NS 19993 (4)

THESE

présentée pour l'obtention du grade de

DOCTORAT DE L'ECOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSEES

Spécialité : Structures et Matériaux

par

Yingzhong GAO

Sujet

MODELES PROBABILISTES ET POSSIBILISTES POUR LA PRISE EN COMPTE DE L'INCERTAIN DANS LA SECURITE DES STRUCTURES

soutenue à Paris le 2 Mai 1996

devant le jury composé de :

MM.	M. LEMAIRE	Président
	D. BOISSIER	Rapporteur
	A. MEBARKI	Rapporteur
	C. CREMONA	Examinateur
	J.F. COSTE	Examinateur
	R. EYMARD	Directeur de thèse

09

E.N.P.C.
INV03692

此文献给：

我亲爱的父母，好好，兰兰

姐姐，姐夫，明明

和我的祖国—中国

A：

Alexandre, Lan

Toute ma famille

et la Chine

REMERCIEMENTS

Les travaux faisant l'objet de ce mémoire ont été effectués au Laboratoire Central des Ponts et Chaussés (LCPC), au sein de la Division Fonctionnement et Durabilité des Ouvrages d'Art (FDOA). Que tous ceux qui, par leur aide ou leur soutien, ont contribué à la réalisation de cette étude, trouvent ici l'expression de ma profonde reconnaissance.

Ma reconnaissance s'adresse tout particulièrement à Monsieur C. Cremona, mon Conseiller scientifique, au LCPC pour la bienveillante attention et le soin avec lesquels il a conduit ce travail et pour ses judicieux conseils dans la réalisation de cette étude. Il m'a beaucoup appris, tant du point de vue moral que scientifique. Qu'il soit assuré de mon profond respect et de mon amitié pour le laborieux travail de correction de ma thèse.

Je souhaite exprimer ma profonde gratitude à mon Directeur de thèse, Monsieur R. Eymard, Chef du Service de Modélisation pour l'Ingénieur au LCPC, Professeur associé à l'Université de Paris-Nord, qui a bien voulu diriger ce travail de thèse. Son expérience et ses conseils avisés m'ont permis de mener à bien l'ensemble de cette recherche.

Je tiens à remercier très vivement et respectueusement Monsieur M. Lemaire, Professeur à l'Institut Français de Mécanique Avancée, qui m'a fait l'honneur de présider le jury de thèse.

Mes remerciements vont également à Messieurs D. Boissier, Professeur à l'Institut des Sciences de l'Ingénieur de l'Université Blaise Pascal, A. Mébarki, Professeur à l'Université de Marne-la-Vallée, et Madame B. Bouchon-Meunier, Professeur à l'Université de Paris VI, qui ont bien voulu assurer la laborieuse tâche de rapporteurs de cette thèse.

J'exprime ma profonde gratitude à Monsieur J.F. Coste, Directeur du Laboratoire Central des Ponts et Chaussées, qui m'a fait l'honneur d'examiner mon travail et d'être membre du jury.

Mes pensées s'adressent également à Messieurs J. Carracilli et M.Y. Lau, chercheurs au LCPC, qui m'ont apporté le soutien de leur amitié.

J'aurai enfin une pensée pour tous mes amis du laboratoire, et plus particulièrement pour les membres de la section DOA, et leur secrétaire Mademoiselle C. Abgrall, qui m'ont soutenu durant la réalisation de ce travail. Je les remercie chaleureusement.

RESUME

Cette thèse a pour cadre général l'étude de la sécurité des structures, sous un double aspect - probabiliste et possibiliste - de la modélisation des variabilités et incertitudes des variables de calcul introduites dans les états limites.

Après avoir rappelé les expressions classiques de la sécurité des structures (approches semi-probabiliste et probabiliste), l'attention est portée sur la définition de pré-mesures de confiance pour l'évaluation du risque de dépassement d'états limites. Divers concepts relatifs à l'expression et à la modélisation des incertitudes sont rappelés, en accentuant les particularités des mesures de possibilité et leur positionnement vis à vis des mesures de probabilité. Les notions essentielles de la théorie probabiliste de la fiabilité sont également rappelées.

Une démarche analogue à la théorie probabiliste de la fiabilité est choisie pour développer une nouvelle théorie de la fiabilité. Nommée théorie possibiliste de la fiabilité, elle adopte une démarche possibiliste de la modélisation des variabilités et incertitudes liées aux variables de calcul ; deux définitions importantes sont d'ailleurs données dans cette étude - celle de la possibilité de défaillance et celle de l'indice possibiliste de la fiabilité. Les similitudes théoriques entre les deux théories de la fiabilité sont nombreuses et une comparaison entre les approches est présentée, en illustrant d'exemples numériques. Les formulations théoriques sont données pour des états limites linéaires et non linéaires, n'introduisant que des variables distinctes et non liées modélisées par des intervalles flous. Les développements théoriques mettent en évidence des simplifications de calcul remarquables, puisque la détermination de l'indice possibiliste de fiabilité et de la possibilité de défaillance se limite à la recherche d'un minimum scalaire. Ceci est réalisé grâce à la règle des signes, dont le principe est détaillé et illustré.

Un exemple concret concernant le calcul de la durée de vie en fatigue d'assemblages soudés, est enfin proposé pour illustrer la démarche possibiliste de la fiabilité. Un soin particulier a été apporté à la modélisation des incertitudes, en utilisant le concept de la régression floue.

Mots-clés : Sécurité des structures, fiabilité, théorie des possibilités, théorie des probabilités, probabilité de défaillance, possibilité de défaillance

SUMMARY

This thesis relates to the analysis of the behavior of the safety of structures, from the point of view of both - probability and possibility - of the modelling of variabilities and uncertainties of the design variables introduced in the limit states.

After reviewing the classical expressions about structural safety (semi-probabilistic and probabilistic approaches), the attention is focused on the definition of pre-measures of confidence to estimate the risk of exceeding limit states. Different concepts related to the expression and to the modelling of the uncertainties are reviewed, highlighting the particularities of the measures of possibility and their positionings to the measures of probability. The essential notions of the reliability theory are also reviewed.

An analogous approach to the probabilistic theory of reliability is adopted to develop a new theory of reliability. The so-called possibilistic reliability theory adopts a possibilistic approach for modelling the variabilities and uncertainties associated with the structural variables ; two important definitions have been given in this study - the possibility of failure and the possibilistic index of reliability. There exist numerous theoretical similarities between the two theories of reliability and one comparison has been presented, in augmenting numerical examples. The theoretical formulations are given for the linear limit states or nonlinear limit states, introducing only distinct and non-inttractive variables modelled by fuzzy intervals. The theoretical developments show a lot of simplifications for calculation, since the determination of the possibilistic index of reliability is reduced to the search of a scalar minimum. It can be realized by the means of the signs rule which principle is detailed and illustrated.

An example concerning the calculation of the fatigue life of welded joints, is finally proposed to illustrate the possibilistic reliability approach. Attention has been focused on the modelling of uncertainties, by using the concept of fuzzy regression.

Keywords : Safety of structure, reliability, theory of possibility, theory of probability, possibility of failure, probability of failure

法 国 国 家 道 桥 理 工 学 院 科 学 博 士 论 文

【 论 文 提 要 】

法国设备交通旅游部 — 国家道桥理工学院 — 中央桥梁道路研究院

本文主要对“模糊集理论”及其在工程和经济决策中的应用作了一系列相应的研究和讨论，其中特别运用了“模糊集”的两个基本理论（一为“或然性理论”，二为“可能性理论”）对工程的安全和经济性问题进行了深入的研究。本文共由六章组成。

在第一章里，我们对工程安全性的一些基本概念做了简单的介绍，特别是对于有关边界状态方程的“信任度”的概念作了一定的介绍并在第二章里详尽介绍了“可能度”，“必然度”和“或然度”的定义。

在第三章中，我们详细介绍了建立在“或然性理论”基础上的可靠性理论，并且通过一个实际算例阐述了该理论的基本概念。在第四章里，我们运用同样的方法在“可能性理论”基础上首次建立了一套全新的可靠性理论，并定义了两个重要的概念 — “可能失效度”和“可能可靠性指数”。“可能可靠性理论”在计算中显示出其简单实用的优点。

在第五章中，我们通过一个简单算例对“或然可靠性理论”和“可能可靠性理论”作了比较。计算结果显示运用“或然可靠性理论”得出的结果和以“可能可靠性理论”得出的结果非常相近。

在第六章中，我们将“或然可靠性理论”和“可能可靠性理论”分别应用于对某高速公路桥的寿命的评估和预测并取得了令人满意的结果。

〖关键词〗：可能度，必然度，或然度，可能失效度，可能可靠性指数

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION 1

CHAPITRE I:
NOTIONS ET PRATIQUES DE LA SECURITE DES STRUCTURES 7

I.1. EXPRESSION HABITUELLE DE LA SECURITE 8
I.1.1. Méthodes semi-probabilistes 9
I.1.2. Méthodes probabilistes de la sécurité 9

I.2. ELEMENTS DE RUPTURE 11

I.3. FONCTIONS D'ETAT LIMITE ET VARIABLES DE BASE 12

I.4. ACTIONS ET RESISTANCES 13

I.5. SYSTEMES 14

I.6. CONCLUSIONS 16

CHAPITRE II:
MESURES DE L'INCERTAIN 17

II.1. IMPRECISION ET INCERTITUDE 17

II.2. EVENEMENTS ET TRIBUS 19

II.3. DEFINITION DES PRE-MESURES DE CONFIANCE 19

II.4. VARIABLES INCERTAINES 21

II.5. PRINCIPE D'EXTENSION 21

II.6. MESURES DE LA FIABILITE 21

II.7. MESURES DE POSSIBILITE ET DE NECESSITE 22
II.7.1. Relation entre mesures de possibilité et de nécessité 23
II.7.2. Distributions de possibilité et de nécessité 23

II.7.3. Mesures de possibilité et de probabilité 24
II.7.4. Méthodes de construction des distributions de possibilité 25
II.7.5. Mesure de possibilité et sous-ensembles flous 28
II.7.6. Variables incertaines dans le cadre possibiliste 30
II.7.7. Mesure de la fiabilité 30

II.8. VARIABLES INDEPENDANTES ET NON LIEES 31

II.9. CONCLUSION 31

CHAPITRE III:
APPROCHE PROBABILISTE DE LA SECURITE DES STRUCTURES 33

III.1. THEORIE DE LA FIABILITE 33

III.2. PROBABILITE DE DEFAILLANCE 34

III.3. ETATS LIMITES LINEAIRES 34
III.3.1. Etat limite linéaire à deux variables 34
III.3.2. Etat limite linéaire à plus de deux variables 36

III.4. ETATS LIMITES NON LINEAIRES 37
III.4.1. Transformée de Rosenblatt 38
III.4.2. Indice de fiabilité et point de fonctionnement 39
III.4.3. Détermination de la probabilité de défaillance 41

III.5. FIABILITE DES SYSTEMES 42
III.5.1. Probabilité de défaillance d'un système-série 46
III.5.2. Probabilité de défaillance d'un système-parallèle 47
III.5.3. Probabilité de défaillance d'un système 47

CHAPITRE IV:
APPROCHE POSSIBILISTE DE LA SECURITE DES STRUCTURES 49

IV.1. RAPPELS 49

IV.2. QUANTITES FLOUS - NOMBRES FLOUS 50
IV.2.1. Quantités floues -Intervalles flous - Nombres flous 50
IV.2.2. Représentation paramétrée d'intervalle flou 51

IV.3. CALCULS D'INTERVALLES FLOUS 52
IV.3.1. Proposition 52
IV.3.2. Application 54

IV.4. POSSIBILITE DE DEFAILLANCE 56

IV.5. ETATS LIMITES LINEAIRES 57
IV.5.1. Choix d'une famille d'intervalles flous 57
IV.5.2. Etats limites linéaires à deux variables 58
IV.5.3. Etats limites linéaires à plusieurs variables 60

IV.6. ETATS LIMITES NON LINEAIRES 61
IV.6.1. Transformée possibiliste 61
IV.6.2. Conséquence de la transformée possibiliste 63
IV.6.3. Indice possibiliste de la fiabilité 63
IV.6.4. Règle des signes 64
IV.6.5. Conséquence de la règle des signes 65
IV.6.6. Conclusion 67
IV.6.7. Exemple 67

IV.7. FIABILITE DES SYSTEMES 70
IV.7.1. Système en série 70
IV.7.2. Système en parallèle 71
IV.7.3. Système quelconque 71

IV.8. CONCLUSIONS 71

CHAPITRE V:
COMPARAISONS ENTRE APPROCHES PROBABILISTE ET POSSIBILISTE 73

V.1. COMPARAISON ENTRE APPROCHES 73
V.1.1. Possibilité et probabilité de défaillance 73
V.1.2. Comparaison entre les méthodologies 74
V.1.3. Indice de fiabilité 75
V.1.4. Méthodes de résolution des problèmes de minimisation 77
V.1.5. Point de fonctionnement 78

V.2. EXEMPLE D'APPLICATION 78
V.2.1. Description probabiliste des variables 78

V.2.2. Description possibiliste des variables 79
V.2.3. calcul des indices probabiliste et possibiliste de la fiabilité 80
V.2.4. Comparaisons entre les résultats probabilistes et possibilistes 86
V.2.5. Système en série 88
V.2.6. Système en parallèle 90
V.2.7. Système complet 93

V.3. CONCLUSIONS 95

CHAPITRE VI:
APPLICATION AU CALCUL DE LA DUREE DE VIE EN FATIGUE D'ASSEMBLAGES SOUDES 97

VI.1. INTRODUCTION 97

VI.2. DESCRIPTION DE L'ENDOMMAGEMENT 98
VI.2.1. Loi de Miner 98
VI.2.2. Résistance à la fatigue 99
VI.2.3. Action et sollicitation de fatigue 99

VI.3. MODELE PROBABILISTE 100
VI.3.1. Estimation de la dispersion des essais 100
VI.3.2. Résistance et sollicitation à la fatigue 102
VI.3.3. Hypothèses sur la distribution des sollicitations 103
VI.3.4. Estimation de la distribution des nombre de cycles d'une classe de contrainte d'amplitude 103
VI.3.5. Construction de la fonction d'état limite 104
VI.3.6. Probabilité de défaillance 104
VI.3.7. Application à un détail constructif 104

VI.4. MODELE POSSIBILISTE 106
VI.4.1. Estimation de la dispersion des essais 106
VI.4.2. Résistance et sollicitation 108
VI.4.3. Hypothèses sur la distribution des sollicitations 109
VI.4.4. Estimation de la distribution des nombre de cycles d'une classe de contrainte d'amplitude 109
VI.4.5. Construction de la fonction d'état limite 110
VI.4.6. Possibilité de défaillance 110

VI.4.7. Application au détail constructif 111

VI.5. CONSTRUCTION DES DISTRIBUTIONS DE POSSIBILITE A PARTIR DES RESULTATS PROBABILISTES 113

VI.6. CONCLUSIONS 115

CONCLUSIONS GENERALES ET PERSPECTIVES 117

BIBLIOGRAPHIE 121

ANNEXE 1 : GLOSSAIRE 127

ANNEXE 2 : ELEMENTS D'ARITHMETIQUE FLOUE 133

ANNEXE 3 : EXEMPLE DE STRUCTURE 137

ANNEXE 4 : REGRESSION POSSIBILISTE LINEAIRE 141

INTRODUCTION

L'idée de sécurité des structures, dans sa forme la plus primitive, a dû germer avec la pratique même de la construction. C'est aussi loin que le deuxième millénaire avant notre ère que l'on découvre cette préoccupation chez Hammourabi, le fameux législateur dont le code a été préservé jusqu'à nos jours et conservé au musée du Londre. Mais cet autocrate ne connaissait rien de la théorie moderne des probabilités. Sa vision de la sécurité rendait le constructeur responsable sur sa tête en cas d'effondrement de la structure, ou passible de quelques punitions moins sévères mais de même nature, en cas de ruine partielle.

Pendant de nombreux siècles, le constructeur fut laissé à son intuition, à sa compétence professionnelle, à son expérience et à celle de ses prédécesseurs, les limites étant souvent déterminées par des accidents ou des effondrements observés.

Cet empirisme ne permettait cependant pas l'élaboration de structures nouvelles avec des matériaux nouveaux. L'émergence de la science de construire, avec la mécanique des structures et la résistance des matériaux, ne s'est produite que bien plus tard et à petits pas. La disparition de l'empirisme au profit des sciences de l'ingénieur a été largement servie par le développement de la construction métallique. Cependant, même à ce stade, le concept de "sécurité des structures" n'était pas encore mentionné dans la littérature technique et l'utilisation de coefficients minorateurs appliqués aux résistances apparaissaient comme la véritable expression de la sécurité. Le principe de sécurité adopté consistait à vérifier que les contraintes maximales calculées en toute section de toute partie d'ouvrage, et sous les cas de charge les plus défavorables, restaient inférieures à une contrainte dite admissible. Cette contrainte se déduisait de la contrainte de ruine du matériau R_{rup}, en divisant cette dernière par un coefficient de sécurité K, fixé de façon conventionnelle. Les justifications consistaient à s'assurer de l'inégalité [Rémy, 1991]

$$S \leq R_{adm} = \frac{R_{rup}}{K} \qquad (1)$$

où S était la contrainte appliquée.

La méthode de conception basée sur le principe des contraintes admissibles a été utilisée dans la première partie de ce siècle sans que se soit réellement posée la définition de ces contraintes admissibles. Leurs valeurs avaient été arbitrairement fixées sur la base de propriétés mécaniques des matériaux utilisés. La prise en considération des améliorations de la production d'aciers, de la conception et la construction des structures a amené à relever les contraintes admissibles de calcul, en diminuant les coefficients de sécurité K. Les tentatives d'améliorer les règles de conception basées sur le principe des contraintes admissibles pour obtenir une meilleure définition des charges et des résistances ont révélé le caractère dispersé des données et des résultats. La nécessité de recourir à des outils traitant de ces variabilités devenait manifeste.

De plus, la résistance à la rupture d'un matériau n'est pas forcément la grandeur la plus significative. Elle l'est pour un matériau à comportement fragile comme la fonte, mais ne l'est pas pour des matériaux ductiles comme l'acier doux ou l'aluminium, pour lesquels la limite de résistance s'accompagne de grandes déformations inacceptables pour une construction. La limite d'élasticité est alors une caractéristique mécanique au moins aussi importante que la contrainte de ruine. L'équation (1) ne tient pas non plus compte des phénomènes d'adaptation mécanique (plasticité, fluage,..) et de la diversité des actions qui s'appliquent aux structures (combinaisons d'actions, fatigue...). En fait, deux problèmes étaient soulevés par la formulation de la sécurité suivant le principe des contraintes admissibles [Calgaro, 1991]:

- remplacer les critères de contraintes admissibles par d'autres critères (états limites)

- rationaliser les modalités d'introduction de la sécurité

C'est pourquoi de nombreux ingénieurs ont tenté d'aborder le problème sous un angle différent en définissant la sécurité par un seuil de probabilité.

C'est en 1928, dans le cadre d'un forum international, que le Professeur Streletsky proclama que la notion de coefficient de sécurité était dépourvue de sens réel. Mais cela n'éveilla qu'un faible écho dans le monde de la recherche et de la construction. Quelques scientifiques, menant des études sur l'évaluation de la résistance des matériaux et structures, développèrent notamment les notions de base d'événements aléatoires, marquant ainsi une rupture avec les règles classiques de conception des structures [Mayer, 1926], [Weibull, 1939]. Ce n'est vraiment qu'au 3ème congrès de l'AIPC (Liège, 1948) que le vrai procès de ce mode erroné de penser fut déclenché par trois français: Marcel Prot, Robert Lévi et Jean Dutheil. Sous leur impulsion, le concept de sécurité probabiliste des structures naissait. Tel fut le tournant à partir duquel les fondements et méthodes de calcul des constructions se trouvèrent ébranlés et remplacées par de nouvelles bases et de nouvelles méthodes.

Ce n'est réellement que dans les années 60 que se posa la nécessité de définir scientifiquement des marges de sécurité. De 1967 à 1974, les outils mathématiques de la fiabilité des structures furent développés. Cela ne changea pas les mentalités et l'approche déterministe résistait. Les ruines d'ouvrages étaient rares et quand tel était le cas, l'erreur humaine l'expliquait. De plus, la théorie de la fiabilité était alors mathématiquement et numériquement complexe. Le peu d'informations statistiques sur les diverses variables ne permettait pas d'avoir des modèles corrects. Aussi, la plupart des ingénieurs

considéraient qu'il était préférable d'utiliser une démarche irrationnelle qui fonctionnait, plutôt qu'une approche plus rationnelle et plus compliquée mais au total tout aussi irrationnelle. C'est ainsi qu'un effort tout particulier fut mis en oeuvre pour aplanir les diverses difficultés. Cornell [Cornell,1967] introduisit un indice de fiabilité à partir duquel Lind [Lind,1973] montra la possibilité de déduire des coefficients de sécurité. Cette étape favorisa donc l'émergence de la démarche semi-probabiliste de la sécurité des structures.

Dans une démarche probabiliste, la contrainte appliquée S à un élément d'une structure de pont et R, la variable caractéristique de la résistance, sont décrites de manière aléatoire, puisque leurs valeurs sont imparfaitement connues. Si la vérification du critère lié à l'état limite se traduit par l'inégalité,

$$S \leq R \tag{2}$$

la ruine de la pièce étant liée au dépassement de cet état limite, la probabilité P_R de l'événement "R < S" caractérisera le niveau de fiabilité de la pièce vis à vis de l'état limite considéré :

$$P_R = \mathrm{Prob}(R < S) \tag{3}$$

La démarche semi-probabiliste, employée dans de nombreux règlements [DCC,1979], [CEB,1976], [CIRIA,1977], [NKB,1978], [CSA,1981], [Mathieu,1976], remplace schématiquement ce calcul de probabilité par la vérification d'un critère faisant intervenir des valeurs représentatives de R et de S, notées, R_K et S_K, et des coefficients partiels de sécurité, qui peuvent être explicité sous la forme suivante :

$$\gamma_S \, S_K \leq \frac{R_K}{\gamma_R} \tag{4}$$

Les règlements en développement (Eurocode 1-Modèle 2 [Prat,1993], LRFD [Nowak,1995]) ont repris cette démarche de calibration des coefficients de sécurité.

L'approche probabiliste a donc essentiellement servi au développement de la démarche semi-probabiliste. C'est cependant à l'ingénierie pétrolière, avec la construction de plates-formes, que l'on doit les percées les plus brillantes de l'application directe d'une démarche probabiliste. Elles ont concerné l'étude de la fiabilité d'assemblages métalliques tubulaires et la mise en oeuvre de stratégies de maintenance [Madsen,1989], [Madsen,1990]. L'application de la théorie de la fiabilité dans ce domaine a permis de définir une démarche de planning d'inspection et d'évaluation exemplaire. Mais, certaines applications aux ponts routiers se trouvent déjà dans la littérature [Faber,1992], [Mohammadi,1989], [Cremona,1994].

A moins de retourner à Hammourabi, le terme de "sécurité" doit être perçu comme l'expression d'une garantie raisonnable contre la ruine des structures. Le degré de sécurité dépend de la relation entre les actions susceptibles de conduire à la ruine et les caractéristiques de résistance de la structure. Or, ni les unes ni les autres ne sauraient être déterminées avec précision et certitude. Cela signifie que les éléments de base du problème sont aléatoires. Mais, si nous ne pouvons observer que des objets imparfaits et si les expériences ne sauraient être garanties d'une objectivité absolue, devons-nous

perdre tout espoir de découvrir le général par l'observation de cas particuliers et de définir des lois générales valables?

Certainement pas et la théorie de la fiabilité, d'essence probabiliste, est là pour en témoigner. Mais, est-ce la seule?

Nous allons tenter dans ce mémoire de montrer qu'il s'agit d'une approche parmi d'autres (chapitre II), et que, parmi ces autres approches, il existe une autre d'intérêt tout aussi marqué. Cette alternative à ce que nous appellerons la **théorie classique de la fiabilité**, rappelée dans le Chapitre III, repose non pas comme cette dernière sur la théorie des probabilités, mais sur la théorie des possibilités. Cette nouvelle théorie de la fiabilité, développée en détail dans le Chapitre IV, présente de nombreuses similitudes avec la théorie classique de la fiabilité, mais a des caractéristiques de calcul d'une très grande simplicité de mise en oeuvre.

Le mémoire intitulé **"Modèles probabilistes et possibilistes pour la prise en compte de l'incertain dans la sécurité des structures"** est divisée en deux parties constituées de trois chapitres chacune. La première partie traite de rappels, tandis que la seconde partie est consacrée au développement de la théorie possibiliste de la fiabilité et à sa comparaison avec la démarche probabiliste au travers de divers exemples (figure 1).

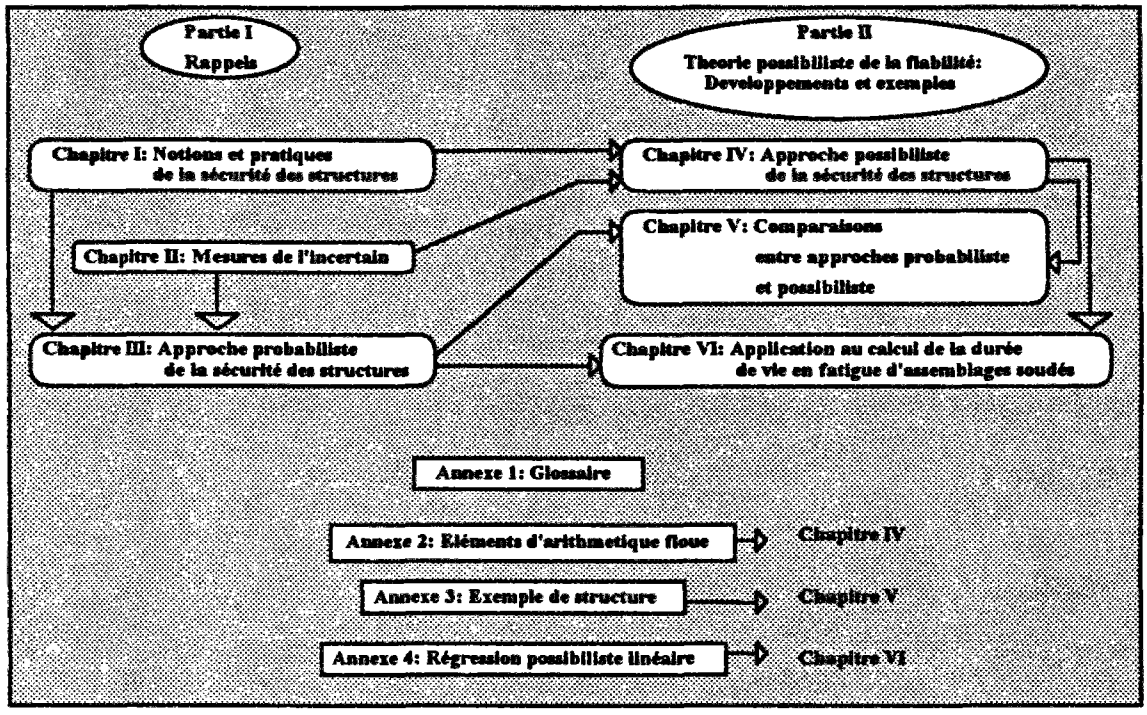


Figure 1: Synoptique du mémoire

Les chapitres I, II et III sont des chapitres de rappels sur la modélisation de l'incertain et sur la théorie probabiliste de la fiabilité. Ce dernier chapitre ne présente que les aspects théoriques les plus importants de la théorie de la fiabilité. Etant un chapitre de rappels, nous avons privilégié la démarche par rapport à la démonstration des divers résultats. Il nous a paru essentiel de la détailler sur le cas simple d'états limites linéaires ; cette méthodologie a en effet constitué le point de départ conceptuel de la théorie possibiliste

de la fiabilité du chapitre IV. Les divers résultats de la théorie probabiliste de la fiabilité sont cependant cités, car comparés dans le chapitre V aux développements du chapitre IV.

Le chapitre V tente de dresser un tableau comparatif des deux approches, tant sur le plan théorique que numérique au travers d'un exemple simple de structure. Le chapitre VI est un chapitre d'application sur un cas concret rencontré dans la construction de ponts métalliques: il s'agit de l'étude de la fiabilité d'assemblages soudés fissurés par fatigue. Le modèle introduit deux variables entachées d'incertitudes et un état limite non linéaire. Une attention particulière a été portée à la modélisation possibiliste des incertitudes, en faisant notamment appel au concept de régression possibiliste linéaire.

PREMIERE

PARTIE :

Expressions habituelles de la fiabilité des structures : Rappels

CHAPITRE I

NOTIONS ET PRATIQUES DE LA SECURITE DES STRUCTURES

La sécurité d'une construction peut se définir comme l'ensemble des marges entre les situations dans lesquelles peut se trouver une construction et celles qui seraient dangereuses pour elle ou ses usagers ou bien qui compromettraient son utilisation normale. Elle n'a alors de sens que dans la mesure où peuvent être définis pour la structure:

- l'ensemble de ses situations normales,
- l'ensemble des situations de danger correspondantes et les gravités de ces dangers en termes d'importance des préjudices,
- les niveaux de confiance de non atteinte des situations de danger, compte tenu des conditions d'assurance de la qualité durant la phase de construction et des conditions d'entretien et de maintenance durant la phase d'exploitation, sachant que ces niveaux de confiance représentent les marges entre les situations normales et les situations dangereuses.

Pour illustrer cette définition, prenons le cas simple d'une barre soumise à un effort axial de traction S et soit R la variable représentative de la résistance de la barre. L'ensemble des situations normales de fonctionnement de cette barre correspond aux cas où l'effort appliqué S reste inférieur à la résistance R. Réciproquement, l'ensemble des situations de danger sont celles où l'effort appliqué S est supérieur ou égal à la résistance R. Le niveau de confiance de non atteinte de ces situations de danger peut se définir comme le risque encouru qu'une situation de la construction se rapproche d'une situation de danger. Ce niveau de confiance (et les gravités des conséquences encourues) est une donnée permettant de qualifier, voire quantifier, la sécurité ou fiabilité d'une structure. Dans le cas présent, le fonctionnement normal de la barre s'exprime par l'inégalité

$$R > S$$

On dit alors que la barre se trouve dans le **domaine de sécurité** (fonctionnement normal). Si l'inégalité précédente n'est pas vérifiée, on dira que la barre se trouve dans le **domaine de défaillance**.

$$S > R$$

Lorsque R = S, on dit que la barre atteint l'**état-limite** de fonctionnement. Nous reviendrons plus loin sur ces notions essentielles dans l'étude de la sécurité des structures et de leurs éléments.

I.1. EXPRESSION HABITUELLE DE LA SECURITE

La démarche traditionnelle de la conception d'une structure peut se résumer en trois étapes-clés [Lemaire et al., 1993] :

1. préciser et évaluer les charges éventuelles,
2. fixer la forme, les dimensions, les matériaux dans une première approximation,
3. vérifier que le comportement estimé de la structure sous ces charges est "satisfaisant" vis à vis de critères prédéfinis.

Ce comportement est défini par des déplacements, des déformations, des contraintes, des efforts,.... La structure sera correctement calculée si les critères fixés sont vérifiés. Si tel n'est pas le cas, on réitère la démarche 2-3. Dans l'ordre logique de la décision, il est d'abord nécessaire de recenser les actions mécaniques auxquelles la structure est soumise (étape 1). Leurs définitions dépendent du cahier des charges fonction de l'usage prévisible et des actions physiques naturelles. L'observation des actions naturelles ainsi que le choix des fonctions d'usage constituent un niveau amont. Il importe alors de représenter les effets mécaniques de ces actions et de ces fonctions. La prise en compte de la sécurité intervient à l'étape 3 et s'effectue selon deux schémas possibles [Lemaire et al., 1993] :

- Vérification des paramètres de la structure par rapport à des données réglementaires considérées comme extrêmes selon les états limites choisis (**Méthodes semi-probabilistes de la sécurité**).
- Calcul probabiliste d'une certaine mesure liée à la "probabilité de défaillance" relative à des états considérés comme critiques choisis (**Méthodes probabilistes de la sécurité**).

Le propos des paragraphes suivants est de présenter succinctement ces deux approches de la sécurité.

I.1.1. Méthodes semi-probabilistes

Les **méthodes semi-probabilistes** dites de niveau 1 ([DCC,1979], [CEB,1976], [CIRIA,1977], [NKB,1978], [CSA,1981], [Mathieu, 1976]), sont les méthodes les plus utilisées. Il s'agit de méthodes qui se résument en deux idées fortes :

- probabiliser tout ce qui peut l'être avec une précision convenable. La méthode d'évaluation d'une variable consiste à déterminer statistiquement une valeur caractéristique et à incorporer dans un coefficient forfaitaire les incertitudes non prises en compte,

- négliger les dispersions de certaines données en utilisant des valeurs déterministes.

Ces méthodes sont appelées semi-probabilistes pour exprimer la coexistence au sein d'un même critère d'état limite, de paramètres dont les valeurs sont statistiquement évaluées et d'autres dont les valeurs sont évaluées de manière déterministes. Les valeurs de ces paramètres ainsi déterminées sont dites **caractéristiques** indépendamment de leur mode d'obtention (déterministe ou probabiliste). Les résistances sont en général définies par des valeurs caractéristiques qui sont des valeurs ayant des probabilités très faibles de ne pas être dépassées. Les actions sont des valeurs caractéristiques estimées ne pas être dépassées plus d'une fois sur 10^n (c'est-à-dire que $P(R<R_k)=P_{5\%}$ et $P(S>S_k)=P_{95\%}$) pour une période d'occurrence dans la vie de la structure.

Cette approche permet une mise en oeuvre de calcul aisée mais conduit à utiliser des coefficients d'incertitude liés au choix déterministe de certains paramètres et aux fractiles retenus pour les autres. Ils doivent aussi couvrir les incertitudes liées à des paramètres mineurs et délaissés au cours de l'étude. Ils sont également calibrés pour ne pas s'éloigner de manière exagérée de dimensionnements réalisés par les méthodes antérieures de conception. Ces coefficients sont appelés **coefficients partiels de sécurité**. Leur vocation essentielle est de couvrir les possibilités d'évolution des paramètres de base dans le sens défavorable et de tenir compte des erreurs liées au modèle de représentation du paramètre et au modèle de calcul des sollicitations à partir de ces paramètres.

Si nous reprenons l'exemple de la barre soumise à un effort axial de traction S et de résistance R, la vérification de la sécurité de cette dernière suivant une démarche semi-probabiliste visera à s'assurer que

$$\gamma_S S_K \leq \frac{R_K}{\gamma_R} \qquad (I.1)$$

où R_K et S_K sont les valeurs caractéristiques et, γ_R et γ_S les coefficients partiels de sécurité.

I.1.2. Méthodes probabilistes de la sécurité

Les coefficients partiels de sécurité sont en fait destinés à couvrir un large ensemble d'incertitudes et peuvent ainsi s'avérer très peu représentatifs du besoin réel d'évaluation

de la sécurité d'une structure particulière. Ils sont sensés tenir compte de l'évolution des matériaux et des sollicitations de manière forfaitaire. Pour des ouvrages exceptionnels ou endommagés, l'évaluation de la fiabilité peut être sur- ou sous-estimée. L'introduction et la prise en compte des incertitudes semblent concourir à répondre à un besoin de rationalisation de l'évaluation de la sécurité. Diverses raisons le motivent:

- on ignore souvent l'évolution des charges dans le temps,
- les propriétés des matériaux sont également susceptibles d'évoluer dans un sens défavorable telle que la corrosion, la perte de durabilité ou la fatigue,
- les éléments réels sont souvent différents des éprouvettes sur lesquelles leurs performances ont été mesurées,
- les études de sensibilité aux erreurs de modélisation du comportement des ouvrages sont généralement omises,
- les malfaçons d'exécution sont malheureusement statistiquement inévitables,
- des sujétions de réalisation découverte au moment de l'exécution des travaux peuvent conduire à des solutions de substitution qui entraînent un comportement d'ensemble de la construction légèrement différent à celui prévu au projet.

La majorité des phénomènes traités en génie civil rejette toute possibilité de fiabilité absolue, car imparfaitement connues. A cette idée doit se substituer la notion de fiabilité optimale qui sous-entend souvent l'optimisation de coûts économiques. Une méthode tenant compte des incertitudes sur les paramètres de calcul apparaît comme un critère d'évaluation réaliste de la sécurité. Pour des structures existantes, cette évaluation de la sécurité nécessite une connaissance parfaite du comportement des structures et de tous les mécanismes de dégradation. Ceci est illusoire et ces incertitudes font qu'une vérification semi-probabiliste peut s'avérer très peu représentative de la résistance totale. Il faut également faire remarquer que les coefficients de sécurité couvrent des incertitudes de mise en oeuvre sur des matériaux récents et donc peuvent être sans rapport avec ceux d'une structure ancienne. Dans un certain sens, il faudrait recalibrer ces coefficients pour réévaluer l'état de sécurité d'une structure ou de certains de ses éléments.

Reprenons l'exemple de la barre soumise à un effort de traction S. Dans une démarche probabiliste, la ruine de cette barre est liée au dépassement de la résistance R. La probabilité P_R de l'événement "R < S" caractérise le niveau de fiabilité :

$$P_R = \mathrm{Prob}(R < S) \qquad (I.2)$$

Le calcul de cette probabilité peut être menée de plusieurs manières. Le calcul peut être direct en faisant appel à une simulation de type Monte-Carlo, ou approché en utilisant les résultats classiques de la théorie de la fiabilité (voir chapitre III). Les **méthodes probabilistes** constituent aujourd'hui une alternative aux approches semi-probabilistes et se divisent en deux catégories, suivant la nature du calcul des probabilités P_R :

- les méthodes "exactes" ou méthodes de niveau 3, issues de simulations numériques au temps de calcul souvent coûteux [Fogli,1982],

- les méthodes de fiabilité au premier ordre ou méthodes de niveau 2, cherchant à approcher la valeur de ces probabilités (chapitre III).

avec pour démarche

- d'identifier l'ensemble des paramètres influençant l'expression du critère d'état limite,

- d'étudier statistiquement la variabilité de chacun de ces paramètres considérés comme souvent stochastiquement indépendants,

- d'en déduire leur fonction de probabilité,

- de calculer la probabilité que le critère d'état-limite ne soit pas satisfait,

- de comparer la probabilité obtenue à une probabilité limite admise au préalable.

Ces méthodes sont généralement regroupées sous le vocable **théorie de la fiabilité**.

Bien qu'extrêmement séduisante, la théorie de la fiabilité est limitée par de nombreux facteurs :

- certaines données sont difficilement mesurables.

- les données statistiques nécessaires sont souvent inexistantes,

- les calculs de probabilité deviennent rapidement insurmontables,

Ces considérations sont déterminantes pour situer ce qu'on peut espérer des limites du probabilisme. Elles impliquent en particulier que les probabilités dont on parle souffrent de n'être que des estimations de fréquences (généralement non observables), basées sur un ensemble évolutif d'informations partielles. Elles résultent également d'hypothèses (choix d'un type de distribution par exemple) qui les rendent conventionnelles. A cause de ces raisons, il est souvent nécessaire, en absence de données suffisantes, de substituer aux probabilités observées à partir des statistiques, des probabilités conventionnelles liées à l'adoption de lois de distribution types (lois de Gumbel, de Weibull, lognormales, exponentielles, normales,...).

I.2. ELEMENTS DE RUPTURE

Considérons à titre d'exemple la poutre de la Figure I.1. Cette barre est soumise à un effort normal et à un moment fléchissant. Elle peut donc défaillir par manque de résistance à l'effort normal, par flambement (déplacement d'amplitude infinie de sa section médiane) ou par manque de résistance au moment de flexion au niveau de l'encastrement. Ces diverses défaillances sont souvent dénommées **modes de défaillances**. Mais, cet exemple montre que la localisation - autant que le critère de

défaillance - est un point important pour correctement définir ce qu'on appellera **élément de rupture**, ou plus simplement **composant**. Cette terminologie est d'ailleurs la plus couramment utilisée.

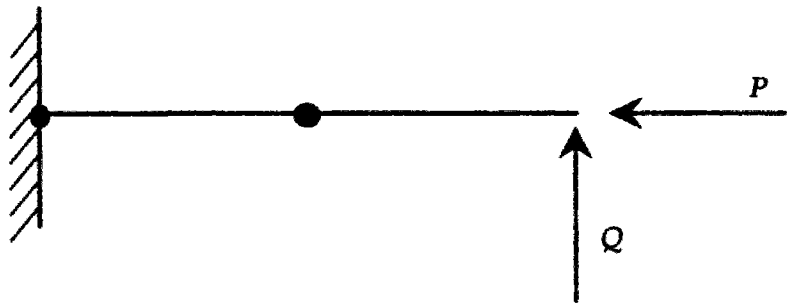


Figure I.1 : Exemples de lieux de défaillance

Un **composant** ou **élément de rupture** est défini par [Rémy, 1991]:

- un élément de structure qui décrit la géométrie et les propriétés mécaniques, c'est-à-dire, la localisation du phénomène physique,
- un ensemble de sollicitations et de résistances,
- un critère de défaillance (ou de ruine) qui décrit le phénomène physique et un modèle liant de manière déterministe les sollicitations et les propriétés de résistance,
- une caractérisation des incertitudes toutes les variables du précédent modèle .

La définition précédente a le mérite de bien distinguer l'élément de rupture de l'élément de structure.

I.3. FONCTIONS D'ETAT LIMITE ET VARIABLES DE BASE

Un élément de rupture implique la définition d'un critère de défaillance classiquement appelé état limite. Cette fonction ou marge contient les variables de base caractérisant les propriétés de l'élément de rupture (résistance) et de son environnement (sollicitation). Si $\underline{Z}$ est le vecteur composé des n variables de base (Z_i), alors l'état limite $g(\underline{Z})$ distingue trois états :

$g(\underline{Z}) > 0$ état de sécurité

$g(\underline{Z}) \leq 0$ état de défaillance

$g(\underline{Z}) = 0$ état limite

Les variables de base définissent un espace de dimension n et la fonction d'état limite décrite une hypersurface de dimension n-1 et divise l'espace en une zone de sécurité D_S et de défaillance D_R. Les variables de base peuvent généralement être réunies en deux

sous ensembles suivant deux types différents par leur rapport à l'élément: les sollicitations S_j et les résistances R_i. Un cas simple d'état limite est celui d'une fonction d'état limite linéaire :

$$g(R , S) = R - S$$

L'état limite inclut les caractéristiques structurales qui assurent la portance des divers chargements (pour une période pré définie). En pratique, ces fonctions d'état font appel à de nombreuses variables, difficiles à appréhender, variant dans le temps et dépendantes entre elles. Dans le cas d'une poutre, diverses fonctions d'état limite peuvent être données pour différentes conditions :

- Dépassement de la capacité portante (moment résistant, effort tranchant résistant),
- Flambement,
- Déformations excessives,
- Vibrations (confort),
- Dégradations (corrosion, fatigue, fissuration).

La défaillance d'un élément de rupture n'implique évidemment pas la défaillance de la structure. La conception traditionnelle vise à s'assurer que les divers états limites sont peu susceptibles d'être dépassés. L'évaluation des structures existantes requiert, quant à elle, une bonne estimation des capacités portantes. L'instrumentation des ouvrages d'art a souvent montré des différences considérables entre la capacité prédite et la capacité observée déterminée par des chargements d'essais. Les facteurs principaux qui expliquent ces écarts sont respectivement le degré d'hyperstaticité, les simplifications de calculs, et l'influence de la combinaison des actions. La **redondance** ou **hyperstaticité interne** est la possibilité pour une structure de fonctionner correctement malgré la ruine d'un de ses éléments. Ceci implique d'analyser les mécanismes de ruine possibles et de vérifier si le report des efforts peut être supporté (étude des chemins de ruine par exemple).

I.4. ACTIONS ET RESISTANCES

En pratique, pour un pont, les actions sont les charges d'exploitation et les charges permanentes. A ces dernières, s'ajoutent des actions particulières comme des poussées de terre, des actions dites de site (vent, neige, séismes), et des actions accidentelles (chocs, explosions, feux, ...). Les charges permanentes admettent des degrés de variation très différents, suivant qu'il s'agit d'éléments préfabriqués ou mis en place, de la nature des superstructures. Des analyses statistiques ont d'ailleurs été menées pour caler des lois de distribution et des valeurs de statistique. Les charges d'exploitation couvrent la gamme d'actions produites par le déplacement des véhicules. Leur effet dépend du poids sur essieux, de la géométrie de roues, de la position sur l'ouvrage, ... Les actions de site (vent, séismes, neige, gel, température, ...) sont en général mal connues.

