alpha - 1 + \frac{\log 2}{\log 3}\right)\log\left(\frac{\log 3}{\log 2}(\alpha-1)+1\right). \quad (4.30)$$

Passons maintenant à la majoration du spectre des singularités. On va tout d'abord calculer $\zeta(q)$, puis on applique le théorème de Jaffard suivant (cf [32]) qui donne la majoration de $d(\alpha)$ par la transformée de Legendre de $\zeta(q) - 1$.

Théorème 8 *Soit $q > 0$ et $s > \frac{m}{q}$. Si $f \in B_q^{s,\infty}(\mathrm{R}^m)$, alors $d(\alpha) \leq \alpha q - sq + m$.*
Ainsi, si $m < \zeta(q) < q$, alors $d(\alpha) \leq \alpha q - \zeta(q) + m$.

On va prouver le résultat suivant

Proposition 20 $\forall q > 0$,

$$\zeta(q) = 1 + q - \frac{\log(2.2^q + 1)}{\log 3}.$$

Preuve:
On prend $3^{-(j+1)} \leq h < 3^{-j}$, $A_j = [-1-3^{-j}, -1] \cup [-3^{-j}, 0] \cup [1-3^{-j}, 1]$ et $B_j = [-1, -3^{-j}] \cup [0, 1-3^{-j}]$.

$$\int |F(x+h)-F(x)|^q\,dx \leq \int_{A_j} |F(x+h)-F(x)|^q\,dx + \int_{B_j} |F(x+h)-F(x)|^q\,dx.$$

Dans un premier temps, on a grâce au fait que $F \in C^{\alpha_{min}}(\mathrm{R})$

$$\int_{A_j} |F(x+h)-F(x)|^q\,dx \leq C|h|^{1+\alpha_{min}q}\,, \tag{4.31}$$

et grâce au fait que $F(x)+F(x-1)=1$ pour $x \in [0,1]$

$$\int_{B_j} |F(x+h)-F(x)|^q\,dx = 2\int_0^{1-3^{-j}} |F(x+h-1)-F(x-1)|^q\,dx.$$

En remarquant que l'intervalle $[0, 1-3^{-j}]$ est l'ensemble des points $x \in [0,1]$ tels que l'un des $i_k(x)$, $k=1,\ldots,j$ aumoins, est égal à 0 ou 1, on écrit $[0,1-3^{-j}]$ comme partition des ensembles $B_{j,k}$, $k=1,\ldots,j$, avec $B_{j,k} = \{x \in [0,1] \ : \ i_k(x)=0 \text{ ou } 1, \text{ et } i_{k+1}(x) = i_{k+2}(x) = \ldots = i_j(x) = 2\}$. Pour $x \in B_{j,k}$, $x+h$ et x ont les mêmes $k-1$ premiers termes du code, donc

$$\begin{aligned}\int_{B_{j,k}} |F(x+h-1)-F(x-1)|^q\,dx &\leq (3^{k-1}\,|h|)^{q\alpha_{min}} \int_{B_{j,k}} |\lambda_{i(k-1,x)}|^q\,dx \\ &\leq (3^{k-1}\,|h|)^{q\alpha_{min}}\ 3^{-j+k-1}\ (\frac{1}{3}|\lambda_0|^q + \frac{1}{3}|\lambda_1|^q + \frac{1}{3}|\lambda_2|^q).\end{aligned}$$

Ce qui donne

$$\int_{B_j} |F(x+h)-F(x)|^q \leq C|h|^{1+q}2^{jq}(2+2^{-q})^j\,,$$

ou encore

$$\int_{B_j} |F(x+h)-F(x)|^q \leq C|h|^{1+q-\frac{\log(2.2^q+1)}{\log 3}}\,. \tag{4.32}$$

Ainsi, comme $1+q\alpha_{min} > 1+q-\frac{\log(2.2^q+1)}{\log 3}$, (4.31) et (4.32) impliquent que

$$S_q(h) \leq C'|h|^{1+q-\frac{\log(2.2^q+1)}{\log 3}}\,. \tag{4.33}$$

En ce qui concerne la minoration de $S_q(h)$, on prend $h_j = 3^{-j-2}$, et on se restreint au domaine $B'_j = \{x \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \ : \ i_{j-1}(x) = i_{j+1}(x) = i_{j+2}(x) = i_{j+3}(x) = i_{j+4}(x) = i_{j+5}(x) = 0 \text{ et } i_j(x) = 2\}$. Pour $x \in B'_j$, $x+h_j$ et x ont les mêmes $j+1$ premiers termes du code, donc

$$|F(x+h_j)-F(x)| = |\lambda_{i(j+1,x)}|\ |F(S^{-1}_{i(j+1,x)}(x+h_j)-1) - F(S^{-1}_{i(j+1,x)}(x)-1)|\,.$$

Or $S^{-1}_{i(j+1,x)}(x) \in [0, \frac{1}{3^4}]$ (car $i_{j+2}(x) = i_{j+3}(x) = i_{j+4}(x) = i_{j+5}(x) = 0$) et $S^{-1}_{i(j+1,x)}(x+h_j) = \frac{1}{3} + S^{-1}_{i(j+1,x)}(x) \in [\frac{1}{3}, \frac{1}{3}+\frac{1}{3^4}]$, donc en posant $y = S^{-1}_{i(j+1,x)}(x)$, on aura

$$\begin{aligned}&|F(S^{-1}_{i(j+1,x)}(x+h_j)-1) - F(S^{-1}_{i(j+1,x)}(x)-1)| \\ =\ &|\ \lambda_1\ F(S_1^{-1}(\frac{1}{3}+y)-1)\ +\ g(\frac{1}{3}+y)\ -\ \lambda_0\ F(S_0^{-1}(y)-1)\ -\ g(y)\ |\,,\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} |F(S^{-1}_{i(j+1,x)}(x+h_j)) - F(S^{-1}_{i(j+1,x)}(x))| &= |-\frac{1}{3}F(3y-1) + \frac{2}{3} - \frac{2}{3}F(3y-1)| \\ &= |\frac{2}{3} - F(3y-1)| \\ &\geq \frac{2}{3} - \frac{16}{27} > 0 \end{aligned}$$

et par suite

$$S_q(h_j) \geq C'|h_j|^{1+q-\frac{\log(2.2^q+1)}{\log 3}} . \tag{4.34}$$

Ainsi comme $\forall q > 0$, $1 + q - \frac{\log(2.2^q+1)}{\log 3} < q$, on en déduit que $\forall q > 0$, $\zeta(q) = 1 + q - \frac{\log(2.2^q+1)}{\log 3}$.

Donc grâce au théorème de Jaffard, le spectre des singularités sera majoré par $\inf_{q>1}(\alpha q - \zeta(q) + 1)$. Un calcul facile nous montre que cet inf est atteint en $q_\alpha = [\log((1-\alpha)\log 3) - \log(2\log 2 - 2(1-\alpha)\log 3)]/\log 2$, et que $q_\alpha > 1$ si et seulement si $\alpha \in [\alpha_{min}, 1 - \frac{4}{5}\frac{\log 2}{\log 3} \simeq 0,6554587...]$ et que la valeur de $\alpha q - \zeta(q) + 1$ en q_α est

$$-\frac{(1-\alpha)}{\log 2}\log((1-\alpha)\log 3) - [\frac{1}{\log 3} + \frac{(\alpha-1)}{\log 2}]\ \log(2\log 2 - 2(1-\alpha)\log 3) + \frac{1}{\log 3}\log(2\log 2)$$

qui coïncide bien avec le minorant de $d(\alpha)$ dans (4.30).

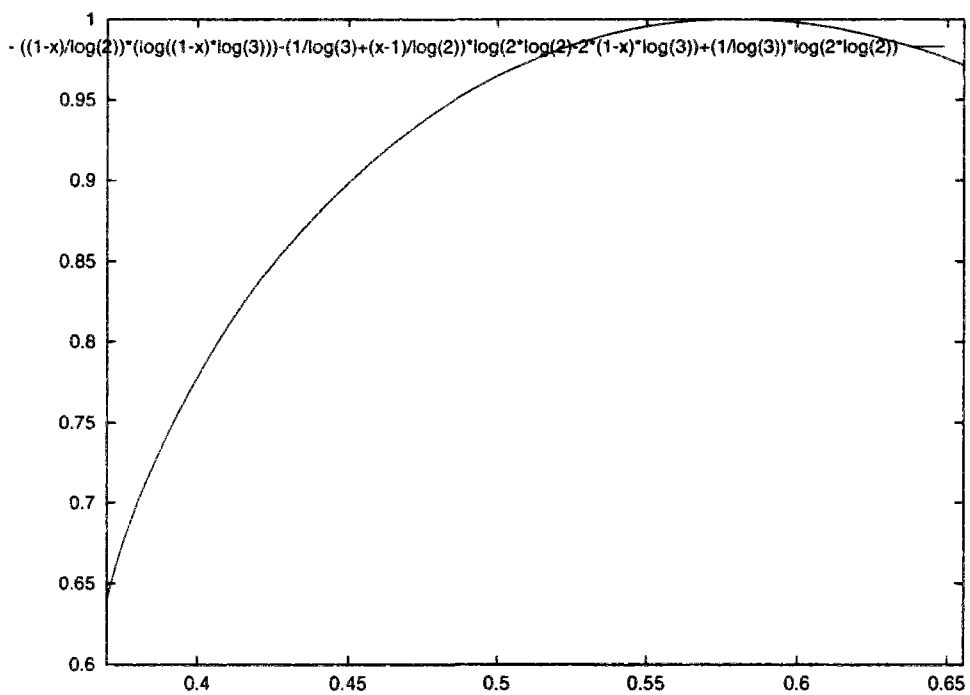


FIG. 4.9 – *Le spectre de la fonction de de Rham sur* $[\alpha_{min}, 1 - \frac{4}{5}\frac{\log 2}{\log 3}]$.

On vient donc de vérifier le formalisme multifractal pour la fonction de de Rham pour tout $\alpha \in [\alpha_{min}, 1 - \frac{4}{5}\frac{\log 2}{\log 3}]$.

