ParisTech
INSTITUT DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES
PARIS INSTITUTE OF TECHNOLOGY

ARTS ET MÉTIERS ParisTech

2012-ENAM-0001

École doctorale n°432 : Sciences des Métiers de l' Ingénieur

# Doctorat ParisTech

# T H È S E

**pour obtenir le grade de docteur délivré par**

## l'École Nationale Supérieure d'Arts et Métiers

### Spécialité " Mécanique et Matériaux"

*présentée et soutenue publiquement par*

**Jean-Marc PIPARD**

le 18 janvier 2012

# Modélisation du comportement élasto-viscoplastique des aciers multiphasés pour la simulation de leur mise en forme

Directeur de thèse : **Marcel BERVEILLER**
Co-encadrement de la thèse : **Farid ABED-MERAIM et Tudor BALAN**

**Jury**

| | | |
|---|---|---|
| **Mme Anne-Marie HABRAKEN**, | Directrice de recherche FNRS, MS$^2$F, U. Liège, Belgique | Président |
| **Mme Brigitte BACROIX**, | Directrice de recherche CNRS, LSPM, Université Paris 13 | Rapporteur |
| **M. Philippe PILVIN**, | Professeur, LIMATB, Université de Bretagne Sud | Rapporteur |
| **M. Marcel BERVEILLER**, | Professeur, LEM3, Arts et Métiers ParisTech - Metz | Examinateur |
| **M. Olivier BOUAZIZ**, | Docteur/Ingénieur HDR, ArcelorMittal, Maizières-Lès-Metz | Examinateur |
| **M. Xavier LEMOINE**, | Docteur/Ingénieur, ArcelorMittal, Maizières-Lès-Metz | Examinateur |
| **M. Farid ABED-MERAIM** | Professeur, LEM3, Arts et Métiers ParisTech - Metz | Invité |
| **M. Tudor BALAN** | MCF HDR, LEM3, Arts et Métiers ParisTech - Metz | Invité |

T H È S E

**Arts et Métiers ParisTech - Centre de Metz**
**LEM3 : Laboratoire d'Etude des Microstructures et de Mécanique des Matériaux**

# Remerciements

Le travail présenté dans ce mémoire a été réalisé dans les locaux des Arts et Métiers ParisTech du CER de Metz. Il est le fruit d'une collaboration entre le Laboratoire de Physique et de Mécanique des Matériaux (LPMM), devenu aujourd'hui le Laboratoire d'Etude des Microstructures et de Mécanique des Matériaux (LEM3), et le centre de Recherche ArcelorMittal de Maizières-Lès-Metz.

Je remercie tout d'abord l'ensemble des membres du jury, et particulièrement Mme Brigitte Bacroix et M. Philippe Pilvin pour avoir accepté de juger mes travaux de thèse, ainsi que Mme Habraken pour avoir présidé ce jury.

Je tiens à rendre hommage à Marcel Berveiller pour m'avoir accordé toute sa confiance (et sa patience) en m'accueillant au sein de son équipe ainsi que pour m'avoir fait bénéficier de son expérience et de son recul scientifique tout au long de ses années.

Je remercie vivement mes encadrants Farid Abed-Meraim et Tudor Balan qui ont su me laisser toute l'autonomie qui m'était nécessaire tout en m'aidant à prendre les bonnes décisions.

Je tiens à remercier très chaleureusement Xavier Lemoine et Olivier Bouaziz, partenaires industriels de cette thèse, aujourd'hui collègues, avec qui les échanges ont toujours été extrêmement enrichissants. Cette interaction forte tout au long de ces années a contribué à me réaliser dans mon travail de chercheur.

Mes plus vifs remerciements s'adressent également à Stéphane Berbenni pour les échanges fructueux et toujours très enrichissants notamment sur la thématique des effets de taille de microstructure. Sans rien avoir choisi officiellement sur le fonctionnement de cette thèse, tu as été indispensable face aux problématiques rencontrées au cours de ce travail, et ce toujours avec le sourire et la bonne humeur. Je tiens également à remercier, par la même occasion, Thiebaud Richeton pour ses valeurs scientifiques et les conversations échangées tout au long de ces années.

Un grand merci à l'ensemble des membres du laboratoire et du personnel de l'ENSAM avec qui j'ai pu interagir dans les bureaux, amphis, couloirs ou terrains de sport. Vous avez tous contribué à rendre ces années très agréables !

Un merci particulier à Benoît Appolaire qui, durant mes années à l'EEIGM puis en stage au LSG2M à l'école des Mines de Nancy, m'a ouvert les yeux sur le formidable terrain de jeu que constitue la recherche.

Je remercie enfin mes parents et mes frères pour leurs encouragements.

Marie, Olivia, je ne saurais assez vous remercier pour votre extrême patience et votre soutien sans faille. Ce mémoire vous est dédié.

# Sommaire

**CHAPITRE I : INTRODUCTION GENERALE ..... 9**

**I.1 CONTEXTE INDUSTRIEL ET SCIENTIFIQUE ..... 11**
I.1.1 LES ACIERS MULTIPHASES ..... 11
I.1.2 UN PROBLEME MULTI-ECHELLES, MULTI-APPROCHES ..... 13
**I.2 CADRE DE LA THESE ..... 14**
I.2.1 OBJECTIFS ..... 14
I.2.2 ORGANISATION DU MANUSCRIT ..... 15
**BIBLIOGRAPHIE ..... 17**

**CHAPITRE II : LOIS DE COMPORTEMENT ELASTO-VISCOPLASTIQUE ..... 19**

**II.1 FORMULATION D'UNE LOI DE COMPORTEMENT NON-LINEAIRE 3D ..... 21**
II.1.1 ETAT THERMODYNAMIQUE ET VARIABLES D'ETAT ..... 21
II.1.2 PREMIER ET SECOND PRINCIPE DE LA THERMODYNAMIQUE ..... 22
II.1.3 LES MATERIAUX STANDARD ET STANDARD GENERALISES ..... 23
II.1.4 APPLICATION AUX LOIS DE COMPORTEMENT ELASTO-VISCOPLASTIQUE ..... 25
**II.2 JUSTIFICATIONS PHYSIQUES DE LA LOI DE COMPORTEMENT CHOISIE ..... 30**
II.2.1 DEFORMATION PLASTIQUE ET MOUVEMENT DES DISLOCATIONS ..... 30
II.2.2 FORMALISME DE L'ACTIVATION THERMIQUE ..... 37
II.2.3 COUPLAGE ENTRE CONTRAINTE INTERNE ET CONTRAINTE EFFECTIVE ..... 42
**II.3 LOI DE COMPORTEMENT ELASTO-VISCOPLASTIQUE ..... 45**
II.3.1 POTENTIEL DE DISSIPATION PROPOSE ..... 45
II.3.2 EVOLUTION DES VARIABLES INTERNES D'ECROUISSAGE ..... 47
II.3.3 LOI ELASTO-VISCOPLASTIQUE TRIDIMENSIONNELLE ..... 49
II.3.4 CONTRAINTE EFFECTIVE $\boldsymbol{\sigma}^*$ : PARTICULARITES ..... 51
II.3.5 SENSIBILITE AUX PARAMETRES ..... 53
**II.4 VALIDATION ET APPLICATION POUR UN ACIER MONOPHASE ..... 55**
II.4.1 IDENTIFICATION DES PARAMETRES ..... 58
II.4.2 SENSIBILITE A LA VITESSE ..... 59
II.4.3 SENSIBILITE A LA TEMPERATURE ..... 61
II.4.4 TRAJETS COMPLEXES DE CHARGEMENT ..... 64
II.4.5 COMPARAISON A D'AUTRES MODELES VISCOPLASTIQUES ..... 67
II.4.6 LIMITES DE LA NOUVELLE APPROCHE ..... 75
**II.5 CONCLUSIONS ..... 76**
**BIBLIOGRAPHIE ..... 79**

**CHAPITRE III : MODELISATION DES HETEROGENEITES DE COMPORTEMENT DE PHASES ELASTO-VISCOPLASTIQUES DANS LES ACIERS MULTIPHASES ..... 83**

**III.1 L'APPROCHE MICROMECANIQUE ..... 85**
III.1.1 NECESSITE D'UNE APPROCHE MULTI-ECHELLES POUR UNE MODELISATION PREDICTIVE ..... 85
III.1.2 ECHELLE DE DESCRIPTION, LONGUEURS CARACTERISTIQUES ET NOTIONS DE V.E.R. ..... 86
III.1.3 RAPPEL DE LA METHODOLOGIE DE L'HOMOGENEISATION ..... 88
III.1.4 ESTIMATIONS AUTOCOHERENTES POUR DES COMPORTEMENTS SIMPLES LINEAIRES ..... 90
**III.2 MODELISATION DES COMPORTEMENTS NON-LINEAIRES ELASTOPLASTIQUE ET VISCOPLASTIQUE ..... 92**
III.2.1 LES PREMIERS PRINCIPAUX MODELES EN ELASTOPLASTICITE ..... 92
III.2.2 LE MODELE AUTOCOHERENT DE KRÖNER EN ELASTOPLASTICITE ..... 93
III.2.3 EXTENSIONS NON LINEAIRES POUR LES COMPORTEMENTS ELASTOPLASTIQUE ET VISCOPLASTIQUE ..... 94
III.2.4 DISCUSSION ..... 101
**III.3 LE PROBLEME MICROMECANIQUE HETEROGENE ELASTO-VISCOPLASTIQUE ..... 102**
III.3.1 LES APPROCHES HEREDITAIRES ..... 103
III.3.2 LES APPROCHES A VARIABLES INTERNES ..... 104
III.3.3 INSUFFISANCE DU SCHEMA AUTOCOHERENT CLASSIQUE ..... 108
III.3.4 LES MODELES A CHAMPS TRANSLATES ..... 109
III.3.5 CONCLUSION ..... 114
**III.4 APPLICATION AUX ACIERS MULTIPHASES ..... 115**
III.4.1 CADRE DE L'ETUDE : UN MODELE MULTIPHASE ..... 115
III.4.2 TRANSITION D'ECHELLES : COMPARAISON ENTRE LE MODELE A CHAMPS TRANSLATES ET LE MODELE EN BETA DANS LE CAS D'UNE LOI DE COMPORTEMENT EN SINH ..... 117
III.4.3 DISCUSSION ..... 121
**III.5 CONCLUSIONS ..... 123**
**BIBLIOGRAPHIE ..... 125**