La modélisation des charges est un point fondamental et diffère largement d'un règlement à un autre. Bien qu'un travail considérable, à travers le monde, ait été effectué pour la modélisation des charges d'exploitation, un effort important reste à accomplir pour la prise en compte des effets dynamiques des charges et la modélisations des actions climatiques. Les nombreuses campagnes de pesage en marche ont largement permis de mieux cerner les caractéristiques de trafic actuel, de même que la construction de grands ponts à haubans, a sensibilisé les ingénieurs aux effets du vent. La démarche la plus aboutie semble être celle menée dans l'offshore où la modélisation des actions climatiques (vent, houle) a été un des points forts des programmes de recherche ([JN94, 1994], [Guedes-Soares, 1991]).

Les variables de résistance des éléments de ponts sont nombreuses. Ce sont les paramètres physiques du matériau, mais aussi les paramètres géométriques de l'élément structurel et, dans certains cas, les forces adjointes telles que la précontrainte. Comme pour les actions, il est souvent difficile de donner une loi de distribution pour les variables de résistance, par manque d'informations. C'est ainsi que l'on doit traiter avec les incertitudes statistiques, dues à des paramètres difficiles à estimer ou à des échantillons peu représentatifs par leur taille. C'est ainsi qu'il est judicieux de probabiliser les statistiques mêmes des variables et de les mettre à jour lorsque l'on dispose d'informations supplémentaires ([Cremona, 1994], [Guedes-Soares, 1991]).

I.5. SYSTEMES

Un **système de rupture** [Rémy, 1991] est par définition un ensemble d'éléments de rupture. Un élément de rupture est défini par son critère d'état limite qui précise le mode de défaillance (flambement, rupture par cisaillement,...). Il est également nécessaire de définir pour un système donné ce que l'on entend par défaillance. Il peut s'agir d'une perte de stabilité, de la défaillance d'un élément important n'entraînant par la "ruine" de la structure, mais son immobilisation,.... Prenons à titre d'exemple la structure décrite par la figure I.2.

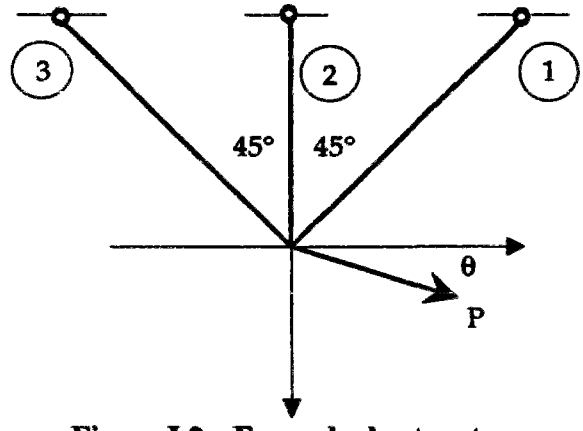


Figure I.2 : Exemple de structure

La défaillance du treillis de la figure I.3 peut être définie, par exemple, de plusieurs manières:

- dès lors qu'un de ses éléments a défailli par excès de compression-traction,

- dès lors que la structure n'est plus stable (plastification de deux barres).

Dans le premier cas, il y a défaillance du treillis dès qu'il y a défaillance d'un des éléments. Relativement à cette définition de la défaillance, cette structure peut être formellement représentée par un système de type "chaîne" où chaque maillon est un élément de rupture, c'est-à-dire une barre (figure I.3).

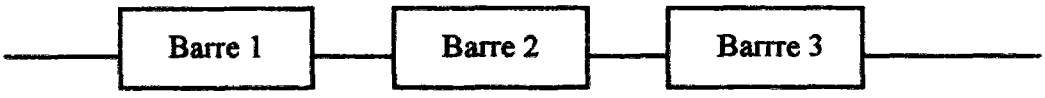


Figure I.3 : Description formelle de la défaillance du treillis par plastification d'une des barres

On dit , dans ce cas, que la structure est formellement décrite en système en série. Un **système dit en série**, est défaillant dès qu'un des éléments de rupture l'est.

Supposons maintenant que la défaillance de la structure corresponde à la plastification de deux barres. Il y a trois configurations possibles:

- défaillance des barres 1 et 2,
- défaillance des barres 1 et 3,
- défaillance des barres 2 et 3.

Considérons, dans un premier temps, la seule mise en plastification des barres 1 et 2. Il est clair que cette plastification n'est pas simultanée, et qu'une des barres peut se plastifier avant l'autre. La défaillance des deux barres peut donc résulter de deux chemins de ruine différents :

- défaillance de la barre 1 puis défaillance de la barre 2,
- défaillance de la barre 2 puis défaillance de la barre 1.

Ainsi la défaillance des barres 1 et 2 peut se décrire formellement par le système en série de la figure I.4.

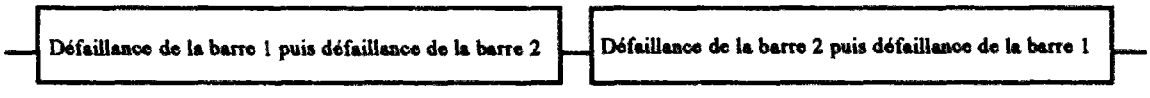


Figure I.4 : Description formelle en série de la défaillance des barres 1 et 2

Etudions plus en détail le premier composant de ce système en série. Ce composant n'est pas à proprement parler, un élément de rupture de la structure. Il exprime la défaillance de la barre 2 sachant que la barre 1 est déjà défaillante. Il peut donc s'exprimer formellement par le système décrit par la figure I.5.

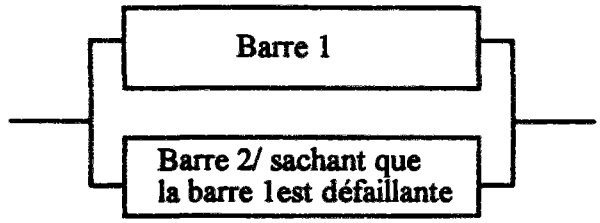
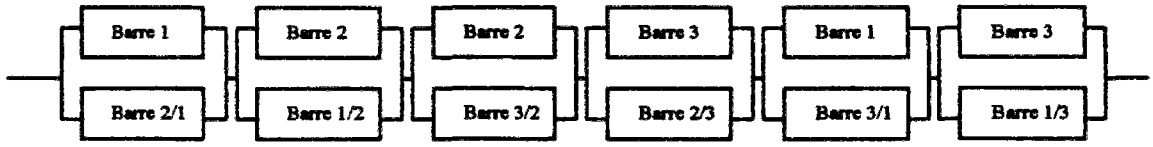


Figure I.5 : Description formelle de la défaillance de la barre 1 suivie de celle de la barre 2

Un tel système est dit en parallèle. Un **système en parallèle** est un système qui fonctionne, tant qu'un de ses composants fonctionne.

En généralisant l'analyse précédente, à toutes les paires de barres, on obtient la description formelle en système de la défaillance du treillis par plastification de deux barres (figure I.6)



Barre i/j = Défaillance de la barre i sachant que la barre j est défaillante

Figure.I.6 : Représentation formelle en système de l'exemple du treillis pour la défaillance par plastification de deux barres

I.6. CONCLUSIONS

Ce chapitre a cherché à introduire les notions de base qui se cachent derrière le concept de sécurité de structure. Les définitions qui y sont données, n'ont pas la prétention d'exprimer toutes les subtilités du problème. Il est vrai que tout autre formalisme y est opposable. Nous avons cependant tenté de résumer et d'unifier diverses expressions de la sécurité et de la fiabilité telles que l'on peut la trouver dans certaines références bibliographiques citées. Il était essentiel d'introduire de la meilleure façon possible, ces différentes notions "philosophiques" puisqu'elles servent de base aux développements du chapitre IV et aux rappels du chapitre III.

CHAPITRE II

MESURES DE L'INCERTAIN

L'objet de ce chapitre est d'aborder mathématiquement les diverses façons de modéliser l'incertain. On en déduit ainsi autant de concepts de sécurité des structures, dont les chapitres III et IV développent des aspects particuliers et le chapitre V une méthodologie de comparaison.

II.1. IMPRECISION ET INCERTITUDE

Les incertitudes sur les modèles théoriques et sur les variables de ces modèles décrivent le caractère imparfait des informations dont l'ingénieur dispose sur les phénomènes étudiés. Il peut s'agir d'un manque de précision des modèles ou d'un manque de données suffisantes pour bien appréhender le comportement du système étudié. D'un point de vue pratique, un élément d'information est défini par un quadruplet [Arago 14, 1994] :

(attribut, objet, valeur, confiance)

L'**objet** est le paramètre ou phénomène observé. L'**attribut** est une fonction qui affecte une ou plusieurs **valeurs** à l'objet et la **confiance** est une indication sur la **fiabilité** de l'élément d'information. Dans ce contexte, on peut aisément distinguer le concept d'**imprécision** de celui d'**incertitude**. L'imprécis concerne le contenu de l'information, c'est-à-dire la composante "valeur" du quadruplet. L'incertain est par contre relatif à la conformité de cette information à la réalité, c'est-à-dire la composante "confiance" du quadruplet. On juge l'incertitude au moyen de qualificatifs tels que "probable", "possible", "nécessaire". D'autres qualificatifs renvoient à l'imprécis, comme "vague", "flou", "général" [Dubois & Prade, 1988]. Pour bien appréhender la démarche choisie, il est souhaitable de donner un exemple d'information incertaine et un exemple d'information imprécise :

information incertaine :

Il est possible que le moment fléchissant de cette section soit supérieur à 1MN.m

Attribut:	moment fléchissant
Objet:	section
Valeur:	supérieur à 1 MN.m
Confiance:	possible

information imprécise :

Le moment fléchissant de cette section est largement supérieur à 1 MN.m

Attribut:	moment fléchissant
Objet:	section
Valeur:	largement supérieur à 1MN.m
Confiance:	1(le moment est effectivement plus grand que 1MN.m)

Comme illustrée par l'exemple, l'imprécision réside dans l'absence d'un contour bien délimité des valeurs affectées aux objets qu'elle concerne. L'incertitude concerne une ou plusieurs valeurs précises mais connues avec un certain niveau de confiance. Plus généralement, une information peut être imprécise et incertaine comme le montre l'exemple suivant :

Information imprécise et incertaine :

Il est possible que le moment fléchissant de cette section soit largement supérieur à 1MN.m

Attribut:	moment fléchissant
Objet:	section
Valeur:	largement supérieur à 1MN.m
Confiance:	possible

Dans cette thèse, notre attention se portera *uniquement* sur le caractère incertain des informations. Cette courte introduction sur les notions d'imprécision et d'incertitude s'avère nécessaire pour éviter toute confusion sur la démarche adoptée dans les travaux qui vont être présentés dans les chapitres suivants. De nombreux concepts -en particulier la théorie des possibilités- ont été initialement élaborés pour appréhender la confiance à apporter sur des informations imprécises, voire imprécises et incertaines. Rares sont les applications au traitement d'informations seulement incertaines. Quelques dénominations relatives à la théorie des sous-ensembles flous seront gardées. Il s'agit d'une nécessité de cohérence avec la littérature sur le sujet. Mais, le lecteur doit rester vigilant ; bien que faisant appel à des notions ou des termes traitant par excellence de l'incomplétude ou de l'insuffisance d'informations (imprécision), leur utilisation dans cette thèse sera limitée au problème de la modélisation de l'incohérence (incertitude). Ces informations produites par l'incertitude sont notamment les valeurs des variables introduites dans les calculs de structures, qu'il s'agisse de résistances ou d'actions/sollicitations. Faisons cependant remarquer que l'imprécision peut dans certains cas se transformer en incertitude. Ainsi, la proposition

Le moment fléchissant de cette section est très élevé.

peut, pour l'individu qui exprime cette proposition, implicitement signifier

Le moment fléchissant de cette section est compris entre 5 MN.m et 10 MN.m.

L'imprécision est traduite en terme d'intervalle, c'est-à-dire d'incertitude subjective puisqu'un autre expert pourra donner un sens différent à *très élevé*.

Nous avons indiqué précédemment que l'incertitude d'une information était exprimée au moyen de termes tels que "probable", "possible", "nécessaire". Dans ce chapitre, nous allons essayer de donner un sens précis à ces qualificatifs. Bien que chacun sera largement développé dans les chapitres suivants, il est cependant essentiel de les distinguer dès maintenant pour bien comprendre la démarche suivie.

II.2 EVENEMENTS,TRIBUS

Pour étudier de manière significative un phénomène variable ou incertain, il faut recenser l'ensemble Ω de toutes les valeurs de l'attribut, c'est-à-dire les **résultats** ou **états**. L'ensemble de ces valeurs peut être ou non dénombrable. On appellera **événement** la réalisation d'un ou de plusieurs résultats [Dubois & Prade, 1988].

Nous allons dans la section suivante nous intéresser à la graduation des qualificatifs de probable, possible et nécessaire. Sans anticiper sur la démarche, on peut dire que cela sous-entend l'introduction de fonctions qui quantifieront le probable, le possible et le nécessaire des événements. Pour cela, il est important de définir le référentiel construit sur Ω de l'ensemble des événements.

Ce référentiel est une famille T de parties de Ω. T est appelée **tribu** et doit vérifier les conditions:

$$\varnothing, \Omega \in T \qquad \text{(II.1)}$$

$$\forall A \in T, \overline{A} \in T \text{ (événement complémentaire)} \qquad \text{(II.2)}$$

$$\forall \{A_n\}_{n\in N} \text{ suite d'événements de T, } \bigcup_{n\in N} A_n \in T \qquad \text{(II.3)}$$

A titre d'exemple, citons l'ensemble des parties de Ω notée $P(\Omega)$ qui définit une tribu. La définition du référentiel T est importante car elle permet de construire des mesures de confiance de chaque événement. Mathématiquement, T est une σ-algèbre, c'est-à-dire une famille stable par passage aux complémentaires, unions et intersections dénombrables.

II.3. DEFINITIONS DES PRE-MESURES DE CONFIANCE

Considérons T une tribu événements. On souhaite évaluer la confiance que l'on peut avoir relativement à l'apparition d'un événement A. Par construction, Ω est un événement

toujours certain puisque tous les événements y sont inclus: son occurrence est toujours vraie. $\varnothing$ est donc un événement toujours impossible [Dubois & Prade, 1988]. Par convention, la pré-mesure de confiance que l'on veut construire est normalisée à 1 pour un événement certain et à 0 pour un événement impossible. Il est alors immédiat que la confiance d'un événement quelconque sera comprise entre 0 et 1. Cette **pré-mesure de confiance** dénotée m(.) est alors définie comme une application de T dans l'intervalle [0,1] :

$$\begin{array}{lccc} m: & T & \rightarrow & [0,1] \\ & A & \rightarrow & m(A) \end{array} \qquad \text{(II.4)}$$

Pour assurer un minimum de cohérence à la pré-mesure m(.), on doit fixer l'**axiome de monotonie** au sens de l'inclusion

$$A \subseteq B \quad \Rightarrow \quad m(A) \leq m(B) \qquad \text{(II.5)}$$

Il exprime que, si l'événement A implique l'événement B, on a toujours au moins autant de confiance en B qu'en A.

Quand le référentiel T est infini, on peut également introduire les **axiomes de continuité** qui s'écrivent :

$\forall \{A_n\}_{n \in N}$ suite d'événements emboîtés de T de type

$A_0 \subseteq \ldots\ldots \subseteq A_n \subseteq \ldots\ldots$ ou $A_0 \supseteq \ldots\ldots \supseteq A_n \supseteq \ldots\ldots$

(suite croissante) (suite décroissante)

$$\lim_{n \to \infty} m(A_n) = m(\lim_{n \to \infty} A_n) \qquad \text{(II.6)}$$

Ces axiomes ne sont pas nécessaires dans la construction d'une pré-mesure de confiance. Ainsi les mesures de possibilités que nous allons définir ultérieurement, ne les vérifient pas en général. On appellera enfin (Ω, T, m) **espace de confiance**.

Une pré-mesure de confiance est donc définie par les axiomes (II.4) et (II.5). De telles fonctions d'ensemble ont été suggérées par Sugeno [Sugeno, 1974] pour évaluer l'incertitude sous le nom de mesures "floues". Kaufmann [Kaufmann, 1973] a suggéré le terme de valuation. A la suite de Prade et Dubois [Prade & Dubois, 1988], nous retiendrons le terme de pré-mesure de confiance tout en rappelant qu'il ne s'agit pas de mesures au sens mathématique classique puisque **l'axiome d'additivité** pour des événements disjoints ($A \cap B = \varnothing$) n'est pas explicitement émis (d'où l'ajout du préfixe *pré-*). Cet axiome stipule :

$$\forall A, B \in T: \quad m(A \cup B) = m(A) + m(B) \qquad \text{(II.7)}$$

Si l'on ajoute cet axiome aux précédents, on retrouve ainsi les **mesures classiques de probabilité**.

II.4. VARIABLES INCERTAINES

Considérons une application X définie sur un espace de confiance (Ω,T,m). X est une application de Ω dans $\Re$:

$$\begin{array}{lccc} X: & \Omega & \rightarrow & \Re \\ & \omega & \rightarrow & X(\omega) \end{array} \qquad \text{(II.8)}$$

On suppose que pour toute partie borélienne J de $\Re$, $X^{-1}(J)$ est un élément de la tribu T. X est alors appelée **variable incertaine**.

La loi de X est la pré-mesure m_X sur $\Re$ définie par

$$m_X(J) = m(\{\omega \in \Omega / X(\omega) \in J\}) \qquad \text{(II.9)}$$

pour toute partie borélienne J de $\Re$.

Remarque
Par simplicité, on écrit souvent l'ensemble $\{\omega \in \Omega / X(\omega) \in J\}$: $X \in J$.

II.5. PRINCIPE D'EXTENSION

Une question qui se pose naturellement est: étant donné plusieurs variables incertaines séparables X,Y,Z,..., comment calcule-t-on la variable incertaine f(X,Y,Z,...) où f est une fonction réelle donnée?

Considérons pour cela un espace de confiance (Ω,T,m), un ensemble Ω' associé à une tribu T', et une application f de Ω dans Ω'. Alors, à partir de l'image réciproque d'un élément B de Ω', définie par

$$f^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega, f(\omega) \in B\} \qquad \text{(II.10)}$$

(sous la contrainte que f vérifie que $f^{-1}(B)$ est un élément de la tribu T pour tout élément B de la tribu T'), on peut construire une pré-mesure m_f déduite de m comme suit:

$$\forall A \in T', \quad m_f(A) = m(f^{-1}(A)) \qquad \text{(II.11)}$$

On vérifie aisément que m_f est une pré-mesure de confiance sur (Ω',T'). Ce principe est dénommé **principe d'extension**. Il sera d'une très grande utilité dans le chapitre IV où les mesures de confiance introduites sont des mesures de possibilité.

II.6. MESURE DE LA FIABILITE

Les pré-mesures de confiance permettent de caractériser les incertitudes attachées aux variables intervenant dans les états limites. Elles permettent aussi de définir des

évaluateurs des risques de dépassement de ces états limites. L'état limite M=g(Z) est en effet une fonction de variables incertaines et est donc lui-même une variable incertaine. On définit alors la **mesure de la fiabilité** d'un élément de rupture par la mesure de l'événement

$$m(\, g(Z) \leq 0) \qquad \text{(II.12)}$$

Dans le cas où m(.) est une mesure de probabilité (axiome d'additivité), on reconnaît l'approche classique de la fiabilité élaborée à partir de la théorie des probabilités (chapitre III). Le concept de mesures de confiance permet d'envisager des théories diverses de la fiabilité. Ceci est possible à condition de savoir construire des estimateurs des lois pour les variables incertaines. Aussi, nous nous limiterons à étudier quelques pré-mesures particulières: les mesures de possibilités, de nécessité et de probabilité.

La section suivante est consacrée à l'étude des mesures de possibilité et de nécessité.

II.7. MESURES DE POSSIBILITE ET DE NECESSITE

Nous avons précédemment vu que les mesures de probabilité étaient des pré-mesures particulières de confiance auxquelles on ajoutait l'axiome d'additivité. Cependant, d'autres pré-mesures de confiance jouent un rôle particulier important, car représentant des cas extrêmes : les **mesures de possibilité** et **de nécessité**.

L'axiome de monotonie entraîne des inégalités directes sur la pré-mesure de confiance des unions (disjonctions d'événements) et des intersections (conjonctions d'événements):

$$\forall\, A, B \in T : \; m(A \cup B) \geq \max(\, m(A), m(B)\,) \qquad \text{(II.13)}$$

$$\forall\, A, B \in T : \; m(A \cap B) \leq \min(\, m(A), m(B)\,) \qquad \text{(II.14)}$$

On appelle **mesures de possibilité,** les fonctions m, notées Π, telles que

$$\Pi(A \cup B) = \max(\, \Pi(A), \Pi(B)\,) \qquad \text{(II.15)}$$

et on appelle **mesures de nécessité**, les fonctions m, notées N, telles que

$$N(A \cap B) = \min(\, N(A), N(B)\,) \qquad \text{(II.16)}$$

Les pré-mesures N et Π ne sont évidemment pas des mesures exactes puisque l'axiome d'additivité n'est pas imposé à leur construction. Néanmoins, et malgré les confusions éventuelles, nous appellerons ces pré-mesures des mesures par cohérence avec la littérature existante sur le sujet.

Remarquons que pour les mesures de possibilité, il n'est pas nécessaire de supposer A et B disjoints. Il est facile de vérifier que si (II.15) est vrai pour A et B disjoints, (II.15) l'est aussi pour toute paire d'événements A et B [Dubois & Prade ,1980], [Zadeh, 1965].

On peut vérifier par ailleurs que si A et $\overline{A}$ sont deux événements complémentaires, alors on a l'égalité :

$$\max(\Pi(A), \Pi(\overline{A})) = 1$$

Ceci s'interprète comme le fait que de deux événements contraires, l'un au moins est complètement possible; de plus lorsqu'un événement est jugé possible, cela n'interdit pas à l'événement contraire de l'être tout autant! L'axiome (II.15) est tout à fait compatible avec l'idée physique de possibilité: pour réaliser l'un ou l'autre de deux événements A et B, il suffit de réaliser le plus facile des deux. Nous verrons que pour l'étude de la fiabilité des systèmes, ces résultats traduisent des intuitions très physiques de la confiance.

On vérifie aussi que si on considère un événement A et son contraire $\overline{A}$, alors on a :

$$\min(N(A), N(\overline{A})) = 0 \qquad \text{(II.17)}$$

Ceci exclut que deux événements contraires puissent être nécessaires simultanément.

II.7.1. Relation entre mesures de possibilité et de nécessité

D'une mesure de possibilité, on construit aisément une mesure de nécessité et réciproquement. Il suffit de prendre:

$$\forall A \subseteq \Omega \qquad N(A) = 1 - \Pi(\overline{A}) \qquad \text{(II.18)}$$

$$\forall A \subseteq \Omega \qquad \Pi(A) = 1 - N(\overline{A}) \qquad \text{(II.19)}$$

On retrouve bien la notion de **dualité** qui indique qu'un événement est nécessaire lorsque son contraire est impossible.

Enfin, d'après (II.18) et de (II.17), on tire :

$$\forall A \subseteq \Omega \qquad N(A) \leq \Pi(A) \qquad \text{(II.20)}$$

ce qui est aussi conforme à l'intuition qu'un événement est possible avant d'être nécessaire.

Nous étudierons dans le Chapitre IV, les moyens théoriques et pratiques pour construire des mesures de possibilité et de nécessité.

II.7.2. Distributions de possibilité et de nécessité

Si l'on admet que l'axiome (II.15) s'étend à des unions infinies d'événements [Nguyen, 1979], on démontre qu'il existe une **distribution de possibilité** π qui vérifie

$$\pi : \quad \Omega \rightarrow [0,1]$$

$$\omega \rightarrow \pi(\omega)$$

$$\forall A \subseteq \Omega,\ \Pi(A) = \sup \{ \pi(\omega) / \omega \in A \} \qquad (II.21)$$

Similairement, une distribution de nécessité peut être construite si l'axiome (II.16) s'étend à des intersections infinies d'événements.

II.7.3. Mesures de possibilité et de probabilité

Il y a deux façons principales d'envisager la théorie des possibilités par rapport à la théorie des probabilités. Si l'on s'appuie sur la différence entre l'ordinal et le numérique [Arago, 1994], alors la théorie des probabilités est la théorie **additive** de l'incertain tandis que la théorie des possibilités est la théorie **ordinale** de l'incertain. Il n'y a alors pas vraiment de relation formelle à rechercher entre ces deux théories qui reposent sur des hypothèses de modélisations différentes.

Un autre sens peut cependant être donné en plongeant la théorie des possibilités dans un cadre probabiliste, en considérant que les degrés de possibilité et de nécessité encadrent une valeur mal connue de probabilité. Les degrés de possibilités sont vues comme de vrais nombres et on est amené à considérer une distribution de possibilité comme équivalente à une famille de probabilité, à savoir $P(\pi)$, des mesures de probabilité P telle que

$$\forall A \in T,\ \Pi(A) \geq P(A) \qquad (II.22)$$

Cette hypothèse revient à formaliser un principe de cohérence entre probabilité et possibilité suggéré par Zadeh, qui énonce qu'un événement est possible avant d'être probable. Et de fait, si on recalcule les bornes supérieure et inférieure de la probabilité P(A) induites par la famille $P(\pi)$ équivalente à la distribution π, on trouve bien que ces bornes coïncident avec $\Pi(A)$ et N(A) respectivement. Néanmoins, ceci n'est pas vrai si on part d'une famille quelconque de mesures de probabilité. Les bornes induites, notée $P_*(A)$ et $P^*(A)$ continuent à vérifier la condition de dualité

$$P_*(A) = 1 - P^*(\overline{A}) \qquad (II.23)$$

mais ne sont plus décomposables pour l'intersection, ni pour l'union respectivement. P_* et P^* peuvent donc être vues comme des mesures de nécessité et de possibilité généralisées, d'une utilisation bien plus difficile que les mesures N et Π, qui en sont un cas particuliers. Cette notion de probabilités hautes et basses a été introduite par Dempster en 1967 [Dempster, 1967] et établie de manière rigoureuse par Shafer [Shafer, 1976] dans sa théorie de l'évidence. Dans cette théorie, Shafer introduit deux mesures particulières dénommées degré de croyance Bel(.) et dégré de plausibilité Pl(.). Sans entrer dans le détail de cette théorie, il est intéressant de signaler que ces deux mesures vérifient le principe de dualité (II.23), et peuvent constituer respectivement des probabilités hautes et basses. Au travers de la construction de ces mesures effectuée par le choix d'une famille de sous-ensemble de Ω, les mesures de probabilité et de possibilité deviennent des cas particuliers des mesures de croyance de Shafer.

II.7.4. Méthodes de construction des distributions de possibilité

Diverses méthodes de construction de distributions de possibilité peuvent être envisagée. La plupart font néanmoins appel aux données statistiques, ce qui peut fausser toute comparaison lorsqu'on désire confronter des résultats probabilistes avec des résultats possibilistes. Elles conduisent notamment à la vérification systématique de l'inégalité

$$\forall A \in T, \qquad P(A) \leq \Pi(A) \tag{II.24}$$

a) Première construction à partir d'histogrammes

Si l'on dispose d'un histogramme concernant une variable aléatoire étudiée, il suffit de le renormaliser en donnant au degré de possibilité de 1 à la classe de valeur maximale. Soit $(p(x_i))_{1 \leq i \leq n}$ l'histogramme d'une variable X ; la distribution de possibilité π_X s'écrit :

$$\pi_X(x_i) = \frac{p(x_i)}{\max\limits_{1 \leq i \leq n} (p(x_i))} \tag{II.25}$$

Ce type de construction a été utilisé dans le chapitre V pour la première construction des distributions de possibilité des variables du treillis. Elle vérifie l'inégalité :

$$\forall A \in T, \qquad P(A) \leq \Pi(A)$$

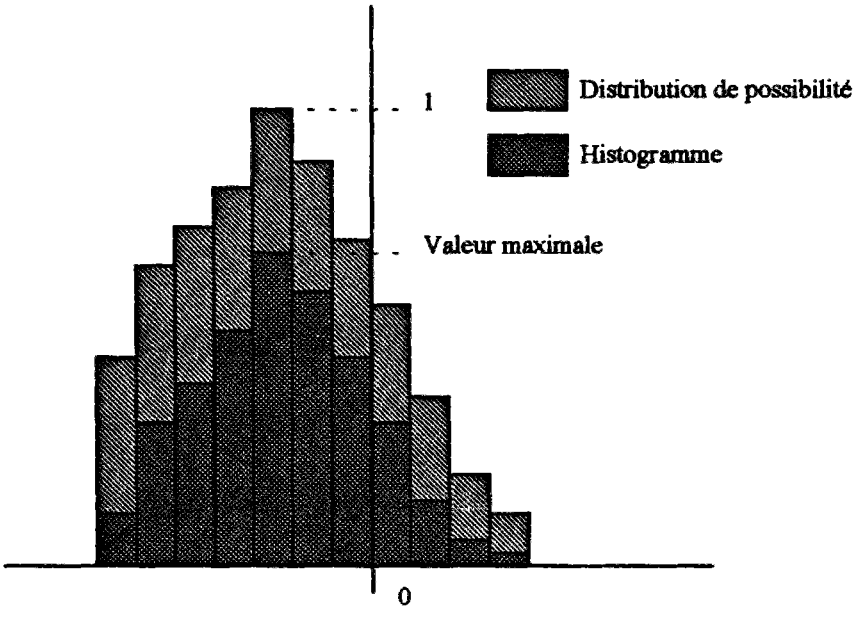


Figure II.1 : Première construction d'une distribution de possibilité à partir d'un histogramme

b) Deuxième construction à partir d'histogrammes

Si l'on ordonne les n classes de l'histogramme de la variable X comme suit

$$p(x_1) \geq p(x_2) \geq \ldots \geq p(x_n) \qquad \text{(II.26)}$$

alors la fonction m(.) définie par

$$\pi(x_i) = \sum_{j=1}^{n} \min(p(x_i),\ p(x_j)) \qquad \text{(II.27)}$$

est une distribution de possibilité π_X pour la variable X. Elle respecte la condition de cohérence d'inégalités entre la probabilité et la possibilité

$$\forall A, \quad P(A) \leq \Pi(A)$$

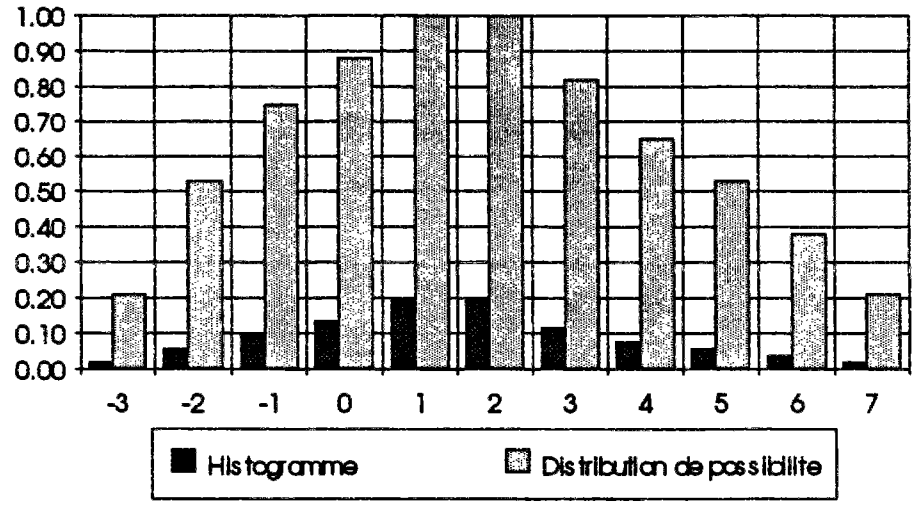


Figure II.2 : Exemple de construction d'une distribution de possibilité à partir d'un histogramme ordonné

c) Construction d'une distribution triangulaire à partir d'une gaussienne

Soit X une variable gaussienne de moyenne m et d'écart-type σ. On retient pour valeur modale la moyenne m de X. Les branches croissante et décroissante (linéaires par hypothèse) sont calibrées de telle façon que le support corresponde à une probabilité d'occurrence de μ%. La figure II.3 illustre la démarche adoptée.

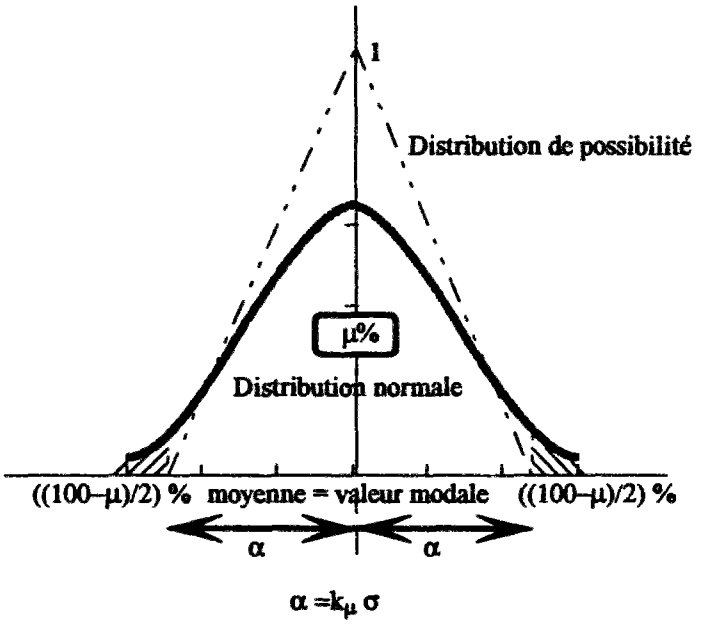


Figure II.3 : Distribution possibiliste triangulaire construite à partir d'une variable gaussienne

L'étalement (gauche et droit) α est calculé à partir du fractile inférieur à $\left(\frac{100-\mu}{2}\right)\%$:

$$\alpha = k_\mu \sigma$$

avec

$$k_\mu = \Phi^{-1}\left(\frac{100-\mu}{2}\%\right) \quad \text{si } k_\mu \leq 0 \qquad \text{(II.28)}$$

$$k_\mu = 1-\Phi^{-1}\left(\frac{100-\mu}{2}\%\right) \quad \text{si non}$$

Cette méthode de construction a été utilisée dans les chapitres V et VI.

d) Construction d'une distribution triangulaire à des données expérimentales

Soit $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ des données relatives à une variable X. Calculons la moyenne de ces données

$$m_X = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad \text{(II.29)}$$

Classons les données $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ en deux groupes suivant qu'elles sont supérieures ou inférieures à cette moyenne de X:

$$G_1 = \{x_i, i = 1,\ldots,n / x_i < m_X\}$$
$$G_2 = \{x_i, i = 1,\ldots,n / x_i > m_X\} \qquad \text{(II.30)}$$

On choisit pour valeur modale la moyenne m_X et on attribue le degré de possibilité de 0,5 aux moyennes des groupes G_1 et G_2 :

$$\begin{cases} \pi_X(m_g) = 0,5 \\ \pi_X(m_d) = 0,5 \end{cases}$$

avec (II.31)

$$m_g = \frac{1}{\text{card}(G_1)} \sum_{x_i \in G_1} x_i \quad m_d = \frac{1}{\text{card}(G_2)} \sum_{x_i \in G_2} x_i$$

La distribution de possibilité de X s'écrit donc :

$$\pi_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \le m_X - \alpha_X \\ 1 - \dfrac{m_X - x}{\alpha_X} & \text{si } m_X - \alpha_X \le x \le m_X \\ 1 & \text{si } x = m_X \\ 1 - \dfrac{x - m_X}{\beta_X} & \text{si } m_X \le x \le m_X + \beta_X \\ 0 & \text{si } x \ge m_X + \beta_X \end{cases}$$

avec

$$\alpha_X = 2(m_X - m_g)$$
$$\beta_X = 2(-m_X + m_d) \qquad \text{(II.32)}$$

Cette méthode de construction est utilisée dans le chapitre VI.

II.7.5. Mesure de possibilité et sous-ensembles flous

Les mesures de possibilité, telles qu'elles ont été décrites dans les sections précédentes, font abstraction de tout concept de la théorie des sous-ensembles flous.

Un sous-ensemble flou A, suivant la définition de Zadeh [Zadeh, 1965], est équivalent à la donnée du référentiel Ω et d'une application μ_A de Ω dans [0,1]. $\mu_A(\omega)$ pour $\omega \in \Omega$ est interprété comme le degré d'appartenance de ω au sous-ensemble flou A. μ_A est dénommée **fonction d'appartenance**. Remarquons, que si l'intervalle [0,1] est remplacé par le doublet {0,1}, μ_A est la fonction caractéristique définissant un sous-ensemble classique (ou net) de Ω.

Comme il est naturel de chercher des expressions assemblistes usuelles pour décrire A [Dubois et Prade, 1988], définissons l'ensemble

$$A_\alpha = \{ \omega \in \Omega / \mu_A(\omega) \geq \alpha \}$$

A_α est appelé **coupe de niveau** α, ou plus simplement **α- coupe**. Cette notion sera utilisée dans le chapitre IV. La famille $C(A) = \{ A_\alpha / \alpha \in]0,1] \}$ est une famille monotone en fonction de α ; en effet,

$$\alpha \leq \alpha' \quad \Rightarrow \quad A_\alpha \supseteq A_{\alpha'} \qquad \text{(II.33)}$$

Cette famille constitue une représentation du sous-ensemble flou A au moyen d'ensembles classiques puisqu'on a [Zadeh, 1971]

$$\forall \omega \in \Omega, \ \mu_A(\omega) = \sup \{ \alpha / \omega \in A_\alpha \} \qquad \text{(II.34)}$$

Inversement, on peut montrer qu'une famille infinie et monotone d'ensembles classiques affectés de poids α_i définit un ensemble flou [Ralescu, 1979]. Ce dernier résultat est très important, puisque c'est lui qui va permettre de raccrocher la mesure de confiance possibiliste à la théorie des sous-ensembles flous.

Pour cela, prenons une mesure de possibilité Π et sa distribution de possibilité π. Considérons le sous-ensemble classique

$$B_\alpha = \{ \omega \in \Omega / \Pi(\{\omega\}) = \pi(\omega) \geq \alpha \} \qquad \text{(II.35)}$$

La famille $C = \{ B_\alpha / \alpha \in]0,1] \}$ définit une famille infinie monotone, puisqu'elle vérifie la condition (II.33). Elle représente donc un sous-ensemble flou B dont la fonction d'appartenance est définie par

$$\begin{aligned} \forall \omega \in \Omega, \ \mu_B(\omega) &= \sup \{ \alpha / \omega \in B_\alpha \} \qquad \text{(II.36)} \\ &= \Pi(\{\omega\}) = \pi(\omega) \end{aligned}$$

L'ensemble flou B est donc la "trace" de la mesure de possibilité Π sur les singletons de Ω. La figure II.4 illustre ces diverses notions.

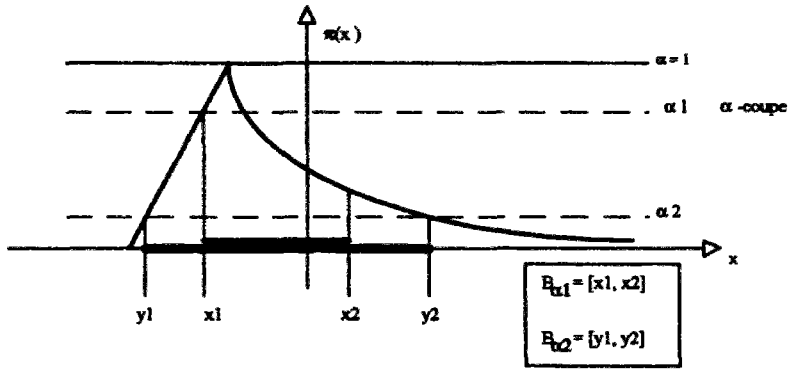


Figure II.4 : Illustration d'une α-coupe

L'intérêt de relier mesures de confiance possibilistes et théorie des sous-ensembles flous réside dans l'opportunité de transférer des résultats de la théorie des sous-ensembles flous vers la théorie des possibilités. C'est ainsi que les opérations assemblistes sur les ensembles flous se traduiront en opérations arithmétiques sur leurs fonctions d'appartenance et donc sur les mesures de possibilités. C'est ainsi que les propositions données dans le chapitre IV pour les opérations arithmétiques entre mesures de possibilité sont directement issues des principes de la théorie des sous-ensembles flous. Bien que la présentation qui en est faite au chapitre IV, ne fait pas explicitement appel à la théorie des sous-ensembles flous, ne pas signaler la dualité entre les deux théories serait occulter un grand nombre de principes à la source de la théorie des possibilités.

II.7.6. Variables incertaines dans le cadre possibiliste

Dans le cas où m(.) est une mesure de probabilité, on reconnaît dans la définition de variables incertaines, le concept de **variable aléatoire**. Pour le cas où m(.) est une mesure de possibilité, la notion de variable incertaine se confond avec celle de **quantité floue**. Cette dernière notion sera précisée dans le chapitre IV.

Pour une quantité floue X, la notion de distribution de possibilité peut se généraliser.La loi Π_X de X est en effet construite à partir d'une mesure de possibilité Π. On définit la distribution de possibilité π_X de X par

$$\pi_X(x) = \pi(\omega)$$

II.7.7. Mesures de la fiabilité

Pour le cas particulier des mesures de possibilité, la fiabilité d'un élément de rupture (notion généralisable aux systèmes) sera évaluée par

$$\Pi_R(g(Z) \leq 0) \qquad \text{(II.37i)}$$

Cette mesure sera appelée **possibilité de défaillance**

Cette définition ne s'applique pas aux mesures de nécessité où l'on préférera "mesurer" la nécessité de sécurité par

$$N(g(Z) \geq 0) \qquad \text{(II.37ii)}$$

II.8. VARIABLES INDEPENDANTES ET NON LIEES

Soit un espace de confiance (Ω,T,P) où $P(.)$ est une mesure de probabilité. Deux variables aléatoires X_1 et X_2 sont dites indépendantes en théorie des probabilités si et seulement si, pour tous les choix J_1et J_2 de boréliens de $\Re$:

$$P(X_1 \in J_1, X_2 \in J_2) = P(X_1 \in J_1).P(X_2 \in J_2) \qquad \text{(II.38)}$$

L'équivalent existe pour les mesures de possibilités Π. Deux quantités floues sont dites non liées si, pour tous les choix J_1et J_2 de boréliens de $\Re$:

$$\pi(X_1 \in J_1, X_2 \in J_2) = \min(\pi(X_1 \in J_1), \pi(, X_2 \in J_2)) \qquad \text{(II.39)}$$

On regroupera sous le terme de **variables séparables**, les notions de variables non liés et indépendantes.

II.9. CONCLUSIONS

Les diverses notions introduites dans ce chapitre montrent que le formalisme de la fiabilité des structures est très large, puisqu'il est possible de construire autant de théorie de la fiabilité, qu'il est possible de définir des mesures de confiance. L'utilisation d'une mesure de probabilité conduit à la théorie classique de la fiabilité dont le formalisme et les techniques seront explicités dans le chapitre suivant. Ce qui paraît intéressant d'aborder, c'est l'éventualité de développer un formalisme identique pour chaque pré-mesure de confiance. Ce problème est assez complexe pour l'avoir laissé de coté dans cette thèse, où nous avons axé notre attention sur une autre pré-mesure de confiance: la mesure de possibilité (chapitre IV). Nous avons également tenté de formuler de manière générale différentes notions comme le principe d'extension ou le concept de variables incertaines. Cet excès de formalisme trouve son origine dans la volonté de rester dans un cadre général d'expression de la fiabilité, bien que seules deux mesures soient utilisées dans les chapitres suivants. Cette généralisation pourra servir de base au développement ultérieur d'autres théories de la fiabilité.