Il faut noter que $d(\alpha_{min}) = \log 2/\log 3$ et que puisque $F \in C^{\alpha_{min}}(\mathrm{R})$ alors $d(\alpha) = -\infty$ pour $\alpha < \alpha_{min}$.

Signalons aussi que les résultats concernant la régularité ponctuelle et la détermination du spectre des singularités ont été établis par Meyer (cf [47]) avant que nous fassions ce travail, en partant d'un changement de temps de la forme $s = h(t)$, dû à Mandelbrot, où h est un homéomorphisme croissant de $[0,1]$ dans $[0,1]$ de sorte que, $F \circ h^{-1}$ soit une fonction C^σ en tout point, σ étant à la fois l'exposant de Hölder ponctuel et global.
Donc notre travail permet de retrouver les résultats de Meyer avec une autre méthode et également d'achever l'étude de la validité du formalisme multifractal.

Signalons enfin que la fonction de de Rham est aussi autosimilaire, mais avec une fonction d'erreur discontinue et pourtant elle est $C^{\log \frac{3}{2}/\log 3}(\mathrm{R})$ et vérifie le formalisme multifractal (cf [5]). On montre dans le prochain chapitre que ceci n'est pas le cas toujours et que les singularités de g peuvent perturber la nature multifractale de F.

Chapitre 5

Multifractalité et Formalisme Multifractal pour les Fonctions Autosimilaires avec g pas assez régulière

Résumé. Le formalisme multifractal a été prouvé pour les fonctions autosimilaires pour les exposants de Hölder inférieurs à la régularité globale de la fonction d'erreur g. On se propose d'étudier le problème pour les exposants de Hölder supérieurs. On montre qu'il y a plusieurs changements au niveau de la nature fractale et la validité du formalisme multifractal: les singularités de g perturbent le spectre des singularités de F, et le formalisme multifractal est faux dans certains cas.

5.1 Introduction

Dans les chapitres 2 et 3, on s'est restreint à l'analyse multifractale et la validité du formalisme multifractal pour les fonctions autosimilaires pour les exposants de Hölder inférieurs à la régularité globale de la fonction d'erreur g. Cette restriction vient du fait que pour la détermination de l'exposant de Hölder ponctuel, on a utilisé le critère qui relie la régularité ponctuelle et la transformée en ondelettes (continue ou discrète) via la notion des espaces 2-microlocaux, qui n'est pratique que lorsque l'exposant de Hölder cherché est plus petit que la régularité de l'ondelette choisie pour l'analyse.
Mais on peut rencontrer des décompositions sur des bases d'ondelettes peu régulières, voir même discontinues comme le cas du système de Haar; Malheureusement, dans ce cas la version discrète du critère précédent ne suffit pas, et il sera fort intéressant de déduire des renseignements de régularité correspondants à des exposants de Hölder supérieurs à la régularité de la base. Un premier moyen pour faire ça est de réécrire cette décomposition sur une base d'ondelettes plus régulières, en effet, il existe des formules de reconstruction plus générales que celle qui fait intervenir uniquement l'ondelette d'analyse (on prend $F : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$)

$$F(x) = C_\psi \int_{a>0} \int_{b\in\mathbf{R}} C_\psi(a,b)(F)\ \psi\left(\frac{x-b}{a}\right)\ db\,\frac{da}{a^2} \tag{5.1}$$

dans lesquelles interviennent deux ondelettes, l'une pour l'analyse, l'autre pour la synthèse. On peut montrer que si Ψ est telle que

$$C_\psi \int_{a>0} \hat{\psi}(a)\ \hat{\Psi}(-a)\ \frac{da}{a} = C_\psi \int_{a>0} \hat{\psi}(-a)\ \hat{\Psi}(a)\ \frac{da}{a} = 1\ ,$$

alors F peut être reconstruite en remplaçant ψ dans (5.1) par la fonction Ψ; on obtient ainsi

$$F(x) = C_\psi \int_{a>0} \int_{b\in\mathbf{R}} C_\psi(a,b)(F)\ \Psi\left(\frac{x-b}{a}\right)\ db\,\frac{da}{a^2}\ . \tag{5.2}$$

Un second moyen est de caractériser les espaces 2-microlocaux par des "ondelettes" singulières. Comme la définition de ces espaces qui utilise la transformée en ondelettes continue ne dépend pas de l'ondelette choisie (et plus généralement de la décomposition de Littlewood-Paley choisie), alors en prenant "l'ondelette du pauvre" $\psi = \delta_1 - \delta_0$ (les masses de Dirac concentrées aux points 1 et 0) qui est singulière, on aura alors

$$C(a,b)(F) \quad = \quad \left(\frac{1}{a}\,\psi(\frac{\cdot}{a}) * F\right)(b) = F(b-a) - F(b)\ ;$$

ce qui permet de caractériser les espaces 2-microlocaux $C^{\alpha,\alpha'}(x_0)$, $0<\alpha<1$ et $-\alpha<\alpha'<1-\alpha$ par la relation (cf [46])

$$|F(b-a)-F(b)| \le Ca^\alpha \left(1+\frac{|b-x_0|}{a}\right)^{-\alpha'} \quad \text{si } 0<a+|b-x_0|\le 1 \text{ et } a>0\,. \tag{5.3}$$

Cette caractérisation est "très voisine" de la définition de la régularité Hölderienne ponctuelle "au point x_0", ceci confirme le rapport qui existe entre les espaces 2-microlocaux et la régularité ponctuelle, mais elle est nettement plus difficile à vérifier.
On peut aussi donner des critères pour la régularité ponctuelle entre 1 et 2 par "l'ondelette" $(\delta_1-\delta_0)*(\delta_1-\delta_0) = \delta_2 - 2\delta_1 + \delta_0$ qui a deux moments nuls, on a en fait l'équivalence entre $F\in C^{\alpha,\alpha'}(x_0)$, $1<\alpha<2$ et $-\alpha<\alpha'<2-\alpha$ et

$$|F(b+2a)-2F(b+a)+F(b)| \le Ca^\alpha \left(1+\frac{|b-x_0|}{a}\right)^{-\alpha'} \quad \text{si } 0<a+|b-x_0|\le 1\,. \tag{5.4}$$

La version discrète (pour $a=2^{-j-1}$ et $b=k2^{-j}$) de cette relation est

$$|F(k2^{-j}+2^{-j})-2F(k2^{-j}+2^{-j-1})+F(k2^{-j})| \le C2^{-\alpha j}\left(1+\frac{|k2^{-j}-x_0|}{2^{-j}}\right)^{-\alpha'} \tag{5.5}$$

$$\text{si } 0<2^{-j}+|k2^{-j}-x_0|\le 1\,.$$

Or pour F définie sur $[0,1]$, continue et s'annulant aux points 0 et 1, le terme $F(k2^{-j}+2^{-j})-2F(k2^{-j}+2^{-j-1})+F(k2^{-j})$ correspond bien au coefficient $C_{j,k}$ du développement de F sur la base de Schauder $\Lambda_{j,k}(x) = \Lambda(2^jx-k)$ pour $j\in\mathbf{N}$ et $k=0,\dots,2^j-1$, où rappelons $\Lambda(x)=\inf(x,1-x)$ si $x\in[0,1]$; 0 sinon, qui est uniformément Lipschitzienne. La relation (5.5) ne suffit pas pour caractériser les espaces 2-microlocaux $C^{\alpha,\alpha'}(x_0)$ pour $\alpha>1$ pour la raison suivante: si elle l'était alors elle caractériserait aussi la régularité ponctuelle; or, les fonctions $F_1(x)=\Lambda(x)$ et $F_2(x)=\Lambda(x)+\frac{1}{2}\Lambda(2x)+\frac{1}{2}\Lambda(2x-1)$ ont les

mêmes coefficients sur la base de Schauder pour $j \geq 2$ et pourtant F_1 n'est pas dérivable au point $1/2$ alors que F_2 y est C^∞. Voici un autre problème : la fonction x^2 est C^∞ alors que ses coefficients $C_{j,k} = 2^{-2j}$ ne décroissent pas rapidement, en effet le système biorthogonal de la base de Schauder a seulement 2 moments nuls.
Le même problème se pose pour les fonctions exprimées dans le système de Haar $h_{j,k}(x) = 2^{j/2}h(2^j x - k)$ pour $j \in \mathrm{N}$ et $k = 0, \ldots, 2^j - 1$; les points dyadiques sont des points de discontinuités pour ces fonctions. Pour les points "suffisamment loin" des dyadiques, ces fonctions sont C^∞ et le critère de la régularité ponctuelle marche; pour les points "bien approximés" par les dyadiques, ce critère ne s'applique pas. Dans [36], Jaffard a montré comment l'exposant de Hölder ponctuel dépend aussi de la qualité de l'approximation par les points dyadiques. Nous évoquerons l'un de ses résultats dans ce chapitre. La version discrète ne suffit pas pour la caractérisation des espaces 2-microlocaux par les ondelettes peu régulières. Les résultats de Jaffard concernant le critère de régularité ponctuelle et les relations entre ces espaces et la régularité ponctuelle donnent une réponse élémentaire à ce problème.

Signalons enfin que les espaces de Besov (et donc $\eta(p)$) peuvent être caractérisés par des critères sur les coefficients d'ondelettes singulières telle que le système de Haar.
C'est avec ces "outils" qu'on part maintenant vers l'étude multifractale et du formalisme multifractale pour les fonctions autosimilaires pour les exposants de Hölder supérieurs à la régularité globale de g.

On va prendre comme fonction d'erreur g la fonction de Schauder $\Lambda(x)$ qui est C^1 selon notre définition pour la régularité Hölderienne uniforme; on définit sur $[0,1]$ deux contractions S_0 et S_1 par $S_0(x) = \frac{1}{2}x$ et $S_1(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$. Les fonctions autosimilaires qui en découlent vont révéler plusieurs changements au niveau de la nature fractale et la validité du formalisme multifractal.

