HAL
open science

Contributions aux méthodes arithmétiques pour la simulation accélérée

Yi-Jun Xiao

To cite this version:

Yi-Jun Xiao. Contributions aux méthodes arithmétiques pour la simulation accélérée. Probabilités [math.PR]. Ecole nationale des ponts et chaussées - ENPC PARIS / MARNE LA VALLEE, 1990. Français. NNT : . pastel-00574113

HAL Id: pastel-00574113

https://pastel.hal.science/pastel-00574113

Submitted on 7 Mar 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

79326

NS 15455 (4)

X

THESE de DOCTORAT
de l'ECOLE NATIONALE des
PONTS et CHAUSSEES

Spécialité

MATHEMATIQUES APPLIQUEES

présentée

par Monsieur Yi-Jun XIAO

pour obtenir le titre de

DOCTEUR DE l'ECOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSEES

Sujet de la thèse:

Contributions aux méthodes arithmétiques pour la simulation accélérée.

soutenue le 27 septembre 1990

devant le jury composé de:

Monsieur N.BOULEAU	(Président)
Monsieur J-P.BOREL	(Rapporteur)
Monsieur H.FAURE	(Rapporteur)
Monsieur G.PAGÈS	(Examinateur)

E.N.P.C.
DOC07556

01

à mes parents

REMERCIEMENTS

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à Monsieur N.Bouleau pour m'avoir accueilli dans le cadre motivant du C.E.R.M.A. et dirigé dans mon travail. Il m'a constament conseillé tout au long de la préparation de cette thèse et m'a fait l'honneur d'accepter la présidence du jury.

J'exprime, également, ma reconnaissance à Messieurs H.Faure et J-P.Borel qui m'ont fait l'honneur d'examiner ce travail et d'accepter de participer au jury. Je voudrais aussi remercier H.Faure de ses conseils et de ses encouragements pendant mon travail et de l'accueil très amical qu'il m'a réservé lors de ma visite à Marseille.

Je remercie aussi G.Pagès pour les idées qu'il m'a données et l'aide qu'il m'a apportée et pour sa participation au jury.

Je tiens aussi à exprimer tout particulièrement ma reconnaissance à D.Lamberton, son amitié, ses conseils précieux, ses encouragements constants ont été autant de contributions déterminantes à mes travaux.

Je remercie H.Jager dont les indications sur les développements en fraction continue m'ont permis d'améliorer mes résultats sur les suites associées aux automorphismes du tore.

Je voudrais remercier O.Chateau, P-P.Dong, P.Gamblin, B.Lapeyre, X-H.Le et V.Serre qui m'ont beaucoup aidé pendant cette thèse.

Je dois beaucoup à ma femme Ya-Min dont l'amour m'a soutenu tout au long de mon travail. Sa patience et son appui dans les moments difficiles m'ont été particulièrement précieux, ainsi que son aide dans la mise en forme de ce document.

Je voudrais enfin remercier avec chaleur tout ceux qui m'ont entouré, notamment mes amis et collègues du C.E.R.M.A..

Table des matières

Introduction Générale **3**

Bibliographie 11

I Les Suites à discrépance faible unidimensionnelles **14**

1 Quelques propriétés des sommes exponentielles et des sommes partielles de la suite de VDC 18

1.1 Introduction 18

1.2 Formule explicite pour la somme exponentielle 20

1.3 Une estimation de la diaphonie de la suite VAN DER CORPUT 27

1.4 Estimation de la discrépance quadratique de la suite de VAN DER CORPUT. 32

1.5 Estimation de la discrépance quadratique de la suite de VAN DER CORPUT symétrisée 42

2 Suites $(n\alpha)$ 46

2.1 Introduction 46

2.2 Résultats preliminaires 49

2.3 Démonstrations des théorèmes 2.1 et 2.2 54

2.4 Estimations sur la constante $C(\alpha)$ 60

Bibliographie de la Partie I 64

II Les Suites à discrépance faible multidimensionnelles **67**

1 La discrépance de la suite de Halton généralisée dans le cas $s \geq 2$ 67

1.1 Introduction et notations 67

1.2 Estimation de la discrépance 69

1.3 Quelques résultats expérimentaux 74

2 Une remarque sur la suite de Faure 80

2.1 Notations et résultats de H.Faure 80

2.2 Une estimation globale de D^* 81
Bibliographie de la Partie II 87

III Quelques résultats expérimentaux sur l'intégration numérique des fonctions périodiques par les suites à discrépance faible 89
1 Introduction 89
2 Intégration des fonctions périodiques en dimension un 93
2.1 Un résultat pour la suite de Van der Corput 93
2.2 Résultats numériques 96
3 Intégration numérique en dimension supérieure à un 100
Bibliographie de la Partie III 110

Introduction Générale

Cette thèse a pour thème l'étude des méthodes de Monte-Carlo accélérées, parfois appelées méthodes "Quasi Monte-Carlo". Elle comprend trois parties. La première concerne l'étude de la suite de Van der Corput et des suites $(n\alpha)$ en dimension un, la seconde donne quelques remarques sur les suites de Halton à base variable avec permutations et la suite de Faure en dimension supérieure à un, et la troisième étudie l'intégration numérique de fonctions périodiques régulières par les suites à discrépance faible.

La méthode de Monte-Carlo, fondée sur la simulation du hasard, permet le calcul numérique d'intégrales. Concrètement, si l'on ramène le domaine d'intégration à $I^s = [0,1]^s, s \geq 1$, alors, on a l'approximation suivante pour toute fonction intégrable f:

$$\int_{I^s} f(\mathbf{t})d\mathbf{t} \approx \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(\mathbf{x}_n) \qquad (d\mathbf{t} = dt_1 \cdots dt_s) \tag{0.0.1}$$

où $\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_n, \cdots$ sont des tirages indépendants d'une variable aléatoire de loi uniforme sur I^s. La convergence presque sûre de $\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(\mathbf{x}_n)$ vers $\int_{I^s} f(\mathbf{t})d\mathbf{t}$ est garantie par la loi des grands nombres. Lorsque f est de carré intégrable, des théorèmes de probabilité permettent de préciser la vitesse de convergence: D'après le théorème centrale limite (cf. [1]) lorsque N tend vers ∞: la variable aléatoire

$$\sqrt{N}\left(\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(\mathbf{x}_n) - \int_{I^s} f(\mathbf{t})d\mathbf{t}\right)$$

converge en loi vers une gaussienne centrée de variance σ^2 avec $\sigma^2 = Var(f) = \int_{I^s}(f - \int_{I^s} f)^2$; et d'après la loi du logarithme itéré on a presque sûrement:

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{\sum_{n=1}^{N} f(\mathbf{x}_n) - N\int_{I^s} f}{\sqrt{2Var(f)N\log\log N}} = 1$$

et

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{\sum_{n=1}^{N} f(\mathbf{x}_n) - N\int_{I^s} f}{\sqrt{2Var(f)N\log\log N}} = -1.$$

Donc, l'erreur dans l'approximation (0.0.1) est en $O(\sqrt{\frac{\log\log N}{N}})$

En fait, pour certaines fonctions, on peut avoir la convergence (0.0.1) en remplaçant les suites random par des suites déterministes. Une suite $X = (\mathbf{x}_n)_{n\geq 1}$ à valeurs dans I^s est dite équirépartie si pour toute fonction f intégrable au sens de Riemann la convergence (0.0.1) a lieu (cf. [15]). Les suites random sont des suites équiréparties très particulières possèdant bien d'autres propriétés. Il existe des suites déterministes équiréparties qui permettent une vitesse de convergence plus grande que les suites au hasard et des estimations effectives de l'erreur facilitant les critères d'arrêt. Les méthodes de "Quasi-Monte-Carlo" sont basées sur l'utilisation de telles suites.

La notion de discrépance permet de mesurer l'équirépartition d'une suite. Soit $X = (\mathbf{x}_n)_{n\geq 1}$ une suite de points de I^s et soit P un borélien de I^s, de volume $|P|$, on note $A(P, N, X)$ le nombre de termes de la suite X, d'indice inférieur ou égal à N, qui appartiennent à P et on pose:

$$E(P, N, X) = A(P, N, X) - |P|N.$$

On définit alors la discrépance de la suite X par:

$$D(N, X) = \frac{1}{N} \sup_{P\in\mathcal{P}_s} |E(P, N, X)| \tag{0.0.2}$$

et la discrépance à l'origine par:

$$D^*(N, X) = \frac{1}{N} \sup_{P\in\mathcal{P}_s^*} |E(P, N, X)|. \tag{0.0.3}$$

où $\mathcal{P}_s$ l'ensemble des pavés de la forme $\prod_{k=1}^s [a_k, b_k[, 0 \leq a_k < b_k \leq 1$ et $\mathcal{P}_s^*$ l'ensemble des pavés de la forme $\prod_{k=1}^s [0, b_k[, 0 \leq b_k \leq 1$. Ces deux mesures sont reliées l'une à l'autre par les inégalités (cf. [16]):

$$D^*(N, X) \leq D(N, X) \leq 2^s D^*(N, X).$$

Alors la suite $X = (\mathbf{x}_n)_{n\geq 1}$ est équirépartie si et seulement si

$$\lim_{N\to\infty} D(N, X) = 0$$

ou encore, si et seulement si

$$\lim_{N\to\infty} D^*(N, X) = 0$$

Les quantités $D(N,X)$ et $D^*(N,X)$ apparaissent comme des mesures de l'equirépartition de la suite X.

Rappelons que, pour les suites random, on a presque sûrement: (cf. [2],[11])

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{\sqrt{2N}D^*(N)}{\sqrt{\log\log N}} = 1,$$

donc presque sûrement $D(N) = O(\sqrt{\frac{\log\log N}{N}})$.

L'intérêt de la quantité $D^*(N,X)$ est qu'elle apparaît dans les estimations d'erreurs pour le calcul approché d'intégrales, comme le montrent le théorème classique suivant:

Théorème 0.1 *(cf. [16]) Soit f une fonction à variation bornée au sens de Hardy et Krause sur I^s et $X = (\mathbf{x}_n)_{n\geq 1}$ une suite à valeurs dans I^s, alors*

$$|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(\mathbf{x}_n) - \int_{I^s} f(\mathbf{t})d\mathbf{t}| \leq V(f)D^*(N,X) \tag{0.0.4}$$

où $V(f)$ est la variation totale au sens de Hardy et Krause de f.

A part ces deux mesures de l'équirépartition, on utilise souvent les mesures suivantes:

1. Soit $1 \leq p \leq \infty$, alors la discrépance-L^p est définie par

$$D^{(p)}(N,X) = \frac{1}{N}(\int_{I^s} |C(\mathbf{t},N,X)|^p d\mathbf{t})^{\frac{1}{p}} \tag{0.0.5}$$

   où $C(\mathbf{t},N,X) = E(P_\mathbf{t},N,X)$ avec $P_\mathbf{t} = \prod_{i=1}^{s}[0,t_i[$. Lorsque $p = +\infty$, $D^{(+\infty)}(N,X) = D^*(N,X)$. On s'intéresse souvent à $D^{(2)}(N,X)$, appelée la discrépance quadratique et notée $T(N,X)$

2. La diaphonie de X est définie par: (cf. [33])

$$F(N,X) = \frac{(2\pi)^s}{N}(\sum_{\mathbf{h}\in\mathbf{Z}^s} |\int_{I^s} C(\mathbf{t},N,X)\exp 2\pi i(\mathbf{h}.\mathbf{t})d\mathbf{t}|^2)^{\frac{1}{2}} \tag{0.0.6}$$

La discrépance quadratique et la diaphonie sont liées par la relation suivante appelée la formule de Koksma (cf. [12]):

$$T^2(N,X) = (\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\prod_{j=1}^{s}(1-x_k^j) - \frac{1}{2^d})^2 + \frac{1}{(2\pi)^{2s}}F^2(N,X) \qquad (0.0.7)$$

Pour la discrépance-L^p et la diaphonie $F(N,X)$ il existe des inégalités du même genre que (0.0.4) (cf. [32],[21]).

En dimension un, le meilleur ordre possible de convergence vers 0 de la discrépance d'une suite est $O(\frac{\log N}{N})$. En effet, pour toute suite $X = (x_n)_{n\geq 1}$ à valeurs dans $I = [0,1]$ on a $D(N,X) = \Omega(\frac{\log N}{N})$ (c'est-à-dire qu'il existe une constante C telle que $D(N,X) \geq C\frac{\log N}{N}$ pour une infinité de N). Plus précisement, W.M.Schmit (cf. [29]) a démontré que $D(N,X) \geq D^*(N,X) \geq \frac{\log N}{100N}$ pour une infinité de N. Il existe des suites dont la discrépance est en $O(\frac{\log N}{N})$. Une des plus célèbres est la suite de Van der Corput définie par $\phi_r = (\phi_r(n))_{n\geq 1}$ avec r un nombre entier ≥ 2 et

$$\phi_r(n) = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{n_i}{r^{i+1}}$$

où $n = \sum_{i=0}^{\infty} n_i r^i, n_i \in \{0,1,\cdots,r-1\}$ est le développement de n en base r. La suite ϕ_2 a été introduite par Van der Corput en 1935 (cf. [30]). Le meilleur ordre possible de convergence vers 0 de la discrépance quadratique $T(N,X)$ et de la diaphonie $F(N,X)$ d'une suite est $O(\frac{\sqrt{\log N}}{N})$. On trouvera une présentation détaillée des résultats connus en dimension un au début de la partie I.

En dimension plus grande que un, on ne sait pas encore le meilleur ordre possible de convergence vers 0 de la discrépance. Ce qu'on connaît pour la borne inférieure (cf. [16], p.105) est en $\Omega(\frac{(\log N)^{\frac{s}{2}}}{N})$ (c'est le même pour $T(N,X)$ et $F(N,X)$) et pour la borne supérieure en $O(\frac{(\log N)^s}{N})$. Citons les suites les plus connues.

1. Suite de Halton (cf. [10])

   Soient $r_1,\ldots,r_s$ des entiers premiers entre eux deux à deux, alors la suite de Halton est définie par:

$$\phi_{r_1,\cdots,r_s} = (\phi_{r_1}(n),\cdots,\phi_{r_s}(n))_{n\geq 1}.$$

Elle a une discrépance

$$D^*(N, \phi_{r_1,\dots,r_s}) \leq \frac{1}{N}[\prod_{i=1}^{s} \frac{r_i \log(r_i N)}{\log r_i}] \quad \text{dès que } N > \max_i r_i.$$

Cette estimation a été améliorée dans [14],[3] et [21]. Remarquons qu'une famille de suites proches de la suite de Halton a été étudiée dans [13].

2. Suite de Faure (cf. [4])

   On définit une application de l'ensemble des nombres r-adiques de $[0,1[$ dans $[0,1[$ de la façon suivante: si

$$x = \sum_{i=0}^{m} \frac{x_i}{r^{i+1}} \quad 0 \leq x_i \leq r-1,\ x_i \in \mathbf{N}$$

   alors on pose

$$Cx = y = \sum_{i=0}^{m} \frac{y_i}{r^{i+1}} \tag{0.0.8}$$

   avec

$$y_j = \sum_{i \geq j} C_i^j x_i \pmod r$$

   où $C_i^j = \frac{i!}{j!(i-j)!}$. La suite de Faure est alors définie pour $N \geq 1$ et r premier au moins égal à s par

$$S_{R_s}^r = (\phi_r(n-1), C(\phi_r(n-1)), \cdots, C^{s-1}(\phi_r(n-1)))_{n \geq 1}$$

   et elle a une discrépance

$$D^*(N, S_{R_s}^r) \leq \frac{1}{s!N}[\frac{r-1}{2\log r}]^s (\log N)^s + O((\log N)^{s-1}). \quad \text{dès que } N > \max_i r_i.$$

   Les méthodes de [4] ont été généralisées par Niederreiter dans [18], [19] et [20].

3. Suite $(n\boldsymbol{\alpha})$ (cf. [16])

   Soient $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \cdots, \alpha_s)$ un point de $\mathbf{R}^s$ et $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ des nombres algébriques tels que $1, \alpha_1, \cdots, \alpha_s$ soient linéairement indépendants sur $\mathbf{Q}$, alors la suite

$$(n\boldsymbol{\alpha}) = (\{n\alpha_1\}, \cdots, \{n\alpha_s\})_{n \geq 1}$$

(où $\{x\}$ désigne la partie fractionnaire du réel x), a une discrépance telle que quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe une constante $C(\boldsymbol{\alpha}, \varepsilon)$ telle que pour tout $N \geq 1$

$$D^*(N, (n\boldsymbol{\alpha})) \leq C(\boldsymbol{\alpha}, \varepsilon)\frac{1}{N^{1-\varepsilon}}$$

Pour les suites finies, l'une des plus célèbres est la suite de Hammersley qui est définie par l'ensemble des points:

$$(\frac{n}{N}, \phi_{r_1}(n), \cdots, \phi_{r_{s-1}}(n)) \quad \text{pour } 1 \leq n \leq N$$

où $r_1, \ldots, r_{s-1}$ sont des entiers positifs premiers entre eux deux à deux. Elle a une discrépance

$$D^*(N) \leq \frac{1}{N}[\prod_{i=1}^{s-1} \frac{r_i \log(r_i N)}{\log r_i}].$$

Pour d'autres suites finies intéressantes, nous renvoyons à [17],[5] et [28].

Le point de départ de notre travail a été l'étude de l'intégration numérique des fonctions périodiques. Nous avons été motivé par un résultat de Niederreiter sur les suites $(n\boldsymbol{\alpha})$ (cf. théorème 0.2 ci-dessous). Rappelons qu'un point $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbf{R}^s$ à coordonnées irrationnelles est dit de type η (pour un réel $\eta \geq 1$) si:

$$\inf\{a \in \mathbf{R} | \exists C(\boldsymbol{\alpha}, a) > 0 \text{ telle que } r(\mathbf{h})^a \langle \mathbf{h} \cdot \boldsymbol{\alpha} \rangle \geq C(\boldsymbol{\alpha}, a)\} = \eta$$

où

$$\langle t \rangle = \min_{m \in \mathbf{Z}} |t - m| \text{ pour } t \in \mathbf{R}$$

Alors, étant donné une constante $c > 0$ et un réel $k \geq 1$ si $\mathcal{E}^k(c)$ désigne la classe des fonctions périodiques sur $[0, 1]^s$ dont le développement de Fourier:

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{h} \in \mathbf{Z}^s} c_{\mathbf{h}} \exp(2\pi i \mathbf{h} \cdot \mathbf{x}) \tag{0.0.9}$$

vérifie

$$|c_{\mathbf{h}}| \leq c r(\mathbf{h})^{-k} \text{ pour tout } \mathbf{h} \neq \mathbf{0},$$

où

$$r(\mathbf{h}) = \prod_{j=1}^{s} \max(1, |h_j|),$$

on a le théorème suivant:

Théorème 0.2 *Soient $s \geq 1$, $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbf{R}^s$ un vecteur à coordonnées irrationnelles, de type $\eta < \infty$, alors on a:*

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f((n\boldsymbol{\alpha})) - \int_{[0,1]^s} f(\mathbf{t})d\mathbf{t} = O(\frac{1}{N}) \tag{0.0.10}$$

pour toute $f \in \mathcal{E}^k(c)$ avec $k > \eta$ (souvent on prend $\boldsymbol{\alpha}$ de type $\eta = 1$)

Dans la troisième partie de cette thèse nous démontrons un résultat analogue en dimension un pour les suites de Van der Corput. En dimension supérieure à un, nous n'avons pas de résultats pour les suites de Halton et Faure, et nous avons fait une étude numérique de la vitesse de convergence pour quelques fonctions tests (cf. III.2). La méthode utilisée en dimension un (cf. III.1) repose sur une formule explicite pour la "somme exponentielle" $S_N(h) = \sum_{n=0}^{N-1} exp(2\pi i h \phi_r(n)), h \in \mathbf{Z}$, qui est présentée dans la partie I.1. En lisant les acticles de Proinov et ses collaborateurs ([26],[27]), nous avons pensé que cette formule pouvait faciliter l'étude de la diaphonie des suites de Van der Corput et nous avons effectivement obtenu des résultats améliorant ceux de [26] sur $\limsup_{N\to\infty} \frac{NF(N)}{\sqrt{\log N}}$, pour les suites ϕ_r avec $r \geq 3$ (cf. partie I.1 et [31]). Depuis, H.Chaix et H.Faure [6] [7] ont obtenu une formule pour $\limsup_{N\to\infty} \frac{NF(N)}{\sqrt{\log N}}$ pour les suites de Van der Corput avec permutations; cette formule peut se calculer exactement pour $r = 2, 3, 4$ et de façon approchée pour les autres valeurs de r.

Nous avons ensuite étudié la diaphonie des suites $(n\alpha)$ en dimension un. Ces suites avaient été étudiées par Proinov dans [22],[24]. En utilisant les propriétés des fractions continues, nous avons obtenu des estimations plus fines de la diaphonie et, en corollaire, de la discrépance quadratique des suites symétrisées. Dans le cas où α est le nombre d'or nous obtenons $\limsup_{N\to\infty} \frac{NF(N)}{\sqrt{\log N}} < 2.7380$ (l'estimation donnée par Proinov dans [24] est: $\limsup_{N\to\infty} \frac{NF(N)}{\sqrt{\log N}} < 9.5036$). Cette étude fait l'objet du paragraphe I.2.

Dans la deuxième partie nous étudions les suites de Halton à base variable avec permutation: nous montrons que les estimations déjà connues pour les suites de Halton classiques restent valabes, et nous donnons quelques résultats numériques. Puis, nous présentons les résultats de H.Faure [4], en essayant de préciser certaines estimations.

Bibliographie

[1] N.Bouleau, Probabilités de l'ingénieur, Hermann (1986).

[2] K.L.Chung, An estimate concerning the Kolmogoroff limit distribution. Trans. Amer. Math. Soc. 67(1949), 36-50.

[3] H.Faure, Suites à faible discrépance dans $\mathbf{T}^s$. Publ. de l'Université de Limoges, 1980.

[4] H.Faure, Discrépance de suites associées à un système de numération (en dimension s) Acta. Arithmetica.XLI. 1982

[5] H.Faure, On the Star-Discrepancy of Generalized Hammersley Sequences in Two Dimensions. Mh. Math. 101, 291-300(1986).

[6] H.Chaix et H.Faure, Discrépance et diaphonie des suites de van der Corput généralisées. C.R.Acad.Sci.Paris, t.310, Série I, p. 315-320, 1990.

[7] H.Chaix et H.Faure, Discrépance et diaphonie des suites de van der Corput généralisées (II). C.R.Acad.Sci.Paris, t.311, Série I, p. 65-68, 1990.

[8] G.Pagès, Thèse de l'Université de Paris VI, (1988).

[9] S.Haber, On a sequence of points of interest for numerical quadrature, J. Res. Nat. But. Standards (Sect. B) 70 (1966), 127-136.

[10] Hua L-K and Wang Y. Applications of Number Theory to Numerical Analysis. Springer Verlag (1981)

[11] J.Kiefer, On large deviations of the empiric d.f. of vector chance variables and a law of the iterated logarithm, Pacific J.Math. 11(1961), 649-660.

[12] L.Kuipers, Simple proof of a theorem of J.F.Koksma, Nieuw Tijdschr. Wisk. 55 (1967) 108-111.

[13] B.Lapeyre et G.Pagès, Familles de suites à discrépance faible obtenues par itération de transformations de $[0,1]$, CRAS, 308, Séris I, 1989, p.507-509.

[14] H.G. Meijer, The discrepancy of a g-adic sequence, Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A71(1968)=Indag. Math. 30(1968), 54-66.

[15] L.Kuipers and H.Niederreiter, Uniform distribution of sequences, Wiley, New York. 1974.

[16] H.Niederreiter, Quasi Monte Carlo methods and pseudo-random numbers. Bull. AMS. 84, p.957-1041. (1978)

[17] H.Niederreiter, Multidimensional numerical integration using pseudo-random numbers, Math. Programming Study 27, 17-38 (1986).

[18] H.Niederreiter, Point sets and sequences with small discrepancy, Monatsh. Math. 104, 273-337 (1987).

[19] H.Niederreiter, Low-discrepancy and low-dispersion sequences, Journal of Number Theory 30, 51-70 (1988).

[20] H.Niederreiter, Quasi-Monte Carlo methods for multidimensional numerical integration, Numerical integration III (Oberwolfach, 1987), Internat. Series of Numerical Math., Vol.85, p.157-171, Birkhäuser, Basel, 1988.

[21] G.Pagès, Van der Corput sequence, Kakutani transform and one-dimensional numerical integration (en préparation).

[22] P.D.Proinov, On the L^2 dicrepancy of some infinite sequences, Serdica Bulg.Math.Publ. 11, 1985, 3.

[23] P.D.Proinov, Estimation of L^2 Discrépancy of a Class of Infinite Sequences. C.R.Acad.Sci Bulgare 36 N.1 37-40 (1983).

[24] P.D.Proinov, On irregularities of distribution C.R.Acad, Sci. Bulgare 39, n.9 31-34 (1986)

[25] P.D.Proinov et V.S Grozdanov, Symmetrization of the Van Der Corput-Halton sequence. C.R.Acad. Sci. Bulgare, 40, n.8 5-8, (1987)

[26] P.D.Proinov et V.S.Grozdanov, On the Diaphony of Van Der Corput-Halton sequence. Journal of Number Theory 30, 94-104 (1988)

[27] P.D.Proinov et E.Y.Atanassov, On the distribution of the Van Der Corput generalized sequences. C.R.Acad. Sci. Paris. t.307. Série 1 p.895-900 (1988).

[28] S.Z.Shi, Estimate of error for quadrature of a multidimensional continuous function (Chinese), Math. Numer. Sinica 3, 360-364 (1981).

[29] W.M.Schmidt Irregularities of distribution. VII, Acta Arith.21 (1972), 45-50.

[30] J.G. Van der Corput, Verteilungsfunktionen. I, II, Nederl. Akad. Wetensch. Proc. 38 (1935), 813-821, 1058-1066.

[31] Y.J.XIAO, Quelques Propriétés des Sommes Exponentielles et des Sommes Partielles de la suite de Van der Corput, Cahier du CERMA, No 11, Déc. 1989, p.131-158.

[32] S.K.Zaremba, Some applications of multidimensional integration by parts, Ann. Polon. Math. 21 Appl. 73(1966), 293-317.

[33] P.Zinterhof et H.Stegbuchner, Trigonometrische approximation mit Gleichverteilungsmethoden, Studia Scientarum Mathematicarum Hungarica, 13, 1978, p.273-289.

Partie I

Les Suites à discrépance faible unidimensionnelles

Dans cette partie, on étudie la suite de Van der corput et les suites $(n\alpha)$. Il est connu que le meilleur ordre possible de convergence vers zéro de la discrépance d'une suite $X = (x_n)_{n\geq 1}$ à valeurs dans $[0,1]$ est $O(\frac{\log N}{N})$. Les spécialistes ont essayé de trouver la suite $X = (x_n)_{n\geq 1}$ avec $\limsup_{N\to\infty} \frac{ND(N,X)}{\log N}$ le plus faible possible. Notons

$$s(X) = \limsup_{N\to\infty} \frac{ND(N,X)}{\log N} \quad \text{et} \quad s^*(X) = \limsup_{N\to\infty} \frac{ND^*(N,X)}{\log N}.$$

Pour la suite ϕ_2 de Van der Corput, S.Haber (cf. [10]) a démontré en 1966 que

$$s^*(\phi_2) = \frac{1}{3\log 2} = 0.48\cdots,$$

puis R.Bejian et H.Faure (cf. [3]) ont montré $s(\phi_2) = s^*(\phi_2)$. En 1981, H.Faure (cf. [4]) a trouvé une formule qui permet de calculer s et s^* exactement pour une classe de suites de Van der Corput avec permutations, contenant toutes les suites ϕ_r avec r entier positif quelconque, et il a obtenu à l'aide de cette formule deux suites σ_1, σ_2 (obtenues à partir de la suite ϕ_{12}) qui vérifient:

$$0.375 < s(\sigma_1) < 0.38$$

et

$$s^*(\sigma_2) = \frac{1919}{3454\log 12} = 0.223\cdots,$$

qui sont les estimations les meilleures obtenues jusqu'à présent.

Le calcul de s et s^* a pu être fait pour d'autres suites, notamment les suites $(n\alpha)$. Y.Dupain, V.T.Sos et L.Rawshow ([1],[2],[25]) ont obtenu les meilleurs estimations pour cette classe de suites:

$$\inf_\alpha s^*(\alpha) = s^*(\sqrt{2}) = \frac{1}{4\log(\sqrt{2}+1)} = 0.283\cdots,$$

et

$$\inf_\alpha s(\alpha) = s(\frac{1+\sqrt{5}}{2}) = \frac{1}{5\log(\frac{1+\sqrt{5}}{2})} = 0.415\cdots.$$

(ici $s(\alpha)$ signifie $s((n\alpha))$ de même pour $s^*(\alpha)$)

Sur la discrépance quadratique on sait que $O(\frac{\log N}{N})$ est le meilleur ordre possible de convergence vers zéro pour les suites de Van der Corput et les suites $(n\alpha)$. C'est Proinov (cf. [20]) qui a montré que le meilleur ordre possible de convergence vers zéro de la discrépance quadratique et la diaphonie d'une suite est $O(\frac{\sqrt{\log N}}{N})$. Les exemples connus de suites dont la discrépance quadratique est en $O(\frac{\sqrt{\log N}}{N})$ sont obtenus en symétrisant les suites dont la diaphonie est en $O(\frac{\sqrt{\log N}}{N})$. En notant

$$t_1(X) = \limsup_{N\to\infty} \frac{NT(N,X)}{\log N},$$

$$t_2(X) = \limsup_{N\to\infty} \frac{N^2T^2(N,X)}{\log N},$$

et

$$f(X) = \limsup_{N\to\infty} \frac{N^2F^2(N,X)}{\log N},$$

on peut faire le bilan suivant, concernant successivement t_1, f et t_2:

Pour t_1, on déduit de résultats de S.Haber (cf. [10]) et Sobol' (cf. [26]) que:

$$t_1(\phi_2) = \frac{1}{6\log 2} = 0.240\cdots.$$

Proinov et Atanassov ont montré (cf. [24])

$$t_1(\phi_r) = \begin{cases} \frac{r^2+r-2}{8(r+1)\log r} & \text{si } r \text{ est pair} \\ \frac{r^2-1}{8r\log r} & \text{si } r \text{ est impair} \end{cases}$$

Sur les suites $(n\alpha)$ on a un seul résultat donné par Niederreiter en 1973 (cf. [17]):

$$t_1(\alpha) \leq \sqrt{\frac{M}{\log(M+1)}\left(\frac{2}{\log(\frac{1+\sqrt{5}}{2})} + \frac{M}{3\log(M+1)}\right)}$$

où α admet un développement en fraction continue: $\alpha = [a_0; a_1, \cdots, a_n, \cdots]$ avec $a_i \leq M, i \geq 1$.