**CHAPITRE IV : PRISE EN COMPTE DE LONGUEURS INTERNES DANS LES APPROCHES A CHAMPS MOYENS ..... 131**

**IV.1 PRINCIPALES LIMITATIONS DES APPROCHES A CHAMPS MOYENS ..... 133**
**IV.2 PRISE EN COMPTE DES EFFETS DE LONGUEURS INTERNES MICROSTRUCTURALES ..... 134**
IV.2.1 APPROCHE PHENOMENOLOGIQUE ..... 134
IV.2.2 INTRODUCTION DANS UNE APPROCHE NON-LOCALE A CHAMPS MOYENS ..... 136
IV.2.3 EFFET DE TAILLE DE GRAIN ..... 137
**IV.3 APPLICATION : EFFET DE TAILLE DE GRAIN DANS LES ACIERS IF ..... 143**
IV.3.1 PARAMETRES MATERIAU ET IDENTIFICATION ..... 143
IV.3.2 RESULTATS ..... 144
IV.3.3 DISCUSSION ..... 149
**IV.4 MODELISATION DE L'EFFET DE TAILLE DE PARTICULES DURES ..... 151**
IV.4.1 MODELE MICROMECANIQUE A 4 PHASES ..... 151
IV.4.2 RESULTATS ..... 154
IV.4.3 DISCUSSION ..... 156
**IV.5 CONCLUSIONS ..... 156**
**BIBLIOGRAPHIE ..... 159**

**CHAPITRE V : INTEGRATION D'OUTILS D'HOMOGENEISATION DANS LE CODE D'ELEMENTS FINIS ABAQUS POUR LA SIMULATION EN MISE EN FORME DES ACIERS MULTIPHASES ..... 163**

**V.1 PRESENTATION DES ROUTINES UTILISATEURS ..... 165**
V.1.1 METHODE DE RESOLUTION ..... 165
V.1.2 IMPLANTATION DE MODELES A CHAMPS MOYENS DANS UNE ROUTINE UTILISATEUR VUMAT ..... 165
V.1.3 VALIDATION DES ALGORITHMES ..... 166
**V.2 SIMULATION D'UN ESSAI DE TRACTION UNIAXIALE ..... 167**
V.2.1 RAPPELS ET SPECIFICITES DE L'ESSAI DE TRACTION UNIAXIALE ..... 167
V.2.2 SIMULATION NUMERIQUE DE L'ESSAI ..... 173
V.2.3 INFLUENCE DE L'ECROUISSAGE ..... 174
V.2.4 EFFET DE LA SENSIBILITE A LA VITESSE ..... 177
V.2.5 CONCLUSIONS ..... 179
**V.3 SIMULATION D'UN ESSAI DE PLIAGE EN V ..... 180**
V.3.1 EFFET DE L'ECROUISSAGE CINEMATIQUE : APPROCHE PHENOMENOLOGIQUE ..... 182
V.3.2 EFFET DE L'ECROUISSAGE CINEMATIQUE : APPROCHE MICROMECANIQUE ..... 187
**V.4 CONCLUSIONS ..... 190**
**BIBLIOGRAPHIE ..... 193**

**CHAPITRE VI : CONCLUSIONS GENERALES ET PERSPECTIVES ..... 195**

**CONCLUSIONS GENERALES ..... 197**
**PERSPECTIVES ..... 202**

**ANNEXES ..... 205**

**ANNEXE 1 : L'INCLUSION D'ESHELBY ..... 207**
**ANNEXE 2 : GEOMETRIES DU POINÇON ET DES CYLINDRES UTILISEES DANS LA SIMULATION DE PLIAGE EN V ..... 211**

**TABLE DES FIGURES ..... 213**

**TABLE DES TABLEAUX ..... 217**

# CHAPITRE I

# INTRODUCTION GENERALE

## I.1 CONTEXTE INDUSTRIEL ET SCIENTIFIQUE

La prise de conscience croissante des états et des sociétés sur l'environnement a entraîné de profondes modifications sur le comportement de nos industries ces dernières années. Fin 2008, la volonté de la Commission européenne de durcir les normes d'émission de $CO_2$ a obligé les constructeurs automobiles à de multiples innovations sur leurs véhicules sous peine de devoir payer de lourdes pénalités financières dès 2012. Si des progrès notables ont pu être réalisés au niveau de la motorisation, la réduction d'émission de $CO_2$ passe avant tout par un allègement du poids des véhicules et particulièrement par une diminution de l'épaisseur des pièces. En représentant 40% du poids total du véhicule et 98% de celui de la « caisse en blanc » (le squelette structural), l'acier constitue le matériau majoritairement utilisé par l'industrie automobile. Afin de conserver ce marché face à d'autres matériaux moins denses, les fournisseurs d'acier doivent fournir des tôles à plus hautes caractéristiques. Cette nouvelle génération d'aciers doit garantir, à épaisseur plus faible, un niveau de sécurité identique voire meilleur tout en conservant une bonne formabilité. Pour relever ce challenge, les sidérurgistes ont besoin d'outils numériques efficaces permettant :

- d'établir des liens entre la microstructure et les propriétés mécaniques de ces nouveaux aciers afin d'optimiser leur conception,
- de simuler leur comportement durant leur application finale visée, c'est-à-dire la mise en forme de pièces automobiles à partir de produits plats : les tôles.

En effet, l'augmentation des caractéristiques mécaniques de ces nouvelles nuances diminuent leur formabilité. Tout le travail du métallurgiste réside dans l'optimisation de la microstructure afin de garantir un bon compromis entre résistance mécanique et formabilité.

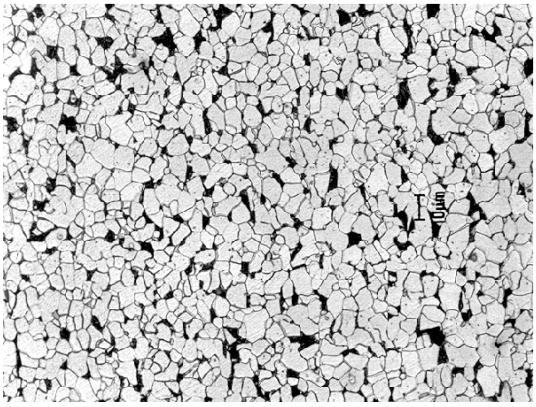
### I.1.1 Les aciers multiphasés

Afin d'atteindre des propriétés accrues de résistance mécanique combinées à de bonnes propriétés de mise en forme, plusieurs mécanismes physiques ont été envisagés par les métallurgistes. Parmi eux citons : le durcissement par solution solide, le durcissement par précipitation, le durcissement par affinement de taille de grain ou par formation de secondes phases, la transformation de phase métastable induite par déformation (effet TRIP) ou encore la génération de macles induite par déformation (effet TWIP).

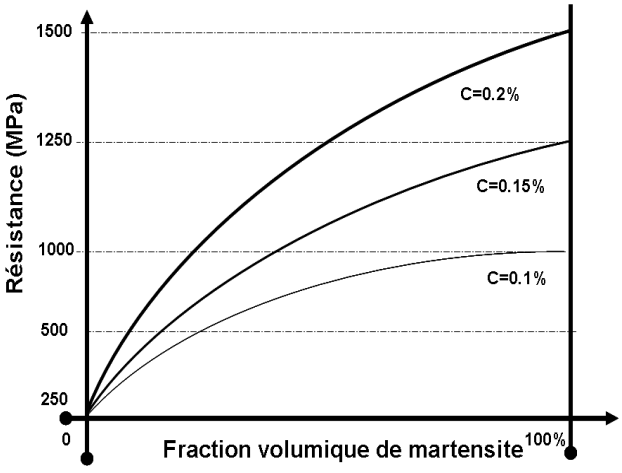
Qu'ils fassent intervenir la dynamique des dislocations ou une transformation de phase induite mécaniquement, ces mécanismes interviennent pour la majorité dans des aciers multiphasés, c'est-à-dire des matériaux composites, « composés » de plusieurs phases. Ces phases dans les aciers peuvent être rangées à température ambiante par dureté croissante : ferrite, perlite, bainite, austénite résiduelle, martensite et cémentite. En science des matériaux, une phase est définie par une composition chimique et un arrangement atomique donné. Appliquée aux aciers, cette définition comporte des limites : la perlite n'est pas une phase puisque formée d'une alternance de fines lamelles de ferrite et de cémentite (carbures de Fer). Il en est de même pour la phase nommée bainite qui peut présenter des morphologies bien différentes. On conçoit donc aisément que la définition de phase appliquée aux aciers est très relative. Elle dépend en particulier de l'échelle d'observation adoptée et est finalement intimement liée à une notion plus vaste : celle d'hétérogénéité (microstructurale, de propriété ou de comportement). Ainsi, un acier dit monophasé est hétérogène : un acier ferritique comporte des grains de ferrite avec des orientations cristallines différentes, des joints de grains etc. Mais si tous les matériaux sont hétérogènes par nature (sauf rares exceptions près tels que les monocristaux purs non déformés [Mon04]), ils peuvent être considérés, à partir

d'une certaine échelle d'observation, comme homogènes dans leur comportement par exemple.

L'intérêt d'un acier multiphasé consiste à combiner les propriétés avantageuses de plusieurs phases. L'exemple le plus connu étant les aciers « Dual-Phase » constitués d'une phase dure et fragile la martensite et d'une phase à faible résistance mais beaucoup plus ductile : la ferrite (**Fig. 1.1a**). Cette combinaison est obtenue lors d'un recuit inter-critique où coexistent la ferrite et l'austénite suivi d'une trempe où l'austénite se transforme en martensite. Selon la fraction de phase dure et le comportement de chacune des phases, les propriétés mécaniques dues à ce mélange peuvent varier considérablement. La **Fig. 1.1b** illustre l'effet de la fraction de phase de martensite contenue dans un acier dual-phase, pour différentes teneurs nominales de carbone.




*a) Micrographie optique d'un acier Dual-Phase : la ferrite apparaît en blanc tandis que la martensite apparaît en noir.*




*b) Evolution schématique de la résistance mécanique des aciers Dual-Phase en fonction de la fraction volumique de martensite et de la teneur en carbone nominal [Bou12].*

**Fig. 1.1 – *Exemple d'aciers multiphasés : les aciers Dual-Phase.***

Du fait de cet effet composite, les aciers Dual-Phase allient une limite d'élasticité relativement faible devant leur résistance mécanique : ils présentent donc une consolidation élevée. Cette propriété traduit une bonne résistance à la striction permettant d'obtenir une grande formabilité à l'emboutissage et de retarder l'apparition de l'endommagement.