En itérant l'équation (1.22), on obtient le développement explicite de F sur la base de Schauder

$$F(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_{i_1(x)} \ldots \lambda_{i_j(x)} \, \Lambda\left((S_{i_1(x)} \circ \ldots \circ S_{i_j(x)})^{-1}(x) \right) \; ; \tag{5.6}$$

$(i_1(x), \ldots, i_j(x), \ldots)$ étant le code binaire de $x \in [0,1]$: $x = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{i_l}{2^l}$ (il n'est pas nécessaire d'interdire ici $i_l = 1$ à partir d'un certain rang).

Notons

$$i(j,x) = (i_1, \ldots, i_j) \; , \; \lambda_{i(j,x)} = \lambda_{i_1} \ldots \lambda_{i_j} \; ,$$
$$S_{i(j,x)} = S_{i_1} \circ \ldots \circ S_{i_j} \; ;$$

et définissons l'opérateur de shift τ par

$$\tau x = \sum_{k=2}^{\infty} i_k(x) 2^{-k+1} \; .$$

Observons que

$$\tau x = S^{-1}_{i_1(x)}(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in [0, 1/2] \\ 2x - 1 & \text{si } x \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

On a alors

$$F(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_{i(j,x)} \, \Lambda\left(S^{-1}_{i(j,x)}(x) \right) \; ;$$

ou encore

$$F(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_{i(j,x)} \Lambda\left(\tau^j x\right) ;$$

On pose

$$|\lambda|_{max} = max\{|\lambda_0|, |\lambda_1|\} \text{ et } |\lambda|_{min} = min\{|\lambda_0|, |\lambda_1|\} ;$$

Considérons

$$\upsilon = -\frac{\log|\lambda|_{max}}{\log 2} \quad \text{et} \quad \omega = -\frac{\log|\lambda|_{min}}{\log 2}$$

Dans la prochaine section, on montre que dans certains cas, les singularités des fonctions de la base de Schauder aux points dyadiques perturbent la nature fractale de F: la régularité ponctuelle de F en un point x dépend de la "qualité" de son approximation par les points dyadiques. Dans d'autres cas, on trouve des résultats semblables à ceux de l'analyse multifractale des fonctions autosimilaires avec une fonction d'erreur g assez régulière.

Dans la troisième section, on donnera la valeur exacte du spectre des singularités.

Dans la quatrième section, on déterminera les fonctions $\eta(p)$ et $\zeta(p)$ et on étudiera la validité du formalisme multifractal.

5.2 Régularité ponctuelle

Le critère qui relie la régularité ponctuelle et les coefficients d'ondelettes via la notion des espaces 2-microlocaux, n'est valable que pour les exposants de Hölder inférieurs à la régularité de la base, donc pour les exposants de Hölder inférieurs à 1 pour le cas de la base de Schauder. Ce critère ne permet pas d'estimer les exposants de Hölder supérieurs aux points dyadiques et ceux qui sont "bien approximés par les dyadiques". Dans [36], Jaffard a trouvé des renseignements pour ce problème; en particulier, il a prouvé que la régularité aux points dyadiques est assurée si on adjoint à la condition 2-microlocale classique une condition "algébrique" sur les coefficients qui exprime le fait que le graphe de F n'est pas "anguleux" au point dyadique considéré.

On définit le "taux d'approximation de x par les points dyadiques" par

$$r(x) = \limsup_{l} \frac{\log dist(x, 2^{-l}\mathrm{N})}{\log 2^{-l}} ;$$

Remarquons que $r(x) \geq 1$ pour tout x.

Théorème 9 *Soit $f(x) = \sum C_{j,k}\Lambda(2^j x - k)$. Si $f \in C^\alpha(x)$ pour $\alpha < 3$, alors il existe une constante $A \in \mathrm{R}$ telle que*

$$| C_{j,k} - A2^{-2j} | \leq C2^{-\alpha j}(1 + |2^j x - k|)^\alpha . \tag{5.7}$$

Inversement, supposons que les coefficients $C_{j,k}$ vérifient pour une constante A appartenant à R, *la condition 2-microlocale*

$$| C_{j,k} - A2^{-2j} | \leq C2^{-\alpha j}(1 + |2^j x - k|)^\beta \tag{5.8}$$

avec $\beta < \alpha$ et $1 < \alpha < 3$.
Alors

- *Si x est non dyadique, alors*

$$\alpha(x) \geq 1 + \frac{\alpha - 1}{r(x)} ; \tag{5.9}$$

(en particulier, si $r(x) = 1$ alors $\alpha(x) \geq \alpha$).
On a en fait un résultat plus précis pour $r(x) > 1$; Pour chaque j, on définit $k_j = k_j(x)$ par

$$|k_j 2^{-j} - x| = \inf_{k \in \mathbb{Z}} |k 2^{-j} - x|$$

et $S \subset \mathbb{N}^*$ par

$$j \in S \quad si \quad k_j 2^{-j} \neq k_{j-1} 2^{-(j-1)} \quad et \quad k_j 2^{-j} = k_{j+1} 2^{-(j+1)}.$$

Soit $J \in S$ et J' le premier indice tel que $|k_J 2^{-J} - x| \geq 2^{-J'}/4$.
On pose

$$E_J(x) = C_{J-1,(k_J-1)/2} - \sum_{j=J}^{J'} 2^{j-J} (C_{j,2^j 2^{-J} k_J - 1} + C_{j,2^j 2^{-J} k_J}).$$

On pose aussi

$$r_J(x) = \frac{\log |k_J 2^{-J} - x|}{\log 2^{-J}} \quad et \quad \alpha_J(x) = \frac{\log |E_J(x)|}{\log 2^{-J}}.$$

Si $\alpha > \liminf_{J \in S} \left(1 + \frac{\alpha_J(x) - 1}{r_J(x)}\right)$, l'exposant de Hölder de f en x est

$$\alpha(x) = \liminf_{J \in S} \left(1 + \frac{\alpha_J(x) - 1}{r_J(x)}\right) ; \tag{5.10}$$

sinon

$$\alpha(x) \geq \alpha . \tag{5.11}$$

- *Si x est dyadique (donc $J' = \infty$), alors si*

$$E_J(x) = 0 \tag{5.12}$$

alors $f \in C^\alpha(x)$ (donc $\alpha(x) \geq \alpha$); sinon f n'est pas dérivable en x (donc $\alpha(x) \leq 1$).

Il faut noter que pour $\alpha \geq 3$ le théorème précédent marche de la même façon en retranchant $B(x - k_0 2^{-j})^3$ ($k_0 = [2^j x]$) des coefficients $C_{j,k}$ pour $3 \leq \alpha < 4$; $C(x - k_0 2^{-j})^4$ pour $4 \leq \alpha < 5$ ...
Remarquons aussi qu'on n'a aucune perte de régularité par rapport aux résultats sur une base s'ondelettes arbitrairement régulière si $r(x) = 1$, ainsi par exemple en tout point x normal en base 2 (c'est à dire que la proportion des 0 dans son développement binaire est égale à celle des 1).

Passons maintenant à l'application de ce résultat. Pour cela, on va d'abord chercher la condition 2-microlocale. Pour $k2^{-j} = \sum_{l=1}^{j} i_l 2^{-l}$, on a $C_{j,k} = \prod_{l=1}^{j} \lambda_{i_l}$.

On pose

$$L_j(x) = \sup_{|k2^{-j}-x|\leq 2.2^{-j}} |C_{j,k}| ,$$

$$\beta_j(x) = \frac{\log L_j(x)}{\log 2^{-j}}$$

et

$$\beta(x) = \liminf \beta_j(x) .$$

Considérons l'unique entier $\tilde{j}$ tel que

$$2^{-\tilde{j}} \leq |k2^{-j} - x| < 2.2^{-\tilde{j}} . \tag{5.13}$$

Si $\tilde{j} \geq j$ alors $|k2^{-j} - x| < 2.2^{-\tilde{j}} \leq 2.2^{-j}$, donc

$$\begin{aligned} |C_{j,k}| &\leq L_j(x) \\ &\leq C2^{-(\beta(x)-\varepsilon)j} \\ &\leq C2^{-(\beta(x)-\varepsilon)j}(1 + |2^j x - k|)^\gamma \end{aligned}$$

pour tout $\gamma > 0$.

Par ailleurs, si $\tilde{j} < j$ alors

$$\begin{aligned} |C_{j,k}| &\leq L_{\tilde{j}}(x)\ |\lambda|_{max}^{j-\tilde{j}} \\ &\leq L_{\tilde{j}}(x)\ 2^{-v(j-\tilde{j})} \\ &\leq C2^{-(\beta(x)-\varepsilon)j}\ |2^j x - k|^{\beta(x)-\varepsilon-v} . \end{aligned}$$

Ainsi, on a la condition 2-microlocale

$$|C_{j,k}| \leq C2^{-(\beta(x)-\varepsilon)j}\ (1 + |2^j x - k|)^{\beta(x)-\varepsilon-v}. \tag{5.14}$$

Passons maintenant à l'estimation de E_J.
De la définition de J', il vient

$$\begin{aligned} E_J(x) &= \lambda_{i(J-1,x)} - \sum_{j=J}^{J'} 2^{j-J}[\lambda_{i(J-1,x)}\lambda_1^{j-J}\lambda_0 + \lambda_{i(J-1,x)}\lambda_1\lambda_0^{j-J}] \\ &= \lambda_{i(J-1,x)}\left(1 - \frac{\lambda_0}{1-2\lambda_1}(1 - (2\lambda_1)^{J'-J+1}) - \frac{\lambda_1}{1-2\lambda_0}(1 - (2\lambda_0)^{J'-J+1})\right) \\ &= \frac{1}{2}\lambda_{i(J-1,x)}\left(2 - \frac{2\lambda_0}{1-2\lambda_1}(1 - (2\lambda_1)^{J'-J+1}) - \frac{2\lambda_1}{1-2\lambda_0}(1 - (2\lambda_0)^{J'-J+1})\right) . \end{aligned}$$