En ce qui concerne la diaphonie Proinov et Grozdanov donnent en 1986 (cf. [23]) un résultat sur la suite de Van der Corput:

$$f(\phi_r) \leq \frac{\pi^2(r^2-1)}{3\log r}, \quad r \geq 2,$$

ensuite, Proinov a démontré avec Atanassov en 1988 (cf. [24])

$$f(\phi_2) = \frac{\pi^2}{9\log 2}.$$

Dans [27], nous avons obtenu pour $r \geq 3$:

$$f(\phi_r) \leq \frac{4\pi^2(r^2-1)}{27\log r}, \quad r \geq 2,$$

(Nous avons repris les résultats de [27] dans le premier chapitre de cette partie et précisé un peu cette estimation sous la forme:

$$f(\phi_r) \leq \frac{\pi^2(r+1)^2(r^2-1)}{12r^2\log r}, \quad r \geq 2),$$

En même temps, H.Chaix et H.Faure (cf. [7],[8]) ont obtenu une formule donnant f exactement pour des suites de Van der Corput avec permutations et à l'aide de cette formule ils ont calculé $f(\phi_r)$ pour $r = 2, 3, 4$ et ont donné une suite S (obtenu par permutation à partir de la suite ϕ_9) telle que:

$$f(S) < 1.451,$$

ce qui donne la diaphonie asymptotique la plus faible actuellement connue.

Sur les suites $(n\alpha)$ avec $\alpha = [a_0; a_1, \cdots, a_n, \cdots]$ un nombre irrationnel tel que $a_i \leq M, i \geq 1$, Proinov a montré en 1986: (cf. [21])

$$f(\alpha) \leq (16 + \frac{2\pi^2}{3})(M+1)^2 = 22.579 \cdots (M+1)^2.$$

Dans le deuxième chapitre de cette partie, nous montrons que:

$$f(\alpha) \leq \frac{M^2 + 4M + \frac{(\sqrt{M^2+4M}+M)^2}{4} S(\frac{4/M}{(1+\sqrt{1+4/M})^2})}{\log(\frac{1+\sqrt{5}}{2})} < 5.496(M^2+4M)$$

où $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+x)^2}$, et dans le cas du nombre d'or:

$$f(\alpha) \leq \frac{(1+\alpha^2)^2 + S(1-\alpha)}{-2\alpha^2 \log \alpha} < 7.496$$

Pour t_2, la meilleure estimation est donnée par H.Faure (cf. [9]) en symétrisant la suite ϕ_2, il a en effet:

$$0.089 < t_2(\tilde{\phi_2}) < 0.103.$$

Pour la suite $(n(\frac{1+\sqrt{5}}{2}))$, nous obtenons:

$$t_2((n(\frac{1+\sqrt{5}}{2}))) < 0.7597.$$

1 Quelques propriétés des sommes exponentielles et des sommes partielles de la suite de VDC

1.1 Introduction

Soit une suite $\sigma = (\xi_n)_{n\geq 0}$ à valeurs dans $[0,1]$. Rappelons que la discrépance quadratique est définie par:

$$T(N,\sigma) = \left(\int_0^1 \mid C(N,t)/N - t \mid^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \tag{1.1.1}$$

où

$$C(N,t) = Card\{\ \xi_n \mid \xi_n < t,\ 0 \leq n \leq N-1\},$$

et la diaphonie, définie par:

$$F(N,\sigma) = \frac{1}{N}\left(2\sum_{h=1}^{\infty}\frac{1}{h^2} \mid \sum_{n=0}^{N-1} \exp\left(2\pi i h \xi_n n\right) \mid^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.1.2}$$

Remarque : La diaphonie donnée ci-dessus peut s'écrire aussi sous la forme suivante (cf. [23]):

$$F(N,\sigma) = (\frac{1}{N^2}\sum_{k,n=1}^{N} g(\xi_k - \xi_n))^{\frac{1}{2}} \tag{1.1.3}$$

où $g(x) = \pi^2(2x^2 - 2|x| + \frac{1}{3})$.

Notons que les conditions suivantes sont équivalentes (cf. [23]):

1. $\sigma = (\xi_n)_{n\geq 0}$ est équirépartie.
2. $\lim_{N\to\infty} T(N,\sigma) = 0$.
3. $\lim_{N\to\infty} F(N,\sigma) = 0$.

Les quantités $F(N,\sigma)$ et $T(N,\sigma)$ sont liées par la relation suivante, appelée formule de Koksma (cf. [17]):

$$T(N,\sigma)^2 = \left(\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\left(\xi_n - \frac{1}{2}\right)\right)^2 + \left(\frac{1}{2\pi}F(N,\sigma)\right)^2. \tag{1.1.4}$$

Nous nous proposons d'étudier $F(N,\sigma)$ et $T(N,\sigma)$ quand $\sigma = \phi_r$ est la suite de VAN DER CORPUT en base $r \geq 2$, (abr. suite-VDC) définie par:

$$\phi_r(n) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{n_i}{r^{i+1}} \tag{1.1.5}$$

où $n = \sum_{i=0}^{\infty} n_i r^i$ est le développement de n en base r, $0 \leq n_i \leq r-1$. Dans I.1.2, nous donnons une formule explicite de la somme exponentielle pour la suite-VDC, qui permet d'obtenir des estimations portant sur $F(N,\phi_r)$ (I.1.3), puis sur $T(N,\phi_r)$ (I.1.4). Cette formule sera utilsée dans la partie III de cette thèse. Dans I.1.5, nous déduisons des résultats précédents des estimations pour la discrépance quadratique de la suite de Van der Corput symétrisée.

1.2 Formule explicite pour la somme exponentielle

L'objet de ce paragraphe est d'étudier l'expression:

$$S_N(h) = \sum_{n=0}^{N-1} exp(2\pi i h \phi_r(n)), \qquad h \in \mathbf{Z}. \tag{1.2.1}$$

Notations:

1. $v_r(h) = \max(\ t \in \mathbf{N} \mid r^t$ divise $h)$ où r et h sont des entiers ≥ 0.
2. $\delta_m(h) = \frac{1}{m} \sum_{n=0}^{m-1} exp(2\pi i h n/m)$.

Remarque :

1. En notant $a|b$ si a divise b et $a \nmid b$ si a ne divise pas b, on a:

$$\delta_m(h) = \begin{cases} 1, & \text{si } m \mid h. \\ 0, & \text{si } m \nmid h. \end{cases}$$

2. $v_r(h) \leq M-1 \quad \Leftrightarrow \quad r^M \nmid h \quad \Leftrightarrow \quad h \not\equiv 0 \bmod r^M$.
3. $v_r(h) \geq M \quad \Leftrightarrow \quad r^M \mid h \quad \Leftrightarrow \quad h \equiv 0 \bmod r^M$.

Le lemme suivant, qui est la clé des estimations de $S_N(h)$, se trouve dans [23].

Lemme 1.1 *:*

$$S_{r^M}(h) = \begin{cases} 0, & si\ v_r(h) \leq M-1. \\ r^M, & si\ v_r(h) \geq M. \end{cases} \tag{1.2.2}$$

Autrement dit: $S_{r^M(h)} = r^M \delta_{r^M}(h)$.

Le lemme suivant est classique, un résultat analogue se trouve dans [23]. Pour la clairté de l'exposé, nous en donnons la démonstration.

Lemme 1.2 *:*

Soient $P \equiv 0 \bmod r^M$ *et* $1 \leq Q \leq r^M$ *avec* m *entier positif, alors*

$$\sum_{n=P}^{P+Q-1} exp(2\pi i h \phi_r(n)) = exp(2\pi i h \phi_r(P)) S_Q(h).$$

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS-ET-CHAUSSÉES
CENTRE PÉDAGOGIQUE DE DOCUMENTATION ET DE COMMUNICATION

Démonstration : D'après l'hypothèse sur P et Q, il est facile de vérifier que

$$\phi_r(P+n) = \phi_r(P) + \phi_r(n), \qquad \forall 0 \leq n \leq Q-1,$$

il en résulte:

$$\begin{aligned}\sum_{n=P}^{P+Q-1} exp(2\pi i h \phi_r(n)) &= \sum_{n=0}^{Q-1} exp(2\pi i h \phi_r(P) + \phi_r(n)) \\ &= exp(2\pi i h \phi_r(P)) S_Q(h).\end{aligned}$$

◇

La convention $\sum_i^{i-1} = 0$ sera utilisée par la suite.

Corollaire 1.3 :
Soit a un entier positif ou nul, alors

$$S_{ar^M}(h) = [\sum_{k=0}^{a-1} exp(2\pi i h \phi_r(kr^M)] S_{r^M}(h).$$

Démonstration : Si $a = 0$, c'est évident. Si $a \neq 0$ d'après le lemme 1.2

$$\begin{aligned}S_{ar^M}(h) &= \sum_{k=0}^{a-1} \left(\sum_{n=kr^M}^{(k+1)r^M-1} exp(2\pi i h \phi_r(n)) \right) \\ &= [\sum_{k=0}^{a-1} exp(2\pi i h \phi_r(kr^M)] S_{r^M}(h).\end{aligned}$$

◇

Proposition 1.4 : *[Formule explicite] Soient*

- $N = \sum_{i=0}^{\infty} n_i r^i$
- $N_s = \sum_{i=0}^{s} n_i r^i$

alors

$$\begin{aligned}S_N(h) = {} & exp(2\pi i h (N - N_{v_r(h)})) \{ r^{v_r(h)} \sum_{k=0}^{n_{v_r(h)}-1} exp(2\pi i h \phi_r(kr^{v_r(h)})) \\ & + exp(2\pi i h \phi_r(n_{v_r(h)} r^{v_r(h)})) N_{v_r(h)-1} \}. \qquad (1.2.3)\end{aligned}$$

Démonstration : Posons:

$$m = [\frac{\log N}{\log r}]$$

alors

$$\begin{aligned} S_N(h) &= \sum_{n=0}^{n_m r^m - 1} exp(2\pi i h \phi_r(n)) \qquad (1.2.4) \\ &+ \sum_{i=1}^{m} \sum_{n=n_m r^m + \cdots + n_i r^i}^{n_m r^m + \cdots + n_i r^i + n_{i-1} r^{i-1} - 1} exp(2\pi i h \phi_r(n)). \end{aligned}$$

D'après le lemme 1.2, le corollaire 1.3 et en remarquant $N_m = N$,

$$\begin{aligned} S_N(h) &= S_{n_m r^m}(h) + \sum_{i=1}^{m} exp(2\pi i h \phi_r(n_m r^m + \cdots + n_i r^i)) S_{n_{i-1} r^{i-1}}(h) \\ &= \left(\sum_{k=0}^{n_m - 1} exp(2\pi i h \phi_r(k r^m)) \right) S_{r^m}(h) \qquad (1.2.5) \\ &+ \sum_{i=1}^{m} exp(2\pi i h \phi_r(N - N_{i-1}))(\sum_{k=0}^{n_{i-1}-1} exp(2\pi i h \phi_r(k r^{i-1})) S_{r^{i-1}}(h) \\ &= \sum_{i=1}^{m+1} exp(2\pi i h \phi_r(N - N_{i-1}))(\sum_{k=0}^{n_{i-1}-1} exp(2\pi i h \phi_r(k r^{i-1})) S_{r^{i-1}}(h). \end{aligned}$$

1) Si $v_r(h) > m$, il est évident que:

$$S_N(h) = N,$$

qui satisfait le (1.2.3).

2) Si $v_r(h) \leq m$, d'après le lemme 1.1 et (1.2.5),

$$\begin{aligned} S_N(h) &= \sum_{i=1}^{v_r(h)+1} exp(2\pi i h \phi_r(N - N_{i-1}))(\sum_{k=0}^{n_{i-1}-1} exp(2\pi i h \phi_r(k r^{i-1})) S_{r^{i-1}}(h) \\ &= exp(2\pi i h \phi_r(N - N_{v_r(h)})) \left(\sum_{k=0}^{n_{v_r(h)}-1} exp(2\pi i h \phi_r(k r^{v_r(h)})) \right) r^{v_r(h)} \\ &+ \sum_{i=1}^{v_r(h)} exp(2\pi i h \phi_r(N - N_{v_r(h)-1})) \sum_{k=0}^{n_{i-1}-1} exp(2\pi i h \phi_r(k r^{i-1})) r^{i-1} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= exp(2\pi i h\phi_r(N - N_{v_r(h)}))\{r^{v_r(h)} \sum_{k=0}^{n_{v_r(h)}-1} exp(2\pi i h\phi_r(kr^{v_r(h)})) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{v_r(h)} exp(2\pi i h\phi_r(n_{v_r(h)} r^{v_r(h)})) \sum_{k=0}^{n_{i-1}-1} exp(2\pi i h\phi_r(kr^{i-1}))r^{i-1}\} \\
&= exp(2\pi i h\phi_r(N - N_{v_r(h)}))\{r^{v_r(h)} \sum_{k=0}^{n_{v_r(h)}-1} exp(2\pi i h\phi_r(kr^{v_r(h)})) \\
&\quad + exp(2\pi i h\phi_r(n_{v_r(h)} r^{v_r(h)})) \sum_{i=1}^{v_r(h)} n_{i-1} r^{i-1}\} \\
&= exp(2\pi i h\phi_r(N - N_{v_r(h)}))\{r^{v_r(h)} \sum_{k=0}^{n_{v_r(h)}-1} exp(2\pi i h\phi_r(kr^{v_r(h)})) \\
&\quad + exp(2\pi i h\phi_r(n_{v_r(h)} r^{v_r(h)}))N_{v_r(h)-1}\}, \qquad (1.2.6)
\end{aligned}
$$

d'où le (1.2.3). ◇

Remarque :

$$
|S_N(h)| = \begin{cases} N, & \text{si } v_r(h) > m. \\ exp(2\pi i h\phi_r(N - N_{v_r(h)-1}))N_{v_r(h)-1}, & \text{si } v_r(h) < m \text{ et } n_{v_r(h)} = 0. \end{cases}
$$

Corollaire 1.5 : *Si $r = 2$, alors $|S_N(h)|$ est un entier positif ou nul $\forall h \in \mathbf{Z}$. Plus précisément, si et $m = [\frac{\log N}{\log 2}]$, on a:*

$$
|S_N(h)| = \begin{cases} N, & si\ v_2(h) > m. \\ 2^{v_2(h)} - N_{v_2(h)-1}, & si\ n_{v_2(h)} = 1. \\ N_{v_2(h)-1}, & si\ v_2(h) < m\ et\ n_{v_2(h)} = 0. \end{cases}
$$

Démonstration : C'est une simple application de la formule explicite de la somme exponentielle au cas $r = 2$. ◇

Corollaire 1.6 *Si $N \equiv 0 \bmod r^k$, avec k entier positif tel que $v_r(h) < k$, alors,*

$$S_N(h) = 0.$$

Démonstration : Puisque $v_r(h) < k$ on a $n_{v_r(h)} = 0$, et en remarquant que $N_{v_r(h)-1} = 0$,

$$S_N(h) = 0$$

d'après la formule explicite de la proposition 1.4. $\diamond$

Corollaire 1.7 : *Soient $h \neq 0$ et $m = [\frac{\log N}{\log r}]$, alors,*

1. *si $n_{v_r(h)} = 0$,*

$$|S_N(h)| \leq r^{v_r(h)} - 1. \tag{1.2.7}$$

2. *si $n_{v_r(h)} \neq 0$,*

$$|S_N(h)| \leq \frac{r+1}{2} r^{v_r(h)}. \tag{1.2.8}$$

3. *si $r = 2$,*

$$|S_N(h)| \leq 2^{v_2(h)}. \tag{1.2.9}$$

Démonstration : D'après la proposition 1.4,

1. si $n_{v_r(h)} = 0, v_r(h) > m$,

$$\begin{aligned} |S_N(h)| &= N \\ &\leq r^{m+1} - 1 \\ &\leq r^{v_r(h)} - 1. \end{aligned}$$

si $n_{v_r(h)} = 0, v_r(h) < m$,

$$\begin{aligned} |S_N(h)| &= N_{v_r(h)-1} \\ &\leq r^{v_r(h)} - 1, \end{aligned}$$

d'où le (1.2.7).

2. si $n_{v_r(h)} \neq 0$:

a) si $N_{v_r(h)-1} = 0$,

$$\begin{aligned} |S_N(h)| &= r^{v_r(h)} \left| \sum_{k=0}^{n_{v_r(h)}-1} exp(2\pi i R(h)k/r) \right| \\ &\leq \frac{r^{v_r(h)}}{sin(\pi R(h)/r)}. \end{aligned}$$

En utilisant $sin(\pi t) \geq 2t$ si $0 \leq t \leq 1/2$, $sin(\pi t) \geq 2(1-t)$ si $1/2 \leq t \leq 1$, on a

$$\begin{aligned} |S_N(h)| &\leq \begin{cases} \dfrac{r^{v_r(h)+1}}{2R(h)} & \text{si } 1/r \leq R(h)/r \leq 1/2 \\ \dfrac{r^{v_r(h)+1}}{2(r-R(h))} & \text{si } 1/2 \leq R(h)/r \leq (r-1)/r \end{cases} \\ &\leq \frac{r^{v_r(h)+1}}{2}. \end{aligned} \tag{1.2.10}$$

b) si $0 < N_{v_r(h)-1} < r^{v_r(h)}/2$, en utilisant la proposition 1.4 et le résulta du a), on a:

$$\begin{aligned} |S_N(h)| &\leq \frac{r^{v_r(h)}}{sin(\pi R(h)/r)} + \frac{r^{v_r(h)}}{2} \\ &\leq \frac{r+1}{2} r^{v_r(h)}. \end{aligned} \tag{1.2.11}$$

c) si $r^{v_r(h)}/2 \leq N_{v_r(h)-1} < r^{v_r(h)}$, de même que dans le cas b)

$$\begin{aligned} |S_N(h)| &\leq |r^{v_r(h)} \sum_{k=0}^{n_{v_r(h)}} exp(2\pi i R(h)k/r) \\ &\quad + exp(2\pi i R(h) n_{v_r(h)}/r)(N_{v_r(h)-1} - r^{v_r(h)})| \\ &\leq r^{v_r(h)} \left| \sum_{k=0}^{n_{v_r(h)}} exp(2\pi i R(h)k/r) \right| + \frac{r^{v_r(h)}}{2} \\ &\leq \frac{r^{v_r(h)}}{sin(\pi R(h)/r)} + \frac{r^{v_r(h)}}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{r+1}{2} r^{v_r(h)} \\ &= \frac{r+1}{2} r^{v_r(h)}, \end{aligned} \tag{1.2.12}$$

d'où de a),b) et c)

$$|S_N(h)| \leq \frac{r+1}{2} r^{v_r(h)}.$$

3. si $r = 2$, d'après le corollaire 1.5, on a

$$\begin{aligned} |S_N(h)| &\leq \max\{2^{v_2(h)} - 1, 2^{v_2(h)}\} \\ &\leq 2^{v_2(h)}, \end{aligned}$$

d'où le (1.2.9).

◇

Remarque : Le corollaire 1.7 implique: $\forall h \neq 0$

$$|S_N(h)| \leq \begin{cases} |h|, & \text{si } r = 2. \\ \frac{r+1}{2}|h|, & \text{si } r \geq 3. \end{cases}$$

Ce résultat améliore celui de Proinov et Grozdanov (cf. [23]):

$$|S_N(h)| \leq rh - 1 \quad \text{où } r \geq 2 \text{ et } h > 0.$$

1.3 Une estimation de la diaphonie de la suite VAN DER CORPUT

Dans cette partie, on utilise les résultats pécédents pour estimer la diaphonie de la suite-VDC.

$$F(N,\sigma) = (2\sum_{h=1}^{\infty}\frac{1}{h^2}|\frac{1}{N}S_N(h)|^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Lemme 1.8 *Soit des entiers m et M tels que $m \leq M-1$, alors*

$$Card\{\, h \mid v_r(h) = m \quad et \quad 1 \leq h \leq r^M - 1\} = (r-1)r^{M-m-1}$$

Démonstration : Immédiate. ◇

Théorème 1.9 *Soit $(\phi_r(n))_{n\geq 0}$ la suite-VDC en base r, alors, pour tout $N \geq 1$:*

1. *si $r \geq 3$:*

$$F(N,\phi_r) < \frac{\pi}{N}\sqrt{\frac{1}{3} + \frac{(r+1)^2}{12r} + \frac{(r+1)^2(r^2-1)\log rN}{12r^2\log r}} \tag{1.3.1}$$

2. *si $r = 2$:*

$$F(N,\phi_r) < \frac{\pi}{2N}\sqrt{3 + \frac{\log N}{\log 2}} \tag{1.3.2}$$

Démonstration : Il suffit d'estimer:

$$\sum_{h=1}^{\infty}\frac{|S_N(h)|^2}{h^2} \tag{1.3.3}$$

où $N = \sum_{i=0}^{\infty} n_i r^i$. En notant $m = [\frac{\log N}{\log r}]$, (1.3.3) peut être développée sous la forme

$$\begin{aligned}\sum_{h=1}^{\infty}\frac{|S_N(h)|^2}{h^2} &= \sum_{h,0\leq v_r(h)\leq m}\frac{|S_N(h)|^2}{h^2} \\ &+ \sum_{h,v_r(h)>m}\frac{|S_N(h)|^2}{h^2}\end{aligned} \tag{1.3.4}$$

Comme $v_r(h) > m \iff h = kr^{m+1}, k = 1, 2, \cdots$, il résulte de la propositon 1.4 que

$$\begin{aligned}\sum_{h, v_r(h)>m} \frac{|S_N(h)|^2}{h^2} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{N^2}{r^{2(m+1)}k^2} \\ &< \frac{\pi^2}{6} \qquad (1.3.5)\end{aligned}$$

Pour le premier terme de (1.3.4), on remarque que $0 \leq v_r(h) \leq m \iff \exists v \in \{0, 1, 2, \cdots\}$. $\exists k$, avec$1 \leq k \leq r^{m+1} - 1$ tels que:

$$h = vr^{m+1} + k$$

d'où

$$\begin{aligned}\sum_{h, 0 \leq v_r(h) \leq m} \frac{|S_N(h)|^2}{h^2} &= \sum_{v=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{r^{(m+1)}-1} \frac{|S_N(vr^{m+1} + k)|^2}{(vr^{m+1} + k)^2} \\ &= \sum_{k=1}^{r^{(m+1)}-1} \frac{|S_N(k)|^2}{k^2} \\ &\quad + \sum_{v=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{r^{(m+1)}-1} \frac{|S_N(k)|^2}{(vr^{m+1} + k)^2} \qquad (1.3.6)\end{aligned}$$

car $S_N(vr^{m+1}+k) = S_N(k), \forall k \in \mathbf{Z}$ et $\forall v \in \mathbf{N}$. On va maintenant distinguer le cas $r \geq 3$ et le cas $r = 2$.

1) Si $r \geq 3$, d'après le corollaire 1.7

$$|S_N(h)| \leq \frac{r+1}{2} r^{v_r(h)} \qquad \forall h \neq 0 \qquad (1.3.7)$$

Donc

$$\sum_{h=1}^{r^{(m+1)}-1} \frac{|S_N(h)|^2}{h^2} \leq \frac{(r+1)^2}{4} \sum_{h=1}^{r^{(m+1)}-1} \frac{r^{2v_r(h)}}{h^2}$$

Notons, pour chaque entier l

$$A_l = \{h \in \mathbf{N} \mid v_r(h) = l\}$$

Il est clair que $h \in A_l$ si et seulement si il existe un entier $q \geq 0$ et un entier $j \in \{1, \ldots, r-1\}$ tels que $h = r^l(qr + j)$. D'où:

$$\begin{aligned}
& \sum_{h=1}^{r^{(m+1)}-1} \frac{|S_N(h)|^2}{h^2} \qquad (1.3.8) \\
\leq\ & \frac{(r+1)^2}{4} \sum_{l=0}^{m} \sum_{h \in A_l \bigcap [1, r^{(m+1)}-1]} \frac{r^{2l}}{h^2} \\
=\ & \frac{(r+1)^2}{4} \sum_{l=0}^{m} \sum_{q=0}^{r^{m-l}-1} \sum_{j=1}^{r-1} \frac{1}{(qr+j)^2} \\
\leq\ & \frac{(r+1)^2}{4}(m+1) \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{r-1} \frac{1}{(qr+j)^2} \\
=\ & \frac{(r+1)^2}{4}(m+1)(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} - \sum_{g=1}^{\infty} \frac{1}{r^2 g^2}) \\
=\ & \frac{\pi^2 (r+1)^2 (r^2-1)(m+1)}{24 r^2} \\
\leq\ & \frac{\pi^2 (r+1)^2 (r^2-1) \log rN}{24 r^2 \log r}
\end{aligned}$$

Pour le deuxième terme de (1.3.6), en utilisant le corollaire 1.7, puis le lemme 1.8:

$$\begin{aligned}
& \sum_{v=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{r^{(m+1)}-1} \frac{|S_N(k)|^2}{(vr^{m+1}+k)^2} \\
\leq\ & \frac{(r+1)^2}{4} \sum_{v=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{r^{(m+1)}-1} \frac{r^{2v_r(k)}}{v^2 r^{2(m+1)}} \\
=\ & \frac{(r+1)^2}{4r^{2(m+1)}} \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{v^2} \sum_{k=1}^{r^{(m+1)}-1} r^{2v_r(k)} \\
=\ & \frac{\pi^2 (r+1)^2}{24 r^{2(m+1)}} \sum_{l=0}^{m} \sum_{k \in A_l \bigcap [1, r^{(m+1)}-1]} r^{2l} \\
=\ & \frac{\pi^2 (r+1)^2}{24 r^{2(m+1)}} \sum_{l=0}^{m} (r-1) r^{m-l} r^{2l}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\pi^2(r+1)^2}{24r^{2(m+1)}} r^m (r^{m+1}-1) \\
&\leq \frac{\pi^2(r+1)^2}{24r}
\end{aligned}
$$

il résulte de (1.3.4), (1.3.5), (1.3.6), (1.3.7) et (1.3.8) que

$$
\begin{aligned}
(NF(N,\phi_r))^2 &= 2\sum_{h=1}^{\infty} \frac{|S_N(h)|^2}{h^2} \\
&< 2\left(\frac{\pi^2}{6} + \frac{\pi^2(r+1)^2}{24r} + \frac{\pi^2(r+1)^2(r^2-1)\log rN}{24r^2\log r}\right) \\
&= \pi^2\left(\frac{1}{3} + \frac{(r+1)^2}{12r} + \frac{(r+1)^2(r^2-1)\log rN}{12r^2\log r}\right)
\end{aligned}
$$

2) Si $r = 2$, d'après le corollaire 1.7

$$
|S_N(h)| \leq 2^{v_2(h)} \qquad \forall h \neq 0 \tag{1.3.9}
$$

En utilisant le même raisonnement que dans le cas $r \geq 3$, on a:

$$
\sum_{h=1}^{2^{m+1}-1} \frac{|S_N(h)|^2}{h^2} \leq \frac{\pi^2 \log 2N}{8\log 2} \tag{1.3.10}
$$

$$
\sum_{v=1}^{\infty} \sum_{h=1}^{2^{m+1}-1} \frac{|S_N(v2^{m+1}+h)|^2}{(v2^{m+1}+h)^2} \leq \frac{\pi^2}{12} \tag{1.3.11}
$$

Donc, de (1.3.4), (1.3.5), (1.3.6), (1.3.10) et (1.3.11), on a

$$
(NF(N,\phi_r))^2 < \pi^2\left(\frac{1}{2} + \frac{\log 2N}{4\log 2}\right)
$$

◇

Corollaire 1.10 (Comportement asymptotique)

1) Si $r \geq 3$,

$$
\limsup_{N\to\infty} \frac{NF(N,\phi_r)}{\sqrt{\log N}} \leq \frac{\pi(r+1)}{2r}\sqrt{\frac{r^2-1}{3\log r}}
$$

2) Si $r = 2$

$$
\limsup_{N\to\infty} \frac{NF(N,\phi_r)}{\sqrt{\log N}} \leq \frac{\pi}{2\sqrt{\log 2}} = 1.886\cdots
$$

Démonstration :

Ces résultats sont immédiats à partir du Théorème 1.9. ◇

Remarque :

Les deux résultats du corollaire 1.10 sont meilleurs que ceux obtenus par Proinov et Grozdanov (cf. [23]), qui donnent:

1) Si $r \geq 3$,

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{NF(N,\phi_r)}{\sqrt{\log N}} \leq \pi\sqrt{\frac{r^2-1}{3\log r}}$$

2) Si $r = 2$

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{NF(N,\phi_r)}{\sqrt{\log N}} \leq \frac{\pi}{\sqrt{\log 2}}$$

Mais dans le cas $r = 2$ Proinov et Atanassov (cf. [24]) donnent le résultat le meilleur possible:

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{NF(N,\phi_r)}{\sqrt{\log N}} = \frac{\pi}{3\sqrt{\log 2}} = 1.257\cdots$$

Corollaire 1.11 *Si $r = 2$, on a:*

$$\sup_{N\geq 2} \frac{NF(N,\phi_r)}{\sqrt{\log N}} = \frac{2F_2(\phi_r)}{\sqrt{\log 2}} = \frac{\pi}{\sqrt{3\log 2}} \qquad \forall N \geq 2 \tag{1.3.12}$$

D'où:

$$F(N,\phi_2) \leq \frac{\pi\sqrt{\log N}}{\sqrt{3\log 2}N} \qquad \forall N \geq 2 \tag{1.3.13}$$

Démonstration :

Pour $N = 2$ un calcul facile donne: $\frac{2F_2(\phi_2)}{\sqrt{\log 2}} = \frac{\pi}{\sqrt{3\log 2}}$ et pour $3 \leq N \leq 6$, on vérifie, à l'aide de l'ordinateur et de la formule (1.1.3) que $\frac{NF(N,\phi_2)}{\sqrt{\log N}} \leq \frac{\pi}{\sqrt{3\log 2}}$.

