Analyse mathématique et numérique de quelques problèmes d'ondes en milieu périodique

Julien Coatléven

▶ **To cite this version:**

Julien Coatléven. Analyse mathématique et numérique de quelques problèmes d'ondes en milieu périodique. Equations aux dérivées partielles [math.AP]. Ecole Polytechnique X, 2011. Français. NNT : . pastel-00649212

HAL Id: pastel-00649212
https://pastel.hal.science/pastel-00649212

Submitted on 7 Dec 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Ecole doctorale de l'École Polytechnique

Thèse

présentée en vue de l'obtention du grade de
Docteur de l'École Polytechnique

« Spécialité : Mathématiques appliquées »

par

Julien Coatléven

Analyse mathématique et numérique de quelques problèmes d'ondes en milieux périodiques

---

Thèse soutenue publiquement le 18 novembre 2011 devant le jury composé de :

M.	François Alouges	Président du jury
M.	Christophe Besse	Rapporteur
M.	Martin Gander	Rapporteur
M.	Xavier Antoine	Examinateur
M.	Eric Cancès	Examinateur
M.	Ricardo Weder	Examinateur
M.	Patrick Joly	Directeur de thèse

Remerciements

À tout lecteur qui s'aventurerait en ces parages, je dis merci de consacrer un peu de temps et d'attention à ce qui m'a occupé pendant ces trois années, et j'espère que la lecture de ce mémoire lui apportera ce qu'il recherche.

Je remercie mon directeur de thèse Patrick Joly, pour m'avoir proposé ce sujet et m'avoir permis de travailler dans ce cadre si agréable. Mais je lui suis surtout reconnaissant pour la grande autonomie et la grande liberté qu'il m'a laissées, témoins de la toute aussi grande confiance qu'il a eu la bienveillance de m'accorder tout au long de ma thèse.

Je remercie également mes deux rapporteurs, Christophe Besse et Martin Gander, pour avoir accepté cette tâche et pour le temps qu'ils y ont consacré, mais surtout pour leur relecture attentive de mon manuscrit et la perspicacité de leur rapport. Je remercie également François Alouges, Xavier Antoine, Eric Cancès et Ricardo Weder de me faire l'honneur d'être membres de mon jury de thèse.

Je remercie ensuite chaleureusement Sonia Fliss, que j'avais eu le plaisir d'avoir comme enseignante à l'Ensta, et qui m'a encadré pendant le stage qui a servi de prélude à cette thèse. Son soutien et ses encouragements réguliers, tout autant que sa bonne humeur permanente, ont beaucoup fait pour m'aider à contrer mon pessimisme naturel.

Je remercie également l'ensemble de l'unité de mathématiques appliquées de l'Ensta et de l'équipe POems, non seulement pour leurs conseils et leur bienveillance pendant ma thèse, mais aussi pour la grande qualité de l'enseignement qu'ils m'ont prodigué durant mon passage à l'Ensta qui a précédé ces trois ans. Ils m'ont permis de retrouver le goût et le plaisir de faire des belles sciences, qui s'étaient quelque peu estompés avant mon entrée dans l'école.

Autour de ce noyau de permanents gravitent quantité de doctorants, dont j'ai eu le plaisir de partager le quotidien. Sans oublier tous les autres et notamment Morgane, Bérangère, Adrien et Alexandre qui nous ont accueillis avec bienveillance, j'ai une pensée particulière pour Juliette et Sébastien, mes compagnons pendant ces trois années parfois difficiles. Retrouver Juliette, avec qui nous nous étions croisés des années plus tôt sans vraiment nous connaître, a été une grande surprise et un grand plaisir, peut-être trop puisqu'il a fallu nous résoudre à ne plus partager le même bureau, tant nous parlions. Je remercie vivement Sébastien, de sa bonne humeur et de son aide informatique si précieuse.

Je tiens à remercier tout mes amis pour leur soutien et leurs conseils pendant ces trois ans. En particulier, je remercie Grégory, pour les nombreux tchats d'encouragement, et pour le courage dont il a fait preuve en relisant ce manuscrit, Thomas, Thibault, Robin, Florian, Jérémie et Laura pour leur soutien, nos discussions passionnées, mais aussi pour nos soirées "sportives" régulières, grandes sources de moral. À tous les autres que je n'ai pas pu voir assez, je promets aussi de me rattraper très vite.

Enfin, je remercie ma famille, pour le soutien et l'affection qu'ils m'ont prodigués depuis toujours, et que j'espère leur prodiguer en retour.

Table des matières

Remerciements **iii**

Introduction **1**

I Problèmes harmoniques en milieux périodiques **9**

1 Méthodes DTN : une approche abstraite du scattering multiple **11**
1.1 Problème modèle . . . 12
1.2 Le cas $\Omega = \mathbb{R}^d$ . . . 15
1.2.1 Méthode DtN pour le cas d'un seul défaut . . . 16
1.2.2 Cas de plusieurs défauts : décomposition de la solution extérieure . . . 19
1.2.3 Cas de plusieurs défauts : factorisation de l'opérateur DtN . . . 25
1.3 Le cas quasi-périodique . . . 27
1.3.1 Méthode DtN pour le cas d'un seul défaut . . . 31
1.3.2 Cas de plusieurs défauts : décomposition de la solution extérieure . . . 32
1.3.3 Cas de plusieurs défauts : factorisation de l'opérateur DtN . . . 39

2 Milieu périodique perturbé **41**
2.1 Méthode LS-DtN en milieu périodique . . . 43
2.1.1 Problème modèle . . . 43
2.1.2 Équation de Lippmann-Schwinger abstraite . . . 45
2.1.3 Détermination de l'opérateur S . . . 49
2.2 Semi-discrétisation dans la variable de Floquet . . . 65
2.2.1 Construction du problème semi-discret . . . 65
2.2.2 Caractère bien posé du problème semi-discret . . . 67
2.2.3 Estimation d'erreur pour l'approximation par quadrature . . . 73
2.3 Le cas de plusieurs défauts linéiques . . . 83
2.3.1 Problème modèle et équation LS . . . 83
2.3.2 Détermination de l'opérateur S . . . 86
2.3.3 Semi-discrétisation dans la variable de Floquet . . . 93
2.3.4 Le cas particulier des défauts bornés . . . 94

3 Milieu périodique perturbé : discrétisation spatiale **99**
3.1 Espaces d'éléments finis sur le guide . . . 100
3.1.1 Espaces d'éléments finis sur le guide . . . 101
3.1.2 Espaces d'èléments finis induits sur les sous-domaines du guide . . . 104
3.1.3 Propriétés des espaces $V_h^r(\xi)$ . . . 105
3.2 Méthode DtN pour les problèmes de guide discrets . . . 108
3.2.1 Problème de guide discret et opérateurs DtN . . . 109
3.2.2 Résolution des problèmes de demi-guide discrets . . . 113

3.3 Analyse de l'équation de Lippmann-Schwinger discrète . . . 120
3.3.1 Réinterprétation de l'équation de Lippmann-Schwinger discrète . . . 122
3.3.2 Estimation d'erreur globale . . . 126
3.4 Le cas de plusieurs défauts linéiques . . . 127
3.4.1 Espace d'éléments finis dans le cas du scattering multiple . . . 127
3.4.2 Problème de guide discret avec plusieurs défauts . . . 130
3.4.3 Le cas particulier des défauts bornés . . . 136
3.5 Résultats numériques . . . 138
3.5.1 Résolution pratique de l'équation quadratique . . . 139
3.5.2 Le cas d'un seul défaut . . . 143
3.5.3 Le cas du scattering multiple . . . 152
3.5.4 Étude de convergence . . . 157
3.5.5 Le cas sans absorption . . . 159

II Problèmes d'évolution en milieux périodiques 163

4 Semi-discrétisation en temps et méthodes DtN 165
4.1 Problèmes d'ordre un en temps . . . 166
4.1.1 Semi-discrétisation en temps . . . 170
4.1.2 Méthode DtN semi-discrète . . . 173
4.1.3 Cas de plusieurs défauts : décomposition de la solution extérieure . . . 180
4.1.4 Cas de plusieurs défauts : décomposition de l'opérateur DtN . . . 185
4.2 Problèmes d'ordre deux en temps . . . 186
4.2.1 Semi-discrétisation en temps . . . 189
4.2.2 Méthode DtN semi-discrète . . . 190
4.2.3 Cas de plusieurs défauts : décomposition de la solution extérieure . . . 193
4.2.4 Cas de plusieurs défauts : décomposition de l'opérateur DtN . . . 197

5 Équations d'évolution dans une bande périodique localement perturbée 201
5.1 Problèmes d'ordre un en temps . . . 202
5.1.1 Problème modèle . . . 202
5.1.2 Résolution des problèmes de demi-guide . . . 206
5.1.3 Le cas du scattering multiple . . . 219
5.2 Problèmes d'ordre deux en temps . . . 226
5.2.1 Problème modèle . . . 227
5.2.2 Résolution des problèmes de demi-guide . . . 229
5.2.3 Le cas du scattering multiple . . . 240

6 Équations d'évolution dans une bande périodique localement perturbée : discrétisation complète 245
6.1 Problèmes d'ordre un en temps discrets . . . 246
6.1.1 Espaces d'éléments finis sur le guide . . . 247
6.1.2 Formulation discrète des problèmes d'ordre un en temps . . . 250
6.1.3 Méthode DtN discrète . . . 257
6.1.4 Résolution des problèmes de demi-guide discrets . . . 262
6.1.5 Le cas du scattering multiple . . . 269
6.1.6 Résultats numériques . . . 276
6.2 Problèmes d'ordre deux en temps discrets . . . 294
6.2.1 Formulation discrète des problèmes d'ordre deux en temps . . . 294
6.2.2 Méthode DtN discrète . . . 301
6.2.3 Résolution des problèmes de demi-guide discrets . . . 304

6.2.4 Le cas du scattering multiple . . . 308
6.2.5 Résultats numériques . . . 311

7 Équations d'évolution dans un milieu périodique perturbé 325
7.1 Problèmes d'ordre un en temps . . . 326
7.1.1 Problème modèle . . . 326
7.1.2 Une formulation de type Lippmann-Schwinger . . . 328
7.1.3 Détermination de l'opérateur S et de la source . . . 332
7.1.4 Semi-discrétisation dans la variable de Floquet . . . 341
7.1.5 Estimation d'erreur pour l'approximation par quadrature . . . 351
7.1.6 Discrétisation spatiale . . . 361
7.1.7 Le cas de plusieurs défauts linéiques . . . 369
7.1.8 Résultats numériques . . . 379
7.2 Problèmes d'ordre deux en temps . . . 390
7.2.1 Problème modèle . . . 390
7.2.2 Formulation de type Lippmann-Schwinger . . . 392
7.2.3 Détermination de l'opérateur S et de la source . . . 394
7.2.4 Semi-discrétisation dans la variable de Floquet . . . 398
7.2.5 Estimation d'erreur pour l'approximation par quadrature . . . 402
7.2.6 Discrétisation spatiale . . . 406
7.2.7 Le cas de plusieurs défauts . . . 411
7.2.8 Résultats numériques . . . 411

Conclusion 417

Annexes 421

A Transformée de Floquet-Bloch des distributions tempérées 421
A.1 La transformée de Floquet-Bloch dans $\mathbb{R}$ . . . 421
A.2 La transformée de Floquet-Bloch dans $\mathbb{R}^d$ . . . 434

B Méthode de décomposition de domaine 439
B.1 Le cas harmonique . . . 439
B.1.1 Principe de l'algorithme de décomposition de domaine . . . 440
B.1.2 Résolution des problèmes de demi-plan . . . 444
B.1.3 Résolution du problème intérieur . . . 445
B.1.4 Analyse de l'équation de transmission . . . 454
B.1.5 Discrétisation de l'équation de transmission . . . 456
B.1.6 Résultats numériques . . . 459
B.2 Le cas temporel . . . 461
B.2.1 Problème modèle . . . 462
B.2.2 Le principe de l'algorithme de décomposition de domaine . . . 463
B.2.3 Résolution des problèmes de demi-plan . . . 466
B.2.4 Résolution du problème intérieur . . . 467
B.2.5 Résolution du problème aux limites non perturbé . . . 469
B.2.6 Analyse de l'équation de transmission . . . 482
B.2.7 Résultats numériques . . . 483

C OPÉRATEURS DTN POUR DES DÉFAUTS BORNÉS DANS LE PLAN POUR DES PROBLÈMES D'ÉVOLUTION 487
C.1 PROBLÈME MODÈLE 487
C.2 CALCUL DES OPÉRATEURS DTN 488
C.3 DÉTERMINATION DES OPÉRATEURS D'EXTENSION 492
C.3.1 Opérateurs d'extension au premier pas de temps 493
C.3.2 Opérateurs d'extension aux pas de temps suivant 495
C.4 QUELQUES CONSIDÉRATIONS PRATIQUES 498

BIBLIOGRAPHIE 504

Introduction

De nombreux problèmes physiques se trouvent être modélisés par des équations aux dérivées partielles posées dans un domaine pour lequel la géométrie ainsi que les coefficients, qui correspondent aux propriétés physiques, sont décrits par des fonctions périodiques, ou des fonctions qui sont périodiques hormis dans certaines régions de taille modeste par rapport au domaine d'intérêt (on parle alors de perturbations pour ces régions). Les matériaux correspondant à ces problèmes ont connu un important regain d'intérêt, de part l'étendue des applications qu'ils autorisent ou permettent d'envisager. C'est tout d'abord le cas en mécanique avec les matériaux à fibres ou composites, assemblage périodique d'au moins deux matériaux "classiques" (on pourra consulter [1], [16] et [53] pour leur modélisation mécanique). Pareille structure procure au matériau final des propriétés qu'aucun des matériaux le constituant ne possède seul, comme une légèreté ou une résistance aux efforts accrue. Ces propriétés expliquent le succès grandissant de ces matériaux dans les domaines de l'aéronautique ou de l'aérospatial. La périodicité ne se rencontre pas seulement à l'échelle macroscopique,

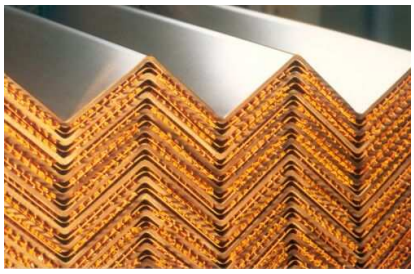


Figure 1 – Exemple de matériau composite

mais également à l'échelle microscopique voire nanométrique, et procure de nouvelles propriétés, électromagnétiques cette fois, aux matériaux qui la possèdent ([56], [76], [50]), autorisant des applications en électronique et en optique. L'exemple le plus célèbre de tels matériaux est sans nul doute constitué par les cristaux photoniques, connus pour posséder des bandes d'énergie (et donc de fréquence) interdites pour les photons. Une telle propriété permet de mettre au point des dispositifs sélectifs en fréquence, et de choisir ainsi les longueurs d'ondes autorisées, ou non, à se propager dans le matériau. Du point de vue mathématique, cette propriété est due à la structure en bande du spectre de l'opérateur différentiel sous-jacent aux phénomènes de propagation (voir [72] pour une introduction au sujet, et [55], [56], [57] pour une présentation plus complète). La présence de bandes interdites est équivalente à la présence de vides entre les bandes dans le spectre. De manière générale, les conditions nécessaires pour l'existence de tels vides ou bandes interdites ne sont pas connues (sauf pour le cas monodimensionnel [13]), mais on peut trouver des exemples de milieux périodiques à fort contraste d'indice où les bandes interdites existent et peuvent être caractérisées ([34] et [35]). D'autres structures à bandes interdites ont été caractérisées au travers d'approches

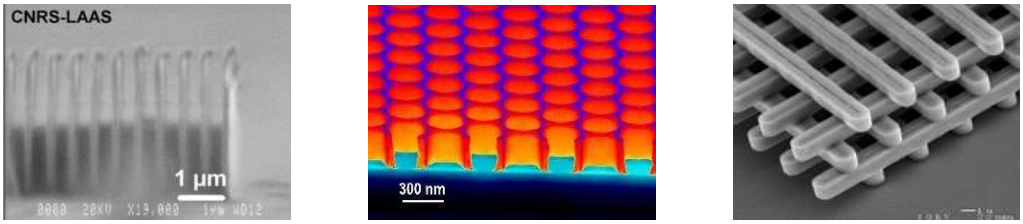


FIGURE 2 – Exemples de cristaux photoniques

numériques ([30]). La sélectivité en fréquence des cristaux en fait des matériaux privilégiés pour la conception de nouveaux dispositifs de télécommunication (antennes) ou de nouveaux composants électroniques (transistors).

Dans la pratique, les matériaux ne sont jamais parfaits, ce qui signifie que la structure n'est en général pas parfaitement périodique. Cela se traduit par exemple par la présence de fissures, de défauts de structure localisés (absence d'une ou plusieurs cellules de périodicité, ou même de véritables canaux de cellules qui forment des défauts linéiques) et plus généralement de divers types de perturbations. Une part de ces défauts est due à une fabrication imparfaite ou à l'usure du matériaux du fait de son utilisation (on pensera en particulier aux applications en aéronautique pour ce cas de figure). Il est primordial d'être en mesure de détecter ce type de défauts, qui peuvent mener à des défaillances. L'approche la plus courante pour résoudre ce type de problème est l'emploi de techniques de contrôle non destructif (CND), qui consistent à utiliser une source, en général d'ondes acoustiques, mécaniques ou électromagnétiques, et à enregistrer la figure de diffraction produite par les défauts. Ces résultats peuvent alors être comparés à des résultats de référence (approche courante en pratique) ou traités par des techniques de la théorie des problèmes inverses (plus précises mais plus complexes) afin de détecter la présence de défauts et même d'en obtenir les caractéristiques. Pour obtenir les figures de référence, comme pour traiter le problème inverse, il est essentiel de savoir traiter le problème direct de diffraction lui-même avec précision, ce qui est l'objectif de cette thèse.

Signalons que les défauts peuvent également être souhaités, et introduits volontairement afin de procurer au matériau des propriétés supplémentaires. En particulier, si l'on parvient à l'aide d'un défaut à créer une fréquence autorisée au sein même d'une bande interdite d'un cristal photonique, cela crée un matériau extrèmement sélectif en fréquence, limitant ainsi énormément les pertes dues à la dispersion dans un guide d'onde par exemple (voir [28] et [29]), ou favorisant l'émission stimulée si l'on cherche à améliorer les performances d'un laser. D'un point de vue mathématique, cela s'explique au moyen de la théorie de la perturbation des opérateurs linéaires (cf [52]), qui nous apprend que pareilles perturbations introduisent des valeurs propres de multiplicité finie au sein des vides dans le spectre (voir [32],[33] et [31]). C'est la raison pour laquelle l'immense majorité des travaux mathématiques concernant les milieux périodiques ont trait à la caractérisation du spectre, des bandes interdites et des éventuels modes de défaut. Les problèmes de diffraction que nous nous proposons de traiter ont comparativement été bien moins souvent abordés.

Les problèmes de diffraction en milieu périodique constituent donc une problématique importante du point de vue applicatif, pour laquelle il est nécessaire de disposer de méthodes numériques efficaces. En règle générale, la taille des perturbations est très modeste par rapport à la taille du milieu périodique, ce qui se traduit souvent par une modélisation comme un défaut de taille unité dans un milieu infini dans au moins une direction. Évidemment, on ne saurait effectuer de simulation numérique directement sur le milieu infini, il est donc essentiel de parvenir à utiliser la périodicité à l'extérieur des perturbations afin de réduire le domaine de résolution à ces perturbations. Ces modèles sont à distinguer des études qui traitent de milieux périodiques perturbés de grande taille, mais bornés, où ce caractère borné est utilisé de façon essentielle ([25], [24], [82], [83] et [81]). L'esprit de l'étude que

nous nous proposons de mener est en effet plus proche de la pléthorique littérature concernant les problèmes de diffraction en milieu homogène, ce qui va bien entendu se retrouver dans l'approche que nous allons suivre.

Problèmes de diffraction

La structure des problèmes de diffraction que nous nous proposons de résoudre est identique à celle des classiques problèmes de diffraction en milieu homogène, à ceci près que le milieu de référence entourant les perturbations n'est plus homogène mais périodique. C'est pourquoi il semble logique d'essayer de s'inspirer des techniques existantes pour ces configurations plus simples lorsque l'on cherche à développer de nouvelles méthodes adaptées aux milieux périodiques. Les diverses approches ayant été étudiées ont toutes en commun le principe que nous avons évoqué plus haut de réduction du domaine de calcul autour du défaut, et diffèrent en général par l'approche suivie pour effectuer en pratique cette réduction.

Une approche relativement récente consiste à entourer le domaine de calcul non par le milieu "réel" que l'on cherche à simuler, mais par une couche absorbante (en pratique d'extension finie) et qui n'induit pas de réflexion parasite à l'interface entre le milieu "réel" et la couche "artificielle" (on parle de couches parfaitement adapées). Cette technique dite des PML (perfectly matched layers), introduite dans [12] s'interprète physiquement par le fait qu'une onde qui pénètre sans réflexion (couche parfaitement adaptée) dans le milieu artificiel va y être suffisamment absorbée pour que la réflexion induite par la troncature du domaine soit d'amplitude négligeable, et donc que pratiquement rien de ce qui entre dans la couche n'en ressorte. On comprend intuitivement pourquoi une telle technique ne peut fonctionner en milieu périodique : les variations du milieu induisant naturellement des réflexions jusqu'à l'infini, une telle couche occulterait toutes ces ondes réfléchies qui jouent pourtant un rôle majeur dans le phénomène de propagation en milieu périodique (en particulier, il est clair que ce sont les interactions destructives entres les diverses ondes, réfléchies ou non, qui sont à l'origine des bandes interdites). Les PML standard ne sont donc pas adaptées au cas des milieux périodiques, mais on signalera tout de même la "Pole condition method", qui peut être vue comme une généralisation de la méthode PML, et offre des perspectives intéressantes en milieu périodique (cf [46] et [47]).

Une autre approche consiste à construire des conditions aux limites artificielles sur le bord du domaine auquel on souhaite réduire les calculs, de sorte que ces conditions miment exactement ou avec une bonne approximation le reste de la dynamique à l'extérieur du domaine de calcul (elles sont pour cela qualifiées de transparentes lorsqu'elles sont exactes par référence au milieu homogène, au sens où elle n'induisent pas de réflexions, et d'absorbantes lorsqu'elles ne sont qu'une approximation). On citera par exemple :

(i) La condition de radiation locale à distance finie ([27], [10])

(ii) Le couplage entre les méthodes volumiques et une représentation intégrale ou la technique des équations intégrales ([49], [60], [45], [48])

(iii) L'approche DtN ou plus généralement les approches basées sur les conditions de transmission, qui nécessitent le calcul exact de l'opérateur de transmission (généralement un opérateur de Dirichlet-to-Neumann) du domaine extérieur

Ces méthodes, développées spécifiquement pour le cas du milieu homogène, sont toutes basées sur une représentation analytique de la solution à l'extérieur du défaut, le plus souvent à l'aide de la fonction de Green du milieu homogène. Elles ne peuvent donc pas être directement étendues au cas d'un milieu périodique général, de telles résolutions analytiques étant impossibles dans ce cas.

Méthodes spécifiques aux milieux périodiques

Un certain nombre d'approches ont été développées pour traiter des équations à coefficients périodiques. La plus célèbre est très certainement la technique d'homogénéisation ([11], [3]). Dans le cas où la taille de la cellule de périodicité est très inférieure à l'échelle de variation des phénomènes d'intérêt (période très inférieure à la longueur d'onde ou à l'échelle de variation des sources et données initiales), cette technique consiste à remplacer le milieu périodique par un milieu homogène équivalent, déterminé à partir de la résolution de problèmes posés sur une cellule de périodicité. Cette théorie est maintenant bien comprise et largement exploitée à des fins numériques. Cependant, une des hypothèses fondamentales de nos modèles sera justement le fait que la taille caractéristique des phénomènes que nous cherchons à modéliser soit du même ordre de grandeur que la période, ce qui nous place hors du cadre d'application des techniques d'homogénéisation.

La technique la plus populaire pour calculer les modes de défauts évoqués plus haut semble être la "supercell method", utilisée (mais il existe bien d'autres méthodes, comme par exemple [9]) afin de calculer les modes de défaut qui sont localisés autour de celui-ci (voir [80] pour une présentation des fondements mathématiques de cette méthode). Les modes localisés, exponentiellement décroissants, permettent d'utiliser un domaine périodique non pas infini mais de grande taille, tout en conservant la convergence de la méthode. Cette méthode présente un certain nombre de similitudes avec l'une des méthodes que nous développons dans ce mémoire, bien que les problèmes étudiés ainsi que la méthode mise en œuvre soient très différents dans leur philosophie.

L'approche la plus importante du point de vue de nos travaux est bien entendue celle de la thèse de Sonia Fliss [37], les présents travaux ayant été originellement initiés comme leur prolongement direct, bien que nous nous en soyons progressivement distingués au cours de nos développements (de par les problèmes que nous avons abordés et les méthodes que nous avons développées). Les travaux de Sonia Fliss avaient pour objet la construction d'opérateurs DtN pour un défaut borné, en milieux périodiques. Les premiers résultats de [37], et sans conteste les plus importants du point de vue de nos travaux, concernent le développement d'une méthode de calcul de ces opérateurs pour l'équation de Helmholtz, dans une géométrie de guide périodique (domaine infini dans une seule direction de périodicité, et borné dans toutes les autres, cf [36] et [39]). Cette méthode tire parti de la périodicité pour ramener le calcul de ces opérateurs à la résolution de problèmes posés sur une cellule de périodicité, et d'une équation quadratique posée sur l'interface entre deux cellules (nous rappelons en détail cette méthode au chapitre 2). Puis, dans [38], on trouve une nouvelle méthode, utilisant les techniques développées pour résoudre les problèmes de guide, et qui a pour but la construction d'opérateurs DtN sur la frontière de défauts bornés plongés dans un milieu périodique infini dans deux directions de périodicité, et borné dans les éventuelles directions supplémentaires. Cette méthode requiert la résolution d'un système (couplé ou non, selon les propriétés de symétrie du problème) d'équations intégrales non classiques. Efficace numériquement dans le cas d'un milieu absorbant, cette méthode pose de difficiles questions d'analyse numérique (principalement dues à la discrétisation de ces équations intégrales non classiques), non encore résolues à ce jour. Bien que nous nous soyons inspirés de ces travaux dans certaines de nos approches initiales, les présents travaux n'utilisent pas cette deuxième approche (hormis la méthode de l'annexe C, chronologiquement la plus ancienne pour le problème concerné).

Présentation de la thèse

Le but originel des présents travaux consistait à étendre les résultats de la thèse de Sonia Fliss [37] à des situations plus complexes, en particulier le cas de plusieurs défauts, c'est-à-dire construire les opérateurs DtN sur ces nouveaux problèmes, mais toujours pour le cas de l'équation de Helmholtz et en se basant sur les opérateurs DtN construits tels qu'ils sont construits dans [38]. Pour cela,

nous avons été amenés à généraliser un certain nombre d'outils typiques du milieu homogène pour pouvoir traiter le problème à plusieurs défauts, dit de "scattering multiple". À l'aide de ces outils nous sommes parvenus à réexprimer les opérateurs DtN correspondant à cette situation complexe à l'aide des opérateurs DtN du cas à un seul défaut. Nous avons ensuite considéré le cas des équations de Maxwell, pour lesquelles nous nous sommes rapidement rendu compte que les résultats de [37] pouvaient être étendus de manière directe, moyennant quelques complications techniques dues au cadre fonctionnel. L'auteur du présent mémoire a alors considéré un nouveau type de problèmes, plus complexes et pour lesquels il était nécessaire de développer de nouveaux outils : les problèmes d'évolution. Le but initial était de traiter l'équation des ondes en milieu périodique, toutefois c'est grâce à une incursion (bibliographique) dans un autre type de problème (l'équation de Schrödinger) que le principe clé de semi-discrétisation préalable à la construction des conditions transparentes nous est apparu. Aussi, nous nous sommes employés à développer pour divers types de problèmes (chaleur, ondes et Schrödinger) les techniques de construction de conditions aux limites transparentes pour les problèmes d'évolution. Nous avons initialement tenté de garder l'esprit des travaux de Sonia Fliss dans notre approche, à savoir nous avons commencé par construire ces conditions aux limites sur des géométries de guide périodique. Une théorie complète (c'est-à-dire y compris l'analyse numérique) a été développée pour ce type de géométrie, déjà très importante du point de vue applicatif. Nous avions alors l'espoir de pouvoir les étendre de la même façon que dans [38] aux problèmes posés dans tout l'espace, dits problèmes de plan. Du point de vue théorique, cette extension est possible, mais elle pose de très importants problèmes pratiques (en particulier elle est déraisonnablement gourmande en mémoire). Nous avons alors tenté une nouvelle approche pour ces problèmes de plan, basée sur la démarche de [69] et qui consiste en une décomposition du domaine de calcul. Cette méthode peut-être vue comme la construction d'opérateurs DtN non plus sur le défaut lui-même, mais sur la frontière d'un domaine non borné le contenant. Cette approche permet alors de traiter le cas de défauts non bornés, aussi nous nous sommes empressés de l'appliquer également sur le problème en régime harmonique (équation de Helmholtz). La mise en œuvre de cette méthode, pour les problèmes d'évolution, s'est avérée possible sans les moyens informatiques exceptionnels qu'aurait nécessité la précédente approche (comprendre une parallélisation obligatoire même pour des problèmes 2D), mais demeurait relativement coûteuse. Une autre difficulté est le fait qu'elle implique la résolution d'une équation intégrale similaire à celle utilisée dans la méthode de [38], et dont on ne sait pas faire l'analyse numérique. L'auteur a alors réalisé qu'il était possible d'utiliser une propriété jusqu'ici négligée de la transformée de Floquet Bloch, à savoir le découplage de la variable physique et de la variable de Floquet lorsque la fonction est à support compact dans l'espace physique, pour mettre au point une méthode différente de résolution des problèmes de plan avec défauts bornés ou non bornés, tant en régime harmonique que pour les problèmes d'évolution. Cette nouvelle méthode baptisée LS-DtN offre l'avantage de ne ne pas être limitée aux défauts bornés contrairement à la méthode de [38], mais surtout il est possible d'en effectuer une analyse numérique complète, avec estimations d'erreur. Enfin, pour les problèmes d'évolution, au delà des considérations théoriques, cette nouvelle méthode présente l'immense avantage par rapport à celles que nous avons explorées au préalable d'être d'un coût parfaitement raisonnable, et très négligeable par rapport au coût des autres méthodes que nous avions imaginées.

Le présent mémoire ne suit pas cette présentation chronologique. Nous avons cherché à présenter de façcon naturelle les méthodes les plus évoluées et efficaces auxquelles nos travaux ont abouti. Cela implique par exemple que nous avons reporté en annexe les approches que nous avons à terme été amenés à abandonner. Leur présentation nous a semblé importante car elles demeurent plus naturelles que les méthodes que nous utilisons au final, et il est important d'expliquer en quoi elles sont moins efficaces. Nous avons ensuite distingué clairement les problèmes en régime harmonique des problèmes d'évolution, chacune de ces deux situations correspondant à l'une des deux grandes parties du mémoire. Ces deux parties sont relativement indépendantes, même si un certain nombre de résultats techniques, utiles tout au long du mémoire, ne sont démontrés que dans la première partie. Nous conseillons toutefois vivement au lecteur de commencer par la première partie, plus simple du fait que toute la machinerie (et les notations) due à l'évolution en temps complexifie beaucoup

la simple écriture des résultats de la deuxième partie. Les principes de base étant très proches dans les deux situations, commencer par le cas harmonique devrait permettre une lecture plus aisée de la deuxième moitié du mémoire.

Le chapitre 1 est consacré à une présentation de la méthode DtN et au développement des outils théoriques nécessaires au traitement des configurations à plusieurs défauts. On y trouvera également une description du cadre fonctionnel que nous devons employer dans la suite. Le chapitre 2 concerne la description de la méthode LS-DtN en milieu périodique et en régime harmonique pour traiter le cas d'un ou plusieurs défauts non bornés. La première partie de l'analyse numérique de cette méthode, à savoir la discrétisation de la variable de Floquet, y est également traitée. Le chapitre 3 est consacré à la discrétisation spatiale et à l'analyse numérique de la version complètement discrétisée des méthodes du chapitre 2. Bien que la discrétisation spatiale soit complètement classique en pratique, l'analyse numérique ne l'est en revanche pas, ce qui explique le fait que nous devions lui consacrer un chapitre entier. Il s'agit d'un chapitre particulièrement technique, aussi le lecteur pourra en première lecture passer directement aux résultats numériques présentés en fin de ce chapitre.

Le chapitre 4 marque le début de la seconde partie du mémoire et est consacré à l'introduction de la technique de semi-discrétisation en temps que nous allons employer. Nous y expliquons ce que devient la problèmatique des conditions aux limites transparentes dans ce contexte, et nous généralisons les outils théoriques du chapitre 1 afin de pouvoir traiter le cas de plusieurs défauts en régime temporel. Le chapitre 5 est consacré à la description de la méthode de calcul des opérateurs DtN pour des guides périodiques, en régime temporel. Cette méthode permet de ramener la détermination de ces opérateurs à la résolution de problèmes de cellules et d'un problème quadratique posé sur l'interface entre deux cellules, puis la résolution à chaque pas de temps d'un problème linéaire posé sur cette même interface. Le chapitre 6 traite de la discrétisation spatiale de la méthode du chapitre 5. Son analyse numérique suit des principes similaires à ceux du chapitre 3. L'une des difficultés principales consiste à expliquer comment obtenir la stabilité (sous CFL) en domaine non borné, ce qui amène à des développements techniques assez longs. Le lecteur pourra une nouvelle fois, en première lecture, uniquement considérer les résultats numériques présents en fin de chacune des deux sections de ce chapitre. Le chapitre 7 explique enfin comment l'on peut développer une méthode LS-DtN pour traiter un ou plusieurs défauts non bornés en régime temporel. Les principes sont similaires à ceux du chapitre 2, mais le traitement de la variable temporelle entraîne une importante complexification des résultats et démonstrations. La discrétisation spatiale, basée sur l'étude du chapitre 6 est incorporée à ce chapitre, ainsi que les divers résultats numériques.

L'annexe A contient les outils nécessaires à l'utilisation de la transformée de Floquet Bloch, qui apparaît de façon récurrente tout au long du mémoire. L'annexe B, assez longue, décrit quant à elle la méthode de décomposition de domaine que nous avons évoquée plus haut, pour le cas harmonique comme pour le cas temporel. L'ensemble des résultats théoriques dont nous disposons y sont démontrés, et nous illustrons sa mise en œuvre par des simulations numériques. Enfin, l'annexe C explique comment, du point de vue théorique, généraliser les idées de [38] aux problèmes d'évolution afin de construire les opérateurs DtN sur la frontière de défauts bornés (soit la première approche évoquée plus haut), ainsi que les raisons pour lesquelles pareille méthode est inutilisable en pratique.

La mise en œuvre des diverses méthodes numériques décrites et analysées dans ce mémoire a nécessité un important travail de programmation, qui a abouti au code nommé simplement `Periodique` (environ 48000 lignes de C++), développé par l'auteur (nous ne nous sommes pas basé sur les programmes `Matlab` issus de la thèse de Sonia Fliss, leur préférant l'efficacité du C++ mais ceci nous obligeant à repartir de zéro ou presque). Ce code permet de traiter l'ensemble des situations évoquées dans ce mémoire (y compris le cas des équations de Maxwell, que nous ne décrivons pas afin de pas trop surcharger ce mémoire et du fait de sa trop grande similarité avec le cas de l'équation de Helmholtz), de façon relativement unifiée. L'ensemble des résultats numériques présentés dans ce mémoire sont issus de cet outil (nous utilisons toutefois `Matlab` et `Paraview` pour offrir une plus

agréable visualisation). Nous donnons plus de détails sur cet outil, dont le développement fut assez long, au chapitre 3, et nous espérons qu'il puisse être réemployé pour de futurs travaux sur les milieux périodiques.

Mentionnons pour terminer une convention typographique qui pourrait perturber le lecteur. Lorsque les démonstrations s'avèrent par trop techniques, elles sont en générale écrites dans une police de taille réduite, afin de mettre en garde le lecteur. Il ne faudra donc pas s'étonner de la présence de deux tailles de police différentes dans les démonstrations.

Articles acceptés et à paraître

[20] J. COATLÉVEN AND P. JOLY, *Operator Factorization for Multiple-Scattering Problems and an Application to Periodic Media*, Communications in Computational Physics

[19] J. COATLÉVEN, *Transparent boundary conditions for evolution equations in infinite periodic strips*, SIAM Journal of Scientific Computing

[18] J. COATLÉVEN, *Helmholtz equation in periodic media with a line defect*, Journal of Computational Physics

Première partie

Problèmes harmoniques en milieux périodiques

Chapitre 1

Méthodes DTN : une approche abstraite du scattering multiple

Résumé. *L'objectif de ce chapitre est de présenter de façon assez générale les méthodes DtN qui nous serviront tout au long de ce mémoire. Nous commençons par introduire l'équation de Helmholtz* (1.4) *qui va nous servir de modèle dans toute cette première partie consacrée aux problèmes harmoniques, dans un contexte complètement générique. Nous supposons seulement que l'on dipose d'un milieu de référence, qui peut être absolument quelconque du point de vue théorique, bien qu'en pratique il soit indispensable, pour pouvoir mener les calculs, que ce milieu possède une structure particulière (par exemple homogène, stratifié, ou le cas qui nous intéressera dans la suite, périodique). Dans une deuxième section nous exposons les principes des méthodes DtN sur le cas simple d'un domaine complètement non borné $\Omega = \mathbb{R}^d$, tout d'abord dans le cas d'un seul défaut (1.2.1) (c'est-à-dire un seul domaine où les propriétés du milieu diffèrent du milieu de référence, ou contient une source). Puis, nous expliquons comment le cas de plusieurs défauts peut s'en déduire, ce qui nous conduit à généraliser à des milieux quelconques les résultats existant en milieu homogène (cf [43] ainsi que [73]) (1.2.2 et 1.2.3). Enfin, dans une dernière section, nous traitons un cas particulier de domaine non borné mais de frontière non vide avec conditions aux limites quasi-périodiques sur celle-ci, situation qui apparaîtra naturellement dans les chapitres suivants lorsque nous traiterons les milieux périodiques. Les sections 2 et 3 sont très proches, les différences étant essentiellement techniques et liées aux conditions quasi-périodiques.*

Dans ce chapitre, nous allons introduire l'équation de Helmholtz qui sera l'équation modèle que nous utiliserons pour traiter des problèmes dits harmoniques en temps, tout au long de cette première partie du mémoire. Cette équation modélise le comportement en temps long de la solution de l'équation des ondes soumise à une excitation harmonique en temps. Nous allons considérer dans ce chapitre un milieu de propagation de référence très général (en particulier non nécessairement périodique, contrairement aux chapitres suivants), sur lequel nous allons présenter la très classique méthode des opérateurs dits de Dirichlet-to-Neumann (DtN), qui permet de réduire la taille des domaines sur lesquels les calculs doivent être menés. Plus précisément, lorsque les perturbations du milieu de référence ainsi que les diverses données sont à support dans un compact fixe, la méthode DtN permet de réduire les calculs à ce domaine borné contenant les perturbations en construisant des conditions aux limites sur son bord qui miment le comportement de la solution dans le domaine que l'on a virtuellement tronqué. Autrement dit, on introduit un bord artificiel, sur lequel les conditions aux limites que l'on impose permettent en quelque sorte à la solution d'ignorer ce bord et de se propager comme s'il n'était pas présent. C'est pourquoi on a l'habitude de qualifier de telles conditions de transparentes.
Lorsque le compact évoqué plus haut possède une seule composante connexe, on parle de problème

de "simple scattering", ce qui peut se traduire par "problème de diffraction par un seul obstacle", par opposition au cas où l'on a plusieurs composantes connexes, auquel cas on parle de problème de "multiple scattering", soit "problème de diffraction par plusieurs obstacles" (voir [65]). Dans le cas du milieu homogène, il est connu que les opérateurs DtN du cas de simple-scattering permettent de reconstruire ceux du cas de scattering multiple (voir [43] ainsi que [73]). Notre premier résultat original va consister à démontrer (de façon constructive) que ce résultat très utile en pratique demeure vrai pour des milieux de propagation très généraux. La deuxième section de ce chapitre, qui établit cette propriété en domaine non borné, correspond à l'article [20].
Si nous avons choisi de faire une présentation séparée et générale de ces méthodes, c'est parce que nous allons fréquemment devoir faire appel aux opérateurs DtN comme intermédiaires de calcul tout au long de ce mémoire. Aussi, nous espérons que cette séparation permettra de clarifier la présentation des méthodes que nous avons developpées pour le cas des milieux périodiques, et qui seront détaillées dans les chapitres suivants.

1.1 Problème modèle

Nous allons considérer tout au long de ce chapitre, et plus généralement dans toute cette première partie, l'équation de Helmholtz posée sur un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^d$. La forme la plus simple de cette équation est :

$$-\Delta u - \omega^2 \rho u = f \quad \text{dans } \Omega \tag{1.1}$$

où

$$-\Delta = -\sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

est l'opérateur Laplacien, ω est la fréquence (réelle) du problème, ρ le milieu de propagation, f une source et u notre inconnue. Il est bien connu que cette équation n'aboutit pas à un problème bien posé sans l'ajout d'une condition supplémentaire. En effet, très formellement, si l'on considère la solution de l'équation des ondes, pour des ρ positifs (ce qui correspond à la plupart des milieux de propagation classiques) :

$$\left| \begin{array}{ll} \rho \dfrac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \Delta U = f e^{-i\omega t} & \text{dans } \Omega \times [0, +\infty[\\ U(\cdot, 0) = 0 & \text{dans } \Omega \\ \dfrac{\partial U}{\partial t}(\cdot, 0) = 0 & \text{dans } \Omega \end{array} \right. \tag{1.2}$$

alors on espère avoir "$U(\cdot, t) \to u(\cdot)e^{-i\omega t}$" quand $t \to +\infty$. Cependant, par ce passage à la limite on perd la notion de conditions initiales, et en quelque sorte (bien que l'équation sans source soit réversible), le sens du temps. C'est ainsi que l'on peut réinterpréter «physiquement» la perte du caractère bien posé par ce passage à la limite. Mathématiquement, résoudre cette équation correspond à inverser l'opérateur :

$$-\frac{1}{\rho}\Delta - \omega^2 I$$

Mais le spectre de $-\rho^{-1}\Delta$ sur $L^2(\Omega)$, Ω non borné, est inclus dans la demi-droite réelle positive, et cet opérateur n'est par conséquent pas inversible. Dans le cas particulier du milieu homogène, le remède consiste à récupérer le sens du temps en imposant aux ondes de s'éloigner des sources, via la célèbre condition de radiation de Sommerfeld (cf [79]), et à se restreindre à des sources compatibles avec cette radiation. Mais, dans le cas des milieux variables, du fait des multiples réflexions subies par l'onde au cours de sa propagation, une telle condition de radiation (sauf cas très particuliers comme les milieux stratifiés à 2 couches) semble pour l'instant échapper à la sagacité générale. Aussi pour donner un sens précis à la notion de solution de cette équation, on se rappelle que le modèle physique

(1.2) de propagation des ondes est en quelque sorte incomplet, puisque l'on a négligé l'atténuation de l'onde par le milieu. Un modèle plus complet serait par conséquent :

$$\left|\begin{array}{ll} \rho\dfrac{\partial^2 U}{\partial t^2}+\varepsilon\rho\dfrac{\partial U}{\partial t}-\Delta U=fe^{-i\omega t} & \text{dans } \Omega\times[0,+\infty[\\ U(\cdot,0)=0 & \text{dans } \Omega \\ \dfrac{\partial U}{\partial t}(\cdot,0)=0 & \text{dans } \Omega \end{array}\right. \tag{1.3}$$

dont la limite formelle en temps long de la forme $u(\cdot)e^{-i\omega t}$ sera a priori solution de (en réinjectant cette forme particulière dans l'équation des ondes avec absorption) :

$$-\Delta u-(\omega^2+i\varepsilon\omega)\rho u=f \quad \text{dans } \Omega \tag{1.4}$$

Cette fois-ci, moyennant des hypothèses raisonnables sur le milieu, la source, et les conditions aux limites sur $\partial\Omega$ (que nous avons volontairement passées sous silence jusqu'ici), nous sommes en présence d'un problème bien posé. Du point de vue physique, l'ajout de l'absorption oblige la solution à s'atténuer en s'éloignant de la source, le milieu absorbant l'énergie au fur et à mesure de la propagation. Cela se traduit mathématiquement par le fait que la solution appartient à un espace de fonctions d'énergie finie (dans notre cas un sous-espace de $H^1(\Omega)$) qui va nous offrir le cadre mathématique adéquat. C'est sur ce problème que nous allons travailler désormais. Précisons maintenant les hypothèses que nous ferons sur les données :

. $f\in L^2(\mathbb{R}^d)$ (H-1)

. ρ appartient à $L^\infty(\mathbb{R}^d;\mathbb{R})$, et $\exists\ \rho_-,\ \rho_+\in\mathbb{R}$ tels que $0<\rho_-\leq\rho\leq\rho_+$ (H-2)

. $\varepsilon>0$ représente comme annoncé le paramètre d'absorption du milieu (H-3)

Nous supposerons ensuite que l'ouvert Ω est lipschitzien (voir par exemple [66] pour une définition précise). On cherchera la solution u dans V qui vérifie :

. $V\subset H^1(\Omega)$, V étant fermé pour la norme $H^1(\Omega)$

On munira V de la norme induite par le produit scalaire H^1, qui en fait un espace de Hilbert, et on désignera par $(\cdot,\cdot)_{L^2(\Omega)}$ le produit scalaire $L^2(\Omega)$, à savoir $\forall\ u,v\in L^2(\Omega)$:

$$(u,v)_{L^2(\Omega)}=\int_\Omega u\overline{v}$$

On désignera de plus par $<\cdot,\cdot>$ le produit de dualité entre $\mathcal{D}(\Omega)$ et son dual, et nous procèderons à la classique identification entre les fonctions $L^1_{loc}(\Omega)$ et les distributions associées. Notre problème modèle complet se réécrira donc de manière générale :

Trouver $u\in V$ tel que

$$-\Delta u-(\omega^2+i\varepsilon\omega)\rho u=f \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega) \tag{1.4}$$

On regroupera notre jeu d'hypothèses (H-1)-(H-3) sous le sigle "hypothèses (H)", par souci de concision. Afin de démontrer le caractère bien posé du problème (1.4), nous aurons besoin du lemme (technique) suivant :

Lemme 1.1. *Si les hypothèses (H) sont satisfaites, alors la forme bilinéaire sur V :*

$$a_\Omega(u,v)=(\nabla u,\nabla v)_{L^2(\Omega)}-(\omega^2+i\varepsilon\omega)\,(\rho u,v)_{L^2(\Omega)}$$

est continue et coercive sur Ω, c'est-à-dire pour tout u, v dans V :

$$|a_\Omega(u,v)| \leq max(1, |\omega^2 + i\varepsilon\omega|\rho_+)||u||_{H^1(\Omega)}||v||_{H^1(\Omega)} \tag{1.5}$$

et

$$|a_\Omega(v,v)| \geq \eta|\omega_\eta| \min(\frac{1}{|\omega_\eta|^2}, \rho_-)||v||^2_{H^1(\Omega)} \tag{1.6}$$

où $\omega_\eta = \widetilde{\omega} + i\eta$ et :

$$\widetilde{\omega} = (\frac{\omega^2 + \sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2\omega^2}}{2})^{1/2} \quad et \quad \eta = \frac{\varepsilon\omega}{2}(\frac{\omega^2 + \sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2\omega^2}}{2})^{-1/2}$$

Démonstration. On démontre aisément la continuité de la forme bilinéaire via l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|a_\Omega(u,v)| \leq ||\nabla u|_{L^2}||\nabla v||_{L^2} + |\omega^2 + i\varepsilon\omega|\rho_+||u||_{L^2}||v||_{L^2} \leq max(1, |\omega^2 + i\varepsilon\omega|\rho_+)||u||_{H^1}||v||_{H^1}$$

On pose alors $\omega_\eta = \widetilde{\omega} + i\eta$ tel que $\omega_\eta^2 = \omega^2 + i\varepsilon\omega$, c'est-à-dire :

$$\widetilde{\omega} = (\frac{\omega^2 + \sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2\omega^2}}{2})^{1/2} \quad \text{et} \quad \eta = \frac{\varepsilon\omega}{2}(\frac{\omega^2 + \sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2\omega^2}}{2})^{-1/2}$$

De plus :

$$\Im\left(\frac{1}{\omega_\eta}(\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla v|^2 - \omega_\eta^2 \int_{\mathbb{R}^2} \rho|v|^2)\right) = \Im\left(\frac{\widetilde{\omega} - i\eta}{|\omega_\eta|^2} \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla v|^2 - (\widetilde{\omega} + i\eta) \int_{\mathbb{R}^2} \rho|v|^2\right)$$

Alors, comme $|z| \geq |\Im(z)|$, on obtient :

$$\left|\frac{1}{\omega_\eta}(\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla v|^2 - \omega_\eta^2 \int_{\mathbb{R}^2} \rho|v|^2)\right| \geq \eta\left(\frac{1}{|\omega_\eta|^2} \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla v|^2 + \rho_- \int_{\mathbb{R}^2} |v|^2\right)$$

et on aboutit finalement à l'inégalité de coercivité :

$$|a_\Omega(v,v)| \geq \eta|\omega_\eta| \min(\frac{1}{|\omega_\eta|^2}, \rho_-)||v||^2_{H^1}$$

□

Ce lemme très simple va nous permettre de démontrer le caractère bien posé de tous les problèmes harmoniques que nous allons rencontrer dans cette première partie. Notre problème modèle sera donc un "bon" problème, et l'unicité (qui disparaîtrait sans l'ajout d'une condition supplémentaire lorsque $\varepsilon = 0$) va nous permettre d'établir rigoureusement les résultats qui vont suivre. La suite de ce chapitre est consacré à la présentation des méthodes DtN ainsi qu'à l'analyse de la situation de scattering multiple sur ce problème modèle. Nous allons particulariser un peu plus notre étude, au sens où nous allons choisir une géométrie précise pour Ω, ainsi que des conditions aux limites bien déterminées, l'objectif étant de couvrir l'ensemble des situations que nous rencontrerons dans ce mémoire. Nous allons commencer par le cas de l'espace libre, évitant ainsi la plupart des difficultés techniques et nous permettant de présenter simplement les principes sous-jacents à ces méthodes. Puis nous considèrerons un cas plus complexe mais dont nous aurons grand besoin dans la suite.

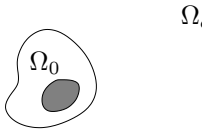


FIGURE 1.1 – Cas $\Omega = \mathbb{R}^2$, Ω_0 avec une seule composante connexe

1.2 Le cas $\Omega = \mathbb{R}^d$

Dans cette section, nous allons pour commencer redémontrer des résultats très classiques sur les opérateurs DtN, et expliquer le principe qui sous-tend ces méthodes, puis nous expliquerons comment passer d'une situation de simple scattering à une situation de scattering multiple. Afin de rendre pertinente l'utilisation de la méthode DtN, au sens où elle va permettre de réduire le problème à un problème équivalent (en un sens à préciser), nous devons faire des hypothèses supplémentaires de structure sur les données. Dorénavant, on supposera l'existence d'un ouvert borné Ω_0 (que nous appelerons indifféremment "défaut" ou "scatterer"), supposé lui aussi lipschitzien, tel que $\Omega_0 \subset \Omega$. Nous appelerons domaine extérieur :

$$\Omega_e = \Omega \setminus \overline{\Omega_0}$$

et nous supposerons de plus que ce domaine Ω_e est lui aussi lipschitzien (ce qui constitue de loin la plus importante restriction parmi nos hypothèses). Cette hypothèse sera aisément vérifiée dans les situations que nous allons traiter (d'autant que comme nous allons le voir, il nous appartient de choisir Ω_0 en pratique). On supposera de plus que :

. *supp* $f \subset \Omega_0$

. On dispose d'un milieu de référence ρ_{ref} tel que *supp* $(\rho - \rho_{ref}) \subset \Omega_0$

Ainsi, on voit que l'on dispose d'une grande latitude dans le choix de Ω_0, même si en pratique, le but sera de le choisir le plus petit possible afin de diminuer au maximum la taille du domaine sur lequel on devra effectivement résoudre les équations (sous-entendu via une résolution numérique). Bien sûr, dans ce contexte un peu abstrait, la notion de milieu de référence signifie seulement que l'on peut trouver une structure intéressante du point de vue des calculs au milieu ρ et dont il ne s'éloigne que dans Ω_0 (par exemple, dans la suite nous aurons ρ_{ref} périodique, mais on pourra penser au cas ρ_{ref} homogène ou stratifié). Le but des méthodes DtN est de restreindre les calculs au domaine Ω_0, en tirant parti de la structure du milieu à l'extérieur pour y parvenir. Nous allons étudier dans la suite deux situations qui vont différer par leur géométries et les conditions aux limites que nous allons imposer. On se place pour commencer dans le cas $\Omega = \mathbb{R}^d$. Il s'agit là de la situation la plus simple du point de vue mathématique, puisque l'on évacue complètement le problème des conditions aux limites. Nous chercherons la solution dans $V = H^1(\mathbb{R}^d)$, et nous commencerons tout naturellement par montrer que le problème modèle est bien posé dans ce cas :

Théorème 1.1. *Sous les hypothèses (H), il existe un unique $u \in H^1(\mathbb{R}^d)$ tel que :*

$$-\Delta u - (\omega^2 + i\varepsilon\omega)\rho u = f \quad \text{dans } \mathbb{R}^d \tag{1.7}$$

qui dépend continûment des données.

Démonstration. La preuve est un exercice très classique de théorie variationnelle, et le résultat une conséquence directe du lemme 1.1. S'il existe une solution u au problème (1.7), alors nécessairement

$u \in H^1(\mathbb{R}^d) \cap H^1(\Delta, \mathbb{R}^d)$. Pour tout $v \in H^1(\mathbb{R}^d)$, on peut donc appliquer la formule de Green et on obtient :

$$a_\Omega(u, v) = (f, v)_{L^2(\mathbb{R}^d)}$$

Il est alors clair que la forme linéaire :

$$l(v) = (f, v)_{L^2}$$

est continue sur $H^1(\mathbb{R}^d)$, puisque l'on a, en vertu de l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$l(v) \leq ||f||_{L^2}||v||_{L^2} \leq ||f||_{L^2}||v||_{H^1}$$

Alors, le lemme 1.1 et le théorème de Lax-Milgram nous permettent de conclure que la forme variationnelle :

Trouver $u \in H^1(\mathbb{R}^d)$ tel que $\forall\ v \in H^1(\mathbb{R}^d)$:

$$a_\Omega(u, v) = l(v)$$

possède une unique solution, ce qui entraîne l'unicité de la solution du problème (1.7). Soit maintenant u la solution du problème variationnel, on a alors $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \subset H^1(\mathbb{R}^d)$:

$$(\nabla u, \nabla v)_{L^2(\mathbb{R}^d)} - (\omega^2 + i\varepsilon\omega)\,(\rho u, v)_{L^2(\mathbb{R}^d)} = (f, v)_{L^2(\mathbb{R}^d)}$$

soit $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$:

$$\begin{aligned} < \nabla u, \nabla \varphi > -(\omega^2 + i\varepsilon\omega) < \rho u, \varphi > &=< f, \varphi > \\ < -\Delta u - (\omega^2 + i\varepsilon\omega)\rho u, \varphi > &=< f, \varphi > \end{aligned}$$

et donc :

$$-\Delta u - (\omega^2 + i\varepsilon\omega)\rho u = f \quad \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$$

Puis, l'identification entre les fonctions $L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ et les distributions associées nous permet de déduire que cette identité a lieu dans $L^2(\mathbb{R}^d)$, et donc $u \in H^1(\mathbb{R}^d) \cap H^1(\Delta, \mathbb{R}^d)$. On a ainsi non seulement montré l'existence d'une solution au problème de départ, mais aussi l'équivalence entre le problème posé au sens des distributions et le problème variationnel. Enfin, de l'inégalité de coercivité et de la continuité de la forme bilinéaire, on déduit que :

$$\eta|\omega_\eta| \min(\frac{1}{|\omega_\eta|^2}, \rho_-)||u||^2_{H^1} \leq ||f||_{L^2}||u||_{H^1}$$

et donc $\exists\ C > 0$ telle que :

$$||u||_{H^1} \leq C||f||_{L^2}$$

soit la continuité par rapport aux données. □

1.2.1 Méthode DtN pour le cas d'un seul défaut

Bien que nous souhaitions restreindre les calculs aux domaine Ω_0, en imposant une condition aux limites adéquate sur sa frontière afin que cela ne modifie pas la solution, il est cependant clair que le phénomène sous-jacent ne se limite pas au domaine Ω_0 et que le milieu extérieur influe sur la solution dans Ω_0, dite intérieure. Aussi il semble raisonnable de commencer par étudier le problème à l'extérieur afin de construire les conditions aux limites recherchées. Rappelons que le domaine Ω_e est ici tout simplement $\Omega_e = \mathbb{R}^d \setminus \overline{\Omega_0}$, de frontière $\partial\Omega_0$. Dans Ω_e, la solution u du problème modèle est encore solution de l'équation de Helmholtz, c'est pourquoi on choisit comme problème extérieur :

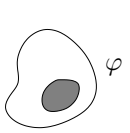


FIGURE 1.2 – Problème extérieur pour le cas $\Omega = \mathbb{R}^2$, Ω_0 avec une seule composante connexe

Pour tout $\varphi \in H^{1/2}(\partial\Omega_0)$, trouver $u_e(\varphi) \in H^1(\Omega_e)$ telle que :

$$\left| \begin{array}{ll} -\Delta u_e(\varphi) - (\omega^2 + i\varepsilon\omega)\rho_{ref} u_e(\varphi) = 0 & \text{dans } \Omega_e \\ u_e(\varphi) = \varphi & \text{sur } \partial\Omega_0 \end{array} \right. \tag{1.8}$$

Naturellement, nous avons encore affaire à un problème bien posé, comme conséquence directe de la coercivité (il suffit de relever la donnée au bord pour se ramener au cas du théoréme 1.1) :

Théorème 1.2. *Sous les hypothèses (H), pour tout $\varphi \in H^{1/2}(\partial\Omega_0)$, il existe une unique solution au problème* (1.8).

La solution du problème modèle (1.7) est bien évidemment solution du problème extérieur associé à la donnée $\varphi = u|_{\partial\Omega_0}$, par unicité de la solution de ce dernier problème, soit :

$$u|_{\partial\Omega_0} = u_e(u|_{\partial\Omega_0})$$

Le principe de la méthode DtN est le suivant : on suppose que l'on est capable de résoudre l'équation de Helmholtz séparément dans Ω_e et Ω_0, et on se demande quelles données (de Dirichlet ou Neumann) utiliser pour chacun de ces problèmes afin que ce que l'on calcule soit la restriction de la solution globale à Ω_e et Ω_0. Puisque l'on cherche une solution dans $H^1(\mathbb{R}^d)$, il est clair que l'on doit utiliser la même donnée de Dirichlet sur $\partial\Omega_0$, afin de ne pas avoir de saut de trace sur $\partial\Omega_0$. Puis, supposons que l'on dispose de u_{int} solution de Helmholtz dans Ω_0, et u_e solution de Helmholtz dans Ω_e. On pose :

$$\widetilde{u} = \left| \begin{array}{ll} u_{int} & \text{dans } \Omega_0 \\ u_e & \text{dans } \Omega_e \end{array} \right.$$

Alors $\forall\, v \in H^1(\mathbb{R}^d)$:

$$\begin{aligned} (-\Delta\widetilde{u}, v)_{L^2(\mathbb{R}^d)} - (\omega^2 + i\varepsilon\omega)\,(\rho\widetilde{u}, v)_{L^2(\mathbb{R}^d)} &= a_\Omega(u, v) \\ &= a_{\Omega_0}(u, v) + a_{\Omega_e}(u, v) \end{aligned}$$

Puis, si ν_e désigne la normale à $\partial\Omega_0$ extérieure à Ω_e et ν_0 désigne la normale à $\partial\Omega_0$ extérieure à Ω_0 :

$$\begin{aligned} (\nabla\widetilde{u}, \nabla v)_{L^2(\Omega_0)} + (\nabla\widetilde{u}, \nabla v)_{L^2(\Omega_e)} &= (-\Delta\widetilde{u}, v)_{L^2(\Omega_0)} + (-\Delta\widetilde{u}, v)_{L^2(\Omega_e)} \\ &\quad + < \frac{\partial u_{int}}{\partial \nu_0}|_{\partial\Omega_0} + \frac{\partial u_e}{\partial \nu_e}|_{\partial\Omega_0}, \overline{v}|_{\partial\Omega_0} > \end{aligned}$$

et donc, en utilisant le fait que :

$$(-\Delta\widetilde{u}, v)_{L^2(\Omega_0)} - (\omega^2 + i\varepsilon\omega)\,(\rho\widetilde{u}, v)_{L^2(\Omega_0)} = 0$$

et

$$(-\Delta\widetilde{u}, v)_{L^2(\Omega_e)} - (\omega^2 + i\varepsilon\omega)\,(\rho\widetilde{u}, v)_{L^2(\Omega_e)} = 0$$

on obtient :

$$(-\Delta\widetilde{u}, v)_{L^2(\mathbb{R}^d)} - (\omega^2 + i\varepsilon\omega)\,(\rho\widetilde{u}, v)_{L^2(\mathbb{R}^d)} = < \frac{\partial u_{int}}{\partial \nu_0}|_{\partial\Omega_0} + \frac{\partial u_e}{\partial \nu_e}|_{\partial\Omega_0}, \overline{v}|_{\partial\Omega_0} >$$

La fonction $\widetilde{u}$ doit donc se raccorder en dérivée normale pour être solution de l'équation de Helmholtz dans tout $\mathbb{R}^d$. Pour formaliser ceci, on introduit l'opérateur de Dirichlet-to-Neumann (DtN) :

$$\begin{array}{rcl} \Lambda_e : H^{1/2}(\partial\Omega_0) & \longrightarrow & H^{-1/2}(\partial\Omega_0) \\ \varphi & \longmapsto & \dfrac{\partial u_e(\varphi)}{\partial \nu_e}|_{\partial\Omega_0} \end{array}$$

La condition transparente consiste alors simplement à imposer comme conditions aux limites :

$$\frac{\partial u}{\partial \nu_0}|_{\partial\Omega_0} + \Lambda_e(u|_{\partial\Omega_0}) = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega_0$$

ce qui nous conduit sans grande surprise au problème intérieur suivant :

Trouver $u_{int} \in H^1(\Omega_0)$ tel que :

$$\left| \begin{array}{ll} -\Delta u_{int} - (\omega^2 + i\varepsilon\omega)\rho u_{int} = f & \text{dans } \Omega_0 \\ \dfrac{\partial u_{int}}{\partial \nu_0}|_{\partial\Omega_0} + \Lambda_e(u_{int}|_{\partial\Omega_0}) = 0 & \text{sur } \partial\Omega_0 \end{array} \right. \tag{1.9}$$

C'est ce dernier problème qui est équivalent au problème initial tout en étant posé en domaine borné. Plus précisément :

Théorème 1.3. *Sous les hypothèses (H), le problème* (1.9) *possède une unique solution, et on a, si* u *est la solution de* (1.7) *:* $u|_{\Omega_0} = u_{int}$.

Démonstration. Il est clair que la restriction $u|_{\Omega_0}$ de la solution u du problème (1.7) est solution de (1.9) par construction. Soit maintenant u_{int} une solution de (1.9) pour $f = 0$. On pose :

$$\widetilde{u} = \left| \begin{array}{ll} u_{int} & \text{dans } \Omega_0 \\ u_e(u_{int}|_{\partial\Omega_0}) & \text{dans } \Omega_e \end{array} \right.$$

Alors $\widetilde{u}$ est solution de l'équation de Helmholtz séparément dans Ω_0 et Ω_e, et se raccorde en trace par construction. Aussi $\widetilde{u} \in H^1(\Omega)$, et de plus $\widetilde{u} \in H^1(\Delta, \Omega_0)$ et $\widetilde{u} \in H^1(\Delta, \Omega_e)$ comme elle est solution de Helmholtz séparément dans Ω_0 et Ω_e et

$$\frac{\partial u_{int}}{\partial \nu_0}|_{\partial\Omega_0} + \Lambda_e(u_{int}|_{\partial\Omega_0}) = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega_0$$

En reprenant le calcul qui nous a permis d'introduire la condition DtN, on obtient :

$$(-\Delta\widetilde{u}, v)_{L^2(\mathbb{R}^d)} - (\omega^2 + i\varepsilon\omega)\,(\rho\widetilde{u}, v)_{L^2(\mathbb{R}^d)} = 0$$

pour tout $v \in H^1(\mathbb{R}^d)$, et donc également au sens des distributions. Alors par unicité de la solution de (1.7), on aboutit à $\widetilde{u} = 0$ puis $u_{int} = 0$, ce qui démontre l'unicité. □

On dispose désormais d'un problème posé en domaine borné, que l'on peut résoudre au moyen d'une méthode numérique adaptée, à condition bien sûr d'être capable de calculer Λ_e et son équivalent numérique.

Remarque 1.1. *Il est à noter qu'il ne s'agit là que d'une manière abstraite de se ramener à un problème posé en domaine borné, puisque la détermination de* Λ_e *passe par la résolution du problème extérieur, qui lui est toujours posé en domaine non borné. Néanmoins, ce problème extérieur ne fait plus intervenir que le milieu de référence* ρ_{ref}*, dont la structure peut permettre soit une résolution analytique (comme en milieu homogène, cf [43] par exemple), soit une résolution numérique (comme en milieu périodique, cf [37] et [38]).*

Remarque 1.2. *Le lecteur aura sans doute remarqué que nous avons précisé dans le titre de cette section que nous considérions le cas d'un seul défaut. Cependant, nous n'avons supposé nulle part que Ω_0 ne devait posséder qu'une seule composante connexe. Aussi, le qualificatif "un seul défaut" tient juste à une question de point de vue, mais cette présentation va nous éviter de devoir répéter les démonstrations qui concernent le caractère bien posé des problèmes intérieurs et extérieurs. Dans la section suivante, nous allons préciser et utiliser la structure de Ω_0, et distinguer clairement le cas du simple scattering et du scattering multiple.*

1.2.2 Cas de plusieurs défauts : décomposition de la solution extérieure

Nous allons désormais considérer explicitement que nous nous trouvons dans une situation de "scattering multiple", c'est-à-dire que l'ouvert Ω_0 est composé de plusieurs composantes connexes. Plus précisément, on suppose qu'il existe (Ω_j), $1 \leq j \leq N_s$, une famille d'ouverts bornés connexes, deux à deux disjoints, tels que $\overline{\Omega_j} \subset \overline{\Omega}$ et :

$$\Omega_0 = \bigcup_{j=1}^{N_s} \Omega_j$$

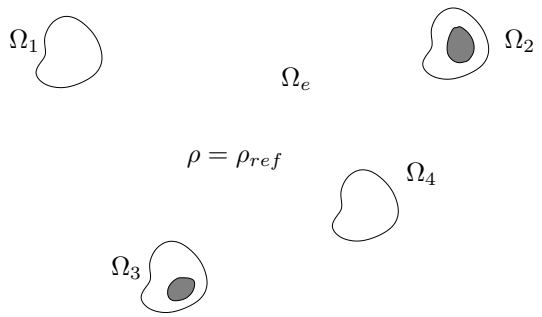


Figure 1.3 – Exemple de géométrie, pour N_s=4

Ainsi, on voit en quel sens pareille configuration peut être qualifiée de "scattering multiple", par opposition au cas $N_s = 1$ de "simple scattering". Bien entendu, les résultats de la section précédente s'appliquent dans ce cas. Notre objectif désormais est d'expliquer comment on peut simplifier le calcul de Λ_e sur Ω_0 dans le cas $N_s > 1$ au sens où l'on va factoriser Λ_e en un produit d'opérateurs construits à partir de problèmes de simple scattering ($N_s = 1$). Le résultat essentiel qui va permettre une telle factorisation est un résultat de décomposition de la solution du problème extérieur à Ω_0 en une somme (unique) de problèmes extérieurs à chaque Ω_j. Un exemple de configuration est donné en figure 1.3. Attelons-nous maintenant à définir précisément ce que nous entendons par décomposition du problème extérieur. Avant tout chose, remarquons que pour tout problème de scattering multiple, comme par exemple la situation à deux défauts de la figure 1.4, il est pratique d'identifier une donnée sur $\partial\Omega_0 = \partial\Omega_e$ au vecteur de ses restrictions à chaque $\partial\Omega_j$. Autrement dit, si φ est une donnée pour le problème extérieur (1.8), on appelera encore $\varphi = (\varphi_j)_{1 \leq j \leq N_s}$ où $\varphi_j = \varphi_{|\partial\Omega_j}$.

Ensuite, on définit le problème de "simple scattering" associé à chacun des défauts Ω_j, qui utilise une donnée sur $\partial\Omega_j$:

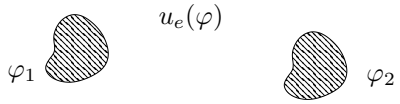


FIGURE 1.4 – Exemple de problème extérieur avec deux défauts

Pour tout $\widetilde{\varphi} \in H^{1/2}(\partial\Omega_j)$, trouver $u_{e,j}(\varphi) \in H^1(\mathbb{R}^d \setminus \overline{\Omega_j})$ tel que :

$$\left| \begin{array}{ll} -\Delta u_{e,j}(\widetilde{\varphi}) - (\omega^2 + i\varepsilon\omega)\rho_{ref} u_{e,j}(\widetilde{\varphi}) = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^d \setminus \overline{\Omega_j} \\ u_{e,j}(\widetilde{\varphi}) = \widetilde{\varphi} & \text{sur } \partial\Omega_j \end{array} \right. \tag{1.10}$$

Ces problèmes, qui ne sont que des cas particuliers de problème (1.8), sont bien posés en vertu du théorème 1.2. Grâce à eux, nous pouvons définir avec précision la signification que nous donnons à une décomposition du problème extérieur. Nous cherchons à savoir, pour tout $\varphi \in H^{1/2}(\partial\Omega_e)$ s'il existe $(\widetilde{\varphi}_j)_j \in \prod_{j=1}^{N_s} H^{1/2}(\partial\Omega_j)$ tels que, dans Ω_e :

$$u_e(\varphi) = \sum_{j=1}^{N_s} u_{e,j}(\widetilde{\varphi}_j) \tag{1.11}$$

autrement dit, si la solution du problème de scattering multiple peut s'écrire comme la superposition de problèmes de simple scattering, ce que l'on illustre sur la figure 1.5. Bien entendu, nous chercherons aussi à savoir si une telle décomposition est unique.

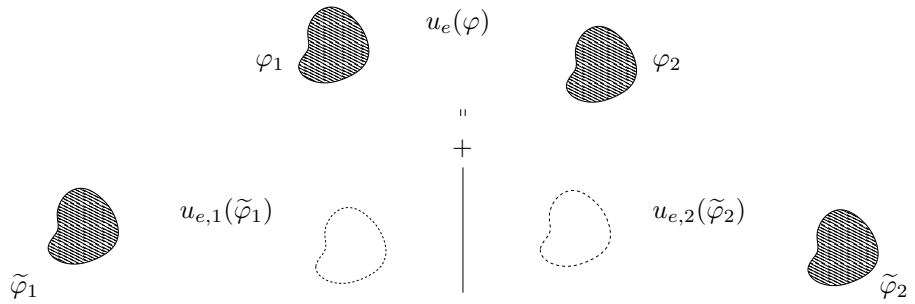


FIGURE 1.5 – Exemple de décomposition avec deux défauts

EXISTENCE D'UNE DÉCOMPOSITION

Dans le cas particulier du milieu homogène, l'existence d'une telle décomposition est un résultat bien connu qui découle très simplement des formules de représentation intégrale (voir [43] ainsi que [73]). Nous allons devoir adopter une approche plus abstraite pour traiter notre situation générale, pour laquelle nous ne disposons pas de pareilles formules explicites. Aussi, les résultats qui vont suivre peuvent être vus comme une généralisation abstraite de ceux de [43] et [73]. La figure 1.5 suggère que pour construire notre décomposition, nous allons devoir examiner la trace de la solution d'un problème extérieur à un seul défaut sur la frontière des autres défauts. Dit autrement, on voit sur la figure 1.5 que nous avons besoin de connaître $u_{e,2}(\widetilde{\varphi}_2)|_{\partial\Omega_1}$ afin de déterminer $\widetilde{\varphi}_1$ et réciproquement. Ceci nous conduit naturellement à introduire de nouveaux opérateurs de propagation afin d'exprimer clairement le lien entre ces traces.

$$\begin{array}{rcl} \Theta_{ij} : H^{1/2}(\partial\Omega_j) & \longrightarrow & H^{1/2}(\partial\Omega_i) \\ \widetilde{\varphi} & \longmapsto & u_{e,j}(\widetilde{\varphi})|_{\partial\Omega_i} \end{array}$$

comme décrit sur la figure 1.6. On remarque que $\Theta_{ii} = I_d(H^{1/2}(\partial\Omega_i))$.

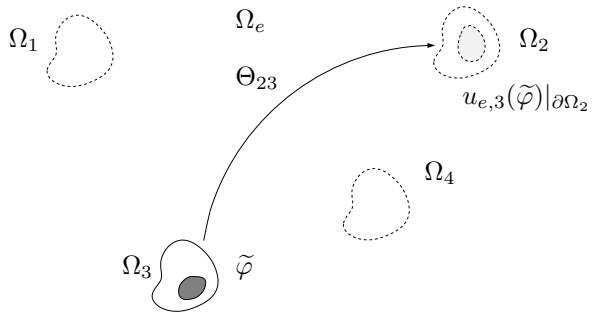


FIGURE 1.6 – L'opérateur Θ_{ij}

On utilise l'identification entre un élément de $H^{1/2}(\partial\Omega_e)$ et le vecteur de ses restrictions à chaque $H^{1/2}(\partial\Omega_j)$ afin de définir l'opérateur suivant :

$$\begin{aligned} \Theta : \prod_{j=1}^{N_s} H^{1/2}(\partial\Omega_j) &\longrightarrow \prod_{i=1}^{N_s} H^{1/2}(\partial\Omega_i) \\ \varphi &\longmapsto \Theta\varphi = \left(\sum_{j=1}^{N_s} \Theta_{ij}\varphi_j \right)_{1\leq i\leq N_s} \end{aligned}$$

On peut alors réécrire Θ sous la forme d'une pseudo-matrice : $\Theta = (\Theta_{ij})_{1\leq i,j\leq N}$.

$$\Theta = \begin{pmatrix} \Theta_{11} & \dots & \Theta_{1i} & \dots & \Theta_{1N_s} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \Theta_{i1} & \dots & \Theta_{ii} & \dots & \Theta_{iN_s} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Theta_{N_s1} & \dots & \Theta_{N_si} & \dots & \Theta_{N_sN_s} \end{pmatrix}$$

Ce nouvel opérateur va s'avérer extrêmement utile pour caractériser notre décomposition. En effet, s'il existe une décomposition :

$$u_e = \sum_{j=1}^{N_s} u_{e,j}(\widetilde{\varphi}_j)$$

alors, en appliquant l'opérateur de trace sur chacun des $\partial\Omega_j$, on obtient :

$$u_e|_{\partial\Omega_i} = \sum_{j=1}^{N_s} u_{e,j}(\widetilde{\varphi}_j)|_{\partial\Omega_i}$$

ce qui peut se réécrire, en utilisant le formalisme des Θ_{ij} :

$$u_e|_{\partial\Omega_i} = \sum_{j=1}^{N_s} \Theta_{ij}\left((u_{e,j}(\widetilde{\varphi}_j)_{\partial\Omega_j}\right)$$

ce qui est aussi, par définition des problèmes extérieurs à un seul défaut (1.10) :

$$u_e|_{\partial\Omega_i} = \sum_{j=1}^{N_s} \Theta_{ij}\widetilde{\varphi}_j$$

Si on désigne par φ le vecteur des traces de u_e, i.e. $\varphi_j = u_e|_{\partial\Omega_j}$, on aboutit à l'équation :

$$\varphi = \Theta\widetilde{\varphi} \tag{1.12}$$

ce qui peut aussi s'écrire :

$$u_e|_{\partial\Omega_e} = \sum_{j=1}^{N_s} u_{e,j}(\widetilde{\varphi}_j)|_{\partial\Omega_e} = \Theta\widetilde{\varphi}$$

Cette relation est la clé qui va nous permettre de démontrer l'existence d'une décomposition, ainsi que d'expliciter le lien fondamental entre les propriétés de l'opérateur Θ et l'existence et l'unicité d'une décomposition :

Théorème 1.4. *L'opérateur :*

$$\Theta : \prod_{j=1}^{N_s} H^{1/2}(\partial\Omega_j) \longrightarrow \prod_{j=1}^{N_s} H^{1/2}(\partial\Omega_j)$$

est inversible si et seulement si la solution du problème extérieur admet une unique décomposition au sens de la relation (1.11) *pour toute donnée $\varphi \in H^{1/2}(\partial\Omega_e)$. Plus précisément :*

(i) Θ surjectif $\Leftrightarrow$ existence d'une décomposition

(ii) Θ injectif $\Leftrightarrow$ unicité de la décomposition

Démonstration.
(i) Θ surjectif $\Rightarrow$ existence d'une décomposition

Soit φ le vecteur des données au bord pour un problème extérieur. Alors comme Θ est surjectif, $\exists$ $\widetilde{\varphi}$ tel que $\varphi = \Theta\widetilde{\varphi}$. On considère alors les $u_{e,j}(\widetilde{\varphi}_j)$, dont la somme est par linéarité solution dans Ω_e du problème extérieur, avec comme donnée au bord

$$\sum_{j=1}^{N_s} u_{e,j}(\widetilde{\varphi}_j)|_{\partial\Omega_e} = \Theta\widetilde{\varphi} = \varphi$$

en vertu de l'équation (1.12). Par unicité de la solution du problème extérieur, on obtient $u_e(\varphi) = \sum_j u_{e,j}(\widetilde{\varphi}_j)$ dans tout Ω_e, ce qui montre l'existence d'une décomposition.

Existence d'une décomposition $\Rightarrow$ Θ surjectif

Soit $\varphi = (\varphi_j)_{1\leq j\leq N}$ un vecteur de $\prod_{j=1}^{N_s} H^{1/2}(\partial\Omega_j)$. Par hypothèse, on sait qu'il existe une décomposition $u_{e,j}(\widetilde{\varphi}_j)$ de $u_e(\varphi)$, solution du problème extérieur pour la donnée φ. Alors en vertu de (1.12), on a $\varphi = \Theta\widetilde{\varphi}$ ce qui démontre la surjectivité.

(ii) Θ injectif $\Rightarrow$ unicité de la décomposition

Soient $u_{e,i}(\widetilde{\varphi}_i)$ et $u_{e,i}(\widetilde{\psi}_i)$ deux décompositions de la même solution extérieure, on obtient $\Theta(\widetilde{\varphi}-\widetilde{\psi}) = 0$ en vertu de l'équation (1.12), d'où l'on déduit $\widetilde{\varphi} = \widetilde{\psi}$ par injectivité de Θ, ce qui démontre l'unicité de la décomposition.

Unicité de la décomposition $\Rightarrow$ Θ injectif

Soit $(\widetilde{\varphi}_j)_{1\leq j\leq N_s}$ tel que $\Theta\widetilde{\varphi} = 0$. On remarque tout d'abord que l'unique solution au problème extérieur avec donnée nulle sur $\partial\Omega_e$ est $u_e(0) = 0$. D'autre part, si on considère $u_{e,j}(\widetilde{\varphi}_j)$, leur somme est solution du même problème extérieur (1.8) que $u_e(0)$, avec, en vertu de (1.12), la donnée au bord

$$\sum_{i=1}^{N_s} u_{e,j}(\widetilde{\varphi}_j)|_{\Omega_e} = \Theta\widetilde{\varphi}$$

c'est-à-dire zéro. Par unicité de la solution du problème extérieur, $\sum_i u_{e,i}(\widetilde{\varphi}_i) = u_e(0)$, donc $u_{e,j}(\widetilde{\varphi}_j)$ est une décompostion de $u_e(0)$. Par unicité de la décomposition, $\widetilde{\varphi} = 0$, ce qui démontre l'injectivité de Θ. □

Ce théorème va être crucial pour établir l'existence d'une décomposition. Son principal intérêt tient au fait qu'il nous permet de réinterpréter les propriétés d'existence et d'unicité de la décomposition comme des propriétés somme toute assez standard pour un opérateur linéaire, et pour lesquelles il va être plus simple d'imaginer une démonstration. De plus, la non-linéarité de la dépendance en chacun des $\partial\Omega_j$ se retrouve totalement "cachée" dans l'opérateur linéaire Θ.

Théorème 1.5. *Pour $i \neq j$, les opérateurs Θ_{ij} sont compacts de $H^{1/2}(\partial\Omega_j)$ vers $H^{1/2}(\partial\Omega_i)$, et l'opérateur Θ est un opérateur de Fredholm d'indice* 0.

Démonstration. C'est une conséquence directe de la définition de Θ_{ij}. Pour φ dans $H^{1/2}(\partial\Omega_j)$, $u_{e,j}(\varphi)$ appartient à $H^2_{loc}(\mathbb{R}^d \setminus \overline{\Omega_j})$ en vertu des résultats classiques de régularité intérieure pour les problèmes elliptiques (cf [66]), donc pour $i \neq j$, sa trace sur $\partial\Omega_i$ possède a minima la régularité $H^{3/2}(\partial\Omega_i)$. Aussi, l'image de Θ_{ij} est incluse dans $H^{3/2}(\partial\Omega_i)$, qui s'injecte de façon compacte dans $H^{1/2}(\partial\Omega_i)$, et par suite Θ_{ij} est compact. Ensuite, on remarque que Θ peut s'écrire $I_d+\mathcal{K}$, avec :

$$\mathcal{K} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \Theta_{1i} & \dots & \Theta_{1N_s} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \Theta_{i1} & \dots & 0 & \dots & \Theta_{iN_s} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Theta_{N_s1} & \dots & \Theta_{N_si} & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

et donc $\mathcal{K}$ est compact en vertu du résultat précédent. Donc Θ est un opérateur de Fredholm d'indice 0. □

Les deux théorèmes 1.4 et 1.5 nous indiquent qu'en vertu de l'alternative de Fredholm, la preuve de l'existence et de l'unicité de la décomposition se réduit à la preuve de l'injectivité de Θ, et en utilisant à nouveau le théorème 1.4, à la preuve de l'unicité de la décomposition. Alors en démontrant l'unicité, nous obtiendrons l'existence sans effort supplémentaire. On voit là le grand apport de notre réinterprétation : la preuve d'unicité va s'avérer relativement aisée, alors qu'une preuve directe d'existence serait bien plus complexe à obtenir dans un cadre aussi général.

Unicité de la décomposition

L'unicité de la décomposition est donnée par le théorème suivant :

Théorème 1.6. *Soit u_e la solution du problème extérieur* (1.8). *S'il existe une décomposition telle que :*

$$u_e \equiv \sum_i \widetilde{u}_i \quad \textit{dans } \Omega_e, \quad \widetilde{u}_i \in H^1(\Omega \setminus \overline{\Omega_i})$$

$$-\Delta\widetilde{u}_i - (\omega^2 + i\varepsilon\omega)\rho_{ref}\widetilde{u}_i = 0 \quad \textit{in } \Omega \setminus \overline{\Omega_i}$$

alors pareille décomposition est unique.

Démonstration. La preuve que nous donnons ici a été fortement inspirée par celle présentée dans [73] pour le cas particulier du milieu homogène. Cependant, nous utiliserons un argument différent pour parvenir à la conclusion finale, ce qui nous permettra d'établir le résultat dans notre situation plus générale. On commence par traiter le cas de deux défauts (nous verrons que le cas de $N_s > 2$ défauts s'en déduit aisément). Soient $\widetilde{v}_1$, $\widetilde{v}_2$ une autre décomposition, et :

$$w_i = \widetilde{u}_i - \widetilde{v}_i \text{ défini dans } \Omega \setminus \overline{\Omega}_i$$

et remarquons ensuite que dans $\Omega \setminus \overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2$, on a :

$$w_1 + w_2 = (\widetilde{u}_1 + \widetilde{u}_2) - (\widetilde{v}_1 + \widetilde{v}_2) = u - u = 0 \quad \text{in } H^1(\Omega \setminus \overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2)$$

En particulier, on a :

$$w_{1|_{\partial\Omega_j}} = -w_{2|_{\partial\Omega_j}} \quad j = 1, 2 \ \ (*)$$

Comme $-\Delta w_i - (\omega^2 + i\varepsilon\omega)\rho_{ref} w_i = 0$ dans $\Omega \setminus \overline{\Omega}_i$, on a de plus $w_i \in H^2(\Omega \setminus \overline{\Omega}_i)$, donc en particulier dans Ω_j, $j \neq i$, comme illustré sur la figure 1.7.

FIGURE 1.7 – Domaine de définition de w_1 et w_2

En d'autres termes, w_1 est régulier au voisinage de $\partial\Omega_2$, on peut donc considérer la trace de sa dérivée normale. Ceci demeure vrai pour w_2 au voisinage de $\partial\Omega_1$. On peut de plus prendre la trace de la dérivée normale de $w_1 + w_2$ comme cette quantité est nulle et par conséquent régulière au voisinage de $\partial\Omega_1$ et $\partial\Omega_2$, et on obtient :

$$\partial_\nu w_1|_{\partial\Omega_j} = -\,\partial_\nu w_2|_{\partial\Omega_j} \quad \text{dans } H^{-1/2}(\partial\Omega_j) \quad j = 1, 2 \ \ (**)$$

Le point clé est le suivant : on considère alors la fonction w définie par : $w = w_1$ dans $\overline{\Omega}_2$ et $w = -w_2$ dans $\Omega \setminus \overline{\Omega}_2$ qui est donc solution de l'équation de Helmholtz séparément dans Ω_2 et

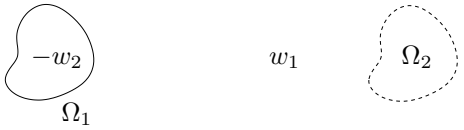


FIGURE 1.8 – La fonction w

$\Omega \setminus \overline{\Omega}_2$, et est continue en valeur $(*)$ et en dérivée normale $(**)$ sur la frontière de Ω_2. Alors, w est solution de l'équation de Helmholtz sans second membre dans le milieu de référence, dans tout Ω. Par unicité, on a donc $w = 0$, et par conséquent $w_2 = 0$ dans $\Omega \setminus \overline{\Omega_2}$. On montre de même que $w_1 = 0$.

Pour N_s défauts, on choisit un w_j particulier et on appelle $\breve{w}_1 = w_j$, $\breve{w}_2 = \sum_{i \neq j} w_i$, et on utilise la preuve ci-dessus pour montrer que $w_j = 0$. On répète ensuite la procédure jusqu'à avoir montré le résultat pour chacun des w_i restants. □

De ce résultat, on déduit l'inversibilité de l'opérateur Θ :

Théorème 1.7. *L'opérateur Θ est inversible de $\displaystyle\prod_{j=1}^{N_s} H^{1/2}(\partial\Omega_j)$ vers $\displaystyle\prod_{j=1}^{N_s} H^{1/2}(\partial\Omega_j)$.*

Démonstration. Le théorème 1.5 nous apprend que l'inversibilité de Θ est régie par l'alternative de Fredholm. De plus, le théorème 1.4 explique que l'injectivité de Θ est équivalente à l'unicité de la décomposition du problème extérieur. Enfin, le théorème 1.6 appliqué à deux décompositions $u_{e,i}(\varphi_i)$ $u_{e,i}(\psi_i)$ montre que $\varphi_i = \psi_i$ et donne l'unicité de la décomposition. En conséquence, Θ est injectif, et donc surjectif et même isomorphique en vertu de l'alternative de Fredholm. □

En conséquence, le théorème 1.4 nous donne le résultat d'existence et d'unicité de la décomposition :

Théorème 1.8. *Pour toute donnée $\varphi \in \prod_{j=1}^{N_s} H^{1/2}(\partial\Omega_j) = H^{1/2}(\partial\Omega_e)$, il existe une unique décomposition de la solution du problème extérieur* (1.8).

Ainsi, résoudre un problème extérieur de "scattering multiple" peut se ramener à la résolution de N_s problèmes de "simple scattering", pour lesquels on est en droit d'espérer que la résolution soit plus simple.

Remarque 1.3. *Pour des problèmes extérieurs à N_s défauts de type* (1.8)*, il est clair que l'opérateur Θ permet de construire un algorithme général de résolution, qui n'utilise que des solutions de problème à un seul défaut :*

- *On résout $\widetilde{\varphi} = (\Theta)^{-1}\varphi$*
- *On résout N_s problèmes extérieurs à un seul défaut, avec donnée $\widetilde{\varphi}$ sur $\partial\Omega_i$.*
- *On fait la somme dans Ω_e des solutions de ces problèmes, et on obtient la solution du problème posé pour N_s défaut.*

Remarque 1.4. *Dans le cas particulier d'un milieu de référence homogène, la solution d'un problème extérieur s'exprime sans peine à partir des formules de représentation intégrale. Si l'on utilise ces formules pour exprimer les Θ_{ij}, il n'est pas difficile de voir que si l'on choisit une méthode itérative de type Gauss-Seidel pour inverser Θ, on retrouve un algorithme de décomposition de domaine présenté dans [8] pour résoudre des problèmes de diffraction par plusieurs obstacles en milieu homogène.*

1.2.3 Cas de plusieurs défauts : factorisation de l'opérateur DtN

Nous allons maintenant expliquer comment le résultat de décomposition que nous venons d'obtenir peut être exploité afin de factoriser l'opérateur Λ_e en un produit d'opérateurs définis à partir de problèmes de simple scattering. Pour cela, on commence par définir les opérateurs DtN $\widetilde{\Lambda}_{ij}$, qui sont le pendant des Θ_{ij} en remplaçant les traces Dirichlet par les traces Neumann, avec ν_i la normale extérieure à $\mathbb{R}^d \setminus \overline{\Omega_i}$:

$$\begin{aligned} \widetilde{\Lambda}_{ij} : H^{1/2}(\partial\Omega_j) &\longrightarrow H^{-1/2}(\partial\Omega_i) \\ \varphi &\longmapsto \partial_{\nu_i} u_{e,j}(\varphi)|_{\partial\Omega_i} \end{aligned}$$

et qui sont à nouveau des opérateurs définis à partir de la solution de problèmes de "simple scattering". En particulier, les $\widetilde{\Lambda}_{ii}$ sont les opérateurs DtN du cas de simple scattering liés à chaque défaut. Considérons à nouveau la solution du problème extérieur à tous les défauts (1.8). On utilise alors notre décomposition (1.12) et on lui applique les opérateurs de trace et de trace normale :

$$u_e(\varphi)|_{\partial\Omega_i} = \sum_{j=1}^{N} u_{e,j}(\widetilde{\varphi}_j)|_{\partial\Omega_i} \quad \text{et} \quad \partial_{\nu_i} u_e(\varphi)|_{\partial\Omega_i} = \sum_{j=1}^{N} \partial_{\nu_i} u_{e,j}(\widetilde{\varphi}_j)|_{\partial\Omega_i}$$

ce qui se réécrit à l'aide des opérateurs Θ_{ij} et $\widetilde{\Lambda}_{ij}$:

$$u_e(\varphi)|_{\partial\Omega_i} = \sum_{j=1}^{N} \Theta_{ij}\left(u_{e,j}(\widetilde{\varphi}_j)|_{\partial\Omega_i}\right) \quad \text{et} \quad \partial_{\nu_i} u_e(\varphi)|_{\partial\Omega_i} = \sum_{j=1}^{N} \widetilde{\Lambda}_{ij}\left(u_{e,j}(\widetilde{\varphi}_j)|_{\partial\Omega_i}\right)$$

Alors en utilisant la définition de Λ_e et le fait que $\varphi_{|\partial\Omega_i} = \varphi_i$, on obtient :

$$\varphi_i = u_e|_{\partial\Omega_i} = \sum_{j=1}^{N} \Theta_{ij}\widetilde{\varphi}_j \quad \text{et} \quad (\Lambda_e\varphi)_i = \partial_{\nu_i} u_e(\varphi)|_{\partial\Omega_i} = \sum_{j=1}^{N} \widetilde{\Lambda}_{ij}\widetilde{\varphi}_j$$

Si on définit $\widetilde{\Lambda}$ de la même façon que Θ, à savoir comme la pseudo-matrice :

$$\begin{aligned} \widetilde{\Lambda} : \prod_{j=1}^{N_s} H^{1/2}(\partial\Omega_j) &\longrightarrow \prod_{i=1}^{N_s} H^{-1/2}(\partial\Omega_i) \\ \varphi &\longmapsto \widetilde{\Lambda}\varphi = \left(\sum_{j=1}^{N_s} \widetilde{\Lambda}_{ij}\varphi_j\right)_{1\le i\le N_s} \end{aligned}$$

alors les deux dernières égalités deviennent, Θ étant inversible en vertu du théorème 1.7 :

$$\Lambda_e\varphi = \widetilde{\Lambda}\Theta^{-1}\varphi \tag{1.13}$$

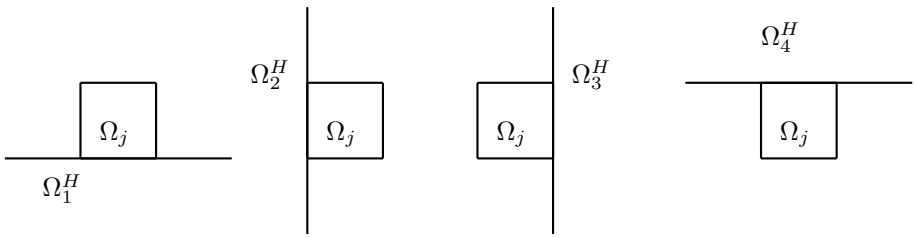
Cette relation implique bien évidemment le résultat suivant :

Théorème 1.9. *Λ_e se factorise en :*

$$\Lambda_e = \widetilde{\Lambda}\Theta^{-1}$$

Il apparaît clair à l'issue de cette section que si l'on est capable de résoudre un problème à un seul défaut dans le milieu de référence, alors résoudre un problème avec plusieurs défauts ne nécessite pas de calculer un nouvel opérateur DtN, mais seulement d'utiliser la solution extérieure pour déterminer les Θ et $\widetilde{\Lambda}$, afin de déduire directement Λ_e. On voit tout de suite le grand intérêt pratique de ce résultat, notamment parce qu'il permet par exemple de ne modifier que légèrement un programme qui traiterait le cas d'un défaut pour passer au cas de plusieurs défauts.

Remarque 1.5. *Nous signalons que ce résultat de factorisation et son implémentation à partir de la méthode de résolution semi-analytique de [38] pour des milieux de référence périodiques dans deux dimensions sont l'objet de [20]. Rappelons succintement en quoi consiste la méthode de [38] : pour de tels milieux, si l'on choisit les Ω_j comme une union carrée de cellules de périodicité, la méthode de [38] repose sur une décomposition de l'espace en quatre demi-plans $(\Omega_k^H)_{1\le k\le 4}$ entourant Ω_j :*



Dans chaque Ω_k^H, on applique la transformée de Floquet-Bloch (cf annexe A) dans la direction de la frontière de Ω_k^H, ce qui transforme le problème initial dans le demi-plan en une famille de problèmes de demi-guide que l'on sait résoudre à partir de problèmes locaux posés dans une cellule de périodicité

(cf chapitre 2 ou [39]). Ceci permet également de reconstruire séquentiellement la solution dans tout $\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega_j}$*, cellule de périodicité par cellule de périodicité, en combinant des problèmes de cellule locaux à la transformée de Floquet-Bloch inverse. De plus, on peut établir un système d'équations intégrales sur la frontière de chaque* Ω_k^H*, et sa solution combinée aux opérateurs DtN de chaque demi-plan nous procure un moyen de calculer l'opérateur DtN correspondant au problème à un seul défaut. Nous illustrons l'emploi de notre méthode de factorisation couplée à la méthode de [38] sur la figure 1.10, où nous avons employé le milieu de la figure 1.9 (les défauts contenant des obstacles avec conditions de Dirichlet homogène sur leur frontière) et une source gaussienne.*

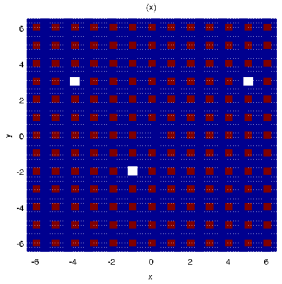


FIGURE 1.9 – Milieu périodique

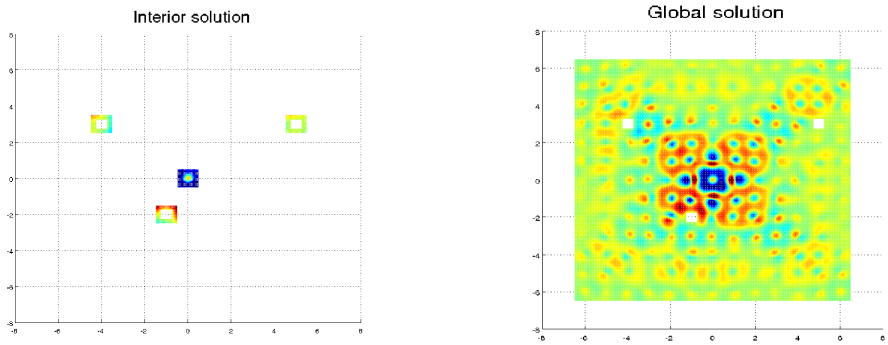


FIGURE 1.10 – Solution intérieure et solution globale pour le milieu constant par morceaux de la figure 1.9, $\omega = 5$ et $\varepsilon = 0.5$

Dans la section suivante, nous allons nous employer à retrouver ces résultats sur un cas plus complexe que le cas $\Omega = \mathbb{R}^d$, et dont nous aurons grand besoin dans les chapitres ultérieurs.

1.3 Le cas quasi-périodique

Nous allons désormais considérer un domaine possédant un bord non vide. Nous allons voir que peu de choses changent par rapport au cas précédent, les différences étant surtout techniques. Essentiellement, la différence tient au fait que nous allons devoir imposer des conditions aux limites sur le bord $\partial\Omega$ de Ω. Bien des choix de conditions aux limites sont possibles pour l'équation de Helmholtz, même parmi les conditions aux limites "essentielles". Afin de ne pas trop multiplier les redémonstrations, nous allons utiliser des conditions aux limites de quasi-périodicité (ce qui impose une certaine restriction sur la forme de $\partial\Omega$). Ce choix peut sembler surprenant, les conditions de Dirichlet homogènes étant a priori l'exemple le plus simple de conditions essentielles, et naturellement un excellent cadre pour un problème modèle. Néanmoins, nous verrons dans la suite que

ces conditions vont apparaître d'elles mêmes dans le cadre des milieux périodiques. En effet, nous allons dans la suite nous intéresser à la résolution d'un problème posé dans $\mathbb{R}^2$, dans un milieu de référence périodique. Nous allons appliquer à ce problème une transformée de Floquet (cf annexe A) dans une direction. Nous verrons que cette opération transforme le problème de plan périodique en une famille de problèmes de guide périodique dans la direction non bornée, et quasi-périodique dans l'autre. Il nous a donc semblé plus judicieux d'introduire dès maintenant ce type de conditions aux limites et de géométrie dont nous aurons besoin dans la suite, d'autant qu'un certain nombre de points techniques doivent être examinés avec précaution dans ce cas particulier. Nous espérons que l'emploi que d'aucuns pourraient juger prématuré de ces conditions et des espaces fonctionnels qui leur sont liés aura l'avantage de familiariser le lecteur avec ces objets.

Afin de pouvoir parler de quasi-périodicité, nous avons a minima besoin que la frontière de $\partial\Omega$ soit composée de deux sous-ensembles disjoints Σ^- et Σ^+ qui soient images l'un de l'autre par une translation. Comme on impose $\partial\Omega = \Sigma^- \cup \Sigma^+$, on a alors nécessairement Σ^- et Σ^+ lipschitziens. Ce cadre très général (et assez imprécis) suffirait pour établir la majorité des résultats qui vont suivre. Néanmoins, nous aurons besoin dans la suite de résultats de régularité jusqu'au bord, et comme nous ne souhaitons pas compliquer à outrance les développements qui vont suivre, nous supposerons que notre frontière a une forme moins générale, qui va nous permettre d'éviter les divers problèmes de singularités qui pourraient survenir, tout en restant suffisamment générale pour traiter nos applications. Nous supposerons donc qu'il existe une fonction $C^{q,1}(\mathbb{R}^{d-1})$, $q \geq 1$:

$$\zeta : \mathbb{R}^{d-1} \to \mathbb{R}$$

telle que, si on note $\boldsymbol{x}' = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{d-1})$ le $d-1$ uplet où on a retiré la deuxième coordonnée, on ait :

$$\Sigma^- = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d \ \mid \ x_d = \zeta(\boldsymbol{x}') \right\}$$

Naturellement, nous poserons :

$$\Sigma^+ = \Sigma^- + L\boldsymbol{e}_d = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d \ \mid \ x_d = \zeta(\boldsymbol{x}') + L \right\}$$

où L est la quasi-période et $\boldsymbol{e}_d$ est le d-ième vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^d$. On remarque bien sûr que Σ^- et Σ^+, s'ils peuvent être bornés comme non bornés dans les directions $\pm\boldsymbol{e_d}$ en tant que sous-ensembles de $\mathbb{R}^d$, sont toujours non bornées dans toutes les autres directions. On posera naturellement :

$$\Omega = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d \ \mid \ \zeta(\boldsymbol{x}') \leq x_d \leq \zeta(\boldsymbol{x}') + L \right\}$$

et on obtient bien $\partial\Omega = \Sigma^- \cup \Sigma^+$ (cf figure 1.11 pour un exemple d'un tel domaine en dimension 2). Un cas particulier important, que nous rencontrerons dans la suite, est le cas où la fonction ζ est périodique, le domaine Ω étant alors lui-même périodique.

Pour les domaines de cette forme, nous pouvons maintenant définir l'espace des fonctions régulières

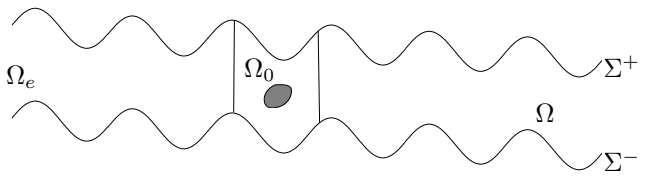


FIGURE 1.11 – Exemple d'ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, Ω_0 avec une seule composante connexe

à décroissance rapide, ξ-quasi-périodiques entre Σ^- et Σ^+ :

$$\mathcal{S}_\xi(\Omega) = \left\{\varphi \in \mathcal{S}(\Omega) \ \mid \ \partial^\alpha_{\boldsymbol{x}}\varphi|_{\Sigma^+} = e^{i\xi L}\partial^\alpha_{\boldsymbol{x}}\varphi|_{\Sigma^-} \ \ \forall\, \alpha = (\alpha_1, \dots \alpha_d) \in \mathbb{N}^d\right\}$$

où :

$$\mathcal{S}(\Omega) = \{\varphi \in C^\infty(\Omega) \ \mid \ |\boldsymbol{x}|^m \partial^\alpha_{\boldsymbol{x}}\varphi(\boldsymbol{x}) \to 0 \quad \text{quand } |\boldsymbol{x}| \to +\infty \ \ \boldsymbol{x} \in \Omega$$
$$\forall\, m \in \mathbb{N} \ \ \forall\, \alpha = (\alpha_1, \dots \alpha_d) \in \mathbb{N}^d\}$$

L'espace des fonctions dans lequel nous chercherons la solution sera naturellement le sous-ensemble des fonctions H^1 qui respectent la quasi-périodicité :

$$H^1_\xi(\Omega) = \overline{\mathcal{S}_\xi(\Omega)}^{H^1}$$

et plus généralement, pour tout $1 \leq m \leq q+1$, on définit :

$$H^m_\xi(\Omega) = \overline{\mathcal{S}_\xi(\Omega)}^{H^m}$$

Bien entendu, pour tout $m \in \mathbb{N}$, l'espace $H^m_\xi(\Omega)$ est un espace de Hilbert séparable pour la norme H^m en tant que sous-espace fermé de $H^m(\Omega)$. Il va nous falloir procéder à un peu d'analyse sur ces espaces, afin d'obtenir leurs principales propriétés, dont nous aurons besoin dans la suite. En particulier, nous aurons besoin d'une caractérisation plus explicite de ces espaces (afin de pouvoir obtenir des résultats de régularité), qui va consister à remplacer le fait d'être limite d'une suite de fonctions régulières quasi-périodiques par une condition sur les traces, exactement comme on le fait pour caractériser H^m_0 comme l'espace des fonctions à trace nulle (nous allons d'ailleurs nous en servir comme intermédiaire dans la démonstration qui va suivre).

Théorème 1.10 (Propriétés des espaces H^m_ξ).

(i) Pour tout $1 \leq m \leq q+1$, si $\zeta \in C^{q,1}$

$$H^m_\xi(\Omega) = \left\{u \in H^m(\Omega) \ \mid \ \partial^\alpha_{\boldsymbol{x}}u|_{\Sigma^+} = e^{i\xi L}\partial^\alpha_{\boldsymbol{x}}u|_{\Sigma^-} \ \ \forall\, \alpha = (\alpha_1, \dots \alpha_d) \in \mathbb{N}^d \ \ |\alpha| \leq m-1\right\}$$

(ii) Pour tout $\mathcal{O} \subset \Omega$ ouvert :

$$H^m_\xi(\mathcal{O}) \stackrel{def}{=} \overline{\mathcal{S}_\xi(\mathcal{O})}^{H^m} = \left\{u|_{\mathcal{O}} \ \mid \ u \in H^m_\xi(\Omega)\right\}$$

Démonstration.

(i) Ce point est quelque peu délicat. On note :

$$\widetilde{H}^m_\xi(\Omega) = \left\{u \in H^m(\Omega) \ \mid \ \partial^\alpha_{\boldsymbol{x}}u|_{\Sigma^+} = e^{i\xi L}\partial^\alpha_{\boldsymbol{x}}u|_{\Sigma^-} \ \ \forall\, \alpha = (\alpha_1, \dots \alpha_d) \in \mathbb{N}^d \ \ |\alpha| \leq m-1\right\}$$

Il est clair par densité et continuité de la trace que pour tout $u \in H^1_\xi(\Omega)$, on a :

$$\partial^\alpha_{\boldsymbol{x}}u|_{\Sigma^+} = e^{i\xi L}\partial^\alpha_{\boldsymbol{x}}u|_{\Sigma^-} \ \ \forall\, \alpha = (\alpha_1, \dots \alpha_d) \in \mathbb{N}^d \ \ |\alpha| \leq m-1$$

ce qui montre que l'on a au moins $H^m_\xi(\Omega) \subset \widetilde{H}^m_\xi(\Omega)$. Il s'agit maintenant de montrer que l'on peut approcher toute fonction de $\widetilde{H}^m_\xi(\Omega)$ par une fonction régulière. Pour cela, considérons une fonction de "cut-off" $\chi \in C^\infty(\Omega)$ telle que :

$$\chi(x,y) = \left| \begin{array}{ll} 1 & \text{pour } \boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}', y) \in \Omega \quad \text{tel que} \quad dist(\boldsymbol{x}, \Sigma^-) < L/4 \\ 0 & \text{pour } \boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}', y) \in \Omega \quad \text{tel que} \quad dist(\boldsymbol{x}, \Sigma^+) < L/4 \end{array} \right.$$

et qui va nous permettre d'extraire la trace de u sur Σ^- de façon simple. On pose alors :

$$u^- = \chi u \quad \text{et} \quad u^+(\boldsymbol{x}', y) = u^-(\boldsymbol{x}', L-y) \quad \text{p.p.}(x,y) \in \Omega$$

de sorte que :

$$u^-|_{\Sigma^+} = 0 \quad u^-|_{\Sigma^-} = u|_{\Sigma^-} \quad \text{et} \quad u^+|_{\Sigma^+} = u|_{\Sigma^-} = e^{-i\xi L}u|_{\Sigma^+} \quad u^+|_{\Sigma^-} = 0$$

Pour tout $u \in \widetilde{H}^m_\xi(\Omega)$, nous pouvons alors définir :

$$\widetilde{u} = u - e^{i\xi L}u^+ - u^-$$

Par construction, $\partial^\alpha_{\boldsymbol{x}}\widetilde{u}|_{\Sigma^\pm} = 0$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$, $|\alpha| \leq m-1$. Alors comme ζ est au moins $C^{m-1,1}$, on sait qu'alors $\widetilde{u} \in H^m_0(\Omega)$ (cf [66] ou [2]). Alors il existe $\theta_n \in \mathcal{D}(\Omega)$ qui converge vers $\widetilde{u}$ en norme H^m. Ensuite, comme $u^- \in H^m(\Omega)$, on sait qu'il existe $\psi^-_n \in \mathcal{S}(\Omega)$ qui converge vers u^- dans $H^m(\Omega)$. Mais alors par construction la fonction $\widetilde{\psi}^+_n(\boldsymbol{x}', y) = \psi^-_n(\boldsymbol{x}', L-y)$ converge vers u^+. Alors la fonction :

$$\varphi_n = \theta_n + e^{i\xi L}\psi^+_n + \psi^-_n$$

est un élément de $\mathcal{S}_\xi(\mathbb{R}^{d-1} \times [0, L])$ et :

$$||\varphi_n - u||_{H^m} \leq ||\theta_n - u + e^{i\xi L}u^+ + u^-||_{H^m} + ||e^{i\xi L}(\psi^+_n - u^+) + \psi^-_n - u^-||_{H^m}$$

tend vers zéro quand n tend vers $+\infty$.

(ii) Pour tout $\mathcal{O} \subset \Omega$ ouvert, il est d'abord clair que :

$$H^m_\xi(\mathcal{O}) \subset \left\{u|_\mathcal{O} \ / \ u \in H^m_\xi(\Omega)\right\}$$

Puis, pour tout $u \in H^m_\xi(\Omega)$, $\exists\ (\varphi_n)_n \in \mathcal{S}_\xi(\Omega)$ telle que $||\varphi_n - u||_{H^m(\Omega)} \to 0$ quand $n \to +\infty$, on a donc également :

$$||\varphi_n|_\mathcal{O} - u|_\mathcal{O}||_{H^m(\mathcal{O})} \to 0$$

et comme bien évidemment $\varphi_n|_\mathcal{O} \in \mathcal{S}_\xi(\mathcal{O})$, on aboutit à :

$$\left\{u|_\mathcal{O} \ / \ u \in H^m_\xi(\mathcal{O})\right\} \subset H^m_\xi(\mathcal{O})$$

□

Les relations de quasi-périodicité entre les traces justifient le nom de fonctions quasi-périodiques. Dans ce cadre hilbertien, il est clair que l'on obtient sans peine l'existence et l'unicité de la solution du problème modèle via le théorème de Lax-Milgram :

Théorème 1.11. *Sous les hypothèses (H), il existe un unique $u \in H^1_\xi(\Omega)$ tel que :*

$$\left|\begin{array}{ll} -\Delta u - (\omega^2 + i\varepsilon\omega)\rho u = f & \text{dans } \Omega \\ \partial_{\nu^+}u|_{\Sigma^+} + e^{i\xi L}\partial_{\nu^-}u|_{\Sigma^-} = 0 & \end{array}\right. \tag{1.14}$$

qui dépend continûment des données, i.e il existe $C > 0$ indépendante de ξ telle que :

$$||u||_{H^1(\Omega)} \leq C||f||_{L^2(\Omega)} \tag{1.15}$$

Démonstration. La seule différence notable avec la preuve du théorème 1.1 tient aux conditions quasi-périodiques. On commence à nouveau par montrer, via la formule de Green, que toute solution du problème (1.14) est solution d'un problème variationnel bien posé. En effet $\forall\ v \in H^1_\xi(\Omega)$, comme $u \in H^1(\Delta, \Omega)$:

$$(-\Delta u, v)_{L^2(\mathbb{R}^d)} - (\omega^2 + i\varepsilon\omega)\,(\rho_{ref}u, v)_{L^2(\mathbb{R}^d)} = 0$$

d'où :

$$\begin{aligned}(\nabla u, \nabla v)_{L^2(\mathbb{R}^d)} - (\omega^2 + i\varepsilon\omega)\,(\rho_{ref}u, v)_{L^2(\mathbb{R}^d)} &= (f, v)_{L^2(\mathbb{R}^d)} \\ - <\partial_{\nu^+}u|_{\Sigma^+}, \overline{v}|_{\Sigma^+}> - <\partial_{\nu^-}u|_{\Sigma^-}, \overline{v}|_{\Sigma^-}> &= 0\end{aligned}$$

Mais, en vertu des conditions quasi-périodiques :

$$\begin{aligned}&<\partial_{\nu^+}u|_{\Sigma^+}, \overline{v}|_{\Sigma^+}> + <\partial_{\nu^-}u|_{\Sigma^-}, \overline{v}|_{\Sigma^-}> \\ =&<\partial_{\nu^+}u|_{\Sigma^+} + e^{i\xi L}\partial_{\nu^-}u|_{\Sigma^-}, \overline{v}|_{\Sigma^+}> = 0\end{aligned}$$

et on aboutit finalement au problème variationnel : trouver $u \in H^1_\xi(\Omega)$ tel que pour tout $v \in H^1_\xi(\Omega)$

$$a_\Omega(u, v) = (f, v)_{L^2(\Omega)}$$

Alors il est clair que l'on peut reproduire la démonstration du théorème 1.1, qui va nous donner l'existence et l'unicité pour cette formulation variationnelle, équivalent au problème initial. La continuité par rapport aux données suit alors de la formulation variationnelle, exactement comme dans la démonstration du théorème 1.1, et il est clair que la constante que l'on trouve ainsi, qui dépend uniquement de la constante de coercivité de la forme bilinéaire, ne dépend pas de ξ.

□

1.3.1 Méthode DtN pour le cas d'un seul défaut

On va maintenant définir le problème extérieur dans ce contexte. On notera :

$$\Gamma_0 = \partial\Omega_0 \setminus \overline{\partial\Omega \cap \partial\Omega_e}$$

la partie du bord de Ω_e qui n'est pas incluse dans $\partial\Omega$ et par conséquent sur laquelle les éléments de $H^1_\xi(\Omega)$ peuvent avoir une trace non nulle ou non quasi-périodique. L'espace des traces sur Γ_0 sera noté :

$$H^{1/2}_\xi(\Gamma_0) = \left\{u|_{\Gamma_0} \ \middle| \ u \in H^1_\xi(\Omega)\right\} \subset H^{1/2}(\Gamma_0)$$

On munira $H^{1/2}_\xi(\Gamma_0)$ de la norme suivante :

$$||u||_{H^{1/2}_\xi(\Gamma_0)} = \inf_{U\in H^1_\xi(\Omega) \ | \ U|_{\Gamma_0}=u} ||U||_{H^1(\Omega)}$$

Plus généralement (et nous en aurons besoin pour obtenir de la compacité nécessaire pour traiter le cas du scattering multiple), on définit l'espace des traces des fonctions de $H^m_\xi(\Omega)$ par :

$$H^{m-1/2}_\xi(\Gamma_0) = \left\{u|_{\Gamma_0} \ \middle| \ u \in H^m_\xi(\Omega)\right\} \subset H^{m-1/2}(\Gamma_0)$$

muni de la norme :

$$||u||_{H^{m-1/2}_\xi(\Gamma_0)} = \inf_{U\in H^m_\xi(\Omega) \ | \ U|_{\Gamma_0}=u} ||U||_{H^m(\Omega)}$$

Malheureusement, dès que $\partial\Omega_0 \cap \Sigma^+ \neq \emptyset$ et $\partial\Omega_0 \cap \Sigma^- \neq \emptyset$, ce qui sera le cas en pratique (et nous supposerons implicitement que c'est le cas dans la suite) l'espace $H^{1/2}_\xi(\Gamma_0)$ n'est pas, comme nous le verrons plus loin, (sauf si bien sûr $\partial\Omega$ est vide) un sous-espace fermé de $H^{1/2}(\Gamma_0)$, (il s'agit du même type de difficulté que pour l'espace $H^{1/2}_{00}$, cf [61] par exemple). C'est l'une des raisons pour lesquelles le cas des fonctions quasi-péridioques mérite d'être traité avec précaution, puisque nous aurons notamment besoin de vérifier que les résultats usuels de régularité et de compacité restent valides pour les espaces de trace quasi-périodiques.

La frontière de Ω_e comporte alors trois parties : $\partial\Omega_e \cap \Sigma^+$, $\partial\Omega_e \cap \Sigma^-$ et Γ_0. On définit deux espaces sur Ω_e :

$$H^1_\xi(\Omega_e) = \overline{\mathcal{S}_\xi(\Omega_e)}^{H^1} = \left\{u|_{\Omega_e} \ \middle| \ u \in H^1_\xi(\Omega)\right\}$$

et le sous-espace des fonctions à trace nulle sur Γ_0 :

$$H^1_{\xi,0}(\Omega_e) = \left\{u \in H^1_\xi(\Omega_e) \ \middle| \ u|_{\Gamma_0} = 0\right\}$$

qui est bien entendu un sous-espace fermé de $H^1_\xi(\Omega_e)$ (en tant qu'image réciproque d'un fermé par l'application trace sur Γ_0, qui est continue), et reste donc un espace de Hilbert pour la norme H^1. Dans ce contexte, le problème extérieur s'écrit :

Pour tout $\varphi \in H^{1/2}_\xi(\Gamma_0)$, trouver $u_e(\varphi) \in H^1_\xi(\Omega_e)$ tel que :

$$\left|\begin{array}{ll} -\Delta u_e(\varphi) - (\omega^2 + i\varepsilon\omega)\rho u_e(\varphi) = 0 & \text{dans } \Omega_e \\ \partial_{\nu^+} u_e(\varphi)|_{\partial\Omega_e\cap\Sigma^+} + e^{i\xi L}\partial_{\nu^-} u_e(\varphi)|_{\partial\Omega_e\cap\Sigma^-} = 0 & \\ u_e(\varphi) = \varphi & \text{sur } \Gamma_0 \end{array}\right. \tag{1.16}$$

A nouveau, ce problème est bien posé, ce qui se montre comme d'habitude via le théorème de Lax-Milgram en utilisant la coercivité de la forme bilinéaire sous-jacente :

Théorème 1.12. *Sous les hypothèses (H), pour Ω_0 borné ou non, pour tout $\varphi \in H^{1/2}_\xi(\Gamma_0)$ le problème* (1.16) *possède une unique solution dans $H^1_\xi(\Omega_e)$.*

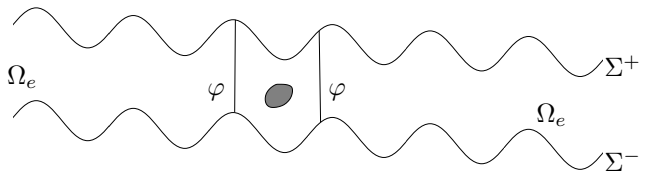


FIGURE 1.12 – Problème extérieur pour l'exemple d'ouvert de la figure 1.11.

Si l'on dispose maintenant d'une solution de Helmholtz dans Ω_0 et dans Ω_e qui satisfont nos conditions aux limites, pour qu'elle soit solution de Helmholtz globale, il va lui falloir comme dans le cas $\Omega = \mathbb{R}^d$ se raccorder en trace et en dérivée normale sur Γ_0. On introduit donc l'opérateur DtN qui va permettre d'exprimer cette condition :

$$\begin{aligned} \Lambda_e : H_\xi^{1/2}(\Gamma_0) &\longrightarrow H_\xi^{1/2}(\Gamma_0)' \\ \varphi &\longmapsto \frac{\partial u_e(\varphi)}{\partial \nu_e}|_{\Gamma_0} \end{aligned}$$

où $H_\xi^{1/2}(\Gamma_0)'$ désigne le dual de $H_\xi^{1/2}(\Gamma_0)$, ce qui nous conduit à nouveau au problème intérieur suivant :

Trouver $u_{int} \in H_\xi^1(\Omega_0)$ tel que :

$$\left| \begin{array}{ll} -\Delta u_{int} - (\omega^2 + i\varepsilon\omega)\rho u_{int} = f & \text{dans } \Omega_0 \\ \partial_{\nu^+} u_e(\varphi)|_{\partial\Omega_0 \cap \Sigma^+} + e^{i\xi L} \partial_{\nu^-} u_e(\varphi)|_{\partial\Omega_0 \cap \Sigma^-} = 0 & \\ \dfrac{\partial u_{int}}{\partial \nu_0}|_{\partial\Omega_0} + \Lambda_e(u_{int}|_{\partial\Omega_0}) = 0 & \text{sur } \partial\Omega_0 \end{array} \right. \tag{1.17}$$

C'est ce dernier problème qui est équivalent au problème initial tout en étant posé en domaine borné. Plus précisément, on montre (exactement comme au démontre le théorème 1.3) :

Théorème 1.13. *Sous les hypothèses (H), le problème* (1.17) *possède une unique solution, et on a, si u est la solution de* (1.7) *: $u|_{\Omega_0} = u_{int}$.*

1.3.2 Cas de plusieurs défauts : décomposition de la solution extérieure

A nouveau, nous allons considérer explicitement que nous nous trouvons dans une situation de "scattering multiple". On suppose donc qu'il existe (Ω_j), $1 \leq j \leq N_s$, une famille d'ouverts bornés connexes, deux à deux disjoints, tels que $\overline{\Omega_j} \subset \overline{\Omega}$ et :

$$\Omega_0 = \bigcup_{j=1}^{N_s} \Omega_j$$

Notre objectif est de nouveau d'expliquer comment on peut factoriser Λ_e dans le contexte des solutions quasi-périodiques. Les différences étant, comme dans la section précédente, essentiellement techniques, nous nous permettrons de passer plus rapidement sur les principes qui sous-tendent notre démarche. Le résultat essentiel qui va permettre une telle factorisation est encore le résultat de décomposition de la solution du problème extérieur à Ω_0 en une somme (unique) de solutions de problèmes extérieurs à chaque Ω_j. Un exemple de configuration en dimension 2 est donné en figure 1.13. On rappelle que :

$$\Gamma_0 = \Gamma_e = \partial\Omega_e \setminus \overline{\partial\Omega_e \cap \partial\Omega}$$

la partie de la frontière de $\partial\Omega_e$ qui n'est pas incluse dans $\partial\Omega$ (les frontières verticales sur l'exemple de la figure 1.13). À nouveau, nous devons commencer par définir avec précision ce que nous entendons par décomposition de la solution du problème extérieur dans ce contexte.

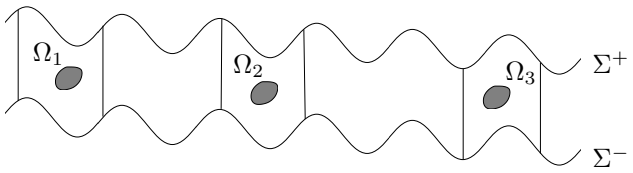


FIGURE 1.13 – Exemple d'ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, avec plusieurs défauts, $N_s = 3$

On introduit pour cela les espaces de fonctions quasi-périodiques à l'extérieur de chaque Ω_j :

$$H^1_\xi(\Omega \setminus \overline{\Omega_j}) = \overline{\mathcal{S}^q_\xi(\overline{\Omega_j})}^{H^1} = \left\{ u|_{\overline{\Omega_j}} \;\middle|\; u \in H^1_\xi(\Omega) \right\}$$

On notera de plus :

$$\Gamma_j = \partial\Omega_j \setminus \overline{\partial\Omega_j \cap \partial\Omega}$$

la partie de la frontière de $\partial\Omega_j$ qui n'est pas incluse dans $\partial\Omega$ (les frontières verticales de chaque Ω_j sur l'exemple de la figure 1.13), et les espaces de trace sur ces frontières sont donnés par :

$$H^{1/2}_\xi(\Gamma_j) = \left\{ u|_{\Gamma_j} \;\middle|\; u \in H^1_\xi(\Omega) \right\} \subset H^{1/2}(\Gamma_j)$$

On notera enfin :

$$\Sigma^+_j = \Sigma^+ \cap \partial(\Omega \setminus \overline{\Omega_j}) \quad \text{et} \quad \Sigma^-_j = \Sigma^- \cap \partial(\Omega \setminus \overline{\Omega_j})$$

On peut alors définir les problèmes extérieurs à chaque Ω_j : pour tout $\varphi \in H^{1/2}_\xi(\Gamma_j)$, trouver $u_{e,j}(\varphi) \in H^1_\xi(\Omega \setminus \overline{\Omega_j})$ tel que :

$$\left| \begin{array}{ll} -\Delta u_{e,j}(\varphi) - (\omega^2 + i\varepsilon\omega)\rho_{ref} u_{e,j}(\varphi) = 0 & \text{dans } \Omega \setminus \overline{\Omega_j} \\ \partial_{\nu^+} u_{e,j}(\varphi)|_{\Sigma^+_j} + e^{i\xi L} \partial_{\nu^-} u_{e,j}(\varphi)|_{\Sigma^-_j} = 0 & \\ u_{e,j}(\varphi) = \varphi & \text{sur } \Gamma_j \end{array} \right. \tag{1.18}$$

Ces problèmes sont un cas particulier de problème (1.16), aussi ils sont bien posés en vertu du théorème 1.12.

Existence d'une décomposition

Sans surprise, nous cherchons dans ce contexte à savoir, pour tout $\varphi \in H^{1/2}(\partial\Omega_e)$ s'il existe $(\widetilde{\varphi}_j)_j$ tels que, dans Ω_e :

$$u_e(\varphi) = \sum_{j=1}^{N_s} u_{e,j}(\widetilde{\varphi}_j) \tag{1.19}$$

Notre démarche va être exactement la même que dans la section précédente, à savoir nous allons transposer la question de l'existence et de l'unicité de la décomposition aux propriétés des opérateurs de propagation :

$$\begin{array}{rccl} \Theta_{ij} : H^{1/2}_\xi(\Gamma_j) & \longrightarrow & H^{1/2}_\xi(\Gamma_i) \\ \widetilde{\varphi} & \longmapsto & u_{e,j}(\widetilde{\varphi})|_{\Gamma_i} \end{array}$$

avec toujours $\Theta_{ii} = Id(H_\xi^{1/2}(\Gamma_i))$. A nouveau, il est pratique d'identifier une donnée sur Γ_e au vecteur de ses restrictions à chaque Γ_j, aussi nous appellerons encore sans distinction $\varphi \in H_\xi^{1/2}(\Gamma_e)$ et $\varphi = (\varphi_j)_{1\leq j\leq N_s}$ où $\varphi_j = \varphi_{|\Gamma_j} \in H_\xi^{1/2}(\Gamma_j)$. A l'aide de cette identification, on définit l'opérateur suivant :

$$\begin{aligned}\Theta : \prod_{j=1}^{N_s} H_\xi^{1/2}(\Gamma_j) &\longrightarrow \prod_{i=1}^{N_s} H_\xi^{1/2}(\Gamma_i)\\ \varphi &\longmapsto \Theta\varphi = \left(\sum_{j=1}^{N_s} \Theta_{ij}\varphi_j\right)_{1\leq i\leq N_s}\end{aligned}$$

qui se réécrit encore sous la forme d'une pseudo-matrice : $\Theta = (\Theta_{ij})_{1\leq i,j\leq N}$.

$$\Theta = \begin{pmatrix} \Theta_{11} & \dots & \Theta_{1i} & \dots & \Theta_{1N_s} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \Theta_{i1} & \dots & \Theta_{ii} & \dots & \Theta_{iN_s} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Theta_{N_s1} & \dots & \Theta_{N_si} & \dots & \Theta_{N_sN_s} \end{pmatrix}$$

Comme dans le cas $\Omega = \mathbb{R}^d$, cet opérateur Θ est relié à l'existence et l'unicité d'une décomposition via une équation fondamentale. En effet, s'il existe une décomposition :

$$u_e = \sum_{j=1}^{N_s} u_{e,j}(\widetilde{\varphi}_j)$$

alors, en appliquant l'opérateur de trace sur chacun des Γ_j, on obtient :

$$u_e|_{\Gamma_i} = \sum_{j=1}^{N_s} u_{e,j}(\widetilde{\varphi}_j)|_{\Gamma_i}$$

ce qui peut se réécrire, en utilisant le formalisme des Θ_{ij} et par définition des problèmes extérieurs à un seul défaut (1.18) :

$$u_e|_{\Gamma_i} = \sum_{j=1}^{N_s} \Theta_{ij}\widetilde{\varphi}_j$$

Si on désigne par φ le vecteur des traces de u_e, i.e. $\varphi_j = u_e|_{\Gamma_j}$, on aboutit à l'équation :

$$\varphi = \Theta\widetilde{\varphi} \tag{1.20}$$

ce qui peut aussi s'écrire :

$$u_e|_{\Gamma_e} = \sum_{j=1}^{N_s} u_{e,j}(\widetilde{\varphi}_j)|_{\Gamma_e} = \Theta\widetilde{\varphi}$$

soit formellement la même relation que dans le cas $\Omega = \mathbb{R}^d$. Le lecteur ne sera donc pas surpris de retrouver le même lien entre l'opérateur Θ et l'existence et l'unicité de la décomposition :

Théorème 1.14. *L'opérateur :*

$$\Theta : \prod_{j=1}^{N_s} H_\xi^{1/2}(\Gamma_j) \longrightarrow \prod_{j=1}^{N_s} H_\xi^{1/2}(\Gamma_j)$$

est inversible si et seulement si la solution du problème extérieur admet une unique décomposition au sens de la relation (1.19) *pour toute donnée* $\varphi \in H_\xi^{1/2}(\Gamma_e)$. *Plus précisément :*

(i) Θ *surjectif* $\Leftrightarrow$ *existence d'une décomposition*

(ii) Θ *injectif* $\Leftrightarrow$ *unicité de la décomposition*

Démonstration. La preuve est exactement la même que celle du théorème 1.4, en substituant la relation (1.19) à la relation (1.11). □

Par analogie avec le cas $\Omega = \mathbb{R}^d$, on espère pouvoir montrer que l'inversibilité de Θ est à nouveau régie par l'alternative de Fredholm, auquel cas, la question de l'existence se réduit à celle de l'unicité, que l'on espère obtenir en adaptant la preuve du théorème 1.6. A terme, nous allons en effet parvenir à suivre cette démarche, cependant, nous allons devoir établir au préalable un certain nombre de résultats techniques supplémentaires. On commence par remarquer que par définition de l'opérateur Θ, nous allons devoir travailler avec l'espace $H_\xi^{1/2}(\Gamma_e)$. Il est naturel de commencer par se demander si cet espace possède de bonnes propriétés.

Théorème 1.15 (Propriétés de $H_\xi^{m-1/2}$). *Pour tout* $m \in \mathbb{N}^*$, *l'espace* $H_\xi^{m-1/2}(\Gamma_j)$ *vérifie :*

(i) $\forall \mathcal{O} \subset \Omega$, *tel que* $\Gamma_j \subset \overline{\mathcal{O}}$,

$$H_\xi^{m-1/2}(\Gamma_j) = \left\{ u|_{\Gamma_j} \ \mid \ u \in H_\xi^m(\mathcal{O}) \right\} \subset H^{m-1/2}(\Gamma_j)$$

(ii) $H_\xi^{m-1/2}(\Gamma_j)$ *est un espace de Hilbert séparable, la norme induite par le produit scalaire étant :*

$$||u||_{H_\xi^{m-1/2}(\Gamma_j)} = \inf_{U \in H_\xi^m(\Omega) \ \mid \ U|_{\Gamma_j} = u} ||U||_{H^m(\Omega)}$$

(iii) Il existe un opérateur de relèvement continu de $H_\xi^{m-1/2}(\Gamma_j)$ *vers* $H_\xi^m(\mathcal{O})$, $\forall \mathcal{O} \subset \Omega$, *tel que* $\Gamma_j \subset \overline{\mathcal{O}}$

Démonstration. (i) Par construction : $H_\xi^m(\mathcal{O}) = \left\{ u|_{\mathcal{O}} \ \mid \ u \in H_\xi^m(\Omega) \right\}$, aussi le résultat est clair, tant que Γ_j est accessible par trace depuis $\mathcal{O}$.

(ii) et (iii) On considère le sous-espace de $H_\xi^m(\Omega)$ suivant :

$$H_{\xi,0}^m(\Omega) = \left\{ u \in H_\xi^m(\Omega) \ \mid \ u|_{\Gamma_j} = 0 \right\}$$

Il est clair que $H_{\xi,0}^m(\Omega)$ est un sous-espace fermé de $H_\xi^m(\Omega)$ en tant qu'image réciproque d'un fermé par la trace, application continue (c'est donc même un espace de Hilbert pour la norme H^m). On peut donc définir la projection orthogonale P sur ce sous-espace fermé :

$$P : H_\xi^m(\Omega) \to H_{\xi,0}^m(\Omega)$$

qui vérifie $PU = U$ pour $U \in H_{\xi,0}^m(\Omega)$, $PU|_{\Gamma_j} = 0$ et donc $(I-P)U|_\Gamma = U|_\Gamma \ \forall \ U \in H_\xi^m(\Omega)$. On définit alors un produit scalaire sur $H_\xi^{m-1/2}(\Gamma_j)$ par :

$$(u, v)_{H_\xi^{m-1/2}(\Gamma_j)} = ((I-P)U, (I-P)V)_{H^m(\Omega)}$$

pour tout $U, V \in H^m(\Omega)$ tels que $U|_{\Gamma_j} = u$ et $V|_{\Gamma_j} = v$. Cette définition est indépendante du choix de U, V, puisque si $U_1, U_2 \in H_\xi^m(\Omega)$ satisfont $U_1|_{\Gamma_j} = u$ et $U_2|_{\Gamma_j} = u$, alors $U_1 - U_2 \in H_{\xi,0}^m(\Omega)$ et $(I-P)(U_1 - U_2) = 0$. L'application bilinénaire définie mérite bien le nom de produit scalaire puisqu'elle est clairement symétrique et :

$$||u||^2_{H_\xi^{m-1/2}(\Gamma_j)} = ||(I-P)U||^2_{H^m(\Omega)}$$

donc si $||u||_{H_\xi^{m-1/2}(\Gamma_j)} = 0$, $(I-P)U = 0$ pour tout U tel que $U|_{\Gamma_j} = u$, mais $(I-P)U|\Gamma_j = u$, d'où $u = 0$. Enfin, pour tout U tel que $U|_{\Gamma_j} = u$, on a :

$$||U|^2_{H^m(\Omega)} = ||PU|^2_{H^m(\Omega)} + ||(I-P)U|^2_{H^m(\Omega)} \geq ||(I-P)U|^2_{H^m(\Omega)} = ||u||^2_{H_\xi^{m-1/2}(\Gamma_j)}$$

ce qui établit :

$$||u||_{H_\xi^{m-1/2}(\Gamma_j)} = \inf_{U\in H_\xi^m(\Omega) \ | \ U|_{\Gamma_j}=u} ||U||_{H^m(\Omega)}$$

Ne reste plus qu'à vérifier la complétude de $H_\xi^{m-1/2}(\Gamma_j)$ pour la norme ainsi définie. Soit (u_n) une suite de Cauchy dans $H_\xi^{m-1/2}(\Gamma_j)$. Alors il existe $U_n \in H_\xi^m(\Omega)$ tel que $U_n|_{\Gamma_j} = u_n$. On pose $V_n = (I-P)U_n$, alors V_n est indépendant du choix de U_n, et :

$$||V_n||_{H_\xi^m(\Omega)} = ||u_n||_{H_\xi^{m-1/2}(\Gamma_j)}$$

donc V_n est de Cauchy dans $H_\xi^m(\Omega)$, qui est un espace de Hilbert. Donc V_n converge vers $V \in H_\xi^m(\Omega)$. On pose $V|_{\Gamma_j} = u$, alors $u \in H^{m-1/2}(\xi)(\Gamma_j)$ par définition. Puis on a :

$$||u_n - u||_{H_\xi^{m-1/2}(\Gamma_j)} \leq ||V_n - V||_{H_\xi^m(\Omega)}$$

donc (u_n) converge vers u dans $H^{m-1/2}(\xi)(\Gamma_j)$, ce qui démontre la complétude. Le lecteur aura sans doute remarqué que l'opérateur de relèvement du point (iii) est apparu dans cette dernière preuve. En effet, pour tout $u \in H_\xi^{m-1/2}(\Gamma_j)$, on pose :

$$Eu = (I-P)U \quad \forall\, U \text{ tel que } U|_{\Gamma_j} = u$$

Alors on sait que cette définition est indépendante du choix de U, que $Eu \in H_\xi^m(\Omega)$ et que :

$$||Eu||_{H_\xi^m(\Omega)} = ||u||_{H_\xi^{m-1/2}(\Gamma_j)}$$

L'opérateur E étant bien évidemment linéaire par construction, cette dernière identité en fait bien un opérateur continu. On remarque même qu'il définit une isométrie entre $H_\xi^{m-1/2}(\Gamma_j)$ et l'orthogonal de $H_{\xi,0}^m(\Omega)$, ce qui fournit une preuve alternative du caractère hilbertien de $H_\xi^{m-1/2}(\Gamma_j)$, et permet d'établir que $H_\xi^{m-1/2}(\Gamma_j)$ est séparable. Pour obtenir un opérateur de relèvement vers $H_\xi^m(\mathcal{O})$, il suffit de prendre la restriction de E à $\mathcal{O}$. □

Remarque 1.6. *Pour l'espace $H^{m-1/2}(\Gamma_j)$, on sait que la norme usuelle est a minima (lorsque l'on ne choisit pas de travailler directement avec la norme de l'infimum) équivalente à la norme définie par l'infimum des fonctions ayant la bonne trace, i.e il existe $c > 0$, $C > 0$ tels que :*

$$c \inf_{U\in H^m(\Omega) \ | \ U|_{\Gamma_j}=u} ||U||_{H^m(\Omega)} \leq ||u||_{H^{m-1/2}(\Gamma_j)} \leq C \inf_{U\in H^m(\Omega) \ | \ U|_{\Gamma_j}=u} ||U||_{H^m(\Omega)}$$

Il est donc clair que la topologie induite par $H^{m-1/2}$ sur $H_\xi^{m-1/2}$, et celle que nous avons défini dans le théorème précédent (et qui fait de $H_\xi^{m-1/2}$ un espace de Hilbert) ne sont pas équivalentes, puisque l'infimum est pris sur un sous-espace strict de $H^m(\Omega)$ dans le calcul de la norme $H_\xi^{m-1/2}$ (sauf si $\partial\Omega_0 \cap \Sigma^+ \neq \emptyset$ ou $\partial\Omega_0 \cap \Sigma^- \neq \emptyset$, mais nous avons exclu ce cas). De plus, comme il est clair que

$$||u||_{H^{m-1/2}(\Gamma_j)} \leq C||u||_{H_\xi^{m-1/2}(\Gamma_j)}$$

la continuité en norme $H_\xi^{m-1/2}$ implique la continuité en norme $H^{m-1/2}$. La topologie induite par cette nouvelle norme est donc strictement plus fine que celle induite par $H^{m-1/2}$. Une conséquence relativement désagréable pour le dual de $H_\xi^{m-1/2}$ est donc qu'il est strictement plus grand que le dual de $H^{m-1/2}$:

$$H^{-m+1/2}(\Gamma_j) \subsetneq H^{m-1/2}(\Gamma_j)'$$

ce qui obligera à la plus grande prudence lorque nous serons amenés à le manipuler. Bien entendu, cela implique aussi que les résultats de compacité usuels sur les espaces de trace ne se transposent pas directement dans ces nouvelles normes, ce qui nous force donc à redémontrer au moins ceux qui nous seront indispensables.

Maintenant que nous sommes sûrs d'être dans le cadre mathématique adéquat, nous allons pouvoir tenter de reproduire les développements du cas $\Omega = \mathbb{R}^d$. Un examen attentif des preuves tant du caractère Fredholm que du théorème 1.6 révèle que la régularité intérieure (c'est-à-dire loin de la frontière supportant les données) de la solution s'est avérée être un ingrédient essentiel pour conclure. Si dans le cas $\Omega = \mathbb{R}^d$ cette régularité repose sur des résultats établis de longue date, dans le cas des

conditions quasi-périodiques, il est préférable de s'assurer que l'on conserve les bonnes propriétés régularisantes de l'équation de Helmholtz, en termes d'espaces quasi-périodiques. Nous allons voir qu'un argument très simple permet de les retrouver :

Lemme 1.2 (**Régularité intérieure des solutions quasi-périodiques**). *Si ζ est de classe $C^{1,1}$, pour tout $g \in L^2(\Omega_e)$, toute fonction $u_e \in H^1_\xi(\Omega_e)$ telle que :*

$$-\Delta u_e = g \quad \text{dans } \Omega_e$$

et

$$\partial_{\nu^+} u_e|_{\partial\Omega_e \cap \Sigma^+} + e^{i\xi L} \partial_{\nu^-} u_e|_{\partial\Omega_e \cap \Sigma^-} = 0$$

vérifie, $\forall\, \delta > 0$:

$$u_e \in H^2_\xi(\Omega_e^\delta)$$

où $\Omega_e^\delta = \{\boldsymbol{x} \in \Omega \mid dist(\boldsymbol{x}, \Gamma_e) > \delta\}$, et :

$$||u_e||_{H^2(\Omega_e^\delta)} \leq C||g||_{L^2(\Omega_e)}$$

Démonstration. Le principe de la démonstration est le suivant : nous savons que, loin de toute frontière portant une condition aux limites, la solution de l'équation de Helmholtz sans second membre est régulière, aussi nous allons nous efforcer de prolonger u_e au-delà des frontières portant la quasi-périodicité, afin de transformer Ω_e^δ en domaine intérieur pour ce prolongement, pour lequel nous pourrons utiliser les résultats classiques. Pour tout $m \in \mathbb{Z}$, on pose :

$$\widetilde{u}_e(x_1, x_2 + mL, \ldots, x_d) = e^{im\xi L} u_e(x_1, x_2, \ldots, x_d)$$

la quasi-périodisée de u_e. On pose $B_m = \Omega + mL\boldsymbol{e_d}$, où $\boldsymbol{e_d}$ est le deuxième vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^d$. La frontière de B_m est donc constituée de :

$$\Sigma_m^+ = \Sigma^+ + mL\boldsymbol{e_d} \quad \text{et} \quad \Sigma_m^- = \Sigma^- + mL\boldsymbol{e_d}$$

Il est alors clair que :

$$\Sigma_m^+ = \Sigma_{m+1}^-$$

Avec ces notations :

$$\widetilde{u}_e|_{B_m} = e^{im\xi L} u_e = e^{im\xi L} \widetilde{u}_e|_{B_0}$$

Sur Σ_m^+, on a :

$$\widetilde{u}_e|_{\Sigma_m^+} = e^{im\xi L} u_e|_{\Sigma^+} = e^{i(m+1)\xi L} u_e|_{\Sigma^-} = \widetilde{u}_e|_{\Sigma_{m+1}^-}$$

donc $\widetilde{u}_e$ se raccorde en trace à chaque interface $\Sigma_m^\pm$, elle est donc H^1_{loc}. Puis

$$\partial_{\nu_+} \widetilde{u}_e|_{\Sigma_m^+} = \partial_{\nu_+} e^{im\xi L} u_e|_{\Sigma^+} = -\partial_{\nu_-} e^{i(m+1)\xi L} u_e|_{\Sigma^-} = -\partial_{\nu_-} \widetilde{u}_e|_{\Sigma_{m+1}^-}$$

donc $\widetilde{u}_e$ se raccorde en dérivée normale à chaque interface $\Sigma_m^\pm$. De plus, elle est solution de l'équation elliptique dans chaque B_m, alors, $\forall\, v \in H^1(\mathbb{R}^d)$ à support compact, on a dans :

$$\mathbb{R}^d = \bigcup_m B_m$$

$$(-\Delta \widetilde{u}_e, v)_{L^2(\mathcal{B})} = \sum_m (-\Delta \widetilde{u}_e, v)_{L^2(B_m)}$$

Puis

$$(-\Delta \widetilde{u}_e, v)_{L^2(B_m)} = (\nabla \widetilde{u}_e, \nabla v)_{L^2(B_m)} + < \frac{\partial \widetilde{u}_e}{\partial \nu^+}|_{\Sigma_m^+}, \overline{v}|_{\Sigma_m^+} > + < \frac{\partial \widetilde{u}_e}{\partial \nu^-}|_{\Sigma_m^-}, \overline{v}|_{\Sigma_m^-} >$$

d'où :

$$\begin{aligned}(-\Delta \widetilde{u}_e, v)_{L^2(\mathcal{B})} &= \sum_m (\nabla \widetilde{u}_e, \nabla v)_{L^2(B_m)} \\ &\quad + \sum_m < \frac{\partial \widetilde{u}_e}{\partial \nu^+}|_{\Sigma_m^+}, \overline{v}|_{\Sigma_m^+} > + < \frac{\partial \widetilde{u}_e}{\partial \nu^-}|_{\Sigma_m^-}, \overline{v}|_{\Sigma_m^-} >\end{aligned}$$

La deuxième somme est nulle puisque tous les termes se compensent deux à deux dans le support de v. Il reste donc :

$$(-\Delta \widetilde{u}_e, v)_{L^2(\mathcal{B})} = \sum_m (\nabla \widetilde{u}_e, \nabla v)_{L^2(B_m)}$$

$$= \sum_m e^{im\xi L} (\nabla u_e, \nabla v)_{L^2(\Omega)} = \sum_m e^{im\xi L} (g, v)_{L^2(\Omega)}$$

Donc $\widetilde{u}_e$ est solution de l'équation elliptique avec pour second membre $\widetilde{g} \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^d)$ dans tout compact inclus dans $\mathbb{R}^d$, et donc en particulier dans tout compact K contenant Ω^δ_e. Alors, en vertu des résultats classiques de régularité intérieure elliptique, $\widetilde{u}_e \in H^2(K)$, d'où $u_e \in H^2(\Omega^\delta_e)$, avec :

$$||\widetilde{u}_e||_{H^2(\Omega^\delta_e)} \leq C||g||_{L^2(\Omega^\delta_e)}$$

Ensuite, on a quasi-périodicité en trace et trace normale par hypothèse. Comme $u_e \in H^2$, on peut dériver tangentiellement la trace, ce qui donne immédiatement la quasi-périodicité de la dérivée tangentielle :

$$\partial_\tau(u_e|_{\Sigma^+}) = \partial_\tau(e^{i\xi L} u_e|_{\Sigma^-}) = e^{i\xi L}\partial_\tau(u_e|_{\Sigma^-})$$

Le gradient est alors quasi-périodique, et il suit du point (iii) du théorème 1.10 qu'alors $u_e \in H^2_\xi(\Omega_\delta)$ comme $\zeta \in C^{1,1}$. □

A ce résultat de régularité correspond un résultat de compacité qui va nous permettre de retrouver le caractère Fredholm de l'opérateur Θ dans le cadre des conditions quasi-périodiques :

Lemme 1.3. *(i) Pour tout borné $\mathcal{O}$, l'injection $H^2_\xi(\mathcal{O}) \hookrightarrow H^1_\xi(\mathcal{O})$ est compacte.*

(ii) L'injection $H^{3/2}_\xi(\Gamma_j) \hookrightarrow H^{1/2}_\xi(\Gamma_j)$ est compacte.

Démonstration. (i) Pour $\mathcal{O}$, on sait que l'injection $\mathcal{I} : H^2(\mathcal{O}) \hookrightarrow H^1(\mathcal{O})$ est compacte. Or l'injection $\mathcal{I}' : H^2_\xi(\mathcal{O}) \hookrightarrow H^1_\xi(\mathcal{O})$ n'est rien d'autre que :

$$\mathcal{I}' = \mathcal{I}|_{H^2_\xi(\mathcal{O})}$$

comme $H^m_\xi(\mathcal{O})$ est un sous-espace fermé de $H^m(\mathcal{O})$, aussi il est clair que $\mathcal{I}'$ est compacte, les normes étant les mêmes sur les restrictions que sur les espaces entiers.

(ii) Soit (φ_n) une suite bornée de $H^{3/2}_\xi(\Gamma_j)$. Or d'après le point (iii) du théorème 1.15 il existe un opérateur de relèvement continu de $H^{3/2}_\xi(\Gamma_j)$ vers $H^2_\xi(\Omega_j)$. On pose donc $u_n = E\varphi_n$, et par conséquent u_n est bornée dans $H^2_\xi(\Omega_j)$. Comme Ω_j est borné, on déduit du point (i) de la présente démonstration que l'on peut extraire une sous-suite $(u_{\sigma(n)})$ qui converge dans $H^1_\xi(\Omega_j)$. On extrait alors $\varphi_{\sigma(n)}$ de φ_n, et on a :

$$||\varphi_{\sigma(n)} - \varphi_{\sigma(m)}||_{H^{1/2}_\xi(\Gamma_j)} \leq ||u_{\sigma(n)} - u_{\sigma(m)}||_{H^1(\Omega_j)}$$

donc $\varphi_{\sigma(n)}$ est de Cauchy dans $H^{1/2}_\xi(\Gamma_j)$, par conséquent elle converge, et le résultat est démontré. □

Ce résultat de compacité nous permet d'établir le pendant du théorème 1.5 dans le cas des fonctions quasi-périodiques, en reproduisant la preuve du cas $\Omega = \mathbb{R}^d$ avec cette nouvelle injection compacte :

Théorème 1.16. *Pour $i \neq j$, les opérateurs Θ_{ij} sont compacts de $H^{1/2}_\xi(\Gamma_j)$ vers $H^{1/2}_\xi(\Gamma_i)$, et l'opérateur Θ est un opérateur de Fredholm d'indice 0.*

Par conséquent, nous avons à nouveau réduit la question de l'existence et de l'unicité à celle de l'unicité seule, qui va à nouveau être une conséquence du caractère bien posé du problème modèle (1.14).

Unicité de la décomposition

De nouveau, l'unicité va se déduire d'un résultat d'unicité général sur les décompositions :

Théorème 1.17. *Soit u_e la solution du problème extérieur* (1.8)*. S'il existe une décomposition telle que :*

$$u_e \equiv \sum_i \widetilde{u}_i \quad \textit{dans } \Omega_e, \quad \widetilde{u}_i \in H^1_\xi(\Omega \setminus \overline{\Omega_i})$$
$$-\Delta\widetilde{u}_i - (\omega^2 + i\varepsilon\omega)\rho_{ref}\widetilde{u}_i = 0 \quad \textit{in } \Omega \setminus \overline{\Omega_i}$$
$$\textit{et} \quad \partial_{\nu^+}\widetilde{u}_i|_{\Sigma_i^+} + ei\xi L\partial_{\nu^-}\widetilde{u}_i|_{\Sigma_i^-} = 0$$

alors pareille décomposition est unique.

Démonstration. La preuve est extrèmement proche de celle du théorème 1.6, puisqu'il suffit de substituer le résultat de régularité 1.2 au résultat de régularité elliptique classique. □

De ce résultat, on déduit comme dans le cas $\Omega = \mathbb{R}^d$ l'inversibilité de l'opérateur Θ via l'alternative de Fredholm :

Théorème 1.18. *L'opérateur Θ est inversible de $\prod_{j=1}^{N_s} H^{1/2}_\xi(\Gamma_j)$ vers $\prod_{j=1}^{N_s} H^{1/2}_\xi(\Gamma_j)$.*

et l'équivalence entre les propriétés de Θ et celles de la décomposition nous donne encore le résultat d'existence et d'unicité :

Théorème 1.19. *Pour toute donnée $\varphi \in \prod_{j=1}^{N_s} H^{1/2}_\xi(\Gamma_j) = H^{1/2}_\xi(\Gamma_e)$, il existe une unique décomposition de la solution du problème extérieur* (1.16)*.*

1.3.3 Cas de plusieurs défauts : factorisation de l'opérateur DtN

Ayant finalement retrouvé tous les résultats de la section précédente dans le cadre des fonctions quasi-périodiques, nous pouvons aveuglément reproduire les calculs qui mènent à la factorisation de Λ_e On introduit donc :

$$\begin{aligned} \widetilde{\Lambda}_{ij} : H^{1/2}_\xi(\Gamma_j) &\longrightarrow H^{1/2}_\xi(\Gamma_i)' \\ \varphi &\longmapsto \partial_{\nu_i} u_{e,j}(\varphi)|_{\Gamma_i} \end{aligned}$$

et qui sont à nouveau des opérateurs définis à partir de la solution de problèmes de "simple scattering". Pour la solution du problème extérieur à tous les défauts (1.16), on utilise le résultat de décomposition (1.20) et on lui applique les opérateurs de trace et de trace normale :

$$u_e(\varphi)|_{\Gamma_i} = \sum_{j=1}^{N} u_{e,j}(\widetilde{\varphi}_j)|_{\Gamma_i} \quad \text{et} \quad \partial_{\nu_i} u_e(\varphi)|_{\Gamma_i} = \sum_{j=1}^{N} \partial_{\nu_i} u_{e,j}(\widetilde{\varphi}_j)|_{\Gamma_i}$$

ce qui se réécrit à l'aide des opérateurs Θ_{ij} et $\widetilde{\Lambda}_{ij}$, en utilisant la définition de Λ_e et le fait que $\varphi_{|\Gamma_i} = \varphi_i$, on obtient :

$$\varphi_i = u_e|_{\Gamma_i} = \sum_{j=1}^{N} \Theta_{ij}\widetilde{\varphi}_j \quad \text{et} \quad (\Lambda_e\varphi)_i = \partial_{\nu_i} u_e(\varphi)|_{\Gamma_i} = \sum_{j=1}^{N} \widetilde{\Lambda}_{ij}\widetilde{\varphi}_j$$

A nouveau si on définit $\widetilde{\Lambda}$ comme la pseudo-matrice :

$$\begin{aligned} \widetilde{\Lambda} : \prod_{j=1}^{N_s} H^{1/2}_\xi(\Gamma_j) &\longrightarrow \prod_{i=1}^{N_s} H^{1/2}_\xi(\Gamma_i)' \\ \varphi &\longmapsto \widetilde{\Lambda}\varphi = \left(\sum_{j=1}^{N_s} \widetilde{\Lambda}_{ij}\varphi_j \right)_{1\le i\le N_s} \end{aligned}$$

alors, Θ étant inversible en vertu du théorème 1.18 :

Théorème 1.20. Λ_e *se factorise en :*

$$\Lambda_e = \widetilde{\Lambda}\Theta^{-1}$$

A la lumière de ces deux exemples, on comprend aisément que le résultat de décomposition, et par suite la factorisation de l'opérateur DtN qu'il implique, va rester valide dans un cadre beaucoup plus général que l'équation de Helmholtz (avec ou sans conditions aux limites). En particulier, il s'étend aisément aux équations de l'acoustique, de l'élastodynamique ou de l'électromagnétisme (à tout le moins pour des coefficients réguliers). De même, il est clair en analysant le cas quasi-périodique, que l'on peut utiliser une vaste gamme de conditions aux limites différentes, sans perdre pour autant nos résultats. Nous aurons régulièrement besoin des résultats de ce chapitre dans la suite, où nous allons utiliser les opérateurs DtN principalement comme intermédiaires de calcul.

Chapitre 2

Milieu périodique perturbé

Résumé. *Dans ce chapitre nous considérons un milieu périodique, non borné dans au moins deux directions. Nous autorisons le milieu à présenter des défauts bornés quelconques inclus dans des défauts non bornés dans une des directions de périodicité (section 2.1.1). Nous présentons alors une méthode originale de résolution des problèmes de diffraction dans une telle configuration, en commençant par le cas d'un seul défaut linéique localement perturbé. Cette méthode couple une généralisation abstraite de l'équation de Lippmann-Schwinger (LS) (section 2.1.2) aux opérateurs DtN dans les guides (section 2.1.3) qui servent d'intermédiaires pour calculer les opérateurs intervenant dans l'équation LS. Puis, dans une deuxième section, nous expliquons comment semi-discrétiser par quadrature les intégrales intervenant dans l'équation LS (section 2.2.1), et nous analysons cette approximation par une technique non classique basée sur une réinterprétation du problème semi-discret comme une approximation du problème initial (2.2.2), ce qui nous permet d'établir des estimations de convergence (2.2.3). Enfin, nous expliquons comment traiter le cas de plusieurs défauts linéiques (2.3.1), et nous présentons une méthode alternative pour le cas des défauts bornés (2.3.2).*

Dans ce chapitre, nous allons nous tourner vers ce qui constitue le coeur de ce mémoire, à savoir la résolution de problèmes d'ondes (ici en régime harmonique) en milieux périodiques présentant des défauts. La simulation de défauts bornés en milieu périodique est une problématique qui a été abordée un certain nombre de fois dans la littérature récente. Grossièrement, on peut distinguer deux grandes familles de problèmes. La première correspond à la résolution de problèmes de diffraction par des défauts bornés en milieu périodique, situation pour laquelle la méthode la plus utilisée semble être la construction d'opérateurs DtN afin de réduire le domaine de calcul au domaine borné contenant les défauts (voir par exemple [24], [39] et [38]). En particulier, la détermination de ces opérateurs DtN pour une géométrie de plan ou de guide périodique a été l'objet de la thèse de Sonia Fliss, dont nous reprendrons les idées pour le traitement des problèmes de guide. La seconde famille de problèmes correspond à la détermination de modes de défauts induits par la présence des perturbations dans les bandes interdites du milieu périodique (cf introduction). Il s'agit d'un domaine très actif du point de vue applicatif, la méthode la plus populaire semblant être la fameuse "super-cell method" (voir [80] pour une présentation orientée mathématique de cette méthode).

Les problèmes que nous nous proposons de traiter dans ce chapitre appartiennent à la première catégorie, à savoir les problèmes de diffraction en milieu périodique. Cependant, contrairement aux travaux existants, nous allons considérer des défauts non bornés, mais possédant tout de même une structure "compatible" avec la périodicité du ou des milieux extérieurs. En particulier, ils seront non bornés dans une direction correspondant à une direction de périodicité du milieu extérieur (on parlera pour cela de défauts linéiques). Notre première approche fut d'appliquer la méthode DtN à

ces problèmes, étendant ainsi les résultats existants sur les défauts bornés. Cette approche a abouti à la méthode de décomposition de domaine que nous présentons en annexe. Nous sommes parvenus à imaginer une approche différente, basée sur une propriété élémentaire de la transformation de Floquet-Bloch, qui présente le double avantage par rapport à la méthode que nous présentons en annexe d'être moins coûteuse en pratique et de pouvoir être complètement analysée du point de vue théorique, au sens où nous disposons d'une estimation d'erreur complète (contrairement à la méthode de décomposition de domaine pour laquelle nous ne disposons que de résultats partiels). Pour toutes ces raisons, c'est cette méthode, qui n'est chronologiquement pas la première que nous ayons étudiée, que nous allons présenter dans ce chapitre.

La méthode que nous présentons dans ce chapitre, et que nous pensons originale, pourrait être résumée comme étant une combinaison astucieuse de deux méthodes classiques, à savoir les méthodes impliquant une généralisation d'une équation de type Lippmann-Schwinger (originellement introduite dans [62]) et les méthodes DtN que nous avons présentées dans le chapitre précédent. La situation la plus simple que nous allons considérer comme problème modèle est le cas d'un problème posé sur $\mathbb{R}^2$ (nous verrons, a minima dans les résultats numériques, que l'on traite sans peine des configurations similaires en dimension supérieure), le milieu étant périodique de part et d'autre d'un défaut borné dans la direction e_1, non borné dans la direction e_2. Nous supposerons de plus que ce défaut est périodique dans la direction e_2, avec la même période qu'à l'extérieur, hormis dans un domaine borné (voir figure 2.1). Il est important de comprendre à ce stade que la dernière hypothèse de périodicité ne signifie pas que le milieu est le même dans et hors du défaut. Par exemple, une configuration classique (correspondant à un canal dans un cristal photonique par exemple) consiste en un milieu périodique divisé en deux par une bande homogène, présentant une ou plusieurs inhomogénéités bornées. Pour une telle géométrie, il est naturel d'essayer de tirer partie de toutes les propriétés de périodicité afin de ramener les calculs au domaine borné contenant les perturbations du défaut non borné. C'est l'utilisation des techniques de type Lippmann-Schwinger qui va nous permettre d'exprimer cette réduction. Cependant, l'équation de Lippmann-Schwinger qui en résulte alors est basée sur un opérateur, que nous appellerons parfois noyau par analogie avec le cas du milieu homogène, défini à partir de la résolution d'un problème non borné (au même titre que les opérateurs DtN sont définis à partir de la résolution de problèmes extérieurs posés en domaines non bornés). La transformée de Floquet-Bloch (voir annexe A) sera l'outil essentiel qui nous permettra de tirer partie de la périodicité, et de réduire la détermination de ce noyau à un problème posé en domaine borné et utilisant les opérateurs DtN de guide quasi-périodiques (le lecteur comprendra alors ici pourquoi nous avons annoncé à la fin du chapitre précédent que les opérateurs DtN allaient nous servir avant tout d'intermédaires de calcul). Une autre manière de voir l'utilisation conjointe de ces deux techniques consiste à dire qu'en substance, nous utilisons l'équation de Lippmann-Schwinger pour traiter la direction de périodicité dans laquelle le défaut est non borné, tandis que nous utilisons les opérateurs DtN pour traiter la direction dans laquelle le défaut est borné (ce qui correspond en quelque sorte à la situation usuelle d'emploi des opérateurs DtN). Dans tous les cas, c'est cette combinaison qui justifie le nom de méthode mixte LS-DtN dont nous avons affublé notre méthode.

Nous allons organiser le présent chapitre de la manière suivante : nous allons dans une première section étudier le problème ci-dessus au niveau continu en espace. Après en avoir exposé les hypothèses en détail, nous expliquerons comment établir l'équation de Lippmann-Schwinger. Puis nous utiliserons la transformée de Floquet-Bloch afin de réinterpréter la détermination du noyau de cette équation comme la résolution d'un problème de guide périodique localement perturbé. Cette résolution se fera à l'aide d'opérateurs DtN de guide, et nous rappellerons à cette occasion la méthode exposée dans [37] qui permet de les calculer en pratique. Par transformée de Floquet-Bloch inverse, on en déduira le noyau de l'équation de Lippmann-Schwinger, et le problème sera résolu. Dans une deuxième section, nous observerons alors que cette dernière inversion nécessite le calcul d'une intégrale irréalisable en pratique. Nous étudierons donc une approximation de cette intégrale par quadrature (ce qui correspond à une discrétisation de la variable de Floquet), et nous montrerons la convergence de cette approximation vers la solution du problème initial. Cette preuve de convergence

sera basée sur la réinterprétation du problème discrétisé dans la variable de Floquet comme la solution d'une EDP particulière, que nous pourrons comparer au problème de départ et ainsi obtenir les estimations de convergence. Puis nous considèrerons le cas où le milieu présente non plus un mais plusieurs défauts linéiques du type précédent. La transformée de Floquet-Bloch nous conduira cette fois à des problèmes de guide présentant plusieurs défauts bornés. Nous verrons alors que par application des résultats du chapitre précédent, nous pouvons encore calculer les opérateurs DtN de guide pour cette situation nouvelle (et non traitée dans [37]), et que les résultats du cas d'un seul défaut se transposent aisément à cette nouvelle configuration. Enfin, dans une dernière section, nous nous pencherons sur le cas particulier des défauts bornés, pour lesquels nous verrons qu'il est possible de développer une méthode purement basée sur l'équation de Lippmann-Schwinger, plus naturelle que la méthode mixte. Cette méthode alternative correspond formellement aux méthodes basées sur le calcul analytique (le plus souvent via une approximation) de la fonction de Green en milieu périodique (possible seulement sur des milieux très simples), utilisée fréquemment en physique. Nous verrons que nous pouvons alors reproduire les résultats de notre méthode mixte pour démontrer la convergence de cette nouvelle méthode "pur" LS, mais que la méthode mixte demeure à la fois plus précise et moins coûteuse.

2.1 Méthode LS-DtN en milieu périodique

2.1.1 Problème modèle

Le problème modèle que nous considérons dans ce chapitre est toujours celui de l'équation de Helmholtz avec absorption, mais cette fois-ci nous nous limitons par souci de simplicité au cas de la dimension 2. Les résultats de ce chapitre s'étendent sans peine au cas où l'on rajoute un nombre quelconque de directions bornées, pourvu que les conditions aux limites qui apparaissent alors respectent la périodicité (nous illustrerons ceci par des résultats numériques en dimension 3 plus loin dans ce chapitre). Nous considèrerons donc :

Trouver $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$ telle que :

$$-\Delta u - (\omega^2 + i\varepsilon\omega)\rho u = f \text{ dans } \mathbb{R}^2 \tag{2.1}$$

sous les hypothèses (H) du chapitre précédent, qui en garantissent le caractère bien posé (cf théorème 1.1). Nous supposerons que le plan $\mathbb{R}^2$ peut être découpé en trois régions, comme illustré sur la figure 2.1 :

. $\Omega^- = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \mid \ x < a_-\right\}$

. $\Omega^+ = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \mid \ x > a_+\right\}$

. $\Omega_{int} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \mid \ a_- < x < a_+\right\}$

On notera Ω_0 l'ouvert $]a_-, a_+[\times]b_-, b_+[\subset \Omega_{int}$, contenant les perturbations bornées (voir figure 2.1). En particulier, on supposera que *supp* $f \subset \Omega_0$. Nous précisons maintenant nos hypothèses de périodicité : $\Omega^\pm$ sont deux sous-domaines périodiques infinis, de périodes $L_x^\pm$ dans la direction x, et possédant la même période L dans la direction y et qui sont par conséquent de la forme :

$$\Omega^\pm = \bigcup_{i=1}^{+\infty} \bigcup_{j=-\infty}^{+\infty} \mathcal{C}_{ij}^\pm \qquad \mathcal{C}_{ij}^\pm = \{\mathcal{C}^\pm \pm ((i-1)L_x^\pm, (j-1)L)\}$$

où les cellules de périodicité de référence sont :

$$\mathcal{C}^\pm = \left\{(x,y) \ \mid \ \pm a_\pm \leq \pm x \leq \pm a_\pm \pm L_x^\pm, \quad 0 \leq y \leq L\right\}$$

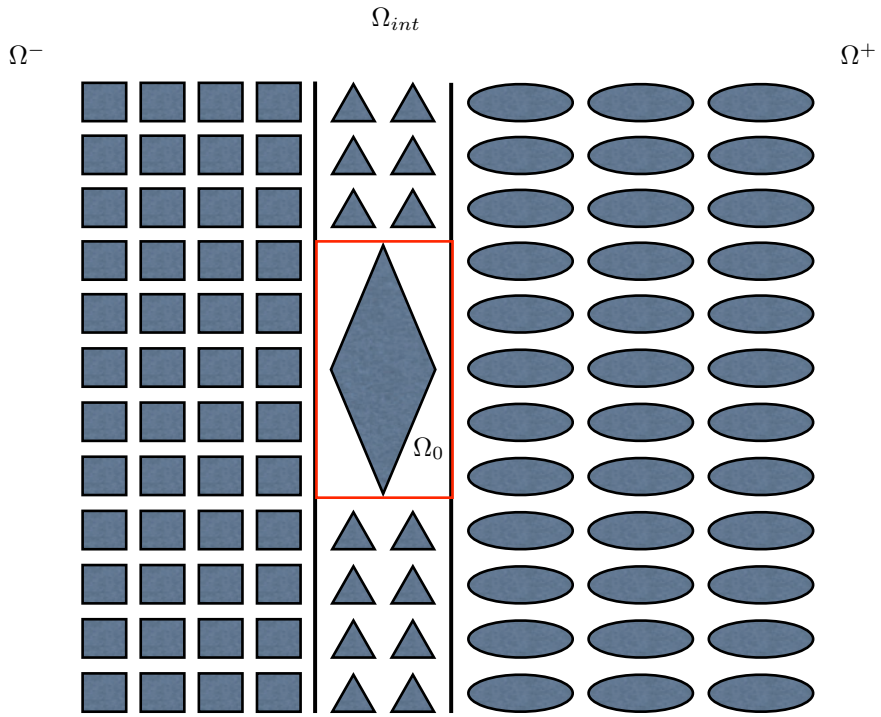


FIGURE 2.1 – Exemple de configuration

On note de plus $\Gamma_{int} = \partial\Omega_{int}$, et $\Gamma^{\pm} = \partial\Omega_{int} \cap \partial\Omega^{\pm}$, Γ^+ et Γ^- étant tous deux isomorphes à $\mathbb{R}$. Nous supposerons que la fonction $\rho \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$ est "doublement périodique" à l'extérieur de Ω_{int}, i.e il existe deux fonctions $\rho^+ \in L^\infty(\Omega^+)$ et $\rho^- \in L^\infty(\Omega^-)$ telles que :

$$\rho^+(x + pL_x^+, y \pm qL) = \rho^+(x, y) \text{ dans } \Omega^+, \quad \forall\ (p, q) \in \mathbb{N}^2, \quad \rho = \rho^+ \text{ dans } \Omega^+$$

$$\rho^-(x - pL_x^-, y \pm qL) = \rho^-(x, y) \text{ dans } \Omega^-, \quad \forall\ (p, q) \in \mathbb{N}^2, \quad \rho = \rho^- \text{ dans } \Omega^-$$

A l'intérieur de Ω_{int}, ρ est périodique dans la direction y avec la même période L, à l'extérieur de Ω_0, i.e il existe une fonction périodique $\rho_{int} \in L^\infty(\Omega_{int})$ telle que :

$$\rho_{int}(x, y + L) = \rho_{int}(x, y) \text{ dans } \Omega_{int}$$

et $\rho = \rho_{int}$ dans $\Omega_{int} \setminus \Omega_0$. Enfin, nous supposerons que $b_+ - b_-$ est un mutliple de la période L (comme nous choisissons Ω_0, ceci est toujours faisable). Par conséquent, quitte à translater l'origine, nous pouvons toujours considérer sans perte de généralité que $b_- = -M^-L$ et $b_+ = M^+L$, $(M^-, M^+) \in \mathbb{N}^2$. Insistons sur le fait que la restriction la plus forte de notre modèle est le fait que nous imposons que les périodes dans la direction y doivent toutes être égales (a minima, elles doivent être commensurables, auquel cas il suffit de prendre le plus petit multiple commun). La raison de cette restriction apparaîtra plus tard dans l'analyse, lorsque nous utiliserons la transformée de Floquet-Bloch dans la direction y. Avec de tels coefficients, le milieu ainsi défini est de la forme illustrée sur la figure 2.1. On voit qu'une telle configuration est plus générale que l'habituel défaut linéique utilisé en milieu périodique (et qui consiste le plus souvent en la présence d'une ligne de cellules homogènes au lieu de périodiques), puisque nous avons autorisé la présence de défauts bornés, ainsi que des périodicités différentes de part et d'autre de Ω_{int}. Nous appellerons toutefois toujours Ω_{int} "défaut linéique", même s'il s'agit d'un léger abus de langage.

Nous pouvons nettement observer sur la figure 2.1 que le milieu que nous venons de définir est globalement périodique dans la direction y, hormis dans la perturbation Ω_0. Notre but va être de tirer parti de cette structure particulière afin de ramener la résolution à Ω_0. Mentionnons immédiatement le fait qu'hormis la construction explicite des opérateurs DtN, l'ensemble des résultats de cette section demeure vrai dans le cas où l'on suppose simplement Ω_0 borné et le milieu périodique dans la direction y (cette remarque nous sera utile pour éviter d'inutiles répétitions lorsque nous considèrerons, plus loin dans ce chapitre, le cas de plusieurs défauts linéiques).

2.1.2 Équation de Lippmann-Schwinger abstraite

Nous allons maintenant expliquer comment on peut formellement réduire le problème modèle (2.1) à un problème posé dans Ω_0. Nous savons qu'une telle chose est possible, puisque nous y sommes d'ores et déjà parvenus dans le chapitre précédent au moyen des opérateurs DtN. Toutefois, le calcul d'opérateurs DtN sur la frontière de Ω_0, dans une configuration extérieure aussi complexe, est une tâche très difficile (la thèse de S. Fliss donne une méthode (complexe) pour y parvenir, mais seulement dans le cas où tous les milieux périodiques extérieurs sont les mêmes, i.e $\rho^- = \rho^+ = \rho_{int}$, donc uniquement dans le cas des défauts bornés). Nous allons donc utiliser une autre approche, qui constitue une abstraction de la classique équation de Lippmann-Schwinger utilisée en milieu homogène. Le principe sous-jacent est assez simple : nous voulons exprimer la solution de notre problème comme la solution du problème sans le défaut dû au milieu (i.e $\rho \neq \rho_{int}$ dans Ω_0), plus une perturbation due à cette variation du milieu dans Ω_0. Dans notre cas, cela signifie que nous allons décomposer la solution comme la solution d'un problème avec un défaut linéique parfaitement périodique en y, plus une perturbation locale. C'est pourquoi nous définissons le milieu ρ_p qui correspond au cas sans le défaut local :

$$\rho_p = \left| \begin{array}{ll} \rho^- & \text{dans } \Omega^- \\ \rho_{int} & \text{dans } \Omega_{int} \\ \rho^+ & \text{dans } \Omega^+ \end{array} \right.$$

Clairement, $\rho_p \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$, satisfait $0 < \rho_- \leq \rho_p \leq \rho_+$ et est L-periodique dans la direction y. C'est ce milieu, plus simple car partout périodique dans la direction y, qui va nous servir de référence. De plus :

$$supp\ (\rho - \rho_p) \subset \Omega_0$$

ce qui montre que le milieu ρ est bien une perturbation de ρ_p. Alors, en écrivant :

$$\rho u = \rho_p u + (\rho - \rho_p)u$$

et en reportant ceci dans (2.1), nous obtenons :

$$-\Delta u - (\omega^2 + i\varepsilon\omega)\rho_p u = f - (\omega^2 + i\varepsilon\omega)(\rho_p - \rho)u$$

C'est la raison pour laquelle nous introduisons l'opérateur suivant :

$$\begin{array}{rcl} S : L^2(\Omega_0) & \longrightarrow & L^2(\mathbb{R}^2) \\ f & \longmapsto & Sf \end{array}$$

où Sf est l'unique solution dans $H^1(\mathbb{R}^2)$ (en vertu de 1.1) du problème :

$$-\Delta Sf - (\omega^2 + i\varepsilon\omega)\rho_p Sf = \widetilde{f}$$

où l'on a noté :

$$\widetilde{f} = \left| \begin{array}{ll} f & \text{dans } \Omega_0 \\ 0 & \text{dans } \mathbb{R}^2 \setminus \Omega_0 \end{array} \right.$$

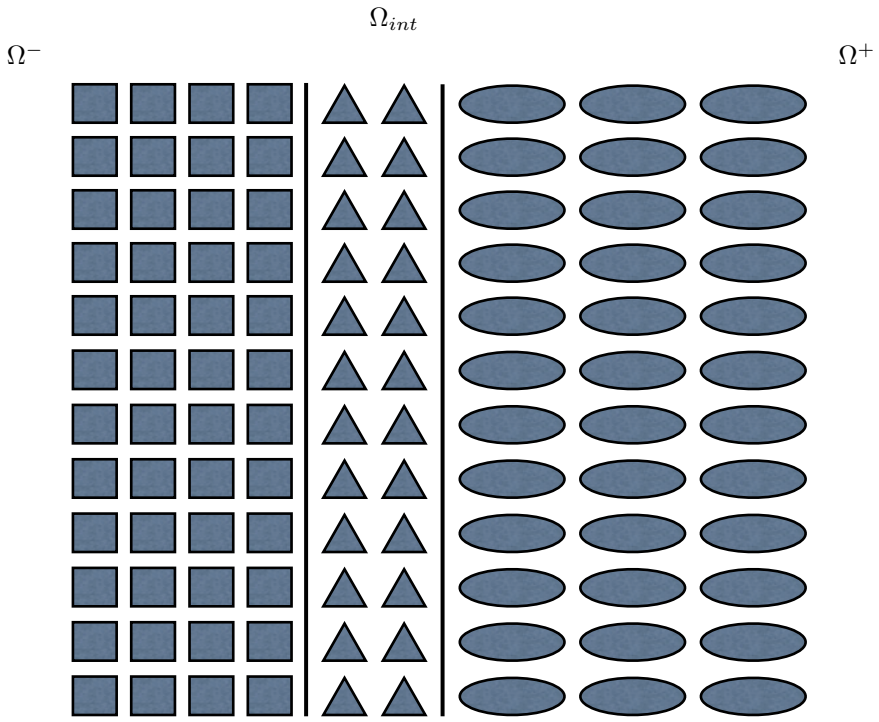


FIGURE 2.2 – Le milieu ρ_p sur l'exemple de la figure 2.1

Pour toute fonction f définie sur Ω_0, nous identifierons désormais f et son prolongement par zéro $\widetilde{f}$. Comme $\rho, \rho_p \in L^\infty$, nous avons $(\rho_p - \rho)u \in L^2(\mathbb{R}^2)$. De plus, cette fontion étant à support dans Ω_0, nous pouvons l'identifier à sa restriction à Ω_0. Alors par linéarité et unicité, il est clair que la solution u de (2.1) est donnée par :

$$u = Sf + S\left(-(\omega^2 + i\varepsilon\omega)(\rho_p - \rho)u\right) \tag{2.2}$$

Nous voyons nettement sur cette expression que u se décompose comme annoncé en la solution d'un problème posé sur le milieu de référence ρ_p (le morceau en Sf) plus une perturbation. Cependant, (2.2) demeure une équation posée sur un domaine non borné. Aussi, nous n'avons pas terminé notre travail de réduction. On introduit pour y parvenir les opérateurs suivants :

$$\begin{array}{rcl} S_0 : L^2(\Omega_0) & \longrightarrow & L^2(\Omega_0) \\ f & \longmapsto & Sf_{|\Omega_0} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} S_{0,\rho} : L^2(\Omega_0) & \longrightarrow & L^2(\Omega_0) \\ f & \longmapsto & S\left[-(\omega^2 + i\varepsilon\omega)(\rho_p - \rho)f\right]_{|\Omega_0} \end{array}$$

Alors, en appliquant l'opérateur de restriction à Ω_0 à l'équation (2.2), nous obtenons :

$$(I - S_{0,\rho})u_{|\Omega_0} = S_0 f \tag{2.3}$$

ce qui constitue la véritable équation de Lippmann-Schwinger. Son intérêt principal réside en le fait qu'elle soit posée sur un domaine borné. Néanmoins, il faut vérifier qu'elle est suffisante pour déterminer la solution u du problème originel, sinon elle ne constituerait guère plus qu'une curiosité algébrique. Il nous faut donc vérifier, puisque nous savons déjà que $u_{|\Omega_0}$ est solution de cette équation, que c'est la seule solution. Pour démontrer cela, nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme 2.1. *Pour tout Ω_0 ouvert borné, les opérateurs S_0 et $S_{0,\rho}$ sont compacts en tant qu'opérateurs sur $L^2(\Omega_0)$*

Démonstration. Pour tout f dans $L^2(\Omega_0)$, $S_0 f$ est la restriction à Ω_0 de Sf, solution dans $\mathbb{R}^2$ de :

$$-\Delta Sf - (\omega^2 + i\varepsilon\omega)\rho_p Sf = f$$

Comme $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$, les résultats usuels de régularité elliptique (voir par exemple [15]) nous apprennent que $Sf \in H^2(\mathbb{R}^2)$. Par conséquent $S_0 f \in H^2(\Omega_0)$, qui, Ω_0 étant borné, s'injecte de façon compacte dans $L^2(\Omega_0)$. Alors S_0 est compact. La même preuve nous donne bien entendu la compacité de $S_{0,\rho}$. □

Ce résultat élémentaire nous autorise à démontrer le caractère bien posé de l'équation de Lippmann-Schwinger (2.3) :

Théorème 2.1. *Pour tout Ω_0 ouvert borné, et pour tout $F \in L^2(\Omega_0)$, le problème : trouver $u \in L^2(\Omega_0)$ tel que :*

$$(I - S_{0,\rho})u = F \tag{2.4}$$

est bien posé. De plus, si $F = S_0 f$, la solution de (2.3) *est la restriction à Ω_0 de la solution de* (2.1)*, qui peut être reconstruite en posant :*

$$u = \begin{cases} u_{|\Omega_0} & \text{dans } \Omega_0 \\ Sf + S\left(-(\omega^2 + i\varepsilon\omega)(\rho_p - \rho)u_{|\Omega_0}\right) & \text{dans } \mathbb{R}^2 \setminus \Omega_0 \end{cases} \tag{2.5}$$

Démonstration. En vertu du lemme 2.1, nous savons que $S_{0,\rho}$ est un opérateur compact sur $L^2(\Omega_0)$. Par conséquent, $I - S_{0,\rho}$ est un opérateur de Fredholm d'indice zéro, et le problème (2.4) est gouverné par l'alternative de Fredholm (voir par exemple [66]). Il nous suffit donc de montrer l'injectivité de $I - S_{0,\rho}$. Nous considérons donc u solution de

$$(I - S_{0,\rho})u = 0$$

Nous définissons ensuite :

$$\widetilde{u} = \begin{cases} u & \text{dans } \Omega_0 \\ S\left(-(\omega^2 + i\varepsilon\omega)(\rho_p - \rho)u\right) & \text{dans } \mathbb{R}^2 \setminus \Omega_0 \end{cases}$$

Alors, comme $S_{0,\rho} f$ est la restriction à Ω_0 de $S\left(-(\omega^2 + i\varepsilon\omega)(\rho_p - \rho)f\right)$ par définition, nous avons en utilisant l'équation (2.4) :

$$u = S_{0,\rho}u = S\left(-(\omega^2 + i\varepsilon\omega)(\rho_p - \rho)u\right) \quad \text{dans } \Omega_0$$

et par suite :

$$\widetilde{u} = S\left(-(\omega^2 + i\varepsilon\omega)(\rho_p - \rho)u\right) \quad \text{dans } \mathbb{R}^2$$

Puis, comme $supp\ (\rho - \rho_p) \subset \Omega_0$, $(\rho_p - \rho)u = (\rho_p - \rho)\widetilde{u}$, nous pouvons réécrire ceci :

$$\widetilde{u} = S\left(-(\omega^2 + i\varepsilon\omega)(\rho_p - \rho)\widetilde{u}\right) \quad \text{dans } \mathbb{R}^2$$

En particulier, nous en déduisons que $\widetilde{u} \in H^1(\mathbb{R}^2)$. D'un autre côté, par définition de $\widetilde{S}$, $\widetilde{u}$ est solution de :

$$-\Delta\widetilde{u} - (\omega^2 + i\varepsilon\omega)\rho_p\widetilde{u} = -(\omega^2 + i\varepsilon\omega)(\rho_p - \rho)\widetilde{u}$$

ce qui se réécrit aussi :

$$-\Delta\widetilde{u} - (\omega^2 + i\varepsilon\omega)\rho\widetilde{u} = 0$$

En vertu du théorème 2.1, l'unique solution dans $H^1(\mathbb{R}^2)$ de ce problème est la solution nulle, aussi nous avons $\widetilde{u} = 0$, et $u = 0$. $I - S_{0,\rho}$ est par conséquent injectif, puis bijectif d'inverse continu en

vertu de l'alternative de Fredholm. Alors le problème (2.4) possède une unique solution.

Prenons maintenant $F = S_0 f$, et posons cette fois :

$$\widetilde{u} = \left| \begin{array}{ll} u & \text{dans } \Omega_0 \\ Sf + S\left(-(\omega^2 + i\varepsilon\omega)(\rho_p - \rho)u\right) & \text{dans } \mathbb{R}^2 \setminus \Omega_0 \end{array} \right.$$

De nouveau, comme $S_{0,\rho} f$ est la restriction à Ω_0 de $S\left(-(\omega^2 + i\varepsilon\omega)(\rho_p - \rho)f\right)$, nous obtenons en utilisant l'équation (2.3)

$$u = S_{0,\rho} u + S_0 f = S\left(-(\omega^2 + i\varepsilon\omega)(\rho_p - \rho)u\right) + S_0 f \quad \text{dans } \Omega_0$$

Rappelons-nous ensuite que $S_0 f$ est également la restriction de Sf à Ω_0, d'où :

$$u = S\left(-(\omega^2 + i\varepsilon\omega)(\rho_p - \rho)u\right) + Sf \quad \text{dans } \Omega_0$$

Alors nous obtenons :

$$\widetilde{u} = S\left(-(\omega^2 + i\varepsilon\omega)(\rho_p - \rho)u\right) + Sf \quad \text{dans } \mathbb{R}^2$$

D'autre part, nous avons toujours $supp\ (\rho - \rho_p) \subset \Omega_0$, $(\rho_p - \rho)u = (\rho_p - \rho)\widetilde{u}$, et donc :

$$\widetilde{u} = S\left(-(\omega^2 + i\varepsilon\omega)(\rho_p - \rho)\widetilde{u}\right) + Sf \quad \text{dans } \mathbb{R}^2$$

Par conséquent $\widetilde{u}$ satisfait (2.2), ce qui signifie qu'elle est l'unique solution dans $H^1(\mathbb{R}^2)$ de (2.1), et u est sa restriction à Ω_0. □

Ce résultat montre que le problème non borné de départ (2.1) est équivalent à l'équation de Lippmann-Schwinger (2.3) définie sur Ω_0 (mais qui n'est plus une équation aux dérivées partielles). En apparence, nous avons réduit le problème à un domaine borné. Mais tout comme pour les opérateurs DtN, les deux opérateurs S_0 et $S_{0,\rho}$ qui doivent être déterminés au préalable, masquent le caractère non borné du problème, puisqu'ils sont définis comme la restriction à Ω_0 de la solution de problèmes posés en domaine non borné. C'est dans la résolution de cette difficulté que réside une partie de l'originalité de nos travaux. Nous allons voir que l'utilisation conjointe de la transformée de Floquet-Bloch et des opérateurs DtN de guide va nous permettre de ramener la détermination de ces deux opérateurs à la résolution d'une famille de problèmes posés en domaines bornés.

Remarque 2.1. *Dans le cas particulier du milieu homogène sauf dans Ω_0, remarquons que l'opérateur S s'écrit, si G est la fonction de Green du milieu homogène :*

$$Sf = \int_{\mathbb{R}^2} G(x-y)f(y)dy = \int_{\Omega_0} G(x-y)f(y)dy$$

comme f est à support dans Ω_0. L'équation (2.3) s'écrit alors dans ce contexte :

$$u + (\omega^2 + i\varepsilon\omega)\int_{\Omega_0} G(x-y)(\rho_p - \rho)(y)u(y)dy = \int_{\Omega_0} G(x-y)f(y)dy$$

C'est cette équation qui est connue sous le nom d'équation de Lippmann-Scwhinger. Comme il est clair que (2.3) n'en est qu'une version abstraite dans un contexte plus général, nous avons choisi de conserver cette dénomination pour la désigner, les idées sous-jacentes étant exactement les mêmes. Toutefois, il semble que les emplois d'une équation de ce type ont toujours été basés sur le calcul (plus ou moins) explicite de la fonction de Green. Notre approche (même si on pourrait probablement calculer la fonction de Green par notre méthode) va permettre de s'en dispenser, rendant ainsi accessible l'ensemble des milieux périodiques, pour lesquels de manière très générale, il n'est pas possible de calculer explicitement la fonction de Green.

Le lecteur aura sans doute remarqué que nous avons pris soin de préciser dans l'énoncé de chacun des résultats de ce paragraphe, que ceux-ci restent valides quel que soit l'ouvert Ω_0. En effet, nous avons seulement utilisé le caractère borné de Ω_0 pour les établir, et nullement sa géométrie particulière. Ceci est destiné à préparer le cas plus général comportant plusieurs défauts linéiques, que nous traiterons plus tard dans ce chapitre.

2.1.3 Détermination de l'opérateur S

Rappelons-nous que les opérateurs S_0 et $S_{0,\rho}$ sont définis à partir de l'opérateur S. Alors, si nous parvenons à réduire la détermination de S à des calculs posés en domaine borné, nous l'aurons également fait pour S_0 et $S_{0,\rho}$.

Le noyau S dans l'espace de Floquet

Remarquons pour commencer que l'opérateur intervenant dans la définition de S, à savoir $-\Delta - (\omega^2+i\varepsilon\omega)\rho_p I$, est un opérateur différentiel à coefficients périodiques dans la direction y (et seulement y lorsque les divers milieux périodiques diffèrent les uns des autres). Une idée naturelle dans ce contexte est par conséquent d'utiliser la transformée de Floquet-Bloch (TFB) dans la direction y, afin de calculer la solution de l'équation définissant y. Cette transformation particulière est un outil privilégié pour l'étude des équations différentielles à coefficients périodiques. Au nombre de ses succès se trouve notamment la détermination de la structure en bande du spectre des opérateurs à coefficients périodiques (voir [55]). Sa définition pour des fonctions régulières est la suivante : pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$, la transformée de Floquet-Bloch dans la direction y associée à la période L est définie par :

$$\mathcal{F}\varphi(x,y,\xi) = \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varphi(x,y+nL)e^{-in\xi L} \quad \forall\, (x,y,\xi) \in \mathbb{R}\times[0,L]\times[0,2\pi/L]$$

Elle est inversible, son inverse étant donné par la formule :

$$\varphi(x,y+pL) = \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \int_0^{2\pi/L} \mathcal{F}\varphi(x,y,\xi)e^{ip\xi L}d\xi \quad \forall\, (x,y,\xi) \in \mathbb{R}\times[0,L] \quad \forall\, p \in \mathbb{N}$$

On notera souvent $\mathbb{K} = [0,L]\times[0,2\pi/L]$. La première propriété remarquable de la TFB tient au fait qu'elle transforme une fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ en une fonction définie sur $\mathbb{R}\times[0,L]\times[0,2\pi/L]$. Autrement dit, du point de vue géométrique, tout se passe comme si cette transformation bornait le domaine dans la direction $\boldsymbol{e_y}$ moyennant l'ajout d'une variable supplémentaire, elle-aussi bornée. Cette transformation est donc un moyen efficace de borner le domaine. Bien entendu, elle n'aura d'intérêt que si l'équation satisfaite par la TFB de la solution du problème qui nous intéresse demeure simple.

Nous aurons besoin dans la suite d'utiliser une définition plus large de la TFB, notamment pour les espaces de Sobolev $H^m(\mathbb{R}^2)$, afin de pouvoir l'appliquer par exemple à $Sf \in H^1(\mathbb{R}^2)$. Il est peu aisé de trouver dans la littérature une étude orientée distributions de cette transformation, aussi nous avons choisi au cours de notre étude de redéfinir complètement cet objet, et d'en étendre la définition aux distributions tempérées (ce qui explique pourquoi nous avons choisi de la définir sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ au lieu de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ comme il est plus usuel de le faire). Il s'agit d'une étude très intéressante mathématiquement, mais qui s'éloigne quelque peu de notre propos. C'est pourquoi nous avons choisi de la faire figurer en annexe A. Nous allons nous contenter ici de rappeler brièvement les propriétés de cette transformation qui permettent de comprendre son intérêt dans le cadre des milieux périodiques, et nous renverrons systématiquement à l'annexe A pour les démonstrations.

Les propriétés principales de la TFB $\mathcal{F}$ pour des fonctions L^2, et qui vont nous être utiles dans la suite, sont les suivantes :

- $\mathcal{F}H^m(\mathbb{R}^2) = L^2([0,2\pi/L], H^m_\xi(\mathbb{R}\times[0,L]))$.
- La TFB commute avec les opérateurs différentiels : si $u \in H^m(\mathbb{R})$ $\partial_x^\alpha \mathcal{F}u = \mathcal{F}(\partial_x^\alpha u)$ $\forall \alpha \in \mathbb{N}^{d+1}$ tel que $|\alpha| \leq m$.

. Elle commute avec la multiplication par une fonction L-périodique en y : pour tout $\mu \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$, L-périodique dans la direction e_y, en identifiant μ et sa restriction à $\mathbb{R} \times [0, L]$, on a $\mathcal{F}(\mu u) = \mu \mathcal{F} u$

. La formule d'inversion reste valable sur $L^2(\mathbb{R}^2)$, i.e pour tout $\hat{u} \in L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{K})$ et pour tout $p \in \mathbb{Z}$:

$$\left(\mathcal{F}^{-1}\hat{u}\right)|_{pL \le y \le (p+1)L} = \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \int_0^{2\pi/L} \hat{u}(\cdot, \cdot, \xi) e^{ip\xi L} d\xi \tag{A.5}$$

et $\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}\hat{u} = \hat{u}$ et si $u \in L^2(\mathbb{R}^2)$, $\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}u = u$.

. Pour tout $u \in L^2(\mathbb{R}^2)$, les sommes partielles $F_{M,N}u$ définies par :

$$F_{M,N}u(\cdot, \xi) = \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \sum_{n=-N}^{M} u_{|_{nL \le y \le (n+1)L}} e^{-in\xi L} \tag{A.6}$$

convergent dans $L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{K})$, et $\mathcal{F}u = \lim_{M,N \to +\infty} F_{M,N}u$ fortement dans $L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{K})$.

Notons immédiatement que la formule d'inversion (A.5) n'est pas parfaitement définie à ce stade, puisqu'elle sous-entend en réalité une identification entre deux domaines géométriquement distincts. En effet, la TFB est définie spatialement sur le domaine :

$$B^0 = \mathbb{R} \times [0, L]$$

tandis que l'inverse de la TFB est définie sur tout $\mathbb{R}^2$. La formule (A.5) doit être comprise au sens où la "bande" :

$$B^m = \mathbb{R} \times [mL, (m+1)L]$$

est isomorphe par translation à B^0. Alors toute fonction v définie sur B^m s'identifie à une fonction w définie sur B^0, i.e presque pour tout $(x, y) \in B^m$:

$$v(x, y) = w(x, y - mL)$$

et presque pour tout $(x, y) \in B^0$

$$v(x, y + mL) = w(x, y)$$

Nous ferons systématiquement l'identification entre les fonctions v et w dans une telle situation, afin d'éviter d'avoir à utiliser sans cesse les opérateurs de translation, et nous noterons cette identification $v \equiv w$. Alors la formule d'inversion doit s'écrire plus rigoureusement :

$$\left(\mathcal{F}^{-1}\hat{u}\right)|_{pL \le y \le (p+1)L} \equiv \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \int_0^{2\pi/L} \hat{u}(\cdot, \cdot, \xi) e^{ip\xi L} d\xi \tag{A.5}$$

Nous allons maintenant appliquer cette transformation à l'équation nous permettant de définir Sf. Remarquons au préalable que si f est à support dans Ω_0, alors elle est non nulle dans B^m seulement si $m \in [\![-M^-, M^+]\!]$, puisque

$$\Omega_0 =]-a_-, a_+[\times]-M^- L, M^+ L[$$

Alors, la TFB d'un tel f est donnée par, en passant à la limite dans (A.6) :

$$\mathcal{F}f \equiv \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \sum_{n=-M^-}^{M^+-1} f_{|_{B^n}} e^{-in\xi L} = \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \sum_{n=-M^-}^{M^+-1} f_{|_{\Omega_0^n}} e^{-in\xi L}$$

si on pose $\Omega_0^m = \Omega_0 \cap B^m$.

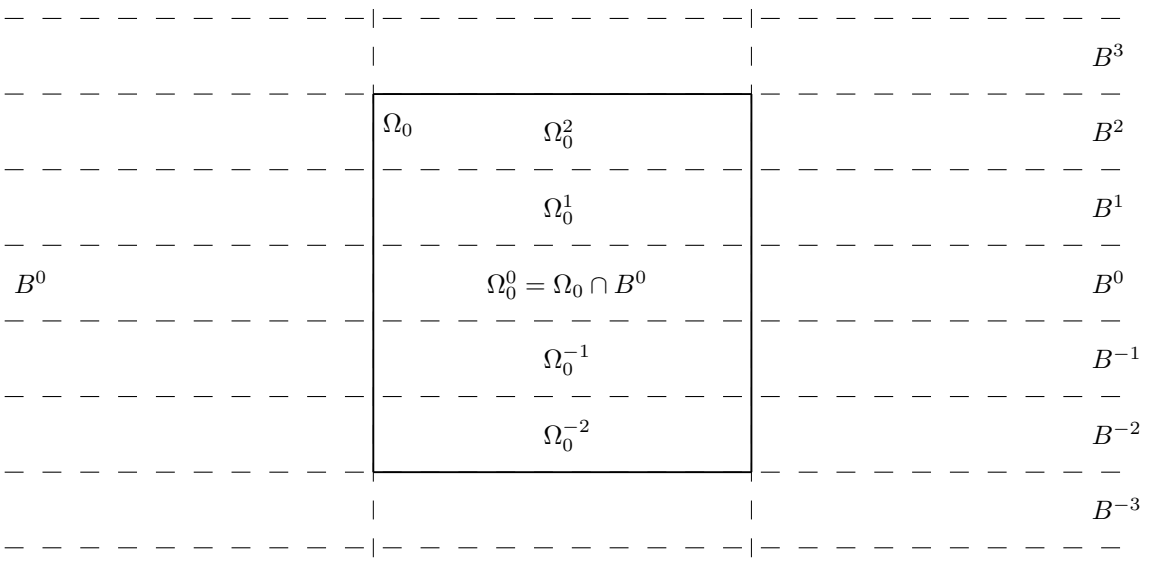


FIGURE 2.3 – Position de Ω_0 par rapport aux B^m, dans le cas $M^- = 2$ et $M^+ = 3$

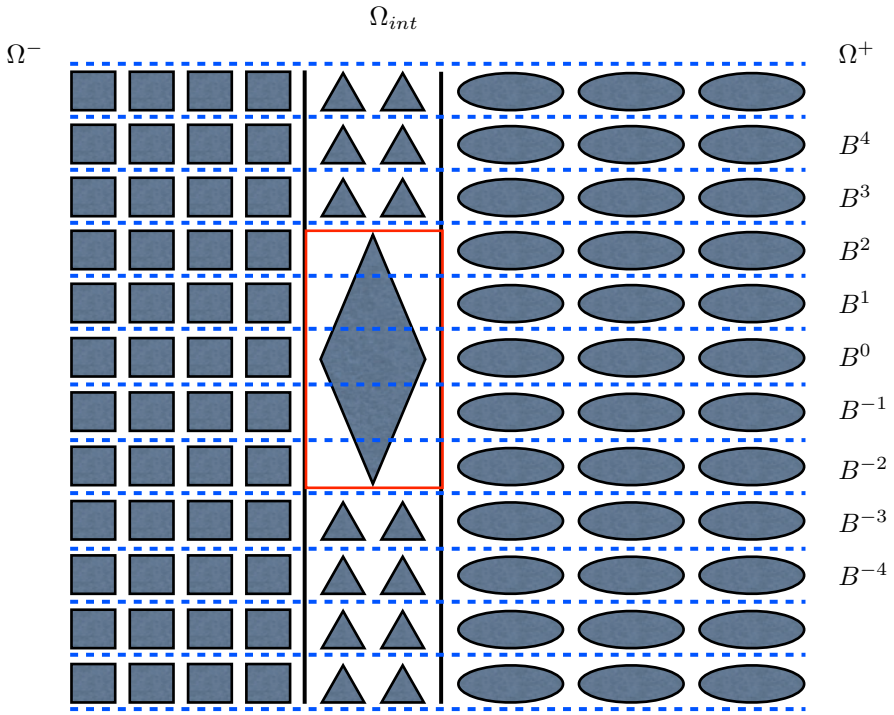


FIGURE 2.4 – Illustration de la position de Ω_0 par rapport aux B^m, avec le milieu "imagé" de la figure 2.1

Des propriétés de la transformée de Floquet, on déduit que la TFB de Sf est solution d'un problème bien identifié, qui est un problème posé dans le "guide" B^0, avec conditions aux limites quasi-périodiques sur la frontière de B^0 (le nom B^0 provient de cette dénomination de "guide d'ondes", "waveguide" en anglais) :

Théorème 2.2. *La transformée de Floquet-Bloch $\hat{S}(\cdot)f$ de Sf est l'unique élément de $L^2(\mathbb{R}\times[0,L]\times[0,2\pi/L])$ qui soit pour presque tout $\xi\in[0,2\pi/L]$ solution dans $H^1_\xi(B^0)$ de :*

$$\left|\begin{array}{l} -\Delta\hat{S}(\xi)f-(\omega^2+i\varepsilon\omega)\rho_p\hat{S}(\xi)f\equiv\sqrt{\dfrac{L}{2\pi}}\displaystyle\sum_{n=-M^-}^{M^+-1}f_{|_{B^n}}e^{-in\xi L} \quad \textit{dans } B^0 \\ \partial_y\hat{S}(\xi)f_{|_{y=L}}=e^{i\xi L}\partial_y\hat{S}(\xi)f_{|_{y=0}} \end{array}\right. \tag{2.6}$$

Démonstration. Le résultat est relativement évident au vu des propriétés de la TFB, néanmoins en faire une démonstration rigoureuse n'est pas aussi simple qu'il pourrait paraître de prime abord, puisque nous voulons obtenir un problème à ξ fixé, alors que la TFB ne va naturellement nous donner que des informations intégrales en ξ (i.e au sens L^2). Commençons par remarquer que le problème (2.6) est bien posé pour tout ξ en vertu du théorème 1.11, et que si on appelle $\hat{S}(\xi)f$ sa solution, on a l'estimation, avec $C>0$ indépendante de ξ :

$$||\hat{S}(\xi)f||_{H^1(B^0)}\leq C\left|\left|\sqrt{\frac{L}{2\pi}}\sum_{n=-M^-}^{M^+-1}f_{|_{B^n}}e^{-in\xi L}\right|\right|_{L^2(B^0)}$$

Par conséquent :

$$||\hat{S}(\xi)f||_{H^1(B^0)}\leq C|M^+-M^-+1|^2||f||_{L^2(\Omega_0)}$$

Alors, comme la fonction :

$$\begin{array}{rcl}(\hat{S}(\cdot)f)(\cdot):B^0\times[0,2\pi/L] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (x,y,\xi) & \longmapsto & \hat{S}(\xi)f(x,y)\end{array}$$

est uniformément bornée en ξ en norme $||\cdot||_{L^2(B^0)}$, elle appartient à $L^2(B^0\times[0,2\pi/L])$, et même $L^2([0,2\pi/L],H^1_\xi(\mathbb{R}\times[0,L]))$.
La remarque que nous avons faite plus haut concernant la TFB des fonctions à support compact nous apprend de plus que :

$$\mathcal{F}f\equiv\sqrt{\frac{L}{2\pi}}\sum_{n=-M^-}^{M^+}f_{|_{B^n}}e^{-in\xi L}$$

Puis, pour tout $\hat{v}\in L^2([0,2\pi/L],H^1_\xi(\mathbb{R}\times[0,L]))$, nous avons, en appliquant la formule de Green pour les fonctions quasi-périodiques (voir le chapitre précédent ou le lemme A.3), nous obtenons :

$$\begin{aligned}&\left(\nabla\hat{S}(\xi)f,\nabla\hat{v}\right)_{L^2(B^0\times[0,2\pi/L])}-(\omega^2+i\varepsilon\omega)\left(\rho_p\hat{S}(\xi)f,\hat{v}\right)_{L^2(B^0\times[0,2\pi/L])}\\&\qquad=(\mathcal{F}f,\hat{v})_{L^2(B^0\times[0,2\pi/L])}\end{aligned}$$

Alors en utilisant l'identité de Parseval pour la TFB (cf théorème A.9) :

$$\left(\rho_p\hat{S}(\xi)f,\hat{v}\right)_{L^2(\mathbb{R}\times[0,L]\times[0,2\pi/L])}=\left(\mathcal{F}^{-1}(\rho_p\hat{S}(\xi)f),\mathcal{F}^{-1}\hat{v}\right)_{L^2(\mathbb{R}^2)}$$

$$(\mathcal{F}f,\hat{v})_{L^2(\mathbb{R}\times[0,L]\times[0,2\pi/L])}=\left(f,\mathcal{F}^{-1}\hat{v}\right)_{L^2(\mathbb{R}^2)}$$

$$\left(\nabla\hat{S}(\xi)f,\nabla\hat{v}\right)_{L^2(\mathbb{R}\times[0,L]\times[0,2\pi/L])}=\left(\mathcal{F}^{-1}(\nabla\hat{S}(\xi)f),\mathcal{F}^{-1}(\nabla\hat{v})\right)_{L^2(\mathbb{R}^2)}$$

Mais en vertu des théorèmes A.9 et A.10, nous savons que la TFB inverse commute avec la multiplication par une fonction périodique et les opérateurs différentiels d'ordre 1 sur $H^1_\xi(B^0)$, d'où :

$$\mathcal{F}^{-1}(\rho_p\hat{S}(\xi)f)=\rho_p\mathcal{F}^{-1}\hat{S}(\xi)f\quad\mathcal{F}^{-1}(\nabla\hat{S}(\xi)f)=\nabla\mathcal{F}^{-1}\hat{S}(\xi)f\quad\mathcal{F}^{-1}(\nabla\hat{v})=\nabla\mathcal{F}^{-1}\hat{v}$$

Alors nous avons :

$$\left(\nabla\mathcal{F}^{-1}\hat{S}(\xi)f, \nabla\mathcal{F}^{-1}\hat{v}\right)_{L^2(\mathbb{R}^2)} - (\omega^2 + i\varepsilon\omega)\left(\rho_p\mathcal{F}^{-1}\hat{S}(\xi)f, \mathcal{F}^{-1}\hat{v}\right)_{L^2(\mathbb{R}^2)} = \left(\widetilde{f}, \mathcal{F}^{-1}\hat{v}\right)_{L^2(\mathbb{R}^2)}$$

pour tout $\hat{v} \in L^2(B^0 \times [0, 2\pi/L])$. Alors en vertu du théorème A.10, nous savons que :

$$\mathcal{F}^{-1}\left(L^2([0, 2\pi/L], H^1_\xi(\mathbb{R} \times [0, L]))\right) = H^1(\mathbb{R}^2)$$

Alors pour tout $v \in H^1(\mathbb{R}^2)$, nous avons :

$$\left(\nabla\mathcal{F}^{-1}\hat{S}(\xi)f, \nabla v\right)_{L^2(\mathbb{R}^2)} - (\omega^2 + i\varepsilon\omega)\left(\rho_p\mathcal{F}^{-1}\hat{S}(\xi)f, v\right)_{L^2(\mathbb{R}^2)} = (f, v)_{L^2(\mathbb{R}^2)}$$

et donc $\mathcal{F}^{-1}\hat{S}(\xi)f$ est solution du même problème que Sf (mis ici sous forme variationnelle). Alors par unicité, on en déduit que :

$$Sf = \mathcal{F}^{-1}\hat{S}(\xi)f \quad \text{dans } H^1(\mathbb{R}^2)$$

et par conséquent :

$$\mathcal{F}(Sf) = \hat{S}(\xi)f \quad \text{dans } L^2([0, 2\pi/L], H^1_\xi(\mathbb{R} \times [0, L]))$$

□

Remarque 2.2. *Ce résultat donne une information a priori quant à la dépendance en ξ de la TFB de Sf. En effet, le problème (2.6) étant bien posé pour tout ξ, on en déduit que l'on peut définir la TFB de Sf en tout ξ et pas seulement pour presque tout ξ, comme le serait la TFB d'une fonction $L^2(\mathbb{R}^2)$ quelconque. En fait, une analyse (relativement aisée) de la dépendance en ξ de $\hat{S}(\xi)f$ nous montre que cette quantité dépend en réalité de façon C^∞ de ξ, principalement grâce à la majoration indépendante de ξ donnée par la formule (1.15). Mais la constante impliquée dans cette estimation va exploser lorsque $\varepsilon \to 0$, ce qui tend à montrer que la régularité en ξ de la TFB de Sf dépend de la présence d'absorption dans le milieu. C'est un résultat que nous retrouverons de manière différente dans la suite, lorsque nous chercherons à discrétiser la variable de Floquet.*

L'action de la TFB sur le problème posé pour le milieu ρ_p consiste donc à transformer un problème de plan en une famille indexée par ξ de problèmes posés sur B^0, qui a une géométrie de "guide d'ondes" (nous parlerons pour cela de problème de guide, ce qui constitue un léger abus de langage puisque nous ne nous sommes pas assurés qu'il existait des ondes effectivement guidées). Nous représentons ce résultat d'une façon que nous espérons imagée sur la figure 2.5.
Il est clair que $\hat{S}(\xi)f$ permet de définir pour tout ξ fixé un opérateur sur $L^2(\Omega_0)$:

$$\begin{array}{rcl} \hat{S}(\xi) : L^2(\Omega_0) & \longrightarrow & H^1_\xi(B^0) \\ f & \longmapsto & \hat{S}(\xi)f \end{array}$$

où $\hat{S}(\xi)f$ est la solution de (2.6). La propriété la plus remarquable de cet opérateur tient au fait que le support compact de f nous permet de calculer explicitement sa TFB, aussi nous connaissons de façon explicite la dépendance de $\hat{S}(\xi)f$ en f (moyennant la résolvante de l'équation sous jacente à (2.6)). Rappelons-nous maintenant que notre but véritable est de calculer Sf. Mais comme conséquence directe de la formule d'inversion de Floquet, nous obtenons :

Corollaire 2.1. *Pour tout $f \in L^2(\Omega_0)$, nous avons :*

$$Sf_{|B^m} \equiv \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \int_0^{2\pi/L} \hat{S}(\xi)f e^{im\xi L} d\xi \tag{2.7}$$

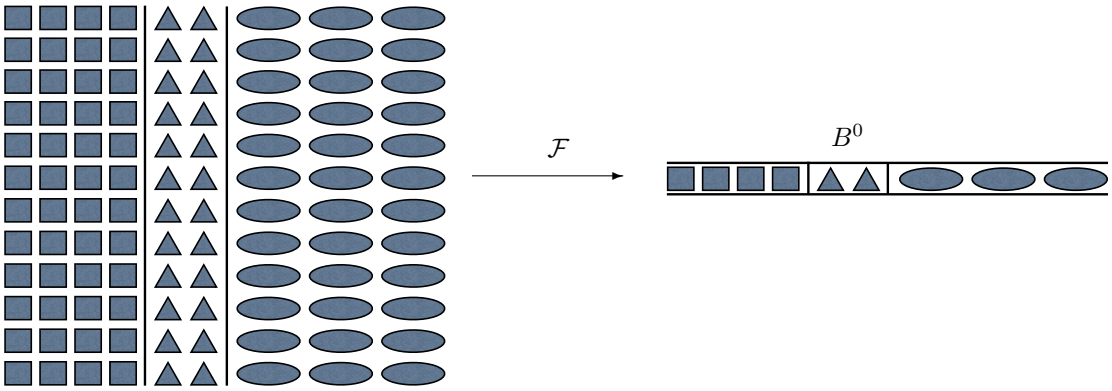


FIGURE 2.5 – L'action de la TFB, du point de vue géométrique, sur l'exemple de la figure 2.1

À ce stade, le lecteur aura certainement compris que le problème (2.6) est la raison pour laquelle nous avons introduit les espaces quasi-périodiques dans le chapitre précédent : le problème dont $\hat{S}(\xi)f$ est solution à ξ fixé est exactement de la forme (1.14). Bien entendu, nous allons tenter d'appliquer l'ensemble des résultats du chapitre précédent à ce problème, c'est-à-dire que nous allons chercher à utiliser la méthode DtN pour résoudre (2.6), et ramener sa résolution à un problème posé en domaine borné.

Remarque 2.3. *La raison pour laquelle nous avons imposé au milieu de posséder la même périodicité dans la direction y dans les trois domaines Ω_{int}, Ω^- et Ω^+ devrait maintenant apparaître clairement au lecteur. En effet, c'est cette hypothèse qui nous permet de définir une TFB qui commute globalement avec la multiplication par ρ_p. Sans cette hypothèse, la seule chose que nous pourrions écrire serait une relation du type :*

$$-\Delta\hat{S}(\xi)f - (\omega^2 + i\varepsilon\omega)\mathcal{F}(\rho_p\mathcal{F}^{-1}\hat{S}(\xi)f) = \mathcal{F}f$$

L'inversion de la TFB étant une opération intégrale, cela reviendrait à coupler toutes les valeurs de $\hat{S}(\xi)f$ pour des ξ différents. Nous serions alors bien en peine de calculer pareil objet (même si ce n'est pas rigoureusement impossible), mais surtout l'analyse numérique d'une discrétisation de ce type de problème (qui serait alors une équation intégrale non classique) poserait les mêmes problèmes que ceux qui nous empêchent de conclure pour la méthode de décomposition de domaine présentée en annexe, ou dans le cas des opérateurs DtN de plan construits dans la thèse de S. Fliss (cf [37]), pour lesquels il n'existe pas d'estimations ou de preuve de convergence à ce jour.

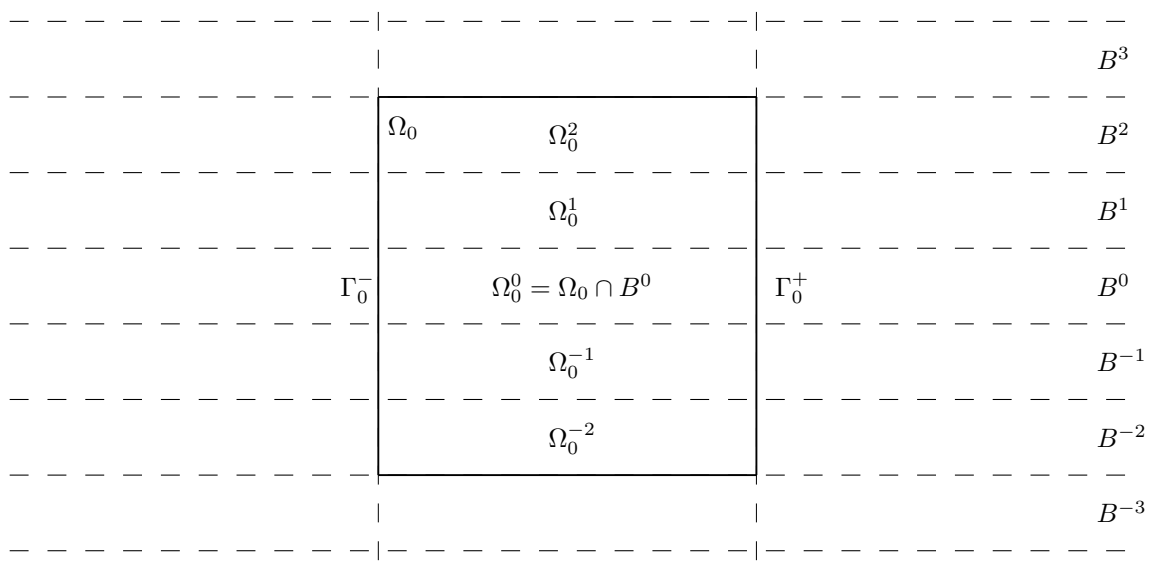
Encore une fois, l'ensemble des résultats que nous venons de présenter demeure vrai pour Ω_0 borné quelconque, à condition que ρ_p, qui est en fait le milieu sans défaut borné, soit périodique dans la direction e_y.

MÉTHODE DTN POUR LES GUIDES PÉRIODIQUES

La TFB de Sf est solution, à ξ fixé, du problème de guide : trouver $\hat{S}(\xi)f \in H^1_\xi(B^0)$ tel que

$$\left|\begin{array}{l} -\Delta\hat{S}(\xi)f - (\omega^2 + i\varepsilon\omega)\rho_p\hat{S}(\xi)f = \sqrt{\dfrac{L}{2\pi}}\displaystyle\sum_{n=-M^-}^{M^+-1} f_{|B^n}e^{-in\xi L} \quad \text{dans } B^0 \\ \partial_y\hat{S}(\xi)f_{|y=L} = e^{i\xi L}\partial_y\hat{S}(\xi)f_{|y=0} \end{array}\right. \tag{2.6}$$

Remarquons tout de suite que le second membre est à support dans $\Omega_0^0 = \Omega_0 \cap B^0$, puisque f est à support dans Ω_0.



De plus, en dehors de $\Omega_0 \cap B^0$, le coefficient ρ_p est périodique dans la direction x puisque $\rho_p = \rho^{\pm}$ dans $\Omega^{\pm}$, donc en particulier dans $B_{\pm}^0 = B^0 \cap \Omega^{\pm}$. En d'autre termes, nous sommes en présence d'un problème de guide périodique localement perturbé, puisque le milieu est périodique dans la direction x sauf dans $\Omega_0 \cap B^0$, où la source est non nulle. Nous pouvons alors appliquer la méthode DtN du chapitre 1 à ce problème. Introduisons quelques notations pour cela :

. Nous désignons par Γ_0^- et Γ_0^+ les frontières verticales gauche et droite de $\Omega_0 \cap B^0$, i.e :

$$\Gamma_0^{\pm} = \left\{(x,y) \in B^0 \ \mid \ x = a_{\pm}\right\}$$

La frontière $\Gamma_0 = \partial(\Omega_0 \cap B^0) \setminus \overline{\partial\Omega_0 \cap \partial B^0}$ est alors donnée par :

$$\Gamma_0 = \Gamma_0^- \times \Gamma_0^+$$

. Les autres frontières verticales sont notées $\Gamma_j^{\pm} = \left\{(x,y) \in B^0 \ \mid \ x = a_{\pm} \pm jL_x^{\pm}\right\}$

. Les cellules de périodicité $\mathcal{C}_{i0}^{\pm}$ encore présentes dans B^0 sont notées simplement $\mathcal{C}_i^{\pm}$.

. Les deux demi-guides extérieurs à $\Omega_0 \cap B^0$ seront notés B_-^0 et B_+^0, avec :

$$B_-^0 = \left\{(x,y) \in B^0 \ \mid \ x < a_-\right\} \quad \text{et} \quad B_+^0 = \left\{(x,y) \in B^0 \ \mid \ x > a_+\right\}$$

. Les deux frontières $y = L$ et $y = 0$ de B^0 seront notées respectivement Σ^+ et Σ^-

Nous définissons le domaine extérieur $B_e^0 = B^0 \setminus \overline{\Omega_0 \cap B^0}$, de sorte que l'on ait aussi :

$$B_e^0 = B_-^0 \cup B_+^0$$

ainsi que le problème extérieur associé :

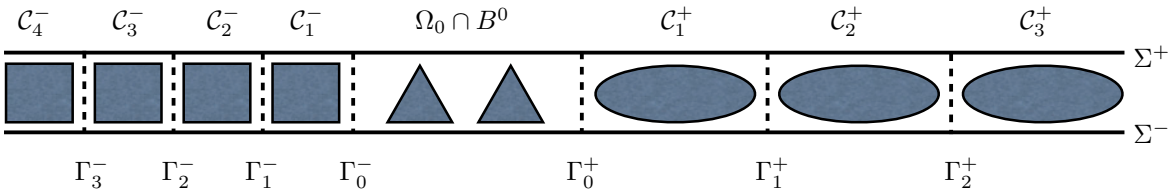


FIGURE 2.6 – Notations utilisées sur le guide

Pour tout $\varphi \in H_\xi^{1/2}(\Gamma_0)$, trouver $u_e(\varphi) \in H_\xi^1(B_e^0)$ tel que :

$$\left| \begin{array}{ll} -\Delta u_e(\varphi) - (\omega^2 + i\varepsilon\omega)\rho_p u_e(\varphi) = 0 & \text{dans } B_e^0 \\ \partial_y u_e(\varphi)_{|_{\Sigma^+ \cap \partial B_e^0}} = e^{i\xi L} \partial_y u_e(\varphi)_{|_{\Sigma^- \cap \partial B_e^0}} & \\ u_e(\varphi)|_{\Gamma_0} = \varphi & \end{array} \right.$$

qui est bien posé en vertu du théorème 1.12. Les opérateurs DtN sont définis par :

$$\begin{array}{rcl} \Lambda_e(\xi) : H_\xi^{1/2}(\Gamma_0) & \longrightarrow & H_\xi^{1/2}(\Gamma_0)' \\ \varphi & \longmapsto & -\dfrac{\partial u_e(\varphi)}{\partial \nu_0}|_{\Gamma_0} \end{array}$$

où ν_0 est la normale extérieure à $\Omega_0 \cap B^0$ sur Γ_0. Alors, le théorème 1.13 nous apprend que résoudre (2.6) est équivalent à résoudre : trouver $\hat{S}_0(\xi) f \in H_\xi^1(\Omega_0 \cap B^0)$ tel que :

$$\left| \begin{array}{ll} -\Delta \hat{S}_0(\xi) f - (\omega^2 + i\varepsilon\omega)\rho_p \hat{S}_0(\xi) f = \sqrt{\dfrac{L}{2\pi}} \displaystyle\sum_{n=-M^-}^{M^+-1} f_{|_{\Omega_0^n}} e^{-in\xi L} & \text{dans } \Omega_0 \cap B^0 \\ \partial_y \hat{S}_0(\xi) f_{|_{\Sigma^+ \cap \partial(\Omega_0 \cap B^0)}} = e^{i\xi L} \partial_y \hat{S}_0(\xi) f_{|_{\Sigma^- \cap \partial(\Omega_0 \cap B^0)}} & \\ \dfrac{\partial \hat{S}_0(\xi) f}{\partial \nu_0} + \Lambda_e(\xi) \left(\hat{S}_0(\xi) f|_{\Gamma_0} \right) = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \end{array} \right. \tag{2.8}$$

et on aura :

$$\begin{array}{rcl} \hat{S}_0(\xi) : L^2(\Omega_0) & \longrightarrow & L^2(\Omega_0 \cap B^0) \\ f & \longmapsto & \hat{S}(\xi) f|_{\Omega_0 \cap B^0} \end{array}$$

Si nous sommes capables de calculer l'opérateur $\Lambda_e(\xi)$ à partir de problèmes posés en domaine borné, alors nous aurons réduit l'ensemble de la détermination de $\hat{S}(\xi) f$ à des calculs posés en domaine borné. De plus, le résultat d'équivalence que nous venons d'établir ici ne dépend pas, encore une fois, de la forme particulière de Ω_0, pourvu qu'il soit borné. Pour le reste de cette sous-section, nous allons par contre devoir utiliser nos hypothèses sur la géométrie. En effet, nous trouvons dans [37] une méthode qui réalise précisément la construction des opérateurs DtN que nous recherchons, pour $\Omega_0 \cap B^0 =]a_-, a + [\times]0, L[$. Nous allons la rappeler en détail ici, à la fois par souci de complétude, et aussi parce que nous allons la discrétiser spatialement d'une manière qui diffère de celle de [37]. L'analyse numérique que nous développerons alors suivra les mêmes principes que la construction théorique que nous allons rappeler, mais en plus complexe (il nous a donc semblé plus simple de les présenter d'abord dans un cadre où la technique ne prend pas le pas sur les idées).

L'ensemble de la méthode est bien entendu basé sur la périodicité, ainsi que sur la remarque suivante :

Pour tout $\varphi \in H_\xi^{1/2}(\Gamma_0^\pm)$, trouver $w_\pm(\varphi) \in H_\xi^1(B_0^\pm)$ tel que :

$$\left| \begin{array}{ll} -\Delta w_\pm(\varphi) - (\omega^2 + i\varepsilon\omega)\rho^\pm w_\pm(\varphi) = 0 & \text{dans } B_0^\pm \\ \partial_y w_\pm(\varphi)_{|_{\Sigma^+ \cap \partial B_0^\pm}} = e^{i\xi L} \partial_y w_\pm(\varphi)_{|_{\Sigma^- \cap \partial B_0^\pm}} & \\ w_\pm(\varphi)|_{\Gamma_0}^\pm = \varphi & \end{array} \right. \tag{2.9}$$

ces problèmes sont encore bien posés en vertu du théorème 1.12. Alors par unicité, comme $\rho_p = \rho^{\pm}$ dans $B^0_{\pm}$ il est clair que l'on a :

$$u_e(\varphi)|_{B^0_{\pm}} = w_{\pm}(\varphi|_{\Gamma^{\pm}_0})$$

Autrement dit, le problème extérieur se décompose en deux problèmes de demi-guide découplés, de part et d'autre de $\Omega_0 \cap B^0$. Ce résultat, presque trivial, nous permet de simplifier énormément la géométrie des problèmes que nous allons effectivement résoudre. De plus, si on définit les opérateurs DtN de demi-guide :

$$\begin{array}{rcl} \Lambda_{\pm}(\xi) : H^{1/2}_{\xi}(\Gamma^{\pm}_0) & \longrightarrow & H^{1/2}_{\xi}(\Gamma^{\pm}_0)' \\ \varphi & \longmapsto & -\dfrac{\partial w_{\pm}(\varphi)}{\partial \nu^{\pm}_0}|_{\Gamma^{\pm}_0} \end{array}$$

où $\nu^{\pm}_0$ est la normale extérieure à $\Omega_0 \cap B^0$ sur $\Gamma^{\pm}_0$. Alors il est clair que :

$$(\Lambda_e(\xi)\varphi)|_{\Gamma^{\pm}_0} = \Lambda_{\pm}(\xi)\varphi|_{\Gamma^{\pm}_0}$$

et par conséquent le problème intérieur (2.8) se réécrit encore :

$$\left| \begin{array}{ll} -\Delta \hat{S}_0(\xi)f - (\omega^2 + i\varepsilon\omega)\rho_p \hat{S}_0(\xi)f = \sqrt{\dfrac{L}{2\pi}} \displaystyle\sum_{n=-M^-}^{M^+-1} f_{|\Omega^n_0} e^{-in\xi L} & \text{dans } \Omega_0 \cap B^0 \\ \partial_y \hat{S}_0(\xi)f_{|_{\Sigma^+ \cap \partial(\Omega_0 \cap B^0)}} = e^{i\xi L}\partial_y \hat{S}_0(\xi)f_{|_{\Sigma^- \cap \partial(\Omega_0 \cap B^0)}} & \\ \dfrac{\partial \hat{S}_0(\xi)f}{\partial \nu^-_0} + \Lambda_-(\xi)\left(\hat{S}_0(\xi)f|_{\Gamma^-_0}\right) = 0 & \text{sur } \Gamma^-_0 \\ \dfrac{\partial \hat{S}_0(\xi)f}{\partial \nu^+_0} + \Lambda_+(\xi)\left(\hat{S}_0(\xi)f|_{\Gamma^+_0}\right) = 0 & \text{sur } \Gamma^+_0 \end{array} \right. \tag{2.10}$$

Il ne reste donc plus qu'à déterminer les $\Lambda_{\pm}$, ce qui revient à résoudre les problèmes de demi-guide (2.9).

Résolution des problèmes de demi-guide en milieu périodique

Il est clair que si nous disposons d'une méthode pour résoudre l'un des deux problèmes de demi-guide, alors la même méthode permettra de résoudre l'autre. Aussi, nous allons nous contenter de rappeler la méthode développée dans [37] pour le cas +. Afin d'alléger les notations, nous allons de plus omettre quelque temps les indices +, lorsque cela ne prête pas à confusion, et nous noterons simplement Σ^+ pour désigner $\Sigma^+ \cap \partial B^0_+$ et Σ^- pour désigner $\Sigma^- \cap \partial B^0_-$. Avec ces simplifications de notations, le problème que nous cherchons à résoudre s'écrit :

Pour tout $\varphi \in H^{1/2}_{\xi}(\Gamma^{\pm}_0)$, trouver $w(\varphi) \in H^1_{\xi}(B^0_+)$ tel que :

$$\left| \begin{array}{ll} -\Delta w(\varphi) - (\omega^2 + i\varepsilon\omega)\rho^+ w(\varphi) = 0 & \text{dans } B^0_+ \\ \partial_y w(\varphi)_{|_{\Sigma^+}} = e^{i\xi L}\partial_y w(\varphi)_{|_{\Sigma^-}} & \\ w(\varphi)|_{\Gamma^+_0} = \varphi & \end{array} \right. \tag{2.11}$$

La méthode développée dans [37] est entièrement basée sur un résultat de structure de la solution des problèmes de demi-guide, qui est une conséquence de la périodicité du problème. Pour exprimer cette structure particulière de $w(\varphi)$, nous devons introduire l'opérateur de propagation suivant :

$$\begin{array}{rcl} R(\xi) : H^{1/2}_{\xi}([0,L]) & \longrightarrow & H^{1/2}_{\xi}([0,L]) \\ \varphi & \longmapsto & w(\varphi)|_{\Gamma^+_1} \end{array}$$

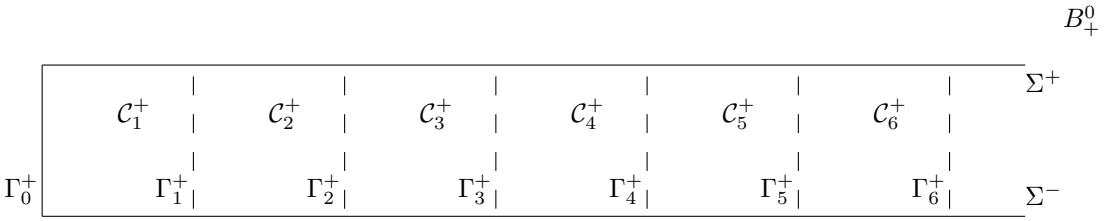


FIGURE 2.7 – Demi-guide B_+^0

Si on considère la restriction de $w(\varphi)$ à B_+^0 privé de la première cellule, on constate qu'elle est formellement solution du même problème que $w(\varphi)$, par périodicité des coefficients (et du domaine), mais pour la donnée $R(\xi)\varphi$. Par unicité, on s'attend donc à pouvoir l'exprimer en fonction de $w(\varphi)$ et $R(\xi)$. C'est le sens du résultat de structure suivant, pour lequel nous introduisons l'opérateur de translation $\tau_h : L^2(B_+^0) \longrightarrow L^2(B_+^0)$, tel que presque partout dans Ω^+, $\tau_h(u)(x,y) = u(x+h,y)$.

Théorème 2.3. *L'opérateur $R(\xi)$ est compact, injectif, de rayon spectral strictement inférieur à 1. De plus, pour tout $\varphi \in H_\xi^{1/2}([0,L])$ et tout $j \geq 0$, la solution du problème de demi-guide* (2.11) *possède la structure suivante :*

$$\tau_{jL_x}(w(\varphi)) = w(R(\xi)^j\varphi) \tag{2.12}$$

Démonstration. On commence par démontrer la formule (2.12). On considère, pour tout $\varphi \in H_\xi^{1/2}([0,L])$ la fonction $\tau_{L_x}(w(\varphi))$. Il est clair par périodicité de ρ^+ que $\tau_{L_x}(w(\varphi))$ est solution de :

$$\left|\begin{array}{ll} -\Delta\tau_{L_x}(w(\varphi)) - (\omega^2 + i\varepsilon\omega)\rho^+\tau_{L_x}(w(\varphi)) = 0 & \text{dans } B_+^0 \\ \partial_y\tau_{L_x}(w(\varphi))|_{\Sigma^+} = e^{i\xi L}\partial_y\tau_{L_x}(w(\varphi))|_{\Sigma^-} & \\ \tau_{L_x}(w(\varphi)) = R(\xi)\varphi & \text{sur } \Gamma_0^+ \end{array}\right.$$

par définition de $R(\xi)$. Mais toujours par définition, $w(R(\xi)\varphi)$ est également solution de ce problème bien posé, aussi $\tau_{L_x}(w(\varphi)) = w(R(\xi)\varphi)$. On obtient ensuite :

$$\tau_{2L_x}(w(\varphi)) = \tau_{L_x}(\tau_{L_x}(w(\varphi))) = \tau_{L_x}(w(R(\xi)\varphi)) = w(R(\xi)^2\varphi)$$

et il suit par une récurrence évidente que : $\tau_{jL_x}(w(\varphi)) = w(R(\xi)^j\varphi)$. Puis, en vertu du lemme 1.2 de régularité intérieure :

$$w \in H_\xi^2(B_+^0 \cap \{x \geq a_+ + \delta\})$$

Donc $R(\xi)\varphi \in H_\xi^{3/2}([0,L])$, qui s'injecte de façon compacte dans $H_\xi^{1/2}([0,L])$, en vertu du lemme 1.3, d'où la compacité de $R(\xi)$.

Supposons maintenant qu'il existe φ tel que $R(\xi)\varphi = 0$. Alors $\tau_{L_x}(w(\varphi))$ est solution de :

$$\left|\begin{array}{ll} -\Delta\tau_{L_x}(w(\varphi)) - (\omega^2 + i\varepsilon\omega)\rho^+\tau_{L_x}(w(\varphi)) = 0 & \text{dans } B_+^0 \\ \partial_y\tau_{L_x}(w(\varphi))|_{\Sigma^+} = e^{i\xi L}\partial_y\tau_{L_x}(w(\varphi))|_{\Sigma^-} & \\ \tau_{L_x}(w(\varphi)) = 0 & \text{sur } \Gamma_0^+ \end{array}\right.$$

mais ce problème est bien posé en vertu du théorème 1.12, d'où $\tau_{L_x}(w(\varphi)) = 0$. Par conséquent $w(\varphi)$ s'annule hors de la première cellule, et est solution d'un problème au Laplacien dans tout B_+^0. Alors le théorème de prolongement unique pour le Laplacien implique $w(\varphi) = 0$ dans tout Ω^+, d'où $\varphi = 0$, ce qui démontre l'injectivité de $R(\xi)$.

Enfin, maintenant que nous savons que $R(\xi)$ est compact, nous en déduisons que son spectre est

uniquement constitué de valeurs propres. Soit donc φ un vecteur propre de $R(\xi)$ associé à la valeur propre λ, alors la formule (5.5) nous donne :

$$||w(\varphi)||^2_{L^2(B^0_+)} = ||w(\varphi)|_{\mathcal{C}_1^+}||^2_{L^2(\mathcal{C})} \sum_{j=0}^{+\infty} |\lambda|^{2j}$$

qui sera fini si et seulement si $|\lambda| < 1$. □

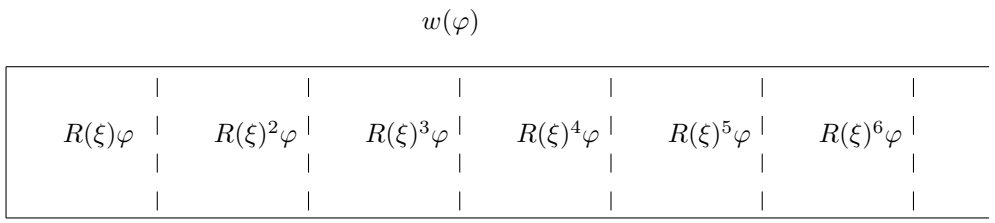


FIGURE 2.8 – Structure de $w(\varphi)$

Nous illustrons cette structure particulière sur la figure 2.8. On déduit aisément de la formule (2.12) qu'il suffit de connaître $w(\varphi)$ dans la première cellule, ainsi que l'opérateur $R(\xi)$, pour pouvoir reconstruire $w(\varphi)$ dans tout B^0_+. Nous allons maintenant observer que l'on peut également déduire la valeur de $w(\varphi)$ dans la première cellule de $R(\xi)$, moyennant la résolution de problèmes locaux. En effet, on observe que $w(\varphi)$ est solution dans la première cellule du problème :

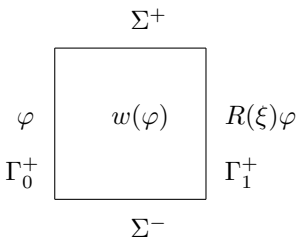


FIGURE 2.9 – $w(\varphi)$ dans la première cellule

$$\begin{cases} -\Delta w(\varphi) - (\omega^2 + i\varepsilon\omega)\rho^+ w(\varphi) = 0 \quad \text{dans } \mathcal{C}_1^+ \\ \partial_y w(\varphi)_{|_{\Sigma^+}} = e^{i\xi L}\partial_y w(\varphi)_{|_{\Sigma^-}} \\ w(\varphi)|^+_{\Gamma_0} = \varphi \\ w(\varphi)|^+_{\Gamma_1} = R(\xi)\varphi \end{cases}$$

et $w(\varphi)|_{\mathcal{C}_1^+} \in H^1_\xi(\mathcal{C}^+)$. Par linéarité, nous sommes naturellement amenés à introduire les deux problèmes de cellule suivants, de solutions $e_0(\varphi), e_1(\varphi) \in H^1_\xi(\mathcal{C}^+)$, qui vont nous permettre d'extraire la dépendance en chacune des données au bord :

$$\begin{cases} -\Delta e_0(\varphi) - (\omega^2 + i\varepsilon\omega)\rho^+ e_0(\varphi) = 0 \quad \text{dans } \mathcal{C}_1^+ \\ \partial_y e_0(\varphi)_{|_{\Sigma^+}} = e^{i\xi L}\partial_y e_0(\varphi)_{|_{\Sigma^-}} \\ e_0(\varphi)|^+_{\Gamma_0} = \varphi \\ e_0(\varphi)|^+_{\Gamma_1} = 0 \end{cases} \tag{2.13}$$

et

$$\left|\begin{array}{l} -\Delta e_1(\varphi) - (\omega^2 + i\varepsilon\omega)\rho^+ e_1(\varphi) = 0 \quad \text{dans } \mathcal{C}_1^+ \\ \partial_y e_1(\varphi)_{|_{\Sigma^+}} = e^{i\xi L}\partial_y e_1(\varphi)_{|_{\Sigma^-}} \\ e_1(\varphi)|^+_{\Gamma_0} = 0 \\ e_1(\varphi)|^+_{\Gamma_1} = \varphi \end{array}\right. \tag{2.14}$$

FIGURE 2.10 – Les deux problèmes de cellule

Ces deux problèmes, tout comme le problème dont la restriction à la première cellule de $w(\varphi)$ est solution, sont bien posés en vertu du théorème 1.12. Alors, par linéarité et unicité, il est clair que dans la première cellule, nous avons :

$$w(\varphi)|_{\mathcal{C}_1^+} = e_0(\varphi) + e_1(R(\xi)\varphi) \tag{2.15}$$

Alors, en appliquant la formule (2.12), on en déduit immédiatement que :

$$w(\varphi)|_{\mathcal{C}_j^+} \equiv e_0(R(\xi)^{j-1}\varphi) + e_1(R(\xi)^j\varphi) \tag{2.16}$$

où l'on a identifié toutes les cellules de périodicité à la première par translation (d'où le symbole $\equiv$). Il est clair que la connaissance des solutions des problèmes de cellule et de $R(\xi)$ est suffisante pour pouvoir reconstruire $w(\varphi)$ dans tout B_+^0. Comme les problèmes de cellule sont posés en domaine borné, il ne nous reste plus qu'à trouver une façon de déterminer $R(\xi)$ à partir de problèmes posés en domaine borné, et nous aurons atteint notre objectif. Remarquons que moralement, nous n'avons utilisé que le raccord en trace de la solution sur Γ_1^+ jusqu'ici. Or, nous savons en vertu du chapitre précédent, que la solution des problèmes de Helmholtz se raccorde aussi en dérivée normale sur Γ_1^+. C'est ce raccord qui va nous permettre de construire une équation pour $R(\xi)$. Le choix des normales est illustré sur la figure 2.11.

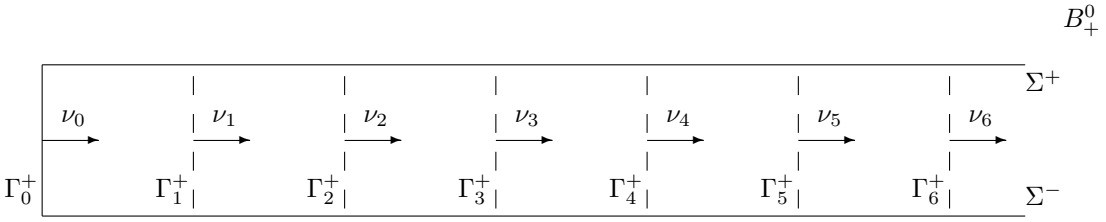


FIGURE 2.11 – Choix des normales

$$\partial_{\nu_1}(w(\varphi)|_{\mathcal{C}_1^+})|_{\Gamma_1^+} = \partial_{\nu_1}(w(\varphi)|_{B_+^0\setminus\overline{\mathcal{C}_1^+}})|_{\Gamma_1^+}$$

Puis, on a en vertu de (2.15), nous avons :

$$\partial_{\nu_1}(w(\varphi)|_{\mathcal{C}_1^+})|_{\Gamma_1^+} = \partial_{\nu_1}e_0(\varphi)|_{\Gamma_1^+} + \partial_{\nu_1}e_1(R(\xi)\varphi)|_{\Gamma_1^+}$$

D'autre part, nous avons :

$$\partial_{\nu_1}(w(\varphi)|_{B_+^0\setminus\overline{\mathcal{C}_1^+}})|_{\Gamma_1^+} = \partial_{\nu_1}(w(\varphi)|_{\mathcal{C}_2^+})|_{\Gamma_1^+}$$

Alors en utilisant (2.16), on en déduit :

$$\partial_{\nu_1}(w(\varphi)|_{B_+^0\setminus\overline{\mathcal{C}_1^+}})|_{\Gamma_1^+} = \partial_{\nu_0}e_0(R(\xi)\varphi)|_{\Gamma_0^+} + \partial_{\nu_0}e_1(R(\xi)^2\varphi)|_{\Gamma_0^+}$$

Alors, en identifiant les frontières verticales entre elles (toujours par translation) :

$$\partial_{\nu_1}e_0(\varphi)|_{\Gamma_1^+} + \partial_{\nu_0}e_1(R(\xi)\varphi)|_{\Gamma_1^+} = \partial_{\nu_0}e_0(R(\xi)\varphi)|_{\Gamma_0^+} + \partial_{\nu_0}e_1(R(\xi)^2\varphi)|_{\Gamma_0^+}$$

Pour réexprimer ceci de façon plus compacte, nous introduisons les opérateurs de trace normale pour les problèmes de cellule :

$$\begin{array}{rcl} T_{00}(\xi) : H_\xi^{1/2}([0,L]) & \longrightarrow & H_\xi^{1/2}([0,L])' \\ \varphi & \longmapsto & -\partial_{\nu_0}e_0(\varphi)|_{\Gamma_0^+} \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} T_{01}(\xi) : H_\xi^{1/2}([0,L]) & \longrightarrow & H_\xi^{1/2}([0,L])' \\ \varphi & \longmapsto & \partial_{\nu_1}e_0(\varphi)|_{\Gamma_1^+} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} T_{10}(\xi) : H_\xi^{1/2}([0,L]) & \longrightarrow & H_\xi^{1/2}([0,L])' \\ \varphi & \longmapsto & -\partial_{\nu_0}e_1(\varphi)|_{\Gamma_0^+} \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} T_{11}(\xi) : H_\xi^{1/2}([0,L]) & \longrightarrow & H_\xi^{1/2}([0,L])' \\ \varphi & \longmapsto & \partial_{\nu_1}e_1(\varphi)|_{\Gamma_1^+} \end{array}$$

Le raccord en dérivée normale se réécrit alors, pour tout $\varphi \in H_\xi^{1/2}([0,L])$:

$$T_{10}(\xi)R(\xi)^2\varphi + (T_{00}(\xi) + T_{11}(\xi))R(\xi)\varphi + T_{01}(\xi)\varphi = 0$$

et donc, au sens des opérateurs sur $H_\xi^{1/2}([0,L])$:

$$T_{10}(\xi)R(\xi)^2 + (T_{00}(\xi) + T_{11}(\xi))R(\xi) + T_{01}(\xi) = 0$$

Les opérateurs $T_{ij}(\xi)$ possèdent un certain nombre de propriétés intéressantes, la plus intéressante (du point de vue de nos applications) étant :

Lemme 2.2. *Les quatres opérateurs $T_{ij}(\xi)$ sont injectifs.*

Démonstration. La preuve étant identique pour les paires d'opérateurs $T_{ii}(\xi)$ et $T_{ij}(\xi)$, nous nous contenterons de le démontrer pour $T_{00}(\xi)$ et $T_{01}(\xi)$. Supposons qu'il existe $\varphi \in H_\xi^{1/2}([0,L])$ tel que $T_{00}(\xi)\varphi = 0$. Alors, par définition de $T_{00}(\xi)$, $e_0(\varphi)$ sera solution de :

$$\left|\begin{array}{ll} -\Delta e_0(\varphi) - (\omega^2 + i\varepsilon\omega)\rho^+ e_0(\varphi) = 0 & \text{dans } \mathcal{C}_1^+ \\ \partial_y e_0(\varphi)_{|_{\Sigma^+}} = e^{i\xi L}\partial_y e_0(\varphi)_{|_{\Sigma^-}} & \\ \partial_\nu e_0(\varphi) = 0 & \text{sur } \Gamma_0^+ \\ e_0(\varphi) = 0 & \text{sur } \Gamma_1^+ \end{array}\right.$$

qui est un problème bien posé d'où $e_0(\varphi) = 0$ et par suite $\varphi = 0$, ce qui démontre l'injectivité de $T_{00}(\xi)$. Supposons qu'il existe $\varphi \in H_\xi^{1/2}([0,L])$ tel que $T_{01}(\xi)\varphi = 0$. Alors, par définition de $T_{01}(\xi)$, $e_0(\varphi)$ sera cette fois solution de :

$$\left|\begin{array}{ll} -\Delta e_0(\varphi) - (\omega^2 + i\varepsilon\omega)\rho^+ e_0(\varphi) = 0 & \text{dans } \mathcal{C}_1^+ \\ \partial_y e_0(\varphi)_{|_{\Sigma^+}} = e^{i\xi L}\partial_y e_0(\varphi)_{|_{\Sigma^-}} & \\ \partial_\nu e_0(\varphi) = 0 & \text{sur } \Gamma_1^+ \\ e_0(\varphi) = 0 & \text{sur } \Gamma_1^+ \end{array}\right.$$

Le théorème de prolongement unique nous assure que seul $e_0(\varphi) = 0$ peut s'annuler en trace et en dérivée normale sur une même frontière tout en satisfaisant une équation elliptique, et on obtient de nouveau $\varphi = 0$. □

De ce lemme, nous déduisons le fait que l'équation de raccord que nous venons d'établir est caractéristique de $R(\xi)$:

Théorème 2.4. *Soit $\mathcal{K}(H_\xi^{1/2}([0,L]))$ l'espace des opérateurs compacts sur $H_\xi^{1/2}([0,L])$. $R(\xi)$ est l'unique opérateur compact de rayon spectral strictement inférieur à 1 solution de :*

Trouver $X \in \mathcal{K}(H_\xi^{1/2}([0,L]))$ tel que :

$$T_{10}(\xi)X^2 + (T_{00}(\xi) + T_{11}(\xi))X + T_{01}(\xi) = 0 \tag{2.17}$$

Démonstration. Nous avons déjà vu que $R(\xi)$ est solution de (2.17), qu'il est compact et de rayon spectral strictement inférieur à 1 (cf théorème 2.3). Ne reste plus qu'à démontrer que c'est la seule solution à ce problème. Soit X un opérateur compact de rayon spectral strictement inférieur à 1, et solution de (2.17). On constate tout d'abord que X est nécessairement injectif. En effet, si $\varphi \in H_\xi^{1/2}([0,L])$ est telle que $X\varphi = 0$, alors comme X est solution de (2.17), ceci entraîne que $T_{01}(\xi)\varphi = 0$. Le lemme 2.2 implique alors $\varphi = 0$, $T_{01}(\xi)$ étant injectif. Ensuite, pour tout $\varphi \in H_\xi^{1/2}([0,L])$, on définit $v(\varphi)$ par :

$$v(\varphi)|_{\mathcal{C}_j^+} = e_0(X^{j-1}\varphi) + e_1(X^j\varphi)$$

Clairement, $v(\varphi)$ est solution de la même équation que $w^1(\varphi)$ dans chaque $\mathcal{C}_j^+$, et elle est continue en trace sur chaque Γ_j^+. Le rayon spectral de X étant strictement inférieur à 1, il existe $0 < \rho_* < 1$ et N_0 tels que, pour tout $N \geq N_0$:$||X^N|| \leq \rho_*^N$, on a :

$$||v(\varphi)||^2_{H^1(B_+^0)} \leq C^{st} + ||\left(v(\varphi)\right)|_{\mathcal{C}_1^+}||^2_{H^1(\mathcal{C}_1^+)} \sum_{N_0+1}^{+\infty} \rho_*^{2N}$$

et donc $v(\varphi) \in H^1(B_+^0)$. Enfin, si on calcule le saut en dérivée normale de $v(\varphi)$ à chaque interface Γ_j^+, on obtient, comme :

$$\partial_x \left(v(\varphi)|_{\mathcal{C}_j^+}\right)|_{\Gamma_{j+1}^+} = T_{01}(\xi)X^{j-1}\varphi + T_{11}(\xi)X^j\varphi$$

$$\partial_x \left(v(\varphi)|_{\mathcal{C}_{j+1}^+}\right)|_{\Gamma_{j+1}^+} = -T_{00}(\xi)X^j\varphi - T_{10}(\xi)X^{j+1}\varphi$$

alors :

$$\left(\partial_x \left(v(\varphi)|_{\mathcal{C}_{j+1}^+}\right)|_{\Gamma_{j+1}^+} - \partial_x \left(v(\varphi)|_{\mathcal{C}_j^+}\right)|_{\Gamma_{j+1}^+}\right)$$

$$= -(T_{10}(\xi)X^2 + (T_{00}(\xi) + T_{11}(\xi))X + T_{01}(\xi))X^{j-1}$$

et le saut est par conséquent nul comme X est solution de (2.17). Donc $v(\varphi)$ est solution dans tout B^0_+ du même problème que $w(\varphi)$, ce qui signifie que : $X\varphi = R(\xi)\varphi$ pour tout $\varphi \in H^{1/2}_\xi([0,L])$ ce qui démontre l'unicité. □

Moyennant la résolution de (2.17), nous voyons donc que la détermination de $R(\xi)$ se déduit également de la résolution des deux problèmes de cellule (2.13) et (2.14). Finalement, on déduit l'opérateur DtN de tout ceci de la façon suivante :

Théorème 2.5. *On a l'expression suivante pour* $\Lambda(\xi)$

$$\Lambda(\xi) = T_{00}(\xi) + T_{10}(\xi)R(\xi) \tag{2.18}$$

Démonstration. Dans la première cellule, en vertu de (2.15) :

$$w(\varphi) = e_0(\varphi) + e_1(R_1\varphi)$$

Alors :

$$-\frac{\partial w^1(\varphi)}{\nu_0} = -\frac{\partial e_0(\varphi)}{\nu_0} - \frac{\partial e_1(R_1\varphi)}{\nu_0}$$

ce qui par définition s'écrit aussi :

$$\Lambda(\xi) = T_{00}(\xi) + T_{10}(\xi)R(\xi)$$

soit la formule annoncée. □

La méthode développée par S. Fliss dans [37], nous permet donc non seulement de construire les opérateurs DtN $\Lambda_\pm(\xi)$ en ne résolvant que des problèmes posés en domaine borné, mais également de disposer de formules de reconstruction ((2.15) et (2.16)) qui permettent de reconstruire les solutions des problèmes de demi-guide dans tout $B^0_\pm$.

Expression des opérateurs S_0 et $S_{0,\rho}$

Rappelons-nous que l'opérateur $\hat{S}(\xi)$, qui est la TFB de S que nous cherchons à déterminer, est solution dans $H^1_\xi(\Omega_0 \cap B^0)$ de :

$$\left|\begin{array}{ll}
-\Delta\hat{S}_0(\xi)f - (\omega^2 + i\varepsilon\omega)\rho_p\hat{S}_0(\xi)f = \sqrt{\dfrac{L}{2\pi}}\displaystyle\sum_{n=-M^-}^{M^+-1} f_{|\Omega_0^n}e^{-in\xi L} & \text{dans } \Omega_0 \cap B^0 \\
\partial_y\hat{S}_0(\xi)f_{\xi|_{\Sigma^+\cap\partial(\Omega_0\cap B^0)}} = e^{i\xi L}\partial_y\hat{S}_0(\xi)f_{\xi|_{\Sigma^-\cap\partial(\Omega_0\cap B^0)}} & \\
\dfrac{\partial\hat{S}_0(\xi)f}{\partial\nu_0^-} + \Lambda_-(\xi)\left(\hat{S}_0(\xi)f|_{\Gamma_0^-}\right) = 0 & \text{sur } \Gamma_0^- \\
\dfrac{\partial\hat{S}_0(\xi)f}{\partial\nu_0^+} + \Lambda_+(\xi)\left(\hat{S}_0(\xi)f|_{\Gamma_0^+}\right) = 0 & \text{sur } \Gamma_0^+
\end{array}\right. \tag{2.10}$$

et on a :

$$\begin{array}{rcl}
\hat{S}_0(\xi) : L^2(\Omega_0) & \longrightarrow & L^2(\Omega_0 \cap B^0) \\
f & \longmapsto & \hat{S}(\xi)f|_{\Omega_0\cap B^0}
\end{array}$$

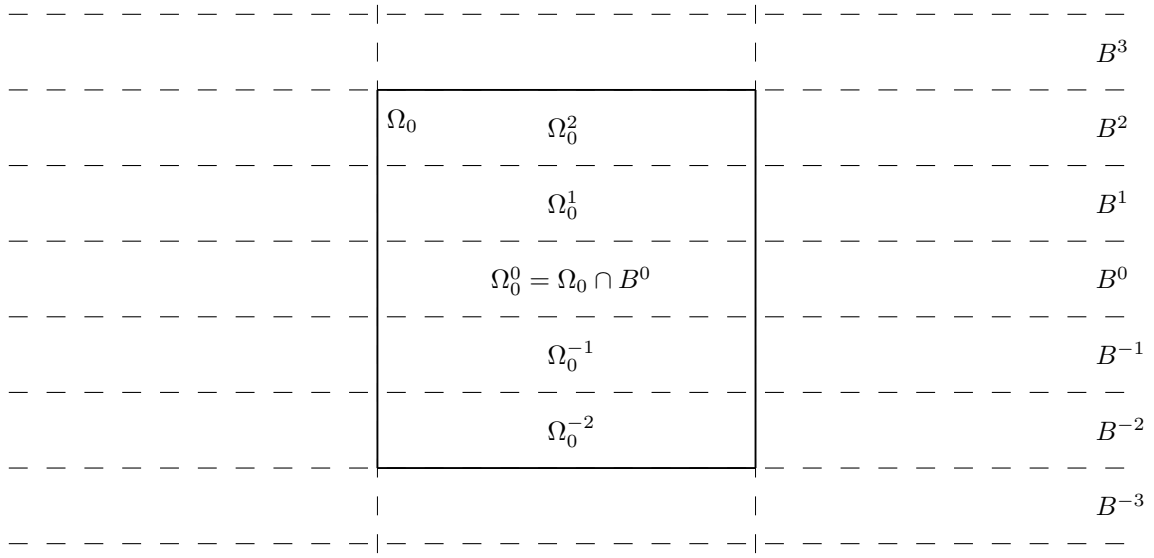
D'autre part, comme nous venons de le rappeler, $\hat{S}(\xi)$, est la TFB de S, soit (cf corollaire 2.1) :

$$Sf_{|B^m} \equiv \sqrt{\frac{L}{2\pi}}\int_0^{2\pi/L}\hat{S}(\xi)fe^{im\xi L}d\xi \tag{2.7}$$

Enfin, par définition, nous avons :

$$\begin{aligned} S_0 : L^2(\Omega_0) &\longrightarrow L^2(\Omega_0) \\ f &\longmapsto Sf_{|\Omega_0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{0,\rho} : L^2(\Omega_0) &\longrightarrow L^2(\Omega_0) \\ f &\longmapsto S\left[-(\omega^2 + i\varepsilon\omega)(\rho_p - \rho)f\right]_{|\Omega_0} \end{aligned}$$



Alors, la formule "finale" qui nous permet de déterminer S_0 et $S_{0,\rho}$ est évidemment donnée par, puisque $\Omega_0^m = \Omega_0 \cap B^m$:

Théorème 2.6. *Pour tout $f \in L^2(\Omega_0)$ et tout $m \in [\![-M^-, M^+ - 1]\!]$, nous avons les formules suivantes pour S et S_ρ*

$$S_0 f|_{\Omega_0^m} \equiv \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \int_0^{2\pi/L} \hat{S}_0(\xi) f e^{i\xi mL} d\xi \tag{2.19}$$

$$S_{0,\rho} f|_{\Omega_0^m} \equiv -(\omega^2 + i\varepsilon\omega)\sqrt{\frac{L}{2\pi}} \int_0^{2\pi/L} \hat{S}_0(\xi)(\rho_p - \rho) f e^{i\xi mL} d\xi \tag{2.20}$$

Comme $\hat{S}_0(\xi)$ se déduit de la résolution de problèmes posés en domaine borné (les problèmes de cellule (2.13) et (2.14), et le problème intérieur (2.8)), les opérateurs intervenant dans l'équation de Lippmann-Schwinger (2.3) :

$$(I - S_{0,\rho} u|_{\Omega_0}) = S_0 f$$

peuvent donc finalement être déterminés à partir de problèmes posés en domaine borné (alors qu'ils sont définis à partir de solutions de problème posés en domaine non borné). L'équation de Lippmann-Scwhinger est donc réellement une réduction en domaine borné du problème initial, que nous pouvons tenter de résoudre numériquement. Deux types d'approximation sont nécessaires pour cela : une discrétisation de la variable d'espace, qui sera classique dans son principe, mais dont l'analyse numérique nécessitera une étude assez longue (et sera l'objet du chapitre suivant), et une discrétisation de la variable de Floquet, afin de pouvoir calculer les intégrales apparaissant dans les formules (2.19) et (2.20). C'est vers cette discrétisation, et son analyse, que nous nous tournons maintenant.

2.2 Semi-discrétisation dans la variable de Floquet

Précisons d'emblée que l'étude que nous allons réaliser dans cette section ne dépend pas de la forme particulière de Ω_0 que nous avons choisie initialement. Les seules hypothèses importantes sont son caractère borné ainsi que la périodicité du milieu sans défaut borné ρ_p. Notre équation de Lippmann-Schwinger :

$$(I - S_{0,\rho})u|_{\Omega_0} = S_0 f \tag{2.3}$$

est donc "entièrement" posée en domaine borné (au sens où toutes les quantités impliquées sont calculables à partir de problèmes posés en domaine borné), et peut être réécrite Ω_0^m par Ω_0^m en utilisant les formules (2.19) et (2.20) :

$$\begin{aligned} &u_{|\Omega_0^m} - (\omega^2 + i\varepsilon\omega)\sqrt{\frac{L}{2\pi}}\int_0^{2\pi/L} \hat{S}(\xi)(\rho_p - \rho)u_{|\Omega_0} e^{im\xi L} d\xi \\ &= \sqrt{\frac{L}{2\pi}}\int_0^{2\pi/L} \hat{S}(\xi) f e^{im\xi L} d\xi \quad \forall\, m \in [\![-M^-, M^+ - 1]\!] \end{aligned} \tag{2.21}$$

Dans la suite, nous identifierons souvent $u|_{\Omega_0}$ et u, ces deux quantités étant équivalentes par restriction et extension au moyen de la formule (2.5). Sur les expressions ci-dessus, nous voyons que les formules que nous avons été à même de trouver sont entièrement basées sur le calcul d'une transformée de Floquet-Bloch inverse, c'est-à-dire sur le calcul d'une intégrale. Or, il est clair que nous ne pouvons pas espérer obtenir en toute généralité une formule analytique pour $\hat{S}(\xi)$, nous pouvons seulement espérer (au moins numériquement, voir le chapitre suivant) pouvoir calculer $\hat{S}(\xi)$ à ξ fixé (c'est la résolution d'une EDP avec des conditions aux limites un peu compliquées en domaine borné). Mais il est clair que nous ne pourrons le faire que pour un nombre fini de valeurs de ξ, et donc le mieux que nous puissions faire est d'approcher les intégrales ci-dessus par une formule de quadrature. C'est à l'étude de cette approximation par quadrature, équivalente à une discrétisation de la variable de Floquet, que nous consacrons cette section. Nous allons voir que nous sommes capables de montrer que le problème semi-discret résultant est bien posé et qu'il converge (rapidement) vers la solution du problème ci-dessus, pour une formule de quadrature adaptée. Cette étude va reposer sur la réinterprétation du problème semi-discret comme la solution d'une modification de l'EDP initiale, plutôt que sur l'utilisation des techniques usuelles d'étude d'équations intégrales (qui nous fournirait par ailleurs une moins bonne estimation de convergence). Cette manière d'étudier la convergence, en plus de conduire au résultat, nous semble avoir le mérite d'être relativement originale.

2.2.1 Construction du problème semi-discret

Rappelons pour commencer en quoi consiste une approximation par quadrature pour calculer une intégrale. Étant donné un maillage de $[0, 2\pi/L]$ constitué de N_k points $(\xi_j)_{1\leq j\leq N_k}$, et étant donné un ensemble de N_k poids $(w_j)_{1\leq j\leq N_k}$, nous définissons la formule de quadrature associée $\oint f$ comme l'opérateur qui à une fonction continue définie sur (ou au minimum définie en tout point de) $[0, 2\pi/L]$ associe :

$$\oint f = \sum_{j=1}^{N_k} w_j f(\xi_j) \simeq \int_0^{2\pi/L} f d\xi \tag{2.22}$$

Comme nous l'avons expliqué dans la remarque 2.2, $\hat{S}_0$ est défini pour tout ξ, aussi nous pouvons lui appliquer une formule de quadrature. Aussi, nous définissons les opérateurs approchés :

$$\begin{array}{ccc} S_{0,\Delta k} : L^2(\Omega_0) & \longrightarrow & H^1(\Omega_0) \\ f & \longmapsto & S_{0,\Delta k} f \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} S_{0,\rho,\Delta k} : L^2(\Omega_0) & \longrightarrow & H^1(\Omega_0) \\ f & \longmapsto & S_{0,\rho,\Delta k} f \end{array}$$

par, $\quad \forall\, m \in [\![-M^-, M^+ - 1]\!]$:

$$S_{0,\Delta k} f|_{\Omega_0^m} \equiv \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \sum_{j=1}^{N_k} w_j \hat{S}_0(\xi_j) f e^{im\xi_j L} \tag{2.23}$$

et :

$$S_{0,\rho,\Delta k} f|_{\Omega_0^m} \equiv -(\omega^2 + i\varepsilon\omega)\sqrt{\frac{L}{2\pi}} \sum_{j=1}^{N_k} w_j \hat{S}_0(\xi_j)(\rho_p - \rho) f e^{im\xi_j L} \tag{2.24}$$

L'indice Δk est supposé représenter la finesse de la formule de quadrature, on prendra :

$$\Delta k = \max_{1 \leq j \leq N_k - 1} |\xi_{j+1} - \xi_j|$$

L'équation de Lippmann-Schwinger sur $L^2(\Omega_0)$ approchée par quadrature sera donc :

$$(I - S_{0,\rho,\Delta k}) u_{\Delta k} = S_{0,\Delta k} f \tag{2.25}$$

Bien entendu, si nous voulons obtenir des résultats précis, nous devons choisir une formule de quadrature particulière. Pour cela, observons quelque peu l'objet que nous essayons d'approcher. Comme nous l'avons expliqué dans la remarque 2.2, nous pourrions montrer que $\hat{S}$ et donc $\hat{S}_0$ est C^∞ en la variable ξ, et est de toute évidence périodique en ξ. Alors, il est bien connu (voir par exemple [58] et les références qui s'y trouvent) que la quadrature basée sur la formule des trapèzes converge plus vite que tout polynôme dans ce contexte, et est en ce sens optimale (les techniques de compacité collective nous auraient mené à une convergence donnée par la formule de quadrature pour une quelconque fonction périodique régulière, soit ici plus vite que tout polynôme, mais nous allons voir que notre méthode nous mène à un résultat plus précis). Cette observation très formelle est la raison qui nous a conduit à utiliser cette formule particulière.

Commençons par rappeler en quoi consiste la formule de quadrature basée sur la règle des trapèzes. On introduit pour cela une partition de $[0, 2\pi/L]$ en N_k sous-intervalles égaux de taille $\Delta k = 2\pi/N_k L$, créant ainsi une grille de $N_K + 1$ points $\xi_j = (j-1)\Delta k$, avec $\xi_1 = 0$ et $\xi_{N_k+1} = 2\pi/L$. Sur chaque sous-intervalle, la fonction est approchée par son interpolant polynômial de degré 1 :

$$f(x) \simeq f(\xi_j)\frac{\xi_{j+1} - \xi}{\Delta k} + f(\xi_{j+1})\frac{\xi - \xi_j}{\Delta k}$$

Alors, en remplaçant f par son interpolant linéaire sur chaque sous-intervalle, on obtient la règle des trapèzes :

$$\oint f = \sum_{j=1}^{N_k} f(\xi_j)\frac{\Delta k}{2} + f(\xi_{j+1})\frac{\Delta k}{2} = \Delta k \left(\frac{f(0)}{2} + f(\Delta k) + \cdots + f(N_k \Delta k) + \frac{f(2\pi/L)}{2} \right)$$

Enfin, pour une fonction périodique, il est clair que la règle des trapèzes se réécrit plus simplement :

$$\Delta k = \frac{2\pi}{N_k L} \qquad \xi_j = j\Delta k \qquad w_j = \Delta k \quad \forall\, j \in [\![1, N_k]\!]$$

$$\oint f = \Delta k \sum_{j=1}^{N_k} f(j\Delta k) \tag{2.26}$$

Les questions qui se posent naturellement sont bien entendu de savoir si l'équation (2.25) est bien posée pour cette formule de quadrature, et dans le cas où la réponse est positive, quel est l'écart entre la solution de l'équation approchée (2.25) et la solution de (2.3). Une technique classique pour répondre à ces questions consiste à utiliser la théorie des opérateurs collectivement compacts (voir [54] et les références qui s'y trouvent). Bien que nous puissions utiliser cette approche dans notre cas, elle conduirait à une estimation d'erreur uniquement basée sur les qualités d'approximation de la quadrature de façon très générique, sans tenir compte de la spécificité de l'équation que nous sommes en train de résoudre. Nous allons adopter une approche très différente comme nous l'avons annoncé plus tôt, en réinterprétant le problème semi-discret comme une EDP, ce qui nous conduira de façon naturelle à nos estimations d'erreurs.