On pose

$$a_J(x) = \frac{\log |\lambda_{i(J,x)}|}{\log 2^{-J}} ;$$

On a alors le résultat suivant

Théorème 10 *Soit* $0 < |\lambda_0| < 1$ *et* $0 < |\lambda_1| < 1$*; Soit* F *la fonction donnée par la série*

$$F(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_{i(j,x)} \Lambda(\tau^j x)$$

solution de l'équation autosimilaire

$$F(x) = \lambda_0 F(2x) + \lambda_1 F(2x-1) + \Lambda(x) ;$$

Alors pour $x \in [0,1]$*, on a*

- *1. Si* $\lambda_0 + \lambda_1 \neq 1/2$*, alors*
  - *(a) si* $|\lambda|_{max} < 1/2$ *(donc* $v > 1$*), alors* $\beta(x) > 1$ *pour tout* x*, et*
    - *A. si* $r(x) > 1$ *et* x *n'est pas dyadique, alors*

$$\begin{aligned} \alpha(x) &= \liminf \left(1 + \frac{a_J(x)}{r_J(x)} - \frac{1}{r_J(x)}\right) \\ &= 1 + \liminf \frac{\log 2^J |\lambda_{i(J,x)}|}{\log |k_J 2^{-J} - x|}. \end{aligned} \tag{5.15}$$

    - *B. si* $r(x) = 1$ *alors* $\alpha(x) = \beta(x)$.
    - *C. si* x *est dyadique, alors* $\alpha(x) \leq 1$.
  - *(b) si* $|\lambda|_{max} \geq 1/2$ *(donc* $v \leq 1$*) alors*

$$\alpha(x) = \beta(x) .$$

- *2. Si* $\lambda_0 + \lambda_1 = 1/2$*, alors*

$$\alpha(x) = \beta(x) .$$

Preuve:
Remarquons d'abord que dans le cas $r(x) = 1$, la condition 2-microlocale (5.14) et la propriété (5.9) du Théorème de Jaffard nous donnent

$$\alpha(x) \geq \beta(x) ;$$

Et que d'autre part, si $\beta(x) < 2$ alors grâce à la première partie du Théorème 9, $\alpha(x)$ ne peut pas être supérieure à $\beta(x)$.
Si $2 \leq \beta(x) < 3$, remarquons que la première partie du Théorème 9 implique que

$$|C_{j,k} - C_{j,k+1}| \leq C 2^{-\alpha j} (1 + |2^j x - k|)^{\alpha} ;$$

Pour notre cas, la différence de deux valeurs consécutives de $C_{j,k}$ est de l'ordre de grandeur de $C_{j,k}$, donc

$$\alpha(x) \leq \beta(x) ;$$

Des différences d'ordre supérieur pour les $C_{j,k}$ sont du même ordre de grandeur que celui de $C_{j,k}$, donc pour $\beta(x) \geq 3$, on obtient aussi $\alpha(x) \leq \beta(x)$. Ainsi

$$\alpha(x) = \beta(x).$$

Maintenant, on va calculer l'exposant de Hölder pour les autres x;

1. Si $\lambda_0 + \lambda_1 \neq 1/2$, alors
   (a) si $|\lambda|_{max} < 1/2$, on a alors
      i. Si $r(x) > 1$ et x n'est pas dyadique, on a

$$|E_J(x)| \sim |\lambda_{i(J,x)}| \; ; \tag{5.16}$$

Donc

$$\alpha_J(x) \sim \frac{\log|\lambda_{i(J,x)}|}{\log 2^{-J}} = 1 + \frac{\log 2^J|\lambda_{i(J,x)}|}{\log 2^{-J}} \; .$$

Il s'ensuit que

$$1 + \frac{\alpha_J(x)-1}{r_J(x)} \approx 1 - \frac{1}{r_J(x)} + \frac{1}{r_J(x)} \frac{\log|\lambda_{i(J,x)}|}{\log 2^{-J}} = 1 + \frac{1}{r_J(x)} \left(a_J(x) - 1\right)$$

où $\approx$ signifie que les deux suites ont la même limite inférieure; et puisque $r_J(x) \approx J'/J$ alors

$$\begin{aligned} 1 + \frac{\alpha_J(x)-1}{r_J(x)} &\approx 1 + \frac{J}{J'}(-1 + \frac{\log|\lambda_{i(J,x)}|}{\log 2^{-J}}) \\ &\approx 1 + \frac{\log 2^J|\lambda_{i(J,x)}|}{\log 2^{-J'}} \; . \end{aligned}$$

Comme $r(x) > 1$ et $\beta(x) > 1$ alors pour $\epsilon > 0$ assez petit (tel que $\beta(x) > 1 + \epsilon$) il existe une infinité de J telle que $1/r_J(x) < 1 - \epsilon$; pour tels J on a $\beta_J(x) > 1 + \epsilon$ et donc comme $|\lambda|_{max} < 1/2$, alors $|\lambda|_{max} \leq \frac{\rho}{2}$ pour un certain $\rho < 1$, et

$$\begin{aligned} L_{J'}(x) &\leq |\lambda_{i(J,x)}| \; |\lambda|_{max}^{J'-J} \\ &\leq |\lambda_{i(J,x)}| \; (\frac{\rho}{2})^{J'-J} \end{aligned}$$

donc grâce à (5.16)

$$\alpha_J(x) \leq \frac{\log L_{J'}(x)}{\log 2^{-J}} + (\frac{J'}{J} - 1)(\frac{\log\rho}{\log 2} - 1)$$

et par suite

$$1 + \frac{\alpha_J(x)-1}{r_J(x)} \leq \beta_{J'}(x) - (\frac{1}{r_J(x)} - 1)\frac{\log\rho}{\log 2}$$

donc

$$\beta(x) - \epsilon > \liminf \left(1 + \frac{\alpha_J(x)-1}{r_J(x)}\right) \; ;$$

La propriété (5.10) du Théorème de Jaffard donne

$$\alpha(x) = \liminf \left(1 + \frac{\alpha_J(x) - 1}{r_J(x)}\right) = 1 + \liminf \frac{\log 2^J |\lambda_{i(J,x)}|}{\log 2^{-J'}};$$

donc

$$\alpha(x) = 1 + \liminf \frac{\log 2^J |\lambda_{i(J,x)}|}{\log |k_J 2^{-J} - x|}.$$

ii. Si x est un point dyadique, comme $E_J(x) \neq 0$ alors $\alpha(x) \leq 1$.

(b) si $|\lambda|_{max} \geq 1/2$ alors dans ce cas,

i. si x n'est pas dyadique, on a

$$|E_J(x)| \leq C 2^{J'-J} L_{J'}(x)$$

soit donc

$$1 + \frac{\alpha_J(x) - 1}{r_J(x)} \geq \beta_{J'}(x)$$

et donc on aura

$$\alpha(x) = \beta(x) .$$

ii. Si x est dyadique, comme $\beta(x) = v$ est inférieure à 1, alors le théorème classique de la caractérisation de la régularité nous donne $\alpha(x) = v$.

2. Si $\lambda_0 + \lambda_1 = 1/2$, alors

(a) si x n'est pas dyadique, on a

$$E_J(x) = \frac{1}{2} \lambda_{i(J-1,x)} \left((2\lambda_1)^{J'-J+1} + (2\lambda_0)^{J'-J+1}\right)$$

donc, on aura comme auparavant

$$|E_J(x)| \leq C 2^{J'-J} L_{J'}(x)$$

et

$$\alpha(x) = \beta(x) .$$

(b) Si x est dyadique, alors $E_J = 0$, donc la condition 2-microlocale (5.14) nous donne $\alpha(x) \geq v$ et l'égalité découle grâce au même raisonnement que celui du cas $r(x) = 1$ pour $|\lambda|_{max} < 1/2$.

La preuve du Théorème 10 est donc achevée.

5.3 Spectre des singularités

On va prouver le résultat suivant

Proposition 21 – **(i)** *Si* $\lambda_0 + \lambda_1 \neq 1/2$, *alors*

– **(i-1)** *si* $|\lambda|_{max} \geq 1/2$ *(donc* $v \leq 1$*) alors pour* $\alpha \in [v, \omega]$

$$d(\alpha) = \inf_q (\alpha q - \gamma(q)) \quad \textit{avec} \quad \gamma(q) = -\frac{\log(|\lambda_0|^q + |\lambda_1|^q)}{\log 2}$$

et $d(\alpha) = -\infty$ *ailleurs.*

- **(i-2)** *si* $|\lambda|_{max} < 1/2$ *(donc* $\upsilon > 1$*) alors pour* $\alpha \in [1, min\{1+\frac{1}{\sigma}, e_\sigma\}]$ *avec* $e_\sigma = -(|2\lambda_0|^\sigma \log|2\lambda_0| + |2\lambda_1|^\sigma \log|2\lambda_1|)/\log 2$ *et* σ *l'unique réel vérifiant* $|2\lambda_0|^\sigma + |2\lambda_1|^\sigma = 1$*, on a*

$$d(\alpha) = \sigma(\alpha - 1) .$$

- **(ii)** *Si* $\lambda_0 + \lambda_1 = 1/2$*, alors pour* $\alpha \in [\upsilon, \omega]$

$$d(\alpha) = \inf_q(\alpha q - \gamma(q))$$

et $d(\alpha) = -\infty$ *ailleurs.*

Preuve :
Dans cette preuve, on ne va pas tenir compte des points dyadiques puisque leur contribu-

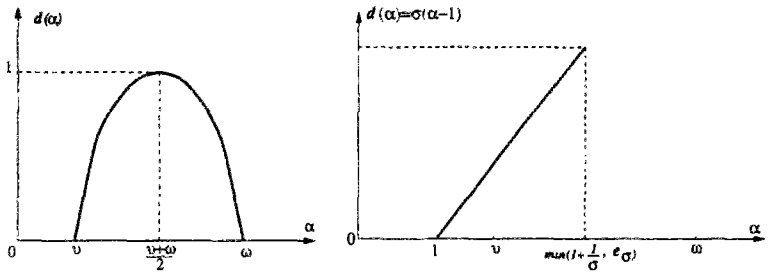


FIG. 5.1 – *spectre des singularités pour les cas* **(i-1)** *et* **(ii)** *(à gauche) et* **(i-2)** *(à droite)*

tion donne une dimension de Hausdorff nulle.
Vu la forme de l'expression de l'exposant de Hölder, la preuve des cas (i-1) et (ii) est exactement la même que celle faite dans [33]. Remarquons d'autre part que si x est un point normal dans la base binaire alors $\lim_l \frac{\log dist(x, 2^{-l}\mathbb{N})}{\log 2^{-l}} = 1$ et donc le Théorème 10 implique que l'exposant de Hölder en x est $(\upsilon+\omega)/2$. Comme presque tout point est normal en base 2, alors pour presque tout point l'exposant de Hölder est $(\upsilon+\omega)/2$; donc $d((\upsilon+\omega)/2) = 1$.

