



**HAL**  
open science

# Calcul en fatigue des ouvrages métalliques par la mécanique de la rupture (approche probabiliste)

Li Jiang

► **To cite this version:**

Li Jiang. Calcul en fatigue des ouvrages métalliques par la mécanique de la rupture (approche probabiliste). Mécanique des structures [physics.class-ph]. Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1994. Français. NNT: . pastel-00569145

**HAL Id: pastel-00569145**

**<https://pastel.hal.science/pastel-00569145>**

Submitted on 24 Feb 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES

X

THÈSE

présentée pour l'obtention du grade de

DOCTORAT DE L'ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES

en Structures et Matériaux

par

Li JIANG

Sujet

**CALCUL EN FATIGUE DES OUVRAGES MÉTALLIQUES  
PAR LA MÉCANIQUE DE LA RUPTURE  
(APPROCHE PROBABILISTE)**

Soutenue à Paris le 21 Octobre 1994

devant le jury composé de :

Président D. FRANÇOIS (École Centrale)

Rapporteurs J. BROZZETTI (CTICM)

M. LEMAIRE (IFMA)

Examineurs J. A. CALGARO (SETRA)

B. JACOB (LCPC)

Directeur de thèse K. DANG VAN (LMS)

09



**LI JIANG — CALCUL EN FATIGUE DES OUVRAGES MÉTALLIQUES PAR LA MÉCANIQUE DE LA RUPTURE (APPROCHE PROBABILISTE) — 1994**





**A La Chine**

**A Yazhen, Alexandre et David**  
献给徐雅珍、蒋铮和蒋锴



## REMERCIEMENTS

*Les travaux faisant l'objet de ce mémoire ont été effectués au Laboratoire Central des Ponts et Chaussées (LCPC), au sein de la Section Fonctionnement des Structures (SFdS). Que tous ceux qui, par leur aide ou leur soutien, ont contribué à la réalisation de cette étude, trouvent ici l'expression de ma profonde reconnaissance.*

*Ma reconnaissance s'adresse tout particulièrement à mon Directeur de thèse, Monsieur K. Dang Van, Directeur de Recherche au CNRS, et Professeur à l'ENPC, qui a bien voulu diriger ce travail de thèse. Son expérience et ses conseils avisés m'ont permis de mener à bien l'ensemble de cette recherche.*

*Je tiens à remercier très vivement et respectueusement Monsieur D. François, Directeur au Laboratoire des Matériaux, et Professeur à l'Ecole Centrale, qui m'a fait l'honneur de présider le jury de thèse.*

*Mes remerciements vont également à Messieurs J. Brozzetti, Directeur scientifique au CTICM, et Professeur à l'ENPC, et M. Lemaire, Professeur à l'Université de Clermont-Ferrand, qui ont bien voulu assurer la laborieuse tâche de rapporteurs de cette thèse.*

*Je suis heureux de compter Monsieur J.A. Calgaro, Chef de la Mission de Recherche en Réglementation au SETRA, et Professeur à l'ENPC, qui m'a fait l'honneur d'être membre du jury.*

*Je souhaite exprimer ma profonde gratitude à Messieurs B. Jacob, Délégué aux Actions d'Orientation et de Valorisation, et R. Eymard, Chef de Service de Modélisation pour l'Ingénieur, au LCPC pour la bienveillante attention et le soin avec lesquels ils ont conduit ce travail et pour leurs judicieux conseils dans la réalisation de cette étude.*

*Mes pensées s'adressent spécialement à Messieurs J. Carracilli et M.Y. Lau, chercheurs de notre section, qu'ils m'ont beaucoup appris, tant du point de vue moral que scientifique. Qu'ils soient assurés de mon profond respect et de mon amitié pour le laborieux travail de correction de ma thèse.*

*Je tiens également à remercier Monsieur Bo-Long Zhu, Directeur de l'Institut des Structures de Construction et Professeur à l'Université Tong-Ji (Shanghai), qui m'a donné l'occasion de faire mes études doctorales en France et qui m'a encouragé constamment.*

*J'aurai enfin une pensée pour tous mes amis du laboratoire, et plus particulièrement pour les membres de la Section FdS, et leur secrétaire Madame C. Chevolleau, qui m'ont apporté leur soutien dans la réalisation de ce travail. Je les remercie chaleureusement.*



# **CALCUL EN FATIGUE DES OUVRAGES MÉTALLIQUES PAR LA MÉCANIQUE DE LA RUPTURE (APPROCHE PROBABILISTE)**

## **Résumé**

Cette thèse est une contribution à l'analyse probabiliste des ponts métalliques ou mixtes en fatigue.

Dans cette thèse, nous proposons des méthodes originales, pour calculer l'indice de fiabilité  $\beta$  et évaluer la probabilité de ruine, basées respectivement sur le modèle d'endommagement linéaire de Miner et sur la loi de propagation de fissure de Paris à seuil, qui prennent en compte les aléas quantifiés sur les charges de trafic réel et sur la résistance déduite des essais de fatigue. L'application du théorème central limite permet des calculs analytiques explicites du dommage cumulé. La modélisation de l'avancement de fissure par processus Markovien simplifie les calculs de la distribution de probabilité. Un programme informatique est fait pour calculer l'intégrale J et pour déterminer le facteur d'intensité de contraintes.

## **Mots-clés**

Détail, Dommage, Facteur d'intensité de contraintes, Fatigue, Fissure, Fonction d'état limite, Indice de fiabilité, Intégrale J, Point de fonctionnement, Probabilité de ruine, Propagation, Processus stochastique, Variable aléatoire.



# **CALCULATION ON FATIGUE OF METALLIC CONSTRUCTIONS BY FRACTURE MECHANICS (PROBABILISTIC APPROACH)**

## **Summary**

This thesis concerns a probabilistic analyse of metallic or mixed bridges on fatigue.

In this thesis, we propose new methods for calculating the reliability index  $\beta$  and for evaluating the probability of failure, based on Miner's linear damage model and Paris' crack propagation law with yield, which take into account the probable load due to real traffic and the strength determined for fatigue tests. The application of central limit theorem allows analytical calculations of the cumulative damage and the simulation of crack length as a Markoff process simplifies the solution of the probability distribution. A computer program has been written for calculating the J integral and for determining the stress intensity factor.

## **Keywords**

Detail, Damage, Stress intensity factor, Fatigue, Crack, Limite state function, Reliability index, J integral, Checking point, Probability of failure, Propagation, Stochastic process, Random variable.



# 随机理论在金属结构断裂力学疲劳分析中的应用

蒋力

法国国家路桥理工学院  
法国交通部——中央路桥研究院

## 【内容提要】

疲劳是一种复杂的随机现象。在实际中，许多不确定的因素影响疲劳破坏。因而，原则上必须运用概率或随机模型对疲劳寿命与可靠性进行分析与估计。本论文研究了金属或混合结构桥梁在实际载荷下疲劳分析的随机方法。论文共分五章：

第一章首先概述了断裂力学中损伤积累与裂纹扩展的确定性模型，讨论了应力强度因子的多种计算方法。之后，利用有限元方法和J积分计算了一座桥梁主梁下部肋板与垂直加筋板焊接部位的应力强度因子。

第二章通过对试件疲劳脆弱区的应力分析，确定了疲劳实验试件的几何形式。并且，阐述了实验步骤及部分实验结果。

第三章对结构安全度计算理论做了综述。

第四章描述结构安全度计算理论在焊接部位的疲劳分析中的应用。可靠度指标是通过Miner损伤累积模型的随机化得到的。针对该随机模型中的各个参数，我们研究了可靠度指标的敏感性。

第五章利用裂纹扩展准则估计疲劳失效概率。我们考虑了实际交通载荷的随机性，使用了固定裂纹扩展增量及时间增量两种计算模式。

在论文中，我们探讨了建立在Miner损伤累积准则及Paris裂纹扩展准则基础上的可靠度指标和失效概率的不同计算方法。这些方法考虑了实际交通载荷及抗疲劳强度的随机性。中心极限定理的使用使得损伤累积可通过解析计算得到。裂纹扩展的马尔柯夫性简化了概率分布的计算。我们同时开发了确定J积分和应力强度因子的有限元计算程序。

## 【关键词】

疲劳、疲劳部位、损伤、裂纹、裂纹扩展、应力强度因子、J积分、临界状态函数、极值点、可靠度指标、失效概率、随机变量、随机过程。



# TABLE DES MATIÈRES

<b>INTRODUCTION.....</b>	<b>1</b>
<b>CHAPITRE I</b>	
<b>Détermination du facteur d'intensité de contraintes d'un détail de pont réel .....</b>	<b>3</b>
<b>I.1. Description physique et définitions.....</b>	<b>3</b>
I.1.1. Phénomène de fatigue.....	3
I.1.2. Introduction de la mécanique de la rupture .....	3
I.1.3. Approche locale et facteurs d'intensité de contraintes.....	5
I.1.4. Approche globale et taux de restitution d'énergie .....	7
I.1.5. Intégrale de contour .....	8
I.1.6. Relation entre les facteurs K, le taux de restitution d'énergie G et l'intégrale J ..	11
<b>I.2. Lois d'endommagement et de propagation en fatigue .....</b>	<b>11</b>
I.2.1. Loi d'endommagement.....	11
I.2.2. Lois de propagation d'une fissure.....	12
<b>I.3. Méthodes de calcul du facteur d'intensité de contrainte .....</b>	<b>15</b>
I.3.1. Forme générale du facteur d'intensité de contrainte .....	15
I.3.2. Méthode générale de calcul .....	15
I.3.3. Une méthode combinée de calcul du facteur KI .....	16
I.3.3.1. Méthode de la fonction influente.....	16
I.3.3.2. Méthode des déplacements.....	18
I.3.3.3. Principe de superposition.....	18
I.3.3.4. Détermination du facteur d'amplification.....	19
I.3.3.5. Maillage autour du fond de la fissure .....	19
<b>I.4. Détermination du facteur K d'un détail de pont réel par l'intégrale de contour .....</b>	<b>20</b>
I.4.1. Analyse du comportement du détail .....	20
I.4.2. Modèle de calcul bidimensionnel.....	26
I.4.3. Calcul des intégrales de contour par éléments finis.....	28
I.4.3.1. Calcul de la densité d'énergie de déformation.....	28
I.4.3.2. Méthode d'intégration.....	29
I.4.3.3. Présentation du programme informatique.....	31

I.4.4. Vérification du programme .....	31
I.4.4.1. Nullité des intégrales de contour .....	31
I.4.4.2. Comparaison avec les valeurs connues .....	32
I.4.4.3. Approximation par la méthode de la fissure profonde .....	33
I.4.5. Résultats du calcul du facteur K du pont réel .....	34
I.5. Conclusion .....	39

## CHAPITRE II

### Etude des champs de contraintes pour des essais de fatigue .....

II.1. Analyse mécanique d'éprouvettes en éléments finis .....	41
II.1.1. Modèles et tailles d'éprouvette dans les calculs .....	41
II.1.2. Hypothèses retenues.....	42
II.1.3. Analyse des résultats des calculs par éléments finis .....	43
II.1.3.1. Modèles sans l'âme.....	43
II.1.3.2. Modèles avec âme.....	46
II.1.4. Conclusions et décisions.....	49
II.2. Essais sur éprouvettes à l'échelle 1 en traction .....	51
II.2.1. Soudage.....	51
II.2.2. Mesures statiques de contraintes en traction .....	51
II.2.3. Etude du comportement en fatigue d'éprouvettes.....	53

## CHAPITRE III

### Théorie de la fiabilité.....

III.1. Modèles de fiabilité structurale.....	55
III.1.1. fonction d'état limite et variables de base.....	55
III.1.2. Incertitudes dans des calculs de fiabilité.....	56
III.1.3. Valeur caractéristique et probabilité de ruine.....	57
III.1.4. Classification des modèles de fiabilité.....	59
III.2. Méthode "FOSM" et indice de fiabilité.....	60
III.2.1. Méthode de premier ordre et second moment.....	60
III.2.2. Indice de fiabilité de Cornell.....	60

III.2.3. Indice de fiabilité de Hasofer-Lind.....	64
III.2.3.1. Transformation des variables non normales.....	65
III.2.3.2. Détermination du point de fonctionnement.....	68
III.2.3.3. Points de fonctionnement locaux et stabilité du résultat.....	70
III.3. Facteurs de sensibilité et borne de la probabilité.....	71
III.3.1. Facteurs de sensibilité et notion d'élasticité.....	71
III.4.2. Borne supérieure de la probabilité de ruine.....	73
III.4. Conclusion.....	74

## CHAPITRE IV

<b>Approche probabiliste de la loi de dommage.....</b>	<b>75</b>
IV.1. Résistance en fatigue d'un détail.....	75
IV.1.1. Modèle de probabilité.....	75
IV.1.2. Dommage dû à un cycle d'amplitude de contrainte.....	76
IV.1.3. Estimation des lois de probabilité issues de la dispersion des essais.....	77
IV.2. Action et sollicitation de fatigue.....	78
IV.2.1. Définitions de l'action et de la sollicitation de fatigue.....	78
IV.2.2. Hypothèses sur la distribution des sollicitations.....	79
IV.2.3. Estimation des paramètres statistiques de la sollicitation de fatigue.....	80
IV.3. Fonction d'état limite en fatigue issue de la loi de Miner.....	81
IV.3.1. Construction de la fonction d'état Limite.....	81
IV.3.2. Détermination de l'indice de fiabilité $\beta$ .....	82
IV.3.2.1. Application du théorème central limite.....	82
IV.3.2.2. Détermination de la moyenne et de l'écart-type de $D_p'$ .....	83
IV.3.2.3. Fonction d'état limite et indice $\beta$ dans l'espace standardisé.....	84
IV.3.3. Point de fonctionnement et valeurs de calcul.....	85
IV.4. Résultats numériques.....	88
IV.4.1. Sensibilité de $\beta$ par rapport aux divers paramètres.....	90
IV.4.2. Influence d'état limite floue.....	94
IV.4.3. Influence des trafics.....	97
IV.5. Discussions.....	98
IV.6. Conclusion.....	103

## **CHAPITRE V**

### **Approche probabiliste de la loi de propagation ..... 105**

#### **V.1. Approches probabilistes ..... 105**

##### **V.1.1. Approche en fixant l'incrément du temps ..... 106**

##### **V.1.2. Approche en fixant l'incrément de la fissure ..... 108**

#### **V.2. Hypothèses ..... 108**

#### **V.3. Déterminations des densités de probabilité..... 109**

##### **V.3.1. Densité de probabilité de transition d'un état $j-1$ à un état $j+1$ ..... 109**

##### **V.3.2. Détermination de la densité de probabilité de $N(a)$ ..... 111**

##### **V.3.3. Détermination de la densité de probabilité de la durée de Vie..... 113**

#### **V.4. Estimations de la propagation de la fissure ..... 116**

#### **V.5. Résultats des calculs de la probabilité de ruine..... 119**

#### **V.6. Conclusion..... 122**

## **CONCLUSION GENERALE ET PERSPECTIVES ..... 123**

## **REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES ..... 125**

## **ANNEXE A**

### **Analyse des données multidimensionnelles par la régression linéaire ..... 129**

#### **A.1. Définition du modèle mathématique ..... 129**

#### **A.2. Estimation des paramètres..... 130**

#### **A.3. Estimation de la variance $\sigma^2$ ..... 131**

#### **A.4. Distributions de probabilité des estimateurs ..... 132**

#### **A.5. Application de ce modèle à la régression d'une droite ..... 134**

#### **A.6. Application de ce modèle à la régression d'un plan..... 135**

**ANNEXE B**

**Compléments de calculs sur les processus ..... 137**

B.1. Equation d'évolution de probabilité..... 137

B.2. Equation d'évolution de probabilité de transition..... 138



## INTRODUCTION

La fatigue est un phénomène qui provoque l'évolution des propriétés d'un matériau soumis à des sollicitations variables. La répétition des cycles d'efforts peut conduire à la rupture. Cette rupture se produit pour des contraintes le plus souvent inférieures à la limite d'élasticité du matériau.

La vérification des projets de ponts métalliques ou mixtes en fatigue, la mise au point de règlements de calcul et les problèmes de maintenance et d'évaluation de la sécurité résiduelle des ouvrages en service font appel à des calculs de dommages en fatigue d'assemblages soudés. Il s'agit de modéliser par la mécanique de la rupture le phénomène de l'endommagement dans la zone critique d'un élément de poutre principale.

En raison du caractère aléatoire des charges de trafic et des incertitudes importantes sur les résistances en fatigue de tels assemblages, les calculs déterministes de durées de vie sont insuffisants pour apprécier la sécurité réelle des ouvrages dans leur contexte. Les méthodes probabilistes, permettant de "chiffrer" le niveau de sécurité ou de fiabilité d'une structure, sont nécessaires.

Des méthodes de calcul approché des probabilités de ruine vis-à-vis d'un état limite donné ont été développées dans les années 70, dont celle dite de premier ordre et deuxième moment (Rackwitz et Fiessler, 1978), en utilisant la notion de l'indice de fiabilité  $\beta$ . Les premières applications de cette méthode pour des états limites de fatigue ont été présentées lors du séminaire AIPC de Lausanne en mars 1990 (IABSE). Celles-ci avaient un aspect théorique et peu opérationnel à cause du manque de données sur les véritables grandeurs aléatoires comme le trafic ou les résultats d'essais de fatigue. Depuis cette vingtaine d'années, la connaissance des actions du trafic sur les ponts et de leurs lois de probabilité a beaucoup progressé grâce à l'acquisition de données abondantes (Bruls, Jacob et Sedlacek, 1989). Il en est même sur les lois de fatigue et les résistances en fatigue correspondantes, grâce à de très nombreux essais (Brozzetti, Ryan et Sedlacek, 1989).

Dans ce mémoire, nous calculons la probabilité de ruine et l'indice de fiabilité  $\beta$  d'un assemblage soudé en fatigue, en tenant compte des aléas quantifiés sur les charges de trafic réel et les essais de fatigue et en utilisant respectivement le modèle de Miner et la loi de propagation de fissure de Paris à seuil.

Notre mémoire intitulé "Calcul en fatigue des ouvrages métalliques par la mécanique de la rupture (approche probabiliste)" comporte cinq chapitres :

- ❑ Le premier chapitre rappelle les théories fondamentales de la mécanique de la rupture et détermine le facteur d'intensité de contrainte de la liaison raidisseur vertical - semelle inférieure de la poutre principale d'un pont réel au travers de l'intégrale J. Le calcul des champs de contrainte et de déplacement est basé sur la méthode des éléments finis.
- ❑ Le deuxième chapitre détermine la forme des éprouvettes et analyse les champs de contrainte induites au voisinage des zones critiques des éprouvettes pour les essais de fatigue par le calcul des éléments finis. La procédure d'essai et certains résultats sont également décrits.
- ❑ Le troisième chapitre rappelle la théorie du calcul de fiabilité.
- ❑ Le chapitre IV est consacré à l'application de la théorie de fiabilité au calcul en fatigue de la liaison raidisseur - semelle par le modèle de Miner. L'étude de la sensibilité de l'indice  $\beta$  a été faite pour divers paramètres de ce modèle.
- ❑ Dans le dernier chapitre, nous calculons la probabilité de ruine en tenant compte des incertitudes sur le chargement des trafics réels dans la loi de propagation de fissure. Deux approches sont utilisées pour ce calcul : l'un est de fixer l'incrément de la propagation, et l'autre l'incrément du temps.

# CHAPITRE I

## DETERMINATION DU FACTEUR D'INTENSITE DE CONTRAINTES D'UN DETAIL DE PONT REEL

### I.1. DESCRIPTION PHYSIQUE ET DEFINITIONS

#### I.1.1. Phénomène de fatigue

La fatigue des pièces métalliques est définie par l'apparition de fissures macroscopiques et leur propagation, sous des charges répétées. Les intensités de la plupart de ces charges sont nettement inférieures à la résistance statique des structures. C'est donc un nombre suffisant de telles charges qui peut produire une fissure importante et conduire à la ruine partielle ou totale d'une structure.

Le dimensionnement en fatigue d'une structure sous chargement cyclique nécessite de définir un "*état limite*" qui sera le critère de résistance. Ce choix lié aux trois étapes distinctes met en jeu des mécanismes différents.

*Initiation de la fissure* : Elle explicite le comportement de la structure entre l'état vierge et l'état où apparaît une fissure microscopique. Il s'agit de la phase d'amorçage. Celui-ci se produit généralement au voisinage des défauts intrinsèques qui peuvent induire des concentrations de contraintes.

*Propagation lente d'une fissure macroscopique* : Au cours de cette étape, la fissure peut croître plus ou moins rapidement selon le matériau et l'intensité du chargement critique.

*Rupture* : Il s'agit là de l'étape finale du phénomène, qui se produit lorsque la taille de la fissure est telle qu'elle a atteint son seuil d'instabilité. Nous adopterons en pratique des critères de ruine liés à une perte de rigidité de la structure, définis par une profondeur relative fixée de la fissure par rapport à l'épaisseur de la pièce (par exemple 0,5).

#### I.1.2. Introduction de la mécanique de la rupture

La rupture d'une pièce mécanique peut s'interpréter par une interruption de la continuité de la pièce. Dans ce cas, l'application de la mécanique des milieux continus se heurte à une singularité due à la présence de fissures dans la pièce. La mécanique de la rupture n'est autre que l'application de la mécanique des milieux continus et de la loi de comportement du

matériau à un corps, avec les conditions aux limites relatives à la présence géométrique de la fissure. Elle conduit à développer un critère de ruine prenant en considération les fissures existant au sein du matériau, et est fondée sur une analyse élastique du champ des contraintes en petites déformations.

L'étude de la résistance statique d'un matériau comportant une ou plusieurs fissures démontre qu'au voisinage d'une fissure la limite d'élasticité du matériau peut être largement dépassée, et les déformations plastiques localisées sont inévitables (Inglis, 1913). Pour tous les matériaux courants, on peut distinguer dans un milieu fissuré trois zones successives.

*Zone d'élaboration* : Cette zone se trouve autour de la pointe de la fissure au cours de la propagation. Cette zone a généralement des dimensions de l'ordre de quelques cristaux. Le caractère discontinu des processus physiques de la rupture dans cette zone rend son étude très difficile, car la frontière entre le microscopique et le macroscopique reste mal définie. Toute analyse de la rupture par une modélisation continue dans cette zone ne peut donc être qu'approximative.

*Zone singulière* : Cette zone est définie comme une zone dans laquelle les champs mécaniques sont continus et possèdent une certaine structure "autonome", caractéristique de la seule fissure. La dimension de cette singularité est en  $1/\sqrt{r}$ ,  $r$  étant compris entre un rayon dit plastique, en dessous duquel les contraintes dépasseraient  $\sigma_e$  (limite d'élasticité) et un rayon au-dessous duquel l'analyse mathématique deviendrait incorrecte.

*Zone extérieure* : Cette zone se situe au-delà des deux précédentes, où les champs mécaniques lointains se raccordent avec le chargement et les conditions aux limites.

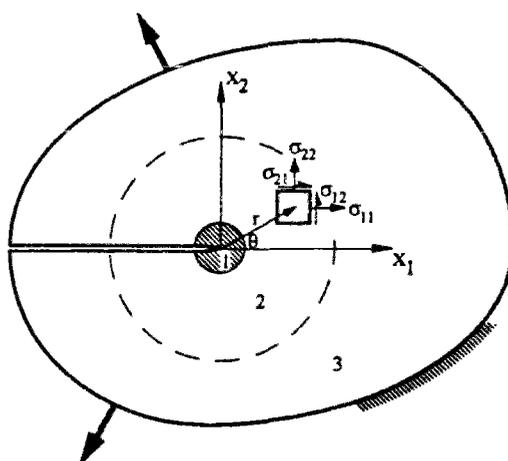


Fig. I-1 Description du milieu fissuré

L'application de la mécanique linéaire de la rupture nécessite alors la condition que la zone non élastique 1 soit être confinée.

La fissuration se manifeste par la séparation irréversible d'un milieu continu en deux parties appelées lèvres de fissure. Cette séparation se caractérise par une discontinuité au sens des déplacements.

Dans les pièces comportant des fissures planes, les mouvements possibles des surfaces de discontinuité ont été classés en trois modes indépendances, noté I, II et III. Le mode I, ou encore le mode d'ouverture, est considéré comme étant le plus important en mécanique de la rupture. Les modes II et III, correspondent localement aux glissements parallèles au plan tangent de la fissure. La première direction de glissement (II) étant normale au front de la fissure et la seconde direction (III) de glissement parallèle.

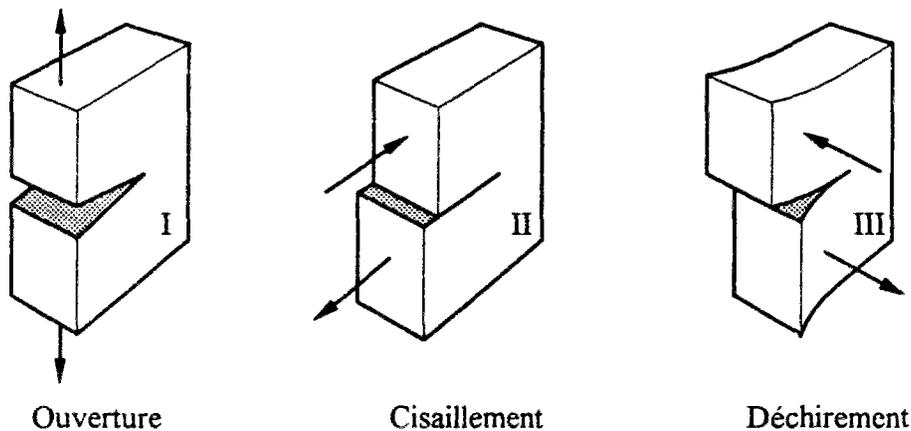


Fig. I-2 Modes de mouvements

Il existe deux types d'approches par la mécanique de la rupture : l'une est l'approche locale, ou des forces internes, caractérisée par l'étude du voisinage du fond de fissure. L'autre est l'approche globale, ou des forces externes, caractérisée par l'analyse énergétique.

### I.1.3. Approche locale et facteurs d'intensité de contraintes

Cette approche consiste à résoudre directement les équations fondamentales de la mécanique des milieux continus en tenant compte de la discontinuité géométrique occasionnée par la fissure. L'analyse est fondée sur l'hypothèse de l'élasticité linéaire (les zones 2 et 3 de la figure I-1 sont supposées élastiques) et des petites déformations.

Pour définir un facteur caractérisant l'agressivité du champ de contrainte obtenue par application d'une charge sur une pièce fissurée, G.R. Irwin (1957, 1958) a calculé les contraintes et les déplacements au voisinage du fond de fissure. En considérant les modes I et II, les contraintes et les déplacements ne varient que dans le plan. Le calcul peut se simplifier

entre les deux mécanismes : déformation plane ou contrainte plane. Les contraintes et les déplacements sont exprimées par les formules ci-après :

$$\begin{aligned}
 \text{Mode I} \quad & \left\{ \begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{KI}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \\ \sigma_{22} &= \frac{KI}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \\ \sigma_{12} &= \frac{KI}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \end{aligned} \right. & \left\{ \begin{aligned} u_1 &= \frac{KI(1+\nu)}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} (k - \cos \theta) \\ u_2 &= \frac{KI(1+\nu)}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} (k - \cos \theta) \end{aligned} \right. \\
 \text{Mode II} \quad & \left\{ \begin{aligned} \sigma_{11} &= -\frac{KII}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \left( 2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right) \\ \sigma_{22} &= \frac{KII}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \\ \sigma_{12} &= \frac{KII}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \end{aligned} \right. & \left\{ \begin{aligned} u_1 &= \frac{KII(1+\nu)}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} (k + 2 + \cos \theta) \\ u_2 &= \frac{KII(1+\nu)}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} (k - 2 + \cos \theta) \end{aligned} \right.
 \end{aligned} \tag{I-1}$$

Différant des deux modes précédents, le fonctionnement du mode III est extérieur au plan. Le calcul est fait autrement.

$$\begin{aligned}
 \text{Mode III} \quad & \left\{ \begin{aligned} \sigma_{11} &= \sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_{12} = 0 \\ \sigma_{23} &= \frac{KIII}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sigma_{31} &= -\frac{KIII}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \end{aligned} \right. & \left\{ \begin{aligned} u_1 &= u_2 = 0 \\ u_3 &= \frac{4KIII(1+\nu)}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \end{aligned} \right.
 \end{aligned} \tag{I-2}$$

Dans les formules précédentes,  $r$  est le rayon,  $\theta$  l'angle polaire,  $\nu$  le coefficient de Poisson,  $E$  le module d'Young, et le coefficient  $k$  vaut  $3-4\nu$  en déformation plane et  $(3-\nu)/(1+\nu)$  en contrainte plane. Les constantes  $KI$ ,  $KII$  et  $KIII$  qui dépendent de la géométrie de la fissure et de la répartition des efforts extérieurs s'appellent "*facteurs d'intensité de contraintes*".

La formulation de l'état des contraintes implique une singularité dans le prolongement de la fissure. Il s'agit d'une règle générale importante de la mécanique de la rupture, selon laquelle les contraintes autour du fond de fissure varient en suivant une relation de la forme :  $\sigma = K/\sqrt{r}$  et tendent vers l'infini lorsque  $r$  tend vers zéro. Au-delà de la singularité, certaines composantes du déplacement sont nulles et la discontinuité des autres est déterminée à partir des formules avec  $\theta = \pm\pi$  :

$$\begin{aligned}
\text{Mode I} \quad \delta u_2 &= u_2(\pi) - u_2(-\pi) = \frac{2KI(1+\nu)}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} (k+1) \\
\text{Mode II} \quad \delta u_1 &= u_1(\pi) - u_1(-\pi) = \frac{2KII(1+\nu)}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} (k+1) \\
\text{Mode III} \quad \delta u_3 &= u_3(\pi) - u_3(-\pi) = \frac{8KIII(1+\nu)}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}}
\end{aligned} \tag{I-3}$$

Les facteurs d'intensité de contraintes mesurent la force de la singularité du champ des contraintes à l'extrémité de la fissure. Ils sont proportionnels aux discontinuités des déplacements des lèvres de la fissure. Si l'on connaît les expressions des composantes des contraintes ou des déplacements, on peut alors réciproquement déterminer les facteurs d'intensité de contraintes, par exemple :

$$KI = \lim_{r \rightarrow 0} (\sigma_{11} \sqrt{2\pi r}) = \lim_{r \rightarrow 0} \left( \frac{E}{2(1+\nu)(k+1)} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \delta u_2 \right) \tag{I-4}$$

#### I.1.4. Approche globale et taux de restitution d'énergie

Cette approche consiste à étudier le bilan des énergies mises en jeu dans le processus d'accroissement de fissure. En appliquant le premier principe de la thermodynamique à un solide fissuré élastique, dans l'hypothèse des petites perturbations, on a :

$$\dot{E} + \dot{K} = P_{\text{ext}} + Q - 2\gamma\dot{A} \tag{I-5}$$

où  $E$  est l'énergie interne,  $K$  l'énergie cinétique,  $Q$  le taux de chaleur reçue dans le domaine considéré,  $A$  la surface de la fissure et  $P_{\text{ext}}$  la puissance des efforts extérieurs s'écrit (en l'absence d'efforts de volume)  $P_{\text{ext}} = \int_S \mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{u}} \, dS$  avec une densité surfacique de forces  $\mathbf{T}$ . Le terme  $-2\gamma\dot{A}$  représente l'évolution de la frontière du volume (la fissure fait partie de la frontière  $S$  du solide).  $2\gamma\dot{A}$  est ainsi la puissance dissipée dans le mécanisme de décohésion,  $\gamma$  étant une constante caractéristique du matériau. La variation d'énergie interne s'exprime par  $\dot{E} = \dot{W}_e + Q = \int_D \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \, dV + Q$  où  $W_e$  est appelée énergie de déformation. Le premier principe devient donc :

$$\dot{W}_e + \dot{K} = \int_S \mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{u}} \, dS - 2\gamma\dot{A} \tag{I-6}$$

La condition de stabilité du processus est que l'énergie cinétique ne s'accroisse pas :

$$\dot{K} = \int_S \mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{u}} \, dS - \dot{W}_e - 2\gamma\dot{A} \leq 0 \tag{I-7}$$

En considérant  $A$  comme seule variable de ce bilan global, cela revient à écrire :

$$\dot{K} = \left( \int_S T \cdot \frac{\partial u}{\partial A} dS - \frac{\partial W_e}{\partial A} - 2\gamma \right) \dot{A} \leq 0 \quad (I-8)$$

d'où (avec  $\dot{A} \geq 0$ )

$$\int_S T \cdot \frac{\partial u}{\partial A} dS - \frac{\partial W_e}{\partial A} \leq 2\gamma \quad (I-8')$$

La quantité de la partie gauche de l'inégalité (I-8'), représentant l'énergie disponible lors d'un accroissement de fissure, est par définition le taux de restitution d'énergie  $G$  :

$$G = \int_S T \cdot \frac{\partial u}{\partial A} dS - \frac{\partial W_e}{\partial A} \quad (I-9)$$

La condition de rupture par instabilité des milieux élastiques fragiles de Griffith (1920) est alors :

$$G > 2\gamma \quad (I-10)$$

Lorsque  $G = 2\gamma$  on peut dire que la rupture est "contrôlée", l'énergie cinétique n'augmentant plus.

### I.1.5. Intégrale de contour

L'analyse élastique linéaire cerne d'assez près la réalité physique pour les matériaux élastiques fragiles ou peu ductiles, mais elle est insuffisante lorsque les déformations plastiques interviennent dans un volume dont la dimension caractéristique dépasse 5 à 20% de l'aire de la fissure. La connaissance des contraintes et des déformations locales, dans le cas de la plasticité non confinée, nécessite des analyses elastoplastiques assez complexes. Dans la pratique, on utilise soit des corrections de zone plastique, soit des paramètres globaux déduits d'une analyse élastique non linéaire. Ce dernier est le cas de l'intégrale de contour.

Considérons le volume  $D$  d'un solide comportant une fissure d'aire  $A$  divisée en deux parties  $D_1$  et  $D_2$ , dont l'une ( $D_1$ ) entoure le fond de fissure. Une charge extérieure donne une énergie potentielle  $P$  au solide. Cette énergie se répartit en  $P = P^{(1)} + P^{(2)}$ , où  $P^{(1)}$  et  $P^{(2)}$  correspondent respectivement aux volumes  $D_1$  et  $D_2$ . Si l'aire de la fissure croît de  $dA$ , l'énergie potentielle varie de  $dP = dP^{(1)} + dP^{(2)}$ . Mais, loin de la fissure, l'énergie ne varie pas lorsque l'aire de cette fissure varie. Il en résulte que la force d'extension de la fissure  $Y$  ne concerne que le volume  $D_1$  :

$$Y = -\frac{\partial P}{\partial A} = -\frac{\partial P^{(1)}}{\partial A} \quad (\text{I-11})$$

En d'autres termes, la force d'extension de la fissure est le taux de libération d'énergie potentielle qui ne concerne qu'un volume entourant la fissure. Il est donc judicieux de l'exprimer sous forme d'une intégrale de volume, car sa valeur ne dépend pas des frontières de  $D_1$  si ce volume n'est pas trop petit.

Par de judicieux changements de fonctions, on peut transformer ces intégrales de volume en intégrales de surface. Si, en plus, le problème est plan, ou si le volume est un prisme, ou un cylindre, dont les génératrices sont parallèles au front de fissure, les calculs se simplifient. Les intégrales de volume sont égales à des intégrales de surface multipliées par une constante et les intégrales de surface deviennent des intégrales curvilignes.

Eshelby (1969) a montré que, dans un problème plan et pour l'épaisseur unité, les énergies potentielles mises en jeu par la translation du défaut suivant l'axe  $x_1$  sont données par des intégrales de contour.

$$-\frac{dP}{dx_1} = \int_C w_e dx_2 - \left( T_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + T_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) ds = J_1$$

$$-\frac{dP}{dx_2} = \int_C w_e dx_1 - \left( T_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + T_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) ds = J_2$$

ou de façon plus concise :

$$-\frac{dP}{dx_k} = \int_C \left( w_e n_k - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) ds = J_k \quad (\text{I-12})$$

avec  $w_e$  la densité d'énergie de déformation,  $n$  la normale extérieure au contour et  $C$  le contour entourant le défaut.

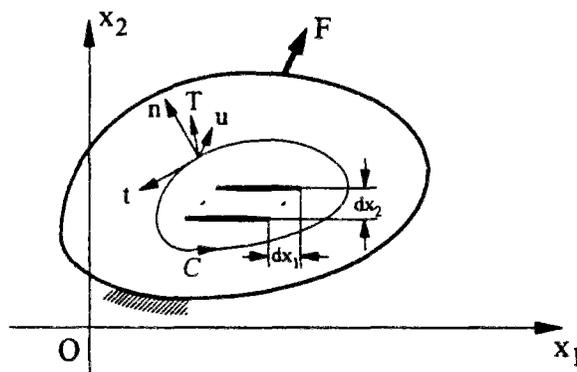


Fig. I-3 Contour de l'intégrale d'Eshelby

Les intégrales  $J_k$  sont indépendantes du contour  $C$  tant que celui-ci contient le même nombre de défauts, pour un problème plan en déformation plane ( $u_3 = 0$ ) ou en contrainte plane ( $\sigma_{33} = 0$ ). Les composantes de la traction sur le contour peuvent être présentées par le vecteur contrainte  $T_i = \sigma_{ij} n_j$ . La densité d'énergie de déformation est définie par  $w_e(\epsilon) = \int_0^\epsilon \sigma_{ij} d\epsilon_{ij}$ . D'où l'on tire la loi de comportement  $\sigma_{ij} = \frac{\partial w_e}{\partial \epsilon_{ij}}$ .

Rice (1968) a étudié le cas particulier d'une entaille dans un plan débouchant en surface, à bords parallèles, raccordés au fond de façon continue. En supposant que le chargement est appliqué à une croissance monotone, que le solide ne comporte pas de déformations initiales, et que la surface du vide n'est pas chargée, l'intégrale de contour n'est alors pas nécessaire en élasticité linéaire, elle peut être dans le domaine non linéaire. Il a montré alors :

$$-\frac{dP}{dl} = -\frac{dP}{dx_1} = \int_C w_e dx_2 - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x_1} ds = J \quad (I-13)$$

Cette expression est l'intégrale  $J_1$  étendue à un contour non fermé allant d'un bord à l'autre de l'entaille.

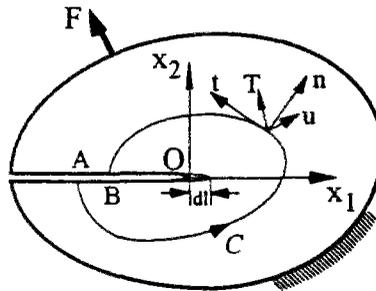


Fig. I-4 Contour de l'intégrale de Rice

Eshelby avait défini des intégrales  $J_k$  à trois dimensions

$$J_k = \int_S \left( w_e n_k - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) dS \quad (I-14)$$

avec la même signification énergétique, où  $S$  est la surface entourant le défaut.

Dans le domaine élastique linéaire,  $J$  est, comme le facteur  $K$  et le taux  $G$ , caractéristique de la singularité du front.  $J$  est encore caractéristique de cette singularité dans le domaine élastique non linéaire, et sous certaines réserves dans le domaine plastique lorsque la singularité ne dépend que d'un seul paramètre.

### I.1.6. Relation entre les facteurs K, le taux de restitution d'énergie G et l'intégrale J

En comparant les définitions de l'intégrale de contour et du taux de restitution d'énergie, pour les problèmes élastiques plans, on voit que :

$$G = J \quad (I-15)$$

En appliquant les intégrales sur un contour circulaire centré à la pointe de la fissure avec les champs asymptotiques de contraintes et de déplacements (I-1), on trouve facilement des relations entre l'intégrale  $J_k$  et les facteurs d'intensité de contrainte en mode I et II.

$$\begin{cases} J_1 = \frac{1-\nu^2}{E} (KI^2 + KII^2) \\ J_2 = -\frac{2(1-\nu^2)}{E} KI KII \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{(Déformation plane)} \\ \end{array} \quad (I-16)$$

$$\begin{cases} J_1 = \frac{1}{E} (KI^2 + KII^2) \\ J_2 = -\frac{2}{E} KI KII \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{(Contrainte plane)} \\ \end{array} \quad (I-17)$$

## I.2. LOIS D'ENDOMMAGEMENT ET DE PROPAGATION EN FATIGUE

### I.2.1. Loi d'endommagement

L'endommagement de fatigue correspond à la naissance et la croissance de microfissures, généralement intracristallines dans les métaux, sous l'effet de sollicitations cycliques, jusqu'à l'amorçage d'une fissure macroscopique. Les lois classiques s'expriment en fonction de grandeurs définies sur un cycle :

- Amplitude de contrainte  $\Delta\sigma/2$  ou de déformation  $\Delta\varepsilon/2$ ,
- Valeur moyenne (sur un cycle) de contrainte  $\bar{\sigma}$  ou de déformation  $\bar{\varepsilon}$ ,
- Rapport du minimum au maximum de la contrainte  $R_\sigma = \sigma_m/\sigma_M$  ou de la déformation  $R_\varepsilon = \varepsilon_m/\varepsilon_M$ .

La loi de Palmgreen-Miner suppose l'additivité des dommages créés sur la pièce par les cycles successifs de chargement, la commutativité de ces cycles, et l'existence d'une relation biunivoque entre le dommage élémentaire induit par un cycle et l'amplitude de chargement. La règle linéaire de cette loi définit les dommages par le facteur d'usage associé  $n_i/N_i$  où  $n_i$  est le nombre de cycles effectués avec un chargement donné pour lequel le nombre de cycles à rupture serait  $N_i$ . L'évolution du dommage est donc linéaire (Miller et Zachariah, 1977) :

$$D = \sum_i \frac{n_i}{N_i} \quad (I-18)$$

Cette loi repose sur l'utilisation des courbes de Wöhler, donnant une relation entre le nombre  $N_i$  et l'amplitude des cycles. On peut alors récrire la loi de Miner par une fonction de l'amplitude de chargement :

$$\frac{\delta D}{\delta N} = \frac{1}{f(\Delta\sigma)} \quad (I-19)$$

### I.2.2. Lois de propagation d'une fissure

Les phénomènes liés à la propagation de la fissuration en fatigue sont très complexes. Les modèles qui se proposent de décrire cette propagation devraient tenir compte de tous les paramètres qui conditionnent cette propagation dans un matériau donné. Les paramètres sont classés en deux grandes catégories :

- les paramètres intrinsèques dépendant du matériau lui même, par exemple, module d'Young, limite d'élasticité, ténacité, ...
- les paramètres extrinsèques dépendant des conditions d'utilisation, par exemple, la température, la fréquence et la forme du signal, ...

La diversité de ces paramètres a conduit les mécaniciens, soucieux de prévoir la rupture des pièces mécaniques sollicitées en fatigue, à établir des lois basées le plus souvent sur des constatations expérimentales et décrivant, le plus correctement possible, l'effet de certains paramètres jugés plus prépondérants que d'autres sur la vitesse de propagation des fissures.

Le modèle le plus utilisé en pratique est basé sur le facteur d'intensité de contraintes qui caractérise les effets de la variation de contrainte et de la géométrie de la pièce, compte tenu de l'extension de la fissure. La propagation d'une fissure sous l'effet de variations de contraintes, provoque un accroissement du facteur d'intensité de contrainte, ce qui implique un accroissement de la vitesse de la fissuration. Ce comportement des structures fissurées, lié à la répétition des charges, entraîne la fatigue du matériau dont la résistance mécanique décroît avec l'augmentation du nombre des cycles de chargement. Pour des problèmes plans, où la fissure est caractérisée par sa longueur "a", la loi de propagation s'écrit donc sous la forme générale :

$$\frac{da}{dN} = f(\Delta K, K_M, K_m, \Delta K_c, \Delta K_s, \dots, \text{constantes du matériau}) \quad (I-20)$$

où  $\Delta K$  représente la variation du facteur  $K$  ( $\Delta K = K_M - K_m$ ),  $\Delta K_c$  est le facteur d'intensité critique à rupture, et  $\Delta K_s$  le facteur d'intensité seuil. Les expériences montrent trois stades de croissance de la fissure de fatigue : démarrage de la propagation à partir d'un seuil de  $\Delta K$  (stade A), croissance régulière de la fissure (stade B) et croissance brutale jusqu'à la rupture (stade C).

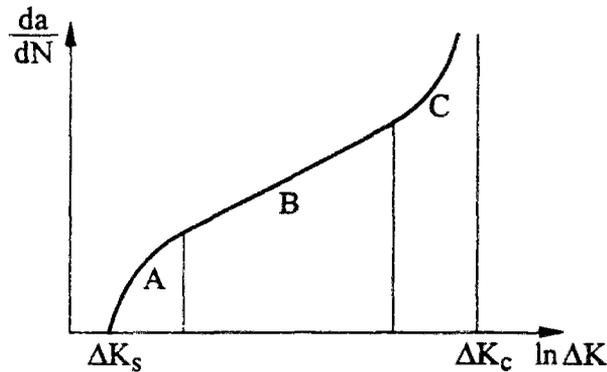


Fig. I-5 Loi de propagation générale

La loi de base largement utilisée pour décrire la propagation de la fissure au stade B est la loi de Paris (1963) :

#### Modèle de Paris

Le modèle de Paris est adapté au mode d'ouverture pure de fissuration :

$$\frac{da}{dN} = C \Delta K I^m \quad (I-21)$$

où  $C$  et  $m$  sont deux constantes caractéristiques du matériau.

La grande simplicité de cette loi à deux paramètres,  $C$  et  $m$ , et sa capacité à corroborer de nombreuses expérimentations lui ont permis d'être la loi la plus utilisée sur le plan pratique. Rappelons que cette loi ne permet ni de tenir compte de l'effet de la contrainte moyenne ni de préciser l'influence des paramètres liés à la fissuration au stade d'initiation et au stade final. Les modèles suivants sont basés sur le modèle de Paris et sont faits pour préciser d'autres facteurs influents.

#### Modèle de Paris à seuil

Il prend en compte un seuil de non fissuration  $\Delta K I_s$ , au-dessous duquel la propagation de la fissure n'a plus lieu, et se formule par :

$$\frac{da}{dN} = C' (\Delta K I - \Delta K I_s)^{m'} \quad (I-22)$$

$\Delta K_{I_S}$  est quantifié expérimentalement, et dépend de la longueur initiale de la fissure et du rapport R caractérisant la contrainte moyenne.

*Modèle de Forman*

Il prend en considération l'existence d'une asymptote verticale, qui décrit la rupture par instabilité et s'écrit sous la forme (Forman, Kearney et Engle, 1967) :

$$\frac{da}{dN} = \frac{C'' \Delta K_I^{m''}}{(1-R)K_{I_C} - \Delta K_I} \quad (I-23)$$

où  $R = K_{I_m}/K_{I_M}$  caractérise le chargement moyen.

*Modèle de Wheeler*

Il tient compte de l'effet de surcharge, mis en évidence expérimentalement par Wei et Shih (1974) et quantifié par Wheeler (1972). C'est un modèle qui introduit dans la loi de Paris l'effet retardateur d'un cycle de variation de contrainte d'amplitude exceptionnelle. Lorsqu'un ou quelques cycles de grande amplitude sont appliqués avant des cycles de plus faibles amplitudes, la vitesse de propagation est réduite. La loi de propagation s'écrit :

$$\frac{da}{dN} = C C_p \Delta K_I^m \quad (I-24)$$

où  $C_p = \min \left\{ \left( \frac{r_p}{a_p - a} \right)^\omega, 1 \right\}$  et  $\omega$  est un coefficient empirique dépendant du type de matériau.

ceci est illustré à la figure I-6.

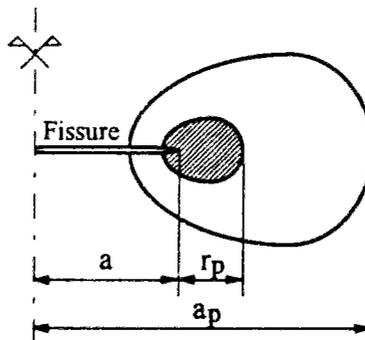


Fig. I-6 Zone plastique après la surcharge

### **I.3. METHODES DE CALCUL DU FACTEUR D'INTENSITE DE CONTRAINTE**

Le calcul de la durée de propagation de fissure implique l'intégration de la loi de propagation, entre la valeur initiale  $a_0$  de la fissure et sa valeur  $a_r$  à la rupture. L'expression du nombre  $N$  de cycles nécessaire à cette progression s'écrit donc :

$$N = N_0 + \int_{a_0}^{a_r} f(\Delta K, K_M, K_m, \Delta K_c, \Delta K_s, \dots, \text{constantes du matériau}) da \quad (\text{I-25})$$

où les constantes du matériau seront déduites par l'essais, et le critère de ruine adopté peut être  $a_r = 0,5 b$ , correspondant à la perte de rigidité de la pièce, si  $b$  désigne son épaisseur. Le problème se ramène donc à la détermination de  $\Delta K$ .

#### **I.3.1. Forme générale du facteur d'intensité de contrainte**

La théorie des poutres fissurées montre que  $\Delta K$  peut s'écrire d'une manière générale sous la forme :

$$\Delta K = \sqrt{\pi a} \Delta \sigma f(a) \quad (\text{I-26})$$

où  $f(a)$  est une fonction de forme qui tient compte de la géométrie de la structure et  $\Delta \sigma$  représente le diagramme des contraintes dans la section passant par le point étudié de la structure non fissurée.

#### **I.3.2. Méthode générale de calcul**

En mécanique de la rupture, les méthodes analytiques donnant des solutions exactes ne sont malheureusement connues que dans certains cas simples. Dès que le problème considéré devient plus complexe, il s'avère nécessaire de le traiter par des techniques numériques. Parmi ces techniques, la méthode des éléments finis s'est révélée être à la fois souple d'emploi et très puissante. Elle est fondée sur le principe variationnel des puissances virtuelles. Ce principe conduit à une méthode de calcul du champ des déplacements vérifiant certaines conditions mécaniques et minimisant l'énergie potentielle du système.

Le calcul du facteur d'intensité de contrainte d'après la connaissance des champs de déplacements et de contraintes par éléments finis suit deux types d'approche par la mécanique de la rupture :

L'approche globale permet de caractériser le facteur d'intensité de contrainte sans se préoccuper de ce qui se passe au voisinage de la fissure pour des cas de sollicitations extérieures bien précis. La description de la structure ne nécessite pas un maillage très fin, mais cette approche n'apporte pas de renseignement complémentaire sur le facteur K. Les méthodes utilisées sont :

- ❑ Méthode des compliances
- ❑ Méthode des intégrales de contour

L'approche locale permet de généraliser le problème vis à vis des sollicitations pour la détermination du facteur d'intensité de contrainte. Cette approche nécessite un maillage très fin au voisinage de la pointe de fissure afin de caractériser la singularité à la pointe de fissure. Elle permet d'obtenir plus de renseignements sur le facteur K, et de déterminer K pour une structure présentant une géométrie bien particulière. Les méthodes utilisées sont :

- ❑ Méthode de la fonction influente
- ❑ Méthode des déplacements
- ❑ Méthode des contraintes
- ❑ Méthode de la fonction poids

Dans l'étude envisagée, nous calculons KI en utilisant la méthode de l'intégrale de contour. D'après les relations (I-16) et (I-17), la connaissance de deux intégrales  $J_1$  et  $J_2$  permet alors dans le cas élastique linéaire de calculer les facteurs d'intensité de contraintes KI et KII. Nous présentons ici également une méthode combinée utilisant à la fois la méthode de la fonction influente et la méthode des déplacements, afin de fournir une moyenne de vérification.