CHAPITRE III

APPROCHE PROBABILISTE DE LA SECURITE DES STRUCTURES

III.1. THEORIE DE LA FIABILITE

Une approche probabiliste de la sécurité des structures est en fait très applicable en pratique. Mais, à cause des difficultés de modélisation probabilistes et mécaniques, et en absence d'informations statistiques suffisantes, il n'est en général pas possible de fournir des descriptions probabilistes utilisables des chargements, notamment dans la gamme correspondant aux états limites ultimes. Le même problème se pose pour décrire statistiquement les propriétés mécaniques et physiques, et de nombreuses difficultés apparaissent dans la définition des relations de comportement (chargement/réponse) dès lors que des non linéarités dues au matériau ou à la géométrie sont mises en évidence. Pour des structures hyperstatiques, l'estimation numérique des probabilités de ruine peut être d'un coût prohibitif. L'analyse en fiabilité est de ce fait obligée d'accepter des compromis et, en pratique, il est nécessaire d'avoir recours à des modèles de comportements simples (individuels ou d'ensemble) non seulement pour des raisons de mise en oeuvre, mais aussi, par la nature même de l'approche "fiabiliste" qui requiert la modélisation de tout comportement d'élément sous forme de fonctions d'état limite.

Ce chapitre vise à fournir les notions de base de la théorie de la fiabilité appliquées aux structures. Il ne s'agit donc pas d'une présentation exhaustive des techniques et méthodes proposées par la théorie de la fiabilité. Un grand nombre de références et ouvrages sont disponibles et traitent du sujet [COMETT 91/92], [Madsen & al, 1984], [Murotsu, 1988], [Ang & Tang, 1984]. Nous nous limiterons dans ce chapitre à présenter les techniques les plus couramment utilisées. Nous avons choisi de débuter par le cas très simple d'un état limite linéaire à deux variables. Bien que ce cas ne soit qu'un cas particulier de la théorie de la fiabilité, il nous est apparu opportun de commencer par lui car il explicite la philosophie qui a prévalu au développement de la théorie de la fiabilité. Ceci est essentiel pour construire une démarche similaire applicable au calcul des possibilités (voir chapitre IV).

III.2. PROBABILITE DE DEFAILLANCE

Avant de développer plus loin les différents aspects de la théorie probabiliste de la fiabilité, définissons ce que l'on appelle **probabilité de ruine** ou **de défaillance**.

Conformément au chapitre II, nous cherchons à définir une pré-mesure de confiance (ou de non confiance!) sur l'événement "ruine ou défaillance" d'un élément de rupture. Dans une approche probabiliste de l'incertain, cette pré-mesure de confiance est donnée par la probabilité de dépassement de l'état limite, probabilité que l'on appelle **probabilité de défaillance** ou **de ruine**. Dans un tel cas, la pré-mesure ainsi définie est une mesure au sens exact du terme puisque l'axiome d'additivité est admis. On préférera dans cette thèse utiliser le terme de défaillance plutôt que celui de ruine, pour exprimer cette probabilité. Bien qu'ayant un sens trop fort pouvant faire croire à un endommagement grave de la structure, le terme de ruine est couramment employé.

Si $M = g(\underline{Z})$ est la marge de sécurité de cet élément de rupture, la **probabilité de défaillance** est une mesure globale déterminée par l'intégrale de la densité de probabilité conjointe des variables de base dans la zone de ruine D_R :

$$P_R = P\left(g(\underline{Z}) \leq 0\right) = \int_{D_R} f_{\underline{Z}}(\underline{z})\, dz_1 \cdots dz_n \qquad \text{(III.1)}$$

Si les variables de base sont indépendantes, la densité de probabilité conjointe est égale au produit de toutes les densités de chaque variable :

$$f_{\underline{Z}}(\underline{z}) = \prod_{i=1}^{n} f_{Z_i}(z_i) = f_{Z_1}(z_1) \cdots f_{Z_n}(z_n) \qquad \text{(III.2)}$$

L'évaluation de ces intégrales est une tâche souvent difficile, sauf pour le cas particulier de fonctions d'état linéaires. Diverses méthodes sont utilisées. La plus directe, mais aussi la plus consommatrice de temps de calcul, est la méthode de simulations Monte-Carlo. D'autres approches existent, approches qui font appel à des approximations de l'état limite. Nous les présenterons plus en détail dans le paragraphe III.4. Pour l'instant, nous allons nous intéresser aux cas d'états limites linéaires, fort instructifs pour appréhender une démarche globale du problème.

III.3. ETATS LIMITES LINEAIRES

III.3.1. Etats limites linéaires à deux variables

Le cas le plus simple est celui d'une fonction d'état limite linéaire comportant deux variables normales et indépendantes:

$$M = g(R,S) = R - S \qquad \text{(III.3)}$$

Ce cas a été traité bien antérieurement à l'introduction des méthodes FORM et SORM et de l'indice d'Hasofer-Lind qui seront définis dans les sections suivantes de ce chapitre.

C'est Cornell [Cornell,1967] qui a le premier donné l'expression de la probabilité de défaillance en mettant en évidence un indice généralisé plus tard par Hasofer. Il est clair que la démarche d'Hasofer se confond avec celle de Cornell pour les états limites affines avec variables normales.

La moyenne et l'écart-type de M sont obtenus directement par la propriété de la sommation de deux variables normales.

$$E(M) = m_R - m_S$$

$$\sigma(M) = \sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}$$

où m_R et m_S sont les moyennes de la résistance R et de la sollicitation S, et σ_R et σ_S leurs écarts types. La variable aléatoire M est aussi une variable aléatoire normale. L'expression de la probabilité de défaillance est alors immédiate

$$P(M \leq 0) = \Phi\left(-\frac{E(M)}{\sigma(M)}\right) = \Phi\left(-\frac{m_R - m_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}}\right) \qquad \text{(III.4)}$$

où Φ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

Le terme $\frac{m_R - m_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}}$ fut dénommé **indice de fiabilité** par Cornell [Cornell,1967]. Il est parfois appelé **indice de Cornell**.

Cet indice a une interprétation graphique intéressante et importante servant de base aux développements théoriques plus généraux de la théorie de la fiabilité (voir section III.4). Pour cela, transformons les variables R et S en variables normales centrées réduites. Ceci s'effectue immédiatement au moyen du changement de variable suivant qui fait apparaître deux variables normales centrées réduites U_R et U_S:

$$U_R = \frac{R - m_R}{\sigma_R} \qquad \text{et} \qquad R = \sigma_R U_R + m_R$$

$$U_S = \frac{S - m_S}{\sigma_S} \qquad \text{et} \qquad S = \sigma_S U_S + m_S$$

La linéarité de la fonction d'état limite est conservée dans l'espace des variables normales centrées réduites après le changement de variables :

$$g_u(U_R, U_S) = m_R - m_S + \sigma_R U_R - \sigma_S U_S \qquad \text{(III.5)}$$

La surface de défaillance est alors une droite :

$$m_R - m_S + \sigma_R U_R - \sigma_S U_S = 0 \qquad \text{(III.6)}$$

Les transformations effectuées conservent les probabilités. Par conséquence, la probabilité de défaillance est égale à la probabilité de dépassement du nouvel état limite

$$P_R = P(g_u \le 0) = P\left((m_R - m_S + \sigma_R U_R - \sigma_S U_S) \le 0\right) \qquad \text{(III.7)}$$

Le point de cette droite le plus proche de l'origine a pour coordonnées dans l'espace standardisé [Jiang, 1994] :

$$\underline{u}^* = \begin{bmatrix} u_R^* \\ u_S^* \end{bmatrix} = \frac{m_R - m_S}{\sigma_R^2 + \sigma_S^2} \begin{bmatrix} -\sigma_R \\ \sigma_S \end{bmatrix} \qquad \text{(III.8)}$$

Ce point est dénommé **point de fonctionnement** et sa distance à l'origine est alors $\beta = \frac{m_R - m_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}}$, c'est-à-dire l'indice de fiabilité précédemment défini. Le point de fonctionnement étant le point le plus proche de l'origine sur la droite, la valeur de la densité de probabilité conjointe en ce point est plus élevée que celles des autres points sur l'état limite. Notons que le point de fonctionnement dans l'espace initial se déduit aisément par les changements de variables explicités plus haut

$$\begin{bmatrix} R^* \\ S^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_R & 0 \\ 0 & \sigma_S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_R^* \\ u_S^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m_R \\ m_S \end{bmatrix} = \frac{\sigma_R^2 m_S + \sigma_S^2 m_R}{\sigma_R^2 + \sigma_S^2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{(III.9)}$$

La figures III.1. illustre cette interprétation géométrique de l'indice de fiabilité β.

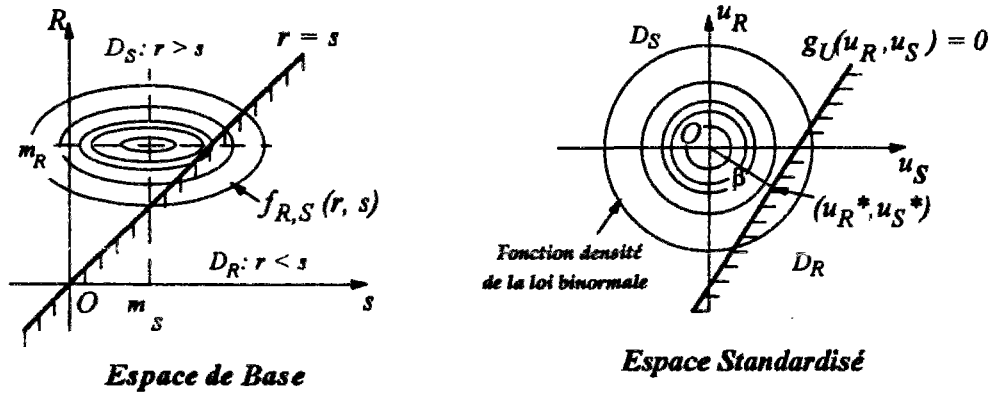


Figure III.1.: Représentations géométriques de l'état limite dans les espaces de base et standardisé et de l'indice de fiabilité β

III.3.2. Etat limite linéaire à plus de deux variables

Les résultats pour un état limite linéaire se généralisent aisément à un état limite affine. Pour une telle fonction d'état limite faisant intervenir des variables normales indépendantes et qui s'écrit

$$g(\underline{Z}) = a_0 + a_1 Z_1 + \ldots + a_n Z_n \qquad \text{(III.10)}$$

la probabilité de défaillance s'obtient de manière analogue au cas d'un état limite linéaire à deux variables normales:

$$P_R = \Phi(-\beta) \qquad \text{(III.11)}$$

avec

$$\beta = \frac{a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i E(Z_i)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sigma^2(Z_i)}} \qquad \text{(III.12)}$$

où $E(Z_i)$ représente la moyenne de la variable Z_i.

III.4. ETATS LIMITES NON LINEAIRES

Pour généraliser les résultats sur les états limites linéaires à des états limites non linéaires, certains auteurs ont proposé de linéariser les états limites autour de points convenablement choisis et de remplacer l'état limite non linéaire par un état limite affine tangent au point de linéarisation. L'inconvénient d'une telle approche réside dans la non invariance des résultats obtenus. En effet, ces derniers dépendent de la fonction d'état limite ainsi que du point de linéarisation. Pour contourner cet handicap, Hasofer et Lind [Hasofer,1974] ont étendu l'interprétation géométrique de l'indice de fiabilité aux états limites non linéaires.

L'indice de fiabilité est alors défini comme la plus petite distance (au sens euclidien) de l'origine à la surface de défaillance dans un espace de variables normales centrées réduites non corrélées. Si $g(\underline{Z})$ est l'état limite dans l'espace des variables de base au nombre de n, cette définition implique donc de redéfinir le problème en termes de variables aléatoires (U_i) normales centrées réduites non corrélées qui définissent un U-espace de dimension n. La transformée liant $\underline{U}$ à $\underline{Z}$, notée $\underline{U}=T(\underline{Z})$, est appelée **transformée de Rosenblatt**. La nouvelle surface de ruine est $g_u(\underline{U})=0$ et les probabilités de défaillance sont conservées, i.e.

$$P_R = P(g(\underline{Z})<0) = P(g_u(\underline{U}) < 0) \qquad \text{(III.13)}$$

Le point de la surface $g_u(\underline{U})=0$ le plus proche de l'origine et sa distance de l'origine peuvent alors être calculés. Tandis que ce point est dénommé **β-point** ou **point de fonctionnement**, sa distance de l'origine est notée β_H et est toujours nommée **indice de fiabilité (d'Hasofer-Lind)**.

III.4.1. Transformée de Rosenblatt

Comme nous l'avons déjà indiqué, la transformation des variables non normales en variables normales se fait au moyen de la transformée de Rosenblatt $\underline{U} = T(\underline{Z})$ [Rosenblatt, 1952]. En principe, le nombre de variables avant et après la transformation reste identique. La transformation T est normalement implicite, c'est-à-dire, d'une part il y a peu de variables qui ont une relation analytique avec une variable normale, d'autre part cette relation est difficile à trouver. Pour cette raison, la transformation T s'écrit souvent d'une manière détournée en utilisant les fonctions de répartition des lois. La transformation d'une seule variable s'écrit ainsi [Rosenblatt, 1952] :

$$\Phi(u_Z) = P(U_Z < u_Z) = P(T(Z) < T(z)) = P(Z < z) = F_Z(z)$$

où $u_Z = \Phi^{-1}(F_Z(z))$ ou $U_Z = T(Z) = \Phi^{-1}(F_Z(Z))$ (III.14)

La dérivée de la transformation est :

$$\frac{dU_Z}{dZ} = \frac{dT}{dZ} = \frac{f_Z(Z)}{\phi(U_Z)} = \frac{f_Z(Z)}{\phi\left(\Phi^{-1}(F_Z(Z))\right)} \quad \text{(III.15)}$$

Pour plusieurs variables, si l'on connaît la fonction de distribution multidimensionnelle de la probabilité conjointe, un système de variables normales standardisées correspondant s'obtient à l'aide de la transformation de Rosenblatt, qui s'appuie aussi sur l'égalité des probabilités des deux systèmes.

$$\begin{aligned} \Phi(u_1) &= F_1(z_1) \\ \Phi(u_2) &= F_2(z_2|z_1) \\ &\vdots \\ \Phi(u_n) &= F_n(z_n|z_{n-1},\cdots,z_1) \end{aligned} \quad \text{(III.16)}$$

où $F_i(z_i|z_{i-1},\cdots,z_1)$ est la fonction de répartition conditionnelle de la variable Z_i en donnant $Z_{i-1},\ldots,Z_1$ (i=2,...,n), la fonction de densité de probabilité conditionnelle s'écrit:

$$f_i(z_i|z_{i-1},\cdots,z_1) = \frac{f_{Z_1,\cdots,Z_i}(z_1,\cdots,z_i)}{f_{Z_1,\cdots,Z_{i-1}}(z_1,\cdots,z_{i-1})} \quad \text{(III.17)}$$

c'est-à-dire

$$F_i(z_i|z_{i-1},\cdots,z_1) = \frac{\int_{-\infty}^{z_i} f_{Z_1,\cdots,Z_i}(z_1,\cdots,z_{i-1},\zeta)\,d\zeta}{f_{Z_1,\cdots,Z_{i-1}}(z_1,\cdots,z_{i-1})} \quad (i = 2,\ldots, n)$$

La transformation T est alors représentée sous la forme [Ang et Tang, 1984] :

$$\begin{aligned} U_1 &= \Phi^{-1}(F_1(Z_1)) \\ U_2 &= \Phi^{-1}(F_2(Z_2|Z_1)) \\ &\vdots \\ U_n &= \Phi^{-1}(F_n(Z_n|Z_{n-1},\cdots,Z_1)) \end{aligned} \qquad \text{(III.18)}$$

et la transformation inverse est réalisée successivement à partir de la première variable :

$$\begin{aligned} Z_1 &= F_1^{-1}(\Phi(U_1)) \\ Z_2 &= F_2^{-1}(\Phi(U_2)|U_1) \\ &\vdots \\ Z_n &= F_n^{-1}(\Phi(U_n)|U_{n-1},\cdots,U_1) \end{aligned} \qquad \text{(III.19)}$$

La densité de probabilité conjointe est rarement connue en pratique, rendant impossible le calcul de la fonction de répartition conditionnelle, la distribution marginale de chaque variable de base et l'estimation de la matrice de corrélation sont en fait les éléments les plus connus. A la vue de ces difficultés, une approximation est alors utilisée dans la transformation. Pour des variables indépendantes, les transformées s'effectuent séparément pour chacune d'entre-elles.

III.4.2. Indice de fiabilité et point de fonctionnement

Une fois les variables de base transformées en variables normales centrées réduites, la deuxième étape de calcul de l'indice de fiabilité consiste à chercher le point de fonctionnement sur la nouvelle surface de défaillance dans l'espace des variables transformées.

L'indice de fiabilité β_H est déterminé à partir du point de fonctionnement. La détermination du point de fonctionnement est mathématiquement modélisée par un problème de minimisation de la distance sous une contrainte d'égalité traduisant l'appartenance à la surface de défaillance [Hasofer & Lind, 1974] :

$$\beta_H = \min\sqrt{\underline{U}^t\underline{U}} = \min \| \underline{U} \|_E \qquad \text{(III.20)}$$

$$\text{sous la contrainte} \qquad g_u(\underline{U}) = 0$$

$\| \|_E$ est la norme euclidienne. La détermination du point de fonctionnement et de sa distance de l'origine est basée sur un principe itératif de linéarisation dû à Rackwitz et Fiessler [Rackwitz & Fiessler, 1978]. On part d'un point quelconque $\underline{U}^0$, par exemple l'origine qui est aussi le point moyen dans l'espace réduit, et on linéarise la fonction d'état limite $g_u(\underline{U})$ en ce point. L'intersection de l'hyperplan tangent avec le plan des variables donne une surface de défaillance approchée linéaire. On recherche alors le point $\underline{U}^1$ sur cette surface le plus proche de l'origine. La procédure est ensuite itérée au point $\underline{U}^1$ et ainsi de suite.

Le détail de l'algorithme se réduit aux étapes essentielles suivantes :

$$\underline{U}^{k+1} = \left(\underline{\alpha}_k^t \underline{U}_k\right)\underline{\alpha}_k + \frac{g_u\left(\underline{U}^k\right)}{\left\|\nabla g_u\left(\underline{U}^k\right)\right\|}\underline{\alpha}_k$$

1.

$$\underline{\alpha}_k = -\frac{\nabla g_u\left(\underline{U}^k\right)}{\left\|\nabla g_u\left(\underline{U}^k\right)\right\|}$$

2. $$\beta_H{}^{k+1} = \frac{g_u\left(\underline{U}^k\right)}{\left\|\nabla g_u\left(\underline{U}^k\right)\right\|} - \underline{\alpha}_k^t \underline{U}^k$$

3. $$\underline{Z}^{k+1} = \underline{Z}^k + [J]\left(\underline{U}^{k+1} - \underline{U}^k\right)$$

où [J] est la matrice jacobienne dont les composants de la matrice inverse s'écrivent:

$$i < j: \quad J_{ij}^{-1} = 0$$

$$i = j: \quad J_{ij}^{-1} = \frac{f_i\left(z_i / z_{i-1},.., z_1\right)}{\phi(u_i)}$$

$$i > j: \quad J_{ij}^{-1} = \frac{\frac{\partial}{\partial z_j} F_i\left(z_i / z_{i-1},.., z_1\right)}{\phi(u_i)}$$

L'algorithme de Rackwitz est un algorithme efficace, mais dont la convergence n'est pas assurée dans tous les cas. Il est également à remarquer que la présence de plusieurs minima peut induire de choisir un mauvais point de fonctionnement.

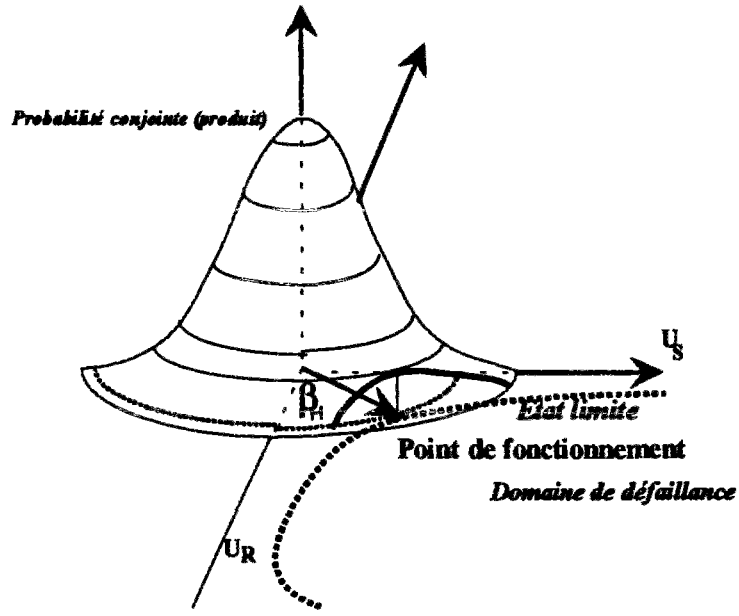


Figure III.2 : Représentation de l'indice de fiabilité

III.4.3. Détermination de la probabilité de défaillance

Une fois le point de fonctionnement et l'indice de fiabilité déterminé, il est nécessaire de retourner au problème initial qui est de déterminer la probabilité de défaillance de l'élément. Diverses techniques existent. Nous présentons dans la section suivante deux des plus utilisées.

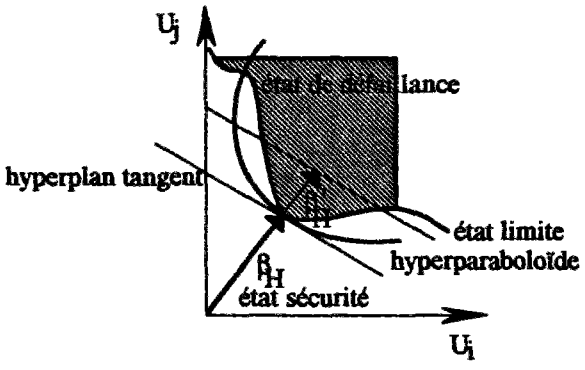


Figure III.3 : Hyperplan et hyperparaboloide tangents - indice de fiabilité

a) Approche au premier ordre

Dans l'approche au premier ordre (First Order Reliability Method -FORM [Hasofer & Lind, 1974]), la surface de ruine $g_u(U) = 0$ est approximée par un hyperplan tangent au point de fonctionnement (Figure III.3). On retrouve ainsi les résultats relatifs aux états limites linéaires:

$$P_R = \Phi(-\beta_H) \qquad \text{(III.21)}$$

où Φ est la fonction de répartition d'une variable aléatoire normale centrée réduite.

b) Approche au second ordre

Dans une approche au second ordre (*Second Order Reliability Method -SORM* [Fiessler& al, 1979]), la surface de ruine est approximée par un hyperparaboloïde (Figure III.3) qui passe par le point de fonctionnement et qui ont les mêmes courbures en ce point. Avec un tel hyperparaboloïde, la probabilité de ruine est approximée par

$$P_R \approx \Phi(-\beta_H)\prod_{i=1}^{n}(1-\beta_H\kappa_i)^{-1/2} \qquad \text{(III.22)}$$

où κ_i sont les courbures principales au β_H-point. Notons que cette approche est ramenée à une approche au premier ordre en définissant un hyperplan équivalent qui est parallèle à l'hyperplan tangent au point de fonctionnement, mais à une distance β_H' définie par

$$\Phi^{-1}(P_R) = -\beta_H'. \qquad \text{(III.23)}$$

III.5. FIABILITE DES SYSTEMES

Nous avons défini dans le chapitre I ce que l'on appelait systèmes en série, parallèles. Dans les sections suivantes, nous présentons diverses techniques pour évaluer les probabilités de défaillance de ces divers types de systèmes. Nous ne détaillerons pas l'obtention de ces expressions bien connues en calcul fiabiliste. Le lecteur est renvoyé à la référence [Madsen, 1984] pour de plus amples détails.

III.5.1. Probabilité de défaillance d'un système en série

a) Calcul par la loi multinormale

Un système en série se formalise par l'union d'états limites approximés par des hyperplans tangents aux divers points de fonctionnement. Soit m le nombre de composants définissant le système et soit $\underline{Z}$ le vecteur composé de l'ensemble des n variables distinctes intervenant dans les divers états limites. Soit $\underline{U}$ le vecteur composé des n variables aléatoires standardisées et indépendantes. Les marges de sécurité sont linéarisées autour des différents points de fonctionnement dans le U-espace

$$g_{uj}(\underline{U}) \approx \sum_{i=1}^{n} a_i^j U_i + \beta_{Hj} = L_j(\underline{U}) + \beta_{Hj} \qquad j = 1,\ldots,m \quad \text{(III.24)}$$

La probabilité de défaillance du système s'écrit donc

$$P_R \approx 1 - P\left((L_1(\underline{U}) > -\beta_{H1}) \cap \ldots \cap (L_m(\underline{U}) > -\beta_{Hm})\right) \qquad \text{(III.25)}$$

Le calcul du second membre est alors ramené à la détermination de la loi multinormale $\Phi_m(\beta_H ; [\rho])$ où β_H est le vecteur composé des m indices de fiabilité et $[\rho]$ la matrice de corrélation entre les diverses marges de sécurité linéarisées dans le U-espace. Cette matrice s'obtient facilement à partir des divers coefficients des hyperplans tangents:

$$[\rho_{ij}] = \left[\sum_{r=1}^{n} a_r^i a_r^j\right]$$

ce qui donne la probabilité de défaillance

$$P_R = 1 - \Phi_m(\beta_H ; [\rho]) \qquad \text{(III.26)}$$

On définit l'indice de fiabilité d'un système-série à m composants comme l'image réciproque de la probabilité de défaillance par la fonction de répartition de la loi normale:

$$\beta_{He} = -\Phi^{-1}(1 - \Phi_m(\beta_H ; [\rho])) \qquad \text{(III.27)}$$

Un hyperplan équivalent $L_e(\underline{U})$ correspondant à l'ensemble des unions peut être construit. Il est définit par :

$$P(L_e(\underline{U}) \leq 0) \approx P\left(\bigcup_{i=1}^{m} L_i(\underline{U}) \leq 0\right) \qquad \text{(III.28)}$$

avec

$$L_e(\underline{U}) = \sum_{i=1}^{n} a_i^e U_i + \beta_{He}$$

$$a_i^e = -\frac{1}{\phi(\beta_{He})} \sum_{j=1}^{m} a_i^j \left.\frac{\partial \Phi_p(\underline{\beta}_H;[\rho])}{\partial \beta_{Hj}}\right|_0 \qquad \text{(III.29)}$$

La figure III.4 illustre schématiquement cet hyperplan équivalent.

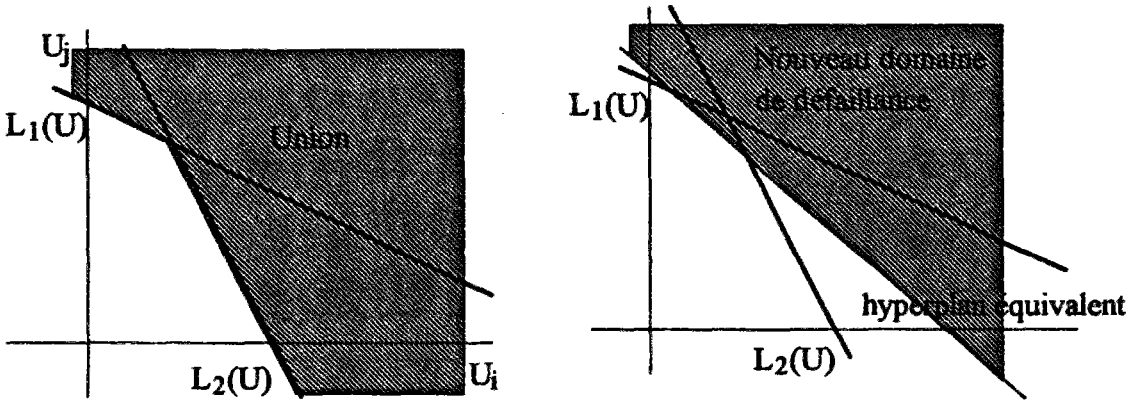


Figure III.4.: Hyperplan équivalent pour le calcul d'unions d'états limites

b) Calcul de la loi multinormale

La méthode calcul d'une loi multinormale que nous présentons ici, est due à Hohenbichler [Hohenbichler, 1982]. Elle donne d'excellents résultats, mais est relativement lourde d'implantation. La loi multinormale Φ_m de corrélation $[\rho]$ s'écrit

$$\Phi_m(\{x\},[\rho]) = \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_m} \frac{1}{(2\pi)^{m/2}} \frac{1}{\det[\rho]^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\{x\}^t[\rho]^{-1}\{x\}\right) dx_1 \ldots dx_m \qquad \text{(III.30)}$$

La formule III.30 peut s'écrire également comme suit :

$$\Phi_m(\{x\},[\rho]) = P\left(\bigcap_{i=1}^{m}\{X_i \leq x_i\}\right)$$

où les X_i sont des variables normales centrées réduites de matrice de corrélation de $[\rho]$. On peut écrire cette égalité sous la forme :

$$\Phi_m(\{x\},[\rho]) = P(X_1 \le x_1) P\left(\bigcap_{i=2}^{m} \{X_i \le x_i | X_1 \le x_1\}\right) \qquad \text{(III.31)}$$

En utilsant l'algorithme de CHOLESKY, on peut trouver une matrice [b], triangulaire inférieure telle que [Rémy, 1991] :

$$[\rho] = [b]\,[b]^T$$

Si on pose :

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_m \end{bmatrix}$$

Les U_i étant des variables normales centrées réduites et indépendantes, on a $b_{11} = 1$. On peut traduire l'équation (III.31) dans l'espace U_i

$$\Phi_m(\{x\},[\rho]) = P(U_1 \le x_1) P\left(\bigcap_{i=2}^{m} \left\{ \sum_{j=1}^{i} b_{ij} U_j \le x_i \middle| U_1 \le x_1 \right\}\right)$$

Dans chaque combinaison linéaire $\sum_{j=1}^{i} b_{ij} U_j$, seul le premier terme $b_{i1} U_1$ est affecté par la condition $U_1 \le x_1$, car les U_i sont indépendantes. La fonction de distribution conditionnelle de U_1 est :

$$F_1(u) = P(U_1 \le U | U_1 \le x_1) = \frac{\Phi(u)}{\Phi(x_1)}$$

On peut donc supprimer la condition en remplaçant l'événement $(U_1 \mid U_1 \le x_1)$ par la variable :

$$\tilde{U} = \Phi^{-1}(\Phi(x_1)\Phi(U_1))$$

(On a bien $F_{\tilde{U}} = F_1$)

La formule (III.31) peut s'écrire :

$$\Phi_m(\{x\},[\rho]) = \Phi(x_1)P\left(\bigcap_{i=2}^{m}\left(b_{i1}\Phi^{-1}(\Phi(x_1)\Phi(U_1)) + \sum_{j=2}^{i} b_{ij}U_j \le x_i\right)\right) \qquad \text{(III.32)}$$

$$= \Phi(x_1)P\left(\bigcap_{i=2}^{m}\left(g_i(\underline{u}) \le 0\right)\right)$$

On linéarise l'équation (III.32) et on obtient :

$$\Phi_m(\{x\},[\rho]) \cong \Phi(x_1)P\left(\bigcap_{i=2}^{m}\left(M_i \le 0\right)\right)$$

$$= \Phi(x_1)P\left(\bigcap_{i=2}^{m}\left(\sum_{j=2}^{i}\alpha_{ij}U_j \le x_i^{(2)}\right)\right)$$

où $\|\underline{\alpha}_i\| = 1$

Soit :

$$\Phi_m(\underline{x},\underline{\rho}) = \Phi(x_1)\Phi_{m-1}(\underline{x}^{(2)},\underline{\rho}^{(2)}) \qquad \text{(III.33)}$$

avec $\underline{\rho}^{(2)} = \underline{\alpha}_i^T\underline{\alpha}_j$

Par conséquent, on peut calculer Φ_n par recurrence en utilisant la formule (III.33).

Pour la loi bi-normale, une approximation est aussi proposée [Rémy, 1991] :

$H_0(x) = 1$

$H_1(x) = x$

$H_2(x) = x^2 - 1$

$H_n(x) = x\,H_{n-1}(x) - (n-1)\,H_{n-2}(x)$

$$\int_0^{\rho}\phi_2(x_1,x_2;t)dt = \frac{1}{2\pi}\exp\left(-\frac{x_1^2}{2}-\frac{x_2^2}{2}\right)\sum_{i=1}^{\infty}\frac{t^i}{i!}H_{i-1}(x_1)H_{i-1}(x_2)$$

$$\Phi_2(x_1,x_2;\rho) = \Phi(x_1)\Phi(x_2) + \int_0^{\rho}\phi_2(x_1,x_2;t)dt \qquad \text{(III.34)}$$

En pratique, on utilisera un développement d'ordre 20.

c) Bornes simples et de Ditlevsen [Ditlevsen,1979]

L'estimation de la loi multinormale pose de nombreux problèmes numériques. On a ainsi souvent recours à des encadrements de la probabilité de défaillance par des bornes supérieures et inférieures. Deux type d'encadrement sont utilisés: les **bornes simples** et les **bornes de Ditlevsen**. Ces bornes s'écrivent

$$\text{Les bornes simples : } \max_{i\in(1,m)} P_R^i \le P_R^s \le \sum_{i=1}^{m} P_R^i \qquad \text{(III.35)}$$

Les bornes de Ditlevsen :

$$P_R^s \ge P_R^1 + \sum_{i=2}^{m}\left[\max\left\{0,\ P_R^i - \sum_{j=1}^{i-1} P_R\left((g_i(\underline{Z})<0)\cap(g_j(\underline{Z})<0)\right)\right\}\right]$$

$$P_R^s \le \sum_{i=1}^{m} P_R^i - \sum_{i=2}^{m} \max_{j<i} P_R\left((g_i(\underline{Z})<0)\cap(g_j(\underline{Z})<0)\right) \qquad \text{(III.36)}$$

Les exposants ^{i} et ^{s} se rapportent aux composants et au système. Les probabilités introduites dans chacune des bornes sont alors évaluées au moyen de la loi binormale.

III.5.2. Probabilité de défaillance d'un système en parallèle

Un système parallèle est un système qui atteint la ruine lorsque tous ses composants sont ruinés. Si $(g_{ui}(\underline{U}))_{1\le i\le p}$ sont les fonctions d'état limite de p composants dans l'espace joint des variables aléatoires normales centrées réduites, alors la première étape consiste à approximer chaque état limite par un hyperplan $(h_i(\underline{U}))_{1\le i\le p}$. Dans ce cas, la probabilité de ruine du système est approximée par :

$$\begin{aligned} P_R &= P\left(\bigcap_{i=1}^{p} h_i(\underline{U}) < 0\right) \\ &= P\left(\bigcap_{i=1}^{p} (L_i < -\beta_{Hi})\right) \\ &= \Phi_p\left(-\underline{\beta}_H\ ;\ [\rho]\right) \end{aligned} \qquad \text{(III.37)}$$

où L_i représente la variable $(h_i(\underline{U}) - \beta_{Hi})$. $[\rho]$ et $\underline{\beta}_H$ sont respectivement la matrice de corrélation des variables U_i et le vecteur composé des m indices β_{Hi}. $\Phi_p(.,.)$ est ici la loi multinormale de paramètres $[\rho]$ et $\underline{\beta}_H$. On définit alors l'indice de fiabilité de ce système par :

$$\beta_{He} = -\Phi^{-1}(\Phi_p(-\underline{\beta}_H, [\rho])) \qquad \text{(III.38)}$$

Un hyperplan équivalent $L_e(\underline{U})$ correspondant à l'ensemble des intersections peut être construit (figure III.5). Il est définit par:

$$P(L_e(\underline{U}) \le 0) \approx P\left(\bigcap_{i=1}^{p} L_i(\underline{U}) \le 0\right) \qquad \text{(III.39)}$$

avec

$$L_e(\underline{U}) = \sum_{i=1}^{n} a_i^e U_i + \beta_{He}$$

$$a_i^e = \frac{1}{\phi(\beta_{He})} \sum_{j=1}^{p} a_i^j \left.\frac{\partial \Phi_p(-\underline{\beta}_H;[\rho])}{\partial \beta_{Hj}}\right|_0 \qquad \text{(III.40)}$$

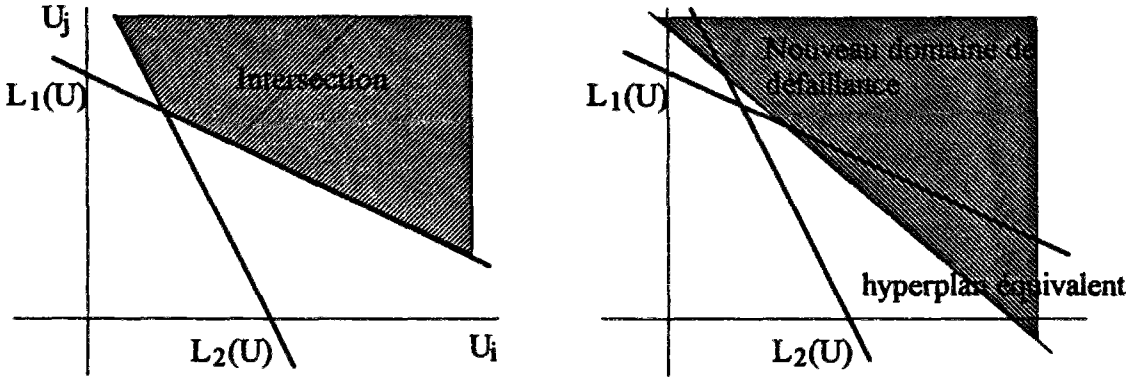


Figure III.5.: Hyperplan équivalent pour le calcul d'intersections d'états limites

III.5.3. Probabilité de défaillance d'un système

Un système quelconque peut formellement se décrire comme un système en série de sous-systèmes en parallèles. La probabilité de défaillance du système s'écrit donc:

$$P_R = P\left(\bigcup_{i=1}^{m} \bigcap_{j=1}^{p_i} (g_{ij}(\underline{Z}) \le 0)\right) \qquad \text{(III.41)}$$

Il suffit donc de calculer pour chaque sous-système en parallèle, un hyperplan tangent. Les différents hyperplans sont ensuite utilisés pour calculer la probabilité de défaillance

du système en série, soit par encadrement, soit à l'aide de la loi multinormale. Cette démarche a été employée dans l'exemple du treillis du chapitre V.

DEUXIEME

PARTIE :

Théorie possibiliste de la fiabilité des structures : Développements et exemples

CHAPITRE IV

APPROCHE POSSIBILISTE DE LA SECURITE DES STRUCTURES

Ce chapitre tente de développer une démarche analogue à l'approche probabiliste de la fiabilité des structures, mais reposant sur la théorie des possibilités. Pour cela, la méthodologie de présentation a été gardée. Elle débute par des états limites linéaires faisant intervenir une catégorie particulière de variables floues, suivie d'une généralisation aux états limites non linéaires. Les restrictions d'application de la théorie développée (notamment en ce qui concerne les variables floues) sont reprises en conclusions.

Il est cependant nécessaire de donner quelques définitions et résultats avant d'aborder les développements théoriques de l'approche possibiliste de la fiabilité des structures. Les sections IV.1-4 ont pour cela le double objectif de :

- présenter quelques catégories de quantités floues couramment utilisées,
- donner quelques éléments et résultats de base concernant le calcul d'opérations arithmétiques entre quantités floues.

IV.1. RAPPELS

Nous rappelons dans cette section les définitions déjà introduites au Chapitre II. On définit une mesure de possibilité Π par une application d'une tribu T de Ω à valeurs dans l'intervalle [0,1] vérifiant les propriétés essentielles

$$\Pi(\varnothing) = 0 \qquad \text{événement impossible} \qquad \text{(IV.1)}$$

$$\Pi(\Omega) = 1 \qquad \text{événement certain} \qquad \text{(IV.2)}$$

$$\forall (A,B) \in T \times T, \qquad \Pi(A \cup B) = \max(\Pi(A), \Pi(B)) \qquad \text{(IV.3)}$$

Ces mesures vérifient alors les inégalités

$$\Pi(A \cap B) \leq \min(\Pi(A), \Pi(B)) \qquad \text{(IV.4)}$$

$$A \supseteq B \quad \Rightarrow \quad \Pi(A) \geq \Pi(B) \qquad \text{(IV.5)}$$

La distribution de possibilité π - lorsqu'elle existe - vérifie :

$$\forall A \in T, \quad \Pi(A) = \sup\{\pi(\omega), \omega \in A\}$$

En général, $\pi(.)$ est fixée, ce qui permet de construire Π.

IV.2. QUANTITES FLOUES - NOMBRES FLOUS

IV.2.1. Quantités floues - Intervalles flous - Nombres flous

Une **quantité floue** X est une variable incertaine (voir chapitre II) associée à une mesure de confiance possibiliste Π_X et de distribution de possibilité π_X. On définit le **noyau** de X comme l'ensemble des valeurs ayant un **degré de possibilité** (c'est-à-dire de mesure de possibilité) de 1:

$$No(X) = \{ x \in \Re / \pi_X(x) = 1 \} \qquad \text{(IV.6)}$$

Tout nombre réel m du noyau No(X) est alors appelé **valeur modale** de X.

Un **intervalle flou** est une quantité floue dite **convexe** dont la distribution de possibilité est quasi-concave [Zadeh, 1965], c'est-à-dire vérifiant

$$\forall u, v \quad \forall w \in [u, v] \quad \pi_X(w) \geq \min(\pi_X(u), \pi_X(v)) \qquad \text{(IV.7)}$$

Un **nombre flou** est un intervalle flou dont la distribution de possibilité est semi-continue supérieurement, à support compact et de noyau réduit à un singleton.

La figure IV.1 illustre ces types de variables incertaines introduites par la théorie des possibilités.

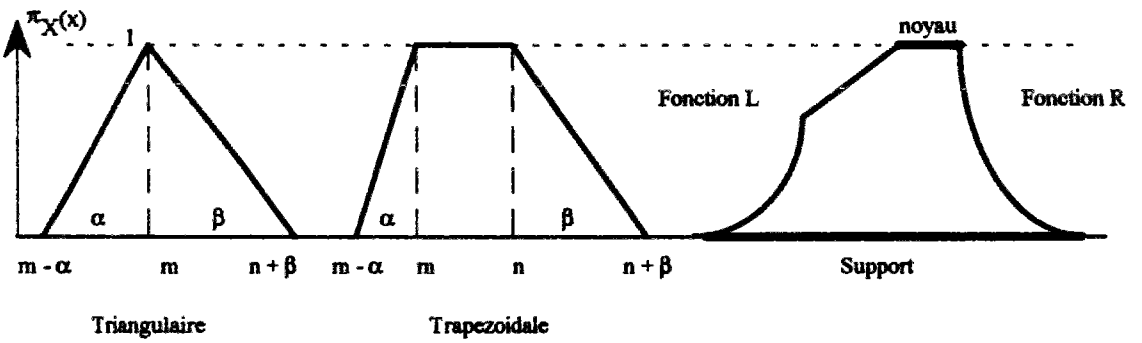


Figure IV.1 : Nombre flou - Intervalle flou - Quantité floue

IV.2.2. Représentation paramétrée d'intervalle flou

Pratiquement, on utilise des intervalles flous X qui sont dits de type L-R, c'est -à-dire dont les distributions de possibilité π_X sont construites à partir de quatre paramètres (m, n, α , β), m et n réels, α et β strictement positifs, et de deux fonctions, notées L et R, définies sur l'ensemble des réels positifs, à valeurs dans [0,1], semi-continues supérieurement et non-croissantes, telles que [Bouchon-Meunier, 1993] :

1. $L(0) = R(0) = 1$ (IV.8)

2. $\forall x > 0 \quad L(x) < 1 \quad$ et $\quad R(x) < 1$ (IV.9)

3. $\forall x < 1 \quad L(x) > 0 \quad$ et $\quad R(x) > 0$ (IV.10)

4. $L(1) = 0 \quad$ ou $\quad L(x) > 0$ et $\lim_{x \to \infty} L(x) = 0$ (IV.11)

   $R(1) = 0 \quad$ ou $\quad R(x) > 0$ et $\lim_{x \to \infty} R(x) = 0$ (IV.12)

π_X est alors défini par :

$$\pi_X(x) = \begin{cases} L\left(\dfrac{m-x}{\alpha}\right) & \text{si } x \le m \\ 1 & \text{si } x \in [m,n] \\ R\left(\dfrac{x-n}{\beta}\right) & \text{si } x \ge n \end{cases} \qquad \text{(IV.13)}$$

On note alors

$$X = (m, n, \alpha , \beta)_{LR} \qquad \text{(IV.14)}$$

Les intervalles flous ont souvent des distributions de possibilité linéaires ou non linéaires par morceaux (forme trapézoïdale, forme triangulaire et forme gaussienne). α et β sont respectivement appelées **étalement à gauche** et **étalement à droite**.