2.2.2 Caractère bien posé du problème semi-discret

Propriétés de la règle des trapèzes

Nous aurons besoin dans la suite d'un certain nombre de propriétés algébriques de la règle des trapèzes. L'une de ses propriétés les plus importantes est le fait qu'elle permet d'intégrer exactement les exponentielles complexes jusqu'au rang N_k. Plus précisément, il est facile de voir que :

$$\frac{L}{2\pi}\int_0^{2\pi/L} e^{i(m-n)\xi L}d\xi = \delta_{nm}$$

Posons :

$$q_{\Delta k,n,m} = \frac{L}{2\pi}\oint e^{i(m-n)\xi L}d\xi$$

Alors :

$$q_{\Delta k,n,m} = \frac{L\Delta k}{2\pi}\sum_{j=1}^{N_k} e^{ij(m-n)\frac{2\pi}{N_k}} = \frac{1}{N_k}\sum_{j=1}^{N_k} e^{ij(m-n)\frac{2\pi}{N_k}}$$

Nous supposerons dorénavant que $N_k > 2\ max(M^-, M^+)$. Alors, si $(m-n) \in N_k\mathbb{Z}$, nous avons :

$$e^{ij(m-n)\frac{2\pi}{N_k}} = 1$$

alors pour $(m-n) \in N_k\mathbb{Z}$, nous obtenons $q_{\Delta k,n,m} = 1$. D'un autre côté, si $(m-n) \notin N_k\mathbb{Z}$:

$$q_{\Delta k,n,m} = \frac{1}{N_k}e^{i(m-n)\frac{2\pi}{N_k}}\frac{1-e^{i(m-n)2\pi}}{1-e^{i(m-n)\frac{2\pi}{N_k}}} = 0$$

En particulier, pour tout $|m-n| < N_k$, la règle des trapèzes intègre exactement cette famille d'exponentielles complexes, i.e :

Lemme 2.3. *La règle des trapèzes intègre exactement les exponentielles complexes de la forme* $e^{i(m-n)\xi L}$ *si* $(m-n) \notin N_k\mathbb{Z}^*$*, i.e. :*

$$\frac{L}{2\pi}\oint e^{i(m-n)\xi L}d\xi = \frac{L}{2\pi}\int_0^{2\pi/L} e^{i(m-n)\xi L}d\xi$$

ce qui s'écrit encore :

$$q_{\Delta k,n,m} = \delta_{nm} \tag{2.27}$$

Ceci est l'une des raisons pour lesquelles c'est une si bonne formule de quadrature pour les fonctions périodiques, ce qui se voit au moyen des séries de Fourier. Une autre propriété, moins fondamentale mais très utile dans la suite, est le fait qu'elle induit une certaine périodicité dans les termes apparaissant sous le signe somme une fois appliquée aux exponentielles complexes. En effet, nous voyons que :

$$e^{ij\frac{N_k}{2}\frac{2\pi}{N_k}} = e^{-ij\frac{N_k}{2}\frac{2\pi}{N_k}} \qquad e^{ij\frac{N_k-1}{2}\frac{2\pi}{N_k}} = e^{-ij\frac{N_k+1}{2}\frac{2\pi}{N_k}}$$

Cette propriété, qui semble juste être une curiosité algébrique à première vue, sera en réalité à l'origine des conditions aux limites que nous obtiendrons lorsque nous réinterpréterons la solution de l'èquation de Lippmann-Schwinger semi-discrète comme la solution d'une EDP, d'où son importance. On regroupe les deux cas pair et impair, en une seule formule en écrivant :

$$e^{ij\lfloor\frac{N_k}{2}\rfloor\frac{2\pi}{N_k}} = e^{ij\lfloor\frac{-N_k}{2}\rfloor\frac{2\pi}{N_k}} \tag{2.28}$$

où $\lfloor\cdot\rfloor$ désigne la partie entière inférieure, i.e. l'entier (signé) immédiatement inférieur ou égal.

Remarque 2.4. *Signalons immédiatement que pour obtenir une convergence d'aussi bonne qualité que celle que nous allons obtenir pour la règle des trapèzes, il est indispensable d'utiliser une formule de quadrature qui intègre exactement la famille d'exponentielles décrite ci-dessus. Ce sera le cas pour toutes les formules décrites dans [58] (par exemple la règle des points milieux ou la règle de Simpson), et plus généralement, il semble que cela soit le cas pour toutes les formules qui réalisent la convergence spectrale (plus rapide que tout polynôme) pour des fonctions périodiques régulières.*

Réinterprétation du problème semi-discret

Nous allons maintenant expliquer comment réinterpréter la solution de l'équation de Lippmann-Schwinger semi-discrète (2.25) comme la solution du problème de Helmholtz (2.33) (que nous allons faire apparaître naturellement), et qui diffère de (1.4) essentiellement par le fait qu'il est posé sur un domaine borné dans la direction y. Nous allons montrer que ce problème est bien posé, ce qui nous permettra ensuite d'en déduire le caractère bien posé de l'équation de Lippmann-Schwinger semi-discrète (2.25) (ce sera aussi notre point de départ lorsque nous chercherons à obtenir une estimation d'erreur.

Soit $u_{\Delta k}$ une solution de (2.25). Dans le cas particulier de la règle des trapèzes, les opérateurs $S_{0,\Delta k}$ et $S_{0,\rho,\Delta k}$ deviennent, pour tout $m \in [\![-M^-, M^+ - 1]\!]$: :

$$S_{0,\Delta k} f|_{\Omega_0^m} \equiv \Delta k \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \sum_{j=1}^{N_k} \hat{S}_0(j\Delta k) f e^{imj\Delta kL} \tag{2.29}$$

et :

$$S_{0,\rho,\Delta k} f|_{\Omega_0^m} \equiv -(\omega^2 + i\varepsilon\omega)\Delta k \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \sum_{j=1}^{N_k} \hat{S}_0(j\Delta k)(\rho_p - \rho) f e^{imj\Delta kL} \tag{2.30}$$

Alors par définition, pour tout $m \in [\![-M^-, M^+]\!]$:

$$u_{\Delta k}|_{\Omega_0^m} = \Delta k \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \sum_{j=1}^{N_k} \hat{S}_0(j\Delta k) \left(f - (\omega^2 + i\varepsilon\omega)(\rho_p - \rho) u_{\Delta k} \right) e^{imj\Delta kL}$$

On étend alors $u_{\Delta k}$ à tout $\mathbb{R}^2$ en posant, pour tout $m \in \mathbb{Z}$:

$$\widetilde{u}_{\Delta_k|B^m} \equiv \Delta k \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \sum_{j=1}^{N_k} \hat{S}(j\Delta k) \left(f - (\omega^2 + i\varepsilon\omega)(\rho_p - \rho) u_{\Delta k} \right) e^{imj\Delta kL} \tag{2.31}$$

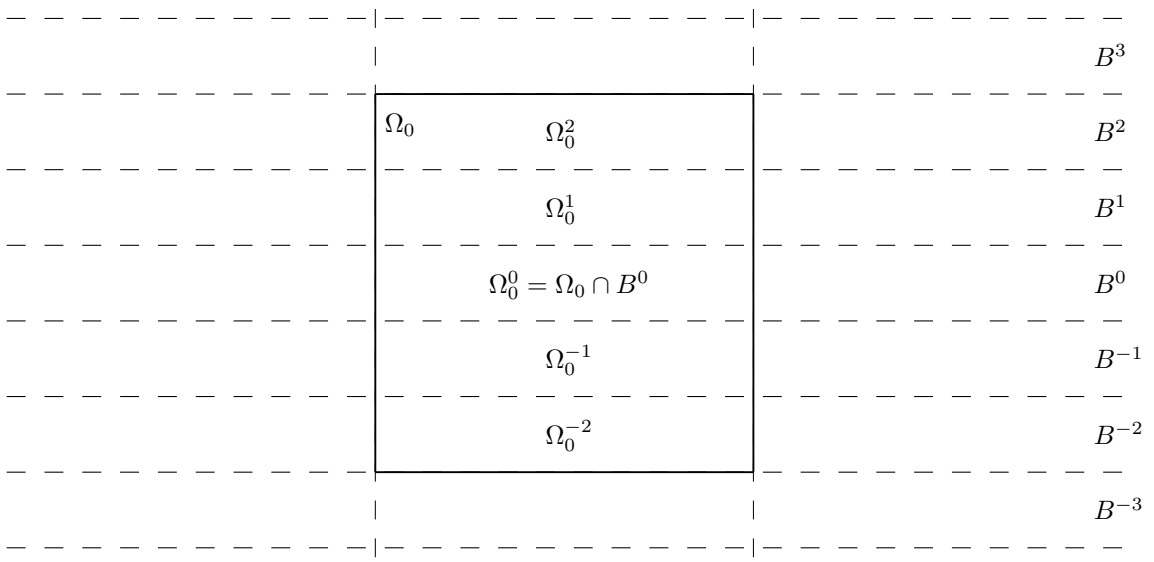
Observons qu'il s'agit bien d'une extension, puisqu'en vertu du théorème 1.13, nous savons que $\hat{S}(\xi) f_{|\Omega_0} = \hat{S}_0(\xi) f$, ce qui implique bien :

$$\widetilde{u}_{\Delta k|\Omega_0} = u_{\Delta k} \tag{2.32}$$

Des propriétés algébriques de la règle des trapèzes, données par le lemme 2.3, nous sommes capables de déduire qu'un tel $\widetilde{u}_{\Delta k}$ est alors solution d'une EDP particulière (le choix du domaine sur lequel cette équation est posée ainsi que les conditions aux limites sont une conséquence directe de (2.28)) :

Théorème 2.7. *Posons :*

$$\Omega_{N_k} = \mathbb{R} \times \left[\left(\lfloor \frac{-N_k}{2} \rfloor + 1 \right) L, \left(\lfloor \frac{N_k}{2} \rfloor + 1 \right) L \right]$$



ainsi que :

$$\Gamma^+_{N_k} = \left\{(x,y) \;\middle|\; y = \left(\lfloor \frac{N_k}{2} \rfloor + 1\right) L\right\} \qquad \Gamma^-_{N_k} = \left\{(x,y) \;\middle|\; y = \left(\lfloor \frac{-N_k}{2} \rfloor + 1\right) L\right\}$$

La fonction $\widetilde{u}_{\Delta k}$ définie à partir de la règle des trapèzes par :

$$\widetilde{u}_{\Delta_k|B^m} \equiv \Delta k \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \sum_{j=1}^{N_k} \hat{S}(j\Delta k)\left(f - (\omega^2 + i\varepsilon\omega)(\rho_p - \rho) u_{\Delta k}\right) e^{imj\Delta k L}$$

à partir d'une solution $u_{\Delta k}$ de (2.25) associée à la même règle des trapèzes est solution de :
Trouver $\widetilde{u}_{\Delta k} \in H^1_{per}(\Omega_{N_k})$ telle que :

$$\left|\begin{array}{ll} -\Delta \widetilde{u}_{\Delta k} - (\omega^2 + i\varepsilon\omega)\rho \widetilde{u}_{\Delta k} = f & \text{dans } \Omega_{N_k} \\ \widetilde{u}_{\Delta k|_{\Gamma^+_{N_k}}} = \widetilde{u}_{\Delta k|_{\Gamma^-_{N_k}}} & \\ \partial_y \widetilde{u}_{\Delta k|_{\Gamma^+_{N_k}}} = \partial_y \widetilde{u}_{\Delta k|_{\Gamma^-_{N_k}}} & \end{array}\right. \tag{2.33}$$

où $H^1_{per}(\Omega_{N_k}) = H^1_{\xi=0}(\Omega_{N_k})$.

Démonstration. Nous allons diviser la preuve en trois grandes étapes. Nous commençons par montrer que $\widetilde{u}_{\Delta k}$ est solution de l'équation de Helmholtz bande par bande (i.e sur chaque B^m), grâce à la première propriété de la règle des trapèzes (l'intégration exacte des exponentielles). Puis nous montrons que $\widetilde{u}_{\Delta k}$ est continu en trace et en dérivée normale à la frontière de chaque B^m, en faisant une solution globale dans Ω_{N_k}. Enfin, nous montrons que $\widetilde{u}_{\Delta k}$ vérifie les conditions aux limites annoncées, comme conséquence de la deuxième propriété de la règle des trapèzes.

(i) $\widetilde{u}_{\Delta k}$ est une solution locale dans B^m

Clairement, $\widetilde{u}_{\Delta k}$ appartient à $H^1(B^m)$ pour tout $m \in \mathbb{Z}$. De plus, en posant (pour alléger un peu) $\widetilde{u}^m_{\Delta k} = \widetilde{u}_{\Delta_k|B^m}$, et en appliquant l'équation de Helmholtz à cette quantité, on obtient :

$$(-\Delta - (\omega^2 + i\varepsilon\omega)\rho_p I)\widetilde{u}^m_{\Delta k} \equiv \Delta k \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \sum_{j=1}^{N_k} (-\Delta - (\omega^2 + i\varepsilon\omega)\rho_p I)\hat{S}(j\Delta k)\,(f$$

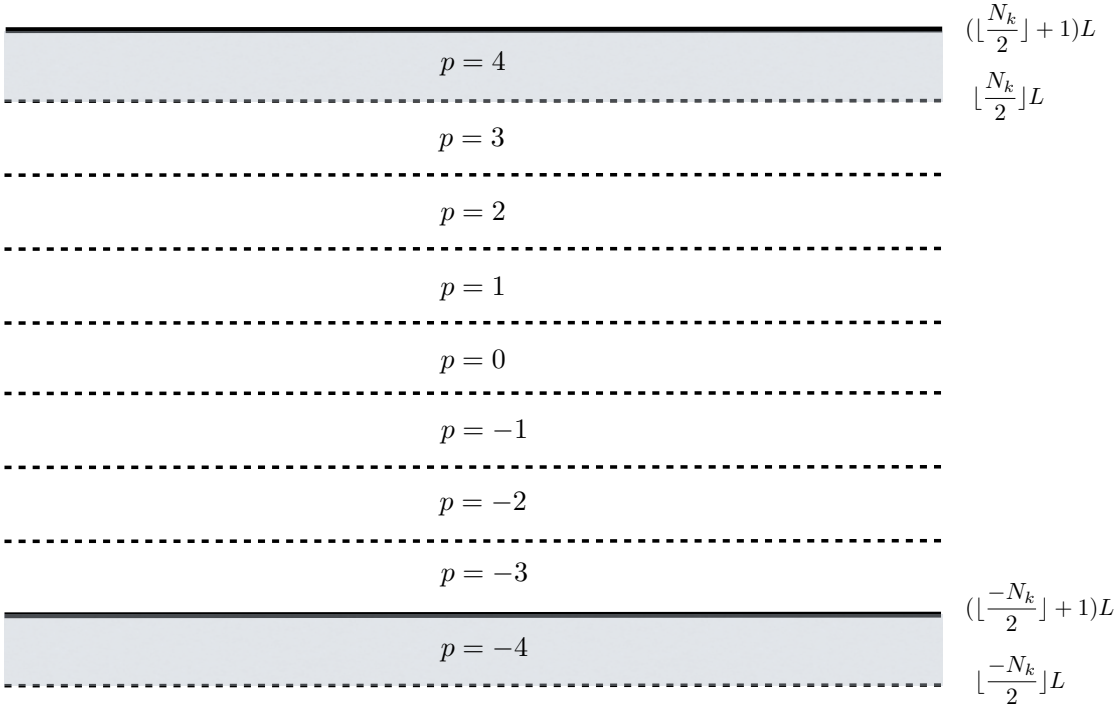


FIGURE 2.12 – Exemple pour $N_k = 8$, les zones grisées représentent les domaines où la fonction est identique, les lignes en gras les frontières $\Gamma^+_{N_k}$ et $\Gamma^-_{N_k}$ de Ω_{N_k}

$$-(\omega^2+i\varepsilon\omega)(\rho_p-\rho)u_{\Delta k}\big)\, e^{imj\Delta kL}$$
$$= \Delta k\frac{L}{2\pi}\sum_{j=1}^{N_k}\sum_{n=-M^-}^{M^+-1}\big(f-(\omega^2+i\varepsilon\omega)(\rho_p-\rho)u_{\Delta k}\big)_{|B^n}\, e^{i(m-n)j\Delta kL}$$

Alors, comme *supp* $(\rho_p-\rho)\subset\Omega_0$, en utilisant (2.32), on peut identifier $(\rho_p-\rho)u_{\Delta k}|_{B^n}$ et $(\rho_p-\rho)\widetilde{u}_{\Delta k}|_{B^n}$ et cette dernière expression devient :

$$-\Delta\widetilde{u}^m_{\Delta k}-(\omega^2+i\varepsilon\omega)\rho_p\widetilde{u}^m_{\Delta k}\equiv\sum_{n=-M^-}^{M^+-1}q_{\Delta k,n,m}\left(f-(\omega^2+i\varepsilon\omega)(\rho_p-\rho)\widetilde{u}_{\Delta k}\right)_{|B^n}$$

Puis, en utilisant les propriétés de $q_{\Delta k,n,m}$ décrites dans le lemme 2.3, nous avons $q_{\Delta k,n,m}=\delta_{nm}$, pour $m\in[\![\lfloor\frac{-N_k}{2}\rfloor,\lfloor\frac{N_k}{2}\rfloor]\!]$, et il suit, en utilisant *supp* $f\cup$*supp* $(\rho-\rho_p)\subset\Omega_0$, pour tout $m\in[\![-M^-,M^+-1]\!]$ (c'est-à-dire pour tout B^m qui intersecte Ω_0) :

$$-\Delta\widetilde{u}^m_{\Delta k}-(\omega^2+i\varepsilon\omega)\rho_p\widetilde{u}^m_{\Delta k}=f-(\omega^2+i\varepsilon\omega)(\rho_p-\rho)\widetilde{u}^m_{\Delta k}\quad\text{ dans } B^m$$

et si $m\in[\![\lfloor\frac{-N_k}{2}\rfloor,\lfloor\frac{N_k}{2}\rfloor]\!]\setminus[\![-M^-,M^+-1]\!]$ (c'est-à-dire en dehors de Ω_0) :

$$-\Delta\widetilde{u}^m_{\Delta k}-(\omega^2+i\varepsilon\omega)\rho_p\widetilde{u}^m_{\Delta k}=0\quad\text{ dans } B^m$$

Alors ceci se réécrit plus globalement, en utilisant encore *supp* $f\cup$*supp* $(\rho-\rho_p)\subset\Omega_0$, pour tout $m\in[\![\lfloor\frac{-N_k}{2}\rfloor,\lfloor\frac{N_k}{2}\rfloor]\!]$:

$$-\Delta\widetilde{u}^m_{\Delta k}-(\omega^2+i\varepsilon\omega)\rho\widetilde{u}^m_{\Delta k}=f$$

(ii) Continuité aux interfaces

Sur une interface entre deux bandes B^m, nous avons :

$$\begin{aligned}\widetilde{u}^m_{\Delta k|_{y=(m+1)L}} &= \Delta k\sqrt{\frac{L}{2\pi}}\sum_{j=1}^{N_k}\hat{S}(j\Delta k)\left(f-(\omega^2+i\varepsilon\omega)(\rho_p-\rho)u_{\Delta k}\right)_{|_{y=L}}e^{imj\Delta kL}\\ &= \Delta k\sqrt{\frac{L}{2\pi}}\sum_{j=1}^{N_k}\hat{S}(j\Delta k)\left(f-(\omega^2+i\varepsilon\omega)(\rho_p-\rho)u_{\Delta k}\right)_{|_{y=0}}e^{ij\Delta kL}e^{imj\Delta kL}\\ &= \widetilde{u}^{m+1}_{\Delta k|_{y=(m+1)L}}\end{aligned}$$

en utilisant la quasi-périodicité de $\hat{S}(\xi)$, donc $\widetilde{u}_{\Delta k}$ est par conséquent continue en trace. Les mêmes calculs mais pour la dérivée normale conduisent à :

$$\partial_y\widetilde{u}^m_{\Delta k|_{y=(m+1)L}} = \partial_y\widetilde{u}^{m+1}_{\Delta k|_{y=(m+1)L}}$$

Alors, $u_{\Delta k}$ est continue en trace et en dérivée normale. Comme nous l'avons vu à de nombreuses reprises, lorsque nous avons construit les opérateurs DtN, pour que deux solutions locales de Helmholtz se raccordent en une solution globale, il faut et il suffit qu'elles se raccordent en trace et en dérivée normale. Aussi, nous avons montré à ce stade que $\widetilde{u}_{\Delta k}$ est une solution globale de Helmholtz dans Ω_{N_k} :

$$-\Delta\widetilde{u}_{\Delta k}-(\omega^2+i\varepsilon\omega)\rho\widetilde{u}_{\Delta k}=f \quad \text{ dans } \Omega_{N_k}$$

(iii) Conditions aux limites périodiques

Nous avons, en vertu de la relation (2.28) :

$$\begin{aligned}\widetilde{u}^{\lfloor\frac{N_k}{2}\rfloor}_{\Delta_k} &\equiv \Delta k\sqrt{\frac{L}{2\pi}}\sum_{j=1}^{N_k}\hat{S}(j\Delta k)\left(f-(\omega^2+i\varepsilon\omega)(\rho_p-\rho)u_{\Delta k}\right)e^{i\lfloor\frac{N_k}{2}\rfloor j\frac{2\pi}{N_k}}\\ &\equiv \Delta k\sqrt{\frac{L}{2\pi}}\sum_{j=1}^{N_k}\hat{S}(j\Delta k)\left(f-(\omega^2+i\varepsilon\omega)(\rho_p-\rho)u_{\Delta k}\right)e^{i\lfloor\frac{-N_k}{2}\rfloor j\frac{2\pi}{N_k}}\\ &= \widetilde{u}^{\lfloor\frac{-N_k}{2}\rfloor}_{\Delta_k}\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}\partial_y\widetilde{u}^{\lfloor\frac{N_k}{2}\rfloor}_{\Delta_k} &\equiv \Delta k\sqrt{\frac{L}{2\pi}}\sum_{j=1}^{N_k}\partial_y\hat{S}(j\Delta k)\left(f-(\omega^2+i\varepsilon\omega)(\rho_p-\rho)u_{\Delta k}\right)e^{i\lfloor\frac{N_k}{2}\rfloor j\frac{2\pi}{N_k}}\\ &\equiv \Delta k\sqrt{\frac{L}{2\pi}}\sum_{j=1}^{N_k}\partial_y\hat{S}(j\Delta k)\left(f-(\omega^2+i\varepsilon\omega)(\rho_p-\rho)u_{\Delta k}\right)e^{i\lfloor\frac{-N_k}{2}\rfloor j\frac{2\pi}{N_k}}\\ &= \partial_y\widetilde{u}^{\lfloor\frac{-N_k}{2}\rfloor}_{\Delta_k}\end{aligned}$$

Alors :

$$\widetilde{u}_{\Delta_k|_{\Gamma^+_{N_k}}} = \widetilde{u}^{\lfloor\frac{N_k}{2}\rfloor}_{\Delta_k|_{y=L}} = \widetilde{u}^{\lfloor\frac{-N_k}{2}\rfloor}_{\Delta_k|_{y=L}} = \widetilde{u}_{\Delta_k|_{\Gamma^-_{N_k}}}$$

et

$$\partial_y\widetilde{u}_{\Delta_k|_{\Gamma^+_{N_k}}} = \partial_y\widetilde{u}^{\lfloor\frac{N_k}{2}\rfloor}_{\Delta_k|_{y=L}} = \partial_y\widetilde{u}^{\lfloor\frac{-N_k}{2}\rfloor}_{\Delta_k|_{y=L}} = \partial_y\widetilde{u}_{\Delta_k|_{\Gamma^-_{N_k}}}$$

et les conditions aux limites annoncées sont satisfaites. □

Nous venons donc de montrer que s'il existe une solution à l'équation de Lippmann-Schwinger semi-discrète, alors elle est la restriction à Ω_0 de la solution du problème (2.33), qui est une perturbation du problème initial (1.4). De plus, en vertu du théorème 1.11, le problème (2.33) est bien posé, puisque le cas des conditions périodiques n'est qu'un cas particulier de conditions quasi-périodiques. Nous allons donc pouvoir l'utiliser pour montrer le caractère bien posé de l'équation de Lippmann-Schwinger (2.25), ainsi que pour obtenir des estimations d'erreur.

Remarque 2.5. *Au vu de cette démonstration, il est clair que la propriété d'intégration exacte des exponentielles de la formule de quadrature est essentielle pour pouvoir réinterpréter le problème semi-discret comme la solution d'une "vraie" équation différentielle. En effet, si les exponentielles ne sont pas intégrées exactement, les restrictions de la solution aux divers B^m se retrouveront mêlées au travers de l'équation que nous obtiendrions. Nous aurions donc une équation mêlant opérateurs de dérivation et de translation, bien plus complexe à étudier, et introduisant sans le moindre doute une erreur plus importante, le modèle approché étant bien plus éloigné du modèle exact dans ce cas. D'autre part, si on utilise une formule de quadrature intégrant exactement les exponentielles, mais différente de la règle des trapèzes, il est clair que l'on retrouvera la même équation volumique, puisque c'est seulement la propriété d'intégration exacte des exponentielles qui est utile pour la retrouver. La différence se situera seulement au niveau des conditions aux limites (et éventuellement la taille du domaine Ω_{N_k}). Une observation attentive de la suite montrera que l'analyse que nous allons effectuer pourrait se transposer pour n'importe quel type de conditions aux limites, et donc pour n'importe quel type de quadrature intégrant exactement les exponentielles. Toutefois, les conditions périodiques présentent le double avantage d'être simples à exposer, et de n'être qu'un cas particulier de quasi-périodicité. Nous restons donc dans le cadre dans lequel nous nous sommes placés depuis le début de ce mémoire, ce qui nous évite d'avoir à redéfinir les espaces fonctionnels dans lesquels nous devons travailler. Enfin, nous allons voir que la convergence est excellente pour cette formule de quadrature, et suffit pour la plupart des situations pratiques.*

Remarque 2.6. *Nous pouvons réinterpréter différemment le résultat ci-dessus. Moralement, en approchant les opérateurs S_0 et $S_{0,\rho}$ par des formules de quadrature, nous avons effectué une discrétisation de la variable de Floquet. La conséquence pour le problème étudié a été de ne pas modifier l'équation, mais de tronquer le domaine dans la direction de la transformée de Floquet. Aussi, il n'est pas déraisonnable de considérer que ceci illustre un état de fait qui semble général (bien que peu étudié à notre connaissance), à savoir que discrétiser la variable de Floquet revient à borner le domaine.*

Caractère bien posé du problème semi-discret

Comme annoncé, le caractère bien posé de l'équation de Lippmann-Schwinger semi-discrète est une conséquence directe du résultat précédent :

Théorème 2.8. *Pour tout $f \in L^2(\Omega_0)$, il existe une unique solution au problème suivant posé dans $L^2(\Omega_0)$:*

$$(I - S_{0,\rho,\Delta k})u_{\Delta k} = S_{0,\Delta k} f \tag{2.25}$$

où $S_{0,\Delta k}$ et $S_{0,\rho,\Delta k}$ sont donnés par (2.23) et (2.24) suivant la règle des trapèzes, i.e, pour tout $m \in [\![-M^-, M^+ - 1]\!]$:

$$S_{0,\Delta k} f|_{\Omega_0^m} = \Delta k \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \sum_{j=1}^{N_k} \hat{S}_0(j\Delta k) f e^{imj\Delta kL} \tag{2.29}$$

et :

$$S_{0,\rho,\Delta k} f|_{\Omega_0^m} = -(\omega^2 + i\varepsilon\omega)\Delta k \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \sum_{j=1}^{N_k} \hat{S}_0(j\Delta k)(\rho_p - \rho) f e^{imj\Delta kL} \tag{2.30}$$

Démonstration. Commençons par remarquer que $\hat{S}(\xi)f$ appartient à $H^2_\xi(B^0)$ en vertu du résultat de régularité 1.2. Il en est donc de même pour $\hat{S}_{0,\rho}(\xi)f$, et par conséquent, pour tout ξ, $\hat{S}_{0,\rho}(\xi)$ est un opérateur compact sur $L^2(\Omega_0)$. Comme toute somme finie d'opérateurs compacts est encore un opérateur compact, $S_{0,\rho,\Delta k}$ définit également un opérateur compact. Alors $I - S_{0,\rho,\Delta k}$ est un opérateur de Fredholm d'indice zéro, et notre problème relève de l'alternative de Fredholm. Il nous suffit donc de démontrer l'unicité de la solution pour en déduire le caractère bien posé du problème (2.25).

Maintenant, soit $u_{\Delta k}$ une solution de (2.25) avec second membre nul. Alors, si l'on construit $\widetilde{u}_{\Delta k}$ à partir de $u_{\Delta k}$ comme auparavant, i.e.

$$\widetilde{u}_{\Delta_k|B^m} \equiv \Delta k \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \sum_{j=1}^{N_k} \hat{S}(j\Delta k) \left(-(\omega^2 + i\varepsilon\omega)(\rho_p - \rho)u_{\Delta k}\right) e^{imj\Delta kL}$$

nous savons qu'il est solution de :

$$\left| \begin{array}{ll} -\Delta\widetilde{u}_{\Delta k} - (\omega^2 + i\varepsilon\omega)\rho\widetilde{u}_{\Delta k} = 0 & \text{dans } \Omega_{N_k} \\ \widetilde{u}_{\Delta k|_{\Gamma^+_{N_k}}} = \widetilde{u}_{\Delta k|_{\Gamma^-_{N_k}}} & \\ \partial_y\widetilde{u}_{\Delta k|_{\Gamma^+_{N_k}}} = \partial_y\widetilde{u}_{\Delta k|_{\Gamma^-_{N_k}}} & \end{array} \right.$$

Ce problème étant bien posé en vertu du théorème 1.11 comme nous l'avons remarqué auparavant, nous obtenons $\widetilde{u}_{\Delta k} = 0$. En particulier, comme $\widetilde{u}_{\Delta k|_{\Omega_0}} = u_{\Delta k}$, nous en déduisons $u_{\Delta k} = 0$, et l'injectivité de $I - S_{0,\rho,\Delta k}$. □

De ce résultat, nous pouvons enfin déduire ce que nous soupçonnions depuis le début, à savoir que l'équation de Lippmann-Schwinger semi-discrète (2.25) est équivalente au problème de Helmholtz modifié (2.33), sa solution étant, par unicité, la restriction à Ω_0 de la solution de (2.33), et la solution de (2.33) pouvant être déduite de celle de (2.25) en construisant $\widetilde{u}_{\Delta k}$ à partir de $u_{\Delta k}$ comme nous l'avons fait jusqu'ici (nous avons donc une situation analogue au cas sans quadrature, à savoir que la solution de l'équation de Lippmann-Schwinger (2.3) est la restriction à Ω_0 de la solution de (1.4)). Il est également clair que nous allons pouvoir obtenir une estimation d'erreur en comparant les problèmes (2.33) et (1.4), plutôt qu'en comparant (2.25) et (2.3).

2.2.3 Estimation d'erreur pour l'approximation par quadrature

L'estimation d'erreur que nous cherchons à établir va résulter, comme nous l'avons annoncé, de la comparaison des problèmes (2.33) et (1.4), plutôt que de (2.25) et (2.3). Une première remarque très naïve est de constater que nous n'allons pouvoir effectuer pareille comparaison au mieux que sur le plus grand domaine commun où sont définies les solutions de ces deux problèmes, à savoir Ω_{N_k}. Sur ce domaine, la solution de (2.33) est la solution d'un problème bien posé, tandis que la solution de (1.4) y est seulement la restriction d'un problème bien posé, mais sur un domaine plus grand. Elle n'a par ailleurs aucune raison (sauf cas très exceptionnel) de satisfaire les conditions aux limites périodiques que satisfait la solution de (2.33). En revanche, ces deux fonctions sont solutions de la même équation volumique sur Ω_{N_k}. La seule source d'erreur va donc être les conditions aux limites périodiques introduites par la quadrature. L'écart entre ces deux fonctions ne va donc pas être solution du problème (2.33), mais d'un problème plus général, présentant des sauts de périodicité entre $\Gamma^+_{N_k}$ et $\Gamma^-_{N_k}$, en trace et en dérivée normale. C'est ce problème que nous allons devoir étudier pour obtenir notre estimation d'erreur.

Problème périodique généralisé

Afin d'obtenir une estimation sur le problème périodique généralisé, indépendante de N_k, nous aurons besoin du lemme technique suivant :

Lemme 2.4. *Il existe un opérateur de relèvement continu E tel que pour tout $\varphi \in H^{1/2}(\mathbb{R})$, $E(\varphi) \in H^1(\Omega_{N_k})$ et :*

$$E(\varphi)|_{\Gamma^+_{N_k}} = \varphi \qquad E(\varphi)|_{\Gamma^-_{N_k}} = 0$$

et il existe une constante $C > 0$ indépendante de N_k telle que :

$$||E(\varphi)||_{H^1} \leq C||\varphi||_{H^{1/2}(\mathbb{R})}$$

Réciproquement, pour tout $u \in H^1(\Omega_{N_k})$, il existe une constante $C > 0$ indépendante de N_k telle que :

$$||u|_{\Gamma^+_{N_k}}||_{H^{1/2}(\mathbb{R})} \leq C||u||_{H^1} \qquad ||u|_{\Gamma^-_{N_k}}||_{H^{1/2}(\mathbb{R})} \leq C||u||_{H^1}$$

Démonstration. Pour tout $\varphi \in H^{1/2}(\mathbb{R})$, nous savons (cf [66] ou [61] par exemple) qu'il existe un opérateur de relèvement $\widetilde{E}$ tel que $\widetilde{E}\varphi \in H^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_-)$, $\widetilde{E}\varphi|_{y=0} = \varphi$ et une constante (indépendante bien entendu de N_k qui n'intervient pas dans ce relèvement sur un demi-plan) telle que :

$$||\widetilde{E}(\varphi)||_{H^1} \leq C||\varphi||_{H^{1/2}(\mathbb{R})}$$

Alors, par translation de l'origine, on construit un opérateur de relèvement (encore appelé $\widetilde{E}$) tel que $\widetilde{E}\varphi \in H^1(\mathbb{R} \times \{y \leq \left(\lfloor \frac{N_k}{2} \rfloor + 1\right) L\})$, $\widetilde{E}\varphi|_{\Gamma^+_{N_k}} = \varphi$ et :

$$||\widetilde{E}(\varphi)||_{H^1} \leq C||\varphi||_{H^{1/2}(\mathbb{R})}$$

avec C indépendante de N_k. Puis, soit χ une fonction C^∞ bornée définie sur $\mathbb{R}^+$ telle que $\chi(0) = 1$ et $\chi(x) = 0$ pour tout $x \geq 1/2$. Alors, si on pose :

$$E(\varphi) = \chi(y - \left(\lfloor \frac{N_k}{2} \rfloor + 1\right) L)\widetilde{E}(\varphi)$$

cet opérateur est clairement du type que nous recherchons. Concernant l'estimation sur la trace, il suffit d'utiliser le théorème de trace de demi-espace, comme il est bien connu que sa constante de continuité dépend seulement de la dimension. □

De ce lemme technique, nous pouvons déduire les propriétés principales du problème avec conditions périodiques généralisées :

Théorème 2.9. *Pour tout couple $(\varphi, \psi) \in H^{1/2}(\mathbb{R}) \times H^{-1/2}(\mathbb{R})$ il existe une unique solution u appartenant à $H^1(\Omega_{N_k})$ de :*

$$\left| \begin{array}{ll} -\Delta u - (\omega^2 + i\varepsilon\omega)\rho u = 0 & \text{dans } \Omega_{N_k} \\ u_{|_{\Gamma^+_{N_k}}} - u_{|_{\Gamma^-_{N_k}}} = \varphi & \\ \partial_y u_{|_{\Gamma^+_{N_k}}} - \partial_y u_{|_{\Gamma^-_{N_k}}} = \psi & \end{array} \right. \tag{2.34}$$

De plus, il existe une constante $C > 0$ indépendante de N_k telle que :

$$||u||_{H^1(\Omega_{N_k})} \leq C(||\varphi||_{H^{1/2}(\mathbb{R})} + ||\psi||_{H^{-1/2}(\mathbb{R})}) \tag{2.35}$$

Démonstration. Remarquons tout d'abord que si $\varphi = 0$ et $\psi = 0$, alors u est solution de (2.33) sans second membre, et est par conséquent nulle en vertu du théorème 1.11, nous avons donc immédiatement unicité de la solution de (2.34). Démontrons maintenant l'existence d'une solution. Pour cela,

nous allons commencer par réinterpréter variationnellement le problème (2.34). Si u est solution de (2.34), alors pour tout $v \in H^1_{per}(\Omega_{N_k})$, la formule de Green nous donne :

$$(\nabla u, \nabla v)_{L^2} - (\omega^2 + i\varepsilon\omega)(\rho u, v)_{L^2} - < \partial_y u_{|_{\Gamma^+_{N_k}}}, v_{|_{\Gamma^+_{N_k}}} > + < \partial_y u_{|_{\Gamma^-_{N_k}}}, v_{|_{\Gamma^-_{N_k}}} >= 0$$

Comme $v \in H^1_{per}(\Omega_{N_k})$, nous avons :

$$v_{|_{\Gamma^+_{N_k}}} - v_{|_{\Gamma^-_{N_k}}} = 0$$

alors la formulation variationnelle devient :

$$(\nabla u, \nabla v)_{L^2} - (\omega^2 + i\varepsilon\omega)(\rho u, v)_{L^2} =< \psi, v_{|_{\Gamma^+_{N_k}}} >$$

Posons maintenant $u_0 = u - E(\varphi)$, où E est l'opérateur de relèvement du lemme 2.4. Alors :

$$u_{0|_{\Gamma^+_{N_k}}} - u_{0|_{\Gamma^-_{N_k}}} = u_{|_{\Gamma^+_{N_k}}} - u_{|_{\Gamma^-_{N_k}}} - (E(\varphi)_{|_{\Gamma^+_{N_k}}} - E(\varphi)_{|_{\Gamma^-_{N_k}}}) = \varphi - \varphi = 0$$

Par conséquent, $u_0 \in H^1_{per}(\Omega_{N_k})$ en vertu du théorème 1.10.De plus, elle est solution de

$$(\nabla u_0, \nabla v)_{L^2} - (\omega^2 + i\varepsilon\omega)(\rho u_0, v)_{L^2} =< \psi, v_{|_{\Gamma^+_{N_k}}} >$$

$$- (\nabla E(\varphi), \nabla v)_{L^2} + (\omega^2 + i\varepsilon\omega)(\rho E(\varphi), v)_{L^2}$$

Rappelons nous maintenant que H^1_{per} est un sous-espace fermé de H^1 pour la norme H^1. Bien que compliqué, le second membre $l(v)$ est linéaire en v et, en vertu de l'inégalité de Cauchy-Schwarz et de la continuité de l'opérateur de relèvement donnée par le lemme 2.4, nous obtenons :

$$|l(v)| \leq (C||\psi||_{H^{-1/2}} + max(1, |\omega^2 + i\varepsilon\omega|\rho_+)||E(\varphi)||_{H^1})||v||_{H^1}$$

où C est indépendante de N_k. Par conséquent, la forme linéaire l est continue. La forme bilinéaire :

$$a_\Omega(u, v) = (\nabla u, \nabla v)_{L^2} - (\omega^2 + i\varepsilon\omega)(\rho u, v)_{L^2}$$

est continue et coercive d'après le lemme 1.1, et plus précisément :

$$|a_\Omega(u, v)| \leq ||\nabla u|_{L^2}||\nabla v||_{L^2} + |\omega^2 + i\varepsilon\omega|\rho_+||u||_{L^2}||v||_{L^2} \leq max(1, |\omega^2 + i\varepsilon\omega|\rho_+)||u||_{H^1}||v||_{H^1}$$

et :

$$|a(v, v)| \geq \eta|\omega_\eta| \min(\frac{1}{|\omega_\eta|^2}, \rho_-)||v||^2_{H^1}$$

et nous notons bien que les constantes ne dépendent pas de N_k. Le problème variationnel :

$$a(u_0, v) = l(v) \quad \forall\, v \in H^1_{per}(\Omega_{N_k})$$

possède donc une unique solution en vertu du théorème de Lax-Milgram. Par conséquent, en posant $u = u_0 + E(\varphi)$, nous obtenons l'existence de u tel que :

$$(\nabla u, \nabla v)_{L^2} - (\omega^2 + i\varepsilon\omega)(\rho u, v)_{L^2} =< \psi, v_{|_{\Gamma^+_{N_k}}} >$$

pour tout $v \in H^1_{per}(\Omega_{N_k})$. Comme

$$\mathcal{D}(\Omega_{N_k}) \subset H^1_{per}(\Omega_{N_k})$$

nous obtenons, pour tout $v \in \mathcal{D}(\Omega_{N_k})$:

$$< \nabla u, \nabla v > -(\omega^2 + i\varepsilon\omega) < \rho u, v >= 0$$

ce qui implique :

$$-\Delta u - (\omega^2 + i\varepsilon\omega)\rho u = 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega_{N_k})$$

Comme $u, f \in L^2$, il suit $\Delta u \in L^2$ et cette équation est donc vraie au sens L^2. Ne reste plus que les conditions aux limites à vérifier. Clairement, nous avons :

$$u_{|_{\Gamma^+_{N_k}}} - u_{|_{\Gamma^-_{N_k}}} = (u_0 + E(\varphi))_{|_{\Gamma^+_{N_k}}} - (u_0 + E(\varphi))_{|_{\Gamma^-_{N_k}}} = \varphi$$

Pour tout $v \in H^1_{per}(\Omega_{N_k})$, en appliquant la formule de Green à la formulation variationnelle, nous obtenons :

$$\big(-\Delta u - (\omega^2 + i\varepsilon\omega)\rho u, v\big)_{L^2} + < \partial_y u_{|_{\Gamma^+_{N_k}}} - \partial_y u_{|_{\Gamma^-_{N_k}}}, v_{|_{\Gamma^+_{N_k}}} > = < \psi, v_{|_{\Gamma^+_{N_k}}} >$$

Alors :

$$< \partial_y u_{|_{\Gamma^+_{N_k}}} - \partial_y u_{|_{\Gamma^-_{N_k}}}, v_{|_{\Gamma^+_{N_k}}} > = < \psi, v_{|_{\Gamma^+_{N_k}}} >$$

Puis, comme H^1_{per} est dense dans H^1 comme il contient $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, nous retrouvons tout $H^{1/2}(\mathbb{R})$ par densité sur la frontière, aussi :

$$\partial_y u_{|_{y=\left(\lfloor \frac{N_k}{2} \rfloor + 1\right)L}} - \partial_y u_{|_{\Gamma^-_{N_k}}} = \psi \quad \text{dans } H^{-1/2}(\mathbb{R})$$

et nous avons démontré l'existence d'une solution. Enfin, en prenant $v = u_0$ dans la formulation variationnelle sur u_0, nous obtenons sans difficultés :

$$a(u_0, u_0) \leq (C||\psi||_{H^{-1/2}} + max(1, |\omega^2 + i\varepsilon\omega|\rho_+)||E(\varphi)||_{H^1})||u_0||_{H^1}$$

La coercivité conduit à :

$$||u_0||_{H^1} \leq \frac{1}{\eta|\omega_\eta| \min(\frac{1}{|\omega_\eta|^2}, \rho_-)}(C||\psi||_{H^{-1/2}} + max(1, |\omega^2 + i\varepsilon\omega|\rho_+)||E(\varphi)||_{H^1})$$

Enfin, en utilisant l'estimation du lemme 2.4, on obtient, avec $C > 0$ toujours indépendante de N_k :

$$||u_0||_{H^1} \leq \frac{C}{\eta|\omega_\eta| \min(\frac{1}{|\omega_\eta|^2}, \rho_-)}(||\psi||_{H^{-1/2}} + max(1, |\omega^2 + i\varepsilon\omega|\rho_+)||\varphi)||_{H^{1/2}})$$

Alors, utilisant de nouveau la continuité de l'opérateur de relèvement, nous obtenons l'existence d'une constante indépendante de N_k telle que :

$$||u||_{H^1} \leq C(||\varphi||_{H^{1/2}(\mathbb{R})} + ||\psi||_{H^{-1/2}(\mathbb{R})})$$

□

Il est clair que l'écart entre la solution de (2.33) et (1.4) sera solution de (2.34), avec :

$$\varphi = u_{|_{\Gamma^+_{N_k}}} - u_{|_{\Gamma^-_{N_k}}} \quad \text{et} \quad \psi = \partial_y u_{|_{\Gamma^+_{N_k}}} - \partial_y u_{|_{\Gamma^-_{N_k}}}$$

si u est la solution de (1.4). Autrement dit, les données pour l'erreur seront les sauts de périodicité en trace et dérivée normale de la solution exacte. Il nous faut donc étudier comment ces sauts décroissent lorsque l'on s'éloigne de Ω_0 (donc quand N_k grandit), afin de savoir comment le problème (2.33) s'approche de (1.4). Cela revient donc à estimer la décroissance de la solution exacte.

Estimation de décroissance pour la solution exacte

Il semble que le fait que la solution de (1.4) décroisse exponentiellement soit un résultat bien connu. Pourtant, lorsque l'on cherche ce résultat dans la littérature, il est presque toujours évoqué sans démonstration (au moins n'avons nous pas pu trouver de cas où la preuve soit faite). Aussi, par souci de complétude, et aussi afin d'obtenir une estimation précise, nous avons préféré redémontrer complètement ce résultat.

Théorème 2.10. *Soit $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ et $\tau > 0$ tels que $e^{\tau|\mathbf{x}|} f \in L^2(\mathbb{R}^2)$, où $\mathbf{x} = (x, y)$. Alors l'unique solution de :*

$$-\Delta u - (\omega^2 + i\varepsilon\omega)\rho u = f \text{ dans } \mathbb{R}^2$$

satisfait $e^{\tau|\mathbf{x}|}u \in H^1(\Delta, \mathbb{R}^2)$ pour tout τ tel que $\tau < \alpha(\omega, \rho_-, \varepsilon)$, où :

$$\alpha(\omega, \rho_-, \varepsilon) = 2\eta|\omega_\eta| \min(\frac{1}{|\omega_\eta|^2}, \rho_-)$$

avec $\omega_\eta = \widetilde{\omega} + i\eta$ et :

$$\widetilde{\omega} = (\frac{\omega^2 + \sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2\omega^2}}{2})^{1/2} \quad \text{et } \eta = \frac{\varepsilon\omega}{2}(\frac{\omega^2 + \sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2\omega^2}}{2})^{-1/2}$$

Démonstration. La preuve se révèle être relativement longue et technique, et sera divisée en deux étapes principales. Nous commençons par démontrer le résultat dans le cas des sources à support compact, puis nous procédons par densité.

(i) Le cas d'une source à support compact

Supposons que f soit à support compact, alors il existe $R_0 > 0$ tel que $supp\ f \subset \mathcal{B}(0, R_0)$. De plus, pour tout $v \in H^1(\mathbb{R}^2)$, on obtient par formule de Green :

$$\int_{\mathbb{R}^2} \nabla u \nabla \overline{v} - (\omega^2 + i\varepsilon\omega)\rho u \overline{v} = \int_{\mathbb{R}^2} f\overline{v}$$

En principe, nous aimerions choisir $e^{2\tau|\mathbf{x}|}u$ comme fonction test. Cependant, nous ne savons pas a priori si $e^{\tau|\mathbf{x}|}u$ appartient à H^1 (c'est même ce que nous cherchons à démontrer), il nous faut donc travailler un peu plus sur la fonction test pour obtenir le résultat souhaité. Nous posons, pour tout $R > R_0$:

$$v = \begin{cases} e^{2\tau|\mathbf{x}|}u & \text{pour } |\mathbf{x}| \leq R \\ e^{2\tau R}u & \text{pour } |\mathbf{x}| \geq R \end{cases}$$

Clairement, $v \in L^2(\mathbb{R}^2)$. Pour l'utiliser comme fonction test, nous devons vérifier qu'il s'agit bien d'un élément de $H^1(\mathbb{R}^2)$. Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)^2$, nous avons :

$$\begin{aligned} \langle \nabla v, \varphi \rangle &= -\langle v, div\ \varphi \rangle = -\int_{\mathbb{R}^2} v div\ \varphi = -\int_{|\mathbf{x}|\leq R} v div\ \varphi - \int_{|\mathbf{x}|\geq R} v div\ \varphi \\ &= \int_{|\mathbf{x}|\leq R} \nabla v \cdot \varphi + \int_{|\mathbf{x}|\geq R} \nabla v \cdot \varphi - \int_{|\mathbf{x}|=R} e^{\tau R}(u|_{|\mathbf{x}|=R-} - u|_{|\mathbf{x}|=R+})\varphi \cdot e_r \end{aligned}$$

Comme $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$, il suit :

$$\langle \nabla v, \varphi \rangle = \int_{|\mathbf{x}|\leq R} e^{2\tau|\mathbf{x}|}(\nabla u + \tau\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}u) \cdot \varphi + \int_{|\mathbf{x}|\geq R} e^{2\tau R}\nabla u \cdot \varphi$$

puis :

$$\nabla v = \begin{cases} e^{2\tau|\mathbf{x}|}(\nabla u + \tau\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}u) & \text{for } |\mathbf{x}| \leq R \\ e^{2\tau R}\nabla u & \text{for } |\mathbf{x}| \geq R \end{cases}$$

ce qui montre que $v \in H^1(\mathbb{R}^2)$ et qu'il s'agit donc d'une bonne fonction test. Alors, nous obtenons :

$$\begin{aligned} &\int_{|\mathbf{x}|\leq R} e^{2\tau|\mathbf{x}|}\left(|\nabla u|^2 + \tau\overline{u}\frac{\mathbf{x}\cdot\nabla u}{|\mathbf{x}|} - (\omega^2 + i\varepsilon\omega)\rho|u|^2\right) + \int_{|\mathbf{x}|\geq R} e^{2\tau R}\left(|\nabla u|^2 - (\omega^2 + i\varepsilon\omega)\rho|u|^2\right) \\ &\qquad = \int_{|\mathbf{x}|\leq R} e^{2\tau|\mathbf{x}|} f\overline{u} + e^{2\tau R}\int_{|\mathbf{x}|\geq R} f\overline{u} \end{aligned}$$

Nous allons estimer chaque terme séparément. Nous commençons par le membre de gauche. Remarquons tout d'abord que :

$$\left|\tau\overline{u}\frac{\mathbf{x}\cdot\nabla u}{|\mathbf{x}|}\right| \leq \frac{\tau}{2}(|\nabla u|^2+|u|^2)$$

Alors, en procédant comme dans la preuve du lemme 1.1, nous posons $\omega_\eta = \widetilde{\omega}+i\eta$ tel que $\omega_\eta^2 = \omega^2+i\epsilon\omega$, et nous savons que :

$$\widetilde{\omega} = (\frac{\omega^2+\sqrt{\omega^4+\varepsilon^2\omega^2}}{2})^{1/2} \quad \text{et } \eta = \frac{\varepsilon\omega}{2}(\frac{\omega^2+\sqrt{\omega^4+\varepsilon^2\omega^2}}{2})^{-1/2}$$

Alors :

$$\Im\left(\frac{1}{\omega_\eta}(\int_{|\mathbf{x}|\leq R} e^{2\tau|\mathbf{x}|}|\nabla u|^2-\omega_\eta^2\int_{|\mathbf{x}|\leq R} e^{2\tau|\mathbf{x}|}\rho|u|^2)\right) = \Im\left(\frac{\widetilde{\omega}-i\eta}{|\omega_\eta|^2}\int_{|\mathbf{x}|\leq R} e^{2\tau|\mathbf{x}|}|\nabla u|^2 -(\widetilde{\omega}+i\eta)\int_{|\mathbf{x}|\leq R} e^{2\tau|\mathbf{x}|}\rho|u|^2\right)$$

De même, nous avons :

$$\Im\left(\frac{1}{\omega_\eta}(\int_{|\mathbf{x}|\geq R} e^{2\tau R}|\nabla u|^2-\omega_\eta^2\int_{|\mathbf{x}|\geq R} e^{2\tau R}\rho|u|^2)\right) = \Im\left(\frac{\widetilde{\omega}-i\eta}{|\omega_\eta|^2}\int_{|\mathbf{x}|\geq R} e^{2\tau R}|\nabla u|^2 -(\widetilde{\omega}+i\eta)\int_{|\mathbf{x}|\geq R} e^{2\tau R}\rho|u|^2\right)$$

Comme $|z|\geq|\Im(z)|$, nous en déduisons finalement :

$$\left|\int_{|\mathbf{x}|\leq R} e^{2\tau|\mathbf{x}|}\left(|\nabla u|^2-(\omega^2+i\varepsilon\omega)\rho|u|^2\right)+\int_{|\mathbf{x}|\geq R} e^{2\tau R}\left(|\nabla u|^2-(\omega^2+i\varepsilon\omega)\rho|u|^2\right)\right|$$
$$\geq \eta|\omega_\eta|\min(\frac{1}{|\omega_\eta|^2},\rho_-)\left(\int_{|\mathbf{x}|\leq R} e^{2\tau|\mathbf{x}|}(|\nabla u|^2+|u|^2)+\int_{|\mathbf{x}|\geq R} e^{2\tau R}(|\nabla u|^2+|u|^2)\right)$$

En combinant ces résultats, nous arrivons à :

$$\left|\int_{|\mathbf{x}|\leq R} e^{2\tau|\mathbf{x}|}\left(|\nabla u|^2+\tau\overline{u}\frac{\mathbf{x}\cdot\nabla u}{|\mathbf{x}|}-(\omega^2+i\varepsilon\omega)\rho|u|^2\right)+\int_{|\mathbf{x}|\geq R} e^{2\tau R}\left(|\nabla u|^2-(\omega^2+i\varepsilon\omega)\rho|u|^2\right)\right|$$
$$\geq \int_{|\mathbf{x}|\leq R} e^{2\tau|\mathbf{x}|}(\eta|\omega_\eta|\min(\frac{1}{|\omega_\eta|^2},\rho_-)-\frac{\tau}{2})(|\nabla u|^2+|u|^2)+\eta|\omega_\eta|\min(\frac{1}{|\omega_\eta|^2},\rho_-)\int_{|\mathbf{x}|\geq R} e^{2\tau R}(|\nabla u|^2+|u|^2)$$

Tournons-nous maintenant vers le membre de droite. Comme $R\geq R_0$, le deuxième terme disparaît, et pour le premier terme, l'inégalité de Cauchy-Schwarz nous donne :

$$\int_{|\mathbf{x}|\leq R} e^{2\tau|\mathbf{x}|}f\overline{u} \leq \left(\int_{|\mathbf{x}|\leq R} e^{2\tau|\mathbf{x}|}|f|^2\right)^{1/2}\left(\int_{|\mathbf{x}|\leq R} e^{2\tau|\mathbf{x}|}|u|^2\right)^{1/2}$$

Alors, en éliminant le deuxième terme du membre de gauche (comme il est positif), nous obtenons :

$$(\eta|\omega_\eta|\min(\frac{1}{|\omega_\eta|^2},\rho_-)-\frac{\tau}{2})\int_{|\mathbf{x}|\leq R} e^{2\tau|\mathbf{x}|}(|\nabla u|^2+|u|^2) \leq ||e^{\tau|\mathbf{x}|}f||_{L^2(|\mathbf{x}|\leq R)}||e^{\tau|\mathbf{x}|}u||_{L^2(|\mathbf{x}|\leq R)}$$

Supposons maintenant que $(\eta|\omega_\eta|\min(\frac{1}{|\omega_\eta|^2},\rho_-)-\frac{\tau}{2})>0$. Alors, en éliminant par positivité le terme en gradient, nous obtenons :

$$(\eta|\omega_\eta|\min(\frac{1}{|\omega_\eta|^2},\rho_-)-\frac{\tau}{2})||e^{\tau|\mathbf{x}|}u||^2_{L^2(|\mathbf{x}|\leq R)} \leq ||e^{\tau|\mathbf{x}|}f||_{L^2(|\mathbf{x}|\leq R)}||e^{\tau|\mathbf{x}|}u||_{L^2(|\mathbf{x}|\leq R)}$$

ce qui implique que :

$$||e^{\tau|\mathbf{x}|}u||_{L^2(|\mathbf{x}|\leq R)} \leq \frac{||e^{\tau|\mathbf{x}|}f||_{L^2(|\mathbf{x}|\leq R)}}{(\eta|\omega_\eta|\min(\frac{1}{|\omega_\eta|^2},\rho_-)-\frac{\tau}{2})}$$

et finalement, nous obtenons pour tout $R>0$:

$$||e^{\tau|\mathbf{x}|}u||_{L^2(|\mathbf{x}|\leq R)} \leq \frac{||e^{\tau|\mathbf{x}|}f||_{L^2(\mathbb{R}^2)}}{(\eta|\omega_\eta|\min(\frac{1}{|\omega_\eta|^2},\rho_-)-\frac{\tau}{2})}$$

ce qui implique, en faisant tendre R vers $+\infty$, que :

$$||e^{\tau|\mathbf{x}|}u||_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq \frac{||e^{\tau|\mathbf{x}|}f||_{L^2(\mathbb{R}^2)}}{(\eta|\omega_\eta|\min(\frac{1}{|\omega_\eta|^2},\rho_-)-\frac{\tau}{2})}$$

Puis, nous éliminons par positivité le terme L^2 au lieu du terme en gradient dans notre estimation, pour obtenir :

$$||e^{\tau|\mathbf{x}|}\nabla u||^2_{L^2(|\mathbf{x}|\leq R)} \leq \frac{||e^{\tau|\mathbf{x}|}f||_{L^2(|\mathbf{x}|\leq R)}||e^{\tau|\mathbf{x}|}u||_{L^2(|\mathbf{x}|\leq R)}}{(\eta|\omega_\eta|\min(\frac{1}{|\omega_\eta|^2},\rho_-)-\frac{\tau}{2})}$$

Alors l'estimation que nous venons d'établir :

$$||e^{\tau|\mathbf{x}|}\nabla u||^2_{L^2(|\mathbf{x}|\leq R)} \leq \frac{||e^{\tau|\mathbf{x}|}f||^2_{L^2(|\mathbf{x}|\leq R)}}{(\eta|\omega_\eta|\min(\frac{1}{|\omega_\eta|^2},\rho_-)-\frac{\tau}{2})^2}$$

pour tout $R>0$, impliquant de nouveau que :

$$||e^{\tau|\mathbf{x}|}\nabla u||_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq \frac{||e^{\tau|\mathbf{x}|}f||_{L^2(\mathbb{R}^2)}}{(\eta|\omega_\eta|\min(\frac{1}{|\omega_\eta|^2},\rho_-)-\frac{\tau}{2})}$$

(ii) Cas général

Soit maintenant $f\in L^2(\mathbb{R}^2)$ telle que $e^{\tau|\mathbf{x}|}f\in L^2(\mathbb{R}^2)$. Alors, comme $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ est dense dans $L^2(\mathbb{R}^2)$, il existe $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers $e^{\tau|\mathbf{x}|}f$ fortement dans $L^2(\mathbb{R}^2)$. Soit $f_n=e^{-\tau|\mathbf{x}|}g_n$, alors nous avons :

$$\begin{aligned}||f_n-f||_{L^2(\mathbb{R}^2)} = ||e^{-\tau|\mathbf{x}|}g_n-f||_{L^2(\mathbb{R}^2)} &= ||e^{-\tau|\mathbf{x}|}(g_n-e^{\tau|\mathbf{x}|}f)||_{L^2(\mathbb{R}^2)}\\ &\leq ||g_n-e^{\tau|\mathbf{x}|}f||_{L^2(\mathbb{R}^2)}\end{aligned}$$

donc f_n converge vers f fortement dans $L^2(\mathbb{R}^2)$. Puis, nous définissons u_n comme l'unique solution dans $H^1(\mathbb{R}^2)$ de :

$$-\Delta u_n-(\omega^2+i\varepsilon\omega)\rho u_n = f_n \text{ dans } \mathbb{R}^2$$

Alors, par linéarité :

$$-\Delta(u_n-u_m)-(\omega^2+i\varepsilon\omega)\rho(u_n-u_m) = f_n-f_m \text{ dans } \mathbb{R}^2$$

Comme f_n est à support compact, nous savons que :

$$||e^{\tau|\mathbf{x}|}(u_n-u_m)||_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq \frac{||e^{\tau|\mathbf{x}|}(f_n-f_m)||_{L^2(\mathbb{R}^2)}}{(\eta|\omega_\eta|\min(\frac{1}{|\omega_\eta|^2},\rho_-)-\frac{\tau}{2})}$$

$$||e^{\tau|\mathbf{x}|}\nabla(u_n-u_m)||_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq \frac{||e^{\tau|\mathbf{x}|}(f_n-f_m)||_{L^2(\mathbb{R}^2)}}{(\eta|\omega_\eta|\min(\frac{1}{|\omega_\eta|^2},\rho_-)-\frac{\tau}{2})}$$

donc $e^{\tau|\mathbf{x}|}u_n$ et $e^{\tau|\mathbf{x}|}\nabla u_n$ sont des suites de Cauchy dans $L^2(\mathbb{R}^2)$, elles sont donc convergentes. De plus, comme $u-u_n$ est solution de :

$$-\Delta(u-u_n)-(\omega^2+i\varepsilon\omega)\rho(u-u_n) = f-f_n \text{ dans } \mathbb{R}^2$$

En vertu du théorème 1.1 nous savons qu'il existe $C>0$ telle que :

$$||u-u_n||_{H^1(\mathbb{R}^2)} \leq C||f-f_n||_{L^2(\mathbb{R}^2)}$$

ce qui implique que u_n converge vers u fortement dans $H^1(\mathbb{R}^2)$. Puis, posons $v=\lim\limits_{n\to\infty} e^{\tau|\mathbf{x}|}u_n$. Nous avons alors

$$||e^{-\tau|\mathbf{x}|}v-u_n||_{L^2(\mathbb{R}^2)} = ||e^{-\tau|\mathbf{x}|}(v-e^{\tau|\mathbf{x}|}u_n)||_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq ||v-e^{\tau|\mathbf{x}|}u_n||_{L^2(\mathbb{R}^2)}$$

donc u_n converge vers $e^{-\tau|\mathbf{x}|}v$ dans $L^2(\mathbb{R}^2)$. Par unicité de la limite, nous en déduisons que $u=e^{-\tau|\mathbf{x}|}v$, donc $e^{\tau|\mathbf{x}|}u=v\in L^2(\mathbb{R}^2)$. Posons maintenant $w=\lim\limits_{n\to\infty} e^{\tau|\mathbf{x}|}\nabla u_n$, alors :

$$||e^{-\tau|\mathbf{x}|}w-\nabla u_n||_{L^2(\mathbb{R}^2)} = ||e^{-\tau|\mathbf{x}|}(w-e^{\tau|\mathbf{x}|}\nabla u_n)||_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq ||w-e^{\tau|\mathbf{x}|}\nabla u_n||_{L^2(\mathbb{R}^2)}$$

donc ∇u_n converge vers $e^{-\tau|\mathbf{x}|}w$ fortement dans $L^2(\mathbb{R}^2)$. Par unicité de la limite, nous en déduisons que $\nabla u=e^{-\tau|\mathbf{x}|}w$, donc $e^{\tau|\mathbf{x}|}\nabla u=w\in L^2(\mathbb{R}^2)$. Ensuite, nous calculons :

$$\nabla(e^{\tau|\mathbf{x}|}u) = e^{\tau|\mathbf{x}|}(\tau\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}u+\nabla u)$$

donc $\nabla(e^{\tau|\mathbf{x}|}u)$ est la somme de deux fonctions de L^2, donc $e^{\tau|\mathbf{x}|}u\in H^1(\mathbb{R}^2)$. Puis, nous calculons $\Delta(e^{\tau|\mathbf{x}|}u)$ au sens des distributions. Nous avons :

$$\Delta(e^{\tau|\mathbf{x}|}u) = e^{\tau|\mathbf{x}|}\left(\left(\tau\frac{1-d}{|\mathbf{x}|}+\tau^2\right)u+2\tau\frac{\mathbf{x}\cdot\nabla u}{|\mathbf{x}|}+\Delta u\right)$$

où $d=2$ est la dimension. Le premier terme est L^2 en vertu de l'inégalité de Hardy. Le deuxième est dans L^2 en vertu du résultat précédent. Enfin, comme u est solution de l'équation de Helmholtz (1.4) :

$$-e^{\tau|\mathbf{x}|}\Delta u = (\omega^2+i\varepsilon\omega)e^{\tau|\mathbf{x}|}u+e^{\tau|\mathbf{x}|}f\in L^2(\mathbb{R}^2)$$

Alors $\Delta(e^{\tau|\mathbf{x}|}u)\in L^2$, et $e^{\tau|\mathbf{x}|}u\in H^1(\Delta,\mathbb{R}^2)$. □

Remarque 2.7. *Notons tout de suite que ce résultat n'est pas optimal. En effet, la constante $\alpha(\omega, \rho_-, \varepsilon)$ qui donne le meilleur taux de décroissance dans le théorème ci-dessus n'est qu'une minoration (au facteur 2 près) de la véritable constante de coercivité de la forme bilinéaire a_Ω. Si on note α cette constante, alors il est clair, en reprenant la démonstation ci-dessus, que l'on peut monter jusqu'à $\tau < 2\alpha$.*

Remarque 2.8. *Remarquons que ce type de comportement est une conséquence directe de la présence d'absorption dans le milieu. Dans le cas sans absorption, nous sommes en droit d'attendre une nette déterioration du taux de décroissance. En effet, dans le cas particulier du milieu homogène, en dimension 2, il est bien connu que les solutions décroissent comme la racine carrée de la distance à la source. La décroissance ayant, comme nous l'avons anticipé, une influence directe sur la vitesse de convergence de l'approximation par quadrature, il est clair que pareille méthode en l'absence d'absorption, s'il elle reste probablement convergente, sera globalement moins efficace.*

Remarque 2.9. *Il peut apparaître surprenant que nous nous intéressions à la décroissance de la solution exacte pour estimer l'impact de la quadrature. Cependant, nous pourrions montrer (cf [37]) que la décroissance d'une fonction est directement reliée à la régularité de sa transformée de Floquet. Comme c'est en la variable de Floquet que nous avons effectué une quadrature, nous sommes finalement bien en train de lier la régularité en Floquet à la qualité de l'approximation, mais par un moyen détourné.*

Disposant maintenant d'une estimation de décroissance, nous sommes en mesure d'estimer la "taille" des données intervenant dans l'équation satisfaite par l'écart entre la solution de (1.4) et (2.33). Ajoutons à cela les estimations que nous avons obtenues sur le problème périodique généralisé, et nous comprenons bien que nous allons maintenant pouvoir obtenir l'estimation d'erreur que nous recherchons.

Estimation d'erreur pour le problème semi-discrétisé

Nous allons combiner l'ensemble des résultats que nous avons obtenus jusqu'ici pour obtenir l'estimation de convergence que nous recherchons. Nous aurons besoin malgré tout d'un dernier lemme technique :

Lemme 2.5. *Soit $\varphi \in H^{1/2}(\mathbb{R})$ et $\mu \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$, alors il existe $C > 0$ telle que :*

$$||\mu\varphi||_{H^{1/2}} \leq C||\mu||_{W^{1,\infty}}||\varphi||_{H^{1/2}} \tag{2.36}$$

Soit $\varphi \in H^{-1/2}(\mathbb{R})$ et $\mu \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$, alors il existe $C > 0$ telle que :

$$||\mu\varphi||_{H^{-1/2}} \leq C||\mu||_{W^{1,\infty}}||\varphi||_{H^{-1/2}} \tag{2.37}$$

Démonstration. Tout d'abord, rappelons que pour tout $\psi \in H^{1/2}(\mathbb{R})$, il existe $C > 0$ telle que :

$$||\psi||_{H^{1/2}} \leq C \inf_{\Psi \in H^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+) \ | \ \Psi|_{y=0}=\psi} ||\Psi||_{H^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)}$$

Soit maintenant E n'importe quel opérateur de relèvement continu de $H^{1/2}(\mathbb{R})$ vers $H^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$, alors nous avons :

$$||\mu\varphi||_{H^{1/2}} \leq C||\mu(x)E\varphi||_{H^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)}$$

comme $\mu(x)E\varphi$ est un relèvement de $\mu(x)\varphi$. Puis, il est clair que :

$$||\mu(x)E\varphi||_{H^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)} \leq 2||\mu||_{W^{1,\infty}(\mathbb{R})}||E\varphi||_{H^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)}$$

et par continuité du relèvement, nous obtenons :

$$||\mu\varphi||_{H^{1/2}} \leq C||\mu||_{W^{1,\infty}}||\varphi||_{H^{1/2}}$$

Rappelons-nous que $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ est dense dans $H^{-1/2}(\mathbb{R})$, et que :

$$||\varphi||_{H^{-1/2}} = \sup_{v\in H^{1/2}} \frac{|<\varphi, v>|}{||v||_{H^{1/2}}}$$

Alors, soit $\varphi_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tel que $||\varphi_n - \varphi||_{H^{-1/2}} \to 0$ quand $n \to +\infty$. Nous avons :

$$\frac{<\mu\varphi_n, v>}{||v||_{H^{1/2}}} = \frac{1}{||v||_{H^{1/2}}} \int \mu\varphi_n v = \frac{<\varphi_n, \mu v>}{||v||_{H^{1/2}}}$$

Puis :

$$\left|\frac{<\mu\varphi_n, v>}{||v||_{H^{1/2}}}\right| \leq C||\varphi_n||_{H^{-1/2}}||\mu||_{W^{1,\infty}}$$

en utilisant (2.36), et $||\mu\varphi_n||_{H^{-1/2}} \leq C||\varphi_n||_{H^{-1/2}}||\mu||_{W^{1,\infty}}$. Le résultat suit en passant à la limite par densité. □

Cette fois, nous pouvons établir l'estimation d'erreur que nous cherchons :

Théorème 2.11. *Soit $u_{\Delta k}$ la solution de (2.25) et u la solution de (2.3). Alors il existe $C > 0$ indépendante de N_k telle que, pour tout $\tau < \alpha(\omega, \varepsilon, \rho_-)$:*

$$||u - u_{\Delta k}||_{H^1(\Omega_0)} \leq Ce^{-\tau\lfloor\frac{N_k}{2}\rfloor L}||e^{\tau|\mathbf{x}|}u||_{H^1(\Delta,\mathbb{R}^2)} \tag{2.38}$$

et si $\widetilde{u}_{\Delta k}$ est l'extension de $u_{\Delta k}$ du théorème 2.7, alors :

$$||u - \widetilde{u}_{\Delta k}||_{H^1(\Omega_{N_k})} \leq Ce^{-\tau\lfloor\frac{N_k}{2}\rfloor L}||e^{\tau|\mathbf{x}|}u||_{H^1(\Delta,\mathbb{R}^2)} \tag{2.39}$$

Démonstration. Construisons encore $\widetilde{u}_{\Delta k}$ comme dans le théorème 2.7. Alors, dans Ω_{N_k}, la fonction $w = \widetilde{u}_{\Delta k} - u$ est solution de :

$$\left|\begin{array}{l} -\Delta w - (\omega^2 + i\varepsilon\omega)\rho w = 0 \quad \text{dans } \Omega_{N_k} \\ w_{|_{\Gamma^+_{N_k}}} - w_{|_{\Gamma^-_{N_k}}} = u_{|_{\Gamma^+_{N_k}}} - u_{|_{\Gamma^-_{N_k}}} \\ \partial_y w_{|_{\Gamma^+_{N_k}}} - \partial_y w_{|_{\Gamma^-_{N_k}}} = \partial_y u_{|_{\Gamma^+_{N_k}}} - \partial_y u_{|_{\Gamma^-_{N_k}}} \end{array}\right.$$

Posons :

$$\varphi = u_{|_{\Gamma^+_{N_k}}} - u_{|_{\Gamma^-_{N_k}}} \quad \text{et} \quad \psi = \partial_y u_{|_{\Gamma^+_{N_k}}} - \partial_y u_{|_{\Gamma^-_{N_k}}}$$

Le problème ci-dessus est alors bien posé en vertu du théorème 2.9, puisque $\varphi \in H^{1/2}(\mathbb{R})$ et $\psi \in H^{-1/2}(\mathbb{R})$, comme $u \in H^1(\Delta, \mathbb{R}^2) = H^2(\mathbb{R}^2)$. Alors, en utilisant l'estimation du théorème 2.9, nous obtenons :

$$||\widetilde{u}_{N_k} - u||_{H^1(\Omega_{N_k})} \leq C(||\varphi||_{H^{1/2}} + ||\psi||_{H^{-1/2}})$$

Ne reste donc plus qu'à estimer φ et ψ. En vertu du théorème 2.10, nous savons que $e^{\tau|\mathbf{x}|}u \in H^1(\Delta, \mathbb{R}^2)$. Comme $u = e^{-\tau|\mathbf{x}|}e^{\tau|\mathbf{x}|}u$, nous avons :

$$u_{|_{\Gamma^+_{N_k}}} = e^{-\tau|\mathbf{x}|}e^{\tau|\mathbf{x}|}u_{|_{\Gamma^+_{N_k}}}$$

Alors, en utilisant le lemme 2.5 :

$$||u_{|_{\Gamma^+_{N_k}}}||_{H^{1/2}(\mathbb{R})} \leq ||e^{-\tau|\mathbf{x}|}||_{W^{1,\infty}(\Gamma^+_{N_k})}||e^{\tau|\mathbf{x}|}u_{|_{\Gamma^+_{N_k}}}||_{H^{1/2}(\mathbb{R})}$$

On montre bien sûr de la même façon que :

$$||u_{|_{\Gamma^-_{N_k}}}||_{H^{1/2}(\mathbb{R})} \leq ||e^{-\tau|\mathbf{x}|}||_{W^{1,\infty}(\Gamma^-_{N_k})}||e^{\tau|\mathbf{x}|}u_{|_{\Gamma^-_{N_k}}}||_{H^{1/2}(\mathbb{R})}$$

Comme :

$$max(||e^{-\tau|\mathbf{x}|}||_{W^{1,\infty}(\Gamma^+_{N_k})}, ||e^{-\tau|\mathbf{x}|}||_{W^{1,\infty}(\Gamma^-_{N_k})}||) \leq (1+\tau)e^{-\tau\lfloor\frac{N_k}{2}\rfloor L}$$

nous avons, en utilisant le théorème de trace du lemme 2.4 :

$$||\varphi||_{H^{1/2}(\mathbb{R})} \leq Ce^{-\tau\lfloor\frac{N_k}{2}\rfloor L}||e^{\tau|\mathbf{x}|}u||_{H^1(\mathbb{R}^2)}$$

En procédant comme nous venons de le faire pour φ, mais en utilisant les dérivées normales, nous obtenons pour ψ, en application du lemme 2.5 (et en prenant la trace d'une dérivée normale sur un demi-plan avec une constante indépendante de N_k comme nous l'avons fait au lemme 2.4) :

$$||\psi||_{H^{-1/2}(\mathbb{R})} \leq Ce^{-\tau\lfloor\frac{N_k}{2}\rfloor L}||e^{\tau|\mathbf{x}|}u||_{H^1(\Delta,\mathbb{R}^2)}$$

ce qui conclut la preuve. □

Nous sommes donc parvenus à démontrer non seulement que le problème semi-discret est bien posé, mais aussi qu'il converge bien vers la solution du problème exact. Cette convergence a de plus ceci de remarquable qu'elle est exponentielle. Le point sujet à amélioration est le fait que nous n'avons pas obtenu une estimation parfaitement optimale, puisque le taux de convergence que nous avons estimé est légèrement pessimiste, étant basé sur une minoration de la constante de coercivité (que nous avons dû effectuer pour avoir des résultats précis). Remarquons que nous n'avons pu effectuer tout ceci que parce que nous sommes capables de réinterpréter une quadrature (intégrant exactement les exponentielles) comme une modification de l'équation initiale portant seulement sur la taille du domaine, et introduisant par le fait des conditions aux limites artificielles (non transparentes). Les techniques classiques d'estimation pour les équations intégrales, que nous avons mentionnées en début de section, et qui se basent sur des propriétés générales d'approximation des fonctions périodiques régulières, n'auraient pu tenir compte de cette spécificité, et nous auraient mené à une estimation plus pessimiste (plus rapide que tout polynôme, mais pas encore exponentiel), et moins précise (les constantes impliquées n'auraient pas été connues avec précision). De plus, le caractère bien posé du problème semi-discret n'aurait été établi que pour N_k "assez grand", tandis que nous avons pu montrer que le problème discret était en réalité bien posé pour tout N_k (dès lors que $N_k > max(M^-, M^+)$). Enfin, les techniques que nous avons développées ici vont pouvoir être réutilisées dans la seconde partie du mémoire lorsque nous traiterons les problèmes d'évolution, ce qui ne serait pas le cas des techniques usuelles basées sur la compacité collective (l'imprécision sur les constantes n'étant pas compatible avec les preuves de convergence temporelle, puisqu'elles peuvent remettre en question la stabilité).

Remarque 2.10. *De nouveau, pour une autre formule de quadrature intégrant exactement les exponentielles, la seule différence avec la règle des trapèzes aurait tenu aux conditions aux limites. Mais quelles que soient ces conditions, il est illusoire d'espérer les voir satisfaites par la solution exacte. Aussi, nous aurions eu une erreur majorée de la même façon par la valeur de la solution exacte sur le bord du domaine. Toute formule de quadrature acceptable du point de vue de l'intégration des exponentielles conduira donc dans ce contexte à une convergence exponentielle. Son étude peut toutefois s'avérer bien plus complexe, puisqu'une formule de quadrature différente peut mener à des conditions aux limites relativement exotiques. C'est pourquoi, encore une fois, nous avons choisi de nous restreindre au cas de la formule des trapèzes, qui permet un exposé relativement simple bien qu'elle contienne toutes les spécificités de notre méthode.*

Remarque 2.11. *Nous pouvons encore pousser un peu plus loin la réinterprétation de nos résultats. Nous avons déjà observé que, pour la règle des trapèzes, l'extension $\widetilde{u}_{\Delta k}$ de la solution semi-discrète,*

définie sur tout $\mathbb{R}^2$, est périodique de période N_k. L'équation qu'elle satisfait dans Ω_{N_k} se périodise de même, sur les translatées de Ω_{N_k}. Aussi, $\widetilde{u}_{\Delta k}$ est égale à la somme de toutes les périodisées de la solution exacte, décalées de N_k (ce qui revient à périodiser la source). Si la solution décroît suffisamment, comme c'est le cas pour le problème avec absorption que nous venons d'étudier, alors ces diverses périodisées ne vont que peu interagir entre elles (ayant moralement beaucoup décru avant de se rencontrer), et donc peu se dégrader mutuellement dans la zone qui leur correspond (Ω_{N_k} pour celle qui nous intérese en pratique). C'est une autre façon d'expliquer les bons résultats que nous avons obtenus. En revanche, en l'absence d'absorption, la solution va décroître beaucoup moins rapidement. Il faudra donc éloigner (ce qui revient à augmenter N_k) considérablement plus les répliques les unes des autres si on ne veut pas dégrader la solution dans Ω_{N_k}. En d'autres termes, cette réinterprétation nous conduit à penser qu'a priori, il faudra considérablement plus de points de quadrature pour traiter le cas sans absorption que le cas avec absorption. C'est une observation que nous confirmerons numériquement dans le chapitre suivant (et nous ne pouvons le faire que numériquement, ne disposant pas d'une théorie complète du cas sans absorption).

2.3 Le cas de plusieurs défauts linéiques

Une question naturelle, suite à l'étude qui précède, est de se demander si l'on peut encore appliquer la méthode précédente dans le cas où le milieu ne présente pas un mais plusieurs défauts linéiques localement perturbés. Nous allons voir que l'immense majorité des résultats du cas précédent se transposent sans modification dans cette nouvelle situation. On pourrait en fait résumer l'ensemble des différences entre les deux situations au fait que l'on doit modifier la méthode de calcul des opérateurs DtN de guide. En effet, le guide périodique qui va naturellement apparaître dans cette situation, comme intermédiaire de calcul pour le noyau S, comportera fort logiquement non plus un mais plusieurs défauts. Nous aurons alors le loisir d'appliquer l'ensemble des résultats du chapitre précédent concernant les opérateurs DtN en scattering multiple afin de déterminer les nouveaux opérateurs DtN.

2.3.1 Problème modèle et équation LS

Problème modèle

Bien entendu, dans ce cas il n'y a plus de raison de parler de milieu à gauche du défaut (Ω^-) et à droite du défaut (Ω^+), la situation la plus logique étant le cas d'un seul milieu de "fond", perturbé par plusieurs défauts linéiques. Nous donnons un exemple imagé d'un tel milieu sur la figure 2.13. La description en termes mathématiques de ce milieu est assez complexe. On désigne par $(\widetilde{\Omega}_i)_{1\leq i\leq N_d}$ les N_d défauts linéiques, définis par :

$$\widetilde{\Omega}_i = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; a^i_- \leq x \leq a^i_+\right\}$$

Comme nous pouvons choisir ces défauts (quitte à inclure une cellule de périodicité du milieu de référence dans le défaut), nous pouvons toujours supposer que $a^i_\pm = q^i_\pm L_x$, avec L_x la période dans la direction x du milieu de référence, et $q^i_\pm \in \mathbb{Z}$. Ces défauts linéiques sont localement pertubés par N_s défauts bornés, notés $(\Omega_j)_{1\leq j\leq N_s}$, qui sont de la forme :

$$\Omega_j =]\widetilde{q}^i_- L_x, \widetilde{q}^i_+ L_x[\times]p^j_- L, p^j_+ L[$$

avec $\widetilde{q}^j_\pm$ et $p^j_\pm$ appartenant à $\mathbb{Z}$. On imposera de plus :

$$\left\{\widetilde{q}^j_-, \widetilde{q}^j_+\right\}_{1\leq j\leq N_s} \subset \left\{q^j_-, q^j_+\right\}_{1\leq j\leq N_d}$$

ce qui signifie que pour tout j dans $[\![1, N_s]\!]$, il existe un i dans $[\![1, N_d]\!]$ tel que $\Omega_j \subset \widetilde{\Omega_i}$ (les défauts bornés sont tous inclus dans un défaut linéique). On dira que ce défaut linéique est numéroté $i(j)$

(nous y reviendrons plus loin). On posera enfin :

$$\Omega_0 = \bigcup_{j=1}^{N_s} \Omega_j$$

l'ensemble des défauts bornés (comme dans le chapitre 1). Le milieu ρ sera supposé périodique dans

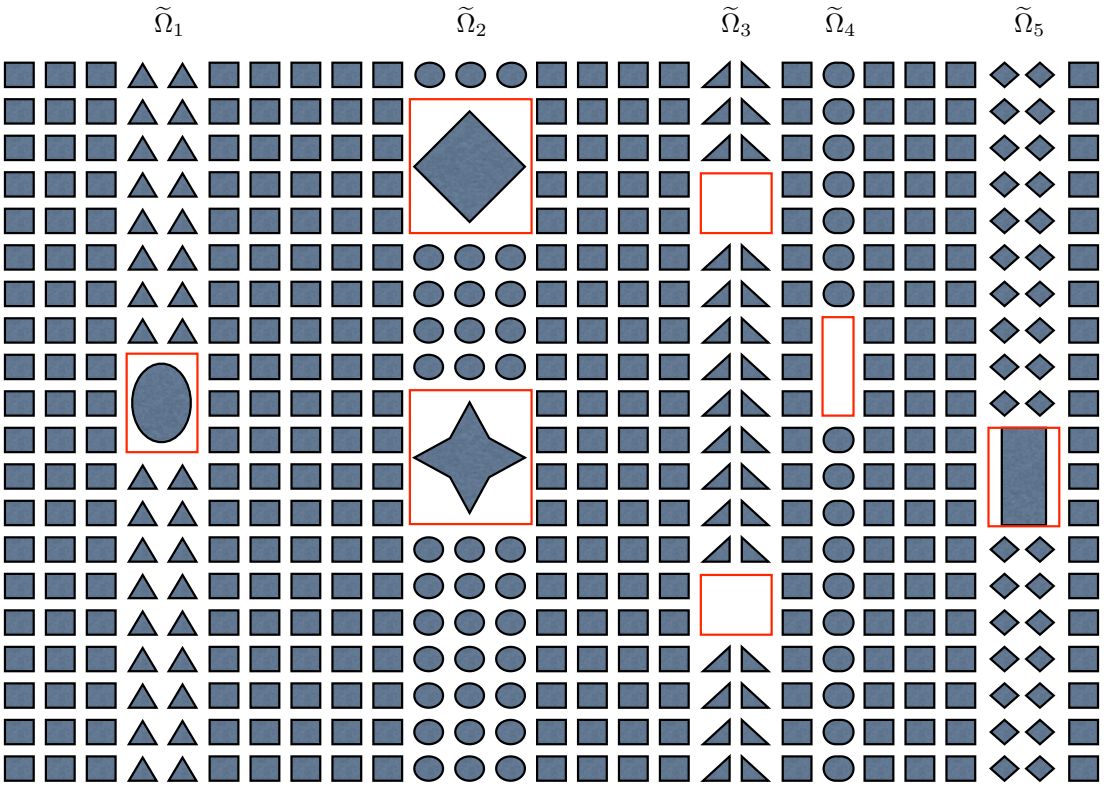


FIGURE 2.13 – Exemple de milieu périodique perturbé par plusieurs défauts linéiques

la direction y en dehors de Ω_0, c'est-à-dire qu'il existe $\rho_p \in L^\infty(\mathbb{R})^2$, tel que $supp\ (\rho - \rho_p) \subset \Omega_0$, et pour presque tout (x, y), $\rho_p(x, y + L) = \rho_p(x, y)$.Ce milieu de "fond" périodique en y, est représenté sur la figure 2.14. En dehors des défauts linéiques, le milieu est supposé doublement périodique, i.e il existe $\rho_{ref} \in L^\infty(\mathbb{R})^2$ tel que presque pour tout (x, y), $\rho_{ref}(x, y+L) = \rho_{ref}(x, y)$ et $\rho_{ref}(x+L_x, y) = \rho_{ref}(x, y)$, et :

$$\rho = \rho_{ref} = \rho_p \text{ dans } \mathbb{R}^2 \setminus \bigcup_{i=1}^{N_d} \widetilde{\Omega}_i$$

En résumé, le milieu sera périodique en y sauf dans Ω_0, et égal à un unique milieu périodique en x et y en dehors des défauts linéiques. Dans ces défauts $\widetilde{\Omega}_i$, le milieu est périodique en y, mais peut différer de ρ_{ref}. Enfin, on supposera bien entendu que $supp\ f \subset \Omega_0$.

Sous ces hypothèses supplémentaires et sous les hypothèses (H) du chapitre précédent, nous cherchons encore à résoudre : trouver $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$ telle que :

$$-\Delta u - (\omega^2 + i\varepsilon\omega)\rho u = f \text{ dans } \mathbb{R}^2 \tag{2.1}$$

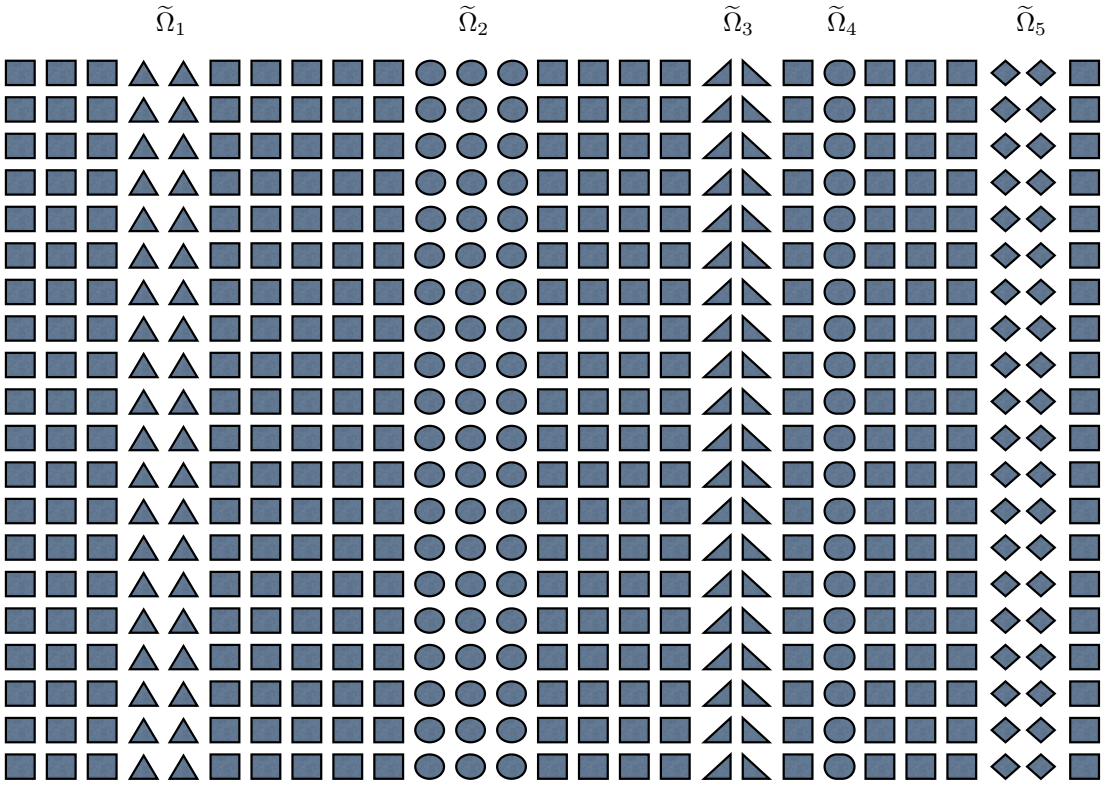


FIGURE 2.14 – Le milieu ρ_p de "référence " pour l'exemple de la figure 2.12

EQUATION DE LIPPMANN-SCHWINGER

Comme nous l'avons déjà expliqué auparavant, l'équation de Lippmann-Scwinger que nous avons établie précédemment est encore valable dans ce cas, puisque nous avons seulement besoin de supposer $supp\ (\rho - \rho_p) \subset \Omega_0$, avec Ω_0 est borné. Alors même dans cette situation plus complexe, le théorème 2.1 nous dit encore que résoudre (2.1) est encore équivalent à résoudre :

$$(I - S_{0,\rho})u_{|_{\Omega_0}} = S_0 f \tag{2.3}$$

où nous avons encore posé :

$$\begin{array}{rcl} S : L^2(\Omega_0) & \longrightarrow & L^2(\mathbb{R}^2) \\ f & \longmapsto & Sf \end{array}$$

où Sf est l'unique solution dans $H^1(\mathbb{R}^2)$ du problème :

$$-\Delta Sf - (\omega^2 + i\varepsilon\omega)\rho_p Sf = f$$

et :

$$\begin{array}{rcl} S_0 : L^2(\Omega_0) & \longrightarrow & L^2(\Omega_0) \\ f & \longmapsto & Sf_{|_{\Omega_0}} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} S_{0,\rho} : L^2(\Omega_0) & \longrightarrow & L^2(\Omega_0) \\ f & \longmapsto & S\left[-(\omega^2 + i\varepsilon\omega)(\rho_p - \rho)f\right]_{|_{\Omega_0}} \end{array}$$

En effet, rappelons-le encore une fois, il n'était nul besoin d'utiliser la géométrie particulière de Ω_0 pour établir ce résultat, mais seulement son caractère borné, afin d'obtenir de la compacité. Le problème est alors encore une fois réduit au calcul de l'opérateur S pour pouvoir en déduire S_0 et $S_{0,\rho}$. Mais comme le milieu ρ_p qui sert à le définir est périodique en y, nous allons pouvoir utiliser la transformée de Floquet dans la direction y pour y parvenir, de la même façon que dans le cas d'un seul défaut linéique.

2.3.2 Détermination de l'opérateur S

Le noyau S dans l'espace de Floquet

La structure du problème étant similaire au cas précédent, nous allons appliquer la transformée de Floquet dans la direction y, pour obtenir un problème de guide périodique localement perturbé, que nous espérons pouvoir résoudre en utilisant une méthode DtN. Remarquons tout d'abord que la transformée de Floquet en y d'une fonction à support dans Ω_0 est un peu plus compliquée à exprimer, du fait de la non-connexité de Ω_0. On a en effet, en utilisant les résultats de l'annexe A que nous avons rappelés dans ce chapitre, et qui donnent une formule explicite pour la TFB de fonctions L^2, nous avons :

$$\mathcal{F}f = \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \sum_{j=1}^{N_s} \sum_{n=p_-^j}^{p_+^j-1} f_{j,n} e^{-in\xi L}$$

si $\Omega_j^n = \Omega_j \cap B^n$ et si $f_{|\Omega_j^n} \equiv f_{j,n}$. La formule est donc un peu plus complexe, mais demeure explicite. Alors, comme la TFB va toujours commuter avec la multiplication par ρ_p et les opérateurs différentiels, il est clair que les mêmes calculs que ceux menés dans la démonstration du théorème 2.2 conduisent à :

Théorème 2.12. *La transformée de Floquet-Bloch $\hat{S}(\cdot)f$ de Sf est l'unique élément de $L^2(\mathbb{R} \times [0,L] \times [0,2\pi/L])$ qui pour presque tout $\xi \in [0,2\pi/L]$ soit solution dans $H^1_\xi(B^0)$ de :*

$$\left| \begin{array}{l} -\Delta \hat{S}(\xi)f - (\omega^2 + i\varepsilon\omega)\rho_p \hat{S}(\xi)f = \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \sum_{j=1}^{N_s} \sum_{n=p_-^j}^{p_+^j-1} f_{j,n} e^{-in\xi L} \quad \text{dans } B^0 \\ \partial_y \hat{S}(\xi)f_{|_{y=L}} = e^{i\xi L} \partial_y \hat{S}(\xi)f_{|_{y=0}} \end{array} \right. \tag{2.40}$$

Il s'agit là encore d'un problème de guide périodique localement perturbé, puisque le second membre, tout comme $\rho_p - \rho_{ref}$, est à support dans un compact fixe. Ce compact est tout simplement donné par :

$$\Omega_0^0 = \left(\bigcup_{i=1}^{N_d} \widetilde{\Omega}_i \right) \cap B^0 = \bigcup_{i=1}^{N_d} \left( ]q_-^i L, q_+^i L[\times]0, L[\right)$$

puisque tous les Ω_j sont inclus dans un $\widetilde{\Omega_i}$, et donc :

$$\Omega_0 \subset \bigcup_{i=1}^{N_d} \widetilde{\Omega}_i$$

On notera $\Omega_{0,i}^0 =]q_-^i L, q_+^i L[\times]0, L[$, les défauts bornés du problème de guide.Autrement dit, de façon imagée, le milieu ρ_p de la figure 2.14 est transformé en le guide périodique localement perturbé représenté sur la figure 2.15. Nous voyons clairement sur cette figure que le problème obtenu est un problème de scattering multiple dans un guide périodique avec conditions aux limites quasi-périodiques. Nous savons donc que si nous sommes capables de calculer les opérateurs DtN du problème de simple-scattering, nous allons pouvoir en déduire l'opérateur DtN dans le cas du scattering multiple, en appliquant les résultats du chapitre 1.

FIGURE 2.15 – Le guide obtenu par TFB du milieu de référence de la figure 2.14

MÉTHODE DTN DANS LES GUIDES EN SCATTERING MULTIPLE

Le domaine extérieur sera cette fois $B^0_e = B^0 \cap \overline{\Omega^0_0}$ et le problème extérieur associé, si :

$$\Gamma_0 = \partial\Omega^0_0 \setminus \partial B^0$$

Pour tout $\varphi \in H^{1/2}_\xi(\Gamma_0)$, trouver $u_e(\varphi) \in H^1_\xi(B^0_e)$ tel que :

$$\left|\begin{array}{ll} -\Delta u_e(\varphi) - (\omega^2 + i\varepsilon\omega)\rho_p u_e(\varphi) = 0 & \text{dans } B^0_e \\ \partial_y u_e(\varphi)_{|_{\Sigma^+\cap\partial B^0_e}} = e^{i\xi L}\partial_y u_e(\varphi)_{|_{\Sigma^-\cap\partial B^0_e}} & \\ u_e(\varphi)|_{\Gamma_0} = \varphi & \end{array}\right.$$

Rappelons que l'opérateur DtN est défini par :

$$\begin{array}{rcl} \Lambda_e(\xi) : H^{1/2}_\xi(\Gamma_0) & \longrightarrow & H^{1/2}_\xi(\Gamma_0)' \\ \varphi & \longmapsto & -\dfrac{\partial u_e(\varphi)}{\partial \nu_0}|_{\Gamma_0} \end{array}$$

où ν_0 est la normale extérieure à $\Omega_0 \cap B^0$ sur Γ_0. Alors, nous savons, toujours en vertu du théorème 1.13, que résoudre (2.40) est équivalent à résoudre : trouver $\hat{S}_0(\xi)f \in H^1_\xi(\Omega^0_0)$ tel que :

$$\left|\begin{array}{ll} -\Delta\hat{S}_0(\xi)f - (\omega^2 + i\varepsilon\omega)\rho_p\hat{S}_0(\xi)f = \sqrt{\dfrac{L}{2\pi}}\displaystyle\sum_{j=1}^{N_s}\sum_{n=p^j_-}^{p^j_+-1} f_{j,n}e^{-in\xi L} & \text{dans } \Omega^0_0 \\ \partial_y\hat{S}_0(\xi)f_{|_{\Sigma^+\cap\partial\Omega^0_0}} = e^{i\xi L}\partial_y\hat{S}_0(\xi)f_{|_{\Sigma^-\cap\partial\Omega^0_0}} & \\ \dfrac{\partial\hat{S}_0(\xi)f}{\partial\nu_0} + \Lambda_e(\xi)\left(\hat{S}_0(\xi)f|_{\Gamma_0}\right) = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \end{array}\right.$$

et on aura :

$$\begin{array}{rcl} \hat{S}_0(\xi) : L^2(\Omega_0) & \longrightarrow & L^2(\Omega_0 \cap B^0) \\ f & \longmapsto & \hat{S}(\xi)f|_{\Omega^0_0} \end{array}$$

Puis, on introduit cette fois les problèmes extérieurs à chaque défaut. En posant $\Sigma^\pm_j = \Sigma^\pm \cap \partial(B^0 \setminus \Omega^0_{0,j})$, et :

$$\Gamma_j = \partial\Omega^0_{0,j} \setminus \partial B^0$$

ces problèmes s'écrivent :

Pour tout $\varphi \in H^{1/2}_\xi(\Gamma_j)$, trouver $u_e(\varphi) \in H^1_\xi(B^0 \setminus \overline{\Omega^0_{0,j}})$ tel que :

$$\left|\begin{array}{ll} -\Delta u_{e,j}(\varphi) - (\omega^2 + i\varepsilon\omega)\rho_p u_{e,j}(\varphi) = 0 & \text{dans } B^0 \setminus \overline{\Omega^0_{0,j}} \\ \partial_y u_{e,j}(\varphi)_{|_{\Sigma^+_j}} = e^{i\xi L}\partial_y u_{e,j}(\varphi)_{|_{\Sigma^-_j}} & \\ u_{e,j}(\varphi)|_{\Gamma_j} = \varphi & \end{array}\right.$$

et sont bien posés en vertu du théorème 1.12. On définit ensuite les opérateurs $\Theta_{ij}(\xi)$ et $\widetilde{\Lambda}_{ij}(\xi)$ comme :

$$\begin{array}{rcl} \Theta_{ij}(\xi) : H_\xi^{1/2}(\Gamma_j) & \longrightarrow & H_\xi^{1/2}(\Gamma_i) \\ \widetilde{\varphi} & \longmapsto & u_{e,j}(\widetilde{\varphi})|_{\Gamma_i} \end{array}$$

et la pseudo-matrice associée :

$$\begin{array}{rcl} \Theta(\xi) : \displaystyle\prod_{j=1}^{N_s} H_\xi^{1/2}(\Gamma_j) & \longrightarrow & \displaystyle\prod_{i=1}^{N_s} H_\xi^{1/2}(\Gamma_i) \\ \varphi & \longmapsto & \Theta(\xi)\varphi = \left(\displaystyle\sum_{j=1}^{N_s} \Theta_{ij}(\xi)\varphi_j \right)_{1\le i\le N_s} \end{array}$$

ainsi que :

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{\Lambda}_{ij}(\xi) : H_\xi^{1/2}(\Gamma_j) & \longrightarrow & H_\xi^{1/2}(\Gamma_i)' \\ \varphi & \longmapsto & \partial_{\nu_i} u_{e,j}(\varphi)|_{\Gamma_i} \end{array}$$

et la pseudo-matrice associée :

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{\Lambda}(\xi) : \displaystyle\prod_{j=1}^{N_s} H_\xi^{1/2}(\Gamma_j) & \longrightarrow & \displaystyle\prod_{i=1}^{N_s} H_\xi^{1/2}(\Gamma_i)' \\ \varphi & \longmapsto & \widetilde{\Lambda}(\xi)\varphi = \left(\displaystyle\sum_{j=1}^{N_s} \widetilde{\Lambda}_{ij}(\xi)\varphi_j \right)_{1\le i\le N_s} \end{array}$$

Alors l'opérateur DtN Λ_e se réécrit, d'après le chapitre 1 :

$$\Lambda_e(\xi) = \widetilde{\Lambda}(\xi)\Theta(\xi)^{-1}$$

Il nous faut donc simplement calculer les opérateurs $\Theta_{ij}(\xi)$ et $\widetilde{\Lambda}_{ij}(\xi)$. Nous allons voir qu'ils se déduisent aisément des opérateurs que nous avons déjà calculés dans le cas du simple scattering. Pour cela, il convient de remarquer que les $u_{e,j}$ sont en réalité des problèmes extérieurs de guide périodique, extérieurs à un seul défaut. Il s'agit donc exactement des problèmes pour lesquels [37] propose une méthode de résolution, que nous avons rappelée plus tôt dans ce chapitre. Nous allons encore une fois découpler chacun de ces problèmes en deux problèmes de demi-guide, pour lesquels nous connaissons une expression cellule par cellule de la solution, au moyen des solutions des problèmes de cellule $e_i^\pm$ et des propagateurs $R^\pm$. Rappelons qu'une donnée φ sur $\Gamma_j = \partial\Omega_j \setminus \overline{\partial\Omega \cap \partial\Omega_j}$, c'est-à-dire sur les frontières verticales de Ω_j, se décompose naturellement en deux parties, à savoir sa restriction φ^- sur la frontière verticale de gauche :

$$\Gamma_{j,-} = \left\{ (x,y) \in \Omega \ \mid \ x = q_-^j L_x \right\}$$

et sa restriction φ^+ sur la frontière verticale de droite

$$\Gamma_{j,+} = \left\{ (x,y) \in \Omega \ \mid \ x = q_+^j L_x \right\}$$

Alors chacun des opérateurs Θ_{ij} et $\widetilde{\Lambda}_{ij}$ s'écrit naturellement sous la forme :

$$\Theta_{ij}(\xi) = \begin{pmatrix} (\Theta_{ij}(\xi))_{--} & (\Theta_{ij}(\xi))_{-+} \\ (\Theta_{ij}(\xi))_{+-} & (\Theta_{ij}(\xi))_{++} \end{pmatrix}$$

et :

$$\widetilde{\Lambda}_{ij}(\xi) = \begin{pmatrix} \left(\widetilde{\Lambda}_{ij}(\xi)\right)_{--} & \left(\widetilde{\Lambda}_{ij}(\xi)\right)_{-+} \\ \left(\widetilde{\Lambda}_{ij}(\xi)\right)_{+-} & \left(\widetilde{\Lambda}_{ij}(\xi)\right)_{++} \end{pmatrix}$$

De sorte que si $\psi = \Theta_{ij}(\xi)\varphi$, on ait :

$$\psi^- = (\Theta_{ij}(\xi))_{--}\,\varphi^- + (\Theta_{ij}(\xi))_{-+}\,\varphi^+ \quad \text{et} \quad \psi^+ = (\Theta_{ij}(\xi))_{+-}\,\varphi^- + (\Theta_{ij}(\xi))_{++}\,\varphi^+$$

et si $\psi = \widetilde{\Lambda}_{ij}(\xi)\varphi$, on ait :

$$\psi^- = \left(\widetilde{\Lambda}_{ij}(\xi)\right)_{--}\varphi^- + \left(\widetilde{\Lambda}_{ij}(\xi)\right)_{-+}\varphi^+ \quad \text{et} \quad \psi^+ = \left(\widetilde{\Lambda}_{ij}(\xi)\right)_{+-}\varphi^- + \left(\widetilde{\Lambda}_{ij}(\xi)\right)_{++}\varphi^+$$

Le découplage entre chaque problème de demi-guide va entraîner, hormis pour le cas $i = j$, que ces opérateurs auront toujours une colonne nulle comme nous allons le voir. Plus précisément, ces opérateurs se calculent suivant les règles suivantes :

Théorème 2.13. *Pour $i = j$, les opérateurs $\Theta_{ii}(\xi)$ et $\widetilde{\Lambda}_{ii}(\xi)$ sont donnés par :*

$$\Theta_{ii}(\xi) = \begin{pmatrix} Id & 0 \\ 0 & Id \end{pmatrix} \quad \textit{et} \quad \widetilde{\Lambda}_{ii}(\xi) = \begin{pmatrix} \Lambda_-(\xi) & 0 \\ 0 & \Lambda_+(\xi) \end{pmatrix}$$

Pour $i \neq j$, les opérateurs $\Theta_{ij}(\xi)$ et $\widetilde{\Lambda}_{ij}(\xi)$, se calculent selon la règle suivante :

. *Si Ω_i est à droite de Ω_j, i.e. si $q^i_- > q^j_+$, alors :*

$$\Theta_{ij}(\xi) = \begin{pmatrix} 0 & R^+(\xi)^{q^i_- - q^j_+} \\ 0 & R^+(\xi)^{q^i_+ - q^j_+} \end{pmatrix}$$

et

$$\widetilde{\Lambda}_{ij}(\xi) = \begin{pmatrix} 0 & -T^+_{00}(\xi)R^+(\xi)^{q^i_- - q^j_+} - T^+_{10}(\xi)R^+(\xi)^{q^i_- - q^j_+ + 1} \\ 0 & T^+_{00}(\xi)R^+(\xi)^{q^i_+ - q^j_+} + T^+_{10}(\xi)R^+(\xi)^{q^i_+ - q^j_+ + 1} \end{pmatrix}$$

. *Si Ω_i est à gauche de Ω_j, i.e. si $q^i_+ < q^j_-$, alors :*

$$\Theta_{ij}(\xi) = \begin{pmatrix} R^-(\xi)^{q^j_- - q^i_-} & 0 \\ R^-(\xi)^{q^j_- - q^i_+} & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$\widetilde{\Lambda}_{ij}(\xi) = \begin{pmatrix} T^-_{00}(\xi)R^-(\xi)^{q^j_- - q^i_-} + T^-_{10}(\xi)R^-(\xi)^{q^j_- - q^i_- + 1} & 0 \\ -T^-_{00}(\xi)R^-(\xi)^{q^j_- - q^i_+} - T^-_{10}(\xi)R^-(\xi)^{q^j_- - q^i_+ + 1} & 0 \end{pmatrix}$$

Démonstration. Ce théorème consiste simplement en une compilation des résultats de structure que nous avons rappelés pour les problèmes de demi-guide. Remarquons tout d'abord que le cas $i = j$ est évident, et ne nécessite pas de démonstration supplémentaire. Pour $i \neq j$, on ne va démontrer que le cas "droite", le cas "gauche" se démontrant exactement de la même manière. La démonstration, très simple dans son principe, nécessite une certaine gymnastique d'aller-retour entre les différentes interprétations des problèmes de demi-guide, qui peut s'avérer ardue si on ne s'y prend pas bien. Aussi, nous allons commencer pour chaque opérateur par exposer la démonstration dans le cas très simple à deux défauts de la figure 2.16, afin d'en clarifier le principe :

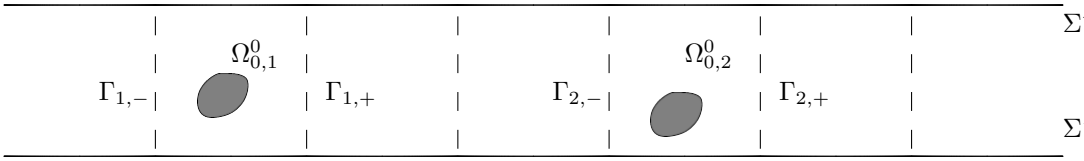


FIGURE 2.16 – Exemple de guide à deux défauts

Le cas "droite" consiste ici à calculer Θ_{21}. Par définition, on a $\Theta_{21}\varphi = u_{e,1}(\varphi)|_{\Gamma_2} = \big(u_{e,1}(\varphi)|_{\Gamma_{2,-}}, u_{e,1}(\varphi)|_{\Gamma_{2,+}}\big)$. Comme nous sommes dans le cas droite, on a de plus :

$$u_{e,1}(\varphi) = \tau_{a_+ - q^1_+ L_x} w_+(\varphi^+)$$

pour tout $x \geq q^1_+ L_x$. Alors (cf figure 5.12) :

$$u_{e,1}(\varphi)|_{\Gamma_{2,-}} = \tau_{a_+ - q^1_+ L_x} w_+(\varphi^+)|_{x=q^2_- L_x} = w_+(\varphi^+)|_{x=a_+ + (q^2_- - q^1_+)L_x} = w_+(\varphi^+)|_{\Gamma^+_{(q^2_- - q^1_+)L_x}}$$

et

$$u_{e,1}(\varphi)|_{\Gamma_{2,+}} = \tau_{a_+ - q^1_+ L_x} w_+(\varphi^+)|_{x=q^2_+ L_x} = w_+(\varphi^+)|_{x=a_+ + (q^2_+ - q^1_+)L_x} = w_+(\varphi^+)|_{\Gamma^+_{(q^2_+ - q^1_+)L_x}}$$

Par définition et en vertu de la formule (2.12), ces quantités sont bien $R^+(\xi)^{q^2_- - q^1_+}\varphi^+$ et $R^+(\xi)^{q^2_+ - q^1_+}\varphi^+$, et on retrouve bien la formule annoncée. Alors de façon générale, on a de la même manière dans le cas "droite", pour l'opérateur Θ_{ij} :

$$(\Theta_{ij}(\xi)\varphi)^- = u_{e,j}(\varphi)|_{\Gamma_{i,-}} = w_+(\varphi^+)|_{\Gamma^+_{q^i_- - q^j_+}} = R^+(\xi)^{q^i_- - q^j_+}\varphi^+$$

et

$$(\Theta_{ij}(\xi)\varphi)^+ = u_{e,j}(\varphi)|_{\Gamma_{i,+}} = w_+(\varphi^+)|_{\Gamma^+_{q^i_+ - q^j_+}} = R^+(\xi)^{q^i_+ - q^j_+}\varphi^+$$

par définition. Passons maintenant aux $\widetilde{\Lambda}_{ij}$, et commençons à nouveau par le cas à deux défauts, pour le cas droite. Par définition, $\widetilde{\Lambda}_{21}(\xi)\varphi = \big(\partial_\nu u_{e,1}(\varphi)|_{\Gamma_{2,-}}, -\partial_\nu u_{e,1}(\varphi)|_{\Gamma_{2,+}}\big)$ si les normales sont orientées dans le sens du guide (vers les x croissants pour le cas droite) comme nous l'avons fait jusqu'à maintenant. Comme nous sommes dans le cas droite, on a toujours :

$$u_{e,1}(\varphi) = \tau_{a_+ - q^1_+ L_x} w_+(\varphi^+)$$

pour tout $x \geq q^1_+ L_x$. Alors (cf figure 2.16) :

$$\partial_\nu u_{e,1}(\varphi)|_{\Gamma_{2,-}} = \partial_\nu \tau_{a_+ - q^1_+ L_x} w_+(\varphi^+)|_{x=q^2_- L_x}$$

$$= w_+(\varphi^+)|_{x=a_+ + (q^2_- - q^1_+)L_x} = \partial_\nu w_+(\varphi^+)|_{\Gamma^+_{(q^2_- - q^1_+)L_x}}$$

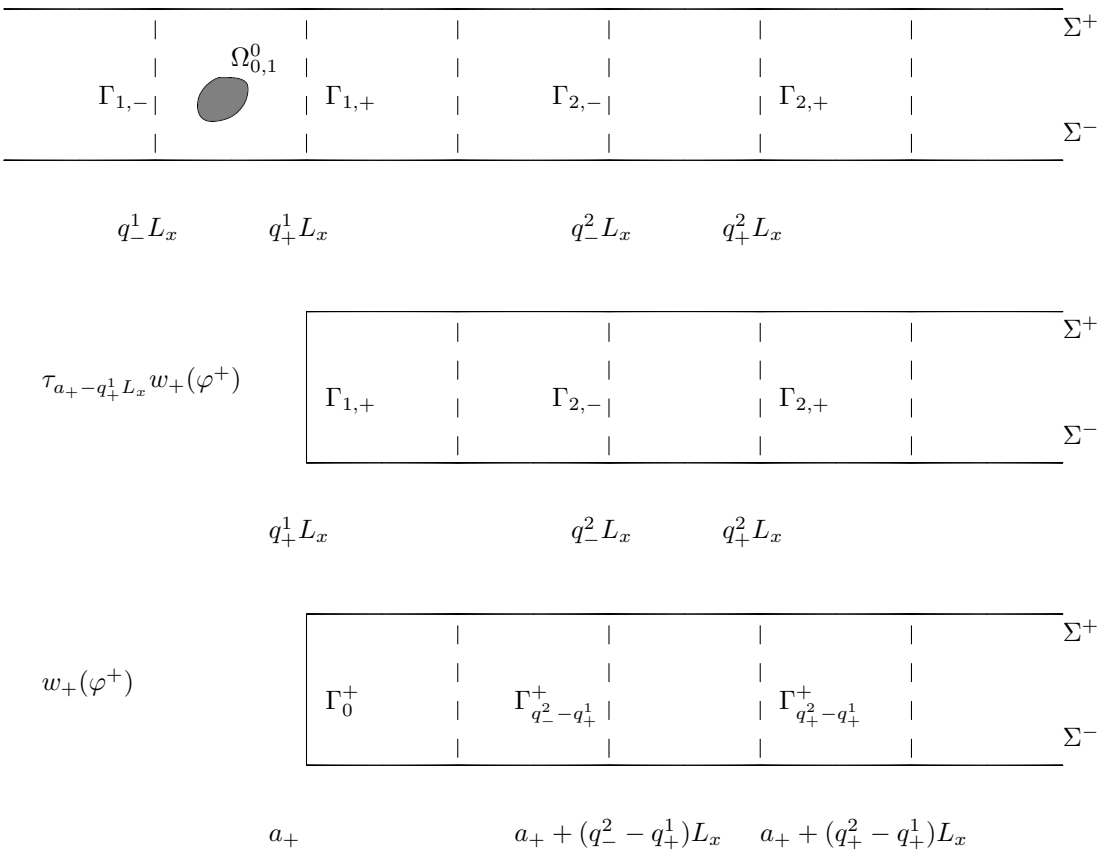


FIGURE 2.17 – Identifications entre les solutions de demi-guide par translation

Maintenant, on exprime w_+ dans la cellule $\mathcal{C}^+_{q^2_- - q^1_+ + 1}$ dont $\Gamma^+_{q^2_+ - q^1_+}$ est la frontière de gauche, en vertu de (5.10) et (5.16) :

$$w_+|_{\mathcal{C}^+_{q^2_- - q^1_+ + 1}} = e^+_0(w^n_+(\varphi^+)|_{\Gamma^+_{q^2_- - q^1_+}}) + e^+_1(w^n_+(\varphi^+)|_{\Gamma^+_{q^2_- - q^1_+ + 1}}$$

On prend alors la dérivée normale sur $\Gamma^+_{(q^2_+ - q^1_+)L_x}$, en prenant garde au fait que les opérateurs de cellule sont orientés dans le sens contraire au x croissants dans ce cas :

$$\partial_\nu u_{e,1}(\varphi)|_{\Gamma_{2,-}} = -T^+_{00}(\xi)R^+(\xi)^{q^2_- - q^1_+}\varphi^+ - T^+_{10}(\xi)R^+(\xi)^{q^2_- - q^1_+ + 1}\varphi^+$$

On fait la même chose pour $\Gamma_{2,+}$, en se servant de la cellule immédiatement après, mais en notant que cette fois les opérateurs sont orientés dans le bon sens :

$$-\partial_\nu u_{e,1}(\varphi)|_{\Gamma_{2,+}} = T^+_{00}(\xi)R^+(\xi)^{q^2_+ - q^1_+}\varphi^+ - T^+_{10}(\xi)R^+(\xi)^{q^2_+ - q^1_+ + 1}\varphi^+$$

De façon générale, pour les $\widetilde{\Lambda}_{ij}$, on a en vertu de (5.10) et (5.16)

$$(\widetilde{\Lambda}_{ij}(\xi)\varphi)^- = \partial_{\nu_0} u_{e,j}(\varphi)|_{\Gamma_{i,-}} = \partial_{\nu_0}\left(w_+(\varphi^+)|_{\mathcal{C}^+_{q^i_- - q^j_+ + 1}}\right)|_{\Gamma^+_0}$$

$$= \partial_{\nu_0} \left(e_0^+(w_+^n(\varphi^+)|_{\Gamma^+_{q_-^i - q_+^j}}) + e_1^+(w_+^n(\varphi^+)|_{\Gamma^+_{q_-^i - q_+^j+1}}) \right) |_{\Gamma_0^+}$$

ce qui par définition s'écrit :

$$(\widetilde{\Lambda}_{ij}(\xi)\varphi)^- = -T_{00}^+(\xi)R^+(\xi)^{q_-^i - q_+^j}\varphi^+ - T_{10}^+(\xi)R^+(\xi)^{q_-^i - q_+^j+1}\varphi^+$$

Puis on a :

$$(\widetilde{\Lambda}_{ij}(\xi)\varphi)^- = \partial_{\nu_1} u_{e,j}(\varphi)|_{\Gamma_{i,-}} = \partial_{\nu_1} \left(w_+(\varphi^+)|_{\mathcal{C}^+_{q_+^i - q_+^j+1}} \right) |_{\Gamma_0^+}$$

$$= \partial_{\nu_1} \left(e_0^+(w_+^n(\varphi^+)|_{\Gamma^+_{q_+^i - q_+^j}}) + e_1^+(w_+^n(\varphi^+)|_{\Gamma^+_{q_+^i - q_+^j+1}}) \right)$$

ce qui par définition s'écrit :

$$(\widetilde{\Lambda}_{ij}(\xi)\varphi)^- = T_{00}^+(\xi)R^+(\xi)^{q_+^i - q_+^j}\varphi^+ + T_{10}^+(\xi)R^+(\xi)^{q_+^i - q_+^j+1}\varphi^+$$

□

Nous voyons donc que nous sommes encore capables de donner des formules explicites, uniquement basées sur la résolution de problèmes posés en domaine borné, pour les opérateurs de scattering multiple. Alors le calcul de $\hat{S}_0(\xi)$ se ramène encore à la résolution de problèmes posés en domaine borné, comme dans le cas du simple scattering.

Expression de S_0 et $S_{0,\rho}$

La TFB de S se calcule donc en résolvant le problème intérieur :

$$\left| \begin{array}{ll} -\Delta\hat{S}_0(\xi)f - (\omega^2 + i\varepsilon\omega)\rho_p\hat{S}_0(\xi)f = \sqrt{\dfrac{L}{2\pi}} \displaystyle\sum_{j=1}^{N_s} \sum_{n=p_-^j}^{p_+^j-1} f_{j,n}e^{-in\xi L} & \text{dans } \Omega_0^0 \\ \partial_y\hat{S}_0(\xi)f_{|_{\Sigma^+\cap\partial\Omega_0^0}} = e^{i\xi L}\partial_y\hat{S}_0(\xi)f_{|_{\Sigma^-\cap\partial\Omega_0^0}} & \\ \dfrac{\partial\hat{S}_0(\xi)f}{\partial\nu_0} + \widetilde{\Lambda}(\xi)\Theta(\xi)^{-1}\left(\hat{S}_0(\xi)f|_{\Gamma_0}\right) = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \end{array} \right.$$

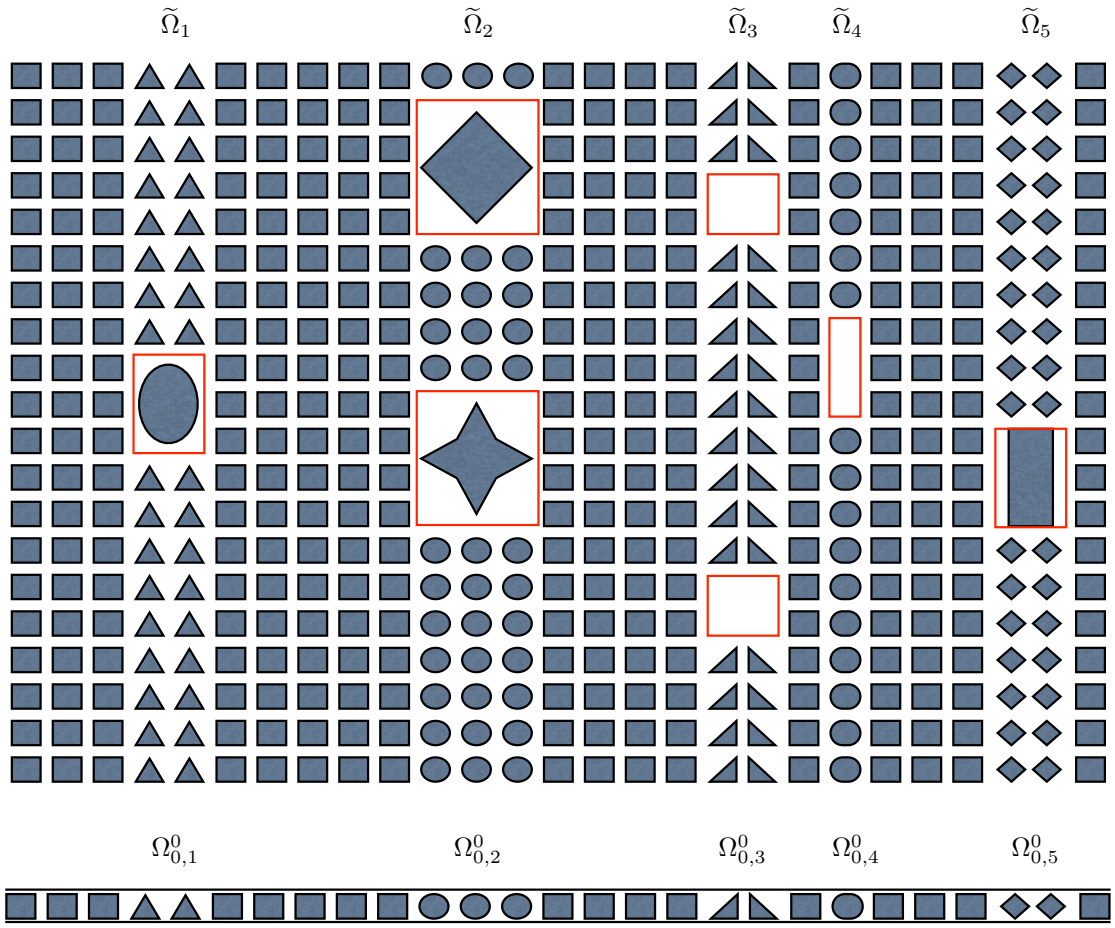
et les opérateurs S_0 et $S_{0,\rho}$ se calculent encore par transformée de Floquet inverse de cet opérateur. Pour l'exprimer simplement, notons que chaque Ω_j étant inclus dans un $\widetilde{\Omega}_i$, ils sont situés à la verticale d'un seul $\Omega_{W,i}$. La TFB inverse dans Ω_j ne dépendra donc que des seules valeurs prises dans ce $\Omega_{0,i}^0$ particulier, que l'on notera $\Omega_{0,i(j)}^0$. Sur l'exemple de la figure 2.13, que nous rappelons ci-après, si on numérote les Ω_j de la gauche vers la droite et de bas en haut, cela signifie que nous faisons correspondre Ω_1 à $\Omega_{0,1}^0$, Ω_2 et Ω_3 à $\Omega_{0,2}^0$, Ω_4 et Ω_5 à $\Omega_{0,3}^0$, Ω_6 à $\Omega_{0,4}^0$ et Ω_7 à $\Omega_{0,5}^0$.

Alors pour tout $f \in L^2(\Omega_0)$, pour tout $j \in [\![1, N_s]\!]$ et tout $m \in [\![p_-^j -, p_+^j + -1]\!]$, nous avons les formules suivantes pour S et S_ρ :

$$S_0 f|_{\Omega_j^m} \equiv \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \int_0^{2\pi/L} (\hat{S}_0(\xi)f)|_{\Omega_{W,i(j)}} e^{i\xi mL} d\xi$$

$$S_{0,\rho} f|_{\Omega_j^m} \equiv -(\omega^2 + i\varepsilon\omega)\sqrt{\frac{L}{2\pi}} \int_0^{2\pi/L} \left(\hat{S}_0(\xi)(\rho_p - \rho)f\right) |_{\Omega_{W,i(j)}} e^{i\xi mL} d\xi$$

À la structure géométrique de Ω_0 et à la méthode de calcul de Λ_e près, nous avons donc abouti à la même situation que dans le cas d'un seul défaut linéique.



2.3.3 Semi-discrétisation dans la variable de Floquet

L'équation de Lippmann-Schwinger que l'on doit résoudre en pratique s'écrit donc : pour tout $f \in L^2(\Omega_0)$, trouver $u \in L^2(\Omega_0)$ tel que pour tout $j \in [\![1, N_s]\!]$ et tout $m \in [\![p^j_- - , p^j_+ + -1]\!]$:

$$\begin{aligned} u_{|\Omega^m_j} - (\omega^2 + i\varepsilon\omega)\sqrt{\frac{L}{2\pi}} \int_0^{2\pi/L} \left(\hat{S}(\xi)(\rho_p - \rho)u_{|\Omega_0}\right)|_{\Omega_{W,i(j)}} e^{im\xi L} d\xi \\ = \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \int_0^{2\pi/L} (\hat{S}(\xi)f)|_{\Omega_{W,i(j)}} e^{im\xi L} d\xi \end{aligned} \tag{2.41}$$

Il est clair que l'on doit, en pratique, encore approcher les intégrales impliquées par une formule de quadrature. Nous considérons encore le cas de la règle des trapèzes. Alors les opérateurs approchés sont donnés par, pour tout $j \in [\![1, N_s]\!]$ et tout $m \in [\![p^j_- - , p^j_+ + -1]\!]$:

$$S_{0,\Delta k} f|_{\Omega^m_j} = \Delta k \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \sum_{j=1}^{N_k} (\hat{S}_0(j\Delta k)f)|_{\Omega_{W,i(j)}} e^{imj\Delta kL} \tag{2.42}$$

et :

$$S_{0,\rho,\Delta k} f|_{\Omega^m_j} = -(\omega^2 + i\varepsilon\omega)\Delta k \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \sum_{j=1}^{N_k} \left(\hat{S}_0(j\Delta k)(\rho_p - \rho)f\right)|_{\Omega_{W,i(j)}} e^{imj\Delta kL} \tag{2.43}$$

L'étude de cette approximation ne diffère en rien de celle du cas d'un seul défaut linéique. L'équation de Lippmann-Schwinger semi-discrète se réinterprète encore comme étant équivalente à la résolution

d'une équation de Helmnholtz modifiée. En effet, par définition, pour tout $j \in [\![1, N_s]\!]$ et tout $m \in [\![p_-^j, p_+^j + -1]\!]$, la solution $u_{\Delta k}$ de l'équation de Lippmann-Schwinger semi-discrète : trouver $u_{\Delta k} \in L^2(\Omega_0)$ telle que

$$(I - S_{0,\rho,\Delta k})u_{\Delta k} = S_{0,\Delta k} f \tag{2.44}$$

vérifie donc par définition :

$$u_{\Delta k}|_{\Omega_j^m} = \Delta k \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \sum_{j=1}^{N_k} \left(\hat{S}_0(j\Delta k) \left(f - (\omega^2 + i\varepsilon\omega)(\rho_p - \rho) u_{\Delta k} \right) \right) |_{\Omega_{W,i(j)}} e^{imj\Delta kL}$$

On étend alors $u_{\Delta k}$ à tout $\mathbb{R}^2$ en posant, pour tout $m \in \mathbb{Z}$:

$$\widetilde{u}_{\Delta_k|B^m} \equiv \Delta k \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \sum_{j=1}^{N_k} \hat{S}(j\Delta k) \left(f - (\omega^2 + i\varepsilon\omega)(\rho_p - \rho) u_{\Delta k} \right) e^{imj\Delta kL} \tag{2.45}$$

c'est-à-dire de la même façon que dans le cas d'un seul défaut. La seule chose à vérifier est qu'il s'agit bien d'une extension, vu que la géométrie est un peu plus complexe. Mais nous avons toujours $\hat{S}(\xi) f|_{\Omega_0^0} = \hat{S}_0(\xi) f$, et donc pour tout $i \in [\![1, N_d]\!]$:

$$\hat{S}(\xi) f|_{\Omega_{W,i}} = \hat{S}_0(\xi) f|_{\Omega_{W,i}}$$

Comme $\Omega_j^m = B^m \cap \Omega_j$ et $B^0 \cap \Omega_{W,i(j)} = \Omega_{W,i(j)}$, et comme $\Omega_j^m \equiv \Omega_{W,i(j)}$, alors $B^m \cap \Omega_j \equiv B^0 \cap \Omega_{W,i(j)}$, on a bien $\widetilde{u}_{\Delta_k|\Omega_j^m} = u_{\Delta k}|_{\Omega_j^m}$, et il s'agit bien d'une extension. Alors, nous savons que la fonction $\widetilde{u}_{\Delta k}$ est solution de :

Trouver $\widetilde{u}_{\Delta k} \in H^1_{per}(\Omega_{N_k})$ telle que :

$$\left| \begin{array}{ll} -\Delta \widetilde{u}_{\Delta k} - (\omega^2 + i\varepsilon\omega)\rho \widetilde{u}_{\Delta k} = f & \text{dans } \Omega_{N_k} \\ \widetilde{u}_{\Delta k|_{\Gamma^+_{N_k}}} = \widetilde{u}_{\Delta k|_{\Gamma^-_{N_k}}} & \\ \partial_y \widetilde{u}_{\Delta k|_{\Gamma^+_{N_k}}} = \partial_y \widetilde{u}_{\Delta k|_{\Gamma^-_{N_k}}} & \end{array} \right. \tag{2.33}$$

Autrement dit, $\widetilde{u}_{\Delta k}$ est solution du même problème que dans le cas d'un seul défaut. On en déduit alors sans difficulté que l'équation de Lippmann-Schwinger semi-discrète est encore bien posée (en se servant du fait que $I - S_{0,\rho,\Delta k}$ est Fredholm d'indice zéro, et que l'on a l'unicité via celle de la solution de (2.33)), et que l'on a la même estimation d'erreur que dans le cas d'un seul défaut linéique. Par conséquent, la méthode que nous avons exposée dans le cas d'un seul défaut linéique s'étend au cas de plusieurs défauts, et conserve les mêmes propriétés de convergence. Il n'y a donc aucun obstacle théorique au traitement de plusieurs défauts non bornés, dès lors que l'on sait traiter un seul défaut et faire du scattering multiple.

2.3.4 Le cas particulier des défauts bornés

Pour conclure ce chapitre, nous allons nous intéresser au cas particulier où $\rho_p = \rho_{ref}$ dans $\mathbb{R}^2 \backslash \Omega_0$, c'est-à-dire le cas où les défauts sont bornés (voir figure 2.18). Bien entendu, comme il ne s'agit que d'un cas particulier de la situation précédente, il est clair que la méthode que nous nous sommes efforcés de décrire dans ce chapitre est encore utilisable dans ce cas. Toutefois, on peut se demander s'il n'est pas possible d'utiliser le fait que le milieu est partout le même (sauf bien sûr dans Ω_0), pour construire une méthode adaptée.

Dans pareille configuration, l'approche la plus naturelle consiste à chercher à construire des opérateurs DtN directement sur la frontière de Ω_0. Dans le cas d'un seul défaut, ces opérateurs DtN de "plan" ont été étudiés dans la thèse de S. Fliss (voir [37] et [38]). Puis, nous savons depuis le

chapitre 1, qu'il est alors possible d'en déduire les Θ_{ij} et $\widetilde{\Lambda}_{ij}$, comme nous venons de le rappeler dans le cas du guide, pour déduire des opérateurs DtN de simple scattering ceux du scattering multiple. Il s'agit d'une approche intéressante, qui fut chronologiquement à l'origine des développements du chapitre 1. Malheureusement, étant basée sur la construction de [37], cette méthode présente les mêmes difficultés d'analyse numérique, à savoir que la construction des divers opérateurs DtN repose sur la résolution d'une équation intégrale non classique qui couple les différentes valeurs de la TFB (comprendre pour des ξ différents), et rend ainsi impossible une analyse telle que celle effectuée pour notre méthode mixte LS-DtN (nous reviendrons sur ce découplage des diverses valeurs de ξ dans le chapitre suivant où nous étudierons la discrétisation spatiale de la méthode). Nous avons développé et implémenté cette méthode, qui constitue le prolongement naturel des travaux de S. Fliss (voir [20]), mais nous ne nous étendrons pas davantage dessus ici, puisque hormis les développements théoriques du chapitre 1, nous ne pouvons pas pousser l'analyse beaucoup plus loin pour cette méthode.

Nous pouvons alors observer, comme nous l'avons déjà fait précédemment, que la méthode mixte

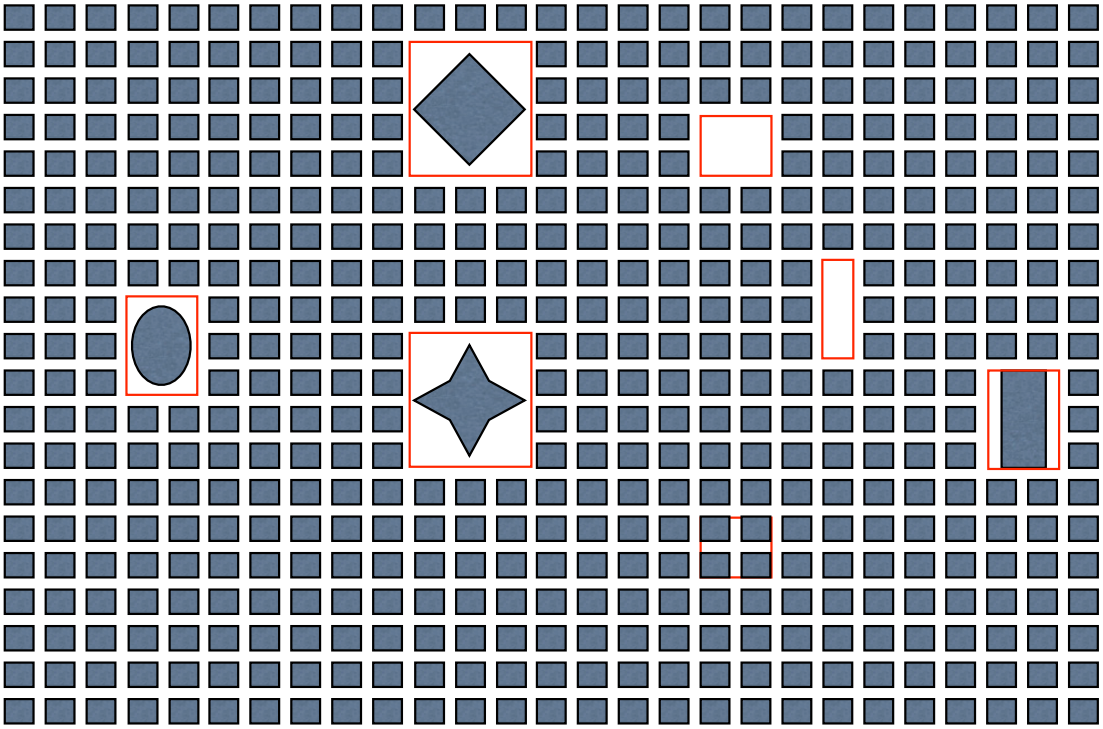


FIGURE 2.18 – Exemple de configuration avec des défauts bornés

LS-DtN consiste en quelque sorte à traiter la périodicité dans la direction des défauts linéiques par l'équation LS, tandis que nous traitons la périodicité dans l'autre direction par opérateurs DtN. La méthode complètement DtN consiste à traiter les deux directions par opérateurs DtN. Cette observation faite, il devient légitime de se demander si à l'opposé, il n'est pas possible de traiter les deux directions de périodicité via l'équation de Lippmann-Schwinger. C'est cette dernière approche que nous souhaitons exposer maintenant.

L'opérateur S dans l'espace de Floquet

Le point de départ est donc de nouveau l'équation de Lippmann-Schwinger :

$$(I - S_{0,\rho})u_{|\Omega_0} = S_0 f \tag{2.3}$$

où, rappelons-le :

$$\begin{array}{rcl} S : L^2(\Omega_0) & \longrightarrow & L^2(\mathbb{R}^2) \\ f & \longmapsto & Sf \end{array}$$

et Sf est l'unique solution dans $H^1(\mathbb{R}^2)$ du problème :

$$-\Delta Sf - (\omega^2 + i\varepsilon\omega)\rho_p Sf = f$$

et enfin :

$$\begin{array}{rcl} S_0 : L^2(\Omega_0) & \longrightarrow & L^2(\Omega_0) \\ f & \longmapsto & Sf_{|\Omega_0} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} S_{0,\rho} : L^2(\Omega_0) & \longrightarrow & L^2(\Omega_0) \\ f & \longmapsto & S\left[-(\omega^2 + i\varepsilon\omega)(\rho_p - \rho)f\right]_{|\Omega_0} \end{array}$$

Dans le cas des défauts bornés, ρ_p est cette fois périodique dans les deux directions x et y, nous pouvons donc appliquer la TFB dans les deux directions, sans compliquer l'équation différentielle obtenue (comme expliqué dans la remarque 2.3). Dans ce cas, la TFB dans les deux directions d'une fonction à support dans Ω_0 est donnée par :

$$\mathcal{F}_{x,y} f \equiv \sqrt{\frac{LL_x}{4\pi^2}} \sum_{j=1}^{N_s} \sum_{m=\widetilde{q}_-^j}^{\widetilde{q}_+^j - 1} \sum_{n=p_-^j}^{p_+^j - 1} f_{m,n} e^{-in\xi_y L} e^{-im\xi_x L_x}$$

où

$$f_{m,n} = f_{|]mL_x,(m+1)L_x[\times]nL,(n+1)L[}$$

Alors on montre, exactement comme on démontre le théorème 2.2, que la transformée de Floquet dans les deux directions de Sf est solution d'une équation simple :

Théorème 2.14. *La transformée de Floquet-Bloch dans les deux directions $\hat{S}(\xi_x, \xi_y)f$ de Sf est l'unique élément de $L^2([0, L_x] \times [0, L] \times [0, 2\pi/L_x] \times [0, 2\pi/L])$ solution dans $H^1_{\xi_x,\xi_y}([0, L_x] \times [0, L])$ pour presque tout $(\xi_x, \xi_y) \in [0, 2\pi/L_x] \times [0, 2\pi/L]$ de :*

$$\left|\begin{array}{l} -\Delta\hat{S}(\xi_x, \xi_y)f - (\omega^2 + i\varepsilon\omega)\rho_p \hat{S}(\xi_x, \xi_y)f = \sqrt{\dfrac{LL_x}{4\pi^2}} \displaystyle\sum_{j=1}^{N_s} \sum_{m=\widetilde{q}_-^j}^{\widetilde{q}_+^j - 1} \sum_{n=p_-^j}^{p_+^j - 1} f_{m,n} e^{-i(n\xi_y L + m\xi_x L_x)} \\ \partial_y \hat{S}(\xi_x, \xi_y)f_{|y=L} = e^{i\xi_y L} \partial_y \hat{S}(\xi_x, \xi_y)f_{|y=0} \\ \partial_x \hat{S}(\xi_x, \xi_y)f_{|x=L_x} = e^{i\xi_x L_x} \partial_x \hat{S}(\xi_x, \xi_y)f_{|x=0} \end{array}\right. \tag{2.46}$$

La double TFB conduit cette fois directement à un problème posé en domaine borné. Par conséquent, il est aisé d'obtenir les opérateurs S_0 et $S_{0,\rho}$ directement par transformée de Floquet-Bloch inverse de $\hat{S}(\xi_x, \xi_y)$, pour tout j et tout $(m, n) \in [\![\widetilde{q}_-^j, \widetilde{q}_+^j -]\!] \times [\![p_-^j, p_+^j - 1]\!]$ (c'est-à-dire sur Ω_0) :

$$(S_0 f)_{m,n} \equiv \sqrt{\frac{LL_x}{4\pi^2}} \int_0^{2\pi/L_x} \int_0^{2\pi/L} \hat{S}(\xi_x, \xi_y) f e^{i(\xi_x mL_x + \xi_y nL)} d\xi_x d\xi_y$$

$$(S_{0,\rho}f)_{m,n} \equiv -(\omega^2+i\varepsilon\omega)\sqrt{\frac{LL_x}{4\pi^2}}\int_0^{2\pi/L_x}\int_0^{2\pi/L}\hat{S}(\xi_x,\xi_y)(\rho_p-\rho)fe^{i(\xi_x mL_x+\xi_y nL)}d\xi_x d\xi_y$$

Cette méthode a au moins le mérite d'être relativement simple à exposer. Bien entendu, il va falloir approcher (par quadrature), la double intégrale apparaissant dans ces formules.

Semi-discrétisation en Floquet

Nous allons encore utiliser la règle des trapèzes pour approcher les intégrales intervenant dans les transformées de Floquet inverses qui permettent de reconstruire S_0 et $S_{0,\rho}$. Alors, les opérateurs approchés s'écrivent pour tout j et tout $(m,n) \in [\![\widetilde{q}_-^j, \widetilde{q}_+^j -]\!] \times [\![p_-^j, p_+^j - 1]\!]$:

$$(S_{0,\Delta k}f)_{m,n} \equiv \Delta k_x \Delta k_y \sqrt{\frac{LL_x}{4\pi^2}} \sum_{j_x=1}^{N_{kx}} \sum_{j_y=1}^{N_{ky}} \hat{S}(j_x\Delta k_x, j_y\Delta k_y) f e^{i(j_x\Delta k_x mL_x + j_y\Delta k_y nL)}$$

et $(S_{0,\rho,\Delta k}f)_{m,n} \equiv$

$$-(\omega^2+i\varepsilon\omega)\Delta k_x\Delta k_y\sqrt{\frac{LL_x}{4\pi^2}} \sum_{j_x=1}^{N_{kx}} \sum_{j_y=1}^{N_{ky}} \hat{S}(j_x\Delta k_x, j_y\Delta k_y)(\rho_p-\rho) f e^{i(j_x\Delta k_x mL_x + j_y\Delta k_y nL)}$$

Soit alors $u_{\Delta k}$ la solution de l'équation de Lippmann-Schwinger semi-discrète :

$$(I - S_{0,\rho,\Delta k})u_{\Delta k} = S_{0,\Delta k}f$$

Nous pouvons sans difficulté la prolonger par en $\widetilde{u}_{\Delta k}$ en posant, pour tout $(m,n) \in \mathbb{Z}^2$:

$$\widetilde{u}_{\Delta k,m,n} = \Delta k_x \Delta k_y \sqrt{\frac{LL_x}{4\pi^2}} \sum_{j_x=1}^{N_{kx}} \sum_{j_y=1}^{N_{ky}} \hat{S}(j_x\Delta k_x, j_y\Delta k_y) f e^{i(j_x\Delta k_x mL_x + j_y\Delta k_y nL)}$$

$$-(\omega^2+i\varepsilon\omega)\Delta k_x\Delta k_y\sqrt{\frac{LL_x}{4\pi^2}} \sum_{j_x=1}^{N_{kx}} \sum_{j_y=1}^{N_{ky}} \hat{S}(j_x\Delta k_x, j_y\Delta k_y)(\rho_p-\rho) u_{\Delta k} e^{i(j_x\Delta k_x mL_x + j_y\Delta k_y nL)}$$

Alors, en procédant exactement comme nous l'avons fait pour le cas de la méthode LS-DtN, on montre que :

Théorème 2.15. *Posons :*

$$\Omega_{N_{k_x},N_{k_y}} = \left[\left(\lfloor\frac{-N_{k_x}}{2}\rfloor+1\right)L_x, \left(\lfloor\frac{N_{k_x}}{2}\rfloor+1\right)L_x\right] \times \left[\left(\lfloor\frac{-N_{k_y}}{2}\rfloor+1\right)L, \left(\lfloor\frac{N_{k_y}}{2}\rfloor+1\right)L\right]$$

ainsi que :

$$\Gamma^+_{N_{k_y}} = \left\{(x,y) \in \overline{\Omega}_{N_{k_x},N_{k_y}} \;\middle|\; y = \left(\lfloor\frac{N_{k_y}}{2}\rfloor+1\right)L\right\}$$

$$\Gamma^-_{N_{k_y}} = \left\{(x,y) \in \overline{\Omega}_{N_{k_x},N_{k_y}} \;\middle|\; y = \left(\lfloor\frac{-N_{k_y}}{2}\rfloor+1\right)L\right\}$$

et

$$\Gamma^+_{N_{k_x}} = \left\{(x,y) \in \overline{\Omega}_{N_{k_x},N_{k_y}} \;\middle|\; y = \left(\lfloor\frac{N_{k_x}}{2}\rfloor+1\right)L_x\right\}$$

$$\Gamma^-_{N_{k_x}} = \left\{(x,y) \in \overline{\Omega}_{N_{k_x},N_{k_y}} \;\middle|\; y = \left(\lfloor\frac{-N_{k_x}}{2}\rfloor+1\right)L_x\right\}$$

La fonction $\widetilde{u}_{\Delta k}$ définie à partir de la règle des trapèzes à partir d'une solution $u_{\Delta k}$ associée à la même règle des trapèzes est solution de :

Trouver $\widetilde{u}_{\Delta k} \in H^1_{per}(\Omega_{N_{k_x},N_{k_y}})$ *telle que :*

$$\left|\begin{array}{ll} -\Delta\widetilde{u}_{\Delta k} - (\omega^2 + i\varepsilon\omega)\rho\widetilde{u}_{\Delta k} = f & \text{dans } \Omega_{N_{k_x},N_{k_y}} \\ \widetilde{u}_{\Delta k}|_{\Gamma^+_{N_{k_y}}} & = \widetilde{u}_{\Delta k}|_{\Gamma^-_{N_{k_y}}} \\ \partial_y\widetilde{u}_{\Delta k}|_{\Gamma^+_{N_{k_y}}} & = \partial_y\widetilde{u}_{\Delta k}|_{\Gamma^-_{N_{k_y}}} \\ \widetilde{u}_{\Delta k}|_{\Gamma^+_{N_{k_x}}} & = \widetilde{u}_{\Delta k}|_{\Gamma^-_{N_{k_x}}} \\ \partial_x\widetilde{u}_{\Delta k}|_{\Gamma^+_{N_{k_x}}} & = \partial_x\widetilde{u}_{\Delta k}|_{\Gamma^-_{N_{k_x}}} \end{array}\right. \tag{2.47}$$

Autrement dit, résoudre l'équation LS semi-discrétisée revient cette fois à résoudre l'équation de Helmholtz sur un domaine borné dans les deux directions. On montre alors que cette équation est bien posée, ce qui entraîne comme dans le cas de la méthode mixte le caractère bien posé de l'équation LS semi-discrète. On montre alors, toujours en procédant comme dans le cas de la méthode mixte, que l'on a l'estimation d'erreur suivante :

Théorème 2.16. *Soit* $u_{\Delta k}$ *la solution de* (2.25) *où les opérateurs sont approchés par quadrature sur la double TFB, et* u *la solution de* (2.3)*. Alors il existe* $C > 0$ *indépendante de* N_k *telle que, pour tout* $\tau < \alpha(\omega, \varepsilon, \rho_-)$ *:*

$$||u - u_{\Delta k}||_{H^1(\Omega_0)} \leq C(e^{-\tau\lfloor\frac{N_{k_x}}{2}\rfloor L_x} + e^{-\tau\lfloor\frac{N_{k_y}}{2}\rfloor L})||e^{\tau|\mathbf{x}|}u||_{H^1(\Delta,\mathbb{R}^2)} \tag{2.48}$$

La méthode converge donc également de façon exponentielle. Mais on constate que l'on a une erreur supplémentaire due à la quadrature sur la variable duale de x. Ceci n'est en fait pas surprenant. Dans le cas de la méthode mixte, le caractère non borné dans la direction x du problème est pris en compte de façon exacte au moyen des opérateurs DtN. Pour la méthode "complètement LS", cela n'est pris en compte que de façon approchée, via la quadrature sur la variable de Floquet correspondant à la direction x. Ceci était déjà visible sur la réinterprétation de l'équation LS semi-discrète : en effet, dans le cas de la méthode mixte, le problème obtenu était non borné dans la direction x, tandis qu'il est borné dans cette direction pour la méthode "complètement LS". Nous verrons dans le chapitre suivant que ce n'est pas le seul avantage de la méthode mixte.

Remarque 2.12. *Il est courant, notamment dans les travaux de physique, de trouver des études de cette dernière situation géométrique, où l'opérateur* S *est calculé à partir de la TFB de la fonction de Green du milieu périodique. Cette TFB correspond formellement à calculer* $S\delta_{x_0}$*, où* δ_{x_0} *est une distribution de Dirac en* x_0*, pour* x_0 *parcourant une cellule de périodicité. Bien entendu, la TFB inverse est approchée par quadrature, comme nous l'avons nous-même fait. Bien que l'on ne puisse pas rigoureusement appliquer nos résultats à ce cas particulier (*δ_{x_0} *n'étant bien évidemment pas* L^2*), la même analyse pourrait être conduite dans ce cas, et l'on pourrait réinterpréter* $S\delta_{x_0}$ *approché par quadrature comme la fonction de Green de l'équation de Helmholtz en domaine borné avec conditions périodiques (si on utilise la règle des trapèzes). Aussi, à condition d'avoir une estimation de décroissance sur la fonction de Green, les résultats présentés dans cette dernière partie du chapitre peuvent être utilisés pour analyser la convergence de ces méthodes.*

Nous sommes parvenus à développer une méthode de résolution de problèmes de Helmholtz en milieu périodique présentant un ou plusieurs défauts non bornés. Cette méthode aboutit à la réduction du problème à un certain nombre de problèmes posés en domaine borné. Comme ces problèmes sont en général trop complexes pour être résolus analytiquement, il est naturel de penser à les résoudre numériquement (c'est-à-dire discrétiser la variable d'espace). Cette discrétisation est relativement classique, mais effectuer son analyse numérique et obtenir des estimations d'erreur est en revanche une tâche non classique et relativement longue. C'est pourquoi nous avons choisi de l'étudier séparément, dans le chapitre suivant.

Chapitre 3

Milieu périodique perturbé : discrétisation spatiale

Résumé. *Dans ce chapitre nous expliquons comment procéder à la discrétisation spatiale des méthodes présentées au chapitre 2, et nous procédons à l'analyse numérique de cette discrétisation. Dans une première section, nous introduisons les espaces d'éléments finis qui vont nous permettre de discrétiser les problèmes non bornés de guide, discrétisation que nous étudions section 3.2. Puis, nous reproduisons la méthode DtN au niveau discret sur ces guides, initialement dans le cas d'un seul défaut, afin de ramener leur résolution à un problème posé en domaine borné. Ceci nous permet de construire (section 3.3) une approximation spatiale des équations de Lippmann-Schwinger semi-discrètes du chapitre 2, ainsi que d'établir des estimations d'erreur complètes (3.3.2). Essentiellement, on pourra considérer qu'il s'agit d'une reproduction des résultats des deux chapitres précédents au niveau discret, en gardant à l'esprit que la structure variationnelle et le manque de régularité inhérents à l'emploi des éléments finis viennent considérablement compliquer les démonstrations. Nous expliquons ensuite comment reproduire au niveau discret les résultats de décomposition du chapitre 1, ce qui nous permet de procéder à l'analyse numérique du cas de plusieurs défauts linéiques (3.5). Enfin, nous terminons ce chapitre par diverses considérations pratiques, et nous illustrons l'ensemble de ces trois chapitres par des résultats numériques (section 3.5).*

Dans ce chapitre, nous allons expliquer comment discrétiser en espace les problèmes de Helmholtz étudiés au chapitre précédent. Rappelons que nous sommes parvenus à réduire la résolution de problèmes posés sur tout $\mathbb{R}^2$ à la résolution d'une équation de Lippmann-Schwinger (semi-discrète) posée sur un domaine borné. Les opérateurs impliqués dans cette équation sont les résolvantes de problèmes de guide périodiques localement perturbés, auxquels on applique une transformée de Floquet inverse (approchée). Ces problèmes de guide sont eux-aussi réduits à la résolution de problèmes posés en domaine borné, au moyen d'opérateurs DtN. Enfin, ces opérateurs sont eux-mêmes déduits de la résolution d'autres problèmes posés en domaine borné, les problèmes de cellule. Tous ces problèmes posés en domaine borné, trop complexes pour être résolus analytiquement, appellent fort naturellement une résolution numérique. Dans notre contexte, un choix judicieux est d'opter pour une résolution par éléments finis.

Une telle résolution est totalement classique pour les problèmes de cellule. En revanche, la construction d'équivalents discrets des opérateurs DtN, et une fois cette construction effectuée, l'étude de l'erreur commise en résolvant l'équation de Lippmann-Schwinger discrète liée à ces opérateurs, sont des tâches bien moins classiques. Pour réaliser l'ensemble de ces études, nous avons choisi d'adopter une démarche assez longue et quelque peu détournée, qui consiste à reproduire l'intégralité de la méthode DtN sur les guides, mais au niveau discret. En particulier, cela va nous obliger à intro-

duire une discrétisation spatiale du guide entier, et donc d'un domaine non borné (ce qui n'est pas classique). Cette approche nous conduira à une définition naturelle des "bons" équivalents discrets des opérateurs DtN, qui nous permettra alors une réinterprétation simple à la fois des problèmes intérieurs discrets et de l'équation de Lippmann-Schwinger discrète. Ces réinterprétations serviront de base, comme dans le cas semi-discret étudié au chapitre précédent, à la démonstration des estimations d'erreur complètes, prenant en compte à la fois la discrétisation spatiale et la quadrature dans la variable de Floquet.

Nous allons commencer par définir et étudier les espaces d'éléments finis que nous allons utiliser sur le guide (y compris sur le guide entier). Dans un deuxième temps, nous appliquerons la méthode DtN à l'approximation des problèmes de guide au moyen de ces espaces, faisant réapparaître de façon naturelle opérateurs DtN, problèmes de cellule et problèmes intérieurs discrets. Puis, nous montrerons que l'équation de Lippmann-Schwinger discrète ainsi construite se réinterprète comme une approximation spatiale de l'équation à laquelle menait la réinterprétation de l'équation de Lippmann-Schwinger semi-discrète, et nous en déduirons une estimation d'erreur globale pour la méthode. Ensuite, nous expliquerons comment le cas de plusieurs défauts linéiques se traite au niveau discret, ainsi que le cas des défauts bornés par la méthode LS complète présentée à la fin du chapitre précédent. Enfin, nous exhiberons un certain nombre de résultats numériques pour illustrer tout ceci.

3.1 Espaces d'éléments finis sur le guide

Hormis en fin de chapitre, comme nous l'avons fait au chapitre précédent, nous considérons le cas d'un problème posé en milieu périodique présentant un seul défaut linéique, c'est-à-dire du type représenté sur la figure 3.1. À ce milieu 2D, notre méthode associe un problème de guide qui

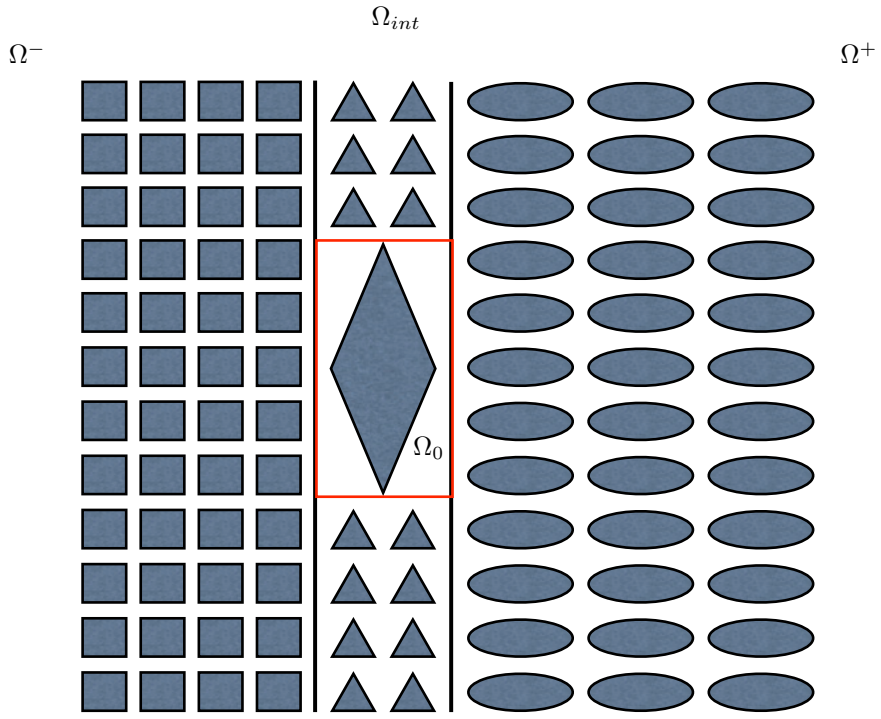


Figure 3.1 – Exemple de configuration

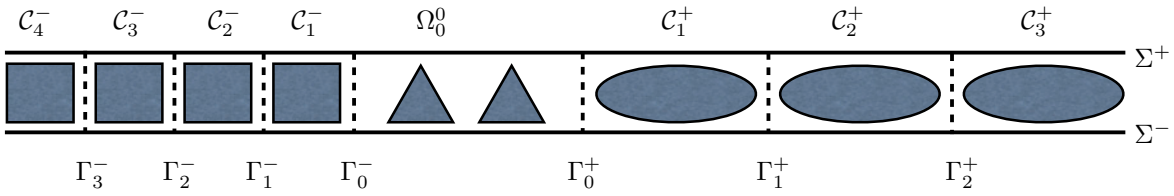


FIGURE 3.2 – Le guide correspondant au milieu de la figure 3.1

a la structure présentée sur la figure 3.2. C'est à la discrétisation de ce problème de guide (avec conditions aux limites quasi-périodiques, rappelons-le) que nous nous intéressons dans un premier temps. Comme annoncé, nous n'allons pas directement discrétiser les problèmes de cellule, mais nous allons discrétiser le problème posé sur l'ensemble du guide, lui appliquer la méthode DtN et en déduire les problèmes de cellule et les "bons" opérateurs DtN discrets. Mais pour pouvoir réaliser ceci, nous avons besoin de définir un espace d'éléments finis sur tout le guide, qui soit compatible avec la périodicité.

3.1.1 Espaces d'éléments finis sur le guide

Nous allons, comme dans le reste de ce mémoire, utiliser des éléments finis de Lagrange d'ordre quelconque, basés sur un maillage en quadrangles du domaine B_0 (en hexaèdres en 3D). Soulignons le fait que l'utilisation de ces éléments particuliers ne constitue pas une restriction nécessaire à l'application de nos méthodes, mais un choix commode qui correspond à ce que nous utiliserons lors des simulations numériques. Rappelons-nous pour commencer que le domaine B_0 est la réunion de trois ensembles :

$$\overline{B_0} = \overline{B_0^-} \cup \overline{\Omega_0^0} \cup \overline{B_0^+}$$

où $\Omega_0^0 = \Omega_0 \cap B_0$ est un ouvert borné, tandis que les deux autres morceaux $B_0^\pm$ sont des demi-guides périodiques. Mais on sait de plus que :

$$\overline{B_0^\pm} = \bigcup_{j=1}^{\infty} \overline{\mathcal{C}_j^\pm}$$

où :

$$\mathcal{C}_j^+ = \left\{(x,y) \in \Omega \;\middle|\; a_+ + (j-1)L_x^+ \leq x \leq a_+ + jL_x^+\right\}$$
$$\mathcal{C}_j^- = \left\{(x,y) \in \Omega \;\middle|\; a_- - jL_x^- \leq x \leq a_- - (j-1)L_x^-\right\}$$

qui seront respectivement isomorphes par translations à $\mathcal{C}^+ = \mathcal{C}_1^+$ et $\mathcal{C}^- = \mathcal{C}_1^-$. Nous souhaitons construire des maillages, qui serviront de support aux éléments finis de Lagrange, qui respectent cette structure périodique. On suppose par conséquent que l'on dispose de trois maillages, de paramètre h, et supposés par souci de simplicité quasi-uniformes (cf [21] ou [74]) :

. $\mathcal{T}_h^+$ qui est un maillage de la cellule de périodicité $\mathcal{C}^+$

. $\mathcal{T}_h^-$ qui est un maillage de la cellule de périodicité $\mathcal{C}^-$

. $\mathcal{T}_h^0$ qui est un maillage de Ω_0^0

Nous souhaitons bien entendu reconstruire un maillage de tout B_0 en concaténant ces maillages élémentaires. Mais nous souhaitons également que le maillage ainsi reconstruit par périodicité demeure conforme, aussi nous devons imposer des hypothèses de périodicité sur les frontières verticales. Si on

pose $\Upsilon_h^{0,\pm}$ et $\Upsilon_h^{1,\pm}$ l'ensemble des noeuds du maillage localisés respectivement sur $\Gamma_0^{\pm}$ et $\Gamma_1^{\pm}$, cette condition de périodicité (ou de conformité) est tout simplement

$$\Upsilon_h^{0,\pm} \pm L_x^{\pm} \boldsymbol{e_x} = \Upsilon_h^{1,\pm}$$

Autrement dit, les frontières verticales, en tant que nuage de points, sont images l'une de l'autre par la translation qui définit la périodicité des deux demi-guides. Puis, on doit imposer une condition similaire pour pouvoir parler de quasi-périodicité, à savoir que les frontières horizontales soient également images l'une de l'autre en tant que nuages de points, mais cette fois-ci au moyen de la translation qui définit la quasi-périodicité. En termes plus mathématiques, si on pose $\Upsilon_h^{\Sigma^{\pm},+}$ et $\Upsilon_h^{\Sigma^{\pm},-}$ l'ensemble des noeuds du maillage localisés respectivement sur $\partial\mathcal{C}_1^+ \cap \Sigma^{\pm}$ et $\partial\mathcal{C}_1^- \cap \Sigma^{\pm}$, cette nouvelle condition s'écrit :

$$\Upsilon_h^{\Sigma^-,\pm} + L\boldsymbol{e_y} = \Upsilon_h^{\Sigma^+,\pm}$$

Ces conditions sont illustrées sur la figure 3.3.

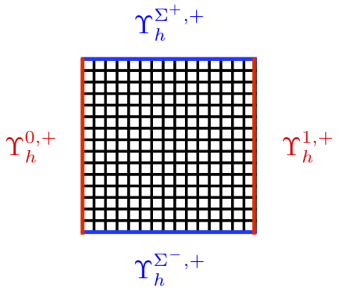


FIGURE 3.3 – Illustration des conditions de périodicité imposées au maillage

Puis, il nous reste à nous assurer que le maillage $\mathcal{T}_h^0$ permet lui aussi un raccord conforme, ainsi que l'expression de conditions de quasi-périodicité. Sans surprise, nous imposerons donc, si $\Upsilon_h^{0,0,+}$ et $\Upsilon_h^{0,0,-}$ sont les ensembles de noeuds de $\mathcal{T}_h^0$ localisés respectivement sur Γ_0^+ et Γ_0^- :

$$\Upsilon_h^{0,0,+} = \Upsilon_h^{0,+} \quad \text{et} \quad \Upsilon_h^{0,0,-} = \Upsilon_h^{0,-}$$

Autrement dit, les noeuds sur la frontière Γ_0^+ de $\mathcal{T}_h^0$ sont les mêmes que ceux de $\mathcal{T}_h^+$, et on a la même propriété pour Γ_0^- et $\mathcal{T}_h^-$. Puis, si $\Upsilon_h^{\Sigma^{\pm},0}$ désigne l'ensemble des noeuds de $\mathcal{T}_h^0$ localisés sur $\partial\Omega_0 \cap \Sigma^{\pm}$, la condition permettant l'usage de conditions de quasi périodicité est donnée par :

$$\Upsilon_h^{\Sigma^-,0} + L\boldsymbol{e_y} = \Upsilon_h^{\Sigma^+,0}$$

On définit maintenant les maillages sur chaque demi-guide B_0^+ et B_0^- par :

. $\mathcal{T}_{W,h}^+ = \left\{T_j = T + jL_x^+ e_x \;\middle|\; T \in \mathcal{T}_h^+ \quad j \in \mathbb{N}\right\}$

. $\mathcal{T}_{W,h}^- = \left\{T_j = T - jL_x^- e_x \;\middle|\; T \in \mathcal{T}_h^- \quad j \in \mathbb{N}\right\}$

Les conditions de périodicité que nous avons imposées nous assurent que ces deux maillages sont conformes et périodiques. Enfin, le maillage global sur le guide B_0 est défini par :

$$\mathcal{T}_h = \mathcal{T}_{W,h}^+ \cup \mathcal{T}_h^0 \cup \mathcal{T}_{W,h}^+$$

et il sera lui-aussi conforme par construction, grâce aux conditions que nous avons imposées sur $\mathcal{T}_h^0$.

Bien que nous nous soyons restreints aux maillages en quadrangles (ou en hexaèdres en 3D), rappelons encore une fois qu'en principe nous pourrions utiliser n'importe quel maillage conforme, pourvu que les conditions de périodicité nodales que nous avons imposées soient satisfaites. On note Q_r l'espace des polynômes de degré r en chacune de leurs variables. Sur chaque maillage élémentaire, on définit l'espace des éléments finis de Lagrange d'ordre r par :

. $V_h^r(\Omega_0^0) = \left\{v_h \in C^0(\Omega_0^0) \ \mid \ v_{h|_T} \in Q_r(T), \ \ T \in \mathcal{T}_h^0\right\}$

. $V_h^r(\mathcal{C}^+) = \left\{v_h \in C^0(\mathcal{C}^+) \ \mid \ v_{h|_T} \in Q_r(T), \ \ T \in \mathcal{T}_h^+\right\}$

. $V_h^r(\mathcal{C}^-) = \left\{v_h \in C^0(\mathcal{C}^-) \ \mid \ v_{h|_T} \in Q_r(T), \ \ T \in \mathcal{T}_h^-\right\}$

De ces espaces, on déduit l'espace infini V_h^r des éléments finis de Lagrange d'ordre r sur le guide Ω :

$$V_h^r = \Big\{v_h \in H^1(B_0) \cap C^0(B_0) \ \mid \ v_{h|_{\Omega_0}} \in V_h^r(\Omega_0^0),$$

$$v_{h|_{\mathcal{C}_j^+}} \in V_h^r(\mathcal{C}^+), \ \ v_{h|_{\mathcal{C}_j^+}} \in V_h^r(\mathcal{C}^-), \ \ \forall j \in \mathbb{N}\Big\}$$

Il est clair que c'est un espace d'éléments finis basé sur $\mathcal{T}_h$ par construction, et que :

$$V_h^r = \left\{v_h \in H^1(B_0) \cap C^0(B_0) \ \mid \ v_{h|_T} \in Q_r(T), \ \ T \in \mathcal{T}_h\right\}$$

Cependant, cet espace étant de dimension infinie, il n'est pas évident a priori qu'il s'agisse bien d'un espace de Hilbert (et donc qu'il soit un bon candidat pour en faire la base d'une méthode d'éléments finis). C'est ce que nous vérifions maintenant :

Théorème 3.1. *L'espace V_h^r est un espace de Hilbert pour la norme H^1.*

Démonstration. Clairement, $V_h^r \subset H^1(B_0)$. Il nous suffit donc de montrer que c'est un espace fermé pour la norme H^1. Soit $(v_h^n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de V_h^r convergente pour la norme H^1, et $v \in H^1(B_0)$ sa limite. Pour tout $T \in \mathcal{T}_h$, nous avons :

$$||v_{h|_T}^n - v_{|_T}||_{H^1(T)} \leq ||v_{h|_T}^n - v_{|_T}||_{H^1(B_0)}$$

Donc $(v_{h|_T}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $v_{|_T}$ dans $H^1(T)$. De plus, pour tout n, $v_{h|_T}^n \in Q_r(T)$, qui est de dimension finie, et par conséquent fermé. Alors $v_{|_T} \in Q_r(T)$. Il ne reste donc plus qu'à montrer la continuité de v. Remarquons que pour toute union finie $\mathcal{O}$ d'éléments $T \in \mathcal{T}_h$, nous avons encore :

$$||v_{h|_\mathcal{O}}^n - v_{|_\mathcal{O}}||_{H^1(\mathcal{O})} \leq ||v_h^n - v||_{H^1(B_0)}$$

donc $(v_{h|_\mathcal{O}}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $v_{|_\mathcal{O}}$ dans $H^1(\mathcal{O})$, ce qui fait de $(v_{h|_\mathcal{O}}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy pour la norme H^1, et qui appartient de plus à :

$$\left\{w_h \in C^0(\overline{\mathcal{O}}) \ \mid \ w_{h|_T} \in Q_r(T) \ \ \forall T \in \mathcal{T}_h \ \ T \subset \mathcal{O}\right\}$$

qui est un espace de dimension finie. Par équivalence des normes sur les espaces de dimension finie, nous en déduisons que c'est également une suite de Cauchy pour la norme C^0, elle converge donc uniformément vers une limite continue sur $\overline{\mathcal{O}}$. Par unicité de la limite, ceci implique que v est continue sur $\overline{\mathcal{O}}$, et par suite sur tout sous-ensemble de B_0, et donc au final sur tout B_0.

□

Nous définissons maintenant l'espace d'éléments finis quasi-périodiques que nous allons utiliser. On pose :

$$V_h^r(\xi) = H_\xi^1(B_0) \cap V_h^r = \left\{v_h \in H_\xi^1(B_0) \cap C^0(B_0) \ \mid \ v_{h|_T} \in Q_r(T), \ \ T \in \mathcal{T}_h\right\}$$

En tant qu'intersection de deux sous-espaces fermés de H^1, c'est également un sous-espace fermé et donc un espace de Hilbert pour la norme H^1. Notons bien ce que les deux espaces que nous venons de définir ont de paradoxal : bien que nous les ayons appelés espaces d'éléments finis, ils sont, comme

nous l'avons mentionné plus haut, de dimension infinie. C'est à dire que ce sont des espaces infinis d'éléments finis. Cette dénomination n'est pas forcément très heureuse, mais elle a le mérite de bien faire comprendre les spécificités de ces espaces. Un nom probablement plus heureux, serait de les appeler simplement espaces d'approximation interne (ou de Galerkin), mais il nous semble que leur lien fort avec les espaces d'éléments finis usuels (dont ils ne sont qu'une généralisation), est moins évident en les nommant ainsi.

3.1.2 Espaces d'èléments finis induits sur les sous-domaines du guide

À partir de cet espace quasi-périodique, on construit par restriction les espaces suivants :

. $V_h^r(\xi)(B_0^+) = \left\{ w_h \in H^1(B_0^+) \ \mid \ \exists v_h \in V_h^r(\xi) \text{ tel que } w_h = v_{h|_{B_0^+}} \right\}$

. $V_h^r(\xi)(B_0^-) = \left\{ w_h \in H^1(B_0^-) \ \mid \ \exists v_h \in V_h^r(\xi) \text{ tel que } w_h = v_{h|_{B_0^-}} \right\}$

. $V_h^r(\xi)(\Omega_0^0) = \left\{ w_h \in H^1(\Omega_0^0) \ \mid \ \exists v_h \in V_h^r(\xi) \text{ tel que } w_h = v_{h|_{\Omega_0 \cap B_0}} \right\}$

. $V_h^r(\xi)(\mathcal{C}^+) = \left\{ w_h \in H^1(\mathcal{C}^+) \ \mid \ \exists v_h \in V_h^r(\xi) \text{ tel que } w_h = v_{h|_{\mathcal{C}_1^+}} \right\}$

. $V_h^r(\xi)(\mathcal{C}^-) = \left\{ w_h \in H^1(\mathcal{C}^-) \ \mid \ \exists v_h \in V_h^r(\xi) \text{ tel que } w_h = v_{h|_{\mathcal{C}_1^+}} \right\}$

Afin de pouvoir parler plus tard de relèvements n'importe où dans le guide, on note plus généralement $B_{0,j}^{\pm,g}$ et $B_{0,j}^{\pm,d}$ les ouverts situés respectivement à gauche et à droite de $\Gamma_j^{\pm}$, et on pose :

. $V_h^r(\xi)(B_{0,j}^{\pm,g}) = \left\{ w_h \in H^1(B_{0,j}^{\pm,g}) \ \mid \ \exists v_h \in V_h^r(\xi) \text{ tel que } w_h = v_{h|_{B_{0,j}^{\pm,g}}} \right\}$

. $V_h^r(\xi)(B_{0,j}^{\pm,d}) = \left\{ w_h \in H^1(B_{0,j}^{\pm,d}) \ \mid \ \exists v_h \in V_h^r(\xi) \text{ tel que } w_h = v_{h|_{B_{0,j}^{\pm,d}}} \right\}$

Pour ces espaces, on montre aisément que :

Théorème 3.2. *Les espaces $V_h^r(\xi)(B_0^+)$, $V_h^r(\xi)(B_0^-)$, $V_h^r(\xi)(\Omega_0 \cap B_0)$, $V_h^r(\xi)(\mathcal{C}^+)$ et $V_h^r(\xi)(\mathcal{C}^-)$, ainsi que $V_h^r(\xi)(B_{0,j}^{\pm,g})$ et $V_h^r(\xi)(B_{0,j}^{\pm,d})$ pour tout j sont des espaces de Hilbert pour la norme H^1. De plus, $V_h^r(\xi)(\Omega_0 \cap B_0)$, $V_h^r(\xi)(\mathcal{C}^+)$ et $V_h^r(\xi)(\mathcal{C}^-)$ sont de dimension finie.*

Démonstration. Tous ces espaces sont image de $V_h^r(\xi)$ par un opérateur de restriction, qui est évidemment continu en norme H^1. Par conséquent, ce sont des sous-espaces fermés de H^1, et donc des espaces de Hilbert. Ne reste plus qu'à montrer que les trois derniers espaces sont de dimension finie. Nous détaillons la preuve seulement pour $V_h^r(\xi)(\Omega_0^0)$, la preuve étant identique pour les deux autres espaces. Pour tout $w_h \in V_h^r(\xi)(\Omega_0^0)$, par définition il existe $\exists v_h \in V_h^r(\xi)$ tel que $w_h = v_{h|\Omega_0^0}$. De plus, il existe $\mathcal{O}$ union finie d'éléments de $\mathcal{T}_h$ telle que $\overline{\mathcal{O}} = \overline{\Omega_0^0}$. Mais nous avons vu dans la preuve du théorème 3.1 que

$$v_{h|_{\Omega_0^0}} \in \left\{ w_h \in C^0(\overline{\mathcal{O}}) \ \mid \ w_{h|_T} \in Q_r(T) \ \ \forall T \in \mathcal{T}_h \ \ T \subset \mathcal{O} \right\}$$

qui est un espace de dimension finie. Alors $V_h^r(\xi)(\Omega_0^0)$ est inclus dans un espace de dimension finie, il est donc également de dimension finie. □

Bien entendu, les problèmes que nous résolverons au final (après application de la méthode DtN) en pratique seront posés sur les trois espaces de dimension finie (i.e sur le domaine intérieur Ω_0^0 ou les cellules de périodicité). Mais nous allons voir dans la suite que l'espace $V_h^r(\xi)$ sera essentiel du point de vue théorique pour obtenir nos estimations de convergence, ainsi que le caractère bien posé des

divers problèmes discrets. Il ne nous reste plus que deux espaces supplémentaires à définir, afin de pouvoir parler de traces. Soient $X_h^{r,\pm}$ les espaces suivants :

$$X_h^{r,\pm}(\xi) = \left\{ \varphi_h \in H^{1/2}(\Gamma) \ | \ \exists v_h \in V_h^r \quad \text{tel que } v_{h|_{\Gamma_0^\pm}} = \varphi_h \right\}$$

Grâce à nos hypothèses de conformité sur les maillages, nous avons le résultat suivant :

Théorème 3.3. *$X_h^{r,\pm}$ sont deux espaces de dimension finie et nous avons :*

$$X_h^{r,\pm}(\xi) = \left\{ \varphi_h \in H^{1/2}(\Gamma) \ | \ \exists v_h \in V_h^r(\xi)(B_0^\pm) \quad \textit{tel que } v_{h|_{\Gamma_0^\pm}} = \varphi_h \right\}$$

$$X_h^{r,\pm}(\xi) = \left\{ \varphi_h \in H^{1/2}(\Gamma) \ | \ \exists v_h \in V_h^r(\xi)(\mathcal{C}^\pm) \quad \textit{tel que } v_{h|_{\Gamma_0^\pm}} = \varphi_h \right\}$$

$$X_h^{r,\pm}(\xi) = \left\{ \varphi_h \in H^{1/2}(\Gamma) \ | \ \exists v_h \in V_h^r(\xi)(\Omega_0^0) \quad \textit{tel que } v_{h|_{\Gamma_0^\pm}} = \varphi_h \right\}$$

$$X_h^{r,\pm}(\xi) = \left\{ \varphi_h \in H^{1/2}(\Gamma) \ | \ \exists v_h \in V_h^r(\xi)(\mathcal{C}^\pm) \quad \textit{tel que } v_{h|_{\Gamma_1^\pm}} = \varphi_h \right\}$$

et pour tout $j \in \mathbb{N}$

$$X_h^{r,\pm}(\xi) = \left\{ \varphi_h \in H^{1/2}(\Gamma) \ | \ \exists v_h \in V_h^r(\xi)(B_0^\pm) \quad \textit{tel que } v_{h|_{\Gamma_j^\pm}} = \varphi_h \right\}$$

Démonstration. Les deux premières identités concernant les traces sur $\Gamma_0^\pm$ sont des conséquences directes de la définition de $X_h^{r,\pm}(\xi)$, des espaces $V_h^r(\xi)(B_0^+)$, $V_h^r(\xi)(B_0^-)$, $V_h^r(\xi)(\Omega_0^0)$, $V_h^r(\xi)(\mathcal{C}^+)$ et $V_h^r(\xi)(\mathcal{C}^-)$. Le fait que $X_h^{r,\pm}(\xi)$ soit de dimension finie suit directement de cette identification à l'espace des traces d'un espace de dimension finie. Enfin, la dernière propriété d'identification aux traces sur n'importe quelle frontière verticale $\Gamma_j^\pm$ provient de l'hypothèse de conformité, les degrés de liberté étant les mêmes (à une translation près) sur chaque $\Gamma_j^\pm$. □

Remarque 3.1. *Le lecteur aura certainement remarqué que nous avons soigneusement éludé la question du choix de la base éléments finis à utiliser en pratique. Du point de vue théorique, nous allons voir que nous n'avons à aucun moment besoin de préciser celle-ci, et que c'est seulement lorsque l'on cherche à implémenter la méthode qu'il est nécessaire de choisir une base particulière. Il faut alors choisir une base qui respecte la quasi-périodicité, ce qui n'est pas un cas classique. Cependant, il suffit d'utiliser la base usuelle pour les éléments finis de Lagrange, d'éliminer les fonctions de base correspondant à Σ^+ par exemple, puis de modifier la fonction de base correspondante (par périodicité) sur Σ^- en ajoutant la fonction que l'on vient d'enlever, multipliée par le facteur $e^{i\xi L}$. De plus, plutôt que d'effectuer réellement cette élimination, il est possible d'avoir recours à des techniques de pseudo-élimination similaires à celles utilisées dans le cas des conditions de Dirichlet (et il s'agit de l'approche que nous avons utilisée en pratique).*

3.1.3 Propriétés des espaces $V_h^r(\xi)$

Nous allons avoir besoin d'un certain nombre de propriétés des espaces que nous venons de définir. L'une des plus importantes est le résulat suivant, qui établit l'équivalence des normes H^1 et L^2 :

Lemme 3.1. *Soit un ouvert $\mathcal{O} \in \left\{ B_0, B_0^+, B_0^-, \Omega_0^0, \mathcal{C}^+, \mathcal{C}^-, B_{0,j}^{\pm,g}, B_{0,j}^{\pm,d} \right\}$. Il existe une constante $C(h) > 0$ dépendante de h (i.e. du maillage) telle que pour tout $u_h \in V_h^r(\mathcal{O})$:*

$$||u_h||_{H^1(\Omega)} \leq C(h)||u_h||_{L^2(\Omega)}$$

Démonstration. Commençons par remarquer que dans le cas où $\mathcal{O} \in \left\{\Omega_0^0, \mathcal{C}^+, \mathcal{C}^-\right\}$, le résultat est évident puisque $V_h^r(\xi)(\mathcal{O})$ est alors un espace de dimension finie. Le résultat découle donc tout simplement de l'équivalence des normes sur les espaces de dimension finie.

Nous allons maintenant faire la démonstration pour le cas $\mathcal{O} = B_0^{\pm}$. On écrit :

$$||u_h||^2_{H^1(B_0^{\pm})} = \sum_{j=1}^{+\infty} ||u_h||^2_{H^1(\mathcal{C}_j^{\pm})}$$

Mais $u_h|_{\mathcal{C}_j^{\pm}} \in V_h^r(\xi)(\mathcal{C}^{\pm})$ par construction. Alors il existe $C > 0$, indépendante de j, telle que :

$$||u_h||^2_{H^1(\mathcal{C}_j^{\pm})} \leq C||u_h||^2_{L^2(\mathcal{C}_j^{\pm})}$$

en utilisant le résultat précédent (qui correspond à la dimension finie). On en déduit alors que :

$$||u_h||^2_{H^1(B_0^{\pm})} = C\sum_{j=1}^{+\infty} ||u_h||^2_{L^2(\mathcal{C}_j^{\pm})} = C||u_h||^2_{L^2(B_0^{\pm})}$$

et le résultat est démontré pour $B_0^{\pm}$. Enfin, comme :

$$||u_h||^2_{H^1(B_0)} = ||u_h||^2_{H^1(B_0^-)} + ||u_h||^2_{H^1(\Omega_0^0)} + ||u_h||^2_{H^1(B_0^+)}$$

le résultat pour B_0 tout entier s'en déduit aisément. Les cas $B_{0,j}^{\pm,g}$ et $B_{0,j}^{\pm,d}$ se démontrent de façon similaire. □

Cette propriété remarquable d'équivalence des normes est une conséquence directe de la périodicité des maillages que nous avons construits. Une de ses implications est que nous pouvons définir des opérateurs de relèvements continus à partir de chaque $\Gamma_j^{\pm}$, qui nous serons indispensables pour pouvoir construire les équivalents discrets des opérateurs DtN :

Lemme 3.2. *On pose :*

$$V_{h,0}^r(\xi)(B_{0,j}^{\pm,g}) = \left\{v_h \in V_h^r(\xi)(B_{0,j}^{\pm,g}) \ \mid \ v_h|_{\Gamma_j^{\pm}} = 0\right\}$$

$$V_{h,0}^r(\xi)(B_{0,j}^{\pm,d}) = \left\{v_h \in V_h^r(\xi)(B_{0,j}^{\pm,d}) \ \mid \ v_h|_{\Gamma_j^{\pm}} = 0\right\}$$

Alors pour tout $u_h \in V_h^r(\xi)$, il existe deux fonctions u_h^g et u_h^d appartenant respectivement à $V_{h,0}^r(\xi)(B_{0,j}^{\pm,g})$ et $V_{h,0}^r(\xi)(B_{0,j}^{\pm,d})$ telles que :

$$(u_h^g, v_h)_{L^2(B_{0,j}^{\pm,g})} = \left(u_h|_{B_{0,j}^{\pm,g}}, v_h\right)_{L^2(B_{0,j}^{\pm,g})} \quad \forall\, v_h \in V_{h,0}^r(\xi)(B_{0,j}^{\pm,g})$$

et

$$\left(u_h^d, v_h\right)_{L^2(B_{0,j}^{\pm,d})} = \left(u_h|_{B_{0,j}^{\pm,d}}, v_h\right)_{L^2(B_{0,j}^{\pm,d})} \quad \forall\, v_h \in V_{h,0}^r(\xi)(B_{0,j}^{\pm,d})$$

Puis, on définit :

$$\eta_h^{j,\pm}(u_h) = \left| \begin{array}{ll} u_h - u_h^g & \text{dans } B_{0,j}^{\pm,g} \\ u_h - u_h^d & \text{dans } B_{0,j}^{\pm,d} \end{array} \right.$$

alors les espaces

$$\left\{\eta_h^{j,\pm}(u_h) \ \mid \ u_h \in V_h^r(\xi)\right\}$$

et

$$\left\{\eta_h^{j,\pm}(u_h) \ \mid \ u_h \in V_h^r(\xi)\right\}$$

sont isomorphes à $X_h^r(\xi)$*, et* $\eta_h^{j,\pm}(u_h)$ *est un relèvement de* $u_{h|_{\Gamma_j^\pm}}$ *qui ne dépend que de* $u_{h|_{\Gamma_j^\pm}}$*, et qu'on notera donc* $\eta_h^{j,\pm}(u_{h|_{\Gamma_j^\pm}})$*, définissant ainsi une application linéaire continue.*

Enfin, on a pour $j \neq 0$ *:*

$$supp\ \eta_h^{j,\pm}(u_{h|_{\Gamma_j^\pm}}) \subset (\overline{B_{0,j}^{\pm,g}} \setminus \overline{B_{0,j+1}^{\pm,g}}) \cup (\overline{B_{0,j}^{\pm,d}} \setminus \overline{B_{0,j+1}^{\pm,d}})$$

et

$$supp\ \eta_h^{0,\pm}(u_{h|_{\Gamma_0^\pm}}) \subset \overline{\Omega_0^0} \setminus \overline{\mathcal{C}_1^\mp} \cup \overline{\mathcal{C}_1^\pm} \setminus \overline{\mathcal{C}_2^\pm}$$

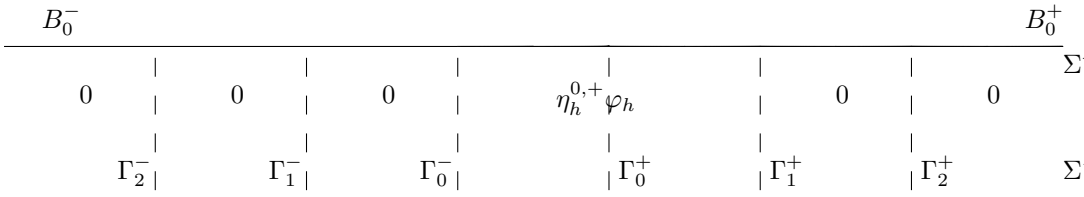


FIGURE 3.4 – Illustration des propriétés des opérateurs de relèvement, pour $\eta_h^{0,+}$

Démonstration. En vertu du lemme 3.1, les formes bilinéaires :

$$\left(u_h^i, v_h\right)_{L^2(B_{0,j}^{\pm,g})} \quad \text{et} \quad \left(u_h^i, v_h\right)_{L^2(B_{0,j}^{\pm,d})}$$

sont coercives sur $V_h^r(\xi)(B_{0,j}^{\pm,g})$ et $V_h^r(\xi)(B_{0,j}^{\pm,d})$. Par conséquent, les problèmes définissant u_h^g et u_h^d sont bien posés en vertu du théorème de Lax-Milgram. On peut donc bien définir $\eta_h^{j,\pm}(u_h)$, et on a :

$$\left| \begin{array}{ll} \left(\eta_h^{j,\pm}(u_h)|_{B_{0,j}^{\pm,g}}, v_h\right)_{L^2(B_{0,j}^{\pm,g})} = 0 & \forall\ v_h \in V_{h,0}^r(\xi)(B_{0,j}^{\pm,g}) \\ \eta_h^{j,\pm}(u_h)|_{B_{0,j}^{\pm,g}} = u_h|_{\Gamma_j^\pm} & \text{sur } \Gamma_j^\pm \end{array} \right.$$

et

$$\left| \begin{array}{ll} \left(\eta_h^{j,\pm}(u_h)|_{B_{0,j}^{\pm,d}}, v_h\right)_{L^2(B_{0,j}^{\pm,d})} = 0 & \forall\ v_h \in V_{h,0}^r(\xi)(B_{0,j}^{\pm,d}) \\ \eta_h^{j,\pm}(u_h)|_{B_{0,j}^{\pm,d}} = u_h|_{\Gamma_j^\pm} & \text{sur } \Gamma_j^\pm \end{array} \right.$$

qui sont encore pour les mêmes raisons deux problèmes bien posés en vertu du lemme 3.1 et du théorème de Lax-Milgram, dépendant seulement de la donnée au bord $u_h|_{\Gamma_j^\pm}$. Alors ceci implique directement le fait que $\eta_h^{j,\pm}(u_h)$ ne dépend que de la donnée au bord (et de façon continue) ainsi que l'isomorphisme annoncé. Alors, on voit que pour tout $v_h \in V_h^r(\xi)(B_{0,j}^{\pm,g})$, tel que $supp\ v_h \in \overline{B_{0,j+1}^{\pm,g}}$:

$$\left(\eta_h^{j,\pm}(u_h)|_{B_{0,j+1}^{\pm,g}}, v_h\right)_{L^2(B_{0,j+1}^{\pm,g})} = 0$$

Comme cet ensemble de fonctions parcourt clairement tout $V_h^r(\xi)(B_{0,j+1}^{\pm,g})$, on a bien $\eta_h^{j,\pm}(u_h)|_{B_{0,j+1}^{\pm,g}} = 0$. On fait de même pour $\eta_h^{j,\pm}(u_h)|_{B_{0,j+1}^{\pm,d}}$, et on obtient la propriété annoncée pour le support pour $j \neq 0$. Le cas $j = 0$ se traite de manière identique, il faut juste prendre garde au changement de notation. □

Nous pouvons donc désormais relever une trace dans $X_h^{r,\pm}(\xi)$ à partir de n'importe quelle frontière verticale $\Gamma_j^\pm$. Ce résultat, sous ses dehors complexes, explique en réalité que l'on peut décomposer toute fonction de $V_h^r(\xi)$ en une fonction à trace nulle sur un certain $\Gamma_j^\pm$ et une fonction à support très localisé autour de $\Gamma_j^\pm$ et qui coïncide en trace avec la fonction initiale (et constitue ainsi un relèvement de cette trace). Étant donné que les problèmes extérieurs sont toujours définis en utilisant des fonctions tests à trace nulle sur une frontière verticale donnée, on comprend aisément qu'un tel résultat va s'avérer extrêmement pratique pour relier le problème initial posé sur tout B_0 (c'est-à-dire utilisant des fonctions tests parcourant tout $V_h^r(\xi)$) aux problèmes extérieurs.

Remarque 3.2. *En pratique, construire ces opérateurs η_h est extrêmement simple, et ne nécessite pas (et c'est heureux) de calculer les projections u_h^g et u_h^d. En effet, étant donné un élément de $X_h^{r,\pm}(\xi)$ localisé sur une interface $\Gamma_j^\pm$, il suffit de prendre les fonctions de base liées aux degrés de liberté de cette frontière, et de les identifier à celles de $X_h^{r,\pm}(\xi)$ (qui sont liées aux mêmes degrés de liberté), si on utilise les fonctions de base usuelles.*

Nous avons également besoin de pouvoir mesurer la qualité avec laquelle nous pouvons approcher un élément de $H^1_\xi(B_0)$ par une fonction de $V_h^r(\xi)$. Fort heureusement, nous pouvons déduire des résultats standard sur les espaces d'éléments finis, que :

Lemme 3.3. *Soit un ouvert $\mathcal{O} \in \left\{B_0, B_0^+, B_0^-, \Omega_0^0, \mathcal{C}^+, \mathcal{C}^-, B_{0,j}^{\pm,g}, B_{0,j}^{\pm,d}\right\}$. Pour tout $v \in H^2_\xi(\mathcal{O})$, il existe C indépendante de h telle que :*

$$\inf_{v_h \in V_h^r(\xi)(\mathcal{O})} ||v - v_h||_{H^1(\mathcal{O})} \leq Ch|v|_{H^2(\mathcal{O})} \tag{3.1}$$

Démonstration. En dimension 2, nous savons que $H^2(\mathcal{O})$ s'injecte dans $C^0(\mathcal{O})$. Nous pouvons donc définir l'interpolant de Lagrange $I_h v$ de tout $v \in H^2_\xi(\mathcal{O})$, tel que $I_h v|_T \in Q_r(T)$ pour tout T appartenant au maillage de $\mathcal{O}$. Alors, comme $I_h v$ coïncide avec v en chaque noeud, il est clair que $I_h v$ est un élément de $V_h^r(\xi)(\mathcal{O})$. Puis :

$$\inf_{v_h \in V_h^r(\xi)(\mathcal{O})} ||v - v_h||_{H^1(\mathcal{O})} \leq ||v - I_h v||_{H^1(\mathcal{O})}$$

Les résultats usuels d'approximation sur $Q_r(T)$ nous apprennent que sur chaque T, il existe une constante $C > 0$ indépendante de T (comme le maillage est quasi-uniforme et périodique) telle que :

$$||v - I_h v||_{H^1(\mathcal{T})} \leq Ch|v|_{H^2(T)}$$

En sommant sur T, on obtient le résulat souhaité. □

Nous disposons maintenant de tous les résultats nécessaires pour pouvoir procéder à l'étude de la discrétisation, au moyen de ces espaces, des problèmes de guide quasi-périodiques qui interviennent dans la méthode mixte LS-DtN.

3.2 Méthode DtN pour les problèmes de guide discrets

Nous allons expliquer dans cette section comment construire des équivalents discrets des opérateurs intervenant dans l'équation de Lippmann-Schwinger, qui correspondront à une approximation par éléments finis.

3.2.1 Problème de guide discret et opérateurs DtN

Rappelons que par définition, pour tout $f \in L^2(\Omega_0)$, $\hat{S}(\xi)$ est défini par :

$$\left| \begin{array}{l} -\Delta \hat{S}(\xi) f - (\omega^2 + i\varepsilon\omega)\rho_p \hat{S}(\xi) f \equiv \sqrt{\dfrac{L}{2\pi}} \displaystyle\sum_{n=-M^-}^{M^+-1} f_{|_{B^n}} e^{-in\xi L} \quad \text{dans } B_0 \\ \partial_y \hat{S}(\xi) f_{|_{y=L}} = e^{i\xi L} \partial_y \hat{S}(\xi) f_{|_{y=0}} \end{array} \right. \tag{2.6}$$

Ce problème se met aisément sous forme variationnelle en appliquant la formule de Green (les termes de bord disparaissant par quasi-périodicité), i.e. pour tout $v \in H^1_\xi(B_0)$:

$$\left(\nabla \hat{S}(\xi) f, \nabla v\right)_{L^2(B_0)} - (\omega^2 + i\varepsilon\omega)\left(\rho_p \hat{S}(\xi) f, v\right)_{L^2(B_0)} = \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \sum_{n=-M^-}^{M^+-1} \left(f_{|_{B^n}}, v\right)_{L^2(B_0)} e^{-in\xi L}$$

Ceci se réécrit, en reprenant la notation du chapitre 1 :

$$a_{B_0}(\hat{S}(\xi) f, v) = \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \sum_{n=-M^-}^{M^+-1} \left(f_{|_{B^n}}, v\right)_{L^2(B_0)} e^{-in\xi L}$$

Comme nous avons $V_h^r(\xi) \subset H^1_\xi(\Omega)$, et que formellement $V_h^r(\xi) \to H^1_\xi(B_0)$ quand $h \to 0$, d'après le lemme 3.3, il est naturel de considérer l'approximation par éléments finis suivante :

Pour tout $f \in L^2(\Omega_0)$, trouver $\hat{S}_h(\xi) f \in V_h^r(\xi)$ tel que, pour tout $v_h \in V_h^r(\xi)$, on ait :

$$a_{B_0}(\hat{S}_h(\xi) f, v_h) = \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \sum_{n=-M^-}^{M^+-1} \left(f_{|_{B^n}}, v_h\right)_{L^2(B_0)} e^{-in\xi L} \tag{3.2}$$

Théorème 3.4. *Sous les hypothèses (H), pour tout $f \in L^2(\Omega_0)$, le problème* (3.2) *est bien posé. De plus, on a l'estimation d'erreur suivante :*

$$||\hat{S}(\xi) f - \hat{S}_h(\xi) f||_{H^1(B_0)} \leq Ch |\hat{S}(\xi) f|_{H^2(B_0)} \tag{3.3}$$

Démonstration. Sous les hypothèses (H), le lemme 1.1 nous apprend que la forme bilinéaire a_{B_0} est continue et coercive. Comme le second membre de (3.2) est bien évidemment une forme bilinéaire continue sur $V_h^r(\xi)$, c'est encore une fois le théorème de Lax-Milgram qui nous permet d'affirmer que ce problème est bien posé. Puis, le lemme de Céa (voir [74] par exemple) nous donne l'existence d'une constante $C > 0$ (qui ne dépend que des constantes de coercivité et de continuité de a_{B_0}) telle que :

$$||\hat{S}(\xi) f - \hat{S}_h(\xi) f||_{H^1(B_0)} \leq C \inf_{v_h \in V_h^r(\xi)(B_0)} ||\hat{S}(\xi) f - v_h||_{H^1(B_0)}$$

Comme $\hat{S}(\xi) f \in H^2_\xi(B_0)$ d'après le lemme de régularité intérieure 1.2, on peut donc appliquer le lemme 3.3 qui nous conduit à l'estimation souhaitée. □

Nous avons implicitement défini l'opérateur :

$$\hat{S}_h(\xi) : L^2(\Omega_0) \longrightarrow V_h^r(\xi)$$

et il s'agit bien d'une approximation (convergente) de $\hat{S}(\xi)$. Mais cette approximation fait appel à l'espace $V_h^r(\xi)$ qui est de dimension infinie, et ne peut donc être utilisé en pratique. Cela n'a rien de surprenant, car nous avons beau avoir "discrétisé" la variable d'espace (grâce aux éléments finis), nous n'avons pas pour autant borné le domaine. C'est ce nous allons maintenant essayer de faire,

en reproduisant au niveau discret la méthode DtN. Pour cela, on introduit la solution extérieure discrète $u_{h,e}$, définie sur $B_{0,e} = B_0 \setminus \overline{\Omega_0^0}$, qui a vocation à être une discrétisation de la solution extérieure continue $u_{h,e}$ définie au chapitre précédent. Étant solution d'un problème avec condition de Dirichlet sur Γ_0, nous savons qu'il va nous falloir utiliser l'espace des fonctions à trace nulle sur Γ_0. Nous poserons donc :

$$V_{h,0}^r(\xi)(B_{0,e}) = \{v_h \in V_h^r(\xi)(B_{0,e}) \ \mid \ v_h|_{\Gamma_0} = 0\}$$

où $V_h^r(\xi)(B_{0,e})$ est bien entendu la réunion de $V_h^r(\xi)(B_0^-)$ et $V_h^r(\xi)(B_0^+)$. Alors le problème extérieur discret que l'on considère est naturellement :

Pour tout $\varphi_h \in X_h^r(\xi)(\Gamma_0) = X_h^{r,-}(\xi) \times X_h^{r,+}(\xi)$, trouver $u_{h,e}(\varphi_h) \in V_h^r(\xi)(B_{0,e})$ telle que, pour tout $v_h \in V_{h,0}^r(\xi)(B_{0,e})$:

$$\left| \begin{array}{l} a_{B_{0,e}}(u_{h,e}(\varphi_h), v_h) = 0 \\ u_{h,e}(\varphi_h)|_{\Gamma_0} = \varphi_h \end{array} \right. \tag{3.4}$$

Il est clair que :

Théorème 3.5. *Pour tout $\varphi_h \in X_h^r(\xi)(\Gamma_0)$, il existe un unique $u_{h,e}(\varphi_h) \in V_h^r(\xi)(B_{0,e})$ solution de (3.4), qui dépend continûment des données.*

Démonstration. Pour tout $v_h \in V_{h,0}^r(\xi)(B_{0,e})$, on a par construction :

$$a_{B_{0,e}}(u_{h,e}, v_h) = 0$$

Puis, pour tout $\varphi_h \in X_h^r(\xi)(\Gamma_0)$, on pose $\eta_h\varphi_h = \eta_h^{0,-}\varphi_h|_{\Gamma_0^-} + \eta_h^{0,+}\varphi_h|_{\Gamma_0^+} \in V_h^r(\xi)(B_{0,e})$, alors il est clair que $\eta_h\varphi_h|_{\Gamma_0} = \varphi_h$. On pose ensuite $u_{h,0} = u_{h,e}(\varphi_h) - \eta\varphi_h \in V_{h,0}^r(\xi)(B_{0,e})$, et :

$$a_{B_{0,e}}(u_{h,0}, v_h) = -a_{B_{0,e}}(\eta_h\varphi_h, v_h)$$

En vertu du lemme 1.1, la forme bilinéaire est continue et coercive. Donc ce problème variationnel est bien posé, et on a donc l'existence d'une solution $u_{h,0}$ pour tout $n \geq 0$. Puis en posant $u_{h,e}(\varphi_h) = u_{h,0} + \eta_h\varphi_h$, on obtient bien une solution de (3.4). Pour l'unicité, il suffit de remarquer que la solution de (3.4) avec donnée nulle est solution de la formulation variationnelle dans $V_{h,0}^r(\xi)(\Omega_e)$, avec donnée nulle. Par conséquent, cette solution est nulle, et on obtient ainsi l'unicité par linéarité. Enfin pour la continuité, il est clair suivant le lemme 3.2 que $\eta_h\varphi_h$ dépend continûment de φ_h. Puis en prenant $u_{h,0}$ comme fonction test, et en utilisant la coercivité et la continuité de la forme bilinéaire, on obtient aisément l'existence d'une constante $C > 0$ telle que :

$$||u_{h,0}||_{H^1(B_{0,e})} \leq C(||u_h^n||_{H^1(B_{0,e})} + ||\varphi_h||_{H_\xi^{1/2}(\Gamma_0)})$$

et par suite la dépendance continue de $u_{h,e}(\varphi_h)$ en φ_h. □

Ce résultat, qui semblera sûrement évident au lecteur, est surtout important par le fait qu'il nous renseigne sur la dépendance continue de la solution discrète extérieure en sa donnée de Dirichlet.

Le principe de la méthode DtN consiste alors à se demander à quelle condition une solution $u_{h,int}$ du problème dans Ω_0^0 et une solution du problème extérieur tel que nous venons de le définir se raccordent en une solution globale. Plus précisément, on se demande à quelle condition :

$$\widetilde{u}_h = \left| \begin{array}{ll} u_{h,int} & \text{dans } \Omega_0^0 \\ u_{h,e} & \text{dans } B_{0,e} \end{array} \right.$$

est solution de (3.2). Comme on cherche une solution globale dans $V_h^r(\xi) \subset H_\xi^1(B_0)$, il est clair que $\widetilde{u}_h$ doit se raccorder en trace sur Γ_0. Aussi, on doit avoir $u_{h,int}|_{\Gamma_0} = u_{h,e}|_{\Gamma_0}$. On se rappelle qu'au

niveau continu, le raccord en dérivée normale assurait le fait d'être solution globale et permettait de définir les bons opérateurs DtN. Une telle chose est impossible au niveau discret, puisque l'usage des éléments finis contraint la régularité et empêche pareil raccord, le gradient des éléments de $V_h^r(\xi)$ étant L^2 mais pas plus. Nous devons donc chercher une nouvelle condition de raccord au niveau discret. Pour ce faire, nous allons avoir besoin de pouvoir passer aisément de fonctions appartenant à $V_h^r(\xi)$ à des fonctions de $V_{h,0}^r(\xi)(\Omega_e)$, en extrayant les traces. Fort heureusement, on construit un opérateur de relèvement η_h tel que $v_h - \eta_h^0(v_h|_{\Gamma_0}) \in V_{h,0}^r(\xi)(\Omega_e)$ et pour tout $w_h \in V_{h,0}^r(\xi)(\Omega_e)$:

$$(v_h - \eta_h(v_h|_{\Gamma_0}), w_h)_{L^2(\Omega_e)} = (v_h, w_h)_{L^2(\Omega_e)}$$

en posant : $\eta_h(v_h|_{\Gamma_0})|_{\Omega^-} = \eta_h^{0,-}(v_h|_{\Gamma_0})|_{\Omega^-}$ et $\eta_h(v_h|_{\Gamma_0})|_{\Omega^+} = \eta_h^{0,+}(v_h|_{\Gamma_0})|_{\Omega^+}$. Mais alors, pour tout $v_h \in V_h^r(\xi)(\Omega)$, nous pouvons donc écrire :

$$a_{B_0}(\widetilde{u}_h, v_h) = a_{\Omega_0^0}(\widetilde{u}_h, v_h) + a_{B_{0,e}}(\widetilde{u}_h, v_h)$$

Dans le domaine extérieur, on obtient :

$$\begin{aligned} a_{B_{0,e}}(\widetilde{u}_h, v_h) &= a_{B_{0,e}}(u_{h,e}, v_h) \\ &= a_{B_{0,e}}(u_{h,e}, v_h - \eta_h(v_h|_{\Gamma_0})) + a_{B_{0,e}}(u_{h,e}, \eta_h(v_h|_{\Gamma_0})) \\ &= a_{B_{0,e}}(u_{h,e}, \eta_h(v_h|_{\Gamma_0})) \end{aligned}$$

Par conséquent, afin d'être solution de (3.2), on devra avoir :

$$a_{\Omega_0^0}(u_{h,int}, v_h) + a_{B_{0,e}}(u_{h,e}, \eta_h(v_h|_{\Gamma_0})) = \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \sum_{n=-M^-}^{M^+-1} \left(f_{|_{B^n}}, v_h\right)_{L^2(B_0)} e^{-in\xi L}$$

C'est la quantité faisant intervenir $B_{0,e}$ qui vient remplacer la condition de raccord des dérivées normales. En effet, la condition DtN que l'on utilisait au niveau semi-discret, était une condition "naturelle", on s'attend donc à la retrouver directement dans la formulation variationnelle du problème. Les autres termes dans l'expression ci-dessus correspondent à l'équation dans le domaine intérieur.

Une autre façon de voir ceci est de comparer cette formulation au cas continu, pour lequel on a pour tout $v \in H_\xi^1(\Omega)$:

$$a_{B_{0,e}}(u_e, v) =< \frac{\partial u_e}{\partial \nu_0}|_{\Gamma_0}, v|_{\Gamma_0} >$$

En particulier, en utilisant un relèvement $\eta v|_{\Gamma_0}$de la trace de v sur Γ_0, comme u_e est solution du problème extérieur, on obtient :

$$a_{B_{0,e}}(u_e, \eta v|_{\Gamma_0}) =< \frac{\partial u_e}{\partial \nu_0}|_{\Gamma_0}, v|_{\Gamma_0} >$$

Cette expression n'est rien d'autre qu'une définition faible de la dérivée normale de u_e, utilisant l'équation. D'autre part, dans le domaine intérieur :

$$a_{\Omega_0^0}(u_{int}, v) = - < \frac{\partial u_{int}}{\partial \nu_0}|_{\Gamma_0}, v|_{\Gamma_0} > + \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \sum_{n=-M^-}^{M^+-1} \left(f_{|_{B^n}}, v\right)_{L^2(\Omega_0^0)} e^{-in\xi L}$$

La condition de raccord au niveau continu consistait à égaliser les dérivées normales de u. On obtient donc :

$$a_{\Omega_0^0}(u_{int}, v) + a_{B_{0,e}}(u_e, \eta v|_{\Gamma_0}) = \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \sum_{n=-M^-}^{M^+-1} \left(f_{|_{B^n}}, v\right)_{L^2(\Omega_0^0)} e^{-in\xi L}$$

On reconnaît alors l'expression que nous avons obtenue au niveau discret, le deuxième terme se réinterprétant comme une forme faible de la dérivée normale de u_e. Dit autrement, la "bonne" condition de raccord au niveau discret est en fait encore le raccord de la dérivée normale de u, mais au sens faible. On remarque par ailleurs qu'au niveau discret, cette forme faible constitue la meilleure approximation permise par les éléments finis de la dérivée normale. Ceci peut apparaître évident au lecteur, néanmoins, il nous aurait semblé par trop contre-intuitif d'introduire ces conditions directement ainsi, et nous avons donc opté pour une approche mimant la méthode DtN au niveau continu et les faisant naturellement survenir.

On définit alors, puisque c'est cette quantité qui vient naturellement remplacer les raccords en dérivée normale, les $\Lambda_{h,e}(\xi)$ comme les traces normales au sens faible des $w^n_{h,e}$, à savoir :

$$\begin{array}{rcl} \Lambda_{h,e}(\xi) : X^r_h(\xi)^2 & \longrightarrow & X^r_h(\xi)^2 \\ \varphi_h & \longmapsto & \Lambda_{h,e}(\xi)\varphi_h \end{array}$$

où $\Lambda_{h,e}(\xi)$ est l'unique solution dans $X^r_h(\xi)^2$ pour tout $\psi_h \in X^r_h(\xi)^2$ de :

$$(\Lambda_{h,e}(\xi)\varphi_h, \psi_h)_{L^2(\Gamma_0)} = a_{B_{0,e}}(u_{h,e}(\varphi_h), \eta_h(\psi_h))$$

Ce problème est effectivement bien posé puisque le second membre définit une forme bilinéaire continue sur $X^r_h(\xi)(\Gamma_0)$ d'après les lemmes 3.1, 3.2 et le théorème 3.4. Alors à φ_h fixé, par équivalence des normes sur $V^r_h(\xi)(B_{0,e})$, il existe un unique $\Lambda_{h,e}(\xi)\varphi_h$ continu tel que :

$$(\Lambda_{h,e}(\xi)\varphi_h, \psi_h)_{L^2(\Gamma_0)} = a_{B_{0,e}}(u_{h,e}(\varphi_h), \eta_h(\psi_h))$$

en vertu du théorème de Riesz. La condition ci-dessus se réécrit :

$$a_{\Omega^0_0}(u_{h,int}, v_h) + (\Lambda_{h,e}(\xi)u_{h,int}|_{\Gamma_0}, v_h|_{\Gamma_0})_{L^2(\Gamma_0)} = \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \sum_{n=-M^-}^{M^+-1} \left(f_{|B^n}, v_h\right)_{L^2(\Omega^0_0)} e^{-in\xi L}$$

Bien entendu, c'est cette relation qui va définir le problème intérieur discret :

Théorème 3.6. *Sous les hypothèses (H), pour tout $f \in L^2(\Omega_0)$, le problème intérieur :*
Trouver $\hat{S}_{0,h}(\xi)f \in V^r_h(\xi)(\Omega^0_0)$ solution, pour tout $v_h \in V^r_h(\xi)(\Omega^0_0)$, de :

$$a_{\Omega^0_0}(\hat{S}_{0,h}(\xi)f, v_h) + \left(\Lambda_{h,e}(\xi)\hat{S}_{0,h}(\xi)f|_{\Gamma_0}, v_h|_{\Gamma_0}\right)_{L^2(\Gamma_0)} = \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \sum_{n=-M^-}^{M^+-1} \left(f_{|B^n}, v_h\right)_{L^2(\Omega^0_0)} e^{-in\xi L} \quad (3.5)$$

est bien posé et est équivalent au problème (3.2) *au sens où : $\hat{S}_{0,h}(\xi)f = \hat{S}_h(\xi)f|_{\Omega^0_0}$, et :*

$$||\hat{S}_0(\xi)f - \hat{S}_{0,h}(\xi)f||_{H^1(\Omega^0_0)} \leq Ch|\hat{S}(\xi)f|_{H^2(B_0)} \quad (3.6)$$

Démonstration. Il est clair par construction que la solution $\hat{S}_h(\xi)f|_{\Omega^0_0}$ de (3.2) est solution de (6.10). Puis, si $\hat{S}_{0,h}(\xi)f$ est solution de (3.5), alors en vertu des calculs précédents :

$$\widetilde{u}^n_h = \left| \begin{array}{ll} u^n_{h,int} & \text{dans } \Omega^0_0 \\ u_{h,e}(\hat{S}_{0,h}(\xi)f|_{\Gamma_0}) & \text{dans } B_{0,e} \end{array} \right.$$

est solution de (3.2). L'unicité de ce dernier problème donne alors l'unicité pour le problème (3.5), et par unicité, on a forcément : $\hat{S}_{0,h}(\xi)f = \hat{S}_h(\xi)f|_{\Omega^0_0}$, et l'estimation (3.6) est alors une conséquence directe de (3.3). □

La méthode DtN nous conduit donc de nouveau à un problème posé sur Ω_0^0, qui est une approximation variationnelle du problème intérieur continu. De plus, nous avons ici une première manifestation de l'intérêt d'avoir introduit un problème de guide discret, puisque la convergence de ce problème posé sur B_0 vers son homologue continu, qui se démontre de façon complètement classique (via le lemme de Céa), entraîne directement la convergence du problème intérieur discret vers son homologue continu (c'est le sens de l'estimation (3.6)). Ce résultat eut été bien plus complexe à établir directement, c'est-à-dire sans passer par le problème de guide, puisqu'il aurait fallu d'une part trouver comment introduire de façon naturelle l'approximation des opérateurs DtN présentée ci-dessus (et qui est optimale vu qu'il s'agit de conditions exactement transparentes pour le guide discret), et d'autre part montrer la convergence de ces conditions aux limites non explicites vers leurs homologues continues, elles-aussi non-explicites.

Il reste maintenant à vérifier, comme au niveau continu, que l'on peut déterminer $\Lambda_{h,e}(\xi)$ à partir de la résolution de problèmes posés en domaine borné. Il est à noter que nous avons construit nos opérateurs DtN discrets différement de ce qui est proposé dans [37] cette fois, puisque d'une part nous n'avons pas utilisé les mêmes espaces d'éléments finis (nous avons opté pour une approche conforme, i.e. nous avons incorporé la quasi-périodicité directement dans les espaces), et d'autre part nous n'avons pas défini les opérateurs DtN discrets à partir des problèmes de cellule, mais bien des problèmes extérieurs. Toutefois, nous allons voir que nous pouvons encore ramener le calcul de $\Lambda_{h,e}(\xi)$ à la résolution de problèmes de cellule. Pour cela, notons que comme au niveau continu, nous pouvons découpler la résolution du problème extérieur en la résolution des deux problèmes de demi-guide : pour tout $\varphi_h \in X_h^r(\xi)(\Gamma_0^\pm) = X_h^r(\xi)$, trouver $w_{h,\pm}(\varphi_h) \in V_h^r(\xi)(B_0^\pm)$ telle que, pour tout $v_h \in V_{h,0}^r(\xi)(B_0^\pm)$:

$$\left| \begin{array}{l} a_{B_0^\pm}(w_{h,\pm}(\varphi_h), v_h) = 0 \\ w_{h,\pm}(\varphi_h)|_{\Gamma_0^\pm} = \varphi_h \end{array} \right. \tag{3.7}$$

qui sont des problèmes bien posés (et qui dépendent continûment de φ_h), d'après le théorème 3.5. On aura alors :

$$u_{h,e}(\varphi_h)|_{B_0^\pm} = w_{h,\pm}(\varphi_h|_{\Gamma_0^\pm})$$

Il est alors évident que l'on peut définir :

$$\begin{array}{rcl} \Lambda_{h,\pm}(\xi) : X_h^r(\xi) & \longrightarrow & X_h^r(\xi) \\ \varphi_h & \longmapsto & \Lambda_{h,\pm}(\xi)\varphi_h \end{array}$$

comme l'unique solution dans $X_h^r(\xi)$ pour tout $\psi_h \in X_h^r(\xi)$ de :

$$(\Lambda_{h,\pm}(\xi)\varphi_h, \psi_h)_{L^2(\Gamma_0^\pm)} = a_{B_0^\pm}(w_{h,\pm}(\varphi_h), \eta_h^{0,\pm}(\psi_h))$$

et que l'on aura, pour tout $\psi_h \in X_h^r(\xi)^2$:

$$(\Lambda_{h,e}(\xi)\varphi_h, \psi_h)_{L^2(\Gamma_0)} = (\Lambda_{h,+}(\xi)\varphi_h, \psi_h)_{L^2(\Gamma_0^+)} + (\Lambda_{h,-}(\xi)\varphi_h, \psi_h)_{L^2(\Gamma_0^-)}$$

Nous allons donc, comme au niveau continu en espace, traiter séparément chacun des problèmes de demi-guide discret.

3.2.2 Résolution des problèmes de demi-guide discrets

Comme dans le cas continu, si nous sommes en mesure de résoudre l'un des deux problèmes de demi-guide, il est bien évident que nous pourrons appliquer la même méthode pour résoudre l'autre. Aussi, nous n'allons nous intéresser qu'au demi-guide de droite, et nous allons omettre momentanément les indices $\pm$, tant que cela ne prête pas à confusion. Nous considérons donc, pour tout $v_h \in V_{h,0}^r(\xi)(B_0^\pm)$:

$$\left| \begin{array}{l} a_{B_0^+}(w_h(\varphi_h), v_h) = 0 \\ w_h(\varphi_h)|_{\Gamma_0^+} = \varphi_h \end{array} \right. \tag{3.7}$$

Notre but est de montrer que l'on peut encore appliquer la méthode de [37], mais au niveau

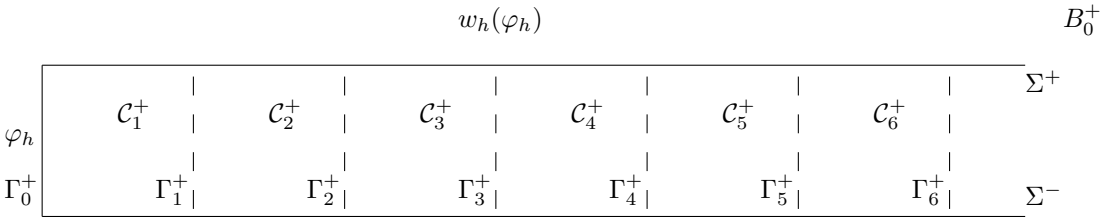


FIGURE 3.5 – Demi-guide B_0^+

discret. Cette étude est relativement nouvelle, même si nous allons voir que dans leur principe, les raisonnements que nous allons effectuer sont essentiellement les mêmes. Nous allons en revanche devoir faire face à un certain nombre de complications, essentiellement techniques, qui allongent considérablement la rédaction des démonstrations. Par analogie avec le cas continu, on introduit le propagateur :

$$\begin{aligned} R_h(\xi) : X_h^r(\xi) &\longrightarrow X_h^r(\xi) \\ \varphi_h &\longmapsto w_h(\varphi_h)|_{\Gamma_1^+} \end{aligned}$$

et on espère retrouver une structure pour $w_h(\varphi_h)$ qui fasse intervenir $R_h(\xi)$, comme au niveau continu en espace :

Théorème 3.7. *Pour tout $\varphi_h \in X_h^r(\xi)$ et tout $j \geq 0$, on a :*

$$\tau_{jL_x^+}(w_h(\varphi_h)) = w_h(R_h(\xi)^j \varphi) \tag{3.8}$$

ce qui s'écrit aussi :

$$w_h(\varphi)|_{\mathcal{C}_{j+1}^+} = w_h(R_h(\xi)^j \varphi)|_{\mathcal{C}_1^+} \tag{3.9}$$

De plus, l'opérateur $R_h(\xi)$ est de rayon spectral strictement inférieur à 1.

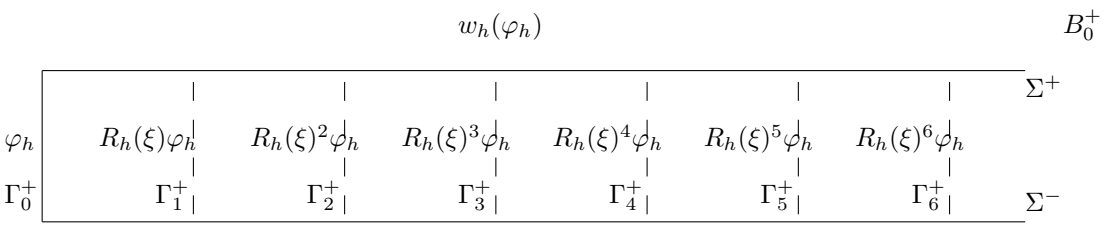


FIGURE 3.6 – Structure de $w_h(\varphi_h)$

Démonstration. La preuve est très similaire dans son principe à celle du théorème 2.3, néanmoins la structure variationnelle vient considérablement compliquer les manipulations algébriques. On commence par démontrer la formule (3.8). Pour tout $\varphi_h \in X_h^r(\xi)$, on considère la fonction :

$$\nu_h(\varphi_h) = \tau_{L_x^+}(w_h(\varphi_h))$$

et on pose : $\Omega_1^+ = B_0^+ \cap \{x \geq a_+ + L\}$. Alors, pour tout $v_h \in V_{h,0}^r(\xi)(B_0^+)$, on a, comme $\rho_p = \rho^+$ dans B_0^+, avec ρ^+ périodique de période L_x^+ :

$$\begin{aligned} a_{B_0^+}(\nu_h(\varphi_h), v_{h,\xi}) &= (\nabla\nu_h(\varphi_h), \nabla v_h)_{L^2(B_0^+)} - (\omega^2 + i\varepsilon\omega)\left(\rho^+\nu_h(\varphi_h), v_h\right)_{L^2(B_0^+)} \\ &= (\nabla\tau_{L_x}(w_h(\varphi_h)), \nabla v_h)_{L^2(B_0^+)} - (\omega^2 + i\varepsilon\omega)\left(\rho^+\tau_{L_x}(w_h(\varphi_h)), v_{h,\xi}\right)_{L^2(B_0^+)} \\ &= (\nabla w_h(\varphi_h), \nabla\tau_{-L_x}(v_h))_{L^2(\Omega_1^+)} - (\omega^2 + i\varepsilon\omega)\left(\rho^+ w_h(\varphi_h), \tau_{-L_x}(v_h)\right)_{L^2(\Omega_1^+)} \end{aligned}$$

Puis, pour tout $v_h \in V_{h,0}^r(\xi)(B_0^+)$, on peut étendre $\tau_{-L_x}(v_h)$ dans $\mathcal{C}_1^+$ par 0 afin d'obtenir un élément de $V_h^0(B_0^+)$. On définit alors :

$$\widetilde{v}_h = \begin{cases} 0 & \text{dans } \mathcal{C}_1^+ \\ \tau_{-L_x}(v_h) & \text{dans } \Omega_1^+ \end{cases}$$

Alors on obtient :

$$\begin{aligned} &(\nabla\nu_h(\varphi_h), \nabla v_h)_{L^2(B_0^+)} - (\omega^2 + i\varepsilon\omega)\left(\rho^+\nu_h(\varphi_h), v_h\right)_{L^2(B_0^+)} \\ &= (\nabla w_h(\varphi_h), \nabla\widetilde{v}_h)_{L^2(B_0^+)} - (\omega^2 + i\varepsilon\omega)\left(\rho^+ w_h(\varphi_h), \widetilde{v}_h\right)_{L^2(B_0^+)} = 0 \end{aligned}$$

comme $w_h(\varphi_h)$ est solution de (3.7). De plus, nous avons :

$$\nu_h(\varphi_h)|_{\Gamma_0^+} = R_h(\xi)\varphi_h$$

Donc $\nu_h(\varphi_h)$ est solution du même problème que $w_h(R_h(\xi)\varphi_h)$, qui est bien posé en vertu du théorème 3.5, d'où :

$$w_h(R_h(\xi)\varphi_h) = \nu_h(\varphi_h) = \tau_{L_x^+}(w_h(\varphi_h))$$

Puis, par récurrence, supposons que (3.8) soit vraie au rang j, alors :

$$\tau_{(j+1)L_x}(w_h(\varphi_h)) = \tau_L(\tau_{jL_x}(w_h(\varphi_h))) = \tau_L(w_h(R_h(\xi)^j\varphi_h)) = w_h(R_h(\xi)^{j+1}\varphi_h)$$

et la formule (3.8) est démontrée pour tout j. Finalement, soit φ_h un vecteur propre de $R_h(\xi)$ associé à la valeur propre λ_h, alors la formule (3.8) conduit à :

$$||w_h(\varphi_h)||^2_{L^2(B_0^+)} = ||w_h(\varphi_h)|_{\mathcal{C}_1^+}||^2_{L^2(\mathcal{C})} \sum_{j=0}^{+\infty} |\lambda_h|^{2j}$$

qui sera fini si et seulement si $|\lambda_h| < 1$. □

Ayant retrouvé le résultat de structure fondamental, nous nous tournons directement vers l'équivalent discret des problèmes de cellule. On rappelle que :

$$V_{h,0}^r(\xi)(\mathcal{C}^+) = \left\{ v_h \in V_h^r(\xi)(\mathcal{C}^+) \;\mid\; v_h|_{\Gamma_0^+} = 0 = v_h|_{\Gamma_1^+} \right\}$$

On définit, pour tout $\varphi_h \in X_h^r(\xi)$, les solutions des problèmes de cellule discrets par :

$$\left| \begin{array}{ll} a_{\mathcal{C}^+}(e_{h,0}(\varphi_h), v_h) = 0 & \forall\, v_h \in V_{h,0}^r(\xi)(\mathcal{C}^+) \\ e_{h,0}(\varphi_h) = \varphi_h & \text{sur } \Gamma_0^+ \\ e_{h,0}(\varphi_h) = 0 & \text{sur } \Gamma_1^+ \end{array} \right. \tag{3.10}$$

$$\left| \begin{array}{ll} a_{\mathcal{C}^+}(e_{h,1}(\varphi_h), v_h) = 0 & \forall\, v_h \in V_{h,0}^r(\xi)(\mathcal{C}^+) \\ e_{h,1}(\varphi_h) = 0 & \text{sur } \Gamma_0^+ \\ e_{h,1}(\varphi_h) = \varphi_h & \text{sur } \Gamma_1^+ \end{array} \right. \tag{3.11}$$

problèmes bien posés en vertu du théorème 3.5. On espère bien entendu retrouver le lien entre ces problèmes de cellule et la restriction à chaque cellule du premier pas de temps. Pour tout $v_h \in V_{h,0}^r(\xi)(\mathcal{C}^+)$, on introduit :

$$\widetilde{v}_h = \begin{cases} v_h & \text{dans } \mathcal{C}_1^+ \\ 0 & \text{dans } \Omega_1^+ \end{cases}$$

FIGURE 3.7 – Les deux problèmes de cellule discrets

Par construction $\widetilde{v}_h \in V_{h,0}^r(\xi)(B_0^+)$, et on a :

$$(\nabla w_h(\varphi_h), \nabla \widetilde{v}_h)_{L^2(B_0^+)} - (\omega^2 + i\varepsilon\omega)\left(\rho^+ w_h(\varphi_h), \widetilde{v}_h\right)_{L^2(B_0^+)} = 0$$

ce qui implique :

$$(\nabla w_h(\varphi_h), \nabla v_h)_{L^2(\mathcal{C}^+)} - (\omega^2 + i\varepsilon\omega)\left(\rho^+ w_h(\varphi_h), v_h\right)_{L^2(\mathcal{C}^+)} = 0$$

De plus, par construction on a :

$$w_h(\varphi_h)|_{\Gamma_0^+} = \varphi_h \quad \text{et} \quad w_h(\varphi_h)|_{\Gamma_1^+} = R_h(\xi)\varphi_h$$

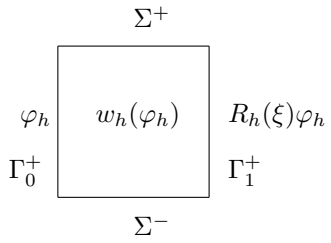


FIGURE 3.8 – $w_h(\varphi_h)$ dans la première cellule

Alors, $w_h(\varphi_h)|_{\mathcal{C}_1^+}$ est solution du même problème que $e_h^0(\varphi_h) + e_h^1(R_h(\xi)\varphi_h)$ par linéarité. On obtient donc par unicité :

$$w_h(\varphi_h)|_{\mathcal{C}_1^+} = e_{h,0}(\varphi_h) + e_{h,1}(R_h(\xi)\varphi_h) \tag{3.12}$$

et, en appliquant (3.9), on en déduit facilement que :

$$w_h(\varphi_h)|_{\mathcal{C}_j^+} = e_{h,0}(R_h(\xi)^{j-1}\varphi_h) + e_{h,1}(R_h(\xi)^j\varphi_h) \tag{3.13}$$

soit les mêmes formules que dans le cas continu en espace. Il ne reste donc plus qu'à retrouver au niveau discret une équation du type (2.17) qui permette de déterminer $R_h(\xi)$ de manière unique, et nous aurons retrouvé l'ensemble de la méthode de [37] au niveau discret. Au niveau continu, c'est le raccord en dérivée normale qui nous a permis d'établir l'équation quadratique caractéristique de R. Mais nous avons vu, lorsque nous avons défini les équivalents discrets des opérateurs DtN, qu'il faut remplacer au niveau discret les raccords en dérivée normale par des raccords au sens faible. C'est pourquoi nous introduisons les équivalents discrets des opérateurs T_{ij} comme la dérivée normale au sens faible des $e_{h,i}$ sur les frontières Γ_j^+, i.e :

$$\begin{array}{rccc} T_{h,00}(\xi) : X_h^r(\xi) & \longrightarrow & X_h^r(\xi) \\ \varphi_h & \longmapsto & T_{h,00}(\xi)\varphi_h \end{array}$$

où $T_{h,00}(\xi)\varphi_h$ est l'unique solution dans $X_h^r(\xi)$ de :

$$(T_{h,00}(\xi)\varphi_h, \psi_h)_{L^2(\Gamma)} = a_{\mathcal{C}^+}(e_{h,0}(\varphi_h), \eta_h^0(\psi_h))$$

$$\begin{aligned} T_{h,01}(\xi) : X_h^r(\xi) &\longrightarrow X_h^r(\xi) \\ \varphi_h &\longmapsto T_{h,01}(\xi)\varphi_h \end{aligned}$$

où $T_{h,01}(\xi)\varphi_h$ est l'unique solution dans $X_h^r(\xi)$ de :

$$(T_{h,01}(\xi)\varphi_h, \psi_h)_{L^2(\Gamma)} = a_{\mathcal{C}^+}(e_{h,0}(\varphi_h), \eta_h^1(\psi_h))$$

$$\begin{aligned} T_{h,10}(\xi) : X_h^r(\xi) &\longrightarrow X_h^r(\xi) \\ \varphi_h &\longmapsto T_{h,10}(\xi)\varphi_h \end{aligned}$$

où $T_{h,10}(\xi)\varphi_h$ est l'unique solution dans $X_h^r(\xi)$ de :

$$(T_{h,10}(\xi)\varphi_h, \psi_h)_{L^2(\Gamma)} = a_{\mathcal{C}^+}(e_{h,1}(\varphi_h), \eta_h^0(\psi_h))$$

$$\begin{aligned} T_{h,11}(\xi) : X_h^r(\xi) &\longrightarrow X_h^r(\xi) \\ \varphi_h &\longmapsto T_{h,11}(\xi)\varphi_h \end{aligned}$$

où $T_{h,11}(\xi)\varphi_h$ est l'unique solution dans $X_h^r(\xi)$ de :

$$(T_{h,11}(\xi)\varphi_h, \psi_h)_{L^2(\Gamma)} = a_{\mathcal{C}^+}(e_{h,1}(\varphi_h), \eta_h^1(\psi_h))$$

Nous nous retrouvons donc formellement dans la même situation qu'au niveau continu en espace. Aussi, il n'est pas surprenant de retrouver l'analogue de l'équation quadratique (2.17) au niveau discret, qui va exprimer le raccord cette fois faible sur Γ_1^+de la solution discrète sur le demi-guide :

Théorème 3.8. *L'opérateur $R_h(\xi)$ est l'unique solution de rayon spectral strictement inférieur à* 1 *de l'équation quadratique :*

$$T_{h,10}(\xi)R_h(\xi)^2 + (T_{h,00}(\xi) + T_{h,11}(\xi))R_h(\xi) + T_{h,01}(\xi) = 0 \tag{3.14}$$

Démonstration. Essentiellement, la preuve est la même que celle du théorème 2.4 qui établit l'équation quadratique dans le cas continu en espace. Néanmoins, nous allons voir que les manipulations algébriques sont encore une fois considérablement compliquées par la structure variationnelle du problème. On commence par montrer que $R_h(\xi)$ est bien solution de (3.14). Soit $v_h \in V_{h,0}^r(\xi)(B_0^+)$ telle que *supp* $v_h \subset B_0^+ \cap \{a_+ \leq x < a_+ + 2L_x\}$. Alors on déduit du lemme 3.2 que (en prolongeant v_h par 0 hors de B_0^+, ce qui restera dans $V_h^r(\xi)$ comme $v_h \in V_{h,0}^r(\xi)(B_0^+)$) :

$$v_h|_{\mathcal{C}_1^+} = v_h^g|_{\mathcal{C}_1^+} + \eta_h^1(v_h|_{\Gamma_1^+})$$

Mais on a également :

$$v_h|_{\mathcal{C}_2^+} = (\tau_{L_x} v_h)|_{\mathcal{C}_1^+} = (\tau_{L_x} v_h)^d|_{\mathcal{C}_1^+} + \eta_h^0(v_h|_{\Gamma_1^+})$$

On note alors :$v_h^1 = v_h^g|_{\mathcal{C}_1^+}$ et $v_h^2 = (\tau_{L_x} v_h)^d|_{\mathcal{C}_1^+}$. Il s'agit maintenant de montrer que chacune de ces fonctions appartient à $V_{h,0}^r(\xi)(\mathcal{C}_1^+)$. Par construction, pour tout $w_h \in V_h^r(\xi)(B_{0,1}^{+,g})$, on a :

$$\left(v_h^g, w_h\right)_{L^2(B_{0,1}^{+,g})} = (v_h, w_h)_{L^2(B_{0,1}^{+,g})}$$

En particulier, pour tout w_h tel que *supp* $w_h \subset B_{0,0}^{+,g}$, on a :

$$\left(v_h^g|_{B_{0,0}^{+,g}}, w_h\right)_{L^2(B_{0,0}^{+,g})} = \left(v_h|_{B_{0,0}^{+,g}}, w_h\right)_{L^2(B_{0,0}^{+,g})}$$

Par définition, il est clair que de tels w_h parcourent tout $V_h^r(\xi)(B_{0,0}^{+,g})$, on a : $v_h^g|_{B_{0,0}^{+,g}} = v_h|_{B_{0,0}^{+,g}} = 0$, ce qui implique donc $v_h^1|_{\Gamma_0^\pm} = 0$. Comme on savait déjà que $v_h^1|_{\Gamma_1^\pm} = 0$, on a bien $v_h^1 \in V_{h,0}^r(\xi)(\mathcal{C}_1^+)$. Pour v_h^2, on a de même :

$$\Big((\tau_{L_x} v_h)^d, w_h\Big)_{L^2(\Omega_{0,+}^d)} = (\tau_{L_x} v_h, w_h)_{L^2(\Omega_{0,+}^d)}$$

En particulier, pour tout w_h tel que $supp\ w_h \subset B_{0,1}^{+,d}$, on a :

$$\Big((\tau_{L_x} v_h)^d|_{B_{0,1}^{+,d}}, w_h\Big)_{L^2(B_{0,1}^{+,d})} = \Big(\tau_{L_x} v_h|_{B_{0,1}^{+,d}}, w_h\Big)_{L^2(B_{0,1}^{+,d})}$$

ce qui implique encore $(\tau_{L_x} v_h)^d|_{B_{0,1}^{+,d}} = \tau_{L_x} v_h|_{B_{0,1}^{+,d}} = 0$, et donc $v_h^2|_{\Gamma_1^+} = 0$, d'où $v_h^2 \in V_{h,0}^r(\xi)(\mathcal{C}_1^+)$ comme $v_h^2|_{\Gamma_0^\pm} = 0$.

D'autre part, nous avons, comme $v_h \in V_{h,0}^r(\xi)(B_0^+)$:

$$a_{\Omega^+}(w_h(\varphi_h), v_h) = 0$$

ce qui se réécrit

$$a_{\mathcal{C}_1^+}(w_h(\varphi_h), v_h) + a_{\mathcal{C}_2^+}(w_h(\varphi_h), v_h) = 0$$

au vu du support de v_h. Alors avec les notations ci-dessus, on a aussi, en identifiant les diverses cellules de périodicité à la cellule de référence $\mathcal{C}_1^+$:

$$\begin{aligned} &a_{\mathcal{C}_1^+}(w_h(\varphi_h)|_{\mathcal{C}_1^+}, v_h^1) + a_{\mathcal{C}_1^+}(w_h(\varphi_h)|_{\mathcal{C}_1^+}, \eta_h^1(v_h|_{\Gamma_1^+})) \\ &+a_{\mathcal{C}_1^+}(w_h(\varphi_h)|_{\mathcal{C}_2^+}, v_h^2) + a_{\mathcal{C}_1^+}(w_h(\varphi_h)|_{\mathcal{C}_2^+}, \eta_h^0(v_h|_{\Gamma_1^+})) = 0 \end{aligned}$$

Mais, en utilisant (3.13), on obtient :

$$w_h(\varphi_h)|_{\mathcal{C}_1^+} = e_{h,0}(\varphi_h) + e_{h,1}(R_h(\xi)\varphi_h) \quad \text{et} \quad w_h(\varphi_h)|_{\mathcal{C}_2^+} = e_{h,0}(R_h(\xi)\varphi_h) + e_{h,1}(R_h(\xi)^2\varphi_h)$$

D'où :

$$a_{\mathcal{C}_1^+}(w_h(\varphi_h)|_{\mathcal{C}_1^+}, v_h^1) = a_{\mathcal{C}_1^+}(e_{h,0}(\varphi_h), v_h^1) + a_{\mathcal{C}_1^+}(e_{h,1}(R_h(\xi)\varphi_h), v_h^1) = 0$$

et

$$a_{\mathcal{C}_1^+}(w_h(\varphi_h)|_{\mathcal{C}_2^+}, v_h^2) = a_{\mathcal{C}_1^+}(e_{h,0}(R_h(\xi)\varphi_h), v_h^2) + a_{\mathcal{C}_1^+}(e_{h,1}(R_h(\xi)^2\varphi_h), v_h^2) = 0$$

qui sont nuls par définition de $e_{h,0}$ and $e_{h,1}$ comme v_h^1 et v_h^2 sont dans $V_{h,0}^r(\xi)(\mathcal{C}_1^+)$. Il nous reste alors deux termes à traiter :

$$\begin{aligned} a_{\mathcal{C}_1^+}(w_h(\varphi_h)|_{\mathcal{C}_1^+}, \eta_h^1(v_h|_{\Gamma_1^+})) &= a_{\mathcal{C}_1^+}(e_{h,0}(\varphi_h), \eta_h^1(v_h|_{\Gamma_1^+})) + a_{\mathcal{C}_1^+}(e_{h,1}(R_h(\xi)\varphi_h), \eta_h^1(v_h|_{\Gamma_1^+})) \\ &= \Big(T_{h,01}(\xi)\varphi_h, v_h|_{\Gamma_1^+}\Big)_{L^2(\Gamma^+)} + \Big(T_{h,11}(\xi)R_h(\xi)\varphi_h, v_h|_{\Gamma_1^+}\Big)_{L^2(\Gamma^+)} \end{aligned}$$

par définition de $T_{h,01}(\xi)$ et $T_{h,11}(\xi)$. Pour l'autre terme, on a de la même façon :

$$\begin{aligned} a_{\mathcal{C}_1^+}(w_h^1(\varphi_h)|_{\mathcal{C}_2^+}, \eta_h^0(v_h|_{\Gamma_1^+})) &= a_{\mathcal{C}_1^+}(e_{h,0}(R_h(\xi)\varphi_h), \eta_h^0(v_h|_{\Gamma_1^+})) + a_{\mathcal{C}_1^+}(e_{h,1}(R_h(\xi)^2\varphi_h), \eta_h^0(v_h|_{\Gamma_1^+})) \\ &= \Big(T_{h,00}(\xi)R_h(\xi)\varphi_h, v_h|_{\Gamma_1^+}\Big)_{L^2(\Gamma^+)} + \Big(T_{h,10}(\xi)R_h(\xi)^2\varphi_h, v_h|_{\Gamma_1^+}\Big)_{L^2(\Gamma^+)} \end{aligned}$$

par définition de $T_{h,00}(\xi)$ et $T_{h,10}(\xi)$. Alors, pour tout $v_h \in V_{h,0}^r(\xi)(\Omega^+)$ tel que $supp\ v_h \subset \Omega^+ \cap \{a_+ \le x < a_+ + 2L_x\}$:

$$\Big(\big(T_{h,10}(\xi)R_h(\xi)^2 + (T_{h,00}(\xi) + T_{h,11}(\xi))R_h(\xi) + T_{h,01}(\xi)\big)\,\varphi_h, v_h|_{\Gamma_1^+}\Big)_{L^2(\Gamma^+)} = 0$$

Mais on a clairement :

$$X_h^r(\xi) = \Big\{v_h|_{\Gamma_1^+} \ \mid \ \text{tel que } supp\ v_h \subset \Omega^+ \cap \{a_+ \le x < a_+ + 2L_x\}\Big\}$$

on en déduit que, pour tout $\varphi_h \in X_h^r(\xi)$:

$$\big(T_{h,10}(\xi)R_h(\xi)^2 + (T_{h,00}(\xi) + T_{h,11}(\xi))R_h(\xi) + T_{h,01}(\xi)\big)\,\varphi_h = 0$$

ce qui est exactement :

$$T_{h,10}(\xi)R_h(\xi)^2 + (T_{h,00}(\xi) + T_{h,11}(\xi))R_h(\xi) + T_{h,01}(\xi) = 0$$

et donc $R_h(\xi)$ est bien solution de (3.14). Maintenant, soit $\widetilde{R}_h$ une autre solution de (3.14) de rayon spectral strictement inférieur à 1. On définit :

$$\widetilde{w}_h(\varphi_h)|_{\mathcal{C}_j^+} = e_h^0(\widetilde{R}_h^{j-1}\varphi_h) + e_h^1(\widetilde{R}_h^j\varphi_h)$$

Comme le rayon spectral de $\widetilde{R}_h$ est strictement inférieur à 1, il existe $0 < \rho_* < 1$ et N_0 tels que, pour tout $N \geq N_0$:$||\widetilde{R}_h^N|| \leq \rho_*^N$, on a :

$$||\widetilde{w}_h(\varphi_h)||^2_{H^1(B_0^+)} \leq C^{st} + ||\left(\widetilde{w}_h(\varphi_h)\right)|_{\mathcal{C}_1^+}||^2_{H^1(\mathcal{C}^+)} \sum_{N_0+1}^{+\infty} \rho_*^{2N}$$

et par conséquent $\widetilde{w}_h(\varphi_h) \in V_h^r(\xi)(B_0^+)$. De plus, pour tout $v_h \in V_{h,0}^r(\xi)(B_0^+)$, on a :

$$a_{\mathcal{C}_1^+}(\widetilde{w}_h(\varphi_h)|_{\mathcal{C}_j^+}, v_h|_{\mathcal{C}_j^+}) = a_{\mathcal{C}_1^+}(e_{h,0}(\widetilde{R}_h^{j-1}\varphi_h), v_h|_{\mathcal{C}_j^+}) + a_{\mathcal{C}_1^+}(e_{h,1}(\widetilde{R}_h^j\varphi_h), v_h|_{\mathcal{C}_j^+})$$

Alors, pour tout $v_h \in V_h^r(\mathcal{C})$, on définit $v_h^0 \in V_{h,0}^r(\mathcal{C}^+)$ par :

$$v_h^0|_{\mathcal{C}_j^+} = v_h|_{\mathcal{C}_j^+} - \eta_h^0(v_h|_{\Gamma_{j-1}^+})|_{\mathcal{C}_1^+} - \eta_h^1(v_h|_{\Gamma_j^+})|_{\mathcal{C}_1^+}$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} a_{\mathcal{C}_1^+}(\widetilde{w}_h(\varphi_h)|_{\mathcal{C}_j^+}, v_h|_{\mathcal{C}_j^+}) &= a_{\mathcal{C}_1^+}(e_{h,0}(\widetilde{R}_h^{j-1}\varphi_h), v_h^0|_{\mathcal{C}_j^+}) + a_{\mathcal{C}_1^+}(e_{h,1}(\widetilde{R}_h^j\varphi_h), v_h^0|_{\mathcal{C}_j^+}) \\ &+ a_{\mathcal{C}_1^+}(e_{h,0}(\widetilde{R}_h^{j-1}\varphi_h), \eta_h^0(v_h|_{\Gamma_{j-1}^+})) + a_{\mathcal{C}_1^+}(e_{h,1}(\widetilde{R}_h^j\varphi_h), \eta_h^1(v_h|_{\Gamma_j^+})) \\ &+ a_{\mathcal{C}_1^+}(e_{h,0}(\widetilde{R}_h^{j-1}\varphi_h), \eta_h^0(v_h|_{\Gamma_{j-1}^+})) + a_{\mathcal{C}_1^+}(e_{h,1}(\widetilde{R}_h^j\varphi_h), \eta_h^1(v_h|_{\Gamma_j^+})) \end{aligned}$$

ce qui s'écrit aussi :

$$\begin{aligned} a_{\mathcal{C}_1^+}(\widetilde{w}_h(\varphi_h)|_{\mathcal{C}_j^+}, v_h|_{\mathcal{C}_j^+}) &= \left(\left(T_{h,00}(\xi)\widetilde{R}_h^{j-1} + T_{h,10}(\xi)\widetilde{R}_h^j\right)\varphi_h, v_h|_{\Gamma_{j-1}^+}\right)_{L^2(\Gamma^+)} \\ &+ \left(\left(T_{h,01}(\xi)\widetilde{R}_h^{j-1} + T_{h,11}(\xi)\widetilde{R}_h^j\right)\varphi_h, v_h|_{\Gamma_j^+}\right)_{L^2(\Gamma^+)} \end{aligned}$$

Alors en sommant sur j comme $\widetilde{w}_h(\varphi_h)$ et v_h sont H^1, on obtient :

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{+\infty} \left(\left(T_{h,00}(\xi)\widetilde{R}_h^{j-1} + T_{h,10}(\xi)\widetilde{R}_h^j\right)\varphi_h, v_h|_{\Gamma_{j-1}}\right)_{L^2(\Gamma^+)} \\ &+ \left(\left(T_{h,01}(\xi)\widetilde{R}_h^{j-1} + T_{h,11}(\xi)\widetilde{R}_h^j\right)\varphi_h, v_h|_{\Gamma_j^+}\right)_{L^2(\Gamma^+)} \\ = &\left(\left(T_{h,10}(\xi)\widetilde{R}_h^2 + (T_{h,00}(\xi) + T_{h,11}(\xi))\widetilde{R}_h + T_{h,01}(\xi)\right)\widetilde{R}_h^{j-1}\varphi_h, v_h|_{\Gamma_{j-1}^+}\right)_{L^2(\Gamma^+)} \end{aligned}$$

et vaut par conséquent 0. Donc :

$$a_{\Omega^+}(\widetilde{w}_h(\varphi_h), v_h) = \sum_{j=1}^{+\infty} a_{\mathcal{C}_1^+}(\widetilde{w}_h(\varphi_h)|_{\mathcal{C}_j^+}, v_h|_{\mathcal{C}_j^+}) = 0$$

et donc au final, comme $\widetilde{w}_h(\varphi_h)|_{\Gamma_0^+} = \varphi_h$, $\widetilde{w}_h(\varphi_h)$ est solution du même problème que $w_h(\varphi_h)$ qui est bien posé, il sont alors égaux, d'où $\widetilde{R}_h = R_h(\xi)$. □

Le premier pas de temps discret se traite donc exactement comme son homologue continu, à condition de remplacer les traces normales par leurs équivalents faibles. On en déduit immédiatement une expression pour le premier opérateur DtN :

Théorème 3.9. *On a l'expression suivante pour* $\Lambda_h(\xi)$

$$\Lambda_h(\xi) = T_{h,00}(\xi) + T_{h,10}(\xi)R_h(\xi) \tag{3.15}$$

Démonstration. Par définition, on a :

$$(\Lambda h(\xi)\varphi_h, \psi_h)_{\Gamma^+} = a_{B_0^+}(w_h(\varphi_h), \eta_h^0(\psi_h))$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned} a_{\mathcal{C}_1^+}(w_h(\varphi_h), \eta_h^0(\psi_h)) &= a_{\mathcal{C}_1^+}e_{h,0}(\varphi_h), \eta_h^0(\psi_h)) + a_{\mathcal{C}_1^+}(e_{h,1}(R_h(\xi)\varphi_h), \eta_h^0(\psi_h)) \\ &= \left((T_{h,00}(\xi) + T_{h,10}(\xi)R_h(\xi))\varphi_h, \psi_h\right)_{\Gamma^+} \end{aligned}$$

Mais, on se rappelle alors que $supp\ \eta_h^{0,+}(u_h)|_{\Omega^+}$ est inclus dans $\mathcal{C}_1^+$, d'où :

$$a_{B_0^+}(w_h(\varphi_h), \eta_h^0(\psi_h)) = a_{\mathcal{C}_1^+}(w_h(\varphi_h), \eta_h^0(\psi_h))$$

et le résultat est démontré. □

La méthode de construction des opérateurs DtN en milieu périodique introduite dans [37] peut donc sans trop de difficultés être transposée au niveau discret, si l'on définit avec précaution les divers opérateurs. L'intérêt d'avoir complètement réappliqué la méthode, plutôt que d'avoir simplement défini des $T_{h,ij}(\xi)$ discrets, et d'en avoir déduit un $R_h(\xi)$ puis un $\Lambda_h(\xi)$, qui n'aurait alors été que respectivement la solution d'une équation quadratique non liée à un problème de demi-guide, et le résultat d'une formule, est justement de bénéficier de la réinterprétation du problème intérieur discret (3.5) comme la restriction de la solution de (3.2) à Ω_0^0. Ce résultat nous permet tout d'abord de démontrer la convergence de la solution de (3.5) vers la solution du problème continu, comme conséquence directe de celle de la solution de (3.2) vers son homologue continu. Mais surtout, il va nous permettre de réinterpréter l'équation de Lippmann-Schwinger complètement discrète comme une discrétisation spatiale d'un problème continu, qui ne sera rien d'autre que le problème en lequel se réinterprète l'équation de Lippmann-Schwinger semi-discrète. Cette nouvelle réinterprétation nous permettra de démontrer une estimation d'erreur complète.

3.3 Analyse de l'équation de Lippmann-Schwinger discrète

L'étape suivante consiste à discrétiser en espace l'équation de Lippmann-Schwinger semi-discrète :

$$(I - S_{0,\rho,\Delta k})u_{\Delta k} = S_{0,\Delta k} f \tag{2.25}$$

où :

$$\begin{array}{ccccc} S_{0,\Delta k} : L^2(\Omega_0) & \longrightarrow & H^1(\Omega_0) & \qquad & S_{0,\rho,\Delta k} : L^2(\Omega_0) & \longrightarrow & H^1(\Omega_0) \\ f & \longmapsto & S_{0,\Delta k} f & & f & \longmapsto & S_{0,\rho,\Delta k} f \end{array}$$

et pour tout $m \in [\![-M^-, M^+ - 1]\!]$, si l'on se restreint au cas de la règle des trapèzes étudiée au chapitre précédent :

$$S_{0,\Delta k} f|_{\Omega_0^m} \equiv \Delta k \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \sum_{j=1}^{N_k} \hat{S}_0(j\Delta k) f e^{imj\Delta kL} \tag{2.29}$$

et :

$$S_{0,\rho,\Delta k} f|_{\Omega_0^m} \equiv -(\omega^2 + i\varepsilon\omega)\Delta k \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \sum_{j=1}^{N_k} \hat{S}_0(j\Delta k)(\rho_p - \rho) f e^{imj\Delta kL} \tag{2.30}$$

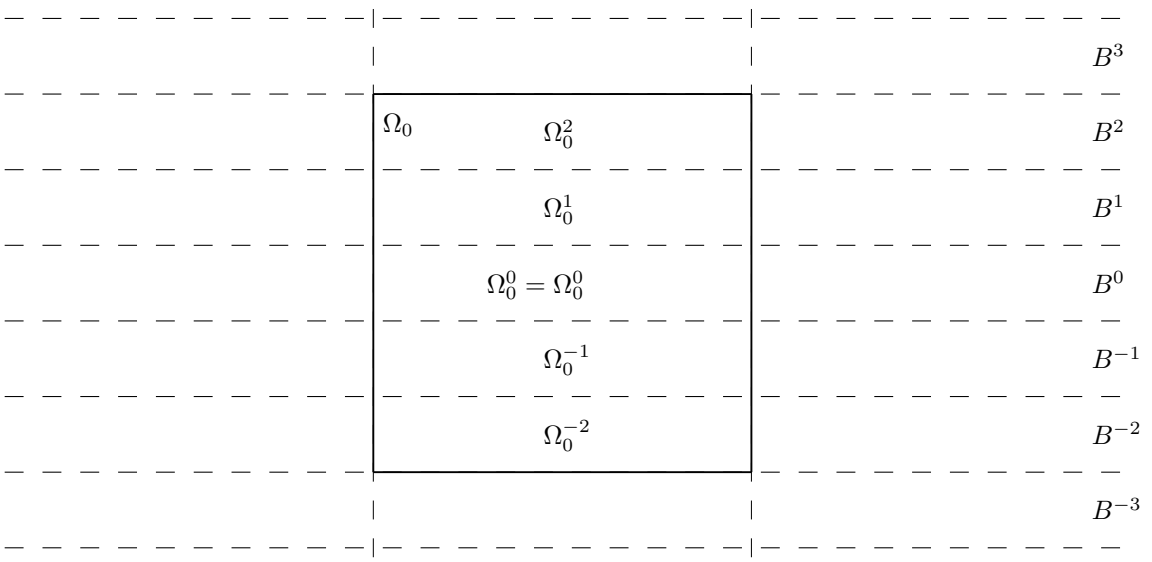
Nous venons de voir que nous pouvions calculer pour tout ξ, à partir de la résolution de problèmes posés en domaines bornés, l'opérateur $\hat{S}_{0,h}(\xi)$ dont nous savons qu'il constitue, à ξ fixé, une approximation convergente de $\hat{S}_0(\xi)$. Aussi, il est naturel de définir les approximation spatiales suivantes des opérateurs ci-dessus : pour tout $m \in [\![-M^-, M^+ - 1]\!]$, nous posons :

$$S_{0,h,\Delta k} f|_{\Omega_0^m} \equiv \Delta k \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \sum_{j=1}^{N_k} \hat{S}_{0,h}(j\Delta k) f e^{imj\Delta kL} \tag{3.16}$$

et :

$$S_{0,\rho,h,\Delta k} f|_{\Omega_0^m} \equiv -(\omega^2 + i\varepsilon\omega)\Delta k \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \sum_{j=1}^{N_k} \hat{S}_{0,h}(j\Delta k)(\rho_p - \rho) f e^{imj\Delta kL} \tag{3.17}$$

Remarquons que nous définissons implicitement, Ω_0^m par Ω_0^m, un maillage sur Ω_0 et l'espace d'éléments finis associé.



En effet, si on pose :

$$\mathcal{T}_h(\Omega_0) = \left\{T_j = T + nLe_y \ \mid \ T \in \mathcal{T}_h(\Omega_0^0) \ \ n \in [\![-M^-, M^+ - 1]\!]\right\}$$

et :

$$V_h^r(\Omega_0) = \left\{v_h \in C^0(\Omega_0) \ \mid \ v_{h|_T} \in Q_r(T), \ \ T \in \mathcal{T}_h(\Omega_0)\right\}$$

qui est clairement de dimension finie, puisque l'on n'a qu'un nombre fini d'éléments T dans le maillage $\mathcal{T}_h(\Omega_0)$, alors, il est évident que les deux opérateurs définis ci-dessus satisfont :

$$S_{0,h,\Delta k} : L^2(\Omega_0) \quad \longrightarrow \quad V_h^r(\Omega_0)$$

$$S_{0,\rho,h,\Delta k} : L^2(\Omega_0) \quad \longrightarrow \quad V_h^r(\Omega_0)$$

et nous pouvons donc formuler avec précision l'équation complètement discrète que l'on résout en pratique :

Trouver $u_{h,\Delta k} \in V_h^r(\Omega_0)$ tel que :

$$(I - S_{0,\rho,h,\Delta k})u_{h,\Delta k} = S_{0,h,\Delta k} f \tag{3.18}$$

ce qui s'écrit aussi :

$$\begin{aligned} &u_{h,\Delta k}|_{\Omega_0^m} + (\omega^2 + i\varepsilon\omega)\Delta k\sqrt{\frac{L}{2\pi}}\sum_{j=1}^{N_k} \hat{S}_{0,h}(j\Delta k)(\rho_p - \rho)u_{h,\Delta k}e^{imj\Delta kL} \\ &\quad = \Delta k\sqrt{\frac{L}{2\pi}}\sum_{j=1}^{N_k} \hat{S}_{0,h}(j\Delta k) f e^{imj\Delta kL} \quad \forall\, m \in [\![-M^-, M^+ - 1]\!] \end{aligned} \tag{3.19}$$

Comme dans le cas semi-discret, les questions naturelles sont le caractère bien posé de cette équation, ainsi que la qualité de l'approximation ainsi réalisée. Ces deux questions vont pouvoir être résolues de la même manière que précédemment, c'est-à-dire au moyen d'une réinterprétation de cette équation, cette fois non plus comme une EDP, mais comme une formulation variationnelle, que nous pourrons comparer à l'EDP (2.33) à laquelle l'équation de Lippmann-Schwinger semi-discrète (2.25) est équivalente. Signalons que l'analyse que nous allons conduire ici est indépendante de la géométrie de Ω_0 et donc de celle de Ω_0^0, pourvu que l'on dispose de maillages appropriés (i.e. se raccordant de façon conforme), et que l'on soit capable de construire les conditions DtN discrètes exactes. Aussi, les résultats que nous allons démontrer ici resteront valables dans le cas du scattering multiple, que nous traiterons plus loin dans ce chapitre.

3.3.1 Réinterprétation de l'équation de Lippmann-Schwinger discrète

Le point de départ de cette réinterprétation est le même que dans le cas semi-discret. On part d'une solution $u_{h,\Delta k}$ de l'équation de Lippmann-Schwinger discrète, et on se sert de l'équation pour construire une extension $\widetilde{u}_{h,\Delta k}$ définie sur tout $\mathbb{R}^2$. Nous posons donc, par analogie avec le cas semi-discret, pour tout $m \in \mathbb{Z}$:

$$\widetilde{u}_{h,\Delta_k}|_{B^m} \equiv \Delta k \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \sum_{j=1}^{N_k} \hat{S}_h(j\Delta k) \left(f - (\omega^2 + i\varepsilon\omega)(\rho_p - \rho) u_{h,\Delta k}\right) e^{imj\Delta kL}$$

On a donc :

$$\begin{aligned}\widetilde{u}_{h,\Delta_k}|_{\Omega_0^m} &\equiv \Delta k \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \sum_{j=1}^{N_k} \hat{S}_h(j\Delta k) \left(f - (\omega^2 + i\varepsilon\omega)(\rho_p - \rho) u_{h,\Delta k}\right) |_{\Omega_0^0} e^{imj\Delta kL} \\ &= \Delta k \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \sum_{j=1}^{N_k} \hat{S}_{0,h}(j\Delta k) \left(f - (\omega^2 + i\varepsilon\omega)(\rho_p - \rho) u_{h,\Delta k}\right) e^{imj\Delta kL}\end{aligned}$$

Comme $\hat{S}_{0,h}(j\Delta k) = \hat{S}_h(j\Delta k)|_{\Omega_0^0}$ en vertu du théorème 3.6, il s'agit bien d'une extension. Nous cherchons maintenant à savoir si $\widetilde{u}_{h,\Delta k}$ est solution d'un problème relié à (2.33). Notons qu'en identifiant toute bande B^m du plan à $B^0 = B_0$, nous avons implicitement défini un maillage de tout le plan $\mathbb{R}^2$, en concaténant des maillages de guide translatés. Plus précisément, pour toute bande $\Omega_{q,p} = \mathbb{R} \times \{qL \leq y \leq pL\}$, nous définissons le maillage :

$$\mathcal{T}_h(\Omega_{q,p}) = \{T_j = T + nLe_y \ \mid \ T \in \mathcal{T}_h(B_0) \ \ n \in [\![q, p]\!]\}$$

c'est-à-dire en concaténant une translation du maillage de guide $\mathcal{T}_h(B_0)$. Ceci produit un maillage conforme grâce aux conditions que nous avons imposées initialement pour pouvoir définir les conditions quasi-périodiques. Puis nous définissons l'espace d'éléments finis associé :

$$V_h^r(\Omega_{q,p}) = \left\{v_h \in H^1(\Omega_{q,p} \cap C^0(\Omega_{q,p}) \ \mid \ v_{h|_T} \in Q_r(T), \ \ T \in \mathcal{T}_h(\Omega_{q,p})\right\}$$

et sa version périodisée :

$$V_{h,per}^r(\Omega_{q,p}) = V_h^r(\Omega_{q,p}) \cap H^1_{\xi=0}(\Omega_{q,p})$$

On montre alors aisément, en procédant comme dans le preuve du théorème 3.1, que :

Lemme 3.4. *$V_h^r(\Omega_0), V_h^r(\Omega_{q,p})$ et $V_{h,per}^r(\Omega_{q,p})$ pour tout q, p dans $\mathbb{Z}$, sont des espaces de Hilbert pour la norme H^1.*

Nous introduisons ce dernier espace en anticipant le fait que $\widetilde{u}_{h,\Delta_k}$ est solution d'un problème avec conditions périodiques. Maintenant, pour tout $v_h \in V_{h,per}^r(\Omega_{N_k})$, nous notons $v_h^m \equiv v_{h|_{B^m}}$. Nous allons avoir besoin du lemme suivant pour déterminer le problème dont $\widetilde{u}_{h,\Delta k}$ est solution :

Lemme 3.5. *Soit $v_h \in V_{h,per}^r(\Omega_{N_k})$. La fonction $\sigma_j(v_h)$ définie par :*

$$\sigma_j(v_h) = \sum_{m=\lfloor \frac{-N_k}{2} \rfloor}^{\lfloor \frac{N_k}{2} \rfloor} v_h^m e^{-imj\Delta kL}$$

appartient à $V_h^r(j\Delta k)(B_0)$.

Démonstration. Clairement, par définition de $V^r_{h,per}(\Omega_{N_k})$, nous avons $\sigma_j(v_h) \in V^r_h$, nous n'avons donc plus qu'à vérifier la condition de quasi-périodicité. Par définition de v^p_h dans Ω_{N_k}, nous avons :

$$v^p_{h|_{y=L}} = v_{h|_{y=(p+1)L}}$$

d'où :

$$\begin{aligned}
\sigma_j(v_h)_{|_{y=L}} &= \sum_{m=\lfloor \frac{-N_k}{2} \rfloor}^{\lfloor \frac{N_k}{2} \rfloor} v_{h|_{y=(p+1)L}} e^{-imj\Delta kL} = \sum_{m=\lfloor \frac{-N_k}{2} \rfloor+1}^{\lfloor \frac{N_k}{2} \rfloor+1} v_{h|_{y=mL}} e^{-i(m-1)j\Delta kL} \\
&= e^{ij\Delta kL} \sum_{m=\lfloor \frac{-N_k}{2} \rfloor+1}^{\lfloor \frac{N_k}{2} \rfloor+1} v_{h|_{y=mL}} e^{-imj\Delta kL} \\
&= e^{ij\Delta kL} \sum_{m=\lfloor \frac{-N_k}{2} \rfloor+1}^{\lfloor \frac{N_k}{2} \rfloor} v_{h|_{y=mL}} e^{-imj\Delta kL} + e^{ij\Delta kL} v_{h|_{y=(\lfloor \frac{N_k}{2} \rfloor+1)L}} e^{-i\lfloor \frac{N_k}{2} \rfloor j\Delta kL}
\end{aligned}$$

Alors en utilisant la périodicité de v_h et la formule (2.28) :

$$\begin{aligned}
\sigma_j(v_h)_{|_{y=L}} &= e^{ij\Delta kL} \sum_{p=\lfloor \frac{-N_k}{2} \rfloor+1}^{\lfloor \frac{N_k}{2} \rfloor} v_{h|_{y=mL}} e^{-imj\Delta kL} + e^{ij\Delta kL} v_{h|_{y=(\lfloor \frac{-N_k}{2} \rfloor+1)L}} e^{-i\lfloor \frac{-N_k}{2} \rfloor j\Delta kL} \\
&= e^{ij\Delta kL} \sum_{m=\lfloor \frac{-N_k}{2} \rfloor}^{\lfloor \frac{N_k}{2} \rfloor} v_{h|_{y=mL}} e^{-imj\Delta kL} = \sigma_j(v_h)_{|_{y=0}}
\end{aligned}$$

□

Alors nous pouvons démontrer que :

Théorème 3.10. *La fonction $\widetilde{u}_{h,\Delta k}$, extension d'une solution $u_{h,\Delta k}$ de (3.18) est solution dans $V^r_{h,per}(\Omega_{N_k})$ du problème bien posé suivant :*
Trouver $\widetilde{u}_{h,\Delta k} \in V^r_{h,per}(\Omega_{N_k})$ telle que, pour tout $v_h \in V^r_{h,per}(\Omega_{N_k})$:

$$(\nabla \widetilde{u}_{h,\Delta k}, \nabla v_h)_{L^2(\Omega_{N_k})} - (\omega^2 + i\varepsilon\omega)\,(\rho \widetilde{u}_{h,\Delta k}, v_h)_{L^2(\Omega_{N_k})} = (f, v_h)_{L^2(\Omega_{N_k})} \tag{3.20}$$

Démonstration. Nous divisons la preuve en deux grandes étapes. Nous commençons par montrer que $\widetilde{u}_{h,\Delta k}$ est bien un élément de $V^r_{h,per}(\Omega_{N_k})$, puis nous montrons qu'elle satisfait bien l'équation annoncée.