Pour $N \geq 7$, on vérifie facilement que:

$$\frac{\pi}{2}\sqrt{3+\frac{\log N}{\log 2}} \leq \pi\sqrt{\frac{\log N}{3\log 2}} \tag{1.3.14}$$

ce qui entraîne (1.3.13) en utilisant le théorème 1.9.

1.4 Estimation de la discrépance quadratique de la suite de VAN DER CORPUT.

Dans cette partie, on va utiliser la formule de Koksma:

$$T(N,\phi_r)^2 = \left(\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\left(\phi_r(n)-\frac{1}{2}\right)\right)^2 + \left(\frac{1}{2\pi}F(N,\phi_r)\right)^2$$

et les estimations de la diaphonie $F(N,\phi_r)$ obtenues dans le paragraphe I.1.3 pour estimer $T(N,\phi_r)$ dans le cas de la suite-VDC. Nous aurons donc à estimer le terme:

$$R_N(\phi_r) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\left(\frac{1}{2}-\phi_r(n)\right). \tag{1.4.1}$$

Lemme 1.12 : *Soit*

$$P(N) = \sum_{n=0}^{N-1}\phi_r(n), \tag{1.4.2}$$

alors

$$P(r^M) = \frac{r^M-1}{2}.$$

Démonstration : Immédiat. ◇

Lemme 1.13 : *Soit a un entier, $1 \leq a \leq r-1$, alors*

$$P(ar^m) = \frac{a}{2}\left(\frac{a-1}{r}+r^m-1\right).$$

Démonstration :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{ar^m-1}\phi_r(n) &= \sum_{v=0}^{a-1}\sum_{n=vr^m}^{(v+1)r^m-1}\phi_r(n) \\
&= \sum_{v=0}^{a-1}\left(\sum_{k=0}^{r^m-1}\phi_r(vr^m+k)\right) \\
&= \sum_{v=0}^{a-1}r^m\phi_r(vr^m)+\sum_{v=0}^{a-1}P(r^m)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{v=1}^{a-1} \frac{v}{r} + \frac{a}{2}(r^m - 1) \\
&= \frac{a}{2}(\frac{a-1}{r} + r^m - 1).
\end{aligned}
$$

$\diamond$

Proposition 1.14 (Formule explicite): *Soit:*

$$N = \sum_{i=0}^{\infty} n_i r^i, \qquad \text{où } 0 \leq n_i \leq r-1,$$

alors on a:

$$
\begin{aligned}
P(N) &= \frac{N}{2} + \frac{1}{2r} \sum_{i=0}^{\infty} n_i(n_i - r - 1) \qquad (1.4.3) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{n_i}{r^{i+1}} N_{i-1},
\end{aligned}
$$

où $N_i = \sum_{j=0}^{i} n_j r^j$ *et* $N_{-1} = 0$.

Démonstration : Pour faciliter la démonstration, on représente $N \geq 1$ sous la forme:

$$N = q_1 r^{m_1} + q_2 r^{m_2} + \cdots + q_\alpha r^{m_\alpha} + \cdots + q_l r^{m_l},$$

où $0 \leq m_1 < m_2 < \cdots < m_l, 1 \leq q_\alpha \leq r-1, \alpha = 1, \cdots, l$, et en notant $N_\alpha = \sum_{\beta=1}^{\alpha} q_\beta r^{m_\beta}$ on va montrer:

$$
\begin{aligned}
P(N) &= \frac{N}{2} + \frac{1}{2r} \sum_{\alpha=1}^{l} q_\alpha(q_\alpha - r - 1) \qquad (1.4.4) \\
&\quad + \sum_{\alpha=2}^{l} q_{\alpha-1} r^{m_{\alpha-1}} \phi_r(N - N_{\alpha-1}) \\
&= \frac{N}{2} + \frac{1}{2r} \sum_{\alpha=1}^{l} q_\alpha(q_\alpha - r - 1) \\
&\quad + \sum_{\beta=2}^{l} q_\beta \sum_{\alpha=2}^{\beta} \frac{q_{\alpha-1} r^{m_{\alpha-1}}}{r^{m_\beta - 1}},
\end{aligned}
$$

ce qui est bien équivalent à (1.4.3).

On a:

$$\begin{aligned}
P(N) &= P(q_l r^{m_l}) + \sum_{\alpha=2}^{l} \sum_{n=q_l r^{m_l}+\cdots+q_\alpha r^{m_\alpha}}^{q_l r^{m_l}+\cdots+q_\alpha r^{m_\alpha}+q_{\alpha-1} r^{m_{\alpha-1}}-1} \phi_r(n) \\
&= P(q_l r^{m_l}) + \sum_{\alpha=2}^{l} \sum_{k=0}^{q_{\alpha-1} r^{m_{\alpha-1}}-1} \phi_r(q_l r^{m_l} + \cdots + q_\alpha r^{m_\alpha} + k) \\
&= P(q_l r^{m_l}) + \sum_{\alpha=2}^{l} P(q_{\alpha-1} r^{m_{\alpha-1}}) \\
&\quad + \sum_{\alpha=2}^{l} q_{\alpha-1} r^{m_{\alpha-1}} \phi_r(q_l r^{m_l} + \cdots + q_\alpha r^{m_\alpha}) \\
&= \sum_{\alpha=1}^{l} P(q_\alpha r^{m_\alpha}) + \sum_{\alpha=2}^{l} q_{\alpha-1} r^{m_{\alpha-1}} \phi_r(q_l r^{m_l} + \cdots + q_\alpha r^{m_\alpha}),
\end{aligned}$$

d'où, en utilisant le lemme 1.13:

$$\begin{aligned}
P(N) &= \sum_{\alpha=1}^{l} \frac{q_\alpha}{2}\left(\frac{q_\alpha - 1}{r} + r^{m_\alpha} - 1\right) + \sum_{\alpha=2}^{l} q_{\alpha-1} r^{m_{\alpha-1}} \phi_r(q_l r^{m_l} + \cdots + q_\alpha r^{m_\alpha}) \\
&= \sum_{\alpha=1}^{l} \frac{q_\alpha r^{m_\alpha}}{2} + \frac{1}{2r} \sum_{\alpha=1}^{l} q_\alpha(q_\alpha - r - 1) \\
&\quad + \sum_{\alpha=2}^{l} q_{\alpha-1} r^{m_{\alpha-1}} \phi_r(q_l r^{m_l} + \cdots + q_\alpha r^{m_\alpha}) \\
&= \frac{N}{2} + \frac{1}{2r} \sum_{\alpha=1}^{l} q_\alpha(q_\alpha - r - 1) \\
&\quad + \sum_{\alpha=2}^{l} q_{\alpha-1} r^{m_{\alpha-1}} \sum_{\beta=\alpha}^{l} \frac{q_\beta}{r^{m_\beta+1}} \\
&= \frac{N}{2} + \frac{1}{2r} \sum_{\alpha=1}^{l} q_\alpha(q_\alpha - r - 1) \\
&\quad + \sum_{\beta=2}^{l} q_\beta \sum_{\alpha=2}^{\beta} \frac{q_{\alpha-1} r^{m_{\alpha-1}}}{r^{m_\beta+1}}.
\end{aligned}$$

$\diamond$

Remarque : : Comme H.Faure nous l'a fait remarquer, la formule (1.4.3) est une version équivalente du résultat de Proinov et Atanassov (cf [24]) sur la discrépance-L^1 pour ϕ_r. On a en effet:

$$D^{(1)}(N,\phi_r) = \int_0^1 |\frac{C(N,t)}{N} - t|dt$$

où

$$C(N,t) = Card\{\ \xi_n \mid \phi_r(n) < t,\ 0 \leq n \leq N-1\}.$$

D'après H.Faure (cf. [4]), on a: $t \geq \frac{C(N,t)}{N}$ et par conséquent:

$$\begin{aligned} D^{(1)}(N,\phi_r) &= \int_0^1 t - \frac{C(N,t)}{N}dt \\ &= \frac{1}{N}\left(\frac{N}{2} - P(N)\right) \\ &= \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{l-1}\frac{n_i}{r}(\frac{r+1-n_i}{2} - \frac{N_{i-1}}{r^i}) \\ &= R_N(\phi_r), \end{aligned} \tag{1.4.5}$$

où $N = \sum_{i=0}^{l-1} n_i r^i$ et $N_i = \sum_{j=0}^{i} n_j r^j$ $(N_{-1} = 0)$.

Dans la suite on va donner un résultat sur le comportement asymptotique de la discrépance quadratique de la suite $\phi_n(r)$. Ce résultat est dû Proinov et Atanassov (cf [24]). Puisque la démonstration n'est pas encore publiée, nous en donnons une, obtenue grâce aux indications de H.Faure avec l'aide de D.Lamberton, en utilisant la formule explicite (1.4.5) ci-dessus.

Théorème 1.15 :

1) Si r est impair,

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{NT(N,\phi_r)}{\log N} = \frac{r^2-1}{8r\log r}. \tag{1.4.6}$$

2) Si r est pair,

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{NT(N,\phi_r)}{\log N} = \frac{r^2+r-2}{8(r+1)\log r}. \tag{1.4.7}$$

Avant de commencer la démonstration, on a besoin d'un lemme qui va être utilisé dans le cas où r est pair.

Lemme 1.16 *Soit la fonction:*

$$S(\epsilon_0, \cdots, \epsilon_{l-1}) = \sum_{i=0}^{l-1} \sum_{j=0}^{i-1} \epsilon_i \epsilon_j r^{j-i}, \tag{1.4.8}$$

où $\epsilon_i \in \{-1, 1\}, i = 0, \ldots, l-1$, *alors quels que soient les* ϵ_i, *on a:*

$$S(\epsilon_0, \cdots, \epsilon_{l-1}) \geq S((-1), (-1)^2, \cdots, (-1)^l). \tag{1.4.9}$$

Démonstration : Puisque

$$S((-1), (-1)^2, \cdots, (-1)^l) = S((-1)^{l-1}\epsilon_{l-1}, (-1)^{l-2}\epsilon_{l-1}, \cdots, \epsilon_{l-1}),$$

il suffit de démontrer que, pour $k = 0, 1, \ldots, l-2$

$$\begin{aligned} & S((-1)^k \epsilon_k, (-1)^{k-1}\epsilon_k, \cdots, (-1)\epsilon_k, \epsilon_k, \cdots, \epsilon_{l-1}) \\ \geq \; & S((-1)^{k+1}\epsilon_{k+1}, (-1)^k \epsilon_{k+1}, \cdots, (-1)\epsilon_{k+1}, \epsilon_{k+1}, \cdots, \epsilon_{l-1}). \end{aligned} \tag{1.4.10}$$

Or:

$$\begin{aligned} & S((-1)^k \epsilon_k, (-1)^{k-1}\epsilon_k, \cdots, (-1)\epsilon_k, \epsilon_k, \cdots, \epsilon_{l-1}) \\ = \; & \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^{2k-i-j} \epsilon_k^2 r^{j-i} + \sum_{i=k+1}^{l-1} \sum_{j=0}^{k} \epsilon_i (-1)^{k-j} \epsilon_k r^{j-i} \\ & + \sum_{i=k+1}^{l-1} \sum_{j=k+1}^{i-1} \epsilon_i \epsilon_j r^{j-i}. \end{aligned} \tag{1.4.11}$$

Mais

$$\sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^{2k-i-j} \epsilon_k^2 r^{j-i} = \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{i-1} (-r)^{j-i},$$

et

$$\begin{aligned} \sum_{i=k+1}^{l-1} \sum_{j=0}^{k} \epsilon_i (-1)^{k-j} \epsilon_k r^{j-i} &= \epsilon_k \Big(\sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} r^j\Big)\Big(\sum_{i=k+1}^{l-1} \frac{\epsilon_i}{r^i}\Big) \\ &\geq -\epsilon_{k+1} \Big(\sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} r^j\Big)\Big(\sum_{i=k+1}^{l-1} \frac{\epsilon_i}{r^i}\Big) \end{aligned}$$

car $\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}r^j > 0$ et $\sum_{i=k+1}^{l-1}\frac{\epsilon_i}{r^i}$ est du signe ϵ_{k+1}; d'où en changeant ϵ_k par $-\epsilon_{k+1}$ dans (1.4.11), on a (1.4.10). $\diamond$

Démonstration : du thérème 1.15.

D'après la formule de Koksma et la diaphonie $F(N,\phi_r)$ de la suite VDC, on voit qu'il suffit d'estimer $R_N(\phi_r)$ pour étudier $T(N,\phi_r)$. On va donc estimer $NR_N(\phi_r)$.

Puisque

$$rNR_N(\phi_r) = \sum_{i=0}^{l-1} n_i\left(\frac{r+1-n_i}{2} - \sum_{j=0}^{i-1} n_j r^{j-i}\right),$$

on introduit la fonction de l variables réelles définie par:

$$A(x_0,\ldots,x_{l-1}) = \sum_{i=0}^{l-1} x_i\left(\frac{r+1-x_i}{2} - \sum_{j=0}^{i-1} x_j r^{j-i}\right). \tag{1.4.12}$$

La fonction A vérifie les propriétés suivantes:

1. pour $k = 0,\ldots,l-1$

$$\frac{\partial A(x_0,\ldots,x_{l-1})}{\partial x_k} = \frac{r+1}{2} - x_k - \sum_{j=0}^{k-1} x_j r^{j-k} - \sum_{i=k+1}^{l-1} x_i r^{k-i}. \tag{1.4.13}$$

2. La matrice des dérivés secondes de la fonction A est donnée par: $-M$ où M est la matrice symétrique:

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{r} & \cdots & \frac{1}{r^{l-1}} \\ \frac{1}{r} & 1 & \cdots & \frac{1}{r^{l-2}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{r^{l-1}} & \frac{1}{r^{l-2}} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \tag{1.4.14}$$

On vérifie que le déterminant de M est égale à $(1-\frac{1}{r^2})^{l-1}$ et que, puisque $r > 1$, les sous déterminants principaux de M sont positifs. Il

en résulte que la fonction A est concave. Et en résolvant le système d'équations:

$$x_k + \sum_{j=0}^{k-1} x_j r^{j-k} + \sum_{i=k+1}^{l-1} x_i r^{k-i} = \frac{r+1}{2}, \quad k = 0, 1, \ldots, l-1, \quad (1.4.15)$$

on voit que $A(x_0, \ldots, x_{l-1})$ atteint son maximum au point $(x_0^*, \cdots, x_{l-1}^*)$ avec $x_0^* = x_{l-1}^* = \frac{r}{2}$ et $x_j^* = \frac{r-1}{2}$ pour $1 < j < l-1$.

3. Quand on fixe toutes les variables x_j pour $j \neq k$, la fonction $x_k \longmapsto A(x_0, \ldots, x_k, \ldots, x_{l-1})$ est un polynome du seconde degré qui atteint son maximum en:

$$\bar{x}_k^* = \frac{r+1}{2} - \sum_{j=0}^{k-1} x_j r^{j-k} - \sum_{i=k+1}^{l-1} x_i r^{k-i} \in \left]\frac{r-3}{2}, \frac{r+1}{2}\right] \quad (1.4.16)$$

Puisque en ce qui concerne nos problèmes, les n_j sont à valeurs dans $\{0, 1, \cdots, r-1\}$, on va discuter selon les cas suivants.

1) Si r est impair, en prenant $n_i = \frac{r-1}{2}$, on a:

$$\begin{aligned} NR_N(\phi_r) &= \sum_{i=0}^{l-1} \frac{r-1}{2r}\left(\frac{r+3}{4} - \frac{r-1}{2}\sum_{j=0}^{i-1} r^{j-i}\right) \quad (1.4.17) \\ &= l\frac{(r-1)(r+3)}{8r} - \frac{(r-1)}{4r}\sum_{i=0}^{l-1}\left(1 - \frac{1}{r^i}\right) \\ &= l\frac{(r-1)(r+1)}{8r} + O(1). \end{aligned}$$

D'autre part, d'après la propriété 2) de la fonction $A(x_0, \ldots, x_{l-1})$, on a

$$\begin{aligned} A(n_0, \ldots, n_{l-1}) &\leq A\left(\frac{r}{2}, \frac{r-1}{2}, \cdots, \frac{r-1}{2}, \frac{r}{2}\right) \\ &= \frac{r-1}{2}\sum_{i=1}^{l-2}\left(\frac{r+3}{4} - \frac{r-1}{2}\sum_{j=1}^{i-1} r^{j-i} - \frac{r}{2}r^{-i}\right) + O(1) \\ &= (l-2)\frac{r^2-1}{8} + O(1) \\ &= l\frac{r^2-1}{8} + O(1), \end{aligned}$$

qui entraîne

$$NR_N(\phi_r) \leq l\frac{r^2-1}{8r} + O(1). \tag{1.4.18}$$

D'où de (1.4.17) et (1.4.18) le (1.4.6) en remarquant $l-1 \leq \log N \leq l$.

2) Si r est pair, en prenant $n_i = \frac{r}{2}$ si i est pair et $n_i = \frac{r}{2} - 1$ si i est impair avec $l = 2k+1$, on obtient:

$$\begin{aligned} NR_N(\phi_r) &= \sum_{p=0}^{k} \frac{1}{2}\left(\frac{r+2}{4} - \frac{1}{r^{2p}}\sum_{j=0}^{2p-1} n_j r^j\right) \\ &+ \sum_{p=0}^{k-1} \frac{1}{r}\left(\frac{r}{2}-1\right)\left(\frac{r+4}{4} - \frac{1}{r^{2p+1}}\sum_{j=0}^{2p} n_j r^j\right) \end{aligned} \tag{1.4.19}$$

Mais

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^{2p}}\sum_{j=0}^{2p-1} n_j r^j &= \frac{1}{r^{2p}}\sum_{j=0}^{2p-1}\frac{r}{2}r^j - \frac{1}{r^{2p}}\sum_{j=0}^{p-1} r^{2j+1} \\ &= \frac{1}{2r^{2p-1}}\left(\frac{r^{2p}-1}{r-1}\right) - \frac{r}{r^{2p}}\left(\frac{r^{2p}-1}{r^2-1}\right) \\ &= \frac{r^{2p}-1}{(r-1)r^{2p-1}}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{r+1}\right) \\ &= \frac{r}{2(r+1)} - \frac{1}{2(r+1)r^{2p}-1} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^{2p+1}}\sum_{j=0}^{2p} n_j r^j &= \frac{1}{r}\frac{1}{r^{2p}}\sum_{j=0}^{2p-1} n_j r^j + \frac{1}{r^{2p+1}}\frac{r}{2}r^{2p} \\ &= \frac{1}{2(r+1)} - \frac{1}{2(r+1)r^{2p}} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{r+2}{2(r+1)} - \frac{1}{2(r+1)r^{2p}} \end{aligned}$$

d'où

$$NR_N(\phi_r) = \sum_{p=0}^{k}\frac{1}{2}\left(\frac{r+2}{4} - \frac{r}{2(r+1)} + \frac{1}{2(r+1)r^{2p}-1}\right) \tag{1.4.20}$$

$$
\begin{aligned}
&+\sum_{p=0}^{k-1}\frac{1}{r}(\frac{r}{2}-1)(\frac{r+4}{4}-\frac{r+2}{2(r+1)}+\frac{1}{2(r+1)r^{2p}})\\
=\ & (k+1)\frac{(r^2+r+2)}{8(r+1)}+k(\frac{(r^2+r-6)}{8(r+1)}+O(1)\\
=\ & l\frac{(r^2+r-2)}{8(r+1)}+O(1).
\end{aligned}
$$

Il en résulte que $\limsup_{N\to\infty}\frac{NR_N(\phi_r)}{\log N}\geq\frac{(r^2+r-2)}{8(r+1)\log r}$.

Pour la majoration, on note $E=\{\frac{r}{2}-1,\frac{r}{2}\}$ et d'après la propriété 3) de la fonction $A(x_0,\ldots,x_{l-1})$, on a

$$
\begin{aligned}
A(n_0,\ldots,n_{l-1}) &\leq \max_{m_0\in E}A(m_0,n_1,\ldots,n_{l-1})\\
&\leq \max_{m_0,m_1\in E}A(m_0,m_1,\ldots,n_{l-1})\\
&\ldots\\
&\leq \max_{m_0,m_1,\ldots,m_{l-1}\in E}A(m_0,m_1,\ldots,m_{l-1}).
\end{aligned}
$$

Donc pour majorer $NR_N(\phi_r)$, dans la suite il suffit de considérer le cas où $n_0,\ldots,n_{l-1}\in E$.

On peut alors écrire n_i sous la forme:

$$
n_i=\frac{r-1-\epsilon_i}{2}, \tag{1.4.21}
$$

avec $\epsilon_i\in\{-1,1\}$ pour $i=0,1,\ldots,l-1$, et donc en écrivant $rNR_N(\phi_r)$ et en utilisant le lemme 1.16, on a

$$
\begin{aligned}
rNR_N(\phi_r) &= \sum_{i=0}^{l-1}(\frac{r-1-\epsilon_i}{2})(\frac{r+3+\epsilon_i}{4}-\sum_{j=0}^{i-1}(\frac{r-1-\epsilon_j}{2})r^{j-i}) \qquad (1.4.22)\\
&= \sum_{i=0}^{l-1}\frac{(r-1)(r+3)-4\epsilon_i-1}{8}\\
&\quad -\sum_{i=0}^{l-1}\sum_{j=0}^{i-1}\frac{(r-1)^2-\epsilon_i(r-1)-\epsilon_j(r-1)-\epsilon_i\epsilon_j}{4}r^{j-i}\\
&= l\frac{(r-1)(r+3)-1}{8}-\sum_{i=0}^{l-1}\sum_{j=0}^{i-1}\frac{(r-1)^2}{4}r^{j-i}-\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{l-1}\epsilon_i
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& + \frac{r-1}{4}\sum_{i=0}^{l-1}\epsilon_i\sum_{j=0}^{i-1}r^{j-i} + \frac{r-1}{4}\sum_{i=0}^{l-1}\sum_{j=0}^{i-1}\epsilon_j r^{j-i} - \frac{1}{4}\sum_{i=0}^{l-1}\sum_{j=0}^{i-1}\epsilon_i\epsilon_j r^{j-i} \\
= \; & l\frac{r^2-2}{8} - \frac{1}{4}\sum_{i=0}^{l-1}\sum_{j=0}^{i-1}\epsilon_i\epsilon_j r^{j-i} + O(1) \\
\leq \; & l\frac{r^2-2}{8} - \frac{1}{4}S((-1),(-1)^2,\cdots,(-1)^l) + O(1) \\
= \; & l\frac{r^2-2}{8} + \frac{l}{4(r+1)} + O(1) \\
= \; & l\frac{r(r^2+r-2)}{8(r+1)} + O(1).
\end{aligned}
$$

où

$$
S((-1),(-1)^2,\cdots,(-1)^l) = -\frac{l}{r+1} + r(1-\frac{(-1)^l}{r^l})
$$

définie par (1.4.9). Donc

$$
N R_N(\phi_r) \leq l\frac{(r^2+r-2)}{8(r+1)} + O(1). \qquad (1.4.23)
$$

D'où de (1.4.20) et (1.4.23) le (1.4.7) en remarquant $l-1 \leq \log N \leq l$. $\diamond$

Remarque : A partir du lemme 1.16, on peut obtenir l'égalité

$$
\limsup_{N\to\infty}\frac{NF(N,\phi_2)}{\sqrt{\log N}} = \frac{\pi}{3\sqrt{\log 2}}
$$

donnée par Proinov et Atanassov dans [24].

1.5 Estimation de la discrépance quadratique de la suite de VAN DER CORPUT symétrisée

Définition 1:

Soit $\sigma = (\xi_n)_{n\geq 0}$ une suite infinie de [0,1], on dit que σ est symétrique si $\forall n \geq 0$,

$$\xi_{2n} + \xi_{2n+1} = 1.$$

Définition 2:

Soit $\tilde{\sigma} = (y_n)$ une suite symétrique de [0,1], alors on dit que $\tilde{\sigma}$ est engendrée par la suite infinie $\sigma = (x_n)$ si $\forall n \geq 0$:

$$x_n = y_{2n} \quad \text{ou} \quad x_n = y_{2n+1}.$$

Lemme 1.17 *(cf. [22]): Soit $\tilde{\sigma}$ une suite symétrique de [0,1] engendrée par σ, alors $\forall N \geq 1$,*

$$(NT(N,\tilde{\sigma}))^2 \leq (\frac{1}{\pi} n F_n(\sigma) + a)^2 + b^2,$$

où $n = [\frac{N}{2}]$, $a = b = 0$, si N est pair et $a = \frac{1}{2\sqrt{3}}$ $b = \frac{1}{2}$ si N est impair.

Théorème 1.18 :

Soit $\tilde{\phi}_r$ une suite symétrique engendrée par la suite-VDC en base r, alors $\forall N \geq 2$

1)

$$NT(N,\tilde{\phi}_r) < \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{(r+1)^2}{12r} + \frac{(r+1)^2(r^2-1)\log rN}{12r^2 \log r}} + 1, \qquad si\ r \geq 3.$$

$$NT(N,\tilde{\phi}_r) < \frac{1}{2}\sqrt{3 + \frac{\log N}{\log 2}} + 1, \qquad si\ r = 2.$$

2)

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{NT(N,\tilde{\phi}_r)}{\sqrt{\log N}} \leq \frac{r+1}{2r}\sqrt{\frac{r^2-1}{3\log r}}, \qquad si\ r \geq 3.$$

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{NT(N,\tilde{\phi}_r)}{\sqrt{\log N}} \leq \frac{1}{2\sqrt{\log 2}} \simeq 0.6005\cdots, \qquad si\ r = 2.$$

Démonstration : En utilisant le lemme 1.17 et l'estimation de la diaphonie de la suite-VDC, on obtient directement ces résultats. $\diamond$

Remarque : Soit

$$C = \limsup_{N\to\infty} \frac{NT(N, \tilde{\phi}_2)}{\sqrt{\log N}}.$$

Proinov et Grozdanov (cf. [23]) ont obtenu la majoration:

$$C \leq \frac{1}{\sqrt{\log 2}} \simeq 1.201\cdots .$$

Avec le lemme 1.17, Proinov et Atanassov déduisent (cf. [24]):

$$C \leq \frac{1}{3\sqrt{\log 2}} \simeq 0.4000\cdots .$$

Pour la suite particulière:

$$\tilde{\sigma} = (\phi_2(0), 1-\phi_2(0), \phi_2(1), 1-\phi_2(1), \cdots),$$

H.Faure (cf. [5]) obtient:

$$0.29 \leq C \leq \sqrt{0.11} = 0.331\cdots .$$

Corollaire 1.19 : *Soit $\tilde{\phi}_2$ la suite symétrique engendrée par la suite-VDC, alors*

1) si N est pair,

$$NT(N, \tilde{\phi}_2) \leq \sqrt{\frac{\log N}{3\log 2}}. \tag{1.5.1}$$

2) si $N \geq 3$ est impair,

$$NT(N, \tilde{\phi}_2) \leq \sqrt{\frac{\log N}{\log 3}}. \tag{1.5.2}$$

Démonstration :

1) Si N est pair, d'après le lemme 1.17, il suffit de démontrer pour $k \geq 1$ entier:

$$\sup_{k\geq 1} \frac{kF_k(\phi_2)}{\pi\sqrt{\log 2k}} = \frac{1}{\sqrt{3\log 2}} \tag{1.5.3}$$

et cela équivaut à d'après le théorème 1.9:

$$\frac{1}{2}\sqrt{3+\frac{\log k}{\log 2}} \leq \frac{1}{\sqrt{3\log 2}}\sqrt{\log 2k}. \tag{1.5.4}$$

Par un calcul direct, on voit que ceci est vrai si

$$k \geq \exp\left(\frac{3-4(\frac{1}{\sqrt{3\log 2}})^2\log 2}{4(\frac{1}{\sqrt{3\log 2}})^2-\frac{1}{\log 2}}\right) \geq 38.1. \tag{1.5.5}$$

Pour $k = 1$ un calcul facile donne: $\frac{F_1(\phi_2)}{\pi\sqrt{\log 2}} = \frac{1}{\sqrt{3\log 2}}$ et pour $2 \leq k \leq 38$, on vérifie, à l'aide de l'ordinateur et de la formule (1.1.3) que $\frac{kF_k(\phi_2)}{\pi\sqrt{\log 2k}} \leq \frac{1}{\sqrt{3\log 2}}$

2) Si N est impair, de même que dans le cas où N est pair, d'après le lemme 1.17, il suffit de démontrer pour $k \geq 1$ entier:

$$\sup_{k\geq 1} \frac{\sqrt{(\frac{kF_k(\phi_2)}{\pi}+a)^2+b^2}}{\sqrt{\log(2k+1)}} = \frac{1}{\sqrt{\log 3}}, \tag{1.5.6}$$

et cela équivaut à d'après le théorème 1.9:

$$(\frac{1}{2}\sqrt{3+\frac{\log k}{\log 2}}+a)^2+b^2 \leq \frac{1}{\sqrt{\log 3}}\sqrt{\log(2k+1)}, \tag{1.5.7}$$

qui est vrai si

$$(\frac{1}{\sqrt{\log 3}})^2(\log 2k)-(\frac{1}{2}\sqrt{3+\frac{\log k}{\log 2}}+a)^2-b^2 \geq 0. \tag{1.5.8}$$

Puisque c'est une fonction croissante en k et supérieure à 0.2 lorsque $k = 13$, d'où (1.5.7) est vrai pour $k \geq 13$.

Pour $k = 1$ on a $\dfrac{\sqrt{(\frac{F_1(\phi_2)}{\pi} + a)^2 + b^2}}{\sqrt{\log 3}} = \dfrac{1}{\sqrt{\log 3}}$ par un calcul facile et pour $2 \leq k \leq 12$, on vérifie directement $\dfrac{\sqrt{(\frac{kF_k(\phi_2)}{\pi} + a)^2 + b^2}}{\sqrt{\log(2k+1)}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{\log 3}}$ par l'ordinateur. $\diamond$

Remarque : Ce résultat améliore celui de Proinov et Grozdanov [22]:

$$NT(N, \tilde{\sigma}) < 2\sqrt{\log N}.$$

2 Suites $(n\alpha)$

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, on travaille sur la suite $\sigma = (\{n\alpha\})_{n\geq 1}$ et sa symétrisée $\tilde{\sigma} = (\{(-1)^{n+1}[(n+1)/2]\alpha\})_{n\geq 1}$, où $\{.\}$ est la fonction partie fractionnaire et $\alpha \in R$ est un nombre de type constant, c'est à dire qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$|h|\langle h\alpha\rangle \geq C, \quad \forall h \in Z - \{0\} \tag{2.1.1}$$

où $\langle . \rangle$ est la fonction définie par:

$$\langle . \rangle = \min_{t\in Z} |. - t|.$$

Dans la suite on notera $C(\alpha)$ la plus grand réel C vérifiant (2.1.1).