Remarque :

Les intervalles flous L-R dont le noyau est réduit à un singleton (i.e. m=n) sont notés

$$X = (m, \alpha , \beta)_{LR}$$

et par abus de langage, seront appelés nombres flous (le support n'est plus obligatoirement compact).

Cas particulier :

Un type d'intervalle flou sera particulièrement utilisé dans les sections suivantes. Il s'agit du **nombre flou gaussien.** Le nombre flou gaussien est un intervalle L-R pour lequel le noyau est réduit à un singleton, et pour lequel les fonctions L et R vérifient $L(x)=R(x)=\exp(-x^2)$ (figure IV.2). Ces fonctions L et R seront dénotées, dans le reste de ce mémoire, par L^0 et R^0.

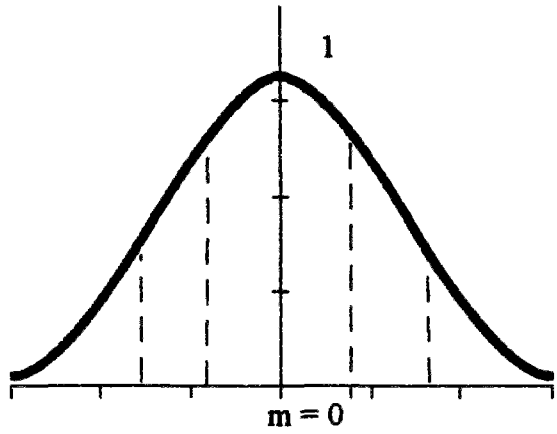


Figure IV.2 : Nombre flou gaussien

IV.3. CALCULS D'INTERVALLES FLOUS

IV.3.1. Proposition

La proposition fondamentale suivante a été donnée pour le calcul des intervalles flous par Dubois et Prade [Dubois et Prade,1988].

Soient $X = (m,n,\alpha,\beta)_{LR}$ et $Y = (p,q,\gamma,\delta)_{L'R'}$ deux intervalles floues de type L-R et L'-R'. On définit les α-coupes X_α et Y_α des variables X et Y par

$$X_\alpha = \{ x \in \Re / \pi_X(x) \geq \alpha \} \qquad \text{(IV.15i)}$$

$$Y_\alpha = \{ y \in \Re / \pi_Y(y) \geq \alpha \} \qquad \text{(IV.15ii)}$$

On suppose que ces dernières ne sont pas tout l'ensemble $\Re$ des réels pour tout $\alpha > 0$. Soit f une fonction de $\Re^2$ dans $\Re$ qui soit continue et **isotone**, c'est-à-dire vérifiant

$$\forall u \geq u', \forall v \geq v' , \ f(u , v) \geq f(u' , v') \qquad \text{(IV.16)}$$

Alors :

Les α-coupes de la quantité floue f(X,Y) sont les images par f des α-coupes de X et Y. Mathématiquement, on peut écrire :

$$\forall \alpha > 0 \qquad f(X,Y)_\alpha = f(X_\alpha , Y_\alpha) \qquad \text{(IV.17)}$$

Cette proposition s'étend également aux fonctions continues f vérifiant:

- f définie sur un pavé de $\Re^2$
- f est **antitone** :
  $\forall u \geq u', \forall v \geq v', f(u, v) \leq f(u', v')$
  c'est-à-dire décroissante en u et en v
- f est **hybride en deuxième argument (hybride de type II)**
  $\forall u \geq u', \forall v \leq v', f(u, v) \geq f(u', v')$
  c'est-à-dire croissante en u et décroissante en v
- f est **hybride en premier argument (hybride de type I)**
  $\forall u \leq u', \forall v \geq v', f(u, v) \geq f(u', v')$
  c'est-à-dire décroissante en u et croissante en v
- f a plus de deux arguments et est monotone en fonction de chacun d'eux

Une conséquence remarquable de cette proposition est que les calculs des parties croissante et décroissante de f(X,Y) peuvent s'effectuer en combinant séparément les parties croissantes et décroissantes de π_X et π_Y d'une manière appropriée:

- *pour une fonction isotone* : la partie croissante (respectivement décroissante) de $\pi_{f(X,Y)}$ s'obtient en combinant les parties croissantes (respectivement décroissantes) de π_X et π_Y,
- *pour une fonction antitone* : la partie croissante (respectivement décroissante) de $\pi_{f(X,Y)}$ s'obtient en combinant les parties décroissantes (respectivement croissantes) de π_X et π_Y,
- *pour une fonction hybride en premier argument (type I)* : la partie croissante (respectivement décroissante) de $\pi_{f(X,Y)}$ s'obtient en combinant la partie décroissante (respectivement croissante) de π_X et la partie croissante (respectivement décroissante) de π_Y,
- *pour une fonction hybride en deuxième argument (type II)* : la partie croissante (respectivement décroissante) de $\pi_{f(X,Y)}$ s'obtient en combinant la partie croissante (respectivement décroissante) de π_X et la partie décroissante (respectivement croissante) de π_Y,

Les résultats généraux présentés ci-dessus permettent de mettre en évidence des propriétés intéressantes, quand on les applique aux opérations usuelles, notamment les quatre opérations arithmétiques, et les opérations maximum et minimum. L'annexe 2 en

donne quelques exemples. Rappelons pour mémoire que les opérations "+" et "×" sont isotones, tandis que "/" et "-" sont hybrides en deuxième argument.

L'intérêt de cette proposition ne réside pas, en ce qui nous concerne, dans sa capacité d'application comme méthode de calcul d'opérations entre intervalles flous. Elle permet d'expliciter, dans un processus de combinaison des intervalles flous, quelle est la branche -croissante ou descendante - de chaque intervalle qui intervient dans le calcul de la branche croisante ou descendante de la variable floue résultante.

La proposition de Dubois et Prade, et sa conséquence permettent de tirer une nouvelle proposition, qui sera essentielle dans la formulation du principe de la règle des signes (section IV.6.).

IV.3.2. Application

Considérons une fonction $g(X_1,X_2,.....,X_n)$ à plusieurs variables distinctes. La quantité floue $M= g(X_1,X_2,.....,X_n)$ est celle que l'on cherche à construire à partir des intervalles flous X_i. Nous avons vu au paragraphe IV.3.1., l'importance du caractère isotone, antitone ou hybride en premier ou deuxième argument des fonctions f, puisque les branches de la quantité floue à construire feront, dans l'un ou l'autre cas, appel aux mêmes branches ou à des branches opposées. La question que l'on peut naturellement se poser, est de savoir si ce mode de construction est généralisable aux fonctions à plusieurs variables.

Dans tout calcul arithmétique, l'association de plusieurs variables se fait toujours par paire, associant deux variables entre-elles, les résultats étant ensuite associés par paire, et ainsi de suite. Le résultat final est donc la composée de fonctions à deux arguments f(x,y) où x et y sont eux-mêmes résultats d'autres opérations.

Exemple:

Considérons la variable

$$M = X_1 - \frac{X_2 X_3}{X_5 X_6} X_4$$

alors le calcul de M se formalise par les suites d'opérations élémentaires

$$M = f_1\left(X_1, f_2\left(X_2, f_3\left(X_3, f_4\left(X_4, f_5\left(X_5, X_6\right)\right)\right)\right)\right)$$

avec

$f_1(.,.) = -$. $f_2(.,.) = \times$. $f_3(.,.) = \times$. $f_4(.,.) = /$.

$f_5(.,.) = \times$.

La proposition suivante permet de préciser les branches de la X_i prises en compte dans la construction des branches de M.

Proposition :

> Soit une fonction g à plusieurs variables et X une quantité floue argument de cette fonction g
>
> Alors,
> 1. si X et ses images successives sont passées un nombre pair de fois, en second argument de fonctions hybrides de type II, de fonctions antitones, et en premier argument de fonctions hybrides de type I, ou de seules fonctions isotones, alors la branche croissante (respectivement décroissante) de π_X sert à la construction de la branche croissante (respectivement décroissante) de π_M.
>
> 2. Dans toutes les autres configurations, la branche croissante de π_X (respectivement décroissante) sert à la construction de la branche décroissante de π_M (respectivement croissante).

Preuve :

Seule la construction des branches croissantes sera considérée. Le raisonnement est en effet identique pour les branches décroissantes. Supposons que la fonction g soit décomposable en m opérations $f_i(.,.)$. $f_1(.,.)$ est la première des opérations, tandis que $f_m(.,.)$ est la dernière.

a) La proposition est vraie pour m =1 : cela correspond aux conséquences de la proposition de Dubois et Prade.

b) Supposons que la proposition soit vraie pour m-1. La dernière opération $f_m(.,.)$ est soit hybride de type I, hybride de type II, isotone ou antitone. Les variables A et B passées en argument de $f_m(.,.)$ sont également issues des résultats des (m-1) autres opérations. Considérons une variable X de la fonction g. Elle a participé à la construction de A, ou à la construction de B (la participation aux deux étant exclue, puisque les variables sont distinctes). Suivant que les points 1 ou 2 sont vérifiés, on obtient les cas suivants pour la branche croissante de M, par application de la règle pour m=1 (le signe + dénote la participation de la branche croissante et le signe - la branche décroissante de X) :

si X participe à A	Hybride I	Hybride II	Isotone	Antitone
Point 1	-	+	+	-
Point 2	+	-	-	+

si X participe à B	Hybride I	Hybride II	Isotone	Antitone
Point 1	+	-	+	-
Point 2	-	+	-	+

Les résultats montrent que la proposition est vérifiée pour m. En effet, les "+" correspondent au cas N.1, tandis que les "-" sont relatifs à un passage impair de fonctions hybrides de type II, type I et antitones (cas N.2).

Exemple :

Reprenons l'exemple

$$M = X_1 - \frac{X_2 X_3}{X_5 X_6} X_4$$

pour lequel on a:

$$M = f_1\Big(X_1, f_2\Big(X_2, f_3\Big(X_3, f_4\big(X_4, f_5(X_5, X_6)\big)\Big)\Big)\Big)$$

avec

$f_1(.,.) = -$. $f_2(.,.) = \times$ $f_3(.,.) = \times$ $f_4(.,.) = /$.

$f_5(.,.) = \times$

Etudions la branche croissante de la distribution de possibilité π_M. Considérons la variable X_5. Cette dernière est passée au travers d'une fonction isotone f_5, puis son résultat en second argument d'une fonction hybride f_4 de type II. Tous les résultats suivants sont passés au travers de fonctions isotones f_3 et f_2, puis finalement en second argument d'une fonction hybride f_1 de type II. Ceci permet de conclure que X_5 et ses images successives sont passées en second argument au travers d'un nombre pair de fonctions hybrides de type II : la branche croissante de X_5 sert à construire la branche croissante de M.

Si nous prenons la variable X_2, cette dernière est passée en second argument d'une fonction hybride, donc sa branche décroissante servira à la construction de la branche croissante de M.

Cette proposition nous sera d'une grande utilité dans l'application de la règle des signes.

IV.4. POSSIBILITE DE DEFAILLANCE

Similairement à l'approche probabiliste, l'approche possibiliste de la sécurité d'un élément de rupture va s'intéresser à évaluer la confiance que l'on va accorder à cet événement, c'est-à-dire la nécessité que l'on ait

$$M = g(Z) \geq 0 \qquad \text{i.e.} \qquad N(M \geq 0) \qquad \text{(IV.18)}$$

D'après la relation existante entre la mesure de possibilité et celle de nécessité, ceci revient à quantifier la possibilité de l'événement contraire

$$M = g(Z) \leq 0 \qquad \text{i.e.} \qquad \Pi(M \leq 0) \qquad \text{(IV.19)}$$

On cherche donc à mesurer la nécessité de la non défaillance ou la possibilité de défaillance. Si M est la marge de sécurité, alors la possibilité de défaillance Π_R est définie par

$$\Pi_R = \Pi(M \leq 0) \qquad \text{(IV.20)}$$

Le problème revient donc à déterminer la mesure de possibilité de M. L'utilisation de la théorie des possibilités dans la modélisation de l'incertain en génie civil n'est pas nouvelle en soi (voir [Boissier & al, 1994], [Vallapian & al, 1991], [Bardossy, 1989], [Boissier & al, 1995]). L'approche que nous allons développer dans les parties suivantes va consister à définir une méthodologie semblable à la théorie de la fiabilité, par essence probabiliste, que nous appellerons théorie possibiliste de la fiabilité. Dans la détermination de la probabilité de défaillance, la théorie de la fiabilité contourne le calcul de la fonction de répartition de la marge de sécurité M qui est une variable aléatoire. La démarche adoptée dans ce chapitre va être identique. Le recours à l'arithmétique floue va être évité ; c'est ce qui distingue notre approche des études référencées ci-dessus . Pour cela, notre démarche sera la suivante :

- nous étudierons dans un premier temps des états limites linéaires composés de nombres flous gaussiens,

- les résultats obtenus seront dans un second temps généralisés à des états limites quelconques constitués d'intervalles flous L-R non liés. L'hypothèse est faite que les fonctions L et R sont bijectives sur leur support, à l'exclusion de leur noyau [m,n]. Cette hypothèse permet de traiter néanmoins un grand nombre d'intervalles flous, les plus utilisés en général (triangulaires, trapézoïdaux, gaussiens,...)

IV.5. ETATS LIMITES LINEAIRES

IV.5.1. Choix d'une famille d'intervalles flous

Dans l'approche probabiliste de la fiabilité, une famille particulière de variables aléatoires avait été choisie. Il s'agissait des variables normales. L'espace standardisé dans lequel le calcul de la probabilité de défaillance était mené, était composé de variables normales centrées réduites. Si l'on veut appliquer la même méthodologie, il est nécessaire de se définir un tel espace approprié à l'approche possibiliste.

Le choix de variables aléatoires normales centrées réduites avait été initialement fait pour deux raisons:

- la plupart des variables aléatoires était souvent décrite par des lois normales ; il était donc intéressant de commencer par cette famille,

- les premières études en fiabilité concernèrent des états limites linéaires composés de variables normales ; dans un tel cas, le caractère de variable aléatoire normale étant stable pour l'addition, il était possible de mener d'une part analytiquement le calcul de la probabilité de défaillance, d'autre part en essayant de lui trouver un sens géométrique (et donc indépendamment des probabilités).

Le problème est analogue pour le calcul des possibilités. Dans le contexte possibiliste, il existe une infinité de familles d'intervalles flous L-R stables pour l'addition: il suffit que L = R (voir Annexe 2). La famille des nombres flous triangulaires est une famille qui est la plus couramment utilisée pour modéliser les incertitudes de manière possibiliste. Cependant, cette famille sera mal adaptée à notre démarche, car les nombres flous triangulaires sont à support compact. Il semble alors pertinent de disposer d'une famille définie sur $\Re$, notamment pour l'espace standardisé (ce qui facilitera la mise en oeuvre de toute procédure d'optimisation -s'il y a lieu - sans imposer de contraintes supplémentaires sur le support d'étude).

Pour cette raison, nous nous sommes tournés vers **la famille des nombres flous gaussiens**, qui est stable pour l'addition et qui a pour support l'ensemble des réels.

IV.5.2. Etats limites linéaires à deux variables

Considérons pour l'instant un état limite M = g(R,S) composé de deux variables R et S décrites comme deux nombres flous gaussiens non liés :

$$R = (m_R, \alpha_R, \alpha_R)_{L^0R^0} \qquad \text{(IV.21i)}$$

$$S = (m_S, \alpha_S, \alpha_S)_{L^0R^0} \qquad \text{(IV.21ii)}$$

avec $L^0(x) = R^0(x) = \exp(-x^2)$. La possibilité de défaillance Π_R est définie par

$$\Pi_R = \Pi(M \le 0) = \Pi(R - S \le 0) = \sup_{x \le 0}[\pi_M(x)] \qquad \text{(IV.22)}$$

où $\pi_M(.)$ est la distribution de possibilité de la quantité floue M. D'après les sections précédentes, on peut énoncer que M est aussi un nombre flou gaussien :

$$M = (m_R - m_S, \alpha_R + \alpha_S, \alpha_R + \alpha_S)_{L^0R^0}$$

La possibilité de défaillance s'écrit donc

$$\Pi_R = \begin{cases} L^0\left(\dfrac{(m_R - m_S) - 0}{\alpha_R + \alpha_S}\right) = L^0\left(\dfrac{m_R - m_S}{\alpha_R + \alpha_S}\right) = L^0\left(-\dfrac{m_R - m_S}{\alpha_R + \alpha_S}\right) & \text{si } m_R \ge m_S \\ 1 & \text{si } m_R < m_S \end{cases} \qquad \text{(IV.23)}$$

Ce calcul simple met en évidence le terme $\dfrac{m_R - m_S}{\alpha_R + \alpha_S} = \lambda$ pour lequel nous allons chercher une représentation géométrique. Transformons pour cela les nombres flous gaussiens R et S en nombres flous gaussiens non liés R_0 et S_0 normalisés, c'est-à-dire de valeur modale nulle et d'étalement gauche et droit unitaires :

$$R_0 = (0, 1, 1)_{L^0R^0} \qquad \text{(IV.24i)}$$

$$S_0 = (0, 1, 1)_{L^0R^0} \qquad \text{(IV.24ii)}$$

alors on a :

$$R = m_R + \alpha_R R_0$$

$$S = m_S + \alpha_S S_0$$

La fonction d'état limite g(R,S) = 0 garde sa linéarité dans le nouvel espace constitué des nombres flous gaussiens normalisés :

$$g_u(R_0, S_0) = m_R - m_S + \alpha_R R_0 - \alpha_S S_0 = 0 \qquad \text{(IV.25)}$$

Si le point O = (0,0) vérifie $g_u(R_0 = 0, S_0 = 0) \leq 0$, c'est-à-dire s'il se trouve dans le domaine de défaillance, alors $\Pi_R = 1$. Si le point O = (0,0) vérifie $g_u(R_0 = 0, S_0 = 0) > 0$, il se trouve dans le domaine de sécurité, alors $\Pi_R < 1$. Nous nous placerons dans cette hypothèse dans les développements suivants.

En utilisant le principe d'extension et les α-coupes de M, R_0 et S_0, on tire qu'il existe deux valeurs R_0^* et S_0^* qui vérifient

$$\pi_M(0) = \pi_{R_0}(R_0^*) = \pi_{S_0}(S_0^*) \qquad \text{(IV.26)}$$

La triple égalité précédente permet de tirer :

$$L^0(R_0^*) = R^0(-S_0^*) \Rightarrow R_0^* = -S_0^*$$

$$\Pi_R = L^0(R_0^*)$$

ce qui conduit à

$$-R_0^* = S_0^* = \frac{m_R - m_S}{\alpha_R + \alpha_S} = \lambda \qquad \text{(IV.27)}$$

(R_0^*, S_0^*) est le point de croisement entre l'état limite dans l'espace des nombres flous gaussiens normalisés et la bissectrice $R_0 + S_0 = 0$. Il s'agit en fait du point le plus proche de l'origine et "le plus possible", c'est-à-dire celui dont le degré de possibilité est maximal. Si on norme l'espace U constitué des variables R_0 et S_0 par la norme infinie

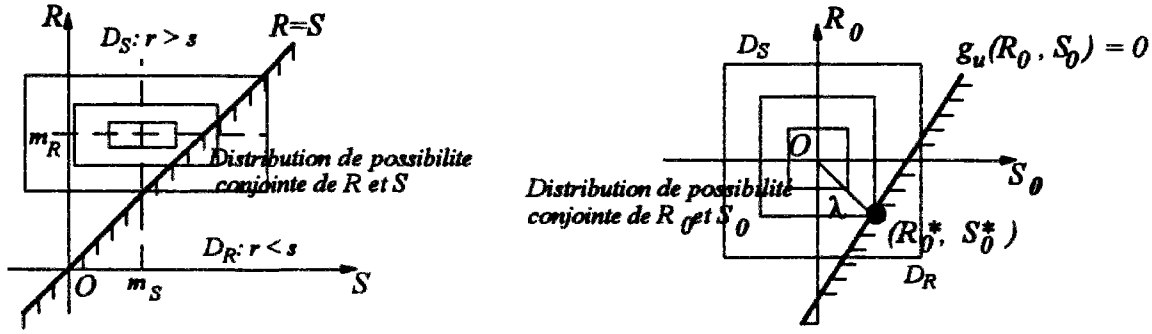
$$\left\| \begin{Bmatrix} R_0 \\ S_0 \end{Bmatrix} \right\|_\infty = \sup(|R_0|, |S_0|) \qquad \text{(IV.28)}$$

alors la distance de l'origine du point (R_0^*, S_0^*) est λ. On appellera le point (R_0^*, S_0^*), le **point de fonctionnement** (Fig.IV.3 a-b). Les carrés tracés sur la figure IV.4

symbolisent les courbes de niveau de la distribution de possibilité conjointe aux deux variables non liées (R_0, S_0):

$$\pi_{R_0,S_0}(r_0,s_0) = \min\left(\pi_{R_0}(r_0), \pi_{S_0}(s_0)\right)$$

Le point de fonctionnement se trouve donc sur la courbe de niveau λ et plus particulièrement à un des angles de cette courbe de niveau, puisqu'on doit avoir $\pi_{R_0}(r_0) = \pi_{S_0}(s_0)$.



Espace de Base *Espace Normalisé*

Fig.IV.3.: Etat limite linéaire à deux variables et interprétation géométrique de l'indice λ

On dénommera le paramètre λ, **indice possibiliste de fiabilité**.

IV.5.3. Etats limites linéaires à plusieurs variables

Pour une fonction d'état limite linéaire composée de r variables de résistance et s variables de sollicitations (nombres flous gaussiens non liés), la possibilité de défaillance est de la forme

$$\Pi_R = \Pi(M \le 0) = \Pi\left(\sum_{i=1}^{r} a_i R_i - \sum_{j=1}^{s} b_j S_j \le 0\right) = \sup_{x \le 0} \pi_M(0) \qquad \text{(IV.29)}$$

et s'écrit

$$\Pi_R = \begin{cases} L^0\left(-\dfrac{\sum_{i=1}^{r} a_i m_{Ri} - \sum_{j=1}^{s} b_j m_{Sj}}{\sum_{i=1}^{r} |a_i|\alpha_{Ri} + \sum_{j=1}^{s} |b_i|\alpha_{Sj}}\right) & \text{si } m_M = \sum_{i=1}^{r} a_i m_{Ri} - \sum_{j=1}^{s} b_j m_{Sj} > 0 \\ 1 & \text{si } m_M \le 0 \end{cases}$$

(IV.30)

L'indice possibiliste de fiabilité s'obtient directement

$$\lambda = \frac{\sum_{i=1}^{r} a_i m_{Ri} - \sum_{j=1}^{s} b_j m_{Sj}}{\sum_{i=1}^{r} |a_i| \alpha_{Ri} + \sum_{j=1}^{s} |b_i| \alpha_{Sj}} \qquad \text{(IV.31)}$$

λ ne prend pas ses valeurs dans $\Re$ mais dans $\Re^+$: $\Pi_R \in [0,1]$ et $\lambda \in [0,\infty[$

IV.6. ETATS LIMITES NON LINEAIRES

Nous nous proposons dans cette section de généraliser les résultats obtenus pour les états limites linéaires. L'interprétation géométrique de l'indice possibiliste de fiabilité dans l'espace des nombres flous gaussiens normalisés va nous servir de fil conducteur. Mais, comme dans le cas de l'approche probabiliste, il faut pouvoir disposer d'une transformation qui transforme tout intervalle flou en nombre flou gaussien.

IV.6.1. Transformée possibiliste

Considérons g(Z) une fonction d'état limite faisant intervenir n intervalles flous L-R non liés Z_i. Définissons pour chaque variable Z l'application τ_Z qui transforme l'intervalle flou Z en un nombre flou gaussien normalisé U :

$$\begin{array}{lccl} \tau_Z : & Z & \rightarrow & U \\ & z & \rightarrow & u = \tau_Z(z) \end{array} \qquad \text{(IV.32)}$$

et vérifiant

$$\begin{cases} \pi_Z(z) = L^0(\tau_Z(z)) & \text{si } z < m_Z \\ \pi_Z(z) = 1 & \text{si } m_Z < z < n_Z \\ \pi_Z(z) = R^0(\tau_Z(z)) & \text{si } z > n_Z \end{cases} \qquad \text{(IV.33)}$$

Comme les fonctions L^0 et R^0 sont strictement décroissantes donc inversibles, on déduit:

$$\begin{array}{lllll} \text{si } z < m_Z : & \pi_Z(z) = L^0(\tau_Z(z)) & \Rightarrow & (L^0)^{-1}\pi_Z(z) = \tau_Z(z) = u \\ \text{si } m_Z < z < n_Z : & \pi_Z(z) = 1 & \Rightarrow & (L^0)^{-1}\pi_Z(z) = \tau_Z(z) = 0 \\ \text{si } z > n_Z : & \pi_Z(z) = R^0(\tau_Z(z)) & \Rightarrow & (R^0)^{-1}\pi_Z(z) = \tau_Z(z) = u \end{array}$$

Remarque

Ces expressions ne sont valables que pour z appartenant au support de Z à l'exclusion des extrémités de ce support. Cette hypothèse n'est pas restrictive pour le calcul du degré de possibilité. Elle ne le sera que pour le calcul du point de fonctionnement, puisqu'en se limitant au support, si le degré de possibilité de défaillance est nul, la composante du point de fonctionnement sur la variable Z sera pris à l'une des extrémités de son support.

Les expressions précédentes permettent de définir pour chaque variable, une transformée τ_Z. Nous avons également besoin de définir l'inverse de cette transformée. Pour cela, il est nécessaire que $\pi_Z(z)$ soit inversible. Pour des intervalles flous L-R pour lesquels les fonctions L et R sont inversibles sur le support de Z, la transformée inverse τ_Z^{-1} peut être définie comme suit :

$$\text{si } u < 0 : \qquad \tau_Z^{-1}(u) = m - \alpha L^{-1}\left(L^0(u)\right) = z$$

$$\text{si } u = 0 : \qquad \tau_Z^{-1}(0) = \begin{cases} m & \text{pour une variable de resistance} \\ n & \text{pour une variable de sollicitation} \\ \dfrac{m+n}{2} & \text{valeur mediane} \\ \text{tout autre valeur} & \text{comprise dans } [m, n] \end{cases}$$

$$\text{si } u > 0 : \qquad \tau_Z^{-1}(u) = n + \beta R^{-1}\left(R^0(u)\right) = z$$

La figure IV.4 illustre graphiquement les champs d'application de cette transformée. Notons que la branche croissante de Z est transformée en la branche croissante de U (et inversement), et que la branche décroissante de Z est transformée en la branche décroissante de U (et inversement).

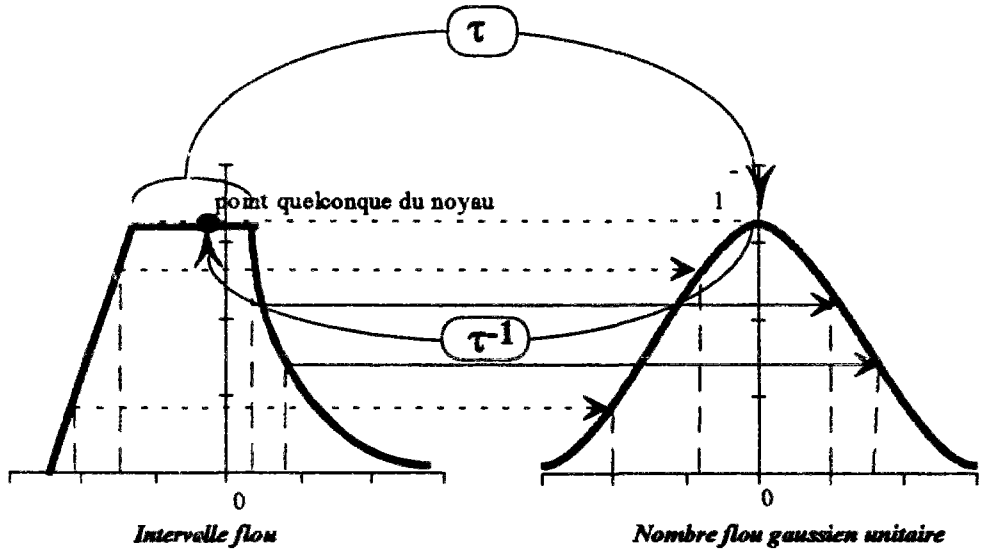


Figure IV.4 : Illustration de la transformée possibiliste

Exemple :

Considérons, à titre d'exemple, une distribution de possibilité trapézoïdale

$$L(z) = R(z) = 1 - z \qquad \text{pour } z \in [0,1]$$

de paramètres m, n, α, β. La transformée τ_Z et son inverse s'exprime aisément

$$\tau_Z(z) = \begin{cases} \sqrt{-\ln\left(L\left(\dfrac{m-z}{\alpha}\right)\right)} & m-\alpha < z < m \\ 0 & z \in [m,n] \\ \sqrt{-\ln\left(L\left(\dfrac{z-n}{\beta}\right)\right)} & n+\beta > z > n \end{cases}$$

$$\tau_Z^{-1}(u) = \begin{cases} m-\alpha\left(1-\exp\left(-u^2\right)\right) & u < 0 \\ \dfrac{m+n}{2} & u = 0 \text{ par exemple} \\ n+\beta\left(1-\exp\left(-u^2\right)\right) & u > 0 \end{cases}$$

IV.6.2. Conséquence de la transformée possibiliste

Une fois transformé l'ensemble des nombres flous de base dans l'espace U des nombres flous gaussiens normalisés, il faut déterminer la possibilité de ruine définie par la nouvelle hypersurface $g_u(\underline{U})=0$. Notons que les transformées permettent de conserver la mesure de la possibilité de défaillance dans le nouvel U-espace :

$$\begin{aligned} \Pi_R &= \Pi(g(Z) \le 0) \\ &= \Pi\left(g\left(\tau_{Z_1}^{-1}(U_1),\ldots,\tau_{Z_n}^{-1}(U_n)\right)\right) \\ &= \Pi(g_u(\underline{U})) \end{aligned} \qquad \text{(IV.34)}$$

IV.6.3. Indice possibiliste de la fiabilité

L'indice possibiliste de fiabilité et le point de fonctionnement sont les solutions du problème de minimisation sous contraintes suivant:

$$\lambda = \min\left[\|\underline{U}\|_\infty\right] \qquad \text{(IV.35)}$$

sous contraintes

$$g_u(\underline{U}) = 0$$

$$|U_i| = |U_j|, \forall i, j$$

L'égalité entre les valeurs absolues provient du fait que chaque U_i est de niveau de distribution de possibilité identique et égale à la possibilité de défaillance Π_R. Comme ces quantités floues, bien que non liées, admettent des distributions de possibilité identiques et symétriques, les valeurs correspondantes au niveau des distributions de possibilité Π_R sont de valeurs absolues identiques.

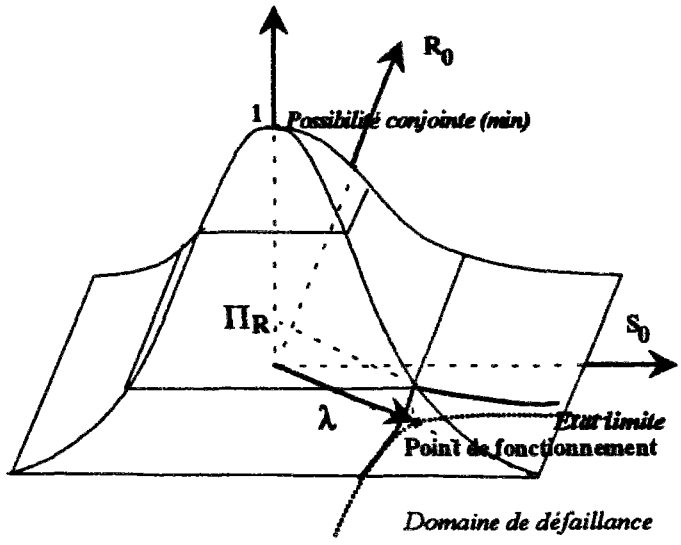


Figure IV.5 : Représentation de l'indice de fiabilité dans le U-espace

IV.6.4. Règle des signes :

Dans le paragraphe IV.3.2, nous avons mis en évidence que, suivant qu'une variable était passée au travers d'un nombre pair ou impair de fonctions hybrides et antitones, la branche croissante ou décroissante de la quantité floue était considérée. Ces résultats sont ici directement applicables et vont nous permettre d'énoncer la règle des signes. Soit la nouvelle fonction d'état limite $g_u(U_1,...,U_n)$. On peut énoncer les résultats suivants (pour des possibilités de défaillance inférieures à 1) [Cremona & Gao, 1995].

i) Pour tout nombre flou U_i passé au travers d'un nombre pair ou nul de fonctions hybrides de type II (en second argument ainsi que ces images successives), de fonctions hybrides de type I (en premier argument ainsi que ces images successives), de fonctions antitones, ou de seules fonctions isotones, alors U_i de niveau de distribution de possibilité Π_R se trouve sur la branche croissante de π_{Ui},

ii) Dans les autres cas, alors U_i de niveau de distribution de possibilité Π_R se trouve sur la branche décroissante de π_{Ui}.

Ces deux résultats se traduisent par :

- Pour tout nombre flou U_i passé au travers d'un nombre pair ou nul de fonctions hybrides de type II (en second argument ainsi que ses images successives), de fonctions hybrides de type I (en premier argument ainsi que ces images successives), de fonctions antitones, ou de seules fonctions isotones, on pose

$$U_i = U < 0$$

- Sinon, on pose

$$U_i = -U > 0$$

IV.6.5. Conséquence de la règle des signes

Remarque préliminaire :

Si le point O = (0,0) vérifie $g_u(U_1 = 0,\ldots,U_n = 0) \leq 0$, c'est-à-dire s'il se trouve dans le domaine de défaillance, alors $\Pi_R = 1$.

Si le point O = (0,0) vérifie $g_u(U_1 = 0,\ldots,U_n = 0) > 0$, il se trouve dans le domaine de sécurité, alors $\Pi_R < 1$.

Nous nous placerons dans cette hypothèse dans les développements suivants.

Revenons à la définition de la possibilité de défaillance:

$$\begin{aligned} \Pi_R &= \Pi(g(Z) \leq 0) \\ &= \Pi\left(g\left(\tau_{Z_1}^{-1}(U_1),\ldots,\tau_{Z_n}^{-1}(U_n)\right)\right) \\ &= \Pi(g_u(\underline{U})) \end{aligned} \qquad \text{(IV.36)}$$

Séparons les variables U_i en deux familles (U_{1i}) et (U_{2j}) selon les résultats tirés de la règle des signes, c'est-à-dire :

$$U_{1i} = U < 0$$

$$U_{2j} = -U > 0$$

Ce résultat provient de l'hypothèse que nous nous trouvons dans le cas où $\Pi_R < 1$, c'est-à-dire que l'origine du U-espace ne se trouve pas dans le domaine de défaillance.

D'après les équations IV.33 , il vient, puisque $U_{1i} < 0$ et $U_{2j} > 0$:

$$\begin{aligned} \tau_{Z_{1i}}^{-1}(U_{1i}) &= m_{1i} - \alpha_{1i} L^{-1}\left(L^0(U_{1i})\right) \\ &= m_{1i} - \alpha_{1i} L^{-1}\left(L^0(U)\right) \end{aligned} \qquad \text{(IV.37i)}$$

$$\begin{aligned}\tau_{Z_{2j}}^{-1}(U_{2j}) &= n_{2j}+\beta_{2j}R^{-1}\left(R^0(U_{2j})\right)\\ &= n_{2j}+\beta_{2j}R^{-1}\left(R^0(-U)\right)\\ &= n_{2j}+\beta_{2j}R^{-1}\left(R^0(U)\right)\end{aligned} \qquad \text{(IV.37ii)}$$

ce qui permet d'écrire:

$$\begin{aligned}\Pi_R &= \Pi\left(g\left(...,\tau_{Z_{1i}}^{-1}(U_{1i}),...,\tau_{Z_{2j}}^{-1}(U_{2j}),...\right)\right)\\ &= \Pi\left(g\left(...,m_{1i}-\alpha_{1i}L^{-1}\left(L^0(U)\right),.....,n_{2j}+\beta_{2j}R^{-1}\left(R^0(U)\right),.....\right)\right)\end{aligned} \qquad \text{(IV.38)}$$

Comme R^0 et L^0 sont identiques, l'équation précédente devient

$$\begin{aligned}\Pi_R &= \Pi\left(g\left(...,m_{1i}-\alpha_{1i}L^{-1}\left(L^0(U)\right),.....,n_{2j}+\beta_{2j}R^{-1}\left(L^0(U)\right),.....\right)\right)\\ &= \Pi\left(g\left(...,m_{1i}-\alpha_{1i}L^{-1}(V),.....,n_{2j}+\beta_{2j}R^{-1}(V),.....\right)\right)\end{aligned} \qquad \text{(IV.39)}$$

avec $V = L^0(U) = \exp\left(-U^2\right)$.

La règle permet donc :

- de choisir les fonctions L ou R utiles à la construction des transformées $\tau_{Z_i}^{-1}$,
- de remplacer tous les U_i par une seule variable U.

Posons

$$\begin{aligned}g(U) &= g\left(...,m_{1i}-\alpha_{1i}L^{-1}\left(L^0(U)\right),.....,n_{2j}+\beta_{2j}R^{-1}\left(L^0(U)\right),.....\right)\\ G(V) &= g\left(...,m_{1i}-\alpha_{1i}L^{-1}(V),.....,n_{2j}+\beta_{2j}R^{-1}(V),.....\right)\end{aligned} \qquad \text{(IV.40)}$$

Le problème (IV.35) se ramène à chercher le point U* solution du problème

$$\min\left(U^2\right) \quad \text{sous contraintes} \quad g_u(U_1,....U_n) = g(U^*) = 0 \quad \text{et} \quad U \le 0$$

On a alors $\lambda = \left|U^*\right|$. Ce dernier problème peut se formaliser plus simplement ; il s'agit de rechercher la racine négative U* de l'équation $g(U) = 0$, la plus proche de 0.

D'après l'équation (IV.40), il est possible de remarquer l'existence d'une alternative à la recherche de la solution U*. En effet, au lieu de chercher U*, il est préférable de

chercher la racine $V^* \in [0,1]$, la plus proche de 1, telle que $g_u(U_1,....U_n) = G(V^*) = 0$. Suivant cette approche, nous n'obtenons pas directement λ, mais la possibilité de défaillance, puisque $V^* = \exp\left(-U^{*2}\right) = \Pi_R$.

La résolution de ces deux problèmes peut être numériquement menée de diverses façons. La démarche la plus simple consiste à utiliser la méthode itérative de Newton/Raphson, par exemple.

IV.6.6. Conclusions

La recherche de la possibilité de défaillance et de son indice possibiliste se réduit à :

1. Si l'origine du U-espace se trouve dans le domaine de défaillance, $g_u(U_1 = 0,..., U_n = 0) < 0$, alors la possibilité de défaillance Π_R est égale à 1, et l'indice λ est nul.

2. Si l'origine du U-espace se trouve dans le domaine de sécurité, alors la possibilité de défaillance Π_R est inférieure à 1, et l'indice λ est strictement positif. Ces deux paramètres se déterminent alors de deux manières différentes, qui se limitent à la simple recherche de solutions scalaires:

   - chercher la racine négative U^* la plus proche de 0, de l'équation $g(U) = 0$; cette approche détermine l'indice de possibilité en premier, puis la possibilité de défaillance,

   - chercher la racine positive V^* la plus proche de 1, de l'équation $G(V) = 0$; cette approche détermine la possibilité de défaillance en premier, puis l'indice de possibilité.

IV.6.7. Exemple

Pour illustrer la règle des signes, considérons l'exemple très simple d'une barre soumise à un effort normal N. Si σ_e est la contrainte limite admissible et A la section de la barre, on peut définir pour état-limite la fonction

$$g(\sigma_e, A, N) = \sigma_e - \frac{N}{A} \qquad \text{(IV.41)}$$

Si on suppose que les diverses variables sont des nombres flous triangulaires, le nouvel état limite dans l'espace standardisé s'écrit

$$g_u(U_{\sigma_e}, U_A, U_N) = \pi_{\sigma_e}^{-1}\left(\pi_0(U_{\sigma_e})\right) - \frac{\pi_N^{-1}(\pi_0(U_N))}{\pi_A^{-1}(\pi_0(U_A))} \qquad \text{(IV.42)}$$

qui n'a de sens que pris séparément sur chaque branche des distributions triangulaires.

a) Ecriture des transformées possibilistes

Si l'on suppose que les variables sont des nombres flous triangulaires non symétriques, on déduit aisément leurs transformées possibilistes et leurs inverses. Pour la variable A, il vient par exemple:

$$\tau_A(A)=\begin{cases}\sqrt{-\ln\left(L\left(\dfrac{m_A-A}{\alpha_A}\right)\right)} & m_A-\alpha_A<A<m_A\\ 0 & A=m_A\\ \sqrt{-\ln\left(L\left(\dfrac{A-m_A}{\beta_A}\right)\right)} & m_A+\beta_A>A>m_A\end{cases}$$

$$\tau_A^{-1}(U_A)=\begin{cases}m_A-\alpha_A\left(1-\exp\left(-U_A{}^2\right)\right) & U_A<0\\ m_A & U_A=0\\ m_A+\beta_A\left(1-\exp\left(-U_A{}^2\right)\right) & U_A>0\end{cases}$$

Des expressions analogues se déduisent pour les autres intervalles flous.

b) Etude de la suite d'opérations arithmétiques

L'état limite

$$g(\sigma_e,A,N)=\sigma_e-\frac{N}{A}$$

peut se décomposer en la suite d'opérations suivantes

$$g(\sigma_e,A,N)=f_1\left(\sigma_e,f_2(N,A)\right)$$

avec (IV.43)

$f_1(.,.)=.-.$ fonction hybride

$f_2(.,.)=./.$ fonction hybride

c) Application de la règle des signes

La règle des signes permet de distinguer dans la construction de chaque branche de l'état limite, quelle branche de chaque variable est utilisée. Pour l'exemple traité, la règle des signes permet d'exprimer :

- la variable σ_e est passée en premier argument d'une fonction hybride de type II. Sa branche croissante contribue à la construction de la branche croissante de l'état limite g.

- la variable N est passée une seule fois en second argument d'une fonction hybride de type II. Sa branche décroissante contribue à la construction de la branche croissante de l'état limite g.