### **I.3.3. Une méthode combinée de calcul du facteur KI**

#### *I.3.3.1. Méthode de la fonction influente*

Considérons une pièce symétrique munie d'une fissure droite de longueur  $a$  suivant l'axe  $Ox$  (cf. Fig. I-7). Appliquons une force  $F$  sur chaque bord de la fissure à une abscisse  $x$  ( $0 \leq x \leq a$ ) sur une ligne dans la direction perpendiculaire au plan  $xOy$  et de longueur  $s(x) = e$  (l'épaisseur de la pièce). Cette force introduit un facteur d'intensité de contrainte en mode I noté  $KI(x, a)$ . La fonction influente peut être définie par (Shi, Paris et Erdogan, 1962) :

$$GI(x, a) = \frac{s(x)}{F} KI(x, a) \quad (I-27)$$

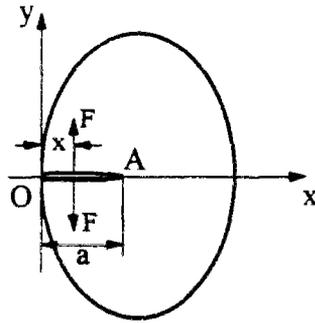


Fig. I-7 Méthode de la fonction influente

$GI(x, a)$  est une fonction qui ne dépend que de la géométrie de la pièce fissurée. La force  $F$  concentrée sur la ligne  $s(x)$  peut être considérée comme une pression  $p(x)$  appliquée sur une surface  $s(x) dx$ . Cette pression est égale à la contrainte qui existe sur la ligne de la fissure en supposant que la pièce n'est pas fissurée. On en déduit un facteur d'intensité de contrainte infinitésimal  $dKI(x, a) = GI(x, a) p(x) dx$ . Pour une fissure de longueur  $a$  :

$$KI(a) = \int_0^a GI(x, a) p(x) dx$$

Pour caractériser  $GI(x, a)$ , on peut utiliser la fonction influente basée sur la fonction de Green, ou la fonction poids proposée par Bueckner. Dans le cas d'une pièce infinie, munie d'une fissure non débouchante, soumise à une distribution de contraintes symétrique par rapport au milieu de la fissure, on utilise la fonction influente :

$$GI(x, a) = \frac{1}{\sqrt{\pi a}} \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} \quad (I-28)$$

Le facteur d'intensité de contrainte en fond de fissure vaut :

$$KI(a) = \frac{1}{\sqrt{\pi a}} \left( \int_{-a}^0 \sigma(-x) \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} dx + \int_0^a \sigma(x) \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} dx \right) = \frac{2a}{\sqrt{\pi a}} \int_0^a \frac{\sigma(x)}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx$$

L'état de contrainte peut être représenté par un polynôme du quatrième degré :

$$\sigma(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + A_4 x^4$$

Le facteur d'intensité de contrainte se déduit des deux formules précédentes :

$$KI(a) = \sqrt{\pi a} \left( A_0 + \frac{2a}{\pi} A_1 + \frac{a^2}{2} A_2 + \frac{4a^3}{3\pi} A_3 + \frac{3a^4}{8} A_4 \right) \quad (I-29)$$

Dans le cas d'une fissure débouchante, le facteur d'intensité de contrainte précédent doit être corrigé des effets de la surface libre en ajoutant un facteur de correction multiplicatif de 1,12 dans cette formule (Irwin, Krafft, Paris et Wells, 1967).

La formule (I-29) peut être généralisée pour tenir compte des différentes formes géométriques de fissure, de la manière suivante (Buchalet et Bamford, 1974) :

$$KI(a) = \sqrt{\pi a} \left( A_0 F_0 + \frac{2a}{\pi} A_1 F_1 + \frac{a^2}{2} A_2 F_2 + \frac{4a^3}{3\pi} A_3 F_3 + \frac{3a^4}{8} A_4 F_4 \right) \quad (I-30)$$

où les coefficients  $F_i$  sont appelés "*facteur d'amplification*" et dépendent de la géométrie de la fissure.

### 1.3.3.2. Méthode des déplacements

Il est possible de calculer directement les déplacements par éléments finis. En identifiant l'ouverture de la fissure avec la valeur proposée par la formule (I-3), KI peut être déterminé.

$$KI = \frac{E}{2(1+\nu)(1+k)} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \delta u_2 \quad (I-31)$$

Cependant le calcul de KI, pour un ensemble de points situés le long de la fissure, donne des valeurs instables. En revanche, les courbes  $\delta u_2^2$ , en fonction de  $r$ , peuvent être assimilées avec une bonne précision à des droites. On peut supposer que :

$$\delta u_2^2 = \xi r + \eta = \xi (r - \zeta)$$

avec  $\zeta = -\eta / \xi$ . Les coefficients  $\xi$  et  $\eta$  (ou  $\zeta$ ) sont déterminés par la méthode des moindres carrés, le courbe peut donc ne pas passer par l'origine. La formule (I-31) devient :

$$KI = \frac{E}{2(1+\nu)(1+k)} \sqrt{\frac{2\pi}{r-\zeta}} \delta u_2 = \frac{E}{2(1+\nu)(1+k)} \sqrt{2\pi\xi} \quad (I-32)$$

### 1.3.3.3. Principe de superposition

On décompose l'état (E), correspondant à une pièce fissurée soumise aux sollicitations extérieures globales (F, M), en l'état (E'), correspondant à cette pièce non fissurée soumise aux mêmes chargements, et l'état (E''), où une distribution de contrainte  $\sigma(x)$  obtenue en l'état (E') est appliquée aux bords de la fissure. KI est égal à KI'' car KI' est nul.

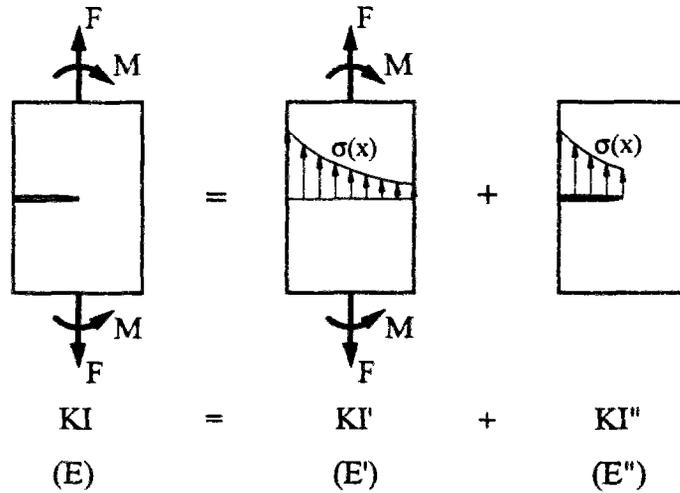


Fig. I-8 Principe de superposition

#### I.3.3.4. Détermination du facteur d'amplification

D'après la formule (I-30), il faudra déterminer les facteurs d'amplification pour obtenir des courbes en fonction de  $a$  après le calcul de chaque incrément de fissure.

Selon le principe de superposition, nous pouvons successivement calculer les  $F_i$  en soumettant séparément les bords de la fissure à des contraintes uniforme :  $\sigma(x) = A_0$ , linéaire :  $\sigma(x) = A_1 x$ , quadratique :  $\sigma(x) = A_2 x^2$ , cubique :  $\sigma(x) = A_3 x^3$  et du quatrième degré :  $\sigma(x) = A_4 x^4$ . Dans chaque cas, les facteurs d'intensité de contrainte  $KI^{(i)}$  sont calculés directement pour différentes profondeurs de fissure par la méthode des déplacements, et le facteur total est égal à la somme des facteurs partiels.

$$KI = KI^{(0)} + KI^{(1)} + KI^{(2)} + KI^{(3)} + KI^{(4)} \quad (I-33)$$

On en déduit alors les facteurs d'amplification :

$$F_0 = \frac{KI^{(0)}}{A_0 \sqrt{\pi a}} \quad F_1 = \frac{\pi}{2a} \frac{KI^{(1)}}{A_1 \sqrt{\pi a}} \quad F_2 = \frac{2}{a^2} \frac{KI^{(2)}}{A_2 \sqrt{\pi a}}$$

$$F_3 = \frac{3\pi}{4a^3} \frac{KI^{(3)}}{A_3 \sqrt{\pi a}} \quad F_4 = \frac{8}{3a^4} \frac{KI^{(4)}}{A_4 \sqrt{\pi a}} \quad (I-34)$$

#### I.3.3.5. Maillage autour du fond de la fissure

Par l'approche locale on s'intéresse aux champs de singularité de déplacements et de contraintes au voisinage de la pointe de fissure. La méthode traditionnelle des éléments finis ne permet pas de rendre compte de cette singularité, même si l'on utilise un maillage très fin. Ceci est dû aux fonctions de forme habituellement employées pour interpoler les déplacements.

La solution pour introduire la singularité des champs est d'utiliser des éléments spéciaux proposés par Barsoum (1976). Ces éléments s'obtiennent en déplaçant certains noeuds milieux adjacents de l'élément bidimensionnel à 6 noeuds ou à 8 noeuds au quart de la longueur.

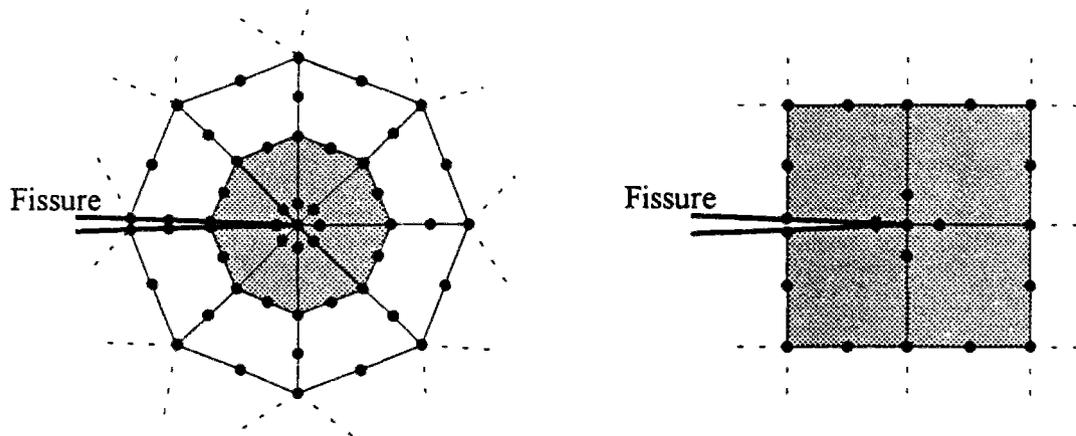


Fig. I-9 Maillages spéciaux

#### I.4. DETERMINATION DU FACTEUR K D'UN DETAIL DE PONT REEL PAR L'INTEGRALE DE CONTOUR

Le détail dont nous étudierons le comportement à la fatigue est la liaison raidisseur vertical - semelle inférieure des poutres principales des ponts mixtes, nous étudions plus particulièrement le cas du pont de Jargeau. C'est un détail critique au regard du dimensionnement de ces ouvrages, car sa ruine peut entraîner la ruine de l'ouvrage. Le calcul de l'intégrale de contour et la détermination du facteur K nécessitent les champs de contraintes et de déplacements pour différentes profondeurs de fissure près du cordon de soudure de la liaison.

##### I.4.1. Analyse du comportement du détail

Le pont de Jargeau comprend cinq travées, dont la plus grande mesure 73 m. Il possède deux poutres principales de 2,5 m de haut.

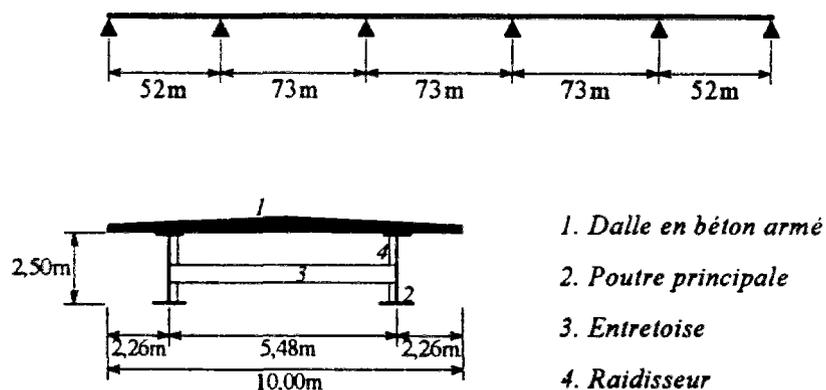


Fig. I-10 Pont de Jargeau

Nous appliquons une force concentrée, qui simule un camion sur le pont, au milieu de la travée étudiée. Pour observer le phénomène de torsion du pont réel, deux cas de chargement sont utilisés. L'un centré consiste dans l'application de deux charges symétriques par rapport aux poutres principales et l'autre, décentré, se caractérise par la mise en place d'une charge sur l'une des poutres.

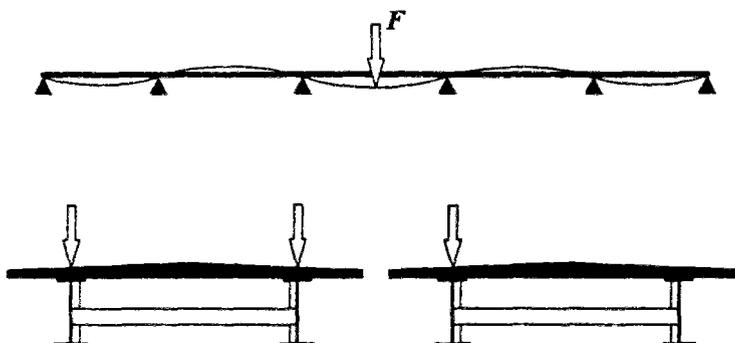


Fig. I-11 Position du chargement sur le pont

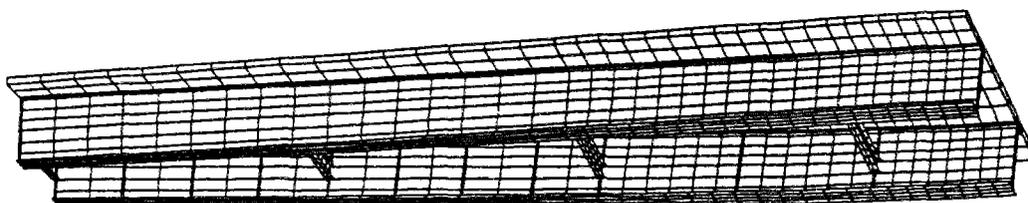
#### *Hypothèses retenues*

- Le calcul par éléments finis est réalisé par le logiciel CESAR-LCPC.
- Deux sortes d'éléments dans le calcul tridimensionnel sont utilisées : quadrilatères à 4 noeuds et triangles à 3 noeuds pour les éléments de coque, hexaèdre à 8 noeuds, pentaèdres à 6 noeuds et tétraèdres à 4 noeuds pour les éléments de volume.
- Le calcul est fait en élasticité linéaire en supposant que le matériau de la soudure a les mêmes propriétés que l'acier, homogène et isotrope.
- Le module d'Young est fixé à :  $E = 210000$  MPa pour l'acier et  $E = 21000$  MPa pour le béton. Le coefficient de Poisson est fixé à :  $\nu = 0,3$  pour l'acier et  $\nu = 0,15$  pour le béton. La masse volumique vaut  $7800$  kg/m<sup>3</sup> pour l'acier et  $2300$  kg/m<sup>3</sup> pour le béton.
- Les conditions d'appuis sont caractérisées par des appuis simples supportant la partie inférieure de la poutre.

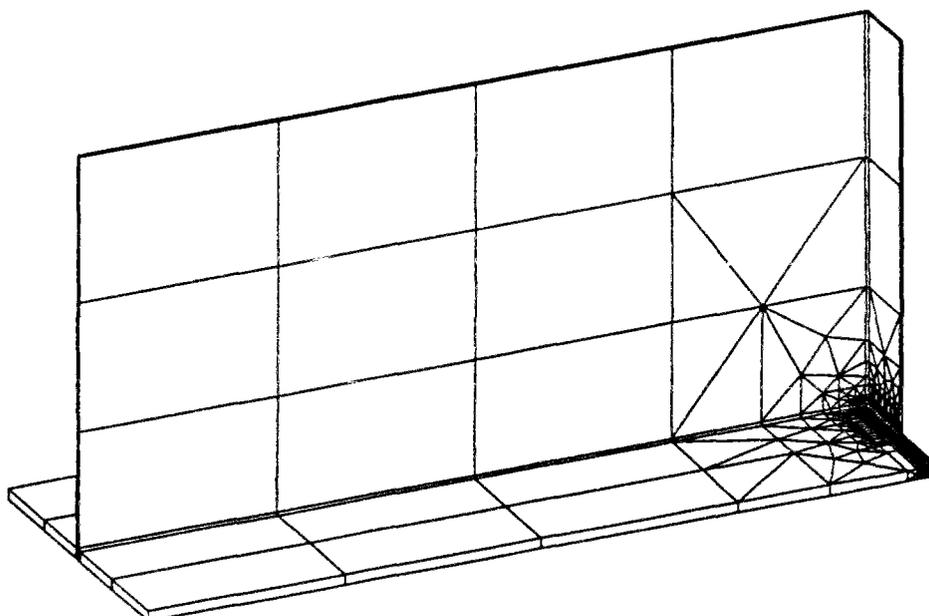
En prévoyant que la fissure se propage à partir du cordon de soudure dans la semelle de la poutre principale, le calcul est divisé en trois étapes et la représentation géométrique de la structure devient de plus en plus précise après chaque étape. Nous commençons le calcul en prenant en compte le pont entier, puis on se limite à une des travées de 73 m et enfin on réduit la zone étudiée jusqu'à la liaison raidisseur - semelle en milieu de travée du pont. Les résultats des déplacements et des contraintes à chaque étape sont utilisés comme conditions aux limites pour le calcul ultérieur. La figure suivante montre les maillages et les déplacements globaux à chaque étape.



a) Première étape



b) Deuxième étape



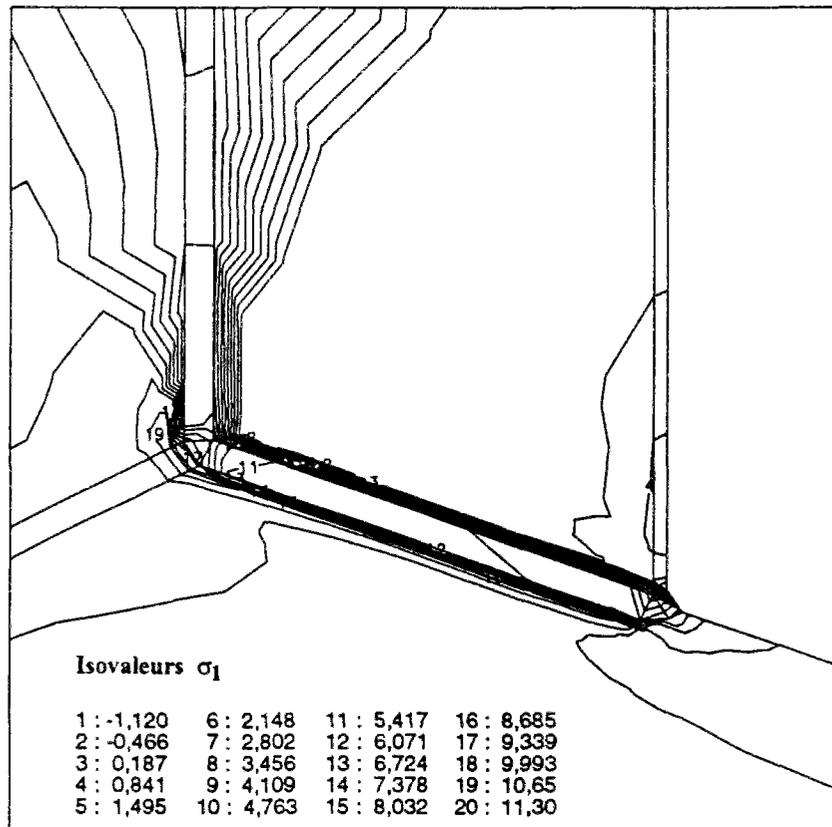
c) Troisième étape

Fig. I-12 Déplacements globaux dans chacune des trois étapes

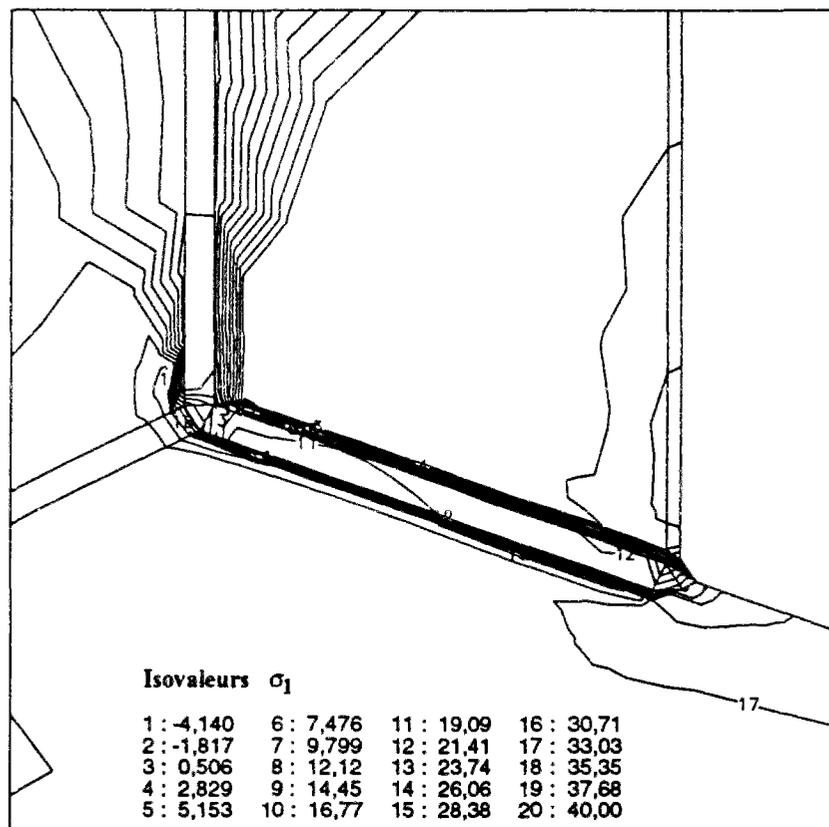
Pour vérifier le calcul de chaque étape, nous comparons, dans le tableau I-1, les valeurs de la contrainte de la direction longitudinale de la poutre et de la flèche maximale en éléments finis avec celles obtenues par le calcul à la main s'appuyant sur l'hypothèse de la flexion plane. Dans le cas de "flexion plus torsion", les résultats du calcul à la main s'obtiennent à l'aide des coefficients de répartition de charge déterminés en éléments finis. Dans la première étape, nous obtenons des résultats du calcul à la main un peu plus élevés par rapport à ceux du calcul par éléments finis à cause de la non prise en compte du renforcement de la section des poutres auprès des appuis. Par contre, à la troisième étape, ces résultats au niveau des contraintes deviennent relativement petits parce que, dans le calcul à la main, on ne peut pas prendre en compte la concentration de contraintes au pied du cordon de soudure.

Etape	1			2			3		
Cas du calcul	Flexion	Flexion + Torsion		Flexion	Flexion + Torsion		Flexion		Flexion + Torsion
Nom du calcul	JARGE C1	JARGM C1		JARG1 C1	JARGT C1		JARGD C2 C4		JARGD C5
Condition du charge.	100 kN sur chaque poutre	400 kN sur une des poutres		100 kN sur chaque poutre	400 kN sur une des poutres			contrainte en bordure	contrainte en bordure
Condition du déplace.	appui simple	appui simple		déplace. en bordure	déplace. en bordure		déplace. en bordure	déplace. minimum	déplace. minimum
Numéro de poutre	1 et 2	1	2	1 et 2	1	2	1 et 2	1 et 2	2
<b>Résultats du calcul d'E.F.</b>									
$\sigma$ (MPa)	7,23	2,74	26,1	9,29	3,78	33,4	10,5	10,5	37,0
$\omega_{\max}$ (mm)	6,74	3,34	23,6	7,63	3,96	26,3	7,63	7,62	26,3
Répartition de charge	0,50	0,10	0,90	0,50	0,11	0,89	0,50	0,50	
<b>Résultats du calcul à la main</b>									
$\sigma$ (MPa)	9,52	3,81	34,3	9,52	4,19	33,9	9,52	9,52	33,9
dif. (%)	+24,1	+28,1	+23,9	+2,42	+9,79	+1,47	-10,3	-10,3	-9,14
$\omega_{\max}$ (mm)	7,73	3,09	27,8	7,73	3,40	27,5	7,73	7,73	27,5
dif. (%)	+12,8	-8,09	+15,1	+1,29	-16,5	+4,36	+1,29	+1,42	+4,36

Tab. I-1 Comparaison des résultats de calculs



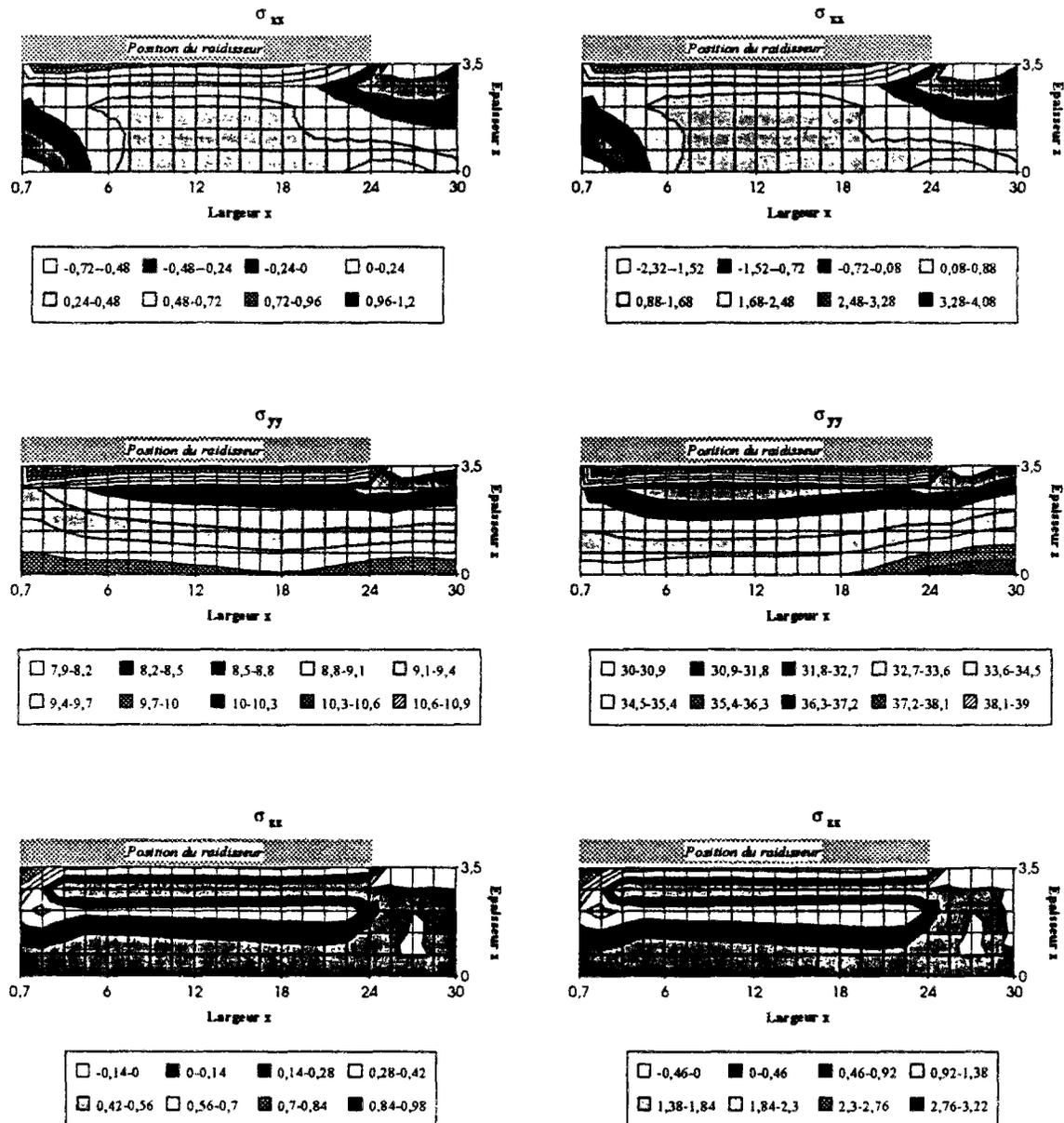
a) Flexion simple



b) Flexion + torsion

Fig. I-13 Isovaleurs de contrainte principale  $\sigma_1$  (MPa)

La figure I-13 compare les lignes d'isovaleurs de la composante maximale des contraintes principales  $\sigma_1$  entre les cas de "flexion simple" et de "flexion plus torsion". Nous trouvons que, pour les deux cas, les allures de ces lignes sont identiques et les valeurs correspondantes sont pratiquement proportionnelles.



a) Flexion simple

b) Flexion + torsion

Fig. I-14 Distribution des contraintes à une section de la semelle près du pied du cordon (MPa et cm)

Pour les deux cas de chargement, la distribution des trois contraintes normales à une section de la semelle près du pied du cordon de soudure est également montrées sous la forme de lignes d'isovaleurs. La direction  $y$  représente le sens perpendiculaire à la section. D'après la figure, nous

voyons qu'il existe une concentration de contraintes dans la semelle à cause de la présence du raidisseur. La distribution semble être pareille dans ce point local pour les deux cas parce que la forme des isolignes est identique. Au niveau des valeurs, la contrainte de la direction longitudinale de la poutre  $\sigma_{yy}$  est beaucoup plus grande que les autres.

La variation de la contrainte  $\sigma_{yy}$  en surface supérieure de la semelle est présentée dans la figure I-15 et les courbes correspondent à une série de positions différentes dans le sens transversal de la semelle. La forme géométrique du raidisseur avec la soudure est indiquée dans le même dessin. La tendance des courbes exprime bien la concentration de contraintes au pied du cordon. Nous trouvons également la coïncidence des courbes dans toute la largeur du raidisseur. Ceci nous permet de prendre seulement une largeur d'unité de la liaison dans le calcul ultérieur et réduire le problème à deux dimensions.

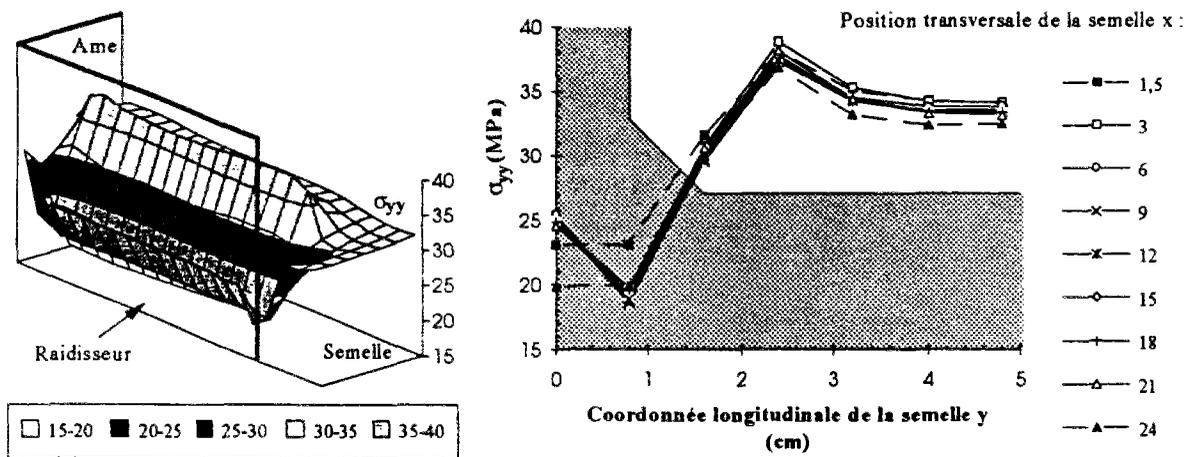


Fig. I-15 Contrainte  $\sigma_{yy}$  en surface supérieure de la semelle

#### I.4.2. Modèle de calcul bidimensionnel

D'après le résultat de l'analyse précédente, nous choisissons le modèle de calcul en déformation plane bidimensionnelle et nous supposons que la fissure au pied du cordon de soudure se propage dans le sens vertical de la semelle. En tridimensionnel, on suppose que la semelle se fissure sur toute la longueur du cordon de soudure de la liaison raidisseur - semelle. C'est un cas extrême. Pour connaître le facteur d'échelle, les épaisseurs différentes du raidisseur et de la semelle sont prises en compte séparément. La figure I-16 montre les dimensions du modèle.

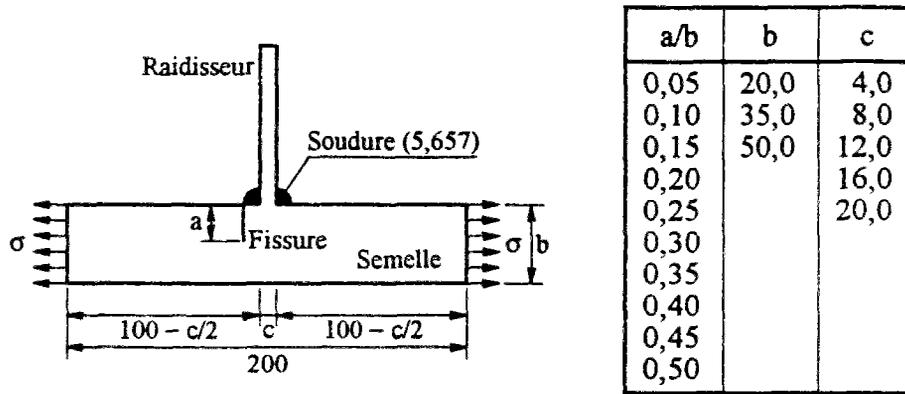


Fig. I-16 Dimensions du modèle de calcul (mm)

Pour étudier la relation entre la charge (la contrainte) et  $J$  (le facteur d'intensité de contraintes), une série d'incrément de charge entre 10 MPa et 150 MPa est appliquée sur les faces latérales de la semelle.

La figure I-17-a montre la déformation du modèle sous l'action du chargement, les extrémités de la semelle étant bloquées dans le sens vertical. La présence de la fissure se manifeste par une flexion supplémentaire. Ce phénomène est plus accentué dans le calcul tridimensionnel. Sur le pont réel, l'âme et la partie non fissurée de la semelle restreignent la flexion. Pour cela, nous faisons le calcul sous deux conditions extrêmes : flexion libre et sans flexion. Les valeurs réelles se trouveront entre les résultats des deux calculs.

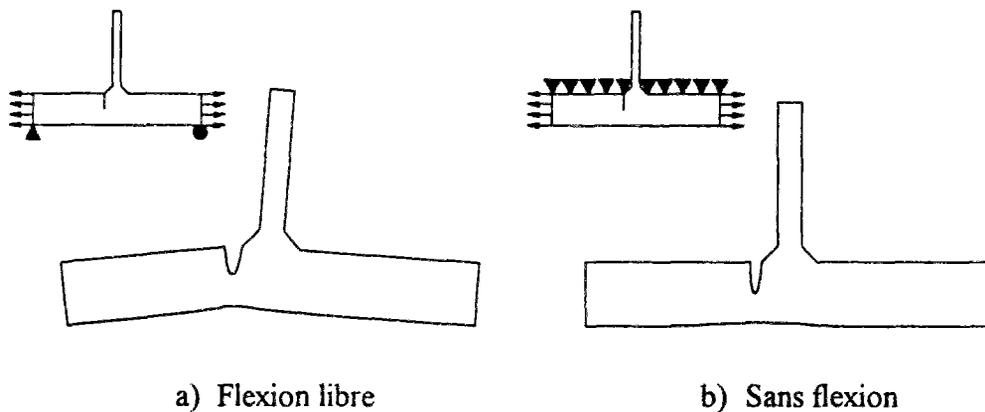


Fig. I-17 Déformations du modèle

Le calcul est fait en élasto-plasticité parfaite avec le critère de Von Mises. Le seuil plastique en cisaillement simple est fixé à 177,5 MPa.

### I.4.3. Calcul des intégrales de contour par éléments finis

#### I.4.3.1. Calcul de la densité d'énergie de déformation

Rappelons la définition de la densité d'énergie de déformation :  $w_e(\epsilon) = \int_0^\epsilon \sigma_{ij} d\epsilon_{ij}$ .

Dans le cas élastique linéaire, cette densité d'énergie  $w_e$  est égale à l'aire de la zone ombrée dans la figure I-18. Pour le problème plan, on calcule  $w_e$  par la formule :

$$w_e = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\sigma_{11} \epsilon_{11} + \sigma_{12} \epsilon_{12} + \sigma_{21} \epsilon_{21} + \sigma_{22} \epsilon_{22}) \quad (I-35)$$

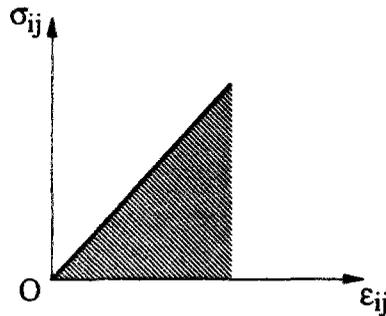


Fig. I-18 Densité d'énergie de déformation élastique

Dans le cas élasto-plastique,  $w_e$  peut être calculée au travers de la contrainte équivalente et de la déformation équivalente, définies respectivement par le deuxième invariant des tenseurs des contraintes et des déformations.

$$\sigma_e = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2)} \quad (I-36)$$

$$\epsilon_e = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\epsilon_{11} - \epsilon_{22})^2 + (\epsilon_{22} - \epsilon_{33})^2 + (\epsilon_{33} - \epsilon_{11})^2 + 6(\epsilon_{12}^2 + \epsilon_{23}^2 + \epsilon_{31}^2)} \quad (I-37)$$

On montre que  $\sigma_e = \frac{2E}{3(1+\nu)} \epsilon_e$  dans le domaine élastique.

Pour les matériaux élasto-plastiques sans écrouissage, le critère de Von Mises est écrit sous la forme,  $\sigma_e \leq \sigma_s$ , où  $\sigma_s$  est le seuil plastique. Les déformations équivalentes élastique  $\epsilon_{ee}$  et plastique  $\epsilon_{ep}$  sont déterminées par

$$\begin{cases} \epsilon_{ee} = \frac{2(1+\nu)}{3E} \sigma_e & (\sigma_e \leq \sigma_s) \\ \epsilon_{ep} = \epsilon_e - \epsilon_{ee} \end{cases} \quad (I-38)$$

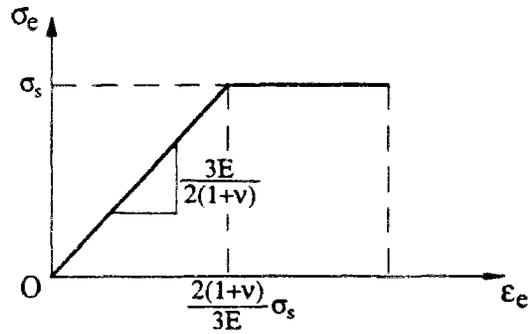


Fig. I-19 Densité d'énergie de distorsion

La densité d'énergie de déformation  $w_e$  peut se diviser en deux parties : celle correspondant à la déformation volumique  $w_v$  et celle due à la distorsion ou au cisaillement  $w_d$ . En supposant que le chargement est croissant monotone, la densité d'énergie de distorsion est donnée par :

$$w_d = \frac{1}{2} \varepsilon_{ee} \sigma_e + \varepsilon_{ep} \sigma_s = \begin{cases} \frac{3E}{4(1+\nu)} \varepsilon_e^2 & \left( \varepsilon_e \leq \frac{2(1+\nu)}{3E} \sigma_s \right) \\ \sigma_s \left( \varepsilon_e - \frac{1+\nu}{3E} \sigma_s \right) & \left( \varepsilon_e > \frac{2(1+\nu)}{3E} \sigma_s \right) \end{cases} \quad (I-39)$$

La définition de la densité d'énergie de déformation volumique est :

$$w_v = \frac{3}{2} \sigma_m \varepsilon_m = \frac{1}{6} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) \quad (I-40)$$

avec  $\sigma_m$  la moyenne du tenseur des contraintes normales,  $\varepsilon_m$  la moyenne du tenseur des déformations normales.

Les formules  $w_e = w_v + w_d$  et (I-35) sont identiques pour le problème plan dans le domaine élastique linéaire.

D'après l'hypothèse des petites déformations, les tenseurs de déformation sont déterminés par  $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i})$ .

#### 1.4.3.2. Méthode d'intégration

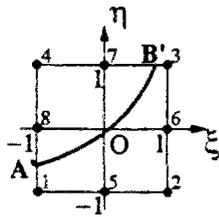
Après le calcul en éléments finis, les champs de contraintes et de déplacements sont représentés par leurs valeurs aux noeuds et les fonctions d'interpolation de différents types d'éléments. Par exemple, pour un élément quadrilatère isoparamétrique à 8 noeuds, la fonction d'interpolation est donnée par la relation suivante :

$$N_i = \frac{1}{4} \left( (1 + \xi \xi_i)(1 + \eta \eta_i) - (1 - \xi^2)(1 + \eta \eta_i) - (1 - \eta^2)(1 + \xi \xi_i) \right) \xi_i^2 \eta_i^2 \\ + \frac{1}{2} \left( (1 - \xi^2)(1 + \eta \eta_i)(1 - \xi_i^2) \eta_i^2 \right) + \frac{1}{2} \left( (1 - \eta^2)(1 + \xi \xi_i)(1 - \eta_i^2) \xi_i^2 \right)$$

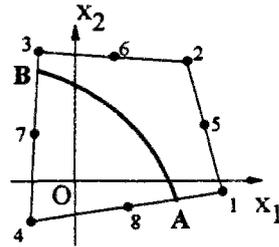
avec

$$\begin{aligned} x_1 &= \sum_{i=1}^8 N_i x_{1i} & u_1 &= \sum_{i=1}^8 N_i u_{1i} \\ x_2 &= \sum_{i=1}^8 N_i x_{2i} & u_2 &= \sum_{i=1}^8 N_i u_{2i} \end{aligned} \quad (I-41)$$

où  $\xi_i$  et  $\eta_i$  sont les coordonnées des noeuds d'élément de référence,  $x_{1i}$  et  $x_{2i}$  les coordonnées réelles, et  $u_{1i}$  et  $u_{2i}$  les déplacements au noeuds.



Élément de référence



Élément réel

Fig. I-20 Élément quadrilatère à 8 noeuds et segment d'intégration

Le contour d'intégration, se croisant avec les éléments, est décomposé en segments. Le résultat de l'intégrale de contour est égal à la somme de ceux de chaque segment. Au niveau d'un segment, les intégrales de contour peuvent être généralisées par :

$$J_{\text{seg}} = \int_A^B P_{\mathbf{x}}(x_1, x_2) dx_1 + Q_{\mathbf{x}}(x_1, x_2) dx_2 \quad (I-42)$$

En introduisant la fonction d'interpolation (I-41), l'intégrale précédente est d'abord réécrite dans l'espace de référence. On peut ensuite réduire cette dernière à une intégrale unidimensionnelle dans l'intervalle  $[-1, 1]$ . La matrice jacobienne de deux étapes de transformation s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1}{d\lambda} \\ \frac{dx_2}{d\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi} & \frac{\partial x_1}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x_2}{\partial \xi} & \frac{\partial x_2}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{d\xi}{d\lambda} \\ \frac{d\eta}{d\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_i \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_{1i} & \sum_i \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_{1i} \\ \sum_i \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_{2i} & \sum_i \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_{2i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\xi_{B'} - \xi_{A'}}{2} \\ \frac{\eta_{B'} - \eta_{A'}}{2} \end{bmatrix} \quad (I-43)$$

L'intégrale unidimensionnelle dans l'intervalle  $[-1, 1]$  est finalement simulée en utilisant les points d'intégration gaussienne.

$$J_{\text{seg}} = \int_{-1}^1 \left( P_{\lambda}(\lambda) \frac{dx_1}{d\lambda} + Q_{\lambda}(\lambda) \frac{dx_2}{d\lambda} \right) d\lambda \equiv \sum_j \omega_j \left( P_{\lambda}(\lambda) \frac{dx_1}{d\lambda} + Q_{\lambda}(\lambda) \frac{dx_2}{d\lambda} \right)_{\lambda_j} \quad (\text{I-44})$$

où  $\omega_j$  est le coefficient de pondération.

#### 1.4.3.3. Présentation du programme informatique

Un programme, nommé "INTEJ", est fait dans le but de calculer les intégrales  $J_1$  et  $J_2$  pour un problème plan en déformation plane, et de déterminer les facteurs KI et KII (qui sont convenables à condition que la zone plastique au fond de la fissure soit relativement petite par rapport à la pièce calculée) selon la formule (I-16).

La mise en oeuvre de "INTEJ" s'effectue de deux manières : par le listing des résultats de "CESAR-LCPC" ou par certains fichiers contenant séparément les coordonnées des noeuds, les numérotations d'éléments, les déplacements aux noeuds et les contraintes aux noeuds. En suivant le dialogue de "INTEJ", un fichier de données est simultanément préparé pour le relancer. Il indique la marche à suivre, les noms des fichiers utilisés, les modules du contour et les données complémentaires etc.

Dans "INTEJ", quatre formes de contour peuvent être choisies : un cercle en fond de fissure, des droites en fond de fissure, un cercle éventuel sans fissure et des droites éventuelles sans fissure. Pour les formes de contour ne contenant pas la fissure, la valeur  $J_k$  est nulle, ce qui permet une vérification.

"INTEJ" permet la visualisation des résultats essentiels sous forme de dessin sur une imprimante laser "KYOCERA F-2200", et produit les résultats complets dans un fichier.

### I.4.4. Vérification du programme

#### 1.4.4.1. Nullité des intégrales de contour

Pour une structure quelconque, la valeur de  $J$  doit être égale à zéro si le contour d'intégration ne contient pas la fissure. Nous donnons comme exemple une barre en traction simple avec une fissure perpendiculaire à l'axe de la barre. Le résultat du calcul de  $J$  suivant des contours différents est présenté dans la figure I-21. Les valeurs des contours 1 et 2, qui ne contiennent pas la fissure, sont 100 fois plus petites que celles des autres contours. On peut considérer que ces petites valeurs sont quasiment nulles.

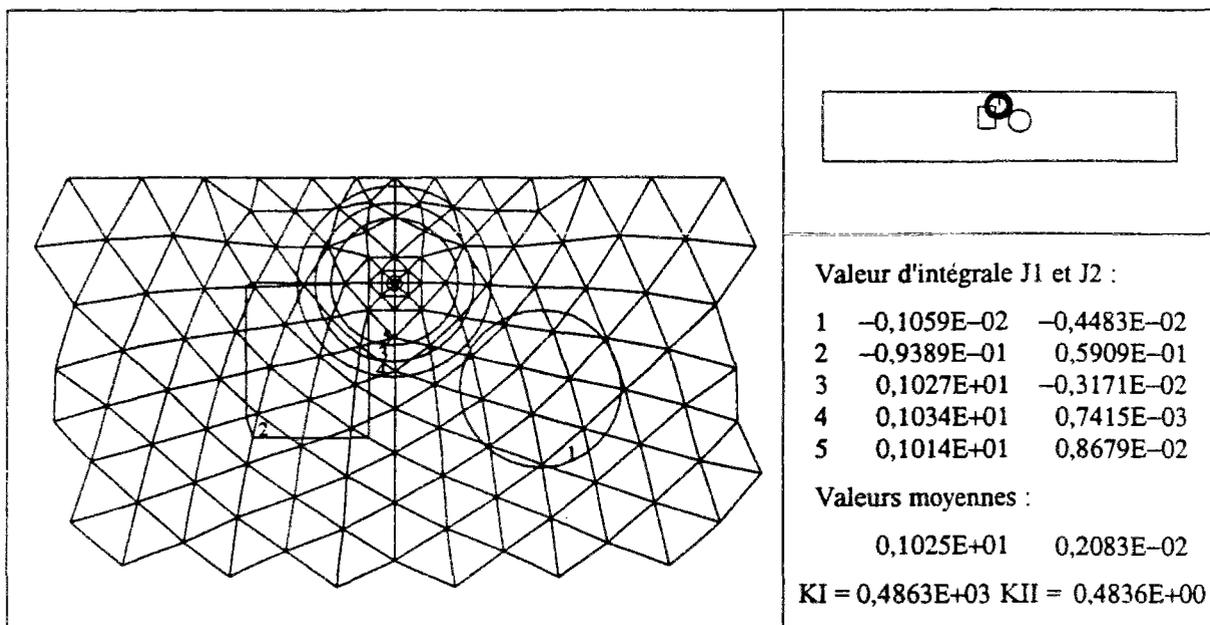


Fig. I-21 Valeurs de J pour des contours différents

#### 1.4.4.2. Comparaison avec les valeurs connues

Pour vérifier la validité de notre méthode, nous appliquons notre calcul à des éprouvettes dont on connaît le K. Il existe, en effet, des formulaires pour les géométries et les chargements courants (Tada, Paris et Irwin, 1973). Le tableau I-2 présente les résultats.

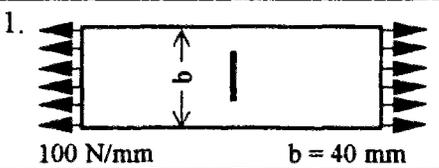
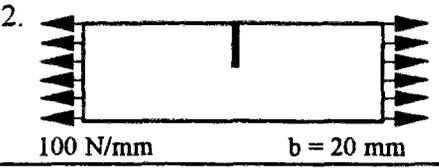
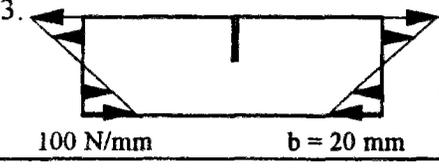
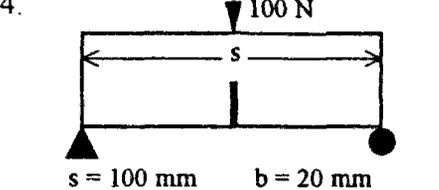
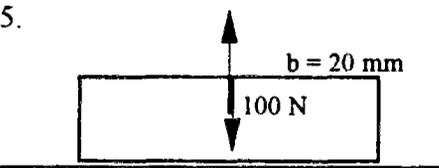
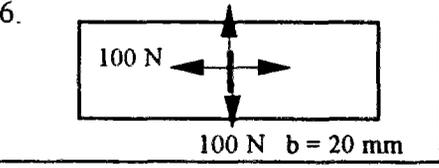
D'une façon générale, les différences observées peuvent avoir diverses origines :

- Une zone plastique trop grande au fond de fissure. Dans ce cas les formules qui permettent de calculer K à partir de J ne s'appliquent plus tout à fait;
- Un contour de J trop proche de la zone de chargement;
- La finesse insuffisante du maillage;
- L'erreur du calcul.

Nous remarquons que les différences entre les valeurs de K déduites de la littérature et celles obtenues par éléments finis sont très faibles. Elles sont presque toutes inférieures à 3 %, avec un cas 5% et un autre 8%. L'écart dans ce dernier cas résulte de la présence d'une zone plastique trop grande sous le chargement de 100 MPa, qui ne peut plus être assimilée à une plasticité confinée. En effet, lorsque le calcul est effectué avec un chargement de 50 MPa, la différence n'est plus que de 1,9% donc dans la fourchette de 3% citée précédemment.

Notons que pour les éprouvettes de type 4, 5 et 6, dont le contour est susceptible de contenir ou de passer sur la zone de chargement, non seulement le contour choisi pour le calcul ne contient pas le point de chargement, mais il est situé loin de ce dernier.