Il nous reste maintenant à étudier le cas (i-2); on va d'abord caractériser les ensembles des singularités. Pour x non dyadique tel que $r(x) > 1$, on a $\alpha(x) = \alpha$ si et seulement si

$$|k_J 2^{-J} - x| = |\tilde{\lambda}_{i(J,x)}|^{\theta_J(x)} \text{ avec } \limsup \theta_J(x) = \frac{1}{\alpha - 1}$$

avec $\tilde{\lambda}_{i(j,x)} = \tilde{\lambda}_{i_1(x)} \dots \tilde{\lambda}_{i_j(x)}$ où $\tilde{\lambda}_0 = 2\lambda_0$ et $\tilde{\lambda}_1 = 2\lambda_1$; cela se traduit comme suit :

$$\forall \varepsilon > 0, \ \{J : |k_J 2^{-J} - x| < |\tilde{\lambda}_{i(J,x)}|^{\frac{1}{\alpha-1+\varepsilon}}\} \text{ est infini}$$

et

$$\forall \delta > 0, \ \exists J_\delta \text{ tel que } \forall J \geq J_\delta , \quad |k_J 2^{-J} - x| \geq |\tilde{\lambda}_{i(J,x)}|^{\frac{1}{\alpha-1-\delta}} .$$

Ainsi, de la définition de k_J, il vient

$$\alpha(x) = \alpha \Leftrightarrow x \in \Big(\bigcap_{\delta < \frac{1}{\alpha-1}} E_\delta\Big) \backslash \Big(\bigcup_{\delta > \frac{1}{\alpha-1}} E_\delta\Big) \tag{5.17}$$

avec

$$E_\delta = \bigcap_{m\geq 1} E_\delta^{(m)} \quad , \quad E_\delta^{(m)} = G_m^{(\delta)} \cup G_{m+1}^{(\delta)} \cup \dots$$

$$G_m^{(\delta)} = \bigcup_{\substack{i_1,\dots,i_m=0 \text{ ou } 1 \\ |\tilde\lambda_{i_1}\dots\tilde\lambda_{i_m}|^\delta < 2^{-m}}} I_{i_1,\dots,i_m}^{(\delta)}$$

et

$$I_{i_1,\dots,i_m}^{(\delta)} =]\sum_{l=1}^{m} i_l 2^{-l} - |\tilde\lambda_{i_1}\dots\tilde\lambda_{i_m}|^\delta \, , \sum_{l=1}^{m} i_l 2^{-l} + |\tilde\lambda_{i_1}\dots\tilde\lambda_{i_m}|^\delta [\, .$$

On pose $E^{(\alpha)}$ l'ensemble des singularités d'ordre α, on a alors

$$d(\alpha) = dim_H E^{(\alpha)} \leq \inf_{\delta < \frac{1}{\alpha-1}} dim_H E_\delta \, .$$

On va donc estimer la dimension de E_δ; remarquons qu'on peut recouvrir E_δ par les intervalles $I_{i_1,\dots,i_n}^{(\delta)}$, $n \geq m$; ce qui donne

$$\begin{aligned} \sum_{n\geq m} \sum_{\substack{i_1,\dots,i_n=0 \text{ ou } 1 \\ |\tilde\lambda_{i_1}\dots\lambda_{i_n}|^\delta < 2^{-n}}} |\, I_{i_1,\dots,i_n}^{(\delta)} \,|^d &\leq \sum_{n\geq m} \sum_{i_1,\dots,i_n=0 \text{ ou } 1} |\, I_{i_1,\dots,i_n}^{(\delta)} \,|^d \\ &= \sum_{n\geq m} 2^d (|\tilde\lambda_0|^{\delta d} + |\tilde\lambda_1|^{\delta d})^n \, ; \end{aligned}$$

si $|\lambda|_{max} < 1/2$, ceci est uniformément borné si et seulement si $|\tilde\lambda_0|^{\delta d} + |\tilde\lambda_1|^{\delta d} < 1$, c'est à dire pour $d > d_\delta$ avec d_δ l'unique réel vérifiant $|\tilde\lambda_0|^{\delta d_\delta} + |\tilde\lambda_1|^{\delta d_\delta} = 1$.
Comme d_δ en tant que fonction de δ est décroissante (car $d_\delta = \sigma/\delta$) alors

$$d(\alpha) \leq d_{\frac{1}{\alpha-1}} = \sigma(\alpha - 1) \, . \tag{5.18}$$

D'autre part, pour donner une bonne minoration pour le spectre des singularités, on va dans un premier temps supposer que $|\lambda_0| = |\lambda_1| := \lambda \in [1/4, 1/2[$. La dépendance en x dans le numérateur de la formule (5.15) disparaît, et les ensembles de singularités seront les ensembles de points ayant la même approximation par les points dyadiques. Dans ce cas $v = \omega = -\frac{\log\lambda}{\log 2} := \alpha_\lambda > 1$, donc pour $\alpha \in [1, \alpha_\lambda]$

$$E^{(\alpha)} = (\bigcap_{\delta < \frac{1}{\alpha-1}} E_\delta) \backslash (\bigcup_{\delta > \frac{1}{\alpha-1}} E_\delta)$$

avec

$$E_\delta = \bigcap_{m\geq 1} \bigcup_{n\geq m} F_n +]-\tilde\lambda^{n\delta} \, , \, \tilde\lambda^{n\delta}[$$

et F_n l'ensemble de toutes les sommes $i_1 2^{-1} + i_2 2^{-2} + \dots + i_n 2^{-n}$ où $i_j = 0$ ou 1. On a dans ce cas $d_{\frac{1}{\alpha-1}} = -(\alpha-1)\frac{\log 2}{\log\lambda} = (\alpha-1)/(\alpha_\lambda - 1)$. Donc pour $\alpha \in [1, \alpha_\lambda]$, $d(\alpha) \leq (\alpha-1)/(\alpha_\lambda - 1)$.

Pour minorer le spectre des singularités, il suffit de construire une mesure de probabilité μ dont le support est l'ensemble des singularités $E^{(\alpha)}$ (ou une partie de $E^{(\alpha)}$), qui vérifie la propriété de "scaling" : "pour tout intervalle $I \subset \mathrm{R}$, de longueur $|I| \leq 1/2$, on ait $\mu(I) \leq C|I|^{d_{\frac{1}{\alpha-1}} - \varepsilon}$, $\forall \varepsilon > 0$".

Soit $m_1 < m_2 < ...$ une suite croissante d'entiers qui tend assez rapidement vers l'infini, disons que pour tout $n \geq 1$, $m_{n+1} \geq \exp(m_n)$. Posons

$$K_{\frac{1}{\alpha-1}} = \bigcap_{n\geq 1} G_{m_n}^{(\frac{1}{\alpha-1})} \tag{5.19}$$

avec

$$G_m^{(\frac{1}{\alpha-1})} = F_m +]-\tilde{\lambda}^{m\frac{1}{\alpha-1}}\ ,\ \tilde{\lambda}^{m\frac{1}{\alpha-1}}[. \tag{5.20}$$

On applique alors le résultat suivant (voir [27]: Example 4.7 p:59-60)

Proposition 22 *Soit $0 < s < 1$ fixé et $n_1 < n_2 < \ldots$ une suite d'entiers qui croit rapidement (telle que par exemple $n_{k+1} \geq max\{n_k^k, 3n_k^{1/s}\}$ pour chaque k). Pour chaque k, soit $A_k \subset \mathrm{R}$ constitué d'intervalles de longueur $n_k^{-1/s}$ chacun, tels que la distance entre les milieux de deux intervalles consécutifs est n_k^{-1}. Alors $dim_H \bigcap_{k\geq 1} A_k = s$.*

Pour notre cas, $A_k = G_{m_k}^{(\frac{1}{\alpha-1})}$, $n_k = 2^{m_k}$ et $s = (\alpha-1)/(\alpha_\lambda - 1)$, donc $dim_H K_{\frac{1}{\alpha-1}} = (\alpha-1)/(\alpha_\lambda-1)$.

On pose N_k le nombre d'intervalles de longueur $2\tilde{\lambda}^{m_k\frac{1}{\alpha-1}}$ que l'on peut trouver dans $H_k = G_{m_1}^{(\frac{1}{\alpha-1})} \cap \ldots \cap G_{m_k}^{(\frac{1}{\alpha-1})}$, et μ_k la mesure de probabilité qui, à chacun de ces N_k intervalles, associe le poids $N_k^{-1}dx/2\tilde{\lambda}^{m_k\frac{1}{\alpha-1}}$. D'après [27] (Example 4.6 p:58-59 et Example 4.7 p:59-60), on a $\mu_k \rightharpoonup \mu$ quand $n \to \infty$, où $\mu = \mu_{\frac{1}{\alpha-1}}$ est supportée par $K_{\frac{1}{\alpha-1}}$, et il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout intervalle I, $|I| \leq 1/2$, on a

$$\mu(I) \leq C\ |\ I\ |^{(\alpha-1)/(\alpha_\lambda-1)} \log\frac{1}{|\ I\ |}. \tag{5.21}$$

D'autre part, on a

$$E^{(\alpha)} \supset E_{\frac{1}{\alpha-1}} \setminus \Big(\bigcup_{\delta > \frac{1}{\alpha-1}} E_\delta \Big) \tag{5.22}$$

et

$$\mu(E_\delta) = 0 \ \text{ pour tout } \ \delta > \frac{1}{\alpha-1}\ .$$

Comme la réunion de ces ensembles peut être écrite comme une réunion dénombrable, la mesure de leur réunion s'annule, donc $\mu_{\frac{1}{\alpha-1}}(E^{(\alpha)}) = \mu_{\frac{1}{\alpha-1}}(E_{\frac{1}{\alpha-1}}) = 1$ car $K_{\frac{1}{\alpha-1}} \subset E_{\frac{1}{\alpha-1}}$.