- la variable A et ses images sont passées deux fois en second argument de fonctions hybrides de type II. Sa branche croissante contribue à la construction de la branche croissante de l'état limite g.

d) Remplacement des variables et sélection des fonctions L et R des variables

Pour des possibilités de défaillance strictement plus petites que 1, la règle des signes permet d'énoncer :

- les fonctions L sont choisies pour l'intervalle flou σ_e et A. On fixe de plus $U_{\sigma_e} = U_A = U < 0$

- la fonction R est choisie pour l'intervalle flou N. On fixe de plus $U_N = -U > 0$

ce qui aboutit à

$$g_u(U_{\sigma_e}, U_A, U_N) = -\alpha_{\sigma_e} L^{-1}\left(L^0(U_{\sigma_e})\right) + m_{\sigma_e} - \frac{\beta_N R^{-1}\left(R^0(U_N)\right) + m_N}{-\alpha_A L^{-1}\left(L^0(U_A)\right) + m_A} \qquad \text{(IV.44)}$$

En remplaçant respectivement U_{σ_e}, U_A, U_N par U, U et -U, il vient

$$\begin{aligned} g(U) &= -\alpha_{\sigma_e} L^{-1}\left(L^0(U)\right) + m_{\sigma_e} - \frac{\beta_N R^{-1}\left(R^0(-U)\right) + m_N}{-\alpha_A L^{-1}\left(L^0(U)\right) + m_A} \\ &= -\alpha_{\sigma_e}\left(1 - e^{-U^2}\right) + m_{\sigma_e} - \frac{\beta_N\left(1 - e^{-U^2}\right) + m_N}{-\alpha_A\left(1 - e^{-U^2}\right) + m_A} \end{aligned} \qquad \text{(IV.45)}$$

Le calcul de U est alors immédiat puisqu'il se ramène à la détermination des racines $\left(1 - e^{-U^2}\right)$ d'un polynôme du second degré

$$\alpha_{\sigma_e}\alpha_A X^2 + \left(-m_A\alpha_{\sigma_e} - m_{\sigma_e}\alpha_A - \beta_N\right)X - m_N + m_A m_{\sigma_e} = 0 \qquad \text{(IV.46)}$$

d'où le résultat (racine positive)

$$X^* = 1 - e^{-U^{*2}}$$

$$= \frac{\left(m_A \alpha_{\sigma_e} + m_{\sigma_e} \alpha_A + \beta_N\right) + \sqrt{\left(m_A \alpha_{\sigma_e} + m_{\sigma_e} \alpha_A + \beta_N\right)^2 + 4\alpha_{\sigma_e} \alpha_A (m_N - m_A m_{\sigma_e})}}{2\alpha_{\sigma_e} \alpha_A}$$

ce qui donne directement la possibilité de défaillance :

$$\Pi_R = e^{-U^{*2}}$$

$$= 1 - \frac{\left(m_A \alpha_{\sigma_e} + m_{\sigma_e} \alpha_A + \alpha_N\right) + \sqrt{\left(m_A \alpha_{\sigma_e} + m_{\sigma_e} \alpha_A + \alpha_N\right)^2 + 4\alpha_{\sigma_e} \alpha_A (m_N - m_A m_{\sigma_e})}}{2\alpha_{\sigma_e} \alpha_A} \tag{IV.47}$$

Dans ce cas, l'indice possibiliste s'écrit :

$$\lambda = \sqrt{-\ln\left(1 - \frac{\left(m_A \alpha_{\sigma_e} + m_{\sigma_e} \alpha_A + \beta_N\right) + \sqrt{\left(m_A \alpha_{\sigma_e} + m_{\sigma_e} \alpha_A + \beta_N\right)^2 + 4\alpha_{\sigma_e} \alpha_A (m_N - m_A m_{\sigma_e})}}{2\alpha_{\sigma_e} \alpha_A}\right)} \tag{IV.48}$$

IV.7. FIABILITE DES SYSTEMES

IV.7.1. Systèmes en série

La possibilité de défaillance d'un système de m composants en série, faisant intervenir n variables globales, s'exprime aisément au moyen de l'axiome (IV.3)

$$\Pi_R^{sys} = \Pi\left(\bigcup_{i=1}^{m} (g_i(Z_1, \ldots, Z_n) \le 0)\right) = \max_{i \in \{1, \ldots, m\}} \left(\Pi(g_i(Z_1, \ldots, Z_n) \le 0)\right) \tag{IV.49}$$

où M_i sont les marges de sécurité des m composants constituant le système.

L'expression (IV.49) exprime encore la cohérence avec l'idée physique de possibilité: pour qu'il y ait défaillance d'un système série, il suffit qu'il y ait défaillance du maillon le plus fragile. Il est à préciser que (IV.49) est toujours vraie même si les marges M_i sont liées [Dubois & Prade, 1989]. Plus simplement, ce résultat est une conséquence de l'axiome de construction des mesures de possibilité concernant la possibilité d'unions.

IV.7.2. Système parallèle

La possibilité de défaillance d'un système en parallèle, admettant p composants, implique de connaître la possibilité de défaillance de conjonctions (intersections). D'après l'inégalité (IV.4), on ne peut donc obtenir qu'une borne supérieure de cette possibilité de défaillance :

$$\Pi_R^{sys} = \Pi\left(\bigcap_{i=1}^{p}\left(g_i(Z_1,\ldots,Z_n)\le 0\right)\right) \le \min_{i\in\{1,\ldots,p\}}\left(\Pi\left(g_i(Z_1,\ldots,Z_n)\le 0\right)\right) \tag{IV.50}$$

Le résultat (IV.50), bien qu'exprimé par une inégalité, est aussi cohérent avec l'idée physique de possibilité: pour avoir la défaillance d'un système parallèle, il suffit au minimum que l'élément le plus sûr soit défaillant. Sa défaillance est une condition nécessaire mais non suffisante (les autres peuvent rester intacts), aspect représenté par l'inégalité.

IV.7.3. Système quelconque

Pour un système quelconque composé de m sous-systèmes en parallèle admettant n_i composants (i=1,...,m), la possibilité de défaillance se déduit des expressions précédentes

$$\Pi_R^{sys} = \Pi\left(\bigcup_{i=1}^{m}\bigcap_{j=1}^{n_i}\left(g_{ij}(Z_1,\ldots,Z_n)\le 0\right)\right) = \max_{i\in\{1,\ldots,m\}}\left(\Pi\left[\bigcap_{j=1}^{n_i}\left(g_{ij}(Z_1,\ldots,Z_n)\le 0\right)\right]\right)$$
$$\le \max_{i\in\{1,\ldots,m\}}\left(\min_{j\in\{1,\ldots,n_i\}}\left(\Pi\left(g_{ij}(Z_1,\ldots,Z_n)\le 0\right)\right)\right) \tag{IV.51}$$

IV.8. CONCLUSIONS

Nous avons développé dans ce chapitre, une théorie de la fiabilité reposant sur la théorie des possibilités. Les chapitres V et VI constitueront des exemples d'illustration de cette approche. La figure IV.6 résume le champ d'application de la théorie et les grandes étapes du calcul des possibilités de défaillance et des indices possibilistes de fiabilité. Une plus large explication des notions introduites dans ce chapitre est donnée dans le chapitre suivant (chapitre V) où les divers concepts théoriques sont comparés avec l'approche probabiliste de la fiabilité.

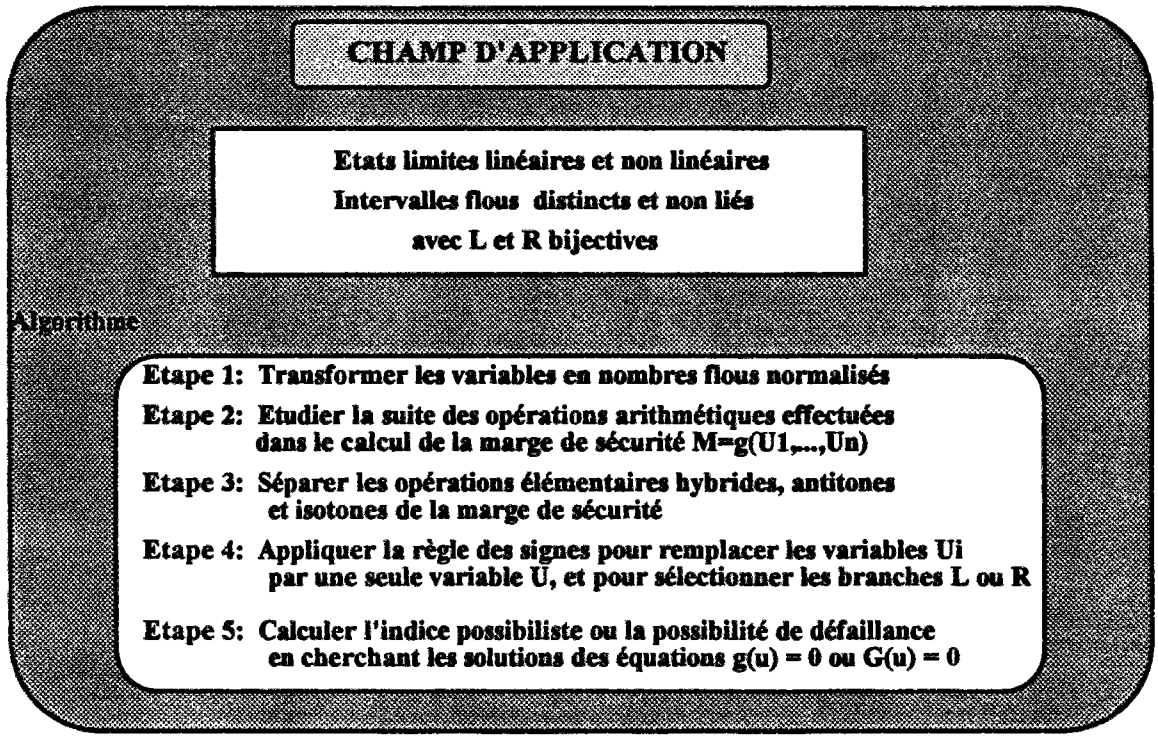


Figure IV.6 : Champ d'application et démarche générale de l'approche possibiliste de la fiabilité

CHAPITRE V
COMPARAISONS ENTRE APPROCHES PROBABILISTE ET POSSIBILISTE

V.1. COMPARAISONS ENTRE APPROCHES

Les théories possibiliste et probabiliste de la fiabilité présentent de nombreux points et concepts communs liés à leur rattachement à la notion de pré-mesure de confiance. Les différences proviennent de l'approche choisie pour modéliser l'incertain : la théorie des possibilités ou la théorie des probabilités.

Cette section détaille les divers concepts introduits par les deux démarches.

V.1.1. Possibilité et probabilité de défaillance

La première question que l'on peut se poser dans tout développement mathématique d'une théorie de la fiabilité, est le sens que l'on accordera aux divers degrés de confiance de la sécurité. En d'autres termes, que signifient par exemple probabilité et possibilité de défaillance ?

La théorie des probabilités est aujourd'hui une théorie très avancée, dont l'axiomatique est claire et non contestée. Comme le soulignent Dubois et Prade [Dubois & Prade, 1988], les controverses relatives à la théorie des probabilités ne portent pas sur son axiomatique, mais sur son interprétation: *Quelle réalité cherche-t-on à traduire au moyen de la théorie des probabilités*?

Cette question peut paraître anodine, car la théorie des probabilités reste attachée au calcul de chances. Lorsque l'on parle de la probabilité d'un événement, une correspondance est automatiquement faite avec le concept d'analyse fréquentielle : la probabilité de cet événement est le rapport entre le nombre de cas favorables à l'apparition d'événement au nombre de cas possibles. L'école fréquentiste considère donc les probabilités comme la limite de fréquences d'événements observés. Cependant, cette approche garde un caractère peu opérationnel en présence de nombres d'observations

insuffisants ou en l'absence de répétabilité des expériences. Pour éviter ces difficultés, l'école subjectiviste a proposé de voir dans les probabilités des mesures du sentiment d'incertitude. La probabilité est alors interprétée *comme une caractéristique proportionnelle à la somme qu'un individu accepterait de payer au cas où la proposition qu'il affirme comme vraie s'avérerait fausse* [Dubois & Prade, 1988]. Ceci correspond tout à fait au concept de probabilité de défaillance, que l'on ne peut traduire de manière fréquentielle (le nombre de cas de rupture étant en général insuffisant), mais de manière subjective, comme étant rattachée à un 'coût' que l'on accepte s'il y a rupture.

La probabilité de défaillance ne doit donc pas être perçue comme un indicateur fréquentiel, mais comme un indicateur subjectif du sentiment d'incertitude. En ce sens, le grief que l'on peut faire au concept de possibilité d'occurrence d'un événement, de ne pas être représentatif d'une réalité liée à l'observation, peut également être fait au concept de probabilité d'occurrence de la défaillance d'une structure. En théorie de la fiabilité, probabilité et possibilité de défaillance recouvrent un même concept: l'évaluation subjective d'un sentiment d'incertitude vis à vis de la sécurité. Dans ce cas, la théorie des possibilités offre de nombreux avantages par rapport à la théorie des probabilités, et notamment celui de rendre compte de tous les aspects du jugement incertain, c'est à dire allant de l'ignorance partielle à l'ignorance totale [Dubois & Prade, 1988]. Ceci n'est pas abordé par cette thèse, mais offre à la théorie des possibilités, et peut-être, à la théorie possibiliste de la fiabilité, des potentialités utilisables dans la gestion des structures.

V.1.2. Comparaisons entre les méthodologies

Les approches probabiliste et possibiliste partent du même principe qui se réduit en deux étapes essentielles :

1. Transformer le problème de base, exprimé dans l'espace des variables de base, en un problème formulé dans un espace normé, constitué de variables aux caractéristiques particulières,

2. Déterminer le point de l'état limite le plus proche de l'origine (suivant la norme choisie) dans ce nouvel espace.

Le tableau V.1. résume les choix pris dans les deux étapes pour les approches probabiliste et possibiliste.

Etape	Approche probabiliste	Approche possibiliste
1: Choix de l'espace normalisé	– Espace composé des ***variables aléatoires normales centrées réduites indépendantes entre elles,*** – Espace normé par la distance euclidienne $\|\|\ \|\|_E$	– Espace composé des **nombres flous gaussiens normalisés** (*étalement unitaire, valeur modale nulle*) – Espace normé par la distance infinie $\|\|\ \|\|_\infty$
2: Problème de minimisation	$\beta_H^2 = \min\left(\|\underline{U}\|_E^2\right)$ sous contrainte $g_u(\underline{U}) = 0$	$\lambda = \min\left(\|\underline{U}\|_\infty\right)$ sous contrainte $g_u(\underline{U}) = 0$ $\|U_i\| = \lambda, \forall i$

Tableau V.1 : Comparaisons entre méthodologies

V.1.3. Indices de fiabilité

La théorie possibiliste de la fiabilité met en évidence un paramètre ou indicateur λ qui, au même titre que la possibilité de défaillance Π_R, permet d'évaluer le niveau de sécurité d'un composant de système. Cet indice est à rapprocher de l'indice de fiabilité β_H. Pour des états limites linéaires composés de nombres flous gaussiens (approche possibiliste) et de variables normales (approche probabiliste), on a les expressions suivantes

Approche probabiliste	Approche possibiliste
• $\beta_H = \dfrac{\sum_{i=1}^{r} a_i E(R_i) - \sum_{j=1}^{s} b_j E(S_j)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{r} a_i^2 \sigma^2(R_i) + \sum_{j=1}^{s} b_j^2 \sigma^2(S_j)}}$	• $\lambda = \dfrac{\sum_{i=1}^{r} a_i m_{Ri} - \sum_{j=1}^{s} b_j m_{Sj}}{\sum_{i=1}^{r} \lvert a_i \rvert \alpha_{R_i} + \sum_{j=1}^{s} \lvert b_j \rvert \alpha_{Sj}}$ si $\sum_{i=1}^{r} a_i m_{Ri} - \sum_{j=1}^{s} b_j m_{Sj} > 0$ • $\lambda = 0$ si $\sum_{i=1}^{r} a_i m_{Ri} - \sum_{j=1}^{s} b_j m_{Sj} \le 0$
• $P_R = \Phi(-\beta_H)$	• $\Pi_R = L^{\circ}(-\lambda)$ si $\sum_{i=1}^{r} a_i m_{Ri} - \sum_{j=1}^{s} b_j m_{Sj} > 0$ • $\Pi_R = 1$ si $\sum_{i=1}^{r} a_i m_{Ri} - \sum_{j=1}^{s} b_j m_{Sj} \le 0$

Tableau V.2 : Etats limites linéaires

A la différence de l'indice probabiliste de fiabilité β, λ ne prend pas ses valeurs dans $\Re$ mais dans $\Re^+$:

$\Pi_R \in [0,1]$ et $\lambda \in [0,\infty[$

$P_R \in [0,1]$ et $\beta \in]-\infty,\infty[$

V.1.4. Méthodes de résolution des problèmes de minimisation

Les problèmes de minimisation introduits dans les chapitres III et IV requièrent la mise en oeuvre de techniques numériques de recherche de minima sous contraintes. Dans l'approche possibiliste, cette recherche se limite à la recherche d'un scalaire, par exploitation de la deuxième contrainte de la minimisation. Le tableau V.3. compare les techniques de résolution employées pour chaque problème.

Approche probabiliste	Approche possibilite
1. Algorithme de Rackwitz pour la recherche du point de fonctionnement $\underline{U}^*$	1. Algorithme de Newton/Raphson pour la recherche de U^*(scalaire négatif) ou de $V^*(\in[0,1])$ (*utile seulement si le point O ne se trouve pas dans le domaine de défaillance du U-espace ; dans ce cas* $\lambda = 0, \Pi_R = 1$)
2. Détermination de l'indice de fiabilité $\beta_H = \left\|\underline{U}^*\right\|_E$	2a. Détermination de l'indice de fiabilité $\lambda = \left\|U^*\right\|$ si la recherche s'opère sur U^* 2b. Détermination de la possibilité de défaillance $\Pi_R = \exp\left(-U^{*2}\right)$ si la recherche s'opère sur U^*
3. Détermination de la probabilité de défaillance $P_R \approx \Phi(-\beta_H)$ (méthode FORM)	3a. Détermination de la possibilité de défaillance $\Pi_R = V^*$ si la recherche s'opère sur $V^*(\in[0,1])$ 3b. Détermination de l'indice de fiabilité $\lambda = \sqrt{-\ln\left(V^*\right)}$ si la recherche s'opère sur $V^*(\in[0,1])$

Tableau V.3 : Comparaisons entre techniques de résolution

La mise en oeuvre de l'approche possibiliste est très simple, puisqu'elle ne nécessite que la recherche d'un scalaire. Ceci est réalisé en appliquant la règle des signes. Il est à noter que la recherche de l'indice et du point de fonctionnement peut être contourné, pour ne laisser place qu'au calcul de la possibilité de défaillance (variable V^*).

V.1.5. Point de fonctionnement

Le tableau V.3. et le chapitre III montrent que la probabilité de défaillance est approximée par les techniques habituelles de la théorie de la fiabilité (sauf si l'on emploie des méthodes de simulation de type Monte-Carlo). Dans l'approche possibiliste, le calcul de la possibilité de défaillance est exact. Les expressions 2b et 3 sont en effet analytiques. Ces résultats cachent une propriété remarquable : le degré de possibilité de défaillance est uniquement lié au point de fonctionnement, et indépendant de la forme de l'état limite en ce point.

Dans la théorie classique de la fiabilité, le point de fonctionnement et l'état limite sont essentiels pour le calcul de la probabilité de défaillance. Il y a intégration d'une probabilité conjointe sur un domaine limité par une hypersurface ou un hyperplan approximant l'hypersurface de ruine au point de fonctionnement. Dans la théorie possibiliste de la fiabilité, seul le point de fonctionnement est utile, puisque la possibilité de défaillance est le degré de possibilité de ce point, du fait que ce point a le degré de possibilité le plus élevé dans le domaine de défaillance. La mesure de possibilité étant une mesure de maximum, la possibilité de défaillance est ce degré.

V.2. EXEMPLE D'APPLICATION

A titre d'illustration, considérons le treillis décrit par la figure V.1. et détaillé dans l'Annexe 2. Supposons que l'état limite pertinent soit la défaillance par excès de compression ou de traction. Notons R_i les efforts normaux résistants de chaque barre et N_i les efforts normaux appliqués. Le matériau constituant les barres est supposé ductile.

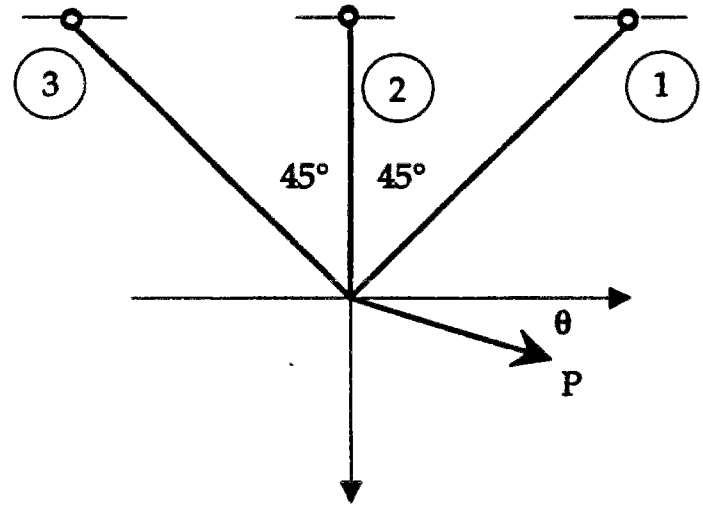


Figure.V.1 : Schéma descriptif de l'exemple de treillis à trois barres

V.2.1. Description probabiliste des variables

Les variables R_i et N_i sont supposées être décrites par des *lois normales* dont les caractéristiques sont données dans le tableau V.4.

Lois normales	P	R_1	R_2	R_3
Moyenne	4 kN	3,5 kN	3,5 kN	3,5 kN
Ecart type	0,8 kN	0,4 kN	0,6 kN	0,4 kN

Tableau V.4 : Données probabilistes des variables du treillis

V.2.2. Description possibiliste des variables

Deux descriptions possibilistes ont été choisies pour modéliser les variables R_i et N_i:

- la première consiste à modéliser chacune des variables par des nombres flous gaussiens de valeurs modales et d'étalements pris respectivement égaux aux valeurs moyennes et aux écarts types du tableau V.4,

- La seconde description vise à choisir des distributions de possibilité triangulaires pour chacune des variables. Pour cela, on retient comme valeurs modales les moyennes des diverses variables. Les branches croissante et décroissante (linéaires par hypothèse) sont calibrées de telle façon que le support corresponde à une probabilité d'occurrence de 90%. La figure V.2 illustre la démarche adoptée.

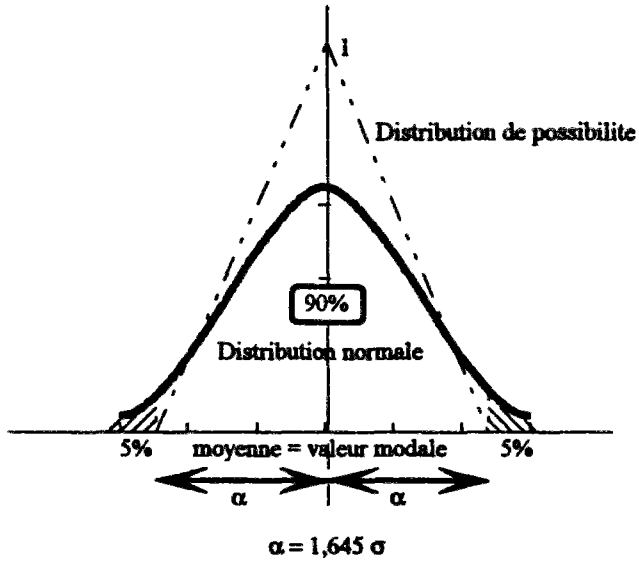


Figure V.2 : Description possibiliste des variables de calcul au moyen de nombres flous triangulaires

Dans le dernier cas, les valeurs des étalements des diverses variables peuvent alors être déterminées (tableau V.5):

$$\alpha_P = m_P - (m_P - 1{,}645\sigma_P) = 1{,}645\sigma_P$$
$$\alpha_{R1} = m_{R1} - (m_{R1} - 1{,}645\sigma_{R1}) = 1{,}645\sigma_{R1}$$
$$\alpha_{R2} = m_{R2} - (m_{R2} - 1{,}645\sigma_{R2}) = 1{,}645\sigma_{R2}$$
$$\alpha_{R3} = m_{R3} - (m_{R3} - 1{,}645\sigma_{R3}) = 1{,}645\sigma_{R3}$$

Distributions triangulaires	P	R_1	R_2	R_3
Valeur modale	4 kN	3,5 kN	3,5 kN	3,5 kN
Valeur étalement	1,316 kN	0,658 kN	0,987 kN	0,658 kN

Tableau V.5 : Données possibilistes des variables du treillis

V.2.3. Calcul des indices probabiliste et possibiliste de la fiabilité

Chaque marge de sécurité, correspondant à chaque barre du treillis (voir Annexe 3), est une expression linéaire en P et R_i. Les indices de fiabilité se déduisent analytiquement.

a) Cas probabiliste

En utilisant la démarche de la fiabilité des structures présentée dans le chapitre III, nous tirons directement les trois indices de fiabilités.

$$\beta_1 = \frac{m_{R_1} - \left|\frac{\sqrt{2}(\sin\theta - \cos\theta) - 2\cos\theta}{2(\sqrt{2}+1)}\right| m_P}{\sqrt{\sigma_{R_1}^2 + \left(\sigma_P \frac{\sqrt{2}(\sin\theta - \cos\theta) - 2\cos\theta}{2(\sqrt{2}+1)}\right)^2}}$$

$$\beta_2 = \frac{m_{R_2} - \left|\frac{\sqrt{2}\sin\theta}{(\sqrt{2}+1)}\right| m_P}{\sqrt{\sigma_{R_2}^2 + \left(\sigma_P \frac{\sqrt{2}\sin\theta}{(\sqrt{2}+1)}\right)^2}}$$

$$\beta_3 = \frac{m_{R_3} - \left|\frac{\sqrt{2}(\sin\theta + \cos\theta) + 2\cos\theta}{2(\sqrt{2}+1)}\right| m_P}{\sqrt{\sigma_{R_3}^2 + \left(\sigma_P \frac{\sqrt{2}(\sin\theta + \cos\theta) + 2\cos\theta}{2(\sqrt{2}+1)}\right)^2}} \qquad \text{(V.1)}$$

Remarque :

Dans l'annexe 3, nous considérons les états limites élémentaires comme : $M_i = R_i - |N_i| = R_i - |\alpha_i|P$ (R_i toujours positif). En fait, les états limites élémentaires sont exprimés comme : $M_i = |R_i| - |N_i|$, dans ce cas, il y aura six fonctions élémentaires. Mais, pour simplifier les calculs, nous ne prenons ici que les trois expressions indiquées dans la formule (V.1).

Les probabilités de défaillance correspondantes s'écrivent alors :

$$P_{R1} = \Phi(-\beta_1) \qquad P_{R2} = \Phi(-\beta_2) \qquad P_{R3} = \Phi(-\beta_3)$$

Si nous choisissons pour valeurs numériques les données du tableau V.4, les indices de fiabilité et les probabilités de défaillance peuvent être calculés pour différents angles de chargement. Les figures V.3 et V.4 donnent l'évolution des indices de fiabilité et des probabilités de défaillance en fonction des angles de chargement.

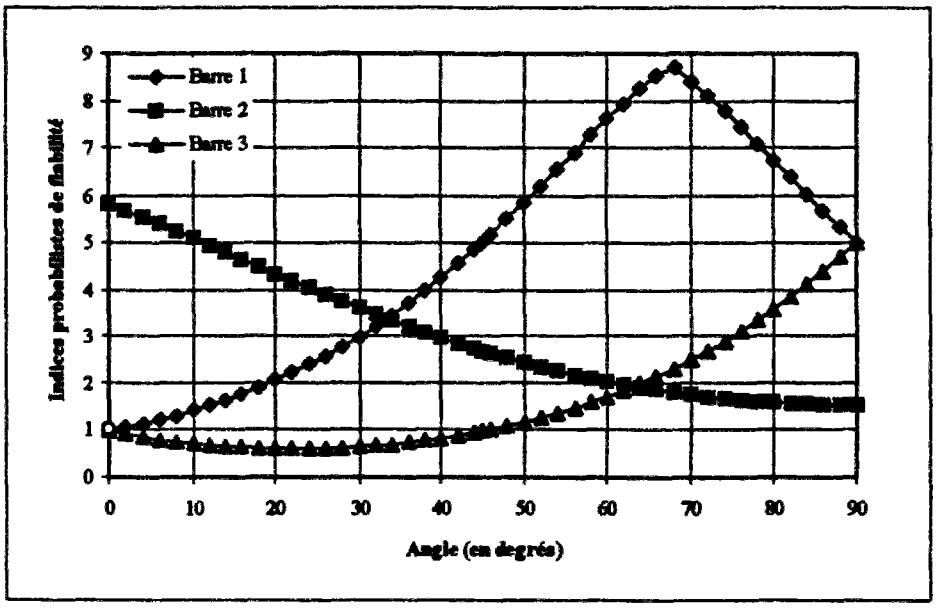


Figure V.3 : Evolution des indices probabilistes de fiabilité en fonction des angles de chargements

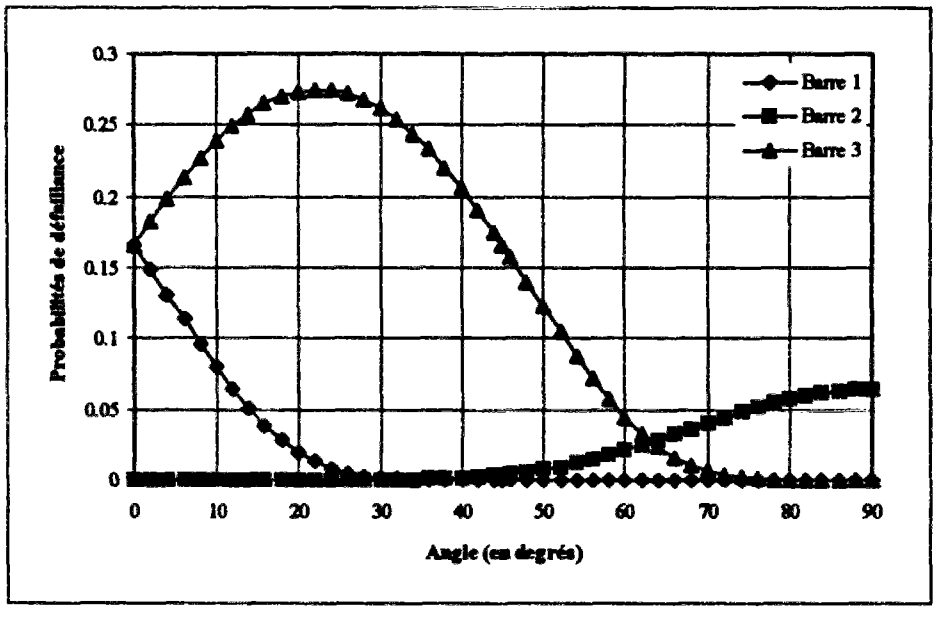


Figure V.4 : Evolution des probabilités de défaillance en fonction des angles de chargements

b) Cas possibiliste

Première hypothèse :

On suppose que les fonctions L et R sont, pour toutes les variables, des fonctions gaussiennes L^0 et R^0. En utilisant la démarche possibiliste de la fiabilité des structures présentée dans le chapitre IV, nous pouvons déduire directement les trois indices de fiabilités.

$$\lambda_1 = \frac{m_{R_1} - \left|\frac{\sqrt{2}(\sin\theta - \cos\theta) - 2\cos\theta}{2(\sqrt{2}+1)}\right| m_P}{\alpha_{R_1} + \alpha_P \left|\frac{\sqrt{2}(\sin\theta - \cos\theta) - 2\cos\theta}{2(\sqrt{2}+1)}\right|}$$

$$\lambda_2 = \frac{m_{R_2} - \left|\frac{\sqrt{2}\sin\theta}{(\sqrt{2}+1)}\right| m_P}{\alpha_{R_2} + \alpha_P \left|\frac{\sqrt{2}\sin\theta}{(\sqrt{2}+1)}\right|}$$

$$\lambda_3 = \frac{m_{R_3} - \left|\frac{\sqrt{2}(\sin\theta + \cos\theta) + 2\cos\theta}{2(\sqrt{2}+1)}\right| m_P}{\alpha_{R_3} + \alpha_P \left|\frac{\sqrt{2}(\sin\theta + \cos\theta) + 2\cos\theta}{2(\sqrt{2}+1)}\right|} \qquad \text{(V.2)}$$

Les possibilités de défaillance correspondantes sont :

$$\Pi_{R1} = L^0(-\lambda_1) \qquad \Pi_{R2} = L^0(-\lambda_2) \qquad \Pi_{R3} = L^0(-\lambda_3)$$

Les Figures V.5 et V.6 donnent respectivement les évolutions des indices possibilistes de fiabilité et des possibilités de défaillance en fonction des angles de chargement.

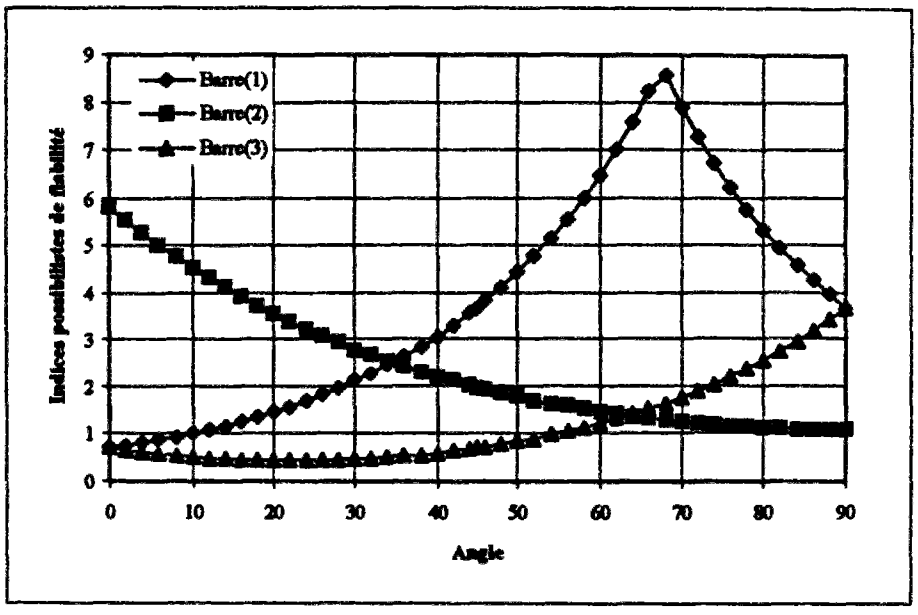


Figure V.5 : Evolution des indices de fiabilité en fonction des angles de chargements

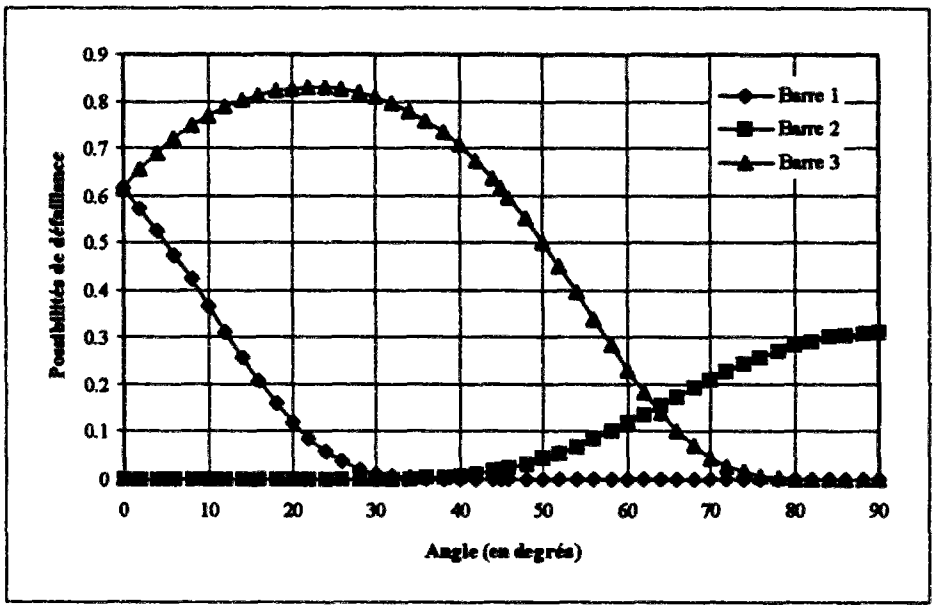


Figure V.6 : Evolution des possibilités de défaillance en fonction des angles de chargements

Deuxième hypothèse :

Les variables sont décrites par des nombres flous triangulaires symétriques. Les fonctions L et R des distributions de possibilité sont donc:

$$L(x) = R(x) = 1 - x$$

Dans ce cas, il faut faire appel à la transformée possibiliste et à la règle des signes. Si les fonctions d'état limite sont formellement écrites

$$M_i = R_i - A_i.P \qquad (V.3)$$

($A_i \geq 0$) en appliquant les résultats du chapitre IV, le point de fonctionnement est donné par la solution négative de l'équation:

$$m_{R_i} - \alpha_{R_i} L^{-1}\left(L^0(U)\right) - A_i.\left[m_P + \alpha_P R^{-1}\left(L^0(U)\right)\right] = 0 \qquad (V.4)$$

car l'opérateur " - " est une fonction hybride. En posant $L^0(U) = V$, la solution de l'équation V.4 est :

$$\begin{aligned} V_i^* &= L\left(\frac{m_{R_i} - A_i.m_P}{\alpha_{R_i} + A_i.\alpha_P}\right) \\ &= 1 - \frac{m_{R_i} - A_i.m_P}{\alpha_{R_i} + A_i.\alpha_P} \end{aligned} \qquad (V.5)$$

V_i^* doit satisfaire à la condition d'appartenir à l'intervalle [0,1], ce qui donne les cas suivants:

- si $V_i^* \in [0,1]$, alors

$$\begin{aligned} \Pi_R^i &= V_i^* \\ &= 1 - \frac{m_{R_i} - A_i.m_P}{\alpha_{R_i} + A_i.\alpha_P} \end{aligned}$$

$$\lambda_i = \sqrt{-\ln\left(1 - \frac{m_{R_i} - A_i.m_P}{\alpha_{R_i} + A_i.\alpha_P}\right)}$$

- si $V_i^* < 0$, $\Pi_R^i = 0$ et λ_i est non défini (valeur "infinie")

- si $V_i^* > 1$, $\Pi_R^i = 1$ et $\lambda_i = 0$

Les figures V.7 et V.8 donnent les évolutions des indices possibilistes de fiabilité et des possibilités de défaillance.

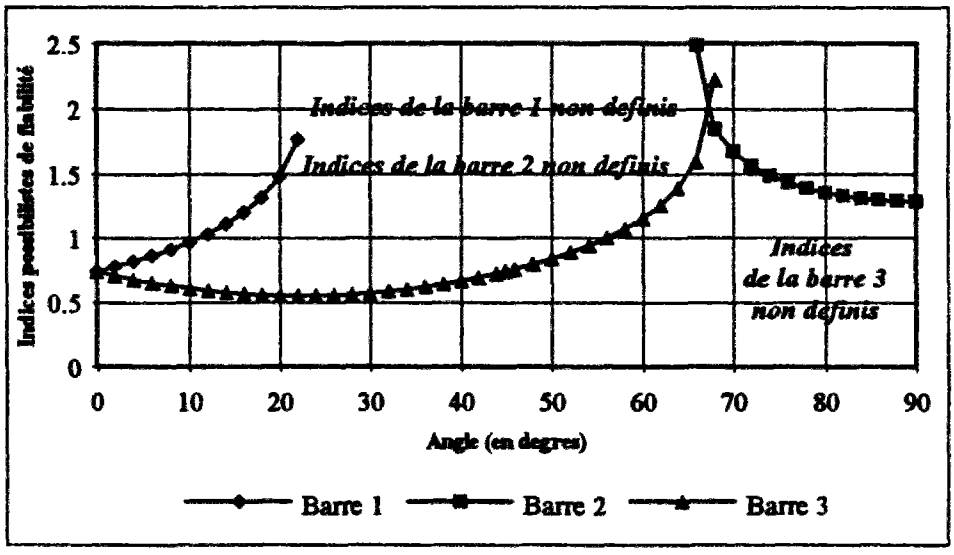


Figure V.7 : Evolution des indices possibilistes de fiabilité suivant divers angles de chargement

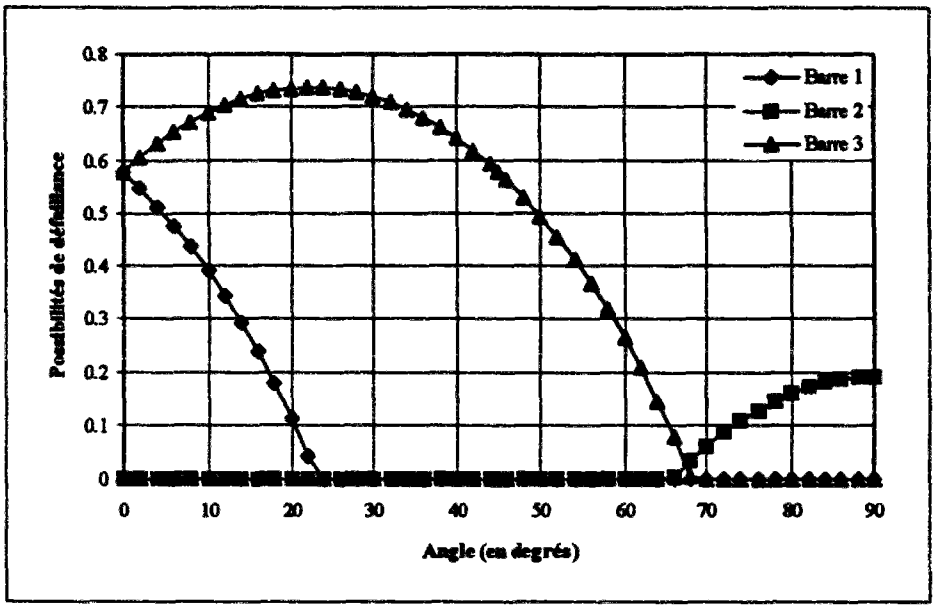


Figure V.8 : Evolution des possibilités de défaillance suivant divers angles de chargement

Les deux descriptions possibilistes des variables de calcul conduisent à des résultats comparables pour ce qui concerne les possibilités de défaillance. Notons que pour la deuxième modélisation des variables, des niveaux de possibilité de 0 sont atteints. Ces derniers proviennent du fait que les diverses variables sont modélisés par des nombres flous au support borné. Par voie de conséquence, les indices possibilistes sont non définis car "infinis".

V.2.4. Comparaisons entre les résultats probabilistes et possibilistes

Les divers résultats montrent la même tendance de variation des probabilités et des possibilités de défaillance par rapport aux divers angles de chargement. La figure V.9 en donne un aperçu pour ce qui concerne la barre 3.

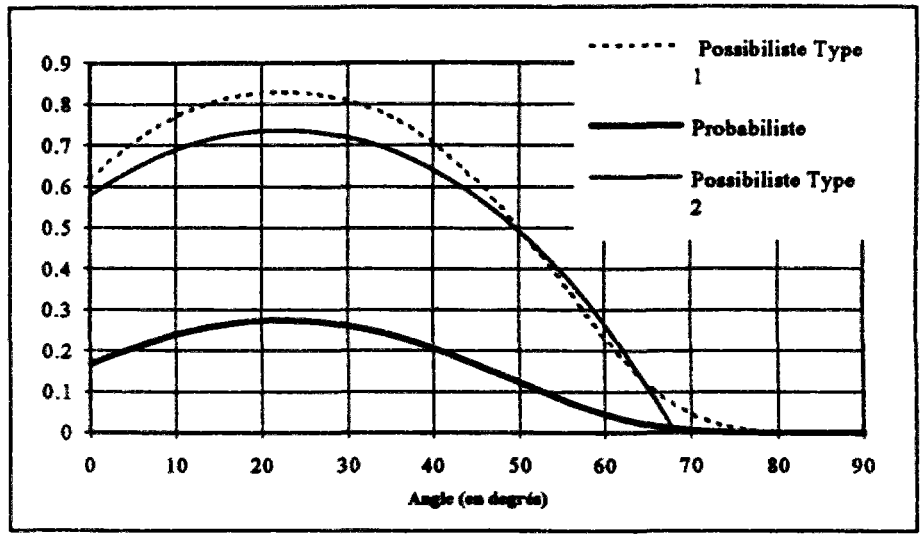


Figure V.9 : Comparaisons entre les possibilités et probabilités de défaillance en fonction des angles de chargements (Barre 3)

Il est enfin normal que les maxima coïncident, puisqu'ils correspondent aux intensités maximales des efforts appliqués.

Pour mener une comparaison plus approfondie, nous normalisons tous les indices probabilistes et possibilistes de la fiabilité, c'est-à-dire que pour chaque composant (ou barre), on a :

$$\hat{P}_R^i(\theta) = \frac{P_R^i(\theta)}{\max\limits_{\theta\in[0,90]}\left(P_R^i(\theta)\right)} \quad \text{et} \quad \hat{\Pi}_R^i(\theta) = \frac{\Pi_R^i(\theta)}{\max\limits_{\theta\in[0,90]}\left(\Pi_R^i(\theta)\right)}$$

où

$P_R^i(\theta)$: probabilité de défaillance de la barre i suivant l'angle de chargement,

$\max\limits_{\theta\in[0,90]}\left(P_R^i(\theta)\right)$: probabilité de défaillance maximale de la barre i,

$\Pi_R^i(\theta)$: possibilité de défaillance de la barre i suivant l'angle de chargement,

$\max\limits_{\theta\in[0,90]}\left(\Pi_R^i(\theta)\right)$: possibilité de défaillance maximale de la barre i.