Rappelons (cf: [16]) que $\alpha \in R$ est un nombre de type constant si et seulement si les quotients partiels de fraction continue de $\alpha = [a_0; a_1, \cdots, a_n, \cdots]$ sont bornés, c'est à dire qu'il existe un entier positif M tel que:

$$a_n \leq M, \quad n \geq 1.$$

Dans [20] et [21], Proinov a obtenu des estimations de la diaphonie et de la discrépance quadratique de ces suites en fonction de la borne supérieure M des quotients partiels de α. Nous nous proposons d'une part d'affiner les estimations de Proinov et d'autre part d'étudier plus précisément le cas où les quotients partiels sont constants, en particulier le cas du nombre d'or.

Nous donnons aussi une estimation sur la constante $C(\alpha)$ dans I.2.4.

Pour alléger les énoncés, nous nous limiterons à l'étude du comportement asymptotique de la diaphonie et de la discrépance quadratique de ces suites et nous noterons pour $x \geq 0$.

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+x)^2}.$$

Théorème 2.1 *Soit $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \cdots, \cdots]$ un nombre irrationel dont les quotients partiels sont bornés par un entier $M > 0$; on a alors:*

$$\begin{aligned} & \limsup_{N\to\infty} \frac{NF(N,\sigma)}{\sqrt{\log N}} \qquad (2.1.2) \\ \leq\ & \frac{1}{\sqrt{\log(\frac{1+\sqrt{5}}{2})}} \sqrt{M^2 + 4M + \frac{(\sqrt{M^2+4M}+M)^2}{4} S(\frac{4/M}{(1+\sqrt{1+4/M})^2})} \\ <\ & 2.3445\sqrt{M^2+4M}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & \limsup_{N\to\infty} \frac{NT(N,\tilde{\sigma})}{\sqrt{\log N}} \qquad (2.1.3) \\ \leq\ & \frac{1}{\pi\sqrt{\log(\frac{1+\sqrt{5}}{2})}} \sqrt{M^2 + 4M + \frac{(\sqrt{M^2+4M}+M)^2}{4} S(\frac{4/M}{(1+\sqrt{1+4/M})^2})} \\ <\ & 0.7463\sqrt{M^2+4M}. \end{aligned}$$

Remarque : Dans [21], Proinov donne les résultats suivants:

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{NF(N,\sigma)}{\sqrt{\log N}} \leq (M+1)\sqrt{(16+\frac{2\pi^2}{3})} = 4,751814\ldots(M+1),$$

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{NT(N,\tilde{\sigma})}{\sqrt{\log N}} \leq (M+1)\sqrt{(\frac{16}{\pi^2}+\frac{2}{3})} = 1.512549\ldots(M+1).$$

Rappelons également (cf. [21]) que pour toute suite σ, on a $\limsup_{N\to\infty} \frac{NF(N,\sigma)}{\sqrt{\log N}} \geq \frac{1}{68}$ et $\limsup_{N\to\infty} \frac{NT(N,\sigma)}{\sqrt{\log N}} \geq \frac{1}{214}$.

Dans le cas où les quotients partiels de α sont constants, les résultats peuvent être précisés sous la forme suivante:

Théorème 2.2 *Soit $\alpha = [0; a, \cdots, a, \cdots]$ un nombre irrationnel à quotients partiels constants.*

1. Si $a \geq 2$, on a:

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{NF(N,\sigma)}{\sqrt{\log N}} \leq \frac{\sqrt{(1+\alpha^2)^2 + S(1-\alpha)}}{\alpha\sqrt{-\log\alpha}}, \tag{2.1.4}$$

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{NT(N,\tilde{\sigma})}{\sqrt{\log N}} \leq \frac{\sqrt{(1+\alpha^2)^2 + S(1-\alpha)}}{\pi\alpha\sqrt{-\log\alpha}}. \tag{2.1.5}$$

2. Si $a = 1$ (α est alors égal au nombre d'or: $\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$)

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{NF(N,\sigma)}{\sqrt{\log N}} \leq \frac{\sqrt{(1+\alpha^2)^2 + S(1-\alpha)}}{\alpha\sqrt{-2\log\alpha}} < 2.7380, \tag{2.1.6}$$

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{NT(N,\tilde{\sigma})}{\sqrt{\log N}} \leq \frac{\sqrt{(1+\alpha^2)^2 + S(1-\alpha)}}{\pi\alpha\sqrt{-2\log\alpha}} < 0.8716. \tag{2.1.7}$$

Remarque :

1. L'estimation de Proinov donne, dans le cas du nombre d'or:

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{NF(N,\sigma)}{\sqrt{\log N}} < 9.5036,$$

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{NT(N,\tilde{\sigma})}{\sqrt{\log N}} < 3.0250.$$

2. Pour la suite symétrisée $\tilde{\omega}$ de la suite de Van der Corput, H.Faure a obtenu dans [5]:

$$0.2983 < \limsup_{N\to\infty} \frac{NT(N,\tilde{\omega})}{\sqrt{\log N}} < 0,3317.$$

Les démonstrations des théorèmes 2.1 et 2.2 seront données dans la troisième partie de ce chapitre, la deuxième partie étant consacrée à quelques résultats préliminaires

2.2 Résultats préliminaires

Dans toute la suite, nous noterons $\langle x \rangle$ la distance du nombre réel x à l'entier le plus proche:

$$\langle x \rangle = \min_{t \in \mathbf{Z}} |x - t|.$$

Nous nous appuierons, comme Proinov, sur le lemme classique suivant:

Lemme 2.3 *(cf. [12], Chap. 7). Pour tout nombre réel δ et pour tout entier $n \geq 1$:*

$$|\sum_{k=1}^{n} e^{2\pi i \delta k}| \leq \min(n, \frac{1}{2\langle \delta \rangle})$$

De ce lemme on déduit immédiatement l'inégalité: $F^2(N, \sigma) \leq 2G_N(\sigma)$ où $G_N(\sigma)$ est définie par:

$$G_N(\sigma) = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{h^2} \min(1, \frac{1}{4N^2 \langle h\alpha \rangle^2}).$$

Les estimations de $F(N, \sigma)$ seront déduites de l'étude de $G_N(\sigma)$.

Nous allons maintenant rappeler quelques résultats classiques sur les fraction continues. Soit $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots]$ un nombre irrationnel, on introduit les suites $(p_n)_{n \geq -1}$ et $(q_n)_{n \geq -1}$ définies par:

$$p_{n+1} = a_{n+1} p_n + p_{n-1}, \quad n \geq 0, \; p_{-1} = 1, \; p_0 = a_0; \tag{2.2.1}$$

et

$$q_{n+1} = a_{n+1} q_n + q_{n-1}, \quad n \geq 0, \; q_{-1} = 0, \; q_0 = 1. \tag{2.2.2}$$

On a alors pour $n \geq 1$: $\frac{p_n}{q_n} = [a_0; a_1, a_2, \cdots, a_n]$ et $\frac{q_{n-1}}{q_n} = [0; a_n, \cdots, a_1]$. Dans la suite, nous noterons:

$$\delta_n = [0; a_n, \cdots, a_1], \tag{2.2.3}$$

et

$$\theta_n = q_n |q_n \alpha - p_n|. \tag{2.2.4}$$

Nous utiliserons les propriétés classiques suivantes: (cf. [12], Chap.10)

1. Pour $q_{n-1} < h < q_n$:

$$\langle h\alpha \rangle > \langle q_{n-1}\alpha \rangle. \tag{2.2.5}$$

2. Pour $n \geq 1$:

$$|\alpha - \frac{p_n}{q_n}| \leq \frac{1}{q_n q_{n+1}}. \tag{2.2.6}$$

3. Pour $n \geq 1$:

$$p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^{n+1}. \tag{2.2.7}$$

4. Si $m \leq a_i \leq M$ pour tout $i \geq 1$, alors pour tout $n \geq 0$:

$$(\frac{m + \sqrt{m^2+4}}{2})^{n-1} \leq q_n \leq (\frac{M + \sqrt{M^2+4}}{2})^n \tag{2.2.8}$$

5. Si $m \leq a_i \leq M$ pour tout $i \geq 1$, alors:

$$\begin{aligned} \limsup_{n\to\infty} \delta_n &\leq [0; m, M, m, M, \cdots, m, M, \cdots] \\ &= \frac{2M}{mM + \sqrt{m^2M^2 + 4mM}}, \end{aligned} \tag{2.2.9}$$

et

$$\begin{aligned} \liminf_{n\to\infty} \delta_n &\geq [0; M, m, M, m, \cdots, m, M, \cdots] \\ &= \frac{2m}{mM + \sqrt{m^2M^2 + 4mM}}. \end{aligned} \tag{2.2.10}$$

Remarquons que pour $n \geq 1$, $|q_n\alpha - p_n| \leq \frac{1}{q_{n+1}} \leq \frac{1}{2}$ et par conséquent: $\theta_n = q_n\langle q_n\alpha \rangle$.

Dans toute la suite nous supposerons $a_0 = 0$, de sorte que $\alpha \in]0,1[$. Soit T la transformation définie par:

$$T(x) = \frac{1}{x} - [\frac{1}{x}] \quad \text{pour} \quad x \in]0,1[\, .$$

Alors on a:

$$T([0; a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots]) = [0; a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots] \tag{2.2.11}$$

ECOLE NATIONALE DES PONTS-ET-CHAUSSÉES
CENTRE PÉDAGOGIQUE DE DOCUMENTATION ET DE COMMUNICATION

et

$$\theta_n = \frac{1}{\dfrac{1}{T^n(\alpha)} + \dfrac{q_{n-1}}{q_n}}. \tag{2.2.12}$$

Cette formule est utilisée par H.Jager dans [13], qui renvoie à [14]. Elle se déduit facilement de la démonstration du théorème 2.4, p.253 de [12].

Proposition 2.4

1. *Soit α un nombre irrationnel à quotients partiels bornés par M, on a alors:*

$$\liminf_{n\to\infty} \theta_n \geq \frac{1}{\sqrt{M^2+4M}}. \tag{2.2.13}$$

2. *Dans le cas particulier où $\alpha = [0; a, \cdots, a, \cdots]$, $a \geq 1$, on a:*

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \theta_n &= \frac{\alpha}{1+\alpha^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{a^2+4}}. \end{aligned} \tag{2.2.14}$$

Démonstration :

1) En remarquant que $\frac{q_{n-1}}{q_n} = \delta_n = [0; a_n, a_{n-1}, \cdots, a_2, a_1]$, et $T^n(\alpha) = [0; a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots] = \frac{1}{[a_{n+1}; a_{n+2}, \ldots]}$, et en utilisant la formule (2.2.12), on a:

$$\begin{aligned} q_n\langle q_n\alpha\rangle &= \theta_n \\ &= \frac{1}{[a_{n+1}; a_{n+2}, \ldots] + \delta_n} \\ &\geq \frac{1}{[M; 1, M, 1, \ldots] + \delta_n} \end{aligned} \tag{2.2.15}$$

car $[a_{n+1}; a_{n+2}, \ldots] \leq [M; 1, M, 1, \ldots] = \dfrac{M+\sqrt{M^2+4M}}{2}$. D'où

$$\liminf_{n\to\infty} \theta_n \geq \frac{1}{[M; 1, M, 1, \ldots] + \limsup\limits_{n\to\infty} \delta_n} \tag{2.2.16}$$

$$\geq \frac{1}{\frac{M+\sqrt{M^2+4M}}{2} + \frac{\sqrt{M^2+4M}-M}{2}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{M^2+4M}}.$$

2) Conséquence immédiate du fait que $T^n(\alpha) = \alpha$ et du fait que $\lim_{n\to\infty} \delta_n = \alpha$. ◇

Le lemme suivant permet de passer des estimations de $F(N,\sigma)$ à des estimations portant sur $T(N,\tilde{\sigma})$.

Lemme 2.5 *(cf. [22])*
Soit $\tilde{\sigma}$ la suite symétrisée d'une suite σ, alors pour tout $N \geq 1$, on a:

$$(NT(N,\tilde{\sigma}))^2 \leq (\frac{1}{\pi} n F_n(\sigma) + a)^2 + b^2,$$

où $n = [\frac{N}{2}]$, $a = b = 0$, si N est pair et $a = \frac{1}{2\sqrt{3}}$ $b = \frac{1}{2}$ si N est impair.

Pour terminer, nous énonçons un lemme qui se trouve essentiellement dans [20].

Lemme 2.6 *Pour tout réel $X \geq 1$:*

$$\sum_{h\geq X} \frac{1}{h^2} \min(1, \frac{1}{4N^2\langle h\alpha\rangle^2}) \leq \frac{12}{XNC(\alpha)}. \tag{2.2.17}$$

Démonstration : (La méthode est la même que dans [20])
Soit $(x_j)_{j\geq 0}$ une suite strictement croissante de réels telle que $x_0 = X$. On a:

$$\sum_{h\geq X} \frac{1}{h^2} \min(1, \frac{1}{4N^2\langle h\alpha\rangle^2}) \tag{2.2.18}$$
$$\leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{x_{j-1}^2} \sum_{x_{j-1}\leq h<x_j} \min(1, \frac{1}{4N^2\langle h\alpha\rangle^2})$$

Notons A_j l'ensemble des réels de la forme $\langle h\alpha\rangle$, avec $h \in [x_{j-1}, x_j[$. Il est clair que si $x \in A_j$:

$$x > \frac{C(\alpha)}{x_j}.$$

De plus, en remarquant que pour tous réels a et b

$$|\langle a\rangle - \langle b\rangle| = \min(\langle a+b\rangle, \langle a-b\rangle)$$

(cf. [20]), on voit que:

$$\forall x, y \in A_j, \quad x \neq y \Longrightarrow |x-y| > \frac{C(\alpha)}{2x_j}.$$

D'où:

$$\begin{aligned}
&\sum_{x_{j-1}\leq h<x_j} \min(1, \frac{1}{4N^2\langle h\alpha\rangle^2}) \\
= &\sum_{x\in A_j} \min(1, \frac{1}{4N^2x^2}) \\
\leq &\sum_{k=2}^{\infty} \min(1, \frac{1}{4N^2(k\frac{C(\alpha)}{2x_j})^2}) \\
= &\sum_{k=2}^{\infty} \min(1, \frac{x_j^2}{k^2N^2C(\alpha)^2}).
\end{aligned}$$

Par suite:

$$\begin{aligned}
&\sum_{h\geq X} \frac{1}{h^2} \min(1, \frac{1}{4N^2\langle h\alpha\rangle^2}) \qquad (2.2.19) \\
\leq &\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{x_{j-1}^2} \sum_{k=2}^{\infty} \min(1, \frac{x_j^2}{k^2N^2C(\alpha)^2}).
\end{aligned}$$

Pour estimer la somme sur k, on écrit:

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=2}^{\infty} \min(1, \frac{x_j^2}{k^2N^2C(\alpha)^2}) \qquad (2.2.20) \\
\leq &\sum_{k,\, 2\leq k\leq \frac{x_j}{NC(\alpha)}} 1 + \sum_{k>\max(1, \frac{x_j}{NC(\alpha)})} \frac{x_j^2}{N^2C^2(\alpha)k^2} \\
\leq &\frac{x_j}{NC(\alpha)} + \frac{x_j^2}{N^2C^2(\alpha)} \sum_{k=1+\max(1,[\frac{x_j}{NC(\alpha)}])} \frac{1}{k^2} \\
\leq &\frac{x_j}{NC(\alpha)} + \frac{x_j^2}{N^2C^2(\alpha)} \frac{1}{\max(1, [\frac{x_j}{NC(\alpha)}])}
\end{aligned}$$

$$\leq \frac{3x_j}{NC(\alpha)}$$

(la dernière inégalité est évidente si $\frac{x_j}{NC(\alpha)} < 1$; dans le cas contraire elle résulte de l'inégalité: $[\frac{x_j}{NC(\alpha)}] \geq \frac{x_j}{2NC(\alpha)}$). En reportant dans l'inégalité (2.2.19), on obtient:

$$\sum_{h \geq X} \frac{1}{h^2} \min(1, \frac{1}{4N^2\langle h\alpha\rangle^2}) \leq \frac{3}{NC(\alpha)} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x_j}{x_{j-1}^2} \tag{2.2.21}$$

et, si l'on prend $x_j = X2^j$:

$$\sum_{h \geq X} \frac{1}{h^2} \min(1, \frac{1}{4N^2\langle h\alpha\rangle^2}) \leq \frac{3}{XNC(\alpha)} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2}{2^{j-1}} = \frac{12}{XNC(\alpha)} \tag{2.2.22}$$

◇

2.3 Démonstrations des théorèmes 2.1 et 2.2

Nos estimations reposent sur les observations suivantes:

Lemme 2.7

1) Soit $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \cdots, \cdots]$ un nombre irrationel et soit $n \geq 1$. Si $h \in [q_{n-1}, q_n[$, il existe un entier $r(h) \geq 1$ tel que:

$$\{\frac{hp_n}{q_n}\} = \frac{r(h)}{q_n}. \tag{2.3.1}$$

Si $h \neq h'$ avec $h, h' \in [q_{n-1}, q_n[$, on a:

$$r(h) \neq r(h'). \tag{2.3.2}$$

2) Si $\alpha = [a_0; 1, 1, \cdots]$, on a, avec les mêmes notations:

$$q_{n-1} < h < q_n \implies 2 \leq r(h) \leq q_n - 2. \tag{2.3.3}$$

Et si $h \neq h'$, avec $h, h' \in [q_{n-1}, q_n[$:

$$|r(h) - r(h')| \geq 2. \tag{2.3.4}$$

Démonstration :

1) L'existence de $r(h) \geq 1$ résulte du fait que p_n et q_n sont premiers entre eux et du fait que h est inférieur à q_n. Si h et h' sont deux entiers distincts dans $[q_{n-1}, q_n[$, on a $|h - h'| < q_n - q_{n-1}$, donc $(h - h')p_n$ n'est pas divisible par q_n. D'où $r(h) \neq r(h')$.

2) Dans le cas du nombre d'or, si on a $|r(h) - r(h')| = 1$, alors on peut supposer, quitte à échanger les rôles de h et h':

$$(h - h')p_n \equiv 1 \pmod{q_n}.$$

Par la propriété (2.7)

$$(h - h') \equiv (-1)^{n-1} q_{n-1} \pmod{q_n}.$$

Ce qui entraîne selon la parité de n:

$$h - h' \equiv q_{n-1} \pmod{q_n} \text{ ou } h - h' \equiv q_n - q_{n-1} \pmod{q_n}.$$

Dans les deux cas on aura:

$$|h - h'| \equiv q_{n-1} \pmod{q_n} \text{ ou } |h - h'| \equiv q_n - q_{n-1} \pmod{q_n}.$$

Ce qui est impossible car $|h - h'| < q_n - q_{n-1} = q_{n-2} < q_{n-1}$.

Un raisonnement analogue conduit à: $2 \leq r(h) \leq q_n - 2$ pour $q_{n-1} < h < q_n$. $\diamond$

Lemme 2.8 *Pour tout entier $n \geq 1$:*

$$\sum_{q_{n-1} \leq h < q_n} \frac{1}{\langle h\alpha \rangle^2} \leq 2q_{n-1}^2 \left(\frac{1}{\theta_{n-1}^2} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k\delta_n - \delta_n\delta_{n+1})^2} \right).$$

De plus, si α est le nombre d'or: on peut supprimer le facteur 2 dans le membre de droite.

Démonstration : On remarque, en utilisant (2.2.6), que, pour $h \in [q_{n-1}, q_n]$:

$$\begin{aligned} \langle h\alpha \rangle &\geq \langle \frac{hp_n}{q_n} \rangle - \frac{h}{q_n q_{n+1}} \\ &\geq \langle \frac{hp_n}{q_n} \rangle - \frac{1}{q_{n+1}} \\ &= \langle \frac{hp_n}{q_n} \rangle - \frac{\delta_n \delta_{n+1}}{q_{n-1}}, \end{aligned}$$

Soit alors

$$H_1^n = \{h \in [q_{n-1}, q_n] \mid \frac{1}{q_n} < \{\frac{hq_{n-1}}{q_n}\} \leq \frac{1}{2}\},$$

et soit

$$H_2^n = \{h \in [q_{n-1}, q_n] \mid \frac{1}{2} < \{\frac{hq_{n-1}}{q_n}\} < 1 - \frac{1}{q_n}\}.$$

On a, en utilisant (2.2.5) et le lemme 2.7:

$$\begin{aligned} & \sum_{q_{n-1} \leq h < q_n} \frac{1}{\langle h\alpha \rangle^2} \qquad (2.3.5) \\ \leq \; & \frac{2q_{n-1}^2}{\theta_{n-1}^2} + \sum_{h \in H_1^n} \frac{1}{\langle h\alpha \rangle^2} + \sum_{h \in H_2^n} \frac{1}{\langle h\alpha \rangle^2} \\ \leq \; & \frac{2q_{n-1}^2}{\theta_{n-1}^2} + \sum_{h \in H_1^n} \frac{1}{(\langle \frac{hp_n}{q_n} \rangle - \frac{\delta_n \delta_{n+1}}{q_{n-1}})^2} + \sum_{h \in H_2^n} \frac{1}{(\langle \frac{hp_n}{q_n} \rangle - \frac{\delta_n \delta_{n+1}}{q_{n-1}})^2}. \end{aligned}$$

Du lemme 2.7, on déduit que si $h, h' \in H_1^n$ (resp.$h, h' \in H_2^n$) avec $h \neq h'$, on a:

$$|\langle \frac{hp_n}{q_n} \rangle - \langle \frac{h'p_n}{q_n} \rangle| \geq \frac{1}{q_n},$$

De plus, pour $h \in H_1^n \bigcup H_2^n$:

$$\langle \frac{hp_n}{q_n} \rangle \geq \frac{2}{q_n}.$$

D'où pour $j = 1, 2$:

$$\begin{aligned} \sum_{h \in H_j^n} \frac{1}{(\langle \frac{hp_n}{q_n} \rangle - \frac{\delta_n \delta_{n+1}}{q_n})^2} \; & \leq \; \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(\frac{k}{q_n} - \frac{\delta_n \delta_{n+1}}{q_{n-1}})^2} \\ & = \; \sum_{k=2}^{\infty} \frac{q_{n-1}^2}{(k\delta_n - \delta_n \delta_{n+1})^2}, \end{aligned}$$

et en reportant dans (2.3.5), on obtient le résultat annoncé.

Dans le cas du nombre d'or, on remarque que compte-tenu du lemme 3.1 $\{h \mid q_{n-1} \leq h < q_n\} = \{q_{n-1}\} \bigcup H_1^n \bigcup H_2^n$ et que, pour $j = 1, 2$, si $h, h' \in H_j^n$ avec $h \neq h'$ on a:

$$|\langle \frac{hp_n}{q_n} \rangle - \langle \frac{h'p_n}{q_n} \rangle| \geq \frac{2}{q_n},$$

De plus, si $\{\frac{q_{n-1}p_n}{q_n}\} \leq \frac{1}{2}$ et $h \neq q_{n-1}$, on a:

$$\begin{aligned} \langle \frac{hp_n}{q_n} \rangle &\geq \langle \frac{q_{n-1}p_n}{q_n} \rangle + \frac{2}{q_n} \\ &= \frac{3}{q_n}. \end{aligned}$$

Donc:

$$\sum_{h \in H_1^n} \frac{1}{\langle h\alpha \rangle^2} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q_{n-1}^2}{((2k+1)\delta_n - \delta_n\delta_{n+1})^2}$$

et

$$\sum_{h \in H_2^n} \frac{1}{\langle h\alpha \rangle^2} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q_{n-1}^2}{(2k\delta_n - \delta_n\delta_{n+1})^2}.$$

D'où:

$$\sum_{q_{n-1} \leq h < q_n} \frac{1}{\langle h\alpha \rangle^2} \leq q_{n-1}^2 (\frac{1}{\theta_{n-1}^2} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k\delta_n - \delta_n\delta_{n+1})^2}).$$

Un raisonnement analoque dans le cas où $\{\frac{q_{n-1}p_n}{q_n}\} > \frac{1}{2}$ conduit au même résultat. $\diamond$

Démonstration du Théorème 2.1:

Comme nous l'avons vu dans la deuxième partie, on a:

$$F^2(N, \sigma) \leq 2G_N(\sigma),$$

où

$$G_N(\sigma) = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{h^2} \min(1, \frac{1}{4N^2\langle h\alpha \rangle^2}). \tag{2.3.6}$$

Dans la suite on va estimer $G_N(\sigma)$. On écrit:

$$G_N(\sigma) = G_N^{(1)}(\sigma) + G_N^{(2)}(\sigma). \tag{2.3.7}$$

où:

$$G_N^{(1)}(\sigma) = \sum_{h=1}^{N-1} \frac{1}{h^2} \min(1, \frac{1}{4N^2\langle h\alpha\rangle^2}), \tag{2.3.8}$$

et

$$G_N^{(2)}(\sigma) = \sum_{h=N}^{\infty} \frac{1}{h^2} \min(1, \frac{1}{4N^2\langle h\alpha\rangle^2}). \tag{2.3.9}$$

Par le lemme 2.6:

$$G_N^{(2)}(\sigma) \leq \frac{12}{N^2 C(\alpha)}. \tag{2.3.10}$$

Pour estimer $G_N^{(1)}(\sigma)$, on écrit, grâce au lemme 2.8:

$$\begin{aligned} G_N^{(1)}(\sigma) &\leq \sum_{n, q_{n-1} \leq N} \sum_{q_{n-1} \leq h < q_n} \frac{1}{h^2} \min(1, \frac{1}{4N^2\langle h\alpha\rangle^2}) \qquad (2.3.11) \\ &\leq \sum_{n, q_{n-1} \leq N} \frac{1}{q_{n-1}^2} \sum_{q_{n-1} \leq h < q_n} \frac{1}{4N^2\langle h\alpha\rangle^2} \\ &\leq \sum_{n, q_{n-1} \leq N} \frac{1}{q_{n-1}^2} \frac{2q_{n-1}^2}{4N^2} (\frac{1}{\theta_{n-1}^2} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k\delta_n - \delta_n\delta_{n+1})^2}) \\ &= \frac{1}{2N^2} \sum_{n, q_{n-1} \leq N} (\frac{1}{\theta_{n-1}^2} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k\delta_n - \delta_n\delta_{n+1})^2}). \end{aligned}$$

D'où:

$$\begin{aligned} \frac{2N^2 G_N^{(1)}(\sigma)}{\log N} &\leq \frac{1}{\log N} \sum_{n, q_{n-1} \leq N} (\frac{1}{\theta_{n-1}^2} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k\delta_n - \delta_n\delta_{n+1})^2}) \qquad (2.3.12) \\ &\leq \frac{1}{\log N} \sum_{n \leq 2 + \frac{\log N}{\log(\frac{1+\sqrt{5}}{2})}} (\frac{1}{\theta_{n-1}^2} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k\delta_n - \delta_n\delta_{n+1})^2}) \end{aligned}$$

car $q_{n-1} \geq (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n-2}$ d'après (2.8). Quand N tend vers ∞, en utilisant (2.9), (2.10) et (2.13) la lim sup du membre de droite peut être majorée par:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\log(\frac{1+\sqrt{5}}{2})}(\frac{1}{\liminf_{n\to\infty}\theta_n^2} + \sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{\liminf_{n\to\infty}\delta_n^2(k-\limsup_{n\to\infty}\delta_n^2)^2}) \\
\leq\ & \frac{1}{\log(\frac{1+\sqrt{5}}{2})}(M^2+4M+\frac{(\sqrt{M^2+4M}+M)^2}{4}S(\frac{4}{M(\sqrt{1+4/M}+1)^2})) \\
\leq\ & \frac{M^2+4M}{\log(\frac{1+\sqrt{5}}{2})}(1+\frac{\pi^2}{6}) \\
<\ & 5.4965(M^2+4M).
\end{aligned}$$

Ce qui achève la démonstration du théorème 2.1.

Démonstration du théorème 1.2:

La démonstration de ce théorème est identique à celle du théorème 2.1 jusqu'à (2.3.12) (sauf que dans le cas du nombre d'or, on peut encore diviser le membre de droite par un facteur 2). On utilise ensuite les relations suivantes:

$$\lim_{n\to\infty}\theta_n = \frac{\alpha}{1+\alpha^2},$$

$$\lim_{n\to\infty}\delta_n = \alpha,$$

et

$$q_{n-1} \geq (\frac{a+\sqrt{a^2+4}}{2})^{n-2} = \frac{1}{\alpha^{n-2}},$$

D'où:

$$\begin{aligned}
\limsup_{N\to\infty}\frac{2N^2G_N(\sigma)}{\log N} &\leq \frac{1}{-\log\alpha}((\frac{1+\alpha^2}{\alpha})^2+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{(k\alpha-\alpha^2)^2}) \quad (2.3.13) \\
&= \frac{1}{-\alpha^2\log\alpha}((1+\alpha^2)^2+S(1-\alpha)).
\end{aligned}$$

et dans le cas du nombre d'or, on a:

$$\begin{aligned}
& \limsup_{N\to\infty} \frac{2N^2 G_N(\sigma)}{\log N} \qquad (2.3.14)\\
\leq\ & \frac{1}{2\log(\frac{1+\sqrt{5}}{2})}(5+(\frac{\sqrt{5}+1}{2})^2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k+\frac{3-\sqrt{5}}{2})^2}))\\
=\ & \frac{1}{2\log(\frac{1+\sqrt{5}}{2})}(5+(\frac{\sqrt{5}+1}{2})^2 S((3-\sqrt{5})/2))\\
\leq\ & 7.4966
\end{aligned}$$

car $S((3-\sqrt{5})/2) < 0.8460$. Ce qui achève la démonstration du théorème 2.2.