Unité de K :  $\sqrt{\text{mm}} \text{ N} / \text{mm}^2$

Type d'éprouvette	a b	KI			KII		
		V. C.	E. F.	Dif. (%)	V. C.	E. F.	Dif. (%)
 100 N/mm      b = 40 mm	.05	177.51	173.20	2.43			
	.20	363.18	363.01	0.05			
	.45	608.20	612.64	-0.73			
 100 N/mm      b = 20 mm	.05	200.70	196.85	1.92			
	.20	485.90	484.96	0.19			
	.45	1286.5	1389.2	-7.98			
 100 N/mm      b = 20 mm	.05	189.44	185.84	1.90			
	.20	373.26	373.36	-0.03			
	.45	722.36	734.67	-1.70			
 s = 100 mm      b = 20 mm	.05	67.877	66.496	2.03			
	.20	127.90	131.27	-2.63			
	.45	253.24	256.60	-1.33			
	.70	675.55	670.39	0.76			
 b = 20 mm 100 N	.20				74.879	76.471	-2.13
	.45				56.191	53.429	4.92
 100 N      b = 20 mm	.20	29.552	29.674	-0.41	29.552	29.674	-0.41
	.45	24.197	23.002	4.94	24.197	23.002	4.94

Tab. I-2 Comparaison entre les résultats E.F. et les valeurs connues

#### 1.4.4.3. Approximation par la méthode de la fissure profonde

Sur la base de la méthode de la complaisance, Rice (1968) propose une méthode du calcul simplifié de J sur une éprouvette de flexion telle que la longueur de fissure représente au moins 60% de l'épaisseur de l'éprouvette. On peut enregistrer la courbe P-d\* par la mesure ou par un calcul en éléments finis, où d\* est le déplacement total diminué du déplacement qui aurait été obtenu avec la même éprouvette non fissurée sous la même force P. L'aire sous cette courbe est égale à l'énergie U\*. J est alors calculée par la formule :

$$J = \frac{2U^*}{t b} = \frac{2U^*}{(b-a) b} \quad (\text{I-45})$$

où t la longueur non fissuré de l'éprouvette, b l'épaisseur de l'éprouvette.

La courbe P-d\* se déduit des 18 points de calcul dans la figure I-22. Nous la simulons par ajustement d'un polynôme du troisième degré.

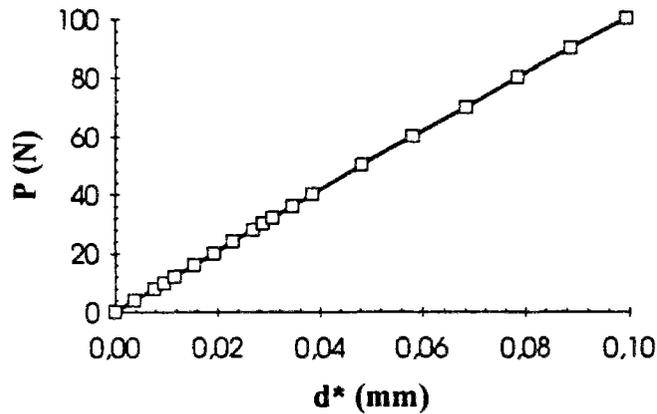


Fig. I-22 Courbe P-d\*

$$P(d^*) = -0,02493 + 1046 d^* - 11,89 d^{*2} - 3918 d^{*3}$$

On en déduit  $J = 1,688 \text{ N/mm}$  et en utilisant la formule (I-16):  $KI = 624,13 \sqrt{\text{mm}} \text{ N/mm}^2$ . La différence entre ce résultat et la valeur du calcul par éléments finis représente 7,4% (Tab. I-2 : Type 4,  $a/b=0,7$ ,  $KI = 670,39 \sqrt{\text{mm}} \text{ N/mm}^2$ ).

Notons que cette méthode n'est qu'approchée et vise à vérifier sommairement les calculs, le résultat est donc satisfaisant.

#### I.4.5. Résultats du calcul du facteur K du pont réel

Les courbes de la figure I-23 présentent la variation de J en fonction du carré du chargement pour a/b de 0,05 à 0,50. En théorie le facteur K est proportionnel à la contrainte quand on fixe les autres paramètres (par exemple la longueur a de la fissure), et selon les formules (I-16) et (I-17), il existe une relation linéaire entre  $J_k$  et le carré du chargement (contrainte) dans le cas élastique linéaire. Nous trouvons que, dans tous les dessins de la figure, les courbes restent des droites jusqu'à 100 MPa (le carré est  $10^4 \text{ MPa}^2$ ). Nous pouvons donc dire que notre modèle est élastique linéaire lorsque la charge est inférieure à 100 MPa, bien qu'il existe une petite zone plastique au fond de fissure et quel que soit a/b. Cette valeur est bien supérieure à 100 MPa quand a/b est au plus égal à 0,3.

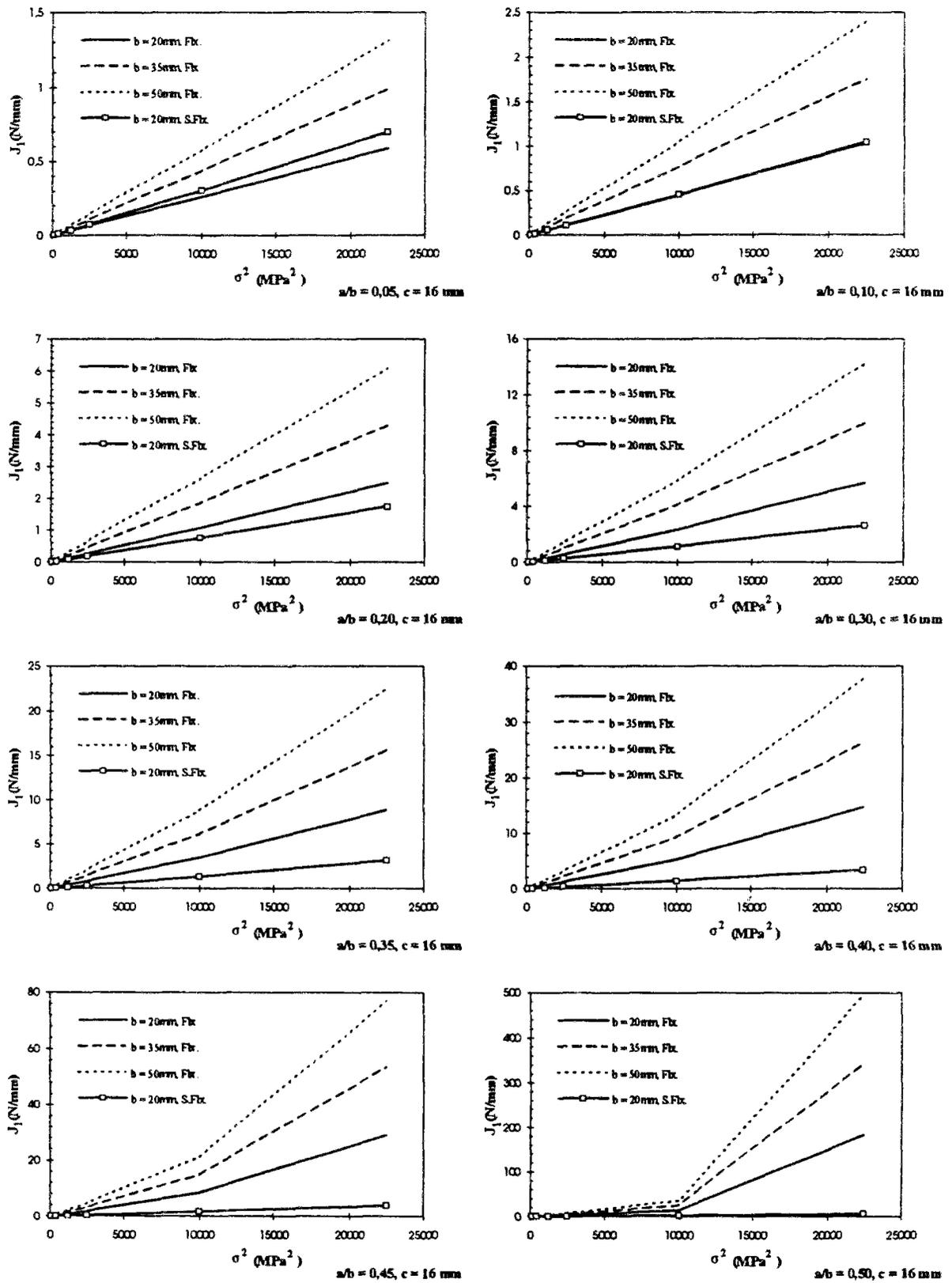


Fig. I-23 Intégrale  $J_1$  en fonction du carré du chargement

Dans la partie linéaire, les calculs de KI et de KII sont alors convenables. La figure I-24 montre séparément les variations de KI et de KII pour différentes épaisseurs de la semelle en fonction de a/b avec et sans flexion, 10 MPa du chargement et c = 16 mm. On observe que KII est négligeable par rapport à KI.

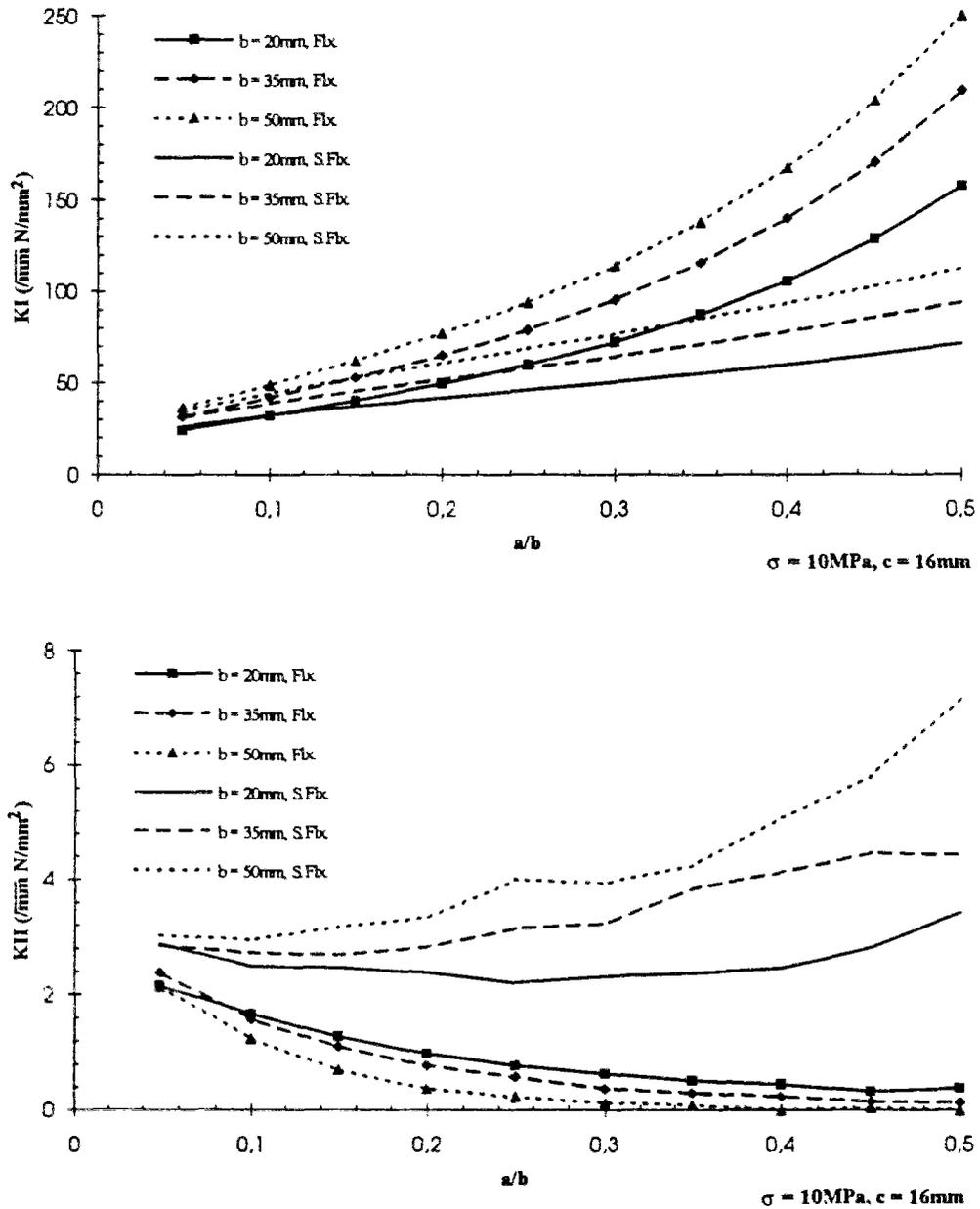


Fig. I-24 Variation des KI et KII en fonction de a/b

D'après le calcul pour différents c avec b = 35 mm et a/b = 0,3 et 0,5 respectivement, les courbes KI-c sont représentées figure I-25. L'horizontalité de ces courbes montre que KI reste constant lorsque c varie. Si KI est considéré comme une fonction des variables  $\sigma$ , a, a/b et c a une influence négligeable.

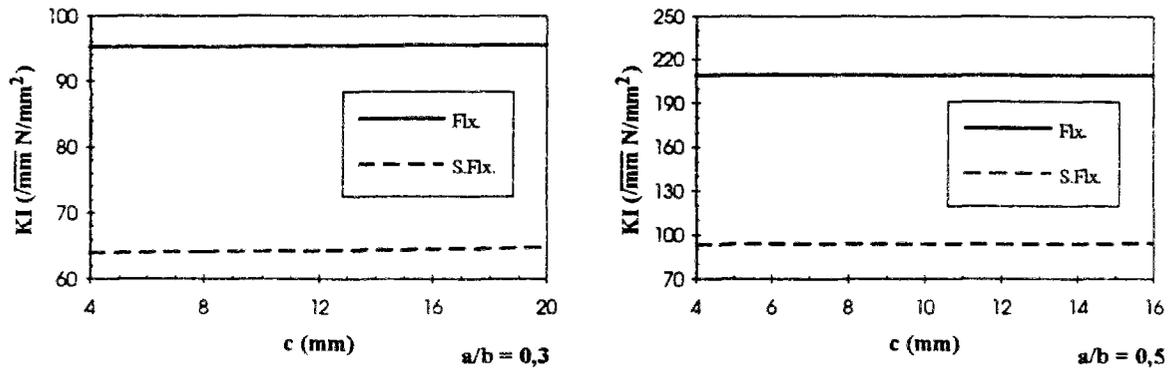


Fig. I-25 Variation de KI en fonction de c

Dans un but de déterminer KI comme fonction de a et b, nous supposons d'abord que KI est de la forme :

$$KI(\sigma, a, b) = \sqrt{\pi a} \sigma F(a/b) \quad (I-46)$$

où la courbe  $F(a/b)$  représente le facteur de forme. Nous divisons donc toutes les valeurs calculées de KI, dans la figure I-24, par  $\sqrt{\pi a} \sigma$ . Les résultats sont représentés pour différentes valeurs de b dans la figure I-26. Ces résultats sont assez voisins quel que soit b. La fonction  $F(a/b)$  est alors construite par ajustement d'un polynôme du quatrième degré, dans deux cas :

$$\begin{aligned} \text{Flexion libre} \quad F\left(\frac{a}{b}\right) &= 1,5215 - 5,2383\left(\frac{a}{b}\right) + 33,365\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 66,032\left(\frac{a}{b}\right)^3 + 61,231\left(\frac{a}{b}\right)^4 \\ \text{Sans flexion} \quad F\left(\frac{a}{b}\right) &= 1,5917 - 6,4179\left(\frac{a}{b}\right) + 30,177\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 59,765\left(\frac{a}{b}\right)^3 + 44,966\left(\frac{a}{b}\right)^4 \end{aligned} \quad (I-47)$$

avec a la longueur de fissure, b l'épaisseur de la semelle et  $a/b \leq 0,5$ .

Nous observons que les valeurs calculées par éléments finis ne s'éloignent jamais de plus de 0,3% de la fonction ajustée.

Nous comparons à la figure I-27 ces courbes avec les facteurs de forme connus (Tada, Paris et Irwin, 1973). En flexion, les deux courbes sont quasiment identiques lorsque  $a/b > 0,2$ . En revanche, sans flexion, il existe toujours un décalage entre les deux. On peut conclure à une influence du raidisseur avec soudure bien que la variation de KI ne dépende pas de c. Cette influence est plus grande sans flexion qu'avec flexion libre, et devient moins importante quand a/b croît.

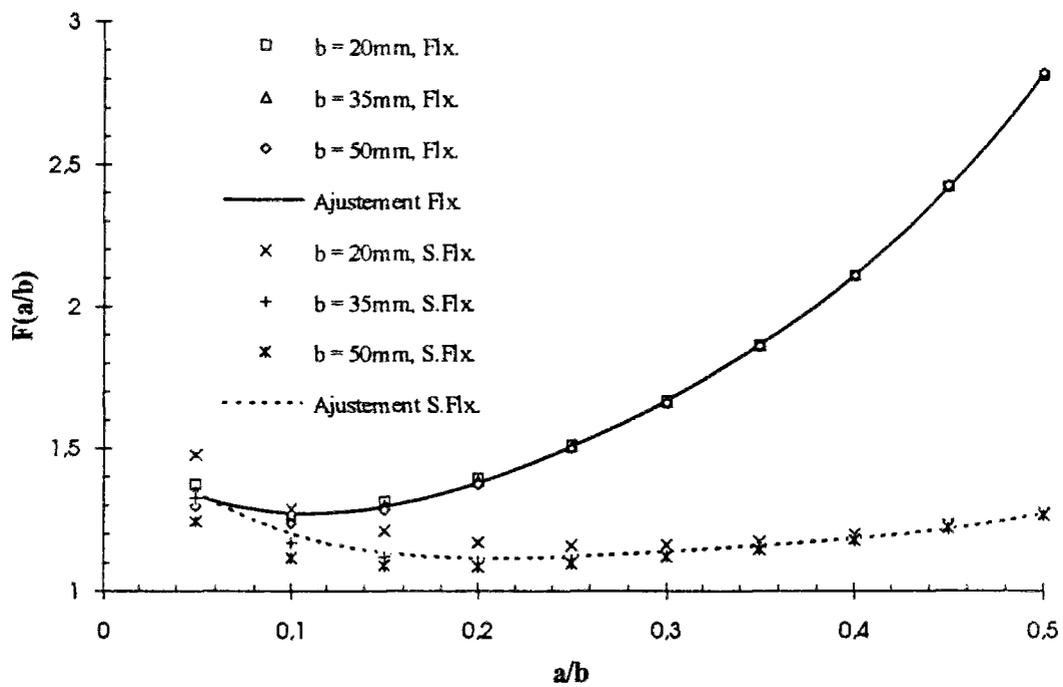


Fig. I-26 Ajustement du facteur de forme sur les valeurs calculées

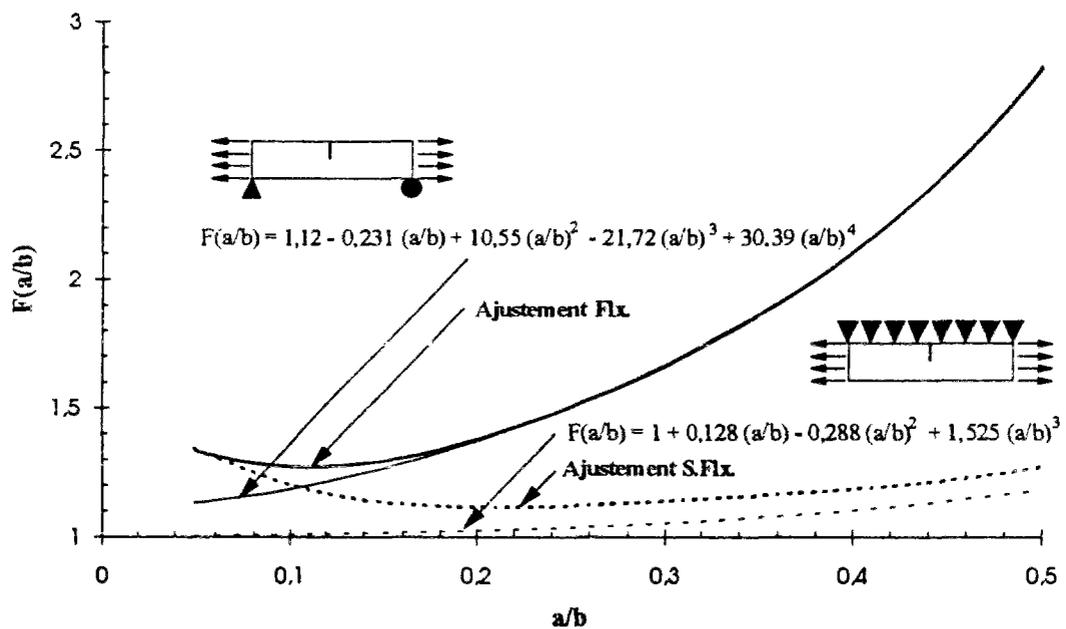


Fig. I-27 Comparaison des facteurs de forme calculées avec ceux des modèles courants

## 1.5. CONCLUSION

L'objet de cette étude est de déterminer le facteur d'intensité de contraintes de la liaison raidisseur vertical - semelle inférieure d'une poutre principale de pont mixte. Par la méthode de l'intégrale de contour, la taille des mailles au fond de la fissure dans les calculs peut être relativement grand par rapport à d'autres méthodes.

Nous avons montré que les résultats obtenus sont tout à fait comparables à ceux des modèles courants.

En modélisant notre liaison, nous avons montré que la fonction polynomiale du facteur de forme de KI était invariante vis-à-vis des dimensions de la semelle et du raidisseur, dans deux cas extrêmes (avec et sans flexion). KII est négligeable par rapport à KI.

L'utilisation des polynômes ajustés comme la fonction de forme dans le programme "PROPAG" (Bignonnet, Carracilli et Jacob, 1991) de calcul de la propagation de fissure nous donnera la durée de vie correspondante.

Quelques précautions sont nécessaires :

- 1) Si J peut caractériser la singularité des champs de contraintes et de déformations en fond de fissure dans le domaine élasto-plastique, il n'en est pas de même pour K qui est calculé à partir de J dans le domaine élastique linéaire.
- 2) Le calcul de J nécessite un assez grand contour éloigné de la zone de chargement qui doit être croissant monotone et sans déformations initiales dans la structure.
- 3) Pour s'assurer que la zone plastique reste confinée (condition nécessaire pour considérer le domaine élastique linéaire), il faut connaître le chargement maximum acceptable.



## **CHAPITRE II**

### **ETUDE DES CHAMPS DE CONTRAINTES POUR DES ESSAIS DE FATIGUE**

Les essais de fatigue permettent de tester le comportement en fatigue d'un assemblage soudé de structures métalliques et d'établir la courbe de la résistance en fatigue (courbe de Wöhler). Les résultats expérimentaux peuvent servir à la classification de l'assemblage étudié dans le règlement et à la valorisation des recherches théoriques de laboratoire dans le domaine de la mécanique de la rupture.

La soudure joue un rôle important sur la résistance en fatigue des assemblages. Les essais consistent également à étudier l'amélioration de la tenue en fatigue de structures, due aux différentes procédures de soudage.

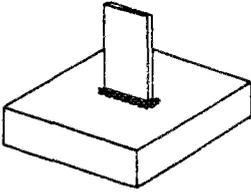
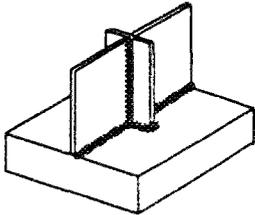
Nous présenterons, dans ce chapitre, une étude par éléments finis afin de définir la forme d'éprouvettes, pouvant représenter la liaison raidisseur vertical - semelle inférieure d'une poutre métallique de ponts réels. Cette étude doit être validée par les essais effectués au LCPC sur des éprouvettes à l'échelle 1, réalisées dans les conditions de soudage industrielles d'un constructeur de ponts.

#### **II.1. ANALYSE MECANIQUE D'EPROUVETTES EN ELEMENTS FINIS**

Pour le dimensionnement des éprouvettes d'essais, nous analyserons, dans cette étude, la concentration de contraintes au pied du cordon de soudure sur les modèles d'éprouvette proposés ; nous comparerons cette valeur de concentration de contraintes avec celle obtenue au niveau de la liaison raidisseur - semelle d'un pont réel (Pont de Jargeau). Diverses dimensions des modèles seront prises en compte pour étudier l'influence du raidisseur et de l'âme sur les essais de fatigue.

##### **II.1.1. Modèles et tailles d'éprouvette dans les calculs**

Deux modèles d'éprouvette ont été proposés : l'un se caractérise par une semelle de taille fixée et des raidisseurs de tailles différentes, l'autre par la présence ou non de l'âme. Le tableau ci-après contient les détails géométriques des modèles.

Modèle	N°	Semelle			Raidi sseur		Soudure	Ame
		Long.	Larg.	Epai.	Larg.	Epai.		Epai.
	1	900	800	100	300	16	5,657	Sans
	2	900	800	100	150	16	5,657	Sans
	3	900	800	100	150	8	5,657	Sans
	4	900	800	100	300	16	5,657	16

Tab. II-1 Tailles des éprouvettes du calcul (mm)

### II.1.2. Hypothèses retenues

Nous faisons le calcul en élasticité linéaire en supposant que le matériau de la soudure a les mêmes propriétés que l'acier, homogène isotrope. Nous prenons 210000 MPa pour le module d'Young, 0,3 pour le coefficient de Poisson et 7800 kg/m<sup>3</sup> pour la masse volumique.

D'après les résultats au niveau du champ de contraintes déduits du calcul par éléments finis du Pont de Jargeau, nous n'appliquons que des charges réparties : l'une de traction de 34,0 MPa est disposée sur la semelle (et sur l'âme si elle existe) dans le sens longitudinal, et les autres de compression de 2,5 MPa et de 3,5 MPa sont placées respectivement sur le côté supérieur du raidisseur et de l'âme. Les coins de la semelle sont sur quatre appuis simples.

Le fait que la pression sur le raidisseur ou l'âme soit beaucoup plus petite que la traction sur la semelle nous donne la possibilité de négliger ces pressions pour faciliter le chargement d'essais. Un calcul complémentaire est fait pour évaluer la différence entre les champs de contraintes dans l'éprouvette sans compression et avec compression.

Le calcul est réalisé par le logiciel CESAR-LCPC et trois sortes d'éléments sont utilisés : hexaèdres à 8 noeuds, pentaèdres à 6 noeuds et tétraèdres à 4 noeuds. Nous adaptons des mailles plus fines dans la zone du cordon de soudure où la concentration de contraintes est la plus forte. En raison des symétries de la géométrie et du chargement, il suffit de mailler un quart d'éprouvette, ce qui réduit ces calculs.

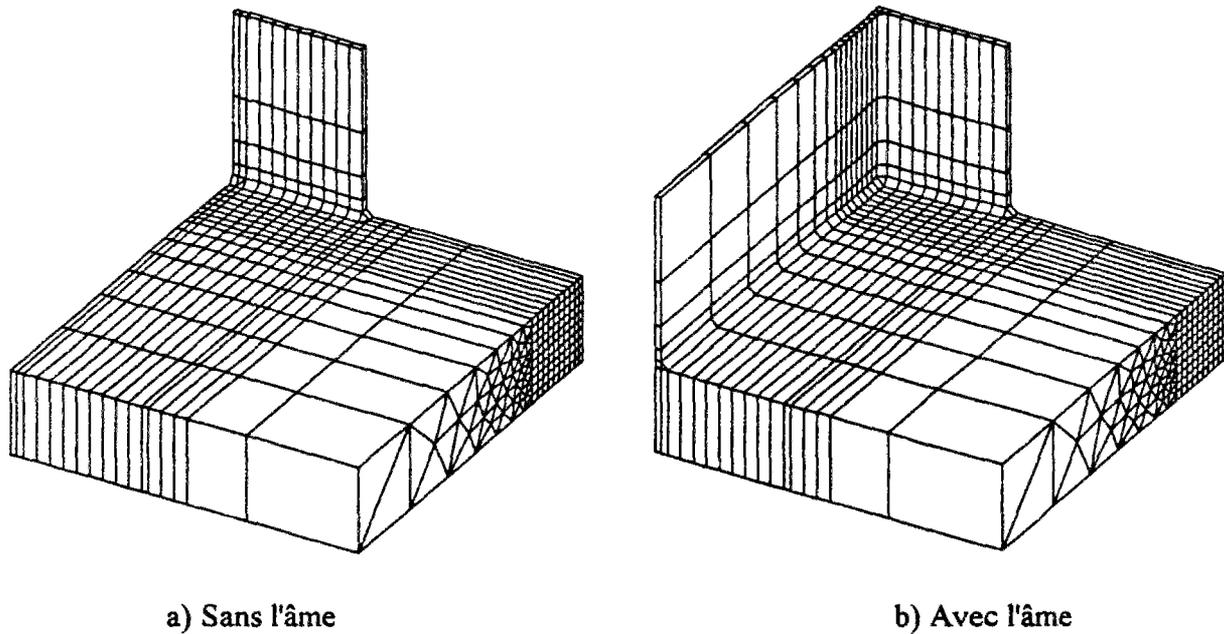


Fig. II-1 Maillages

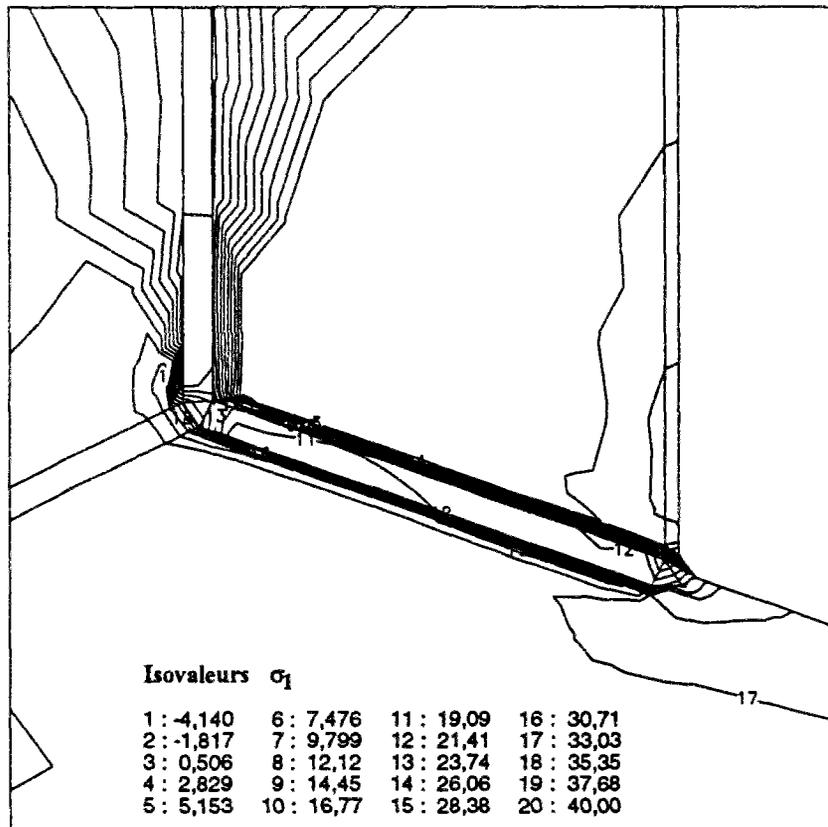
### II.1.3. Analyse des résultats des calculs par éléments finis

Dans l'essai de fatigue, la contrainte de traction joue un rôle très important. Les résultats ci-après concernent essentiellement le champ de contraintes dans la zone critique. Dans un premier temps, nous discuterons les résultats issus des modèles sans la présence de l'âme.

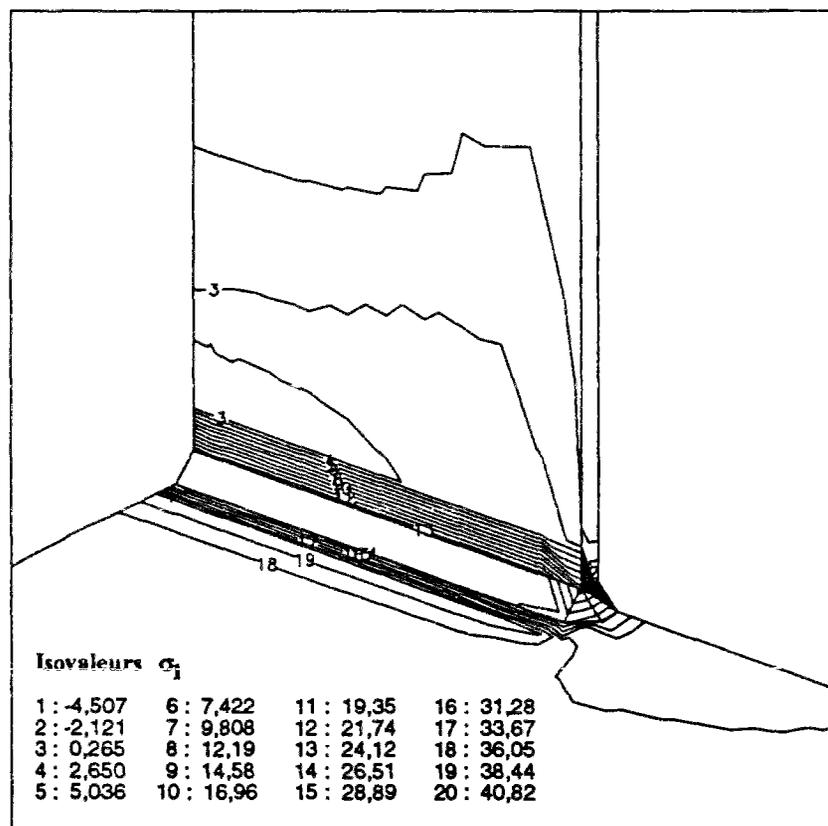
#### II.1.3.1. Modèles sans l'âme

La figure II-2 présente séparément les lignes d'isovaleurs de la première contrainte principale  $\sigma_1$  du pont réel et celles de l'éprouvette dans la zone de la liaison raidisseur-semelle. En comparant les deux cas, nous pouvons dire que les allures des lignes d'isovaleurs sont pratiquement voisines avec des intensités comparables (la différence est inférieure à 3,5%). Le parallélisme de ces lignes démontre que la contrainte  $\sigma_1$  ne varie pas dans le sens de la soudure.

La contrainte normale dans la direction longitudinale de la semelle  $\sigma_{yy}$  est au moins dix fois plus grande que celle dans les deux autres directions, de même pour les cisaillements. La figure II-3 montre la forme générale des variations de cette contrainte en surface supérieure de la semelle dans les cas du pont et de l'éprouvette. Nous remarquons l'invariance de la contrainte sur toute la longueur du raidisseur.



a) Pont réel



b) Eprouvette

Fig. II-2 Isovaleurs de la contrainte principale  $\sigma_1$  (MPa)

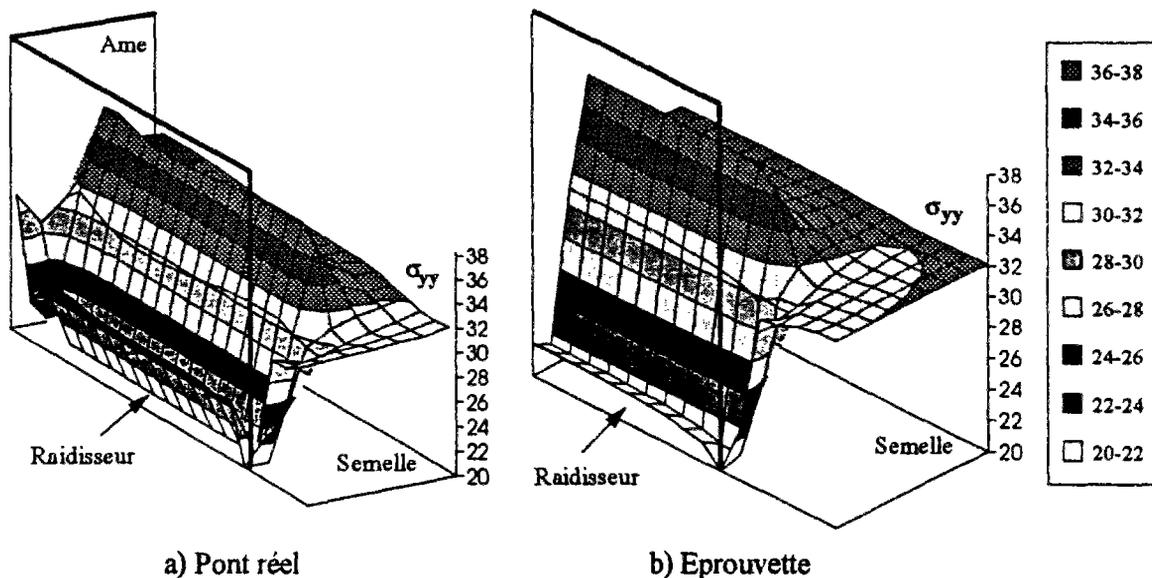


Fig. II-3 Distribution de la contrainte  $\sigma_{yy}$  en surface supérieure de la semelle (MPa)

En raison de cette invariance, la variation de  $\sigma_{yy}$ , dans la semelle, au droit du raidisseur, peut être représentée par une simple courbe (moyenne) dans le sens longitudinal de la semelle. A l'aide de ce type de courbes, nous observons mieux les concentrations de contrainte au pied du cordon de soudure raidisseur - semelle pour les cas différents. L'influence du raidisseur n'est sensible que jusqu'à 70 mm du cordon de soudure. En comparant les courbes ci-dessous, avec celles du calcul sans compression sur le raidisseur (courbe "E1 Sans Pression"), nous concluons que cette compression, quelle que soit sa valeur, n'influe pas sur la concentration de contrainte.

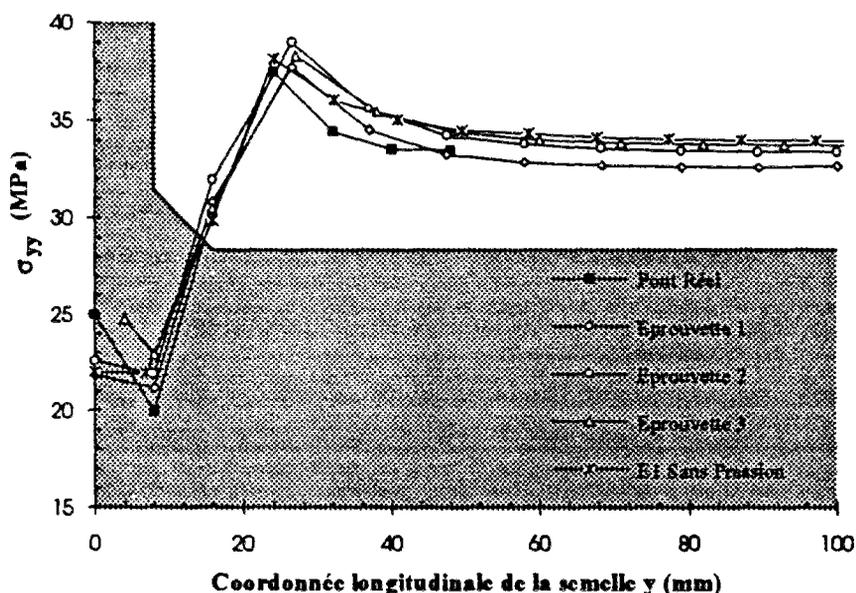


Fig. II-4 Comparaison du champ de contrainte  $\sigma_{yy}$

Pour évaluer l'influence des raidisseurs dans l'épaisseur de la semelle, nous choisissons la section dans laquelle se trouve le maximum de la contrainte normale  $\sigma_{yy}$ . A cause de l'invariance de la contrainte  $\sigma_{yy}$  dans la partie en présence du raidisseur, nous présentons également la variation de cette contrainte par une seule courbe pour toute la partie. Les courbes, correspondant aux trois éprouvettes et au pont réel, sont incluses dans la figure suivante, où les axes verticaux représentent les profondeurs de la semelle : 100 mm pour les éprouvettes et 35 mm pour le pont. L'influence du raidisseur n'est sensible que dans la première maille, c'est-à-dire que la zone de concentration de contraintes est très confinée près de la surface supérieure de la semelle. D'ailleurs, le phénomène de flexion augmente avec la compression sur le côté supérieur du raidisseur.

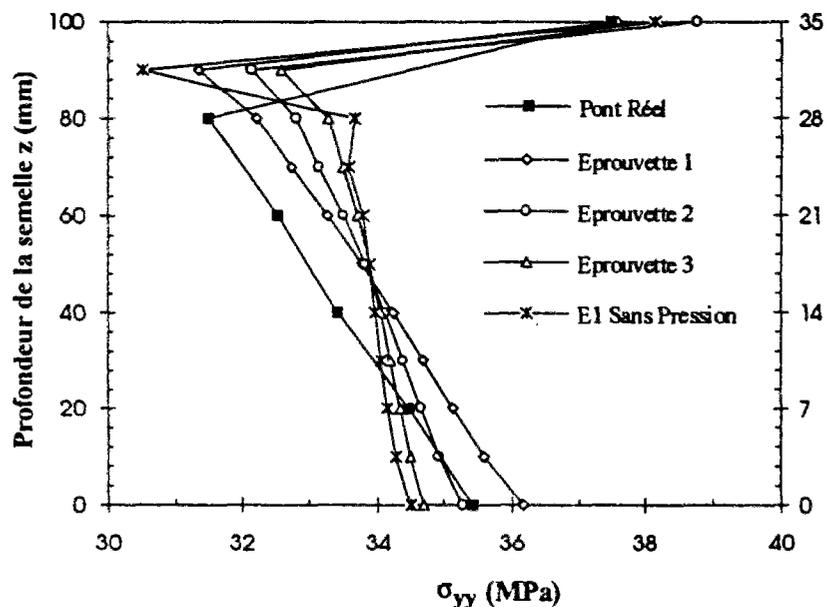


Fig. II-5 Variation de la contrainte  $\sigma_{yy}$  dans la profondeur de la semelle

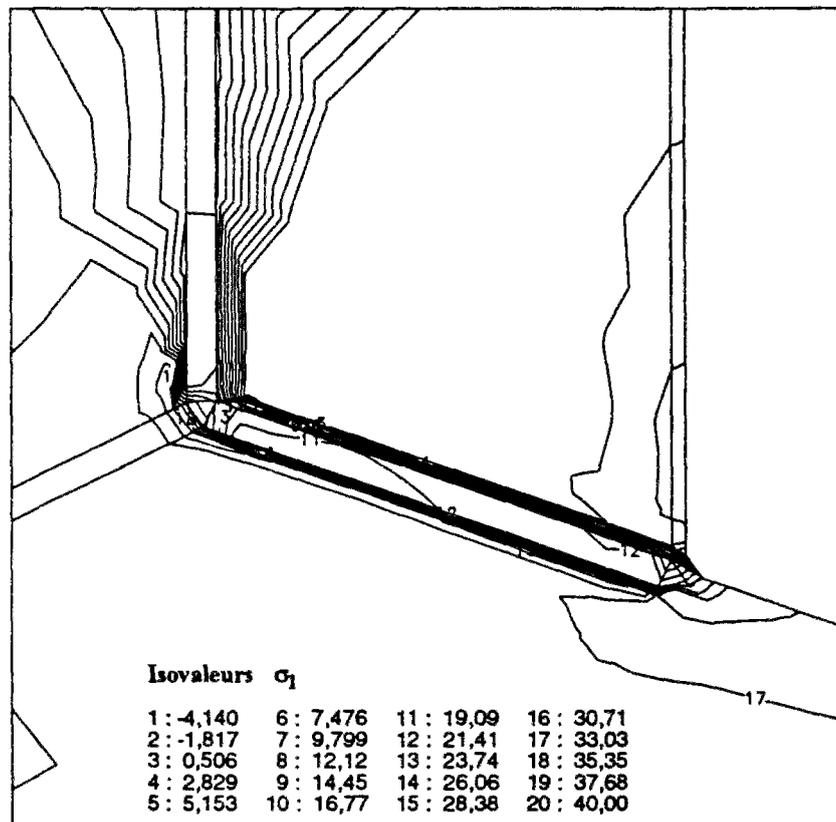
Après avoir fait les calculs concernant ces trois modèles d'éprouvettes dépourvues de l'âme, qui représentent bien le champ de contraintes du pont réel, nous devons faire un calcul supplémentaire permettant d'étudier l'effet de l'âme.

### II.1.3.2. Modèles avec âme

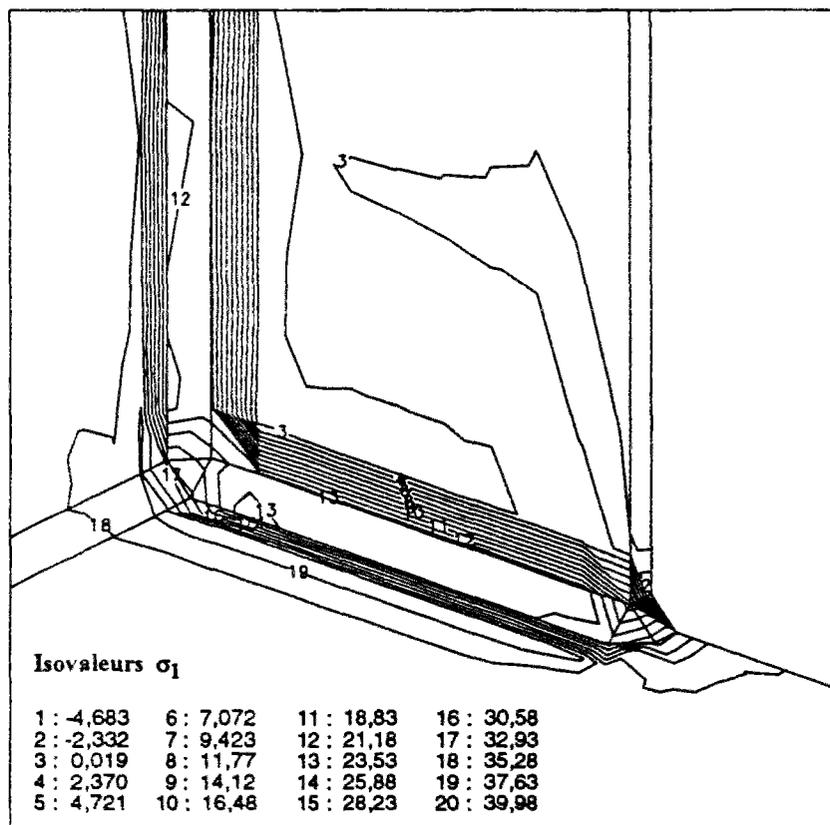
La comparaison des valeurs, au pied du cordon de soudure raidisseur - semelle, de la première contrainte principale  $\sigma_1$ , montre de nouveau les analogies d'allure et d'intensité entre le pont et l'éprouvette. La concentration des contraintes sur les âmes est observée aussi bien dans le cas de l'éprouvette que du pont. Du fait que la distribution des contraintes dites nominales dans l'âme est différente entre les deux : homogène pour l'éprouvette et d'une forme

triangulaire pour le pont, cette concentration reste constante sur toute la longueur de la soudure raidisseur - âme dans l'éprouvette, et par contre, elle décroît en s'éloignant de la semelle dans le pont. Cependant, l'âme pourra avoir autant de chance de fissurer que la semelle en essais de fatigue. Ce n'est pas le cas en pratique.

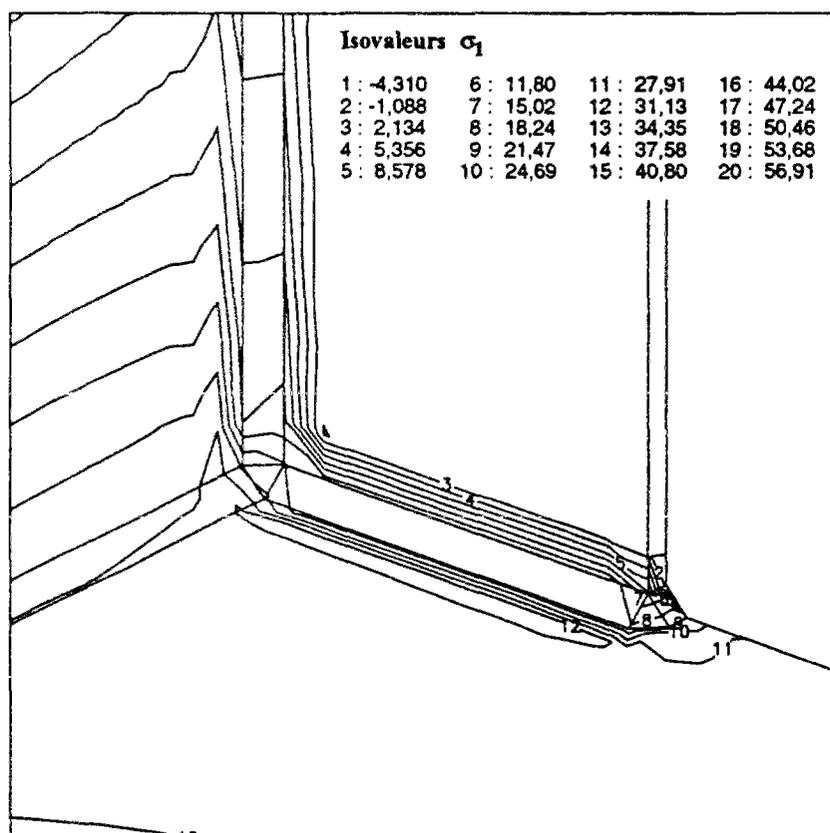
Si nous éliminons la charge de traction sur le bord vertical de l'âme, le calcul nous montre que la concentration de contraintes diminue aussi vite dans la semelle que dans l'âme. Le maximum de la contrainte  $\sigma_1$  cette fois n'est plus encore à la surface supérieure de la semelle, il se trouve à la surface inférieure à cause de la flexion produite par les compressions verticales. L'explication est que l'absence de traction sur le bord de l'âme entraîne une partie de la charge de la semelle vers l'âme, et réduit alors la concentration de contraintes dans la partie supérieure de la semelle près du cordon de soudure.



a) Pont réel



b) Eprouvette avec la traction sur le bord



c) Eprouvette sans traction sur le bord

Fig. II-6 Isovaleurs de la contrainte principale  $\sigma_1$  (MPa)

#### II.1.4. Conclusions et décisions

Le modèle sans la présence de l'âme dans l'éprouvette représente bien la liaison raidisseur - semelle du pont de Jargeau du point de vue des contraintes en traction dans la zone de concentration. La variation des contraintes locales due à la compression est extrêmement faible. Le chargement de ce modèle peut donc se simplifier en enlevant la compression sur le raidisseur.

Dans la semelle, la section droite la plus sollicitée en fatigue se situe près du cordon de soudure. Le diagramme des contraintes de cette section est pratiquement le même pour le pont réel et pour les éprouvettes. La profondeur de la zone de la concentration de contraintes dans cette section est inférieure à la taille d'un élément, qui reste relativement petite par rapport à l'épaisseur de la semelle, d'après le calcul par éléments finis. Au niveau local, la concentration de contraintes ne varie pas en fonction des différentes épaisseurs.

Les variations d'épaisseur et de largeur du raidisseur ne changent pas la forme et l'amplitude maximale des contraintes dans la semelle. La zone d'influence du raidisseur sur la semelle représente une longueur d'environ 70 mm de chaque côté, et une largeur à peu près égale à celle du raidisseur. La semelle des éprouvettes doit être au moins aussi grande que cette zone d'influence. Si l'on prend une semelle plus large, la partie en dehors de la zone d'influence de la semelle produira seulement une augmentation de la rigidité des éprouvettes pendant les essais.

Un modèle de chargement facile pour le montage d'essais, qui consiste à appliquer une charge répartie soit sur tous les bords : ceux de la semelle et de l'âme, soit seulement sur celui de la semelle, n'est pas suffisante pour simuler le champ des contraintes de la liaison raidisseur - semelle du pont réel en utilisant l'éprouvette avec âme. La forme de la charge doit être variée pour l'âme, comme en pratique. Ce qui représente un essai très difficilement réalisable à moins de faire travailler l'éprouvette en flexion plutôt qu'en traction.

En effet, l'influence de l'âme est invisible sur le champ réel de la contrainte  $\sigma_{yy}$ . Elle provoque la fatigue de cette liaison, lorsque la structure n'est pas encore fissurée. Dans le cas où la fissure se propage dans le détail, il se produit une déformation supplémentaire de flexion induite par la présence de la fissure, comme le montre le calcul, dans le chapitre précédent, du facteur d'intensité de contraintes K avec un modèle bidimensionnel fissuré. L'existence de l'âme peut empêcher cette flexion. Le résultat sera une diminution du facteur K et un ralentissement de la propagation de la fissure.