Les figures V.10, V.11 et V.12 montrent les évolutions des probabilités et des possibilités de défaillance normalisées en fonction de divers angles de chargement pour les barres 1, 2 et 3.

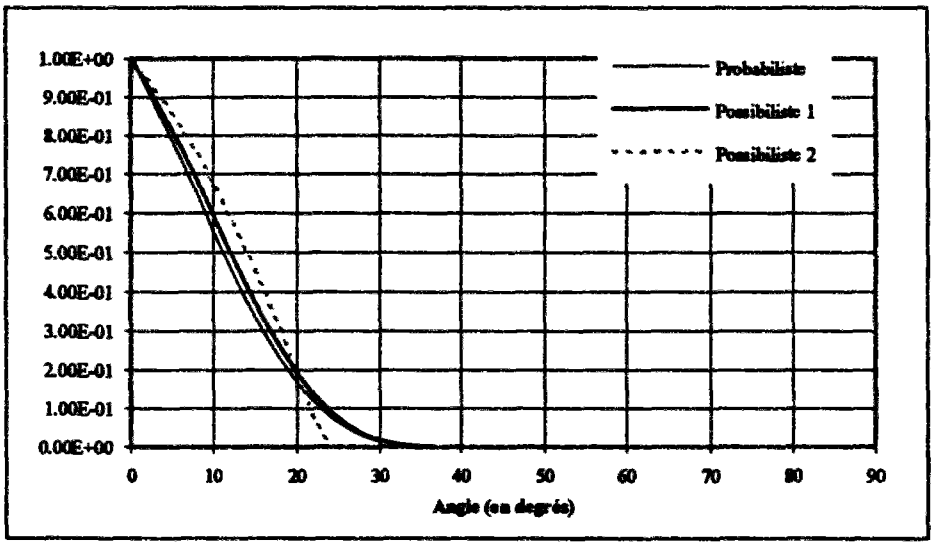


Figure V.10 : Evolution des probabilités et des possibilités de défaillance normalisées pour la barre 1

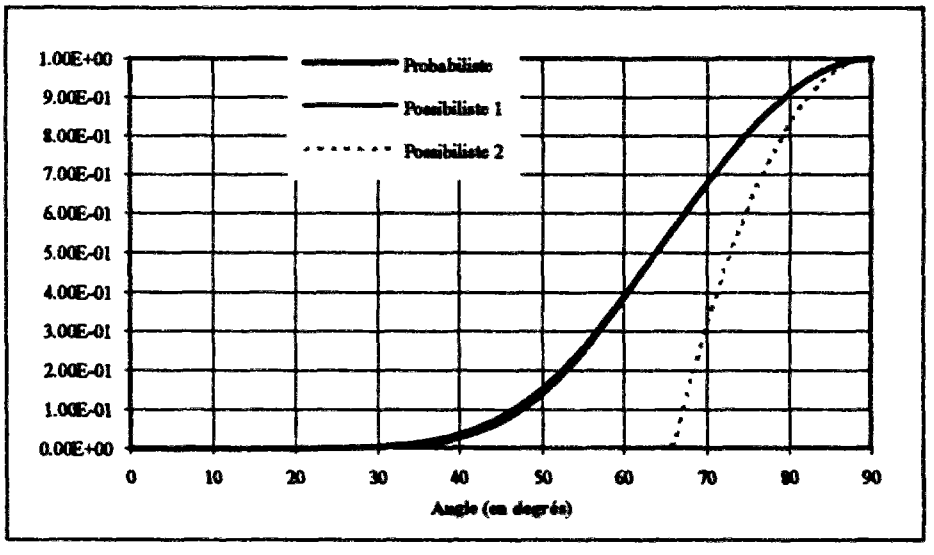


Figure V.11 : Evolution des probabilités et des possibilités de défaillance normalisées pour la barre 2

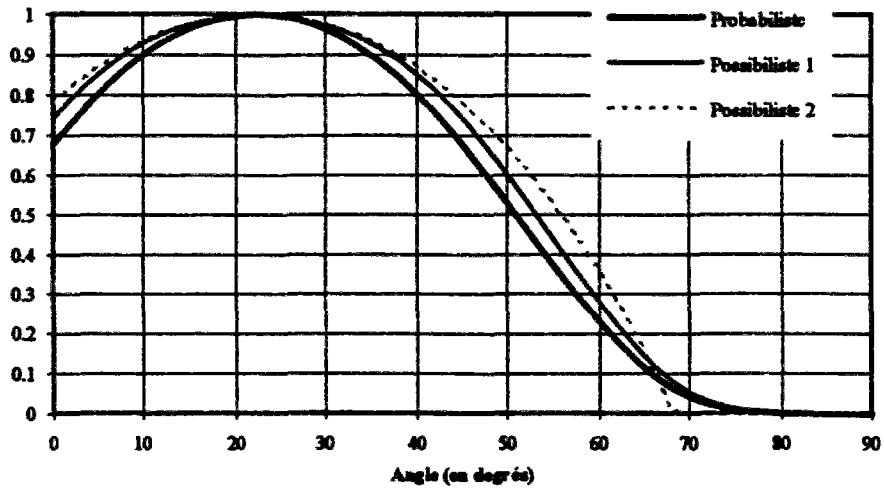


Figure V.12 : Evolution des probabilités et des possibilités de défaillance normalisées pour la barre 3

Pour la modélisation possibiliste de type 1, la relation $P_R \leq \Pi_R$ est conservée pour tous les angles. Ceci n'est plus vrai pour la modélisation possibiliste de type 2, notamment lorsque les niveaux de possibilité sont nulles. En effet, pour cette modélisation de variables, des niveaux de possibilités de défaillance de 0 sont atteints, ce qui n'est pas le cas de l'approche probabiliste pour laquelle cette valeur n'est pas atteinte. Il y a donc pour certains angles de chargement, des possibilités de défaillance inférieures aux probabilités de défaillance. Néanmoins, ces cas restent très marginaux. L'attention doit cependant être attirée sur le fait que la validité de la relation $P_R \leq \Pi_R$ est fortement liée aux choix de la description possibiliste des variables.

D'après les diverses figures, la tendance de variation des probabilités et des possibilités de défaillance par rapport aux divers angles de chargement est toujours conservée. Les écarts montrent que les possibilités et les probabilités de défaillance recouvrent des concepts différents et ne se déduisent pas les uns des autres.

V.2.5. Systèmes en série

a) Calcul des probabilités de défaillance du système en série

Supposons que le critère de ruine du treillis soit la défaillance d'un de ses éléments. Comme l'illustre la Figure I.3, la représentation formelle de ce problème conduit à étudier un système série. En utilisant l'approche probabiliste de la fiabilité présentée dans le chapitre III, nous pouvons calculer les probabilités de défaillance de système-série (intégrale multinormale). La Figure V.13 donne les évolutions de la probabilité de défaillance en fonction des angles de chargements.

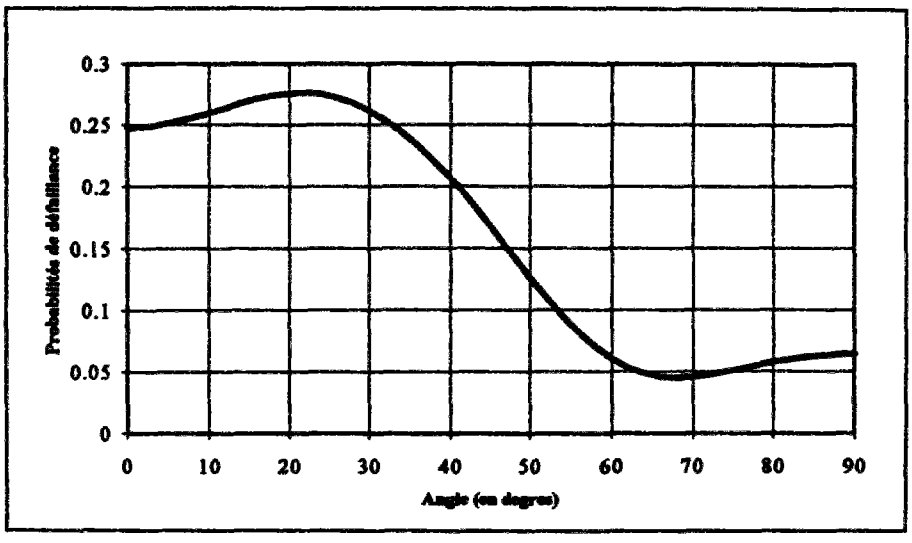


Figure V.13 : Evolution des probabilités de défaillance en fonction des angles de chargement (système en série)

b) Calcul des possibilités de défaillance du système en série

Première description :

La figure V.14 donne l'évolution des possibilités de défaillance du système-série en fonction de l'angle de chargement, lorsque toutes les variables sont décrites par des nombres flous gaussiens.

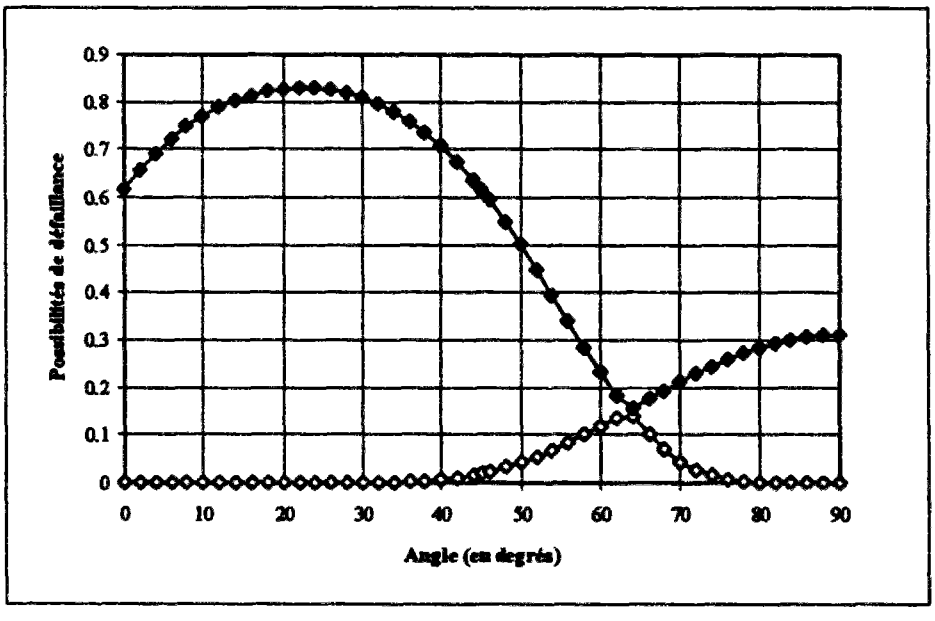


Figure V.14 : Evolution des possibilités de défaillance en fonction des angles de chargement (système en série, nombres flous gaussiens)

On peut noter que ce sont les fiabilités respectives des barres 2 et 3 qui conditionnent la fiabilité du système. On retrouve bien le résultat intuitif qui consiste à énoncer que la fiabilité d'un système en série est la même que la fiabilité du maillon le plus fragile.

Remarquons enfin que les tendances de variation entre les probabilités et les possibilités de défaillance sont différentes pour le système en série. Ceci diffère de l'analyse de la fiabilité des différentes barres qui exhibait des tendances analogues.

Deuxième description :

Les variables sont maintenant décrites par des nombres flous triangulaires. La figure V.15 donne les variations des possibilités de défaillance suivant cette hypothèse.

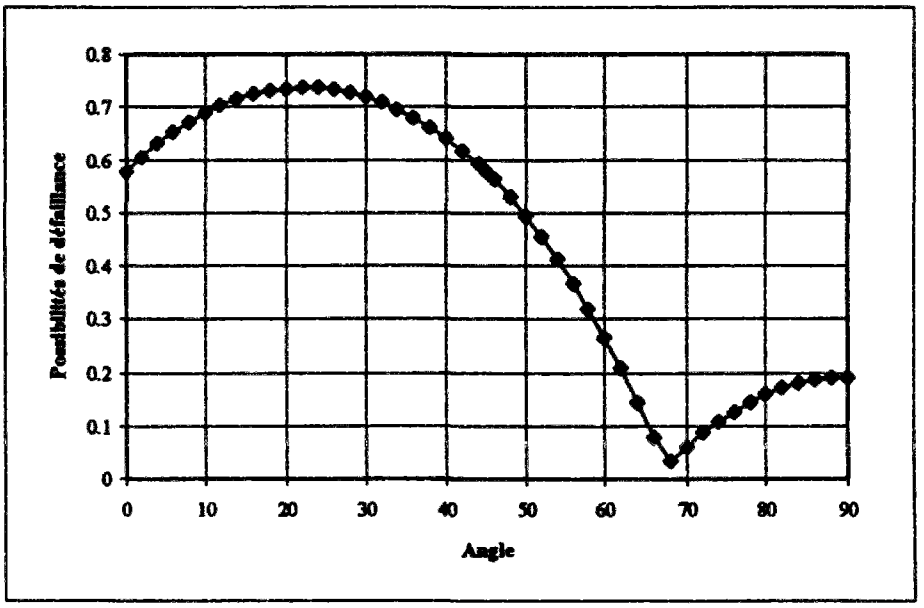
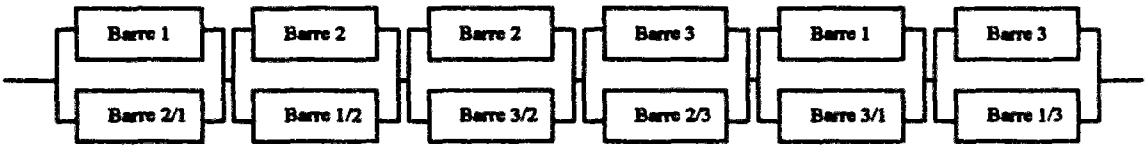


Figure V.15 : Evolution des possibilités de défaillance suivant divers angles de chargement (système en série, nombres flous triangulaires)

Des conclusions identiques à celles énoncées pour la première description des variables peuvent être avancées dans le cas présent.

V.2.6. Système en parallèle

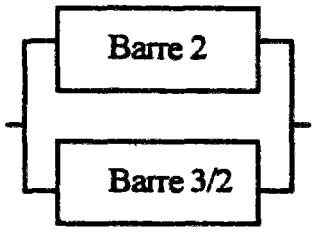
Reprenons l'exemple du treillis, mais utilisons maintenant la description formelle en système quelconque suivant (annexe 3) :



Barre i/j = Défaillance de la barre i sachant que la barre j est défaillante

Figure V.16 : Représentation formelle en système de l'exemple du treillis pour la défaillance par plastification de deux barres

Cette représentation met en évidence 6 mécanismes de ruine. Intéressons nous pour l'instant au mécanisme de ruine



a) Calcul des probabilités de défaillance du sous-système en parallèle (2, 3/2)

Si les données du tableau III.4 sont de nouveau utilisées, il est alors possible de calculer la probabilité de défaillance de ce système parallèle. La figure V.17 donne l'évolution de cette probabilité de défaillance en fonction de l'angle de chargement.

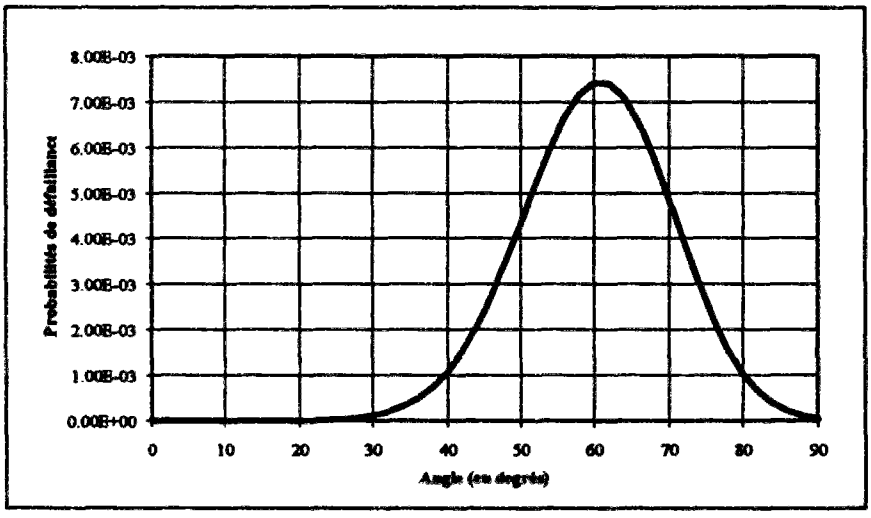


Figure V.17 : Evolution de la probabilité de défaillance pour le mécanisme "barre 2 - barre 3/2"

b) Calcul des possibilités de défaillance du sous-système en parallèle (2, 3/2)

Première description :

La figure V.18 donne l'évolution des possibilités de défaillance en fonction de l'angle de chargement, lorsque les variables sont des nombres flous gaussiens.

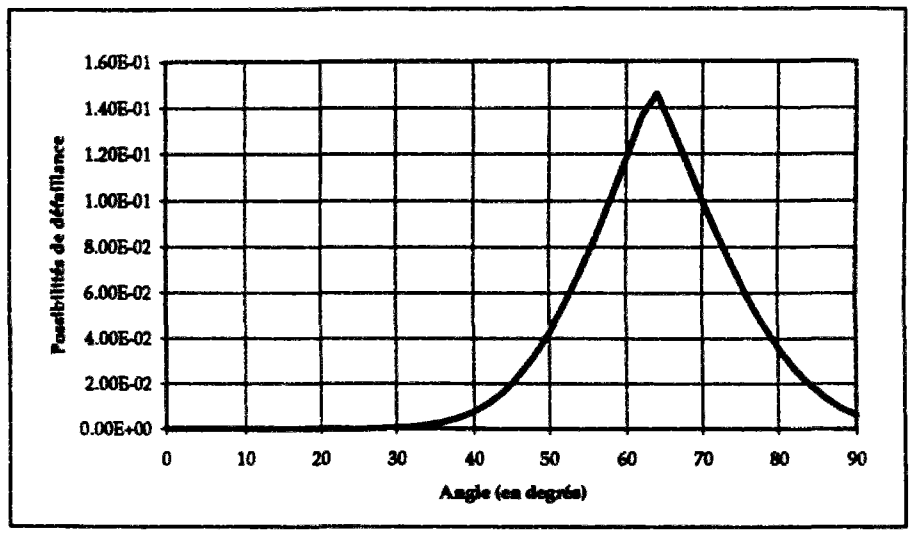


Figure V.18 : Evolutions des possibilités de défaillance du sous-système (2, 3/2) (nombres flous gaussiens)

Deuxième description :

La figure V.19 donne la variation des possibilités de défaillance lorsque les variables sont des nombres flous triangulaires.

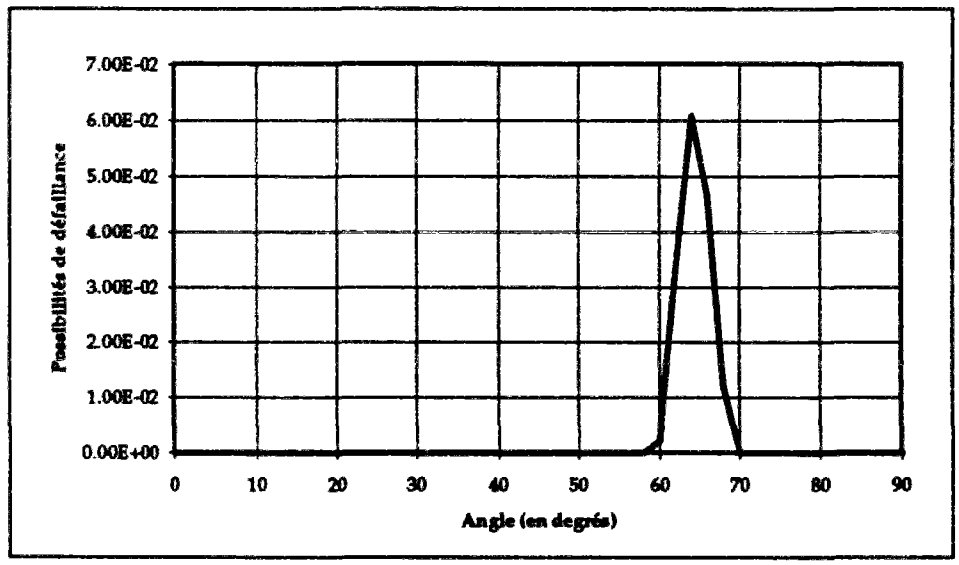


Figure V.19 : Evolution des possibilités de défaillance du sous-système (2, 3/2) (nombres flous triangulaires)

V.2.7. Système complet

a) Calcul des probabilités de défaillance du système complet

La figure V.20 donne les évolutions des probabilités de défaillance en fonction des angles de chargement relativement à la représentation formelle de la figure V.16. Les probabilités de défaillance sont encadrées par les bornes simples.

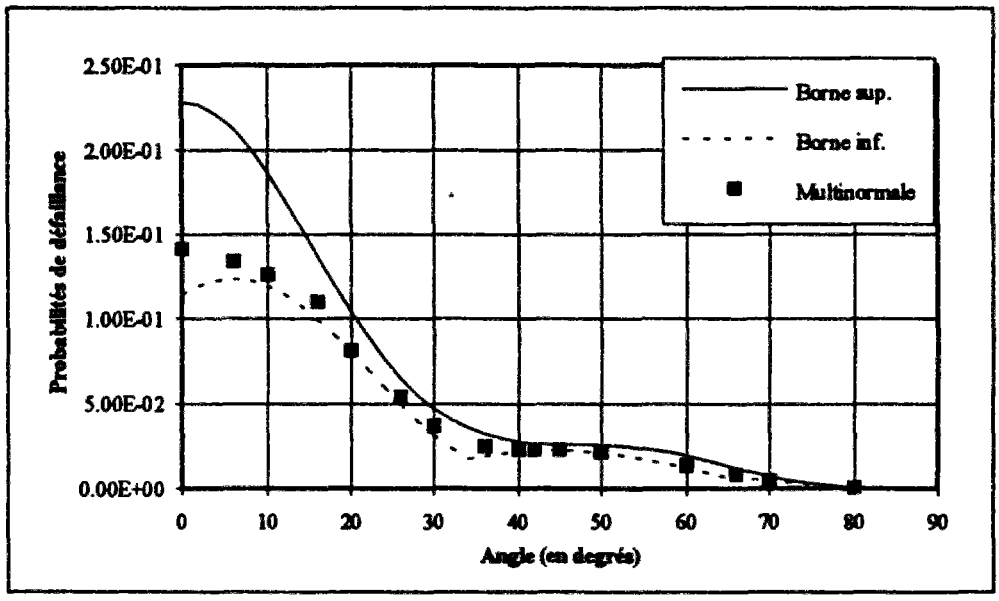


Figure V.20 : Evolution des probabilités de défaillance suivant divers angles de chargement

b) Calcul des possibilités de défaillance du système complet

Première description :

Les possibilités de défaillance du système-complet sont calculées en utilisant les formules présentées dans le chapitre IV.

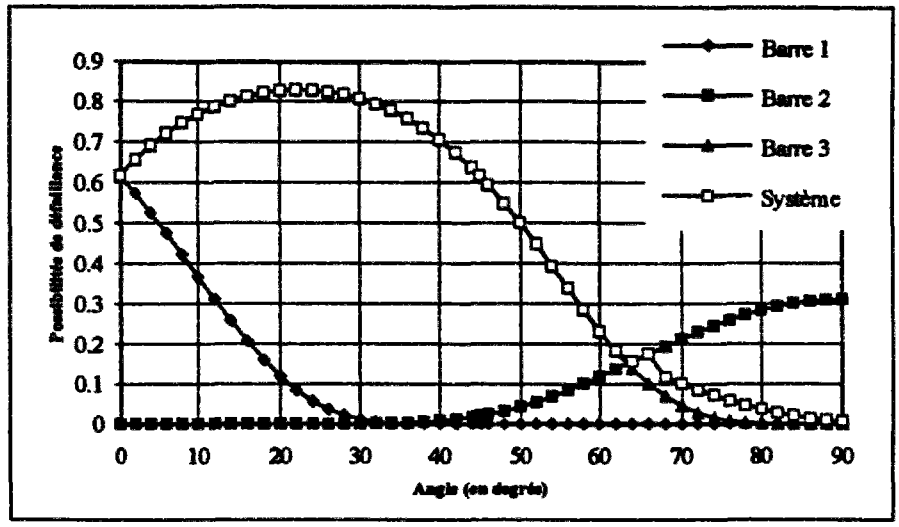


Figure V.21 : Evolution des possibilités de défaillance suivant divers angles de chargement (nombres flous gaussiens)

Ces possibilités sont les bornes supérieures des possibilités exactes, puisque les expressions de la section IV.7.3 ne permettent d'avoir que des bornes supérieures des possibilités de défaillance d'intersections d'états limites.

Deuxième description :

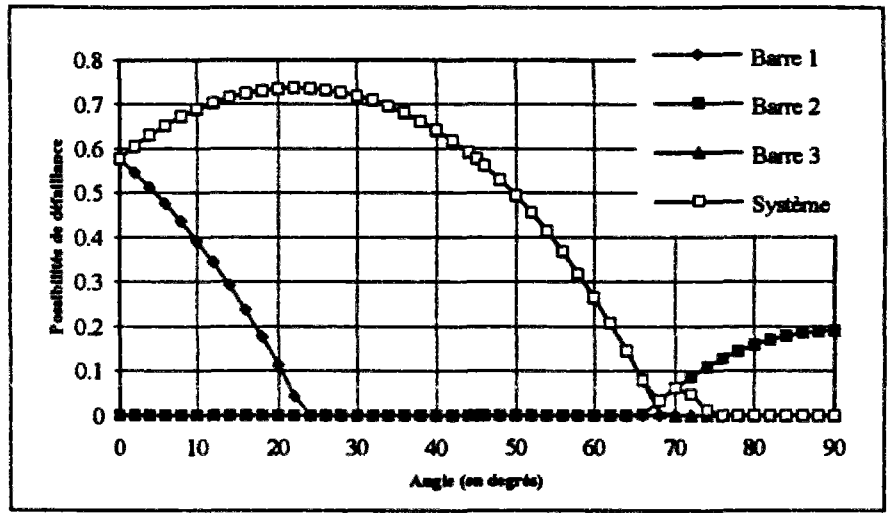


Figure V.22 : Evolution des possibilités de défaillance suivant divers angles de chargement (nombres flous triangulaires)

c) Comparaisons entre les résultats pour le système complet

Le calcul de la possibilité de défaillance d'un système repose sur une suite d'opérations de min(.) et de max(.). Ceci fait que ce niveau de possibilité tend à épouser,dans certaines configurations, les possibilités de défaillance de certains composants, comme le montrent la figure V.21. Les figures V.21 et V.22 correspondent à des calculs possibilistes, avec

des descriptions des variables différentes. Elles exhibent néanmoins des tendances très voisines. Comparées à l'approche probabiliste, les tendances sont alors très différentes. Il n'y a pas par exemple croissance du risque de défaillance, puis décroissance. L'angle de θ=67,5° correspond à un changement de fonctionnement pour la barre 1 ; elle passe d'un état de compression à un état de traction. Ce changement de fonctionnement fait que les barres 2 et 3 doivent reprendre des efforts supplémentaires, ce qui accroît le risque de défaillance. Puis, la barre 1 se remet à reprendre les efforts, les trois barres travaillant en traction, donc de façons identiques. Les niveaux de possibilité chutent, pour indiquer un risque de défaillance moindre.

Cette évolution du risque de défaillance exprime donc bien un comportement physique. Paradoxalement, les résultats probabilistes ne mettent pas en évidence ce changement de comportement à θ=67,5°. Ceci peut s'expliquer par le fait que l'approche probabiliste tend à lisser les résultats sur l'ensemble de la fiabilité des sous-systèmes et des composants. L'approche possibiliste suit plus brutalement les changements. Il ne faut pas oublier que les calculs possibilistes reposent sur des opérateurs min et max, plus sensibles que les calculs probabilistes qui effectuent une intégration sur un domaine qui est le domaine de défaillance. Cette fonction de lissage était déjà très perceptible dans les calculs de la fiabilité des systèmes en série.

V.3. CONCLUSIONS

Dans ce chapitre, nous avons comparé les développements théoriques entre les deux approches différentes. Les exemples d'illustration - pour les composants comme pour les systèmes - ont introduit des états limites simples, linéaires à deux variables. Ces dernières ont été modélisées par des variables aléatoires gaussiennes pour ce qui relève de l'approche probabiliste, et par des nombres flous gaussiens et triangulaires pour l'approche possibiliste.

Diverses conclusions peuvent être formulées à l'issue de ces comparaisons :

1. l'approche possibiliste requiert un moins grand nombre de calculs numériques, puisque le degré de défaillance et l'indice de possibilité se déduisent de la résolution d'une équation scalaire.

2. l'approche possibiliste nécessite cependant une pré-étude de la fonction d'état limite pour analyser les opérations arithmétiques effectuées, afin d'appliquer la règle des signes. Cela constitue donc une analyse qui ne peut être automatisée simplement.

3. les comparaisons numériques mettent en évidence une certaine cohérence entre les approches. Pour les systèmes, cela n'est plus du tout confirmé, les comportements différant sensiblement.

4. l'approche probabiliste a une fonction de lissage des niveaux de fiabilité dans l'analyse des systèmes, que ne présente pas l'approche possibiliste. Cette dernière suit les niveaux de fiabilité les plus importants des sous-systèmes parallèles composant le système complet. Les quelques résultats de notre analyse tendent à

montrer que l'approche possibiliste est plus apte à suivre des modifications locales des niveaux de fiabilité, que ne l'est l'approche probabiliste.

CHAPITRE VI

APPLICATION AU CALCUL DE LA DUREE DE VIE EN FATIGUE D'ASSEMBLAGES SOUDES

VI.1. INTRODUCTION

La fatigue de pièces métalliques est définie comme l'apparition de fissures macroscopiques et leur propagation sous des charges répétées. Les intensités de ces charges sont souvent inférieures à celle qui entraînerait la ruine par rupture. C'est le nombre répété de ces charges qui produit une fissuration de la pièce et conduit à la ruine partielle ou totale de cette dernière. Le dimensionnement en fatigue d'une structure sous charges répétées nécessite de définir un "état limite" qui sera le critère de résistance à la fatigue. Ce choix est lié aux grandes étapes du processus de fatigue [Bui, 1985], [Bignonnet & al., 1990] :

- La première étape correspond au temps "d'initiation" de la fissure. Elle explicite le comportement de la structure soudée entre l'état intact et l'état où apparaît une fissure microscopique, et s'appelle la phase d'amorçage. L'amorçage se produit généralement au voisinage des défauts intrinsèques : intrusion, défauts de conception de la structure, discontinuité géométrique, défauts de fabrication ou de soudage, etc... dans ces zones les contraintes locales sont élevées, sans toutefois que les contraintes généralisées ne dépassent la limite élastique des matériaux.

- La seconde étape du phénomène est la propagation d'une fissure macroscopique. Cette propagation pourra être lente si le matériau présente certaines propriétés de ductilité, c'est-à-dire peut subir de grandes déformations sans rupture. Par contre elle pourra être extrêmement rapide, et même quasiment instantanée si le matériau est fragile (acier à haute résistance par exemple).

- La troisième étape correspond à la rupture d'une pièce mécanique qui peut s'interpréter par une interruption dans sa continuité. Avec cette définition particulière de la ruine, l'application de la mécanique des milieux continus se heurte à une singularité due à la présence de fissures dans la pièce. Aussi adopterons nous en pratique des critères de ruine liés à une perte de rigidité de la structure, et définis par une longueur relative fixée de la fissure par rapport à l'épaisseur de la pièce.

La vérification en fatigue des projets de ponts métalliques ou mixtes, la mise au point de règlements de calcul et les problèmes de maintenance et d'évaluation de la sécurité résiduelle des ouvrages en service font appel à des calculs de dommages en fatigue d'assemblages soudés. En raison du caractère incertain des charges de trafic et des incertitudes importantes sur les résistances en fatigue de tels assemblages, les calculs déterministes de durées de service sont insuffisants pour apprécier la sécurité réelle des ouvrages dans leur contexte. Les approches probabiliste et possibiliste peuvent alors être d'un certain secours pour appréhender la sécurité ou fiabilité d'une pièce métallique. Le recours à une approche probabiliste pour modéliser les incertitudes incohérentes à la fatigue n'est pas récent. Egalement lié à l'étude de l'inspection des fissures de fatigue, le problème a été tout particulièrement étudié par les ingénieurs de l'offshore [Madsen & al.,1989], [Madsen & al., 1990]. Les études probabilistes de la fatigue sont aujourd'hui nombreuses. Quelques références essentielles pourront être trouvées dans [Cremona, 1995]. Ces études reposent sur différents choix de modélisation probabiliste des variables de calcul mais, également sur divers critères de défaillance d'un détail de structures vis-à-vis des lois de fatigue :

- la comparaison de la taille de la fissure de fatigue par rapport à une taille de fissure limite [Madsen, 1990]. Une telle approche nécessitera de recourir à l'utilisation des principes de la mécanique de la rupture pour déterminer l'évolution de la fissure dans le temps,

- la comparaison de la valeur d'une fonction d'endommagement par rapport à un endommagement maximal admissible. La mécanique de la rupture peut aider à définir une fonction d'endommagement, mais l'on préfère souvent faire appel à la loi de Miner [Jiang & Jacob, 1994].

Dans cette étude qui ne se veut pas être exhaustive sur les problèmes liés aux phénomènes de fatigue, on étudie en particulier la durée de service d'un détail donné (raidisseur-semelle) d'un pont soumis à la sollicitation due au trafic routier pendant une durée D. Le modèle d'endommagement utilisé sera la loi de Miner [Miner, 1945].

VI.2. DESCRIPTION DE L'ENDOMMAGEMENT

VI.2.1. Loi de Miner

Il existe divers critères de ruine d'un détail de structures vis-à-vis des lois de fatigue. Par exemple, la loi de Paris [Paris, 1963] est définie par une profondeur de fissure par rapport à l'épaisseur de la pièce, la loi de Miner est donnée pour une valeur de dommage cumulé etc... Dans la loi de Miner [Miner, 1945], le dommage pendant la durée de vie se traduit par le nombre de cycle subi n_i correspondant à chaque intensité de charge S_i et de

leur nombre de cycle à la rupture N_i [Yao et al., 1986]. Ceci conduit à l'expression suivante :

$$D(T) = \sum \frac{n_i}{N_i} = \sum \frac{n_i}{f(S_i)} \qquad (VI.1)$$

Le dommage dû à nombre de cycle d'une amplitude S est défini par le nombre inverse de N :

$$D(S_i) = \frac{n_i}{N_i} = \frac{n_i}{f(S_i)} \qquad (VI.2)$$

où n_i représente le nombre de cycle pour une classe de contrainte d'amplitude S_i.

VI.2.2. Résistance à la fatigue

La résistance à la fatigue d'un détail de structure métallique est définie par le nombre de cycles N d'amplitude S subis à sa rupture. Les essais en laboratoire [Brozzetti & al., 1989] ont montré que ce nombre N est convenablement évalué par l'équation :

$$N = A\, S^{-B} \qquad (VI.3)$$

où A et B sont constants et déterminés par l'expérimentation; ils dépendent du détail de la structure et des conditions de soudage. En coordonnées bi-logarithmiques, l'équation (VI.3) peut s'écrire :

$$\ln N = \ln A - B \ln S$$

Cependant, du fait de la dispersion des matériaux et de l'erreur des essais, on considère lnN comme une **variable incertaine** caractérisant la résistance, cette variable lnN sera alors supposée vérifier le modèle linéaire :

$$\ln N = \ln A - B \ln S + \varepsilon \qquad (VI.4)$$

dans lequel ε est également une variable incertaine.

Il y a deux façons différentes pour traiter le caractère incertain de la variable ε :

- une démarche probabiliste qui consiste à choisir une loi de probabilité pour ε,
- une démarche possibiliste qui consiste à choisir une distribution de possibilité pour la variable ε.

VI.2.3. Action et sollicitation de fatigue

En suivant le trafic routier, un pont se charge sous le passage d'un ou de plusieurs véhicules. Ici, l'action est définie par le groupe de véhicules. Les séparations des groupes

dans un trafic s'effectuent quand aucun véhicule ne circule sur le pont. Un trafic routier se compose donc d'une suite d'actions qui agissent successivement sur le pont.

La sollicitation en fatigue d'un détail constructif (nous considérons essentiellement le cas des assemblages soudés) d'un pont métallique est le résultat d'un historique de contrainte dû au trafic appliqué jusqu'à la ruine du détail. Cet historique peut être coupé en "sous-historiques" d'actions en fonction de la séparation des groupes. Les résultats de ces "sous-historiques" sont alors vus comme un processus discret.

Le résultat d'un "sous-historique" (comme la sollicitation en fatigue d'une action) est le dommage cumulé des actions, déterminé par le dommage dû à une classe de contrainte d'amplitude. D'après la formule (VI.2), on obtient la loi de Miner sous la forme suivante :

$$D(S_i) = \left(\frac{n_i}{f(S_i)}\right) e^{-\varepsilon} \qquad \text{(VI.5)}$$

avec le dommage cumulé d'une classe de contrainte d'amplitude S_i :

$$d(S_i) = \frac{n_i}{f(S_i)}$$

Le dommage cumulé pendant la période est calculé par la formule suivante :

$$D_p = \sum_{i=1}^{n} D(S_i) = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{n_i}{f(S_i)}\right) e^{-\varepsilon} = \left(\frac{n_1}{f(S_1)} + \ldots + \frac{n_n}{f(S_n)}\right) e^{-\varepsilon} \qquad \text{(VI.6)}$$

avec

$$d_p = \frac{n_1}{f(S_1)} + \ldots + \frac{n_n}{f(S_n)}$$

n_1 , ... n_n sont les nombres de cycle correspondants à chaque classe d'amplitude S_i.

Nous supposons que n_1 , ... n_n sont des variables incertaines qui peuvent être traitées de manière possibiliste ou probabiliste. Dans l'approche probabiliste, elles seront considérées comme des variables aléatoires normales, tandis que, dans l'approche possibiliste, ce seront des nombres flous.

VI.3. MODELE PROBABILISTE

VI.3.1. Estimation de la dispersion des essais

Les estimateurs des paramètres $\ln \hat{A}$ et $\hat{B}$ de l'équation (VI.4) sont obtenus à l'aide d'une régression linéaire traditionnelle, à partir d'un certain nombre d'observations indépendantes de couples ($\ln N_i$, $\ln S_i$). Les estimateurs s'écrivent directement [Press, 1989] :

$$\begin{bmatrix} \ln(\hat{A}) \\ \hat{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{\ln N} + \hat{B}\overline{\ln S} \\ \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(\ln S_i - \overline{\ln S})(\ln N_i - \overline{\ln N})}{\sum_{i=1}^{n}(\ln S_i - \overline{\ln S})^2} \end{bmatrix} \qquad \text{(VI.7)}$$

Pour l'approche probabiliste, ε est une variable aléatoire normale centrée d'écart-type σ_ε et l'estimateur de $\hat{\sigma}_\varepsilon$ s'obtient par [Jiang, 1994]

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n}(\ln N_i - \ln(\hat{A}) + \hat{B}\ln S_i)^2 \qquad \text{(VI.8)}$$

avec

$$\overline{\ln S} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln S_i$$

$$\overline{\ln N} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln N_i$$

Selon les résultats expérimentaux d'essais en laboratoires, on peut disposer de la courbe S-N concernant le nombre de cycle à la rupture en fonction des intensités de contrainte [Carraccilli,1995]. Pour une série particulière d'essais, les données sont indiquées dans le tableau VI.1. Les essais montrent que les contraintes d'amplitude inférieure à 36 MPa ont peu d'influence sur la durée de vie en fatigue de l'assemblage soudé étudié.

Amplitude de contrainte	Nombre de cycle à la rupture
204 (MPa)	343 000
204 (MPa)	180 000
204 (MPa)	150000
163 (MPa)	460 000
163 (MPa)	526 000
122 (MPa)	1 500 000

Tableau VI.1 : Données expérimentales

En utilisant les données expérimentales du Tableau VI.1, la figure VI.1 montre les résultats de la régression linéaire.

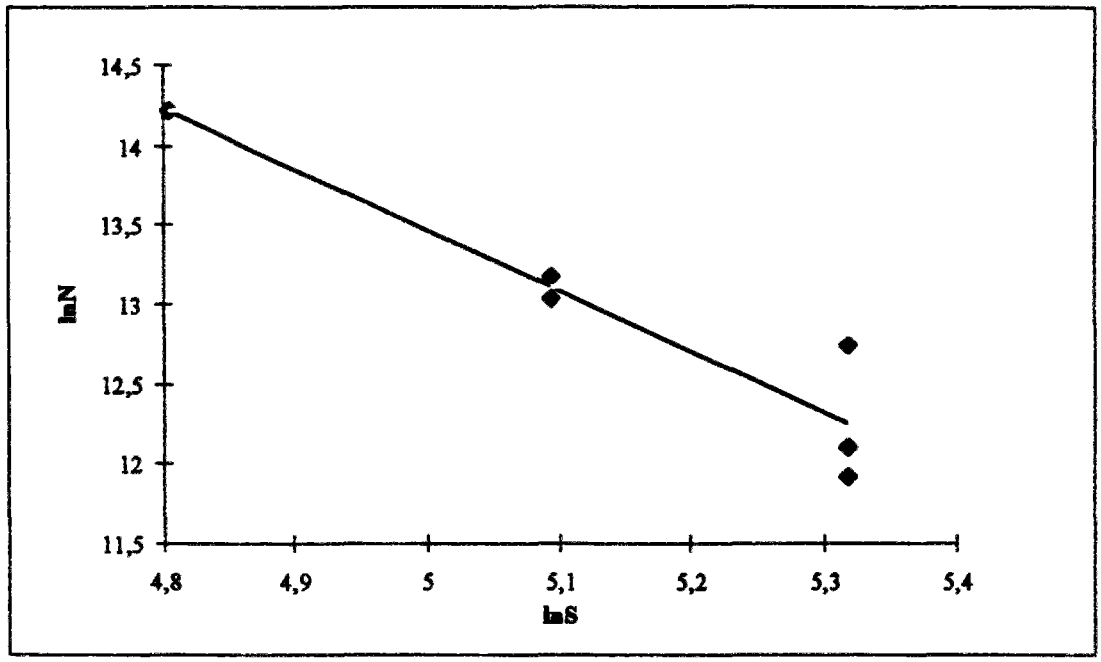


Figure VI.1 : Régression linéaire probabiliste sur les données expérimentales

Notons que pour la droite obtenue par régression linéaire, on a :

$\ln \hat{A} = 32{,}56942$
$\hat{B} = 3{,}82018$

VI.3.2. Résistance et sollicitation à la fatigue

Dans l'approche probabiliste, l'équation évaluée par la résistance à la fatigue (nombre de cycles N d'amplitude S subis avant rupture) d'un détail de structure métallique (courbe S-N) s'écrit toujours comme (VI.4)

$$\ln(N) = \ln(A) - B\ln(S) + \varepsilon$$

dans laquelle ε est une variable aléatoire centrée réduite d'écart-type σ_ε, et pour chaque lnS, lnN est donc une variable aléatoire normale $N(\ln(A) - B\ln(S), \sigma_\varepsilon)$. Les estimateurs de $\ln \hat{A}$, de $\hat{B}$ et $\hat{\sigma}_\varepsilon$ sont calculés respectivement par les formules (IV.7) et (IV.8).

Le dommage cumulé pendant la période est obtenu par la formule suivante

$$D_p = \sum_{i=1}^{n} D(S_i) = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{n_i}{f(S_i)} \right) e^{-\varepsilon} = \left(\frac{n_1}{f(S_1)} + \ldots + \frac{n_n}{f(S_n)} \right) e^{-\varepsilon} \qquad \text{(VI.9)}$$

On note d_p, le dommage cumulé par les classes de contrainte d'amplitude :

$$d_p = \frac{n_1}{f(S_1)} + \ldots + \frac{n_n}{f(S_n)}$$

Les nombres de cycles n_1, ..., n_n sont supposés être des variables aléatoires normales non-corrélées. Dans ce cas, d_p peut être considéré comme une variable aléatoire normale.

VI.3.3. Hypothèses sur la distribution des sollicitations

Un certain nombre d'hypothèses sera fait sur les variables aléatoires décrites dans le paragraphe précédent, permettant d'une part une estimation des paramètres de leur distribution, d'autre part la possibilité de mener les calculs conduisant aux indices de fiabilité.