2.4 Estimations sur la constante $C(\alpha)$

Soit α un nombre de type constant. Nous avons vu, dans ce qui précède l'importance de la constante $C(\alpha)$ (cf. lemme 2.6). Il est intéressant d'avoir un nombre α avec $C(\alpha)$ grand. Nous donnons donc dans la suite quelque résultats sur les estimations de $C(\alpha)$.

Rappelons que $C(\alpha)$ intervient aussi dans d'autres cas, par exemple, pour estimer la discrépance quadratique de la suite $(n\alpha)$ (cf. [20]), pour estimer l'erreur de l'intégration numérique d'une fonction périodique par la suite $(n\alpha)$ (cf. [18]), etc.

Théorème 2.9 *Soit $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \cdots, \cdots]$ un nombre irrationel dont les quotients partiels du développement en fraction continue vérifient: $m \leq a_i \leq M$, $i \geq 1$, où m et M sont deux entiers positifs, alors:*

$$C(\alpha) \geq \frac{2m}{mM + \sqrt{m^2M^2 + 4mM} + 2}, \qquad (2.4.1)$$

et c'est une estimation la meilleure possible. En effet si $\alpha = [a_0; m, M, \cdots, m, M, \cdots]$, alors:

$$C(\alpha) = m\langle m\alpha\rangle = \frac{2m}{mM + \sqrt{m^2M^2 + 4mM} + 2}. \qquad (2.4.2)$$

Démonstration : On prend $a_0 = 0$. D'après (2.5) et $\langle h\alpha \rangle = \langle -h\alpha \rangle$, on a:

$$C(\alpha) = \inf_{n \geq 0} q_n \langle q_n \alpha \rangle.$$

D'après (2.2.12) pour $n \geq 1$

$$\begin{aligned} q_n \langle q_n \alpha \rangle &= \theta_n \\ &= \frac{1}{[a_{n+1}; a_{n+2}, \ldots] + \delta_n}. \end{aligned}$$

Puisque

$$\begin{aligned} \delta_n &= [0; a_n, \cdots, a_1] \\ &\leq [0; m, M, m, M, \cdots] \\ &\leq [0; m] \\ &= \frac{1}{m} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} [a_{n+1}; a_{n+2}, \ldots] &\leq [M; m, M, m, M, \cdots] \\ &= \frac{mM + \sqrt{m^2M^2 + 4mM}}{2m}, \end{aligned}$$

d'où pour $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} q_n \langle q_n \alpha \rangle &\geq \frac{1}{\dfrac{mM + \sqrt{m^2M^2 + 4mM}}{2m} + \dfrac{1}{m}} \\ &= \frac{2m}{mM + \sqrt{m^2M^2 + 4mM} + 2} \end{aligned} \tag{2.4.3}$$

D'ailleur en remarquant que si $m \geq 2$, $\langle \alpha \rangle = \alpha$ et si $m = 1$, $\langle \alpha \rangle = \min\{\alpha, 1 - \alpha\}$, on a pour $m \geq 2$:

$$\begin{aligned} \langle \alpha \rangle &\geq [0; M, m, M, m, \cdots] \\ &= \frac{2m}{mM + \sqrt{m^2M^2 + 4mM}} \\ &\geq \frac{2m}{mM + \sqrt{m^2M^2 + 4mM} + 2} \end{aligned} \tag{2.4.4}$$

et pour $m = 1$:

$$\begin{aligned} \langle\alpha\rangle &\geq \min\{[0; M, 1, M, 1, \cdots], 1 - [0; 1, M, 1, M, \cdots]\} \\ &= \frac{2}{M + \sqrt{M^2 + 4M} + 2}. \end{aligned} \tag{2.4.5}$$

D'où de (2.4.3), (2.4.4) et (2.4.5):

$$\begin{aligned} C(\alpha) &= \inf_{n\geq 0} q_n\langle q_n\alpha\rangle \\ &\geq \frac{2m}{mM + \sqrt{m^2M^2 + 4mM} + 2}. \end{aligned} \tag{2.4.6}$$

En prenant $\alpha = [0; m, M, m, M, \cdots]$, on a:

$$\begin{aligned} q_1\langle q_1\alpha\rangle &= m\langle m\alpha\rangle \\ &= \frac{1}{[M; m, M, \cdots] + \delta_1} \\ &= \frac{2m}{mM + \sqrt{m^2M^2 + 4mM} + 2}, \end{aligned} \tag{2.4.7}$$

d'où:

$$C(\alpha) = \frac{2m}{mM + \sqrt{m^2M^2 + 4mM} + 2}. \tag{2.4.8}$$

◇

D'après ce théorème on a immédiatement:

Corollaire 2.10 *Soit* $\alpha = [a_0; a, a, \cdots, a, \cdots]$, $a \geq 1$, *alors on a:*

$$C(\alpha) = a\langle a\delta\rangle = \frac{2a}{a^2 + a\sqrt{a^2 + 4} + 2}. \tag{2.4.9}$$

Remarque :

1. Sur la constante $C(\alpha)$, Proinov (cf: [20]) donne l'estimation suivante: Soit $\alpha = [a_0, a_1, a_2, \ldots]$ un irrationel tel que $1 \leq a_i \leq M$, $i \geq 1$, où $M > 0$; alors

$$C(\alpha) \geq \frac{1}{4(M+1)};$$

2. Dans [13], l'inégalité (2.3):

$$\min(\theta_{n-1}, \theta_n, \theta_{n+1}) < \frac{1}{\sqrt{a_{n+1}^2 + 4}}$$

attribuée par les auteurs à N.Obrechkoff et F.Bagemihl-J.R.McLaughlin (où θ_n définie par (2.2.4)) entraîne:

$$C(\alpha) \leq \frac{1}{\sqrt{M^2 + 4}}, \text{si } M = \sup\{a_n, n \geq 3\}.$$

Mais on ne sait pas si elle est la meilleure possible ou non lorsque $1 \leq a_i \leq M, i \geq 1$?

Bibliographie

[1] Y.Dupain, Discrépance à l'origine de la suite $(n[(1+\sqrt{5})/2])$, Ann. Inst. Fourier, t.XXIX, fasc. 1, 1979, p.81-106.

[2] Y.Dupain et V.T.Sos, Sur la discrépance à l'origine des suites $(n\alpha)$, Acta. Arithmetica, XXXVII (1980) p.363-374.

[3] R.Bejian et H.Faure, Discrépance de la suite de Van der Corput, C.R.Acad.Sci.Paris, t.286, Séris A, 1977, p.313-316.

[4] H.Faure, Discrépance de suites associées a un système de numération (en dimension un), Bull. Soc. math. France, 109. p.143-182 1981.

[5] H.Faure, Discrépance quadratique de suite infinies en dimension un, in "Proe. conf. on Number Theory, University of Laval . Quebec (Canada). 1987 " pp. 22-25.

[6] H.Faure, Number Theory, J.-M. De Koninck and C.Levesque (éd.) Walter de Gruyter. Berlin. New York (1989).

[7] H.Chaix et H.Faure, Discrépance et diaphonie des suites de van der Corput généralisées. C.R.Acad.Sci.Paris, t.310, Série I, p. 315-320, 1990.

[8] H.Chaix et H.Faure, Discrépance et diaphonie des suites de van der Corput généralisées (II). C.R.Acad.Sci.Paris, t.311, Série I, p. 65-68, 1990.

[9] H.Faure, Discrépance quadratique de la suite de Van der Corput et de sa symétrique, Acta Arithmetica, 55-4. 1990 (à paraître).

[10] S.Haber, On a sequence of points of interest for numerical quadrature, J. Res. Nat. But Standards (Sect. B) 70 (1966). 127-136.

[11] Hua L-K and Wang Y Applications of Number Theory to Numerical Analysis. Springer Verlag 1981)

[12] Hua.L.K, Introduction to Number Theory Springer-Verlag Brelin .(1982)

[13] H.Jager, The distribution of certain sequences connected with the continued fraction. Indag. Math. 48, 61-69 (1986).

[14] J.F.Koksma, Diophantiche Approximationen, Julius Springer, Berlin (1936).

[15] L.Kuipers, Simple proof of a theorem of J.F.Koksma, Nieuw Tijdschr. Wisk. 55 (1967) 108-111.

[16] L.Kuipers and H.Niederreiter, Uniform distribution of sequences, Wiley, New York, 1974.

[17] H.Niederreiter, Application of Diophantine approximation to numerical integration, in "Diophantine Approximation and its Applications " (C.F.Osgood, Ed) pp, 129-199 Academie press New York (1973)

[18] H.Niederreiter, Quasi Monte Carlo methods and pseudo-random numbers. Bull. AMS. 84, p.957-1041. (1978)

[19] P.D.Proinov, On the L^2 dicrepancy of some infinite sequences, Serdica Bulg.Math.Publ. 11, 1985, 3.

[20] P.D.Proinov, Estimation of L^2 Discrépancy of a Class of Infinite Sequences. C.R.Acad.Sci Bulgare 36 N.1 37-40 (1983).

[21] P.D.Proinov, On irregularities of distribution C.R.Acad, Sci. Bulgare 39, n.9 31-34 (1986)

[22] P.D.Proinov et V.S.Grozdanov, Symmetrization of the Van Der Corput-Halton sequence. C.R.Acad, Sci. Bulgare, 40, n.8 5-8, (1987)

[23] P.D.Proinov et V.S.Grozdanov, On the Diaphony of Van Der Corput-Halton sequence. Journal of Number Theory 30, 94-104 (1988)

[24] P.D.Proinov et E.Y.Atanassov, On the distribution of the Van Der Corput generalized sequences. C.R.Acad. Sci. Paris. t.307. Série 1 p.895-900 (1988).

[25] L.Ramshaw, On the discrepancy of the sequence formed by the multiples of an irrational number, J. of Number Theory 13 (1981), p. 138-175.

[26] I.M.Sobol', Multidimensional Quadrature Formulae and Haar Functions, Moscow. (1969) (In Russian)

[27] Y.J.XIAO, Quelques Propriétés des Sommes Exponentielles et des Sommes Partielles de la suite de Van der Corput, Cahier du CERMA, No 11, Déc. 1989, p.131-158.

Partie II

Les Suites à discrépance faible multidimensionnelles

1 La discrépance de la suite de Halton généralisée dans le cas s ≥ 2

1.1 Introduction et notations

On estime dans ce chapitre la discrépance à l'origine de suites de Halton généralisées (à base variable avec ou sans permutations) par la même méthode que pour estimer la suite de Halton classique (cf. [17]). On obtient une estimation de la discrépance du même ordre, c'est à dire:

$$D^*(N, S^{\Sigma_{R^1},\cdots,\Sigma_{R^s}}) = O(N^{-1}(\log N)^s), \quad s \geq 1, \quad n \geq 1, \qquad (1.1.1)$$

où $S^{\Sigma_{R^1},\cdots,\Sigma_{R^s}}$ représente la suite qui va être définie plus loin, s étant la dimension.

Dans le cas $s = 1$, d'après W.M.Schmit (cf. [17]) $D^*(N, X) = \Omega(N^{-1}(\log N))$ pour $X = (x_n)_{n\geq 1}$ une suite quelconque. Donc la discrépance d'une suite Van der Corput généralisée a le meilleur ordre de convergence possible; H.Faure (cf. [8]), P.D.Proinov et E.Y.Atanassov (cf. [1] et [15]) ont des résultats plus précis pour cette suite.

Pour $s \geq 2$, H.Faure a donné une estimation du même ordre de grandeur que (1.1.1) pour la discrépance à l'origine de la suite de Halton à base constante avec permutations (cf. [9]); puisque l'on ne sait pas quel est le meilleur ordre pour la borne inférieure de la discrépance (on sait seulement

pour toute suite X, $D^*(N,X) = \Omega(N^{-1}(\log N)^{\frac{s}{2}})$ par Roth (cf. [16])) on peut simplement dire que la famille des suites de Halton généralisée s a pour l'instant le meilleur ordre de convergence connu. Rappelons que, pour $s \geq 2$, on ne connaît pas de suite X dont la discrépance vérifie:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{D(N,X)}{N^{-1}(\log N)^s} = 0.$$

Depuis H.Niederreiter (cf. [14]), on croit fortement que pour la suite de Halton classique, $O(n^{-1}(\log n)^s)$, $s \geq 2$ est le meilleur ordre, mais jusqu'à maintenant il semble que ce soit une conjecture très difficile.

On montre d'abord un résultat sur l'estimation de la discrépance à l'origine de la suite de Halton à base variable avec permutations dans la section 2, ensuite on donne quelques résultats expérimentaux sur les suites de Halton à base constante avec permutations dans la section 3.

Soit $\mathcal{U}$ un ensemble fini de pavés tel que $\emptyset \in \mathcal{U}$, $[0,1[^s \in \mathcal{U}$. Quel que soit $P \in \mathcal{P}_s$ on définit:

$$\delta_{\mathcal{U}}(P) = \min_{P_1,P_2\in\mathcal{U} \text{ et } P_1\subset P\subset P_2} (|P_2| - |P_1|), \tag{1.1.2}$$

$$\delta_{\mathcal{U}} = \sup_{P\in\mathcal{P}_s} \delta_{\mathcal{U}}(P) \tag{1.1.3}$$

et

$$\delta^*_{\mathcal{U}} = \sup_{P\in\mathcal{P}^*_s} \delta_{\mathcal{U}}(P). \tag{1.1.4}$$

On pose

$$\Delta_{\mathcal{U}}(N) = \sup_{P\in\mathcal{U}} |E(P,N,X)|. \tag{1.1.5}$$

Proposition 1.1 *(cf. [17], Chap. 1)*

$$N\,D(N,X) \leq \Delta_{\mathcal{U}}(N) + N\delta_{\mathcal{U}} \tag{1.1.6}$$

et

$$N\,D^*(N,X) \leq \Delta_{\mathcal{U}}(N) + N\delta^*_{\mathcal{U}} \tag{1.1.7}$$

Base variable et Suite de Halton généralisée

Soit $1 = r_0, r_1, \cdots$, une suite d'entiers tels que $r_i \geq 2$ pour $i \geq 1$. Si on note:

$$R_j = \prod_{i=1}^{j} r_i, \quad j \geq 1; \quad R_0 = 1, \tag{1.1.8}$$

alors $\forall n \geq 0$ entier, on a une représentation unique sous la forme: (cf. [12])

$$n = \sum_{j=0}^{\infty} n_j R_j, \quad n_j \in \{0, 1, \ldots, r_{j+1} - 1\} \tag{1.1.9}$$

Notant R la suite $(r_j)_{j\geq 0}$, on parle de système de numération R-adique, et la base $R = (r_j)_{j\geq 0}$ ainsi définie est une base variable.

Soit, pour chaque $j \geq 0$, σ_j^R une permutation de l'ensemble $\{0, 1, \ldots, r_{j+1} - 1\}$, A la suite $\Sigma_R = (\sigma_j^R)_{j\geq 0}$ on associe la suite de Van der Corput à base variable avec permutations en base $R = (r_j)_{j\geq 0}$, notée S^{Σ_R} et définie par:

$$S^{\Sigma_R}(n) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\sigma_j^R(n_j)}{R_{j+1}}, \quad n = 1, 2, \cdots. \tag{1.1.10}$$

Considérons maintenant s bases variables $R^1 = (r_j^1)_{j\geq 0}, \cdots, R^k = (r_j^k)_{j\geq 0}, \cdots, R^s = (r_j^s)_{j\geq 0}$ et posons: $R_j^k = \prod_{i=0}^{j} r_i^k$, $1 \leq k \leq s$. On suppose les R_j^k premiers entre eux au sens suivant:

$$p.g.c.d(R_{i_1}^{k_1}, R_{i_2}^{k_2}) = 1, \quad \forall i_1, i_2 \geq 1 \text{ et } 1 \leq k_1 < k_2 \leq s. \tag{1.1.11}$$

Si pour chaque $k \in \{1, \ldots, s\}$, on a une suite de permutations $\Sigma^{R^k} = (\sigma_j^{R_k})_{j\geq 0}$, alors on peut definir la suite de Halton à base variable avec permutations de la façon suivante:

$$S^{\Sigma_{R^1} \cdots \Sigma_{R^s}} = (S^{\Sigma_{R^1}}(n), \cdots, S^{\Sigma_{R^s}}(n))_{n\geq 1}. \tag{1.1.12}$$

1.2 Estimation de la discrépance

Lemme 1.2 *(cf. [7]) Soit n un nombre entier positif, alors*

$$Card\{k \mid k = [illegible] \bmod m),\ 1 \leq k \leq n\} = [\frac{n}{m}] \text{ ou } [\frac{n}{m}] + 1.$$

Lemme 1.3 *(cf. [13]) (Théorème chinois)*

Soient $a_1, \cdots, a_s$ s nombres entiers. Si $m_1, \cdots, m_s$ sont des entiers premiers deux à deux, alors le système d'équations congruentes:

$$k \equiv a_i \pmod{m_i}, \quad 1 \leq i \leq s$$

a une solution unique modulo $m_1 \times \cdots \times m_s$.

Théorème 1.4 *Soient $S^{\Sigma_{R^1},\cdots,\Sigma_{R^s}}$ la suite de Halton à base variable avec permutations définie dans le paragraphe 1, si elle vérifie:*

$$\sum_{i=1}^{N} r_i^v = O(N), \quad 1 \leq v \leq s, \tag{1.2.1}$$

alors

$$ND^*(N, S^{\Sigma_{R^1},\cdots,\Sigma_{R^s}}) = O((\log N)^s). \tag{1.2.2}$$

Si on suppose plus précisement pour tout $k \in \{1, \cdots, s\}$ il existe $C_k > 1$ tels que pour tout $N \geq 1$

$$\sum_{i=1}^{N} r_i^k \leq C_k N \tag{1.2.3}$$

et il existe $B_k \geq \log 2$ tels que pour tout $M \geq 1$

$$e^{B_k M} \leq R_M^k, \tag{1.2.4}$$

alors

$$ND^*(N, S^{\Sigma_{R^1},\cdots,\Sigma_{R^s}}) \leq \prod_{k=1}^{s} (C_k - 1)(\frac{\log N}{B_k} + 1) + s. \tag{1.2.5}$$

Démonstration :

Si $h_1, \cdots, h_s$ sont des entiers positifs, on note $\mathcal{P}^*(h_1, \cdots, h_s)$ l'ensemble des pavés de la forme $\prod_{k=1}^{s} [0, \frac{b_k}{R_{h_k}^k}[$ où, pour chaque k, b_k est un entier tel que $0 \leq b_k \leq R_{h_k}^k$. Alors, comme le montre W.M.Schmit (cf. [17] page 8):

$$\delta^*_{\mathcal{P}^*(h_1,\cdots,h_s)} \leq \sum_{k=1}^{s} \delta^*_{\mathcal{P}_k^*(h_k)}, \tag{1.2.6}$$

ECOLE NATIONALE DES PONTS-ET-CHAUSSÉES
CENTRE PÉDAGOGIQUE DE DOCUMENTATION ET DE COMMUNICATION

où $\mathcal{P}_k^*(h_k)$ est l'ensemble des intervalles de la forme $[0, \frac{b_k}{R_{h_k}^k}[$. Il est clair que, pour $1 \leq k \leq s$:

$$\delta^*_{\mathcal{P}_k^*(h_k)} \leq \frac{1}{R_{h_k}^k}, \tag{1.2.7}$$

d'où

$$\delta^*_{\mathcal{P}^*(h_1,\cdots,h_s)} \leq \sum_{k=1}^{s} \frac{1}{R_{h_k}^k}. \tag{1.2.8}$$

Donc d'après la proposition 1.1

$$ND^*(N, S^{\Sigma_{R^1},\cdots,\Sigma_{R^s}}) \leq \Delta_{\mathcal{P}^*(h_1,\cdots,h_s)} + \sum_{k=1}^{s} \frac{1}{R_{h_k}^k}. \tag{1.2.9}$$

On va ensuite estimer $\Delta_{\mathcal{P}^*(h_1,\cdots,h_s)}$.

On appelle pavé élémentaire de type $(R^1, \cdots, R^s)$ un pavé de la forme:

$$\prod_{k=1}^{s} [\frac{u_k}{R_{p_k}^k}, \frac{u_k+1}{R_{p_k}^k}[, \tag{1.2.10}$$

où u_k et p_k sont des entiers positifs ou nuls tels que $u_k < R_{p_k}^k$. On démontre d'abord que quelque soit $B = \prod_{k=1}^{s} [\frac{u_k}{R_{p_k}^k}, \frac{u_k+1}{R_{p_k}^k}[$, un pavé élémentaire de type $(R^1, \cdots, R^s)$ on a

$$|E(N, B, S^{\Sigma_{R^1},\cdots,\Sigma_{R^s}})| \leq 1. \tag{1.2.11}$$

En effet pour $1 \leq n \leq N$

$$S^{\Sigma_{R^1},\cdots,\Sigma_{R^s}}(n) \in B \tag{1.2.12}$$

si et seulement si pour tout $k \in \{1, \cdots, s\}$

$$S^{\Sigma_{R^k}}(n) \in [\frac{u_k}{R_{p_k}^k}, \frac{u_k+1}{R_{p_k}^k}[. \tag{1.2.13}$$

Puisque on peut écrire

$$\frac{u_k}{R_{p_k}^k} = \frac{a_0^k}{R_1^k} + \frac{a_1^k}{R_2^k} + \cdots + \frac{a_{p_k-1}^k}{R_{p_k}^k} \tag{1.2.14}$$

avec $0 \leq a_j^k < r_{j+1}^k$, $j = 0, \cdots, p_k - 1$, et

$$S^{\Sigma_{R^k}}(n) = \frac{\sigma_0^{R^k}(n_0)}{R_1^k} + \frac{\sigma_1^{R^k}(n_1)}{R_2^k} + \cdots + \frac{\sigma_{p_k-1}^{R^k}(n_{p_k-1})}{R_{p_k}^k} + \sum_{i=p_k+1}^{\infty} \frac{\sigma_{i-1}^{R^k}(n_{i-1})}{R_i^k} \tag{1.2.15}$$

on voit que la relation (1.2.13) est équivalente à pour $1 \leq k \leq s$ et $i = 0, \cdots, p_k - 1$

$$\sigma_i^{R^k}(n_i) = a_i^k \tag{1.2.16}$$

et (1.2.16) est vérifié si et seulement si, pour tout $k \in \{1, \cdots, s\}$:

$$n \equiv \sum_{i=0}^{p_k-1} (\sigma_i^{R^k})^{-1}(a_i^k) R_i^k \pmod{R_{p_k}^k}. \tag{1.2.17}$$

Donc d'après le théorème chinois (1.2.12) est vrai si et seulement si n se trouve dans une classe de congruence modulo $\prod_{k=1}^{s} R_{p_k}^k$ fixée, d'où en utilisant le lemme 1.2

$$|E(B, N, S^{\Sigma_{R^1}, \cdots, \Sigma_{R^s}})| = |A(B, N, S^{\Sigma_{R^1}, \cdots, \Sigma_{R^s}}) - \frac{N}{\prod_{k=1}^{s} R_{p_k}^k}| \leq 1.$$

Soit $P = \prod_{k=1}^{s} [0, \frac{b_k}{R_{h_k}^k}[\in \Delta_{\mathcal{P}^*(h_1, \cdots, h_s)}$, alors on décompose P en au plus

$$\prod_{k=1}^{s} (\sum_{i=1}^{h_k} r_i^k - h_k) \tag{1.2.18}$$

pavés élémentaires de type $(R^1, \cdots, R^s)$. Pour cela, il suffit de démontrer que pour toute base variable R, on peut décomposer un intervalle $[0, \frac{b}{R_h}[$ avec $0 \leq b \leq R_h$ en au plus $\sum_{i=1}^{h} r_i - h$ pavés élémentaires de type R et on va le démontrer par récurrence.

Pour $h = 1$, c'est trivial si $b = 0$ ou $b = r_1$; dans l'autre cas $[0, \frac{b}{r_1}[$ peut être décomposé en $b \leq r_1 - 1$ pavé élémentaire de longueur $\frac{1}{r_1}$.

On passe de h à $h+1$ de la façon suivante. Pour $[0, \frac{b}{R_{h+1}}[$, on écrit $b = v_0 + v_1 r_{h+1}$ avec $v_0 < r_{h+1}$ et $v_1 \leq R_h$. Si $v_0 = 0$, $[0, \frac{b}{R_{h+1}}[= [0, \frac{v_1}{R_h}[$, et on peut appliquer l'hypothèse de récurrence, si $v_1 = 0$, le résultat est évident. On peut donc supposer $v_0 > 0$ et $v_1 > 0$. Puisque $b \leq R_{h+1}$, on a alors: $v_1 < R_h$. Or

$$[0, \frac{b}{R_{h+1}}[= [0, \frac{v_1}{R_h}[\bigcup [\frac{v_1 r_{h+1}}{R_{h+1}}, \frac{v_0 + v_1 r_{h+1}}{R_{h+1}}[, \tag{1.2.19}$$

d'après l'hypothèse $[0, \frac{v_1}{R_h}[$ se décompose en a plus $\sum_{i=1}^{h} r_i - h$ pavé élémentaire de type $(R^1, \cdots, R^s)$ et

$$[\frac{v_1 r_{h+1}}{R_{h+1}}, \frac{v_0 + v_1 r_{h+1}}{R_{h+1}}[= \bigcup_{i=1}^{v_0} [\frac{v_1 r_{h+1} + i - 1}{R_{h+1}}, \frac{v_1 r_{h+1} + i}{R_{h+1}}[, \tag{1.2.20}$$

Donc, on peut décomposer $[0, \frac{b}{R_{h+1}}[$ en au plus $\sum_{i=1}^{h} r_i - h + v_0 \leq \sum_{i=1}^{h+1} r_i - (h+1)$ pavés élémentaires de type $(R^1, \cdots, R^s)$.

De (1.2.9), (1.2.18) et l'additivité de $E(P, N)$, on déduit:

$$N D^*(N, S^{\Sigma_{R^1}, \cdots, \Sigma_{R^s}}) \leq \prod_{k=1}^{s} (\sum_{i=1}^{h_k} r_i^k - h_k) + N \sum_{k=1}^{s} \frac{1}{R_{h_k}^k}. \tag{1.2.21}$$

En prenant h_k tel que:

$$R_{h_k - 1}^k \leq N \leq R_{h_k}^k, \tag{1.2.22}$$

et en utilisant $\sum_{i=1}^{N} r_i^k \leq C_k N$, $e^{B_k M} \leq R_M^k$, on obtient (1.2.5). $\diamond$

Remarque :

Nous ne savons pas si la condition (1.2.1) du théorème 1.4 est aussi nécessaire pour que la discrépance soit de l'ordre de $O(\frac{(\log N)^s}{N})$. Dans le cas $s = 1$, pour les suites de Van der Corput à base variable avec permutations, cette condition (1.2.1) est nécessaire (cf. [1] et [10]).

En ce qui concerne la discrépance $D(N, S^{\Sigma_{R^1}, \cdots, \Sigma_{R^s}})$, l'estimation est la même à une constante près.

1.3 Quelques résultats expérimentaux

On voit que les estimations de la discrépance de la suite de Halton à base constante avec les permutations sont idendiques à celles de la suite de Halton classique. En dimension 1, H.Faure (cf. [8]) a obtenu des valeurs exactes de $\limsup_{N\to\infty} \frac{N D(N, S_r^{\Sigma})}{\log N}$ pour une classe de permutations particulières et nous a exhibé les permutations qui minimisent la lim sup dans cette classe (communication personnelle). Mais il n'y a pas de résultat analoque en dimension supérieure à 1. Remarquons que H.Faure (cf. [10] et [7]) a obtenu aussi des valeurs exactes de $\limsup_{N\to\infty} \frac{N T(N, S_r^{\Sigma})}{\log N}$ et $\limsup_{N\to\infty} \frac{N F(N, S_r^{\Sigma})}{\log N}$, où $T(N, S_r^{\Sigma})$ et $F(N, S_r^{\Sigma})$ sont respectivement la discrépance quadratique et la diaphonie de la suite de S_r^{Σ}, pour une classe de permutations particulières.

Le but de cette partie est de tester numériquement quelques suites de Halton à base constante avec permutations en les comparant avec la suite de Halton classique, en dimension $s \geq 2$. Ce travail a été aidé par N.Bouleau et G.Pagès.

Trois types de permutations ont été testés et comparés à la suite de Halton classique. Dans les trois cas, les permutations sont constantes ($\sigma_j^R = \sigma^R$ pour tout j)

1. Les permutations ci-dessous données par H.Faure, minimisent les $\limsup_{N\to\infty} \frac{N D(N, S_r^{\Sigma})}{\log N}$ en dimension un pour les bases correspondantes et les suites de Halton généralisées associées seront appellées HALPER.F.

   Permutation de Faure

   $r = 2 \quad \sigma = id$

   $r = 3 \quad \sigma = id$

   $r = 5 \quad \sigma = (1\ 3)$

   $r = 7 \quad \sigma = (1\ 3)(2\ 5)$

   $r = 11 \quad \sigma = (1\ 7)(2\ 4)(3\ 9)(6\ 8)$

   $r = 13 \quad \sigma = (1\ 8)(2\ 4)(3\ 10)(5\ 6\ 11\ 7)$

   $r = 17 \quad \sigma = (1\ 6\ 4\ 2\ 13\ 7\ 15\ 10\ 12\ 14\ 3\ 9)(5\ 11)$

   $r = 19 \quad \sigma = (1\ 8\ 15\ 14\ 2\ 13\ 7\ 6)(3\ 4\ 16\ 5\ 11\ 12\ 17\ 10)$

2. Les permutations suivantes sont données par E.Braaten et G.Weller (cf. [5]) et les suites de Halton généralisées associées seront appellées HALPER.B. Notant

   Notation σ sera notée $[\sigma(0), \sigma(1), \cdots, \sigma(r-1)]$. pour la suite de HALPER.B.