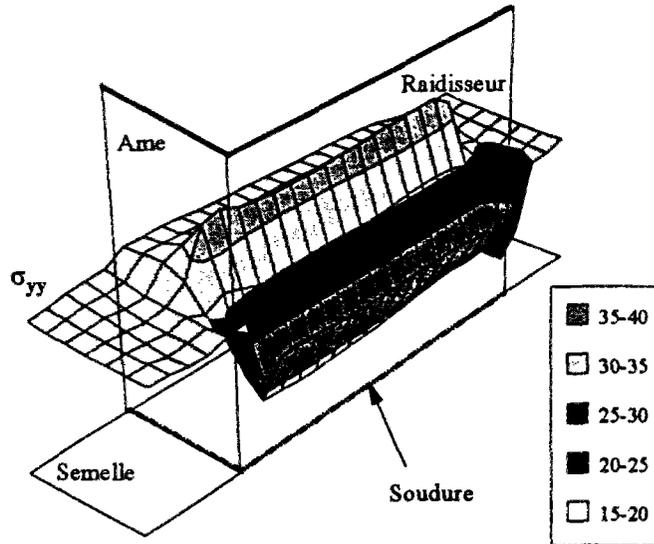
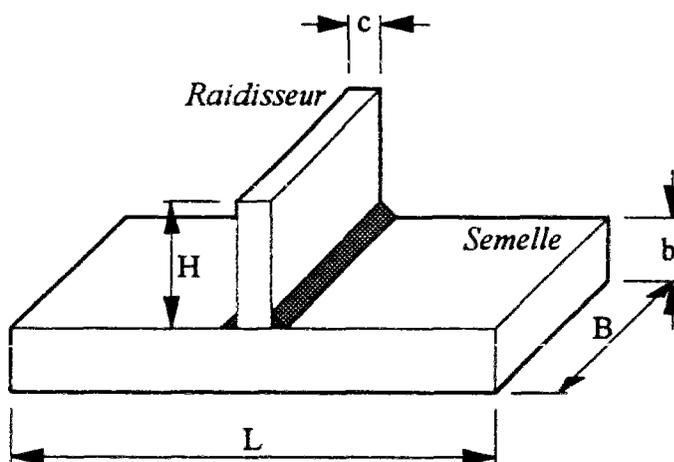


Fig. II-7 Contraintes  $\sigma_{yy}$  en surface supérieure de la semelle du pont réel du côté de l'âme (MPa)

Pour étudier le phénomène de fatigue et faciliter le montage d'essais, nous retenons finalement le modèle des éprouvettes dépourvues de l'âme avec une traction simple, et nous prenons aussi une largeur identique pour la semelle et pour le raidisseur. En tenant compte des caractéristiques des presses existantes et de leur disponibilité, deux échelles d'éprouvettes sont proposées : l'échelle réduite qui vise une machine servo-hydraulique Schenck d'une capacité de 400 kN à l'IRSID, et l'échelle 1 : une presse M.F.L. d'une capacité de  $\pm 5000$  kN au LCPC. Les dimensions des éprouvettes des deux échelles sont données comme suit :



Echelle	Réduite	1
L	700	200
B	70	70
H	200	48
b	24	35
c	16	16
Gorge	5	5
Nombre	12	10

Fig. II-8 Dimensions des éprouvettes (mm)

Une étude de l'effet d'échelle de l'épaisseur de la semelle sur le facteur d'intensité de contraintes  $K$ , les contraintes résiduelles, les phases d'amorçage et de propagation de fissure et le chargement etc (Le Pautremat, Carracilli et Jiang, 1991), a été faite à l'IRSID. Certaines méthodes pour calculer le facteur d'échelle ont été apportées par cette étude.

## **II.2. ESSAIS SUR EPROUVETTES A L'ECHELLE 1 EN TRACTION**

Les essais sur les éprouvettes d'épaisseurs identiques à celles du pont réel s'effectuent au LCPC, à l'aide de la presse haute performance M.F.L., sous la direction de M. Carracilli. Certains détails et résultats d'essais présentés ci-après sont tirés du rapport de recherche CECA (Carracilli, Esnouf et Estivin, 1993).

### **II.2.1. Soudage**

Le soudage a été effectué au C.R.D.M. de Dunkerque. Après un préchauffage à 100°C, la tôle de 16 millimètres d'épaisseur a été soudée manuellement par un procédé de fil fourré sans protection gazeuse, sur une tôle de 35 millimètres d'épaisseur. Ce procédé de soudage est le même que celui utilisé actuellement par les constructeurs de ponts.

Pour améliorer le profil du pied de cordon et augmenter la tenue en fatigue du détail constructif étudié, un parachèvement type refusion TIG a été proposé.

### **II.2.2. Mesures statiques de contraintes en traction**

Pour vérifier la correspondance entre la force appliquée par la presse et la déformation obtenue par la mesure, il est nécessaire de procéder à un étalonnage de l'éprouvette sous une charge statique. Ceci se réalise sur la même machine (la presse M.F.L.) que celle des essais de fatigue. Les mesures de déformations sont réalisées au moyen de ponts d'extensométrie à courant porteur KWS-Hottinger et recueillies sur le numérisateur-enregistreur LCPC. La disposition des jauges est présentée dans la figure II-9.

Les éprouvettes sont sollicitées en traction par un chargement quasi-statique d'une variation continue de 10 à 610 kN (vitesse de chargement 2400 kN/mn), puis par un déchargement équivalent.

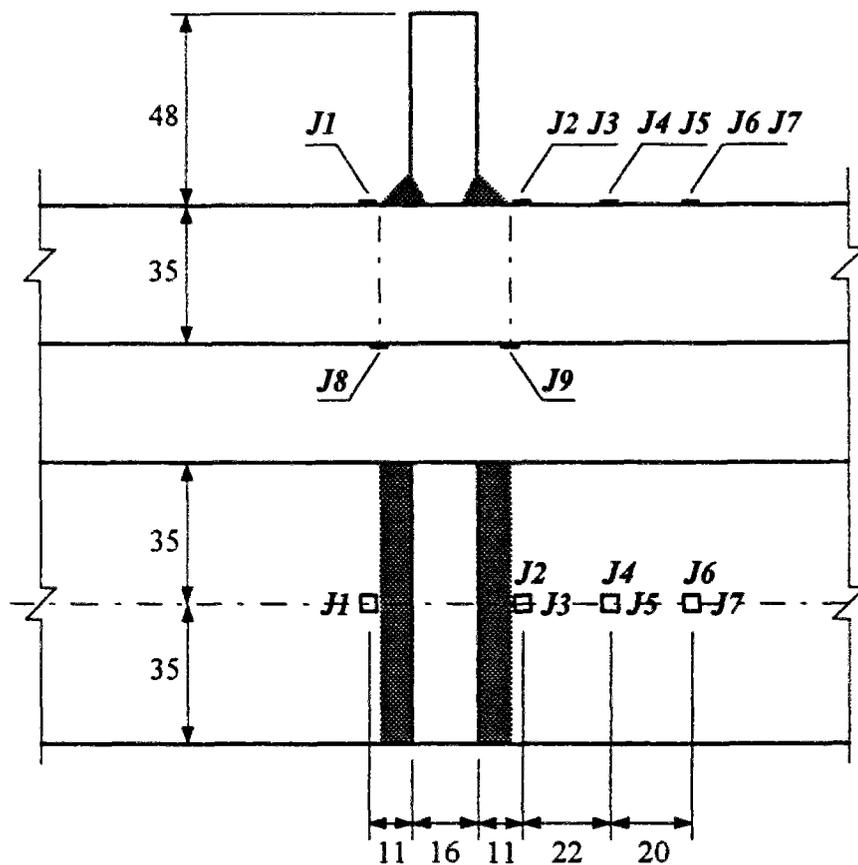


Fig. II-9 Implantation des jauges sur les éprouvettes

La réponse des jauges concorde bien avec le chargement. Le résultat issu des mesures sur une des éprouvettes est montré dans le tableau II-2 pour une charge de 600 kN. Au niveau des jauges éloignées de la liaison, nous retrouvons bien la contrainte longitudinale nominale calculée, valant 245 MPa, tandis que sur celles qui sont près du cordon de soudure (J1 et J3), nous obtenons une concentration de contrainte en accord avec les calculs par éléments finis. La contrainte transversale est faible.

N° des jauges	Déformation ( $\mu$ déf)	Contraintes (MPa)
1	-1469	-290
2	293	-34
3	-1524	-300
4	330	-8
5	-1221	-235
6	331	-11
7	-1277	-246
8	-1194	-229
9	-1207	-232

Tab. II-2 Microdéformations et contraintes au niveau des jauges

### II.2.3. Etude du comportement en fatigue d'éprouvettes.

Pour les essais de fatigue, nous utilisons un chargement sinusoïdal à amplitude constante. Plusieurs niveaux d'amplitude sont appliqués pour les différentes éprouvettes. Les trois premières ont subi un chargement d'amplitude 500 kN (entre 50 kN et 550 kN), les deux suivantes de 400 kN (entre 40 kN et 440 kN), et la cinquième — l'essai en cours comporte une charge de 300 kN (entre 30 kN et 330 kN). Le rapport R est alors toujours proche de 0,1 (R = 0,09).

La fissuration des éprouvettes est contrôlée par les deux jauges (J8 et J9) branchées en demi-pont d'extensométrie. Ainsi la mesure porte sur la différence des déformations, qui est égale à zéro tant que les éprouvettes ne sont pas fissurées. D'autres jauges, utilisées lors du chargement statique, ont été conservées pour un meilleur suivi des essais.

Le tableau suivant présente le nombre de cycles à la rupture déduit de ces essais, pour chaque éprouvette. Il fournit également le nombre de cycles à l'amorçage étant entendu que ce dernier correspond conventionnellement à une augmentation de 15% de l'amplitude du signal du départ. Dans les trois premiers essais, nous obtenons une très grande dispersion des résultats pour un chargement identique. Cette dispersion peut être due à l'incertitude sur la qualité de soudure, et aussi à un certain endommagement des éprouvettes pendant le transport avant les essais. D'ailleurs, nous trouvons que la durée de la phase d'amorçage par rapport à la durée totale de l'assemblage est d'environ 50%, ce qui est supérieur aux valeurs couramment admises (environ 30%).

N° des éprouvettes	Chargement (kN)	Contrainte nominale (MPa)	Nombre de cycles à la rupture	Nombre de cycles à l'amorçage	% de l'amorçage sur la durée de vie
1	500	204	343000	200000	58
2	500	204	180000	90000	50
3	500	204	150000	45000	30
4	400	163	460000	250000	54
5	400	163	526000	220000	42
6	300	122	>609000		

Tab. II-3 Résultats des essais de fatigue

Les courbes de Wöhler réglementaires sont composées de trois portions de droites en coordonnées bi-logarithmiques, selon la formule suivante :

$$\ln(N) = \begin{cases} \infty & (\Delta\sigma < \Delta\sigma_T) \\ \ln(C_1) - m_1 \ln(\Delta\sigma) & (\Delta\sigma_T \leq \Delta\sigma < \Delta\sigma_L) \\ \ln(C_2) - m_2 \ln(\Delta\sigma) & (\Delta\sigma_L \leq \Delta\sigma) \end{cases}$$

où les pentes des droites sont fixées à  $-1/3$ ,  $-1/5$  et  $0$  ( $m_2 = 3$  et  $m_1 = 5$ ). La limite de fatigue  $\Delta\sigma_L$ , qui correspond au changement de pente de  $m_2$  à  $m_1$ , se situe à 5 millions de cycles, et la limite de troncature  $\Delta\sigma_T$ , au-dessous de laquelle les cycles ne contribuent plus à la fatigue, à 100 millions de cycles. Le paramètre  $C_2$  (ou  $C_1$ ) résulte de la *catégorie du détail*, définie par l'amplitude de contraintes  $\Delta\sigma$  correspondant à 2 millions de cycles.

Nous comparons les résultats des essais de fatigue avec la courbe de Wöhler réglementaire pour ce type de liaison dans la figure ci-dessous. Le nombre de cycles à l'amorçage est dessiné sur la même figure. Les trois classes non corrigées, correspondant au détail étudié, sont : la classe 90 préconisée par le D.A.N. (Document d'Application National) de l'Eurocode 3 pour les structures françaises, et les classes 80 et 71 dans la classification C.E.C.M. (Convention Européenne de la Construction Métallique) pour des épaisseurs du raidisseur respectivement inférieures ou supérieures à 12 mm. Selon ces classes, la probabilité de non ruine est de 95%. Nous voyons que presque tous les points des essais se situent au-dessus des trois courbes. La classe 90 est bien représentative du comportement en fatigue de cette liaison, même s'il existe des points au-dessous de cette courbe.

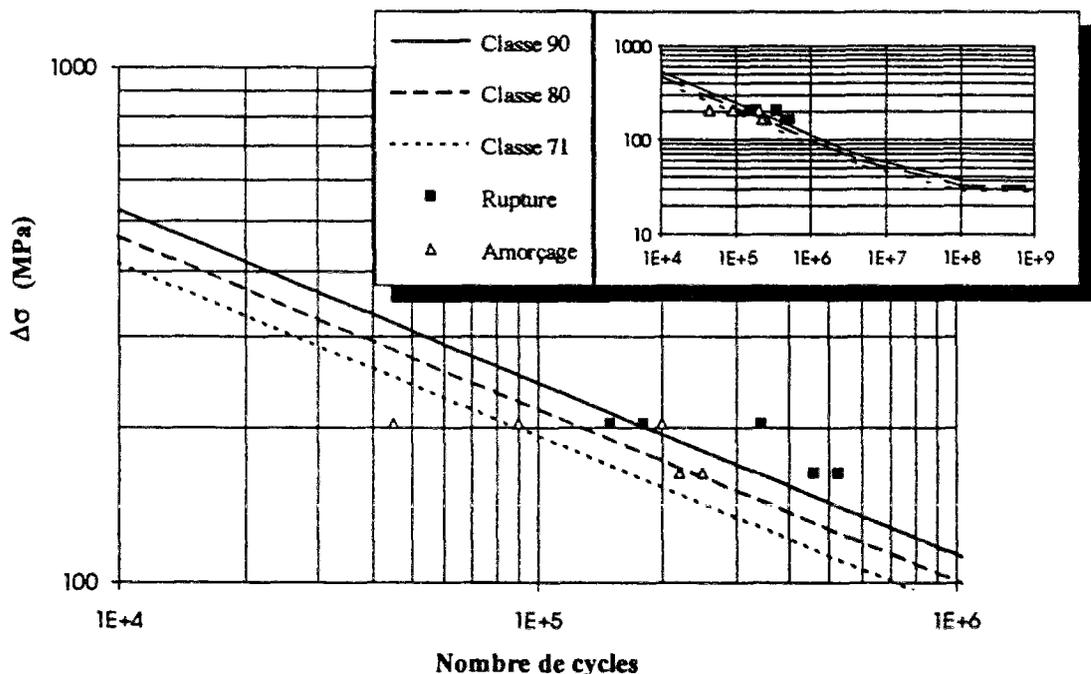


Fig. II-10 Résultats des essais et courbes de Wöhler réglementaires

En observant visuellement les surfaces de rupture des éprouvettes, nous constatons que les fissures s'amorcent en plusieurs points, tout au long du cordon de soudure, celles-ci se rejoignant progressivement pour donner un front droit sur la quasi-totalité de la largeur de l'éprouvette.

## CHAPITRE III

### THEORIE DE LA FIABILITE

Les réponses d'une structure à des charges doivent satisfaire les besoins du service concernant les divers critères comme les limites de dommage, de contraintes et de fléchissement, la sécurité des structures contre la ruine etc. Chaque critère peut décrire un "état limite" et le dépassement de cet état limite signifie la défaillance de la structure.

La théorie de la fiabilité est développée dans des buts de déterminer la probabilité de dépassement d'états limites d'une structure et de prévoir la ruine des éléments ou de l'ensemble de la structure pendant la durée de service. Les calculs de probabilité d'occurrence des événements s'appuient sur des lois déduites d'observations et de mesures sur une période suffisamment longue et d'essais assez nombreux.

Dans ce chapitre, les modèles de fiabilité, de différents niveaux, sont présentés sous des formes générales et les calculs de probabilité de ruine sont limités à un élément de structure. La conception des facteurs de sensibilité servira aux applications des chapitres suivants.

#### **III.1. MODELES DE FIABILITE STRUCTURALE**

##### **III.1.1. Fonction d'état limite et variables de base**

En utilisant les méthodes conventionnelles d'analyse de structures et les règlements, un état limite, donné par les critères correspondant aux fonctionnements de structures, peut être représenté mathématiquement par une fonction, nommée "*fonction d'état limite*", qui contient les variables caractérisant les propriétés de structure et l'environnement de son usage (Lau, 1991).

Ces variables de la fonction d'état limite, dites "*fondamentales*" ou "*de base*", sont dans les cas les plus simples indépendantes. Par exemple, les variables de base peuvent être les paramètres géométriques des structures, le poids unitaire et la résistance des matériaux, les différents types de charges etc. Selon les modèles de fiabilité de différents niveaux (définis dans le paragraphe suivant), les variables de base sont des variables déterministes ou probabilistes, pour les fonctions d'état limite indépendantes du temps. Dans le cas où le temps intervient explicitement, on a affaire à des processus temporels ou stochastiques.

En formulation vectorielle, un vecteur de  $n$  variables de base  $\underline{Z} = \{Z_1, \dots, Z_n\}^T$  appartient à un espace à  $n$  dimensions  $z^n$ . La fonction d'état limite  $g(\underline{Z})$  divise  $z^n$  en deux parties : l'une est le domaine de sécurité  $D_S$  et l'autre le domaine de ruine  $D_R$ .  $\underline{Z} \in D_S$ , correspondant habituellement à  $g(\underline{Z}) > 0$ , signifie que le critère est satisfait. Par contre  $\underline{Z} \in D_R$ , équivalant à  $g(\underline{Z}) < 0$ , signifie que la structure est ruinée.  $g(\underline{Z}) = 0$  représente alors une hypersurface de ruine dans l'espace  $z^n$ .

Les variables de base peuvent généralement être regroupées en deux sous familles caractérisant respectivement : la sollicitation  $S$  et la résistance  $R$ . Dans le cas le plus simple, la fonction d'état limite est sous la forme :

$$g(R, S) = R - S \quad (\text{III-1})$$

Parfois, une troisième sous famille regroupe les variables géométriques.

### III.1.2. Incertitudes dans des calculs de fiabilité

L'occurrence de phénomènes imprévisibles peut provoquer la ruine d'une structure à un moment quelconque de sa vie, incluant les périodes de construction et d'usage. Les calculs de fiabilité de structures doivent tenir compte des incertitudes sur ces phénomènes. Les incertitudes peuvent être classifiées selon leur origine (Henley et Kumamoto, 1981) :

*Incertain de décision* : Les différentes décisions peuvent être prises sur la mesure d'arrivée des phénomènes. Un exemple typique est vis-à-vis de quelle longueur de fissure, par rapport à la dimension d'un élément de structures, l'élément devient inutilisable.

*Incertain de modèle* : L'application de modèles mécaniques ou physiques différents peut conduire à des résultats différents.

*Incertain de prédiction* : Pour les problèmes dépendants du temps, la fiabilité future d'une structure est estimée à partir d'informations sur le fonctionnement passé de la structure. Ces informations se complètent constamment, et la prédiction de la fiabilité correspondante peut être remise à jour.

*Incertain physique* : Les lois de probabilité de certaines variables de base sont dépendantes de constantes physiques ou de propriétés physiques des grandeurs représentées. Ainsi en est-il, par exemple, d'une limite de fatigue d'acier ou sa limite élastique. Cette incertitude peut être réduite par l'acquisition de données mesurées et par un accroissement du contrôle de qualité, mais elle ne peut pas être éliminée.

*Incertitude statistique* : A priori, l'incertitude physique des variables de base est généralement inconnue. Pour la connaître, l'estimation statistique, à l'aide d'observations, est obligatoire. Il existe souvent un biais et toujours une dispersion dans les résultats d'observations, donc des échantillons différents peuvent produire à des estimations différentes.

*Incertitude humaine* : Les divers facteurs humains, comme le niveau d'éducation professionnelle, les conditions du travail, l'expérience de projecteurs, l'habileté d'ouvriers, les auto-contrôles et les contrôles externes, influent sur les erreurs de décision, de documentation, de calcul et de construction, etc., et donc sur la fiabilité. Ces effets humains sont très variables, et augmentent alors le degré d'incertitude du problème.

Les incertitudes sont très difficiles à représenter et à quantifier pour un système complexe. La représentation et la quantification des incertitudes sont principalement basées sur les théories probabiliste et statistique, mais peuvent faire appel à des considérations physiques ou empiriques. En général, les incertitudes sont prises en compte par des variables aléatoires dans les problèmes indépendants du temps, et par des processus stochastiques lorsque le temps intervient.

### III.1.3. Valeur caractéristique et probabilité de ruine

La *valeur caractéristique* d'une variable aléatoire (de base) est un fractile inférieur ou supérieur, ayant une probabilité donnée de dépassement (par exemple 10, 5 ou 1%). Pour la résistance  $R$ , il est un fractile inférieur ayant une probabilité de  $1-k$  de dépassement. Pour la sollicitation  $S$ , il est un fractile supérieur, dépassé avec une probabilité  $k$ .

La définition de la valeur caractéristique peut être ainsi donnée par :

$$P(R < r_k) = k \quad \text{(Résistance)} \quad \text{(III-2)}$$

$$P(S > s_k) = k \quad \text{(Sollicitation)} \quad \text{(III-3)}$$

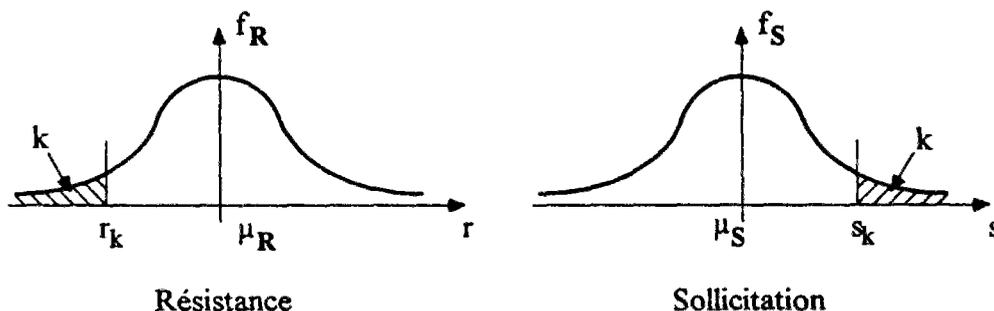


Fig. III-1 Définition de valeurs caractéristiques

où  $r_k$  et  $s_k$  sont respectivement les valeurs caractéristiques de la résistance et de la sollicitation,  $\mu_R$  et  $\mu_S$  les moyennes,  $f_R$  et  $f_S$  les densités de probabilité. La valeur la plus courante du fractile  $k$  est 0,05.

La définition de valeur caractéristique est transposable à un processus stochastique, dans un intervalle de temps donné.

Une valeur caractéristique est liée à une probabilité individuelle. Chaque variable de base a sa propre valeur caractéristique. Pour une structure, *la probabilité de ruine* est une mesure globale déterminée par l'intégrale de la densité de probabilité conjointe des variables de base dans le domaine de ruine  $D_R$ . La fonction d'état limite dépend de toutes les variables de base, et délimite le domaine de ruine dans l'espace  $z^n$ . La probabilité de ruine peut s'écrire :

$$P_R = P(g(\underline{Z}) < 0) = \int_{D_R} f_{\underline{Z}}(z) dz_1 \cdots dz_n \quad (\text{III-4})$$

Pour des variables de base indépendantes, la densité de probabilité conjointe est égale au produit des densités de chaque variable :

$$f_{\underline{Z}}(z) = \prod_{i=1}^n f_{z_i}(z_i) = f_{z_1}(z_1) \cdots f_{z_n}(z_n) \quad (\text{III-5})$$

Dans le cas de la fonction d'état limite (III-1) et en supposant que la résistance  $R$  est indépendante de la sollicitation  $S$ , la probabilité de ruine est donnée par :

$$\begin{aligned} P_R &= P(R - S < 0) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_r^{\infty} f_R(r) f_S(s) ds dr \\ &= P(M < 0) = \int_{-\infty}^0 \left( \int_{-\infty}^{\infty} f_R(r) f_S(r - m) dr \right) dm = \int_{-\infty}^0 f_M(m) dm \end{aligned} \quad (\text{III-6})$$

où  $M = R - S$  est "la marge de sécurité". La figure suivante schématise la densité conjointe de  $R$  et de  $S$ , la fonction d'état limite et le domaine d'intégration de la probabilité de ruine.

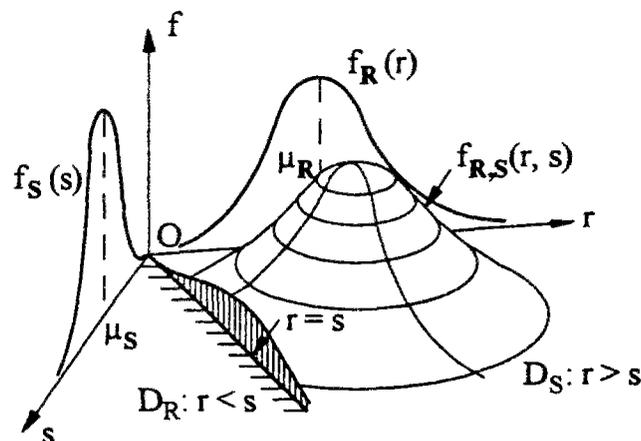


Fig. III-2 Détermination de la probabilité de ruine

La probabilité de sécurité est alors calculée par l'intégration dans le domaine de sécurité  $D_S$ , et la somme des deux probabilités vaut un.

$$P_S = P(g(\underline{Z}) \geq 0) = \int_{D_S} f_{\underline{Z}}(\underline{z}) dz_1 \cdots dz_n = 1 - P_R \quad (\text{III-7})$$

Pour un problème dépendant du temps, il faut signaler que la probabilité de ruine, qui est évidemment une fonction du temps  $P_R(D)$ , tient compte de la ruine survenant pendant une durée  $[0, D]$ , mais ne représente pas la probabilité correspondant à un instant ponctuel. Cette fonction  $P_R(D)$  peut donc être retrouvée à partir de la distribution de probabilité de la durée de vie d'une structure :

$$P_R(D) = F_D(D) = \int_0^D f_D(d) d[d] \quad (\text{III-8})$$

où  $F_D(D)$ , est la fonction de répartition de la variable aléatoire  $D$ .  $F_D(D)$  est la probabilité que la durée de vie  $D$  soit inférieure à une certaine valeur de référence  $D$ , c'est-à-dire la probabilité que la ruine de la structure arrive avant l'âge  $D$ . La relation entre la densité de la durée de vie et la probabilité de ruine (où la probabilité de sécurité) s'écrit :

$$f_D(d) = P_R'(D)|_{D=d} = -P_S'(D)|_{D=d} \quad (\text{III-9})$$

#### III.1.4. Classification des modèles de fiabilité

Les modèles de fiabilité structurale sont classés en niveaux, suivant le degré de sophistication de la représentation des incertitudes des variables de base.

Au niveau 1, nous parlerons du modèle *semi-probabiliste*, couramment utilisé jusqu'à présent dans les règlements. La fiabilité des structures est liée à des *coefficients partiels de sécurité* affectés aux variables de sollicitation et de résistance. Ces coefficients tiennent compte des incertitudes réelles lorsqu'on dispose de l'information statistique nécessaire, et jouent un rôle de *coefficients partiels forfaitaires* pour s'accrode avec la pratique antérieure et ce que l'on peut supposer de la réalité dans le cas contraire. Les variables figurant dans la fonction d'état limite apparaissent soit par leur valeur caractéristique, soit par leur valeur moyenne.

Le modèle de niveau 2, nommé "*modèle probabiliste*", tente d'évaluer directement et globalement, pour une structure ou un élément de structure, la probabilité d'atteindre un quelconque état limite au cours d'une période de référence  $D$ , compte tenu de toutes les incertitudes identifiées sur les charges et les résistances, et également sur les effets humains le cas échéant. La fonction d'état limite est une fonction de variables aléatoires ou de processus stochastiques.

Le modèle de niveau 3 est établi sur la base d'un modèle probabiliste, en tenant compte de tous les aléas, mais aussi de fonctions stratégiques et économiques.

## **III.2. METHODE "FOSM" ET INDICE DE FIABILITE**

### **III.2.1. Méthode de premier ordre et second moment**

D'après le modèle probabiliste (de niveau 2), la mesure de la fiabilité d'une structure est sa probabilité de ruine déterminée par l'intégrale multidimensionnelle (III-4). Cette intégrale peut rarement être calculée par une méthode analytique à cause de la complexité de la densité de probabilité conjointe et de la non-linéarité de la fonction d'état limite. Si l'on recourt à des méthodes numériques, l'erreur d'intégration est importante pour un problème à plusieurs dimensions, et le temps de calcul croît exponentiellement avec le nombre de dimensions.

L'intégrale à une formule analytique dans un cas très particulier, pour lequel les variables de base suivent la loi de probabilité normale et la fonction d'état limite est linéaire. Pour cette raison, on se ramène à ce cas pour calculer la probabilité de ruine approximative correspondant à une fonction d'état limite quelconque avec des variables aléatoires d'une distribution quelconque, en évitant l'intégration générale.

La notion de "*second moment*" intervient dans la représentation des variables de base, sachant que la loi normale ne dépend que de ses deux premiers moments : la moyenne et la variance. Dans de très nombreux cas, les deux premiers moments d'une loi de probabilité sont suffisants pour décrire la loi. Dans d'autre cas, ces deux moments permettent une approximation de la loi réelle. La linéarisation d'une fonction d'état limite non linéaire est réalisée par un développement de Taylor au premier ordre, au voisinage du point de ruine la plus probable, dit "*point de fonctionnement*". En synthétisant les deux types d'approximations, le nom de "*First-Order and Second-Moment*" (en anglais) est donné à la méthode.

### **III.2.2. Indice de fiabilité de Cornell**

Dans un premier temps, on calcule la probabilité de ruine pour une fonction d'état limite linéaire et des variables normales. Ce calcul illustre la méthode de premier ordre et second moment. L'indice de fiabilité de Cornell sera introduit par ce calcul.

La fonction d'état limite linéaire des variables de base normales peut s'écrire d'une façon vectorielle :

$$g(\underline{Z}) = a_0 + \underline{a}^\tau \underline{Z} = a_0 + a_1 Z_1 + \dots + a_n Z_n \quad (\text{III-10})$$

et la densité de probabilité conjointe des variables de base :

$$f_{\underline{Z}}(\underline{z}) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \left| \underline{C}_{\underline{Z}} \right|^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\underline{z} - \underline{\mu}_{\underline{Z}})^\tau \underline{C}_{\underline{Z}}^{-1}(\underline{z} - \underline{\mu}_{\underline{Z}})\right) \quad (\text{III-11})$$

où  $\underline{\mu}_{\underline{Z}}$  est le vecteur des moyennes et  $\underline{C}_{\underline{Z}}$  la matrice de variance - covariance.

La matrice de variance - covariance, étant symétrique et définie positive, peut être décomposée en deux matrices triangulaires par la méthode de Cholesky.

$$\underline{C}_{\underline{Z}} = \underline{A} \underline{A}^\tau$$

Après un changement de variables, basé sur cette factorisation, on obtient un groupe de variables normales centrées réduites et indépendantes  $\underline{U}$ .

$$\underline{U} = \underline{A}^{-1}(\underline{Z} - \underline{\mu}_{\underline{Z}}) \quad \text{et inversement} \quad \underline{Z} = \underline{A} \underline{U} + \underline{\mu}_{\underline{Z}} \quad (\text{III-12})$$

En introduisant ce changement de variables dans la formule (III-4), l'intégrale est simplifiée :

$$\begin{aligned} P_R &= P(g(\underline{Z}) < 0) \\ &= \int_{a_0 + \underline{a}^\tau \underline{z} < 0} (2\pi)^{-n/2} \left| \underline{C}_{\underline{Z}} \right|^{-n/2} \exp\left(-\frac{1}{2}(\underline{z} - \underline{\mu}_{\underline{Z}})^\tau \underline{C}_{\underline{Z}}^{-1}(\underline{z} - \underline{\mu}_{\underline{Z}})\right) dz_1 \dots dz_n \\ &= \int_{a_0 + \underline{a}^\tau \underline{\mu}_{\underline{Z}} + \underline{a}^\tau \underline{A} \underline{u} < 0} (2\pi)^{-n/2} \exp\left(-\frac{1}{2}\underline{u}^\tau \underline{u}\right) du_1 \dots du_n \end{aligned}$$

L'attention est attirée sur la matrice Jacobienne correspondant au changement de variables, qui est représentée par la matrice  $\underline{A}$ , c'est-à-dire que  $\left| \underline{A} \right| = \left| \underline{C}_{\underline{Z}} \right|^{1/2}$ . A l'aide de la marge de sécurité, définie par la formule suivante :

$$\underline{M} = g(\underline{Z}) = a_0 + \underline{a}^\tau \underline{Z} = a_0 + \underline{a}^\tau \underline{\mu}_{\underline{Z}} + \underline{a}^\tau \underline{A} \underline{U} \quad (\text{III-13})$$

l'intégrale multidimensionnelle précédente se réduit à une intégrale unidimensionnelle.

$$\begin{aligned} P_R &= P(\underline{M} = g(\underline{Z}) < 0) \\ &= \int_{-\infty}^0 \left( 2\pi \left( \underline{a}^\tau \underline{A} \right) \left( \underline{a}^\tau \underline{A} \right)^\tau \right)^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2} \left( m - (a_0 + \underline{a}^\tau \underline{\mu}_{\underline{Z}}) \right)^2 \left( \left( \underline{a}^\tau \underline{A} \right) \left( \underline{a}^\tau \underline{A} \right)^\tau \right)^{-1}\right) dm \\ &= \int_{-\infty}^0 \left( 2\pi \underline{a}^\tau \underline{C}_{\underline{Z}} \underline{a} \right)^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2} \left( m - a_0 - \underline{a}^\tau \underline{\mu}_{\underline{Z}} \right)^2 \left( \underline{a}^\tau \underline{C}_{\underline{Z}} \underline{a} \right)^{-1}\right) dm \end{aligned}$$

Cette simplification résulte du fait que la transformation linéaire des variables normales  $a_0 + \underline{a}^T \underline{Z}$  est également une variable normale. La moyenne et la variance de cette variable sont respectivement  $a_0 + \underline{a}^T \underline{\mu_Z}$  et  $\underline{a}^T \underline{C_Z} \underline{a}$ .

La probabilité de ruine, dans ce cas le plus simple, peut alors être déterminée en utilisant la fonction de répartition de la variable normale standardisée  $\Phi(\cdot)$  :

$$P_R = P(M = g(\underline{Z}) < 0) = P\left(U_M = \frac{M - \mu_M}{\sigma_M} < -\frac{\mu_M}{\sigma_M}\right) = \Phi\left(-\frac{\mu_M}{\sigma_M}\right) \quad (\text{III-14})$$

où la moyenne de  $M$  est  $\mu_M = a_0 + \underline{a}^T \underline{\mu_Z}$  et son écart-type est  $\sigma_M = \sqrt{\underline{a}^T \underline{C_Z} \underline{a}}$ .

L'indice de fiabilité de Cornell, noté  $\beta_C$ , est défini par la fraction  $\mu_M/\sigma_M$ . C'est un indice caractéristique, lié par bijection à la probabilité de ruine. La liaison entre l'indice de fiabilité  $\beta_C$  et la probabilité de ruine  $P_R$  est assurée par la fonction de répartition de la variable normale standardisée (Cornell, 1969) :

$$\beta_C = \frac{\mu_M}{\sigma_M} = \frac{a_0 + \underline{a}^T \underline{\mu_Z}}{\sqrt{\underline{a}^T \underline{C_Z} \underline{a}}} = -\Phi^{-1}(P_R) \quad (\text{III-15})$$

Une interprétation géométrique de l'indice de fiabilité  $\beta_C$  est donnée, vis-à-vis de la fonction d'état limite de deux variables  $g(\underline{R}, \underline{S}) = \underline{R} - \underline{S}$ , dans la figure III-3 suivant le raisonnement suivant : la marge de sécurité  $M$  est égale à la différence de deux variables normales et indépendantes. Selon la définition, l'indice de fiabilité  $\beta_C$  s'écrit :

$$\beta_C = \frac{\mu_M}{\sigma_M} = \frac{\mu_R - \mu_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} \quad (\text{III-16})$$

où  $\mu_R$  et  $\mu_S$  sont les moyennes de la résistance  $\underline{R}$  et de la sollicitation  $\underline{S}$ , et  $\sigma_R$  et  $\sigma_S$  leurs écart-types. Grâce à l'indépendance entre  $\underline{R}$  et  $\underline{S}$ , le changement de variables (III-12) peut s'écrire :

$$\begin{aligned} U_R &= \frac{R - \mu_R}{\sigma_R} & \text{et} & & R &= \sigma_R U_R + \mu_R \\ U_S &= \frac{S - \mu_S}{\sigma_S} & \text{et} & & S &= \sigma_S U_S + \mu_S \end{aligned}$$

La linéarité de la fonction d'état limite est conservée dans l'espace des variables normales centrées réduites après le changement de variables :

$$g_\mu(U_R, U_S) = \mu_R - \mu_S + \sigma_R U_R - \sigma_S U_S \quad (\text{III-17})$$

La fonction de ruine est alors une droite :

$$\mu_R - \mu_S + \sigma_R U_R - \sigma_S U_S = 0$$

En divisant les deux membres de l'égalité précédente par  $\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}$ , l'indice  $\beta_C$  est retrouvé dans la formule. De plus, on obtient un vecteur unitaire, noté par  $\underline{\alpha}$ , indiquant la direction orthogonale à la droite :

$$\beta_C + \underline{\alpha}^T \begin{bmatrix} U_R \\ U_S \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{III-18})$$

avec

$$\underline{\alpha} = \begin{bmatrix} \alpha_R \\ \alpha_S \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} \begin{bmatrix} \sigma_R \\ -\sigma_S \end{bmatrix} \quad (\text{III-19})$$

Géométriquement, l'indice de fiabilité  $\beta_C$  représente donc la distance de l'origine à la frontière du domaine de ruine (III-18) dans cet espace standardisé. Le point situé à cette distance sur le graphique de la fonction d'état limite est nommé "point de fonctionnement". C'est visiblement le point d'intersection entre la frontière du domaine de ruine et sa perpendiculaire issue de l'origine ( $u_R^*$ ,  $u_S^*$ ).

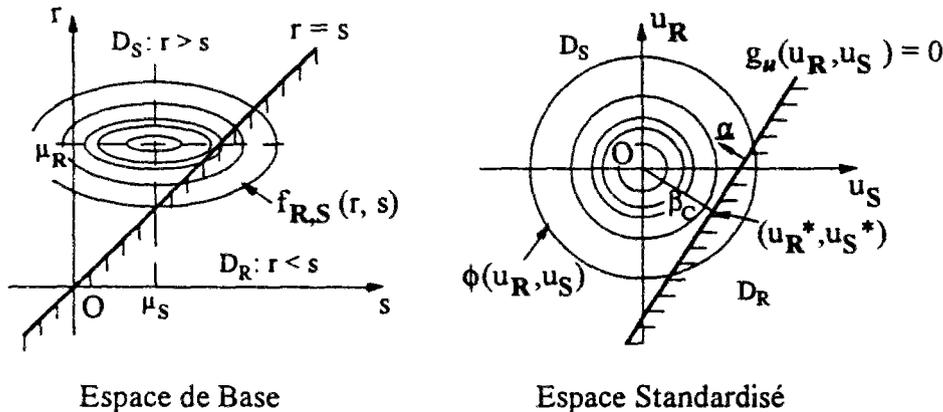


Fig. III-3 Interprétation géométrique de l'indice de fiabilité  $\beta_C$

Le point de fonctionnement est le point le plus proche de l'origine sur la droite  $g_u(u_R, u_S) = 0$ . La densité de probabilité conjointe de R et S atteint donc son maximum sur cette droite. Numériquement, ce point peut être trouvé par des méthodes itératives qui consistent à minimiser une fonction de distance  $\sqrt{u_R^2 + u_S^2}$  sous la contrainte de rester sur la fonction d'état limite  $g_u(u_R, u_S) = 0$ . Les coordonnées du point de fonctionnement s'écrivent :

$$\underline{u}^* = \begin{bmatrix} u_R^* \\ u_S^* \end{bmatrix} = -\beta_C \underline{\alpha} = \frac{\mu_R - \mu_S}{\sigma_R^2 + \sigma_S^2} \begin{bmatrix} -\sigma_R \\ \sigma_S \end{bmatrix} \quad (\text{III-20})$$

Dans l'espace de base ce point est déterminé après le changement de variables :

$$\begin{bmatrix} r^* \\ s^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_R & 0 \\ 0 & \sigma_S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_R^* \\ u_S^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mu_R \\ \mu_S \end{bmatrix} = \frac{\sigma_R^2 \mu_S + \sigma_S^2 \mu_R}{\sigma_R^2 + \sigma_S^2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{III-21})$$

On mentionnera toutefois la limite de l'intérêt de cet indice de Cornell, qui reste dépendant de la formulation du problème de fiabilité et du choix des variables de base.

### III.2.3. Indice de fiabilité de Hasofer-Lind

En utilisant l'interprétation géométrique de l'indice de fiabilité de Cornell, *l'indice de fiabilité de Hasofer-Lind* est défini, pour une fonction d'état limite quelconque et des variables aléatoires quelconques, par la distance du point de fonctionnement à l'origine dans l'espace des variables normales centrées réduites et indépendantes (Hasofer et Lind, 1974). Bien entendu, cette distance est également la plus petite distance de l'origine à la surface d'état limite.

D'après cette définition, la probabilité de ruine est estimée par la relation :

$$P_R \equiv \Phi(-\beta_{HL}) \quad (\text{III-22})$$

où  $\beta_{HL}$  est l'indice de Hasofer-Lind. Cette formule signifie géométriquement que la surface de ruine est approchée par un hyperplan passant par le point de fonctionnement et perpendiculaire à la droite de l'origine au point de fonctionnement. Dans le cas où la fonction d'état limite est continue et de classe  $C^1$ , cet hyperplan représente le plan tangent à la surface de ruine au point de fonctionnement.

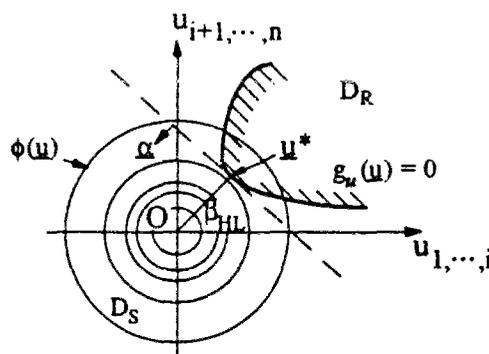


Fig. III-4 Définition de l'indice de fiabilité  $\beta_{HL}$  (dans l'espace standardisé)

L'indice de Hasofer-Lind est alors déterminé en deux étapes : la première transforme les variables non normales en variables normales, la deuxième cherche le point de fonctionnement

sur la surface de ruine dans l'espace des variables transformées. Il présente l'intérêt, par rapport à l'indice de Cornell, d'être indépendant de la formulation du problème de fiabilité.

### III.2.3.1. Transformation des variables non normales

La transformation des variables non normales en variables normales peut être symbolisée par la formule suivante :

$$\underline{U} = T(\underline{Z}) \quad (\text{III-23})$$

En principe, le nombre de variables avant et après la transformation est identique. Mais il arrive que les variables de base soient représentées par des variables normales standardisées moins nombreuses, notamment lorsque les premières ne sont pas toutes indépendantes.

La transformation  $T$  est normalement implicite, c'est-à-dire qu'il y a peu de variables ayant une relation analytique directe avec une variable normale, comme c'est le cas pour une variable lognormale. D'autre part cette relation est difficile à trouver dans la plupart des cas quand elle existe. Pour cette raison, la transformation  $T$  s'écrit souvent d'une manière détournée en utilisant les fonctions de répartition. La transformation d'une seule variable s'obtient par :

en posant :  $U_Z = T(Z)$

$$\Phi(u_Z) = P(U_Z < u_Z) = P(T(Z) < T(z)) = P(Z < z) = F_Z(z)$$

$$\Leftrightarrow u_Z = \Phi^{-1}(F_Z(z)) \quad \text{ou} \quad U_Z = T(Z) = \Phi^{-1}(F_Z(Z)) \quad (\text{III-24})$$

où  $T$  est une transformation monotone croissante. La dérivée de la transformation est :

$$\frac{dU_Z}{dZ} = \frac{dT}{dZ} = \frac{f_Z(Z)}{\phi(U_Z)} = \frac{f_Z(Z)}{\phi(\Phi^{-1}(F_Z(Z)))} \quad (\text{III-25})$$

La formule (III-24) n'a de valeur que numérique, car la fonction de répartition de la variable normale  $\Phi(\cdot)$  n'a pas de représentation analytique.

Pour plusieurs variables, même dépendantes, si l'on connaît la densité multidimensionnelle de probabilité conjointe, un système de variables normales standardisées correspondant s'obtient à l'aide de "la transformation de Rosenblatt" (Rosenblatt, 1952), qui s'appuie aussi sur l'égalité des probabilités des deux systèmes :

$$\begin{aligned}
\Phi(u_1) &= F_1(z_1) \\
\Phi(u_2) &= F_2(z_2|z_1) \\
&\vdots \\
\Phi(u_n) &= F_n(z_n|z_{n-1}, \dots, z_1)
\end{aligned} \tag{III-26}$$

où  $F_i(z_i|z_{i-1}, \dots, z_1)$  est la fonction de répartition conditionnelle de la variable  $Z_i$ , connaissant  $Z_{i-1}, \dots, Z_1$  ( $i = 2, \dots, n$ ), définit par :

$$f_i(z_i|z_{i-1}, \dots, z_1) = \frac{f_{Z_1, \dots, Z_i}(z_1, \dots, z_i)}{f_{Z_1, \dots, Z_{i-1}}(z_1, \dots, z_{i-1})} \tag{III-27}$$

donc

$$F_i(z_i|z_{i-1}, \dots, z_1) = \frac{\int_{-\infty}^{z_i} f_{Z_1, \dots, Z_i}(z_1, \dots, z_{i-1}, \zeta) d\zeta}{f_{Z_1, \dots, Z_{i-1}}(z_1, \dots, z_{i-1})} \quad (i = 2, \dots, n) \tag{III-28}$$

La densité marginale d'un sous-ensemble de variables  $Z_1, \dots, Z_i$  est calculée par l'intégrale de la densité de probabilité conjointe  $f_{\underline{Z}}(\underline{z})$  :

$$f_{Z_1, \dots, Z_i}(z_1, \dots, z_i) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\underline{Z}}(\underline{z}) dz_{i+1} \dots dz_n$$

La transformation  $T$  est alors représentée sous la forme :

$$\begin{aligned}
U_1 &= \Phi^{-1}(F_1(Z_1)) \\
U_2 &= \Phi^{-1}(F_2(Z_2|Z_1)) \\
&\vdots \\
U_n &= \Phi^{-1}(F_n(Z_n|Z_{n-1}, \dots, Z_1))
\end{aligned} \tag{III-29}$$

Et la transformation inverse est réalisée successivement à partir de la première variable :

$$\begin{aligned}
Z_1 &= F_1^{-1}(\Phi(U_1)) \\
Z_2 &= F_2^{-1}(\Phi(U_2)|Z_1) \\
&\vdots \\
Z_n &= F_n^{-1}(\Phi(U_n)|Z_{n-1}, \dots, Z_1)
\end{aligned} \tag{III-30}$$

Notons que la transformation de Rosenblatt peut être faite de  $n!$  façons différentes. Par exemple, dans un cas bidimensionnel, la transformation peut être commencée par la variable 1 ou 2. Ces différentes façons conduisent à des valeurs différentes pour l'indice de fiabilité (Melchers, 1987).

La densité de probabilité conjointe est rarement connue en pratique. La fonction de répartition conditionnelle est alors impossible à calculer. Ce que l'on connaît le plus

communément est la distribution marginale de chaque variable de base et une estimation de la matrice de corrélation.

Devant ces difficultés, une approximation, basée sur la notion de "second moment", est utilisée dans la transformation. Les étapes de la transformation s'écrivent alors comme suit :

- 1) Transformer respectivement chaque variable de base en variable normale centrée réduite par la formule (III-24) en remplaçant la fonction de répartition  $F_Z(z)$  par la fonction de répartition marginale. Les variables normales ainsi obtenues ne sont pas indépendantes.
- 2) Evaluer les coefficients de corrélation entre les variables normales centrées réduites, obtenues après la première étape, à partir de la matrice de corrélation des variables de base en introduisant la représentation de "second moment".
- 3) Transformer les variables normales centrées réduites dépendantes en variables indépendantes par orthogonalisation, en utilisant la formule (III-12) établie sur la factorisation de Cholesky.

Dans la méthode de "second moment", si la transformation en variable normale d'une variable quelconque s'écrit  $X = T(Z)$ , la moyenne et la variance de la variable normale sont calculées sous les formes ci-après, en négligeant les moments d'ordre supérieur à deux dans le développement de la variable en série de Taylor au voisinage de la moyenne.

$$\mu_X = E(X) = E(T(Z)) \cong T(\mu_Z) + \left[ \frac{1}{2} \frac{d^2 T}{dZ^2} \Big|_{\mu_Z} V(Z) \right] \quad (\text{III-31})$$

$$\sigma_X^2 = V(X) = V(T(Z)) \cong \left( \frac{dT}{dZ} \Big|_{\mu_Z} \right)^2 V(Z) - \left[ \frac{1}{2} \frac{d^2 T}{dZ^2} \Big|_{\mu_Z} V(Z) \right]^2 \quad (\text{III-32})$$

Ainsi le coefficient de corrélation des deux variables après la transformation s'obtient dans ce cas :

$$\rho_{X_1, X_2} = \frac{\text{Cov}(X_1, X_2)}{\sigma_{X_1} \sigma_{X_2}} = \frac{\text{Cov}(T_{Z_1}(Z_1), T_{Z_2}(Z_2))}{\sqrt{V(T_{Z_1}(Z_1))V(T_{Z_2}(Z_2))}} \\ \cong \frac{\frac{dT_{Z_1}}{dZ_1} \Big|_{\mu_{Z_1}} \frac{dT_{Z_2}}{dZ_2} \Big|_{\mu_{Z_2}} \text{Cov}(Z_1, Z_2) - \frac{1}{4} \frac{d^2 T_{Z_1}}{dZ_1^2} \Big|_{\mu_{Z_1}} \frac{d^2 T_{Z_2}}{dZ_2^2} \Big|_{\mu_{Z_2}} V(Z_1)V(Z_2)}{\sqrt{V(T_{Z_1}(Z_1))V(T_{Z_2}(Z_2))}} \quad (\text{III-33})$$

D'après la formule précédente, si les deux transformations  $T_{Z_1}(Z_1)$  et  $T_{Z_2}(Z_2)$  sont linéaires, le coefficient de corrélation ne varie pas avant et après les transformations :  $\rho_{X_1 X_2} = \rho_{Z_1 Z_2}$ .

Dans notre cas, les variables résultant de la transformation à l'étape 1) sont centrées réduites. La formule (III-33) peut alors se simplifier :

$$\rho_{X_1 X_2} \equiv \sqrt{1 + T_{Z_1}^2(\mu_{Z_1})} \sqrt{1 + T_{Z_2}^2(\mu_{Z_2})} \rho_{Z_1 Z_2} - T_{Z_1}(\mu_{Z_1}) T_{Z_2}(\mu_{Z_2}) \quad (\text{III-34})$$

### III.2.3.2. Détermination du point de fonctionnement

L'indice de fiabilité  $\beta_{HL}$  est déterminé par le point de fonctionnement qui est le point le plus proche de l'origine sur la surface de ruine dans l'espace standardisé. La détermination du point de fonctionnement est mathématiquement modélisée par la minimisation de la distance sous une contrainte traduisant l'appartenance à la surface de ruine (Shinozuka, 1983) :

$$\min \sqrt{\underline{\mathbf{U}}^T \underline{\mathbf{U}}} = \min \|\underline{\mathbf{U}}\| \quad \text{sous la contrainte} \quad g_{\mu}(\underline{\mathbf{U}}) = 0 \quad (\text{III-35})$$

A cause de la complexité de la fonction d'état limite et de la transformation, il est difficile, voire impossible de résoudre ce type de problème analytiquement. On pense naturellement à une méthode numérique. Parmi les diverses solutions, la méthode dite "FORM" — "First-Order Reliability Method" en anglais — est souvent utilisée pour les fonctions d'état limite ayant des dérivées partielles continues (Hohenbichler et Rackwitz, 1983). L'algorithme s'effectue suivant les étapes ci-dessous.