A travers cet exemple sur les Dual-Phase, il est aisé de comprendre comment le multiphasage permet en optimisant les microstructures d'obtenir des aciers à caractéristiques améliorées. La volonté forte d'alléger les structures pousse le sidérurgiste à davantage optimiser les microstructures de ses aciers afin de tirer partie au maximum du compromis résistance élevée/formabilité. La **Fig. 1.2** présente la diminution classique la formabilité avec l'augmentation de la résistance mécanique. La flèche orange illustre dans quelle direction les développements doivent évoluer.

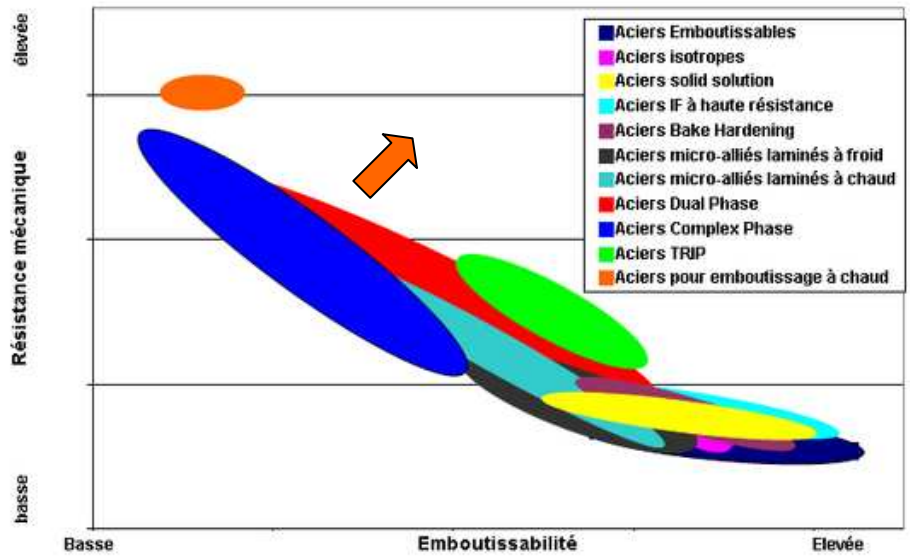



**Fig. 1.2 –** ***Relation entre résistance mécanique et emboutissabilité pour les différentes familles d'aciers [Arc11].***

Le multiphasage est omniprésent, quelle que soit la famille d'aciers à très haute résistance considérée. La combinaison de plusieurs phases au sein d'un même acier offre de multiples possibilités de conception.

## I.1.2 Un problème multi-échelles, multi-approches

La conception et l'optimisation des nouvelles générations d'aciers requièrent un nombre d'essais expérimentaux importants et coûteux. La simulation numérique constitue un outil indispensable afin de diminuer considérablement les campagnes expérimentales et par conséquent les temps et les coûts liés à la conception et à l'optimisation. Le couplage entre essais expérimentaux et simulation numérique reste primordial pour la caractérisation des aciers et la pertinence des simulations. Cependant, la validité de ces dernières dépend directement des lois de comportement injectées en entrée. Ces lois, obtenues généralement à partir de l'identification d'essais expérimentaux, ne sont valables que dans un domaine proche de celui du domaine d'identification des essais. De plus, elles ne permettent pas toujours de donner des indications précises sur les paramètres microstructuraux qu'il conviendrait de changer afin d'optimiser l'acier considéré.

La conception d'un acier au travers de l'optimisation de sa microstructure repose inévitablement sur la compréhension des liens existants entre sa microstructure et ses propriétés mécaniques. Dans le cas d'un acier multiphasé, la loi de comportement globale peut être déterminée à partir des lois de comportement locales de ses phases constitutives à l'aide d'une transition d'échelles. Ceci reporte le problème de l'identification à une échelle plus fine, celle des phases. Mais permet de réajuster le comportement macroscopique de l'acier multiphasé considéré à partir de la fraction volumique de ses phases, de leur morphologie, de leur arrangement dans l'espace, de leur comportement local etc. On peut espérer ainsi accroître le domaine de validité des lois de comportement de ces aciers au-delà du domaine pour lesquels ils ont été identifiés.

L'optimisation de la microstructure d'un acier multiphasé nécessite tout d'abord de travailler à une échelle fine : celle de la microstructure afin de tenter de maîtriser son comportement le plus possible. Le comportement de l'acier nécessite par ailleurs d'être validé

à une plus grande échelle, celle des essais expérimentaux pour la caractérisation des propriétés mécaniques puis celle de la structure pour la mise en forme des pièces : c'est le domaine de la simulation numérique. Force est de constater que le problème de l'optimisation des aciers multiphasés se retrouve au cœur d'un problème multi-échelles nécessitant pour sa résolution le recours à de multiples approches. C'est là par exemple toute la complexité du problème d'optimisation d'une microstructure d'un acier visant à répondre à un problème de localisation de la déformation sur une pièce automobile. Un tel problème est illustré par la **Fig. 1.3**.

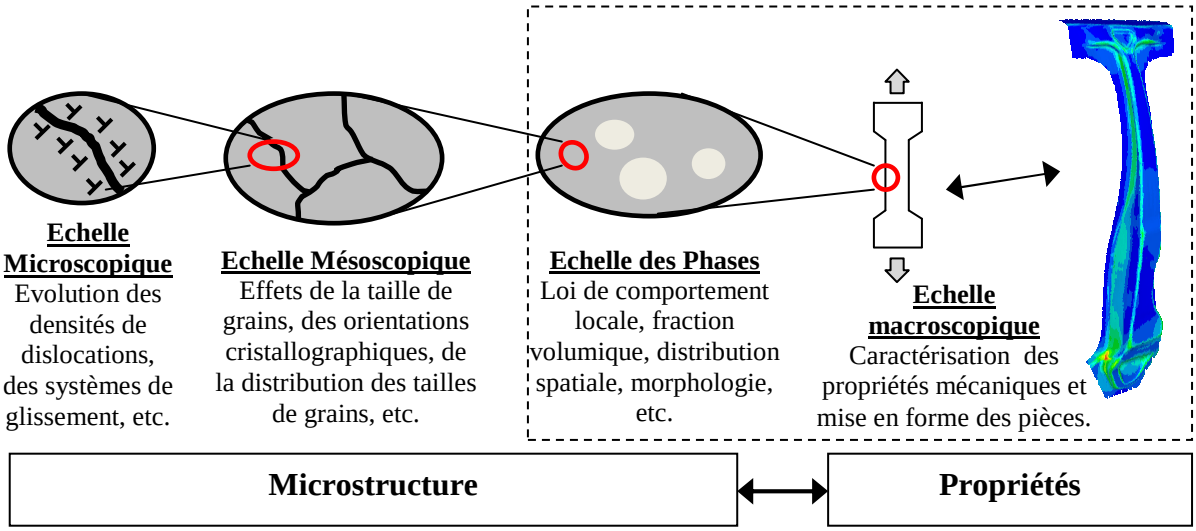



**Fig. 1.3 –** ***Optimisation de la microstructure pour l'amélioration des propriétés mécaniques : un problème à différentes échelles.***

## I.2 CADRE DE LA THESE

L'objectif de cette thèse, partenariat entre le Laboratoire d' Etude des Microstructures et Mécanique des Matériaux et le sidérurgiste ArcelorMittal, s'inscrit pleinement dans cette démarche multi-échelles, multi-approches. L'objectif étant la réalisation d'un outil numérique implanté dans le logiciel de calcul par éléments finis Abaqus proposant la modélisation du comportement d'un acier multiphasé à partir des lois de comportement élasto-viscoplastique de ses phases. L'hétérogénéité du comportement des phases étant prise en compte au travers d'une transition d'échelles. Le cadre ainsi défini est schématisé sur la **Fig. 1.3** par le rectangle en pointillé.

### I.2.1 Objectifs

L'outil numérique, visant à modéliser le comportement élasto-viscoplastique des aciers multiphasés, en vue d'une application pour la simulation en mise en forme, doit répondre principalement à trois critères:

- d'identification aisée, il doit être pertinent dans la description des caractéristiques du comportement rhéologique de ces aciers sur toute la gamme de déformations et de vitesses de déformations que comporte les procédés de mise en forme ;
- au-delà de cette description, il doit établir des liens entre la microstructure et les propriétés mécaniques de l'acier d'une part afin de permettre la possibilité de

concevoir de nouvelles nuances et d'autre part afin d'être pertinent dans la description du comportement au-delà du domaine pour lequel il a été initialement identifié ;
- il doit être facilement implantable dans un logiciel de calcul par éléments finis en vue de simuler le comportement des produits pour leur application finale : la mise en forme et la tenue au crash.

### I.2.2 Organisation du manuscrit

Les chapitres suivants décrivent les modélisations choisies et validées à l'aide de ces critères dans le cadre du développement de cet outil numérique ainsi que les réflexions initiées tout au long de ce travail de thèse.

Dans le chapitre 2, une nouvelle loi de comportement élasto-viscoplastique, basée sur une loi scalaire proposée par ArcelorMittal, est formulée dans un cadre tensoriel et exprimée sous forme incrémentale. Basée sur des mécanismes physiques liés à la dynamique des dislocations, elle est tout d'abord validée à partir d'un ensemble de résultats expérimentaux puis confrontée à des modèles récents issus de la littérature.

Le chapitre 3 traite de la prise en compte de l'hétérogénéité du comportement élasto-viscoplastique des phases constitutives au sein d'un acier multiphasé. Au travers d'une analyse bibliographique sur les modèles de transition d'échelles, les spécificités liées au comportement élasto-viscoplastique sont mises en relief. L'application de ces modèles dans le cadre d'un acier multiphasé est discutée dans le but de définir une solution applicable à l'outil numérique de cette thèse.

Dans le chapitre 4, nous nous penchons sur la faiblesse des approches à champs moyens à capter des effets de longueurs internes microstructurales. Ce chapitre est l'occasion de proposer une nouvelle approche micromécanique visant à introduire dans ces approches des longueurs internes de manière originale afin de reproduire des effets de taille de microstructure (taille de grains, taille de particules dures etc.) sur le comportement macroscopique homogénéisé.