   Permutation de Braaten et Weller

Premiers	Permutation de $(0\ 1\ 2 \cdots r-1)$
2	[0 1]
3	[0 2 1]
5	[0 3 1 4 2]
7	[0 4 2 6 1 5 3]
11	[0 5 8 2 10 3 6 1 9 7 4]
13	[0 6 10 2 8 4 12 1 9 5 11 3 7]
17	[0 8 13 3 11 5 16 1 10 7 14 4 12 2 15 6 9]
19	[0 9 14 3 17 6 11 1 15 7 12 4 18 8 2 16 10 5 13]
23	[0 11 17 4 20 7 13 2 22 9 15 5 18 1 14 10 21 6 16 3 19 8 12]
29	[0 15 7 24 11 22 2 27 9 18 4 22 13 26 5 16 10 23 1 19 28 6 14 17 3 25 12 8 21]
31	[0 15 23 5 27 9 18 2 29 12 20 7 25 11 17 3 30 14 22 1 21 8 26 10 16 28 4 19 6 24 13]
37	[0 18 28 6 23 11 34 3 25 14 31 8 20 36 1 16 27 10 22 1 3 32 4 29 17 7 35 19 2 26 12 30 9 24 15 33 5 21]
41	[0 20 31 7 26 12 38 3 23 34 14 17 29 5 40 10 24 1 35 18 28 9 33 15 21 4 37 13 30 8 39 22 2 27 16 32 11 25 6 36 19]
43	[0 21 32 7 38 13 25 3 35 17 28 10 41 5 23 30 15 37 1 19 33 11 26 42 8 18 29 4 39 14 22 34 6 24 12 40 2 31 20 27 9 36 16]
47	[0 24 12 39 6 33 20 44 3 29 16 36 10 42 22 8 31 26 14 46 1 35 18 28 5 40 19 37 11 25 43 4 30 15 34 9 45 21 2 32 17 41 13 27 7 38 23]
53	[0 26 40 9 33 16 49 4 36 21 45 12 29 6 51 23 38 14 43 1 30 19 47 10 34 24 42 3 27 52 15 18 39 7 46 31 11 35 20 48 2 28 41 8 22 50 13 32 17 44 5 37 25]

3. Le troisième type de permutations est obtenu en prenant les permutations de Braaten et Weller comme des cycles, par exemple pour $r = 5$,

on prend le cycle (0 3 1 4 2). Les suites associées seront appellées HALPER.X.

Le calcul numérique de la discrépance exacte en dimension grande semble hors de portée. Donc, on introduit la pseudo-discrépance:

$$D_p^*(N,X) = \frac{1}{N} \sup_{P \in \mathcal{E}} |E(P,N,X)|$$

avec $\mathcal{E}$ un ensemble fini de 2000 pavés de la forme $\prod_{i=1}^{s}[0,x_i]$, tirés au hasard indépendamment les uns des autres de la façon suivante: les coordonnés x_i sont des variables aléatoires indépendantes équidistribuées dont la loi est celle de l'exponentielle de $-X$ où X suit une loi gamma de paramètres $\frac{1}{s}$ et 1 dont la densité est donné par:

$$g_{\frac{1}{s},1} = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{s})} x^{\frac{1}{s}-1} \exp(-x) 1_{[0,\infty[}(x).$$

La raison de ce choix est que la distribution du volume du pavé aléatoire ainsi défini est uniforme sur $[0,1]$.

On a testé:

$$F_N(X) = \frac{\sqrt{2N} D_p^*(N,X)}{\sqrt{\log(\log N + 2)}}, \quad 1 \leq N \leq 2^{20}$$

avec les dimensions $s = 2,3,5,7,9,10,11,13,15,20$. Pour les dimensions $s > 8$, on ne disposait pas des suites permutées de H.Faure. Nous présentons seulement ici les résultats pour $s = 5$ et $s = 7$ qui sont les dimensions les plus grandes pour lesquelles on ait pu testé tous les types de permutation. Noter que pour les suites de nombres aléatoires,

$$\limsup_{N \to \infty} F_N(X) = 1 \ \ p.s,$$

par la loi du logarithme itéré.

Les résultats numériques font apparaître le classement suivant quand on ordonne les suites par ordre croissant, en fonction de la quantité $moy_{2^{19} < N \leq 2^{20}} F_N$:

1. La suite HALPER.B,
2. La suite HALPER.F,
3. La suite HALPER.X,

4. La suite de Halton.

Les tableaux ci-dessous donnent les résultats pour $s = 5$ et $s = 7$. Dans la colonne $moyF_N$, (resp. $maxF_N$) on fait apparaître la moyenne (resp. le max) de F_N pour N variant successivement entre 1 et 2^1, 2^1 et 2^2,..., 2^{18} et 2^{19}, 2^{19} et 2^{20}. On va analyser les résultats principalement à partir de $moyF_N$. Les valeurs avec $*$ signifient les meilleures dans les lignes.

dimension $s = 5$

Suite	HALPER.B		HALPER.F		HALPER.X		Halton	
N	$moyF_N$	$maxF_N$	$moyF_N$	$maxF_N$	$moyF_N$	$maxF_N$	$moyF_N$	$maxF_N$
$1 \leq N \leq 2^1$	3.160*	3.603	3.247	4.047	3.707	4.595	3.927	4.495
$2^1 < N \leq 2^2$	1.808*	2.053	2.204	2.216	2.054	2.269	3.030	3.058
$2^2 < N \leq 2^3$	1.519*	1.707	1.789	1.960	1.867	1.996	2.429	2.614
$2^3 < N \leq 2^4$	1.301*	1.522	1.345	1.469	1.521	1.725	1.849	2.033
$2^4 < N \leq 2^5$	1.025*	1.212	1.066	1.394	1.429	1.593	1.492	1.922
$2^5 < N \leq 2^6$	0.902	1.114	0.814*	1.063	1.087	1.260	1.135	1.359
$2^6 < N \leq 2^7$	0.682	0.889	0.646*	0.776	0.856	1.054	0.920	1.138
$2^7 < N \leq 2^8$	0.545*	0.731	0.547	0.663	0.771	0.976	0.666	0.813
$2^8 < N \leq 2^9$	0.452	0.551	0.392*	0.509	0.616	0.738	0.558	0.708
$2^9 < N \leq 2^{10}$	0.334	0.441	0.318*	0.463	0.529	0.664	0.425	0.582
$2^{10} < N \leq 2^{11}$	0.278	0.372	0.247*	0.363	0.389	0.511	0.325	0.413
$2^{11} < N \leq 2^{12}$	0.213	0.313	0.207*	0.268	0.280	0.392	0.268	0.372
$2^{12} < N \leq 2^{13}$	0.182	0.242	0.149*	0.206	0.229	0.307	0.214	0.272
$2^{13} < N \leq 2^{14}$	0.167	0.247	0.122*	0.160	0.170	0.216	0.155	0.219
$2^{14} < N \leq 2^{15}$	0.137	0.193	0.098*	0.144	0.120	0.166	0.125	0.172
$2^{15} < N \leq 2^{16}$	0.106	0.165	0.079*	0.111	0.097	0.146	0.095	0.130
$2^{16} < N \leq 2^{17}$	0.071	0.111	0.055*	0.079	0.072	0.100	0.072	0.103
$2^{17} < N \leq 2^{18}$	0.055	0.094	0.044*	0.062	0.055	0.081	0.058	0.084
$2^{18} < N \leq 2^{19}$	0.037*	0.058	0.037*	0.053	0.045	0.065	0.045	0.061
$2^{19} < N \leq 2^{20}$	0.026*	0.044	0.029	0.043	0.035	0.047	0.036	0.060

En dimension $s = 5$, en fonction de $moyF_N$, la suite HALPER.B et la suite HALPER.F sont meilleures dans l'ensemble que la suite HALPER.X et la suite de Halton. Pour la suite HALPER.B et la suite HALPER.F, on observe que quand $1 \leq N \leq 2^5$ et $2^{19} < N \leq 2^{20}$ la suite HALPER.B est la meilleure, et que quand $2^5 < N \leq 2^{19}$, c'est la suite HALPER.F qui est la meilleure. Pour la suite HALPER.X et la suite Halton, quand $1 \leq N \leq 2^6$ et $2^{14} < N \leq 2^{20}$ la meilleure est la suite HALPER.X, et dans les autres cas c'est la suite de Halton qui l'emporte. On a remarqué aussi que pour $2^{14} < N \leq 2^{16}$ la suite HALPER.X est meilleure que la suite HALPER.B, mais moins bonne que celle HALPER.F.

dimension $s = 7$

Suite	HALPER.B		HALPER.F		HALPER.X		Halton	
N	$moyF_N$	$maxF_N$	$moyF_N$	$maxF_N$	$moyF_N$	$maxF_N$	$moyF_N$	$maxF_N$
$1 \leq N \leq 2^1$	3.343*	4.049	3.345	4.053	3.732	4.576	3.956	4.544
$2^1 < N \leq 2^2$	1.916*	1.920	2.330	2.380	2.307	2.491	3.256	3.261
$2^2 < N \leq 2^3$	1.665*	2.010	2.020	2.490	2.192	2.268	3.016	3.183
$2^3 < N \leq 2^4$	1.417*	1.627	1.574	1.843	1.597	2.086	2.144	2.707
$2^4 < N \leq 2^5$	1.253	1.441	1.183*	1.392	1.204	1.352	1.647	1.831
$2^5 < N \leq 2^6$	0.968	1.184	0.905*	1.127	0.990	1.143	1.392	1.584
$2^6 < N \leq 2^7$	0.715	0.928	0.707*	0.843	0.764	1.104	1.207	1.447
$2^7 < N \leq 2^8$	0.606	0.726	0.593*	0.718	0.689	0.815	0.838	1.054
$2^8 < N \leq 2^9$	0.486	0.620	0.449*	0.530	0.538	0.684	0.674	0.823
$2^9 < N \leq 2^{10}$	0.407*	0.483	0.416	0.509	0.435	0.552	0.581	0.771
$2^{10} < N \leq 2^{11}$	0.311*	0.463	0.313	0.436	0.349	0.414	0.521	0.687
$2^{11} < N \leq 2^{12}$	0.248*	0.348	0.277	0.414	0.276	0.365	0.384	0.549
$2^{12} < N \leq 2^{13}$	0.191*	0.252	0.213	0.277	0.212	0.305	0.273	0.370
$2^{13} < N \leq 2^{14}$	0.151*	0.217	0.182	0.252	0.174	0.239	0.224	0.290
$2^{14} < N \leq 2^{15}$	0.123*	0.159	0.135	0.189	0.139	0.193	0.171	0.228
$2^{15} < N \leq 2^{16}$	0.105	0.150	0.101*	0.139	0.105	0.147	0.158	0.217
$2^{16} < N \leq 2^{17}$	0.080	0.124	0.086	0.123	0.079*	0.116	0.119	0.172
$2^{17} < N \leq 2^{18}$	0.062*	0.089	0.069	0.107	0.062*	0.095	0.088	0.124
$2^{18} < N \leq 2^{19}$	0.046*	0.073	0.053	0.089	0.055	0.084	0.076	0.111
$2^{19} < N \leq 2^{20}$	0.036*	0.051	0.047	0.073	0.049	0.073	0.050	0.070

En dimension $s = 7$, en fonction de $moyF_N$, on observe que la suite de Halton est toujours moins bonne que les autres suites, et que la suite la meilleure entre HALPER.B et HALPER.F est toujours meilleure que HALPER.X sauf dans le cas où $2^{16} < N \leq 2^{17}$. Pour la suite HALPER.B et la suite HALPER.F, quand $1 \leq N \leq 2^4$ et $2^9 < N \leq 2^{20}$, c'est la suite HALPER.B qui gagne, quand $2^4 < N \leq 2^9$ la suite HALPER.F est meilleure. Pour $2^4 < N \leq 2^5$, la suite HALPER.X est meilleure que la suite HALPER.B mais moins bonne que celle de HALPER.F. Pour $2^{15} < N \leq 2^{18}$, la suite HALPER.X est pratiquement la meilleure parmi ces quatre suites. Par contre, pour $2^{18} < N \leq 2^{20}$, la suite HALPER.B est la meilleure. Pour les même valeurs de N on voit que les trois autres suites ont à peu près la même $moyF_N$, mais que $\max_{2^9<N\leq 2^{20}} F_N$ est plus petit pour la suite de Halton que pour HALPER.F et HALPER.X.

2 Une remarque sur la suite de Faure

Dans son acticle [9], H.Faure a trouvé une suite $X = (\xi_n)_{n\geq 1} \in [0,1[^s$, appelée depuis suite de Faure, avec une discrépance très faible, on a en effet:

$$N D^*(N,X) \leq \frac{1}{s!}(\frac{r-1}{2\log r})^s(\log N)^s + O((\log N)^{s-1}) \qquad \forall N \geq 1$$

Cette discrépance est très intéressante d'une part parce que son ordre est le meilleur que l'on connaisse, et d'autre part parce que la constante $\frac{1}{s!}(\frac{r-1}{2\log r})^s$ est très petite et en fait tend vers zéro lorsque s tend vers l'infini. Mais puisqu'il n'a pas estimé la constante devant $(\log N)^{s-1}$, on peut se demander si cette constante est très grande (notamment en lisant [4],[11],[3]).

Dans cette remarque, on reprend le raisonnement de H.Faure pour donner une estimation globale de D^* et étudier le $O((\log N)^{s-1})$.

2.1 Notations et Résultats de H.Faure

1) Pavé élémentaire en base r:

Soit r un entier $\geq s$, on appelle pavé élémentaire en base r un pavé de la forme:

$$\prod_{k=1}^{s}[\frac{u_k}{r^{p_k}}, \frac{u_k+1}{r^{p_k}}[$$

avec u_k et p_k entiers positifs ou nuls tels que $u_k < r^{p_k}, \forall k$.

2) Suite de type $P^m_{r,s}$ et $P_{r,s}$:

Soient m un entier ≥ 0 et $X = (\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_{r^m})$ une suite de r^m points de $[0,1[^s$, on dit que X est une suite de type $P^m_{r,s}$ (noté: $X \sim P^m_{r,s}$) si tout pavé élémentaire en base r de volume r^{-m} contient un terme et un seul de la suite X.

Soit $X = (\mathbf{x}_n)_{n\geq 1}$ une suite infinie dans $[0,1[^s$; on dit que X est une suite de type $P_{r,s}$ (noté: $X \sim P_{r,s}$) si $\forall m, l$ entiers ≥ 0, $X^l_m = (\mathbf{x}_{lr^m+1}, \cdots, \mathbf{x}_{(l+1)r^m}) \sim P^m_{r,s}$.

Théorème 2.1 *(cf. [9])*
Soient $s \geq 2$ et $r \geq s$ impair; alors $\forall X \sim P^m_{r,s}$:

$$ND^*(r^m, X) \leq (\frac{r-1}{2})^{s-1} \frac{(m+s)^{s-1}}{(s-1)!}$$

Théorème 2.2 *(cf. Théorème 3 de [9])*
Soient $s \geq 2$ et $r \geq s$ impair; alors $\forall X \sim P_{r,s}$:

$$ND^*(N, X) \leq \frac{1}{s!}(\frac{r-1}{2\log r})^s (\log N)^s + O((\log N)^{s-1}) \qquad \forall N \geq 1$$

Remarque : Les suites de Faure [9] sont des exemples de suites de type $P_{r,s}$

Dans le Théorème 2.2, si l'on suppose que r est le plus petit nombre premier $> s$, alors

$$\lim_{s \to \infty} \frac{1}{s!}(\frac{r-1}{2\log r})^s = 0$$

2.2 Une estimation globale de D^*

Lemme 2.3 *Soient m, s et j sont des entiers positifs, alors*

$$\sum_{j=1}^{m} (j+s)^{s-1} \leq \frac{1}{s}(m+s+1)^s$$

Lemme 2.4 *Soit $\{T_i\}_{i=1,\dots,n}$ l'ensemble des ensembles d'entiers positifs tq $\forall 1 \leq i \neq j \leq n$*

$$T_i \bigcap T_j = \phi \quad ou\ T_i \quad ou\ T_j$$

alors

$$|E(K, \bigcup_{i=1}^{n} T_i, X)| \leq \sum_{i=1}^{n} |E(K, T_i, X)| \qquad \forall K \in \wp_s$$

Remarque :

Le lemme 2.3 et le lemme 2.4 sont utilisés implicitement par H.Faure [9] sans démonstration, on ne les démontre pas non plus puisqu'ils ne sont pas difficiles.

Lemme 2.5 *Pour tout $x \geq 67$ il existe un nombre premier entre x et $x(1+\frac{2}{(\log x - 3/2)})$.*

Démonstration : En utilisant pour tout $x \geq 67$ [2]

$$\log x - \frac{3}{2} < \frac{x}{\pi(x)} < \log x - \frac{1}{2},$$

où $\pi(x)$ est le nombre de nombre premier inférieur ou égale à x, on peut facilement obtenir ce lemme. ◇

Proposition 2.6 *Soient $s \geq 2$ et $r \geq s$ impair, alors $\forall X \sim P_{r,s}$ on a*
1)

$$ND^*(N,X) \leq (\frac{r-1}{2})^s \frac{(n+s+1)^s}{s!}$$

où $n = [\log_r 2N]$
2) Si $\log_r N \geq s+2$

$$\begin{aligned} ND^*(N,X) \quad \leq \quad & \frac{1}{s!}(\frac{r-1}{2\log r})^s (\log N)^s \\ & + \frac{(s+2)(r-1)}{s!}(\frac{r-1}{\log r})^{s-1}(\log N)^{s-1} \end{aligned}$$

Démonstration : On reprend la démonstration du théorème 4 (ii) de [9].
1) On utilise ici le système de numération dont la base est

$$B_r = \{-\frac{(r-1)}{2}, \cdots, -1, 0, 1, \cdots, \frac{(r-1)}{2}\}$$

$\forall N \geq 1 \exists n \geq 0$ tq $\frac{r^n}{2} \leq N < \frac{r^{n+1}}{2}$ (cela implique $n = [\log_r 2N]$), on peut donc écrire N par

$$N = \sum_{m=0}^{n} N_m r^m \qquad \text{avec } N_m \in B_r \text{ et } N_n > 0 \tag{2.2.1}$$

Posons $T_n =]0, N_n r^n]$, et pour $0 \leq m \leq n-1$, on définit T_m comme un intervalle d'entiers, ouvert à gauche:

$$T_m =]a_m, b_m] \tag{2.2.2}$$

avec

$$a_m = \min\{\sum_{j=m}^{n} N_j r^j, \sum_{j=m+1}^{n} N_j r^j\}$$

et

$$b_m = \max\{\sum_{j=m}^{n} N_j r^j, \sum_{j=m+1}^{n} N_j r^j\}$$

alors l'ensemble de $\{T_m\}_{0\leq m\leq n}$ vérifie l'hypothèse du lemme 2.4 et $[1, N] = \bigcup_{m=0}^{n} T_m$ donc

$$|E(P, N, X)| \leq \sum_{m=0}^{n} |E(P, T_m, X)| \qquad \forall P \in \mathcal{P}_s^* \tag{2.2.3}$$

en remarquant que T_m est lui-même réunion (disjointe) de $|N_m|$ intervalles $T_{\mu,m}, \mu = 1, \cdots, |N_m|$ du type $]lr^m, (l+1)r^m]$, on a

$$|E(P, T_m, X)| \leq \sum_{\mu=1}^{|N_m|} |E(P, T_{\mu,m}, X)| \qquad \forall P \in \mathcal{P}_s^* \tag{2.2.4}$$

Mais la suite X étant de type $P_{r,s}$ d'après le Théorème 2.1, pour chaque intervalle $T_{\mu,m}$

$$|E(P, T_{\mu,m}, X)| \leq (\frac{r-1}{2})^{s-1} \frac{(m+s)^{s-1}}{(s-1)!}. \tag{2.2.5}$$

Cette inégalité est l'estimation de [9] (ligne 7, page 349). A partir de cette inégalité Faure obtient le théorème 2.2. On peut expliciter le "O" qui apparaît dans ce théorème de la façon suivante:

$$\begin{aligned} |E(P, N, X)| &\leq (\frac{r-1}{2})^{s-1} \sum_{m=0}^{n} \sum_{\mu=1}^{|N_m|} \frac{(m+s)^{s-1}}{(s-1)!} \qquad (2.2.6) \\ &\leq (\frac{r-1}{2})^{s} \sum_{m=0}^{n} \frac{(m+s)^{s-1}}{(s-1)!} \\ &\leq (\frac{r-1}{2})^{s} \frac{(n+s+1)^{s}}{s!} \end{aligned}$$

la dernière étape provient du lemme 2.3.

2) Pour $r \geq 2$, on a

$$n = [\log_r 2N] \leq \log_r N + 1$$

et donc lorsque $\log_r N \geq s+2$

$$\begin{aligned}
\frac{(n+s+1)^s}{s!} &\leq \frac{(\log_r N+s+2)^s}{s!} \qquad (2.2.7)\\
&= \frac{(\log_r N)^s}{s!} + \frac{1}{s!}[C_s^1(\log_r N)^{s-1}(s+2) + C_s^2(log_r N)^{s-2}(s+2)^2\\
&\quad + \cdots + C_s^{s-1}(\log_r N)(s+2)^{s-1} + (s+2)^s]\\
&= \frac{(\log_r N)^s}{s!} + \frac{(\log_r N)^{s-1}(s+2)}{s!}[C_s^1 + C_s^2\frac{s+2}{\log_r N}\\
&\quad + \cdots + C_s^{s-1}\frac{(s+2)^{s-2}}{(\log_r N)^{s-2}} + \frac{(s+2)^{s-1}}{(\log_r N)^{s-1}}]\\
&\leq \frac{(\log_r N)^s}{s!} + \frac{(\log_r N)^{s-1}(s+2)}{s!}[C_s^1 +\\
&\quad C_s^2 + \cdots + C_s^{s-1} + 1]\\
&\leq \frac{(\log_r N)^s}{s!} + \frac{(s+2)2^s(\log_r N)^{s-1}}{s!}
\end{aligned}$$

d'après 1), on a

$$\begin{aligned}
N D^*(N,X) &\leq \frac{1}{s!}(\frac{r-1}{2\log r})^s(\log N)^s\\
&\quad + \frac{(s+2)(r-1)}{s!}(\frac{r-1}{\log r})^{s-1}(\log N)^{s-1}
\end{aligned}$$

◇

Corollaire 2.7 *Soit C un réel strictement plus grand que e et soit $D = \{(s,N) \in \mathbf{N}\times\mathbf{N} | N \geq (Cs)^s\}$. En notant $D^*(s,N,X) = D^*(N,X)$, alors on a*

$$\lim_{\|(s,N)\|\to\infty \text{ avec } (s,N)\in D} D^*(s,N,X) = 0,$$

où $\|.\|$ est la norme Euclidienne.

Démonstration : D'après la proposition 2.6

$$D^*(N,X) \leq (\frac{r-1}{2})^s\frac{(n+s+1)^s}{Ns!}$$

où $n = [\log_r 2N]$ et r est le premier nombre premier $\geq s$. Donc en utilisant le lemme 2.5 pour $s \geq 67$:

$$\begin{aligned}
D^*(s,N,X) &\leq \left(\frac{s(1+\frac{2}{(\log s-3/2)}-1}{2}\right)^s \frac{(\log_r 2N+s+1)^s}{Ns!} \\
&\leq s^s\left(1+\frac{2}{\log s-3/2}-\frac{1}{s}\right)^s \frac{(\frac{\log N}{\log s}+s+1+1)^s}{2^s Ns!} \\
&\approx \frac{s^s(1+\frac{2}{\log s-3/2}-\frac{1}{s})^s(\frac{\log N}{\log s}+s+2)^s}{N\sqrt{2\pi s}(\frac{2s}{e})^s} \quad \text{car } s! \approx \sqrt{2\pi s}(\tfrac{s}{e})^s \\
&= \frac{e^s}{N2^s\sqrt{2\pi s}}\left(1+\frac{2}{\log s-3/2}-\frac{1}{s}\right)^s\left(\frac{\log N}{\log s}+s+2\right)^s \\
&\stackrel{\text{def}}{=} f(s,N),
\end{aligned}$$

pour $N = (Cs)^s$

$$\begin{aligned}
f(s,N) &= \frac{e^s}{2^s\sqrt{2\pi s}}\frac{(1+\frac{2}{\log s-3/2}-\frac{1}{s})^s(\frac{s\log C}{\log s}+2s+2)^s}{C^s s^s} \\
&= \frac{e^s}{2^s\sqrt{2\pi s}}\frac{(1+\frac{2}{\log s-3/2}-\frac{1}{s})^s(\frac{\log C}{\log s}+2+\frac{2}{s})^s}{C^s s^s} \\
&= \left(\frac{e}{C}\right)^s\frac{1}{\sqrt{2\pi s}}\left(1+\frac{2}{\log s-3/2}-\frac{1}{s}\right)^s\left(\frac{\log C}{2\log s}+1+\frac{1}{s}\right)^s.
\end{aligned}$$

Le membre de droite de cette égalité tend vers 0 si et seulement si $C > e$. En effet, si $C > e$,

$$\lim_{s\to\infty}\left(\frac{e}{C}\right)\left(1+\frac{2}{\log s-3/2}-\frac{1}{s}\right)\left(\frac{\log C}{2\log s}+1+\frac{1}{s}\right) = \frac{e}{C} < 1,$$

et par conséquence:

$$\lim_{s\to\infty} f(s,(Cs)^s) = 0.$$

Si $C = e$, alors

$$\begin{aligned}
f(s,N) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi s}}\left(1+\frac{2}{\log s-3/2}-\frac{1}{s}\right)^s\left(\frac{1}{2\log s}+1+\frac{1}{s}\right)^s \\
&\geq \frac{(1+\frac{1}{2\log s})^s}{\sqrt{2\pi s}} \\
&\geq \frac{1+s\frac{1}{2\log s}}{\sqrt{2\pi s}} \longrightarrow \infty.
\end{aligned}$$

D'où

$$\lim_{s\to\infty} f(s,(2es)^s) = \infty.$$

et il est clair que $\lim_{s\to\infty} f(s,(2es)^s) = \infty$ si $C < e$. $\diamond$

Remarque : Dans le cas 2), si r est le premier nombre premier $> s$, alors en utilisant que $\forall x > 0$ réel, il existe un nombre premier entre x et $2x$, et la formule de Stirling, on peut encore montrer

$$\lim_{s\to\infty} \frac{(s+2)(r-1)}{s!}\left(\frac{r-1}{\log r}\right)^{s-1} = 0$$

Mais la condition $\log_r N \geq s+2$ impose que N soit très grand, lorsque la dimension devient élevée.

Remarque :

Il est tentant d'essayer de construire des suites associant la suite de Halton et la suite de Faure (par exemple la suite $(\phi_2(n), C(\phi_5(n)))_{n\geq 1}$ où C est définie par (0.0.8) avec $r = 5$). Les tests que nous avons fait sur ce type de suites donnent des résultats décevants et même, dans certains cas moins bons qu'avec les suites random.

Bibliographie

[1] E.Y.Atanassov, Note on the discrepancy of the Van Der Corput generalized sequences. C.R.Acad.Bulgare Sci. 42, No.3.1989.

[2] J.Rarkley Rosser and Lowell Schoenfeld, Approximate formulas for some functions of prime numbers. Illinois Journal of Mathematics 6 (1962), 64-94.

[3] B.L.Fox, ALGORITHM 647: Implementation and Relative Efficiency of Quasirandom sequence Generators. ACM. Transactions on Mathematicd Software, Vol. 12. No.4 12.1986

[4] N.Bouleau, Sur le calcul effectif d'espérances en dimension grande ou infinie. Cahier du CERMA n.11 Déc.1989

[5] E.BRAATEN and G.WELLER, An Improved Low-Discrepancy Sequence for Multidimensional Quasi-Monte Carlo Integration. JOURNAL OF COMPUTATIONAL PHYSICS 33, 249-258 (1979).

[6] H.Chaix et H.Faure, Discrépance et diaphonie des suites de van der Corput généralisées. C.R.Acad.Sci.Paris, t.310, Série I, p. 315-320, 1990.

[7] H.Chaix et H.Faure, Discrépance et diaphonie des suites de van der Corput généralisées (II). C.R.Acad.Sci.Paris, t.311, Série I, p. 65-68, 1990.

[8] H.Faure, Discrépance de suites associées à un système de numération (en dimension un) Bull. Soc. Math. France. 109, 1981. pp. 143-182.

[9] H.Faure, Discrépance de suites associées à un systême de numération (en dimension s) Acta. Arithmetica.XLI. 1982

[10] H.Faure, On the Star-Discrepancy of Generalized Hammersley Sequences in Two Dimensions. Mh. Math. 101, 291-300(1986).

[11] O.Faure, Calculs de discrépances exactes Mémoire de D.E.A. CERMA ENPC 1988

[12] A.S.Fraenkel, Systems of numeration. Amer. Math. monthly, 92(1985) pp. 105-114.

[13] Hua L-K and Wang Y., Applications of Number Theory to Numerical Analysis. Springer-Verlag (1981).

[14] H.Niederreiter, Quasi Monte Carlo methods and pseudo-random numbers. Bull. AMS. 84, p.957-1041. (1978).

[15] P.D.Proinov et E.Y.Atanassov, On the distribution of the Van Der Corput generalized sequences, C.R.Acad.Sci.Paris, 307, série I, p.895-900, 1988.

[16] K.F.Roth, Mathematika. 1,1954,73.

[17] W.M.Schmit, Lectures on Irregularities of distribution, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay,1977.

Partie III

Quelques résultats expérimentaux sur l'intégration numérique des fonctions périodiques par les suites à discrépance faible

1 Introduction

Pour estimer l'erreur dans l'approximation, avec des suites à discrépance faible, de l'intégrale d'une fonction à variation bornée au sens de Hardy et Krause, on peut utiliser l'inégalité de Koksma:

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(\mathbf{x}_n) - \int_{[0,1]^s} f(\mathbf{t})d\mathbf{t}\right| \leq V(f)D^*(N,X) \qquad (1.0.1)$$

où $X = (\mathbf{x}_n)_{n\geq 1}$ est une suite à valeurs dans $[0,1]^s$, $V(f)$ est la variation totale au sens de Hardy et Krause de la fonction f et $D^*(N,X)$ est la discrépance à l'origine de la suite X. Les meilleures estimations connues actuellement donnent donc, pour les suites de Halton et de Faure, une majoration de l'erreur en $O(\frac{(\log N)^s}{N})$.