Pour un trafic durant toute la vie du service d'une structure, qui traverse évidemment plusieurs périodes, deux processus discrets sont construits : l'un par le dommage dû à une classe de contrainte d'amplitude $d(S_i)$, l'autre par les nombres des cycles n_1, ..., n_n dans les périodes [Jiang & Jacob, 1993].

Hypothèse 1 :

Ces deux processus sont supposés stationnaires, c'est-à-dire que les moyennes de $d(S_i)$ et des n_1, ..., n_n sont constantes dans toutes les périodes. Une période assez longue (minimum une semaine) doit être choisie pour que la séquence observée soit représentative.

Hypothèse 2 :

Les $d(S_i)$ sont indépendants, et les $d(S_i)$ suivent une même loi de probabilité.

Hypothèse 3 :

Les n_1 , ..., n_n sont indépendants et suivent une même loi de probabilité.

VI.3.4. Estimation de la distribution des nombres de cycles d'une classe de contrainte d'amplitude

Nous avons choisi quatre enregistrements du trafic d'une semaine complète, effectués sur autoroutes A6, pendant les années 84, 86, 89.

A partir des résultats du comptage effectué sur les quatre échantillons (4 enregistrements du trafic d'une semaine), nous pouvons procéder à l'estimation de la loi probabiliste décrivant le nombre de cycle d'une classe de contrainte d'amplitude n_i :

$$\hat{m}_{n_i} = \bar{n}_i = \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{4} n_{i,j} \qquad \text{(VI.10)}$$

$$\hat{\sigma}_{n_i}{}^2 = \frac{1}{4-1}\sum_{j=1}^{4}\left(n_{i,j} - \bar{n}_i\right)^2 \qquad \text{(VI.11)}$$

VI.3.5. Construction de la fonction d'état limite

Dans l'étude de la fatigue, la défaillance peut être provoquée par l'accumulation de dommages. Pour cette raison, la fonction d'état limite dépend de la durée du service D, ainsi que du niveau de risque de ruine.

Le dommage cumulé D sur la durée T, évalué par la somme des dommages périodiques, établit une fonction d'état limite [Jiang & Jacob, 1993] :

$$D(T) = \sum_{j=1}^{s} D_{pj} = \left(\sum_{j=1}^{s} d_{pj} \right) e^{-\varepsilon} = \left(s \sum_{i=1}^{n} d(S_i) \right) e^{-\varepsilon} \qquad \text{(VI.12)}$$

où s, nommé **coefficient de durée**, est le nombre de périodes T dans la durée D ($s = \frac{D}{T}$).

Le critère de ruine, décrit au travers de cette fonction d'état limite, est que le dommage cumulé de la durée D doit être inférieur ou égal à un.

$$D(T) = \sum_{j=1}^{s} D_{pj} = \left(\sum_{j=1}^{s} d_{pj} \right) e^{-\varepsilon} = \left(s \sum_{i=1}^{n} d(S_i) \right) e^{-\varepsilon} = D_D e^{-\varepsilon} \leq 1 \quad \text{(VI.13)}$$

VI.3.6. Probabilité de défaillance

Selon l'équation (VI.13), la fonction d'état limite peut s'écrire

$$M = 1 - D(T) = 1 - s\left(\frac{n_1}{f(S_1)} + \ldots + \frac{n_n}{f(S_n)} \right) e^{-\varepsilon} = 1 - s d_p e^{-\varepsilon} \qquad \text{(VI.14)}$$

La probabilité de défaillance est définie comme

$$P(M \leq 0) = \int_{-\infty}^{0} f(M) dM \qquad \text{(VI.15)}$$

où f(M) est la fonction densité de la loi de M.

L'expression (VI.14) est une équation comprenant deux variables aléatoires normales d_p et ε . Les probabilités de défaillance (VI.15) sont approximées par la méthode FORM.

VI.3.7. Application à un détail constructif

Divers enregistrements de trafic routier réels (autoroute A6), observés par périodes d'une semaine complète (T = une semaine), ont été utilisés pour l'étude d'un détail constructif

(assemblage raidisseur-semelle) d'un pont métallique. Le tableau VI.2 donne les valeurs de moyenne et de l'écart-type de ε et d_P. s est alors le nombre de semaines.

ε	m_ε	0,0
	σ_ε	0,31
d_P	m_{d_P}	$2{,}61\ 10^{-4}$
	σ_{d_P}	$3{,}05\ 10^{-5}$

Tableau VI.2 : Statistiques des variables ε et d_P

Les figures VI.2 et VI.3 donnent l'évolution des indices de fiabilité et des probabilités de défaillance en fonction du nombre d'années de service.

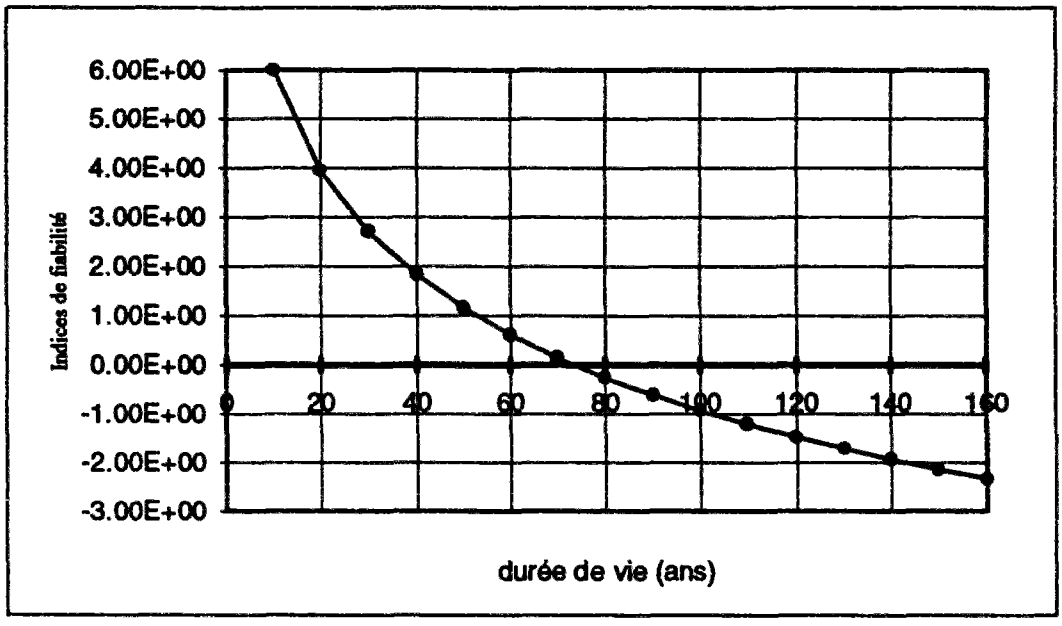


Figure VI.2 : Evolution de l'indice de fiabilité en fonction du nombre d'années de service

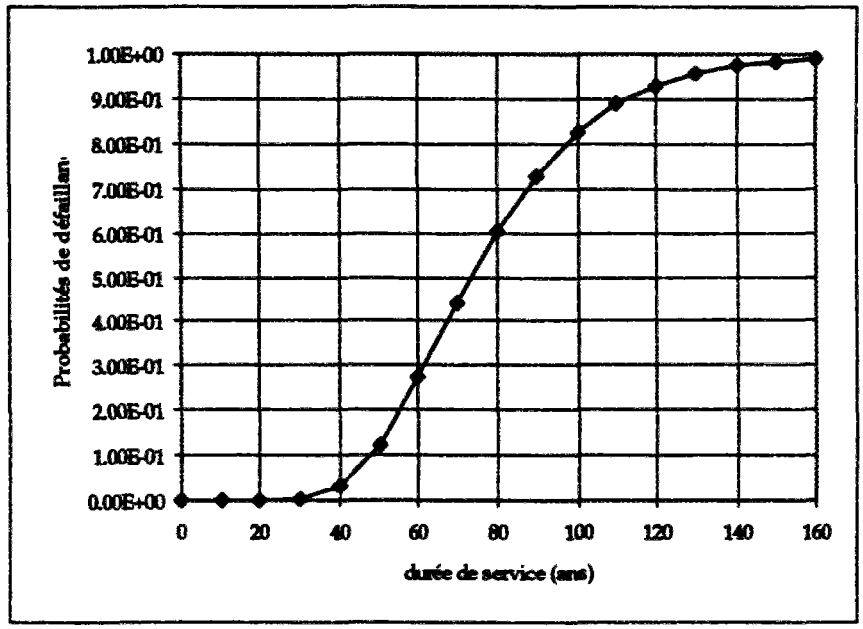


Figure VI.3 : Evolution de la probabilité de défaillance en fonction du nombre d'années de service

La figure VI.3 montre que les probabilités de défaillance sont évaluées par une courbe croissante en fonction du nombre d'années de service.

VI.4. MODELE POSSIBILISTE

VI.4.1. Estimation de la dispersion des essais (régression possibiliste)

Pour l'approche possibiliste, les estimateurs des paramètres ln(A) et B du modèle (VI.4) sont obtenus à l'aide d'une régression possibiliste linéaire [Terano, 1987], à partir d'un certain nombre d'observations de couples (y_i, x_i).

Cette méthode est primitivement appliquée à un modèle dont la valeur du nombre flou Y est une fonction linéaire d'un vecteur $\underline{x}$ supposé connu sans erreur. La possibilité de Y ne dépend que d'un nombre flou de la forme triangulaire symétrique ε de la valeur modale nulle.

Pour le modèle à une seule pente, en utilisant les formules dans l'annexe 4, ln(A) et B sont déterminés par une modélisation de la minimisation.

$$\min \alpha_\varepsilon$$

sous contraintes

$$\pi_{\ln N}(\ln N_i) \geq h \qquad \text{(VI.16)}$$

$$\alpha_\varepsilon \geq 0$$

$$0 \leq h < 1$$

h est un niveau de confiance pré-définie qui est déterminé dans l'intervalle de [0,1[. Il caractérise l'incertitude sur des informations données. Ceci implique que plus h est élevé, plus l'incertitude sur les données est élevée.

La démarche de l'équation VI.16 est illustrée dans la figure VI.4.

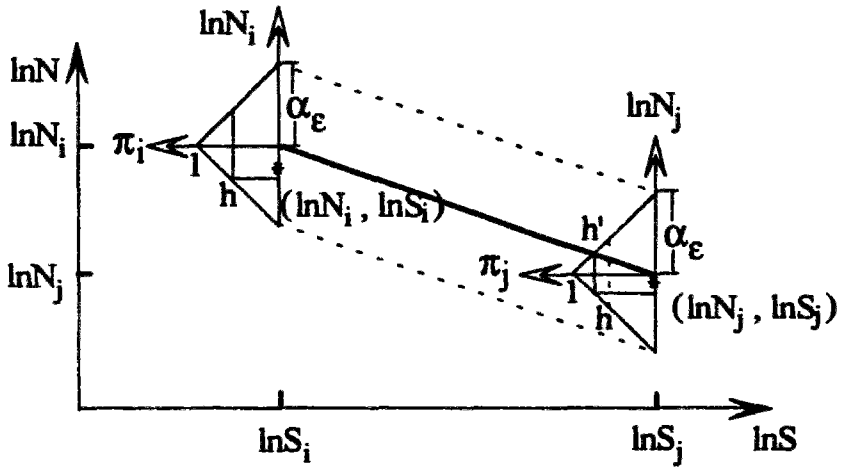


Figure VI.4 : Illustration de la méthode régression possibiliste

L'équation (VI.16) peut s'écrire :

chercher $\ln(\hat{A})$, $\hat{B}$ et α_ε tels que

$$\min \alpha_\varepsilon$$

sous contraintes (VI.17)

$$\ln N_i \le \ln(\hat{A}) - \hat{B}\ln S_i + (1-h)\alpha_\varepsilon$$

$$\ln N_i \ge \ln(\hat{A}) - \hat{B}\ln S_i - (1-h)\alpha_\varepsilon$$

$$\alpha_\varepsilon \ge 0$$

$$0 \le h < 1$$

En utilisant les données de Tableau VI.1, nous obtenons les résultats de cette régression possibiliste indiquée sur la figure VI.5.

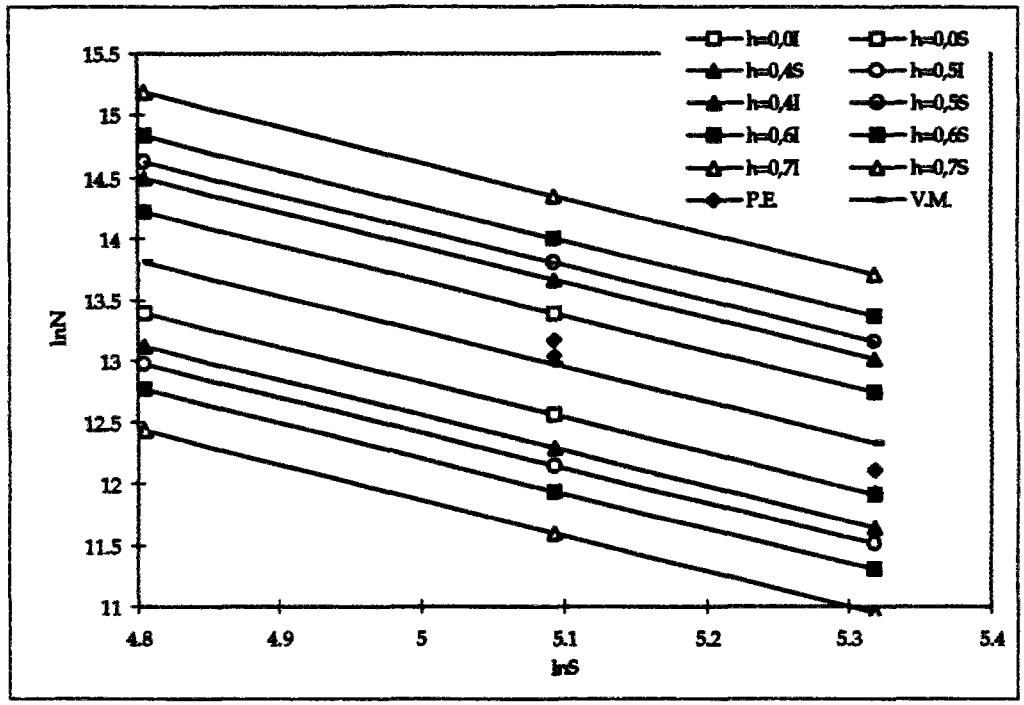


Figure VI.5 : Résultats de la régression possibiliste pour différentes valeurs de h

V.M. représente la droite de valeur modale obtenue par la régression possibiliste. P.E indique les points expérimentaux. I et S indiquent les limites inférieures et supérieures des supports des distributions de possibilités de ε suivant h. La bande de la droite des valeurs modales est :

$$\ln \hat{A} = 27{,}59521$$
$$-\hat{B} = -2{,}87005$$

VI.4.2. Résistance et sollicitation

Dans l'approche possibiliste, l'équation évaluée par la résistance à la fatigue (nombre de cycles N d'amplitude S subis avant rupture) d'un détail de structure métallique (courbe S-N) s'écrit toujours comme (VI.4)

$$\ln(N) = \ln(A) - B\ln(S) + \varepsilon$$

dans laquelle ε est un nombre flou de la forme triangulaire $\varepsilon = (0, \alpha_\varepsilon, \alpha_\varepsilon)_{LR}$, et pour chaque lnS, lnN est également un nombre flou.

Le dommage cumulé pendant la période s'exprime toujours par la formule suivante

$$D_p = \sum_{i=1}^{n} D(S_i) = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{n_i}{f(S_i)} \right) e^{-\varepsilon} = \left(\frac{n_1}{f(S_1)} + \ldots + \frac{n_n}{f(S_n)} \right) e^{-\varepsilon} = d_p e^{-\varepsilon} \qquad \text{(VI.18)}$$

Les nombres de cycles n_1, ..., n_n sont supposés être des nombres flous triangulaires. Dans ce cas, d_p peut être également considéré comme un nombre flou triangulaire.

IV.4.3. Hypothèses sur la distribution des sollicitations

Similairement à l'approche probabiliste, diverses hypothèses sont faites sur la nature des sollicitations :

Hypothèse 1 :

Le nombre de cycle subi n_i (correspondante à S_i) pendant une période est modélisé par un nombre flou triangulaire.

Hypothèse 2 :

La même distribution de possibilité sur n_i est utilisée dans les calculs pendant toute la période de service.

VI.4.4. Estimation de la distribution des nombres de cycle d'une classe de contrainte d'amplitude

A partir des 4 enregistrements du trafic, nous pouvons procéder à l'estimation de la distribution possibiliste décrivant le nombre de cycles d'une classe de contrainte d'amplitude n_i.

Pour la valeur modale de n_i, nous imposons que :

$$m_{n_i} = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} n_i \qquad \text{(VI.19)}$$

Pour la construire, nous calculons le moyenne des k valeurs qui sont inférieures à m_{ni} et lui affectons le niveau de distribution de possibilité de 0,5:

$$m^g_{n_i} = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} n_j \quad n_j < m_{n_i}$$

$$\pi_{n_i}(m^g_{n_i}) = 0,5$$

Nous pouvons donc obtenir l'étalement gauche

$$\alpha_{n_i} = 2\left(m_{n_i} - m^g_{n_i}\right) \qquad \text{(VI.20)}$$

Pour la construction de distribution possibiliste de la partie droite, nous prenons la moyenne des valeurs qui sont supérieures à m_{ni} comme le niveau de distribution de possibilité égale à 0,5 :

$$m^{d}_{n_i} = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} n_j \quad n_j > m_{n_i}$$

$$\pi_{n_i}(m^{d}_{n_i}) = 0,5$$

Nous pouvons donc obtenir l'étalement droit

$$\beta_{n_i} = 2\left(-m_{n_i} + m^{d}_{n_i}\right) \qquad \text{(VI.21)}$$

Les distributions de possibilité de n_i sont donc supposées de forme triangulaire non symétrique. Ceci permet de construire la distribution de d_P qui est elle-même triangulaire non symétrique.

VI.4.5. Construction de la fonction d'état limite

Le critère de ruine, décrit au travers de la fonction d'état limite (VI.18), est que le dommage cumulé de la durée D(T) doit être inférieur ou égal à un.

$$D(T) = \sum_{j=1}^{s} D_{Pj} = \left(\sum_{j=1}^{s} d_{Pj}\right)e^{-\varepsilon} = \left(s\sum_{i=1}^{n} d(S_i)\right)e^{-\varepsilon} = sd_P e^{-\varepsilon} \le 1 \qquad \text{(VI.22)}$$

VI.4.6. Possibilité de défaillance

Selon l'équation (VI.22), la fonction d'état limite qui peut s'écrire par

$$M = 1 - D(T) = 1 - s\left(\frac{n_1}{f(S_1)} + \ldots + \frac{n_n}{f(S_n)}\right)e^{-\varepsilon} = 1 - sd_P e^{-\varepsilon} \qquad \text{(VI.23)}$$

mène à décrire la fiabilité de l'assemblage par la détermination du degré de possibilité suivant

$$\Pi_R = \Pi(M \le 0)$$

Dans la formule (VI.23), les deux variables d_P et ε sont des nombres flous triangulaires. La fonction d'état limite est une fonction hybride en ε et d_P :

$$\varepsilon \ge \varepsilon',\ d_p \le d_p^{'} \ \Rightarrow\ 1 - sd_P e^{-\varepsilon} \ge 1 - sd_p^{'} e^{-\varepsilon'}$$

D'après les développements théoriques du Chapitre IV, par la règle des signes, la branche décroissante de π_{d_p} sert à la construction de la branche croissante de π_M et la branche croissante de π_ε sert à la construction de la branche croissante de π_M. On a donc:

$$\Pi_R(s) = \Pi\left(1 - sd_p e^{-\varepsilon} \le 0\right) = \Pi\left(1 - s\pi_{d_p}^{-1}\left[\pi^0(u_{d_p})\right]e^{-\pi_\varepsilon^{-1}\left[\pi^0(u_\varepsilon)\right]} \le 0\right)$$

ce qui permet de construire la fonction $g(u)$, en posant $u_{d_p} = -u > 0, u_\varepsilon = u < 0$

$$\begin{aligned} g(u) &= 1 - s\left[m_{d_p} + \beta_{d_p} R_{d_p}^{-1}\left[R^0(u)\right]\right]\exp\left(-m_\varepsilon + \alpha_\varepsilon L_\varepsilon^{-1}\left[L^0(u)\right]\right) \\ &= 1 - s\left[m_{d_p} + \beta_{d_p}\left(1 - e^{-u^2}\right)\right]\exp\left(-m_\varepsilon + \alpha_\varepsilon\left(1 - e^{-u^2}\right)\right) \end{aligned} \qquad \text{(VI.24)}$$

La détermination de l'indice possibiliste de fiabilité (et par voie de conséquence de la possibilité de défaillance) nécessite de rechercher la plus petite racine en valeur absolue de l'équation

$$g(u) = 1 - s\left[m_{d_p} + \beta_{d_p}\left(1 - e^{-u^2}\right)\right]\exp\left(-m_\varepsilon + \alpha_\varepsilon\left(1 - e^{-u^2}\right)\right) = 0 \qquad \text{(VI.25)}$$

Pour résoudre l'équation (VI.25), diverses méthodes numériques peuvent être employées. Dans le cas présent, l'algorithme de Newton/Raphson a été utilisé. Si U* est la solution de (VI.25), l'indice possibiliste de fiabilité est alors défini par

$$\lambda = |U^*| \qquad \text{(VI.26)}$$

et la possibilité de défaillance s'obtient par

$$\Pi(M \le 0) = e^{-\lambda^2} = V \qquad \text{(VI.27)}$$

Il apparaît plus judicieux de chercher la plus grande solution V de l'intervalle [0,1] de l'équation:

$$g(V) = 1 - s(m_{d_p} + \beta_{d_p} - \beta_{d_p} V)e^{-(m_\varepsilon - \alpha_\varepsilon + \alpha_\varepsilon V)} = 0 \qquad \text{(VI.28)}$$

Dans ce cas, la possibilité de défaillance V est directement obtenue.

VI.4.7. Application au détail constructif

Le tableau VI.3 donne les valeurs modales et d'étalement de ε et de d_p pour une semaine de service.

ε	m_ε	0,0
	$\alpha_\varepsilon(h=0)$	0,41
	$\alpha_\varepsilon(h=0,5)$	0,82
	α_ε (h=0,7)	1,37
d_P	m_{d_P}	$9,30\ 10^{-4}$
	α_{d_P}	$7,37\ 10^{-4}$
	β_{d_P}	$3,97\ 10^{-4}$

Tableau VI.3 : Etalements et valeurs modales des variables de calcul

Les figures VI.6 et VI.7 donnent l'évolution de l'indice possibiliste de fiabilité et de la possibilité de défaillance en fonction du nombre d'années de service.

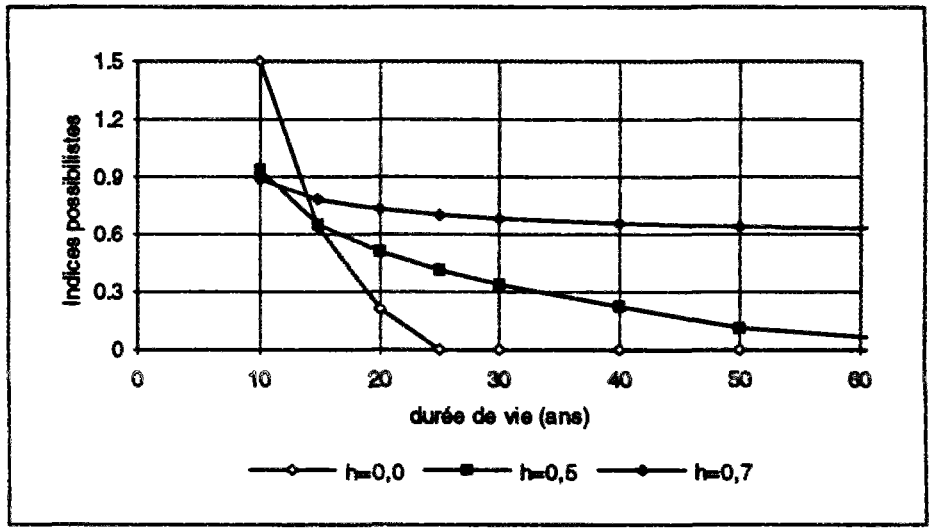


Figure VI.6 : Evolution de l'indice possibiliste de fiabilité en fonction du nombre d'années de service

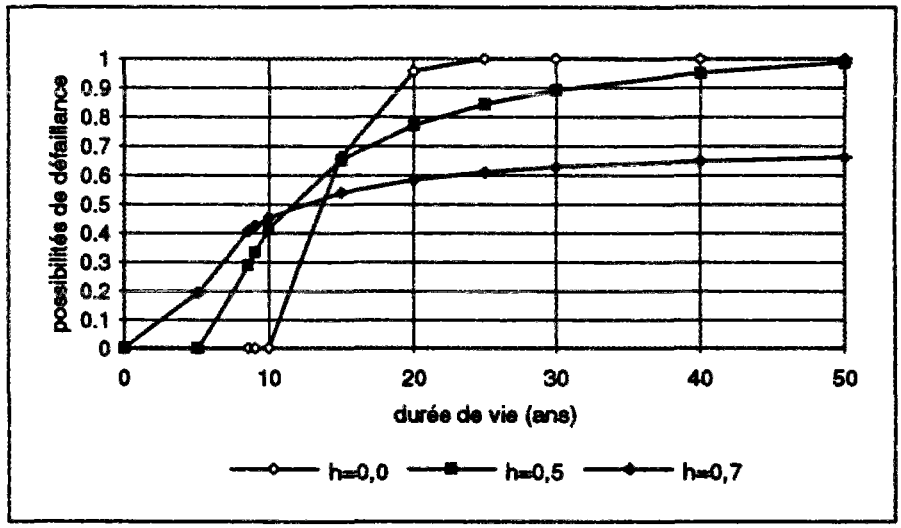


Figure VI.7 : Evolution des possibilités de défaillance par rapport aux diverses années de durée de vie

La figure VI.7 confirme que les possibilités de défaillance sont évaluées par une courbe croissante en fonction du nombre d'années de service.

Pendant les premières années de service, plus h est élevé, plus les possibilités de défaillance sont grandes; puis cette tendance s'inverse. Comment expliquer cette tendance de variation?

Cela s'explique par le fait que les incertitudes ne jouent plus dans le même sens pour des possibilités faibles et élevées, les incertitudes augmentent les faibles degrés de possibilité et diminuent les niveaux plus élevés.

Ce phénomène existe aussi dans l'approche probabiliste. Ainsi, si l'on augmente l'écart-type sur ε, nous constatons également (figure VI.8) cette baisse dans le niveau de variation de la probabilité de défaillance avec le nombre d'années de service (Proba ≥ 0,5).

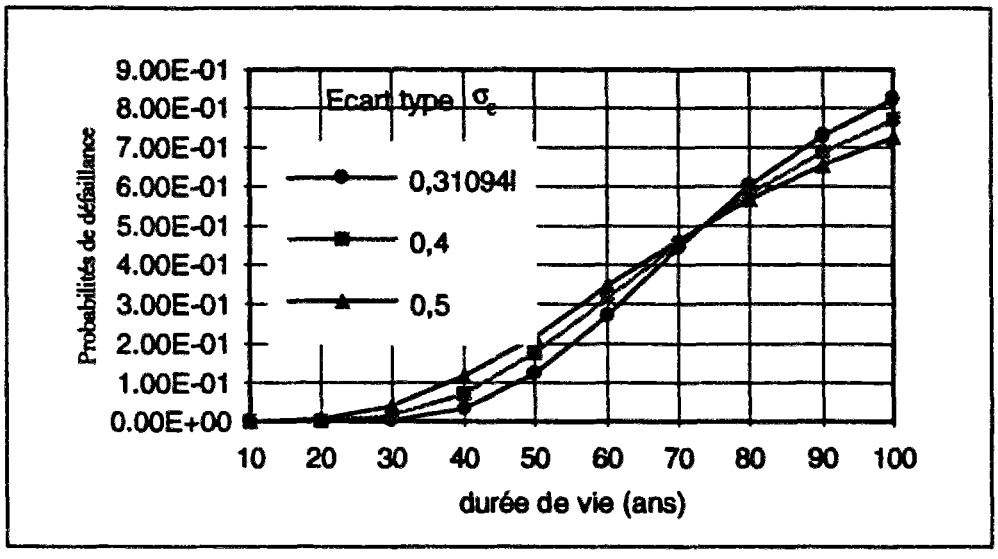


Figure VI.8 : Sensibilité de l'évolution des probabilités de défaillance suivant l'écart type σ_ε

VI.5 CONSTRUCTION DES DISTRIBUTIONS DE POSSIBILITE A PARTIR DES RESULTATS PROBABILISTES

Nous avons présenté la méthode de régression possibiliste pour construire la distribution possibiliste ε, et une méthode subjective pour les distributions des n_i. Supposons maintenant que ε et n_i soient toujours des nombres flous de forme triangulaire, mais la distribution de possibilité ε sera construite à partir d'une régression classique (figure V.1), c'est-à-dire nous gardons $\ln \hat{A} = 32{,}56942$, $\hat{B} = 3{,}82018$. Les valeurs d'étalement sont déterminées comme dans le chapitre V, pour les variables du treillis, à partir de valeurs caractéristiques probabilistes au delà desquelles les niveaux de possibilité sont nuls. Nous avons ici retenu les fractiles inférieurs et supérieurs à 5%. On obtient donc pour ε et les n_i

$\alpha_\varepsilon = 1{,}645\sigma_\varepsilon$

$\alpha_{ni} = 1{,}645\sigma_{ni}$

Tableau VI.4 donne les valeurs modales et d'étalement m_ε, α_ε, m_{dp} et α_{dp}

ε	m_ε	0,0
	α_ε	0,51
d_P	m_{d_P}	$2{,}61\ 10^{-4}$
	α_{d_P}	$1{,}88\ 10^{-4}$

Tableau VI.4 : Etalements et valeurs modales des variables de calcul

La figure VI.9 donne l'évolution des possibilités de défaillance en fonction de la durée de service.

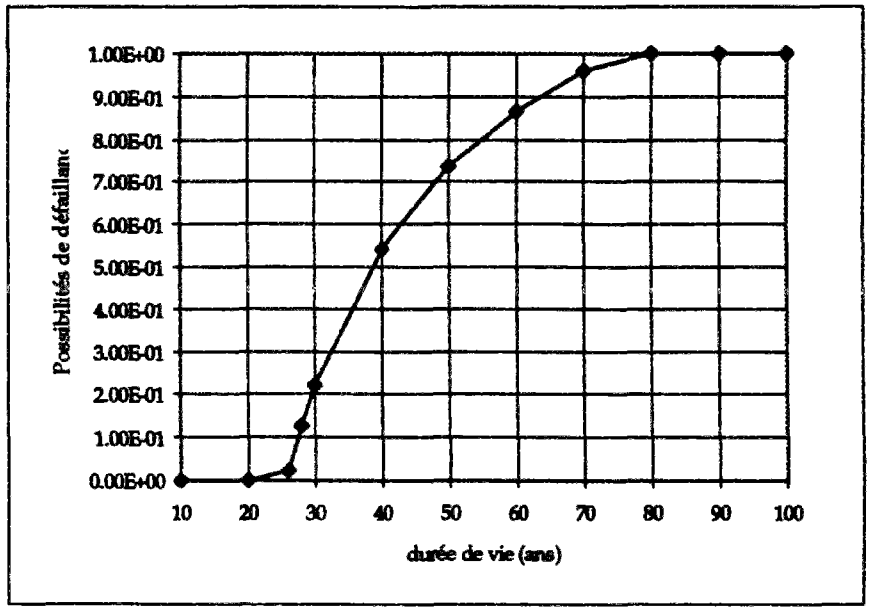


Figure VI.9 : Evolution des possibilités de défaillance en fonction du nombre d'années de service

En comparant la figure VI.9 avec la figure VI.3, nous constatons la même tendance des variations des probabilités de défaillance et des possibilités de défaillance en fonction du nombre d'années de service. La durée de vie est évaluée à 75~80 ans environ pour un niveau de possibilité de défaillance de 1, ce qui correspond à une probabilité de défaillance 0,5. Ce dernier résultat s'explique en partie par le choix des valeurs modales comme égales aux moyennes, et les valeurs des étalements construits au moyen des écarts types.

VI.6. CONCLUSION

Ce chapitre a été consacré à l'application des théories possibiliste et probabiliste de la fiabilité au calcul de la durée de vie en fatigue d'assemblages soudés. Comme nous l'avions constaté au chapitre V, une certaine adéquation dans les résultats et dans les tendances d'évolution entre l'approche probabiliste et l'approche possibiliste doit être notée. Elle l'est d'autant plus lorsque les distributions de possibilités sont déterminées à partir des fonctions densités des variables. L'approche possibiliste présente des résultats moins lissés que ceux issus de la démarche probabiliste.

L'analyse qui est présentée dans ce chapitre, illustre de façon plus générale ce que l'on peut attendre d'une théorie possibiliste de la fiabilité. Nous avons en effet essayé, dans une première étape, de rechercher des distributions de possibilité pour les variables, qui ne soient pas dérivées directement de données statistiques et d'histogrammes. Ainsi, la régression possibiliste nous permet de traiter de façon originale les données d'essais. La description possibiliste de l'endommagement pour la période de référence de la semaine repose sur une description subjective des mesures, puisqu'un degré de possibilité de 0,5 est arbitrairement choisi pour une valeur précise. Ceci montre la flexibilité de l'approche possibiliste, mais aussi le risque d'obtenir des résultats très peu réalistes en absence de description possibiliste réfléchie pour les variables de calcul. La théorie des possibilités ne propose pas, comme le fait la théorie des probabilités, un formalisme évolué. En d'autres termes, des tests d'hypothèse sont encore à inventer.

CONCLUSION GENERALE ET PERSPECTIVES

Dans cette étude, nous nous sommes attachés à suivre les différentes pistes qui s'offrent à l'ingénieur pour évaluer la sécurité des structures, avec une attention principalement marquée pour les approches probabilistes et possibilistes. Nous avons ainsi rappelé les expressions classiques de la sécurité des structures et la modélisation des incertitudes des variables de calcul introduites dans les états limites, en accentuant les particularités des mesures de possibilité et de nécessité et leur positionnement vis à vis des mesures de probabilité. Nous avons ainsi défini des pré-mesures de confiance pour l'évaluation du risque de dépassement d'états limites.

De manière identique à la théorie classique de la fiabilité, une nouvelle théorie de la fiabilité a été construite sur les principes de la théorie des possibilités. Cette théorie, nommée théorie possibiliste de la fiabilité, adopte une démarche possibiliste de la modélisation des variabilités et incertitudes liées aux paramètres de calcul ; deux définitions importantes sont d'ailleurs données dans cette étude - celle de la possibilité de défaillance et celle de l'indice possibiliste de la fiabilité. Les formulations théoriques sont données pour des états limites linéaires et non linéaires, introduisant des intervalles flous aux fonctions L et R bijectives sur leur domaine de définition. Les variables doivent être distinctes et non liées. Les développements théoriques mettent en évidence des simplifications de calcul remarquables, puisque la détermination de l'indice possibiliste de fiabilité se limite à la recherche d'un minimum scalaire, qui peut être soit l'indice possibiliste de fiabilité, soit la possibilité de défaillance. Pour se faire, la démarche consiste à analyser les opérations arithmétiques effectuées dans la fonction d'état limite, pour appliquer la règle des signes qui permet de passer d'une problématique à n variables à un problème scalaire. La figure 1 rappelle les conditions d'utilisation de la théorie possibiliste de la fiabilité et ses étapes essentielles.

Divers exemples du calcul de la fiabilité de systèmes en série et quelconques sont donnés pour les deux approches, avec diverses modélisations possibilistes des variables (nombres flous gaussiens, nombres flous triangulaires).

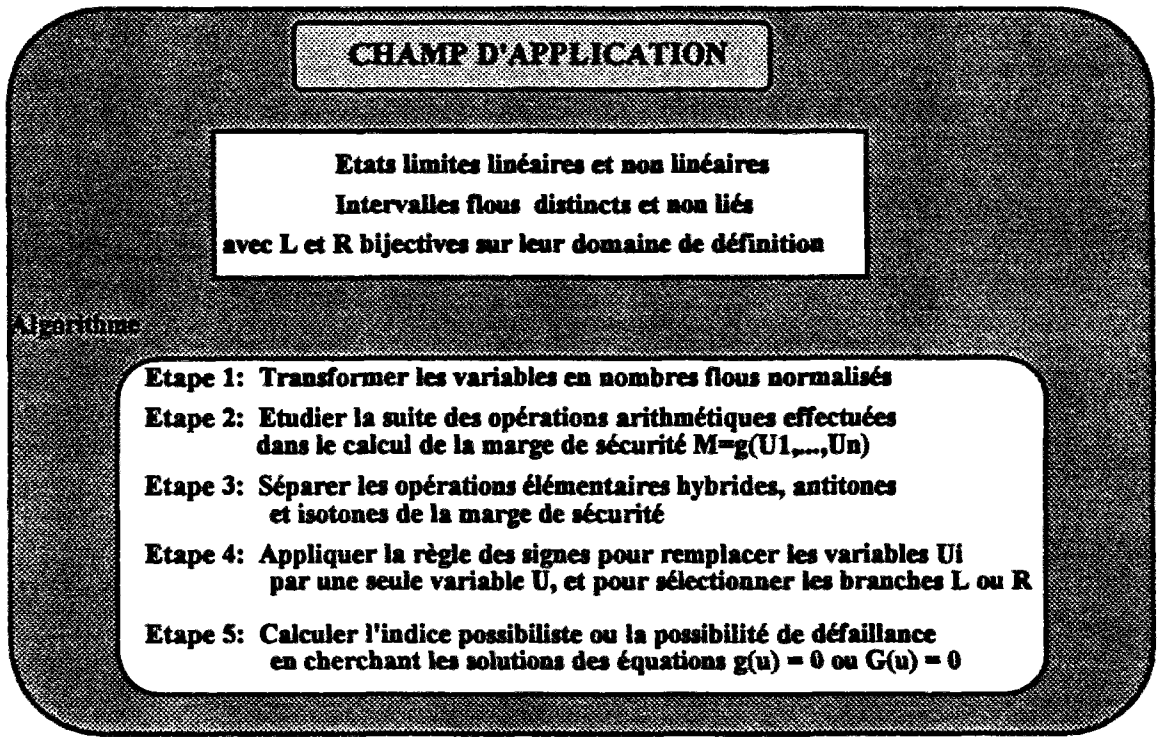


Figure 1.: Champ d'application et démarche générale de l'approche possibiliste de la fiabilité

Une application de la théorie possibiliste de la fiabilité, en comparaison avec la démarche probabiliste, a concerné le calcul de la durée de vie en fatigue d'assemblages soudés. Les approches probabilistes et possibilistes ont été utilisées pour évaluer, vis à vis du risque de ruine par fatigue et en utilisant la loi de Miner, la durée de service d'un détail donné d'une structure soumise aux sollicitations de trafic routier. Les résultats montrent la même tendance de variations de probabilités de défaillance et de possibilités de défaillance en fonction du nombre d'années de service. Un intérêt particulier a été accordé à la modélisation des variables possibilistes, puisque nous avons recouru au concept de régression possibiliste linéaire pour caler un nombre flou triangulaire caractérisant les incertitudes sur les courbes "amplitude de contraintes - nombre de cycles à la rupture". Ceci a mis en évidence un paramètre supplémentaire (le paramètre h) qui indique de manière subjective, la confiance que l'on peut accorder aux mesures. Ceci diffère largement de la démarche probabiliste, qui se limite à minimiser les erreurs au sens des moindres carrés.

Les divers résultats montrent que l'approche possibiliste est plus sensible aux conditions de calcul. Ceci implique une très grande prudence dans l'exploitation des études que l'on peut mener (notamment vis à vis de la modélisation des variables), mais permet de suivre certains phénomènes physiques, proches des intuitions d'ingénieurs. Citons pour exemple le problème du treillis du chapitre V, pour lequel la démarche possibiliste met en évidence un changement de la fiabilité autour de l'angle de 67,5°, angle remarquable car condition de non chargement d'une des barres. Il est clair que des analyses et études supplémentaires sont nécessaires pour valider cette sensibilité de la technique.

Les divers exemples ont montré que l'approche possibiliste, comme l'approche probabiliste, constituait un outil pertinent pour l'évaluation de la sécurité. Il présente de

plus l'énorme avantage de ne pas reposer sur une analyse fréquentielle des données, aspect intéressant quand on dispose d'échantillons non représentatifs. Les distributions de possibilité peuvent être néanmoins construites à partir d'histogrammes expérimentaux. Le calcul de la possibilité de défaillance est très simple puisqu'il se ramène à la recherche d'un minimum d'une fonction scalaire. L'algorithme de Newton constitue une approche convenable dans la recherche de cette valeur, bien que la convergence vers le minimum absolu ne soit pas assurée.

Cependant, plusieurs études sont encore à mener pour approfondir cette théorie. Il reste en effet nécessaire de pouvoir l'étendre aux cas de variables liées, ceci afin de traiter certains cas concrets. Il est également essentiel de pouvoir définir des indicateurs de sensibilité aux données, comme ceux qui existent dans l'approche probabiliste [Madsen et al., 1984]. Il convient aussi de signaler que la théorie des possibilités présente un formalisme encore incomplet par rapport à la théorie des probabilités. Ainsi, le concept de lois de valeurs extrêmes, très utiles en génie civil pour modéliser certaines variables (trafic, vent, pluie,..) est encore à inventer et développer. Nous nous sommes de plus limités à la modélisation des incertitudes. L'imprécision des modèles a été laissée de coté. Il reste donc à étudier l'insertion de ce concept dans la théorie possibiliste de la fiabilité.

Enfin, il faut remarquer que la comparaison entre les différentes approches de prise en compte de l'incertain doit être affinée. En effet, on pourrait mener cette comparaison sur d'autres bases ; par exemple :

- la distribution de possibilité conjointe de deux variables incertaines a été estimée à l'aide de la relation $f(x,y) = \min(f_X(x), f_Y(y))$. D'autres choix respectent une axiomatique compatible (toute t-norme par exemple [Bouchon-Meunier, 1993]), comme par exemple, $f(x,y) = f_X(x).f_Y(y)$, ce qui conduit à la définition de l'indépendance des variables. Il serait donc nécessaire d'étudier l'impact de ce choix sur la définition d'un indice de fiabilité des structures.

- un point à approfondir est sans conteste la méthode d'estimation des distributions de possibilité; dans ce mémoire, les diverses méthodes choisies s'appuient sur l'emploi des histogrammes ou de données statistiques. On aurait pu faire un choix différent (par exemple, attribuer une possibilité de 1 à une partie de l'espace englobant les points d'observation, prolongée par une distribution triangulaire arbitraire).

En effet, cette comparaison nécessite d'abord de résoudre le problème de l'estimation, que nous avons abordé pour les distributions des possibilités. La définition d'estimateurs peut s'appuyer sur la notion de confiance et de rejet, claire dans le cas des probabilités, mais à définir dans le cas d'autres pré-mesures de confiance. Ensuite, cette comparaison doit être établie sur la base d'objectifs convenablement formulés, dans des termes analogues à la théorie des jeux ; ceci suppose de savoir définir le coût de la sécurité , ainsi que le coût de la ruine partielle ou totale de la structure.

Cette thèse ne peut donc pas prétendre avoir proposé une alternative complète et crédible à l'approche de la fiabilité probabiliste ; elle aura montré l'existence d'autres choix, et tenté d'amorcer une comparaison, encore bien imparfaite, avec les approches traditionnelles. Enfin, les questions soulevées à cette occasion : choix d'une pré-mesure de confiance et estimateurs adaptés à ce choix, mériteront des développements

mathématiques appliqués au contexte du dimensionnement des structures, ce qui est l'un des problèmes principaux posés à l'ingénieur.

BIBLIOGRAPHIE

[Ang & Tang, 1984] Ang J., Tang J, 1984, **Probability concepts in Engineering Planning and Design**, Vol. II Decision, Risk and Reliability, Wiley, New-York

[Arago 14, 1994] Arago14, 1994, **Logique Floue**, Masson, Paris

[Bardossy,1989] Bardossy A., Bogardi I., 1989, "Fuzzy fatigue life prediction", **Structural Safety**, Vol.6., N.1, pp.25-38

[Bignonnet,1990] Bignonnet A., Carracilli J. & Jacob B., 1990, "Comportement en fatigue des ponts métalliques Application aux dalles orthotropes en acier", **Recherche CECA**, N°07210 KD317, Rapport Final, LCPC-IRSID.