Le lemme suivant nous permet alors de conclure que $d(\alpha) = (\alpha-1)/(\alpha_\lambda-1)$ pour $\alpha \in [1, \alpha_\lambda]$.

Lemme 1 *Soit $A \subset \mathrm{R}^m$ et R_ε l'ensemble de tous les recouvrements de A par des ensembles de diamètre au plus ε. Soit*

$$M_{\varepsilon,d}(A) \ = \ \inf_{r\in R_\varepsilon} \sum_{A_i\in r} (\mathrm{diam}\, A_i)^d \log(1/(\mathrm{diam}\, A_i))$$

et soit

$$\mathrm{Mes}_d(A) \ = \ \limsup_{\varepsilon\to 0} M_{\varepsilon,d}(A)$$

la d-mesure de Hausdorff measure modifiée (évidemment, cette modification ne change pas la dimension de Hausdorff de A qui est $D = \inf\{d : \mathrm{Mes}_d(A) = 0\} = \sup\{d : \mathrm{Mes}_d(A) = +\infty\}$*).*

Soit μ *une mesure de probabilité sur* R^m *et* $E \subset \mathrm{R}^m$.

Si $\limsup_{r\to 0} \frac{\mu(B(x,r))}{r^s \log(1/r)} < C \quad \forall\, x \in E$, *alors* $\mathrm{Mes}_s(E) \geq \frac{\mu(E)}{C}$.

Revenons maintenant au cas général, on va écrire l'ensemble des singularités sous la forme d'une partition d'ensembles de points ayant la même approximation par les points dyadiques, puis minorer la taille de ces nouveaux ensembles.

On écrit

$$E^{(\alpha)} = \bigcup_{\beta \geq 1} A^\beta \cap E^{(\alpha)}$$

avec

$$A^\beta = \{x : \limsup \frac{\log |k_J 2^{-J} - x|}{\log 2^{-J}} = \beta\} .$$

On a aussi

$$E^{(\alpha)} \supset \bigcup_{\beta \in [max\{1, \frac{\nu-1}{\alpha-1}\}, \frac{\omega-1}{\alpha-1}]} A^\beta \cap D_{(\alpha-1)\beta}$$

avec

$$D_{(\alpha-1)\beta} = \{x : \lim \frac{\log |\tilde{\lambda}_{i(J,x)}|}{\log 2^{-J}} = (\alpha-1)\beta\} .$$

Donc

$$d(\alpha) \geq \sup_{\beta \in [max\{1, \frac{\nu-1}{\alpha-1}\}, \frac{\omega-1}{\alpha-1}]} dim_H A^\beta \cap D_{(\alpha-1)\beta}. \tag{5.23}$$

On va montrer que la dimension de Hausdorff de $A^\beta \cap D_{(\alpha-1)\beta}$ est supérieure au produit des dimensions de Hausdorff de A^β et $D_{(\alpha-1)\beta}$ et que le suprémum précédent coïncide avec $\sigma(\alpha-1)$.

Un raisonnement analogue à celui du cas $|\tilde{\lambda}_0| = |\tilde{\lambda}_1|$ nous donne

$$A^\beta = (\bigcap_{\delta<\beta} A_\delta) \backslash (\bigcup_{\delta>\beta} A_\delta) ,$$

avec

$$A_\delta = \bigcap_{m\geq 1} \bigcup_{n\geq m} F_n +]-2^{-n\delta}\ ,\ 2^{-n\delta}[$$

et $dim_H A^\beta = 1/\beta$.

D'autre part la dimension de Hausdorff de $D_{(\alpha-1)\beta}$ est bien connue (cf [27] ou [33] par exemple) et vaut $\inf_a(a(\alpha-1)\beta - \tau(a))$ avec $\tau(a) = -\log_2(|\tilde{\lambda}_0|^a + |\tilde{\lambda}_1|^a)$.

On pose $\tilde{K}_\beta = \bigcap_{n\geq 1} \tilde{G}^{(\beta)}_{m_n}$ avec $\tilde{G}^{(\beta)}_m = F_m +]-2^{-m\beta}\ ,\ 2^{-m\beta}[$. Pour la minoration de la dimension de $A^\beta \cap D_{(\alpha-1)\beta}$ on va construire sur l'ensemble $\tilde{K}_\beta$, une famille de mesures de probabilités invariantes, analogue à celle qui intervient dans le calcul des dimensions des $D_{(\alpha-1)\beta}$ (cf [33]) et utiliser Lemma 8 du second chapitre.

On pose $P_0 = |\tilde{\lambda}_0|^a 2^{\tau(a)}$ et $P_1 = |\tilde{\lambda}_1|^a 2^{\tau(a)}$, alors $P_0 + P_1 = 1$. Construisons sur $\tilde{G}_{m_n}^{(\beta)}$ une mesure de probabilité μ_n telle que pour tout $(i_1, \ldots, i_{m_n})$,

$$\mu\left(\sum_{l=1}^{m_n} i_l 2^{-l} +]-2^{-m_n\beta}, 2^{-m_n\beta}[\right) = P_{i_1} \ldots P_{i_{m_n}}.$$

Alors $\mu_n \rightharpoonup \mu$ quand $n \to \infty$, où $\mu = \mu_{\beta,a}$ est une mesure de probabilité supportée par $\tilde{K}_\beta$.

Soient $x \in \tilde{K}_\beta \cap D_{(\alpha-1)\beta}$ et $I(x,r)$ un intervalle de centre x et de rayon r. Comme $x \in D_{(\alpha-1)\beta}$ alors il existe n tel que pour $i = (i_1(x), \ldots, i_{m_n}(x))$, $\frac{\log|\tilde{\lambda}_i|}{\log 2^{-m_n}} \leq (\alpha-1)\beta + \epsilon$, donc pour $r_n = 2^{-m_n\beta}$ et $a > 0$, on a $\mu(I(x,r_n)) \sim P_{i_1} \ldots P_{i_{m_n}} = |\tilde{\lambda}_i|^a 2^{m_n\tau(a)}$, donc

$$\frac{\log \mu(I(x,r_n))}{\log 2^{-m_n\beta}} \leq a(\alpha-1) + a\epsilon - \frac{\tau(a)}{\beta};$$

Donc pour tout $a > 0$ et $\epsilon > 0$

$$\limsup_{r\to 0} \frac{\mu(I(x,r))}{r^{a(\alpha-1)-\frac{\tau(a)}{\beta}+\epsilon}} = +\infty$$

donc, d'aprés Lemma 8, $M_s(\tilde{K}_\beta \cap D_{(\alpha-1)\beta}) = 0$ et $dim_H \tilde{K}_\beta \cap D_{(\alpha-1)\beta} \leq a(\alpha-1) - \frac{\tau(a)}{\beta}$ $\forall a > 0$.

Soit maintenant $r > 0$, on prend j tel que $\frac{1}{2}2^{-j} \leq 2r < 2^{-j}$ et $i = (i_1, \ldots, i_j)$ le code de l'intervalle dyadique de longueur 2^{-j} contenant $I(x,r)$ alors

$$\begin{aligned}
\mu(I(x,r)) &\leq P_{i_1} \ldots P_{i_j} \\
&= |\tilde{\lambda}_i|^a 2^{j\tau(a)} \\
&\leq 2^{-ja((\alpha-1)\beta-\epsilon)} 2^{j\tau(a)} = 2^{-j[a((\alpha-1)\beta-\epsilon)-\tau(a)]} \quad \text{pour } a > 0 \\
&\leq 2^{-j[a(\alpha-1-\epsilon)-\frac{\tau(a)}{\beta}]}
\end{aligned}$$

donc $\forall \epsilon > 0$

$$\frac{\mu(I(x,r))}{r^{a(\alpha-1)-\frac{\tau(a)}{\beta}-\epsilon}} \leq C.$$

En prenant

$$a = \left[\log\left(-\frac{\log|\tilde{\lambda}_1| + (\alpha-1)\beta\log 2}{\log|\tilde{\lambda}_0| + (\alpha-1)\beta\log 2}\right)\right] / \left[\log\frac{|\tilde{\lambda}_0|}{|\tilde{\lambda}_1|}\right] := a_\beta \tag{5.24}$$

on aura alors $\tau'(a) = (\alpha-1)\beta$ et l'infimum de $a(\alpha-1) - \frac{\tau(a)}{\beta}$ est atteint pour $a = a_\beta$; De plus, grâce à des arguments analogues à ceux de [33] on a $\mu(\tilde{K}_\beta \cap D_{(\alpha-1)\beta}) > 0$ (avec $\mu = \mu_{\beta,a_\beta}$); donc en utilisant Lemma 8, on aura l'égalité

$$dim_H \tilde{K}_\beta \cap D_{(\alpha-1)\beta} = \inf_{a>0}(a(\alpha-1) - \frac{\tau(a)}{\beta}). \tag{5.25}$$

Du travail précédent, on en déduit que

$$d(\alpha) \geq \sup_{\beta\in[max\{1,\frac{v-1}{\alpha-1}\},\frac{w-1}{\alpha-1}]} \frac{1}{\beta} \inf_a(a(\alpha-1)\beta - \tau(a)). \tag{5.26}$$

On pose

$$\varphi(\beta) = \inf_a(a(\alpha-1)\beta - \tau(a)) = a_\beta(\alpha-1)\beta - \tau(a_\beta)$$

et

$$\Phi(\beta) = \frac{1}{\beta}\varphi(\beta).$$

Un calcul facile nous donne

$$\Phi'(\beta) = -\frac{1}{\beta^2 \log 2}\log(|\tilde{\lambda}_0|^{a_\beta} + |\tilde{\lambda}_1|^{a_\beta}).$$

Donc $\Phi'(\beta) = 0$ si et seulement si $|\tilde{\lambda}_0|^{a_\beta} + |\tilde{\lambda}_1|^{a_\beta} = 1$, c'est à dire que $a_\beta = \sigma$, ou encore $\beta = -\frac{(|\tilde{\lambda}_0|^\sigma \log|\tilde{\lambda}_0| + |\tilde{\lambda}_1|^\sigma \log|\tilde{\lambda}_1|)}{(\alpha-1)\log 2} := \bar{\beta}$; Or $\beta \in [max\{1, \frac{v-1}{\alpha-1}\}, \frac{\omega-1}{\alpha-1}]$ si et seulement si $\alpha \in [1, -(|\tilde{\lambda}_0|^\sigma \log|\tilde{\lambda}_0| + |\tilde{\lambda}_1|^\sigma \log|\tilde{\lambda}_1|)/\log 2]$ donc

$$\sup_{\beta \in [max\{1, \frac{v-1}{\alpha-1}\}, \frac{\omega-1}{\alpha-1}]} \Phi(\beta) = \sigma(\alpha-1)\ .$$

Ce qui achève la preuve de la Proposition 21.