(i) $\widetilde{u}_{h,\Delta k}$ est un élément de $V^r_{h,per}(\Omega_{N_k})$

Tout d'abord, il est clair que $\widetilde{u}_{h,\Delta k} \in V^r_h(\xi)(B^m)$ pour tout m dans $\mathbb{Z}$, par construction. Alors, en notant encore $\widetilde{u}^m_{h,\Delta k} = \widetilde{u}_{h,\Delta_k}|_{B^m}$, nous avons :

$$\begin{aligned}
\widetilde{u}^p_{h,\Delta k|_{y=(p+1)L}} &= \Delta k \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \sum_{j=1}^{N_k} \hat{S}_h(j\Delta k) \left(f - (\omega^2 + i\varepsilon\omega)(\rho_p - \rho) u_{h,\Delta k}\right)_{|_{y=L}} e^{ipj\Delta kL} \\
&= \Delta k \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \sum_{j=1}^{N_k} \hat{S}_h(j\Delta k) \left(f - (\omega^2 + i\varepsilon\omega)(\rho_p - \rho) u_{h,\Delta k}\right)_{|_{y=0}} e^{ij\Delta kL} e^{ipj\Delta kL} \\
&= \Delta k \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \sum_{j=1}^{N_k} \hat{S}_h(j\Delta k) \left(f - (\omega^2 + i\varepsilon\omega)(\rho_p - \rho) u_{h,\Delta k}\right)_{|_{y=0}} e^{i(p+1)j\Delta kL} \\
&= \widetilde{u}^{p+1}_{h,\Delta k|_{y=(p+1)L}}
\end{aligned}$$

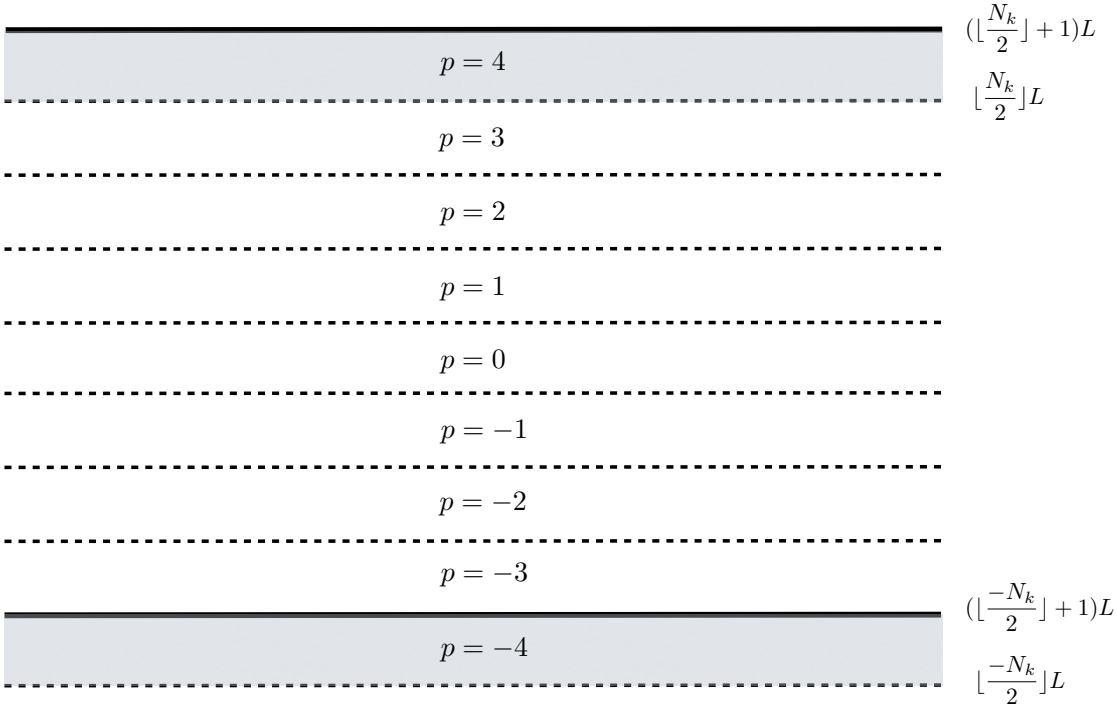


FIGURE 3.9 – Exemple pour $N_k = 8$, les zones grisées représentent les domaines où la fonction est identique, les lignes en gras les frontières $\Gamma^+_{N_k}$ et $\Gamma^-_{N_k}$ de Ω_{N_k}

en utilisant la quasi-périodicité de $\hat{S}_h(\xi)$, et est par conséquent continue en trace. Alors nous avons $\widetilde{u}_{h,\Delta k} \in V^r_h(\Omega_{q,p})$ pour tout q, p dans $\mathbb{Z}$. Puis, nous montrons que $\widetilde{u}_{h,\Delta k}$ satisfait des conditions de périodicité. En effet, de (2.28) nous déduisons :

$$\begin{aligned}
\widetilde{u}^{\lfloor \frac{N_k}{2} \rfloor}_{h,\Delta_k} &= \Delta k \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \sum_{j=1}^{N_k} \hat{S}_h(j\Delta k) \left(f - (\omega^2 + i\varepsilon\omega)(\rho_p - \rho) u_{h,\Delta k} \right) e^{i \lfloor \frac{N_k}{2} \rfloor j \frac{2\pi}{N_k}} \\
&= \Delta k \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \sum_{j=1}^{N_k} \hat{S}_h(j\Delta k) \left(f - (\omega^2 + i\varepsilon\omega)(\rho_p - \rho) u_{h,\Delta k} \right) e^{i \lfloor \frac{-N_k}{2} \rfloor j \frac{2\pi}{N_k}} \\
&= \widetilde{u}^{\lfloor \frac{-N_k}{2} \rfloor}_{h,\Delta_k}
\end{aligned}$$

Alors, nous en déduisons que :

$$\widetilde{u}_{h,\Delta_k|_{y=\left(\lfloor \frac{N_k}{2} \rfloor + 1\right)L}} = \widetilde{u}^{\lfloor \frac{N_k}{2} \rfloor}_{h,\Delta_k|_{y=L}} = \widetilde{u}^{\lfloor \frac{-N_k}{2} \rfloor}_{h,\Delta_k|_{y=L}} = \widetilde{u}_{h,\Delta_k|_{y=\left(\lfloor \frac{-N_k}{2} \rfloor + 1\right)L}}$$

donc

$$\widetilde{u}_{h,\Delta k} \in V^r_{h,per}(\Omega_{N_k}) = V^r_{h,per}(\Omega_{N_k})$$

(ii) $\widetilde{u}_{h,\Delta k}$ est solution de (3.20)

Pour tout $v_h \in V^r_{h,per}(\Omega_{N_k})$, et tout $m \in \mathbb{Z}$, nous avons :

$$\begin{aligned}
&\left(\nabla \widetilde{u}^m_{h,\Delta k}, \nabla v^m_h \right)_{L^2(B_0)} - (\omega^2 + i\varepsilon\omega) \left(\rho_p \widetilde{u}^m_{h,\Delta k}, v^m_h \right)_{L^2(B_0)} \\
&= \Delta k \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \sum_{j=1}^{N_k} \left(\nabla \hat{S}_h(j\Delta k) \left(f - (\omega^2 + i\varepsilon\omega)(\rho_p - \rho) u_{h,\Delta k} \right) e^{imj\Delta k L}, \nabla v^m_h \right)_{L^2(B_0)} \\
&\quad -(\omega^2 + i\varepsilon\omega) \left(\rho_p \hat{S}_h(j\Delta k) \left(f - (\omega^2 + i\varepsilon\omega)(\rho_p - \rho) u_{h,\Delta k} \right) e^{ipj\Delta k L}, v^m_h \right)_{L^2(B_0)}
\end{aligned}$$

$$= \Delta k \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \sum_{j=1}^{N_k} \left(\nabla \hat{S}_h(j\Delta k) \left(f - (\omega^2 + i\varepsilon\omega)(\rho_p - \rho) u_{h,\Delta k} \right), \nabla v_h^m e^{-imj\Delta kL} \right)_{L^2(B_0)}$$
$$-(\omega^2 + i\varepsilon\omega) \left(\rho_p \hat{S}_h(j\Delta k) \left(f - (\omega^2 + i\varepsilon\omega)(\rho_p - \rho) u_{h,\Delta k} \right), v_h^m e^{-imj\Delta kL} \right)_{L^2(B_0)}$$

Par conséquent, nous avons :

$$\left(\nabla \widetilde{u}_{h,\Delta k}, \nabla v_h \right)_{L^2(\Omega_{N_k})} - (\omega^2 + i\varepsilon\omega) \left(\rho_p \widetilde{u}_{h,\Delta k}, v_h \right)_{L^2(\Omega_{N_k})}$$
$$= \sum_{m=\lfloor \frac{-N_k}{2} \rfloor + 1}^{\lfloor \frac{N_k}{2} \rfloor} \left(\nabla \widetilde{u}_{h,\Delta k}^p, \nabla v_h^p \right)_{L^2(B_0)} - (\omega^2 + i\varepsilon\omega) \left(\rho_p \widetilde{u}_{h,\Delta k}^p, v_h^m \right)_{L^2(B_0)}$$
$$= \Delta k \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \sum_{j=1}^{N_k} \left(\nabla \hat{S}_h(j\Delta k) \left(f - (\omega^2 + i\varepsilon\omega)(\rho_p - \rho) u_{h,\Delta k} \right), \nabla \sigma_j(v_h) \right)_{L^2(B_0)}$$
$$-(\omega^2 + i\varepsilon\omega) \left(\rho_p \hat{S}_h(j\Delta k) \left(f - (\omega^2 + i\varepsilon\omega)(\rho_p - \rho) u_{h,\Delta k} \right), \sigma_j(v_h) \right)_{L^2(B_0)}$$

Comme $\sigma_j(v_h) \in V_h^r(j\Delta k)(B_0)$ en vertu du lemme 3.5, nous avons par définition de $\hat{S}_h(j\Delta k)$:

$$\left(\nabla \widetilde{u}_{h,\Delta k}, \nabla v_h \right)_{L^2(\Omega_{N_k})} - (\omega^2 + i\varepsilon\omega) \left(\rho_p \widetilde{u}_{h,\Delta k}, v_h \right)_{L^2(\Omega_{N_k})}$$
$$= \Delta k \frac{L}{2\pi} \sum_{j=1}^{N_k} \sum_{n=-M^-}^{M^+} \left(\left(f - (\omega^2 + i\varepsilon\omega)(\rho_p - \rho) u_{h,\Delta k} \right)|_{B^n}, \sigma_j(v_h) \right)_{L^2(B_0)} e^{-inj\Delta kL}$$

Alors, en réexprimant $\sigma_j(v_h)$:

$$= \frac{1}{N_k} \sum_{j=1}^{N_k} \sum_{n=-M^-}^{M^+} \sum_{m=\lfloor \frac{-N_k}{2} \rfloor}^{\lfloor \frac{N_k}{2} \rfloor} e^{i(m-n)j\Delta kL} \left(\left(f - (\omega^2 + i\varepsilon\omega)(\rho_p - \rho) u_{h,\Delta k} \right)_{|B^n}, v_h^m \right)_{L^2(B_0)}$$
$$= \sum_{m=\lfloor \frac{-N_k}{2} \rfloor}^{\lfloor \frac{N_k}{2} \rfloor} \sum_{n=-M^-}^{M^+} q_{\Delta k,n,m} \left(\left(f - (\omega^2 + i\varepsilon\omega)(\rho_p - \rho) u_{h,\Delta k} \right)|_{B^n}, v_h^m \right)_{L^2(B_0)}$$

Maintenant, pour tout $m \in [\![\lfloor \frac{-N_k}{2} \rfloor, \lfloor \frac{N_k}{2} \rfloor]\!]$, nous savons que $q_{\Delta k,n,m} = \delta_{nm}$, donc nous obtenons, en utilisant le fait que $supp\ (\rho_p - \rho) \subset \Omega_0$ et que $\widetilde{u}_{h,\Delta k}$ est une extension de $u_{h,\Delta k}$:

$$\left(\nabla \widetilde{u}_{h,\Delta k}, \nabla v_h \right)_{L^2(\Omega_{N_k})} - (\omega^2 + i\varepsilon\omega) \left(\rho_p \widetilde{u}_{h,\Delta k}, v_h \right)_{L^2(\Omega_{N_k})}$$
$$= \left(\left(f - (\omega^2 + i\varepsilon\omega)(\rho_p - \rho) \widetilde{u}_{h,\Delta k} \right), v_h^m \right)_{L^2(\Omega_{N_k})}$$

ce qui se réécrit :

$$\left(\nabla \widetilde{u}_{h,\Delta k}, \nabla v_h \right)_{L^2(\Omega_{N_k})} - (\omega^2 + i\varepsilon\omega) \left(\rho \widetilde{u}_{h,\Delta k}, v_h \right)_{L^2(\Omega_{N_k})} = (f, v_h)_{L^2(\Omega_{N_k})}$$

Enfin, on montre que ce problème est bien posé en reproduisant la preuve du théorème 3.4, donc (3.20) n'est qu'un cas particulier. □

Nous voyons donc que l'équation de Lippmann-Schwinger discrète peut non seulement être réinterprétée comme la solution d'un problème variationnel, comme l'équation semi-discrète pouvait l'être en une EDP, mais qu'il est clair que ce problème variationnel constitue une approximation de l'EDP correspondant à l'équation de Lippmann-Schwinger semi-discrète. Cela va nous permettre d'établir très facilement le caractère bien posé de (3.18), ainsi qu'une estimation d'erreur globale.

Théorème 3.11. *Pour tout $f \in L^2(\Omega_0)$, il existe un unique $u_{h,\Delta k} \in V_h^r(\Omega)$ solution de :*

$$(I - S_{0,\rho,h,\Delta k}) u_{h,\Delta k} = S_{0,h,\Delta k} f \tag{3.18}$$

Démonstration. Comme $V_h^r(\Omega)$ est de dimension finie, comme nous l'avons remarqué plus tôt, il nous faut seulement démontrer l'unicité. Supposons que $u_{h,\Delta k}$ soit une solution de (3.18) pour $f = 0$. On construit alors son extension $\widetilde{u}_{h,\Delta k}$, qui d'après le théorème 3.10 est solution de (3.20), sans source. Comme ce problème est bien posé, nous savons alors que $\widetilde{u}_{h,\Delta k} = 0$. Par conséquent $u_{h,\Delta k} = 0$, et l'unicité pour (3.18) est démontrée. □

3.3.2 Estimation d'erreur globale

Nous disposons d'un équivalent discret de notre équation de Lippmann-Schwinger, qui est un problème bien posé. Nous savons de plus que nous approchons correctement chacun des opérateurs impliqués, c'est-à-dire que nous en avons réalisé une approximation consistante. Il est donc pratiquement évident à ce stade que nous avons défini une approximation convergente de notre problème continu, puisque le problème en lequel se réinterprète l'équation discrète est bien posé (ce qui devrait fournir de la stabilité a priori). Nous allons maintenant nous en assurer, et estimer la vitesse à laquelle cette convergence a lieu. Pour cela, nous commençons par montrer que le problème (3.20), issu de la réinterprétation de (3.18), est une approximation convergente de (2.33), issu de la réinterprétation de (2.25) :

Théorème 3.12. *Il existe une constante $C > 0$ indépendante de h et N_k telle que, pour tout $f \in L^2(\Omega_0)$, si $u_{\Delta k}$ est la solution de (2.33) et $u_{h,\Delta k}$ celle de (3.20) :*

$$||u_{\Delta k} - u_{h,\Delta k}||_{H^1(\Omega_{N_k})} \leq Ch||f||_{L^2(\Omega_0)} \tag{3.21}$$

Démonstration. Nous savons que la forme bilinéaire :

$$a_{\Omega_{N_k}}(u,v) = (\nabla u, \nabla v)_{L^2(\Omega_{N_k})} - (\omega^2 + i\varepsilon\omega)\,(\rho_p u, v)_{L^2(\Omega_{N_k})}$$

est continue et coercive en norme H^1 d'après le lemme 1.1, et plus précisément :

$$|a_{\Omega_{N_k}}(v,v)| \geq \eta|\omega_\eta| \min(\frac{1}{|\omega_\eta|^2}, \rho_-)||v||^2_{H^1}$$

et

$$|a_{\Omega_{N_k}}(u,v)| \leq max(1, |\omega^2 + i\varepsilon\omega|\rho_-)||u||_{H^1}||v||_{H^1}$$

Alors, le lemme de Céa nous assure de l'existence de $C > 0$ indépendante de h et N_k telle que :

$$||u_{\Delta k} - u_{h,\Delta k}||_{H^1(\Omega_{N_k})} \leq C \inf_{v_h \in V^r_{h,per}} ||u_{\Delta k} - v_h||_{H^1(\Omega_{N_k})}$$

Puis le lemme 1.2 nous apprend que $u_{\Delta k} \in H^2_{per}(\Omega_{N_k})$. Alors, le lemme 3.3 conduit à :

$$||u_{\Delta k} - u_{h,\Delta k}||_{H^1(\Omega_{N_k})} \leq Ch|u_{\Delta k}|_{H^2(\Omega_{N_k})}$$

Il ne reste plus qu'à nous assurer que $|u_{\Delta k}|_{H^2(\Omega_{N_k})}$ peut se majorer indépendamment de N_k. En reprenant les estimations classiques de théorie elliptique (i.e. la méthode des quotients différentiels de Nirenberg, cf [15]), on montre qu'il existe $C > 0$ indépendante de N_k, telle que :

$$||u_{\Delta k}||_{H^2(\Omega_{N_k})} \leq C||f||_{L^2(\Omega_0)}$$

et le résultat est démontré. □

Nous en déduisons alors le résultat global de convergence :

Théorème 3.13. *Il existe $C > 0$ indépendante de h et N_k tels que, pour tout $f \in L^2(\Omega_0)$ et tout $\tau < \alpha(\omega, \varepsilon, \rho_-)$, si u est la solution de (1.4) et $u_{h,\Delta k}$ la solution de (3.20) :*

$$||u - u_{h,\Delta k}||_{H^1(\Omega_0)} \leq C\left(h||f||_{L^2(\Omega_0)} + e^{-\tau\lfloor\frac{N_k}{2}\rfloor L}||e^{\tau|\mathbf{x}|}u||_{H^1(\Delta,\mathbb{R}^2)}\right) \tag{3.22}$$

et

$$||u - \widetilde{u}_{h,\Delta k}||_{H^1(\Omega_{N_k})} \leq C\left(h||f||_{L^2(\Omega_0)} + e^{-\tau\lfloor\frac{N_k}{2}\rfloor L}||e^{\tau|\mathbf{x}|}u||_{H^1(\Delta,\mathbb{R}^2)}\right) \tag{3.23}$$

Démonstration. En utilisant l'inégalité triangulaire, nous avons :

$$||u - \widetilde{u}_{h,\Delta k}||_{H^1(\Omega_{N_k})} \leq ||u - u_{\Delta k}||_{H^1(\Omega_{N_k})} + ||u_{\Delta k} - \widetilde{u}_{h,\Delta k}||_{H^1(\Omega_{N_k})}$$

Il suffit de combiner les estimations (2.38) et (3.21) pour obtenir (3.23), et (3.22) suit directement. □

Remarque 3.3. *Il est bien évident que si f est plus régulière que L^2, alors la solution de* (1.4) *ainsi que celle de* (2.33) *seront plus régulières que H^2. Alors on peut améliorer les estimations d'erreur spatiales ci-dessus. On aura, si $f \in H^{r-1}(\mathbb{R}^2)$:*

$$||u_{\Delta k} - u_{h,\Delta k}||_{H^1(\Omega_{N_k})} \leq Ch^r ||f||_{H^{r-1}(\mathbb{R}^2)}$$

et on aura la même chose pour (3.23) *et* (3.22)*. Dit autrement, notre méthode conduit à la même erreur spatiale qu'une méthode d'éléments finis classique sur un domaine borné, utilisant les mêmes éléments de Lagrange d'ordre r.*

3.4 Le cas de plusieurs défauts linéiques

Tout comme nous l'avons fait dans le chapitre précédent, il est logique une fois que l'on sait comment traiter le cas d'un défaut linéique, de se demander comment traiter le cas de plusieurs défauts. Mais comme au niveau continu, il est clair que la seule vraie différence avec le cas d'un seul défaut va se situer dans le calcul des opérateurs DtN sur le guide résultant de la transformée de Floquet dans la direction y. Une fois ces opérateurs DtN correctement calculés au niveau discret, il est clair que l'on peut réinterpréter de la même manière que dans le cas d'un seul défaut l'équation de Lippmann-Schwinger discrète résultante, et que l'on obtient par conséquent la même estimation d'erreur. Nous allons donc nous contenter, après avoir rappelé la configuration que nous souhaitons traiter, d'expliquer comment appliquer les résultats du chapitre 1 au niveau discret (i.e. comment redémontrer au niveau discret le résultat de décomposition spatiale). Puis, comme le cas d'un seul défaut est formellement identique au niveau discret et au niveau continu, il est clair que nous pourrons établir les mêmes formules qu'au niveau continu pour obtenir les Θ_{ij} et $\widetilde{\Lambda}_{ij}$ au niveau discret.

3.4.1 Espace d'éléments finis dans le cas du scattering multiple

Nous voulons traiter une configuration similaire à celle traitée dans la dernière section du chapitre 2, c'est-à-dire du type illustré sur la figure 3.10. Rappelons que l'on désigne par $(\widetilde{\Omega}_i)_{1\leq i\leq N_d}$ les N_d défauts linéiques, définis par :

$$\widetilde{\Omega}_i = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \mid \ q_-^i L_x \leq x \leq q_+^i L_x\right\}$$

Ces défauts linéiques sont localement perturbés par N_s défauts bornés, notés $(\Omega_j)_{1\leq j\leq N_s}$, qui sont de la forme :

$$\Omega_j =]\widetilde{q}_-^i L_x, \widetilde{q}_+^i L_x[\times]p_-^j L, p_+^j L[$$

avec :

$$\left\{\widetilde{q}_-^j, \widetilde{q}_+^j\right\}_{1\leq j\leq N_s} \subset \left\{q_-^j, q_+^j\right\}_{1\leq j\leq N_d}$$

Puis :

$$\Omega_0 = \bigcup_{j=1}^{N_s} \Omega_j$$

Le milieu ρ est périodique dans la direction y en dehors de Ω_0, c'est-à-dire qu'il existe $\rho_p \in L^\infty(\mathbb{R})^2$, tel que *supp* $(\rho - \rho_p) \subset \Omega_0$, et pour presque tout (x,y), $\rho_p(x, y+L) = \rho_p(x,y)$. Ce milieu de

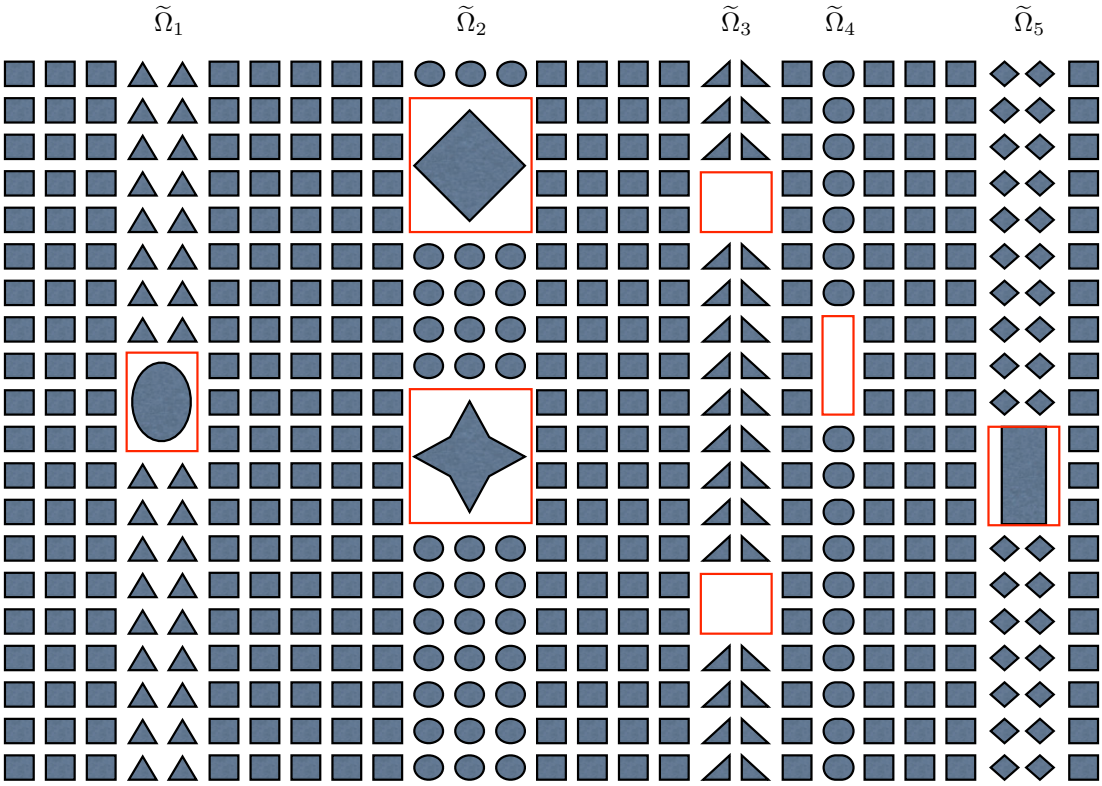


FIGURE 3.10 – Exemple de milieu périodique perturbé par plusieurs défauts linéiques

"fond" périodique en y, est représenté sur la figure 3.11. En dehors des défauts linéiques, le milieu est supposé doublement périodique, i.e il existe $\rho_{ref} \in L^\infty(\mathbb{R})^2$ tel que pour presque tout (x, y), $\rho_{ref}(x, y + L) = \rho_{ref}(x, y)$ et $\rho_{ref}(x + L_x, y) = \rho_{ref}(x, y)$, et :

$$\rho = \rho_{ref} \text{ dans } \mathbb{R}^2 \setminus \bigcup_{i=1}^{N_d} \widetilde{\Omega}_i$$

En particulier, on aura aussi :

$$\rho_p = \rho_{ref} \text{ dans } \mathbb{R}^2 \setminus \bigcup_{i=1}^{N_d} \widetilde{\Omega}_i$$

Après application de la TFB dans la direction y, on aboutit à un guide périodique localement perturbé par les défauts $\Omega^0_{0,i}$, tel que représenté sur la figure 3.12, avec $\Omega^0_{0,i} =]q^i_- L, q^i_+ L[\times]0, L[$ et

$$\Omega^0_0 = \bigcup_{i=1}^{N_d} \Omega^0_{0,i}$$

Par analogie avec le cas d'un seul défaut, il nous faut commencer par définir un maillage adéquat sur ce guide. On suppose cette fois que l'on dispose d'un maillage $\mathcal{T}^j_h$ de chacun des défauts $\Omega^0_{0,j}$, qui possède les mêmes propriétés que les maillages de domaine borné introduit précedemment (à savoir la conformité vis-à-vis des diverses formes de périodicité). Comme nous n'avons plus qu'un seul milieu périodique à l'extérieur de Ω^0_0, nous n'avons plus besoin que d'un seul maillage de cellule de périodicité, noté $\mathcal{T}^+_h$. On suppose alors que tous ces maillages sont conformes les uns vis-à-vis

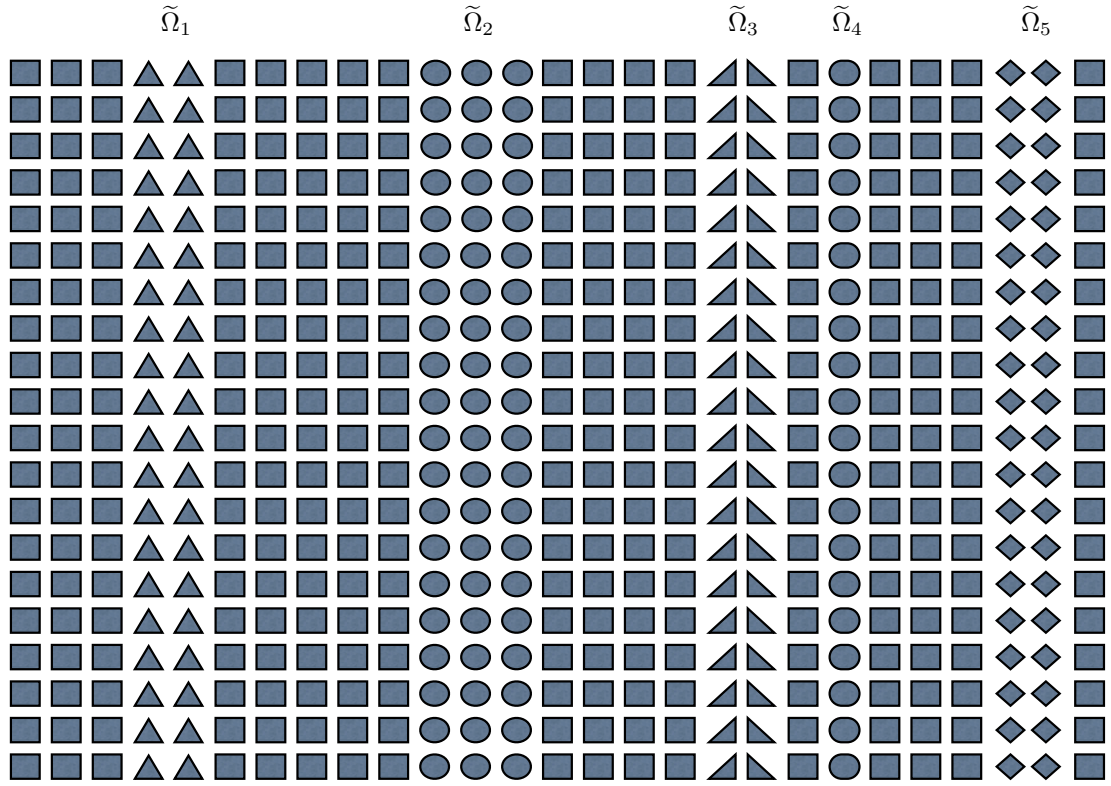


FIGURE 3.11 – Le milieu ρ_p de "référence " pour l'exemple de la figure 3.10

FIGURE 3.12 – Le guide obtenu par TFB du milieu de référence de la figure 3.11

des autres, à savoir que l'on produit un maillage conforme en les concaténant. Dit autrement, cela signifie que leur frontières verticales, en tant que nuages de points, sont toutes isomorphes deux à deux par une simple translation dans la direction x.

On construit alors le maillage $\mathcal{T}_h$ en concaténant ces maillages en respectant la géométrie :

$$\mathcal{T}_h = \bigcup_{i=1}^{N_d} \mathcal{T}_h^j \cup \left\{ T + jL_x^+ \ \middle| \ T \in \mathcal{T}_h^+, \ \ j \in \mathbb{Z} \quad \text{et } T + jL_x^+ \cap \Omega_0^0 = \emptyset \right\}$$

ainsi que l'espace d'éléments finis associé :

$$V_h^r = \left\{ v_h \in H^1(B_0) \cap C^0(B_0) \ \middle| \ v_{h|_T} \in Q_r(T), \ \ T \in \mathcal{T}_h \right\}$$

L'espace $V_h^r(\xi) = V_h^r(\xi) \cap H^1_\xi(B_0)$ que l'on en déduit possède alors exactement les mêmes propriétés que dans le cas précédent (aussi, nous ne refaisons pas les démonstrations dans ce nouveau cas). On définit alors tous les sous-espaces utiles comme précedemment, par restriction des éléments de $V_h^r(\xi)$ aux différents sous-ensembles du maillage (la discrétisation ainsi définie n'est qu'un cas particulier du cas de simple scattering, puisque l'on peut toujours considérer que l'on regroupe les défauts et

les cellules de périodicité entre les défauts dans un seul domaine intérieur Ω_0^0).

On rappelle que :

$$\Gamma_j = \partial\Omega_{0,j}^0 \setminus \partial B_0$$

Puis, on peut construire en vertu du lemme 3.2 des opérateurs de relèvement $\widetilde{\eta}_h^{j,\pm}$ à partir de chacune des frontières verticales $\Gamma_{j,\pm}$ des $\Omega_{0,j}^0$, qui vérifient, si $B_{0,j,\pm}^g$ et $B_{0,j,\pm}^d$ sont les ouverts de B_0 situés respectivement à gauche et à droite de $\Gamma_{j,\pm}$:

$$\left(u_h|_{B_{0,j,\pm}^g} - \widetilde{\eta}_h^{j,\pm}(u_h|_{\Gamma_{j,\pm}}), v_h\right)_{L^2(B_{0,j,\pm}^g)} = 0 \quad \forall\, v_h \in V_{h,0}^r(\xi)(B_{0,j,\pm}^g)$$

et

$$\left(u_h|_{B_{0,j,\pm}^d} - \widetilde{\eta}_h^{j,\pm}(u_h|_{\Gamma_{j,\pm}}, v_h\right)_{L^2(B_{0,j,\pm}^d)} = 0 \quad \forall\, v_h \in V_{h,0}^r(\xi)(B_{0,j,\pm}^d)$$

À nouveau, il est clair que le support de ces fonctions ne dépasse pas une cellule au delà de la frontière $\Gamma_{j,\pm}$ (plus précisément, le support de ces fonctions ne dépasse pas une maille de part et d'autre de la frontière). Il est alors clair que si $i \neq j$, pour tout $(u_h, v_h) \in V_h^r(\xi)$, on a comme conséquence directe du lemme 3.2 comme les $\overline{\Omega_j}$ sont d'intersection vide, et donc distants d'au moins une cellule de périodicité :

$$supp\ \widetilde{\eta}_h^{j,\pm}(u_h|_{\Gamma_{j,\pm}}) \cap supp\ \widetilde{\eta}_h^{i,\pm}(u_h|_{\Gamma_{i,\pm}}) = \emptyset$$

Sur le bord $\Gamma_0 = \bigcup_{j=1}^{N_s} \Gamma_j$, nous pouvons donc définir sans ambiguïté l'opérateur de relèvement :

$$\eta_h^e(u_h|_{\Gamma_0}) = \sum_{j=1}^{N_s} \widetilde{\eta}_h^{j,-}(u_h|_{\Gamma_{j,-}}) + \widetilde{\eta}_h^{j,+}(u_h|_{\Gamma_{j,+}})$$

les divers termes pour des j différents n'interagissant pas entre eux.

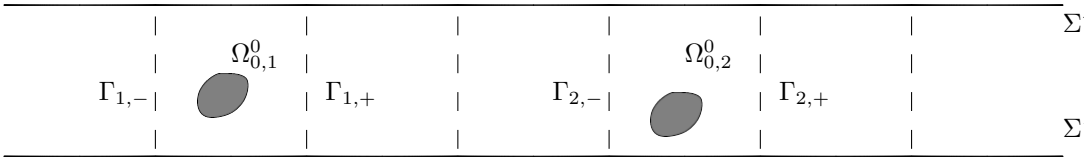


FIGURE 3.13 – Notations pour une configuration de scattering multiple, avec deux défauts

3.4.2 Problème de guide discret avec plusieurs défauts

Le problème de guide discret que l'on cherche à résoudre est alors, en faisant une formulation variationnelle du problème satisfait par $\hat{S}(\xi)f$:

Pour tout $f \in L^2(\Omega_0)$, trouver $\hat{S}_h(\xi)f \in V_h^r(\xi)$ tel que, pour tout $v_h \in V_h^r(\xi)$, on ait :

$$a_{B_0}(\hat{S}_h(\xi)f, v_h) = \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \sum_{j=1}^{N_s} \sum_{n=p_-^j}^{p_+^j - 1} (f_{j,n}, v_h)_{L^2(B_0)}\, e^{-in\xi L} \tag{3.24}$$

On montre en procédant comme pour le théorème 3.4 que ce problème est bien posé. Alors afin de construire les conditions DtN, on utilise le problème extérieur posé sur $B_{0,e} = B_0 \cap \overline{\Omega_0^0}$, dont la frontière "verticale" Γ_0 est :

$$\Gamma_0 = \partial\Omega_{0,j}^0 \setminus \partial B_0 = \bigcup_{j=1}^{N_d} \Gamma_j$$

Pour tout $\varphi_h \in X_h^r(\xi)(\Gamma_0) = X_h^r(\xi)^{2N_d}$, trouver $u_{h,e}(\varphi_h) \in V_h^r(\xi)(B_{0,e})$ telle que, pour tout $v_h \in V_{h,0}^r(\xi)(B_{0,e})$:

$$\left| \begin{array}{l} a_{B_{0,e}}(u_{h,e}(\varphi_h), v_h) = 0 \\ u_{h,e}(\varphi_h)|_{\Gamma_0} = \varphi_h \end{array} \right. \tag{3.25}$$

Ce problème est de nouveau bien posé, ce qui se démontre en adaptant très légèrement (la frontière n'est plus la même) la preuve du théorème 3.5. On définit alors l'opérateur DtN discret :

$$\begin{array}{rcl} \Lambda_{h,e}(\xi) : X_h^r(\xi)^{2N_d} & \longrightarrow & X_h^r(\xi)^{2N_d} \\ \varphi_h & \longmapsto & \Lambda_{h,e}(\xi)\varphi_h \end{array}$$

comme l'unique solution dans $X_h^r(\xi)^{2N_d}$ pour tout $\psi_h \in X_h^r(\xi)^{2N_d}$ de :

$$(\Lambda_{h,e}(\xi)\varphi_h, \psi_h)_{L^2(\Gamma_0)} = a_{B_{0,e}}(u_{h,e}(\varphi_h), \eta_h^e(\psi_h))$$

On voit, en procédant comme dans le cas du simple scattering (cf théorème 3.6), que résoudre (3.24) est équivalent à résoudre :

Trouver $\hat{S}_{0,h}(\xi)f \in V_h^r(\xi)(\Omega_0^0)$ solution de, pour tout $v_h \in V_h^r(\xi)(\Omega_0^0)$:

$$a_{\Omega_0^0}(\hat{S}_{0,h}(\xi)f, v_h) + \left(\Lambda_{h,e}(\xi)\hat{S}_{0,h}(\xi)f|_{\Gamma_0}, v_h|_{\Gamma_0}\right)_{L^2(\Gamma_0)} = \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \sum_{j=1}^{N_s} \sum_{n=p_-^j}^{p_+^j - 1} (f_{j,n}, v_h)_{L^2(\Omega_0^0)}\, e^{-in\xi L} \tag{3.26}$$

au sens où $\hat{S}_{0,h}(\xi)f = \hat{S}_h(\xi)f|_{\Omega_0^0}$. La question est donc de savoir comment calculer cet opérateur $\Lambda_{h,e}$ en pratique. Bien entendu, nous espérons pouvoir réappliquer les résultats du chapitre 1 de factorisation de l'opérateur DtN, pour pouvoir utiliser les formules démontrées dans le chapitre 2. Pour cela, nous introduisons les problèmes extérieurs à chaque défaut :

Pour tout $\varphi_h \in X_h^r(\xi)(\Gamma_j) = X_h^r(\xi)^2$, trouver $u_{h,e,j}(\varphi_h) \in V_h^r(\xi)(B_0 \setminus \overline{\Omega}_{0,j}^0)$ telle que, pour tout $v_h \in V_{h,0}^r(\xi)(B_0 \setminus \overline{\Omega}_{0,j}^0)$:

$$\left| \begin{array}{l} a_{\Omega_W \setminus \overline{\Omega}_{W,j}}(u_{h,e,j}(\varphi_h), v_h) = 0 \\ u_{h,e,j}(\varphi_h)|_{\Gamma_j} = \varphi_h \end{array} \right. \tag{3.27}$$

Ces problèmes sont bien posés en vertu du théorème 3.5. Le résultat de décomposition spatiale obtenu au niveau continu équivaut au niveau discret à savoir si étant donné une famille $\varphi_h \in X_h^r(\xi)^{2N_d}$, il est possible de trouver un élément $\widetilde{\varphi}_h \in X_h^r(\xi)^{2N_d}$ tel que, si on identifie de nouveau un élément de $X_h^r(\xi)(\Gamma_0)$ au vecteur de ses restrictions aux Γ_j

$$u_{h,e}(\varphi_h) = \sum_{j=1}^{N_s} u_{h,e,j}(\widetilde{\varphi}_{h,j}) \tag{3.28}$$

On définit naturellement la famille d'opérateurs discrets, par analogie avec le cas continu :

$$\begin{array}{rcl} \Theta_{h,ij}(\xi) : X_h^r(\xi)^2 & \longrightarrow & X_h^r(\xi)^2 \\ \varphi_h & \longmapsto & u_{h,e,j}(\varphi_h)|_{\Gamma_i} \end{array}$$

ainsi que les opérateurs Θ_h^n comme les matrices associées :

$$\begin{aligned}\Theta_h(\xi) : X_h^r(\xi)^{2N_s} &\longrightarrow X_h^r(\xi)^{2N_s} \\ \varphi_h &\longmapsto (\Theta_h\varphi_h)_i = \sum_{j=1}^{N_s} \Theta_{h,ij}(\xi)\varphi_{h,j}\end{aligned}$$

On reformule alors la relation de décomposition à l'aide de ces opérateurs, comme au niveau continu, en prenant la trace sur Γ_0 :

$$\varphi_h^n = \Theta_h \widetilde{\varphi}_h \tag{3.29}$$

L'existence et l'unicité de la décomposition sont alors liées de la même façon qu'au niveau continu aux propriétés de l'opérateur $\Theta_h(\xi)$.

Théorème 3.14. *L'opérateur $\Theta_h(\xi)$ est inversible de $X_h^r(\xi)^{2N_s}$ vers $X_h^r(\xi)^{2N_s}$ si et seulement si la solution du problème extérieur admet une unique décomposition au sens de l'équation* (3.28) *pour toute donnée φ_h. Plus précisément :*

(i) $\Theta_h(\xi)$ surjectif $\Leftrightarrow$ existence d'une décomposition

(ii) $\Theta_h(\xi)$ injectif $\Leftrightarrow$ unicité de la décomposition

Démonstration. Elle est identique à celle du théorème 1.14, en remplaçant les problèmes et opérateurs discrets par leurs homologues continus, aussi nous ne la reproduisons pas ici. □

La situation est toutefois plus simple qu'au niveau continu, puisque Θ_h agit sur l'espace $X_h^r(\xi)^{2N_s}$, qui est de dimension finie. Le théorème du rang vient alors remplacer l'alternative de Fredholm, et il est alors clair qu'il suffit de vérifier l'injectivité de Θ_h pour obtenir l'existence et l'unicité d'une décomposition. Mais encore une fois, la propriété la plus simple à démontrer est l'unicité de la décomposition :

Théorème 3.15. *Soit $u_{h,e}$ la solution du problème extérieur* (3.25)*, alors s'il existe une décomposition telle que :*

$$u_{h,e}(\varphi_h) \equiv \sum_{i=1}^{N_d} \widetilde{u}_{h,i} \quad \text{dans } B_{0,e}, \quad \widetilde{u}_{h,i} \in V_h^r(\xi)(B_0 \setminus \overline{\Omega}_{0,i}^0)$$

et

$$a_{B_0\setminus\overline{\Omega}_{0,i}^0}(\widetilde{u}_{h,i}, v_h) = 0 \quad \forall\, v_h \in V_{h,0}^r(\xi)(B_0 \setminus \overline{\Omega}_{0,i}^0)$$

cette décomposition est unique.

Démonstration. La preuve est très similaire à celle du théorème 1.17 pour le cas continu. On commence par considérer le cas de deux défauts (le cas général s'en déduisant aisément). Soient $\widetilde{v}_{h,1}$, $\widetilde{v}_{h,2}$ une autre décomposition, et :

$$w_{h,i} = \widetilde{u}_{h,i} - \widetilde{v}_{h,i} \text{ défini dans } \Omega \setminus \overline{\Omega}_i$$

et remarquons ensuite que dans $B_0 \setminus \overline{\Omega}_{0,1}^0 \cup \overline{\Omega}_{0,2}^0$, on a :

$$w_{h,1} + w_{h,2} = (\widetilde{u}_{h,1} + \widetilde{u}_{h,2}) - (\widetilde{v}_{h,1} + \widetilde{v}_{h,2}) = u_{h,e}^1 - u_{h,e}^1 = 0 \quad \text{dans } H_\xi^1(B_0 \setminus \overline{\Omega}_{0,1}^0 \cup \overline{\Omega}_{0,2}^0)$$

En particulier, on a : $w_{h,1}{}_{|\Gamma_j} = -w_{h,2}{}_{|\Gamma_j} \quad j = 1, 2$. On considère alors la fonction w_h définie par : $w_h = w_{h,1}$ dans $\overline{\Omega}_{0,2}^0$ et $w_h = -w_{h,2}$ dans $B_0 \setminus \overline{\Omega}_{0,2}^0$. Alors on a, pour tout $v_h \in V_h^r(\xi)$:

$$a_{B_0}(w_h, v_h) = a_{\Omega_{0,2}^0}(w_{h,1}, v_h) - a_{B_0\setminus\overline{\Omega}_{0,2}^0}(w_{h,2}, v_h)$$

Puis on écrit :

$$v_h = v_h - \widetilde{\eta}_h^{2^-}(v_h|_{\Gamma_{2,-}}) - \widetilde{\eta}_h^{2^+}(v_h|_{\Gamma_{2,+}}) + \widetilde{\eta}_h^{2^-}(v_h|_{\Gamma_{2,-}}) + \widetilde{\eta}_h^{2^+}(v_h|_{\Gamma_{2,+}})$$

Par construction, $v_h - \widetilde{\eta}_h^{2^-}(v_h|_{\Gamma_{2,-}}) - \widetilde{\eta}_h^{2^+}(v_h|_{\Gamma_{2,+}})$ appartient à $V_{h,0}^r(\xi)(B_0 \setminus \overline{\Omega}_{0,2}^0)$, et $V_{h,0}^r(\xi)(\Omega_{0,2}^0)$, on peut donc prolonger sa restriction à $\Omega_{0,2}^0$ par 0 (ce qui en fait un élément de $V_{h,0}^r(\xi)(B_0 \setminus \overline{\Omega}_{0,1}^0)$), aussi :

$$a_{B_0}(w_h, v_h) = a_{\Omega_{0,2}^0}(w_{h,1}, \widetilde{\eta}_h^{2^-}(v_h|_{\Gamma_{2,-}}) + \widetilde{\eta}_h^{2^+}(v_h|_{\Gamma_{2,+}})) - a_{B_0\setminus\overline{\Omega}_{0,2}^0}(w_{h,2}, \widetilde{\eta}_h^{2^-}(v_h|_{\Gamma_{2,-}}) + \widetilde{\eta}_h^{2^+}(v_h|_{\Gamma_{2,+}}))$$

Mais $w_{h,1}$ est solution de

$$a_{B_0\setminus\overline{\Omega}_{0,1}^0}(w_{h,1}, v_h) = 0$$

pour tout $v_h \in V_{h,0}^r(\xi)(B_0 \setminus \overline{\Omega}_{0,1}^0)$, dont $\widetilde{\eta}_h^{2^-}(v_h|_{\Gamma_{2,-}}) + \widetilde{\eta}_h^{2^+}(v_h|_{\Gamma_{2,+}})$ fait partie en vertu du lemme 3.2 (propriété des supports), avec de plus $\widetilde{\eta}_h^{2^-}(v_h|_{\Gamma_{2,-}}) + \widetilde{\eta}_h^{2^+}(v_h|_{\Gamma_{2,+}}) = 0$ dans $\Omega_{0,1}^0$ (toujours en vertu de la propriété sur les supports). Alors on a :

$$a_{\Omega_{0,2}^0}(w_{h,1}, \widetilde{\eta}_h^{2^-}(v_h|_{\Gamma_{2,-}} + \widetilde{\eta}_h^{2^+}(v_h|_{\Gamma_{2,+}}))) = -a_{B_0\setminus\overline{\Omega}_{0,1}^0\cup\overline{\Omega}_{0,2}^0}(w_{h,1}, \widetilde{\eta}_h^{2^-}(v_h|_{\Gamma_{2,-}}) + \widetilde{\eta}_h^{2^+}(v_h|_{\Gamma_{2,+}}))$$

et

$$a_{B_0\setminus\overline{\Omega}_{0,2}^0}(w_{h,2}, \widetilde{\eta}_h^{2^-}(v_h|_{\Gamma_{2,-}}) + \widetilde{\eta}_h^{2^+}(v_h|_{\Gamma_{2,+}})) = a_{B_0\setminus\overline{\Omega}_{0,1}^0\cup\overline{\Omega}_{0,2}^0}(w_{h,2}, \widetilde{\eta}_h^{2^-}(v_h|_{\Gamma_{2,-}}) + \widetilde{\eta}_h^{2^+}(v_h|_{\Gamma_{2,+}}))$$

et par conséquent pour tout $v_h \in V_h^r(\xi)$:

$$a_{B_0}(w_h, v_h) = -a_{B_0\setminus\overline{\Omega}_{0,1}^0\cup\overline{\Omega}_{0,2}^0}(w_{h,1} + w_{h,2}, \widetilde{\eta}_h^{2^-}(v_h|_{\Gamma_{2,-}}) + \widetilde{\eta}_h^{2^+}(v_h|_{\Gamma_{2,+}})) = 0$$

comme $w_{h,1} + w_{h,2} = 0$ dans $H_\xi^1(B_0 \setminus \overline{\Omega}_{0,1}^0 \cup \overline{\Omega}_{0,2}^0)$. On a donc $w_h = 0$, et par conséquent $w_{h,2} = 0$ dans $B_0 \setminus \overline{\Omega_{0,2}^0}$. On montre de même que $w_{h,1} = 0$.

Pour N_s défauts, on choisit un $w_{h,j}$ particulier et on appelle $\check{w}_{h,1} = w_{h,j}$, $\check{w}_{h,2} = \sum_{i\neq j} w_{h,i}$, et on utilise la preuve ci-dessus pour montrer que $w_{h,j} = 0$. On répète ensuite la procédure jusqu'à avoir montré le résultat pour chacun des $w_{h,i}$ restants. □

On en déduit donc immédiatement, en vertu du théorème 3.14 et du théorème du rang que :

Théorème 3.16. *L'opérateur $\Theta_h(\xi)$ est inversible de $X_h^r(\xi)^{2N_s}$ vers $X_h^r(\xi)^{2N_s}$.*

ainsi que le résultat de décomposition discret :

Théorème 3.17. *Pour toute donnée $(\varphi^n)_j \in X_h^r(\xi)^{2N_s}$, il existe une unique décomposition de la solution du problème extérieur* (3.25)*, au sens de la formule* (3.28)*.*

Nous reformulons alors la condition DtN discrète au moyen de ces opérateurs. On utilise la décomposition (3.28) et on applique l'opérateur de trace :

$$u_{h,e}(\varphi_h)|_{\Gamma_i} = \sum_{j=1}^{N_d} u_{h,e,j}^k(\widetilde{\varphi}_{h,j})|_{\Gamma_i}$$

Alors en utilisant la définition des opérateurs $\Theta_{h,ij}(\xi)$:

$$u_{h,e}(\varphi_h)|_{\Gamma_i} = \sum_{j=1}^{N_d} \Theta_{h,ij}(\xi)\widetilde{\varphi}_{h,j}$$

et donc :

$$\varphi_{h,i} = \sum_{j=1}^{N_d} \Theta_{h,ij}(\xi)\widetilde{\varphi}_{h,j}$$

D'autre part, nous avons, pour tout $\psi_h \in X_h^r(\xi)^{2N_s}$:

$$a_{B_{0,e}}(u_{h,e}(\varphi_h), \eta_h^e(\psi_h))$$

$$= \sum_{i=1}^{N_d} a_{B_{0,e}}(u_{h,e}(\varphi_h), \widetilde{\eta}_h^{i,-}(\psi_h|_{\Gamma_{i,-}})) + a_{B_{0,e}} u_{h,e}(\varphi_h), \widetilde{\eta}_h^{i,+}(\psi_h|_{\Gamma_{i,+}}))$$

$$= \sum_{j=1}^{N_d} \sum_{i=1}^{N_d} a_{B_{0,e}}(u_{h,e,j}(\widetilde{\varphi}_{h,j}), \widetilde{\eta}_h^{i,-}(\psi_h|_{\Gamma_{i,-}}))$$

$$+a_{B_{0,e}}(u_{h,e,j}(\widetilde{\varphi}_{h,j}), \widetilde{\eta}_h^{i,+}(\psi_h|_{\Gamma_{i,+}}))$$

Mais en vertu de la propriété sur les supports des relèvements, ceci peut se réécrire :

$$= \sum_{j=1}^{N_d} \sum_{i=1}^{N_d} a_{B_0 \setminus \overline{\Omega}_{W,j}}(u_{h,e,j}(\widetilde{\varphi}_{h,j}), \widetilde{\eta}_h^{i,-}(\psi_h|_{\Gamma_{i,-}}))$$

$$+a_{B_0 \setminus \overline{\Omega}_{W,j}}(u_{h,e,j}(\widetilde{\varphi}_{h,j}), \widetilde{\eta}_h^{i,+}(\psi_h|_{\Gamma_{i,+}}))$$

On introduit alors la famille :

$$\begin{aligned} \widetilde{\Lambda}_{h,ij}(\xi) : X_h^r(\xi)^2 &\longrightarrow X_h^r(\xi)^2 \\ \varphi_h &\longmapsto \widetilde{\Lambda}_{h,ij}(\xi)\varphi_h \end{aligned}$$

où $\widetilde{\Lambda}_{h,ij}(\xi)\varphi_h$ est l'unique solution pour tout $\psi_h \in X_h^r(\xi)^2$ de :

$$\left(\widetilde{\Lambda}_{h,ij}(\xi)\varphi_h, \psi_h\right)_{L^2(\Gamma)} =$$

$$a_{B_0 \setminus \overline{\Omega}_{W,j}}(u_{h,e,j}(\varphi_h), \eta_h^{j,-}(\psi_h|_{\Gamma_{j,-}}))$$
$$+a_{B_0 \setminus \overline{\Omega}_{W,j}}(u_{h,e,j}(\varphi_h), \eta_h^{j,+}(\psi_h|_{\Gamma_{j,+}}))$$

ainsi que la matrice :

$$\begin{aligned} \widetilde{\Lambda}_h(\xi) : X_h^r(\xi)^{2N_s} &\longrightarrow X_h^r(\xi)^{2N_s} \\ \varphi_h &\longmapsto \left(\widetilde{\Lambda}_h(\xi)\varphi_h\right)_i = \sum_{j=1}^{N_d} \widetilde{\Lambda}_{h,ij}(\xi)\varphi_{h,j} \end{aligned}$$

Alors il est clair que :

$$a_{B_{0,e}}(u_{h,e}(\varphi_h), \eta_h^e(\psi_h)) = (\Lambda_{h,e}(\xi)\varphi_h, \psi_h)_{L^2(\Gamma_0)}$$

$$= \sum_{j=1}^{N_d} \sum_{i=1}^{N_d} \left(\widetilde{\Lambda}_{h,ij}(\xi)\widetilde{\varphi}_{h,j}, \psi_h|_{\Gamma_i}\right)_{L^2(\Gamma_i)} = \left(\widetilde{\Lambda}_h(\xi)\widetilde{\varphi}_h, \psi_h\right)_{L^2(\Gamma_0)}$$

et on obtient :

$$\varphi_h = \Theta_h(\xi)\widetilde{\varphi}_h \quad \text{et} \quad \Lambda_{h,e}(\xi)\varphi_h = \widetilde{\Lambda}_h(\xi)\widetilde{\varphi}_h$$

soit l'analogue des formules obtenues au niveau continu. On en déduit donc immédiatement le résultat suivant pour le problème intérieur :

Théorème 3.18. *Le problème intérieur* (3.26) *se réécrit : trouver* $\hat{S}_{0,h}(\xi)f \in V_h^r(\xi)(\Omega_0^0)$ *solution de, pour tout* $v_h \in V_h^r(\xi)(\Omega_0^0)$ *:*

$$\left| \begin{array}{l} a_{\Omega_0^0}(\hat{S}_{0,h}(\xi)f, v_h) + \left(\widetilde{\Lambda}_h(\xi)\widetilde{\varphi}_h, v_h|_{\Gamma_0}\right)_{L^2(\Gamma_0)} = \sqrt{\dfrac{L}{2\pi}} \displaystyle\sum_{j=1}^{N_s} \sum_{n=p_-^j}^{p_+^j - 1} (f_{j,n}, v_h)_{L^2(\Omega_0^0)}\, e^{-in\xi L} \\ \hat{S}_{0,h}(\xi)f|_{\Gamma_0} = \Theta_h(\xi)\widetilde{\varphi}_h \end{array} \right. \tag{3.30}$$

Il est alors bien sûr clair, comme les problèmes discrets extérieurs à un seul défaut peuvent se traiter comme au niveau continu, que l'on peut montrer (de la même façon qu'au niveau continu, aussi nous ne reproduisons pas la preuve ici) :

Théorème 3.19. *Pour $i = j$, les opérateurs $\Theta_{h,ii}(\xi)$ et $\widetilde{\Lambda}_{h,ii}(\xi)$ sont donnés par :*

$$\Theta_{h,ii}(\xi) = \begin{pmatrix} Id & 0 \\ 0 & Id \end{pmatrix} \quad et \quad \widetilde{\Lambda}_{h,ii}(\xi) = \begin{pmatrix} \Lambda_{h,-}(\xi) & 0 \\ 0 & \Lambda_{h,+}(\xi) \end{pmatrix}$$

Pour $i \neq j$, les opérateurs $\Theta_{h,ij}(\xi)$ et $\widetilde{\Lambda}_{h,ij}(\xi)$, se calculent selon la règle suivante :

. *Si Ω_i est à droite de Ω_j, i.e. si $q_-^i > q_+^j$, alors :*

$$\Theta_{h,ij}(\xi) = \begin{pmatrix} 0 & R_h^+(\xi)^{q_-^i - q_+^j} \\ 0 & R_h^+(\xi)^{q_+^i - q_+^j} \end{pmatrix}$$

et

$$\widetilde{\Lambda}_{h,ij}(\xi) = \begin{pmatrix} 0 & -T_{h,00}^+(\xi) R_h^+(\xi)^{q_-^i - q_+^j} - T_{h,10}^+(\xi) R_h^+(\xi)^{q_-^i - q_+^j + 1} \\ 0 & T_{h,00}^+(\xi) R_h^+(\xi)^{q_+^i - q_+^j} + T_{h,10}^+(\xi) R_h^+(\xi)^{q_+^i - q_+^j + 1} \end{pmatrix}$$

. *Si Ω_i est à gauche de Ω_j, i.e. si $q_+^i < q_-^j$, alors :*

$$\Theta_{h,ij}(\xi) = \begin{pmatrix} R_h^-(\xi)^{q_-^j - q_-^i} & 0 \\ R_h^-(\xi)^{q_-^j - q_+^i} & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$\widetilde{\Lambda}_{h,ij}(\xi) = \begin{pmatrix} T_{h,00}^-(\xi) R_h^-(\xi)^{q_-^j - q_-^i} + T_{h,10}^-(\xi) R_h^-(\xi)^{q_-^j - q_-^i + 1} & 0 \\ -T_{h,00}^-(\xi) R_h^-(\xi)^{q_-^j - q_+^i} - T_{h,10}^-(\xi) R_h^-(\xi)^{q_-^j - q_+^i + 1} & 0 \end{pmatrix}$$

Nous pouvons donc appliquer au niveau discret l'ensemble des résultats que nous avons pu obtenir au niveau continu, sur les guides présentant plusieurs défauts. Alors en définissant les opérateurs discrets, pour tout $j \in [\![1, N_s]\!]$ et tout $m \in [\![p_-^j - , p_+^j + -1]\!]$:

$$S_{0,h,\Delta k} f|_{\Omega_j^m} = \Delta k \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \sum_{j=1}^{N_k} (\hat{S}_{0,h}(j\Delta k) f)|_{\Omega_{W,i(j)}} e^{imj\Delta k L} \tag{3.31}$$

et :

$$S_{0,\rho,h,\Delta k} f|_{\Omega_j^m} = -(\omega^2 + i\varepsilon\omega)\Delta k \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \sum_{j=1}^{N_k} \left(\hat{S}_{0,h}(j\Delta k)(\rho_p - \rho) f \right) |_{\Omega_{W,i(j)}} e^{imj\Delta k L} \tag{3.32}$$

il est clair, que comme dans le cas d'un seul défaut, on définit implicitement un maillage de Ω_0 et l'espace $V_h^r(\Omega_0)$ associé. De plus, il est clair que l'on peut réinterpréter la solution de :

$$(I - S_{0,\rho,h,\Delta k}) u_{h,\Delta k} = S_{0,h,\Delta k} f$$

comme solution du problème variationnel (3.20), comme dans le cas d'un seul défaut (l'analyse que nous avions mené dans la section précédente étant indépendante de la forme de Ω_0). Alors on montre comme dans le cas d'un seul défaut que l'équation de Lippmann-Schwinger discrète est bien posée, et que l'on conserve la même estimation d'erreur dans le cas de plusieurs défauts que dans le cas d'un seul défaut.

3.4.3 Le cas particulier des défauts bornés

Nous allons pour terminer, expliquer très brièvement comment discrétiser et faire l'analyse numérique de la méthode "complètement LS" exposée à la fin du chapitre précédent, et applicable dans le cas des défauts bornés (i.e. une situation telle que celle présentée sur la figure 3.14).

Rappelons que dans une telle configuration, les opérateurs intervenant dans l'équation de Lippmann-

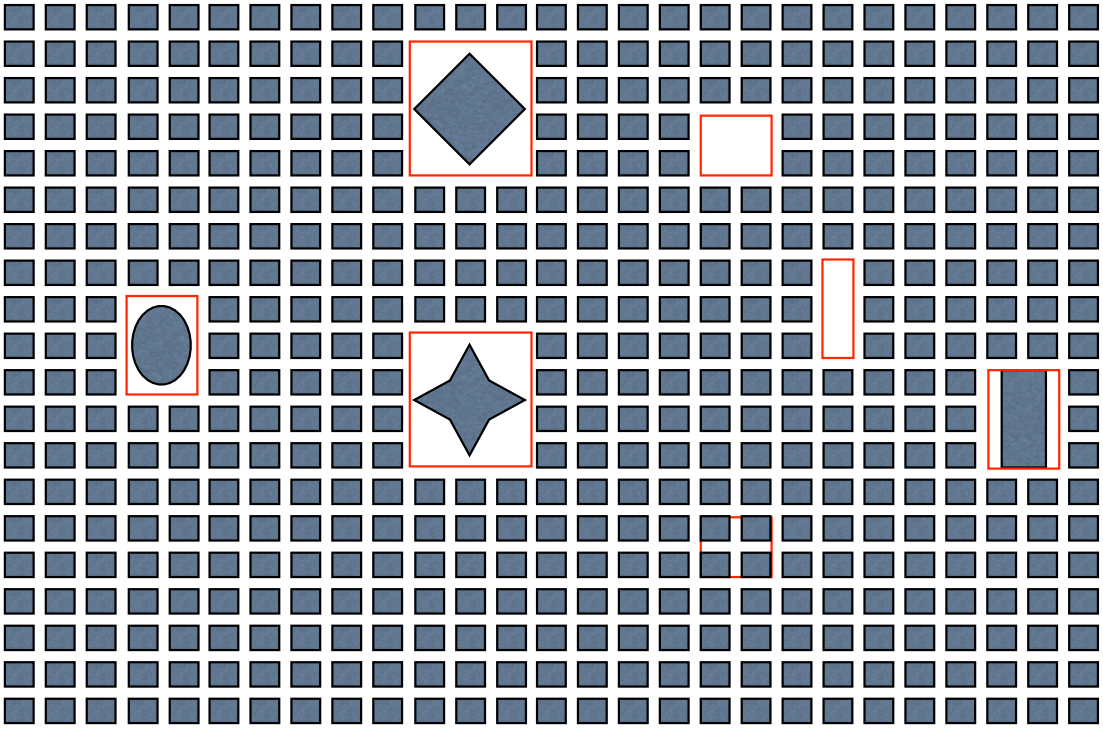


Figure 3.14 – Exemple de configuration avec des défauts bornés

Schwinger sont définis directement par TFB inverse à partir de la résolution du problème :

Trouver $\hat{S}(\xi_x,\xi_y)f \in L^2([0,L_x]\times[0,L]\times[0,2\pi/L_x]\times[0,2\pi/L])$ solution dans $H^1_{\xi_x,\xi_y}([0,L_x]\times[0,L])$ pour presque tout $(\xi_x,\xi_y)\in[0,2\pi/L_x]\times[0,2\pi/L]$ de :

$$\left|\begin{array}{l} -\Delta\hat{S}(\xi_x,\xi_y)f-(\omega^2+i\varepsilon\omega)\rho_p\hat{S}(\xi_x,\xi_y)f=\sqrt{\dfrac{LL_x}{4\pi^2}}\displaystyle\sum_{j=1}^{N_s}\sum_{m=\widetilde{q}_-^j}^{\widetilde{q}_+^j-1}\sum_{n=p_-^j}^{p_+^j-1}f_{m,n}e^{-i(n\xi_yL+m\xi_xL_x)} \\ \partial_y\hat{S}(\xi_x,\xi_y)f_{|_{y=L}}=e^{i\xi_yL}\partial_y\hat{S}(\xi_x,\xi_y)f_{|_{y=0}} \\ \partial_x\hat{S}(\xi_x,\xi_y)f_{|_{x=L_x}}=e^{i\xi_xL}\partial_x\hat{S}(\xi_x,\xi_y)f_{|_{x=0}} \end{array}\right. \tag{2.46}$$

Ce problème, à ξ_x et ξ_y fixé, est posé sur le domaine borné $[0,L_x]\times[0,L]$. Il se discrétise donc de façon complètement classique dans $V_h^r(\xi_x,\xi_y)([0,L_x]\times[0,L])$, en : Trouver $\hat{S}_h(\xi_x,\xi_y)f\in V_h^r(\xi_x,\xi_y)([0,L_x]\times$

$[0, L])$, tel que, pour tout $v_h \in V_h^r(\xi_x, \xi_y)([0, L_x] \times [0, L])$:

$$a_{[0,L_x]\times[0,L]}(\hat{S}_h(\xi_x, \xi_y)f, v_h) = \sqrt{\frac{LL_x}{4\pi^2}} \sum_{j=1}^{N_s} \sum_{m=\widetilde{q}_-^j}^{\widetilde{q}_+^j - 1} \sum_{n=p_-^j}^{p_+^j - 1} (f_{m,n}, v_h)_{L^2([0,L_x]\times[0,L])} \, e^{-i(n\xi_y L + m\xi_x L_x)} \tag{3.33}$$

On définit alors les opérateurs intervenant dans l'équation de Lippmann-Schwinger discrète par, pour tout j et tout $(m, n) \in [\![\widetilde{q}_-^j, \widetilde{q}_+^j -]\!] \times [\![p_-^j, p_+^j - 1]\!]$ (c'est-à-dire sur Ω_0) :

$$(S_{0,h,\Delta k} f)_{m,n} \equiv \Delta k_x \Delta k_y \sqrt{\frac{LL_x}{4\pi^2}} \sum_{j_x=1}^{N_{kx}} \sum_{j_y=1}^{N_{ky}} \hat{S}_h(j_x \Delta k_x, j_y \Delta k_y) f e^{i(j_x \Delta k_x m L_x + j_y \Delta k_y n L)}$$

et $(S_{0,\rho,h,\Delta k} f)_{m,n} \equiv$

$$-(\omega^2 + i\varepsilon\omega)\Delta k_x \Delta k_y \sqrt{\frac{LL_x}{4\pi^2}} \sum_{j_x=1}^{N_{kx}} \sum_{j_y=1}^{N_{ky}} \hat{S}_h(j_x \Delta k_x, j_y \Delta k_y)(\rho_p - \rho) f e^{i(j_x \Delta k_x m L_x + j_y \Delta k_y n L)}$$

Comme au niveau continu, l'analyse de cette équation discrète se traite de la même façon que dans le cas de la méthode mixte. On montre, que si on étend une solution $u_{h,\Delta k} \in V_h^r(\Omega_0)$ de l'équation de Lippmann-Schwinger discrète :

$$(I - S_{0,\rho,h,\Delta k}) u_{h,\Delta k} = S_{0,h,\Delta k} f \tag{LSdisc}$$

à tout $\mathbb{R}^2$ par :

$$\widetilde{u}_{h,\Delta k,m,n} = \Delta k_x \Delta k_y \sqrt{\frac{LL_x}{4\pi^2}} \sum_{j_x=1}^{N_{kx}} \sum_{j_y=1}^{N_{ky}} \hat{S}_h(j_x \Delta k_x, j_y \Delta k_y) f e^{i(j_x \Delta k_x m L_x + j_y \Delta k_y n L)}$$

$$-(\omega^2 + i\varepsilon\omega)\Delta k_x \Delta k_y \sqrt{\frac{LL_x}{4\pi^2}} \sum_{j_x=1}^{N_{kx}} \sum_{j_y=1}^{N_{ky}} \hat{S}_h(j_x \Delta k_x, j_y \Delta k_y)(\rho_p - \rho) u_{\Delta k} e^{i(j_x \Delta k_x m L_x + j_y \Delta k_y n L)}$$

alors $\widetilde{u}_{h,\Delta k}$ est la solution du problème variationnel :

Trouver $\widetilde{u}_{h,\Delta k} \in V_{h,per}(\Omega_{N_{k_x}, N_{k_y}})$ tel que, pour tout $v_h \in V_{h,per}(\Omega_{N_{k_x}, N_{k_y}})$:

$$a_{\Omega_{N_{k_x}, N_{k_y}}}(\hat{S}_h(\xi_x, \xi_y)f, v_h) = (f, v_h)_{L^2(\Omega_{N_{k_x}, N_{k_y}})}$$

soit donc une approximation variationnelle du problème (2.47) en lequel se réinterprète l'équation de Lippmann-Schwinger semi-discrète. Alors il est clair que comme pour la méthode mixte LS-DtN, la discrétisation en espace ainsi effectuée ne fait que rajouter l'erreur classique de discrétisation due aux éléments finis, et on a donc :

Théorème 3.20. *Soit $u_{h,\Delta k}$ la solution de* (3.18) *où les opérateurs sont approchés par quadrature sur la double TFB, et u la solution de* (2.3)*. Alors il existe $C > 0$ indépendante de N_k telle que, pour tout $\tau < \alpha(\omega, \varepsilon, \rho_-)$:*

$$||u - u_{h,\Delta k}||_{H^1(\Omega_0)} \leq C \left(h||f||_{L^2(\Omega_0)} + (e^{-\tau \lfloor \frac{N_{k_x}}{2} \rfloor L_x} + e^{-\tau \lfloor \frac{N_{k_y}}{2} \rfloor L})||e^{\tau|\mathbf{x}|} u||_{H^1(\Delta, \mathbb{R}^2)} \right) \tag{3.34}$$

Au niveau discret, cette méthode alternative se compare donc à la méthode mixte de la même façon qu'au niveau continu (on aura donc une erreur plus grande avec cette méthode).

3.5 Résultats numériques

Nous allons maintenant illustrer l'ensemble des résultats de cette première partie par des résultats numériques. Comme nous l'avons mentionné en introduction, l'ensemble des résultats numériques présents dans ce mémoire ont étés réalisés à l'aide du code C++ `Periodique`, réalisé par l'auteur. Ce code représente un travail assez important (il dépasse les 48000 lignes), et permet de résoudre l'ensemble des situations présentées ici, par les différentes méthodes évoquées. De plus, il comporte une reprogrammation de la méthode DtN pour les défauts bornés (par équations intégrales) développée dans [37], mais à l'aide des éléments finis issus des $V_h^r(\xi)$, et non pas des éléments finis mixtes utilisés dans [37]. Se trouve également dans le code le cas du scattering multiple par méthode DtN, développé dans le cadre des présents travaux.

Les matrices élémentaires éléments finis sont issues de la très souple et très efficace librairie F.E.M.M.E. développée par S. Imperiale. En particulier, cette librairie procure de très utiles outils de visualisation pour les éléments finis d'ordre élevé, ainsi qu'un traitement des formats de maillage les plus répandus. Malheureusement, cette souplesse a un prix, qui tient au fait que l'assemblage (même si des outils s'y trouvent pour le simplifier) et surtout le traitement des conditions aux limites, sont entièrement à la charge de l'utilisateur (ce qui dans le cas des conditions quasi-périodiques n'est pas un travail simple).

Enfin, les diverses opérations purement algébriques, telles que la résolution des divers systèmes linéaires, ont pu être traitées au moyen de la librairie SELDON, qui comporte un interfaçage très utile vers les diverses librairies C++ et FORTRAN d'algèbre linéaire (BLAS, LAPACK, MUMPS, ARPACK...).

La méthode mixte LS-DtN que nous avons développée peut algorithmiquement se résumer comme suit :

. Boucle sur les points de quadrature ξ_k

- Pour chaque point de quadrature ξ_k, on résout les problèmes de cellule (3.10) et (3.11), pour les deux demi-guides (gauche $(-)$ et droite $(+)$)
- On en déduit les $T_{h,ij}^{\pm}(\xi_k)$, et par suite $R_h(\xi_k)^{\pm}$ en résolvant (3.14), pour les deux demi-guides, et enfin $\Lambda_h^{\pm}(\xi_k)$
- On résout le problème intérieur (3.5), et on ajoute la contribution de quadrature ainsi calculée aux opérateurs $S_{0,h,\Delta k}$ et $S_{0,\rho,h,\Delta k}$

. On résout l'équation de Lippmann-Schwinger discrète

Si l'on est seulement intéressé par la solution dans Ω_0, alors on s'arrête ici. En revanche, on peut si on le souhaite obtenir la solution dans Ω_{N_k}, cellule par cellule, en reconstruisant $\widetilde{u}_{h,\Delta k}$ au moyen de :

$$\widetilde{u}_{h,\Delta_k}|_{B^m} \equiv \Delta k \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \sum_{j=1}^{N_k} \hat{S}_h(j\Delta k) \left(f - (\omega^2 + i\varepsilon\omega)(\rho_p - \rho) u_{h,\Delta k} \right) e^{imj\Delta kL}$$

puisque l'on peut reconstruire $\hat{S}_h(j\Delta k)$ dans les deux demi-guides, cellule par cellule, au moyen de la formule (3.13). Pour cela, le moyen le plus économique en mémoire (et c'est celui que nous avons utilisé) consiste à réeffectuer une boucle sur les points de quadrature :

Boucle sur les points de quadrature ξ_k

– Pour chaque point de quadrature ξ_k, on résout à nouveau les problèmes de cellule (3.10) et (3.11), pour les deux demi-guides (gauche $(-)$ et droite $(+)$)

– On en déduit les $T^{\pm}_{h,ij}(\xi_k)$, et par suite $R_h(\xi_k)^{\pm}$ en résolvant (3.14), pour les deux demi-guides, et enfin $\Lambda^{\pm}_h(\xi_k)$

– On résout le problème intérieur (3.5), mais avec comme source $f - (\omega^2 + i\varepsilon\omega)(\rho_p - \rho)u_{h,\Delta k}$, ce qui nous donne la TFB de la solution

– Des traces de cette solution intérieure sur $\Gamma_0^{\pm}$, on déduit la valeur de la TFB de la solution cellule par cellule, aussi loin qu'on le souhaite dans le guide, au moyen de (3.13)

– On ajoute cette contribution de quadrature dans $\widetilde{u}_{h,\Delta_k}$

Fin de la boucle sur les points de quadrature ξ_j

Bien entendu, on pourrait encore utiliser cette formule pour reconstruire $\widetilde{u}_{h,\Delta k}$ au delà de Ω_{N_k}, mais nous n'aurions alors qu'une périodisation de la solution, due à la quadrature et sans rapport avec la solution exacte. De plus, il est clair que si l'on ne voit pas d'objection au stockage d'une importante quantité de données, on peut s'affranchir de la deuxième résolution des problèmes de cellule et des équations quadratiques de cette boucle de reconstruction, en les stockant la première fois.

Remarquons l'importance du découplage que nous avons obtenu pour chaque point de quadrature (i.e. chaque ξ) : ces boucles sont complètement découplées, ce qui permet une résolution nécessitant peu de stockage, ainsi qu'une éventuelle parallélisation massive.

Dans tout ceci, la seule étape que nous n'avons pas complètement traitée, est la résolution pratique de l'équation quadratique. C'est ce point que nous éclaircissons maintenant.

3.5.1 Résolution pratique de l'équation quadratique

Nous rappelons donc que nous cherchons à résoudre le problème :

Trouver l'unique opérateur de $\mathcal{L}(M_h)$ de rayon spectral strictement inférieur à 1 solution de :

$$F_h(X_h) = T^h_{10}X_h^2 + (T^h_{00} + T^h_{11})X_h + T^h_{01} = 0$$

La méthode que nous avons choisi est bien évidemment la même que celle de [37], à savoir une méthode de Newton "modifiée". L'algorithme est le suivant :

. Choix d'un point initial X_0 de rayon spectral strictement inférieur à 1

. Boucle sur k, tant que $F_h(X_k) = 0$ n'est pas satisfaite (à η fixé près)

  . Calcul de la direction de descente $D_k = -DF_h(X_k)^{-1}F_h(X_k)$

  . Mise à jour ($\delta > 0$ étant fixé) : si $\rho(X_k + D_k) < 1$, $X_{k+1} = X_k + D_k$, sinon $X_{k+1} = (\rho(X_k + D_k) + \delta)^{-1}(X_k + D_k)$

. Fin de la boucle sur k

Le différence avec une méthode de Newton classique tient au fait que l'on force chaque itéré à garder un rayon spectral strictement inférieur à 1. Cependant on peut déjà se demander si une méthode de Newton classique ne convergerait pas. Le résultat standard sur cette méthode est un résultat de convergence locale sous réserve que la fonction que l'on cherche à annuler soit différentiable en la solution, de différentielle inversible. Or ici, nous avons :

$$\begin{aligned} DF_h(R_h)\cdot X_h &= T^h_{10}R_hX_h + T^h_{10}X_hR_h + (T^h_{00}+T^h_{11})X_h \\ &= (\Lambda_h + T^h_{11})X_h + T^h_{10}X_hR_h \end{aligned}$$

À l'issue des travaux de [37], l'inversibilité de cette différentielle demeurait une question ouverte. Mais au cours des présents travaux, cette question est réapparue de façon plus fondamentale encore lors du traitement des problèmes d'évolution, mais dans un cadre où imaginer une réponse à cette question était plus naturel. Aussi, nous sommes aujourd'hui en mesure d'apporter une réponse positive à cette question :

Théorème 3.21. *L'opérateur :*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(X^r_h(\xi)) &\longrightarrow \mathcal{L}(X^r_h(\xi)) \\ X_h &\longmapsto (T_{h,11}+\Lambda_h)X_h + T_{h,10}X_hR_h \end{aligned}$$

est inversible.

Démonstration. Nous n'allons en réalité démontrer que l'injectivité, la dimension finie de $X^r_h(\xi)$ faisant le reste du travail pour nous. Comme annoncé, les principes qui sous-tendent cette preuve sont issus d'un résultat sur les problèmes d'évolution, aussi nous invitons le lecteur à se reporter aux lemmes 5.2 et 6.4. Mais il s'agit d'une question longtemps restée sans réponse, c'est pourquoi nous la détaillons tout de même dans ce contexte (même si cette preuve est une totale répétition de celle du lemme 6.4). Supposons qu'il existe un opérateur $X_h \in \mathcal{L}(X^r_h(\xi))$ tel que :

$$(T_{h,11}+\Lambda_h)X_h + T_{h,10}X_hR_h = 0$$

Pour tout $\varphi_h \in X^r_h(\xi)$, nous allons montrer que dans ce cas on peut construire à partir de $X_h\varphi_h$ une solution $v_h(\varphi_h) \in V^r_h(\xi)(B_0^+)$ au problème :

$$\left|\begin{array}{ll} a_{B_0^+}(v_h(\varphi_h), w_h) = 0 & \forall\, w_h \in V^r_{h,0}(\xi)(B_0^+) \\ v_h(\varphi_h) = 0 & \text{sur } \Gamma_0^+ \\ v_h(\varphi_h) = X_h\varphi_h & \text{sur } \Gamma_1^+ \end{array}\right.$$

d'où l'on déduira que $X_h\varphi_h = 0$. En procédant comme pour les formules (3.12) et (3.13), on voit qu'une telle fonction v_h vérifie nécessairement (elle est solution des formulations variationnelles associées dans chaque cellule) :

$$v_h(\varphi_h)|_{\mathcal{C}_j^+} = e_{h,0}(v_h(\varphi_h)|_{\Gamma^+_{j-1}}) + e_{h,1}(v_h(\varphi_h)|_{\Gamma_j^+})$$

Dans la première cellule, les conditions aux limites imposent

$$v_h(\varphi_h)|_{\mathcal{C}_1^+} = e_{h,1}(X_h\varphi_h)$$

Le lemme 6.4 nous incite à proposer la formule générale : $v_h(\varphi_h)|_{\mathcal{C}_j^+} = e_0(D_{j-1}(R_h,X_h)\varphi_h) + e_{h,1}(D_j(R_h,X_h)\varphi_h)$, où on rappelle que pour simplifier les manipulations, nous avons posé $D_0 = 0$ et :

$$D_j(R,X) = \sum_{p=0}^{j-1} R^pXR^{j-1-p}$$

De plus, on a :

$$D_{j+1}(R,X) = RD_j(R,X) + XR^j \quad \text{et} \quad D_{j+1}(R,X) = D_j(R,X)R + R^jX$$

On démontre maintenant notre formule par récurrence, comme nous avons déjà initialisé celle-ci. Supposons la formule vraie au rang j. Alors, la continuité en trace impose :

$$v_h(\varphi_h)|_{\mathcal{C}_{j+1}^+} = e_{h,0}(D_j(R_h,X_h)\varphi_h) + e_{h,1}(v_h(\varphi_h)|_{\Gamma^+_{j+1}})$$

En reprenant les calculs de la démonstration du théorème 3.8, on aboutit à, pour tout $w_h \in V^r_{h,0}(\xi)(B_0^+)$:

$$a_{\mathcal{C}_1^+}(v_h(\varphi_h)|_{\mathcal{C}_j^+}, w_h|_{\mathcal{C}_j^+}) = \left(\left(T_{h,00}v_h(\varphi_h)|_{\Gamma^+_{j-1}} + T_{h,10}v_h(\varphi_h)|_{\Gamma_j^+}\right)\varphi_h, w_h|_{\Gamma^+_{j-1}}\right)_{L^2(\Gamma^+)}$$

$$+\left(\left(T_{h,01}v_h(\varphi_h)|_{\Gamma_{j-1}^+}+T_{h,11}v_h(\varphi_h)|_{\Gamma_j^+}\right)\varphi_h,w_h|_{\Gamma_j^+}\right)_{L^2(\Gamma^+)}$$

On souhaite que les termes en $v_h|_{\Gamma_j^+}$ se compensent en sommant sur j, ce qui se réécrit, en utilisant la formule de récurrence :

$$T_{h,01}D_{j-1}(R_h,X_h)\varphi_h+T_{h,11}D_j(R_h,X_h)\varphi_h=-T_{h,00}D_j(R_h,X_h)\varphi_h-T_{h,10}v_h(\varphi)|_{\Gamma_{j+1}^+}$$

ce qui se réécrit, en utilisant la première propriété de D_j :

$$(T_{h,00}+T_{h,11})R_hD_{j-1}(R_h,X_h)\varphi_h+T_{h,01}R_hD_{j-1}(R_h,X_h)\varphi_h+(T_{h,00}+T_{h,11})X_hR_h^j\varphi_h=-T_{h,10}v_h(\varphi_h)|_{\Gamma_{j+1}^+}$$

L'équation satisfaite par X_h donne :

$$(T_{h,00}+T_{h,11})X_hR_h^j\varphi_h=-T_{h,10}R_hX_hR_h^j\varphi_h-T_{h,10}X_hR_h^{j+1}\varphi_h$$

tandis que l'équation (3.14) satisfaite par R_h donne :

$$(T_{h,00}+T_{h,11})R_hD_{j-1}(R_h,X_h)\varphi_h+T_{h,01}D_{j-1}(R_h,X_h)\varphi_h=-T_{h,10}R_h^2D_{j-1}(R_h,X_h)\varphi_h$$

Aussi, nous devons satisfaire : $T_{h,10}v_h(\varphi_h)|_{\Gamma_{j+1}^+}=T_{h,10}\left(R_hX_hR_h^j+X_hR_h^{j+1}+R_h^2D_{j-1}(R_h,X_h)\right)\varphi_h$
ce qui, en utilisant la première propriété de D_j conduit à poser :

$$v_h(\varphi_h)|_{\Gamma_{j+1}^+}=\left(X_hR_h^{j+1}+R_hD_j(R_h,X)\right)\varphi_h$$

La deuxième propriété de D_j donne finalement : $v_h(\varphi_h)|_{\Gamma_{j+1}^+}=D_{j+1}(R_h,X_h)\varphi$, et la formule est démontrée.

De cette formule, on déduit que : $||v_h(\varphi_h)|_{\mathcal{C}_j^+}||^2_{H^1(\mathcal{C}^+)}\leq C(X)\left(||R_h||^{2j}+||R_h||^{2(j-1)}\right)$, donc $v_h(\varphi_h)$ appartient $H^1(\Omega_+)$, et dans ce cas à $V_h^r(\xi)(B_0^+)$ par construction. Aussi, nous avons construit une solution avec donnée zéro sur Γ_0^+, ce qui implique $v_h(\varphi_h)=0$ par unicité, et en particulier $X_h\varphi_h=0$ pour tout $\varphi_h\in X_h^r(\xi)$, ce qui signifie précisément que $X_h=0$ et conclut la démonstration. □

Par conséquent, une méthode de Newton classique convergerait bien localement vers la solution. En effet, on a le résultat suivant (dont nous détaillons intentionnellement la démonstration, très classique, car cela va nous être immédiatement utile) :

Théorème 3.22. *Soit F_h une fonction de classe C^1 dans un voisinage Ω de R_h, et telle que $F_h(R_h)=0$ et $DF_h(R_h)$ sa différentielle en R_h soit inversible.*

Alors il existe $\eta_0>0$ tel que si $||X_0-R_h||<\eta_0$, l'algorithme de Newton défini par $X_{k+1}=X_k+D_k$ où $D_k=-DF_h(X_k)^{-1}F_h(X_k)$, converge vers R_h

Démonstration. On pose $\beta=||DF_h(X_k)^{-1}||$ (en norme d'opérateur). Comme $DF_h(R_h)$ est continue, on fixe un $\delta>0$ et on choisit un η_0 tel que $B(R_h,\eta_0)\subset\Omega$,

$$\kappa=\frac{2\beta}{\beta+\delta}<1$$

et

$$||X-R_h||\leq\eta_0\Rightarrow||DF_h(X)-DF_h(R_h)||\leq\frac{1}{\beta+\delta}$$

Alors si $X\in B(R_h,\eta_0)$, comme $DF_h(X)=DF_h(R_h)+DF_h(X)-DF_h(R_h)$ et comme :

$$||DF_h(R_h)^{-1}(DF_h(X)-DF_h(R_h)||\leq\frac{\beta}{\beta+\delta}<1$$

d'où l'on déduit que $DF_h(X)$ est inversible pour tout $X\in B(R_h,\eta_0)$. Alors pour un $X_0\in B(R_h,\eta_0)$, on peut définir D_0 et initialiser la méthode de Newton. Supposons maintenant que $X_k\in B(R_h,\eta_0)$, alors on peut définir la direction de descente D_k, et on a :

$$\begin{aligned}X_{k+1}-R_h&=X_k+D_k-R_h\\&=X_k-DF_h(X_k)^{-1}F_h(X_k)-R_h\\&=DF_h(X_k)^{-1}(DF_h(X_k)(X_k-R_h)-F_h(X_k))\end{aligned}$$

Or, en utilisant la formule de Taylor avec reste intégral, il vient :

$$F_h(X_k) = F_h(R_h) + \int_0^1 DF_h(R_h + t(X_k - R_h))(X_k - R_h)dt$$

d'où :

$$X_{k+1} - R_h = DF_h(X_k)^{-1} \left(\int_0^1 \left[DF_h(X_k) - DF_h(R_h + t(X_k - R_h)) \right] (X_k - R_h)dt \right)$$

et donc, :

$$||X_{k+1} - R_h|| \leq \frac{2\beta}{\beta + \delta} ||X_k - R_h|| = \kappa ||X_k - R_h||$$

Alors par récurrence il est clair que toute la suite (X_k) est incluse dans $B(R_h, \eta_0)$ et donc que tous les D_k sont bien définis, de plus :

$$||X_k - R_h|| \leq \kappa^k ||X_0 - R_h||$$

avec $\kappa < 1$, donc la suite converge vers R_h. □

Pourquoi veut-on modifier cette méthode classique ? Tout simplement parce que nous ne savons pas estimer la solution recherchée, et donc nous ne savons pas a priori nous placer dans le bassin de convergence de la méthode de Newton. En pratique, la méthode de Newton non modifiée converge, mais pas toujours vers la bonne solution. L'idée est donc la suivante : si notre méthode modifiée converge, comme il existe une unique solution de rayon spectral strictement inférieur à 1, alors on aura convergé vers la bonne solution. Reste à initialiser correctement cette méthode. On peut cependant déjà retrouver le résultat de convergence locale de notre méthode modifiée de manière évidente :

Théorème 3.23. *Il existe un $\eta > 0$ tel que pour toute donnée intiale dans $B(R_h, \eta)$, la méthode de Newton modifiée appliquée à notre problème converge vers R_h.*

Démonstration. Supposons que X_0 soit dans le bassin de convergence de Newton non modifiée et que son rayon spectral soit strictement inférieur à 1. Alors, il est facile de voir en reprenant la démonstration de la convergence de la méthode de Newton que :

$$||X_0 + D_0 - R_h|| \leq \kappa ||X_0 - R_h||$$

avec $0 < \kappa < 1$. On note η_0 le rayon de la même boule que lors de la démonstration de la convergence locale de Newton non modifiée. Or, l'application rayon spectral étant continue, cela signifie qu'il existe une boule de centre $B(R_h, \eta_1)$ telle que pour tout X dans cette boule, on ait :

$$|\rho(X) - \rho(R_h)| \leq 1 - \rho(R_h) - \delta$$

avec δ tel que : $0 < 1 - \rho(R_h) - \delta < 1$, et donc $\rho(X) < 1 - \delta$.

Alors si on initialise l'algorithme de Newton modifié avec un X_0 dans $B(R_h, min(\eta_0, \eta_1))$, D_0 sera bien défini, et $X_0 + D_0$ sera encore dans $B(R_h, min(\eta_0, \eta_1))$, puisque

$$||X_0 + D_0 - R_h|| \leq \kappa ||X_0 - R_h|| < min(\eta_0, \eta_1)$$

donc son rayon spectral sera bien strictement inférieur à 1, et pour les deux méthodes (modifiée et non modifiée), $X_1 = X_0 + D_0$. Par récurrence, supposons que $X_k \in B(R_h, min(\eta_0, \eta_1))$, alors D_k est bien défini, et $X_k + D_k$ est de rayon spectral strictement inférieur à 1. Alors pour les deux méthodes, $X_{k+1} = X_k + D_k$.

On vient donc de montrer par récurrence qu'il existe un $\eta > 0$ tel que pour toute donnée initiale dans $B(R_h, \eta)$, les deux méthodes se confondent. Comme on est dans le cas où la méthode classique converge, on en déduit que pour toute donnée intiale dans cette boule, la méthode de Newton modifiée converge. □

La situation est donc la suivante : nous disposons d'une méthode de Newton qui converge localement vers la bonne solution, et qui depuis n'importe quel point de départ, si elle converge ne peut converger que vers la bonne solution. Malheureusement, on peut constater sur des exemples 1D que le bassin de convergence est très difficile à caractériser. On prendra donc un X_0 de rayon spectral strictement inférieur à 1 ($X_0 = 0$ par exemple), et nous serons sûr que si nous convergeons, nous convergeons vers la bonne solution. Pour de "grandes" valeurs du paramètre d'absorption ($\varepsilon > 0.5$), la non convergence n'a jamais été observée pour $X_0 = 0$. En revanche pour des valeurs inférieures, la méthode initialisée à zéro ne converge généralement pas (en tous cas pas suffisamment rapidement). Mais il existe un remède simple : il suffit de calculer R_h pour une valeur de ε plus grande, pour laquelle on sait que l'algorithme converge en pratique, et se servir de ce R_h pour initialiser la méthode pour la valeur de ε courante. Avec cette heuristique pour l'initialisation, la non convergence n'est alors plus jamais observée, même dans le cas limite $\varepsilon = 0$. Étant dans l'incapacité de caractériser le bassin de convergence de la méthode modifiée, et n'étant pas parvenus à trouver d'autres méthodes fiable pour globaliser l'algorithme de Newton, nous ne pouvons nous prononcer davantage sur cette résolution.

Une dernière remarque sur cette méthode concerne son coût. Contrairement aux apparences, les matrices sur lesquelles nous travaillons étant de taille modeste (elles sont de la taille du bord des cellules de périodicité), en 2D comme en 3D, l'exécution de la méthode est extrèmement rapide en pratique (ce qui est heureux puisque nous devons effectuer cette résolution deux fois par points de quadrature, et quatre fois si ε est trop petit), à un détail près. La majeure partie du coût se trouve concentrée dans le calcul du rayon spectral des itérés, et il s'agit là du véritable facteur limitant de la méthode. Au delà d'une certaine taille (heureusement très grande, ce problème n'étant apparu que pour des cas 3D vectoriels, i.e. pour les équations de Maxwell), le calcul de ce rayon spectral peut devenir trop long selon la méthode employée pour le calculer, et la méthode de Newton, grossièrement, passe d'un temps d'exécution marginal à un temps d'exécution prépondérant (et même excessif) par rapport à la durée totale de résolution. Nous avons testé diverses méthodes pour accélérer le calcul de ce rayon spectral, à savoir principalement les méthodes de puissance itérée ou l'algorithme d'Arnoldi (cf ARPACK). La méthode de puissance itérée échoue régulièrement à s'acquitter de ce calcul en temps raisonnable, nos expérimentations numériques nous montrant que les itérés de la méthode de Newton ne satisfont pas toujours les hypothèses de convergence de cette méthode (en particulier l'hypothèse de "séparation" des valeurs propres). L'algorithme d'Arnoldi semble en revanche quasi-systématiquement efficace pour effectuer ce calcul, même si nous ne disposons pas d'argument théorique nous garantissant sa convergence. Il y a là matière à amélioration, puisque comme nous l'avons déjà mentionné, c'est cette résolution en apparence anodine qui peut finir par limiter la taille des problèmes que nous pouvons traiter en pratique.

3.5.2 Le cas d'un seul défaut

Précisons d'emblée que dans toute la suite, sauf mention explicite du contraire, nous allons utiliser une période $L = L_x^+ = L_x^- = 1$, en x comme en y. De plus, nous allons (sauf analyse de convergence) utiliser un maillage cartésien de la cellule de référence, avec $N_x - 1 = N_y - 1 = 10$ mailles par période, soit un maillage de $N_x \times N_y = 11 \times 11$ noeuds pour la cellule de référence. Sur ce maillage, nous allons principalement utiliser des éléments finis d'ordre $r = 3$. Comme nous allons illustrer notre propos pour des sources régulières, il nous suffira de monter en ordre lorsque nous aurons besoin d'augmenter la précision en espace de nos simulations. Enfin, nous rappelons que N_k désigne toujours le nombre de points de quadrature.

Nous allons commencer cette présentation de résultats numériques par quelques validations dans le cas du milieu homogène. On commence par considérer un défaut $\Omega_0 =]0,1[\times]0,1[$, le défaut linéique étant $\Omega_{int} =]0,1[\times\mathbb{R}$. Nous supposons pour débuter que le milieu est périodique dans tout $\mathbb{R}^2$, la

seule perturbation étant une source gaussienne (tronquée) de la forme :

$$f = \begin{cases} A_f e^{-\left(\frac{(x-c_x)^2}{w_x^2}+\frac{(y-c_y)^2}{w_y^2}\right)} & \text{dans } \Omega_0 \\ 0 & \text{dans } \mathbb{R}^2 \setminus \Omega_0 \end{cases} \tag{3.35}$$

Nous prenons dans un premier temps les paramètres suivants pour cette gaussienne :

$$A_f = 160 \quad c_x = c_y = 0.5 \quad w_x = w_y = 0.02$$

Une telle source est alors une approximation numérique raisonnable d'un point source, aussi l'on s'attend à observer un résultat proche de la fonction de Green du cas homogène, à savoir une fonction de Hankel en dimension 2. Notons que dans pareille configuration, la méthode DtN développée dans [37] permet a priori de calculer cette solution. C'est pourquoi nous commençons par comparer les résultats de notre méthode à ceux donnés par la méthode de [37] (reprogrammée par l'auteur dans `Periodique`). Le résultat de cette comparaison est présentée sur la figure 3.15, où nous avons reconstruit la solution sur 6 cellules de périodicité autour de Ω_0, ce dernier étant représenté par le carré noir.

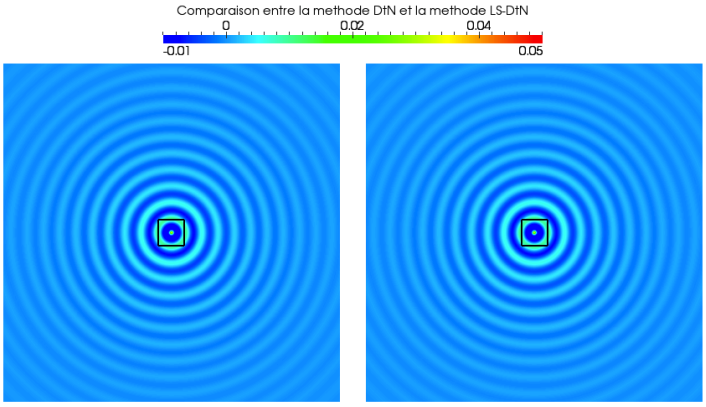


FIGURE 3.15 – Comparaison entre la méthode DtN et la méthode LS-DtN dans le cas d'une source quasi-ponctuelle, pour $\omega = 10$, $\varepsilon = 0.5$, $r = 3$ et $N_k = 40$

Nous observons sans peine que les résultats sont quasi identiques par ces deux méthodes, ce qui confirme le bon fonctionnement de la méthode LS-DtN. Notons que ces deux méthodes impliquent la résolution d'un système linéaire a priori plein. Pour la méthode LS-DtN, il s'agit de l'équation LS, qui est de taille $N_x^2 \times N_y^2$ (même si, en l'absence de perturbation sur les coefficients, comme ici, l'opérateur $I_h - S_{0,\rho,h} = I_h$ et il n'y a donc rien à inverser). Pour la méthode DtN, le système plein correspond aux équations intégrales permettant de déterminer les opérateurs DtN. Ces équations sont de taille $N_x^2 \times N_k^2$, N_k représentant non pas une quadrature dans le cas de la méthode DtN, mais le nombre de degrés de liberté dans la deuxième direction d'une approximation par éléments finis de taille $N_x \times N_k$ de l'espace de Floquet. En pratique, pour avoir une bonne précision sur la méthode DtN, on constate qu'avec un peu d'absorption, il faut prendre N_k de l'ordre de N_y, pour des longueurs d'ondes comparables à la période (ω entre 1 et 50 par exemple). Cela signifie que le coût de la résolution du système plein est comparable pour ces deux méthodes. Mais nous pouvons néanmmoins observer que dans le cas de la méthode LS-DtN, la taille de ce système ne dépend pas de N_k (c'est sa durée d'assemblage qui en dépend linéairement), contrairement à ce qui se passe pour

la méthode DtN. Cela signifie que lorsque nous diminuons l'absorption, puisque nous savons qu'il faut alors améliorer l'approximation dans la variable de Floquet pour garder la même précision, à fréquence fixée (et donc à maillage fixe), la taille du système plein va drastiquement augmenter dans le cas de la méthode DtN de [37], alors qu'il restera constant dans le cas de la méthode LS-DtN. Il s'agit là d'un avantage pratique très important en faveur de la méthode LS-DtN (en plus du fait qu'elle permet de traiter des situations plus générales). On pourrait arguer que la durée d'assemblage va augmenter linéairement dans le cas de la méthode LS-DtN, mais il est facile de voir (cf [37]) que le coût d'assemblage de la méthode DtN va lui augmenter quadratiquement avec N_k. De plus, les problèmes à ξ fixés que l'on résout pour assembler le système plein de la méthode LS-DtN sont entièrement découplés, ce qui rend leur parallélisation (non effectuée à ce jour dans `Periodique`) particulièrement simple.

Nous allons maintenant essayer d'observer un comportement prédit par la théorie de notre méthode LS-DtN. Nous savons que de la quadrature dans la variable de Floquet résulte une périodisation de la solution, de période N_k (ce qui n'est pas sans rappeler la périodisation induite par la discrétisation de la transformée de Floquet, et il s'agit en réalité du même phénomène, du au remplacement d'une intégrale par une somme finie). Néanmoins, nous avons prouvé que le problème est bien posé pour tout $N_k > 2$. Nous devrions donc pouvoir observer cette périodisation en prenant de faibles valeurs de N_k. Pour $N_k = 12$, nous représentons sur un grand nombre de périodes la solution obtenue sur la figure 3.16.

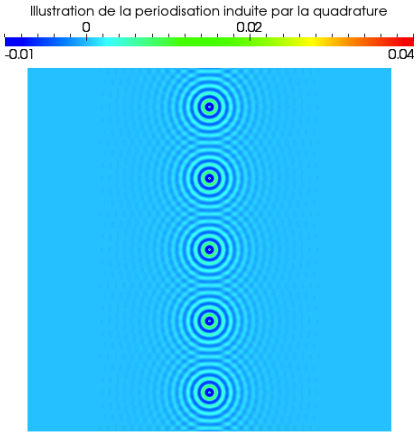


FIGURE 3.16 – Illustration de la périodisation induite par la quadrature pour $\omega = 5$, $\varepsilon = 0.5$, $r = 3$ and $N_k = 12$

Nous voyons nettement les répliques sur cette figure, ainsi que les interactions parasites qu'elles induisent sur la solution centrale, qui est celle qui nous intéresse. Observons maintenant comment cette solution centrale s'améliore avec le nombre de points de quadrature. Pour cela nous avons représenté sur la figure 3.17 la solution sur 6 cellules au delà du défaut, pour diverses valeurs de N_k, en commençant par $N_k = 12$, pour laquelle nous avons a priori représenté exactement une période de la solution (nous présentons également un zoom sur la solution dans Ω_0), d'où les 6 périodes représentées.

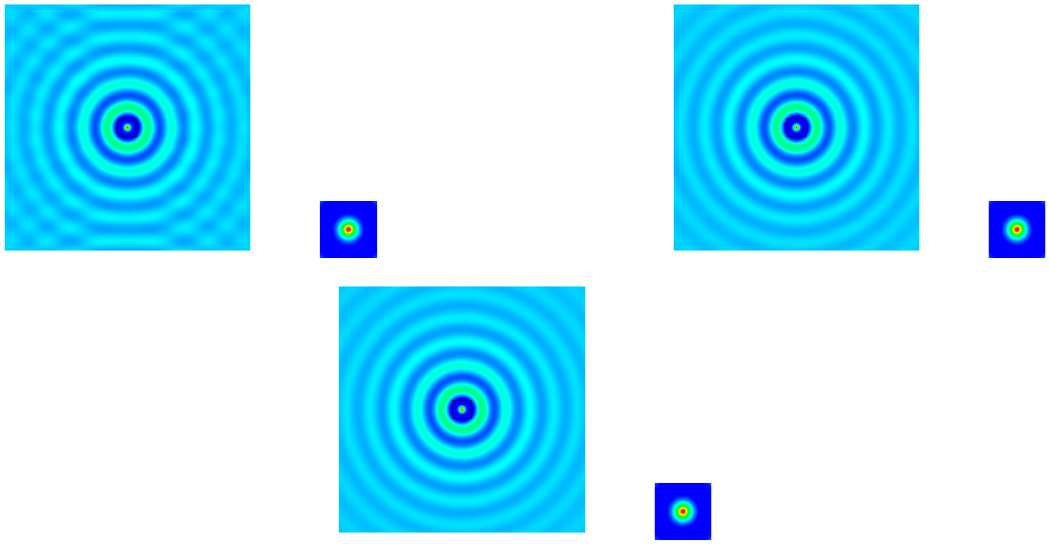


FIGURE 3.17 – Solution pour $\omega = 5$, $\varepsilon = 0.5$, $r = 3$ et $N_k = 12, 20, 30$

Nous voyons bien sur cette figure que les interactions entre les différentes répliques de la solution, dues à la quadrature, diminuent quand N_k augmente. Dès 20 points de quadrature, la solution est de très bonne qualité, ce qui confirme a priori la très bonne vitesse de convergence prédite par la théorie. Ensuite, nous prenons $r = 3$ et $N_k = 50$, et nous faisons varier l'absorption et la fréquence. On observe sur la figure 3.18 que la méthode se comporte très bien vis-à-vis de ces variations dans les paramètres.

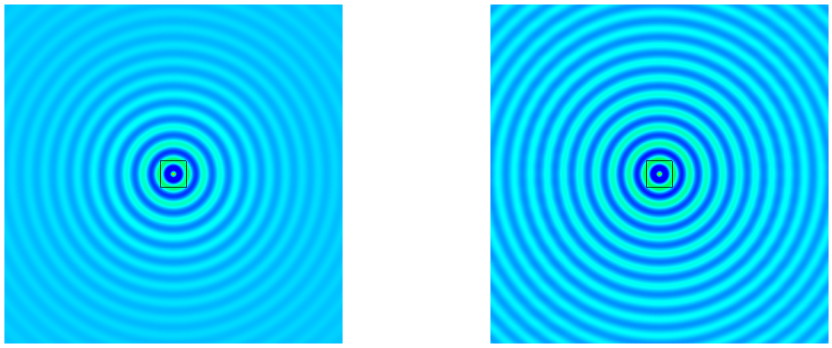


FIGURE 3.18 – Solution pour $\omega = 10$, $\varepsilon = 0.5, 0.1$, $r = 3$ et $N_k = 50$

Passons maintenant au cas d'un milieu périodique, toujours avec un défaut borné, et comparons nos résultats à ceux de la méthode DtN. Nous utilisons le milieu périodique de la figure 3.19, constitué de gaussiennes dans chaque cellule, avec pour défaut l'absence d'une cellule de périodicité, la source étant toujours la même.

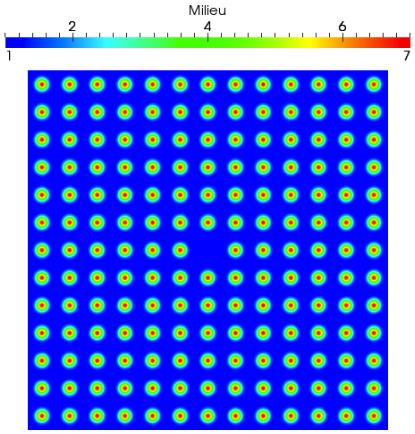


FIGURE 3.19 – Milieu périodique gaussien, le défaut étant l'absence d'une période

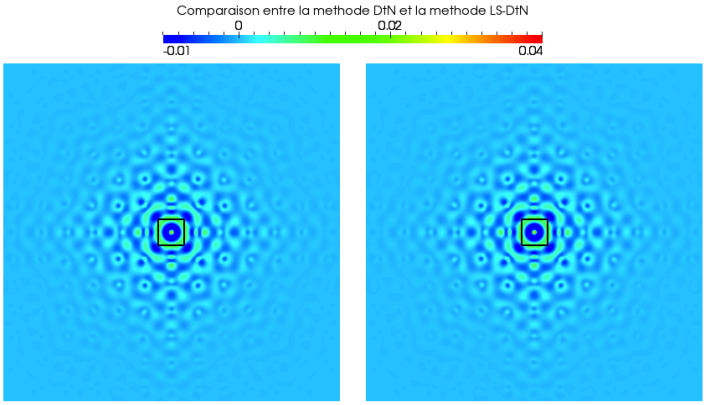


FIGURE 3.20 – Comparaison entre la méthode DtN et la méthode LS-DtN dans le cas d'une source quasi-ponctuelle, pour $\omega = 10$, $\varepsilon = 0.5$, $r = 3$ and $N_k = 40$, et le milieu périodique de la figure 3.19

Sur la figure 3.20, nous constatons de nouveau l'excellent accord entre ces deux méthodes. Nous allons maintenant employer notre méthode dans sa configuration de prédilection, à savoir des défauts linéiques localement perturbés (situation que ne peut traiter la méthode DtN). Nous utilisons un milieu constant par morceaux pour le demi-espace de gauche, un milieu gaussien pour celui de droite, et homogène dans Ω_{int}, avec défaut gaussien dans Ω_0 (et toujours la même source). Le milieu ainsi que les résultats sont présentés sur les figures 3.21 et 3.22. On observe nettement (en particulier sur la représentation tridimensionnelle de la figure 3.22) la structure particulièrement complexe de la solution, due aux multiples réflexions jusqu'à l'inifini

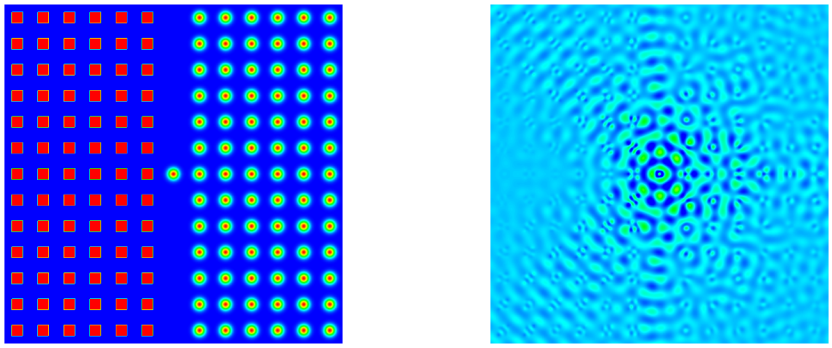


FIGURE 3.21 – Milieu et solution pour $\omega = 10$, $\varepsilon = 0.1$, $r = 3$ et $N_k = 50$

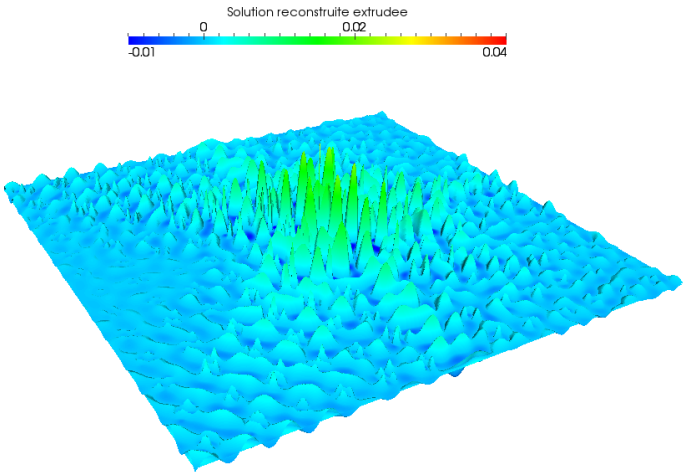


FIGURE 3.22 – Vue 3D de la solution solution pour $\omega = 10$, $\varepsilon = 0.1$, $r = 3$ et $N_k = 50$ et le milieu de la figure 3.21

Nous allons illustrer un peu plus la complexité des solutions en milieu périodique. Pour cela, nous diminuons un peu l'absorption ($\varepsilon = 0.05$), et nous décentrons légèrement la source ($c_x = 0.6$, $c_y = 0.4$). Pour différentes fréquences, nous obtenons les résultats présentés sur les figures 3.23 et 3.24. Nous observons sans peine que nous avons alors perdu toute symétrie à cause de l'excentrage de la source. De plus, nous observons que le comportement de la solution varie énormément avec la fréquence, mettant en évidence le fait qu'il soit si ardu de caractériser le comportement asymptotique de la solution. Une telle caractérisation permettrait sans doute, comme le fait la condition de Sommerfeld en milieu homogène, de donner un cadre mathématique rigoureux au cas sans absorption, mais ces exemples viennent nous rappeler en quoi il s'agit là d'une tâche très difficile.

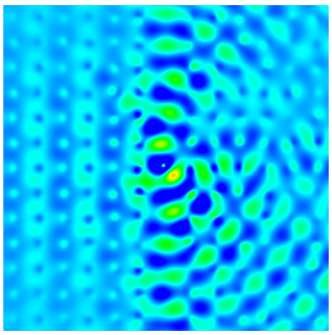
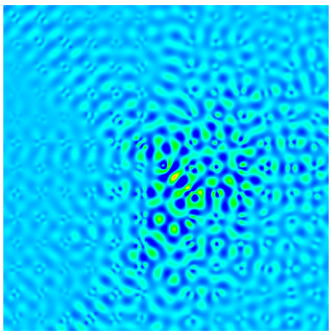
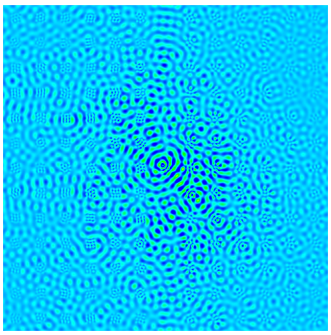




FIGURE 3.23 – Solution pour $\varepsilon = 0.05$, $N_k = 60$, $\omega = 5, 10$ avec $r = 3$, $\omega = 20$ avec $r = 5$

Nous allons maintenant exhiber un exemple avec un défaut de taille supérieure à 1. Nous prenons $\Omega_0 =]0, 1[\times]0, 2[$, et le milieu constant par morceaux de la figure 3.25, toujours pour une source gaussienne, mais cette fois de paramètres :

$$A_f = 160 \quad c_x = 0.5,\ c_y = 1 \quad w_x = 0.02,\ w_y = 0.2$$

Nous présentons des simulations pour ce milieu pour deux jeux de paramètres différents sur les figures 3.26 et 3.27.

Enfin, nous considérons un exemple 3D, afin d'illustrer le fait que l'ajout de directions bornées au problème ne pose aucune difficulté particulière. Notre milieu sera donc toujours non borné dans les directions x et y, et borné dans la direction z, avec plus précisément $z \in [0, 1]$. Nous commençons par utiliser la source 2D centrée que nous avons utilisée pour les validations par comparaison à la méthode DtN, et nous utilisons des conditions de Neumann homogènes sur les frontières $z = 0$ et $z = 1$. Nous nous attendons donc à retrouver la solution 2D, étirée dans la direction z, ce qui est bien ce que l'on observe sur la figure 3.28. Puis, nous testons notre méthode sur une vraie situation

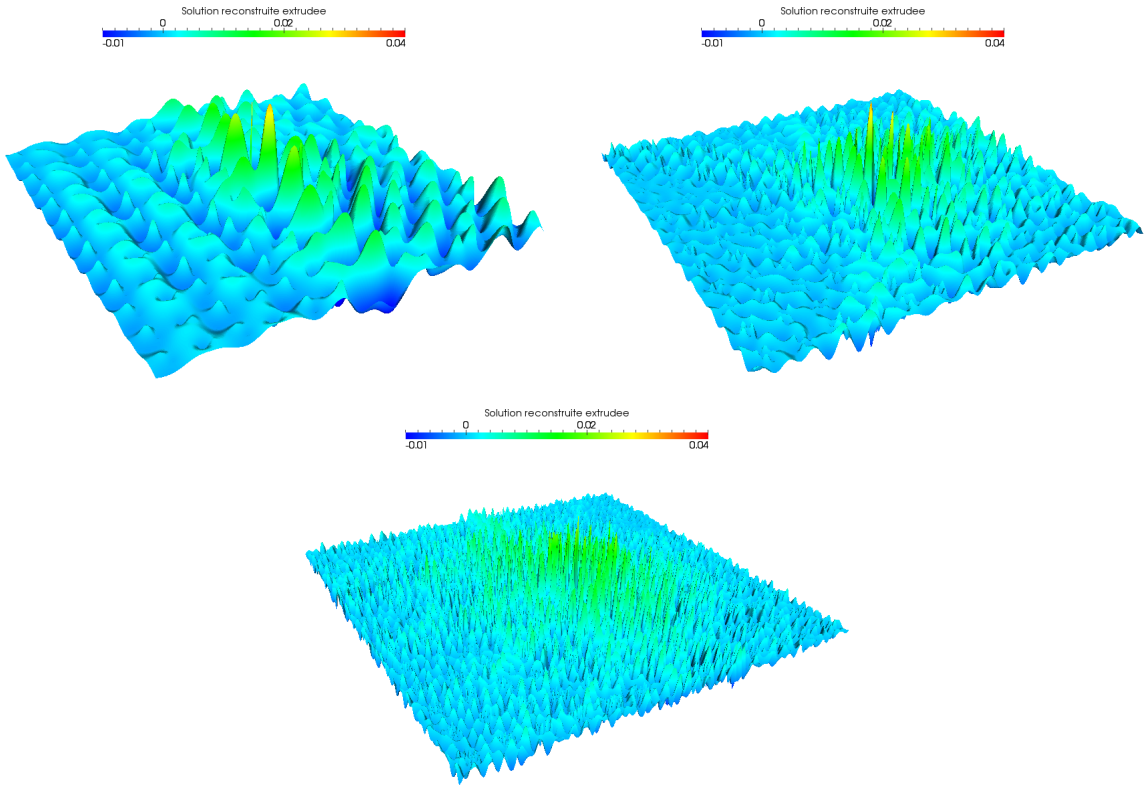


FIGURE 3.24 – Visualisation 3D des solutions de la figure 3.23

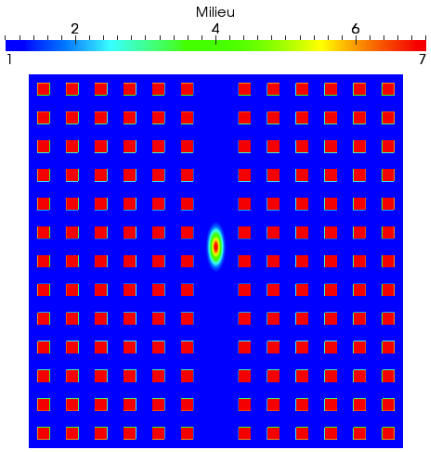


FIGURE 3.25 – Milieu périodique avec défaut $\Omega_0 =]0,1[\times]0,2[$

3D. Nous utilisons la source :

$$f = \begin{cases} A_f e^{-\left(\frac{(x-c_x)^2}{w_x^2}+\frac{(y-c_y)^2}{w_y^2}+\frac{(z-c_z)^2}{w_z^2}\right)} & \text{dans } \Omega_0 \\ 0 & \text{dans } \mathbb{R}^2 \setminus \Omega_0 \end{cases} \tag{3.36}$$

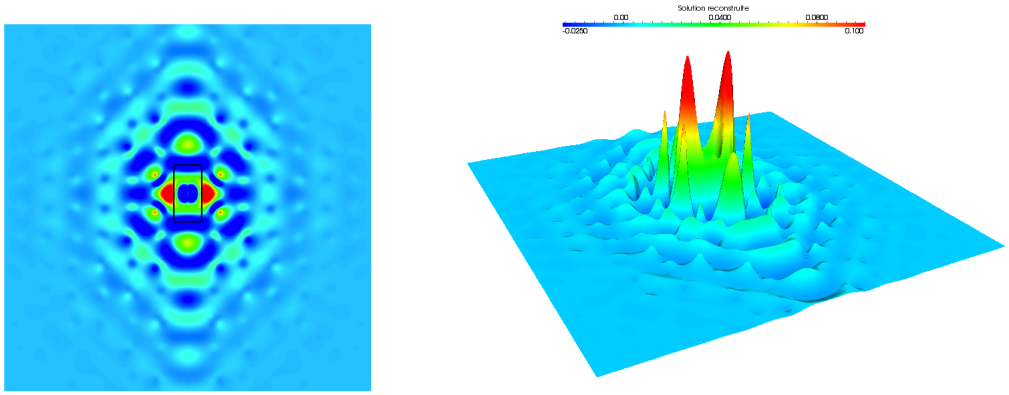


FIGURE 3.26 – Solution pour le milieu de la figure 3.25 $\omega = 5$, $\varepsilon = 0.5$, $r = 3$ et $N_k = 30$

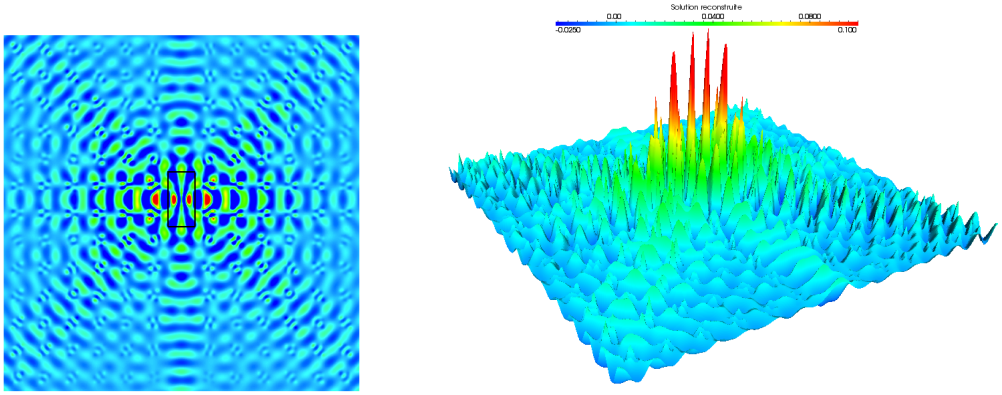


FIGURE 3.27 – Solution pour le milieu de la figure 3.25 $\omega = 10$, $\varepsilon = 0.1$, $r = 3$ et $N_k = 50$

avec les paramètres :

$$A_f = 14 \quad c_x = 0.7 \quad c_z = c_y = 0.5 \quad w_x = w_y = w_z = 0.2$$

Les résultats pour le milieu de la figure 3.29 sont présentés sur les figures 3.29 et 3.30. Nous observons de nouveau la complexité des solutions en milieu périodique sur cet exemple 3D.

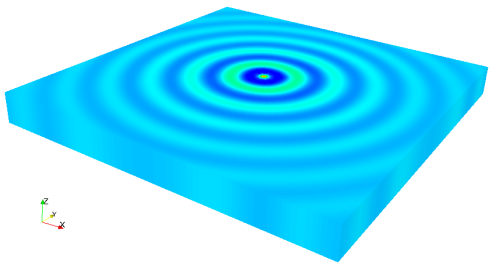


FIGURE 3.28 – Exemple 3D en milieu homogène, $r = 1$, $N_k = 30$, $\varepsilon = 0.5$, $\omega = 5$

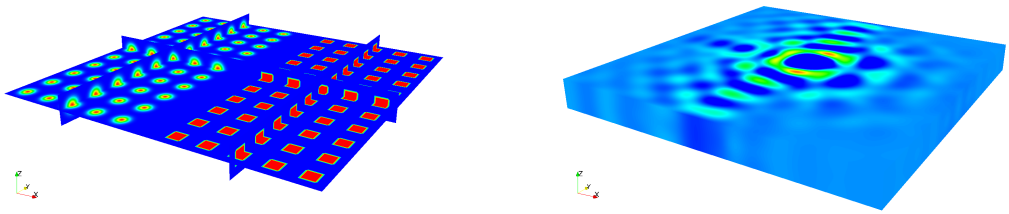


FIGURE 3.29 – Milieu périodique 3D et solution pour $r = 2$, $N_k = 30$, $\varepsilon = 0.5$, $\omega = 5$

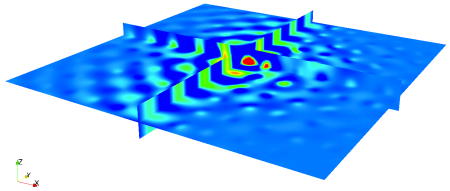


FIGURE 3.30 – Coupe de l'exemple 3D de la figure 3.29

3.5.3 Le cas du scattering multiple

Nous allons maintenant présenter des résultats dans le cas de plusieurs défauts linéiques. La méthode de résolution des problèmes de guide passant par la factorisation de l'opérateur DtN dans le cas du scattering multiple, nous allons commencer par vérifier que dans le cas d'un seul défaut linéique, nous obtenons les mêmes résultats que l'on applique la méthode dédiée au simple scattering ou au multi-scattering. Nous emploierons notre source gaussienne favorite :

$$f = \left| \begin{array}{ll} A_f e^{-\left(\frac{(x-c_x)^2}{w_x^2} + \frac{(y-c_y)^2}{w_y^2}\right)} & \text{dans } \Omega_0 \\ 0 & \text{dans } \mathbb{R}^2 \setminus \Omega_0 \end{array} \right. \tag{3.35}$$

avec

$$A_f = 160 \quad c_x = c_y = 0.5 \quad w_x = w_y = 0.02$$

pour le milieu de la figure 3.31. On voit nettement sur la figure 3.32 que les deux méthodes sont en parfait accord. Nous pouvons ensuite valider la méthode à l'aide d'une configuration pour laquelle la solution est facile à connaître a priori. Nous considérons un milieu parfaitement homogène, mais avec quatre sources identiques. La solution, par linéarité, doit être tout simplement la somme des solutions correspondant à chacune des sources, ce qui est bien ce que l'on observe sur la figure 3.33.

Ensuite, nous présentons deux situations plus complexes, à savoir les milieux des figures 3.34 et 3.35. Nous utilisons deux sources gaussiennes, placées au centre de l'unique défaut de chacun des défauts linéiques de droite et de gauche. Les solutions correspondantes sont celles des figures 3.36 et 3.37

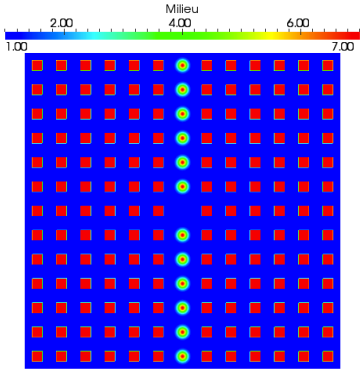


FIGURE 3.31 – Milieu périodique pour la comparaison entre la méthode de simple et de multi scattering

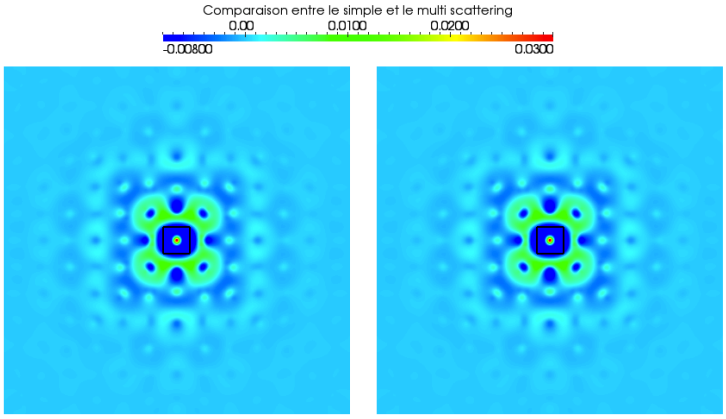


FIGURE 3.32 – Comparaison entre la méthode de simple et de multi scattering, pour $r = 3$, $\omega = 5$, $\varepsilon = 0.5$, $N_k = 30$

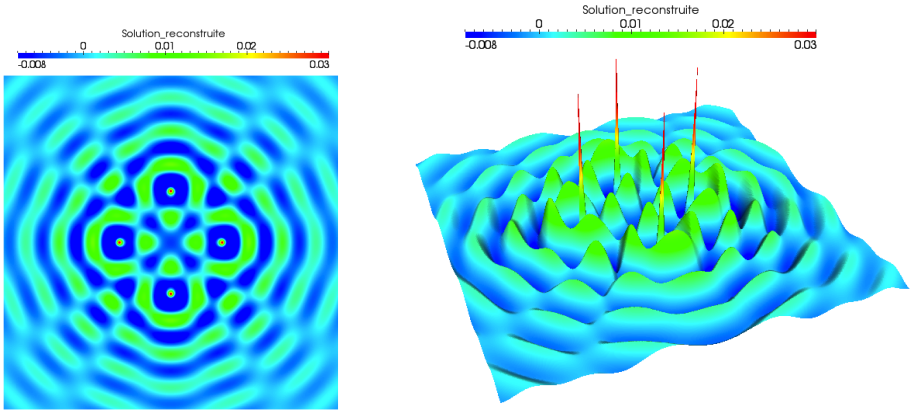


FIGURE 3.33 – Solution pour quatres sources en milieu homogène pour $r = 2$, $N_k = 30$, $\varepsilon = 0.5$, $\omega = 5$

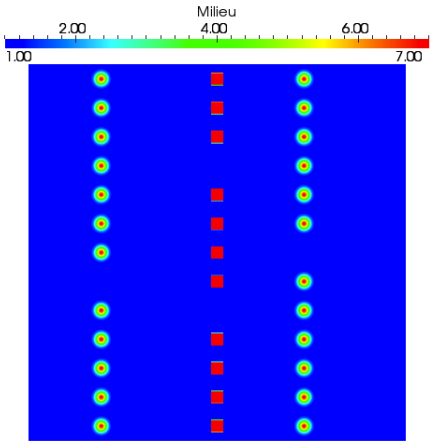


FIGURE 3.34 – Milieu périodique correspondant à la solution de la figure 3.36

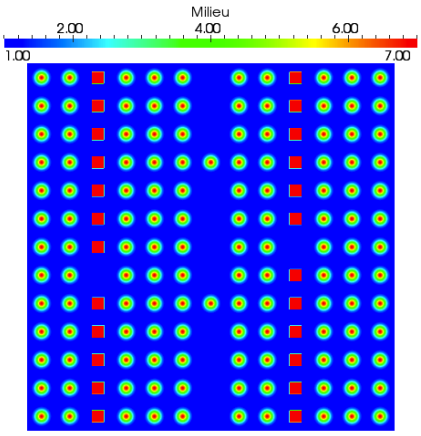


FIGURE 3.35 – Milieu périodique correspondant à la solution de la figure 3.37

respectivement. Nous voyons là que la méthode permet de traiter des situations complexes, et que les solutions le sont tout autant.

Nous illustrons maintenant l'emploi de la méthode de scattering multiple pour résoudre un problème de scattering "classique" (à savoir avec des défauts bornés), sur les figures 3.38 et 3.39. Maintenant, pour ces configurations avec défauts bornés, nous avons vu que nous pouvions employer une méthode complètement LS. Sur le milieu de la figure 3.40, avec la même source gaussienne dans chacun des défauts, nous comparons la méthode LS-DtN et la méthode LS complet. Nous voyons sur la figure 3.41 qu'il n'y a pas de différence qualitative notable au niveau des résultats (même si l'on sait que la méthode LS complète est moins précise quantitativement). On voit nettement sur la figure 3.32

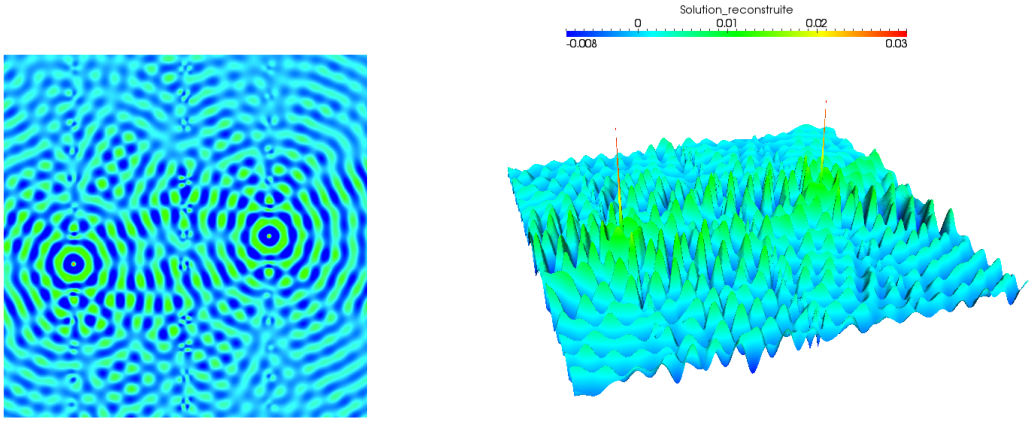


FIGURE 3.36 – Solution correspondant au milieu de la figure 3.34 pour $r = 3$, $N_k = 50$, $\varepsilon = 0.1$, $\omega = 10$

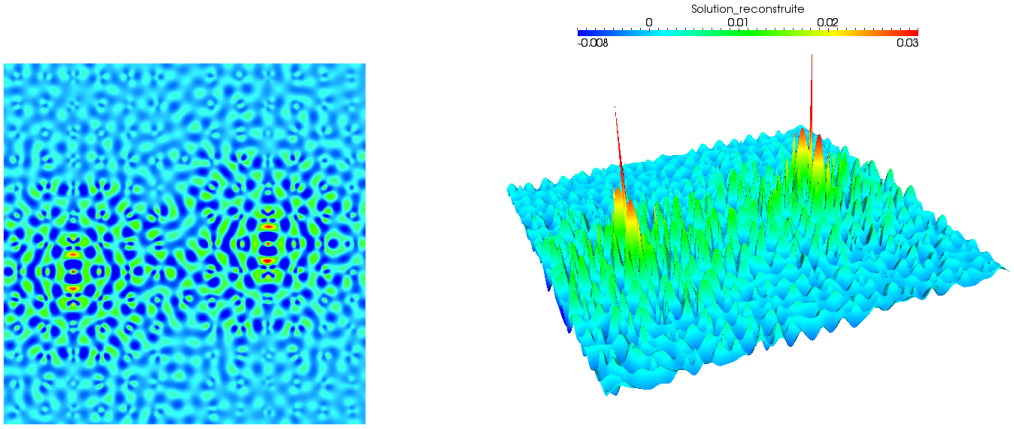


FIGURE 3.37 – Solution correspondant au milieu de la figure 3.35 pour $r = 3$, $N_k = 50$, $\varepsilon = 0.1$, $\omega = 10$

que les deux méthodes sont en parfait accord. Analysons maintenant le coût de chacune de ces deux méthodes. Nous considérons des maillages cartésiens de $N_x \times N_y$ points, et N_k points de quadrature (dans les deux directions pour la méthode LS complète). Les deux méthodes nécessitent la résolution d'un problème intérieur de même taille, aussi nous n'avons pas besoin de le prendre en compte pour comparer ces deux méthodes. Ce que nous devons comparer en revanche c'est le coût d'assemblage de ce système, qui diffère selon que l'on choisit l'une ou l'autre de ces méthodes. Nous prenons comme unité de référence la résolution d'un problème de cellule, et nous considérons le cas d'un seul défaut de taille M dans la direction x.

Pour la méthode mixte, nous devons résoudre N_k problèmes de guide, en construisant les opérateurs DtN pour chacun de ces problèmes. Nous devons donc résoudre $2 \times N_k$ fois deux problèmes de cellule, pour chacune des fonctions de base du bord, soit pour N_y fonctions. Au total, cela représente $4 \times N_k \times N_y$ problèmes de cellule à résoudre, ce qui nous donne le coût du calcul des opérateurs DtN. Puis, pour chaque point de quadrature, nous devons résoudre le problème intérieur pour chacune des fonctions de base volumique cette fois, qui sont au nombre de $M \times N_x \times N_y$. Cela représente $M \times N_k \times N_x \times N_y$ problèmes supplémentaires. Au final, nous devons donc résoudre : $(4+MN_x)N_kN_y$

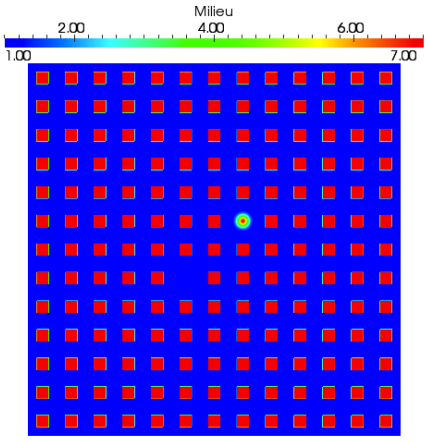


FIGURE 3.38 – Configuration simple pour un problème de scattering

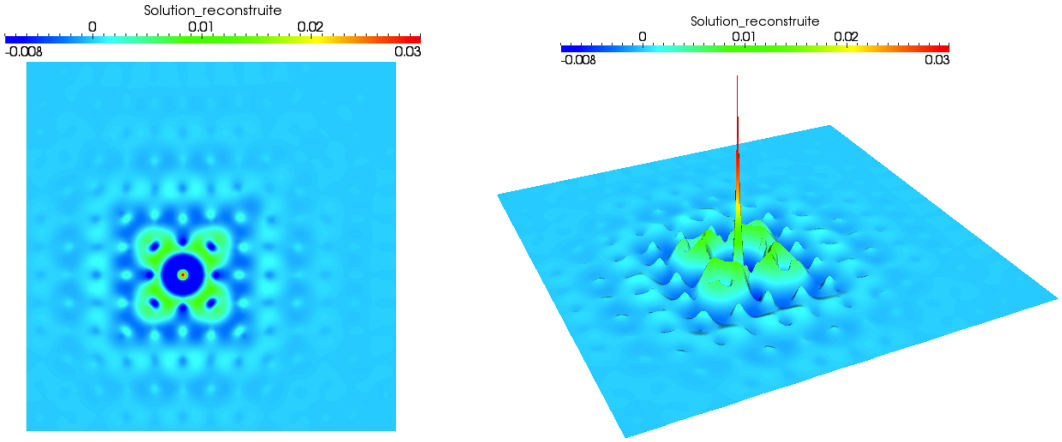


FIGURE 3.39 – Solution pour le problème de la figure 3.38 pour $r = 3$, $N_k = 30$, $\varepsilon = 0.5$, $\omega = 5$

problèmes de cellule pour la méthode mixte LS-DtN. Pour la méthode LS complète, nous résolvons seulement des problèmes intérieurs, mais pour beaucoup plus de points de quadrature. Nous aurons $N_k^2 N_x N_y$ problèmes à résoudre.

L'écart, en termes de problèmes de cellule, entre ces deux méthodes est alors donné par :

$$(N_k N_x - 4 - M N_x) N_k N_y$$

Il est clair que $N_k N_x$ sera plus grand que $4 + M N_x$, dès que $N_k > M + 4$ (et $N_x > 1$), ce que l'on a bien évidemment toujours en pratique, surtout si l'on cherche à faire converger la méthode. Le coût de la méthode LS complète augmente donc nettement plus rapidement que celui de la méthode mixte LS-DtN, et ce pour atteindre une précision moindre. Aussi, même si la méthode LS complète peut sembler plus naturelle a priori, elle est bien moins efficace en pratique que la méthode mixte, d'autant plus qu'elle ne permet pas de traiter des situations aussi générales (puisqu'elle ne permet de traiter que des défauts bornés).

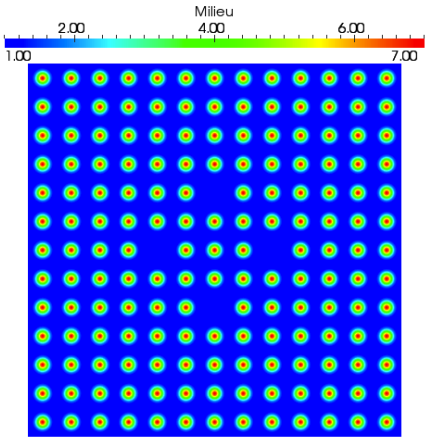


FIGURE 3.40 – Milieu périodique pour la comparaison entre les méthodes LS-DtN et LS complet

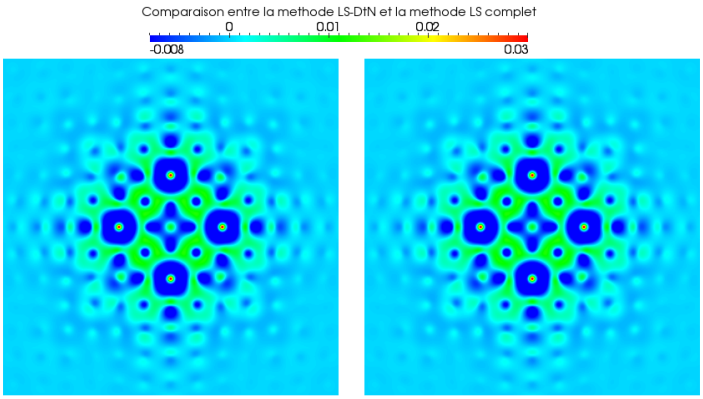


FIGURE 3.41 – Comparaison entre les méthodes LS-DtN et LS complet pour $r = 3$, $\omega = 5$, $\varepsilon = 0.5$, $N_k = 30$

3.5.4 ÉTUDE DE CONVERGENCE

Nous allons maintenant vérifier numériquement les estimations de convergence que nous avons obtenues. Commençons par remarquer que pour établir notre estimation finale, nous nous sommes servis du fait qu'à N_k fixé, le problème avec quadrature convergeait spatialement (avec une constante indépendante de N_k). Cette convergence est en fait une convergence totalement classique pour une méthode d'éléments finis pour un problème coercif. Vérifier cette convergence revient donc à vérifier que les éléments finis ont été correctement implémentés, de plus, au vu de la régularité de nos sources numériques, nous devons nous contenter de la vérifier pour les ordres 1 et 2. Nous voyons sur la figure 3.42 que nous retrouvons les vitesses de convergence prédites par la théorie. Nous passons maintenant à l'étude de la convergence vis-à-vis de la quadrature. Nous allons fixer le maillage en espace et l'ordre, et faire varier le nombre de points de quadrature. À h fixé, nous savons que le problème avec quadrature est équivalent à résoudre un problème discrétisé en espace sur le domaine Ω_{N_k}, avec conditions périodiques. Lorsque N_k tend vers l'infini, ce problème tend vers une

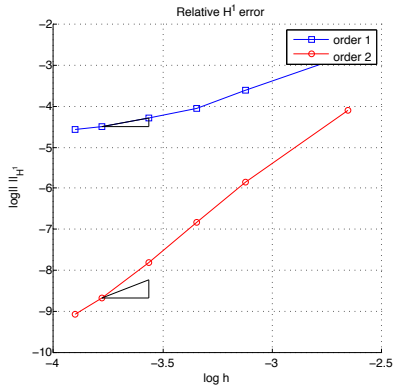


FIGURE 3.42 – Vérification de la convergence spatiale pour la méthode mixte LS-DtN

discrétisation de tout l'espace (qui est bien posé en tant que cas particulier de Ω_{N_k}). Nous savons alors que l'écart entre ce problème limite et le problème pour N_k fini est donné par la décroissance spatiale du problème limite (discret en espace). Or nous n'avons établi cette décroissance que pour le problème continu en espace. Néanmoins, pour un maillage assez fin, la solution discrétisée en espace est très proche de la solution continue, et décroit donc à peu près de la même manière. Aussi, le problème complètement discret à h et r fixés pour un maillage assez fin devrait converger par rapport au nombre de points de quadrature, vers une discrétisation spatiale du problème posé sur tout $\mathbb{R}^2$, à vitesse exponentielle. D'après l'estimation (3.23), nous devons observer une convergence au moins en $e^{-\tau\lfloor\frac{N_{k_x}}{2}\rfloor L}$ pour $\tau < \alpha(\omega, \varepsilon, \rho_-)$.

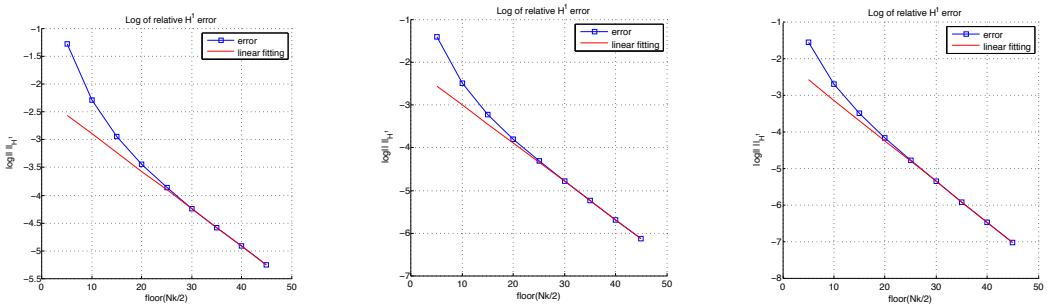


FIGURE 3.43 – Courbes de convergence pour $r = 3$, $\omega = 10$, $\varepsilon = 0.06, 0.08, 0.1$, les pentes des asymptotes sont respectivement -0.064, -0.0898 et -0.1113

Sur ces diverses figures 3.43 et 3.44, où l'on a tracé le log de l'erreur H^1 en fonction de $\lfloor\frac{N_{k_x}}{2}\rfloor L$, on observe que la convergence s'effectue bien à vitesse exponentielle, les diverses courbes étant asymptotiquement des droites.

Nous constatons ensuite sur ces résultats que le taux de convergence semble en pratique être quelque chose comme $e^{-\varepsilon\lfloor\frac{N_{k_x}}{2}\rfloor L}$ (sur la dernière courbe, le décrochage de la courbe de convergence est dû

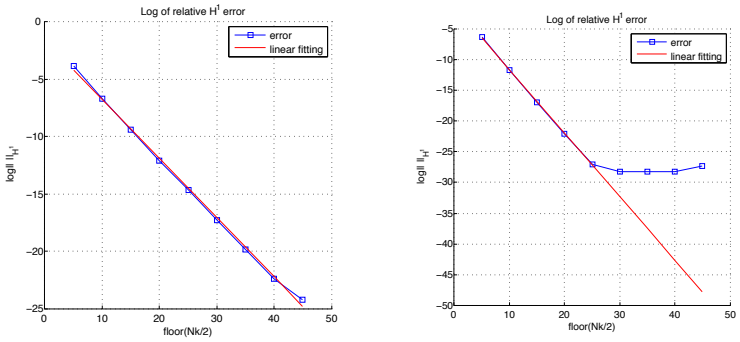


FIGURE 3.44 – Courbes de convergence pour $\omega = 10$, $r = 3$ et $\varepsilon = 0.5$, $r = 5$ et $\varepsilon = 1$ les pentes des asymptotes sont respectivement -0.5154, -1.0358

au fait que l'on a atteint la précision numérique) pour la fréquence $\omega = 10$ à laquelle nous avons mené ces calculs. Pour ε tendant vers zéro, nous avons (avec $\rho_- = 1$) $\widetilde{\omega} \sim \omega \quad$ et $\quad \eta \sim \varepsilon/2$. Alors $\alpha(\omega, \rho_-, \varepsilon) \sim \varepsilon/|\omega|$. Autrement dit, notre estimation de décroissance est pessimiste. Il faut bien observer que $\alpha(\omega, \rho_-, \varepsilon)$ est issue d'une minoration de la constante de coercivité du problème, ce qui explique que notre estimation soit en deça de la réalité. C'est la raison pour laquelle on observe un meilleur taux de convergence en pratique (d'autant que c'est la constante de coercivité du problème discret, et non continu, que l'on obtient en pratique). Néanmoins, notre constante théorique nous fournit un bon ordre de grandeur pour la constante pratique, et dans tous les cas, nous obtenons bien une convergence à vitesse exponentielle, comme annoncé.

3.5.5 Le cas sans absorption

Nous terminons cette exposé des résultats numériques par un petit détour vers le cas sans absorption. Bien que nous perdions la coercivité, et donc un cadre bien posé nous permettant de faire des démonstrations, nous pouvons néanmoins nous livrer à quelques extrapolations. Nous savons que dans le cas avec absorption, c'est la décroissance de la solution qui donne la vitesse de convergence vis-à-vis du nombre de points de quadrature. Dans le cas sans absorption, nous savons que pour un milieu homogène, la solution "sortante" (satisfaisant la condition de Sommerfeld) décroît non plus exponentiellement mais en $1/\sqrt{|x|}$. Si notre méthode converge encore dans le cas sans absorption, nous nous attendons par conséquent à ce que la vitesse de convergence soit bien plus lente dans ce cas. C'est ce que nous observons en pratique, ainsi que nous l'illustrons sur les figures 3.45 et 3.46 (nous utilisons encore la même source centrée), puisque nous voyons qu'il faut bien plus de points de quadrature pour approcher correctement la solution.

Pour des milieux périodiques généraux, nous ne disposons (en dépit d'un certain nombre d'efforts dans ce domaine) d'estimation de décroissance (que l'on aurait pu espérer obtenir par absorption limite). Néanmoins, rien ne nous empêche de tester numériquement notre méthode, en la comparant à deux cas avec très peu d'absorption, pour lesquels nous savons que tout se passe bien. Nous voyons sur la figure 3.47 que les solutions sont comparables, et la solution pour $\varepsilon = 0$ semble bien issue d'un principe d'absorption limite (pusiqu'elle ressemble furieusement aux deux autres, l'atténuation due à l'absoption en moins). Aussi nous sommes fortement enclins à penser que la méthode que nous avons

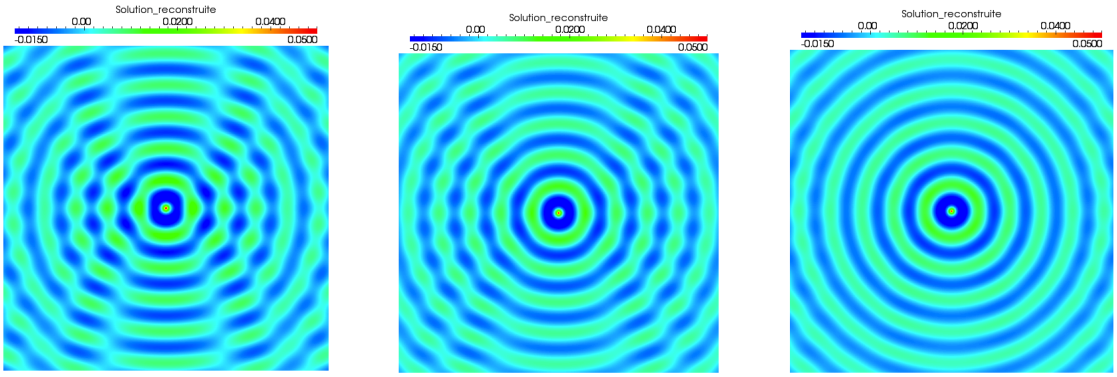


FIGURE 3.45 – Milieu homogène sans absorption, pour $r = 3$, $\omega = 5$, $N_k = 30, 50$ et 100

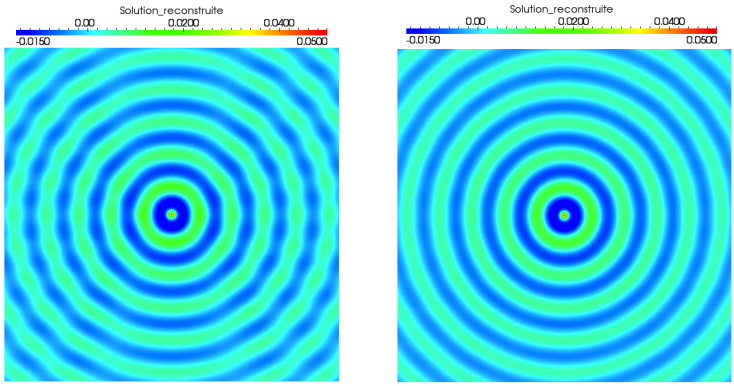


FIGURE 3.46 – Milieu homogène sans absorption, pour $r = 3$, $\omega = 5$, $N_k = 500$ et 1000

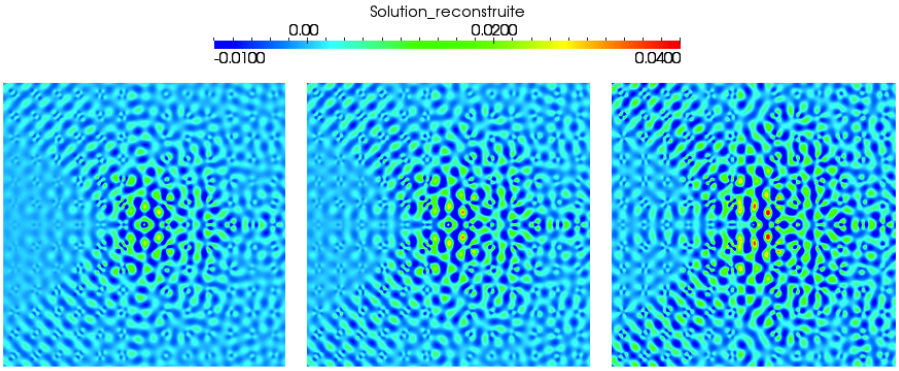


FIGURE 3.47 – Solution pour le milieu de la figure 3.21, $r = 3$, $\omega = 10$, $\varepsilon = 0.05$ avec $N_k = 80$, $\varepsilon = 0.025$ avec $N_k = 80$ et $\varepsilon = 0$ avec $N_k = 3000$

développée ici permet de traiter le cas sans absorption, à condition d'augmenter considérablement le nombre de points de quadrature. Rappelons alors que cela n'influe que sur la durée d'assemblage du système (et pas sur sa taille), contrairement à ce qui se produit pour la méthode DtN de [37] (qui ne s'emploie de toute façon que pour des défauts bornés). C'est pourquoi nous parvenons en pratique à faire converger (ou tout du moins semble-t-il) la méthode mixte LS-DtN dans le cas sans

absorption (bien entendu, pour des fréquences pour lesquelles le problème limite ne présente pas de modes), ce qui n'a pas encore pu être fait pour la méthode de [37] (du fait de l'augmentation de la taille du système plein lorsque l'on augmente N_k).

La discrétisation spatiale de la méthode mixte LS-DtN que nous avons exposée dans cette première partie s'effectue donc sans douleur et de façon complètement classique, même si l'analyse numérique de cette discrétisation est en revanche complexe. À l'aide d'éléments finis usuels, on parvient à implémenter cette méthode, et les résultats numériques ainsi obtenus sont très satisfaisants. Ils sont en accord avec des solutions analytiques comme avec les résultats d'autre méthodes, et la méthode converge avec une vitesse au moins égale à celle prévue par la théorie. De plus, elle permet visiblement de traiter le cas sans absorption, même si cette dernière configuration échappe pour le moment à nos capacités d'analyse (mais cela n'est qu'une conséquence de l'absence de résultat d'unicité pour le cas sans absorption en milieu périodique). Enfin, il est clair que l'on peut grandement optimiser cette méthode en pratique, notamment par un usage intensif du parallélisme. Ajoutons pour conclure que cette méthode s'étend sans peine aux équations de Maxwell, tant du point de vue théorique que pratique. Cette extension a été réalisée durant cette thèse, néanmoins nous avons choisi de ne pas traiter ce cas dans le présent mémoire, les différences étant essentiellement techniques : du point de vue théorique, il faut tenir compte du fait, très classique, que l'injection de $H(rot)$ dans L^2 n'est pas compacte (cf [67]), même en domaine borné, et du point de vue pratique, il faut utiliser des éléments finis $H(rot)$, plus difficiles à manipuler.

Deuxième partie

Problèmes d'évolution en milieux périodiques

Chapitre 4

Semi-discrétisation en temps et méthodes DtN

Résumé. *L'objectif de ce chapitre est de présenter une extension des méthodes du chapitre 1 aux problèmes d'évolution. Nous expliquons sur un problème modèle d'ordre un en temps (section 4.1) relativement général pourquoi il est peut-être plus simple et pertinent de considérer une approximation semi-discrète en temps (4.1.1) du problème modèle, et nous construisons les conditions transparentes au niveau semi-discret, tout d'abord dans le cas d'un seul défaut (section 4.1.2). Puis, nous expliquons comment les résultats du chapitre 1 sur le cas de plusieurs défauts s'étendent au cas des problèmes d'évolution (section 4.1.3), nous permettant de traiter facilement le cas de plusieurs défauts à partir du cas d'un seul défaut. Enfin, dans une seconde partie (section 4.2), nous expliquons comment étendre ces résultats aux problèmes d'ordre deux en temps.*

Dans ce chapitre, nous allons introduire les problèmes modèles d'évolution que nous allons traiter dans toute cette deuxième partie du mémoire. Nous allons sensiblement élargir le cadre de notre discussion, puisque nous n'allons plus nous limiter aux seuls problèmes d'ondes, les méthodes que nous avons développées pouvant s'appliquer à une gamme beaucoup plus large de problèmes. Aussi, nous allons considérer non plus un mais deux problèmes modèles, l'un correspondant à des problèmes d'ordre un en temps (qui permettra de traiter simultanément les équations paraboliques telles que la chaleur ainsi que les équations de type Schrödinger linéaire) et l'autre qui correspondra aux problèmes d'ordre deux en temps sur lequel nous expliquerons comment généraliser les méthodes que nous allons développer pour l'ordre un (et on comprendra alors sur ce cas particulier que ces méthodes permettent a priori de traiter des problèmes d'ordre quelconque, au moins formellement). Bien entendu, l'équation des ondes sera traitée via ce second type de problème modèle. Comme dans la première partie, nous allons considérer dans ce chapitre introductif un milieu de propagation de référence très général (en particulier non nécessairement périodique), sur lequel nous allons présenter un équivalent semi-discret en temps de la méthode des opérateurs dits de Dirichlet-to-Neumann (DtN) qui permettent de réduire la taille des domaines sur lesquels les calculs doivent être menés, et nous supposerons à nouveau que les perturbations du milieu de référence ainsi que les diverses données sont à support dans un compact donné.

Classiquement, les méthodes DtN pour les problèmes d'évolution ont pour point de départ une expression au moins semi-analytique de l'opérateur DtN sur le problème continu, cette expression impliquant, sauf cas très particuliers, une convolution en temps (voir [5], [6], et [4] pour l'équation de Schrödinger, et par exemple [42], [44] et [41] pour l'équation des ondes). Cette convolution s'exprime à l'aide de la fonction de Green, qui n'est en général pas connue, notamment pour les milieux

périodiques. Dans les cas où l'on dispose d'une expression analytique, se pose alors l'épineuse question de la discrétisation d'une telle convolution, qui peut conduire même pour des schémas en temps ayant de bonnes propriétés à d'insolubles problèmes de stabilité numérique si l'on n'utilise pas de quadrature adaptée (à ce sujet, on pourra consulter [63] et [64] pour les techniques de "convolution quadrature", mais aussi [5], [6], et [4] pour l'approche par transformée en Z du problème semi-discret, qui mime l'approche par transformée de Laplace pour le problème continu). Nous allons emprunter une autre voie, déjà apparue pour les équations de Schrödinger avec potentiel constant (cf [78] et [7]), qui consiste à semi-discrétiser en temps le problème avant de construire les opérateurs DtN, ce qui en principe permet d'adapter les opérateurs DtN au schéma utilisé, et ainsi de se préserver des problèmes de stabilité introduits par une discrétisation d'un opérateur de convolution provenant du problème continu. Cependant, cette seconde approche utilise en général abondamment elle aussi des calculs analytiques, les opérateurs DtN discrets étant en général calculés via la transformée de Laplace en espace du problème.

Nous allons adapter la technique de semi-discrétisation à notre cadre où des calculs analytiques ne sont pas possibles, au moyen d'un résultat de décomposition (en temps) de la solution à l'extérieur des défauts (à ne pas confondre avec le résultat de décomposition spatiale du scattering multiple), qui permettra une construction abstraite des opérateurs DtN discrets (mais que nous pourrons bien sûr expliciter dans le cas des milieux périodiques dans les chapitres suivants). Ensuite, dans le cas du scattering multiple, nous expliquerons comment reconstruire les opérateurs DtN à partir d'opérateurs qui se déduisent de la résolution de problèmes de simple scattering, comme dans le cas harmonique. À nouveau, ce résultat sera issu d'un résultat de décomposition (spatiale cette fois) de la solution à l'extérieur des défauts.

4.1 Problèmes d'ordre un en temps

Comme annoncé en préambule, nous allons utiliser un modèle pour les problèmes d'ordre un en temps suffisament générique pour englober des situations aussi diverses que l'équation de la chaleur ou l'équation de Schrödinger. Nous chercherons donc une fonction $u : \Omega \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{C}$ solution du problème modèle suivant :

$$\left| \begin{array}{ll} \gamma\rho\dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + Vu = f & \text{dans } \Omega, \quad t > 0 \\ u(\cdot, 0) = u_0 & \text{dans } \Omega \end{array} \right. \tag{4.1}$$

où Ω sera un ouvert de $\mathbb{R}^d$. Nous devons rajouter quelques hypothèses plus techniques qui vont nous garantir de bonnes propriétés d'existence et d'unicité de la solution :

(H1) $f \in C^1(]0, +\infty[, L^2(\Omega))$, $u_0 \in D(A)$, $\rho \in L^\infty(\Omega)$, $V \in L^\infty(\Omega)$

(H2) $\exists\ \rho_-, \rho_+ \in \mathbb{R}$ tels que $0 < \rho_- \leq \rho \leq \rho_+$.

(H3) $\gamma = 1$ ou $\gamma = -i$.

(H4) si $\gamma = 1$, on suppose $V \geq 0$.

Les hypothèses de régularité sur la source f et la donnée initiale u_0 ($D(A)$ désignant le domaine d'un opérateur que nous fixerons plus bas, une fois choisies les conditions aux limites) vont nous permettre de nous restreindre aux solutions fortes. Bien entendu, on pourrait relâcher quelque peu ces hypohèses et ne considérer que des solutions faibles à ces problèmes, mais le choix des solutions fortes comme point de départ va nous permettre de rester dans un cadre simple recelant néanmoins

toute la richesse nécessaire. Les hypothèses (H3) et (H4) sont celles qui permettent de traiter sans douleur simultanément les équations de la chaleur et de Schrödinger, en prenant $\gamma = 1$ pour la première, ce qui n'autorise alors que des potentiels $V \geq 0$, et $\gamma = -i$ pour la seconde, et nos hypothèses autorisent alors les potentiels négatifs. Le lecteur se demandera sans doute pourquoi nous n'avons pas "caché" le paramètre γ dans le coefficient ρ. Pour le comprendre, il convient de mettre le modèle sous la forme :

$$\gamma \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{\rho}\Delta u + \frac{V}{\rho}u = f \quad \text{dans } \Omega, \quad t > 0$$

où il est plus clair que ρ décrit les caractéristiques du milieu, tandis que γ change la nature de l'opérateur différentiel en temps. Leur signification étant clairement différente, nous avons tenu à les distinguer. Le cadre "physique" adéquat pour les modèles que nous cherchons à traiter étant toujours celui des solutions d'énergie finie, nous chercherons toujours la solution dans $H^1(\Omega)$. On désignera encore par $(\cdot,\cdot)_{L^2(\Omega)}$ le produit scalaire $L^2(\Omega)$, à savoir pour tous $u, v \in L^2(\Omega)$:

$$(u, v)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega u\overline{v}$$

et par $< \cdot, \cdot >$ le produit de dualité entre $\mathcal{D}(\Omega)$ et son dual (et nous procèderons encore à la classique identification entre les fonctions $L^1_{loc}(\Omega)$ et les distributions associées). Nous supposerons comme d'habitude que l'ouvert Ω est lipschitzien, et on cherchera comme dans la première partie la solution u dans $\mathcal{V}$ qui vérifie :

. $\mathcal{V} \subset H^1(\Omega)$, $\mathcal{V}$ étant fermé pour la norme $H^1(\Omega)$

et $\mathcal{V}$ sera muni du produit scalaire H^1, qui en fait un espace de Hilbert. On désignera désormais sous le vocable "hypothèses (HT)" notre jeu d'hypothèses (H1)-(H4). À nouveau, l'existence et l'unicité des solutions de ces problèmes va reposer sur le lemme suivant :

Lemme 4.1. *Si les hypothèses (HT) sont satisfaites, alors, pour tout $\lambda > 0$ la forme bilinéaire :*

$$a_\Omega(u, v) = \frac{1}{\gamma}(\nabla u, \nabla v)_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{\gamma}(Vu, v)_{L^2(\Omega)} + \lambda(\rho u, v)_{L^2(\Omega)}$$

est continue et coercive sur $\mathcal{V}$.

Démonstration. On commence par la continuité, pour laquelle, en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz à chaque partie de la forme bilinéaire, on obtient :

$$\begin{aligned} |a_\Omega(u, v)| &\leq \frac{1}{|\gamma|}||\nabla u||_{L^2(\Omega)}||\nabla v||_{L^2(\Omega)} + (\frac{1}{|\gamma|}||V||_{L^\infty(\Omega)} + |\lambda|\rho_+)||u||_{L^2(\Omega)}||v||_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \max\left(\frac{1}{|\gamma|}, \frac{1}{|\gamma|}||V||_{L^\infty(\Omega)} + |\lambda|\rho_+\right)||u||_{H^1(\Omega)}||v||_{H^1(\Omega)} \end{aligned}$$

Passons maintenant à la coercivité. Nous allons distinguer suivant la valeur de γ.

(i) Cas $\gamma = -i$

Dans ce cas, nos hypothèses n'imposent rien sur le signe de V, aussi il va falloir procéder avec quelques précautions. On a :

$$\gamma a_\Omega(u, u) = ||\nabla u||^2_{L^2(\Omega)} + (Vu, u)_{L^2(\Omega)} + \gamma\lambda(\rho u, u)_{L^2(\Omega)}$$

On utilise la relation $|z| \geq \delta\Re\mathrm{e}(z) + (1-\delta)|\Im\mathrm{m}(z)|$, $\forall\, 0 \leq \delta \leq 1$. Il vient :

$$|\gamma a_\Omega(u, u)| \geq \delta||\nabla u||^2_{L^2(\Omega)} + \delta(Vu, u)_{L^2(\Omega)}$$

$$+(1-\delta)\lambda(\rho u, u)_{L^2(\Omega)}$$

et donc, en utilisant (H1) et (H2) :

$$|\gamma a_\Omega(u, u)| \geq \delta||\nabla u||^2_{L^2(\Omega)} + ((1-\delta)\rho_- \lambda - \delta||V||_{L^\infty(\Omega)})||u||^2_{L^2(\Omega)}$$

En prenant δ assez petit, le dernier morceau est positif pour tout $\lambda > 0$, et on obtient en divisant par $|\gamma|$:

$$|a_\Omega(u,u)| \geq \frac{\delta}{|\gamma|} min(1, ((1-\delta)\rho_- \lambda - \delta ||V||_{L^\infty(\Omega)}))||u||^2_{H^1(\Omega)}$$

soit la coercivité de a_Ω.

(ii) Cas $\gamma = 1$

Dans ce cas, nos hypothèses imposent $V \geq 0$, et la démonstration est beaucoup plus simple. En effet, on a directement :

$$\begin{aligned} a_\Omega(u,u) &= \frac{1}{\gamma}||\nabla u||^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{\gamma}(Vu,u)_{L^2(\Omega)} + \lambda(\rho u,u)_{L^2(\Omega)} \\ &\geq \frac{1}{\gamma}||\nabla u||^2_{L^2(\Omega)} + \lambda\rho_- ||u||^2_{L^2(\Omega)} \\ &\geq \min(\frac{1}{\gamma}, \lambda\rho_-)||u||^2_{H^1(\Omega)} \end{aligned}$$

□

Nous n'allons cependant pas cette fois exposer d'abord nos résultats sur le cas simple $\Omega = \mathbb{R}^d$, mais dans le cas d'un milieu possédant une frontière. Se pose alors la question de choisir les conditions aux limites sur le bord d'un tel domaine. Afin de simplifier notre exposé, nous utiliserons des conditions de Neumann homogènes. On gardera à l'esprit que le cas des conditions de Dirichlet homogènes consiste formellement à faire les substitutions :

$$H^m \to H^m_0 \quad \text{et} \quad H^{m-1/2} \to H^{m-1/2}_{00}$$

et à remplacer les divers résultats de compacité et régularité classiques sur les espaces H^m et $H^{m-1/2}$ que nous utilisons dans la suite par leurs équivalents (tout aussi classiques, cf [61]) sur ces espaces. Le cas des conditions quasi-périodiques (pour des ouverts Ω de la forme décrite au chapitre 1 qui donne un sens à ces conditions), dont nous aurons besoin au chapitre 7, consiste à faire les substitutions :

$$H^m \to H^m_\xi \quad \text{et} \quad H^{m-1/2} \to H^{m-1/2}_\xi$$

et les résultats de compacité et de régularité doivent être remplacés par ceux que nous avons établis au chapitre 1 pour ces espaces quasi-périodiques. L'intégralité des résultats de ce chapitre demeure alors vrai (et se démontre de manière identique) pour les conditions de Dirichlet homogènes et les conditions quasi-périodiques. Nous avons donc choisi de traiter le cas le plus simple, ce qui va nous permettre de raccourcir quelque peu notre exposé, ce chapitre constituant le point de départ de développements relativement longs, d'autant plus que nous n'aurons de cesse de distinguer l'ordre un de l'ordre deux en temps. Lorsque nous présenterons des résultats numériques, nous illustrerons bien sûr l'emploi des autres conditions aux limites.

Nous supposerons que nous disposons d'un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ lipschitzien, connexe (cf figure 4.1 pour un exemple d'un tel domaine en dimension 2).

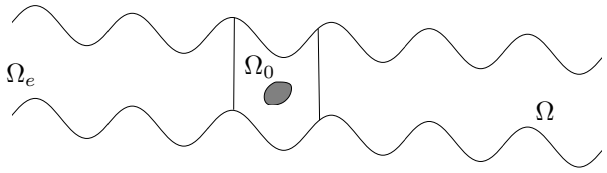


FIGURE 4.1 – Exemple d'ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, Ω_0 avec une seule composante connexe

On cherchera la solution dans l'espace $\mathcal{V} = H^1(\Omega)$, et nous choisirons comme domaine pour l'opérateur :

$$A = \frac{1}{\gamma\rho}(-\Delta + V)$$

l'espace fermé pour la norme $||\cdot||^2_{H^1(\Delta,\Omega)} = ||\cdot||^2_{H^1(\Omega)} + ||\Delta\cdot||^2_{L^2(\Omega)}$:

$$D(A) = \left\{u \in H^1(\Omega) \ | \ \Delta u \in L^2(\Omega) \quad \text{et} \quad \partial_\nu u|_{\partial\Omega} = 0\right\}$$

et on travaillera à l'aide du produit scalaire $||\cdot||_{L^2_\rho(\Omega)} = (\rho()\cdot,\cdot)_{L^2(\Omega)}$ sur $L^2(\Omega)$. Notre problème modèle complet se réécrira donc : trouver $u \in C^1([0,+\infty[, L^2(\Omega)) \cap C^0([0,+\infty[, D(A))$ tel que

$$\left|\begin{array}{ll} \gamma\rho\dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + Vu = f & \text{dans } \Omega, \quad t > 0 \\ \partial_\nu u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ u(\cdot,0) = u_0 & \text{dans } \Omega \end{array}\right. \tag{4.2}$$

Le lemme de coercivité 4.1 nous permet d'appliquer directement le théorème de Hille-Yosida (voir [15] ou [23] pour un énoncé et une démonstration complets), afin d'obtenir :

Théorème 4.1. *Pour tout $f \in C^1(\mathbb{R}_+, L^2(\Omega))$ et tout $u_0 \in D(A)$, sous les hypothèses (HT) le problème* (4.2) *possède une unique solution appartenant à $C^1([0,+\infty[, L^2(\Omega)) \cap C^0([0,+\infty[, D(A))$.*

Nous allons maintenant tenter de reproduire la méthode DtN sur ce problème modèle. Nous supposerons comme d'habitude l'existence d'un ouvert borné Ω_0, supposé lipschitzien, tel que $\Omega_0 \subset \Omega$, et nous appelerons domaine extérieur :

$$\Omega_e = \Omega \setminus \overline{\Omega_0}$$

On suppose alors que toutes les données sont à support dans Ω_0 :

. *supp* $f(\cdot,t) \subset \Omega_0$, pour tout $t > 0$

. On dispose d'un milieu de référence ρ_{ref}, V_{ref} tel que *supp* $(\rho - \rho_{ref}) \cup$ *supp* $(V - V_{ref}) \subset \Omega_0$

. *supp* $u_0 \subset \Omega_0$

La méthode DtN consiste alors comme en régime harmonique à réduire le domaine de calcul à Ω_0 en construisant des conditions aux limites qui expriment la continuité en trace et en dérivée normale de la solution sur :

$$\Gamma_0 = \partial\Omega_0 \setminus \overline{\partial\Omega \cap \partial\Omega_0}$$

Pour y parvenir, on doit introduire un problème extérieur avec donnée de Dirichlet sur Γ_0 et l'opérateur DtN sera alors l'opérateur qui à une donnée de Dirichlet associe la trace normale de la solution du problème extérieur associé à cette donnée. Dans le cas, le plus simple, d'un milieu homogène cet opérateur s'exprime à partir de la fonction de Green du problème extérieur par une convolution entre cette fonction et la donnée de Dirichlet. Par exemple, il est bien connu que pour l'équation de Schrödinger en 1D en l'absence de potentiel, cet opérateur est l'opérateur pseudo-différentiel (cf [4]) :

$$e^{-i\pi/4}\partial_t^{1/2}$$

que l'on peut aussi voir comme la dérivée en temps de la convolution en temps par la fonction :

$$e^{-i\pi/4}\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$$

La discrétisation de cet opérateur est une tâche complexe, qui dépend du schéma numérique choisi (cf [5] et [6]), et pour laquelle les questions de stabilité du schéma complet ainsi obtenu sont particulièrement délicates. Le but de ces conditions aux limites étant de simplifier les résolutions numériques en les restreignant à des domaines bornés, et comme il est clair au vu de cet exemple que l'on devra au final traiter chaque schéma numérique séparément, est apparue dans le contexte des équations

de Schrödinger avec potentiel constant (au moins dans Ω_e) l'idée de ne pas construire l'opérateur DtN sur le problème continu, mais sur le problème semi-discret en temps (cf [7] et [78]). On a ainsi l'espoir que les conditions DtN que l'on construit de cette façon vont préserver les bonnes propriétés du schéma auquel elles sont liées. Ce principe de semi-discrétisation va constituer notre point de départ pour le traitement de notre problème modèle. Néanmoins, nous allons considérablement nous éloigner des méthodes usuelles basées sur la semi-discrétisation, qui se servent en général de résolutions analytiques du problème extérieur semi-discret, basées sur la transformation en Z. Nous allons quant à nous nous baser sur un résultat de décomposition en temps de la solution de ce problème extérieur.

4.1.1 Semi-discrétisation en temps

Pour formuler le problème semi-discret, il nous faut choisir un schéma. Il est bien évident que nous n'allons pas pouvoir traiter ici tous les types de schémas numériques existant dans la pléthorique littérature sur ce sujet, aussi nous allons choisir une famille très célèbre de schémas à un paramètre, à savoir les θ-schémas, qui bien que très simples vont nous permettre de mettre en évidence toutes les difficultés et avantages des méthodes que nous allons développer, et qui bien sûr s'adapteront à n'importe quel autre schéma linéaire, pourvu qu'il soit convergent. On se restreint désormais à l'intervalle de temps $[0,T]$, avec $T = N\Delta t$ où $\Delta t > 0$ sera le pas de temps (constant) du schéma. Alors, le problème semi-discretisé par $\theta-$schéma associé à notre problème modèle s'écrit :

Trouver $(u^n)_{0\leq n\leq N} \in H^1(\Omega)^N$ tel que :

$$\left|\begin{array}{ll} \gamma\rho\dfrac{u^{n+1}-u^n}{\Delta t} + (-\Delta + V)(\theta u^{n+1} + (1-\theta)u^n) = f^{n+\theta} & \text{dans } \Omega \quad 0 \leq n \leq N \\ \partial_\nu u^{n+1} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ u^0(\cdot) = u_0(\cdot) & \text{dans } \Omega \end{array}\right. \tag{4.3}$$

où l'on a noté $f^n = f(\cdot, n\Delta t)$ et $f^{n+\theta} = \theta f^{n+1} + (1-\theta)f^n$. Nous allons commencer par vérifier que sous nos hypothèses, ce problème semi-discret conserve bien un sens. Nous aurons pour cela besoin du lemme suivant :

Lemme 4.2. *Sous les hypothèses (HT), pour tout $\theta \geq 0$ et $\Delta t > 0$, la forme bilinéaire :*

$$\begin{array}{rcl} a_{\Omega,\theta,\Delta t} : H^1(\Omega)\times H^1(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (u,v) & \longmapsto & (\theta\Delta t\nabla u, \nabla v)_{L^2(\Omega)} + ((\theta\Delta t V + \gamma\rho)u, v)_{L^2(\Omega)} \end{array}$$

est continue sur $H^1(\Omega)\times H^1(\Omega)$, et coercive si $\theta > 0$.

Démonstration. On commence par la continuité, pour laquelle, en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz à chaque partie de la forme bilinéaire, on obtient :

$$\begin{aligned} |a_{\Omega,\theta,\Delta t}(u,v)| &\leq \theta\Delta t||\nabla u||_{L^2(\Omega)}||\nabla v||_{L^2(\Omega)} + (\theta\Delta t||V||_{L^\infty(\Omega)} + |\gamma|\rho_+)||u||_{L^2(\Omega)}||v||_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \max\left(\theta\Delta t, \theta\Delta t||V||_{L^\infty(\Omega)} + |\gamma|\rho_+\right)||u||_{H^1(\Omega)}||v||_{H^1(\Omega)} \end{aligned}$$

Pour la coercivité, nous allons à nouveau devoir distinguer deux cas, suivant les valeurs de γ :

(i) Cas $\gamma = -i$

Sous nos hypothèses, V n'est pas nécessairement positif, il faut donc estimer avec précaution. On a :

$$a_{\Omega,\theta,\Delta t}(u,u) = \theta\Delta t\left(\nabla u, \nabla u\right)_{L^2(\Omega)} + ((\theta\Delta t V - i\rho)u, u)_{L^2(\Omega)}$$

On utilise la relation $|z| \geq \delta\Re\mathrm{e}(z) + (1-\delta)|\Im\mathrm{m}(z)|$, $\forall 0 \leq \delta \leq 1$. Il vient :

$$\begin{aligned} |a_{\Omega,\theta,\Delta t}(u,u)| \geq \delta\theta\Delta||\nabla u||^2_{L^2(\Omega)} + \delta\left(\theta\Delta t V u, u\right)_{L^2(\Omega)} \\ +(1-\delta)\left(\rho u, u\right)_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

et donc, en utilisant (H1) et (H2) :

$$|a_{\Omega,\theta,\Delta t}(u,u)| \geq \delta\theta\Delta||\nabla u||^2_{L^2(\Omega)} + \left((1-\delta)\rho_- - \delta\theta\Delta t||V||_{L^\infty(\Omega)}\right)||u||^2_{L^2(\Omega)}$$

En prenant δ assez petit, on obtient la coercivité de $a_{\theta,\Delta t}$.

(ii) Cas $\gamma = 1$

Dans ce cas (H4) impose $V \geq 0$, et on a :

$$\Re\mathrm{e}\left(a_{\Omega,\theta,\Delta t}(u,u)\right) = \theta\Delta t\,(\nabla u, \nabla u)_{L^2(\Omega)} + ((\theta\Delta t V + \rho)u, u)_{L^2(\Omega)}$$

d'où l'on déduit aisément en vertu de (H2) que :

$$\Re\mathrm{e}\left(a_{\Omega,\theta,\Delta t}(u,u)\right) \geq \min(\theta\Delta t, \rho_-)||u||^2_{H^1(\Omega)}$$

et donc :

$$|a_{\Omega,\theta,\Delta t}(u,u)| \geq \min(\theta\Delta t, \rho_-)||u||^2_{H^1(\Omega)}$$

ce qui démontre la coercivité de $a_{\theta,\Delta t}$.

□

Afin d'alléger les notations pour la suite, on introduit l'opérateur suivant :

$$\begin{array}{rcl} A(\theta,\Delta t) : H^1(\Omega) & \longrightarrow & H^{-1}(\Omega) \\ u & \longmapsto & -\theta\Delta t\Delta u + \theta\Delta t V u + \gamma\rho u \end{array}$$

Notre problème modèle semi-discret se réécrit donc : trouver $(u^n)_{0\leq n\leq N} \in H^1(\Omega)^N$ tel que :

$$\left|\begin{array}{ll} A(\theta,\Delta t)u^{n+1} = A(\theta-1,\Delta t)u^n + \Delta t f^{n+\theta} & \text{dans } \Omega \quad 0 \leq n \leq N \\ \partial_\nu u^{n+1} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ u^0(\cdot) = u_0(\cdot) & \text{dans } \Omega \end{array}\right. \tag{4.3}$$

On déduit alors le caractère bien posé de notre problème modèle semi-discret du lemme précédent :

Théorème 4.2. *Sous les hypothèses (HT), il existe une unique famille $(u^n)_{0\leq n\leq N} \in H^1(\Omega)^N$ qui soit solution de* (4.3)*. De plus, chaque problème à n fixé est bien posé.*

Démonstration. On commence par mettre sous forme variationnelle chacun de ces problèmes. Par hypothèse, $u_0 \in D(A)$, alors par récurrence il est clair que pour tout n, $\Delta u^n \in L^2(\Omega)$. On peut donc appliquer la formule de Green à chacun de ces problèmes, et on a, pour tout $v \in H^1(\Omega)$:

$$\left(A(\theta,\Delta t)u^{n+1}, v\right)_{L^2(\Omega)} = a_{\Omega,\theta,\Delta t}(u^{n+1}, v) - \theta\Delta t < \partial_\nu u^{n+1}|_{\partial\Omega}, \overline{v}|_{\partial\Omega} >$$

et donc

$$\left(A(\theta,\Delta t)u^{n+1}, v\right)_{L^2(\Omega)} = a_{\Omega,\theta,\Delta t}(u^{n+1}, v)$$

Alors on obtient la formulation variationnelle :

$$a_{\Omega,\theta,\Delta t}(u^{n+1}, v) = a_{\Omega,\theta-1,\Delta t}(u^n, v) + \Delta t\left(f^{n+\theta}, v\right)_{L^2(\Omega)} \quad \forall\, v \in H^1(\Omega)$$

Le lemme 4.2 nous apprend que la forme bilinéaire $a_{\Omega,\theta,\Delta t}$ est continue et coercive en norme H^1, aussi il est clair par le théorème de Lax-Milgram qu'il existe un unique u^1 satisfaisant cette relation pour $u^0 \in D(A)$ et donc par récurrence qu'il existe une unique famille solution de cette récurrence variationnelle. De plus, il est clair que toute solution avec données nulles de (4.3) est solution de la récurrence variationnelle avec données nulles, et est par conséquent nulle, ce qui prouve l'unicité de la solution du problème (4.3).

Soit maintenant $(u^n)_{0\leq n\leq N} \in H^1(\Omega)^N$ la solution de cette récurrence variationnelle, alors on a, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$:

$$a_{\Omega,\theta,\Delta t}(u^{n+1}, \varphi) = a_{\Omega,\theta-1,\Delta t}(u^n, \varphi) + \Delta t\left(f^{n+\theta}, \varphi\right)_{L^2(\Omega)}$$

soit donc, en réinterprétant les produits scalaires $L^2(\Omega)$ comme des produits de dualité sur $\mathcal{D}(\Omega)$:

$$\theta\Delta t < \nabla u^{n+1}, \nabla\overline{\varphi} > + < (\theta\Delta t V + \gamma\rho)u^{n+1}, \overline{\varphi} >= (\theta-1)\Delta t < \nabla u^n, \nabla\overline{\varphi} >$$

$$+ < ((\theta-1)\Delta t V + \gamma\rho)u^n, \overline{\varphi} > + < \Delta t f^{n+\theta}, \overline{v} >$$

d'où

$$< A(\theta,\Delta t)u^{n+1}, \overline{\varphi} >=< A(\theta-1,\Delta t)u^n, \overline{\varphi} > + < \Delta t f^{n+\theta}, \overline{v} >$$

et donc :

$$A(\theta,\Delta t)u^{n+1} = A(\theta-1,\Delta t)u^n + \Delta t f^{n+\theta}$$

dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. Par récurrence, on voit clairement que $A(\theta,\Delta t)u^{n+1} \in L^2(\Omega)$, et donc cette équation est vraie au sens $L^2(\Omega)$. Alors si on fait maintenant une formule de Green avec une fonction test $v \in H^1(\Omega)$, on trouve :

$$a_{\Omega,\theta,\Delta t}(u^{n+1},\varphi) = \left(A(\theta,\Delta t)u^{n+1}, v\right)_{L^2(\Omega)} + \theta\Delta t < \partial_\nu u^{n+1}|_{\partial\Omega}, \overline{v}|_{\partial\Omega} >$$

D'où :

$$\left(A(\theta,\Delta t)u^{n+1} - A(\theta-1,\Delta t)u^n - \Delta t f^{n+\theta}, v\right)_{L^2(\Omega)} + \theta\Delta t < \partial_\nu u^{n+1}|_{\partial\Omega}, \overline{v}|_{\partial\Omega} >$$

$$+(1-\theta)\Delta t < \partial_\nu u^n|_{\partial\Omega}, \overline{v}|_{\partial\Omega} >$$

et par suite :

$$\theta\Delta t < \partial_\nu u^{n+1}|_{\partial\Omega}, \overline{v}|_{\partial\Omega} > +(1-\theta)\Delta t < \partial_\nu u^n|_{\partial\Omega}, \overline{v}|_{\partial\Omega} >= 0$$

Comme $u^0 \in D(A)$, on a :

$$< \partial_\nu u^0|_{\partial\Omega}, \overline{v}|_{\partial\Omega} >= 0$$

et alors par récurrence il est clair que pour tout n

$$< \partial_\nu u^n|_{\partial\Omega}, \overline{v}|_{\partial\Omega} >= 0$$

et ce pour toute fonction test $v \in H^1(\Omega)$. On en déduit donc :

$$\partial_\nu u^n|_{\partial\Omega} = 0 \quad \text{dans } H^{-1/2}(\partial\Omega)$$

Alors la famille $(u^n)_{0\le n\le N}$ est bien solution de (4.3), et nous avons montré l'existence d'une solution. □

La question naturelle (et dont la réponse est très classique) qui se pose ensuite pour ce problème modèle est de savoir dans quelle mesure il approche effectivement le problème continu (4.2), ce qui conduit dans le cas des schémas numériques aux questions de consistance et de stabilité. Il est bien connu que le θ-schéma va permettre d'approcher convenablement notre problème modèle. On a effet deux résultats très classiques de stabilité :

Lemme 4.3. *Sous les hypothèses (HT), pour tout $\theta > 0$, $\Delta t > 0$, la solution de :*

$$\left|\begin{array}{l} A(\theta,\Delta t)u = f \quad \text{dans } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \\ \partial_\nu u|_{\partial\Omega} = 0 \end{array}\right.$$

vérifie :

$$||u||_{L^2_\rho} \le ||f||_{L^2_{1/\rho}}$$

où l'on note $||\cdot||_{L^2_\mu(\Omega)} = (\mu(\cdot,\cdot)_{L^2(\Omega)}$, et qui n'est une norme que si $\mu \ge C > 0$ presque partout.

Lemme 4.4. *Sous les hypothèses (HT), pour tout $\theta \ge 1/2$ et $\Delta t > 0$, on a :*

$$||A(\theta,\Delta t)^{-1}A(\theta-1,\Delta t)||_{\mathcal{L}(L^2_\rho)} \le 1 \tag{4.4}$$

desquels on déduit aisément le résultat de convergence :

Théorème 4.3. *On suppose que :*

$$u \in C^2([0,T], L^2(\Omega))$$

Alors sous les hypothèses (HT), pour tout $\theta \geq 1/2$, pour tout $t^n \leq T$, on a le résultat de convergence :

$$||u(\cdot,t^n) - u^n||_{L^2_\rho} \leq CT\Delta t \sup_{[0,T]} ||\partial_t^2 u(\cdot,t)||_{L^2(\Omega)}$$

Remarque 4.1. *Le lecteur aura sûrement remarqué que nous avons dû exclure toutes les valeurs de $\theta < 1/2$. Pour l'équation de Schödinger, ceci est parfaitement normal puisque même après discrétisation spatiale, il est bien connu que le θ-schéma n'est stable que pour $\theta \geq 1/2$. En revanche ceci peut surprendre pour l'équation de la chaleur étant donné qu'il est bien connu que, sous condition CFL, le θ-schéma est stable et convergent même pour $\theta < 1/2$. Cela est dû au fait que nous travaillons sur un problème seulement discrétisé en temps, et que par conséquent l'opérateur Laplacien n'est pas borné sur $L^2(\Omega)$ (on peut aussi le voir comme le fait que les normes $||\cdot||_{L^2(\Omega)}$ et $|\cdot|_{H^1(\Omega)}$ ne sont pas équivalentes). Nous pourrons récupérer (bien plus tard dans cette deuxième partie) les valeurs de $\theta < 1/2$ lorsque nous discrétiserons aussi la variable d'espace.*

Maintenant que nous sommes assurés que notre nouveau problème modèle est un bon substitut au problème continu initial, nous pouvons nous préoccuper de sa résolution par méthode DtN.

4.1.2 Méthode DtN semi-discrète

Rappelons-nous que le principe des méthodes DtN consiste, à partir d'une solution dans Ω_0 et dans Ω_e, à chercher une condition sur leurs traces respectives afin que l'on puisse construire une solution globale sur Ω à partir des deux précédentes. Aussi, il convient d'étudier au préalable le problème extérieur posé dans Ω_e, c'est-à-dire l'équation satisfaite par la restriction à Ω_e de la solution de (4.3). C'est pourquoi on introduit le problème suivant :

Pour tout $(\varphi^n)_{1\leq n\leq N} \in H^{1/2}(\Gamma_0)^N$, trouver $(u_e^n)_{0\leq n\leq N} \in H^1(\Omega_e)^N$ tel que :

$$\left|\begin{array}{ll} A(\theta,\Delta t)u_e^{n+1} = A(\theta-1,\Delta t)u_e^n & \text{dans } \Omega_e \quad 0 \leq n \leq N \\ \partial_\nu u_e^{n+1} = 0 & \text{sur } \partial\Omega_e \cap \partial\Omega \\ u_e^{n+1}|_{\Gamma_0} = \varphi^{n+1} & \text{sur } \Gamma_0 \\ u_e^0(\cdot) = 0 & \text{dans } \Omega_e \end{array}\right. \tag{4.5}$$

Comme d'habitude, la coercivité de la forme bilinéaire sous-jacente nous donne le caractère bien posé de ce problème :

Théorème 4.4. *Sous les hypothèses (HT), pour tout $(\varphi^n)_{1\leq n\leq N}$, il existe une unique famille $(u_e^n)_{0\leq n\leq N} \in H^1(\Omega_e)^N$ solution de (4.5). De plus, chaque problème à n fixé est bien posé.*

Supposons maintenant que nous soyons capables de calculer la solution de ce problème extérieur pour toute donnée $(\varphi^n)_{1\leq n\leq N}$ et que nous disposions d'autre part d'une solution intérieure $(u_{int}^n)_{0\leq n\leq N}$. La question naturelle est alors de savoir à quelle condition la famille :

$$\widetilde{u}_n = \left|\begin{array}{ll} u_{int}^n & \text{dans } \Omega_0 \\ u_e^n & \text{dans } \Omega_e \end{array}\right.$$

sera solution de (4.3). Comme nous recherchons une solution dans $H^1(\Omega)$, il est clair que l'on devra avoir raccord en trace, c'est-à-dire $\varphi^n = u^n_{int}|_{\Gamma_0}$. Puis, pour tout $v \in H^1(\Omega)$, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}
(A(\theta,\Delta t)\widetilde{u}_n, v)_{L^2(\Omega)} &= a_{\Omega,\theta,\Delta t}(\widetilde{u}_n, v) - \theta\Delta t < \partial_\nu \widetilde{u}|_{\partial\Omega}, \overline{v}|_{\partial\Omega} > \\
&= a_{\Omega_0,\theta,\Delta t}(u^n_{int}, v) + a_{\Omega_e,\theta,\Delta t}(u^n_e, v) \\
&= (A(\theta,\Delta t)u^n_{int}, v)_{L^2(\Omega_0)} + (A(\theta,\Delta t)u^n_e, v)_{L^2(\Omega_e)} \\
&+ \theta\Delta t\,(< \partial_\nu u^n_{int}|_{\partial\Omega_0\cap\partial\Omega}, \overline{v}|_{\partial\Omega_0\cap\partial\Omega} > + < \partial_\nu u^n_e|_{\partial\Omega_e\cap\partial\Omega}, \overline{v}|_{\partial\Omega_e\cap\partial\Omega} > \\
&+ < \partial_{\nu_0} u^n_{int}|_{\Gamma_0}, \overline{v}|_{\Gamma_0} > + < \partial_{\nu_e} u^n_e|_{\Gamma_0}, \overline{v}|_{\Gamma_0} >)
\end{aligned}$$

Les deux premiers termes dans la parenthèse sont nuls d'après les conditions aux limites, et on aboutit à :

$$\begin{aligned}
(A(\theta,\Delta t)\widetilde{u}_n, v)_{L^2(\Omega)} &= (A(\theta,\Delta t)u^n_{int}, v)_{L^2(\Omega_0)} + (A(\theta,\Delta t)u^n_e, v)_{L^2(\Omega_e)} \\
&+ \theta\Delta t\,(\partial_{\nu_0} u^n_{int}|_{\Gamma_0}, \overline{v}|_{\Gamma_0} > + < \partial_{\nu_e} u^n_e|_{\Gamma_0}, \overline{v}|_{\Gamma_0} >)
\end{aligned}$$

Aussi, comme :

$$\left(A(\theta,\Delta t)u^{n+1}_{int}, v\right)_{L^2(\Omega_0)} - (A(\theta-1,\Delta t)u^n_{int}, v)_{L^2(\Omega_0)} - \left(f^{n+\theta}, v\right)_{L^2(\Omega)} = 0$$

et

$$\left(A(\theta,\Delta t)u^{n+1}_e, v\right)_{L^2(\Omega_e)} - (A(\theta-1,\Delta t)u^n_e, v)_{L^2(\Omega_e)} = 0$$

on obtient :

$$\begin{aligned}
&\left(A(\theta,\Delta t)\widetilde{u}^{n+1}, v\right)_{L^2(\Omega)} - (A(\theta-1,\Delta t)\widetilde{u}^n, v)_{L^2(\Omega)} - \left(f^{n+\theta}, v\right)_{L^2(\Omega)} \\
&= \theta\Delta t\left(< \partial_{\nu_0} u^{n+1}_{int}|_{\Gamma_0}, \overline{v}|_{\Gamma_0} > + < \partial_{\nu_e} u^{n+1}_e|_{\Gamma_0}, \overline{v}|_{\Gamma_0} >\right) \\
&+(1-\theta)\Delta t\,(< \partial_{\nu_0} u^n_{int}|_{\Gamma_0}, \overline{v}|_{\Gamma_0} > + < \partial_{\nu_e} u^n_e|_{\Gamma_0}, \overline{v}|_{\Gamma_0} >) \\
&=< \partial_{\nu_0} u^{n+\theta}_{int}|_{\Gamma_0}, \overline{v}|_{\Gamma_0} > + < \partial_{\nu_e} u^{n+\theta}_e|_{\Gamma_0}, \overline{v}|_{\Gamma_0} >
\end{aligned}$$

Il faut donc que $\widetilde{u}^{n+\theta}$ se raccorde en dérivée normale pour que la famille $(\widetilde{u}_n)_{0\le n\le N}$ soit solution de (4.3). Ce résultat peut sembler surprenant puisqu'a priori, il semble plus naturel de raccorder $\widetilde{u}^n$. Mais comme $\widetilde{u}^0$ se raccorde, par récurrence l'un est équivalent à l'autre. Néanmoins, la bonne quantité à raccorder est bien celle que nous venons d'obtenir, puisqu'elle permettra d'exprimer aisément la condition DtN, et de plus c'est bien elle qui réapparaîtra lorsque nous discrétiserons en espace (voir chapitre 6). À ce stade, nous voyons bien que l'opérateur que nous allons devoir expliciter est :

$$\begin{aligned}
\Upsilon : H^{1/2}(\Gamma_0)^N &\longrightarrow H^{-1/2}(\Gamma_0)^N \\
(\varphi^n)_{1\le n\le N} &\longmapsto \left(\partial_{\nu_e} u^{n+\theta}_e|_{\Gamma_0}\right)_{1\le n\le N}
\end{aligned}$$

Il semble des plus naturel de chercher à expliciter la dépendance de cet opérateur en chacun des φ^j, ce qui revient à chercher à expliciter la dépendance de u^n_e en chacun des φ^j. Commençons par le premier pas de temps u^1_e, et considérons pour tout $\varphi \in H^{1/2}(\Gamma_0)$

$$\begin{aligned}
w^1_e(\cdot) : H^{1/2}(\Gamma_0) &\longrightarrow H^1(\Omega_e) \\
\varphi &\longmapsto w^1_e(\varphi)
\end{aligned}$$

solution dans $H^1(\Omega_e)$ de :

$$\left|\begin{array}{ll} A(\theta,\Delta t)w_e^1(\varphi)=0 & \text{dans } \Omega_e \\ \partial_\nu w_e^1=0 & \text{sur } \partial\Omega_e\cap\partial\Omega \\ w_e^1|_{\Gamma_0}=\varphi & \text{sur } \Gamma_0 \end{array}\right. \tag{4.6}$$

Ce problème étant bien posé (théorème 4.4 pour le premier pas de temps), il est clair par unicité que l'on a :

$$u_e^1 = w_e^1(\varphi^1)$$

et nous avons bien "explicité" la dépendance de u_e^1 par rapport aux données. Puis, le second pas de temps étant solution dans $H^1(\Omega_e)$ de :

$$\left|\begin{array}{ll} A(\theta,\Delta t)u_e^2=A(\theta-1,\Delta t)u_e^1 & \text{dans } \Omega_e \\ \partial_\nu u_e^2=0 & \text{sur } \partial\Omega_e\cap\partial\Omega \\ u_e^2|_{\Gamma_0}=\varphi^2 & \text{sur } \Gamma_0 \end{array}\right.$$

par linéarité, $u_e^2 - w_e^1(\varphi^2)$ vérifie, dans $H^1(\Omega_e)$:

$$\left|\begin{array}{ll} A(\theta,\Delta t)(u_e^2-w_e^1(\varphi^2))=A(\theta-1,\Delta t)w_e^1(\varphi^1) & \text{dans } \Omega_e \\ \partial_\nu(u_e^2-w_e^1(\varphi^2))=0 & \text{sur } \partial\Omega_e\cap\partial\Omega \\ (u_e^2-w_e^1(\varphi^2))|_{\Gamma_0}=0 & \text{sur } \Gamma_0 \end{array}\right.$$

Autrement dit, on peut relever la donnée au bord en utilisant l'opérateur $w_e^1(\cdot)$ sans perturber l'équation, et on voit qu'alors $u_e^2 - w_e^1(\varphi^2)$ ne dépend plus que de φ^1, ce qui montre que l'on a à nouveau extrait la dépendance par rapport aux données de u_e^2. On explicite ceci en considérant, pour tout $\varphi \in H^{1/2}(\Gamma_0)$

$$\begin{array}{rcl} w_e^2(\cdot) : H^{1/2}(\Gamma_0) & \longrightarrow & H^1(\Omega_e) \\ \varphi & \longmapsto & w_e^2(\varphi) \end{array}$$

solution dans $H^1(\Omega_e)$ de :

$$\left|\begin{array}{ll} A(\theta,\Delta t)w_e^2(\varphi)=A(\theta-1,\Delta t)w_e^1(\varphi) & \text{dans } \Omega_e \\ \partial_\nu w_e^2(\varphi)=0 & \text{sur } \partial\Omega_e\cap\partial\Omega \\ w_e^2(\varphi)|_{\Gamma_0}=0 & \text{sur } \Gamma_0 \end{array}\right.$$

qui est bien posé (théorème 4.4 pour le deuxième pas de temps avec $\varphi^2 = 0$), et on a alors par unicité :

$$u_e^2 = w_e^1(\varphi^2) + w_e^2(\varphi^1)$$

Pour u_e^3, on aura dans $H^1(\Omega_e)$:

$$\left|\begin{array}{ll} A(\theta,\Delta t)(u_e^3-w_e^1(\varphi^3))=A(\theta-1,\Delta t)(w_e^1(\varphi^2)+w_e^2(\varphi^1)) & \text{dans } \Omega_e \\ \partial_\nu(u_e^3-w_e^1(\varphi^3))=0 & \text{sur } \partial\Omega_e\cap\partial\Omega \\ (u_e^3-w_e^1(\varphi^3))|_{\Gamma_0}=0 & \text{sur } \Gamma_0 \end{array}\right.$$

Ce problème, formellement identique au précédent, est toujours bien posé, et il est clair par linéarité

et unicité dans $H^1(\Omega_e)$ que :

$$\left|\begin{array}{ll} A(\theta,\Delta t)(u_e^3 - w_e^1(\varphi^3) - w_e^2(\varphi^2)) = A(\theta-1,\Delta t)(w_e^2(\varphi^1)) \text{ dans } \Omega_e & \\ \partial_\nu(u_e^3 - w_e^1(\varphi^3) - w_e^2(\varphi^2)) = 0 & \text{sur } \partial\Omega_e \cap \partial\Omega \\ (u_e^3 - w_e^1(\varphi^3) - w_e^2(\varphi^2))|_{\Gamma_0} = 0 \text{ sur } \Gamma_0 & \end{array}\right.$$

où l'on a partiellement résolu l'équation en utilisant la définition de $w_e^2(\varphi)$. On voit que la quantité $u_e^3 - w_e^1(\varphi^3) - w_e^2(\varphi^2)$ ne dépend plus que de φ^1, et on est tenté d'introduire une nouvelle solution auxiliaire w_e^3 pour expliciter cette dépendance. Cependant, on devine à ce stade comment va se propager la récurrence que nous venons d'amorcer ici, aussi nous introduisons directement, pour tout $\varphi \in H^{1/2}(\Gamma_0)$, la famille :

$$\begin{array}{rcl} w_e^n(\cdot) : H^{1/2}(\Gamma_0) & \longrightarrow & H^1(\Omega_e) \\ \varphi & \longmapsto & w_e^n(\varphi) \end{array}$$

définie par la récurrence :

$$\left|\begin{array}{ll} A(\theta,\Delta t)w_e^{n+1}(\varphi) = A(\theta-1,\Delta t)w_e^n(\varphi) & \text{dans } \Omega_e \\ \partial_\nu w_e^{n+1}(\varphi) = 0 & \text{sur } \partial\Omega_e \cap \partial\Omega \\ w_e^1(\varphi)|_{\Gamma_0} = \varphi & \text{sur } \Gamma_0 \\ w_e^{n+1}(\varphi)|_{\Gamma_0} = 0 & \text{sur } \Gamma_0, \ \ \forall n \geq 1 \\ w_e^0(\varphi) = 0 & \text{dans } \Omega_e \end{array}\right. \tag{4.7}$$

et chacun des problèmes impliqués est bien posé en vertu du théorème 4.4, dont il ne s'agit que d'un cas particulier. Alors on obtient le résultat de décomposition en temps suivant :

Théorème 4.5. *Sous les hypothèses (HT), pour tout $(\varphi^n)_{1\leq n\leq N}$, et pour tout $n \geq 0$:*

$$u_e^n = \sum_{k=1}^{n} w_e^k(\varphi^{n-k+1}) \tag{4.8}$$

Démonstration. Nous savons déjà que cette formule est vraie pour les premiers pas de temps, on peut donc faire avancer la récurrence. Par définition :

$$\left|\begin{array}{ll} A(\theta,\Delta t)u_e^{n+1} = A(\theta-1,\Delta t)u_e^n & \text{dans } \Omega_e \\ \partial_\nu u_e^{n+1} = 0 & \text{sur } \partial\Omega_e \cap \partial\Omega \\ u_e^{n+1}|_{\Gamma_0} = \varphi^{n+1} & \text{sur } \Gamma_0 \end{array}\right.$$

En comparant cette équation à (4.6), on voit que $w_e^1(\varphi^{n+1})$ est solution de la même équation mais sans second membre et pour la donnée φ sur Γ_0. Par linéarité et unicité, il est clair que l'on peut écrire $u_e^{n+1} = w_e^1(\varphi^{n+1}) + v^{n+1}$, où v^{n+1} est l'unique solution dans $H^1(\Omega_e)$ de :

$$\left|\begin{array}{ll} A(\theta,\Delta t)v^{n+1} = A(\theta-1,\Delta t)u_e^n & \text{dans } \Omega_e \\ \partial_\nu v^{n+1} = 0 & \text{sur } \partial\Omega_e \cap \partial\Omega \\ v^{n+1}|_{\Gamma_0} = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \end{array}\right.$$

Supposons maintenant (4.8) satisfaite au rang n. Alors

$$u_e^n = \sum_{k=1}^{n} w_e^k(\varphi^{n-k+1})$$

et donc par linéarité et unicité,

$$v^{n+1} = \sum_{k=1}^{n} v_k^{n+1}$$

où les v_k satisfont dans $H^1(\Omega_e)$:

$$\left| \begin{array}{ll} A(\theta, \Delta t) v_k^{n+1} = A(\theta - 1, \Delta t) w_e^k(\varphi_{n-k+1}) & \text{dans } \Omega_+ \\ \partial_\nu v_k^{n+1} = 0 & \text{sur } \partial\Omega_e \cap \partial\Omega \\ v_k^{n+1}|_{\Gamma_0} = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \end{array} \right.$$

Mais il s'agit là exactement des problèmes (4.7) (qui définissent par récurrence les (w_e^n)) pour $n = k$, donc $v_k^{n+1} = w_e^{k+1}(\varphi^{n-k+1})$ par unicité. Alors :

$$u_e^{n+1} = w_e^1(\varphi_{n+1}) + \sum_{k=1}^{n} w_e^{k+1}(\varphi^{n-k+1}) = \sum_{k=1}^{n+1} w_e^k(\varphi^{n+1-k+1})$$

□

Nous avons bien atteint le but que nous nous étions fixé : nous avons réexprimé u_e^n en séparant la dépendance en chacun des φ^j. Bien sûr, il ne s'agit là que d'une expression semi-explicite, puisque les $w_e^j(\cdot)$ restent encore à calculer en pratique. Néanmoins, la formule que nous venons d'établir à partir d'arguments très élémentaires va s'avérer extrêmement utile tant sur le plan théorique que pratique.

Remarque 4.2. *La formule* (4.8) *est en réalité une formule de convolution discrète entre les opérateurs $w_e^n(\cdot)$ et les données φ^n, et est donc le pendant semi-discret des formules de convolution que nous aurions pu obtenir au niveau continu. En revanche, si nous avions discrétisé les formules de convolution continues, nous aurions certes obtenu des formules de convolution discrètes, mais les chances eurent été bien minces que nous puissions retrouver la formule* (4.8)*, qui est exacte (et donc optimale). Nous n'aurions abouti qu'à des formules approchées, et donc de moindre qualité (notamment pour la stabilité, comme nous le verrons plus loin). A noter toutefois que c'est là l'origine de la notation w_e^j, où le w vient rappeler que ces opérateurs sont les poids ("weights" en anglais) de la convolution.*

Enfin, si on se penche un peu plus sur la famille $(w_e^n(\cdot))_{0\leq n\leq N}$, on voit qu'il s'agit d'une sorte de fonction de Green semi-discrète pour le problème extérieur, sa donnée étant la famille $(\delta_{1n}(Id))_{0\leq n\leq N}$, soit un dirac discret. Il n'est donc pas surprenant de trouver une formule de représentation du type (4.8)*. Nous aurions d'ailleurs pu introduire ainsi les w_e^j, néanmoins, il nous a semblé plus pédagogique de les introduire de la façon dont ils sont réellement apparus dans notre étude.*

Nous allons nous empresser maintenant d'utiliser cette relation afin d'expliciter l'opérateur Υ :

Théorème 4.6. *On pose, pour tout $n \geq 1$:*

$$\begin{array}{rcl} \Lambda_e^n : H^{1/2}(\Gamma_0) & \longrightarrow & H^{-1/2}(\Gamma_0) \\ \varphi & \longmapsto & \theta \dfrac{\partial w_e^n(\varphi)}{\partial \nu_e}|_{\Gamma_0} + (1-\theta) \dfrac{\partial w_e^{n-1}(\varphi)}{\partial \nu_e}|_{\Gamma_0} \end{array}$$

Alors :

$$\left(\Upsilon(\varphi^k)_{1\leq k\leq N}\right)_n = \frac{\partial u_e^{n+\theta}}{\partial \nu_e} = \sum_{k=1}^{n+1} \Lambda_e^k(\varphi^{n+1-k+1})$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} u_e^{n+\theta} &= \theta u_e^{n+1} + (1-\theta) u_e^n \\ &= \theta \sum_{k=1}^{n+1} w_e^k(\varphi^{n+1-k+1}) + (1-\theta) \sum_{k=1}^{n} w_e^k(\varphi^{n-k+1}) \end{aligned}$$

en utilisant (4.8). On décale alors l'indice de la deuxième somme, en utilisant le fait que $w_e^0 = 0$:

$$\begin{aligned} u_e^{n+\theta} &= \theta \sum_{k=1}^{n+1} w_e^k(\varphi^{n+1-k+1}) + (1-\theta) \sum_{k=1}^{n+1} w_e^{k-1}(\varphi^{n+1-k+1}) \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \theta w_e^k(\varphi^{n+1-k+1}) + (1-\theta) w_e^{k-1}(\varphi^{n+1-k+1}) \end{aligned}$$

et il suffit alors d'appliquer l'opérateur linéaire de trace normale pour obtenir le résultat demandé. □

On introduit alors très naturellement le problème intérieur suivant :

Trouver $(u_{int}^n)_{0\le n\le N} \in H^1(\Omega_0)^N$ tel que :

$$\left| \begin{array}{ll} A(\theta,\Delta t) u_{int}^{n+1} = A(\theta-1,\Delta t) u_{int}^n + \Delta t f^{n+\theta} & \text{dans } \Omega_0 \quad 0 \le n \le N \\ \partial_\nu u_{int}^{n+1} = 0 & \text{sur } \partial\Omega_0 \cap \partial\Omega \\ u_{int}^0(\cdot) = u_0(\cdot) & \text{dans } \Omega_0 \\ \dfrac{\partial u_{int}^{n+\theta}}{\partial \nu_0}|_{\Gamma_0} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \Lambda_e^k(u_{int}^{n+1-k+1}|_{\Gamma_0}) = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \end{array} \right. \tag{4.9}$$

et on aboutit au résultat d'équivalence suivant, qui nous permet de restreindre la résolution à un domaine borné :

Théorème 4.7. *Sous les hypothèses (HT), le problème* (4.9) *est bien posé et on a pour tout* $0 \le n \le N$ *:* $u_{int}^n = u^n|_{\Omega_0}$.

Démonstration. Pour tout n, il est clair que la restriction à Ω_0 $u^n|_{\Omega_0}$ de la solution u^n de (4.3) est solution de (4.9) par construction. Réciproquement soit $(\widetilde{u}^n)_{0\le n\le N}$ la famille définie par :

$$\widetilde{u}_n = \left| \begin{array}{ll} u_{int}^n & \text{dans } \Omega_0 \\ u_e^n & \text{dans } \Omega_e \end{array} \right.$$

Or comme :

$$\frac{\partial u_{int}^{n+\theta}}{\partial \nu_0}|_{\Gamma_0} + \sum_{k=1}^{n+1} \Lambda_e^k(u_{int}^{n+1-k+1}|_{\Gamma_0}) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0$$

nous avons vu plus haut que $(\widetilde{u}^n)_{0\le n\le N}$ est solution de (4.9). L'unicité pour ce dernier problème nous apprend que pour des données nulles, $\widetilde{u}^n = 0$ pour tout n, il en est donc de même pour u_{int}^n, ce qui donne l'unicité pour le problème intérieur (4.9). De plus, on a par unicité pour le problème (4.3) $\widetilde{u}^n = u^n$ pour tout n, ce qui implique $u_{int}^n = u^n|_{\Omega_0}$. □

Bien qu'il s'agisse d'un résultat très simple à démontrer, ce résultat présente un corollaire dont les implications sont beaucoup plus importantes qu'il n'y paraît de prime abord :

Corollaire 4.1. *Pour tout $\theta \geq 1/2$, pour tout $t^n \leq T$, on a le résultat de convergence :*

$$||u(\cdot, t^n) - u^n||_{L^2_\rho(\Omega_0)} \leq CT\Delta t \sup_{[0,T]} ||\partial_t^2 u(\cdot, t)||_{L^2_\rho(\Omega)}$$

Bien qu'il s'agisse là d'une évidence compte tenu des théorèmes 4.3 et 4.7, ce résultat prend toute sa saveur lorsque l'on réalise qu'il signifie que le schéma numérique sous-jacent au problème (4.9) est stable par construction, puisqu'il est équivalent au schéma posé sur le domaine non borné. Autrement dit, nous avons construit des conditions aux limites parfaitement transparentes, qui d'une part nous donnent comme solution la restriction de la solution du schéma posé sur le domaine entier (donc nous n'avons pas introduit d'erreur supplémentaire en tronquant le domaine), et d'autre part ne perturbent pas la stabilité de la méthode (ce qui est en général la pierre d'achoppement des méthodes directes de discrétisation des conditions aux limites continues). C'est de notre point de vue la grande force de ces méthodes, d'autant qu'il est souvent plus aisé de calculer les Λ_j que leur équivalent continu, comme nous le verrons plus loin pour le cas des milieux périodiques.

Remarque 4.3. *Les conditions aux limites transparentes prennent dans ce cadre la forme d'une convolution discrète, ce qui peut surprendre. Néanmoins, il est possible de retrouver (très formellement) cette expression, en utilisant la transformée en Z, qui est l'outil usuel pour construire des conditions DtN dans les cas simples (coefficients constants principalement). Pour toute suite $(h_j)_{j\in\mathbb{N}} \in l^2$, on définit sa transformée en Z par :*

$$H(z) = \sum_{j=0}^{+\infty} h^j z^{-j}$$

dont l'inverse est donné par :

$$h^j = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} H(z) z^{j-1} dz$$

où $\mathcal{C}$ est un contour dans le plan complexe contenant tous les pôles de $H(z)$. Alors, si on applique formellement cette transformée au problème extérieur (4.5)*, sa transformée en Z $U_e(z)$ est solution de :*

$$\left| \begin{array}{ll} \dfrac{z-1}{\Delta t}\gamma\rho U_e(z) + (z\theta + (1-\theta))(-\Delta + V)U_e(z) = 0 & \text{dans } \Omega_e \quad 0 \leq n \leq N \\ \partial_\nu U_e(z) = 0 & \text{sur } \partial\Omega_e \cap \partial\Omega \\ U_e(z)|_{\Gamma_0} = \Phi(z) & \text{sur } \Gamma_0 \end{array} \right.$$

On définit alors $\Lambda(z)\Phi(z) = \partial_{\nu_0} U_e(z)|_{\Gamma_0}$, et dans ce cas, on obtient, en appliquant la formule d'inversion :

$$\partial_{\nu_0} u_e^n|_{\Gamma_0} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \Lambda(z)\Phi(z) z^{n-1} dz$$

Mais (toujours formellement), il n'est pas difficile de voir que la transformée en Z inverse d'un produit est une convolution discrète, plus précisément si $\Lambda(z) = \sum_{j=0}^{+\infty} \mu_e^j z^{-j}$, on aura :

$$\partial_{\nu_0} u_e^n|_{\Gamma_0} = \sum_{j=0}^{n} \mu_e^j \varphi^{n-j}$$

Alors, avec par convention $\mu_e^j = 0$ si $j < 0$, et comme $\varphi^0 = 0$:

$$\begin{aligned}\partial_{\nu_0} u_e^{n+\theta}|_{\Gamma_0} &= \theta \sum_{j=0}^{n} \mu_e^j \varphi^{n+1-j} + (1-\theta) \sum_{j=0}^{n-1} \mu_e^j \varphi^{n-j} \\ &= \sum_{j=0}^{n} \theta \mu_e^j \varphi^{n+1-j} + (1-\theta) \mu_e^{j-1} \varphi^{n+1-j} \\ &= \sum_{j=0}^{n} \mu_e^{j+\theta} \varphi^{n+1-j} \\ &= \sum_{j=1}^{n+1} \mu_e^{j-1+\theta} \varphi^{n+1-j+1}\end{aligned}$$

soit le même type de convolution discrète que celles que nous avons obtenues. Néanmoins, la grande différence entre notre approche et celle par transformée en Z (au delà bien entendu des diverses difficultés mathématiques inhérentes à l'utilisation de la transformée en Z, l'étude des pôles de $\Lambda(z)\Phi(z)$ n'étant pas la moindre), c'est que nous avons identifié un problème dont les μ_e^j sont les opérateurs DtN. Cela nous autorise à imaginer d'autres modes de calcul qu'une inversion de transformée en Z, ce qui est à la fois difficile à justifier et à réaliser, d'autant que l'on a peu d'espoir d'obtenir une formule analytique, ce qui impose alors une approximation supplémentaire, comme il faut alors utiliser des quadratures pour faire cette inversion. En outre, cette quadrature brise alors le lien entre ce que l'on résout effectivement et le schéma posé sur tout Ω. Par conséquent, nous n'avons plus de résultat du type 4.1, et on peut perdre la stabilité, alors que notre approche permet automatiquement de conserver la stabilité et la convergence.

4.1.3 Cas de plusieurs défauts : décomposition de la solution extérieure

Nous allons désormais considérer explicitement que nous nous trouvons dans une situation de "scattering multiple", c'est-à-dire que l'ouvert Ω_0 est composé de plusieurs composantes connexes. Plus précisément, on supposera comme au chapitre 1 dans le cas harmonique qu'il existe (Ω_j), $1 \leq j \leq N_s$, une famille d'ouverts bornés connexes, deux à deux disjoints, tels que $\overline{\Omega_j} \subset \overline{\Omega}$ et :

$$\Omega_0 = \bigcup_{j=1}^{N_s} \Omega_j$$

Notre objectif est maintenant d'expliquer comment on peut décomposer l'action de chacun des Λ_e^j en utilisant uniquement des opérateurs définis à partir de problèmes de "simple scattering". Le résultat essentiel qui va permettre une telle décomposition est, comme dans le cas harmonique, un résultat de décomposition de la solution du problème extérieur à Ω_0 en une somme (unique) de problèmes extérieurs à chaque Ω_j. Un exemple de configuration en dimension 2 est donné sur la figure 4.2. On rappelle que :

$$\Gamma_0 = \Gamma_e = \partial\Omega_e \setminus \overline{\partial\Omega_e \cap \partial\Omega}$$

la partie de la frontière de $\partial\Omega_j$ qui n'est pas incluse dans $\partial\Omega$ (les frontières verticales sur l'exemple de la figure 4.2). Nous allons commencer par expliciter ce que nous entendons par décomposition de la solution extérieure dans ce contexte.
On note :

$$\Gamma_j = \partial\Omega_j \setminus \overline{\partial\Omega_j \cap \partial\Omega}$$

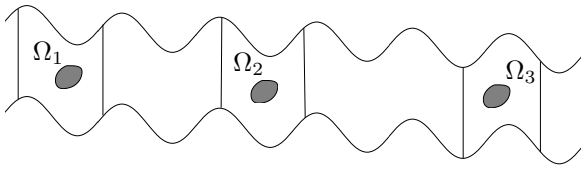


FIGURE 4.2 – Exemple d'ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, avec plusieurs défauts, $N_s = 3$

la partie de la frontière de $\partial\Omega_j$ qui n'est pas incluse dans $\partial\Omega$ (les frontières verticales de chaque Ω_j sur l'exemple de la figure 4.2), ainsi que :

$$\Sigma_j = \partial(\Omega \setminus \overline{\Omega_j}) \cap \Gamma_j$$

Comme nous l'avons fait chaque fois que nous nous sommes trouvé dans une telle configuration, nous allons identifier une donnée sur Γ_e au vecteur de ses restrictions à chaque Γ_j, et nous appelerons donc sans distinction $\varphi \in H^{1/2}(\Gamma_e)$ et $\varphi = (\varphi_j)_{1\leq j\leq N_s}$ où $\varphi_j = \varphi_{|\Gamma_j} \in H^{1/2}(\Gamma_j)$. On associe alors naturellement à chaque Ω_j un problème extérieur :

Pour tout $(\widetilde{\varphi}_j^n)_{1\leq n\leq N} \in H^{1/2}(\Gamma_j)^N$, trouver $(u_{e,j}^n)_{0\leq n\leq N} \in H^1(\Omega \setminus \overline{\Omega_j})^N$ tel que :

$$\left|\begin{array}{ll} A(\theta,\Delta t)u_{e,j}^{n+1} = A(\theta-1,\Delta t)u_{e,j}^n & \text{dans } \Omega\setminus\overline{\Omega_j} \quad 0\leq n\leq N \\ \partial_\nu u_{e,j}^{n+1} = 0 & \text{sur } \Sigma_j \\ u_{e,j}^{n+1}|_{\Gamma_j} = \widetilde{\varphi}_j^{n+1} & \text{sur } \Gamma_j \\ u_{e,j}^0(\cdot) = 0 & \text{dans } \Omega\setminus\overline{\Omega_j} \end{array}\right. \tag{4.10}$$

Ce problème est évidemment bien posé en vertu du théorème 4.4, puisqu'il ne s'agit que d'un cas particulier de (4.5). Alors, nous pouvons maintentant expliquer ce que nous entendons par existence d'une décomposition. Pour toute famille $(\varphi_j^n)_{1\leq n\leq N} \in H^{1/2}(\Gamma_e)^N$, nous cherchons à savoir s'il existe N_s familles $(\widetilde{\varphi}_j^n)_{1\leq n\leq N} \in H^{1/2}(\Gamma_j)^N$ telles que, si $(u_e^n)_{0\leq n\leq N}$ est la solution de (4.5) associée à la première famille de données et $(u_{e,j}^n)_{0\leq n\leq N}$ les solutions de (4.10) associées à chaque famille $(\widetilde{\varphi}_j^n)_{1\leq n\leq N}$:

$$u_e^n = \sum_{j=1}^{N_s} u_{e,j}^n \tag{4.11}$$

Nous connaissons la dépendance de chaque u_e^n en les $(\varphi_j^n)_{1\leq n\leq N}$ via la formule (4.8). Il nous faut alors connaître la dépendance des $u_{e,j}^n$ en chaque $(\widetilde{\varphi}_j^n)_{1\leq n\leq N}$ afin de pouvoir analyser plus précisément la relation ci-dessus. Mais (4.10) n'étant qu'un cas particulier de problème (4.5), il est clair par le théorème 4.5 que si on définit pour tout $\varphi \in H^{1/2}(\Gamma_j)$, la famille $(w_{e,j}^n(\varphi))_{0\leq n\leq N}$

$$\begin{array}{rcl} w_{e,j}^n(\cdot) : H^{1/2}(\Gamma_j) & \longrightarrow & H^1(\Omega\setminus\overline{\Omega_j}) \\ \varphi & \longmapsto & w_{e,j}^n(\varphi) \end{array}$$

définie par la récurrence :

$$\left|\begin{array}{ll} A(\theta,\Delta t)w_{e,j}^{n+1}(\varphi) = A(\theta-1,\Delta t)w_{e,j}^n(\varphi) & \text{dans } \Omega\setminus\overline{\Omega_j} \\ \partial_\nu w_{e,j}^{n+1}(\varphi) = 0 & \text{sur } \Sigma_j \\ w_{e,j}^1(\varphi)|_{\Gamma_j} = \varphi & \text{sur } \Gamma_j \\ w_{e,j}^{n+1}(\varphi)|_{\Gamma_j} = 0 & \text{sur } \Gamma_j\ \forall n\geq 1 \\ w_{e,j}^0(\varphi) = 0 & \text{dans } \Omega\setminus\overline{\Omega_j} \end{array}\right. \tag{4.12}$$

qui est bien posé en vertu du théorème 4.4, alors on obtient :

Théorème 4.8. *Sous les hypothèses (HT), pour tout $j \in [\![1, N_s]\!]$ et tout $(\widetilde{\varphi}_j^n)_{1\leq n\leq N}$, pour tout $n \geq 0$:*

$$u_{e,j}^n = \sum_{k=1}^{n} w_{e,j}^k(\widetilde{\varphi}_j^{n-k+1}) \tag{4.13}$$

et on ainsi également explicité la dépendance de $u_{e,j}^n$ en chaque $(\widetilde{\varphi}_j^n)_{0\leq n\leq N}$. Alors, en combinant les résultats de décomposition en temps des théorèmes 4.5 et 4.8, la relation (4.11) se réécrit :

$$\sum_{k=1}^{n} w_e^k(\varphi^{n-k+1}) = \sum_{j=1}^{N_s}\sum_{k=1}^{n} w_{e,j}^k(\widetilde{\varphi}_j^{n-k+1}) \tag{4.14}$$

Sur cette dernière relation, on voit nettement la dépendance en chacune des données, aussi c'est elle que nous allons principalement utiliser dans la suite, tout en gardant à l'esprit qu'elle est équivalente à la relation (4.11), qui elle donne une signification plus intelligible à la notion de décomposition.

Existence d'une décomposition

Nous introduisons, par analogie avec le cas harmonique (cf chapitre 1), les opérateurs :

$$\begin{array}{rcl} \Theta_{ij}^k : H^{1/2}(\Gamma_j) & \longrightarrow & H^{1/2}(\Gamma_i) \\ \widetilde{\varphi} & \longmapsto & w_{e,j}^k(\widetilde{\varphi})|_{\Gamma_i} \end{array}$$

On remarque que $\Theta_{ii}^1 = Id(H^{1/2}(\Gamma_i))$ tandis que $\Theta_{ii}^n = 0$ pour $n \neq 1$. On utilise alors l'identification entre Γ_e et les Γ_j, pour définir les opérateurs :

$$\begin{array}{rcl} \Theta^k : \displaystyle\prod_{j=1}^{N_s} H^{1/2}(\Gamma_j) & \longrightarrow & \displaystyle\prod_{i=1}^{N_s} H^{1/2}(\Gamma_i) \\ \varphi & \longmapsto & \Theta^k\varphi = \left(\displaystyle\sum_{j=1}^{N_s} \Theta_{ij}^k\varphi_j\right)_{1\leq i\leq N_s} \end{array}$$

qui se réécrivent encore sous la forme d'une pseudo-matrice : $\Theta^k = (\Theta_{ij})_{1\leq i,j\leq N}$.

$$\Theta^k = \begin{pmatrix} \Theta_{11}^k & \dots & \Theta_{1i}^k & \dots & \Theta_{1N_s}^k \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \Theta_{i1}^k & \dots & \Theta_{ii}^k & \dots & \Theta_{iN_s}^k \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Theta_{N_s1}^k & \dots & \Theta_{N_si}^k & \dots & \Theta_{N_sN_s}^k \end{pmatrix}$$

Ces opérateurs Θ^k sont reliés à l'existence et l'unicité d'une décomposition via une équation fondamentale. En effet, s'il existe une décomposition :

$$\sum_{k=1}^{n} w_e^k(\varphi^{n-k+1}) = \sum_{j=1}^{N_s}\sum_{k=1}^{n} w_{e,j}^k(\widetilde{\varphi}_j^{n-k+1})$$

Alors, en prenant la trace sur Γ_i :

$$\sum_{k=1}^{n} w_e^k(\varphi^{n-k+1})|_{\Gamma_i} = \sum_{j=1}^{N_s}\sum_{k=1}^{n} w_{e,j}^k(\widetilde{\varphi}_j^{n-k+1})|_{\Gamma_i}$$

ce qui se réécrit à l'aide des Θ_{ij}^k's

$$\sum_{k=1}^{n} w_e^k(\varphi^{n-k+1})|_{\Gamma_i} = \sum_{j=1}^{N_s}\sum_{k=1}^{n} \Theta_{ij}^k \widetilde{\varphi}_j^{n-k+1}$$

Alors, en utilisant le fait que $w_e^1(\varphi^n)|_{\Gamma_i} = \varphi_i^n$ et $w_e^k(\varphi^{n-k+1})|_{\partial\Omega_i} = 0$ pour $k \neq 1$, on obtient :

$$\varphi_i^n = \sum_{j=1}^{N_s}\sum_{k=1}^{n} \Theta_{ij}^k \widetilde{\varphi}_j^{n-k+1}$$

ce qui sous forme matricielle donne l'équation :

$$\varphi^n = \sum_{k=1}^{n} \Theta^k \widetilde{\varphi}^{n-k+1} \tag{4.15}$$

ce qui peut aussi s'écrire :

$$u_e^n|_{\Gamma_e} = \sum_{j=1}^{N_s} u_{e,j}^n|_{\Gamma_e} = \sum_{k=1}^{n} \Theta^k \widetilde{\varphi}^{n-k+1} \tag{4.16}$$

Cette relation est la clé qui va nous permettre de démontrer l'existence d'une décomposition, ainsi que d'expliciter le lien fondamental entre les propriétés de l'opérateur Θ^1 et l'existence et l'unicité d'une décomposition. En effet, on réécrit sans peine (4.15) sous la forme :

$$\Theta^1 \widetilde{\varphi}^n = \varphi^n - \sum_{k=2}^{n} \Theta^k \widetilde{\varphi}^{n-k+1} \tag{4.17}$$

autrement dit, par récurrence, l'existence et l'unicité de $\widetilde{\varphi}^n$ ne vont dépendre que des propriétés de Θ^1. Remarquons que cet opérateur est défini formellement de la même façon que l'opérateur Θ du cas harmonique, à partir d'un problème elliptique, aussi il est clair que l'on peut démontrer exactement de la même façon que (cf chapitre 1, théorème 1.4) :

Théorème 4.9. *Sous les hypothèses (HT), l'opérateur Θ^1 est inversible de $\prod_{j=1}^N H^{1/2}(\Gamma_j)$ vers $\prod_{j=1}^N H^{1/2}(\Gamma_j)$ si et seulement si la solution du problème extérieur pour le premier pas de temps ($n = 1$) admet une unique décomposition au sens de l'équation (4.11) pour toute donnée φ. Plus précisément :*

(i) Θ^1 surjectif $\Leftrightarrow$ existence d'une décomposition

(ii) Θ^1 injectif $\Leftrightarrow$ unicité de la décomposition

Par conséquence, pour pouvoir conclure (par récurrence) à l'existence d'une décomposition à chaque pas de temps, on déduit de la relation (4.17) qu'il ne nous reste plus qu'à montrer que Θ^1 est surjectif. Mais encore une fois, en poursuivant l'analogie avec le cas harmonique, il est clair que l'on démontre sans peine, comme conséquence du gain de régularité intérieure, que :

Théorème 4.10. *Sous les hypothèses (HT), pour $i \neq j$, les opérateurs Θ_{ij}^1 sont compacts de $H^{1/2}(\Gamma_j)$ vers $H^{1/2}(\Gamma_i)$, et l'opérateur Θ^1 est un opérateur de Fredholm d'indice 0.*

Les deux théorèmes 4.9 et 4.10 nous indiquent donc qu'en vertu de l'alternative de Fredholm, la preuve de l'existence et de l'unicité de la décomposition se réduit à la preuve de l'injectivité de Θ^1, et donc en utilisant à nouveau le théorème 4.9, à la preuve de l'unicité de la décomposition. Nous retrouvons donc le même type de situation que dans le cas harmonique décrit au chapitre 1.

Unicité de la décomposition

L'unicité de la décomposition s'avère être une conséquence directe du résultat suivant, qui se démontre comme le théorème 1.6 :

Théorème 4.11. *Soit u_e^1 la solution du problème extérieur* (4.5) *pour $n = 1$, alors s'il existe une décomposition telle que :*

$$u_e^1 \equiv \sum_{i=1}^{N_S} \widetilde{u}_i \quad \text{dans } \Omega_e, \quad \widetilde{u}_i \in H^1(\Omega \setminus \overline{\Omega_i}) \quad A(\theta, \Delta t)\widetilde{u}_i = 0 \quad \text{dans } \Omega \setminus \overline{\Omega_i}$$

$$\text{et} \quad \partial_\nu \widetilde{u}_i|_{\Sigma_i} = 0$$

cette décomposition est unique sous les hypothèses (HT).

On en déduit immédiatement que :

Théorème 4.12. *Sous les hypothèses (HT), l'opérateur Θ^1 est inversible de $\prod_{j=1}^{N_s} H^{1/2}(\Gamma_j)$ vers $\prod_{j=1}^{N_s} H^{1/2}(\Gamma_j)$.*

On en arrive enfin au résultat d'existence et d'unicité de la décomposition :

Théorème 4.13. *Sous les hypothèses (HT), pour toute donnée $(\varphi^n)_j \in \prod_{j=1}^{N_s} H^{1/2}(\Gamma_j)^{\mathbb{N}} = H^{1/2}(\Gamma_e)^{\mathbb{N}}$, il existe une unique décomposition de la solution du problème extérieur* (4.5)*, pour tout n, au sens de la formule* (4.11)*.*

Démonstration. On pose comme d'habitude $\varphi^k = u_e^k|_{\partial\Omega_e}$. Pour $n = 1$, le théorème 4.12 nous apprend qu'il existe un unique $\widetilde{\varphi}^1$ tel que :

$$\varphi^1 = \Theta^1 \widetilde{\varphi}^1$$

Alors $\sum_j w_{e,j}^1(\widetilde{\varphi}_j^1)$ nous fournit la décomposition souhaitée en vertu de (4.13) et (4.14). Elle est de plus unique par injectivité de Θ^1. On procède ensuite par récurrence pour tout $n \geq 1$. On suppose avoir trouvé une unique décomposition jusqu'au rang $n-1$. On résout alors :

$$\Theta^1 \widetilde{\varphi}^n = \varphi^n - \sum_{k=2}^{n} \Theta^k \widetilde{\varphi}^{n-k+1}$$

afin de déterminer le nouveau $\widetilde{\varphi}^n$. Alors on fabrique une décomposition via :

$$\sum_{j=1}^{N_s} \sum_{k=1}^{n} w_{e,j}^k(\widetilde{\varphi}_j^{n-k+1})$$

en vertu de (4.13) et (4.14), et celle ci est unique puisque si une autre décomposition $\widetilde{\psi}^n$ existe, on aura à chaque pas de temps :

$$\Theta^1(\widetilde{\varphi}^k - \widetilde{\psi}^k) = 0$$

et donc $\widetilde{\varphi}^k = \widetilde{\psi}^k$ par injectivité de Θ^1. □

Aussi, comme nous venons de le montrer, résoudre un problème extérieur semi-discret de "scattering multiple" peut donc se ramener à la résolution de N_s problèmes semi-discrets de "simple scattering", pour lesquels on est en droit d'espérer que la résolution soit plus simple. Cette propriété va pouvoir se retranscrire sur les opérateurs DtN, ainsi que nous allons maintenant le montrer.

4.1.4 Cas de plusieurs défauts : décomposition de l'opérateur DtN

Notre but est désormais d'expliquer comment exploiter les résultats de décomposition des sections précédentes afin de décomposer les opérateurs Λ_e^k à l'aide d'opérateurs construits simplement à partir de la résolution de problèmes de simple-scattering. Nous définissons pour les mêmes raisons que nous avions défini les Θ_{ij}^k, les nouveaux opérateurs DtN $\widetilde{\Lambda}_{ij}^k$:

$$\begin{aligned} \widetilde{\Lambda}_{ij}^k : H^{1/2}(\Gamma_j) &\longrightarrow H^{-1/2}(\Gamma_i) \\ \widetilde{\varphi} &\longmapsto \partial_{\nu_i} w_{e,j}^{k+\theta}(\varphi)|_{\Gamma_i} \end{aligned}$$

où les ν_j sont les normales extérieures à $\Omega \setminus \overline{\Omega}_j$ sur Γ_j. On utilise alors la décomposition (4.14) et on applique les opérateurs de trace et de trace normale :

$$\sum_{k=1}^{n} w_e^k(\varphi^{n-k+1})|_{\Gamma_i} = \sum_{j=1}^{N_s}\sum_{k=1}^{n} w_{e,j}^k(\widetilde{\varphi}_j^{n-k+1})|_{\Gamma_i}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \partial_{\nu_i} w_e^k(\varphi^{n-k+1})|_{\Gamma_i} = \sum_{j=1}^{N_s}\sum_{k=1}^{n} \partial_{\nu_i} w_{e,j}^k(\widetilde{\varphi}_j^{n-k+1})|_{\Gamma_i}$$

On fait la θ-somme de la seconde relation pour obtenir :

$$\sum_{k=1}^{n} \partial_{\nu_i} w_e^{k+\theta}(\varphi^{n-k+1})|_{\Gamma_i} = \sum_{j=1}^{N_s}\sum_{k=1}^{n} \partial_{\nu_i} w_{e,j}^{k+\theta}(\widetilde{\varphi}_j^{n-k+1})|_{\Gamma_i}$$

Alors en utilisant la définition des opérateurs Θ_{ij}^k et $\widetilde{\Lambda}_{ij}^k$:

$$\sum_{k=1}^{n} w_e^k(\varphi^{n-k+1})|_{\Gamma_i} = \sum_{j=1}^{N_s}\sum_{k=1}^{n} \Theta_{ij}^k \widetilde{\varphi}_j^{n-k+1}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \partial_{\nu_i} w_e^{k+\theta}(\varphi^{n-k+1})|_{\Gamma_i} = \sum_{j=1}^{N_s}\sum_{k=1}^{n} \widetilde{\Lambda}_{ij}^k \widetilde{\varphi}_j^{n-k+1}$$

La définition de Λ_e^k, et le fait que $\varphi_{|\Gamma_i} = \varphi_i$, nous donnent :

$$\varphi_i^n = \sum_{j=1}^{N_s}\sum_{k=1}^{n} \Theta_{ij}^k \widetilde{\varphi}_j^{n-k+1} \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{n} (\Lambda_e^k \varphi^{n-k+1})_i = \sum_{j=1}^{N_s}\sum_{k=1}^{n} \widetilde{\Lambda}_{ij}^k \widetilde{\varphi}_j^{n-k+1}$$

On définit alors $\widetilde{\Lambda}^k$ de la même manière que Θ^k :

$$\begin{aligned} \widetilde{\Lambda}^k : \prod_{j=1}^{N_s} H^{1/2}(\Gamma_j) &\longrightarrow \prod_{i=1}^{N_s} H^{-1/2}(\Gamma_i) \\ \varphi &\longmapsto \widetilde{\Lambda}^k \varphi = \left(\sum_{j=1}^{N_s} \widetilde{\Lambda}_{ij}^k \varphi_j \right)_{1 \le i \le N_s} \end{aligned}$$

et on obtient :

$$\varphi^n = \sum_{k=1}^{n} \Theta^k \widetilde{\varphi}^{n-k+1} \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{n} \Lambda_e^k \varphi^{n-k+1} = \sum_{k=1}^{n} \widetilde{\Lambda}^k \widetilde{\varphi}^{n-k+1}$$

On peut alors réécrire le problème (4.9) sous la forme :

Théorème 4.14. *Sous les hypothèses (HT), le problème* (4.9) *est équivalent à trouver* $(u_{int}^n)_{0\leq n\leq N} \in H^1(\Omega_0)^N$ *et* $(\widetilde{\varphi}^n)_{1\leq n\leq N} \in H^{1/2}(\Gamma_0)^N$ *tels que :*

$$\left|\begin{array}{ll} A(\theta,\Delta t)u_{int}^{n+1} = A(\theta-1,\Delta t)u_{int}^n + \Delta t f^{n+\theta} & \text{dans } \Omega_0 \quad 0\leq n\leq N \\ \partial_\nu u_{int}^{n+1} = 0 & \text{sur } \partial\Omega_0\cap\partial\Omega \\ u_{int}^0(\cdot) = u_0(\cdot) & \text{dans } \Omega_0 \\ \Theta^1\widetilde{\varphi}^{n+1} = u_{int}^{n+1}|_{\partial\Omega_{int}} - \displaystyle\sum_{k=2}^{n+1}\Theta^k\widetilde{\varphi}^{n+1-k+1} & \text{sur } \Gamma_0 \\ \partial_{\nu_0}u_{int}^{n+\theta} + \widetilde{\Lambda}^1\widetilde{\varphi}^{n+1} + \displaystyle\sum_{k=2}^{n+1}\widetilde{\Lambda}^k\widetilde{\varphi}^{n+1-k+1} = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \end{array}\right. \tag{4.18}$$

Comme pour les théorèmes de scattering multiple en harmonique, le caractère bien posé de ce nouveau problème est immédiat puisqu'il est rigoureusement identique au problème (4.9), nous avons seulement modifié la manière dont nous calculons l'opérateur DtN.

On voit sur ce résultat un autre avantage de la semi-discrétisation par rapport au modèle continu : nous venons d'obtenir relativement aisément le résultat de décomposition, alors qu'on devine que si un tel résultat est vrai au niveau continu, il va faire intervenir des opérateurs de convolution en temps, qu'il va falloir inverser, ce qui serait sans conteste bien plus compliqué que ce que nous venons de réaliser.

4.2 Problèmes d'ordre deux en temps

Nous allons maintenant considérer un problème modèle d'ordre deux en temps, sur lequel nous allons expliquer comment se généralisent les résultats de la section précédente. Notre objectif initial, lorsque nous avons abordé cette étude, était de traiter le cas de l'équation des ondes à coefficients variables, aussi c'est cette équation que nous allons utiliser comme problème modèle d'ordre deux en temps. On cherchera donc $u : \Omega\times\mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ solution du problème modèle suivant :

$$\left|\begin{array}{ll} \rho\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f & \text{dans } \Omega, \quad t>0 \\ u(\cdot,0) = u_0 & \text{dans } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(\cdot,0) = u_1 & \text{dans } \Omega \end{array}\right. \tag{4.19}$$

où Ω sera toujours un ouvert de $\mathbb{R}^d$. Nous devons à nouveau rajouter quelques hypothèses techniques qui vont nous garantir l'existence et l'unicité des solutions :

(H1) $f\in C^1(]0,+\infty[, L^2(\Omega))$, $(u_0,u_1)\in D(A)$, $\rho\in L^\infty(\Omega)$, $V\in L^\infty(\Omega)$

(H2) $\exists\ \rho_-,\ \rho_+\in\mathbb{R}$ tels que $0<\rho_-\leq\rho\leq\rho_+$.

où ($D(A)$ désigne le domaine d'un opérateur que nous fixerons dans un instant, une fois précisées les conditions aux limites. On désignera comme toujours ce nouvel ensemble d'hypothèses par "hypothèses (HT2)". Nous supposerons comme d'habitude que l'ouvert Ω est lipschitzien, et nous ne traiterons explicitement que des conditions aux limites dites "essentielles", à savoir u dans V qui vérifie :

. $V \subset H^1(\Omega)$, V étant fermé pour la norme $H^1(\Omega)$

Comme d'habitude, dans un tel cadre l'existence et l'unicité des solutions vont reposer sur les propriétés d'une forme bilinéaire :

Lemme 4.5. *Si les hypothèses (HT2) sont satisfaites, alors, pour tout $\lambda > 0$ la forme bilinéaire sur V :*

$$a^1_\Omega(u,v) = (\nabla u, \nabla v)_{L^2(\Omega)} + \lambda\,(\rho u, v)_{L^2(\Omega)}$$

est continue et coercive sur V.

Démonstration. On commence par la continuité, pour laquelle, en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz à chaque partie de la forme bilinéaire, on obtient :

$$\begin{aligned} |a^1_\Omega(u,v)| &\leq ||\nabla u||_{L^2(\Omega)}||\nabla v||_{L^2(\Omega)} + |\lambda|\rho_+||u||_{L^2(\Omega)}||v||_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \max\left(1, |\lambda|\rho_+\right)||u||_{H^1(\Omega)}||v||_{H^1(\Omega)} \end{aligned}$$

et pour la coercivité, on a :

$$\begin{aligned} a^1_\Omega(u,u) &= ||\nabla u||^2_{L^2(\Omega)} + \lambda\,(\rho u, u)_{L^2(\Omega)} \\ &\geq ||\nabla u||^2_{L^2(\Omega)} + \lambda\rho_-||u||^2_{L^2(\Omega)} \\ &\geq \min(1, \lambda\rho_-)||u||^2_{H^1(\Omega)} \end{aligned}$$

□

Tout comme dans la section précédente, nous allons nous placer dans le cas simple des conditions de Neumann homogènes, sur la frontière d'un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ lipschitzien connexe (cf figure 4.3 pour un exemple d'un tel domaine en dimension 2).

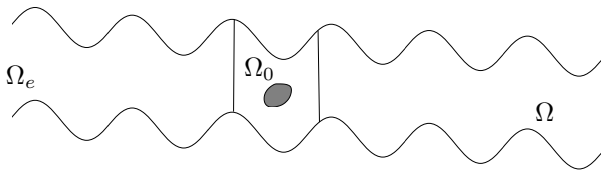


FIGURE 4.3 – Exemple d'ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, Ω_0 avec une seule composante connexe

Nous allons toujours nous placer dans l'espace $V = H^1(\Omega)$. Ne reste plus qu'à définir $D(A)$, afin d'avoir un jeu complet d'hypothèses. On pose :

$$U(\cdot,t) = \begin{pmatrix} u(\cdot,t) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(\cdot,t) \end{pmatrix}$$

Alors, en posant :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -\dfrac{1}{\rho}\Delta & 0 \end{pmatrix}$$

l'équation se réécrit :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + AU = \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{\rho}f \end{pmatrix}$$

On prendra donc pour domaine de cet opérateur l'espace fermé :

$$D(A) = \left\{ u \in H^1(\Omega) \ \mid \ \Delta u \in L^2(\Omega) \quad \text{et} \quad \partial_\nu u|_{\partial\Omega} = 0 \right\} \times H^1(\Omega)$$

que l'on notera aussi :

$$D(A) = H^1(\Delta, \Omega) \times H^1(\Omega)$$

C'est un sous-espace de :

$$H = H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$$

sur lequel on travaillera à l'aide du produit scalaire :

$$(U, V)_H = (\nabla u_1, \nabla v_1)_{L^2(\Omega)} + (u_1, v_1)_{L^2_\rho(\Omega)} + (u_2, v_2)_{L^2_\rho(\Omega)}$$

si $U = (u_1, u_2)$ et $V = (v_1, v_2)$. Notre problème modèle complet se réécrira donc : trouver $u \in C^1([0, +\infty[, H^1(\Omega)) \cap C^0([0, +\infty[, H^1(\Delta, \Omega))$ tel que

$$\left| \begin{array}{ll} \rho \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f & \text{dans } \Omega, \quad t > 0 \\ \partial_\nu u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ u(\cdot, 0) = u_0 & \text{dans } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(\cdot, 0) = u_1 & \text{dans } \Omega \end{array} \right. \tag{4.20}$$

Bien entendu, ce problème est bien posé en vertu du théorème de Hille-Yosida :

Théorème 4.15. *Pour tout $f \in C^1(\mathbb{R}_+, L^2(\Omega))$ et tout $(u_0, u_1) \in D(A)$, sous les hypothèses (HT2) le problème* (4.20) *possède une unique solution appartenant à :*

$$C^2([0, +\infty[, L^2(\Omega)) \cap C^1([0, +\infty[, H^1(\Omega)) \cap C^0([0, +\infty[, H^1(\Delta, \Omega))$$

Nous allons maintenant tenter de reproduire la méthode DtN sur ce problème modèle. Il nous faut donc supposer comme d'habitude l'existence d'un ouvert borné Ω_0, supposé lipschitzien, tel que $\Omega_0 \subset \Omega$, et on rappelle que nous appelerons domaine extérieur :

$$\Omega_e = \Omega \setminus \overline{\Omega_0}$$

On suppose alors que toutes les données sont à support dans Ω_0 :

. *supp* $f(\cdot, t) \subset \Omega_0$, pour tout $t > 0$

. On dispose d'un milieu de référence ρ_{ref} tel que *supp* $\rho - \rho_{ref} \subset \Omega_0$

. *supp* $u_0 \cup$ *supp* $u_1 \subset \Omega_0$

La méthode DtN va toujours consister à réduire le domaine de calcul à Ω_0 en construisant des conditions aux limites qui expriment la continuité en trace et en dérivée normale de la solution sur :

$$\Gamma_0 = \partial\Omega_0 \setminus \overline{\partial\Omega \cap \partial\Omega_0}$$

Nous allons bien sûr, comme pour le premier ordre en temps, commencer par semi-discrétiser le problème modèle.

4.2.1 Semi-discrétisation en temps

De nouveau, pour formuler le problème semi-discret, il nous faut maintenant choisir un schéma. Nous choisissons encore d'utiliser un θ-schéma, et on se restreint de nouveau à l'intervalle de temps $[0,T]$, avec $T = N\Delta t$ où $\Delta t > 0$ sera le pas de temps (constant) du schéma. Alors, le problème semi-discretisé par θ-schéma associé à notre problème modèle s'écrit :

Trouver $(u^n)_{0\leq n\leq N} \in H^1(\Omega)^{N+1}$ tel que :

$$\left|\begin{array}{ll} \rho\dfrac{u^{n+1}-2u^n+u^{n-1}}{\Delta t^2} - \theta\Delta u^{n+1} - (1-2\theta)\Delta u^n - \theta\Delta u^{n-1} = f^{n,\theta} & \text{dans } \Omega \quad 1\leq n\leq N \\ \partial_\nu u^{n+1} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ u^0(\cdot) = u_0(\cdot) & \text{dans } \Omega \\ u^1(\cdot) = u_0(\cdot) + \Delta t u_1 + \dfrac{\Delta t^2}{2\rho}\Delta u_0(\cdot) & \text{dans } \Omega \end{array}\right. \tag{4.21}$$

où l'on a noté $f^n = f(\cdot, n\Delta t)$ et $f^{n,\theta} = \theta f^{n+1} + (1-2\theta)f^n + \theta f^{n-1}$. Afin de ne pas perdre en régularité par rapport au problème continu, et ne pas compliquer inutilement l'exposé, il nous faut rajouter l'hypothèse $u_1 \in H^1(\Delta,\Omega)$. De plus, pour le schéma de démarrage que nous avons choisi, nous devons également supposer $\Delta u_0 \in H^1(\Delta,\Omega)$, toujours pour ne pas perdre en régularité. Cette hypothèse est entièrement liée au choix du schéma de démarrage, il suffit par exemple de prendre :

$$u^1(\cdot) = u_0(\cdot) + \Delta t u_1$$

pour ne plus en avoir besoin. Nous avons tout de même tenu à utiliser le schéma de démarrage plus précis, afin de rester cohérents avec ce que nous utiliserons une fois la discrétisation en espace effectuée. Beaucoup de démonstrations étant quasi-identiques à celles de la section précédente, nous nous contenterons dans la suite d'énoncer les divers résultats et de donner les idées des diverses preuves (et notamment les quelques différences avec le cas précédent), et nous détaillerons les démonstrations uniquement lorsque surgissent les spécificités de l'ordre 2. Nous commençons par vérifier que sous nos hypothèses, ce problème semi-discret conserve bien un sens, ce qui est une conséquence du lemme suivant :

Lemme 4.6. *Sous les hypothèses (HT2), pour tout $\theta \geq 0$ et $\Delta t > 0$, la forme bilinéaire :*

$$\begin{array}{rcl} a^1_{\Omega,\theta,\Delta t} : H^1(\Omega)\times H^1(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (u,v) & \longmapsto & \left(\theta\Delta t^2\nabla u, \nabla v\right)_{L^2(\Omega)} + (\rho u, v)_{L^2(\Omega)} \end{array}$$

est continue sur $H^1(\Omega)\times H^1(\Omega)$ et coercive si $\theta > 0$.

Démonstration. C'est une conséquence directe du lemme 4.2 dans le cas $\gamma = 1$, $V = 0$. □

Afin d'alléger les notations pour la suite, on introduit les deux opérateurs suivants :

$$\begin{array}{rcl} A_1(\theta,\Delta t) : H^1(\Omega) & \longrightarrow & H^{-1}(\Omega) \\ u & \longmapsto & -\theta\Delta t^2\Delta u + \rho u \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcl} A_2(\theta,\Delta t) : H^1(\Omega) & \longrightarrow & H^{-1}(\Omega) \\ u & \longmapsto & -(2\theta-1)\Delta t^2\Delta u + 2\rho u \end{array}$$

Alors notre problème modèle se réécrit :

Trouver $(u^n)_{0\leq n\leq N} \in H^1(\Omega)^N$ tel que :

$$\left|\begin{array}{ll} A_1(\theta,\Delta t)u^{n+1} = A_2(\theta,\Delta t)u^n - A_1(\theta,\Delta t)u^{n-1} + \Delta t^2 f^{n,\theta} & \text{dans } \Omega \quad 1\leq n\leq N \\ \partial_\nu u^{n+1} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ u^0(\cdot) = u_0(\cdot) & \text{dans } \Omega \\ u^1(\cdot) = u_0(\cdot) + \Delta t u_1 + \dfrac{\Delta t^2}{2\rho}\Delta u_0(\cdot) & \text{dans } \Omega \end{array}\right. \tag{4.21}$$

On déduit alors le caractère bien posé de notre problème modèle semi-discret du lemme précédent, en procédant comme pour le théorème 4.2 :

Théorème 4.16. *Sous les hypothèses (HT2), il existe une unique famille $(u^n)_{0\leq n\leq N} \in H^1_\xi(\Omega)^N$ qui soit solution de* (4.21)*. De plus, chaque problème à n fixé est bien posé.*

Démonstration. La preuve est quasi identique à celle du théorème 4.2 en remplaçant le lemme 4.2 par le lemme 4.6. □

Nous savons ensuite que ce nouveau problème semi-discret constitue une bonne approximation du problème continu (4.20). Il s'agit en effet du très classique :

Théorème 4.17. *On suppose que :*

$$u \in C^3([0,T], L^2(\Omega)) \cap C^2([0,T], H^1(\Omega))$$

Alors sous les hypothèses (HT2), pour tout $\theta \geq 1/4$, pour tout $t^n \leq T$, on a le résultat de convergence :

$$||u(\cdot,t^n) - u^n||_{L^2_\rho(\Omega)} \leq CT\Delta t(\sup_{[0,T]} ||\partial_t^2 u(\cdot,t)||_{H^1(\Omega)} + \sup_{[0,T]} ||\partial_t^3 u(\cdot,t)||_{L^2_\rho(\Omega)})$$

Remarque 4.4. *À nouveau, la limitation $\theta \geq 1/4$ pourra être levée une fois effectuée la discrétisation en espace, et remplacée par une condition CFL, ainsi que nous le verrons dans les chapitres suivants.*

Maintenant que nous sommes rassurés quant au bon comportement du schéma que nous avons choisi pour notre étude, nous pouvons passer à l'analyse des méthodes DtN pour les problèmes d'ordre deux en temps. La principale nouveauté sera la forme prise par la décomposition en temps de la solution extérieure.

4.2.2 Méthode DtN semi-discrète

Nous allons procéder entièrement par analogie avec le cas de l'ordre un en temps. On commence donc par introduire le problème extérieur :

Pour tout $(\varphi^n)_{2\leq n\leq N} \in H^{1/2}(\Gamma_0)^N$, trouver $(u_e^n)_{0\leq n\leq N} \in H^1(\Omega_e)^N$ tel que :

$$\left|\begin{array}{ll} A_1(\theta,\Delta t)u_e^{n+1} = A_2(\theta,\Delta t)u_e^n - A_1(\theta,\Delta t)u_e^{n-1} & \text{dans } \Omega_e \quad 1\leq n\leq N \\ \partial_\nu u_e^{n+1} = 0 & \text{sur } \partial\Omega_e \cap \partial\Omega \\ u_e^{n+1}|_{\Gamma_0} = \varphi^{n+1} & \text{sur } \Gamma_0 \\ u_e^0(\cdot) = 0 & \text{dans } \Omega_e \\ u_e^1(\cdot) = 0 & \text{dans } \Omega_e \end{array}\right. \tag{4.22}$$

qui constitue bien évidemment un problème bien posé, grâce à la coercivité :

Théorème 4.18. *Sous les hypothèses (HT2), pour tout $(\varphi^n)_{2\leq n\leq N}$, il existe une unique famille $(u_e^n)_{0\leq n\leq N} \in H^1(\Omega_e)^N$ solution de (4.22). De plus, chaque problème à n fixé est bien posé.*

Ensuite, afin d'expliciter la dépendance de u_e^n en chacun des φ^j, nous introduisons, pour tout $\varphi \in H^{1/2}(\Gamma_0)$, la famille $(w_e^n(\varphi))_{0\leq n\leq N} \in H^1(\Omega_e)^N$:

$$\left|\begin{array}{ll} A_1(\theta,\Delta t)w_e^{n+1}(\varphi) = A_2(\theta,\Delta t)w_e^n(\varphi) - A_1(\theta,\Delta t)w_e^{n-1}(\varphi) & \text{dans } \Omega_e \\ \partial_\nu w_e^{n+1}(\varphi) = 0 & \text{sur } \partial\Omega_e \cap \partial\Omega \\ w_e^2(\varphi)|_{\Gamma_0} = \varphi & \text{sur } \Gamma_0 \\ w_e^{n+1}(\varphi)|_{\Gamma_0} = 0 & \text{sur } \Gamma_0, \ \ \forall n \geq 2 \\ w_e^0(\varphi) = 0 & \text{dans } \Omega_e \\ w_e^1(\varphi) = 0 & \text{dans } \Omega_e \end{array}\right. \tag{4.23}$$

Chacun des problèmes impliqués est bien posé en vertu du théorème 4.18, dont il ne s'agit que d'un cas particulier. On obtient alors le résultat de décomposition en temps attendu, à savoir :

Théorème 4.19. *Sous les hypothèses (HT2), pour tout $(\varphi^n)_{2\leq n\leq N}$, et pour tout $n \geq 0$:*

$$u_e^n = \sum_{k=2}^{n} w_e^k(\varphi^{n-k+2}) \tag{4.24}$$

Démonstration. Il est clair que le résultat est vrai pour $n = 0, 1$. Pour $n = 2$, $w_e^2(\varphi^2)$ et u_e^2 sont solutions du même problème, qui est bien posé en vertu du théorème 4.18. Alors par unicité $u_e^2 = w_e^2(\varphi^2)$. On suppose maintenant que la formule (4.24) est vraie jusqu'au rang n. Alors on a dans $H^1_\xi(\Omega_e)$:

$$\left|\begin{array}{ll} A_1(\theta,\Delta t)u_e^{n+1} = A_2(\theta,\Delta t)u_e^n - A_1(\theta,\Delta t)u_e^{n-1} & \text{dans } \Omega_e \\ \partial_\nu u_e^{n+1} = 0 & \text{sur } \partial\Omega_e \cap \partial\Omega \\ u_e^{n+1} = \varphi^{n+1} & \text{sur } \Gamma_e \end{array}\right.$$

Alors, si on remplace u_e^n and u_e^{n-1} par leurs expressions via la formule (4.24) :

$$\begin{aligned} A_1(\theta,\Delta t)u_e^{n+1} &= A_2(\theta,\Delta t)\sum_{k=2}^{n} w_e^k(\varphi^{n-k+2}) - A_1(\theta,\Delta t)\sum_{k=2}^{n-1} w_e^k(\varphi^{n-1-k+2}) \\ &= \sum_{k=2}^{n} A_2(\theta,\Delta t)w_e^k(\varphi^{n-k+2}) - A_1(\theta,\Delta t)w_e^{k-1}(\varphi^{n-k+2}) \end{aligned}$$

où on utilise le fait que $w_e^1(\varphi) = w_e^0(\varphi) = 0$. Par linéarité, on voit que u_e^{n+1} est la somme de $v(\varphi^{n+1})$ solution dans $H^1_\xi(\Omega_e)$ de :

$$\left|\begin{array}{ll} A_1(\theta,\Delta t)v(\varphi^{n+1}) = 0 & \text{dans } \Omega_e \\ \partial_\nu v(\varphi^{n+1}) = 0 & \text{sur } \partial\Omega_e \cap \partial\Omega \\ v(\varphi^{n+1}) = \varphi^{n+1} & \text{sur } \Gamma_e \end{array}\right.$$

et des v_k solutions dans $H^1(\Omega_e)$ de :

$$\left|\begin{array}{ll} A_1(\theta,\Delta t)v_k = A_2(\theta,\Delta t)w_e^k(\varphi^{n-k+2}) - A_1(\theta,\Delta t)w_e^{k-1}(\varphi^{n-k+2}) & \text{dans } \Omega_e \\ \partial_\nu v_k = 0 & \text{sur } \partial\Omega_e \cap \partial\Omega \\ v_k = 0 & \text{sur } \Gamma_e \end{array}\right.$$

Par unicité, on voit que $v(\varphi) = w_e^2(\varphi^{n+1})$ et $v_k = w_e^{k+1}(\varphi^{n-k+2})$, en utilisant la définition des $w_e^k(\varphi)$. Alors il suit :

$$u_e^{n+1} = w_e^2(\varphi^{n+1}) + \sum_{k=2}^{n} w_e^{k+1}(\varphi^{n-k+2}) = \sum_{k=2}^{n+1} w_e^k(\varphi^{n+1-k+2})$$

□

Remarque 4.5. *À ce stade, on comprend comment ce résultat va se généraliser à une récurrence de n'importe quel ordre. Supposons que l'on ait un schéma à m points de la forme (en oubliant les conditions aux limites quasi-périodiques) :*

$$\left| \begin{array}{ll} A^m u_e^n = \sum_{k=1}^m A^k u_e^{n-k} & \textit{dans } \Omega_e \\ u_e^k(\cdot) = 0 & \textit{dans } \Omega_e, \ \ 0 \leq k \leq m-1 \\ u_e^n|_{\Gamma_0} = \varphi^{n+1} & \textit{sur } \Gamma_0 \end{array} \right.$$

où A^n est un opérateur inversible, alors en posant :

$$\left| \begin{array}{ll} A^m w^n(\varphi) = \sum_{k=1}^m A^k w^{n-k}(\varphi) & \textit{dans } \Omega_e \\ w^k(\varphi) = 0 & \textit{dans } \Omega_e, \ \ 0 \leq k \leq m-1 \\ w^m(\varphi)|_{\Gamma_0} = \varphi & \textit{sur } \Gamma_0 \\ w^{k+1}(\varphi)|_{\Gamma_0} = \varphi & \textit{sur } \Gamma_0, \ \ k \geq m \end{array} \right.$$

on aboutira aisément à :

$$u_e^n = \sum_{k=m}^{n} w^k(\varphi^{n-k+m})$$

ce qui constitue la généralisation évidente des formules 4.8 et 4.24. On comprend alors comment tout ce que nous présentons peut alors se généraliser au cas des schémas à m points.

Il nous faut maintenant nous demander quelle est la quantité à raccorder afin de construire les opérateurs DtN adéquats. On suppose que nous sommes capables de calculer la solution du problème extérieur pour toute donnée $(\varphi_n)_{2\leq n\leq N}$ et que nous disposons d'autre part d'une solution intérieure $(u_{int}^n)_{0\leq n\leq N}$. La question est comme toujours de savoir à quelle condition la famille :

$$\widetilde{u}_n = \left| \begin{array}{ll} u_{int}^n & \text{dans } \Omega_0 \\ u_e^n & \text{dans } \Omega_e \end{array} \right.$$

sera solution de (4.21). Comme nous recherchons une solution dans $H^1_\xi(\Omega)$, il est clair que l'on devra avoir raccord en trace, c'est-à-dire $\varphi^n = u_{int}^n|_{\Gamma_0}$. Observons ensuite que dans le cas de l'ordre un en temps, la condition de raccord supplémentaire était le raccord en dérivée normale de $u^{n+\theta}$, soit la quantité à laquelle on applique l'opérateur d'ordre deux en espace. Alors, il est clair que les mêmes calculs que dans le cas de l'ordre un en temps nous conduisent cette fois-ci à, pour tout $v \in H^1(\Omega)$:

$$\begin{aligned} &(A_1(\theta,\Delta t)\widetilde{u}_{n+1}, v)_{L^2(\Omega)} - (A_2(\theta,\Delta t)\widetilde{u}_n, v)_{L^2(\Omega)} + (A_1(\theta,\Delta t)\widetilde{u}_{n-1}, v)_{L^2(\Omega)} - \left(f^{n+\theta}, v\right)_{L^2(\Omega)} \\ &= \theta\Delta t \left(< \partial_{\nu_0} u_{int}^{n+1}|_{\Gamma_0}, \overline{v}|_{\Gamma_0} > + < \partial_{\nu_e} u_e^{n+1}|_{\Gamma_0}, \overline{v}|_{\Gamma_0} > \right) \\ &+(1-2\theta)\Delta t \left(< \partial_{\nu_0} u_{int}^{n}|_{\Gamma_0}, \overline{v}|_{\Gamma_0} > + < \partial_{\nu_e} u_e^{n}|_{\Gamma_0}, \overline{v}|_{\Gamma_0} > \right) \\ &+\theta\Delta t \left(< \partial_{\nu_0} u_{int}^{n-1}|_{\Gamma_0}, \overline{v}|_{\Gamma_0} > + < \partial_{\nu_e} u_e^{n-1}|_{\Gamma_0}, \overline{v}|_{\Gamma_0} > \right) \\ &= < \partial_{\nu_0} u_{int}^{n,\theta}|_{\Gamma_0}, \overline{v}|_{\Gamma_0} > + < \partial_{\nu_e} u_e^{n,\theta}|_{\Gamma_0}, \overline{v}|_{\Gamma_0} > \end{aligned}$$

soit le raccord de la trace normale de $\widetilde{u}^{n,\theta}$. Sous cette condition, la famille $(\widetilde{u}_n)_{0\leq n\leq N}$ est solution de (4.21). On peut alors utiliser la convolution discrète pour l'exprimer :

Théorème 4.20. *On pose, pour tout $n \geq 2$:*

$$\begin{aligned} \Lambda_e^n : H^{1/2}(\Gamma_0) &\longrightarrow H^{-1/2}(\Gamma_0) \\ \varphi &\longmapsto \theta \frac{\partial w_e^n(\varphi)}{\partial \nu_e}|_{\Gamma_0} + (1-2\theta)\frac{\partial w^{e,n-1}(\varphi)}{\partial \nu_e}|_{\Gamma_0} + \theta \frac{\partial w_e^{n-2}(\varphi)}{\partial \nu_e}|_{\Gamma_0} \end{aligned}$$

Alors :

$$\frac{\partial u_e^{n,\theta}}{\partial \nu_e} = \sum_{k=2}^{n+1} \Lambda_e^k(\varphi^{n+1-k+2})$$

où l'on rappelle que :

$$u_e^{n,\theta} = \theta u_e^{n+1} + (1-2\theta)u_e^n + \theta u_e^{n-1}$$

On formule alors le problème intérieur :

Trouver $(u_{int}^n)_{0\leq n\leq N} \in H^1(\Omega_0)^N$ tel que :

$$\left|\begin{array}{ll} A_1(\theta,\Delta t)u_{int}^{n+1} = A_2(\theta,\Delta t)u_{int}^n - A_1(\theta,\Delta t)u_{int}^{n-1} + \Delta t f^{n+\theta} & \text{dans } \Omega_0 \quad 0 \leq n \leq N \\ \partial_\nu u_{int}^{n+1} = 0 & \text{sur } \partial\Omega_0 \cap \partial\Omega \\ u_{int}^0(\cdot) = u_0(\cdot) & \text{dans } \Omega_0 \\ u_{int}^1(\cdot) = u_0(\cdot) + \Delta t u_1 + \dfrac{\Delta t^2}{2\rho}\Delta u_0(\cdot) & \text{dans } \Omega_0 \\ \dfrac{\partial u_{int}^{n,\theta}}{\partial \nu_0}|_{\Gamma_0} + \displaystyle\sum_{k=2}^{n+1} \Lambda_e^k(u_{int}^{n+1-k+2}|_{\Gamma_0}) = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \end{array}\right. \tag{4.25}$$

et on a bien entendu le résultat d'équivalence, comme conséquence de l'unicité pour le problème initial :

Théorème 4.21. *Sous les hypothèses (HT2), le problème* (4.25) *est bien posé et on a pour tout* $0 \leq n \leq N$ *:* $u_{int}^n = u^n|_{\Omega_0}$.