[Boissier & al, 1994] Boissier D., Al-Hajjar J., Boulemai C., 1994, "Incertain, imprécis et aide à la décision en génie civil", **Journées Nationales : Applications des statistiques et probabilistes en analyse des matériaux et des ouvrages**, Cachan, pp.5-13

[Boissier & al, 1995] Boissier D., Al-Hajjar J., Mammeri L., 1995, "Fiabilité et possibilité en mécanique des sols", **12ème Congrés Français de Mécanique**, Strasbourg, Vol.4, pp.457-460

[Bouchon-Meunier, 1993] Bouchon-Meunier B, 1993, **La Logique Floue**, que sais-je, N.2702, PUF, Paris

[Brozzetti,1989] Brozzetti J., Ryan, I. & Sedlacek G., 1989, "Background information on fatigue design rules - Statistical Evalution", **Eurocode3**, Part.1, Chap.9, Doc 9.01.

[Bruneau,1992] Bruneau M., 1992, "Evaluation of system reliability methods for cable-stayed bridge design", **ASCE Journal of Structural Engineering**, Vol.118, N°4, pp.1106-1120

[Bui,1985] Bui H.D., 1985, "Introduction à la mécanique de la rupture", **Rupture Contrôle Sûreté**, pp.3-45.

[Calgaro,1991] Calgaro J.A., 1991, "Introduction à la Réglementation technique", **Annales des ponts et chaussées**, N°60, pp.20-40.

[Carracilli,1995] Carracilli J., Le Pautremat C. & Jacob B., 1995, "Measurements and interpretation of dynamic loads on bridges", **Recherche CECA**, N°07210 SA311, Rapport Final.

[Cornell,1967] Cornell C.A., 1967, "Some thoughts on Maximum Probable loads" and "Structural safety insurance", **Memorandum to ASCE Structural Safety Committee**, MIT, Cambridge, USA

[CEB,1976] CEB, 1976, "First order reliability concepts for design codes", N° 112

[CIRIA,1977] CIRIA, 1977, **Rationalization of safety and serviceability factors in structural codes**, Rapport N°63, Grande-Bretagne

[COMETT, 1991-1992] **Probabilistic Methods for Structural Design**, France, Portugal, Grèce

[Cremona, 1994] Cremona C. 1994, "Approche probabiliste de la fiabilité des ponts", **Journées Nationales "Applications des statistiques et probabilités en analyse des matériaux et des ouvrages"**, édité par A. Mébarki, J.P. Muzeau, M. Lemaire, pp.81-92

[Cremona,1995] Cremona C., 1995, **Applications de la Théorie de la Fiabilité à la Sécurité d'Eléments Structuraux d'Ouvrages d'Art**, Collection ERLPC, LCPC, Paris

[Cremona & Gao,1995] Cremona C., Gao Y., 1995, "Théorie possibiliste de la fiabilité des structures", **Rencontres francophones sur la logique floue et ses applications**, Legèdues Edition, Paris

[CSA,1974] CSA S-136, 1974

[CSA,1981] CSA S-136,1981

[Dempster, 1967] Dempster A.P., 1967, "Upper and lower probabilities induced by a multivalued mapping", **Annals of Mathematical Statistics**, Vol.38, pp.325-339

[Ditlevsen,1979] Ditlevsen O, 1979, "Narrow reliability bounds for structural systems", ASCE journal of structural Mechanics, Vol.7, pp.453-472

[DCC,1979] **Directives Communes relatives au Calcul des Constructions**, 1979, France

[Dubois & Prade,1980] Dubois D., Prade H., 1980, **Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications**, Vol.144 in Mathematics in Sciences and Engineering Series, Academic Press, New-York

[Dubois & Prade,1988] Dubois D., Prade H., 1988, **Théorie des Possibilités: Applications à la représentation des connaissances en informatique**, Masson, Paris

[Faber,1992] Faber M. & al, 1992, "Optimal fatigue testing - a Reassessment Tool", **IABSE Colloquium**, Copenhagen

[Fiessler & al, 1979] Fiessler B; Neumann H.J., Rackwitz R., 1979, "Quadratic limit states in structural safety", **Journal of the Engineering Mechanics Division**, ASCE, Vol.105, EM4

[Fogli & al.,1982] Fogli M., Lemaire M., 1982, "L'approche de Monte-Carlo dans les problèmes de sécurité. Application à l'estimation probabiliste du risque de ruine des poutres hyperstatiques en béton armé soumises à des actions aléatoires statistiques", **Annales de l'ITBTP**, n°403

[Furuta,1989] Furuta H., Ozaki Y., Shiraishi N., 1989, "Fatigue analysis of reinforced concrete deck based on fuzzy sets theory", **ICOSSAR89**, pp.198-205

[Galambos,1982] Galambos T.V. & al, 1982, "Probability based load criteria: Assessment of current design practice", **ASCE Journal of the Structural Division**, Vol.108, ST5

[Goyet & Remy,1988] Goyet J. & Rémy B., 1988, "Fiabilité des structures. Méthodologie d'ensemble et application aux structures à barres", **Construction Métallique**, N°4, pp.15-33

[Guedes-Soares, 1991] Guedes-Soares C., 1991,"Load and resistance modeling for structural reliability analysis", **Cours COMETT**, France, Portugal, Grece

[Hasofer & Lind,1974] Hasofer A.M., Lind N.C., "Exact and invariant second moment code format", **Journal of the Engineering Mechanics Division**, ASCE, Vol.100, pp.111-121

[Hohenbichler, 1982] Hohenbichler M, 1982, "An approximation to the multivariate normale distribution", **Proc. Euromech 155 (DIALOG)**, Danish Engineering Academy, Lyngby, Danemark

[Itoh,1989] Itoh S., Itagaki H., 1989, "Application of Fuzzy Bayesian Analysis to Structural Reliability", **ICOSSAR89**, pp..1771-1774

[Jiang & Jacob, 1993] Jiang L., Jacob B., 1993, "Probabilistic fatigue reliability", **Conférence ICOSSAR'93**, Innsbrück, Autriche

[Jiang, 1994] Jiang L., 1994, "Calcul en fatigue des ouvrages métalliques par la mécanique de la rupture", **Thèse en doctorat de l'ENPC**, Paris

[JN94, 1994] Recueil de communications, **Journées Nationales "Applications des statistiques et probabilités en analyse des matériaux et des ouvrages"**, édité par A. Mébarki, J.P. Muzeau, M. Lemaire

[Kaufmann,1973] Kaufmann A., 1973, **Introduction à la théorie des sous-ensembles flous: Vol.I Eléments théoriques de base**, Masson, Paris

[Lemaire et al.,1993] Lemaire M., Ghazlan G., 1993, "Mécanique des milieux continus", **Formation Doctorale : Matériaux, Structures, Fiabilité**, Université Blaise PASCAL

[Lind,1973] Lind N.C., 1973, "The design of structural design norms", **Journal of Structural Mechanics**, Vol.1

[Madsen,1984] Madsen H.O., Frenk S. & Lind N.C., 1984, **Methods of Structural Safety**, Prentice-Hall

[Madsen,1989] Madsen H.O. & al, 1989, "Optimal inspection planning fatigue damage of offshore structures", **ICOSSAR89**, pp.2099-2106

[Madsen,1990] Madsen H.O. & al, 1990, "Probability based optimization of fatigue design inspection and maintenance", **Symposium IOS**, Glasgow

[Mathieu,1976] Mathieu K., 1976, "Modèl Code", **CEB**, pp127-128

[Mayer, 1926] Mayer M., 1926, **Die Sicherheit der Bauwerke**, Springer-Verlag

[Miner,1945] Miner M.A., 1945, "Cumulative damage in fatigue", **Trans. ASME, Journal of Applied Mechanics**, 12 N°3.

[Mirza, 1979] Mirza S.A., MacGregor J.G., 1979, "Variations in dimensions of reinforced concrete members", **ASCE Journal of the Structural Division**, Vol.105, ST4., pp.751-766

[Mohammadi,1989] Mohammadi J., Yazbeck G.J., 1989, "Strategies for bridge inspection using probabilistic models", **ICOSSAR89**

[Murotsu, 1986] Thoft-Christensen P., Murotsu Y., 1986, **Application of strutural systems reliability theory**, Springer-Verlag

[Nguyen,1979] Nguyen H.T., 1979, "Some mathematical tools for linguistic probabilities", **Fuzzy Sets and Systems**, Vol.2, pp.53-65

[NKB,1978] NKB (The Nordic Committee on Building Regulation), 1978, **Recommandations for loading and safety regulations for structural design** , Rapport N°36, Copenhague

[Nowak,1995] Nowak A., 1995, "Calibration of LRFD bridge Code", ASCE Journal of Structural Engineering, Vol.121, N.8, pp.1254-1251

[Paris,1963] Paris P.C. & Erdogan F., 1963, "A Critical of Crack Propagation Laws", **Trans. ASME, J. Basic Eng.**, Serie D, 85, N°3.

[Prat, 1993] Prat M, 1993, "Présentation des modèles de charges et des méthodes de calibration et d'ajustement: Charges normales de trafic", Annales de l'I.T.B.T.P., N.514, pp.98-111

[Press,1989] Press W., Flannery B., Teukolsky S., Vetterling W., 1989, **Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing**, Cambridge University Press, p.509

[Rackwitz & al, 1978] Rackwitz R., Fiessler B., 1978, "Structural reliability combined random load sequences", **Computers and Structures, Pergamon Press**, Vol.9

[Rémy, 1991] Remy B., 1991, "Fiabilité d'ensemble des structures", **Cours COMETT**, France, Portugal, Grece

[Ralescu, 1979] Ralescu D., " A survey of the representation of fuzzy concepts and its appliactions", **Advances in Fuzzy Set Theory and Applications**, North-Holland, pp.71-91

[Ranganathan,1992] Ranganathan R., Mistry Z., 1992, "Reliability analysis of a Highway Bridge", **IABSE Colloquium**, Copenhagen, pp.361-368

[Rosenblatt, 1952] Rosenblatt M, 1952, "Remarks on a multivariate transformation", **Annals of Mathematical Statistics**, Vol.39, N.6

[Shafer, 1976] Shafer G., 1976, **A Mathematical Theory of Evidence**, Princeton University Press, Princeton

[Shiraishi,1989] Shiraishi N., Furuta H., 1989, "Reliability of damaged structures", **ICOSSAR89**, pp.190-197

[Sugeno, 1974] Sugeno M., 1964, **Theory of fuzzy integral and its applications**, Thèse de Doctorat, Tokyo Institute of Technology, Japon

[Taerwe, 1983] Taerwe L.R., 1993, "Towards a consistent treatment of model uncertainties in reliability formats for concrete structures", **Safety and Performance Concepts**, Bulletin du CEB N°219.

[Terano et al., 1992] Terano T., Asai K., Sugeno M., 1992, **Fuzzy Systems Theory and its Applications**, Academic Press

[Valapian & al, 1991] Vallapian S., Pham T.D., Murti V., 1991, "Application fuzzy sets in the finite element analysis of geotehnical problems", **International Conference on computing in Civil and Building Engineering**, Tokyo, pp.111-118

[Weibull,1939] Weibull W., 1939, "A statistical theory of the strength of materials", **Royal Sweedish Institute of Engineering Research**, N.151, Stockholm, Suede

[Yao,1986] Yao J., Kozin F., Wen Y.K., Yang J.N., Scuëller G.I. & Ditlevsen O., 1986, "Stochastic Fatigue, Fracture and Damage Analysis", **Structural Safety**, 3, pp.231-267.

[Zadeh, 1965] Zadeh L.A., 1965, "Fuzzy sets", **Information and control**, vol.8, pp.338-353

[Zadeh, 1971] Zadeh L.A., 1971, "Similarity relations and fuzzy orderings", **Information Sciences**, vol.3, pp.177-200

ANNEXE 1
GLOSSAIRE

α-coupe

Soient $X = (m,n,\alpha,\beta)_{LR}$ un intervalle flou de type L-R. On définit les α-coupes X_a de la variable X par
$X_a = \{ x \in \Re / \pi_X(x) \geq \alpha \}$
où π_X est la distribution de possibilité de X

Arithmétique floue

Domaine traitant du calcul des opérations élémentaires et de la recherche de solutions d'équations faisant intervenir des quantités floues

Attribut

Fonction qui affecte une ou plusieurs valeurs à un objet

Axiome d'additivité

Axiome de construction d'une mesure de confiance précisant que

$\forall A, B \in T: \quad A \cap B = \emptyset, \; m(A \cup B) = m(A) + m(B)$

Axiome de continuité

Axiome de construction d'une mesure de confiance
$\forall \{A_n\}_{n \in N}$ suite d'événements emboîtés croissante ou décroissante, $\lim_{n \to \infty} m(A_n) = m(\lim_{n \to \infty} A_n)$

Axiome de monotonie

Axiome de construction d'une mesure de confiance m(.) (obligatoire)
$A \subseteq B \Rightarrow \quad m(A) \leq m(B)$

Bornes de Ditlevsen

Bornes d'encadrement de la probabilité de défaillance d'un système série

Bornes simples — Bornes d'encadrement de la probabilité de défaillance d'un système série

Confiance — Indication de la fiabilité de l'élément d'information

Coefficients partiels de sécurité — Coefficients d'incertitude introduits dans les appro--ches semi-probabilistes de la sécurité des structures

Composant — Il s'agit
- d'un élément de structure qui décrit la géométrie et les propriétés mécaniques, c'est-à-dire, le lieu du phénomène physique,
- d'un ensemble de sollicitations ou chargements,
- d'un critère de défaillance (ou de ruine) qui décrit le phénomène physique et un modèle liant de manière déterministe les sollicitations et les propriétés de résistance,
- d'une caractérisation des incertitudes toutes les variables et paramètres du précédent modèle.

Défaillance (ou ruine) — Dépassement d'un état limite

Distribution de possibilité — Application de l'ensemble d'évènements Ω dans [0,1]

$\pi: \quad \Omega \quad \rightarrow \quad [0,1]$

$\omega \quad \rightarrow \quad \pi(\omega)$

$\forall A \subseteq \Omega, \ \Pi(A) = \sup \{ \pi(\omega) / \omega \in A \}$

Elément de rupture — *voir composant*

Espace de confiance — Triplet constitué d'un ensemble d'évènements Ω, d'une tribu T sur Ω et d'une mesure de confiance m(.)

Etat limite — Fonction de variables et paramètres qui décrit mathématiquement les états au-delà desquels une structure ne remplit plus sa mission ou n'est plus sûre

Fonctions L et R — Expression analytique des branches croissantes et décroissantes d'une quantité floue X. L (pour la branche gauche ou croissante) et R (pour la branche droite ou décroissante) sont des fonctions vérifiant les conditions:

1. $L(0) = R(0) = 1$
2. $\forall x > 0 \quad L(x) < 1 \quad$ et $\quad R(x) < 1$
3. $\forall x < 1 \quad L(x) > 0 \quad$ et $\quad R(x) > 0$
4. $L(1) = 0 \quad$ ou $\quad L(x) > 0$ et $\lim_{x \to \infty} L(x) = 0$

   $R(1) = 0 \quad$ ou $\quad R(x) > 0$ et $\lim_{x \to \infty} R(x) = 0$

L et R sont également appelées fonctions de forme (figure 1)

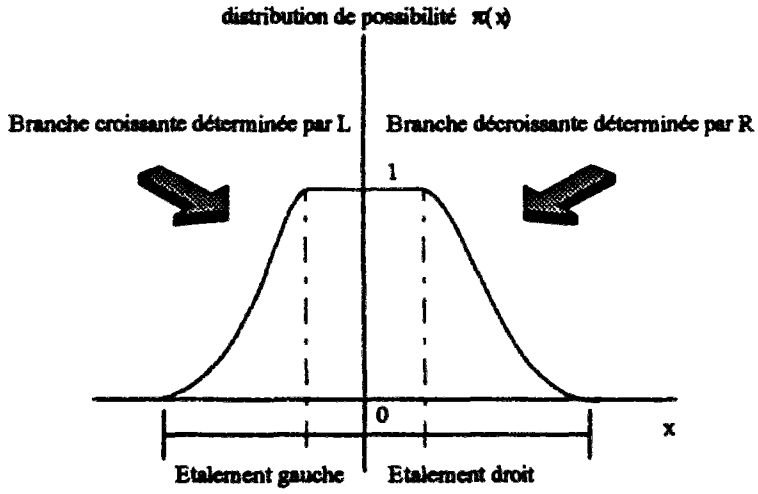


Figure 1: Fonctionsde forme L et R

Etalement (gauche ou droit) Valeur caractéristique de l'applatissement d'une distribution de possibilité.

Evènement Valeur d'un attribut

Fonction antitone Une fonction f à deux variables est **antitone** ssi
$\forall u \geq u', \forall v \geq v', f(u, v) \leq f(u', v')$

Fonction hybride Une fonction f à deux variables est **hybride** ssi
$\forall u \geq u', \forall v \leq v', f(u, v) \geq f(u', v')$

Fonction isotone Une fonction f à deux variables est **isotone** ssi
$\forall u \geq u', \forall v \geq v', f(u, v) \geq f(u', v')$

Imprécision Incomplétude ou insuffisance d'une information

Incertitude Incohérence d'une information

Indice de Cornell Indice de fiabilité pour des états limites linéaires

Indice de fiabilité Distance de l'origine du point de fonctionnement (approche probabiliste)

Indice possibiliste de fiabilité Distance de l'origine du point de fonctionnement (approche possibiliste)

Mécanisme de ruine Ensemble de composants (ou éléments de rupture) qui, ayant défailli simultanément, entraînent la défaillance du système.

Pré-mesure de confiance Application d'une tribu T dans [0,1]

$m: T \rightarrow [0,1]$

$A \rightarrow m(A)$

Mesure de nécessité — Pré-mesure de confiance admettant l'axiome de construction suivant
$\forall(A,B)\subseteq\Omega\times\Omega$, $N(A\cap B) = \min(N(A),N(B))$
Par abus de langage, cette pré-mesure est dénommée mesure.

Mesure de possibilité — Mesure de confiance Π admettant l'axiome de construction suivant
$\forall(A,B)\subseteq\Omega\times\Omega$, $\Pi(A\cup B) = \max(\Pi(A),\Pi(B))$
Par abus de langage, cette pré-mesure est dénommée mesure.

Mesure de probabilité — Pré-mesure de confiance P admettant l'axiome d'addivité. La dénomination de mesure est ici justifiée.

Méthodes probabilistes — Approche probabiliste de la sécurité des structures (voir chapitre I)

Méthodes semi-probabilistes — Approche déterministe de la sécurité des structures (voir chapitre I)

Nombre flou — Quantité floue admettant un noyau réduit à un singleton

Noyau — C'est l'ensemble des valeurs d'une quantité floue X de degré de possibilité unitaire
$No(X) = \{ x \in \Re / \pi_X(x) = 1 \}$

Objet — Paramètre ou phénomène observé

Point de fonctionnement — Point de l'hypersurface de ruine le plus proche de l'origine dans un espace standardisé de norme infinie (pour la mesure de possibilité) ou de norme euclidienne (pour la mesure de probabilité)

Possibilité de défaillance — Si $g(\underline{Z})$ est une fonction d'état limite et $\underline{Z}$ un vecteur de nombres flous, alors si Π la mesure de possibilité de $g(\underline{Z})$, la possibilité de défaillance est définie par
$\Pi_R = \Pi(g(\underline{Z}) \leq 0)$

Probabilité de défaillance — Si $g(\underline{Z})$ est une fonction d'état limite et $\underline{Z}$ un vecteur de variables aléatoires, alors si P la mesure de probabilité de $g(\underline{Z})$, la probabilité de défaillance est définie par
$P_R = P(g(\underline{Z}) \leq 0)$

Principe d'extension — Principe de construction d'un espace de confiance à partir d'un autre espace de confiance

Quantité floue — Variable incertaine construite sur un espace de confiance possibiliste

Règle des signes — Règle permettant de ramener la recherche du point de fonctionnement dans l'espace des nombres flous gaussiens (approche possibiliste) à la détermination d'un seul scalaire.

Système — Ensemble d'éléments de rupture ou composants

Système série — Système où chaque mécanisme de ruine n'est composé que d'un seul élément

Système parallèle — Système n'admettant qu'un seul mécanisme de ruine

Théorie de la fiabilité — Domaine mathématique traitant da sécurité des structures et fondée sur la théorie des probabilités

Théorie des probabilités — Domaine mathématique traitant de l'incertain par utilisation de mesures de confiance probabilistes

Théorie des possibilités — Domaine mathématique traitant de l'incertain par utilisation de mesures de confiance possibilistes

Tribu — Référentiel construit sur un ensemble Ω d'évènements vérifiant les propriétés
$\Omega \in T$
$\forall A \in T, \overline{A} \in T$ (événement complémentaire)
$\forall \{A_n\}_{n \in N}$ suite d'événements de T, $\bigcup_{n \in N} A_n \in T$

Valeur caractéristique — Fractile d'une variable aléatoire

Valeur modale — Valeur du noyau d'une quantité floue

Variable aléatoire — Variable incertaine construite sur un espace de confiance probabilisé (mesure de confiance probabiliste)

Variable incertaine — Fonction d'un ensemble d'évènements Ω dans $\Re$

$$X: \quad \Omega \rightarrow \Re$$
$$\omega \rightarrow X(\omega)$$

Pour toute partie borélienne J de $\Re$, $X^{-1}(J)$ est un élément de la tribu T de Ω.

Variables séparables — Terme général pour désigner des quantités floues non liées ou des variables aléatoire indépendantes

ANNEXE 2
ELEMENTS D'ARITHMETIQUE FLOUE

Les divers résultats présentées dans cette annexe sont la conséquence du principe d'extension et de la proposition de Dubois et Prade donnée dans le chapitre IV, section A2.3.

A2.1. FONCTIONS A UN SEUL ARGUMENT

Une **opération unaire** D peut être définie comme suit [Dubois & Prade, 1988]: Si f n'a qu'un seul argument et X est un intervalle flou, f(X) a pour distribution de possibilité

$$\begin{aligned} \pi_{f(X)}(y) &= \sup_{y=f(x)} \pi_X(x) \\ &= \pi_X(f^{-1}(y)) \qquad \text{si f est injective} \end{aligned} \tag{A2.1}$$

Remarque: L'équation (A2.1) est l'application directe du principe d'extension pour des mesures de possibilité.

En particulier, l'**opposé** d'une quantité floue X, noté -X, , est tel que

$$\forall\, y \in \Re, \qquad \pi_{-X}(y) = \pi_X(-y) \tag{A2.2}$$

L'**inverse** de X, noté 1/X, est tel que

$$\forall\, y \in \Re,\ y \neq 0 \qquad \pi_{1/X}(y) = \pi_x(1/y) \tag{A2.3}$$

La **multiplication scalaire** de X, notée lX, est telle que

$$\forall y \in \Re, \forall \lambda \in \Re, \lambda \neq 0 \quad \pi_{\lambda x}(y) = \pi_X(y/\lambda) \tag{A2.4}$$

La **puissance** de X, notée X^p, est telle que

$$\forall y \in \Re, \forall p \in \Re, p \neq 0 \quad \pi_{X^p}(y) = \pi_X(y^{1/p}) \tag{A2.5}$$

L'**exponentielle** de X, notée exp(X), est telle que

$$\forall y \in \Re^+, \pi_{\exp(X)}(y) = \pi_X(\ln(y)) \tag{A2.6}$$

A2.2. EXTENSION DES QUATRE OPERATIONS

On définit aussi la somme, la différence, le produit et le quotient de deux quantités floues X et Y comme les quantités floues notées respectivement X⊕Y, XΘY , X⊗Y et XØY de distribution de possibilité [Dubois & Prade, 1988]

$$\pi_{X\oplus Y}(z) = \sup_{z=x+y} \{\min(\pi_X(x), \pi_Y(y)), x \in \Re, y \in \Re\} \tag{A2.7}$$

$$\pi_{X\Theta Y}(z) = \sup_{z=x-y} \{\min(\pi_X(x), \pi_Y(y)), x \in \Re, y \in \Re\} \tag{A2.8}$$

$$\pi_{X\otimes Y}(z) = \sup_{z=x.y} \{\min(\pi_X(x), \pi_Y(y)), x \in \Re, y \in \Re\} \tag{A2.9}$$

$$\pi_{X\varnothing Y}(z) = \sup_{z=x/y} \{\min(\pi_X(x), \pi_Y(y)), x \in \Re, y \in \Re\} \tag{A2.10}$$

A2.3. CALCUL PRATIQUE DES INTERVALLES FLOUS L-R

Basés sur un principe d'extension, à partir des résultats de équations (A2.7, A2.8, A2.9 et A2.10), nous pouvons obtenir les opérations arithmétique usuelles pour les intervalles flous de type L-R [Dubois & Prade, 1988]

- pour le cas où f(z) = x + y (fonction isotone),

Si X et Y sont deux intervalles flous de type L-R

$$X = (m, n, \alpha, \beta)_{LR} \quad ; \quad Y = (p, q, \gamma, \delta)_{LR}$$

on a : $X \oplus Y = (m + p, n+q, \alpha + \gamma ; \beta + \delta)_{LR}$ (A2.11)

- pour le cas où f(z) = x - y (fonction hybride),

Si X et Y sont deux intervalles flous de types opposés

$$X = (m, n, \alpha, \beta)_{LR} \quad ; \quad Y = (p, q, \gamma, \delta)_{RL}$$

on a : $X \ominus Y = (m - p, n - q, \alpha + \gamma ; \beta + \delta)_{LR}$ (A2.12)

- pour le cas où f(z) = xy et $z \leq m.n$ (fonction isotone)

Si X et Y sont deux quantités floues de type L-R

$$X = (m, n, \alpha, \beta)_{LR} \quad ; \quad Y = (p, q, \gamma, \delta)_{LR}$$

on a par exemple:

$$\pi_{X \otimes Y}(z) \underset{z \leq m.n}{=} L\left(\frac{n\alpha + m\gamma - \sqrt{(m\gamma - n\alpha)^2 + 4\alpha\gamma z}}{2\alpha\gamma} \right) \quad \text{(A2.13)}$$

- pour le cas où f(z) = x/y et $z \leq m/n$ (fonction hybride),

Si X et Y sont deux quantités floues de types opposés

$$X = (m, n, \alpha, \beta)_{LR} \quad ; \quad Y = (p, q, \gamma, \delta)_{RL}$$

on a par exemple:

$$\pi_{X \oslash Y}(z) \underset{z \leq m/n}{=} L\left(\frac{m - zn}{\alpha + z\delta} \right) \quad \text{(A2.14)}$$

Selon les équations (A2.11 à A2.14), on peut déduire alors quatre opérations qui sont définies correspondant aux opérations usuelles + , - , × et ÷ respectivement dans le cas où X et Y sont deux intervalles flous [Dubois et Prade,1988]. Ces opérations permettent de définir ce que l'on appelle communément l'**arithmétique floue**.

ANNEXE 3
EXEMPLE DE STRUCTURE

Considérons le treillis décrit par la figure A3.1. et assumons que l'état limite pertinent soit la défaillance par excès de compression ou de traction. Notons R_i les efforts normaux résistants de chaque barre et N_i les efforts normaux appliqués. Le matériau constituant les barres est supposé ductile.

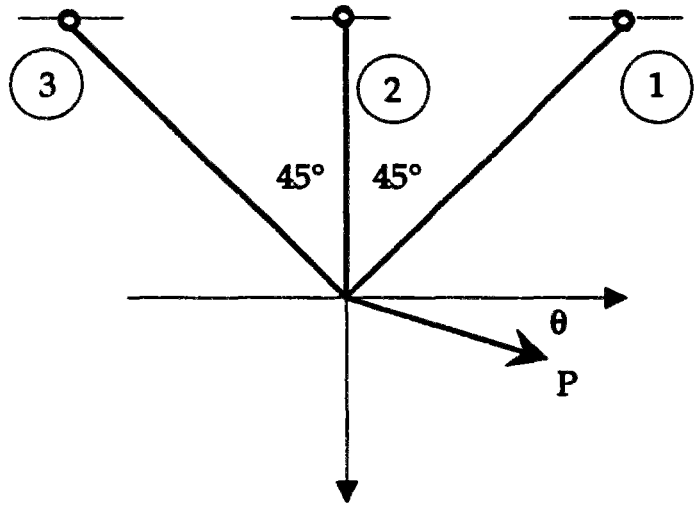


Figure.A3.1: Schéma descriptif de l'exemple de treillis à trois barres

Les équations d'équilibre sont :

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}}N_3 + 0 - \frac{1}{\sqrt{2}}N_1 &= \cos\theta\, P \\ \frac{1}{\sqrt{2}}N_1 + N_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}N_3 &= \sin\theta\, P \end{aligned}\right\} \qquad \text{(A3.1)}$$

En utilisant une méthode de type "déplacement", et en supposant les sections identiques, on tire l'expression analytique des modules des efforts normaux dans chaque barre

$$N_1 = \left|\frac{\sqrt{2}(\sin\theta - \cos\theta) - 2\cos\theta}{2(\sqrt{2}+1)}\right| P \qquad \text{(A3.2i)}$$

$$N_2 = \left|\frac{\sqrt{2}\sin\theta}{\sqrt{2}+1}\right| P \qquad \text{(A3.2ii)}$$

$$N_3 = \left|\frac{\sqrt{2}(\sin\theta + \cos\theta) + 2\cos\theta}{2(\sqrt{2}+1)}\right| P \qquad \text{(A3.2iii)}$$

Les états limites des éléments 1, 2 et 3 sont alors données par :

$$M_i = R_i - N_i = 0 \qquad i=1,2,3 \qquad \text{(A3.3)}$$

Dans le chapitre I, la défaillance successive de deux barres a été introduite pour décrire le comportement en système de la structure. Le chapitre V constitue une application numérique des principes énoncés dans le chapitre I. Nous y avons montré que la structure pouvait se décrire

- soit comme un système en série pour lequel sa défaillance est la défaillance d'une des barres,
- soit comme un système en série composé de 6 sous-systèmes en parallèle admettant deux composants.

La première description ne nécessite aucun calcul mécanique supplémentaire, puisque seuls les états limites des composants sont utilisés. Pour la deuxième description, il est nécessaire de regarder la défaillance de chaque barre, puis la défaillance d'une seconde barre sachant la première ruinée. La fonction d'état limite de la seconde barre doit donc être modifiée pour tenir compte de la défaillance de la première. Pour chacun des sous systèmes en parallèle, nous obtenons les paires d'états limites suivantes:

Barres 3 et 1

$$\begin{cases} M_3 = R_3 - N_3 \\ M_{1/3} = R_1 - \left|-\sqrt{2}\cos\theta P + R_3\right| \end{cases} \qquad \text{(A3.4)}$$

Barres 1 et 3

$$\begin{cases} M_1 = R_1 - N_1 \\ M_{3/1} = R_3 - \left|\sqrt{2}\cos\theta P + R_1\right| \end{cases} \quad (A3.5)$$

Barres 1 et 2

$$\begin{cases} M_1 = R_1 - N_1 \\ M_{2/1} = R_2 - \left|(\sin\theta - \cos\theta)P - \sqrt{2}R_1\right| \end{cases} \quad (A3.6)$$

Barres 2 et 1

$$\begin{cases} M_2 = R_2 - N_2 \\ M_{1/2} = R_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\left|(\sin\theta - \cos\theta)P - R_2\right| \end{cases} \quad (A3.7)$$

Barres 3 et 2

$$\begin{cases} M_3 = R_3 - N_3 \\ M_{2/3} = R_2 - \left|(\sin\theta + \cos\theta)P - \sqrt{2}R_3\right| \end{cases} \quad (A3.8)$$

Barres 2 et 3

$$\begin{cases} M_2 = R_2 - N_2 \\ M_{3/2} = R_3 - \frac{1}{\sqrt{2}}\left|(\sin\theta + \cos\theta)P - R_2\right| \end{cases} \quad (A3.9)$$

Remarque 1:

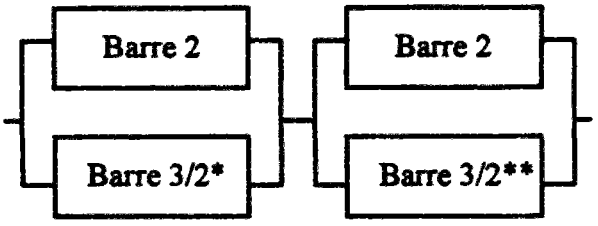
Dans les équations (A3.4) et (A3.7), il faut tenir compte du changement de signe de F_1. Pour $\theta > 67,5°$, la barre 1 fonctionne en traction, tandis que, $\theta < 67,5°$, elle fonctionne en compression. Il faut donc affecter du signe "négatif", la variable F_1 pour $\theta < 67,5°$. Pour les autres équations ((A3.5) et (A3.6)), cette variable est prise en valeur absolue, et il n'y a pas lieu de changer son signe.

Remarque 2:

Les calculs des états limites $M_{i/j}$ font apparaître des valeurs absolues. La fonction

$$f(u,v) = u - |v| \quad (A3.10)$$

n'est pas une fonction hybride, antitone ou isotone. Celle oblige donc à décomposer les marges $M_{i/j}$ en deux sous composants. Ainsi, le sous-système (2, 3/2) est décrit comme un système série de sous systèmes parallèles :



avec pour états limites respectifs:

$$\begin{cases} M_2 = R_2 - N_2 \\ M_{3/2}{}^* = R_3 - N_{3/2}{}^* = R_3 - \frac{1}{\sqrt{2}}\left((\sin\theta + \cos\theta)P - R_2\right) \end{cases} \qquad \text{(A3.11i)}$$

et

$$\begin{cases} M_2 = R_2 - N_2 \\ M_{3/2}{}^{**} = R_3 - N_{3/2}{}^{**} = R_3 + \frac{1}{\sqrt{2}}\left((\sin\theta + \cos\theta)P - R_2\right) \end{cases} \qquad \text{(A3.11ii)}$$

Ceci équivaut à remplacer la mesure d'occurrence de la valeur absolue d'un événement par la mesure d'occurrente de l'union d'événements opposés.

ANNEXE 4
REGRESSION POSSIBILISTE LINEAIRE

A4.1. DEFINITION DU MODELE MATHEMATIQUE

Le but d'une régression est, en utilisant un certain nombre de groupes d'observation de deux variables ou plus, de déterminer une fonction relativement simple qui limite la relation complexe entre eux. Pour la régression linéaire, cette fonction est supposée linéaire.

La méthode de régression possibiliste [Terano & al, 1992] est ici appliquée à un modèle dont la valeur modale de nombre flou Y est une fonction linéaire d'un vecteur $\underline{x}$ supposé connu sans erreurs. La distribution de possibilité de Y ne dépend donc que de celle de ε qui est de valeur modale nulle. Ce modèle peut être représenté comme suit :

$$\begin{aligned} Y &= f(\underline{x}, \underline{a}, \varepsilon) \\ &= a_1 x_1 + \cdots + a_m x_m + \varepsilon \\ &= \underline{x}^t \underline{a} + \varepsilon \end{aligned} \qquad \text{(A4.1)}$$

Le vecteur de paramètres inconnus $\underline{a}$ sera déterminé à partir de n groupes d'observations non liées $(y_i, \underline{x}_i^t)$, i=1, ..., n.

Posons $\underline{Y} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}$, $\underline{\underline{X}} = \begin{bmatrix} \underline{x}_1^t \\ \vdots \\ \underline{x}_n^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nm} \end{bmatrix}$, $\underline{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$ et α_ε la valeur d'étalement du nombre flou ε. La forme de distribution de possibilité ε est supposée triangulaire symétrique.

Le principe de la régression possibiliste linéaire est expliqué par la figure A4.1. Pour chaque vecteur de mesures $\underline{x}_i$, la variable $\hat{Y}_i = f(\underline{x}_i, \underline{a}, \varepsilon_i)$ est un nombre flou admettant la distribution de possibilité $\pi_{\hat{Y}_i}$. Définissons un degré h de confiance envers la précision des données et l'existence d'une régression. Les paramètres $\underline{a}$ doivent être déterminés de telle manière que la h-coupe $(Y_i)_h$ de Y_i soit incluse dans la h-coupe $(\hat{Y}_i)_h$ de $\hat{Y}_i$. Ceci signifie que pour tout point y_i correspondant à $\underline{x}_i$, le niveau h indique le degré de confiance que le point de mesure se rapproche de la régression. Puisque plusieurs régressions possibilistes linéaires, satisfaisant cette condition, existent, la régression linéaire que l'on choisira, sera celle qui donne un étalement minimal α_ε pour ε [Bardossy & Bogardi, 1989]. Ce critère exprime la recherche d'une distribution pour ε qui minimise l'erreur par rapport aux données.

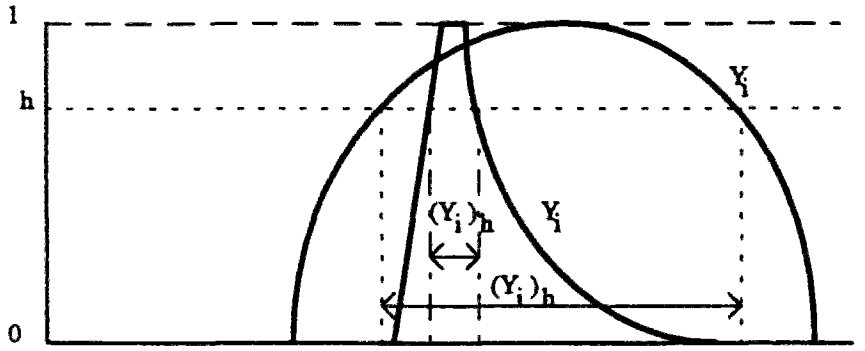


Figure A4.1.: Principe de la régression possibiliste

A4.2. ESTIMATION DES PARAMETRES

L'estimateur $\hat{\underline{a}}$ de $\underline{a}$ s'obtient au travers d'un problème de minimisation de l'étalement α_ε sous contrainte que le niveau de possibilité $\pi_{Y_i}(y_i)$ soit supérieur à un niveau h, c'est-à-dire :

$$\min \quad \alpha_\varepsilon$$

sous contraintes

$$\pi_{Y_i}(y_i) \geq h \quad \text{et} \quad 0 \leq h < 1 \qquad \text{(A4.2)}$$

Le niveau h est un niveau de confiance pré-défini et déterminé dans l'intervalle [0, 1[. Plus h est élevé, plus l'incertitude sur les mesures est considérée comme élevée. Le niveau de possibilité $\pi_{Y_i}(y_i)$ s'écrit :

$$\pi_{Y_i}(y_i) = L\left(\frac{\sum_{j=1}^{m}\hat{a}_j x_{ij} - y_i}{\alpha_\varepsilon}\right) = \begin{cases} 1 - \dfrac{\sum_{j=1}^{m}\hat{a}_j x_{ij} - y_i}{\alpha_\varepsilon} & y_i \le \sum_{j=1}^{m}\hat{a}_j x_{ij} \\ 1 + \dfrac{\sum_{j=1}^{m}\hat{a}_j x_{ij} - y_i}{\alpha_\varepsilon} & y_i > \sum_{j=1}^{m}\hat{a}_j x_{ij} \end{cases}$$

La formule A4.2 peut donc s'écrire donc

$$\min \quad \alpha_\varepsilon$$

sous contraintes

$$y_i \ge \sum_{j=1}^{m}\hat{a}_j x_{ij} - (1-h)\alpha_\varepsilon$$

$$y_i < \sum_{j=1}^{m}\hat{a}_j x_{ij} + (1-h)\alpha_\varepsilon \qquad i=1,\ldots, n$$

$$\alpha_\varepsilon \ge 0$$

$$0 \le h < 1 \qquad \text{(A4.3)}$$

Les paramètres α_ε et $\underline{\hat{a}}$ apparaissent comme des solutions d'un problème de minimisation classique.

A4.3. APPLICATION A LA REGRESSION D'UNE DROITE

Le modèle de régression d'une droite est défini comme suit :

$$Y = a_1 + a_2 x + \varepsilon \qquad \text{(A4.4)}$$

Pour estimer les paramètres a_1 et a_2, on introduit n groupes d'observation non liée (y_i, x_i), i=1, ..., n dans le modèle

$$\underline{Y} = \underline{X}\underline{a} + \underline{\varepsilon} \qquad \text{(A4.5)}$$

$\hat{a}_1$, $\hat{a}_2$ et α_ε sont déterminés au travers un problème de minimisation sous contraintes, c'est-à-dire :

$$\min \quad \alpha_\varepsilon$$

sous contraintes

$$y_i \geq \hat{a}_1 + \hat{a}_2 x_i - (1-h)\alpha_\varepsilon$$

$$y_i < \hat{a}_1 + \hat{a}_2 x_i + (1-h)\alpha_\varepsilon \qquad i=1,\ldots, n$$

$$\alpha_\varepsilon \geq 0$$

$$0 \leq h < 1 \qquad \text{(A4.6)}$$

La figure A4.2 illustre la démarche dans ce cas simple.

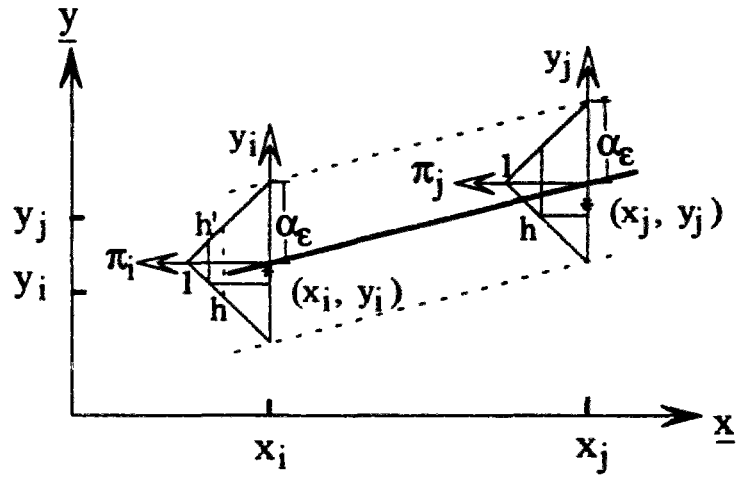


Figure A4.2.: Régression possibiliste d'une droite

RESUME

Cette thèse a pour cadre général l'étude de la sécurité des structures, sous un double aspect - probabiliste et possibiliste - de la modélisation des variabilités et incertitudes des variables de calcul introduites dans les états limites.

Après avoir rappelé les expressions classiques de la sécurité des structures (approches semi-probabiliste et probabiliste), l'attention est portée sur la définition de pré-mesures de confiance pour l'évaluation du risque de dépassement d'états limites. Divers concepts relatifs à l'expression et à la modélisation des incertitudes sont rappelés, en accentuant les particularités des mesures de possibilité et leur positionnement vis à vis des mesures de probabilité. Les notions essentielles de la théorie probabiliste de la fiabilité sont également rappelées.

Une démarche analogue à la théorie probabiliste de la fiabilité est choisie pour développer une nouvelle théorie de la fiabilité. Nommée théorie possibiliste de la fiabilité, elle adopte une démarche possibiliste de la modélisation des variabilités et incertitudes liées aux variables de calcul ; deux définitions importantes sont d'ailleurs données dans cette étude - celle de la possibilité de défaillance et celle de l'indice possibiliste de la fiabilité. Les similitudes théoriques entre les deux théories de la fiabilité sont nombreuses et une comparaison entre les approches est présentée, en illustrant d'exemples numériques. Les formulations théoriques sont données pour des états limites linéaires et non linéaires, n'introduisant que des variables distinctes et non liées modélisées par des intervalles flous. Les développements théoriques mettent en évidence des simplifications de calcul remarquables, puisque la détermination de l'indice possibiliste de fiabilité et de la possibilité de défaillance se limite à la recherche d'un minimum scalaire. Ceci est réalisé grâce à la règle des signes, dont le principe est détaillé et illustré.

Un exemple concret concernant le calcul de la durée de vie en fatigue d'assemblages soudés, est enfin proposé pour illustrer la démarche possibiliste de la fiabilité. Un soin particulier a été apporté à la modélisation des incertitudes, en utilisant le concept de la régression floue.

Mots-clés : Sécurité des structures, fiabilité, théorie des possibilités, théorie des probabilités, probabilité de défaillance, possibilité de défaillance