Mais on sait aussi que pour certaines fonctions plus régulières et certaines suites à discrépance faible on a des estimations d'erreur meilleures que celles données par l'inégalité de Koksma. Étant donné une constante $c > 0$ et un

réel $k \geq 1$, nous noterons $E_k(c)$ la classe des fonctions périodiques sur $[0,1]^s$ dont le développement de Fourier:

$$f(x) = \sum_{h \in Z^s} c_h \exp(2\pi h \cdot x) \tag{1.0.2}$$

vérifie

$$|c_h| \leq cr(h)^{-k} \text{ pour tout } h \neq 0,$$

où

$$r(h) = \prod_{j=1}^{s} \max(1, |h_j|).$$

Rappelons qu'un vecteur à coordonnées irrationnelles $\boldsymbol{\alpha} \in R^s$ est dit de type η (≥ 1) si:

$$\inf\{a \in R | \exists C(\boldsymbol{\alpha}, a) > 0 \text{ telle que } r(h)^a \|h \cdot \boldsymbol{\alpha}\| \geq C(\boldsymbol{\alpha}, a)\} = \eta$$

où

$$\|t\| = \min_{m \in Z} |t - m| \text{ pour } t \in R$$

Théorème 1.1 *Soient $s \geq 1$, $\boldsymbol{\alpha} \in R^s$ un point à coordonnées irrationnelles de type $\eta < \infty$ et $(n\boldsymbol{\alpha})$ la suite définie dans l'introduction générale, alors on a:*

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f((n\boldsymbol{\alpha})) - \int_{[0,1]^s} f(t)dt = O(\frac{1}{N}) \tag{1.0.3}$$

pour toute $f \in E_k(c)$ avec $k > \eta$ (souvent on prend $\boldsymbol{\alpha}$ de type $\eta = 1$)

Remarque : Le grand "O" devant "$\frac{1}{N}$" est souvent difficile à estimer à cause à la fois de $\boldsymbol{\alpha}$ et de f.

Pour les suites arithmétiques à discrépance faible (suite de Halton, suite de Faure, etc), on n'a pas de résultats analogues à (1.0.3), sauf en dimension 1, pour la suite de Van der Corput (cf. III.2). Mais on peut conjecturer que pour $f \in E_k(c)$ avec k assez grand ($k > 1$ par exemple), on aura ce type de résultat, ou bien on peut espérer que l'on a:

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f((n\boldsymbol{\alpha})) - \int_{[0,1]^s} f(t)dt = o(\frac{(\log N)^{\frac{s}{2}}}{N}) \tag{1.0.4}$$

ce qui serait une meilleure estimation que ce qu'on obtient à partir de l'inégalité de Koksma, puisque:

$$D^*(N,X) = \Omega(\frac{(\log N)^{\frac{s}{2}}}{N})$$

pour toute suite X.

Pour les raisons ci-dessus, dans III.2 nous montrons un résultat analogue au théorème 1.1 pour la suite de Van der Corput et nous donnons des résultats numériques pour des fonction particulières; dans III.3 on teste par l'ordinateur:

1. Si on a une bonne convergence en $(\frac{1}{N})$ en utilisant la suite de Halton pour des fonctions périodiques appartenant à $E_k(c)$ avec k assez grand.

2. A défaut d'une convergence en $(\frac{1}{N})$, si on a mieux qu'une convergence en $(\frac{(\log N)^{\frac{s}{2}}}{N})$.

3. deux fonctions périodiques moins régulières, déjà étudiées par Fox (cf. [2]), Braaten et Weller (cf. [1]) :

   - pour savoir si on obtient une convergence plus rapide que celle déduite de l'inégalité de Koksma.
   - pour compléter les études de Fox, Braaten et Weller en testant, sur les mêmes fonctions, la suite $(n\alpha)$ avec $\alpha = (\sqrt{2}, \sqrt{3}, \cdots, \sqrt{p_s})$ où p_s désigne le s-ième nombre premier.

Les fonctions qu'on va employer sont:

1.

$$f_1^{(s)}(\mathbf{x}) = \sin 2\pi(\sum_{i=1}^{s} x_i) \qquad (1.0.5)$$

qu'on appellera "Sinus". Cette fonction appartient à $E_{k(c)}$ pour c assez grand. Cette fonction est surtout intéressante en dimension > 1, où on ne connaît pas de formule explicite ni d'estimation précise pour la somme exponentielle des suites de Halton (rappelons qu'un résultat classique, dû à Erdos permet d'estimer la discrépance extrême en fonction de la somme exponentielle).

2.

$$f_2^{(s)}(\mathbf{x}) = (1.5)^s \prod_{i=1}^{s}(2x_i - 1)\exp(\frac{1}{\|t(\mathbf{x})\|_s^s - 1}) \tag{1.0.6}$$

où $t(\mathbf{x}) = (2x_1 - 1, \cdots, 2x_s - 1)$ et $\|\mathbf{x}\| = (|x_1|^s + \cdots + |x_s|^s)^{\frac{1}{s}}$. cette fonction appartient à $E_k(c)$ pour c assez grand, quel que soit k, et sera appelée "Expo".

3.

$$f_3^{(s)}(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^{s} |4x_i - 2| \tag{1.0.7}$$

qui appartient à $E_1(c) \bigcap C_0$ pour c assez grand et n'appartient pas à C_1, et qu'on appelle "Poly". C'est la fonction déjà testée par Fox.

4.

$$f_4^{(s)}(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^{s} \exp(-2(x_i - 0.5)^2) \tag{1.0.8}$$

qui appartient à $E_1(c) \bigcap C_0$ pour c assez grand et n'appartient pas à C_1, et qu'on appellera "Gauss". C'est la fonction déjà testée par Braaten et Weller.

La suite de Halton est définie par:

$$(\phi_2(n), \phi_3(n), \cdots, \phi_{p_s}(n))_{n\geq 1}$$

où $(\phi_{p_i}(n))_{n\geq 1}$ est la suite de Van der Corput en base p_i et p_i est le i-ème nombre premier. La suite $(n\boldsymbol{\alpha})$ où $\boldsymbol{\alpha} = (\sqrt{2}, \sqrt{3}, \cdots, \sqrt{p_s})$ sera appelée suite "Racine".

Le programme est conçu par tester si pour une suite $X = (\mathbf{x}_n)_{n\geq 1}$:

$$E_N(X) = \sum_{n=1}^{N} f(\mathbf{x}_n) - N \int_{[0,1]^s} f(\mathbf{t})d\mathbf{t}$$

est borné et dans le cas contraire, si

$$L_N(X) = \frac{E_N(X)}{(\log(N+2))^{\frac{s}{2}}}$$

tend vers zero lorsque N tend vers l'infini. Le nombre maximum d'itération est 2500 pour $s = 1$ et 10^6 pour $s \geq 2$. Les résultats sont présentés sous forme de dessins et tableaux.

Les résultats semblent confirmer en général, une vitesse de convergence en $o(\frac{(\log N)^{\frac{s}{2}}}{N})$, avec chacune des suites. En fait, la convergence semble être en $O(\frac{1}{N})$ en dimension petite ($s = 2,3$), mais en dimension plus grande les résultats ne permettent pas de conclure à une convergence en $O(\frac{1}{N})$. De plus, la suite "Racine" donne en général de meilleurs résultats, mais il y a des exceptions.

2 Intégration des fonctions périodiques en dimension un

2.1 Un résultat pour la suite de Van der Corput

Soit $\phi_r = (\phi_r(n))_{n\geq 0}$ la suite de Van der Corput en base r et $r \geq 2$ un entier quelconque.

Théorème 2.1 : *Pour $N \geq 1$ quelconque, $f \in E_\alpha(c)$ et $\alpha > 1$, on a*

$$|\int_0^1 f(t)dt - \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f(\phi_r(n))| \leq \frac{2\alpha c C_1}{(\alpha-1)}\frac{1}{N} + \frac{2c}{(\alpha-1)}\frac{1}{N^{\alpha-1}},$$

où C_1 est une constante qui ne dépend que de r.

Démonstration : Un calcul facile donne: $\forall f \in E_\alpha(c)$

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f(\phi_r(n)) = \int_0^1 f(t)dt + \frac{1}{N}\sum_{k\neq 0} c(k)\sum_{n=0}^{N-1} exp(2\pi i k\phi_r(n)).$$

En notant

$$\begin{aligned} I_N(\phi_r) &= \frac{1}{N}\sum_{k\neq 0} c(k)\sum_{n=0}^{N-1} exp(2\pi i k\phi_r(n)) \\ &= \frac{1}{N}\sum_{k\neq 0} c(k) S_N(k), \end{aligned}$$

donc, pour estimer l'erreur de cet intégrale approchée, il suffit d'évaluer $I_N(\phi_r)$.

Un calcul direct donne:

$$\begin{aligned} I_N(\phi_r) &= \frac{1}{N}\sum_{1\le|k|\le N} c(k)S_N(k) \\ &\quad + \frac{1}{N}\sum_{N+1\le|k|} c(k)S_N(k) \\ &= I_N(1) + I_N(2), \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} I_N(1) &= \frac{1}{N}\sum_{1\le|k|\le N} c(k)S_N(k), \\ I_N(2) &= \frac{1}{N}\sum_{N+1\le|k|} c(k)S_N(k). \end{aligned}$$

Pour $I_N(2)$, on a

$$\begin{aligned} |I_N(2)| &\le \frac{1}{N}\sum_{N+1\le|k|} |c(k)| \\ &\le 2c\frac{1}{N}\sum_{N+1\le|k|} \frac{1}{k^\alpha} \\ &\le \frac{2c}{\alpha-1}N^{-\alpha+1}, \end{aligned}$$

où $C_2(\alpha) = 2c/(\alpha-1)$.

Il reste donc à evaluer $I_N(1)$. D'après le corollaire I.1.7 , il existe une constante $C_1 > 0$ qui ne dépend que de r telle que

$$|S_N(k)| \le C_1|k|, \qquad \forall k \ne 0.$$

D'où

$$\begin{aligned} |I_N(1)| &\le \frac{2cC_1}{N}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k^{\alpha-1}} \\ &\le \frac{2cC_1}{N}\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right), \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} |I_N(\phi_r)| &\leq |I_N(1)| + |I_N(2)| \\ &\leq \frac{2\alpha c C_1}{(\alpha-1)}\frac{1}{N} + \frac{2c}{(\alpha-1)}\frac{1}{N^{\alpha-1}} \\ &\leq C(\alpha)(\frac{1}{N} + \frac{1}{N^{\alpha-1}}), \end{aligned}$$

avec $C(\alpha) = \max(2\alpha c C_1/(\alpha-1), 2c/(\alpha-1))$. $\diamond$

Remarque :

1) Si $r = 2$, on peut prendre $C_1 = 1$. (le corollaire I.1.7)

2) D'après le théorème suivant (cf. [3]): $\forall \sigma = (\xi_n)$ une suite à valeurs dans [0,1], on ne peut pas obtenir une estimation meilleure que:

$$\int_0^1 f(t)dt - \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(\xi_n) = O(N^{-1}), \qquad \forall f \in E_\alpha(c),$$

où "O" ne dépend que de f, α et c. Notre résultat est optimal à une constante près.

3) G.Pagès a remarqué que la condition $\alpha > 2$ peut être remplacée par $\alpha > 1$ (cf. [4]).

4) L'estimation des erreurs de l'intégrale approchée par la suite-VDC en dimension ≥ 2 (on l'appelle aussi suite de HALTON) est encore un problème ouvert.

2.2 Résultats numériques

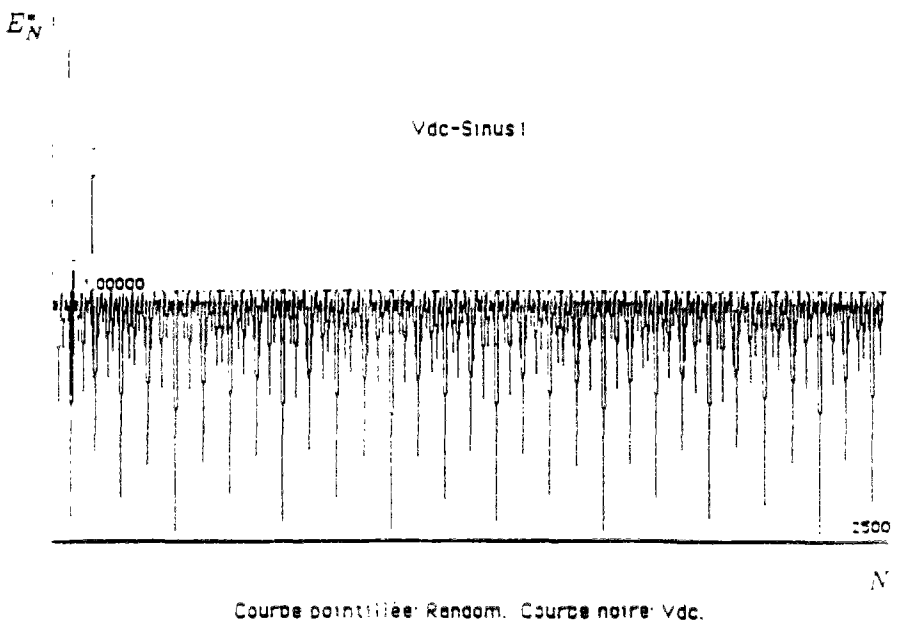
Les dessins ci-dessous font apparaître

$$E_N^* = \max_{1\leq j\leq 5} \left| \sum_{n=1}^{N+j} f(x_n) - (N+j)\int_0^1 f(x)dx \right|$$

pour tous les nombres N multiples de 5, strictement inférieurs à 2500.

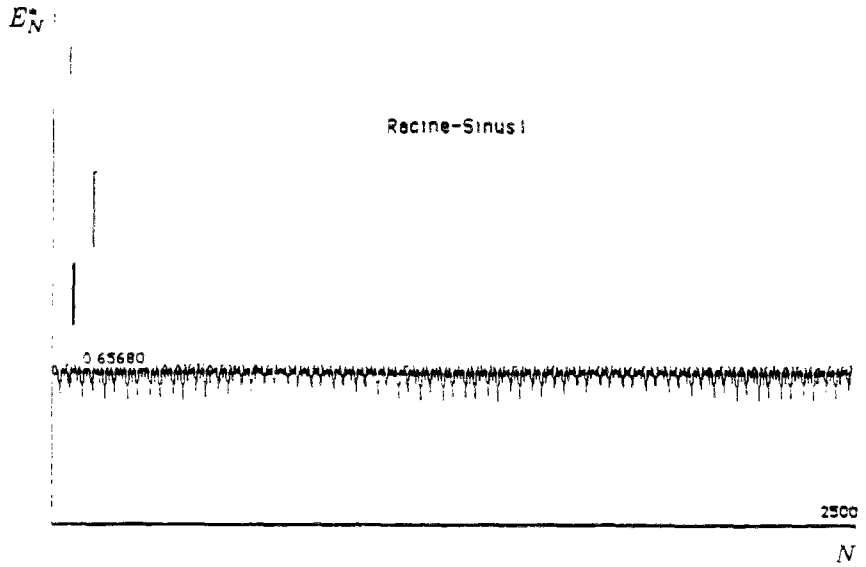
Remarque : Pour la fonction $\sin 2\pi x$ avec la suite de Van der Corput, on sait calculer explicitement E_N^* et $\sup_N E_N^* = 1$ est évidente; avec la suite $(\{n\sqrt{2}\})_{n\geq 1}$, on peut aussi donner la forme explicite de E_N^*

Présentation graphique:

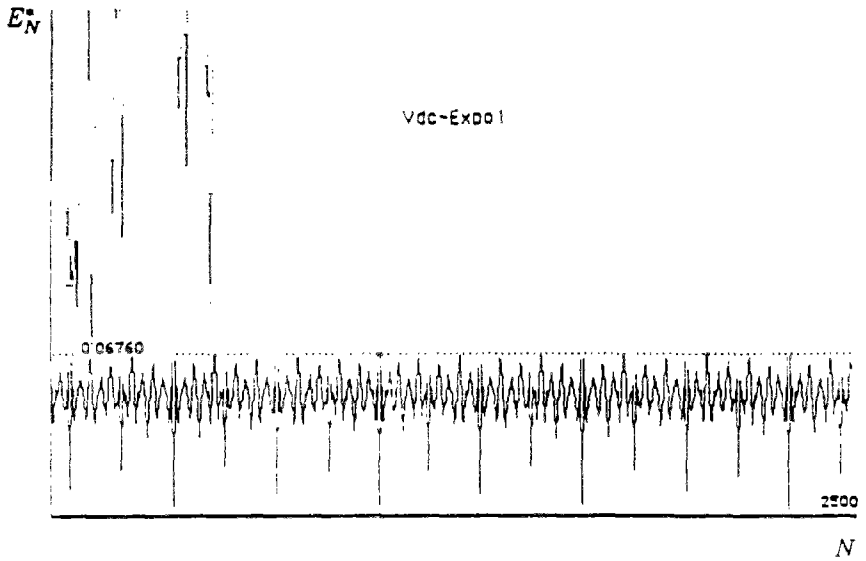


Courbe pointillée: Random. Courbe noire: Vdc.

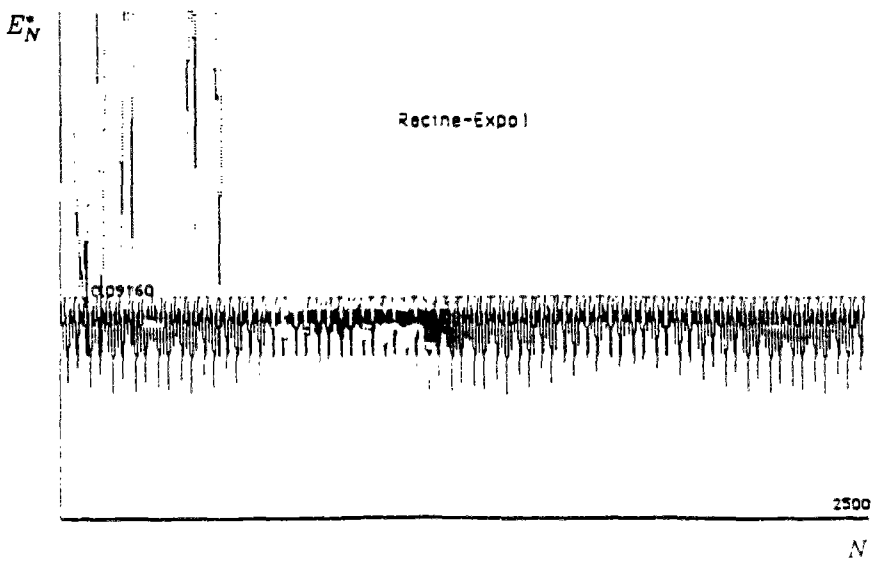
Vdc-Sinus1 signifie qu'on utilise la suite de Van der Corput pour la fonction Sinus en dimension 1. Dans les dessins suivants, on adopte une convention analogue.



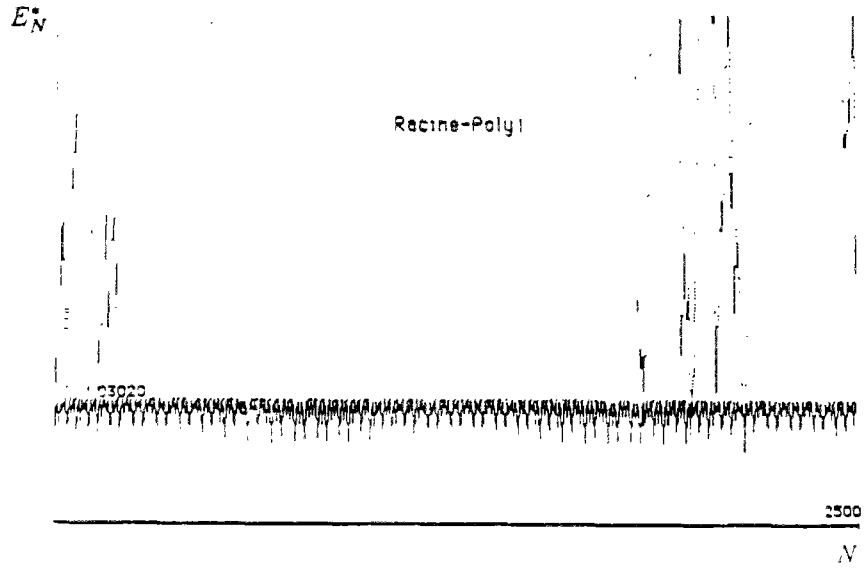
Courbe pointillée: Random. Courbe noire: Racine.



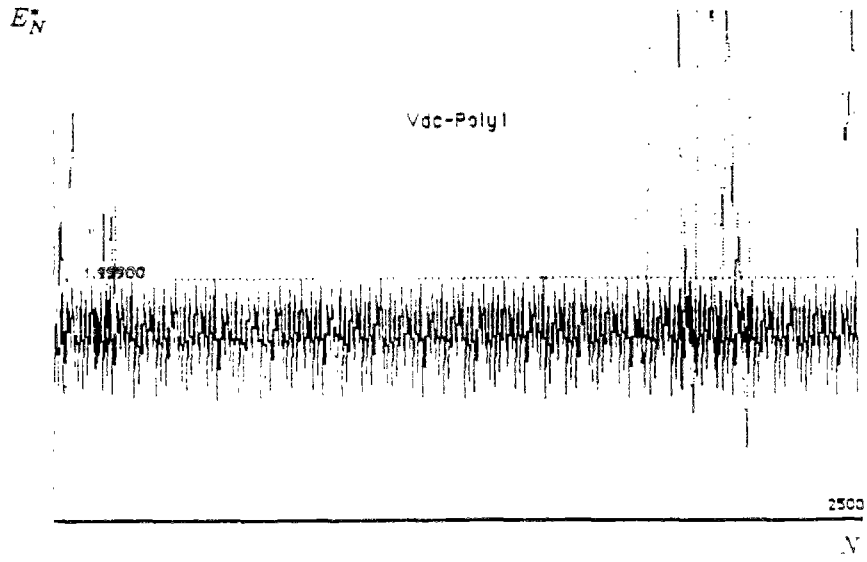
Courbe pointillée: Random. Courbe noire: Vdc.



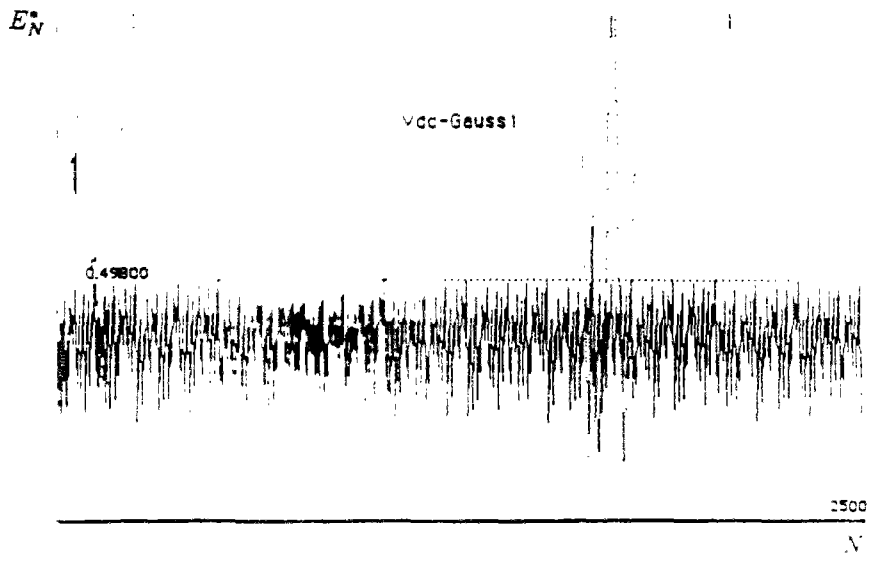
Courbe pointillée Random Courbe noire: Racine.



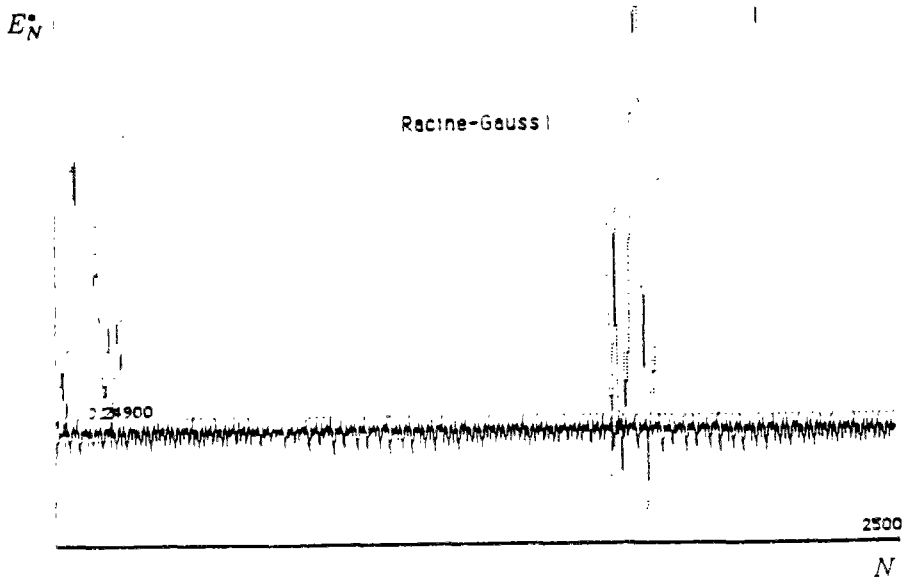
Courbe pointillée: Random. Courbe noire: Racine.



Courbe pointillée Random. Courbe noire: Vdc.



Courbe pointillée Random. Courbe noire: Vdc.



Courbe pointillée: Random Courbe noire: Racine.

Commentaire:

On observe que pour la fonction "Sinus1", "Racine" est meilleure; mais pour la fonction "Expo1", la suite de Van der Corput est meilleure. Donc la comparaison des suites dépend de la fonction.

Pour la fonction "Poly1" et la fonction "Gauss1", qui sont moins régulières que les deux fonctions précédentes on observe aussi des erreurs en $O(\frac{1}{N})$. Pour ces deux fonctions, l'erreur la plus petite est obtenue avec la suite "Racine". Dans tous les cas, on remarque de grandes oscillations deE_N^* pour la suite de Van der Corput.

Comme prévu, les suites Randoms ne marchent pas.

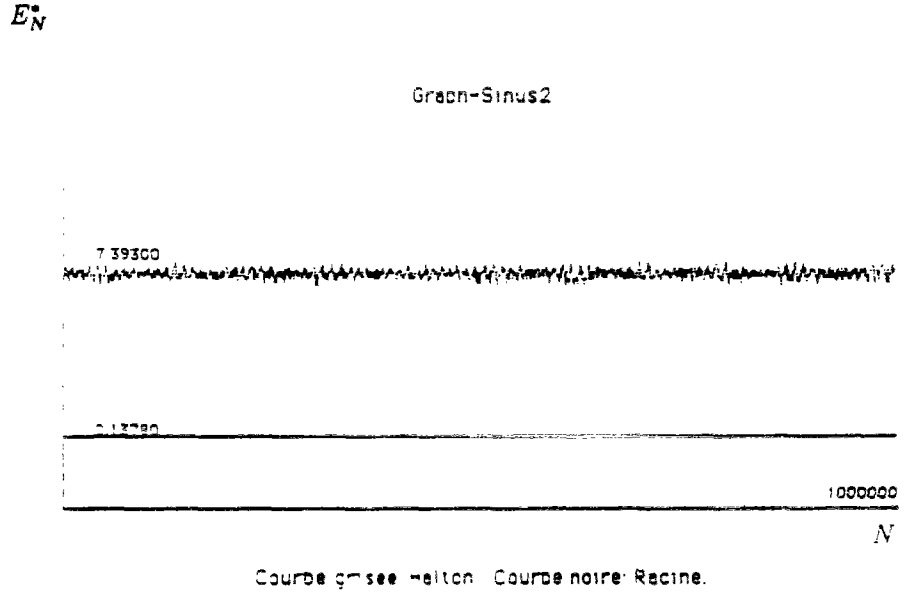
3 Intégration numérique en dimension supérieure à un

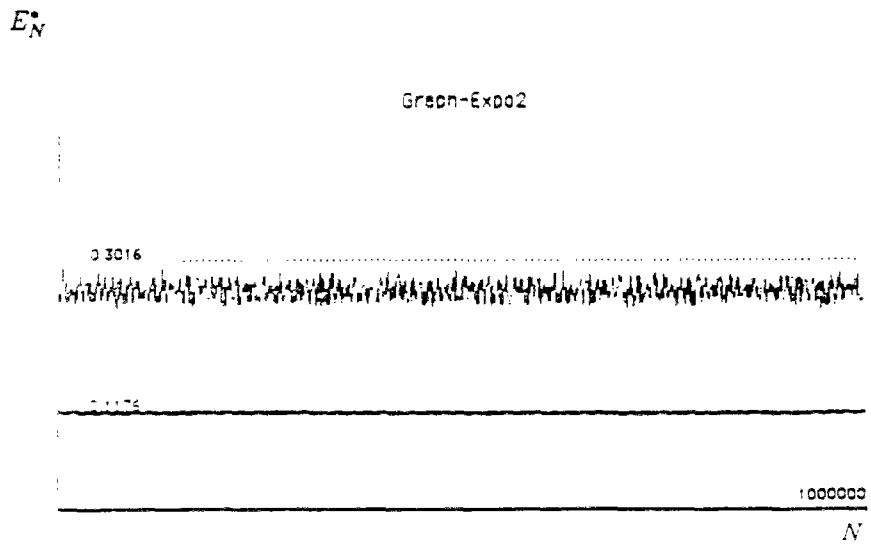
Dans cette partie, on reprend les fonctions "Sinus", "Expo", "Poly" et "Gauss" définies respectivement par (1.0.5), (1.0.6), (1.0.7) et (1.0.8). Dans les dessins, on fait apparaître

$$E_N^* = \max_{1 \leq j \leq 1000} \left| \sum_{n=1}^{N+j} f(\mathbf{x}_n) - (N+j) \int_{[0,1]^s} f(\mathbf{t}) d\mathbf{t} \right|$$

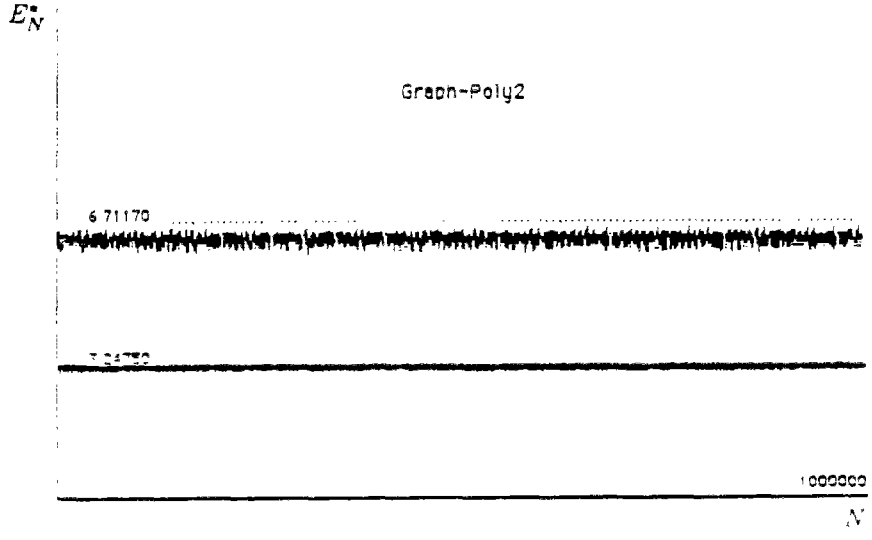
pour N multiple de 10^3, inférieur à 10^6.