- 1) Choisir un point initial quelconque  $\underline{z}_0$  comme une approximation du point de fonctionnement  $\underline{z}^*$ . On choisit généralement le point de coordonnées égales aux moyennes.
- 2) Transformer les variables de base en variables standardisées au point de fonctionnement (suivant les étapes expliquées dans le paragraphe précédent).
- 3) Approximer la fonction d'état limite par les deux premiers termes de la série de Taylor développée par rapport au point  $\underline{u}^*$  dans l'espace transformé, en utilisant la matrice Jacobienne de la transformation inverse  $J_{T^{-1}}$ .

$$g(\underline{\mathbf{Z}}) = g(T^{-1}(\underline{\mathbf{U}})) = g_{\mu}(\underline{\mathbf{U}}) \approx g(\underline{\mathbf{z}}^*) + \nabla \underline{g}^T(\underline{\mathbf{z}}^*) \left. J_{T^{-1}} \right|_{\underline{\mathbf{u}}^*, \underline{\mathbf{z}}^*} (\underline{\mathbf{U}} - \underline{\mathbf{u}}^*) \quad (\text{III-36})$$

où  $\nabla \underline{g}^T(\underline{\mathbf{z}}^*)$  exprime le vecteur des dérivées partielles  $\left[ \frac{\partial g}{\partial Z_1}, \dots, \frac{\partial g}{\partial Z_n} \right]_{\underline{\mathbf{z}}^*}$ .

- 4) Déterminer le point le plus proche de l'origine de la fonction d'état limite approchée qui est un hyperplan. Le vecteur unitaire orthogonal correspondant s'obtient après la normalisation :

$$\underline{\alpha} = \frac{\underline{J}_{T^{-1}}^{\tau} \big|_{\underline{u}^*, z^*} \nabla \underline{g}(z^*)}{\left\| \underline{J}_{T^{-1}}^{\tau} \big|_{\underline{u}^*, z^*} \nabla \underline{g}(z^*) \right\|} \quad (\text{III-37})$$

ainsi que la distance de cet hyperplan à l'origine, en divisant le terme constant par la norme du vecteur orthogonal :

$$\beta = \frac{g(z^*) - \nabla \underline{g}^{\tau}(z^*) \underline{J}_{T^{-1}} \big|_{\underline{u}^*, z^*} \underline{u}^*}{\left\| \underline{J}_{T^{-1}}^{\tau} \big|_{\underline{u}^*, z^*} \nabla \underline{g}(z^*) \right\|} \quad (\text{III-38})$$

Le point le plus proche de l'origine de la fonction d'état limite approchée est obtenu par

$$\underline{u}^{**} = -\beta \underline{\alpha} \quad (\text{III-39})$$

- 5) Faire la transformation inverse pour trouver le point  $z^{**}$  dans l'espace de base.
- 6) Comparer la distance, soit entre les deux points  $z^*$  et  $z^{**}$  dans l'espace de base, soit entre  $\underline{u}^*$  et  $\underline{u}^{**}$  dans l'espace transformé, à un pas fixé  $\varepsilon$ . Si cette distance est supérieure à  $\varepsilon$ , le point  $z^{**}$  est considéré comme une nouvelle approximation du point de fonctionnement et on retourne à l'étape 2). Sinon, on arrête la procédure de recherche et l'on retient  $z^*$  comme point de fonctionnement et  $\beta_{HL} = \beta$ .

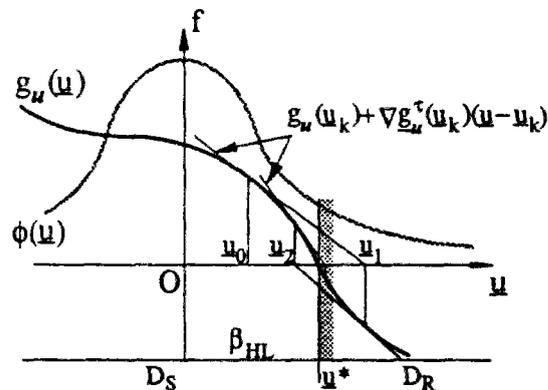


Fig. III-5 Schématisation de la convergence (dans l'espace standardisé)

En accord avec la transformation des variables décrite dans le paragraphe précédent, la matrice Jacobienne à l'étape 3) est calculée comme suit :

$$\underline{J}_{T^{-1}} = \frac{\partial(\underline{Z})}{\partial(\underline{X})} \frac{\partial(\underline{X})}{\partial(\underline{U})} = \begin{bmatrix} \frac{\partial Z_1}{\partial X_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{\partial Z_n}{\partial X_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial U_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ \frac{\partial X_n}{\partial U_1} & \dots & \frac{\partial X_n}{\partial U_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\phi(X_1)}{f_{Z_1}(Z_1)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{\phi(X_n)}{f_{Z_n}(Z_n)} \end{bmatrix} \underline{A} \quad (\text{III-40})$$

où la matrice triangulaire inférieure  $\underline{A}$  est le résultat de la factorisation de Cholesky de la matrice de corrélation :  $\rho_{\underline{X}} = \underline{A} \underline{A}^T$ . Le vecteur  $\underline{X}$  est un résultat intermédiaire au cours de la transformation. Sa loi de probabilité est normale centrée réduite. A l'étape 5), il est souvent difficile de déterminer la fonction de répartition inverse  $F_{Z_i}^{-1}$  (i peut être 1, ..., n) au niveau de la transformation de  $\underline{X}$  à  $\underline{Z}$ . Cependant, on exploite l'approximation (Ditlevsen, 1981) :

$$z_i^{**} \cong z_i^* + \frac{\phi(x_i^*)}{f_{Z_i}(z_i^*)} (x_i^{**} - x_i^*) = z_i^* + \frac{\phi(\Phi^{-1}(F_{Z_i}(z_i^*)))}{f_{Z_i}(z_i^*)} (x_i^{**} - \Phi^{-1}(F_{Z_i}(z_i^*))) \quad (\text{III-41})$$

où le point  $\underline{x}^*$  correspond au point  $\underline{u}^*$ , et  $\underline{x}^{**}$  à  $\underline{u}^{**}$ .

### III.2.3.3. Points de fonctionnement locaux et stabilité du résultat

La méthode de premier ordre s'adapte à une fonction d'état limite non linéaire dans laquelle les dérivées partielles sont continues. Sur la surface d'état limite, il peut exister plusieurs points de fonctionnement dans l'espace standardisé, c'est-à-dire des points qui ont une valeur de densité de probabilité relativement grande par rapport aux autres situés à leur côté, même si la surface est convexe. Parmi ces points, celui qui dispose de la densité la plus grande est défini comme le "point de fonctionnement global", et les autres des "points de fonctionnement locaux".

A partir d'un point initial, l'itération converge vers un de ces points de fonctionnement locaux ou global. Les différents points de fonctionnement peuvent donc être trouvés en fonction des données initiales. Pour approcher le point de fonctionnement global, on peut répéter le calcul en partant de points initiaux différents et choisir le résultat le plus proche de l'origine (Dolinsky, 1983), mais l'erreur du calcul est difficile à évaluer. Dans le cas où il n'existe qu'un point de fonctionnement, l'itération converge vers ce point quel que soit les données initiales. Le résultat est unique.

### **III.3. FACTEURS DE SENSIBILITE ET BORNE DE LA PROBABILITE**

#### **III.3.1. Facteurs de sensibilité et notion d'élasticité**

Parfois, la connaissance de la probabilité de ruine peut être complétée par celle de la sensibilité de l'indice  $\beta$  par rapport à certaines variables de base, aux paramètres de leurs lois de probabilité ou aux paramètres de la fonction d'état limite. La sensibilité est mesurée généralement à l'aide d'un facteur de sensibilité défini d'une manière suivante.

Une variation d'un des paramètres provoque une variation de l'indice  $\beta$ , et de la probabilité de ruine. Pour un ensemble de paramètres  $\underline{\omega} = \{\omega_1, \dots, \omega_m\}^\tau$  et un indice  $\beta$  fonction de ces paramètres, si  $\beta(\underline{\omega})$  est continûment différentiable par rapport à  $\omega_j$  ( $j = 1, \dots, m$ ), le facteur de sensibilité est égal à la dérivée partielle :

$$\alpha_{\omega_j} = \frac{\partial \beta(\underline{\omega})}{\partial \omega_j} \quad (\text{III-42})$$

Avec cette définition, on peut estimer l'influence des paramètres sur l'approximation de la probabilité de ruine déterminée par la formule (III-22) :

$$\frac{\partial P_R(\underline{\omega})}{\partial \omega_j} \equiv \frac{\partial}{\partial \omega_j} \Phi(-\beta(\underline{\omega})) = -\phi(-\beta(\underline{\omega})) \frac{\partial \beta(\underline{\omega})}{\partial \omega_j} = -\alpha_{\omega_j} \phi(\beta(\underline{\omega})) \quad (\text{III-43})$$

L'indice de fiabilité  $\beta(\underline{\omega})$  est représenté dans l'espace standardisé par la distance de l'origine au point de fonctionnement, lui-même fonction des paramètres. En partageant l'ensemble des paramètres en deux groupes : ceux de la fonction d'état limite  $\underline{\omega}_g$  et ceux des lois de probabilité  $\underline{\omega}_T$  liés à de la transformation, on calcule le facteur de sensibilité par rapport à ces derniers de telle sorte que l'évaluations additionnelles de la fonction d'état limite ne soient pas nécessaires (Hohenbichler et Rackwitz, 1986).

$$\begin{aligned} \alpha_{\omega_j} &= \frac{\partial \beta(\underline{\omega})}{\partial \omega_j} = \frac{\partial}{\partial \omega_j} \sqrt{\underline{u}^{*\tau}(\underline{\omega}) \underline{u}^*(\underline{\omega})} = \frac{1}{\beta(\underline{\omega})} \underline{u}^{*\tau}(\underline{\omega}) \frac{\partial}{\partial \omega_j} \underline{u}^*(\underline{\omega}) \\ &= \frac{1}{\beta(\underline{\omega})} \underline{u}^{*\tau}(\underline{\omega}) \frac{\partial}{\partial \omega_j} T(\underline{z}^*(\underline{\omega}_g), \underline{\omega}_T) \end{aligned} \quad (\text{III-44})$$

avec  $\underline{\omega} = \{\underline{\omega}_g^\tau, \underline{\omega}_T^\tau\}^\tau$  et  $\omega_j \in \underline{\omega}_T$ .

Dans le cas où les variables de base sont indépendantes, la transformation d'une des variables ne concerne pas les autres. Le calcul du facteur de sensibilité se simplifie :

$$\alpha_{\omega_{ij}} = \frac{u_i^*(\underline{\omega})}{\beta(\underline{\omega})} \frac{\partial}{\partial \omega_{ij}} T_i(z_i^*(\underline{\omega}_g), \underline{\omega}_{T_i}) \quad (\omega_{ij} \in \underline{\omega}_{T_i}) \quad (\text{III-45})$$

Un résultat remarquable s'obtient pour les variables de base normales et indépendantes, dont les paramètres de la loi sont la moyenne  $\mu_i$  et l'écart-type  $\sigma_i$ . La transformation des variables est donnée par  $U_i = T_i(Z_i, \mu_i, \sigma_i) = \frac{Z_i - \mu_i}{\sigma_i}$ . D'après la relation entre le vecteur orthogonal unitaire, l'indice  $\beta$  et les coordonnées du point de fonctionnement (III-39), les facteurs de sensibilité par rapport à la moyenne et à l'écart-type sont :

$$\alpha_{\mu_i} = -\frac{u_i^*(\underline{\omega})}{\beta(\underline{\omega})} \frac{1}{\sigma_i} = \frac{\alpha_i}{\sigma_i} \quad (\text{III-46})$$

$$\alpha_{\sigma_i} = -\frac{u_i^*(\underline{\omega})}{\beta(\underline{\omega})} \frac{z_i^* - \mu_i}{\sigma_i^2} = -\frac{\alpha_i^2 \beta(\underline{\omega})}{\sigma_i} \quad (\text{III-47})$$

On conclut de ces calculs que la composante du vecteur orthogonal unitaire  $\alpha_i$ , équivalant au cosinus directeur du plan tangent au point de fonctionnement, est une mesure de l'influence de la moyenne et de l'écart-type d'une variable, donc de la variable elle-même sur  $\beta$ . Une variable avec une valeur absolue  $\alpha_i$  grande est considérée comme stochastiquement importante.

Par la formule (III-44), on peut évaluer aussi la sensibilité de  $\beta$  par rapport aux paramètres de la fonction d'état limite. Mais, à cause du caractère implicite de la fonction  $z^*(\underline{\omega}_g)$ , on préfère calculer le facteur de sensibilité par rapport aux paramètres  $\underline{\omega}_g$  à partir de la fonction d'état limite écrite sous la forme  $g(\underline{Z}, \underline{\omega}_g) = g(T^{-1}(\underline{U}, \underline{\omega}_T), \underline{\omega}_g)$ . D'après la formule (III-38), l'indice de fiabilité  $\beta$  est déterminé par linéarisation de la fonction d'état limite au point de fonctionnement.

$$\beta(\underline{\omega}) = \frac{g(z^*, \underline{\omega}_g) - \nabla \underline{g}^T(z^*, \underline{\omega}_g) \underline{J}_{T^{-1}}(z^*, \underline{u}^*, \underline{\omega}_T) \underline{u}^*}{\left\| \underline{J}_{T^{-1}}^T(z^*, \underline{u}^*, \underline{\omega}_T) \nabla \underline{g}(z^*, \underline{\omega}_g) \right\|}$$

La dérivation partielle de la fonction précédente donne le facteur de sensibilité. En négligeant les termes dérivés du deuxième ordre au niveau de la fonction d'état limite, une approche de ce facteur est :

$$\alpha_{\omega_j} \equiv \frac{\partial g(z^*, \underline{\omega}_g)}{\partial \omega_j} \frac{1}{\left\| \underline{J}_{T^{-1}}^T(z^*, \underline{u}^*, \underline{\omega}_T) \nabla \underline{g}(z^*, \underline{\omega}_g) \right\|} \quad (\omega_j \in \underline{\omega}_g) \quad (\text{III-48})$$

Notons que le vecteur des dérivées  $\nabla \underline{g}(z^*, \underline{\omega}_g)$  n'est relatif qu'aux variables  $\underline{Z}$  et le point de fonctionnement  $z^*$  ou  $\underline{u}^*$  est constant dans la dérivation précédente.

Le facteur de sensibilité sous la forme normalisée, appelé "*élasticité*", représente une mesure identique de la sensibilité pour des valeurs différentes de l'indice  $\beta$  et du paramètre concerné.

$$e_{\omega_j} = \frac{\partial \beta(\underline{\omega})}{\partial \omega_j} \frac{\omega_j}{\beta(\underline{\omega})} = \alpha_{\omega_j} \frac{\omega_j}{\beta(\underline{\omega})} \quad (\text{III-49})$$

### III.3.2. Borne supérieure de la probabilité de ruine

D'après la formule (III-22), on approche la probabilité de ruine par celle correspondant à une fonction d'état limite linéaire, avec une distance  $\beta$  à l'origine dans l'espace standardisé. Cette approximation donne une borne supérieure de la probabilité de ruine pour une fonction d'état limite concave. Par contre, elle donne une borne inférieure pour une fonction convexe, ce qui est le cas le plus général malheureusement.

Plus généralement, la probabilité de ruine approximée en prenant une hypersphère de rayon  $\beta$  centrée à l'origine comme fonction d'état limite approchée constitue une borne supérieure quelle que soit la fonction d'état limite. Cette hypersphère s'écrit :

$$M = g_u(\underline{U}) = \beta^2 - \underline{U}^T \underline{U} = \beta^2 - \sum_{i=1}^n U_i^2 = 0 \quad (\text{III-50})$$

La somme des carrés des variables normales centrées réduites et indépendantes,  $U_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ), suit la loi de Pearson, dite "*loi de  $\chi^2$* ", de degré égal au nombre de variables sommées. Alors, la probabilité de ruine peut être calculée par :

$$P_R = P(M < 0) = P\left(\sum_{i=1}^n U_i^2 > \beta^2\right) = 1 - F_{\chi_n^2}(\beta^2) \quad (\text{III-51})$$

où  $F_{\chi_n^2}(\cdot)$  est la fonction de répartition d'une variable de  $\chi^2$  à  $n$  degrés. Cette borne supérieure de la probabilité de ruine est fatiguée en fonction de la dimension  $n$  dans la figure ci-après. La courbe en pointillés représente la probabilité de ruine correspondante à une droite  $\Phi(-\beta)$ .

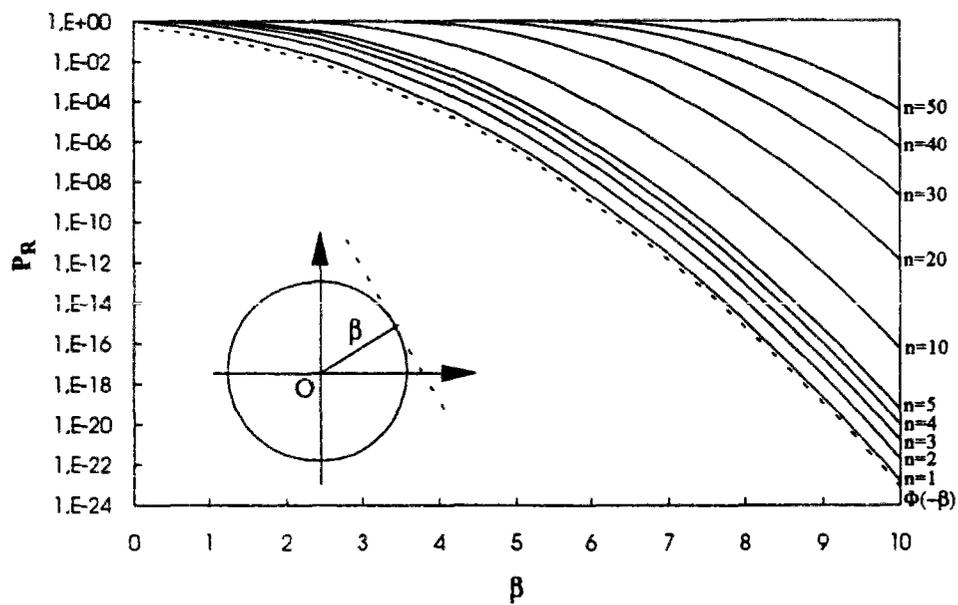


Fig. III-6 Borne supérieure de la probabilité de ruine

Dans la plupart des cas, cette borne supérieure est beaucoup plus éloignée de la probabilité réelle que celle obtenue par l'hyperplan.

#### III.4. CONCLUSION

D'après les rappels de la théorie de la fiabilité dans ce chapitre, nous allons calculer l'indice de fiabilité et la probabilité de ruine de la liaison raidisseur - semelle. Pour éviter les cas où l'algorithme de Rackwitz est mis en défaut par des minimums locaux nombreux, nous développerons une méthode de calcul explicite analytique de l'indice  $\beta$  en appliquant le modèle de Miner.

## CHAPITRE IV

### APPROCHE PROBABILISTE DE LA LOI DE DOMMAGE

Ce chapitre présente une méthode d'évaluation du niveau du risque de ruine d'un détail donné d'une structure, soumise à la sollicitation due au trafic routier pendant une durée  $D$ , en utilisant la loi de Miner (Jacob et Jiang, 1993). Il s'agit de calculer la probabilité pour que la ruine du détail intervienne avant le temps  $D$ , en plaçant l'origine des temps à la date de mise en service de la structure. La résistance du détail en fatigue est déterminée à l'aide des essais de laboratoire dont la dispersion conduit à une forme probabiliste. La caractérisation de la sollicitation s'appuie sur les mesures du trafic routier réel.

Cette probabilité sera déterminée par l'indice de fiabilité  $\beta$  de Hasofer-Lind, défini par la distance minimale, dans l'espace probabiliste standardisé des sollicitations et des résistances, de l'origine à la surface de ruine du détail  $g(\mathbf{Z}) = 0$  donnée par la fonction d'état limite.

#### IV.1. RESISTANCE EN FATIGUE D'UN DETAIL

##### IV.1.1. Modèle de probabilité

La résistance à la fatigue d'un détail de structure métallique est définie par le nombre de cycles  $N$  d'amplitude  $\Delta\sigma$  subis à sa rupture. Les essais en laboratoire ont montré que ce nombre  $N$  peut être convenablement évalué (Brozzetti, Ryan et Sedlacek, 1989) par la formule :

$$N = C \Delta\sigma^{-m} \quad (\text{IV-1})$$

où les paramètres  $C$  et  $m$  sont déterminés expérimentalement, et dépendent du détail de la structure et des conditions de soudage.

La formule (IV-1) représente une courbe  $\Delta\sigma$ - $N$  dite courbe de Wöhler. Dans des coordonnées bi-logarithmiques, cette courbe est sous une forme linéaire :

$$\ln(N) = \ln(C) - m \ln(\Delta\sigma) \quad (\text{IV-1}')$$

Cependant, du fait de la dispersion des matériaux et de l'erreur des essais, on considérera mathématiquement, dans les formules (IV-1'),  $\ln(N)$  comme une variable aléatoire normale  $Y$  caractérisant la résistance, fonction de  $\Delta\sigma$  noté  $x$ ,  $\ln(C)$  et  $m$  étant les paramètres inconnus. La variable  $Y$  sera alors supposée vérifier le modèle linéaire :

$$Y = \ln(C) - m x + \varepsilon \quad (\text{IV-2})$$

dans lequel  $\varepsilon$  est une variable aléatoire normale centrée d'écart-type  $\sigma_\varepsilon$ , et pour chaque valeur de  $x$ ,  $Y$  est une variable aléatoire normale  $\mathcal{N}(\ln(C) - m x, \sigma_\varepsilon)$ .

Dans la plupart des cas, la résistance à la fatigue d'un détail peut être exprimée plus précisément par trois portions de droites dans l'espace des coordonnées bi-logarithmique, en introduisant la limite de fatigue sous amplitude constante  $\Delta\sigma_L$ , qui correspond au changement de pente de  $m_2$  à  $m_1$ , et la limite de troncature  $\Delta\sigma_T$ , au-dessous de laquelle les cycles ne contribuent plus à la fatigue :

$$\ln(N) = \begin{cases} \infty & (\Delta\sigma < \Delta\sigma_T) \\ \ln(C_1) - m_1 \ln(\Delta\sigma) & (\Delta\sigma_T \leq \Delta\sigma < \Delta\sigma_L) \\ \ln(C_2) - m_2 \ln(\Delta\sigma) & (\Delta\sigma_L \leq \Delta\sigma) \end{cases} \quad (\text{IV-3})$$

où  $C_1$  peut être déterminé à partir des trois autres paramètres :

$$C_1 = C_2 \Delta\sigma_L^{(m_1 - m_2)}$$

Le modèle probabiliste s'écrit :

$$Y = \begin{cases} \infty & (x < \ln(\Delta\sigma_T)) \\ \ln(C_1) - m_1 x + \varepsilon & (\ln(\Delta\sigma_T) \leq x < \ln(\Delta\sigma_L)) \\ \ln(C_2) - m_2 x + \varepsilon & (\ln(\Delta\sigma_L) \leq x) \end{cases} \quad (\text{IV-4})$$

#### IV.1.2. Dommage dû à un cycle d'amplitude de contrainte

Selon le modèle précédent de résistance, le nombre de cycles  $N$  d'amplitude  $\Delta\sigma$  à la rupture est donc une variable aléatoire lognormale. Une formule identique pour les deux modèles peut s'écrire de la façon suivante :

$$N = \exp(Y) = f(\Delta\sigma) e^\varepsilon \quad (\text{IV-5})$$

Pour le modèle (IV-2) :  $f(\Delta\sigma) = C \Delta\sigma^{-m}$

et pour le modèle (IV-4) :

$$f(\Delta\sigma) = \begin{cases} \infty & (\Delta\sigma < \Delta\sigma_T) \\ C_1 \Delta\sigma^{-m_1} & (\Delta\sigma_T \leq \Delta\sigma < \Delta\sigma_L) \\ C_2 \Delta\sigma^{-m_2} & (\Delta\sigma_L \leq \Delta\sigma) \end{cases}$$

D'après la loi de Miner, le dommage dû à un seul cycle d'amplitude  $\Delta\sigma$  est défini par le nombre inverse de  $N$  :

$$D_c(\Delta\sigma) = \frac{1}{N} = \frac{1}{f(\Delta\sigma)} e^{-\epsilon} \quad (\text{IV-6})$$

#### IV.1.3. Estimation des lois de probabilité issues de la dispersion des essais

Les estimateurs des paramètres, soit  $\ln(\hat{C})$  et  $\hat{m}$  du modèle (IV-2), soit  $\ln(\hat{C}_1)$ ,  $\ln(\hat{C}_2)$ ,  $\hat{m}_1$  et  $\hat{m}_2$  du modèle (IV-4), sont obtenus à l'aide d'une régression linéaire, à partir d'un certain nombre d'observations indépendantes de couples  $(Y_i, x_i)$ .

Pour le modèle à une seule pente, en utilisant les formules (A-12) et (A-13) de l'annexe A les estimateurs peuvent s'écrire directement.

$$\begin{bmatrix} \ln(\hat{C}) \\ \hat{m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Y} + \hat{m} \bar{x} \\ -\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(Y_i - \bar{Y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \end{bmatrix} \quad (\text{IV-7})$$

$$\hat{\sigma}_\epsilon^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n (Y_i - \ln(\hat{C}) + \hat{m} x_i)^2 \quad (\text{IV-8})$$

où  $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln(\Delta\sigma_i)$  et  $\bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln(N_i)$ .

Pour le modèle à trois pentes, on procède comme il suit : d'abord, afin d'avoir des paramètres indépendants, on écrit le paramètre  $C_1$  en fonction des trois autres paramètres :

$$Y = \begin{cases} \ln(C_2) - (m_2 - m_1) \ln(\Delta\sigma_L) - m_1 x + \epsilon \\ \ln(C_2) - m_2 x + \epsilon \end{cases} \begin{cases} (x < \ln(\Delta\sigma_T)) \\ (\ln(\Delta\sigma_T) \leq x < \ln(\Delta\sigma_L)) \\ (\ln(\Delta\sigma_L) \leq x) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \ln(C_2) - m_2 \ln(\Delta\sigma_L) + m_1 (\ln(\Delta\sigma_L) - x) + \epsilon & (x < \ln(\Delta\sigma_T)) \\ \ln(C_2) - m_2 x + m_1 0 + \epsilon & (\ln(\Delta\sigma_T) \leq x < \ln(\Delta\sigma_L)) \\ \ln(C_2) - m_2 x + m_1 0 + \epsilon & (\ln(\Delta\sigma_L) \leq x) \end{cases}$$

Ensuite, en groupant les  $n$  réalisations des couples  $(Y_i, x_i)$  en trois groupes en accord avec les points de discontinuité  $\ln(\Delta\sigma_T)$  et  $\ln(\Delta\sigma_L)$ , on remplit le vecteur  $\underline{Y}$  et la matrice  $\underline{X}$  du modèle de régression linéaire (A-16) de la manière suivante :

$$\underline{Y} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_{n_2} \\ Y_{n_2+1} \\ \vdots \\ Y_{n_2+n_1} \end{bmatrix}, \underline{X} = \begin{bmatrix} 1 & -x_1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & -x_{n_2} & 0 \\ 1 & -\ln(\Delta\sigma_L) & \ln(\Delta\sigma_L) - x_{n_2+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & -\ln(\Delta\sigma_L) & \ln(\Delta\sigma_L) - x_{n_2+n_1} \end{bmatrix} \begin{array}{l} x_i \geq \ln(\Delta\sigma_L) \\ \text{Limite } \ln(\Delta\sigma_L) \\ \ln(\Delta\sigma_L) > x_i \geq \ln(\Delta\sigma_T) \end{array} \quad (\text{IV-9})$$

où  $n_2$  est le nombre des réalisations tombant dans l'intervalle  $[\ln(\Delta\sigma_L), \infty)$  et  $n_1$  celui dans l'intervalle  $[\ln(\Delta\sigma_T), \ln(\Delta\sigma_L))$ . Les estimateurs  $\ln(\hat{C}_2)$ ,  $\hat{m}_2$  et  $\hat{m}_1$  s'obtiennent finalement par la formule (A-17) en introduisant ce vecteur  $\underline{Y}$  et cette matrice  $\underline{X}$ . A partir de ces trois paramètres, on peut déterminer  $\hat{\sigma}_\varepsilon$  et  $\ln(\hat{C}_1)$  facilement.

$$\ln(\hat{C}_1) = \ln(\hat{C}_2) - (\hat{m}_2 - \hat{m}_1) \ln(\Delta\sigma_L) \quad (\text{IV-10})$$

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{1}{n-3} \left( \sum_{i=1}^{n_2} (Y_i - \ln(\hat{C}_2) + \hat{m}_2 x_i)^2 + \sum_{i=n_2+1}^{n_2+n_1} (Y_i - \ln(\hat{C}_1) + \hat{m}_1 x_i)^2 \right) \quad (\text{IV-11})$$

## IV.2. ACTION ET SOLLICITATION DE FATIGUE

### IV.2.1. Définitions de l'action et de la sollicitation de fatigue

Au passage du trafic routier, un pont se charge au passage soit d'un seul véhicule soit d'un groupe de véhicules. L'action est définie par ce groupe de véhicules sur le pont. Dans un trafic routier, les séparations de groupes seront définies par l'absence de véhicules sur le pont. Un trafic routier est donc constitué par de nombreuses actions qui agissent successivement sur le pont.

La sollicitation en fatigue pour *un détail* (nous considérons essentiellement le cas des assemblages soudés) d'un pont métallique est le résultat d'un historique de contraintes cycliques dû au trafic appliqué jusqu'à la ruine du détail. Cet historique peut se couper en "sous-historiques" d'actions selon la séparation des groupes, et les résultats de ces "sous-historiques" successifs sont alors vus comme un processus discret.

Dans cette étude, la sollicitation en fatigue d'une action — le résultat d'un "sous-historique" — est de la forme du dommage cumulé d'une action, déterminé par la somme des dommages dus à un cycle de contrainte d'après la formule (IV-6).

$$D_a = \sum^{N_c} D_c(\Delta\sigma) = \left( \sum^{N_c} \frac{1}{f(\Delta\sigma)} \right) e^{-\varepsilon} \quad (\text{IV-12})$$

Dans la formule les variables qui provoquent l'incertitude sur le dommage cumulé d'une action sont le caractère de la dispersion d'essais  $\epsilon$  de la résistance du détail, et les amplitudes  $\Delta\sigma$  et leur nombre  $N_c$  de la sollicitation. Visiblement, la partie entre les parenthèses de la formule représente la sollicitation d'une action.

$$D_a' = \sum^{N_c} \frac{1}{f(\Delta\sigma)} \quad (IV-13)$$

Le nombre d'actions  $N_a$  contenues dans des trafics pendant une période T (par exemple une semaine) varie en fonction de la route et des périodes différentes. Nous supposons donc que  $N_a$  est une variable aléatoire, et nous calculons le dommage cumulé pendant la période par la formule suivante :

$$D_p = \sum^{N_a} D_a = \left( \sum^{N_a} D_a' \right) e^{-\epsilon} = D_p' e^{-\epsilon} \quad (IV-14)$$

Notez que la définition de  $D_p'$  est :

$$D_p' = \sum^{N_a} D_a' = \sum^{N_a} \sum^{N_c} \frac{1}{f(\Delta\sigma)} \quad (IV-15)$$

#### IV.2.2. Hypothèses sur la distribution des sollicitations

Un certain nombre d'hypothèses seront faites sur les variables aléatoires décrites dans le paragraphe précédent, permettant d'une part une estimation des paramètres de leur distribution, d'autre part la possibilité de mener les calculs conduisant aux indices de fiabilité.

Pour un trafic durant toute la vie du service d'une structure, qui traverse évidemment plusieurs périodes, deux processus discrets sont construits : l'un par la sollicitation d'une action  $D_a'$ , l'autre par les nombres d'actions  $N_a$  dans les périodes.

**H1 :** Ces deux processus sont supposés stationnaires, c'est-à-dire que les moyennes de  $D_a'$  et de  $N_a$  sont constantes dans toutes les périodes.

Une période assez longue (minimum une semaine) doit être choisie pour que la séquence observée soit représentative.

**H2 :** Les  $D_a'$  sont indépendants, c'est-à-dire que les passages du groupe de véhicules agissent indépendamment sur le pont, et les  $D_a'$  suivent une même loi de probabilité.

L'indépendance entre les nombres d'actions  $N_a$  des périodes différentes peut être conduite par cette hypothèse.

**H3 :** Les  $N_a$  sont indépendants et suivent une même loi de probabilité.

**H4 :** Le nombre d'actions  $N_a$  est indépendant de la sollicitation d'une action  $D_a'$ .

#### IV.2.3. Estimation des paramètres statistiques de la sollicitation de fatigue

Nous disposons d'enregistrements du trafic routier réel, effectués sur un certain nombre de routes et autoroutes du réseau français par les systèmes de pesage en marche. Nous avons choisi, pour notre étude, les trafics des autoroutes A1 à Survilliers, A6 à Auxerre, A31 à Autreville et A31 à Langres, ainsi que des routes nationales RN23 à Angers, RN182 à Tancarville et RN205 à Chamonix, qui sont des trafics relativement lourds en Europe, observés par périodes d'une semaine ( $T =$  une semaine).

Nous avons considéré plusieurs échantillons d'une semaine de trafic. Dans certains échantillons, il existe les "trous" d'enregistrement dus à des coupures de courant sur le site de pesage, ou à la saturation des supports d'enregistrement (place mémoire nulle). Nous avons comblé ces trous par la reproduction d'enregistrements du même trafic, effectués à la même heure, et au même jour, lors de la mesure d'une autre semaine. Nous obtenons ainsi treize enregistrements du trafic d'une semaine complète, pendant les années 84, 86, 87, 88, 89 et 90.

Le logiciel CASTOR-LCPC (Eymard et Jacob, 1989) permet de calculer, à partir des lignes ou surfaces d'influence du détail, l'histogramme des variations de contrainte sous l'effet du trafic, établissant ainsi des classes d'étendues de cycles de contrainte. La décomposition de l'historique des contraintes en cycles nécessite une méthode de comptage. Celle qui est utilisée ici est la méthode "de la goutte d'eau", ou "rain-flow" (Chabrolin, 1989), qui a montré un bon accord avec les expériences de laboratoire.

Un nouveau module a été développé dans CASTOR-LCPC pour distinguer les actions contenues dans les trafics de semaine, compter le nombre d'actions dans ces échantillons et calculer le dommage cumulé d'actions correspondant au détail, en prenant directement le résultat du comptage "de la goutte d'eau" sans passer par l'histogramme.

A partir des résultats du comptage effectué sur les  $n_e$  échantillons, nous pouvons procéder à l'estimation de la loi probabiliste décrivant le nombre d'actions d'une semaine  $N_a$  :

$$\hat{\mu}_{N_a} = \bar{N}_a = \frac{1}{n_e} \sum_{i=1}^{n_e} N_{a,i} \quad (IV-16)$$

$$\hat{\sigma}_{N_a}^2 = \frac{1}{n_e - 1} \sum_{i=1}^{n_e} (N_{a,i} - \bar{N}_a)^2 = \frac{1}{n_e - 1} \left( \sum_{i=1}^{n_e} N_{a,i}^2 - n_e \bar{N}_a^2 \right) \quad (\text{IV-17})$$

où  $\hat{\mu}_{N_a}$  et  $\hat{\sigma}_{N_a}$  sont respectivement les estimateurs de la moyenne et d'écart-type. Nous pouvons également estimer la moyenne et la variance de  $D_a'$  en utilisant les résultats du calcul du dommage cumulé d'une action :

$$\hat{\mu}_{D_a'} = \bar{D}_a' = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n D_{a,i}' \quad (\text{IV-18})$$

$$\hat{\sigma}_{D_a'}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (D_{a,i}' - \bar{D}_a')^2 = \frac{1}{n-1} \left( \sum_{i=1}^n D_{a,i}'^2 - n \bar{D}_a'^2 \right) \quad (\text{IV-19})$$

où n est le nombre de toutes les actions dans les  $n_e$  trafics d'une semaine.

### **IV.3. FONCTION D'ETAT LIMITE EN FATIGUE ISSUE DE LA LOI DE MINER**

#### **IV.3.1. Construction de la fonction d'état limite**

En fatigue, la ruine d'une structures peut être provoquée par l'accumulation de dommages. Une structure avec une durée de service D plus longue prendra plus de risque. Pour cette raison, la fonction d'état limite dépend de la durée du service D, ainsi que le niveau du risque de ruine.

Le dommage cumulé pendant la durée D, évalué par la somme des dommages périodiques, établit une fonction d'état limite :

$$D_D = \sum^s D_p = \left( \sum^s D_p' \right) e^{-\epsilon} = \left( \sum^s \sum^{N_a} D_a' \right) e^{-\epsilon} \quad (\text{IV-20})$$

où s, nommé "*coefficient de la durée*", est le nombre de périodes T dans la durée D ( $s = \frac{D}{T}$ ). Les variables aléatoires  $N_a$  et  $D_a'$  sont liées à la sollicitation,  $\epsilon$  caractérise la résistance.

Le critère de ruine, décrit au travers de cette fonction d'état limite, est que le dommage cumulé de la durée D doit être inférieur ou égal à un.

$$D_D = \left( \sum^s D_p' \right) e^{-\epsilon} = \left( \sum^s \sum^{N_a} D_a' \right) e^{-\epsilon} \leq 1 \quad (\text{IV-21})$$

### IV.3.2. Détermination de l'indice de fiabilité $\beta$

L'indice de fiabilité de Hasofer-Lind est défini par la distance minimale de l'origine à la surface de ruine dans l'espace standardisé (celui des variables normales centrées réduites). Les étapes suivantes sont faites pour transformer la fonction d'état limite de l'espace physique (de base) à l'espace standardisé et chercher ainsi le point le plus proche de l'origine sur la surface de ruine définie par la fonction d'état limite transformée.

#### IV.3.2.1. Application du théorème central limite

La partie entre les parenthèses de la fonction d'état limite (IV-20) est une somme de  $s$  variables aléatoires  $D_p'$  indépendantes et de même loi de probabilité d'après les hypothèses H1, H2 et H3. Pour une période  $T$  conventionnelle d'une semaine, et pour des durées de service des structures de plusieurs dizaines d'années,  $s$  est toujours un nombre assez grand pour utiliser le théorème central limite.

Selon le théorème central limite, la somme des nombreuses variables aléatoires indépendantes, ayant la même loi de probabilité, s'approche d'une variable normale.

Soient la moyenne  $\mu_{D_p'}$  et l'écart-type  $\sigma_{D_p'}$  de la variable  $D_p'$ . Le dommage cumulé de la durée  $D$  est calculé comme suit :

$$D_D = \left( \sum^s D_p' \right) e^{-\varepsilon} = \left( \sqrt{\sum^s \sigma_{D_p'}^2} \frac{\sum^s (D_p' - \mu_{D_p'})}{\sqrt{\sum^s \sigma_{D_p'}^2}} + \sum^s \mu_{D_p'} \right) e^{-\varepsilon} \quad (IV-22)$$

$$\cong (\sqrt{s} \sigma_{D_p'} U_S + s \mu_{D_p'}) e^{-\varepsilon}$$

où  $U_S$ , caractérisant la sollicitation, est une variable normale centrée réduite. L'approximation utilisée dans le calcul précédent est :

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \left( \frac{\sum^s (D_p' - \mu_{D_p'})}{\sqrt{s} \sigma_{D_p'}} \right) = U_S \sim \mathcal{N}(0,1) \quad (IV-23)$$

#### IV.3.2.2. Détermination de la moyenne et de l'écart-type de $D_p'$

En suivant la définition de la variable  $D_p'$ , qui est égale à la somme d'un nombre aléatoire de variables aléatoires, la probabilité que le dommage cumulé soit inférieur ou égal à une valeur  $d_0$  peut s'écrire sous la forme suivante d'après H4 :

$$\begin{aligned} P(D_p' \leq d_0) &= \int_0^\infty P\left(\sum_{a=1}^{n_a} D_a' \leq d_0\right) f(n_a) dn_a \\ &= \int_0^\infty \int_0^{d_0} f(d_p' | n_a) d[d_p'] f(n_a) dn_a \\ &= \int_0^{d_0} \int_0^\infty f(d_p' | n_a) f(n_a) dn_a d[d_p'] \end{aligned} \quad (IV-24)$$

où  $f(n_a)$  représente la densité du nombre d'actions  $N_a$  et  $f(d_p' | n_a)$  la densité conditionnelle du dommage  $D_p'$ .

En utilisant les propriétés de la somme des variables aléatoires indépendantes sur les calculs de la moyenne et la variance :

$$E\left(\sum_{a=1}^{n_a} D_a'\right) = n_a \mu_{D_a'} \quad \text{et} \quad V\left(\sum_{a=1}^{n_a} D_a'\right) = n_a \sigma_{D_a'}^2 = E\left(\sum_{a=1}^{n_a} D_a'\right)^2 - (n_a \mu_{D_a'})^2$$

nous obtenons les moments du premier et du second ordre de  $D_p'$  :

$$\begin{aligned} E(D_p') &= \int_0^\infty \int_0^\infty d_p' f(d_p' | n_a) d[d_p'] f(n_a) dn_a = \int_0^\infty E\left(\sum_{a=1}^{n_a} D_a'\right) f(n_a) dn_a \\ &= \int_0^\infty n_a \mu_{D_a'} f(n_a) dn_a = \mu_{D_a'} \mu_{N_a} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(D_p')^2 &= \int_0^\infty \int_0^\infty (d_p')^2 f(d_p' | n_a) d[d_p'] f(n_a) dn_a = \int_0^\infty E\left(\sum_{a=1}^{n_a} D_a'\right)^2 f(n_a) dn_a \\ &= \int_0^\infty (n_a \sigma_{D_a'}^2 + n_a^2 \mu_{D_a'}^2) f(n_a) dn_a = \sigma_{D_a'}^2 \mu_{N_a} + \mu_{D_a'}^2 (\sigma_{N_a}^2 + \mu_{N_a}^2) \end{aligned}$$

La moyenne et l'écart-type de  $D_p'$  sont alors :

$$\mu_{D_p'} = E(D_p') = \mu_{D_a'} \mu_{N_a} \quad (IV-25)$$

$$\sigma_{D_p'}^2 = E(D_p')^2 - \mu_{D_p'}^2 = \sigma_{D_a'}^2 \mu_{N_a} + \mu_{D_a'}^2 \sigma_{N_a}^2 \quad (IV-26)$$

### IV.3.2.3. Fonction d'état limite et indice $\beta$ dans l'espace standardisé

D'après les résultats (IV-22), (IV-25) et (IV-26) et en reprenant l'hypothèse que  $\varepsilon$  est une variable normale centrée et d'écart-type  $\sigma_\varepsilon$  dans le paragraphe IV.1.1., nous arrivons à écrire le dommage approximatif dans l'espace standardisé :

$$D_D \equiv s \mu_{D_s} \mu_{N_s} \left( \sqrt{\frac{C_{D_s}^2}{s \mu_{N_s}} + \frac{C_{N_s}^2}{s}} U_S + 1 \right) e^{-\sigma_\varepsilon U_R} \leq 1 \quad (IV-27)$$

ou sous autre forme :

$$\ln(D_D) \equiv \ln(s \mu_{D_s} \mu_{N_s}) + \ln \left( \sqrt{\frac{C_{D_s}^2}{s \mu_{N_s}} + \frac{C_{N_s}^2}{s}} U_S + 1 \right) - \sigma_\varepsilon U_R \leq 0 \quad (IV-28)$$

où  $C_{D_s} = \frac{\sigma_{D_s}}{\mu_{D_s}}$  et  $C_{N_s} = \frac{\sigma_{N_s}}{\mu_{N_s}}$  sont des coefficients de variation d'une variable aléatoire.

C'est une surface de ruine non linéaire des variables normales centrées réduites  $U_S$  et  $U_R$ . Le point de fonctionnement et l'indice de fiabilité  $\beta_{HL}$  peuvent être déterminés numériquement par la méthode décrite dans le chapitre précédent.

Dans notre cas particulier, une grande valeur du coefficient  $s$  nous amène à un très faible terme  $\sqrt{\frac{C_{D_s}^2}{s \mu_{N_s}} + \frac{C_{N_s}^2}{s}}$  de la fonction d'état limite. Ceci permet une deuxième approximation de la fonction d'état limite sous la forme (IV-28) s'appuyant sur le développement de la série de Taylor par rapport au point zéro. En ne prenant que les deux premiers termes de la série, nous obtenons une fonction d'état limite linéaire. La droite de ruine s'écrit :

$$\ln(D_D) \equiv \ln(s \mu_{D_s} \mu_{N_s}) + \sqrt{\frac{C_{D_s}^2}{s \mu_{N_s}} + \frac{C_{N_s}^2}{s}} U_S - \sigma_\varepsilon U_R \leq 0 \quad (IV-29)$$

L'indice de fiabilité de Hasofer-Lind est équivalent à celui de Cornell, qui est défini par une formule analytique (III-15) :

$$\beta \equiv \frac{-\ln(s \mu_{D_s} \mu_{N_s})}{\| \underline{a} \|} \quad (IV-30)$$

$$\text{où } \underline{a}^\tau = \left[ -\sqrt{\frac{C_{D_s}^2}{s \mu_{N_s}} + \frac{C_{N_s}^2}{s}}, \sigma_\varepsilon \right] \text{ et } \| \underline{a} \| = \sqrt{\frac{C_{D_s}^2}{s \mu_{N_s}} + \frac{C_{N_s}^2}{s} + \sigma_\varepsilon^2}.$$

Le point de fonctionnement est donné par :

$$\begin{bmatrix} u_S^* \\ u_R^* \end{bmatrix} \equiv -\beta \underline{\alpha} = -\beta \frac{\underline{a}}{\|\underline{a}\|} = \frac{\ln(s \mu_{D_a'} \mu_{N_a})}{\frac{C_{D_a'}^2}{s \mu_{N_a}} + \frac{C_{N_a}^2}{s} + \sigma_\varepsilon^2} \begin{bmatrix} -\sqrt{\frac{C_{D_a'}^2}{s \mu_{N_a}} + \frac{C_{N_a}^2}{s}} \\ \sigma_\varepsilon \end{bmatrix} \quad (\text{IV-31})$$

### IV.3.3. Point de fonctionnement et valeurs de calcul

En pratique, on s'intéresse au point de fonctionnement dans l'espace de base, représentant un point critique du détail d'une structure et pouvant fournir des valeurs de calcul pour le projet. Pour cette raison on définit les composantes du point de fonctionnement dans l'espace de base par "*les valeurs de calcul*" et on les détermine à l'aide de la transformation des variables de l'espace standardisé à l'espace de base, après le calcul de l'indice de fiabilité  $\beta$ .

Dans notre problème, pour la résistance, la transformation des variables est simple :

$$\varepsilon^* = \sigma_\varepsilon u_R^* \quad (\text{IV-32})$$

Mais pour la sollicitation, à cause de l'utilisation du théorème central limite, le nombre de variables est énormément réduit en suivant l'évolution de la fonction d'état limite de l'espace de base vers celui standardisé. La transformation peut être non univoque. Grâce à H2 et H3, nous supposons que toutes les variables de la somme dans l'espace de base disposent d'une même valeur de calcul. Les valeurs de calcul des variables  $D_p'$  s'obtiennent alors avec l'approximation (IV-23) :

$$d_p'^* \equiv \mu_{D_p'} + \frac{\sigma_{D_p'}}{\sqrt{s}} u_S^* = \mu_{D_a'} \mu_{N_a} \left( 1 + \sqrt{\frac{C_{D_a'}^2}{s \mu_{N_a}} + \frac{C_{N_a}^2}{s}} u_S^* \right) \quad (\text{IV-33})$$

La variable  $D_p'$  représente l'effet général d'un certain nombre d'actions. Si l'on veut savoir plus précisément les influences de chaque action  $D_a'$  et du nombre d'actions  $N_a$  sur cet effet général  $D_p'$ , c'est-à-dire les valeurs de calcul de  $D_a'$  et de  $N_a$ , la formule précédente ne donne pas de réponse, on est obligé de rechercher d'autre instrument.

A partir de la fonction d'état limite de base (IV-20), nous appliquons le théorème central limite au calcul de la somme des dommages d'une action  $D_a'$ , au lieu de ceux d'une période  $D_p'$ . Même pour une somme du nombre aléatoire des aléas, ce théorème est à peu près juste.

$$\begin{aligned}
D_D &= \left( \sum \sum^s D_{a'} \right) e^{-\epsilon} = \left( \sqrt{\frac{\sum \sum^s (D_{a'} - \mu_{D_{a'}})}{\sum \sum^s \sigma_{D_{a'}}^2}} + \sum \sum^s \mu_{D_{a'}} \right) e^{-\epsilon} \\
&\equiv \left( \sqrt{\sum N_a \sigma_{D_{a'}}} U_D + \mu_{D_{a'}} \sum N_a \right) e^{-\epsilon}
\end{aligned}$$

où  $U_D$  est indépendant de la somme du nombre d'actions  $N_a$  d'après H4. La formule du théorème central limite adaptée à cette étape s'écrit :

$$\lim_{\sum N_a \rightarrow \infty} \left( \frac{\sum \sum^s (D_{a'} - \mu_{D_{a'}})}{\sqrt{\sum \sum^s \sigma_{D_{a'}}^2}} \right) = \lim_{\sum N_a \rightarrow \infty} \left( \frac{\sum \sum^s D_{a'} - \mu_{D_{a'}} \sum N_a}{\sqrt{\sum N_a \sigma_{D_{a'}}}} \right) = U_D \sim \mathcal{N}(0,1) \quad (\text{IV-34})$$

L'indépendance de  $N_a$  et une grande valeur de  $s$  nous permettent d'utiliser une nouvelle fois le théorème central limite pour calculer la somme de  $N_a$  :

$$\sum N_a = \sqrt{\sum \sigma_{N_a}^2} \frac{\sum (N_a - \mu_{N_a})}{\sqrt{\sum \sigma_{N_a}^2}} + \sum \mu_{N_a} \equiv \sqrt{s} \sigma_{N_a} U_N + s \mu_{N_a}$$

avec

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \left( \frac{\sum (N_a - \mu_{N_a})}{\sqrt{s} \sigma_{N_a}} \right) = U_N \sim \mathcal{N}(0,1) \quad (\text{IV-35})$$

En introduisant cette approche dans la fonction d'état limite et en transformant la variable  $\epsilon$  de la résistance à une variable normale centrée réduite, nous obtenons une formule dans l'espace standardisé :

$$\begin{aligned}
D_D &\equiv \left( \sqrt{\sqrt{s} \sigma_{N_a} U_N + s \mu_{N_a}} \sigma_{D_{a'}} U_D + \sqrt{s} \mu_{D_{a'}} \sigma_{N_a} U_N + s \mu_{D_{a'}} \mu_{N_a} \right) e^{-\sigma_\epsilon U_R} \\
&= s \mu_{D_{a'}} \mu_{N_a} \left( \frac{C_{D_{a'}}}{\sqrt{s} \mu_{N_a}} \sqrt{\frac{C_{N_a}}{\sqrt{s}} U_N + 1} U_D + \frac{C_{N_a}}{\sqrt{s}} U_N + 1 \right) e^{-\sigma_\epsilon U_R}
\end{aligned}$$

Le critère de ruine se trouve comme suit :

$$\ln(s \mu_{D_a'} \mu_{N_a}) + \ln \left( \frac{C_{D_a'}}{\sqrt{s \mu_{N_a}}} \sqrt{\frac{C_{N_a}}{s}} U_N + 1 U_D + \frac{C_{N_a}}{\sqrt{s}} U_N + 1 \right) - \sigma_\varepsilon U_R \leq 0 \quad (IV-36)$$

Comme nous avons linéarisé la surface (IV-28), nous prenons la série de Taylor du premier ordre développée au point zéro des faibles termes  $\frac{C_{D_a'}}{\sqrt{s \mu_{N_a}}}$  et  $\frac{C_{N_a}}{\sqrt{s}}$ .

$$\ln(s \mu_{D_a'} \mu_{N_a}) + \frac{C_{D_a'}}{\sqrt{s \mu_{N_a}}} U_D + \frac{C_{N_a}}{\sqrt{s}} U_N - \sigma_\varepsilon U_R \leq 0 \quad (IV-37)$$

L'indice de fiabilité  $\beta$ , correspondant à ce plan de ruine, correspond également à la droite de ruine décrite dans le paragraphe précédent. Les formules du calcul d'indice de fiabilité  $\beta$  sont identiques. Au niveau du point de fonctionnement, pour la résistance  $U_R$ , nous obtenons le même résultat par deux méthodes, et pour la sollicitation, la norme de deux composants  $u_D^*$  et  $u_N^*$  du point de fonctionnement est justement égale à  $u_S^*$  de la formule (IV-31).

$$\begin{bmatrix} u_N^* \\ u_D^* \\ u_R^* \end{bmatrix} \equiv -\beta \underline{\alpha} = \frac{\ln(s \mu_{D_a'} \mu_{N_a})}{\frac{C_{D_a'}^2}{s \mu_{N_a}} + \frac{C_{N_a}^2}{s} + \sigma_\varepsilon^2} \begin{bmatrix} -\frac{C_{N_a}}{\sqrt{s}} \\ \frac{C_{D_a'}}{\sqrt{s \mu_{N_a}}} \\ \sigma_\varepsilon \end{bmatrix} \quad (IV-38)$$

et donc  $\sqrt{u_N^{*2} + u_D^{*2}} = u_S^*$ .