Dans le chapitre 5, l'outil de modélisation du comportement macroscopique d'un acier multiphasé à partir des lois de comportement élasto-viscoplastique locales de ses phases est implanté dans le logiciel de calcul par éléments finis Abaqus. Les différents choix de modélisation sont illustrés, confortés voire confrontés au travers de la simulation d'un essai de traction uniaxiale et de la simulation d'un essai de pliage en V.

Enfin, le chapitre 6 permet de conclure sur l'ensemble du travail réalisé et des perspectives qu'il offre.

## BIBLIOGRAPHIE

[Bou12] **BOUAZIZ O.** Aciers avancés pour applications automobiles : forces motrices et logique de développement. **In**: *Techniques de l'ingénieur*, à paraître.

[Mon04] **MONTHEILLET F.** Comportement rhéologique des matériaux métalliques multiphasés. **In:** *Techniques de L'ingénieur*, 20 pages, 2004.

[Arc11] **ARCELORMITTAL.** Catalogue offre produits pour l'automobile. *Site internet : www.arcelormittal.com*, mis à jour le 31-08-2011.

# CHAPITRE II

# LOIS DE COMPORTEMENT ELASTO-VISCOPLASTIQUE

## II.1 FORMULATION D'UNE LOI DE COMPORTEMENT NON-LINEAIRE 3D

Parmi les principales méthodes de formulation des lois de comportement des matériaux, l'approche thermodynamique est celle qui décrit les phénomènes physiques microscopiques du milieu réel par l'évolution de variables internes macroscopiques dans un milieu fictif équivalent homogène et continu. Cette approche « phénoménologique » est utilisée dans cette étude afin de construire une loi de comportement élasto-viscoplastique tridimensionnelle qui sera utilisée pour décrire le comportement des phases individuelles d'aciers multiphasés.

Nous rappelons dans une première partie le formalisme thermodynamique utilisé pour la construction de lois de comportement non linéaires en introduisant le concept de matériaux standard et standard généralisés. Après une comparaison des différentes formes classiques de lois de comportement viscoplastique, nous justifions notre choix par l'interprétation de mécanismes physiques de déformation propres aux matériaux cubiques centrés. Dans une troisième partie, nous particularisons le formalisme thermodynamique à la détermination d'une loi élasto-viscoplastique dont la partie visqueuse est exprimée à l'aide d'une fonction sinus hyperbolique. Enfin, dans une dernière partie, la nouvelle loi de comportement élasto-viscoplastique est appliquée dans le cas des aciers ferritiques au travers d'un solveur Fortran. Afin de déterminer les limites de l'approche proposée, une confrontation est menée avec d'une part des essais expérimentaux sur des trajets séquentiels de chargement, et d'autre part avec des modèles viscoplastiques issus de la littérature.

### II.1.1 Etat thermodynamique et variables d'état

La thermodynamique revient à considérer toute évolution (temporelle ou spatiale) comme une succession d'états d'équilibre (en fait stationnaires). L'état thermodynamique d'un élément de matière peut être défini par un certain nombre de variables indépendantes : les variables d'état. La connaissance des valeurs de ces variables à un instant t donné en tout point de l'élément de matière suffit à le caractériser entièrement. Le choix des variables d'état dépend de la nature du problème à traiter et du nombre de phénomènes physiques que l'on désire modéliser.

Dans le cadre de la thermodynamique associée à la mécanique des milieux continus, les variables d'état choisies sont :

i) la déformation $\boldsymbol{\varepsilon}$,
ii) la température T,
iii) la déformation inélastique notée $\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{p}}$ ou $\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{vp}}$ qui rend compte de l'histoire de déformation pour les phénomènes irréversibles,
iv) les variables internes scalaires et tensorielles notées respectivement $V_k$ et $\mathbf{V_k}$ dont l'évolution rend compte des transformations internes du matériau (écrouissage isotrope, écrouissage cinématique etc.…).

On suppose que la déformation $\boldsymbol{\varepsilon}$ peut être décomposée en la somme d'une partie élastique $\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{e}}$ et d'une partie inélastique $\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{p}}$ :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{e}} + \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{p}} \qquad \textbf{(2.1)}$$

## II.1.2 Premier et second principe de la thermodynamique

Le potentiel thermodynamique naturellement utilisé en mécanique est l'énergie libre de Helmholtz qui relie l'énergie interne spécifique « e » et l'entropie spécifique « s » :

$$\psi = e - Ts \tag{2.2}$$

Le premier principe de la thermodynamique exprime la conservation de l'énergie en exprimant la variation de l'énergie interne du matériau par unité de volume comme la somme du flux spécifique d'énergie des forces intérieures et du flux de chaleur reçue. Il s'écrit en l'absence de rayonnement :

$$\rho\dot{e} = \boldsymbol{\sigma}:\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \mathrm{div}\vec{\mathbf{q}} \tag{2.3}$$

$\boldsymbol{\sigma}$ étant le tenseur des contraintes de Cauchy, $\rho$ la densité volumique et $\vec{\mathbf{q}}$ le vecteur flux de chaleur.

Le second principe de la thermodynamique traduit que la vitesse de production d'entropie doit être positive :

$$\rho\dot{s} + \mathrm{div}\left(\frac{\vec{\mathbf{q}}}{T}\right) \geq 0 \tag{2.4}$$

En remarquant que :

$$\mathrm{div}\left(\frac{\vec{\mathbf{q}}}{T}\right) = \frac{\mathrm{div}\vec{\mathbf{q}}}{T} - \frac{\vec{\mathbf{q}}.\overrightarrow{\mathbf{grad}}T}{T^2},$$

l'introduction de l'énergie libre $\psi$ dans les expressions du premier et du second principe de la thermodynamique conduit à l'expression de l'inégalité de Clausius-Duhem :

$$\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \rho\left(\dot{\psi} + s\dot{T}\right) - \frac{1}{T}\vec{\mathbf{q}}.\overrightarrow{\mathbf{grad}}T \geq 0 \tag{2.5}$$

L'état thermodynamique du matériau est représenté localement par le potentiel d'énergie libre dépendant de variables d'état arbitrairement choisies, ici $\psi = \psi(\varepsilon^e, T, V_k)$. Le flux du potentiel d'énergie libre peut donc se décomposer comme suit :

$$\dot{\psi} = \frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}^e} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e + \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{V}_k} : \dot{\mathbf{V}}_k + \frac{\partial\psi}{\partial T}\dot{T} \tag{2.6}$$

En introduisant les relations (2.1) et (2.6) dans (2.5), on obtient une nouvelle expression de l'inégalité de Clausius-Duhem :

$$\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p + \left(\boldsymbol{\sigma} - \rho\frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}^e}\right) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e - \rho\left(s + \frac{\partial\psi}{\partial T}\right)\dot{T} - \rho\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{V}_k}\dot{\mathbf{V}}_k - \frac{1}{T}\vec{\mathbf{q}}.\overrightarrow{\mathbf{grad}}T \geq 0 \tag{2.7}$$

Cette inégalité doit être vraie quelle que soit la transformation considérée. Si l'on considère une transformation élastique isotherme ($\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathbf{p}} = \overrightarrow{\mathbf{grad}}T = \vec{\mathbf{0}}$ et $\dot{T} = 0$) sans évolution des variables internes ($\dot{\mathbf{V}}_{\mathbf{k}} = \vec{\mathbf{0}}$) alors on obtient :

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{e}}} \qquad \textbf{(2.8)}$$

Pour une transformation thermoélastique à température homogène ($\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathbf{p}} = \mathbf{0}$ et $\overrightarrow{\mathbf{grad}}T = \vec{\mathbf{0}}$), sans variation des variables internes ($\dot{\mathbf{V}}_{\mathbf{k}} = \mathbf{0}$), et compte tenu de (2.8) on obtient :

$$s = -\frac{\partial \psi}{\partial T} \qquad \textbf{(2.9)}$$

Les relations (2.8) et (2.9) définissent les lois de la thermoélasticité [Lem88]. Le tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ et l'entropie spécifique $s$ sont donc les forces thermodynamiques respectivement associées au tenseur des déformations élastiques $\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{e}}$ et à la température T. Par analogie, on définit les forces thermodynamiques associées aux variables internes par l'expression :

$$\mathbf{v}_{\mathbf{k}} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{V}_{\mathbf{k}}} \qquad \textbf{(2.10)}$$

A chaque instant, le potentiel thermodynamique $\psi=\psi(\varepsilon^{e},T,\mathbf{V}_{\mathbf{k}})$ donne des relations entre les variables d'état $(\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{e}},T,\mathbf{V}_{\mathbf{k}})$ et les variables associées $(\boldsymbol{\sigma},s,\mathbf{v}_{\mathbf{k}})$, ce sont les lois d'état. Ce potentiel suffit donc pour les problèmes de thermoélasticité. Pour des phénomènes irréversibles, l'évolution des variables internes décrivant les transformations irréversibles du matériau nécessitent des lois complémentaires qui doivent également respecter le second principe de la thermodynamique. Ces lois complémentaires sont obtenues à partir du potentiel de dissipation qui peut être introduit, par exemple, par le formalisme des matériaux standard généralisés.