Une conséquence immédiate de ce résultat et du théorème de convergence 4.17 est, comme à l'ordre 1 en temps :

Corollaire 4.2. *Pour tout $\theta \geq 1/4$, pour tout $t^n \leq T$, on a le résultat de convergence :*

$$\lim_{\Delta t\to 0} ||u(\cdot,t^n) - u^n||_{L^2_\rho(\Omega_0)} \leq CT\Delta t(\sup_{[0,T]} ||\partial_t^2 u(\cdot,t)||_{H^1(\Omega)} + \sup_{[0,T]} ||\partial_t^3 u(\cdot,t)||_{L^2_\rho(\Omega)})$$

ce qui garantit de nouveau automatiquement la stabilité du schéma numérique posé sur Ω_0 avec conditions aux limites artificielles.

4.2.3 Cas de plusieurs défauts : décomposition de la solution extérieure

Nous passons maintenant explicitement à une situation de "scattering multiple". On supposera donc qu'il existe (Ω_j), $1 \leq j \leq N_s$, une famille d'ouverts bornés connexes, deux à deux disjoints, tels que $\overline{\Omega_j} \subset \overline{\Omega}$ et :

$$\Omega_0 = \bigcup_{j=1}^{N_s} \Omega_j$$

Nous allons expliquer comment se transposent au cas des problèmes d'ordre deux en temps les divers résultats de décomposition, tant pour les opérateurs Λ_e^j que pour la solution du problème extérieur. Un exemple de configuration en dimension 2 est donné en figure 4.4. On rappelle que :

$$\Gamma_0 = \Gamma_e = \partial\Omega_e \setminus \overline{\partial\Omega_e \cap \partial\Omega}$$

la partie de la frontière de $\partial\Omega_j$ qui n'est pas incluse dans $\partial\Omega$ (les frontières verticales sur l'exemple de la figure 4.4).

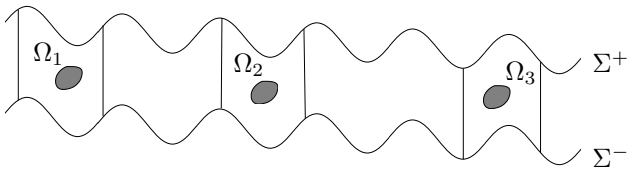


FIGURE 4.4 – Exemple d'ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, avec plusieurs défauts, $N_s = 3$

On rappelle les notations que l'on utilise dans ce cas :

$$\Gamma_j = \partial\Omega_j \setminus \overline{\partial\Omega_j \cap \partial\Omega}$$

la partie de la frontière de $\partial\Omega_j$ qui n'est pas incluse dans $\partial\Omega$ (les frontières verticales de chaque Ω_j sur l'exemple de la figure 4.4) et :

$$\Sigma_j = \partial(\Omega \setminus \overline{\Omega_j}) \cap \partial\Omega$$

Comme d'habitude, nous identifions une donnée sur Γ_e au vecteur de ses restrictions à chaque Γ_j. Afin d'expliciter le résultat de décomposition, nous avons besoin d'associer à chaque Ω_j un problème extérieur :

Pour tout $(\widetilde{\varphi}_j^n)_{2\leq n\leq N} \in H^{1/2}(\Gamma_j)^N$, trouver $(u_{e,j}^n)_{0\leq n\leq N} \in H^1(\Omega \setminus \overline{\Omega_j})^N$ tel que :

$$\left|\begin{array}{ll} A_1(\theta,\Delta t)u_{e,j}^{n+1} = A_2(\theta,\Delta t)u_{e,j}^n - A_1(\theta,\Delta t)u_{e,j}^{n-1} & \text{dans } \Omega \setminus \overline{\Omega_j} \quad 1 \leq n \leq N \\ \partial_\nu u_{e,j}^{n+1} = 0 & \text{sur } \Sigma_j \\ u_{e,j}^{n+1}|_{\Gamma_j} = \widetilde{\varphi}_j^{n+1} & \text{sur } \Gamma_j \\ u_{e,j}^0(\cdot) = 0 & \text{dans } \Omega \setminus \overline{\Omega_j} \\ u_{e,j}^1(\cdot) = 0 & \text{dans } \Omega \setminus \overline{\Omega_j} \end{array}\right. \tag{4.26}$$

Il est encore clair que ce problème extérieur n'est qu'un cas particulier de problème extérieur (4.22), aussi il est bien posé en vertu du théorème 4.18, puisqu'il ne s'agit que d'un cas particulier de (4.5). Comme dans le cas des problèmes d'ordre un en temps, pour tout $(\varphi_j^n)_{2\leq n\leq N} \in H^{1/2}(\Gamma_e)^N$, nous cherchons à savoir s'il existe N_s familles $(\widetilde{\varphi}_j^n)_{0\leq n\leq N} \in H^{1/2}(\Gamma_j)^N$ telles que, si $(u_e^n)_{0\leq n\leq N}$ est la solution de (4.22) associée à la première famille de données et $(u_{e,j}^n)_{0\leq n\leq N}$ les solutions de (4.26) associées à chaque famille $(\widetilde{\varphi}_j^n)_{2\leq n\leq N}$:

$$u_e^n = \sum_{j=1}^{N_s} u_{e,j}^n \tag{4.27}$$

Pour cela, on a encore besoin d'expliciter la dépendance des $u_{e,j}^n$ en les $\widetilde{\varphi}_j^n$, via l'introduction, pour tout $\varphi \in H^{1/2}(\Gamma_j)$, de la famille $(w_{e,j}^n(\varphi))_{0\leq n\leq N} \in H^1(\Omega \setminus \overline{\Omega_j})^N$ solution de :

$$\left|\begin{array}{ll} A_1(\theta,\Delta t)w_{e,j}^{n+1}(\varphi) = A_2(\theta,\Delta t)w_{e,j}^n(\varphi) - A_1(\theta,\Delta t)w_{e,j}^{n-1}(\varphi) & \text{dans } \Omega\setminus\overline{\Omega_j} \\ \partial_\nu w_{e,j}^{n+1}(\varphi) = 0 & \text{sur } \Sigma_j \\ w_{e,j}^2(\varphi)|_{\Gamma_j} = \varphi & \text{sur } \Gamma_j \\ w_{e,j}^{n+1}(\varphi)|_{\Gamma_j} = 0 & \text{sur } \Gamma_j\ \forall n\geq 2 \\ w_{e,j}^0(\varphi) = 0 & \text{dans } \Omega\setminus\overline{\Omega_j} \\ w_{e,j}^1(\varphi) = 0 & \text{dans } \Omega\setminus\overline{\Omega_j} \end{array}\right. \tag{4.28}$$

qui est bien posé en vertu du théorème 4.18. Alors il est clair d'après le théorème 4.19 que l'on a :

Théorème 4.22. *Sous les hypothèses (HT2), pour tout $j \in [\![1, N_s]\!]$ et tout $(\widetilde{\varphi}_j^n)_{2\leq n\leq N}$, pour tout $n \geq 0$:*

$$u_{e,j}^n = \sum_{k=2}^{n} w_{e,j}^k(\widetilde{\varphi}_j^{n-k+2}) \tag{4.29}$$

Comme dans le cas de l'ordre un en temps, en combinant les résultats de décomposition en temps des théorèmes 4.19 et 4.22, la relation (4.27) se réécrit :

$$\sum_{k=2}^{n} w_e^k(\varphi^{n-k+2}) = \sum_{j=1}^{N_s}\sum_{k=2}^{n} w_{e,j}^k(\widetilde{\varphi}_j^{n-k+2}) \tag{4.30}$$

C'est à nouveau cette dernière forme de la décomposition qui va permettre d'en démontrer l'existence et l'unicité.

Existence d'une décomposition

On procède une nouvelle fois en deux temps : on commence par montrer que l'existence et l'unicité sont équivalentes aux propriétés d'un opérateur dont l'inversibilité relève de l'alternative de Fredholm. On réduit ainsi la question à la preuve de l'unicité, que l'on établit aisément en utilisant l'unicité de la solution du problème posé dans tout Ω.

Par analogie avec les cas du premier ordre en temps, nous introduisons les opérateurs :

$$\begin{array}{rcl} \Theta_{ij}^k : H^{1/2}(\Gamma_j) & \longrightarrow & H^{1/2}(\Gamma_i) \\ \widetilde{\varphi} & \longmapsto & w_{e,j}^k(\widetilde{\varphi})|_{\Gamma_i} \end{array}$$

avec comme nous en avons l'habitude maintenant $\Theta_{ii}^2 = Id(H^{1/2}(\Gamma_i))$ et $\Theta_{ii}^n = 0$ pour $n \neq 2$. On utilise alors l'identification entre Γ_e et les Γ_j, pour définir les opérateurs :

$$\begin{array}{rcl} \Theta^k : \displaystyle\prod_{j=1}^{N_s} H^{1/2}(\Gamma_j) & \longrightarrow & \displaystyle\prod_{i=1}^{N_s} H^{1/2}(\Gamma_i) \\ \varphi & \longmapsto & \Theta^k\varphi = \left(\displaystyle\sum_{j=1}^{N_s} \Theta_{ij}^k\varphi_j\right)_{1\leq i\leq N_s} \end{array}$$

qui se réécrivent encore sous la forme d'une pseudo-matrice : $\Theta^k = (\Theta_{ij})_{1\leq i,j\leq N}$.

Nous allons voir que ce sont encore les propriétés du premier de ces opérateurs à être non nul

qui vont être équivalentes à l'existence et l'unicité d'une décomposition. En effet, s'il existe une décomposition :

$$\sum_{k=2}^{n} w_e^k(\varphi^{n-k+2}) = \sum_{j=1}^{N_s}\sum_{k=2}^{n} w_{e,j}^k(\widetilde{\varphi}_j^{n-k+2})$$

Alors, en prenant la trace sur Γ_i :

$$\sum_{k=2}^{n} w_e^k(\varphi^{n-k+2})|_{\Gamma_i} = \sum_{j=1}^{N_s}\sum_{k=2}^{n} w_{e,j}^k(\widetilde{\varphi}_j^{n-k+2})|_{\Gamma_i}$$

ce qui se réécrit à l'aide des $\Theta_{i,j}^k$

$$\sum_{k=2}^{n} w_e^k(\varphi^{n-k+2})|_{\Gamma_i} = \sum_{j=1}^{N_s}\sum_{k=2}^{n} \Theta_{ij}^k\widetilde{\varphi}_j^{n-k+2}$$

Alors, en utilisant le fait que $w_e^2(\varphi^n)|_{\Gamma_i} = \varphi_i^n$ et $w_e^k(\varphi^{n-k+1})|_{\partial\Omega_i} = 0$ pour $k \neq 2$, on obtient :

$$\varphi_i^n = \sum_{j=1}^{N_s}\sum_{k=2}^{n} \Theta_{ij}^k\widetilde{\varphi}_j^{n-k+2}$$

ce qui sous forme matricielle donne l'équation :

$$\varphi^n = \sum_{k=2}^{n} \Theta^k\widetilde{\varphi}^{n-k+2} \tag{4.31}$$

ce qui peut aussi s'écrire :

$$u_e^n|_{\Gamma_e} = \sum_{j=1}^{N_s} u_{e,j}^n|_{\Gamma_e} = \sum_{k=2}^{n} \Theta^k\widetilde{\varphi}^{n-k+2}$$

Cette relation est la clé qui va nous permettre de démontrer l'existence d'une décomposition, ainsi que d'expliciter le lien fondamental entre les propriétés de l'opérateur Θ^1 et l'existence et l'unicité d'une décomposition. En effet, on réécrit sans peine (4.31) sous la forme :

$$\Theta^2\widetilde{\varphi}^n = \varphi^n - \sum_{k=3}^{n} \Theta^k\widetilde{\varphi}^{n-k+2} \tag{4.32}$$

autrement dit, par récurrence, l'existence et l'unicité de $\widetilde{\varphi}^n$ ne vont dépendre que des propriétés de Θ^2 :

Théorème 4.23. *Sous les hypothèses (HT2), l'opérateur Θ^2 est inversible de $\prod_{j=1}^{N} H^{1/2}(\Gamma_j)$ vers $\prod_{j=1}^{N} H^{1/2}(\Gamma_j)$ si et seulement si la solution du problème extérieur pour le premier pas de temps ($n = 2$) admet une unique décomposition au sens de l'équation* (4.27) *pour toute donnée φ. Plus précisément :*

(i) Θ^2 surjectif $\Leftrightarrow$ existence d'une décomposition

(ii) Θ^2 injectif $\Leftrightarrow$ unicité de la décomposition

Démonstration. La preuve est identique à celle du théorème 4.9 en utilisant les relations que nous venons d'obtenir, aussi nous ne la reproduisons pas ici. □

À nouveau, on voit bien que l'existence d'une décomposition se déduit (par récurrence) de la relation (4.32) aussi il suffit de montrer que Θ^2 est surjectif. Mais on a la propriété suivante :

Théorème 4.24. *Sous les hypothèses (HT2), pour $i \neq j$, les opérateurs Θ^2_{ij} sont compacts de $H^{1/2}_{\xi}(\Gamma_j)$ vers $H^{1/2}(\Gamma_i)$, et l'opérateur Θ^2 est un opérateur de Fredholm d'indice 0.*

Démonstration. C'est une conséquence du gain de régularité intérieure, en procédant exactement comme au théorème 4.10. □

Aussi, on voit bien que l'on peut, comme dans le cas harmonique ou le cas de l'ordre un en temps, réduire la preuve de l'existence et de l'unicité à celle de l'unicité en vertu du théorème 4.23 et de l'alternative de Fredholm.

Unicité de la décomposition

Comme dans le cas de l'ordre un en temps, on commence par établir un résultat général d'unicité :

Théorème 4.25. *Soit u^2_e la solution du problème extérieur (4.22) pour $n = 2$, alors s'il existe une décomposition telle que :*

$$u^1_e \equiv \sum_{i=1}^{N_S} \widetilde{u}_i \quad \text{dans } \Omega_e, \quad \widetilde{u}_i \in H^1(\Omega \setminus \overline{\Omega_i}) \quad A_1(\theta, \Delta t)\widetilde{u}_i = 0 \quad \text{dans } \Omega \setminus \overline{\Omega_i}$$

$$\text{et} \quad \partial_\nu \widetilde{u}_i|_{\Sigma_i} = 0$$

cette décomposition est unique sous les hypothèses (HT2).

On en déduit immédiatement :

Théorème 4.26. *Sous les hypothèses (HT2), l'opérateur Θ^2 est inversible de $\prod_{j=1}^{N_s} H^{1/2}(\Gamma_j)$ vers $\prod_{j=1}^{N_s} H^{1/2}(\Gamma_j)$.*

ainsi que le résultat d'existence et d'unicité de la décomposition :

Théorème 4.27. *Sous les hypothèses (HT2), pour toute donnée $(\varphi^n)_j \in \prod_{j=1}^{N_s} H^{1/2}(\Gamma_j)^{\mathbb{N}} = H^{1/2}(\Gamma_e)^{\mathbb{N}}$, il existe une unique décomposition de la solution du problème extérieur (4.22), pour tout n, au sens de la formule (4.27).*

De ce résultat de décomposition de la solution extérieure, on déduit comme pour les problèmes d'ordre un en temps, une décompositon des opérateurs DtN.

4.2.4 Cas de plusieurs défauts : décomposition de l'opérateur DtN

Toujours par analogie avec le cas de l'ordre un en temps, nous définissons les opérateurs DtN $\widetilde{\Lambda}^k_{ij}$ par :

$$\begin{aligned} \widetilde{\Lambda}^k_{ij} : H^{1/2}(\Gamma_j) &\longrightarrow H^{-1/2}(\Gamma_i) \\ \widetilde{\varphi} &\longmapsto \partial_{\nu_i} w^{k,\theta}_{e,j}(\varphi)|_{\Gamma_i} \end{aligned}$$

où les ν_j sont les normales extérieures à $\Omega \setminus \overline{\Omega}_j$ sur Γ_j. On utilise alors la décomposition (4.30) et on applique les opérateurs de trace et de trace normale :

$$\sum_{k=2}^{n} w^k_e(\varphi^{n-k+2})|_{\Gamma_i} = \sum_{j=1}^{N_s} \sum_{k=2}^{n} w^k_{e,j}(\widetilde{\varphi}^{n-k+2}_j)|_{\Gamma_i}$$

$$\sum_{k=2}^{n} \partial_{\nu_i} w_e^k(\varphi^{n-k+2})|_{\Gamma_i} = \sum_{j=1}^{N_s}\sum_{k=2}^{n} \partial_{\nu_i} w_{e,j}^k(\widetilde{\varphi}_j^{n-k+2})|_{\Gamma_i}$$

On fait la θ-somme de la seconde relation pour obtenir :

$$\sum_{k=2}^{n} \partial_{\nu_i} w_e^{k,\theta}(\varphi^{n-k+2})|_{\Gamma_i} = \sum_{j=1}^{N_s}\sum_{k=2}^{n} \partial_{\nu_i} w_{e,j}^{k,\theta}(\widetilde{\varphi}_j^{n-k+2})|_{\Gamma_i}$$

Alors en utilisant la définition des opérateurs Θ_{ij}^k et $\widetilde{\Lambda}_{ij}^k$:

$$\sum_{k=2}^{n} w_e^k(\varphi^{n-k+2})|_{\Gamma_i} = \sum_{j=1}^{N_s}\sum_{k=2}^{n} \Theta_{ij}^k \widetilde{\varphi}_j^{n-k+2}$$

$$\sum_{k=2}^{n} \partial_{\nu_i} w_e^{k,\theta}(\varphi^{n-k+2})|_{\Gamma_i} = \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=2}^{n} \widetilde{\Lambda}_{ij}^k \widetilde{\varphi}_j^{n-k+2}$$

La définition de Λ_e^k, et le fait que $\varphi_{|_{\Gamma_i}} = \varphi_i$, nous donnent :

$$\varphi_i^n = \sum_{j=1}^{N_s}\sum_{k=2}^{n} \Theta_{ij}^k \widetilde{\varphi}_j^{n-k+2} \quad \text{et} \quad \sum_{k=2}^{n} (\Lambda_e^k \varphi^{n-k+2})_i = \sum_{j=1}^{N_s}\sum_{k=2}^{n} \widetilde{\Lambda}_{ij}^k \widetilde{\varphi}_j^{n-k+2}$$

On définit alors $\widetilde{\Lambda}^k$ de la même manière que Θ^k :

$$\begin{aligned} \widetilde{\Lambda}^k : \prod_{j=1}^{N_s} H^{1/2}(\Gamma_j) &\longrightarrow \prod_{i=1}^{N_s} H^{-1/2}(\Gamma_i) \\ \varphi &\longmapsto \widetilde{\Lambda}^k \varphi = \left(\sum_{j=1}^{N_s} \widetilde{\Lambda}_{ij}^k \varphi_j \right)_{1\le i\le N_s} \end{aligned}$$

et on obtient :

$$\varphi^n = \sum_{k=2}^{n} \Theta^k \widetilde{\varphi}^{n-k+2} \quad \text{et} \quad \sum_{k=2}^{n} \Lambda_e^k \varphi^{n-k+2} = \sum_{k=2}^{n} \widetilde{\Lambda}^k \widetilde{\varphi}^{n-k+2}$$

On peut alors réécrire le problème (4.9) sous la forme :

Théorème 4.28. *Sous les hypothèses (HT2), le problème* (4.25) *est équivalent à trouver* $(u_{int}^n)_{0\le n\le N} \in H^1(\Omega_0)^N$ *tel que :*

$$\left|\begin{array}{ll} A_1(\theta,\Delta t)u_{int}^{n+1} = A_2(\theta,\Delta t)u_{int}^n - A_1(\theta,\Delta t)u_{int}^{n-1} + \Delta t f^{n+\theta} & \text{dans } \Omega_0 \quad 1\le n\le N \\ \partial_\nu u_{int}^{n+1} = 0 & \text{sur } \partial\Omega_0 \cap \partial\Omega \\ u_{int}^0(\cdot) = u_0(\cdot) & \text{dans } \Omega_0 \\ u_{int}^1(\cdot) = u_0(\cdot) + \Delta t u_1 + \dfrac{\Delta t^2}{2\rho}\Delta u_0(\cdot) & \text{dans } \Omega_0 \\ \displaystyle\sum_{k=2}^{n+1} \Theta^k \widetilde{\varphi}^{n+1-k+2} = (u_{int}^{n+1}|_{\partial\Omega_{int}}) & \text{sur } \Gamma_0 \\ \partial_{\nu_0} u_{int}^{n+\theta} + \displaystyle\sum_{k=2}^{n+1} \widetilde{\Lambda}^k \widetilde{\varphi}^{n+1-k+2} = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \end{array}\right. \tag{4.33}$$

Comme dans le cas de l'ordre un en temps, le caractère bien posé de ce nouveau problème est immédiat puisqu'il est rigoureusement identique au problème (4.25), nous avons seulement modifié la manière dont nous calculons l'opérateur DtN.

Remarque 4.6. *À nouveau, on comprend comment ce résultat va se généraliser à une récurrence de n'importe quel ordre :*

$$\left|\begin{array}{ll} A^m u^n = \displaystyle\sum_{k=1}^{m} A^k u^{n-k} & \text{dans } \Omega_e \\ u_e^k(\cdot) = 0 & \text{dans } \Omega_e, \;\; 0 \leq k \leq m-1 \\ u_e^n|_{\Gamma_0} = \varphi^{n+1} & \text{sur } \Gamma_0 \end{array}\right.$$

En effet, on introduira les problèmes extérieurs $u_{e,j}^n$ à m points, ainsi que les $w_{e,j}^m$ qui en découlent. Alors, en définissant les Θ^k et $\widetilde{\Lambda}^k$ à partir de ces derniers, la condition transparente deviendra (dans le cas particulier où les opérateurs A^n sont encore basés sur le Laplacien) :

$$\sum_{k=m}^{n} \Theta^k \widetilde{\varphi}^{n-k+m} = (u_{int}^n|_{\partial\Omega_{int}}) \quad \text{sur } \Gamma_0$$

$$\partial_{\nu_0} u_{int}^{n,m} + \sum_{k=m}^{n} \widetilde{\Lambda}^k \widetilde{\varphi}^{n-k+m} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0$$

où $\partial_{\nu_0} u_{int}^{n,m}$ représente (très formellement, puisqu'en toute généralité il ne s'agit pas forcément d'une dérivée normale) la quantité à raccorder.

Chapitre 5

Équations d'évolution dans une bande périodique localement perturbée

Résumé. *Nous considérons désormais des problèmes d'évolution en milieu périodique. Dans ce chapitre, nous considérons une géométrie particulière, à savoir un domaine non borné dans la direction de périodicité, et borné dans toutes les autres, que nous appelons guide. Dans une première partie (section 5.1), nous expliquons comment effectuer en pratique le calcul des opérateurs DtN pour le problème modèle d'ordre un en temps. Nous commençons par le cas d'un seul défaut, et nous expliquons pourquoi ce calcul se ramène à la résolution de deux problèmes de demi-guide périodiques (section 5.1.1). Nous montrons ensuite que ces problèmes de demi-guide se ramènent par périodicité à la résolution de problèmes de cellule et d'équations opérateurs posées sur une frontière (section 5.1.2). Puis, nous expliquons comment calculer les opérateurs de scattering multiple introduits au chapitre précédent, pour une géométrie de guide (5.1.3). Enfin, dans une deuxième partie, nous étendons une fois de plus ces résultats au cas des problèmes d'ordre deux en temps (5.2).*

Nous allons nous concentrer dorénavant sur le cas particulier des milieux périodiques. Dans ce chapitre, nous allons présenter une méthode originale de calcul des opérateurs DtN semi-discrets introduits dans le chapitre précédent, pour une géométrie particulière, en milieu périodique. La périodicité va nous permettre de réduire la résolution des problèmes extérieurs à des calculs restreints à une cellule de périodicité, conduisant ainsi à une méthode de calcul des opérateurs DtN ne faisant appel qu'à la résolution de problèmes posés en domaine borné. Nous allons procéder comme au chapitre précédent, à savoir nous allons commencer par exposer nos résultats sur le cas des problèmes d'ordre un en temps, en simple et multi-scattering, puis nous montrerons comment ces résultats se généralisent au cas des problèmes d'ordre deux en temps.

La géométrie que nous nous proposons de traiter dans ce chapitre consiste en un domaine Ω, que nous appelerons abusivement guide par analogie avec le cas de l'équation de Helmholtz, qui sera infini dans une direction (nous choisirons la première de la base canonique), et borné dans toutes les autres. De plus, nous supposerons que sa frontière est périodique en dehors d'un domaine Ω_0, borné (voir figure 5.1 pour un exemple). Par souci de simplicité, nous allons nous restreindre dans les développements qui vont suivre, au cas de la dimension 2 et des conditions de Neumann homogènes. Bien entendu, tous les résultats que nous allons exposer demeurent valables en dimension supérieure et pour d'autres types de conditions aux limites, à condition qu'elles respectent la périodicité que

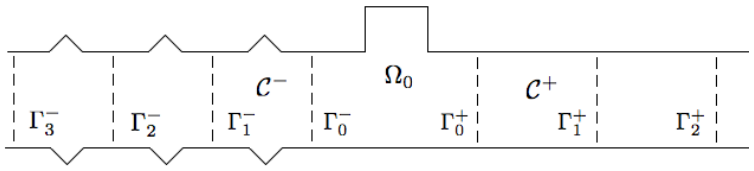


FIGURE 5.1 – Exemple en dimension 2 : en dehors du domaine borné Ω_0, la géométrie ainsi que les propriétés du milieu sont périodiques. Les cellules de périodicité sont notées $\mathcal{C}^-$ et $\mathcal{C}^+$

nous allons imposer à la géométrie et aux coefficients (ce sera notamment le cas des conditions de Dirichlet homogène ou des conditions quasi-périodiques, voir [19]).

5.1 Problèmes d'ordre un en temps

Nous nous plaçons comme annoncé dans le cas particulier de la dimension 2, et nous précisons maintenant la géométrie de notre domaine Ω. Nous supposons disposer d'un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, lipschitzien, connexe, borné dans la direction y et infini dans la direction x. Nous rajoutons des hypothèses de périodicité sur le domaine Ω. On commence par identifier le "défaut" $\Omega_0 = \Omega \cap \{-a_- < x < a_+\}$, où a_-, a_+ sont deux nombres réels, et nous supposons que le domaine est périodique en dehors de Ω_0, c'est-à-dire que l'on peut définir des cellules de périodicité :

$$\mathcal{C}_j^+ = \left\{(x,y) \in \Omega \ \middle|\ a_+ + (j-1)L^+ \leq x \leq a_+ + jL^+\right\}$$

$$\mathcal{C}_j^- = \left\{(x,y) \in \Omega \ \middle|\ a_- - jL^- \leq x \leq a_- - (j-1)L^-\right\}$$

qui seront respectivement isomorphes par translations à : $\mathcal{C}^+ = \mathcal{C}_1^+$ et $\mathcal{C}^- = \mathcal{C}_1^-$ Cet isomorphisme sera souvent sous-entendu dans la suite. On notera enfin : $\Gamma_j^\pm = \Omega \cap \{x = \pm a_\pm \pm jL^\pm\}$. Tous les Γ_j^+ (respectivement Γ_j^-) sont en isomorphisme, on notera donc souvent simplement Γ^+ (respectivement Γ^-) lorsque la position de la frontière verticale n'a pas d'importance. La frontière de Ω_e qui ne correspond pas aux conditions aux limites est donc :

$$\Gamma_0 = \Gamma_0^- \cup \Gamma_0^+$$

Enfin, on notera :

$$\Omega^+ = \{(x,y) \in \Omega \ \mid\ x > a_+\}$$

et

$$\Omega^- \{(x,y) \in \Omega \ \mid\ x < -a_-\}$$

de sorte que $\Omega_e = \Omega \setminus \overline{\Omega_0} = \Omega^+ \cup \Omega^-$. Enfin, nous notons Σ^+ et Σ^- les parties supérieures et inférieures de la frontière de Ω. Toutes ces notations sont illustrées sur la figure 5.2.

5.1.1 Problème modèle

Maintenant que notre géométrie de travail est clairement identifiée, nous rappelons que nous cherchons à construire des opérateurs DtN pour le problème modèle d'ordre un :
Trouver $u \in C^1([0,+\infty[, L^2(\Omega)) \cap C^0([0,+\infty[, D(A))$ tel que (voir le chapitre précédent pour la

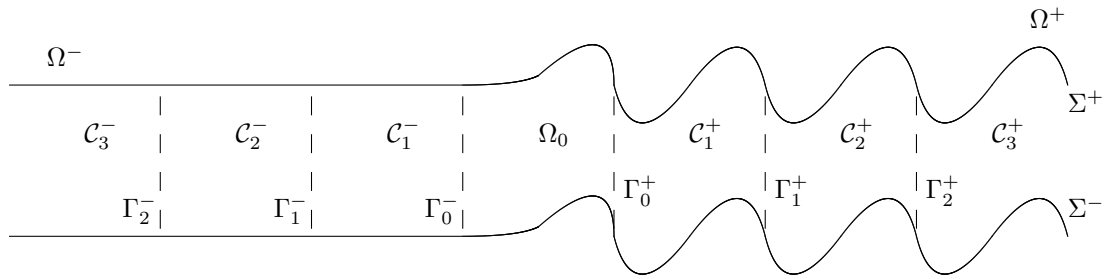


FIGURE 5.2 – Notations pour le guide périodique

défintion de $D(A)$)

$$\left|\begin{array}{ll} \gamma\rho\dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + Vu = f & \text{dans } \Omega, \quad t > 0 \\ \partial_\nu u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ u(\cdot, 0) = u_0 & \text{dans } \Omega \end{array}\right. \tag{4.2}$$

sous les hypothèses qui garantissent son caractère bien posé, ainsi que le caractère local des perturbations :

(H1) $f \in C^1(]0, +\infty[, L^2(\Omega))$, $u_0 \in D(A)$, $\rho \in L^\infty(\Omega)$, $V \in L^\infty(\Omega)$

(H2) $\exists\ \rho_-,\ \rho_+ \in \mathbb{R}$ tels que $0 < \rho_- \leq \rho \leq \rho_+$.

(H3) $\gamma = 1$ ou $\gamma = -i$.

(H4) si $\gamma = 1$, on suppose $V \geq 0$.

(H5) *supp* $f \cup$ *supp* $u_0 \subset \Omega_0$

Nous rajoutons désormais une hypothèse de périodicité des coefficients, à savoir :

(H6) $\exists \rho^-, \rho^+, V^-, V^+$, avec $\rho^\pm(x \pm L^\pm) = \rho^\pm(x)$ et $V^\pm(x \pm L^\pm) = V^\pm(x)$, $x \in \Omega^\pm$ et telles que $\rho|_{\Omega^\pm} = \rho^\pm$ et $V|_{\Omega^\pm} = V^\pm$

autrement dit, les coefficients sont périodiques dans Ω_e, avec la même périodicité que celle que possède Ω. Notre problème mérite alors son nom de problème de guide périodique localement perturbé. Nous avons vu que pour appliquer les méthodes DtN, il est plus commode de le semi-discrétiser en : trouver $(u^n)_{0 \leq n \leq N} \in H^1(\Omega)^{N+1}$ tel que :

$$\left|\begin{array}{ll} \gamma\rho\dfrac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} + (-\Delta + V)(\theta u^{n+1} + (1-\theta)u^n) = f^{n+\theta} & \text{dans } \Omega \quad 0 \leq n \leq N \\ \partial_\nu u^{n+1} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ u^0(\cdot) = u_0(\cdot) & \text{dans } \Omega \end{array}\right. \tag{4.3}$$

problème pour lequel nous construisons les opérateurs DtN en passant par la résolution des problèmes extérieurs : pour tout $(\varphi^n)_{1\leq n\leq N} \in H^{1/2}(\Gamma_0)^N$, trouver $(u_e^n)_{0\leq n\leq N} \in H^1(\Omega_e)^{N+1}$ tel que :

$$\left|\begin{array}{ll} A(\theta,\Delta t)u_e^{n+1} = A(\theta-1,\Delta t)u_e^n & \text{dans } \Omega_e \quad 0\leq n\leq N \\ \partial_\nu u_e^{n+1} = 0 & \text{sur } \partial\Omega_e\cap\partial\Omega \\ u_e^{n+1}|_{\Gamma_0} = \varphi^{n+1} & \text{sur } \Gamma_0 \\ u_e^0(\cdot) = 0 & \text{dans } \Omega_e \end{array}\right. \tag{4.5}$$

avec :

$$\begin{array}{rcl} A(\theta,\Delta t) : H^1(\Omega) & \longrightarrow & H^{-1}(\Omega) \\ u & \longmapsto & -\theta\Delta t\Delta u + \theta\Delta t V u + \gamma\rho u \end{array}$$

qui se décomposent en (cf 4.5) :

$$u_e^n = \sum_{k=1}^{n} w_e^k(\varphi^{n-k+1}) \tag{4.8}$$

avec, pour tout $\varphi \in H^{1/2}(\Gamma_0)$, la famille $(w_e^n(\varphi))_{0\leq n\leq N} \in H^1(\Omega_e)^{N+1}$ définie par :

$$\left|\begin{array}{ll} A(\theta,\Delta t)w_e^{n+1}(\varphi) = A(\theta-1,\Delta t)w_e^n(\varphi) & \text{dans } \Omega_e \\ \partial_\nu w_e^{n+1}(\varphi) = 0 & \text{sur } \partial\Omega_e\cap\partial\Omega \\ w_e^0(\varphi) = 0 & \text{dans } \Omega_e \\ w_e^1(\varphi)|_{\Gamma_0} = \varphi & \text{sur } \Gamma_0 \\ w_e^{n+1}(\varphi)|_{\Gamma_0} = 0 & \text{sur } \Gamma_0, \ \ \forall n\geq 1 \end{array}\right. \tag{4.7}$$

La condition DtN que l'on cherche alors à construire s'exprime via, si u_{int}^n est la solution de (4.9) :

$$\frac{\partial u_{int}^{n+\theta}}{\partial \nu_0}|_{\Gamma_0} + \sum_{k=1}^{n+1} \Lambda_e^k(u_{int}^{n+1-k+1}|_{\Gamma_0}) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0$$

avec, pour tout $n \geq 1$:

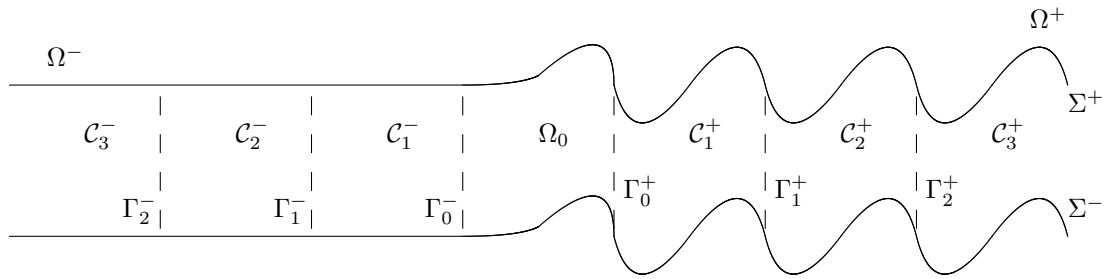
$$\begin{array}{rcl} \Lambda_e^n : H^{1/2}(\Gamma_0) & \longrightarrow & H_\xi^{-1/2}(\Gamma_0) \\ \varphi & \longmapsto & \theta\dfrac{\partial w_e^n(\varphi)}{\partial \nu_e}|_{\Gamma_0} + (1-\theta)\dfrac{\partial w_e^{n-1}(\varphi)}{\partial \nu_e}|_{\Gamma_0} \end{array}$$

Notre but dans ce chapitre va consister en le calcul de ces opérateurs DtN, avec comme objectif de parvenir à réduire toutes les étapes de calcul à des résolutions en domaine borné, afin de pouvoir en réaliser une discrétisation spatiale en vue de l'implémentation de la méthode. L'ingrédient essentiel qui va nous permettre une telle réduction est bien sûr l'hypothèse de périodicité. Remarquons tout de suite que dans une telle configuration géométrique, comme :

$$\Gamma_0 = \Gamma_0^- \cup \Gamma_0^+$$

résoudre (4.7) est équivalent à résoudre chacun des deux problèmes suivants posés sur des demi-guides périodiques : pour tout $\varphi \in H^{1/2}(\Gamma_0^\pm)$, trouver $(w_\pm^n)_{0\leq n\leq N} \in H^1(\Omega^\pm)^{N+1}$ tel que :

$$\left|\begin{array}{ll} A(\theta,\Delta t)w_\pm^{n+1}(\varphi) = A(\theta-1,\Delta t)w_\pm^n(\varphi) & \text{dans } \Omega^\pm \\ \partial_\nu w_\pm^{n+1}(\varphi) = 0 & \text{sur } \partial\Omega^\pm\cap\partial\Omega \\ w_\pm^0(\varphi) = 0 & \text{dans } \Omega^\pm \\ w_\pm^1(\varphi)|_{\Gamma_0^\pm} = \varphi & \text{sur } \Gamma_0^\pm \\ w_\pm^{n+1}(\varphi)|_{\Gamma_0^\pm} = 0 & \text{sur } \Gamma_0^\pm, \ \ \forall n\geq 1 \end{array}\right. \tag{5.1}$$



et en faisant l'identification entre φ et $(\varphi|_{\Gamma_0^-}, \varphi|_{\Gamma_0^+})$ de poser :

$$w_e^n(\varphi)|_{\Omega^\pm} = w_\pm^n(\varphi|_{\Gamma_0^\pm})$$

comme chacun des problèmes (4.7) et (5.1) est bien posé en vertu du théorème 4.4. Les opérateurs DtN Λ_e^n se décomposent alors en :

$$\Lambda_e^n = \begin{pmatrix} \Lambda_-^n & 0 \\ 0 & \Lambda_+^n \end{pmatrix}$$

si

$$\begin{aligned} \Lambda_\pm^n : H^{1/2}(\Gamma_0^\pm) &\longrightarrow H^{-1/2}(\Gamma_0^\pm) \\ \varphi &\longmapsto \theta \frac{\partial w_\pm^n(\varphi)}{\partial \nu_e^\pm}|_{\Gamma_0^\pm} + (1-\theta)\frac{\partial w_\pm^{n-1}(\varphi)}{\partial \nu_e^\pm}|_{\Gamma_0^\pm} \end{aligned}$$

Une autre façon de comprendre ceci est de considérer les problèmes de demi-guide : pour tout $(\varphi_\pm^n)_{1\le n\le N} \in H^{1/2}(\Gamma_0^\pm)^N$, trouver $(u_{e,\pm}^n)_{0\le n\le N} \in H^1(\Omega^\pm)^{N+1}$ tel que :

$$\left|\begin{array}{ll} A(\theta,\Delta t)u_\pm^{n+1} = A(\theta-1,\Delta t)u_{e,\pm}^n & \text{dans } \Omega^\pm \quad 0\le n\le N \\ \partial_\nu u_\pm^{n+1} = 0 & \text{sur } \partial\Omega^\pm \cap \partial\Omega \\ u_\pm^{n+1}|_{\Gamma_0} = \varphi_\pm^{n+1} & \text{sur } \Gamma_0^\pm \\ u_\pm^0(\cdot) = 0 & \text{dans } \Omega^\pm \end{array}\right. \tag{5.2}$$

qui sont bien posés, toujours en vertu du théorème 4.4. Alors par unicité il est clair que si on prend :

$$\varphi_\pm^n = \varphi^n|_{\Gamma_0^\pm}$$

on aura, par unicité :

$$u_e^n|_{\Omega^\pm} = u_\pm^n$$

et donc la condition de raccord à appliquer sur $\Gamma_0^\pm$ peut aussi se voir comme étant :

$$\partial_{\nu_0} u_e^{n+\theta}|_{\Gamma_0^\pm} = \partial_{\nu_0} u_\pm^{n+\theta}|_{\Gamma_0^\pm}$$

Comme on a bien évidemment, en vertu du théorème 4.5 :

$$u_\pm = \sum_{k=1}^n w_\pm^k(\varphi_\pm^{n-k+1}) \tag{5.3}$$

ces deux points de vue sont rigoureusement équivalents. L'intérêt de cette réécriture tient au fait que nous remplaçons un problème posé sur un domaine complexe (Ω_e n'est pas connexe) avec deux périodicités différentes, par deux problèmes découplés posés sur des demi-guides ne présentant qu'une

seule périodicité, et donc plus simples. Aussi, nous allons proposer une méthode pour résoudre indépendamment chacun des deux problèmes de demi-guide (5.2) en passant par les (5.1), et en déduire les $\Lambda_{\pm}^{n}$. Comme les deux problèmes + et − sont formellement identiques, il est bien évident que si l'on dispose d'une méthode pour résoudre l'un de ces deux problèmes, alors cette méthode va nous permettre de résoudre l'autre. Aussi, afin d'alléger notre présentation, nous n'allons détailler que le cas du problème de demi-guide posé dans Ω^+, l'autre s'en déduisant aisément. Nous allons en profiter pour omettre les indices + chaque fois que cela ne nuira pas à la compréhension, dans toute la sous-section à venir.

5.1.2 Résolution des problèmes de demi-guide

Notre objectif s'est donc réduit à proposer une méthode de résolution basée sur la périodicité pour :

$$\left|\begin{array}{ll} A(\theta,\Delta t)w^{n+1}(\varphi) = A(\theta-1,\Delta t)w^{n}(\varphi) & \text{dans } \Omega^+ \\ \partial_\nu w^{n+1}(\varphi) = 0 & \text{sur } \partial\Omega^+ \cap \partial\Omega \\ w^0(\varphi) = 0 & \text{dans } \Omega^\pm \\ w^1(\varphi)|_{\Gamma_0^+} = \varphi & \text{sur } \Gamma_0^+ \\ w^{n+1}(\varphi)|_{\Gamma_0^+} = 0 & \text{sur } \Gamma_0^+, \ \ \forall n \geq 1 \end{array}\right. \tag{5.1}$$

posé sur le domaine Ω^+ où les coefficients de $A(\theta,\Delta t)$ ainsi que la géométrie sont L^+ périodiques dans la direction infinie des $x > 0$.

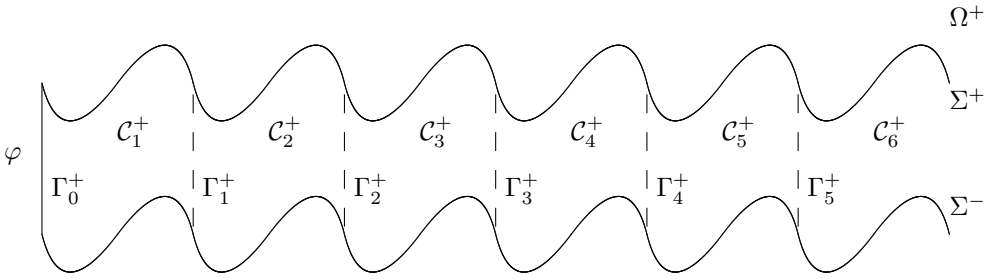


Figure 5.3 – Demi-guide Ω^+

Le premier pas de temps

La famille que nous nous proposons d'étudier étant définie par récurrence, il est naturel de commencer notre étude par le premier pas de temps. Celui-ci se réécrit : pour tout $\varphi \in H^{1/2}(\Gamma_0^+)$, trouver $w^1(\varphi) \in H^1(\Omega^+)$ tel que :

$$\left|\begin{array}{ll} -\theta\Delta t\Delta w^1(\varphi) + (\theta\Delta t V + \gamma\rho)w^1(\varphi) = 0 & \text{dans } \Omega^+ \\ \partial_\nu w^1(\varphi) = 0 & \text{sur } \partial\Omega^+ \cap \partial\Omega \\ w^1(\varphi) = \varphi & \text{sur } \Gamma_0^+ \end{array}\right. \tag{5.4}$$

et nous savons ce problème bien posé d'après le théorème 4.4. On remarque que ce problème a la même structure que les problèmes de demi-guide périodique pour l'équation de Helmholtz, étudiés dans [36], [37] et [39], étude que nous avons rappelée au chapitre 2, et qui permet de ramener la résolution de pareils problèmes à la résolution de problèmes posés sur une seule cellule de périodicité,

et d'une équation quadratique. Cette méthode est basée sur un résultat de structure de la solution, qui permet de la déterminer cellule par cellule au lieu d'avoir à la calculer globalement. Suite à cette remarque, il semble naturel d'essayer de reproduire ces résultats sur notre premier pas de temps.

Par analogie avec le cas harmonique, nous commençons donc par essayer de déterminer la structure de $w^1(\varphi)$. Nous introduisons pour cela l'opérateur de propagation R_1 défini par :

$$\begin{array}{rcl} R_1 : H^{1/2}(\Gamma^+) & \longrightarrow & H^{1/2}(\Gamma^+) \\ \varphi & \longmapsto & w^1(\varphi)|_{\Gamma_1^+} \end{array}$$

et qui transporte donc la donnée pour w^1 vers Γ_1^+, procurant ainsi la donnée pour le problème dont est solution w^1 dans le demi-guide privé de sa première cellule. Par périodicité, on comprend aisément que ce nouveau problème va être de la même forme que celui satisfait par w^1 dans Ω^+, mais pour la donnée $R_1\varphi$. Aussi, si on note $\tau_h : L^2(\Omega_+) \longrightarrow L^2(\Omega_+)$ l'opérateur de translation tel que presque partout dans Ω^+, on ait $\tau_h(u)(x,y) = u(x+h,y)$, on ne sera pas surpris de trouver le résultat de structure suivant :

Théorème 5.1. *Pour tout $\varphi \in H^{1/2}(\Gamma^+)$ et tout $j \geq 0$, on a :*

$$\tau_{jL^+}(w^1(\varphi)) = w^1(R_1^j\varphi) \tag{5.5}$$

ce qui s'écrit aussi :

$$w^1(\varphi)|_{\mathcal{C}_{j+1}^+} = w^1(R_1^j\varphi)|_{\mathcal{C}_1^+} \tag{5.6}$$

De plus, l'opérateur R_1 est compact, injectif, et de rayon spectral strictement inférieur à 1.

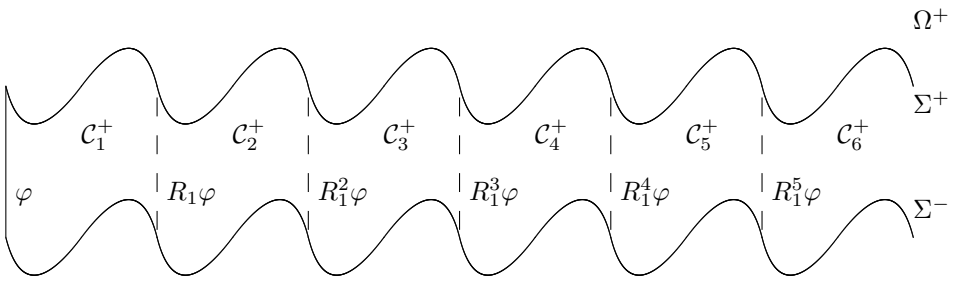


FIGURE 5.4 – Illustration de la formule (5.5) qui donne la structure du premier pas de temps

Démonstration. On commence par démontrer la formule (5.5). On considère, pour tout $\varphi \in H^{1/2}(\Gamma)$ la fonction $\tau_{L^+}(w^1(\varphi))$. Il est clair par périodicité de ρ et V que $\tau_{L^+}(w^1(\varphi))$ est solution de :

$$\left| \begin{array}{ll} -\theta\Delta t\Delta\tau_{L^+}(w^1(\varphi)) + (\theta\Delta tV + \gamma\rho)\tau_{L^+}(w^1(\varphi)) = 0 & \text{dans } \Omega_+ \\ \partial_\nu\tau_{L^+}(w^1(\varphi)) = 0 & \text{sur } \partial\Omega^+ \cap \partial\Omega \\ \tau_{L^+}(w^1(\varphi)) = R_1\varphi & \text{sur } \Gamma_0^+ \end{array} \right.$$

par définition de R_1. Mais toujours par définition, $w^1(R_1\varphi)$ est l'unique solution de ce problème bien posé. Alors $\tau_{L^+}(w^1(\varphi)) = w^1(R_1\varphi)$. On obtient ensuite :

$$\tau_{2L^+}(w^1(\varphi)) = \tau_{L^+}(\tau_{L^+}(w^1(\varphi))) = \tau_{L^+}(w^1(R_1\varphi)) = w^1(R_1^2\varphi)$$

et il suit par une récurrence évidente que : $\tau_{jL^+}(w^1(\varphi)) = w^1(R_1^j\varphi)$. Puis, en vertu des résultats classiques de régularité intérieure , $w_1 \in H^2(\Omega_+ \cap \{x \geq a_+ + \delta\})$, donc $R_1\varphi \in H^{3/2}(\Gamma^+)$, qui s'injecte

de façon compacte dans $H^{1/2}(\Gamma^+)$, d'où la compacité de R_1.

Supposons maintenant qu'il existe φ tel que $R_1\varphi = 0$. Alors $\tau_{L^+}(w^1(\varphi))$ est solution de :

$$\left|\begin{array}{ll} -\theta\Delta t\Delta\tau_{L^+}(w^1(\varphi)) + (\theta\Delta t V + \gamma\rho)\tau_{L^+}(w^1(\varphi)) = 0 & \text{dans } \Omega_+ \\ \partial_\nu\tau_{L^+}(w^1(\varphi)) = 0 & \text{sur } \partial\Omega^+ \cap \partial\Omega \\ \tau_{L^+}(w^1(\varphi)) = 0 & \text{sur } \Gamma_0^+ \end{array}\right.$$

mais ce problème est bien posé en vertu du théorème 4.4, d'où $\tau_{L^+}(w^1(\varphi)) = 0$. Par conséquent $w^1(\varphi)$ s'annule hors de la première cellule, et est solution d'un problème au Laplacien dans tout Ω^+. Alors le théorème de prolongement unique pour le Laplacien implique $w^1(\varphi) = 0$ dans tout Ω^+, d'où $\varphi = 0$, ce qui démontre l'injectivité de R_1.

Enfin, maintenant que nous savons que R_1 est compact, nous en déduisons que son spectre est uniquement constitué de valeurs propres. Soit donc φ un vecteur propre de R_1 associé à la valeur propre λ, alors la formule (5.5) nous donne :

$$||w^1(\varphi)||^2_{L^2(\Omega_+)} = ||w^1(\varphi)|_{\mathcal{C}_1^+}||^2_{L^2(\mathcal{C})} \sum_{j=0}^{+\infty} |\lambda|^{2j}$$

qui sera fini si et seulement si $|\lambda| < 1$. □

Cette formule de propagation nous indique qu'il suffit d'être capable de calculer $w^1(\varphi)$ dans la première cellule, ainsi que l'opérateur R_1, pour pouvoir reconstruire $w^1(\varphi)$ dans tout Ω^+, cellule par cellule. Nous allons commencer par la détermination de $w^1(\varphi)$ dans la première cellule. Observons que l'on peut en réalité également déduire de R_1 l'expression de $w^1(\varphi)$ dans la première cellule. En effet, il est clair au vu de la figure 5.4 que $w^1(\varphi)$ y est solution de :

$$\left|\begin{array}{ll} A(\theta, \Delta t)w^1(\varphi) = 0 & \text{dans } \mathcal{C}_1^+ \\ \partial_\nu w^1(\varphi) = 0 & \text{sur } \partial\mathcal{C}_1^+ \setminus (\Gamma_0^+ \cup \Gamma_1^+) \\ w^1(\varphi) = \varphi & \text{sur } \Gamma_0^+ \\ w^1(\varphi) = R_1\varphi & \text{sur } \Gamma_1^+ \end{array}\right.$$

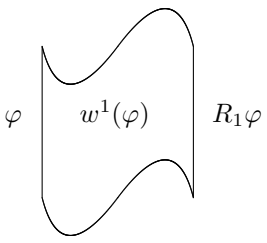


FIGURE 5.5 – $w^1(\varphi)$ dans la première cellule

Afin d'extraire la dépendance en chacune des deux données au bord (principe que nous avons sempiternellement appliqué jusqu'ici avec succès), nous introduisons les deux problèmes de cellule suivants, posés dans $H^1_\xi(\mathcal{C}^+)$:

$$\left|\begin{array}{ll} A(\theta,\Delta t)e_0(\varphi)=0 & \text{dans } \mathcal{C}_1^+ \\ \partial_\nu e_0(\varphi)=0 & \text{sur } \partial\mathcal{C}_1^+ \setminus (\Gamma_0^+ \cup \Gamma_1^+) \\ e_0(\varphi)=\varphi & \text{sur } \Gamma_0^+ \\ e_0(\varphi)=0 & \text{sur } \Gamma_1^+ \end{array}\right. \tag{5.7}$$

$$\left|\begin{array}{ll} A(\theta,\Delta t)e_1(\varphi)=0 & \text{dans } \mathcal{C}_1^+ \\ \partial_\nu e_1(\varphi)=0 & \text{sur } \partial\mathcal{C}_1^+ \setminus (\Gamma_0^+ \cup \Gamma_1^+) \\ e_1(\varphi)=0 & \text{sur } \Gamma_0^+ \\ e_1(\varphi)=\varphi & \text{sur } \Gamma_1^+ \end{array}\right. \tag{5.8}$$

FIGURE 5.6 – Illustration des conditions aux limites pour les problèmes de cellule

À nouveau, ces problèmes ne sont que des cas particuliers de problèmes (4.5), ils sont donc bien posés en vertu du théorème 4.4. Alors, il est clair par unicité que l'on a :

$$w^1(\varphi)|_{\mathcal{C}_1^+} = e_0(\varphi) + e_1(R_1\varphi) \tag{5.9}$$

Puis, en appliquant (5.6), on en déduit facilement que :

$$w^1(\varphi)|_{\mathcal{C}_j^+} = e_0(R_1^{j-1}\varphi) + e_1(R_1^j\varphi) \tag{5.10}$$

On voit donc qu'il suffit de connaître R_1 et de résoudre les deux problèmes de cellule ci-dessus afin d'être capables de déterminer w^1 dans tout le guide. Les problèmes de cellule, posés en domaine bornés, étant aisément résolus numériquement comme nous le verrons dans le chapitre suivant, il ne nous reste plus qu'à déterminer R_1, afin d'avoir complètement résolu le problème au premier pas de temps.

Les deux relations ci-dessus ont utilisé la continuité en trace de w^1 sur Γ_1^+ pour être établies, aussi une idée somme toute assez naturelle est d'utiliser le raccord en dérivée normale de w^1 sur Γ_1^+, afin d'établir de nouvelles relations que l'on espère utiles pour caractériser R_1. Le choix de la normale ν_1 est illustré sur la figure 5.7 comme étant la normale sortante à $\mathcal{C}_1^+$.

Nous allons utiliser les problèmes de cellule afin d'exprimer ce raccord. Nous avons donc :

$$\frac{\partial w^1(\varphi)|_{\mathcal{C}_1^+}}{\partial \nu_1}|_{\Gamma_1^+} = \frac{\partial w^1(\varphi)|_{\Omega^+\setminus\overline{\mathcal{C}_1^+}}}{\partial \nu_1}|_{\Gamma_1^+}$$

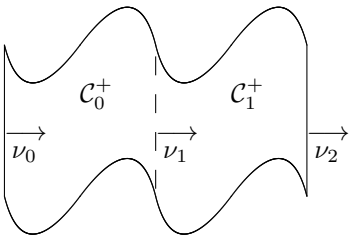


FIGURE 5.7 – Choix des normales

Ce qui se réécrit, en utilisant (5.10) et l'identification par translation entre toutes les cellules de périodicité :

$$\frac{\partial e_0(\varphi)}{\partial \nu_1}|_{\Gamma_1^+} + \frac{\partial e_1(R_1\varphi)}{\partial \nu_1}|_{\Gamma_1^+} = \frac{\partial e_0(R_1\varphi)}{\partial \nu_0}|_{\Gamma_0^+} \frac{\partial e_1(R_1^2\varphi)}{\partial \nu_0}|_{\Gamma_0^+}$$

On donne alors un nom à ces diverses quantités, en introduisant les opérateurs :

$$\begin{array}{rcl} T_{00} : H^{1/2}(\Gamma^+) & \longrightarrow & H^{-1/2}(\Gamma^+) \\ \varphi & \longmapsto & -\theta \dfrac{\partial e_0(\varphi)}{\partial \nu_0}|_{\Gamma_0^+} \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} T_{01} : H^{1/2}(\Gamma^+) & \longrightarrow & H^{-1/2}(\Gamma^+) \\ \varphi & \longmapsto & \theta \dfrac{\partial e_0(\varphi)}{\partial \nu_1}|_{\Gamma_1^+} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} T_{10} : H^{1/2}(\Gamma^+) & \longrightarrow & H^{-1/2}(\Gamma^+) \\ \varphi & \longmapsto & -\theta \dfrac{\partial e_1(\varphi)}{\partial \nu_0}|_{\Gamma_0^+} \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} T_{11} : H^{1/2}(\Gamma^+) & \longrightarrow & H^{-1/2}(\Gamma^+) \\ \varphi & \longmapsto & \theta \dfrac{\partial e_1(\varphi)}{\partial \nu_1}|_{\Gamma_1^+} \end{array}$$

Alors la relation ci-dessus se réécrit :

$$T_{01}\varphi + T_{11}R_1\varphi = -T_{00}R_1\varphi - T_{10}R_1^2\varphi$$

soit, comme ce doit être vrai pour tout $\varphi \in H_\xi^{1/2}(\Gamma^+)$:

$$T_{10}R_1^2 + (T_{00} + T_{11})R_1 + T_{01} = 0$$

au sens des opérateurs linéaires sur $H^{1/2}(\Gamma^+)$. Nous avons donc obtenu une équation pour R_1, que nous espérons suffisante pour le déterminer complètement. Pour cela, nous avons besoin de connaître quelques propriétés des opérateurs T_{ij} que nous venons de définir :

Lemme 5.1. *Les quatres opérateurs T_{ij} sont injectifs.*

Démonstration. La preuve est identique pour chacun des T_{ii} ou des T_{ij}, aussi nous ne la détaillerons que pour T_{00} et T_{01}. Supposons qu'il existe $\varphi \in H^{1/2}(\Gamma^+)$ tel que $T_{00}\varphi = 0$. Alors, par définition de T_{00}, $e_0(\varphi)$ sera solution de :

$$\left| \begin{array}{ll} -\theta\Delta t\Delta e_0(\varphi) + (\theta\Delta t V + \gamma\rho)e_0(\varphi) = 0 & \text{dans } \mathcal{C}_\infty^+ \\ \partial_\nu e_0(\varphi) = 0 & \text{sur } \partial\mathcal{C}_1^+ \setminus (\Gamma_0^+ \cup \Gamma_1^+) \\ \partial_\nu e_0(\varphi) = 0 & \text{sur } \Gamma_0^+ \\ e_0(\varphi) = 0 & \text{sur } \Gamma_1^+ \end{array} \right.$$

qui est un problème bien posé d'où $e_0(\varphi) = 0$ et par suite $\varphi = 0$, ce qui démontre l'injectivité de T_{00}. Supposons qu'il existe $\varphi \in H^{1/2}(\Gamma^+)$ tel que $T_{01}\varphi = 0$. Alors, par définition de T_{01}, $e_0(\varphi)$ sera

cette fois solution de :

$$\left|\begin{array}{ll} -\theta\Delta t\Delta e_0(\varphi) + (\theta\Delta t V + \gamma\rho)e_0(\varphi) = 0 & \text{dans } \mathcal{C}_\infty^+ \\ \partial_\nu e_0(\varphi) = 0 & \text{sur } \partial\mathcal{C}_1^+ \setminus (\Gamma_0^+ \cup \Gamma_1^+) \\ \partial_\nu e_0(\varphi) = 0 & \text{sur } \Gamma_1^+ \\ e_0(\varphi) = 0 & \text{sur } \Gamma_1^+ \end{array}\right.$$

Le théorème de prolongement unique nous assure que seul $e_0(\varphi) = 0$ peut s'annuler en trace et en dérivée normale sur une même frontière tout en satisfaisant une équation elliptique, et on obtient de nouveau $\varphi = 0$. □

Grâce à ce résultat, nous sommes en mesure de démontrer que, comme dans le cas de l'équation de Helmholtz en milieu périodique, l'équation quadratique en R_1 que nous avons obtenu est bien suffisante pour déterminer R_1 :

Théorème 5.2. *Soit $\mathcal{K}(H^{1/2}(\Gamma^+))$ l'espace des opérateurs compacts sur $H^{1/2}(\Gamma^+)$. R_1 est l'unique opérateur compact de rayon spectral strictement inférieur à 1 solution de :*

Trouver $X \in \mathcal{K}(H^{1/2}(\Gamma^+))$ tel que :

$$T_{10}X^2 + (T_{00} + T_{11})X + T_{01} = 0 \tag{5.11}$$

Démonstration. Nous avons déjà vu que R_1 est solution de (5.11), qu'il est compact et de rayon spectral strictement inférieur à 1 (cf théorème 5.1). Ne reste plus qu'à démontrer que c'est la seule solution à ce problème. Soit X un opérateur compact de rayon spectral strictement inférieur à 1, et solution de (5.11). On constate tout d'abord que X est nécessairement injectif. En effet, si $\varphi \in H^{1/2}(\Gamma^+)$ est telle que $X\varphi = 0$, alors comme X est solution de (5.11), ceci entraîne que $T_{01}\varphi = 0$. Le lemme 5.1 implique alors $\varphi = 0$, T_{01} étant injectif. Ensuite, pour tout $\varphi \in H^{1/2}(\Gamma^+)$, on définit $v(\varphi)$ par :

$$v(\varphi)|_{\mathcal{C}_j^+} = e_0(X^{j-1}\varphi) + e_1(X^j\varphi)$$

Clairement, $v(\varphi)$ est solution de la même équation que $w^1(\varphi)$ dans chaque $\mathcal{C}_j^+$, et elle est continue en trace sur chaque Γ_j. Comme X est compact et injectif, son spectre est uniquement constitué de valeurs propres. Par hypothèse, le rayon spectral de X est strictement inférieur à 1, aussi il existe $0 < \rho_* < 1$ et N_0 tels que, pour tout $N \geq N_0$, $||X^N|| \leq \rho_*^N$, et on a :

$$||v(\varphi)||^2_{H^1(\Omega_+)} \leq C^{st} + ||\left(v(\varphi)\right)|_{\mathcal{C}_1^+}||^2_{H^1(\mathcal{C}_1^+)} \sum_{N_0+1}^{+\infty} \rho_*^{2N}$$

et donc $v(\varphi) \in H^1(\Omega_+)$. Enfin, si on calcule le saut en dérivée normale de $v(\varphi)$ à chaque interface Γ_j^+, on obtient, comme :

$$\theta\partial_x\left(v(\varphi)|_{\mathcal{C}_j^+}\right)|_{\Gamma_{j+1}^+} = T_{01}X^{j-1}\varphi + T_{11}X^j\varphi$$

$$\theta\partial_x\left(v(\varphi)|_{\mathcal{C}_{j+1}^+}\right)|_{\Gamma_{j+1}^+} = -T_{00}X^j\varphi - T_{10}X^{j+1}\varphi$$

$$\theta\left(\partial_x\left(v(\varphi)|_{\mathcal{C}_{j+1}^+}\right)|_{\Gamma_{j+1}^+} - \partial_x\left(v(\varphi)|_{\mathcal{C}_j^+}\right)|_{\Gamma_{j+1}^+}\right) = -(T_{10}X^2 + (T_{00} + T_{11})X + T_{01})X^{j-1}$$

et le saut est par conséquent nul comme X est solution de (5.11). Donc $v(\varphi)$ est solution dans tout Ω_+ du même problème que $w^1(\varphi)$, ce qui signifie que : $X\varphi = R_1\varphi$ pour tout $\varphi \in H^{1/2}(\Gamma^+)$ ce qui démontre l'unicité. □

À ce stade, il est clair que nous avons ramené à des domaines bornés la résolution du problème au premier pas de temps, puisque nous n'avons qu'à résoudre les problèmes de cellule, par définition posés en domaine borné, et l'équation quadratique (5.11), posée sur une frontière, afin de déterminer complètement $w^1(\varphi)$. Il est de plus aisé de déduire de ces résultats une expression pour le premier opérateur DtN :

$$\Lambda^1\varphi = \theta\frac{\partial w^1(\varphi)}{\nu_e^+} = -\theta\frac{\partial w^1(\varphi)}{\nu_0}$$

en utilisant les opérateurs T_{ij} :

Théorème 5.3. *On a l'expression suivante pour* Λ^1

$$\Lambda^1 = T_{00} + T_{10}R_1 \tag{5.12}$$

Démonstration. Dans la première cellule, en vertu de (5.9) :

$$w^1(\varphi) = e_0(\varphi) + e_1(R_1\varphi)$$

Alors :

$$-\theta\frac{\partial w^1(\varphi)}{\nu_0} = -\theta\frac{\partial e_0(\varphi)}{\nu_0} - \theta\frac{\partial e_1(R_1\varphi)}{\nu_0}$$

ce qui par définition s'écrit aussi :

$$\Lambda^1 = T_{00} + T_{10}R_1$$

soit la formule annoncée. □

Remarque 5.1. *Il peut sembler surprenant de prime abord que nous ayons inclus* θ *dans la définition des* T_{ij}*, mais cette dernière formule en fournit l'explication : la quantité que nous devons raccorder étant la* θ*-dérivée normale, il est judicieux d'incorporer ce facteur dans les* T_{ij}*.*

Pas de temps suivants

Le premier pas de temps peut donc se traiter comme l'équation de Helmholtz avec absorption, aussi ce que nous venons d'expliquer peut se voir comme une application des travaux de [36], [37] et [39] à notre cas particulier. Nous allons voir maintenant que les pas de temps suivants nécessitent plus d'attention, et le développement de nouvelles idées. Nous allons persister dans la démarche qui consiste à rechercher une structure à la solution puis en déduire une réduction à un domaine borné via des problèmes de cellule et des équations de raccord. On se rappelle que l'on cherche à résoudre :

$$\left|\begin{array}{ll} A(\theta,\Delta t)w^{n+1}(\varphi) = A(\theta-1,\Delta t)w^n(\varphi) & \text{dans } \Omega^+ \\ \partial_\nu w^{n+1}(\varphi) = 0 & \text{sur } \partial\Omega^+ \cap \partial\Omega \\ w^0(\varphi) = 0 & \text{dans } \Omega^\pm \\ w^1(\varphi)|_{\Gamma_0^+} = \varphi & \text{sur } \Gamma_0^+ \\ w^{n+1}(\varphi)|_{\Gamma_0^+} = 0 & \text{sur } \Gamma_0^+, \ \ \forall n \geq 1 \end{array}\right. \tag{5.1}$$

Afin de déterminer la structure de ces solutions, nous introduisons, par analogie avec le premier pas de temps, les propagateurs :

$$\begin{array}{rcl} R_n : H^{1/2}(\Gamma^+) & \longrightarrow & H^{1/2}(\Gamma^+) \\ \varphi & \longmapsto & w^n(\varphi)|_{\Gamma_1^+} \end{array}$$

Le résultat fondamental qui va nous permettre de développer une méthode de calcul des $w^n(\varphi)$ est le résultat de structure suivant :

Théorème 5.4. *Pour tout $\varphi \in H^{1/2}(\Gamma^+)$, on a :*

$$\tau_{L^+}(w^n(\varphi)) = \sum_{k=1}^{n} w^k(R_{n-k+1}\varphi) \tag{5.13}$$

Démonstration. Nous démontrons ce résultat par récurrence. Pour $n = 1$, (5.13) n'est rien d'autre que (5.5), aussi nous avons d'ores et déjà initialisé la récurrence. Remarquons ensuite que par périodicité des coefficients, τ_{L^+} commute avec la multiplication par $(\theta\Delta t V + \rho)$. Comme il commute aussi avec le Laplacien, on obtient la commutativité de $A(\theta, \Delta t)$ et de τ_{L^+}. Alors, en appliquant cet opérateur de translation à (5.1), et en utilisant la définition de R_{n+1}, on obtient :

$$\left|\begin{array}{ll} A(\theta,\Delta t)\tau_{L^+}(w^{n+1}(\varphi)) = A(\theta-1,\Delta t)\tau_{L^+}(w^n(\varphi)) & \text{dans } \Omega_+ \\ \partial_\nu \tau_{L^+}(w^{n+1}(\varphi)) = 0 & \text{sur } \partial\Omega^+ \cap \partial\Omega \\ \tau_{L^+}(w^{n+1}(\varphi))|_{\Gamma_0} = R_{n+1}\varphi & \text{sur } \Gamma_0^+ \end{array}\right.$$

Supposons maintenant (5.13) vraie au rang n. Alors on obtient, en l'injectant dans l'expression précedente :

$$\left|\begin{array}{ll} A(\theta,\Delta t)\tau_{L^+}(w^{n+1}(\varphi)) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} A(\theta-1,\Delta t)w^k(R_{n-k+1}\varphi) & \text{dans } \Omega_+ \\ \partial_\nu \tau_{L^+}(w^{n+1}(\varphi)) = 0 & \text{sur } \partial\Omega^+ \cap \partial\Omega \\ \tau_{L^+}(w^{n+1}(\varphi))|_{\Gamma_0} = R_{n+1}\varphi & \text{sur } \Gamma_0^+ \end{array}\right.$$

Par linéarité et unicité, comme nous l'avons déjà vu dans la preuve du théorème 4.5, on peut extraire la donnée au bord en utilisant w^1, on obtient alors $\tau_{L^+}(w^{n+1}) = w_e^1(R_{n+1}\varphi) + \sum_{k=1}^{n} v_k^{n+1}$ où les v_k satisfont :

$$\left|\begin{array}{ll} A(\theta,\Delta t)v_k^{n+1} = A(\theta-1,\Delta t)w^k(R_{n-k+1}\varphi) & \text{dans } \Omega_+ \\ \partial_\nu v_k^{n+1} = 0 & \text{sur } \partial\Omega^+ \cap \partial\Omega \\ v_k^{n+1}|_{\Gamma_0^+} = 0 & \text{sur } \Gamma_0^+ \end{array}\right.$$

Mais on reconnaît là l'équation (5.1) vérifiée par $w^{k+1}(R_{n-k+1}\varphi)$, aussi par unicité, on en déduit que :

$$\tau_{L^+}(w^{n+1}(\varphi)) = w^1(R_{n+1}\varphi) + \sum_{k=1}^{n} w^{k+1}(R_{n-k+1}\varphi) = \sum_{k=1}^{n+1} w^k(R_{n+1-k+1}\varphi)$$

□

Cette relation peut aussi s'écrire, en identifiant entre elles les diverses cellules de périodicité, pour tout $j \geq 1$:

$$w^n(\varphi)|_{\mathcal{C}_{j+1}^+} = \sum_{k=1}^{n} w^k(R_{n-k+1}\varphi)|_{\mathcal{C}_j^+} \tag{5.14}$$

Il est donc clair, en procédant cette fois de proche en proche (et non plus en appliquant directement une formule comme pour le premier pas de temps), qu'il suffit de connaître les R_k pour $k \leq n$ et $w^n(\varphi)$ dans la première cellule afin d'être capables de reconstruire $w^n(\varphi)$ dans tout Ω^+. Nous sommes donc en bonne voie pour réussir à réduire la détermination de $w^n(\varphi)$ à la résolution de problèmes posés en domaines bornés. L'étape suivante, si on poursuit l'analogie avec le premier pas de temps, consiste à trouver des problèmes de cellule qui permettent de déduire $w^n(\varphi)$ des R_k dans la première cellule. Il est clair que l'on peut se servir des problèmes de cellule introduits pour traiter le premier pas de temps afin d'extraire les conditions aux limites, mais il va nous falloir un nouveau

problème de cellule afin de traiter le second membre dû aux pas de temps précédents. On introduit pour cela l'opérateur :

$$E : H^1(\Delta, \mathcal{C}_1^+) \subset L^2(\mathcal{C}_1^+) \quad \longrightarrow \quad H^1(\mathcal{C}_1^+) \subset L^2(\mathcal{C}_1^+)$$

qui à f dans $H^1(\Delta, \mathcal{C}_1^+)$ associe la solution dans $H^1(\mathcal{C}_1^+)$ de :

$$\left| \begin{array}{ll} A(\theta, \Delta t)E(f) = A(\theta - 1, \Delta t)f & \text{dans } \mathcal{D}'(\mathcal{C}_1^+) \\ \partial_\nu E(f) = 0 & \text{sur } \partial\mathcal{C}_1^+ \setminus (\Gamma_0^+ \cup \Gamma_1^+) \\ E(f)|_{\Gamma_0} = 0 & \text{sur } \Gamma_0^+ \\ E(f)|_{\Gamma_1} = 0 & \text{sur } \Gamma_1^+ \end{array} \right. \tag{5.15}$$

problème à nouveau bien posé en vertu du théorème 4.4.

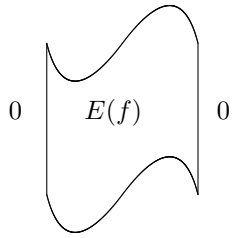


FIGURE 5.8 – Illustration des conditions aux limites pour le nouveau problème de cellule

Alors par unicité, il est clair que l'on a, pour tout $n \geq 2$:

$$w^n(\varphi)|_{\mathcal{C}_j^+} = E(w^{n-1}(\varphi)|_{\mathcal{C}_j^+}) + e_0(w^n(\varphi)|_{\Gamma_{j-1}^+}) + e_1(w^n(\varphi)|_{\Gamma_j^+}) \tag{5.16}$$

En particulier, dans la première cellule comme $w^n(\varphi)|_{\Gamma_0^+} = 0$ on en déduit que :

$$w^n(\varphi)|_{\mathcal{C}_1^+} = E(w^{n-1}(\varphi)|_{\mathcal{C}_1^+}) + e_1(R_n\varphi) \tag{5.17}$$

La formule (5.16) sera très utile lorsque nous voudrons reconstruire en pratique $w^n(\varphi)$. Dans tous les cas, on voit qu'au prix de la résolution de (5.15), il ne nous reste plus qu'à déterminer les R_n pour avoir complètement ramené la détermination d'un pas de temps quelconque à des problèmes posés en domaine borné. C'est sans surprise que nous allons utiliser un raccord en dérivée normale pour élaborer une équation pour R_n. Nous avons déjà observé, lorsque nous avons introduit les opérateurs DtN, que la quantité qui se raccorde est $w^{n+\theta}$ (tout simplement car c'est sur elle qu'agit l'opérateur Laplacien). Nous allons bien entendu maintenant expliciter ce raccord à l'aide de nos problèmes de cellule. On commence par remettre un peu en forme ce raccord en dérivée normale : $\partial_{\nu_1}\left(w^{n+\theta}(\varphi)|_{\mathcal{C}_1^+}\right)|_{\Gamma_1^+} = \partial_{\nu_1}\left(w^{n+\theta}(\varphi)|_{\mathcal{C}_2^+}\right)|_{\Gamma_1^+}$ ce qui s'écrit aussi :

$$\partial_{\nu_1} w^{n+\theta}(\varphi)|_{\Gamma_1^+} = \partial_{\nu_0}\tau_{L^+}\left(w^{n+\theta}(\varphi)\right)|_{\Gamma_0^+} \tag{5.18}$$

On réécrit chacun des deux membres de cette identité en utilisant l'ensemble des opérateurs que nous avons auparavant introduits, en gardant à l'esprit que nous cherchons à déterminer R_{n+1}, et

qu'il nous faut faire apparaître explicitement la dépendance en cette quantité. Pour le membre de gauche, (5.17) donne, comme $w^{n+\theta}(\varphi) = \theta w^{n+1}(\varphi) + (1-\theta)w^n(\varphi)$:

$$\partial_{\nu_1} w^{n+\theta}(\varphi)|_{\Gamma_1^+} = \theta \partial_{\nu_1} E(w^n(\varphi)|_{\mathcal{C}_1^+})|_{\Gamma_1} + (1-\theta)\partial_{\nu_1} w^n(\varphi)|_{\Gamma_1} + \theta \partial_{\nu_1} e_1(R_{n+1}\varphi)|_{\Gamma_1}$$

Le dernier morceau n'est autre que $T_{11}R_{n+1}\varphi$, mais les deux premiers termes sont nouveaux. À mieux y regarder, on constate que ce sont les deux quantités qui apparaissent naturellement sur les bords après formule de Green sur (5.15), tout comme les T_{ij} le font pour les équations définissant les deux premiers problèmes de cellule. C'est donc la quantité qui est naturellement appelée à jouer un rôle dans le raccord, et c'est pourquoi on introduit les deux nouveaux opérateurs de trace :

$$\begin{array}{rcl} T_0 : H^1(\Delta, \mathcal{C}_1^+) & \longrightarrow & H^{-1/2}(\Gamma^+) \\ f & \longmapsto & -\theta \partial_{\nu_0} E(f)|_{\Gamma_0} - (1-\theta)\partial_{\nu_0} f|_{\Gamma_0^+} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} T_1 : H^1(\Delta, \mathcal{C}_1^+) & \longrightarrow & H^{-1/2}(\Gamma^+) \\ f & \longmapsto & \theta \partial_{\nu_1} E(f)|_{\Gamma_1} + (1-\theta)\partial_{\nu_1} f|_{\Gamma_1^+} \end{array}$$

Puis, afin d'alléger les notations, on introduit un objet spécifique pour désigner la restriction à la première cellule de $w^n(\varphi)$:

$$\begin{array}{rcl} W^n : H^{1/2}(\Gamma^+) & \longrightarrow & H^1(\mathcal{C}_1^+) \\ \varphi & \longmapsto & w^n(\varphi)|_{\mathcal{C}_1^+} \end{array}$$

Alors on obtient, pour le membre de gauche de (5.18) :

$$\partial_{\nu_1} w_e^{n+\theta}(\varphi)|_{\Gamma_1^+} = T_1 W_n \varphi + T_{11} R_{n+1}\varphi$$

Le membre de droite de (5.18) est plus compliqué à traiter. Une partie de la dépendance en R_{n+1} apparaît directement si on utilise la formule de propagation (5.13) :

$$\tau_{L^+}(w^{n+1}(\varphi))|_{\mathcal{C}_1^+} = \sum_{k=2}^{n} W^k R_{n+1-k+1}\varphi + W^{n+1}R_1\varphi + W^1 R_{n+1}\varphi$$

et

$$\tau_{L^+}(w^n(\varphi))|_{\mathcal{C}_1^+} = \sum_{k=1}^{n} W^k R_{n-k+1}\varphi$$

On fait la θ-somme de ces deux expressions pour obtenir :

$$\begin{aligned} \tau_{L^+}(w^{n+\theta}(\varphi))|_{\mathcal{C}_1^+} &= \theta \sum_{k=2}^{n} W^k R_{n+2-k}\varphi + \theta W^{n+1}R_1\varphi + \theta W^1 R_{n+1}\varphi \\ &\quad + (1-\theta)\sum_{k=1}^{n} W^k R_{n-k+1}\varphi \\ &= \theta \sum_{k=2}^{n} W^k R_{n+2-k}\varphi + \theta W^{n+1}R_1\varphi + \theta W^1 R_{n+1}\varphi \\ &\quad + (1-\theta)\sum_{k=2}^{n} W^{k-1} R_{n+2-k}\varphi + (1-\theta)W^n R_1\varphi \end{aligned}$$

On regroupe alors les deux sommes, et on fait apparaître totalement la dépendance en R_{n+1} en démasquant la dernière partie cachée dans le terme $w^{n+1}(R_1\varphi)$ au moyen de la formule (5.17) :

$$\begin{aligned}\tau_{L^+}(w^{n+\theta}(\varphi))|_{\mathcal{C}_1^+} &= \sum_{k=2}^{n} W^{k+\theta-1}R_{n+2-k}\varphi + \theta W^{n+1}R_1\varphi \\ &\quad + \theta W^1 R_{n+1}\varphi + (1-\theta)W^n R_1\varphi \\ &= \sum_{k=2}^{n} W^{k+\theta-1}R_{n+2-k}\varphi + \theta E(W^n R_1\varphi) + \theta e_1(R_{n+1}R_1\varphi) \\ &\quad + \theta W^1 R_{n+1}\varphi + (1-\theta)W^n R_1\varphi\end{aligned}$$

Puis, en utilisant les définitions de Λ^k, T_0, et T_{10} :

$$\partial_{\nu_0}\tau_{L^+}(w^{n+\theta}(\varphi))|_{\Gamma_0^+} = -\sum_{k=2}^{n}\Lambda^k R_{n+2-k}\varphi - T_0 W^n R_1\varphi - T_{10}R_{n+1}R_1\varphi - \Lambda^1 R_{n+1}\varphi$$

On obtient donc, pour tout $\varphi \in H_\xi^{1/2}(\Gamma^+)$:

$$T_1 W^n\varphi + T_{11}R_{n+1}\varphi + T_{10}R_{n+1}R_1\varphi + \Lambda^1 R_{n+1}\varphi + T_0 W^n R_1\varphi + \sum_{k=2}^{n}\Lambda^k R_{n+2-k}\varphi$$

qui se réécrit donc :

$$(T_{11}+\Lambda^1)R_{n+1} + T_{10}R_{n+1}R_1 + T_1 W^n + T_0 W^n R_1 + \sum_{k=2}^{n}\Lambda^k R_{n+2-k} = 0$$

En l'état, il nous manque un moyen de calculer les Λ^k jusqu'au temps n pour pouvoir espérer utiliser cette équation. Fort heureusement, il est très facile de montrer que :

Théorème 5.5. *On a l'expression suivante pour Λ^n, $n \geq 2$:*

$$\Lambda^n = T_0 W^{n-1} + T_{10}R_n \tag{5.19}$$

Démonstration. Dans la première cellule, d'après (5.9) :

$$w^n(\varphi) = E(w^{n-1}(\varphi)) + e_1(R_n\varphi)$$

Alors :

$$-\theta\frac{\partial w^n(\varphi)}{\nu_0} = -\theta\frac{\partial E(w^{n-1}(\varphi))}{\nu_0} - \theta\frac{\partial e_1(R_n\varphi)}{\nu_0}$$

et donc :

$$-\theta\frac{\partial w^{n+\theta-1}(\varphi)}{\nu_0} = -\theta\frac{\partial E(w^{n-1}(\varphi))}{\nu_0} - (1-\theta)\frac{\partial w^{n-1}(\varphi)}{\nu_0} - \theta\frac{\partial e_1(R_n\varphi)}{\nu_0}$$

ce qui par définition s'écrit aussi :

$$\Lambda^n = T_0 W_e^{n-1} + T_{10}R_n$$

soit la formule annoncée. □

Ce doute légitime dissipé, on voit par ailleurs que les R_n vont nous fournir un moyen commode de calculer nos Λ^n tant recherchés. Il ne reste plus qu'à vérifier que l'équation que nous venons d'obtenir pour R_n le caractérise bien. Le lemme suivant nous fournit une réponse à cette question :

Lemme 5.2. *On note $\mathcal{B}(H^{1/2}(\Gamma^+))$ l'espace des opérateurs continus sur $H^{1/2}(\Gamma^+)$. L'opérateur :*

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{B}(H^{1/2}(\Gamma)) & \longrightarrow & \mathcal{B}(H^{1/2}(\Gamma)) \\ X & \longmapsto & (T_{11}+\Lambda^1)X + T_{10}XR_1 \end{array}$$

est injectif.

Démonstration. Supposons qu'il existe un opérateur $X \in \mathcal{B}(H^{1/2}(\Gamma^+))$ tel que :

$$(T_{11}+\Lambda^1)X + T_{10}XR_1 = 0 \quad (*)$$

Pour tout $\varphi \in H_\xi^{1/2}(\Gamma^+)$, nous allons montrer que dans ce cas on peut construire à partir de $X\varphi$ une solution $v(\varphi) \in H_\xi^1(\Omega)$ au problème :

$$\left| \begin{array}{ll} -\theta\Delta t\Delta v(\varphi) + (\theta\Delta t V + \gamma\rho)v(\varphi) = 0 & \text{dans } \Omega^+ \\ \partial_\nu v(\varphi) = 0 & \text{sur } \partial\Omega^+ \cap \partial\Omega \\ v(\varphi) = 0 & \text{sur } \Gamma_0^+ \\ v(\varphi) = X\varphi & \text{sur } \Gamma_1^+ \end{array} \right.$$

d'où l'on déduira que $X\varphi = 0$. Nous allons construire cette fonction cellule par cellule. Une telle fonction v étant solution de (5.4) dans chaque cellule, on aura alors par unicité et par définition de e_0 et e_1 :

$$v(\varphi)|_{\mathcal{C}_j^+} = e_0(v(\varphi)|_{\Gamma_{j-1}}) + e_1(v(\varphi)|_{\Gamma_j^+})$$

Dans la première cellule, les conditions aux limites $v(\varphi)|_{\Gamma_0} = 0$ et $v(\varphi)|_{\Gamma_1} = X\varphi$ imposent

$$v(\varphi)|_{\mathcal{C}_1^+} = e_1(X\varphi)$$

Passons maintenant à la deuxième cellule. Si on impose la continuité en trace il est clair que l'on a :

$$v(\varphi)|_{\mathcal{C}_2^+} = e_0(X\varphi)) + e_1(v(\varphi)|_{\Gamma_2})$$

Si on impose de plus la continuité en trace normale à la première interface Γ_1, on obtient :

$$\partial_x e_1(X\varphi)|_{\Gamma_1^+} = \partial_x e_0(X\varphi)|_{\Gamma_1^+} + \partial_x e_1(v(\varphi)|_{\Gamma_2^+})|_{\Gamma_1^+}$$

ce qui se réécrit encore $T_{11}X\varphi = -T_{00}X\varphi - T_{10}v(\varphi)|_{\Gamma_2}$. Mais, en utilisant l'équation $(*)$ satisfaite par X et l'expression de Λ^1 (5.12), on obtient par ailleurs

$$T_{11}X\varphi = -T_{00}X\varphi - T_{10}R_1X\varphi - T_{10}XR_1\varphi$$

ce qui implique $T_{10}v(\varphi)|_{\Gamma_2^+} = T_{10}(R_1X + XR_1)\varphi$, et finalement $v(\varphi)|_{\Gamma_2^+} = (R_1X + XR_1)\varphi$ puisque T_{10} est injectif. On peut reproduire ce raisonnement sur Γ_2, ce qui nous conduit à (voir la récurrence plus bas pour les détails) : $v(\varphi)|_{\Gamma_3^+} = R_1^2X + R_1XR_1 + XR_1^2$.

On devine alors une formule générale : $v(\varphi)|_{\mathcal{C}_j^+} = e_0(D_{j-1}(R_1,X)\varphi) + e_1(D_j(R_1,X)\varphi)$, où, pour simplifier les manipulations à suivre, nous avons posé $D_0 = 0$ et :

$$D_j(R,X) = \sum_{p=0}^{j-1} R^p X R^{j-1-p}$$

Il est facile de vérifier que l'on a :

$$D_{j+1}(R,X) = RD_j(R,X) + XR^j \quad \text{et} \quad D_{j+1}(R,X) = D_j(R,X)R + R^jX$$

On démontre maintenant notre formule par récurrence, comme nous avons déjà initialisé celle-ci. Supposons la formule vraie au rang j. Alors, la continuité en trace impose :

$$v(\varphi)|_{\mathcal{C}^+_{j+1}} = e_0(D_j(R_1,X)\varphi) + e_1(v(\varphi)|_{\Gamma^+_{j+1}})$$

Si on impose de plus la continuité en trace normale, on obtient :

$$T_{01}D_{j-1}(R_1,X) + T_{11}D_j(R_1,X)\varphi = -T_{00}D_j(R_1,X)\varphi - T_{10}v(\varphi)|_{\Gamma^+_{j+1}}$$

ce qui se réécrit, en utilisant la première propriété de D_j :

$$(T_{00}+T_{11})R_1D_{j-1}(R_1,X)\varphi + T_{01}R_1D_{j-1}(R_1,X) + (T_{00}+T_{11})XR_1^j\varphi = -T_{10}v(\varphi)|_{\Gamma^+_{j+1}}$$

L'équation satisfaite par X donne :

$$(T_{00}+T_{11})XR_1^j\varphi = -T_{10}R_1XR_1^j\varphi - T_{10}XR_1^{j+1}\varphi$$

tandis que l'équation (5.11) satisfaite par R_1 donne :

$$(T_{00}+T_{11})R_1D_{j-1}(R_1,X)\varphi + T_{01}D_{j-1}(R_1,X)\varphi = -T_{10}R_1^2D_{j-1}(R_1,X)\varphi$$

Aussi, nous avons : $T_{10}v(\varphi)|_{\Gamma^+_{j+1}} = T_{10}\left(R_1XR_1^j + XR_1^{j+1} + R_1^2D_{j-1}(R_1,X)\right)\varphi$
ce qui, en utilisant l'injectivité de T_{10} et la première propriété de D_j conduit à :

$$v(\varphi)|_{\Gamma^+_{j+1}} = \left(XR_1^{j+1} + R_1D_j(R_1,X)\right)\varphi$$

La deuxième propriété de D_j donne finalement : $v(\varphi)|_{\Gamma^+_{j+1}} = D_{j+1}(R_1,X)\varphi$, et la formule est démontrée.

De cette formule, on déduit que : $||v(\varphi)|_{\mathcal{C}^+_j}||^2_{H^1(\mathcal{C}^+)} \leq C(X)\left(||R_1||^{2j} + ||R_1||^{2(j-1)}\right)$, donc $v(\varphi)$ appartient $H^1(\Omega_+)$, et dans ce cas à $H^1(\Omega^+)$ par construction. Nous avons donc construit une solution de (5.4) avec donnée zéro sur Γ_0^+, ce qui implique $v(\varphi)=0$ par unicité, et en particulier $X\varphi = 0$ pour tout $\varphi \in H^{1/2}(\Gamma^+)$, ce qui signifie précisément que $X=0$ et conclut la démonstration. □

On en déduit aisément le résultat espéré sur l'équation que nous avons établie pour R_n :

Théorème 5.6. *Pour tout $n \geq 2$, R_n est l'unique solution dans $\mathcal{B}(H^{1/2}(\Gamma))$ de :*

$$(T_{11}+\Lambda^1)R_n + T_{10}R_nR_1 + T_1W^{n-1} + T_0W^{n-1}R_1 + \sum_{k=2}^{n-1}\Lambda^kR_{n-k+1} = 0 \tag{5.20}$$

Démonstration. On sait déjà que R_n est solution de cette équation. Soit P_n une autre solution, et $X_n = R_n - P_n$. Alors X_n vérifie, par linéarité :

$$(T_{11}+\Lambda^1)X_n + T_{10}X_nR_1$$

Le lemme 5.2 implique alors $X_n = 0$, et on a donc unicité de la solution. □

Remarque 5.2. *L'équation* (5.20) *est celle que l'on va devoir résoudre à chaque pas de temps pour déterminer les diverses quantités utiles. Toutefois, elle présente l'immense avantage par rapport à* (5.11) *(qui elle est quadratique mais n'est résolue qu'une seule fois) d'être linéaire. Plus précisément, elle est de la forme générale :*

$$AR_nB + CR_nD = E$$

il s'agit donc d'une équation de Sylvester en R_n. De nombreuses méthodes très efficaces existent pour résoudre pareilles équations (au niveau matriciel bien sûr), l'hypothèse cruciale, et en général difficile à vérifier, pour pouvoir appliquer ces méthodes étant l'injectivité de l'application linéaire sous-jacente, ici $X \longmapsto (T_{11}+\Lambda^1)X+T_{10}XR_1$ (cf [40]). Dans notre cas, cette injectivité est assurée par le lemme 5.2, ce qui nous assure que nous pourrons résoudre cette équation en pratique sans difficulté.

Nous sommes donc parvenus à déduire de la résolution de problèmes posés en domaines bornés la détermination des $\Lambda^n_\pm$, et donc de Λ^n_e, dans le cas particulier du guide périodique localement perturbé. Au passage, nous avons trouvé des formules de reconstruction (5.10) et (5.16), qui, alliées aux formules de décomposition en temps (4.8), nous permettront après résolution du problème intérieur (4.9), de retrouver la solution dans tout le guide.

On déduit aisément de ces résultats un algorithme de résolution des problèmes de guide semi-discrets :

Initialisation

(1) On résout les trois problèmes de cellule (5.7), (5.8) et (5.15), dans chacun des deux demi-guides.

(2) On résout les deux équations quadratiques (5.11) afin de déterminer $R_1^\pm$.

(3) On en déduit $\Lambda^1_\pm$ en utilisant (5.12).

(4) On résout le problème intérieur (4.9)

Boucle sur le pas de temps

(1) On construit $W^n_\pm$ dans la première cellule de chaque demi-guide.

(2) On résout (5.20) pour chaque demi-guide, afin d'obtenir $R_n^\pm$.

(3) On en déduit $\Lambda^n_\pm$ en utilisant (5.19).

(4) On résout le problème intérieur (4.9) pour le pas de temps courant.

Éventuellement, à chaque étape, on peut reconstruire la solution partout où on le souhaite dans le guide en utilisant (5.10) et (5.16). Il est important de noter que cette récurrence ne requiert de conserver en mémoire pratiquement que des données "surfaciques", c'est-à-dire définies sur les frontières $\Gamma_0^\pm$. En effet, la famille des $R_n^\pm$ et celle des $\Lambda^n_{e,\pm}$ doivent être entièrement conservées au fur et à mesure qu'elles sont calculées (afin de pouvoir calculer les convolutions discrètes qui interviennent à chaque pas de temps), tandis que les valeurs de $W^n_{e,\pm}$ et de la solution intérieure ne doivent être conservées que durant un pas de temps. C'est ceci qui rend la méthode à la fois utilisable et performante en pratique.

5.1.3 Le cas du scattering multiple

Nous allons maintenant voir comment se calculent dans le cas des milieux périodiques les opérateurs Θ^k_{ij} et $\widetilde{\Lambda}^k_{ij}$ définis au chapitre 4. Nous allons devoir imposer des hypothèses de structure un peu plus restrictives que dans le cas d'un seul défaut. Nous allons supposer que le milieu ne

présente qu'un seul type de périodicité à l'extérieur du domaine Ω_0. Autrement, dit, on supposera que $\mathcal{C}^+ = \mathcal{C}^-$, et que $\rho^+ = \rho^-$, $V^+ = V^-$.

On suppose ensuite que dans l'ouvert Ω_0, le support des sources et des perturbations est la réunion de N_s défauts du type précédent, à savoir il existe N_s couples (a_-^j, a_+^j) tels que :

$$\Omega_j = \Omega \cap \left\{ a_-^j < x < a_+^j \right\}$$

On renommera alors :

$$\Omega_0 = \bigcup_{j=1}^{N_s} \Omega_j$$

comme au chapitre 4. Entre ces défauts, le milieu aura donc les mêmes propriétés (y compris géométriques) que dans $\Omega^\pm$. Néanmoins, afin de pouvoir appliquer les méthodes ci-dessus, nous avons besoin de choisir les Ω_j de sorte qu'ils coïncident avec la périodicité. Quitte à les agrandir un peu, nous pouvons toujours supposer que tous les $a_\pm^j$ sont de la forme $a_\pm^j = q_\pm^j L_x$. Enfin, nous supposerons que la frontière de Ω est désormais parfaitement périodique dans la direction $\boldsymbol{e_1}$, autrement dit, du point de vue géométrique, chaque Ω_j doit être une union de cellules de périodicité $\mathcal{C}^+$. Au final, les coefficients vérifient :

$$\rho(x + L_x) = \rho(x) \quad \forall \ (x, x + L_x) \notin \Omega_0$$

et

$$V(x + L_x) = V(x) \quad \forall \ (x, x + L_x) \notin \Omega_0$$

On illustre ces propriétés sur la figure 5.9 :

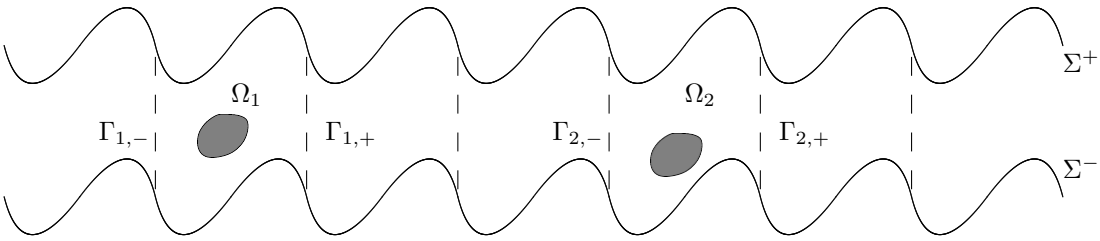


FIGURE 5.9 – Exemple de configuration en scattering multiple, avec deux défauts

Alors dans ce cas, les problèmes semi-discrets extérieurs à chaque Ω_j, à savoir : pour tout $(\widetilde{\varphi}_j^n)_{1\leq n\leq N} \in H^{1/2}(\Gamma_j)^N$, trouver $(u_{e,j}^n)_{0\leq n\leq N} \in H^1(\Omega \setminus \overline{\Omega_j})^{N+1}$ tel que :

$$\left| \begin{array}{ll} A(\theta, \Delta t) u_{e,j}^{n+1} = A(\theta - 1, \Delta t) u_{e,j}^n & \text{dans } \Omega \setminus \overline{\Omega_j} \quad 0 \leq n \leq N \\ \partial_\nu u_{e,j}^{n+1} = 0 & \text{sur } \Sigma_j \\ u_{e,j}^{n+1}|_{\Gamma_j} = \widetilde{\varphi}_j^{n+1} & \text{sur } \Gamma_j \\ u_{e,j}^0(\cdot) = 0 & \text{dans } \Omega \setminus \overline{\Omega_j} \end{array} \right. \tag{4.10}$$

sont posés sur des domaines qui sont exactement de la forme traitée précédemment, à savoir un guide périodique avec un seul défaut (voir figure 5.10 et 5.11).

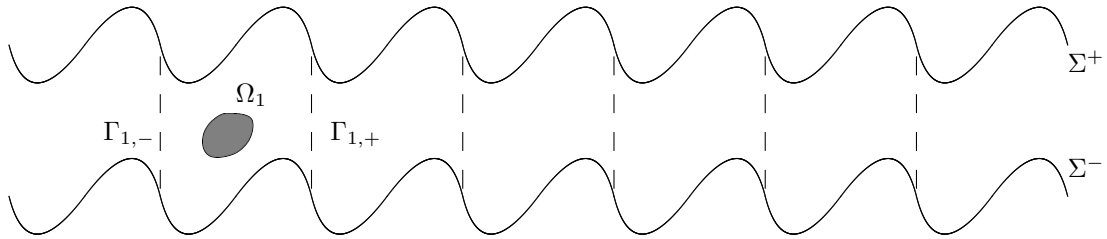


FIGURE 5.10 – Configuration pour $(u^n_{e,1})_{0\leq n\leq N}$

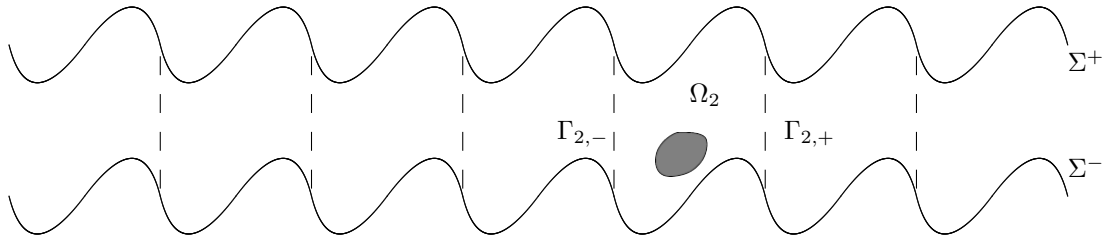


FIGURE 5.11 – Configuration pour $(u^n_{e,2})_{0\leq n\leq N}$

En vertu du théorème 4.8, chacun de ces problèmes admet une décomposition en temps au moyen de la famille $(w^n_{e,j}(\varphi))_{0\leq n\leq N} \in H^1_\xi(\Omega\setminus\overline{\Omega_j})^{N+1}$ définie par :

$$\left|\begin{array}{ll} A(\theta,\Delta t)w^{n+1}_{e,j}(\varphi) = A(\theta-1,\Delta t)w^n_{e,j}(\varphi) & \text{dans } \Omega\setminus\overline{\Omega_j} \\ \partial_\nu w^{n+1}_{e,j}(\varphi) = 0 & \text{sur } \Sigma_j \\ w^0_{e,j}(\varphi) = 0 & \text{dans } \Omega\setminus\overline{\Omega_j} \\ w^1_{e,j}(\varphi)|_{\Gamma_j} = \varphi & \text{sur } \Gamma_j \\ w^{n+1}_{e,j}(\varphi)|_{\Gamma_j} = 0 & \text{sur } \Gamma_j\ \forall n\geq 1 \end{array}\right. \tag{4.12}$$

et nous avons vu dans la section précédente que ces problèmes se découplent en deux problèmes de demi-guide $(w^n_{j,\pm}(\varphi))_{0\leq n\leq N}$, qui se résolvent aisément en utilisant la périodicité. Nous allons voir que nous sommes en mesure d'exhiber des formules explicites pour le calcul des Θ^k_{ij} et $\widetilde{\Lambda}^k_{ij}$, qui ne dépendent que de la position relative de Ω_j par rapport à Ω_i (comme nous avons choisi de faire "coller" les Ω_j à la périodicité). Encore une fois, notons qu'une donnée φ sur $\Gamma_j = \partial\Omega_j\setminus\overline{\partial\Omega\cap\partial\Omega_j}$, c'est-à-dire sur les frontières verticales de Ω_j, se décompose naturellement en deux parties, à savoir sa restriction φ^- sur la frontière verticale de gauche :

$$\Gamma_{j,-} = \left\{(x,y)\in\Omega \ \mid\ x = q^j_- L_x\right\}$$

et sa restriction φ^+ sur la frontière verticale de droite

$$\Gamma_{j,+} = \left\{(x,y)\in\Omega \ \mid\ x = q^j_+ L_x\right\}$$

Alors chacun des opérateurs Θ_{ij}^k et $\widetilde{\Lambda}_{ij}^k$ s'écrit naturellement sous la forme :

$$\Theta_{ij}^k = \begin{pmatrix} (\Theta_{ij}^k)_{--} & (\Theta_{ij}^k)_{-+} \\ (\Theta_{ij}^k)_{+-} & (\Theta_{ij}^k)_{++} \end{pmatrix}$$

et :

$$\widetilde{\Lambda}_{ij}^k = \begin{pmatrix} \left(\widetilde{\Lambda}_{ij}^k\right)_{--} & \left(\widetilde{\Lambda}_{ij}^k\right)_{-+} \\ \left(\widetilde{\Lambda}_{ij}^k\right)_{+-} & \left(\widetilde{\Lambda}_{ij}^k\right)_{++} \end{pmatrix}$$

De sorte que si $\psi = \Theta_{ij}^k \varphi$, on ait :

$$\psi^- = (\Theta_{ij}^k)_{--}\,\varphi^- + (\Theta_{ij}^k)_{-+}\,\varphi^+ \quad \text{et} \quad \psi^+ = (\Theta_{ij}^k)_{+-}\,\varphi^- + (\Theta_{ij}^k)_{++}\,\varphi^+$$

et si $\psi = \widetilde{\Lambda}_{ij}^k \varphi$, on ait :

$$\psi^- = \left(\widetilde{\Lambda}_{ij}^k\right)_{--}\varphi^- + \left(\widetilde{\Lambda}_{ij}^k\right)_{-+}\varphi^+ \quad \text{et} \quad \psi^+ = \left(\widetilde{\Lambda}_{ij}^k\right)_{+-}\varphi^- + \left(\widetilde{\Lambda}_{ij}^k\right)_{++}\varphi^+$$

On peut alors calculer chacun des blocs comme indiqué dans le théorème suivant :

Théorème 5.7. *Pour $i = j$, les opérateurs Θ_{ii}^n et $\widetilde{\Lambda}_{ii}^n$ sont donnés par :*

$$\Theta_{ii}^n = \begin{pmatrix} Id & 0 \\ 0 & Id \end{pmatrix} \quad et \quad \widetilde{\Lambda}_{ii}^n = \begin{pmatrix} \Lambda_-^n & 0 \\ 0 & \Lambda_+^n \end{pmatrix}$$

Pour $i \neq j$, les opérateurs Θ_{ij}^1 et $\widetilde{\Lambda}_{ij}^1$, se calculent selon la règle suivante :

. *Si Ω_i est à droite de Ω_j, i.e. si $q_-^i > q_+^j$, alors :*

$$\Theta_{ij}^1 = \begin{pmatrix} 0 & (R_1^+)^{q_-^i - q_+^j} \\ 0 & (R_1^+)^{q_+^i - q_+^j} \end{pmatrix}$$

et

$$\widetilde{\Lambda}_{ij}^1 = \begin{pmatrix} 0 & -T_{00}^+(R_1^+)^{q_-^i - q_+^j} - T_{10}^+(R_1^+)^{q_-^i - q_+^j + 1} \\ 0 & T_{00}^+(R_1^+)^{q_+^i - q_+^j} + T_{10}^+(R_1^+)^{q_+^i - q_+^j + 1} \end{pmatrix}$$

. *Si Ω_i est à gauche de Ω_j, i.e. si $q_+^i < q_-^j$, alors :*

$$\Theta_{ij}^1 = \begin{pmatrix} (R_1^-)^{q_-^j - q_-^i} & 0 \\ (R_1^-)^{q_-^j - q_+^i} & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$\widetilde{\Lambda}_{ij}^1 = \begin{pmatrix} T_{00}^-(R_1^-)^{q_-^j - q_-^i} + T_{10}^-(R_1^-)^{q_-^j - q_-^i + 1} & 0 \\ -T_{00}^-(R_1^-)^{q_-^j - q_+^i} - T_{10}^-(R_1^-)^{q_-^j - q_+^i + 1} & 0 \end{pmatrix}$$

Puis, pour tout $n > 1$, on pose :

$$\begin{array}{rccc} W_{n,j}^{\pm} : H^{1/2}(\Gamma^{\pm}) & \longrightarrow & H^1(\mathcal{C}^{\pm}) \\ \varphi & \longmapsto & w_{\pm}^n(\varphi)|_{\mathcal{C}_j^{\pm}} \end{array}$$

la restriction à la $j-$ième cellule et

$$\begin{array}{rcl} R^{\pm}_{n,j} : H^{1/2}(\Gamma^{\pm}) & \longrightarrow & H^{1/2}(\Gamma^{\pm}) \\ \varphi & \longmapsto & w^n_{\pm}(\varphi)|_{\Gamma^{\pm}_j} \end{array}$$

la trace sur la $j-$ième frontière verticale. Alors :

$$R^{\pm}_{n,j} = \sum_{k=1}^{n} R^{\pm}_{k,j-1} R^{\pm}_{n-k+1,1}$$

et les opérateurs Θ^n_{ij} et $\widetilde{\Lambda}^n_{ij}$, $i \neq j$, se calculent selon la règle suivante :

. *Si Ω_i est à droite de Ω_j, i.e. si $q^i_- > q^j_+$, alors :*

$$\Theta^n_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & R^+_{n,q^i_- - q^j_+} \\ 0 & R^+_{n,q^i_+ - q^j_+} \end{pmatrix}$$

et

$$\widetilde{\Lambda}^n_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & -T^+_{00} R^+_{n,q^i_- - q^j_+} - T^+_{10} R^+_{n,q^i_- - q^j_+ + 1} - T^+_0 W^+_{n-1,q^i_- - q^j_+ + 1} \\ 0 & T^+_{00} R^+_{n,q^i_+ - q^j_+} + T^+_{10} R^+_{n,q^i_+ - q^j_+ + 1} + T^+_0 W^+_{n-1,q^i_+ - q^j_+ + 1} \end{pmatrix}$$

. *Si Ω_i est à gauche de Ω_j, i.e. si $q^i_+ < q^j_-$, alors :*

$$\Theta^n_{ij} = \begin{pmatrix} R^-_{n,q^j_- - q^i_-} & 0 \\ R^-_{n,q^j_- - q^i_+} & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$\widetilde{\Lambda}^n_{ij} = \begin{pmatrix} T^-_{00} R^-_{n,q^j_- - q^i_-} + T^-_{10} R^-_{n,q^j_- - q^i_- + 1} + T^-_0 W^-_{n-1,q^j_- - q^i_- + 1} & 0 \\ -T^-_{00} R^-_{n,q^j_- - q^i_+} - T^-_{10} R^-_{n,q^j_- - q^i_+ + 1} - T^-_0 W^-_{n-1,q^j_- - q^i_+ + 1} & 0 \end{pmatrix}$$

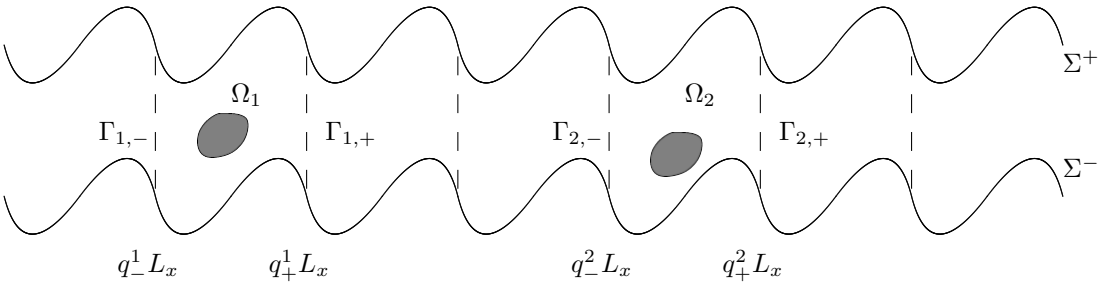
Démonstration. Malgré un énoncé complexe, nous allons voir que ce théorème est extrèmement simple dans son principe à démontrer, puisqu'il ne s'agit finalement que de rassembler l'ensemble des résultats de structure que nous avons démontrés jusqu'ici. Remarquons tout d'abord que le cas $i = j$ est évident, et ne nécessite pas de démonstration supplémentaire. Pour $i \neq j$, on ne va démontrer que le cas "droite", le cas "gauche" se démontrant exactement de la même manière. En revanche, bien que la démonstration soit très simple dans son principe, elle nécessite une certaine gymnastique d'aller-retour entre les différentes interprétations des problèmes de demi-guide, qui peut s'avérer ardue si on ne s'y prend pas bien. Aussi, nous allons commencer pour chaque opérateur par exposer la démonstration dans le cas très simple à deux défauts de la figure 5.9, afin d'en clarifier le principe :

Le cas "droite" consiste ici à calculer Θ^n_{21}. Par définition, on a $\Theta^n_{21}\varphi = w^n_{e,1}(\varphi)|_{\Gamma_2} = \big(w^n_{e,1}(\varphi)|_{\Gamma_{2,-}}, w^n_{e,1}(\varphi)|_{\Gamma_{2,+}}\big)$. Comme nous sommes dans le cas droite, on a de plus :

$$w^n_{e,1}(\varphi) = \tau_{a_+ - q^1_+ L_x} w^n_+(\varphi^+)$$

pour tout $x \geq q^1_+ L_x$. Alors (cf figure 5.12) :

$$w^n_{e,1}(\varphi)|_{\Gamma_{2,-}} = \tau_{a_+ - q^1_+ L_x} w^n_+(\varphi^+)|_{x = q^2_- L_x} = w^n_+(\varphi^+)|_{x = a_+ + (q^2_- - q^1_+) L_x} = w^n_+(\varphi^+)|_{\Gamma^+_{(q^2_- - q^1_+) L_x}}$$



et

$$w^n_{e,1}(\varphi)|_{\Gamma_{2,+}} = \tau_{a_+ - q^1_+ L_x} w^n_+(\varphi^+)|_{x=q^2_+ L_x} = w^n_+(\varphi^+)|_{x=a_+ + (q^2_+ - q^1_+)L_x} = w^n_+(\varphi^+)|_{\Gamma^+_{(q^2_+ - q^1_+)L_x}}$$

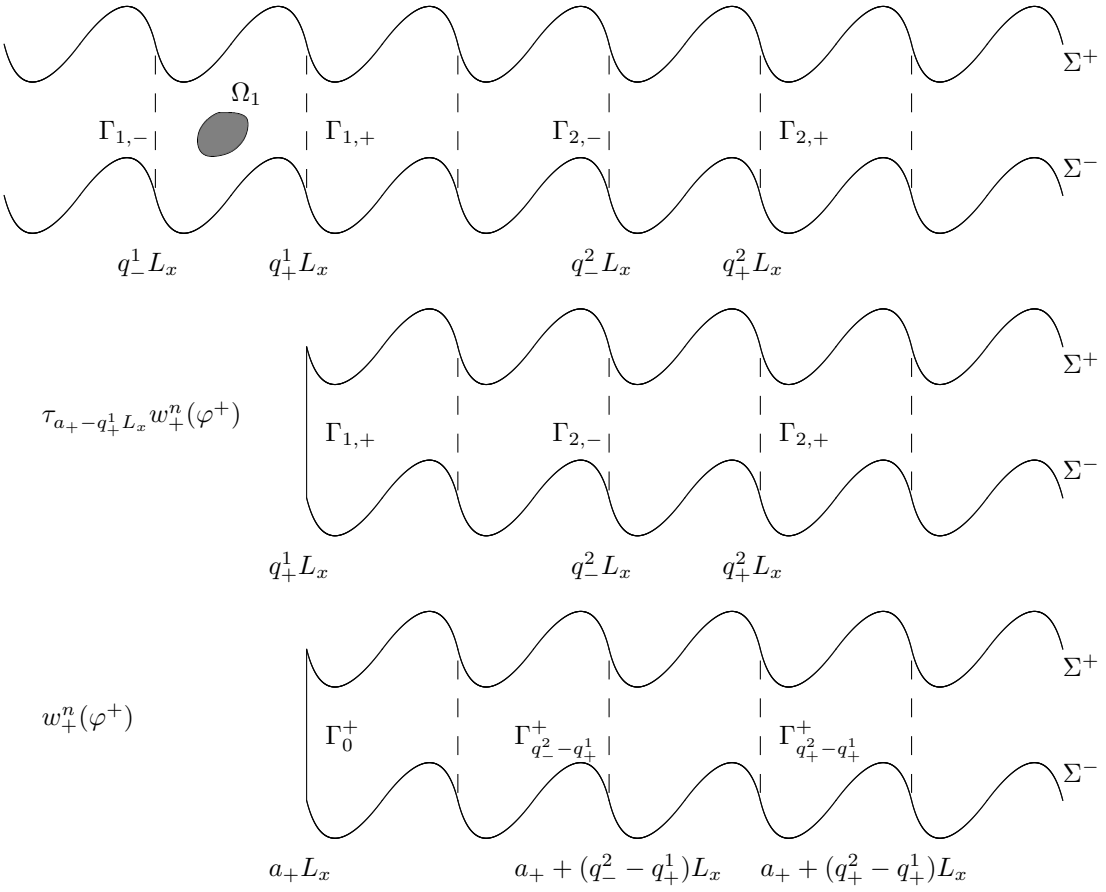


FIGURE 5.12 – Identifications entre les solutions de demi-guide par translation

Par définition, ces quantités sont bien $R^+_{n,q^2_- - q^1_+}\varphi^+$ et $R^+_{n,q^2_+ - q^1_+}\varphi^+$, et on retrouve bien la formule

annoncée. Alors de façon générale, on a de la même façon dans le cas "droite", pour l'opérateur Θ^n_{ij} :

$$(\Theta^n_{ij}\varphi)^- = w^n_{e,j}(\varphi)|_{\Gamma_{i,-}} = w^n_+(\varphi^+)|_{\Gamma^+_{q^i_- - q^j_+}} = R^+_{n,q^i_- - q^j_+}\varphi^+$$

et

$$(\Theta^n_{ij}\varphi)^+ = w^n_{e,j}(\varphi)|_{\Gamma_{i,+}} = w^n_+(\varphi^+)|_{\Gamma^+_{q^i_+ - q^j_+}} = R^+_{n,q^i_+ - q^j_+}\varphi^+$$

par définition. Dans le cas particulier $n = 1$, on a $R^\pm_{1,j} = (R^\pm_1)^j$ en vertu de (5.6). On obtient donc les formules demandées pour les Θ^n_{ij}.

Passons maintenant aux $\widetilde{\Lambda}^k_{ij}$, et commençons à nouveau par le cas à deux défauts, pour le cas "droite". Par définition, $\widetilde{\Lambda}^n_{21}\varphi = \left(\partial_\nu w^{n-1+\theta}_{e,1}(\varphi)|_{\Gamma_{2,-}}, -\partial_\nu w^{n-1+\theta}_{e,1}(\varphi)|_{\Gamma_{2,+}}\right)$ si les normales sont orientées dans le sens du guide (vers les x croissants pour le cas droite) comme nous l'avons fait jusqu'à maintenant. Comme nous sommes dans le cas "droite", on a toujours :

$$w^{n-1+\theta}_{e,1}(\varphi) = \tau_{a_+ - q^1_+ L_x} w^{n-1+\theta}_+(\varphi^+)$$

pour tout $x \geq q^1_+ L_x$. Alors (cf figure 5.12) :

$$\partial_\nu w^{n-1+\theta}_{e,1}(\varphi)|_{\Gamma_{2,-}} = \partial_\nu \tau_{a_+ - q^1_+ L_x} w^{n-1+\theta}_+(\varphi^+)|_{x = q^2_- L_x}$$

$$= w^{n-1+\theta}_+(\varphi^+)|_{x = a_+ + (q^2_- - q^1_+)L_x} = \partial_\nu w^{n-1+\theta}_+(\varphi^+)|_{\Gamma^+_{(q^2_- - q^1_+)L_x}}$$

Maintenant, on exprime $w^{n+\theta}_+$ dans la cellule $\mathcal{C}^+_{q^2_- - q^1_+ + 1}$ dont $\Gamma^+_{q^2_+ - q^1_+}$ est la frontière de gauche, en vertu de (5.10) et (5.16) :

$$w^{n-1+\theta}_+|_{\mathcal{C}^+_{q^2_- - q^1_+ + 1}} = \theta\left(e^+_0(w^n_+(\varphi^+)|_{\Gamma^+_{q^2_- - q^1_+}}) + e^+_1(w^n_+(\varphi^+)|_{\Gamma^+_{q^2_- - q^1_+ + 1}})\right.$$

$$\left. + E^+(w^{n-1}_+(\varphi^+)|_{\mathcal{C}^+_{q^2_- - q^1_+ + 1}})\right) + (1-\theta)w^{n-1}_+|_{\mathcal{C}^+_{q^2_- - q^1_+ + 1}}$$

On prend alors la dérivée normale sur $\Gamma^+_{(q^2_+ - q^1_+)L_x}$, en prenant garde au fait que les opérateurs de cellule sont orientés dans le sens contraire aux x croissants dans ce cas :

$$\partial_\nu w^{n-1+\theta}_{e,1}(\varphi)|_{\Gamma_{2,-}} = -T^+_{00}R^+_{n,q^2_- - q^1_+}\varphi^+ - T^+_{10}R^+_{n,q^2_- - q^1_+ + 1}\varphi^+ - T^+_0 W^+_{n-1,q^2_- - q^1_+ + 1}\varphi^+$$

On fait la même chose pour $\Gamma_{2,+}$, en se servant de la cellule immédiatement après, mais en notant que cette fois les opérateurs sont orientés dans le bon sens :

$$-\partial_\nu w^{n-1+\theta}_{e,1}(\varphi)|_{\Gamma_{2,+}} = T^+_{00}R^+_{n,q^2_+ - q^1_+}\varphi^+ - T^+_{10}R^+_{n,q^2_+ - q^1_+ + 1}\varphi^+ - T^+_0 W^+_{n-1,q^2_+ - q^1_+ + 1}\varphi^+$$

De façon générale, pour les $\widetilde{\Lambda}^k_{ij}$, on a en vertu de (5.10) et (5.16)

$$(\widetilde{\Lambda}^n_{ij}\varphi)^- = \partial_{\nu_0} w^{n+\theta}_{e,j}(\varphi)|_{\Gamma_{i,-}} = \partial_{\nu_0}\left(w^n_+(\varphi^+)|_{\mathcal{C}^+_{q^i_- - q^j_+ + 1}}\right)|_{\Gamma^+_0}$$

$$= \partial_{\nu_0}\left(e^+_0(w^n_+(\varphi^+)|_{\Gamma^+_{q^i_- - q^j_+}}) + e^+_1(w^n_+(\varphi^+)|_{\Gamma^+_{q^i_- - q^j_+ + 1}}) + E^+(w^{n-1}_+(\varphi^+)|_{\mathcal{C}^+_{q^i_- - q^j_+ + 1}})\right)|_{\Gamma^+_0}$$

ce qui par définition s'écrit :

$$(\widetilde{\Lambda}^n_{ij}\varphi)^- = -T^+_{00}R^+_{n,q^i_- - q^j_+}\varphi^+ - T^+_{10}R^+_{n,q^i_- - q^j_+ + 1}\varphi^+ - T^+_0 W^+_{n-1,q^i_- - q^j_+ + 1}\varphi^+$$

Puis on a :

$$(\widetilde{\Lambda}^n_{ij}\varphi)^- = \partial_{\nu_1} w^{n+\theta}_{e,j}(\varphi)|_{\Gamma_{i,-}} = \partial_{\nu_1}\left(w^n_+(\varphi^+)|_{\mathcal{C}^+_{q^i_+ - q^j_+ +1}} \right)|_{\Gamma^+_0}$$

$$= \partial_{\nu_1}\left(e^+_0(w^n_+(\varphi^+)|_{\Gamma^+_{q^i_+ - q^j_+}}) + e^+_1(w^n_+(\varphi^+)|_{\Gamma^+_{q^i_+ - q^j_+ +1}}) + E^+(w^{n-1}_+(\varphi^+)|_{\mathcal{C}^+_{q^i_+ - q^j_+ +1}}) \right)|_{\Gamma^+_0}$$

ce qui par définition s'écrit :

$$(\widetilde{\Lambda}^n_{ij}\varphi)^- = T^+_{00} R^+_{n,q^i_+ - q^j_+}\varphi^+ + T^+_{10} R^+_{n,q^i_+ - q^j_+ +1}\varphi^+ + T^+_0 W^+_{n-1,q^i_+ - q^j_+ +1}\varphi^+$$

et on retrouve les formules particulières au premier pas de temps en utilisant $R^\pm_{1,j} = (R^\pm_1)^j$ et en se rappelant que $w^0_{e,\pm} = 0$. Enfin, la récurrence qui permet de déterminer les $R^\pm_{n,j}$ est une conséquence évidente de (5.13) :

$$\tau_{\pm L^\pm_x}(w^n_\pm(\varphi)) = \sum_{k=1}^n w^k_\pm(R^\pm_{n-k+1}\varphi)$$

puisqu'il suffit tout d'abord d'appliquer l'opérateur de translation pour obtenir :

$$\tau_{\pm j L^\pm_x}(w^n_\pm(\varphi)) = \sum_{k=1}^n \tau_{\pm(j-1)L^\pm_x}(w^k_\pm(R^\pm_{n-k+1}\varphi))$$

puis l'opérateur de trace sur $\Gamma^\pm_0$ à cette expression pour obtenir directement :

$$R^\pm_{n,j} = \sum_{k=1}^n R^\pm_{k,j-1} R^\pm_{n-k+1,1}$$

soit la relation demandée. □

À l'aide de ces formules élémentaires, on assemble aisément les opérateurs Θ^n et $\widetilde{\Lambda}^n$, et on peut donc complètement calculer les opérateurs apparaissant sur la frontière pour le problème intérieur en scattering multiple (4.18). Les formules ci-dessus ne faisant apparaître que des quantités qui se déduisent (par récurrence) de la résolution des problèmes de cellule, nous pouvons sans crainte affirmer que nous avons encore réduit le problème de scattering multiple dans un guide périodique à des problèmes posés en domaine borné.

Il est légitime de penser à discrétiser en espace les divers problèmes que nous avons considérés, et ainsi de passer à une résolution complètement numérique. Ce sera l'objet du chapitre suivant. Pour l'heure, nous allons nous intéresser à l'extension de ces résultats au cas des problèmes d'ordre deux en temps.

5.2 Problèmes d'ordre deux en temps

Comme annoncé, nous allons maintenant expliquer comment la méthode que nous venons d'exposer sur le cas des problèmes d'ordre un en temps en milieu périodique se généralise au cas des problèmes d'ordre deux en temps. Nous commençons encore une fois par le cas du simple scattering, et nous conservons la géométrie de la section précédente, ainsi que les conditions de Neumann homogènes. Nous rappelons les notations sur la figure 5.13.

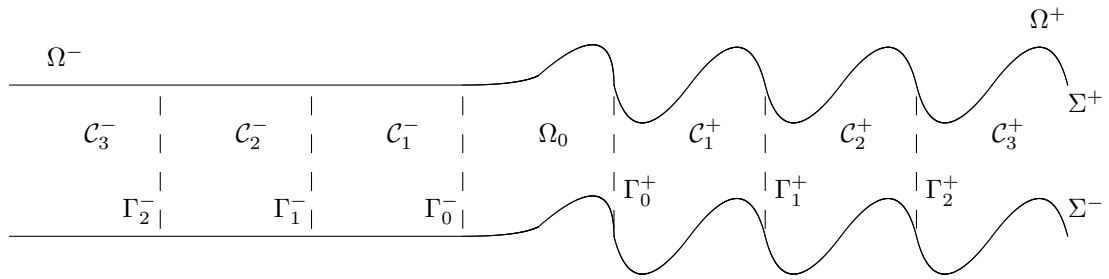


FIGURE 5.13 – Notations pour le guide périodique

5.2.1 Problème modèle

Nous reprenons bien évidemment le problème modèle d'ordre deux en temps introduit au chapitre précédent. Rappelons que le problème continu que nous cherchons à résoudre est : trouver $u \in C^1([0,+\infty[,H^1(\Omega)) \cap C^0([0,+\infty[,H^1(\Delta,\Omega))$ tel que

$$\left|\begin{array}{ll} \rho\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f & \text{dans } \Omega, \quad t>0 \\ \partial_\nu u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ u(\cdot,0) = u_0 & \text{dans } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(\cdot,0) = u_1 & \text{dans } \Omega \end{array}\right. \tag{4.20}$$

sous les hypothèses qui garantissent son caractère bien posé ainsi que le caractère local des perturbations :

(H1) $f \in C^1(]0,+\infty[,L^2(\Omega))$, $(u_0,u_1) \in H^1(\Delta,\Omega)\times H^1(\Omega)$, $\rho \in L^\infty(\Omega)$, $V \in L^\infty(\Omega)$

(H2) $\exists\ \rho_-,\ \rho_+ \in \mathbb{R}$ tels que $0<\rho_- \le \rho \le \rho_+$.

(H3) *supp* $f \cup$ *supp* $u_0 \cup$ *supp* $u_1 \subset \Omega_0$

Bien sûr, nous rajoutons une hypothèse de périodicité des coefficients, à savoir :

(H4) $\exists \rho^-,\rho^+$, avec $\rho^\pm(x \pm L^\pm) = \rho^\pm(x)$, $x \in \Omega^\pm$ et telles que $\rho|_{\Omega^\pm} = \rho^\pm$

Comme pour le cas des problèmes d'ordre un avec un seul défaut, les coefficients sont périodiques dans Ω_e, avec la même périodicité que celle que possède Ω. Notre problème mérite alors son nom de problème de guide périodique localement perturbé. Ensuite, le problème semi-discrétisé par θ-schéma associé s'écrit : trouver $(u^n)_{0\le n\le N} \in H^1(\Omega)^{N+1}$ tel que :

$$\left|\begin{array}{lll} \rho\dfrac{u^{n+1}-2u^n+u^{n-1}}{\Delta t^2} - \theta\Delta u^{n+1} - (1-2\theta)\Delta u^n - \theta\Delta u^{n-1} = f^{n,\theta} & \text{dans } \Omega & 1\le n\le N \\ \partial_\nu u^{n+1} = 0 & \text{sur } \partial\Omega & \\ u^0(\cdot) = u_0(\cdot) & \text{dans } \Omega & \\ u^1(\cdot) = u_0(\cdot) + \Delta t u_1 + \dfrac{\Delta t^2}{2\rho}\Delta u_0(\cdot) & \text{dans } \Omega & \end{array}\right. \tag{4.21}$$

Les problèmes extérieurs associés, grâce auxquels nous construisons les opérateurs DtN, sont donnés par : pour tout $(\varphi^n)_{2\leq n\leq N} \in H^{1/2}(\Gamma_0)^{N-1}$, trouver $(u_e^n)_{0\leq n\leq N} \in H^1(\Omega_e)^{N+1}$ tel que :

$$\left|\begin{array}{ll} A_1(\theta,\Delta t)u_e^{n+1} = A_2(\theta,\Delta t)u_e^n - A_1(\theta,\Delta t)u_e^{n-1} & \text{dans } \Omega_e \quad 1\leq n\leq N \\ \partial_{\nu^+} u_e^{n+1} = 0 & \text{sur } \partial\Omega_e\cap\partial\Omega \\ u_e^{n+1}|_{\Gamma_0} = \varphi^{n+1} & \text{sur } \Gamma_0 \\ u_e^0(\cdot) = 0 & \text{dans } \Omega_e \\ u_e^1(\cdot) = 0 & \text{dans } \Omega_e \end{array}\right. \tag{4.22}$$

avec :

$$\begin{array}{rcl} A_1(\theta,\Delta t) : H^1(\Omega) & \longrightarrow & H^{-1}(\Omega) \\ u & \longmapsto & -\theta\Delta t^2\Delta u + \rho u \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcl} A_2(\theta,\Delta t) : H^1(\Omega) & \longrightarrow & H^{-1}(\Omega) \\ u & \longmapsto & -(2\theta-1)\Delta t^2\Delta u + 2\rho u \end{array}$$

La dépendance de u_e^n en chacun des φ^j s'explicite en introduisant, pour tout $\varphi \in H^{1/2}(\Gamma_0)$, la famille $(w_e^n(\varphi))_{0\leq n\leq N} \in H^1(\Omega_e)^{N+1}$:

$$\left|\begin{array}{ll} A_1(\theta,\Delta t)w_e^{n+1}(\varphi) = A_2(\theta,\Delta t)w_e^n(\varphi) - A_1(\theta,\Delta t)w_e^{n-1}(\varphi) & \text{dans } \Omega_e \\ \partial_{\nu^+} w_e^{n+1}(\varphi) = 0 & \text{sur } \partial\Omega_e\cap\partial\Omega \\ w_e^0(\varphi) = 0 & \text{dans } \Omega_e \\ w_e^1(\varphi) = 0 & \text{dans } \Omega_e \\ w_e^2(\varphi)|_{\Gamma_0} = \varphi & \text{sur } \Gamma_0 \\ w_e^{n+1}(\varphi)|_{\Gamma_0} = 0 & \text{sur } \Gamma_0, \ \ \forall n\geq 2 \end{array}\right. \tag{4.23}$$

et la décomposition en temps de u_e^n s'écrit alors :

$$u_e^n = \sum_{k=2}^{n} w_e^k(\varphi^{n-k+2}) \tag{4.24}$$

Rappelons alors que la condition DtN que l'on cherche alors à construire s'exprime via, si u_{int}^n est la solution de (4.25) :

$$\frac{\partial u_{int}^{n,\theta}}{\partial \nu_0}|_{\Gamma_0} + \sum_{k=2}^{n+1} \Lambda_e^k(u_{int}^{n+1-k+2}|_{\Gamma_0}) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0$$

avec, pour tout $n\geq 2$:

$$\begin{array}{rcl} \Lambda_e^n : H^{1/2}(\Gamma_0) & \longrightarrow & H^{-1/2}(\Gamma_0) \\ \varphi & \longmapsto & \theta\dfrac{\partial w_e^n(\varphi)}{\partial\nu_e}|_{\Gamma_0} + (1-2\theta)\dfrac{\partial w_e^{n-1}(\varphi)}{\partial\nu_e}|_{\Gamma_0} + \theta\dfrac{\partial w_e^{n-2}(\varphi)}{\partial\nu_e}|_{\Gamma_0} \end{array}$$

Comme dans le cas des problèmes d'ordre un en temps, nous allons utiliser la périodicité afin de construire une méthode de calcul des w_e^n n'utilisant que des problèmes de cellule, et nous en déduirons alors les Λ_e^n associés. Mais toujours comme dans le cas de l'ordre un, on remarque que pour cette géométrie particulière, comme

$$\Gamma_0 = \Gamma_0^- \cup \Gamma_0^+$$

Calculer les w_e^n est équivalent à calculer, pour tout $\varphi \in H^{1/2}(\Gamma_0^\pm)$, les familles $(w_\pm^n(\varphi))_{0\leq n\leq N} \in H^1(\Omega^\pm)^{N+1}$ solutions des problèmes de demi-guide :

$$\left|\begin{array}{ll} A_1(\theta,\Delta t)w_\pm^{n+1}(\varphi) = A_2(\theta,\Delta t)w_\pm^n(\varphi) - A_1(\theta,\Delta t)w_\pm^{n-1}(\varphi) & \text{dans } \Omega^\pm \\ \partial_{\nu^+} w_\pm^{n+1}(\varphi) = 0 & \text{sur } \partial\Omega^+ \cap \partial\Omega \\ w_\pm^0(\varphi) = 0 & \text{dans } \Omega^\pm \\ w_\pm^1(\varphi) = 0 & \text{dans } \Omega^\pm \\ w_\pm^2(\varphi)|_{\Gamma_0} = \varphi & \text{sur } \Gamma_0^\pm \\ w_\pm^{n+1}(\varphi)|_{\Gamma_0} = 0 & \text{sur } \Gamma_0^\pm, \quad \forall n \geq 2 \end{array}\right. \tag{5.21}$$

et en faisant l'identification entre φ et $(\varphi|_{\Gamma_0^-}, \varphi|_{\Gamma_0^+})$ de poser :

$$w_e^n(\varphi)|_{\Omega^\pm} = w_\pm^n(\varphi|_{\Gamma_0^\pm})$$

comme chacun des problèmes (4.23) et (5.21) est bien posé en vertu du théorème 4.18. Les opérateurs DtN Λ_e^n se décomposent donc encore en :

$$\Lambda_e^n = \begin{pmatrix} \Lambda_-^n & 0 \\ 0 & \Lambda_+^n \end{pmatrix}$$

si

$$\begin{array}{rcl} \Lambda_\pm^n : H^{1/2}(\Gamma_0^\pm) & \longrightarrow & H^{-1/2}(\Gamma_0^\pm) \\ \varphi & \longmapsto & \theta \dfrac{\partial w_\pm^n(\varphi)}{\partial \nu_e}|_{\Gamma_0^\pm} + (1-2\theta)\dfrac{\partial w_\pm^{n-1}(\varphi)}{\partial \nu_e}|_{\Gamma_0^\pm} + \theta \dfrac{\partial w_\pm^{n-2}(\varphi)}{\partial \nu_e}|_{\Gamma_0^\pm} \end{array}$$

ce que l'on pourrait aussi réinterpréter, comme dans le cas des problèmes d'ordre un en temps, comme résoudre les problèmes d'ordre deux semi-discrets dans chaque demi-guide $\Omega^\pm$ associés aux données $(\varphi^n|_{\Gamma_0^\pm})_{2\leq n\leq N}$. Nous allons généraliser la méthode de l'ordre un et résoudre indépendamment chacun des deux problèmes de demi-guide (5.1), et en déduire les $\Lambda_\pm^n$. Comme les deux problèmes + et − sont formellement identiques, nous n'allons à nouveau détailler que le cas du problème de demi-guide posé dans Ω^+, l'autre s'en déduisant aisément. Nous en profiterons encore pour omettre les indices + chaque fois que cela ne nuira pas à la compréhension, dans toute la sous-section à venir.

5.2.2 Résolution des problèmes de demi-guide

Nous allons procéder entièrement par analogie. Nous commençons donc par analyser le premier pas de temps ($n = 2$ cette fois-ci), afin de déterminer sa structure et d'utiliser la périodicité pour ramener sa résolution à des problèmes de cellule. Puis nous étudierons comment la structure du premier pas de temps se propage au travers de la récurrence définissant les w^n.

Le premier pas de temps

Le problème satisfait par le premier pas de temps $n = 2$ s'écrit : pour tout $\varphi \in H^{1/2}(\Gamma_0^+)$, trouver $w^2(\varphi) \in H^1(\Omega^+)$ tel que :

$$\left|\begin{array}{ll} -\theta\Delta t^2 \Delta w_e^2(\varphi) + \rho w^2(\varphi) = 0 & \text{dans } \Omega^+ \\ \partial_\nu w^2(\varphi) = 0 & \text{sur } \partial\Omega^+ \cap \partial\Omega \\ w^2(\varphi) = \varphi & \text{sur } \Gamma_0^+ \end{array}\right. \tag{5.22}$$

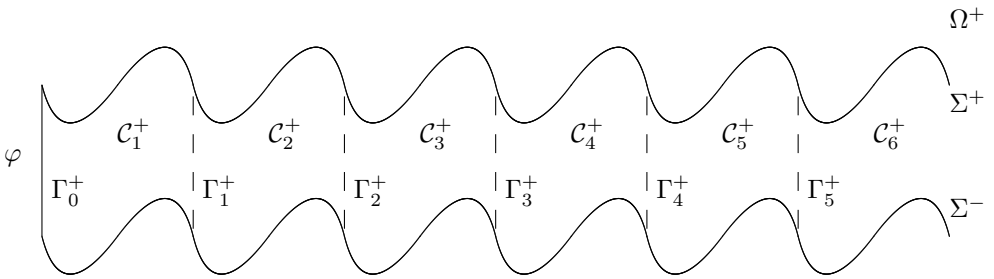


FIGURE 5.14 – Demi-guide Ω^+

Un observateur attentif aura tout de suite remarqué qu'il ne s'agit que d'un cas particulier du problème satisfait par le premier pas de temps pour notre problème modèle d'ordre un (avec $V = 0$ et Δt^2 à la place de Δt). Cette remarque nous permet, sans avoir besoin de les redémontrer, d'obtenir l'ensemble des résultats utiles pour le premier pas de temps. On commence par introduire l'opérateur de propagation :

$$\begin{array}{rcl} R_2 : H^{1/2}(\Gamma^+) & \longrightarrow & H^{1/2}(\Gamma^+) \\ \varphi & \longmapsto & w^2(\varphi)|_{\Gamma_1^+} \end{array}$$

on obtient immédiatement comme conséquence du théoème 5.1 le résultat de structure fondamental pour le premier pas de temps du problème modèle d'ordre deux en temps :

Théorème 5.8. *Pour tout $\varphi \in H^{1/2}(\Gamma^+)$ et tout $j \geq 0$, on a :*

$$\tau_{jL^+}(w^2(\varphi)) = w^2(R_2^j \varphi) \tag{5.23}$$

ce qui s'écrit aussi :

$$w^2(\varphi)|_{\mathcal{C}_{j+1}^+} = w^2(R_2^j \varphi)|_{\mathcal{C}_2^+} \tag{5.24}$$

De plus, l'opérateur R_2 est compact, injectif, et de rayon spectral strictement inférieur à 1.

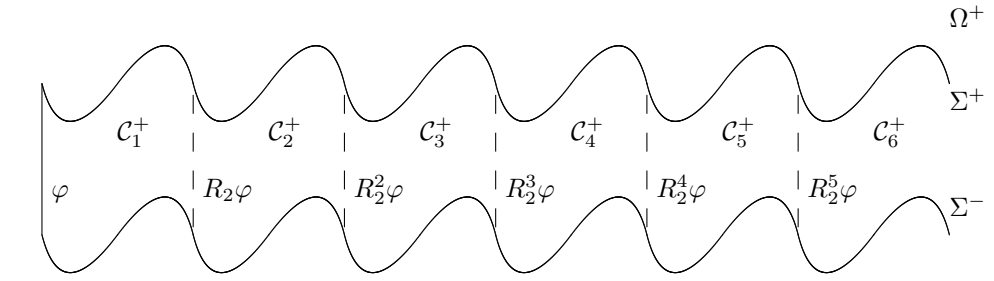


FIGURE 5.15 – Illustration de la formule (5.23) qui donne la structure du premier pas de temps

Encore une fois, cette formule de propagation nous indique qu'il suffit d'être capable de calculer $w^2(\varphi)$ dans la première cellule, ainsi que l'opérateur R_2, pour pouvoir reconstruire $w_e^2(\varphi)$ dans tout Ω^+, cellule par cellule. Or il est clair, au vu de la figure 5.15, que dans la première cellule, $w_e^2(\varphi)$ est solution de :

$$\left| \begin{array}{ll} A_1(\theta, \Delta t) w^2(\varphi) = 0 & \text{dans } \mathcal{C}_1^+ \\ \partial_\nu w^2(\varphi) = 0 & \text{sur } \partial\mathcal{C}_1^+ \setminus (\Gamma_0^+ \cup \Gamma_1^+) \\ w^2(\varphi) = \varphi & \text{sur } \Gamma_0^+ \\ w^2(\varphi) = R_1 \varphi & \text{sur } \Gamma_1^+ \end{array} \right.$$

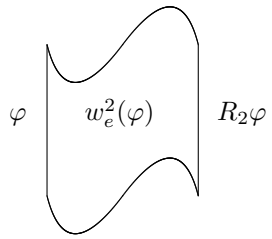


FIGURE 5.16 – $w_e^2(\varphi)$ dans la première cellule

Alors, toujours par analogie avec le cas de l'ordre un en temps, introduisons les deux problèmes de cellule suivants, posés dans $H^1(\mathcal{C}^+)$:

$$\left|\begin{array}{ll} A_1(\theta,\Delta t)e_0(\varphi)=0 & \text{dans } \mathcal{C}_1^+ \\ \partial_{\nu^+}e_0(\varphi)=0 & \text{sur } \partial\mathcal{C}_1^+ \setminus (\Gamma_0^+ \cup \Gamma_1^+) \\ e_0(\varphi)=\varphi & \text{sur } \Gamma_0^+ \\ e_0(\varphi)=0 & \text{sur } \Gamma_1^+ \end{array}\right. \tag{5.25}$$

$$\left|\begin{array}{ll} A_1(\theta,\Delta t)e_1(\varphi)=0 & \text{dans } \mathcal{C}_1^+ \\ \partial_{\nu^+}e_1(\varphi)=0 & \text{sur } \partial\mathcal{C}_1^+ \setminus (\Gamma_0^+ \cup \Gamma_1^+) \\ e_1(\varphi)=0 & \text{sur } \Gamma_0^+ \\ e_1(\varphi)=\varphi & \text{sur } \Gamma_1^+ \end{array}\right. \tag{5.26}$$

FIGURE 5.17 – Illustration des conditions aux limites pour les problèmes de cellule

À nouveau, ces problèmes ne sont que des cas particuliers de problèmes (5.7) et (5.8), ils sont donc bien posés et il est clair que les formules (5.9) et (5.28) sont encore valables, à savoir :

$$w^2(\varphi)|_{\mathcal{C}_1^+} = e_0(\varphi) + e_1(R_2\varphi) \tag{5.27}$$

Alors, en appliquant (5.24), on en déduit facilement que :

$$w^2(\varphi)|_{\mathcal{C}_j^+} = e_0(R_2^{j-1}\varphi) + e_1(R_2^j\varphi) \tag{5.28}$$

Nous savons, en appliquant les résultats de la section précédente et le fait que (5.22) n'est qu'un cas particulier de (5.4), que pour déterminer R_2, nous n'avons plus qu'à utiliser le raccord en dérivée

normale imposé par l'équation. On rappelle que le choix de la normale ν_1 est illustré sur la figure 5.7.

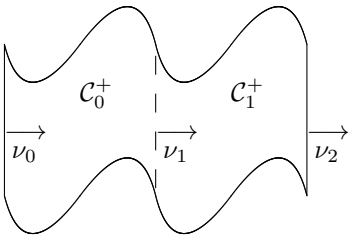


FIGURE 5.18 – Choix des normales

Il est alors évident, en combinant ce raccord aux formules (5.28), qu'en introduisant les opérateurs :

$$\begin{aligned} T_{00} : H^{1/2}(\Gamma^+) &\longrightarrow H^{-1/2}(\Gamma^+) & T_{01} : H^{1/2}(\Gamma^+) &\longrightarrow H^{-1/2}(\Gamma^+) \\ \varphi &\longmapsto -\theta \frac{\partial e_0(\varphi)}{\partial \nu_0}|_{\Gamma_0^+} & \varphi &\longmapsto \theta \frac{\partial e_0(\varphi)}{\partial \nu_1}|_{\Gamma_1^+} \\ T_{10} : H^{1/2}(\Gamma^+) &\longrightarrow H^{-1/2}(\Gamma^+) & T_{11} : H^{1/2}(\Gamma^+) &\longrightarrow H^{-1/2}(\Gamma^+) \\ \varphi &\longmapsto -\theta \frac{\partial e_1(\varphi)}{\partial \nu_0}|_{\Gamma_0^+} & \varphi &\longmapsto \theta \frac{\partial e_1(\varphi)}{\partial \nu_1}|_{\Gamma_1^+} \end{aligned}$$

on obtient en réexprimant le raccord au moyen de ces opérateurs, par application du théorème 5.2 :

Théorème 5.9. *Soit $\mathcal{K}(H^{1/2}(\Gamma^+))$ l'espace des opérateurs compacts sur $H^{1/2}(\Gamma^+)$. R_2 est l'unique opérateur compact de rayon spectral strictement inférieur à 1 solution de :*

Trouver $X \in \mathcal{K}(H^{1/2}(\Gamma^+))$ tel que :

$$T_{10}X^2 + (T_{00} + T_{11})X + T_{01} = 0 \tag{5.29}$$

puisque l'on aura toujours, en vertu du lemme 5.1 :

Lemme 5.3. *Les quatres opérateurs T_{ij} sont injectifs.*

Alors R_2 se détermine encore au moyen d'une équation quadratique posée sur la frontière Γ_1^+ (donc en domaine borné), et on obtient une expression explicite pour le premier opérateur DtN Λ_e^2, toujours par application directe des résultats pour le cas de l'ordre un en temps :

Théorème 5.10. *On a l'expression suivante pour Λ_e^2*

$$\Lambda^2 = T_{00} + T_{10}R_2 \tag{5.30}$$

Il n'y a donc aucune différence de traitement pour le premier pas de temps à l'ordre deux en temps (nos choix de modèles nous ont même permis de ramener l'un à l'autre). En revanche, des différences apparaissent pour le traitement des pas de temps ultérieurs, la récurrence plus complexe induisant un traitement lui aussi plus complexe, même si les principes qui le sous-tendent restent globalement les mêmes.

Pas de temps suivants

Rappelons que les pas de temps suivants sont définis via la récurrence :

$$\left|\begin{array}{ll} A_1(\theta,\Delta t)w^{n+1}(\varphi) = A_2(\theta,\Delta t)w^n(\varphi) - A_1(\theta,\Delta t)w^{n-1}_{e,\pm}(\varphi) & \text{dans } \Omega^+ \\ \partial_\nu w^{n+1}(\varphi) = 0 & \text{sur } \partial\Omega^+ \cap \partial\Omega \\ w^0(\varphi) = 0 & \text{dans } \Omega^+ \\ w^1(\varphi) = 0 & \text{dans } \Omega^+ \\ w^2(\varphi)|_{\Gamma_0} = \varphi & \text{sur } \Gamma_0^+ \\ w^{n+1}(\varphi)|_{\Gamma_0} = 0 & \text{sur } \Gamma_0^+, \ \forall n \geq 2 \end{array}\right. \tag{5.21}$$

Par analogie avec le cas de l'ordre un en temps, notre première tâche consiste à analyser comment la structure du premier pas de temps se propage au travers de cette récurrence. On introduit pour cela les propagateurs :

$$\begin{array}{rcl} R_n : H^{1/2}(\Gamma^+) & \longrightarrow & H^{1/2}(\Gamma^+) \\ \varphi & \longmapsto & w^n(\varphi)|_{\Gamma_1^+} \end{array}$$

On obtient un résultat de structure très proche de (5.13), qui en diffère de la même façon que (4.24) diffère de (4.8) :

Théorème 5.11. *Pour tout $\varphi \in H^{1/2}(\Gamma^+)$, on a :*

$$\tau_{L^+}(w^n(\varphi)) = \sum_{k=2}^{n} w^k(R_{n-k+2}\varphi) \tag{5.31}$$

Démonstration. Ce résultat se démontre encore par récurrence. Pour $n = 2$, (5.31) n'est rien d'autre que (5.23), aussi nous avons d'ores et déjà initialisé la récurrence. Remarquons ensuite que par périodicté des coefficients, $A(\theta,\Delta t)$ commute avec τ_{L^+}. Alors, en appliquant cet opérateur de translation à (5.21), et en utilisant la définition de R_{n+1}, on obtient :

$$\left|\begin{array}{ll} A_1(\theta,\Delta t)\tau_{L^+}(w^{n+1}(\varphi)) = A_2(\theta,\Delta t)\tau_{L^+}(w^n(\varphi)) - A_1(\theta,\Delta t)\tau_{L^+}(w^{n-1}(\varphi)) & \text{dans } \Omega_+ \\ \partial_\nu \tau_{L^+}(w^{n+1}(\varphi)) = 0 & \text{sur } \partial\Omega^+ \cap \partial\Omega \\ \tau_{L^+}(w^{n+1}(\varphi))|_{\Gamma_0} = R_{n+1}\varphi & \text{sur } \Gamma_0^+ \end{array}\right.$$

Supposons maintenant (5.31) vraie au rang n. Alors on obtient :

$$\left|\begin{array}{l} A_1(\theta,\Delta t)\tau_{L^+}(w^{n+1}(\varphi)) = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} A_2(\theta,\Delta t)w^k(R_{n-k+2}\varphi) - \sum_{k=2}^{n-1} A_1(\theta,\Delta t)w^k(R_{n-1-k+2}\varphi) \\ \partial_\nu \tau_{L^+}(w^{n+1}(\varphi)) = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega^+ \cap \partial\Omega \\ \tau_{L^+}(w^{n+1}(\varphi))|_{\Gamma_0} = R_{n+1}\varphi \quad \text{sur } \Gamma_0^+ \end{array}\right.$$

Par linéarité et unicité, comme nous l'avons déjà vu dans la preuve du théorème 4.19, on peut extraire la donnée au bord en utilisant w_e^2, on obtient alors $\tau_{L^+}(w^{n+1}) = w_e^2(R_{n+1}\varphi) + \sum_{k=2}^{n} v_k^{n+1}$ où les v_k satisfont :

$$\left|\begin{array}{ll} A_1(\theta,\Delta t)v_k^{n+1} = A_2(\theta,\Delta t)w^k(R_{n-k+2}\varphi) - A_1(\theta,\Delta t)w^{k-1}(R_{n-k+2}\varphi) & \text{dans } \Omega_+ \\ \partial_\nu v_k^{n+1} = 0 & \text{sur } \partial\Omega^+ \cap \partial\Omega \\ v_k^{n+1}|_{\Gamma_0^+} = 0 & \text{sur } \Gamma_0^+ \end{array}\right.$$

comme :

$$\sum_{k=2}^{n-1} A_1(\theta,\Delta t)w^k(R_{n-1-k+2}\varphi) = \sum_{k=2}^{n} A_1(\theta,\Delta t)w^{k-1}(R_{n-k+2}\varphi)$$

puisque $w^1 = 0$. Mais on reconnaît là l'équation vérifiée par $w^{k+1}(R_{n-k+2}\varphi)$, aussi par unicité, on en déduit que :

$$\tau_{L^+}(w^{n+1}(\varphi)) = w^2(R_{n+1}\varphi) + \sum_{k=3}^{n} w^{k+1}(R_{n-k+2}\varphi) = \sum_{k=2}^{n+1} w^k(R_{n+1-k+2}\varphi)$$

□

Cette relation peut aussi s'écrire, pour tout $j \geq 1$:

$$w^n(\varphi)|_{\mathcal{C}_{j+1}^+} = \sum_{k=2}^{n} w^k(R_{n-k+2}\varphi)|_{\mathcal{C}_j^+} \tag{5.32}$$

De nouveau, en procédant de proche en proche, on voit qu'il suffit de connaître les R_k jusqu'au temps n et $w^n(\varphi)$ dans la première cellule afin d'être capables de reconstruire $w_e^n(\varphi)$ dans tout Ω^+. Comme pour le cas de l'ordre un en temps, il nous faut maintenant introduire de nouveaux problèmes de cellule afin de pouvoir traiter le second membre. Là se situe la principale différence entre les deux cas : nous n'allons plus devoir introduire un mais deux problèmes de cellule, afin de traiter chacun des seconds membres impliqués dans la récurrence. Soient :

$$E : H^1(\Delta,\mathcal{C}_1^+) \subset L^2(\mathcal{C}_1^+) \quad \longrightarrow \quad H^1(\mathcal{C}_1^+) \subset L^2(\mathcal{C}_1^+)$$

et

$$\widetilde{E} : H^1(\Delta,\mathcal{C}_1^+) \subset L^2(\mathcal{C}_1^+) \quad \longrightarrow \quad H^1(\mathcal{C}_1^+) \subset L^2(\mathcal{C}_1^+)$$

qui à f dans $H^1(\Delta,\mathcal{C}_1^+)$ associent respectivement la solution dans $H^1(\mathcal{C}_1^+)$ de :

$$\left|\begin{array}{ll} A_1(\theta,\Delta t)E(f) = A_2(\theta,\Delta t)f & \text{dans } \mathcal{D}'(\mathcal{C}_1^+) \\ \partial_\nu E(f) = 0 & \text{sur } \partial\mathcal{C}_1^+ \setminus (\Gamma_0^+ \cup \Gamma_1^+) \\ E(f)|_{\Gamma_0} = 0 & \text{sur } \Gamma_0^+ \\ E(f)|_{\Gamma_1} = 0 & \text{sur } \Gamma_1^+ \end{array}\right. \tag{5.33}$$

et de :

$$\left|\begin{array}{ll} A_1(\theta,\Delta t)\widetilde{E}(f) = -A_1(\theta,\Delta t)f & \text{dans } \mathcal{D}'(\mathcal{C}_1^+) \\ \partial_\nu \widetilde{E}(f) = 0 & \text{sur } \partial\mathcal{C}_1^+ \setminus (\Gamma_0^+ \cup \Gamma_1^+) \\ \widetilde{E}(f)|_{\Gamma_0} = 0 & \text{sur } \Gamma_0^+ \\ \widetilde{E}(f)|_{\Gamma_1} = 0 & \text{sur } \Gamma_1^+ \end{array}\right. \tag{5.34}$$

qui sont des problèmes bien posés en vertu du théorème 4.18 en tant que cas particuliers de (4.22).

Alors par unicité, il est clair que l'on a, pour tout $n \geq 3$:

$$w^n(\varphi)|_{\mathcal{C}_1^+} = E(w^{n-1}(\varphi)|_{\mathcal{C}_1^+}) + \widetilde{E}(w^{n-2}(\varphi)|_{\mathcal{C}_1^+}) + e_1(R_n\varphi) \tag{5.35}$$

FIGURE 5.19 – Illustration des conditions aux limites pour les nouveaux problèmes de cellule

De manière plus générale, on a :

$$w^n(\varphi)|_{\mathcal{C}_j^+} = E(w^{n-1}(\varphi)|_{\mathcal{C}_j^+}) + \widetilde{E}(w^{n-2}(\varphi)|_{\mathcal{C}_j^+}) + e_0(w^n(\varphi)|_{\Gamma_{j-1}^+}) + e_1(w^n(\varphi)|_{\Gamma_j^+}) \tag{5.36}$$

Comme dans le cas de l'ordre un en temps, on voit donc qu'au prix de la résolution de ces deux nouveaux problèmes de cellule, il suffit de connaître la famille R_n pour avoir complètement résolu les problèmes de demi-guide. Bien entendu, pour déterminer les R_n, nous allons utiliser une équation issue de la condition de raccord en dérivée normale induite par l'équation. Comme pour l'opérateur DtN, c'est $w^{n,\theta}$ qui va se raccorder. Nous allons bien sûr expliciter ce raccord au moyen de nos problèmes de cellule. Par analogie avec le cas de l'ordre un en temps, on peut anticiper l'apparition des opérateurs de trace liés à E et $\widetilde{E}$, à savoir :

$$\begin{array}{rcl} T_0 : H^1(\Delta, \mathcal{C}_1^+) & \longrightarrow & H^{-1/2}(\Gamma^+) \\ f & - \longmapsto & \theta\partial_{\nu_0} E(f)|_{\Gamma_0} - (1-2\theta)\partial_{\nu_0} f|_{\Gamma_0^+} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} T_1 : H^1(\Delta, \mathcal{C}_1^+) & \longrightarrow & H^{-1/2}(\Gamma^+) \\ f & \longmapsto & \theta\partial_{\nu_1} E(f)|_{\Gamma_1} + (1-2\theta)\partial_{\nu_1} f|_{\Gamma_1^+} \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{T}_0 : H^1(\Delta, \mathcal{C}_1^+) & \longrightarrow & H^{-1/2}(\Gamma^+) \\ f & \longmapsto & -\theta\partial_{\nu_0} \widetilde{E}(f)|_{\Gamma_0} - \theta\partial_{\nu_0} f|_{\Gamma_0^+} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{T}_1 : H^1(\Delta, \mathcal{C}_1^+) & \longrightarrow & H^{-1/2}(\Gamma^+) \\ f & \longmapsto & \theta\partial_{\nu_1} \widetilde{E}(f)|_{\Gamma_1} + \theta\partial_{\nu_1} f|_{\Gamma_1^+} \end{array}$$

et afin d'alléger les notations, on introduit un objet spécifique pour désigner la restriction à la première cellule :

$$\begin{array}{rcl} W^n : H^{1/2}(\Gamma^+) & \longrightarrow & H^1(\mathcal{C}_1^+) \\ \varphi & \longmapsto & w^n(\varphi)|_{\mathcal{C}_1^+} \end{array}$$

Ces objets définis, nous allons nous employer à faire apparaître une forme exploitable de la condition de raccord, en gardant toujours à l'esprit que nous cherchons à déterminer R_{n+1}, et qu'il nous faut donc faire apparaître explicitement la dépendance en cette quantité. On commence, toujours comme dans le cas de l'ordre un en temps, par réécrire un peu différemment ce raccord en dérivée normale : $\partial_{\nu_1}\left(w^{n,\theta}(\varphi)|_{\mathcal{C}_1^+}\right)|_{\Gamma_1^+} = \partial_{\nu_1}\left(w^{n,\theta}(\varphi)|_{\mathcal{C}_2^+}\right)|_{\Gamma_1^+}$ ce qui s'écrit aussi :

$$\partial_\nu w^{n,\theta}(\varphi)|_{\Gamma_1^+} = \partial_{\nu_0}\tau_{L^+}\left(w^{n,\theta}(\varphi)\right)|_{\Gamma_0^+} \tag{5.37}$$

Pour le membre de gauche, (5.35) donne, comme $w_e^{n,\theta}(\varphi) = \theta w^{n+1}(\varphi) + (1-2\theta)w^n(\varphi) + \theta w^{n-1}(\varphi)$:

$$\begin{aligned}\partial_{\nu_1} w^{n,\theta}(\varphi)|_{\Gamma_1^+} &= \theta\partial_{\nu_1} E(w^n(\varphi)|_{\mathcal{C}_1^+})|_{\Gamma_1} + (1-2\theta)\partial_\nu w^n(\varphi)|_{\Gamma_1} \\ &+ \theta\partial_{\nu_1}\widetilde{E}(w^{n-1}(\varphi)|_{\mathcal{C}_1^+})|_{\Gamma_1} + \theta\partial_\nu w^{n-1}(\varphi)|_{\Gamma_1} \\ &+ \theta\partial_\nu e_1(R_{n+1}\varphi)|_{\Gamma_1}\end{aligned}$$

Donc en utilisant les opérateurs T_1 et $\widetilde{T}_1$ définis ci-dessus :

$$\partial_{\nu_1} w^{n,\theta}(\varphi)|_{\Gamma_1^+} = T_1 W^n\varphi + \widetilde{T}_1 W^{n-1}\varphi + T_{11}R_{n+1}\varphi$$

Puis, nous nous tournons vers le membre de droite de (5.37). Une partie de la dépendance en R_{n+1} apparaît directement si on utilise la formule de propagation (5.31) :

$$\tau_{L^+}(w^{n+1}(\varphi))|_{\mathcal{C}_1^+} = \sum_{k=3}^{n} W^k R_{n+1-k+2}\varphi + W^{n+1}R_2\varphi + W^2 R_{n+1}\varphi$$

puis

$$\tau_L(w^n(\varphi)) = \sum_{k=2}^{n} W^k R_{n-k+2}\varphi$$

et enfin :

$$\tau_L(w^{n-1}(\varphi)) = \sum_{k=2}^{n-1} W^k R_{n-k+2}\varphi$$

On fait la θ-somme de ces trois expressions pour obtenir :

$$\begin{aligned}\tau_{L^+}(w^{n,\theta}(\varphi))|_{\mathcal{C}_1^+} &= \theta\sum_{k=2}^{n} W^k R_{n+3-k}\varphi + \theta W^{n+1}R_2\varphi + \theta W^2 R_{n+1}\varphi \\ &+ (1-2\theta)\sum_{k=2}^{n} W^k R_{n-k+2}\varphi + \theta\sum_{k=2}^{n-1} W^k R_{n-k+2}\varphi \\ &= \theta\sum_{k=2}^{n} W^k R_{n+3-k}\varphi + \theta W^{n+2}R_2\varphi + \theta W^2 R_{n+1}\varphi \\ &+ (1-2\theta)\sum_{k=3}^{n} W^{k-1} R_{n-k+3}\varphi + \theta\sum_{k=3}^{n} W^{k-2} R_{n-k+3}\varphi \\ &+ (1-2\theta)W^n R_2\varphi + \theta W^{n-1}R_2\varphi\end{aligned}$$

On regroupe alors les trois sommes, et on fait apparaître totalement la dépendance en R_{n+1} en démasquant la dernière partie cachée dans le terme $w^{n+1}(R_2\varphi)$ au moyen de la formule (5.35) :

$$\begin{aligned}\tau_{L^+}(w^{n,\theta}(\varphi))|_{\mathcal{C}_1^+} &= \sum_{k=3}^{n} W^{k-1,\theta} R_{n+3-k}\varphi + \theta W^{n+1}R_2\varphi \\ &+ \theta W^2 R_{n+1}\varphi + (1-2\theta)W^n R_2\varphi + \theta W^{n-1}R_2\varphi \\ &= \sum_{k=3}^{n} W^{k-1,\theta-1} R_{n+3-k}\varphi + (1-2\theta)E(W^n R_2\varphi) + \theta\widetilde{E}(W^{n-1}R_2\varphi) \\ &+ \theta e_1(R_{n+1}R_2\varphi) + \theta W^2 R_{n+1}\varphi + (1-2\theta)W^n R_2\varphi + \theta W^{n-1}R_2\varphi\end{aligned}$$

Puis, en utilisant les définitions de Λ^k, T_0, $\widetilde{T}_0$ et T_{10} :

$$\partial_{\nu_0}\tau_{L^+}(w^{n,\theta}(\varphi))|_{\Gamma_0^+} = -\sum_{k=3}^{n}\Lambda^k R_{n+3-k}\varphi - T_0W^nR_1\varphi - \widetilde{T}_0W^{n-1}R_1\varphi - T_{10}R_{n+1}R_2\varphi - \Lambda^2R_{n+1}\varphi$$

On obtient donc, pour tout $\varphi \in H^{1/2}(\Gamma^+)$:

$$(T_{11}+\Lambda^2)R_{n+1}\varphi + T_{10}R_{n+1}R_2\varphi + T_1W^n\varphi + \widetilde{T}_1W^{n-1}\varphi$$

$$+T_0W^nR_1\varphi + \widetilde{T}_0W^{n-1}R_1\varphi + \sum_{k=3}^{n}\Lambda^kR_{n+3-k}\varphi = 0$$

soit encore :

$$(T_{11}+\Lambda^2)R_{n+1} + T_{10}R_{n+1}R_2 + T_1W^n + \widetilde{T}_1W^{n-1} + T_0W^nR_1 + \widetilde{T}_0W^{n-1}R_1 + \sum_{k=3}^{n}\Lambda^kR_{n+3-k} = 0$$

À nouveau, arrivés à ce stade nous devons nous demander comment calculer les Λ^k jusqu'au temps n pour pouvoir espérer utiliser cette équation. Mais, il est encore une fois très facile de montrer que :

Théorème 5.12. *On a l'expression suivante pour Λ^n, $n \geq 3$:*

$$\Lambda^n = T_0W^{n-1} + \widetilde{T}_0W^{n-2} + T_{10}R_n \tag{5.38}$$

Démonstration. Dans la première cellule, en vertu de (5.27) :

$$w^n(\varphi) = E(w^{n-1}(\varphi)) + \widetilde{E}(w^{n-2}(\varphi)) + e_1(R_n\varphi)$$

Alors :

$$-\theta\frac{\partial w^n(\varphi)}{\nu_0} = -\theta\frac{\partial E(w^{n-1}(\varphi))}{\nu_0} - \theta\frac{\partial\widetilde{E}(w^{n-2}(\varphi))}{\nu_0} - \theta\frac{\partial e_1(R_n\varphi)}{\nu_0}$$

et donc :

$$-\theta\frac{\partial w^{n+\theta-1}(\varphi)}{\nu_0} = -\theta\frac{\partial E(w^{n-1}(\varphi))}{\nu_0} - (1-2\theta)\frac{\partial w^{n-1}(\varphi)}{\nu_0}$$

$$-\theta\frac{\partial\widetilde{E}(w^{n-2}(\varphi))}{\nu_0} - \theta\frac{\partial w^{n-2}(\varphi)}{\nu_0} - \theta\frac{\partial e_1(R_n\varphi)}{\nu_0}$$

ce qui par définition s'écrit aussi :

$$\Lambda^n = T_0W^{n-1} + \widetilde{T}_0W^{n-2} + T_{10}R_n$$

soit la formule annoncée. □

Alors il ne reste plus qu'à vérifier que l'équation que nous venons d'obtenir pour R_n le caractérise bien. Le lemme suivant, dont la preuve est identique à celle du lemme 5.2, nous fournit une réponse à cette question :

Lemme 5.4. *On note $\mathcal{B}(H^{1/2}(\Gamma^+))$ l'espace des opérateurs continus sur $H^{1/2}(\Gamma^+)$. L'opérateur :*

$$\begin{array}{rcl}\mathcal{B}(H^{1/2}(\Gamma)) & \longrightarrow & \mathcal{B}(H^{1/2}(\Gamma)) \\ X & \longmapsto & (T_{11}+\Lambda^2)X + T_{10}XR_2\end{array}$$

est injectif.

On en déduit alors le résultat attendu concernant l'équation sur R_n :

Théorème 5.13. *Pour tout $n \geq 3$, R_n est l'unique solution dans $\mathcal{B}(H^{1/2}(\Gamma))$ de :*

$$(T_{11}+\Lambda^2)R_n+T_{10}R_nR_2+T_1W^{n-1}+\widetilde{T}_1W^{n-2}+T_0W^{n-1}R_1+\widetilde{T}_0W^{n-2}R_1+\sum_{k=3}^{n-1}\Lambda^kR_{n-k+2}=0 \quad (5.39)$$

Démonstration. On sait déjà que R_n est solution de cette équation. Soit P_n une autre solution, et $X_n = R_n - P_n$. Alors X_n vérifie, par linéarité :

$$(T_{11} + \Lambda^2)X_n + T_{10}X_nR_1$$

Le lemme 5.4 implique alors $X_n = 0$, et on a donc unicité de la solution. □

Remarque 5.3. *Il est relativement aisé de comprendre comment ces résultats vont se généraliser à une récurrence de n'importe quel ordre, en milieu périodique :*

$$\left|\begin{array}{ll} A^m u^n = \displaystyle\sum_{k=1}^{m} A^k u^{n-k} & \textit{dans } \Omega^+ \\ u^k(\cdot) = 0 & \textit{dans } \Omega^+, \ \ 0 \leq k \leq m-1 \\ u^n|_{\Gamma_0} = \varphi^{n+1} & \textit{sur } \Gamma_0^+ \end{array}\right.$$

En effet, pour plus de simplicité dans le cas où les A_j sont encore basés sur des opérateurs différentiels elliptiques d'ordre deux, on aura toujours à résoudre les deux problèmes de cellule :

$$\left|\begin{array}{ll} A^m e_0(\varphi) = 0 & \textit{dans } \mathcal{C}_1^+ \\ e_0(\varphi)|_{\Gamma_0} = \varphi & \textit{sur } \Gamma_0^+ \\ e_0(\varphi)|_{\Gamma_1} = 0 & \textit{sur } \Gamma_1^+ \end{array}\right.$$

et

$$\left|\begin{array}{ll} A^m e_1(\varphi) = 0 & \textit{dans } \mathcal{C}_1^+ \\ e_1(\varphi)|_{\Gamma_0} = \varphi & \textit{sur } \Gamma_0^+ \\ e_1(\varphi)|_{\Gamma_1} = 0 & \textit{sur } \Gamma_1^+ \end{array}\right.$$

pour extraire les données au bord. En posant alors :

$$\begin{array}{rcl} R_m : H^{1/2}(\Gamma^+) & \longrightarrow & H^{1/2}(\Gamma^+) \\ \varphi & \longmapsto & w^m(\varphi)|_{\Gamma_1^+} \end{array}$$

On aura toujours :

$$\tau j L^+ w^m(\varphi) = w^m(R_m^j \varphi)$$

pour le premier pas de temps, et l'équation caractéristique :

$$T_{10}R_m^2 + (T_{00} + T_{11})R_m + T_{01} = 0$$

pour déterminer R_m. Puis, pour les pas de temps suivants, il faudra introduire m problèmes de cellule avec second membre :

$$\left|\begin{array}{ll} A^m E_k(f) = A^k f & \textit{dans } \Omega_e \\ E_k(f)|_{\Gamma_0} = 0 & \textit{sur } \Gamma_0^+ \\ E_k(f)|_{\Gamma_1} = 0 & \textit{sur } \Gamma_1^+ \end{array}\right.$$

On aura alors :

$$w^n(\varphi)|_{\mathcal{C}_1^+} = \sum_{k=1}^{m} E_k(w^{n-k}(\varphi)|_{\mathcal{C}_1^+}) + e_1(R_n\varphi)$$

et les conditions de raccord conduiront à l'équation caractéristique suivante pour les R_n, si les T_0^k et T_1^k sont les deux opérateurs de trace associés à chaque E_k :

$$(T_{11} + \Lambda^m)R_n + T_{10}R_nR_m + \sum_{k=1}^{m} T_0^k W^{n-k} R_m + T_1^k W^{n-k} + \sum_{k=m+1}^{n-1} \Lambda^k R_{n-k+m} = 0$$

Le nombre de pas de temps n'aura donc pour effet que de compliquer un peu les calculs, sans fondamentalement modifier la méthode.

Nous sommes donc de nouveau parvenus à réduire à la résolution de problèmes posés en domaines bornés la détermination des $\Lambda_\pm^n$, et donc de Λ^n, dans le cas particulier du guide périodique localement perturbé.

L'algorithme de résolution des problèmes de guide semi-discrets d'ordre deux en temps est donné par :

Initialisation

(1) On résout les quatre problèmes de cellules (5.25), (5.26), (5.33) et (5.34), dans chacun des deux demi-guides.

(2) On résout les deux équations quadratiques (5.29) afin de déterminer $R_2^\pm$.

(3) On en déduit $\Lambda_\pm^2$ en utilisant (5.30).

(4) On résout le problème intérieur (4.25)

Boucle sur le pas de temps

(1) On construit $W_\pm^n$ dans la première cellule de chaque demi-guide.

(2) On résout (5.39) pour chaque demi-guide, afin d'obtenir $R_n^\pm$.

(3) On en déduit $\Lambda_\pm^n$ en utilisant (5.38).

(4) On résout le problème intérieur (4.25) pour le pas de temps courant.

Encore une fois, à chaque étape on peut reconstruire la solution partout où on le souhaite dans le guide en utilisant (5.28) et (5.36). On n'a toujours besoin de conserver en mémoire pratiquement que des données "surfaciques", à savoir la famille des $R_n^\pm$ et celle des $\Lambda_\pm^n$, mais cette fois les valeurs de $W_\pm^n$ et de la solution intérieure ne doivent être conservées que durant deux pas de temps et non plus un seul. La méthode, comme nous le verrons ensuite ne se déteriore donc pratiquement pas à l'ordre deux en temps en pratique. Mais il est clair que plus le schéma requiert de pas de temps, plus la méthode sera coûteuse, ce qui d'ailleurs en pratique se voit bien plus dans le fait que nous devons résoudre un problème de cellule "volumique" de plus, que dans l'occupation mémoire que cela entraîne.

5.2.3 Le cas du scattering multiple

Nous allons maintenant voir comment se calculent dans le cas des milieux périodiques les opérateurs Θ_{ij}^k et $\widetilde{\Lambda}_{ij}^k$ définis au chapitre 4, pour le cas des problèmes d'ordre deux en temps. La démarche est extrèmement similaire à celle de l'ordre un en temps (on pourrait presque la résumer à un simple décalage d'indice dans les formules qui vont suivre), aussi nous serons très brefs, et nous nous bornerons à exposer le principal résultat (dont la démonstration est identique à celle du cas de l'ordre un en temps). Nous supposerons comme précédemment que le milieu ne présente qu'un seul type de périodicité à l'extérieur du domaine Ω_0, soit $\mathcal{C}^+ = \mathcal{C}^-$, et que $\rho^+ = \rho^-$. Dans l'ouvert Ω_0, le support des sources et des perturbations est la réunion de N_s défauts du type précédent, à savoir il existe N_s couples (a_-^j, a_+^j) tels que :

$$\Omega_j = \Omega \cap \left\{ a_-^j < x < a_+^j \right\}$$

et $a_\pm^j = q_\pm^j L_x$. On renommera alors :

$$\Omega_0 = \bigcup_{j=1}^{N_s} \Omega_j$$

comme au chapitre 4. Entre ces défauts, le milieu aura donc les mêmes propriétés (y compris géométriques) que dans $\Omega^\pm$. Enfin, nous supposons que la frontière de Ω est parfaitement périodique dans la direction $\boldsymbol{e_1}$, autrement dit, du point de vue géométrique, chaque Ω_j doit être une union de cellules de périodicité $\mathcal{C}^+$. Les coefficients vérifient :

$$\rho(x + L_x) = \rho(x) \quad \forall \ (x, x + L_x) \notin \Omega_0$$

On illustre ces propriétés sur la figure 5.20 :

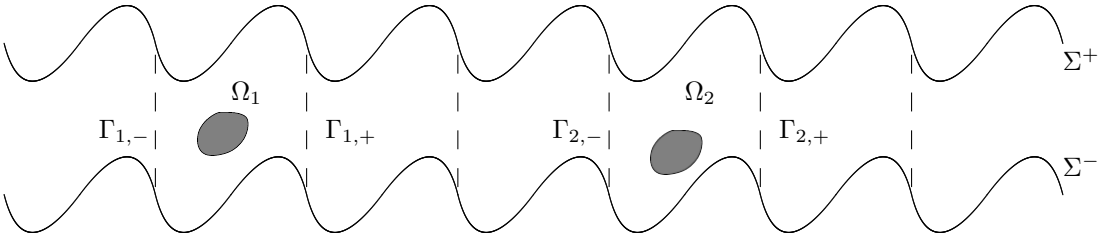


Figure 5.20 – Exemple de configuration en scattering multiple, avec deux défauts

Alors dans ce cas, les problèmes semi-discrets extérieurs à chaque Ω_j, à savoir : pour tout $(\widetilde{\varphi}_j^n)_{2\leq n\leq N}$ $\in H^{1/2}(\Gamma_j)^N$, trouver $(u_{e,j}^n)_{0\leq n\leq N} \in H^1(\Omega \setminus \overline{\Omega_j})^N$ tel que :

$$\left| \begin{array}{ll} A_1(\theta, \Delta t) u_{e,j}^{n+1} = A_2(\theta, \Delta t) u_{e,j}^n - A_1(\theta, \Delta t) u_{e,j}^{n-1} & \text{dans } \Omega \setminus \overline{\Omega_j} \quad 0 \leq n \leq N \\ \partial_\nu u_{e,j}^{n+1} = 0 & \text{sur } \Sigma_j \\ u_{e,j}^{n+1}|_{\Gamma_j} = \widetilde{\varphi}_j^{n+1} & \text{sur } \Gamma_j, \ \ \forall\, n \geq 1 \\ u_{e,j}^0(\cdot) = 0 & \text{dans } \Omega \setminus \overline{\Omega_j} \\ u_{e,j}^1(\cdot) = 0 & \text{dans } \Omega \setminus \overline{\Omega_j} \end{array} \right. \tag{4.10}$$

sont posés sur des domaines qui sont exactement de la forme traitée précédemment, à savoir un guide périodique avec un seul défaut (voir figure 5.21 et 5.22).

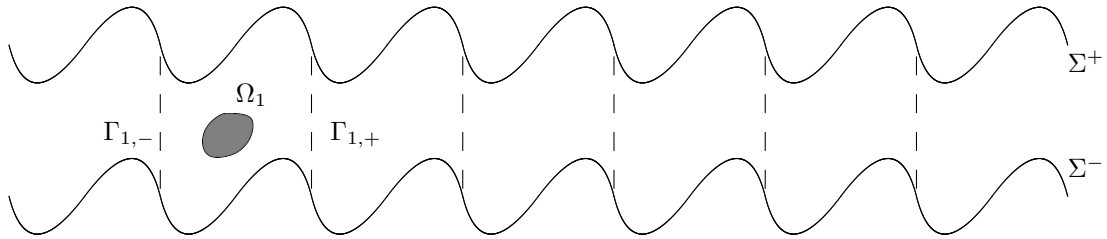


FIGURE 5.21 – Configuration pour $(u^n_{e,1})_{0\leq n\leq N}$

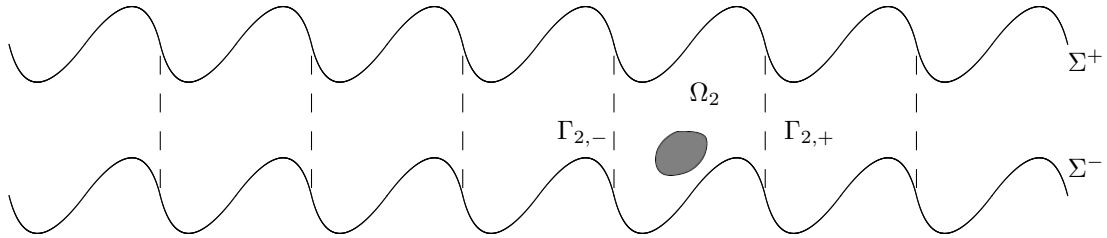


FIGURE 5.22 – Configuration pour $(u^n_{e,2})_{0\leq n\leq N}$

En vertu du théorème 4.19, chacun des ces problèmes admet à nouveau une décomposition en temps au moyen de la famille $(w^n_{e,j}(\varphi))_{0\leq n\leq N} \in H^1(\Omega\setminus\overline{\Omega_j})^N$ définie par :

$$\left|\begin{array}{ll}
A_1(\theta,\Delta t)w^{n+1}_{e,j}(\varphi) = A_2(\theta,\Delta t)w^n_{e,j}(\varphi) - A_1(\theta,\Delta t)w^{n-1}_{e,j}(\varphi) & \text{dans } \Omega\setminus\overline{\Omega_j}\\
\partial_\nu w^{n+1}_{e,j}(\varphi) = 0 & \text{sur } \Sigma_j\\
w^0_{e,j}(\varphi) = 0 & \text{dans } \Omega\setminus\overline{\Omega_j}\\
w^1_{e,j}(\varphi) = 0 & \text{dans } \Omega\setminus\overline{\Omega_j}\\
w^2_{e,j}(\varphi)|_{\Gamma_j} = \varphi & \text{sur } \Gamma_j\\
w^{n+1}_{e,j}(\varphi)|_{\Gamma_j} = 0 & \text{sur } \Gamma_j\ \forall n\geq 2
\end{array}\right.$$

et nous avons vu dans la section précédente que ces problèmes se découplent en deux problèmes de demi-guide $(w^n_{j,\pm}(\varphi))_{0\leq n\leq N}$, qui se résolvent aisément en utilisant la périodicité. Alors, exactement comme pour le cas de l'ordre un en temps, les opérateurs Θ^k_{ij} et $\widetilde{\Lambda_{ij}}^k$ se calculent aisément à partir des opérateurs de cellule et des propagateurs :

Théorème 5.14. *Pour $i=j$, les opérateurs Θ^n_{ii} et $\widetilde{\Lambda}^n_{ii}$ sont donnés par :*

$$\Theta^n_{ii} = \begin{pmatrix} Id & 0\\ 0 & Id\end{pmatrix} \quad et \quad \widetilde{\Lambda}^n_{ii} = \begin{pmatrix} \Lambda^n_- & 0\\ 0 & \Lambda^n_+\end{pmatrix}$$

Pour $i\neq j$, les opérateurs Θ^2_{ij} et $\widetilde{\Lambda}^2_{ij}$, se calculent selon la règle suivante :

. *Si Ω_i est à droite de Ω_j, i.e. si $q_-^i > q_+^j$, alors :*

$$\Theta_{ij}^2 = \begin{pmatrix} 0 & (R_2^+)^{q_-^i - q_+^j} \\ 0 & (R_2^+)^{q_+^i - q_+^j} \end{pmatrix}$$

et

$$\widetilde{\Lambda}_{ij}^2 = \begin{pmatrix} 0 & -T_{00}^+(R_2^+)^{q_-^i - q_+^j} - T_{10}^+(R_2^+)^{q_-^i - q_+^j + 1} \\ 0 & T_{00}^+(R_2^+)^{q_+^i - q_+^j} + T_{10}^+(R_2^+)^{q_+^i - q_+^j + 1} \end{pmatrix}$$

. *Si Ω_i est à gauche de Ω_j, i.e. si $q_+^i < q_-^j$, alors :*

$$\Theta_{ij}^2 = \begin{pmatrix} (R_2^-)^{q_-^j - q_-^i} & 0 \\ (R_2^-)^{q_-^j - q_+^i} & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$\widetilde{\Lambda}_{ij}^2 = \begin{pmatrix} T_{00}^-(R_2^-)^{q_-^j - q_-^i} + T_{10}^-(R_2^-)^{q_-^j - q_-^i + 1} & 0 \\ -T_{00}^-(R_2^-)^{q_-^j - q_+^i} - T_{10}^-(R_2^-)^{q_-^j - q_+^i + 1} & 0 \end{pmatrix}$$

Puis, pour tout $n > 2$, on pose :

$$\begin{array}{rcl} W_{n,j}^{\pm} : H^{1/2}(\Gamma^{\pm}) & \longrightarrow & H^1(\mathcal{C}^{\pm}) \\ \varphi & \longmapsto & w_{\pm}^n(\varphi)|_{\mathcal{C}_j^{\pm}} \end{array}$$

la restriction à la $j-$ième cellule et

$$\begin{array}{rcl} R_{n,j}^{\pm} : H^{1/2}(\Gamma^{\pm}) & \longrightarrow & H^{1/2}(\Gamma^{\pm}) \\ \varphi & \longmapsto & w_{\pm}^n(\varphi)|_{\Gamma_j^{\pm}} \end{array}$$

la trace sur la $j-$ième frontière verticale. Alors :

$$R_{n,j}^{\pm} = \sum_{k=2}^{n} R_{k,j-1}^{\pm} R_{n-k+2,1}^{\pm}$$

et les opérateurs Θ_{ij}^n et $\widetilde{\Lambda}_{ij}^n$, $i \neq j$, se calculent selon la règle suivante :

. *Si Ω_i est à droite de Ω_j, i.e. si $q_-^i > q_+^j$, alors :*

$$\Theta_{ij}^n = \begin{pmatrix} 0 & R^+_{n,q_-^i - q_+^j} \\ 0 & R^+_{n,q_+^i - q_+^j} \end{pmatrix}$$

et

$$\widetilde{\Lambda}_{ij}^n = \begin{pmatrix} 0 & -T_{00}^+ R^+_{n,q_-^i - q_+^j} - T_{10}^+ R^+_{n,q_-^i - q_+^j + 1} - T_0^+ W^+_{n-1,q_-^i - q_+^j + 1} - \widetilde{T}_0^+ W^+_{n-2,q_-^i - q_+^j + 1} \\ 0 & T_{00}^+ R^+_{n,q_+^i - q_+^j} + T_{10}^+ R^+_{n,q_+^i - q_+^j + 1} + T_0^+ W^+_{n-1,q_+^i - q_+^j + 1} + \widetilde{T}_0^+ W^+_{n-2,q_+^i - q_+^j + 1} \end{pmatrix}$$

. *Si Ω_i est à gauche de Ω_j, i.e. si $q_+^i < q_-^j$, alors :*

$$\Theta_{ij}^n = \begin{pmatrix} R^-_{n,q_-^j - q_-^i} & 0 \\ R^-_{n,q_-^j - q_+^i} & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$\widetilde{\Lambda}^n_{ij} = \begin{pmatrix} T^-_{00}R^-_{n,q^j_- - q^i_-} + T^-_{10}R^-_{n,q^j_- - q^i_- +1} + T^-_0 W^-_{n-1,q^j_- - q^i_- +1} + \widetilde{T}^-_0 W^-_{n-2,q^j_- - q^i_- +1} & 0 \\ -T^-_{00}R^-_{n,q^j_- - q^i_+} - T^-_{10}R^-_{n,q^j_- - q^i_+ +1} - T^-_0 W^-_{n-1,q^j_- - q^i_+ +1} - \widetilde{T}^-_0 W^-_{n-2,q^j_- - q^i_+ +1} & 0 \end{pmatrix}$$

On voit alors que le cas de l'ordre deux en temps ne présente pas de difficultés particulières pour passer du simple au multiple scattering.

Dans le cas des guides périodiques perturbés par un ou plusieurs défauts bornés, nous sommes donc parvenus à construire explicitement les opérateurs DtN au niveau semi-discret en temps, en ayant uniquement recours à la résolution de problèmes posés en domaine borné. Alors l'intégralité de la résolution du problème de guide est ramenée à un problème posé en domaine borné. Nous pouvons noter qu'il n'était pas évident a priori (même si nous étions confiants au vu des résultats existants dans le cas harmonique) qu'une telle réduction soit possible en régime temporel. En effet comme nous le verrons dans le chapitre suivant, la solution n'a elle rien de périodique : la dynamique des phénomènes est qualitativement très complexe, de multiples phénomènes d'interaction ou de réflexion, cachés dans les opérateurs DtN, se produisant "jusqu'à" l'infini.

Comme nous l'avons signalé au début du chapitre précédent, les résultats de ce chapitre demeurent valables pour d'autres types de conditions aux limites, en particulier pour les conditions de Dirichlet homogènes et les conditions quasi-périodiques (pour des ouverts du type décrit au chapitre 1). Les démonstrations sont exactement les mêmes pour ces deux types de conditions, mais il faut bien entendu utiliser les espaces fonctionnels correspondant à ces deux situations. Autrement dit, il suffit de substituer H^1_ξ à H^1, $H^{1/2}_\xi$ à $H^{1/2}$ et $(H^{1/2}_\xi)'$ à $H^{-1/2}$, et utiliser la formule de Green adaptée au cas quasi-périodique (identique in fine à celle du cas des conditions de Neumann homogènes), pour pouvoir traiter le cas quasi-périodique (les résultats de régularité et de compacité qui interviennent dans les preuves ont été démontrés au chapitre 1 pour les espaces quasi-périodiques). Il faut seulement prendre note du fait que dans le cas des conditions quasi-périodiques, les divers opérateurs de cellule dépendent alors de la quasi-période ξ, i.e on aura $R^\pm_n(\xi), T^\pm_{ij}(\xi), T^\pm_i(\xi)$ et $\Lambda^\pm_n(\xi)$. Aussi, nous ferons référence (au chapitre 7) aux divers résultats de ce chapitre pour des conditions aux limites quasi-périodique (ce qui constitue un très léger abus nous évitant une fastidieuse redémonstration de tous ces résultats pour des conditions aux limites quasi-périodiques).

Il est clair que nos résultats peuvent s'étendre sans effort à d'autres situations légèrement différentes. Par exemple, on peut ajouter, sans rien avoir à modifier de ce que nous venons d'établir, des obstacles dans les défauts. On peut aussi envisager d'utiliser un milieu périodique dont les cellules de périodicité comprennent des obstacles.

Disposant maintenant de problèmes posés sur des domaines bornés, nous allons tout naturellement nous employer maintenant à leur discrétisation (que nous avons évoquée régulièrement jusqu'ici). Nous allons voir qu'il convient de procéder avec quelques précautions, si on veut conserver (et démontrer) les bonnes propriétés de stabilité et de convergence que nous avons garanties jusqu'à maintenant.

Nous ajoutons enfin pour clore ce chapitre que les problèmes de guide que nous venons d'étudier, et les opérateurs DtN associés, vont réapparaître comme dans le cas harmonique lorsque nous souhaiterons étudier des problèmes d'évolution posés en milieu périodique non borné, ce qui est une raison de plus pour mener l'analyse numérique de leur discrétisation avec le plus grand soin.

Chapitre 6

Équations d'évolution dans une bande périodique localement perturbée : discrétisation complète

Résumé. *L'objectif de ce chapitre est de présenter et d'analyser une discrétisation spatiale de la méthode de résolution des problèmes de guide étudiés au chapitre précédent. Nous réutilisons les espaces d'éléments finis introduits au chapitre 3 pour discrétiser en espace le guide tout entier (section 6.1.1), et nous reproduisons au niveau discret l'ensemble de la méthode du chapitre précédent, tout d'abord pour les problèmes d'ordre un en temps (section 6.1), en simple (sections 6.1.2, 6.1.3 et 6.1.4) et multi (section 6.1.5) scattering, puis nous procédons de même pour les problèmes d'ordre deux en temps (section 6.2). Ceci nous procure une réinterprétation de la méthode complètement discrétisée comme une approximation espace-temps des problèmes posés sur le guide infini, aboutissant à une estimation d'erreur complète. Des résultats numériques sont présentés pour illustrer l'ensemble de ces résultats, sections 6.1.6 et 6.2.5.*

Au chapitre précédent, nous sommes parvenus à réduire la résolution des problèmes modèles d'évolution d'ordre un et deux en temps à la résolution de problèmes de cellules et d'un problème intérieur, posé sur un domaine borné contenant le support des défauts. Ces problèmes sont bien entendu trop complexes pour pouvoir espérer les résoudre analytiquement, aussi il est naturel d'en envisager une résolution numérique. Dans notre contexte, un choix judicieux consiste à utiliser une méthode d'éléments finis pour les résoudre.

Afin d'établir les résultats de stabilité et convergence que l'on est en droit d'espérer, nous allons non pas analyser directement ces problèmes posés en domaine borné, mais reprendre la démarche du chapitre 3 qui consiste à réinterpréter ces problèmes discrets posés en domaine borné comme étant issus de l'application de la méthode DtN, mais sur une discrétisation éléments finis du guide tout entier (donc d'un domaine non borné). Cette démarche, qui va s'avérer relativement longue et quelque peu technique, nous a néanmoins semblé être la plus judicieuse afin d'établir la stabilité et la convergence de la méthode complètement discrétisée. Elle a en outre l'avantage d'introduire naturellement les opérateurs DtN discrets, et de fournir de façon systématique les résultats de stabilité et de convergence attendus. De plus, nous verrons que l'on récupère au niveau discret les schémas stables sous CFL, que nous avions dû écarter au niveau semi-discret. Bien entendu, cette étude sera sans

surprise, au sens où une fois définis correctement les opérateurs discrets, on obtient formellement exactement les mêmes résultats qu'au niveau semi-discret. Le lecteur qui aurait anticipé ces résultats pourra donc passer directement aux résultats numériques, présentés en fin de chacune des deux sections, la première concernant l'ordre un en temps, la deuxième l'ordre deux. Enfin, nous allons de nouveau utiliser des conditions de Neumann homogènes par simplicité, mais il est clair que l'on peut tout aussi bien avoir recours à des conditions de Dirichlet homogènes (cf résultats numériques) ou quasi-périodiques (cf chapitre suivant), à condition d'incorporer ces nouvelles conditions dans les espaces d'éléments finis bien entendu (cf chapitre 3 pour la définition des espaces d'éléments finis quasi-périodiques).

6.1 Problèmes d'ordre un en temps discrets

Nous commençons par le cas d'un seul défaut. On rappelle sur la figure 6.1 le type de géométrie dans lequel nous nous sommes placés pour ce premier cas.

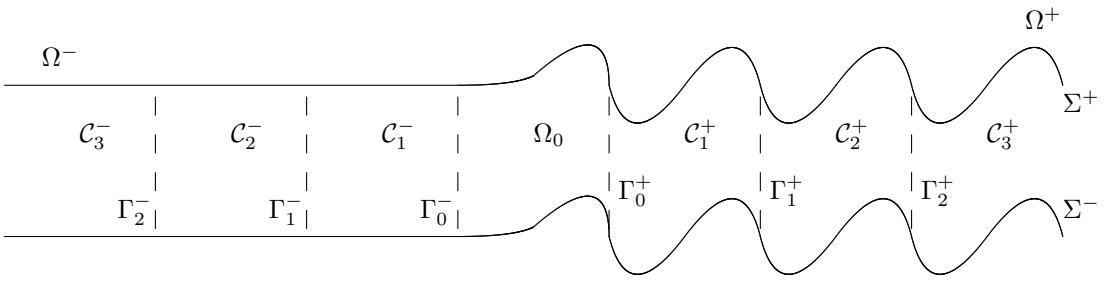


FIGURE 6.1 – Notations pour le guide périodique

Comme annoncé en préambule, nous allons dans cette section, discrétiser par éléments finis les divers problèmes de cellule et problèmes intérieurs, posés en domaines bornés, qui sont apparus aux chapitres 4 et 5. La démarche la plus naturelle serait de faire directement une formulation variationnelle des problèmes de cellules, et d'en déduire les Λ_e^n discrets en appliquant les formules du chapitre 5, puis de résoudre les problèmes intérieurs discrets ainsi constitués. Au final, ce que nous allons faire dans cette section va nous mener aux mêmes équations et solutions que cette approche directe l'aurait fait (à ceci près qu'il aurait fallu imaginer a priori une discrétisation des opérateurs T_{ij} et T_i, qui va apparaître naturellement en suivant la démarche que nous allons adopter). Cependant, on voit mal comment démontrer la stabilité et la convergence vers la solution du problème de guide (4.3) simplement à partir de ces problèmes locaux. Aussi, nous avons opté pour l'approche, certes plus longue (et assez fastidieuse) qui consiste à reproduire l'intégralité de la méthode DtN, mais au niveau discret. En particulier, nous allons montrer que ce que nous résolvons en pratique est équivalent à la résolution d'un problème d'éléments finis sur l'ensemble du guide Ω. L'intérêt majeur de cette vision tient au fait qu'il est assez simple (et classique) d'établir la stabilité et la convergence du problème posé sur le maillage infini recouvrant tout le guide, et d'en déduire celle de la méthode DtN par équivalence. La contrepartie, c'est qu'il va nous falloir reconstruire l'ensemble des objets que nous avons définis jusqu'ici, au niveau complètement discret. Nous commençons par reprendre la construction présentée au chapitre 2 pour les maillages et les espaces d'éléments finis dans le guide, et nous rappelons les résultats de structure qui nous seront utiles dans la suite.

6.1.1 Espaces d'éléments finis sur le guide

La construction des espaces d'éléments finis du chapitre 2 partait du fait que le domaine Ω est la réunion de trois ensembles :

$$\overline{\Omega} = \overline{\Omega^-} \cup \overline{\Omega_0} \cup \overline{\Omega^+}$$

où Ω_0 est un ouvert borné, tandis que les deux autres morceaux $\Omega_W^{\pm}$ sont des demi-guides périodiques, i.e. constitués d'une périodisation d'une unique cellule de périodicité :

$$\overline{\Omega^{\pm}} = \bigcup_{j=1}^{\infty} \overline{\mathcal{C}_j^{\pm}}$$

où :

$$\mathcal{C}_j^+ = \left\{(x,y) \in \Omega \ \mid \ a_+ + (j-1)L^+ \leq x \leq a_+ + jL^+\right\}$$

$$\mathcal{C}_j^- = \left\{(x,y) \in \Omega \ \mid \ -a_- - jL^- \leq x \leq -a_- - (j-1)L^-\right\}$$

qui seront respectivement isomorphes par translations à $\mathcal{C}^+ = \mathcal{C}_1^+$ et $\mathcal{C}^- = \mathcal{C}_1^-$. Les maillages que l'on construit, qui serviront de support aux éléments finis de Lagrange, respectent cette structure périodique, c'est-à-dire que l'on suppose disposer de trois maillages, de paramètre h, et supposés par souci de simplicité quasi-uniformes (cf [21] ou [74]) :

. $\mathcal{T}_h^+$ qui est un maillage de la cellule de périodicité $\mathcal{C}^+$

. $\mathcal{T}_h^-$ qui est un maillage de la cellule de périodicité $\mathcal{C}^-$

. $\mathcal{T}_h^0$ qui est un maillage de Ω_0

Nous reconstruisons un maillage de tout Ω en concaténant ces maillages élémentaires. On impose les mêmes conditions de conformité à ces maillages élémentaires qu'au chapitre 3. On définit maintenant les maillages sur chaque demi-guide Ω^+ et Ω^- par :

. $\mathcal{T}_{W,h}^+ = \left\{T_j = T + jL^+e_x \ \mid \ T \in \mathcal{T}_h^+ \ \ j \in \mathbb{N}\right\}$

. $\mathcal{T}_{W,h}^- = \left\{T_j = T - jL^-e_x \ \mid \ T \in \mathcal{T}_h^- \ \ j \in \mathbb{N}\right\}$

Enfin, le maillage global sur le guide Ω est défini par :

$$\mathcal{T}_h = \mathcal{T}_{W,h}^+ \cup \mathcal{T}_h^0 \cup \mathcal{T}_{W,h}^+$$

On rappelle que Q_r désigne l'espace des polynômes de degré r en chacune de leurs variables, et sur chaque maillage élémentaire, on définit l'espace des éléments finis de Lagrange d'ordre r par :

. $V_h^r(\Omega_0) = \left\{v_h \in C^0(\Omega_0) \ \mid \ v_{h|_T} \in Q_r(T), \ \ T \in \mathcal{T}_h^0\right\}$

. $V_h^r(\mathcal{C}^+) = \left\{v_h \in C^0(\mathcal{C}^+) \ \mid \ v_{h|_T} \in Q_r(T), \ \ T \in \mathcal{T}_h^+\right\}$

. $V_h^r(\mathcal{C}^-) = \left\{v_h \in C^0(\mathcal{C}^-) \ \mid \ v_{h|_T} \in Q_r(T), \ \ T \in \mathcal{T}_h^-\right\}$

de ces espaces, on déduit l'espace infini V_h des éléments finis de Lagrange d'ordre r sur le guide Ω :

$$V_h^r = \Big\{v_h \in H^1(\Omega) \cap C^0(\Omega) \ \mid \ v_{h|_{\Omega_0}} \in V_h^r(\Omega_0),$$

$$v_{h|_{\mathcal{C}_j^+}} \in V_h^r(\mathcal{C}^+),\ \ v_{h|_{\mathcal{C}_j^+}} \in V_h^r(\mathcal{C}^-),\ \ \forall j \in \mathbb{N} \Big\}$$

et donc

$$V_h^r = \left\{ v_h \in H^1(\Omega) \cap C^0(\Omega) \ \mid \ v_{h|_T} \in Q_r(T),\ \ T \in \mathcal{T}_h \right\}$$

On rappelle alors que cet espace quelque peu étrange est un espace de Hilbert pour la norme H^1 (cf chapitre 3, théorème 3.1). Par périodicité, on peut également définir :

$$V_h^r(\mathcal{C}_j^\pm) = V_h^r(\mathcal{C}^+) \pm jL^\pm \boldsymbol{e_x}$$

Toujours par périodicité du maillage, il est clair que :

$$V_h^r(\mathcal{C}_j^\pm) = \left\{ w_h \in H^1(\mathcal{C}^+) \ \mid \ \exists v_h \in V_h^r \text{ tel que } w_h = v_{h|_{\mathcal{C}_j^\pm}} \right\}$$

et, nous n'aurons donc de cesse de faire l'identification entre $V_h^r(\mathcal{C}_j^\pm)$ et $V_h^r(\mathcal{C}^+)$ (de la même façon que nous avons toujours identifié les cellules de periodicté entre elles au niveau semi-discret). Enfin, afin de pouvoir parler de relèvements, on note $\Omega_j^{\pm,g}$ et $\Omega_j^{\pm,d}$ les ouverts situés respectivements à gauche et à droite de $\Gamma_j^\pm$, et on définit également par restriction $V_h^r(\Omega_j^{\pm,g})$ et $V_h^r(\Omega_j^{\pm,d})$, qui sont encore des espaces de Hilbert en vertu du théorème 3.2. Enfin, on rappelle que $X_h^{r,\pm}$ désigne l'espace :

$$X_h^{r,\pm} = \left\{ \varphi_h \in H^{1/2}(\Gamma^\pm) \ \mid \ \exists v_h \in V_h^r \quad \text{tel que } v_{h|_{\Gamma_0^\pm}} = \varphi_h \right\}$$

et qu'en vertu du théorème 3.3, les espaces de trace sur toutes les frontières verticales $\Gamma_j^\pm$ sont isomorphes à ces espaces (i.e. les traces sur Γ_j^+ sont dans $X_h^{r,+}$, et les traces sur Γ_j^- sont dans $X_h^{r,-}$). De plus, les deux espaces $X_h^{r,\pm}$ sont clairement de dimension finie. Ces identités nous permettent encore d'identifier toutes les frontières verticales entre elles dans chaque demi-guide, comme au niveau semi-discret, identification que nous ferons en permanence dans la suite. Nous allons avoir besoin dans la suite d'une propriété remarquable des espaces infinis d'éléments finis que nous avons contruits, afin de pouvoir traiter les schémas pour $0 \leq \theta < 1/2$, à savoir le fait que nous avons une inégalité de type Poincaré inversée sur ces espaces. Rappelons en effet que si $\mathcal{O} \in \left\{\Omega, \Omega^+, \Omega^-, \Omega_0, \mathcal{C}^+, \mathcal{C}^-, \Omega_j^\pm\right\}$, alors le lemme 3.1 (en reproduisant la même preuve sans conditions de quasi-périodicité) nous apprend qu'il existe une constante $C(h) > 0$ dépendante de h (i.e. du maillage) telle que pour tout $u_h \in V_h^r(\mathcal{O})$:

$$||u_h||_{H^1}(\Omega) \leq C(h)||u_h||_{L^2(\Omega)}$$

Cette propriété remarquable d'équivalence des normes est une conséquence directe de la périodicité des maillages que nous avons construits. Elle signifie, et c'est heureux, que notre étrange espace de dimension infinie se comporte en réalité comme un espace de dimension finie à bien des points de vue. En outre, c'est cette équivalence (qui est bien sûr fausse sur $H^1(\Omega)$) qui va nous permettre d'obtenir la stabilité des schémas pour $\theta < 1/2$ pour l'équation de la chaleur, et en particulier du schéma explicite, que nous avons dû éviter jusqu'ici. On rappelle enfin que pour tout $u \in H^2(\mathcal{O})$, $\mathcal{O} \in \left\{\Omega, \Omega^+, \Omega^-, \Omega_0, \mathcal{C}^+, \mathcal{C}^-, \Omega_j^\pm\right\}$, on a le résultat d'approximation :

$$\inf_{v_h \in V_h^r(\mathcal{O})} ||u - v_h||_{H^1(\mathcal{O})} \leq Ch|u|_{H^2(\mathcal{O})}$$

On introduit l'opérateur P^h de projection sur V_h^r, relatif à une forme bilinéaire continue coercive a, défini pour tout $v \in H^1(\Omega)$ comme la solution dans V_h^r de :

$$a(P^h v, v_h) = a(v, v_h) \qquad \forall\ v_h \in V_h^r$$

(et qui est bien défini en vertu du théorème de Lax-Milgram). Pour tout $u \in H^1(\Omega)$, on a alors par définition, pour tout $v_h \in V_h^r$:

$$a(u - P^h u, v_h) = 0$$

De cette propriété, on déduit le résultat d'approximation suivant :

Lemme 6.1. *Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $u \in H^2(\Omega)$, on a :*

$$||u - P^h u||_{H^1(\Omega)} \leq Ch|u|_{H^2(\Omega)} \tag{6.1}$$

Si on suppose de plus que pour $g \in L^2(\Omega)$, la solution $\varphi \in H^1(\Omega)$ de :

$$a(\varphi, v) = (g, v)_{L^2(\Omega)} \qquad \forall\, v \in H^1(\Omega)$$

vérifie (on dit que le problème adjoint est régulier) :

$$||\varphi||_{H^2(\Omega)} \leq C||g||_{L^2(\Omega)}$$

alors on a de plus :

$$||u - P^h u||_{L^2(\Omega)} \leq Ch^2|u|_{H^2(\Omega)} \tag{6.2}$$

Démonstration. On note M et α les constantes de continuité et de coercivité de a. On part de :

$$\begin{aligned}\alpha||u - P^h u||^2_{H^1(\Omega)} &\leq |a(u - P^h u, u - v_h + v_h - P^h u)| \\ &\leq |a(u - P^h u, u - v_h)|\end{aligned}$$

En utilisant la continuité de a :

$$\alpha||u - P^h u||^2_{H^1(\Omega)} \leq M||u - P^h u||_{H^1(\Omega)}||u - v_h||_{H^1(\Omega)}$$

d'où, pour tout v_h :

$$\alpha||u - P^h u||_{H^1(\Omega)} \leq M||u - v_h||_{H^1(\Omega)}$$

et donc :

$$\alpha||u - P^h u||_{H^1(\Omega)} \leq M \inf_{v_h \in V_h^r} ||u - v_h||_{H^1(\Omega)}$$

Alors en utilisant les résultats d'approximation par des éléments de V_h^r, on obtient :

$$||u - P^h u||_{H^1(\Omega)} \leq Ch|u|_{H^2(\Omega)}$$

On définit ensuite, pour tout $g \in L^2(\Omega)$, $\varphi \in H^1(\Omega)$ comme la solution de :

$$a(\varphi, v) = (g, v)_{L^2(\Omega)} \qquad \forall\, v \in H^1(\Omega)$$

qui est bien posé en vertu du théorème de Lax-Milgram. On a alors :

$$\begin{aligned}\left|\left(g, u - P^h u\right)_{L^2(\Omega)}\right| &= \left|a(u - P^h u, \varphi)\right| \\ &= \left|a(u - P^h u, \varphi - v_h) + a(u - P^h u, v_h)\right| \\ &= \left|a(u - P^h u, \varphi - v_h)\right| \\ &\leq M||u - P^h u||_{H^1(\Omega)}||\varphi - v_h||_{H^1(\Omega)}\end{aligned}$$

d'où :

$$\left|\left(g, u - P^h u\right)_{L^2(\Omega)}\right| \leq M||u - P^h u||_{H^1(\Omega)} \inf_{v_h \in V_h^r} ||\varphi - v_h||_{H^1(\Omega)}$$

Mais d'autre part, si on introduit φ_h comme l'unique solution (toujours par le théorème de Lax-Milgram) de :

$$a(\varphi_h, v_h) = (g, v_h)_{L^2(\Omega)} \qquad \forall\, v_h \in V_h^r$$

on a pour tout $v_h \in V_h^r$:

$$a(v_h, \varphi - \varphi_h) = 0$$

Alors :

$$\begin{aligned}\alpha||\varphi - \varphi_h||^2_{H^1(\Omega)} &\leq |a(\varphi - \varphi_h, \varphi - \varphi_h)| \\ &\leq |a(\varphi - v_h, \varphi - \varphi_h) + a(v_h - \varphi_h, \varphi - \varphi_h)| \\ &=\leq |a(\varphi - v_h, \varphi - \varphi_h)| \\ &\leq M||\varphi - v_h||_{H^1(\Omega)}||\varphi - \varphi_h||_{H^1(\Omega)}\end{aligned}$$

d'où, encore une fois :

$$\alpha||\varphi - \varphi_h||_{H^1(\Omega)} \leq M \inf_{v_h \in V_h^r} ||\varphi - v_h||_{H^1(\Omega)}$$

Puis, par hypothèse :

$$||\varphi||_{H^2(\Omega)} \leq C||g||_{L^2(\Omega)}$$

et on a donc en utilisant encore une fois les résultats d'approximation par des éléments de V_h^r :

$$||\varphi - \varphi_h||_{H^1(\Omega)} \leq Ch|\varphi|_{H^2(\Omega)} \leq Ch||g||_{L^2(\Omega)}$$

Finalement, en prenant $g = u - P^h u$, on aboutit à :

$$||u - P^h u||^2_{L^2(\Omega)} \leq C||u - P^h u||_{H^1(\Omega)}||\varphi - v_h||_{H^1(\Omega)}$$

$$||u - P^h u||_{L^2(\Omega)} \leq Ch^2$$

et donc le résultat annoncé. □

Nous aurons besoin dans la suite de cet opérateur de projection afin d'établir les résultats de convergence. En effet, un grand nombre des propriétés que nous démontrerons sont seulement vraies sur V_h^r (grâce à l'équivalence des normes), il nous faudra donc comparer la solution discrète à une projection de la solution continue, pour laquelle nous pourrons utiliser les propriétés de V_h^r, le reste de l'erreur étant contrôlé par le résultat ci-dessus.

6.1.2 Formulation discrète des problèmes d'ordre un en temps

Nous allons maintenant utiliser ces espaces afin de formuler l'approximation par éléments finis en espace, et θ-schéma en temps, du problème modèle (4.2). Très naturellement, nous cherchons la famille $(u_h^n)_{0\leq n\leq N} \in (V_h^r)^N$ solution de la récurrence suivante :

$$\left| \begin{array}{l} \left((\rho + \theta\Delta t V)u_h^{n+1}, v_h\right)_{L^2(\Omega)} + \left(\theta\Delta t\nabla u_h^{n+1}, \nabla v_h\right)_{L^2(\Omega)} = \left(f^{n+\theta}, v_h\right)_{L^2(\Omega)} \\ + ((\rho + (\theta-1)\Delta t V)u_h^n, v_h)_{L^2(\Omega)} + ((\theta-1)\Delta t\nabla u_h^n, \nabla v_h)_{L^2(\Omega)} \\ u_h^0 = I_h u_0 \end{array} \right. \tag{6.3}$$

où I_h est un opérateur "d'approximation" continu sur V_h^r (idéalement, l'interpolant de Lagrange, mais on peut utiliser d'autres interpolants, comme l'interpolant de Clément, ou même la projection elliptique sur V_h^r). Nous allons tenter d'appliquer à la fois la méthode DtN du chapitre 4, ainsi que les techniques particulières au milieu périodique développées dans la section précédente, à ce problème complètement discrétisé. Mais au préalable, nous allons vérifier que ce nouveau problème est une bonne approximation du problème modèle (4.2). Ce résultat n'est pas complètement classique puisque nous travaillons sur un domaine infini, et que notre espace V_h^r est de dimension infinie. On commence par remettre un peu en forme l'équation ci-dessus. On introduit les opérateurs :

$$\begin{array}{rcl} M_\rho^h : L^2(\Omega) & \longrightarrow & V_h^r \\ v & \longmapsto & M_\rho^h v \end{array}$$

où $M_\rho^h v$ est l'unique solution dans V_h^r, en vertu du théorème de Riesz, de :

$$\left(M_\rho^h v, v_h\right)_{H^1(\Omega)} = (\rho v, v_h)_{L^2(\Omega)}$$

et

$$\begin{array}{rcl} K^h : H^1(\Omega) & \longrightarrow & V_h^r \\ v & \longmapsto & K^h v \end{array}$$

où $K^h v$ est l'unique solution dans V_h^r, en vertu du théorème de Riesz, de :

$$\left(K^h v, v_h\right)_{H^1(\Omega)} = (\nabla v, \nabla v_h)_{L^2(\Omega)}$$

Remarquons tout de suite que l'opérateur M_ρ^h est inversible sur V_h^r. En effet, si on considère le problème : pour $u \in H^1(\Omega)$, trouver $\widetilde{M}_\rho^h u \in V_h^r$ tel que pour tout $v_h \in V_h^r$:

$$\left(\rho \widetilde{M}_\rho^h u, v_h\right)_{L^2(\Omega)} = (u, v_h)_{H^1(\Omega)}$$

alors en vertu du lemme 3.1, la forme bilinéaire de gauche vérifie :

$$(\rho u_h, u_h)_{L^2(\Omega)} \geq \frac{1}{C(h)} \rho^- ||u_h||^2_{H^1(\Omega)}$$

et est donc coercive. Alors on conclut à l'existence et l'unicité de $\widetilde{M}_\rho^h u$ en vertu du théorème de Lax-Milgram. Puis, on a clairement, pour tout $u_h \in V_h^r$, et tout $v_h \in V_h^r$:

$$\left(M_\rho^h \widetilde{M}_\rho^h u_h, v_h\right)_{H^1(\Omega)} = \left(\rho \widetilde{M}_\rho^h u, v_h\right)_{L^2(\Omega)} = (u_h, v_h)_{H^1(\Omega)}$$

et

$$\left(\rho \widetilde{M}_\rho^h M_\rho^h u_h, v_h\right)_{L^2(\Omega)} = \left(M_\rho^h M_\rho^h u_h, v_h\right)_{H^1(\Omega)} = (\rho u_h, v_h)_{L^2(\Omega)}$$

alors dans V_h^r :

$$M_\rho^h \widetilde{M}_\rho^h u_h = \widetilde{M}_\rho^h M_\rho^h u_h = u_h$$

ce qui montre que $\widetilde{M}_\rho^h$ et M_ρ^h sont inverses l'un de l'autre sur V_h^r. En revanche, cette propriété serait fausse sur $H^1(\Omega)$. C'est de nouveau le signe que V_h^r se comporte comme un espace de dimension finie, puisque l'équivalence des normes est encore à l'origine de ce résultat. On pose maintenant :

$$\begin{array}{rcl} A^h(\Omega, \theta, \Delta t) : H^1(\Omega) & \longrightarrow & V_h^r \\ v & \longmapsto & M_{\gamma\rho}^h + \theta \Delta t (M_V^h + K^h) v \end{array}$$

Alors le problème (6.3) se réécrit :

$$\left| \begin{array}{l} A^h(\Omega, \theta, \Delta t) u_h^{n+1} = A^h(\Omega, \theta - 1, \Delta t) u_h^n + M_{Id}^h(\Omega) f^{n+\theta} \\ u_h^0 = I_h u_0 \end{array} \right. \tag{6.3}$$

En dehors de toute autre considération, on voit que ce formalisme nous permet déja une grande économie de notations. On note ensuite que pour tout $u_h, v_h \in V_h^r$, on a par construction :

$$\left(A^h(\Omega, \theta, \Delta t) u_h, v_h\right)_{H^1(\Omega)} = a_{\Omega,\theta,\Delta t}(u_h, v_h)$$

Alors ce résultat et l'équivalence des normes sur V_h^r impliquent immédiatement le caractère bien posé du problème complètement discrétisé, y compris pour $\theta = 0$:

Théorème 6.1. *Sous les hypothèses (H), pour tout $\theta \geq 0$, $\Delta t > 0$, il existe une unique famille $(u_h^n)_{0 \leq n \leq N} \in (V_h^r)^N$ solution de (6.3), et pour chaque pas de temps, le problème est bien posé, soit $A(\Omega, \theta, \Delta t)$ inversible sur V_h^r.*

Démonstration. On commence par le cas $\theta > 0$, pour lequel la conclusion est aisée. On a pour tout $v_h \in V_h^r$:

$$a_{\Omega,\theta,\Delta t}(u_h^{n+1}, v_h) = a_{\Omega,\theta-1,\Delta t}(u_h^n, v_h) + \left(f^{n+\theta}, v_h\right)_{L^2(\Omega)}$$

Or d'après le lemme 4.2, la forme bilinéaire $a_{\Omega,\theta,\Delta t}$ est coercive pour tout $\theta > 0$, et continue pour tout θ. Alors le problème variationnel ci-dessus est bien posé à chaque pas de temps, ce qui est équivalent à dire que $A(\Omega, \theta, \Delta t)$ est inversible sur V_h^r. Aussi, par récurrence, il existe une unique famille solution de ce problème.

On considère maintenant le cas du schéma explicite, $\theta = 0$. Dans ce cas, le problème se réduit à :

$$\left(\rho u_h^{n+1}, v_h\right)_{L^2(\Omega)} = a_{\Omega,-1,\Delta t}(u_h^n, v_h) + (f^n, v_h)_{L^2(\Omega)}$$

Le membre de droite définit toujours une forme linéaire continue sur V_h^r en vertu du lemme 4.2, et il est clair que le membre de gauche définit une application bilinéaire continue. Puis :

$$(\rho u_h, u_h)_{L^2(\Omega)} \geq \rho_- ||u_h||^2_{L^2(\Omega)} \geq \frac{\rho_-}{C(h)^2} ||u_h||^2_{H^1}(\Omega)$$

en vertu du lemme 3.1, et le membre de gauche correspond donc à une forme bilinéaire continue coercive. Le problème variationnel ci-dessus est encore bien posé à chaque pas de temps et par récurrence, il existe une unique famille solution de ce problème (et on a bien $A(\Omega, 0, \Delta t)$ inversible sur V_h^r). □

Nous allons maintenant étudier la qualité en mesurant dans quelle mesure il approche le problème continu (4.2). Il nous a semblé important de refaire complètement cette démonstration de convergence, puisque bien qu'elle soit très classique sur les espaces d'éléments finis usuels (comprendre de dimension finie), elle l'est moins dans le cas d'un espace de dimension infinie tel que V_h^r. Cette étude passe tout d'abord par une étude de stabilité, basée sur les deux lemmes suivants :

Lemme 6.2. *Pour tout $\theta \geq 0$, $\Delta t > 0$, pour tout $f \in L^2(\Omega)$, la solution de :*

$$A^h(\Omega, \theta, \Delta t) u_h = M^h_{Id} f$$

vérifie :

$$||u_h||_{L^2_\rho} \leq ||f||_{L^2_{1/\rho}}$$

où l'on note $||\cdot||_{L^2_\mu(\Omega)} = (\mu()\cdot, \cdot)_{L^2(\Omega)}$, et qui n'est une norme que si $\mu \geq C > 0$ presque partout.

Démonstration. Pour tout $f_h \in L^2(\Omega)$, $\theta > 0$ et $\Delta t > 0$, on considère la solution dans V_h^r de :

$$A^h(\Omega, \theta, \Delta t) u_h = M^h_{Id} f$$

dont on sait qu'elle existe et est unique en vertu du théorème 6.1. 0n distingue à nouveau suivant la valeur de γ :

(i) Si $\gamma = i$. On part de :

$$A^h(\Omega, \theta, \Delta t) u_h = M^h_{Id} f$$

et on fait le produit scalaire H^1 par u_h et il vient :

$$||u_h||^2_{L^2_{i\rho + \theta\Delta t + V}} + \theta\Delta t\, (\nabla u_h, \nabla u_h)_{L^2(\Omega)} = (f, u_h)_{L^2(\Omega)}$$

soit en prenant la partie imaginaire :

$$||u_h||^2_{L^2_\rho} = \Im\mathrm{m}((f, u_h)_{L^2(\Omega)})$$

d'où l'on déduit que :

$$||u_h||^2_{L^2_\rho} \leq ||f||_{L^2_{1/\rho}} ||u_h||_{L^2_\rho}$$

et donc :

$$||u_h||_{L^2_\rho} \leq ||f||_{L^2_{1/\rho}}$$

(ii) Si $\gamma = 1$, $V \geq 0$. On part encore de :

$$A^h(\Omega, \theta, \Delta t) u_h = M^h_{Id} f$$

et on toujours fait le produit scalaire H^1 par u et il vient :

$$||u_h||^2_{L^2_{\rho + \theta\Delta t + V}} + \theta\Delta t\, (\nabla u_h, \nabla u_h)_{L^2(\Omega)} = (f, u)_{L^2(\Omega)}$$

soit en minorant, comme V est positif :

$$||u_h||^2_{L^2_\rho} \leq ||f||_{L^2_{1/\rho}} ||u_h||_{L^2_\rho}$$

et donc :

$$||u_h||_{L^2_\rho} \leq ||f||_{L^2_{1/\rho}}$$

□

Ensuite, on a :

Lemme 6.3. *Pour tout $\theta \geq 1/2$ et $\Delta t > 0$, on a sur V_h^r :*

$$||A^h(\Omega,\theta,\Delta t)^{-1}A^h(\Omega,\theta-1,\Delta t)||_{L^2_\rho} \leq 1 \tag{6.4}$$

Dans le cas $\gamma = 1$ et $\theta < 1/2$, l'estimation ci-dessus reste vraie si la condition CFL :

$$(\frac{1}{2}-\theta)\rho^-\Delta t||(M_\rho^h)^{-1}(K^h+M_V^h)||_{H^1} \leq 1 \tag{6.5}$$

est satisfaite.

Démonstration. Pour tout $u_h^n \in V_h^r$, on considère la solution dans V_h^r de :

$$A^h(\Omega,\theta,\Delta t)u_h^{n+1} = A^h(\Omega,\theta-1,\Delta t)u_h^n$$

On fait le produit scalaire H^1 avec $u_h^{n+\theta} = \theta u_h^{n+1} + (1-\theta)u_h^n$:

$$\left(M_{i\rho}^h(u_h^{n+1}-u_h^n),u_h^{n+\theta}\right)_{H^1} + \Delta t\left(M_V^h u_h^{n+\theta},u^{n+\theta}\right)_{H^1} + \Delta t\left(K^h u_h^{n+\theta},u^{n+\theta}\right)_{H^1} = 0$$

De nouveau, on distingue suivant les valeurs de γ.

(i) Cas $\gamma = i$. On a :

$$u_h^{n+\theta} = \frac{u_h^{n+1}+u_h^n}{2} + (\theta-\frac{1}{2})(u_h^{n+1}-u_h^n)$$

d'où :

$$\left(M_{i\rho}^h(u_h^{n+1}-u_h^n),u_h^{n+\theta}\right)_{H^1} = \frac{i}{2}\left(\left(M_\rho^h u_h^{n+1},u_h^{n+1}\right)_{H^1} - \left(M_\rho^h u_h^n,u_h^n\right)_{H^1}\right)$$
$$-\Im\mathrm{m}\left(M_\rho^h u_h^{n+1},u_h^n\right)_{H^1} + i(\theta-\frac{1}{2})\left(M_\rho^h(u_h^{n+1}-u_h^n),u_h^{n+1}-u_h^n\right)_{H^1}$$

Alors en prenant la partie imaginaire de l'expression précédente et en utilisant la relation ci-dessus, il vient :

$$\frac{1}{2}\left(\left(M_\rho^h u_h^{n+1},u_h^{n+1}\right)_{H^1} - \left(M_\rho^h u_h^n,u_h^n\right)_{H^1}\right) + (\theta-\frac{1}{2})\left(M_\rho^h(u_h^{n+1}-u_h^n),u_h^{n+1}-u_h^n\right)_{H^1} = 0$$

soit, en réinterprétant M_ρ^h :

$$||u_h^{n+1}||^2_{L^2_\rho(\Omega)} - ||u_h^{n+1}||^2_{L^2_\rho(\Omega)} + 2(\theta-\frac{1}{2})||u_h^{n+1}-u_h^n||^2_{L^2_\rho(\Omega)} = 0$$

Par conséquent, pour $\theta \geq 1/2$, on obtient bien :

$$||u_h^{n+1}||_{L^2_\rho(\Omega)} \leq ||u_h^{n+1}||_{L^2_\rho(\Omega)}$$

(ii) Cas $\gamma = 1$, avec $V \geq 0$. On procède comme pour le cas précédent, en partant de :

$$u_h^{n+\theta} = \frac{u_h^{n+1}+u_h^n}{2} + (\theta-\frac{1}{2})(u_h^{n+1}-u_h^n)$$

qui conduit cette fois à :

$$\left(M_\rho^h(u_h^{n+1}-u_h^n),u_h^{n+\theta}\right)_{H^1} = \frac{1}{2}\left(\left(M_\rho^h u_h^{n+1},u_h^{n+1}\right)_{H^1} - \left(M_\rho^h u_h^n,u_h^n\right)_{H^1}\right)$$
$$+(\theta-\frac{1}{2})\left(M_\rho^h(u_h^{n+1}-u_h^n),u_h^{n+1}-u_h^n\right)_{H^1}$$

D'où, en réinjectant ceci dans l'équation dont on fait le produit saclaire H^1 par $u_h^{n+\theta}$ et en réinterprétant chaque terme :

$$\frac{1}{2}\left(||u_h^{n+1}||^2_{L^2_\rho(\Omega)} - ||u_h^{n+1}||^2_{L^2_\rho(\Omega)}\right) + (\theta-\frac{1}{2})||u_h^{n+1}-u_h^n||^2_{L^2_\rho(\Omega)}$$
$$+||\nabla u_h^{n+\theta}||^2_{L^2(\Omega)} + \left(Vu_h^{n+\theta},u_h^{n+\theta}\right)_{L^2(\Omega)} = 0$$

et donc, pour $\theta \geq 1/2$ on en déduit facilement que :

$$||u_h^{n+1}||_{L^2_\rho(\Omega)} \leq ||u_h^{n+1}||_{L^2_\rho(\Omega)}$$

tous les autres termes étant positifs.

Dans le cas où $\theta < 1/2$, $\gamma = 1$ et donc $V \geq 0$ par hypothèse, en se rappelant que M^h_{rho} est inversible, on a en prenant la norme H^1 de l'équation :

$$||u_h^{n+1} - u_h^n||_{H^1(\Omega)} = \Delta t||(M_\rho^h)^{-1}(K^h + M_V^h)u_h^{n+\theta}||_{H^1}$$

Puis, on utilise le fait que pour tout opérateur A pour un produit scalaire $(\cdot,\cdot)$, on a :

$$||Av||^2 = (Av, Av) \leq ||A||\,(Av, v)$$

puisque, pour tout $v \notin KerA$, on a :

$$\frac{||Av||^2}{(Av,v)} = \frac{(Av,Av)}{(Av,v)} = \frac{\left(v, A^2v\right)}{(Av,v)} \leq \frac{||A||^2||v||^2}{(Av,v)} \leq \frac{||A||^2}{||A||} \leq ||A||$$

Alors comme $(M_\rho^h)^{-1}(K^h + M_V^h)$ est clairement autoadjoint en tant que produit de deux opérateurs autoadjoints par construction, on a :

$$||(M_\rho^h)^{-1}(K^h + M_V^h)u_h^{n+\theta}||^2_{H^1} \leq ||(M_\rho^h)^{-1}(K^h + M_V^h)||_{H^1}\left((M_\rho^h)^{-1}(K^h + M_V^h)u_h^{n+\theta}, u_h^{n+\theta}\right)_{H^1(\Omega)}$$

Alors :

$$\begin{aligned}
&||\nabla u_h^{n+\theta}||^2_{L^2(\Omega)} + \left(Vu_h^{n+\theta}, u_h^{n+\theta}\right)_{L^2(\Omega)} - (\frac{1}{2} - \theta)||u_h^{n+1} - u_h^n||^2_{L^2_\rho(\Omega)} \\
&\geq \left((K^h + M_V^h)u_h^{n+\theta}, u_h^{n+\theta}\right)_{H^1(\Omega)} - (\frac{1}{2} - \theta)\rho^-||u_h^{n+1} - u_h^n||^2_{H^1} \\
&\geq \left((K^h + M_V^h)u_h^{n+\theta}, u_h^{n+\theta}\right)_{H^1(\Omega)} - (\frac{1}{2} - \theta)\rho^-\Delta t||(M_\rho^h)^{-1}(K^h + M_V^h)u_h^{n+\theta}||^2_{H^1} \\
&\geq \left(1 - (\frac{1}{2} - \theta)\rho^-\Delta t||(M_\rho^h)^{-1}(K^h + M_V^h)||_{H^1}\right)||(M_\rho^h)^{-1}(K^h + M_V^h)u_h^{n+\theta}||^2_{H^1}
\end{aligned}$$

Donc dès que $(1 - (\frac{1}{2} - \theta)\rho^-\Delta t||(M_\rho^h)^{-1}(K^h + M_V^h)||_{H^1}) \geq 0$, on aura de nouveau l'estimation de stabilité. □

De ces deux lemmes, on déduit maintenant le résultat de convergence (légèrement sous-optimal puisque l'on impose un peu plus de régularité qu'il n'est strictement nécessaire) :

Théorème 6.2. *On suppose que :*

$$u \in C^2([0,T], L^2(\Omega)) \qquad \partial_t u \in L^2([0,T], H^2(\Omega))$$

Alors pour tout $\Delta t > 0$ et tout $\theta \geq 1/2$, il existe une constante $C > 0$, indépendante de h et Δt :

$$||u(\cdot, n\Delta t) - u_h^n||_{L^2_\rho(\Omega)} \leq C(\Delta t + h^2) \tag{6.6}$$

Si $0 \leq \theta < 1/2$, l'estimation ci-dessus est encore vraie dans le cas $\gamma = 1$ si la condition CFL :

$$(\frac{1}{2} - \theta)\rho^-\Delta t||(M_\rho^h)^{-1}(K^h + M_V^h)||_{H^1} \leq 1 \tag{6.5}$$

est satisfaite.

Démonstration. On a d'une part par définition :

$$A^h(\Omega, \theta, \Delta t)u_h^{n+1} = A^h(\Omega, \theta - 1, \Delta t)u_h^n + M^h_{Id}f^{n+\theta}$$

D'autre part, on a comme u est solution de (4.2), on a :

$$\begin{aligned}
a_{\Omega,\theta,\Delta t}(u(\cdot,(n+1)\Delta t), v_h) = \theta\Delta t\,(f(\cdot,(n+1)\Delta t), v_h)_{L^2(\Omega)} + (\gamma\rho u(\cdot,(n+1)\Delta t), v_h)_{L^2(\Omega)} \\
-\theta\Delta t\left(\gamma\rho\frac{\partial u}{\partial t}(\cdot,(n+1)\Delta t), v_h\right)_{L^2(\Omega)}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
a_{\Omega,\theta-1,\Delta t}(u(\cdot,n\Delta t), v_h) = (\theta-1)\Delta t\,(f(\cdot,n\Delta t), v_h)_{L^2(\Omega)} + (\gamma\rho u(\cdot,n\Delta t), v_h)_{L^2(\Omega)} \\
-(\theta-1)\Delta t\left(\gamma\rho\frac{\partial u}{\partial t}(\cdot,n\Delta t), v_h\right)_{L^2(\Omega)}
\end{aligned}$$

Alors :

$$a_{\Omega,\theta,\Delta t}(u(\cdot,(n+1)\Delta t), v_h) - a_{\Omega,\theta-1,\Delta t}(u(\cdot,n\Delta t), v_h) = (\theta f(\cdot,(n+1)\Delta t) + (1-\theta)f(\cdot,n\Delta t), v_h)_{L^2(\Omega)}$$

$$+\Delta t\left(\gamma\rho\left(\frac{u(\cdot,(n+1)\Delta t)-u(\cdot,n\Delta t)}{\Delta t}-\theta\frac{\partial u}{\partial t}(\cdot,(n+1)\Delta t)-(1-\theta)\frac{\partial u}{\partial t}(\cdot,n\Delta t)\right),v_h\right)_{L^2(\Omega)}$$

On pose

$$\varepsilon^{n+\theta}=\frac{u(\cdot,(n+1)\Delta t)-u(\cdot,n\Delta t)}{\Delta t}-\theta\frac{\partial u}{\partial t}(\cdot,(n+1)\Delta t)-(1-\theta)\frac{\partial u}{\partial t}(\cdot,n\Delta t)$$

Alors, en utilisant les opérateurs que nous avons introduits, on obtient :

$$A^h(\Omega,\theta,\Delta t)u(\cdot,(n+1)\Delta t)=A^h(\Omega,\theta-1,\Delta t)u(\cdot,n\Delta t)+M^h_{Id}f^{n+\theta}+\Delta tM^h_{Id}(\gamma\rho\varepsilon^{n+\theta})$$

On aimerait maintenant faire la différence entre ces deux équations, et utiliser les lemmes que nous avons précédemment démontrés. Malheureuseument, ces lemmes ne sont valables que pour des éléments de V^r_h, puisque l'on a besoin de réinterpréter le produit scalaire par une fonction test bien choisie, et qui doit être dans V^r_h, pour les démontrer. Pour contourner cette difficulté, on introduit l'opérateur de projection P^h associé à la forme bilinéaire $a_{\Omega,1,1}$, qui est continue et coercive en vertu du lemme 4.2, et qui satisfait les hyothèses du lemme 6.1 en vertu du lemme de régularité 1.2. On a alors, par linéarité :

$$A^h(\Omega,\theta,\Delta t)P^hu(\cdot,(n+1)\Delta t)=A^h(\Omega,\theta-1,\Delta t)P^hu(\cdot,n\Delta t)+M^h_{Id}f^{n+\theta}+\Delta tM^h_{Id}(\gamma\rho\varepsilon^{n+\theta})$$

$$+A^h(\Omega,\theta,\Delta t)(P^h-I)u(\cdot,(n+1)\Delta t)-A^h(\Omega,\theta-1,\Delta t)(P^h-I)u(\cdot,n\Delta t)$$

Alors $e^n=u^n_h-P^hu(\cdot,n\Delta t)$ est solution de :

$$A^h(\Omega,\theta,\Delta t)e^{n+1}=A^h(\Omega,\theta-1,\Delta t)e^n+\Delta tM^h_{Id}(\gamma\rho\varepsilon^{n+\theta})$$

$$+A^h(\Omega,\theta,\Delta t)(P^h-I)u(\cdot,(n+1)\Delta t)-A^h(\Omega,\theta-1,\Delta t)(P^h-I)u(\cdot,n\Delta t)$$

Puis, pour tout $v_h\in V^r_h$, on a :

$$\begin{aligned}\left(A^h(\Omega,\theta,\Delta t)(P^h-I)u,v_h\right)_{H^1(\Omega)}&=a_{\Omega,\theta,\Delta t}((P^h-I)u,v_h)\\&=\theta a_{\Omega,1,\Delta t}((P^h-I)u,v_h)+(1-\theta\Delta t)\left(\gamma\rho(P^h-I)u,v_h\right)_{L^2(\Omega)}\\&=(1-\theta\Delta t)\left(\gamma\rho(P^h-I)u,v_h\right)_{L^2(\Omega)}\\&=(1-\theta\Delta t)\left(M^h_{Id}(\gamma\rho(P^h-I)u),v_h\right)_{H^1(\Omega)}\end{aligned}$$

Par conséquent, l'équation ci-dessus devient :

$$A^h(\Omega,\theta,\Delta t)e^{n+1}=A^h(\Omega,\theta-1,\Delta t)e^n+\Delta tM^h_{Id}(\gamma\rho\varepsilon^{n+\theta})$$

$$+(1-\theta\Delta t)M^h_{Id}(\gamma\rho\nu^{n+1})-(2-\theta\Delta t)M^h_{Id}(\gamma\rho\nu^n)$$

où on a posé $\nu^n=(P^h-I)u(\cdot,n\Delta t)$. Nous sommes maintenant en mesure d'appliquer les lemmes 6.2 et 6.3. On a :

$$e^{n+1}=A^h(\Omega,\theta,\Delta t)^{-1}A^h(\Omega,\theta-1,\Delta t)e^n+\Delta tA^h(\Omega,\theta,\Delta t)^{-1}M^h_{Id}(\gamma\rho\varepsilon^{n+\theta})$$

$$+(1-\theta\Delta t)A^h(\Omega,\theta,\Delta t)^{-1}M^h_{Id}(\gamma\rho\nu^{n+1})-(2-\theta\Delta t)A^h(\Omega,\theta,\Delta t)^{-1}M^h_{Id}(\gamma\rho\nu^n)$$

Alors les lemmes 6.2 et 6.3 conduisent à :

$$||e^{n+1}||_{L^2_\rho(\Omega)}\leq||e^n||_{L^2_\rho(\Omega)}+\Delta t||\varepsilon^{n+\theta}||_{L^2(\Omega)}+|1-\theta\Delta t|||\nu^{n+1}||_{L^2(\Omega)}+|2-\theta\Delta t|||\nu^n||_{L^2(\Omega)}$$

ce qui par récurrence donne :

$$||e^n||_{L^2_\rho(\Omega)}\leq||e^0||_{L^2_\rho(\Omega)}+\sum_{k=1}^n\left(\Delta t||\varepsilon^{k+\theta}||_{L^2(\Omega)}+|1-\theta\Delta t|||\nu^{k+1}||_{L^2(\Omega)}+|2-\theta\Delta t|||\nu^k||_{L^2(\Omega)}\right)$$

Le premier terme s'estime facilement en :

$$||e^0||_{L^2_\rho(\Omega)}\leq||u^0_h-u_0||_{L^2_\rho(\Omega)}+||u_0-P^hu_0||_{L^2_\rho(\Omega)}\leq Ch^2|u_0|_{H^2(\Omega)}$$

en vertu du lemme de projection elliptique 6.1 et comme $u_0\in H^2(\Omega)$ en vertu du lemme de régularité 1.2. Le terme en $\varepsilon^{n+\theta}$ s'estime de façon classique par développement de Taylor pour tout n tel que $n\Delta t\leq T$. En effet, si on écrit le développement de Taylor (sous-entendu pour la norme L^2 comme $u\in C^2([0,T],L^2(\Omega))$) de la solution du problème continu :

$$u(\cdot,(n+1)\Delta t)=\theta u(\cdot,(n+1)\Delta t)+(1-\theta)u(\cdot,n\Delta t)+(1-\theta)\Delta t\frac{\partial u}{\partial t}(\cdot,n\Delta t)+\mathcal{O}(\Delta t^2)$$

avec :

$$\mathcal{O}(\Delta t^2)\leq\int_{(n+1/2)\Delta t}^{(n+1)\Delta t}||\partial_t^2u(\cdot,t)(n+1/2)\Delta t-t)||_{L^2_\rho(\Omega)}\leq\frac{\Delta t^2}{2}\sup_{[(n+1/2)\Delta t,(n+1)\Delta t]}||\partial_t^2u(\cdot,t)||_{L^2_\rho(\Omega)}$$

$$u(\cdot,n\Delta t)=(1-\theta)u(\cdot,n\Delta t)+\theta u(\cdot,(n+1)\Delta t)-\theta\Delta t\frac{\partial u}{\partial t}(\cdot,(n+1)\Delta t)+\mathcal{O}(\Delta t^2)$$

avec :

$$\mathcal{O}(\Delta t^2)=\int_{n\Delta t}^{(n+1/2)\Delta t}||\partial_t^2u(\cdot,t)(n+1/2)\Delta t-t)||_{L^2_\rho(\Omega)}\leq\frac{\Delta t^2}{2}\sup_{[n\Delta t,(n+1/2)\Delta t]}||\partial_t^2u(\cdot,t)||_{L^2_\rho(\Omega)}$$

D'où :

$$\rho(x)\frac{u(\cdot,(n+1)\Delta t)-u(\cdot,n\Delta t)}{\Delta t}=\theta\rho(x)\frac{\partial u}{\partial t}(\cdot,(n+1)\Delta t)+(1-\theta)\rho(x)\frac{\partial u}{\partial t}(\cdot,n\Delta t)+\mathcal{O}(\Delta t)$$

avec :

$$\mathcal{O}(\Delta t)\leq\Delta t\sup_{[n\Delta t,(n+1)\Delta t]}||\partial_t^2u(\cdot,t)||_{L^2_\rho(\Omega)}$$

L'erreur de troncature est donc donnée par :

$$\varepsilon^{n+1/2}=\gamma\rho\frac{u(\cdot,(n+1)\Delta t)-u(\cdot,n\Delta t)}{\Delta t}-\theta\Delta u(\cdot,(n+1)\Delta t)-(1-\theta)\Delta u(\cdot,n\Delta t)$$
$$+\theta Vu(\cdot,(n+1)\Delta t)+(1-\theta)Vu(\cdot,n\Delta t)-\theta f_{n+1}(x)-(1-\theta)f_n(x)\in\mathcal{O}(\Delta t)$$

Aussi, on aboutit à :

$$\sum_{k=1}^{n}\Delta t||\varepsilon^{k+\theta}||_{L^2(\Omega)}\leq CT\Delta t$$

Reste alors le terme qui correspond à la projection elliptique de chaque pas de temps. On commence par remarquer que si :

$$J=\int_x^y v(t)dt$$

Alors :

$$||J||^2_{L^2(\Omega)}=\int_\Omega\left(\int_x^y v(t)dt\right)^2$$

Or :

$$\left|\int_x^y v(t)dt\right|\leq\left|\int_x^y 1dt\right|^{1/2}\left|\int_x^y v(t)^2dt\right|^{1/2}=|y-x|^{1/2}\left|\int_x^y v(t)^2dt\right|^{1/2}$$

Alors :

$$||J||^2_{L^2(\Omega)}\leq|y-x|\int_x^y||v(t)||^2_{L^2(\Omega)}dt$$

On en déduit que comme :

$$\nu^n=(P^h-I)\int_{(n-1)\Delta t}^{n\Delta t}\frac{\partial u}{\partial t}(\cdot,t)dt=\int_{(n-1)\Delta t}^{n\Delta t}(P^h-I)\frac{\partial u}{\partial t}(\cdot,t)dt$$

on a :

$$||\nu^n||^2_{L^2(\Omega)}\leq\Delta t\int_{(n-1)\Delta t}^{n\Delta t}||(P^h-I)\frac{\partial u}{\partial t}(\cdot,t)||^2_{L^2(\Omega)}\leq C\Delta th^4\int_{(n-1)\Delta t}^{n\Delta t}|\frac{\partial u}{\partial t}(\cdot,t)|^2_{H^2(\Omega)}$$

Alors on a ensuite, comme $\sum_{k=1}^{n}1=\frac{n\Delta t}{\Delta t}\leq\frac{T}{\Delta t}$:

$$\sum_{k=1}^{n}||\nu^n||_{L^2(\Omega)}\leq\left(\sum_{k=1}^{n}||\nu^n||^2_{L^2(\Omega)}\right)^{1/2}\frac{T^{1/2}}{\Delta t^{1/2}}\leq Ch^2T^{1/2}\left(\int_0^{n\Delta t}|\frac{\partial u}{\partial t}(\cdot,t)|^2_{H^2(\Omega)}\right)^{1/2}$$

En combinant les différents termes, on obtient l'estimation de convergence annoncée.

□

Remarque 6.1. *En pratique, il n'est pas nécessaire de connaître* $||(M^h_\rho)^{-1}(K^h+M^h_V)||_{H^1(\Omega)}$ *pour respecter la condition CFL. En effet, comme :*

$$\left(A^h(\Omega,\theta,\Delta t)u_h^{n+1},u_h^{n+\theta}\right)_{H^1(\Omega)}-\left(A^h(\Omega,\theta-1,\Delta t)u_h^n,u_h^{n+\theta}\right)_{H^1(\Omega)}$$
$$=\frac{1}{2}\left(||u_h^{n+1}||^2_{L^2_\rho(\Omega)}-||u_h^{n+1}||^2_{L^2_\rho(\Omega)}\right)+(\theta-\frac{1}{2})||u_h^{n+1}-u_h^n||^2_{L^2_\rho(\Omega)}$$
$$+||\nabla u_h^{n+\theta}||^2_{L^2(\Omega)}+\left(Vu_h^{n+\theta},u_h^{n+\theta}\right)_{L^2(\Omega)}$$
$$=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{2}\left(||u_h^{n+1}||^2_{L^2_\rho(\mathcal{C}_j^+)}-||u_h^{n+1}||^2_{L^2_\rho(\mathcal{C}_j^+)}\right)+(\theta-\frac{1}{2})||u_h^{n+1}-u_h^n||^2_{L^2_\rho(\mathcal{C}_j^+)}$$

$$+||\nabla u_h^{n+\theta}||^2_{L^2(\mathcal{C}_j^+)} + \left(Vu_h^{n+\theta}, u_h^{n+\theta}\right)_{L^2(\mathcal{C}_j^+)}$$
$$+\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2}\left(||u_h^{n+1}||^2_{L^2_\rho(\mathcal{C}_j^-)} - ||u_h^{n+1}||^2_{L^2_\rho(\mathcal{C}_j^-)}\right) + (\theta - \frac{1}{2})||u_h^{n+1} - u_h^n||^2_{L^2_\rho(\mathcal{C}_j^-)}$$
$$+||\nabla u_h^{n+\theta}||^2_{L^2(\mathcal{C}_j^-)} + \left(Vu_h^{n+\theta}, u_h^{n+\theta}\right)_{L^2(\mathcal{C}_j^-)}$$
$$+\frac{1}{2}\left(||u_h^{n+1}||^2_{L^2_\rho(\Omega_0)} - ||u_h^{n+1}||^2_{L^2_\rho(\mathcal{C}_j^+)}\right) + (\theta - \frac{1}{2})||u_h^{n+1} - u_h^n||^2_{L^2_\rho(\Omega_0)}$$
$$+||\nabla u_h^{n+\theta}||^2_{L^2(\Omega_0)} + \left(Vu_h^{n+\theta}, u_h^{n+\theta}\right)_{L^2(\Omega_0)}$$

alors en reprenant les calculs du lemme 6.3, et en définissant les opérateurs M_μ^h et K^h sur chacun des ouverts impliqués de la même manière que sur Ω, on voit qu'il suffit de trouver une condition CFL sur chacun des bornés $\mathcal{C}^+$, $\mathcal{C}^-$ et Ω_0 pour que

$$(\frac{1}{2} - \theta)\rho^- \Delta t||(M_\rho^h)^{-1}(K^h + M_V^h)||_{H^1(\mathcal{C}^+)} \leq 1$$
$$(\frac{1}{2} - \theta)\rho^- \Delta t||(M_\rho^h)^{-1}(K^h + M_V^h)||_{H^1(\mathcal{C}^-)} \leq 1$$

et

$$(\frac{1}{2} - \theta)\rho^- \Delta t||(M_\rho^h)^{-1}(K^h + M_V^h)||_{H^1(\Omega_0)} \leq 1$$

par périodicité des coefficients et équivalence des normes sur les espaces de dimension finie, afin de retrouver l'estimation de stabilité. On prendra alors le pas de temps correspondant à la plus contraignante de ces trois conditions CFL. Cela revient donc au calcul de trois conditions CFL classiques sur des domaines bornés, ce qui ne pose pas de problème pratique, au prix bien entendu d'une probable sous-estimation du meilleur pas de temps admissible.

Nous allons maintenant voir que dans le cas discret, la méthode DtN permet encore de se ramener à un problème posé sur Ω_0, équivalent au problème posé sur tout Ω. C'est donc le théorème 6.1 qui garantira à terme la convergence de notre méthode complètement discrétisée.

6.1.3 Méthode DtN discrète

Comme dans le cas semi-discret, on commence par introduire le problème extérieur dont la restriction à Ω_e de la famille $(u_h^n)_{0\leq n\leq N}$ est solution : pour tout $(\varphi_h^n)_{1\leq n\leq N}$ appartenant à :

$$X_h^r(\Gamma_0)^N = (X_h^r(\Gamma_0^-) \times X_h^r(\Gamma_0^+))^N = (X_h^r)^{2N}$$

on cherche $(u_{h,e}^n)_{0\leq n\leq N} \in V_h^r(\Omega_e)^{N+1}$ telle que, pour tout v_h appartenant à

$$V_{h,0}^r(\Omega_e) = \{v_h \in V_h^r(\Omega_e) \ | \ v_h|_{\Gamma_0} = 0\}$$

on ait :

$$\left|\begin{array}{l} a_{\Omega_e,\theta,\Delta t}(u_{h,e}^{n+1}, v_h) = a_{\Omega_e,\theta-1,\Delta t}(u_{h,e}^n, v_h) \\ u_{h,e}^{n+1}|_{\Gamma_0} = \varphi_h^{n+1} \\ u_{h,e}^0 = 0 \end{array}\right. \tag{6.7}$$

et on souhaite vérifier que ce problème est bien posé. Nous avons alors besoin des opérateurs de relèvement définis au chapitre 3, lemme 3.2 (bien entendu, sans conditions quasi-périodiques cette fois, et donc définis à partir des V_h^r et X_h^r, et non plus des $V_h^r(\xi)$ et $X_h^r(\xi)$). Rappelons que ces opérateurs permettent en réalité de décomposer toute fonction de V_h^r en une fonction à trace nulle sur un certain $\Gamma_j^\pm$ et une fonction à support très localisé autour de $\Gamma_j^\pm$ et qui coïncide en trace avec la fonction initiale (et constitue ainsi un relèvement de cette trace).

Nous pouvons alors, en utilisant ces opérateurs, démontrer le théorème suivant :

Théorème 6.3. *Pour tout $\theta \geq 0$ et tout $(\varphi_h^n)_{1\leq n\leq N} \in (X_h^r)^{2N}$, il existe une unique famille $(u_{h,e}^n)_{0\leq n\leq N} \in V_h^r(\Omega_e)^{N+1}$ solution de (6.7), qui dépend continûment des données.*

Démonstration. Pour tout $v_h \in V_{h,0}^r(\Omega_e)$, on a par construction :

$$a_{\Omega_e,\theta,\Delta t}(u_h^{n+1}, v_h) = a_{\Omega_e,\theta-1,\Delta t}(u_h^n, v_h)$$

Puis, pour tout $\varphi_h \in (X_h^r)^2$, on pose $\eta_h\varphi_h = \eta_h^{0,-}\varphi_h|_{\Gamma_0^-} + \eta_h^{0,+}\varphi_h|_{\Gamma_0^+} \in V_h^r(\Omega_e)$, alors il est clair que $\eta_h\varphi_h|_{\Gamma_0} = \varphi_h$. On pose ensuite $u_{h,0}^{n+1} = u_h^{n+1} - \eta\varphi_h^{n+1} \in V_{h,0}^r(\Omega_e)$, et :

$$a_{\Omega_e,\theta,\Delta t}(u_{h,0}^{n+1}, v_h) = a_{\Omega_e,\theta-1,\Delta t}(u_h^n, v_h) - a_{\Omega_e,\theta,\Delta t}(\eta_h\varphi_h^{n+1}, v_h)$$

En vertu du lemme 5.2, la forme bilinéaire est continue pour tout θ, et coercive pour $\theta > 0$. Pour $\theta = 0$, c'est l'équivalence des normes en procédant comme dans la démonstration du théorème 6.1 qui donne la coercivité. Donc ce problème variationnel est bien posé, et on a donc l'existence d'une solution $u_{h,0}^{n+1}$ pour tout $n \geq 0$. Puis en posant $u_h^{n+1} = u_{h,0}^{n+1} + \eta_h\varphi_h^{n+1}$, on obtient bien une solution de (6.7). Pour l'unicité, il suffit de remarquer que la solution de (6.7) avec donnée nulle est solution de la formulation variationnelle dans $V_{h,0}^r(\Omega_e)$, avec donnée nulle. Par conséquent, cette solution est nulle, et on obtient ainsi l'unicité par linéarité. Enfin pour la continuité, il est clair en vertu du lemme 3.2 que $\eta_h\varphi_h$ dépend continûment de φ_h. Puis en prenant $u_{h,0}^{n+1}$ comme fonction test, et en utilisant la coercivité et la continuité de la forme bilinéaire, on obtient aisément l'existence d'une constante $C > 0$ telle que :

$$||u_{h,0}^{n+1}||_{H^1(\Omega_e)} \leq C(||u_h^n||_{H^1(\Omega_e)} + ||\varphi_h^{n+1}||_{H^{1/2}(\Gamma_0)})$$

En particulier, ceci donne :

$$||u_{h,0}^1||_{H^1(\Omega_e)} \leq C||\varphi_h^1||_{H^{1/2}(\Gamma_0)}$$

et par suite la dépendance continue de $u_{h,e}^1$ en φ_h^1. Puis par récurrence, en utilisant l'estimation ci-dessus, on obtient la dépendance continue de chaque pas de temps. □

Ensuite, on se demande bien entendu s'il est possible de retrouver la décomposition en temps si utile que nous avons obtenue au niveau semi-discret. Par analogie, on introduit donc, pour tout $\varphi_h \in (X_h^r)^2$, la famille $(w_{h,e}^n(\varphi_h))_{0\leq n\leq N} \in V_h^r(\Omega_e)^N$ solution de, pour tout $v_h \in V_{h,0}^r(\Omega_e)$:

$$\left|\begin{array}{ll} a_{\Omega_e,\theta,\Delta t}(w_{h,e}^{n+1}(\varphi_h), v_h) = a_{\Omega_e,\theta-1,\Delta t}(w_{h,e}^n(\varphi_h), v_h) & \\ w_{h,e}^1(\varphi_h)|_{\Gamma_0} = \varphi_h & \\ w_{h,e}^0(\varphi_h) = 0 & \\ w_{h,e}^n(\varphi_h)|_{\Gamma_0} = 0 & n \neq 1 \end{array}\right. \tag{6.8}$$

Ce problème est bien posé en vertu du théorème précédent. En transposant les idées du cas semi-discret au niveau complètement discret, on parvient à retrouver l'analogue de la formule de décomposition en temps :

Théorème 6.4. *Pour tout $(\varphi_h^n)_{1\leq n\leq N} \in (X_h^r)^{2N}$, et tout $n \geq 0$, on a :*

$$u_{h,e}^n = \sum_{k=1}^{n} w_{h,e}^k(\varphi_h^{n-k+1}) \tag{6.9}$$

Démonstration. La preuve est encore entièrement basée sur la linéarité et l'unicité. On part de :

$$\left|\begin{array}{l} a_{\Omega_e,\theta,\Delta t}(u_{h,e}^{n+1}, v_h) = a_{\Omega_e,\theta-1,\Delta t}(u_{h,e}^n, v_h) \\ u_{h,e}^{n+1}|_{\Gamma_0} = \varphi_h^{n+1} \end{array}\right.$$

Il est clair que $w_{h,e}^1(\varphi_h^1)$ et $u_{h,e}^1$ sont solutions du même problème, d'où $w_{h,e}^1(\varphi_h^1) = u_{h,e}^1$, ce qui initialise la récurrence. Par unicité et linéarité, il est ensuite clair que l'on peut écrire $u_{h,e}^{n+1} = w_{h,e}^1(\varphi_h^{n+1}) + v_h^{n+1}$, où v_h^{n+1} est l'unique solution dans $V_h^r(\Omega_e)$ de :

$$\left|\begin{array}{l} a_{\Omega_e,\theta,\Delta t}(v_h^{n+1}, v_h) = a_{\Omega_e,\theta-1,\Delta t}(u_{h,e}^n, v_h) \\ v_h^{n+1}|_{\Gamma_0} = 0 \end{array}\right.$$

Supposons maintenant (6.9) satisfaite au rang n. Alors $u_{h,e}^n = \sum_{k=1}^n w_{h,e}^k(\varphi_h^{n-k+1})$, et donc par linéarité et unicité, $v_h^{n+1} = \sum_{k=1}^n v_{h,k}^{n+1}$ où les $v_{h,k}^{n+1}$ satisfont dans $V_h^r(\Omega_e)$:

$$\left| \begin{array}{l} a_{\Omega_e,\theta,\Delta t}(v_{h,k}^{n+1}, v_h) = a_{\Omega_e,\theta-1,\Delta t}(w_{h,e}^k(\varphi_{n-k+1}), v_h) \\ v_{h,k}^{n+1}|_{\Gamma_0} = 0 \end{array} \right.$$

Mais il s'agit là exactement des problèmes (6.8) (qui définissent par récurrence les $(w_{h,e}^n)$) pour $n = k$, donc $v_{h,k}^{n+1} = w_{h,e}^{k+1}(\varphi_h^{n-k+1})$ par unicité. Alors :

$$u_{h,e}^{n+1} = w_{h,e}^1(\varphi_h^{n+1}) + \sum_{k=1}^n w_{h,e}^{k+1}(\varphi_h^{n-k+1}) = \sum_{k=1}^{n+1} w_{h,e}^k(\varphi_h^{n+1-k+1})$$

□

La méthode DtN discrète part du même constat qu'au niveau continu. Étant donnée une solution $(u_{h,int}^n)_{0\le n\le N} \in V_h^r(\Omega_0)^N$ dans Ω_0 et une solution $(u_{h,e}^n)_{0\le n\le N} \in V_h^r(\Omega_e)^N$ dans Ω_e, on se demande à quelle condition :

$$\widetilde{u}_h^n = \left| \begin{array}{ll} u_{h,int}^n & \text{dans } \Omega_0 \\ u_{h,e}^n & \text{dans } \Omega_e \end{array} \right.$$

est solution de (6.3). Comme on cherche une solution globale dans $V_h^r \subset H^1(\Omega)$, il est clair que $\widetilde{u}_h^n$ doit se raccorder en trace sur Γ_0. Aussi, on doit avoir $u_{h,int}^n|_{\Gamma_0} = u_{h,e}^n|_{\Gamma_0}$ pour tout n. Mais si au niveau semi-discret le raccord en θ-dérivée normale assurait le fait d'être solution globale et permettait de définir les bons opérateurs DtN, au niveau discret, pour les mêmes raisons que dans le cas harmonique, ce sont donc des raccords au sens faible qu'il nous faut utiliser. On construit aisément un opérateur de relèvement η_h tel que $v_h - \eta_h^0(v_h|_{\Gamma_0}) \in V_{h,0}^r(\Omega_e)$ et pour tout $w_h \in V_{h,0}^r(\Omega_e)$:

$$(v_h - \eta_h(v_h|_{\Gamma_0}), w_h)_{L^2(\Omega_e)} = (v_h, w_h)_{L^2(\Omega_e)}$$

en posant : $\eta_h(v_h|_{\Gamma_0})|_{\Omega^-} = \eta_h^{0,-}(v_h|_{\Gamma_0})|_{\Omega^-}$ et $\eta_h(v_h|_{\Gamma_0})|_{\Omega^+} = \eta_h^{0,+}(v_h|_{\Gamma_0})|_{\Omega^+}$. Alors, pour tout $v_h \in V_h^r(\Omega)$, nous pouvons écrire :

$$a_{\Omega,\theta,\Delta t}(\widetilde{u}_h^n, v_h) = a_{\Omega_0,\theta,\Delta t}(\widetilde{u}_h^n, v_h) + a_{\Omega_e,\theta,\Delta t}(\widetilde{u}_h^n, v_h)$$

Dans le domaine extérieur, on obtient :

$$\begin{aligned} a_{\Omega_e,\theta,\Delta t}(\widetilde{u}_h^n, v_h) &= a_{\Omega_e\theta,\Delta t}(u_{h,e}^n, v_h) \\ &= a_{\Omega^e,\theta,\Delta t}(u_{h,e}^n, v_h - \eta_h(v_h|_{\Gamma_0})) + a_{\Omega_e,\theta,\Delta t}(u_{h,e}^n, \eta_h(v_h|_{\Gamma_0})) \\ &= a_{\Omega_e,\theta,\Delta t}(u_{h,e}^n, \eta_h(v_h|_{\Gamma_0})) \end{aligned}$$

Par conséquent, afin d'être solution de (6.3), on devra avoir :

$$\begin{aligned} a_{\Omega_0,\theta,\Delta t}(u_{h,int}^{n+1}, v_h) - a_{\Omega_0,\theta-1,\Delta t}(u_{h,int}^n, v_h) - \left(\Delta t f^{n+\theta}, v_h\right)_{L^2(\Omega_0)} \\ + a_{\Omega_e,\theta,\Delta t}(u_{h,e}^{n+1}, \eta_h(v_h|_{\Gamma_0})) - a_{\Omega_e,\theta-1,\Delta t}(u_{h,e}^n, \eta_h(v_h|_{\Gamma_0})) = 0 \end{aligned}$$

C'est la quantité faisant intervenir Ω_e (les deux derniers termes) qui vient remplacer la condition de raccord des dérivées normales, et l'on se convainc aisément que ce n'est là rien d'autre que la dérivée normale de $u_{h,e}^{n+\theta}$, mais au sens faible. Nous allons bien entendu utiliser la décomposition en temps, pour réexprimer les divers termes qui font intervenir Ω_e :

$$a_{\Omega_e,\theta,\Delta t}(u_{h,e}^n, \eta_h(v_h|_{\Gamma_0})) = \sum_{k=1}^n a_{\Omega_e,\theta,\Delta t}(w_{h,e}^k(\varphi_h^{n-k+1}), \eta_h(v_h|_{\Gamma_0}))$$

On définit les $\Lambda^n_{h,e}$ comme les traces normales au sens faible des $w^n_{h,e}$, à savoir :

$$\begin{aligned} \Lambda^n_{h,e} : (X^r_h)^2 &\longrightarrow (X^r_h)^2 \\ \varphi_h &\longmapsto \Lambda^n_{h,e}\varphi_h \end{aligned}$$

défini comme l'unique solution dans $(X^r_h)^2$ pour tout $\psi_h \in (X^r_h)^2$ de :

$$\left(\Lambda^n_{h,e}\varphi_h, \psi_h\right)_{L^2(\Gamma_0)} = a_{\Omega_e,\theta,\Delta t}(w^n_{h,e}(\varphi_h), \eta_h(\psi_h)) - a_{\Omega_e,\theta-1,\Delta t}(w^{n-1}_{h,e}(\varphi_h), \eta_h(\psi_h))$$

Ce problème est effectivement bien posé puisque le second membre définit une forme bilinéaire continue sur X^r_h en vertu des lemmes 4.2, 3.2 et du théorème 6.3. Alors à φ_h fixé, par équivalence des normes sur $V^r_h(\Omega_e)$, il existe un unique $\Lambda^n_{h,e}\varphi_h$ continu tel que :

$$\left(\Lambda^n_{h,e}\varphi_h, \psi_h\right)_{L^2(\Gamma_0)} = a_{\Omega_e,\theta,\Delta t}(w^n_{h,e}(\varphi_h), \eta_h(\psi_h)) - a_{\Omega_e,\theta-1,\Delta t}(w^{n-1}_{h,e}(\varphi_h), \eta_h(\psi_h))$$

en vertu du théorème de Riesz. La condition ci-dessus se réécrit :

$$\begin{aligned} a_{\Omega_0,\theta,\Delta t}(u^{n+1}_{h,int}, v_h) - a_{\Omega_0,\theta,\Delta t}(u^n_{h,int}, v_h) - \left(\Delta t f^{n+\theta}, v_h\right)_{L^2(\Omega_0)} \\ + \sum_{k=1}^{n+1} \left(\Lambda^k_{h,e} u^{n+1-k+1}_{h,int}|_{\Gamma_0}, v_h|_{\Gamma_0}\right)_{L^2(\Gamma_0)} = 0 \end{aligned}$$

Bien entendu, c'est cette relation qui va définir le problème intérieur discret :

Théorème 6.5. *Sous les hypothèses (H), le problème intérieur :*
Trouver $(u^n_{h,int})_{0\le n\le N} \in V^r_h(\Omega_0)^N$ solution de, pour tout $v_h \in V^r_h(\Omega_0)$:

$$\left| \begin{array}{l} a_{\Omega_0,\theta,\Delta t}(u^{n+1}_{h,int}, v_h) - a_{\Omega_0,\theta-1,\Delta t}(u^n_{h,int}, v_h) - \left(\Delta t f^{n+\theta}, v_h\right)_{L^2(\Omega_0)} \\ + \sum_{k=1}^{n+1} \left(\Lambda^k_{h,e} u^{n+1-k+1}_{h,int}|_{\Gamma_0}, v_h|_{\Gamma_0}\right)_{L^2(\Gamma_0)} = 0 \\ u^0_{h,int} = u^0_h = I_h u_0 \end{array} \right. \tag{6.10}$$

est bien posé et est équivalent au problème (6.3) *au sens où si $(u^n_h)_{0\le n\le N}$ est la solution de* (6.3)*, alors pour tout n, on a : $u^n_{h,int} = u^n_h|_{\Omega_0}$.*

Démonstration. Il est clair par construction que la solution $(u^n_h|_{\Omega_0})_{0\le n\le N}$ de (6.3) est solution de (6.10). Puis, si $(u^n_{h,int})_{0\le n\le N}$ est solution de (6.10), et $(u^n_{h,e})_{0\le n\le N}$ associée à la famille de données $(u^n_{h,int}|_{\Gamma_0})_{0\le n\le N}$, alors en vertu des calculs précédents :

$$\widetilde{u}^n_h = \left| \begin{array}{ll} u^n_{h,int} & \text{dans } \Omega_0 \\ u^n_{h,e} & \text{dans } \Omega_e \end{array} \right.$$

est solution de (6.3). L'unicité de ce dernier problème donne alors l'unicité pour le problème (6.10), on a donc forcément : $u^n_{h,int} = u^n_h|_{\Omega_0}$. □

Une conséquence immédiate est le résultat de convergence discret suivant :

Corollaire 6.1. *Sous les hypothèses du théorème 6.2, on a :*

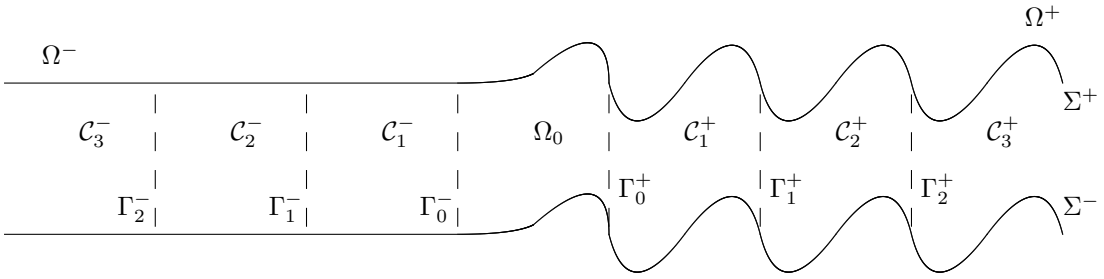
$$||u(\cdot, n\Delta t) - u^n_{h,int}||_{L^2_\rho(\Omega_0)} \le C(\Delta t + h^2) \tag{6.11}$$

C'est la grande force de notre réinterprétation du problème intérieur ainsi construit en la restriction d'un problème abstrait posé sur un maillage infini, puisque les résultats de convergence et de stabilité du problème abstrait, relativement classiques à établir puisque l'on ne doit pas gérer de conditions aux limites exotiques, se transportent directement sur le problème intérieur. En revanche, une démonstration directe du corollaire 6.1, qui ne passerait pas par le problème abstrait (6.3), serait beaucoup plus complexe à obtenir.