Par conséquent, nous pouvons dire que la droite (IV-29) est une représentation bidimensionnelle de la fonction d'état limite en réunissant les effets des deux variables appartenant à la sollicitation, et le plan (IV-37) est la représentation complète.

De ce dernier, les valeurs de calcul du dommage d'une action  $D_a'$  et du nombre d'actions pendant une période  $N_a$  peuvent être déterminées séparément en utilisant les deux approximations du théorème central limite (IV-34) et (V-35). Bien entendu, pour chaque type de variables, leurs valeurs de calcul sont identiques.

$$n_a^* \equiv \mu_{N_a} + \frac{\sigma_{N_a}}{\sqrt{s}} u_N^* = \mu_{N_a} \left( 1 + \frac{C_{N_a}}{\sqrt{s}} u_N^* \right) \quad (IV-39)$$

$$d_a'^* \equiv \mu_{D_a'} + \frac{\sigma_{D_a'}}{\sqrt{s n_a^*}} u_D^* = \mu_{D_a'} \left( 1 + \frac{C_{D_a'}}{\sqrt{s n_a^*}} u_D^* \right) \quad (IV-40)$$

Nous avons prouvé que  $d_p'^* = n_a^* d_a'^*$ .

#### IV.4. RESULTATS NUMERIQUES

Le détail, dont nous calculons l'indice de fiabilité en fatigue, est la liaison entre le raidisseur vertical et la semelle inférieure de la poutre principale au milieu de la troisième travée du pont de Jargeau.

D'après les nombreux essais de fatigue sur différents types de détails, la CECM a proposé une série de courbes parallèles représentant la résistance des détails. Ces courbes sont composées de trois portions de droites en coordonnées bi-logarithmiques et les pentes des droites adoptées sont fixées à  $-1/3$ ,  $-1/5$  et  $0$ . La limite de troncature  $\Delta\sigma_T$  se situe à 100 millions cycles, la limite de fatigue  $\Delta\sigma_L$  à 5 millions cycles. Le paramètre  $C_2$  (ou  $C_1$ ) dans la formule (IV-3) s'obtient par la catégorie du détail, dont la valeur correspond à la contrainte  $\Delta\sigma$  à 2 millions de cycles que doit supporter un détail constructif donné. La dispersion des courbes est décrite par l'écart-type  $\sigma_e$  variant dans un intervalle de 0,1 à 0,5.

Pour simplifier notre calcul, nous utilisons directement la courbe de la résistance de CECM avec la catégorie de détail 90 (soit 102 après les corrections d'épaisseur et de moyenne), à laquelle notre liaison correspond.

En passant par le calcul de CASTOR-LCPC, nous obtenons le nombre d'actions  $N_a$  dans 10 enregistrements du trafic d'une semaine et le dommage cumulé  $D_a'$  de ces actions. Les estimations sont faites d'après les formules (IV-16), (IV-17), (IV-18) et (IV-19), et nous présentons les résultats dans le tableau suivant.

Trafic			$D_a'$			Nombre d'actions $N_a$
Route	Site	Année	Moyenne ( $10^{-8}$ )	Ecart-type ( $10^{-8}$ )	Coef. de Variation	
A6	Auxerre	84	3,61302	3,87253	1,07183	4491
A6	Auxerre	84	3,44953	3,88882	1,12735	3918
A6	Auxerre	86	3,67386	4,16742	1,13434	4465
A6	Auxerre	89	2,06353	2,02116	0,97947	1448
A1	Survilliers	90	7,32876	1,03477	1,41193	4848
A31	Autreville	90	2,56176	2,60000	1,01493	2271
A31	Langres	88	2,01068	1,62499	0,80818	1186
R1	Moyenne		4,10419			3232,4
	Ecart-type			6,01312		1553,5
	Coef. de Variation				1,46512	0,4806

RN23	Angers	87	1,67230	1,29180	0,77247	594
RN205	Chamonix	87	2,73000	3,31732	1,21513	1245
RN182	Tancarville	87	7,27117	11,5681	1,59096	1482
R2	Moyenne		4,16346			2594,8
	Ecart-type			6,36625		1646,2
	Coef. de Variation				1,52908	0,6344

Tab. IV-1 Estimations du dommage d'une action et du nombre des actions

Comme nous n'avons pas d'enregistrement de trafics d'une durée supérieure à six semaines, nous ne pouvons pas estimer l'incertitude du nombre d'actions  $N_a$  d'un trafic donné. Nous sommes obligés de mélanger les différents trafics. Dans le tableau, **R1** montre les résultats d'estimations obtenus en ne mélangeant que les trafics autoroutiers, et **R2** ceux de tous les trafics. Si l'on élimine la dispersion de la variable  $N_a$ , le tableau permet également le calcul de la fiabilité à partir d'un trafic individuel.

Selon **R2**, dont les coefficients de variation  $C_{D_s}$  et  $C_{N_s}$  sont plus grands et la moyenne  $\mu_{N_s}$  plus petite, le terme  $\sqrt{\frac{C_{D_s}^2}{s \mu_{N_s}} + \frac{C_{N_s}^2}{s}}$  de la fonction d'état limite (IV-27) ou (IV-28) pour le coefficient de la durée  $s$  correspondant à 10 ans (la plus petite valeur de  $s$ ) a une valeur faible 0,0278.

Pour valider la formule (IV-30), nous faisons une comparaison entre les résultats obtenus par la formule d'une part et par la méthode numérique d'autre part. Les variations de l'indice  $\beta$  en fonction de la durée sont montrées dans la figure suivante en fixant l'écart-type  $\sigma_\epsilon$  à 0,2303. La superposition des symboles (les résultats numériques) sur la courbe (représentant la formule approximative) signifie que, dans notre cas, la linéarisation de la fonction d'état limite par la série de Taylor est convenable. De plus, nous trouvons que la variation de l'indice  $\beta$  sur l'abscisse logarithmique est pratiquement linéaire. L'interprétation de ce phénomène s'obtient après dérivation partielle de l'indice  $\beta$  par rapport au logarithme du coefficient de la durée  $s$  :

$$\frac{\partial \beta}{\partial (\ln(s))} = \frac{\partial \beta}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial (\ln(s))} \equiv - \frac{1}{\left( \frac{C_{D_s}^2}{s \mu_{N_s}} + \frac{C_{N_s}^2}{s} + \sigma_\epsilon^2 \right)^{1/2}} - \frac{\left( \frac{C_{D_s}^2}{s \mu_{N_s}} + \frac{C_{N_s}^2}{s} \right) \ln(s \mu_{D_s} \mu_{N_s})}{2 \left( \frac{C_{D_s}^2}{s \mu_{N_s}} + \frac{C_{N_s}^2}{s} + \sigma_\epsilon^2 \right)^{3/2}}$$

Si le terme  $\sqrt{\frac{C_{D_s}^2}{s \mu_{N_s}} + \frac{C_{N_s}^2}{s}}$  est petit, cette dérivée partielle est proche d'une constante :

$$\frac{\partial \beta}{\partial (\ln(s))} \cong -\frac{1}{\sigma_\epsilon} \quad (\text{IV-41})$$

Alors, la linéarité de l'indice  $\beta$ , en fonction du logarithme de la durée, découle de la faiblesse du terme sous la racine et de l'équation de la formule approximative (IV-30). Pour simplifier, nous n'utilisons, dans les calculs ci-après, que la formule approximative.

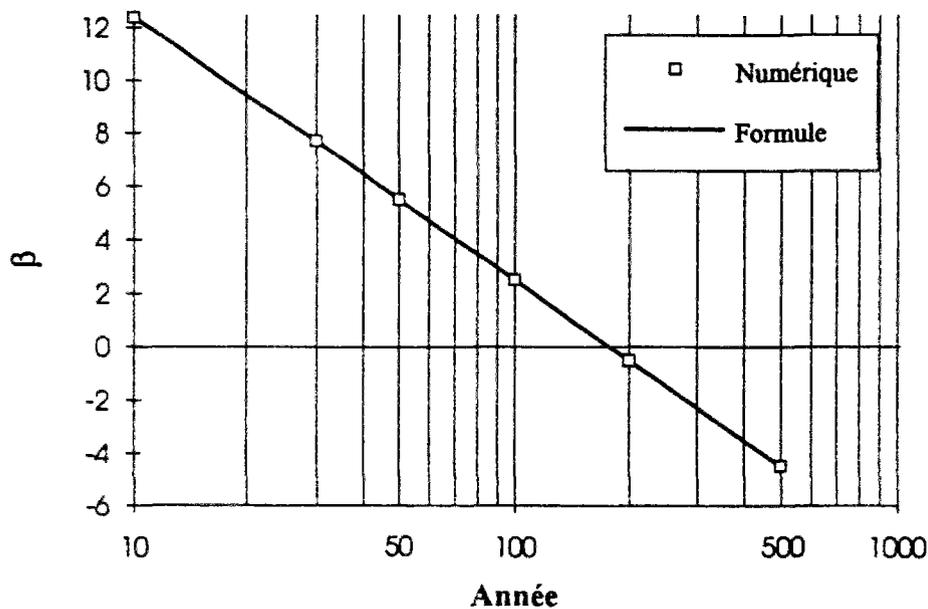


Fig. IV-1 Indice de fiabilité en fonction de la durée ( $\sigma_\epsilon = 0,2303$ )

Dans la figure, l'indice de fiabilité  $\beta$  négatif, pour une durée de vie supérieure à environ 180 ans, ce qui signifie que le point origine dans l'espace standardisé est inclus dans la zone de ruine et la probabilité de ruine est supérieure à 0,5.

#### IV.4.1. Sensibilité de $\beta$ par rapport aux divers paramètres

Comme le coefficient de la durée  $s$ , tous les paramètres dans la formule (IV-30) peuvent agir sur l'indice de fiabilité. Ce qui nous intéresse est de savoir quel est le paramètre le plus important pour l'indice  $\beta$ . Le facteur de sensibilité (ou l'élasticité) par rapport à chacun des paramètres défini dans le chapitre précédent répond à cette question.

En choisissant une durée de 100 ans, nous déterminons les facteurs de sensibilité  $\alpha_\omega$  et les élasticités  $e_\omega$  pour tous les paramètres, et consignons les résultats précis du calcul dans le tableau suivant.

Paramètre $\omega$	Valeur du calcul précis		Formule simplifiée	
	$\alpha_\omega$	$e_\omega$	$\alpha_\omega$	$e_\omega$
$s$ (5218)	$-8,31347 \times 10^{-4}$	-1,74386	$-\frac{1}{s \sigma_E}$	$\frac{1}{\ln(s \mu_{D_a'} \mu_{N_a})}$
$\mu_{D_a}'$	$-1,04235 \times 10^8$	-1,74459	$-\frac{1}{\mu_{D_a}' \sigma_E}$	$\frac{1}{\ln(s \mu_{D_a}' \mu_{N_a})}$
$\mu_{N_a}$	$-1,67249 \times 10^{-3}$	-1,74459	$-\frac{1}{\mu_{N_a} \sigma_E}$	$\frac{1}{\ln(s \mu_{D_a}' \mu_{N_a})}$
$\sigma_E$ (0,2303)	-10,7876	-0,998544	$\frac{\ln(s \mu_{D_a}' \mu_{N_a})}{\sigma_E^2}$	-1
$C_{N_a}$	$-5,69612 \times 10^{-3}$	$-1,45271 \times 10^{-3}$	$\frac{C_{N_a} \ln(s \mu_{D_a}' \mu_{N_a})}{s \sigma_E^3}$	$-\frac{C_{N_a}^2}{s \sigma_E^2}$
$C_{D_a}'$	$-5,29092 \times 10^{-6}$	$-3,25227 \times 10^{-6}$	$\frac{C_{D_a}' \ln(s \mu_{D_a}' \mu_{N_a})}{s \mu_{N_a} \sigma_E^3}$	$-\frac{C_{D_a}'^2}{s \mu_{N_a} \sigma_E^2}$
Indice de fiabilité $\beta = 2,48756$			$\beta \cong -\frac{\ln(s \mu_{D_a}' \mu_{N_a})}{\sigma_E}$	

Tab. IV-2 Facteur de sensibilité et Elasticité

Par comparaison des valeurs absolues, nous trouvons trois paramètres qui sont à un même niveau d'importance : le coefficient de la durée  $s$ , les moyennes du dommage d'une action  $D_a'$  et du nombre d'actions dans une période  $N_a$ . D'après le facteur de sensibilité, la moyenne du dommage d'une action  $\mu_{D_a}'$  paraît être le facteur le plus important. Mais à cause de sa faible valeur (de l'ordre de  $10^{-8}$ ) elle ne peut pas beaucoup bouger, et donc, n'a pas plus d'importance que les deux autres. Les facteurs de sensibilité de  $s$  et de  $N_a$  sont au contraire faibles. C'est leur valeur élevée qui les rend important. En fait, l'élasticité représente mieux la sensibilité de  $\beta$  par rapport aux paramètres.

Dans une moindre mesure, nous avons les coefficients de variation de  $D_a'$  et de  $N_a$  dont les facteurs de sensibilité et les élasticités sont relativement petits. En négligeant certains termes dans ces deux paramètres, nous déduisons les formules simplifiées qui donnent des valeurs approchées pour calculer l'indice de fiabilité  $\beta$  et la sensibilité. Par ces formules, nous

retrouvons l'égalité entre les trois premiers paramètres du tableau sur l'élasticité. Ce type de simplification peut également être appliqué au calcul du point de fonctionnement.

Le facteur de sensibilité, par rapport à l'écart-type de la courbe de la résistance  $\sigma_\epsilon$ , est une fonction de l'indice  $\beta$  et son élasticité reste une constante. A un instant donné, ce facteur de sensibilité  $\alpha_{\sigma_\epsilon}$  peut être élevé, de telle sorte que l'écart-type  $\sigma_\epsilon$  devienne le paramètre le plus important parmi tous les autres. Par exemple, pour des trafics légers, les moyennes  $\mu_{D_a}$  et  $\mu_{N_a}$  sont petites, et la valeur absolue de l'élasticité  $(\ln(s \mu_{D_a} \mu_{N_a}))^{-1}$  est probablement inférieure à 1. Le facteur  $\alpha_{\sigma_\epsilon}$  peut aussi être nul comme dans le cas suivant.

La figure ci-après montre les variations de l'indice  $\beta$  en fonction de la durée de vie pour certaines valeurs d'écart-type  $\sigma_\epsilon$  dans l'intervalle de 0,1 à 0,5. Nous observons que toutes les courbes se croisent en un même point où l'indice  $\beta$  vaut zéro. Ceci revient à dire que pour cette durée de vie ( $D = 178$  ans) l'indice  $\beta$  est identique ( $\beta = 0$ ) et que le facteur de sensibilité  $\alpha_{\sigma_\epsilon}$  est nul. La décroissance de l'indice  $\beta$ , pour les différentes valeurs de  $\sigma_\epsilon$ , vérifie bien la formule (IV-41) qui donne une pente constante : un écart-type  $\sigma_\epsilon$  plus petit correspond à une pente plus grande.

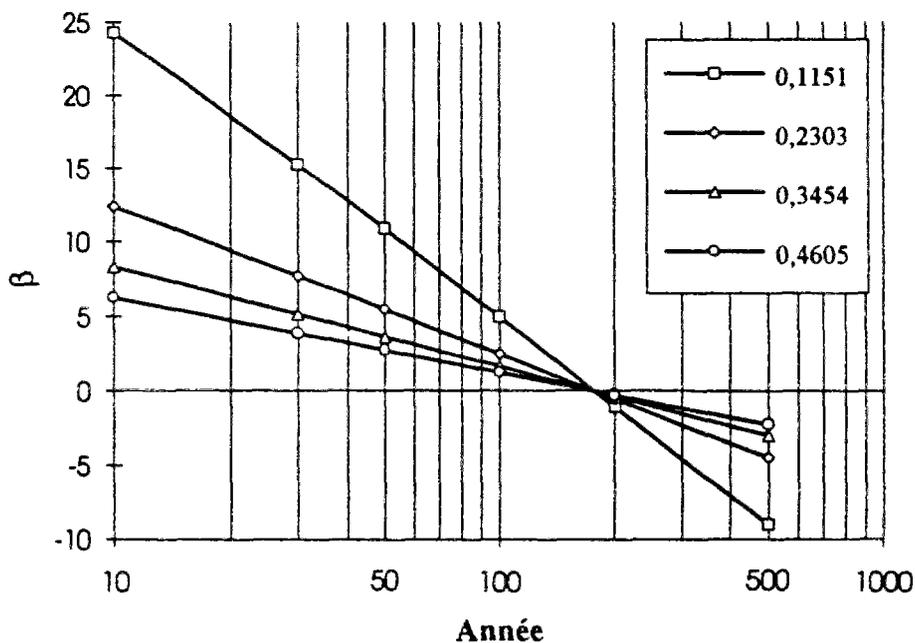


Fig. IV-2 Sensibilité par rapport à l'écart-type  $\sigma_\epsilon$

D'ailleurs, nous attirons l'attention sur la sensibilité vis-à-vis de la moyenne de la variable  $\epsilon$ . En principe, cette variable modélise la dispersion de la résistance du détail due aux matériaux, à la fabrication et à l'erreur d'essais. Sa moyenne est zéro, et elle disparaît donc dans la fonction d'état limite et dans la formule de calcul de l'indice  $\beta$  (IV-30). Or, parfois, on arrive

assez mal à déterminer la catégorie du détail en utilisant la série des courbes conventionnelles de la résistance en fatigue. Dans ce cas, la sensibilité par rapport à cette moyenne est intéressante.

Si l'on tient compte du petit décalage de la moyenne  $\mu_\epsilon$ , dans la formule, on a :

$$\beta \equiv \frac{\delta\mu_\epsilon - \ln(s \mu_{D_a} \cdot \mu_{N_a})}{\sqrt{\frac{C_{D_a}^2}{s \mu_{N_a}} + \frac{C_{N_a}^2}{s} + \sigma_\epsilon^2}} \quad (IV-42)$$

Comme les deux points correspondant au changement de pente  $\Delta\sigma_L$  et  $\Delta\sigma_T$  des courbes de CECM sont différents suivant la catégorie du détail, la variation du dommage cumulé ne peut pas être représentée simplement par la moyenne  $\mu_\epsilon$ , mais est liée aussi à  $\Delta\sigma_L$  et  $\Delta\sigma_T$ . La formule précédente est donc estimative. La figure suivante montre la variation de l'indice de fiabilité  $\beta$  en fonction du décalage de la moyenne  $\delta\mu_\epsilon$  pour notre détail de catégorie 102 par la formule estimative et par le calcul numérique, selon la catégorie correspondant à  $\delta\mu_\epsilon$ . Pour faciliter la comparaison, nous fixons la durée de vie à 100 ans ( $s = 5218$ ). La différence des deux courbes prouve l'influence de  $\Delta\sigma_L$  et  $\Delta\sigma_T$  sur le dommage, ainsi que l'indice  $\beta$ .

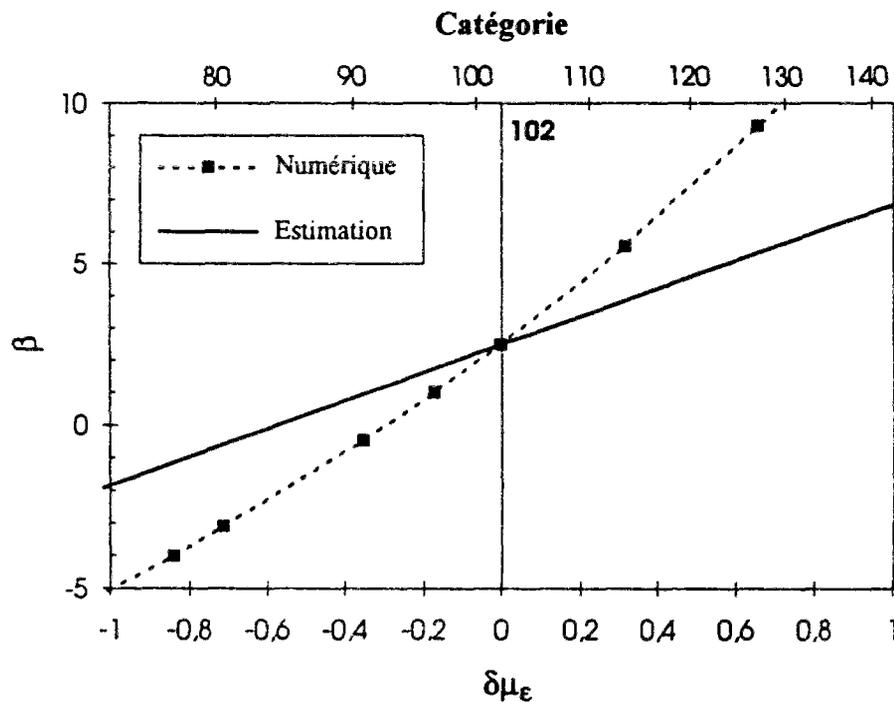


Fig. IV-3 Variation de  $\beta$  en fonction du décalage de la moyenne ( $\sigma_\epsilon = 0,2303$ )

Le facteur de sensibilité, par rapport à  $\delta\mu_\epsilon$ , correspond alors à la pente des courbes de la figure au point zéro. Nous remarquons que l'estimation conduit à un facteur de sensibilité

moins grand que celui réel qui s'obtient numériquement. Autrement dit, la moyenne  $\mu_\epsilon$  peut être, dans la réalité, encore plus importante que l'estimation. Nous donnons les valeurs du facteur sensibilité :

Par la formule (IV-42),

$$\alpha_{\delta\mu_\epsilon} = \frac{\partial\beta}{\partial(\delta\mu_\epsilon)} \equiv \left( \frac{C_{D_a}^2}{s\mu_{N_a}} + \frac{C_{N_a}^2}{s} + \sigma_\epsilon^2 \right)^{-1/2} \equiv \frac{1}{\sigma_\epsilon} \quad (\text{IV-43})$$

$$e_{\delta\mu_\epsilon} = \frac{\delta\mu_\epsilon}{\beta} \alpha_{\delta\mu_\epsilon} \equiv \frac{\delta\mu_\epsilon}{\delta\mu_\epsilon - \ln(s\mu_{D_a}\mu_{N_a})} \quad (\text{IV-44})$$

nous avons  $\alpha_{\delta\mu_\epsilon} = 4,340$ , et par le calcul numérique,  $\alpha_{\delta\mu_\epsilon} = 9,161$ .

L'élasticité varie avec la moyenne  $\delta\mu_\epsilon$ . Ici, l'élasticité est égale à zéro parce que cette moyenne est subjectivement nulle. Mais dès qu'elle prend une certaine valeur, l'élasticité augmente rapidement.

#### IV.4.2. Influence d'état limite floue

La ruine d'une structure est physiquement définie par la perte de la rigidité. En fatigue, comme la nature de la fissuration dépend de la forme des détails, des matériaux et des divers types de chargement subis par la structure etc, il est difficile de décrire précisément la fissuration pour différents détails au travers seulement d'une loi de fatigue identique. Même si l'on établit une loi identique pour quelques types de détails ou de matériaux, les valeurs critiques des paramètres de cette loi ne peuvent pas être pareilles vis-à-vis du fonctionnement des structures. La définition de la ruine des structures ou des détails par ces valeurs critiques est donc floue du point de vue mathématique (Lau et Gao, 1994).

D'après la loi de Miner, l'état d'un détail est décrit par le dommage cumulé. Le critère de ruine du détail est donné par sa valeur critique. Antérieurement, le critère est que le dommage cumulé doit être inférieur ou égal à un (IV-21), c'est-à-dire que pour tous les détails, le dommage critique doit être un. Pourtant, le dommage critique n'est pas précis, il varie dans un intervalle dépendant du fonctionnement des structures ou des détails.

En mathématique, une variable non précise est représentée à l'aide d'une fonction qui caractérise le degré d'appartenance de la variable au phénomène. On l'appelle "*la fonction caractéristique d'appartenance*". Cette fonction d'appartenance est généralement déterminée de manière statistique, mais parfois on peut aussi y introduire l'opinion de l'expérimentation.

Dans notre cas, nous donnons la fonction caractéristique d'appartenance à la ruine du détail au dommage cumulé critique subjectivement.

Soit la valeur critique floue  $\bar{V}$ . Sa fonction d'appartenance à la ruine est :

$$F_{\bar{V}}(v) = \begin{cases} 0 & (0 \leq v < v_0) \\ \frac{v-v_0}{1-v_0} & (v_0 \leq v < 1) \\ 1 & (1 \leq v) \end{cases} \quad (\text{IV-45})$$

où  $v$  est le dommage cumulé qui peut varier dans l'espace  $[0, \infty)$  et  $v_0$  définit un intervalle  $[v_0, 1]$  où le degré d'appartenance augmente de 0 à 1. La fonction  $F_{\bar{V}}(v)$  signifie que le détail de la structure est sûrement en sécurité à la valeur  $v$  correspondant à 0 degré d'appartenance. Par contre, le détail est certainement ruiné à celle de 1 degré d'appartenance. Dans l'intervalle  $[v_0, 1]$ , la possibilité de ruine est proportionnelle à la valeur  $v$ .

En revanche, la sécurité du détail est exprimée par le complément  $\bar{\bar{V}}$  avec la fonction caractéristique d'appartenance correspondante :

$$F_{\bar{\bar{V}}}(v) = 1 - F_{\bar{V}}(v) = \begin{cases} 1 & (0 \leq v < v_0) \\ \frac{1-v}{1-v_0} & (v_0 \leq v < 1) \\ 0 & (1 \leq v) \end{cases} \quad (\text{IV-46})$$

Le critère de ruine (IV-21) devient alors flou en tenant compte de la valeur critique du dommage cumulé peu précise.

$$\tilde{g}(\mathbf{D}_D) = \bar{V}(v) \quad (\text{IV-47})$$

où  $\tilde{g}(\mathbf{D}_D)$  signifie un critère flou de la variable  $\mathbf{D}_D$ . Dans l'espace de probabilité, ce critère est représenté par une bande d'une largeur  $1 - v_0$  qui sépare les zones de ruine et de sécurité. Selon notre définition de la fonction caractéristique d'appartenance, le critère de ruine classique désigne la borne de cette bande du côté de la zone de ruine.

La possibilité de ruine n'est pas nulle dans la bande d'état limite et la probabilité de ruine correspondante est ajustée par la fonction caractéristique d'appartenance. Au total, nous sommions les probabilités de ruine des parts de la zone de ruine et de la bande. Un indice de fiabilité modifié  $\beta'$  peut également être calculé d'après la somme des probabilités. Cet indice est égal à la distance d'origine à une certaine surface limitée dans la bande, dans l'espace de probabilité standardisé.

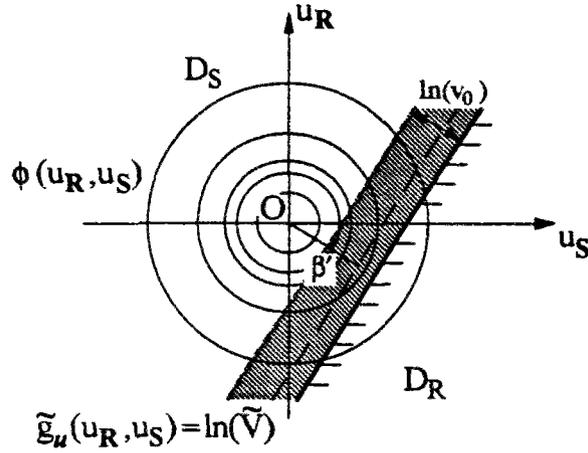


Fig. IV-4 Critère d'état limite flou

Par la formule (IV-29), le logarithme du dommage cumulé s'approche d'une variable normale (un composé linéaire de deux variables normales centrées réduites  $U_S$  et  $U_R$ ). Nous déterminons donc d'abord la fonction caractéristique d'appartenance concernant le logarithme du dommage cumulé afin de calculer la probabilité de ruine.

Soit un changement de variables  $\xi = \ln(v)$ . Alors  $v = e^\xi$ .

$$F_{\Xi}(\xi) = F_{\ln(\tilde{V})}(\ln(v)) = F_{\tilde{V}}(e^\xi) = \begin{cases} 0 & (\xi < \ln(v_0)) \\ \frac{e^\xi - v_0}{1 - v_0} & (\ln(v_0) \leq \xi < 0) \\ 1 & (0 \leq \xi) \end{cases} \quad (IV-48)$$

En considérant cette fonction caractéristique d'appartenance comme une fonction de répartition conditionnelle, la probabilité de ruine s'écrit sous la forme d'une probabilité conjointe :

$$\begin{aligned} P_R &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} F_{\Xi}(\xi) \frac{1}{\sigma_M} \phi\left(\frac{\xi + \mu_M}{\sigma_M}\right) d\xi \\ &= \int_{\ln(v_0)}^0 \frac{e^\xi - v_0}{1 - v_0} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_M} \exp\left(-\frac{(\xi + \mu_M)^2}{2 \sigma_M^2}\right) d\xi + \Phi(-\beta) \end{aligned} \quad (IV-49)$$

avec une définition de la marge de sécurité :  $M = -\ln(D_D)$ . La moyenne et l'écart-type sont

$$\mu_M = -\mu_{\ln(D_D)} \equiv -\ln(s \mu_{D_a}, \mu_{N_a}) \quad \text{et} \quad \sigma_M = \sigma_{\ln(D_D)} \equiv \sqrt{\frac{C_{D_a}^2}{s \mu_{N_a}^2} + \frac{C_{N_a}^2}{s} + \sigma_\epsilon^2}$$

Dans la formule précédente, le premier terme donne la probabilité de ruine venant de la bande, qui est pondérée par la fonction caractéristique d'appartenance, et le deuxième donne celle de la zone de ruine.

La croissance de la probabilité de ruine est présentée par la figure IV-5 en fonction de la largeur de la bande différente. L'indice de fiabilité modifié  $\beta'$  est parallèlement déterminé en utilisant la relation  $\beta' = -\Phi^{-1}(P_R) = \Phi^{-1}(P_S)$  d'après (III-22).

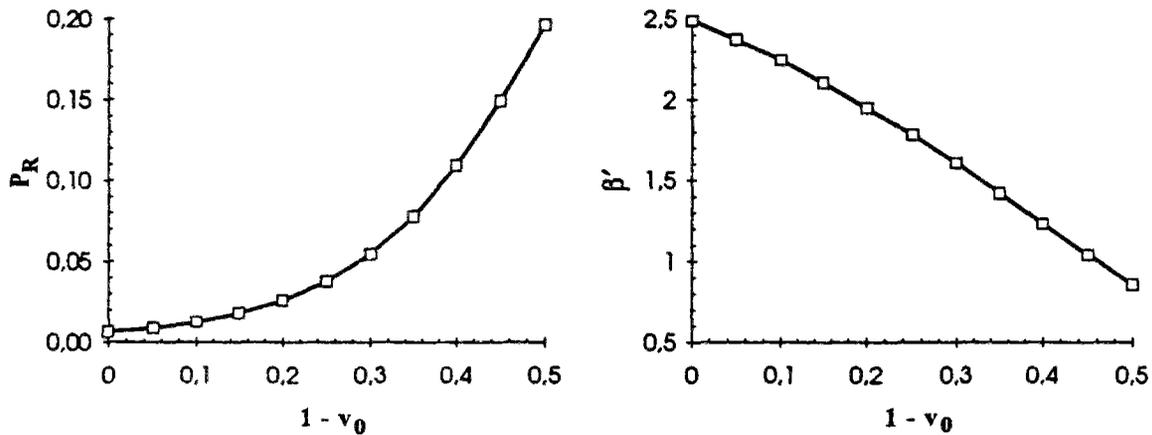


Fig. IV-5 Augmentation de la probabilité de ruine et diminution de l'indice  $\beta'$

#### IV.4.3. Influence des trafics

En prenant les résultats des estimations du dommage d'une action pour les différents trafics dans le tableau IV-1, nous avons calculé l'indice  $\beta$  en fonction de la durée, pour ces trafics individuels RN205 à Chamonix et A6 à Auxerre, et aussi des mélanges des trafics de toutes les natures R2 et autoroutiers R1. La linéarité et le parallélisme des courbes, en coordonnées bi-logarithmique de la figure suivante, démontrent que les coefficients de variation de  $D_a'$  et de  $N_a$  sont négligeables pour tous les trafics.

Les trois dessins au-dessus de la figure expliquent séparément les effets des moyennes  $\mu_{D_a'}$  et  $\mu_{N_a}$ , et de leur produit  $\mu_{D_a'} \times \mu_{N_a}$  sur l'indice  $\beta$  d'une durée de 100 ans. Une relation linéaire se trouve entre le logarithme du produit des deux moyennes et l'indice  $\beta$ . Par contre, pour celui de chacune des moyennes, cette relation linéaire n'existe plus. Les points de calcul se répartissent par hasard à deux côtés d'une ligne de régression. Le phénomène intéressant est que parmi les trafics analysés, les trafics de route nationale disposent de la moyenne du dommage d'une action  $\mu_{D_a'}$  relativement grande par rapport à la ligne de régression. Ceci revient à dire qu'il y a de grands groupes de véhicules dans les trafics de route nationale autant

que dans les trafics autoroutiers. Toutefois, les nombres de ces grands groupes sont petits pour les trafics de route nationale.

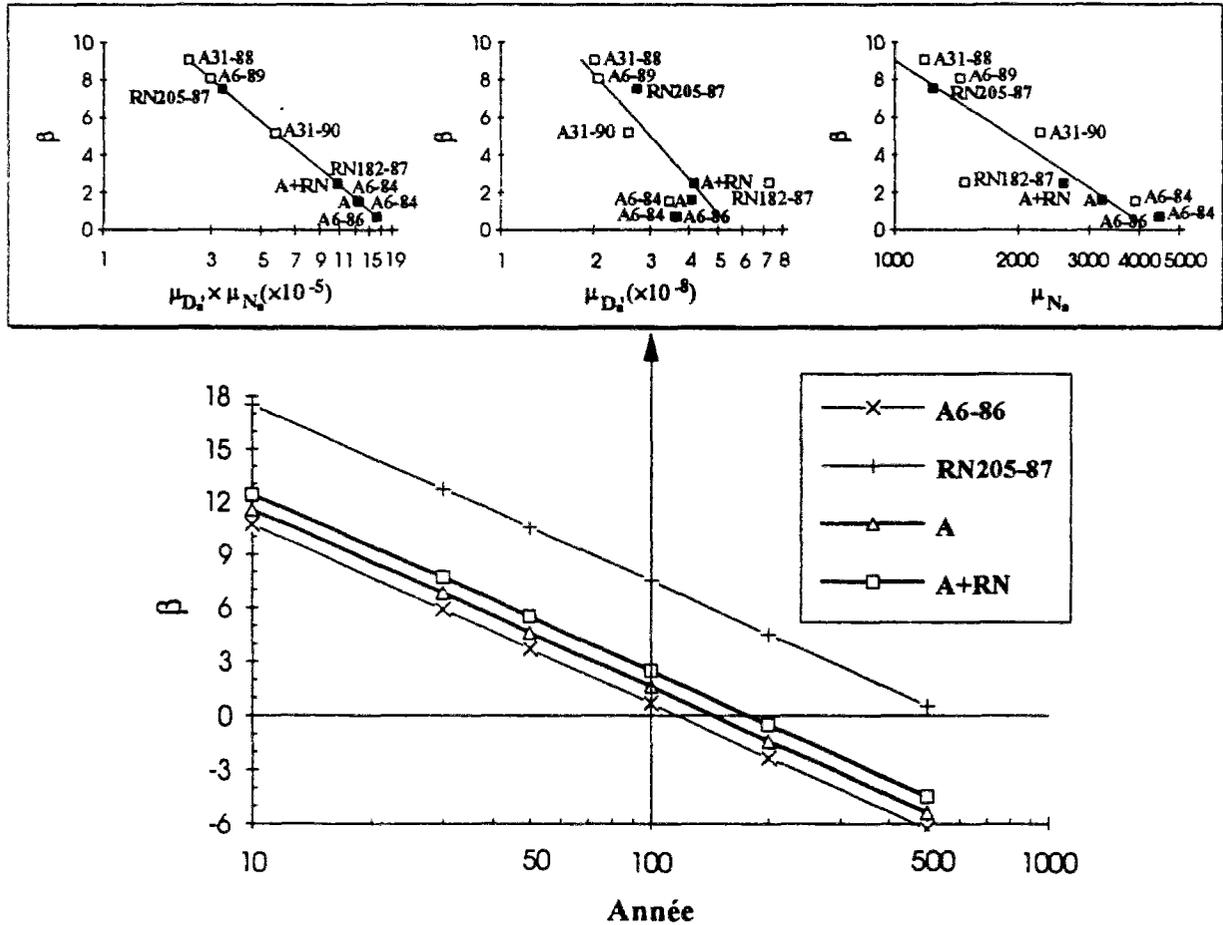


Fig. IV-6 Indice de fiabilité  $\beta$  pour les divers trafics ( $\sigma_\epsilon = 0,2303$ )

## IV.5. DISCUSSIONS

### Dépendance des cycles de l'amplitude des contraintes dans une action

Une action est définie par un groupe de véhicules passant en même temps ou de manière continue sur le pont. L'effet de ce groupe de véhicules sur un détail du pont est décrit par l'historique des contraintes calculé à l'aide de la ligne ou de la surface d'influence du détail. Après comptage des cycles de contraintes, on obtient un paquet de cycles d'amplitudes différentes correspondant à l'action. Ces cycles sont évidemment corrélés par les véhicules qui les produisent. L'indépendance se retrouve entre les dommages cumulés des actions différentes.

Néanmoins, le coefficient de variation du dommage cumulé d'une action  $C_{D_1}$  est négligeable d'après l'étude de sensibilité de l'indice  $\beta$ . Les coefficients de corrélation des

dommages dus à un des cycles d'une action  $D_c'$  sont éventuellement éliminés ( $D_c' = 1/f(\Delta\sigma)$  et  $D_c = D_c' e^{-\epsilon}$ ). Nous pouvons alors supposer que les  $D_c'$  sont indépendants et suivent une même loi de probabilité au lieu de H2. Par conséquent, en remplaçant  $D_a'$  et  $N_a$  par  $D_c'$  et le nombre de cycles pendant une période  $N_c$  aux étapes du calcul de l'indice  $\beta$ , nous obtenons à peu près le même résultat.

Trafic			$D_c'$			Nombre de cycles $N_c$
Route	Site	Année	Moyenne (10 <sup>-8</sup> )	Ecart-type (10 <sup>-8</sup> )	Coef. de Variation	
A6	Auxerre	84	2,74251	2,50866	0,91473	5917
A6	Auxerre	84	2,66049	2,53701	0,95359	5080
A6	Auxerre	86	2,79785	2,58968	0,92560	5863
A6	Auxerre	89	1,83707	1,37788	0,75004	1627
A1	Survilliers	90	3,86152	5,24034	1,35707	9201
A31	Autreville	90	2,28148	1,86407	0,81704	2550
A31	Langres	88	1,81896	1,17402	0,64543	1311
R3	Moyenne		2,94362			4506,9
	Ecart-type			3,51124		2844,0
	Coef. de Variation				1,19283	0,6310
RN23	Angers	87	1,68793	1,04188	0,61725	589
RN205	Chamonix	87	2,35215	2,36152	1,00398	1445
RN182	Tancarville	87	4,97042	7,59299	1,52764	2168
R4	Moyenne		3,02196			3575,0
	Ecart-type			3,86027		2789,7
	Coef. de Variation				1,27741	0,7804

Tab. IV-3 Estimations du dommage d'un cycle et du nombre des cycles

Le tableau précédent contient les valeurs des estimateurs de  $D_c'$  et de  $N_c$  à partir des mêmes dix enregistrements du trafic d'une semaine que ceux choisis dans le tableau IV-1. La différence entre les estimateurs d'une action et d'un cycle n'est pas tellement grande à cause de la disparition des nombreux cycles d'amplitude au-dessous de la limite de troncature.

En utilisant R4 vis-à-vis du mélange de tous les trafics, nous calculons l'indice de fiabilité  $\beta$ , les facteurs de sensibilité et les élasticités pour une durée de 100 ans, et nous les

mettons dans le tableau. Pour faciliter la comparaison, nous récrivons aussi les résultats obtenus antérieurement avec l'indépendance des actions. Les valeurs de l'indice  $\beta$  et des élasticités par les deux hypothèses sont pratiquement identiques sauf celles des élasticités par rapport aux coefficients de variation, qui sont négligeables. Etant donné que les moyennes du dommage et du nombre varient d'après les différentes hypothèses, les facteurs de sensibilité ne sont pas proches à ce niveau.

Calcul avec l'indépendance des cycles			Calcul avec l'indépendance des actions		
Paramètre $\omega$	$\alpha_\omega$	$e_\omega$	$e_\omega$	$\alpha_\omega$	Paramètre $\omega$
s (5218)	$-8,30862 \times 10^{-4}$	-1,74349	-1,74386	$-8,31347 \times 10^{-4}$	s
$\mu_{D_c}$	$-1,43555 \times 10^8$	-1,74459	-1,74459	$-1,04235 \times 10^8$	$\mu_{D_a}$
$\mu_{N_c}$	$-1,21349 \times 10^{-3}$	-1,74459	-1,74459	$-1,67249 \times 10^{-3}$	$\mu_{N_a}$
$\sigma_\varepsilon(0,2303)$	-10,7756	-0,997802	-0,998544	-10,7876	$\sigma_\varepsilon$
$C_{N_c}$	$-6,99863 \times 10^{-3}$	$-2,19630 \times 10^{-3}$	$-1,45271 \times 10^{-3}$	$-5,69612 \times 10^{-3}$	$C_{N_a}$
$C_{D_c}$	$-3,20465 \times 10^{-6}$	$-1,64626 \times 10^{-6}$	$-3,25227 \times 10^{-6}$	$-5,29092 \times 10^{-6}$	$C_{D_a}$
Indice $\beta = 2,48664$			Indice $\beta = 2,48756$		

Tab. IV-4 Comparaison entre les résultats avec l'indépendance des cycles et celle des actions

### Incertitude des estimateurs et tolérance

Dans le calcul de fiabilité, il est indispensable de connaître les paramètres des lois de probabilité des variables de base comme les moyennes  $\mu_{D_a}$  et  $\mu_{N_a}$  de notre problème. Mais normalement, ces paramètres sont inconnus, et on peut seulement obtenir des valeurs estimées à partir de leurs estimateurs (également aléatoires). Alors, il faut tenir compte, sur l'indice  $\beta$  et sur les valeurs de calcul, de l'influence de l'incertitude venant des estimateurs.

Pour les moyennes  $\mu_{D_a}$  et  $\mu_{N_a}$ , les estimateurs (IV-16) et (IV-18) sont définis par la somme d'un certain nombre d'observations indépendantes sur le nombre. La moyenne de ce type d'estimateurs est égale à celle estimée, et la variance vaut celle des observations divisée par le nombre.

$$E(\hat{\mu}_Z) = \mu_Z \quad \text{et} \quad V(\hat{\mu}_Z) = \sigma_Z^2 / n_Z \quad (\text{IV-50})$$

où  $Z$  représente soit  $D_a'$  soit  $N_a$ . Si les observations suivent une loi normale, l'estimateur de  $\mu_Z$  est une variable normale, sinon, il s'approche d'une variable normale lorsque le nombre  $n_Z$  est assez grand. En négligeant l'incertitude de l'estimateur de la variance et en donnant un fractile  $k$ , l'intervalle de confiance ou la tolérance sur la moyenne  $\mu_Z$  est obtenu comme suit :

$$\mu_Z \in \left( \hat{\mu}_Z - \frac{\hat{\sigma}_Z}{\sqrt{n_Z}} \Phi^{-1}\left(\frac{k}{2}\right), \hat{\mu}_Z + \frac{\hat{\sigma}_Z}{\sqrt{n_Z}} \Phi^{-1}\left(\frac{k}{2}\right) \right) \quad (\text{IV-51})$$

La probabilité que cet intervalle ne contienne pas la moyenne  $\mu_Z$  est inférieure à  $k$ .

Si l'on veut prendre en compte l'incertitude de l'estimateur de la variance dans l'intervalle de confiance, une formule analytique peut s'adapter spécialement aux observations normales à l'aide d'une liaison entre l'estimateur de la variance et une variable de  $\chi^2$ .

$$(n_Z - 1) \hat{\sigma}_Z^2 / \sigma_Z^2 \sim \chi_{n_Z - 1}^2 \quad (\text{IV-52})$$

L'intervalle de confiance devient :

$$\mu_Z \in \left( \hat{\mu}_Z - \frac{\hat{\sigma}_Z}{\sqrt{n_Z}} t_{n_Z - 1, k/2}, \hat{\mu}_Z + \frac{\hat{\sigma}_Z}{\sqrt{n_Z}} t_{n_Z - 1, k/2} \right) \quad (\text{IV-53})$$

où  $t_{n_Z - 1, k/2}$  représente le  $k/2$  d'une variable de loi de "Student" de  $n_Z - 1$  degrés de liberté.

Dans cette étude, si l'on utilise la courbe expérimentale de la résistance, l'incertitude sur les paramètres estimés de la courbe intervient dans le calcul de fiabilité, d'une part par les deux moyennes précédentes caractérisant le trafic, d'autre part par l'écart-type  $\sigma_\epsilon$ . La distribution de probabilité de  $\sigma_\epsilon$  est de la forme suivante :

$$(n - l) \hat{\sigma}_\epsilon^2 / \sigma_\epsilon^2 \sim \chi_{n - l}^2 \quad (\text{IV-54})$$

avec  $l = 2$  pour la courbe à une pente en coordonnées bi-logarithmique, et  $l = 3$  pour celle à trois pentes.  $n$  correspondant au nombre des points d'essai. L'intervalle de confiance de l'écart-type  $\sigma_\epsilon$  s'écrit alors :

$$\sigma_\epsilon \in \left( \hat{\sigma}_\epsilon \sqrt{\frac{n - l}{F_{\chi_{n-l}^2}^{-1}\left(1 - \frac{k}{2}\right)}}, \hat{\sigma}_\epsilon \sqrt{\frac{n - l}{F_{\chi_{n-l}^2}^{-1}\left(\frac{k}{2}\right)}} \right) \quad (\text{IV-55})$$

Les intervalles de confiance définis précédemment sont décrits en fonction du nombre d'observations dans la figure par deux dessins séparés pour les moyenne et les variances, dont

nous prenons les estimateurs centrés réduits. Quant aux autres valeurs des estimateurs, les extrémités de l'intervalle peuvent être déterminées en multipliant la valeur des courbes avec la variance estimée, puis en additionnant la moyenne estimée. Dans le premier dessin, la "méthode N" indique l'intervalle donné par la formule (IV-51), et la "méthode T" celui par la formule (IV-53).

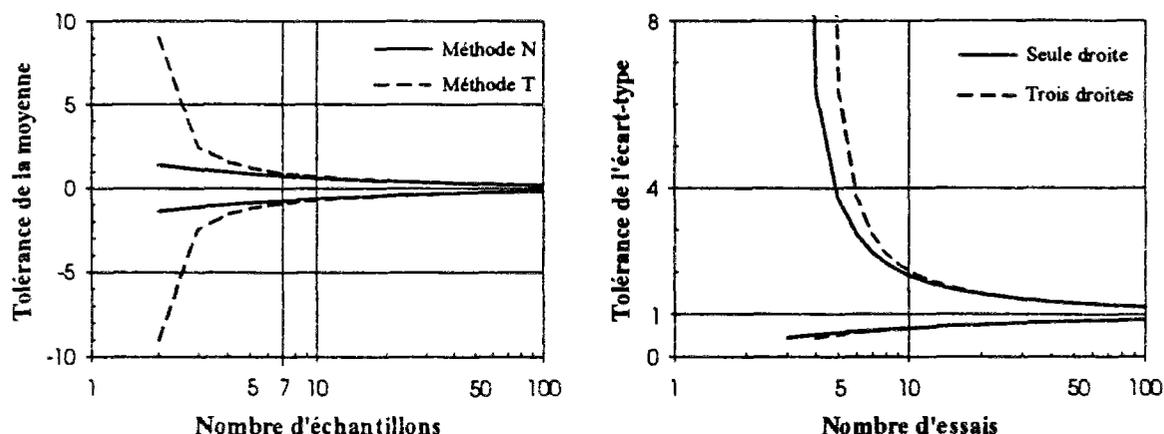


Fig. IV-7 Intervalle de confiance ( $k = 0,05$ )

D'après la figure, l'incertitude due aux estimateurs est décroissante lorsque le nombre d'échantillons augmente. Pour la moyenne du dommage d'une action  $\mu_{D_a}$ , nous avons des milliers d'échantillons, l'incertitude venant de ce paramètre peut être négligée. Alors, dans notre calcul, il n'y a que l'estimateur de la moyenne du nombre d'actions  $\mu_{N_a}$  dont l'influence de l'incertitude est importante sur l'indice de fiabilité  $\beta$ . Pour le mélange de dix trafics, cette moyenne est estimée à partir de dix échantillons et son intervalle de confiance est  $\mu_{N_a} \in (1417,2, 3772,4)$  selon la méthode T (La différence entre les méthodes T et N est faible dans ce cas).

Au niveau de l'indice  $\beta$ , l'intervalle de confiance peut être calculé en introduisant les deux valeurs extrêmes de la moyenne  $\mu_{N_a}$  directement dans la formule (IV-30). Nous obtenons  $\beta \in (0,8636, 5,1125)$  pour une durée de 100 ans et un écart-type  $\sigma_e$  de 0,2303.