### II.1.3 Les matériaux standard et standard généralisés

En tenant compte des lois de la thermoélasticité (2.8) et (2.9), l'expression de l'inégalité de Clausius-Duhem (2.7) s'écrit sous la forme d'une dissipation $\Phi$ positive ou nulle :

$$\Phi = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathbf{p}} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{V}_{\mathbf{k}}} : \dot{\mathbf{V}}_{\mathbf{k}} - \frac{1}{T} \vec{\mathbf{q}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{grad}}T \geq 0 \qquad \textbf{(2.11)}$$

Il est possible de décomposer cette dissipation en deux parties : la dissipation intrinsèque volumique $\Phi_i$ et la dissipation thermique volumique $\Phi_T$ :

$$\Phi_i = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathbf{p}} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{V}_{\mathbf{k}}} : \dot{\mathbf{V}}_{\mathbf{k}} \qquad \textbf{(2.12)}$$

$$\Phi_T = -\frac{1}{T}\vec{\mathbf{q}}.\overrightarrow{\mathbf{grad}}T \qquad \textbf{(2.13)}$$

Le cadre thermodynamique est alors respecté si l'inégalité de Clausius-Duhem est vérifiée, ce qui revient à considérer que la dissipation est positive ou nulle. Halphen et Nguyen [Hal74], [Hal75] ont proposé un formalisme rigoureux permettant de construire des lois de comportement tout en vérifiant de façon systématique le second principe. Les auteurs postulent l'existence d'un potentiel de dissipation $\Omega$ qui s'exprime comme une fonction scalaire semi-continue inférieurement des variables flux $\left(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathbf{p}}, \dot{V}_k, \frac{\vec{\mathbf{q}}}{T}\right)$ et minimale à l'origine. La dissipation s'exprime alors sous la forme suivante :

$$\Phi = \frac{\partial \Omega}{\partial \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathbf{p}}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathbf{p}} + \frac{\partial \Omega}{\partial \dot{\mathbf{V}}_k} : \dot{\mathbf{V}}_k + \frac{\partial \Omega}{\partial \vec{\mathbf{q}}/T} \cdot \frac{\vec{\mathbf{q}}}{T} \qquad \textbf{(2.14)}$$

Les lois complémentaires donnant l'expression des variables conjuguées $\left(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{v}_k, \overrightarrow{\mathbf{grad}}T\right)$ sont obtenues à partir de l'hypothèse de dissipativité normale [Mor70] :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} = \dfrac{\partial \Omega}{\partial \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathbf{p}}} \\ \mathbf{v}_k = -\dfrac{\partial \Omega}{\partial \dot{\mathbf{V}}_k} \\ \overrightarrow{\mathbf{grad}}T = -\dfrac{\partial \Omega}{\partial \vec{\mathbf{q}}/T} \end{cases} \qquad \textbf{(2.15)}$$

Il est courant d'utiliser le potentiel de dissipation dual de $\Omega$ : $\Omega^*$ qui s'exprime comme une fonction scalaire semi-continue inférieurement des variables conjuguées $\left(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{v}_k, \overrightarrow{\mathbf{grad}}T\right)$ et minimale à l'origine. Ce potentiel $\Omega^*$ est défini par la transformée de Legendre de $\Omega$ :

$$\Omega^*\left(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{v}_k, \overrightarrow{\mathbf{grad}}T\right) = \sup\left(\Phi - \Omega\left(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathbf{p}}, \mathbf{V}_k, \vec{\mathbf{q}}/T\right)\right) \qquad \textbf{(2.16)}$$

Il permet d'obtenir l'évolution des variables d'état par les lois complémentaires suivantes :

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathbf{p}} = \dfrac{\partial \Omega^*}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \\ \dot{\mathbf{V}}_k = -\dfrac{\partial \Omega^*}{\partial \mathbf{v}_k} \\ \vec{\mathbf{q}}/T = -\dfrac{\partial \Omega^*}{\partial \overrightarrow{\mathbf{grad}}T} \end{cases} \qquad \textbf{(2.17)}$$

La première loi conduit à la loi de viscoplasticité dont la sensibilité est gouvernée par la forme du potentiel $\Omega^*$. La deuxième loi exprime l'évolution des variables internes tandis que la troisième loi conduit à l'équation de la chaleur [Lem88]. Un matériau respectant

uniquement la première loi est dit « standard ». Un matériau respectant l'ensemble des lois est dit « standard généralisé » : la règle de normalité est alors étendue aux variables internes.

Le formalisme des matériaux standard généralisés repose donc sur l'existence de deux potentiels :

i) L'énergie libre $\psi$ qui permet d'une part d'obtenir les lois d'état qui sont les relations entre les variables d'état et les forces thermodynamiques associées et qui définit d'autre part les variables internes associées aux phénomènes irréversibles,
ii) Le potentiel dual de dissipation $\Omega^*$ qui définit l'ensemble des phénomènes dissipatifs : la loi de viscoplasticité et l'évolution des variables internes.

La formulation de la loi de comportement nécessite donc de choisir un potentiel de dissipation satisfaisant les conditions imposées par le formalisme des matériaux standard généralisés. Ce choix procure une certaine liberté et dépend des phénomènes physiques et donc des variables internes choisies que l'on désire inclure dans le modèle de comportement.

### II.1.4 Application aux lois de comportement élasto-viscoplastique

Compte tenu de l'hypothèse de partition des déformations, la déformation totale s'exprime comme la somme d'une déformation élastique et d'une déformation viscoplastique :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^{e} + \boldsymbol{\varepsilon}^{vp}$$

La relation d'élasticité considérée ici comme linéaire et isotrope, est obtenue par la loi de Hooke généralisée par Cauchy qui relie de façon linéaire le tenseur des contraintes au tenseur des déformations élastiques :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}^{e}$$

avec **C**, le tenseur classique d'ordre 4 des modules d'élasticité.

La partie viscoplastique des déformations est déduite directement à partir du potentiel de dissipation par la relation (2.17) rappelée ici :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp} = \frac{\partial \Omega^*}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$$

La forme de la loi de comportement élasto-viscoplastique dépend donc principalement de sa partie viscoplastique. Différentes formes de lois de comportement existent, et leur spécificité réside essentiellement dans le choix de la forme du potentiel de dissipation. Parmi les lois présentes dans la littérature visant à expliquer la relation entre la vitesse de déformation et la contrainte appliquée, deux écoles se distinguent principalement :

i) La première école s'attache à décrire des expériences de fluage à contrainte faible : la vitesse de déformation est généralement une fonction puissance de la contrainte,
ii) La deuxième école s'intéresse plus particulièrement aux fortes contraintes et aux grandes vitesses de déformation : dans ce cas, la vitesse de déformation est une fonction exponentielle ou hyperbolique de la contrainte.

Dans cette partie, une analyse des trois principales formes de lois de comportement présentes dans la littérature est menée. La comparaison de leur domaine de validité respectif permet de choisir la forme adéquate pour la constitution du modèle élasto-viscoplastique au domaine visé (simulation de la mise en forme et du crash).

**Lois viscoplastiques de type puissance**

Le modèle viscoplastique unidimensionnel de Norton relie la vitesse de déformation à la contrainte par une loi en puissance :

$$\sigma = \lambda\left(\dot{\varepsilon}^{vp}\right)^{1/N} \qquad \textbf{(2.18)}$$

où $\lambda$ et N sont des constantes, tel que :

$$N = \frac{1}{m} \text{ et } m = \frac{d\left(\ln\sigma\right)}{d\left(\ln\dot{\varepsilon}^{vp}\right)}$$

La loi d'Odqvist est la généralisation de la loi de Norton dans le domaine tridimensionnel. Le potentiel viscoplastique dont elle est issue s'écrit :

$$\Omega^{*} = \frac{\lambda}{N+1}\left(\frac{\sigma_{eq}}{\lambda}\right)^{N+1} \qquad \textbf{(2.19)}$$

où $\sigma_{eq} = J_2(\boldsymbol{\sigma})$ est la contrainte équivalente de von Mises. Par dérivation de ce potentiel, selon la relation (2.17), on obtient la relation entre le tenseur des déformations viscoplastiques $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathbf{vp}}$ et le déviateur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}'$ :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathbf{vp}} = \frac{3}{2}\left(\frac{\sigma_{eq}}{\lambda}\right)^{N}\frac{\boldsymbol{\sigma}'}{\sigma_{eq}} \qquad \textbf{(2.20)}$$

La loi de Norton généralisée comporte des limitations importantes :

i) Un domaine d'élasticité négligeable : la partie viscoplastique de dépend pas de la taille du domaine d'élasticité,
ii) Pas d'écrouissage et donc pas de variables internes décrivant les transformations internes du matériau,
iii) L'exposant N, dit de Norton, n'est valable, une fois fixé, que dans un domaine peu étendu de contraintes.

Il est possible de compléter la loi d'Odqvist, beaucoup d'auteurs ont contribué à l'élaboration de variantes de la loi de Norton généralisée. Parmi ces variantes, il est possible par exemple d'ajouter :

i) un terme d'écrouissage isotrope R,
ii) un terme d'écrouissage cinématique **X**,
iii) un domaine d'élasticité de taille $Y = \sigma_0 + R$.

Le potentiel viscoplastique correspondant s'écrit alors :

$$\Omega^{*} = \frac{\sigma_0}{N+1}\left(\frac{\left\langle \sigma_{eq} - Y \right\rangle}{\sigma_0}\right)^{N+1} \qquad \textbf{(2.21)}$$

où $\langle . \rangle$ indique la partie positive. Le tenseur des déformations viscoplastiques qui en découle est de la forme :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathbf{vp}} = \frac{3}{2}\left(\frac{\left\langle \sigma_{eq} - Y \right\rangle}{\sigma_0}\right)^{N} \frac{\boldsymbol{\sigma}' - \mathbf{X}}{\sigma_{eq}} \qquad \textbf{(2.22)}$$

où $\sigma_{eq} = J_2(\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{X})$ est la contrainte équivalente de von Mises dans l'espace déviatorique et $\sigma_0$ est la taille du domaine initial d'élasticité.

**Domaine de validité des lois en puissances et des lois exponentielles**

Les lois puissances comportent des limitations majeures quant à la modélisation de la contrainte en fonction de la déformation et sa sensibilité à la vitesse de déformation. Lemaitre et Chaboche montrent les limitations de telles lois [Lem88] :

i) Le domaine de vitesse de déformation est compris entre $10^{-8}$ $s^{-1}$ et $10^{-3}$ $s^{-1}$ environ. Pour des vitesses très faibles (inférieures à $10^{-8}$ $s^{-1}$), il faut prendre en compte l'évolution possible de l'exposant N en fonction de la contrainte ce qui peut être résolu en ajoutant un terme exponentiel,
ii) Le domaine de déformation dépend des essais sur lesquels l'identification a été effectuée. Il est en général compris entre $10^{-4}$ et $10^{-2}$ et peut être étendu grâce à un terme d'écrouissage linéaire.

Les lois puissances peuvent être améliorées par l'adjonction de termes correctifs (terme linéaire, terme exponentiel etc.) ce qui correspond malheureusement à alourdir la modélisation par l'ajout de nouveaux paramètres qu'il faut identifier.

Pour des contraintes élevées, la vitesse de déformation croît très vite en fonction de la contrainte et la loi puissance ne parvient plus à décrire correctement l'évolution des courbes expérimentales. Dans ce domaine de contraintes élevées, les lois de type exponentiel s'ajustent bien à l'évolution de la contrainte en fonction de la vitesse de déformation. Malheureusement, pour de faibles contraintes, ces lois exponentielles ne sont plus valables.