Présentation générale des résultats: En dimension2, on observe, pour les 4 fonctions, que E_N^* reste bornée et que les résultats sont meilleurs avec la suite "Racine". Les résultats sont à peu près idendiques en dimension 3.

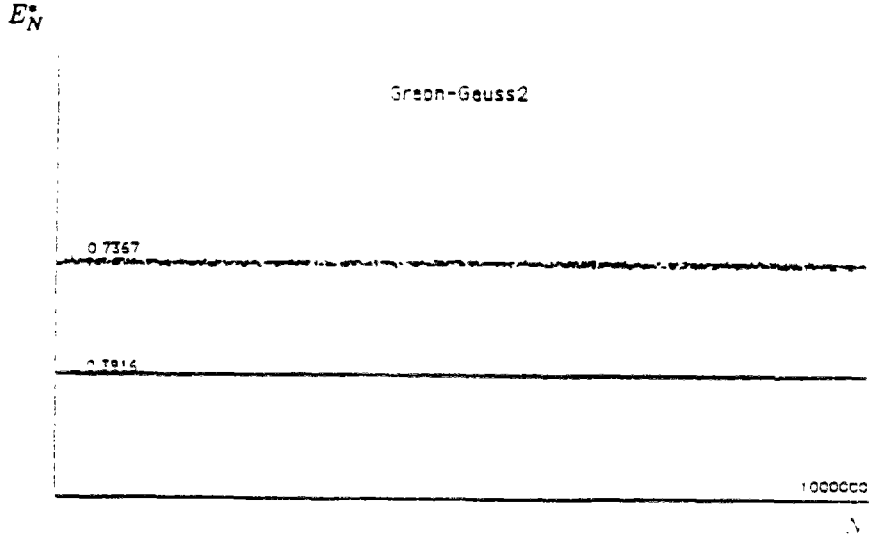




Courbe grisee: Halton Courbe noire: Racine



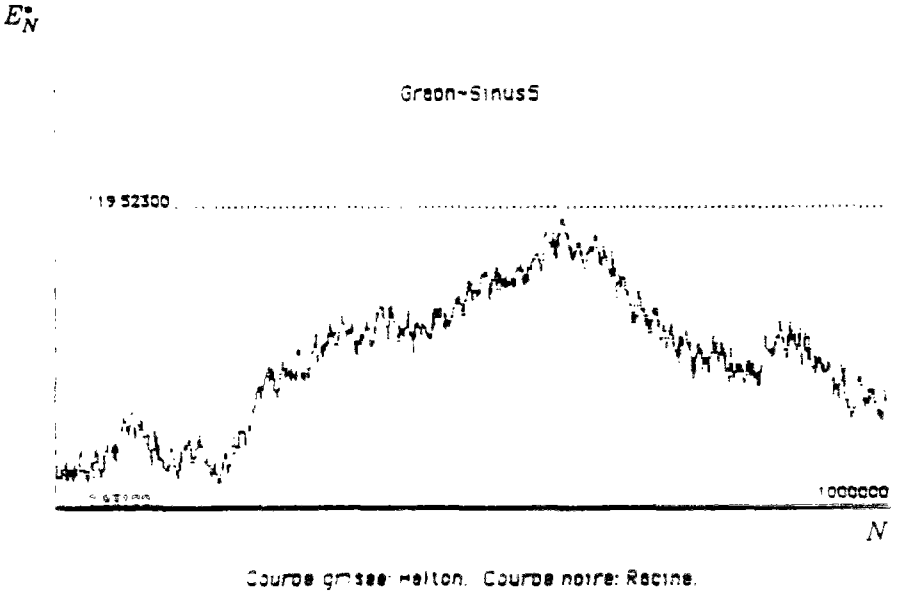
Courbe grisee: Halton. Courbe noire: Racine.



Courbe grisee: Halton Courbe noire: Racine

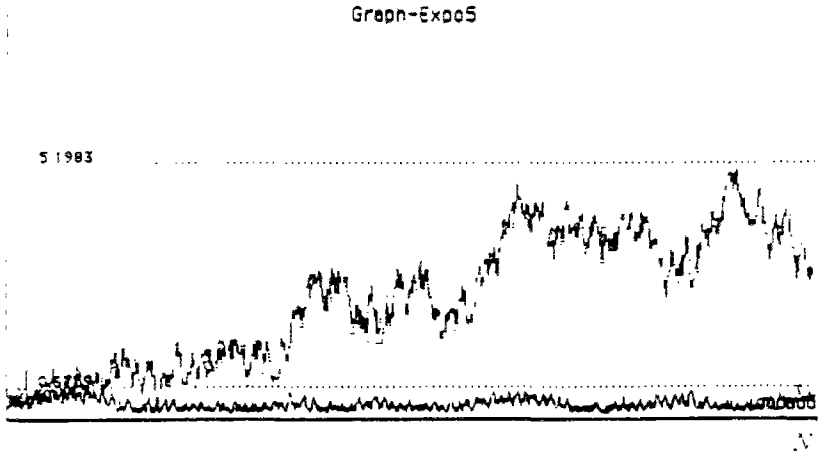
En dimension 5, pour les 4 fonctions, les résultats suggèrent que E_N^* reste borné pour la suite "Racine". Dans le cas des fonctions "Sinus" et "Expo", c'est une simple confirmation du théorème 1.1, le cas des fonctions "Poly" et "Gauss" suggère que le théorème 1.1 est encore vrai sous des hypothèses plus faibles.

Pour la suite de Halton, appliquée aux fonctions "Sinus" et "Expo", on observe un assez bon comportement jusque vers $N = 200.000$, puis de fortes augmentations de E_N^* et de grandes oscillations. Tout ce qu'on peut conclure c'est que même si E_N^* reste bornée, la borne supérieure sera élevée, au moins dans le cas de la fonction "Sinus". Dans ces condition, il est intéressant de tester une vitesse de convergence en $o(\frac{(\log N)^{\frac{d}{2}}}{N})$ (voir tableaux plus loin). On notera que les résultats obtenus pour les fonction "Poly" et "Gauss" donnent plus une impression de bornitude, mais on ne peut évidemment pas dire plus.



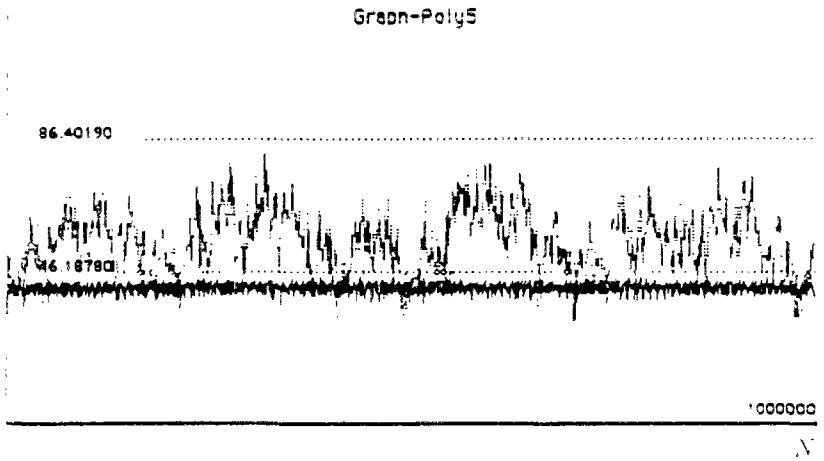
Courbe grisée: Halton. Courbe noire: Racine.

E_N^*



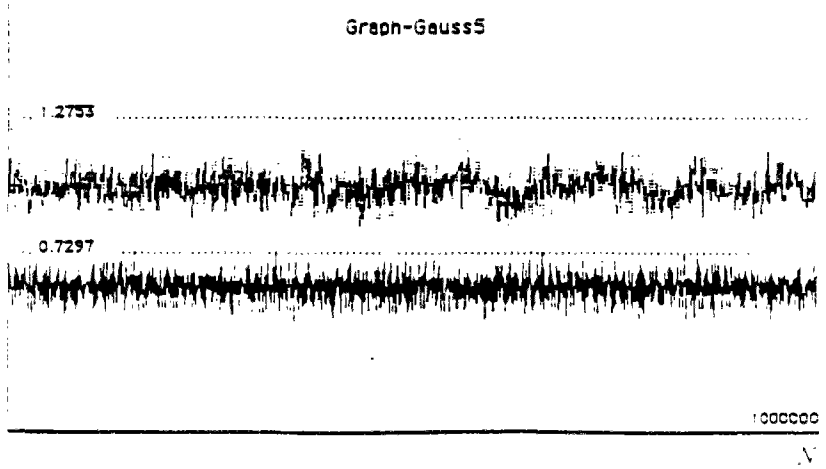
Courbe grisee: Halton. Courbe noire: Racine.

E_N^*



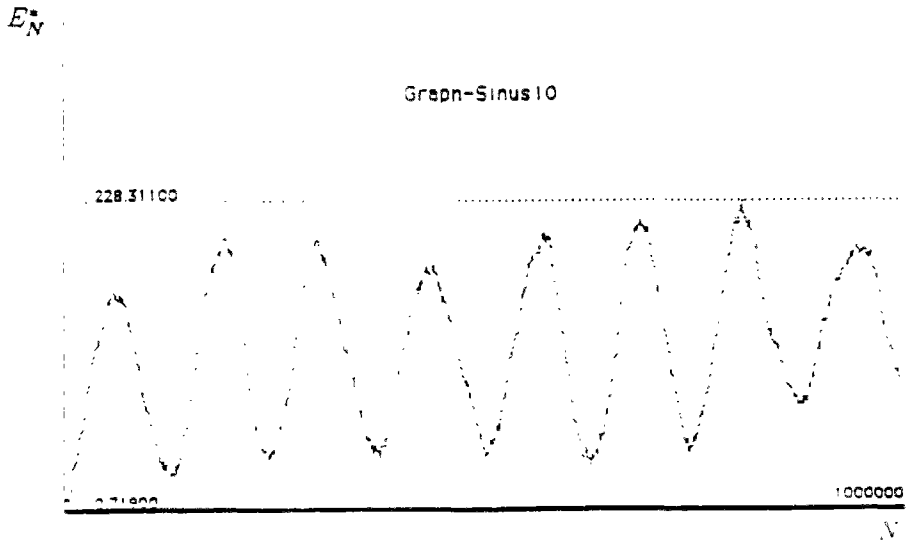
Courbe grisée: Halton. Courbe noire: Racine.

E_N^*

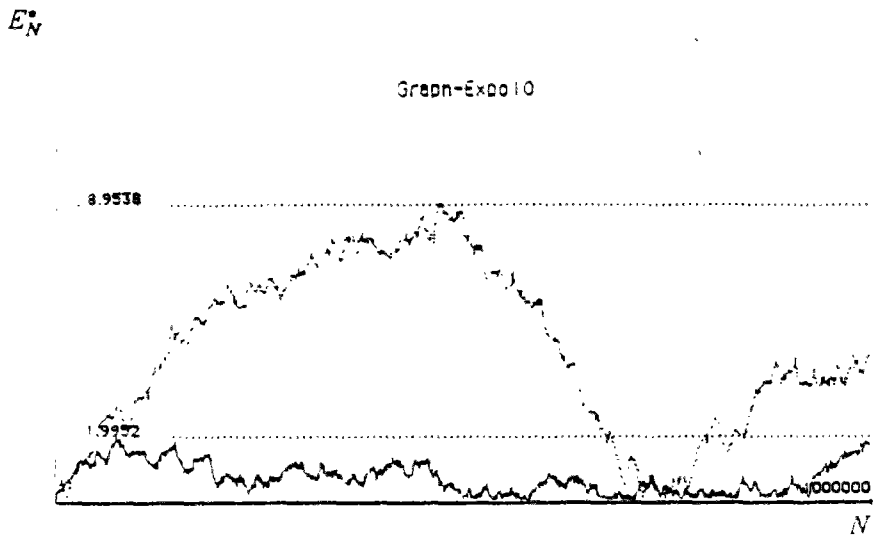


Courbe grisee: Halton. Courbe noire: Racine.

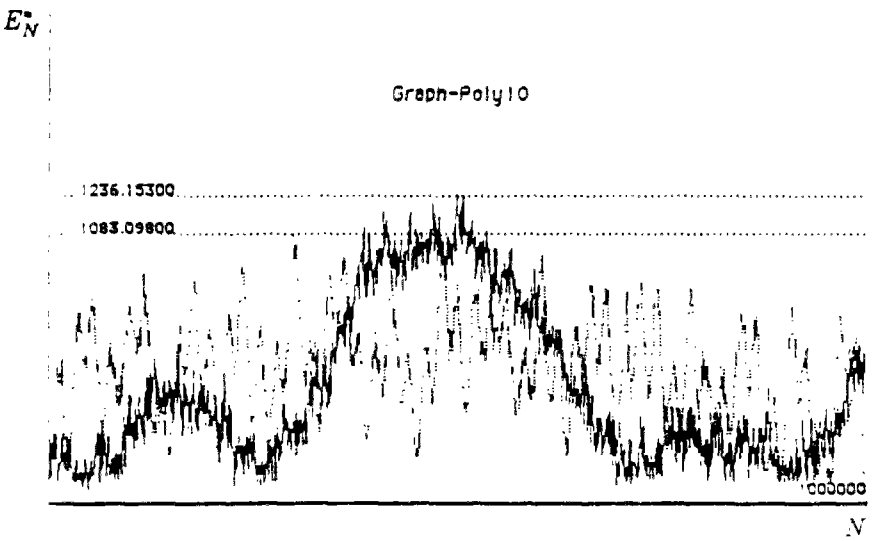
En dimension 10, la bornitude de E_N^* pour les fonctions "Sinus" et "Expo" avec la suite "Racine" est confirmée (cf. théorème 1.1). Mais, pour les fonctions "Poly" et "Gauss", on observe un moins bon comportement de la suite "Racine": grandes oscillations, constante élevée (pour la fonction "Poly"; ce dernier point est dû peut-être à la grande variance de la fonction "Poly" quand la dimension augmente). Sur le Graph-Poly10, on observe qu'au départ la suite "Racine" est meilleure que la suite de Halton (jusque vers N = 200.000), puis la suite "Racine" se comporte moins bien autour de N = 500.000, alors que la suite de Halton reste à peu près au même niveau, avec toujours de grandes oscillations. Pour la fonction "Gauss", les deux suites se comportent à peu près de la même façon.



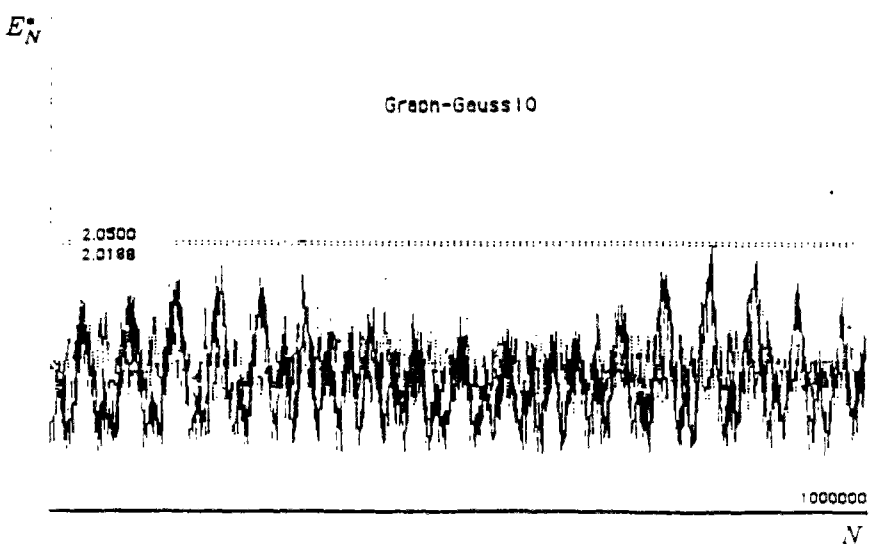
Courbe grise: Halton Courbe noire: Racine.



Courbe grisée: Halton Courbe noire: Racine.



Courbe grisée: Halton. Courbe noire: Racine.

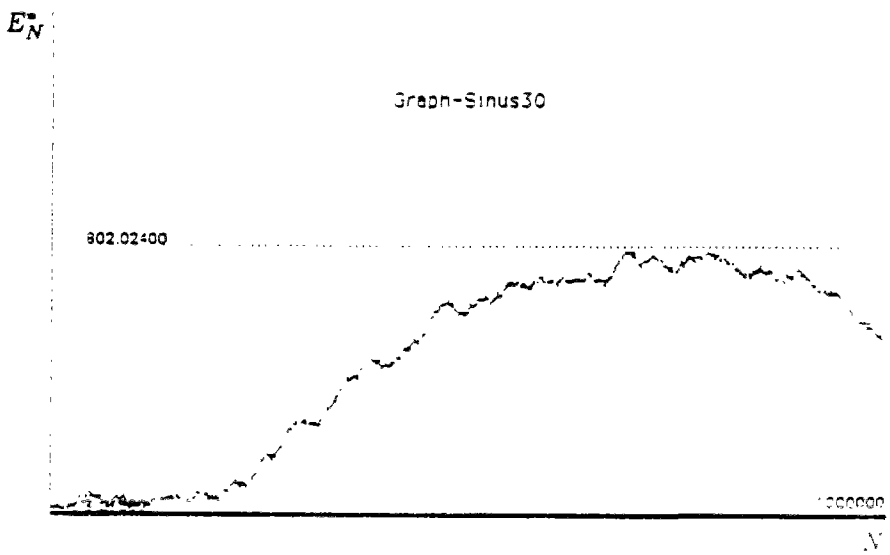


Courbe grisée: Halton. Courbe noire: Racine.

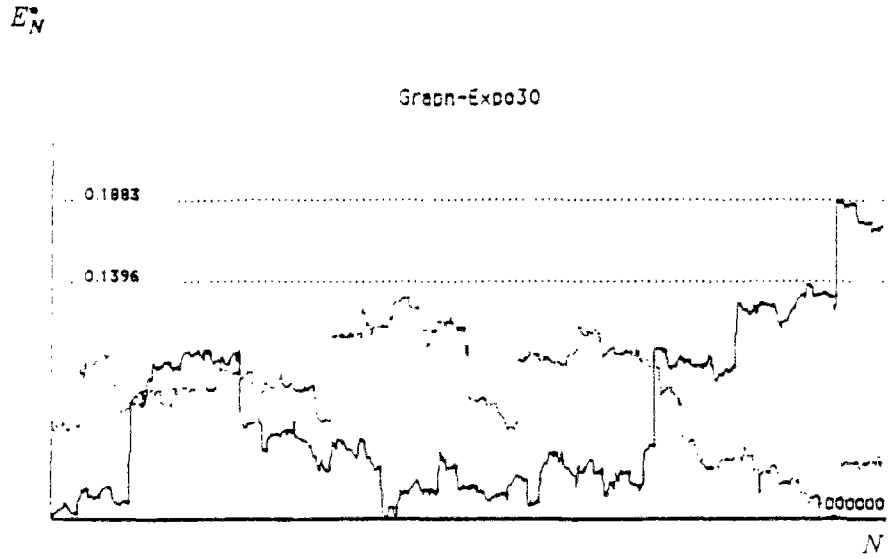
En dimension 30, la bornitude de E_N^* pour la suite "Racine" est confirmé pour les 4 fonctions, pour la fonction "Expo", la suite de Halton donne de meilleurs résultats pour les grandes valeurs de N. La courbe de la suite "Racine" pourrait même nous faire penser que E_N n'est pas borné, contrairement au théorème 1.1.

Pour la fonction "Poly", on observe une très grande valeur de E_N^*, même pour les petites valeurs de N et de faibles variations de E_N^*. C'est dû aux faits suivants: 1) la fonction a une grande variance, 2) prend des valeurs très grandes sur un ensemble de mesure très petite, 3) la suite de Halton prend ses premières valeurs dans cet ensemble. Ceci pourrait être évité en utilisant des suites de Halton mélangées.

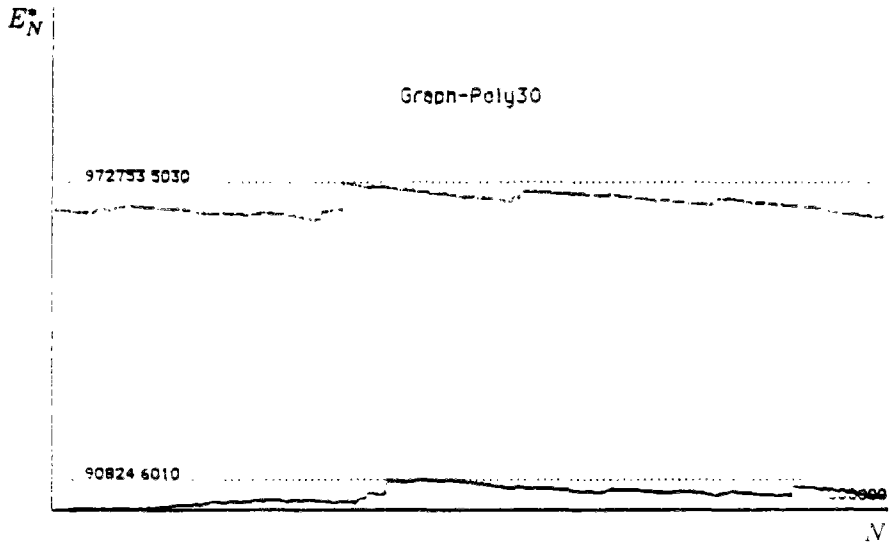
Dans tous les cas, la suite "Racine" est nettement meilleure que la suite de Halton pour $N \leq 10^5$. D'un point de vue pratique, la suite "Racine" paraît donc intéressante.



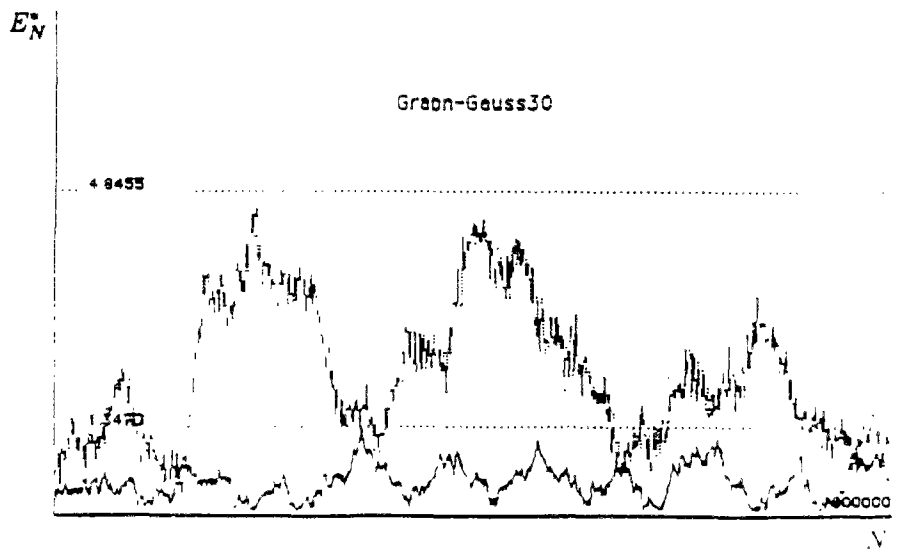
Courbe grisee Halton Courbe noire: Racine.



Courbe grisee: Halton. Courbe noire: Racine.



Courbe grisee: Halton. Courbe noire: Racine.



Courbe grisee: Halton. Courbe noire: Racine.

Dans les tableaux suivants, on fait apparaître les valeurs maximales de E_n et L_n, pour n variant dans les 10 premiers intervalles de longueur 10^5. On considère uniquement les fonctions "Sinus" et "Expo". La convagence en $o(\frac{(\log N)^{\frac{s}{2}}}{N})$ semble confirmée, dans le cas de la fonction "Sinus"; pour la fonction "Expo", c'est beaucoup moins net en dimension 5. Mais pour les dimensions élevées, c'est clair. Cependant, il faut remarquer que quand s augmente $1/(\log N)^{\frac{s}{2}}$ devient très petit et est même négligeable devant $1/\sqrt{N}$ pour N de l'ordre de 10^6 et $s \geq 10$. Pour tester une convergence en $o(\frac{(\log N)^{\frac{s}{2}}}{N})$ en dimension élevé, il faudrait donc atteindre des valeurs de N plus grandes.

SinusNum5

	HALTON		RACINE	
n = nombre de simulations	Max(E_n)	Max(L_n)	Max(E_n)	Max(L_n)
n= 1 à 100000	40.892	0.785	0.813	0.645
n= 100001 à 200000	35.980	0.079	...	0.0018
n= 200001 à 300000	62.687	0.111	...	0.0015
n= 300001 à 400000	81.556	0.136	...	0.0014
n= 400001 à 500000	87.322	0.140	...	0.00139
n= 500001 à 600000	109.397	0.169	...	0.00133
n= 600001 à 700000	119.523	0.184	...	0.00128
n= 700001 à 800000	88.279	0.132	...	0.00125
n= 800001 à 900000	74.524	0.107	...	0.00122
n= 900001 à 1000000	69.279	0.099	...	0.00119

ExpoNum5

	HALTON		RACINE	
n = nombre de simulations	Max(E_n)	Max(L_n)	Max(E_n)	Max(L_n)
n= 1 à 100000	1.221	0.0093	0.675	0.0091
n= 100001 à 200000	1.549	0.0032	0.617	0.0013
n= 200001 à 300000	1.753	0.0032	0.432	0.0008
n= 300001 à 400000	3.055	0.0051	0.557	0.0009
n= 400001 à 500000	3.155	0.0052	0.481	0.0007
n= 500001 à 600000	3.490	0.0054	0.536	0.0008
n= 600001 à 700000	4.773	0.0073	0.602	0.0009
n= 700001 à 800000	4.327	0.0064	0.459	0.0006
n= 800001 à 900000	5.198	0.0074	0.603	0.0008
n= 900001 à 1000000	5.088	0.0073	0.654	0.0009

SinusNum10

	HALTON		RACINE	
n = nombre de simulations	Max(E n)	Max(L n)	Max(E n)	Max(L n)
n= 1 à 100000	161.19	0.1375	0.719	0.4080
n= 100001 à 200000	203.56	0.0007	...	0.0000
n= 200001 à 300000	192.90	0.0007	...	...
n= 300001 à 400000	200.48	0.0006	...	...
n= 400001 à 500000	180.63	0.00048	...	...
n= 500001 à 600000	203.38	0.00049	...	...
n= 600001 à 700000	213.17	0.00048	...	...
n= 700001 à 800000	202.50	0.00045	...	...
n= 800001 à 900000	228.31	0.00048	...	...
n= 900001 à 1000000	194.81	0.00039	...	...

ExpoNum10

	HALTON		RACINE	
n = nombre de simulations	Max(E n)	Max(L n)	Max(E n)	Max(L n)
n= 1 à 100000	3.102	0.002905	1.995	0.000338
n= 100001 à 200000	6.202	0.000023	1.831	0.000007
n= 200001 à 300000	7.043	0.000023	1.255	0.000003
n= 300001 à 400000	8.170	0.000023	1.246	0.000003
n= 400001 à 500000	8.953	0.000023	1.375	0.000003
n= 500001 à 600000	8.764	0.000022	0.634	0.000001
n= 600001 à 700000	5.600	0.000013	0.881	0.000002
n= 700001 à 800000	2.117	0.000004	0.819	0.000001
n= 800001 à 900000	4.263	0.000008	0.823	0.000001
n= 900001 à 1000000	4.403	0.000008	1.829	0.000003

SinusNum30

	HALTON		RACINE	
n = nombre de simulations	Max(E n)	Max(L n)	Max(E n)	Max(L n)
n= 1 à 100000	72.50	0.1975	3.215	0.1411
n= 100001 à 200000	71.19	0.0000	...	0.0000
n= 200001 à 300000	284.63	...	...	...
n= 300001 à 400000	466.15	...	...	...
n= 400001 à 500000	645.82	...	...	...
n= 500001 à 600000	713.09	...	...	...
n= 600001 à 700000	802.02	...	...	...
n= 700001 à 800000	785.02	...	...	...
n= 800001 à 900000	773.24	...	...	...
n= 900001 à 1000000	724.01	...	...	...

ExpoNum30

	HALTON		RACINE	
n = nombre de simulations	Max(E n)	Max(L n)	Max(E n)	Max(L n)
n= 1 à 100000	0.098	0.000002	0.072	0.000000
n= 100001 à 200000	0.079	0.000000	0.099	...
n= 200001 à 300000	0.088	...	0.098	...
n= 300001 à 400000	0.139	...	0.047	...
n= 400001 à 500000	0.130	...	0.039	...
n= 500001 à 600000	0.104	...	0.038	...
n= 600001 à 700000	0.113	...	0.039	...
n= 700001 à 800000	0.099	...	0.100	...
n= 800001 à 900000	0.041	...	0.130	...
n= 900001 à 1000000	0.042	...	0.188	...

Bibliographie

[1] E.BRAATEN and G.WELLER An Improved Low-Discrepancy Sequence for Multidimensional Quasi-Monte Carlo Integration. Journal of computational physics 33, 249-258(1979).

[2] B.L.Fox, ALGORITHM 647: Implementation and Relative Efficiency of Quasirandom sequence Generators. ACM. Transactions on Mathematicd Software, Vol. 12. No.4 12.1986

[3] Hua L-K and Wang Y., Applications of Number Theory to Numerical Analysis. Springer-Verlag (1981).

[4] G.Pagès, Van der Corput sequence, Kakutani transform and one-dimensional numerical integration (en préparation).