Au niveau des valeurs de calcul, nous construisons d'abord un nouvel estimateur  $\hat{\mu}_s$  en composant les estimateurs de la moyenne et de la variance de  $N_a$ , afin de remplacer la moyenne  $\mu_{N_a}$  dans la formule (IV-30). Dans le sens de sécurité, ce nouvel estimateur est supposé être pratiquement supérieur à la moyenne de  $N_a$ , c'est-à-dire que la probabilité qu'il soit inférieur à  $\mu_{N_a}$  est limitée à une petite valeur de  $k_s$  :

$$P(\hat{\mu}_s = \hat{\mu}_{N_a} + \kappa \hat{\sigma}_{N_a} < \mu_{N_a}) = k_s \quad (IV-56)$$

Par la méthode T, le facteur  $\kappa$  peut être déterminé vis-à-vis d'un  $k_s$  d'après une déduction de la formule précédente.

$$P\left(\kappa < \frac{\mu_{N_a} - \hat{\mu}_{N_a}}{\hat{\sigma}_{N_a}} = \frac{1}{\sqrt{n_{N_a}}} T_{n_{N_a}-1}\right) = k_s \quad (\text{IV-57})$$

En fixant  $k_s$  à 0,05 et  $n_{N_a}$  à 10, nous avons  $\kappa = 0,57969$  et  $\hat{\mu}_s = 3549,1$ . Sous les mêmes conditions de calcul que ceux de l'intervalle de l'indice  $\beta$ , le seuil  $\hat{\beta}_s$  vaut 1,1284. Ensuite, nous ajustons le point de fonctionnement en prenant la valeur du seuil au lieu de l'indice  $\beta$  dans la formule (IV-31) ou (IV-38). D'après la transformation avec  $\hat{\mu}_s$ , nous pouvons trouver les valeurs de calcul correspondant à ce dernier point de fonctionnement. Le tableau suivant donne une comparaison entre les valeurs de calcul avant et après l'ajustement.

	Sans l'incertitude de $\hat{\mu}_{N_a}$	Avec l'incertitude de $\hat{\mu}_{N_a}$
Indice $\beta$	2,4876	1,1284
$n_a^*$	2597,0	3550,0
$d_a^*$	$4,1635 \times 10^{-8}$	$4,1635 \times 10^{-8}$
$\varepsilon^*$	-0,57237	-0,25964

Tab. IV-5 Valeurs de calcul avec l'incertitude de l'estimateur

## IV.6. CONCLUSION

Nous avons fourni une méthode de calcul explicite analytique de l'indice de fiabilité  $\beta$  en fatigue, pour des assemblages de ponts métalliques soumis à l'action du trafic routier, dans le cas de l'application du modèle d'endommagement de Miner. Cette méthode permet la prise en compte des aléas caractérisant les trafics, de la dispersion de la résistance en fatigue du détail et même de l'incertitude sur le critère de ruine.

D'après l'étude de sensibilité, l'indice de fiabilité  $\beta$  obtenu par cette méthode est surtout sensible à la durée de vie et aux trafics, puis à la résistance en fatigue du détail y compris la catégorie et l'écart-type de la courbe de Wöhler. Par rapport à ces derniers, l'influence de l'incertitude du critère de ruine est relativement faible, mais elle ne peut pas être négligée.

Pour des ouvrages à longue durée de vie, les coefficients de variation du dommage d'une action et du nombre d'actions pendant la période représentative peuvent être négligés dans le calcul de la méthode, même pour la dépendance entre les cycles voisins de l'historique des contraintes.

Quand le nombre d'échantillons est limité, l'influence de l'incertitude due à l'utilisation des estimateurs est considérable pour l'indice de fiabilité  $\beta$  et les valeurs du calcul.

Appliquée à des cas réels, cette méthode permet de quantifier la sécurité en fatigue de projets ou des ouvrages en service. Pour la recherche laboratoire, elle nous donne une possibilité de déterminer le convoi de fatigue réglementaire (Kretz et Jacob, 1991) de manière à égaliser les indices de fiabilité correspondant respectivement à la sollicitation routière et à celle du convoi.

## CHAPITRE V

### APPROCHE PROBABILISTE DE LA LOI DE PROPAGATION

Dans ce chapitre, nous évaluerons la probabilité de ruine d'un assemblage métallique de pont, soumis aux sollicitations dues au trafic routier de forme aléatoire, en appliquant les lois de la propagation de fissure de la mécanique de la rupture (Kozin et Bogdanoff, 1989). L'indice de fiabilité  $\beta$  sera déterminé à partir de cette probabilité. Le rapport entre l'indice de fiabilité  $\beta$  et la probabilité de ruine est donné par  $P_R = \Phi(-\beta)$ , où  $\Phi$  représente la fonction de répartition d'une variable aléatoire normale centrée réduite. Les calculs s'appuient sur les résultats d'analyse déterministe de la mécanique de la rupture d'un détail (par exemple la fonction de forme), et sur les mesures du trafic routier réel (Yang, Salivar, et Annis, 1983, et Spencer et Tang, 1989). Un processus markovien et le théorème central limite sont utilisés dans les calculs.

#### V.1. APPROCHES PROBABILISTES

Dans le chapitre I, nous avons introduit la définition du facteur d'intensité de contraintes  $K$ , et également la modélisation des lois de propagation basées sur le facteur  $K$ . Lorsque la charge varie, ainsi que la géométrie du fait de l'extension de la fissure, la valeur du facteur  $K$ , à chaque instant, permet de décrire les effets de ces variations. Des formes générales de la variation du facteur  $K$  et de la loi de propagation ont été données respectivement dans les formules (I-26) et (I-20). D'après ces deux formules, nous pouvons réécrire la vitesse de propagation en fonction de l'amplitude de contraintes  $\Delta\sigma$  et de la profondeur de la fissure  $a$ , et fixer les autres paramètres dont l'effet est moindre (Hoepfner et Krupp, 1974) :

$$\frac{da}{dN} = f(a, \Delta\sigma) \quad (V-1)$$

La fonction  $f(\cdot)$  peut varier selon les lois de propagation et les géométries de pièces fissurées différentes. Pour un seul cycle d'amplitude de contraintes ( $dN = 1$ ), la propagation de la fissure est donc :

$$\delta a = f(a, \Delta\sigma) \quad (V-2)$$

En tenant compte des incertitudes sur l'amplitude des contraintes, du nombre de cycles de cette amplitude et de la profondeur de la fissure, nous établirons deux approches probabilistes différentes vis-à-vis de la loi de propagation précédente.

### V.1.1. Approche en fixant l'incrément du temps

Pour une certaine profondeur de fissure, un cycle d'amplitude de contraintes  $\Delta\sigma$  aléatoire provoque un accroissement également aléatoire de la fissure :

$$\delta a(a) = f(a, \Delta\sigma) \quad (V-3)$$

Dans le cas où la profondeur  $a$  est aléatoire, cet accroissement est une variable aléatoire fonction de  $a$  dont la loi est une loi conditionnelle sachant  $a$ . En appliquant des cycles successifs de contraintes, un processus aléatoire décrit la propagation de la fissure :

$$a_j = a_{j-1} + \delta a_j = a_{j-1} + \delta a(a_{j-1}) = a_{j-1} + f(a_{j-1}, \Delta\sigma_j) \quad (1 \leq j) \quad (V-4)$$

La taille de la fissure, à chaque fin de cycle  $a_j$ , peut être considérée comme un état. Si les cycles de contraintes sont indépendants, alors  $a_j$  ne dépend que de l'état précédent  $a_{j-1}$ . Le processus  $a_0, a_1, \dots, a_j, \dots$  est *markovien* (Tsurui et Ishikawa, 1986).

En pratique, l'action sur un pont est définie par la séquence de véhicules (cf. chapitre IV, paragraphe 2). Les cycles déduits de l'historique de la variation de contraintes d'une action, correspondant au détail en fatigue, sont essentiellement dépendants. L'indépendance n'existe qu'entre les cycles qui appartiennent aux actions différentes. Pour cette raison, le processus d'avancement de la fissure au niveau des cycles n'est pas markovien. Par contre, celui au niveau des actions (de paquets des cycles) peut vérifier les propriétés markoviennes en calculant l'accroissement de la fissure produit par une action :

$$\Delta a(a) = \sum_{i=1}^{N_c} f\left(a + \sum_{j=0}^{i-1} \delta a_j, \Delta\sigma_i\right) \quad (V-5)$$

avec  $\delta a_0 = 0$  et  $N_c$  le nombre de cycles d'une action.

Par la même formule, nous pouvons calculer la propagation de la fissure pendant une période représentative du trafic — un incrément du temps fixé. Cependant,  $N_c$  représente le nombre de cycles de contraintes pendant la période totale au lieu de celui pendant la durée d'une action. Les trafics de périodes différentes sont indépendants car ils contiennent des actions qui sont indépendantes. Ainsi, pendant une période, la propagation suit également un

processus markovien pour une durée de vie  $D$  de la structure donnée. A partir d'une longueur initiale de fissure  $a_0$  (qu'elle soit aléatoire ou déterministe), ce processus s'écrit :

$$a_j = a_{j-1} + \Delta a(a_{j-1}) \quad (1 \leq j \leq s) \quad (V-6)$$

où  $s$ , nommé le coefficient de la durée, est le nombre de périodes dans la durée de vie  $D$ , et  $j$  indique l'incrément de temps.

Dans un processus markovien, la variable d'un état ne dépend que de celle de l'état précédent, c'est-à-dire que la densité de probabilité, résultant des états antérieurs  $p(a_j|a_{j-1}, \dots, a_0)$ , peut se simplifier en celle fonction du seul état précédent  $p(a_j|a_{j-1})$ , dite densité de probabilité de transition. Dans notre calcul, cette dernière est déterminée par la densité de probabilité de l'accroissement de la fissure pendant la période  $\Delta a(a_{j-1})$  :

$$p(a_j|a_{j-1}, \dots, a_0) = p(a_j|a_{j-1}) = p_{\Delta a(a_{j-1}=a_{j-1})}(a_j - a_{j-1}) \quad (V-7)$$

Une correspondance a été établie entre la densité de probabilité de transition et la propagation de la fissure pendant une période. Par analogie, la densité de transition entre des états non successifs correspond à la propagation sur plusieurs périodes.

La densité de transition entre états non successifs peut s'obtenir à partir des probabilités de transitions élémentaires en utilisant l'Equation d'évolution de la probabilité de transition déduite de l'intégrale suivante :

$$\begin{aligned} p(a_j) &= \int_{-\infty}^{\infty} p(a_j|a_{j-1})p(a_{j-1}) da_{j-1} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} p(a_j|a_{j-1}) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} p(a_{j-1}|a_{j-2})p(a_{j-2}) da_{j-2} \right] da_{j-1} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} p(a_j|a_{j-1})p(a_{j-1}|a_{j-2}) da_{j-1} \right] p(a_{j-2}) da_{j-2} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} p(a_j|a_{j-2})p(a_{j-2}) da_{j-2} \end{aligned} \quad (V-8)$$

D'où l'on peut tirer une équation d'évolution de la probabilité de transition

$$p(a_j|a_{j-2}) = \int_{-\infty}^{\infty} p(a_j|a_{j-1})p(a_{j-1}|a_{j-2}) da_{j-1} \quad (V-9)$$

En utilisant la densité de probabilité de transition de la première à la dernière étape  $p(a_s|a_0)$  et en considérant la densité de la longueur initiale de la fissure  $p(a_0)$ , nous arrivons au calcul de la probabilité de ruine pour la durée de vie  $D$  (le but de cette étude, Zhu, 1985) :

$$P_R = P(a_s > a_r) = \int_{a_r}^{\infty} p(a_s) da_s = \int_{a_r}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(a_s|a_0)p(a_0) da_0 da_s \quad (V-10)$$

où  $a_r$  est de la longueur de fissure critique.

### V.1.2. Approche en fixant l'incrément de la fissure

D'une l'autre manière, quand on fixe l'incrément de la propagation de la fissure  $\Delta a$  à partir d'une profondeur  $a$ , le temps  $T$  pris par cet incrément de la propagation est une variable aléatoire :

$$T(a) = \frac{N(a)}{v} = \frac{1}{v} \int_a^{a+\Delta a} \frac{da}{f(a, \Delta\sigma)} \quad (V-11)$$

où le taux de cycles  $v$  représente l'incertitude de la moyenne du nombre de cycles de contraintes par unité de temps (Bolotin, 1989).

La durée de vie d'un détail de la structure est égale à la somme des temps pris par tous les incréments de la propagation entre la fissure initiale  $a_0$  et la fissure critique  $a_T$  :

$$D = \sum_{k=1}^{n_\Delta} T(a_{k-1}) = \frac{1}{v} \sum_{k=1}^{n_\Delta} \int_{a_{k-1}}^{a_k} \frac{da}{f(a, \Delta\sigma)} = \frac{1}{v} \sum_{k=1}^{n_\Delta} N(a_{k-1}) \quad (V-12)$$

La probabilité de ruine est calculée en utilisant la densité de probabilité de la durée  $D$  et une durée de vie  $D$  :

$$P_R = P(D > D) = \int_D^\infty p_D(D) dD \quad (V-13)$$

## V.2. HYPOTHESES

Le calcul de fiabilité d'un détail de pont en fatigue par les approches précédentes, nécessite l'histogramme de l'amplitude de contraintes déduit de l'enregistrement du trafic réel, pendant une certaine période représentative. Comme dans le chapitre IV, nous utilisons le logiciel CASTOR-LCPC pour, d'abord, déterminer l'historique de contraintes du détail étudié sous l'effet du trafic au travers de la surface d'influence, et ensuite le décomposer en cycles d'amplitude de contraintes  $\Delta\sigma$  à l'aide de la méthode de comptage "rain-flow".

Nous introduisons ici un certain nombre d'hypothèses afin de déterminer les diverses densités de probabilité utiles pour les deux approches et d'estimer leurs coefficients directement à partir de l'histogramme de "rain-flow" (Tanaka et Tsurui, 1987).

**H1 :** Pour l'approche en fixant l'incrément du temps, nous supposons que les effets du trafic, pendant la période représentative  $\Delta a(a)$ , sont stationnaires et indépendants des différentes périodes.

Cette hypothèse peut être facilement vérifiée pour des périodes suffisamment longues, par exemple une semaine.

En revanche, les hypothèses ci-dessous sont beaucoup plus restrictives. Nous les formulons pour obtenir une densité de probabilité analytique du nombre de cycles produisant un incrément de propagation  $N(a)$  dans l'approche, en fixant l'incrément de la fissure.

**H2 :** Dans les calculs en fixant l'incrément de la fissure, tous les cycles de contraintes  $\Delta\sigma$  suivent une même loi de probabilité.

En réalité, le processus des cycles de  $\Delta\sigma$  n'est pas stationnaire, il est seulement périodique. Pour cette raison, les  $\Delta\sigma$  ne suivent pas une même loi, mais les effets cumulés pendant la période peuvent suivre une même loi, et donc être stationnaires. Nous maintenons cette hypothèse parce qu'elle peut nous amener à une grande simplicité de calcul.

Les estimations des coefficients de la distribution de  $\Delta\sigma$  donnent les valeurs moyennes si l'on utilise les échantillons des périodes complètes. Par ces valeurs moyennes, les résultats globaux varient peu à cause de cette hypothèse.

La définition d'une action — une séquence de véhicules — conduit à un groupage des cycles de contraintes. Les deux hypothèses au niveau de l'indépendance sont prises dans les calculs du chapitre précédent : l'une est l'indépendance entre tous les groupes de cycles, et l'autre celle entre tous les cycles. Il y a un bon accord entre les résultats d'après les deux hypothèses. Ici nous utilisons la plus simple.

**H3 :** Tous les cycles d'amplitude de contraintes  $\Delta\sigma$  sont indépendants.

A partir des deux dernières hypothèses, on peut retrouver la première, celle qui concerne la propagation de la fissure  $\Delta a(a)$  pendant la période.

### **V.3. DETERMINATIONS DES DENSITES DE PROBABILITE**

#### **V.3.1. Densité de probabilité de transition d'un état $j-1$ à un état $j+1$**

La densité de probabilité de transition de plusieurs étapes est déduite de celle d'une seule étape selon l'équation d'évolution de la probabilité de transition (V-9), qui est sous une forme intégrale. Par cette formule, on est obligé de calculer autant d'intégrales que de nombre d'étapes. Ceci donne un calcul très lourd. Dans l'annexe B, on obtient une forme en série de cette équation (Stratonovitch, 1963). Pour calculer la densité d'évolution de probabilité de transition de plusieurs étapes, la résolution de l'équation de dérivation devient alors nécessaire.

$$p(a, j+1|a_{j-1}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{d^n}{da^n} \left\{ E(\Delta a^n | a, j) p(a, j|a_{j-1}) \right\} \quad (V-14)$$

où  $E(\Delta a^n | a, j)$  est le moment de l'incrément conditionnel d'ordre  $n$ . Quand  $n = 1$ , ce moment est équivalent à la moyenne de l'aléa conditionnel  $\Delta a(a_j)$  (Khasminskii, 1968, et Zhu, 1983). Dans la partie gauche de l'équation, la variable  $a$  représente la longueur de fissure d'étape  $j+1$ , et dans la partie droite, celle d'étape  $j$ .

Par différence finie entre deux étapes temporelles, on aboutit à l'*Equation de Fokker-Planck-Kolmogorov* (Equation de FPK) :

$$\begin{aligned} & p(a, j+1|a_{j-1}) - p(a, j|a_{j-1}) \\ & \equiv -\frac{d}{da} \left\{ E(\Delta a | a, j) p(a, j|a_{j-1}) \right\} + \frac{1}{2} \frac{d^2}{da^2} \left\{ E(\Delta a^2 | a, j) p(a, j|a_{j-1}) \right\} \end{aligned} \quad (V-15)$$

qui donne une bonne précision dans le cas où les moments de l'incrément conditionnels d'ordre supérieur à 2 sont petits.

L'estimation des moments de l'incrément conditionnel dans le paragraphe suivant nous montre que ceux d'ordre élevé sont petits. Nous pouvons alors utiliser l'équation de FPK.

D'après H1, les moments de l'incrément conditionnels sont constants en fonction de l'étape (avancement du temps). L'équation (V-15) se simplifie :

$$\begin{aligned} & p(a, j+1|a_{j-1}) - p(a, j|a_{j-1}) \\ & \equiv -\frac{d}{da} \left\{ E(\Delta a | a) p(a, j|a_{j-1}) \right\} + \frac{1}{2} \frac{d^2}{da^2} \left\{ E(\Delta a^2 | a) p(a, j|a_{j-1}) \right\} \end{aligned} \quad (V-16)$$

Pour résoudre l'équation de FPK, nous utilisons la méthode différentielle (Garrido et Masoliver, 1982). C'est-à-dire qu'en partageant l'intervalle de la propagation de la fissure entre la valeur initiale  $a_0$  et la valeur critique  $a_r$  par des petits segments  $\Delta a$ , la première et la deuxième dérivées, par rapport à la longueur de la fissure  $a$  dans la partie droite de l'équation précédente, sont évaluées par les valeurs aux points de la séparation des segments (noeuds) selon des formules différentielles. Dans le cas où les segments  $\Delta a$  sont constants, les formules différentielles les plus souvent utilisées s'écrivent :

$$\left. \frac{df}{da} \right|_k \equiv \frac{f_{k+1} - f_{k-1}}{2 \Delta a} \quad \text{et} \quad \left. \frac{d^2 f}{da^2} \right|_k \equiv \frac{f_{k+1} - 2f_k + f_{k-1}}{\Delta a^2} \quad (V-17)$$

En accord avec l'équation de FPK, la fonction de dérivation  $f$  peut représenter respectivement  $E(\Delta a|a) p(a, j|a_{j-1})$  et  $E(\Delta a^2|a) p(a, j|a_{j-1})$ . Entre les deux noeuds, les dérivées s'obtiennent par interpolation linéaire selon les valeurs aux noeuds.

En donnant la condition initiale — la densité de probabilité de transition  $p(a_1|a_0)$ , et les conditions aux limites — la densité de probabilité de transition valant zéro aux points  $a_0$  et  $\infty$  pour toutes les étapes, nous pouvons calculer successivement la densité de probabilité de transition de multi-étapes au début de  $a_0$ .

$$p(a_k, j+1|a_0) \equiv p(a_k, j|a_0) - \frac{E(\Delta a|a_{k+1})p(a_{k+1}, j|a_0) - E(\Delta a|a_{k-1})p(a_{k-1}, j|a_0)}{2\Delta a} + \frac{E(\Delta a^2|a_{k+1})p(a_{k+1}, j|a_0) - 2E(\Delta a^2|a_k)p(a_k, j|a_0) + E(\Delta a^2|a_{k-1})p(a_{k-1}, j|a_0)}{2\Delta a^2} \quad (V-18)$$

La figure suivante schématise la procédure de ce calcul. L'axe du temps  $T$  indique la direction de l'itération, et l'axe de la longueur de la fissure, la direction de la propagation. Un incrément du temps  $\Delta T$  correspond à une période de propagation.

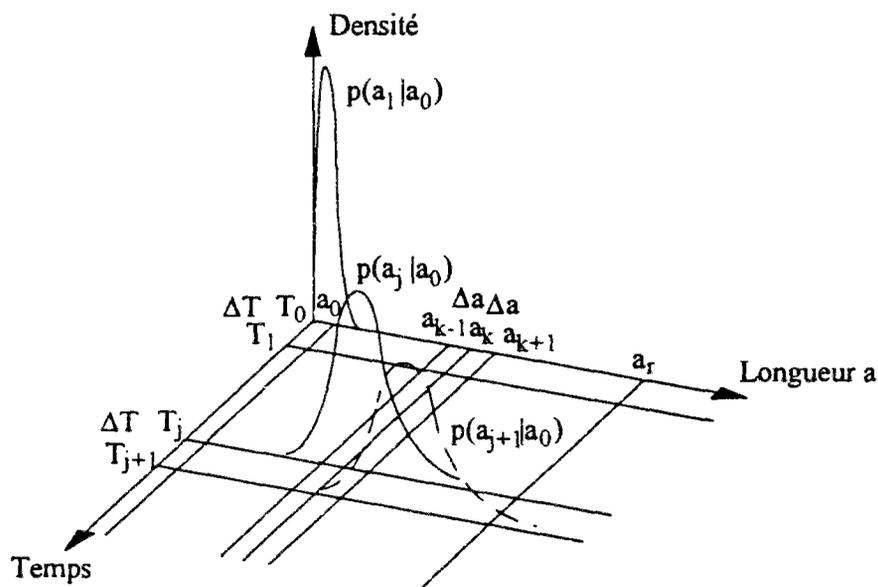


Fig. V-1 Détermination de la densité de transition par la méthode différentielle

### V.3.2. Détermination de la densité de probabilité de $N(a)$

$N(a)$  est le nombre de cycles de contraintes qui produit un petit incrément  $\Delta a$  de la propagation de la fissure à partir d'une certaine profondeur  $a$ . Pour calculer le temps  $T(a)$  correspondant à  $N(a)$ , nous devons d'abord déterminer la densité de probabilité de  $N(a)$ .

La propagation de la fissure due à un seul cycle d'amplitude de contraintes, représentée par la formule (V-3), est une variable aléatoire. En notant la densité de probabilité de cette propagation  $\delta a$  par  $\Psi_1$ , la probabilité que  $\Delta a$  soit atteint en un cycle peut s'écrire :

$$P_1 = \int_{\Delta a}^{\infty} \Psi_1(\delta a) d\delta a = 1 - \int_0^{\Delta a} \Psi_1(\delta a) d\delta a \quad (V-19)$$

En cumulant les effets d'un seul cycle, nous obtenons la propagation de la fissure amenée par plusieurs cycles d'amplitude de contraintes :

$$\Delta a(a) = \sum_{i=1}^n f \left( a + \sum_{j=0}^{i-1} \delta a_j, \Delta \sigma_i \right) \quad (V-20)$$

En pratique, quand la longueur de la fissure  $a$  est loin de la valeur critique  $a_T$ , la propagation due à un cycle  $\delta a$  est très petite par rapport à la valeur  $a$ , même pour une somme d'un certain nombre de  $\delta a$ . Pour cette raison, nous introduisons l'approximation suivante qui simplifie le calcul de la formule (V-20) :

$$f \left( a + \sum_{j=1}^{i-1} \delta a_j, \Delta \sigma_i \right) \cong f(a, \Delta \sigma_i) \quad (V-21)$$

Par conséquent, la propagation produite par de nombreux cycles s'approche de la somme des effets individuels de chaque cycle :

$$\Delta a(a) \cong \sum_{i=1}^n f(a, \Delta \sigma_i) = \sum_{i=1}^n \delta a_i(a) \quad (V-22)$$

De la même manière concernant un seul cycle, nous présentons la probabilité que  $\Delta a$  soit atteint en  $n$  cycles ou moins en remplaçant  $\Psi_1$  par  $\Psi_n$  — la densité de probabilité de la somme de  $\delta a_i$  :

$$\sum_{i=1}^n P_i = \int_{\Delta a}^{\infty} \Psi_n(\alpha) d\alpha = 1 - \int_0^{\Delta a} \Psi_n(\alpha) d\alpha \quad (V-23)$$

où  $P_i$  représente la probabilité que  $\Delta a$  soit atteint précisément en  $n$  cycles.

Selon le théorème central limite, la somme de  $\delta a_i$  peut être approchée par une variable aléatoire normale pour un nombre  $n$  assez grand sous les conditions de H2 et H3. Nous obtenons une densité approximative de  $\Psi_n$  :

$$\Psi_n(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi nV(a)}} \exp \left( -\frac{(\alpha - nE(a))^2}{2nV(a)} \right) \quad (\text{grand } n) \quad (V-24)$$

où  $E(a)$  et  $V(a)$  sont la moyenne et la variance de  $\delta a_i$ .

D'après cette densité approximative  $\Psi_n(\alpha)$  et à l'aide de la fonction de répartition d'une variable normale standardisée  $\Phi(\cdot)$ , la probabilité que  $\Delta a$  soit atteint en  $n$  cycles précises  $P_n$  est déterminée. Ceci représente la répartition de probabilité de  $N(a)$  d'une façon discrète lorsque  $n$  est grand.

$$P_n = \int_{\Delta a}^{\infty} \Psi_n(\alpha) d\alpha - \int_{\Delta a}^{\infty} \Psi_{n-1}(\alpha) d\alpha$$

$$= -\left( \Phi\left(\frac{\Delta a - nE(a)}{\sqrt{nV(a)}}\right) - \Phi\left(\frac{\Delta a - (n-1)E(a)}{\sqrt{(n-1)V(a)}}\right) \right) \quad (\text{grand } n) \quad (V-25)$$

En fatigue, la propagation de la fissure a besoin de nombreux cycles, la rupture sous un petit nombre de cycles ne convient pas. Les probabilités que  $\Delta a$  soit franchi en un petit nombre de cycles sont alors négligeables même pour un incrément  $\Delta a$  pas tellement petit. La condition que  $n$  soit grand peut toujours se vérifier sauf dans les derniers incréments, c'est-à-dire près de la longueur critique  $a_r$ . En effet, l'influence de ces derniers incréments sur la durée de vie est faible car la plupart des cycles ont été passés dans les incréments précédents.

En prenant la relation entre la répartition et la densité :  $P_n = p_{N(a)}(n) dn$ , une fonction de répartition de  $N(a)$  sous la forme continue s'acquiert :

$$p_{N(a)}(n) = -\frac{\partial}{\partial n} \Phi\left(\frac{\Delta a - nE(a)}{\sqrt{nV(a)}}\right) \quad (V-26)$$

La moyenne et la variance de la variable  $N(a)$  décrite par cette densité sont respectivement :

$$E(N(a)) = \frac{\Delta a}{E(a)} + \frac{V(a)}{2E^2(a)} = \frac{\Delta a}{E(a)} + \frac{1}{2}C^2(a) \quad (V-27)$$

$$V(N(a)) = \frac{\Delta a V(a)}{E^3(a)} + \frac{5V^2(a)}{4E^4(a)} = \frac{\Delta a}{E(a)}C^2(a) + \frac{5}{4}C^4(a) \quad (V-28)$$

### V.3.3. Détermination de la densité de probabilité de la durée de vie

Comme le montre la formule (V-12), la durée de vie  $D$  est égale à la somme des nombres des cycles pris par tous les incréments de l'avancement de la fissure sur le taux de cycles  $v$  :

$$D = \frac{1}{v} \sum_{k=1}^{n_{\Delta}} N(a_{k-1})$$

Pour évaluer la probabilité de la somme des  $N(a)$  avec un nombre  $s$  assez grand, nous pouvons également utiliser le théorème central limite. Dans ce but, nous entendons partager l'intervalle de la propagation  $[a_0, a_r]$  d'une telle manière que tous les  $N(a)$  aient la même loi de probabilité.

Dans les calculs de la moyenne et de la variance de  $\delta a$  selon la loi de Paris :

$$E(a) = E(f(a, \Delta\sigma)) = E\left(C(\sqrt{\pi a} \Delta\sigma F(a))^m\right) = C(\sqrt{\pi a} F(a))^m E(\Delta\sigma^m)$$

$$V(a) = V(f(a, \Delta\sigma)) = V\left(C(\sqrt{\pi a} \Delta\sigma F(a))^m\right) = \left[C(\sqrt{\pi a} F(a))^m\right]^2 V(\Delta\sigma^m)$$

nous trouvons que la moyenne et la variance de  $\delta a$  sont égales à une fonction déterministe de la longueur de la fissure multipliée par une constante, caractérisant l'incertitude de l'amplitude de contraintes. Ce résultat nous donne l'idée de décomposer la moyenne et la variance de  $\delta a$  de la façon suivante pour toutes les lois de propagation :

$$E(a) = E_g g(a) \quad (V-29)$$

$$V(a) = V_g g^2(a) \quad (V-30)$$

Pour la loi de Paris, la fonction  $g(a) = C(\sqrt{\pi a} F(a))^m$ , et les constants  $E_g$  et  $V_g$  caractérisent la moyenne et la variance d'amplitude de contraintes à la puissance  $m$ . Pour les autres lois, nous ne sommes pas sûrs que ces décompositions soient convenables, et pas sûrs non plus d'avoir des présentations précises et explicites de la fonction  $g(a)$  et des constants  $E_g$  et  $V_g$ . Afin de tester la convenance des décompositions, nous calculons numériquement certaines valeurs de la moyenne  $E(a)$  et de la variance  $V(a)$  correspondant aux différentes profondeurs  $a$ . A partir de ces valeurs, nous ajustons un coefficient dit  $C_g$ , qui est défini par  $C_g = \frac{\sqrt{V_g}}{E_g}$ , en minimisant une fonction objective

$$f_{\text{obj}}(C_g) = \sum_i \left(\sqrt{V(a_i)} - C_g E(a_i)\right)^2 \quad (V-31)$$

D'après l'ajustement, si nous obtenons une faible valeur de la fonction  $f_{\text{obj}}$ , les décompositions sont convenables, sinon, nous ne pouvons pas les utiliser.

Les déductions ci-après sont sous la condition que les décompositions (V-29) et (V-30) soient convenables.

En introduisant les décompositions dans la densité de probabilité de  $N(a)$  obtenue dans le paragraphe précédent

$$p_{N(a)}(n) = -\frac{\partial}{\partial n} \Phi\left(\frac{\Delta a - n E_g g(a)}{\sqrt{n V_g g^2(a)}}\right) = -\frac{\partial}{\partial n} \Phi\left(\frac{\frac{\Delta a}{g(a)} - n E_g}{\sqrt{n V_g}}\right) \quad (V-32)$$

nous découvrons immédiatement que, pour uniformiser la densité de probabilité de  $N(a)$ , il suffit de régler la dimension des incréments de propagation  $\Delta a$  au travers de la formule :

$$\frac{\Delta a}{g(a)} = \text{Constante } A \quad (\text{V-33})$$

La moyenne et la variance de  $N(a)$  deviennent :

$$E(N(a)) = \frac{A}{E_g} + \frac{V_g}{2E_g^2} = \frac{A}{E_g} + \frac{1}{2}C_g^2 \quad (\text{V-34})$$

$$V(N(a)) = \frac{A V_g}{E_g^3} + \frac{5V_g^2}{4E_g^4} = \frac{A}{E_g}C_g^2 + \frac{5}{4}C_g^4 \quad (\text{V-35})$$

Dans le cas où la fonction  $g(a)$  est explicite, comme dans la loi de Paris, les coefficients  $E_g$  et  $V_g$  (ou  $C_g$ ) sont calculés directement par les décompositions (V-29) et (V-30), et tous les points de la séparation des incréments  $\Delta a$  sont successivement déterminés depuis la fissure initiale  $a_0$  jusqu'à la valeur critique  $a_r$  par la formule (V-33) en fixant la constante  $A$  :

$$a_k = a_{k-1} + \Delta a_k = a_{k-1} + A g(a_{k-1}) \quad (k = 1, 2, \dots, n_\Delta) \quad (\text{V-36})$$

Le nombre d'incrément  $n_\Delta$  et le dernier point  $a_{n_\Delta}$  ( $\geq a_r$ ) s'obtiendront en même temps. Si l'on donne le nombre d'incrément  $n_\Delta$ , la constante  $A$  peut être ajustée par l'intégrale suivante en sachant que les incréments sont petits :

$$n_\Delta = \frac{1}{A} \sum_{k=1}^{n_\Delta} \frac{\Delta a_k}{g(a_{k-1})} \cong \frac{1}{A} \int_{a_0}^{a_r} \frac{da}{g(a)} \Leftrightarrow A \cong \frac{1}{n_\Delta} \int_{a_0}^{a_r} \frac{da}{g(a)} \quad (\text{V-37})$$

Dans le cas où la fonction  $g(a)$  est implicite, nous calculons le coefficient  $C_g$  à l'aide de la minimisation de la fonction objective (V-31), et nous déterminons le terme  $\frac{A}{E_g}$  ensemble en empruntant l'intégrale précédente :

$$\frac{A}{E_g} \cong \frac{1}{n_\Delta} \int_{a_0}^{a_r} \frac{da}{E_g g(a)} = \frac{1}{n_\Delta} \int_{a_0}^{a_r} \frac{da}{E(a)} \quad (\text{V-38})$$

Finalement, nous procédons à écrire la distribution de la somme des nombres des cycles d'après le théorème central limite et à établir la densité de la durée de vie des structures. La somme des  $N(a)$  suit une loi normale avec la moyenne  $n_\Delta E(N(a))$  et la variance  $n_\Delta V(N(a))$ . La probabilité de ruine s'évalue par une double intégration si nous tenons compte de l'incertitude sur le taux de cycles  $v$  (en posant une densité  $p_v$ ).

$$\begin{aligned}
P(\mathbf{D} > D) &= \int_D^{\infty} p_{\mathbf{D}}(D) dD \\
&= \int_D^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{v}{\sqrt{2\pi n_{\Delta} V(N(a))}} \exp\left(-\frac{(vD - n_{\Delta} E(N(a)))^2}{2 n_{\Delta} V(N(a))}\right) p_v(v) dv dD
\end{aligned}$$

De cette intégration, nous retirons la densité de probabilité de la durée  $\mathbf{D}$  :

$$p_{\mathbf{D}}(D) = \int_0^{\infty} \frac{v}{\sqrt{2\pi n_{\Delta} V(N(a))}} \exp\left(-\frac{(vD - n_{\Delta} E(N(a)))^2}{2 n_{\Delta} V(N(a))}\right) p_v(v) dv \quad (\text{V-39})$$

#### V.4. ESTIMATIONS DE LA PROPAGATION DE LA FISSURE

Dans les déductions précédentes, nous avons utilisé le moment de l'incrément conditionnel de divers ordres  $E(\Delta a^n | a)$  de la propagation de la fissure pendant une période représentative, la moyenne  $E(a)$  et la variance  $V(a)$  de la propagation de la fissure due à un seul cycle d'amplitude de contraintes, qui sont fonction de la longueur  $a$ . Pour obtenir une courbe lissée, les estimations doivent être faites en plusieurs points de  $a$  dans l'intervalle de la propagation  $[a_0, a_r]$ .

Ici, nous utilisons les mêmes enregistrements du trafic routier réel d'une semaine que dans le chapitre IV afin d'estimer  $E(\Delta a^n | a)$ ,  $E(a)$  et  $V(a)$ . La période représentative est alors fixée à une semaine. A partir de ces enregistrements, le logiciel CASTOR-LCPC produit les histogrammes d'amplitudes de contraintes  $\Delta\sigma$  de "rain-flow" correspondant au détail étudié — l'assemblage soudé du raidisseur vertical - semelle inférieure des poutres principales du pont de Jargeau.

Les réalisations de la propagation de la fissure sont calculées selon la loi de Paris à seuil (I-22), dont les deux constantes du matériau  $C'$  et  $m'$  valent respectivement  $8,0 \times 10^{-12}$  et 2,85. La fonction de forme incluse dans l'amplitude du facteur d'intensité de contrainte  $\Delta K_I$  est déterminée dans le chapitre I par l'intégrale de Rice vis-à-vis du détail (I-47). Il existe un certain nombre de méthodes pour définir  $\Delta K_{I_s}$ . Nous préférons utiliser la méthode proposée par le contrat CECA qui consiste à associer la longueur initiale de la fissure  $a_0$  et la limite de troncature en fatigue  $\Delta\sigma_T$  de la courbe de Wöhler.

$$\Delta K_{I_s} = \sqrt{\pi a_0} \Delta\sigma_T F\left(\frac{a_0}{b}\right) \quad (\text{V-40})$$

Correspondant à notre détail,  $\Delta K_{I_s}$  vaut  $1,4445 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$  pour  $a_0 = 0,4 \text{ mm}$ .

En prenant un histogramme d'une semaine, les estimateurs de la moyenne  $E(a)$  et de la variance  $V(a)$  s'écrivent :

$$\hat{E}(a) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta a_i = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(a, \Delta \sigma_i) \quad (V-41)$$

$$\hat{V}(a) = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (\delta a_i - \hat{E}(a))^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (f(a, \Delta \sigma_i) - \hat{E}(a))^2 \quad (V-42)$$

où  $N$  représente le nombre de cycles d'amplitude de contraintes dans l'histogramme. Bien entendu, plusieurs histogrammes peuvent être utilisés dans cette estimation. La figure suivante montre le résultat de l'estimation d'après 10 histogrammes.

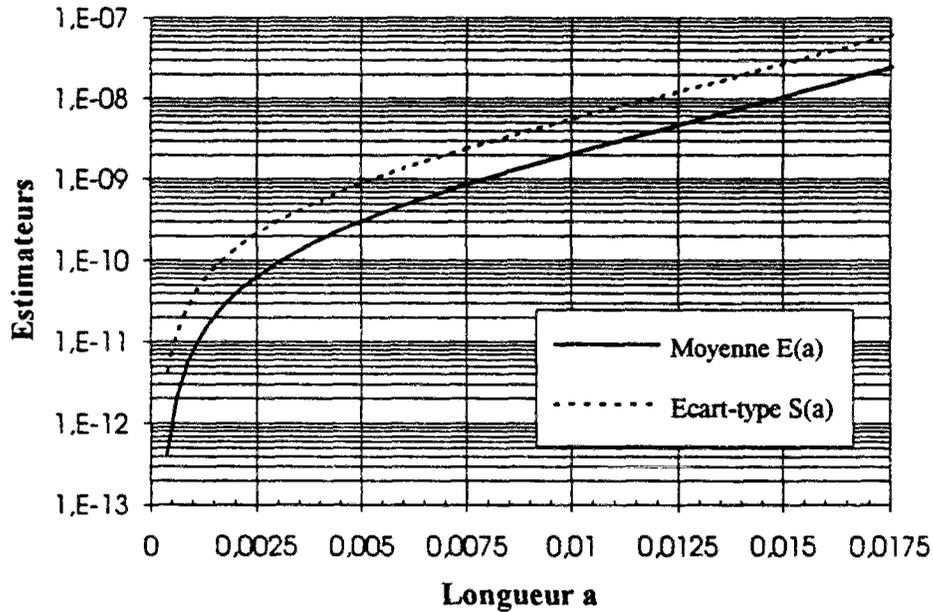


Fig. V-2 Estimation de la propagation due à un seul cycle en fonction de  $a$  (m)

En cumulant les propagations dues à des cycles dans un histogramme, nous obtenons une réalisation de la propagation pendant une semaine. Par les 10 réalisations déduites des 10 histogrammes, nous estimons les moments de l'incrément conditionnels  $E(\Delta a^n | a)$  :

$$\hat{E}(\Delta a^n | a) = \frac{1}{N_h} \sum_{k=1}^{N_h} (\Delta a_k(a))^n \quad (V-43)$$

où  $N_h$  signifie le nombre d'histogrammes. Nous cumulons, de deux manières, la propagation pour déterminer les réalisations  $\Delta a(a)$  : l'une est de la formule (V-20) dont la longueur de la fissure  $a$  augmente après chaque calcul de l'incrément cyclique, l'autre de la formule (V-22) dont la propagation est calculée à partir d'une longueur  $a$  fixée pour tous les cycles. Nous

comparons la différence amenée par ces deux manières sur les estimateurs de la moyenne et de l'écart-type de  $E(\Delta a|a)$  dans la figure en bas. Nous trouvons que les deux courbes se superposent pratiquement lorsque la longueur  $a$  est inférieure à 0,01m. Par rapport à la longueur critique  $a_c$  — la moitié de l'épaisseur de la pièce étudiée 0,0175m, cette valeur est assez grande. Ce phénomène valide l'approximation (V-21) qui déduit une distribution normale dans la détermination de la densité du nombre de cycles  $N(a)$  correspondant à un petit incrément de la propagation.

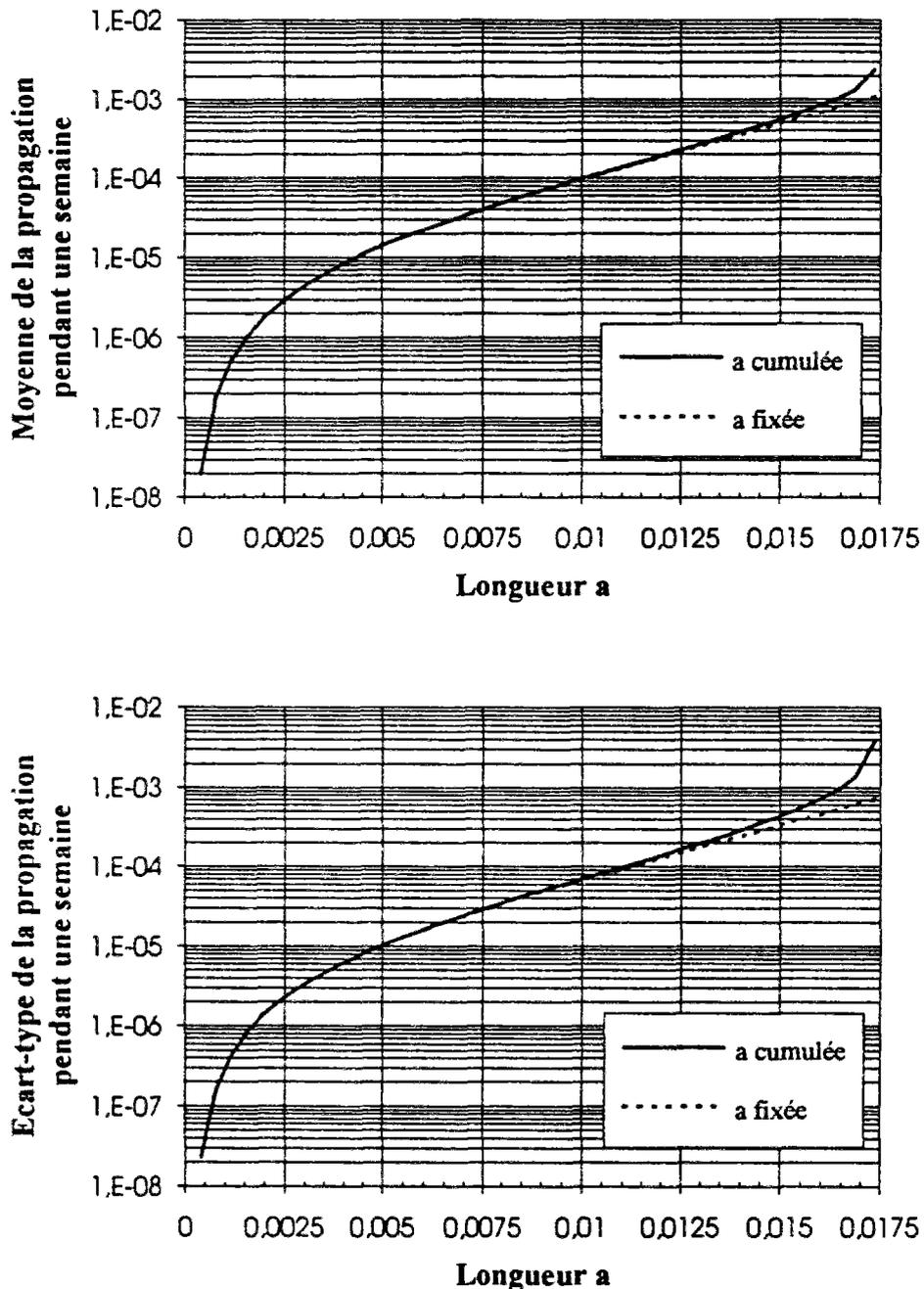


Fig. V-3 Comparaison des deux façons du calcul de la propagation pendant une semaine (m)

## V.5. RESULTATS DES CALCULS DE LA PROBABILITE DE RUINE

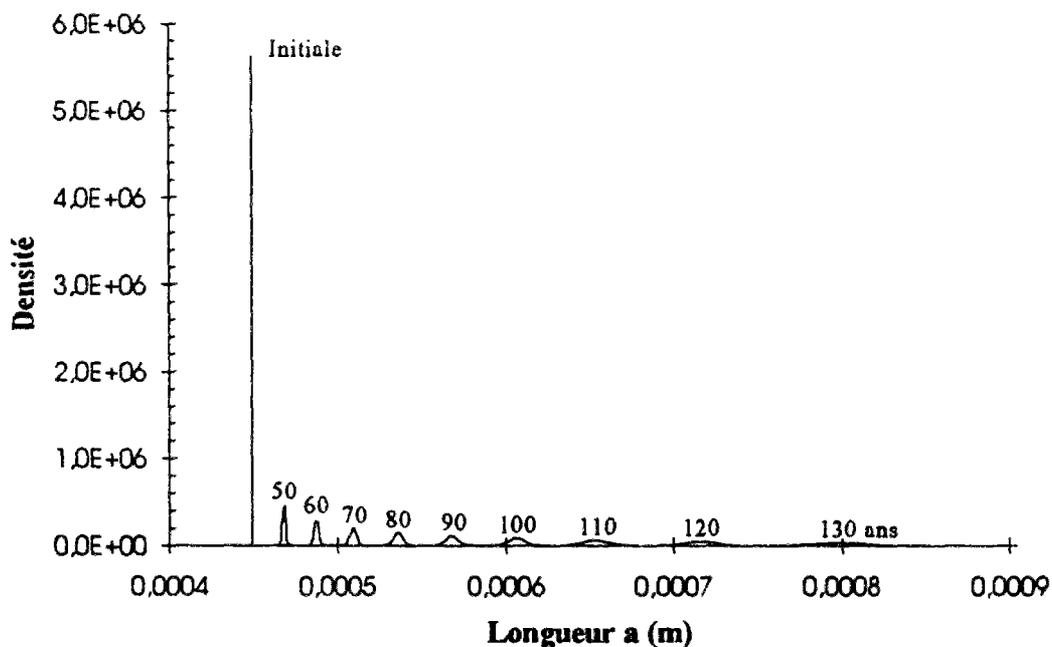
En introduisant les courbes estimées des moments de l'incrément conditionnels d'ordres 1 et 2 dans la résolution de l'équation de FPK, nous obtenons l'évolution de la densité de probabilité de transition en fonction du temps. La distribution initiale est sous la forme normale avec la moyenne 0,000449m représentant la longueur initiale et l'écart-type  $3,29196 \times 10^{-8}m$  venu de l'estimation de la propagation  $E(\Delta a|a)$  pour  $a = 0,000449m$ .

Après chaque itération de la résolution, à cause de l'erreur de la formule différentielle, la surface couverte par la densité obtenue est plus ou moins différente de 1. Pour corriger cette erreur, nous ajustons une fonction de simulation de la densité sous la condition que la surface couverte par celle-ci vaille 1. La forme de la fonction de simulation s'écrit :

$$p(a) = \exp\left(\sum_{i=0}^4 c_i a^i\right) \quad (V-44)$$

où  $c_i$  sont des coefficients ajustés.

Les trois dessins ci-après présentent successivement l'évolution de la densité de transition en fonction du temps. Nous observons que la probabilité de ruine se manifeste presque au dernier moment. Vis-à-vis de la durée, cette augmentation instantanée de la probabilité de ruine signifie une petite dispersion sur la durée de vie du détail. En ne tenant pas compte de l'incertitude au niveau de la fissure initiale, nous avons la probabilité de ruine de 0,402 à 184 ans et 3 mois.



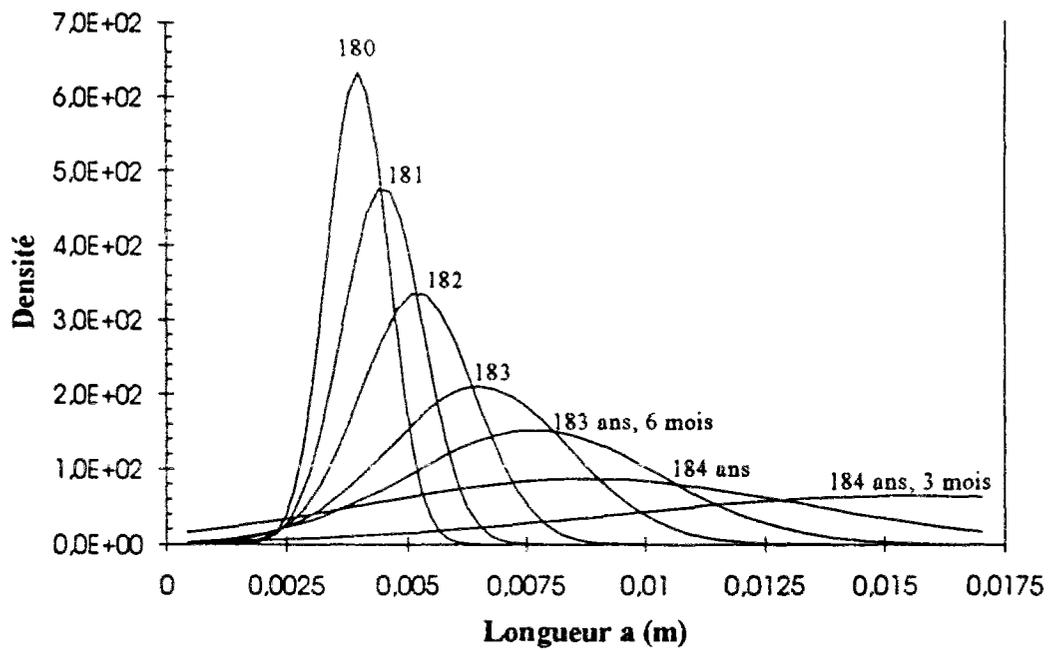
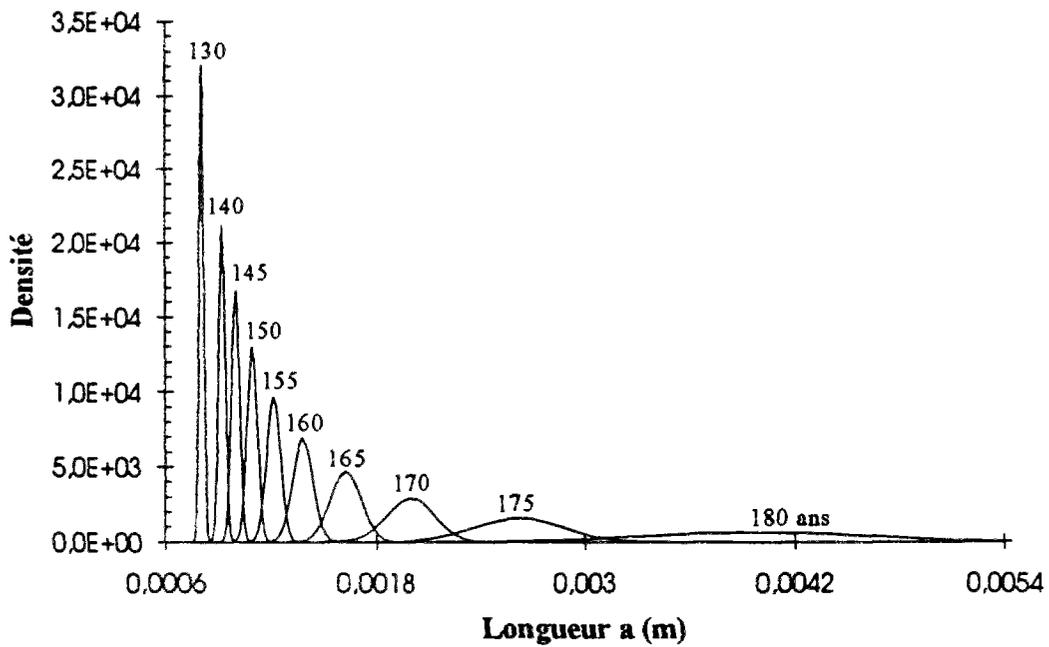


Fig. V-4 Evolution de la densité de probabilité de transition

Comme vérification, nous comparons les allures de l'avancement de la fissure obtenues par la résolution de l'équation de FPK (en prenant la valeur moyenne) et par le calcul déterministe de la propagation dans la figure suivante. Nous obtenons des résultats identiques, sauf au dernier moment où la propagation de la fissure déduite de l'équation de FPK est légèrement plus rapide que celle du calcul déterministe.