Afin de décrire correctement l'écoulement plastique et la sensibilité de la contrainte d'écoulement à la vitesse de déformation, il convient de se baser sur les résultats de nombreuses expériences [Poi76], [Bou97], [Rus01], [Rus07]. Celles-ci montrent que :

i) pour de très faibles vitesses de déformation ($\dot{\varepsilon}^{vp} \to 0$), l'écoulement plastique est newtonien ($\dot{\varepsilon}^{vp} \sim \sigma$),
ii) pour des vitesses de déformation faibles ($10^{-8}s^{-1} \le \dot{\varepsilon}^{vp} \le 10^{-3}s^{-1}$), les lois puissances décrivent de façon satisfaisante cette sensibilité,

iii) pour des vitesses de déformation plus grandes, la sensibilité est mieux décrite par une loi exponentielle,
iv) la contrainte d'écoulement observe une saturation de sa sensibilité à la vitesse de déformation lorsque celle-ci augmente.

L'ensemble de ces observations peut être résumé par la **Fig. 2.1**. La figure permet de comprendre la raison pour laquelle l'on retrouve classiquement dans la littérature un grand nombre de lois viscoplastiques dont la forme est une loi en puissance ou une loi exponentielle. Chacune opérant dans un domaine de déformation, un domaine de vitesses de déformation et un domaine de contraintes différents. Certaines lois regroupent un terme en puissance et un terme exponentiel permettant ainsi d'étendre leur domaine de validité. Malheureusement, ces lois nécessitent un ensemble de paramètres à identifier plus important dont la signification physique n'est pas toujours évidente.

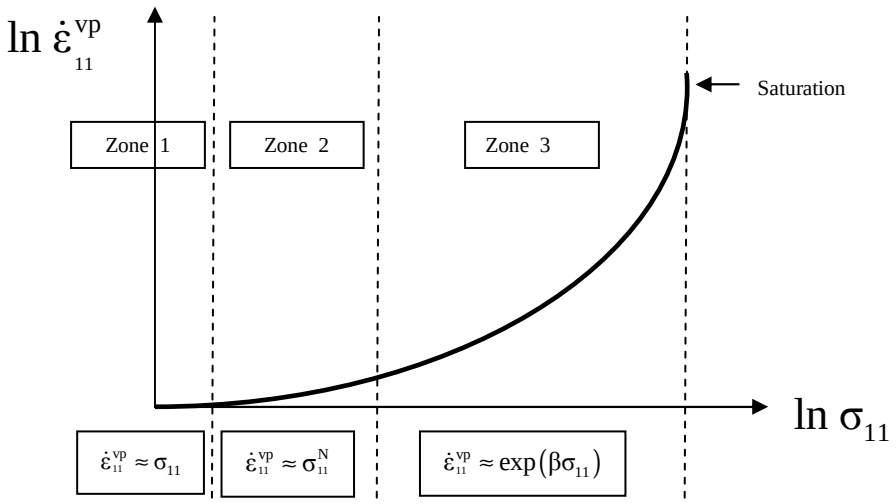



**Fig. 2.1 –** ***Représentation schématique de la sensibilité de la contrainte à la vitesse de déformation en traction uniaxiale.***

La détermination d'une loi de comportement doit donc faire face à un compromis entre :

i) le nombre de paramètres à identifier du modèle qui doit être le plus faible possible et dont l'identification doit être la plus aisée possible,
ii) la pertinence du modèle à reproduire les résultats expérimentaux dans un domaine de validité le plus étendu possible.

## Lois en sinus hyperbolique

Afin de couvrir l'ensemble du domaine des contraintes pour des résultats en fluage, différents auteurs [Wee57], [Gar63], [Bar65], [Sel66], [Jon69] ont proposé des relations empiriques en sinus hyperbolique reliant la vitesse de déformation $\dot{\varepsilon}^{vp}$ à la contrainte $\sigma$. Parmi ces auteurs, Sellars et Tegart [Sel66] ont proposé une relation qui non seulement couvre un large domaine en contraintes mais également un large domaine en température :

$$\dot{\varepsilon} = A\left(\sinh \alpha\sigma\right)^{n} \exp\left(\frac{-Q}{RT}\right) \qquad \textbf{(2.23)}$$

où A, α et n sont des constantes indépendantes de la température, Q étant l'énergie d'activation.

On rappelle l'expression du sinus hyperbolique et son développement limité de Taylor au voisinage de zéro :

$$\sinh\left(x\right) = \frac{\exp\left(x\right) - \exp\left(-x\right)}{2} \qquad \textbf{(2.24)}$$

$$\sinh(x)\big|_{x=0} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + ... \qquad \textbf{(2.25)}$$

Ce type de loi en sinus hyperbolique peut être réduit à une loi en puissance pour de faibles contraintes et à une loi exponentielle pour de très fortes contraintes, ce qui de ce fait lui confère une validité plus générale. En effet, pour de faibles contraintes, compte tenu des relations (2.24) et (2.25), l'équation (2.23) est équivalente à une loi en puissance :

$$\dot{\varepsilon} = A'\left(\alpha\sigma\right)^{n} \exp\left(\frac{-Q}{RT}\right) \approx K_1 \times \sigma^{n} \qquad \textbf{(2.26)}$$

avec $K_1$ constante.

Pour de fortes contraintes, compte tenu de (2.24), l'équation (2.23) est équivalente à une loi exponentielle :

$$\dot{\varepsilon} = A''\exp\left(\beta\sigma\right)\exp\left(\frac{-Q}{RT}\right) \approx K_2 \times \exp\left(\sigma\right) \qquad \textbf{(2.27)}$$

avec $K_2$ constante.

La loi en sinus hyperbolique décrit donc bien de façon asymptotique la sensibilité de la contrainte à la vitesse de déformation schématisée sur la **Fig. 2.1**. A savoir :

i) un écoulement newtonien pour les plus faibles contraintes,
ii) un comportement linéaire pour les faibles contraintes (loi puissance),
iii) un comportement saturant exponentiel pour les fortes contraintes (loi exponentielle).

Elle permet d'obtenir ainsi un comportement physiquement acceptable sur un large domaine de contraintes ce que ne permettent pas seules les lois en puissance (échec pour les fortes contraintes) et les lois exponentielles (échec pour les faibles contraintes).

Par rapport à des lois mixtes faisant intervenir à la fois une partie puissance et une partie exponentielle, la loi en sinus hyperbolique comporte moins de paramètres. Langkruis *et al.* [Lan99] ont montré que nombre de modèles de comportement viscoplastique (lois puissance, lois exponentielles, lois en sinus hyperbolique) pouvaient être dérivés de l'équation exponentielle saturante générale proposée par Sah *et al.* [Sah69]. Les auteurs comparent la modélisation de comportement de quatre alliages Al-Mg-Si à partir de cinq modèles différents :

i) les quatre premiers modèles sont des variantes de l'équation générale saturante dont la sensibilité à la vitesse de déformation est de la forme puissance, exponentielle ou sinus hyperbolique,
ii) le cinquième modèle est une loi en sinus hyperbolique.

Les auteurs concluent que le modèle le plus favorable à la modélisation est celui en sinus hyperbolique compte tenu de la qualité de l'identification, de la complexité du modèle et des valeurs des paramètres d'identification obtenus et ce, malgré une précision moindre vis-à-vis de lois plus complexes à nombre de paramètres plus important.

Afin de décrire le comportement élasto-viscoplastique des aciers multiphasés sur un large domaine de contraintes et de vitesses de déformation pour l'application visée (simulation de la mise en forme et du crash), la forme de loi élasto-viscoplastique retenue dans le cadre de ce travail de thèse est une loi en sinus hyperbolique. Celle-ci présente l'avantage d'un large domaine de validité pour un nombre réduit de paramètres auxquels il est toutefois possible de donner un sens physique.

## II.2 JUSTIFICATIONS PHYSIQUES DE LA LOI DE COMPORTEMENT CHOISIE

Dans cette partie, nous justifions le choix de la forme de la loi en sinus hyperbolique à partir de mécanismes physiques responsables de la déformation viscoplastique. La description de l'activation thermique de ces mécanismes au travers du système thermodynamique permet de préciser la loi d'écoulement et d'introduire naturellement les effets de vitesses dans le comportement.

### II.2.1 Déformation plastique et mouvement des dislocations

D'un point de vue général, tous matériaux confondus, il est possible de regrouper sous le terme de « déformations inélastiques » l'ensemble des déformations permanentes, c'est-à-dire l'ensemble des déformations qui peuvent subsister lorsque la sollicitation devient nulle (**Fig. 2.2**). La déformation inélastique s'oppose ainsi à la déformation élastique qui elle est réversible : lorsque la sollicitation est stoppée, un matériau élastique retrouve l'état initial qu'il avait avant sollicitation. Le matériau plastique, lui, a changé d'état. La notion d'inélasticité est donc intimement liée à la notion d'irréversibilité. A l'échelle de la microstructure, cette irréversibilité se traduit par une transformation permanente de la microstructure.

Pour les matériaux métalliques polycristallins qui nous intéressent dans le cadre de cette étude sur les aciers multiphasés, la plasticité est, dans la plupart des cas et à basses températures, associée au mouvement des dislocations. Nous exclurons de notre étude des mécanismes plus particuliers comme le maclage propre aux aciers TWIP ou encore la transformation de phase présente dans les aciers TRIP. Nous nous intéresserons ici exclusivement au cas le plus général, c'est-à-dire au mouvement des dislocations par glissement sur les plans cristallographiques.