Bien entendu, dans le contexte des guides périodiques, nous allons réécrire encore une fois les problèmes extérieurs et opérateurs DtN discrets à partir des problèmes de demi-guide. On introduit donc, pour tout $\varphi_h \in X_h^r$, les deux familles $(w^n_{h,\pm}(\varphi_h))_{0\leq n\leq N} \in V_h^r(\Omega^\pm)^N$ solution pour tout $v_h \in V^r_{h,0}(\Omega^\pm)$ des problèmes de demi-guide :

$$\left|\begin{array}{ll} a_{\Omega^\pm,\theta,\Delta t}(w_{h,\pm}(\varphi_h)^{n+1}, v_h) = a_{\Omega^\pm,\theta,\Delta t}(w_{h,\pm}(\varphi_h)^{n}, v_h) & \\ w^1_{h,\pm}(\varphi_h)|_{\Gamma_0^\pm} = \varphi_h & \\ w^0_{h,\pm}(\varphi_h) = 0 & \\ w^n_{h,\pm}(\varphi_h)|_{\Gamma_0^\pm} = 0 & n \neq 1 \end{array}\right. \tag{6.12}$$

qui sont bien posés en vertu du théorème 6.3.



Par unicité, il est clair que si on décompose chaque $\varphi_h \in X_h^r(\Gamma_0)$ en :

$$\varphi_h = \left(\varphi_h|_{\Gamma_0^-}, \varphi_h|_{\Gamma_0^+}\right)$$

alors :

$$w^n_{h,e}(\varphi_h)|_{\Omega^\pm} = w^n_{h,\pm}(\varphi_h^{pm})$$

comme au niveau continu en espace. On pose alors :

$$\begin{array}{rccc} \Lambda^n_{h,\pm} : & X_h^r & \longrightarrow & X_h^r \\ & \varphi_h & \longmapsto & \Lambda^n_{h,\pm}\varphi_h \end{array}$$

défini comme l'unique solution dans X_h^r pour tout $\psi_h \in X_h^r$ de :

$$\left(\Lambda^n_{h,\pm}\varphi_h, \psi_h\right)_{L^2(\Gamma_0^\pm)} = a_{\Omega^\pm,\theta,\Delta t}(w^n_{h,\pm}(\varphi_h), \eta_h^{0,\pm}(\psi_h)) - a_{\Omega^\pm,\theta-1,\Delta t}(w^{n-1}_{h,\pm}(\varphi_h), \eta_h^{0,\pm}(\psi_h))$$

Alors le problème intérieur pourra encore se réécrire :

$$\begin{aligned} a_{\Omega_0,\theta,\Delta t}(u^{n+1}_{h,int}, v_h) - a_{\Omega_0,\theta,\Delta t}(u^n_{h,int}, v_h) - \left(\Delta t f^{n+\theta}, v_h\right)_{L^2(\Omega_0)} & \\ + \sum_{k=1}^{n+1} \left(\Lambda^k_{h,-} u^{n+1-k+1}_{h,int}|_{\Gamma_0^-}, v_h|_{\Gamma_0^-}\right)_{L^2(\Gamma_0^-)} & \\ + \sum_{k=1}^{n+1} \left(\Lambda^k_{h,+} u^{n+1-k+1}_{h,int}|_{\Gamma_0^+}, v_h|_{\Gamma_0^+}\right)_{L^2(\Gamma_0^+)} = 0 & \end{aligned}$$

Nous pouvons donc de nouveau nous contenter de résoudre indépendamment les deux familles de problèmes de demi-guide périodiques (6.12), comme au niveau continu en espace.

6.1.4 Résolution des problèmes de demi-guide discrets

De nouveau, nous nous contenterons d'expliquer la méthode sur le demi-guide de droite, et nous oublierons les indices + dans toute cette sous-section. Nous rappelons les notations pour le demi-guide sur la figure 6.2.

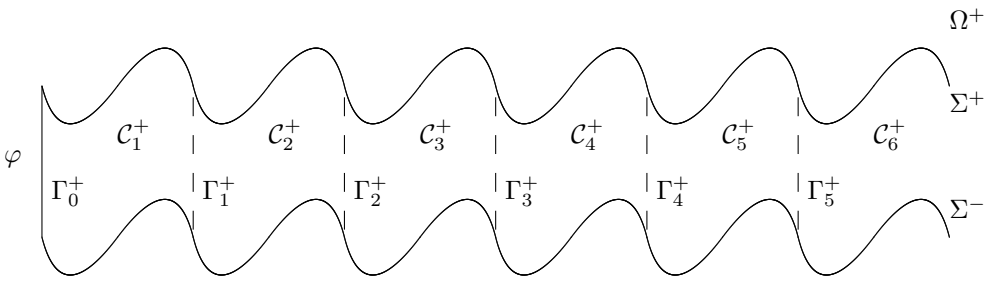


Figure 6.2 – Demi-guide Ω^+

Le premier pas de temps

Comme dans le cas semi-discret en temps, nous débutons cette étude par le cas du premier pas de temps. Comme nous l'avions déjà remarqué au niveau semi-discret, le premier pas de temps est formellement équivalent au cas de l'équation de Helmholtz, étudié en première partie de ce mémoire. Aussi, comme nous avons pu observer qu'il s'agissait d'une tâche assez longue et technique que de reproduire la méthode de [37] au niveau discret, nous allons nous contenter, pour le premier pas de temps, de rappeler les résultats du chapitre 3, mais adaptés au cas du premier pas de temps, et nous renverrons systématiquement à ce chapitre pour les démonstrations. Par analogie, on introduit le premier propagateur :

$$\begin{aligned} R_{h,1} : X_h^r &\longrightarrow X_h^r \\ \varphi_h &\longmapsto w_h^1(\varphi_h)|_{\Gamma_1^+} \end{aligned}$$

et on retrouve une structure pour $w_h^1(\varphi_h)$ qui fait intervenir $R_{h,1}$:

Théorème 6.6. *Pour tout $\varphi_h \in X_h^r$ et tout $j \geq 0$, on a :*

$$\tau_{jL^+}(w_h^1(\varphi_h)) = w_h^1(R_{h,1}^j \varphi) \tag{6.13}$$

ce qui s'écrit aussi :

$$w_h^1(\varphi)|_{\mathcal{C}_{j+1}^+} = w_h^1(R_{h,1}^j \varphi)|_{\mathcal{C}_1^+} \tag{6.14}$$

De plus, l'opérateur $R_{h,1}$ est de rayon spectral strictement inférieur à 1.

Puis, nous pouvons, toujours par analogie avec le cas de l'équation de Helmholtz, introduire les problèmes de cellule nécessaires à la réduction du problème à un domaine borné. On rappelle que :

$$V_{h,0}^r(\mathcal{C}^+) = \left\{ v_h \in V_h^r(\mathcal{C}^+) \ \mid \ v_h|_{\Gamma_0^+} = 0 = v_h|_{\Gamma_1^+} \right\}$$

Alors, pour tout $\varphi_h \in X_h^r$, les solutions dans $V_h^r(\mathcal{C}^+)$ des problèmes de cellule discrets sont définies par :

$$\left|\begin{array}{ll} a_{\mathcal{C}^+,\theta,\Delta t}(e_{h,0}(\varphi_h), v_h) = 0 & \forall\, v_h \in V_{h,0}^r(\mathcal{C}^+) \\ e_{h,0}(\varphi_h) = \varphi_h & \text{sur } \Gamma_0^+ \\ e_{h,0}(\varphi_h) = 0 & \text{sur } \Gamma_1^+ \end{array}\right. \tag{6.15}$$

$$\left|\begin{array}{ll} a_{\mathcal{C}^+,\theta,\Delta t}(e_{h,1}(\varphi_h), v_h) = 0 & \forall\, v_h \in V_{h,0}^r(\mathcal{C}^+) \\ e_{h,1}(\varphi_h) = 0 & \text{sur } \Gamma_0^+ \\ e_{h,1}(\varphi_h) = \varphi_h & \text{sur } \Gamma_1^+ \end{array}\right. \tag{6.16}$$

problèmes bien posés en vertu du théorème 6.3. Alors, $w_h^1(\varphi_h)|_{\mathcal{C}_1}$ étant solution du même problème que $e_h^0(\varphi_h) + e_h^1(R_h\varphi_h)$ par linéarité, on obtient par unicité :

$$w_h^1(\varphi_h)|_{\mathcal{C}_1^+} = e_{h,0}(\varphi_h) + e_{h,1}(R_{h,1}\varphi_h) \tag{6.17}$$

et, en appliquant (6.14), on en déduit facilement que :

$$w_h^1(\varphi_h)|_{\mathcal{C}_j^+} = e_{h,0}(R_{h,1}^{j-1}\varphi) + e_{h,1}(R_{h,1}^{j}\varphi) \tag{6.18}$$

soit les mêmes formules que dans le cas continu en espace. Ne reste donc plus qu'à retrouver au niveau discret une équation du type (5.11) pour déterminer $R_{h,1}$ de manière unique. Les équivalents discrets des opérateurs T_{ij}, définis comme la dérivée normale au sens faible des $e_{h,i}$ sur les frontières Γ_j^+, sont donnés par :

$$\begin{array}{rcl} T_{h,00} : X_h^r & \longrightarrow & X_h^r \\ \varphi_h & \longmapsto & T_{h,00}\varphi_h \end{array}$$

où $T_{h,00}\varphi_h$ est l'unique solution dans X_h^r de :

$$(T_{h,00}\varphi_h, \psi_h)_{L^2(\Gamma)} = a_{\mathcal{C}^+,\theta,\Delta t}(e_{h,0}(\varphi_h), \eta_h^0(\psi_h))$$

$$\begin{array}{rcl} T_{h,01} : X_h^r & \longrightarrow & X_h^r \\ \varphi_h & \longmapsto & T_{h,01}\varphi_h \end{array}$$

où $T_{h,01}\varphi_h$ est l'unique solution dans X_h^r de :

$$(T_{h,01}\varphi_h, \psi_h)_{L^2(\Gamma)} = a_{\mathcal{C}^+,\theta,\Delta t}(e_{h,0}(\varphi_h), \eta_h^1(\psi_h))$$

$$\begin{array}{rcl} T_{h,10} : X_h^r & \longrightarrow & X_h^r \\ \varphi_h & \longmapsto & T_{h,10}\varphi_h \end{array}$$

où $T_{h,10}\varphi_h$ est l'unique solution dans X_h^r de :

$$(T_{h,10}\varphi_h, \psi_h)_{L^2(\Gamma)} = a_{\mathcal{C}^+,\theta,\Delta t}(e_{h,1}(\varphi_h), \eta_h^0(\psi_h))$$

$$\begin{array}{rcl} T_{h,11} : X_h^r & \longrightarrow & X_h^r \\ \varphi_h & \longmapsto & T_{h,11}\varphi_h \end{array}$$

où $T_{h,11}\varphi_h$ est l'unique solution dans X_h^r de :

$$(T_{h,11}\varphi_h, \psi_h)_{L^2(\Gamma)} = a_{\mathcal{C}^+,\theta,\Delta t}(e_{h,1}(\varphi_h), \eta_h^1(\psi_h))$$

On retrouve bien entendu l'équation quadratique exprimant le raccord en dérivée normale au sens faible :

Théorème 6.7. *L'opérateur $R_{h,1}$ est l'unique solution de rayon spectral strictement inférieur à 1 de l'équation quadratique :*

$$T_{h,10}R_{h,1}^2 + (T_{h,00} + T_{h,11})R_{h,1} + T_{h,01} = 0 \tag{6.19}$$

Le premier pas de temps discret se traite donc exactement comme son homologue continu, à condition de remplacer les traces normales par leurs équivalents faibles. On en déduit immédiatement une expression pour le premier opérateur DtN :

Théorème 6.8. *On a l'expression suivante pour Λ_h^1*

$$\Lambda_h^1 = T_{h,00} + T_{h,10}R_{h,1} \tag{6.20}$$

Pas de temps suivants

Forts de ce succès, nous nous tournons vers les pas de temps suivants. Bien qu'il puisse d'ores et déjà apparaître évident que les résultats du cas continu en espace vont se transposer au cas discret, il convient de procéder avec quelques précautions, afin de bien identifier les équivalents discrets des $\theta-$dérivées normales qui intervenaient dans la définition des divers opérateurs de cellule dans le cas continu.

On se rappelle que l'on cherche à résoudre :

$$\left|\begin{array}{ll} a_{\Omega^\pm,\theta,\Delta t}(w_h(\varphi_h)^{n+1}, v_h) = a_{\Omega^\pm,\theta,\Delta t}(w_h(\varphi_h)^n, v_h) & \\ w_h(\varphi_h)^1|_{\Gamma_0^\pm} = \varphi_h & \\ w_h(\varphi_h)^0 = 0 & \\ w_h(\varphi_h)^n|_{\Gamma_0^\pm} = 0 & n \neq 1 \end{array}\right. \tag{6.12}$$

On introduit comme nous en avons maintenant l'habitude les propagateurs :

$$\begin{array}{rcl} R_{h,n} : X_h^r & \longrightarrow & X_h^r \\ \varphi_h & \longmapsto & w_h^n(\varphi_h)|_{\Gamma_1^+} \end{array}$$

Alors, on retrouve sans surprise véritable le résultat fondamental de propagation :

Théorème 6.9. *Pour tout $\varphi \in H^{1/2}(\Gamma^+)$, on a :*

$$\tau_{L^+}(w_h^n(\varphi_h)) = \sum_{k=1}^{n} w_h^k(R_{h,n-k+1}\varphi_h) \tag{6.21}$$

Démonstration. On procède par récurrence. Celle-ci est déjà initialisée par la formule (5.11). Pour tout $\varphi_h \in X_h^r$, on considère la fonction :

$$\nu_h^n(\varphi_h) = \tau_{L_x}(w_h^n(\varphi_h))$$

Puis, pour tout $v_h \in V_{h,0}^r(\Omega_W^+)$, on étend $\tau_{-L_x}(v_h)$ dans $\mathcal{C}_1^+$ par 0 afin d'obtenir un élément de $V_h^0(\Omega^+)$. On définit alors :

$$\widetilde{v}_h = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{dans } \mathcal{C}_1^+ \\ \tau_{-L_x}(v_h) & \text{dans } \Omega_1^+ \end{array}\right.$$

Alors en procédant comme dans la preuve du théorème 6.6, on montre aisément que :

$$a_{\Omega^+,\theta,\Delta t}(\nu_h(\varphi_h), v_h) = a_{\Omega^+,\theta,\Delta t}(w_h^n(\varphi_h), \widetilde{v}_h)$$

On en déduit que :

$$a_{\Omega^+,\theta,\Delta t}(\nu_h^{n+1}(\varphi_h), v_h) = a_{\Omega^+,\theta-1,\Delta t}(\nu_h^n(\varphi_h), \widetilde{v}_h)$$

comme $w_{h,e}^n(\varphi_h)$ est solution de (6.12). De plus, nous avons :

$$\nu_h^{n+1}(\varphi_h)|_{\Gamma_0} = R_{h,n+1}\varphi_h$$

On suppose ensuite (6.21) vérifiée au rang n. Alors $\nu_h^n(\varphi_h) = \sum_{k=1}^{n} w_h^k(R_{h,n-k+1}\varphi_h)$, et par linéarité et unicité on obtient alors :

$$\nu_h^{n+1}(\varphi_h) = w_h^1(R_{h,n+1}\varphi_h\varphi_h) + \sum_{k=1}^{n} w_h^{k+1}(R_{h,n-k+1}\varphi_h) = \sum_{k=1}^{n+1} w_h^k(R_{h,n+1-k+1}\varphi_h)$$

soit la formule demandée. □

En poursuivant l'analogie avec le cas continu, on doit donc ensuite introduire un nouveau problème de cellule afin d'exprimer la solution cellule par cellule uniquement en fonction des solutions des problèmes de cellule et des propagateurs R_n. On considèrera donc l'opérateur :

$$\begin{array}{rcl} E_h : V_h^r(\mathcal{C}^+) & \longrightarrow & V_{h,0}^r(\mathcal{C}^+) \\ f_h & \longmapsto & E_h f_h \end{array}$$

où $E_h f_h$ est l'unique solution (en vertu du théorème 6.3 dans $V_h^r(\mathcal{C}_1^+)$ de :

$$\left| \begin{array}{ll} a_{\mathcal{C}^+,\theta,\Delta t}(E_h f_h, v_h) = a_{\mathcal{C}^+,\theta-1,\Delta t}(f_h, v_h) & \forall\, v_h \in V_{h,0}^r(\mathcal{C}^+) \\ E_h f_h = 0 & \text{sur } \Gamma_0^+ \\ E_h f_h = 0 & \text{sur } \Gamma_1^+ \end{array} \right. \tag{6.22}$$

Alors par unicité, en procédant comme pour les formules (6.17) et (6.18), il est clair que l'on a, pour tout $n \geq 2$:

$$w_h^n(\varphi_h)|_{\mathcal{C}_1^+} = E_h(w_h^{n-1}(\varphi_h)|_{\mathcal{C}_1^+}) + e_{h,1}(R_{h,n}\varphi_h) \tag{6.23}$$

De manière plus générale, on a :

$$w_h^n(\varphi_h)|_{\mathcal{C}_j^+} = E_h(w_h^{n-1}(\varphi_h)|_{\mathcal{C}_j^+}) + e_{h,0}(w_h^n(\varphi_h)|_{\Gamma_{j-1}^+}) + e_{h,1}(w_h^n(\varphi_h)|_{\Gamma_j^+}) \tag{6.24}$$

soit formellement les mêmes formules de calcul qu'au niveau continu. Ne reste plus qu'à retrouver une équation caractéristique pour $R_{h,n}$. Bien entendu, c'est le raccord discret (à savoir le raccord des dérivées normales au sens faible) qui va nous fournir cette équation. En poussant l'analogie avec le cas continu, on voit qu'il est nécessaire d'introduire les opérateurs :

$$\begin{array}{rcl} T_{h,0} : V_h^r(\mathcal{C}^+) & \longrightarrow & X_h^r \\ f_h & \longmapsto & T_{h,0} f_h \end{array}$$

où $T_{h,0} f_h$ est l'unique solution dans X_h^r de :

$$(T_{h,0} f_h, \psi_h)_{L^2(\Gamma^+)} = a_{\mathcal{C}_1^+,\theta,\Delta t}(E_h f_h, \eta_h^0(\psi_h)) - a_{\mathcal{C}_1^+,\theta-1,\Delta t}(f_h, \eta_h^0(\psi_h))$$

$$\begin{array}{rcl} T_{h,1} : V_h^r(\mathcal{C}^+) & \longrightarrow & X_h^r \\ f_h & \longmapsto & T_{h,1} f_h \end{array}$$

où $T_{h,1} f_h$ est l'unique solution dans X_h^r de :

$$(T_{h,1} f_h, \psi_h)_{L^2(\Gamma^+)} = a_{\mathcal{C}_1^+,\theta,\Delta t}(E_h f_h, \eta_h^1(\psi_h)) - a_{\mathcal{C}_1^+,\theta-1,\Delta t}(f_h, \eta_h^1(\psi_h))$$

Puis, afin d'alléger les notations, on introduit encore un objet spécifique pour désigner la restriction à la première cellule :

$$\begin{array}{rcl} W_h^n : X_h^r & \longrightarrow & V_h^r(\mathcal{C}_1^+) \\ \varphi & \longmapsto & w_h^n(\varphi)|_{\mathcal{C}_1^+} \end{array}$$

On commence par donner les formules de calcul des $\Lambda_{h,e}^n$ à partir de l'ensemble de ces opérateurs :

Théorème 6.10. *On a l'expression suivante pour Λ_e^n, $n \geq 2$:*

$$\Lambda_h^n = T_{h,0} W_h^{n-1} + T_{h,10} R_{h,n} \tag{6.25}$$

Démonstration. On a par définition :

$$(\Lambda_h^n \varphi_h, \psi_h)_{L^2(\Gamma^+)} = a_{\Omega^+,\theta,\Delta t}(w_h^n(\varphi_h), \eta_h^0(\psi_h)) - a_{\Omega^+,\theta-1,\Delta t}(w_h^{n-1}(\varphi_h), \eta_h^0(\psi_h))$$

Puis :

$$a_{\Omega^+,\theta,\Delta t}(w_h^n(\varphi_h), \eta_h^0(\psi_h)) = a_{\mathcal{C}_1^+,\theta,\Delta t}(w_h^n(\varphi_h), \eta_h^0(\psi_h))$$

au vu du support de $\eta_h^0(\psi_h)$. Enfin, on a :

$$a_{\mathcal{C}_1^+,\theta,\Delta t}(w_{h,e}^n(\varphi_h), \eta_h^0(\psi_h)) = a_{\mathcal{C}_1^+,\theta,\Delta t}(E_h W w_h^{n-1}(\varphi_h), \eta_h^0(\psi_h))$$

$$+ a_{\mathcal{C}_1^+,\theta,\Delta t}(e_{h,1}(R_{h,n}\varphi_h), \eta_h^0(\psi_h))$$

et donc :

$$(\Lambda_h^n \varphi_h, \psi_h)_{L^2(\Gamma^+)} = a_{\mathcal{C}_1^+,\theta,\Delta t}(E_h W w_h^{n-1}(\varphi_h), \eta_h^0(\psi_h)) + a_{\mathcal{C}_1^+,\theta,\Delta t}(e_{h,1}(R_{h,n}\varphi_h), \eta_h^0(\psi_h))$$

$$- a_{\mathcal{C}_1^+,\theta-1,\Delta t}(w_h^{n-1}(\varphi_h), \eta_h^0(\psi_h))$$

soit précisément :

$$(\Lambda_h^n \varphi_h, \psi_h)_{L^2(\Gamma^+)} = \Big((T_{h,0} W_h^{n-1} + T_{h,10} R_{h,n})\varphi_h, \psi_h \Big)_{L^2(\Gamma^+)}$$

□

Si nous anticipons légèrement sur la forme de l'équation caractéristique, on s'attend à ce qu'elle soit de la forme :

$$(T_{h,11} + \Lambda_h^1) R_{h,n} + T_{h,10} R_{h,n} R_{h,1} = F_h$$

Établissons l'inversibilité de l'opérateur linéaire sous-jacent :

Lemme 6.4. *L'opérateur :*

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{L}(X_h^r) & \longrightarrow & \mathcal{L}(X_h^r) \\ X_h & \longmapsto & (T_{h,11} + \Lambda_h^1) X_h + T_{h,10} X_h R_{h,1} \end{array}$$

est inversible.

Démonstration. Nous n'allons en réalité démontrer que l'injectivité, la dimension finie de X_h^r faisant le reste du travail pour nous. On procède exactement comme dans la preuve du lemme 5.2, mais au niveau variationnel, comme nous en avons maintenant l'habitude.

Supposons qu'il existe un opérateur $X_h \in \mathcal{L}(X_h^r)$ tel que :

$$(T_{h,11} + \Lambda_h^1) X_h + T_{h,10} X_h R_{h,1} = 0$$

Pour tout $\varphi_h \in X_h^r$, nous allons montrer que dans ce cas on peut construire à partir de $X_h \varphi_h$ une solution $v_h(\varphi_h) \in V_h^r(\Omega^+)$ au problème :

$$\left| \begin{array}{ll} a_{\Omega^+,\theta,\Delta t}(v_h(\varphi_h), w_h) = 0 & \forall\, w_h \in V_{h,0}^r(\Omega^+) \\ v_h(\varphi_h) = 0 & \text{sur } \Gamma_0^+ \\ v_h(\varphi_h) = X_h \varphi_h & \text{sur } \Gamma_1^+ \end{array} \right.$$

d'où l'on déduira que $X_h\varphi_h = 0$. En procédant comme pour les formules (3.12) et (3.13), on voit qu'une telle fonction v_h vérifie nécessairement (elle est solution des formulations variationnelles associées dans chaque cellule) :

$$v_h(\varphi_h)|_{\mathcal{C}_j^+} = e_{h,0}(v_h(\varphi_h)|_{\Gamma_{j-1}}) + e_{h,1}(v_h(\varphi_h)|_{\Gamma_j^+})$$

Dans la première cellule, les conditions aux limites imposent

$$v_h(\varphi_h)|_{\mathcal{C}_1^+} = e_{h,1}(X_h\varphi_h)$$

La question est maintenant de savoir s'il est possible de déterminer des valeurs pour les $v_h(\varphi_h)|_{\Gamma_j^+}$ de sorte que l'on ait continuité en trace sur chaque Γ_j^+, ainsi que le raccord correspondant à la forme faible des dérivées normales. On procède par récurrence. Par analogie avec le cas continu, on propose la formule générale : $v_h(\varphi_h)|_{\mathcal{C}_j^+} = e_0(D_{j-1}(R_{h,1}, X_h)\varphi_h) + e_{h,1}(D_j(R_{h,1}, X_h)\varphi_h)$, où on rappelle que pour simplifier les manipulations, nous avons posé $D_0 = 0$ et :

$$D_j(R, X) = \sum_{p=0}^{j-1} R^p X R^{j-1-p}$$

De plus, on a :

$$D_{j+1}(R, X) = RD_j(R, X) + XR^j \quad \text{et} \quad D_{j+1}(R, X) = D_j(R, X)R + R^j X$$

On démontre maintenant notre formule par récurrence, comme nous avons déjà initialisé celle-ci. Supposons la formule vraie au rang j. Alors, la continuité en trace impose :

$$v_h(\varphi_h)|_{\mathcal{C}_{j+1}^+} = e_{h,0}(D_j(R_{h,1}, X_h)\varphi_h) + e_{h,1}(v_h(\varphi_h)|_{\Gamma_{j+1}^+})$$

En reprenant les calculs de la démonstration du théorème 6.7, on aboutit à, pour tout $w_h \in V_{h,0}^r(\Omega^+)$:

$$a_{\mathcal{C}_1^+,\theta,\Delta t}(v_h(\varphi_h)|_{\mathcal{C}_j^+}, w_h|_{\mathcal{C}_j^+}) = \left(\left(T_{h,00}v_h(\varphi_h)|_{\Gamma_{j-1}^+} + T_{h,10}v_h(\varphi_h)|_{\Gamma_j^+}\right)\varphi_h, w_h|_{\Gamma_{j-1}^+}\right)_{L^2(\Gamma^+)}$$
$$+ \left(\left(T_{h,01}v_h(\varphi_h)|_{\Gamma_{j-1}^+} + T_{h,11}v_h(\varphi_h)|_{\Gamma_j^+}\right)\varphi_h, w_h|_{\Gamma_j^+}\right)_{L^2(\Gamma^+)}$$

On souhaite que les termes en $v_h|_{\Gamma_j^+}$ se compensent en sommant sur j, ce qui se réécrit, en utilisant la formule de récurrence :

$$T_{h,01}D_{j-1}(R_{h,1}, X_h) + T_{h,11}D_j(R_{h,1}, X_h)\varphi_h = -T_{h,00}D_j(R_{h,1}, X_h)\varphi_h - T_{h,10}v_h(\varphi)|_{\Gamma_{j+1}^+}$$

ce qui se réécrit, en utilisant la première propriété de D_j :

$$(T_{h,00}+T_{h,11})R_{h,1}D_{j-1}(R_{h,1}, X_h)\varphi_h + T_{h,01}R_{h,1}D_{j-1}(R_{h,1}, X_h) + (T_{h,00}+T_{h,11})X_hR_{h,1}^j\varphi_h = -T_{h,10}v_h(\varphi_h)|_{\Gamma_{j+1}^+}$$

L'équation satisfaite par X_h donne :

$$(T_{h,00} + T_{h,11})X_hR_{h,1}^j\varphi_h = -T_{h,10}R_{h,1}X_hR_{h,1}^j\varphi_h - T_{h,10}X_hR_{h,1}^{j+1}\varphi_h$$

tandis que l'équation (6.19) satisfaite par $R_{h,1}$ donne :

$$(T_{h,00} + T_{h,11})R_{h,1}D_{j-1}(R_{h,1}, X_h)\varphi_h + T_{h,01}D_{j-1}(R_{h,1}, X_h)\varphi_h = -T_{h,10}R_{h,1}^2D_{j-1}(R_{h,1}, X_h)\varphi_h$$

Aussi, nous devons vérifier : $T_{h,10}v_h(\varphi_h)|_{\Gamma_{j+1}^+} = T_{h,10}\left(R_{h,1}X_hR_{h,1}^j + X_hR_{h,1}^{j+1} + R_{h,1}^2D_{j-1}(R_{h,1}, X_h)\right)\varphi_h$
ce qui, en utilisant la première propriété de D_j conduit à :

$$v_h(\varphi_h)|_{\Gamma_{j+1}^+} = \left(X_hR_{h,1}^{j+1} + R_{h,1}D_j(R_{h,1}, X)\right)\varphi_h$$

La deuxième propriété de D_j donne finalement : $v_h(\varphi_h)|_{\Gamma_{j+1}^+} = D_{j+1}(R_{h,1}, X_h)\varphi$, et la formule est démontrée.

De cette formule, on déduit que : $||v_h(\varphi_h)|_{\mathcal{C}_j^+}||^2_{H^1(\mathcal{C}^+)} \leq C(X)\left(||R_{h,1}||^{2j} + ||R_{h,1}||^{2(j-1)}\right)$, donc $v_h(\varphi_h)$ appartient $H^1(\Omega_+)$, et dans ce cas à $V_h^r(\Omega^+)$ par construction. Aussi, nous avons construit une solution avec donnée zéro sur Γ_0^+, ce qui implique $v_h(\varphi_h) = 0$ par unicité, et en particulier $X_h\varphi_h = 0$ pour tout $\varphi_h \in X_h^r$, ce qui signifie précisément que $X_h = 0$ et conclut la démonstration. □

On démontre alors que $R_{h,n}$ est l'unique solution d'une équation caractéristique formellement identique à celle satisfaite par R_n au niveau continu, et qui exprime le raccord faible en dérivée normale de $w_h^{n+\theta}$:

Théorème 6.11. *Pour tout $n \geq 2$, $R_{h,n}$ est l'unique solution dans $\mathcal{L}(X_h^r)$ de :*

$$(T_{h,11} + \Lambda_h^1)R_{h,n} + T_{h,10}R_{h,n}R_{h,1} + T_{h,1}W_h^{n-1} + T_{h,0}W_h^{n-1}R_{h,1} + \sum_{k=2}^{n-1} \Lambda_h^k R_{h,n-k+1} = 0 \qquad (6.26)$$

Démonstration. En vertu du lemme 6.4, il est clair qu'il existe une unique solution à cette équation. Nous n'avons donc plus qu'à montrer qu'il s'agit de $R_{h,n}$. On procède initialement comme dans la preuve du théorème 3.8. Soit $v_h \in V_{h,0}^r(\Omega^+)$ telle que $supp\ v_h \subset \Omega^+ \cap \{a_+ \leq x < a_+ + 2L_x\}$. Alors :

$$v_h|_{\mathcal{C}_1^+} = v_h^1 + \eta_h^1(v_h|_{\Gamma_1^+}) \quad \text{et} \quad v_h|_{\mathcal{C}_2^+} = v_h^2 + \eta_h^0(v_h|_{\Gamma_1})$$

où v_h^1 et v_h^2 appartiennent à $V_{h,0}^r(\mathcal{C}_1^+)$. Ensuite, pour tout $n \geq 1$ on a comme $v_h \in V_{h,0}^r(\Omega^+)$:

$$a_{\Omega^+,\theta,\Delta t}(w_h^{n+1}(\varphi_h), v_h) = a_{\Omega^+,\theta-1,\Delta t}(w_h^n(\varphi_h), v_h)$$

ce qui se réécrit

$$a_{\mathcal{C}_1^+,\theta,\Delta t}(w_h^{n+1}(\varphi_h), v_h) + a_{\mathcal{C}_2^+,\theta,\Delta t}(w_h^{n+1}(\varphi_h), v_h) = a_{\mathcal{C}_1^+,\theta-1,\Delta t}(w_h^n(\varphi_h), v_h) + a_{\mathcal{C}_2^+,\theta-1,\Delta t}(w_h^n(\varphi_h), v_h)$$

au vu du support de v_h. Alors avec les notations ci-dessus, on a aussi, en identifiant les diverses cellules de périodicité à la cellule de référence $\mathcal{C}_1^+$:

$$\begin{aligned}
&a_{\mathcal{C}_1^+,\theta,\Delta t}(w_h^{n+1}(\varphi_h)|_{\mathcal{C}_1^+}, v_h^1) + a_{\mathcal{C}_1^+,\theta,\Delta t}(w_h^{n+1}(\varphi_h)|_{\mathcal{C}_1^+}, \eta_h^1(v_h|_{\Gamma_1^+})) \\
&+a_{\mathcal{C}_1^+,\theta,\Delta t}(w_h^{n+1}(\varphi_h)|_{\mathcal{C}_2^+}, v_h^2) + a_{\mathcal{C}_1^+,\theta,\Delta t}(w_h^{n+1}(\varphi_h)|_{\mathcal{C}_2^+}, \eta_h^0(v_h|_{\Gamma_1^+})) \\
&= a_{\mathcal{C}_1^+,\theta-1,\Delta t}(w_h^n(\varphi_h)|_{\mathcal{C}_1^+}, v_h^1) + a_{\mathcal{C}_1^+,\theta-1,\Delta t}(w_h^n(\varphi_h)|_{\mathcal{C}_1^+}, \eta_h^1(v_h|_{\Gamma_1^+})) \\
&+a_{\mathcal{C}_1^+,\theta-1,\Delta t}(w_h^n(\varphi_h)|_{\mathcal{C}_2^+}, v_h^2) + a_{\mathcal{C}_1^+,\theta-1,\Delta t}(w_h^n(\varphi_h)|_{\mathcal{C}_2^+}, \eta_h^0(v_h|_{\Gamma_1^+}))
\end{aligned}$$

Il s'agit maintenant de réexprimer chacun de ces morceaux en utilisant les divers problèmes de cellule, tout en essayant de séparer la dépendance en $R_{h,n+1}$ des autres termes (puisque l'on cherche une équation en cette quantité). Remarquons tout d'abord, qu'en vertu de (6.24), on a pour tout $n \geq 2$:

$$w_h^n(\varphi_h)|_{\mathcal{C}_j^+} = E_h(w_h^{n-1}(\varphi_h)|_{\mathcal{C}_j^+}) + e_{h,0}(w_h^n(\varphi_h)|_{\Gamma_{j-1}^+}) + e_{h,1}(w_h^n(\varphi_h)|_{\Gamma_j^+})$$

ce qui implique donc que tous les termes en v_h^1 et v_h^2 sont nuls comme v_h^1 et v_h^2 appartiennent à $V_{h,0}^r(\mathcal{C}_1^+)$. Aussi, l'identité précédente se réduit à :

$$\begin{aligned}
&a_{\mathcal{C}_1^+,\theta,\Delta t}(w_h^{n+1}(\varphi_h)|_{\mathcal{C}_1^+}, \eta_h^1(v_h|_{\Gamma_1^+})) + a_{\mathcal{C}_1^+,\theta,\Delta t}(w_h^{n+1}(\varphi_h)|_{\mathcal{C}_2^+}, \eta_h^0(v_h|_{\Gamma_1^+})) \\
&-a_{\mathcal{C}_1^+,\theta-1,\Delta t}(w_h^n(\varphi_h)|_{\mathcal{C}_1^+}, \eta_h^1(v_h|_{\Gamma_1^+})) - a_{\mathcal{C}_1^+,\theta-1,\Delta t}(w_h^n(\varphi_h)|_{\mathcal{C}_2^+}, \eta_h^0(v_h|_{\Gamma_1^+})) = 0
\end{aligned}$$

Nous allons regrouper les différents termes en fonction de la cellule à laquelle ils correspondent. On utilise (6.23) pour la premiere cellule :

$$\begin{aligned}
&a_{\mathcal{C}_1^+,\theta,\Delta t}(w_h^{n+1}(\varphi_h)|_{\mathcal{C}_1^+}, \eta_h^1(v_h|_{\Gamma_1^+})) - a_{\mathcal{C}_1^+,\theta-1,\Delta t}(w_h^n(\varphi_h)|_{\mathcal{C}_1^+}, \eta_h^1(v_h|_{\Gamma_1^+})) \\
&= a_{\mathcal{C}_1^+,\theta,\Delta t}(E_h W_h^n \varphi_h, \eta_h^1(v_h|_{\Gamma_1^+})) - a_{\mathcal{C}_1^+,\theta-1,\Delta t}(W_h^n \varphi_h, \eta_h^1(v_h|_{\Gamma_1^+})) + a_{\mathcal{C}_1^+,\theta,\Delta t}(e_{h,1}(R_{h,n+1}\varphi_h)|_{\mathcal{C}_1^+}, \eta_h^1(v_h|_{\Gamma_1^+}))
\end{aligned}$$

Mais ceci est exactement :

$$\left(T_{h,1}W_h^n\varphi_h, v_h|_{\Gamma_1^+}\right)_{L^2(\Gamma^+)} + \left(T_{h,11}\varphi_h, v_h|_{\Gamma_1^+}\right)_{L^2(\Gamma^+)}$$

Comme au niveau continu, le terme dans la seconde cellule est plus délicat à traiter. Une partie de la dépendance en $R_{h,n+1}$ apparaît directement si on utilise la formule de propagation (6.21) :

$$w_h^{n+1}(\varphi_h)|_{\mathcal{C}_2^+} = \tau_{L^+}(w_h^{n+1}(\varphi_h))|_{\mathcal{C}_1^+} = \sum_{k=2}^{n} W_h^k R_{h,n+1-k+1}\varphi_h + W_h^{n+1}R_{h,1}\varphi_h + W_h^1 R_{h,n+1}\varphi_h$$

Puis on réutilise (6.23) afin de faire apparaître explicitement le reste de la dépendance en $R_{h,n+1}$ caché dans le terme $W_h^{n+1}(R_{h,1}\varphi_h)$:

$$w_h^{n+1}(\varphi_h)|_{\mathcal{C}_2^+} = \sum_{k=2}^{n} W_h^k R_{h,n+1-k+1}\varphi_h + +E_h(W_h^n R_{h,1}\varphi) + e_{h,1}(R_{h,n+1}R_{h,1}\varphi_h)$$

On a également en vertu de (6.21) :

$$w_h^n(\varphi_h)|_{\mathcal{C}_2^+} = \tau_{L^+}(w_h^n(\varphi_h))|_{\mathcal{C}_1^+} = \sum_{k=1}^{n} W_h^k R_{h,n-k+1}\varphi_h$$

qui se réécrit (en anticipant le regroupement des deux sommes que nous allons faire immédiatement après) :

$$w_h^n(\varphi_h)|_{\mathcal{C}_2^+} = \sum_{k=2}^{n} W_h^{k-1} R_{h,n+1-k+1}\varphi_h + W_h^n R_{h,1}\varphi_h$$

On reporte alors tout ceci dans nos termes pris sur la deuxième cellule :

$$\begin{aligned}
&a_{\mathcal{C}_1^+,\theta,\Delta t}(w_h^{n+1}(\varphi_h)|_{\mathcal{C}_2^+}, \eta_h^0(v_h|_{\Gamma_1^+})) - a_{\mathcal{C}_1^+,\theta-1,\Delta t}(w_h^n(\varphi_h)|_{\mathcal{C}_2^+}, \eta_h^0(v_h|_{\Gamma_1^+})) \\
&= \sum_{k=2}^{n} a_{\mathcal{C}_1^+,\theta,\Delta t}(W_h^k R_{h,n+1-k+1}\varphi_h, \eta_h^0(v_h|_{\Gamma_1^+})) - \sum_{k=2}^{n} a_{\mathcal{C}_1^+,\theta-1,\Delta t}(W_h^{k-1} R_{h,n+1-k+1}\varphi_h, \eta_h^0(v_h|_{\Gamma_1^+})) \\
&\quad + a_{\mathcal{C}_1^+,\theta,\Delta t}(E_h(W_h^n R_{h,1}\varphi), \eta_h^0(v_h|_{\Gamma_1^+})) a_{\mathcal{C}_1^+,\theta-1,\Delta t}(W_h^n R_{h,1}\varphi_h, \eta_h^0(v_h|_{\Gamma_1^+})) \\
&\quad + a_{\mathcal{C}_1^+,\theta,\Delta t}(e_{h,1}(R_{h,n+1}R_{h,1}\varphi_h), \eta_h^0(v_h|_{\Gamma_1^+}))
\end{aligned}$$

Alors en identifiant chacun des termes, on reconnaît :

$$\begin{aligned}
&a_{\mathcal{C}_1^+,\theta,\Delta t}(w_h^{n+1}(\varphi_h)|_{\mathcal{C}_2^+}, \eta_h^0(v_h|_{\Gamma_1^+})) - a_{\mathcal{C}_1^+,\theta-1,\Delta t}(w_h^n(\varphi_h)|_{\mathcal{C}_2^+}, \eta_h^0(v_h|_{\Gamma_1^+})) \\
&= \sum_{k=2}^{n} \left(\Lambda_h^k R_{h,n+1-k+1}, v_h|_{\Gamma_1^+}\right)_{L^2(\Gamma^+)} + \left(T_{h,0} W_h^n R_{h,1}, v_h|_{\Gamma_1^+}\right)_{L^2(\Gamma^+)} + \left(T_{h,10} R_{h,n+1} R_{h,1}\varphi_h, v_h|_{\Gamma_1^+}\right)_{L^2(\Gamma^+)}
\end{aligned}$$

Alors, en sommant les deux termes, et comme $v_h|_{\Gamma_1^+}$ parcourt tout X_h^r, on obtient bien :

$$(T_{h,11} + \Lambda_h^1) R_{h,n+1}\varphi_h + T_{h,10} R_{h,n+1} R_{h,1}\varphi_h + T_{h,1} W_h^n \varphi_h + T_{h,0} W_h^n R_{h,1}\varphi_h + \sum_{k=2}^{n} \Lambda_{h,e}^k R_{h,n+1-k+1}\varphi_h = 0$$

pour tout φ_h, et par conséquent :

$$(T_{h,11} + \Lambda_h^1) R_{h,n+1} + T_{h,10} R_{h,n+1} R_{h,1} + T_{h,1} W_h^n + T_{h,0} W_h^n R_{h,1} + \sum_{k=2}^{n} \Lambda_h^k R_{h,n+1-k+1} = 0$$

soit l'identité annoncée. □

L'ensemble des résultats que nous avions obtenus au niveau semi-discret se transposent donc au niveau discret, sous une forme formellement identique. Cette construction théorique, certes fastidieuse, des opérateurs DtN complètement discrets présente l'avantage de nous montrer que ce que l'on calcule ainsi est la restriction à Ω_0 de ce que l'on aurait obtenu par un calcul (irréalisable) sur un maillage infini. Nos conditions aux limites méritent alors bien leur nom de transparentes, même au niveau discret, les seules approximations induites par notre méthode se révélant être les classiques erreurs dues à l'approximation en temps et en espace.

6.1.5 Le cas du scattering multiple

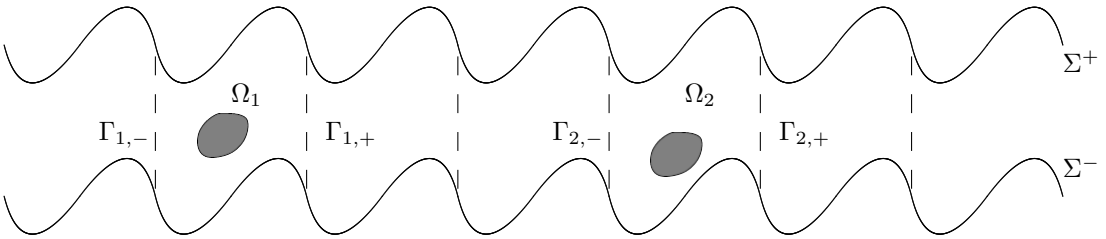
Avant de passer aux résultats numériques, nous concluons l'analyse numérique de la méthode par l'étude du cas avec plusieurs défauts. Nous reprenons la situation géométrique de scattering multiple présentée à la fin de la section précédente. Les coefficients vérifient :

$$\rho(x + L_x) = \rho(x) \quad \forall \ (x, x + L_x) \notin \Omega_0$$

et

$$V(x + L_x) = V(x) \quad \forall \ (x, x + L_x) \notin \Omega_0$$

On construit alors le maillage du guide dans cette nouvelle configuration, ainsi que les divers maillages locaux, comme nous l'avons fait dans le chapitre 3. En effet, on suppose que l'on dispose d'un maillage $\mathcal{T}_h^j$ de chacun des défauts Ω_j, qui possède les mêmes propriétés que les maillages de domaine borné introduit précedemment (à savoir la conformité vis-à-vis des diverses formes de périodicité). N'ayant plus qu'un seul type de périodicité, on ne considère plus qu'un seul maillage de cellule $\mathcal{T}_h^+$. On construit alors le maillage $\mathcal{T}_h$ en concaténant ces maillages en respectant la géométrie, et l'espace



V_h^r que l'on en déduit possède alors exactement les mêmes propriétés que dans le cas précédent. On définit alors tous les sous-espaces utiles comme précedemment, par restriction des éléments de V_h^r aux différents sous-ensembles du maillage. Alors bien entendu, le problème discret définit par :

Trouver $(u_h^n)_{0\leq n\leq N} \in (V_h^r)^{N+1}$ solution de la récurrence suivante :

$$\left|\begin{array}{l} \big((\rho+\theta\Delta t V)u_h^{n+1}, v_h\big)_{L^2(\Omega)} + \big(\theta\Delta t\nabla u_h^{n+1}, \nabla v_h\big)_{L^2(\Omega)} = \big(f^{n+\theta}, v_h\big)_{L^2(\Omega)} \\ +((\rho+(\theta-1)\Delta t V)u_h^n, v_h)_{L^2(\Omega)} + ((\theta-1)\Delta t\nabla u_h^n, \nabla v_h)_{L^2(\Omega)} \\ u_h^0 = I_h u_0 \end{array}\right. \tag{6.3}$$

est bien posé en vertu du théorème 6.1 et il sera stable et convergeant en vertu du théorème 6.2 (qui s'appliquent directement dans ce cas). De plus, avec cette fois $\Gamma_0 = \bigcup_{j=1}^{N_s}\Gamma_j$, il est clair que le problème extérieur associé :

Pour tout $(\varphi_h^n)_{1\leq n\leq N} \in X_h^r(\Gamma_0)^N = (X_h^r)^{2NN_s}$, trouver $(u_{h,e}^n)_{0\leq n\leq N} \in V_h^r(\Omega_e)^{N+1}$ telle que, pour tout $v_h \in V_{h,0}^r(\Omega_e) = \{v_h \in V_h^r(\Omega_e) \mid v_h|_{\Gamma_0} = 0\}$:

$$\left|\begin{array}{l} a_{\Omega_e,\theta,\Delta t}(u_{h,e}^{n+1}, v_h) = a_{\Omega_e,\theta-1,\Delta t}(u_{h,e}^n, v_h) \\ u_{h,e}^{n+1}|_{\Gamma_0} = \varphi_h^{n+1} \end{array}\right. \tag{6.7}$$

sera également bien posé par une légère modification du théorème 6.3. Enfin, le problème extérieur va bien évidemment encore une fois se décomposer en introduisant, pour tout $\varphi_h \in (X_h^r)^{2N_s}$, la famille $(w_{h,e}^n(\varphi_h))_{0\leq n\leq N} \in V_h^r(\Omega_e)^{N+1}$ solution de, pour tout $v_h \in V_{h,0}^r(\Omega_e)$:

$$\left|\begin{array}{ll} a_{\Omega_e,\theta,\Delta t}(w_{h,e}^{n+1}(\varphi_h), v_h) = a_{\Omega_e,\theta-1,\Delta t}(w_{h,e}^n(\varphi_h), v_h) & \\ w_{h,e}^1(\varphi_h)|_{\Gamma_0} = \varphi_h & \\ w_{h,e}^0(\varphi_h) = 0 & \\ w_{h,e}^n(\varphi_h)|_{\Gamma_0} = 0 & n \neq 1 \end{array}\right. \tag{6.8}$$

qui sera encore bien posé, et :

$$u_{h,e}^n = \sum_{k=1}^{n} w_{h,e}^k(\varphi_h^{n-k+1}) \tag{6.9}$$

Puis, on rappelle qu'en vertu du lemme 3.2, on peut construire des opérateurs de relèvement $\widetilde{\eta}_h^{j,\pm}$ à partir de chacune des frontières verticales $\Gamma_{j,\pm}$ des Ω_j, tels que leur support ne dépasse pas une cellule au delà de la frontière $\Gamma_{j,\pm}$ et donc :

$$supp\ \widetilde{\eta}_h^{j,\pm}(u_h|_{\Gamma_{j,\pm}}) \cap supp\ \widetilde{\eta}_h^{i,\pm}(u_h|_{\Gamma_{i,\pm}}) = \emptyset$$

Sur le bord $\Gamma_0 = \bigcup_{j=1}^{N_s}\Gamma_j$, nous pouvons donc définir sans ambiguïté l'opérateur de relèvement :

$$\eta_h^e(u_h|_{\Gamma_0}) = \sum_{j=1}^{N_s} \widetilde{\eta}_h^{j,-}(u_h|_{\Gamma_{j,-}}) + \widetilde{\eta}_h^{j,+}(u_h|_{\Gamma_{j,+}})$$

les divers termes pour des j différents n'interagissant pas entre eux. Alors en définissant les opérateurs DtN par :

$$\begin{array}{rcl} \Lambda^n_{h,e} : (X^r_h)^{2N_s} & \longrightarrow & (X^r_h)^{2N_s} \\ \varphi_h & \longmapsto & \Lambda^n_{h,e}\varphi_h \end{array}$$

défini comme l'unique solution dans $(X^r_h)^{2N_s}$ pour tout $\psi_h \in (X^r_h)^{2N_s}$ de :

$$\left(\Lambda^n_{h,e}\varphi_h, \psi_h\right)_{L^2(\Gamma_0)} = a_{\Omega_e,\theta,\Delta t}(w^n_{h,e}(\varphi_h), \eta^e_h(\psi_h)) - a_{\Omega_e,\theta-1,\Delta t}(w^{n-1}_{h,e}(\varphi_h), \eta^e_h(\psi_h))$$

Il est alors clair que le problème intérieur :

Trouver $(u^n_{h,int})_{0\leq n\leq N} \in V^r_h(\Omega_e)^{N+1}$ solution de, pour tout $v_h \in V^r_h(\Omega_0)$:

$$\begin{array}{l} a_{\Omega_0,\theta,\Delta t}(u^{n+1}_{h,int}, v_h) - a_{\Omega_0,\theta-1,\Delta t}(u^n_{h,int}, v_h) - \left(\Delta t f^{n+\theta}, v_h\right)_{L^2(\Omega_0)} \\ + \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \left(\Lambda^k_{h,e} u^{n+1-k+1}_{h,int}|_{\Gamma_0}, v_h|_{\Gamma_0}\right)_{L^2(\Gamma_0)} = 0 \end{array} \tag{6.10}$$

est équivalent au problème discret initial posé dans V^r_h. La seule question restant alors en suspens est de savoir si les résultats de décomposition que nous avions obtenus au niveau continu sont encore valables au niveau discret, auquel cas nous pourrons calculer les opérateurs $\Lambda^n_{h,e}$ via les mêmes formules que celles données par le théorème 5.7, mais avec les équivalents discrets des opérateurs Θ^n_{ij} et $\widetilde{\Lambda}^n_{ij}$. On introduit donc les problèmes extérieurs à chaque Ω_j, Pour tout $(\varphi^n_h)_{1\leq n\leq N} \in (X^r_h)^{2N}$, trouver $(u^n_{h,e,j})_{0\leq n\leq N} \in V^r_h(\Omega_e)^{N+1}$ telle que, pour tout $v_h \in V^r_{h,0}(\Omega \setminus \overline{\Omega_j}) = \left\{v_h \in V^r_h(\Omega \setminus \overline{\Omega_j}) \ \middle|\ v_h|_{\Gamma_j} = 0\right\}$:

$$\left| \begin{array}{l} a_{\Omega\setminus\overline{\Omega_j},\theta,\Delta t}(u^{n+1}_{h,e,j}, v_h) = a_{\Omega\setminus\overline{\Omega_j},\theta-1,\Delta t}(u^n_{h,e,j}, v_h) \\ u^{n+1}_{h,e,j}|_{\Gamma_j} = \varphi^{n+1}_h \end{array} \right. \tag{6.27}$$

Ainsi que les fonctions qui permettent leur décomposition en temps :

Pour tout $\widetilde{\varphi}_h \in (X^r_h)^2$, trouver $(w^n_{h,e,j}(\widetilde{\varphi}_h))_{0\leq n\leq N} \in V^r_h(\Omega \setminus \overline{\Omega_j})^{N+1}$ solution de, pour tout $v_h \in V^r_{h,0}(\Omega \setminus \overline{\Omega_j})$:

$$\left| \begin{array}{ll} a_{\Omega\setminus\overline{\Omega_j},\theta,\Delta t}(w^{n+1}_{h,e,j}(\widetilde{\varphi}_h), v_h) = a_{\Omega\setminus\overline{\Omega_j},\theta-1,\Delta t}(w^n_{h,e,j}(\widetilde{\varphi}_h), v_h) & \\ w^1_{h,e,j}(\widetilde{\varphi}_h)|_{\Gamma_j} = \widetilde{\varphi}_h & \\ w^0_{h,e,j}(\widetilde{\varphi}_h) = 0 & \\ w^n_{h,e,j}(\widetilde{\varphi}_h)|_{\Gamma_j} = 0 & n \neq 1 \end{array} \right.$$

Ces deux familles de problèmes sont bien posées en vertu du théorème 6.3. On se demande alors s'il est possible d'établir au niveau discret le résultat de décomposition spatiale obtenu au niveau continu, à savoir si étant donné une famille $(\varphi^n_h)_{1\leq n\leq N} \in (X^r_h)^{2NN_s}$, il est possible de trouver une famille $(\widetilde{\varphi}^n_h)_{1\leq n\leq N} \in (X^r_h)^{2NN_s}$ telle que :

$$u^n_{h,e} = \sum_{j=1}^{N_s} u^n_{h,e,j} \tag{6.28}$$

ce qui se réécrit en utilisant les décompositions en temps :

$$\sum_{k=1}^{n} w^k_{h,e}(\varphi^{n-k+1}_h) = \sum_{j=1}^{N_s}\sum_{k=1}^{n} w^k_{h,e,j}(\widetilde{\varphi}^{n-k+1}_{h,j}) \tag{6.29}$$

On définit naturellement la famille d'opérateurs discrets, par analogie avec le cas continu :

$$\begin{aligned} \Theta^n_{h,ij} : (X^r_h)^2 &\longrightarrow (X^r_h)^2 \\ \varphi_h &\longmapsto w^n_{h,e,j}(\varphi_h)|_{\Gamma_i} \end{aligned}$$

ainsi que les opérateurs Θ^n_h comme les matrices associées :

$$\begin{aligned} \Theta^n_h : (X^r_h)^{2N_s} &\longrightarrow (X^r_h)^{2N_s} \\ \varphi_h &\longmapsto (\Theta^n_h \varphi_h)_i = \sum_{j=1}^{N_s} \Theta^n_{h,ij} \varphi_{h,j} \end{aligned}$$

On reformule alors la relation de décomposition à l'aide de ces opérateurs, comme au niveau continu, en prenant la trace sur Γ_0 :

$$\varphi^n_h = \sum_{k=1}^{n} \Theta^k_h \widetilde{\varphi}^{n-k+1}_h \tag{6.30}$$

qui se réécrit aussi :

$$\Theta^1_h \widetilde{\varphi}^n_h = \varphi^n_h - \sum_{k=2}^{n} \Theta^k_h \widetilde{\varphi}^{n-k+1}_h \tag{6.31}$$

L'existence et l'unicité de la décomposition sont donc encore liées de la même façon aux propriétés de l'opérateur Θ^1_h. Rappelons nous que dans le cas continu, nous avions remarqué que l'on pouvait réappliquer les résultats du cas harmonique à Θ_1, puisque Θ et Θ_1 étaient définis à partir du même type de problème elliptique. Nous pouvons bien entendu faire la même chose au niveau discret, et les démonstrations des diverses propriétés de Θ^1_h sont identiques à celles des mêmes propriétés pour Θ_h. Aussi, il est clair qu'en procédant comme pour le théorème 3.14, on montre que :

Théorème 6.12. *L'opérateur Θ^1_h est inversible de $(X^r_h)^{2N_s}$ vers $(X^r_h)^{2N_s}$ si et seulement si la solution du problème extérieur pour le premier pas de temps ($n = 1$) admet une unique décomposition au sens de l'équation* (6.28) *pour toute donnée φ_h. Plus précisément :*

(i) Θ^1_h surjectif $\Leftrightarrow$ existence d'une décomposition

(ii) Θ^1_h injectif $\Leftrightarrow$ unicité de la décomposition

Puis $(X^r_h)^{2N_s}$ étant de dimension finie, il suffit de vérifier l'injectivité de Θ^1_h pour obtenir (par récurrence) l'existence et l'unicité d'une décomposition. Mais encore une fois, la propriété la plus simple à démontrer est l'unicité de la décomposition au premier pas de temps (la démonstration est identique à celle du théorème 3.15) :

Théorème 6.13. *Soit $u^1_{h,e}$ la solution du problème extérieur* (6.7) *pour $n = 1$, alors s'il existe une décomposition telle que :*

$$u^1_{h,e} \equiv \sum_{i=1}^{N_S} \widetilde{u}_{h,i} \qquad \text{dans } \Omega_e, \quad \widetilde{u}_{h,i} \in V^r_h(\Omega \setminus \overline{\Omega_i})$$

et

$$a_{\Omega\setminus\overline{\Omega_i},\theta,\Delta t}(\widetilde{u}_{h,i}, v_h) = 0 \quad \forall\, v_h \in V^r_{h,0}(\Omega \setminus \overline{\Omega_j})$$

cette décomposition est unique.

On en déduit donc immédiatement, en vertu du théorème 6.12 et du théorème du rang que :

Théorème 6.14. *L'opérateur Θ^1_h est inversible de $(X^r_h)^{2N_s}$ vers $(X^r_h)^{2N_s}$.*

ainsi que le résultat de décomposition discret :

Théorème 6.15. *Pour toute donnée* $(\varphi^n)_j \in (X_h^r)^{2NN_s}$*, il existe une unique décomposition de la solution du problème extérieur* (6.7)*, pour tout* n*, au sens de la formule* (6.28)*.*

Nous reformulons alors la condition DtN discrète au moyen de ces opérateurs. On utilise la décomposition (6.29) et on applique l'opérateur de trace :

$$\sum_{k=1}^{n} w_{h,e}^k(\varphi_h^{n-k+1})|_{\Gamma_i} = \sum_{j=1}^{N_s}\sum_{k=1}^{n} w_{h,e,j}^k(\widetilde{\varphi}_{h,j}^{n-k+1})|_{\Gamma_i}$$

Alors en utilisant la définition des opérateurs $\Theta_{h,ij}^k$:

$$\sum_{k=1}^{n} w_{h,e}^k(\varphi_h^{n-k+1})|_{\Gamma_i} = \sum_{j=1}^{N_s}\sum_{k=1}^{n} \Theta_{h,ij}^k \widetilde{\varphi}_{h,j}^{n-k+1}$$

et donc :

$$\varphi_{h,i}^n = \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{n} \Theta_{h,ij}^k \widetilde{\varphi}_{h,j}^{n-k+1}$$

D'autre part, nous avons, pour tout $\psi_h \in (X_h^r)^{2N_s}$:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{\Omega_e,\theta,\Delta t}(w_{h,e}^k(\varphi_h^{n-k+1}), \eta_h^e(\psi_h))$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{N_s} a_{\Omega_e,\theta,\Delta t}(w_{h,e}^k(\varphi_h^{n-k+1}), \widetilde{\eta}_h^{i,-}(\psi_h|_{\Gamma_{i,-}})) + a_{\Omega_e,\theta,\Delta t}(w_{h,e}^k(\varphi_h^{n-k+1}), \widetilde{\eta}_h^{i,+}(\psi_h|_{\Gamma_{i,+}}))$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{N_s}\sum_{i=1}^{N_s} a_{\Omega_e,\theta,\Delta t}(w_{h,e,j}^k(\widetilde{\varphi}_{h,j}^{n-k+1}), \widetilde{\eta}_h^{i,-}(\psi_h|_{\Gamma_{i,-}}))$$

$$+ a_{\Omega_e,\theta,\Delta t}(w_{h,e,j}^k(\widetilde{\varphi}_{h,j}^{n-k+1}), \widetilde{\eta}_h^{i,+}(\psi_h|_{\Gamma_{i,+}}))$$

Mais en vertu de la propriété sur les supports des relèvements, ceci peut se réécrire :

$$= \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{N_s}\sum_{i=1}^{N_s} a_{\Omega\setminus\overline{\Omega_i},\theta,\Delta t}(w_{h,e,j}^k(\widetilde{\varphi}_{h,j}^{n-k+1}), \widetilde{\eta}_h^{i,-}(\psi_h|_{\Gamma_{i,-}}))$$

$$+ a_{\Omega\setminus\overline{\Omega_i},\theta,\Delta t}(w_{h,e,j}^k(\widetilde{\varphi}_{h,j}^{n-k+1}), \widetilde{\eta}_h^{i,+}(\psi_h|_{\Gamma_{i,+}}))$$

On introduit alors la famille :

$$\begin{aligned} \widetilde{\Lambda}_{h,ij}^n : (X_h^r)^2 &\longrightarrow (X_h^r)^2 \\ \varphi_h &\longmapsto \widetilde{\Lambda}_{h,ij}^n \varphi_h \end{aligned}$$

où $\widetilde{\Lambda}_{h,ij}^n \varphi_h$ est l'unique solution pour tout $\psi_h \in (X_h^r)^2$ de :

$$\left(\widetilde{\Lambda}_{h,ij}^n \varphi_h, \psi_h\right)_{L^2(\Gamma)} =$$

$$a_{\Omega\setminus\overline{\Omega_i},\theta,\Delta t}(w_{h,e,j}^n(\varphi_h), \eta_h^{i,-}(\psi_h|_{\Gamma_{i,-}})) - a_{\Omega\setminus\overline{\Omega_i},\theta-1,\Delta t}(w_{h,e,j}^{n-1}(\varphi_h), \eta_h^{i,-}(\psi_h|_{\Gamma_{i,-}}))$$

$$+a_{\Omega\setminus\overline{\Omega_j},\theta,\Delta t}(w^n_{h,e,j}(\varphi_h),\eta^{j,+}_h(\psi_h|_{\Gamma_{j,+}}))-a_{\Omega\setminus\overline{\Omega_j},\theta-1,\Delta t}(w^{n-1}_{h,e,j}(\varphi_h),\eta^{j,+}_h(\psi_h|_{\Gamma_{j,+}}))$$

ainsi que les matrices :

$$\begin{aligned}\widetilde{\Lambda}^n_h : (X^r_h)^{2N_s} &\longrightarrow (X^r_h)^{2N_s}\\ \varphi_h &\longmapsto \left(\widetilde{\Lambda}^n_h\varphi_h\right)_i=\sum_{j=1}^{N_s}\widetilde{\Lambda}^n_{h,ij}\varphi_{h,j}\end{aligned}$$

Alors il est clair que :

$$a_{\Omega_e,\theta,\Delta t}(u^n_{h,e},\eta^e_h(\psi_h))-a_{\Omega_e,\theta-1,\Delta t}(u^{n-1}_{h,e},\eta^e_h(\psi_h))=\sum_{k=1}^{n}\left(\Lambda^k_{h,e}\varphi^{n-k+1}_h,\psi_h\right)_{L^2(\Gamma_0)}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{N_s}\sum_{i=1}^{N_s}\left(\widetilde{\Lambda}^k_{h,ij}\widetilde{\varphi}^{n-k+1}_{h,j},\psi_h|_{\Gamma_i}\right)_{L^2(\Gamma_i)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\widetilde{\Lambda}^k_h\widetilde{\varphi}^{n-k+1}_h,\psi_h\right)_{L^2(\Gamma_0)}$$

et on obtient :

$$\varphi^n_h=\sum_{k=1}^{n}\Theta^k_h\widetilde{\varphi}^{n-k+1}_h\quad\text{et}\quad\sum_{k=1}^{n}\Lambda^k_{h,e}\varphi^{n-k+1}_h=\sum_{k=1}^{n}\widetilde{\Lambda}^k_h\widetilde{\varphi}^{n-k+1}_h$$

soit l'analogue des formules obtenues au niveau continu. On en déduit donc immédiatement le résultat suivant pour le problème intérieur :

Théorème 6.16. *Le problème intérieur* (6.10) *se réécrit dans le cas du scattering mutliple :*

$$\left|\begin{array}{l} a_{\Omega_0,\theta,\Delta t}(u^{n+1}_{h,int},v_h)-a_{\Omega_0,\theta,\Delta t}(u^n_{h,int},v_h)-\left(\Delta t f^{n+\theta},v_h\right)_{L^2(\Omega_0)}\\ +\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}\left(\widetilde{\Lambda}^k_h\widetilde{\varphi}^{n+1-k+1}_h,v_h|_{\Gamma_0}\right)_{L^2(\Gamma_0)}=0\\ u^{n+1}_{h,int}|_{\Gamma_0}=\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}\Theta^k_h\widetilde{\varphi}^{n+1-k+1}_h\end{array}\right. \tag{6.32}$$

Par équivalence, ce problème est bien évidemment encore une fois bien posé, stable et convergent. Enfin, il est clair que chacun des problèmes extérieurs à un défaut s'identifie à deux problèmes de demi-guide périodiques, comme au niveau continu, et que l'on aboutit donc au mêmes règles de calcul pour les opérateurs $\Theta^n_{h,ij}$ et $\widetilde{\Lambda}^n_{h,ij}$:

Théorème 6.17. *Pour $i=j$, les opérateurs $\Theta^n_{h,ii}$ et $\widetilde{\Lambda}^n_{h,ii}$ sont donnés par :*

$$\Theta^n_{h,ii}=\begin{pmatrix} Id & 0\\ 0 & Id\end{pmatrix}\quad et\quad \widetilde{\Lambda}^n_{h,ii}=\begin{pmatrix}\Lambda^n_{h,-} & 0\\ 0 & \Lambda^n_{h,+}\end{pmatrix}$$

Pour $i\neq j$, les opérateurs $\Theta^1_{h,ij}$ et $\widetilde{\Lambda}^1_{h,ij}$, $i\neq j$, se calculent selon la règle suivante :

. *Si Ω_i est à droite de Ω_j, i.e. si $q^i_->q^j_+$, alors :*

$$\Theta^1_{h,ij}=\begin{pmatrix}0 & (R^+_{h,1})^{q^i_- -q^j_+}\\ 0 & (R^+_{h,1})^{q^i_+ -q^j_+}\end{pmatrix}$$

et

$$\widetilde{\Lambda}^1_{h,ij}=\begin{pmatrix}0 & -T^+_{h,00}(R^+_{h,1})^{q^i_- -q^j_+}-T^+_{h,10}(R^+_{h,1})^{q^i_- -q^j_+ +1}\\ 0 & T^+_{h,00}(R^+_{h,1})^{q^i_+ -q^j_+}+T^+_{h,10}(R^+_{h,1})^{q^i_+ -q^j_+ +1}\end{pmatrix}$$

. *Si Ω_i est à gauche de Ω_j, i.e. si $q_+^i < q_-^j$, alors :*

$$\Theta^1_{h,ij} = \begin{pmatrix} (R^-_{h,1})^{q_-^j - q_-^i} & 0 \\ (R^-_{h,1})^{q_-^j - q_+^i} & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$\widetilde{\Lambda}^1_{h,ij} = \begin{pmatrix} T^-_{h,00}(R^-_{h,1})^{q_-^j - q_-^i} + T^-_{h,10}(R^-_{h,1})^{q_-^j - q_-^i + 1} & 0 \\ -T^-_{h,00}(R^-_{h,1})^{q_-^j - q_+^i} - T^-_{h,10}(R^-_{h,1})^{q_-^j - q_+^i + 1} & 0 \end{pmatrix}$$

Puis, pour tout $n > 1$, on pose :

$$\begin{array}{rcl} W^\pm_{h,n,j} : H^{1/2}(\Gamma^\pm) & \longrightarrow & H^1(\mathcal{C}^\pm) \\ \varphi & \longmapsto & w^n_{h,\pm}(\varphi)|_{\mathcal{C}^\pm_j} \end{array}$$

la restriction à la $j-$ième cellule et

$$\begin{array}{rcl} R^\pm_{h,n,j} : H^{1/2}(\Gamma^\pm) & \longrightarrow & H^{1/2}(\Gamma^\pm) \\ \varphi & \longmapsto & w^n_{h,\pm}(\varphi)|_{\Gamma^\pm_j} \end{array}$$

la trace sur la $j-$ième frontière verticale. Alors :

$$R^\pm_{h,n,j} = \sum_{k=1}^{n} R^\pm_{h,k,j-1} R^\pm_{h,n-k+1,1}$$

et les opérateurs $\Theta^n_{h,ij}$ et $\widetilde{\Lambda}^n_{h,ij}$, $i \neq j$, se calculent selon la règle suivante :

. *Si Ω_i est à droite de Ω_j, i.e. si $q_-^i > q_+^j$, alors :*

$$\Theta^n_{h,ij} = \begin{pmatrix} 0 & R^+_{h,n,q_-^i - q_+^j} \\ 0 & R^+_{h,n,q_+^i - q_+^j} \end{pmatrix}$$

et

$$\widetilde{\Lambda}^n_{h,ij} = \begin{pmatrix} 0 & -T^+_{h,00}R^+_{h,n,q_-^i - q_+^j} - T^+_{h,10}R^+_{h,n,q_-^i - q_+^j + 1} - T^+_{h,0}W^+_{h,n-1,q_-^i - q_+^j + 1} \\ 0 & T^+_{h,00}R^+_{h,n,q_+^i - q_+^j} + T^+_{h,10}R^+_{h,n,q_+^i - q_+^j + 1} + T^+_{h,0}W^+_{h,n-1,q_+^i - q_+^j + 1} \end{pmatrix}$$

. *Si Ω_i est à gauche de Ω_j, i.e. si $q_+^i < q_-^j$, alors :*

$$\Theta^n_{h,ij} = \begin{pmatrix} R^-_{h,n,q_-^j - q_-^i} & 0 \\ R^-_{h,n,q_-^j - q_+^i} & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$\widetilde{\Lambda}^n_{h,ij} = \begin{pmatrix} T^-_{h,00}R^-_{h,n,q_-^j - q_-^i} + T^-_{h,10}R^-_{h,n,q_-^j - q_-^i + 1} + T^-_{h,0}W^-_{h,n-1,q_-^j - q_-^i + 1} & 0 \\ -T^-_{h,00}R^-_{h,n,q_-^j - q_+^i} - T^-_{h,10}R^-_{h,n,q_-^j - q_+^i + 1} - T^-_{h,0}W^-_{h,n-1,q_-^j - q_+^i + 1} & 0 \end{pmatrix}$$

Démonstration. La preuve est identique à celle du théorème 5.7, en remplaçant tout les opérateurs continus par leurs équivalents discrets, aussi nous ne la reproduisons pas ici. □

6.1.6 Résultats numériques

Nous allons maintenant illustrer les résultats de ce chapitre pour le premier ordre en temps par des simulations numériques. Bien que la résolution soit restreinte à Ω_0, nous pouvons sans peine reconstruire la solution cellule par cellule au moyen de la formule (6.24), les traces sur chaque frontière verticale s'obtenant en utilisant la formule de propagation (6.21) comme dans le théorème précédent, c'est-à-dire :

$$R^{\pm}_{h,n,j} = \sum_{k=1}^{n} R^{\pm}_{h,k,j-1} R^{\pm}_{h,n-k+1,1}$$

C'est pourquoi nous représenterons la solution sur un domaine plus large que le seul défaut la plupart du temps, la reconstruction pouvant sans peine être effectuée a posteriori, sans alourdir les calculs. Notre objectif, au delà de vérifier le bon fonctionnement de la méthode va être de nous atteler à illustrer le fait qu'appliquer la méthode au niveau discret est équivalent à résoudre le problème sur un maillage infini. Pour cela, nous commençons par un cas très particulier de "guide", à savoir le cas monodimensionnel (il n'y aura donc pas de frontière). Ceci nous permettra d'utiliser des solutions exactes aussi bien que des solutions numériques pour valider notre méthode, et offre d'agréables possibilités de visualisation.

Résultats dans le cas monodimensionnel

Nous considérons comme cellule de périodicité le segment $]0,1[$, et nous prendrons un défaut de taille 1. Nous utilisons un maillage uniforme des divers domaines, de pas $h = 0.1$, et nous emploierons des éléments finis d'ordre r élevé pour obtenir plus de précision en espace. Nous commençons par le cas de l'équation de la chaleur, tout d'abord en milieu homogène $\rho = 1$, sans défaut, et nous utilisons une donnée initiale u_0 donnée par :

$$u_0 = \left| \begin{array}{ll} A e^{-\frac{(x-c_x)^2}{w_x^2}} & \text{dans } \Omega_0 \\ 0 & \text{dans } \mathbb{R}^2 \setminus \Omega_0 \end{array} \right. \tag{6.33}$$

avec $A = 3$, $c_x = 0.5$ et $w_x = 0.2$. Nous comparons la solution donnée par notre méthode à la solution exacte sur les figures 6.3 et 6.4.

On constate que l'approximation est excellente, et que les conditions aux limites sur les bords du défaut (matérialisé par les lignes verticales) sont effectivement transparentes. Toujours en milieu homogène, nous comparons maintenant la solution donnée par notre méthode à une solution numérique posée sur un très grand domaine homogène (50 périodes de part et d'autre du défaut), avec conditions de Dirichlet homogènes au bord de ce domaine. La solution numérique ainsi obtenue est proche de ce que l'on aurait obtenu sur un domaine infini (du fait de la décroissance de la solution), et nous pouvons donc l'utiliser pour vérifier, avec une marge raisonnable, que notre méthode correspond bien à une résolution sur un domaine infini. Les résultats sont présentés sur les figures 6.6 et 6.5.

On ne constate aucune différence notable entre ces deux solutions, ce qui confirme le bon fonctionnement de la méthode, de même que notre réinterprétation théorique comme la résolution sur un domaine infini.

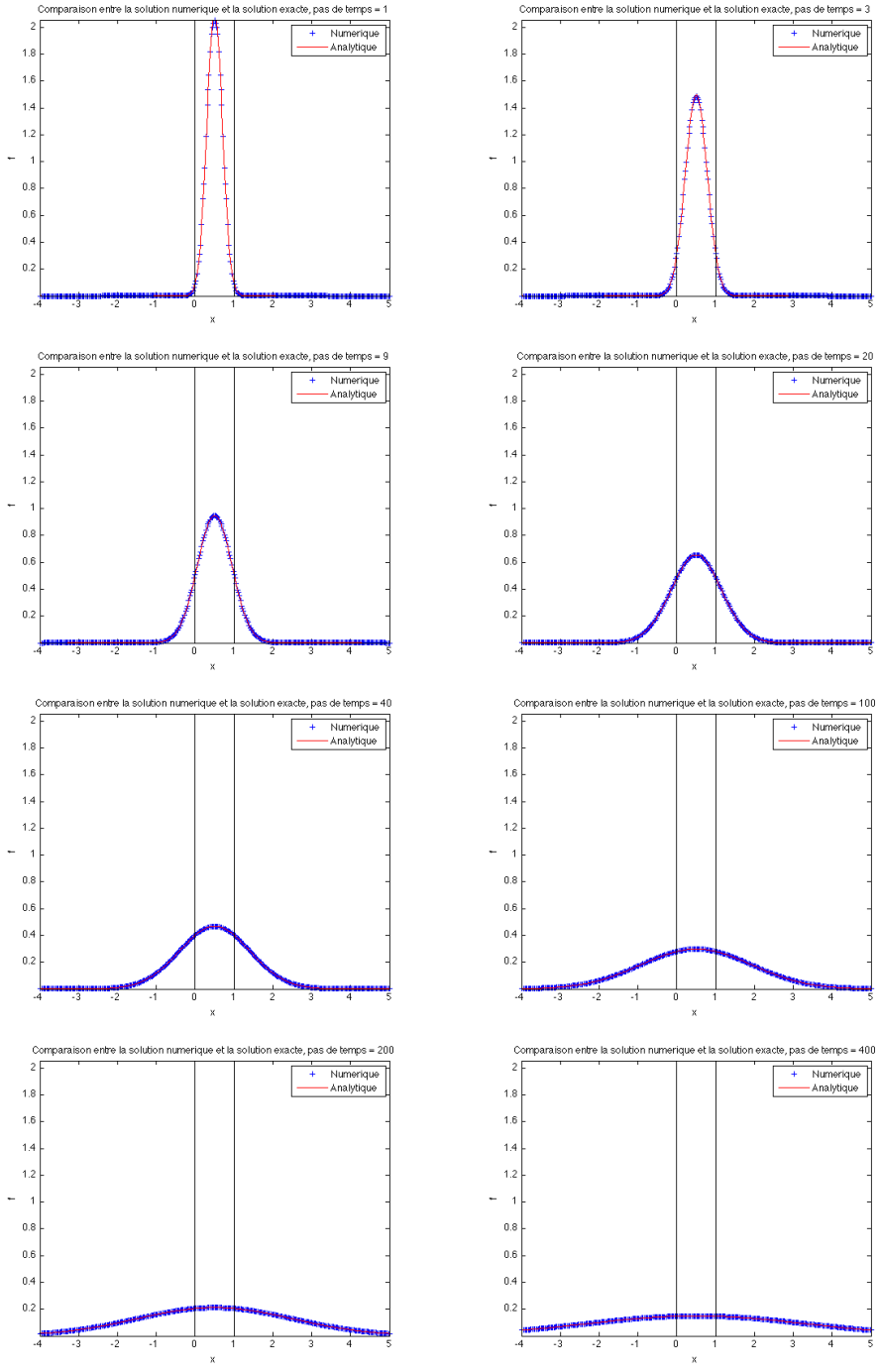


FIGURE 6.3 – Comparaison entre la solution exacte et la solution donnée par la méthode pour $r = 4$, $\theta = 0.5$, $\Delta t = 0.01$, pour $t = 0.01, 0.03, 0.09, 0.2, 0.4, 1, 2$ et 4

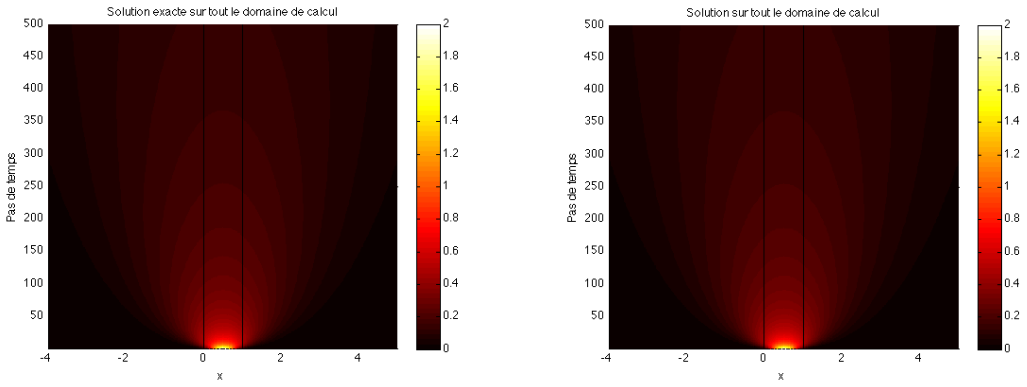


FIGURE 6.4 – Comparaison entre la solution exacte et la solution donnée par la méthode pour $r = 4$, $\theta = 0.5$, $\Delta t = 0.01$, sur l'ensemble de la durée de simulation : à gauche, solution exacte, à droite, solution numérique

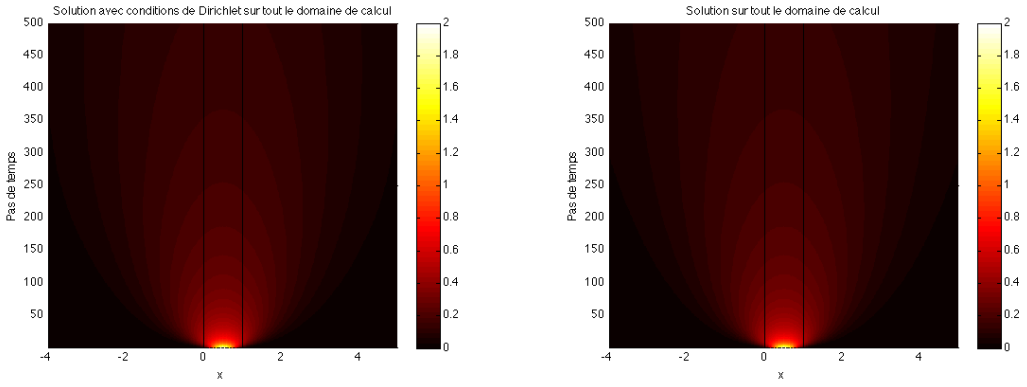


FIGURE 6.5 – Comparaison entre la solution numérique sur un grand domaine avec conditions de Dirichlet et la solution donnée par la méthode pour $r = 4$, $\theta = 0.5$, $\Delta t = 0.01$, sur l'ensemble de la durée de simulation : à gauche, solution exacte, à droite, solution numérique

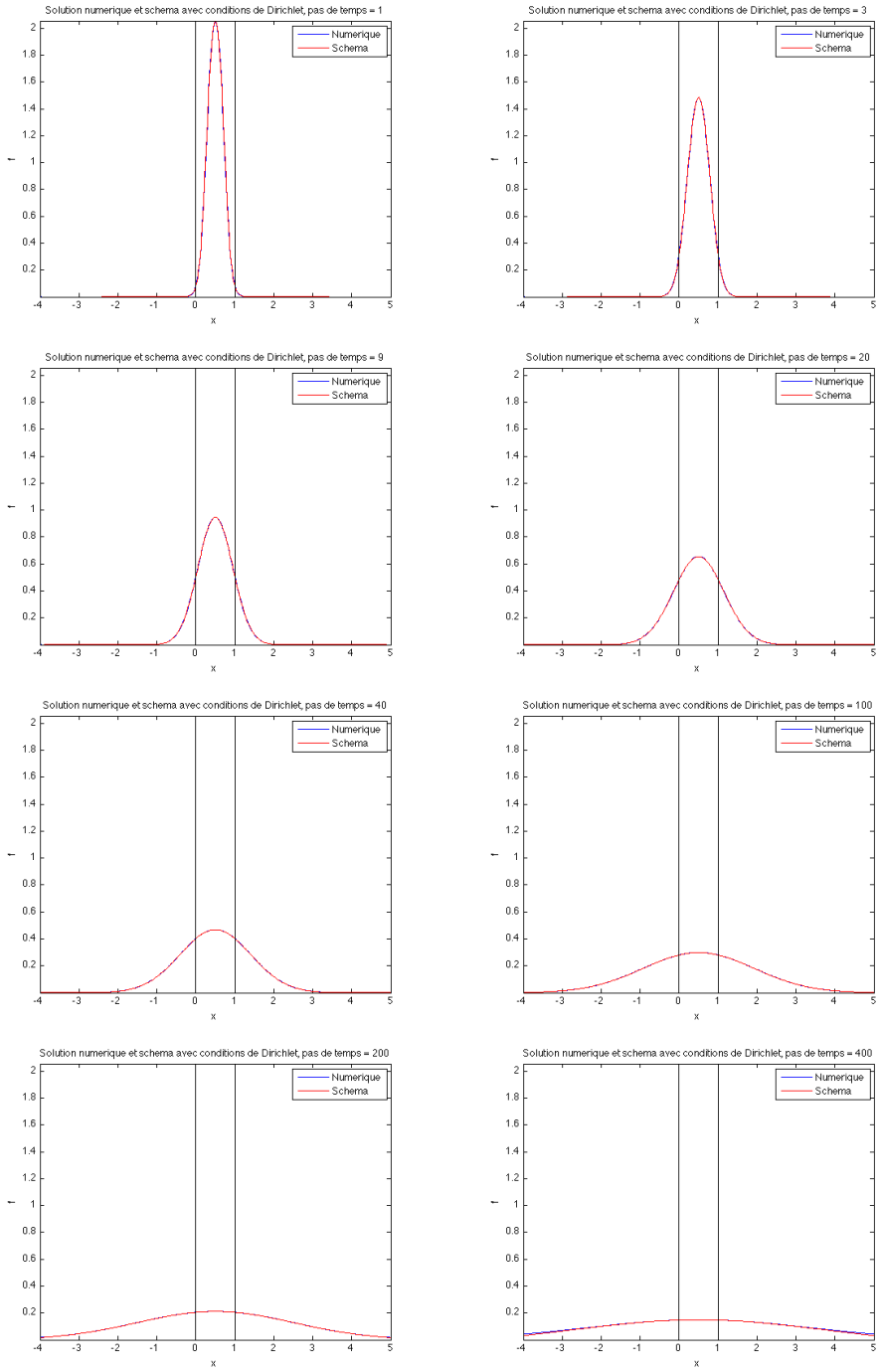


FIGURE 6.6 – Comparaison entre la solution numérique sur un grand domaine avec conditions de Dirichlet et la solution donnée par la méthode pour $r = 4$, $\theta = 0.5$, $\Delta t = 0.01$, pour $t = 0.01, 0.03, 0.09, 0.2, 0.4, 1, 2$ et 4

Nous refaisons la même expérience, cette fois avec le milieu périodique de la figure 6.7. Les résultats sont présentés sur les figures 6.8 et 6.9.

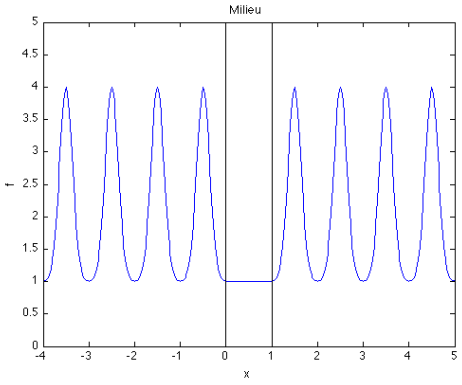


FIGURE 6.7 – Milieu périodique 1D

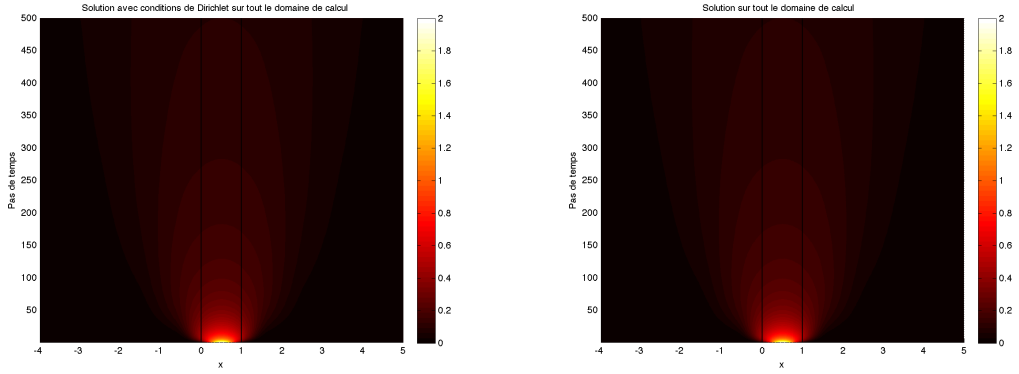


FIGURE 6.8 – Comparaison entre la solution numérique sur un grand domaine avec conditions de Dirichlet et la solution donnée par la méthode sur le milieu de la figure 6.7, pour $r = 4$, $\theta = 0.5$, $\Delta t = 0.01$, sur l'ensemble de la durée de simulation : à gauche, solution exacte, à droite, solution numérique

On ne constate une fois de plus aucune différence notable entre les deux solutions. On remarque par ailleurs que le côté dissipatif de l'équation de la chaleur domine largement la dynamique de la solution, si bien que la périodicité n'a que peu d'influence dans cette situation 1D.

Nous allons maintenant effectuer les deux derniers tests pour l'équation de Schrödinger. Celle-ci étant nettement moins dissipative que l'équation de la chaleur, et la vitesse de propagation des solutions étant toujours infinie, nous ne pourrons utiliser la solution numérique avec conditions de Dirichlet que sur un intervalle de temps assez court (mais cela nous fournit une bonne comparaison qualitative). La donnée initiale est toujours notre gaussienne tronquée, mais à laquelle on donne une

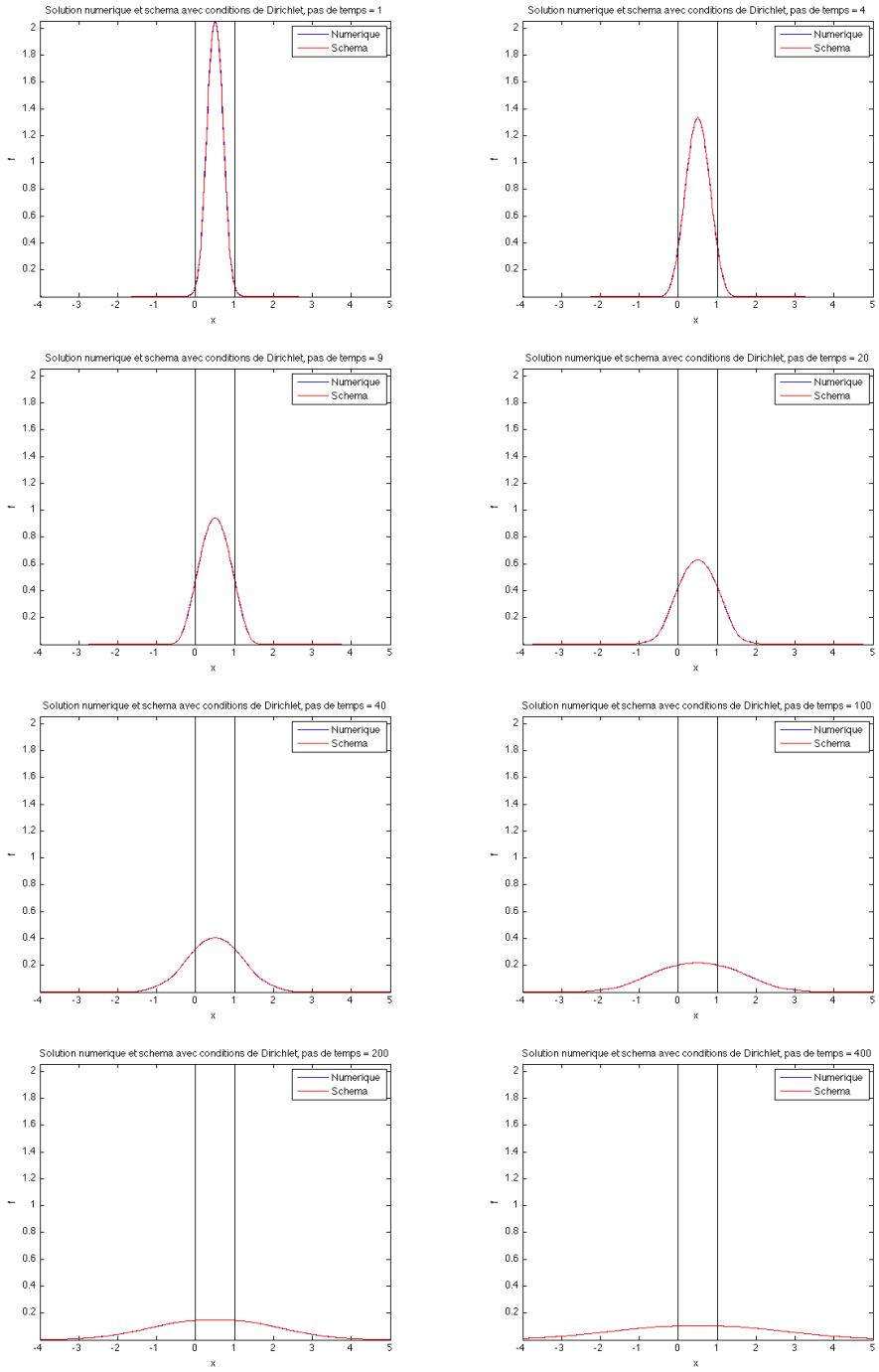


FIGURE 6.9 – Comparaison entre la solution numérique sur un grand domaine avec conditions de Dirichlet et la solution donnée par la méthode sur le milieu de la figure 6.7, pour $r = 4$, $\theta = 0.5$, $\Delta t = 0.01$, pour $t = 0.01, 0.03, 0.09, 0.2, 0.4, 1, 2$ et 4

impulsion ν_x vers la droite :

$$u_0 = \left| \begin{array}{ll} A e^{-\frac{(x-c_x)^2}{w_x^2}} e^{i\nu_x x} & \text{dans } \Omega_0 \\ 0 & \text{dans } \mathbb{R}^2 \setminus \Omega_0 \end{array} \right. \tag{6.34}$$

avec $A = 3$, $c_x = 0.5$, $w_x = 0.2$ et $\nu_x = 8$. Le cas du milieu homogène est présenté sur les figures 6.12 et 6.10, le cas du milieu périodique sur les figures 6.13 et 6.11. Les solutions sont toujours aussi indiscernables, tant que n'apparaissent pas les réflexions dues aux conditions de Dirichlet. Ce désaccord du aux réflexions peut être vu comme une confirmation indirecte de la réinterprétation de notre méthode comme la résolution sur un domaine infini (si l'on agrandit le domaine avec conditions de Dirichlet, le désaccord apparaît plus tardivement).

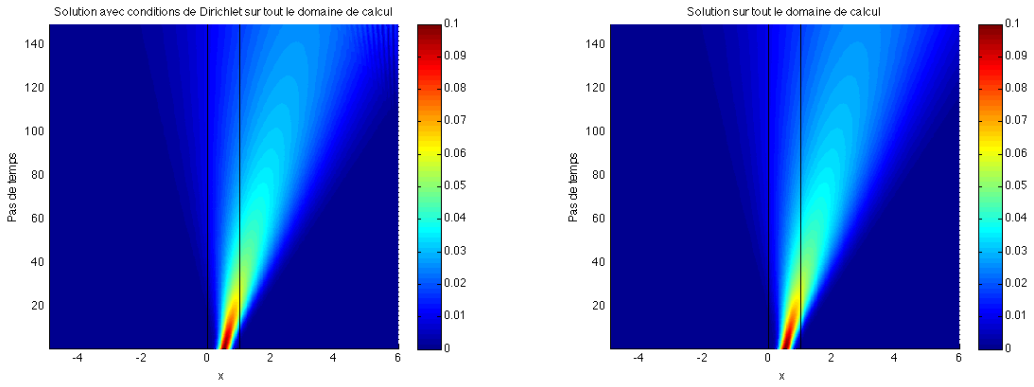


FIGURE 6.10 – Comparaison entre le module de la solution numérique sur un grand domaine avec conditions de Dirichlet et celui de la solution donnée par la méthode dans le cas de l'équation de Schrödinger, pour $r = 5$, $\theta = 1$, $\Delta t = 0.001$, sur l'ensemble de la durée de simulation : à gauche, solution exacte, à droite, solution numérique

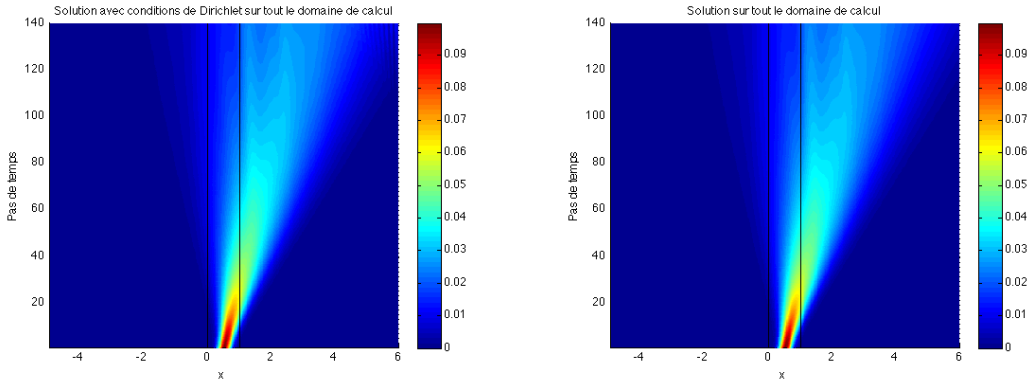


FIGURE 6.11 – Comparaison entre le module de la solution numérique sur un grand domaine avec conditions de Dirichlet et celui de la solution donnée par la méthode dans le cas de l'équation de Schrödinger sur le milieu de la figure 6.7, pour $r = 5$, $\theta = 1$, $\Delta t = 0.001$, sur l'ensemble de la durée de simulation : à gauche, solution exacte, à droite, solution numérique

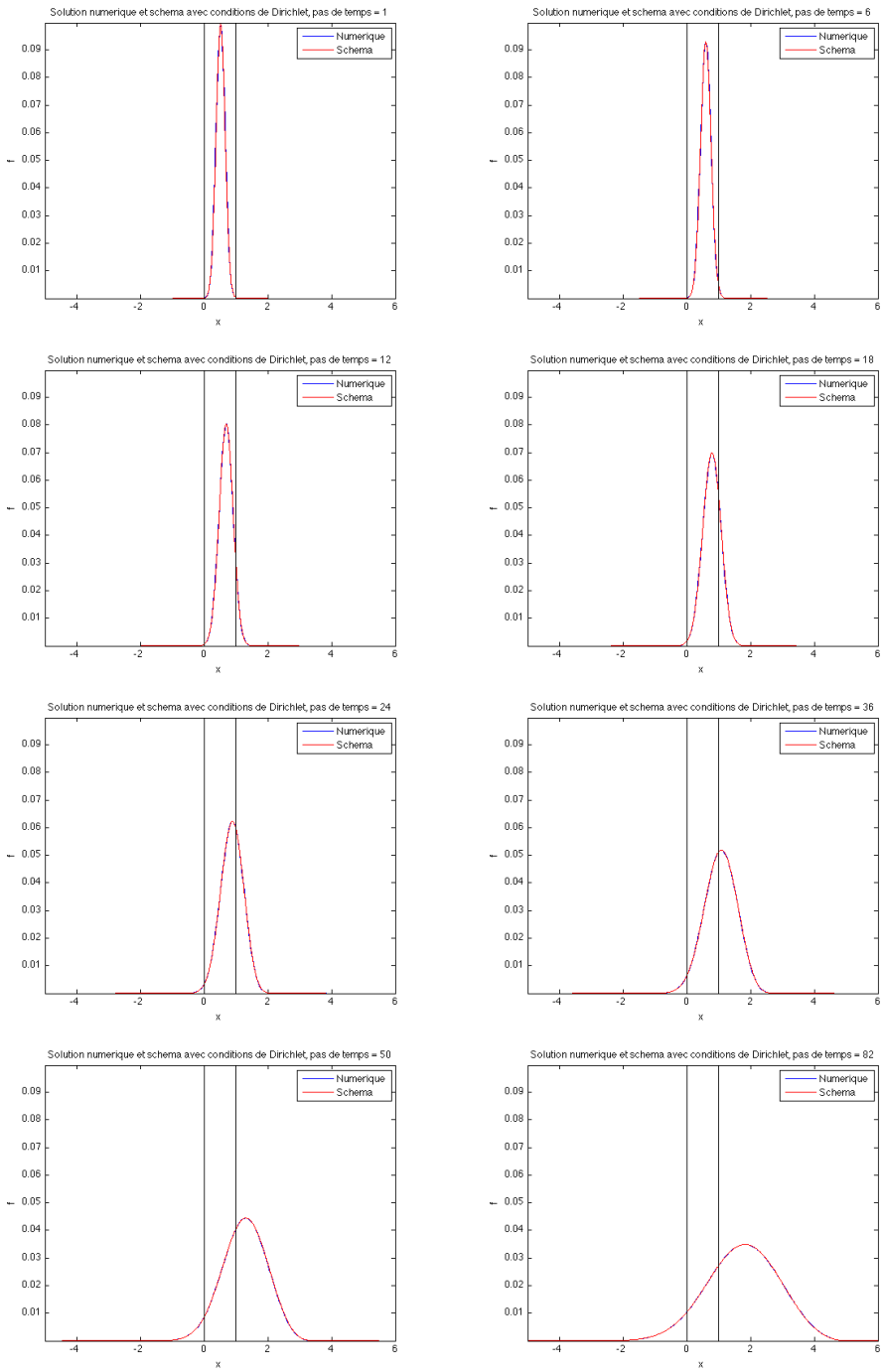


FIGURE 6.12 – Comparaison entre le module de la solution numérique sur un grand domaine avec conditions de Dirichlet et celui de la solution donnée par la méthode dans le cas de l'équation de Schrödinger, pour $r = 5$, $\theta = 1$, $\Delta t = 0.001$, pour $t = 0.001, 0.006, 0.012, 0.018, 0.024, 0.036, 0.05$ et 0.082

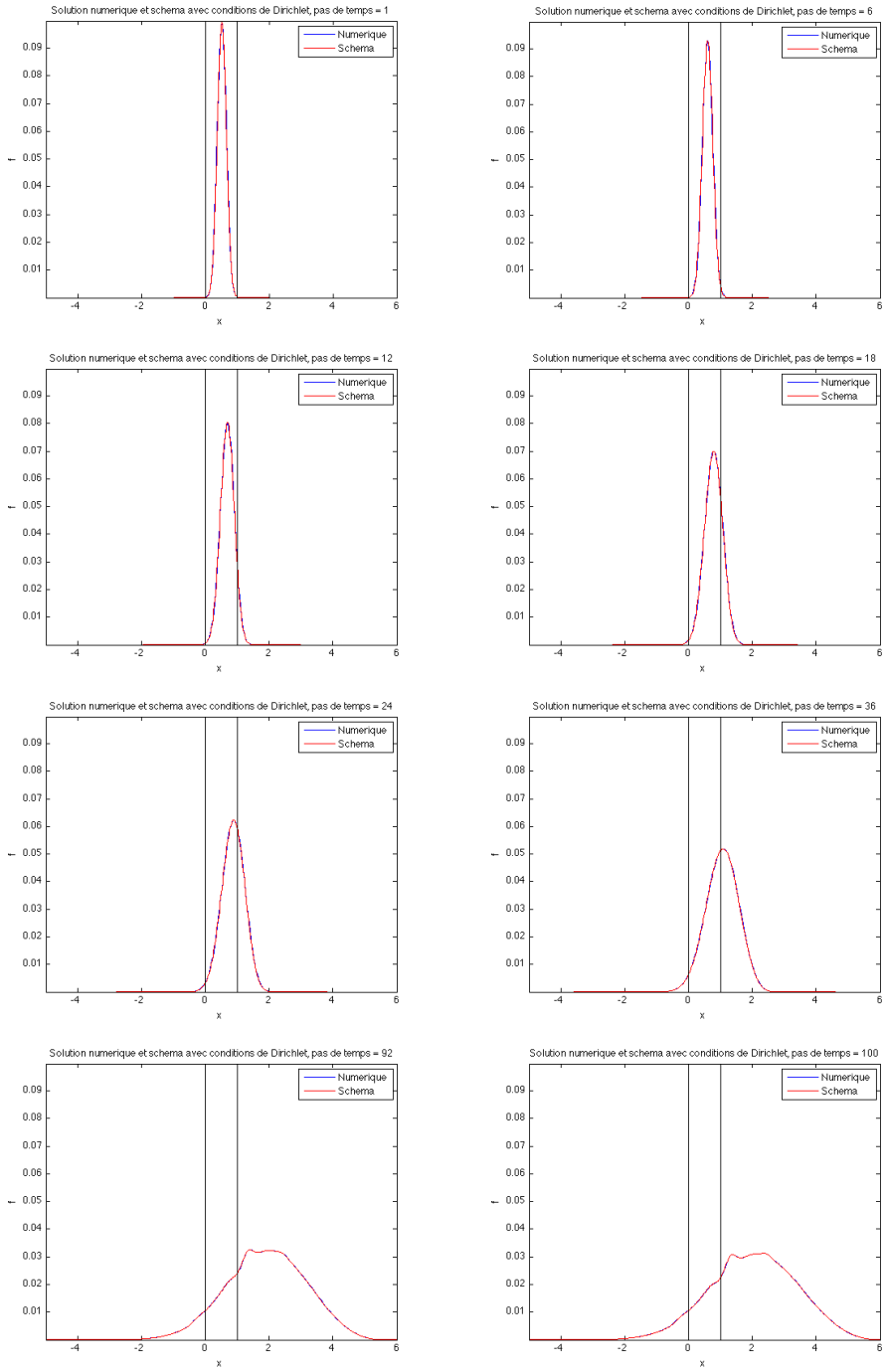


FIGURE 6.13 – Comparaison entre le module de la solution numérique sur un grand domaine avec conditions de Dirichlet et celui de la solution donnée par la méthode dans le cas de l'équation de Schrödinger sur le milieu de la figure 6.7, pour $r = 5$, $\theta = 1$, $\Delta t = 0.001$, pour $t = 0.001, 0.006, 0.012, 0.018, 0.024, 0.036, 0.092$ et 0.1

Le guide avec un seul défaut

Nous considérons maintenant un guide périodique avec un seul défaut. Nous allons utiliser deux types de conditions aux limites dans les simulations qui vont suivre. Nous utiliserons des conditions de Neumann homogènes dans un permier temps. Nous utiliserons également des conditions de Dirichlet homogènes, pour lesquelles nous savons qu'il est immédiat d'étendre les résultats que nous avons obtenus dans cette deuxième partie.

Nous commençons par l'équation de Schrödinger, dans un guide droit $\mathbb{R}\times]0,1[$, en milieu périodique. Le défaut est le domaine $\Omega_0 =]0,1[$. On utilise une donnée initiale gaussienne avec une impulsion :

$$u_0(x,y) = \chi_{\Omega_0}(x,y) e^{-(\frac{(x-c_x)^2}{w_x} + \frac{(y-c_y)^2}{w_y})} e^{i\nu_x x}$$

avec $A = 1$, $c_x = c_y = 0.5$, $w_x = w_y = 0.1$, $\nu_x = 20$. La cellule de périodicité est maillée uniformément en quadrangles, avec $N_x = N_y = 11$ degrés de liberté dans chaque direction. Nous utilisons le potentiel constant par morceaux de la figure 6.14. Nos calculs sont limités au domaine central Ω_0.

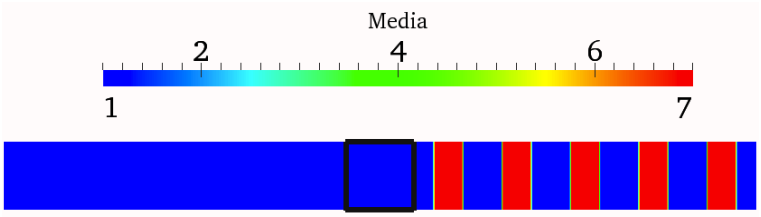


Figure 6.14 – Potentiel constant par morceaux utilisé avec l'équation de Schrodinger

Les résultats sont présentés sur la figure 6.15. Pour chaque instant représenté, le résultat du haut correspond à notre méthode, celui du bas à la résolution sur un large domaine avec conditions de Dirichlet homogènes en bout de guide. Le domaine de calcul pour notre méthode est figuré par le carré noir, sur lequel nous zoomons sur la droite de la figure, pour chaque pas de temps. Nous constatons une fois de plus qu'il n'y a pas différence notable entre les deux solutions, tant que la valeur au bord n'est pas devenue assez grande pour que les réflexions en bout de guide viennent perturber la solution en domaine borné, ce qui confirme une fois de plus le bon fonctionnement de notre méthode, ainsi que sa réinterprétation comme une résolution sur un guide infini.

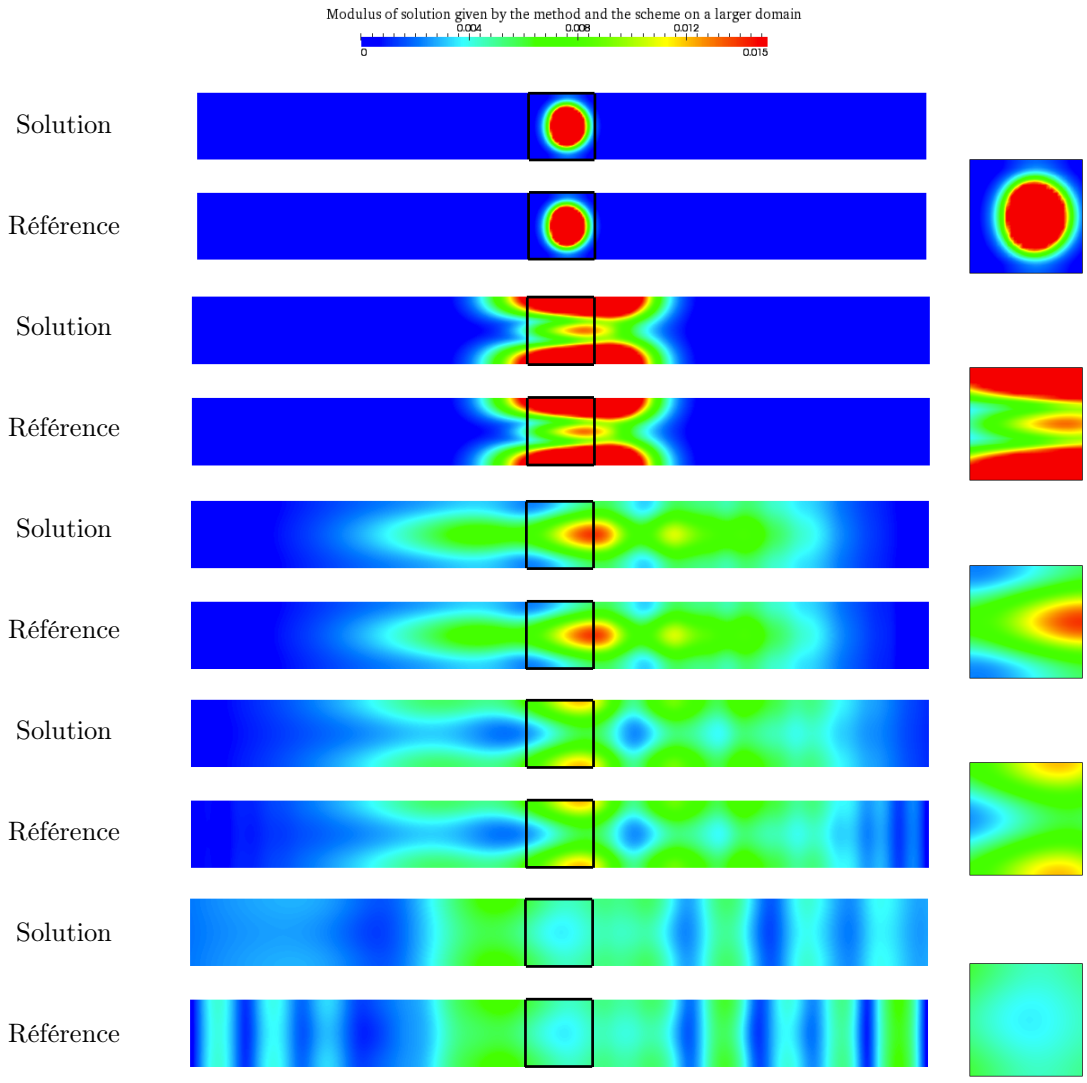


FIGURE 6.15 – Module de la solution de l'équation de Schrödinger pour $r = 3$, $\theta = 1$, $\Delta t = 4e^{-3}$, pour $t = 0.004, 0.068, 0.308, 0.384$ et 0.748, et comparaison avec la résolution sur un grand domaine avec conditions de Dirichlet au bout

Nous échangeons ensuite les conditions de Neumann pour des conditions de Dirichlet homogènes, et nous utilisons le guide à géométrie périodique de la figure 6.16, avec le potentiel représenté sur cette même figure. Cette fois, les cellules sont maillées par 21 degrés de liberté dans chaque direction.

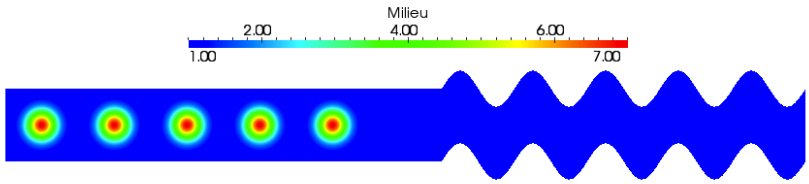


FIGURE 6.16 – Milieu et potentiel périodique pour l'équation de Schrödinger

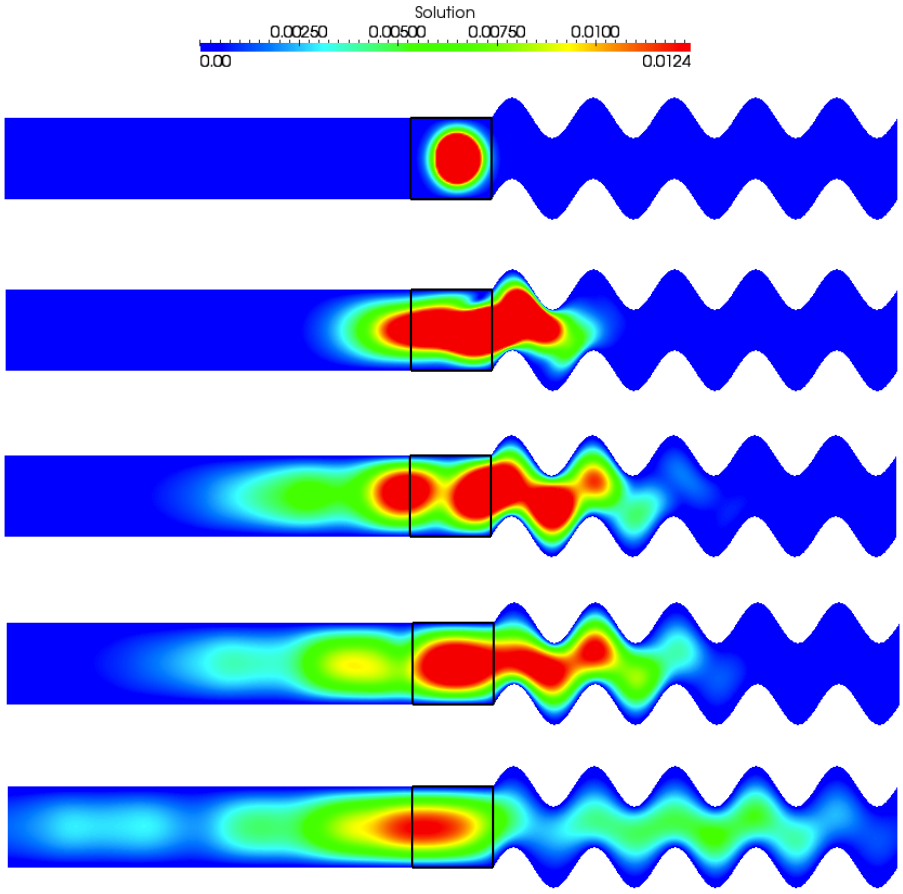


FIGURE 6.17 – Comparaison entre le module de la solution numérique sur un grand domaine avec conditions de Dirichlet et celui de la solution donnée par la méthode dans le cas de l'équation de Schrödinger sur le milieu de la figure 6.16, pour $r = 3$, $\theta = 1$, $\Delta t = 0.004$, $t = 0.004, 0.08, 0.24, 0.32$ et 0.72

Nous pouvons constater la complexité du phénomène sur la solution de la figure 6.17.

Nous illustrons ensuite le cas de l'équation de la chaleur, pour le guide droit $\mathbb{R}\times]0,1[$ avec conditions de Dirichlet sur le bord du guide, en milieu périodique (cf figure 6.18). Le défaut est toujours le domaine $\Omega_0 =]0,1[$. Nous comparons avec la résolution sur un grand domaine non infini (5 périodes de part et d'autre du défaut), pour lequel nous rajoutons des conditions de Dirichlet homogènes sur les frontières supplémentaires. Nous laissons varier l'échelle d'une figure à l'autre, du fait de la

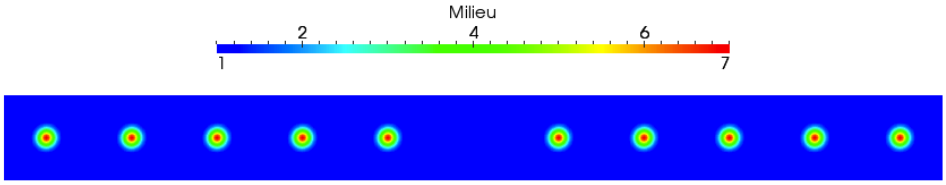


FIGURE 6.18 – Milieu périodique pour l'équation de la chaleur

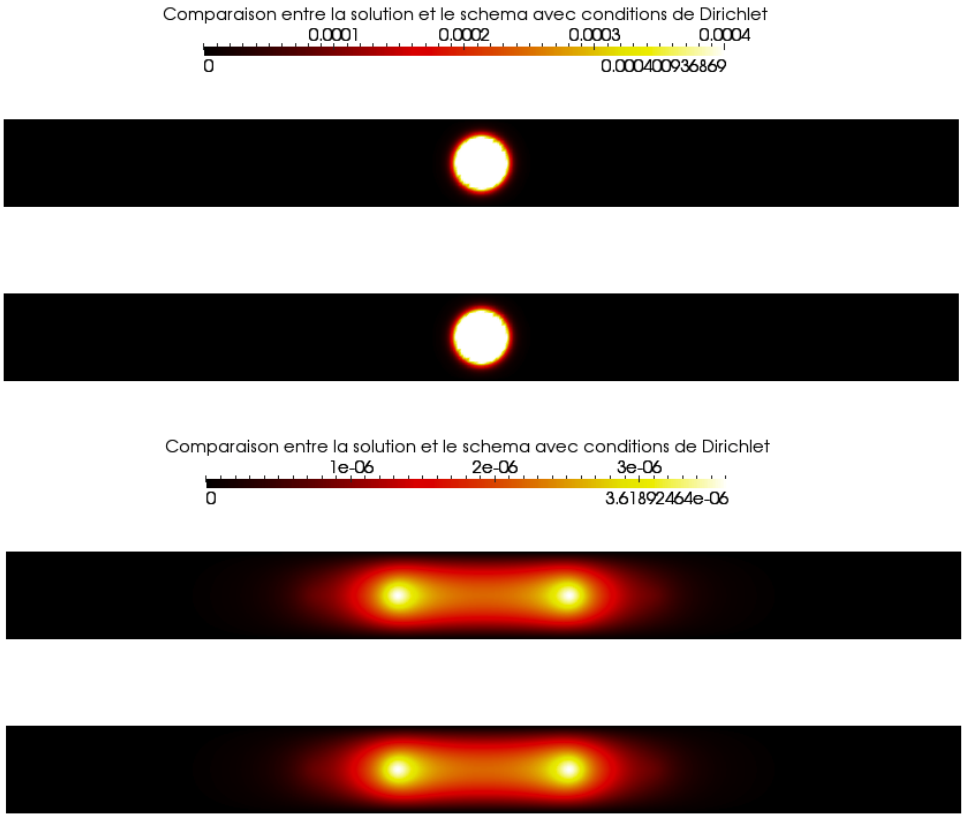


FIGURE 6.19 – Comparaison entre la solution numérique sur un grand domaine avec conditions de Dirichlet et la solution donnée par la méthode dans le cas de l'équation de la chaleur sur le milieu de la figure 6.14, pour $r = 3$, $\theta = 0.5$, $\Delta t = 0.005$, $t = 0.005$ et 0.6

décroissance rapide de la solution. Nous constatons une fois de plus l'excellent accord entre notre

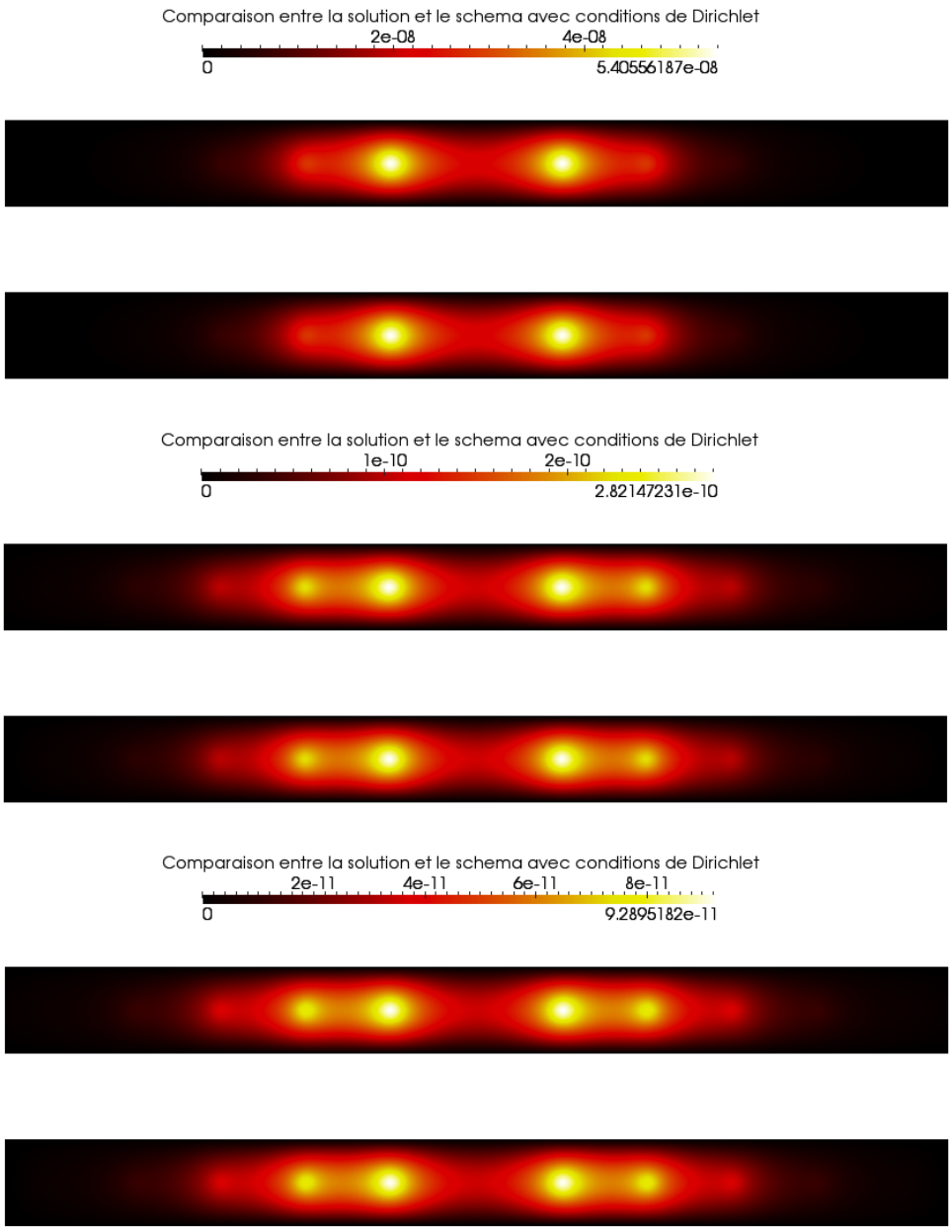


FIGURE 6.20 – Comparaison entre la solution numérique sur un grand domaine avec conditions de Dirichlet et la solution donnée par la méthode dans le cas de l'équation de la chaleur sur le milieu de la figure 6.14, pour $r = 3$, $\theta = 0.5$, $\Delta t = 0.005$, $t = 1.15, 1.85$ et 2

solution et la solution de référence sur un large domaine tronqué.

En conclusion, nous avons pu vérifier numériquement que la méthode approche correctement des solutions exactes (cas 1D), et qu'elle coïncide avec ce que donnerait une résolution posée sur un domaine infini. Comme la méthode s'étend aisément à n'importe quel schéma, il est clair qu'il suffit de choisir un schéma en fonction de ses propriétés (ordre, dissipation, dispersion...) déterminées en considérant un domaine infini, et d'appliquer notre méthode pour ce schéma.

Le guide avec plusieurs défauts

Nous concluons cette présentation de résultats numériques pour l'ordre un en temps par quelques résultats dans le cas de plusieurs défauts. Nous commençons par comparer les résultats de la méthode pour un seul défaut, dont nous nous sommes assurés du bon fonctionnement, à ceux donnés par la méthode pour le cas de plusieurs défauts, où les conditions transparentes sont calculées par la technique de scattering multiple exposée au chapitre 4. Nous utilisons le milieu périodique de la figure 6.21, avec potentiel négatif, et toujours la même donnée initiale avec impulsion. Les deux

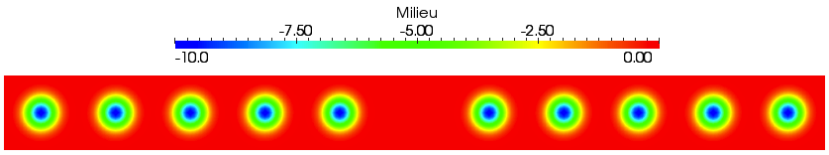


Figure 6.21 – Potentiel utilisé pour comparer le simple au multi scattering

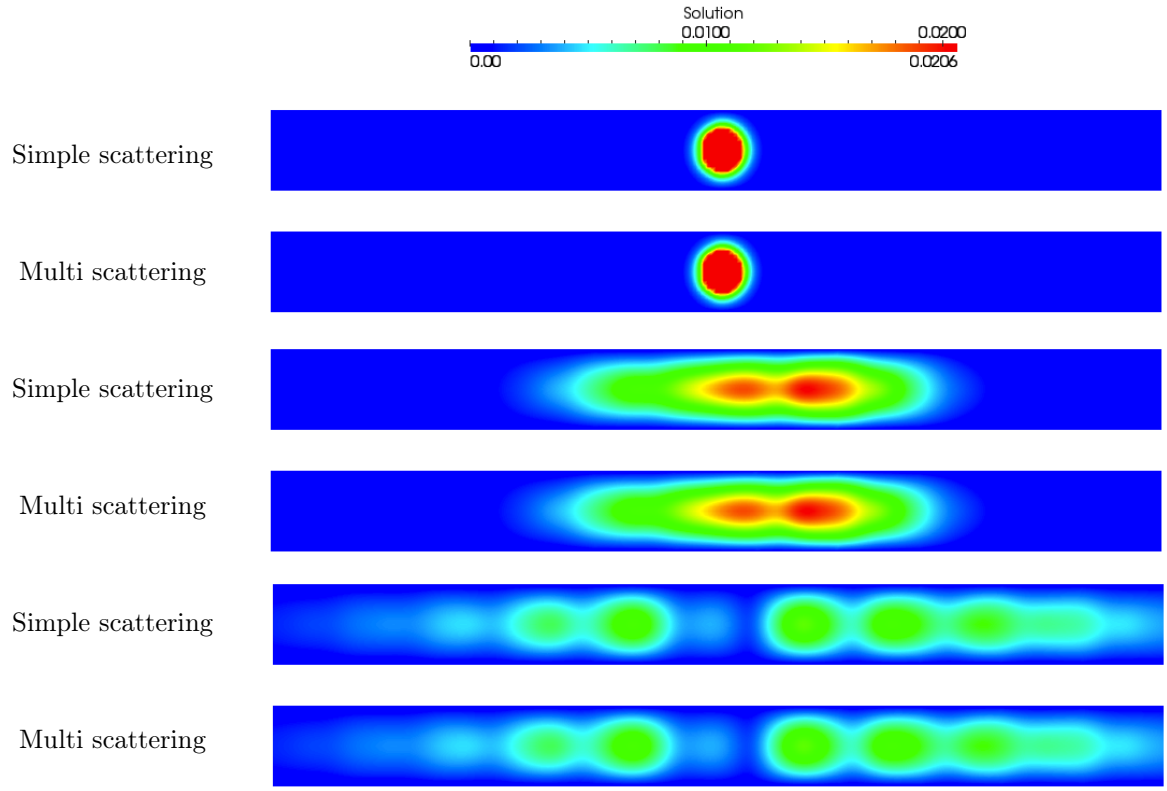


Figure 6.22 – Comparaison entre le module de la solution calculée avec la méthode de simple scattering et celui de la solution calculée par la méthode de scattering multiple sur le milieu de la figure 6.21, pour $r = 2$, $\theta = 1$, $\Delta t = 0.004$, $t = 0.004, 0.16$ et 0.52

solutions coïncident parfaitement, ce qui valide la méthode de scattering multiple que nous avons implémentée. Puis, nous considérons une vraie solution de scattering multiple, décrite sur la figure

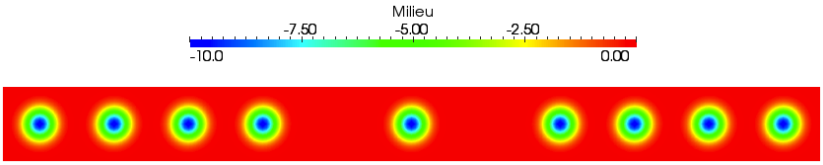


FIGURE 6.23 – Potentiel utilisé pour le scattering multiple

6.23. Nous utilisons deux données initiales gaussiennes avec impulsion, celle de gauche étant la même que celle que nous avons employée jusqu'ici, celle de droite la même gaussienne mais avec une impulsion $\nu_x = 10$. Nous représentons sur les figures 6.24 à 6.31 la solution reconstruite, la solution intérieure, et chaque composante extérieure reconstruite $u^n_{h,e,j}$.

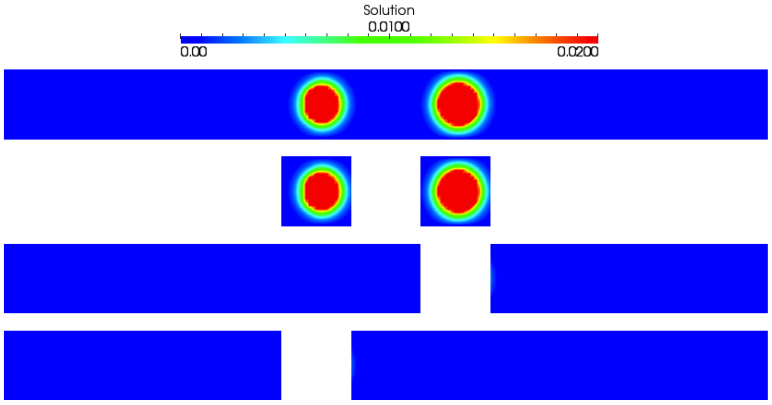


FIGURE 6.24 – Module de la solution pour le milieu 6.23, $r = 2$, $\theta = 1$, $dt = 0.004$, $t = 0.004$

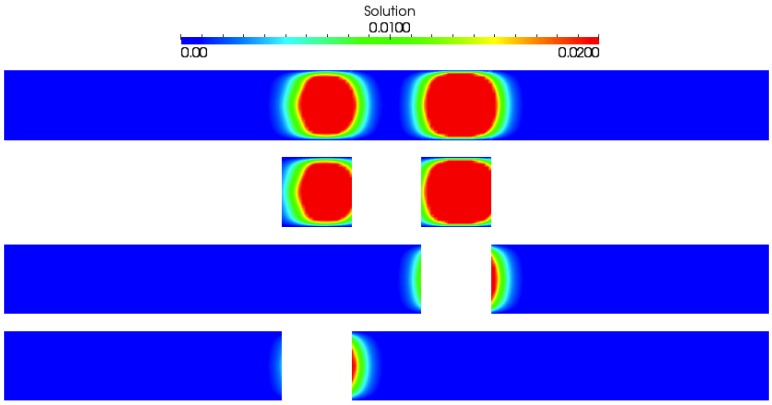


FIGURE 6.25 – Module de la solution pour le milieu 6.23, $r = 2$, $\theta = 1$, $dt = 0.004$, $t = 0.016$

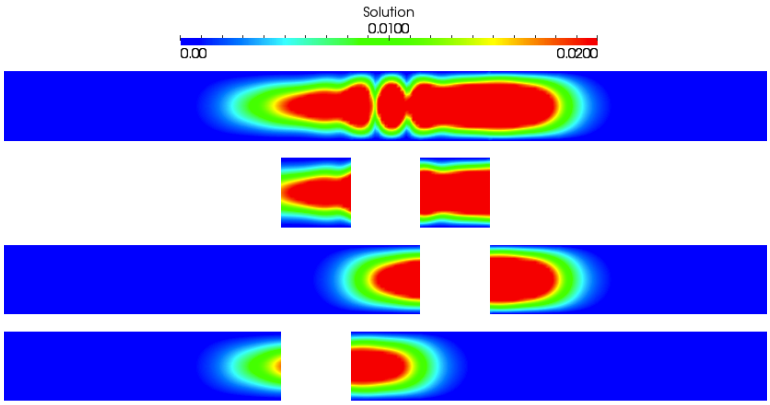


FIGURE 6.26 – Module de la solution pour le milieu 6.23, $r = 2$, $\theta = 1$, $dt = 0.004$, $t = 0.08$

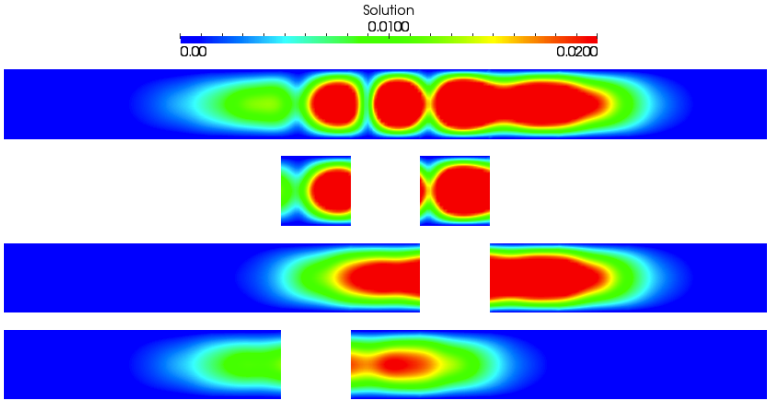


FIGURE 6.27 – Module de la solution pour le milieu 6.23, $r = 2$, $\theta = 1$, $dt = 0.004$, $t = 0.16$

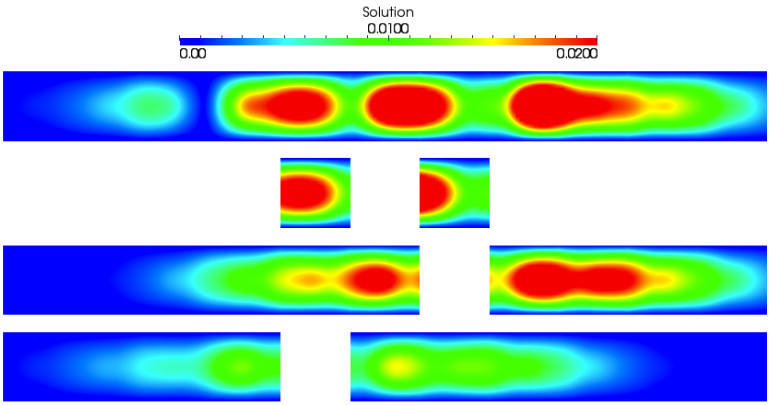


FIGURE 6.28 – Module de la solution pour le milieu 6.23, $r = 2$, $\theta = 1$, $dt = 0.004$, $t = 0.32$

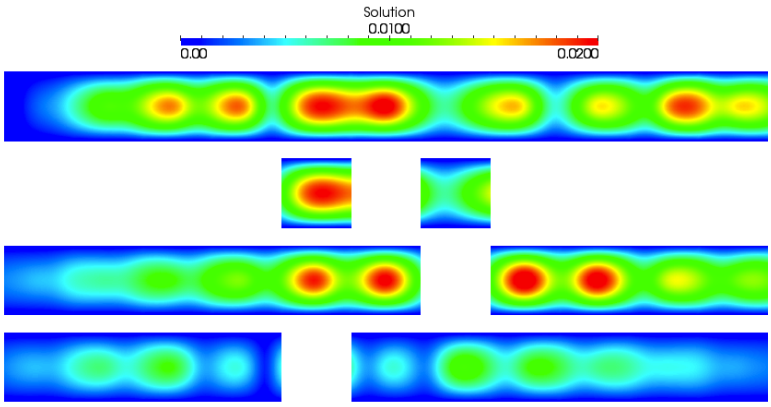


FIGURE 6.29 – Module de la solution pour le milieu 6.23, $r = 2$, $\theta = 1$, $dt = 0.004$, $t = 0.64$

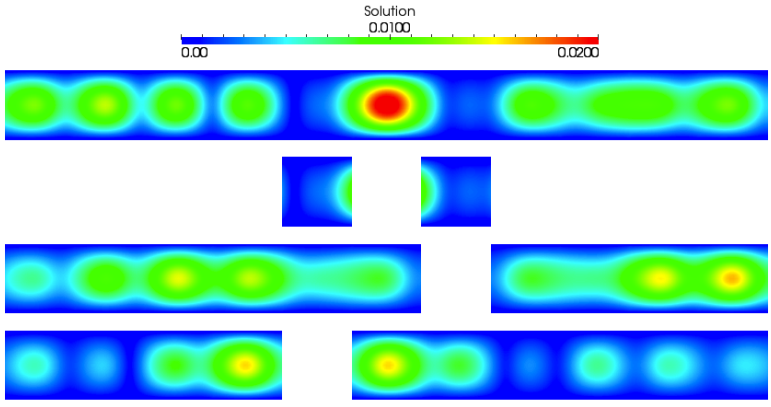


FIGURE 6.30 – Module de la solution pour le milieu 6.23, $r = 2$, $\theta = 1$, $dt = 0.004$, $t = 1.2$

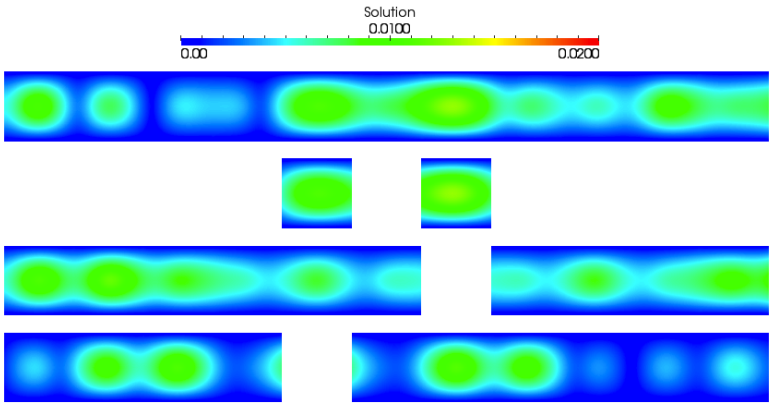


FIGURE 6.31 – Module de la solution pour le milieu 6.23, $r = 2$, $\theta = 1$, $dt = 0.004$, $t = 1.6$

6.2 Problèmes d'ordre deux en temps discrets

Nous allons maintenant étudier la discrétisation complète des problèmes d'ordre deux en temps. Encore une fois, plutôt que de discrétiser directement les problèmes posés en domaine borné que nous avons obtenus dans le chapitre précédent, nous allons retrouver ces problèmes discrets à partir d'une réinterpréation du problème discret comme un problème d'éléments finis posé sur un maillage infini. Cette réinterprétation nous permettra à nouveau d'obtenir une estimation de convergence complète pour la méthode ainsi définie. Ensuite, comme nous venons de le faire pour le cas des problèmes d'ordre un en temps, nous nous emploierons à transposer la méthode de détermination des opérateurs DtN développée au chapitre précédent au niveau discret. Toutefois, si la réinterprétation du problème comme un problème posé sur un guide infini, et le résultat de convergence qui en découlent, nécessitent une analyse approfondie, il est clair que la transposition au niveau discret de la méthode périodique pour l'ordre deux en temps ne présente pas de réelles nouveautés ou difficultés par rapport au cas de l'ordre un en temps. Aussi nous nous contenterons d'une présentation des résultats et formules essentiels pour la méthode.

6.2.1 Formulation discrète des problèmes d'ordre deux en temps

Comme nous l'avons fait jusqu'ici, nous commençons par le cas des problèmes de simple scattering. Nous rappelons la géométrie sur la figure 6.32, et les hypothèses sur le milieu sont les mêmes que dans le chapitre précédent.

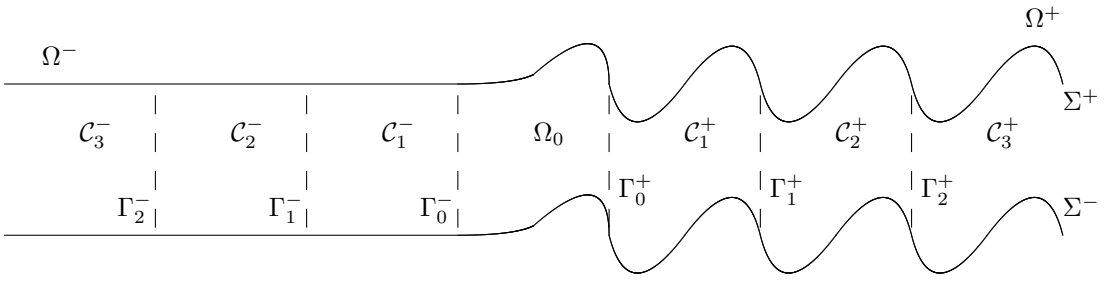


Figure 6.32 – Notations pour le guide périodique

Nous reprenons l'ensemble des notations de la section 6.1 concernant les espaces d'éléments finis sur le guide. Nous cherchons alors la famille $(u_h^n)_{0\leq n\leq N} \in (V_h^r)^N$ solution de la récurrence suivante :

$$\left|\begin{array}{l} a^1_{\Omega,\theta,\Delta t}(u_h^{n+1}, v_h) = \Delta t^2 \left(f^{n,\theta}, v_h\right)_{L^2(\Omega)} + a^2_{\Omega,\theta,\Delta t}(u_h^n, v_h) - a^1_{\Omega,\theta,\Delta t}(u_h^{n-1}, v_h) \\ u_h^0 = P^h u_0 \\ \left(\rho u_h^1, v_h\right)_{L^2(\Omega)} = \left(\rho(u_h^0 + \Delta t P^h u_1), v_h\right)_{L^2(\Omega)} + \dfrac{\Delta t^2}{2}\left(\nabla u_h^0, \nabla v_h\right)_{L^2(\Omega)} \end{array}\right. \tag{6.35}$$

où l'on rappelle que :

$$a^1_{\Omega,\theta,\Delta t}(u,v) = (\rho u, v)_{L^2(\Omega)} + \theta \Delta t^2 \left(\nabla u, \nabla v\right)_{L^2(\Omega)}$$

et

$$a^2_{\Omega,\theta,\Delta t}(u,v) = 2\left(\rho u, v\right)_{L^2(\Omega)} + (2\theta - 1)\Delta t^2 \left(\nabla u, \nabla v\right)_{L^2(\Omega)}$$

et P^h est l'opérateur de projection elliptique associé à $a^1_{\Omega,1,1}$. On introduit encore les opérateurs :

$$\begin{aligned} A_1^h(\Omega,\theta,\Delta t) : H^1(\Omega) &\longrightarrow V_h^r \\ v &\longmapsto M_\rho^h + \theta\Delta t^2 K^h v \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} A_2^h(\Omega,\theta,\Delta t) : H^1(\Omega) &\longrightarrow V_h^r \\ v &\longmapsto 2M_\rho^h + (2\theta-1)\Delta t^2 K^h v \end{aligned}$$

qui vont nous permettre de traiter plus agréablement la convergence. Le problème discret se réécrit alors :

Trouver $(u_h^n)_{0\le n\le N} \in (V_h^r)^N$ solution de la récurrence :

$$\left|\begin{array}{l} A_1^h(\Omega,\theta,\Delta t)u_h^{n+1} = \Delta t^2 M_{Id}^h f^{n,\theta} + A_2^h(\Omega,\theta,\Delta t)u_h^n - A_1^h(\Omega,\theta,\Delta t)u_h^{n-1} \\ u_h^0 = P^h u_0 \\ M_\rho^h u_h^1 = M_\rho^h(u_h^0 + \Delta t P^h u_1) + \dfrac{\Delta t^2}{2} K^h u_h^0 \end{array}\right. \tag{6.35}$$

On montre aisément qu'il s'agit d'un problème bien posé (cf théorème 6.1) :

Théorème 6.18. *Sous les hypothèses (H), il existe une unique famille $(u_h^n)_{0\le n\le N} \in (V_h^r)^N$ solution de* (6.35)*. De plus, le problème est bien posé à chaque pas de temps.*

Nous allons maintenant démontrer la convergence de ce problème discret vers la solution du problème continu (4.20) pour cette géométrie particulère. Les principes qui sous-tendent cette démonstration sont encore une fois très classiques, néanmoins il nous semble utile de la redétailler dans le cas de notre espace V_h^r de dimension infinie, qui lui ne l'est pas. Nous allons voir que du point de vue de la convergence, la méthode se comporte sur notre domaine non borné de la même manière qu'elle l'aurait fait sur un domaine borné. On commence par démontrer une identité d'énergie :

Lemme 6.5. *Sous les hypothèses (H), pour tout $\theta > 0$, $\Delta t > 0$, la quantité :*

$$E_h^{n+1/2} = ||u_h^{n+1} - u_h^n||^2_{L^2_\rho(\Omega)} + (\theta - \frac{1}{4})\Delta t^2 ||\nabla(u_h^{n+1} - u_h^n)||^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{4}\Delta t^2 ||\nabla(u_h^{n+1} + u_h^n)||^2_{L^2(\Omega)}$$

vérifie l'équation dite de conservation de l'énergie discrète :

$$E_h^{n+1/2} - E_h^{n-1/2} = \Delta t^2 \left(f^{n,\theta}, u_h^{n+1} - u_H^{n-1}\right)_{L^2_\rho(\Omega)} \tag{6.36}$$

Démonstration. On commence par réécrire un peu l'équation. On a :

$$a^1_{\Omega,\theta,\Delta t}(u_h^{n+1}, v_h) = a^1_{\Omega,\theta-1/4,\Delta t}(u_h^{n+1}, v_h) + \frac{1}{4}\Delta t^2 \left(\nabla u_h^{n+1}, \nabla v_h\right)_{L^2(\Omega)}$$

et

$$a^2_{\Omega,\theta,\Delta t}(u_h^n, v_h) = 2a^1_{\Omega,\theta-1/4,\Delta t}(u_h^n, v_h) + \frac{1}{2}\Delta t^2 \left(\nabla u_h^n, \nabla v_h\right)_{L^2(\Omega)}$$

Alors on a, en regroupant les divers termes :

$$a^1_{\Omega,\theta-1/4,\Delta t}(u_h^{n+1} - 2u_h^n + u_h^{n-1}), v_h) + \frac{1}{4}\Delta t^2 \left(\nabla(u_h^{n+1} + 2u_h^n + u_h^{n-1}), \nabla v_h\right)_{L^2(\Omega)} = \left(\Delta t^2 f^{n,\theta}, v_h\right)_{L^2(\Omega)}$$

On choisit maintenant comme fonction test $u^{n+1} - u^{n-1} \in V_h^r$. Alors on obtient :

$$\begin{aligned} &\left(u_h^{n+1} - 2u_h^n + u_h^{n-1}, u_h^{n+1} - u_h^{n-1}\right)_{L^2_\rho(\Omega)} \\ &+(\theta - \frac{1}{4})\Delta t^2 \left(\nabla(u_h^{n+1} - 2u_h^n + u_h^{n-1}), \nabla(u_h^{n+1} - u_h^{n-1})\right)_{L^2(\Omega)} \\ &+\frac{1}{4}\Delta t^2 \left(u_h^{n+1} + 2u_h^n + u_h^{n-1}, u_h^{n+1} - u_h^{n-1}\right)_{L^2(\Omega)} = \Delta t^2 \left(f^{n,\theta}, u_h^{n+1} - u_h^{n-1}\right)_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

On va traiter chaque terme séparément. On commence par remarquer que :

$$u_h^{n+1} - u_h^{n-1} = (u_h^{n+1} + u_h^n) - (u_h^n + u_h^{n-1})$$

Alors le troisième terme devient :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{4}\Delta t^2 \left(u_h^{n+1} + 2u_h^n + u_h^{n-1}, u_h^{n+1} - u_h^{n-1}\right)_{L^2(\Omega)} \\
= \; & \frac{1}{4}\Delta t^2 \left((u_h^{n+1} + u_h^n) + (u_h^n + u_h^{n-1}), (u_h^{n+1} + u_h^n) - (u_h^n + u_h^{n-1})\right)_{L^2(\Omega)} \\
= \; & \frac{1}{4}\Delta t^2 \left(u_h^{n+1} + u_h^n, u_h^{n+1} + u_h^n)\right)_{L^2(\Omega)} - \frac{1}{4}\Delta t^2 \left((u_h^n + u_h^{n-1}, u_h^n + u_h^{n-1}\right)_{L^2(\Omega)} \\
= \; & \frac{1}{4}\Delta t^2 ||u_h^{n+1} + u_h^n||^2_{L^2(\Omega)} - \frac{1}{4}\Delta t^2 ||u_h^n + u_h^{n-1}||^2_{L^2(\Omega)}
\end{aligned}$$

On écrit ensuite :

$$u_h^{n+1} - u_h^{n-1} = (u_h^{n+1} - u_h^n) + (u_h^n - u_h^{n-1})$$

Alors le premier terme devient :

$$\begin{aligned}
& \left(u_h^{n+1} - 2u_h^n + u_h^{n-1}, u_h^{n+1} - u_h^{n-1}\right)_{L^2_\rho(\Omega)} \\
= \; & \left((u_h^{n+1} - u_h^n) - (u_h^n - u_h^{n-1}), (u_h^{n+1} - u_h^n) + (u_h^n - u_h^{n-1})\right)_{L^2_\rho(\Omega)} \\
= \; & \left(u_h^{n+1} - u_h^n, u_h^{n+1} - u_h^n)\right)_{L^2_\rho(\Omega)} - \left(u_h^n - u_h^{n-1}, u_h^n - u_h^{n-1}\right)_{L^2_\rho(\Omega)} \\
= \; & ||u_h^{n+1} - u_h^n||^2_{L^2_\rho(\Omega)} - ||u_h^n - u_h^{n-1}||^2_{L^2_\rho(\Omega)}
\end{aligned}$$

et de même, le deuxième terme devient :

$$\begin{aligned}
& (\theta - \frac{1}{4})\Delta t^2 \left(\nabla(u_h^{n+1} - 2u_h^n + u_h^{n-1}), \nabla(u_h^{n+1} - u_h^{n-1})\right)_{L^2(\Omega)} \\
= \; & (\theta - \frac{1}{4})\Delta t^2 ||\nabla(u_h^{n+1} - u_h^n)||^2_{L^2(\Omega)} - (\theta - \frac{1}{4})\Delta t^2 ||\nabla(u_h^n - u_h^{n-1})||^2_{L^2(\Omega)}
\end{aligned}$$

On obtient alors finalement :

$$\begin{aligned}
& ||u_h^{n+1} - u_h^n||^2_{L^2_\rho(\Omega)} + (\theta - \frac{1}{4})\Delta t^2 ||\nabla(u_h^{n+1} - u_h^n)||^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{4}\Delta t^2 ||u_h^{n+1} + u_h^n||^2_{L^2(\Omega)} \\
- & ||u_h^n - u_h^{n-1}||^2_{L^2_\rho(\Omega)} - (\theta - \frac{1}{4})\Delta t^2 ||\nabla(u_h^n - u_h^{n-1})||^2_{L^2(\Omega)} - \frac{1}{4}\Delta t^2 ||u_h^n + u_h^{n-1}||^2_{L^2(\Omega)} \\
& = \Delta t^2 \left(f^{n,\theta}, u_h^{n+1} - u_h^{n-1}\right)_{L^2(\Omega)}
\end{aligned}$$

soit, en posant :

$$E_h^{n+1/2} = ||u_h^{n+1} - u_h^n||^2_{L^2_\rho(\Omega)} + (\theta - \frac{1}{4})\Delta t^2 ||\nabla(u_h^{n+1} - u_h^n)||^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{4}\Delta t^2 ||\nabla(u_h^{n+1} + u_h^n)||^2_{L^2(\Omega)}$$

l'identité d'énergie :

$$E_h^{n+1/2} - E_h^{n-1/2} = \Delta t^2 \left(f^{n,\theta}, u_h^{n+1} - u_h^{n-1}\right)_{L^2(\Omega)}$$

□

De cette identité d'énergie, on déduit le résultat de convergence suivant :

Théorème 6.19. *On suppose que la solution du problème continu et les données vérifient :*

$$u_0 \in H^3(\Omega) \qquad u \in C^3([0,T], L^2(\Omega)) \qquad \partial_t^2 u \in L^2([0,T], H^2(\Omega))$$

et qu'il existe $C > 0$ indépendante de h et Δt telle que :

$$\Delta t^2 ||(M_\rho^h)^{-1} K^h|| < C$$

Alors pour tout $\Delta t > 0$ et tout $\theta \geq 1/4$, il existe une constante $C > 0$, indépendante de h et Δt :

$$||u(\cdot, n\Delta t) - u_h^n||_{L^2_\rho(\Omega)} \leq C(\Delta t + h^2) \tag{6.37}$$

Si $0 \leq \theta < 1/4$, l'estimation ci-dessus est encore vraie si la condition CFL :

$$(\frac{1}{4} - \theta)\frac{\Delta t^2 \rho^+}{\rho^-} ||(M_\rho^h)^{-1} K^h|| < 1 \tag{6.38}$$

est satisfaite.

Démonstration. Comme dans le cas de l'ordre un en temps, nous allons devoir prendre garde au fait que la solution du problème continu n'appartient pas à V_h^r. Il va donc nous falloir encore une fois utiliser une projection elliptique bien choisie comme intermédiaire afin d'assurer la convergence.

D'une part, nous avons pour la solution du problème discret :

$$a^1_{\Omega,\theta,\Delta t}(u_h^{n+1},v_h)=\Delta t^2\left(f^{n,\theta},v_h\right)_{L^2(\Omega)}+a^2_{\Omega,\theta,\Delta t}(u_h^n,v_h)-a^1_{\Omega,\theta,\Delta t}(u_h^{n-1},v_h)$$

D'autre part, pour la solution u de (4.20), on a :

$$a^1_{\Omega,\theta,\Delta t}(u(\cdot,(n+1)\Delta t),v_h)=\theta\Delta t^2\left(f^{n+1},v_h\right)_{L^2(\Omega)}+(\rho u(\cdot,(n+1)\Delta t),v_h)_{L^2(\Omega)}$$
$$-\theta\Delta t^2\left(\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\cdot,(n+1)\Delta t),v_h\right)_{L^2(\Omega)}$$

ainsi que

$$a^2_{\Omega,\theta,\Delta t}(u(\cdot,(n+1)\Delta t),v_h)=(2\theta-1)\Delta t^2\left(f^n,v_h\right)_{L^2(\Omega)}+2\left(\rho u(\cdot,n\Delta t),v_h\right)_{L^2(\Omega)}$$
$$-(2\theta-1)\Delta t^2\left(\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\cdot,n\Delta t),v_h\right)_{L^2(\Omega)}$$

Alors on obtient :

$$a^1_{\Omega,\theta,\Delta t}(u(\cdot,(n+1)\Delta t),v_h)-a^2_{\Omega,\theta,\Delta t}(u(\cdot,n\Delta t),v_h)+a^1_{\Omega,\theta,\Delta t}(u(\cdot,(n-1)\Delta t),v_h)=\Delta t^2\left(f^{n,\theta},v_h\right)_{L^2(\Omega)}$$
$$+(\rho(u(\cdot,(n+1)\Delta t)-2u(\cdot,n\Delta t)+u(\cdot,(n-1)\Delta t)),v_h)_{L^2(\Omega)}$$
$$-\Delta t^2\left(\theta\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\cdot,(n+1)\Delta t)+(1-2\theta)\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\cdot,n\Delta t)+\theta\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\cdot,(n-1)\Delta t),v_h\right)_{L^2(\Omega)}$$

On reconnaît l'erreur de troncature :

$$\varepsilon^{n,\theta}=\frac{u(\cdot,(n+1)\Delta t)-2u(\cdot,n\Delta t)+u(\cdot,(n-1)\Delta t)}{\Delta t^2}-\theta\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\cdot,(n+1)\Delta t)$$
$$-(1-2\theta)\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\cdot,n\Delta t)-\theta\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\cdot,(n-1)\Delta t)$$

Alors on obtient :

$$a^1_{\Omega,\theta,\Delta t}(u(\cdot,(n+1)\Delta t),v_h)-a^2_{\Omega,\theta,\Delta t}(u(\cdot,n\Delta t),v_h)+a^1_{\Omega,\theta,\Delta t}(u(\cdot,(n-1)\Delta t),v_h)=\Delta t^2\left(f^{n,\theta}+\rho\varepsilon^{n,\theta},v_h\right)_{L^2(\Omega)}$$

Soit encore en utilisant les opérateurs que nous avons introduit :

$$A^h_1(\Omega,\theta,\Delta t)u(\cdot,(n+1)\Delta t)-A^h_2(\Omega,\theta,\Delta t)u(\cdot,n\Delta t)+A^h_1(\Omega,\theta,\Delta t)u(\cdot,(n-1)\Delta t)=\Delta t^2M^h_{Id}f^{n,\theta}+\Delta t^2M^h_\rho\varepsilon^{n,\theta}$$

On introduit maintenant P^h, l'opérateur de projection associé à la forme bilinéaire $a^1(\Omega,1,1)$. Alors l'erreur : $e_h^n=u_h^n-P^hu(\cdot,n\Delta t)$ est solution de :

$$A^h_1(\Omega,\theta,\Delta t)e_h^{n+1}-A^h_2(\Omega,\theta,\Delta t)e_h^n+A^h_1(\Omega,\theta,\Delta t)e_h^{n-1}=\Delta t^2M^h_\rho\varepsilon^{n,\theta}$$
$$+A^h_1(\Omega,\theta,\Delta t)(P^h-I)u(\cdot,(n+1)\Delta t)-A^h_2(\Omega,\theta,\Delta t)(P^h-I)u(\cdot,n\Delta t)+A^h_1(\Omega,\theta,\Delta t)(P^h-I)u(\cdot,(n-1)\Delta t)$$

Puis, pour tout $v_h\in V_h^r$, on a :

$$\begin{aligned}\left(A^h_1(\Omega,\theta,\Delta t)(P^h-I)u,v_h\right)_{H^1(\Omega)}&=a^1_{\Omega,\theta,\Delta t}((P^h-I)u,v_h)\\&=\theta\Delta t^2a^1_{\Omega,1,\Delta t}((P^h-I)u,v_h)+(1-\theta\Delta t^2)\left(\rho(P^h-I)u,v_h\right)_{L^2(\Omega)}\\&=(1-\theta\Delta t^2)\left(\rho(P^h-I)u,v_h\right)_{L^2(\Omega)}\\&=(1-\theta\Delta t^2)\left(M^h_{Id}\rho(P^h-I)u,v_h\right)_{H^1(\Omega)}\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}\left(A^h_1(\Omega,\theta,\Delta t)(P^h-I)u,v_h\right)_{H^1(\Omega)}&=a^2_{\Omega,\theta,\Delta t}((P^h-I)u,v_h)\\&=(2\theta-1)a^1_{\Omega,1,\Delta t}((P^h-I)u,v_h)+(2-(2\theta-1)\Delta t^2)\left(\rho(P^h-I)u,v_h\right)_{L^2(\Omega)}\\&=(2-(2\theta-1)\Delta t^2)\left(\rho(P^h-I)u,v_h\right)_{L^2(\Omega)}\\&=(2-(2\theta-1)\Delta t^2)\left(M^h_{Id}\rho(P^h-I)u,v_h\right)_{H^1(\Omega)}\end{aligned}$$

Alors le problème ci-dessus se réécrit :

$$A_1^h(\Omega,\theta,\Delta t)e_h^{n+1} - A_2^h(\Omega,\theta,\Delta t)e_h^n + A_1^h(\Omega,\theta,\Delta t)e_h^{n-1} = \Delta t^2 M_\rho^h \varepsilon^{n,\theta}$$
$$+(1-\theta\Delta t^2)M_{Id}^h\rho(P^h-I)u(\cdot,(n+1)\Delta t) + (2-(2\theta-1)\Delta t^2)M_{Id}^h\rho(P^h-I)u(\cdot,n\Delta t)$$
$$+(1-\theta\Delta t^2)M_{Id}^h\rho(P^h-I)u(\cdot,(n-1)\Delta t)$$

On introduit l'erreur de projection elliptique :

$$\nu^{n,\theta} = (1-\theta\Delta t^2)(P^h-I)u(\cdot,(n+1)\Delta t) + (2-(2\theta-1)\Delta t^2)(P^h-I)u(\cdot,n\Delta t) + (1-\theta\Delta t^2)(P^h-I)u(\cdot,(n-1)\Delta t)$$

Nous pouvons maintenant appliquer l'identité d'énergie (6.36). L'énergie de l'erreur :

$$E_h^{n+1/2} = ||e_h^{n+1}-e_h^n||^2_{L^2_\rho(\Omega)} + (\theta-\frac{1}{4})\Delta t^2||\nabla(e_h^{n+1}-e_h^n)||^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{4}\Delta t^2||\nabla(e_h^{n+1}+e_h^n)||^2_{L^2(\Omega)}$$

vérifie :

$$\begin{aligned} E_h^{n+1/2} - E_h^{n-1/2} &= \left(\Delta t^2\varepsilon^{n,\theta} + \nu^{n,\theta}, e_h^{n+1}-e_h^{n-1}\right)_{L^2(\Omega)} \\ &= \left(\Delta t^2\varepsilon^{n,\theta} + \nu^{n,\theta}, (e_h^{n+1}-e_h^n)+(e_h^n-e_h^{n-1})\right)_{L^2(\Omega)} \\ &\leq (\Delta t^2||\varepsilon^{n,\theta}||_{L^2(\Omega)} + ||\nu^{n,\theta}||_{L^2(\Omega)})(||e_h^{n+1}-e_h^n||_{L^2(\Omega)} + ||e_h^n-e_h^{n-1}||_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

Pour $\theta \geq 1/4$, il est clair que :

$$||e_h^{n+1}-e_h^n||^2_{L^2(\Omega)} \leq E_h^{n+1/2}$$

Nous allons maintenant observer qu'on peut encore obtenir une minoration de ce type sous la condition CFL (6.38) si $\theta < 1/4$. On a :

$$E_h^{n+1/2} = ||e_h^{n+1}-e_h^n||^2_{L^2_\rho(\Omega)} - (\frac{1}{4}-\theta)\Delta t^2||\nabla(e_h^{n+1}-e_h^n)||^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{4}\Delta t^2||\nabla(e_h^{n+1}+e_h^n)||^2_{L^2(\Omega)}$$

Mais, comme $e_h^{n+1}-e_h^n \in V_h^r$, on peut écrire :

$$||\nabla(e_h^{n+1}-e_h^n)||^2_{L^2(\Omega)} = \left(K^h(e_h^{n+1}-e_h^n), e_h^{n+1}-e_h^n\right)_{H^1(\Omega)}$$

Rappelons nous maintenant que M^h est inversible sur V_h^r, et servons-nous en pour faire réapparaître la norme L^2 de $e_h^{n+1}-e_h^n$:

$$\begin{aligned} ||\nabla(e_h^{n+1}-e_h^n)||^2_{L^2(\Omega)} &= \left(K^h(e_h^{n+1}-e_h^n), e_h^{n+1}-e_h^n\right)_{H^1(\Omega)} \\ &= \left(M^h\rho(M_\rho^h)^{-1}K^h(e_h^{n+1}-e_h^n), e_h^{n+1}-e_h^n\right)_{H^1(\Omega)} \\ &= \left(\rho(M_\rho^h)^{-1}K^h(e_h^{n+1}-e_h^n), e_h^{n+1}-e_h^n\right)_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \frac{\rho^+}{\rho^-}||(M_\rho^h)^{-1}K^h||\ ||e_h^{n+1}-e_h^n||^2_{L^2_\rho(\Omega)} \end{aligned}$$

Alors :

$$E_h^{n+1/2} \geq (1-\frac{\rho^+}{\rho^-}(\frac{1}{4}-\theta)\Delta t^2||(M_\rho^h)^{-1}K^h||)\ ||e_h^{n+1}-e_h^n||^2_{L^2_\rho(\Omega)}$$

Donc sous la condition CFL, on a :

$$E_h^{n+1/2} \geq (1-\alpha)||e_h^{n+1}-e_h^n||^2_{L^2_\rho(\Omega)}$$

Alors la dernière relation issue de l'identité d'énergie se réécrit (prendre $\alpha = 0$ pour $\theta \geq 1/4$) :

$$E_h^{n+1/2} - E_H^{n-1/2} \leq (\Delta t^2||\varepsilon^{n,\theta}||_{L^2(\Omega)} + ||\nu^{n,\theta}||_{L^2(\Omega)})\sqrt{\frac{1}{1-\alpha}}\left(\sqrt{E_h^{n+1/2}} + \sqrt{E_h^{n-1/2}}\right)$$

et donc :

$$\sqrt{E_h^{n+1/2}} - \sqrt{E_h^{n-1/2}} \leq \sqrt{\frac{1}{1-\alpha}}(\Delta t^2||\varepsilon_h^{n,\theta}||_{L^2(\Omega)} + ||\nu^{n,\theta}||_{L^2(\Omega)})$$

On somme alors sur n cette relation :

$$\sqrt{E_h^{n+1/2}} \leq \sqrt{E_h^{1/2}} + \sqrt{\frac{1}{1-\alpha}}(\Delta t^2\sum_{k=1}^n ||\varepsilon_h^{n,\theta}||_{L^2(\Omega)} + ||\nu^{n,\theta}||_{L^2(\Omega)})$$

L'erreur de troncature se majore classiquement par développements de Taylor, et on a :

$$\Delta t^2 \sum_{k=1}^{n} ||\varepsilon_h^{n,\theta}||_{L^2(\Omega)} \leq CT\Delta t^2$$

Pour traiter l'erreur de projection, on a besoin d'un résultat un peu plus fin que celui du théorème 6.2. On commence encore par remarquer que si :

$$J = \int_x^y v(t)dt$$

Alors :

$$||J||^2_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega \left(\int_x^y \int_x^t \frac{\partial v}{\partial t}(s)dsdt \right)^2$$

Or :

$$\left| \int_x^t \frac{\partial v}{\partial t}(s)dsdt \right| \leq \left| \int_x^t 1ds \right|^{1/2} \left(\int_x^t \left| \frac{\partial v}{\partial t}(s) \right|^2 ds \right)^{1/2} = |t-x|^{1/2} \left(\int_x^y \left| \frac{\partial v}{\partial t}(s) \right|^2 \right)^{1/2}$$

D'où on déduit que :

$$\left| \int_x^y \int_x^t \frac{\partial v}{\partial t}(s)dsdt \right| \leq \int_x^y |t-x|^{1/2} dt \left(\int_x^y \left| \frac{\partial v}{\partial t}(s) \right|^2 \right)^{1/2} = \frac{2}{3}|y-x|^{3/2} \left(\int_x^y \left| \frac{\partial v}{\partial t}(s) \right|^2 \right)^{1/2}$$

Alors :

$$||J||^2_{L^2(\Omega)} \leq \frac{4}{9}|y-x|^3 \int_x^y \left|\left| \frac{\partial v}{\partial t}(t) \right|\right|^2_{L^2(\Omega)} dt$$

On en déduit que comme :

$$(P^h - I)u(\cdot, n\Delta t) = (P^h - I) \int_{(n-1)\Delta t}^{n\Delta t} \frac{\partial u}{\partial t}(\cdot, t) = \int_{(n-1)\Delta t}^{n\Delta t} (P^h - I) \frac{\partial u}{\partial t}(\cdot, t)$$

alors :

$$||(P^h - I)u(\cdot, n\Delta t)||^2_{L^2(\Omega)} \leq C\Delta t^3 \int_{(n-1)\Delta t}^{n\Delta t} \left|\left| \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\cdot, t) \right|\right|^2_{L^2(\Omega)} \leq C\Delta t^3 h^4 \int_{(n-1)\Delta t}^{n\Delta t} \left| \frac{\partial^2 u(\cdot, t)}{\partial t^2} \right|^2_{H^2(\Omega)}$$

Il suit comme $\sum_{k=1}^{n} 1 = \frac{n\Delta t}{\Delta t} \leq \frac{T}{\Delta t}$:

$$\sum_{k=1}^{n} ||(P^h - I)u(\cdot, n\Delta t)||_{L^2(\Omega)} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} ||(P^h - I)u(\cdot, n\Delta t)||^2_{L^2(\Omega)} \right)^{1/2} \frac{T^{1/2}}{\Delta t^{1/2}}$$

$$\leq Ch^2 T^{1/2} \Delta t \left(\int_0^{n\Delta t} |\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\cdot, t)|^2_{H^2(\Omega)} \right)^{1/2}$$

et donc, par l'inégalité triangulaire :

$$\sum_{k=1}^{n} ||\nu^{n,\theta}||_{L^2(\Omega)} \leq Ch^2 T^{1/2} \Delta t \left(\int_0^T |\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\cdot, t)|^2_{H^2(\Omega)} \right)^{1/2}$$

On obtient alors :

$$\sqrt{E_h^{n+1/2}} \leq \sqrt{E_h^{1/2}} + \sqrt{\frac{1}{1-\alpha}}(CT\Delta t^2 + C\Delta t h^2)$$

Ne reste plus qu'à majorer $\sqrt{E_h^{1/2}}$. On se place dans le cas (idéal) où on a choisi $I_h = P^h$. Nous avons :

$$u_h^0 = P^h u_0 \quad \Rightarrow \quad e_h^0 = 0$$

et

$$\left(\rho u_h^1, v_h\right)_{L^2(\Omega)} = \left(\rho(P^h u_0 + \Delta t P^h u_1), v_h\right)_{L^2(\Omega)} + \frac{\Delta t^2}{2} \left(\nabla P^h u_0, \nabla v_h\right)_{L^2(\Omega)}$$

D'autre part, en faisant un développement de Taylor et en utilisant l'équation, on obtient :

$$\rho u(\cdot, \Delta t) = \rho u_0 + \Delta t \rho u_1 + \rho \frac{\Delta t^2}{2} \Delta u_0 + \frac{1}{2} \int_0^{\Delta t} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(\cdot, t)(\Delta t - t)^2 dt$$

Alors, comme P^h est borné indépendamment de h et Δt, on a :

$$\rho P^h u(\cdot, \Delta t) = \rho P^h u_0 + \Delta t \rho P^h u_1 + \frac{\Delta t^2}{2} P^h \Delta u_0 + \frac{\rho}{2} \int_0^{\Delta t} P^h \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(\cdot, t)(\Delta t - t)^2 dt$$

$$= \rho P^h u_0 + \Delta t \rho P^h u_1 + \rho \frac{\Delta t^2}{2} \Delta P^h u_0 + \frac{\Delta t^2}{2}(P^h \Delta u_0 - \Delta P^h u_0) + \frac{\rho}{2}\int_0^{\Delta t} P^h \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(\cdot,t)(\Delta t - t)^2 dt$$

Alors, pour tout $v_h \in V_h^r$:

$$\Big(\rho(u_h^1 - P^h u(\cdot,\Delta t)), v_h\Big)_{L^2(\Omega)} = -\left(\frac{\Delta t^2}{2}(P^h \Delta u_0 - \Delta P^h u_0), v_h\right)_{L^2(\Omega)}$$

$$-\left(\frac{\rho}{2}\int_0^{\Delta t} P^h \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(\cdot,t)(\Delta t - t)^2 dt, v_h\right)_{L^2(\Omega)}$$

En prenant $v_h = u_h^1 - P^h u(\cdot,\Delta t)$, on en déduit :

$$||u_h^1 - P^h u(\cdot,\Delta t)||^2_{L^2_\rho(\Omega)} \leq \frac{\Delta t^2}{2}||P^h \Delta u_0 - \Delta P^h u_0||_{L^2(\Omega)}||u_h^1 - P^h u(\cdot,\Delta t)||_{L^2_\rho(\Omega)}$$

$$+\Delta t^3 \sup_{[0,T]}||\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(\cdot,t)||_{L^2(\Omega)}||u_h^1 - P^h u(\cdot,\Delta t)||_{L^2_\rho(\Omega)}$$

et il suit :

$$||u_h^1 - P^h u(\cdot,\Delta t)||^2_{L^2_\rho(\Omega)} \leq C\Delta t^2 h||u_0||_{H^3(\Omega)} + \Delta t^3 \sup_{[0,T]}||\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(\cdot,t)||_{L^2(\Omega)}$$

Pour estimer la semi-norme H^1, cette fois on écrit que :

$$\begin{aligned}
||\nabla(u_h^1 - P^h u(\cdot,\Delta t))||^2_{L^2(\Omega)} &= \Big(K^h(u_h^1 - P^h u(\cdot,\Delta t)), u_h^1 - P^h u(\cdot,\Delta t)\Big)_{H^1(\Omega)} \\
&= \Big(M_\rho^h (M_\rho^h)^{-1} K^h(u_h^1 - P^h u(\cdot,\Delta t)), u_h^1 - P^h u(\cdot,\Delta t)\Big)_{H^1(\Omega)} \\
&= \Big(\rho(M_\rho^h)^{-1} K^h(u_h^1 - P^h u(\cdot,\Delta t)), u_h^1 - P^h u(\cdot,\Delta t)\Big)_{L^2(\Omega)} \\
&\leq ||(M_\rho^h)^{-1} K^h||\ ||u_h^1 - P^h u(\cdot,\Delta t)||^2_{L^2_\rho(\Omega)}
\end{aligned}$$

Alors on en déduit :

$$\Delta t||\nabla(u_h^1 - P^h u(\cdot,\Delta t))||^2_{L^2(\Omega)} \leq C\Delta t^2 h||u_0||_{H^3(\Omega)} + \Delta t^3 \sup_{[0,T]}||\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(\cdot,t)||_{L^2(\Omega)}$$

En combinant ces inégalités, on peut alors majorer l'énergie de l'erreur par :

$$\sqrt{E_h^{n+1/2}} \leq C(T)(\Delta t^2 h + \Delta t^3 + \Delta t^2 + \Delta t h^2)$$

Pour conclure à la convergence, il suffit de remarquer que :

$$e_h^n = \sum_{k=0}^{n-1} e_h^{k+1} - e_h^k$$

par conséquent, pour tout $n \leq N$:

$$||e_h^n||_{L^2_\rho(\Omega)} \leq C\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{E_h^{n+1/2}} \leq C(T)(\Delta t + h^2)$$

ce qui termine la preuve de convergence. Encore une fois, si la solution est plus régulière en temps (au moins $C^4([0,T],L^2(\Omega))$), on pourra affiner les estimations ci-dessus et obtenir une convergence à l'ordre deux en temps. □

Bien entendu, ce résultat peut être considérablement affiné. On pourrait en effet montrer que pour $\theta = 1/12$, si la solution et les données sont suffisamment régulières, on peut obtenir une convergence à l'ordre 4 en temps. De plus, encore une fois sous des hypothèses suffisantes de régularité, il est clair que pour des éléments finis d'ordre r, on s'attend à une convergence d'ordre $r+1$ en espace en norme L^2. En résumé, on peut dire que sur le domaine infini Ω, la discrétisation que l'on utilise aboutit aux mêmes résultats de convergence que ceux que l'on obtiendrait en domaine borné en utilisant cette discrétisation. C'est le point que nous voulions illustrer, aussi nous ne nous attelerons pas à la tâche (longue) qui consisterait à redémontrer les estimations optimales de convergence sur notre domaine non borné.

Remarque 6.2. *On peut de nouveau montrer qu'il n'est pas nécessaire en pratique de connaître* $||(M_\rho^h)^{-1}K^h||$ *pour pouvoir satisfaire la condition* (6.38)*. En effet (de la même façon que pour l'ordre un en temps) il suffit qu'elle soit satisfaite sur chaque cellule de périodicité et sur le défaut, pour qu'elle soit satisfaite sur* Ω*. On dispose donc encore d'un critère pratique pour déterminer la CFL.*

Nous allons maintenant expliquer comment réduire le problème discret d'ordre deux à un problème équivalent posé sur le domaine Ω_0. Encore une fois, comme dans le cas de l'ordre un en temps, ce sera donc le théorème de convergence que nous venons de démontrer sur le guide complet qui va garantir, par équivalence, la convergence du problème intérieur.

6.2.2 Méthode DtN discrète

Afin de construire les opérateurs DtN discrets, il nous faut, comme nous en avons maintenant l'habitude, introduire les problèmes extérieurs correspondant. On considèrera donc, pour tout $(\varphi_h^n)_{2\leq n\leq N} \in (X_h^r)^{2(N-2)}$, la famille $(u_{h,e}^n)_{0\leq n\leq N} \in V_h^r(\Omega_e)$ telle que, pour tout $v_h \in V_{h,0}^r(\Omega_e) = \{v_h \in V_h^r(\Omega_e) \mid v_h|_{\Gamma_0} = 0\}$:

$$\left|\begin{array}{l} a^1_{\Omega_e,\theta,\Delta t}(u_{h,e}^{n+1}, v_h) = a^2_{\Omega_e,\theta,\Delta t}(u_{h,e}^n, v_h) - a^1_{\Omega_e,\theta,\Delta t}(u_{h,e}^{n-1}, v_h) \\ u_{h,e}^{n+1}|_{\Gamma_0} = \varphi_h^{n+1} u_{h,e}^0 = 0 \\ u_{h,e}^1 = 0 \end{array}\right. \tag{6.39}$$

Bien évidemment, on a le :

Théorème 6.20. *Sous les hyptohèses (H), pour tout* $(\varphi_h^n)_{2\leq n\leq N} \in (X_h^r)^{2(N-2)}$*, il existe une unique famille* $(u_{h,e}^n)_{0\leq n\leq N} \in V_h^r(\Omega_e)$ *solution de* (6.39)*, qui dépend continûment des données. De plus, le problème correspondant à chaque pas de temps est bien posé.*

Par analogie avec le cas semi-discret, et étant donné que nous avons réussi à retrouver ce résultat pour le cas de l'ordre un en temps discret, on s'attend à pouvoir faire une décomposition en temps de ce problème d'ordre deux discret. On introduit donc pour tout $\varphi_h \in (X_h^r)^2$, la famille $(w_{h,e}^n)_{0\leq n\leq N} \in V_h^r(\Omega_e)$ telle que, pour tout $v_h \in V_{h,0}^r(\Omega_e) = \{v_h \in V_h^r(\Omega_e) \mid v_h|_{\Gamma_0} = 0\}$:

$$\left|\begin{array}{ll} a^1_{\Omega_e,\theta,\Delta t}(w_{h,e}^{n+1}(\varphi_h), v_h) = a^2_{\Omega_e,\theta,\Delta t}(w_{h,e}^n(\varphi_h), v_h) - a^1_{\Omega_e,\theta,\Delta t}(w_{h,e}^{n-1}(\varphi_h), v_h) & \\ w_{h,e}^2(\varphi_h)|_{\Gamma_0} = \varphi_h & \\ w_{h,e}^0(\varphi_h) = 0 & \\ w_{h,e}^1(\varphi_h) = 0 & \\ w_{h,e}^n(\varphi_h)|_{\Gamma_0} = 0 & n \neq 2 \end{array}\right. \tag{6.40}$$

Ce problème est bien posé en vertu du théorème 6.20. On aboutit alors à :

Théorème 6.21. *Sous les hypothèses (H), pour tout* $(\varphi_h^n)_{2\leq n\leq N} \in (X_h^r)^{2(N-2)}$*, on a :*

$$u_{h,e}^n = \sum_{k=2}^{n} w_{h,e}^k(\varphi_h^{n-k+2}) \tag{6.41}$$

Nous disposons maintenant des outils nécessaires afin de déterminer les "bons" opérateurs DtN discrets dans le cas de l'ordre deux en temps. Le point de départ est toujours le même : étant donnée une solution $(u_{h,int}^n)_{0\leq n\leq N} \in V_h^r(\Omega_0)^N$ dans Ω_0 et une solution $(u_{h,e}^n)_{0\leq n\leq N} \in V_h^r(\Omega_e)^N$ dans Ω_e, on se demande à quelle condition :

$$\widetilde{u}_h^n = \left|\begin{array}{ll} u_{h,int}^n & \text{dans } \Omega_0 \\ u_{h,e}^n & \text{dans } \Omega_e \end{array}\right.$$

est solution de (6.35) dans tout Ω. Comme on cherche une solution globale dans $V_h^r \subset H^1(\Omega)$, il est clair que $\widetilde{u}_h^n$ doit se raccorder en trace sur Γ_0. Aussi, on doit avoir $u_{h,int}^n|_{\Gamma_0} = u_{h,e}^n|_{\Gamma_0}$ pour tout n. Ensuite, rappelons-nous que la condition transparente au niveau continu ne faisait qu'exprimer la continuité de la dérivée normale de $u^{n,\theta}$. On s'attend donc, suite à ce que nous avons observé sur le cas de l'ordre un en temps, à retrouver ce raccord au niveau discret, mais au sens faible. Pour tout $v_h \in V_h^r(\Omega)$, nous pouvons écrire, pour $i = 1, 2$:

$$a^i_{\Omega,\theta,\Delta t}(\widetilde{u}_h^n, v_h) = a^i_{\Omega_0,\theta,\Delta t}(\widetilde{u}_h^n, v_h) + a^1_{\Omega_e,\theta,\Delta t}(\widetilde{u}_h^n, v_h)$$

Dans le domaine extérieur, on a :

$$\begin{aligned} a^i_{\Omega_e,\theta,\Delta t}(\widetilde{u}_h^n, v_h) &= a^i_{\Omega_e\theta,\Delta t}(u^n_{h,e}, v_h) \\ &= a^i_{\Omega^e,\theta,\Delta t}(u^n_{h,e}, v_h - \eta_h(v_h|_{\Gamma_0})) + a^i_{\Omega_e,\theta,\Delta t}(u^n_{h,e}, \eta_h(v_h|_{\Gamma_0})) \\ &= a^i_{\Omega_e,\theta,\Delta t}(u^n_{h,e}, \eta_h(v_h|_{\Gamma_0})) \end{aligned}$$

Par conséquent, afin d'être solution de (6.35), on devra avoir :

$$\begin{aligned} &a^1_{\Omega_0,\theta,\Delta t}(u^{n+1}_{h,int}, v_h) - a^2_{\Omega_0,\theta,\Delta t}(u^n_{h,int}, v_h) + a^1_{\Omega_0,\theta,\Delta t}(u^{n-1}_{h,int}, v_h) - \left(\Delta t^2 f^{n,\theta}, v_h\right)_{L^2(\Omega_0)} \\ &+a^1_{\Omega_e,\theta,\Delta t}(u^{n+1}_{h,e}, \eta_h(v_h|_{\Gamma_0})) - a^2_{\Omega_e,\theta,\Delta t}(u^n_{h,e}, \eta_h(v_h|_{\Gamma_0})) + a^1_{\Omega_e,\theta,\Delta t}(u^{n+1}_{h,e}, \eta_h(v_h|_{\Gamma_0})) = 0 \end{aligned}$$

Les trois derniers termes dans cette expression peuvent sans difficulté se réinterpréter comme une définition faible de la dérivée normale de $u_h^{n,\theta}$. Il s'agit donc de la quantité qui exprime la condition transparente, et par conséquent correspond aux "bons" opérateurs DtN. Comme dans le cas de l'ordre un en temps, on utilise alors la décomposition en temps, pour réexprimer ce terme :

$$a^i_{\Omega_e,\theta,\Delta t}(u^n_{h,e}, \eta_h(v_h|_{\Gamma_0})) = \sum_{k=2}^{n} a^i_{\Omega_e,\theta,\Delta t}(w^k_{h,e}(\varphi_h^{n-k+2}), \eta_h(v_h|_{\Gamma_0}))$$

On définit alors naturellement l'équivalent discret de l'opérateur DtN en posant :

$$\begin{aligned} \Lambda^n_{h,e} : (X_h^r)^2 &\longrightarrow (X_h^r)^2 \\ \varphi_h &\longmapsto \Lambda^n_{h,e}\varphi_h \end{aligned}$$

défini comme l'unique solution dans $(X_h^r)^2$ pour tout $\psi_h \in (X_h^r)^2$ de :

$$\begin{aligned} \left(\Lambda^n_{h,e}\varphi_h, \psi_h\right)_{L^2(\Gamma_0)} &= a^1_{\Omega_e,\theta,\Delta t}(w^n_{h,e}(\varphi_h), \eta_h(\psi_h)) - a^2_{\Omega_e,\theta,\Delta t}(w^{n-1}_{h,e}(\varphi_h), \eta_h(\psi_h)) \\ &+a^1_{\Omega_e,\theta,\Delta t}(w^{n-2}_{h,e}(\varphi_h), \eta_h(\psi_h)) \end{aligned}$$

La condition de raccord se réécrit donc :

$$\begin{aligned} &a^1_{\Omega_0,\theta,\Delta t}(u^{n+1}_{h,int}, v_h) - a^2_{\Omega_0,\theta,\Delta t}(u^n_{h,int}, v_h) + a^1_{\Omega_0,\theta,\Delta t}(u^{n-1}_{h,int}, v_h) - \left(\Delta t^2 f^{n,\theta}, v_h\right)_{L^2(\Omega_0)} \\ &+\sum_{k=2}^{n+1} \left(\Lambda^k_{h,e} u^{n+1-k+2}_{h,int}|_{\Gamma_0}, v_h|_{\Gamma_0}\right)_{L^2(\Gamma_0)} = 0 \end{aligned}$$

Alors on aboutit naturellement au résultat suivant :

Théorème 6.22. *Sous les hypothèses (H), le problème intérieur :*

Trouver $(u^n_{h,int})_{0\leq n\leq N} \in V^r_h(\Omega_e)^N$ *solution de, pour tout* $v_h \in V^r_h(\Omega_0)$ *:*

$$\left|\begin{array}{l} a^1_{\Omega_0,\theta,\Delta t}(u^{n+1}_{h,int}, v_h) - a^2_{\Omega_0,\theta,\Delta t}(u^n_{h,int}, v_h) + a^1_{\Omega_0,\theta,\Delta t}(u^{n-1}_{h,int}, v_h) - \left(\Delta t^2 f^{n,\theta}, v_h\right)_{L^2(\Omega_0)} \\ + \sum_{k=1}^{n+1} \left(\Lambda^k_{h,e} u^{n+1-k+1}_{h,int}|_{\Gamma_0}, v_h|_{\Gamma_0}\right)_{L^2(\Gamma_0)} = 0 \\ u^0_{h,int} = u^0_h = P^h u_0 \\ \left(\rho u^1_h, v_h\right)_{L^2(\Omega_0)} = \left(\rho(u^0_h + \Delta t P^h u_1), v_h\right)_{L^2(\Omega_0)} + \dfrac{\Delta t^2}{2}\left(\nabla u^0_h, \nabla v_h\right)_{L^2(\Omega_0)} \end{array}\right. \tag{6.42}$$

est bien posé et est équivalent au problème (6.3) *au sens où si* $(u^n_h)_{0\leq n\leq N}$ *est la solution de* (6.3)*, alors pour tout n, on a :* $u^n_{h,int} = u^n_h|_{\Omega_0}$*.*

Démonstration. La preuve est identique à celle du théorème 6.5, aussi nous ne la reproduisons pas ici. □

On voit donc comment réduire le problème discret d'ordre deux en temps à un problème posé en domaine borné. Une autre conséquence de cette équivalence est le résultat de convergence suivant :

Corollaire 6.1. *Sous les hypothèses du théorème 6.19, on a :*

$$||u(\cdot, n\Delta t) - u^n_{h,int}||_{L^2_\rho(\Omega_0)} \leq C(\Delta t + h^2) \tag{6.43}$$

Encore une fois, on voit que le résultat de convergence que l'on a établi dans le contexte abstrait du problème posé sur V^r_h nous permet de déduire sans effort supplémentaire la convergence du problème que l'on résout effectivement en pratique.

Comme nous l'avons observé jusqu'ici dans le contexte des guides périodiques, la solution du problème extérieur se décompose en deux problèmes de demi-guide découplés. On introduit donc : pour tout $\varphi_h \in X^r_h$, la famille $(w^n_{h,\pm})_{0\leq n\leq N} \in V^r_h(\Omega_e)$ telle que, pour tout $v_h \in V^r_{h,0}(\Omega_\pm) = \left\{v_h \in V^r_h(\Omega_\pm) \;|\; v_h|_{\Gamma^\pm_0} = 0\right\}$:

$$\left|\begin{array}{ll} a^1_{\Omega_\pm,\theta,\Delta t}(w^{n+1}_{h,e}(\varphi_h), v_h) = a^2_{\Omega_\pm,\theta,\Delta t}(w^n_{h,e}(\varphi_h), v_h) - a^1_{\Omega_\pm,\theta,\Delta t}(w^{n-1}_{h,e}(\varphi_h), v_h) & \\ w^2_{h,\pm}(\varphi_h)|_{\Gamma^\pm_0} = \varphi_h & \\ w^0_{h,\pm}(\varphi_h) = 0 & \\ w^1_{h,\pm}(\varphi_h) = 0 & \\ w^n_{h,\pm}(\varphi_h)|_{\Gamma_0} = 0 & n \neq 2 \end{array}\right. \tag{6.44}$$

qui sont encore bien posés en vertu du théorème 6.20. Par unicité, il est clair que si on décompose chaque $\varphi_h \in X^r_h(\Gamma_0)$ en :

$$\varphi_h = \left(\varphi_h|_{\Gamma^-_0}, \varphi_h|_{\Gamma^+_0}\right)$$

alors, comme nous en avons maintenant l'habitude :

$$w^n_{h,e}(\varphi_h)|_{\Omega^\pm} = w^n_{h,\pm}(\varphi^{pm}_h)$$

comme au niveau continu en espace. Aussi, on posera :

$$\begin{array}{rccc} \Lambda^n_{h,\pm} : X^r_h & \longrightarrow & X^r_h \\ \varphi_h & \longmapsto & \Lambda^n_{h,\pm}\varphi_h \end{array}$$

défini comme l'unique solution dans X_h^r pour tout $\psi_h \in X_h^r$ de :

$$\left(\Lambda_{h,\pm}^n \varphi_h, \psi_h\right)_{L^2(\Gamma_0^\pm)} = a^1_{\Omega^\pm,\theta,\Delta t}(w^n_{h,\pm}(\varphi_h), \eta_h^{0,\pm}(\psi_h)) - a^2_{\Omega^\pm,\theta,\Delta t}(w^{n-1}_{h,\pm}(\varphi_h), \eta_h^{0,\pm}(\psi_h))$$

$$+a^1_{\Omega^\pm,\theta,\Delta t}(w^{n-2}_{h,\pm}(\varphi_h), \eta_h^{0,\pm}(\psi_h))$$

Alors le problème intérieur pourra encore se réécrire :

$$a^1_{\Omega_0,\theta,\Delta t}(u^{n+1}_{h,int}, v_h) - a^2_{\Omega_0,\theta,\Delta t}(u^n_{h,int}, v_h) + a^1_{\Omega_0,\theta,\Delta t}(u^{n-1}_{h,int}, v_h) - \left(\Delta t^2 f^{n,\theta}, v_h\right)_{L^2(\Omega_0)}$$

$$+\sum_{k=2}^{n+1} \left(\Lambda^k_{h,-} u^{n+1-k+2}_{h,int}|_{\Gamma_0^-}, v_h|_{\Gamma_0^-}\right)_{L^2(\Gamma_0^-)}$$

$$+\sum_{k=2}^{n+1} \left(\Lambda^k_{h,+} u^{n+1-k+2}_{h,int}|_{\Gamma_0^+}, v_h|_{\Gamma_0^+}\right)_{L^2(\Gamma_0^+)} = 0$$

Ce sont donc les opérateurs $\Lambda^n_{h,\pm}$ que nous cherchons à déterminer, au moyen de la résolution des problèmes de demi-guide discrets.

6.2.3 Résolution des problèmes de demi-guide discrets

Encore une fois, nous nous contenterons d'expliquer la méthode sur le demi-guide de droite, et nous oublierons les indices + dans toute cette sous-section. Nous rappelons les notations pour le demi-guide sur la figure 6.33.

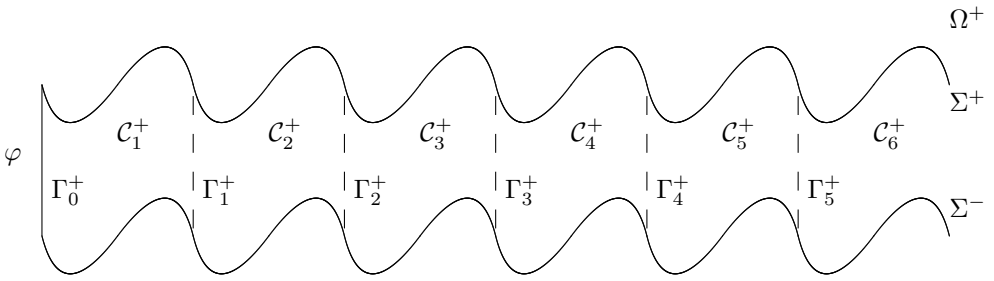


FIGURE 6.33 – Demi-guide Ω^+

Le lecteur aura sans doute deviné à ce stade que les résultats du chapitre précédent se transposent directement au niveau discret à condition de définir avec précaution les équivalents discrets des opérateurs de trace normale. Les démonstrations des divers résultats qui vont suivre se déduisent de celles du cas continu en procédant comme dans le cas de l'ordre un en temps. Aussi, afin d'alléger un peu cette présentation, nous allons nous contenter de définir les divers objets et d'énoncer les résultats, sans en donner la démonstration.

Le premier pas de temps

Pour déterminer la structure du premier pas de temps, on introduit l'opérateur de propagation :

$$\begin{aligned} R_{h,2} : X_h^r &\longrightarrow X_h^r \\ \varphi_h &\longmapsto w_h^2(\varphi_h)|_{\Gamma_1^+} \end{aligned}$$

Alors on montre que la structure du premier pas de temps est gouvernée par le résultat suivant :

Théorème 6.23. *Pour tout $\varphi_h \in X_h^r$ et tout $j \geq 0$, on a :*

$$\tau_{jL^+}(w_h^2(\varphi_h)) = w_h^2(R_{h,2}^j \varphi) \tag{6.45}$$

ce qui s'écrit aussi :

$$w_h^2(\varphi)|_{\mathcal{C}_{j+1}^+} = w_h^2(R_{h,2}^j \varphi)|_{\mathcal{C}_1^+} \tag{6.46}$$

De plus, l'opérateur $R_{h,2}$ est de rayon spectral strictement inférieur à 1.

Pour exprimer complètement le premier pas de temps en fonction du propagateur, on introduit les deux problèmes de cellule :

$$\left| \begin{array}{ll} a^1_{\mathcal{C}^+,\theta,\Delta t}(e_{h,0}(\varphi_h), v_h) = 0 & \forall\, v_h \in V_{h,0}^r(\mathcal{C}^+) \\ e_{h,0}(\varphi_h) = \varphi_h & \text{sur } \Gamma_0^+ \\ e_{h,0}(\varphi_h) = 0 & \text{sur } \Gamma_1^+ \end{array} \right. \tag{6.47}$$

$$\left| \begin{array}{ll} a^1_{\mathcal{C}^+,\theta,\Delta t}(e_{h,1}(\varphi_h), v_h) = 0 & \forall\, v_h \in V_{h,0}^r(\mathcal{C}^+) \\ e_{h,1}(\varphi_h) = 0 & \text{sur } \Gamma_0^+ \\ e_{h,1}(\varphi_h) = \varphi_h & \text{sur } \Gamma_1^+ \end{array} \right. \tag{6.48}$$

et on montre par unicité la formule suivante :

$$w_h^2(\varphi_h)|_{\mathcal{C}_1^+} = e_{h,0}(\varphi_h) + e_{h,1}(R_{h,2}\varphi_h) \tag{6.49}$$

et, en appliquant (6.46), on en déduit facilement que :

$$w_h^2(\varphi_h)|_{\mathcal{C}_j^+} = e_{h,0}(R_{h,2}^{j-1}\varphi) + e_{h,1}(R_{h,2}^j \varphi) \tag{6.50}$$

Afin de déterminer $R_{h,2}$, on utilise le raccord en dérivée normale au sens faible. On introduit pour cela les opérateurs :

$$\begin{aligned} T_{h,00} : X_h^r &\longrightarrow X_h^r \\ \varphi_h &\longmapsto T_{h,00}\varphi_h \end{aligned}$$

où $T_{h,00}\varphi_h$ est l'unique solution dans X_h^r de :

$$(T_{h,00}\varphi_h, \psi_h)_{L^2(\Gamma)} = a^1_{\mathcal{C}^+,\theta,\Delta t}(e_{h,0}(\varphi_h), \eta_h^0(\psi_h))$$

$$\begin{aligned} T_{h,01} : X_h^r &\longrightarrow X_h^r \\ \varphi_h &\longmapsto T_{h,01}\varphi_h \end{aligned}$$

où $T_{h,01}\varphi_h$ est l'unique solution dans X_h^r de :

$$(T_{h,01}\varphi_h, \psi_h)_{L^2(\Gamma)} = a^1_{\mathcal{C}^+,\theta,\Delta t}(e_{h,0}(\varphi_h), \eta_h^1(\psi_h))$$

$$\begin{aligned} T_{h,10} : X_h^r &\longrightarrow X_h^r \\ \varphi_h &\longmapsto T_{h,10}\varphi_h \end{aligned}$$

où $T_{h,10}\varphi_h$ est l'unique solution dans X_h^r de :

$$(T_{h,10}\varphi_h, \psi_h)_{L^2(\Gamma)} = a^1_{\mathcal{C}^+,\theta,\Delta t}(e_{h,1}(\varphi_h), \eta_h^0(\psi_h))$$

$$\begin{aligned} T_{h,11} : X_h^r &\longrightarrow X_h^r \\ \varphi_h &\longmapsto T_{h,11}\varphi_h \end{aligned}$$

où $T_{h,11}\varphi_h$ est l'unique solution dans X_h^r de :

$$(T_{h,11}\varphi_h, \psi_h)_{L^2(\Gamma)} = a^1_{\mathcal{C}^+,\theta,\Delta t}(e_{h,1}(\varphi_h), \eta_h^1(\psi_h))$$

Alors $R_{h,2}$ se détermine en résolvant la même équation quadratique qu'au niveau continu :

Théorème 6.24. *L'opérateur $R_{h,2}$ est l'unique solution de rayon spectral strictement inférieur à 1 de l'équation quadratique :*

$$T_{h,10}R_{h,2}^2 + (T_{h,00} + T_{h,11})R_{h,2} + T_{h,01} = 0 \tag{6.51}$$

Le premier opérateur DtN se calcule aussi par la même formule qu'au niveau continu :

Théorème 6.25. *On a l'expression suivante pour Λ_h^2*

$$\Lambda_h^2 = T_{h,00} + T_{h,10}R_1 \tag{6.52}$$

Pas de temps suivant

Pour obtenir la structure des pas de temps suivants, on introduit encore les propagateurs :

$$\begin{aligned} R_{h,n} : X_h^r &\longrightarrow X_h^r \\ \varphi_h &\longmapsto w_h^n(\varphi_h)|_{\Gamma_1^+} \end{aligned}$$

Alors la structure des w_h^n est gouvernée par le résultat suivant :

Théorème 6.26. *Pour tout $\varphi \in H^{1/2}(\Gamma^+)$, on a :*

$$\tau_{L^+}(w_h^n(\varphi_h)) = \sum_{k=2}^{n} w_h^k(R_{h,n-k+2}\varphi_h) \tag{6.53}$$

Les deux équivalents discrets des problèmes de cellule qui vont nous permettre de déterminer les w_h^n cellule par cellule uniquement à partir des propagateurs sont donnés par :

$$\begin{aligned} E_h : V_h^r(\mathcal{C}^+) &\longrightarrow V_{h,0}^r(\mathcal{C}^+) \\ f_h &\longmapsto E_h f_h \end{aligned}$$

où $E_h f_h$ est l'unique solution dans $V_h^r(\mathcal{C}_1^+)$ de :

$$\left| \begin{array}{ll} a^1_{\mathcal{C}^+,\theta,\Delta t}(E_h f_h, v_h) = a^2_{\mathcal{C}^+,\theta,\Delta t}(f_h, v_h) & \forall\ v_h \in V_{h,0}^r(\mathcal{C}^+) \\ E_h f_h = 0 & \text{sur } \Gamma_0^+ \\ E_h f_h = 0 & \text{sur } \Gamma_1^+ \end{array} \right. \tag{6.54}$$

et

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{E}_h : V_h^r(\mathcal{C}^+) & \longrightarrow & V_{h,0}^r(\mathcal{C}^+) \\ f_h & \longmapsto & \widetilde{E}_h f_h \end{array}$$

où $\widetilde{E}_h f_h$ est l'unique solution dans $V_h^r(\mathcal{C}_1^+)$ de :

$$\left| \begin{array}{ll} a^1_{\mathcal{C}^+,\theta,\Delta t}(\widetilde{E}_h f_h, v_h) = -a^1_{\mathcal{C}^+,\theta,\Delta t}(f_h, v_h) & \forall\, v_h \in V_{h,0}^r(\mathcal{C}^+) \\ \widetilde{E}_h f_h = 0 & \text{sur } \Gamma_0^+ \\ \widetilde{E}_h f_h = 0 & \text{sur } \Gamma_1^+ \end{array} \right. \tag{6.55}$$

Alors on obtient les formules de reconstruction suivantes, pour tout $n \geq 3$:

$$w_h^n(\varphi_h)|_{\mathcal{C}_1^+} = E_h(w_h^{n-1}(\varphi_h)|_{\mathcal{C}_1^+}) + \widetilde{E}_h(w_h^{n-2}(\varphi_h)|_{\mathcal{C}_1^+}) + e_{h,1}(R_{h,n}\varphi_h) \tag{6.56}$$

De manière plus générale, on a :

$$w_h^n(\varphi_h)|_{\mathcal{C}_j^+} = E_h(w_h^{n-1}(\varphi_h)|_{\mathcal{C}_j^+}) + \widetilde{E}_h(w_h^{n-2}(\varphi_h)|_{\mathcal{C}_j^+}) + e_{h,0}(w_h^n(\varphi_h)|_{\Gamma_{j-1}^+}) + e_{h,1}(w_h^n(\varphi_h)|_{\Gamma_j^+}) \tag{6.57}$$

Il ne reste plus qu'à construire une équation pour $R_{h,n}$. Afin d'exprimer le raccord en dérivée normale au sens faible, on introduit les opérateurs :

$$\begin{array}{rcl} T_{h,0} : V_h^r(\mathcal{C}^+) & \longrightarrow & X_h^r \\ f_h & \longmapsto & T_{h,0} f_h \end{array}$$

où $T_{h,0} f_h$ est l'unique solution dans X_h^r de :

$$(T_{h,0} f_h, \psi_h)_{L^2(\Gamma^+)} = a^1_{\mathcal{C}_1^+,\theta,\Delta t}(E_h f_h, \eta_h^0(\psi_h)) - a^2_{\mathcal{C}_1^+,\theta,\Delta t}(f_h, \eta_h^0(\psi_h))$$

$$\begin{array}{rcl} T_{h,1} : V_h^r(\mathcal{C}^+) & \longrightarrow & X_h^r \\ f_h & \longmapsto & T_{h,1} f_h \end{array}$$

où $T_{h,1} f_h$ est l'unique solution dans X_h^r de :

$$(T_{h,1} f_h, \psi_h)_{L^2(\Gamma^+)} = a^1_{\mathcal{C}_1^+,\theta,\Delta t}(E_h f_h, \eta_h^1(\psi_h)) - a^2_{\mathcal{C}_1^+,\theta,\Delta t}(f_h, \eta_h^1(\psi_h))$$

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{T}_{h,0} : V_h^r(\mathcal{C}^+) & \longrightarrow & X_h^r \\ f_h & \longmapsto & \widetilde{T}_{h,0} f_h \end{array}$$

où $\widetilde{T}_{h,0} f_h$ est l'unique solution dans X_h^r de :

$$\left(\widetilde{T}_{h,0} f_h, \psi_h\right)_{L^2(\Gamma^+)} = a^1_{\mathcal{C}_1^+,\theta,\Delta t}(\widetilde{E}_h f_h, \eta_h^0(\psi_h)) + a^1_{\mathcal{C}_1^+,\theta,\Delta t}(f_h, \eta_h^0(\psi_h))$$

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{T}_{h,1} : V_h^r(\mathcal{C}^+) & \longrightarrow & X_h^r \\ f_h & \longmapsto & \widetilde{T}_{h,1} f_h \end{array}$$

où $\widetilde{T}_{h,1} f_h$ est l'unique solution dans X_h^r de :

$$\left(\widetilde{T}_{h,1} f_h, \psi_h\right)_{L^2(\Gamma^+)} = a^1_{\mathcal{C}_1^+,\theta,\Delta t}(\widetilde{E}_h f_h, \eta_h^1(\psi_h)) + a^1_{\mathcal{C}_1^+,\theta,\Delta t}(f_h, \eta_h^1(\psi_h))$$

Puis, afin d'alléger les notations, on introduit encore un objet spécifique pour désigner la restriction à la première cellule :

$$\begin{array}{rcl} W_h^n : X_h^r & \longrightarrow & V_h^r(\mathcal{C}_1^+) \\ \varphi & \longmapsto & w_h^n(\varphi)|_{\mathcal{C}_1^+} \end{array}$$

On commence par donner les formules de calcul des $\Lambda_{h,e}^n$ à partir de l'ensemble de ces opérateurs :

Théorème 6.27. *On a l'expression suivante pour Λ_e^n, $n \geq 3$:*

$$\Lambda_h^n = T_{h,0} W_h^{n-1} + \widetilde{T}_{h,0} W_h^{n-2} + T_{h,10} R_{h,n} \tag{6.58}$$

On démontre alors que $R_{h,n}$ est l'unique solution d'une équation caractéristique formellement identique à celle satisfaite par R_n au niveau continu :

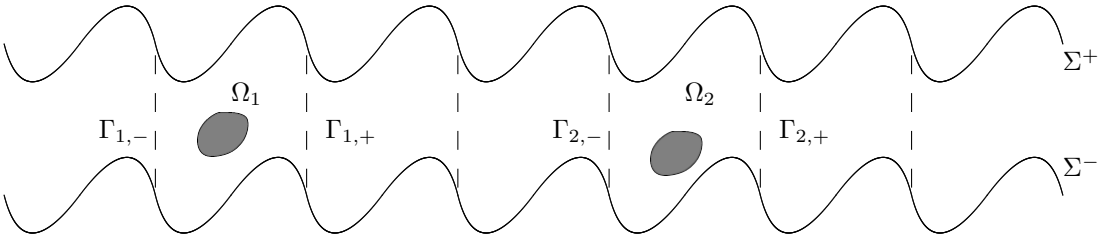
Théorème 6.28. *Pour tout $n \geq 2$, $R_{h,n}$ est l'unique solution dans $\mathcal{L}(X_h^r)$ de :*

$$\begin{array}{c} (T_{h,11} + \Lambda_h^2) R_{h,n} + T_{h,10} R_{h,n} R_{h,2} + T_{h,1} W_h^{n-1} + T_{h,0} W_h^{n-1} R_{h,2} \\ + \widetilde{T}_{h,1} W_h^{n-2} + \widetilde{T}_{h,0} W_h^{n-2} R_{h,2} + \displaystyle\sum_{k=3}^{n-1} \Lambda_h^k R_{h,n-k+2} = 0 \end{array} \tag{6.59}$$

Formellement, il n'y a donc aucune différence dans le traitement des problèmes discrets par rapport aux problèmes semi-discrets, si l'on définit correctement les opérateurs de trace normale.

6.2.4 Le cas du scattering multiple

Nous concluons l'anlyse numérique du cas de l'ordre deux en temps par un bref aperçu du cas avec plusieurs défauts. Nous reprenons la situation géométrique de scattering multiple présentée à la fin du chapitre précédent.



Les problèmes extérieurs à chaque défaut sont définis pour tout $\varphi_h \in (X_h^r)^2$, par la famille $(w_{h,e,j}^n)_{0 \leq n \leq N} \in V_h^r(\Omega \setminus \overline{\Omega_j})$ telle que, pour tout $v_h \in V_{h,0}^r(\Omega \setminus \overline{\Omega_j})$:

$$\left| \begin{array}{ll} a^1_{\Omega\setminus\overline{\Omega_j},\theta,\Delta t}(w_{h,e,j}^{n+1}(\varphi_h), v_h) = a^2_{\Omega\setminus\overline{\Omega_j},\theta,\Delta t}(w_{h,e,j}^{n}(\varphi_h), v_h) - a^1_{\Omega\setminus\overline{\Omega_j},\theta,\Delta t}(w_{h,e,j}^{n-1}(\varphi_h), v_h) & \\ w_{h,e,j}^2(\varphi_h)|_{\Gamma_j} = \varphi_h & \\ w_{h,e,j}^0(\varphi_h) = 0 & \\ w_{h,e,j}^1(\varphi_h) = 0 & \\ w_{h,e,j}^n(\varphi_h)|_{\Gamma_j} = 0 & n \neq 2 \end{array} \right. \tag{6.60}$$

Alors les opérateurs $\Theta^n_{h,ij}$ sont définis par :

$$\begin{aligned}\Theta^n_{h,ij} : (X^r_h)^2 &\longrightarrow (X^r_h)^2\\ \varphi_h &\longmapsto w^n_{h,e,j}(\varphi_h)|_{\Gamma_i}\end{aligned}$$

tandis que les opérateurs $\widetilde{\Lambda}^n_{h,ij}$ sont définis par :

$$\begin{aligned}\widetilde{\Lambda}^n_{h,ij} : (X^r_h)^2 &\longrightarrow (X^r_h)^2\\ \varphi_h &\longmapsto \widetilde{\Lambda}^n_{h,ij}\varphi_h\end{aligned}$$

où $\widetilde{\Lambda}^n_{h,ij}\varphi_h$ est l'unique solution pour tout $\psi_h \in (X^r_h)^2$ de :

$$\left(\widetilde{\Lambda}^n_{h,ij}\varphi_h, \psi_h\right)_{L^2(\Gamma)} =$$

$$\begin{aligned}&a^1_{\Omega\setminus\overline{\Omega_j},\theta,\Delta t}(w^n_{h,e,j}(\varphi_h), \eta^{j,-}_h(\psi_h|_{\Gamma_{j,-}})) - a^2_{\Omega\setminus\overline{\Omega_j},\theta,\Delta t}(w^{n-1}_{h,e,j}(\varphi_h), \eta^{j,-}_h(\psi_h|_{\Gamma_{j,-}}))\\ &+a^1_{\Omega\setminus\overline{\Omega_j},\theta,\Delta t}(w^{n-2}_{h,e,j}(\varphi_h), \eta^{j,-}_h(\psi_h|_{\Gamma_{j,-}})) + a^1_{\Omega\setminus\overline{\Omega_j},\theta,\Delta t}(w^n_{h,e,j}(\varphi_h), \eta^{j,+}_h(\psi_h|_{\Gamma_{j,+}}))\\ &-a^2_{\Omega\setminus\overline{\Omega_j},\theta,\Delta t}(w^{n-1}_{h,e,j}(\varphi_h), \eta^{j,+}_h(\psi_h|_{\Gamma_{j,+}})) + a^1_{\Omega\setminus\overline{\Omega_j},\theta,\Delta t}(w^{n-2}_{h,e,j}(\varphi_h), \eta^{j,+}_h(\psi_h|_{\Gamma_{j,+}}))\end{aligned}$$

Alors on montre, en procédant comme dans la section précédente (et donc en mimant au niveau discret les résultats du chapitre 4) le résultat suivant :

Théorème 6.29. *Le problème intérieur* (6.42) *se réécrit dans le cas du scattering mutliple :*

$$\left|\begin{array}{l} a^1_{\Omega_0,\theta,\Delta t}(u^{n+1}_{h,int}, v_h) - a^2_{\Omega_0,\theta,\Delta t}(u^n_{h,int}, v_h) + a^1_{\Omega_0,\theta,\Delta t}(u^{n-1}_{h,int}, v_h) - \left(\Delta t^2 f^{n,\theta}, v_h\right)_{L^2(\Omega_0)}\\ +\displaystyle\sum_{k=2}^{n+1}\left(\widetilde{\Lambda}^k_h\widetilde{\varphi}^{n+1-k+2}_h, v_h|_{\Gamma_0}\right)_{L^2(\Gamma_0)} = 0\\ u^{n+1}_{h,int}|_{\Gamma_0} = \displaystyle\sum_{k=2}^{n+1}\Theta^k_h\widetilde{\varphi}^{n+1-k+2}_h\end{array}\right. \tag{6.61}$$

Enfin, on montre, et la démonstration est identique à celle du cas continu en réinterprétant les problèmes extérieurs à chaque défaut comme deux problèmes de demi-guide, que l'on peut calculer $\Theta^n_{h,ij}$ et $\widetilde{\Lambda}^n_{h,ij}$ par les règles suivantes :

Théorème 6.30. *Pour $i = j$, les opérateurs $\Theta^n_{h,ii}$ et $\widetilde{\Lambda}^n_{h,ii}$ sont donnés par :*

$$\Theta^n_{h,ii} = \begin{pmatrix} Id & 0\\ 0 & Id\end{pmatrix} \quad et \quad \widetilde{\Lambda}^n_{h,ii} = \begin{pmatrix} \Lambda^n_{h,-} & 0\\ 0 & \Lambda^n_{h,+}\end{pmatrix}$$

Pour $i \neq j$, les opérateurs $\Theta^2_{h,ij}$ et $\widetilde{\Lambda}^2_{h,ij}$, se calculent selon la règle suivante :

. *Si Ω_i est à droite de Ω_j, i.e. si $q^i_- > q^j_+$, alors :*

$$\Theta^2_{h,ij} = \begin{pmatrix} 0 & (R^{h,+}_2)^{q^i_- - q^j_+}\\ 0 & (R^{h,+}_2)^{q^i_+ - q^j_+}\end{pmatrix}$$

et

$$\widetilde{\Lambda}^2_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & -T^+_{h,00}(R^{h,+}_2)^{q^i_- - q^j_+} - T^+_{h,10}(R^{h,+}_2)^{q^i_- - q^j_+ + 1}\\ 0 & T^+_{h,00}(R^{h,+}_2)^{q^i_+ - q^j_+} + T^+_{h,10}(R^{h,+}_2)^{q^i_+ - q^j_+ + 1}\end{pmatrix}$$

. *Si Ω_i est à gauche de Ω_j, i.e. si $q_+^i < q_-^j$, alors :*

$$\Theta^2_{h,ij} = \begin{pmatrix} (R_2^{h,-})^{q_-^j - q_-^i} & 0 \\ (R_2^{h,-})^{q_-^j - q_+^i} & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$\widetilde{\Lambda}^2_{h,ij} = \begin{pmatrix} T^-_{h,00}(R_2^{h,-})^{q_-^j - q_-^i} + T^-_{h,10}(R_2^{h,-})^{q_-^j - q_-^i + 1} & 0 \\ -T^-_{h,00}(R_2^{h,-})^{q_-^j - q_+^i} - T^-_{h,10}(R_2^{h,-})^{q_-^j - q_+^i + 1} & 0 \end{pmatrix}$$

Puis, pour tout $n > 2$, on pose :

$$\begin{aligned} W^{\pm}_{h,n,j} : (X_h^r)^2 &\longrightarrow V_h^r(\mathcal{C}^{\pm}) \\ \varphi &\longmapsto w^n_{h,\pm}(\varphi)|_{\mathcal{C}_j^{\pm}} \end{aligned}$$

la restriction à la $j-$ième cellule et

$$\begin{aligned} R^{\pm}_{h,n,j} : (X_h^r)^2 &\longrightarrow (X_h^r)^2 \\ \varphi &\longmapsto w^n_{h,\pm}(\varphi)|_{\Gamma_j^{\pm}} \end{aligned}$$

la trace sur la $j-$ième frontière verticale. Alors :

$$R^{\pm}_{h,n,j} = \sum_{k=2}^{n} R^{\pm}_{h,k,j-1} R^{\pm}_{h,n-k+2,1}$$

et les opérateurs $\Theta^n_{h,ij}$ et $\widetilde{\Lambda}^n_{h,ij}$, $i \neq j$, se calculent selon la règle suivante :

. *Si Ω_i est à droite de Ω_j, i.e. si $q_-^i > q_+^j$, alors :*

$$\Theta^n_{h,ij} = \begin{pmatrix} 0 & R^+_{h,n,q_-^i - q_+^j} \\ 0 & R^+_{h,n,q_+^i - q_+^j} \end{pmatrix}$$

et

$$\widetilde{\Lambda}^n_{h,ij} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -T^+_{h,00}R^+_{h,n,q_-^i - q_+^j} - T^+_{h,10}R^+_{h,n,q_-^i - q_+^j + 1} - T^+_{h,0}W^+_{h,n-1,q_-^i - q_+^j + 1} - \widetilde{T}^+_{h,0}W^+_{h,n-2,q_-^i - q_+^j + 1} \\ 0 & T^+_{h,00}R^+_{h,n,q_+^i - q_+^j} + T^+_{h,10}R^+_{h,n,q_+^i - q_+^j + 1} + T^+_{h,0}W^+_{h,n-1,q_+^i - q_+^j + 1} + \widetilde{T}^+_{h,0}W^+_{h,n-2,q_+^i - q_+^j + 1} \end{pmatrix}$$

. *Si Ω_i est à gauche de Ω_j, i.e. si $q_+^i < q_-^j$, alors :*

$$\Theta^n_{h,ij} = \begin{pmatrix} R^-_{h,n,q_-^j - q_-^i} & 0 \\ R^-_{h,n,q_-^j - q_+^i} & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$\widetilde{\Lambda}^n_{h,ij} =$$

$$\begin{pmatrix} T^-_{h,00}R^-_{h,n,q_-^j - q_-^i} + T^-_{h,10}R^-_{h,n,q_-^j - q_-^i + 1} + T^-_{h,0}W^-_{h,n-1,q_-^j - q_-^i + 1} + \widetilde{T}^-_{h,0}W^-_{h,n-2,q_-^j - q_-^i + 1} & 0 \\ -T^-_{h,00}R^-_{h,n,q_-^j - q_+^i} - T^-_{h,10}R^-_{h,n,q_-^j - q_+^i + 1} - T^-_{h,0}W^-_{h,n-1,q_-^j - q_+^i + 1} - \widetilde{T}^-_{h,0}W^-_{h,n-2,q_-^j - q_+^i + 1} & 0 \end{pmatrix}$$

6.2.5 Résultats numériques

Nous concluons cette extension aux problèmes d'ordre deux en temps par quelques résultats numériques sur l'équation des ondes en milieu périodique. Nous allons procéder comme nous l'avons fait pour l'ordre un en temps. Nous commençons par présenter quelques résultats sur le cas monodimensionnel, où il est aisé de calculer des solutions de référence, puis nous passons au cas du guide, en simple puis en multi scattering.

Le cas monodimensionnel

Nous reprenons ici les maillages que nous avons utilisés pour l'ordre un en temps dans le cas monodimensionnel. Nous considérons pour commencer le cas du milieu homogène $\rho = 1$, et d'une donnée initiale gaussienne :

$$u_0 = \left| \begin{array}{ll} Ae^{-\frac{(x-c_x)^2}{w_x^2}} & \text{dans } \Omega_0 \\ 0 & \text{dans } \mathbb{R}^2 \setminus \Omega_0 \end{array} \right.$$

avec $A = 3$, $c_x = 0.5$ et $w_x = 0.2$, en l'absence de source et de vitesse initiale. La solution exacte est dans ce cas très simple :

$$u_{ex}(x,t) = \frac{1}{2}(u_0(x-t) + u_0(x+t))$$

et nous la comparons à la solution analytique donnée par notre méthode sur les figures 6.34 et 6.35.

Sur la figure 6.36, nous représentons le module de l'écart entre ces deux solutions. Le cas de l'équation des ondes en milieu homogène nous permet alors aisément de constater qu'il n'y a aucune réflexion due aux opérateurs DtN, ce qui confirme nos résultats théoriques. L'erreur constatée est entièrement due à la dispersion numérique, ce qui explique qu'elle soit centrée le long des trajectoires.

Nous comparons maintenant notre solution numérique à une résolution sur 50 périodes autour du défaut, avec condition de Dirichlet en bout de guide (figures 6.38 et 6.37).

Il n'y a aucune différence notable entre ces deux solutions. Nous n'avons pas représenté l'erreur dans ce cas, car elle est nulle sur toute la durée de simulation (la solution n'ayant pas atteint les bords du domaine, il n'y a pas de réflexion du fait de la propagation à vitesse finie). Nous refaisons ce dernier test dans le cas du milieu périodique de la figure 6.37.

Une fois de plus, nous constatons l'excellent accord entre ces deux types de simulations, en dépit de la structure complexe de la solution due aux multiples réflexions, nettement visibles sur la figure 6.40. C'est aussi une parfaite occasion pour constater l'efficacité des formules de reconstruction à l'extérieur du défaut, puisqu'on voit clairement sur cette figure que le prolongement ainsi obtenu est parfaitement raccordé, et prolonge bien le phénomène en prenant en compte les réflexions extérieures, aussi loin qu'elles puissent se trouver.

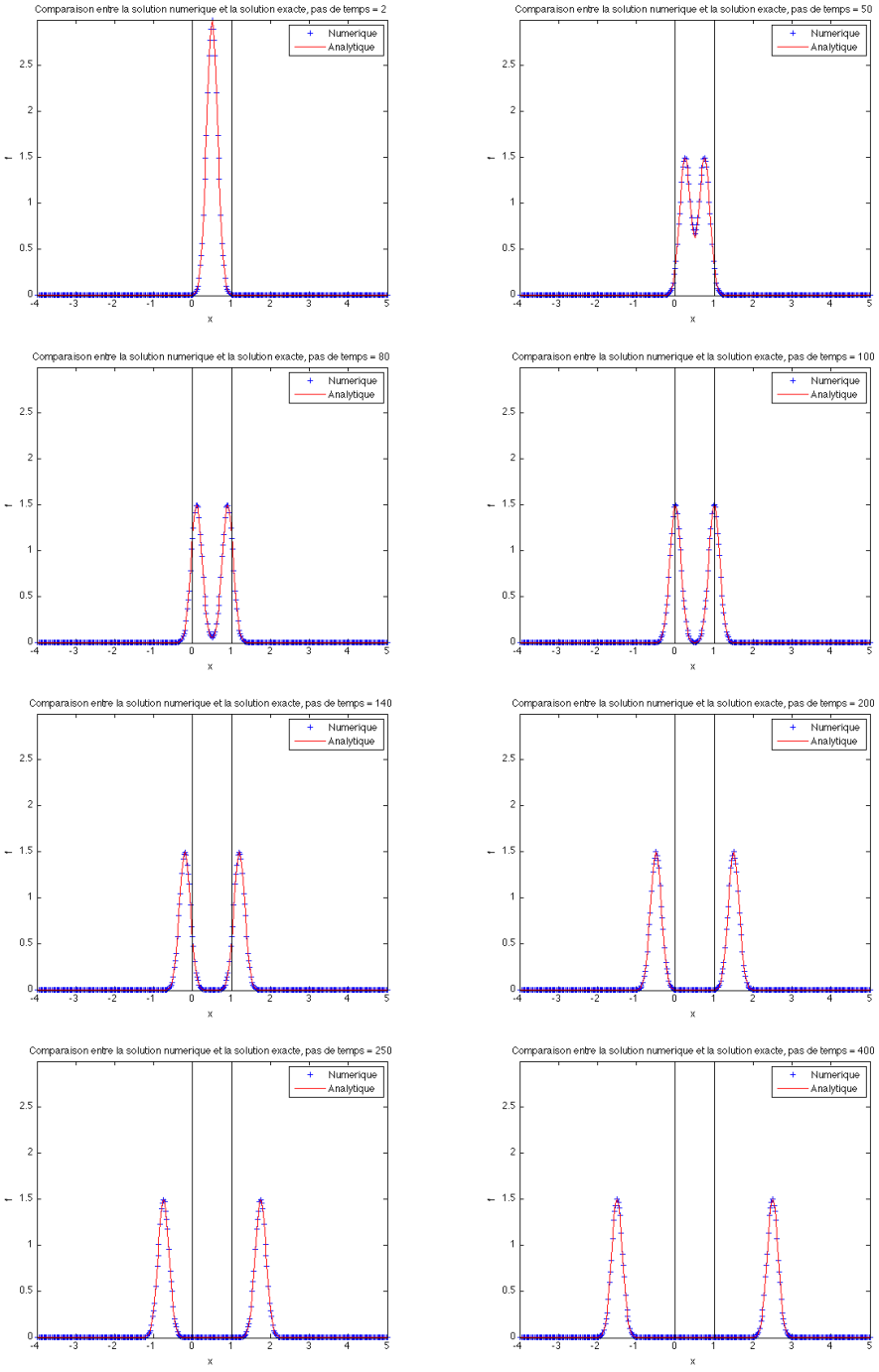


FIGURE 6.34 – Comparaison entre la solution exacte et la solution donnée par la méthode pour $r = 4$, $\theta = 1/12$, $\Delta t = 0.005$, pour $t = 0.01, 0.25, 0.4, 0.5, 0.7, 1, 1.25$ et 2

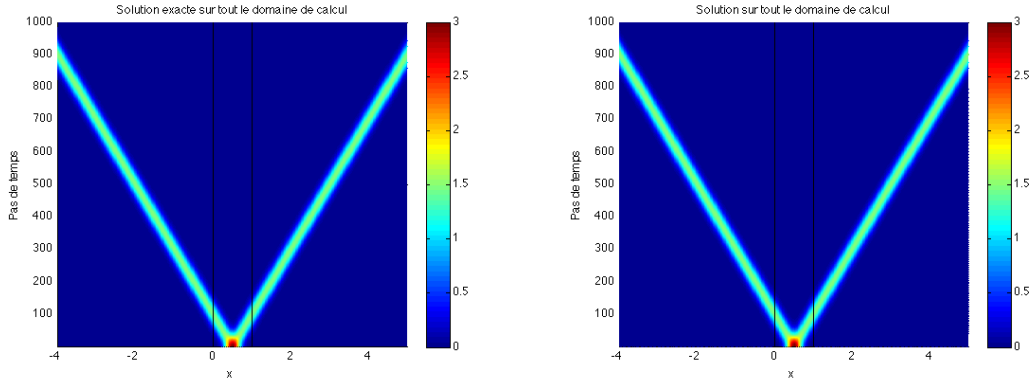


FIGURE 6.35 – Comparaison entre la solution exacte et la solution donnée par la méthode pour $r = 4$, $\theta = 1/12$, $\Delta t = 0.005$, sur l'ensemble de la durée de simulation : à gauche, solution exacte, à droite, solution numérique

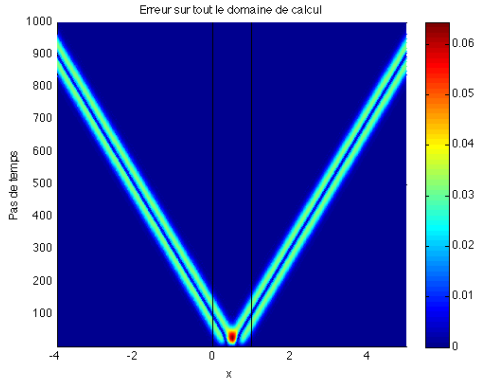


FIGURE 6.36 – Module de l'erreur entre la solution exacte et la solution donnée par la méthode pour $r = 4$, $\theta = 1/12$, $\Delta t = 0.005$, sur l'ensemble de la durée de simulation

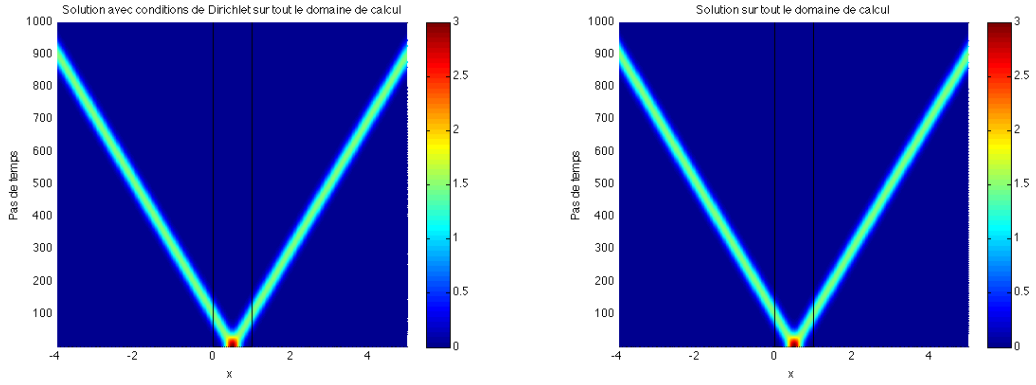


FIGURE 6.37 – Comparaison entre la solution numérique sur un grand domaine avec conditions de Dirichlet et la solution donnée par la méthode pour $r = 4$, $\theta = 1/12$, $\Delta t = 0.005$, sur l'ensemble de la durée de simulation : à gauche, solution de référence, à droite, solution numérique

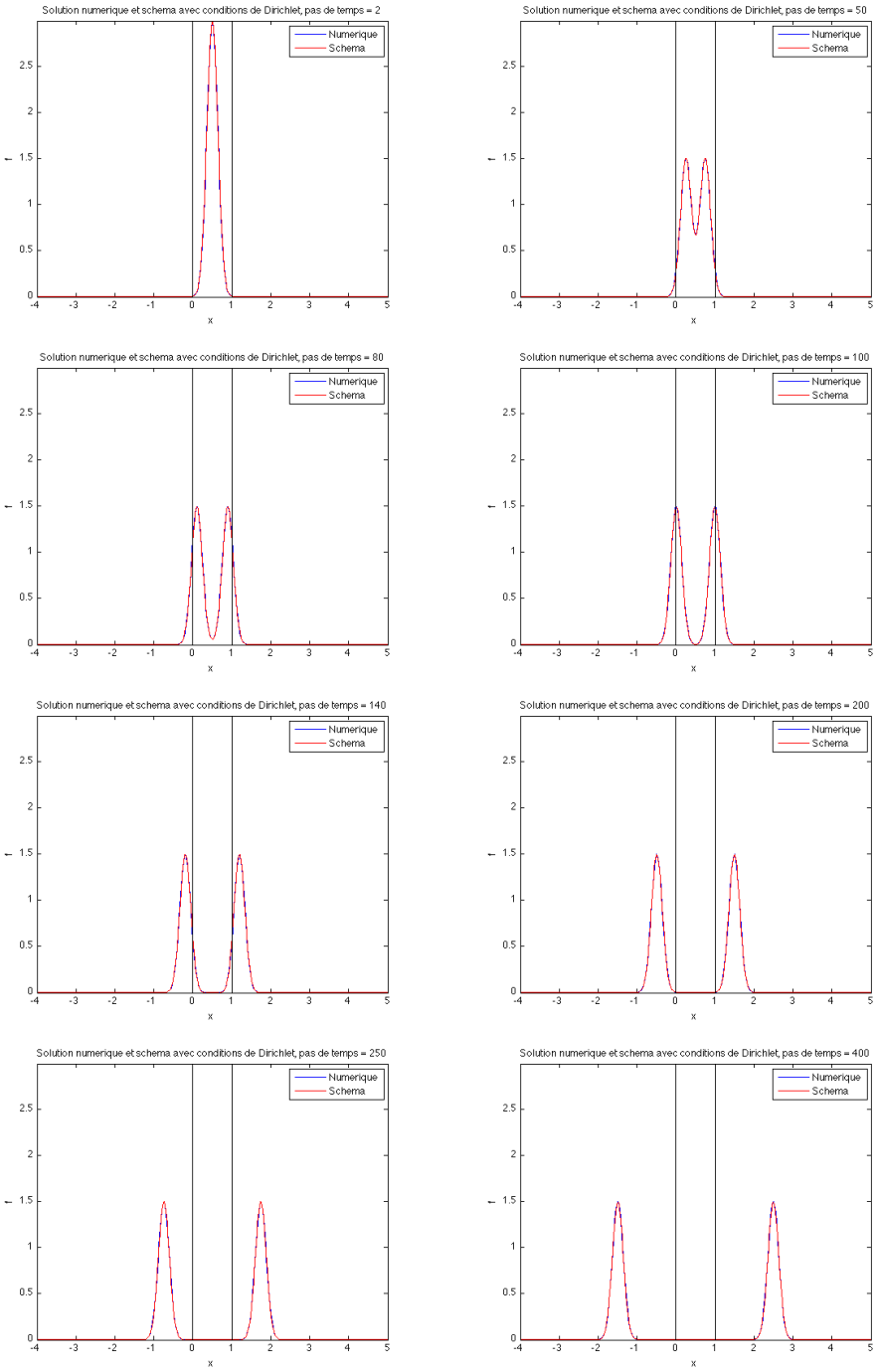


FIGURE 6.38 – Comparaison entre la solution numérique sur un grand domaine avec conditions de Dirichlet et la solution donnée par la méthode pour $r = 4$, $\theta = 1/12$, $\Delta t = 0.005$, pour $t = 0.01, 0.25, 0.4, 0.5, 0.7, 1, 1.25$ et 2

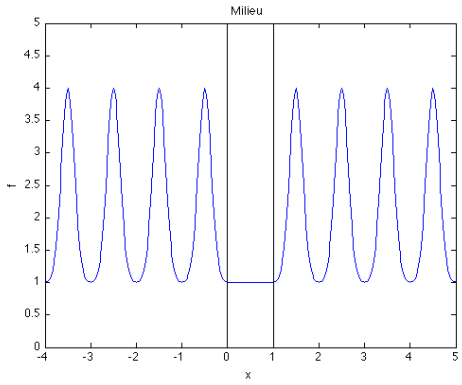


FIGURE 6.39 – Milieu périodique 1D

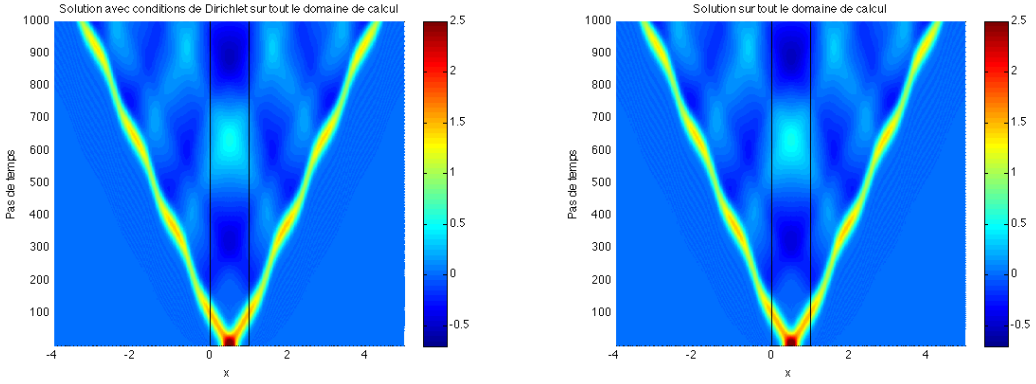


FIGURE 6.40 – Comparaison entre la solution numérique sur un grand domaine avec conditions de Dirichlet et la solution donnée par la méthode sur le milieu de la figure 6.39 pour $r = 4$, $\theta = 1/12$, $\Delta t = 0.005$, sur l'ensemble de la durée de simulation : à gauche, solution de référence, à droite, solution numérique

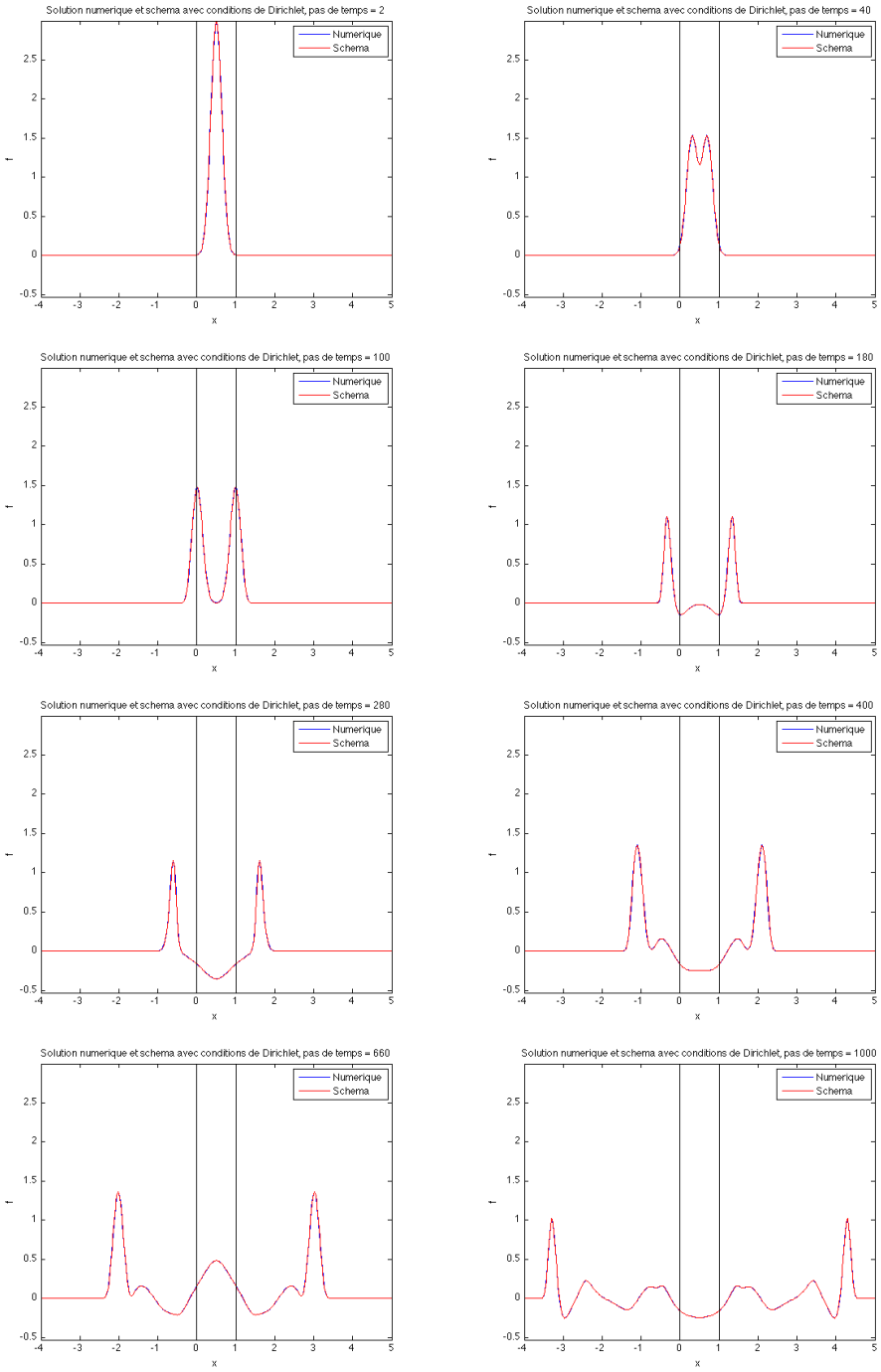


FIGURE 6.41 – Comparaison entre la solution numérique sur un grand domaine avec conditions de Dirichlet et la solution donnée par la méthode sur le milieu de la figure 6.39 pour $r = 4$, $\theta = 1/12$, $\Delta t = 0.005$, pour $t = 0.01, 0.2, 0.5, 0.9, 1.4, 2, 3.3$ et 5

Le cas du guide avec un seul défaut

Nous considérons maintenant le guide périodique droit avec un seul défaut que nous avons déjà utilisé pour l'ordre un en temps. Nous considérons le milieu périodique de la figure 6.43, et nous utilisons cette fois la source :

$$f(x,y,t) = \chi_{\Omega_0}(x,y) e^{-(\frac{(x-c_x)^2}{w_x})} cos(\omega t)$$

avec $c_x = 0.5$, $w_x = 0.2$ et $\omega = 5$. Les conditions aux limites sont des conditions de Neumann homogènes dans notre configuration. Une fois encore, nous ne constatons aucune différence notable

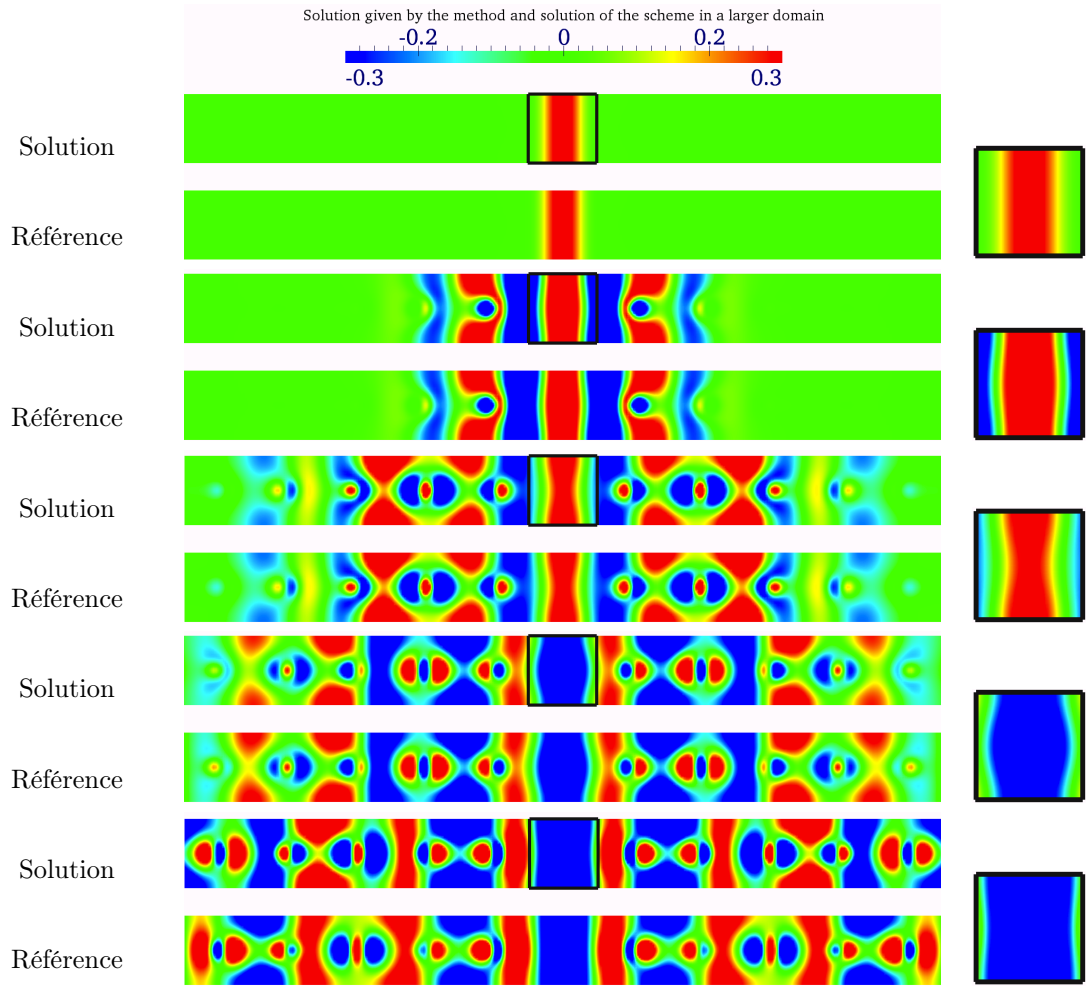


Figure 6.42 – Comparaison entre la solution numérique sur un grand domaine avec conditions de Dirichlet et la solution donnée par la méthode sur le milieu de la figure 6.43, pour $r = 3$ $\theta = 1/4$, $\Delta t = 4e-2$, $t = 0.32, 4.08, 12.28, 14.08$ et 30

entre les deux types de résolution tant que la solution n'a pas atteint les bords avec conditions de Dirichlet. Sur le milieu de la figure 6.44, nous résolvons le cas d'une donnée initiale u_0 :

$$u_0(x,y) = \chi_{\Omega_0}(x,y) e^{-(\frac{(x-c_x)^2}{w_x} + \frac{(y-c_y)^2}{w_y})}$$

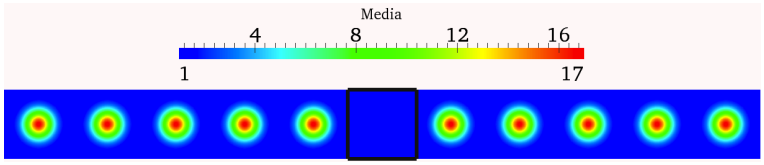


FIGURE 6.43 – Milieu périodique utilisé pour comparer la méthode à une résolution sur un grand domaine

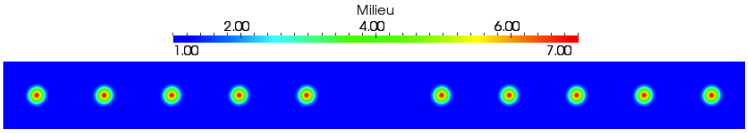


FIGURE 6.44 – Milieu périodique utilisé avec une donnée initiale

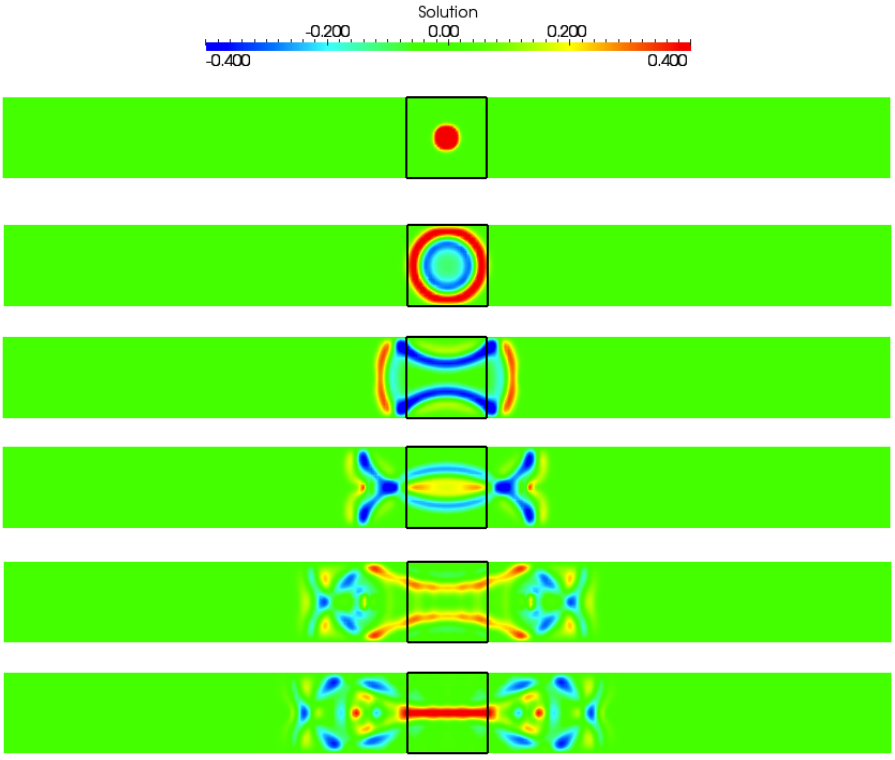


FIGURE 6.45 – Équation des ondes avec donnée initiale sur le milieu de la figure 6.44, pour $r = 3$, $\theta = 1/12$, $\Delta t = 0.01$, $t = 0.02, 0.4, 0.8, 1.2, 1.8$ et 2

avec $A = 3$, $c_x = c_y = 0.5$, $w_x = w_y = 0.1$.

LE CAS DU GUIDE AVEC PLUSIEURS DÉFAUTS

Nous terminons cet exposé par quelques résultats en scattering multiple. Nous commençons bien entendu par valider la résolution par les techniques de scattering mutliple dans le cas d'un seul

défaut, en comparant les résultats obtenus avec la méthode utilisée dans le cas d'un seul défaut. On utilise une source harmonique :

$$f(x,y,t) = \chi_{\Omega_0}(x,y) A e^{-(\frac{(x-c_x)^2}{w_x})-(\frac{(y-c_y)^2}{w_y})} cos(\omega t)$$

pour $A = 3$, $c_x = c_y = 0.5$, $w_x = w_y = 0.2$, et $\omega = 5$. Le milieu est celui de la figure 6.46, et on constate sur la figure 6.47 le parfait accord entre les deux types de résolution. Puis, nous considérons

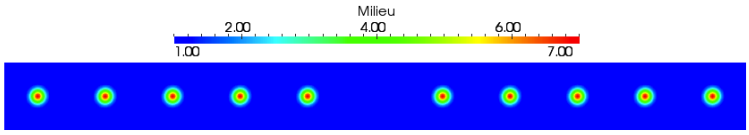


FIGURE 6.46 – Milieu périodique utilisé avec une donnée initiale

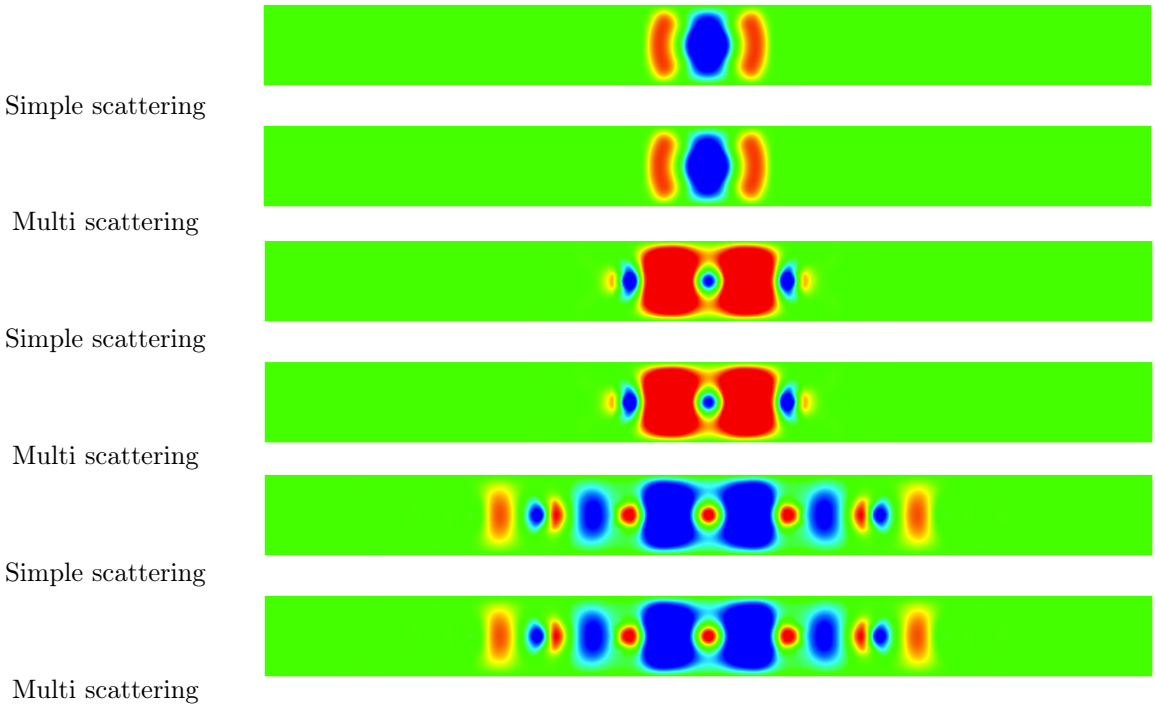


FIGURE 6.47 – Comparaison entre la solution calculée avec la méthode de simple scattering et celui de la solution calculée par la méthode de scattering multiple sur le milieu de la figure 6.21, pour $r = 4$, $\theta = 1/12$, $\Delta t = 0.01$, $t = 0.8, 2$ et 5

une vraie situation de scattering multiple, à savoir le milieu de la figure 6.48, avec dans chaque défaut la source harmonique que nous avons utilisée sur le cas précédent. Les résultats sont présentés sur les figures 6.49 à 6.56, où l'on a représenté la solution reconstruite, la solution intérieure, et chaque composante extérieure reconstruite $u^n_{h,e,j}$.

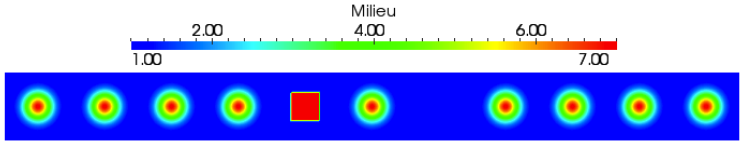


FIGURE 6.48 – Milieu périodique en scattering multiple

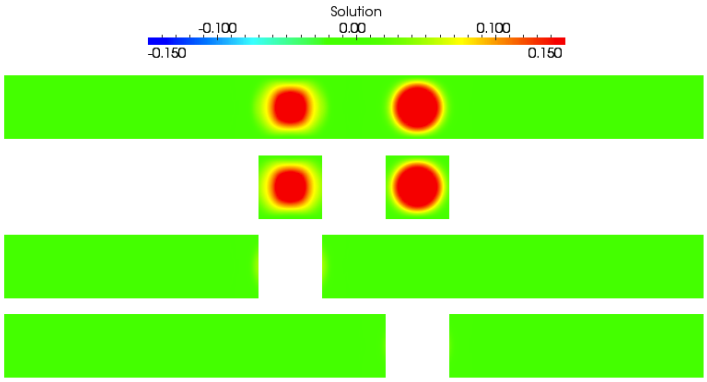


FIGURE 6.49 – Solution pour le milieu 6.23, $r = 3$, $\theta = 1/12$, $dt = 0.0200925$, $t = 0.40185$

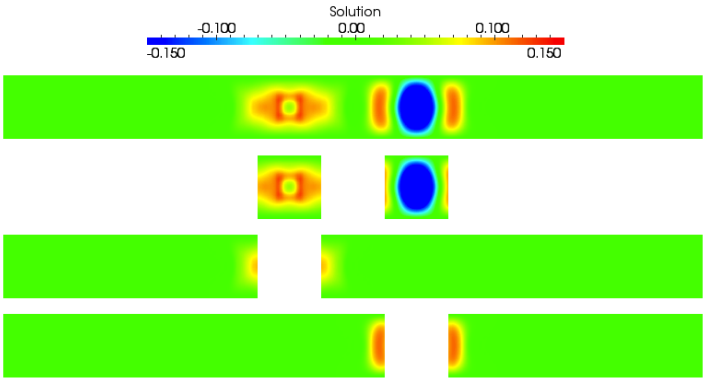


FIGURE 6.50 – Solution pour le milieu 6.23, $r = 3$, $\theta = 1/12$, $dt = 0.0200925$, $t = 0.8037$

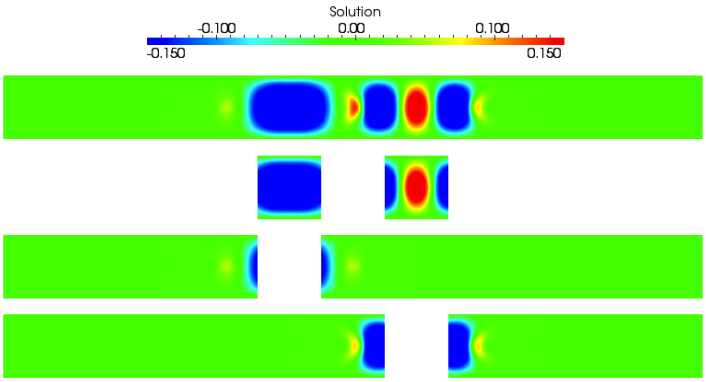


FIGURE 6.51 – Solution pour le milieu 6.23, $r = 3$, $\theta = 1/12$, $dt = 0.0200925$, $t = 1.406475$

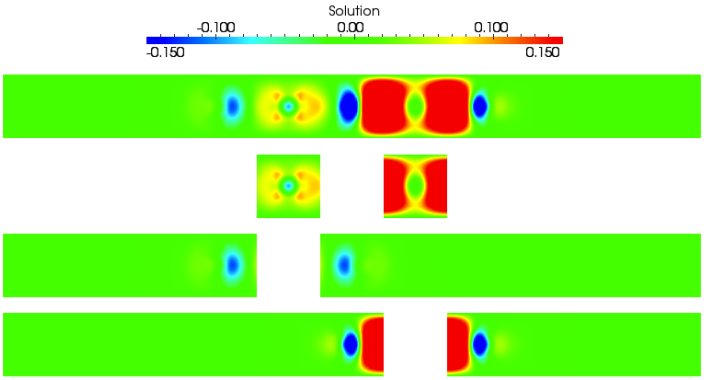


FIGURE 6.52 – Solution pour le milieu 6.23, $r = 3$, $\theta = 1/12$, $dt = 0.0200925$, $t = 2.00925$

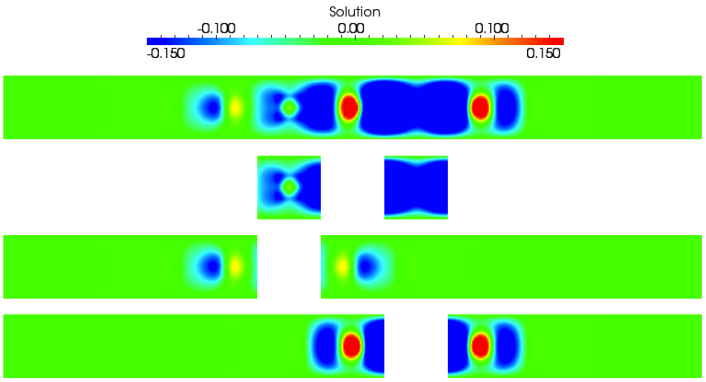


FIGURE 6.53 – Solution pour le milieu 6.23, $r = 3$, $\theta = 1/12$, $dt = 0.0200925$, $t = 2.612025$

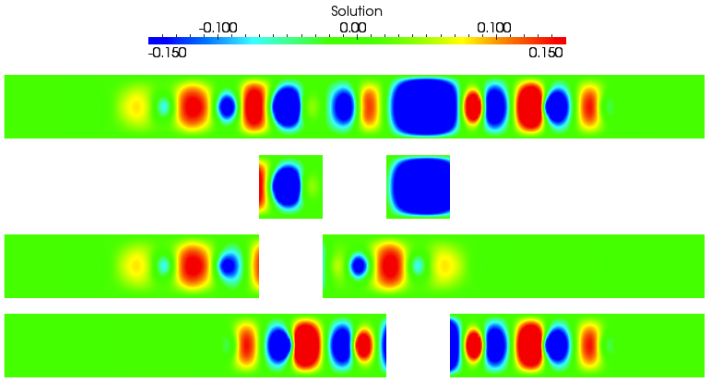


FIGURE 6.54 – Solution pour le milieu 6.23, $r = 3$, $\theta = 1/12$, $dt = 0.0200925$, $t = 4.8222$

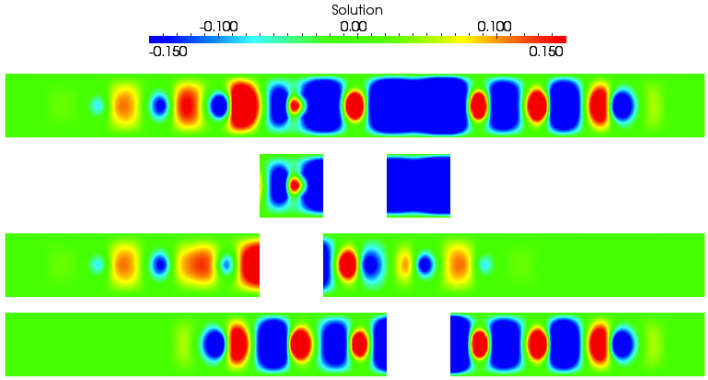


FIGURE 6.55 – Solution pour le milieu 6.23, $r = 3$, $\theta = 1/12$, $dt = 0.0200925$, $t = 6.228675$

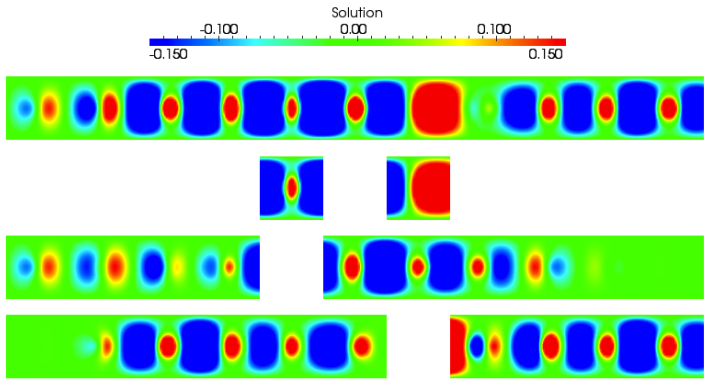


FIGURE 6.56 – Solution pour le milieu 6.23, $r = 3$, $\theta = 1/12$, $dt = 0.0200925$, $t = 9.041625$

En conclusion de ce chapitre, nous pouvons affirmer que la méthode, une fois implémentée, est bien équivalente à une résolution sur une discrétisation de tout le guide. Les opérateurs DtN que nous avons construits permettent donc bien de construire des conditions aux limites transparentes, et nous pouvons résoudre des problèmes de guide périodique localement perturbé au travers de la résolution de problèmes posés en domaine borné.

Le "défaut" principal de ces conditions transparentes tient à la convolution en temps qu'elles impliquent. Même s'il est tout à fait possible de séparer le calcul des opérateurs DtN de la résolution, à cause de cette convolution, le coût d'un pas de temps va augmenter linéairement avec le temps, du fait du calcul des conditions transparentes. Il faut bien voir que ces conditions étant exactes, cet état de fait n'est pas lié à notre méthode, mais qu'il s'agit d'une difficulté structurelle des problèmes d'évolution : toute condition transparente sera une convolution (cf remarque 4.3), sauf cas exceptionnel (comme l'équation des ondes 1D en milieu homogène).

Il est légitime de se demander s'il n'est pas possible de tronquer cette convolution, afin de rendre le coût d'un pas de temps indépendant du nombre de pas de temps qui l'ont précédé. À cette question, on peut apporter deux types de réponses. La première, pûrement numérique, consiste à dire qu'il est très aisé de tronquer en pratique la somme intervenant dans la convolution, et d'observer l'erreur ainsi créée. Cette erreur (nous ne reproduisons pas les résultats ici, en espérant que le lecteur nous fera confiance sur ce point) devient rapidement très grande, même dans le cas de l'équation de la chaleur (dans le cas de l'équation des ondes, toute troncature engendre des réflexions catastrophiques). L'expérience numérique nous incite donc à penser qu'une troncature directe de la convolution dégrade complètement le résultat. La deuxième réponse à apporter à cette question passe par un peu d'analyse, que nous allons résumer succintement. Moralement, s'il advenait que l'on puisse tronquer la convolution, cela signifierait que la norme des opérateurs DtN tend vers 0 quand $n \to +\infty$, et donc que les w_n tendraient eux aussi vers zéro. Sur le cas de l'ordre un en temps, on peut observer facilement que la décroissance de la norme de ces opérateurs est liée à la borne inférieure (positive sous nos hypothèses) du spectre de l'opérateur elliptique $-\rho^{-1}\Delta$ (cas de l'équation de la chaleur, a priori le plus favorable du fait du caractère hautement dissipatif de l'équation). Plus cette borne inférieure est grande, plus les normes devraient décroître rapidement. Malheureusement, si l'on considère par exemple le cas des conditions de Neumann (ce qui permet également de comprendre le cas 1D), cette borne inférieure est tout simplement 0, si bien que la norme des w_n ne décroît pas, même pour l'équation de la chaleur. Ces deux arguments nous ont convaincu que si l'on cherche à développer des conditions absorbantes efficaces, elles n'étaient pas à rechercher du côté d'une troncature de la convolution. Cela signifie entre autres que même des conditions approchées engendreront une augmentation linéaire du coût de calcul de chaque pas de temps, soit la difficulté que nous espérions les voir résoudre. De telles conditions ne permettraient éventuellement d'économiser que sur le temps de calcul des Λ_n, et pas sur la résolution en elle-même. C'est pourquoi nous n'avons pas davantage essayé de développer des conditions approchées à partir de nos conditions exactes.