Ainsi, on constate que les singularités des fonctions de la base Schauder aux points dyadiques (bien que leur réunion soit dénombrable et ait une dimension de Hausdorff nulle) changent complètement la nature fractale de la fonction autosimilaire associée.

5.4 Validité du formalisme multifractal

Remarquons que la dérivée (au sens des distributions) de la fonction F est donnée par la série $F'(x) = \sum_{j=0}^{\infty} 2^j \lambda_{i(j,x)}\ h\left(S^{-1}_{i(j,x)}(x)\right)$ où $h(x)$ est la fonction de Haar qui vaut 0 pour $x < 0$, 1 sur $[0, 1/2[$, -1 sur $[1/2, 1[$ et 0 pour $x \geq 1$.

Dans [16], on a le résultat suivant

Proposition 23 *Soit* $0 < s < 1/p \leq 1$ *et* $f = \sum C_{j,k} h(2^j x - k)$. *Si* $f \in L^p$ *et*

$$\sup_{0<\epsilon<\delta}\left[\int_{t\in[0,1]\,:\,t+\epsilon\in[0,1]} |f(t+\epsilon) - f(t)|^p\, dt\right]^{1/p} = O(\delta^s)\ ,\ \delta \mapsto 0 \qquad (5.27)$$

alors

$$A_{j,p} := 2^{j(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})}\left(\sum_k |2^{-\frac{j}{2}} C_{j,k}|^p\right)^{\frac{1}{p}} = O(2^{-js})\ ,\ j \mapsto \infty. \qquad (5.28)$$

Réciproquement, (5.28) implique que la série de Haar correspondante converge vers f *dans* L^p *satisfaisant (5.27).*

Ainsi la Proposition 23 est identique à la caractérisation des séries d'ondelettes régulières dans les espaces de Besov (cf [45]) et donne $\eta_f(p) = \zeta_f(p) = sp$.

Appliquons ce résultat pour F', on a

$$A_{j,p} = 2^{-j/p}2^j \left(\sum_{|i|=j} |\lambda_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} = 2^{-j\left(-1+\frac{1}{p}-\frac{\log(|\lambda_0|^p+|\lambda_1|^p)}{p\log 2}\right)}$$
$$= 2^{-j\left(\frac{1}{p}-\frac{\log(|\tilde{\lambda}_0|^p+|\tilde{\lambda}_1|^p)}{p\log 2}\right)} ;$$

1. Si $\lambda_0 + \lambda_1 \neq 1/2$, alors

   (a) si $|\lambda|_{max} \geq 1/2$, alors pour tout $p \geq 1$, on a $|\tilde{\lambda}_0|^p + |\tilde{\lambda}_1|^p > 1$ et donc pour tout $p \geq 1$ $\eta_{F'}(p) = \zeta_{F'}(p) = 1 - \frac{\log(|\tilde{\lambda}_0|^p+|\tilde{\lambda}_1|^p)}{\log 2}$, ainsi comme $\eta(p) = \eta_{F'}(p) + p$ et $\zeta(p) = \zeta_{F'}(p) + p$, alors pour $\alpha \in [\upsilon, \omega]$

$$\inf_{p\geq 1}(\alpha p - \zeta(p) + 1) = \inf_{p\geq 1}(\alpha p - \eta(p) + 1) = \inf_{p\geq 1} \log_2((2^\alpha|\lambda_0|)^p + (2^\alpha|\lambda_1|)^p)$$
$$= d(\alpha)$$

   et le formalisme multifractal est valide.

   (b) si $|\lambda|_{max} < 1/2$, alors

      i. si $|\lambda_0| + |\lambda_1| > 1/2$, on pose p_0 l'unique p tel que $|\tilde{\lambda}_0|^p + |\tilde{\lambda}_1|^p = 1$, (c'est à dire $p_0 = \sigma$); alors pour tout $1 \leq p < p_0$, on a $|\tilde{\lambda}_0|^p + |\tilde{\lambda}_1|^p > 1$ et par suite $\eta_{F'}(p) = \zeta_{F'}(p) = 1 - \frac{\log(|\tilde{\lambda}_0|^p+|\tilde{\lambda}_1|^p)}{\log 2}$, ainsi

$$\inf_{1\leq p<p_0}(\alpha p - \zeta(p) + 1) = \inf_{1\leq p<p_0}(\alpha p - \eta(p) + 1)$$
$$= \inf_{1\leq p<p_0} \log_2((2^{(\alpha-1)}|\tilde{\lambda}_0|)^p + (2^{(\alpha-1)}|\tilde{\lambda}_1|)^p)$$
$$= \inf_{1\leq p<p_0} \log_2((2^\alpha|\lambda_0|)^p + (2^\alpha|\lambda_1|)^p) .$$

      Cependant pour $p \geq p_0$, on a $A_{j,p} \leq C2^{-js}$, $\forall 0 < s < 1/p$, donc $\zeta_{F'}(p) \geq 1$, et comme F' n'est pas continue alors $F' \notin B_p^{s,\infty}$ pour $s > 1/p$, et par suite $\eta_{F'}(p) = \zeta_{F'}(p) = 1$, donc

$$\inf_{p\geq p_0}(\alpha p - \eta(p) + 1) = \inf_{p\geq p_0}(\alpha p - \zeta(p) + 1) = (\alpha - 1)p_0 .$$

      Pour $1 \leq \alpha \leq \upsilon$, on a $2^\alpha|\lambda_0| \leq 1$ et $2^\alpha|\lambda_1| \leq 1$, il s'ensuit alors que

$$\inf_{1\leq p<p_0}(\alpha p - \eta(p) + 1) = \inf_{1\leq p<p_0}(\alpha p - \zeta(p) + 1)$$
$$= \log_2((2^{(\alpha-1)}|\tilde{\lambda}_0|)^{p_0} + (2^{(\alpha-1)}|\tilde{\lambda}_1|))^{p_0}$$
$$= (\alpha - 1)p_0 ;$$

      Or par définition, $(\alpha - 1)p_0 = d(\alpha)$ pour $\alpha \geq 1$, ainsi pour $1 \leq \alpha \leq \upsilon$

$$d(\alpha) = \inf_{p\geq 1}((\alpha - 1)p - \zeta(p) + 1) = \inf_{p\geq 1}((\alpha - 1)p - \eta(p) + 1) \qquad (5.29)$$

      et pour $\upsilon < \alpha \leq min\{1 + \frac{1}{\sigma}, -(|\tilde{\lambda}_0|^\sigma \log|\tilde{\lambda}_0| + |\tilde{\lambda}_1|^\sigma \log|\tilde{\lambda}_1|)/\log 2\}$

$$d(\alpha) = \inf_{p\geq p_0}(\alpha p - \zeta(p) + 1) = \inf_{p\geq p_0}(\alpha p - \eta(p) + 1) . \qquad (5.30)$$

ii. si maintenant $|\lambda_0| + |\lambda_1| < 1/2$, alors pour tout $p \geq 1$, $|\tilde{\lambda}_0|^p + |\tilde{\lambda}_1|^p < 1$ et donc $\eta(p) = \zeta(p) = 1 + p$. Il s'ensuit que

$$\inf_{p\geq 1}(\alpha p - \zeta(p) + 1) = \inf_{p\geq 1}(\alpha p - \eta(p) + 1) = \alpha - 1 .$$

Comme $\sigma < 1$ alors

$$d(\alpha) < \inf_{p\geq 1}(\alpha p - \zeta(p) + 1) = \inf_{p\geq 1}(\alpha p - \eta(p) + 1) ,$$

et le formalisme multifractal échoue dans ce cas.

2. Si $\lambda_0 + \lambda_1 = 1/2$, alors

   (a) si $|\lambda|_{max} \geq 1/2$ alors comme précédemment le formalisme multifractal est valide.

   (b) si $|\lambda|_{max} < 1/2$ alors le formalisme multifractal est valide pour tout $\alpha \in [\upsilon, \omega]$ tel que l'infimum dans $\inf_{p\geq 1} \log_2((2^\alpha|\lambda_0|)^p + (2^\alpha|\lambda_1|)^p)$ est atteint pour $p \in [1, p_0]$.

D'où la conclusion suivante

Théorème 11 *Soit F la fonction donnée par la série*

$$F(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_{i(j,x)}\ \Lambda(\tau^j x)$$

solution de l'équation autosimilaire

$$F(x) = \lambda_0 F(2x) + \lambda_1 F(2x-1) + \Lambda(x) ;$$

Alors

1. *Si $\lambda_0 + \lambda_1 \neq 1/2$, alors*

   (a) si $|\lambda|_{max} \geq 1/2$ (i.e $\upsilon \leq 1$) alors le formalisme multifractal est valide sur $[\upsilon, \omega]$.

   (b) si $|\lambda|_{max} < 1/2$ (i.e $\upsilon > 1$), alors

      i. si $|\lambda_0|+|\lambda_1| > 1/2$, alors le formalisme multifractal est valide sur $[1, min\{1+\frac{1}{\sigma}, -(|\tilde{\lambda}_0|^\sigma \log|\tilde{\lambda}_0| + |\tilde{\lambda}_1|^\sigma \log|\tilde{\lambda}_1|)/\log 2\}]$.

      ii. si $|\lambda_0| + |\lambda_1| < 1/2$, alors le formalisme multifractal échoue.