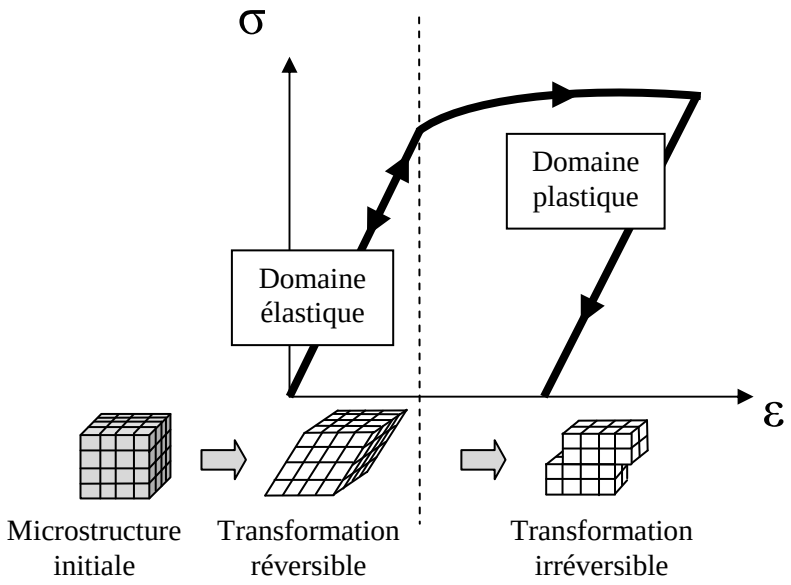


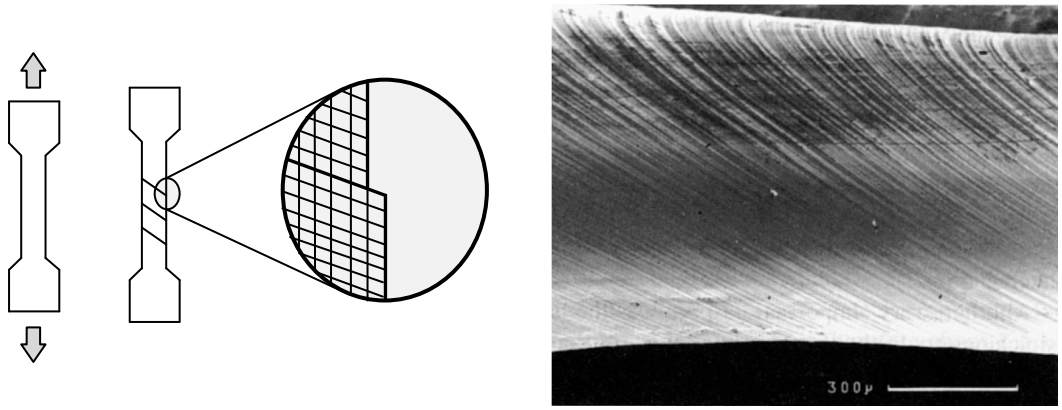

**Fig. 2.2 –** ***Transformation réversible puis irréversible de la microstructure lors d'une déformation élastoplastique.***

Sans vouloir rentrer dans le détail de la théorie des dislocations qui sort du cadre de notre étude, il est toutefois nécessaire de rappeler ici quelques notions sur les dislocations et les mécanismes rentrant en jeu dans la déformation plastique afin de mieux comprendre les choix de modélisation du comportement plastique ou viscoplastique présentés par la suite.

**Dislocations : origines, définitions et propriétés**

A l'aide d'un microscope, la visualisation d'un essai de traction sur un monocristal montre, une fois le régime plastique établi, l'apparition de marches à sa surface (**Fig. 2.3**). Une « marche » est en fait le résultat visible en surface d'un décalage dans le réseau cristallin.

Les premiers modèles tentèrent d'expliquer les traces de glissement à la surface des matériaux déformés par le glissement rigide de blocs cristallins via des plans atomiques denses. Or les calculs montrèrent très vite que la contrainte nécessaire pour cisailler de façon rigide un cristal sans défauts, c'est-à-dire couper l'ensemble des liaisons du plan atomique, déplacer les blocs puis pour les recoller ensuite, était $10^2$ à $10^4$ fois supérieure à la limite d'élasticité. Dans les années 1930, Polanyi, Taylor et Orowan proposèrent alors l'existence d'un mécanisme facilitant un tel mouvement du réseau : le glissement ne s'effectue pas de façon rigide mais se propage à l'aide de défauts linéaires du réseau : les dislocations. Le déplacement d'un bloc cristallin via un plan atomique facilité par une dislocation est souvent illustré par le déplacement d'un tapis reposant sur le sol facilité par la propagation d'une bosse (**Fig. 2.4**). En effet, du fait du frottement, il est plus facile de créer une bosse à l'extrémité d'un tapis et la propager que de vouloir traîner le tapis directement.




*(a) Essai de traction et apparition de lignes de glissement à la surface de l'éprouvette.*

*(b) Micrographie M.E.B. d'un monocristal de Cadmium déformé par glissement des dislocations selon les plans (100). Mise en évidence des marches créées à sa surface. ©DoITPoMS, University of Cambridge [Cam09].*

**Fig. 2.3 –** ***Mise en évidence de marches à la surface d'un monocristal soumis à une traction uniaxiale.***

Puisque le déplacement d'un tapis est facilité par la propagation de bosses, il est possible de dire, dans un même esprit, que la déformation plastique est donc facilitée par la propagation de défauts cristallins linéaires : les dislocations. L'invention du microscope électronique permit plus tardivement de confirmer la présence de ces défauts linéaires du réseau qui se révèlent être capitaux dans la compréhension des mécanismes de la déformation plastique des métaux.

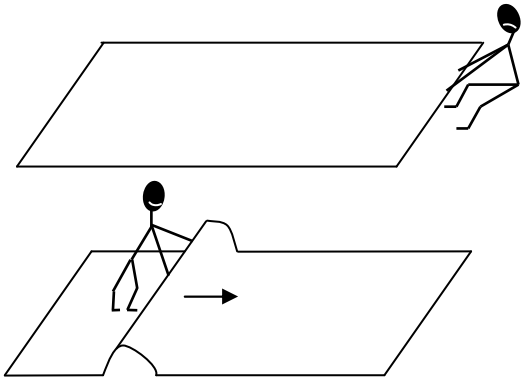
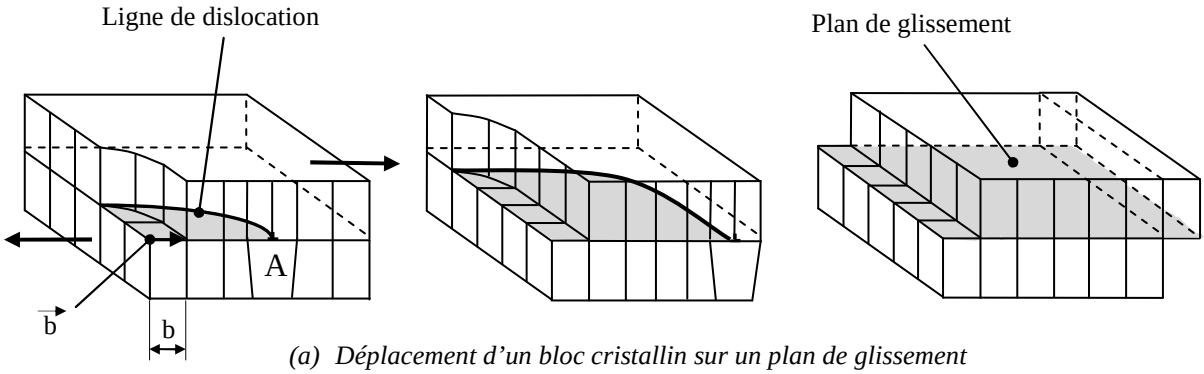


**Fig. 2.4 –** ***Déplacement schématique d'un tapis au sol facilité par création et la propagation d'une bosse.***

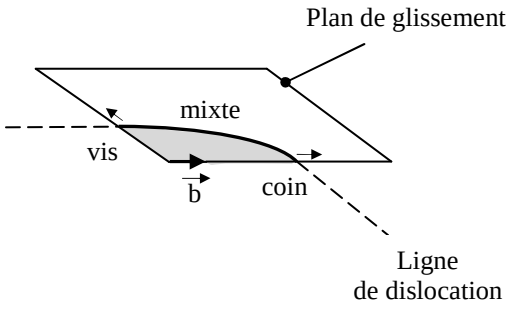
Le déplacement élémentaire d'un bloc cristallin qui correspond à une distance interatomique sur le plan de glissement (**Fig. 2.3**) n'est donc pas le résultat de la translation rigide de blocs cristallins de part et d'autre du plan de glissement mais résulte bien du déplacement progressif d'un bloc facilité par la propagation d'une dislocation (**Fig. 2.5a**).

Une dislocation est définie géométriquement par son vecteur de Burgers $\vec{\mathbf{b}}$. Celui-ci caractérise l'amplitude et la direction du déplacement. Selon l'angle créé entre le vecteur de

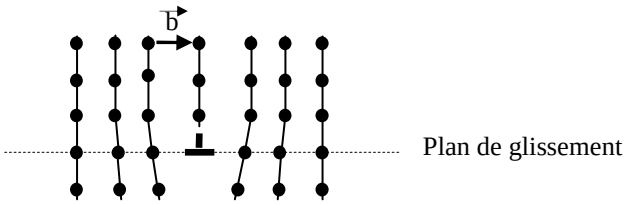
Burgers et le vecteur $\vec{dl}$ tangent à la ligne de dislocation, plusieurs configurations atomiques existent (**Fig. 2.5b**). On parle de configuration vis, si le vecteur de Burgers est tangent à la ligne de dislocation et de configuration coin s'il lui est perpendiculaire. Pour les cas intermédiaires, on parle de configuration mixte. On notera qu'une dislocation vis peut également changer de plan de glissement (glissement dévié). La **Fig. 2.5c** montre la configuration locale des atomes dans le cas d'une dislocation coin. La dislocation perturbe localement l'agencement atomique du réseau. Les atomes proches de la dislocation se retrouvent dans une position légèrement différente de leur configuration et exercent une force de rappel. Cette distorsion du réseau augmente l'énergie interne d'un volume proche autour de la ligne. On parle alors de champ de contraintes créé autour de la dislocation.