Enfin, nous rappelons une fois de plus que l'ensemble des résultats des chapitres 4, 5 et 6 demeurent valables pour d'autre types de conditions aux limites que les conditions de Neumann homogènes, comme les conditions de Dirichlet homogènes (ce que nous avons illustré numériquement), mais surtout dans le cas des conditions aux limites quasi-périodiques. Nous allons en effet abondamment avoir recours aux résultats de ces trois chapitres dans le chapitre 7, mais pour des conditions aux limites quasi-périodiques. Au niveau discret, cela consiste à remplacer les espaces V_h^r par les $V_h^r(\xi) = V_h^r \cap H_\xi^1$, définis au chapitre 3, et les X_h^r par les $X_h^r(\xi)$. En dehors de ces substitutions, il n'y a rigoureusement aucune différence à apporter aux démonstrations des résultats de ce chapitre pour traiter le cas des conditions quasi-périodiques, aussi nous ferons systématiquement allusion dans la suite aux théorèmes que nous venons de démontrer sans préciser cette substitution anodine (ce qui constitue un très léger abus nous évitant de reproduire ces preuves à l'identique pour les conditions quasi-périodiques).

Chapitre 7

Équations d'évolution dans un milieu périodique perturbé

Résumé. *Dans ce chapitre nous considérons le même type de configuration que dans les chapitres 2 et 3, à savoir un milieu périodique non borné dans au moins deux directions, qui présente des défauts bornés quelconques inclus dans des défauts non bornés dans une des directions de périodicité. Nous étendons la méthode des chapitres 2 et 3 aux problèmes d'évolution d'ordre un et deux en temps. Nous commençons une nouvelle fois par traiter les problèmes d'ordre un en temps (section 7.1), en commençant pour simplifier par le cas d'un seul défaut linéique. Nous expliquons comment généraliser l'équation de Lippmann-Schwinger aux problèmes d'évolution semi-discrets en temps (section 7.1.2), puis nous montrons comment utiliser les opérateurs DtN des chapitres 4, 5 et 6 afin de calculer les opérateurs impliqués dans l'équation de Lippmann-Schwinger (section 7.1.3). Puis nous procédons au même type de discrétisation par quadrature de ces opérateurs (section 7.1.4) que dans le chapitre 2, que nous analysons une nouvelle fois au moyen d'une réinterprétation de cette quadrature en une approximation du problème initial, nous permettant d'obtenir une estimation d'erreur (section 7.1.5). Puis nous réutilisons les résultats du chapitre 6 pour discrétiser la variable d'espace, et ainsi obtenir une version complètement discrète de la méthode (section 7.1.6). Nous expliquons ensuite comment traiter le cas de plusieurs défauts (section 7.1.7), et nous terminons cette section par quelques illustrations numériques (section 7.1.8). Dans une deuxième section (section 7.2), nous expliquons comment étendre ces résultats au cas des problèmes d'ordre deux en temps, comme nous l'avons fait dans tous les chapitres de cette deuxième partie.*

Dans ce chapitre, nous allons considérer une configuration différente de celles traitées dans les deux chapitres précédents, principalement par le fait que le milieu sera non borné dans non plus une mais deux directions. Le cas le plus simple étant le plan en dimension 2, il nous arrivera parfois de parler de problème de plan (même si l'ajout de dimensions supplémentaires en lesquelles le milieu est borné ne présente aucune difficulté).

Nous allons considérer une situation similaire à celle traitée dans les chapitres 2 et 3 en régime harmonique, c'est-à-dire que nous allons considérer un problème posé sur $\mathbb{R}^2$, le milieu étant périodique de part et d'autre d'un défaut borné dans la direction e_1, non borné dans la direction e_2. Nous supposerons de plus que ce défaut est périodique dans la direction e_2, avec la même période qu'à l'extérieur, hormis dans un domaine borné (voir figure 7.1). Cette identité de configuration géométrique incite fortement à tenter de réexploiter, dans le contexte des équations d'évolution, les principes qui nous ont permis de développer avec succès la méthode LS-DTN dans le cas harmonique. Aussi, le but de ce chapitre est d'expliquer comment généraliser aux problèmes d'évolution semi-discrets les techniques de type Lippmann-Schwinger pour réduire le problème à un problème

équivalent posé sur le défaut borné. Les opérateurs intervenant dans l'équation résultante seront eux calculés au moyen de leur transformée de Floquet, qui conduira à des problèmes d'évolution posés sur un guide périodique localement perturbé (comme dans le cas harmonique). Nous pourrons alors utiliser les techniques DtN des trois chapitres précédents pour les calculer à partir de problèmes posés en domaine borné. Encore une fois, cette méthode mixte peut se réinterpréter comme l'utilisation de l'équation de Lippmann-Schwinger pour traiter la direction de périodicité dans laquelle le défaut est non borné, et celle des opérateurs DtN pour traiter la direction dans laquelle le défaut est borné.

Comme chaque fois que nous avons traité de problèmes d'évolution, nous allons dans une première section expliquer comment traiter par cette méthode les problèmes d'ordre un en temps, puis nous expliquerons comment généraliser ces résultats aux problèmes d'ordre deux en temps dans une deuxième section. Chacune de ces deux sections sera organisée comme suit : dans un premier temps, nous présenterons le problème modèle accompagné de sa semi-discrétisation en temps (sur laquelle nous travaillons), puis nous expliquerons comment obtenir une formulation de type Lippmann-Schwinger sur ce problème, et calculer les opérateurs sous-jacents. Ensuite, nous nous emploierons à discrétiser en la variable de Floquet l'équation de Lippmann-Schwinger ainsi obtenue, et nous analyserons la qualité de l'approximation résultante et son caractère bien posé au moyen d'une réinterprétation de ce nouveau problème comme une EDP (de façon similaire à ce que nous avons fait au niveau continu). Puis, nous complèterons cette approximation par une discrétisation de la variable d'espace, obéissant aux mêmes principes que celle exposée dans le chapitre précédent. Enfin, nous expliquerons comment traiter le cas de plusieurs défauts linéiques, et nous analyserons en détail le cas des défauts bornés, pour lequel nous expliquerons comment obtenir des méthodes alternatives de résolution. Nous illustrerons bien entendu l'ensemble de cette étude par des simulations numériques.

7.1 Problèmes d'ordre un en temps

7.1.1 Problème modèle

Par souci de simplicité, nous nous limitons au cas de la dimension 2. Nous reprenons pour modèle d'équation d'ordre un en temps le problème (4.2), mais cette fois-ci posé sur $\mathbb{R}^2$: trouver $u \in C^1([0,+\infty[, L^2(\mathbb{R}^2)) \cap C^0([0,+\infty[, H^1(\Delta,\mathbb{R}^2))$ telle que :

$$\left| \begin{array}{ll} \gamma\rho\dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + Vu = f & \text{dans } \mathbb{R}^2, \quad t>0 \\ u(\cdot,0) = u_0 & \text{dans } \mathbb{R}^2 \end{array} \right. \tag{7.1}$$

sous les hypothèses (HT) qui garantissent son caractère bien posé :

(H1) $f \in C^1(]0,+\infty[, L^2(\mathbb{R}^2))$, $u_0 \in H^1(\Delta,\mathbb{R}^2)$, $\rho \in L^\infty(\Omega)$, $V \in L^\infty(\Omega)$

(H2) $\exists\ \rho_-,\ \rho_+ \in \mathbb{R}$ tels que $0 < \rho_- \leq \rho \leq \rho_+$.

(H3) $\gamma = 1$ ou $\gamma = -i$.

(H4) si $\gamma = 1$, on suppose $V \geq 0$.

Bien entendu, les démonstrations du chapitre 4 s'adaptent sans difficulté à cette situation plus simple, et nous conservons le caractère bien posé de ce problème (c'est-à-dire l'existence et l'unicité d'une solution forte dépendant continûment des données). Comme nous en avons maintenant l'habitude, ce n'est pas pour ce problème que nous allons développer une méthode de résolution, mais pour sa

semi-discrétisation en temps (par θ-schéma) à savoir : trouver $(u^n)_{0\leq n\leq N} \in H^1(\Omega)^{N+1}$ tel que :

$$\left|\begin{array}{ll} \gamma\rho\dfrac{u^{n+1}-u^n}{\Delta t} + (-\Delta + V)(\theta u^{n+1} + (1-\theta)u^n) = f^{n+\theta} & \text{dans } \mathbb{R}^2 \quad 0 \leq n \leq N \\ u^0(\cdot) = u_0(\cdot) & \text{dans } \mathbb{R}^2 \end{array}\right. \tag{7.2}$$

et qui constitue également un problème bien posé par une adaptation évidente des résultats du chapitre 4. Précisons maintenant les hypothèses que nous faisons sur le milieu, les données et les coefficients. Nous supposerons que le plan $\mathbb{R}^2$ peut être découpé en trois régions, comme illustré sur la figure 7.1 :

. $\Omega^- = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \mid \ x < a_-\right\}$

. $\Omega^+ = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \mid \ x > a_+\right\}$

. $\Omega_{int} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \mid \ a_- < x < a_+\right\}$

On notera Ω_0 l'ouvert $]a_-, a_+[\times]b_-, b_+[\subset \Omega_{int}$, contenant les perturbations bornées (voir figure 7.1), et donc :

(H5) *supp* $f \cup$ *supp* $u_0 \subset \Omega_0$.

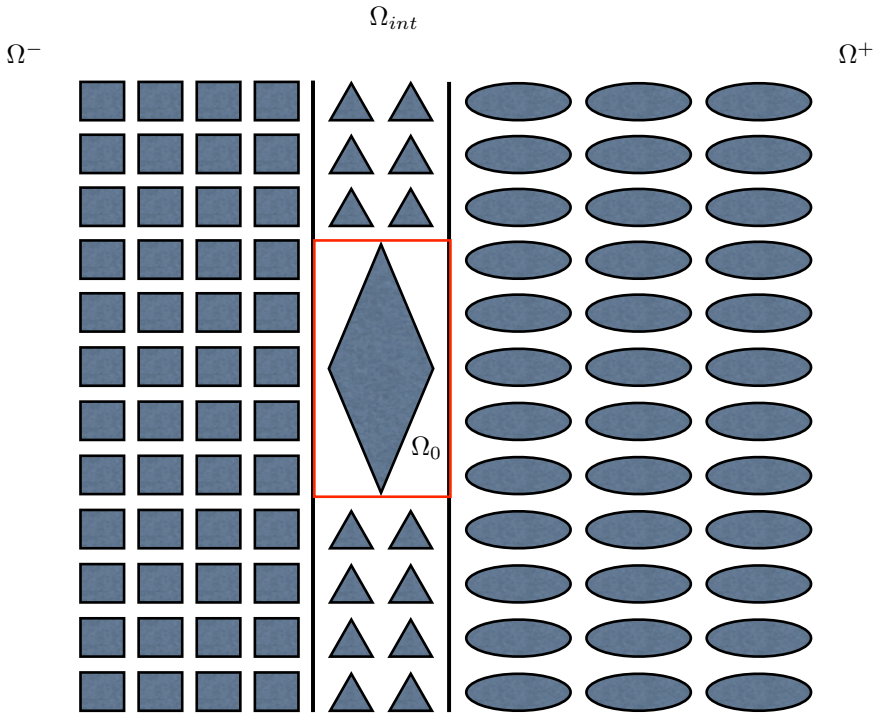


FIGURE 7.1 – Exemple de configuration

$\Omega^{\pm}$ sont deux demi-espaces périodiques infinis, de périodes $L_x^{\pm}$ dans la direction x, et possédant la même période L dans la direction y et qui sont par conséquent de la forme :

$$\Omega^{\pm} = \bigcup_{i=1}^{+\infty} \bigcup_{j=-\infty}^{+\infty} \mathcal{C}_{ij}^{\pm} \qquad \mathcal{C}_{ij}^{\pm} = \{\mathcal{C}^{\pm} \pm ((i-1)L_x^{\pm}, (j-1)L)\}$$

où les cellules de périodicité de référence sont :

$$\mathcal{C}^{\pm} = \left\{(x,y) \;\middle|\; \pm a_{\pm} \leq \pm x \leq \pm a_{\pm} \pm L_x^{\pm}, \quad 0 \leq y \leq L\right\}$$

On note de plus $\Gamma_{int} = \partial\Omega_{int}$, et $\Gamma^{\pm} = \partial\Omega_{int} \cap \partial\Omega^{\pm}$, Γ^{+} et Γ^{-} étant tous deux isomorphes à $\mathbb{R}$. Nous supposerons que les fonctions $\rho \in L^{\infty}(\mathbb{R}^2)$ et $V \in L^{\infty}(\mathbb{R}^2)$ sont "doublement périodiques" à l'extérieur de Ω_{int}, i.e. il existe quatre fonctions $\rho^{+}, V^{+} \in L^{\infty}(\Omega^{+})$ et $\rho^{-}, V^{-} \in L^{\infty}(\Omega^{-})$ telles que :

$$\begin{aligned}
\rho^{+}(x + pL_x^{+}, y \pm qL) &= \rho^{+}(x,y) \text{ dans } \Omega^{+}, \quad \forall\, (p,q) \in \mathbb{N}^2, \quad \rho = \rho^{+} \text{ dans } \Omega^{+} \\
\rho^{-}(x - pL_x^{-}, y \pm qL) &= \rho^{-}(x,y) \text{ dans } \Omega^{-}, \quad \forall\, (p,q) \in \mathbb{N}^2, \quad \rho = \rho^{-} \text{ dans } \Omega^{-} \\
V^{+}(x + pL_x^{+}, y \pm qL) &= V^{+}(x,y) \text{ dans } \Omega^{+}, \quad \forall\, (p,q) \in \mathbb{N}^2, \quad V = V^{+} \text{ dans } \Omega^{+} \\
V^{-}(x - pL_x^{-}, y \pm qL) &= V^{-}(x,y) \text{ dans } \Omega^{-}, \quad \forall\, (p,q) \in \mathbb{N}^2, \quad V = V^{-} \text{ dans } \Omega^{-}
\end{aligned}$$

A l'intérieur de Ω_{int}, ρ et V sont périodiques dans la direction y avec la même période L, à l'extérieur de Ω_0, i.e. il existe deux fonctions périodiques $\rho_{int}, V_{int} \in L^{\infty}(\Omega_{int})$ telles que :

$$\begin{aligned}
\rho_{int}(x, y+L) &= \rho_{int}(x,y) \text{ dans } \Omega_{int} \\
V_{int}(x, y+L) &= V_{int}(x,y) \text{ dans } \Omega_{int}
\end{aligned}$$

et $\rho = \rho_{int} \quad V = V_{int}$ dans $\Omega_{int} \setminus \Omega_0$. Enfin, nous supposerons que $b_{-} = -M^{-}L$ et $b_{+} = M^{+}L$, $(M^{-}, M^{+}) \in \mathbb{N}^2$.

Comme nous l'avons déjà fait au chapitre 2, remarquons que la représentation "imagée" du milieu sur la figure 7.1 met bien en évidence le fait que le milieu est globalement périodique dans la direction y, à l'extérieur de Ω_0. Nous allons donc nous employer à ramener, autant que possible, la résolution de ce problème à l'ouvert Ω_0, en exploitant la périodicité extérieure.

7.1.2 Une formulation de type Lippmann-Schwinger

Comme dans le cas harmonique, nous pourrions formellement effectuer cette réduction en construisant des opérateurs DtN sur la frontière de Ω_0. Mais la configuration extérieure, complexe, ne permet pas (à notre connaissance) de détermination pratique de ces opérateurs (nous verrons en annexe que même dans le cas plus simple où le milieu extérieur est constitué d'un seul milieu périodique, cela reste une tâche complexe du point de vue théorique et qui pose de sérieuses difficultés pratiques). À cela vient s'ajouter les succès obtenus via notre approche mixte dans le cas harmonique, aussi nous allons plutôt nous employer à effectuer une transposition de la méthode de Lippmann-Schwinger (abstraite) dans le contexte des équations d'évolution (semi-discrètes). Rappelons que cette méthode consiste (et nous y sommes fortement incités par la figure 7.1) à voir la solution de notre problème comme la somme d'un problème posé sur un milieu periodique dans la direction y et d'une perturbation. Pour cela, on introduit les coefficients suivants, qui décrivent le milieu périodique sous-jacent :

$$\rho_p = \left| \begin{array}{ll} \rho^{-} & \text{dans } \Omega^{-} \\ \rho_{int} & \text{dans } \Omega_{int} \\ \rho^{+} & \text{dans } \Omega^{+} \end{array} \right. \quad \text{et} \quad V_p = \left| \begin{array}{ll} V^{-} & \text{dans } \Omega^{-} \\ V_{int} & \text{dans } \Omega_{int} \\ V^{+} & \text{dans } \Omega^{+} \end{array} \right.$$

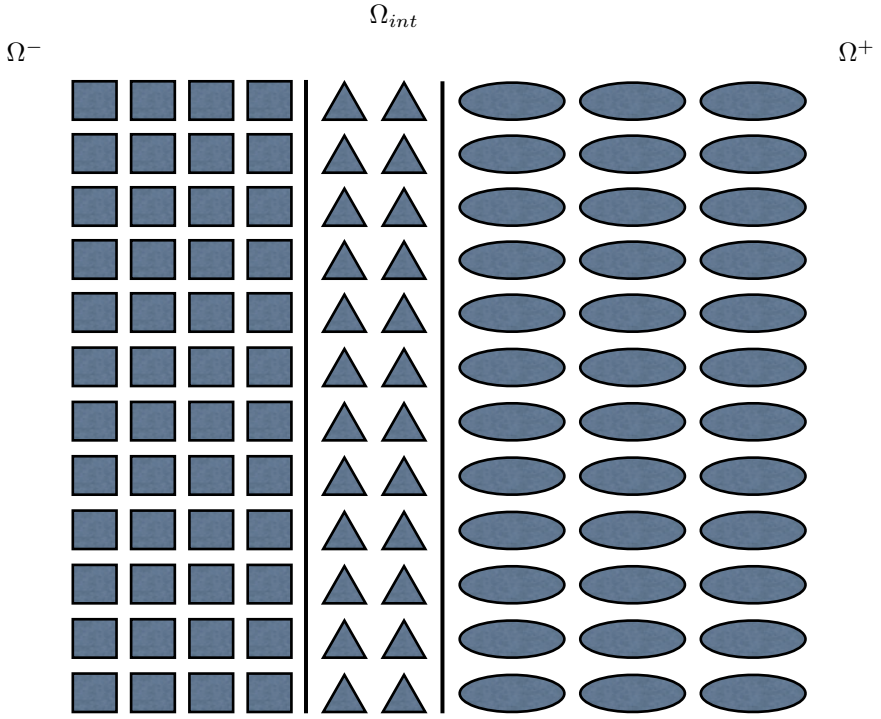


FIGURE 7.2 – Le milieu périodique en y sous-jacent pour l'exemple de la figure 7.1

Alors, $\rho_p, V_p \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$, $0 < \rho_- \leq \rho_p \leq \rho_+$ et ρ_p et V_p sont L-périodiques dans la direction y. De plus :

$$supp\ (\rho - \rho_p) \subset \Omega_0 \quad \text{et} \quad supp\ (V - V_p) \subset \Omega_0$$

Puis, posons comme d'habitude :

$$A(\theta, \Delta t) = \theta \Delta t(-\Delta + V) + \rho$$

et introduisons :

$$A_P(\theta, \Delta t) = \theta \Delta t(-\Delta + V_p) + \rho_p$$

Notre problème modèle s'écrit :

$$A(\theta, \Delta t)u^{n+1} = A(\theta - 1, \Delta t)u^n + \Delta t f^{n+\theta} \tag{7.3}$$

Pour tout $0 \leq n \leq N$, nous avons :

$$\rho u^n = \rho_p u^n + (\rho - \rho_p)u^n \quad \text{et } Vu^n = V_p u^n + (V - V_p)u^n$$

En reportant ceci pour u^{n+1} dans (7.3), nous obtenons :

$$A_P(\theta, \Delta t)u^{n+1} = A_P(\theta - 1, \Delta t)u^n + \Delta t f^{n+\theta}$$

$$+ \left[\theta \Delta t(V_p - V) + (\rho_p - \rho)\right] u^{n+1} - \left[(\theta - 1)\Delta t(V_p - V) + (\rho_p - \rho)\right] u^n$$

À ce stade, il convient de remarquer que la situation est passablement plus compliquée que dans le cas harmonique, puisque nous devons non seulement gérer le terme de perturbation au temps $n + 1$, mais également la dépendance en le pas de temps précédent. Remarquons tout de suite que les trois derniers termes sont à support dans Ω_0. Hormis l'avant dernier, qui fait intervenir u^{n+1}, il

est légitime de les considérer comme des sources pour le pas de temps $n+1$. Autrement dit, notre problème d'évolution correspondant aux coefficients (ρ, V) s'écrit comme un problème d'évolution du même type, mais pour les coefficients (ρ_p, V_p), avec une source modifiée et une perturbation. Pour décrire cette observation en termes plus mathématiques, nous introduisons l'opérateur S (en faisant, comme dans le chapitre 2, l'identification entre une fonction L^2 à support dans Ω_0 et son extension par 0 à tout $\mathbb{R}^2$) qui va nous servir à décrire la perturbation :

$$\begin{aligned} S : L^2(\Omega_0) &\longrightarrow H^1(\mathbb{R}^2) \\ f &\longmapsto Sf \end{aligned}$$

où Sf est défini comme l'unique solution dans $H^1(\mathbb{R}^2)$ de :

$$A_P(\theta, \Delta t) Sf = f \tag{7.4}$$

En effet, rappelons que :

$$A(\theta, \Delta t) = \theta \Delta t(-\Delta + V) + \rho$$

et que pour tout $u \in H^1(\Delta, \mathbb{R}^2)$, $v \in H^1(\mathbb{R}^2)$:

$$(A(\theta, \Delta t)u, v)_{L^2(\mathbb{R}^2)} = a_{\mathbb{R}^2, \theta, \Delta t}(u, v)$$

et que cette forme bilinéaire est continue et coercive pour tout $\theta, \Delta t > 0$ en vertu du lemme 4.2 sous les hypothèses (HT) (satisfaites par ρ_p et V_p), et par conséquent le théorème de Lax-Milgram nous assure que la définition ci-dessus est légitime.

Nous désignons ensuite par g^{n+1} la solution dans $H^1(\mathbb{R}^2)$ de :

$$A_P(\theta, \Delta t) g^{n+1} = A_P(\theta - 1, \Delta t) u^n + \Delta t f^{n+\theta} - \left[(\theta - 1)\Delta t(V_p - V) + (\rho_p - \rho)\right] u^n \tag{7.5}$$

problème bien posé dans $H^1(\mathbb{R}^2)$ pour les mêmes raisons que ci-dessus (comme $u^n \in H^1(\Delta, \mathbb{R}^2)$). g^{n+1} correspond à la solution d'un problème posé dans le milieu (ρ_p, V_p) au pas de temps $n+1$, avec une source modifiée. Alors par linéarité et unicité, il est clair que l'on a, dans $L^2(\mathbb{R}^2)$:

$$u^{n+1} = g^{n+1} + S\left[\theta \Delta t(V_p - V) + (\rho_p - \rho)\right] u^{n+1} \tag{7.6}$$

et u^{n+1} est bien la somme de la solution en milieu (ρ_p, V_p) avec source modifiée et d'une perturbation. Nous définissons alors :

$$\begin{aligned} S_{0,\theta,\Delta t} : L^2(\Omega_0) &\longrightarrow H^1(\Omega_0) \\ f &\longmapsto S\left[\theta \Delta t(V_p - V) + (\rho_p - \rho)\right] f|_{\Omega_0} \end{aligned}$$

En appliquant l'opérateur de restriction à Ω_0 à (7.6), nous obtenons :

$$(I - S_{0,\theta,\Delta t}) u^{n+1}|_{\Omega_0} = g^{n+1}|_{\Omega_0} \tag{7.7}$$

où $g^{n+1}|_{\Omega_0}$ joue cette fois le rôle de source. Il s'agit là d'une équation posée sur Ω_0, formellement similaire à l'équation de Lippmann-Schwinger (2.3) obtenue dans le cas harmonique (et que nous désignerons par conséquent comme l'équation de Lippmann-Schwinger pour notre problème d'évolution). Nous pouvons donc espérer qu'elle soit suffisante pour déterminer $u^{n+1}|_{\Omega_0}$. Afin de vérifier ceci, nous avons besoin du lemme suivant, qui se démontre exactement de la même façon que le lemme 2.1 :

Lemme 7.1. *Pour tout Ω_0 ouvert borné, l'opérateur $S_{0,\theta,\Delta t}$ est compact en tant qu'opérateur sur $L^2(\Omega_0)$*

Ce résultat très simple nous permet de montrer que l'équation (7.7) correspond à un problème bien posé :

Théorème 7.1. *Pour tout ouvert Ω_0 borné, pour tout $F \in L^2(\Omega_0)$, le problème : trouver $u \in L^2(\Omega_0)$ tel que :*

$$(I - S_{0,\theta,\Delta t})u = F \tag{7.8}$$

est bien posé. De plus, si $F = g^{n+1}|_{\Omega_0}$, où g^{n+1} est la solution de (7.5), alors la solution u de (7.8) est la restriction à Ω_0 de la solution de (7.2), qui peut-être reconstruite en posant :

$$u^{n+1} = \left| \begin{array}{ll} u & \text{dans } \Omega_0 \\ g^{n+1} + S\left([\theta\Delta t(V_p - V) + (\rho_p - \rho)]\, u\right) & \text{dans } \mathbb{R}^2 \setminus \Omega_0 \end{array} \right. \tag{7.9}$$

Démonstration. En vertu du lemme 7.1, $I - S_{0,\theta,\Delta t}$ est un opérateur de Fredholm d'indice zéro, et le problème (7.8) est régi par l'alternative de Fredholm. Il nous suffit donc de démontrer l'injectivité de $I - S_{0,\theta,\Delta t}$. Soit u tel que :

$$I - S_{0,\theta,\Delta t}u = 0$$

On étend u à tout $\mathbb{R}^2$ en posant :

$$\widetilde{u} = \left| \begin{array}{ll} u|_{\Omega_0} & \text{dans } \Omega_0 \\ S\left([\theta\Delta t(V_p - V) + (\rho_p - \rho)]\, u\right) & \text{dans } \mathbb{R}^2 \setminus \Omega_0 \end{array} \right.$$

Alors, comme $S_{0,\theta,\Delta t}f$ est la restriction à Ω_0 de $S\left([\theta\Delta t(V_p - V) + (\rho_p - \rho)]\, f\right)$ par définition, nous avons en utilisant l'équation (7.8) :

$$u = S_{0,\theta,\Delta t}u = S\left([\theta\Delta t(V_p - V) + (\rho_p - \rho)]\, u\right) \quad \text{dans } \Omega_0$$

et par suite :

$$\widetilde{u} = S\left([\theta\Delta t(V_p - V) + (\rho_p - \rho)]\, u\right) \quad \text{dans } \mathbb{R}^2$$

Puis, comme *supp* $(\rho - \rho_p) \subset \Omega_0$ et *supp* $(V - V_p) \subset \Omega_0$, $(\rho_p - \rho)u = (\rho_p - \rho)\widetilde{u}$ et $(V_p - V)u = (V_p - V)\widetilde{u}$, nous pouvons réécrire ceci :

$$\widetilde{u} = S\left([\theta\Delta t(V_p - V) + (\rho_p - \rho)]\, \widetilde{u}\right) \quad \text{dans } \mathbb{R}^2$$

En particulier, nous en déduisons que $\widetilde{u} \in H^1(\mathbb{R}^2)$. D'un autre côté, par définition de $\widetilde{S}$, $\widetilde{u}$ est solution de :

$$\theta\Delta t(-\Delta + V_p)\widetilde{u} + \rho_p\widetilde{u} = [\theta\Delta t(V_p - V) + (\rho_p - \rho)]\, \widetilde{u}$$

ce qui se réécrit aussi :

$$\theta\Delta t(-\Delta + V_p)\widetilde{u} + \rho_p\widetilde{u} = 0$$

Or nous avons déjà observé que ce problème est bien posé par application du théorème de Lax-Milgram, et donc $\widetilde{u} = 0$. Par suite, $S_{0,\theta,\Delta t}$ est injectif, et le problème (7.8) est bien posé.

Considérons maintenant la solution u de (7.8) associée à $F = g^{n+1}|_{\Omega_0}$, et posons :

$$\widetilde{u} = \left| \begin{array}{ll} u|_{\Omega_0} & \text{dans } \Omega_0 \\ g^{n+1} + S\left([\theta\Delta t(V_p - V) + (\rho_p - \rho)]\, u|_{\Omega_0}\right) & \text{dans } \mathbb{R}^2 \setminus \Omega_0 \end{array} \right.$$

De nouveau, comme $S_{0,\theta,\Delta t}f$ est la restriction à Ω_0 de $S\left([\theta\Delta t(V_p - V) + (\rho_p - \rho)]\, f\right)$ par définition, nous avons en utilisant l'équation (7.8) :

$$u = S_{0,\theta,\Delta t}u + g^{n+1} = S\left([\theta\Delta t(V_p - V) + (\rho_p - \rho)]\, u\right) + g^{n+1}|_{\Omega_0} \quad \text{dans } \Omega_0$$

Alors :

$$\widetilde{u} = S\left([\theta\Delta t(V_p - V) + (\rho_p - \rho)]\, u\right) + g^{n+1} \quad \text{dans } \mathbb{R}^2$$

Puis, comme *supp* $(\rho-\rho_p) \subset \Omega_0$ et *supp* $(V-V_p) \subset \Omega_0$, $(\rho_p-\rho)u = (\rho_p-\rho)\widetilde{u}$ et $(V_p-V)u = (V_p-V)\widetilde{u}$, nous pouvons réécrire ceci :

$$\widetilde{u} = S\left([\theta\Delta t(V_p - V) + (\rho_p - \rho)]\,\widetilde{u}\right) + g^{n+1} \quad \text{dans } \mathbb{R}^2$$

Par conséquent $\widetilde{u}$ est solution de (7.2) au temps $n+1$, il s'agit donc de u^{n+1}, et u est sa restriction à Ω_0. □

Ce résultat montre que l'on peut, comme en régime harmonique, écrire un problème équivalent au problème de départ mais posé sur le domaine borné Ω_0. Toutefois, l'opérateur $S_{0,\theta,\Delta t}$ est défini via la résolution d'un problème posé en domaine non borné, de même que le terme source. Pour résoudre cette difficulté, nous allons, comme le milieu sous-jacent aux problèmes permettant de définir sources et opérateurs est périodique dans la direction y, appliquer la même transformée de Floquet-Bloch dans la direction y, en espérant obtenir des problèmes plus simples, que nous pourrons résoudre. Bien entendu, on anticipe que nous allons obtenir des problèmes d'évolution sur des guides périodiques localement perturbés, avec conditions aux limites quasi-périodiques, ce que nous avons appris à résoudre dans les deux chapitres précédents, un changement de conditions aux limites ne modifiant pas ces résultats tant qu'elles respectent la périodicité dans la direction du guide, comme nous l'avons précisé dans ces chapitres. Aussi nous allons nous référer aux divers théorèmes sans préciser chaque fois qu'il faut les comprendre avec conditions aux limites quasi-périodiques.

Remarque 7.1. *Remarquons de nouveau le grand intérêt qu'il y a à considérer le problème semi-discret plutôt que le problème continu pour construire une méthode de résolution : dans le cas continu, ce qui correspondrait à l'opérateur $S_{0,\theta,\Delta t}$ ferait intervenir une convolution en temps, de même que le terme source qui viendrait remplacer g^{n+1}, dont nous ne saurions pas calculer les noyaux (il s'agit de la fonction de Green spatio-temporelle du milieu périodique). Dans notre cas, remarquons tout de suite que l'opérateur à inverser pour résoudre cette équation est le même à chaque pas de temps, seule la source évoluant. Il s'agit là d'un très grand avantage pratique, puisque la résolution temporelle, une fois le système inversé (ou a minima factorisé), se résume au calcul de la dite source à chaque pas de temps.*

Comme nous avons pris soin de le préciser dans l'énoncé de chacun des résultats de ce paragraphe, ils restent valables dans un contexte beaucoup plus général, dès lors que Ω_0 est borné. En particulier, ils demeureront valides pour la situation de scattering multiple que nous aborderons en fin de section.

7.1.3 Détermination de l'opérateur S et de la source

Par analogie avec le cas harmonique, c'est l'opérateur S que nous allons chercher à caractériser, plutôt que $S_{0,\theta,\Delta t}$. Nous allons conjointement travailler sur la source g^{n+1}, les principes permettant de ramener la détermination de ces deux quantités à la résolution d'un problème posé en domaine borné étant rigoureusement identiques. En effet, formellement, pour $f \in L^2(\Omega_0)$, Sf est solution de :

$$A_P(\theta, \Delta t)Sf = f$$

tandis que la famille $(g^n)_{1\leq n\leq N} \in H^1(\mathbb{R}^2)^N$ est définie par :

$$A_P(\theta, \Delta t)g^{n+1} = A_P(\theta - 1, \Delta t)u^n + \Delta t f^{n+\theta} - \left[(\theta - 1)\Delta t(V_p - V) + (\rho_p - \rho)\right]u^n$$

En d'autre termes, on peut voir Sf comme étant g^1 dans le cas particulier $f^{\theta+1} = 1/\Delta t f$, $u^0 = 0$. Aussi, nous ne détaillerons chaque fois les démonstrations que pour g^n.

Par analogie avec le cas harmonique, nous allons maintenant étudier les problèmes dont sont solutions les TFB de ces deux quantités. Rappelons tout d'abord les propriétés principales de la TFB $\mathcal{F}$ pour des fonctions L^2 :

. $\mathcal{F}H^m(\mathbb{R}^2) = H^m_\xi(\mathbb{R}\times[0,L])$.

. La TFB commute avec les opérateurs différentiels : si $u \in H^m(\mathbb{R})$ $\partial_x^\alpha \mathcal{F}u = \mathcal{F}(\partial_x^\alpha u)$ pour tout $u \in L^2(\mathbb{R}^2)$ et $\forall \alpha \in \mathbb{N}^{d+1}$ tel que $|\alpha| \leq m$.

. Elle commute avec la multiplication par une fonction L-périodique en y : pour tout $\mu \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$, L-périodique dans la direction e_y, en identifiant μ et sa restriction à $\mathbb{R}\times[0,L]$, on a $\mathcal{F}(\mu u) = \mu \mathcal{F}u$

. La formule d'inversion reste valable sur L^2, i.e. pour tout $\hat{u} \in L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{K})$ et pour tout $p \in \mathbb{Z}$:

$$\left(\mathcal{F}^{-1}\hat{u}\right)|_{pL\leq y\leq (p+1)L} \equiv \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \int_0^{2\pi/L} \hat{u}(\cdot,\cdot,\xi) e^{ip\xi L} d\xi \tag{A.5}$$

et $\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}\hat{u} = \hat{u}$ et si $u \in L^2(\mathbb{R}^2)$, $\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}u = u$.

. Pour tout $u \in L^2(\mathbb{R}^2)$, les sommes partielles $F_{M,N}u$ définies par :

$$F_{M,N}u(\cdot,\xi) = \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \sum_{n=-N}^{M} u_{|_{nL\leq y\leq (n+1)L}} e^{-in\xi L} \tag{A.6}$$

convergent dans $L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{K})$, et $\mathcal{F}u = \lim_{M,N\to+\infty} F_{M,N}u$ fortement dans $L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{K})$.

Nous rappelons également que toute "bande" :

$$B^m = \mathbb{R}\times[mL,(m+1)L]$$

étant isomorphe par translation à B^0, toute fonction v définie sur B^m s'identifie à une fonction w définie sur B^0, i.e. presque pour tout $(x,y) \in B^m$:

$$v(x,y) = w(x,y-mL)$$

et pour presque tout $(x,y) \in B^0$

$$v(x,y+mL) = w(x,y)$$

et que nous notons cette identification $v \equiv w$. Enfin, rappelons que si f est à support dans Ω_0, alors elle est non nulle dans B^m seulement si $m \in [\![-M^-, M^+]\!]$, puisque

$$\Omega_0 =]a_-, a_+[\times]-M^-L, M^+L[$$

et la TFB d'un tel f est donnée par, en passant à la limite dans (A.6) :

$$\mathcal{F}f \equiv \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \sum_{p=-M^-}^{M^+-1} f_{|_{B^n}} e^{-in\xi L} = \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \sum_{p=-M^-}^{M^+-1} f_{|_{\Omega_0^n}} e^{-in\xi L}$$

si on pose $\Omega_0^m = \Omega_0 \cap B^m$.

Comme la famille $(g^n)_{1\leq n\leq N}$ est définie à partir de la famille des $(u^n)_{0\leq n\leq N}$, il semble clair que nous allons également devoir analyser la TFB de cette quantité pour obtenir des informations sur celle de $(g^n)_{1\leq n\leq N}$. Des propriétés de la TFB, nous déduisons que les TFB de Sf, $(u^n)_{0\leq n\leq N}$ et $(g^n)_{1\leq n\leq N}$ sont solutions de problèmes bien identifiés, posés sur B^0 :

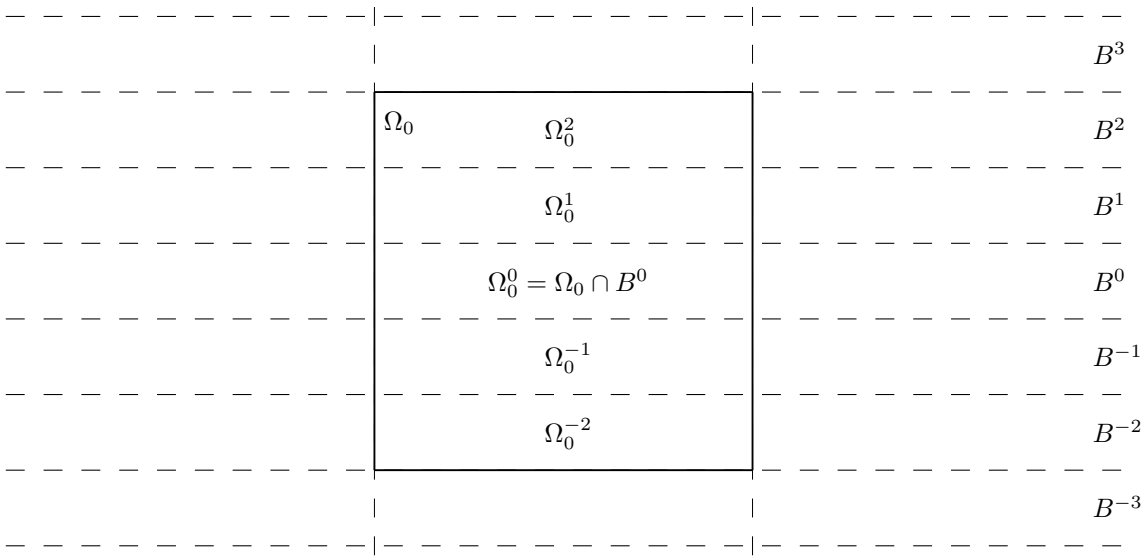


FIGURE 7.3 – Position de Ω_0 par rapport aux B^m, dans le cas $M^- = 2$ et $M^+ = 3$

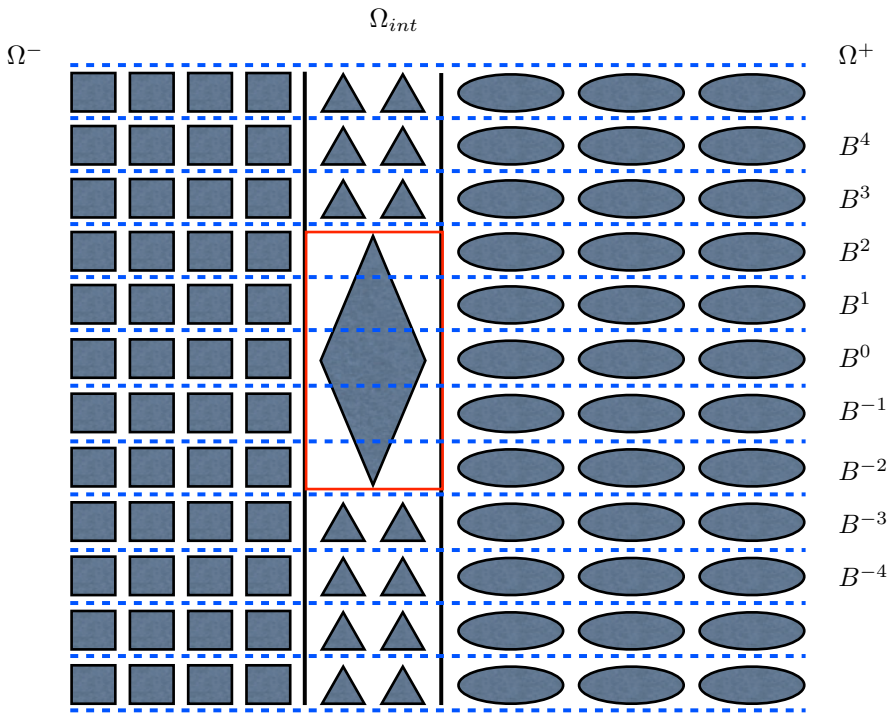


FIGURE 7.4 – Illustration de la position de Ω_0 par rapport aux B^m, avec le milieu "imagé" de la figure 7.1

Théorème 7.2. *Soit $\hat{S}(\xi)f$ la TFB de Sf, $\hat{g}^n(\xi)$ celle de g^n et $\hat{u}^n(\xi)$ celle de u^n. Alors $\hat{S}(\cdot)f$ est l'unique élément de $L^2(\mathbb{R} \times [0, L] \times [0, 2\pi/L])$ qui pour presque tout $\xi \in [0, 2\pi/L]$ soit solution dans*

$H^1_\xi(B^0)$ *de :*

$$\left|\begin{array}{l} A_P(\theta,\Delta t)\hat{S}(\xi)f \equiv \sqrt{\dfrac{L}{2\pi}}\displaystyle\sum_{p=-M^-}^{M^+-1} f_{|_{B^p}} e^{-ip\xi L} \quad \textit{dans } B^0 \\ \partial_y \hat{S}(\xi) f_{|_{y=L}} = e^{i\xi L}\partial_y \hat{S}(\xi) f_{|_{y=0}} \end{array}\right. \tag{7.10}$$

Pour tout $0 \le n \le N-1$, $\hat{g}^{n+1}(\cdot)$ *est l'unique élément de* $L^2(\mathbb{R}\times[0,L]\times[0,2\pi/L])$ *qui pour presque tout* $\xi \in [0,2\pi/L]$ *soit solution dans* $H^1_\xi(B^0)$ *de :*

$$\left|\begin{array}{ll} A_P(\theta,\Delta t)\hat{g}^{n+1}(\xi) \equiv A_P(\theta-1,\Delta t)\hat{u}^n(\xi) + \sqrt{\dfrac{L}{2\pi}}\Delta t \displaystyle\sum_{p=-M^-}^{M^+-1} f^{n+\theta}_{|_{B^p}} e^{-ip\xi L} & \\ -\sqrt{\dfrac{L}{2\pi}}\displaystyle\sum_{p=-M^-}^{M^+-1} \left[(\theta-1)\Delta t(V_p - V) + (\rho_p - \rho)\right] u^n_{|_{B^p}} e^{-ip\xi L} & \textit{dans } B^0 \\ \partial_y \hat{g}^{n+1}(\xi)_{|_{y=L}} = e^{i\xi L}\partial_y \hat{g}^{n+1}(\xi)_{|_{y=0}} & \end{array}\right. \tag{7.11}$$

Enfin, $(\hat{u}^n(\cdot))_{0\le n\le N}$ *est l'unique famille de* $L^2(\mathbb{R}\times[0,L]\times[0,2\pi/L])^{N+1}$ *qui pour presque tout* $\xi \in [0,2\pi/L]$ *soit solution dans* $H^1_\xi(B^0)$ *de :*

$$\left|\begin{array}{ll} A_P(\theta,\Delta t)\hat{u}^{n+1}(\xi) \equiv A_P(\theta-1,\Delta t)\hat{u}^n(\xi) + \sqrt{\dfrac{L}{2\pi}}\Delta t \displaystyle\sum_{p=-M^-}^{M^+-1} f^{n+\theta}_{|_{B^p}} e^{-ip\xi L} & \\ +\sqrt{\dfrac{L}{2\pi}}\displaystyle\sum_{p=-M^-}^{M^+-1} \left[\theta\Delta t(V_p - V) + (\rho_p - \rho)\right] u^{n+1}_{|_{B^p}} e^{-ip\xi L} & \\ -\sqrt{\dfrac{L}{2\pi}}\displaystyle\sum_{p=-M^-}^{M^+-1} \left[(\theta-1)\Delta t(V_p - V) + (\rho_p - \rho)\right] u^n_{|_{B^p}} e^{-ip\xi L} & \textit{dans } B^0 \\ \partial_y \hat{u}^{n+1}(\xi)_{|_{y=L}} = e^{i\xi L}\partial_y \hat{u}^{n+1}(\xi)_{|_{y=0}} & \\ \hat{u}^0(\xi) = \sqrt{\dfrac{L}{2\pi}}\displaystyle\sum_{p=-M^-}^{M^+-1} u_{0|_{B^p}} e^{-ip\xi L} & \end{array}\right. \tag{7.12}$$

Démonstration. Comme nous l'avons déjà remarqué, il nous suffit de faire la démonstration pour $\hat{g}^n(\xi)$, et le résultat sera démontré pour $\hat{S}(\xi)f$. Commençons par remarquer que le problème (7.11) est bien posé en vertu du théorème 4.2. Puis, des lemmes de stabilité 4.3 et 4.4, nous déduisons que :

$$||\hat{g}^{n+1}(\xi)||_{L^2(\rho_p)} \le ||\hat{u}^n(\xi)||_{L^2(\rho_p)} + \left|\left|\sqrt{\frac{L}{2\pi}}\Delta t \sum_{p=-M^-}^{M^+-1} f^{n+\theta}_{|_{B^n}} e^{-in\xi L}\right|\right|_{L^2(1/\rho_p)}$$
$$+ \left|\left|\sqrt{\frac{L}{2\pi}}\sum_{p=-M^-}^{M^+-1} \left[(\theta-1)\Delta t(V_p - V) + (\rho_p - \rho)\right] u^n_{|_{B^p}} e^{-ip\xi L}\right|\right|_{L^2(1/\rho_p)}$$

D'une part, les deux sommes se majorent aisément par :

$$\left|\left|\sqrt{\frac{L}{2\pi}}\sum_{p=-M^-}^{M^+-1} \left[(\theta-1)\Delta t(V_p - V) + (\rho_p - \rho)\right] u^n_{|_{B^p}} e^{-ip\xi L}\right|\right|_{L^2(1/\rho_p)}$$
$$+ \left|\left|\sqrt{\frac{L}{2\pi}}\Delta t \sum_{p=-M^-}^{M^+-1} f^{n+\theta}_{|_{B^p}} e^{-ip\xi L}\right|\right|_{L^2(1/\rho_p)} \le C|M^+ - M^- - 1|(||f^{n+\theta}||_{L^2(\Omega_0)} + ||u^n||_{L^2(\Omega_0)})$$

Puis, d'autre part nous savons que $\int_0^{2\pi/L} ||\hat{u}^n(\xi)||^2_{L^2(\rho_p)} d\xi = ||u^n||^2_{L^2(\rho_p)}$. Par conséquent, la fonction :

$$\begin{aligned} \hat{g}^{n+1} : B^0 \times [0, 2\pi/L] &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (x, y, \xi) &\longmapsto \hat{g}^{n+1}(x, y, \xi) \end{aligned}$$

est de carré intégrable. Puis, en utilisant ce que nous avons rappelé plus haut concernant la TFB des fonctions à support dans Ω_0, il est clair que :

$$\Delta t \mathcal{F} f^{n+\theta} = \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \Delta t \sum_{p=-M^-}^{M^+-1} f^{n+\theta}_{|_{B^p}} e^{-ip\xi L}$$

$$\mathcal{F}\left([(\theta-1)\Delta t(V_p - V) + (\rho_p - \rho)]\, u^n\right) = \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \sum_{p=-M^-}^{M^+-1} [(\theta-1)\Delta t(V_p - V) + (\rho_p - \rho)]\, u^n_{|_{B^p}} e^{-ip\xi L}$$

Alors pour tout $\hat{v} \in L^2(\mathbb{R} \times [0, L] \times [0, 2\pi/L])$, nous avons, en appliquant la formule de Green pour les fonctions quasi-périodiques :

$$\begin{aligned} &\theta \Delta t \left(\nabla \hat{g}^{n+1}(\xi), \nabla \hat{v}\right)_{L^2(B^0 \times [0,2\pi/L])} + \left((\theta \Delta t V_p + \rho_p)\hat{g}^{n+1}(\xi), \hat{v}\right)_{L^2(B^0 \times [0,2\pi/L])} = \\ &(\theta-1)\Delta t \left(\nabla \hat{u}^n(\xi), \nabla \hat{v}\right)_{L^2(B^0 \times [0,2\pi/L])} + \left(((\theta-1)\Delta t V_p + \rho_p)\hat{u}^n(\xi), \hat{v}\right)_{L^2(B^0 \times [0,2\pi/L])} \\ &+ \left(\Delta t \mathcal{F} f^{n+\theta}, \hat{v}\right)_{L^2(B^0 \times [0,2\pi/L])} - \left(\mathcal{F}\left([(\theta-1)\Delta t(V_p - V) + (\rho_p - \rho)]\, u^n\right), \hat{v}\right)_{L^2(B^0 \times [0,2\pi/L])} \end{aligned}$$

Alors en utilisant l'identité de Parseval pour la TFB (cf théorème A.9), et le fait (cf théorèmes A.9 et A.10) que la TFB inverse commute avec la multiplication par une fonction périodique et les opérateurs différentiels d'ordre 1 sur $H^1_\xi(B^0)$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} &\theta \Delta t \left(\nabla \mathcal{F}^{-1}\hat{g}^{n+1}(\xi), \nabla \mathcal{F}^{-1}\hat{v}\right)_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \left((\theta \Delta t V_p + \rho_p)\mathcal{F}^{-1}\hat{g}^{n+1}(\xi), \mathcal{F}^{-1}\hat{v}\right)_{L^2(\mathbb{R}^2)} = \\ &(\theta-1)\Delta t \left(\nabla u^n, \nabla \mathcal{F}^{-1}\hat{v}\right)_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \left(((\theta-1)\Delta t V_p + \rho_p)u^n, \mathcal{F}^{-1}\hat{v}\right)_{L^2(\mathbb{R}^2)} \\ &+ \left(\Delta t f^{n+\theta} - \left([(\theta-1)\Delta t(V_p - V) + (\rho_p - \rho)]\, u^n\right), \mathcal{F}^{-1}\hat{v}\right)_{L^2(\mathbb{R}^2)} \end{aligned}$$

et donc $\mathcal{F}^{-1}\hat{g}^{n+1}(\xi)$ est solution du même problème que g^{n+1} (mis ici sous forme variationnelle). Par unicité, nous en déduisons donc que $g^{n+1} = \mathcal{F}^{-1}\hat{g}^{n+1}(\xi)$, et par conséquent :

$$\mathcal{F} g^{n+1} = \hat{g}^{n+1}(\xi) \quad \text{dans } L^2([0, 2\pi/L], H^1_\xi(\mathbb{R} \times [0, L]))$$

Enfin, pour la famille $(\hat{u}^n(\xi))_{0 \le n \le N}$, on remarque que l'on a directement :

$$\hat{u}^0(\xi) = \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \sum_{p=-M^-}^{M^+-1} u_{0|_{B^p}} e^{-ip\xi L}$$

en application de la remarque sur la TFB des fonctions à support compact. Puis, nous savons que :

$$u^{n+1} = S\left[\theta \Delta t(V_p - V) + (\rho_p - \rho)\right] u^{n+1} + g^{n+1}$$

Alors le résultat suit en combinant les problèmes pour les TFB de $S\left[\theta \Delta t(V_p - V) + (\rho_p - \rho)\right]$ et g^{n+1}. □

Sur la figure 7.5, nous résumons de façon imagée l'impact "géométrique" de la TFB sur notre problème, qui transforme donc un problème d'évolution semi-discret posé sur le plan en une famille de problèmes semi-discrets posés sur le guide B^0. Il est clair que $\hat{S}(\xi)f$ permet de définir pour tout ξ fixé un opérateur sur $L^2(\Omega_0)$:

$$\begin{aligned} \hat{S}(\xi) : L^2(\Omega_0) &\longrightarrow H^1_\xi(B^0) \\ f &\longmapsto \hat{S}(\xi)f \end{aligned}$$

On déduit alors aisément, en appliquant la transformée de Floquet-Bloch inverse, une formule pour le calcul de Sf :

Corollaire 7.1. *Pour tout $f \in L^2(\Omega_0)$, nous avons :*

$$Sf_{|B^m} \equiv \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \int_0^{2\pi/L} \hat{S}(\xi) f e^{im\xi L} d\xi \tag{7.13}$$

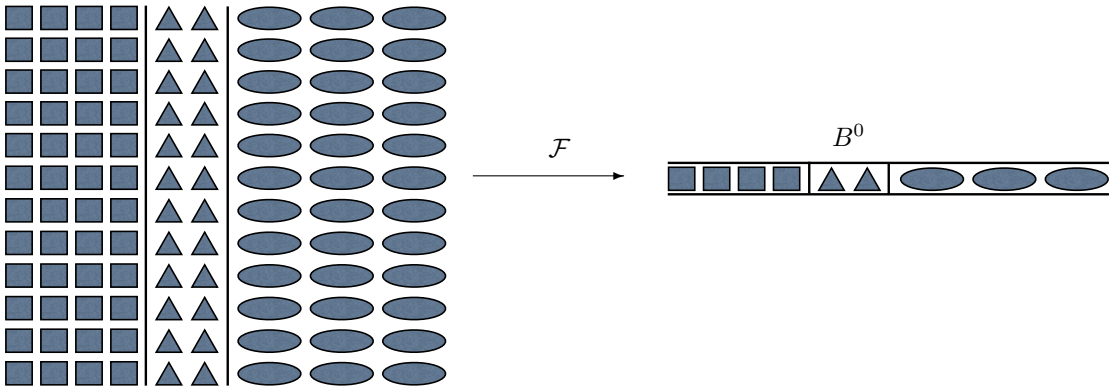


FIGURE 7.5 – L'action de la TFB, du point de vue géométrique, sur l'exemple de la figure 7.1

Attardons nous quelque peu sur la forme particulière des équations que nous venons de déterminer. Formellement, la famille $(\hat{u}^n(\xi))_{0\leq n\leq N}$ à ξ fixé est solution d'un problème d'évolution posé dans le milieu ρ_p, V_p, avec une source modifiée par rapport à u^n mais toujours à support dans Ω_0^0. Il s'agit donc d'un problème posé dans un guide périodique localement perturbé (puisque les coefficients ρ_p et V_p sont périodiques en dehors de Ω_0^0 par hypothèse), exactement de la forme que nous avons traitée aux chapitres 5 et 6 (avec une source certes étrange). Alors nous savons en vertu du théorème 4.7, que la restriction $\hat{u}^{n+1}(\xi)|_{\Omega_0}$ de $\hat{u}^{n+1}(\xi)$ est l'unique famille de $H^1_\xi(\Omega_0^0)^{N+1}$ solution de :

$$\left|\begin{array}{ll}
A_P(\theta,\Delta t)\hat{u}^{n+1}(\xi) \equiv A_P(\theta-1,\Delta t)\hat{u}^n(\xi) + \sqrt{\frac{L}{2\pi}}\Delta t \sum_{p=-M^-}^{M^+-1} f^{n+\theta}_{|_{\Omega_0^p}} e^{-ip\xi L} & \\
+\sqrt{\frac{L}{2\pi}} \sum_{p=-M^-}^{M^+-1} \left[\theta\Delta t(V_p - V) + (\rho_p - \rho)\right] u^{n+1}_{|_{\Omega_0^p}} e^{-ip\xi L} & \\
-\sqrt{\frac{L}{2\pi}} \sum_{p=-M^-}^{M^+-1} \left[(\theta-1)\Delta t(V_p - V) + (\rho_p - \rho)\right] u^{n}_{|_{\Omega_0^p}} e^{-ip\xi L} & \text{dans } \Omega_0^0 \\
\partial_y \hat{u}^{n+1}(\xi)_{|_{y=L}} = e^{i\xi L}\partial_y \hat{u}^{n+1}(\xi)_{|_{y=0}} & \\
\partial_{\nu_0^+}\hat{u}^{n+1}(\xi) + \sum_{k=1}^{n+1} \Lambda_+^k(\xi)\hat{u}^{n+1-k+1}(\xi)|_{\Gamma_0^+} = 0 & \text{sur } \Gamma_0^+ \\
\partial_{\nu_0^-}\hat{u}^{n+1}(\xi) + \sum_{k=1}^{n+1} \Lambda_-^k(\xi)\hat{u}^{n+1-k+1}(\xi)|_{\Gamma_0^-} = 0 & \text{sur } \Gamma_0^- \\
\hat{u}^0(\xi) = \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \sum_{p=-M^-}^{M^+-1} u_{0|_{Bp}} e^{-ip\xi L} &
\end{array}\right. \tag{7.14}$$

Notons bien que même en supposant le problème parfaitement résolu au temps n, une partie de la source (le terme en $u^{n+1}|_{\Omega_0}$) nous est inconnue à chaque pas de temps, et que nous ne pouvons pas utiliser cette formule directement pour déterminer $\hat{u}^{n+1}$. En revanche, une fois résolue l'équation de Lippmann-Schwinger, et donc connus $u^n|_{\Omega_0}$ et $u^{n+1}|_{\Omega_0}$, il est clair que l'on pourra utiliser ce problème, et les techniques de reconstruction dans les guides associées, pour pouvoir reconstruire la solution partout où on le souhaite dans $\mathbb{R}^2$. Néanmoins, cette formulation est d'ores et déjà très

utile pour comprendre comment nous pouvons calculer les restrictions de $\hat{S}(\xi)f$ et de $\hat{g}^n(\xi)$ à Ω_0. Commençons par le plus simple des deux. Par application directe des résultats du chapitre 5, nous savons que, si on pose (on se rappelle que $\Omega_0^0 = \Omega_0 \cap B^0$) :

$$\begin{aligned} \hat{S}_0(\xi) : L^2(\Omega_0) &\longrightarrow H^1_\xi(\Omega_0^0) \\ f &\longmapsto \hat{S}(\xi)f|_{\Omega_0^0} \end{aligned}$$

$\hat{S}(\xi)f$ étant un "premier pas de temps" avec donnée initiale nulle, la méthode DtN nous apprend que, en vertu du théorème 4.7 (c'est-à-dire du résultat ci-dessus), $\hat{S}_0(\xi)f$ est l'unique solution dans $H^1_\xi(B^0)$ du problème :

$$\left|\begin{array}{ll} A_P(\theta,\Delta t)\hat{S}_0(\xi)f \equiv \sqrt{\dfrac{L}{2\pi}}\displaystyle\sum_{p=-M^-}^{M^+-1} f_{|_{B^p}} e^{-ip\xi L} & \text{dans } B^0 \\ \partial_{\nu_0^+}\hat{S}_0(\xi)f + \Lambda^1_+(\xi)\hat{S}_0(\xi)f|_{\Gamma_0^+} = 0 & \text{sur } \Gamma_0^+ \\ \partial_{\nu_0^-}\hat{S}_0(\xi)f + \Lambda^1_-(\xi)\hat{S}_0(\xi)f|_{\Gamma_0^-} = 0 & \text{sur } \Gamma_0^+ \\ \partial_y\hat{S}_0(\xi)f_{|_{y=L}} = e^{i\xi L}\partial_y\hat{S}_0(\xi)f_{|_{y=0}} & \end{array}\right. \tag{7.15}$$

Il est donc aisé de ramener le calcul de $\hat{S}(\xi)$ à un problème posé en domaine borné, puisque nous savons comment calculer $\Lambda^1_\pm(\xi)$ à partir de la résolution de problèmes de cellule en vertu des résultats du chapitre 5.

Pour calculer $\hat{g}^{n+1}(\xi)$, il faut analyser finement le fait que $\hat{u}^{n+1}(\xi)$ et $\hat{g}^{n+1}(\xi)$ ne diffèrent que par leur terme source. Imaginons en effet une famille $(\hat{v}^{k,n+1}(\xi))_{0\le k\le n+1}$ à ξ fixé dont l'équation coïncide avec celle de $\hat{u}^n(\xi)$ jusqu'au temps n, mais qui diffère en source au temps $n+1$, de sorte que la source au temps $n+1$ soit celle qui définit $\hat{g}^{n+1(\xi)}$. On s'attend à ce qu'elle soit égale à $\hat{g}^{n+1}(\xi)$ au temps $n+1$, et comme elle définit un "vrai" problème de guide (c'est-à-dire une récurrence définie à tous les temps dont $\hat{v}^{n+1,n+1}(\xi)$ n'est qu'un instant particulier), nous pourrons lui appliquer le théorème 4.7 et en obtenir une caractérisation en domaine borné, nous permettant ainsi de déterminer $\hat{g}^{n+1}(\xi)$. C'est cette idée qui nous a conduit au résultat suivant :

Lemme 7.2. *Pour tout $1 \le n \le N$, soit $(\hat{v}^{k,n}(\xi))_{0\le k\le n}$ définie comme l'unique famille de $H^1_\xi(B^0)^{n+1}$ solution de, pour tout $k < n-1$:*

$$\left|\begin{array}{l} A_P(\theta,\Delta t)\hat{v}^{k+1,n}(\xi) \equiv A_P(\theta-1,\Delta t)\hat{v}^{k,n}(\xi) + \sqrt{\dfrac{L}{2\pi}}\Delta t\displaystyle\sum_{p=-M^-}^{M^+-1} f^{k+\theta}_{|_{B^p}} e^{-ip\xi L} \\ +\sqrt{\dfrac{L}{2\pi}}\displaystyle\sum_{p=-M^-}^{M^+-1}\left[\theta\Delta t(V_p - V) + (\rho_p - \rho)\right] u^{k+1}_{|_{B^p}} e^{-ip\xi L} \\ -\sqrt{\dfrac{L}{2\pi}}\displaystyle\sum_{p=-M^-}^{M^+-1}\left[(\theta-1)\Delta t(V_p - V) + (\rho_p - \rho)\right] u^{k}_{|_{B^p}} e^{-ip\xi L} \qquad \textit{dans } B^0 \\ \\ \partial_y\hat{v}^{k+1,n}(\xi)_{|_{y=L}} = e^{i\xi L}\partial_y\hat{v}^{k+1,n}(\xi)_{|_{y=0}} \\ \hat{v}^0(\xi) = \sqrt{\dfrac{L}{2\pi}}\displaystyle\sum_{p=-M^-}^{M^+-1} u_{0|_{B^p}} e^{-ip\xi L} \end{array}\right. \tag{7.16}$$

et solution au temps n de :

$$\left|\begin{array}{ll}
A_P(\theta,\Delta t)\hat v^{n,n}(\xi) \equiv A_P(\theta-1,\Delta t)\hat v^{n-1,n}(\xi) + \sqrt{\frac{L}{2\pi}}\Delta t \sum_{p=-M^-}^{M^+-1} f^{n+\theta-1}_{|_{B^p}} e^{-ip\xi L} & \\
-\sqrt{\frac{L}{2\pi}} \sum_{p=-M^-}^{M^+-1} \left[(\theta-1)\Delta t(V_p - V) + (\rho_p - \rho)\right] u^{n-1}_{|_{B^p}} e^{-ip\xi L} & \text{dans } B^0 \\
\partial_y \hat v^{n,n}(\xi)_{|_{y=L}} = e^{i\xi L}\partial_y \hat v^{n,n}(\xi)_{|_{y=0}} &
\end{array}\right. \tag{7.17}$$

Alors :

$$\hat v^{k,n}(\xi) = \hat u^k(\xi) \text{ pour tout } k < n \quad \text{et} \quad \hat v^{n,n}(\xi) = \hat g^n(\xi)$$

Démonstration. La preuve est en fait relativement évidente. Pour tout $k < n$, les récurrences satisfaites par $\hat v^{k,n}(\xi)$ et $\hat u^k(\xi)$ sont identiques, et par conséquent ce problème étant bien posé en vertu du théorème 4.2, nous avons $\hat v^{k,n}(\xi) = \hat u^k(\xi)$. Mais alors dans ce cas, $\hat v^{n,n}(\xi)$ est solution du même problème que $\hat g^n(\xi)$, qui est bien posé, et nous avons donc $\hat v^{n,n}(\xi) = \hat g^n(\xi)$. □

Ce résultat, qui est essentiellement un jeu d'écriture astucieux, constitue en fait la clé de voûte qui va nous permettre de calculer $\hat g^{n+1}(\xi)$. En effet, nous pouvons appliquer, au temps $n+1$, le théorème 4.7 à $(\hat v^{k,n+1}(\xi))_{0\le k\le n+1}$, solution d'un problème de guide localement perturbé, et nous avons :

$$\left|\begin{array}{ll}
A_P(\theta,\Delta t)\hat v^{n+1,n+1}(\xi) \equiv A_P(\theta-1,\Delta t)\hat v^{n,n+1}(\xi) + \sqrt{\frac{L}{2\pi}}\Delta t \sum_{p=-M^-}^{M^+-1} f^{n+\theta}_{|_{\Omega_0^p}} e^{-ip\xi L} & \\
-\sqrt{\frac{L}{2\pi}} \sum_{p=-M^-}^{M^+-1} \left[(\theta-1)\Delta t(V_p - V) + (\rho_p - \rho)\right] u^{n}_{|_{\Omega_0^p}} e^{-ip\xi L} & \text{dans } \Omega_0^0 \\
\partial_y \hat v^{n+1,n+1}(\xi)_{|_{y=L}} = e^{i\xi L}\partial_y \hat u^{n+1}(\xi)_{|_{y=0}} & \\
\partial_{\nu_0^+} \hat v^{n+1,n+1}(\xi) + \sum_{k=1}^{n+1} \Lambda^k_+(\xi)\hat v^{n+1-k+1,n+1}(\xi)|_{\Gamma_0^+} = 0 & \text{sur } \Gamma_0^+ \\
\partial_{\nu_0^-} \hat v^{n+1,n+1}(\xi) + \sum_{k=1}^{n+1} \Lambda^k_-(\xi)\hat v^{n+1-k+1,n+1}(\xi)|_{\Gamma_0^-} = 0 & \text{sur } \Gamma_0^-
\end{array}\right.$$

Mais en appliquant le lemme 7.2 ci-dessus, ceci devient :

$$\left|\begin{array}{ll}
A_P(\theta,\Delta t)\hat g^{n+1}(\xi)|_{\Omega_0^0} \equiv A_P(\theta-1,\Delta t)\hat u^{n}(\xi) + \sqrt{\frac{L}{2\pi}}\Delta t \sum_{p=-M^-}^{M^+-1} f^{n+\theta}_{|_{\Omega_0^p}} e^{-ip\xi L} & \\
-\sqrt{\frac{L}{2\pi}} \sum_{p=-M^-}^{M^+-1} \left[(\theta-1)\Delta t(V_p - V) + (\rho_p - \rho)\right] u^{n}_{|_{\Omega_0^p}} e^{-ip\xi L} & \text{dans } \Omega_0^0 \\
\partial_y \hat g^{n+1}(\xi)_{|_{y=L}} = e^{i\xi L}\partial_y \hat g^{n+1}(\xi)_{|_{y=0}} & \\
\partial_{\nu_0^+} \hat g^{n+1}(\xi) + \Lambda^1_+(\xi)\hat g^{n+1}(\xi)|_{\Gamma_0^+} = -\sum_{k=2}^{n+1} \Lambda^k_+(\xi)\hat u^{n+1-k+1}(\xi)|_{\Gamma_0^+} & \text{sur } \Gamma_0^+ \\
\partial_{\nu_0^-} \hat g^{n+1}(\xi) + \Lambda^1_-(\xi)\hat g^{n+1}(\xi)|_{\Gamma_0^-} = -\sum_{k=2}^{n+1} \Lambda^k_-(\xi)\hat u^{n+1-k+1}(\xi)|_{\Gamma_0^-} & \text{sur } \Gamma_0^+
\end{array}\right. \tag{7.18}$$

Nous obtenons donc un problème posé sur le domaine Ω_0^0 pour déterminer $\hat{g}^{n+1}(\xi)|_{\Omega_0^0}$. À noter que ce problème que nous avons obtenu à partir d'arguments très simples, fait intervenir les traces de $\hat{u}^k(\xi)$ mais seulement aux instants précédents ($k < n+1$). Or, nous n'avions défini g^{n+1} qu'à partir de u^n, ce qui rendait pareille formulation difficile à deviner a priori (à noter qu'il n'y a pas de contradiction avec la définition de g^{n+1}, puisque u^n dépend de tous les pas de temps qui l'ont précédé). Notre jeu d'écriture n'était donc pas si anodin, puisque il nous a permis de mettre en évidence le lien de g^{n+1} avec tout le "passé" de u^{n+1} : les $\hat{v}^{k,n+1}(\xi)$ étant définis pas récurrence, nous avons fait apparaître le "passé" de g^{n+1}, qui a priori n'en avait pas forcément. Ce "passé" explique pourquoi les $\hat{u}^k(\xi)$ aux instants précédents ont une influence sur g^{n+1}.

En appliquant la TFB inverse, nous pouvons alors donner les formules finales qui nous permettent de calculer effectivement les diverses quantités impliquées dans l'équation de Lippmann-Schwinger (7.7) :

Théorème 7.3. *Pour tout $f \in L^2(\Omega_0)$ et tout $m \in [\![-M^-, M^+ - 1]\!]$*

$$S_{0,\theta,\Delta t} f|_{\Omega_0^m} \equiv \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \int_0^{2\pi/L} \hat{S}_0(\xi) \left[\theta \Delta t (V_p - V) + (\rho_p - \rho)\right] f e^{i\xi m L} d\xi \tag{7.19}$$

De plus, nous avons pour tout $m \in [\![-M^-, M^+ - 1]\!]$ et tout $1 \leq n \leq N$:

$$g^n|_{\Omega_0^m} \equiv \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \int_0^{2\pi/L} \hat{g}^n(\xi)|_{\Omega_0^0} e^{i\xi m L} d\xi \tag{7.20}$$

pour tout $m \in [\![-M^-, M^+ - 1]\!]$ et tout $0 \leq n \leq N$:

$$u^n|_{\Omega_0^m} \equiv \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \int_0^{2\pi/L} \hat{u}^n(\xi)|_{\Omega_0^0} e^{i\xi m L} d\xi \tag{7.21}$$

Maintenant que nous savons calculer l'ensemble des objets qui nous intéressaient, voyons comment résoudre effectivement notre problème. À $t = 0$, nous connaissons $\hat{u}^0(\xi)|_{\Omega_0^0}$ explicitement comme u_0 est à support dans Ω_0^0, nous pouvons donc calculer $\hat{g}^1(\xi)|_{\Omega_0^0}$ pour tout ξ, au moyen de (7.18). De plus, nous pouvons assembler l'équation de Lippmann-Schwinger en calculant $S_{0,\theta,\Delta t}$ au moyen de la formule (7.19). Nous pouvons donc déterminer $u^1|_{\Omega_0}$. Mais une fois cette quantité connue, nous pouvons calculer $\hat{u}^1(\xi)|_{\Omega_0^0}$ pour tout ξ au moyen de (7.14). Nous pouvons donc calculer $\hat{g}^2(\xi)|_{\Omega_0^0}$, et on voit alors comment la récurrence avance. L'algorithme sous-jacent est le suivant :

. *Initialisation*

- On calcule les $\Lambda_\pm^k(\xi)$ pour tout $1 \leq k \leq N$ au moyen de la méthode du chapitre 5
- On calcule $\hat{u}^0(\xi)|_{\Omega_0^0}$ directement par TFB, ainsi que $S_{0,\theta,\Delta t}$ par la formule (7.19)
- On calcule $\hat{g}^1(\xi)|_{\Omega_0^0}$ en résolvant (7.18)
- On résout (7.7) pour déterminer $u^1|_{\Omega_0}$
- On calcule $\hat{u}^1(\xi)|_{\Omega_0^0}$ en résolvant (7.14)

. *Boucle sur le pas de temps n*

- On calcule $\hat{g}^n(\xi)|_{\Omega_0^0}$ en résolvant (7.18)

- On résout (7.7) pour déterminer $u^n|_{\Omega_0}$

- On calcule $\hat{u}^n(\xi)|_{\Omega_0^0}$ en résolvant (7.14)

Nous voyons donc que le problème semi-discret est entièrement résolu à ce stade, au sens où chacune des opérations mentionnées dans l'algorithme ci-dessus s'effectue à partir de la résolution de problèmes posés en domaine borné. Nous pouvons donc maintenant nous tourner vers une discrétisation spatiale et en la variable de Floquet de ce problème. La discrétisation spatiale est encore une fois classique dans son principe (mais complexe dans son analyse), tandis que la discrétisation en la variable de Floquet suit quant à elle les mêmes principes que celle effectuée au chapitre 2. C'est cette dernière discrétisation que nous étudions dans un premier temps.

7.1.4 Semi-discrétisation dans la variable de Floquet

Comme dans le cas harmonique, précisons que l'étude que nous allons mener dans cette sous-section ne dépend pas de la forme particulière de Ω_0, seul son caractère borné est nécessaire. L'équation de Lippmann-Schwinger (7.7) que nous venons d'établir fait appel, tant pour le calcul des opérateurs sous-jacents que de sa source, au calcul de transformées de Floquet-Bloch inverse, et donc au calcul d'intégrales. Bien entendu, comme nous ne disposons pas de formules analytiques pour $\hat{S}_0(\xi)$, $\hat{g}^n(\xi)$ et $\hat{u}^n(\xi)$, il nous faut (comme dans le cas harmonique) approcher ces intégrales, ce que nous nous proposons de faire par quadrature. Nous allons mimer l'approche (fructueuse) que nous avons menée dans le cas harmonique sur notre problème d'évolution, et nous allons montrer que nous pouvons encore réinterpréter le problème semi-discret en temps et en la variable de Floquet comme un problème semi-discret en temps qui sera, comme dans le cas harmonique, une perturbation du problème initial, à savoir (7.2) ici. Ceci nous permettra d'établir le caractère bien posé de l'approximation par quadrature, et nous pourrons en déduire une estimation d'erreur.

Construction d'une approximation par quadrature

Nous commençons par expliquer comment nous approchons l'opérateur $S_{0,\theta,\Delta t}$ ainsi que la source g^n par quadrature. Rappelons que les TFB étant périodiques en la variable ξ, et comme nous pourrions montrer qu'elles sont également C^∞ en cette même variable, les résultats classiques (cf [58]) de convergence pour l'approximation de fonctions périodiques par quadrature nous apprennent que la formule basée sur la règle des trapèzes converge plus vite que tout polynôme pour de telles fonctions, ce qui nous a conduit à privilégier cette règle particulière. Comme nous l'avons expliqué au chapitre 2, c'est le fait que cette règle permette une intégration exacte d'une certaine classe d'exponentielles complexe qui est à l'origine de cette convergence rapide. Aussi, a priori toute formule de quadrature possédant cette propriété pourrait une nouvelle fois convenir. Néanmoins nous n'allons expliciter nos résultats que dans le cas de la règle des trapèzes, encore une fois parce qu'elle induit des conditions aux limites "simples" (périodiques) pour la réinterprétation de l'équation de Lippmann-Schwinger.

Rappelons qu'une quadrature consiste, étant donné un maillage de $[0, 2\pi/L]$ constitué de N_k points $(\xi_j)_{1\leq j\leq N_k}$, et étant donné un ensemble de N_k poids $(w_j)_{1\leq j\leq N_k}$, à approcher l'intégrale d'une fonction par :

$$\oint f = \sum_{j=1}^{N_k} w_j f(\xi_j) \simeq \int_0^{2\pi/L} f d\xi \tag{2.22}$$

Dans le contexte des fonctions périodiques, la règle des trapèzes consiste à choisir (voir le chapitre 2) :

$$\Delta k = \frac{2\pi}{N_k L} \qquad \xi_j = j\Delta k \qquad w_j = \Delta k \quad \forall\, j \in [\![1, N_k]\!]$$

Or, nous avons, pour tout $f \in L^2(\Omega_0)$ et tout $m \in [\![-M^-, M^+ - 1]\!]$, en vertu du théorème 7.3 :

$$S_{0,\theta,\Delta t} f|_{\Omega_0^m} \equiv \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \int_0^{2\pi/L} \hat{S}_0(\xi) \left[\theta \Delta t (V_p - V) + (\rho_p - \rho)\right] f e^{i\xi m L} d\xi \tag{7.19}$$

Alors nous pouvons directement définir l'approximation par quadrature $S_{0,\theta,\Delta t,\Delta k}$ de l'opérateur $S_{0,\theta,\Delta t}$:

$$\begin{array}{ccc} S_{0,\theta,\Delta t,\Delta k} : L^2(\Omega_0) & \longrightarrow & H^1(\Omega_0) \\ f & \longmapsto & S_{0,\theta,\Delta t,\Delta k} f \end{array}$$

par, $\quad \forall\, m \in [\![-M^-, M^+ - 1]\!]$:

$$S_{0,\theta,\Delta t,\Delta k} f|_{\Omega_0^m} \equiv \Delta k \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \sum_{j=1}^{N_k} \hat{S}_0(j\Delta k) \left[\theta \Delta t (V_p - V) + (\rho_p - \rho)\right] f e^{imj\Delta k L} \tag{7.22}$$

et nous avons ainsi défini l'approximation par quadrature de l'opérateur sous-jacent à l'équation de Lippmann-Schwinger. Il va nous falloir travailler un peu plus pour la source. Rappelons nous que, en vertu du théorème 7.3, pour tout $m \in [\![-M^-, M^+ - 1]\!]$ et tout $0 \leq n \leq N$:

$$g^n|_{\Omega_0^m} \equiv \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \int_0^{2\pi/L} \hat{g}^n(\xi)|_{\Omega_0^0} e^{i\xi m L} d\xi \tag{7.20}$$

Nous serions donc tentés naïvement de poser :

$$g^n_{\Delta k}|_{\Omega_0^m} \equiv \Delta k \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \sum_{j=1}^{N_k} \hat{g}^n(j\Delta k)|_{\Omega_0^0} e^{imj\Delta k L} \tag{7.20}$$

Mais $\hat{g}^n(j\Delta k)$ est défini au moyen de la TFB de la solution exacte $\hat{u}^n(j\Delta k)$, ainsi que de $u^n|_{\Omega_0}$, que nous ne connaissons pas. Il va donc falloir définir des approximations de ces quantités, pour pouvoir construire une approximation de $\hat{g}^n(j\Delta k)$ et en déduire un $g^n_{\Delta k}$ exploitable en pratique. Nous procédons par récurrence, en mimant les formules dont on dispose au niveau continu.

Supposons que nous disposions de solutions approchées $u^n_{\Delta k}$ du problème posé dans Ω_0. Alors par analogie avec la formule (7.12), nous définissons par récurrence ce que nous espérons être une approximation de la TFB de cette solution en désignant par $(\hat{u}^n_{\Delta k}(j\Delta k))_{0\leq n\leq N}$ l'unique famille de $H^1_{j\Delta k}(B^0)^{N+1}$ solution de :

$$\left|\begin{array}{ll}
A_P(\theta,\Delta t)\hat{u}^{n+1}_{\Delta k}(j\Delta k) \equiv A_P(\theta-1,\Delta t)\hat{u}^n_{\Delta k}(j\Delta k) + \sqrt{\frac{L}{2\pi}}\Delta t \sum_{p=-M^-}^{M^+-1} f^{n+\theta}_{|_{B^p}} e^{-ip\xi L} & \\
+\sqrt{\frac{L}{2\pi}} \sum_{p=-M^-}^{M^+-1} \left[\theta\Delta t(V_p - V) + (\rho_p - \rho)\right] u^{n+1}_{\Delta k|_{B^p}} e^{-ipj\Delta k L} & \\
-\sqrt{\frac{L}{2\pi}} \sum_{p=-M^-}^{M^+-1} \left[(\theta-1)\Delta t(V_p - V) + (\rho_p - \rho)\right] u^n_{\Delta k|_{B^p}} e^{-ipj\Delta k L} & \text{dans } B^0 \\
\partial_y \hat{u}^{n+1}_{\Delta k}(j\Delta k)_{|_{y=L}} = e^{i\xi L}\partial_y \hat{u}^{n+1}(j\Delta k)_{|_{y=0}} & \\
\hat{u}^0_{\Delta k}(j\Delta k) = \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \sum_{p=-M^-}^{M^+-1} u_{0|_{B^p}} e^{-ipj\Delta k L} &
\end{array}\right. \tag{7.23}$$

Bien entendu, ce problème étant un cas particulier de problème (7.12), nous savons qu'il est équivalent de résoudre :

$$\left|\begin{array}{ll}
A_P(\theta,\Delta t)\hat{u}^{n+1}_{\Delta k}(j\Delta k) \equiv A_P(\theta-1,\Delta t)\hat{u}^{n}_{\Delta k}(j\Delta k) + \sqrt{\dfrac{L}{2\pi}}\Delta t \displaystyle\sum_{p=-M^-}^{M^+-1} f^{n+\theta}_{|_{B^p}} e^{-ip\xi L} & \\
+\sqrt{\dfrac{L}{2\pi}} \displaystyle\sum_{p=-M^-}^{M^+-1} \left[\theta\Delta t(V_p - V) + (\rho_p - \rho)\right] u^{n+1}_{\Delta k|_{B^p}} e^{-ipj\Delta kL} & \\
-\sqrt{\dfrac{L}{2\pi}} \displaystyle\sum_{p=-M^-}^{M^+-1} \left[(\theta-1)\Delta t(V_p - V) + (\rho_p - \rho)\right] u^{n}_{\Delta k|_{B^p}} e^{-ipj\Delta kL} & \text{dans } \Omega^0_0 \\
\partial_{\nu_0^+}\hat{u}^{n+1}_{\Delta k}(j\Delta k) + \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \Lambda^k_+(j\Delta k)\hat{u}^{n+1-k+1}_{\Delta k}(j\Delta k)|_{\Gamma_0^+} = 0 & \text{sur } \Gamma_0^+ \\
\partial_{\nu_0^-}\hat{u}^{n+1}_{\Delta k}(j\Delta k) + \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \Lambda^k_-(j\Delta k)\hat{u}^{n+1-k+1}_{\Delta k}(j\Delta k)|_{\Gamma_0^-} = 0 & \text{sur } \Gamma_0^- \\
\partial_y \hat{u}^{n+1}_{\Delta k}(j\Delta k)_{|_{y=L}} = e^{i\xi L}\partial_y \hat{u}^{n+1}(j\Delta k)_{|_{y=0}} & \\
\hat{u}^0_{\Delta k}(j\Delta k) = \sqrt{\dfrac{L}{2\pi}} \displaystyle\sum_{p=-M^-}^{M^+-1} u_{0|_{B^p}} e^{-ipj\Delta kL} &
\end{array}\right. \tag{7.24}$$

Puis, pour tout $0 \leq n \leq N-1$, nous définissons $\hat{g}^{n+1}_{\Delta k}(j\Delta k)$ comme l'unique solution dans $H^1_{j\Delta k}(B^0)$ de :

$$\left|\begin{array}{ll}
A_P(\theta,\Delta t)\hat{g}^{n+1}_{\Delta k}(j\Delta k) \equiv A_P(\theta-1,\Delta t)\hat{u}^{n}_{\Delta k}(j\Delta k) + \sqrt{\dfrac{L}{2\pi}}\Delta t \displaystyle\sum_{p=-M^-}^{M^+-1} f^{n+\theta}_{|_{B^p}} e^{-ipj\Delta kL} & \\
+\sqrt{\dfrac{L}{2\pi}} \displaystyle\sum_{p=-M^-}^{M^+-1} \left[(1-\theta)\Delta t(V_p - V) + (\rho_p - \rho)\right] u^{n}_{\Delta k|_{B^p}} e^{-ipj\Delta kL} & \text{dans } B^0 \\
\partial_y \hat{g}^{n+1}_{\Delta k}(j\Delta k)_{|_{y=L}} = e^{i\xi L}\partial_y \hat{g}^{n+1}_{\Delta k}(j\Delta k)_{|_{y=0}} &
\end{array}\right. \tag{7.25}$$

Comme il s'agit d'un cas particulier de problème (7.11), nous savons encore qu'il est équivalent de résoudre le problème posé en domaine borné :

$$\left|\begin{array}{ll}
A_P(\theta,\Delta t)\hat{g}^{n+1}_{\Delta k}(j\Delta k) \equiv A_P(\theta-1,\Delta t)\hat{u}^{n}_{\Delta k}(j\Delta k) + \sqrt{\dfrac{L}{2\pi}}\Delta t \displaystyle\sum_{p=-M^-}^{M^+-1} f^{n+\theta}_{|_{B^p}} e^{-ipj\Delta kL} & \\
-\sqrt{\dfrac{L}{2\pi}} \displaystyle\sum_{p=-M^-}^{M^+-1} \left[(\theta-1)\Delta t(V_p - V) + (\rho_p - \rho)\right] u^{n}_{\Delta k|_{B^p}} e^{-ipj\Delta kL} & \text{dans } B^0 \\
\partial_y \hat{g}^{n+1}_{\Delta k}(j\Delta k)_{|_{y=L}} = e^{i\xi L}\partial_y \hat{g}^{n+1}_{\Delta k}(j\Delta k)_{|_{y=0}} & \\
\partial_{\nu_0^+}\hat{g}^{n+1}_{\Delta k}(j\Delta k) + \Lambda^1_+(j\Delta k)\hat{g}^{n+1}_{\Delta k}(j\Delta k)|_{\Gamma_0^+} = -\displaystyle\sum_{k=2}^{n+1} \Lambda^k_+(\xi)\hat{u}^{n+1-k+1}_{\Delta k}(j\Delta k)|_{\Gamma_0^+} & \text{sur } \Gamma_0^+ \\
\partial_{\nu_0^-}\hat{g}^{n+1}_{\Delta k}(j\Delta k) + \Lambda^1_-(j\Delta k)\hat{g}^{n+1}_{\Delta k}(j\Delta k)|_{\Gamma_0^-} = -\displaystyle\sum_{k=2}^{n+1} \Lambda^k_-(\xi)\hat{u}^{n+1-k+1}_{\Delta k}(j\Delta k)|_{\Gamma_0^-} & \text{sur } \Gamma_0^+
\end{array}\right. \tag{7.26}$$

C'est cette dernière quantité que nous allons utiliser pour calculer la source de l'équation de Lippmann-Schwinger approchée par quadrature. Nous poserons naturellement :

$$g^n_{\Delta k}|_{B^m} \equiv \Delta k \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \sum_{j=1}^{N_k} \hat{g}^n_{\Delta k}(j\Delta k) e^{imj\Delta kL} \tag{7.27}$$

Bien sûr nous choisirons les $u^n_{\Delta k}$ comme les solutions successives de l'équation de Lippmann-Schwinger. Comme nous avons le même schéma de récurrence qu'au niveau continu, il est clair que si ces solutions existent à chaque pas de temps, alors toutes ces quantités sont bien définies.

Le problème que nous cherchons à résoudre se reformule finalement en : étant donnés $u_0 \in H^1(\Delta, \Omega_0)$ et $f \in L^2(\Omega_0)$, nous cherchons une famille $(u^n_{\Delta k})_{0\leq n\leq N} \in L^2(\Omega_0)^{N+1}$ telle que :

$$\left| \begin{array}{l} (I - S_{0,\theta,\Delta t,\Delta k}) u^n_{\Delta k} = g^n_{\Delta k}|_{\Omega_0} \quad \forall\ 1 \leq n \leq N \\ u^0_{\Delta k} = u_0 \end{array} \right. \tag{7.28}$$

où $g^n_{\Delta k}$ est donnée par (7.27), avec $(\hat{g}^n_{\Delta k}(j\Delta k))_{\substack{1\leq n\leq N \\ 1\leq j\leq N_k}}$ et $(\hat{u}^n_{\Delta k}(j\Delta k))_{\substack{0\leq n\leq N \\ 1\leq j\leq N_k}}$ les solutions de (7.26) et (7.24), associées à la famille $u^n_{\Delta k}$.

La question cruciale est de savoir si l'opérateur $I - S_{0,\theta,\Delta t,\Delta k}$ est inversible ou non. Fort heureusement, nous allons voir que la réponse à cette question d'inversibilité est positive. Pour cela, nous allons avoir besoin de réinterpréter une solution éventuelle de (7.28) comme la restriction à Ω_0 de la solution d'une EDP semi-discrète, de la façon similaire à ce que nous avions fait dans le cas harmonique au chapitre 2.

Une autre question intéressante est de savoir si lorsque l'on choisit $u^n_{\Delta k}$ comme la solution (si tant est qu'elle existe) de (7.28), nous conservons un lien de type TFB discrète inverse entre $u^n_{\Delta k}$ et $(\hat{u}^n_{\Delta k}(j\Delta k))_{1\leq j\leq N_k}$, i.e. nous cherchons à savoir si :

$$u^n_{\Delta k}|_{\Omega_0^m} \equiv \Delta k \frac{L}{2\pi} \sum_{j=1}^{N_k} \hat{u}^n_{\Delta k}(j\Delta k)|_{\Omega_0^0} e^{imj\Delta kL}$$

ou si leur seul lien tient à la définition de $(\hat{u}^n_{\Delta k}(j\Delta k))_{1\leq j\leq N_k}$. Cette question trouvera une réponse (positive) lors de la démonstration du théorème 7.4 qui va suivre, en tant qu'intermédiaire essentiel à cette démonstration.

Remarque 7.2. *Les problèmes* (7.26) *et* (7.24) *peuvent être considérés comme une approximation par quadrature de* (7.18) *et* (7.14)*. En effet, bien que cette quadrature n'intervienne pas directement dans leur définition, elle est au coeur du calcul d'une partie de la source de ces problèmes. En quelque sorte, ils ne servent qu'à modéliser la façon dont l'erreur due à la quadrature se propage au cours du temps. En effet, si nous calculions l'erreur entre la solution de ces nouveaux problèmes et la solution des problèmes qu'ils sont censés approcher, nous verrions sans peine que cette erreur est solution de la même récurrence, mais avec comme source l'erreur $u^n - u^n_{\Delta k}$, à savoir l'erreur sur la résolution de l'équation de Lippmann-Schwinger*

Réinterprétation de l'équation de Lippmann-Schwinger semi-discrète

Le point de départ de cette réinterprétation est comme dans le cas harmonique la construction d'une extension d'une éventuelle solution à tout le plan $\mathbb{R}^2$, au travers de l'équation de Lippmann-Schwinger. Soit $(u^n_{\Delta k})_{0\leq n\leq N}$ une solution (définie sur Ω_0) de (7.28). Cela signifie que, pour tout $n \geq 1$ et tout $m \in [\![-M^-, M^+ - 1]\!]$:

$$u^n_{\Delta k}|_{\Omega_0^m} \equiv g^n_{\Delta k}|_{\Omega_0^m} + \Delta k \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \sum_{j=1}^{N_k} \hat{S}_0(j\Delta k) \left[\theta \Delta t (V_p - V) + (\rho_p - \rho)\right] u^n_{\Delta k} e^{imj\Delta kL}$$

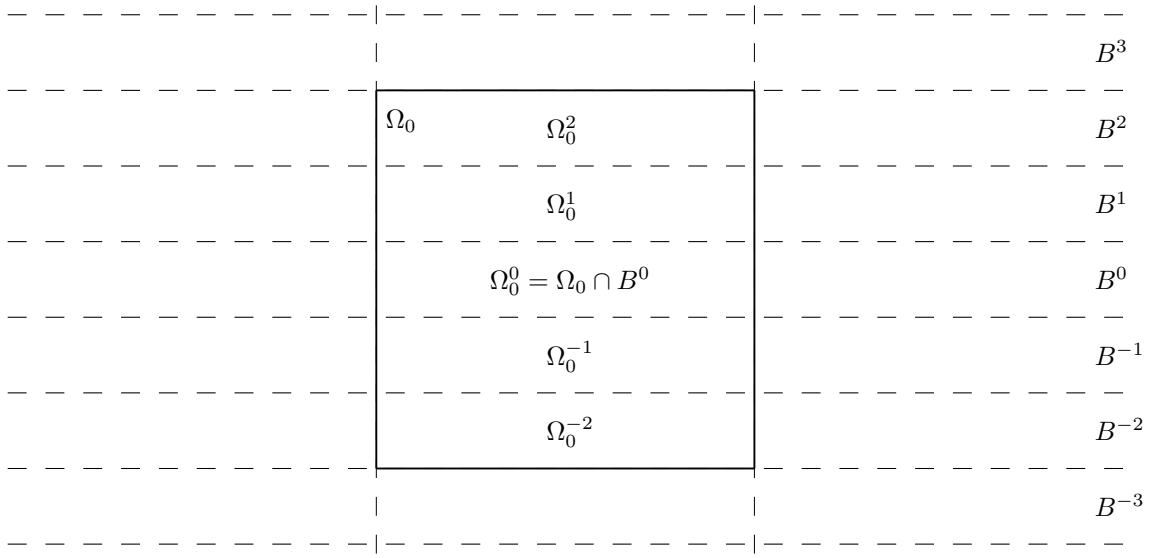
Nous définissons son extension $(\widetilde{u}^n_{\Delta k})_{0\leq n\leq N}$ en posant $\widetilde{u}^0_{\Delta k} = u_0$, et pour tout $n \geq 1$ et tout $m \in \mathbb{Z}$:

$$\widetilde{u}^n_{\Delta k}|_{B^m} \equiv g^n_{\Delta k}|_{B^m} + \Delta k\sqrt{\frac{L}{2\pi}}\sum_{j=1}^{N_k} \hat{S}(j\Delta k)\left[\theta\Delta t(V_p - V) + (\rho_p - \rho)\right] u^n_{\Delta k} e^{imj\Delta kL}$$

Observons qu'il s'agit bien d'une extension puisque $\hat{S}(j\Delta k)f|_{\Omega^0_0} = \hat{S}_0(j\Delta k)f$ pour tout $f \in L^2(\Omega_0)$, ce qui implique :

$$\widetilde{u}^n_{\Delta k}|_{\Omega_0} = u^n_{\Delta k}$$

si $u^n_{\Delta k}$ est solution de l'équation (7.28).



Alors des propriétés de la formule de quadrature, à savoir l'intégration exacte des exponentielles complexes (cf. lemme 2.3) et la périodicité interne (cf. la relation (2.28)), nous sommes capables de déduire le résultat suivant :

Théorème 7.4. *Posons :*

$$\Omega_{N_k} = \mathbb{R} \times \left[\left(\lfloor\frac{-N_k}{2}\rfloor + 1\right)L, \left(\lfloor\frac{N_k}{2}\rfloor + 1\right)L\right]$$

ainsi que :

$$\Gamma^+_{N_k} = \left\{(x,y) \;\mid\; y = \left(\lfloor\frac{N_k}{2}\rfloor + 1\right)L\right\} \qquad \Gamma^-_{N_k} = \left\{(x,y) \;\mid\; y = \left(\lfloor\frac{-N_k}{2}\rfloor + 1\right)L\right\}$$

La famille $(\widetilde{u}^n_{\Delta k})_{0\leq n\leq N}$ définie comme l'extension à $\mathbb{R}^2$ d'une famille $(u^n_{\Delta k})_{0\leq n\leq N}$ solution de (7.28)*, est l'unique solution de : trouver $(\widetilde{u}^n_{\Delta k})_{0\leq n\leq N} \in H^1_{per}(\Omega_{N_k})^{N+1}$ telle que :*

$$\left|\begin{array}{ll} A(\theta,\Delta t)\widetilde{u}^{n+1}_{\Delta k} = A(\theta-1,\Delta t)\widetilde{u}^n_{\Delta k} + \Delta t f^{n+\theta} & \text{dans } \Omega_{N_k} \\ \widetilde{u}^{n+1}_{\Delta k|_{\Gamma^+_{N_k}}} = \widetilde{u}^{n+1}_{\Delta k|_{\Gamma^-_{N_k}}} & \\ \partial_y\widetilde{u}^{n+1}_{\Delta k|_{\Gamma^+_{N_k}}} = \partial_y\widetilde{u}^{n+1}_{\Delta k|_{\Gamma^-_{N_k}}} & \\ \widetilde{u}^0_{\Delta k} = u_0 & \end{array}\right. \tag{7.29}$$

où nous rappelons que : $A(\theta,\Delta t) = \theta\Delta t(-\Delta + V) + \rho$ et $H^1_{per}(\Omega_{N_k}) = H^1_{\xi=0}(\Omega_{N_k})$.

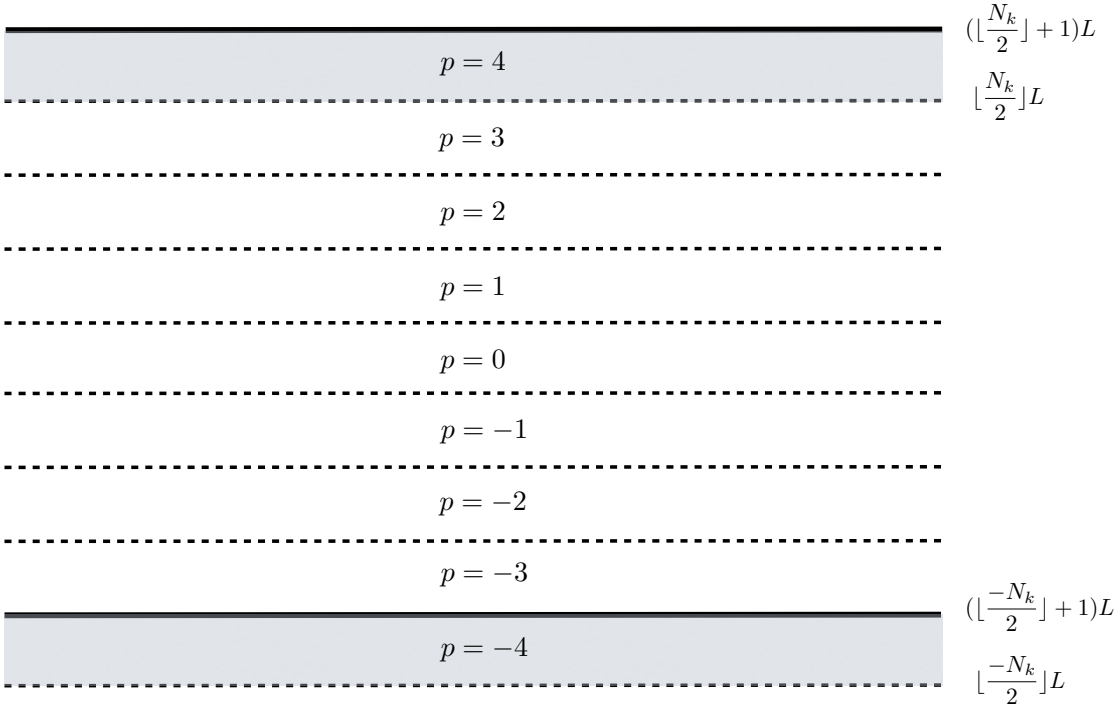


FIGURE 7.6 – Exemple pour $N_k = 8$, les zones grisées représentent les domaines où la fonction est identique, les lignes en gras les frontières $\Gamma^+_{N_k}$ et $\Gamma^-_{N_k}$ de Ω_{N_k}

Démonstration. La preuve est très similaire dans son principe à celle du théorème 2.7, mais la gestion de la récurrence est la cause d'une certaine complication technique. Nous allons la diviser en quatre grandes étapes. Nous commençons par montrer que la famille $(g^n_{\Delta k})_{0\leq n\leq N}$ est solution de la même récurrence volumique que la TFB inverse discrète $v^n_{\Delta k}$ de $\hat{u}^n_{\Delta k}$, bande par bande (i.e. sur chaque B^m). Puis nous montrons que $g^n_{\Delta k}$ et $v^n_{\Delta k}$ sont continues en trace et en dérivée normale à la frontière de chaque B^m. Enfin, nous montrons que ces deux objets vérifient les conditions aux limites de périodicité annoncées. Ces deux familles seront alors solutions de la même récurrence volumique, qui est un problème bien posé, elles seront donc égales et cette égalité nous donnera le résultat.

(i) Équation dans B^m

Clairement, $g^n_{\Delta k}$ appartient à $H^1(B^m)$ pour tout n et pour tout $m \in \mathbb{Z}$. De plus, en posant (pour alléger un peu) $g^{n,m}_{\Delta k} = g_{\Delta k|B^m}$, nous avons :

$$\widetilde{u}^{n+1,m}_{\Delta k} \equiv g^{n+1}_{\Delta k}|_{B^m} + \Delta k\sqrt{\frac{L}{2\pi}}\sum_{j=1}^{N_k}\hat{S}(j\Delta k)\left[\theta\Delta t(V_p - V) + (\rho_p - \rho)\right]u^{n+1}_{\Delta k}e^{imj\Delta kL}$$

$$= \Delta k\sqrt{\frac{L}{2\pi}}\sum_{j=1}^{N_k}\left(g^{n+1}_{\Delta k}(j\Delta k) + \hat{S}(j\Delta k)\left[\theta\Delta t(V_p - V) + (\rho_p - \rho)\right]u^{n+1}_{\Delta k}\right)e^{imj\Delta kL}$$

Alors en appliquant l'opérateur $A_P(\theta, \Delta t) = \theta\Delta t(-\Delta + V_p) + \rho_p$ à cette quantité, on obtient, pour tout $n \geq 0$:

$$A_P(\theta,\Delta t)\widetilde{u}^{n+1,m}_{\Delta k} \equiv \Delta k\frac{L}{2\pi}\sum_{j=1}^{N_k}A_P(\theta-1,\Delta t)\hat{u}^n_{\Delta k}(j\Delta k)e^{imj\Delta kL}$$

$$+\Delta k\frac{L}{2\pi}\sum_{j=1}^{N_k}\sum_{p=-M^-}^{M^+-1}\Delta t f^{n+\theta}_{|_{B^p}}e^{i(m-p)j\Delta kL}$$

$$+\Delta k\frac{L}{2\pi}\sum_{j=1}^{N_k}\sum_{p=-M^-}^{M^+-1}\left[(1-\theta)\Delta t(V_p - V) + (\rho_p - \rho)\right]u^n_{\Delta k|_{B^p}}e^{i(m-p)j\Delta kL}$$

$$+\Delta k\frac{L}{2\pi}\sum_{j=1}^{N_k}\sum_{p=-M^-}^{M^+-1}\left[\theta\Delta t(V_p-V)+(\rho_p-\rho)\right]u^{n+1}_{\Delta k|_{B^p}}\,e^{i(m-p)j\Delta kL}$$

par définition de $\hat{g}^{n+1}_{\Delta k}(j\Delta k)$ et $\hat{S}(j\Delta k)$. En utilisant la notation du lemme 2.3, cette dernière expression devient :

$$A_P(\theta,\Delta t)\widetilde{u}^{n+1,m}_{\Delta k}\equiv A_P(\theta-1,\Delta t)\left(\Delta k\frac{L}{2\pi}\sum_{j=1}^{N_k}\hat{u}^n_{\Delta k}(j\Delta k)e^{imj\Delta kL}\right)$$

$$+\sum_{p=-M^-}^{M^+-1}q_{\Delta k,p,m}\Delta t f^{n+\theta}_{|_{B^p}}+\sum_{p=-M^-}^{M^+-1}q_{\Delta k,p,m}\left[\theta\Delta t(V_p-V)+(\rho_p-\rho)\right]u^{n+1}_{\Delta k|_{B^p}}$$

$$+\sum_{p=-M^-}^{M^+-1}q_{\Delta k,p,m}\left[(1-\theta)\Delta t(V_p-V)+(\rho_p-\rho)\right]u^{n}_{\Delta k|_{B^p}}$$

Définissons, pour tout $n\geq 0$:

$$v^{n,m}_{\Delta k}=v^n_{\Delta k}|_{B^m}=\Delta k\frac{L}{2\pi}\sum_{j=1}^{N_k}\hat{u}^n_{\Delta k}(j\Delta k)e^{imj\Delta kL}$$

de sorte que, tout comme $\widetilde{u}^n_{\Delta k}$, la fonction $v^n_{\Delta k}$ ainsi définie appartienne à $H^1(B^m)$ pour tout n et tout $m\in\mathbb{Z}$. Remarquons que $v^n_{\Delta k}$ n'est rien d'autre que la TFB inverse discrète de $\hat{u}^n_{\Delta k}$ (que l'on espère égale à $g^n_{\Delta k}$). Alors la relation ci-dessus se réécrit :

$$A_P(\theta,\Delta t)\widetilde{u}^{n+1,m}_{\Delta k}\equiv A_P(\theta-1,\Delta t)v^{n,m}_{\Delta k}+\sum_{p=-M^-}^{M^+-1}q_{\Delta k,p,m}\Delta t f^{n+\theta}_{|_{B^p}}$$

$$-\sum_{p=-M^-}^{M^+-1}q_{\Delta k,p,m}\left[(\theta-1)\Delta t(V_p-V)+(\rho_p-\rho)\right]u^{n}_{\Delta k|_{B^p}}$$

$$+\sum_{p=-M^-}^{M^+-1}q_{\Delta k,p,m}\left[\theta\Delta t(V_p-V)+(\rho_p-\rho)\right]u^{n+1}_{\Delta k|_{B^p}}$$

Puis, en utilisant les propriétés de $q_{\Delta k,p,m}$ décrites dans le lemme 2.3, nous avons $q_{\Delta k,p,m}=\delta_{pm}$, pour $m\in[\![\lfloor\frac{-N_k}{2}\rfloor,\lfloor\frac{N_k}{2}\rfloor]\!]$, et il suit, en utilisant $supp\ f\cup supp\ (\rho-\rho_p)\cup supp\ (V-V_p)\subset\Omega_0$, pour tout $m\in[\![-M^-,M^+-1]\!]$ (c'est-à-dire pour tout B^m qui intersecte Ω_0) :

$$A_P(\theta,\Delta t)\widetilde{u}^{n+1,m}_{\Delta k}\equiv A_P(\theta-1,\Delta t)v^{n,m}_{\Delta k}-\left[(\theta-1)\Delta t(V_p-V)+(\rho_p-\rho)\right]u^{n}_{\Delta k|_{B^p}}+$$
$$+\left[\theta\Delta t(V_p-V)+(\rho_p-\rho)\right]u^{n+1}_{\Delta k|_{B^p}}$$

et si $m\in[\![\lfloor\frac{-N_k}{2}\rfloor,\lfloor\frac{N_k}{2}\rfloor]\!]\setminus[\![-M^-,M^+-1]\!]$ (c'est-à-dire en dehors de Ω_0) :

$$A_P(\theta,\Delta t)\widetilde{u}^{n+1,m}_{\Delta k}\equiv A_P(\theta-1,\Delta t)v^{n,m}_{\Delta k}$$

Alors ceci se réécrit plus globalement, en utilisant encore $supp\ f\cup supp\ (\rho-\rho_p)\cup supp\ (V-V_p)\subset\Omega_0$, pour tout $m\in[\![\lfloor\frac{-N_k}{2}\rfloor,\lfloor\frac{N_k}{2}\rfloor]\!]$:

$$A_P(\theta,\Delta t)\widetilde{u}^{n+1,m}_{\Delta k}=\Delta t f^{n+\theta}+A_P(\theta-1,\Delta t)v^{n,m}_{\Delta k}-\left[(\theta-1)\Delta t(V_p-V)+(\rho_p-\rho)\right]u^{n}_{\Delta k}$$
$$+\left[\theta\Delta t(V_p-V)+(\rho_p-\rho)\right]u^{n+1}_{\Delta k}$$

Étudions maintenant la famille $(v^n_{\Delta k})_{0\leq n\leq N}$, que nous avons définie en cours de route. Par construction, nous avons :

$$A_P(\theta,\Delta t)v^{n+1,m}_{\Delta k}=\Delta k\frac{L}{2\pi}\sum_{j=1}^{N_k}A_P(\theta,\Delta t)\hat{u}^{n+1}_{\Delta k}(j\Delta k)e^{imj\Delta kL}$$

et donc, en utilisant la définition de $\hat{u}^n(\Delta k)$ (voir (7.23)) :

$$A_P(\theta,\Delta t)v^{n,m}_{\Delta k}=\Delta k\frac{L}{2\pi}\sum_{j=1}^{N_k}A_P(\theta-1,\Delta t)\hat{u}^{n}_{\Delta k}(j\Delta k)e^{imj\Delta kL}$$

$$+\Delta k\frac{L}{2\pi}\sum_{j=1}^{N_k}\sum_{p=-M^-}^{M^+-1}\Delta t f^{n+\theta}_{|_{B^p}}e^{i(m-p)j\Delta kL}$$

$$-\Delta k\frac{L}{2\pi}\sum_{j=1}^{N_k}\sum_{p=-M^-}^{M^+-1}\left[(\theta-1)\Delta t(V_p-V)+(\rho_p-\rho)\right]u^n_{\Delta k|_{B^p}}e^{i(m-p)j\Delta kL}$$

$$+\Delta k\frac{L}{2\pi}\sum_{j=1}^{N_k}\sum_{p=-M^-}^{M^+-1}\left[\theta\Delta t(V_p-V)+(\rho_p-\rho)\right]u^{n+1}_{\Delta k|_{B^p}}e^{i(m-p)j\Delta kL}$$

Alors les mêmes calculs et identifications que ci-dessus nous mènent à :

$$A_P(\theta,\Delta t)v^{n+1,m}_{\Delta k}=\Delta t f^{n+\theta}+A_P(\theta-1,\Delta t)v^{n,m}_{\Delta k}+\left[(1-\theta)\Delta t(V_p-V)+(\rho_p-\rho)\right]u^n_{\Delta k}$$
$$+\left[\theta\Delta t(V_p-V)+(\rho_p-\rho)\right]u^{n+1}_{\Delta k}$$

(ii) Continuité aux interfaces

Commençons par montrer la continuité aux interfaces de $g^n_{\Delta k}$, pour tout n. Sur une interface entre deux bandes B^m, nous avons :

$$\begin{aligned}g^{n,m}_{\Delta k|_{y=(m+1)L}}&=\Delta k\sqrt{\frac{L}{2\pi}}\sum_{j=1}^{N_k}\hat g^n_{\Delta k}(j\Delta k)_{|_{y=L}}e^{imj\Delta kL}\\&=\Delta k\sqrt{\frac{L}{2\pi}}\sum_{j=1}^{N_k}\hat g^n_{\Delta k}(j\Delta k)_{|_{y=0}}e^{ij\Delta kL}e^{imj\Delta kL}\\&=g^{n,m+1}_{\Delta k|_{y=(m+1)L}}\end{aligned}$$

en utilisant la quasi-périodicité de $\hat g_{\Delta k}(j\Delta k)$, donc $g^n_{\Delta k}$ est par conséquent continue en trace. Les mêmes calculs mais pour la dérivée normale conduisent à :

$$\partial_y g^{n,m}_{\Delta k|_{y=(m+1)L}}=\partial_y g^{n,m+1}_{\Delta k|_{y=(m+1)L}}$$

On montre exactement de la même façon (il suffit de remplacer $\hat g^n_{\Delta k}$ par $\hat u^n_{\Delta k}$ dans les formules ci-dessus) que $v^n_{\Delta k}$ est continue en trace et en dérivée normale. Ne reste plus qu'à vérifier cette propriété pour $\widetilde u^n_{\Delta k}$. Nous avons :

$$\begin{aligned}\widetilde u^{n,m}_{\Delta k|_{y=(m+1)L}}&=g^{n,m}_{\Delta k|_{y=(m+1)L}}+\Delta k\sqrt{\frac{L}{2\pi}}\sum_{j=1}^{N_k}\hat S(j\Delta k)\left[\theta\Delta t(V_p-V)+(\rho_p-\rho)\right]u^{n+1}_{\Delta k|_{y=L}}e^{imj\Delta kL}\\&=g^{n,m+1}_{\Delta k|_{y=(m+1)L}}+\Delta k\sqrt{\frac{L}{2\pi}}\sum_{j=1}^{N_k}\hat S(j\Delta k)\left[\theta\Delta t(V_p-V)+(\rho_p-\rho)\right]u^{n+1}_{\Delta k|_{y=0}}e^{ij\Delta kL}e^{imj\Delta kL}\\&=\widetilde u^{n,m+1}_{\Delta k|_{y=(m+1)L}}\end{aligned}$$

en utilisant la quasi-périodicité de $\hat S(j\Delta k)$, donc $\widetilde u^n_{\Delta k}$ est continue en trace Encore une fois, il suffit d'appliquer l'opérateur de dérivation aux calculs ci-dessus pour obenir la continuité en dérivée normale de $\widetilde u^n_{\Delta k}$.

Alors, $\widetilde u^n_{\Delta k}$ et $v^n_{\Delta k}$ sont continues en trace et en dérivée normale. Comme nous l'avons vu à de nombreuses reprises, lorsque nous avons construit les opérateurs DtN, pour que deux solutions locales se raccordent en une solution globale, il faut et il suffit qu'elles se raccordent en trace et en dérivée normale. Aussi, nous avons montré à ce stade que $\widetilde u^n_{\Delta k}$ et $v^n_{\Delta k}$ sont solutions globales dans Ω_{N_k} de :

$$A_P(\theta,\Delta t)\widetilde u^{n+1}_{\Delta k}=\Delta t f^{n+\theta}+A_P(\theta-1,\Delta t)v^n_{\Delta k}-\left[(\theta-1)\Delta t(V_p-V)+(\rho_p-\rho)\right]u^n_{\Delta k}$$
$$+\left[\theta\Delta t(V_p-V)+(\rho_p-\rho)\right]u^{n+1}_{\Delta k}$$

et

$$A_P(\theta,\Delta t)v^{n+1}_{\Delta k}=\Delta t f^{n+\theta}+A_P(\theta-1,\Delta t)v^n_{\Delta k}-\left[(\theta-1)\Delta t(V_p-V)+(\rho_p-\rho)\right]u^n_{\Delta k}$$
$$+\left[\theta\Delta t(V_p-V)+(\rho_p-\rho)\right]u^{n+1}_{\Delta k}$$

(iii) Conditions aux limites périodiques

Nous avons, en vertu de la relation (2.28) :

$$\begin{aligned}g^{\lfloor\frac{N_k}{2}\rfloor}_{\Delta_k}&\equiv\Delta k\sqrt{\frac{L}{2\pi}}\sum_{j=1}^{N_k}\hat g^n_{\Delta k}(j\Delta k)e^{i\lfloor\frac{N_k}{2}\rfloor j\frac{2\pi}{N_k}}\\&\equiv\Delta k\sqrt{\frac{L}{2\pi}}\sum_{j=1}^{N_k}\hat g^n_{\Delta k}(j\Delta k)e^{i\lfloor\frac{-N_k}{2}\rfloor j\frac{2\pi}{N_k}}\\&=g^{n,\lfloor\frac{-N_k}{2}\rfloor}_{\Delta_k}\end{aligned}$$

et il suffit d'appliquer l'opérateur de dérivation pour obtenir : $\partial_y g^{n,\lfloor\frac{N_k}{2}\rfloor}_{\Delta_k} = \partial_y g^{n,\lfloor\frac{-N_k}{2}\rfloor}_{\Delta_k}$. Alors :

$$g^n_{\Delta_k}|_{\Gamma^+_{N_k}} = g^{n,\lfloor\frac{N_k}{2}\rfloor}_{\Delta_k}|_{y=L} = g^{n,\lfloor\frac{-N_k}{2}\rfloor}_{\Delta_k}|_{y=L} = g^n_{\Delta_k}|_{\Gamma^-_{N_k}}$$

et

$$\partial_y g^n_{\Delta_k}|_{\Gamma^+_{N_k}} = \partial_y g^{n,\lfloor\frac{N_k}{2}\rfloor}_{\Delta_k}|_{y=L} = \partial_y g^{n,\lfloor\frac{-N_k}{2}\rfloor}_{\Delta_k}|_{y=L} = \partial_y g^n_{\Delta_k}|_{\Gamma^-_{N_k}}$$

et les conditions aux limites annoncées sont satisfaites pour $g^n_{\Delta k}$. Encore une fois, il suffit de remplacer $\hat{g}^n_{\Delta k}$ par $\hat{u}^n_{\Delta k}$ pour démontrer la même propriété pour $v^n_{\Delta k}$. Enfin, pour $\widetilde{u}^n_{\Delta k}$:

$$\begin{aligned}
\widetilde{u}^{n,\lfloor\frac{N_k}{2}\rfloor}_{\Delta_k} &\equiv g^{n,\lfloor\frac{N_k}{2}\rfloor}_{\Delta_k} + \Delta k\sqrt{\frac{L}{2\pi}}\sum_{j=1}^{N_k}\hat{S}(j\Delta k)\left[\theta\Delta t(V_p - V) + (\rho_p - \rho)\right]u^{n+1}_{\Delta k}e^{i\lfloor\frac{N_k}{2}\rfloor j\frac{2\pi}{N_k}} \\
&\equiv g^{n,\lfloor\frac{-N_k}{2}\rfloor}_{\Delta_k} + \Delta k\sqrt{\frac{L}{2\pi}}\sum_{j=1}^{N_k}\hat{S}(j\Delta k)\left[\theta\Delta t(V_p - V) + (\rho_p - \rho)\right]u^{n+1}_{\Delta k}e^{i\lfloor\frac{-N_k}{2}\rfloor j\frac{2\pi}{N_k}} \\
&= \widetilde{u}^{n,\lfloor\frac{-N_k}{2}\rfloor}_{\Delta_k}
\end{aligned}$$

et il suffit encore d'appliquer l'opérateur de dérivation pour obtenir :$\partial_y\widetilde{u}^{n,\lfloor\frac{N_k}{2}\rfloor}_{\Delta_k} = \partial_y\widetilde{u}^{n,\lfloor\frac{-N_k}{2}\rfloor}_{\Delta_k}$, et donc :

$$\widetilde{u}^n_{\Delta_k}|_{\Gamma^+_{N_k}} = \widetilde{u}^{n,\lfloor\frac{N_k}{2}\rfloor}_{\Delta_k}|_{y=L} = \widetilde{u}^{n,\lfloor\frac{-N_k}{2}\rfloor}_{\Delta_k}|_{y=L} = \widetilde{u}^n_{\Delta_k}|_{\Gamma^-_{N_k}}$$

et

$$\partial_y\widetilde{u}^n_{\Delta_k}|_{\Gamma^+_{N_k}} = \partial_y\widetilde{u}^{n,\lfloor\frac{N_k}{2}\rfloor}_{\Delta_k}|_{y=L} = \partial_y\widetilde{u}^{n,\lfloor\frac{-N_k}{2}\rfloor}_{\Delta_k}|_{y=L} = \partial_y\widetilde{u}^n_{\Delta_k}|_{\Gamma^-_{N_k}}$$

(iv) Conclusion

Nous avons donc montré qu'à n fixé, $v^{n+1}_{\Delta k}$ et $\widetilde{u}^{n+1}_{\Delta k}$ sont solutions du même problème avec conditions périodiques. De plus, la récurrence satisfaite par $(v^n_{\Delta k})_{0\leq n\leq N}$ définit un problème bien posé (en particulier à chaque pas de temps) en vertu du théorème 4.2, puisque par hypothèse $u^n_{\Delta k} \in L^2(\Omega_0)$. Nous en déduisons donc que $v^n_{\Delta k} = \widetilde{u}^n_{\Delta k}$, pour tout n. Nous pouvons donc écrire :

$$\begin{aligned}
A_P(\theta,\Delta t)\widetilde{u}^{n+1}_{\Delta k} = \Delta t f^{n+\theta} + A_P(\theta-1,\Delta t)\widetilde{u}^n_{\Delta k} - \left[(\theta-1)\Delta t(V_p - V) + (\rho_p - \rho)\right]u^n_{\Delta k} \\
+ \left[\theta\Delta t(V_p - V) + (\rho_p - \rho)\right]u^{n+1}_{\Delta k}
\end{aligned}$$

Alors, comme $supp\ (\rho_p - \rho) \cup supp\ (V_p - V) \subset \Omega_0$, et $\widetilde{u}^n_{\Delta k}|_{\Omega_0} = u^n_{\Delta k}$, on peut identifier $(\rho_p - \rho)u^n_{\Delta k}|_{B^p}$ à $(\rho_p - \rho)\widetilde{u}^n_{\Delta k}|_{B^p}$, et $(V_p - V)u^n_{\Delta k}|_{B^p}$ à $(V_p - V)g^n_{\Delta k}|_{B^p}$. Rappelons ensuite que :

$$A(\theta,\Delta t) = A_P(\theta,\Delta t) + \theta\Delta t(V - V_p) + (\rho - \rho_p)$$

Alors l'équation ci-dessus se réécrit :

$$A(\theta,\Delta t)\widetilde{u}^{n+1}_{\Delta k} = \Delta t f^{n+\theta} + A(\theta-1,\Delta t)\widetilde{u}^n_{\Delta k}$$

et le résultat est démontré. □

Remarque 7.3. *Remarquons que nous avons démontré que $\widetilde{u}^n_{\Delta k}$ est en fait la TFB inverse discrète, liée à la formule de quadrature choisie, de $\hat{u}^n_{\Delta k}$. Cela confirme le fait que nous avons fait le bon choix pour définir les approximations de $\hat{g}^n$ et $\hat{u}^n$, puisque nous n'avons pas détérioré le lien entre $u^n_{\Delta k}$ et $\hat{u}^n_{\Delta k}$ (dans la mesure de ce qui est permis par notre approximation par quadrature).*

Nous voyons que les diverses approximations que nous avons effectuées ont eu moralement pour conséquence de borner le domaine (et d'ajouter des conditions périodiques), sans modifier l'équation (ce qui est, au vu du cas harmonique, ce que nous pouvions espérer de mieux). De plus, nous savons que le problème (7.29) est bien posé en vertu du théorème 4.2, les conditions périodiques n'étant qu'un cas particulier de quasi-périodicité. Comme dans le cas harmonique, nous allons pouvoir exploiter cette information pour montrer que le problème (7.28) est bien posé.

Remarque 7.4. *Tout comme dans le cas harmonique, la démonstration ci-dessus montre que c'est la propriété d'intégration exacte des exponentielles de la formule de quadrature qui est essentielle pour pouvoir réinterpréter le problème semi-discret comme la solution d'une "vraie" équation différentielle. La règle des trapèzes se distingue par les conditions aux limites (périodiques) qu'elle induit sur le problème final. Elle nous permet donc de rester dans le cadre fonctionnel que nous avons exploité dans la première partie de ce mémoire, mais tout autre formule de quadrature possédant la même propriété d'intégration exacte de cette famille d'exponentielles conviendrait également.*

Caractère bien posé du problème avec quadrature

Le caractère bien posé de l'équation de Lippmann-Schwinger approchée par quadrature est une conséquence directe de celui du problème (7.29) :

Théorème 7.5. *Soient $u_0 \in H^1(\Delta, \Omega_0)$ et $f \in L^2(\Omega_0)$, et soit le problème : trouver $(u^n_{\Delta k})_{0\leq n\leq N} \in L^2(\Omega_0)^{N+1}$ telle que :*

$$\left| \begin{array}{l} (I - S_{0,\theta,\Delta t,\Delta k})u^n_{\Delta k} = g^n_{\Delta k}|_{\Omega_0} \quad \forall\ 1 \leq n \leq N \\ u^0_{\Delta k} = u_0 \end{array} \right. \tag{7.28}$$

où $g^n_{\Delta k}$ est donnée par (7.27)*, avec $(\hat{g}^n_{\Delta k}(j\Delta k))_{\substack{1\leq n\leq N \\ 1\leq j\leq N_k}}$ et $(\hat{u}^n_{\Delta k}(j\Delta k))_{\substack{0\leq n\leq N \\ 1\leq j\leq N_k}}$ les solutions de* (7.26) *et* (7.24)*, associées à la famille $u^n_{\Delta k}$. Ce problème est bien posé.*

Démonstration. Remarquons que $\hat{S}(\xi)f \in H^2(B^0)$ pour tout $f \in L^2(\Omega_0)$ en vertu du résultat de régularité 1.2. Par conséquent, $S_{0,\theta,\Delta t,\Delta k}$ est un opérateur compact sur $L^2(\Omega_0)$, comme Ω_0 est borné. L'inversibilité de l'opérateur $I - S_{0,\theta,\Delta t,\Delta k}$ est donc régie par l'alternative de Fredholm, et par suite il en est de même pour le problème qui nous intéresse.

Soit maintenant $u \in L^2(\Omega_0)$ telle que $(I - S_{0,\theta,\Delta t,\Delta k})u = 0$. Un tel u est un premier pas de temps associé aux données $u_0 = f = 0$ pour le problème (7.28). Alors l'extension $\widetilde{u}^1_{\Delta k}$ de u est solution de :

$$\left| \begin{array}{ll} A(\theta, \Delta t)\widetilde{u}^1_{\Delta k} = 0 & \text{dans } \Omega_{N_k} \\ \widetilde{u}^1_{\Delta k|_{\Gamma^+_{N_k}}} = \widetilde{u}^1_{\Delta k|_{\Gamma^-_{N_k}}} & \\ \partial_y \widetilde{u}^1_{\Delta k|_{\Gamma^+_{N_k}}} = \partial_y \widetilde{u}^1_{\Delta k|_{\Gamma^-_{N_k}}} & \end{array} \right.$$

Ce problème étant bien posé, nous en déduisons $\widetilde{u}^1_{\Delta k} = 0$, et par conséquent l'opérateur $I - S_{0,\theta,\Delta t,\Delta k}$ est injectif, et par suite bijectif, d'inverse continu. Alors le problème (7.28) est bien posé. □

De ce résultat, nous déduisons le fait que résoudre (7.28) est équivalent à résoudre (7.29) par unicité. Nous allons donc pouvoir tenter d'obtenir une estimation d'erreur à partir de (7.29), ce qui est sans le moindre doute beaucoup plus simple que si nous devions travailler avec (7.28). Cette équivalence nous apprend de plus que l'équation de Lippmann-Schwinger approchée par quadrature est équivalente à un problème que nous savons être stable (et même convergent). Autrement dit, nous avons conservé les propriétés de stabilité du problème discrétisé en temps seulement, en effectuant cette quadrature.

Remarque 7.5. *Dans le cas harmonique, nous avions mentionné le fait que nous pouvions utiliser la théorie de la compacité collective pour montrer le caractère bien posé de l'équation de Lippmann-Schwinger. Cette théorie pourrait encore s'appliquer ici pour obtenir l'inversibilité, au moins pour N_k grand, de l'opérateur $I - S_{0,\theta,\Delta t,\Delta k}$. Cependant, cette théorie ne fournirait pas d'estimation de stabilité (qui est implicite dans notre réinterprétation), en particulier sur le second membre (lui aussi approché par quadrature). Il nous semble que l'analyse de convergence que nous allons maintenant mener serait non pas moins précise par la théorie de la compacité collective (comme dans le cas harmonique), mais impossible à mener, parce qu'elle ne fournit pas d'estimation directe sur la norme de l'inverse de $I - S_{0,\theta,\Delta t,\Delta k}$, et donc ne permet pas d'accéder à de la stabilité. Notre réinterprétation nous permet de passer par le problème* (7.29) *pour obtenir les résultats de convergence (nous travaillons donc sur un ouvert plus grand), sur lequel nous avons déjà obtenu, par des techniques classiques, une estimation de stabilité (cf chapitre 4).*

7.1.5 Estimation d'erreur pour l'approximation par quadrature

Commençons par remarquer que le problème : trouver $(\widetilde{u}^n_{\Delta k})_{0\leq n\leq N} \in H^1_{per}(\Omega_{N_k})^{N+1}$ telle que :

$$\left|\begin{array}{ll} A(\theta,\Delta t)\widetilde{u}^{n+1}_{\Delta k} = A(\theta-1,\Delta t)\widetilde{u}^n_{\Delta k} + \Delta t f^{n+\theta} & \text{dans } \Omega_{N_k} \\ \widetilde{u}^{n+1}_{\Delta k|_{\Gamma^+_{N_k}}} = \widetilde{u}^{n+1}_{\Delta k|_{\Gamma^-_{N_k}}} & \\ \partial_y \widetilde{u}^{n+1}_{\Delta k|_{\Gamma^+_{N_k}}} = \partial_y \widetilde{u}^{n+1}_{\Delta k|_{\Gamma^-_{N_k}}} & \\ \widetilde{u}^0_{\Delta k} = u_0 & \end{array}\right. \tag{7.29}$$

en lequel nous avons réinterprété l'équation de Lippmann-Schwinger approchée par quadrature (7.28), s'il peut être vu comme le problème (7.2) tronqué dans la direction y, peut aussi être vu comme une approximation semi-discrète en temps du problème : trouver $u_{\Delta k} \in C^0(0,T,H^1\xi(\Delta,\Omega_{N_k})) \cap C^1(0,T,L^2(\Omega_{N_k}))$ tel que :

$$\left|\begin{array}{ll} \gamma\rho\dfrac{\partial u_{\Delta k}}{\partial t} - \Delta u_{\Delta k} + V u_{\Delta k} = f & \text{dans } \Omega_{N_k} \\ u_{\Delta k|_{\Gamma^+_{N_k}}} = u_{\Delta k|_{\Gamma^-_{N_k}}} & \\ \partial_y u_{\Delta k|_{\Gamma^+_{N_k}}} = \partial_y u_{\Delta k|_{\Gamma^-_{N_k}}} & \\ u_{\Delta k}(x,0) = u_0 & \text{dans } \Omega_{N_k} \end{array}\right. \tag{7.30}$$

telle que nous l'avons étudiée au chapitre 4. Remarquons tout d'abord que le fait que nous puissions réinterpréter le problème avec quadrature comme une approximation en temps seulement d'un problème continu modifié, nous garantit sans démonstration supplémentaire que le problème auquel nous avons abouti est stable et convergent à nombre de points de quadrature fixé en vertu des résultats du chapitre 4. Nous savons en effet, en vertu du théorème 4.3, que, si $u_{\Delta k}$ est suffisamment régulière :

$$||u_{\Delta k}(\cdot,n\Delta t) - \widetilde{u}^n_{\Delta k}||_{L^2_\rho(\Omega_{N_k})} \leq CT\Delta t \sup_{[0,T]} ||\partial_t^2 u_{\Delta k}||_{L^2(\Omega_{N_k})} \tag{7.31}$$

avec C indépendante de Ω_{N_k} (cf. démonstration du théorème 6.2). L'estimation ci-dessus nous renseignant en quelque sorte complètement sur l'erreur de discrétisation en temps, il est légitime de penser à comparer le problème continu (7.1) (que nous cherchons à approcher) au problème continu (7.30), plutôt que de tenter de comparer les problèmes semi-discrets (7.29) et (7.2). Nous pourrons alors en déduire une estimation d'erreur globale par inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} ||u(\cdot,n\Delta t) - \widetilde{u}^n_{\Delta k}||_{L^2_\rho(\Omega_{N_k})} &\leq ||u(\cdot,n\Delta t) - u_{\Delta k}(\cdot,n\Delta t)||_{L^2_\rho(\Omega_{N_k})} + ||u_{\Delta k}(\cdot,n\Delta t) - \widetilde{u}^n_{\Delta k}||_{L^2_\rho(\Omega_{N_k})} \\ &\leq ||u(\cdot,n\Delta t) - u_{\Delta k}(\cdot,n\Delta t)||_{L^2_\rho(\Omega_{N_k})} + CT\Delta t \sup_{[0,T]} ||\partial_t^2 u_{\Delta k}||_{L^2(\Omega_{N_k})} \end{aligned} \tag{7.32}$$

L'erreur $e_{\Delta k} = u - u_{\Delta k}$ entre la solution u de (7.1) et celle $u_{\Delta k}$ de (7.30), qui est la quantité qu'il nous reste à estimer, satisfait $e_{\Delta k} \in C^0(0,T,H^1(\Delta,\Omega_{N_k})) \cap C^1(0,T,L^2(\Omega_{N_k}))$ et par linéarité :

$$\left|\begin{array}{ll} \gamma\rho\dfrac{\partial e_{\Delta k}}{\partial t} - \Delta e_{\Delta k} + V e_{\Delta k} = 0 & \text{dans } \Omega_{N_k} \\ e_{\Delta k|_{\Gamma^+_{N_k}}} - e_{\Delta k|_{\Gamma^-_{N_k}}} = \varphi & \\ \partial_y e_{\Delta k|_{\Gamma^+_{N_k}}} - \partial_y e_{\Delta k|_{\Gamma^-_{N_k}}} = \psi & \\ e_{\Delta k}(x,0) = 0 & \text{dans } \Omega_{N_k} \end{array}\right. \tag{7.33}$$

avec $\varphi = u_{|_{\Gamma^+_{N_k}}} - u_{|_{\Gamma^-_{N_k}}}$ et $\psi = \partial_y u_{|_{\Gamma^+_{N_k}}} - \partial_y u_{|_{\Gamma^-_{N_k}}}$, $\varphi(0) = \psi(0) = 0$.
Alors, comme dans le cas harmonique, il est clair que l'erreur va dépendre principalement de la décroissance spatiale de la solution de (7.1). Contrairement à tout ce que nous avons fait jusqu'ici pour

les problèmes d'évolution, les propriétés de décroissance dépendent de la nature de l'équation, elle sont très différentes pour l'équation de la chaleur et pour l'équation de Schrödinger (qui constituent les deux cas pratiques que nous souhaitons pouvoir traiter). Aussi, nous allons séparer complètement l'étude de ces deux situations.

Le cas de l'équation de la chaleur

Dans ce cas, le problème pour l'erreur devient : trouver $e_{\Delta k} \in C^0(0,T,H^1(\Delta,\Omega_{N_k}))\cap C^1(0,T,L^2(\Omega_{N_k}))$ et par linéarité :

$$\left|\begin{array}{ll} \rho\dfrac{\partial e_{\Delta k}}{\partial t} - \Delta e_{\Delta k} = 0 & \text{dans } \Omega_{N_k} \\ e_{\Delta k}|_{\Gamma^+_{N_k}} - e_{\Delta k}|_{\Gamma^-_{N_k}} = \varphi & \\ \partial_y e_{\Delta k}|_{\Gamma^+_{N_k}} - \partial_y e_{\Delta k}|_{\Gamma^-_{N_k}} = \psi & \\ e_{\Delta k}(x,0) = 0 & \text{dans } \Omega_{N_k} \end{array}\right. \tag{7.34}$$

avec $\varphi = u_{|_{\Gamma^+_{N_k}}} - u_{|_{\Gamma^-_{N_k}}}$ et $\psi = \partial_y u_{|_{\Gamma^+_{N_k}}} - \partial_y u_{|_{\Gamma^-_{N_k}}}$, $\varphi(0) = \psi(0) = 0$.
Ce problème, du fait des conditions aux limites non homogènes, ne peut être traité directement par la théorie de Hille-Yosida. Le cadre le plus adapté pour traiter pareille situation semble être le cadre variationnel (voir [23] ou [61] pour le cas général). Autrement dit, c'est sous forme variationnelle que nous allons pouvoir exploiter cette équation. Résoudre (7.34) est équivalent à résoudre :

$$\left|\begin{array}{ll} \left(\rho\dfrac{\partial e_{\Delta k}}{\partial t}, v\right)_{L^2(\Omega_{N_k})} + (\nabla e_{\Delta k}, \nabla v)_{L^2(\Omega_{N_k})} =< \psi, v|_{\Gamma^+_{N_k}} > & \forall\, v \in H^1_{per}(\Omega_{N_k}) \\ e_{\Delta k}|_{\Gamma^+_{N_k}} - e_{\Delta k}|_{\Gamma^-_{N_k}} = \varphi & \\ e_{\Delta k}(x,0) = 0 & \text{dans } \Omega_{N_k} \end{array}\right. \tag{7.35}$$

Puis, si E désigne l'opérateur de relèvement du lemme 2.4, alors : $e_{\Delta k,0} = e_{\Delta k} - E\varphi \in H^1_{per}(\Omega_{N_k})$ satisfait :

$$\left|\begin{array}{ll} \left(\rho\dfrac{\partial e_{\Delta k,0}}{\partial t}, v\right)_{L^2(\Omega_{N_k})} + (\nabla e_{\Delta k,0}, \nabla v)_{L^2(\Omega_{N_k})} =< \psi, v|_{\Gamma^+_{N_k}} > & \\ -\left(\rho\dfrac{\partial E\varphi}{\partial t}, v\right)_{L^2(\Omega_{N_k})} - (\nabla E\varphi, \nabla v)_{L^2(\Omega_{N_k})} & \forall\, v \in H^1_{per}(\Omega_{N_k}) \\ e_{\Delta k,0}(x,0) = 0 & \text{dans } \Omega_{N_k} \end{array}\right. \tag{7.36}$$

(le fait que $e_{\Delta_k,0}(\cdot,0)$ reste à zéro provient du fait que $\varphi(0) = 0$). L'existence et l'unicité de la solution de pareil problème se traitent au moyen du théorème de J.L. Lions (voir [23]) :

Théorème 7.6 (J.L. Lions). *Soit H un espace de Hilbert réel, $V \subset H$ un sous-espace dense de H qui s'injecte continûment dans H, et V' son dual. Pour tout $t \in [0,T]$, soit $a(t;\cdot,\cdot)$ une forme bilinéaire continue sur $V \times V$ telle que :*

$$\left\{\begin{array}{l} \textit{pour tout } u, v \in V,\ \textit{la fonction } t \mapsto a(t;u,v) \textit{ est mesurable} \\ \textit{et il existe une constante } M(T) > 0 \textit{ telle que :} \\ |a(t;u,v)| \le M||u||_V||v||_V \end{array}\right. \tag{7.37}$$

On suppose de plus que la forme bilinéaire est coercive (au sens large) sur V, i.e. :

$$\left\{\begin{array}{l} \textit{il existe deux constantes } \alpha > 0 \textit{ et } \lambda \textit{ telles que} \\ a(t;u,u) + \lambda||u||^2_H \ge \alpha||u||^2_V \end{array}\right. \tag{7.38}$$

Alors, si $u_0 \in H$ *et* $f \in L^2(0,T,V')$*, il existe une unique solution* $u \in L^2(0,T,V), \partial_t u \in L^2(0,T,V')$ *au problème :*

$$\left| \begin{array}{l} \dfrac{d}{dt}\left(u(\cdot),v\right)_H + a(\cdot;u(\cdot),v) =< f(\cdot),v > \quad \textit{dans } \mathcal{D}'(]0,T[)\ \forall v \in V \\ u(0) = u_0 \end{array} \right. \tag{7.39}$$

Ce théorème est bien adapté à notre situation, puisque le lemme 4.1 nous fournit la coercivité et la continuité de la forme bilinéaire. Mais, comme le second membre de (7.36) fait intervenir les traces et traces normales de la solution de (7.1), il nous apprend de plus qu'une certaine régularité en temps va nous être nécessaire sur nos conditions aux limites φ et ψ, pour que le problème soit bien posé (et donc en particulier dépende continûment de ses données). Plus précisément nous devons vérifier une hypothèse de régularité sur φ et ψ, mais aussi sur $\partial_t\varphi$. Fort heureusement, nous pouvons démontrer très simplement le lemme suivant :

Lemme 7.3. *Soit* u *la solution de* (7.1) *dans le cas de la chaleur, sous les hypothèses (HT). Alors :*

$$\partial_t u \in L^2(0,T,H^1(\mathbb{R}^2)) \quad \textit{et } \partial_t^2 u \in L^2(0,T,H^{-1}(\mathbb{R}^2))$$

et

$$u|_{\Gamma_{N_k^\pm}} \in H^1(0,T,H^{1/2}(\mathbb{R})) \quad \textit{et} \quad \partial_y u|_{\Gamma_{N_k^\pm}} \in L^2(0,T,H^{-1/2}(\mathbb{R}))$$

Démonstration. Nous savons, en vertu du théorème 4.1, que $u \in C^0(0,T,H^2(\mathbb{R}^2)) \cap C^1(0,T,L^2(\mathbb{R}^2))$. Alors nous avons déjà que :

$$u|_{\Gamma_{N_k^{pm}}} \in C^0(0,T,H^{1/2}(\mathbb{R})) \quad \text{et} \quad \partial_y u|_{\Gamma_{N_k^{pm}}} \in C^0(0,T,H^{-1/2}(\mathbb{R}))$$

et en particulier :

$$u|_{\Gamma_{N_k^{pm}}} \in L^2(0,T,H^{1/2}(\mathbb{R})) \quad \text{et} \quad \partial_y u|_{\Gamma_{N_k^{pm}}} \in L^2(0,T,H^{-1/2}(\mathbb{R}))$$

Considérons maintenant $u' = \partial_t u$. Au sens des distributions, nous avons :

$$\rho\frac{\partial u'}{\partial t} - \Delta u' = \frac{\partial f}{\partial t}$$

Le problème pour u' se met donc sous forme variationnelle en :

$$\left| \begin{array}{l} \dfrac{d}{dt}\left(\rho u'(\cdot),v\right)_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \left(\nabla u'(\cdot),\nabla v\right)_{L^2(\mathbb{R}^2)} = \left(\dfrac{\partial f}{\partial t},v\right)_{L^2(\mathbb{R}^2)} \\ u'(0) = \dfrac{\partial u}{\partial t}(0) \end{array} \right.$$

avec par hypothèse $\partial_t f \in C^0(0,T,L^2)$. Comme $\dfrac{\partial u}{\partial t}(0) \in L^2(\mathbb{R}^2)$ en vertu du théorème 4.1, et comme la forme bilinéaire satisfait les hypothèses du théorème de J.L. Lions en vertu du lemme 4.1, nous savons que ce problème est bien posé mais surtout que :

$$u' \in L^2(0,T,H^1(\mathbb{R}^2)) \quad \text{et } \partial_t u' \in L^2(0,T,H^{-1}(\mathbb{R}^2))$$

Alors nous avons directement par application du théorème de trace :

$$u'|_{\Gamma^\pm_{N_k}} \in L^2(0,T,H^{1/2}(\mathbb{R}))$$

et le lemme est démontré. □

Remarque 7.6. *Notons que nous sommes capables d'établir simplement ce résultat parce que nous nous sommes intéressés à des solutions fortes. Avec des hypothèses minimales (en temps) sur le second membre pour le problème initial* (7.1)*, nous n'obtiendrions pas la régularité nécessaire sur les traces de la solution de* (7.1)*, et nous ne pourrions pas obtenir l'estimation que nous allons montrer par la suite.*

Nous voyons donc que le problème satisfait par l'erreur rentre alors dans le cadre du théorème de J.L. Lions. Nous sommes de plus en mesure de montrer sa continuité par rapport aux données :

Théorème 7.7. *Pour tout $\varphi \in H^1(0,T,H^{1/2}(\mathbb{R}))$ et tout $\psi \in L^2(0,T,H^{-1/2}(\mathbb{R}))$, le problème (7.34) est bien posé. On a de plus l'estimation, pour presque tout $t \in [0,T]$:*

$$||e_{\Delta k}||_{L^2_\rho(\Omega_{N_k})} \leq Ce^t \left(\int_0^t ||\psi||^2_{H^{-1/2}} + ||\varphi||^2_{H^{1/2}} + ||\partial_t \varphi||^2_{H^{1/2}} \right)^{1/2} \tag{7.40}$$

où la constante C ne dépend ni de N_k, ni de T.

Démonstration. Comme $\varphi \in H^1(0,T,H^{1/2}(\mathbb{R}))$ et $\psi \in L^2(0,T,H^{-1/2}(\mathbb{R}))$, le second membre de (7.36) est bien dans $L^2(0,T,H^{-1}(\mathbb{R}^2))$. Alors nous pouvons appliquer le théorème de J.L. Lions qui nous donne l'existence d'un unique $e_{\Delta k,0}$ (la forme bilinéaire est coercive au sens large en vertu du lemme 4.1), ce qui nous fournit de plus l'unicité de la solution de (7.34). Puis en procédant à rebours, il est clair que $e_{\Delta k} = e_{\Delta k,0} + E\varphi$ est bien solution du problème variationnel, et par suite de (7.34) (puisque $e_{\Delta k}(0) = e_{\Delta_k,0}(0) + E(\varphi(0)) = 0$).

Prenons maintenant comme fonction test $v = e_{\Delta k_0}(t)$ dans (7.36), pour presque tout $t \in [0,T]$:

$$\left(\rho \frac{\partial e_{\Delta k,0}}{\partial t}, e_{\Delta k,0}\right)_{L^2(\Omega_{N_k})} + \left(\nabla e_{\Delta k,0}, \nabla e_{\Delta k,0}\right)_{L^2(\Omega_{N_k})} =< \psi, e_{\Delta k}|_{\Gamma^+_{N_k}} >$$
$$- \left(\rho \frac{\partial E\varphi}{\partial t}, e_{\Delta k,0}\right)_{L^2(\Omega_{N_k})} - \left(\nabla E\varphi, \nabla e_{\Delta k,0}\right)_{L^2(\Omega_{N_k})}$$

Posons ensuite $\widetilde{e}_{\Delta k,0} = e^{-t} e_{\Delta k,0}$, nous obtenons :

$$\left(\rho \frac{\partial \widetilde{e}_{\Delta k,0}}{\partial t}, \widetilde{e}_{\Delta k,0}\right)_{L^2(\Omega_{N_k})} + \left(\nabla \widetilde{e}_{\Delta k,0}, \nabla \widetilde{e}_{\Delta k,0}\right)_{L^2(\Omega_{N_k})} + \left(\rho \widetilde{e}_{\Delta k,0}, \widetilde{e}_{\Delta k,0}\right)_{L^2(\Omega_{N_k})}$$
$$= e^{-t} < \psi, \widetilde{e}_{\Delta k}|_{\Gamma^+_{N_k}} > -e^{-t} \left(\rho \frac{\partial E\varphi}{\partial t}, \widetilde{e}_{\Delta k,0}\right)_{L^2(\Omega_{N_k})} - e^{-t} \left(\nabla E\varphi, \nabla \widetilde{e}_{\Delta k,0}\right)_{L^2(\Omega_{N_k})}$$

Remarquons ensuite qu'au vu de nos hypothèses, nous avons :

$$|e^{-t} < \psi(t), \widetilde{e}_{\Delta k}(t)|_{\Gamma^+_{N_k}} > | \leq Ce^{-t} ||\psi(t)||_{H^{-1/2}(\mathbb{R})} ||\widetilde{e}_{\Delta k}(t)||_{H^1(\Omega_{N_k})}$$

$$|e^{-t} \left(\rho \frac{\partial E\varphi}{\partial t}(t), \widetilde{e}_{\Delta k,0}(t)\right)_{L^2(\Omega_{N_k})} | \leq Ce^{-t} ||E\partial_t \varphi||_{L^2(\Omega_{N_k})} ||\widetilde{e}_{\Delta k,0}(t)||_{L^2(\Omega_{N_k})}$$
$$\leq Ce^{-t} ||\partial_t \varphi||_{H^{1/2}(\mathbb{R})} ||\widetilde{e}_{\Delta k,0}(t)||_{L^2(\Omega_{N_k})}$$

et enfin :

$$|e^{-t} \left(\nabla E\varphi(t), \nabla \widetilde{e}_{\Delta k,0}(t)\right)_{L^2(\Omega_{N_k})} | \leq Ce^{-t} ||\nabla E\varphi||_{L^2(\Omega_{N_k})} ||\widetilde{e}_{\Delta k,0}(t)||_{H^1(\Omega_{N_k})}$$
$$\leq Ce^{-t} ||\varphi||_{H^{1/2}(\mathbb{R})} ||\widetilde{e}_{\Delta k,0}(t)||_{H^1(\Omega_{N_k})}$$

puisque, en vertu des propriétés de E, il existe $C > 0$ (indépendante de N_k) telle que :

$$||\nabla E\varphi||_{L^2(\Omega_{N_k})} \leq C||\varphi||_{H^{1/2}(\mathbb{R})} \quad ||\partial_t E\varphi||_{L^2(\Omega_{N_k})} = ||E\partial_t\varphi||_{L^2(\Omega_{N_k})} \leq C||\partial_t\varphi||_{H^{1/2}(\mathbb{R})}$$

Le membre de droite est par conséquent intégrable en temps. Alors en procédant à cette intégration, nous obtenons :

$$\frac{1}{2}||\widetilde{e}_{\Delta k,0}||^2_{L^2(\Omega_{N_k})} + \int_0^t ||\widetilde{e}_{\Delta k,0}||^2_{L^2_\rho(\Omega_{N_k})} + ||\nabla \widetilde{e}_{\Delta k,0}||^2_{L^2(\Omega_{N_k})} = \int_0^t e^{-s} < \psi(s), \widetilde{e}_{\Delta k}(s)|_{\Gamma^+_{N_k}} >$$
$$- \int_0^t e^{-s} \left(\rho \frac{\partial E\varphi}{\partial t}(s), \widetilde{e}_{\Delta k,0}(s)\right)_{L^2(\Omega_{N_k})} + e^{-s} \left(\nabla E\varphi(s), \nabla \widetilde{e}_{\Delta k,0}(s)\right)_{L^2(\Omega_{N_k})}$$

On majore alors séparément chacun des termes sous l'intégrale du second membre. Pour le terme en ψ, nous avons :

$$\int_0^t e^{-s} < \psi(s), \widetilde{e}_{\Delta k}(s)|_{\Gamma^+_{N_k}} > \leq \int_0^t Ce^{-s} ||\psi||_{H^{-1/2}(\mathbb{R})} \left(||\widetilde{e}_{\Delta k,0}||^2_{L^2_\rho(\mathbb{R}^2)} + ||\nabla \widetilde{e}_{\Delta k,0}||^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} \right)^{1/2}$$
$$\leq \int_0^t \frac{2C^2}{2} e^{-2s} ||\psi||^2_{H^{-1/2}(\mathbb{R})} + \int_0^t \frac{1}{4} ||\widetilde{e}_{\Delta k,0}||^2_{L^2_\rho(\mathbb{R}^2)} + \frac{1}{4} ||\nabla \widetilde{e}_{\Delta k,0}||^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}$$

Pour l'autre terme, nous écrivons :

$$\int_0^t e^{-s} \left(\rho \frac{\partial E\varphi}{\partial t}(s), \widetilde{e}_{\Delta k,0}(s)\right)_{L^2(\Omega_{N_k})} + e^{-s} \left(\nabla E\varphi(s), \nabla \widetilde{e}_{\Delta k,0}(s)\right)_{L^2(\Omega_{N_k})}$$
$$\leq \int_0^t 2e^{-2s} \left(||\frac{\partial E\varphi}{\partial t}||^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} + ||\nabla E\varphi||^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} \right) + \int_0^t \frac{1}{4} \left(||\widetilde{e}_{\Delta k,0}||^2_{L^2_\rho(\mathbb{R}^2)} + ||\nabla \widetilde{e}_{\Delta k,0}||^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} \right)$$

ce qui, en utilisant les propriétés de l'opérateur E se réécrit encore :

$$\int_0^t e^{-s}\left(\rho\frac{\partial E\varphi}{\partial t}(s),\widetilde{e}_{\Delta k,0}(s)\right)_{L^2(\Omega_{N_k})}+e^{-s}\left(\nabla E\varphi(s),\nabla\widetilde{e}_{\Delta k,0}(s)\right)_{L^2(\Omega_{N_k})}$$

$$\leq\int_0^t Ce^{-2s}\left(||\partial_t\varphi||^2_{H^{1/2}(\mathbb{R})}+||\varphi||^2_{H^{1/2}(\mathbb{R})}\right)+\int_0^t\frac{1}{4}\left(||\widetilde{e}_{\Delta k,0}||^2_{L^2_\rho(\mathbb{R}^2)}+||\nabla\widetilde{e}_{\Delta k,0}||^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}\right)$$

Si nous combinons ces deux majorations, nous obtenons :

$$\frac{1}{2}||\widetilde{e}_{\Delta k,0}||^2_{L^2_\rho(\Omega_{N_k})}+\frac{1}{2}\int_0^t||\widetilde{e}_{\Delta k,0}||^2_{L^2_\rho(\Omega_{N_k})}+||\nabla\widetilde{e}_{\Delta k,0}||^2_{L^2(\Omega_{N_k})}$$

$$\leq\int_0^t\frac{2C^2}{2}e^{-2s}||\psi||^2_{H^{-1/2}(\mathbb{R})}+\int_0^t Ce^{-2s}\left(||\partial_t\varphi||^2_{H^{1/2}(\mathbb{R})}+||\varphi||^2_{H^{1/2}(\mathbb{R})}\right)$$

Comme $||e_{\Delta k,0}||_{L^2_\rho(\Omega_{N_k})}=e^t||\widetilde{e}_{\Delta k,0}||_{L^2_\rho(\Omega_{N_k})}$, on aboutit finalement à :

$$||e_{\Delta k,0}||_{L^2_\rho(\Omega_{N_k})}\leq Ce^t\left(\int_0^t||\psi||^2_{H^{-1/2}(\mathbb{R})}+||\partial_t\varphi||^2_{H^{1/2}(\mathbb{R})}+||\varphi||^2_{H^{1/2}(\mathbb{R})}\right)^{1/2}$$

□

Remarquons que cette estimation fait intervenir exactement les normes $H^1(0,T,H^{1/2}(\mathbb{R}))$ de φ et $L^2(0,T,H^{-1/2}(\mathbb{R}))$ de ψ. Autrement dit, nous n'avons pas seulement vérifié dans le lemme précédent ces hypothèses de régularité pour nous placer dans le cadre du théorème de Lions, mais également parce qu'il s'agit des hypothèses minimales nécessaires pour pouvoir mener les calculs que nous avons effectués dans la démonstration ci-dessus.

Il est maintenant clair que si nous pouvons obtenir une estimation de décroissance pour les traces et dérivées normales de la solution de (7.1), alors l'estimation que nous venons d'établir ci-dessus nous permettra d'établir la convergence. Il est bien connu (via la fonction de Green) qu'en milieu homogène, l'équation de la chaleur est très diffusive, et décroît spatialement de manière exponentielle. Nous allons voir que l'on peut obtenir un résultat similaire en milieu périodique, par des techniques variationnelles :

Théorème 7.8. *Sous les hypothèses (HT), pour tout $\tau<1$, on a $e^{\tau|\boldsymbol{x}|}u\in C^0(0,T,H^1(\Delta,\mathbb{R}^2))$ et $e^{\tau|\boldsymbol{x}|}\partial_t u\in L^2(0,T,H^1(\mathbb{R}^2))$.*

Démonstration. On commence par montrer que $e^{\tau|\boldsymbol{x}|}u\in C^0(0,T,H^1(\mathbb{R}^2))$. Pour cela, on met l'équation de la chaleur sous forme variationnelle : pour tout $v\in H^1(\Omega)$:

$$\int_{\mathbb{R}^2}\rho\frac{\partial u}{\partial t}v+\int_{\mathbb{R}^2}\nabla u\nabla v=\int_{\mathbb{R}^2}fv$$

On aimerait choisir $v=e^{2\tau|\boldsymbol{x}}u(\cdot)$ comme fonction test. Mais on ne sait pas a priori si une telle fonction est L^2, encore moins H^1 (c'est ce que nous voulons montrer). Nous sommes donc obligés d'approcher cette fonction, c'est pourquoi on introduit $R\geq R_0$ où R_0 est tel que $supp\ u_0\cap supp\ f\subset B(0,R_0)$, et on pose :

$$v=\left|\begin{array}{ll}e^{2\tau|\boldsymbol{x}}u(\cdot) & \text{pour } |\boldsymbol{x}|\leq R\\ e^{2\tau R}u(\cdot) & \text{pour } |\boldsymbol{x}|\geq R\end{array}\right.$$

et nous avons vu lors de la démonstration du théorème 2.10 qu'une telle fonction est bien dans H^1. Nous obtenons alors, en prenant cette fonction test particulière :

$$\int_{|\boldsymbol{x}|\leq R}\rho e^{2\tau|\boldsymbol{x}|}\frac{\partial u}{\partial t}u+\int_{|\boldsymbol{x}|\geq R}\rho e^{2\tau R}\frac{\partial u}{\partial t}u+\int_{|\boldsymbol{x}|\leq R}e^{2\tau|\boldsymbol{x}|}\left(|\nabla u|^2+2\tau\frac{\boldsymbol{x}\cdot\nabla u}{|\boldsymbol{x}|}\right)$$

$$+\int_{|\boldsymbol{x}|\geq R}e^{2\tau R}|\nabla u|^2=\int_{|\boldsymbol{x}|\leq R}e^{2\tau|\boldsymbol{x}|}fu$$

On intègre alors entre 0 et t, chacun des morceaux étant au moins L^2 en temps :

$$\frac{1}{2}||e^{\tau|\boldsymbol{x}|}u||^2_{L^2_\rho(B(0,R))}-\frac{1}{2}||e^{\tau|\boldsymbol{x}|}u_0||^2_{L^2_\rho(B(0,R))}+\frac{1}{2}||e^{\tau R}u||^2_{L^2_\rho(B(0,R)^C)}+\int_0^t\int_{|\boldsymbol{x}|\leq R}e^{2\tau|\boldsymbol{x}|}\left(|\nabla u|^2+2\tau\frac{\boldsymbol{x}\cdot\nabla u}{|\boldsymbol{x}|}\right)$$

$$+\int_0^t\int_{|\boldsymbol{x}|\geq R}e^{2\tau R}|\nabla u|^2=\int_0^t\int_{|\boldsymbol{x}|\leq R}e^{2\tau|\boldsymbol{x}|}fu$$

Puis, le terme en gradient sur $B(0,R)$ se minore en :

$$\int_0^t \int_{|\boldsymbol{x}|\leq R} e^{2\tau|\boldsymbol{x}|}\left(|\nabla u|^2 + 2\tau\frac{\boldsymbol{x}\cdot\nabla u}{|\boldsymbol{x}|}\right) \geq \int_0^t \int_{|\boldsymbol{x}|\leq R} e^{2\tau|\boldsymbol{x}|}\left((1-\tau)|\nabla u|^2 - \tau|u|^2\right)$$
$$\geq \int_0^t \int_{|\boldsymbol{x}|\leq R} e^{2\tau|\boldsymbol{x}|}\left((1-\tau)|\nabla u|^2 - \frac{\tau}{\rho^-}\rho|u|^2\right)$$

Finalement, la partie due à la source se majore en :

$$\int_0^t \int_{|\boldsymbol{x}|\leq R} e^{2\tau|\boldsymbol{x}|} fu \leq \int_0^t \int_{|\boldsymbol{x}|\leq R} \frac{1}{2} e^{2\tau|\boldsymbol{x}|}\left(|f|^2 + \frac{\rho}{\rho^-}|u|^2\right)$$

Alors, en enlevant le terme positif sur $B(0,R)^C$, on obtient :

$$\frac{1}{2}||e^{\tau|\boldsymbol{x}|}u||^2_{L^2_\rho(B(0,R))} + \int_0^t \int_{|\boldsymbol{x}|\leq R} e^{2\tau|\boldsymbol{x}|}(1-\tau)|\nabla u|^2$$
$$\leq \frac{1}{2}||e^{\tau|\boldsymbol{x}|}u_0||^2_{L^2_\rho(B(0,R))} + \frac{1}{2}\int_0^t \int_{|\boldsymbol{x}|\leq R} e^{2\tau|\boldsymbol{x}|}|f|^2 + \int_0^t \int_{|\boldsymbol{x}|\leq R} e^{2\tau|\boldsymbol{x}|}\frac{1}{\rho^-}(\tau+\frac{1}{2})\rho|u|^2$$

Pour $\tau < 1$, le lemme de Gronwall (voir [23]) nous permet de conclure que :

$$||e^{\tau|\boldsymbol{x}|}u||^2_{L^2_\rho(B(0,R))} \leq \left(\frac{1}{2}||e^{\tau|\boldsymbol{x}|}u_0||^2_{L^2_\rho(B(0,R))} + \frac{1}{2}\int_0^t ||e^{\tau|\boldsymbol{x}|}f||^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}\right) e^{\frac{t}{\rho^-}(\tau+\frac{1}{2})}$$

et donc $e^{\tau|\boldsymbol{x}|}u \in L^\infty(0,T,L^2)$. Puis, nous en déduisons, comme :

$$(1-\tau)\int_0^t \int_{|\boldsymbol{x}|\leq R} e^{2\tau|\boldsymbol{x}|}|\nabla u|^2$$
$$\leq \frac{1}{2}||e^{\tau|\boldsymbol{x}|}u_0||^2_{L^2_\rho(B(0,R))} + \frac{1}{2}\int_0^t \int_{|\boldsymbol{x}|\leq R} e^{2\tau|\boldsymbol{x}|}|f|^2 + \int_0^t \int_{|\boldsymbol{x}|\leq R} e^{2\tau|\boldsymbol{x}|}\frac{1}{\rho^-}(\tau+\frac{1}{2})\rho|u|^2 + \frac{1}{2}||e^{\tau|\boldsymbol{x}|}u||^2_{L^2_\rho(B(0,R))}$$

que $e^{\tau|\boldsymbol{x}|}\nabla u \in L^2(0,T,L^2)$. Comme :

$$\nabla(e^{\tau|\mathbf{x}|}u) = e^{\tau|\mathbf{x}|}(\tau\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}u + \nabla u)$$

il est clair que $e^{\tau|\boldsymbol{x}|}u \in L^2(0,T,H^1)$. Mais $u \in C^0(0,T,H^2)$, donc clairement ceci implique $e^{\tau|\boldsymbol{x}|}u \in C^0(0,T,H^1)$. Maintenant, pour u solution forte, nous avons montré que $u' = \partial_t u$ était une solution faible d'une équation de la chaleur (avec données dérivées), c'est-à-dire $u' \in L^2(0,T,H^1(\mathbb{R}^2))$ et $\partial_t u' \in L^2(0,T,H^{-1}(\mathbb{R}^2))$. En remplaçant les intégrales en espace par des produits de dualité lorsqu'il en est besoin, il est clair que les calculs ci-dessus peuvent être conduits pour u', et on obtient :

$$\frac{1}{2}||e^{\tau|\boldsymbol{x}|}u'||^2_{L^2_\rho(B(0,R))} + \int_0^t \int_{|\boldsymbol{x}|\leq R} e^{2\tau|\boldsymbol{x}|}(1-\tau)|\nabla u'|^2$$
$$\leq \frac{1}{2}||e^{\tau|\boldsymbol{x}|}\partial_t u(x,0)||^2_{L^2_\rho(B(0,R))} + \frac{1}{2}\int_0^t \int_{|\boldsymbol{x}|\leq R} e^{2\tau|\boldsymbol{x}|}|f|^2 + \int_0^t \int_{|\boldsymbol{x}|\leq R} e^{2\tau|\boldsymbol{x}|}\frac{1}{\rho^-}(\tau+\frac{1}{2})\rho|u'|^2$$

comme $\partial_t u(x,0)$ sera à support compact, u étant solution de l'équation. Nous obtiendrons donc de la même façon $e^{\tau|\boldsymbol{x}|}u' \in L^2(0,T,H^1)$ (mais pas plus cette fois). Alors, comme u est solution de l'équation de la chaleur, $e^{\tau|\boldsymbol{x}|}\Delta u \in L^2(0,T,L^2(\mathbb{R}^2))$, puis :

$$\Delta(e^{\tau|\mathbf{x}|}u) = e^{\tau|\mathbf{x}|}\left(\left(\tau\frac{1-d}{|\mathbf{x}|} + \tau^2\right)u + 2\tau\frac{\mathbf{x}\cdot\nabla u}{|\mathbf{x}|} + \Delta u\right)$$

où $d = 2$ est la dimension. Le premier terme est L^2 en vertu de l'inégalité de Hardy, et les deux derniers le sont grâce à ce que nous venons de démontrer, et le résultat suit. □

Nous disposons maintenant de tous les outils pour démontrer l'estimation d'erreur L^2 pour la méthode avec quadrature, dans le cas de l'équation de la chaleur :

Théorème 7.9. *Sous les hypothèses (HT) et si :*

$$\partial_t^2 f \in L^2(0,\infty,L^2(\Omega_0)) \text{ et } \partial_t^2 u_{\Delta k} \in C^0(0,T,L^2(\Omega_{N_k}))$$

si $(\widetilde{u}^n_{\Delta k})_{0\leq n\leq N}$ est l'extension de la famille $(u^n_{\Delta k})_{0\leq n\leq N}$ solution de (7.28), et si u est la solution de (7.1), alors, il existe $C > 0$ indépendante de T et Δt telle que, pour tout $\tau < 1$ et tout $n\Delta t \leq T$:

$$||u(\cdot,n\Delta t) - \widetilde{u}^n_{\Delta k}||_{L^2_\rho(\Omega_{N_k})} \leq C\left(T\Delta t + e^T e^{-\tau\lfloor\frac{N_k}{2}\rfloor L}\right) \tag{7.41}$$

et

$$||u(\cdot,n\Delta t) - u^n_{\Delta k}||_{L^2_\rho(\Omega_0)} \leq C\left(T\Delta t + e^T e^{-\tau\lfloor\frac{N_k}{2}\rfloor L}\right) \tag{7.42}$$

Démonstration. Sous les hypothèses de régularité supplémentaires, nous pouvons appliquer le théorème 4.3. Alors, en vertu de (7.32) :

$$||u(\cdot,n\Delta t)-\widetilde{u}^n_{\Delta k}||_{L^2_\rho(\Omega_{N_k})}\leq ||u(\cdot,n\Delta t)-u_{\Delta k}(\cdot,n\Delta t)||_{L^2_\rho(\Omega_{N_k})}+CT\Delta t\sup_{[0,T]}||\partial_t^2 u_{\Delta k}||_{L^2(\Omega_{N_k})}$$

Le premier terme revient à estimer $e_{\Delta k}$, pour :

$$\varphi=u|_{\Gamma^+_{N_k}}-u|_{\Gamma^-_{N_k}}\qquad\text{et}\qquad\psi=\partial_y u|_{\Gamma^+_{N_k}}-\partial_y u|_{\Gamma^-_{N_k}}$$

En procédant comme dans la démonstration du théorème 2.11, on montre aisément que :

$$||\varphi||_{H^{1/2}(\mathbb{R})}\leq Ce^{-\tau\lfloor\frac{N_k}{2}\rfloor L}||e^{\tau|\boldsymbol{x}|}u||_{H^1(\mathbb{R}^2)}\qquad||\partial_t\varphi||||_{H^{1/2}(\mathbb{R})}\leq Ce^{-\tau\lfloor\frac{N_k}{2}\rfloor L}||e^{\tau|\boldsymbol{x}|}\partial_t u||_{H^1(\mathbb{R}^2)}$$

et

$$||\psi||_{H^{-1/2}(\mathbb{R})}\leq Ce^{-\tau\lfloor\frac{N_k}{2}\rfloor L}||e^{\tau|\boldsymbol{x}|}u||_{H^1(\Delta,\mathbb{R}^2)}$$

quantités que nous savons finies en vertu du théorème 7.8. Alors le résultat suit en reportant ces expressions dans l'estimation (7.40). Ne reste plus qu'à montrer que l'on peut majorer le terme en $||\partial_t^2 u_{\Delta k}||_{L^2(\Omega_{N_k})}$ indépendamment de N_k. Nous savons que $\partial_t^2 u_{\Delta k}$ est solution au sens des distributions d'une équation de la chaleur, avec des données répondant aux exigences du théorème de Lions. En procédant comme dans la démonstration du théorème 7.7, puisque $\partial_t^2 e_{\Delta k}$ est encore solution d'une équation de la chaleur au sens des distributions, on montre sans peine qu'il existe $C>0$ indépendante de T et N_k :

$$||\partial_t^2 u_{\Delta k}(t)||_{L^2(\Omega_{N_k})}\leq C\left(||\partial_t^2 u_{\Delta k}(0)||_{L^2(\Omega_0)}+\int_0^{+\infty}||\partial_t^2 f||^2_{L^2(\Omega_0)}\right)$$

□

Bien entendu, on peut sans doute affaiblir quelque peu les hypothèses sur les données, et établir ce résultat dans un cadre moins restrictif (remarquons d'ailleurs que nous n'avons besoin de ces hypothèses supplémentaires que pour traiter la partie due à la discrétisation en temps de l'erreur, et non pour traiter la quadrature). Dans le cas de l'équation de la chaleur, nous nous retrouvons donc dans la même situation que dans le cas de l'équation de Helmholtz avec absorption, à savoir une méthode qui converge exponentiellement avec le nombre de points de quadrature. Notons toutefois que la constante intervenant dans cette estimation d'erreur se dégrade quand T augmente (i.e. lorsque l'on souhaite calculer la solution sur un intervalle de temps plus grand). Si pour le terme correspondant à l'erreur de discrétisation en temps cette augmentation reste classique (linéaire), pour le terme correspondant à l'erreur de quadrature, cette augmentation se fait au même rythme que se fait la décroissance de l'erreur par rapport à N_k (i.e. de façon exponentielle). Autrement dit, lorsque l'on augmente la longueur de l'intervalle de temps sur lequel on observe la solution, il faut augmenter proportionnellement le nombre de points de quadrature si on ne veut pas dégrader l'erreur, ce qui n'a, en pratique, rien de dramatique ni de très contraignant. Bien entendu, il est également possible que notre estimation ait été un peu trop large, et que nous ayons surestimé cette constante.

Comme dans le cas harmonique, c'est le caractère très dissipatif de cette équation (soit l'estimation de décroissance) qui est à l'origine de ce bon comportement. Nous pouvons hélas d'ores et déjà soupçonner que la situation se déteriore dans le cas d'une équation telle que celle de Schrödinger.

Le cas de l'équation de Schrödinger

Le problème pour l'erreur devient cette fois ci : trouver $e_{\Delta k}\in C^0(0,T,H^1(\Delta,\Omega_{N_k}))\cap C^1(0,T,L^2(\Omega_{N_k}))$ et par linéarité :

$$\left|\begin{array}{ll}-i\dfrac{\partial e_{\Delta k}}{\partial t}-\Delta e_{\Delta k}+Ve_{\Delta k}=0 & \text{dans } \Omega_{N_k}\\ e_{\Delta k}|_{\Gamma^+_{N_k}}-e_{\Delta k}|_{\Gamma^-_{N_k}}=\varphi & \\ \partial_y e_{\Delta k}|_{\Gamma^+_{N_k}}-\partial_y e_{\Delta k}|_{\Gamma^-_{N_k}}=\psi & \\ e_{\Delta k}(x,0)=0 & \text{dans } \Omega_{N_k}\end{array}\right. \tag{7.43}$$

avec $\varphi = u_{|_{\Gamma^+_{N_k}}} - u_{|_{\Gamma^-_{N_k}}}$ et $\psi = \partial_y u_{|_{\Gamma^+_{N_k}}} - \partial_y u_{|_{\Gamma^-_{N_k}}}$, $\varphi(0) = \psi(0) = 0$.
De nouveau, c'est au sens variationnel que nous allons essayer de traiter ce problème (voir [23] ou [61] pour le cas général). Résoudre (7.43) revient à résoudre :

$$\left| \begin{array}{l} -\left(i\dfrac{\partial e_{\Delta k}}{\partial t}, v\right)_{L^2(\Omega_{N_k})} + (\nabla e_{\Delta k}, \nabla v)_{L^2(\Omega_{N_k})} + (V e_{\Delta k}, v)_{L^2(\Omega_{N_k})} \\ =< \psi, v|_{\Gamma^+_{N_k}} > \quad \forall\, v \in H^1_{per}(\Omega_{N_k}) \\ e_{\Delta k}|_{\Gamma^+_{N_k}} - e_{\Delta k}|_{\Gamma^-_{N_k}} = \varphi \\ e_{\Delta k}(x,0) = 0 \quad \text{dans } \Omega_{N_k} \end{array} \right. \tag{7.44}$$

Puis, si E désigne l'opérateur de relèvement du lemme 2.4, alors : $e_{\Delta k,0} = e_{\Delta k} - E\varphi \in H^1_{per}(\Omega_{N_k})$ satisfait :

$$\left| \begin{array}{l} -\left(i\dfrac{\partial e_{\Delta k,0}}{\partial t}, v\right)_{L^2(\Omega_{N_k})} + (\nabla e_{\Delta k,0}, \nabla v)_{L^2(\Omega_{N_k})} + (V e_{\Delta k,0}, v)_{L^2(\Omega_{N_k})} =< \psi, v|_{\Gamma^+_{N_k}} > \\ +i\left(\dfrac{\partial E\varphi}{\partial t}, v\right)_{L^2(\Omega_{N_k})} - (\nabla E\varphi, \nabla v)_{L^2(\Omega_{N_k})} - (VE\varphi, v)_{L^2(\Omega_{N_k})} \quad \forall\, v \in H^1_{per}(\Omega_{N_k}) \\ e_{\Delta k,0}(x,0) = 0 \quad \text{dans } \Omega_{N_k} \end{array} \right. \tag{7.45}$$

(avec $\varphi(0)$ entraînant encore $e_{\Delta k,0}(0) = 0$). L'existence et l'unicité de la solution d'un tel problème se traite au moyen du théorème suivant (cf [23], dont nous avons très légèrement adapté l'hypothèse $f \in L^2(0,T,H)$ et $\partial_t f \in L^2(0,T,V')$ en $f \in C^0(0,T,V')$ et $\partial_t f \in L^2(0,T,V')$, ce qui se fait sans la moindre difficulté) :

Théorème 7.10. *Soit H un espace de Hilbert, $V \subset H$ un sous-espace dense de H qui s'injecte continûment dans H, et V' son dual. Pour tout $t \in [0,T]$, soit $a(t;\cdot,\cdot)$ une forme bilinéaire continue sur $V \times V$ telle que :*

$$\left\{ \begin{array}{l} (i)\ \textit{pour tout } u, v \in V,\ \textit{la fonction } t \mapsto a(t;u,v) \in\ C^1([0,T]) \\ (ii)\ a(t;u,v) = \overline{a(t;v,u)}\ \textit{pour tout } u, v \in V \textit{ et tout } t \in [0,T] \\ (iii)\ \textit{il existe deux constantes } \alpha > 0 \textit{ et } \lambda \textit{ telles que} \\ a(t;u,u) + \lambda ||u||^2_H \geq \alpha ||u||^2_V \end{array} \right. \tag{7.46}$$

Alors, si $u_0 \in V$, $f \in C^0(0,T,V')$ et $\partial_t f \in L^2(0,T,V')$, il existe une unique solution $u \in L^2(0,T,V), \partial_t u \in L^2(0,T,V')$ au problème :

$$\left| \begin{array}{l} \dfrac{d}{dt}(u(\cdot), v)_H + a(\cdot; u(\cdot), v) =< f(\cdot), v > \quad \textit{dans } \mathcal{D}'(]0,T[)\ \forall v \in V \\ u(0) = u_0 \end{array} \right. \tag{7.47}$$

Notons bien la différence essentielle avec le théorème 7.6 (hormis les hypothèses sur la forme bilinéaire, qui sont satisfaites dans notre cas), qui tient à la régularité supplémentaire imposée à la source et à la donnée initiale. Elle signifie en particulier, au vu de l'équation (7.45), que nous avons besoin de vérifier que les traces de la solution de notre problème initial (7.1) satisfont bien une condition de régularité en temps non plus seulement en valeur et en dérivée (comme c'était le cas pour l'équation de la chaleur) mais également en dérivée seconde. De même pour la trace normale, nous allons maintenant devoir vérifier une condition sur sa dérivée.

L'idéal serait que nous puissions montrer, comme nous y sommes parvenus dans le cas de l'équation de la chaleur, que les solutions auxquelles nous nous intéressons (fortes en temps afin de pouvoir utiliser des schémas différences finies) satisfont naturellement les hypothèses de régularité nécessaires. Nous allons observer qu'il n'en est rien. Nous savons, en vertu du théorème 4.1, que

$u \in C^0(0,T,H^2(\mathbb{R}^2)) \cap C^1(0,T,L^2(\mathbb{R}^2))$. Puis, posons $u^{'} = \partial_t u$. Au sens des distributions, nous avons :

$$-i\frac{\partial u^{'}}{\partial t} - \Delta u^{'} + V u^{'} = \frac{\partial f}{\partial t}$$

Le problème pour $u^{'}$ se met donc sous forme variationnelle en :

$$\left| \begin{array}{l} \dfrac{d}{dt}\left(u^{'}(\cdot), v\right)_{L^2(\mathbb{R}^2)} + i\left(\nabla u^{'}(\cdot), \nabla v\right)_{L^2(\mathbb{R}^2)} + i\left(V u^{'}, v\right)_{L^2(\Omega_0)} = i\left(\dfrac{\partial f}{\partial t}, v\right)_{L^2(\mathbb{R}^2)} \\ u^{'}(0) = \dfrac{\partial u}{\partial t}(0) \end{array} \right.$$

Nous faisons donc face à deux types de difficultés pour pouvoir appliquer le théorème 7.10 : tout d'abord, rien ne nous garantit que $\partial_t u(0) \in H^1(\mathbb{R}^2)$, puisque nous avons seulement a priori $\partial_t u(0) \in L^2(\mathbb{R}^2)$. Nous aurions également besoin de $\partial_t^2 f \in L^2(0,T,H^{-1}(\mathbb{R}^2))$ pour pouvoir reproduire la démonstration du lemme 7.3. Aussi, sans hypothèse supplémentaire (principalement sur f), le problème satisfait par l'erreur ne rentre pas dans le cadre du théorème 7.10.

Nous pouvons de plus, par analogie avec le cas de l'équation de la chaleur, anticiper le fait que si nous parvenons à établir une estimation pour le problème (7.43), elle fera intervenir les normes de φ et ψ correspondant à la régularité minimale nécessaire pour pouvoir appliquer le théorème 7.10.

Théorème 7.11. *Si $\varphi \in H^2(0,T,H^{1/2}(\mathbb{R}))$ et si $\psi \in H^1(0,T,H^{-1/2}(\mathbb{R}))$, le problème* (7.43) *est bien posé. De plus, si $e_{\Delta k} = u - u_{\Delta k}$, on a l'estimation d'erreur :*

$$||e_{\Delta k,0}||_{H^1(\Omega_{N_k})} \leq C e^{\lambda t}\left(\int_0^t ||\partial_t \psi||^2_{H^{-1/2}(\mathbb{R})} + ||\partial_t \varphi||^2_{H^{1/2}(\mathbb{R})} + ||\partial_t^2 \varphi||^2_{H^{1/2}(\mathbb{R})}\right)^{1/2} \tag{7.48}$$

avec $\lambda = 0$ si $V > 0$ et $\lambda > ||V||_{L^\infty}$ sinon.

Démonstration. Sous nos hypothèses le second membre F pour (7.45) est dans $H^{-1}(\mathbb{R}^2)$, avec :

$$< F, v > = < \psi, v|_{\Gamma^+_{N_k}} > + i\left(\frac{\partial E\varphi}{\partial t}, v\right)_{L^2(\Omega_{N_k})} - (\nabla E\varphi, \nabla v)_{L^2(\Omega_{N_k})} - \left(VE\varphi, e_{\Delta k,0}\right)_{L^2(\Omega_{N_k})}$$

Comme $\varphi \in H^2(0,T,H^{1/2}(\mathbb{R}))$ et $\psi \in H^1(0,T,H^{-1/2}(\mathbb{R}))$, on a bien, puisque $H^2([0,T]) \subset C^1([0,T])$ et $H^1([0,T]) \subset C^0([0,T])$ $F \in C^0(0,T,H^{-1}(\mathbb{R}^2))$. En dérivant en temps, on voit de plus que $F \in L^2(0,T,H^{-1}(\mathbb{R}^2))$, au vu des régularités en temps de φ et ψ. Alors le problème pour $e_{\Delta k,0}$ est bien posé en vertu du théorème 7.10 (la forme bilinéaire étant toujours coercive au sens large en vertu du lemme 4.1), et on en déduit comme d'habitude le caractère bien posé du problème pour $e_{\Delta k}$.

Remarquons que si on remplace $e_{\Delta k}$ par $\widetilde{e}_{\Delta k} = e^{\lambda t}$ dans (7.43), on obtient :

$$\left| \begin{array}{ll} -i\dfrac{\partial \widetilde{e}_{\Delta k}}{\partial t} - \Delta \widetilde{e}_{\Delta k} + (V+\lambda)\widetilde{e}_{\Delta k} = 0 & \text{dans } \Omega_{N_k} \\ \widetilde{e}_{\Delta k}|_{\Gamma^+_{N_k}} - \widetilde{e}_{\Delta k}|_{\Gamma^-_{N_k}} = \varphi & \\ \partial_y \widetilde{e}_{\Delta k}|_{\Gamma^+_{N_k}} - \partial_y \widetilde{e}_{\Delta k}|_{\Gamma^-_{N_k}} = \psi & \\ \widetilde{e}_{\Delta k}(x,0) = 0 & \text{dans } \Omega_{N_k} \end{array} \right. \tag{7.49}$$

et pour $\lambda > ||V||_{L^\infty}$, cela revient à travailler avec un potentiel positif. Aussi quitte à changer $e_{\Delta k}$ en $\widetilde{e}_{\Delta k}$, nous pouvons toujours supposer $V \geq V_- > 0$. Comme $e_{\Delta k} = u - u_{\Delta k}$, nous pouvons prendre $v = \partial_t e_{\Delta k,0} \in C^0(0,T,L^2(\mathbb{R}^2))$ dans (7.45) comme fonction test, et nous obtenons :

$$\begin{array}{l} -\left(i\partial_t e_{\Delta k,0}, \partial_t e_{\Delta k,0}\right)_{L^2(\Omega_{N_k})} + \left(\nabla e_{\Delta k,0}, \nabla \partial_t e_{\Delta k,0}\right)_{L^2(\Omega_{N_k})} + \left(V e_{\Delta k,0}, \partial_t e_{\Delta k,0}\right)_{L^2(\Omega_{N_k})} = < \psi, \partial_t e_{\Delta k,0}|_{\Gamma^+_{N_k}} > \\ +i\left(\partial_t E\varphi, \partial_t e_{\Delta k,0}\right)_{L^2(\Omega_{N_k})} - \left(\nabla E\varphi, \nabla \partial_t e_{\Delta k,0}\right)_{L^2(\Omega_{N_k})} - \left(VE\varphi, \partial_t e_{\Delta k,0}\right)_{L^2(\Omega_{N_k})} \end{array}$$

On prend alors la partie réelle de cette expression, et on obtient :

$$\begin{array}{l} \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial}{\partial t}||\nabla e_{\Delta k,0}||^2_{L^2(\Omega_{N_k})} + \Re\left(V e_{\Delta k,0}, \partial_t e_{\Delta k,0}\right)_{L^2(\Omega_{N_k})} = 2\Re < \psi, \partial_t e_{\Delta k,0}|_{\Gamma^+_{N_k}} > \\ -\Im\left(\partial_t E\varphi, \partial_t e_{\Delta k,0}\right)_{L^2(\Omega_{N_k})} - \Re\left(\nabla E\varphi, \nabla \partial_t e_{\Delta k,0}\right)_{L^2(\Omega_{N_k})} - \Re\left(VE\varphi, \partial_t e_{\Delta k,0}\right)_{L^2(\Omega_{N_k})} \end{array}$$

En intégrant en temps (au moins formellement) on obtient, avec $\alpha = \frac{1}{2}\min(1, V_-)$:

$$\alpha||e_{\Delta k,0}||^2_{H^1(\Omega_{N_k})} \leq \Re \int_0^t \psi, \partial_t e_{\Delta k,0}|_{\Gamma^+_{N_k}} > -\Im \int_0^t \left(\partial_t E\varphi, \partial_t e_{\Delta k,0}\right)_{L^2(\Omega_{N_k})}$$
$$-\Re \int_0^t \left(\nabla E\varphi, \nabla \partial_t e_{\Delta k,0}\right)_{L^2(\Omega_{N_k})} - \Re \int_0^t \left(VE\varphi, \partial_t e_{\Delta k,0}\right)_{L^2(\Omega_{N_k})}$$

Nous allons avoir besoin de travailler quelque peu sur le second membre de cette inégalité. Nous avons :

$$\Re \int_0^t < \psi, \partial_t e_{\Delta k,0}|_{\Gamma^+_{N_k}} > - \left(\nabla E\varphi, \nabla \partial_t e_{\Delta k,0}\right)_{L^2(\Omega_{N_k})} - \left(VE\varphi, \partial_t e_{\Delta k,0}\right)_{L^2(\Omega_{N_k})} - \Im \int_0^t \left(\partial_t E\varphi, \partial_t e_{\Delta k,0}\right)_{L^2(\Omega_{N_k})}$$
$$= \Re < \psi(t), e_{\Delta k,0}|_{\Gamma^+_{N_k}}(t) > -\Im \left(\partial_t E\varphi(t), e_{\Delta k,0}(t)\right)_{L^2(\Omega_{N_k})} - \Re \left(\nabla E\varphi(t), \nabla e_{\Delta k,0}(t)\right)_{L^2(\Omega_{N_k})}$$
$$-\Re \left(VE\varphi(t), e_{\Delta k,0}(t)\right)_{L^2(\Omega_{N_k})} - \Re \int_0^t < \partial_t \psi, e_{\Delta k,0}|_{\Gamma^+_{N_k}} > - \left(\nabla \partial_t E\varphi, \nabla e_{\Delta k,0}\right)_{L^2(\Omega_{N_k})}$$
$$-\Re \int_0^t - \left(V\partial_t E\varphi, e_{\Delta k,0}\right)_{L^2(\Omega_{N_k})} - \Im \int_0^t \left(\partial_t^2 E\varphi, e_{\Delta k,0}\right)_{L^2(\Omega_{N_k})}$$
$$\leq \frac{C}{2\alpha}\left(||\psi(t)||^2_{H^{-1/2}(\mathbb{R})} + ||\varphi||^2_{H^{1/2}(\mathbb{R})} + ||\partial_t \varphi||^2_{H^{1/2}(\mathbb{R})}\right) + \frac{\alpha}{2}||e_{\Delta k,0}||^2_{H^1(\Omega_{N_k})}$$
$$+C\int_0^t \left(||\partial_t \psi||^2_{H^{-1/2}(\mathbb{R})} + ||\partial_t \varphi||^2_{H^{1/2}(\mathbb{R})} + ||\partial_t^2 \varphi||^2_{H^{1/2}(\mathbb{R})} + ||e_{\Delta k,0}||^2_{H^1}\right)$$

Les hypothèses de régularité en temps sur ψ et φ nous garantissant que tous ces termes ont bien un sens, l'intégration en temps est jusitifée a posteriori. Alors, en utilisant le fait que :

$$\varphi = \int_0^t \partial_t \varphi \quad \partial_t \varphi = \int_0^t \partial_t^2 \varphi \quad \psi = \int_0^t \partial_t \psi$$

on obtient :

$$\frac{\alpha}{2}||e_{\Delta k,0}||^2_{H^1(\Omega_{N_k})} \leq C(T)\int_0^t \left(||\partial_t \psi||^2_{H^{-1/2}(\mathbb{R})} + ||\partial_t \varphi||^2_{H^{1/2}(\mathbb{R})} + ||\partial_t^2 \varphi||^2_{H^{1/2}(\mathbb{R})} + ||e_{\Delta k,0}||^2_{H^1}\right)$$

et le lemme de Gronwall donne la conclusion. □

Remarquons que ce théorème nous garantit l'unicité de la solution du problème satisfait par $e_{\Delta k}$ (puisque les données nulles satisfont bien évidemment les hypothèses de régularité du théorème ci-dessus). Comme nous savons par ailleurs que dans le cas :

$$\varphi = u_{|_{\Gamma^+_{N_k}}} - u_{|_{\Gamma^-_{N_k}}} \quad \psi = \partial_y u_{|_{\Gamma^+_{N_k}}} - \partial_y u_{|_{\Gamma^-_{N_k}}}$$

la solution existe, puisqu'il s'agit de $e_{\Delta k} = u - u_{\Delta k}$, alors nous pouvons en conclure qu'il existe une unique solution au problème satisfait par l'erreur. En revanche, cette solution ne répond aux exigences de régularité du théorème ci-dessus, aussi nous ne pouvons pas, en général, utiliser l'estimation d'erreur que nous venons d'obtenir sans hypothèse supplémentaire.

Supposons maintenant que la solution u de (7.1) soit suffisamment régulière (notons qu'il s'agit d'un cas de figure classique d'analyse numérique que d'avoir besoin d'un peu plus de régularité que celle permettant de donner un sens au problème pour obtenir des estimations d'erreur). Malheureusement, les difficultés inhérentes à l'équation de Schrödinger ne s'arrêtent pas ici. Nous devrions, pour terminer l'étude de convergence de la méthode, analyser la décroissance de la solution de l'équation de Schrödinger dans un potentiel (presque) périodique. Cette étude est beaucoup plus complexe à mener que dans les autres situations étudiées dans ce mémoire. La plupart des résultats de décroissance existant dans la littérature traitent soit du cas du potentiel nul, soit le cas de potentiels décroissants à l'infini (cf. [51] et [77] par exemple). L'hypothèse de décroissance du potentiel (qui n'est bien évidement pas satisfaite par nos potentiels périodiques) semble difficile à lever, et nous ne sommes par parvenus à pousser cette question plus loin. Aussi, l'estimation (7.48) est la meilleure que nous puissions fournir pour le cas de l'équation de Schrödinger. La solution étant toujours décroissante, il ne fait pas de doute que le problème approché par quadrature converge vers la solution du problème continu, mais ne nous pouvons pas donner plus d'informations sur la vitesse à laquelle cette convergence a lieu, contrairement aux autres situations abordées dans ce mémoire. Si la solution décroît très lentement, cette convergence pourra d'ailleurs être lente, mais nous verrons lors des simulations numériques que la méthode se comporte malgré tout très bien pour l'équation de Schrödinger.

7.1.6 Discrétisation spatiale

Formulation du problème discret

Nous allons maintenant expliquer comment discrétiser en espace la méthode que nous venons de présenter, et ainsi comment en obtenir une formulation utilisable en pratique. Comme le lecteur s'en doute certainement, nous allons réutiliser la discrétisation en espace des problèmes de guide que nous avons présentée au chapitre 6, mais pour le cas de conditions quasi-périodiques (nous utiliserons donc les espaces définis au chapitre 3, pour lesquels nous savons que les résultats du chapitre 6 demeurent vrais). En effet, nous cherchons à discrétiser en espace le problème : trouver $(u^n_{\Delta k})_{0\leq n\leq N} \in L^2(\Omega_0)^{N+1}$ telle que :

$$\left| \begin{array}{l} (I - S_{0,\theta,\Delta t,\Delta k})u^n_{\Delta k} = g^n_{\Delta k}|_{\Omega_0} \quad \forall\ 1 \leq n \leq N \\ u^0_{\Delta k} = u_0 \end{array} \right. \tag{7.28}$$

où $g^n_{\Delta k}$ est donnée par (7.27), avec $(\hat{g}^n_{\Delta k}(j\Delta k))_{\substack{1\leq n\leq N \\ 1\leq j\leq N_k}}$ et $(\hat{u}^n_{\Delta k}(j\Delta k))_{\substack{0\leq n\leq N \\ 1\leq j\leq N_k}}$ les solutions de (7.26) et (7.24), associées à la famille $u^n_{\Delta k}$. Rappelons que l'opérateur $S_{0,\theta,\Delta t,\Delta k}$ ainsi que la source g^n sont définis par, $\forall\ m \in [\![-M^-, M^+ - 1]\!]$:

$$S_{0,\theta,\Delta t,\Delta k} f|_{\Omega^m_0} \equiv \Delta k \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \sum_{j=1}^{N_k} \hat{S}_0(j\Delta k)\left[\theta\Delta t(V_p - V) + (\rho_p - \rho)\right] f e^{imj\Delta kL} \tag{7.22}$$

$$g^n_{\Delta k}|_{\Omega^m_0} \equiv \Delta k \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \sum_{j=1}^{N_k} \hat{g}^n_{\Delta k}(j\Delta k)|_{\Omega^0_0} e^{imj\Delta kL} \tag{7.27}$$

c'est-à-dire à partir de la résolution de problèmes de guide périodique. Nous avons appris au chapitre 6 comment discrétiser de tels problèmes, aussi, en reprenant l'ensemble des notations du chapitre 3, et en supposant que nous disposons du même type de maillage, nous définissons fort naturellement l'approximation en espace de l'opérateur $\hat{S}(j\Delta k)$ en posant :

$$\begin{array}{rcl} \hat{S}_h(j\Delta k) : L^2(\Omega_0) & \longrightarrow & V^r_h(\xi) \\ f & \longmapsto & \hat{S}_h(j\Delta k) f \end{array}$$

où $\hat{S}_h(j\Delta k)f$ est l'unique solution dans $V^r_h(\xi)$ de :

$$a^P_{B^0,\theta,\Delta t}(\hat{S}_h(j\Delta k), v_h) = \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \sum_{p=-M^-}^{M^+-1} \left(f_{|B^n}, v_h\right)_{L^2(B^0)} e^{-ipj\Delta kL} \quad \forall v_h \in V^r_h(\xi) \tag{7.50}$$

et où nous avons posé :

$$a^P_{\Omega,\theta,\Delta t}(u, v) = (\theta\Delta t\nabla u, \nabla v)_{L^2(\Omega)} + ((\theta\Delta t V_p + \gamma\rho_p)u, v)_{L^2(\Omega)}$$

Nous savons non seulement que ce problème est bien posé en vertu du théorème 6.1, mais aussi qu'il est équivalent à résoudre : trouver $\hat{S}_{0,h}(j\Delta k)f$ dans $V^r_h(\xi)(\Omega^0_0)$ tel que $\forall v_h \in V^r_h(\xi)(\Omega^0_0)$:

$$\left| \begin{array}{l} a^P_{\Omega^0_0,\theta,\Delta t}(\hat{S}_{0,h}(j\Delta k)f, v_h) + \left(\Lambda^1_{h,-}(j\Delta k)\hat{S}_{0,h}(j\Delta k)f|_{\Gamma^-_0}, v_h|_{\Gamma^-_0}\right)_{L^2(\Gamma^-_0)} \\ + \left(\Lambda^1_{h,+}(j\Delta k)\hat{S}_{0,h}(j\Delta k)f|_{\Gamma^+_0}, v_h|_{\Gamma^+_0}\right)_{L^2(\Gamma^-_0)} = \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \sum_{p=-M^-}^{M^+-1} (f_{|\Omega^p_0}, v_h)_{L^2(\Omega^0_0)} e^{-ipj\Delta kL} \end{array} \right. \tag{7.51}$$

en vertu du théorème 6.5, et que cette approximation spatiale est convergente en vertu du corollaire 6.1. Ensuite, pour $m \in [\![-M^-, M^+ - 1]\!]$ nous définissons l'approximation spatiale de la famille

$(\hat{u}^n(j\Delta k))_{0\leq n\leq N}$ comme, étant donnée $(u^n_{h,\Delta k})_{0\leq n\leq N}\in V^r_h(\xi)(\Omega_0)$, l'unique famille $(\hat{u}^n_{h,\Delta k}(j\Delta k))_{0\leq n\leq N}$ solution dans $V^r_h(\xi)^{N+1}$ de :

$$\left|\begin{array}{l} a^P_{B^0,\theta,\Delta t}(\hat{u}^{n+1}_{h,\Delta k}(j\Delta k),v_h)=a^P_{B^0,\theta-1,\Delta t}(\hat{u}^n_{h,\Delta k}(j\Delta k),v_h)\\ +\sqrt{\dfrac{L}{2\pi}}\displaystyle\sum_{p=-M^-}^{M^+-1}(f_{|_{\Omega^p_0}},v_h)_{L^2(B^0)}e^{-ipj\Delta kL}\\ +\sqrt{\dfrac{L}{2\pi}}\displaystyle\sum_{p=-M^-}^{M^+-1}([\theta\Delta t(V_p-V)+(\rho_p-\rho)]u^{n+1}_{h,\Delta k}|_{B^p},v_h)_{L^2(B^0)}e^{-ipj\Delta kL}\\ -\sqrt{\dfrac{L}{2\pi}}\displaystyle\sum_{p=-M^-}^{M^+-1}([(\theta-1)\Delta t(V_p-V)+(\rho_p-\rho)]u^{n}_{h,\Delta k}|_{B^p},v_h)_{L^2(B^0)}e^{-ipj\Delta kL}\quad\forall v_h\in V^r_h(\xi)\\ \hat{u}^0_{h,\Delta k}(j\Delta k)=\sqrt{\dfrac{L}{2\pi}}\displaystyle\sum_{p=-M^-}^{M^+-1}I^r_h u_{0|_{\Omega^p_0}}e^{-ipj\Delta kL}\end{array}\right. \tag{7.52}$$

Encore une fois, ce problème est bien posé en vertu du théorème 6.1, et est équivalent à résoudre : trouver $(\hat{u}^n_{h,\Delta k}(j\Delta k))_{0\leq n\leq N}$ solution dans $V^r_h(\xi)^{N+1}(\Omega^0_0)$ de :

$$\left|\begin{array}{l} a^P_{\Omega^0_0,\theta,\Delta t}(\hat{u}^{n+1}_{h,\Delta k}(j\Delta k),v_h)+\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}\left(\Lambda^k_{h,-}(j\Delta k)\hat{u}^{n+1-k+1}_{h,\Delta k}(j\Delta k)|_{\Gamma^-_0},v_h|_{\Gamma^-_0}\right)_{\Gamma^-_0}\\ +\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}\left(\Lambda^k_{h,+}(j\Delta k)\hat{u}^{n+1-k+1}_{h,\Delta k}(j\Delta k)|_{\Gamma^+_0},v_h|_{\Gamma^+_0}\right)_{\Gamma^+_0}=a^P_{\Omega^0_0,\theta-1,\Delta t}(\hat{u}^n_{h,\Delta k}(j\Delta k),v_h)\\ +\sqrt{\dfrac{L}{2\pi}}\displaystyle\sum_{p=-M^-}^{M^+-1}(f_{|_{\Omega^p_0}},v_h)_{L^2(\Omega^0_0)}e^{-ipj\Delta kL}\\ +\sqrt{\dfrac{L}{2\pi}}\displaystyle\sum_{p=-M^-}^{M^+-1}([\theta\Delta t(V_p-V)+(\rho_p-\rho)]u^{n+1}_{h,\Delta k}|_{\Omega^p_0},v_h)_{L^2(\Omega^0_0)}e^{-ipj\Delta kL}\\ -\sqrt{\dfrac{L}{2\pi}}\displaystyle\sum_{p=-M^-}^{M^+-1}([(\theta-1)\Delta t(V_p-V)+(\rho_p-\rho)]u^{n}_{h,\Delta k}|_{\Omega^p_0},v_h)_{L^2(\Omega^0_0)}e^{-ipj\Delta kL}\quad\forall v_h\in V^r_h(\xi)(\Omega^0_0)\\ \hat{u}^0_{h,\Delta k}(j\Delta k)=\sqrt{\dfrac{L}{2\pi}}\displaystyle\sum_{p=-M^-}^{M^+-1}I^r_h u_{0|_{\Omega^p_0}}e^{-ipj\Delta kL}\end{array}\right. \tag{7.53}$$

toujours en vertu du théorème 6.5. Enfin, nous définissons $\hat{g}^{n+1}v(j\Delta k)$ pour tout $n\geq 0$ comme l'unique solution dans $V^r_h(\xi)$ de, pour tout $v_h\in V^r_h(\xi)$:

$$\left|\begin{array}{l} a^P_{B^0,\theta,\Delta t}(\hat{g}^{n+1}_{h,\Delta k}(j\Delta k),v_h)=a^P_{B^0,\theta-1,\Delta t}(\hat{u}^n_{h,\Delta k}(j\Delta k),v_h)\\ +\sqrt{\dfrac{L}{2\pi}}\displaystyle\sum_{p=-M^-}^{M^+-1}(f_{|_{\Omega^p_0}},v_h)_{L^2(B^0)}e^{-ipj\Delta kL}\\ -\sqrt{\dfrac{L}{2\pi}}\displaystyle\sum_{p=-M^-}^{M^+-1}([(\theta-1)\Delta t(V_p-V)+(\rho_p-\rho)]u^{n}_{h,\Delta k}|_{B^p},v_h)_{L^2(B^0)}e^{-ipj\Delta kL}\end{array}\right. \tag{7.54}$$

En procédant comme dans le cas continu et en considérant $\hat{g}^{n+1}_{h,\Delta k}(j\Delta k)$ comme $\hat{u}^{n+1}_{h,\Delta k}(j\Delta k)$ avec une source modifiée, il est clair que l'on peut également réduire ce dernier problème à la résolution d'un

problème posé sur Ω_0^0, i.e. : trouver $\hat{g}_{h,\Delta k}^{n+1}(j\Delta k) \in V_h^r(\xi)(\Omega_0^0)$ tel que $\forall v_h \in V_h^r(\xi)(\Omega_0^0)$:

$$\left|\begin{array}{l} a^P_{\Omega_0^0,\theta,\Delta t}(\hat{g}_{h,\Delta k}^{n+1}(j\Delta k), v_h) + \left(\Lambda^1_{h,-}(j\Delta k)\hat{g}_{h,\Delta k}^{n+1}(j\Delta k)|_{\Gamma_0^-}, v_h|_{\Gamma_0^-}\right)_{\Gamma_0^-} \\ + \left(\Lambda^1_{h,+}(j\Delta k)\hat{g}_{h,\Delta k}^{n+1}(j\Delta k)|_{\Gamma_0^+}, v_h|_{\Gamma_0^-}\right)_{\Gamma_0^+} = a^P_{\Omega_0^0,\theta-1,\Delta t}(\hat{u}_{h,\Delta k}^{n}(j\Delta k), v_h) \\ + \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \sum_{p=-M^-}^{M^+-1} (f_{|_{\Omega_0^p}}, v_h)_{L^2(\Omega_0^0)} e^{-ipj\Delta kL} - \sum_{k=2}^{n+1} \left(\Lambda^k_{h,-}(j\Delta k)\hat{u}_{h,\Delta k}^{n+1-k+1}(j\Delta k)|_{\Gamma_0^-}, v_h|_{\Gamma_0^-}\right)_{\Gamma_0^-} \\ - \sum_{k=2}^{n+1} \left(\Lambda^k_{h,+}(j\Delta k)\hat{u}_{h,\Delta k}^{n+1-k+1}(j\Delta k)|_{\Gamma_0^+}, v_h|_{\Gamma_0^+}\right)_{\Gamma_0^+} \\ - \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \sum_{p=-M^-}^{M^+-1} ([(\theta-1)\Delta t(V_p - V) + (\rho_p - \rho)]u_{h,\Delta k}^n|_{\Omega_0^p}, v_h)_{L^2(\Omega_0^0)} e^{-ipj\Delta kL} \end{array}\right. \tag{7.55}$$

Nous définissons l'opérateur discret $S_{0,\theta,\Delta t,h,\Delta k}$ et la source discrète $g^n_{h,\Delta k}$ pour l'équation de Lippmann-Schwinger comme, $\quad \forall\, m \in [\![-M^-, M^+ - 1]\!]$:

$$S_{0,\theta,\Delta t,h,\Delta k} f|_{\Omega_0^m} \equiv \Delta k \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \sum_{j=1}^{N_k} \hat{S}_{0,h}(j\Delta k)\left[\theta\Delta t(V_p - V) + (\rho_p - \rho)\right] f e^{imj\Delta kL} \tag{7.56}$$

et pour tout $n \geq 1$:

$$g^n_{h,\Delta k}|_{\Omega_0^m} \equiv \Delta k \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \sum_{j=1}^{N_k} \hat{g}^n_{h,\Delta k}(j\Delta k)|_{\Omega_0^0} e^{imj\Delta kL} \tag{7.57}$$

qui sont clairement à valeurs dans $V_h^r(\Omega_0)$. Alors le problème complètement discret que nous cherchons à résoudre s'écrit : trouver $(u^n_{h,\Delta k})_{0\leq n\leq N} \in V_h^r(\Omega_0)^{N+1}$ telle que :

$$\left|\begin{array}{l} (I - S_{0,\theta,\Delta t,h,\Delta k})u^n_{h,\Delta k} = g^n_{h,\Delta k}|_{\Omega_0} \quad \forall\ 1 \leq n \leq N \\ u^0_{h,\Delta k} = I_h^r u_0 \end{array}\right. \tag{7.58}$$

où $g^n_{h,\Delta k}$ est donnée par (7.57), avec $\left(\hat{g}^n_{h,\Delta k}(j\Delta k)\right)_{\substack{1\leq n\leq N \\ 1\leq j\leq N_k}}$ et $\left(\hat{u}^n_{h,\Delta k}(j\Delta k)\right)_{\substack{0\leq n\leq N \\ 1\leq j\leq N_k}}$ les solutions de (7.55) et (7.53), associées à la famille $u^n_{h,\Delta k}$.

Bien entendu, nous cherchons à savoir si ce problème discret est bien posé, et dans quelle mesure il approche bien le problème initial.

Réinterprétation de l'équation de Lippmann-Schwinger complètement discrétisée

Nous commençons comme dans le cas continu en espace par réinterpréter ce problème posé sur Ω_0 comme la restriction à Ω_0 d'un problème posé sur Ω_{N_k}. Pour cela, étant donnée une solution $(u^n_{h,\Delta k})_{0\leq n\leq N} \in V_h^r(\xi)^{N+1}(\Omega_0)$ de (7.58), nous construisons son extension $(\widetilde{u}^n_{h,\Delta k})_{0\leq n\leq N}$ à tout $\mathbb{R}^2$ en posant $\widetilde{u}^0_{h,\Delta k} = I_h^r u_0$, et pour tout $n \geq 1$ et tout $m \in \mathbb{Z}$:

$$\widetilde{u}^n_{h,\Delta k}|_{B^m} \equiv g^n_{h,\Delta k}|_{B^m} + \Delta k \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \sum_{j=1}^{N_k} \hat{S}_h(j\Delta k)\left[\theta\Delta t(V_p - V) + (\rho_p - \rho)\right] u^n_{h,\Delta k} e^{imj\Delta kL}$$

Comme $(u^n_{h,\Delta k})_{0\leq n\leq N}$ est solution de (7.58), nous avons :

$$u^n_{h,\Delta k}|_{\Omega_0^m} \equiv g^n_{h,\Delta k}|_{\Omega_0^m} + \Delta k \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \sum_{j=1}^{N_k} \hat{S}_{0,h}(j\Delta k)\left[\theta\Delta t(V_p - V) + (\rho_p - \rho)\right] u^n_{h,\Delta k} e^{imj\Delta kL}$$

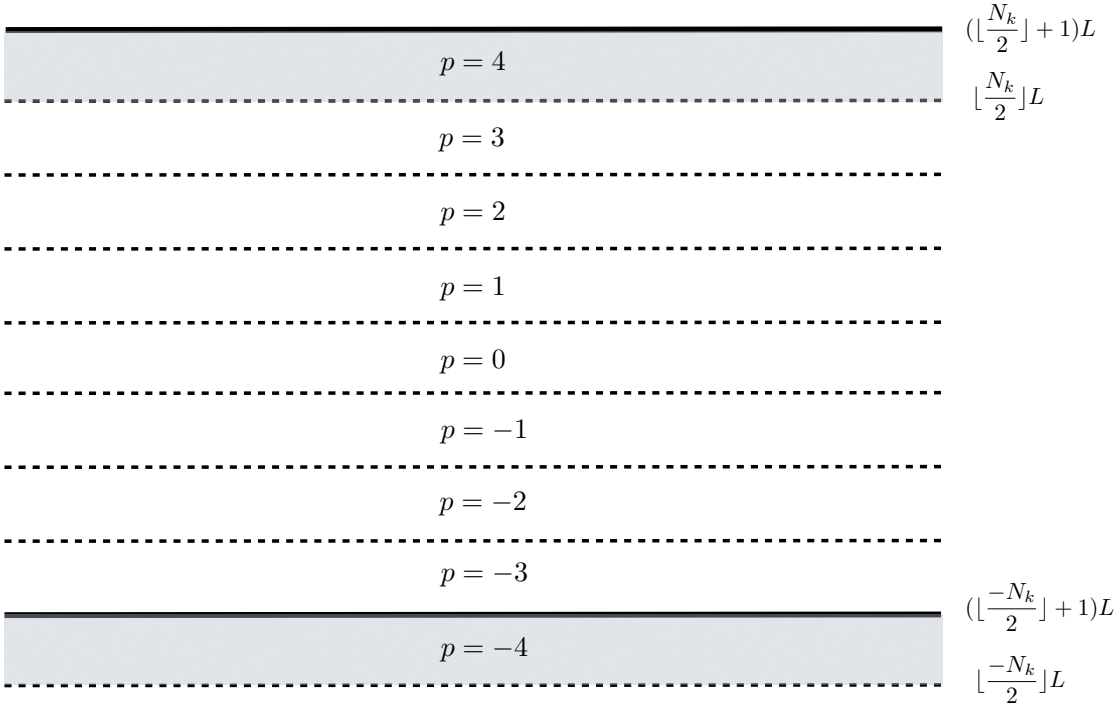
et il s'agit bien d'une extension puisque $\hat{S}_h(j\Delta k)f|_{\Omega_0^0} = \hat{S}_{0,h}(j\Delta k)f$ pour tout $f \in L^2(\Omega_0)$, ce qui implique :

$$\widetilde{u}^n_{h,\Delta k}|_{\Omega_0} = u^n_{h,\Delta k}$$

si $u^n_{h,\Delta k}$ est solution de l'équation (7.58). Alors on montre que :

Théorème 7.12. *Soit $(u^n_{h,\Delta k})_{0\le n\le N}$ une solution de (7.58). Alors son extension $(\widetilde{u}^n_{h,\Delta k})_{0\le n\le N}$ est solution du problème bien posé : trouver $(\widetilde{u}^n_{h,\Delta k})_{0\le n\le N} \in V^r_{h,per}(\Omega_{N_k})^{N+1}$ tel que :*

$$\left|\begin{array}{l} a_{\Omega_{N_k},\theta,\Delta t}(\widetilde{u}^{n+1}_{h,\Delta k}, v_h) = a_{\Omega_{N_k},\theta-1,\Delta t}(\widetilde{u}^n_{h,\Delta k}, v_h) + (f, v_h)_{L^2(\Omega_{N_k})} \quad \forall v_h \in V^r_{h,per}(\Omega_{N_k}) \\ \widetilde{u}^0_{h,\Delta k} = I^r_h u_0 \end{array}\right. \tag{7.59}$$



Démonstration. La démonstration suit les mêmes principes que celle du théorème 7.4. Cependant, les manipulations algébriques sont compliquées par la structure variationnelle du problème discret. On découpe la preuve en trois grandes étapes :

(i) Les diverses fonctions sont dans $V^r_{h,per}(\Omega_{N_k})$

Commençons par montrer la continuité aux interfaces de $g^n_{h,\Delta k}$, pour tout n. Sur une interface entre deux bandes B^m, nous avons (en notant $g^{n,m}_{h,\Delta k} = g^n_{h,\Delta k}|_{B^m}$) :

$$\begin{aligned} g^{n,m}_{h,\Delta k|_{y=(m+1)L}} &= \Delta k \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \sum_{j=1}^{N_k} \hat{g}^n_{h,\Delta k}(j\Delta k)_{|_{y=L}} e^{imj\Delta kL} \\ &= \Delta k \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \sum_{j=1}^{N_k} \hat{g}^n_{h,\Delta k}(j\Delta k)_{|_{y=0}} e^{ij\Delta kL} e^{imj\Delta kL} \\ &= g^{n,m+1}_{h,\Delta k|_{y=(m+1)L}} \end{aligned}$$

en utilisant la quasi-périodicité de $\hat{g}_{\Delta k}(j\Delta k)$, donc $g^n_{\Delta k}$ est par conséquent continue en trace. Nous introduisons alors la TFB inverse discrète de $\hat{u}^n_h(j\Delta k)$, en nous inspirant du cas continu :

$$v^{n,m}_{h,\Delta k} = v^n_{\Delta k}|_{B^m} = \Delta k \frac{L}{2\pi} \sum_{j=1}^{N_k} \hat{u}^n_{h,\Delta k}(j\Delta k) e^{imj\Delta kL}$$

Alors, en procédant exactement comme pour $g^n_{h,\Delta k}$, on montre aisément que $v^n_{h,\Delta k}$ est continue en trace. Ne reste plus qu'à vérifier cette propriété pour $\widetilde{u}^n_{h,\Delta k}$. Nous avons :

$$\begin{aligned}
\widetilde{u}^{n,m}_{h,\Delta k|_{y=(m+1)L}} &= g^{n,m}_{h,\Delta k|_{y=(m+1)L}} + \Delta k \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \sum_{j=1}^{N_k} \hat{S}_h(j\Delta k) \left[\theta \Delta t (V_p - V) + (\rho_p - \rho)\right] u^{n+1}_{\Delta k|_{y=L}} e^{imj\Delta kL} \\
&= g^{n,m+1}_{\Delta k|_{y=(m+1)L}} + \Delta k \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \sum_{j=1}^{N_k} \hat{S}_h(j\Delta k) \left[\theta \Delta t (V_p - V) + (\rho_p - \rho)\right] u^{n+1}_{\Delta k|_{y=0}} e^{ij\Delta kL} e^{imj\Delta kL} \\
&= \widetilde{u}^{n,m+1}_{\Delta k|_{y=(m+1)L}}
\end{aligned}$$

en utilisant la quasi-périodicité de $\hat{S}_h(j\Delta k)$,donc $\widetilde{u}^n_{h,\Delta k}$ est continue en trace.

Alors, pour chacune de ces trois fonctions, il est clair par construction qu'elles sont toutes dans $V^r_h(B^m)$ pour tout m. La continuité aux interfaces que nous venons de démontrer nous garantit alors qu'elles sont bien dans $V^r_h(\Omega_{N_k})$. Ne reste donc plus qu'à vérifier les conditions aux limites périodiques. Nous avons, en vertu de la relation (2.28) :

$$\begin{aligned}
g^{\lfloor \frac{N_k}{2} \rfloor}_{h,\Delta_k} &\equiv \Delta k \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \sum_{j=1}^{N_k} \hat{g}^n_{h,\Delta k}(j\Delta k) e^{i \lfloor \frac{N_k}{2} \rfloor j \frac{2\pi}{N_k}} \\
&\equiv \Delta k \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \sum_{j=1}^{N_k} \hat{g}^n_{h,\Delta k}(j\Delta k) e^{i \lfloor \frac{-N_k}{2} \rfloor j \frac{2\pi}{N_k}} \\
&= g^{n,\lfloor \frac{-N_k}{2} \rfloor}_{h,\Delta_k}
\end{aligned}$$

Alors :

$$g^n_{\Delta_k|_{\Gamma^+_{N_k}}} = g^{n,\lfloor \frac{N_k}{2} \rfloor}_{\Delta_k|_{y=L}} = g^{n,\lfloor \frac{-N_k}{2} \rfloor}_{\Delta_k|_{y=L}} = g^n_{\Delta_k|_{\Gamma^-_{N_k}}}$$

et on a bien $g^n_{h,\Delta k} \in V^r_{h,per}(\Omega_{N_k})$. Encore une fois, il suffit de remplacer $\hat{g}^n_{h,\Delta k}$ par $\hat{u}^n_{h,\Delta k}$ pour démontrer la même propriété pour $v^n_{h,\Delta k}$. Pour $\widetilde{u}^n_{h,\Delta k}$:

$$\begin{aligned}
\widetilde{u}^{n,\lfloor \frac{N_k}{2} \rfloor}_{h,\Delta_k} &\equiv g^{n,\lfloor \frac{N_k}{2} \rfloor}_{h,\Delta_k} + \Delta k \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \sum_{j=1}^{N_k} \hat{S}_h(j\Delta k) \left[\theta \Delta t (V_p - V) + (\rho_p - \rho)\right] u^{n+1}_{\Delta k} e^{i \lfloor \frac{N_k}{2} \rfloor j \frac{2\pi}{N_k}} \\
&\equiv g^{n,\lfloor \frac{-N_k}{2} \rfloor}_{h,\Delta_k} + \Delta k \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \sum_{j=1}^{N_k} \hat{S}_h(j\Delta k) \left[\theta \Delta t (V_p - V) + (\rho_p - \rho)\right] u^{n+1}_{\Delta k} e^{i \lfloor \frac{-N_k}{2} \rfloor j \frac{2\pi}{N_k}} \\
&= \widetilde{u}^{n,\lfloor \frac{-N_k}{2} \rfloor}_{h,\Delta_k}
\end{aligned}$$

et donc :

$$\widetilde{u}^n_{\Delta_k|_{\Gamma^+_{N_k}}} = \widetilde{u}^{n,\lfloor \frac{N_k}{2} \rfloor}_{\Delta_k|_{y=L}} = \widetilde{u}^{n,\lfloor \frac{-N_k}{2} \rfloor}_{\Delta_k|_{y=L}} = \widetilde{u}^n_{\Delta_k|_{\Gamma^-_{N_k}}}$$

montrant ainsi que $\widetilde{u}^n_{h,\Delta k} \in V^r_{h,per}(\Omega_{N_k})$.

(ii) Formulation variationnelle dans Ω_{N_k}

Bande par bande, nous avons :

$$\begin{aligned}
\widetilde{u}^{n+1,m}_{h,\Delta k} &\equiv g^{n+1}_{h,\Delta k}|_{B^m} + \Delta k \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \sum_{j=1}^{N_k} \hat{S}_h(j\Delta k) \left[\theta \Delta t (V_p - V) + (\rho_p - \rho)\right] u^{n+1}_{\Delta k} e^{imj\Delta kL} \\
&= \Delta k \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \sum_{j=1}^{N_k} \left(\hat{g}^{n+1}_{h,\Delta k}(j\Delta k) + \hat{S}_h(j\Delta k) \left[\theta \Delta t (V_p - V) + (\rho_p - \rho)\right] u^{n+1}_{h,\Delta k} \right) e^{imj\Delta kL}
\end{aligned}$$

Alors pour tout $m \in \mathbb{Z}$ et pour tout $v_h \in V^r_{h,per}(\Omega_{N_k})$ nous avons :

$$a^P_{B^0,\theta,\Delta t}(\widetilde{u}^{n+1,m}_{h,\Delta k}, v^m_h) = \Delta k \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \sum_{j=1}^{N_k} a^P_{B^0,\theta,\Delta t} \left(\hat{g}^{n+1}_{h,\Delta k}(j\Delta k), v^m_h e^{-imj\Delta kL} \right)$$

$$+\Delta k\sqrt{\frac{L}{2\pi}}\sum_{j=1}^{N_k} a^P_{B^0,\theta,\Delta t}\left(\hat{S}_h(j\Delta k)\left[\theta\Delta t(V_p-V)+(\rho_p-\rho)\right]u^{n+1}_{h,\Delta k}, v_h^m e^{-imj\Delta kL}\right)$$

Par conséquent, comme :

$$a^P_{\Omega_{N_k},\theta,\Delta t}(\widetilde{u}^{n+1}_{h,\Delta k}, v_h) = \sum_{m=\lfloor\frac{-N_k}{2}\rfloor+1}^{\lfloor\frac{N_k}{2}\rfloor} a^P_{B^0,\theta,\Delta t}(\widetilde{u}^{n+1,m}_{h,\Delta k}, v_h^m)$$

en utilisant la notation du lemme 3.5, nous avons :

$$a^P_{\Omega_{N_k},\theta,\Delta t}(\widetilde{u}^{n+1}_{h,\Delta k}, v_h) = \Delta k\sqrt{\frac{L}{2\pi}}\sum_{j=1}^{N_k} a^P_{B^0,\theta,\Delta t}\left(\hat{g}^{n+1}_{h,\Delta k}(j\Delta k), \sigma_j(v_h)\right)$$

$$+\Delta k\sqrt{\frac{L}{2\pi}}\sum_{j=1}^{N_k} a^P_{B^0,\theta,\Delta t}\left(\hat{S}_h(j\Delta k)\left[\theta\Delta t(V_p-V)+(\rho_p-\rho)\right]u^{n+1}_{h,\Delta k}, \sigma_j(v_h)\right)$$

Comme $\sigma_j(v_h) \in V_h^r(j\Delta k)(B^0)$ en vertu du lemme 3.5, nous obtenons, par définition de $\hat{g}^{n+1}_{\Delta k}(j\Delta k)$ et $\hat{S}(j\Delta k)$:

$$a^P_{\Omega_{N_k},\theta,\Delta t}(\widetilde{u}^{n+1}_{h,\Delta k}, v_h) = \Delta k\frac{L}{2\pi}\sum_{j=1}^{N_k} a^P_{B^0,\theta-1,\Delta t}(\hat{u}^n_{h,\Delta k}(j\Delta k), \sigma_j(v_h))$$

$$+\Delta k\frac{L}{2\pi}\sum_{j=1}^{N_k}\sum_{p=-M^-}^{M^+-1}\Delta t(f^{n+\theta}_{|_{B^p}}, \sigma_j(v_h)e^{ipj\Delta kL})_{L^2(B^0)}$$

$$+\Delta k\frac{L}{2\pi}\sum_{j=1}^{N_k}\sum_{p=-M^-}^{M^+-1}([(\theta-1)\Delta t(V_p-V)+(\rho_p-\rho)]u^n_{h,\Delta k|_{B^p}}, \sigma_j(v_h)e^{ipj\Delta kL})_{L^2(B^0)}$$

$$+\Delta k\frac{L}{2\pi}\sum_{j=1}^{N_k}\sum_{p=-M^-}^{M^+-1}([\theta\Delta t(V_p-V)+(\rho_p-\rho)]u^{n+1}_{h,\Delta k|_{B^p}}, \sigma_j(v_h)e^{ipj\Delta kL})_{L^2(B^0)}$$

On réexprime alors $\sigma_j(v_h)$, et on obtient :

$$a^P_{\Omega_{N_k},\theta,\Delta t}(\widetilde{u}^{n+1}_{h,\Delta k}, v_h) = \Delta k\frac{L}{2\pi}\sum_{j=1}^{N_k}\sum_{m=\lfloor\frac{-N_k}{2}\rfloor+1}^{\lfloor\frac{N_k}{2}\rfloor} a^P_{B^0,\theta-1,\Delta t}(\hat{u}^n_{h,\Delta k}(j\Delta k)e^{imj\Delta kL}, v_h^m)$$

$$+\Delta k\frac{L}{2\pi}\sum_{j=1}^{N_k}\sum_{p=-M^-}^{M^+-1}\sum_{m=\lfloor\frac{-N_k}{2}\rfloor+1}^{\lfloor\frac{N_k}{2}\rfloor}\Delta t e^{i(m-p)j\Delta kL}(f^{n+\theta}_{|_{B^p}}, v_h^m)_{L^2(B^0)}$$

$$-\Delta k\frac{L}{2\pi}\sum_{j=1}^{N_k}\sum_{p=-M^-}^{M^+-1}\sum_{m=\lfloor\frac{-N_k}{2}\rfloor+1}^{\lfloor\frac{N_k}{2}\rfloor} e^{i(m-p)j\Delta kL}([(\theta-1)\Delta t(V_p-V)+(\rho_p-\rho)]u^n_{h,\Delta k|_{B^p}}, v_h^m)_{L^2(B^0)}$$

$$+\Delta k\frac{L}{2\pi}\sum_{j=1}^{N_k}\sum_{p=-M^-}^{M^+-1}\sum_{m=\lfloor\frac{-N_k}{2}\rfloor+1}^{\lfloor\frac{N_k}{2}\rfloor} e^{i(m-p)j\Delta kL}([\theta\Delta t(V_p-V)+(\rho_p-\rho)]u^{n+1}_{h,\Delta k|_{B^p}}, v_h^m)_{L^2(B^0)}$$

En utilisant la notation du lemme 2.3 et la définition de $v^n_{h,\Delta k}$, cette dernière expression devient :

$$a^P_{\Omega_{N_k},\theta,\Delta t}(\widetilde{u}^{n+1}_{h,\Delta k}, v_h) = \sum_{m=\lfloor\frac{-N_k}{2}\rfloor+1}^{\lfloor\frac{N_k}{2}\rfloor} a^P_{B^0,\theta-1,\Delta t}(v^{n,m}_{h,\Delta k}, v_h^m)$$

$$+\sum_{p=-M^-}^{M^+-1}\sum_{m=\lfloor\frac{-N_k}{2}\rfloor+1}^{\lfloor\frac{N_k}{2}\rfloor}\Delta t q_{\Delta k,p,m}(f^{n+\theta}_{|_{B^p}}, v_h^m)_{L^2(B^0)}$$

$$-\sum_{p=-M^-}^{M^+-1}\sum_{m=\lfloor\frac{-N_k}{2}\rfloor+1}^{\lfloor\frac{N_k}{2}\rfloor} q_{\Delta k,p,m}([(\theta-1)\Delta t(V_p-V)+(\rho_p-\rho)]u^n_{h,\Delta k|_{B^p}}, v_h^m)_{L^2(B^0)}$$

$$+\sum_{p=-M^-}^{M^+-1}\sum_{m=\lfloor\frac{-N_k}{2}\rfloor+1}^{\lfloor\frac{N_k}{2}\rfloor} q_{\Delta k,p,m}([\theta\Delta t(V_p-V)+(\rho_p-\rho)]u^{n+1}_{h,\Delta k|_{B^p}},v_h^m)_{L^2(B^0)}$$

Puis, en utilisant les propriétés de $q_{\Delta k,p,m}$ décrites dans le lemme 2.3, nous avons $q_{\Delta k,p,m}=\delta_{pm}$, pour $m\in[\![\lfloor\frac{-N_k}{2}\rfloor,\lfloor\frac{N_k}{2}\rfloor]\!]$, et il suit, en utilisant $supp\ f\cup supp\ (\rho-\rho_p)\cup supp\ (V-V_p)\subset\Omega_0$:

$$a^P_{\Omega_{N_k},\theta,\Delta t}(\widetilde{u}^{n+1}_{h,\Delta k},v_h)=a^P_{\Omega_{N_k},\theta-1,\Delta t}(v^n_{h,\Delta k},v_h)+\Delta t(f^{n+\theta},v_h)_{L^2(\Omega_{N_k})}$$
$$+([\theta\Delta t(V_p-V)+(\rho_p-\rho)]u^{n+1}_{h,\Delta k},v_h)_{L^2(\Omega_{N_k})}+([(1-\theta)\Delta t(V_p-V)+(\rho_p-\rho)]u^n_{h,\Delta k},v_h)_{L^2(\Omega_{N_k})}$$

Étudions maintenant la famille $(v^n_{h,\Delta k})_{0\le n\le N}$.

$$v^{n+1,m}_{h,\Delta k}=\Delta k\frac{L}{2\pi}\sum_{j=1}^{N_k}\hat{u}^{n+1}_{h,\Delta k}(j\Delta k)e^{imj\Delta kL}$$

Alors :

$$a^P_{B^0,\theta,\Delta t}(v^{n+1,m}_{h,\Delta k},v^m_h)=\Delta k\frac{L}{2\pi}\sum_{j=1}^{N_k}a^P_{B^0,\theta,\Delta t}(\hat{u}^{n+1}_{h,\Delta k}(j\Delta k),v^m_he^{-imj\Delta kL})$$

On somme sur m pour obtenir :

$$a^P_{\Omega_{N_k},\theta,\Delta t}(v^{n+1}_{h,\Delta k},v_h)=\Delta k\frac{L}{2\pi}\sum_{j=1}^{N_k}a^P_{B^0,\theta,\Delta t}(\hat{u}^{n+1}_{h,\Delta k}(j\Delta k),\sigma_j(v_h))$$

Par définition de $\hat{u}^{n+1}_{h,\Delta k}(j\Delta k)$, comme $\sigma_j(v_h)\in V^r_h(j\Delta k)(B^0)$, nous obtenons :

$$a^P_{\Omega_{N_k},\theta,\Delta t}(v^{n+1}_{h,\Delta k},v_h)=\Delta k\frac{L}{2\pi}\sum_{j=1}^{N_k}a^P_{B^0,\theta-1,\Delta t}(\hat{u}^n_{h,\Delta k}(j\Delta k),\sigma_j(v_h))$$

$$+\Delta k\frac{L}{2\pi}\sum_{j=1}^{N_k}\sum_{p=-M^-}^{M^+-1}\Delta t(f^{n+\theta}_{|_{B^p}},\sigma_j(v_h)e^{ipj\Delta kL})_{L^2(B^0)}$$
$$-\Delta k\frac{L}{2\pi}\sum_{j=1}^{N_k}\sum_{p=-M^-}^{M^+-1}([(\theta-1)\Delta t(V_p-V)+(\rho_p-\rho)]u^n_{h,\Delta k|_{B^p}},\sigma_j(v_h)e^{ipj\Delta kL})_{L^2(B^0)}$$
$$+\Delta k\frac{L}{2\pi}\sum_{j=1}^{N_k}\sum_{p=-M^-}^{M^+-1}([\theta\Delta t(V_p-V)+(\rho_p-\rho)]u^{n+1}_{h,\Delta k|_{B^p}},\sigma_j(v_h)e^{ipj\Delta kL})_{L^2(B^0)}$$

Les mêmes calculs et identifications que ci-dessus nous mènent à :

$$a^P_{\Omega_{N_k},\theta,\Delta t}(v^{n+1}_{h,\Delta k},v_h)=a^P_{\Omega_{N_k},\theta-1,\Delta t}(v^n_{h,\Delta k},v_h)+\Delta t(f^{n+\theta},v_h)_{L^2(\Omega_{N_k})}$$
$$+([\theta\Delta t(V_p-V)+(\rho_p-\rho)]u^{n+1}_{h,\Delta k},v_h)_{L^2(\Omega_{N_k})}+([(1-\theta)\Delta t(V_p-V)+(\rho_p-\rho)]u^n_{h,\Delta k},v_h)_{L^2(\Omega_{N_k})}$$

(iv) Conclusion

Nous avons donc montré qu'à n fixé, $v^{n+1}_{h,\Delta k}$ et $\widetilde{u}^{n+1}_{h,\Delta k}$ sont solutions du même problème variationnel, bien posé en vertu du théorème 6.1, puisque par hypothèse $u^n_{h,\Delta k}\in L^2(\Omega_0)$. Nous en déduisons donc que $v^n_{h,\Delta k}=\widetilde{u}^n_{h,\Delta k}$, pour tout n. Alors :

$$a^P_{\Omega_{N_k},\theta,\Delta t}(\widetilde{u}^{n+1}_{h,\Delta k},v_h)=a^P_{\Omega_{N_k},\theta-1,\Delta t}(\widetilde{u}^n_{h,\Delta k},v_h)+\Delta t(f^{n+\theta},v_h)_{L^2(\Omega_{N_k})}$$
$$+([\theta\Delta t(V_p-V)+(\rho_p-\rho)]u^{n+1}_{h,\Delta k},v_h)_{L^2(\Omega_{N_k})}-([(\theta-1)\Delta t(V_p-V)+(\rho_p-\rho)]u^n_{h,\Delta k},v_h)_{L^2(\Omega_{N_k})}$$

Comme $\widetilde{u}^{n+1}_{h,\Delta k}|_{\Omega_0}=u^{n+1}_{h,\Delta k}$, et $supp\ (\rho-\rho_p)\cup supp\ (V-V_p)\subset\Omega_0$, nous avons :

$$[\theta\Delta t(V_p-V)+(\rho_p-\rho)]u^{n+1}_{h,\Delta k}=[\theta\Delta t(V_p-V)+(\rho_p-\rho)]\widetilde{u}^{n+1}_{h,\Delta k}$$

et

$$[(\theta-1)\Delta t(V_p-V)+(\rho_p-\rho)]u^n_{h,\Delta k}=[(\theta-1)\Delta t(V_p-V)+(\rho_p-\rho)]\widetilde{u}^n_{h,\Delta k}$$

et l'expression ci-dessus se réécrit :

$$a_{\Omega_{N_k},\theta,\Delta t}(\widetilde{u}^{n+1}_{h,\Delta k},v_h)=a_{\Omega_{N_k},\theta-1,\Delta t}(\widetilde{u}^n_{h,\Delta k},v_h)+\Delta t(f^{n+\theta},v_h)_{L^2(\Omega_{N_k})}$$

soit le résultat annoncé. Notons enfin que ce problème est bien posé en vertu du théorème 4.2. □

Remarquons que (7.59) est une approximation variationnelle dans $V^r_{h,per}(\Omega_{N_k})$ de (7.29). L'équation de Lippmann-Schwinger complètement discrète se réinterprète donc comme une approximation par éléments finis du problème en lequel l'équation non discrétisée se réinterprétait.

Caractère bien posé de l'équation complètement discrétisée

Nous déduisons immédiatement de la réinterprétation ci-dessus :

Théorème 7.13. *Sous les hypothèses (HT), il existe une unique famille* $(u^n_{h,\Delta k})_{0\leq n\leq N} \in V^r_h(\Omega_0)^{N+1}$ *telle que :*

$$\left| \begin{array}{l} (I - S_{0,\theta,\Delta t,h,\Delta k})u^n_{h,\Delta k} = g^n_{h,\Delta k}|_{\Omega_0} \quad \forall\ 1 \leq n \leq N \\ u^0_{h,\Delta k} = I^r_h u_0 \end{array} \right. \tag{7.58}$$

où $g^n_{h,\Delta k}$ *est donnée par* (7.57)*, avec* $\left(\hat{g}^n_{h,\Delta k}(j\Delta k)\right)_{\substack{1\leq n\leq N \\ 1\leq j\leq N_k}}$ *et* $\left(\hat{u}^n_{h,\Delta k}(j\Delta k)\right)_{\substack{0\leq n\leq N \\ 1\leq j\leq N_k}}$ *les solutions de* (7.55) *et* (7.53)*, associées à la famille* $u^n_{h,\Delta k}$*.*

Démonstration. Il suffit de montrer que l'opérateur $I - S_{0,\theta,\Delta t,h,\Delta k}$ pour prouver le résultat. Comme $V^r_h(\Omega)$ est de dimension finie il nous faut seulement démontrer son injectivité. Supposons que $u_{h,\Delta k}$ soit tel que :

$$(I - S_{0,\theta,\Delta t,h,\Delta k})u_{h,\Delta k} = 0$$

On construit alors son extension $\widetilde{u}_{h,\Delta k}$, qui d'après le théorème 7.12 est solution de (7.59) au premier pas de temps, sans source ni donnée initiale. Comme ce problème est bien posé, nous savons alors que $\widetilde{u}_{h,\Delta k} = 0$. Par conséquent $u_{h,\Delta k} = 0$, et le résultat est démontré. □

Estimation d'erreur globale

Obtenir une estimation d'erreur va s'avérer fort simple à partir des résultats que nous avons obtenus. En effet, il suffit de remarquer que le problème (7.59) : trouver $(\widetilde{u}^n_{h,\Delta k})_{0\leq n\leq N} \in V^r_{h,per}(\Omega_{N_k})^{N+1}$ tel que :

$$\left| \begin{array}{l} a_{\Omega_{N_k},\theta,\Delta t}(\widetilde{u}^{n+1}_{h,\Delta k}, v_h) = a_{\Omega_{N_k},\theta-1,\Delta t}(\widetilde{u}^n_{h,\Delta k}, v_h) + (f, v_h)_{L^2(\Omega_{N_k})} \quad \forall v_h \in V^r_{h,per}(\Omega_{N_k}) \\ \widetilde{u}^0_{h,\Delta k} = I^r_h u_0 \end{array} \right. \tag{7.59}$$

n'est rien d'autre qu'une approximation en temps et en espace du problème de guide : trouver $u_{\Delta k} \in C^0(0,T,H^1\xi(\Delta,\Omega_{N_k})) \cap C^1(0,T,L^2(\Omega_{N_k}))$ tel que :

$$\left| \begin{array}{ll} \gamma\rho\dfrac{\partial u_{\Delta k}}{\partial t} - \Delta u_{\Delta k} + V u_{\Delta k} = f & \text{dans } \Omega_{N_k} \\ u_{\Delta k}|_{\Gamma^+_{N_k}} = u_{\Delta k}|_{\Gamma^-_{N_k}} & \\ \partial_y u_{\Delta k}|_{\Gamma^+_{N_k}} = \partial_y u_{\Delta k}|_{\Gamma^-_{N_k}} & \\ u_{\Delta k}(x,0) = u_0 & \text{dans } \Omega_{N_k} \end{array} \right. \tag{7.30}$$

de la même façon que (7.29) en était une approximation en temps seulement. Alors, non seulement nous sommes encore une fois assurés de la convergence de la méthode numérique finale, mais nous savons également estimer l'erreur commise en effectuant pareille approximation en vertu des résultats du chapitre 6, c'est-à-dire sans démonstration supplémentaire. Mais d'autre part, nous avons déjà étudié l'écart entre la solution de (7.30) vers laquelle converge la méthode numérique à N_k fixé, et celle de (7.1). Aussi, nous obtenons directement, en combinant ces deux estimations via l'inégalité triangulaire, le résultat suivant :

Théorème 7.14. *Si* $(u^n_{h,\Delta k})_{0\leq n\leq N}$ *est la solution de* (7.58) *et* $(\widetilde{u}^n_{h,\Delta k})_{0\leq n\leq N}$ *son extension, et si* u *désigne la solution de* (7.1)*, alors on a les estimations suivantes :*

- *Dans le cas de l'équation de la chaleur, pour tout* $\tau < 1$*, sous les hypothèses de régularité du théorème 7.9 :*

$$||u(\cdot, n\Delta k) - \widetilde{u}^n_{h,\Delta k}||_{L^2(\Omega_{N_k})} \leq C(T\Delta t + Th^2 + e^T e^{-\tau\lfloor\frac{N_k}{2}\rfloor L}) \tag{7.60}$$

et

$$||u(\cdot, n\Delta k) - u^n_{h,\Delta k}||_{L^2(\Omega_0)} \leq C(T\Delta t + Th^2 + e^T e^{-\tau\lfloor\frac{N_k}{2}\rfloor L}) \tag{7.61}$$

– *Dans le cas de l'équation de Schrodïnger, si la solution est suffisamment régulière (au sens du théorème 7.11), avec* $\lambda = 0$ *si* $V > 0$ *et* $\lambda > ||V||_{L^\infty}$ *sinon. :*

$$||u(\cdot, n\Delta k) - \widetilde{u}^n_{h,\Delta k}||_{L^2(\Omega_{N_k})} \leq C\left(T\Delta t + Th^2 \right.$$
$$\left. + e^{\lambda T}\left(\int_0^T ||\partial_t\psi||^2_{H^{-1/2}(\mathbb{R})} + ||\partial_t\varphi||^2_{H^{1/2}(\mathbb{R})} + ||\partial_t^2\varphi||^2_{H^{1/2}(\mathbb{R})}\right)^{1/2}\right) \tag{7.62}$$

et

$$||u(\cdot, n\Delta k) - u^n_{h,\Delta k}||_{L^2(\Omega_0)} \leq C\left(\Delta t + h^2 \right.$$
$$\left. + e^{\lambda T}\left(\int_0^T ||\partial_t\psi||^2_{H^{-1/2}(\mathbb{R})} + ||\partial_t\varphi||^2_{H^{1/2}(\mathbb{R})} + ||\partial_t^2\varphi||^2_{H^{1/2}(\mathbb{R})}\right)^{1/2}\right) \tag{7.63}$$

avec $\varphi = u_{|_{\Gamma^+_{N_k}}} - u_{|_{\Gamma^-_{N_k}}}$ *et* $\psi = \partial_y u_{|_{\Gamma^+_{N_k}}} - \partial_y u_{|_{\Gamma^-_{N_k}}}$.

La méthode complètement discrétisée possède donc les mêmes propriétés de convergence en temps et en espace que ce que nous obtiendrions pour un problème posé sur un domaine borné discrétisé par le même schéma numérique. À cette erreur de discrétisation s'ajoute l'erreur due à la quadrature, que nous maîtrisons totalement dans le cas de la chaleur, et un peu moins dans le cas de l'équation de Schrödinger. Dans tous les cas, nous savons que la problème discret converge vers une approximation du problème continu, et nous obtenons donc en particulier sa stabilité (sous condition CFL si besoin est).

7.1.7 Le cas de plusieurs défauts linéiques

Nous allons encore une fois nous appliquer à étendre la méthode que nous avons développée dans le cas d'un seul défaut linéique séparant deux milieux périodiques au cas de plusieurs défauts linéiques dans un seul milieu périodique de fond, comme nous l'avons fait chaque fois que nous disposions d'une méthode pour traiter le cas d'un défaut. L'opération devenant à ce stade sans doute quelque peu répétitive, nous allons nous employer à expliciter seulement les différences entre les deux situations. Comme le lecteur s'en doutera certainement à ce stade, la véritable différence se situe au niveau de la résolution des problèmes de guide résultant de la TFB, puisque nous allons passer de problèmes présentant non plus un mais plusieurs défauts. Mais il s'agit d'une problématique que nous avons déjà intégralement traitée dans les chapitres précédents, ce qui va nous autoriser un exposé relativement bref.

Problème modèle et équation de Lippmann-Schwinger

Nous considérons une situation similaire à celle traitée dans les chapitres 2 et 3. On désigne par $(\widetilde{\Omega}_i)_{1\leq i\leq N_d}$ les N_d défauts linéiques, définis par :

$$\widetilde{\Omega}_i = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \middle|\ q^i_- L_x \leq x \leq q^i_+ L_x\right\}$$

avec L_x la période dans la direction x du milieu de référence, et $q^i_\pm \in \mathbb{Z}$. Ces défauts linéiques sont localement pertubés par N_s défauts bornés, notés $(\Omega_j)_{1\leq j\leq N_s}$, qui sont de la forme :

$$\Omega_j =]\widetilde{q}^i_- L_x, \widetilde{q}^i_+ L_x[\times]p^j_- L, p^j_+ L[$$

avec $\widetilde{q}^j_\pm$ et $p^j_\pm$ appartenant à $\mathbb{Z}$ avec :

$$\left\{\widetilde{q}^j_-, \widetilde{q}^j_+\right\}_{1\leq j\leq N_s} \subset \left\{q^j_-, q^j_+\right\}_{1\leq j\leq N_d}$$

(ce qui rappelons-le signifie que pour tout j dans $[\![1, N_s]\!]$, il existe un i dans $[\![1, N_d]\!]$ tel que $\Omega_j \subset \widetilde{\Omega_i}$, i.e. les défauts bornés sont tous inclus dans un défaut linéique, on dira que ce défaut linéique est numéroté $i(j)$). On posera enfin :

$$\Omega_0 = \bigcup_{j=1}^{N_s} \Omega_j$$

l'ensemble des défauts bornés. Les coefficients ρ et V seront supposés périodiques dans la direction

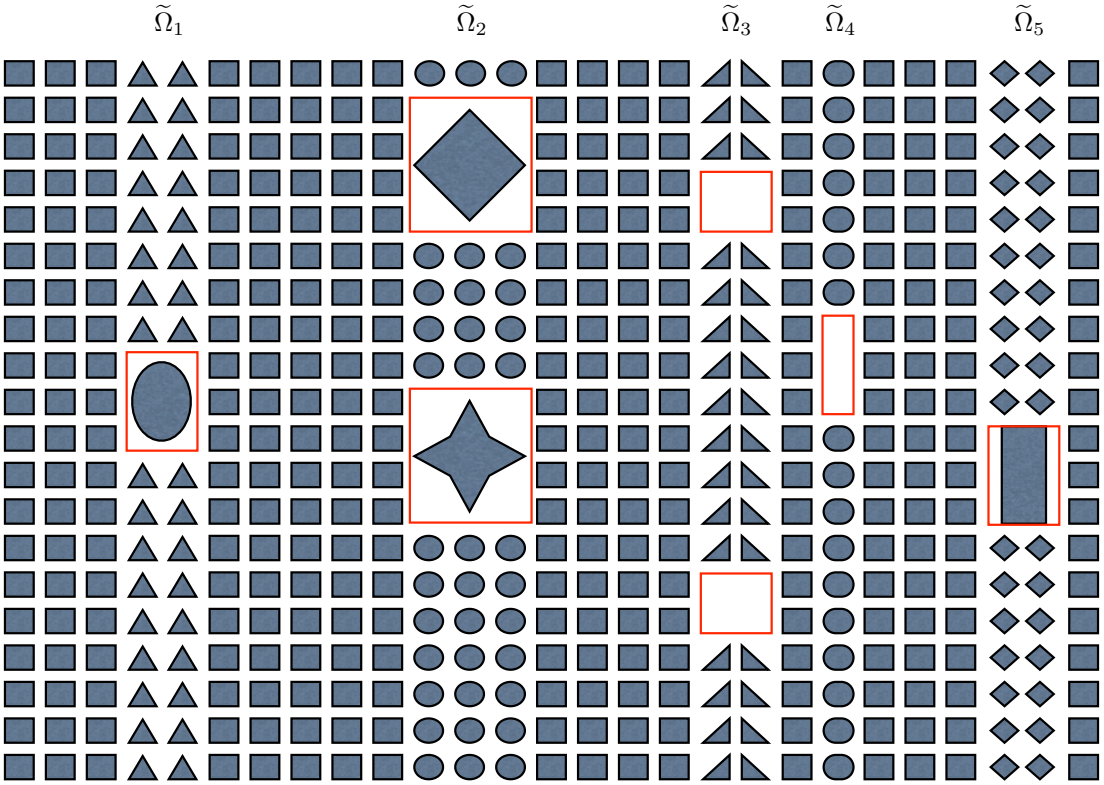


FIGURE 7.7 – Exemple de milieu périodique perturbé par plusieurs défauts linéiques

y en dehors de Ω_0, c'est-à-dire qu'il existe $\rho_p \in L^\infty(\mathbb{R})^2$, tel que $supp\ (\rho - \rho_p) \subset \Omega_0$, et presque pour tout (x, y), $\rho_p(x, y + L) = \rho_p(x, y)$, et $V_p \in L^\infty(\mathbb{R})^2$, tel que $supp\ (V - V_p) \subset \Omega_0$, et presque pour tout (x, y), $V_p(x, y + L) = V_p(x, y)$. Ce milieu de "fond" périodique en y, est représenté sur la figure 7.9. En dehors des défauts linéiques, le milieu est supposé doublement périodique, i.e. il existe $\rho_{ref} \in L^\infty(\mathbb{R})^2$ et $V_{ref} \in L^\infty(\mathbb{R})^2$ tels que presque pour tout (x, y), $\rho_{ref}(x, y + L) = \rho_{ref}(x, y)$, $\rho_{ref}(x + L_x, y) = \rho_{ref}(x, y)$, $V_{ref}(x, y + L) = V_{ref}(x, y)$ et $V_{ref}(x + L_x, y) = V_{ref}(x, y)$, et :

$$\rho = \rho_{ref} \text{ dans } \mathbb{R}^2 \setminus \bigcup_{i=1}^{N_d} \widetilde{\Omega}_i \quad \text{et} \quad V = V_{ref} \text{ dans } \mathbb{R}^2 \setminus \bigcup_{i=1}^{N_d} \widetilde{\Omega}_i$$

En particulier, on aura aussi :

$$\rho_p = \rho_{ref} \text{ dans } \mathbb{R}^2 \setminus \bigcup_{i=1}^{N_d} \widetilde{\Omega}_i \quad \text{et} \quad V_p = V_{ref} \text{ dans } \mathbb{R}^2 \setminus \bigcup_{i=1}^{N_d} \widetilde{\Omega}_i$$

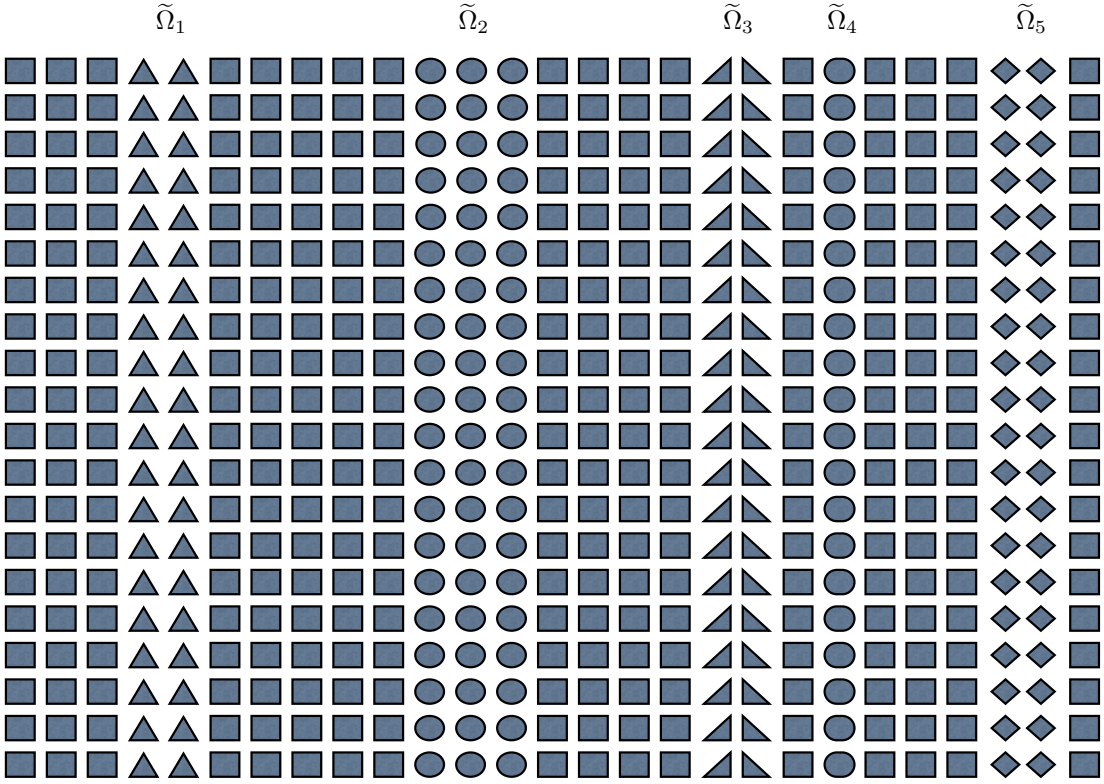


FIGURE 7.8 – Le milieu de "référence " pour l'exemple de la figure 7.7

Nous cherchons toujours à résoudre :

$$\left| \begin{array}{ll} \gamma\rho\dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + Vu = f & \text{dans } \mathbb{R}^2, \quad t > 0 \\ u(\cdot, 0) = u_0 & \text{dans } \mathbb{R}^2 \end{array} \right. \tag{7.1}$$

et nous construisons une méthode numérique sur sa semi-discrétisation en temps : trouver $(u^n)_{0\leq n\leq N} \in H^1(\Omega)^{N+1}$ tel que :

$$\left| \begin{array}{lll} \gamma\rho\dfrac{u^{n+1}-u^n}{\Delta t} + (-\Delta + V)(\theta u^{n+1} + (1-\theta)u^n) = f^{n+\theta} & \text{dans } \mathbb{R}^2 & 0 \leq n \leq N \\ u^0(\cdot) = u_0(\cdot) & \text{dans } \mathbb{R}^2 & \end{array} \right. \tag{7.2}$$

Comme Ω_0 est borné, il est évident que résoudre ce problème peut encore se réduire à la résolution de l'équation de Lippmann-Schwinger. Posons :

$$A_P(\theta, \Delta t)g^{n+1} = A_P(\theta - 1, \Delta t)u^n + \Delta t f^{n+\theta} + \left[(1-\theta)\Delta t(V_p - V) + (\rho_p - \rho)\right] u^n \tag{7.5}$$

$$\begin{array}{rcl} S : L^2(\Omega_0) & \longrightarrow & H^1(\mathbb{R}^2) \\ f & \longmapsto & Sf \end{array}$$

où Sf est défini comme l'unique solution dans $H^1(\mathbb{R}^2)$ de :

$$A_P(\theta, \Delta t)Sf = f \tag{7.4}$$

et :

$$\begin{aligned} S_{0,\theta,\Delta t} : L^2(\Omega_0) &\longrightarrow H^1(\mathbb{R}^2) \\ f &\longmapsto S\left[\theta\Delta t(V_p - V) + (\rho_p - \rho)\right] f|_{\Omega_0} \end{aligned}$$

Alors à chaque pas de temps, notre problème est équivalent à trouver $u^{n+1}|_{\Omega_0} \in L^2(\Omega_0)$ tel que :

$$(I - S_{0,\theta,\Delta t})u^{n+1}|_{\Omega_0} = g^{n+1}|_{\Omega_0} \tag{7.7}$$

puisque, rappelons-le, seul le caractère borné de Ω_0 est nécessaire pour établir ce résultat. Si nous pouvons encore calculer les divers opérateurs et sources intervenant dans ce problème dans le cas du scattering multiple, alors nous aurons réduit un nouveau problème non borné à un problème borné.

Détermination des opérateurs et sources en scattering multiple

Comme le milieu de "fond" est périodique en y, nous pouvons toujours espérer simplifier le problème en lui appliquant la TFB dans la direction y. Rappelons qu'en utilisant la formule explicite pour la TFB de fonctions L^2, nous avons, si *supp* $f \subset \Omega_0$:

$$\mathcal{F}f = \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \sum_{j=1}^{N_s} \sum_{p=p_-^j}^{p_+^j - 1} f_{j,p} e^{-ip\xi L}$$

si on note $f_{|\Omega_j^p} \equiv f_{j,p}$. Alors dans ce cas, l'équivalent du théorème 7.2 est le résultat suivant (qui se démontre rigoureusement de la même façon, aussi nous ne reproduisons pas sa preuve ici) :

Théorème 7.15. *Soit $\hat{S}(\xi)f$ la TFB de Sf, $\hat{g}^n(\xi)$ celle de g^n et $\hat{u}^n(\xi)$ celle de u^n. Alors $\hat{S}(\cdot)f$ est l'unique élément de $L^2(\mathbb{R} \times [0, L] \times [0, 2\pi/L])$ qui presque tout $\xi \in [0, 2\pi/L]$ soit solution dans $H^1_\xi(B^0)$ pour de :*

$$\left| \begin{array}{l} A_P(\theta, \Delta t)\hat{S}(\xi)f \equiv \sqrt{\dfrac{L}{2\pi}} \displaystyle\sum_{j=1}^{N_s} \sum_{p=p_-^j}^{p_+^j - 1} f_{|\Omega_j^p} e^{-ip\xi L} \quad \text{dans } B^0 \\ \partial_y \hat{S}(\xi)f_{|y=L} = e^{i\xi L} \partial_y \hat{S}(\xi)f_{|y=0} \end{array} \right. \tag{7.64}$$

Pour tout $0 \leq n \leq N-1$, $\hat{g}^{n+1}(\cdot)$ est l'unique élément de $L^2(\mathbb{R} \times [0, L] \times [0, 2\pi/L])$ qui pour presque tout $\xi \in [0, 2\pi/L]$ soit solution dans $H^1_\xi(B^0)$ de :

$$\left| \begin{array}{l} A_P(\theta, \Delta t)\hat{g}^{n+1}(\xi) \equiv A_P(\theta - 1, \Delta t)\hat{u}^n(\xi) + \sqrt{\dfrac{L}{2\pi}} \Delta t \displaystyle\sum_{j=1}^{N_s} \sum_{p=p_-^j}^{p_+^j - 1} f^{n+\theta}_{|\Omega_j^p} e^{-ip\xi L} \\ -\sqrt{\dfrac{L}{2\pi}} \displaystyle\sum_{j=1}^{N_s} \sum_{p=p_-^j}^{p_+^j - 1} \left[(\theta - 1)\Delta t(V_p - V) + (\rho_p - \rho)\right] u^n_{|\Omega_j^p} e^{-ip\xi L} \qquad \text{dans } B^0 \\ \partial_y \hat{g}^{n+1}(\xi)_{|y=L} = e^{i\xi L} \partial_y \hat{g}^{n+1}(\xi)_{|y=0} \end{array} \right. \tag{7.65}$$

Enfin, $(\hat{u}^n(\cdot))_{0 \leq n \leq N}$ est l'unique famille de $L^2(\mathbb{R} \times [0, L] \times [0, 2\pi/L])^{N+1}$ qui pour presque tout

$\xi \in [0, 2\pi/L]$ *soit solution dans* $H^1_\xi(B^0)$ *de :*

$$\left|\begin{array}{l} A_P(\theta,\Delta t)\hat{u}^{n+1}(\xi) \equiv A_P(\theta-1,\Delta t)\hat{u}^n(\xi) + \sqrt{\frac{L}{2\pi}}\Delta t \sum_{j=1}^{N_s}\sum_{p=p^j_-}^{p^j_+-1} f^{n+\theta}_{|_{\Omega^p_j}} e^{-ip\xi L} \\ +\sqrt{\frac{L}{2\pi}}\sum_{j=1}^{N_s}\sum_{p=p^j_-}^{p^j_+-1}\left[\theta\Delta t(V_p-V)+(\rho_p-\rho)\right] u^{n+1}_{|_{\Omega^p_j}} e^{-ip\xi L} \\ -\sqrt{\frac{L}{2\pi}}\sum_{j=1}^{N_s}\sum_{p=p^j_-}^{p^j_+-1}\left[(\theta-1)\Delta t(V_p-V)+(\rho_p-\rho)\right] u^{n}_{|_{\Omega^p_j}} e^{-ip\xi L} \qquad \textit{dans } B^0 \\ \partial_y\hat{u}^{n+1}(\xi)_{|_{y=L}} = e^{i\xi L}\partial_y\hat{u}^{n+1}(\xi)_{|_{y=0}} \\ \hat{u}^0(\xi) = \sqrt{\frac{L}{2\pi}}\sum_{j=1}^{N_s}\sum_{p=p^j_-}^{p^j_+-1} u_{0|_{\Omega^p_j}} e^{-ip\xi L} \end{array}\right. \tag{7.66}$$

Il s'agit, comme on pouvait s'y attendre, de problèmes de guide périodique localement perturbés par plusieurs défauts bornés, avec conditions aux limites quasi-périodiques. Les divers seconds membres autres que ceux donnés par les récurrences, c'est-à-dire ceux pouvant être considérés comme des sources sont en effet à support dans un compact fixe :

$$\Omega^0_0 = \left(\bigcup_{i=1}^{N_d}\widetilde{\Omega}_i\right)\cap B^0 = \left(\bigcup_{i=1}^{N_d}]q^i_- L, q^i_+ L[\right)\times]0, L[$$

puisque tous les Ω_j sont inclus dans un $\widetilde{\Omega_i}$, et donc :

$$\Omega_0 \subset \bigcup_{i=1}^{N_d}\widetilde{\Omega}_i$$

On notera $\Omega_{W,i} =]q^i_- L, q^i_+ L[\times]0, L[$, les défauts bornés du problème de guide, de sorte que :

$$\Omega^0_0 = \bigcup_{i=1}^{N_d}\Omega_{W,i}$$

et $\Gamma_{W,j} = \partial\Omega^0_{0,j} \setminus \partial B^0$. Le guide périodique localement perturbé obtenu est représenté sur la figure 7.8. Mais nous avons appris aux chapitres 4 et 5 comment ramener la résolution de pareils problèmes

FIGURE 7.9 – Le guide obtenu par TFB du milieu de référence de la figure 7.8

à la résolution de problèmes posés en domaine borné. Aussi, par application direct des résultats du chapitre 5, et en procédant comme d'habitude pour réinterpréter $\hat{g}^{n+1}$ comme le $n+1$-ième pas

de temps d'un problème de guide, nous savons qu'il est équivalent de résoudre les trois problèmes suivants, si on pose :

$$\begin{aligned} \hat{S}_0(\xi) : L^2(\Omega_0) &\longrightarrow H^1_\xi(\Omega_0^0) \\ f &\longmapsto \hat{S}(\xi) f|_{\Omega_0^0} \end{aligned}$$

Trouver $\hat{S}_0(\xi) f \in H^1_\xi(\Omega_0)$ tel que :

$$\left| \begin{array}{ll} A_P(\theta, \Delta t)\hat{S}_0(\xi) f \equiv \sqrt{\dfrac{L}{2\pi}} \displaystyle\sum_{j=1}^{N_s} \sum_{p=p_-^j}^{p_+^j-1} f_{|_{\Omega_j^p}} e^{-ip\xi L} & \text{dans } \Omega_0^0 \\ \partial_{\nu_0} \hat{S}_0(\xi) f + \widetilde{\Lambda}^1(\xi)\widetilde{\varphi}_S(\xi)|_{\Gamma_{W,0}} = 0 & \text{sur } \Gamma_{W,0} \\ \Theta^1 \widetilde{\varphi}_S(\xi) = \hat{S}_0(\xi) f|_{\Gamma_{W,0}} \partial_y \hat{S}_0(\xi) f_{|_{y=L}} = e^{i\xi L} \partial_y \hat{S}_0(\xi) f_{|_{y=0}} & \end{array} \right. \tag{7.67}$$

Trouver $(\hat{u}^{n+1}(\xi))_{0 \le n \le N}$ dans $H^1_\xi(\Omega_0^0)^{N+1}$ telle que :

$$\left| \begin{array}{ll} A_P(\theta, \Delta t)\hat{u}^{n+1}(\xi) \equiv A_P(\theta - 1, \Delta t)\hat{u}^n(\xi) + \sqrt{\dfrac{L}{2\pi}} \Delta t \displaystyle\sum_{j=1}^{N_s} \sum_{p=p_-^j}^{p_+^j-1} f^{n+\theta}_{|_{\Omega_j^p}} e^{-ip\xi L} & \\ + \sqrt{\dfrac{L}{2\pi}} \displaystyle\sum_{j=1}^{N_s} \sum_{p=p_-^j}^{p_+^j-1} \left[\theta \Delta t (V_p - V) + (\rho_p - \rho)\right] u^{n+1}_{|_{\Omega_j^p}} e^{-ip\xi L} & \\ - \sqrt{\dfrac{L}{2\pi}} \displaystyle\sum_{j=1}^{N_s} \sum_{p=p_-^j}^{p_+^j-1} \left[(\theta - 1) \Delta t (V_p - V) + (\rho_p - \rho)\right] u^{n}_{|_{\Omega_j^p}} e^{-ip\xi L} & \text{dans } \Omega_0^0 \\ \partial_y \hat{u}^{n+1}(\xi)_{|_{y=L}} = e^{i\xi L} \partial_y \hat{u}^{n+1}(\xi)_{|_{y=0}} & \\ \partial_{\nu_0} \hat{u}^{n+1}(\xi) + \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \widetilde{\Lambda}^k(\xi) \widetilde{\varphi}^{n+1-k+1}(\xi) = 0 & \text{sur } \Gamma_{W,0} \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \Theta^k \widetilde{\varphi}^{n+1-k+1}(\xi) = \hat{u}^{n+1}(\xi)|_{\Gamma_{W,0}} & \\ \hat{u}^0(\xi) = \sqrt{\dfrac{L}{2\pi}} \displaystyle\sum_{j=1}^{N_s} \sum_{p=p_-^j}^{p_+^j-1} u_{0|_{\Omega_j^p}} e^{-ip\xi L} & \end{array} \right. \tag{7.68}$$

Trouver $\hat{g}^{n+1}(\xi) \in H^1_\xi(\Omega_0)$ tel que :

$$\left|\begin{array}{ll} A_P(\theta,\Delta t)\hat{g}^{n+1}(\xi) \equiv A_P(\theta-1,\Delta t)\hat{u}^n(\xi) + \sqrt{\frac{L}{2\pi}}\Delta t \sum_{j=1}^{N_s}\sum_{p=p^j_-}^{p^j_+-1} f^{n+\theta}_{|_{\Omega^p_j}} e^{-ip\xi L} & \\ -\sqrt{\frac{L}{2\pi}}\sum_{j=1}^{N_s}\sum_{p=p^j_-}^{p^j_+-1}\left[(\theta-1)\Delta t(V_p-V)+(\rho_p-\rho)\right] u^n_{|_{\Omega^p_j}} e^{-ip\xi L} & \text{dans } \Omega^0_0 \\ \partial_y \hat{g}^{n+1}(\xi)_{|_{y=L}} = e^{i\xi L}\partial_y \hat{g}^{n+1}(\xi)_{|_{y=0}} & \\ \partial_{\nu_0}\hat{g}^{n+1}(\xi) + \widetilde{\Lambda}^1(\xi)\widetilde{\varphi}^{n+1}_g(\xi) = -\sum_{k=2}^{n+1}\widetilde{\Lambda}^k(\xi)\widetilde{\varphi}^{n+1-k+1}(\xi) & \text{sur } \Gamma_{W,0} \\ \Theta^1\widetilde{\varphi}^{n+1}_g(\xi) + \sum_{k=2}^{n+1}\Theta^k\widetilde{\varphi}^{n+1-k+1} = \hat{g}^{n+1}(\xi)|_{\Gamma_0} & \end{array}\right. \tag{7.69}$$

Alors, rappelons que chaque Ω_j étant inclus dans un $\widetilde{\Omega}_i$, il est situé à la verticale d'un seul $\Omega_{W,i}$. La TFB inverse dans Ω_j ne dépendra donc que des seules valeurs prises dans ce $\Omega_{W,i}$ particulier, que l'on notera $\Omega_{W,i(j)}$. Alors, pour tout $j \in [\![1, N_s]\!]$ et tout $m \in [\![p^j_- - , p^j_+ + -1]\!]$, nous avons les formules suivantes pour $S_{0,\theta,\Delta t}$ et g^n :

$$S_{0,\theta,\Delta t} f|_{\Omega^m_j} \equiv \sqrt{\frac{L}{2\pi}}\int_0^{2\pi/L} (\hat{S}_0(\xi)\left[\theta\Delta t(V_p-V)+(\rho_p-\rho)\right] f)|_{\Omega_{W,i(j)}} e^{i\xi mL} d\xi$$

$$g^n|_{\Omega^m_j} \equiv \sqrt{\frac{L}{2\pi}}\int_0^{2\pi/L} \hat{g}^n(\xi)|_{\Omega_{W,i(j)}} e^{i\xi mL} d\xi$$

et nous avons donc obtenu une formulation complètement posée en domaine borné. Alors nous pouvons traiter le problème avec plusieurs défauts linéiques de la même façon que nous avons traité le cas d'un seul défaut.