2. *Si $\lambda_0 + \lambda_1 = 1/2$, alors*

   (a) si $|\lambda|_{max} \geq 1/2$ (i.e $\upsilon \leq 1$), alors le formalisme multifractal est valide sur $[\upsilon, \omega]$.

   (b) si $|\lambda|_{max} < 1/2$ (i.e $\upsilon > 1$), alors le formalisme multifractal est valide pour tout $\alpha \in [\upsilon, \omega]$ tel que l'infimum dans $\inf_{p\geq 1} \log_2((2^\alpha|\lambda_0|)^p + (2^\alpha|\lambda_1|)^p)$ est atteint pour $p \in [1, \sigma]$.

Conclusion

Dans ce mémoire, on a fait l'analyse multifractale et on a étudié la validité du formalisme multifractal pour certaines extensions du modèle linéaire et isotrope de Jaffard pour les fonctions autosimilaires $F(x) = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i F(S_i^{-1}(x)) + g(x)$. Ces extensions concernent les structures des contractions (non-linéarité, anisotropie), la condition de séparation, et la régularité de la fonction d'erreur g.

On a montré que le formalisme multifractal reste vrai pour des autosimilarités associées à des contractions non-linéaires; qu'il dépend des propriétés d'isotropie des contractions; qu'il est vrai pour certaines fonctions autosimilaires dont les contractions se recouvrent; et enfin que les singularités de g perturbent le spectre de F et le formalisme multifractal est faux dans certains cas.

Perspectives:

- Combiner ces résultats pour l'étude d'autosimilarités plus générales.
- Essayer de mettre en oeuvre ces résultats pour l'analyse multifractale des images médicales ou radar satellite.

Bibliographie

[1] R.A. Adams. *Sobolev spaces.* Academic press, 1978.

[2] A. Arneodo, E. Bacry, et J. F. Muzy. Wavelet analysis of fractal signals. direct determination of the singularity spectrum of fully developped turbulence data. Preprint, 1991.

[3] A. Arneodo, Bacry E., et J. F. Muzy. Singularity spectrum of fractal signals from wavelet analysis: Exact results. To appear in Journ.Stat. Phys.

[4] M. Ben Slimane. Selfsimilar functions, multifractal formalism and wavelet analysis. Communication dans le thème "les ondelettes et les fractals" (17-24 mars) dans le Programme sur les fonctions splines et la théorie des ondelettes Janvier-avril 1996 organisé par le Centre de recherches mathématiques de l'Université de Montréal (Québec) Canada.

[5] M. Ben Slimane. Formalisme multifractal et chirps logarithmiques pour les fonctions d'échelles. Rapports de recherche du Cermics, 96-56, novembre 1995.

[6] M. Ben Slimane. Multifractal formalism and anisotropic selfsimilar functions. Preprint, 1995.

[7] M. Ben Slimane. Multifractal formalism for selfsimilar functions under the action of nonlinear dynamical systems. Preprint, 1995.

[8] J.M. Bony. Second microlocalization and propagation of singularities for semilinear hyperbolic equations. *Taniguchi Symp. HERT. Katata*, pages 11–49, 1981.

[9] J.M. Bony. Intéraction des singularités pour l'équation de klein-gordon non linéaire. *Séminaire Goulaouic-Schwartz-Meyer, Ecole polytechnique*, 1983-84.

[10] G. Bourdaud et S. Sickel. Homeomorphisms which act on Besov spaces. Preprint, 1995.

[11] G. Brown, G. Michon, et J. Peyrière. On the multifractal analysis of measures. *Jour. Stat. Phys.*, T.66:775–79, 1992.

[12] A.P. Calderón. An atomic decomposition of distributions in parabolic $\mathcal{H}^p$ spaces. *Advances In Mathematics*, 25:216–225, 1977.

[13] A.P. Calderón et A. Torchinsky. Parabolic maximal functions associated with a distribution. *Advances In Mathematics*, 24:101–171, 1977.

[14] C. Canus et J. Lévy Véhel. Change detection in sequences of images by multifractal analysis. *ICASP*, 1996.

[15] E. Cesaro. Fonctions continues sans dérivée. *Archiv der Mathematik und Physik*, 3e série(tome 10):p. 57–63, 1906.

[16] Z. Ciesielski. Haar orthogonal functions in analysis and probability. *Alfred Haar Memorial Conference*, pages 25–56, 1985. Colloquia Mathematica Conference, Colloquia Mathematica Societatis Janos Bolyai, Budapest.

[17] A. Cohen et I. Daubechies. A new technique to estimate the regularity of refinable functions. *Rev.Mat.Iberoam*, 12(2), 1996.

[18] A. Cohen, K Gröchenig, et L. Villemoes. Regularity of multivariate refinable functions. Preprint.

[19] A. Cohen et R.D Ryan. *Wavelets and multiscale signal processing.* Chapman and Hall, London, 1995.

[20] P. Collet, J. Lebowitz, et A. Porzio. The dimension spectrum of some dynamical systems. *Jour. Stat. Phys*, T.47:PP.609–644, 1987.

[21] I. Daubechies. Communication privée.

[22] I. Daubechies et J.C Lagarias. Two-scale difference equations.1. existence and global regularity of solutions. *SIAM J Math anal*, Vol 22(No 5):pp 1388–1410, September 1991.

[23] I. Daubechies et J.C. Lagarias. Two-scale difference equations.2. local regularity, infinite products of matrices and fractals. *SIAM J Math anal*, 24:1031–1079, 1992.

[24] I. Daubechies et J.C. Lagarias. On the thermodynamic formalism for functions. *Reviews in Mathematical Physics*, Vol. 6(No. 5a):1033–1070, 1994.

[25] G. De Rham. Sur un exemple de fonction continue sans dérivée. *Enseign. Math*, 3:71–72, 1957.

[26] H.G. Eggleston. The fractional dimension of a set defined by dicimal properties. *Quart. J.Math.Oxford Ser*, 20:pp31–36, 1949.

[27] K.J Falconer. *Fractal Geometry.* John Wiley and sons, 1990.

[28] K.J Falconer. The multifractal spectrum of statistically self-similar measures. *Journal of Theoretical Probability*, 7(3):681–702, July 1994.

[29] G.B. Folland et E.M. Stein. *Hardy spaces on homogeneous groups*, volume Mathematical Notes 28, *Princeton University Press and University of Tokyo Press.* Princeton, New Jersey, 1993.

[30] U. Frisch et G. Parisi. Fully developped turbulence and intermittency. *Proc. Int. Summer school Phys. Enrico Fermi*, pages 84–88, 1985.

[31] J. Hutchinson. Fractals and self-similarity. *Indiana Univ.Math.J*, pages 713–747, 1981.

[32] S. Jaffard. Multifractal formalism for functions. Part 1: Results valid for all functions. *SIAM Journal Math. Anal.* To appear.

[33] S. Jaffard. Multifractal formalism for functions. Part 2: Selfsimilar functions. *SIAM Journal Math. Anal.* To appear.

[34] S. Jaffard. Pointwise smoothness, two-microlocalization and wavelet coefficients. *Publicacions Matemàtiques*, Vol 35:155–168, 1991.

[35] S. Jaffard. Local behavior of Riemann's function. *Contemporary Mathematics. AMS*, Vol:189:pp: 287–307, 1995.

[36] S. Jaffard et B. Mandelbrot. Local regularity of nonsmooth wavelet expansions and applications to the Polya function. To appear in Advances in Math.

[37] S. Jaffard et Y. Meyer. Pointwise behavior of functions. Preprint, 1993.

[38] J. King. The singularity spectrum for general Sierpinski carpets. Preprint, 1992.

[39] A.N. Kolmogorov. *Dokl. Akad. Nauka SSSR*, 119:861, 1958.

[40] J. Lévy Véhel et R. Vojak. Multifractal analysis of Choquet capacities: Preliminary results. To appear in Advances in Applied Mathematics.

[41] J. Lévy Véhel et R. Vojak. Higher order multifractal formalism. Preprint, 1996.

[42] B.B. Mandelbrot. Intermittent turbulence in self-similar cascades: divergence of high moments and dimension of carrier. *J.Fluid Mech*, 62:331–358, 1975.

[43] B.B. Mandelbrot. Negative dimensions and H"olders, multifractals, and the role of lateral preasymptotics in science. *Fourier Analysis and Applications*, 1993. Paris. Edited by Jacques Peyrière, J.P. Kahane meeting.

[44] B.B. Mandelbrot et R. Riedi. Multifractal formalism for infinite multinomial measures. *Advances in Applied Mathematics*, 16:132–150, 1995.

[45] Y. Meyer. *Ondelettes et opérateurs.* Hermann, 1990.

[46] Y. Meyer. Les espaces 2-microlocaux. Cours de DEA à l'Université de Paris Dauphine, 1992.

[47] Y. Meyer. Fonctions multifractales. Cours de DEA à l'Université de Paris Dauphine, 1995.

[48] Y. Meyer. Analyse par ondelettes et analyse 2-microlocale des chirps généralisés. Cahiers de Mathématiques de la Décision n:9246, 27/11/92.

[49] G. Michon. Une constructions des mesures de Gibbs sur certains ensembles de cantor. *C.R.Acad.Sci.Paris*, t. 308, Série 1:p 315–318, 1989.

[50] L. Olsen. A multifractal formalism. To appear in Advances in Mathematics.

[51] L. Olsen. Self-affine multifractal Sierpinski sponges in R^d. Preprint.

[52] J. Peyrière. Multifractal measures. Dordrecht Kluwer Academic Press, ed., *Proceeding of the NATO Advanced Study Institute on Probabilistic and Stochastic Methods in Analysis with Applications*, volume Vol 372, 1992.

[53] D.A. Rand. The singularity spectrum $f(\alpha)$ for Cookie-cutters. *Ergod. Th.and Dynam. Sys*, 9:527–541, 1989.

[54] R. Riedi. An improved multifractal formalism and self-similar measures. To appear in Journal Math. Anal. Appl.

[55] C.A. Rogers. *Hausdorff measures.* Cambridge University Press, 1970.

[56] H. Triebel. *Theory of function spaces.* Birkhauser, Basel, 1983.

[57] H. Triebel. *Theory of function spaces.II.* Birkhauser, Basel, 1992.