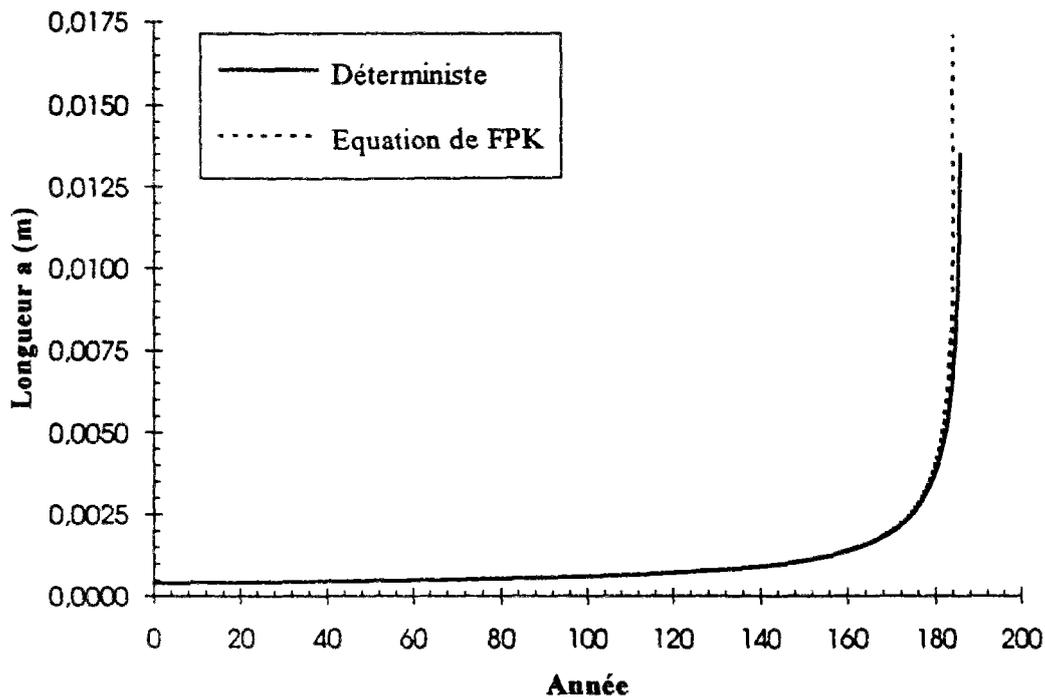


Fig. V-5 Comparaison de la moyenne de l'avancement avec le calcul déterministe

Dans l'approche où l'on fixe l'incrément de la fissure, la loi de Paris à seuil ne nous permet pas de décomposer directement la moyenne et la variance de la propagation due à un seul cycle selon les formules (V-29) et (V-30). La fonction  $g(a)$  est implicite. Pour déterminer la densité de la durée de vie  $D$ , nous minimisons d'abord la fonction objective (V-31) qui représente l'erreur lorsque les décompositions s'effectuent numériquement. Nous obtenons une valeur faible de cette fonction par rapport à  $E(a)$  et  $V(a)$  :  $f_{obj} = 1,0458 \times 10^{-16}$ , alors les décompositions sont convenables. Ensuite, nous calculons la moyenne et la variance du nombre de cycles  $N(a)$  correspondant à un petit incrément de la propagation en introduisant le coefficient  $C_g$  et le terme  $\frac{A}{E_g}$  dans les formules (V-34) et (V-35). Nous remarquons que  $C_g$  est déterminé par la minimisation et  $\frac{A}{E_g}$  est évalué par l'intégrale (V-38) en donnant le nombre d'incrément  $n_{\Delta}$  (= 50). Après l'estimation du taux de cycles  $v$ , nous établissons finalement la densité de la durée de vie  $D$  suivant une loi normale sans tenir compte de la dispersion de  $v$ , c'est-à-dire que nous ne prenons que la moyenne (qui vaut 2414428 cycles / ans).

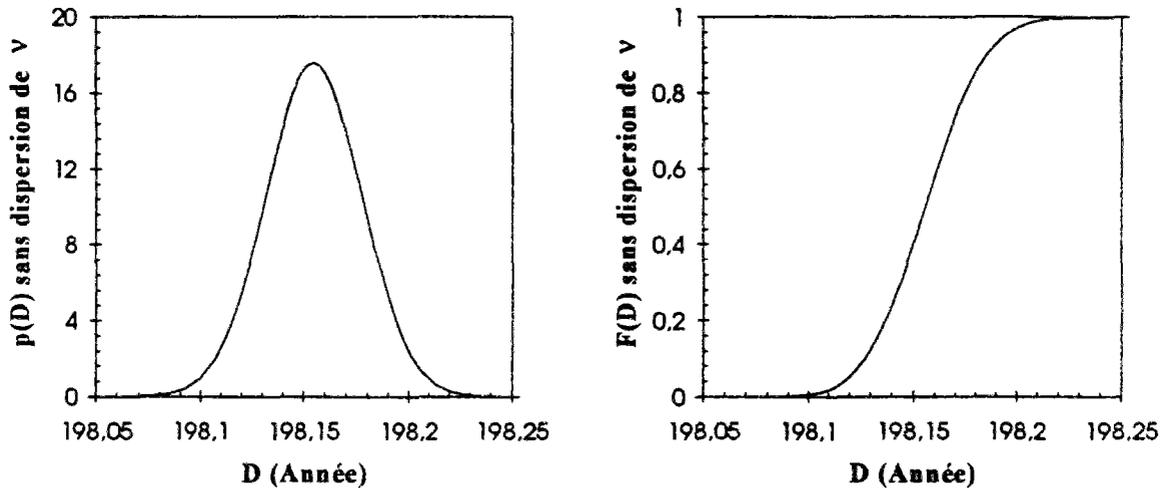


Fig. V-6 Distribution de probabilité de la durée de vie

Dans la figure précédente, nous retrouvons une petite dispersion de la durée de vie  $D$ , qui s'accorde bien avec les résultats du calcul de l'évolution de la densité de probabilité. La moyenne de la durée  $D = 198,15$  ans est un peu plus grande que celles obtenues par le calcul déterministe de la propagation et par la résolution de l'équation de FPK à cause de l'approximation (V-21).

## V.6. CONCLUSION

Nous avons développé deux approches probabilistes, pour calculer la propagation de la fissure, qui permettent d'appliquer diverses lois de propagation. Les résultats obtenus d'après ces deux approches sont comparables au calcul déterministe.

La dispersion amenée seulement par l'incertitude de l'amplitude de contraintes est faible sur la longueur de la fissure et sur la durée de vie, c'est-à-dire que les incertitudes de la fissure initiale  $a_0$  et du taux de cycles  $v$  ne sont pas prises en compte.

## CONCLUSION GENERALE ET PERSPECTIVES

### CONCLUSION GENERALE

Nous avons développé des méthodes de calcul de l'indice de fiabilité  $\beta$  ou de la probabilité de ruine en fatigue, pour des assemblages de ponts métalliques soumis à l'action du trafic routier, avec le modèle d'endommagement (de Miner) et les lois de propagation de la mécanique de la rupture. Ces méthodes permettent la prise en compte, des aléas caractérisant les trafics, de la dispersion de la résistance en fatigue du détail et même de l'incertitude sur le critère de ruine. Appliquées à des cas réels, ces méthodes permettent de quantifier la sécurité en fatigue de projets ou d'ouvrages en service.

Pour des ouvrages à longue durée de vie, les calculs de l'indice  $\beta$  par le modèle d'endommagement montrent que les coefficients de variation du dommage d'une action et du nombre d'actions pendant la période représentative peuvent être négligés devant celui de la courbe de Wöhler. Ceci est comparable au résultat obtenu dans le cas de l'application de la loi de propagation (de Paris à seuil) : la dispersion sur la longueur de la fissure ou sur la durée de vie déduite seulement de l'incertitude de l'amplitude de contraintes est faible.

L'étude de la sensibilité de l'indice  $\beta$ , par rapport aux paramètres du modèle de Miner, montre que cet indice est surtout sensible à la durée de vie, et aux moyennes du dommage d'une action et du nombre d'actions, puis à la résistance en fatigue du détail y compris la catégorie et l'écart-type de la courbe de Wöhler. A partir de ces résultats, nous espérons pouvoir faire cette étude de la sensibilité pour d'autres paramètres du trafic, ayant des significations physiques plus communes et plus compréhensibles, par exemples le débit moyen et le poids moyen des poids lourds d'un enregistrement du trafic. Dans ce cas, les résultats seront encore plus "parlants".

### PERSPECTIVES

Dans ce mémoire, nous avons calculé la fiabilité de l'assemblage raidisseur vertical - semelle inférieure du pont de Jargeau. Pour déterminer le convoi de fatigue réglementaire, nous pouvons d'abord appliquer les méthodes du calcul de fiabilité à tous les types de détails pour différents ponts, et ensuite calibrer ou identifier les indices de fiabilité  $\beta$  obtenus sous les charges du trafic réel et du convoi de fatigue.

Au niveau de la calibration des coefficients partiels de sécurité, nous pouvons également appliquer ces méthodes de calcul de la fiabilité à divers détails, en tenant compte du chargement et de la résistance des différentes catégories et classes réglementaires. Pour chaque détail, nous pouvons obtenir une correspondance entre l'indice de fiabilité  $\beta$  et les coefficients de sécurité  $\gamma$  à partir d'un groupe de variables de base (correspondant à  $\gamma = 1$ ). En rassemblant les résultats obtenus de chaque détail, il est possible d'établir une variation générale de l'indice  $\beta$  en fonction des coefficients  $\gamma$ .

Pour les cas où les algorithmes traditionnels sont mis en défaut par des minimums locaux nombreux, nous sommes en train de développer un nouvel algorithme de recherche du point de fonctionnement, dit "de l'hypersphère". Pour valider cet algorithme, nous avons calculé un certain nombre d'exemples trouvés dans la littérature, par exemple celui donné par Hohenbichler et Rackwitz (1981). Nous espérons aussi appliquer ce calcul à des ouvrages réels avec une fonction d'état limite plus complexe. Après ce-là, nous allons exposer cet algorithme.

## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- Barsoum, R.S.** (1976) : *On the Use of Isoparametric Finite Elements in Linear Fracture Mechanics*, Int. J. Num. Meth. Eng., 10, No. 1, pp.25-37.
- Bignonnet, A., Carracilli, J., et Jacob, B.** (Mars 1991) : *Etude en Fatigue des Ponts Métalliques par un Modèle de Mécanique de la Rupture*, Conférence ITBTP, N°493, Série Construction Métallique, pp.58-95.
- Bolotin, V.V.** (1989) : *Prediction of Service Life for Mechanics ans Structures*, ASME Press, New York.
- Brozzetti, J., Ryan, L, and Sedlacek, G.** (December 1989) : *Background Information on Fatigue Design Rules — Statistical Evaluation*, Eurocode 3, Part. 1, Chap. 9, Doc 9.01.
- Bruls, A., Jacob, B., and Sedlacek, G.** (March 1989) : *Traffic Data of the European Countries*, Eurocode 1, Traffic Loads on Bridges, Report of WG 2.
- Buchalet, C.B., and Bamford, W.H.** (1974) : *Stress Intensity Factor for Continuous Surface Flaws in Reactor Pressure Vessels*, Mech. Crack Growth, ASTM, STP 590.
- Carracilli, J., Esnouf, A., et Estivin, M.** (Decembre 1993) : *Comportement en Fatigue des Ponts Métalliques*, Recherche CECA, N°07210 SA311, Rapport Semestriel N°7.
- Chabrolin, B.** (1989) : *Comptage de Cycles de Fatigue — Méthode de la Goutte d'Eau*, Construction Métallique n°4.
- Cornell, C.A.** (1969) : *A Probability Based Structural Code*, J. Amer. Conc. Inst., 66, No. 12, pp.974-985.
- Ditlevsen, O.** (1981) : *Principle of Normal Tail Approximation*, J. Eng. Mech. Div., ASCE, 107, No. EM6, pp.1191-1208.
- Dolinsky, K.** (1983) : *First-order Second-moment Approximation in Reliability of Structural Systems : Critical Review and Alternative Approach*, Struct. Safety, 1, No. 3, pp.211-231.
- Eshelby, J.D.** (1969) : *Energy Relations and the Energy-momentum Tensor in Continous Mechanics*, Inelastic Behavior of Solids, McGrawHill, pp.77-115.
- Eurocode 1** (September 1993) : *Basis of Design of Actions on Structures — Traffic Loads on Bridge*, Part 1.

**Eymard, R., and Jacob, B.** (Novembre-Décembre 1989) : *Un Nouveau Logiciel : Le Programme CASTOR-LCPC pour le Calcul des Actions et Sollicitations du Trafic dans les Ouvrages Routiers*, Bull Liaison LPC, n° 164 , pp.64-78.

**Forman, F.G., Kearney, V.E., and Engle, R.M.** (1967) : *Numerical Analysis of Crack Propagation in Cyclic Loaded Structures*, Trans. ASME, J. Basic Eng. 89, No. 3.

**Garrido, L., and Masoliver, J.** (1982) : *On a Classe of Exact Solutions to the Fokker-Planck Equations*, J. Math. Phys., 23, pp.1155-1158.

**Goyet, J.** (Mars 1994) : *Fiabilité des Structures, Etat de l'Art, Application à la Calibration des Codes et la Réqualification des Structures Existantes*, Journées Nationales ASPAM, ENS, Cachan.

**Griffith, A.A.** (1920) : *The Phenomena of Rupture and Flow in Solids*, Phil. trans. Roy. Soc. Serie A, Vol. 221, London.

**Hasofer, A.M., and Lind, N.C.** (1974) : *Exact and Invariant Second-moment Code Format*, J. Engg. Mech. Div., ASCE, 100, No. EM1, pp.111-121.

**Henley, E.J., and Kumamoto, H.** (1981) : *Reliability Engineering and Risk Assessment*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.

**Hoeppner, D.W., and Krupp, W.E.** (1974) : *Prediction of Component Life bay Application of Fatigue Crack Knowledge*, Eng. Fract. Mech., No. 6, pp.47-70.

**Hohenbichler, M., and Rackwitz, R.** (1981) : *Non-normal Dependent Vectors in Structural Safety*, J. Engg. Mech. Div., ASCE, 107, No. EM6, pp.1227-1237.

**Hohenbichler, M., and Rackwitz, R.** (1983) : *First-order Concepts in Systems Reliability*, Struct. Safety, 1, No. 3, pp.177-188.

**Hohenbichler, M., and Rackwitz, R.** (December 1986) : *Sensitivity and Importance Measures in Structural Reliability*, Civil Engg. Syst. 3.

**IABSE** (March 1990) : *Remaining Fatigue Life of Steel Structures*, International Workshop, IABSE report vol.9, Lausanne.

**Inglis, C.E.** (1913) : *Stress in a Plate due to the Presence of Craks and Sharp Corners*, Trans. Inst. Archit. Vol. 55, London.

**Irwin, G.R.** (1957) : *Analyse of Stresses and Strains near the End of a Crack Traversing a Plate*, Trans. ASME, J. Appl. Mech.

- Irwin, G.R.** (1958) : *Fracture, Handbuch der Physik*, Vol. VI, Springer, Berlin.
- Irwin, G.R., Krafft, J.M., Paris, P.C., and Wells, A.A.** (1967) : *Basic Aspects of Crack Growth and Fracture*, Section 7 in *Technologie of Steel Pressure Vessels for Water-Cooled Nuclear Reactors*, ORNL NSIC-21, Oakridge National Lab.
- Jacob, B., and Jiang, L.** (1993) : *Probability Fatigue Reliability*, Proceedings ICOSSAR'93, Innsbrück, Austria, August, pp.1075-1081.
- Khasminskii, R.Z.** (1968) : *On the Averaging Principle for Stochastic Differential Ito Equations*, *Kibernetika*, No. 4, pp.260-279.
- Kozin, F., and Bogdanoff, J.** (1989) : *Recent Thought on Probabilistic Fatigue Crack Growth*, *Appl. Mech. Rev.*, No. 42, S121-S127.
- Kretz, T., et Jacob, B.** (1991) : *Convoi de Fatigue pour les Ponts-Route Mixtes*, *Revue Construction Métallique*, N° 1, pp.41-51.
- Lau, M.Y.** (1991) : *Introduction aux Méthodes de Calcul de la Fiabilité*, Thème Fatigue de Ponts Métalliques ou Mixtes, Rapport interne N° 1, LCPC-SETRA.
- Lau, M.Y., et Gao, Y.Z.** (1994) : *Présentation des Sous-Ensembles Flous et de la Théorie des Possibilités*, Rapport de recherche, LCPC.
- Le Pautremat, E., Carracilli, J., et Jiang, L.** (Juin 1991) : *Comportement en Fatigue des Poutres Métalliques de Ponts*, Recherche CECA, N°07210 SA311, Rapport Semestriel N°2.
- Melchers, R.E.** (1987) : *Structural Reliability — Analysis and Prediction*, Ellis Horwood Limited, pp.138-139.
- Miller, K.J., and Zachariah, K.P.** (1977) : *Cumulative Damage Laws for Fatigue Crack Initiation and Stage I Propagation*, *Journal of Strain Analysis*, Vol.12, No.4.
- Paris, P.C., and Erdogan, F.** (1963) : *A Critical Analysis of Crack Propagation Laws*, *Trans. ASME, J. Basic Eng., Serie D*, 85, No. 3.
- Rackwitz, R., and Fiessler, B.** (1978) : *Structural Reliability under Combined Random Load Sequences*, *Computers & Structures*, Pergamon Press, NewYork, Vol.9, pp.489-494.
- Rice, J.R.** (1968) : *A Path Independant Integral and the Approximate Analysis of Strain Concentration by Notches and Cracks*, *J. Appl. Mech.*, pp.379-386.

- Rosenblatt, M.** (1952) : *Remarks on a Multivariate Transformation*, Ann. Math. Stat., 23, pp.470-472.
- Shi, G.C., Paris, P.C., and Erdogan, F.** (1962) : *Crack Tip Stress Intensity Factor for Plane Extension and Plate Bending Problems*, Trans. ASME, Vol. 84.
- Shinozuka, M.** (1983) : *Basic Analysis of Structural Safety*, J. Struct. Div., ASCE, 109, No.3, pp.721-740.
- Spencer, J.B.F., and Tang, J.** (1989) : *Stochastic Approach to Modeling Fatigue Crack Growth*, AIAA J., No. 27, pp.1628-1635.
- Stratonovitch, R.L.** (1963) : *Topics in the Theory of Random Noise*, Gordon and Breach, Vol. 1.
- Tada, H., Paris, P.C., and Irwin, G.R.** (1973) : *The Stress Analysis of Cracks Handbook*, Del. Research Corporation, Hellertown, Pa, USA.
- Tanaka, H., and Tsurui, A.** (1987) : *Reliability Degradation of Structural Components in the Process of Fatigue Crack Propagation under Stationary Random Loading*, Eng. Fract. Mech., No. 27, pp.501-516.
- Tsurui, A., and Ishikawa, H.** (1986) : *Application of the Fokker-Planck Equation to a Stochastic Fatigue Crack Growth Model*, Structural Safety, No. 4, pp.15-29.
- Wei, R.P., and Shih, T.T.** (1974) : *Delay in Fatigue Crack Growth*, International J. Frac. Mech., Vol. 10, No. 1.
- Wheeler, O.E.** (1972) : *Spectrum Loading and Crack Growth*, Trans. ASME, J. Basic Eng. 94, No. 1
- Yang, J.N., Salivar, G.C., and Annis, C.G.** (1983) : *Statistical Modeling of Fatigue Crack Growth in a Nickel-Supalloy*, Eng. Fract. Mech., No. 18, pp.257-270.
- Zhu, W.Q.** (1983) : *On the Method of Stochastic Averaging of Energy Envelope*, Proc. Int. Workshop on Stochastic Stru. Mech., Rep 1-83, University of Innsbruck.
- Zhu, W.Q.** (1985) : *A Method for Estimating Reliability of Structures Subject to Quasi-Stationary and (or) Quasi-Homogeneous Gaussian Random Excitations*, Proceedings 4th ICOSSAR, Vol. 1.

## ANNEXE A

### ANALYSE DES DONNEES MULTIDIMENSIONNELLES PAR LA REGRESSION LINEAIRE

#### A.1. DEFINITION DU MODELE MATHEMATIQUE

Le but de la méthode de régression est, en utilisant certain nombre de groupes d'observation de deux variables ou plus, de déterminer une fonction relativement simple qui imite la relation complexe entre eux. Au niveau de la régression linéaire, cette fonction est alors supposée linéaire.

La méthode de régression linéaire est primitivement appliquée à un modèle dont la moyenne de la variable aléatoire  $Y$  est une fonction linéaire d'un vecteur  $\underline{x}$  supposé connu sans erreur. La probabilité de  $Y$  ne dépend que d'une variable aléatoire  $\varepsilon$  de moyenne nulle supposée indépendante de  $\underline{x}$ . Ce modèle peut être représenté comme suit :

$$Y = f(\underline{x}, \underline{a}) + \varepsilon = a_1 x_1 + \dots + a_m x_m + \varepsilon = \underline{x}^\tau \underline{a} + \varepsilon \quad (\text{A-1})$$

Le vecteur de paramètres inconnus  $\underline{a}$  sera déterminé à partir de  $n$  groupes d'observation indépendante  $(Y_i, \underline{x}_i^\tau)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , en supposant que ces observations sont parfaitement satisfaites au modèle (A-1).

Soient

$$\underline{Y} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}, \quad \underline{X} = \begin{bmatrix} \underline{x}_1^\tau \\ \vdots \\ \underline{x}_n^\tau \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} & \dots & x_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \dots & x_{nm} \end{bmatrix}, \quad \underline{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix},$$

le vecteur de moyenne  $E(\underline{\varepsilon}) = \underline{0}$  et la matrice de variance - covariance  $\text{Cov}(\underline{Y}, \underline{Y}) = \sigma^2 \underline{I}$  (où  $\underline{I}$  est la matrice unitaire de dimensions  $n$ ). Le modèle précédent est sous une forme :

$$\underline{Y} = \underline{X} \underline{a} + \underline{\varepsilon} \quad (\text{A-2})$$

On a :

$$E(\underline{Y}) = \underline{X} \underline{a} + E(\underline{\varepsilon}) = \underline{X} \underline{a}$$

$$\text{Cov}(\underline{\varepsilon}, \underline{\varepsilon}) = E(\underline{\varepsilon} \underline{\varepsilon}^\tau) = E\left[(\underline{Y} - E(\underline{Y}))(\underline{Y} - E(\underline{Y}))^\tau\right] = \text{Cov}(\underline{Y}, \underline{Y}) = \sigma^2 \underline{I}$$

Par les déductions suivantes, on estimera les paramètres  $\underline{a}$  et l'écart-type  $\sigma$  de ce modèle, et démontrera certains théorèmes et propriétés concernant leurs estimateurs.

## **A.2. ESTIMATION DES PARAMETRES**

L'estimateur de  $\underline{\mathbf{a}}$  nommée par  $\hat{\mathbf{a}}$  s'obtient en rendant minimale le carré de la norme du vecteur  $\underline{\mathbf{Y}} - \underline{\mathbf{X}} \underline{\mathbf{a}}$ , c'est-à-dire :

$$\| \underline{\mathbf{Y}} - \underline{\mathbf{X}} \hat{\mathbf{a}} \|^2 = \min \| \underline{\mathbf{Y}} - \underline{\mathbf{X}} \underline{\mathbf{a}} \|^2$$

La formule algébrique s'écrit :

$$\sum_{i=1}^n \left( Y_i - \sum_{j=1}^m x_{ij} \hat{a}_j \right)^2 = \min \sum_{i=1}^n \left( Y_i - \sum_{j=1}^m x_{ij} a_j \right)^2 = f_{\min}(a_1, \dots, a_m)$$

D'après la méthode de la dérivée partielle, le minimum de la fonction  $f(a_1, \dots, a_m)$  se trouve au point vérifiant les équations suivantes :

$$\frac{\partial f}{\partial a_k} = \sum_{i=1}^n -2 \left( Y_i - \sum_{j=1}^m x_{ij} \hat{a}_j \right) x_{ik} = -2 \left[ \sum_{i=1}^n Y_i x_{ik} - \sum_{j=1}^m \left( \sum_{i=1}^n x_{ij} x_{ik} \right) \hat{a}_j \right] = 0 \quad (k = 1, \dots, m)$$

Ces équations s'appellent "*Equations de Normalité*". On récrit ces équations par des matrices et des vecteurs :

$$\underline{\mathbf{X}}^T \underline{\mathbf{Y}} - (\underline{\mathbf{X}}^T \underline{\mathbf{X}}) \hat{\mathbf{a}} = \underline{\mathbf{0}} \quad (\text{A-3})$$

A la condition que  $(\underline{\mathbf{X}}^T \underline{\mathbf{X}})$  soit définie positive, l'estimateur de  $\underline{\mathbf{a}}$  est déterminé :

$$\hat{\mathbf{a}} = (\underline{\mathbf{X}}^T \underline{\mathbf{X}})^{-1} \underline{\mathbf{X}}^T \underline{\mathbf{Y}} \quad (\text{A-4})$$

### **Propriétés de $\hat{\mathbf{a}}$**

1) Le vecteur de moyenne de  $\hat{\mathbf{a}}$  est :

$$E(\hat{\mathbf{a}}) = E \left( (\underline{\mathbf{X}}^T \underline{\mathbf{X}})^{-1} \underline{\mathbf{X}}^T \underline{\mathbf{Y}} \right) = (\underline{\mathbf{X}}^T \underline{\mathbf{X}})^{-1} \underline{\mathbf{X}}^T E(\underline{\mathbf{Y}}) = (\underline{\mathbf{X}}^T \underline{\mathbf{X}})^{-1} \underline{\mathbf{X}}^T \underline{\mathbf{X}} \underline{\mathbf{a}} = \underline{\mathbf{a}}$$

2) La matrice de variance-covariance de  $\hat{\mathbf{a}}$  est :

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{a}}) &= (\underline{\mathbf{X}}^T \underline{\mathbf{X}})^{-1} \underline{\mathbf{X}}^T \text{Cov}(\underline{\mathbf{Y}}, \underline{\mathbf{Y}}) \underline{\mathbf{X}} (\underline{\mathbf{X}}^T \underline{\mathbf{X}})^{-1} \\ &= (\underline{\mathbf{X}}^T \underline{\mathbf{X}})^{-1} \underline{\mathbf{X}}^T \sigma^2 \underline{\mathbf{I}} \underline{\mathbf{X}} (\underline{\mathbf{X}}^T \underline{\mathbf{X}})^{-1} = \sigma^2 (\underline{\mathbf{X}}^T \underline{\mathbf{X}})^{-1} \end{aligned}$$

### A.3. ESTIMATION DE LA VARIANCE $\sigma^2$

L'estimateur de la variance  $\sigma^2$  s'obtient à l'aide de la somme des carrés du résidu  $Q_r$  définie comme suit :

$$Q_r = \|\underline{Y}_r\|^2 = \|\underline{Y} - \underline{X}\hat{\underline{a}}\|^2 = \left\| \left( \underline{I} - \underline{X}(\underline{X}^T \underline{X})^{-1} \underline{X}^T \right) \underline{Y} \right\|^2 \quad (\text{A-5})$$

où  $\underline{Y}_r$  s'appelant "*Vecteur Résiduel*" est une estimation du vecteur  $\underline{\epsilon}$ .

Propriétés de  $\underline{Y}_r$  et de  $Q_r$

1)  $\underline{Y}_r$  ne corrèle pas avec  $\hat{\underline{a}}$

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\underline{Y}_r, \hat{\underline{a}}) &= \text{Cov} \left[ \left( \underline{I} - \underline{X}(\underline{X}^T \underline{X})^{-1} \underline{X}^T \right) \underline{Y}, (\underline{X}^T \underline{X})^{-1} \underline{X}^T \underline{Y} \right] \\ &= \left( \underline{I} - \underline{X}(\underline{X}^T \underline{X})^{-1} \underline{X}^T \right) \text{Cov}(\underline{Y}, \underline{Y}) \underline{X}(\underline{X}^T \underline{X})^{-1} \\ &= \sigma^2 \left( \underline{I} - \underline{X}(\underline{X}^T \underline{X})^{-1} \underline{X}^T \right) \underline{X}(\underline{X}^T \underline{X})^{-1} = \underline{0} \end{aligned}$$

2) Le vecteur de moyenne et la matrice de variance-covariance de  $\underline{Y}_r$  sont :

$$E(\underline{Y}_r) = E(\underline{Y} - \underline{X}\hat{\underline{a}}) = \underline{0}$$

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\underline{Y}_r, \underline{Y}_r) &= \text{Cov} \left[ \left( \underline{I} - \underline{X}(\underline{X}^T \underline{X})^{-1} \underline{X}^T \right) \underline{Y}, \left( \underline{I} - \underline{X}(\underline{X}^T \underline{X})^{-1} \underline{X}^T \right) \underline{Y} \right] \\ &= \left( \underline{I} - \underline{X}(\underline{X}^T \underline{X})^{-1} \underline{X}^T \right) \text{Cov}(\underline{Y}, \underline{Y}) \left( \underline{I} - \underline{X}(\underline{X}^T \underline{X})^{-1} \underline{X}^T \right) \\ &= \sigma^2 \left( \underline{I} - \underline{X}(\underline{X}^T \underline{X})^{-1} \underline{X}^T \right) \end{aligned}$$

3) La moyenne de  $Q_r$  est :

$$E(Q_r) = \sigma^2(n - m)$$

[Démonstration]

$$\begin{aligned} E(Q_r) &= E(\underline{Y}_r^T \underline{Y}_r) = E^2(\underline{Y}_r) + \text{trace}[\text{Cov}(\underline{Y}_r, \underline{Y}_r)] \\ &= \sigma^2 \text{trace} \left[ \underline{I} - \underline{X}(\underline{X}^T \underline{X})^{-1} \underline{X}^T \right] = \sigma^2 \left( n - \text{trace} \left[ \underline{X}(\underline{X}^T \underline{X})^{-1} \underline{X}^T \right] \right) \end{aligned}$$

En représentant l'éléments de la matrice  $\underline{X}^T \underline{X}$  par  $\sum_{k=1}^n x_{ki} x_{kj}$  et ceux de sa matrice inverse par  $b_{ij}$  ( $i, j = 1, \dots, m$ ), on a la relation :

$$\sum_{j=1}^m b_{ij} \sum_{k=1}^n x_{kj} x_{ki} = \begin{cases} 1 & (i=1) \\ 0 & (i \neq 1) \end{cases}$$

La trace de  $\underline{X} (\underline{X}^T \underline{X})^{-1} \underline{X}^T$  est la somme des éléments diagonaux de la matrice :

$$\text{trace} \left[ \underline{X} (\underline{X}^T \underline{X})^{-1} \underline{X}^T \right] = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m x_{ki} b_{ij} x_{kj} = \sum_{i=1}^m \left( \sum_{j=1}^m b_{ij} \sum_{k=1}^n x_{kj} x_{ki} \right) = \sum_{i=1}^m 1 = m$$

Par conséquent

$$E(Q_r) = \sigma^2 (n - m)$$

L'estimateur  $\hat{\sigma}^2$  est alors :

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n - m} Q_r = \frac{1}{n - m} \| \underline{Y} - \underline{X} \hat{\underline{a}} \|^2 \quad (\text{A-6})$$

#### A.4. DISTRIBUTIONS DE PROBABILITE DES ESTIMATEURS

Dans le cas où la variable aléatoire  $\underline{Y}$  du modèle est Gaussienne, c'est-à-dire normale, les distributions de probabilité des estimateurs  $\hat{\underline{a}}$  et  $\hat{\sigma}^2$  peuvent être représentées analytiquement.

$$\text{Pour } \hat{\underline{a}} : \quad \hat{\underline{a}} \sim \mathcal{N} \left( \underline{a}, \sigma^2 (\underline{X}^T \underline{X})^{-1} \right) \quad (\text{A-7})$$

$$\text{et pour } \hat{\sigma}^2 : \quad \frac{(n - m)}{\sigma^2} \hat{\sigma}^2 = \frac{Q_r}{\sigma^2} \sim \chi^2(n - m) \quad (\text{A-8})$$

où  $\mathcal{N}(E, V)$  signifie une loi normale de moyenne  $E$  et de variance  $V$ , et  $\chi^2(N)$  une loi de Pearson centrée de nombre de degrés  $N$ .

La formule (A-7) peut se prouver directement par propriétés de  $\hat{\underline{a}}$ , et la formule (A-8) est démontrée par les étapes ci-après.

[Démonstration]

Etant donné que la matrice  $\underline{X}(\underline{X}^\tau \underline{X})^{-1} \underline{X}^\tau$  est une matrice symétrique non négative du rang  $m$ , il existe une matrice orthogonale  $\underline{A}$  qui peut justifier la formule :

$$\underline{A} \underline{X} (\underline{X}^\tau \underline{X})^{-1} \underline{X}^\tau \underline{A}^\tau = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_m & & \\ & & & 0 & \ddots \\ 0 & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (\underline{A}^\tau \underline{A} = \underline{I})$$

où  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  sont positifs. Parce que

$$\begin{aligned} \left[ \underline{A} \underline{X} (\underline{X}^\tau \underline{X})^{-1} \underline{X}^\tau \underline{A}^\tau \right]^2 &= \underline{A} \underline{X} (\underline{X}^\tau \underline{X})^{-1} \underline{X}^\tau \underline{A}^\tau \underline{A} \underline{X} (\underline{X}^\tau \underline{X})^{-1} \underline{X}^\tau \underline{A}^\tau \\ &= \underline{A} \underline{X} (\underline{X}^\tau \underline{X})^{-1} \underline{X}^\tau \underline{A}^\tau \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \lambda_i^2 = \lambda_i \quad \Leftrightarrow \lambda_i = 1 \quad (i = 1, \dots, m)$$

on obtient :

$$\underline{A} \underline{X} (\underline{X}^\tau \underline{X})^{-1} \underline{X}^\tau \underline{A}^\tau = \begin{bmatrix} \underline{I}_m & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Un changement de variables  $\underline{Z} = \underline{A} (\underline{Y} - \underline{X} \underline{a})$  nous donne une série de variables normales centrées indépendantes

$$E(\underline{Z}) = \underline{A} (E(\underline{Y}) - \underline{X} \underline{a}) = \underline{0}$$

$$\text{Cov}(\underline{Z}, \underline{Z}) = \underline{A} \text{Cov}(\underline{Y}, \underline{Y}) \underline{A}^\tau = \sigma^2 \underline{I}$$

Par ces variables, nous pouvons représenter le carré des trois normes suivantes :

$$\| \underline{Y} - \underline{X} \underline{a} \|^2 = \| \underline{A}^\tau \underline{Z} \|^2 = \underline{Z}^\tau \underline{A} \underline{A}^\tau \underline{Z} = \sum_{i=1}^n Z_i^2$$

$$\begin{aligned} \| \underline{X} \hat{\underline{a}} - \underline{X} \underline{a} \|^2 &= \left\| \underline{X} (\underline{X}^\tau \underline{X})^{-1} \underline{X}^\tau \underline{Y} - \underline{X} \underline{a} \right\|^2 = \left\| \underline{X} (\underline{X}^\tau \underline{X})^{-1} \underline{X}^\tau (\underline{Y} - \underline{X} \underline{a}) \right\|^2 \\ &= \left\| \underline{X} (\underline{X}^\tau \underline{X})^{-1} \underline{X}^\tau \underline{A}^\tau \underline{Z} \right\|^2 = \underline{Z}^\tau \underline{A} \left( \underline{X} (\underline{X}^\tau \underline{X})^{-1} \underline{X}^\tau \right) \underline{A}^\tau \underline{Z} \\ &= \underline{Z}^\tau \underline{A} \underline{X} (\underline{X}^\tau \underline{X})^{-1} \underline{X}^\tau \underline{A}^\tau \underline{Z} = \sum_{i=1}^m Z_i^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\| \underline{\mathbf{Y}} - \underline{\mathbf{X}} \hat{\underline{\mathbf{a}}} \|^2 &= Q_r = \left\| \left( \underline{\mathbf{I}} - \underline{\mathbf{X}} (\underline{\mathbf{X}}^T \underline{\mathbf{X}})^{-1} \underline{\mathbf{X}}^T \right) \underline{\mathbf{Y}} \right\|^2 = \left\| \left( \underline{\mathbf{I}} - \underline{\mathbf{X}} (\underline{\mathbf{X}}^T \underline{\mathbf{X}})^{-1} \underline{\mathbf{X}}^T \right) (\underline{\mathbf{Y}} - \underline{\mathbf{X}} \underline{\mathbf{a}}) \right\|^2 \\
&= \left\| \left( \underline{\mathbf{I}} - \underline{\mathbf{X}} (\underline{\mathbf{X}}^T \underline{\mathbf{X}})^{-1} \underline{\mathbf{X}}^T \right) \underline{\mathbf{A}}^T \underline{\mathbf{Z}} \right\|^2 = \underline{\mathbf{Z}}^T \underline{\mathbf{A}} \left( \underline{\mathbf{I}} - \underline{\mathbf{X}} (\underline{\mathbf{X}}^T \underline{\mathbf{X}})^{-1} \underline{\mathbf{X}}^T \right)^2 \underline{\mathbf{A}}^T \underline{\mathbf{Z}} \\
&= \underline{\mathbf{Z}}^T \underline{\mathbf{A}} \left( \underline{\mathbf{I}} - \underline{\mathbf{X}} (\underline{\mathbf{X}}^T \underline{\mathbf{X}})^{-1} \underline{\mathbf{X}}^T \right) \underline{\mathbf{A}}^T \underline{\mathbf{Z}} = \sum_{i=1}^n Z_i - \sum_{i=1}^m Z_i = \sum_{i=m+1}^n Z_i
\end{aligned}$$

Par conséquent,  $Q_r/\sigma^2$  est égal à une somme de  $(n-m)$  variables normales centrées réduites indépendantes. Autrement dit,

$$\frac{Q_r}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-m)$$

En plus, un résultat important peut être retiré d'après la démonstration.

$$\| \underline{\mathbf{Y}} - \underline{\mathbf{X}} \underline{\mathbf{a}} \|^2 = \| \underline{\mathbf{Y}} - \underline{\mathbf{X}} \hat{\underline{\mathbf{a}}} \|^2 + \| \underline{\mathbf{X}} \hat{\underline{\mathbf{a}}} - \underline{\mathbf{X}} \underline{\mathbf{a}} \|^2 \quad (\text{A-9})$$

#### A.5. APPLICATION DE CE MODELE A LA REGRESSION D'UNE DROITE

Le modèle de régression d'une droite est défini comme suit :

$$\mathbf{Y} = a_1 + a_2 x + \varepsilon \quad (\text{A-10})$$

Pour estimer les paramètres  $a_1$  et  $a_2$  on introduit  $n$  groupes d'observation indépendante  $(Y_i, x_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , dans le modèle :

$$\underline{\mathbf{Y}} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_2 \end{bmatrix} = \underline{\mathbf{X}} \underline{\mathbf{a}} + \underline{\varepsilon} \quad (\text{A-11})$$

L'estimateurs de  $a_1$  et  $a_2$  sont donnés par l'équations de normalité :

$$\begin{aligned}
\hat{\underline{\mathbf{a}}} &= (\underline{\mathbf{X}}^T \underline{\mathbf{X}})^{-1} \underline{\mathbf{X}}^T \underline{\mathbf{Y}} = \begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^n X_i \\ \sum_{i=1}^n X_i & \sum_{i=1}^n X_i^2 \end{bmatrix}^{-1} \underline{\mathbf{X}}^T \underline{\mathbf{Y}} \\
\begin{bmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{n} + \frac{-\bar{x}^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} & \frac{-\bar{x}}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \\ \frac{-\bar{x}}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} & \frac{1}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n Y_i \\ \sum_{i=1}^n x_i Y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Y} - \hat{a}_2 \bar{x} \\ \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(Y_i - \bar{Y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \end{bmatrix} \quad (\text{A-12})
\end{aligned}$$

$$\text{où } \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \text{ et } \bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i.$$

Le vecteur de moyenne et la matrice de variance - covariance sont :

$$E(\hat{\underline{a}}) = \underline{a} \quad \text{et} \quad \text{Cov}(\underline{a}, \underline{a}) = \sigma^2 (\underline{X}^T \underline{X})^{-1} = \sigma^2 \begin{bmatrix} \frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} & \frac{-\bar{x}}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \\ \frac{-\bar{x}}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} & \frac{1}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \end{bmatrix}$$

L'estimateur de la variance  $\sigma^2$  est une fonction de la somme des carrés du résidu  $Q_r$  :

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-2} Q_r = \frac{1}{n-2} \left\| \underline{Y} - \underline{X} \hat{\underline{a}} \right\|^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{a}_1 - \hat{a}_2 x_i)^2 \quad (\text{A-13})$$

Si  $\underline{Y} \sim \mathcal{N}(\underline{X} \underline{a}, \sigma^2 \underline{I})$ , alors

$$\hat{\underline{a}} \sim \mathcal{N}\left(\underline{a}, \sigma^2 (\underline{X}^T \underline{X})^{-1}\right) \quad \text{et} \quad \frac{Q_r}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-2) \quad (\text{A-14})$$

## A.6. APPLICATION DE CE MODELE A LA REGRESSION D'UN PLAN

Le modèle de régression d'un plan est défini comme suit :

$$Y = a_1 + a_2 p + a_3 q + \varepsilon \quad (\text{A-15})$$

Pour estimer les paramètres  $a_1$ ,  $a_2$  et  $a_3$ , on introduit  $n$  groupes d'observation indépendante  $(Y_i, p_i, q_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , dans le modèle :

$$\underline{Y} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & p_1 & q_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & p_n & q_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix} = \underline{X} \underline{a} + \underline{\varepsilon} \quad (\text{A-16})$$

L'estimateur de  $\underline{a}$  est donné par l'équations de normalité :

$$\hat{\underline{a}} = (\underline{X}^T \underline{X})^{-1} \underline{X}^T \underline{Y} = \begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^n p_i & \sum_{i=1}^n q_i \\ \sum_{i=1}^n p_i & \sum_{i=1}^n p_i^2 & \sum_{i=1}^n p_i q_i \\ \sum_{i=1}^n q_i & \sum_{i=1}^n p_i q_i & \sum_{i=1}^n q_i^2 \end{bmatrix}^{-1} \underline{X}^T \underline{Y}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \\ \hat{a}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Y} - \hat{a}_2 \bar{p} - \hat{a}_3 \bar{q} \\ \frac{1}{S} \left( \sum_{i=1}^n (q_i - \bar{q})^2 \sum_{i=1}^n (p_i - \bar{p})(Y_i - \bar{Y}) - \sum_{i=1}^n (p_i - \bar{p})(q_i - \bar{q}) \sum_{i=1}^n (q_i - \bar{q})(Y_i - \bar{Y}) \right) \\ \frac{1}{S} \left( \sum_{i=1}^n (p_i - \bar{p})^2 \sum_{i=1}^n (q_i - \bar{q})(Y_i - \bar{Y}) - \sum_{i=1}^n (p_i - \bar{p})(q_i - \bar{q}) \sum_{i=1}^n (p_i - \bar{p})(Y_i - \bar{Y}) \right) \end{bmatrix} \quad (\text{A-17})$$

où  $\bar{p} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p_i$ ,  $\bar{q} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n q_i$ ,  $\bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i$

et  $S = \sum_{i=1}^n (p_i - \bar{q})^2 \sum_{i=1}^n (p_i - \bar{q})^2 - \left( \sum_{i=1}^n (p_i - \bar{p})(q_i - \bar{q}) \right)^2$ .

Le vecteur de moyenne et la matrice de variance - covariance sont :

$$E(\hat{\underline{a}}) = \underline{a}$$

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\underline{a}, \underline{a}) &= \sigma^2 (\underline{X}^T \underline{X})^{-1} \\ &= \frac{\sigma^2}{S} \begin{bmatrix} \frac{S}{n} + \sum_{i=1}^n (q_i - \bar{p} - p_i \bar{q})^2 & -\sum_{i=1}^n (q_i - \bar{q})(q_i - \bar{p} - p_i \bar{q}) & \sum_{i=1}^n (p_i - \bar{p})(q_i - \bar{p} - p_i \bar{q}) \\ -\sum_{i=1}^n (q_i - \bar{q})(q_i - \bar{p} - p_i \bar{q}) & \sum_{i=1}^n (q_i - \bar{q})^2 & -\sum_{i=1}^n (p_i - \bar{p})(q_i - \bar{q}) \\ \sum_{i=1}^n (p_i - \bar{p})(q_i - \bar{p} - p_i \bar{q}) & -\sum_{i=1}^n (p_i - \bar{p})(q_i - \bar{q}) & \sum_{i=1}^n (p_i - \bar{p})^2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

L'estimateur de la variance  $\sigma^2$  est une fonction de la somme des carrés du résidu  $Q_r$  :

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-3} Q_r = \frac{1}{n-3} \left\| \underline{Y} - \underline{X} \hat{\underline{a}} \right\|^2 = \frac{1}{n-3} \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{a}_1 - \hat{a}_2 p_i - \hat{a}_3 q_i)^2 \quad (\text{A-18})$$

Si  $\underline{Y} \sim \mathcal{N}(\underline{X} \underline{a}, \sigma^2 \underline{I})$ , alors

$$\hat{\underline{a}} \sim \mathcal{N}\left(\underline{a}, \sigma^2 (\underline{X}^T \underline{X})^{-1}\right) \quad \text{et} \quad \frac{Q_r}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-3) \quad (\text{A-19})$$

## ANNEXE B

### COMPLEMENTS DE CALCULS SUR LES PROCESSUS

#### B.1. EQUATION D'EVOLUTION DE PROBABILITE

Soit  $p(y_j)$  la densité de probabilité d'un processus stochastique discret  $Y_j$  à l'étape  $j$ . Sa densité de probabilité  $p(y_{j+1})$  à l'étape  $j+1$  est donnée par l'intégrale suivante :

$$p(y_{j+1}) = \int_{-\infty}^{\infty} p(y_{j+1}|y_j) p(y_j) dy_j \quad (B-1)$$

où  $p(y_{j+1}|y_j)$  est la densité de probabilité de transition de l'étape  $j$  à l'étape  $j+1$ . C'est une *équation d'évolution de probabilité* sous une forme d'intégration. La déduction mathématique ci-après est faite pour déterminer la forme de dérivation (en série) de cette équation.

Dans un premier temps, nous déduisons la forme de série de la densité  $p(y_{j+1}|y_j)$ , considérée comme une fonction de variable  $y_{j+1}$ . La fonction caractéristique de probabilité de transition, nommée  $\phi(\theta_{j+1}|y_j)$ , est définie par sa transformation de Fourier :

$$\phi(\theta_{j+1}|y_j) = \int_{-\infty}^{\infty} p(y_{j+1}|y_j) e^{i\theta_{j+1}y_{j+1}} dy_{j+1} = \int_{-\infty}^{\infty} p(y_{j+1}|y_j) e^{i\theta_{j+1}\Delta y} d\Delta y \quad (B-2)$$

où  $\Delta y = y_{j+1} - y_j$ . Alors, la transformation inverse peut se présenter :

$$p(y_{j+1}|y_j) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\theta_{j+1}|y_j) e^{-i\theta_{j+1}\Delta y} d\theta_{j+1} \quad (B-3)$$

La fonction caractéristique de probabilité de transition possède la propriété que la  $n^{\text{ème}}$  dérivé de  $\phi(\theta_{j+1}|y_j)$  au point zéro est égale au produit de  $i^n$  avec le moment de l'incrément  $\Delta y$  de l'ordre  $n$  :

$$\left. \frac{\partial^n \phi(\theta_{j+1}|y_j)}{\partial \theta_{j+1}^n} \right|_{\theta_{j+1}=0} = \left[ \int_{-\infty}^{\infty} (i\Delta y)^n p(y_{j+1}|y_j) e^{i\theta_{j+1}\Delta y} d\Delta y \right]_{\theta_{j+1}=0} = i^n E[\Delta y^n | y_j] \quad (B-4)$$

où  $\Delta y = Y_{j+1} - y_j$  signifie une variable aléatoire concernant  $\Delta y$ . D'après cette propriété, nous pouvons récrire la fonction  $\phi(\theta_{j+1}|y_j)$  au travers du développement de la série de Taylor par rapport au point zéro :

$$\phi(\theta_{j+1}|y_j) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n E[\Delta y^n | y_j]}{n!} \theta_{j+1}^n \quad (B-5)$$

A l'aide de la fonction de Dirac  $\delta(x)$ , qui est la transformation inverse de Fourier de 1, la densité de probabilité de transition s'obtient sous la forme de série d'après la transformation inverse de Fourier de la fonction précédente :

$$\begin{aligned} p(y_{j+1}|y_j) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{E[\Delta y^n | y_j]}{n!} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (i\theta_{j+1})^n e^{-i\theta_{j+1}\Delta y} d\theta_{j+1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{E[\Delta y^n | y_j]}{n!} \frac{d^n \delta(\Delta y)}{dy_j^n} \end{aligned} \quad (\text{B-6})$$

Ensuite, nous calculons la densité  $p(y_{j+1})$  en introduisant la densité de transition, sous la forme de série, dans l'équation d'évolution de probabilité (B-1). La forme de série de cette équation se trouve après les intégrations partielles :

$$\begin{aligned} p(y_{j+1}) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} E[\Delta y^n | y_j] p(y_j) \frac{d^n}{dy_j^n} \delta(\Delta y) dy_j \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\Delta y) \frac{d^n}{dy_j^n} (E[\Delta y^n | y_j] p(y_j)) dy_j \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left\{ \frac{d^n}{dy_j^n} (E[\Delta y^n | y_j] p(y_j)) \right\}_{y_j=y_{j+1}} \end{aligned} \quad (\text{B-7})$$

D'une autre manière de présentation, cette équation peut s'écrire :

$$p(y, j+1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{d^n}{dy^n} (E[\Delta y^n | y, j] p(y, j)) \quad (\text{B-8})$$

## **B.2. EQUATION D'EVOLUTION DE PROBABILITE DE TRANSITION**

Soit un processus Markovien discret  $Y_j$ . La densité de probabilité de transition d'une seule étape est notée par  $p(y_j|y_{j-1})$ . La densité de probabilité de transition de deux étapes est obtenue par l'équation d'évolution de probabilité de transition sous une forme d'intégration :

$$p(y_{j+1}|y_{j-1}) = \int_{-\infty}^{\infty} p(y_{j+1}|y_j) p(y_j|y_{j-1}) dy_j \quad (\text{B-9})$$

En comparant cette équation avec (B-1), on remplace la densité  $p(y_j)$  par la densité de transition  $p(y_j|y_{j-1})$  et la densité  $p(y_{j+1})$  par la densité de transition  $p(y_{j+1}|y_{j-1})$ , on peut écrire tout de suite l'équation d'évolution de probabilité de transition sous la forme de série :

$$p(y, j+1|y_{j-1}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{d^n}{dy^n} (E[\Delta y^n | y, j] p(y, j|y_{j-1})) \quad (\text{B-10})$$