Quadrature dans la variable de Floquet

Maintenant, il convient de discrétiser les intégrales intervenant dans les expressions ci-dessus. Si nous utilisons encore la règle des trapèzes, ces expressions deviennent :

$$S_{0,\theta,\Delta t,\Delta k} f|_{\Omega^m_j} \equiv \Delta k\sqrt{\frac{L}{2\pi}}\sum_{j=1}^{N_k} (\hat{S}_0(j\Delta k)\left[\theta\Delta t(V_p-V)+(\rho_p-\rho)\right] f)|_{\Omega_{W,i(j)}} e^{ijm\Delta kL}$$

$$g^n_{\Delta k}|_{\Omega^m_j} \equiv \Delta k\sqrt{\frac{L}{2\pi}}\sum_{j=1}^{N_k} \hat{g}^n_{\Delta k}(j\Delta k)|_{\Omega_{W,i(j)}} e^{ijm\Delta kL}$$

où $\hat{g}^n_{\Delta k}(j\Delta k)$ est défini via (7.69) à partir de $\hat{u}^n(j\Delta k)$, elle-même définie à partir de (7.68), étant donnée une famille $(u^n_{\Delta k})_{0\le n\le N} \in L^2(\Omega_0)^{N+1}$. Alors bien entendu, le problème approché par quadrature s'écrit encore : trouver $(u^n_{h,\Delta k})_{0\le n\le N} \in V^r_h(\Omega_0)^{N+1}$ telle que :

$$\left|\begin{array}{l} (I - S_{0,\theta,\Delta t,h,\Delta k})u^n_{h,\Delta k} = g^n_{h,\Delta k}|_{\Omega_0} \quad \forall\ 1 \le n \le N \\ u^0_{h,\Delta k} = I^r_h u_0 \end{array}\right. \tag{7.70}$$

La question de l'existence et de l'unicité de ce problème se traite exactement de la même manière que dans le cas d'un seul défaut. Les résultats des sections précédentes s'appliquent directement,

et on montre que l'extension $(\widetilde{u}^n_{h,\Delta k})_{0\leq n\leq N}$ à tout le plan de $(u^n_{h,\Delta k})_{0\leq n\leq N}$ est solution de (7.29). Alors on obtient le caractère bien posé via cette réinterprétation et l'alternative de Fredholm, et on en déduit que les résultats de convergence du cas d'un seul défaut sont encore valables dans ce cas. Toutes les démonstrations et tous les raisonnements étant identiques, nous ne les reproduisons pas ici, dans l'espoir d'alléger quelque peu l'exposé.

Un mot pour finir sur la discrétisation spatiale de ce problème. Les problèmes de guide avec plusieurs défauts se traitent par la méthode du chapitre 6, comme précédemment. Alors le problème complètement discret que l'on définit ainsi se réinterprète comme une approximation espace-temps de (7.30), comme dans le cas d'un seul défaut (et la preuve est encore une fois identique dans les deux cas). Alors il est clair que l'on peut là aussi étendre directement les résultats de convergence du cas d'un seul défaut au cas de plusieurs défauts (et que nous ne reproduisons pas les démonstrations pour éviter une fastidieuse répétition).

Le cas particulier des défauts bornés

De la même façon que nous l'avons fait dans le cas du régime harmonique, signalons pour conclure ce tour d'horizon des problèmes de scattering multiple qu'il est encore possible de développer une méthode "complètement LS" dans le cas où $\rho_p = \rho_{ref}$ dans $\mathbb{R}^2\backslash\Omega_0$, et donc que tous les vrais défauts sont bornés (voir figure 7.10). Dans pareille configuration, l'approche la plus naturelle serait de chercher à construire des opérateurs DtN directement sur la frontière de Ω_0. Nous présentons en annexe C une méthode pour obtenir ces opérateurs du point de vue théorique. Malheureusement, ainsi que nous l'expliquons dans cette annexe, cette méthode, qui généralise aux problèmes d'évolution les idées de [37] pour le cas harmonique, est quasiment inutilisable en pratique. De plus, son analyse numérique est tout aussi ardue que celle de la méthode de [37], puisqu'elle implique toutjours la discrétisation d'une équation intégrale non classique. Notre recherche d'une méthode alternative à celle que nous venons de développer et qui tirerait partie de la double périodicité du milieu extérieur doit donc suivre une autre voie. Comme dans le cas harmonique, le principe va être d'appliquer une double TFB à l'équation de Lippmann-Schwinger. La TFB dans les deux directions d'une fonction à support dans Ω_0 est donnée par :

$$\mathcal{F}_{x,y}f \equiv \sqrt{\frac{LL_x}{4\pi^2}}\sum_{j=1}^{N_s}\sum_{m=\widetilde{q}^j_-}^{\widetilde{q}^j_+-1}\sum_{n=p^j_-}^{p^j_+-1} f_{|_{P_{m,n}}}e^{-in\xi_y L}e^{-im\xi_x L_x}$$

où

$$P_{m,n} =]mL_x,(m+1)L_x[\times]nL,(n+1)L[$$

Alors, on montre que :

Théorème 7.16. *Soit $\hat{S}(\xi_x,\xi_y)f$ la double TFB de Sf, $\hat{g}^n(\xi_x,\xi_y)$ celle de g^n et $\hat{u}^n(\xi_x,\xi_y)$ celle de u^n. Alors $\hat{S}(\xi_x,\xi_y)f$ est l'unique élément de $L^2([0,L_x]\times[0,L]\times[0,2\pi/L_x]\times[0,2\pi/L])$ qui pour presque tout $\xi_x,\xi_y\in[0,2\pi/L_x]\times[0,2\pi/L]$ soit solution dans $H^1_{\xi_x,\xi_y}(B^0)$ de :*

$$\left|\begin{array}{l} A_P(\theta,\Delta t)\hat{S}(\xi)f \equiv \sqrt{\frac{LL_x}{4\pi^2}}\sum_{j=1}^{N_s}\sum_{m=\widetilde{q}^j_-}^{\widetilde{q}^j_+-1}\sum_{n=p^j_-}^{p^j_+-1} f_{|_{P_{m,n}}}e^{-i(n\xi_y L+m\xi_x L_x)} \\ \partial_y\hat{S}(\xi)f_{|_{y=L}} = e^{i\xi L}\partial_y\hat{S}(\xi)f_{|_{y=0}} \\ \partial_x\hat{S}(\xi)f_{|_{x=L_x}} = e^{i\xi L_x}\partial_y\hat{S}(\xi)f_{|_{x=0}} \end{array}\right. \tag{7.71}$$

Pour tout $0\leq n\leq N-1$, $\hat{g}^{n+1}(\xi_x,\xi_y)$ est l'unique élément de $L^2([0,L_x]\times[0,L]\times[0,2\pi/L_x]\times$

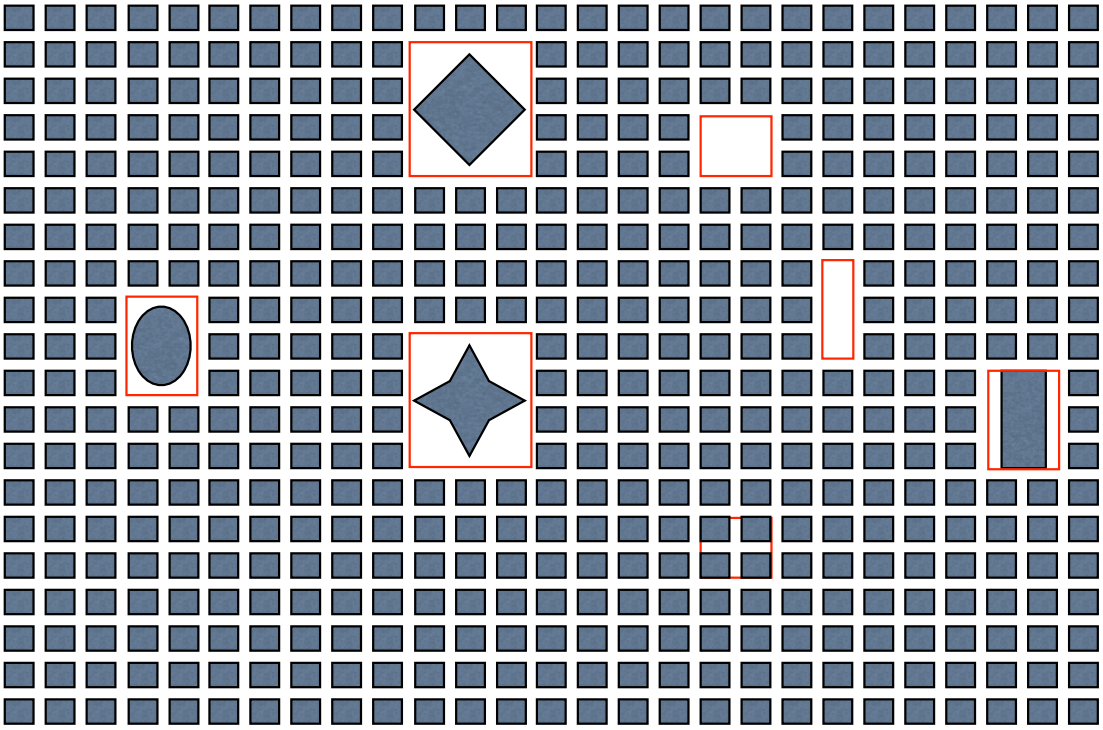


FIGURE 7.10 – Exemple de configuration avec des défauts bornés

$[0, 2\pi/L])$ *qui pour presque tout* $\xi_x, \xi_y \in [0, 2\pi/L_x] \times [0, 2\pi/L]$ *soit solution dans* $H^1_{\xi_x,\xi_y}(B^0)$ *de :*

$$\left|\begin{array}{l} A_P(\theta,\Delta t)\hat{g}^{n+1}(\xi) \equiv A_P(\theta-1,\Delta t)\hat{u}^n(\xi) + \sqrt{\dfrac{LL_x}{4\pi^2}} \displaystyle\sum_{j=1}^{N_s} \sum_{m=\widetilde{q}_-^j}^{\widetilde{q}_+^j-1} \sum_{n=p_-^j}^{p_+^j-1} f^{n+\theta}_{|_{P_{m,n}}} e^{-i(n\xi_y L + m\xi_x L_x)} \\ -\sqrt{\dfrac{LL_x}{4\pi^2}} \displaystyle\sum_{j=1}^{N_s} \sum_{m=\widetilde{q}_-^j}^{\widetilde{q}_+^j-1} \sum_{n=p_-^j}^{p_+^j-1} \left[(\theta-1)\Delta t(V_p - V) + (\rho_p - \rho)\right] u^n_{|_{P_{m,n}}} e^{-i(n\xi_y L + m\xi_x L_x)} \\ \partial_y \hat{g}^{n+1}(\xi)_{|_{y=L}} = e^{i\xi L}\partial_y \hat{g}^{n+1}(\xi)_{|_{y=0}} \\ \partial_x \hat{g}^{n+1}(\xi)_{|_{x=L_x}} = e^{i\xi L_x}\partial_x \hat{g}^{n+1}(\xi)_{|_{x=0}} \end{array}\right. \tag{7.72}$$

Enfin, $(\hat{u}^n(\xi_x, \xi_y))_{0\le n\le N}$ *est l'unique famille de* $L^2([0, L_x] \times [0, L] \times [0, 2\pi/L_x] \times [0, 2\pi/L])$ *qui pour*

presque tout $\xi_x, \xi_y \in [0, 2\pi/L_x] \times [0, 2\pi/L]$ *soit solution dans* $H^1_{\xi_x,\xi_y}(B^0)$ *de :*

$$\left|\begin{array}{l}
A_P(\theta,\Delta t)\hat{u}^{n+1}(\xi) \equiv A_P(\theta-1,\Delta t)\hat{u}^n(\xi) + \sqrt{\frac{LL_x}{4\pi^2}} \sum_{j=1}^{N_s} \sum_{m=\widetilde{q}_-^j}^{\widetilde{q}_+^j-1} \sum_{n=p_-^j}^{p_+^j-1} f^{n+\theta}_{|_{P_{m,n}}} e^{-i(n\xi_y L + m\xi_x L_x)} \\
+\sqrt{\frac{LL_x}{4\pi^2}} \sum_{j=1}^{N_s} \sum_{m=\widetilde{q}_-^j}^{\widetilde{q}_+^j-1} \sum_{n=p_-^j}^{p_+^j-1} \left[\theta\Delta t(V_p - V) + (\rho_p - \rho)\right] u^{n+1}_{|_{P_{m,n}}} e^{-i(n\xi_y L + m\xi_x L_x)} \\
-\sqrt{\frac{LL_x}{4\pi^2}} \sum_{j=1}^{N_s} \sum_{m=\widetilde{q}_-^j}^{\widetilde{q}_+^j-1} \sum_{n=p_-^j}^{p_+^j-1} \left[(\theta-1)\Delta t(V_p - V) + (\rho_p - \rho)\right] u^{n}_{|_{P_{m,n}}} e^{-i(n\xi_y L + m\xi_x L_x)} \\
\partial_y \hat{u}^{n+1}(\xi)_{|_{y=L}} = e^{i\xi L} \partial_y \hat{u}^{n+1}(\xi)_{|_{y=0}} \\
\partial_x \hat{u}^{n+1}(\xi)_{|_{x=L_x}} = e^{i\xi L_x} \partial_x \hat{u}^{n+1}(\xi)_{|_{x=0}} \\
\hat{u}^0(\xi) = \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \sum_{j=1}^{N_s} \sum_{p=p_-^j}^{p_+^j-1} u_{0|_{\Omega_j^p}} e^{-ip\xi L}
\end{array}\right. \tag{7.73}$$

Comme dans le cas harmonique, la double TFB conduit directement à un problème posé en domaine borné. Nous pouvons donc exprimer directement les quantités que nous recherchons à partir de ces doubles TFB : pour tout j et tout $(m,n) \in [\![\widetilde{q}_-^j, \widetilde{q}_+^j -]\!] \times [\![p_-^j, p_+^j - 1]\!]$ (c'est-à-dire sur Ω_0) :

$$(S_{0,\theta,\Delta t} f)|_{P_{m,n}} \equiv \sqrt{\frac{LL_x}{4\pi^2}} \int_0^{2\pi/L_x} \int_0^{2\pi/L} \hat{S}(\xi_x,\xi_y) \left[\theta\Delta t(V_p - V) + (\rho_p - \rho)\right] f e^{i(\xi_x m L_x + \xi_y n L)}$$

$$g^n|_{P_{m,n}} \equiv \sqrt{\frac{LL_x}{4\pi^2}} \int_0^{2\pi/L_x} \int_0^{2\pi/L} \hat{g}^n(\xi_x,\xi_y) e^{i(\xi_x m L_x + \xi_y n L)}$$

Bien entendu, il faut ensuite discrétiser ces intégrales en effectuant une quadrature. Étant donnée une famille $(u^n_{\Delta k})_{0\le n\le N}$, on définit $(\hat{u}^n(j_x\Delta k_x, j_y\Delta k_y))_{0\le n\le N}$ et $(\hat{g}^n(j_x\Delta k_x, j_y\Delta k_y))_{0\le n\le N}$ et comme les solutions de (7.73) et (7.72) associées à cette famille. Puis on pose : pour tout j et tout $(m,n) \in [\![\widetilde{q}_-^j, \widetilde{q}_+^j -]\!] \times [\![p_-^j, p_+^j - 1]\!]$:

$$(S_{0,\theta,\Delta t,\Delta k} f)|_{P_{m,n}} \equiv$$

$$\Delta k_x \Delta k_y \sqrt{\frac{LL_x}{4\pi^2}} \sum_{j_x=1}^{N_{kx}} \sum_{j_y=1}^{N_{ky}} \hat{S}(j_x\Delta k_x, j_y\Delta k_y) \left[\theta\Delta t(V_p - V) + (\rho_p - \rho)\right] f e^{i(j_x\Delta k_x m L_x + j_y \Delta k_y n L)}$$

et

$$(g^n_{\Delta k})|_{P_{m,n}} \equiv \Delta k_x \Delta k_y \sqrt{\frac{LL_x}{4\pi^2}} \sum_{j_x=1}^{N_{kx}} \sum_{j_y=1}^{N_{ky}} \hat{g}^n_{\Delta k}(j_x\Delta k_x, j_y\Delta k_y) e^{i(j_x\Delta k_x m L_x + j_y\Delta k_y n L)}$$

Alors le problème associé est encore : trouver $(u^n_{\Delta k})_{0\le n\le N} \in L^2(\Omega_0)^{N+1}$ telle que :

$$\left|\begin{array}{l}
(I - S_{0,\theta,\Delta t,\Delta k}) u^n_{h,\Delta k} = g^n_{\Delta k}|_{\Omega_0} \quad \forall\ 1 \le n \le N \\
u^0_{\Delta k} = u_0
\end{array}\right. \tag{7.74}$$

avec $(\hat{g}^n_{\Delta k}(j\Delta k))_{\substack{0\le n\le N \\ 1\le i\le N_{kx} \\ 1\le j\le N_{ky}}}$ et $(\hat{u}^n_{\Delta k}(j\Delta k))_{\substack{0\le n\le N \\ 1\le i\le N_{kx} \\ 1\le j\le N_{ky}}}$ les solutions de (7.72) et (7.73), associées à la famille $u^n_{\Delta k}$.

Toute solution de ce problème peut être étendue à $\mathbb{R}^2$ en posant :

$$\widetilde{u}^n_{\Delta k}|_{P_{m,n}} = g^n_{\Delta k}|_{P_{m,n}}$$

$$+\Delta k_x \Delta k_y \sqrt{\frac{LL_x}{4\pi^2}} \sum_{j_x=1}^{N_{kx}} \sum_{j_y=1}^{N_{ky}} \hat{S}(j_x\Delta k_x, j_y\Delta k_y)\left[\theta\Delta t(V_p - V) + (\rho_p - \rho)\right] f e^{i(j_x\Delta k_x m L_x + j_y \Delta k_y n L)}$$

et on montre alors, en procédant exactement comme pour le théorème 7.4 que :

Théorème 7.17. *Si $(u^n_{\Delta k})_{0\leq n\leq N} \in L^2(\Omega_0)^{N+1}$ est solution de (7.74), alors, avec les notations du théorème 2.15, $(\widetilde{u}^n_{\Delta k})_{0\leq n\leq N}$ est solution dans $H^1_{per}(\Omega_{N_{k_x},N_{k_y}})$ de :*

$$\left|\begin{array}{ll} A(\theta,\Delta t)\widetilde{u}^{n+1}_{\Delta k} = A(\theta,\Delta t)\widetilde{u}^n_{\Delta k} + \Delta t f^{n+\theta} \\ \widetilde{u}^{n+1}_{\Delta k|_{\Gamma^+_{N_{k_y}}}} = \widetilde{u}^{n+1}_{\Delta k|_{\Gamma^-_{N_{k_y}}}} \\ \partial_y\widetilde{u}^{n+1}_{\Delta k|_{\Gamma^+_{N_{k_y}}}} = \partial_y\widetilde{u}^{n+1}_{\Delta k|_{\Gamma^-_{N_{k_y}}}} \\ \widetilde{u}^{n+1}_{\Delta k|_{\Gamma^+_{N_{k_x}}}} = \widetilde{u}^{n+1}_{\Delta k|_{\Gamma^-_{N_{k_x}}}} \\ \partial_x\widetilde{u}^{n+1}_{\Delta k|_{\Gamma^+_{N_{k_x}}}} = \partial_x\widetilde{u}^{n+1}_{\Delta k|_{\Gamma^-_{N_{k_x}}}} \end{array}\right. \tag{7.75}$$

Alors de cette réinterprétation on déduit sans peine le caractère bien posé de (7.74), et on peut établir des estimations d'erreur par les mêmes méthodes que celles que nous avons employées précédemment. Bien entendu, c'est la norme de la solution exacte sur $\Gamma_{N^\pm_{k_x}}$ et $\Gamma_{N^\pm_{k_y}}$ qui va intervenir dans ces estimations d'erreur. Alors l'erreur commise par cette méthode est plus importante que celle commise par la méthode mixte que nous avons développée dans cette section, ce qui rejoint le fait que la méthode complètement LS tronque le domaine dans les deux directions, contre une avec la méthode mixte.

7.1.8 Résultats numériques

Pour terminer cette première section, nous allons présenter un certain nombre de simulations numériques, afin d'illustrer les résultats que nous venons d'établir. L'algorithme correspondant à la méthode que nous venons de développer peut être résumé ainsi :

. **Initialisation** : boucle dans la variable de Floquet

- On résout les problèmes de cellules pour obtenir $e^\pm_{0,h}(j\Delta k), e^\pm_{1,h}(j\Delta k)$ et $E^\pm_h(j\Delta k)$

- On en déduit les $T^\pm_{h,ij}(j\Delta k)$ et $T^\pm_{h,i}(j\Delta k)$, ainsi que $R^\pm_{h,1}(j\Delta k)$ et $\Lambda^\pm_{h,1}(j\Delta k)$ (on stocke ce dernier)

- On résout le problème intérieur (7.51) afin d'obtenir $\hat{S}_{h,0}(j\Delta k)$, et l'on ajoute cette contribution de quadrature via la formule (7.56) pour assembler $S_{0,h,\Delta k}$. On résout de même le problème intérieur (7.55) pour $\hat{g}^1_{h,\Delta k}(j\Delta k)$, afin d'assembler $g^1_{h,\Delta k}$ via la formule (7.57).

- Boucle temporelle

  On résout l'équation linéaire pour obtenir $R^\pm_{h,n}(j\Delta k)$

On en déduit $\Lambda^{\pm}_{h,n}(j\Delta k)$, que l'on stocke

- Fin de la boucle temporelle

. Fin de la boucle dans la variable de Floquet pour l'initialisation

. **Résolution de l'équation LS temporelle**

- On résout l'équation LS au premier pas de temps, pour obtenir $u^1_{h,\Delta k}$

- Boucle dans la variable de Floquet : on utilise $u^1_{h,\Delta k}$ pour calculer $\hat{u}^1_{h,\Delta k}(j\Delta k)$ à partir de $\hat{g}^1_{h,\Delta k}(j\Delta k)$, en résolvant un problème intérieur de guide (7.53)

- Boucle temporelle

  Boucle dans la variable de Floquet : on calcule $\hat{g}^n_{h,\Delta k}(j\Delta k)$ à partir de $\hat{u}^{n-1}_{h,\Delta k}(j\Delta k)$, en résolvant un problème intérieur de guide (7.55)

  On résout l'équation LS au temps n pour obtenir $u^n_{h,\Delta k}$

  Boucle dans la variable de Floquet : on calcule $\hat{u}^n_{h,\Delta k}(j\Delta k)$ à partir de $\hat{g}^{n-1}_{h,\Delta k}(j\Delta k)$ et $u^n_{h,\Delta k}$, en résolvant un problème intérieur de guide (7.53)

- Fin de la boucle temporelle

L'une des propriétés remarquable importante tient au fait que l'équation LS que l'on doit résoudre à chaque pas de temps est toujours la même, aussi on ne doit l'assembler qu'une seule fois (au cours de la phase d'initialisation), et il suffit de la factoriser ou de l'inverser une seule fois (ce qui réduit considérablement le coût de chaque pas de temps). Si l'on souhaite reconstruire la solution en dehors de Ω_0, il est possible d'ajouter une phase de reconstruction à cet algorithme, qui consiste à reconstruire les $\hat{u}^n_{h,\Delta k}(j\Delta k)$ en dehors de Ω_0 via la méthode des chapitres 5 et 6. On peut organiser cette reconstruction de nombreuses manières. Si l'on dispose d'importantes capacités de stockage, on peut choisir de stocker l'ensemble des quantités calculées au cours des différentes étapes de l'algorithme précédent, auquel cas cette phase de reconstruction est purement algébrique. On peut aussi construire des approches plus intermédaires, telles que celle implementée dans le code `Periodique`. On stocke les $u^n_{h,\Delta k}$, et l'on fait une boucle dans la variable de Floquet. Pour chaque point de quadrature $j\Delta k$, on fait une boucle temporelle, dans laquelle on calcule les $\hat{u}^n_{h,\Delta k}(j\Delta k)$ à j fixé, sur la zone où l'on souhaite reconstruire. Une fois cette double boucle effectuée, il ne reste plus qu'à appliquer la formule de quadrature définissant $\widetilde{u}^n_{h,\Delta k}$ à chaque pas de temps. Cette phase de reconstruction est sans conteste la plus coûteuse de l'algorithme, mais il faut garder à l'esprit qu'elle n'est pas indispensable à la résolution, et n'est utile que si l'on souhaite observer la solution hors du défaut. Bien entendu, elle est hautement parallélisable, et l'on peut la réaliser de très nombreuses manières, le choix devant s'effectuer selon que l'on préfère recalculer ou stocker les diverses quantités.

Le cas d'un seul défaut

Nous allons travailler avec la cellule de périodicité isomorphe à $]0,1[\times]0,1[$, discrétisée par un maillage cartésien de 11×11 degrés de liberté, et nous ferons varier l'ordre r suivant nos besoins. Nous allons commencer par le cas d'un seul défaut linéique $]0,1[\times\mathbb{R}$, contenant un défaut borné Ω_0, discrétisé de la même façon (i.e. chaque sous ensemble de Ω_0 isomorphe à $]0,1[\times]0,1[$ sera discrétisé

par un maillage cartésien de 11×11 degrés de liberté). Comme nous pouvons sans peine reconstruire $\widetilde{u}_{h,\Delta k}$ partout où on le souhaite, nous représenterons la solution sur un domaine plus large. Nous commençons par quelques validations. Nous comparons la solution donnée par notre méthode à une résolution au moyen du même schéma numérique sur un domaine plus grand, avec conditions de Dirichlet homogènes sur la frontière. Nous commençons par le cas de l'équation de Schrödinger, en l'absence de potentiel, avec une donnée initiale donnée par :

$$u_0(x,y) = \chi_{\Omega_0}(x,y) e^{-(\frac{(x-c_x)^2}{w_x} + \frac{(y-c_y)^2}{w_y})} e^{i(\nu_x x + \nu_y y)}$$

avec $A = 1$, $c_x = c_y = 0.5$, $w_x = w_y = 0.1$, $\nu_x = \nu_y = 10$. Comme nous l'avons déjà précisé dans le chapitre 6, bien que la vitesse de propagation soit infinie pour l'équation de Schrödinger, le problème posé en domaine borné avec conditions de Dirichlet sera très proche de la solution sur un domaine infini, au moins pendant un laps de temps (assez court) du fait du support borné de la donnée initiale. Les résultats sont présentés sur la figure 7.14, la solution donnée par notre méthode étant sur la droite de la figure, le défaut étant représenté par le carré noir. Tant que les conditions de Dirichlet ne viennent par perturber la solution de référence, on constate sur ces figures le parfait accord entre les deux méthodes, ce qui vient confirmer le bon fonctionnement de notre méthode prédit par notre analyse théorique. Nous reproduisons la même expérience, mais sur le milieu périodique de la figure 7.11. Une fois de plus, on constate sur la figure 7.15 le très bon accord entre les deux méthodes

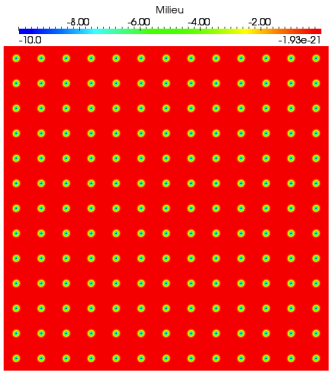


FIGURE 7.11 – Milieu périodique utilisé avec l'équation de Schrödinger, pour comparer la méthode à une résolution sur un grand domaine avec conditions de Dirichlet

tant que les conditions de Dirichlet ne dégradent pas la solution de référence. Nous refaisons cette dernière expérience, mais pour l'équation de la chaleur, sur le milieu de la figure 7.12. Cette fois, nous savons du fait de la décroissance exponentielle en espace des solutions de l'équation de la chaleur, que les conditions de Dirichlet ne vont pratiquement pas perturber la solution de référence. Nous observons en effet sur la figure 7.16 qu'il n'y a aucune différence notable entre les deux types de résolution, ce qui vient une fois de plus confirmer le bon fonctionnement de notre méthode. Nous testons maintenant notre méthode sur le cas d'un défaut linéique localement perturbé, pour l'équation de Schrödinger. Nous utilisons le milieu de la figure 7.13, et les résultats sont présentés sur la figure 7.17. Sur la figure 7.17, on voit clairement la complexité de la structure de la solution, due à la périodicité du milieu, ainsi qu'à la présence de défauts.

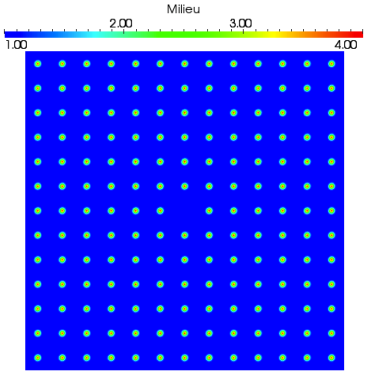


FIGURE 7.12 – Milieu périodique utilisé avec l'équation de la chaleur, pour comparer la méthode à une résolution sur un grand domaine avec conditions de Dirichlet

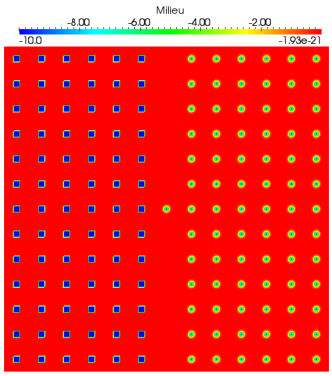


FIGURE 7.13 – Milieu périodique

LE CAS DE PLUSIEURS DÉFAUTS

Nous considérons maintenant le cas de plusieurs défauts linéiques localement perturbés. Nous commençons une nouvelle fois par comparer la méthode de résolution pour le cas de plusieurs défauts à celle du cas d'un seul défaut. Nous utilisons pour cela le milieu à un seul défaut de la figure 7.18, et la condition initiale que nous avons utilisée jusqu'ici. On voit sur la figure 7.20 que les deux méthodes sont en parfait accord sur cet exemple. Nous concluons cet ensemble de résultats numériques par une véritable situation de scattering multiple. Nous utilisons pour cela le milieu de la figure 7.19. Nous utilisons deux données initiales gaussiennes avec impulsion. Celle du défaut de gauche est la même que celle que nous avons utilisée jusqu'à présent, celle du défaut de droite est identique à ceci près que l'impulsion est de direction opposée ($\nu_x = \nu_y = -10$).

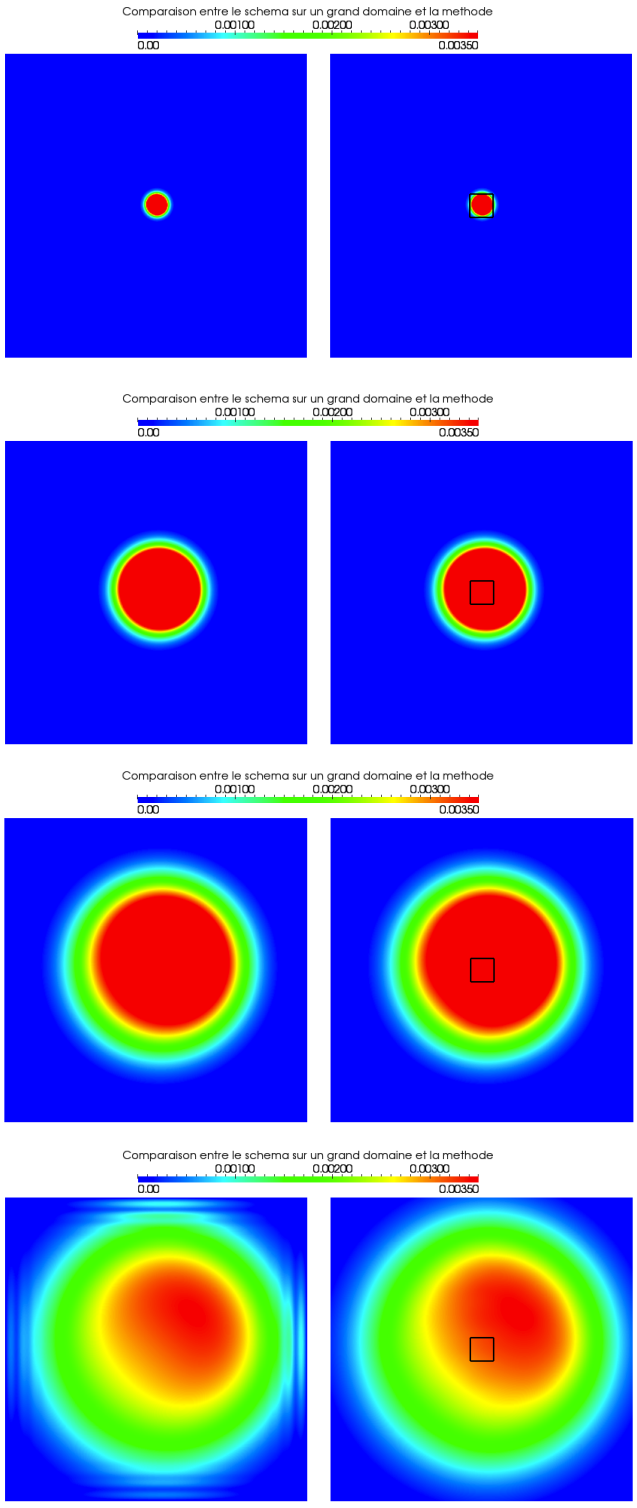


FIGURE 7.14 – Comparaison entre le schéma sur un grand domaine et la solution donnée par la méthode pour $r = 2$, $\theta = 1$, $\Delta t = 0.005$, $N_k = 30$, pour $t = 0.005, 0.1, 0.3$ et 0.5, pour l'équation de Schrödinger

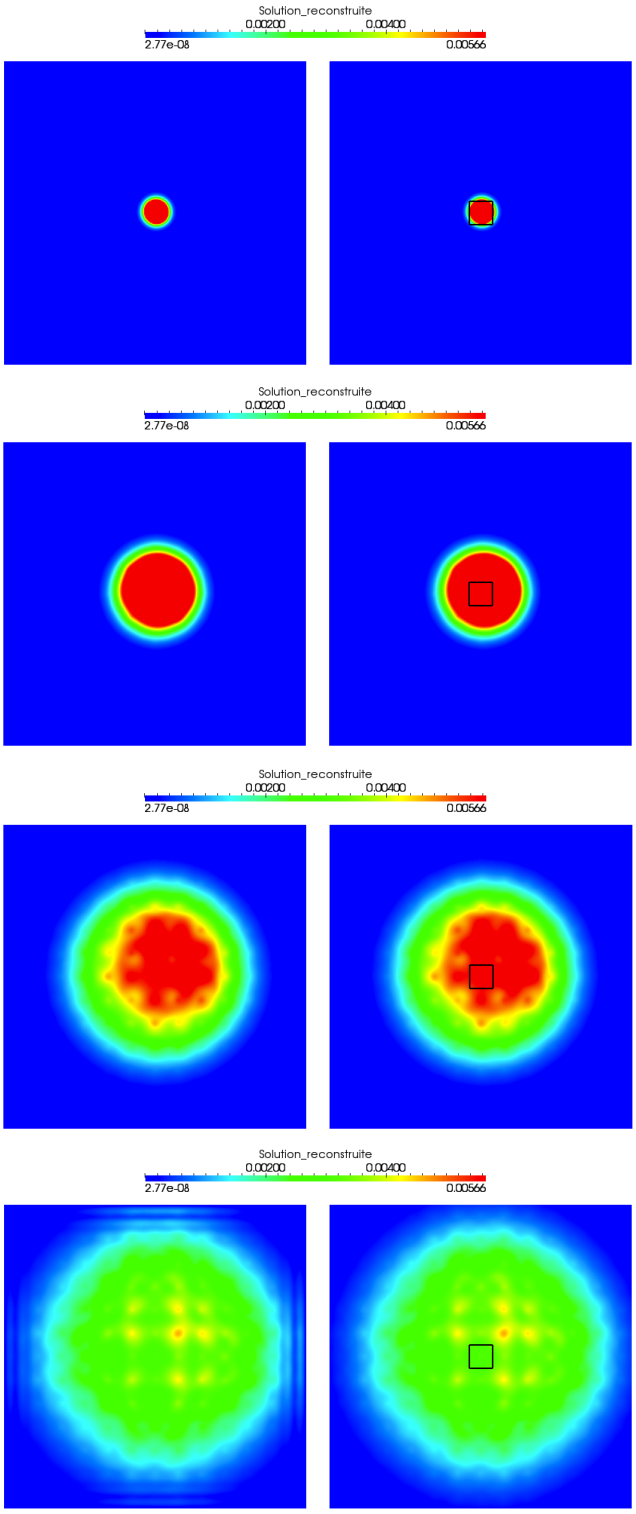


FIGURE 7.15 – Comparaison entre le schéma sur un grand domaine et la solution donnée par la méthode sur le milieu de la figure 7.11, pour $r = 2$, $\theta = 1$, $\Delta t = 0.005$, $N_k = 30$, pour $t = 0.005, 0.1, 0.3$ et 0.5, pour l'équation de Schrödinger

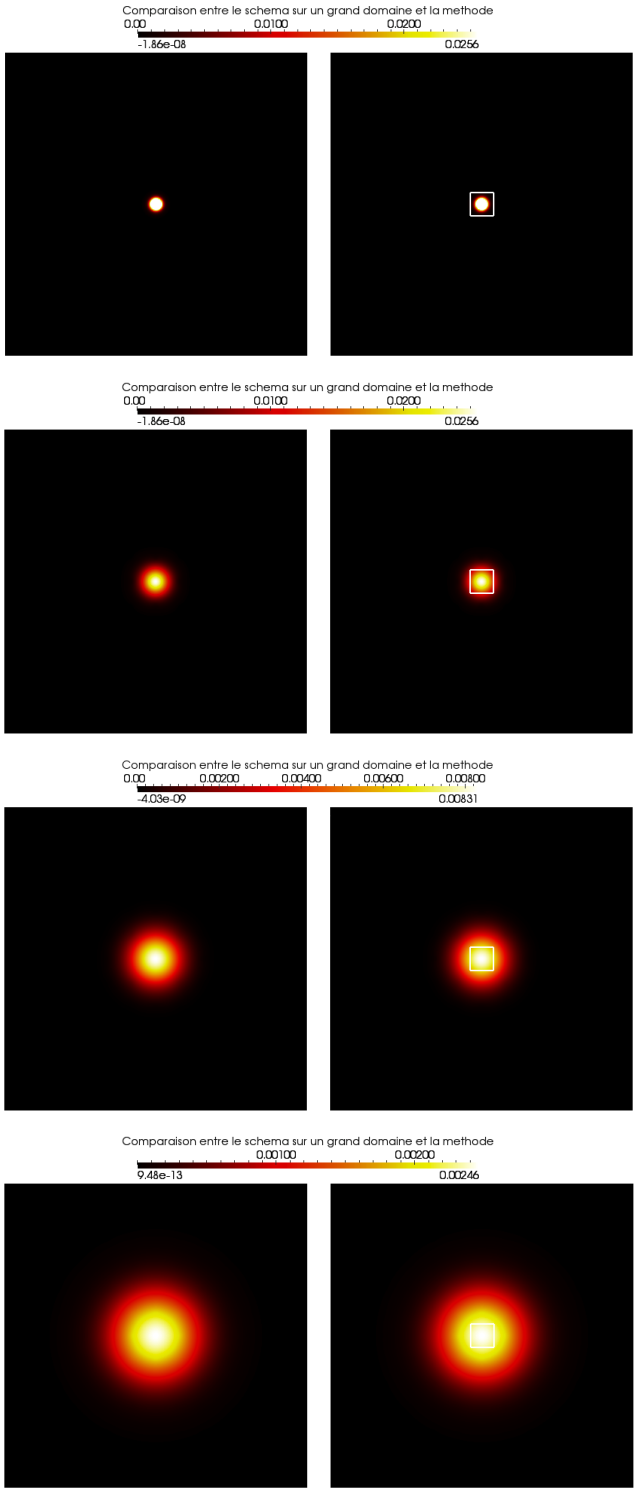


FIGURE 7.16 – Comparaison entre le schéma sur un grand domaine et la solution donnée par la méthode sur le milieu de la figure 7.12, pour $r = 2$, $\theta = 1$, $\Delta t = 0.005$, $N_k = 30$, pour $t = 0.005, 0.095, 0.3$ et 1, pour l'équation de la chaleur

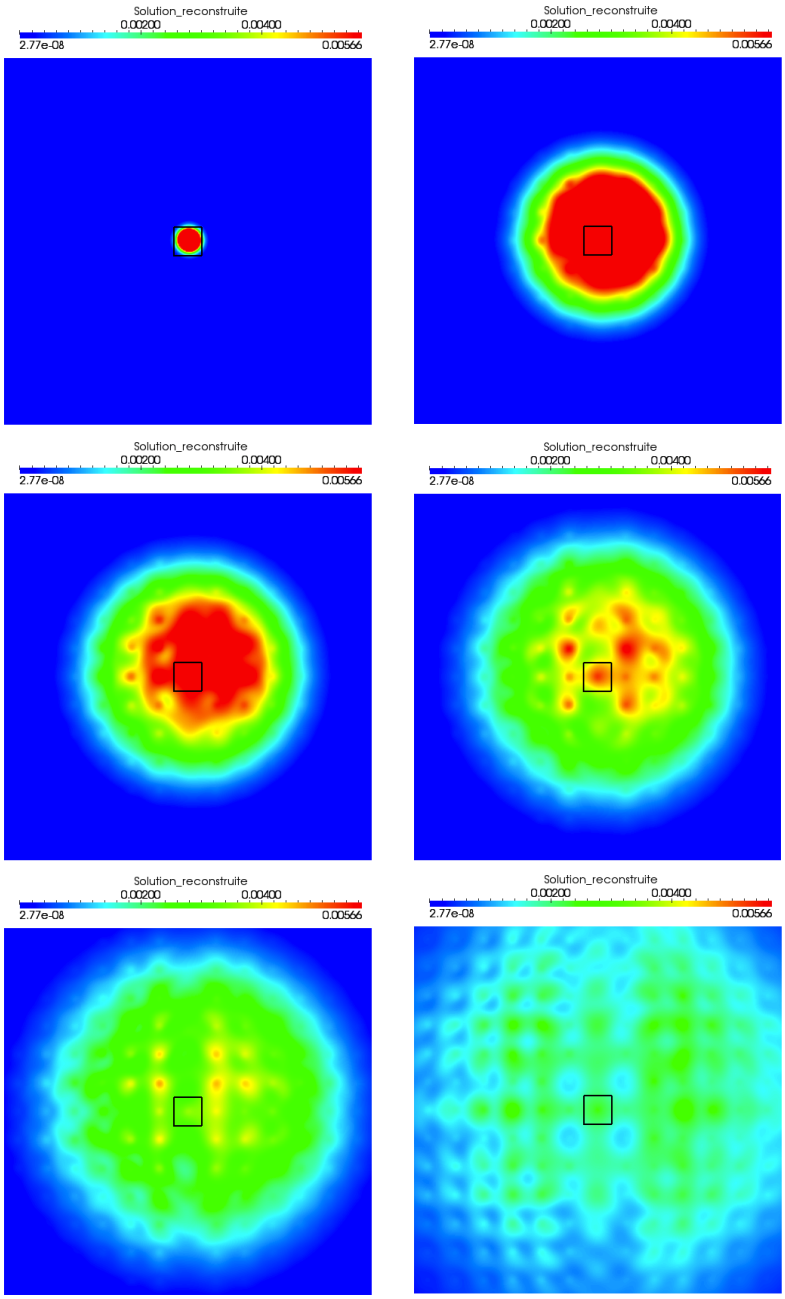


FIGURE 7.17 – Solution de Schrödinger le milieu de la figure 7.13, pour $r = 2$, $\theta = 1$, $\Delta t = 0.005$, $N_k = 30$, pour $t = 0.005, 0.2, 0.3, 0.4$ et 0.5

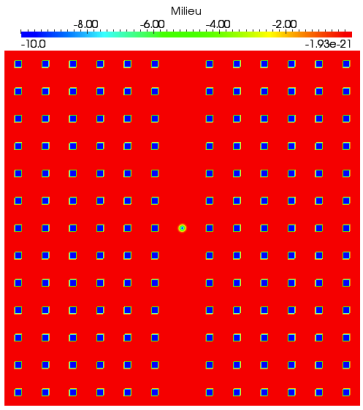


FIGURE 7.18 – Milieu périodique utilisé pour comparer le simple ou multi scattering

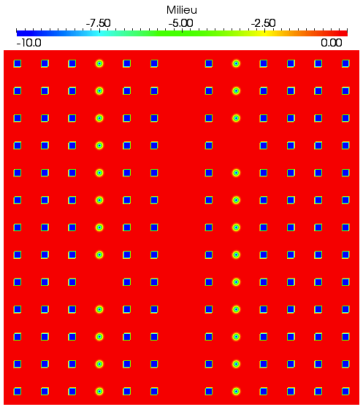


FIGURE 7.19 – Milieu périodique avec plusieurs défauts

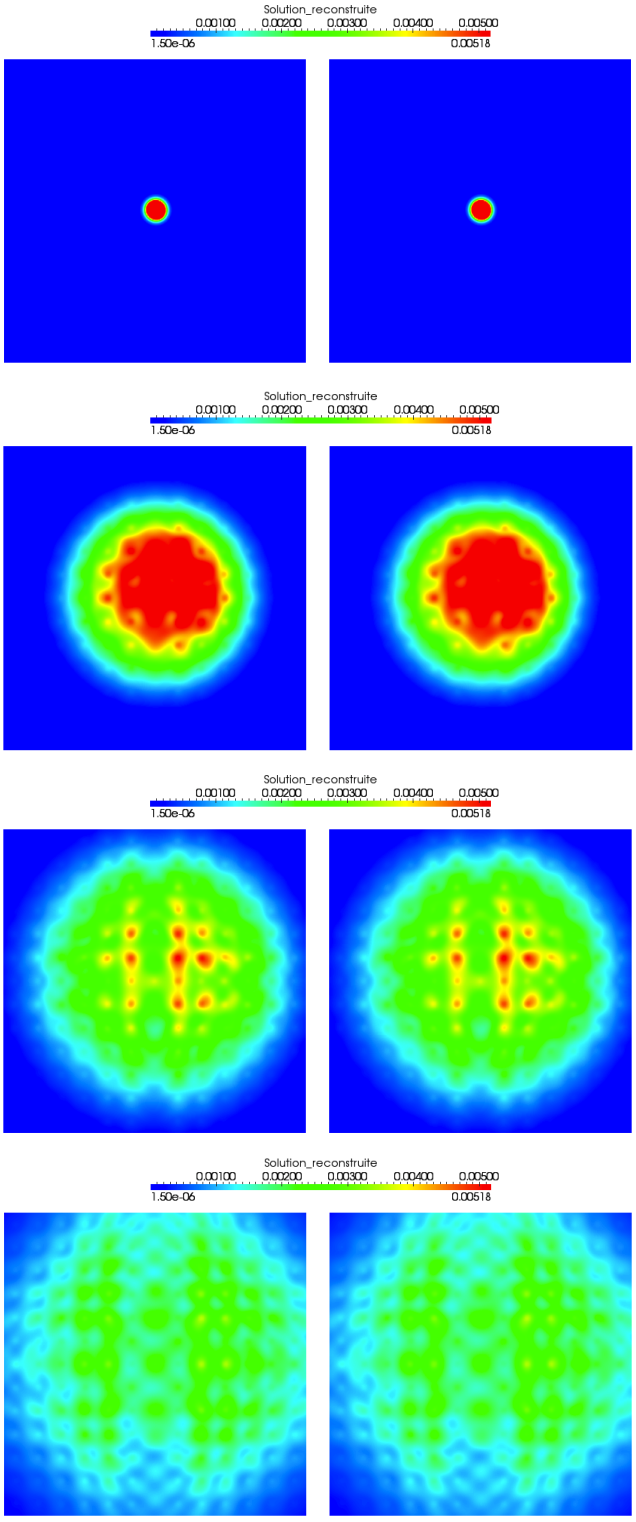


FIGURE 7.20 – Comparaison entre le simple (à gauche) et le multi scattering (à droite) sur le milieu de la figure 7.18, pour $r = 2$, $\theta = 1$, $\Delta t = 0.005$, $N_k = 30$, pour $t = 0.005, 0.3, 0.5$ et 0.8

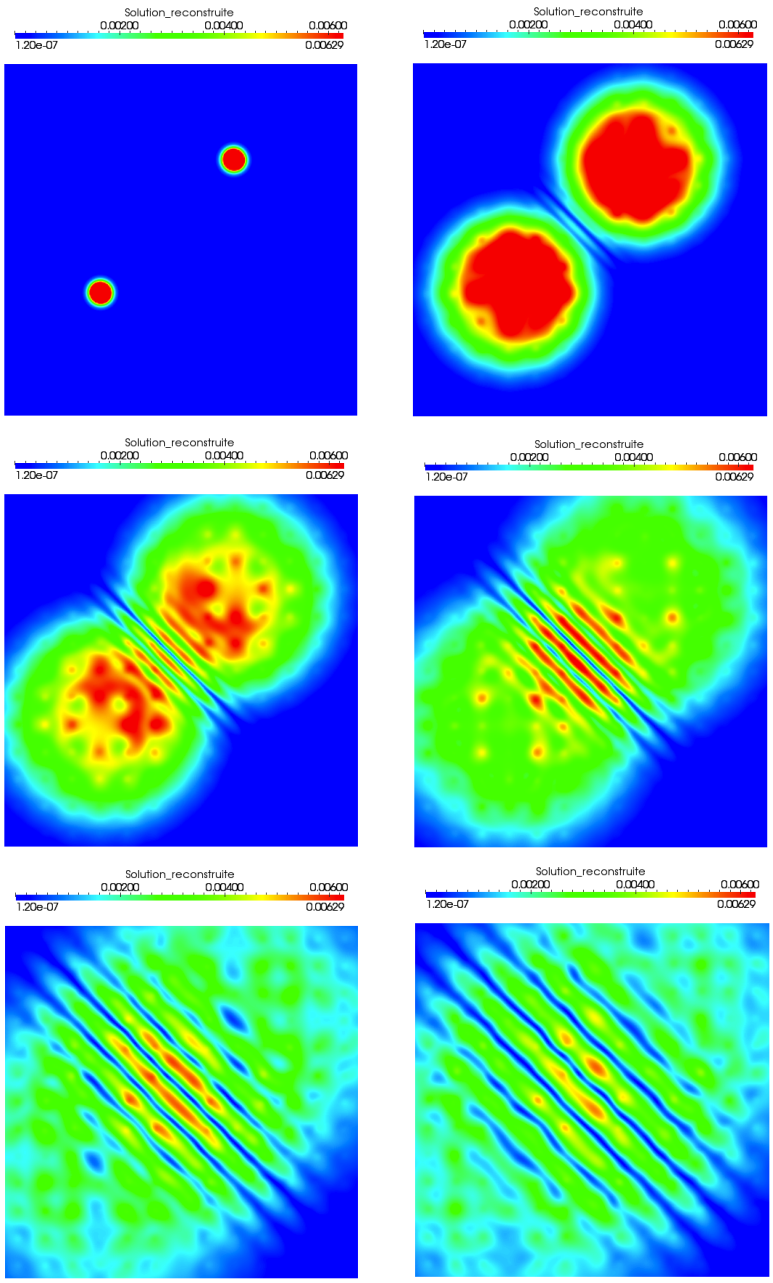


FIGURE 7.21 – Solution pour le milieu de la figure 7.19, pour $r = 2$, $\theta = 1$, $\Delta t = 0.005$, $N_k = 30$, pour $t = 0.005, 0.2, 0.3$ et 0.6

7.2 Problèmes d'ordre deux en temps

Comme nous l'avons fait chaque fois jusqu'à maintenant, nous allons expliquer comment généraliser au cas de l'ordre deux en temps les résultats obtenus sur les problèmes d'ordre un (et nous espérons que le lecteur comprendra, comme chaque fois, que la généralisation à des problèmes d'ordre supérieur ne présente pas de difficultés supplémentaires).

L'immense majorité des démonstrations s'avère identique dans les deux situations, au traitement de la récurrence à deux pas de temps près (lorsqu'elle intervient dans la perturbation), pour certaines d'entre elles. Aussi, nous allons redonner la plupart des résultats sans démonstration. Le point sur lequel nous devrons nous attarder est bien sûr la convergence de la méthode, vis-à-vis de la quadrature dans la variable de Floquet. Nous avons en effet observé au cours de la section précédente qu'elle dépendait fortement de l'équation, au travers des propriétés de décroissance de la solution, aboutissant à une convergence excellente dans le cas de la chaleur, et nettement moins bonne dans le cas de l'équation de Schrödinger. Nous allons voir que les choses se présentent de la meilleure façon possible pour notre problème modèle d'ordre deux en temps, qui correspond à une équation d'ondes (à savoir le problème qui nous intéressait à l'origine). L'ingrédient principal de ce bon comportement sera une propriété plus forte qu'une propriété de décroissance à l'infini, à savoir tout simplement le fait que pour l'équation des ondes, la vitesse de propagation est finie, et le support de la solution, pour des sources et données initiales à support compact, sera par conséquent lui-aussi compact.

7.2.1 Problème modèle

Nous nous limitons encore une fois au cas de la dimension 2. Rappelons que notre problème modèle d'ordre deux en temps s'écrit dans ce contexte : trouver $u \in C^1([0,+\infty[, H^1_(\mathbb{R}^2)) \cap C^0([0,+\infty[, H^2(\mathbb{R}^2))$ tel que

$$\left| \begin{array}{ll} \rho \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f & \text{dans } \mathbb{R}^2, \quad t > 0 \\ u(\cdot, 0) = u_0 & \text{dans } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(\cdot, 0) = u_1 & \text{dans } \mathbb{R}^2 \end{array} \right. \tag{7.76}$$

qui est bien posé par une adaptation évidente du théorème 4.15 sous les hypothèses (HT2) :

(H1) $f \in C^1(]0,+\infty[, L^2(\Omega))$, $(u_0, u_1) \in D(A)$, $\rho \in L^\infty(\Omega)$, $V \in L^\infty(\Omega)$

(H2) $\exists\ \rho_-,\ \rho_+ \in \mathbb{R}$ tels que $0 < \rho_- \leq \rho \leq \rho_+$.

Bien que ce problème soit celui que nous cherchons à résoudre, nous allons comme d'habitude développer une méthode pour résoudre son approximation en temps (par θ-schéma) : Trouver $(u^n)_{0 \leq n \leq N} \in H^1(\mathbb{R}^2)^{N+1}$ tel que :

$$\left| \begin{array}{lll} \rho \dfrac{u^{n+1} - 2u^n + u^{n-1}}{\Delta t^2} - \theta \Delta u^{n+1} - (1-2\theta)\Delta u^n - \theta \Delta u^{n-1} = f^{n,\theta} & \text{dans } \Omega & 1 \leq n \leq N \\ u^0(\cdot) = u_0(\cdot) & \text{dans } \Omega & \\ u^1(\cdot) = u_0(\cdot) + \Delta t u_1 + \dfrac{\Delta t^2}{2\rho} \Delta u_0(\cdot) & \text{dans } \Omega & \end{array} \right. \tag{7.77}$$

qui est encore bien posé, en adaptant le théorème 4.16. Nous allons travailler sur des milieux présentant le même type de structure que dans le cas de l'ordre un en temps. Nous commençons bien sûr par le cas d'un seul défaut linéique dans $\mathbb{R}^2$. Le plan $\mathbb{R}^2$ peut être découpé en trois régions :

. $\Omega^- = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \middle|\ x < a_-\right\}$

. $\Omega^+ = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \mid \ x > a_+\right\}$

. $\Omega_{int} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \mid \ a_- < x < a_+\right\}$

On notera Ω_0 l'ouvert $]a_-, a_+[\times]b_-, b_+[\subset \Omega_{int}$, contenant les perturbations bornées (voir figure 7.22), on complète donc les hypothèses (HT2) par :

. $supp\ f(\cdot,t) \subset \Omega_0$, pour tout $t > 0$

. $supp\ u_0 \cup supp\ u_1 \subset \Omega_0$

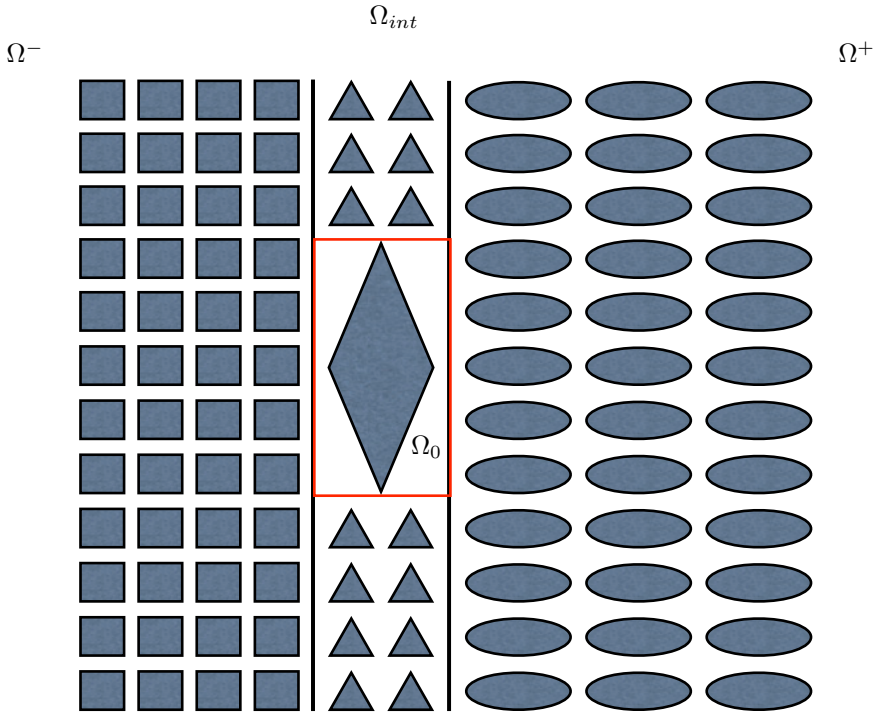


FIGURE 7.22 – Exemple de configuration

$\Omega^\pm$ sont deux sous-domaines périodiques infinis, de périodes $L_x^\pm$ dans la direction x, et possédant la même période L dans la direction y et qui sont par conséquent de la forme :

$$\Omega^\pm = \bigcup_{i=1}^{+\infty} \bigcup_{j=-\infty}^{+\infty} \mathcal{C}_{ij}^\pm \qquad \mathcal{C}_{ij}^\pm = \{\mathcal{C}^\pm \pm ((i-1)L_x^\pm, (j-1)L)\}$$

où les cellules de périodicité de référence sont :

$$\mathcal{C}^\pm = \left\{(x,y) \ \mid \ \pm a_\pm \leq \pm x \leq \pm a_\pm \pm L_x^\pm, \quad 0 \leq y \leq L\right\}$$

On note de plus $\Gamma_{int} = \partial\Omega_{int}$, et $\Gamma^\pm = \partial\Omega_{int} \cap \partial\Omega^\pm$, Γ^+ et Γ^- étant tous deux isomorphes à $\mathbb{R}$. Nous supposerons que la fonction $\rho \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$ est "doublement périodique" à l'extérieur de Ω_{int}, i.e. il existe deux fonctions $\rho^+ \in L^\infty(\Omega^+)$ et $\rho^- \in L^\infty(\Omega^-)$ telles que :

$$\rho^+(x + pL_x^+, y \pm qL) = \rho^+(x,y) \text{ dans } \Omega^+, \quad \forall\ (p,q) \in \mathbb{N}^2, \quad \rho = \rho^+ \text{ dans } \Omega^+$$

$$\rho^-(x - pL_x^-, y \pm qL) = \rho^-(x, y) \text{ dans } \Omega^-, \quad \forall\, (p, q) \in \mathbb{N}^2, \quad \rho = \rho^- \text{ dans } \Omega^-$$

A l'intérieur de Ω_{int}, ρ est périodique dans la direction y avec la même période L, à l'extérieur de Ω_0, i.e. il existe une fonction périodique $\rho_{int} \in L^\infty(\Omega_{int})$ telle que :

$$\rho_{int}(x, y + L) = \rho_{int}(x, y) \text{ dans } \Omega_{int}$$

et $\rho = \rho_{int}$ dans $\Omega_{int} \backslash \Omega_0$. Enfin, nous supposerons que $b_- = -M^- L$ et $b_+ = M^+ L$, $(M^-, M^+) \in \mathbb{N}^2$.

7.2.2 Formulation de type Lippmann-Schwinger

Nous allons, comme dans le cas harmonique ou le cas de l'ordre un en temps, exprimer la solution de notre problème comme la somme d'un problème posé sur un milieu périodique dans la direction y et d'une perturbation. Pour cela, on introduit le coefficient suivant, qui décrit le milieu périodique sous-jacent :

$$\rho_p = \left| \begin{array}{ll} \rho^- & \text{dans } \Omega^- \\ \rho_{int} & \text{dans } \Omega_{int} \\ \rho^+ & \text{dans } \Omega^+ \end{array} \right.$$

Alors, $\rho_p \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$, $0 < \rho_- \leq \rho_p \leq \rho_+$ et ρ_p est L-périodique dans la direction y. De plus :

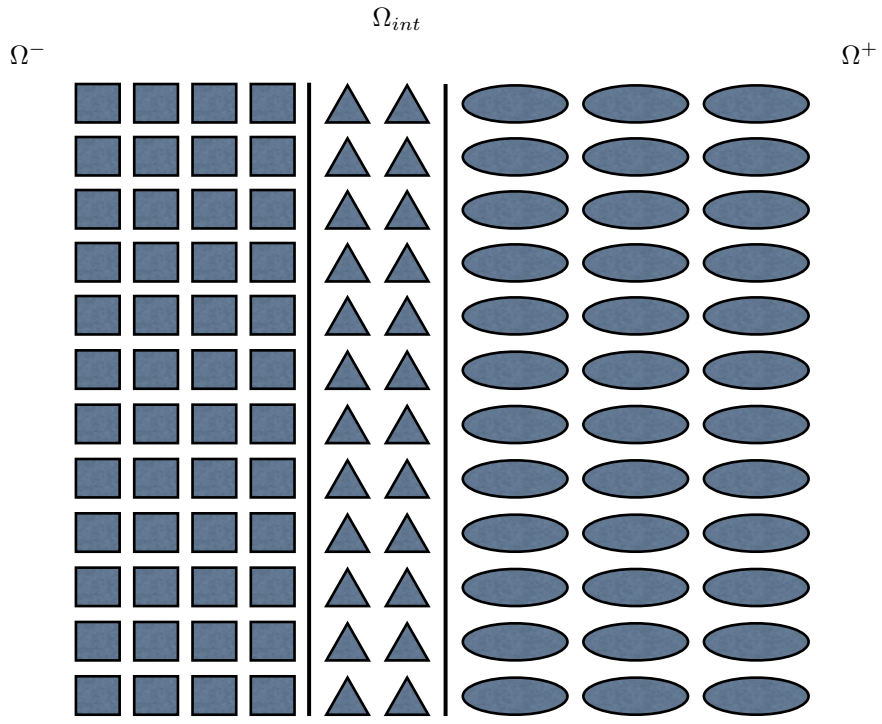


Figure 7.23 – Le milieu périodique en y sous-jacent pour l'exemple de la figure 7.22

$$supp\ (\rho - \rho_p) \subset \Omega_0$$

Puis, posons comme d'habitude :

$$A_1(\theta, \Delta t) = -\theta \Delta t^2 - \Delta + \rho \quad A_2(\theta, \Delta t) = -(2\theta - 1)\Delta t^2 - \Delta + 2\rho$$

et introduisons :

$$A_{1,P}(\theta,\Delta t) = -\theta\Delta t^2 - \Delta + \rho_p \quad A_{2,P}(\theta,\Delta t) = -(2\theta-1)\Delta t^2 - \Delta + 2\rho_p$$

Notre problème modèle s'écrit :

$$A_1(\theta,\Delta t)u^{n+1} = A_2(\theta,\Delta t)u^n - A_1(\theta,\Delta t)u^{n-1} + \Delta t^2 f^{n,\theta}$$

Pour tout $0 \leq n \leq N$, nous avons :

$$\rho u^n = \rho_p u^n + (\rho - \rho_p)u^n$$

En reportant ceci pour u^{n+1} dans (7.2), nous obtenons :

$$A_{1,P}(\theta,\Delta t)u^{n+1} = A_{2,P}(\theta,\Delta t)u^n - A_{1,P}(\theta,\Delta t)u^{n-1} + \Delta t^2 f^{n,\theta}$$
$$(\rho_p - \rho)u^{n+1} - 2(\rho_p - \rho)u^n + (\rho_p - \rho)u^{n-1}$$

À ceci près que nous devons gérer non plus un mais deux pas de temps ultérieurs, nous sommes dans une situation similaire à celle rencontrée dans le cas de l'ordre un en temps. Nous introduisons donc par analogie l'opérateur :

$$\begin{aligned} S : L^2(\Omega_0) &\longrightarrow H^1(\mathbb{R}^2) \\ f &\longmapsto Sf \end{aligned}$$

où Sf est défini comme l'unique solution dans $H^1(\mathbb{R}^2)$ de :

$$A_{1,P}(\theta,\Delta t)Sf = f \tag{7.78}$$

Comme le problème définissant S est un cas particulier du problème définissant S dans le cas de l'ordre un en temps (équation de la chaleur avec Δt^2 à la place de Δt), nous savons que le problème (7.78) est bien posé, ce nouvel opérateur S est bien défini. De même, on définit $g^{n+1} \in H^1(\mathbb{R}^2)$ pour tout $n \geq 1$ comme l'unique solution de :

$$A_{1,P}(\theta,\Delta t)g^{n+1} = A_{2,P}(\theta,\Delta t)u^n - A_{1,P}(\theta,\Delta t)u^{n-1} + \Delta t^2 f^{n,\theta} - 2(\rho_p - \rho)u^n + (\rho_p - \rho)u^{n-1} \tag{7.79}$$

qui est un problème bien posé pour les mêmes raisons. Alors par unicité, il est encore une fois clair que :

$$u^{n+1} = g^{n+1} + S(\rho_p - \rho)u^{n+1} \tag{7.80}$$

et u^{n+1} est bien la somme de la solution en milieu ρ_p avec source modifiée et d'une perturbation. Nous définissons alors :

$$\begin{aligned} S_{0,\rho} : L^2(\Omega_0) &\longrightarrow H^1(\mathbb{R}^2) \\ f &\longmapsto S(\rho_p - \rho)f|_{\Omega_0} \end{aligned}$$

En appliquant l'opérateur de restriction à Ω_0 à (7.6), nous obtenons :

$$(I - S_{0,\rho})u^{n+1}|_{\Omega_0} = g^{n+1}|_{\Omega_0} \tag{7.81}$$

où $g^{n+1}|_{\Omega_0}$ joue cette fois le rôle de source. C'est l'équation de Lippmann-Schwinger que nous allons utiliser pour ramener le problème d'ordre deux en temps au domaine borné Ω_0. Remarquons que :

$$S_{0,\rho} = S_{0,\theta,\Delta t^2}$$

si $S_{0,\theta,\Delta t}$ est l'opérateur du cas de l'ordre un en temps, pour $V = V_p = 0$ et $\gamma = 1$. Alors, comme conséquence directe du théorème 7.1, nous avons (nous pourrions également reproduire la démonstration de ce théorème pour le cas de l'ordre deux en temps, et constater que (7.81) est régie par l'alternative de Fredholm) :

Théorème 7.18. *Pour tout ouvert Ω_0 borné, pour tout $F \in L^2(\Omega_0)$, le problème : trouver $u \in L^2(\Omega_0)$ tel que :*

$$(I - S_{0,\rho})u = F \tag{7.82}$$

est bien posé. De plus, si $F = g^{n+1}|_{\Omega_0}$, où g^{n+1} est la solution de (7.5), alors la solution u de (7.82) est la restriction à Ω_0 de la solution de (7.77), qui peut-être reconstruite en posant :

$$u^{n+1} = \left| \begin{array}{ll} u & \text{dans } \Omega_0 \\ g^{n+1} + S(\rho_p - \rho)u & \text{dans } \mathbb{R}^2 \setminus \Omega_0 \end{array} \right. \tag{7.83}$$

Afin de permettre la détermination de $S_{0,\rho}$ et $(g^n)_{0\leq n\leq N}$ à partir de la résolution de problèmes posés en domaine borné, nous allons encore une fois utiliser la précieuse transformée de Floquet-Bloch dans la direction y, pour obtenir des problèmes d'évolution sur des guides périodiques localement perturbés, avec conditions aux limites quasi-périodiques, que nous savons déjà réduire à des problèmes posés en domaine borné.

7.2.3 Détermination de l'opérateur S et de la source

Comme dans le cas de l'ordre un en temps, nous allons déterminer S et $(g^n)_{0\leq n\leq N}$ à partir de leur TFB. Pour cela nous aurons également besoin de connaître l'équation satisfaite par la TFB de $(u^n)_{0\leq n\leq N}$, solution du problème (7.77). On montre, exactement comme dans le cas de l'ordre un en temps, que :

Théorème 7.19. *Soit $\hat{S}(\xi)f$ la TFB de Sf, $\hat{g}^n(\xi)$ celle de g^n et $\hat{u}^n(\xi)$ celle de u^n. Alors $\hat{S}(\cdot)f$ est l'unique élément de $L^2(\mathbb{R}\times[0,L]\times[0,2\pi/L])$ qui pour presque tout $\xi \in [0,2\pi/L]$ soit solution dans $H^1_\xi(B^0)$ de :*

$$\left| \begin{array}{l} A_{1,P}(\theta,\Delta t)\hat{S}(\xi)f \equiv \sqrt{\dfrac{L}{2\pi}} \displaystyle\sum_{p=-M^-}^{M^+-1} f_{|_{B^p}} e^{-ip\xi L} \quad \text{dans } B^0 \\ \partial_y \hat{S}(\xi)f_{|_{y=L}} = e^{i\xi L}\partial_y \hat{S}(\xi)f_{|_{y=0}} \end{array} \right. \tag{7.84}$$

Pour tout $1 \leq n \leq N-1$, $\hat{g}^{n+1}(\cdot)$ est l'unique élément de $L^2(\mathbb{R}\times[0,L]\times[0,2\pi/L])$ pour presque tout $\xi \in [0,2\pi/L]$ soit solution dans $H^1_\xi(B^0)$ de :

$$\left| \begin{array}{l} A_{1,P}(\theta,\Delta t)\hat{g}^{n+1}(\xi) \equiv A_{2,P}(\theta,\Delta t)\hat{u}^n(\xi) - A_{1,P}(\theta,\Delta t)\hat{u}^{n-1}(\xi) + \Delta t^2 \sqrt{\dfrac{L}{2\pi}} \displaystyle\sum_{p=-M^-}^{M^+-1} f^{n,\theta}_{|_{B^p}} e^{-ip\xi L} \\ + \sqrt{\dfrac{L}{2\pi}} \displaystyle\sum_{p=-M^-}^{M^+-1} (\rho_p - \rho)(u^{n-1}_{|_{B^p}} - 2u^n_{|_{B^p}})e^{-ip\xi L} \quad \text{dans } B^0 \\ \partial_y \hat{g}^{n+1}(\xi)_{|_{y=L}} = e^{i\xi L}\partial_y \hat{g}^{n+1}(\xi)_{|_{y=0}} \end{array} \right. \tag{7.85}$$

Enfin, $(\hat{u}^n(\cdot))_{0\leq n\leq N}$ est l'unique famille de $L^2(\mathbb{R}\times[0,L]\times[0,2\pi/L])^{N+1}$ qui pour presque tout

$\xi \in [0, 2\pi/L]$ *soit solution dans* $H^1_\xi(B^0)$ *de :*

$$\left|\begin{array}{l} A_{1,P}(\theta,\Delta t)\hat{u}^{n+1}(\xi) \equiv A_{2,P}(\theta,\Delta t)\hat{u}^n(\xi) - A_{1,P}(\theta,\Delta t)\hat{u}^{n-1}(\xi) + \Delta t^2\sqrt{\frac{L}{2\pi}}\sum_{p=-M^-}^{M^+-1} f^{n,\theta}_{|_{B^p}} e^{-ip\xi L} \\ +\sqrt{\frac{L}{2\pi}}\sum_{p=-M^-}^{M^+-1}(\rho_p-\rho)(u^{n+1}_{|_{B^p}} + u^{n-1}_{|_{B^p}} - 2u^n_{|_{B^p}})e^{-ip\xi L} \quad \textit{dans } B^0 \\ \partial_y\hat{u}^{n+1}(\xi)_{|_{y=L}} = e^{i\xi L}\partial_y\hat{u}^{n+1}(\xi)_{|_{y=0}} \\ \hat{u}^0(\xi) = \sqrt{\frac{L}{2\pi}}\sum_{p=-M^-}^{M^+-1} u_{0|_{B^p}} e^{-ip\xi L} \\ \hat{u}^1(\xi) = \sqrt{\frac{L}{2\pi}}\sum_{p=-M^-}^{M^+-1}(u_{0|_{B^p}} + \Delta t u_{1|_{B^p}} + \frac{\Delta t^2}{2}\Delta u_{0|_{B^p}})e^{-ip\xi L} \end{array}\right. \tag{7.86}$$

Comme il s'agit de problèmes de guide, nous savons que nous pouvons réduire ces problèmes à des problèmes équivalents posés sur Ω^0_0. En application directe du théorème 4.21, nous savons en effet que si l'on définit :

$$\begin{array}{rcl} \hat{S}_0(\xi) : L^2(\Omega_0) & \longrightarrow & H^1_\xi(\Omega^0_0) \\ f & \longmapsto & \hat{S}_0(\xi)f \end{array}$$

où $\hat{S}_0(\xi)f$ est l'unique solution (en vertu du théorème 4.21) dans $H^1_\xi(\Omega^0_0)$ de :

$$\left|\begin{array}{ll} A_{1,P}(\theta,\Delta t)\hat{S}_0(\xi)f \equiv \sqrt{\frac{L}{2\pi}}\sum_{p=-M^-}^{M^+-1} f_{|_{B^p}} e^{-ip\xi L} & \text{dans } B^0 \\ \partial_{\nu_0^+}\hat{S}_0(\xi)f + \Lambda^2_+(\xi)\hat{S}_0(\xi)f|_{\Gamma_0^+} = 0 & \text{sur } \Gamma_0^+ \\ \partial_{\nu_0^-}\hat{S}_0(\xi)f + \Lambda^2_-(\xi)\hat{S}_0(\xi)f|_{\Gamma_0^-} = 0 & \text{sur } \Gamma_0^+ \\ \partial_y\hat{S}_0(\xi)f_{|_{y=L}} = e^{i\xi L}\partial_y\hat{S}_0(\xi)f_{|_{y=0}} & \end{array}\right. \tag{7.87}$$

alors $\hat{S}(\xi)f|_{\Omega^0_0} = \hat{S}_0(\xi)f$, comme $\hat{S}(\xi)f$ peut-être considéré comme un premier pas de temps avec données initiales nulles. Nous avons de plus, toujours en application du théorème 4.21, que $\hat{u}^{n+1}(\xi)|_{\Omega^0_0}$

(que nous notons encore $\hat{u}^{n+1}(\xi)$) est l'unique solution dans $H^1_\xi(\Omega_0^0)$ de :

$$\left|\begin{array}{l}
A_{1,P}(\theta,\Delta t)\hat{u}^{n+1}(\xi) \equiv A_{2,P}(\theta,\Delta t)\hat{u}^{n}(\xi) - A_{1,P}(\theta,\Delta t)\hat{u}^{n-1}(\xi) + \Delta t^2\sqrt{\frac{L}{2\pi}}\sum_{p=-M^-}^{M^+-1} f^{n,\theta}_{|_{B^p}} e^{-ip\xi L} \\
+\sqrt{\frac{L}{2\pi}}\sum_{p=-M^-}^{M^+-1}(\rho_p-\rho)(u^{n+1}_{|_{B^p}} + u^{n-1}_{|_{B^p}} - 2u^{n}_{|_{B^p}})e^{-ip\xi L} \quad \text{dans } \Omega_0^0 \\
\partial_{\nu_0^+}\hat{u}^{n+1}(\xi) + \sum_{k=2}^{n+1}\Lambda^k_+(\xi)\hat{u}^{n+1-k+2}(\xi)|_{\Gamma_0^+} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0^+ \\
\partial_{\nu_0^-}\hat{u}^{n+1}(\xi) + \sum_{k=2}^{n+1}\Lambda^k_-(\xi)\hat{u}^{n+1-k+2}(\xi)|_{\Gamma_0^-} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0^- \\
\partial_y\hat{u}^{n+1}(\xi)_{|_{y=L}} = e^{i\xi L}\partial_y\hat{u}^{n+1}(\xi)_{|_{y=0}} \\
\hat{u}^0(\xi) = \sqrt{\frac{L}{2\pi}}\sum_{p=-M^-}^{M^+-1} u_{0|_{B^p}} e^{-ip\xi L} \\
\hat{u}^1(\xi) = \sqrt{\frac{L}{2\pi}}\sum_{p=-M^-}^{M^+-1}(u_{0|_{B^p}} + \Delta t u_{1|_{B^p}} + \frac{\Delta t^2}{2}\Delta u_{0|_{B^p}})e^{-ip\xi L}
\end{array}\right. \tag{7.88}$$

Ne reste plus qu'à ramener la détermination de $(\hat{g}^n(\xi))_{2\le n\le N}$ à Ω_0^0. Comme dans le cas de l'ordre un en temps, nous devons pour cela montrer au préalable que l'on peut identifier $\hat{g}^n(\xi)$ à une modification de $\hat{u}^n(\xi)$ restreinte au temps n. Plus précisément :

Lemme 7.4. *Pour tout $2 \le n \le N$, soit $(\hat{v}^{k,n}(\xi))_{0\le k\le n}$ définie comme l'unique famille de $H^1_\xi(B^0)^{n+1}$ solution de, pour tout $k < n-1$:*

$$\left|\begin{array}{l}
A_{1,P}(\theta,\Delta t)\hat{v}^{k+1,n}(\xi) \equiv A_{2,P}(\theta,\Delta t)\hat{v}^{k,n}(\xi) - A_{1,P}(\theta,\Delta t)\hat{v}^{k-1,n}(\xi) \\
+\sqrt{\frac{L}{2\pi}}\sum_{p=-M^-}^{M^+-1}\Delta t^2 f^{n,\theta}_{|_{B^p}} e^{-ip\xi L} + (\rho_p-\rho)(u^{n+1}_{|_{B^p}} + u^{n-1}_{|_{B^p}} - 2u^{n}_{|_{B^p}})e^{-ip\xi L} \quad \textit{dans } B^0 \\
\partial_y\hat{v}^{k+1,n}(\xi)_{|_{y=L}} = e^{i\xi L}\partial_y\hat{v}^{k+1,n}(\xi)_{|_{y=0}} \\
\hat{v}^{0,n}(\xi) = \sqrt{\frac{L}{2\pi}}\sum_{p=-M^-}^{M^+-1} u_{0|_{B^p}} e^{-ip\xi L} \\
\hat{v}^{1,n}(\xi) = \sqrt{\frac{L}{2\pi}}\sum_{p=-M^-}^{M^+-1}(u_{0|_{B^p}} + \Delta t u_{1|_{B^p}} + \frac{\Delta t^2}{2}\Delta u_{0|_{B^p}})e^{-ip\xi L}
\end{array}\right. \tag{7.89}$$

et solution au temps n de :

$$\left|\begin{array}{l}
A_{1,P}(\theta,\Delta t)\hat{v}^{n,n}(\xi) \equiv A_{2,P}(\theta,\Delta t)\hat{v}^{n-1,n}(\xi) - A_{1,P}(\theta,\Delta t)\hat{v}^{n-2,n}(\xi) \\
+\sqrt{\frac{L}{2\pi}}\sum_{p=-M^-}^{M^+-1}\Delta t^2 f^{n,\theta}_{|_{B^p}} e^{-ip\xi L} + (\rho_p-\rho)(u^{n-1}_{|_{B^p}} - 2u^{n}_{|_{B^p}})e^{-ip\xi L} \quad \textit{dans } B^0 \\
\partial_y\hat{v}^{n,n}(\xi)_{|_{y=L}} = e^{i\xi L}\partial_y\hat{v}^{n,n}(\xi)_{|_{y=0}}
\end{array}\right. \tag{7.90}$$

Alors :

$$\hat{v}^{k,n}(\xi) = \hat{u}^k(\xi) \textit{ pour tout } k < n \quad \textit{et} \quad \hat{v}^{n,n}(\xi) = \hat{g}^n(\xi)$$

Démonstration. La preuve est la même que celle du lemme 7.2. Pour tout $k < n$, les récurrences satisfaites par $\hat{v}^{k,n}(\xi)$ et $\hat{u}^k(\xi)$ sont identiques, et par conséquent ce problème étant bien posé en vertu du théorème 4.16, nous avons $\hat{v}^{k,n}(\xi) = \hat{u}^k(\xi)$. Mais alors dans ce cas, $\hat{v}^{n,n}(\xi)$ est solution du même problème que $\hat{g}^n(\xi)$, qui est bien posé, et nous avons donc $\hat{v}^{n,n}(\xi) = \hat{g}^n(\xi)$. □

En application du théorème 4.21, nous savons donc, $(\hat{v}^{k,n+1}(\xi))_{0\leq k\leq n}$ étant la solution d'un problème de guide, que, au temps $n+1$:

$$\left|\begin{array}{l} A_{1,P}(\theta,\Delta t)\hat{v}^{n+1,n+1}(\xi) \equiv A_{2,P}(\theta,\Delta t)\hat{v}^{n,n+1} - A_{1,P}(\theta,\Delta t)\hat{v}^{n-1,n+1}(\xi) \\ +\Delta t^2\sqrt{\dfrac{L}{2\pi}}\displaystyle\sum_{p=-M^-}^{M^+-1} f^{n,\theta}_{|_{B^p}}e^{-ip\xi L} + (\rho_p-\rho)(u^{n+1}_{|_{B^p}} + u^{n-1}_{|_{B^p}} - 2u^n_{|_{B^p}})e^{-ip\xi L} \quad \text{dans } \Omega_0^0 \\ \partial_{\nu_0^+}\hat{v}^{n+1,n+1}(\xi) + \displaystyle\sum_{k=2}^{n+1}\Lambda_+^k(\xi)\hat{v}^{n+1-k+2,n+1}(\xi)|_{\Gamma_0^+} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0^+ \\ \partial_{\nu_0^-}\hat{v}^{n+1,n+1}(\xi) + \displaystyle\sum_{k=2}^{n+1}\Lambda_-^k(\xi)\hat{v}^{n+1-k+2,n+1}(\xi)|_{\Gamma_0^-} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0^- \\ \partial_y\hat{v}^{n+1,n+1}(\xi)_{|_{y=L}} = e^{i\xi L}\partial_y\hat{v}^{n+1,n+1}(\xi)_{|_{y=0}} \end{array}\right.$$

Alors en application du lemme ci-dessus, nous savons que $\hat{g}^{n+1}(\xi)$ est l'unique solution dans $H^1_\xi(\Omega_0^0)$ de :

$$\left|\begin{array}{l} A_{1,P}(\theta,\Delta t)\hat{g}^{n+1}(\xi) \equiv A_{2,P}(\theta,\Delta t)\hat{u}^{n} - A_{1,P}(\theta,\Delta t)\hat{u}^{n-1}(\xi) + \Delta t^2\sqrt{\dfrac{L}{2\pi}}\displaystyle\sum_{p=-M^-}^{M^+-1} f^{n,\theta}_{|_{B^p}}e^{-ip\xi L} \\ +\sqrt{\dfrac{L}{2\pi}}\displaystyle\sum_{p=-M^-}^{M^+-1}(\rho_p-\rho)(u^{n+1}_{|_{B^p}} + u^{n-1}_{|_{B^p}} - 2u^n_{|_{B^p}})e^{-ip\xi L} \quad \text{dans } \Omega_0^0 \\ \partial_{\nu_0^+}\hat{g}^{n+1}(\xi) + \Lambda_+^2(\xi)\hat{g}^{n+1}(\xi)|_{\Gamma_0^+} = -\displaystyle\sum_{k=3}^{n+1}\Lambda_+^k(\xi)\hat{u}^{n+1-k+2}(\xi)|_{\Gamma_0^+} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0^+ \\ \partial_{\nu_0^-}\hat{g}^{n+1}(\xi) + \Lambda_-^2(\xi)\hat{g}^{n+1}(\xi)|_{\Gamma_0^-} = -\displaystyle\sum_{k=3}^{n+1}\Lambda_-^k(\xi)\hat{u}^{n+1-k+2}(\xi)|_{\Gamma_0^-} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0^- \\ \partial_y\hat{g}^{n+1}(\xi)_{|_{y=L}} = e^{i\xi L}\partial_y\hat{g}^{n+1}(\xi)_{|_{y=0}} \end{array}\right. \tag{7.91}$$

Nous savons, en appliquant la TFB inverse, que les quantités que nous cherchons pour "assembler" notre équation de Lippmann-Schwinger sont données par :

Théorème 7.20. *Pour tout $f \in L^2(\Omega_0)$ et tout $m \in [\![-M^-, M^+-1]\!]$*

$$S_{0,\theta,\Delta t}f|_{\Omega_0^m} \equiv \sqrt{\frac{L}{2\pi}}\int_0^{2\pi/L}\hat{S}_0(\xi)(\rho_p-\rho)fe^{i\xi mL}d\xi \tag{7.92}$$

De plus, nous avons pour tout $m \in [\![-M^-, M^+-1]\!]$ et tout $2 \leq n \leq N$:

$$g^n|_{\Omega_0^m} \equiv \sqrt{\frac{L}{2\pi}}\int_0^{2\pi/L}\hat{g}^n(\xi)|_{\Omega_0^0}e^{i\xi mL}d\xi \tag{7.93}$$

et pour tout $m \in [\![-M^-, M^+-1]\!]$ et tout $0 \leq n \leq N$:

$$u^n|_{\Omega_0^m} \equiv \sqrt{\frac{L}{2\pi}}\int_0^{2\pi/L}\hat{u}^n(\xi)|_{\Omega_0^0}e^{i\xi mL}d\xi \tag{7.94}$$

Alors comme dans le cas de l'ordre un en temps, nous avons réussi à véritablement ramener notre problème initial à un problème posé en domaine borné (au sens où le calcul de toutes les quantités intervenant dans l'équation (7.81) est lui-aussi ramené à des résolutions sur des domaines bornés). L'étape suivante consiste comme nous en avons maintenant l'habitude à discrétiser par quadrature les intégrales intervenant dans ces expressions.

7.2.4 Semi-discrétisation dans la variable de Floquet

Formulation du problème approché par quadrature

Nous allons procéder entièrement par analogie avec le cas de l'ordre un en temps. Nous utilisons, pour les mêmes raisons qu'auparavant, la formule de quadrature basée sur la règle des trapèzes pour procéder à la discrétisation dans la variable de Floquet. L'approximation par quadrature de l'opérateur $S_{0,\rho}$ se définit directement en posant :

$$\begin{aligned} S_{0,\rho,\Delta k} : L^2(\Omega_0) &\longrightarrow H^1(\Omega_0) \\ f &\longmapsto S_{0,\rho,\Delta k} f \end{aligned}$$

avec, $\forall\, m \in [\![-M^-, M^+ - 1]\!]$:

$$S_{0,\rho,\Delta k} f|_{\Omega_0^m} \equiv \Delta k \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \sum_{j=1}^{N_k} \hat{S}_0(j\Delta k)(\rho_p - \rho) f e^{imj\Delta k L} \tag{7.95}$$

Pour approcher $g^{n+1}|_{\Omega_0}$, nous savons d'après notre expérience de l'ordre un en temps que nous avons besoin de définir une approximation de toute la famille $(\hat{u}^n(\xi))_{0\leq n\leq N}$ au préalable. Étant donnée une famille $(u^n_{\Delta k})_{0\leq n\leq N} \in L^2(\Omega_0)^{N+1}$, on définit la famille $(\hat{u}^n_{\Delta k}(j\Delta k))_{\substack{0\leq n\leq N \\ 1\leq j\leq N_k}}$ associée en posant :

$$\left|\begin{array}{l} A_{1,P}(\theta,\Delta t)\hat{u}^{n+1}_{\Delta k}(j\Delta k) \equiv A_{2,P}(\theta,\Delta t)\hat{u}^{n}_{\Delta k}(j\Delta k) - A_{1,P}(\theta,\Delta t)\hat{u}^{n-1}_{\Delta k}(j\Delta k) \\ +\Delta t^2 \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \displaystyle\sum_{p=-M^-}^{M^+-1} f^{n,\theta}_{|_{B^p}} e^{-ipj\Delta k L} + (\rho_p - \rho)(u^{n+1}_{\Delta k|_{B^p}} + u^{n-1}_{\Delta k|_{B^p}} - 2u^n_{\Delta k|_{B^p}})e^{-ipj\Delta k L} \quad \text{dans } B^0 \\ \partial_y \hat{u}^{n+1}_{\Delta k}(j\Delta k)_{|_{y=L}} = e^{ij\Delta k L}\partial_y \hat{u}^{n+1}_{\Delta k}(j\Delta k)_{|_{y=0}} \\ \hat{u}^0_{\Delta k}(j\Delta k) = \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \displaystyle\sum_{p=-M^-}^{M^+-1} u_{0|_{B^p}} e^{-ipj\Delta k L} \\ \hat{u}^1_{\Delta k}(j\Delta k) = \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \displaystyle\sum_{p=-M^-}^{M^+-1} (u_{0|_{B^p}} + \Delta t u_{1|_{B^p}} + \frac{\Delta t^2}{2}\Delta u_{0|_{B^p}})e^{-ipj\Delta k L} \end{array}\right. \tag{7.96}$$

problème bien posé en vertu du théorème 4.16 et équivalent, en vertu du théorème 4.21, à :

$$\left|\begin{array}{l} A_{1,P}(\theta,\Delta t)\hat{u}^{n+1}_{\Delta k}(j\Delta k) \equiv A_{2,P}(\theta,\Delta t)\hat{u}^{n}_{\Delta k}(j\Delta k) - A_{1,P}(\theta,\Delta t)\hat{u}^{n-1}_{\Delta k}(j\Delta k) \\ +\Delta t^2\sqrt{\dfrac{L}{2\pi}}\displaystyle\sum_{p=-M^-}^{M^+-1} f^{n,\theta}_{|_{B^p}} e^{-ipj\Delta kL} + (\rho_p-\rho)(u^{n+1}_{\Delta k|_{B^p}} + u^{n-1}_{\Delta k|_{B^p}} - 2u^{n}_{\Delta k|_{B^p}})e^{-ipj\Delta kL} \quad \text{dans } \Omega_0^0 \\ \partial_{\nu_0^+}\hat{u}^{n+1}_{\Delta k}(j\Delta k) + \displaystyle\sum_{k=2}^{n+1}\Lambda^k_+(j\Delta k)\hat{u}^{n+1-k+2}_{\Delta k}(j\Delta k)|_{\Gamma_0^+} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0^+ \\ \partial_{\nu_0^-}\hat{u}^{n+1}_{\Delta k}(j\Delta k) + \displaystyle\sum_{k=2}^{n+1}\Lambda^k_-(j\Delta k)\hat{u}^{n+1-k+2}_{\Delta k}(j\Delta k)|_{\Gamma_0^-} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0^- \\ \partial_y\hat{u}^{n+1}_{\Delta k}(j\Delta k)_{|_{y=L}} = e^{ij\Delta kL}\partial_y\hat{u}^{n+1}_{\Delta k}(j\Delta k)_{|_{y=0}} \\ \hat{u}^0_{\Delta k}(j\Delta k) = \sqrt{\dfrac{L}{2\pi}}\displaystyle\sum_{p=-M^-}^{M^+-1} u_{0|_{B^p}} e^{-ipj\Delta kL} \\ \hat{u}^1_{\Delta k}(j\Delta k) = \sqrt{\dfrac{L}{2\pi}}\displaystyle\sum_{p=-M^-}^{M^+-1} (u_{0|_{B^p}} + \Delta t u_{1|_{B^p}} + \dfrac{\Delta t^2}{2}\Delta u_{0|_{B^p}})e^{-ipj\Delta kL} \end{array}\right. \tag{7.97}$$

On définit alors la famille $(\hat{g}^n(j\Delta k))_{\substack{2\le n\le N\\ 1\le j\le N_k}}$ comme l'unique solution de :

$$\left|\begin{array}{l} A_{1,P}(\theta,\Delta t)\hat{g}^{n+1}_{\Delta k}(j\Delta k) \equiv A_{2,P}(\theta,\Delta t)\hat{u}^{n}_{\Delta k}(j\Delta k) - A_{1,P}(\theta,\Delta t)\hat{u}^{n-1}_{\Delta k}(j\Delta k) \\ +\Delta t^2\sqrt{\dfrac{L}{2\pi}}\displaystyle\sum_{p=-M^-}^{M^+-1} f^{n,\theta}_{|_{B^p}} e^{-ipj\Delta kL} + (\rho_p-\rho)(u^{n-1}_{\Delta k|_{B^p}} - 2u^{n}_{\Delta k|_{B^p}})e^{-ipj\Delta kL} \quad \text{dans } B^0 \\ \partial_y\hat{g}^{n+1}_{\Delta k}(j\Delta k)_{|_{y=L}} = e^{ij\Delta kL}\partial_y\hat{g}^{n+1}_{\Delta k}(j\Delta k)_{|_{y=0}} \end{array}\right. \tag{7.98}$$

problème encore bien posé en vertu du théorème 4.16 dont nous savons maintenant, en appliquant le lemme 4.4, qu'il est équivalent à résoudre :

$$\left|\begin{array}{l} A_{1,P}(\theta,\Delta t)\hat{g}^{n+1}_{\Delta k}(j\Delta k) \equiv A_{2,P}(\theta,\Delta t)\hat{u}^{n}_{\Delta k}(j\Delta k) - A_{1,P}(\theta,\Delta t)\hat{u}^{n-1}_{\Delta k}(j\Delta k) \\ +\Delta t^2\sqrt{\dfrac{L}{2\pi}}\displaystyle\sum_{p=-M^-}^{M^+-1} f^{n,\theta}_{|_{B^p}} e^{-ipj\Delta kL} + (\rho_p-\rho)(u^{n-1}_{\Delta k|_{B^p}} - 2u^{n}_{\Delta k|_{B^p}})e^{-ipj\Delta kL} \quad \text{dans } \Omega_0^0 \\ \partial_{\nu_0^+}\hat{g}^{n+1}_{\Delta k}(j\Delta k) + \Lambda^2_+(j\Delta k)\hat{g}^{n+1}_{\Delta k}(j\Delta k)|_{\Gamma_0^+} = -\displaystyle\sum_{k=3}^{n+1}\Lambda^k_+(j\Delta k)\hat{u}^{n+1-k+2}_{\Delta k}(j\Delta k)|_{\Gamma_0^+} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0^+ \\ \partial_{\nu_0^-}\hat{g}^{n+1}_{\Delta k}(j\Delta k) + \Lambda^2_-(j\Delta k)\hat{g}^{n+1}_{\Delta k}(j\Delta k)|_{\Gamma_0^-} = -\displaystyle\sum_{k=3}^{n+1}\Lambda^k_-(j\Delta k)\hat{u}^{n+1-k+2}_{\Delta k}(j\Delta k)|_{\Gamma_0^-} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0^- \\ \partial_y\hat{g}^{n+1}_{\Delta k}(j\Delta k)_{|_{y=L}} = e^{ij\Delta kL}\partial_y\hat{g}^{n+1}_{\Delta k}(j\Delta k)_{|_{y=0}} \end{array}\right. \tag{7.99}$$

et on définit la famille $(g^n_{\Delta k})_{2\le n\le N}$ des sources pour l'équation de Lippmann-Schwinger approchée par quadrature par :

$$g^n_{\Delta k}|_{B^m} \equiv \Delta k\sqrt{\frac{L}{2\pi}}\sum_{j=1}^{N_k}\hat{g}^n_{\Delta k}(j\Delta k)e^{imj\Delta kL} \tag{7.100}$$

Le problème que nous cherchons à résoudre se reformule encore une fois en : étant donnés $u_0 \in H^1(\Delta,\Omega_0),\ u_1 \in H^1(\Omega_0)$ et $f \in L^2(\Omega_0)$, nous cherchons une famille $(u^n_{\Delta k})_{0\le n\le N} \in L^2(\Omega_0)^{N+1}$ telle

que :

$$\left|\begin{array}{l} (I - S_{0,\rho,\Delta k})u^n_{\Delta k} = g^n_{\Delta k}|_{\Omega_0} \qquad \forall\ 2 \leq n \leq N \\ u^0_{\Delta k} = u_0 \\ u^1_{\Delta k} = u_0 + \Delta u_1 + \dfrac{\Delta t^2}{2}\Delta u_0 \end{array}\right. \tag{7.101}$$

où $g^n_{\Delta k}$ est donnée par (7.100), avec $(\hat{g}^n_{\Delta k}(j\Delta k))_{\substack{2\leq n\leq N\\ 1\leq j\leq N_k}}$ et $(\hat{u}^n_{\Delta k}(j\Delta k))_{\substack{0\leq n\leq N\\ 1\leq j\leq N_k}}$ les solutions de (7.99) et (7.97), associées à la famille $u^n_{\Delta k}$.

Les questions d'existence et d'unicité de la solution de ce problème, ainsi que les estimations d'erreur, vont une fois de plus résulter de notre capacité à réinterpréter l'approximation par quadrature comme une troncature du domaine de calcul.

Réinterprétation de l'équation de Lippmann-Schwinger semi-discrète

Cette réinterprétation se base encore une fois sur la construction d'une extension d'une solution de (7.101). Si $(u^n_{\Delta k})_{0\leq n\leq N}$ est une solution (définie sur Ω_0) de (7.101), pour tout $n \geq 1$ et tout $m \in [\![-M^-, M^+ - 1]\!]$:

$$u^n_{\Delta k}|_{\Omega^m_0} \equiv g^n_{\Delta k}|_{\Omega^m_0} + \Delta k\sqrt{\frac{L}{2\pi}}\sum_{j=1}^{N_k}\hat{S}_0(j\Delta k)\left[\theta\Delta t(V_p - V) + (\rho_p - \rho)\right]u^n_{\Delta k}e^{imj\Delta kL}$$

Son extension $(\widetilde{u}^n_{\Delta k})_{0\leq n\leq N}$ est une nouvelle fois définie en posant $\widetilde{u}^0_{\Delta k} = u_0$, $\widetilde{u}^1_{\Delta k} = u_0 + \Delta u_1 + \dfrac{\Delta t^2}{2}\Delta u_0$ et pour tout $n \geq 1$ et tout $m \in \mathbb{Z}$:

$$\widetilde{u}^n_{\Delta k}|_{B^m} \equiv g^n_{\Delta k}|_{B^m} + \Delta k\sqrt{\frac{L}{2\pi}}\sum_{j=1}^{N_k}\hat{S}(j\Delta k)\left[\theta\Delta t(V_p - V) + (\rho_p - \rho)\right]u^n_{\Delta k}e^{imj\Delta kL}$$

Encore une fois, c'est une extension puisque $\hat{S}(j\Delta k)f|_{\Omega^0_0} = \hat{S}_0(j\Delta k)f$ pour tout $f \in L^2(\Omega_0)$, ce qui implique :

$$\widetilde{u}^n_{\Delta k}|_{\Omega_0} = u^n_{\Delta k}$$

si $u^n_{\Delta k}$ est solution de l'équation (7.101). Alors, en procédant exactement comme dans le cas de l'ordre un en temps, on montre que :

Théorème 7.21. *Soit :*

$$\Omega_{N_k} = \mathbb{R}\times\left[\left(\lfloor\frac{-N_k}{2}\rfloor + 1\right)L, \left(\lfloor\frac{N_k}{2}\rfloor + 1\right)L\right]$$

ainsi que :

$$\Gamma^+_{N_k} = \left\{(x,y)\ \mid\ y = \left(\lfloor\frac{N_k}{2}\rfloor + 1\right)L\right\} \qquad \Gamma^-_{N_k} = \left\{(x,y)\ \mid\ y = \left(\lfloor\frac{-N_k}{2}\rfloor + 1\right)L\right\}$$

La famille $(\widetilde{u}^n_{\Delta k})_{0\leq n\leq N}$ définie comme l'extension à $\mathbb{R}^2$ d'une famille $(u^n_{\Delta k})_{0\leq n\leq N}$ solution de (7.101)*, est l'unique solution de : trouver $(\widetilde{u}^n_{\Delta k})_{0\leq n\leq N} \in H^1_{per}(\Omega_{N_k})^{N+1}$ telle que :*

$$\left|\begin{array}{l} A_1(\theta,\Delta t)\widetilde{u}^{n+1}_{\Delta k} = A_2(\theta,\Delta t)\widetilde{u}^n_{\Delta k} - A_1(\theta,\Delta t)\widetilde{u}^{n-1}_{\Delta k} + \Delta t f^{n+\theta} \quad \textit{dans } \Omega_{N_k} \\ \widetilde{u}^{n+1}_{\Delta k|_{\Gamma^+_{N_k}}} = \widetilde{u}^{n+1}_{\Delta k|_{\Gamma^-_{N_k}}} \\ \partial_y\widetilde{u}^{n+1}_{\Delta k|_{\Gamma^+_{N_k}}} = \partial_y\widetilde{u}^{n+1}_{\Delta k|_{\Gamma^-_{N_k}}} \\ \widetilde{u}^0_{\Delta k} = u_0 \\ \widetilde{u}^1_{\Delta k} = u_0 + \Delta u_1 + \dfrac{\Delta t^2}{2}\Delta u_0 \end{array}\right. \tag{7.102}$$

où nous rappelons que : $A_1(\theta,\Delta t) = -\theta\Delta t^2\Delta + \rho$, $A_2(\theta,\Delta t) = -(\theta-1)\Delta t^2\Delta + \rho$ *et* $H^1_{per}(\Omega_{N_k}) = H^1_{\xi=0}(\Omega_{N_k})$.

Démonstration. La preuve est la même que celle du théorème 7.4. On commence par trouver les équations satisfaites bande par bande par $\widetilde{u}^n_k$ et la TFB discrète inverse de $\hat{u}^n_{\Delta k}$

$$v^n_{\Delta k}|_{B^m} = \Delta k \frac{L}{2\pi} \sum_{j=1}^{N_k} \hat{u}^n_{\Delta k}(j\Delta k) e^{imj\Delta kL}$$

On montre ensuite que ces deux familles se raccordent en trace et en dérivée normale entre chaque bande, et qu'elles vérifient les conditions aux limites quasi-périodiques. Alors elles sont solutions de la même récurrence, bien posée, et sont donc égales. L'équation (7.102) suit alors directement de cette égalité et du fait que $\widetilde{u}^n_{\Delta k}|_{\Omega_0} = u^n_{\Delta k}$. Les détails de cette preuve étant rigoureusement identiques à ceux de la (longue) preuve du théorème 7.4, nous ne les reproduisons pas ici. □

Caractère bien posé de l'approximation par quadrature

Le caractère bien posé de l'équation de Lippmann-Schwinger approchée par quadrature est une conséquence directe de celui du problème (7.29) :

Théorème 7.22. *Soient* $u_0 \in H^1(\Delta,\Omega_0)$, $u_1 \in H^1(\Omega_0)$ *et* $f \in L^2(\Omega_0)$, *et soit le problème : trouver* $(u^n_{\Delta k})_{0\le n\le N} \in L^2(\Omega_0)^{N+1}$ *telle que :*

$$\left|\begin{array}{ll} (I - S_{0,\rho,\Delta k})u^n_{\Delta k} = g^n_{\Delta k}|_{\Omega_0} & \forall\ 2 \le n \le N \\ u^0_{\Delta k} = u_0 & \\ u^1_{\Delta k} = u_0 + \Delta u_1 + \dfrac{\Delta t^2}{2}\Delta u_0 & \end{array}\right. \tag{7.101}$$

où $g^n_{\Delta k}$ *est donnée par* (7.100), *avec* $(\hat{g}^n_{\Delta k}(j\Delta k))_{\substack{2\le n\le N\\ 1\le j\le N_k}}$ *et* $(\hat{u}^n_{\Delta k}(j\Delta k))_{\substack{0\le n\le N\\ 1\le j\le N_k}}$ *les solutions de* (7.99) *et* (7.97), *associées à la famille* $u^n_{\Delta k}$. *Ce problème est bien posé.*

Démonstration. Remarquons que $\hat{S}(\xi)f \in H^2(B^0)$ pour tout $f \in L^2(\Omega_0)$ en vertu du résultat de régularité 1.2. Par conséquent, $S_{0,\rho,\Delta k}$ est un opérateur compact sur $L^2(\Omega_0)$, comme Ω_0 est borné. L'inversibilité de l'opérateur $I - S_{0,\rho,\Delta k}$ est donc régie par l'alternative de Fredholm, et par suite il en est de même pour le problème qui nous intéresse.

Soit maintenant $u \in L^2(\Omega_0)$ telle que $(I - S_{0,\rho,\Delta k})u = 0$. Un tel u est un premier pas de temps associé aux données $u_0 = f = 0$ pour le problème (7.101). Alors l'extension $\widetilde{u}^1_{\Delta k}$ de u est solution de :

$$\left|\begin{array}{ll} A_1(\theta,\Delta t)\widetilde{u}^1_{\Delta k} = 0 & \text{dans } \Omega_{N_k} \\ \widetilde{u}^1_{\Delta k}|_{\Gamma^+_{N_k}} = \widetilde{u}^1_{\Delta k}|_{\Gamma^-_{N_k}} & \\ \partial_y\widetilde{u}^1_{\Delta k}|_{\Gamma^+_{N_k}} = \partial_y\widetilde{u}^1_{\Delta k}|_{\Gamma^-_{N_k}} & \end{array}\right.$$

Ce problème étant bien posé, nous en déduisons $\widetilde{u}^1_{\Delta k} = 0$, et par conséquent l'opérateur $I - S_{0,\theta,\Delta t,\Delta k}$ est injectif, et par suite bijectif, d'inverse continu. Alors le problème (7.101) est bien posé. □

Nous sommes donc parvenus, dans le cas de l'ordre deux en temps, à reproduire la méthode développée dans le cas de l'ordre un en temps, et de vérifier son caractère bien posé. Ne reste plus qu'à estimer l'erreur due à cette quadrature, ce qui se fera encore au travers de la réinterprétation de l'équation LS approchée par quadrature.

7.2.5 Estimation d'erreur pour l'approximation par quadrature

De nouveau, remarquons que le problème : trouver $(\widetilde{u}^n_{\Delta k})_{0\leq n\leq N} \in H^1_{per}(\Omega_{N_k})^{N+1}$ telle que :

$$\left|\begin{array}{l} A_1(\theta,\Delta t)\widetilde{u}^{n+1}_{\Delta k} = A_2(\theta,\Delta t)\widetilde{u}^n_{\Delta k} - A_1(\theta,\Delta t)\widetilde{u}^{n-1}_{\Delta k} + \Delta t f^{n+\theta} \quad \text{dans } \Omega_{N_k} \\ \widetilde{u}^{n+1}_{\Delta k|_{\Gamma^+_{N_k}}} = \widetilde{u}^{n+1}_{\Delta k|_{\Gamma^-_{N_k}}} \\ \partial_y \widetilde{u}^{n+1}_{\Delta k|_{\Gamma^+_{N_k}}} = \partial_y \widetilde{u}^{n+1}_{\Delta k|_{\Gamma^-_{N_k}}} \\ \widetilde{u}^0_{\Delta k} = u_0 \\ \widetilde{u}^1_{\Delta k} = u_0 + \Delta u_1 + \dfrac{\Delta t^2}{2}\Delta u_0 \end{array}\right. \tag{7.102}$$

en lequel nous avons réinterprété l'équation (7.101) est une approximation en temps de : trouver $u_{\Delta k} \in C^0(0,T,H^1_{per}(\Delta,\Omega_{N_k})) \cap C^1(0,T,H^1_{per}(\Omega_{N_k})) \cap C^2(0,T,L^2(\Omega_{N_k}))$ solution de :

$$\left|\begin{array}{ll} \rho\dfrac{\partial^2 u_{\Delta k}}{\partial t^2} - \Delta u_{\Delta k} = f & \text{dans } \Omega_{N_k}, \quad t>0 \\ u_{\Delta k|_{\Gamma^+_{N_k}}} = u_{\Delta k|_{\Gamma^-_{N_k}}} & \\ \partial_y u_{\Delta k|_{\Gamma^+_{N_k}}} = \partial_y u_{\Delta k|_{\Gamma^-_{N_k}}} & \\ u^0_{\Delta k} = u_0 & \\ u^1_{\Delta k} = u_0 + \Delta u_1 + \dfrac{\Delta t^2}{2}\Delta u_0 & \end{array}\right. \tag{7.103}$$

telle que nous l'avons étudiée au chapitre 4. Nous savons alors, qu'à N_k fixé, nous avons, si $u_{\Delta k}$ est suffisamment régulière en temps, l'existence de $C>0$ indépendante de N_k, T et Δt telle que :

$$||u_{\Delta k}(\cdot,t^n) - \widetilde{u}^n_{\Delta k}||_{L^2_\rho(\Omega)} \leq CT\Delta t(\sup_{[0,T]}||\partial_t^2 u_{\Delta k}(\cdot,t)||_{H^1(\Omega)} + \sup_{[0,T]}||\partial_t^3 u_{\Delta k}(\cdot,t)||_{L^2_\rho(\Omega)})$$

Alors, en utilisant l'inégalité triangulaire, nous pouvons écrire :

$$||u(\cdot,n\Delta t) - \widetilde{u}^n_{\Delta k}||_{L^2_\rho(\Omega_{N_k})} \leq ||u(\cdot,n\Delta t) - u_{\Delta k}(\cdot,n\Delta t)||_{L^2_\rho(\Omega_{N_k})} + ||u_{\Delta k}(\cdot,n\Delta t) - \widetilde{u}^n_{\Delta k}||_{L^2_\rho(\Omega_{N_k})}$$

$$\leq ||u(\cdot,n\Delta t) - u_{\Delta k}(\cdot,n\Delta t)||_{L^2_\rho(\Omega_{N_k})} + CT\Delta t(\sup_{[0,T]}||\partial_t^2 u_{\Delta k}(\cdot,t)||_{H^1(\Omega)} + \sup_{[0,T]}||\partial_t^3 u_{\Delta k}(\cdot,t)||_{L^2_\rho(\Omega)}) \tag{7.104}$$

Nous sommes donc ramenés encore une fois à étudier l'erreur $e_{\Delta k} = u - u_{\Delta k}$ entre la solution u de (7.76) et celle $u_{\Delta k}$ de (7.103). Elle est solution de :

$$\left|\begin{array}{ll} \rho\dfrac{\partial^2 e_{\Delta k}}{\partial t^2} - \Delta e_{\Delta k} = 0 & \text{dans } \Omega_{N_k}, \quad t>0 \\ u_{\Delta k|_{\Gamma^+_{N_k}}} - u_{\Delta k|_{\Gamma^-_{N_k}}} = \varphi & \\ \partial_y u_{\Delta k|_{\Gamma^+_{N_k}}} - \partial_y u_{\Delta k|_{\Gamma^-_{N_k}}} = \psi & \\ e^0_{\Delta k} = e^1_{\Delta k} = 0 & \end{array}\right. \tag{7.105}$$

avec $\varphi = u_{|_{\Gamma^+_{N_k}}} - u_{|_{\Gamma^-_{N_k}}}$ et $\psi = \partial_y u_{|_{\Gamma^+_{N_k}}} - \partial_y u_{|_{\Gamma^-_{N_k}}}$, $\varphi(0) = \psi(0) = 0$.
Nous ne pouvons une fois de plus pas traiter ce problème via la théorie de Hille-Yosida. Nous devons donc de nouveau faire une incursion dans la théorie des solutions faibles. On met ce problème sous

forme variationnelle :

$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{d^2}{dt^2}\left(\rho e_{\Delta k}, v\right)_{L^2(\Omega_{N_k})} + \left(\nabla e_{\Delta k}, \nabla v\right)_{L^2(\Omega_{N_k})} =< \psi, v|_{\Gamma^+_{N_k}} > \quad \text{dans } \mathcal{D}'(]0,T[),\ \forall v \in H^1_{per}(\Omega_{N_k}) \\ u_{\Delta k}|_{\Gamma^+_{N_k}} - u_{\Delta k}|_{\Gamma^-_{N_k}} = \varphi \\ e^0_{\Delta k} = e^1_{\Delta k} = 0 \end{array}\right. \tag{7.106}$$

On utilise alors l'opérateur de relèvement E du lemme 2.4, et : $e_{\Delta k,0} = e_{\Delta k} - E\varphi \in H^1_{per}(\Omega_{N_k})$ satisfait :

$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{d^2}{dt^2}\left(\rho e_{\Delta k,0}, v\right)_{L^2(\Omega_{N_k})} + \left(\nabla e_{\Delta k,0}, \nabla v\right)_{L^2(\Omega_{N_k})} =< \psi, v|_{\Gamma^+_{N_k}} > \\ -\dfrac{d^2}{dt^2}\left(\rho E\varphi, v\right)_{L^2(\Omega_{N_k})} - \left(E\varphi, \nabla v\right)_{L^2(\Omega_{N_k})} \quad \text{dans } \mathcal{D}'(]0,T[),\ \forall v \in H^1_{per}(\Omega_{N_k}) \\ e^0_{\Delta k,0} = e^1_{\Delta k,0} = 0 \end{array}\right. \tag{7.107}$$

la condition initiale étant satisfaite puisque $\varphi(0) = 0$. Nous disposons alors du théorème suivant (cf. [23]) :

Théorème 7.23. *Soit H un espace de Hilbert, $V \subset H$ un sous-espace dense de H qui s'injecte continûment dans H, et V' son dual. Pour tout $t \in [0,T]$, soit $a(t;\cdot,\cdot)$ une forme bilinéaire continue sur $V \times V$ telle que :*

$$\left\{\begin{array}{l} \textit{pour tout } u, v \in V, \textit{ la fonction } t \mapsto a(t;u,v) \in C^1([0,T]) \\ \textit{il existe deux constantes } \alpha > 0 \textit{ et } \lambda \textit{ telles que} \\ a(t;u,u) + \lambda||u||^2_H \geq \alpha||u||^2_V \end{array}\right. \tag{7.108}$$

Alors, si $u_0 \in V$, $u_1 \in H$ et $f \in L^2(0,T,V')$, il existe une unique solution $u \in C^0(0,T,V), \partial_t u \in C^0(0,T,H), \partial_t^2 u \in L^2(0,T,V')$ au problème :

$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{d^2}{dt^2}\left(u(\cdot), v\right)_H + a(\cdot; u(\cdot), v) =< f(\cdot), v > \quad \textit{dans } \mathcal{D}'(]0,T[),\ \ \forall v \in V \\ u(0) = u_0 \\ \dfrac{d}{dt}u(0) = u_1 \end{array}\right. \tag{7.109}$$

Alors comme dans le cas de l'ordre un en temps, sous réserve que les données du problème satisfait par l'erreur soit suffisamment régulières en temps, nous savons que celui-ci est bien posé. Nous déduisons le caractère bien posé de l'équation satisfaite par l'erreur, ainsi qu'une première estimation, via le résultat suivant :

Théorème 7.24. *Pour tous $\varphi \in H^2(0,T,H^{1/2}(\mathbb{R}^2))$, $\psi \in L^2(0,T,H^{-1/2}(\mathbb{R}^2))$, avec $\varphi(0) = 0$ le problème* (7.105) *est bien posé.*

Démonstration. Comme $\varphi \in H^2(0,T,H^{1/2}(\mathbb{R}^2))$, $\psi \in L^2(0,T,H^{-1/2}(\mathbb{R}^2))$, le second membre de (7.107) satisfait les hypothèses du théorème 7.24. Alors, il existe un unique $e_{\Delta k,0}$ solution de ce problème. En posant $e_{\Delta k} = e_{\Delta k,0} + E\varphi$, on vérifie aisément que $e_{\Delta k}$ est bien solution de (7.105), comme $e_{\Delta k}(0) = e_{\Delta k,0}(0) + E\varphi(0) = 0$. Enfin, toute solution de (7.105) avec données nulles satisfait (7.107) avec données nulles, et est par conséquent nulle et l'unicité en découle.

□

Ne nous reste plus, comme dans le cas de l'ordre un en temps, qu'à vérifier que nous disposons de cette régularité et à obtenir une estimation de décroissance sur la solution exacte pour pouvoir quantifier l'erreur commise. Nous allons voir que dans le cas de notre modèle d'ondes, nous disposons d'un résultat plus fort qu'une simple décroissance de la solution :

Théorème 7.25. *Pour f, u_0, u_1 à support dans Ω_0, la solution de (7.76) satisfait :*

$$suppu(\cdot,t) \subset \big\{(x,y) \ \mid \ y \in \big]-M^- - ct, M^+ + ct\big[\big\}$$

où $c = \sup \sqrt{\frac{1}{\rho}}$.

Démonstration. Nous considérons, les demi-espaces mobiles :

$$\Omega_+^t = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \mid \ y > X_+(t)\big\} \quad \Omega_-^t = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \mid \ y < X_-(t)\big\}$$

où $X_\pm(t)$ sont définis par :

$$\left| \begin{array}{l} \dfrac{dX_\pm}{dt}(t) = V_\pm \\ X_\pm(0) = \pm M^\pm L \end{array} \right.$$

les vitesses $V_\pm$ restant à fixer. Les frontières de ces demi-espaces sont :

$$\Gamma_\pm^t = \big\{(x,y) \ \mid \ y = \pm M^\pm L + V_\pm\big\}$$

Par construction, $u_0 = u_1 = 0$ dans $\Omega_\pm^0$, et $f = 0$ dans $\Omega_\pm^t$, pour tout $t > 0$. Considérons maintenant l'évolution au cours du temps de l'énergie contenue dans $\Omega_\pm^t$, à savoir :

$$E(u, \Omega_\pm^t, t) = \int_{\Omega_\pm^t} e(\cdot,t) \quad \text{où} \quad e(\cdot,t) = \frac{1}{2}\rho \left|\frac{\partial u}{\partial t}(\cdot,t)\right|^2 + \frac{1}{2}|\nabla u(\cdot,t)|^2$$

ce qui a bien un sens puisque $u \in C^1(0,T,H^1(\mathbb{R}^2))$. Remarquons que $(x,y) \in \Omega_+^t \equiv y > M^+L + V_+t$ et $(x,y) \in \Omega_-^t \equiv y < -M^-L + V_-t$ Alors, comme de plus $u \in C^2(0,T,L^2(\mathbb{R}^2)) \cap C^0(0,T,H^2(\mathbb{R}^2))$, nous pouvons écrire que :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}E(u,\Omega_+^t,t) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{d}{dt} \int_{M^+L+V_+t}^{+\infty} e(x,y,t)dydx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \frac{d}{dt} \int_0^{+\infty} e(x, y + M^+L + t, t)dydx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial t} e(x, y + M^+L + t, t)dydx - V_+ \int_{\mathbb{R}} e(x, M^+L + t, t)dx \\
&= \int_{\Omega_+^t} \frac{\partial}{\partial t} e(x,y,t) - V_+ \int_{\Gamma_+^t} e(x,y,t)
\end{aligned}$$

Or, ceci se réécrit d'une part :

$$\frac{d}{dt}E(u,\Omega_+^t,t) = \int_{\Omega_+^t} \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla u + \nabla \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{V_+}{2}\int_{\Gamma_+^t} \rho \left|\frac{\partial u}{\partial t}(\cdot,t)\right|^2 + |\nabla u(\cdot,t)|^2$$

D'autre part, en appliquant la formule de Green (qui a bien un sens pour une solution forte en temps comme $u \in C^2(0,T,L^2(\mathbb{R}^2)) \cap C^1(0,T,H^1(\mathbb{R}^2))$) avec $\partial_t u$ comme fonction test, nous obtenons (la normale à $\Omega_\pm^t$ étant $\mp e_y$) :

$$\int_{\Omega_+^t} \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla u \nabla \frac{\partial u}{\partial t} = -\int_{\Gamma_+^t} \pm \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial t}$$

Aussi, nous avons :

$$\frac{d}{dt}E(u,\Omega_+^t,t) = -\frac{1}{2}\int_{\Gamma_+^t} V_+ \left(\rho \left|\frac{\partial u}{\partial t}(\cdot,t)\right|^2 + |\nabla u(\cdot,t)|^2\right) + 2\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial t}$$

On a ensuite $|\nabla u|^2 = \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 + \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|^2$, aussi ceci s'écrit :

$$\frac{d}{dt}E(u,\Omega_+^t,t) = -\frac{1}{2}\int_{\Gamma_+^t} V_+ \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 - \frac{1}{2}\int_{\Gamma_+^t} V_+ \left(\rho \left|\frac{\partial u}{\partial t}(\cdot,t)\right|^2 + \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|^2\right) + 2\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial t}$$

Puis, on remarque que :

$$\begin{aligned}
\rho \left|\frac{\partial u}{\partial t}(\cdot,t)\right|^2 + \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|^2 + 2\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial t} &= \rho V_+ \left(\left|\frac{\partial u}{\partial t}(\cdot,t)\right|^2 + \frac{1}{\rho}\left|\frac{\partial u}{\partial y}(\cdot,t)\right|^2 + \frac{2}{\rho V_+}\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial t}\right) \\
&= \rho V_+ \left[\left(\left|\frac{\partial u}{\partial t}(\cdot,t)\right| + \frac{1}{\rho V_+}\left|\frac{\partial u}{\partial y}(\cdot,t)\right|\right)^2 + \frac{1}{\rho}(1 - \frac{1}{\rho V_+^2})\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|^2\right]
\end{aligned}$$

Alors, nous avons finalement obtenu :

$$\frac{d}{dt}E(u,\Omega_+^t,t) = -\frac{1}{2}\int_{\Gamma_+^t} V_+ \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 - \frac{1}{2}\int_{\Gamma_+^t} \rho V_+ \left[\left(\left|\frac{\partial u}{\partial t}(\cdot,t)\right| + \frac{1}{\rho V_+}\left|\frac{\partial u}{\partial y}(\cdot,t)\right|\right)^2 + \frac{1}{\rho}(1-\frac{1}{\rho V_+^2})\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|^2\right]$$

De même, on montre que :

$$\frac{d}{dt}E(u,\Omega_-^t,t) = \int_{\Omega_-^t}\frac{\partial}{\partial t}e(x,y,t) + V_-\int_{\Gamma_-^t} e(x,y,t)$$

et en reprenant les calculs, que :

$$\frac{d}{dt}E(u,\Omega_-^t,t) = \frac{1}{2}\int_{\Gamma_+^t} V_+ \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 + \frac{1}{2}\int_{\Gamma_-^t} \rho V_- \left[\left(\left|\frac{\partial u}{\partial t}(\cdot,t)\right| + \frac{1}{\rho V_+}\left|\frac{\partial u}{\partial y}(\cdot,t)\right|\right)^2 + \frac{1}{\rho}(1-\frac{1}{\rho V_-^2})\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|^2\right]$$

Alors dès que $V_+ \geq \sup\sqrt{\frac{1}{\rho}} = c$ et $V_- \leq -\sup\sqrt{\frac{1}{\rho}} = -c$, nous aurons :

$$\frac{d}{dt}E(u,\Omega_\pm^t,t) \leq 0$$

Mais comme nous l'avons déjà remarqué, nous avons $E(u,\Omega_\pm^0,0) = 0$, ce qui implique $E(u,\Omega_\pm^t,t) = 0$ et par suite $u|_{\Omega_\pm^t} = 0$ pour tout $t > 0$, ce qui termine la démonstration. □

De ce résultat de propagation à vitesse finie, nous déduisons immédiatement que pour tout $t \leq \dfrac{\min(-[\![\frac{-N_k}{2}]\!],[\![\frac{N_k}{2}]\!])}{c} - \max(|M^-|L,|M^+|L)$, nous avons :

$$\varphi = u_{|_{\Gamma^+_{N_k}}} - u_{|_{\Gamma^-_{N_k}}} = 0 \quad \text{et} \quad \psi = \partial_y u_{|_{\Gamma^+_{N_k}}} - \partial_y u_{|_{\Gamma^-_{N_k}}} = 0$$

pour le problème satisfait par l'erreur, puisque le support :

$$supp\ u(\cdot,t) \subset \left\{(x,y) \ \mid \ y \in \left]-M^- - ct, M^+ + ct\right[\right\}$$

n'a pas encore atteint la frontière de Ω_{N_k}. On s'attend donc à ce que l'erreur soit nulle, et nous avons le résultat suivant :

Théorème 7.26. *Sous les hypothèses (HT2) et si :*

$$u \in C^3([0,T],L^2(\Omega)) \cap C^2([0,T],H^1(\Omega))$$

Si $(\widetilde{u}^n_{\Delta k})_{0\leq n\leq N}$ *est l'extension de la famille* $(u^n_{\Delta k})_{0\leq n\leq N}$ *solution de* (7.101)*, et si* u *est la solution de* (7.76)*, pour tout :*

$$T \leq \frac{\min(-[\![\frac{-N_k}{2}]\!],[\![\frac{N_k}{2}]\!])}{c} - \max(|M^-|L,|M^+|L)$$

$u = u_{\Delta k}$*, et nous avons l'existence de* $C > 0$ *indépendante de* N_k*,* T *et* Δt *telle que pour tout* $n\Delta t \leq T$ *:*

$$||u(\cdot,n\Delta t) - \widetilde{u}^n_{\Delta k}||_{L^2_\rho(\Omega_{N_k})} \leq CT\Delta t(\sup_{[0,T]}||\partial_t^2 u(\cdot,t)||_{H^1(\Omega)} + \sup_{[0,T]}||\partial_t^3 u(\cdot,t)||_{L^2_\rho(\Omega)}) \tag{7.110}$$

et

$$||u(\cdot,n\Delta t) - u^n_{\Delta k}||_{L^2_\rho(\Omega_0)} \leq CT\Delta t(\sup_{[0,T]}||\partial_t^2 u(\cdot,t)||_{H^1(\Omega)} + \sup_{[0,T]}||\partial_t^3 u(\cdot,t)||_{L^2_\rho(\Omega)}) \tag{7.111}$$

Démonstration. Pour tout $t \leq T$, répétons que $t \leq \frac{\min(-[\![\frac{-N_k}{2}]\!],[\![\frac{N_k}{2}]\!])}{c}$, implique :

$$\varphi = u_{|_{\Gamma^+_{N_k}}} - u_{|_{\Gamma^-_{N_k}}} = 0 \quad \text{et} \quad \psi = \partial_y u_{|_{\Gamma^+_{N_k}}} - \partial_y u_{|_{\Gamma^-_{N_k}}} = 0$$

puisque le support :

$$supp\ u(\cdot,t) \subset \left\{(x,y) \ \mid \ y \in \left]-M^- - cT, M^+ + cT\right[\right\}$$

Comme bien évidemment dans ce cas $\varphi \in H^2(0,T,H^{1/2}(\mathbb{R}^2))$, $\psi \in L^2(0,T,H^{-1/2}(\mathbb{R}^2))$, nous savons en vertu du théorème 7.25 que le problème satisfait par $e_{\Delta k}$ est bien posé, et nous en déduisons que $e_{\Delta k} = 0$. Alors $u = u_{\Delta k}$, et les estimations se déduisent directement de (7.104). □

Ce résultat nous apprend qu'à condition de prendre suffisamment de points de quadrature, la-dite quadrature n'introduit aucune erreur, et nous sommes en train de résoudre le problème sans bord. Notre méthode s'apparente donc à ce qui se passerait si l'on résolvait sur un domaine suffisamment large pour contenir la solution sur tout $[0,T]$. Cela dit, nous ne résolvons pas sur Ω_{N_k}, ce que nous faisons s'apparente à un découplage de la résolution sur chacun des B^m contenus Ω_{N_k}, avec de plus une réduction à un domaine borné sur ces bandes, sans erreur puisque nous utilisons les DtN exacts dans la direction x.

L'idéal, lorsque l'on résout un problème d'ondes par cette méthode, est donc de prendre suffisamment de points de quadrature pour couvrir toute la plage temporelle qui nous intéresse. Il faut bien voir que la résolution de chacun des problèmes correspondant à un point de quadrature donné étant complètement découplée de celle correspondant aux autres points de quadrature, ce choix est la plupart du temps possible en pratique. En revanche, cela augmente proportionnellement la durée d'un pas de temps, puisque nous devons résoudre un pas de temps de problèmes de guide pour chaque point de quadrature, ce qui peut poser problème pour des temps longs.

7.2.6 Discrétisation spatiale

Nous allons maintenant nous employer à expliquer comment discrétiser en espace les problèmes que nous venons d'obtenir, et comment analyser l'erreur introduite par cette discrétisation. Cette étude diffère très peu du cas de l'ordre un en temps, aussi nous allons principalement nous borner à exposer les divers résultats. Nous reprenons l'ensemble des notations du chapitre 6 concernant les problèmes de guide.

Formulation du problème complètement discrétisé

Posons :

$$a^{1,P}_{\Omega,\theta,\Delta t}(u,v) = \left(\theta\Delta t^2\nabla u, \nabla v\right)_{L^2(\Omega)} + \left(\rho_p u, v\right)_{L^2(\Omega)}$$

et

$$a^{2,P}_{\Omega,\theta,\Delta t}(u,v) = \left((2\theta-1)\Delta t^2\nabla u, \nabla v\right)_{L^2(\Omega)} + \left(2\rho_p u, v\right)_{L^2(\Omega)}$$

Nous définissons l'approximation en espace de l'opérateur $\hat{S}(j\Delta k)$ en posant :

$$\begin{aligned} \hat{S}_h(j\Delta k) : L^2(\Omega_0) &\longrightarrow V_h^r(\xi) \\ f &\longmapsto \hat{S}_h(j\Delta k) f \end{aligned}$$

où $\hat{S}_h(j\Delta k)f$ est l'unique solution dans $V_h^r(\xi)$ de :

$$a^{1,P}_{B^0,\theta,\Delta t}(\hat{S}_h(j\Delta k), v_h) = \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \sum_{p=-M^-}^{M^+-1} \left(f_{|_{B^n}}, v_h\right)_{L^2(B^0)} e^{-ipj\Delta kL} \quad \forall v_h \in V_h^r(\xi) \tag{7.112}$$

Ce problème est bien posé en vertu du théorème 6.18, et il est équivalent à résoudre, en vertu du théorème 6.22 : trouver $\hat{S}_{0,h}(j\Delta k)f$ dans $V_h^r(\xi)(\Omega_0^0)$ tel que $\forall v_h \in V_h^r(\xi)(\Omega_0^0)$:

$$\left|\begin{array}{l} a^{1,P}_{\Omega_0,\theta,\Delta t}(\hat{S}_{0,h}(j\Delta k)f, v_h) + \left(\Lambda_-^2(j\Delta k)\hat{S}_{0,h}(j\Delta k)f|_{\Gamma_0^-}, v_h|_{\Gamma_0^-}\right)_{L^2(\Gamma_0^-)} \\ + \left(\Lambda_+^2(j\Delta k)\hat{S}_{0,h}(j\Delta k)f|_{\Gamma_0^+}, v_h|_{\Gamma_0^+}\right)_{L^2(\Gamma_0^-)} = \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \sum_{p=-M^-}^{M^+-1} (f_{|_{\Omega_0^p}}, v_h)_{L^2(\Omega_0)} e^{-ipj\Delta kL} \end{array}\right. \tag{7.113}$$

$\hat{S}_{0,h}(j\Delta k)$ définit alors un opérateur sur $L^2(\Omega_0)$:

$$\begin{aligned}\hat{S}_{0,h}(j\Delta k) : L^2(\Omega_0) &\longrightarrow V_h^r(\xi)(\Omega_0^0)\\ f &\longmapsto \hat{S}_{0,h}(j\Delta k)f\end{aligned}$$

et nous avons, pour tout $f \in L^2(\Omega_0)$

$$\hat{S}_h(j\Delta k)f|_{\Omega_0^0} = \hat{S}_{0,h}(j\Delta k)f$$

Pour $m \in [\![-M^-, M^+ - 1]\!]$ l'approximation spatiale de la famille $(\hat{u}^n(j\Delta k))_{0\leq n\leq N}$ est définie par, étant donnée $(u^n_{h,\Delta k})_{0\leq n\leq N} \in V_h^r(\xi)(\Omega_0)$, l'unique famille $(\hat{u}^n_{h,\Delta k}(j\Delta k))_{0\leq n\leq N}$ solution dans $V_h^r(\xi)^{N+1}$ de :

$$\left|\begin{array}{l}
a^{1,P}_{B^0,\theta,\Delta t}(\hat{u}^{n+1}_{h,\Delta k}(j\Delta k), v_h) = a^{2,P}_{B^0,\theta,\Delta t}(\hat{u}^{n}_{h,\Delta k}(j\Delta k), v_h) - a^{1,P}_{B^0,\theta,\Delta t}(\hat{u}^{n-1}_{h,\Delta k}(j\Delta k), v_h)\\
+\sqrt{\dfrac{L}{2\pi}}\displaystyle\sum_{p=-M^-}^{M^+-1}(f_{|_{\Omega_0^p}}, v_h)_{L^2(B^0)}e^{-ipj\Delta kL}\\
+\sqrt{\dfrac{L}{2\pi}}\displaystyle\sum_{p=-M^-}^{M^+-1}((\rho_p-\rho)(u^{n+1}_{h,\Delta k}|_{B^p} - 2u^n_{h,\Delta k}|_{B^p} + u^{n-1}_{h,\Delta k}|_{B^p}, v_h)_{L^2(B^0)}e^{-ipj\Delta kL} \quad \forall v_h \in V_h^r(\xi)\\
\hat{u}^0_{h,\Delta k}(j\Delta k) = \sqrt{\dfrac{L}{2\pi}}\displaystyle\sum_{p=-M^-}^{M^+-1} P^h u_{0|_{\Omega_0^p}}e^{-ipj\Delta kL}\\
\left(\rho\hat{u}^1_{h,\Delta k}(j\Delta k), v_h\right)_{L^2(B^0)} = \sqrt{\dfrac{L}{2\pi}}\displaystyle\sum_{p=-M^-}^{M^+-1}\left(\rho(P^h u_{0|_{\Omega_0^p}} + \Delta t P^h u_{1|_{\Omega_0^p}}), v_h\right)_{L^2(B^0)}e^{-ipj\Delta kL}\\
+\sqrt{\dfrac{L}{2\pi}}\displaystyle\sum_{p=-M^-}^{M^+-1}\frac{\Delta t^2}{2}\left(\nabla P^h u_{0|_{\Omega_0^p}}, \nabla v_h\right)_{L^2(B^0)}e^{-ipj\Delta kL} \quad \forall v_h \in V_h^r(\xi)
\end{array}\right. \tag{7.114}$$

Encore une fois, ce problème est bien posé en vertu du théorème 6.18, et est équivalent à résoudre : trouver $(\hat{u}^n_{h,\Delta k}(j\Delta k))_{0\leq n\leq N}$ solution dans $V_h^r(\xi)^{N+1}(\Omega_0^0)$ de :

$$\left|\begin{array}{l}
a^{1,P}_{\Omega_0^0,\theta,\Delta t}(\hat{u}^{n+1}_{h,\Delta k}(j\Delta k), v_h) + \displaystyle\sum_{k=2}^{n+1}\left(\Lambda^k_{h,-}(j\Delta k)\hat{u}^{n+1-k+2}_{h,\Delta k}(j\Delta k)|_{\Gamma_0^-}, v_h|_{\Gamma_0^-}\right)_{\Gamma_0^-}\\
+\displaystyle\sum_{k=2}^{n+1}\left(\Lambda^k_{h,+}(j\Delta k)\hat{u}^{n+1-k+2}_{h,\Delta k}(j\Delta k)|_{\Gamma_0^+}, v_h|_{\Gamma_0^+}\right)_{\Gamma_0^+} = a^{2,P}_{\Omega_0^0,\theta,\Delta t}(\hat{u}^{n}_{h,\Delta k}(j\Delta k), v_h)\\
-a^{1,P}_{\Omega_0^0,\theta,\Delta t}(\hat{u}^{n-1}_{h,\Delta k}(j\Delta k), v_h) + \sqrt{\dfrac{L}{2\pi}}\displaystyle\sum_{p=-M^-}^{M^+-1}(f_{|_{\Omega_0^p}}, v_h)_{L^2(\Omega_0)}e^{-ipj\Delta kL}\\
+\sqrt{\dfrac{L}{2\pi}}\displaystyle\sum_{p=-M^-}^{M^+-1}((\rho_p-\rho)(u^{n+1}_{h,\Delta k}|_{B^p} - 2u^n_{h,\Delta k}|_{B^p} + u^{n-1}_{h,\Delta k}|_{B^p}, v_h)_{L^2(\Omega_0^0)}e^{-ipj\Delta kL} \quad \forall v_h \in V_h^r(\xi)(\Omega_0^0)\\
\hat{u}^0_{h,\Delta k}(j\Delta k) = \sqrt{\dfrac{L}{2\pi}}\displaystyle\sum_{p=-M^-}^{M^+-1} P^h u_{0|_{\Omega_0^p}}e^{-ipj\Delta kL}\\
\left(\rho\hat{u}^1_{h,\Delta k}(j\Delta k), v_h\right)_{L^2(\Omega_0^0)} = \sqrt{\dfrac{L}{2\pi}}\displaystyle\sum_{p=-M^-}^{M^+-1}\left(\rho(P^h u_{0|_{\Omega_0^p}} + \Delta t P^h u_{1|_{\Omega_0^p}}), v_h\right)_{L^2(\Omega_0^0)}e^{-ipj\Delta kL}\\
+\sqrt{\dfrac{L}{2\pi}}\displaystyle\sum_{p=-M^-}^{M^+-1}\frac{\Delta t^2}{2}\left(\nabla P^h u_{0|_{\Omega_0^p}}, \nabla v_h\right)_{L^2(\Omega_0^0)}e^{-ipj\Delta kL} \quad \forall v_h \in V_h^r(\xi)(\Omega_0^0)
\end{array}\right. \tag{7.115}$$

en vertu du théorème 6.22. Enfin, nous définissons $\hat{g}^{n+1}_{h,\Delta k}(j\Delta k)$ pour tout $n \geq 0$ comme l'unique solution dans $V^r_h(\xi)$ de, pour tout $v_h \in V^r_h(\xi)$:

$$\left|\begin{array}{l} a^{1,P}_{B^0,\theta,\Delta t}(\hat{g}^{n+1}_{h,\Delta k}(j\Delta k), v_h) = a^{2,P}_{B^0,\theta,\Delta t}(\hat{u}^n_{h,\Delta k}(j\Delta k), v_h) - a^{1,P}_{B^0,\theta,\Delta t}(\hat{u}^{n-1}_{h,\Delta k}(j\Delta k), v_h) \\ +\sqrt{\dfrac{L}{2\pi}} \displaystyle\sum_{p=-M^-}^{M^+-1} (f_{|_{\Omega^p_0}}, v_h)_{L^2(B^0)} e^{-ipj\Delta kL} \\ +\sqrt{\dfrac{L}{2\pi}} \displaystyle\sum_{p=-M^-}^{M^+-1} ((\rho_p - \rho)(u^{n-1}_{h,\Delta k}|_{B^p} - 2u^n_{h,\Delta k}|_{B^p}, v_h)_{L^2(B^0)} e^{-ipj\Delta kL} \end{array}\right. \tag{7.116}$$

En procédant comme dans le cas continu on montre une fois de plus que $\hat{g}^{n+1}_h(j\Delta k)$ comme $\hat{u}^{n+1}_h(j\Delta k)$, se réduit à la résolution du problème posé sur Ω^0_0 : trouver $\hat{g}^{n+1}_h(j\Delta k) \in V^r_h(\xi)(\Omega_0)$ tel que $\forall v_h \in V^r_h(\xi)(\Omega^0_0)$:

$$\left|\begin{array}{l} a^{1,P}_{\Omega^0_0,\theta,\Delta t}(\hat{g}^{n+1}_{h,\Delta k}(j\Delta k), v_h) + \left(\Lambda^2_{h,-}(j\Delta k)\hat{g}^{n+1}_{h,\Delta k}(j\Delta k)|_{\Gamma^-_0}, v_h|_{\Gamma^-_0}\right)_{\Gamma^-_0} \\ + \left(\Lambda^2_{h,+}(j\Delta k)\hat{g}^{n+1}_{h,\Delta k}(j\Delta k)|_{\Gamma^+_0}, v_h|_{\Gamma^+_0}\right)_{\Gamma^+_0} = -\displaystyle\sum_{k=3}^{n+1} \left(\Lambda^k_{h,-}(j\Delta k)\hat{u}^{n+1-k+2}_{h,\Delta k}(j\Delta k)|_{\Gamma^-_0}, v_h|_{\Gamma^-_0}\right)_{\Gamma^-_0} \\ -\displaystyle\sum_{k=3}^{n+1} \left(\Lambda^k_{h,+}(j\Delta k)\hat{u}^{n+1-k+2}_{h,\Delta k}(j\Delta k)|_{\Gamma^+_0}, v_h|_{\Gamma^+_0}\right)_{\Gamma^+_0} + a^{2,P}_{\Omega^0_0,\theta,\Delta t}(\hat{u}^n_{h,\Delta k}(j\Delta k), v_h) \\ -a^{1,P}_{\Omega^0_0,\theta,\Delta t}(\hat{u}^{n-1}_{h,\Delta k}(j\Delta k), v_h) + \sqrt{\dfrac{L}{2\pi}} \displaystyle\sum_{p=-M^-}^{M^+-1} (f_{|_{\Omega^p_0}}, v_h)_{L^2(\Omega^0_0)} e^{-ipj\Delta kL} \\ +\sqrt{\dfrac{L}{2\pi}} \displaystyle\sum_{p=-M^-}^{M^+-1} ((\rho_p - \rho)(u^{n-1}_{h,\Delta k}|_{\Omega^p_0} - 2u^n_{h,\Delta k}|_{\Omega^p_0}, v_h)_{L^2(\Omega^0_0)} e^{-ipj\Delta kL} \end{array}\right. \tag{7.117}$$

Alors nous définissons l'opérateur discret $S_{0,\rho,h,\Delta k}$ et la source discrète $g^n_{h,\Delta k}$ pour l'équation de Lippmann-Schwinger comme, $\quad \forall\, m \in [\![-M^-, M^+ - 1]\!]$:

$$S_{0,\rho,h,\Delta k} f|_{\Omega^m_0} \equiv \Delta k \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \sum_{j=1}^{N_k} \hat{S}_{0,h}(j\Delta k)(\rho_p - \rho) f e^{imj\Delta kL} \tag{7.118}$$

et pour tout $n \geq 2$:

$$g^n_{h,\Delta k}|_{\Omega^m_0} \equiv \Delta k \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \sum_{j=1}^{N_k} \hat{g}^n_{h,\Delta k}(j\Delta k)|_{\Omega^0_0} e^{imj\Delta kL} \tag{7.119}$$

qui sont clairement à valeur dans $V^r_h(\Omega_0)$. Le problème complètement discret que nous cherchons à résoudre s'écrit : trouver $(u^n_{h,\Delta k})_{0\leq n\leq N} \in V^r_h(\Omega_0)^{N+1}$ telle que :

$$\left|\begin{array}{l} (I - S_{0,\theta,\Delta t,h,\Delta k}) u^n_{h,\Delta k} = g^n_{h,\Delta k}|_{\Omega_0} \quad \forall\ 2 \leq n \leq N \\ u^0_{h,\Delta k} = P^h u_0 \\ \left(\rho u^1_{h,\Delta k}, v_h\right)_{L^2(\Omega_0)} = \left(\rho(P^h u_0 + \Delta t P^h u_1), v_h\right)_{L^2(\Omega_0)} \\ +\dfrac{\Delta t^2}{2} \left(\nabla P^h u_0, \nabla v_h\right)_{L^2(\Omega_0)} \quad \forall v_h \in V^r_h(\xi)(\Omega_0) \end{array}\right. \tag{7.120}$$

où $g^n_{h,\Delta k}$ est donnée par (7.119), avec $\left(\hat{g}^n_{h,\Delta k}(j\Delta k)\right)_{\substack{2\leq n\leq N \\ 1\leq j\leq N_k}}$ et $\left(\hat{u}^n_{h,\Delta k}(j\Delta k)\right)_{\substack{0\leq n\leq N \\ 1\leq j\leq N_k}}$ les solutions de (7.117) et (7.115), associées à la famille $u^n_{h,\Delta k}$.

Réinterprétation et caractère bien posé du problème discret

Étant donnée une solution $(u^n_{h,\Delta k})_{0\leq n\leq N} \in V^r_h(\xi)^{N+1}(\Omega_0)$ de (7.120), nous construisons son extension $(\widetilde{u}^n_{h,\Delta k})_{0\leq n\leq N}$ à tout $\mathbb{R}^2$ en posant $\widetilde{u}^0_{h,\Delta k} = I^r_h u_0$, et pour tout $n \geq 1$ et tout $m \in \mathbb{Z}$:

$$\widetilde{u}^n_{h,\Delta k}|_{B^m} \equiv g^n_{h,\Delta k}|_{B^m} + \Delta k\sqrt{\frac{L}{2\pi}}\sum_{j=1}^{N_k} \hat{S}_h(j\Delta k)\left[\theta\Delta t(V_p - V) + (\rho_p - \rho)\right] u^n_{h,\Delta k} e^{imj\Delta kL}$$

Comme $(u^n_{h,\Delta k})_{0\leq n\leq N}$ est solution de (7.120), nous avons :

$$u^n_{h,\Delta k}|_{\Omega_0^m} \equiv g^n_{h,\Delta k}|_{\Omega_0^m} + \Delta k\sqrt{\frac{L}{2\pi}}\sum_{j=1}^{N_k} \hat{S}_{0,h}(j\Delta k)\left[\theta\Delta t(V_p - V) + (\rho_p - \rho)\right] u^n_{h,\Delta k} e^{imj\Delta kL}$$

et il s'agit bien d'une extension puisque $\hat{S}_h(j\Delta k)f|_{\Omega_0^0} = \hat{S}_{0,h}(j\Delta k)f$ pour tout $f \in L^2(\Omega_0)$, ce qui implique :

$$\widetilde{u}^n_{h,\Delta k}|_{\Omega_0} = u^n_{h,\Delta k}$$

si $u^n_{h,\Delta k}$ est solution de l'équation (7.120). Alors, en procédant exactement comme pour l'ordre un en temps, on démontre que exactement de la même façon que pour le théorème 7.12 au second membre près (c'est pourquoi nous ne reproduisons pas la preuve) que :

Théorème 7.27. *Soit $(u^n_{h,\Delta k})_{0\leq n\leq N}$ une solution de (7.120). Alors son extension $(\widetilde{u}^n_{h,\Delta k})_{0\leq n\leq N}$ est solution du problème bien posé : trouver $(\widetilde{u}^n_{h,\Delta k})_{0\leq n\leq N} \in V^r_{h,per}(\Omega_{N_k})^{N+1}$ tel que :*

$$\left|\begin{array}{l} a^1_{\Omega_{N_k},\theta,\Delta t}(\widetilde{u}^{n+1}_{h,\Delta k}, v_h) = a^2_{\Omega_{N_k},\theta-1,\Delta t}(\widetilde{u}^n_{h,\Delta k}, v_h) - a^1_{\Omega_{N_k},\theta,\Delta t}(\widetilde{u}^{n-1}_{h,\Delta k}, v_h) \\ + (f, v_h)_{L^2(\Omega_{N_k})} \quad \forall v_h \in V^r_{h,per}(\Omega_{N_k}) \\ \widetilde{u}^0_{h,\Delta k} = P^h u_0 \\ \left(\rho\widetilde{u}^1_{h,\Delta k}, v_h\right)_{L^2(\Omega_{N_k})} = \left(\rho(P^h u_0 + \Delta t P^h u_1), v_h\right)_{L^2(\Omega_{N_k})} \\ + \dfrac{\Delta t^2}{2}\left(\nabla P^h u_0, \nabla v_h\right)_{L^2(\Omega_{N_k})} \quad \forall v_h \in V^r_{h,per}(\Omega_{N_k}) \end{array}\right. \tag{7.121}$$

De cette réinterprétation, nous déduisons aisément le caractère bien posé du problème discret :

Théorème 7.28. *Sous les hypothèses (HT2), il existe une unique famille $(u^n_{h,\Delta k})_{0\leq n\leq N} \in V^r_h(\Omega_0)^{N+1}$ telle que :*

$$\left|\begin{array}{l} (I - S_{0,\theta,\Delta t,h,\Delta k})u^n_{h,\Delta k} = g^n_{h,\Delta k}|_{\Omega_0} \quad \forall\ 2 \leq n \leq N \\ u^0_{h,\Delta k} = P^h u_0 \\ \left(\rho u^1_{h,\Delta k}, v_h\right)_{L^2(\Omega_0)} = \left(\rho(P^h u_0 + \Delta t P^h u_1), v_h\right)_{L^2(\Omega_0)} \\ + \dfrac{\Delta t^2}{2}\left(\nabla P^h u_0, \nabla v_h\right)_{L^2(\Omega_0)} \quad \forall v_h \in V^r_h(\xi)(\Omega_0) \end{array}\right. \tag{7.120}$$

où $g^n_{h,\Delta k}$ est donnée par (7.119), avec $\left(\hat{g}^n_{h,\Delta k}(j\Delta k)\right)_{\substack{2\leq n\leq N\\ 1\leq j\leq N_k}}$ et $\left(\hat{u}^n_{h,\Delta k}(j\Delta k)\right)_{\substack{0\leq n\leq N\\ 1\leq j\leq N_k}}$ les solutions de (7.117) et (7.115), associées à la famille $u^n_{h,\Delta k}$.

la preuve étant identique à celle du théorème 7.13. Ne reste plus qu'à obtenir une estimation d'erreur prenant en compte la discrétisation spatiale.

Estimation d'erreur pour le problème complètement discrétisé

Comme dans le cas de l'ordre un en temps, obtenir cette estimation globale va être particulièrement aisé au vu des résultats que nous avons déjà à notre disposition. Le problème (7.121) étant une approximation espace-temps du problème :

Trouver $u_{\Delta k} \in C^0(0,T,H^1_{per}(\Delta,\Omega_{N_k})) \cap C^1(0,T,H^1_{per}(\Omega_{N_k})) \cap C^2(0,T,L^2(\Omega_{N_k}))$ solution de :

$$\left|\begin{array}{ll} \rho\dfrac{\partial^2 u_{\Delta k}}{\partial t^2} - \Delta u_{\Delta k} = f & \text{dans } \Omega_{N_k}, \quad t>0 \\ u_{\Delta k}|_{\Gamma^+_{N_k}} = u_{\Delta k}|_{\Gamma^-_{N_k}} & \\ \partial_y u_{\Delta k}|_{\Gamma^+_{N_k}} = \partial_y u_{\Delta k}|_{\Gamma^-_{N_k}} & \\ u^0_{\Delta k} = u_0 & \\ u^1_{\Delta k} = u_0 + \Delta u_1 + \dfrac{\Delta t^2}{2}\Delta u_0 & \end{array}\right. \tag{7.103}$$

l'estimation que nous recherchons s'obtient directement :

Théorème 7.29. *Sous les hypothèses (HT2) et celles du théorème 6.19, si $(\widetilde{u}^n_{\Delta k})_{0\le n\le N}$ est l'extension de la famille $(u^n_{\Delta k})_{0\le n\le N}$ solution de* (7.101)*, et si u est la solution de* (7.76)*, pour tout :*

$$T \le \frac{\min(-[\![\frac{-N_k}{2}]\!], [\![\frac{N_k}{2}]\!])}{c} - \max(|M^-|L, |M^+|L)$$

nous avons l'existence de $C>0$ indépendante de N_k, T h et Δt telle que pour tout $n\Delta t \le T$:

$$||u(\cdot,n\Delta t) - \widetilde{u}^n_{\Delta k}||_{L^2_\rho(\Omega_{N_k})} \le CT(\Delta t + h^2) \tag{7.122}$$

et

$$||u(\cdot,n\Delta t) - u^n_{\Delta k}||_{L^2_\rho(\Omega_0)} \le CT(\Delta t + h^2) \tag{7.123}$$

Démonstration. La preuve est élémentaire. Nous avons, en vertu du théorème 7.26 $u = u_{\Delta k}$. Alors :

$$||u(\cdot,n\Delta t) - \widetilde{u}^n_{\Delta k}||_{L^2_\rho(\Omega_{N_k})} = ||u_{\Delta k}(\cdot,n\Delta t) - \widetilde{u}^n_{\Delta k}||_{L^2_\rho(\Omega_{N_k})}$$

et cette quantité s'estime via le théorème 6.19, ce qui nous fournit le résultat . □

Au niveau discret également, sous réserve d'utiliser suffisamment de points de quadrature, notre méthode n'introduit pas d'erreur liée à cette quadrature, et est équivalente à la résolution sur un maillage infini d'une approximation espace temps du problème initial. Nous avons donc véritablement réduit cette résolution à un domain borné, sans introduire d'erreur due à cette réduction. Les seules erreurs commises sont les erreurs classiques de discrétisation en espace et en temps, dues au schéma choisi (et comme nous l'avons expliqué, nous pourrions utiliser n'importe quel schéma à la place du θ-schéma).

Remarque 7.7. *Ce résultat (de même que celui du théorème 7.26) est à rapprocher de ceux des théorèmes 2.11 et 3.13 pour le cas harmonique. Le régime harmonique correspondant moralement aux temps longs pour notre problème d'évolution, les résultats de cette section nous apprennent qu'il faudra un nombre infini de points de quadrature pour avoir une solution exacte quand $t \to +\infty$, et que, au vu du problème* (7.105)*, c'est la décroissance de la solution harmonique qui assurera l'éventuelle convergence de la méthode. Les théorèmes 2.11 et 3.13 expriment également cet état de fait (même si nous n'avons pu les établir qu'en présence d'absorption).*

La quadrature dans la variable de Floquet périodise les solutions, aussi bien harmoniques que temporelles, aussi, à nombre de points de quadrature fixé, au delà du temps T maximal donné par le

théorème ci-dessus, les périodisations de la solution vont interférer entre elles. Si la solution décroît rapidement à mesure qu'elle s'éloigne de la source (c'est le cas si le milieu est absorbant), alors ces interactions ne vont pas beaucoup perturber la solution (et on peut utiliser un "petit" nombre de points de quadrature). En revanche, si la solution décroît lentement, ces interactions vont fortement dégrader la solution. L'erreur due à la quadrature en régime harmonique se réinterprètant en quelque sorte comme la somme de toutes les interactions de la solution avec toutes ces périodisées, qui ont, à l'infini en temps, eu le temps d'atteindre le domaine Ω_{N_k}. On comprend donc qu'il faille d'autant plus "éloigner" le domaine Ω_{N_k} de ces répliques que la solution décroit peu, c'est-à-dire augmenter le nombre de points de quadrature, et on retrouve ainsi a priori les observations que nous avions déjà effectuées dans le cas harmonique (cf chapitre 2 et 3).

7.2.7 Le cas de plusieurs défauts

Nous pourrions bien entendu redévelopper l'ensemble des résultats que nous avons obtenus pour l'ordre deux en temps dans le cas d'un seul défaut sur le cas de plusieurs défauts. Cette extension ne présente aucune différence avec le cas de l'ordre un en temps : nous allons devoir modifier le second membre des problèmes de guide pour tenir compte des multiples défauts, et utiliser les opérateurs DtN correspondant au cas du scattering multiple pour pouvoir effectuer les réductions à des domaines bornés. Il nous a semblé toutefois qu'il serait, à ce stade du mémoire, fastidieux de répéter ce qui peut se voir comme encore les mêmes résultats, sur un cas différent, d'autant que, comme le lecteur l'aura noté, la simple écriture des divers problèmes prend une place considérable. Nous espérons que le lecteur, parvenu à ce stade du mémoire, verra sans peine qu'il n'y a rien de nouveau à effectuer cette extension. Aussi, nous allons nous borner à présenter des résultats numériques correspondant à cette situation de scattering multiple, en gardant à l'esprit que l'ensemble des résultats que nous avons obtenus pour le cas du simple scattering demeurent vrais dans cette situation plus complexe.

7.2.8 Résultats numériques

Nous terminons ce chapitre par quelques résultats numériques sur les problèmes d'ordre deux en temps, c'est-à-dire sur l'équation des ondes en milieu périodique. Nous conservons les mêmes maillages que dans le cas de l'ordre un en temps présenté en fin de section précédente. Nous allons encore une fois commencer par comparer les résultats de notre méthode à une résolution sur un grand domaine, avec conditions de Dirichlet. Comme la vitesse de propagation est finie dans le cas de l'équation des ondes, cette solution de référence sera identique à une résolution sur un domaine infini (donc ce que devrait produire notre méthode), tant que l'onde n'aura pas atteint les bords du domaine de calcul. Nous utiliserons la source harmonique :

$$f(x,y,t) = \chi_{\Omega_0}(x,y) A_f e^{-\left(\frac{(x-c_x)^2}{w_x^2} + \frac{(y-c_y)^2}{w_y^2}\right)} cos(\omega t)$$

avec $A = 16$, $c_x = c_y = 0.5$, $w_x = w_y = 0.1$. Nous commençons par le cas du milieu homogène, avec $\omega = 10$. Les résultats de la figure 7.26 (le domaine de résolution est le carré central de taille 1, la solution est reconstruite sur 6 périodes dans chaque direction autour du support de la source) dans cette configuration nous confirment une fois de plus le bon fonctionnement de la méthode, au sens où les deux méthodes donnent bien la même solution tant que celle-ci n'a pas atteint les bords du domaine de calcul pour la résolution avec conditions de Dirichlet. Nous reproduisons la même expérience sur le milieu périodique avec défaut borné de la figure 7.24, et les résultats de la figure 7.27 dans cette configuration plus complexe nous montrent qu'une fois de plus, la méthode LS-DtN donne une solution d'excellente qualité. Nous utilisons maintenant la même source pour $\omega = 5$, mais dans le cas du défaut linéique localement perturbé de la figure 7.25. Les résultats sont présentés sur les figures 7.28 et 7.29, sur lesquelles nous pouvons une fois de plus observer

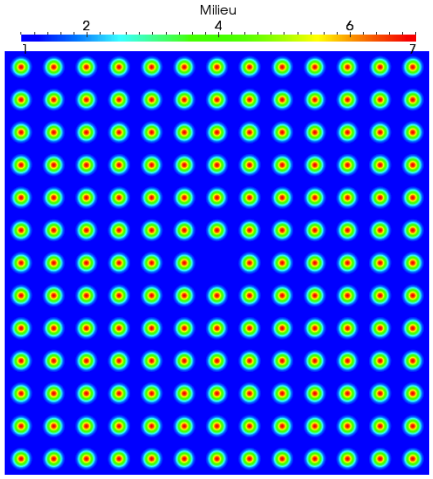


FIGURE 7.24 – Milieu périodique

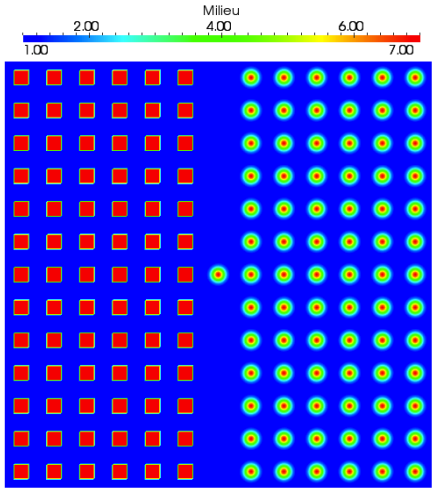


FIGURE 7.25 – Milieu périodique

la complexité du phénomène de propagation d'ondes en milieu périodique. Nous sommes donc parvenus avec succès à étendre la méthode LS-DtN au cas des problèmes d'évolution en milieux périodiques, et ce dans des configurations relativement complexes présentant un ou plusieurs défauts linéiques localement perturbés. La méthode ainsi obtenue est particulièrement efficace dans le cas de l'équation de la chaleur (convergence exponentielle) et exacte (au sens où elle n'introduit pas de frontières artificielles) dans le cas de l'équation des ondes (à condition de prendre suffisamment de points de quadrature). Dans le cas de l'équation de Schrödinger, pour laquelle la situation est moins claire du point de vue théorique, les résultats numériques sont tout aussi encourageant que pour les autres situations abordées. Nous espérons qu'il apparaît clairement au lecteur que la méthode que nous venons de décrire n'est absolument pas limitée aux θ-schémas, et peut s'appliquer pour n'importe quel schéma en temps. La condition est de construire convenablement les opérateurs DtN de guide (qui étaient une θ-version d'un DtN classique dans notre cas).

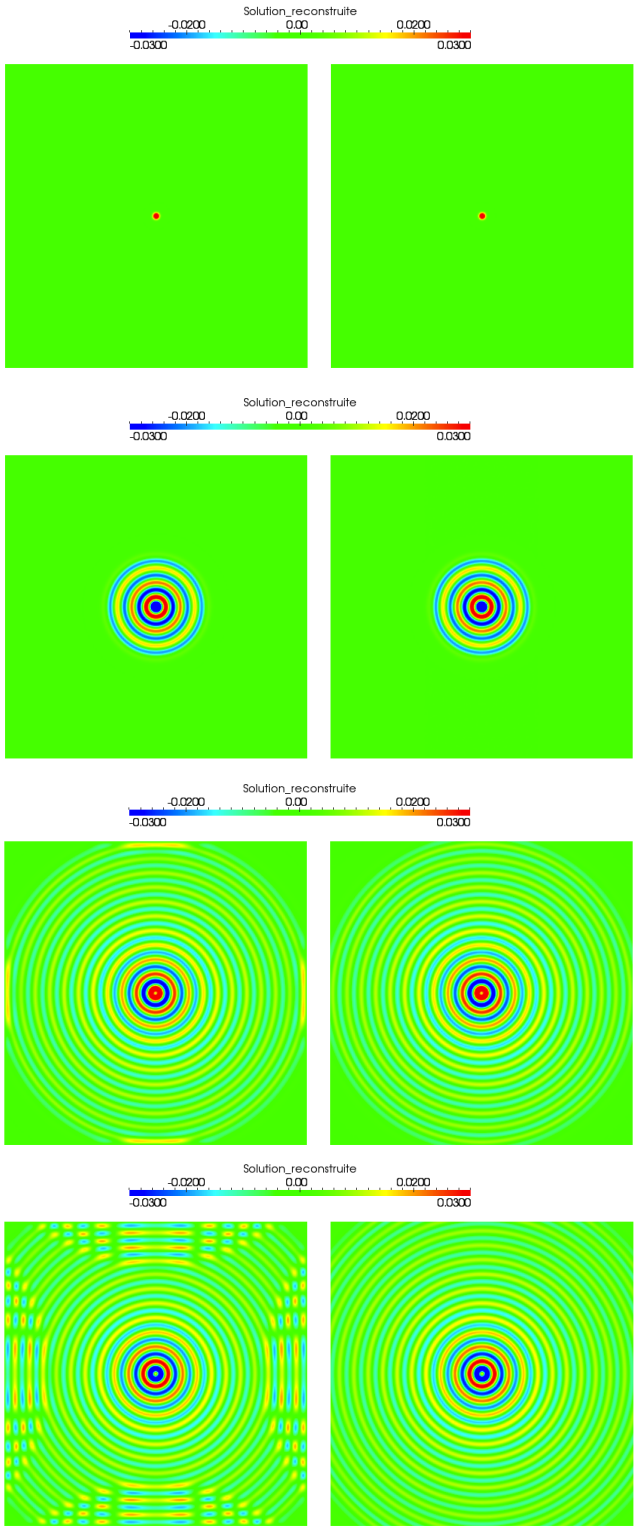


FIGURE 7.26 – Comparaison entre le schéma sur un grand domaine et la solution donnée par la méthode en milieu homogène, pour $r = 2$, $\theta = 1/4$, $\Delta t = 0.04$, $N_k = 30$, pour $t = 0.16, 2.4, 7.2$ et 8.8

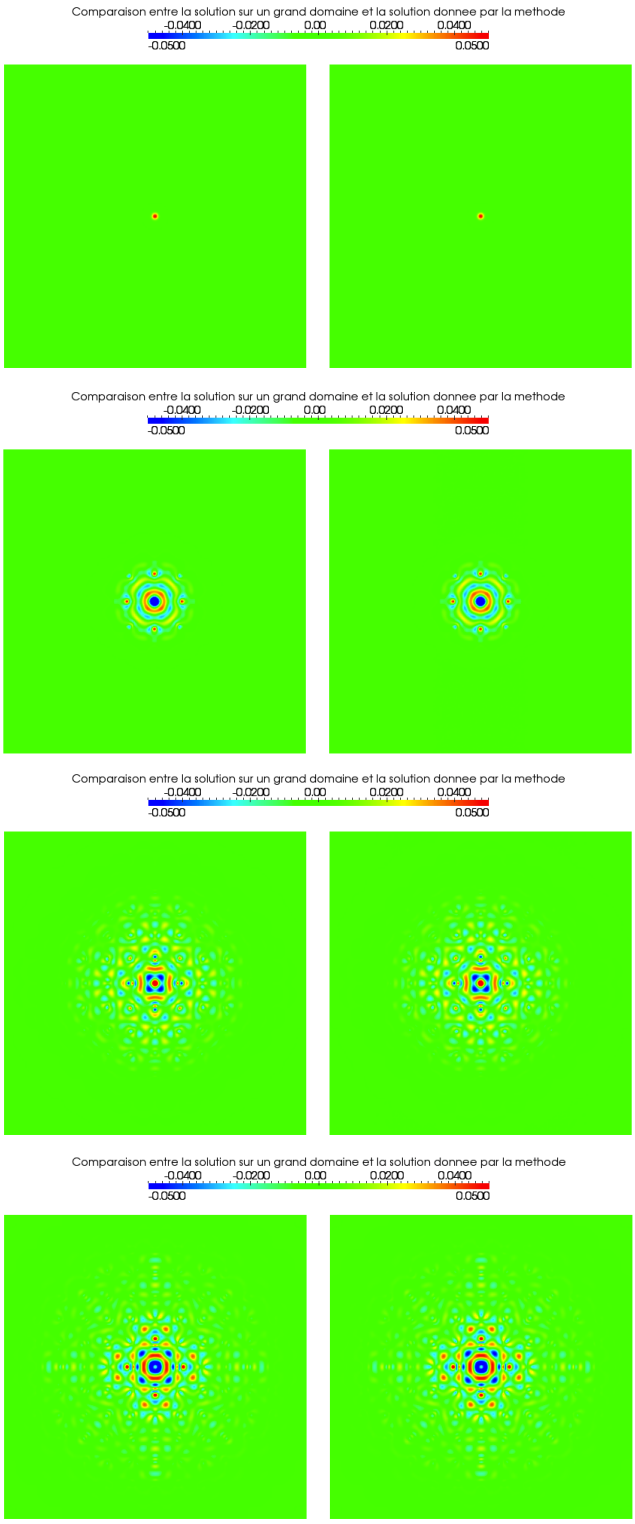


FIGURE 7.27 – Comparaison entre le schéma sur un grand domaine et la solution donnée par la méthode sur le milieu de la figure 7.24, pour $r = 2$, $\theta = 1/4$, $\Delta t = 0.04$, $N_k = 30$, pour $t = 0.16, 2.4, 6.4$ et 8.8

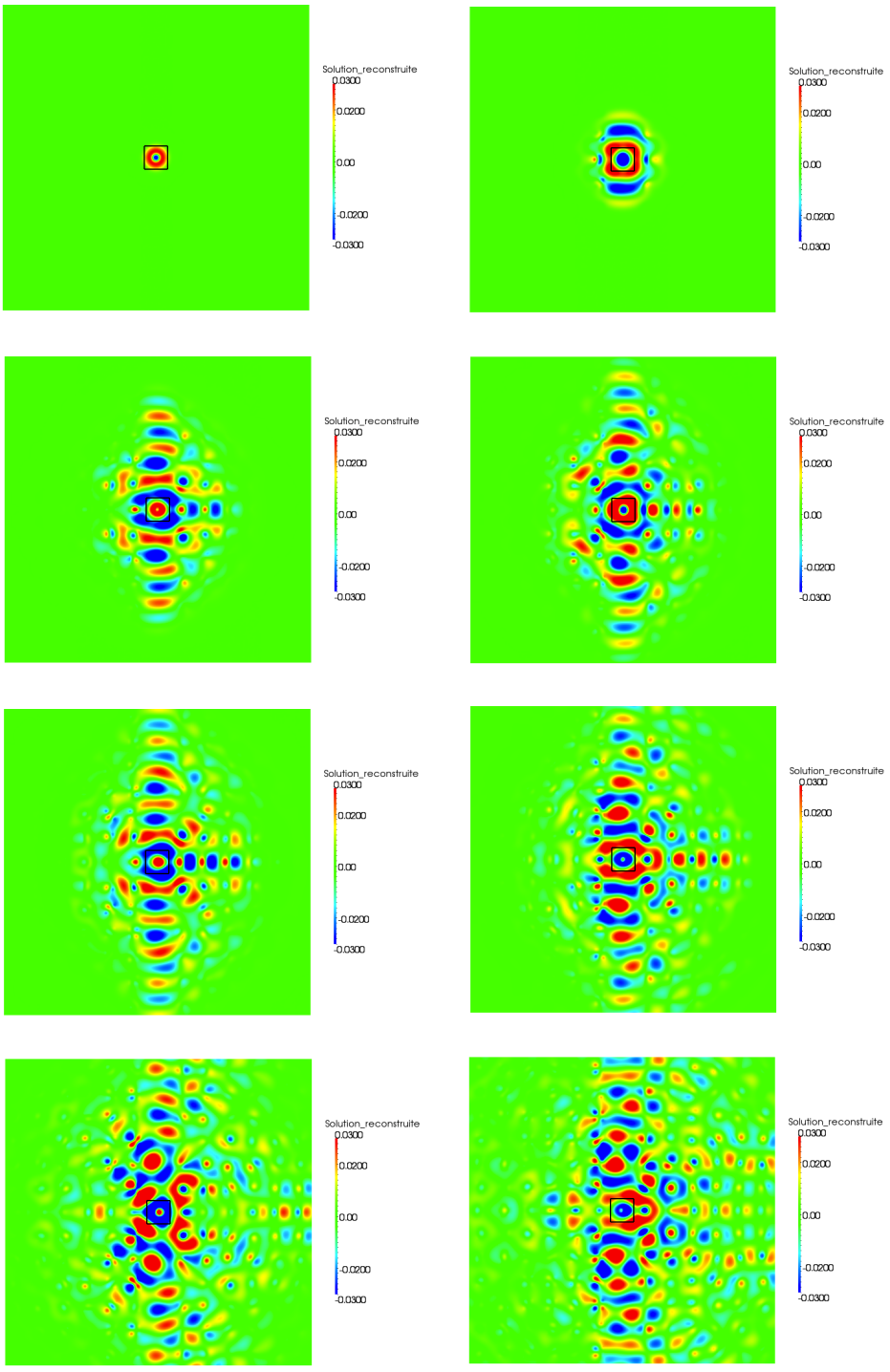


FIGURE 7.28 – Solution pour le milieu de la figure 7.25, pour $r = 2$, $\theta = 1/4$, $\Delta t = 0.04$, $N_k = 30$, pour $t = 0.8, 2.4, 5.6, 7.2, 8, 10, 14$ et 20

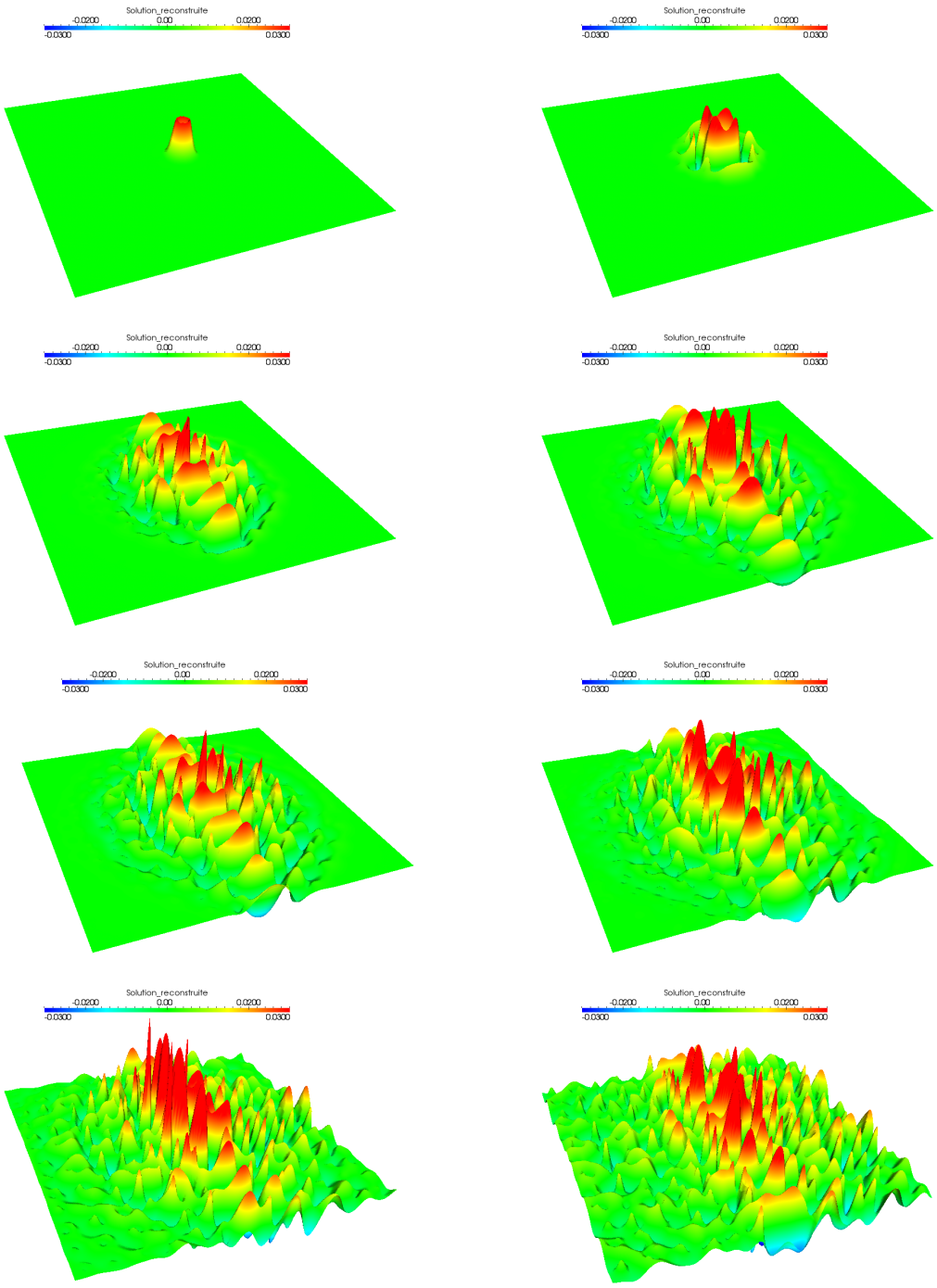


FIGURE 7.29 – Visualisation 3D de la solution pour le milieu de la figure 7.25, pour $r = 2$, $\theta = 1/4$, $\Delta t = 0.04$, $N_k = 30$, pour $t = 0.8, 2.4, 5.6, 7.2, 8, 10, 14$ et 20

Conclusion

Les méthodes que nous avons présentées sont donc parfaitement comprises, tant du point de vue théorique que numérique, et permettent de traiter des situations complexes (comme par exemple le cas de plusieurs défauts linéiques). Les résultats numériques sont très satisfaisants, et le coût de mise en œuvre de ces méthodes est très compétitif en régime harmonique, et tout à fait raisonnable et satisfaisant pour les problèmes d'évolution. Insistons une dernière fois sur le fait que bien que nous ayons exclusivement travaillé sur les θ-schémas dans la seconde partie du mémoire, la méthode s'adapte à n'importe quel autre schéma numérique, simplement en modifiant les équations régissant les divers problèmes de cellule suivant l'équation induite par le schéma considéré.

Le traitement de situations plus réalistes, à savoir les équations de l'acoustique complète ou les équations de Maxwell (avec absorption) a été réalisé durant cette thèse, mais ne présentant pas de véritable différence avec le cas de l'équation de Helmholtz, nous avons choisi de présenter nos méthodes dans la situation la plus simple (nous planifions plutôt la rédaction d'un article pour le cas des équations de Maxwell). Les autres situations ont été implémentées dans le code `Periodique`.

La principale question ouverte en régime harmonique nous semble être le traitement du cas sans absorption ($\varepsilon = 0$). Du point de vue théorique, la question de l'unicité est une question particulièrement difficile, qui échappe aux cadres les plus larges pour lesquels ce type de question peut habituellement être traité (milieu ayant un comportement "décroissant" à l'infini (cf. [75], [70] et [71]), ce qui n'est bien évidemment pas le cas d'un milieu périodique, qui oscille jusqu'à l'infini). Malgré d'importants efforts durant cette thèse et celle qui l'a précédée, cette question demeure largement ouverte. Une fois cette question traitée et la décroissance de la solution dans le cas sans absportion connue, on peut envisager que l'emploi d'une formule de quadrature mieux adaptée pourrait améliorer la vitesse de convergence de la méthode LS-DtN. Cette décroissance correspondra à une certaine régularité dans la variable de Floquet, ce qui nous indiquera quel est l'ordre le plus élevé possible pour la formule de quadrature (la convergence spectrale que nous avons obtenue, et qui rendait quasi-équivalentes toutes les formules de quadrature intégrant exactement les exponentielles complexes, correspondait en effet à une régularité infinie dans la variable de Floquet, ce qui ne sera plus le cas dans le cas sans absorption).

Du point de vue pratique, l'amélioration principale à apporter à nos méthodes nous semble être la parallélisation des divers algorithmes. Il s'agit bien évidemment d'un travail essentiellement informatique, mais primordial si l'on souhaite traiter des situations 3D vectorielles complexes avec précision. Nous ne nous y sommes pas intéressé dans cette thèse, notre but lorsque nous avons implémenté nos méthodes étant essentiellement de démontrer l'efficacité et le bon comportement de ces méthodes au travers de simulations numériques. À ce sujet, le fait que nous ayons pu mener les calculs au travers d'algorithmes purement séquentiels, et sur un ordinateur portable (nous avons utilisé un Macbook Pro de configuration moyenne) nous a semblé être une bonne preuve de l'efficacité et du coût raisonnable de nos algorithmes de résolution.

Les méthodes que nous avons développées peuvent très certainement être employées afin de résoudre les problèmes pratiques mentionnés en introduction. On peut par exemple les incorporer dans un algorithme d'optimisation servant à identifier les défauts à incorporer à un milieu périodique pour

obtenir les propriétés de sélectivité en fréquence souhaitée, ou encore pour obtenir les figures de référence d'un algorithme de CND. Enfin, ces méthodes laissent envisager la possibilité d'adapter les techniques de problème inverse préexistantes, comme la Linear Sampling Method (cf. [14] et [22]), qui nécessite le calcul numérique de la fonction de Green (parfaitement envisageable avec nos méthodes).

Annexes

Annexe A

Transformée de Floquet-Bloch des distributions tempérées

Dans cette annexe, nous introduisons la désormais célèbre transformée de Floquet-Bloch. Il s'agit d'un outil puissant qui permet, entre autre chose, de démontrer la structure en bandes du spectre des opérateurs linéaires à coefficients périodiques, qui est à l'origine du grand intérêt pratique des milieux périodiques. Nous avons besoin pour nos développements de définir la transformée de Floquet-Bloch (TFB) pour des fonctions dans les espaces de Sobolev usuels. Cependant, s'il n'est pas difficile de trouver dans la littérature diverses constructions de la FBT pour des fonctions régulières, ainsi que son extension par densité aux fonctions L^2, il s'est avéré en revanche beaucoup plus difficile d'en trouver une construction de la TFB pour (un sous-espace de) l'espace des distributions. C'est pourquoi nous avons choisi, bien qu'il s'agisse d'un travail assez long, de la redéfinir complètement dans cette annexe.

A.1 La transformée de Floquet-Bloch dans $\mathbb{R}$

Nous allons suivre une démarche calcquée sur la construction de la transformée de Fourier des distributions, c'est pourquoi on commence par définir la TFB pour un espace suffisamment large de fonctions régulières :

Définition A.1. *La transformée de Floquet-Bloch de période L est définie pour tout $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) = \left\{\psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \ \middle| \ x^j \partial_y^m \psi(y) \to 0 \text{ quand } x \to \pm\infty \ \ \forall (j,m) \in \mathbb{N}^2\right\}$ par :*

$$\mathcal{F}\psi(y;\xi) = \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \psi(y+nL) e^{-in\xi L}$$

On commence par remarquer que, pour toute fonction dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, on a, pour $y \in [0, L]$:

$$|\psi(y+nL)| = \frac{(nL)^2}{(nL)^2}|\psi(y+nL)| \leq \frac{1}{(nL)^2}|(y+nL)^2\psi(y+nL)|$$

qui tend vers zéro quand $n \to +\infty$. On a de même :

$$|\psi(y-nL)| = \frac{(nL)^2}{(nL)^2}|\psi(y-nL)| \leq \frac{2}{(nL)^2}|(y-nL)^2\psi(y-nL)|$$

qui tend vers zéro quand $n \to +\infty$ pour $y \leq 0$. En conséquence, il existe un entier N_0 et une constante positive C tels que :

$$\sum_{n=-N}^{M} |\psi(y+nL)| \leq \sum_{n=-N_0}^{n=N_0} |\psi(y+nL)| + C \sum_{n=N_0+1}^{\infty} \frac{1}{(nL)^2} < +\infty$$

ce qui démontre que la somme apparaissant dans la définition de la transformée de Floquet-Bloch est absolument convergente. La même preuve peut bien évidemment être appliquée à toutes les dérivées d'une fonction appartenant à $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, puisqu'elles sont aussi des éléments de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, nous permettant désormais de parler librement de la TFB d'une fonction de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ et de ses dérivées. Les propriétés principales de la transformée de Floquet-Bloch des fonctions régulières sont regroupées dans le théorème suivant :

Théorème A.1. *Soit ψ appartenant à $\mathcal{S}(\mathbb{R})$:*

- *$\mathcal{F}\psi(y,\xi) \in \mathcal{C}^\infty([0,L]\times[0,2\pi/L])$, et toutes ses dérivées en y sont quasi-périodiques en y, périodiques en ξ i.e :*

$$\partial_y^j \mathcal{F}\psi(L,\xi) = e^{i\xi L}\partial_y^j \mathcal{F}\psi(0,\xi) \quad \forall (j,q)\in\mathbb{N}^2$$

and

$$\partial_y^j\partial_\xi^q \mathcal{F}\psi(y,2\pi/L) = \partial_y^j\partial_\xi^q \mathcal{F}\psi(y,0) \quad \forall (j,q)\in\mathbb{N}^2$$

- *La TFB commute avec les opérateurs différentiels :*

$$\mathcal{F}\left(\frac{d\psi}{dy}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(\mathcal{F}\psi)$$

- *Elle diagonalise les opérateurs de translation :*

$$(\tau_{qL}\psi)(y) = \psi(y+qL) \;\Rightarrow\; \mathcal{F}(\tau_q\psi)(y;\xi) = e^{-iq\xi L}\mathcal{F}(\tau_q\psi)(y;k)\;\; (y;k)\in\mathbb{K}$$

- *Elle commute avec la multiplication par une fonction L-périodique, i.e. si μ est une fonction L-périodique appartenant à $C^\infty(\mathbb{R})$:*

$$\mathcal{F}(\mu\psi)(y;\xi) = \mu(y)\mathcal{F}\psi(y;\xi)\;\; (y;\xi)\in\mathbb{K}$$

- *Elle peut être inversée au moyen de la formule :*

$$\forall y\in[0,L],\quad \forall p\in\mathbb{Z},\quad \psi(y+pL) = \sqrt{\frac{L}{2\pi}}\int_0^{2\pi/L}\mathcal{F}\psi(y,\xi)e^{ip\xi L}d\xi$$

Démonstration. Soit ψ une fonction appartenant à $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. On pose $\phi_n(y,\xi) = \psi(y+nL)e^{-in\xi L}$.On a, pour $y\in[0,L]$:

$$|n^j\phi_n(y,\xi)| = \frac{1}{(nL)^2}|(nL)^{j+2}\phi_n(y,\xi)| \le \frac{1}{(nL)^2}|(y+nL)^{j+2}\psi(y+nL)|$$

qui tend vers zéro quand n tend vers $+\infty$ comme ψ est dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Plus précisément, pour tout $\epsilon>0$, il existe z_+ tel que $z^{j+2}|\psi(z)|\le\epsilon\;\forall z\ge z_+$. Cela implique, comme $y\in[0,L]$, qu'il existe N_+ tel que $y+nL\ge z_+\;\forall y\in[0,L]$, et par conséquent on obtient que, $\forall y\in[0,L]$:

$$|n^j\phi_n(y,\xi)| \le \frac{\epsilon}{(nL)^2}$$

ce qui signifie que l'on a la borne uniforme :

$$||n^j\phi_n(y,\xi)||_{L^\infty([0,L]\times[0,2\pi/L])} \le \frac{\epsilon}{(nL)^2}$$

On montre de la même façon qu'il existe N_- tel que pour $n\ge N_-$:

$$||(-n)^j\phi_{-n}(y,\xi)||_{L^\infty([0,L]\times[0,2\pi/L])} \le \frac{\epsilon}{(nL)^2}$$

Par conséquent, pour tout $j \in \mathbb{N}$, on a :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} ||n^j \phi_n(y,\xi)||_{L^\infty([0,L]\times[0,2\pi/L])} < \infty$$

et la série converge normalement, ce qui implique, comme les ϕ_n sont des fonctions régulières, que leur somme définit une fonction continue. Si on différentie terme à terme, on voit que :

$$\partial_y^j \partial_\xi^q (\psi(y+nL)e^{-in\xi L}) = (-inL)^q \partial_y^j \psi(y+nL)e^{-in\xi L}$$

qui est bien entendue continue, et comme $\partial_y^j \psi$ est aussi dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, on peut lui appliquer le résultat précédent qui montre que cette nouvelle série converge normalement, et coincide avec la dérivée de la première série, en vertu des théorèmes classiques sur les séries de fonctions normalement convergentes. En d'autres termes, on a montré que :

$$\partial_y^j \partial_\xi^q \mathcal{F}\psi(y;\xi) = \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} (-inL)^q \partial_y^j \psi(y+nL)e^{-in\xi L}$$

et comme de plus on a démontré que toutes ces sommes définissent des fonctions continues, on a montré que $\mathcal{F}\psi(y,\xi) \in C^\infty([0,L]\times[0,2\pi/L])$. De cette formule, on déduit immédiatement que la TFB commute avec les opérateurs différentiels en y (il suffit de prendre $q=0$), et que, pour tout $(j,q) \in \mathbb{N}^2$:

$$\partial_y^j \partial_\xi^q \mathcal{F}\psi(y;2\pi/L) = \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} (-inL)^q \partial_y^j \psi(y+nL) = \partial_y^j \partial_\xi^q \mathcal{F}\psi(y;0)$$

ce qui démontre que $\mathcal{F}\psi$ et toutes ses dérivées sont périodiques en ξ. Concernant la quasi-périodicité en y, on a :

$$\begin{aligned}
\partial_y^j \mathcal{F}\psi(L;\xi) &= \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \partial_y^j \psi(L+nL)e^{-in\xi L} \\
&= \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \partial_y^j \psi(0+nL)e^{-i(n-1)\xi L} \\
&= e^{i\xi L}\sqrt{\frac{L}{2\pi}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \partial_y^j \psi(0+nL)e^{-in\xi L} \\
&= e^{i\xi L}\sqrt{\frac{L}{2\pi}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \partial_y^j \psi(0+nL)e^{-in\xi L}
\end{aligned}$$

On se tourne maintenant vers la TFB de la translatée d'une fonction. Comme la translatée d'une fonction régulière à décroissance rapide est toujours un élément de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(\tau_{qL}\psi)(y;\xi) &= \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \sum_{n=-N_-+q}^{N_++q} \psi(y+nL+qL)e^{-in\xi L} \\
\mathcal{F}(\tau_{qL}\psi)(y;\xi) &= \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \sum_{n=-N_-}^{N_+} \psi(y+nL)e^{-i(n-q)\xi L} \\
\mathcal{F}(\tau_{qL}\psi)(y;\xi) &= e^{iq\xi L}\mathcal{F}\psi(y;\xi)
\end{aligned}$$

Ensuite, on considère la multiplication par une fonction L-périodique μ appartenant à $C^\infty(\mathbb{R})$. Le produit $\mu\psi$ est toujours dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, donc on peut directement écrire :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\mu\psi)(y;\xi) &= \sqrt{\frac{L}{2\pi}}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\mu(y+nL)\psi(y+nL)e^{-in\xi L}\\ \mathcal{F}(\mu\psi)(y;\xi) &= \sqrt{\frac{L}{2\pi}}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\mu(y)\psi(y+nL)e^{-in\xi L}\\ \mathcal{F}(\mu\psi)(y;\xi) &= \mu(y)\mathcal{F}\psi(y;\xi)\end{aligned}$$

Ne reste plus qu'à démontrer la formule d'inversion. On a, $\forall y \in [0, L]$:

$$|\sqrt{\frac{L}{2\pi}}\int_0^{2\pi/L}\psi(y+nL)e^{-in\xi L}e^{ip\xi L}d\xi| \leq \sqrt{\frac{L}{2\pi}}\int_0^{2\pi/L}|\psi(y+nL)|d\xi \leq \sqrt{\frac{2\pi}{L}}|\psi(y+nL)|$$

alors, la somme partielle des intégrales satisfait :

$$\sum_{n=-N}^{M}|\frac{L}{2\pi}\int_0^{2\pi/L}\psi(y+nL)e^{-in\xi L}e^{ip\xi L}d\xi| \leq \sqrt{\frac{L}{2\pi}}\sum_{n\in\mathbb{Z}}|\psi(y+nL)|$$

qui converge normalement, et par conséquent la somme des intégrales est aussi normalement convergente. Alors on peut intervertir la série et l'intégrale, et on obtient :

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{L}{2\pi}}\int_0^{2\pi/L}\mathcal{F}\psi(y,\xi)e^{ip\xi L}d\xi &= \sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{L}{2\pi}\psi(y+nL)\int_0^{2\pi/L}e^{-in\xi L}e^{ip\xi L}d\xi\\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}}\psi(y+nL)\delta_{np}\end{aligned}$$

où δ_{np} représente le symbole de kroenecker, ce qui implique :

$$\sqrt{\frac{L}{2\pi}}\int_0^{2\pi/L}\mathcal{F}\psi(x,\xi)e^{ip\xi L}d\xi = \psi(y+pL)$$

et la formule d'inversion est démontrée. □

Afin de pouvoir étendre la définition de la FBT à l'espace des distributions tempérées, nous allons avoir besoin de quelques résultats supplémentaires. En particulier, il nous faut identifier avec précision l'image par la TFB de l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Afin de réduire un peu la taille des diverses notations, on notera désormais $\mathbb{K} = [0, L] \times [0, 2\pi/L]$. On a :

Théorème A.2. *La TFB (et son inverse) définit un isomorphisme entre $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ et le sous-espace fermé $\mathcal{FS}(\mathbb{K})$ de $C^\infty(\mathbb{K})$, défini par :*

$$\mathcal{FS}(\mathbb{K}) = \Big\{\psi \in C^\infty(\mathbb{K}) \;\mid\; \partial_y^j\mathcal{F}\psi(L,\xi) = e^{i\xi L}\partial_y^j\mathcal{F}\psi(0,\xi)$$

$$\text{et } \partial_y^j\partial_\xi^q\mathcal{F}\psi(y,2\pi/L) = \partial_y^j\partial_\xi^q\mathcal{F}\psi(y,0) \quad \forall(j,q)\in\mathbb{N}^2 \quad \forall(j,q)\in\mathbb{N}^2\Big\}$$

De plus, la TFB est linéaire continue de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ vers $\mathcal{FS}(\mathbb{K})$ et son inverse est linéaire continue de $\mathcal{FS}(\mathbb{K})$ vers $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Démonstration. Du théorème A.1, on déduit immédiatement que :

$$\mathcal{F}(\mathcal{S}(\mathbb{R})) \subset \mathcal{FS}(\mathbb{K})$$

On commence ensuite par vérifier que $\mathcal{FS}(\mathbb{K})$ est fermé. Considérons l'un quelconque des espaces :

$$V_j = \left\{ \psi \in C^\infty(\mathbb{K}) \ \mid \ \partial_y^j \mathcal{F}\psi(L,\xi) = e^{i\xi L} \partial_y^j \mathcal{F}\psi(0,\xi) \right\}$$

et

$$W_{j,q} = \left\{ \psi \in C^\infty(\mathbb{K}) \ \mid \ \partial_y^j \partial_\xi^q \mathcal{F}\psi(y, 2\pi/L) = \partial_y^j \partial_\xi^q \mathcal{F}\psi(y,0) \right\}$$

et rappelons-nous que la topologie usuelle sur $C^\infty(\mathbb{K})$ est engendrée par la famille dénombrable de semi-normes :

$$p_{j,q}(\psi) = sup_{(y,\xi)\in\mathbb{K}} |\partial_y^j \partial_\xi^q \psi(y,\xi)|$$

pour laquelle c'est un espace complet. Alors, il est clair que les applications linéaires :

$$\partial_y^j \mathcal{F}\psi(L,\xi) - e^{i\xi L} \partial_y^j \mathcal{F}\psi(0,\xi)$$

et

$$\partial_y^j \partial_\xi^q \mathcal{F}\psi(y, 2\pi/L) - \partial_y^j \partial_\xi^q \mathcal{F}\psi(y,0)$$

sont continues en termes de semi-normes, ce qui implique que $V_{j,q}$ et $W_{j,q}$ sont fermés en tant qu'images réciproques par une application continue du fermé $\{0\}$. Il suit alors que :

$$\mathcal{FS}(\mathbb{K}) = \bigcap_j V_j \cap \bigcap_{j,q} W_{j,q}$$

est fermé en tant qu'intersection (infinie) d'espaces fermés. On cherche maintenant à caractériser l'image de cet espace par l'inverse de la TFB. Pour tout $\hat{\psi} \in \mathcal{FS}(\mathbb{K})$, on définit, pour tout $y \in [0, L]$ et tout $p \in \mathbb{Z}$:

$$\psi(y + pL) = \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \int_0^{2\pi/L} \hat{\psi}(y,\xi) e^{ip\xi L}$$

Il est clair que ψ appartient à chaque $\mathcal{C}^\infty(]pL, (p+1)L[)$. De plus, on a :

$$\partial_y^j \psi(0 + pL) = \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \int_0^{2\pi/L} \partial_y^j \hat{\psi}(0,\xi) e^{ip\xi L}$$

et

$$\partial_y^j \psi(L + (p-1)L) = \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \int_0^{2\pi/L} \partial_y^j \hat{\psi}(L,\xi) e^{i(p-1)\xi L}$$

Comme $\hat{\psi} \in \mathcal{FS}(\mathbb{K})$, on a $\partial_y^j \hat{\psi}(L,\xi) = e^{i\xi L} \partial_y^j \hat{\psi}(0,\xi)$, et par conséquent :

$$\partial_y^j \psi(0 + pL) = \partial_y^j \psi(L + (p-1)L)$$

et ψ est donc dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. On cherche ensuite à déterminer les propriétés de décroissance de ψ. On a :

$$\int_0^{2\pi/L} \partial_y^j \hat{\psi}(y,\xi) e^{ip\xi L} d\xi = \frac{1}{ipL} \left[\partial_y^j \hat{\psi}(y,\xi) e^{ip\xi L} \right]_0^{2\pi/L} - \frac{1}{ipL} \int_0^{2\pi/L} \partial_y^j \partial_\xi \hat{\psi}(y,\xi) e^{ip\xi L} d\xi$$

Le terme entre crochets s'annule comme $\hat{\psi} \in \mathcal{FS}(\mathbb{K})$, on a donc $\partial_y^j \partial_\xi^q \hat{\psi}(y, 2\pi/L) = \partial_y^j \partial_\xi^q \hat{\psi}(0,\xi)$. Comme cela reste vrai pour tout q, on peut répéter le processus à l'envi et on obtient aisément que :

$$\int_0^{2\pi/L} \partial_y^j \hat{\psi}(y,\xi) e^{ip\xi L} d\xi = \left(-\frac{1}{ipL} \right)^q \int_0^{2\pi/L} \partial_y^j \partial_\xi^q \hat{\psi}(y,\xi) e^{ip\xi L} d\xi$$

Alors pour tout $y \in [0, L]$, on obtient :

$$(y + pL)^m \partial_y^j \psi(y + pL) = (y + pL)^m \left(-\frac{1}{ipL} \right)^q \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \int_0^{2\pi/L} \partial_y^j \partial_\xi^q \hat{\psi}(y, \xi) e^{ip\xi L} d\xi$$

d'où il suit :

$$|(y + pL)^m \partial_y^j \psi(y + pL)| \leq \frac{|(y + pL)^m|}{|pL|^q} \sqrt{\frac{2\pi}{L}} sup_{(y,\xi)\in\mathbb{K}} |\partial_y^j \partial_\xi^q \hat{\psi}(y, \xi)|$$

pour tout q. Avec $q > m$, on voit que $|(y + pL)^m \partial_y^j \psi(y + pL)|$ tend vers zéro pour tout $y \in [0, L]$ quand $p \to \pm\infty$. On en déduit alors que :

$$y^m \partial_y^j \psi(y) \to 0 \quad \text{quand} \quad y \to \pm\infty, \quad \forall m$$

En effet, supposons que c'est faux par exemple pour $y \to +\infty$. Alors, ceci implique, comme ψ est continue, qu'il existe une suite croissante y_n, telle que pour tout n, $y_n^m \partial_y^j \psi(y_n) > 1/n$. Cependant, il existe $p(n)$ et $y(n) \in [0, L]$ tels que $p(n)$ est une fonction strictement croissante de n telle que $y_n = y(n)+p(n)$. Or, pour tout n suffisamment grand, nous venons de montrer que $y_n^m \partial_y^j \psi(y_n) \leq 1/n$ comme notre borne était uniforme en y, on aboutit donc à une contradiction. La même démonstration permet de traiter le cas de la limite négative. Par conséquent, nous venons de montrer que :

$$\mathcal{FS}(\mathbb{K}) \subset \mathcal{F}(\mathcal{S}(\mathbb{R}))$$

et alors on a en fait :

$$\mathcal{FS}(\mathbb{K}) = \mathcal{F}(\mathcal{S}(\mathbb{R})) \quad \text{et} \quad \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{FS}(\mathbb{K})) = \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

Ne nous reste plus qu'à vérifier la continuité de la TFB et de son inverse. Nous avons vu que, pour tout $\hat{\psi} \in \mathcal{FS}(\mathbb{K})$:

$$|(y + pL)^m \partial_y^j \psi(y + pL)| \leq \frac{|(y + pL)^m|}{|pL|^q} \sqrt{\frac{2\pi}{L}} \sup_{(y,\xi)\in\mathbb{K}} |\partial_y^j \partial_\xi^q \hat{\psi}(y, \xi)|$$

ce qui implique, pour $q > m$:

$$\sup_{y\in\mathbb{R}} |y^m \partial_y^j \psi(y)| \leq C \sup_{(y,\xi)\in\mathbb{K}} |\partial_y^j \partial_\xi^q \hat{\psi}(y, \xi)|$$

comme le terme dépendant de p tend vers zéro uniformément en y (comme $y \in [0, L]$) quand $p \to \pm\infty$, par conséquent nous pouvons trouver une borne uniforme en y. Alors $\mathcal{F}^{-1}$, linéaire, est continue de $\mathcal{FS}(\mathbb{K})$ vers $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, pour la topologie définie par les semi-normes $s_{j,m}(\psi) = sup_{y\in\mathbb{R}} |y^m \partial_y^j \psi(y)|$ sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Comme $\mathcal{FS}(\mathbb{K})$ et $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ sont des espaces complets pour les topologies que nous avons utilisées, et comme la TFB définit une bijection entre ces deux espaces, le théorème de l'application ouverte (cf [15]) on déduit que $\mathcal{F}$ est également continue de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ vers $\mathcal{FS}(\mathbb{K})$. □

Nous allons avoir besoin d'un dernier résultat sur les fonctions régulières avant de pouvoir étendre la TFB aux distributions :

Théorème A.3. *Pour tous $(\varphi, \psi) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})^2$, et pour tous $(\hat{\varphi}, \hat{\psi}) \in \mathcal{FS}(\mathbb{K})^2$, on a les deux identités de Parseval :*

$$(\mathcal{F}\varphi, \mathcal{F}\psi)_{L^2(\mathbb{K})} = (\varphi, \psi)_{L^2(\mathbb{R})} \text{ et } \left(\hat{\varphi}, \hat{\psi}\right)_{L^2(\mathbb{K})} = \left(\mathcal{F}^{-1}\hat{\varphi}, \mathcal{F}^{-1}\hat{\psi}\right)_{L^2(\mathbb{R})} \tag{A.1}$$

Démonstration. Comme $\mathcal{F}$ est une bijection continue $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ vers $\mathcal{FS}(\mathbb{K})$, il suffit de démontrer une seule de ces eux identités. Pour tous $(\varphi, \psi) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})^2$, nous avons :

$$\begin{aligned}\int_K \mathcal{F}\varphi\overline{\mathcal{F}\psi} &= \sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{m\in\mathbb{Z}} \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \int_0^L \varphi(y+nL)\overline{\psi(y+mL)}dy \int_0^{2\pi/L} e^{i(n-m)\xi L}d\xi \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_0^L \varphi(y+nL)\overline{\psi(y+nL)} \\ &= \int_{\mathbb{R}} \varphi\overline{\psi}\end{aligned}$$

où nous avons à nouveau pu inverser les séries et intégrales en vertu de la décroissance rapide des fonctions (l'argument est le même que celui utilisé dans la preuve de la formule d'inversion, appliqué à chaque somme). □

Nous sommes désormais en position d'étendre la TFB à l'ensemble bien plus vaste des distributions tempérées. Toujours inspirés par le cas de la transformée de Fourier, et les relations de Parseval ci-dessus, nous allons procéder par dualité. On définit, pour toute distribution tempérée $T \in \mathcal{S}^{'}(\mathbb{R})$ et toute fonction test $\varphi \in \mathcal{FS}(\mathbb{K})$:

$$< \mathcal{F}T, \varphi > = < T, \mathcal{F}^{-1}\varphi >$$

où $< \cdot, \cdot >$ désigne le produit de dualité entre $\mathcal{S}^{'}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, dont on sait qu'il s'identifie au produit de dualité des distributions. On définit également, pour toute forme linéaire "quasi-periodique" $T \in \mathcal{FS}^{'}(\mathbb{K})$ et toute fonction test $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ la transformation $\mathcal{F}^{-1}$:

$$< \mathcal{F}^{-1}T, \varphi > = < T, \mathcal{F}\varphi >$$

où cette fois $< \cdot, \cdot >$ désigne le produit de dualité entre $\mathcal{FS}^{'}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{FS}(\mathbb{R})$. Afin d'alléger les notations, nous conservons la notation $< \cdot, \cdot >$ dans les deux cas, puisqu'il suffit de regarder à quel espace apartient la fonction test pour déterminer sans ambiguïtés la dualité impliquée. On obtient alors sans difficulté :

Théorème A.4. *La transformée $\mathcal{F}$ définit une bijection continue entre $\mathcal{S}^{'}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{FS}^{'}(\mathbb{K})$, d'inverse $\mathcal{F}^{-1}$.*

Démonstration. Pour tout $T \in \mathcal{S}^{'}(\mathcal{R})$ et tout $\varphi \in \mathcal{FS}(\mathbb{K})$:

$$\begin{aligned}| < \mathcal{F}T, \varphi > | = | < T, \mathcal{F}^{-1}\varphi > | &\leq C \sup_{j\in J_0, m\in M_0} \sup_{y\in\mathbb{R}} |y^m \partial_y^j (\mathcal{F}^{-1}\varphi)(y)| \\ &\leq C^{'} \sup_{j\in J_0^{'}, q\in Q_0} \sup_{(y,\xi)\in\mathbb{K}} |\partial_y^j \partial_\xi^q \varphi(y,\xi)|\end{aligned}$$

où $J_0, J_0^{'}$ et Q_0 sont des ensembles finis d'entiers, comme T est un élément de $\mathcal{S}^{'}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{F}^{-1}$ est continue. De la même façon, il est facile de voir que, pour tout $T \in \mathcal{FS}(\mathbb{K})$ et tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned}| < \mathcal{F}^{-1}T, \varphi > | = | < T, \mathcal{F}\varphi > | &\leq C \sup_{j\in J_0^{'}, q\in Q_0} \sup_{(y,\xi)\in\mathbb{K}} |\partial_y^j \partial_\xi^q \mathcal{F}\varphi(y,\xi)| \\ &\leq C^{'} \sup_{j\in J_0, m\in M_0} \sup_{y\in\mathbb{R}} |y^m \partial_y^j \varphi(y)|\end{aligned}$$

et nous avons ainsi démontré la continuité des nouvelles tranformées. Ensuite, on voit que pour tout $T \in \mathcal{S}^{'}(\mathbb{R})$ et tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$:

$$< \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}T, \varphi > = < \mathcal{F}T, \mathcal{F}\varphi > = < T, \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}\varphi > = < T, \varphi >$$

montrant ainsi que $\mathcal{F}^{-1}$ est un inverse à gauche pour $\mathcal{F}$ (et réciproquement). Puis, pour tout $T \in \mathcal{FS}^{'}(\mathbb{R})$ et tout $\varphi \in \mathcal{FS}(\mathbb{K})$

$$< \mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}T, \varphi >=< \mathcal{F}^{-1}T, \mathcal{F}^{-1}\varphi >=< T, \mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}\varphi >=< T, \varphi >$$

montrant ainsi que $\mathcal{F}^{-1}$ est un inverse à droite pour $\mathcal{F}$ (et réciproquement), et donc finalement qu'elles définissent une bijection entre $\mathcal{S}^{'}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{FS}^{'}(\mathbb{K})$. □

Malheureusement, l'espace $\mathcal{FS}^{'}(\mathbb{K})$ ne s'identifie pas à un sous-espace de $\mathcal{D}^{'}(\mathring{\mathbb{K}})$, mais seulement de $\mathcal{D}^{'}(\mathbb{R}^2)$. Nous avons là une propriété très désagréable de la transformée de Floquet, qui a pour conséquence génante que les propriétés algébriques valables pour les fonctions régulières ne se transposent pas directement aux distributions, tout simplement parce que nous ne pouvons pas définir sans précautions supplémentaires la dérivée ou le produit par une fonction régulière périodique. Nous allons pouvoir récupérer les propriétés utiles de la TFB pour des fonctions dans les espaces de Sobolev usuels, qui apparaissent naturellement lorsque l'on étudie les équations aux dérivées partielles. En revanche, on peut toujours identifier une fonction $f \in L^1(\mathbb{K})$ à la forme linéaire suivante, définie sur $\mathcal{FS}(\mathbb{K})$:

$$\forall\, \hat{\varphi} \in \mathcal{FS}(\mathbb{K}) \qquad < f, \hat{\varphi} >= \int_{\mathbb{K}} f\hat{\varphi}$$

puisque :

$$| < f, \hat{\varphi} > | = ||f||_{L^1(\mathbb{K})} \sup_{(y,\xi)\in\mathbb{K}} |\hat{\varphi}|$$

ce qui en fait donc un élément de $\mathcal{FS}^{'}(\mathbb{K})$. Aussi, dans la suite nous ferons toujours cette identification. On commence alors par caractériser la TFB de fonctions $L^2(\mathbb{R})$:

Théorème A.5. *La TFB définit une isométrie entre $L^2(\mathbb{R})$ et $L^2(\mathbb{K})$, et, pour tous $(u, v) \in L^2(\mathbb{R})^2$ et tous $(\hat{u}, \hat{v}) \in L^2(\mathbb{K})^2$ on a les identités de Parseval :*

$$(\mathcal{F}u, \mathcal{F}v)_{L^2(\mathbb{K})} = (u, v)_{L^2(\mathbb{R})} \qquad et \qquad (\hat{u}, \hat{v})_{L^2(\mathbb{K})} = \left(\mathcal{F}^{-1}\hat{u}, \mathcal{F}^{-1}\hat{v}\right)_{L^2(\mathbb{R})} \tag{A.2}$$

De plus, on a les propriétés suivantes :

- *La formule d'inversion demeure valide pour des fonctions $\hat{u} \in L^2(\mathbb{K})$, i.e (si τ_h est l'opérateur de translation $(\tau_h\varphi)(x) = \varphi(x + h)$ défini pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et étendu par densité à $L^2(\mathbb{R})$) :*

$$\tau_{pL}\left(\mathcal{F}^{-1}\hat{u}\right) = \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \int_0^{2\pi/L} \hat{u}(\cdot, \xi)e^{ip\xi L}d\xi \tag{A.3}$$

- *Pour tout $u \in L^2(\mathbb{R})$, la somme partielle $F_{M,N}u$ définie par :*

$$F_{M,N}u(\cdot, \xi) = \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \sum_{n=-N}^{M} (\tau_{nL}u)(\cdot)e^{-in\xi L}$$

  converge dans $L^2(\mathbb{K})$, et on a $\mathcal{F}u = \lim_{M,N\to+\infty} F_{M,N}u$ fortement dans $L^2(\mathbb{K})$.
- *Pour toute fonction L^2, la TFB commute avec la multiplication par une fonction L^∞ L-périodique μ, i.e $\mathcal{F}(\mu v) = \mu\mathcal{F}v$ in $L^2(\mathbb{K})$ (où nous identifions μ avec sa restriction à une seule période)*

Démonstration. On sait que $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$. ALors, pour tout $v \in L^2(\mathbb{R})$, il existe une suite φ_n d'éléments de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ que converge vers v dans L^2. En utilisant l'identité de Parseval (A.1) pour les fonctions $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, on obtient :

$$||\mathcal{F}\varphi_n||_{L^2(\mathbb{K})} = ||\varphi_n||_{L^2(\mathbb{R})}$$

ce qui démontre que $\mathcal{F}\varphi_n$ converge dans $L^2(\mathbb{K})$, avec pour limite $\hat{v}$. Alors, par définition, pour tout $\hat{\psi} \in \mathcal{FS}(\mathbb{K})$

$$< \mathcal{F}\varphi_n, \hat{\psi} >=< \varphi_n, \mathcal{F}^{-1}\hat{\psi} >= \int_{\mathbb{R}} \varphi_n \mathcal{F}^{-1}\hat{\psi} \to \int_{\mathbb{R}} v\mathcal{F}^{-1}\hat{\psi} =< \mathcal{F}v, \hat{\psi} >$$

ce qui démontre $\hat{v} = \mathcal{F}v$ in $\mathcal{FS}'(\mathbb{K})$, et par conséquent que $\mathcal{F}v$ appartient à $L^2(\mathbb{K})$. Ensuite, pour tout $u \in L^2(\mathbb{R})$, on a $\mathcal{F}(\mathcal{S}(\mathbb{R})) = \mathcal{FS}(\mathbb{K})$:

$$\begin{aligned}
(\mathcal{F}u, \mathcal{F}v)_{L^2(\mathbb{K})} &= \lim_{n\to+\infty} (\mathcal{F}u, \mathcal{F}\varphi_n)_{L^2(\mathbb{K})} \\
&= \lim_{n\to+\infty} < \mathcal{F}u, \overline{\mathcal{F}\varphi_n} > \\
&= \lim_{n\to+\infty} < u, \overline{\varphi_n} > \\
&= \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} u\overline{\varphi_n} \\
&= \int_{\mathbb{R}} u\overline{v}
\end{aligned}$$

Réciproquement, remarquons que $\mathcal{FS}(\mathbb{K})$ est dense dans $L^2(\mathbb{K})$ comme il contient $\mathcal{D}(\mathbb{K})$. Par conséquent, pour tout $\hat{v} \in L^2(\mathbb{K})$, il existe une suite $\hat{\varphi_n}$ d'éléments de $\mathcal{FS}(\mathbb{K})$ qui converge vers $\hat{v}$ dans $L^2(\mathbb{K})$. Alors, en utilisant à nouveau (A.1) on obtient que :

$$||\hat{\varphi_n}||_{L^2(\mathbb{K})} = ||\mathcal{F}^{-1}\hat{\varphi_n}||_{L^2(\mathbb{R})}$$

donc $\mathcal{F}^{-1}\hat{\varphi_n}$ converge dans $L^2(\mathbb{R})$, avec pour limite v. Puis, on voit de nouveau que pour tout $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$:

$$< \mathcal{F}^{-1}\hat{\varphi_n}, \psi >=< \hat{\varphi_n}, \mathcal{F}\psi >= \int_{\mathbb{R}} \hat{\varphi_n}\mathcal{F}\psi \to \int_{\mathbb{R}} \hat{v}\mathcal{F}\psi =< \mathcal{F}^{-1}\hat{v}, \psi >$$

et il suit $\mathcal{F}^{-1}\hat{v} = v$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, et par conséquent $\mathcal{F}^{-1}\hat{v}$ appartient à $L^2(\mathbb{R})$. Nous avons en fait démontré, comme $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}^{-1}$ sont inverses au sens des distributions, que :

$$\mathcal{F}(L^2(\mathbb{R})) = L^2(\mathbb{K}) \text{ et } \mathcal{F}^{-1}(L^2(\mathbb{K})) = L^2(\mathbb{R})$$

Ensuite, en prenant $u = \mathcal{F}^{-1}\hat{u}$ et $v = \mathcal{F}^{-1}\hat{v}$ dans la première identité de Parseval que nous venons de démontrer, on obtient immédiatement la seconde, et on a aussi, pour tout $u \in L^2(\mathbb{R})$ et tout $\hat{u} \in L^2(\mathbb{K})$, en prenant $u = v$ et $\hat{u} = \hat{v}$ dans les identités de Parseval :

$$||\mathcal{F}u||_{L^2(\mathbb{K})} = ||u||_{L^2(\mathbb{R})} \quad \text{et} \quad ||\hat{u}||_{L^2(\mathbb{K})} = ||\mathcal{F}^{-1}\hat{u}||_{L^2(\mathbb{R})}$$

ce qui montre que la TFB définit une isométrie entre $L^2(\mathbb{R})$ et $L^2(\mathbb{K})$. Maintenant que nous disposons de ces propriétés de structure, nous nous tournons vers les propriétés algébriques. On commence par étendre la formule d'inversion. On définit, pour tout $\hat{u} \in L^2(\mathbb{K})$, et tout $p \in \mathbb{Z}$:

$$I_{\hat{u}|[pL,(p+1)L]} = \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \int_0^{2\pi/L} \hat{u}(\cdot, \xi) e^{ip\xi L} d\xi$$

qui a bien un sens puisque l'on prend l'intégrale sur un domaine borné et $\hat{u}$ appartient à L^2. Pour tout compact K inclus dans $\mathbb{K}$, on a, si p_0 est tel que $K \subset]-p_0L, p_0L[$:

$$\left| \int_K I_{\hat{u}} \right| \leq \int_{-p_0L}^{p_0L} |I_{\hat{u}}| \leq \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \sum_{p=-p_0}^{p_0} \int_0^L \int_0^{2\pi/L} |\hat{u}| \leq 2p_0 \sqrt{\frac{2\pi}{L}} ||\hat{u}||_{L^2(\mathbb{K})}$$

en vertu de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrant ainsi que $I_{\hat{u}}$ est $L^1_{loc}(\mathbb{R})$, ce qui implique que $I_{\hat{u}}$ appartient à $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Ensuite, soient M, N deux entiers positifs, on a alors, pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned}\int_{-NL}^{ML} I_{\hat{u}}\overline{\varphi} &= \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \sum_{p=-N}^{M} \int_0^L \overline{\varphi(x+pL)} \int_0^{2\pi/L} \hat{u}(x,\xi) e^{ip\xi L} d\xi \\ &= \int_0^L \int_0^{2\pi/L} \hat{u}(x,\xi) \overline{\sqrt{\frac{L}{2\pi}} \sum_{p=-N}^{M} \varphi(x+pL) e^{-ip\xi L} d\xi}\end{aligned}$$

Remarquons alors que quand M, N tendent vers l'infini

$$\overline{\sqrt{\frac{L}{2\pi}} \sum_{p=-N}^{M} \varphi(x+pL) e^{-ip\xi L} d\xi} \to \overline{\mathcal{F}\varphi} \in \mathcal{FS}(\mathbb{K})$$

uniformément sur $\mathbb{K}$, par conséquent l'intégrant possède une limite intégrable. De plus, comme $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, pour M, N suffisamment grands, il existe un entier N_0 et une constante C dépendant seulement de φ tels que (voir la preuve du théorème A.1) :

$$\left| \hat{u}(x,\xi) \overline{\sqrt{\frac{L}{2\pi}} \sum_{p=-N}^{M} \varphi(x+pL) e^{-ip\xi L}} \right| \leq |\hat{u}(x,\xi)| \left| \sum_{p=-N_0}^{N_0} |\varphi(x+pL)| + C \sum_{p \geq N_0} \frac{1}{(pL)^2} \right|$$

qui est un majorant intégrable, ce qui montre au passage que $I_{\hat{u}}\overline{\varphi}$ est intégrable. En conséquence, on peut appliquer le théorème de convergence dominée de Lebesgue et on obtient que :

$$\lim_{M,N \to +\infty} \int_{-NL}^{ML} I_{\hat{u}}\overline{\varphi} = (\hat{u}, \mathcal{F}\varphi)_{L^2(\mathbb{K})}$$

Alors ceci montre comme $\mathcal{F}$ est continue de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ vers $\mathcal{FS}(\mathbb{K})$, que $I_{\hat{u}}$ définit une forme linéaire continue sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, ce qui signifie exactement que $I_{\hat{u}}$ appartient à $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Alors pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$:

$$< I_{\hat{u}}, \overline{\varphi} >= \int_{\mathbb{R}} I_{\hat{u}}\overline{\varphi} = \left(\mathcal{F}^{-1}\hat{u}, \varphi\right)_{L^2(\mathbb{R})}$$

ce qui montre que $I_{\hat{u}} = \mathcal{F}^{-1}\hat{u}$.

On va maintenant établir la formule directe. Clairement, pour tout $u \in L^2(\mathbb{R})$ et tout M, N, $F_{M,N}u \in L^2(\mathbb{K})$ en tant que somme finie d'éléments de $L^2(\mathbb{K})$. Alors, pour tout $\hat{\psi} \in L^2(\mathbb{K})$, on a :

$$\begin{aligned}< F_{M,N}u, \overline{\hat{\psi}} > &= \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \int_0^L \int_0^{2\pi/L} \sum_{n=-N}^{M} \tau_{pL} u(x) e^{-ip\xi L} \overline{\hat{\psi}(x,\xi)} dx d\xi \\ &= \sum_{n=-N}^{M} \int_0^L \tau_{pL} u(x) \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \int_0^{2\pi/L} \overline{\hat{\psi}(x,\xi) e^{ip\xi L}} dx d\xi \\ &= \sum_{n=-N}^{M} \int_0^L \tau_{pL} u(x) \overline{\mathcal{F}^{-1}\hat{\psi}(x+pl)} dx d\xi \\ &= \int_{-NL}^{ML} u(x) \overline{\mathcal{F}^{-1}\hat{\psi}(x)} dx d\xi \underset{M,N \to +\infty}{\to} < u, \mathcal{F}^{-1}\overline{\hat{\psi}} >=< \mathcal{F}u, \overline{\hat{\psi}} >\end{aligned}$$

Ceci montre que $F_{M,N}u$ converge faiblement dans $L^2(\mathbb{K})$ vers $\mathcal{F}u$. De plus, nous avons, en utilisant la formule d'inversion désormais valide sur $L^2(\mathbb{K})$:

$$| < F_{M,N}u, \overline{\hat{\psi}} > | \leq | \int_{-NL}^{ML} u(x) \overline{\mathcal{F}^{-1}\hat{\psi}(x)} dx d\xi | \leq ||u||_{L^2(\mathbb{R})} ||\mathcal{F}^{-1}\hat{\psi}||_{L^2(\mathbb{R})} = ||u||_{L^2(\mathbb{R})} ||\hat{\psi}||_{L^2(\mathbb{K})}$$

en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'identité de Parseval que nous avons établie pour les fonctions L^2. Cela démontre par ailleurs (en identifiant $L^2(\mathbb{K})$ et son dual) que :

$$||F_{M,N}u||_{L^2(\mathbb{K})} \leq ||u||_{L^2(\mathbb{R})}$$

De plus, nous avons :

$$\begin{aligned}||F_{M,N}u - F_{P,Q}u||^2_{L^2(\mathbb{K})} &=< F_{M,N}u, \overline{F_{M,N}u - F_{P,Q}u} > - < F_{P,Q}u, \overline{F_{M,N}u - F_{P,Q}u} > \\ &= \int_{-NL}^{ML} u(x)\overline{\mathcal{F}^{-1}(F_{M,N}u - F_{P,Q}u)} - \int_{-QL}^{PL} u(x)\overline{\mathcal{F}^{-1}(F_{M,N}u - F_{P,Q}u)}\end{aligned}$$

comme $F_{M,N}u - F_{P,Q}u$ appartient à $L^2(\mathbb{K})$, aussi pouvons-nous utiliser le résultat précédent. Alors, en utilisant encore la formule d'inversion pour les fonctions $L^2(\mathbb{K})$, c'est-à-dire pour tout $y \in [0, L]$:

$$\mathcal{F}^{-1}(F_{M,N}u)(y + pL) = \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \int_0^{2\pi/L} \sum_{n=-N}^{M} u(y + nL)e^{i(p-n)\xi L} d\xi$$

on voit que :

$$\mathcal{F}^{-1}(F_{M,N}u)(y + pL) = \begin{cases} 0 & \text{si } p > M \\ u(y + pL) & \text{si } -N \leq p \leq M \\ 0 & \text{si } p < -N \end{cases}$$

ce qui implique :

$$||F_{M,N}u - F_{P,Q}u||^2_{L^2(\mathbb{K})} = \int_{-NL}^{ML} |u(x)|^2 - 2\int_{-min(N,Q)L}^{min(M,P)L} |u(x)|^2 + \int_{-QL}^{PL} |u(x)|^2$$

qui tend vers zéro quand $M, N, P, Q \to +\infty$, u appartenant à $L^2(\mathbb{R})$, ce qui montre que $F_{M,N}u$ est une suite de Cauchy dans $L^2(\mathbb{K})$, et par conséquent qu'elle converge fortement. Les limites fortes et faibles coincidant lorsqu'elles existent toutes les deux, ceci montre que $F_{M,N}u$ converge fortement vers $\mathcal{F}u$ dans $L^2(\mathbb{K})$.

Finalement, pour tout $u \in \mathbb{R}$ et $\mu \in L^\infty(\mathbb{R})$ L-périodique (que l'on identifie à sa restriction à $[0, L]$), il est clair que μu appartient toujours à $L^2(\mathbb{R})$. Par conséquent, nous avons pour tout $\hat{v} \in L^2(\mathbb{K})$:

$$(\mathcal{F}(\mu u), \hat{v})_{L^2(\mathbb{K})} = \left(\mu u, \mathcal{F}^{-1}\hat{v}\right)_{L^2(\mathbb{R})}$$

Maintenant nous pouvons utiliser la formule d'inversion que nous avons établie pour des fonctions L^2 afin de réexprimer le dernier terme :

$$\begin{aligned}(\mathcal{F}(\mu u), \hat{v})_{L^2(\mathbb{K})} &= \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \int_0^L \mu(x + pL)u(x + pL) \int_0^{2\pi/L} \overline{\hat{v}}(x, \xi)e^{-ip\xi L} d\xi dx \\ &= \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \int_0^L \mu(x)u(x + pL) \int_0^{2\pi/L} \overline{\hat{v}}(x, \xi)e^{-ip\xi L} d\xi dx \\ &= \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \int_0^L \mu(x)u(x + pL) \int_0^{2\pi/L} \overline{\mu\hat{v}}(x, \xi)e^{-ip\xi L} d\xi dx\end{aligned}$$

Comme $\overline{\mu}\hat{v}$ appartient toujours à $L^2(\mathbb{K})$, et nous pouvons identifier le dernier terme avec l'inverse de la TFB de $\overline{\mu}\hat{v}$. Aussi nous avons :

$$\begin{aligned}(\mathcal{F}(\mu u), \hat{v})_{L^2(\mathbb{K})} &= \left(u, \mathcal{F}^{-1}(\overline{\mu}\hat{v})\right)_{L^2(\mathbb{R})} \\ &= (\mathcal{F}u, \overline{\mu}\hat{v})_{L^2(\mathbb{K})} \\ &= (\mu\mathcal{F}u, \hat{v})_{L^2(\mathbb{K})}\end{aligned}$$

et il suit $\mathcal{F}(\mu u) = \mu\mathcal{F}u$ dans $L^2(\mathbb{K})$. □

Nous avons d'ores et déjà récupéré l'une des propriétés algébriques de la TFB, à savoir la commutativié de la TFB avec le produit par des fonctions périodiques. Maintenant, nous terminons cette section par quelques remarques préliminaires sur le comportement des espaces de Sobolev plus réguliers (en particulier $H^1(\mathbb{R})$) sous l'action de la TFB, ce qui nous permettra au passage de justifier le nom "quasi-périodique" que nous avons attribué à l'espace $\mathcal{FS}'(\mathbb{K})$, mais surtout de récupérer la commutativité de la TFB avec les opérateurs différentiels. Plus précisément, si on définit :

$$\mathcal{S}_\xi([0,L]) = \left\{ u \in C^\infty([0,L]) \ \mid \ \partial_x^j u(L) = e^{i\xi L}\partial_x^j u(0) \quad \forall j \in \mathbb{N} \right\}$$

alors, on définit pour tout $s \in \mathbb{R}$, $s > 0$, :

$$H^s_\xi([0,L]) = \overline{\mathcal{S}_\xi([0,L])}^{H^s([0,L])}$$

la fermeture de $\mathcal{S}_\xi([0,L])$ pour la norme $H^s([0,L])$. Remarquons que si $\hat{\varphi} \in \mathcal{FS}(\mathbb{K})$, alors $\hat{\varphi}(\cdot,\xi) \in \mathcal{S}_\xi([0,L])$ à ξ fixé. On commence par justifier le nom "quasi-périodique" dont nous avons affublé $\mathcal{FS}'(\mathbb{K})$:

Lemme A.1. *Pour tout $\hat{u} \in H^1_\xi(\Delta,[0,L]) = \overline{\mathcal{S}_\xi([0,L])}^{H^1(\Delta,[0,L])}$, on a :*

$$\hat{u}(L) = e^{i\xi L}\hat{u}(0) \text{ et } \partial_x\hat{u}(L) = e^{i\xi L}\partial_x\hat{u}(0)$$

Démonstration. Il est bien connu que les opérateurs de trace impliqués dans les formules ci-dessus sont continus de $H^1(\Delta,[0,L])$ vers $\mathbb{C}$. Alors, comme $\mathcal{S}_\xi([0,L])$ est dense dans $H^1_\xi(\Delta,[0,L])$ on peut trouver une suite $\hat{\varphi_n}$ de $\mathcal{S}_\xi([0,L])$ convergeant vers $\hat{u}$ dans $H^1_\xi(\Delta,[0,L])$. De plus, nous avons :

$$\hat{\varphi_n}(L) - e^{i\xi L}\hat{\varphi_n}(0) = 0 \text{ et } \partial_x\hat{\varphi_n}(L) - e^{i\xi L}\partial_x\hat{\varphi_n}(0) = 0$$

comme $\hat{\varphi_n} \in \mathcal{S}_\xi([0,L])$. Par continuité, cela reste vrai pour les limites. □

On obtient alors sans surprise :

Théorème A.6. *Pour tout entier $k > 0$:*

$$\mathcal{F}(H^k(\mathbb{R})) = L^2([0,2\pi/L], H^k_\xi([0,L]))$$

et si $u \in H^k(\mathbb{R})$, alors $\forall\ 0 \le j \le k$:

$$\mathcal{F}(\partial_y^j u) = \partial_y^j \mathcal{F}u$$

et si $\hat{u} \in L^2([0,2\pi/L], H^k_\xi([0,L]))$, alors $\forall\ 0 \le j \le k$:

$$\mathcal{F}^{-1}(\partial_y^j \hat{u}) = \partial_y^j \mathcal{F}^{-1}\hat{u}$$

la dérivée étant prise au sens des distributions des deux côtés de l'égalité.

Démonstration. On commence par remarquer que $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est dense dans $H^k(\mathbb{R})$ (pusiqu'il contient par exemple $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ que l'on sait être dense). Alors, pour tout $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, il existe $\varphi_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ qui converge vers u fortement dans $H^k(\mathbb{R})$. Ensuite, en utilisant l'identité de Parseval et la commutation de la TFB avec les dérivées pour les fonctions régulières, on a :

$$||\partial_y^j \mathcal{F}\varphi_n||_{L^2(\mathbb{K})} = ||\mathcal{F}\partial_y^j\varphi_n||_{L^2(\mathbb{K})} = ||\partial_y^j\varphi_n||_{L^2(\mathbb{R})}$$

La TFB étant linéaire, on a également :

$$||\partial_y^j \mathcal{F}(\varphi_n - \varphi_m)||_{L^2(\mathbb{K})} = ||\mathcal{F}(\partial_y^j\varphi_n - \partial_y^j\varphi_m)||_{L^2(\mathbb{K})} = ||\partial_y^j\varphi_n - \partial_y^j\varphi_m||_{L^2(\mathbb{R})}$$

donc $\mathcal{F}\varphi_n$ est de Cauchy dans $L^2([0,2\pi/L],H^k([0,L]))$, par conséquent elle y converge fortement, avec $\mathcal{F}u$ pour limite par continuité L^2 de la TFB. De plus, $\mathcal{F}\varphi_n \in \mathcal{FS}(\mathbb{K})$, par conséquent à ξ fixé elle appartient à $\mathcal{S}_\xi([0,L])$ comme nous l'avons remarqué ci-dessus. La convergence dans $L^2([0,2\pi/L],H^k([0,L]))$ impliquant que pour presque tout ξ, $\mathcal{F}(\cdot,\xi)$ converge fortement dans $H^k([0,L])$, on voit que $\mathcal{F}u(\cdot,\xi) \in H^k_\xi([0,L])$ pour presque tout ξ. Ensuite, comme $\mathcal{F}u$ est la limite de $\mathcal{F}\varphi_n$ dans $L^2([0,2\pi/L],H^k([0,L]))$, on a :

$$||\partial_y^j \mathcal{F}\varphi_n - \partial_y^j \mathcal{F}u||_{L^2(\mathbb{K})} \to 0$$

Mais comme $\partial_y^j\varphi_n$ converge vers $\partial_y^j u \in L^2(\mathbb{R})$ fortement dans $L^2(\mathbb{R})$, nous avons également, par continuité L^2 de la TFB :

$$||\mathcal{F}\partial_y^j\varphi_n - \mathcal{F}\partial_y^j u||_{L^2(\mathbb{K})} \to 0$$

Alors, a nouveau comme $\partial_y^j\mathcal{F}\varphi_n = \mathcal{F}\partial_y^j\varphi_n$, φ_n étant régulière, on en déduit par unicité de la limite que :

$$\mathcal{F}(\partial_y^j u) = \partial_y^j \mathcal{F}u$$

dans $L^2(\mathbb{K})$, ce qui démontre la commutativité de la TFB avec les opérateurs de dérivation.

Réciproquement, soit $\hat{u}$ un élément de $L^2([0,2\pi/L],H^k_\xi([0,L]))$. Alors la transformée de Floquet inverse de chaque $\partial_y^j\hat{u}$ est donnée, pour tout $0 \le j \le k$, par :

$$\tau_{pL}\left(\mathcal{F}^{-1}\partial_y^j\hat{u}\right) = \sqrt{\frac{L}{2\pi}}\int_0^{2\pi/L} \partial_y^j\hat{u}(\cdot,\xi)e^{ip\xi L}d\xi$$

Puis, pour chaque $0 \le j \le k-1$, on remarque que $\partial_y^j\hat{u}\partial_y^j\hat{u} \in L^2([0,2\pi/L],H^{k-j}([0,L]))$ (avec $H^{k-j}([0,L]) = C^{k-j-1}([0,L])$ ici). Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a alors, toujours pour $0 \le j \le k-1$:

$$\begin{aligned}
< \partial_y\mathcal{F}^{-1}(\partial_y^j\hat{u}),\varphi > &= - < \mathcal{F}^{-1}(\partial_y^j\hat{u}),\partial_y\varphi > \\
&= -\left(\mathcal{F}^{-1}(\partial_y^j\hat{u}),\partial_y\varphi\right)_{L^2(\mathbb{R})} \\
&= -\sum_{p\in\mathbb{Z}}\int_{pL}^{(p+1)L} \mathcal{F}^{-1}(\partial_y^j\hat{u})\partial_y\varphi \\
&= -\sum_{p\in\mathbb{Z}}\int_0^{L} \tau_{pL}(\mathcal{F}^{-1}(\partial_y^j\hat{u}))\tau_{pL}(\partial_y\varphi) \\
&= -\sqrt{\frac{L}{2\pi}}\sum_{p\in\mathbb{Z}}\int_0^L\int_0^{2\pi/L} \partial_y^j\hat{u}e^{ip\xi L}\tau_{pL}(\partial_y\varphi)
\end{aligned}$$

où l'on remarque que la somme est en réalité finie puisque φ est à support compact. On intègre alors par parties en y, comme pour $0 \le j \le k-1$, $\partial_y^j\hat{u}(\cdot,\xi) \in H^{k-j}([0,L])$:

$$\begin{aligned}
< \partial_y\mathcal{F}^{-1}(\partial_y^j\hat{u}),\varphi > &= \sqrt{\frac{L}{2\pi}}\sum_{p\in\mathbb{Z}}\int_0^L\int_0^{2\pi/L} \partial_y^{j+1}\hat{u}e^{ip\xi L}\tau_{pL}(\varphi) \\
&\quad - \sqrt{\frac{L}{2\pi}}\sum_{p\in\mathbb{Z}}\int_0^{2\pi/L} \partial_y^j\hat{u}(L,\xi)e^{ip\xi L}\varphi((p+1)L) \\
&\quad \sqrt{\frac{L}{2\pi}}\sum_{p\in\mathbb{Z}}\int_0^{2\pi/L} \partial_y^j\hat{u}(0,\xi)e^{ip\xi L}\varphi(pL)
\end{aligned}$$

la trace ayant bien un sens puisque $\partial_y^j\hat{u} \in L^2([0,2\pi/L],H^{k-j}([0,L]))$. Le lemme A.1 nous apprend alors que presque pour tout ξ, $\partial_y^j\hat{u}(L,\xi) = \partial_y^j\hat{u}(0,\xi)e^{i\xi L}$, donc les deux termes de bord se compensent

et il suit :

$$\begin{aligned}
< \partial_y \mathcal{F}^{-1}(\partial_y^j \hat{u}), \varphi > &= \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \sum_{p\in\mathbb{Z}} \int_0^L \int_0^{2\pi/L} \partial_y^{j+1} \hat{u} e^{ip\xi L} \tau_{pL}(\varphi) \\
&= \sum_{p\in\mathbb{Z}} \int_{pL}^{(p+1)L} \mathcal{F}^{-1}(\partial_y^{j+1}\hat{u})\varphi \\
&= \left(\mathcal{F}^{-1}(\partial_y^{j+1}\hat{u}), \partial_y\varphi\right)_{L^2(\mathbb{R})} \\
&=< \mathcal{F}^{-1}(\partial_y^{j+1}\hat{u}), \varphi >
\end{aligned}$$

et donc $\partial_y \mathcal{F}^{-1}(\partial_y^j \hat{u}) = \mathcal{F}^{-1}(\partial_y^{j+1}\hat{u})$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ pour $0 \leq j \leq k-1$. Comme $\mathcal{F}^{-1}(\partial_y^j \hat{u}) \in L^2(\mathbb{R})$ pour tout $0 \leq j \leq k$, on en déduit que $\mathcal{F}^{-1}\hat{u} \in H^k(\mathbb{R})$, ce qui conclut la démonstration. □

Remarque A.1. *Nous disposons maintenant d'un moyen très détourné pour montrer que $\mathcal{FS}'(\mathbb{K})$ ne peut pas s'identifier à un sous-espace de $\mathcal{D}'(\mathbb{K})$. En effet, supposons qu'une telle chose soit vraie, alors on aurait, pour tout $\hat{T} \in \mathcal{FS}'(\mathbb{K})$ et tout $\hat{\varphi} \in \mathcal{FS}(\mathbb{K})$:*

$$< \partial_y \hat{T}, \hat{\varphi} >= - < \hat{T}, \partial_y \hat{\varphi} >$$

Ceci impliquerait alors, $\forall\, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$:

$$< \partial_y \mathcal{F}^{-1}\hat{T}, \varphi >= - < \mathcal{F}^{-1}\hat{T}, \partial_y\varphi >= - < \hat{T}, \mathcal{F}\partial_y\varphi >$$

La commutativité de la TFB avec la dérivation pour une fonction régulière donnerait alors :

$$< \partial_y \mathcal{F}^{-1}\hat{T}, \varphi >= - < \hat{T}, \partial_y \mathcal{F}\varphi >=< \partial_y \hat{T}, \mathcal{F}\varphi >=< \mathcal{F}^{-1}\partial_y \hat{T}, \varphi >$$

donc on aurait de nouveau la propriété de commutativité de la TFB avec les opérateurs différentiels pour des distributions (la même démonstration fonctionnant pour la TFB directe). Alors, la fonction ψ constante égale à 1 sur $\mathbb{K}$ étant dans $L^2([0, 2\pi/L], H^1([0, L]))$, on aurait $\mathcal{F}^{-1}\psi \in L^2(\mathbb{R})$ ainsi que $\partial_y \mathcal{F}^{-1}\psi = \mathcal{F}^{-1}\partial_y\psi \in L^2(\mathbb{R})$, et donc $\mathcal{F}^{-1}\psi \in H^1(\mathbb{R})$. Mais $\psi \in L^2(\mathbb{K})$, aussi la formule d'inversion est valide et donne, pour $y \in [0, L]$:

$$\mathcal{F}^{-1}\psi(y + pL) = \left| \begin{array}{ll} \sqrt{\dfrac{2\pi}{L}} & si\ p = 0 \\ 0 & sinon \end{array} \right.$$

qui est discontinue, et donc ne saurait être $H^1(\mathbb{R})$. On aboutit donc à une contradiction, par conséquent $\mathcal{FS}'(\mathbb{K})$ ne peut pas s'identifier à un sous-espace de $\mathcal{D}'(\mathbb{K})$. Ce résultat nous met en garde sur le fait que bien que nous soyons parvenus à étendre la TFB aux distributions tempérées, la commutativité de la TFB avec les opérateurs différentiels ne s'est pas transportée aux distributions, et ne se transporte qu'à des sous-espaces très particuliers de $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, à savoir moralement ceux qui respectent la quasi-périodicté.

A.2 La transformée de Floquet-Bloch dans $\mathbb{R}^d$

Les résultats de la section précédente s'étendent aisément en dimension supérieure, ainsi que nous allons maintenant l'expliquer. Considérons un domaine $\Omega = \mathcal{O} \times \mathbb{R}$, où $\mathcal{O}$ est un ouvert Lipschitz de $\mathbb{R}^{d-1}$. On notera $x = (x_1, x_2)$ un élément de Ω où $x_1 \in \mathcal{O}$ et $x_2 \in \mathbb{R}$. Alors on définit la TFB directionnelle $\mathcal{F}_{x_2}$ dans la direction x_2 exactement de la même façon que pour des fonctions d'une seule variable. Ainsi, nous allons considérer des fonctions de $\mathcal{S}(\Omega)$ (remarquons que si $\mathcal{O}$ est borné,

alors ceci n'impose pas de condition de décroissance dans les directions bornées). On munit cet espace de la topologie définie par la famille de semi-normes :

$$q_{\alpha,m}(\varphi) = \sup_{\mathcal{O}\times\mathbb{R}} |x_2|^m |\partial^\alpha \varphi(x_1, x_2)|$$

où α est n'importe quel multi indice de dérivation, et qui fait de $\mathcal{S}(\Omega)$ un espace complet.

Définition A.2. *Pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\Omega)$, on définit :*

$$\mathcal{F}_{x_2}\varphi(x_1, x_2, \xi) = \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varphi(x_1, x_2 + nL) e^{-in\xi L}$$

On voit immédiatement en fixant x_1, qu'il ne s'agit que de la TFB sur $\mathbb{R}$ de la fonction $\varphi(x_1, \cdot)$ que nous avons définie dans la section précédente, par conséquent toutes les propriétés que nous avons démontrées dans la section précédente pour les fonctions régulières se transposent immédiatement dans ce contexte :

Théorème A.7. *La TFB des fonctions de $\mathcal{S}(\Omega)$ présente les propriétés suivantes :*

- *La TFB définit une bijection continue entre $\mathcal{S}(\Omega)$ et l'espace :*

$$\mathcal{FS}_{x_2}(\mathcal{O}\times\mathbb{K}) = \big\{\psi \in C^\infty(\mathcal{O}\times\mathbb{K}) \;|\; \partial^j_{x_2}\mathcal{F}\psi(x_1, L, \xi) = e^{i\xi L}\partial^j_{x_2}\mathcal{F}\psi(x_1, 0, \xi)$$
$$\text{et } \partial^j_{x_2}\partial^q_\xi \mathcal{F}\psi(x_1, x_2, 2\pi/L) = \partial^j_{x_2}\partial^q_\xi \mathcal{F}\psi(x_1, x_2, 0) \quad \forall (j,q) \in \mathbb{N}^2 \quad \big\}$$

- *Elle commute avec les opérateurs différentiels (avec α n'importe quel multi indice de dérivation) :*

$$\partial^\alpha_x(\mathcal{F}_x\varphi) = \mathcal{F}_{x_2}(\partial^\alpha_x\varphi) \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^{d+1}$$

- *Elle commute avec la multiplication par une fonction régulière L-périodique, i.e. pour $\mu \in \mathcal{E}(\Omega)$ $L-$périodique en x_2, si on identifie μ à sa restriction à $\mathcal{O}\times[0,L]$:*

$$\mathcal{F}_{x_2}(\mu\varphi) = \mu\mathcal{F}_{x_2}(\varphi)$$

- *Son inverse $\mathcal{F}^{-1}_{x_2}$ est donné par, pour tout $(x_1, x_2) \in \mathcal{O}\times[0,L]$ et tout $p \in \mathbb{Z}$:*

$$\varphi(x_1, x_2 + pL) = \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \int_0^{2\pi/L} \mathcal{F}_{x_2}\varphi(x_1, x_2, \xi) e^{ip\xi L} d\xi$$

- *On a les identités de Parseval suivantes, pour tout $(u, v) \in \mathcal{S}(\Omega)^2$ et tout $(\hat{u}, \hat{v}) \in \mathcal{FS}_{x_2}(\mathcal{O}\times\mathbb{K})^2$:*

$$(\mathcal{F}u, \mathcal{F}v)_{L^2(\mathcal{O}\times\mathbb{K})} = (u, v)_{L^2(\mathcal{O}\times\mathbb{R})} \;\text{ et }\; (\hat{u}, \hat{v})_{L^2(\mathcal{O}\times\mathbb{K})} = \big(\mathcal{F}^{-1}\hat{u}, \mathcal{F}^{-1}\hat{v}\big)_{L^2(\mathcal{O}\times\mathbb{R})}$$

Démonstration. Il suffit de remarquer que nous ne considérons en réalité que la TFB de $\varphi(x_1, \cdot)$, pour tout x_1, et d'appliquer les résultats de la section précédente. □

Naturellement, on étend cette définition aux distributions tempérées en posant pour tout $T \in \mathcal{S}'_{x_2}(\mathcal{O}\times\mathbb{R})$:

$$< \mathcal{F}_{x_2}T, \varphi > = < T, \mathcal{F}_{x_2}\varphi > \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}_{x_2}(\mathcal{O}\times\mathbb{R})$$

et pour tout $\hat{T} \in \mathcal{FS}'_{x_2}(\mathcal{O}\times\mathbb{K})$:

$$< \mathcal{F}^{-1}_{x_2}\hat{T}, \hat{\varphi} > = < \hat{T}, \mathcal{F}^{-1}_{x_2}\hat{\varphi} > \quad \forall \hat{\varphi} \in \mathcal{FS}_{x_2}(\mathcal{O}\times\mathbb{K})$$

où à nouveau il faut prendre garde au fait que $\mathcal{FS}'_{x_2}(\mathcal{O}\times\mathbb{K})$ n'est pas un sous-espace de $\mathcal{D}'(\mathcal{O}\times\mathring{\mathbb{K}})$. On aboutit en toute logique au même résultat que pour le cas monodimensionnel :

Théorème A.8. *La TFB $\mathcal{F}_{x_2}$ définit une bijection continue de $\mathcal{S}'_{x_2}(\mathcal{O}\times\mathbb{R})$ vers $\mathcal{FS}'_{x_2}(\mathcal{O}\times\mathbb{K})$ d'inverse $\mathcal{F}^{-1}_{x_2}$.*

Démonstration. La preuve est exactement la même que celle du théorème A.2, au changement de normes près, aussi nous ne la reproduisons pas ici. □

On va maintenant considérer la TFB sur les espaces de Sobolev comme précédemment. Pour des fonctions L^2, on obtient :

Théorème A.9. *La TFB définit une isométrie entre $L^2(\Omega)$ et $L^2(\mathcal{O}\times\mathbb{K})$, et, pour tout $(u,v)\in L^2(\Omega)^2$ et tout $(\hat{u},\hat{v})\in L^2(\mathcal{O}\times\mathbb{K})^2$ on a les identités de Parseval :*

$$(\mathcal{F}u,\mathcal{F}v)_{L^2(\mathcal{O}\times\mathbb{K})}=(u,v)_{L^2(\Omega)}\qquad et\qquad (\hat{u},\hat{v})_{L^2(\mathcal{O}\times\mathbb{K})}=\left(\mathcal{F}^{-1}\hat{u},\mathcal{F}^{-1}\hat{v}\right)_{L^2(\Omega)} \tag{A.4}$$

De plus, on a les propriétés algébriques suivantes :

. *La formule d'inversion est valide pour toute fonction $\hat{u}\in L^2(\mathcal{O}\times\mathbb{K})$, i.e (en notant toujours τ_h l'opérateur de translation et e_2 le vecteur de la base canonique correspondant à x_2) :*

$$\tau_{pLe_2}\left(\mathcal{F}^{-1}\hat{u}\right)=\sqrt{\frac{L}{2\pi}}\int_0^{2\pi/L}\hat{u}(\cdot,\cdot,\xi)e^{ip\xi L}d\xi \tag{A.5}$$

. *Pour tout $u\in L^2(\Omega)$, les sommes partielles $F_{M,N}u$ définies par :*

$$F_{M,N}u(\cdot,\xi)=\sqrt{\frac{L}{2\pi}}\sum_{n=-N}^{M}(\tau_{nLe_2}u)(\cdot,\cdot)e^{-in\xi L} \tag{A.6}$$

convergent dans $L^2(\mathcal{O}\times\mathbb{K})$, et $\mathcal{F}u=\lim_{M,N\to+\infty}F_{M,N}u$ fortement dans $L^2(\mathcal{O}\times\mathbb{K})$.

. *Pour toute fonction L^2, la TFB commute avec la multiplication par une fonction L^∞ L-périodique μ, i.e $\mathcal{F}(\mu v)=\mu\mathcal{F}v$ in $L^2(\mathcal{O}\times\mathbb{K})$ si on identifie μ à sa restriction à $\mathcal{O}\times[0,L]$)*

Démonstration. A nouveau, la preuve est identique à celle du cas monodimensionnel, comme $\mathcal{S}(\Omega)$ est dense dans $L^2(\Omega)$ comme il contient $\mathcal{D}(\Omega)$. Aussi, nous ne la reproduisons pas ici. □

Passons maintenant aux espaces de Sobolev qui autorisent la dérivation. On pose :

$$\mathcal{S}_\xi(\mathcal{O}\times[0,L])=\left\{u\in C^\infty(\mathcal{O}\times[0,L])\ \mid\ \partial_x^j u(L)=e^{i\xi L}\partial_x^j u(0)\quad\forall j\in\mathbb{N}\right\}$$

Alors, on définit, pour tout $s\in\mathbb{R}$, $s>0$, :

$$H^s_\xi(\mathcal{O}\times[0,L])=\overline{\mathcal{S}_\xi(\mathcal{O}\times[0,L])}^{H^s([0,L])}$$

la fermeture de $\mathcal{S}_\xi(\mathcal{O}\times[0,L])$ pour la norme $H^s([0,L])$. Ces espaces vérifient alors des conditions quasi-périodiques :

Lemme A.2. *Pour tout $\hat{u}\in H^k_\xi(\mathcal{O}\times[0,L])$, on a, pour tout multi-indice de dérivation α tel que $|\alpha|\le k-1$:*

$$\partial^\alpha\hat{u}(\cdot,x_2=L)=e^{i\xi L}\partial^\alpha\hat{u}(\cdot,x_2=0)\ \textit{dans}\ H^{k-|\alpha|-1/2}(\mathcal{O})$$

Puis, pour tout $\hat{u}\in H^1_\xi(\Delta,\mathcal{O}\times[0,L])=\overline{\mathcal{S}_\xi(\mathcal{O}\times[0,L])}^{H^1(\Delta)}$, on a :

$$\partial_{x_2}\hat{u}(\cdot,x_2=L)=e^{i\xi L}\partial_{x_2}\hat{u}(\cdot,x_2=0)\ \textit{dans}\ H^{-1/2}(\mathcal{O})$$

Démonstration. On procède par densité. Par définition, pour tout $\hat{u} \in H^k_\xi(\mathcal{O} \times [0, L])$, il existe $\varphi_n \in S_\xi(\mathcal{O} \times [0, L])$ qui converge vers $\hat{u}$ en norme H^k. On a par définition :

$$\partial^\alpha \varphi_n(\cdot, x_2 = L) = e^{i\xi L} \partial^\alpha \varphi_n(\cdot, x_2 = 0)$$

Puis, les opérateurs de trace :

$$\hat{u} \longmapsto \partial^\alpha \hat{u}(\cdot, x_2 = L) \quad \text{et} \quad \hat{u} \longmapsto \partial^\alpha \hat{u}(\cdot, x_2 = 0)$$

étant continus de $H^k(\mathcal{O} \times [0, L])$ vers $H^{k-|\alpha|-1/2}(\mathcal{O})$, il est clair que cette relation reste encore vraie pour $\hat{u}$. On procède de même sur $H^1_\xi(\Delta, \mathcal{O} \times [0, L])$ pour obtenir la dernière relation. □

Des relations de quasi-périodicté, on déduit comme dans le cas monodimensionnel :

Théorème A.10. *Pour tout entier k, on a :*

$$\mathcal{F}_{x2}(H^k(\Omega)) = L^2([0, 2\pi/L], H^k_\xi(\mathcal{O} \times [0, L]))$$

et si $u \in H^k(\Omega)$, alors $\forall\, 0 \leq j \leq k$:

$$\mathcal{F}(\partial_y^j u) = \partial_y^j \mathcal{F} u$$

et si $\hat{u} \in L^2([0, 2\pi/L], H^k_\xi(\mathcal{O} \times [0, L]))$, alors $\forall\, 0 \leq j \leq k$:

$$\mathcal{F}^{-1}(\partial_y^j \hat{u}) = \partial_y^j \mathcal{F}^{-1} \hat{u}$$

la dérivée étant prise au sens des distributions des deux côtés de l'égalité.

Démonstration. La preuve est identique à celle du cas monodimensionnel, aussi nous ne la reproduisons pas ici. □

On peut alors obtenir des formules de Green pour ces espaces quasi-périodiques :

Lemme A.3. *Pour tout $\hat{u} \in H^1_\xi((0) \times [0, L])$ et tout $\hat{v} \in H^1_\xi((0) \times [0, L])^d$, on a :*

$$(\hat{u}, \hat{v} \cdot \nu)_{L^2(\partial\mathcal{O} \times [0,L])} = (\nabla \hat{u}, \hat{v})_{L^2(\mathcal{O} \times [0,L])} - (\hat{u}, div\ \hat{v})_{L^2(\mathcal{O} \times [0,L])}$$

Pour tout $\hat{u} \in H^1_\xi(\Delta, (0) \times [0, L])$ et tout $\hat{v} \in H^1_\xi((0) \times [0, L])$, on a :

$${}_{H^{-1/2}}\langle \partial_\nu \hat{u}, \hat{v} \rangle_{H^{1/2}(\partial\mathcal{O} \times [0,L])} = (-\Delta \hat{u}, \hat{v})_{L^2(\mathcal{O} \times [0,L])} + (\nabla \hat{u}, \nabla \hat{v})_{L^2(\mathcal{O} \times [0,L])}$$

Démonstration. Pour tout $\hat{u} \in H^1_\xi((0) \times [0, L])$ et tout $\hat{v} \in H^1_\xi((0) \times [0, L])^d$, la formule de Green usuelle donne immédiatement :

$$(\hat{u}, \hat{v} \cdot \nu)_{L^2(\partial\mathcal{O} \times [0,L])} + (\hat{u}, \hat{v} \cdot \nu)_{L^2(\mathcal{O} \times \{x_2 = L\})}$$

$$+ (\hat{u}, \hat{v} \cdot \nu)_{L^2(\mathcal{O} \times \{x_2 = 0\})} = (\nabla \hat{u}, \hat{v})_{L^2(\mathcal{O} \times [0,L])} - (\hat{u}, div\ \hat{v})_{L^2(\mathcal{O} \times [0,L])}$$

Alors le lemme A.2 nous donne :

$$(\hat{u}, \hat{v} \cdot \nu)_{L^2(\mathcal{O} \times \{x_2 = L\})} = -\left(e^{i\xi L} \hat{u}, e^{i\xi L} \hat{v} \cdot \nu\right)_{L^2(\mathcal{O} \times \{x_2 = 0\})}$$

comme les normales sont de signes opposés, alors le produit scalaire étant hermitien, on obtient :

$$(\hat{u}, \hat{v} \cdot \nu)_{L^2(\mathcal{O} \times \{x_2 = L\})} = -e^{i\xi L} e^{-i\xi L} (\hat{u}, \hat{v} \cdot \nu)_{L^2(\mathcal{O} \times \{x_2 = 0\})}$$

alors les deux termes se compensent, et on obtient la formule désirée.

Pour tout $\hat{u} \in H^1_\xi(\Delta,(0)\times[0,L])$ et tout $\hat{v} \in H^1_\xi((0)\times[0,L])$, la formule de Green usuelle donne immédiatement :

$$\begin{aligned}{}_{H^{-1/2}}\left\langle \partial_\nu \hat{u}, \hat{v}\right\rangle_{H^{1/2}(\partial\mathcal{O}\times[0,L])} +{}_{H^{-1/2}}\left\langle \partial_\nu \hat{u}, \hat{v}\right\rangle_{H^{1/2}(\mathcal{O}\times\{x_2=L\})} +{}_{H^{-1/2}}\left\langle \partial_\nu \hat{u}, \hat{v}\right\rangle_{H^{1/2}(\mathcal{O}\times\{x_2=0\})}\\ = (-\Delta\hat{u},\hat{v})_{L^2(\mathcal{O}\times[0,L])} + (\nabla\hat{u},\nabla\hat{v})_{L^2(\mathcal{O}\times[0,L])}\end{aligned}$$

Alors le lemme A.2 nous donne :

$${}_{H^{-1/2}}\left\langle \partial_\nu \hat{u}, \hat{v}\right\rangle_{H^{1/2}(\mathcal{O}\times\{x_2=L\})} ={}_{H^{-1/2}}\left\langle -\partial_\nu e^{i\xi L}\hat{u}, e^{i\xi L}\hat{v}\right\rangle_{H^{1/2}(\mathcal{O}\times\{x_2=0\})}$$

comme les normales sont de signes opposés, alors le produit scalaire étant hermitien, on obtient :

$${}_{H^{-1/2}}\left\langle \partial_\nu \hat{u}, \hat{v}\right\rangle_{H^{1/2}(\mathcal{O}\times\{x_2=L\})} = -e^{i\xi L}e^{-i\xi L}_{H^{-1/2}}\left\langle \partial_\nu \hat{u}, \hat{v}\right\rangle_{H^{1/2}(\mathcal{O}\times\{x_2=0\})}$$

alors les deux termes se compensent, et on obtient la formule désirée. □

On définit alors les espaces de traces correspondant à ces espaces de Sobolev :

$$H^{k-1/2}_\xi(\partial\mathcal{O}\times[0,L]) = \left\{\hat{u}|_{\partial\mathcal{O}} \;\middle|\; u\in H^k_\xi(\mathcal{O}\times[0,L])\right\}$$

munis de la norme :

$$||v||_{H^{k-1/2}_\xi(\partial\mathcal{O}\times[0,L])} = inf\left\{||V||_{H^1_\xi(\mathcal{O}\times[0,L])} \;\middle|\; V\in H^k_\xi(\mathcal{O}\times[0,L]) \text{ tel que } V_{|\partial\mathcal{O}} = v\right\}$$

Ces espaces ont été étudiés au chapitre 1. Nous allons établir un dernier résultat, qui lie la trace de la TFB à la trace de la fonction de départ :

Lemme A.4. *Soit u appartenant à $H^1(\mathcal{O}\times\mathbb{R})$. Alors :*

$$(\mathcal{F}_{x_2}u)_{|\partial\mathcal{O}\times[0,L]} = \mathcal{F}(u_{|\partial\mathcal{O}\times\mathbb{R}})$$

De plus, si u appartient à $H^1(\Delta,\mathcal{O}\times\mathbb{R})$, alors :

$$\partial_\nu(\mathcal{F}_{x_2}u)_{|\partial\mathcal{O}\times[0,L]} = \mathcal{F}(\partial_\nu u_{|\partial\mathcal{O}\times\mathbb{R}})$$

Démonstration. Soit u appartenant à $H^1(\mathcal{O}\times\mathbb{R})$, on a $\mathcal{F}u\in L^2([0,2\pi/L],H^1_\xi(\mathcal{O}\times[0,L]))$, donc la trace est bien définie, et appartient à $H^{1/2}_\xi([0,L])$ par définition. La formule de Green donne alors, pour tout $\psi\in\mathcal{FS}_{x_2}(\mathcal{O}\times[0,L])^d$:

$$\left(u,\mathcal{F}^{-1}\psi\cdot\nu\right)_{L^2(\partial\mathcal{O}\times\mathbb{R})} = \left(\nabla u,\mathcal{F}^{-1}\psi\right)_{L^2(\Omega)} - \left(u,div\ \mathcal{F}^{-1}\psi\right)_{L^2(\Omega)}$$

D'un autre côté, la formule de Green donne pour la TFB :

$$(\mathcal{F}u,\psi\cdot\nu)_{L^2(\partial\mathcal{O}\times[0,L])} = (\nabla\mathcal{F}u,\psi)_{L^2(\mathcal{O}\times[0,L])} - (\mathcal{F}u,div\ \psi)_{L^2(\mathcal{O}\times[0,L])}$$

Mais nous savons que :

$$\left(\nabla u,\mathcal{F}^{-1}\psi\right)_{L^2(\Omega)} = (\nabla\mathcal{F}u,\psi)_{L^2(\mathcal{O}\times[0,L])}$$

ainsi que

$$\left(u,div\ \mathcal{F}^{-1}\psi\right)_{L^2(\Omega)} = (\mathcal{F}u,div\ \psi)_{L^2(\mathcal{O}\times[0,L])}$$

par définition de la TFB et en utilisant les propriétés de commutation du théorème A.10. Alors, comme la TFB est bijective de $\mathcal{S}(\mathcal{O}\times\mathbb{R})$ vers $\mathcal{FS}_{x_2}(\mathcal{O}\times[0,L])$, et comme $\psi_{|\partial\mathcal{O}\times[0,L]}\cdot\nu$ parcourt clairement tout $\mathcal{FS}_{x_2}(\partial\mathcal{O}\times[0,L])$, on obtient que :

$$\mathcal{F}u_{|\partial\mathcal{O}\times[0,L]} = \mathcal{F}(u_{|\partial\mathcal{O}\times\mathbb{R}})$$

La preuve de la deuxième identité est exactement la même, en utilisant la seconde formule de Green. □

Annexe B

Méthode de décomposition de domaine

Dans cette annexe, nous allons présenter ce qui fut notre première idée pour traiter le cas des défauts non bornés, tant pour les problèmes harmoniques que pour les problème d'évolution. Le principe en est fort simple : pour traiter des défauts bornés, on construit des opérateurs DtN sur leur frontière, aussi pour traiter des défauts non bornés, il est légitime de songer à faire de même. Reste ensuite à trouver un moyen de ramener ces problèmes posés sur un domaine non borné (les frontières des défauts) à la résolution de problèmes posés en domaine borné. En milieu périodique, c'est une nouvelle fois la transformée de Floquet-Bloch qui va nous permettre cette réduction. Cette méthode est particulièrement délicate à décrire (en particulier pour les problèmes d'évolution), et va nécessiter l'introduction d'un important volume de notation (probablement plus encore que pour la méthode mixte LS-DtN, ce qui n'est pas peu dire). Nous conseillons à ce sujet au lecteur de ne lire l'extension de cette méthode aux problèmes d'évolution qu'en ayant bien en tête le cas du régime harmonique et le chapitre 5, et nous prévenons qu'il s'agit d'une annexe particulièrement technique, qui va utiliser en détail l'ensemble des résultats de l'annexe A.

B.1 Le cas harmonique

Nous allons considérer la même situation qu'au chapitre 2 avec un seul défaut, telle qu'illustrée sur la figure B.1. Rappelons que le plan $\mathbb{R}^2$ peut être découpé en trois régions :

. $\Omega^- = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \middle| \ x < a_-\right\}$

. $\Omega^+ = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \middle| \ x > a_+\right\}$

. $\Omega_{int} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \middle| \ a_- < x < a_+\right\}$

On notera Ω_0 l'ouvert $]a_-, a_+[\times]b_-, b_+[\subset \Omega_{int}$, contenant les perturbations bornées (voir figure 2.1), où $b_- = -M^- L$ et $b_+ = M^+ L$, $(M^-, M^+) \in \mathbb{N}^2$. En particulier, on supposera que $supp\ f \subset \Omega_0$. Quitte à translater le domaine, nous pourrons toujours supposer que $M^- = 0$. $\Omega^\pm$ sont deux sous-domaines périodiques infinis, de périodes $L_x^\pm$ dans la direction x, et possédant la même période L dans la direction y et qui sont par conséquent de la forme :

$$\Omega^\pm = \bigcup_{i=1}^{+\infty} \bigcup_{j=-\infty}^{+\infty} \mathcal{C}_{ij}^\pm \qquad \mathcal{C}_{ij}^\pm = \{\mathcal{C}^\pm \pm ((i-1)L_x^\pm, (j-1)L)\}$$

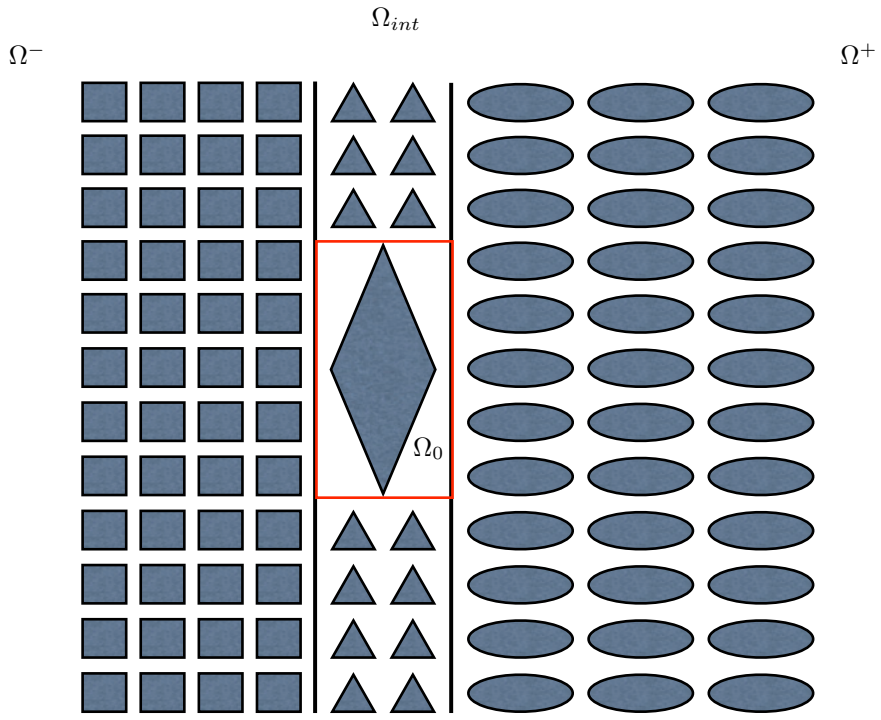


FIGURE B.1 – Exemple de configuration

où les cellules de périodicité de référence sont :

$$\mathcal{C}^{\pm} = \left\{(x,y) \;\middle|\; \pm a_{\pm} \leq \pm x \leq \pm a_{\pm} \pm L_x^{\pm}, \quad 0 \leq y \leq L\right\}$$

$\Gamma_{int} = \partial\Omega_{int}$, et $\Gamma^{\pm} = \partial\Omega_{int} \cap \partial\Omega^{\pm}$, Γ^+ et Γ^- étant tous deux isomorphes à $\mathbb{R}$. La fonction $\rho \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$ est "doublement périodique" à l'extérieur de Ω_{int}, i.e il existe deux fonctions $\rho^+ \in L^\infty(\Omega^+)$ et $\rho^- \in L^\infty(\Omega^-)$ telles que :

$$\rho^+(x + pL_x^+, y \pm qL) = \rho^+(x,y) \text{ dans } \Omega^+, \quad \forall\, (p,q) \in \mathbb{N}^2, \quad \rho = \rho^+ \text{ dans } \Omega^+$$
$$\rho^-(x - pL_x^-, y \pm qL) = \rho^-(x,y) \text{ dans } \Omega^-, \quad \forall\, (p,q) \in \mathbb{N}^2, \quad \rho = \rho^- \text{ dans } \Omega^-$$

A l'intérieur de Ω_{int}, ρ est périodique dans la direction y avec la même période L, à l'extérieur de Ω_0, i.e il existe une fonction périodique $\rho_{int} \in L^\infty(\Omega_{int})$ telle que :

$$\rho_{int}(x, y + L) = \rho_{int}(x,y) \text{ dans } \Omega_{int}$$

et $\rho = \rho_{int}$ dans $\Omega_{int} \setminus \Omega_0$. Sous ces hypothèses, nous cherchons encore une fois à résoudre : trouver $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$ telle que :

$$-\Delta u - (\omega^2 + i\varepsilon\omega)\rho u = f \text{ dans } \mathbb{R}^2 \tag{2.1}$$

B.1.1 Principe de l'algorithme de décomposition de domaine

Nous allons maintenant expliquer le principe général qui gouverne notre méthode de décomposition de domaine. Nous avons été fortement inspirés par [69], mais nous utiliserons une technique différente pour calculer les diverses quantités impliquées par la formulation qui va suivre.

Nous souhaitons caractériser la restriction de la solution de (2.1) à chacun des sous-domaines Ω^+,

Ω^- et Ω_{int}. Pour ce faire, nous aurons besoin des traces sur les deux composantes connexes Γ^+ et Γ^- de $\partial\Omega_{int}$, i.e :

$$\varphi^\pm = u^\pm_{|_{\Gamma^\pm}}$$

avec :

$$\Gamma^\pm = \{a_\pm\} \times \mathbb{R}$$

Nous identifierons toujours une donnée φ sur $\partial\Omega_{int}$ au vecteur de ses restrictions $(\varphi|_{\Gamma^-}, \varphi|_{\Gamma^+})$. Alors, au dehors de Ω_{int}, les restrictions de u à Ω^+ et Ω^-, notées $u_+(\varphi^+)$ and $u_-(\varphi^-)$, seront solution de :

$$\left|\begin{array}{ll} -\Delta u_\pm(\varphi^\pm) - (\omega^2 + i\varepsilon\omega)\rho^\pm u_\pm(\varphi^\pm) = 0 & \text{dans } \Omega^\pm \\ u_\pm(\varphi^\pm) = \varphi^\pm & \text{sur } \Gamma^\pm \end{array}\right. \tag{B.1}$$

qui sont des problèmes aux limites non-homogènes posés sur des demi-plan périodiques. À l'intérieur de Ω_{int}, la restriction u_{int} de u est solution d'un problème plus complexe :

$$\left|\begin{array}{ll} -\Delta u_{int}(\varphi^-, \varphi^+) - (\omega^2 + i\varepsilon\omega)\rho u_{int}(\varphi^-, \varphi^+) = f & \text{dans } \Omega_{int} \\ u_{int}(\varphi^-, \varphi^+) = \varphi^\pm & \text{sur } \Gamma^\pm \end{array}\right. \tag{B.2}$$

Supposons un instant que nous sachions résoudre chacun de ces trois problèmes, pour tout couple de données (φ^-, φ^+). Si l'on souhaite que les solutions de (B.1) et (B.2) associées à (φ^-, φ^+), soient les restrictions de la solution de (2.1) à leurs domaines de définition respectifs, nous savons (cf chapitre 1) qu'il suffit que ces solutions se raccordent en dérivée normale (comme elles se raccordent en trace par construction). En d'autres termes, il suffit d'assurer que :

$$\begin{aligned} \partial_\nu u_{int}(\varphi^-, \varphi^+)|_{\Gamma^+} &= \partial_\nu u_+(\varphi^+)|_{\Gamma^+} \\ \partial_\nu u_{int}(\varphi^-, \varphi^+)|_{\Gamma^-} &= \partial_\nu u_-(\varphi^-)|_{\Gamma^-} \end{aligned} \tag{B.3}$$

pour obtenir la solution de (2.1) dans chacun des sous-domaines considérés. La méthode de décomposition de domaine se résume alors comme suit :

. Pour tout $\varphi^\pm$, on construit les opérateurs :

$$\begin{array}{ll} \varphi^\pm \longmapsto \partial_\nu u_{int}(\varphi^-, \varphi^+)|_{\Gamma^+} & \varphi^\pm \longmapsto \partial_\nu u_{int}(\varphi^-, \varphi^+)|_{\Gamma^-} \\ \varphi^+ \longmapsto \partial_\nu u_+(\varphi^+)|_{\Gamma^+} & \varphi^- \longmapsto \partial_\nu u_-(\varphi^-)|_{\Gamma^-} \end{array}$$

. On cherche $\varphi^\pm$ tels que (B.3) soit satisfaite.

. On résout (B.1) et (B.2) pour ce couple de données particulier.

Cette formulation pose bien entendu la question de savoir si (B.3) suffit à déterminer complètement le couple (φ^-, φ^+). Le lecteur remarquera sans doute que le problème de transmission (B.3), ainsi que les trois autres problèmes impliqués dans la formulation ci-dessus, sont toujours posés en domaine non borné. Cependant, nous pouvons d'ores et déjà remarquer que le problème intérieur posé dans Ω_{int} ne diffère des problèmes de guide traités au chapitre 2 par la méthode de [37], que par ces conditions aux limites non homogènes, qui ne respectent pas la périodicité dans la direction y, et qui sont les inconnues pour le problème de transmission. Sans ces données aux limites, nous savons comment ramener le problème à Ω_0, ce qui signifie que pour ce problème intérieur également, le caractère non borné provient des données aux limites $\varphi^\pm$. Par conséquent, c'est pour ces deux quantités que nous devons en priorité développer une méthode de réduction à un domaine borné.

La périodicité dans la direction y sous-jacente au problème nous incite à utiliser la TFB dans la direction y. Nous notons, pour presque tout $\xi \in [0, 2\pi/L]$:

$$\hat{\varphi}^{\pm}(\cdot, \xi) = \mathcal{F}(\varphi^{\pm}(\cdot))(\cdot, \xi)$$

Par définition de la TFB, $\hat{\varphi}^{\pm}(\cdot, \xi)$ est une fonction de $\mathbb{K} = [0, L] \times [0, 2\pi/L]$, domaine borné, tandis que $\varphi^{\pm}(\cdot)$ est une fonction définie sur $\mathbb{R}$, non borné, i.e :

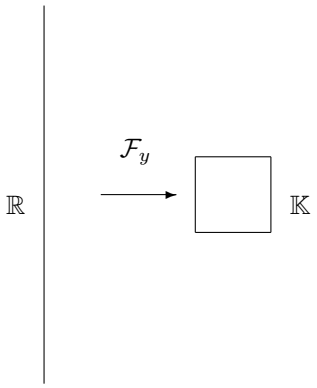


FIGURE B.2 – Visualisation de l'effet géométrique de la TFB

Nous voyons que nous pouvons trouver simplement des équivalents bornés aux $\varphi^{\pm}(\cdot)$. Ceci devrait suffire à faire disparaître le caractère non borné du problème posé sur Ω_{int} (ce que nous confimerons dans la suite). Nous pouvons également appliquer la TFB aux conditions de transmission. Remarquons pour cela que :

$$\begin{aligned} \partial_\nu u_{int}(\varphi^-, \varphi^+)|_{\Gamma^+} &= \partial_\nu u_+(\varphi^+)|_{\Gamma^+} \\ \partial_\nu u_{int}(\varphi^-, \varphi^+)|_{\Gamma^-} &= \partial_\nu u_-(\varphi^-)|_{\Gamma^-} \end{aligned} \tag{B.3}$$

est équivalent à, pour tout $\psi \in H^{1/2}(\mathbb{R})^2$:

$$\begin{aligned} < \partial_\nu u_{int}(\varphi^-, \varphi^+)|_{\Gamma^+}, \psi|_{\Gamma^+} > &= < \partial_\nu u_+(\varphi^+)|_{\Gamma^+}, \psi|_{\Gamma^+} > \\ < \partial_\nu u_{int}(\varphi^-, \varphi^+)|_{\Gamma^-}, \psi|_{\Gamma^-} > &= < \partial_\nu u_-(\varphi^-)|_{\Gamma^-}, \psi|_{\Gamma^-} > \end{aligned}$$

si $< \text{cot}, \cdot >$ désigne le produit de dualité entre $H^{1/2}(\mathbb{R})$ et $H^{-1/2}(\mathbb{R})$. Puis, nous pouvons écrire pour chacune de ces quantités :

$$< \partial_\nu u_{int}(\varphi)|_{\Gamma^+}, \psi|_{\Gamma^+} > + < \partial_\nu u_{int}(\varphi)|_{\Gamma^-}, \psi|_{\Gamma^-} >$$

$$= (-\Delta u_{int}(\varphi), E\psi)_{L^2(\Omega_{int})} + (\nabla u_{int}(\varphi), \nabla E\psi)_{L^2(\Omega_{int})}$$

On utilise alors l'identité de Parseval, et la commutativité de la TFB avec les opérateurs différentiels sur les $H^m(\Omega_{int})$:

$$(-\Delta u_{int}(\varphi), E\psi)_{L^2(\Omega_{int})} + (\nabla u_{int}(\varphi), \nabla E\psi)_{L^2(\Omega_{int})}$$

$$= (-\Delta \mathcal{F} u_{int}(\varphi), \mathcal{F}E\psi)_{L^2(\Omega_{int})} + (\nabla \mathcal{F} u_{int}(\varphi), \nabla \mathcal{F}E\psi)_{L^2(]-a_-, a_+[\times\mathbb{K})}$$

La formule de Green sur les espaces quasi-périodiques (cf lemme A.3), nous apprend alors que :

$$\int_0^{2\pi/L} < \partial_\nu \mathcal{F} u_{int}(\varphi)|_{\Gamma^+}, \mathcal{F}\psi|_{\Gamma^+} > d\xi + < \partial_\nu \mathcal{F} u_{int}(\varphi)|_{\Gamma^-}, \mathcal{F}\psi|_{\Gamma^-} > d\xi$$

$$= (-\Delta \mathcal{F} u_{int}(\varphi), \mathcal{F} E \psi)_{L^2(\Omega_{int})} + (\nabla \mathcal{F} u_{int}(\varphi), \nabla \mathcal{F} E \psi)_{L^2(]-a_-,a_+[\times\mathbb{K})}$$

ce qui implique au final que, la TFB commutant avec les opérateurs de trace en vertu du lemme A.4 :

$$< \partial_\nu u_{int}(\varphi)|_{\Gamma^+}, \psi|_{\Gamma^+} > + < \partial_\nu u_{int}(\varphi)|_{\Gamma^-}, \psi|_{\Gamma^-} >$$

$$= \int_0^{2\pi/L} < \hat{\Lambda}^{int,+}\left(\hat{\varphi}^-, \hat{\varphi}^+\right)(\cdot,\xi), \mathcal{F}\psi(\cdot,\xi)|_{x=a_+} > d\xi + < \hat{\Lambda}^{int,-}\left(\hat{\varphi}^-, \hat{\varphi}^+\right)(\cdot,\xi), \mathcal{F}\psi(\cdot,\xi)|_{x=-a_-} > d\xi$$

pour tout ψ, si l'on définit :

$$\hat{\Lambda}^{int,+}\left(\hat{\varphi}^-, \hat{\varphi}^+\right)(\cdot,\xi) = \mathcal{F}\left(\partial_\nu u_{int}(\mathcal{F}^{-1}\hat{\varphi}^-, \mathcal{F}^{-1}\hat{\varphi}^+)|_{\Gamma^+}\right)(\cdot,\xi)$$

$$\hat{\Lambda}^{int,-}\left(\hat{\varphi}^-, \hat{\varphi}^+\right)(\cdot,\xi) = \mathcal{F}\left(\partial_\nu u_{int}(\mathcal{F}^{-1}\hat{\varphi}^-, \mathcal{F}^{-1}\hat{\varphi}^+)|_{\Gamma^-}\right)(\cdot,\xi)$$

On en déduit, en prenant ψ nul sur l'un des $\Gamma^\pm$ que, pour tout $\hat{\psi} \in L^2(0, 2\pi/L, H^{1/2}_\xi(]0, L[))$:

$$< \partial_\nu u_{int}(\varphi)|_{\Gamma^\pm}, \mathcal{F}^{-1}\hat{\psi}|_{\Gamma^\pm} > = \int_0^{2\pi/L} < \hat{\Lambda}^{int,\pm}(\hat{\varphi})(\cdot,\xi), \hat{\psi}(\cdot,\xi)|_{x=\pm a_\pm} > d\xi$$

On montre de même, que si l'on définit :

$$\hat{\Lambda}^{e,\pm}(\hat{\varphi}^\pm)(\cdot,\xi) = -\mathcal{F}\left(\partial_\nu u_\pm(\mathcal{F}^{-1}\hat{\varphi}^\pm)|_{\Gamma^\pm}\right)(\cdot,\xi)$$

alors pour tout $\hat{\psi} \in L^2(0, 2\pi/L, H^{1/2}_\xi(]0, L[))$:

$$< \partial_\nu u_\pm(\varphi^\pm)|_{\Gamma^\pm}, \psi|_{\Gamma^+}, \mathcal{F}^{-1}\hat{\psi}|_{\Gamma^\pm} > = -\int_0^{2\pi/L} < \hat{\Lambda}^{e,\pm}\left(\hat{\varphi}^\pm\right)(\cdot,\xi), \hat{\psi}(\cdot,\xi)|_{x=\pm a_\pm} > d\xi$$

Alors les conditions de transmission se réécrivent en Floquet :

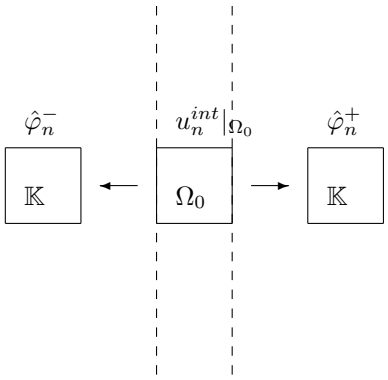
$$\left|\begin{array}{l} \displaystyle\int_0^{2\pi/L} < \hat{\Lambda}^{int,+}(\hat{\varphi})(\cdot,\xi), \hat{\psi}(\cdot,\xi)|_{x=a_+} > d\xi + < \hat{\Lambda}^{e,+}\left(\hat{\varphi}^+\right)(\cdot,\xi), \hat{\psi}(\cdot,\xi)|_{x=a_+} > d\xi = 0 \\ \displaystyle\int_0^{2\pi/L} < \hat{\Lambda}^{int,-}(\hat{\varphi})(\cdot,\xi), \hat{\psi}(\cdot,\xi)|_{x=-a_-} > d\xi + < \hat{\Lambda}^{e,+}\left(\hat{\varphi}^-\right)(\cdot,\xi), \hat{\psi}(\cdot,\xi)|_{x=-a_-} > d\xi = 0 \end{array}\right. \tag{B.4}$$

ce qui implique en particulier (et l'on voit sans doute mieux sur ces formules quelles sont les quantités qu'il nous faut apprendre à calculer) pour presque tout ξ :

$$\hat{\Lambda}^{int,+}\left(\hat{\varphi}^-, \hat{\varphi}^+\right)(\cdot,\xi) + \hat{\Lambda}^{e,+}\hat{\varphi}^+(\cdot,\xi) = 0$$

$$\hat{\Lambda}^{int,-}\left(\hat{\varphi}^-, \hat{\varphi}^+\right)(\cdot,\xi) + \hat{\Lambda}^{e,-}\hat{\varphi}^-(\cdot,\xi) = 0$$

Nous obtenons des équations en termes des inconnues définies sur $\mathbb{K}$. Bien entendu, l'un de nos buts sera de tenter d'exprimer ces opérateurs directement à partir des $\{\hat{\varphi}^\pm\}$. Si nous parvenons à faire tout ceci, on comprend que le problème se réduit à déterminer $(u^{int}|_{\Omega_0}, \hat{\varphi}^-, \hat{\varphi}^+)$, ce qui correspond à résoudre un problème posé sur le domaine borné $\Omega_0 \times \mathbb{K} \times \mathbb{K}$:



B.1.2 Résolution des problèmes de demi-plan

Nous commençons par expliquer comment ramener la résolution des deux problèmes de demi-guide (et donc des opérateurs $\Lambda^{e,\pm}$) à des domaines bornés. Comme nous l'avons déjà constaté à plusieurs reprises, nous avons bien évidemment :

Théorème B.1. *La transformée de Floquet-Bloch $\hat{u}_\pm(\hat{\varphi}^\pm)$ de $u_\pm(\varphi^\pm)$ est l'unique élément de $L^2(B_0^\pm \times [0, 2\pi/L])$ (si $B_0^+ =]a_+, +\infty[\times]0, L[$ et $B_0^- =]-\infty, a_-[\times]0, L[$) qui pour presque tout $\xi \in [0, 2\pi/L]$ soit solution dans $H^1_\xi(B_0^\pm)$ de :*

$$\left|\begin{array}{ll} -\Delta\hat{u}_\pm(\hat{\varphi}^\pm) - (\omega^2 + i\varepsilon\omega)\rho^\pm\hat{u}_\pm(\hat{\varphi}^\pm) = 0 & \textit{dans } \Omega^\pm \\ \partial_y\hat{u}_\pm(\hat{\varphi}^\pm)_{|_{y=L}} = e^{i\xi L}\partial_y\hat{u}_\pm(\hat{\varphi}^\pm)_{|_{y=0}} & \\ \hat{u}_\pm(\hat{\varphi}^\pm) = \hat{\varphi}^\pm & \textit{sur } \Gamma_0^\pm \end{array}\right. \tag{B.5}$$

si $\hat{\varphi}^\pm = \mathcal{F}\varphi^\pm$.

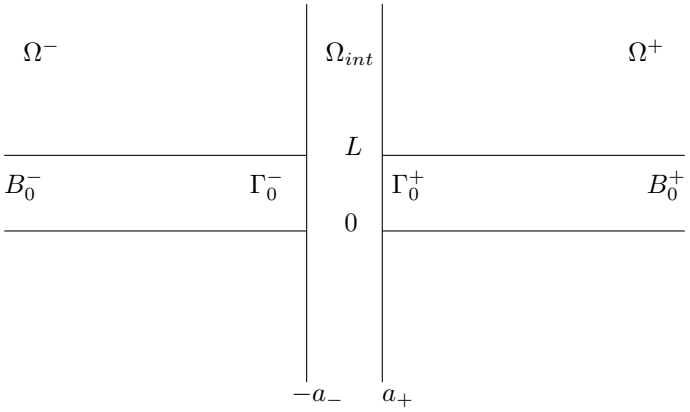


Figure B.3 – Notations utilisées pour la TFB des problèmes de demi-plan

En d'autres termes, la TFB des problèmes de demi-plan est solution de problèmes de demi-guide périodiques, que nous savons résoudre (cf chapitre 2 ou [37]).

Construction des opérateurs DtN de demi-plan

Rappelons que pour appliquer la méthode de décomposition de domaine, nous cherchons à calculer les opérateurs :

$$\varphi^\pm \longmapsto \partial_\nu u_+(\varphi^+)|_{\Gamma^+} \quad \varphi^\pm \longmapsto \partial_\nu u_-(\varphi^-)|_{\Gamma^-}$$

Mais nous avons bien évidemment :

$$u_\pm(\varphi^\pm) = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}u_\pm(\varphi^\pm)) = \mathcal{F}^{-1}(\hat{u}_\pm(\hat{\varphi}^\pm))$$

d'après le théorème B.1. Par conséquent, nous avons, en vertu du lemme A.4 :

$$\partial_\nu u_\pm(\varphi^\pm)_{|_{\Gamma^\pm}} = \mathcal{F}^{-1}(\Lambda^\pm(\cdot)\mathcal{F}\varphi^\pm)(\cdot, \xi) \tag{B.6}$$

par définition des $\Lambda^\pm(\xi)$ (voir chapitre 2), qui sont les opérateurs DtN de demi-guide périodique. En particulier, ceci implique que :

$$\Lambda^\pm(\cdot) : L^2(0, 2\pi/L, H^{1/2}_\xi(]0, L[)) \longrightarrow L^2(0, 2\pi/L, H^{1/2}_\xi(]0, L[)')$$

Alors nous savons déjà comment calculer deux des quatres opérateurs que nous recherchions, avec une expression répondant aux exigences que nous nous étions fixées. En appliquant la TFB à l'expression ci-dessus, nous avons en effet montré que :

$$\hat{\Lambda}^{e,\pm}(\hat{\varphi}^{\pm})(\cdot,\xi) = \Lambda^{\pm}(\xi)\hat{\varphi}^{\pm}(\cdot,\xi) \tag{B.7}$$

ce qui signifie de plus que nous sommes parvenus à en trouver une expression ne faisant pas intervenir de TFB inverse, ainsi que nous le souhaitions. Il ne nous reste plus maintenant qu'à trouver une manière de traiter le problème posé sur Ω_{int}.

B.1.3 Résolution du problème intérieur

Nous allons noter simplement φ définie sur Γ_{int} un couple $(\varphi_n^-, \varphi_n^+)$ définit sur $\Gamma^- \times \Gamma^+$. Rappelons nous que le problème intérieur était défini par :

$$\left|\begin{array}{ll} -\Delta u_{int}(\varphi) - (\omega^2 + i\varepsilon\omega)\rho u_{int}(\varphi) = f & \text{dans } \Omega_{int} \\ u_{int}(\varphi) = \varphi & \text{sur } \Gamma_{int} \end{array}\right. \tag{B.2}$$

Rappelons que le principe qui sous-tend l'analyse que nous entendons mener est le suivant : le

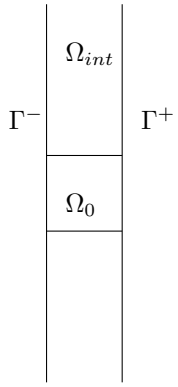


Figure B.4 – Configuration intérieure

problème ci-dessus peut se voir comme un problème de guide périodique localement perturbé avec conditions de Dirichlet non-homogènes. Or, nous savons traiter, par la méthode de [37], de tels problèmes, mais pour des données homogènes (et plus généralement pour toutes données respectant la périodicité). Aussi, nous allons essayer de décomposer la solution du problème intérieur en la somme du même problème mais avec données homogènes, plus un problème prenant en compte les données inhomogènes. L'inévitable couplage entre ces deux problèmes se fera au travers de la source pour le problème avec données homogènes, ce que nous saurons traiter via la méthode de [37].

Décomposition du problème intérieur

En l'absence de source et de perturbation sur les coefficients, le problème que nous aurions à considérer serait tout simplement le problème intérieur non perturbé suivant (la notation US signifie "unperturbed strip", soit guide non perturbé en français) :

$$\left|\begin{array}{ll} -\Delta u_{US}(\varphi) - (\omega^2 + i\varepsilon\omega)\rho_{int} u_{US}(\varphi) = 0 & \text{dans } \Omega_{int} \\ u_{US}(\varphi) = \varphi & \text{sur } \Gamma_{int} \end{array}\right. \tag{B.8}$$

On pose alors $u_P(\varphi) = u_{int}(\varphi) - u_{US}(\varphi)$, la partie de la solution intérieure due à toutes les pertubations (d'où l'indice P). Par définition, elle satisfait l'équation :

$$\begin{aligned} -\Delta u_P(\varphi) - (\omega^2 + i\varepsilon\omega)\rho u_P(\varphi) &= -\Delta(u_{int}(\varphi) - u_{US}(\varphi)) - (\omega^2 + i\varepsilon\omega)\rho(u_{int}(\varphi) - u_{US}(\varphi)) \\ &= f + (\rho_{int} - \rho)u_{US}(\varphi) \end{aligned}$$

Sur la frontière Γ_{int}, nous avons par construction $u_P(\varphi) = 0$. Comme le terme source

$$f - (\omega^2 + i\varepsilon\omega)(\rho_{int} - \rho)u_{US}(\varphi)$$

est supporté dans Ω_0, nous avons clairement un problème de guide périodique localement perturbé, avec conditions de Dirichlet homogènes, ce que nous savons résoudre, pourvu que nous puissions calculer u_{US}^n, et nous avons bien décomposé la solution comme annoncé.

Résolution du problème aux limites non pertubé

Nous cherchons à déterminer $u_{US}(\varphi)$, en réduisant cette détermination à un domaine borné. Comme $u_{US}(\varphi)$ est solution d'un problème avec le coefficient ρ_{int}, périodique dans la direction y, il est naturel de lui appliquer la TFB. Nous déduisons comme d'habitude que :

Théorème B.2. *La transformée de Floquet-Bloch $\hat{u}_{US}(\xi)(\hat{\varphi})$ de $u_{US}(\varphi)$ est l'unique élément de $L^2(\mathcal{C}_{int} \times [0, 2\pi/L])$ qui pour presque tout $\xi \in [0, 2\pi/L]$ soit solution dans $H^1_\xi(\mathcal{C}_{int})$ de :*

$$\left| \begin{array}{ll} -\Delta\hat{u}_{US}(\xi)(\hat{\varphi}) - (\omega^2 + i\varepsilon\omega)\rho_{int}\hat{u}_{US}(\xi)(\hat{\varphi}) = 0 & \text{dans } \mathcal{C}_{int} \\ \partial_y\hat{u}_{US}(\xi)(\hat{\varphi})_{|_{y=L}} = e^{i\xi L}\partial_y\hat{u}_{US}(\xi)(\hat{\varphi})_{|_{y=0}} & \\ \hat{u}_{US}(\xi)(\hat{\varphi}) = \hat{\varphi} & \text{on } \Gamma^+_{\mathcal{C}_{int}} \times \Gamma^-_{\mathcal{C}_{int}} \end{array} \right. \tag{B.9}$$

si $\hat{\varphi}^\pm = \mathcal{F}\varphi^\pm$.

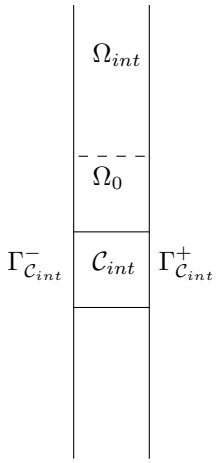
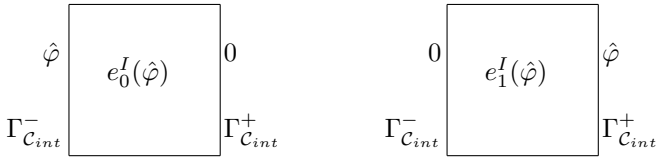


Figure B.5 – Notations pour la TFB du problème intérieur non perturbé

Afin de séparer la dépendance en chacun des deux "morceaux" de la donnée au bord, nous introduisons, pour presque tout ξ, et pour tout $\hat{\varphi} \in H^{1/2}_\xi(]0, L[)$, les problèmes de cellule intérieurs posés dans $H^1_\xi(\mathcal{C}_{int})$:



$$\left|\begin{array}{ll} -\Delta e_0^I(\xi)(\hat{\varphi}) - (\omega^2 + i\varepsilon\omega)\rho_{int} e_0^I(\hat{\varphi})(\hat{\varphi}) = 0 & \text{dans } \mathcal{C}_{int} \\ \partial_y e_0^I(\xi)(\hat{\varphi})_{|_{y=L}} = e^{i\xi L}\partial_y e_0^I(\xi)(\hat{\varphi})_{|_{y=0}} & \\ e_0^I(\xi)(\hat{\varphi}) = \hat{\varphi} & \text{on } \Gamma^-_{\mathcal{C}_{int}} \\ e_0^I(\xi)(\hat{\varphi}) = 0 & \text{on } \Gamma^+_{\mathcal{C}_{int}} \end{array}\right. \tag{B.10}$$

$$\left|\begin{array}{ll} -\Delta e_1^I(\xi)(\hat{\varphi}) - (\omega^2 + i\varepsilon\omega)\rho_{int} e_1^I(\xi)(\hat{\varphi})(\hat{\varphi}) = 0 & \text{dans } \mathcal{C}_{int} \\ \partial_y e_1^I(\xi)(\hat{\varphi})_{|_{y=L}} = e^{i\xi L}\partial_y e_1^I(\xi)(\hat{\varphi})_{|_{y=0}} & \\ e_1^I(\xi)(\hat{\varphi}) = 0 & \text{on } \Gamma^-_{\mathcal{C}_{int}} \\ e_1^I(\xi)(\hat{\varphi}) = \hat{\varphi} & \text{on } \Gamma^+_{\mathcal{C}_{int}} \end{array}\right. \tag{B.11}$$

Alors par unicité et linéarité, on voit sans peine que pour tout $\varphi = (\varphi^-, \varphi^+) \in H_\xi^{1/2}(]0,L[) \times H_\xi^{1/2}(]0,L[)$:

$$\hat{u}_{US}(\xi)(\hat{\varphi}) = e_0^I(\xi)(\hat{\varphi}^-) + e_1^I(\xi)(\hat{\varphi}^+) \tag{B.12}$$

Afin de construire les opérateurs intervenant dans (B.3), nous avons besoin de pouvoir calculer $\partial_\nu u_{int}(\varphi)|_{\Gamma_{int}}$. Aussi, nous devons être capables de calculer $\partial_\nu u_{US}|_{\Gamma_{int}}$. Définissons :

$$\begin{array}{rcl} \Lambda^I : H^{1/2}(\Gamma_{int}) & \longrightarrow & H^{-1/2}(\Gamma_{int}) \\ \varphi & \longmapsto & (\partial_\nu u_{US}(\varphi)|_{\Gamma^-}, \partial_\nu u_{US}(\varphi)|_{\Gamma^+}) \end{array}$$

En utilisant la TFB nous avons :

$$\partial_\nu u_{US}(\varphi)|_{\Gamma^\pm} = \mathcal{F}^{-1}\hat{u}_{US}(\hat{\varphi})|_{\Gamma^\pm_{\mathcal{C}_{int}}}$$

Nous posons :

$$\begin{array}{rcl} \hat{\Lambda}^I(\xi) : H_\xi^{1/2}(]0,L[) \times H_\xi^{1/2}(]0,L[) & \longrightarrow & H_\xi^{1/2}(]0,L[)' \times H_\xi^{1/2}(]0,L[)' \\ \varphi & \longmapsto & \left(\partial\nu\hat{u}_{US}(\xi)(\hat{\varphi})|_{\Gamma^-_{\mathcal{C}_{int}}}, \partial\nu\hat{u}_{US}(\xi)(\hat{\varphi})|_{\Gamma^+_{\mathcal{C}_{int}}}\right) \end{array}$$

alors :

$$\partial_\nu u_{US}(\varphi)|_{\Gamma^\pm} = \mathcal{F}^{-1}\hat{\Lambda}^I\hat{\varphi}|_{\Gamma^\pm_{\mathcal{C}_{int}}}$$

ce qui n'est rien d'autre que :

$$\Lambda^I\varphi = \mathcal{F}^{-1}\left(\hat{\Lambda}^I\mathcal{F}\varphi\right)$$

et implique en particulier que :

$$\hat{\Lambda}^I(\cdot) : L^2(0, 2\pi/L, H_\xi^{1/2}(]0,L[) \times H_\xi^{1/2}(]0,L[)) \longrightarrow L^2(0, 2\pi/L, H_\xi^{1/2}(]0,L[)' \times H_\xi^{1/2}(]0,L[)')$$

Ne reste plus qu'à calculer $\hat{\Lambda}^I$. Introduisons :

$$\begin{array}{ccc} T^I_{00}(\xi) : H^{1/2}_\xi(]0,L[) & \longrightarrow H^{1/2}_\xi(]0,L[)' & \qquad T^I_{01}(\xi) : H^{1/2}_\xi(]0,L[) \longrightarrow H^{1/2}_\xi(]0,L[)' \\ \varphi & \longmapsto \partial_\nu e^I_0(\xi)(\varphi)|_{\Gamma^-_{\mathcal{C}_{int}}} & \qquad \varphi \longmapsto \partial_\nu e^I_0(\xi)(\varphi)|_{\Gamma^+_{\mathcal{C}_{int}}} \\ T^I_{10}(\xi) : H^{1/2}_\xi(]0,L[) & \longrightarrow H^{1/2}_\xi(]0,L[)' & \qquad T^I_{11}(\xi) : H^{1/2}_\xi(]0,L[) \longrightarrow H^{1/2}_\xi(]0,L[)' \\ \varphi & \longmapsto \partial_\nu e^I_1(\xi)(\varphi)|_{\Gamma^-_{\mathcal{C}_{int}}} & \qquad \varphi \longmapsto \partial_\nu e^I_1(\xi)(\varphi)|_{\Gamma^+_{\mathcal{C}_{int}}} \end{array}$$

alors :

Théorème B.3. *Pour tout $\hat{\varphi} = (\hat{\varphi}^-, \hat{\varphi}^+) \in H^{1/2}_\xi(]0,L[) \times H^{1/2}_\xi(]0,L[)$:*

$$\hat{\Lambda}^I(\xi)\hat{\varphi} = (T^I_{00}\hat{\varphi}^- + T^I_{10}\hat{\varphi}^+, T^I_{01}\hat{\varphi}^- + T^I_{11}\hat{\varphi}^+) \tag{B.13}$$

Par conséquent, nous sommes capables de calculer toutes les quantités utiles pour le problème intérieur non perturbé, et ce avec les mêmes données en Floquet $\hat{\varphi} = (\hat{\varphi}^-, \hat{\varphi}^+)$ que nous avions utilisées pour les problèmes extérieurs, c'est-à-dire les données qui correspondent à une résolution en domaine borné.

Remarque B.1. *Lorsque nous avons défini u_{US}, nous avons implicitement choisi de reporter la perturbation dans u^P, séparant ainsi la dépendance en φ de la perturbation. Nous aurions a priori pu faire le choix de garder mélées la pertubation sur le coefficient ρ et cette dépendance. Mais la TFB n'aurait pas mené à un problème simple dans $\mathcal{C}_{int}$. Or, il est crucial de pouvoir effectuer cette TFB simplement, puisque nous devons ramener φ, qui vit sur les frontières non bornées de Ω_{int}, à sa TFB, qui elle est définie sur les frontières bornées de $\mathcal{C}_{int}$.*

Résolution du problème intérieur perturbé

Rappelons que le problème intérieur avec perturbation s'écrit :

$$\left| \begin{array}{ll} -\Delta u_P(\varphi) - (\omega^2 + i\varepsilon\omega)\rho u_P(\varphi) = f - (\omega^2 + i\varepsilon\omega)(\rho_{int} - \rho)u_{US}(\varphi) & \text{dans } \Omega_{int} \\ u_P(\varphi) = 0 & \text{on } \Gamma_{int} \end{array} \right. \tag{B.14}$$

Ce problème se réduit sans peine à Ω_0 en utilisant les opérateurs DtN pour les demi-guide Ω^+_{int} et

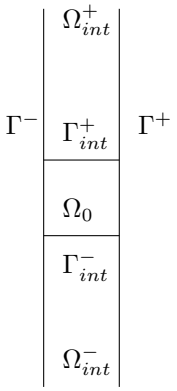


Figure B.6 – Configuration intérieure

Ω_{int}^- (voir figure B.6). Plus précisément, si l'on définit :

$$\left|\begin{array}{ll} -\Delta w^{\pm}(\varphi) - (\omega^2 + i\varepsilon\omega)\rho_{int} w^{\pm}(\varphi) = 0 & \text{dans } \Omega_{int}^{\pm} \\ w^{\pm}(\varphi) = \varphi & \text{sur } \Gamma_{int}^{\pm} \\ w^{\pm}(\varphi) = 0 & \text{sur } \Gamma_{int} = \Gamma^- \cup \Gamma^+ \end{array}\right. \tag{B.15}$$

qui se calculent avec la méthode de [37], les DtN associés sont donnés par :

$$\begin{array}{rcl} \Lambda_{int}^{\pm} : H_{00}^{1/2}(\Gamma_{int}^{\pm}) & \longrightarrow & H_{00}^{-1/2}(\Gamma_{int}^{\pm}) \\ \varphi & \longmapsto & \partial_\nu w^{\pm}(\varphi)|_{\Gamma_{int}^{\pm}} \end{array}$$

Alors, le problème (B.14) est équivalent à :

$$\left|\begin{array}{ll} -\Delta u_P(\varphi) - (\omega^2 + i\varepsilon\omega)\rho u_P(\varphi) = f - (\omega^2 + i\varepsilon\omega)(\rho_{int} - \rho)u_{US}(\varphi) & \text{dans } \Omega_0 \\ \partial\nu u_P(\varphi)|_{\Gamma_{int}^{\pm}} + \Lambda_{int}^{\pm} u_P(\varphi)|_{\Gamma_{int}^{\pm}} = 0 & \text{sur } \Gamma_{int}^{\pm} \\ u_P(\varphi) = 0 & \text{sur } \Gamma_{int} \cap \partial\Omega_0 \end{array}\right. \tag{B.16}$$

À ce stade, nous savons donc comment résoudre le problème intérieur perturbé, à condition de connaître φ. Aussi, il semble qu'il ne reste plus qu'à expliciter la dérivée normale de $u_P(\varphi)$ pour pouvoir écrire l'équation (B.3). Mais cette équation a φ pour inconnue, or nous n'avons pas explicité la dépendance de $u_P(\varphi)$ en cette quantité. C'est ce que nous nous proposons de faire maintenant. Nous allons voir qu'il s'agit d'une tâche relativement aisée. Nous avons :

$$\left|\begin{array}{ll} -\Delta u_P(\varphi) - (\omega^2 + i\varepsilon\omega)\rho u_P(\varphi) = f + (\rho_{int} - \rho)u_{US}(\varphi) & \text{dans } \Omega_{int} \\ u_P(\varphi) = 0 & \text{on } \Gamma_{int} \end{array}\right. \tag{B.14}$$

La dépendance en φ de $u_P(\varphi)$ provient donc uniquement du second membre en $(\rho_{int} - \rho)u_{US}(\varphi)$. Introduisons alors le problème :

$$\left|\begin{array}{ll} -\Delta B(\varphi) - (\omega^2 + i\varepsilon\omega)\rho B(\varphi) = -(\omega^2 + i\varepsilon\omega)(\rho_{int} - \rho)u_{US}(\varphi) & \text{dans } \Omega_{int} \\ B(\varphi) = 0 & \text{sur } \Gamma_{int} \end{array}\right. \tag{B.17}$$

ainsi que la différence entre $\widetilde{u}_P = u_P(\varphi) - B(\varphi)$, solution de :

$$\left|\begin{array}{ll} -\Delta \widetilde{u}_P - (\omega^2 + i\varepsilon\omega)\rho \widetilde{u}_P = f & \text{dans } \Omega_{int} \\ \widetilde{u}_P = 0 & \text{sur } \Gamma_{int} \end{array}\right. \tag{B.18}$$

qui ne dépend visiblement pas de φ. Alors ces deux problèmes étant encore des problèmes de guide localement perturbés, nous pouvons les réduire à des problèmes posés sur Ω_0 comme nous l'avons fait pour $u_P(\varphi)$, c'est-à-dire qu'ils sont respectivement équivalents à :

$$\left|\begin{array}{ll} -\Delta B(\varphi) - (\omega^2 + i\varepsilon\omega)\rho B(\varphi) = -(\omega^2 + i\varepsilon\omega)(\rho_{int} - \rho)u_{US}(\varphi) & \text{dans } \Omega_0 \\ \partial\nu B(\varphi)|_{\Gamma_{int}^{\pm}} + \Lambda_{int}^{\pm} B(\varphi)|_{\Gamma_{int}^{\pm}} = 0 & \text{sur } \Gamma_{int}^{\pm} \\ B(\varphi) = 0 & \text{sur } \Gamma_{int} \cap \partial\Omega_0 \end{array}\right. \tag{B.19}$$

et

$$\left|\begin{array}{ll} -\Delta \widetilde{u}_P - (\omega^2 + i\varepsilon\omega)\rho \widetilde{u}_P = f & \text{dans } \Omega_0 \\ \partial\nu \widetilde{u}_P|_{\Gamma_{int}^{\pm}} + \Lambda_{int}^{\pm} \widetilde{u}_P|_{\Gamma_{int}^{\pm}} = 0 & \text{sur } \Gamma_{int}^{\pm} \\ \widetilde{u}_P = 0 & \text{sur } \Gamma_{int} \cap \partial\Omega_0 \end{array}\right. \tag{B.20}$$

Cette fois, nous avons bien extrait toute la dépendance de $u_P(\varphi)$ en φ, et nous allons pouvoir calculer les derniers opérateurs intervenant dans l'équation B.3.

Notre but est maintenant de parvenir à calculer $\partial_\nu u_P(\varphi)|_{\Gamma_{int}}$. Bien sûr, nous allons séparer cette quantité en deux morceaux, $\partial_\nu \widetilde{u}_P|_{\Gamma_{int}}$ et $\partial_\nu B(\varphi)|_{\Gamma_{int}}$. Enfin, comme nous avons exprimé jusqu'ici toutes les quantités intervenant dans (B.3) dans l'espace de Floquet, nous allons essayer de faire de même ici, et en n'ayant recours, comme d'habitude, qu'à la résolution de problèmes posés en domaine bornés. Remarquons au préalable que les problèmes définissant $B(\varphi)$ et $\widetilde{u}_P$ étant formellement identiques (seule la source diffère), si nous trouvons une méthode pour calculer l'un, nous saurons calculer l'autre.

Afin de pouvoir exprimer l'ensemble des quantités qui nous intéressent en Floquet, remarquons qu'il est équivalent, la TFB définissant une bijection entre $H^1_\xi(\mathcal{C}_{int})$ et $H^1(\Omega_{int})$, ainsi qu'entre $H^{1/2}_\xi(]0,L[)^2$ et $H^{1/2}(\mathbb{R})^2$, de définir $B(\varphi)$ par :

$$\left|\begin{array}{ll} -\Delta B(\varphi) - (\omega^2 + i\varepsilon\omega)\rho B(\varphi) = -(\omega^2 + i\varepsilon\omega)(\rho_{int} - \rho)\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}(u_{US}(\varphi)) & \text{dans } \Omega_{int} \\ B(\varphi) = 0 & \text{sur } \Gamma_{int} \end{array}\right.$$

En vertu du théorème B.2, $\mathcal{F}(u_{US}(\varphi))(\cdot,\xi) = \hat{u}_{US}(\mathcal{F}\varphi)(\cdot,\xi) = \hat{u}_{US}(\hat{\varphi})(\cdot,\xi)$, aussi :

$$\left|\begin{array}{ll} -\Delta B(\varphi) - (\omega^2 + i\varepsilon\omega)\rho B(\varphi) = -(\omega^2 + i\varepsilon\omega)(\rho_{int} - \rho)\mathcal{F}^{-1}(\hat{u}_{US}(\hat{\varphi})) & \text{dans } \Omega_{int} \\ B(\varphi) = 0 & \text{sur } \Gamma_{int} \end{array}\right.$$

Or, le support de $(\rho_{int} - \rho)$ étant réduit à Ω_0, nous avons, pour tout $p \in [\![-M^-, M^+ - 1]\!]$:

$$(\rho_{int} - \rho)\mathcal{F}^{-1}(\hat{u}_{US}(\hat{\varphi}))|_{\Omega_0^p} = \sqrt{\frac{L}{2\pi}}(\rho_{int} - \rho)\int_0^{2\pi/L} \hat{u}_{US}(\hat{\varphi})(\cdot,\xi)e^{ip\xi L}d\xi$$

et $(\rho_{int} - \rho)\mathcal{F}^{-1}(\hat{u}_{US}(\hat{\varphi})) = 0$ au dehors de Ω_0. Nous introduisons :

$$\begin{array}{rcl} F_P : L^2(0, 2\pi/L, H^{1/2}_\xi(]0,L[)^2) & \longrightarrow & H^1(\Omega_0) \\ \hat{\varphi} & \longmapsto & F_P\hat{\varphi} \end{array}$$

où :

$$F_P\hat{\varphi}|_{\Omega_0^p} = -(\omega^2 + i\varepsilon\omega)\sqrt{\frac{L}{2\pi}}(\rho_{int} - \rho)\int_0^{2\pi/L} \hat{u}_{US}(\hat{\varphi})(\cdot,\xi)e^{ip\xi L}d\xi$$

et $F_P\hat{\varphi}|_{\Omega_{int}\setminus\Omega_0} = 0$. Nous poserons alors, avec un léger abus de notation :

$$\begin{array}{rcl} B : L^2(0, 2\pi/L, H^{1/2}_\xi(]0,L[)^2) & \longrightarrow & H^1(\Omega_{int}) \\ \hat{\varphi} & \longmapsto & B(\hat{\varphi}) \end{array}$$

où :

$$\left|\begin{array}{ll} -\Delta B(\hat{\varphi}) - (\omega^2 + i\varepsilon\omega)\rho B(\hat{\varphi}) = F_P\hat{\varphi} & \text{dans } \Omega_{int} \\ B(\hat{\varphi}) = 0 & \text{sur } \Gamma_{int} \end{array}\right. \tag{B.21}$$

et bien évidemment $B(\hat{\varphi}) = B(\varphi)$. Ce jeu de notation nous permet de définir B à partir de la TFB de φ de façon explicite. Nous introduisons (voir la figure B.7) :

. Les frontières hautes et basses de Ω_0, que nous avons déjà notées $\Gamma^\pm_{int} = \partial\Omega_0 \cap \{y = b_\pm\}$

. Nous découpons $\Gamma^{\pm} \cap \partial\Omega^{\pm}_{int}$ en sous-domaines :

$$\Gamma_j^{++} = \Gamma^+ \cap \{y \in [b_+ + (j-1)L, b_+ + jL]\}$$
$$\Gamma_j^{-+} = \Gamma^- \cap \{y \in [b_+ + (j-1)L, b_+ + jL]\}$$
$$\Gamma_j^{+-} = \Gamma^+ \cap \{y \in [b_- - (j-1)L, b_- - jL]\}$$
$$\Gamma_j^{--} = \Gamma^- \cap \{y \in [b_- - (j-1)L, b_- - jL]\}$$

. Nous introduisons les cellules de périodicité intérieures :

$$\mathcal{C}_j^{\pm} = \Omega^{\pm}_{int} \cap \{y \in [b_{\pm} \pm (j-1)L, b_{\pm} \pm jL\}$$

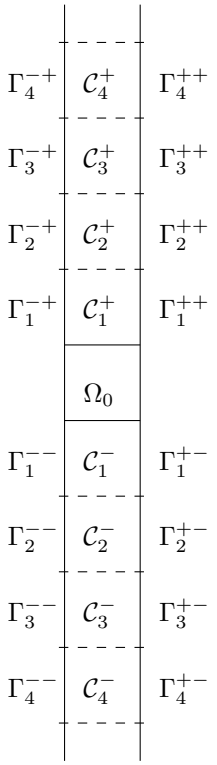


FIGURE B.7 – Configuration intérieure : détail des notations

Nous définissons :

$$\begin{array}{rcl} D_B^{\pm} : L^2(0, 2\pi/L, H_{\xi}^{1/2}(]0, L[)^2) & \longrightarrow & H^{1/2}([a_-, a_+]) \\ \hat{\varphi} & \longmapsto & B(\hat{\varphi})|_{\Gamma^{\pm}_{int}} \end{array}$$

Alors, nous savons que dans $\Omega^{\pm}_{int}$, nous avons :

$$B(\hat{\varphi})|_{\Omega^{\pm}_{int}} = w^{\pm}(D_B^{\pm}\hat{\varphi})$$

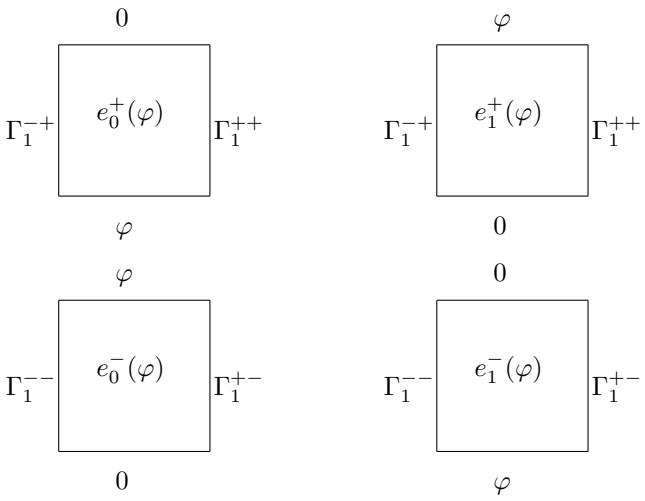
et par conséquent dans chaque cellule :

$$B(\hat{\varphi})|_{\mathcal{C}_j^{\pm}} = e_0^{\pm}((R^{\pm})^{j-1} D_B^{\pm}\hat{\varphi}) + e_1^{\pm}((R^{\pm})^j D_B^{\pm}\hat{\varphi})$$

si $R^{\pm}\varphi = w^{\pm}(\varphi)|_{\Gamma_1^{\pm}}$. De même, nous aurons :

$$\widetilde{u}_P|_{\mathcal{C}_j^{\pm}} = e_0^{\pm}((R^{\pm})^{j-1}\widetilde{u}_P|_{\Gamma_{int}^{\pm}}) + e_1^{\pm}((R^{\pm})^{j}\widetilde{u}_P|_{\Gamma_{int}^{\pm}})$$

Nous rappelons "visuellement" la définition des problèmes de cellule sur les figures suivantes.



Nous définissons alors les opérateurs de trace suivant, pour $i = 0, 1$:

$$\begin{aligned} N_i^{++} : H^{1/2}([a-, a_+]) &\longrightarrow H^{-1/2}([0, L]) \\ \varphi &\longmapsto \frac{\partial e_i^+(\varphi)}{\partial \nu}|_{\Gamma_1^{++}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_i^{-+} : H^{1/2}([a-, a_+]) &\longrightarrow H^{-1/2}([0, L]) \\ \varphi &\longmapsto \frac{\partial e_i^+(\varphi)}{\partial \nu}|_{\Gamma_1^{-+}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_i^{+-} : H^{1/2}([a-, a_+]) &\longrightarrow H^{-1/2}([0, L]) \\ \varphi &\longmapsto \frac{\partial e_i^-(\varphi)}{\partial \nu}|_{\Gamma_1^{+-}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_i^{--} : H^{1/2}([a-, a_+]) &\longrightarrow H^{-1/2}([0, L]) \\ \varphi &\longmapsto \frac{\partial e_i^-(\varphi)}{\partial \nu}|_{\Gamma_1^{--}} \end{aligned}$$

L'idée sous-tendant ces définitions est encore une fois le fait que nous n'allons pouvoir calculer les choses que localement dans Ω_0, et que nous devons malgré tout être capables de calculer les quantités qui nous intéressent. Alors ces opérateurs ne sont rien d'autre qu'une façon de réexprimer les traces normales partout où on le souhaite, au travers des problèmes posés en domaine borné que l'on peut résoudre en pratique. Intéressons nous maintenant à la TFB de $\partial_\nu B(\varphi)|_{\Gamma^{\pm}}$. Du lemme A.4, nous déduisons que :

$$\mathcal{F}\left(\partial_\nu B(\hat{\varphi})|_{\Gamma^{\pm}}\right)(\cdot, \xi) = \partial_\nu \left(\mathcal{F}B(\hat{\varphi})\right)|_{\Gamma_{\mathcal{C}_{int}}^{\pm}}(\cdot, \xi)$$

Alors, il nous suffit de calculer $\mathcal{F}B(\varphi)$ et de lui appliquer l'opérateur de trace. De même, nous aurons :

$$\mathcal{F}\left(\partial_\nu \widetilde{u}_P|_{\Gamma^\pm}\right)(\cdot,\xi) = \partial_\nu\left(\mathcal{F}\widetilde{u}_P\right)|_{\Gamma^\pm_{\mathcal{C}_{int}}}(\cdot,\xi)$$

Nous posons $M = \dfrac{b_+ - b_-}{L}$, et nous obtenons :

Lemme B.1. *Pour tout $\hat{\varphi} \in L^2(0, 2\pi/L, H^{1/2}_\xi(]0,L[)^2)$, la TFB de $B(\hat{\varphi})$ est donnée par :*

$$\begin{aligned}\mathcal{F}B(\hat{\varphi}) = &\sqrt{\frac{L}{2\pi}} e^{-i(M+1)\xi L}(E_0^+ + E_1^+R^+)(I_d - R^+e^{-i\xi L})^{-1}D_B^+\hat{\varphi} \\ &+\sqrt{\frac{L}{2\pi}}\sum_{j=1}^{M-1} B(\hat{\varphi})|_{\Omega_0\cap\{y\in[b_-+jL,(j+1)L]\}}e^{-ij\xi L} \\ &+\sqrt{\frac{L}{2\pi}} e^{i\xi L}(E_0^- + E_1^-R^-)(I_d - R^-e^{i\xi L})^{-1}D_B^-\hat{\varphi}\end{aligned} \tag{B.22}$$

où $E_i^\pm$ est l'opérateur qui à $\varphi \in H^{1/2}([a-,a_+])$ associe $e_i^\pm(\varphi)$. Celle de $\widetilde{u}_P$ est donnée par :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\widetilde{u}_P = &\sqrt{\frac{L}{2\pi}} e^{-i(M+1)\xi L}(E_0^+ + E_1^+R^+)(I_d - R^+e^{-i\xi L})^{-1}\widetilde{u}_P|_{\Gamma^+_{int}} \\ &+\sqrt{\frac{L}{2\pi}}\sum_{j=1}^{M-1} \widetilde{u}_P|_{\Omega_0\cap\{y\in[b_-+jL,(j+1)L]\}}e^{-ij\xi L} \\ &+\sqrt{\frac{L}{2\pi}} e^{i\xi L}(E_0^- + E_1^-R^-)(I_d - R^-e^{i\xi L})^{-1}D_B^-\widetilde{u}_P|_{\Gamma^-_{int}}\end{aligned} \tag{B.23}$$

Démonstration. Comme $B(\hat{\varphi})$ appartient à $H^1(\Omega_{int})$, nous savons en vertu du théorème A.9 que nous pouvons calculer $\mathcal{F}B(\hat{\varphi})$ à l'aide de la formule impliquant une somme infinie, qui convergera dans $L^2([0,2\pi/L], H^1_\xi(\mathcal{C}_{int}))$. Alors :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}B(\hat{\varphi}) = &\sqrt{\frac{L}{2\pi}}\sum_{j=1}^{+\infty} B(\hat{\varphi})|_{\mathcal{C}_j^+}e^{-i(j+M)\xi L} \\ +\sqrt{\frac{L}{2\pi}}\sum_{j=1}^{M-1} &B(\hat{\varphi})|_{\Omega_0\cap\{y\in[b_-+jL,(j+1)L]\}}e^{-ij\xi L} + \sqrt{\frac{L}{2\pi}}\sum_{j=1}^{+\infty} B(\hat{\varphi})|_{\mathcal{C}_j^-}e^{ij\xi L}\end{aligned}$$

Nous savons que :

$$B(\hat{\varphi})|_{\mathcal{C}_j^\pm} = e_0^\pm((R^\pm)^{j-1}D_B^\pm\hat{\varphi}) + e_1^\pm((R^\pm)^jD_B^\pm\hat{\varphi})$$

Alors la première somme est égale à :

$$\sqrt{\frac{L}{2\pi}}\sum_{j=1}^{+\infty} B(\hat{\varphi})|_{\mathcal{C}_j^+}e^{-i(j+M)\xi L} = \sqrt{\frac{L}{2\pi}}\sum_{j=1}^{+\infty}(E_0^\pm + E_1^\pm R^\pm)(R^\pm)^{j-1}D_B^\pm\hat{\varphi}e^{-i(j+M)\xi L}$$

De plus, nous savons que $||R^\pm||$ est strictement inférieur à 1, et que les opérateurs $E_i^\pm$ sont linéaires continus (comme les problèmes les définissant sont bien posés), ce qui signifie que cette somme converge vers :

$$\sqrt{\frac{L}{2\pi}}\sum_{j=1}^{+\infty} B(\hat{\varphi})|_{\mathcal{C}_j^+}e^{-i(j+M)\xi L} = \sqrt{\frac{L}{2\pi}}e^{-i(M+1)\xi L}(E_0^+ + E_1^+R^+)(I_d - R^+e^{-i\xi L})^{-1}D_B^+\hat{\varphi}$$

nous fournissant la première partie de la formule, la seconde se démontrant exactement de la même façon. La même preuve fournit la formule pour $\widetilde{u}_P$. □

Nous appliquons alors l'opérateur de trace normale, et nous en déduisons :

Théorème B.4. *Notons, pour $j = 0 \dots M-1$:*

$$\begin{aligned}\Lambda^\pm_{B0,j} : L^2(0,2\pi/L,H^{1/2}_\xi(]0,L[)^2) &\longrightarrow H^{-1/2}([b_- + jL,(j+1)L]) \\ \hat{\varphi} &\longmapsto \frac{\partial B(\hat{\varphi})}{\partial\nu}|_{\partial\Omega_0\cap\Gamma^\pm\cap\{y\in[b_-+jL,(j+1)L]\}}\end{aligned}$$

Alors pour tout $\varphi \in H^{1/2}([b_-,b_+]) \times H^{1/2}([b_-,b_+])$, la TFB de la trace normale de $B(\varphi)$ est donnée par :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\partial_\nu B(\hat{\varphi})|_{\Gamma^\pm}(\cdot,\xi) = &\sqrt{\frac{L}{2\pi}} e^{-i(M+1)\xi L}(N_0^{\pm+} + N_1^{\pm+}R^+)(I_d - R^+e^{-i\xi L})^{-1} D_B^+ \hat{\varphi} \\ &+\sqrt{\frac{L}{2\pi}} \sum_{j=1}^{M-1} \Lambda_{B0,j}^{\pm} \hat{\varphi} e^{-ij\xi L} \\ &+\sqrt{\frac{L}{2\pi}} e^{i\xi L}(N_0^{\pm-} + N_1^{\pm-}R^-)(I_d - R^-e^{i\xi L})^{-1} D_B^- \hat{\varphi}\end{aligned}$$

Nous avons également :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\partial_\nu \widetilde{u}_P|_{\Gamma^\pm}(\cdot,\xi) = &\sqrt{\frac{L}{2\pi}} e^{-i(M+1)\xi L}(N_0^{\pm+} + N_1^{\pm+}R^+)(I_d - R^+e^{-i\xi L})^{-1} \widetilde{u}_P|_{\Gamma_{int}^+} \\ &+\sqrt{\frac{L}{2\pi}} \sum_{j=1}^{M-1} \partial_\nu \widetilde{u}_P|_{\partial\Omega_0 \cap \Gamma^\pm \cap \{y \in [b_- + jL, (j+1)L]\}} \varphi e^{-ij\xi L} \\ &+\sqrt{\frac{L}{2\pi}} e^{i\xi L}(N_0^{\pm-} + N_1^{\pm-}R^-)(I_d - R^-e^{i\xi L})^{-1} \widetilde{u}_P|_{\Gamma_{int}^-}\end{aligned}$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer l'opérateur de trace normale à la formule du lemme B.1. Alors nous obtenons :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\partial_\nu B(\hat{\varphi})|_{\Gamma^\pm} = &\sqrt{\frac{L}{2\pi}} e^{-i(M+1)\xi L}\partial_\nu(E_0^+ + E_1^+R^+)(I_d - R^+e^{-i\xi L})^{-1} D_B^+ \hat{\varphi}|_{\Gamma^\pm_{\mathcal{C}_{int}}}(\cdot,\xi) \\ &+\sqrt{\frac{L}{2\pi}} \sum_{j=1}^{M-1} \partial_\nu B(\hat{\varphi})|^{\pm}_{\Omega_0 \cap \{y \in [b_- + jL, (j+1)L]\}} e^{-ij\xi L} \\ &+\sqrt{\frac{L}{2\pi}} e^{i\xi L}\partial_\nu(E_0^- + E_1^-R^-)(I_d - R^-e^{i\xi L})^{-1} D_B^- \hat{\varphi}|_{\Gamma^\pm_{\mathcal{C}_{int}}}(\cdot,\xi)\end{aligned}$$

Il suffit alors de reconnaître dans cette formule les opérateurs que nous avions préalablement définis. Encore une fois, la même preuve donne la formule pour $\widetilde{u}_P$. □

Nous sommes donc capables de calculer toutes les quantités intervenant dans (B.3) dans l'espace de Floquet. Nous allons maintenant regrouper l'ensemble de nos résultats, afin d'obtenir l'expression finale de (B.3) que l'on utilisera en pratique, et nous allons de plus montrer que cette équation correspond à un problème bien posé.

B.1.4 Analyse de l'équation de transmission

Commençons par rappeler que l'équation (B.3) se réécrit, en Floquet :

$$\left| \begin{array}{l} \displaystyle\int_0^{2\pi/L} < \hat{\Lambda}^{int,+}(\hat{\varphi})(\cdot,\xi), \hat{\psi}(\cdot,\xi)|_{x=a_+} > d\xi + < \hat{\Lambda}^{e,+}\left(\hat{\varphi}^+\right)(\cdot,\xi), \hat{\psi}(\cdot,\xi)|_{x=a_+} > d\xi = 0 \\ \displaystyle\int_0^{2\pi/L} < \hat{\Lambda}^{int,-}(\hat{\varphi})(\cdot,\xi), \hat{\psi}(\cdot,\xi)|_{x=-a_-} > d\xi + < \hat{\Lambda}^{e,+}\left(\hat{\varphi}^-\right)(\cdot,\xi), \hat{\psi}(\cdot,\xi)|_{x=-a_-} > d\xi = 0 \end{array} \right. \tag{B.4}$$

avec

$$\begin{aligned}\hat{\Lambda}^{int,\pm}\left(\hat{\varphi}^-,\hat{\varphi}^+\right)(\cdot,\xi) &= \mathcal{F}\left(\partial_\nu u_{int}(\mathcal{F}^{-1}\hat{\varphi}^-, \mathcal{F}^{-1}\hat{\varphi}^+)|_{\Gamma^\pm}\right)(\cdot,\xi) \\ \hat{\Lambda}^{e,\pm}(\hat{\varphi}^\pm)(\cdot,\xi) &= -\mathcal{F}\left(\partial_\nu u_\pm(\mathcal{F}^{-1}\hat{\varphi}^\pm)|_{\Gamma^\pm}\right)(\cdot,\xi)\end{aligned}$$

Nous savons calculer $\hat{\Lambda}^{e,\pm}$ par la formule :

$$\hat{\Lambda}^{e,\pm}(\hat{\varphi}^\pm)(\cdot,\xi) = \Lambda^\pm(\xi)\hat{\varphi}^\pm(\cdot,\xi) \tag{B.7}$$

Nous définissons l'opérateur de $H^{1/2}(]0,L[)^2$ vers $H^{-1/2}(]0,L[)^2$ associé :

$$\hat{\Lambda}^e(\xi) = \begin{pmatrix} \hat{\Lambda}^{e,-}(\xi) & 0 \\ 0 & \hat{\Lambda}^{e,+}(\xi) \end{pmatrix}$$

D'autre part :

$$\mathcal{F}\left(\partial_\nu u_{int}(\mathcal{F}^{-1}\hat{\varphi}^-,\mathcal{F}^{-1}\hat{\varphi}^+)|_{\Gamma^\pm}\right)(\cdot,\xi)=\mathcal{F}\left(\partial_\nu u_{US}(\mathcal{F}^{-1}\hat{\varphi}^-,\mathcal{F}^{-1}\hat{\varphi}^+)|_{\Gamma^\pm}\right)(\cdot,\xi)$$
$$+\mathcal{F}\left(\partial_\nu u_P(\mathcal{F}^{-1}\hat{\varphi}^-,\mathcal{F}^{-1}\hat{\varphi}^+)|_{\Gamma^\pm}\right)(\cdot,\xi)$$

Puis, nous savons que :

$$\mathcal{F}\left(\partial_\nu u_{US}(\mathcal{F}^{-1}\hat{\varphi}^-,\mathcal{F}^{-1}\hat{\varphi}^+)|_{\Gamma^\pm}\right)(\cdot,\xi)=\hat{\Lambda}^I(\xi)\hat{\varphi}^-(\cdot,\xi)|_{\Gamma^\pm}$$

où $\hat{\Lambda}^I(\xi)$ se calcule via la formule :

$$\hat{\Lambda}^I\hat{\varphi}=(T^I_{00}\hat{\varphi}^-+T^I_{10}\hat{\varphi}^+,T^I_{01}\hat{\varphi}^-+T^I_{11}\hat{\varphi}^+) \tag{B.13}$$

ce qui s'écrit encore :

$$\hat{\Lambda}^I(\xi)=\begin{pmatrix} T^I_{00}(\xi) & T^I_{10}(\xi)\\ T^I_{01}(\xi) & T^I_{11}(\xi)\end{pmatrix}$$

Enfin :

$$\mathcal{F}\left(\partial_\nu u_P(\mathcal{F}^{-1}\hat{\varphi}^-,\mathcal{F}^{-1}\hat{\varphi}^+)|_{\Gamma^\pm}\right)(\cdot,\xi)=\mathcal{F}\left(\partial_\nu B(\hat{\varphi})|_{\Gamma^\pm}\right)(\cdot,\xi)$$
$$+\mathcal{F}\left(\partial_\nu\widetilde{u}_P|_{\Gamma^\pm}\right)(\cdot,\xi)$$

et le théorème B.4 nous apprend comment calculer ces quantités. Nous poserons :

$$\hat{\lambda}^\pm_f(\cdot,\xi)=\sqrt{\frac{L}{2\pi}}e^{-i(M+1)\xi L}(N^{\pm+}_0+N^{\pm+}_1R^+)(I_d-R^+e^{-i\xi L})^{-1}\widetilde{u}_P|_{\Gamma^+_{int}}$$
$$+\sqrt{\frac{L}{2\pi}}\sum_{j=1}^{M-1}\partial_\nu\widetilde{u}_P|_{\partial\Omega_0\cap\Gamma^\pm\cap\{y\in[b_-+jL,(j+1)L]\}}\varphi e^{-ij\xi L}$$
$$+\sqrt{\frac{L}{2\pi}}e^{i\xi L}(N^{\pm-}_0+N^{\pm-}_1R^-)(I_d-R^-e^{i\xi L})^{-1}\widetilde{u}_P|_{\Gamma^-_{int}}$$

Puis, nous introduisons l'opérateur $\hat{\Lambda}^B(\xi)$ défini par :

$$\begin{array}{rcl}\hat{\Lambda}^B : L^2(0,2\pi/L,H^{1/2}_\xi(]0,L[)^2) & \longrightarrow & L^2(0,2\pi/L,\left(H^{1/2}_\xi(]0,L[)'\right)^2)\\ \hat{\varphi} & \longmapsto & (\partial_\nu B(\hat{\varphi})|_{\Gamma^-},\partial_\nu B(\hat{\varphi})|_{\Gamma^+})\end{array}$$

Alors l'équation de transmission, complètement exprimée dans les variables de Floquet, devient, pour presque tout $\xi\in[0,2\pi/L]$:

$$\int_0^{2\pi/L}<\left(\hat{\Lambda}^e(\xi)+\hat{\Lambda}^I(\xi)\right)\hat{\varphi}(\cdot,\xi)+\left(\hat{\Lambda}^B\hat{\varphi}\right)(\cdot,\xi),\hat{\psi}(\cdot,\xi)>d\xi=-\int_0^{2\pi/L}<\hat{\lambda}_f(\cdot,\xi),\hat{\psi}(\cdot,\xi)>d\xi \tag{B.24}$$

où $<\cdot,\cdot>$ désigne le produit de dualité entre $H^{1/2}_\xi(]0,L[)^2$ et son dual. L'opérateur $\hat{\Lambda}^B$, qui cache une TFB inverse (via la définition de $B(\hat{\varphi})$), couple l'ensemble des valeurs en ξ. Aussi, cette équation (qui est satisfaite pour presque tout ξ comme les diverses quantités sont intégrables) ne peut pas être inversée à ξ fixé. Nous savons malgré tout que ce problème admet une unique solution :

Théorème B.5.
Il existe un unique $\hat{\varphi}\in L^2(0,2\pi/L,H^{1/2}_\xi(]0,L[)^2)$ tel que, pour tout $\hat{\psi}\in L^2(0,2\pi/L,H^{1/2}_\xi(]0,L[)^2)$:

$$\int_0^{2\pi/L}<\left(\hat{\Lambda}^e(\xi)+\hat{\Lambda}^I(\xi)\right)\hat{\varphi}(\cdot,\xi)+\left(\hat{\Lambda}^B\hat{\varphi}\right)(\cdot,\xi),\hat{\psi}(\cdot,\xi)>d\xi=-\int_0^{2\pi/L}<\hat{\lambda}_f(\cdot,\xi),\hat{\psi}(\cdot,\xi)>d\xi \tag{B.24}$$

Démonstration. La formulation variationnelle (B.24) est équivalente par construction à trouver :

$$\varphi = (\mathcal{F}^{-1}\hat{\varphi}|_{\Gamma^-_{int}}, \mathcal{F}^{-1}\hat{\varphi}|_{\Gamma^+_{int}})$$

solution de :

$$\begin{aligned} \partial_\nu u_{int}(\varphi^-,\varphi^+)|_{\Gamma^+} &= \partial_\nu u_+(\varphi^+)|_{\Gamma^+} \\ \partial_\nu u_{int}(\varphi^-,\varphi^+)|_{\Gamma^-} &= \partial_\nu u_-(\varphi^-)|_{\Gamma^-} \end{aligned} \tag{B.3}$$

Or, nous savons déjà que les traces de la solution de (2.1) vérifient cette équation. Nous avons donc déjà existence d'une solution. Pour l'unicité, il suffit de considérer une solution dans le cas $\hat{\lambda}_f = 0$. Cela revient, en repassant dans l'espace physique, à considérer $\varphi = (\mathcal{F}^{-1}\hat{\varphi}|_{\Gamma^-_{int}}, \mathcal{F}^{-1}\hat{\varphi}|_{\Gamma^+_{int}})$ solution de :

$$\begin{aligned} \partial_\nu (u_{US}(\varphi) + B(\varphi))|_{\Gamma^+} &= \partial_\nu u_+(\varphi^+)|_{\Gamma^+} \\ \partial_\nu (u_{US}(\varphi) + B(\varphi))|_{\Gamma^-} &= \partial_\nu u_-(\varphi^-)|_{\Gamma^-} \end{aligned} \tag{B.25}$$

On pose alors :

$$\widetilde{u} = \left| \begin{array}{ll} u_-(\varphi^-) & \text{dans } \Omega^- \\ u_{US}(\varphi) + B(\varphi) & \text{dans } \Omega_{int} \\ u_+(\varphi^+) & \text{dans } \Omega^+ \end{array} \right.$$

Or :

$$\left| \begin{array}{ll} -\Delta B(\varphi) - (\omega^2 + i\varepsilon\omega)\rho B(\varphi) = -(\omega^2 + i\varepsilon\omega)(\rho_{int} - \rho)u_{US}(\varphi) & \text{dans } \Omega_{int} \\ B(\varphi) = 0 & \text{sur } \partial\Omega_{int} \end{array} \right.$$

et

$$\left| \begin{array}{ll} -\Delta u_{US}(\varphi) - (\omega^2 + i\varepsilon\omega)\rho_{int} u_{US}(\varphi) = 0 & \text{dans } \Omega_{int} \\ u_{US}(\varphi) = \varphi & \text{sur } \partial\Omega_{int} \end{array} \right.$$

Alors $\widetilde{u}$ satisfait dans Ω_{int} :

$$\left| \begin{array}{ll} -\Delta\widetilde{u}(\varphi) - (\omega^2 + i\varepsilon\omega)\rho\widetilde{u} = 0 & \text{dans } \Omega_{int} \\ \widetilde{u}(\varphi) = \varphi & \text{sur } \partial\Omega_{int} \end{array} \right.$$

elle est aussi solution de cette équation dans $\Omega^\pm$ par définition de $u^\pm$. Par conséquent, comme elle se raccorde en trace (par construction) et en dérivée normale (comme φ satisfait (B.25)), elle est solution globale de (2.1) sans second membre, et est par conséquent nulle. On en déduit que $\varphi = 0$, et l'unicité pour notre problème. □

Nous sommes finalement parvenus à réécrire notre condition de transmissions comme une équation posée en domaine borné, nous permettant de déterminer φ via sa transformée de Floquet, nous pouvons donc appliquer l'algorithme de résolution que nous avons proposé au début de cette annexe. De plus, la forme variationnelle de l'équation (B.24) conduit naturellement à la discrétiser par éléments finis. Malheureusement, son caractère bien posé, au niveau continu, ne relève pas d'un cadre aussi agréable que la coercivité, mais d'une réinterprétation de l'équation, en lien avec un problème bien posé (le problème initial). Cette réinterprétation ne se transpose pas au niveau discret (contrairement à ce qui pouvait se passer avec la méthode mixte des chapitres 2 et 3) comme nous allons maintenant l'expliquer, et il s'agit là de la raison pour laquelle nous ne sommes pas parvenus à effectuer l'analyse numérique complète de la méthode.

B.1.5 Discrétisation de l'équation de transmission

Nous allons nous contenter d'expliquer comment nous avons choisi de discrétiser l'équation (B.24), par éléments finis. Nous avons exploré deux voies différentes, conduisant toutes deux à des résultats numériques comparables. Le principe est de construire un sous-espace de $V = L^2(0, 2\pi/L, H^{1/2}_\xi(]0, L[)^2)$, de dimension finie. À ξ fixé, un élément de cet espace appartient à $H^{1/2}_\xi(]0, L[)^2$. Or, nous connaissons déjà (cf chapitre 3) un bon candidat pour approcher cet espace : il s'agit de $X^r_h(\xi)$. Aussi, nous sommes tentés de chercher, pour tout $\hat{\varphi} \in V$, une approximation $\hat{\varphi}_h$ telle que $\hat{\varphi}_h(\cdot, \xi) \in X^r_h(\xi)$.

La TFB dans la direction y que nous avons appliquée transforme implicitement le plan $\mathbb{R}^2$ en le guide définit au chapitre 2 : Nous pouvons donc réutiliser l'ensemble des espaces discrets que nous avons déjà définis sur le guide image. Rappelons que $X^r_h(\xi)$ est composé des traces sur une frontière verticale, bord d'une cellule de périodicité, des éléments de $V^r_h(\xi)$. Eux-mêmes sont construits en

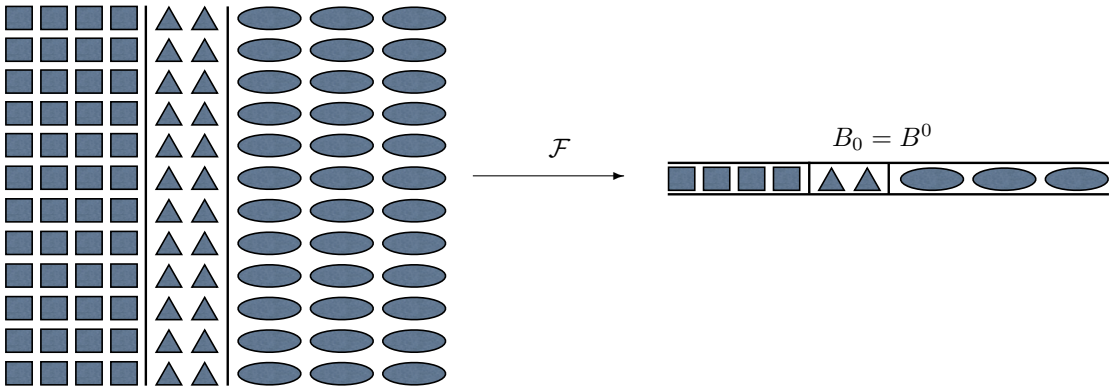


FIGURE B.8 – L'action de la TFB, du point de vue géométrique

quasi-périodisant l'espace V_h^r. Alors il est clair que si on note ψ_0 la fonction de base de V_h^r correspondant au noeud du bas sur une frontière verticale, et ψ_N celle correspondant au noeud du haut sur une frontière verticale, et ψ_i, $1 \leq i \leq N-1$ les fonctions de base correspondant aux autres degrés de liberté sur cette même frontière, nous aurons :

$$\hat{\varphi}_h(\cdot,\xi) = \sum_{j=1}^{N-1} \alpha_j(\xi)\psi_j + \alpha_0(\xi)\left(\psi_0 + e^{i\xi L}\psi_N\right)$$

si l'on souhaite que $\hat{\varphi}_h(\cdot,\xi) \in X_h^r(\xi)$ pour tout ξ. Toute la question se réduit alors à choisir une dépendance en la variable ξ pour les $\alpha_j(\xi)$. Il nous a semblé que deux approches était a priori possibles.

La première consiste à observer que l'inconnue $\hat{\varphi}$ n'est a priori pas plus que L^2 en la variable ξ. Il est donc logique d'utiliser une approximation conforme L^2 en la variable ξ, mais de plus bas degré, puisque nous ne disposons pas de la régularité supplémentaire qui justifierait l'emploi d'une approximation plus précise. Ceci correspond à approcher la dépendance en ξ par des polynômes d'ordre 0, autrement dit à supposer $\alpha_j(\xi)$ constant par morceaux en ξ, ce qui revient à poser :

$$\hat{\varphi}_h(\cdot,\xi) = \sum_{j=1}^{N-1}\sum_{k=1}^{N_k} \alpha_{j,k}\psi_j w_k(\xi) + \sum_{k=1}^{N_k} \alpha_{0,k}\left(\psi_0 + e^{i\xi L}\psi_N\right) w_k(\xi)$$

où l'on a maillé $[0, 2\pi/L]$ à l'aide des N_k+1 points $(\xi_k)_{0\leq k\leq N_k}$, tels que $w_k(\xi)|_{[\xi_q-1,\xi_q]} = \delta_{kq}$. Ce choix correspond à celui de [37] pour approcher l'équation intégrale, très proche de (B.24), intervenant dans la détermination des opérateurs DtN de plan.

Notre seconde approche consiste à observer que ce que nous recherchons doit être la TFB de la trace d'une solution de l'équation de Helmholtz. Dans le cas où $\varepsilon > 0$, c'est-à-dire lorsque le milieu est absorbant, nous savons (cf théorème 2.10) que la solution décroît exponentiellement dans ce contexte. Or, la TFB $\hat{\varphi}$ de φ est définie, en vertu du lemme A.4 et du théorème A.9, comme la série :

$$\hat{\varphi}(y;\xi) = \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \psi(y+nL)e^{-in\xi L}$$

Si φ est très décroissante, il semble raisonnable de penser que l'on ne commet pas une grosse erreur en approchant cette série par ces sommes partielles. D'autre part, il est clair que l'on peut construire

un maillage de l'ensemble du plan (et nous l'avons implicitement déjà fait aux chapitres 3 et 7) en périodisant celui du guide (par translation). Alors, on peut imaginer approcher φ par un φ_h tel que :

$$\varphi_h(y)|_{nL\leq y\leq (n+1)L} = \sum_{j=0}^{N} \beta_{j,n}\psi_j(y-nL)$$

avec bien entendu des conditions de sommabilité sur les $\beta_{j,n}$ correspondant à la régularité $H^{1/2}$, ainsi que la condition de continuité en trace :

$$\beta_{0,n} = \beta_{N,n-1}$$

Pour un tel φ_h, la TFB (formellement) s'écrit :

$$\hat{\varphi}_h(y;\xi) = \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{j=0}^{N} \beta_{j,n}\psi_j(y)e^{-in\xi L}$$

En permutant les sommes (toujours formellement), nous avons :

$$\hat{\varphi}_h(y;\xi) = \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \sum_{j=0}^{N} \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \beta_{j,n}e^{-in\xi L} \right) \psi_j(y)$$

$$= \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \sum_{j=1}^{N-1} \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \beta_{j,n}e^{-in\xi L} \right) \psi_j(y) + \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \beta_{0,n}e^{-in\xi L} \right) \psi_0(y) + \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \beta_{N,n}e^{-in\xi L} \right) \psi_N(y)$$

La dernière somme s'écrit encore :

$$\sqrt{\frac{L}{2\pi}} \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \beta_{N,n-1}e^{-in\xi L} \right) e^{i\xi L}\psi_N(y) = \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \beta_{0,n}e^{-in\xi L} \right) e^{i\xi L}\psi_N(y)$$

en utilisant la continuité en trace, et donc :

$$\hat{\varphi}_h(y;\xi) = \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \sum_{j=1}^{N-1} \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \beta_{j,n}e^{-in\xi L} \right) \psi_j(y) + \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \beta_{0,n}e^{-in\xi L} \right) (\psi_0(y) + e^{i\xi L}\psi_N(y))$$

Il suffit d'ajouter des conditions de sommabilité l^2 sur les coefficients pour justifier l'ensemble de ces manipulations, et on montre que le fait que $\varphi_h \in H^{1/2}$ implique justement cette condition (il s'agit là de manipulations quelque peu fastidieuses, que nous ne reproduisons pas ici). Alors ces calculs justifient le choix d'imposer $\hat{\varphi}_h(\cdot,\xi) \in X_h^r(\xi)$ à ξ fixé, que nous avions fait a priori dans l'approche précédente. Mais encore une fois, si la solution est très décroissante, nous sommes tentés de tronquer les séries provenant de la définition de la TFB, ce qui nous conduit à chercher un $\hat{\varphi}_h$ de la forme :

$$\hat{\varphi}_h(y;\xi) = \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{k=-q}^{q} \beta_{j,k}\psi_j(y)e^{-ik\xi L} + \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \sum_{k=-q}^{q} \beta_{0,k}(\psi_0(y) + e^{i\xi L}\psi_N(y))e^{-ik\xi L}$$

C'est la deuxième approximation que nous avons considérée (bien entendu, elle n'est a priori pas adaptée au traitement de l'absorption limite).

Une fois effectué le choix de la base dans laquelle nous cherchons notre inconnue discrète, il faut malheureusement observer que nous ne pouvons pas calculer de façon exacte les diverses intégrales intervenant dans (B.24) (ainsi que dans la construction de $\hat{\Lambda}^B$). Nous devons donc rajouter une quadrature aux approximations déjà effectuées. Il nous a alors semblé très difficile de réinterpréter le système linéaire obtenu in fine. Or sans une réinterprétation et en l'absence de propriétés algébriques

usuelles, ne nous sommes pas en mesure de montrer le caractère inversible de ce système linéaire, et encore moins d'obtenir des estimations d'erreur. Nous devrons donc nous contenter d'une exploration numérique de cette méthode.

Nous complètons toutefois cette analyse (succinte) par une remarque sur la taille des systèmes à résoudre en pratique. Avec les notations du paragraphe ci-dessus, l'équation de transmission va correspondre à la résolution d'un système linéaire, plein à cause de l'opérateur $\hat{\Lambda}^B$ qui couple toutes les valeurs de ξ, de taille $(N-1)^2 \times N_k^2$. Autrement dit, et contrairement à ce qui se produisait dans le cas de la méthode mixte LS-DtN étudiée au chapitre 2, la taille du système plein sous-jacent à la méthode augmente avec le nombre de degrés de liberté correspondant à la variable de Floquet. Or, il semble clair que l'on devrait moralement avoir recours à la même précision en Floquet pour les deux méthodes si l'on souhaite la même précision. Aussi, à précision spatiale fixée (ce qui correspond par exemple à une situation de travail à fréquence fixe), si l'on diminue l'absorption, l'expérience de la méthode mixte (ou de la méthode de [37]) nous conduit à penser qu'il faut augmenter la précision en la variable de Floquet (et ceci sera confirmé numériquement). La taille du système plein à résoudre augmente alors de façon quadratique pour cette méthode de décomposition de domaine, alors qu'elle reste fixe pour la méthode mixte, le nombre de degrés de liberté en Floquet (qui sont des points de quadrature dans ce cas) n'augmentant que la durée de l'assemblage de l'équation, et ce de façon linéaire. Nous espérons qu'il semble alors évident au lecteur que la méthode mixte est en tout point préférable, que ce soit du point de vue théorique (puisque nous disposons d'une théorie complète et contrôlons l'erreur) que du point de vue pratique (la méthode mixte étant in fine moins coûteuse alors qu'elle résout un problème volumique). Toutefois, il nous a semblé important de présenter cette méthode, chronologiquement la première a nous être venu à l'esprit (suite à la lecture de [69]), puisque la recherche d'un découplage des diverses valeurs en ξ, et donc en quelque sorte la rechercher de la levée du verrou numérique du à la résolution de l'équation de transmission, constitue l'une des raisons qui nous ont poussé à explorer d'autre voie que l'approche purement DtN (dont cette méthode n'est qu'une version non bornée) et à finalement aboutir à la méthode mixte.

B.1.6 Résultats numériques

Nous allons comparer les résultats produits par la méthode de décomposition de domaine à ceux produits par notre méthode mixte Ls-DtN. Les maillages sont les mêmes que ceux du chapitre 3, et nous employons de nouveau une source gaussienne

$$f = \left| \begin{array}{ll} A_f e^{-\left(\frac{(x-c_x)^2}{w_x^2} + \frac{(y-c_y)^2}{w_y^2}\right)} & \text{dans } \Omega_0 \\ 0 & \text{dans } \mathbb{R}^2 \setminus \Omega_0 \end{array} \right.$$

de paramètres :

$$A_f = 160 \quad c_x = c_y = 0.5 \quad w_x = w_y = 0.02$$

Nous commençons par comparer sur la figure B.9 la méthode LS-DtN à la méthode de décomposition de domaine dans le cas où l'on utilise des fonctions de base constantes par morceaux pour approcher la variation dans la variable de Floquet. On constate, pour cette configuration simple, un très bon accord entre les deux méthodes.

Nous utilisons maintenant le milieu périodique de la figure B.10, et l'on voit sur la figure B.11 que les deux méthodes produisent des solutions comparables.

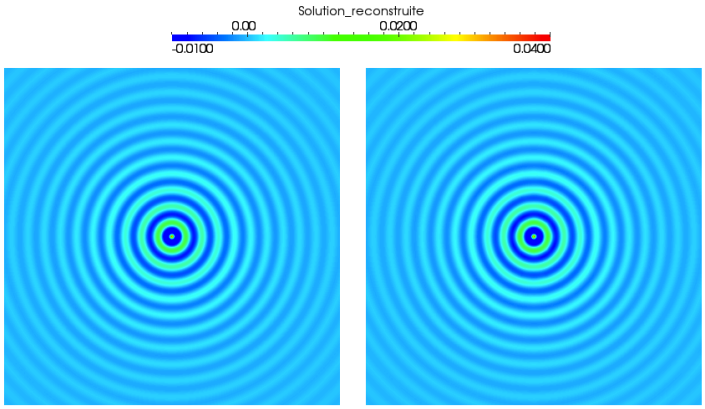


FIGURE B.9 – Comparaison entre la méthode LS-DtN (à gauche) et la méthode de décomposition de domaine (à droite), pour $\omega = 10$, $\varepsilon = 0.5$, $r = 3$ and $N_k = 40$, et 40 fonctions de bases pour la méthode de décomposition de domaine

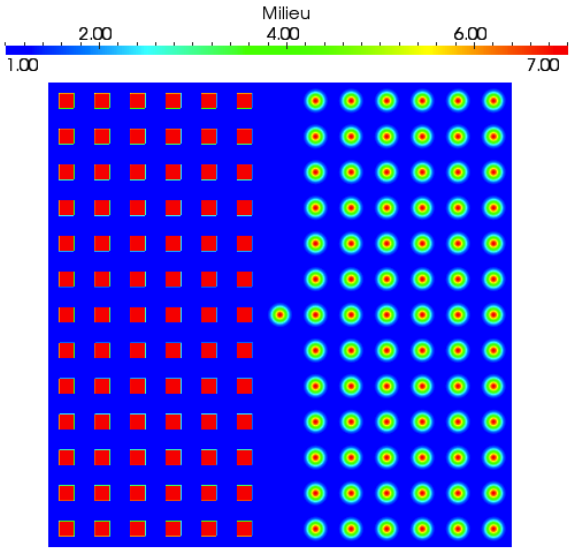


FIGURE B.10 – Milieu périodique

Nous terminons ce bref aperçu numérique de la méthode de décomposition de domaine par le cas où l'on utilise le deuxième type d'approximation pour la variable de Floquet, à savoir des fonctions de base exponentielles. Sur la figure B.12, on voit que ce type de fonctions de base produit également de bons résultats.

En conclusion, il apparaît que bien que nous ne sachions pas le justifier rigoureusement, la méthode de décomposition de domaine discrétisée donne de bons résultats en pratique. Cependant, la complexité théorique de la description de cette méthode trouve son pendant pratique en une grande complexité de mise en œuvre. L'équation de transmission, au coeur de cette méthode, s'avère en effet particulièrement délicate à assembler. Cette difficulté de mise en œuvre est un autre argument,

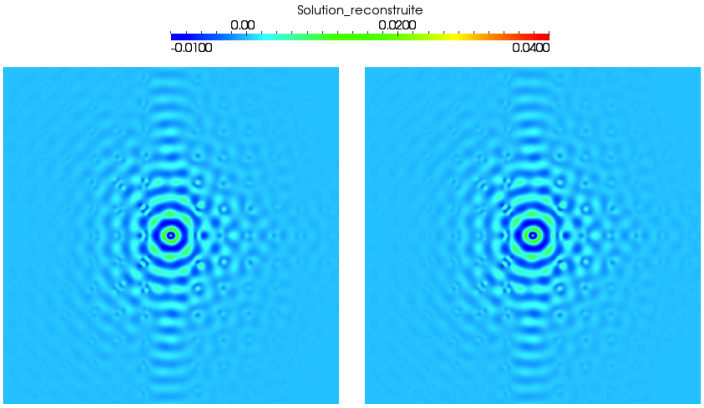


FIGURE B.11 – Comparaison entre la méthode LS-DtN (à gauche) et la méthode de décomposition de domaine (à droite) pour le milieu de la figure B.10, pour $\omega = 10$, $\varepsilon = 0.5$, $r = 3$ and $N_k = 40$, et 40 fonctions de bases pour la méthode de décomposition de domaine

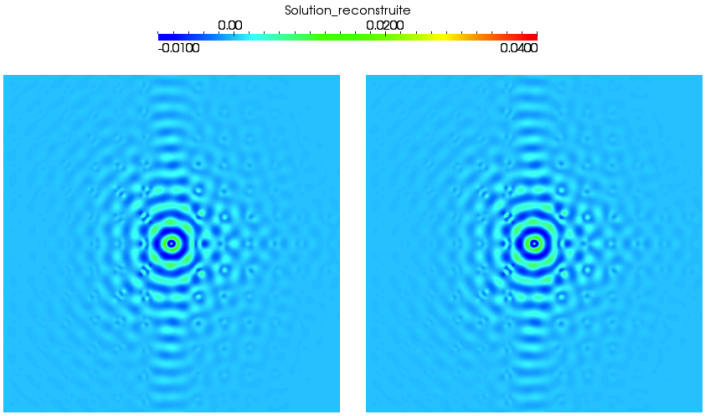


FIGURE B.12 – Comparaison entre la méthode LS-DtN (à gauche) et la méthode de décomposition de domaine (à droite) pour le milieu de la figure B.10, pour $\omega = 10$, $\varepsilon = 0.5$, $r = 3$ and $N_k = 40$, et 20 fonctions de bases exponentielles pour la méthode de décomposition de domaine

tout au moins du point de vue de l'auteur, en faveur de la méthode LS-DtN, bien plus simple à programmer car essentiellement basée sur la résolution de problèmes de guide.

B.2 Le cas temporel

Nous allons maintenant expliquer comment la méthode que nous venons de présenter pour résoudre les problèmes de défaut linéique en régime harmonique s'étend au cas des équations d'évolution. Nous allons présenter la méthode dans le cas des problèmes d'ordre un en temps. Nous espérons que le lecteur, suite à la lecture de la deuxième partie du mémoire comprendra que cette méthode s'étend sans difficulté à l'ordre deux en temps (et en fait à des problèmes de n'importe quel ordre en temps), de la même façon que toutes les autres méthodes présentées dans ce mémoire. Nous n'allons cependant pas expliciter cette extension ici, afin de ne pas surcharger cette annexe.

B.2.1 Problème modèle

Nous reprenons le problème modèle pour l'ordre un en temps, avec un seul défaut linéique, sur lequel nous avons travaillé au chapitre 7.
Nous cherchons $u \in C^1([0,+\infty[, L^2(\mathbb{R}^2)) \cap C^0([0,+\infty[, H^1(\Delta, \mathbb{R}^2))$ telle que :

$$\left| \begin{array}{ll} \gamma\rho\dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + Vu = f & \text{dans } \mathbb{R}^2, \quad t > 0 \\ u(\cdot, 0) = u_0 & \text{dans } \mathbb{R}^2 \end{array} \right. \tag{7.1}$$

sous les hypothèses (HT) qui garantissent son caractère bien posé. De nouveau, nous travailllons sur sa semi-dicrétisation en temps (par θ-schéma) à savoir : trouver $(u^n)_{0\leq n\leq N} \in H^1(\Omega)^{N+1}$:

$$\left| \begin{array}{ll} \gamma\rho\dfrac{u^{n+1}-u^n}{\Delta t} + (-\Delta + V)(\theta u^{n+1} + (1-\theta)u^n) = f^{n+\theta} & \text{dans } \mathbb{R}^2 \quad 0 \leq n \leq N \\ u^0(\cdot) = u_0(\cdot) & \text{dans } \mathbb{R}^2 \end{array} \right. \tag{B.26}$$

Le plan $\mathbb{R}^2$ peut toujours être découpé en trois régions, comme illustré sur la figure 7.1 :

. $\Omega^- = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \middle| \ x < a_-\right\}$

. $\Omega^+ = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \middle| \ x > a_+\right\}$

. $\Omega_{int} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \middle| \ a_- < x < a_+\right\}$

et Ω_0 l'ouvert $]a_-, a_+[\times]b_-, b_+[\subset \Omega_{int}$, contient les perturbations bornées (voir figure 7.1) :

(H5) *supp* $f \cup$ *supp* $u_0 \subset \Omega_0$.
$\Omega^\pm$ sont deux sous-domaines périodiques infinis, de périodes $L_x^\pm$ dans la direction x, et possédant la même période L dans la direction y et qui sont par conséquent de la forme :

$$\Omega^\pm = \bigcup_{i=1}^{+\infty} \bigcup_{j=-\infty}^{+\infty} \mathcal{C}_{ij}^\pm \qquad \mathcal{C}_{ij}^\pm = \{\mathcal{C}^\pm \pm ((i-1)L_x^\pm, (j-1)L)\}$$

où les cellules de périodicité de référence sont :

$$\mathcal{C}^\pm = \left\{(x,y) \ \middle| \ \pm a_\pm \leq \pm x \leq \pm a_\pm \pm L_x^\pm, \quad 0 \leq y \leq L\right\}$$

On note de plus $\Gamma_{int} = \partial\Omega_{int}$, et $\Gamma^\pm = \partial\Omega_{int} \cap \partial\Omega^\pm$, Γ^+ et Γ^- étant tous deux isomorphes à $\mathbb{R}$. Les fonctions $\rho \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$ et $V \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$ sont "doublement périodiques" à l'extérieur de Ω_{int}, i.e. il existe quatre fonctions $\rho^+, V^+ \in L^\infty(\Omega^+)$ et $\rho^-, V^- \in L^\infty(\Omega^-)$ telles que :

$$\begin{aligned}
\rho^+(x + pL_x^+, y \pm qL) &= \rho^+(x,y) \text{ dans } \Omega^+, \quad \forall\, (p,q) \in \mathbb{N}^2, \quad \rho = \rho^+ \text{ dans } \Omega^+ \\
\rho^-(x - pL_x^-, y \pm qL) &= \rho^-(x,y) \text{ dans } \Omega^-, \quad \forall\, (p,q) \in \mathbb{N}^2, \quad \rho = \rho^- \text{ dans } \Omega^- \\
V^+(x + pL_x^+, y \pm qL) &= V^+(x,y) \text{ dans } \Omega^+, \quad \forall\, (p,q) \in \mathbb{N}^2, \quad V = V^+ \text{ dans } \Omega^+ \\
V^-(x - pL_x^-, y \pm qL) &= V^-(x,y) \text{ dans } \Omega^-, \quad \forall\, (p,q) \in \mathbb{N}^2, \quad V = V^- \text{ dans } \Omega^-
\end{aligned}$$

A l'intérieur de Ω_{int}, ρ et V sont périodiques dans la direction y avec la même période L, à l'extérieur de Ω_0, i.e il existe deux fonctions périodiques $\rho_{int}, V_{int} \in L^\infty(\Omega_{int})$ telles que :

$$\rho_{int}(x, y + L) = \rho_{int}(x,y) \text{ dans } \Omega_{int}$$

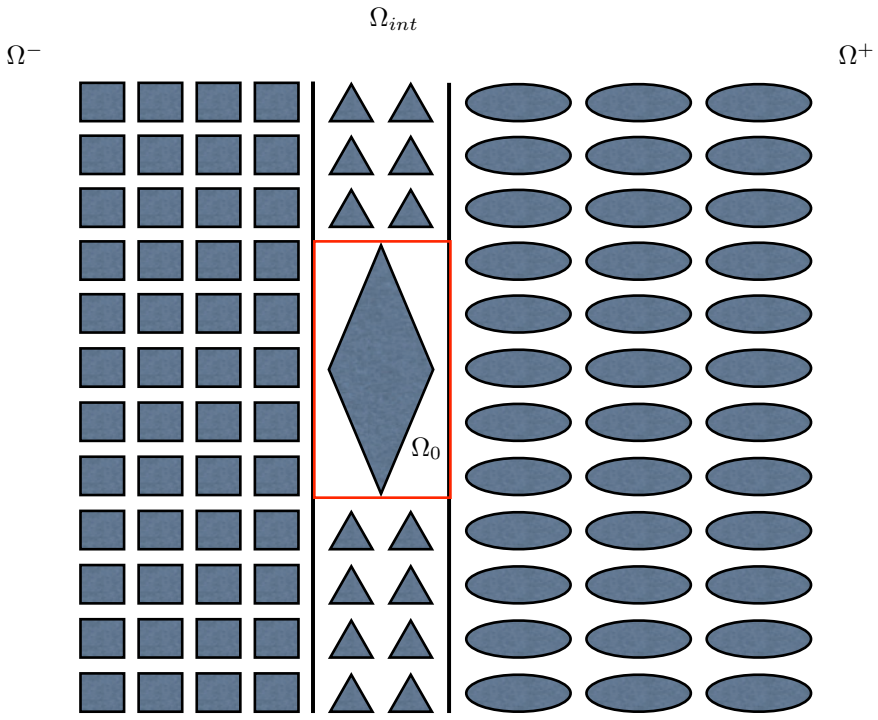


FIGURE B.13 – Exemple de configuration

$$V_{int}(x, y + L) = V_{int}(x, y) \text{ dans } \Omega_{int}$$

et $\rho = \rho_{int}$ $V = V_{int}$ dans $\Omega_{int} \setminus \Omega_0$. Enfin, rappelons que nous choisissons $b_- = -M^- L$ et $b_+ = M^+ L$, $(M^-, M^+) \in \mathbb{N}^2$.

B.2.2 Le principe de l'algorithme de décomposition de domaine

Nous rappelons maintenant les principes de notre algorithme de décomposition de domaine, mais dans le contexte des problèmes d'évolution. Nous souhaitons caractériser, à chaque pas de temps, la restriction de la solution de notre problème modèle (7.2)à chacun des ouverts Ω^+, Ω^- et Ω_{int}. Pour ce faire, nous aurons de nouveau besoin de connaître les traces de la solution sur Γ^+ et Γ^- :

$$\varphi_n^{\pm} = u_{n|_{\Gamma^{\pm}}}^{\pm}$$

où nous notons toujours :

$$\Gamma^{\pm} = \{a_{\pm}\} \times \mathbb{R}$$

Au dehors de Ω_{int}, les restrictions de u_n à Ω^+ et Ω^-, notées u_+^n et u_-^n, seront solutions de :

$$\left|\begin{array}{ll} \gamma\rho\dfrac{u_{\pm}^{n+1} - u_{\pm}^n}{\Delta t} + (-\Delta + V)(\theta u_{\pm}^{n+1} + (1-\theta)u_{\pm}^n) = 0 & \text{dans } \Omega^{\pm} \quad 0 \le n \le N \\ u_{\pm}^{n+1} = \varphi_n^{\pm} & \text{sur } \Gamma^{\pm} \\ u_{\pm}^0 = 0 & \text{dans } \Omega^{\pm} \end{array}\right. \tag{B.27}$$

qui sont des problèmes aux limites posés sur des demi-plans périodiques. À l'intérieur de Ω_{int}, la restriction de u^n, notée u^n_{int}, est en revanche solution d'un problème assez complexe :

$$\left|\begin{array}{ll} \gamma\rho\dfrac{u^{n+1}_{int}-u^n_{int}}{\Delta t}+(-\Delta+V)(\theta u^{n+1}_{int}+(1-\theta)u^n_{int})=f^{n+\theta} & \text{dans } \Omega_{int} \quad 0\leq n\leq N \\ u^{n+1}_{int}=\varphi^{\pm}_n & \text{sur } \Gamma^{\pm} \\ u^0_{int}=u_0 & \text{dans } \Omega_{int} \end{array}\right. \tag{B.28}$$

Il est clair au vu de ces définitions que $u^n_{\pm}$ et u^n_{int} dépendent seulement des valeurs de $\varphi^{\pm}_k$ pour $0\leq k\leq n$, i.e. ce sont des quantités "causales" (elle ne dépendent que du passé, et pas de l'avenir). Nous noterons par $\{\varphi^{\pm}_k\}$ la dépendance causale d'une autre famille (typiquement $u^n_{\pm}$ et u^n_{int}) en la famille $(\varphi^{\pm}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans la suite, c'est-à-dire que nous écrirons par exemple $u^n_{int}\{\varphi^{\pm}_k\}$, pour décrire le fait que u^n_{int} dépend seulement des valeurs de $\varphi^{\pm}_k$ pour $0\leq k\leq n$ (alors $u^{n+\theta}_{int}$ dépendra des valeurs de $\varphi^{\pm}_k$ jusqu'au temps $n+1$). Supposons un instant que nous sachions résoudre les trois problèmes que nous venons de mettre en évidence, pour toute famille $(\varphi^{\pm}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Si nous souhaitons que les solutions de (B.27) et (B.28) associées à la famille $(\varphi^{\pm}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soient les restrictions de la solution de (B.26) à leurs domaines de définition, comme nous savons par construction qu'elles satisfont la bonne équation dans chacun des sous-domaines du plan, et qu'elles se raccordent en trace sur $\partial\Omega_{int}$, il ne nous reste plus qu'à assurer leur raccord en dérivée normale. En d'autres termes, il nous suffit de vérifier que :

$$\begin{aligned} \partial_\nu u^{n+\theta}_{int}\{\varphi^{\pm}_k\}|_{\Gamma^+} &= \partial_\nu u^{n+\theta}_{+}\{\varphi^{+}_k\}|_{\Gamma^+} \\ \partial_\nu u^{n+\theta}_{int}\{\varphi^{\pm}_k\}|_{\Gamma^-} &= \partial_\nu u^{n+\theta}_{-}\{\varphi^{-}_k\}|_{\Gamma^-} \end{aligned} \tag{B.29}$$

pour nous assurer que nous sommes bien en train de calculer la solution de (B.26) dans chaque sous-domaine, à partir de la famille $(\varphi^{\pm}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Le principe de la méthode est alors le suivant :

. Pour tout $(\varphi^{\pm}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, construire pour tout n les opérateurs :

$$\begin{array}{ll} (\varphi^{\pm}_k)_{0\leq k\leq n}\longmapsto \partial_\nu u^{n+\theta}_{int}\{\varphi^{\pm}_k\}|_{\Gamma^+} & (\varphi^{\pm}_k)_{0\leq k\leq n}\longmapsto \partial_\nu u^{n+\theta}_{int}\{\varphi^{\pm}_k\}|_{\Gamma^-} \\ (\varphi^{\pm}_k)_{0\leq k\leq n}\longmapsto \partial_\nu u^{n+\theta}_{+}\{\varphi^{+}_k\}|_{\Gamma^+} & (\varphi^{\pm}_k)_{0\leq k\leq n}\longmapsto \partial_\nu u^{n+\theta}_{-}\{\varphi^{-}_k\}|_{\Gamma^-} \end{array}$$

. Trouver $(\varphi^{\pm}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tel que (B.29) soit satisfaite.

. Résoudre (B.27) et (B.28) pour cette famille de $(\varphi^{\pm}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ particulière.

Cette formulation soulève naturellement la question de savoir si le problème défini par l'équation (B.29) suffit à déterminer $(\varphi^{\pm}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de manière unique, question à laquelle nous apporterons bien entendu une réponse (fort heureusement positive) en fin de section.

Comme dans le cas harmonique, nous remarquons que nous avons formellement échangé un problème non borné, que nous ne pouvons résoudre numériquement, en un autre problème non borné posé sur Ω_{int}, et une condition de transmission (B.29) qui met elle aussi en jeu des quantités définies sur des domaines non bornés. Mais nous remarquons aussi que le problème intérieur ne diffère une fois de plus des problèmes de guide que nous savons résoudre en domaine borné (cf chapitre 5) que par ses données aux limites $\varphi^{\pm}_n$, qui sont également les inconnues pour l'équation de transmission (B.29). En d'autres termes, tout le côté non borné se trouve, comme en régime harmonique, en quelque sorte concentré dans les $\varphi^{\pm}_n$. Pour les ramener à des inconnues définies sur des domaines bornés, nous allons une fois de plus leur faire subir une TFB dans la direction y.

Nous notons, pour presque tout $\xi\in[0,2\pi/L]$ et tout $k\in\mathbb{N}$:

$$\hat{\varphi}^{\pm}_k(\cdot,\xi)=\mathcal{F}(\varphi^{\pm}_k(\cdot))(\cdot,\xi)$$

Par définition de la transformée de Floquet-Bloch, $\hat{\varphi}_k^{\pm}(\cdot,\xi)$ est une fonction définie sur le domaine borné $\mathbb{K} = [0, L] \times [0, 2\pi/L]$, tandis que $\varphi_k^{\pm}(\cdot)$ était définie sur $\mathbb{R}$.

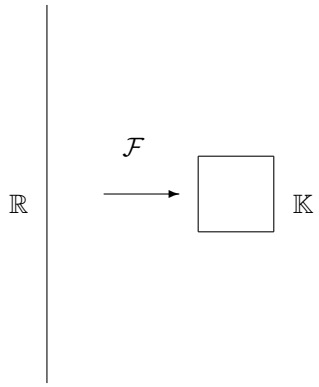


FIGURE B.14 – Visualisation de l'effet géométrique de la TFB

Appliquons maintenant la TFB à l'équation de transmission. En procédant comme dans le cas harmonique (i.e en utilisant la formule de Green et en utilisant l'identité de Parseval pour la TFB), on montre aisément que (B.29) est équivalente à :

$$\left|\begin{array}{l} \displaystyle\int_0^{2\pi/L} < \hat{\Lambda}_{n+\theta}^{int,+}\{\hat{\varphi}_k^{\pm}\}(\cdot,\xi), \hat{\psi}(\cdot,\xi)|_{x=a_+} > d\xi + < \hat{\Lambda}_{n+\theta}^{e,+}\{\hat{\varphi}_k^{+}\}(\cdot,\xi), \hat{\psi}(\cdot,\xi)|_{x=a_+} > d\xi = 0 \\ \displaystyle\int_0^{2\pi/L} < \hat{\Lambda}_{n+\theta}^{int,-}\{\hat{\varphi}_k^{\pm}\}(\cdot,\xi), \hat{\psi}(\cdot,\xi)|_{x=-a_-} > d\xi + < \hat{\Lambda}_{n+\theta}^{e,+}\{\hat{\varphi}_k^{-}\}(\cdot,\xi), \hat{\psi}(\cdot,\xi)|_{x=-a_-} > d\xi = 0 \end{array}\right. \tag{B.30}$$

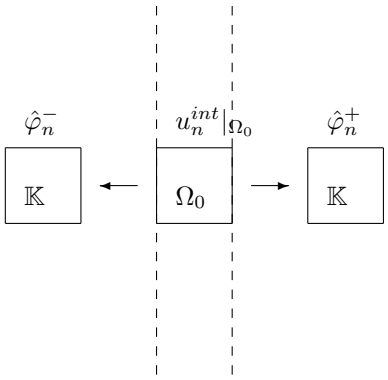
où l'on a posé, pour tout n :

$$\hat{\Lambda}_{n+\theta}^{int,+}\{\hat{\varphi}_k^{\pm}\}(\cdot,\xi) = \mathcal{F}\left(\partial_\nu u_{int}^{n+\theta}\{\mathcal{F}^{-1}\left(\hat{\varphi}_k^{\pm}\right)\}|_{\Gamma^+}\right)(\cdot,\xi)$$

$$\hat{\Lambda}_{n+\theta}^{int,-}\{\hat{\varphi}_k^{\pm}\}(\cdot,\xi) = \mathcal{F}\left(\partial_\nu u_{int}^{n+\theta}\{\mathcal{F}^{-1}\left(\hat{\varphi}_k^{\pm}\right)\}|_{\Gamma^-}\right)(\cdot,\xi)$$

$$\hat{\Lambda}_{n+\theta}^{e,\pm}\{\hat{\varphi}_k^{\pm}\}(\cdot,\xi) = -\mathcal{F}\left(\partial_\nu u_{\pm}^{n+\theta}\{\mathcal{F}^{-1}\left(\hat{\varphi}_k^{\pm}\right)\}|_{\Gamma^\pm}\right)(\cdot,\xi)$$

Une fois ces opérateurs déterminés, il est clair que nous aurons bien obtenu un problème se réduisant à déterminer les inconnues $(u_n^{int}|_{\Omega_0}, \hat{\varphi}_n^-, \hat{\varphi}_n^+)$ ce qui correspond à résoudre un problème posé sur le domaine borné $\Omega_0 \times \mathbb{K} \times \mathbb{K}$:



B.2.3 Résolution des problèmes de demi-plan

Comme nous l'avons fait dans le cas harmonique, nous commençons par expliquer comment résoudre les problèmes de demi-plan à partir de problèmes posés en domaine borné, ce qui nous fournira les opérateurs $\Lambda^{e,\pm}_{n+\theta}$ dans l'espace de Floquet. Nous rappelons nos notations sur la figure B.15. Rappelons également qu'au dehors de Ω_{int}, les restrictions de la solution de (B.26) à Ω^+ et Ω^-, notées u^n_+ et u^n_-, sont solution de :

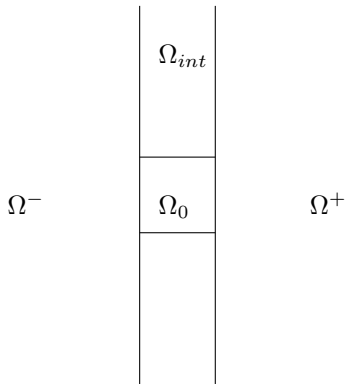


Figure B.15 – Rappel de la géométrie du problème

$$\left|\begin{array}{ll} \gamma\rho\dfrac{u^{n+1}_\pm - u^n_\pm}{\Delta t} + (-\Delta + V)(\theta u^{n+1}_\pm + (1-\theta)u^n_\pm) = 0 & \text{in } \Omega^\pm \quad 0 \le n \le N \\ u^{n+1}_\pm = \varphi^\pm_n & \text{on } \Gamma^\pm \\ u^0_\pm = 0 & \text{in } \Omega^\pm \end{array}\right. \tag{B.27}$$

Notre but est maintenant de montrer que ces problèmes peuvent être résolus directement à partir de la méthode développée au chapitre 5 pour les problèmes de guide. Appliquons la TFB à nos problèmes de demi-plan (B.27). On montre au moyen des mêmes propriétés de la TFB que d'habitude, que :

Théorème B.6. *La transformée de Floquet-Bloch $(\hat{u}^n_\pm)_{0\le n\le N}$ de $(u^n_\pm)_{0\le n\le N}$ est l'unique élément de $L^2(B^\pm_0 \times [0, 2\pi/L])$ (si $B^+_0 =]a_+, +\infty[\times]0, L[$ et $B^-_0 =]-\infty, a_-[\times]0, L[$) qui pour presque tout $\xi \in [0, 2\pi/L]$ soit solution dans $H^1_\xi(B^\pm_0)$ de :*

$$\left|\begin{array}{ll} A(\theta, \Delta t)\hat{u}^{n+1}_\pm(\cdot,\xi) = A(\theta-1, \Delta t)\hat{u}^n_\pm(\cdot,\xi) & \textit{dans } B^\pm_0 \\ \partial_y \hat{u}^{n+1}_{\pm|_{y=L}} = e^{i\xi L}\partial_y \hat{u}^{n+1}_{\pm|_{y=0}} & \\ \hat{u}^0_\pm(\cdot,\xi) = 0 & \textit{dans } B^\pm_0 \\ \hat{u}^{n+1}_\pm(\cdot,\xi) = \hat{\varphi}^\pm_{n+1}(\cdot,\xi) & \textit{sur } \Gamma^\pm_0 \end{array}\right. \tag{B.31}$$

si $\hat{\varphi}^\pm_{n+1}$ est la TFB de $\varphi^\pm_{n+1}$.

Encore une fois, la TFB transforme des problèmes de demi-plan en une famille de problèmes de demi-guide. Mais nous savons résoudre pareils problèmes au moyen de la méthode développée dans le chapitre 5, qui nous permet d'en ramener la résolution à la résolution de problèmes posés en domaine borné. Il nous faut maintenant calculer les opérateurs :

$$(\varphi^\pm_n)_{n\in\mathbb{N}} \longmapsto \left(\partial_\nu u^{n+\theta}_+\{\varphi^+_n\}|_{\Gamma^+}\right)_{n\in\mathbb{N}} \quad (\varphi^\pm_n)_{n\in\mathbb{N}} \longmapsto \left(\partial_\nu u^{n+\theta}_-\{\varphi^-_n\}|_{\Gamma^-}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

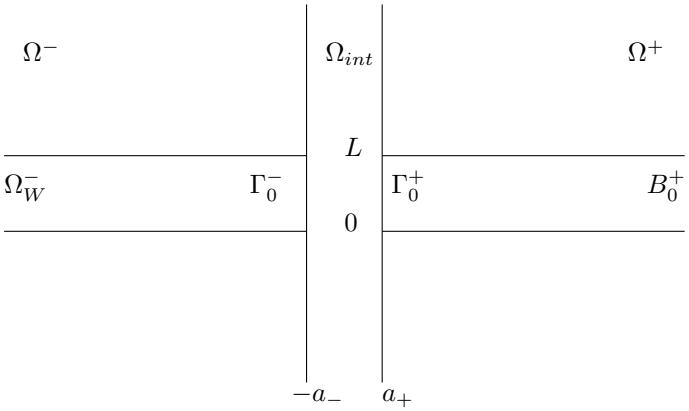


FIGURE B.16 – Notations pour la TFB des problèmes de demi-plan

La TFB étant inversible, nous avons clairement :

$$u_\pm^{n+\theta} = \mathcal{F}^{-1}(\hat{u}_\pm^{n+\theta})$$

Les résultats du chapitre 5, nous permettent décrire :

$$\hat{u}_\pm^n(\cdot,\xi) = \sum_{k=1}^{n} \hat{w}_\pm^k(\mathcal{F}\varphi_{n-k+1}^\pm)(\cdot,\xi)$$

où la famille $(\hat{w}_\pm^n(\cdot,\xi))_{0\le n\le N} \in H_\xi^1(B_0^\pm)^{N+1}$ est définie par récurrence via :

$$\left|\begin{array}{ll} A(\theta,\Delta t)\,\hat{w}_\pm^{n+1}(\varphi)(\cdot,\xi) = A(\theta-1,\Delta t)\,\hat{w}_\pm^n(\varphi)(\cdot,\xi) & \text{dans } B_0^\pm \ \ \forall n\ge 0 \\ \hat{w}_\pm^0(\varphi)(\cdot,\xi) = 0 & \text{dans } B_0^\pm \\ \hat{w}_\pm^1(\varphi)(\cdot,\xi) = \varphi & \text{sur } \Gamma_0^\pm \\ \hat{w}_\pm^{n+1}(\varphi)(\cdot,\xi) = 0 & \text{sur } \Gamma_0^\pm \ \ \forall n\ge 0 \\ \partial_y \hat{w}_\pm^{n+1}(\varphi)_{|_{y=L}} = e^{i\xi L}\partial_y \hat{w}_\pm^{n+1}(\varphi)_{|_{y=0}} & \end{array}\right. \tag{B.32}$$

Alors, comme la TFB commute avec les opérateurs de trace en vertu du lemme A.4, nous en déduisons que :

$$\left(\frac{\partial u_\pm^{n+\theta}}{\partial \nu}\right)_{|_{\Gamma\pm}} = \mathcal{F}^{-1}\left(\sum_{k=1}^{n+1}(\hat{\Lambda}_\pm^k(\xi)\mathcal{F}\varphi_{n+1-k+1}^\pm)(\cdot,\xi)\right) \tag{B.33}$$

par définition des $\hat{\Lambda}_\pm^k(\xi)$ associés aux $\hat{w}_\pm^k(\cdot,\xi)$ (voir chapitre 5). Aussi nous savons comment calculer deux des quatres opérateurs intervenant dans (B.29). Avec les notations introduites précedemment, nous avons en effet montré que :

$$\hat{\Lambda}_{n+\theta}^{e,\pm}\{\hat{\varphi}_k^\pm\}(\cdot,\xi) = -\sum_{k=1}^{n+1}(\hat{\Lambda}_k^\pm(\xi)\hat{\varphi}_{n+1-k+1}^\pm)(\cdot,\xi) \tag{B.34}$$

Nous nous tournons maintenant vers la résolution du problème intérieur posé dans Ω_{int}.

B.2.4 Résolution du problème intérieur

Nous allons maintenant expliquer comment résoudre le problème intérieur. Une fois de plus, nous

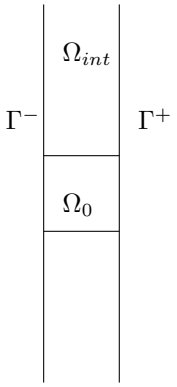


FIGURE B.17 – Configuration intérieure

identifierons une donnée φ_n définie sur Γ_{int} au couple de ses restrictions $(\varphi_n|_{\Gamma^-}, \varphi_n|_{\Gamma^+})$. Rappelons-nous que le problème intérieur était défini par :

$$\left|\begin{array}{ll} A(\theta,\Delta t)u_{int}^{n+1} = A(\theta-1,\Delta t)u_{int}^{n} + \Delta t f^{n+\theta} & \text{dans } \Omega_{int} \\ u_{int}^{n+1} = \varphi_{n+1} & \text{sur } \Gamma_{int} \\ u_{int}^{0} = u_0 & \text{dans } \Omega_{int} \end{array}\right. \tag{B.28}$$

Le principe sous-jacent à notre analyse va être le même que dans le cas harmonique : ce problème est un problème de guide périodique localement perturbé avec des données de Dirichlet inhomogènes. Nous savons résoudre pareils problèmes de guide pour des données homogènes, et nous allons voir que nous pouvons traiter les données inhomogènes par transformée de Floquet-Bloch.

DÉCOMPOSITION DU PROBLÈME INTÉRIEUR

Introduisons l'opérateur non perturbé :

$$A_p(\theta,\Delta t) = \theta\Delta t(-\Delta + V_{int}) + \gamma\rho_{int} I$$

Remarquons que $A(\theta,\Delta t)u - A_p(\theta,\Delta t)u$ sera alors à support dans Ω_0 pour tout $u \in H^1(\Delta,\Omega_{int})$. En l'absence de source, de donnée initiale et de perturbation sur les coefficients, nous considèrerions le problème (l'indice US signifiant encore "unperturbed strip") :

$$\left|\begin{array}{ll} A_p(\theta,\Delta t)u_{US}^{n+1} = A_p(\theta-1,\Delta t)u_{US}^{n} & \text{dans } \Omega_{int} \\ u_{US}^{0} = 0 & \text{dans } \Omega_{int} \\ u_{US}^{n+1} = \varphi_{n+1} & \text{sur } \Gamma_{int} \end{array}\right. \tag{B.35}$$

Nous noterons $u_P^n = u^n - u_{US}^n$ la partie de la solution due aux perturbations (d'où l'indice P). Par construction, elle sera solution de :

$$\begin{aligned} A(\theta,\Delta t)u_P^n =& A(\theta,\Delta t)u^n - A_p(\theta,\Delta t)u_{US}^n + \left[A_p(\theta,\Delta t) - A(\theta,\Delta t)\right]u_{US}^n \\ =& A(\theta-1,\Delta t)u^{n-1} + \Delta t f^{n+\theta} - A_p(\theta-1,\Delta t)u_{US}^{n-1} + \left[A_p(\theta,\Delta t) - A(\theta,\Delta t)\right]u_{US}^n \\ =& A(\theta-1,\Delta t)u_P^{n-1} - \left[A_p(\theta-1,\Delta t) - A(\theta-1,\Delta t)\right]u_{US}^{n-1} \\ &+ \left[A_p(\theta,\Delta t) - A(\theta,\Delta t)\right]u_{US}^n + \Delta t f^{n+\theta} \end{aligned}$$

Sur la frontière Γ_{int}, nous aurons par construction $u_P^n = 0$, ainsi que $u_P^0 = u_0$. Le terme source

$$\left[A_p(\theta-1,\Delta t) - A(\theta-1,\Delta t)\right]u_{US}^{n-1} + \left[A_p(\theta,\Delta t) - A(\theta,\Delta t)\right]u_{US}^n + f^{n+\theta}$$

étant à support compact dans Ω_0, nous avons clairement un problème de la forme traitée au chapitre 5, que nous saurons résoudre pourvu que l'on puisse calculer le terme source, ce qui revient à calculer u_{US}^n.

B.2.5 Résolution du problème aux limites non perturbé

Remarquons qu'à n fixé, la définition de u_{US}^{n+1} ne fait (implicitement) intervenir que les valeurs de $(\varphi_n^{\pm})_{n\in\mathbb{N}}$ pour les temps 1 à n, ce qui fait encore de u_{US}^{n+1} une quantité causale. Nous pouvons alors espérer extraire la dépendance en chaque φ^n, dans l'esprit de la relation (4.8). Par analogie avec (B.32), nous introduisons $\forall\varphi \in H^{1/2}(\Gamma_{int})$:

$$\left|\begin{array}{ll} A_p(\theta,\Delta t)w_I^{n+1}(\varphi) = A_p(\theta-1,\Delta t)w_I^n(\varphi) & \text{dans } \Omega_{int} \\ w_I^0(\varphi) = 0 & \text{dans } \Omega_{int} \\ w_I^1(\varphi) = \varphi & \text{sur } \Gamma_{int} \\ w_I^{n+1}(\varphi) = 0 & \text{sur } \Gamma_{int} \quad \forall n \geq 1 \end{array}\right. \tag{B.36}$$

Alors, on démontre (exactement de la même façon que l'on démontre (4.8)) que :

Théorème B.7. *Poour tout $n \geq 1$:*

$$u_{US}^n = \sum_{k=1}^{n} w_I^k(\varphi_{n-k+1}) \tag{B.37}$$

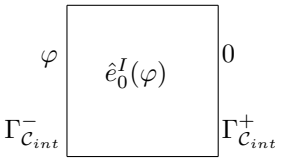
Par conséquent, il nous suffit de déterminer les $(w_n^I(\varphi))_{0\leq n\leq N}$, ce que nous allons chercher à ramener à la résolution de problèmes posés en domaine borné. Pour y parvenir, nous utilisons une fois de plus la TFB dans la direction y, les coefficients du problème satisfait par les $(w_n^I(\varphi))_{0\leq n\leq N}$ étant périodiques dans cette direction. On montre une fois de plus que :

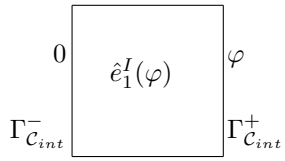
Théorème B.8. *La transformée de Floquet-Bloch $(\hat{w}_I^n(\hat{\varphi}))_{0\leq n\leq N}$ de $(w_I^n(\varphi))_{0\leq n\leq N}$ est l'unique élément de $L^2(\mathcal{C}_{int}\times[0,2\pi/L])$ qui pour presque tout $\xi\in[0,2\pi/L]$ soit solution dans $H^1_\xi(\mathcal{C}_{int})$ de (avec $\mathcal{C}_{int} =]a_-,a_+[\times]0,L[$, $\Gamma^+_{\mathcal{C}_{int}} = \{x=a_+\}\cap\partial\mathcal{C}_{int}$ et $\Gamma^-_{\mathcal{C}_{int}} = \{x=a_-\}\cap\partial\mathcal{C}_{int}$) :*

$$\left|\begin{array}{ll} A_p(\theta,\Delta t)\hat{w}_I^{n+1}(\hat{\varphi}) = A_p(\theta-1,\Delta t)\hat{w}_I^n(\hat{\varphi}) & \textit{dans } \mathcal{C}_{int} \\ \hat{w}_I^0(\hat{\varphi}) = 0 & \textit{dans } \mathcal{C}_{int} \\ \hat{w}_I^1(\hat{\varphi}) = \hat{\varphi} & \textit{sur } \Gamma^+_{\mathcal{C}_{int}}\times\Gamma^-_{\mathcal{C}_{int}} \\ \hat{w}_I^{n+1}(\hat{\varphi}) = 0 & \textit{sur } \Gamma^+_{\mathcal{C}_{int}}\times\Gamma^-_{\mathcal{C}_{int}} \quad \forall n\geq 1 \\ \partial_y\hat{w}_I^{n+1}(\hat{\varphi})_{|_{y=L}} = e^{i\xi L}\partial_y\hat{w}_I^{n+1}(\hat{\varphi})_{|_{y=0}} & \end{array}\right. \tag{B.38}$$

si $\hat{\varphi} = \mathcal{F}\varphi$.

Pour effectuer en pratique le calcul des fonctions $\hat{w}^I$, nous introduisons, pour presque tout ξ, et pour tout $\varphi\in H^{1/2}_\xi(]0,L[)$, les problèmes de cellule intérieurs, solutions dans $H^1_\xi(\mathcal{C}_{int})$ de :





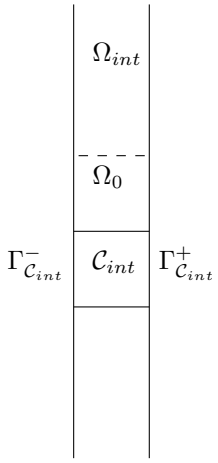
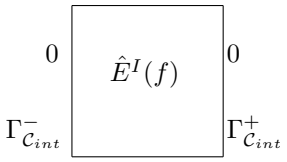


FIGURE B.18 – Notations utilisées pour la TFB du problème intérieur

$$\left|\begin{array}{ll} A_p(\theta,\Delta t)\hat{e}_0^I(\varphi)=0 & \text{dans } \mathcal{C}_{int} \\ \partial_y\hat{e}_0^I(\varphi)_{|_{y=L}}=e^{i\xi L}\partial_y\hat{e}_0^I(\varphi)_{|_{y=0}}\hat{e}_0^I(\varphi)=\varphi & \text{sur } \Gamma^-_{\mathcal{C}_{int}} \\ \hat{e}_0^I(\varphi)=0 & \text{sur } \Gamma^+_{\mathcal{C}_{int}} \end{array}\right. \tag{B.39}$$

$$\left|\begin{array}{ll} A_p(\theta,\Delta t)\hat{e}_1^I(\varphi)=0 & \text{dans } \mathcal{C}_{int} \\ \partial_y\hat{e}_1^I(\varphi)_{|_{y=L}}=e^{i\xi L}\partial_y\hat{e}_1^I(\varphi)_{|_{y=0}}\hat{e}_1^I(\varphi)=0 & \text{sur } \Gamma^-_{\mathcal{C}_{int}} \\ \hat{e}_1^I(\varphi)=\varphi & \text{surn } \Gamma^+_{\mathcal{C}_{int}} \end{array}\right. \tag{B.40}$$

Ces deux problèmes de cellule vont nous permettre de gérer les conditions aux limites. Pour traiter le second membre, nous aurons besoin d'un problème de cellule supplémentaire, défini comme la solution dans $H^1_\xi(\mathcal{C}_{int})$ pour tout $f \in H^1(\Delta,\mathcal{C}_{int})$ of :



$$\left|\begin{array}{ll} A_p(\theta,\Delta t)\hat{E}^I(f)=A_p(\theta-1,\Delta t)f & \text{in } \mathcal{D}'(\mathcal{C}_{int}) \\ \partial_y\hat{E}^I(f)_{|_{y=L}}=e^{i\xi L}\partial_y\hat{E}^I(f)_{|_{y=0}}\hat{E}^I(f)|_{\Gamma_i}=0 & \text{on } \Gamma^\pm_{\mathcal{C}_{int}} \end{array}\right. \tag{B.41}$$

Alors, on démontre sans peine (par unicité et linéarité) que :

Théorème B.9. *Pour tout* $\varphi=(\varphi^-,\varphi^+)\in H^{1/2}_\xi(]0,L[)\times H^{1/2}_\xi(]0,L[)$ *:*

$$\left|\begin{array}{l} \hat{w}_I^1(\varphi)=\hat{e}_0^I(\varphi^-)+\hat{e}_1^I(\varphi^+) \\ \hat{w}_I^n(\varphi)=\hat{E}^I(\hat{w}_I^{n-1}(\varphi)) \end{array}\right. \tag{B.42}$$

Puisque nous avons besoin de connaître $\partial_\nu u_{int}^{n+\theta}|_{\Gamma_{int}}$ pour construire les opérateurs intervenant dans (B.29), reste maintenant à exprimer $\partial_\nu u_{US}^{n+\theta}|_{\Gamma_{int}}$. Immédiatement, si on définit :

$$\begin{aligned}\Lambda_I^n : H^{1/2}(\Gamma_{int}) &\longrightarrow H^{-1/2}(\Gamma_{int})\\ \varphi &\longmapsto \left(\theta\frac{\partial w_I^n(\varphi)}{\partial\nu}|_{\Gamma^-} + (\theta-1)\frac{\partial w_I^{n-1}(\varphi)}{\partial\nu}|_{\Gamma^-},\right.\\ &\qquad \left.\theta\frac{\partial w_n^I(\varphi)}{\partial\nu}|_{\Gamma^+} + (\theta-1)\frac{\partial w_{n-1}^I(\varphi)}{\partial\nu}|_{\Gamma^+}\right)\end{aligned}$$

nous avons :

$$\frac{\partial u_{US}^{n+\theta}}{\partial\nu}|_{\Gamma_{int}} = \sum_{k=1}^{n+1}\Lambda_k^I(\varphi_{n+1-k+1}) = \sum_{k=1}^{n+1}\partial_\nu w_I^{k-1+\theta}(\varphi_{n+1-k+1})$$

D'autre part, en utilisant la TFB nous obtenons :

$$\frac{\partial w_I^{n-1+\theta}(\varphi)}{\partial\nu}|_{\Gamma^\pm} = \mathcal{F}^{-1}\frac{\partial\hat{w}_I^{n-1+\theta}(\mathcal{F}\varphi)}{\partial\nu}|_{\Gamma^\pm_{\mathcal{C}_{int}}}$$

Nous notons :

$$\begin{aligned}\hat{\Lambda}_I^n : H_\xi^{1/2}(]0,L[)\times H_\xi^{1/2}(]0,L[) &\longrightarrow H_\xi^{1/2}(]0,L[)'\times H_\xi^{1/2}(]0,L[)'\\ \varphi &\longmapsto \left(\theta\frac{\partial\hat{w}_n^I(\varphi)}{\partial\nu}|_{\Gamma^-_{\mathcal{C}_{int}}} + (\theta-1)\partial_\nu\hat{w}_{n-1}^I(\varphi)|_{\Gamma^-_{\mathcal{C}_{int}}},\right.\\ &\qquad \left.\theta\partial_\nu\hat{w}_n^I(\varphi)|_{\Gamma^+_{\mathcal{C}_{int}}} + (\theta-1)\partial_\nu\hat{w}_{n-1}^I(\varphi)|_{\Gamma^+_{\mathcal{C}_{int}}}\right)\end{aligned}$$

alors :

$$\partial_\nu w_{n-1+\theta}^I(\varphi)|_{\Gamma^\pm} = \mathcal{F}^{-1}\hat{\Lambda}_{n-1+\theta}^I(\mathcal{F}\varphi)_{\Gamma^\pm}$$

Ce qui n'est rien d'autre que :

$$\Lambda_n^I\varphi = \mathcal{F}^{-1}\left(\hat{\Lambda}_I^n\mathcal{F}\varphi\right)$$

de sorte que nous pouvons finalement écrire :

$$\partial_\nu u_{US}^{n+\theta}|_{\Gamma_{int}} = \sum_{k=1}^{n+1}\mathcal{F}^{-1}\left(\hat{\Lambda}_I^k(\mathcal{F}\varphi_{n+1-k+1})\right)$$

Ne reste plus qu'à calculer ces $\hat{\Lambda}_I^k$, et le problème intérieur non perturbé sera entièrement résolu dans l'espace de Floquet. Nous introduisons les opérateurs de trace normale associé aux problèmes de cellule :

$$\begin{aligned}\hat{T}_{00}^I : H_\xi^{1/2}(]0,L[) &\longrightarrow H_\xi^{1/2}(]0,L[)'\\ \varphi &\longmapsto \theta\partial_\nu\hat{e}_0^I(\varphi)|_{\Gamma^-_{\mathcal{C}_{int}}}\end{aligned}\qquad\begin{aligned}\hat{T}_{01}^I : H_\xi^{1/2}(]0,L[) &\longrightarrow H_\xi^{1/2}(]0,L[)'\\ \varphi &\longmapsto \theta\partial_\nu\hat{e}_0^I(\varphi)|_{\Gamma^+_{\mathcal{C}_{int}}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{T}_{10}^I : H_\xi^{1/2}(]0,L[) &\longrightarrow H_\xi^{1/2}(]0,L[)'\\ \varphi &\longmapsto \theta\partial_\nu\hat{e}_1^I(\varphi)|_{\Gamma^-_{\mathcal{C}_{int}}}\end{aligned}\qquad\begin{aligned}\hat{T}_{11}^I : H_\xi^{1/2}(]0,L[) &\longrightarrow H_\xi^{1/2}(]0,L[)'\\ \varphi &\longmapsto \theta\partial_\nu\hat{e}_1^I(\varphi)|_{\Gamma^+_{\mathcal{C}_{int}}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{T}_0^I : H^1(\Delta,\mathcal{C}_{int}) &\longrightarrow H_\xi^{1/2}(]0,L[)'\\ f &\longmapsto \theta\partial_\nu\hat{E}^I(f)|_{\Gamma^-_{\mathcal{C}_{int}}} + (1-\theta)\partial_\nu f|_{\Gamma^-_{\mathcal{C}_{int}}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{T}_1^I : H^1(\Delta, \mathcal{C}_{int}) &\longrightarrow H_\xi^{1/2}(]0,L[)' \\ f &\longmapsto \theta\partial_\nu \hat{E}^I(f)|_{\Gamma^+_{\mathcal{C}_{int}}} + (1-\theta)\partial_\nu f|_{\Gamma^+_{\mathcal{C}_{int}}}\end{aligned}$$

Alors nous sommes capables d'en déduire, par récurrence, les opérateurs que nous recherchons, comme nous avons, en conséquence direct du théorème B.9 :

Théorème B.10. *Pour tout* $\varphi = (\varphi^-, \varphi^+) \in H_\xi^{1/2}(]0,L[) \times H_\xi^{1/2}(]0,L[)$ *:*

$$\left|\begin{array}{l} \hat{\Lambda}_I^1\varphi = (\hat{T}_{00}^I\varphi^- + \hat{T}_{10}^I\varphi^+, \hat{T}_{01}^I\varphi^- + \hat{T}_{11}^I\varphi^+) \\ \hat{\Lambda}_I^n\varphi = (\hat{T}_0^I(\hat{w}_I^{n-1}(\varphi)), \hat{T}_1^I(\hat{w}_I^{n-1}(\varphi))) \end{array}\right. \tag{B.43}$$

Résolution du problème intérieur non perturbé

Rappelons nous que le problème intérieur perturbé s'écrit : :

$$\left|\begin{array}{lll} A(\theta,\Delta t)u_P^n = & A(\theta-1,\Delta t)u_P^{n-1} - [A_p(\theta-1,\Delta t) - A(\theta-1,\Delta t)]\, u_{US}^{n-1} & \\ & + [A_p(\theta,\Delta t) - A(\theta,\Delta t)]\, u_{US}^n + \Delta t f^{n+\theta} & \text{in } \Omega_{int} \\ u_P^0 = u_0 & & \text{dans } \Omega_{int} \\ u_P^n = 0 & & \text{sur } \Gamma_{int} \end{array}\right. \tag{B.44}$$

Nous savons, depuis le chapitre 5, que ce problème est équivalent à un problème posé sur Ω_0 faisant

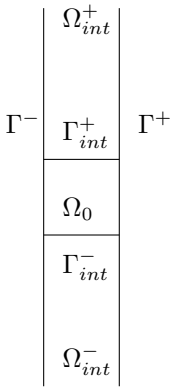


Figure B.19 – Rappel de la configuration intérieure

intervenir les opérateurs DtN correspondant aux deux demi-guides infinis Ω_{int}^+ et Ω_{int}^- (voir figure B.19). Rappelons en effet qu'il suffit de définir :

$$\left|\begin{array}{ll} A(\theta,\Delta t)\, w_\pm^{n+1}(\varphi) = A(\theta-1,\Delta t)\, w_\pm^n(\varphi) & \text{dans } \Omega_{int}^\pm \ \ \forall n \geq 0 \\ w_\pm^0(\varphi) = 0 & \text{dans } \Omega_{int}^\pm \\ w_\pm^1(\varphi) = \varphi & \text{sur } \Gamma_{int}^\pm \\ w_\pm^{n+1}(\varphi) = 0 & \text{sur } \Gamma_{int}^\pm \ \ \forall n \geq 0 \\ (DBC) \text{ for } w_{n+1}^\pm(\varphi) \ \ \forall n \geq 0 & \text{sur } \partial\Omega_{int}^\pm \cap \Gamma_{int} \end{array}\right. \tag{B.45}$$

qui se calculent par la méthode de chapitre 5, ainsi que les opérateurs DtN associés :

$$\begin{aligned}\Lambda_\pm^{n,int} : H_{00}^{1/2}(\Gamma_{int}^\pm) &\longrightarrow H_{00}^{-1/2}(\Gamma_{int}^\pm) \\ \varphi &\longmapsto \theta\partial_\nu w_\pm^n(\varphi)|_{\Gamma_{int}^\pm} + (\theta-1)\partial_\nu w_\pm^{n-1}(\varphi)|_{\Gamma_{int}^\pm}\end{aligned}$$

Alors, le problème (B.44) est équivalent à :

$$\left|\begin{array}{ll} A(\theta,\Delta t)u_P^n = A(\theta-1,\Delta t)u_P^{n-1} - \left[A_p(\theta-1,\Delta t) - A(\theta-1,\Delta t)\right] u_{US}^{n-1} & \\ + \left[A_p(\theta,\Delta t) - A(\theta,\Delta t)\right] u_{US}^n + \Delta t f^{n+\theta} & \text{dans } \Omega_0 \\ \Delta t \dfrac{\partial u_P^{n-1+\theta}}{\partial \nu}|_{\Gamma_{int}^{\pm}} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \Lambda_{\pm}^{k,int} u_P^{n-k+1}|_{\Gamma_{int}^{\pm}} = 0 & \text{on } \Gamma_{int}^{\pm} \\ u_P^0 = u_0 & \text{dans } \Omega_0 \\ u_P^n = 0 & \text{sur } \Gamma_{int} \cap \partial\Omega_0 \end{array}\right. \tag{B.46}$$

Encore une fois, on pourrait avoir l'impression que le problème est complètement résolu à ce stade, et que nous pouvons écrire la condition de transmission (B.29) (si tant est que nous puissions exprimer explicitement la TFB de la dérivée normale de u_{int}^n sur $\partial\Omega_{int}$). Mais notre expérience du cas harmonique nous apprend que nous devons au préalable extirper la dépendance en φ^n de façon explicite. Écrivons que :

$$\begin{aligned} A(\theta,\Delta t)u_P^n =& A(\theta-1,\Delta t)u_P^{n-1} - \left[A_p(\theta-1,\Delta t) - A(\theta-1,\Delta t)\right] u_{US}^{n-1} \\ &+ \left[A_p(\theta,\Delta t) - A(\theta,\Delta t)\right] u_{US}^n + \Delta t f^{n+\theta} \end{aligned}$$

Dans cette expression, nous voyons en vertu de (4.8) et (B.37) que le seul terme faisant intervenir φ^n est u_{US}^n. Si l'on utilise (B.37) pour expliciter la dépendance en φ_n, nous obtenons :

$$\begin{aligned} A(\theta,\Delta t)u_P^n =& A(\theta-1,\Delta t)u_P^{n-1} - \left[A_p(\theta-1,\Delta t) - A(\theta-1,\Delta t)\right] u_{US}^{n-1} \\ &+ \Delta t f^{n+\theta} + \left[A_p(\theta,\Delta t) - A(\theta,\Delta t)\right] \sum_{k=2}^{n} w_I^k(\varphi_{n-k+1}) \\ &+ \left[A_p(\theta,\Delta t) - A(\theta,\Delta t)\right] w_I^1(\varphi_n) \end{aligned}$$

Remarquons alors que la façon dont u_P^n dépend de φ_n est elle indépendante de n. Aussi, pour extraire cette dépendance, il nous suffit d'extraire l'unique problème :

$$\left|\begin{array}{ll} A(\theta,\Delta t)B(\varphi) = \left[A_p(\theta,\Delta t) - A(\theta,\Delta t)\right] w_I^1(\varphi) & \text{dans } \Omega_{int} \\ B(\varphi) = 0 & \text{sur } \Gamma_{int} \cap \partial\Omega_0 \end{array}\right. \tag{B.47}$$

Remarquons immédiatement que, de la même façon qu'en régime harmonique, nous ne savons calculer le second membre de ce problème que via sa TFB. Aussi, il est naturel d'exprimer ce second membre comme :

$$\begin{array}{rcl} F_P^1 : L^2(0,2\pi/L,H_\xi^{1/2}(]0,L[)^2) & \longrightarrow & H^1(\Omega_0) \\ \hat{\varphi} & \longmapsto & F_P^1\hat{\varphi} \end{array}$$

où :

$$F_P^1\hat{\varphi}|_{\Omega_0^p} = -(\omega^2 + i\varepsilon\omega)\sqrt{\frac{L}{2\pi}}\left[A_p(\theta,\Delta t) - A(\theta,\Delta t)\right]\hat{w}_I^1(\hat{\varphi})(\cdot,\xi)e^{ip\xi L}d\xi$$

et $F_P^1\hat{\varphi}|_{\Omega_{int}\setminus\Omega_0} = 0$. Nous poserons alors, avec un léger abus de notation :

$$\begin{array}{rcl} B : L^2(0,2\pi/L,H_\xi^{1/2}(]0,L[)^2) & \longrightarrow & H^1(\Omega_{int}) \\ \hat{\varphi} & \longmapsto & B(\hat{\varphi}) \end{array}$$

où :

$$\left|\begin{array}{ll} A(\theta,\Delta t)B(\hat{\varphi}) = F_P^1\hat{\varphi} & \text{dans } \Omega_{int} \\ B(\hat{\varphi}) = 0 & \text{sur } \Gamma_{int}\cap\partial\Omega_0 \end{array}\right. \tag{B.48}$$

et nous travaillerons désormais avec cette version du problème. Il ne s'agit ni plus ni moins que d'un premier pas de temps de problème de guide localement perturbé, aussi nous savons en vertu des résultats du chapitre 5 qu'il est équivalent de résoudre :

$$\left|\begin{array}{ll} A(\theta,\Delta t)B(\hat{\varphi}) = F_P^1\hat{\varphi} & \text{dans } \Omega_0 \\ \Delta t\partial_\nu B(\hat{\varphi})|_{\Gamma_{int}^\pm} + \Lambda_{1,int}^\pm B(\hat{\varphi})|_{\Gamma_{int}^\pm} = 0 & \text{sur } \Gamma_{int}^\pm \\ B(\hat{\varphi}) = 0 & \text{sur } \Gamma_{int} \end{array}\right. \tag{B.49}$$

Considérons maintenant la différence entre u_P^n et $B(\hat{\varphi}_n)$. Nous posons $\widetilde{u}_P^n = u_P^n - B(\hat{\varphi}_n)$. Elle est solution de, en faisant la différence entre (B.46) et (B.49) :

$$\left|\begin{array}{ll} A(\theta,\Delta t)\widetilde{u}_P^n = A(\theta-1,\Delta t)u_P^{n-1} - \left[A_p(\theta-1,\Delta t) - A(\theta-1,\Delta t)\right]u_{US}^{n-1} & \\ + \left[A_p(\theta,\Delta t) - A(\theta,\Delta t)\right]\displaystyle\sum_{k=2}^{n} w_k^I(\varphi_{n-k+1}) + \Delta t f^{n+\theta} & \text{in } \Omega_0 \\ \theta\Delta t\partial_\nu\widetilde{u}_P^n|_{\Gamma_{int}^\pm} + \Lambda_{1,int}^\pm\widetilde{u}_P^n|_{\Gamma_{int}^\pm} = (\theta-1)\Delta t\partial_\nu u_P^{n-1}|_{\Gamma_{int}^\pm} & \\ -\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\Lambda_{k,int}^\pm u_P^{n-k+1}|_{\Gamma_{int}^\pm} & \text{on } \Gamma_{int}^\pm \\ \widetilde{u}_P^n = 0 & \text{on } \Gamma_{int}\cap\partial\Omega_0 \end{array}\right. \tag{B.50}$$

Formellement, il est également possible de voir $\widetilde{u}_P^n$ comme la solution d'un problème de guide localement perturbé, posé sur Ω_{int}, et qu'il sera facile de calculer par la méthode du chapitre 5. En effet, nous avons :

Théorème B.11. *Soit $\widetilde{\varphi}_n^\pm$ la famille définie par :*

$$\widetilde{\varphi}_k^\pm = u_P^k|_{\Gamma_{int}^\pm} \text{ si } k<n \quad \text{et } \widetilde{\varphi}_n^\pm = \widetilde{u}_P^n|_{\Gamma_{int}^\pm}$$

Alors, dans $\Omega_{int}^\pm$, nous avons :

$$\widetilde{u}_p^n = \sum_{k=1}^{n} w_\pm^k(\widetilde{\varphi}_{n-k+1}^\pm) \tag{B.51}$$

Démonstration. Soit v_n la solution sur Ω_{int} de la même récurrence que u_p^n, jusqu'au temps n (exclu). Au temps n, on utilise la source modifiée :

$$-\left[A_p(\theta-1,\Delta t) - A(\theta-1,\Delta t)\right]u_{US}^{n-1} + \left[A_p(\theta,\Delta t) - A(\theta,\Delta t)\right]\sum_{k=2}^{n} w_I^k(\varphi_{n-k+1}) + \Delta t f^{n+\theta}$$

de sorte que v_n soit solution de :

$$\left|\begin{array}{ll} A(\theta,\Delta t)v^n = A(\theta-1,\Delta t)v^{n-1} - \left[A_p(\theta-1,\Delta t) - A(\theta-1,\Delta t)\right]u_{US}^{n-1} & \\ + \left[A_p(\theta,\Delta t) - A(\theta,\Delta t)\right]\displaystyle\sum_{k=2}^{n} w_I^k(\varphi_{n-k+1}) + \Delta t f^{n+\theta} & \text{dans } \Omega_0 \\ v_P^n = 0 & \text{sur } \Gamma_{int} \end{array}\right.$$

Les résultats du chapitre 5 nous apprennent que ce problème pour v_n est équivalent à un problème posé sur Ω_0, qui est exactement celui satisfait par $\widetilde{u}_p^n$. Par unicité et en vertu du théorème de prolongement unique, on en déduit que $\widetilde{u}_p^n = v_n$ dans tout Ω_{int}. Le résultat se déduit alors immédiatement de (4.8). □

Calcul des opérateurs DtN pour le problème intérieur

Nous allons maintenant expliquer comment il est possible de calculer $\partial_\nu u_P^{n+\theta}|_{\Gamma_{int}}$, pour tout temps n, dans l'espace de Floquet. Bien entendu, nous allons séparément calculer $\partial_\nu \widetilde{u}_P^n|_{\Gamma_{int}}$ et $\partial_\nu B(\hat{\varphi}_n)$. Nous aurons besoin d'un complément de notations pour cela. Nous introduisons (voir figure B.20) :

. Les frontières haute et basse de Ω_0, $\Gamma_{int}^{\pm} = \partial\Omega_0 \cap \{y = b_\pm\}$

. On découpe $\Gamma^\pm \cap \partial\Omega_{int}^\pm$ en sous-domaines correspondant aux cellules de périodicité :

$$\Gamma_j^{++} = \Gamma^+ \cap \{y \in [b_+ + (j-1)L, b_+ + jL]\}$$
$$\Gamma_j^{-+} = \Gamma^- \cap \{y \in [b_+ + (j-1)L, b_+ + jL]\}$$
$$\Gamma_j^{+-} = \Gamma^+ \cap \{y \in [b_- - (j-1)L, b_- - jL]\}$$
$$\Gamma_j^{--} = \Gamma^- \cap \{y \in [b_- - (j-1)L, b_- - jL]\}$$

. Les cellules de périodicité sont notées :

$$\mathcal{C}_j^\pm = \Omega_{int}^\pm \cap \{y \in [b_\pm \pm (j-1)L, b_\pm \pm jL\}$$

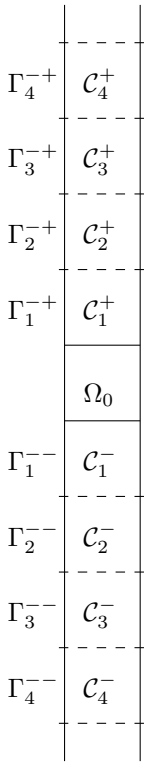


Figure B.20 – Notations détaillées pour le domaine intérieur

Le calcul de $\partial_\nu B(\hat{\varphi}_n)$ suit rigoureusement les mêmes principes que dans le cas harmonique. Nous définissons

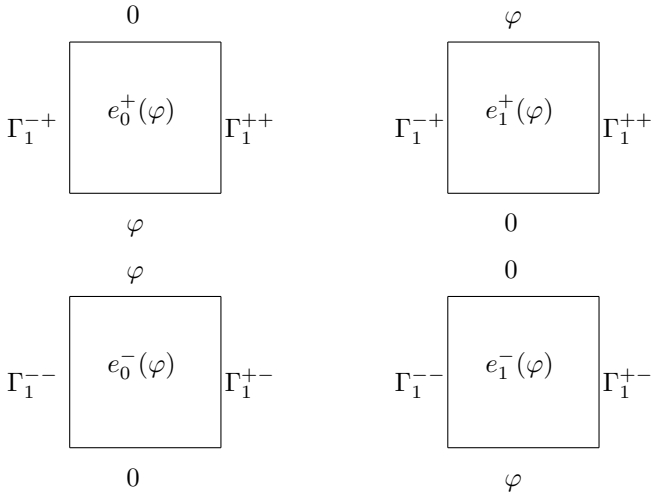
$$\begin{array}{rcl} D_B^\pm : H_\xi^{1/2}(]0,L[) \times H_\xi^{1/2}(]0,L[) & \longrightarrow & H^{1/2}([a_-,a_+]) \\ \varphi & \longmapsto & B(\hat{\varphi})|_{\Gamma_{int}^\pm} \end{array}$$

Alors nous savons que dans $\Omega_{int}^{\pm}$:

$$B(\varphi)|_{\Omega_{int}^{\pm}} = w_1^{\pm}(D_B^{\pm}\varphi)$$

et dans chaque cellule, nous avons :

$$B(\varphi)|_{\mathcal{C}_j^{\pm}} = e_0^{\pm}((R_1^{\pm})^{j-1}D_B^{\pm}\varphi) + e_1^{\pm}((R_1^{\pm})^{j}D_B^{\pm}\varphi)$$



Nous définissons alors les opérateurs de trace suivant, pour $i = 0, 1$:

$$\begin{aligned} N_i^{++} : H^{1/2}([a-, a_+]) &\longrightarrow H^{-1/2}([0, L]) \\ \varphi &\longmapsto \theta \frac{\partial e_i^+(\varphi)}{\partial \nu}|_{\Gamma_1^{++}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_i^{-+} : H^{1/2}([a-, a_+]) &\longrightarrow H^{-1/2}([0, L]) \\ \varphi &\longmapsto \theta \frac{\partial e_i^+(\varphi)}{\partial \nu}|_{\Gamma_1^{-+}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_i^{+-} : H^{1/2}([a-, a_+]) &\longrightarrow H^{-1/2}([0, L]) \\ \varphi &\longmapsto \theta \frac{\partial e_i^-(\varphi)}{\partial \nu}|_{\Gamma_1^{+-}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_i^{--} : H^{1/2}([a-, a_+]) &\longrightarrow H^{-1/2}([0, L]) \\ \varphi &\longmapsto \theta \frac{\partial e_i^-(\varphi)}{\partial \nu}|_{\Gamma_1^{--}} \end{aligned}$$

La TFB de $\theta\partial_\nu B(\hat{\varphi})|_{\Gamma^\pm}$, en vertu du lemme A.4, se calcule via :

$$\mathcal{F}\left(\theta\partial_\nu B(\hat{\varphi})|_{\Gamma^\pm}\right)(\cdot, \xi) = \theta\partial_\nu\left(\mathcal{F}B(\hat{\varphi})\right)|_{\Gamma^\pm_{\mathcal{C}_{int}}}(\cdot, \xi)$$

Puis, on montre, exactement de la même façon que l'on montre le lemme B.1 que, si $M = \dfrac{b_+ - b_-}{L}$:

Lemme B.2. *Pour tout $\hat{\varphi} \in H_\xi^{1/2}(]0,L[) \times H_\xi^{1/2}(]0,L[)$, la TFB de $B(\hat{\varphi})$ est donnée par :*

$$\begin{aligned}\mathcal{F}B(\hat{\varphi}) = &\sqrt{\frac{L}{2\pi}} e^{-i(M+1)\xi L}(E_0^+ + E_1^+ R_1^+)(I_d - R_1^+ e^{-i\xi L})^{-1} D_B^+ v \\ &+\sqrt{\frac{L}{2\pi}} \sum_{j=1}^{M-1} B(\hat{\varphi})|_{\Omega_0 \cap \{y \in [b_- + jL,(j+1)L]\}} e^{-ij\xi L} \\ &+\sqrt{\frac{L}{2\pi}} e^{i\xi L}(E_0^- + E_1^- R_1^-)(I_d - R_1^- e^{i\xi L})^{-1} D_B^- \hat{\varphi}\end{aligned} \tag{B.52}$$

où $E_i^\pm$ est l'opérateur qui à $\varphi \in H^{1/2}([a-,a_+])$ associe $e_i^\pm(\varphi)$.

En appliquant l'opérateur de trace normale, on obtient directement que :

Théorème B.12. *Soit, pour $j = 0 \dots M-1$:*

$$\begin{aligned}\Lambda_{B0,j}^\pm : H_\xi^{1/2}(]0,L[) \times H_\xi^{1/2}(]0,L[) &\longrightarrow H^{-1/2}([b_- + jL,(j+1)L]) \\ \varphi &\longmapsto \theta \Delta t \partial_\nu B(\hat{\varphi})|_{\partial\Omega_0 \cap \Gamma^\pm \cap \{y \in [b_- + jL,(j+1)L]\}}\end{aligned}$$

Pour tout $\hat{\varphi} \in H_\xi^{1/2}(]0,L[) \times H_\xi^{1/2}(]0,L[)$, la TFB de la trace normale de $B(\hat{\varphi})$ est donnée par :

$$\begin{aligned}\hat{\Lambda}_B^\pm(\xi)\hat{\varphi} = \mathcal{F}\theta\partial_\nu B(\hat{\varphi}))|_{\Gamma^\pm}(\cdot,\xi) = &\sqrt{\frac{L}{2\pi}} e^{-i(M+1)\xi L}(N_0^{\pm+} + N_1^{\pm+} R_1^+)(I_d - R_1^+ e^{-i\xi L})^{-1} D_B^+ \hat{\varphi} \\ &+\sqrt{\frac{L}{2\pi}} \sum_{j=1}^{M-1} \Lambda_{B0,j}^\pm \hat{\varphi} e^{-ij\xi L} \\ &+\sqrt{\frac{L}{2\pi}} e^{i\xi L}(N_0^{\pm-} + N_1^{\pm-} R_1^-)(I_d - R_1^- e^{i\xi L})^{-1} D_B^- \hat{\varphi}\end{aligned}$$

Une fois de plus, remarquons que la formule ci-dessus ne nécessite que des opérateurs déterminés à partir de la résolution de problèmes posés en domaine borné. Passons maintenant au calcul de la trace normale de $\widetilde{u}_P^n$. Nous allons encore effectuer au préalable le calcul de la TFB de $\widetilde{u}_P^n$, puis nous lui appliquerons l'opérateur de trace. Nous aurons besoin pour cela du résultat suivant :

Lemme B.3. *Soit :*

$$\begin{aligned}W_{k,j}^\pm : H^{1/2}([a_-,a_+]) &\longrightarrow H^1(\Delta, \mathcal{C}_j^\pm) \\ \varphi &\longmapsto w_\pm^k(\varphi)|_{\mathcal{C}_j^\pm}\end{aligned}$$

ainsi que les deux opérateurs :

$$\mathcal{I}_n^+ \varphi = \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \sum_{j=1}^{+\infty} W_{k,j}^+ \varphi e^{-i(M+j)\xi L} \quad \mathcal{I}_n^- \varphi = \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \sum_{j=1}^{+\infty} W_{k,j}^- \varphi e^{ij\xi L}$$

Alors ces deux opérateurs sont bien définis pour tout n, i.e les séries convergent en norme d'opérateur. De plus nous avons :

$$\mathcal{I}_1^+ = \sqrt{\frac{L}{2\pi}} e^{-i(M+1)\xi L}(E_0^+ + E_1^+ R_1^+)(I_d - R_1^+ e^{-i\xi L})^{-1}$$

et

$$\mathcal{I}_1^+ = \sqrt{\frac{L}{2\pi}} e^{i\xi L}(E_0^- + E_1^- R_1^-)(I_d - R_1^- e^{i\xi L})^{-1}$$

et pour tout n

$$\mathcal{I}_n^+ = (\sqrt{\frac{L}{2\pi}} e^{-i(M+1)\xi L} W_{n,1}^+ + e^{-i\xi L} \sum_{k=2}^{n} \mathcal{I}_k^+ R_{n-k+1}^+)(I - R_1^+ e^{-i\xi L})^{-1}$$

ainsi que

$$\mathcal{I}_n^- = (\sqrt{\frac{L}{2\pi}} e^{i\xi L} W_{n,1}^- + e^{i\xi L} \sum_{k=2}^{n} \mathcal{I}_k^- R_{n-k+1}^-)(I - R_1^- e^{i\xi L})^{-1}$$

Démonstration. Nous allons démontrer ce résultat par récurrence, et nous restreindre au cas +, l'autre se traitant exactement de la même manière. Dans toute la preuve, nous noterons $I_n^{J,\pm}$ les sommes partielles jusqu'au rang J, i.e :

$$\mathcal{I}_n^{J,+}\varphi = \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \sum_{j=1}^{J} W_{n,j}^+ \varphi e^{-i(M+j)\xi L}$$

Nous commençons par le cas $n = 1$. Nous avons :

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_1^{J,+}\varphi &= \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \sum_{j=1}^{J} W_{1,j}^+ \varphi e^{-i(M+j)\xi L} \\ &= \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \sum_{j=1}^{J} (E_0^+ + E_1^+ R_1^+)(R_1^+)^{j-1} \varphi e^{-i(M+j)\xi L}\end{aligned}$$

Nous utilisons de nouveau le fait que $||R_1^+|| < 1$ si bien que la série est convergente, avec pour limite :

$$\mathcal{I}_1^+ = \sqrt{\frac{L}{2\pi}} e^{-i(M+1)\xi L}(E_0^+ + E_1^+ R_1^+)(I_d - R_1^+ e^{-i\xi L})^{-1}$$

De plus, en norme nous avons :

$$||\mathcal{I}_1^{J,+}\varphi||_{L^2([0,2\pi/L]H^1(\times\mathcal{C}^+))} \leq \sqrt{\frac{2\pi}{L}} \sum_{j=1}^{J} (||E_0^+|| + ||E_1^+||\ ||R_1^|||)||R_1^+||^{j-1} ||\varphi||_{H^{1/2}([a_-,a_+])}$$

si bien que nous avons également montré la convergence en norme de $\mathcal{I}_1^{J,+}$.

Nous montrons maintenant que l'on peut trouver une formule de récurrence pour $I_n^{J,+}$, pour tout n et tout $J > 1$, i.e :

$$\mathcal{I}_n^{J,+} = (\sqrt{\frac{L}{2\pi}} e^{-i(M+1)\xi L} W_{n,1}^+ + e^{-i\xi L} \sum_{k=2}^{n} \mathcal{I}_k^{J,+} R_{n-k+1})(I_d - R_1^+ e^{-i\xi L})^{-1}$$

En effet, nous avons :

$$\mathcal{I}_n^{J,+}\varphi = \sqrt{\frac{L}{2\pi}} W_{n,1}^+ \varphi e^{-i(M+1)\xi L} + \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \sum_{j=2}^{J} W_{n,j}^+ \varphi e^{-i(M+j)\xi L}$$

Rappelons-nous de la formule de propagation, pour tout $j > 1$:

$$W_{n,j}^+ \varphi = \sum_{k=1}^{n} W_{k,j-1}^+ R_{n-k+1}^+ \varphi$$

Alors, il suit :

$$\mathcal{I}_n^{J,+}\varphi = \sqrt{\frac{L}{2\pi}} W_{n,1}^+ \varphi e^{-i(M+1)\xi L} + \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \sum_{j=2}^{J} \sum_{k=1}^{n} W_{k,j-1}^+ R_{n-k+1}^+ \varphi e^{-i(M+j)\xi L}$$

En intervertissant les deux sommes, et en réindiçant par $j-1$ au lieu de j, nous aboutissons à :

$$\mathcal{I}_n^{J,+}\varphi = \sqrt{\frac{L}{2\pi}} W_{n,1}^+ \varphi e^{-i(M+1)\xi L} + e^{-i\xi L} \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{J} W_{k,j}^+ R_{n-k+1}^+ \varphi e^{-i(M+j)\xi L}$$

Nous reconnaissons ici $\mathcal{I}_k^{J,+}$, si bien que :

$$\mathcal{I}_n^{J,+}\varphi = \sqrt{\frac{L}{2\pi}} W_{n,1}^+ \varphi e^{-i(M+1)\xi L} + e^{-i\xi L} \mathcal{I}_n^{J,+} R_1^+ \varphi + e^{-i\xi L} \sum_{k=2}^{n} \mathcal{I}_k^{J,+} R_{n-k+1}^+ \varphi$$

Comme $||R_1^+||$ est strictement inférieur à 1, $I_d - R_1^+ e^{-i\xi L}$ est inversible, et nous obtenons :

$$\mathcal{I}_n^{J,+}\varphi = (\sqrt{\frac{L}{2\pi}} e^{-i(M+1)\xi L} W_{n,1}^+ + e^{-i\xi L} \sum_{k=2}^{n} \mathcal{I}_k^{J,+} R_{n-k+1}^+)(I_d - R_1^+ e^{-i\xi L})^{-1}\varphi$$

Nous allons maintenant faire tendre $J \to \infty$, en procédant toujours par récurrence. Supposon que $\mathcal{I}_k^+$ soit bien d éfini (la série converge en norme d'opérateur) jusqu'au rang $n-1$. Alors, nous avons :

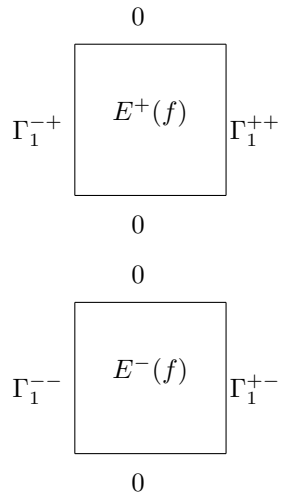
$$\mathcal{I}_n^{J,+} = (\sqrt{\frac{L}{2\pi}} e^{-i(M+1)\xi L} W_{n,1}^+ + e^{-i\xi L} \sum_{k=2}^{n} \mathcal{I}_k^{J,+} R_{n-k+1}^+)(I_d - R_1^+ e^{-i\xi L})^{-1}$$

et chaque $\mathcal{I}_k^{J,+}$ converge en norme d'opérateur quand $J \to \infty$. Alors c'est également vrai pour $\mathcal{I}_n^{J,+}$, la somme sur k étant finie. Aussi, $\mathcal{I}_n^+$ est bien défini, et nous avons de plus démontré la formule de récurrence. □

De ces opérateurs "volumiques" nous déduisons les opérateurs de trace normale qui vont apparaître dans la TFB que nous cherchons à calculer. Nous définissons les quatres familles d'opérateurs suivantes (où $\mathcal{I}_0^{\pm} = 0$) :

$$\begin{aligned} \hat{N}_n^{\pm+} : H^{1/2}([a_-, a_+]) &\longrightarrow H_\xi^{1/2}([0,L]) \\ \varphi &\longmapsto \left(\theta\Delta t\partial_\nu \mathcal{I}_n^+\varphi + (1-\theta)\Delta t\partial_\nu \mathcal{I}_{n-1}^+\varphi\right)|_{\Gamma_{\mathcal{C}_{int}^{\pm}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{N}_n^{\pm-} : H^{1/2}([a_-, a_+]) &\longrightarrow H_\xi^{1/2}([0,L]) \\ \varphi &\longmapsto \left(\theta\Delta t\partial_\nu \mathcal{I}_n^-\varphi + (1-\theta)\Delta t\partial_\nu \mathcal{I}_{n-1}^+\varphi\right)|_{\Gamma_{\mathcal{C}_{int}^{\pm}}} \end{aligned}$$



Nous définissons de plus les opérateurs de trace associés au troisième problème de cellule :

$$\begin{aligned} N_E^{++} : H^1(\Delta, \mathcal{C}^+) &\longrightarrow H^{-1/2}([0,L]) \\ \varphi &\longmapsto \theta\frac{\partial E^+(f)}{\partial\nu}|_{\Gamma_1^{++}} + (1-\theta)\frac{\partial f}{\partial\nu}|_{\Gamma_1^{++}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_E^{-+} : H^1(\Delta, \mathcal{C}^+) &\longrightarrow H^{-1/2}([0,L]) \\ \varphi &\longmapsto \theta\frac{\partial E^+(f)}{\partial\nu}|_{\Gamma_1^{-+}} + (1-\theta)\frac{\partial f}{\partial\nu}|_{\Gamma_1^{-+}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_E^{+-} : H^1(\Delta, \mathcal{C}^-) &\longrightarrow H^{-1/2}([0,L]) \\ \varphi &\longmapsto \theta \frac{\partial E^-(f)}{\partial \nu}|_{\Gamma_1^{+-}} + (1-\theta)\frac{\partial f}{\partial \nu}|_{\Gamma_1^{+-}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_E^{--} : H^1(\Delta, \mathcal{C}^-) &\longrightarrow H^{-1/2}([0,L]) \\ \varphi &\longmapsto \theta \frac{\partial E^-(f)}{\partial \nu}|_{\Gamma_1^{--}} + (1-\theta)\frac{\partial f}{\partial \nu}|_{\Gamma_1^{--}} \end{aligned}$$

Alors nous pouvons montrer que :

Lemme B.4. *La formule suivante est vraie pour $n = 1$:*

$$\hat{N}_1^{\pm+} = \sqrt{\frac{L}{2\pi}} e^{-i(M+1)\xi L}(N_0^{\pm+} + N_1^{\pm+} R_1^+)(I_d - R_1^+ e^{-i\xi L})^{-1}$$

ainsi que

$$\hat{N}_1^{\pm-} = \sqrt{\frac{L}{2\pi}} e^{i\xi L}(N_0^{\pm-} + N_1^{\pm-} R_1^-)(I_d - R_1^- e^{i\xi L})^{-1}$$

et pour tout n, nous avons les formules de récurrence suivantes :

$$\hat{N}_n^{\pm+} = (\sqrt{\frac{L}{2\pi}} e^{-i(M+1)\xi L}(N_E^{\pm,+} W_{n-1,1}^+ + N_1^{\pm,+} R_n^+) + e^{-i\xi L}\sum_{k=2}^{n} \hat{N}_k^{\pm+} R_{n-k+1}^+)(I - R_1^+ e^{-i\xi L})^{-1}$$

et

$$\hat{N}_n^{\pm-} = (\sqrt{\frac{L}{2\pi}} e^{i\xi L}(N_E^{\pm,-} W_{n-1,1}^- + N_1^{\pm,-} R_n^-) + e^{i\xi L}\sum_{k=2}^{n} \hat{N}_k^{\pm-} R_{n-k+1}^-)(I - R_1^- e^{i\xi L})^{-1}$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer l'opérateur de trace normale aux formules que nous avons démontrées dans le lemme précédent pour obtenir le résultat pour $n = 1$. Pour obtenir les formules de récurrence, il faut écrire, pour le cas $+$:

$$\theta\Delta t\mathcal{I}_n^+ + (1-\theta)\Delta t\mathcal{I}_{n-1}^+ = \theta\Delta t(\sqrt{\frac{L}{2\pi}} e^{-i(M+1)\xi L} W_{n,1}^+ + e^{-i\xi L}\sum_{k=2}^{n} \mathcal{I}_k^+ R_{n-k+1}^+)(I - R_1^+ e^{-i\xi L})^{-1}$$

$$+(1-\theta)\Delta t(\sqrt{\frac{L}{2\pi}} e^{-i(M+1)\xi L} W_{n-1,1}^+ + e^{-i\xi L}\sum_{k=2}^{n-1} \mathcal{I}_k^+ R_{n-1-k+1}^+)(I - R_1^+ e^{-i\xi L})^{-1}$$

Alors :

$$\begin{aligned} \theta\Delta t\mathcal{I}_n^+ + (1-\theta)\Delta t\mathcal{I}_{n-1}^+ = \Big(&\sqrt{\frac{L}{2\pi}} e^{-i(M+1)\xi L}(\theta\Delta t W_{n,1}^+ + (1-\theta)\Delta t W_{n-1,1}^+) \\ &+e^{-i\xi L}\sum_{k=2}^{n} \Delta t(\theta\mathcal{I}_k^+ + (1-\theta)\mathcal{I}_{k-1}^+) R_{n-k+1}^+\Big)(I - R_1^+ e^{-i\xi L})^{-1} \end{aligned}$$

De plus :

$$\theta\Delta t W_{n,1}^+ + (1-\theta)\Delta t W_{n-1,1}^+ = \theta\Delta t E^+(W_{n-1}^+) + \theta\Delta t E_1^+ R_n^+ + (1-\theta)\Delta t W_{n-1,1}^+$$

Il suffit maintenant d'appliquer l'opérateur de trace normale et de reconnaître dans cette formule les opérateurs que nous avions préalablement définis. Le cas $-$ se démontre exactement de la même façon. □

Nous pouvons finalement nous tourner vers le calcul de la dérivée normale de $\widetilde{u}_P^n$, et plus précisément de $\Delta t\partial_\nu u_P^{n+\theta}$ (comme c'est la quantité qui intervient naturellement dans (B.29)). En utilisant le lemme précédent, on montre que :

Théorème B.13. *Nous notons encore $\widetilde{\varphi}_n^\pm$ la famille :*

$$\widetilde{\varphi}_k^\pm = u_P^k|_{\Gamma_{int}^\pm} \text{ si } k < n \quad \text{et } \widetilde{\varphi}_n^\pm = \widetilde{u}_P^n|_{\Gamma_{int}^\pm}$$

et nous posons :

$$\widetilde{\lambda}_j^{n+\theta-1,\pm} = \left(\theta\frac{\partial\widetilde{u}_P^n}{\partial\nu} + (1-\theta)\frac{\partial u_P^{n-1}}{\partial\nu}\right)|_{\partial\Omega_0\cap\Gamma^\pm\cap\{y\in[b_-+jL,(j+1)L]\}} \text{ for } j = 0..M-1$$

Alors $\mathcal{F}\left(\left(\theta\partial_\nu\widetilde{u}_P^n + (1-\theta)\partial_\nu u_P^{n-1}\right)|_{\Gamma_{int}^\pm}\right) = \hat{\lambda}_f^{n+\theta,\pm}(\cdot,\xi)$ *est donné par :*

$$\sum_{k=1}^{n}\hat{N}_k^{\pm+}\widetilde{\varphi}_{n-k+1}^{+} + \sum_{j=0}^{M-1}\widetilde{\lambda}_j^{n+\theta-1,\pm}e^{-ij\xi L} + \sum_{k=1}^{n}\hat{N}_k^{\pm-}\widetilde{\varphi}_{n-k+1}^{-}$$

Démonstration. En utilisant une fois de plus le lemme A.4 :

$$\mathcal{F}\left(\left(\theta\partial_\nu\widetilde{u}_P^n + (1-\theta)\partial_\nu u_P^{n-1}\right)|_{\Gamma_{int}^\pm}\right) = \partial_\nu\mathcal{F}\left(\theta\widetilde{u}_P^n + (1-\theta)u_P^{n-1}\right)|_{\Gamma_{C_{int}^\pm}}$$

Alors, le théorème B.11 nous apprend que dans $\Omega_{int}^\pm$:

$$\widetilde{u}_p^n|_{\Omega_{int}^\pm} = \sum_{k=1}^{n} w_k^\pm(\widetilde{\varphi}_{n-k+1}^\pm)$$

et la définition de $\widetilde{\varphi}_k^\pm$ combinée à la formule (4.8) nous donne :

$$u_p^{n-1}|_{\Omega_{int}^\pm} = \sum_{k=1}^{n-1} w_k^\pm(\widetilde{\varphi}_{n-1-k+1}^\pm)$$

De plus, la TFB de $\theta\Delta t\widetilde{u}_P^n + (1-\theta)\Delta t u_P^{n-1}$ est donnée par :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left(\theta\Delta t\widetilde{u}_P^n + (1-\theta)\Delta t u_P^{n-1}\right) &= \sqrt{\frac{L}{2\pi}}\sum_{j=1}^{+\infty}\left(\theta\Delta t\widetilde{u}_P^n + (1-\theta)\Delta t u_P^{n-1}\right)|_{\mathcal{C}_j^+}e^{-i(M+j)\xi L}\\ &+\sqrt{\frac{L}{2\pi}}\sum_{j=0}^{M-1}\left(\theta\Delta t\widetilde{u}_P^n + (1-\theta)\Delta t u_P^{n-1}\right)|_{\Omega_0\cap\{y\in[b_-+jL,(j+1)L]\}}e^{-ij\xi L}\\ &\sqrt{\frac{L}{2\pi}}\sum_{j=1}^{+\infty}\left(\theta\Delta t\widetilde{u}_P^n + (1-\theta)\Delta t u_P^{n-1}\right)|_{\mathcal{C}_j^-}e^{ij\xi L}\end{aligned}$$

Nous savons en vertu du lemme B.3 que les sommes intervenant dans $\mathcal{I}_k^\pm$ sont convergentes. Alors, la TFB de $\theta\Delta t\widetilde{u}_P^n + (1-\theta)\Delta t u_P^{n-1}$ est donnée par, en intervertissant les sommes infinies et finies :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left(\theta\Delta t\widetilde{u}_P^n + (1-\theta)\Delta t u_P^{n-1}\right) &= \theta\sum_{k=1}^{n}\mathcal{I}_k^+\widetilde{\varphi}_{n-k+1}^+ + (1-\theta)\Delta t\sum_{k=1}^{n-1}\mathcal{I}_k^+\widetilde{\varphi}_{n-1-k+1}^+\\ &+\sqrt{\frac{L}{2\pi}}\sum_{j=0}^{M-1}\left(\theta\Delta t\widetilde{u}_P^n + (1-\theta)\Delta t u_P^{n-1}\right)|_{\Omega_0\cap\{y\in[b_-+jL,(j+1)L]\}}e^{-ij\xi L}\\ &+\theta\sum_{k=1}^{n}\mathcal{I}_k^-\widetilde{\varphi}_{n-k+1}^- + (1-\theta)\Delta t\sum_{k=1}^{n-1}\mathcal{I}_k^-\widetilde{\varphi}_{n-1-k+1}^-\end{aligned}$$

ce qui se réécrit :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left(\theta\Delta t\widetilde{u}_P^n + (1-\theta)\Delta t u_P^{n-1}\right) &= \sum_{k=1}^{n}\left(\theta\Delta t\mathcal{I}_k^+ + (1-\theta)\Delta t\mathcal{I}_{k-1}^+\right)\widetilde{\varphi}_{n-k+1}^+\\ &+\sqrt{\frac{L}{2\pi}}\sum_{j=0}^{M-1}\left(\theta\Delta t\widetilde{u}_P^n + (1-\theta)\Delta t u_P^{n-1}\right)|_{\Omega_0\cap\{y\in[b_-+jL,(j+1)L]\}}e^{-ij\xi L}\\ &+\theta\sum_{k=1}^{n}\left(\theta\Delta t\mathcal{I}_k^- + (1-\theta)\Delta t\mathcal{I}_{k-1}^-\right)\widetilde{\varphi}_{n-k+1}^-\end{aligned}$$

Il suffit alors d'appliquer l'opérateur de trace normale, et de reconnaître les diverses quantités que nous avions préalablement définies, pour obtenir la formule annoncée. □

B.2.6 Analyse de l'équation de transmission

Nous allons maintenant rassembler l'ensemble des résultats que nous venons d'établir, afin d'obtenir l'expression finale de l'équation de transmission, qui est celle que l'on utilise en pratique. Nous partons de :

$$\left| \begin{array}{l} \displaystyle\int_0^{2\pi/L} < \hat{\Lambda}^{int,+}_{n+\theta}\{\hat{\varphi}^{\pm}_k\}(\cdot,\xi), \hat{\psi}(\cdot,\xi)|_{x=a_+} > d\xi + < \hat{\Lambda}^{e,+}_{n+\theta}\{\hat{\varphi}^{+}_k\}(\cdot,\xi), \hat{\psi}(\cdot,\xi)|_{x=a_+} > d\xi = 0 \\ \displaystyle\int_0^{2\pi/L} < \hat{\Lambda}^{int,-}_{n+\theta}\{\hat{\varphi}^{\pm}_k\}(\cdot,\xi), \hat{\psi}(\cdot,\xi)|_{x=-a_-} > d\xi + < \hat{\Lambda}^{e,+}_{n+\theta}\{\hat{\varphi}^{-}_k\}(\cdot,\xi), \hat{\psi}(\cdot,\xi)|_{x=-a_-} > d\xi = 0 \end{array} \right. \tag{B.30}$$

où l'on se rappelle que, pour tout n :

$$\hat{\Lambda}^{int,+}_{n+\theta}\{\hat{\varphi}^{\pm}_k\}(\cdot,\xi) = \mathcal{F}\left(\partial_\nu u^{n+\theta}_{int}\{\mathcal{F}^{-1}\left(\hat{\varphi}^{\pm}_k\right)\}|_{\Gamma^+}\right)(\cdot,\xi)$$

$$\hat{\Lambda}^{int,-}_{n+\theta}\{\hat{\varphi}^{\pm}_k\}(\cdot,\xi) = \mathcal{F}\left(\partial_\nu u^{n+\theta}_{int}\{\mathcal{F}^{-1}\left(\hat{\varphi}^{\pm}_k\right)\}|_{\Gamma^-}\right)(\cdot,\xi)$$

$$\hat{\Lambda}^{e,\pm}_{n+\theta}\{\hat{\varphi}^{\pm}_k\}(\cdot,\xi) = -\mathcal{F}\left(\partial_\nu u^{n+\theta}_{\pm}\{\mathcal{F}^{-1}\left(\hat{\varphi}^{\pm}_k\right)\}|_{\Gamma^\pm}\right)(\cdot,\xi)$$

Mais nous savons désormais que :

$$\hat{\Lambda}^{e,\pm}_{n+\theta}\{\hat{\varphi}^{\pm}_k\}(\cdot,\xi) = -\sum_{k=1}^{n+1}(\hat{\Lambda}^{\pm}_k\hat{\varphi}^{\pm}_{n+1-k+1})(\cdot,\xi)$$

Nous noterons $\hat{\Lambda}^E_k\varphi = (\hat{\Lambda}^-_k\varphi^-, \hat{\Lambda}^+_k\varphi^+)$. Puis nous savons que $\hat{\Lambda}^{int}_{n+\theta} = (\hat{\Lambda}^{int,+}_{n+\theta}, \hat{\Lambda}^{int,-}_{n+\theta})$ se décompose en :

$$\hat{\Lambda}^{int}_{n+\theta}\{\hat{\varphi}_k\} = \mathcal{F}(\partial_\nu u^{n+\theta}_{US}|_{\Gamma_{int}}) + \mathcal{F}(\partial_\nu u^{n+\theta}_{P}|_{\Gamma_{int}})$$

avec :

$$\mathcal{F}(\partial_\nu u^{n+\theta}_{US}|_{\Gamma_{int}}) = \sum_{k=1}^{n+1}\hat{\Lambda}^k_I\hat{\varphi}^{n+1-k+1}$$

et

$$\left| \begin{array}{l} \hat{\Lambda}^1_I(\xi)\varphi = (\hat{T}^I_{00}(\xi)\varphi^- + \hat{T}^I_{10}(\xi)\varphi^+, \hat{T}^I_{01}(\xi)\varphi^- + \hat{T}^I_{11}(\xi)\varphi^+) \\ \hat{\Lambda}^n_I(\xi)\varphi = (\hat{T}^I_0(\xi)(\hat{w}^{n-1}_I(\varphi)), \hat{T}^I_1(\xi)(\hat{w}^{n-1}_I(\varphi))) \end{array} \right.$$

Enfin :

$$\mathcal{F}(\partial_\nu u^{n+\theta}_{P}|_{\Gamma^\pm_{int}}) = \hat{\Lambda}^{\pm}_B\hat{\varphi}^n + \hat{\lambda}^{n+\theta,\pm}_f$$

où $\hat{\Lambda_B}^{\pm}(\xi)\hat{\varphi^n}(\cdot,\xi)$ et $\hat{\lambda}^{n+\theta,\pm}_f(\cdot,\xi)$ se calculent par les formules :

$$\begin{aligned} \hat{\Lambda}^{\pm}_B(\xi)\hat{\varphi}(\cdot,\xi) = &\sqrt{\frac{L}{2\pi}}e^{-i(M+1)\xi L}(N^{\pm+}_0 + N^{\pm+}_1R^+_1)(I_d - R^+_1e^{-i\xi L})^{-1}D^+_B\hat{\varphi} \\ &+\sqrt{\frac{L}{2\pi}}\sum_{j=1}^{M-1}\Lambda^{\pm}_{B0,j}\hat{\varphi}e^{-ij\xi L} \\ &+\sqrt{\frac{L}{2\pi}}e^{i\xi L}(N^{\pm-}_0 + N^{\pm-}_1R^-_1)(I_d - R^-_1e^{i\xi L})^{-1}D^-_B\hat{\varphi} \end{aligned}$$

et

$$\hat{\lambda}^{n+\theta,\pm}_f(\cdot,\xi) = \sum_{k=1}^{n+1}\hat{N}^{\pm+}_k\widetilde{\varphi}^+_{n+1-k+1} + \sum_{j=0}^{M-1}\widetilde{\lambda}^{n+\theta,\pm}_j e^{-ij\xi L} + \sum_{k=1}^{n+1}\hat{N}^{\pm-}_k\widetilde{\varphi}^-_{n+1-k+1}$$

On posera $\hat{\Lambda}_B = (\hat{\Lambda}_B^-, \hat{\Lambda}_B^+)$, $\hat{\lambda}_f^{n+\theta} = (\hat{\lambda}_f^{n+\theta,-}, \hat{\lambda}_f^{n+\theta,+})$. Alors l'équation de transmission se réécrit finalement, :

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi/L} &< (\hat{\Lambda}_1^E(\xi) + \hat{\Lambda}_I^1(\xi) + \hat{\Lambda}_B(\xi))\hat{\varphi}_{n+1}(\cdot,\xi), \hat{\psi}(\cdot,\xi) > d\xi = \\ -\int_0^{2\pi/L} &< \sum_{k=2}^{n+1} (\hat{\Lambda}_k^E(\xi) + \hat{\Lambda}_I^k(\xi))\hat{\varphi}_{n+1-k+1}(\cdot,\xi) + \hat{\lambda}_f^{n+\theta}(\cdot,\xi), \hat{\psi}(\cdot,\xi) >\end{aligned} \tag{B.53}$$

On montre alors aisément que :

Théorème B.14. *Il existe une unique famille $(\hat{\varphi}_n)_{1\leq n\leq N} \in L^2(0, 2\pi/L, H_\xi^{1/2}(]0, L[)^2)^N$ tel que, pour tout $\hat{\psi} \in L^2(0, 2\pi/L, H_\xi^{1/2}(]0, L[)^2)$ et tout n :*

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi/L} &< (\hat{\Lambda}_1^E(\xi) + \hat{\Lambda}_I^1(\xi) + \hat{\Lambda}_B(\xi))\hat{\varphi}_{n+1}(\cdot,\xi), \hat{\psi}(\cdot,\xi) > d\xi = \\ -\int_0^{2\pi/L} &< \sum_{k=2}^{n+1} (\hat{\Lambda}_k^E(\xi) + \hat{\Lambda}_I^k(\xi))\hat{\varphi}_{n+1-k+1}(\cdot,\xi) + \hat{\lambda}_f^{n+\theta}(\cdot,\xi), \hat{\psi}(\cdot,\xi) >\end{aligned} \tag{B.53}$$

Démonstration. La preuve est quasi-identique à celle du théorème B.5 pour le cas harmonique. On réinterprète (B.53) dans l'espace physique, comme la condition de transmission, si $\hat{\varphi}_k^\pm = \mathcal{F}\varphi_k^\pm$:

$$\begin{aligned}\partial_\nu u_{int}^{n+\theta}\{\varphi_k^\pm\}|_{\Gamma+} &= \partial_\nu u_+^{n+\theta}\{\varphi_k^+\}|_{\Gamma+} \\ \partial_\nu u_{int}^{n+\theta}\{\varphi_k^\pm\}|_{\Gamma-} &= \partial_\nu u_-^{n+\theta}\{\varphi_k^-\}|_{\Gamma-}\end{aligned} \tag{B.29}$$

Alors il est clair qu'en prenant $\varphi_k^\pm = u^n|_{\Gamma_{int}^\pm}$, nous aurons une solution à ce problème. Pour l'unicité, comme dans le cas harmonique il suffit de considérer le cas où $\lambda_f^{n+\theta} = 0$. Dans ce cas, dans l'espace physique, l'équation de transmission revient à :

$$\begin{aligned}\partial_\nu(u_{US}^{n+\theta}(\{\varphi_k\}) + B(\varphi^{n+1}))|_{\Gamma+} &= \partial_\nu u_+^{n+\theta}(\{\varphi_k^+\})|_{\Gamma+} \\ \partial_\nu(u_{US}^{n+\theta}(\{\varphi_k\}) + B(\varphi^{n+1}))|_{\Gamma-} &= \partial_\nu u_-^{n+\theta}(\{\varphi_k^-\})|_{\Gamma-}\end{aligned} \tag{B.54}$$

Alors si on pose :

$$\widetilde{u}^n = \left| \begin{array}{ll} u_-^n(\{\varphi_k^-\}) & \text{dans } \Omega^- \\ u_{US}^n(\{\varphi_k\}) + B(\varphi^n) & \text{dans } \Omega_{int} \\ u_+^n(\{\varphi_k^+\}) & \text{dans } \Omega^+ \end{array} \right.$$

cette famille sera alors solution de (B.26), sans second membre ni donnée initiale, et sera donc nulle. Alors les $\varphi^\pm$ sont nuls, et ceci montre l'unicité. □

B.2.7 Résultats numériques

L'équation de transmission (B.53), variationnelle, appelle le même type d'approximation par éléments finis que celle que nous avons utilisée dans le cas du régime harmonique pour discrétiser (B.24). Nous renvoyons donc à la section précédente quant aux détails concernant cette approximation. Bien entendu, pour les mêmes raisons que dans le cas harmonique, l'analyse numérique de la méthode de décompositon de domaine discrétisée demeure hors de portée, puisque nous ne sommes pas en mesure de réinterpréter le système obtenu au final. Nous allons terminer cette annexe par quelques résultats numériques, où nous comparerons une nouvelle fois la méthode LS-DtN à la méthode de décomposition de domaine. Au préalable, nous tenons à mettre en évidence le coût de stockage de la méthode de décomposition de domaine. Afin de pouvoir calculer le second membre de (B.53), nous devons en effet stocker l'ensemble des opérateurs $\hat{N}_n^{\pm,\pm}(\xi)$. Dans le cas des fonctions de base constantes par morceaux, si N_y désigne le nombre de mailles dans une direction d'espace et N_k le nombre de fonctions de ces fonctions de base, ces opérateurs sont de taille $(N_y-1)^2 \times N_k$ et ce pour chaque point de quadrature dans la variable de Floquet et chaque pas de temps. Si l'on a N pas de temps, cela représente une quantité de taille $(N_y-1)^2 \times N_k^2 \times N$, ce qui est généralement énorme,

d'autant plus que l'on doit également stocker les nombreux opérateurs de guide supplémentaires (qui eux sont de taille très raisonnable, en général de taille $(N_y-1)^2$ ou $N_y(N_y-1)$) nécessaires pour pouvoir calculer les $\hat{N}_n^{\pm,\pm}(\xi)$. Ceci est à comparer aux seuls $\hat{\Lambda}_n^{\pm}(\xi)$, de taille $(N-1)^2$, à stocker pour chaque point de quadrature pour la méthode LS-DtN (les deux méthodes nécessitent le stockage des $\hat{\varphi}_n^{\pm}(\xi)$, de taille (N_y-1) pour chaque point de quadrature, mais ces quantités sont complètement négligeables). L'écart de consommation mémoire (minimale) entre ces deux méthodes est donc particulièrement énorme, et il est tel que la méthode de décomposition de domaine ne se révèle utilisable en pratique que pour un petit nombre de pas de temps. Ceci a constitué une motivation forte pour rechercher une méthode alternative, ce qui a abouti à la méthode LS-DtN.

Nous reprenons les maillages utilisés au chapitre 7, et nous commençons par comparer la méthode de décomposition de domaine à la méthode LS-DtN en milieu homogène. Nous considérons le cas de l'équation des ondes (pour laquelle nous savons que la méthode LS-DtN est exacte), afin d'illustrer le fait que la méthode de décomposition de domaine s'étend bien au cas de l'ordre deux en temps (et avouons-le, aussi pour des raisons esthétiques), et nous remployons la source harmonique du chapitre 7. Sur la figure B.22, on constate le bon comportement de la méthode de décompositon de domaine (nous utilisons les fonctions constantes par morceaux pour la variable de Floquet). Puis sur la figure B.23, nous reproduisons la même expérience, mais pour le milieu périodique de la figure 7.12. La solution donnée par la méthode de décomposition de domaine est de nouveau correcte.

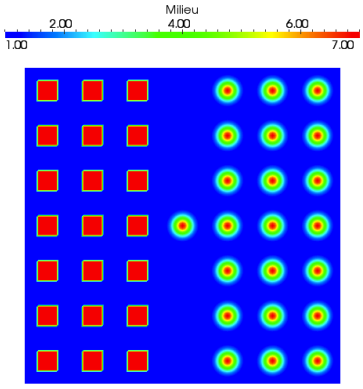


FIGURE B.21 – Milieu périodique

La méthode de décomposition de domaine semble donc donner des résultats satisfaisants en pratique, mais son coût, en particulier en terme de stockage mémoire, l'empêche d'être véritablement utilisable. On lui préfèrera donc la méthode LS-DtN, qui offre le double avantage d'être bien moins coûteuse et de pouvoir être analysée complètement, y compris au niveau discret. Signalons par ailleurs que la méthode de décomposition de domaine est de très loin, parmi toutes les méthodes implémentées dans `Periodique` (c'est-à-dire toutes les méthodes présentées dans ce ce mémoire, ainsi que les méthodes de [37] et leur extension au cas du scattering multiple par les techniques du chapitre 1, ainsi que l'extension aux équations de Maxwell de la méthode de guide de [39] et de la méthode LS-DtN du chapitre 2), la plus complexe à mettre en œuvre, et la plus délicate à programmer sans erreurs, ce qui en fait une méthode assez redoutable à utiliser. Néanmoins, rappelons qu'elle correspond à une idée naturelle, à savoir la construction de conditions aux limites transparentes sur la frontière de défauts non bornés, aussi il nous a semblé essentiel de la faire figurer dans ce mémoire, au delà du fait qu'il s'agisse chronologiquement de la première méthode que nous avons imaginée pour traiter les défauts non bornés.

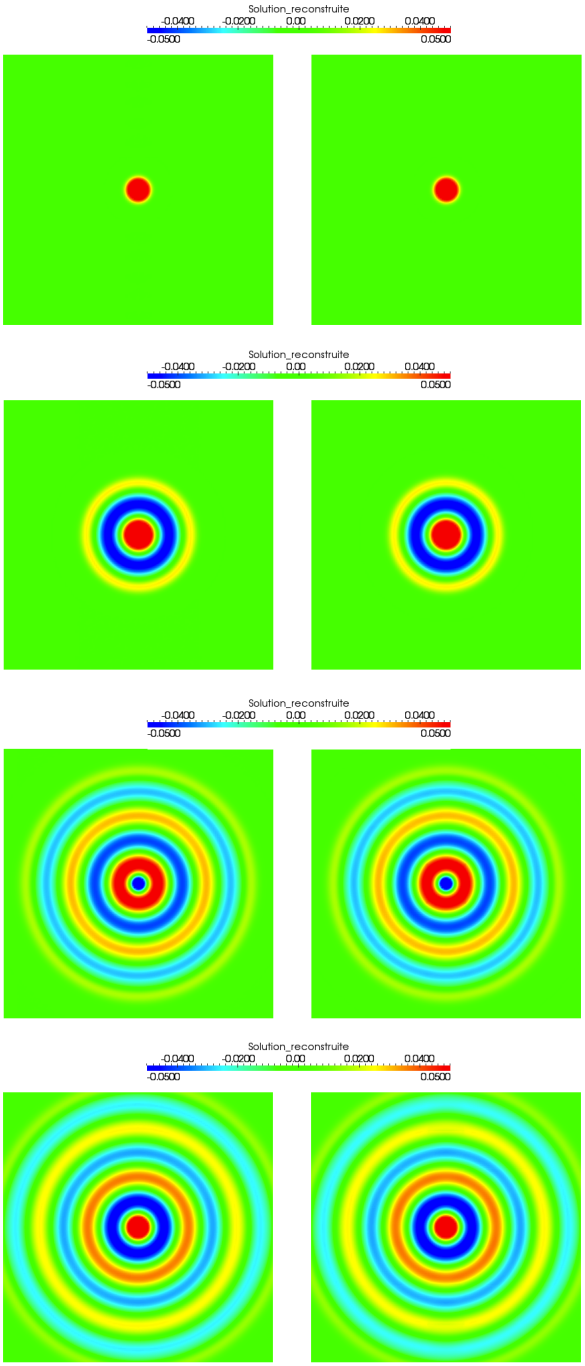


FIGURE B.22 – Comparaison entre la méthode LS-DtN (à gauche) et la méthode de décomposition de domaine (à droite), pour $\theta = 1/4$, $\Delta t = 0.04$, $r = 2$ and $N_k = 20$, et 20 fonctions de bases pour la méthode de décomposition de domaine, $t = 0.4, 1.6, 3.2$ et 4

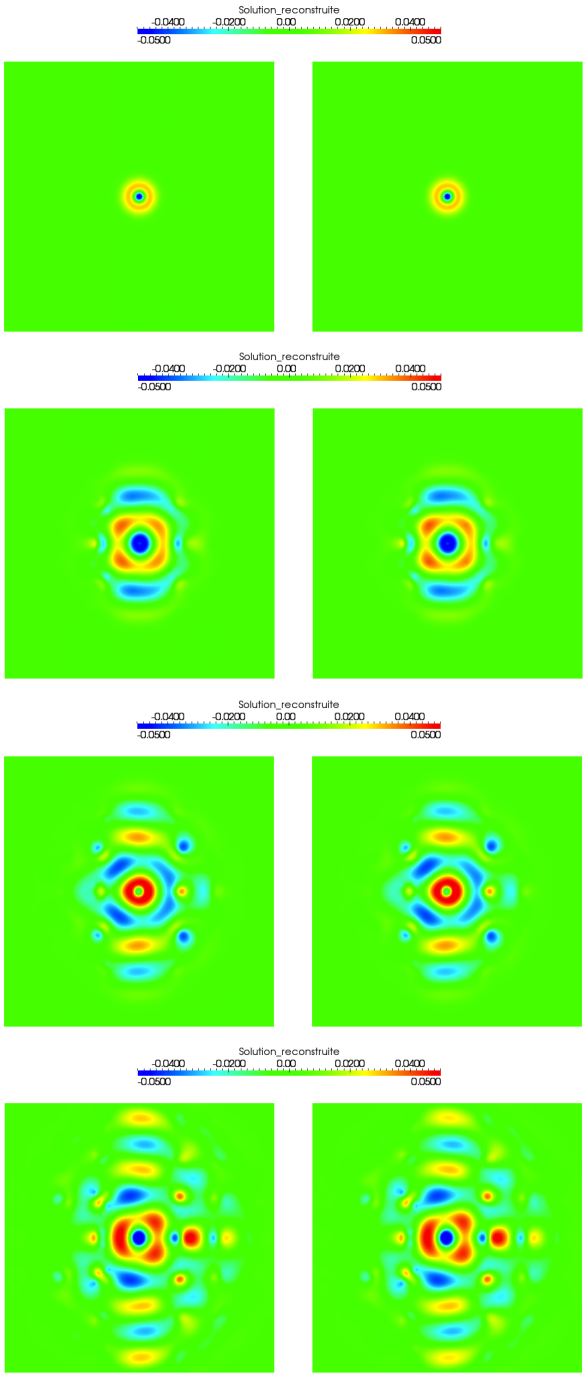


FIGURE B.23 – Comparaison entre la méthode LS-DtN (à gauche) et la méthode de décomposition de domaine (à droite) sur le milieu de la figure B.21, pour $\theta = 1/4$, $\Delta t = 0.04$, $r = 2$ and $N_k = 20$, et 20 fonctions de bases pour la méthode de décomposition de domaine, $t = 0.8, 2.4, 3.2$ et 4.8

Annexe C

Opérateurs DtN pour des défauts bornés dans le plan pour des problèmes d'évolution

Dans cette annexe, nous allons expliquer comment il est possible de calculer les opérateurs DtN pour un problème de plan périodique perturbé par un défaut borné, pour des problèmes d'évolution. La méthode que nous allons présenter est une extension au cas temporel de la méthode de [37]. Nous verrons toutefois que cette méthode théorique a une contrepartie pratique irréaliste, du fait des coût de stockage démesurés (surtout comparée à la méthode mixte, et même face à la méthode de décomposition de domaine) qu'elle engendre. Il nous a semblé important de la faire tout de même figurer dans ce mémoire, car il s'agit sans doute de la méthode la plus naturelle a priori. Nous allons, comme nous l'avons fait dans l'annexe précédente, nous restreindre au cas de l'ordre un en temps, et nous espérons que la seconde partie du mémoire permettra au lecteur de comprendre aisément comment se traite les ordres supérieurs.

C.1 Problème modèle

Une fois de plus, nous cherchons $u \in C^1([0,+\infty[, L^2(\mathbb{R}^2)) \cap C^0([0,+\infty[, H^1(\Delta, \mathbb{R}^2))$ telle que :

$$\left| \begin{array}{ll} \gamma\rho\dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + Vu = f & \text{dans } \mathbb{R}^2, \quad t > 0 \\ u(\cdot, 0) = u_0 & \text{dans } \mathbb{R}^2 \end{array} \right. \tag{7.1}$$

sous les hypothèses (HT) qui garantissent son caractère bien posé, et nous le semi-discrétisons par θ-schéma : trouver $(u^n)_{0\leq n\leq N} \in H^1(\Omega)^{N+1}$:

$$\left| \begin{array}{lll} \gamma\rho\dfrac{u^{n+1}-u^n}{\Delta t} + (-\Delta + V)(\theta u^{n+1} + (1-\theta)u^n) = f^{n+\theta} & \text{dans } \mathbb{R}^2 & 0 \leq n \leq N \\ u^0(\cdot) = u_0(\cdot) & \text{dans } \mathbb{R}^2 & \end{array} \right. \tag{B.26}$$

Nous allons considérer une configuration parmi les plus simples de celles rencontrées jusqu'ici. Nous considérons qu'il existe $M \in \mathbb{N}$, $L \in \mathbb{R}$, $\Omega_0 =]0, ML[\times]0, ML[$, $\rho_p, V_p \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$, tels que :

$$\rho_p(x+pL, y+qL) = \rho_p(x,y) \quad V_p(x+pL, y+qL) = V_p(x,y) \quad \forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

et

$$\rho = \rho_p \text{ dans } \mathbb{R}^2 \setminus \Omega_0 \quad V = V_p \text{ dans } \mathbb{R}^2 \setminus \Omega_0$$

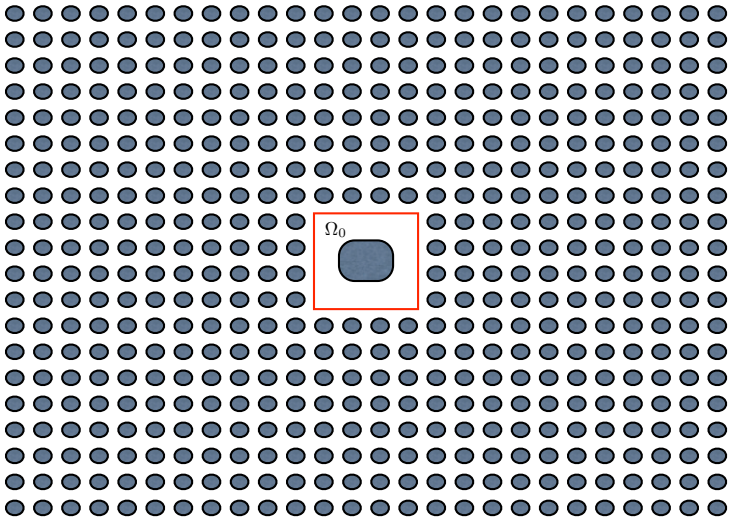


FIGURE C.1 – Exemple de configuration

Autrement dit nous supposons que le milieu est périodique à l'extérieur d'un domaine borné. L'hypothèse la plus forte faite ici, à savoir le fait que l'on doive choisir la même période dans les directions x et y, est la même que celle de [37] pour le cas harmonique, et semble indispensable, comme nous allons le voir dans la suite. Nous illustrons notre configuration de travail sur la figure C.1.

C.2 Calcul des opérateurs DtN

Nous commençons par rappeler quelques résultats du chapitre 4. Nous notons $\Omega_e = \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega_0}$, et $\Gamma_0 = \partial\Omega_0 = \partial\Omega_e$. La restriction à Ω_e de la solution de (B.26) est un cas particulier de problème extérieur :

Pour tout $(\varphi^n)_{1\leq n\leq N} \in \left(H^{1/2}(\Gamma_0)\right)^N$, trouver $(u_e^n)_{0\leq n\leq N} \in \left(H^1(\Omega_e)\right)^N$ tel que :

$$\left|\begin{array}{ll} A(\theta,\Delta t)u_e^{n+1} = A(\theta-1,\Delta t)u_e^n & \text{dans } \Omega_e \quad 0\leq n\leq N \\ u_e^{n+1}|_{\Gamma_0} = \varphi^{n+1} & \text{sur } \Gamma_0 \\ u_e^0(\cdot) = 0 & \text{dans } \Omega_e \end{array}\right. \tag{4.5}$$

Nous savons alors que si nous introduisons, pour tout $\varphi \in H^{1/2}(\Gamma_0)$, la famille $(w_e^n(\varphi))_{0\leq n\leq N} \in \left(H^1(\Omega_e)\right)^N$:

$$\left|\begin{array}{ll} A(\theta,\Delta t)w_e^{n+1}(\varphi) = A(\theta-1,\Delta t)w_e^n(\varphi) & \text{dans } \Omega_e \\ w_e^0(\varphi) = 0 & \text{dans } \Omega_e \\ w_e^1(\varphi)|_{\Gamma_0} = \varphi & \text{sur } \Gamma_0 \\ w_e^{n+1}(\varphi)|_{\Gamma_0} = 0 & \text{sur } \Gamma_0, \ \ \forall n\geq 1 \end{array}\right. \tag{4.7}$$

alors non seulement nous avons, en vertu du théorème 4.5 :

$$u_e^n = \sum_{k=1}^{n} w_e^k(\varphi^{n-k+1}) \tag{4.8}$$

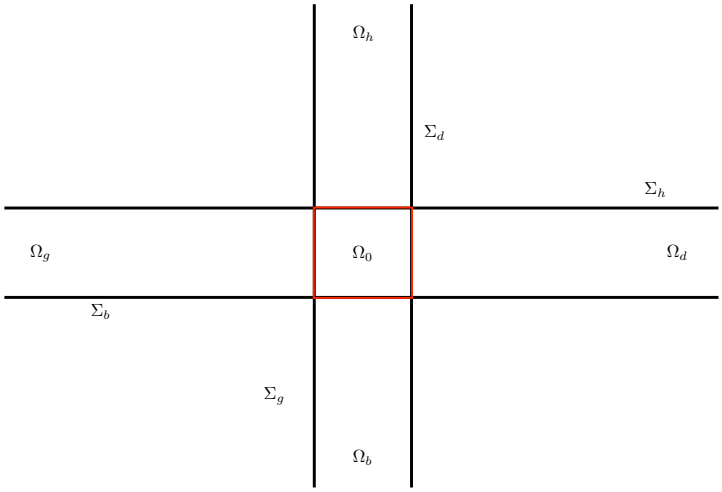


FIGURE C.2 – Notations pour les demi-plans

mais de plus, si l'on note :

$$\begin{aligned} \Lambda_e^n : H^{1/2}(\Gamma_0) &\longrightarrow H^{-1/2}(\Gamma_0) \\ \varphi &\longmapsto \theta \frac{\partial w_e^n(\varphi)}{\partial \nu_e}|_{\Gamma_0} + (1-\theta)\frac{\partial w_e^{n-1}(\varphi)}{\partial \nu_e}|_{\Gamma_0} \end{aligned}$$

alors résoudre (B.26) est équivalent à résoudre :

Trouver $(u_{int}^n)_{0\leq n\leq N} \in H^1(\Omega_0)^N$ tel que :

$$\left|\begin{array}{ll} A(\theta,\Delta t)u_{int}^{n+1} = A(\theta-1,\Delta t)u_{int}^n + \Delta t f^{n+\theta} & \text{dans } \Omega_0 \quad 0\leq n\leq N \\ u_{int}^0(\cdot) = u_0(\cdot) & \text{dans } \Omega_0 \\ \dfrac{\partial u_{int}^{n+\theta}}{\partial \nu_0}|_{\Gamma_0} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \Lambda_e^k(u_{int}^{n+1-k+1}|_{\Gamma_0}) = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \end{array}\right. \tag{4.9}$$

Ce sont ces opérateurs DtN $(\Lambda_e^n)_{1\leq n\leq N}$ que nous cherchons à calculer, en utilisant au mieux la périodicité pour ramener cette détermination à la résolution de problèmes posés en domaine borné. Nous allons avoir besoin de connaître un peu mieux la structure de la solution pour cela. Nous introduisons quatre demi-espaces, à savoir les quatre demi-espaces entourant le défaut, naturellement définis par celui-ci :

$$\Omega_d = \big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;|\; x > ML\big\} \quad \Omega_g = \big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;|\; x < 0\big\}$$

$$\Omega_h = \big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;|\; y > ML\big\} \quad \Omega_b = \big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;|\; y < 0\big\}$$

Leur frontières respectives sont notées :

$$\Sigma_d = \big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;|\; x = ML\big\} \quad \Sigma_g = \big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;|\; x = 0\big\}$$

$$\Sigma_h = \big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;|\; y = ML\big\} \quad \Sigma_b = \big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;|\; y = 0\big\}$$

La restriction de la solution à chacun de ces demi-plans est un cas particulier de problème de demi-plan : Pour $\alpha \in \{d, b, h, g\}$, pour tout $(\varphi^n)_{1\leq n\leq N} \in \left(H^{1/2}(\mathbb{R})\right)^N$, trouver $(u_H^{\alpha,n})_{0\leq n\leq N} \in \left(H^1(\Omega_\alpha)\right)^N$ tel que :

$$\left|\begin{array}{ll} A(\theta,\Delta t)u_H^{\alpha,n+1} = A(\theta-1,\Delta t)u_H^{\alpha,n} & \text{dans } \Omega_\alpha \quad 0\leq n\leq N \\ u_H^{\alpha,n+1}|_{\Sigma_0} = \varphi^{n+1} & \text{sur } \Sigma_\alpha \\ u_H^{\alpha,0}(\cdot) = 0 & \text{dans } \Omega_\alpha \end{array}\right. \tag{C.1}$$

qui sont bien posés en tant que particulier de problèmes extérieurs. À chacun de ces demi-plans, nous pouvons associer une famille de solutions auxiliaires, telles que, pour tout $\varphi \in H^{1/2}(\mathbb{R})$, $(w_H^{\alpha,n}(\varphi))_{0\leq n\leq N} \in \left(H^1(\Omega_\alpha)\right)^N$ satisfait :

$$\left|\begin{array}{ll} A(\theta,\Delta t)w_H^{\alpha,n+1}(\varphi) = A(\theta-1,\Delta t)w_H^{\alpha,n}(\varphi) & \text{dans } \Omega_\alpha \quad 0\leq n\leq N \\ w_H^{\alpha,1(\varphi)}|_{\Sigma_0} = \varphi & \text{sur } \Sigma_\alpha \\ w_H^{\alpha,n+1}(\varphi)|_{\Sigma_0} = 0 & \text{sur } \Sigma_\alpha \quad \forall n\geq 1 \\ w_H^{\alpha,0}(\varphi)(\cdot) = 0 & \text{dans } \Omega_\alpha \end{array}\right. \tag{C.2}$$

Bien entendu, nous pouvons appliquer le théroème 4.5 dans ce cas, et nous avons, pour tout $(\varphi^n)_{1\leq n\leq N} \in \left(H^{1/2}(\mathbb{R})\right)^N$

$$u_H^{\alpha,n} = \sum_{k=1}^{n} w_H^{\alpha,k}(\varphi^{n-k+1})$$

Les opérateurs DtN associés sont définis par :

$$\begin{array}{rcl} \Lambda_H^{\alpha,n} : H^{1/2}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & H^{-1/2}(\mathbb{R}) \\ \varphi & \longmapsto & \theta\dfrac{\partial w_H^{\alpha,n}(\varphi)}{\partial \nu_\alpha}|_{\Sigma_\alpha} + (1-\theta)\dfrac{\partial w_H^{\alpha n-1}(\varphi)}{\partial \nu_\alpha}|_{\Sigma_\alpha} \end{array}$$

Explicitons le lien entre ces problèmes de demi-plan, et le problème que nous cherchons à résoudre. Si l'on choisit :

$$\varphi^n = u^n|_{\Gamma_0} \quad \text{et} \quad \varphi_{H,\alpha}^n = u^n|_{\Sigma^\alpha}$$

alors, par unicité, nous avons :

$$u^n_{|\Omega_e} = \sum_{k=1}^{n} w_e^k(\varphi^{n-k+1}) \quad \text{et} \quad u^n_{|\Omega_\alpha} = \sum_{k=1}^{n} w_H^{\alpha,k}(\varphi_{H,\alpha}^{n-k+1})$$

En particulier, ceci implique :

$$\sum_{k=1}^{n} w_e^k(\varphi^{n-k+1})_{|\Omega_\alpha} = \sum_{k=1}^{n} w_H^{\alpha,k}(\varphi_{H,\alpha}^{n-k+1})$$

On introduit les opérateurs :

$$\begin{array}{rcl} D_e^{\alpha,n} : H^{1/2}(\Gamma_0) & \longrightarrow & H^{1/2}(\mathbb{R}) \\ \varphi & \longmapsto & w_e^n(\varphi)|_{\Sigma_\alpha} \end{array}$$

Alors, en appliquant l'opérateur de trace sur Σ_α à l'expression précédente, nous obtenons (comme seul $w_H^{\alpha,1}$ est à trace non nulle sur Σ_α) :

$$\varphi_{H,\alpha}^n = \sum_{k=1}^{n} D_e^{\alpha,k}\varphi^{n-k+1} \tag{C.3}$$

Alors nous avons :

$$\partial_{\nu_e} u^{n+\theta}|_{\Sigma_\alpha} = \sum_{k=1}^{n} \Lambda_H^{\alpha,k} \varphi_{H,\alpha}^{n-k+1} = \sum_{k=1}^{n} \Lambda_H^{\alpha,k} \left(\sum_{q=1}^{n-k+1} D_e^{\alpha,q} \varphi^{n-k-q+2} \right)$$

Si l'on note $\Sigma_\alpha^0 = \Sigma_\alpha \cap \Gamma_0$, et η_0^α l'opérateur de restriction de $\mathbb{R}$ à $]0, L[$ sur chacun des Σ_α définit sur $H^{1/2}(\mathbb{R})$, nous pouvons l'étendre par dualité à $H^{-1/2}(\mathbb{R})$, et nous avons :

$$\partial_{\nu_e} u^{n+\theta}|_{\Sigma_\alpha^0} = \eta_0^\alpha \sum_{k=1}^{n} \sum_{q=1}^{n-k+1} \Lambda_H^{\alpha,k} D_e^{\alpha,q} \varphi^{n-k-q+2}$$

Ce qui implique que :

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\Lambda_e^k \varphi^{n-k+1} \right) |_{\Sigma_\alpha^0} = \eta_0^\alpha \sum_{k=1}^{n} \sum_{q=1}^{n-k+1} \Lambda_H^{\alpha,k} D_e^{\alpha,q} \varphi^{n-k-q+2}$$

Nous pouvons donc exprimer l'action des opérateurs DtN Λ_e^k que nous recherchons, c'est-à-dire la condition transparente, à partir de opérateurs de demi-espace. L'intérêt de cette formulation particulière tient au fait que nous savons calculer les opérateurs DtN $\Lambda_H^{\alpha,k}$ au moyen de leur transformée de Floquet-Bloch. Nous savons en effet que les TFB dans la direction y pour le cas gauche et le cas droite, et dans la direction x pour le cas haut et bas, sont solutions de problèmes de demi-guide périodiques :

Théorème C.1. *Pour $\alpha = g$ ou d, la transformée de Floquet-Bloch dans la direction y $(\hat{w}_H^{\alpha,n}(\hat{\varphi}))_{0\le n\le N}$ de $(w_H^{\alpha,n}(\varphi))_{0\le n\le N}$ est l'unique élément de $L^2(B_0^\alpha \times [0, 2\pi/L])$ (si $B_0^d =]ML, +\infty[\times]0, L[$ et $B_0^g =]-\infty, 0[\times]0, L[$), solution dans $H^1_\xi(B_0^\alpha)$ pour presque tout $\xi \in [0, 2\pi/L]$ de :*

$$\left|\begin{array}{ll}
A(\theta, \Delta t)\hat{w}_H^{\alpha,n+1}(\hat{\varphi})(\cdot,\xi) = A(\theta-1, \Delta t)\hat{w}_H^{\alpha,n}(\hat{\varphi})(\cdot,\xi) & \text{dans } B_0^\alpha \\
\partial_y \hat{w}_H^{\alpha,n+1}(\hat{\varphi})_{|_{y=L}} = e^{i\xi L}\partial_y \hat{w}_H^{n+1}(\hat{\varphi})_{|_{y=0}} & \\
\hat{w}_H^{\alpha,0}(\hat{\varphi})(\cdot,\xi) = 0 & \text{dans } B_0^\alpha \\
\hat{w}_H^{\alpha,1}(\hat{\varphi})(\cdot,\xi) = \hat{\varphi}(\cdot,\xi) & \text{sur } \Gamma_0^\alpha \\
\hat{w}_H^{\alpha,n+1}(\hat{\varphi})(\cdot,\xi) = 0 & \text{sur } \Gamma_0^\alpha \quad \forall n \ge 1
\end{array}\right.$$

si $\hat{\varphi}$ est la TFB de φ, et

$$\Gamma_0^d = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x = ML,\ y \in]0, L[\right\} \quad \Gamma_0^g = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x = 0,\ y \in]0, L[\right\}$$

Pour $\alpha = h$ ou b, la transformée de Floquet-Bloch dans la direction x $(\hat{w}_H^{\alpha,n}(\hat{\varphi}))_{0\le n\le N}$ de $(w_H^{\alpha,n}(\varphi))_{0\le n\le N}$ est l'unique élément de $L^2(B_0^\alpha \times [0, 2\pi/L])$ (si $B_0^d =]0, L[\times]ML, +\infty[$ et $B_0^g =]0, L[\times]-\infty, 0[$), solution dans $H^1_\xi(B_0^\alpha)$ pour presque tout $\xi \in [0, 2\pi/L]$ de :

$$\left|\begin{array}{ll}
A(\theta, \Delta t)\hat{w}_H^{\alpha,n+1}(\hat{\varphi})(\cdot,\xi) = A(\theta-1, \Delta t)\hat{w}_H^{\alpha,n}(\hat{\varphi})(\cdot,\xi) & \text{dans } B_0^\alpha \\
\partial_x \hat{w}_H^{\alpha,n+1}(\hat{\varphi})_{|_{x=L}} = e^{i\xi L}\partial_x \hat{w}_H^{n+1}(\hat{\varphi})_{|_{x=0}} & \\
\hat{w}_H^{\alpha,0}(\hat{\varphi})(\cdot,\xi) = 0 & \text{dans } B_0^\alpha \\
\hat{w}_H^{\alpha,1}(\hat{\varphi})(\cdot,\xi) = \hat{\varphi}(\cdot,\xi) & \text{sur } \Gamma_0^\alpha \\
\hat{w}_H^{\alpha,n+1}(\hat{\varphi})(\cdot,\xi) = 0 & \text{sur } \Gamma_0^\alpha \quad \forall n \ge 1
\end{array}\right.$$

si $\hat{\varphi}$ est la TFB de φ, et

$$\Gamma_0^h = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y = ML,\ x \in]0, L[\right\} \quad \Gamma_0^b = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y = 0,\ x \in]0, L[\right\}$$

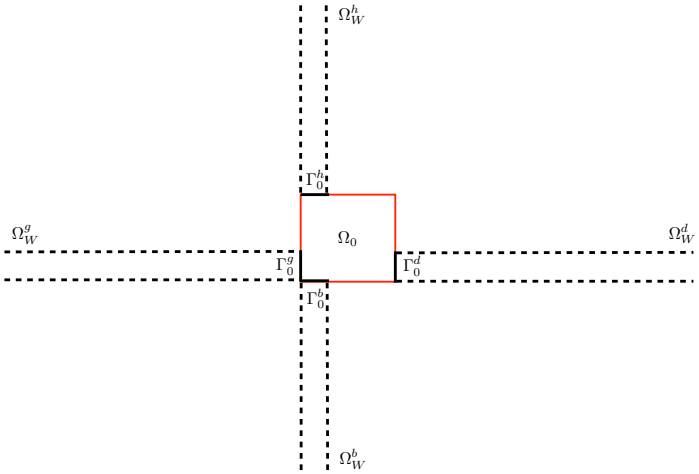


FIGURE C.3 – Notations pour les guides issus de la TFB des problèmes de demi-plan

Démonstration. Elle est identique à celle du théorème B.6, aussi nous ne la reproduisons pas ici. □

Nous illustrons la géométrie des demi-guides ainsi définis sur la figure C.3. En posant :

$$\begin{aligned} \hat{\Lambda}_H^{\alpha,n} : H_\xi^{1/2}(]0,L[) &\longrightarrow H_\xi^{1/2}(]0,L[)' \\ \hat{\varphi} &\longmapsto \theta \frac{\partial \hat{w}_H^{\alpha,n}(\hat{\varphi})}{\partial \nu_\alpha}|_{\Gamma_0^\alpha} + (1-\theta)\frac{\partial \hat{w}_H^{\alpha n-1}(\hat{\varphi})}{\partial \nu_\alpha}|_{\Gamma_0^\alpha} \end{aligned}$$

et on a bien évidemment :

$$\Lambda_H^{\alpha,n}\varphi = \mathcal{F}^{-1}\left(\hat{\Lambda}_H^{\alpha,n}\hat{\varphi}\right)$$

Les problèmes satisfaits par les $(\hat{w}_H^{\alpha,n}(\hat{\varphi}))_{0\leq n\leq N}$ étant des problèmes de demi-guide périodiques, ils peuvent être résolus par la méthode du chapitre 4, ce qui permet de calculer les $\hat{\Lambda}_H^{\alpha,n}$ à partir de la résolution de problèmes posés en domaine borné.

Aussi, il nous suffit de disposer d'une méthode permettant de calculer les opérateurs d'extension $D_e^{\alpha,k}$, et nous serons capables de calculer les opérateurs DtN pour une défaut borné.

C.3 Détermination des opérateurs d'extension

Les principes qui vont nous permettre d'obtenir une équation pour les opérateurs $D_e^{\alpha,k}$ sont les mêmes que ceux développés dans [37] dans le cas harmonique. Nous allons utiliser le fait que les quatre demi-plans Ω_α se recouvrent partiellement. L'unicité de la solution va alors nous garantir certaines conditions de compatibilité sur les traces des solutions aux problèmes de demi-plans, ce qui nous fournira une équation sur $D_e^{\alpha,k}$. Nous introduisons pour cela quelque notations supplémentaires :

$$\Sigma_d^+ = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;|\; x = ML,\; y > ML\right\} \quad \Sigma_g^+ = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;|\; x = 0,\; y > ML\right\}$$

$$\Sigma_h^+ = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;|\; y = ML,\; x > ML\right\} \quad \Sigma_b^+ = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;|\; y = 0,\; x > ML\right\}$$

$$\Sigma_d^- = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;|\; x = ML,\; y < 0\right\} \quad \Sigma_g^- = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;|\; x = 0,\; y < 0\right\}$$

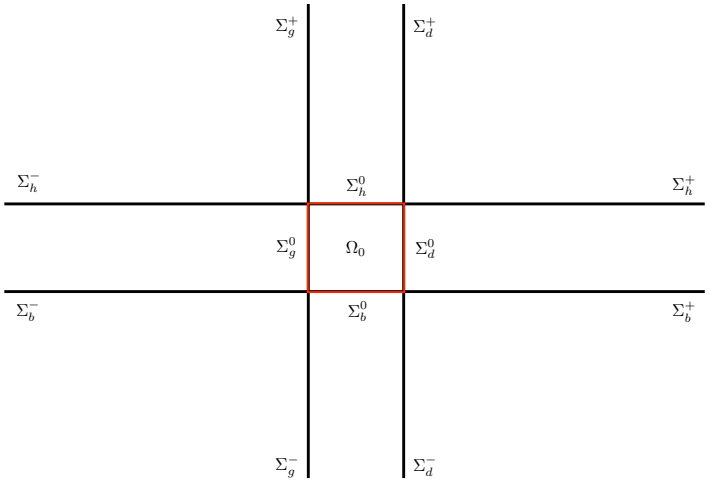


FIGURE C.4 – Notations détaillées pour les frontières des demi-plans

$$\Sigma_h^- = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \mid \ y = ML,\ x < 0\right\} \quad \Sigma_b^- = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \mid \ y = 0,\ x < 0\right\}$$

Remarquons pour commencer que, par construction :

$$D_e^{\alpha,1}(\varphi)|_{\Sigma_\alpha^0} = \varphi|_{\Sigma_\alpha^0} \quad D_e^{\alpha,1}(\varphi)|_{\Sigma_\alpha^0} = 0 \text{ si } k \neq 1$$

ce qui nous donne une première information (une contrainte affine) sur ces opérateurs. Nous allons maintenant construire une équation, basée sur l'unicité des solutions, pour ces opérateurs. Nous procédons par récurrence afin de déterminer les relations satisfaites par les $D_e^{\alpha,n}$. Nous commençons donc naturellement par le cas $n = 1$.

C.3.1 Opérateurs d'extension au premier pas de temps

Placons nous dans le demi-plan Ω_d. Trois problèmes de demi-plan sont définis sur au moins une portion de Ω_d, il s'agit de $(w_h^{d,1}(\varphi)_{0\leq n\leq N}$, $(w_h^{h,1}(\varphi)_{0\leq n\leq N}$ et $(w_h^{b,1}(\varphi)_{0\leq n\leq N}$. De plus, nous avons :

$$u^1_{|_{\Omega_\alpha}} = w_H^{\alpha,1}(\varphi^1_{H,\alpha})$$

Alors, dans $\Omega_d \cap \Omega_h$:

$$w_H^{d,1}(\varphi^1_{H,d}) = w_H^{h,1}(\varphi^1_{H,h})$$

Prenons alors la trace sur Σ_h^+, nous obtenons :

$$w_H^{d,1}(\varphi^1_{H,d})|_{\Sigma_h^+} = \varphi^1_{H,h}|_{\Sigma_h^+}$$

Dans $\Omega_d \cap \Omega_h$, nous avons :

$$w_H^{d,1}(\varphi^1_{H,d}) = w_H^{b,1}(\varphi^1_{H,b})$$

alors en prenant la trace cette fois sur Σ_b^+, nous obtenons :

$$w_H^{d,1}(\varphi^1_{H,d})|_{\Sigma_b^+} = \varphi^1_{H,b}|_{\Sigma_b^+}$$

Mais nous savons d'autre part que, en vertu de (C.3) :

$$\varphi^1_{H,\alpha} = D_e^{\alpha,1}\varphi^1$$

Alors ces deux expressions deviennent :

$$w_H^{d,1}(D_e^{d,1}\varphi^1)|_{\Sigma_h^+} = D_e^{h,1}\varphi^1|_{\Sigma_h^+} \quad \text{et} \quad w_H^{d,1}(D_e^{d,1}\varphi^1)|_{\Sigma_b^+} = D_e^{b,1}\varphi^1|_{\Sigma_b^+}$$

On montre de la même façon que :

$$w_H^{g,1}(D_e^{g,1}\varphi^1)|_{\Sigma_h^-} = D_e^{h,1}\varphi^1|_{\Sigma_h^-} \quad \text{et} \quad w_H^{g,1}(D_e^{g,1}\varphi^1)|_{\Sigma_b^-} = D_e^{b,1}\varphi^1|_{\Sigma_b^-}$$

$$w_H^{h,1}(D_e^{h,1}\varphi^1)|_{\Sigma_d^+} = D_e^{d,1}\varphi^1|_{\Sigma_d^+} \quad \text{et} \quad w_H^{h,1}(D_e^{h,1}\varphi^1)|_{\Sigma_g^+} = D_e^{g,1}\varphi^1|_{\Sigma_g^+}$$

$$w_H^{b,1}(D_e^{b,1}\varphi^1)|_{\Sigma_d^-} = D_e^{d,1}\varphi^1|_{\Sigma_d^-} \quad \text{et} \quad w_H^{b,1}(D_e^{b,1}\varphi^1)|_{\Sigma_g^-} = D_e^{g,1}\varphi^1|_{\Sigma_g^-}$$

Formalisons ces relations à l'aide d'opérateurs. Nous introduisons les $D_H^{\alpha,k}$ définis sur $H^{1/2}(\mathbb{R})$ par :

$$D_H^{d,k}\psi = \left| \begin{array}{ll} w_H^{d,k}(\psi)|_{\Sigma_d^+} & \text{sur } \Sigma_h^+ \\ \delta_{1k}\psi|_{\Sigma_d^0} & \text{sur } \Sigma_d^0 \\ w_H^{d,k}(\psi)|_{\Sigma_d^-} & \text{sur } \Sigma_b^+ \end{array} \right. \qquad D_H^{g,k}\psi = \left| \begin{array}{ll} w_H^{g,k}(\psi)|_{\Sigma_d^+} & \text{sur } \Sigma_h^- \\ \delta_{1k}\psi|_{\Sigma_g^0} & \text{sur } \Sigma_g^0 \\ w_H^{g,k}(\psi)|_{\Sigma_d^-} & \text{sur } \Sigma_b^- \end{array} \right.$$

$$D_H^{h,k}\psi = \left| \begin{array}{ll} w_H^{h,k}(\psi)|_{\Sigma_d^+} & \text{sur } \Sigma_d^+ \\ \delta_{1k}\psi|_{\Sigma_h^0} & \text{sur } \Sigma_h^0 \\ w_H^{h,k}(\psi)|_{\Sigma_d^-} & \text{sur } \Sigma_g^+ \end{array} \right. \qquad D_H^{b,k}\psi = \left| \begin{array}{ll} w_H^{b,k}(\psi)|_{\Sigma_d^+} & \text{sur } \Sigma_d^- \\ \delta_{1k}\psi|_{\Sigma_b^0} & \text{sur } \Sigma_b^0 \\ w_H^{b,k}(\psi)|_{\Sigma_d^-} & \text{sur } \Sigma_g^- \end{array} \right.$$

Remarquons que chacun des ces opérateurs est à valeurs sur un ouvert un peu particulier. Nous introduisons :

$$\Gamma_d = \Sigma_h^+ \times \Sigma_d^0 \times \Sigma_b^+ \quad \Gamma_g = \Sigma_h^- \times \Sigma_g^0 \times \Sigma_b^- \quad \Gamma_h = \Sigma_d^+ \times \Sigma_h^0 \times \Sigma_g^+ \quad \Gamma_b = \Sigma_d^- \times \Sigma_b^0 \times \Sigma_g^-$$

ainsi que les espaces :

$$H^{1/2}(\Gamma_d) = H^{1/2}(\Sigma_h^+) \times H^{1/2}(\Sigma_d^0) \times H^{1/2}(\Sigma_b^+) \quad H^{1/2}(\Gamma_g) = H^{1/2}(\Sigma_h^-) \times H^{1/2}(\Sigma_g^0) \times H^{1/2}(\Sigma_b^-)$$

$$H^{1/2}(\Gamma_h) = H^{1/2}(\Sigma_d^+) \times H^{1/2}(\Sigma_h^0) \times H^{1/2}(\Sigma_g^+) \quad H^{1/2}(\Gamma_b) = H^{1/2}(\Sigma_d^-) \times H^{1/2}(\Sigma_b^0) \times H^{1/2}(\Sigma_g^-)$$

Alors nous avons $D_h^{\alpha,k} : H^{1/2}(\mathbb{R}) \longrightarrow H^{1/2}(\Gamma_\alpha)$. Notons :

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{D}_H^k : H^{1/2}((R))^4 & \longrightarrow & H^{1/2}(\Gamma_d) \times H^{1/2}(\Gamma_g) \times H^{1/2}(\Gamma_h) \times H^{1/2}(\Gamma_b) \\ (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4) & \longmapsto & \left(D_H^d\psi_1, D_h^g\psi_2, D_H^h\psi_3, D_H^b\psi_4\right) \end{array}$$

et enfin $D_H^k : H^{1/2}((R))^4 \longrightarrow H^{1/2}((R))^4$ tel que :

$$D_H^k\left(\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4\right)|_{\Sigma_\alpha^\pm} = \widetilde{D}_H^k\left(\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4\right)|_{\Sigma_\alpha^\pm}$$

$$D_H^k\left(\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4\right)|_{\Sigma_\alpha^0} = \widetilde{D}_H^k\left(\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4\right)|_{\Sigma_\alpha^0}$$

$\widetilde{D}_H^k$ et D_H^k ne sont en réalité que deux façons différentes d'organiser les restrictions définies par les $D_h\alpha, k$, mais D_H^k présente l'avantage de les écrire sur les Σ_α, où sont définies nos inconnues, et surtout d'une façon qui met en évidence le raccord $H^{1/2}$ de ces restrictions (qui provient du fait que les $w_H^{\alpha,k}$ sont H^1). Alors les relations que nous avons trouvées ci-dessus se réécrivent :

$$D_H^1(D_e^{d,1}\varphi^1, D_e^{g,1}\varphi^1, D_e^{h,1}\varphi^1, D_e^{b,1}\varphi^1) = (D_e^{d,1}\varphi^1, D_e^{g,1}\varphi^1, D_e^{h,1}\varphi^1, D_e^{b,1}\varphi^1)$$

Nous noterons $D_e^1\varphi = (D_e^{d,1}\varphi^1, D_e^{g,1}\varphi^1, D_e^{h,1}\varphi^1, D_e^{b,1}\varphi^1)$, si bien que :

$$D_H^1 D_e^1\varphi = D_e^1\varphi \tag{C.4}$$

Théorème C.2. *Soit :*

$$\mathcal{L}_\alpha = \left\{ L \in \mathcal{L}(H^{1/2}(\Gamma_0), H^{1/2}(\Sigma_\alpha)) \ \mid \ L\varphi|_{\Sigma_\alpha^0} = \varphi|_{\Sigma_\alpha^0} \right\}$$

Il existe un unique quadruplet $D_e = (D_e^{d,1}, D_e^{g,1}, D_e^{h,1}, D_e^{b,1})$ *d'opérateurs de* $\mathcal{L}_d \times \mathcal{L}_g \times \mathcal{L}_h \times \mathcal{L}_b$ *tel que :*

$$D_H^1 D_e^1 \varphi = D_e^1 \varphi \tag{C.4}$$

pour tout $\varphi \in H^{1/2}(\Gamma_0)$.

Démonstration. Nous venons de montrer l'existence, ne reste plus qu'à montrer l'unicité. Supposons que nous ayons deux solutions, alors leur différence $D = (D^d, D^g, D^h, D^b)$ va vérifier :

$$D^{\alpha,1}\varphi)|_{\Sigma_\alpha^0}$$

et sera donc dans l'espace $\mathcal{L}_d^0 \times \mathcal{L}_g^0 \times \mathcal{L}_h^0 \times \mathcal{L}_b^0$ avec

$$\mathcal{L}_\alpha^0 = \left\{ L \in \mathcal{L}(H^{1/2}(\Gamma_0), H^{1/2}(\Sigma_\alpha)) \ \mid \ L\varphi|_{\Sigma_\alpha^0} = 0 \right\}$$

Alors, comme :

$$D_H^1 D\varphi|_{\Sigma_\alpha^0} = w_H^{\alpha,1}(D^\alpha\varphi)|_{\Sigma_\alpha^0} = D^\alpha\varphi|_{\Sigma_\alpha^0}$$

il est clair que D_H^1 laisse invariant cet espace vectoriel, et nous aurons en particulier et que l'équation (C.4) est satisfaite par $D\varphi$ sur les Σ_α^0. Puis, les restrictions de D_H^1 à tous les $\Sigma_\alpha^\pm$ étant des applications linéaires, l'équation sera encore satisfaite par $D\varphi$ sur ces restrictions. Alors $D\varphi$ satisfait (C.4) globalement, et la question de l'unicité se réduit à celle de l'injectivité de l'opérateur $I - D_H^1$ sur $\mathcal{L}_d^0 \times \mathcal{L}_g^0 \times \mathcal{L}_h^0 \times \mathcal{L}_b^0$.

Pour tout $\varphi \in H^{1/2}(\Gamma_0)$, nous construisons :

$$\widetilde{u} = \left| \begin{array}{ll} w_H^{d,1}(D^d\varphi) & \text{dans } \Omega_d \\ w_H^{g,1}(D^g\varphi) & \text{dans } \Omega_g \\ w_H^{h,1}(D^h\varphi) & \text{dans } \Omega_h \setminus ((\Omega_h \cap \Omega_d) \cup (\Omega_h \cap \Omega_g)) \\ w_H^{b,1}(D^b\varphi) & \text{dans } \Omega_b \setminus ((\Omega_b \cap \Omega_d) \cup (\Omega_b \cap \Omega_g)) \end{array} \right.$$

et nous cherchons à montrer qu'un tel $\widetilde{u}$ est nul. Comme

$$w_H^{\alpha,1}(D^\alpha\varphi)|_{\Sigma_\alpha^0} = 0$$

et par suite $\widetilde{u}|_{\Gamma_0} = 0$. Puis, séparément dans chacun des ouverts où nous l'avons définie, $\widetilde{u}$ est solution de $A(\theta, \Delta u) = 0$ par construction. Il ne nous reste alors plus qu''a montrer que $\widetilde{u}$ est globalement solution de cette équation dans Ω_e.

Remarquons alors que l'équation :

$$D_H^1 D\varphi = D\varphi$$

implique que :

$$w_H^{h,1}(D^h\varphi)|_{\Sigma_d^+} = D^d\varphi|_{\Sigma_d^+} \quad w_H^{d,1}(D^d\varphi)|_{\Sigma_h^+} = D^h\varphi|_{\Sigma_h^+}$$

Autrement dit, dans le quart de plan supérieur droit, $w_H^{h,1}(D^{h,1}\varphi)$ et $w_H^{d,1}(D^{d,1}\varphi)$ sont solution de la même équation, et sont égales en trace. Par unicité, elles sont égales sur ce quart de plan, ce qui imlpique la continuité en trace et en dérivée pour $\widetilde{u}$ sur Σ_d^+ et Σ_h^+. On procède de même pour les 6 autres morceaux, et on montre ainsi que $\widetilde{u}$ est solution globale. Alors par unicité, $\widetilde{u} = 0$, ce qui implique l'unicité pour notre problème. □

Nous sommes donc parvenus, au premier pas de temps, à trouver une équation qui permettent de déterminer de manière unique les opérateurs d'extension. Nous allons maintenant voir que cette relation initie une récurrence qui va nous permettre d'obtenir ces opérateurs à chaque pas de temps.

C.3.2 Opérateurs d'extension aux pas de temps suivant

Nous reprenons la démarche que nous avions suivie au premier pas de temps. Placons nous dans le demi-plan Ω_d. Nous avons :

$$u^n_{|\Omega_\alpha} = \sum_{k=1}^{n} w_H^{\alpha,k}(\varphi_{H,\alpha}^{n-k+1})$$

Alors, dans $\Omega_d \cap \Omega_h$:

$$\sum_{k=1}^{n} w_H^{d,k}(\varphi_{H,d}^{n-k+1}) = \sum_{k=1}^{n} w_H^{h,k}(\varphi_{H,h}^{n-k+1})$$

Prenons alors la trace sur Σ_h^+, nous obtenons :

$$\sum_{k=1}^{n} w_H^{d,k}(\varphi_{H,d}^{n-k+1})|_{\Sigma_h^+} = \varphi_{H,h}^{n}|_{\Sigma_h^+}$$

Dans $\Omega_d \cap \Omega_h$, nous avons :

$$\sum_{k=1}^{n} w_H^{d,k}(\varphi_{H,d}^{n-k+1}) = \sum_{k=1}^{n} w_H^{b,k}(\varphi_{H,b}^{n-k+1})$$

alors en prenant la trace cette fois sur Σ_b^+, nous obtenons :

$$\sum_{k=1}^{n} w_H^{d,k}(\varphi_{H,d}^{n-k+1})|_{\Sigma_b^+} = \varphi_{H,b}^{n}|_{\Sigma_b^+}$$

Mais nous savons d'autre part que :

$$\varphi_{H,\alpha}^{n} = \sum_{k=1}^{n} D_e^{\alpha,k}\varphi^{n-k+1} \tag{C.3}$$

Alors ces deux expressions deviennent :

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{q=1}^{n-k+1} w_H^{d,k}(D_e^{d,q}\varphi^{n-k-q+2})|_{\Sigma_h^+} = \sum_{k=1}^{n} D_e^{h,k}\varphi^{n-k+1}|_{\Sigma_h^+}$$

et

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{q=1}^{n-k+1} w_H^{d,k}(D_e^{d,q}\varphi^{n-k-q+2})|_{\Sigma_b^+} = \sum_{k=1}^{n} D_e^{b,k}\varphi^{n-k+1}|_{\Sigma_b^+}$$

On montre de même que :

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{q=1}^{n-k+1} w_H^{g,k}(D_e^{g,q}\varphi^{n-k-q+2})|_{\Sigma_h^-} = \sum_{k=1}^{n} D_e^{h,k}\varphi^{n-k+1}|_{\Sigma_h^-}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{q=1}^{n-k+1} w_H^{g,k}(D_e^{g,q}\varphi^{n-k-q+2})|_{\Sigma_b^-} = \sum_{k=1}^{n} D_e^{b,k}\varphi^{n-k+1}|_{\Sigma_b^-}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{q=1}^{n-k+1} w_H^{h,k}(D_e^{h,q}\varphi^{n-k-q+2})|_{\Sigma_d^+} = \sum_{k=1}^{n} D_e^{d,k}\varphi^{n-k+1}|_{\Sigma_d^+}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{q=1}^{n-k+1} w_H^{h,k}(D_e^{h,q}\varphi^{n-k-q+2})|_{\Sigma_g^+} = \sum_{k=1}^{n} D_e^{g,k}\varphi^{n-k+1}|_{\Sigma_g^+}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{q=1}^{n-k+1} w_H^{b,k}(D_e^{b,q}\varphi^{n-k-q+2})|_{\Sigma_d^-} = \sum_{k=1}^{n} D_e^{d,k}\varphi^{n-k+1}|_{\Sigma_d^-}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{q=1}^{n-k+1} w_H^{b,k}(D_e^{b,q}\varphi^{n-k-q+2})|_{\Sigma_b^-} = \sum_{k=1}^{n} D_e^{g,k}\varphi^{n-k+1}|_{\Sigma_g^-}$$

Reprenons maintenant les notations condensées (i.e les opérateurs D_H^k) que nous avons introduites au pargraphe précédent, alors il n'est pas difficile de voir que l'ensemble de ces relations s'écrit :

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{q=1}^{n-k+1} D_H^k(D_e^{d,q}\varphi^{n-k-q+2}, D_e^{g,q}\varphi^{n-k-q+2}, D_e^{h,q}\varphi^{n-k-q+2}, D_e^{b,q}\varphi^{n-k-q+2})$$

$$= \sum_{k=1}^{n}(D_e^{d,k}\varphi^{n-k+1}, D_e^{g,k}\varphi^{n-k+1}, D_e^{h,k}\varphi^{n-k+1}, D_e^{b,k}\varphi^{n-k+1})$$

ou encore, en utilisant la notation condensée $D_e^k\varphi = (D_e^{d,k}\varphi, D_e^{g,k}\varphi, D_e^{h,k}\varphi, D_e^{b,k}\varphi$:

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{q=1}^{n-k+1} D_H^k D_e^q\varphi^{n-k-q+2} = \sum_{k=1}^{n} D_e^k\varphi^{n-k+1}$$

Travaillons un peu la double somme intervenant dans le terme de gauche. Posons $n-p+1 = n-k-q+2$, nous avons $p = k+q-1$, et donc $k \leq p \leq n$, pour q variant de 1 à $n-k+1$. Alors :

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{q=1}^{n-k+1} D_H^k D_e^q\varphi^{n-k-q+2} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{p=k}^{n} D_H^k D_e^{p-k+1}\varphi^{n-p+1}$$

On intervertit maintenant les deux sommes :

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{q=1}^{n-k+1} D_H^k(D_e^q\varphi^{n-k-q+2} = \sum_{p=1}^{n}\sum_{k=1}^{p} D_H^k D_e^{p-k+1}\varphi^{n-p+1}$$

Alors notre équation devient en changeant le nom des indices muets sur le membre de droite :

$$\sum_{p=1}^{n}\sum_{k=1}^{p} D_H^k D_e^{p-k+1}\varphi^{n-p+1} = \sum_{p=1}^{n} D_e^p\varphi^{n-p+1} \tag{C.5}$$

Pour $n = 1$, cette relation redonne bien (C.4), et on devine que l'on va pouvoir simplifier cette relation par récurrence, en égalisant les termes sous le signe somme :

Théorème C.3. *Pour tout $n > 1$, il existe un unique quadruplet $D_e^n = (D_e^{d,n}, D_e^{g,n}, D_e^{h,n}, D_e^{b,n})$ d'opérateurs de $\mathcal{L}_d^0 \times \mathcal{L}_g^0 \times \mathcal{L}_h^0 \times \mathcal{L}_b^0$ tel que :*

$$D_e^n\varphi = \sum_{k=1}^{n} D_H^k D_e^{n-k+1}\varphi \tag{C.6}$$

pour tout $\varphi \in H^{1/2}(\Gamma_0)$.

Démonstration. Nous allons procéder par récurrence. Remarquons que les D_H^k envoyant $\mathcal{L}_d^0 \times \mathcal{L}_g^0 \times \mathcal{L}_h^0 \times \mathcal{L}_b^0$ dans lui-même, nous avons cette fois une équation linéaire. Nous avons vu dans la preuve du théorème C.2 que $I - D_H^1$ était injectif sur cet espace. Or l'équation (C.6) se réécrit aisément :

$$(I - D_H^1)D_e^n\varphi = \sum_{k=2}^{n} D_H^k D_e^{n-k+1}\varphi$$

aussi, nous avons déjà démontré l'unicité de la solution de ce problème.

Pour $n = 2$, la relation (C.5) s'ecrit :

$$D_H^1 D_e^1\varphi + D_H^1 D_e^2\varphi + D_H^2 D_e^1\varphi = D_e^1\varphi^1 + D_e^2\varphi^2$$

Mais nous savons que $D_H^1 D_e^1 \varphi = D_e^1$, aussi ceci devient :

$$D_H^1 D_e^2 \varphi + D_H^2 D_e^1 \varphi = D_e^2 \varphi^2$$

soit (C.6) pour $n = 2$, et la récurrence est amorcée. Supposons donc (C.6) vérifiée jusqu'au rang $n-1$. La relation(C.5) nous donne :

$$\sum_{p=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} D_H^k D_e^{p-k+1} \varphi^{n-p+1} = \sum_{p=1}^{n} D_e^p \varphi^{n-p+1}$$

ce qui s'écrit encore :

$$\sum_{k=1}^{n} D_H^k D_e^{n-k+1} \varphi^1 + \sum_{p=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{p} D_H^k D_e^{p-k+1} \varphi^{n-p+1} = \sum_{p=1}^{n-1} D_e^p \varphi^{n-p+1} + D_e^n \varphi^1$$

Or, pour tout $k \leq n-1$, $\sum_{k=1}^{p} D_H^k D_e^{p-k+1} \varphi = D_e^p \varphi$ en vertu de l'hypothèse de récurrence, aussi ceci sécrit :

$$\sum_{k=1}^{n} D_H^k D_e^{n-k+1} \varphi^1 + \sum_{p=1}^{n-1} D_e^p \varphi^{n-p+1} = \sum_{p=1}^{n-1} D_e^p \varphi^{n-p+1} + D_e^n \varphi^1$$

et donc :

$$D_e^n \varphi^1 = \sum_{k=1}^{n} D_H^k D_e^{n-k+1} \varphi^1$$

pour tout $\varphi^1 \in H^{1/2}(\Gamma_0)$, et le théorème est démontré. □

Nous disposons donc d'une équation permettant de déterminer chacun des opérateurs d'extension. Mais cette équation implique des opérateurs agissant sur $H^{1/2}(\mathbb{R})$, c'est-à-dire sur des domaines non bornés. Toutefois, nous avons appris dans l'annexe B, à contourner cette difficulté en remplaçant les inconnues par leur transformée de Floquet-Bloch. Aussi, en pratique nous chercherons $\mathcal{F}(D_e^n \varphi)$ pour tout $\varphi \in H^{1/2}(\Gamma_0)$, et nous définirons :

$$\hat{D}_H^k(\xi) \hat{\psi}(\cdot, \xi) = \mathcal{F}(D_H^k \mathcal{F}^{-1} \hat{\psi})(\cdot, \xi)$$

de sorte que l'équation (C.6) devienne, en Floquet, pour tout $\hat{\psi} \in \left(H_\xi^{1/2}(]0, L[)' \right)^4$:

$$\int_0^{2\pi/L} < \hat{\psi}(\cdot, \xi), \mathcal{F}(D_e^n \varphi)(\cdot, \xi) > d\xi = \sum_{k=1}^{n} \int_0^{2\pi/L} < \hat{\psi}(\cdot, \xi), \hat{D}_H^k(\xi) \mathcal{F}(D_e^{n-k+1} \varphi)(\cdot, \xi) > d\xi \quad \text{(C.7)}$$

ce qui se démontre de la même façon que l'on montre (B.4), au moyen de l'identité de Parseval et de la formule de Green pour les fonctions quasi-périodiques. Comme on connaît explicitement les $\hat{w}_H^{\alpha,k}$, i.e les TFB des $w_H^{\alpha,k}$, à partir desquelles est défini D_H^k, il est clair que l'on peut trouver une expression pour l'opérateur $\hat{D}_H^k(\xi)$. Plus précisément, on obtient une formule explicite pour $\hat{D}_H^1(\xi)$, et les $\hat{D}_H^k(\xi)$ se construisent par récurrence. Les formules obtenues sont très proches de celles obtenues pour les Λ_B et λ_n qui apparaissent dans la méthode mixte, et se démontrent de la même manière. Le simple fait d'écrire leurs expressions exactes nous obligeant à l'introduction d'une nouvelle pléthore de notations, nous n'allons pas les retranscrire ici, d'autant que comme nous allons l'expliquer maintenant, elles ne sont que très peu utiles en pratique.

C.4 Quelques considérations pratiques

Du point de vue pratique, nous approchons chacun des D_e^n dans l'espace de Floquet, et nous les déterminons via une formulation variationnelle (l'équation (C.7)) qui fait intervenir les $\hat{D}_H^k(\xi)$. Si l'on maille la cellule de périodicité avec $N_x \times N_y$ points, avec $N_x = N_y$ pour simplifier, et que l'on choisit une base à N_k éléments pour approcher l'espace de Floquet, chacun des $\mathcal{F} D_e^n \varphi$ sera un objet de taille $N_k \times N_y$. Comme nous devons les connaître pour chaque fonction de base du bord du défaut, en supposant celui de taille 1, nous devrons donc calculer un objet de taille $N_k N_y \times 4N_y$, pour chaque pas de temps, ce qui représente un coût de stockage rapidement considérable (étant donné que nous

sommes obligés de tous les conserver pour pouvoir calculer les dérivées normales intervenant dans la condition transparente). Mais le coût de grâce pratique est en réalité porté par les $\hat{D}_H^k(\xi)$, qui eux sont des matrices de taille $N_k^2 N_y^2$, soit des matrices bien plus grosses, et doivent également être stockées pour pouvoir calculer les nouveaux D_e^n. Bien sûr, avec des capacités de mémoire suffisantes, il est possible de mettre cette méthode en œuvre, mais son coût de stockage prohibitif nous a conduit à chercher des alternatives aux seuls opérateurs DtN sur des défauts bornés, nous conduisant dans un premier temps à la méthode de décomposition de domaine de l'annexe B, qui résout partiellement les problèmes de stockage (elle conduit à un coût de stockage encore élévé, mais atteignable avec un ordinateur portable récent), et surtout à la méthode mixte LS-DtN dans un deuxième temps, qui elle ne pose pas de réels problèmes de stockage (hormis pour des temps très longs pour certaines équations).

Bibliographie

[1] J. Aboudi. *Mechanics of composite materials.* Studies in appliedmechanics. Elsevier, Amsterdam, 1991.

[2] R. Adams and J. Fournier. *Sobolev spaces, second edition.* Elsevier, 2005.

[3] G. Allaire. *Homogenization and two-scale convergence.* SIAM J. Math. Anal., 1992.

[4] X. Antoine, A. Arnold, C. Besse, M. Ehrhardt, and A. Schädle. *A review of transparent and artificial boundary conditions techniques for linear and nonlinear schrödinger equations.* Communications in Computational Physics, 2008.

[5] X. Antoine and C. Besse. *Unconditionally stable discretization schemes of non-reflecting boundary conditions for the one-dimensional schrödinger equation.* Journal of Computational Physics, 2003.

[6] X. Antoine, C. Besse, and V. Mouysset. *Numerical schemes for the simulation of the two-dimensionnal schrödinger equation using non-reflecting boundary conditions.* Mathematics of computation, 2004.

[7] A. Arnold. *Numericaly absorbing boundary conditions for quantum evolution equations.* VLSI Design, 1998.

[8] M. Balabane and V. Tirel. *Décomposition de domaine pour un calcul hybride de l'équation de helmholtz.* C. R. Acad. Sci. Paris, 1997.

[9] A. Barnett and L. Greengard. *A new integral representation for quasi-periodic fields and its application to two-dimensional band structure calculations.* Journal of Computational Physics, 2010.

[10] A. Bayliss and E. Turkel. *Radiation boundary conditions for wave-like equations.* Comm. Pure Appl. Math., 1980.

[11] A. Bensoussan, J. Lions, and G. Papanicolaou. *Asymptotic analysis for periodic structures, vol. 5 de Studies in Mathematics and its Applications.* North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1978.

[12] J.-P. Berenger. *A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves.* J. Comput. Phys., 1994.

[13] G. Borg. *Eine umkehrung der sturm-liouvilleschen eigenwertaufgabe. bestimmung der differentialgleichung durch die eigenwerte.* Acta Math., 1946.

[14] L. Bourgeois and E. Lunéville. *The linear sampling method in a waveguide : a modal formulation.* Inverse problems, 2008.

[15] H. Brezis. *Analyse fonctionnelle, théorie et applications.* Masson, Paris, 1983.

[16] R. Christensen. *Mechanics of composite materials.* John Wiley Sons Inc., New York.

[17] J. Coatléven. *Résolution de problèmes de propagation d'ondes dans des milieux périodiques localement perturbés.* Master's thesis, ENSTA, Paris, 2008.

[18] J. Coatléven. *Helmholtz equation in periodic media with a line defect.* Journal of Computational Physics, à paraître.

[19] J. Coatléven. *Transparent boundary conditions for evolution equations in infinite periodic strips.* SIAM Journal of Scientific Computing, soumis.

[20] J. Coatléven and P. Joly. *Operator factorization for multiple-scattering problems and an application to periodic media.* Communications in Computational Physics, à paraître.

[21] A. Cohen. *Approximations variationnelles des edp.* Notes de cours de M2, 2007-2008.

[22] D. Colton and R. Kress. *Inverse Acoustic and electromagnetic scattering theory.* Springer-Verlag, 1998.

[23] R. Dautray and J.-L. Lions. *Mathematical analysis and numerical methods for science and technology, volume 5 : evolution problems.* Springer, 1993.

[24] M. Ehrhardt, H. Han, and C. Zheng. *Numerical simulation of waves in periodic structures.* Communications in Computational Physics, 2009.

[25] M. Ehrhardt and C. Zheng. *Exact artificial boundary conditions for problems with periodic structures.* Journal of Computational Physics, 2008.

[26] D. Eidus. *The principle of limiting amplitude.* Uspehi Mat. Nauk, 1969.

[27] B. Engquist and A. Majda. *Radiation boundary conditions for acoustic and elastic wave calculations.* Comm. Pure Appl. Math., 1979.

[28] S. Fan, P. Villeneuve, J. Joannopoulos, and H. Haus. *Channel drop filters in photonic crystals.* Opt. Expr., 1998.

[29] S. Fan, P. Villeneuve, J. Joannopoulos, and H. Haus. *Channel drop tunneling through localized states.* Phys. Rev. Lett., 1998.

[30] A. Figotin and Y. Godin. *The computation of spectra of some 2d photonic crystals.* J. Comput. Phys., 1997.

[31] A. Figotin and V. Gorentsveig. *Localized electromagnetic waves in a periodic-layered dielectric medium with a defect.* Phys. Rev. B, 1998.

[32] A. Figotin and A. Klein. *Localized classical waves created by defects.* J. Statist. Phys., 1997.

[33] A. Figotin and A. Klein. *Midgap defect modes in dielectric and acoustic media.* SIAM J. Appl. Math., 1998.

[34] A. Figotin and P. Kuchment. *Band-gap structure of spectra of periodic dielectric and acoustic media. i. scalar model.* SIAM J. Appl. Math., 1996.

[35] A. Figotin and P. Kuchment. *Band-gap structure of spectra of periodic dielectric and acoustic media. ii. two-dimensional photonic crystals.* SIAM J. Appl. Math., 1996.

[36] S. Fliss. *Conditions aux limites absorbantes pour les guides d'ondes périodiques.* Master's thesis, Ecole Polytechnique, Palaiseau, 2005.

[37] S. Fliss. *Etude mathématique et numérique de la propagation des ondes dans des milieux périodiques localement perturbés.* Ph.D. thesis, Ecole Polytechnique, Palaiseau, 2009.

[38] S. Fliss and P. Joly. *Exact boundary conditions for time-harmonic wave propagation in locally perturbed periodic media.* Applied Numerical Mathematics, 2009.

[39] S. Fliss, P. Joly, and J.-R. Li. *Exact boundary conditions for periodic waveguides containing a local perturbation.* Communications in Computational Physics, 2006.

[40] J. D. Gardiner, A. J. Laub, J. J. Amato, and C. B. Moler. *Solution of the sylvester matrix equation* $axb^T + cxd^T = e$. ACM Trans. Math. Softw., 1992.

[41] D. Givoli and B. Neta. *High-order non-reflecting boundary scheme for time-dependent waves.* Journal of Computational Physics, 2003.

[42] M. J. Grote and J. Keller. *Exact non reflecting boundary conditions for the time dependent wave equation.* SIAM J. Appl. Math, 1995.

[43] M. J. Grote and C. Kirsch. *Dirichlet-to-neumann boundary conditions for multiple scattering problems.* Journal of Computational Physics, 2004.

[44] T. Hagstrom and S. Hariharan. *Progressive wave expansions and open boundary problems.* Computational Wave Propagation, 1995.

[45] C. Hazard and M. Lenoir. *On the solution of time-harmonic scattering problems for maxwell's equations.* SIAM J. Appl. Math., 1996.

[46] T. Hohage, F. Schmidt, and L. Zschiedrich. *Solving time-harmonic scattering problems based on the pole condition, i. theory.* SIAM J. Math. Anal., 2003.

[47] T. Hohage, F. Schmidt, and L. Zschiedrich. *Solving time-harmonic scattering problems based on the pole condition, ii. convergence of the pml method.* SIAM J. Math. Anal., 2003.

[48] A. Jami and M. Lenoir. *Formulation variationnelle pour le couplage entre une méthode d'éléments finis et une représentation intégrale.* C.R.Acad.Sci.Paris., 1977.

[49] C. Johnson and C. Nédélec. *On the coupling of boundary integral and finite element methods.* Math. Comp., 1980.

[50] S. G. Johnson and J. D. Joannopoulos. *Photonic crystal - the road from theory to practice.* Kluwer Acad. Publ., 2002.

[51] J. Journé, A. Soffer, and C. D. Sogge. *Decay estimates for schrödinger operators.* Communications on Pure and applied Mathematics, 1991.

[52] T. Kato. *Perturbation theory for linear operators.* Springer, 1980.

[53] A. Kaw. *Mechanics of compositematerials.* C R C Press Incorporated, 2005.

[54] R. Kress. *Linear integral equations second edition.* Springer, 1998.

[55] P. Kuchment. *Floquet theory for partial differential equations.* Birkhaüser Verlag, 1993.

[56] P. Kuchment. *The mathematics of photonic crystals, chapter 7 of Mathematical modeling in optical science.* SIAM, Philadelphia, 2001.

[57] P. Kuchment. *On some spectral problems of mathematical physics.* 2004.

[58] A. Kurganov and S. Tsynkov. *On spectral accuracy of quadrature formulae based on piecewise polynomial interpolation.* IMA Journal of Numerical Analysis, 2005.

[59] S. Z. Levendorskii. *Acoustic waves in perturbed periodic layer : a limiting absorption principle.* Asymptot. Anal., 1998.

[60] V. Levillain. *Coupling integral equation methods and finite volume elements for the resolution of time harmonic maxwell's equations in three dimensional heterogeneous medium.* Technical report 222, CMAP, Ecole Polytechnique, 1990.

[61] J.-L. Lions and E. Magenes. *Problèmes aux limites non homogènes et applications, volume 1.* Dunod, Paris, 1968.

[62] B. A. Lippmann and J. Schwinger. *Variational principles for scattering process.* Phys. Rev., 1950.

[63] C. Lubich. *Convolution quadrature and discretized operational calculus. i.* Numerische Mathematik, 1988.

[64] C. Lubich. *Convolution quadrature and discretized operational calculus. ii.* Numerische Mathematik, 1988.

[65] P. A. Martin. *Multiple scattering : Interaction of time harmonic waves with N obstacles.* 2006.

[66] W. McLean. *Strongly elliptic systems and boundary integral equations.* Cambridge university press, 2000.

[67] P. Monk. *Finite element methods for Maxwell's equations.* Oxford science publications, 2003.

[68] M. Murata and T. Tsuchida. *Asymptotics of green functions and the limiting absorption principle for elliptic operators with periodic coefficients.* J. Math. Kyoto Univ., 2006.

[69] D. G. Pedreira and P. Joly. *Mathematical analysis of a method to compute guided waves in integrated optics.* INRIA research report.

[70] B. Perthame and L. Vega. *Morrey campanato estimates for helmholtz equations.* Journal of Functional Analysis, 1999.

[71] B. Perthame and L. Vega. *Energy concentration and sommerfeld condition for helmholtz equation with varaible index at infinity.* GAFA Geometric And Functional Analysis, 2007.

[72] M. Plum. *The spectra of periodic differential operators.* Lecture notes, Oberwolfach seminar, 2008.

[73] R. Potthast, F. ben Hassen, and J. Liu. *On source analysis by wave splitting with applications in inverse scattering of multiple obstacles.* Journal of Computational Mathematics, 2007.

[74] P. A. Raviart and J. Thomas. *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivees partielles.* Dunod, 2004.

[75] Y. Saito. *Schrödinger operators with a nonspherical radiation condition.* Pacific journal of mathematics, 1987.

[76] K. Sakoda. *Optical properties of photonic crystals.* Springer Verlag Berlin, 2001.

[77] W. Schlag. *Dispersive estimates for schrödinger operators : a survey.* Ann. of Math. Stud., 2007.

[78] F. Schmidt and D. Yevick. *Discrete transparent boundary conditions for schrödinger-type equations.* Journal of Computational Physics, 1997.

[79] A. Sommerfeld and M. Bethe. *Electron theory of metals.* Handbook of Physics, 1933.

[80] S. Soussi. *Convergence of the supercell method for defect modes calculations in photonic crystals.* SIAM J. Numer. Anal., 2005.

[81] J. Yuan and Y. Y. Lu. *Dirichlet-to-neumann map method with boundary cells for photonic crystals devices.* Communications in Computational Physics, 2011.

[82] L. Yuan and Y. Y. Lu. *An efficient bidirectional propagation method based on dirichlet-to-neumann maps.* IEEE Photonics Techn. Lett, 2006.

[83] L. Yuan and Y. Y. Lu. *A recursive-doubling dirichlet-to-neumann-map method for periodic waveguides.* Journal of Lightwave Technology, 2007.

Titre : Analyse mathématique et numérique de quelques problèmes d'ondes en milieu périodique

Résumé *: De nombreux problèmes physiques sont modélisés par des équations aux dérivées partielles posées dans un domaine pour lesquels la géométrie ainsi que les coefficients sont décrits par des fonctions périodiques, hormis dans certaines régions de taille modeste par rapport à celle du domaine d'intérêt (on parle alors de perturbations pour ces régions). Les caractéristiques du problème sortant très souvent du cadre d'application des méthodes d'homogénéisation, nous avons développé des méthodes alternatives tirant parti de la periodicité afin de restreindre le domaine de calcul à des domaines bornés. Pour cela, nous avons généralisé les approches de type Lippmann-Schwinger, ce qui nous permet de traiter le cas de défauts bornés ou le cas de défauts non bornés structurés, la difficulté tenant au fait que l'on ne dispose pas dans le cas d'un milieu périodique quelconque d'une représentation analytique de la solution en l'absence de perturbation (i.e la fonction de Green est inconnue en général). Notre approche repose sur la connaissance des opérateurs de Dirichlet-to-Neumann (DtN) de bandes périodiques non bornés dans une seule direction. Nous traitons deux grandes familles de problèmes, les problèmes harmoniques, pour lesquels les opérateurs DtN dans les bandes sont connus, et les problèmes d'évolution, pour lesquels nous proposons une méthode de construction de ces opérateurs. Nous traitons dans ces deux situations le cas d'une perturbation bornée ou non, puis nous généralisons les techniques de scattering multiple du milieu homogène au cas périodique, afin de pouvoir traiter le cas de plusieurs perturbations.*

Title : Mathematical and numerical analysis of wave problems in periodic media

Abstract *: The modeling of many interesting physical problems leads to partial differential equations, in a domain whose geometry and coefficients are functions periodic outside some regions, called scatterers, which are small with respect to the full domain of interest. The caracteristics of these problems often prevent us from applying classical homogeneization techniques, that is why we have developped new methods to restrict the computational domain to bounded domains. We have generalized the Lippmann-Schwinger equation approach, which allows us to treat bounded and structured unbounded scatterers, the main issue being that for a generic periodic medium there is no analytic representation of the solution in the case without scatterers (i.e the Green function is unknown). Dirichlet-to-Neumann (DtN) maps for periodic strips infinite in one direction play a key role in our approach. We treat two kinds of problems : time harmonic problems, for which the DtN maps for strip problems are known, and evolution problems, for which we present a method of derivation of these operators. In these two cases, we first treat the case of one bounded or unbounded scatterer, then we generalize the multiple scattering methods for homogeneous media to the case of periodic media, which allow us to handle several scatterers as well.*