*(a) Déplacement d'un bloc cristallin sur un plan de glissement*




*(b) Configurations vis, coin et mixte d'une ligne de dislocation.*




*(c) Configuration atomique du glissement au point A (configuration coin).*

**Fig. 2.5 –** ***Déplacement élémentaire d'un bloc cristallin sur un plan de glissement facilité par la propagation d'une ligne de dislocation.***

Nous avons vu dans un cas extrêmement simple comment la propagation d'une dislocation facilitait le cisaillement d'un cristal. Dans les alliages métalliques polycristallins, la densité des dislocations est considérable : de l'ordre de $10^{10}$ $m^{-2}$ pour un métal bien recuit à $10^{18}$ $m^{-2}$ pour certains polycristaux. La déformation plastique des alliages résulte donc du mouvement complexe d'un ensemble de dislocations, le mouvement de chacune pouvant être impacté par les forces du réseau et/ou par la présence d'autres défauts. Ce mouvement peut s'effectuer suivant deux modes :

i) **Un mode conservatif : le mouvement par glissement.** C'est le mode que nous avons décrit jusqu'à présent (analogie du tapis). Il ne fait pratiquement pas intervenir le déplacement des atomes du cristal (ceux-ci sont inférieurs à la distance inter-

atomique). La déformation par glissement des dislocations s'effectue à volume constant sans augmentation de la matière, c'est pourquoi il est dit conservatif.

ii) **Un mode non conservatif : le mouvement par montée.** C'est le mouvement d'une ligne de dislocation hors de son plan de glissement. Ce mode implique un transport de matière : des lacunes et/ou des interstitiels sont consommés et émis. C'est pourquoi il est dit non-conservatif. Ce mode de mouvement par diffusion est actif à hautes températures, c'est-à-dire pour des températures T supérieures à 0,3 fois la température de fusion $T_f$.

A basses températures, le mécanisme prépondérant responsable de la déformation plastique est donc le mouvement des dislocations par glissement. C'est dans ce cadre précis que le modèle est constitué. La diffusion et le transport de matière seront donc considérés comme inexistants par la suite.

## Loi d'Orowan

La déformation plastique est intimement liée aux transformations permanentes de la microstructure et donc au mouvement des dislocations. Dans les années 1930, Orowan suggère une relation entre vitesse de déformation macroscopique et vitesse moyenne des dislocations.

Considérons un cristal de hauteur h et de largeur L entièrement cisaillé par une dislocation i de vecteur de Burgers $\vec{\mathbf{b}}$ (**Fig. 2.6**). L'amplitude de déformation $\gamma$ de ce cisaillement est immédiate :

$$\gamma = \frac{\left\|\vec{\mathbf{b}}\right\|}{h} \qquad \textbf{(2.28)}$$

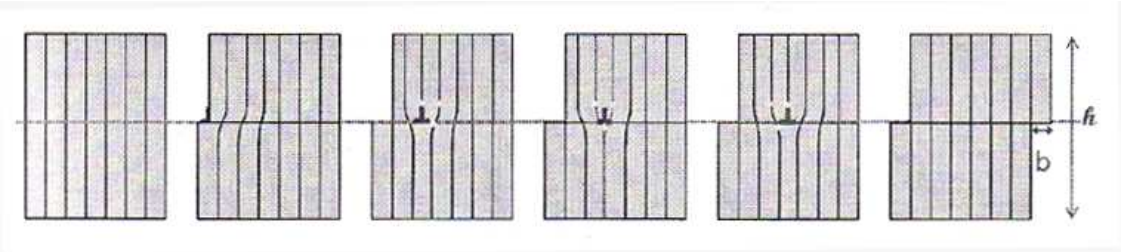



**Fig. 2.6 –** ***Schéma d'un monocristal cisaillé de part et d'autre par le glissement d'une dislocation coin, d'après [Vig07].***

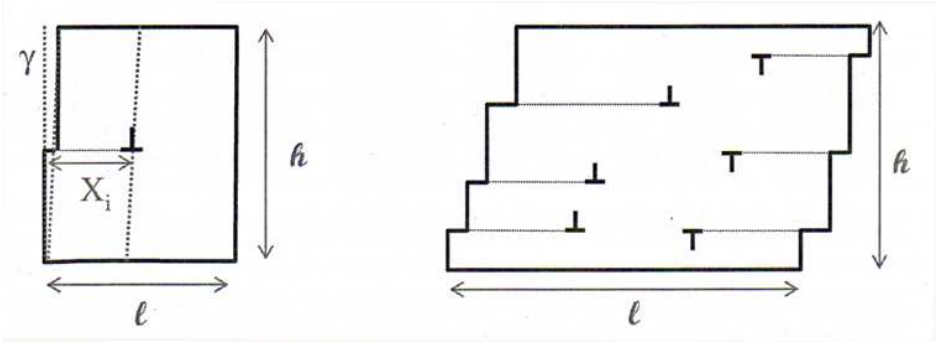
Si la dislocation i parcourt seulement une distance $X_i$ alors l'amplitude de déformation est proportionnelle à la distance balayée $X_i$ (**Fig. 2.7a**) et s'écrit :

$$\gamma = \frac{\left\|\vec{\mathbf{b}}\right\|}{h}\frac{X_i}{L} \qquad \textbf{(2.29)}$$

Si maintenant le cristal est traversé par N dislocations qui chacune parcourt une distance $X_i$, alors l'amplitude de déformation du cristal est égale à la somme des amplitudes de déformation $\gamma_i$ engendrées par le mouvement de chaque dislocation i (**Fig. 2.7b**).

En considérant $\langle X_i \rangle$ comme la distance moyenne parcourue par chaque dislocation et en introduisant la profondeur P du cristal, il est possible de faire apparaître la densité de dislocations mobiles $\rho_m$ , longueur totale de ligne de dislocation dans le cristal en $m/m^3$ :

$$\gamma = \sum_i \gamma_i = \sum_i \frac{\|\vec{b}\|}{h}\frac{X_i}{L} = N\frac{\|\vec{b}\|}{h}\frac{\langle X_i \rangle}{L} = N\frac{P}{P}\frac{\|\vec{b}\|}{h}\frac{\langle X_i \rangle}{L} = \rho_m b \langle X_i \rangle \qquad \textbf{(2.30)}$$




(a) (b)

**Fig. 2.7 –** ***Géométrie d'un cristal cisaillé partiellement par une seule dislocation (a) ou par plusieurs dislocations (b), d'après [Vig07].***

La dérivée temporelle de cette relation fait apparaître deux termes :

$$\frac{d\gamma}{dt} = \langle X_i \rangle b \frac{d\rho_m}{dt} + \rho_m b \frac{d\langle X_i \rangle}{dt} \qquad \textbf{(2.31)}$$

En négligeant le cas où la production de dislocations est du premier ordre (exemple des crochets de traction dus à une production accrue de dislocations), on considère que la vitesse de déformation est contrôlée par la propagation des dislocations. Cela revient à négliger le premier terme devant le second :

$$\frac{d\gamma}{dt} = \rho_m b \frac{d\langle X_i \rangle}{dt} \qquad \textbf{(2.32)}$$

En faisant apparaitre la vitesse moyenne v des dislocations, nous obtenons la loi d'Orowan :

$$\dot{\gamma}_p = \rho_m b v \qquad \textbf{(2.33)}$$

Le calcul géométrique précédent ([Poi76], [Vig07]) suppose que le déplacement des dislocations s'effectue par glissement. Poirier montre que si l'on considère que le déplacement des dislocations se fait par montée, le calcul aboutit à la même loi. La loi d'Orowan s'applique donc quel que soit le mode de mouvement envisagé.

En dépit des approximations, la loi d'Orowan se révèle être d'une importance fondamentale puisqu'elle permet de relier la vitesse de déformation plastique $\dot{\gamma}_p$ directement à des paramètres microstructuraux comme la densité $\rho_m$ et la vitesse moyenne v des

dislocations mobiles. Ces deux paramètres (vitesse et densité) caractérisent la déformation plastique macroscopique. Nous verrons dans les paragraphes suivants que chacun des deux paramètres contribue de manière différente dans la modélisation de la déformation plastique.

Précisons que la déformation plastique macroscopique $\gamma$ apparaissant dans la formule d'Orowan (2.30) est la déformation projetée ou résolue (resolved shear strain) dans le plan de glissement de la dislocation de vecteur de Burgers **b**. On lui associe une contrainte projetée ou résolue $\tau$. Les observations d'échantillons déformés montrent que les glissements des dislocations s'effectuent préférentiellement selon des systèmes de glissement. Chaque système de glissement « g » se compose d'un plan et d'une direction de glissement. Ces derniers appartiennent généralement aux plans et aux directions de plus forte densité atomique existants dans le réseau cristallin concerné.

Les grandeurs propres à chaque système de glissement peuvent être déterminées à partir des grandeurs macroscopiques. La **Fig. 2.8** représente le cas particulier d'un monocristal sollicité par une force F en traction où la normale au plan de glissement, la direction de glissement et l'axe de sollicitation sont coplanaires.

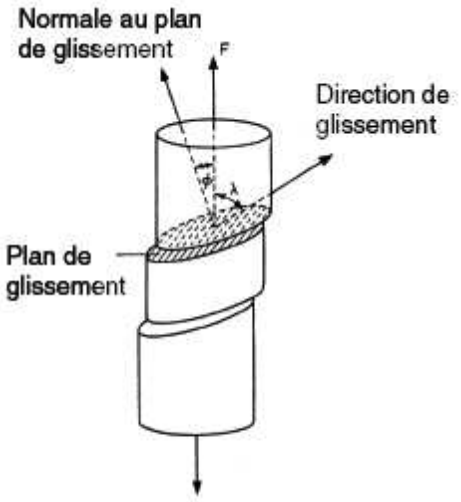



**Fig. 2.8 -** ***Détermination du coefficient de Schmid dans le cas particulier d'un monocristal sollicité en traction [Vig07].***

Dans ces conditions, les relations géométriques décrivant la projection sur le système considéré sont simples et s'écrivent :

$$\begin{cases} \tau = F_{projetée}/S_{projetée} = F\cos\lambda/(S/\cos\varphi) = \sigma(\cos\lambda\cos\varphi) \\ \gamma = \Delta l_{projetée}/l_{projetée} = \Delta l/\cos\lambda/l\cos\varphi = \varepsilon/(\cos\lambda\cos\varphi) \end{cases} \quad \textbf{(2.34)}$$

Le terme $(\cos\lambda\cos\varphi)$ appelé « facteur de Schmid » traduit l'orientation du chargement en fonction de la normale au plan de glissement et de la direction de glissement au travers de deux angles : $\varphi$ et $\lambda$. Pour chaque système de glissement, il est possible de calculer le facteur de Schmid qui lui est associé. Ce sont les systèmes possédant les facteurs de Schmid les plus élevés qui sont activés en premier. L'exemple illustré par la **Fig. 2.8** est un cas particulier du cadre plus général de la plasticité cristalline. Il permet de se figurer aisément les relations existantes entre contrainte et déformation macroscopiques et entre cission résolue et déformation sur un plan de glissement. Plus généralement, c'est la partie symétrique du

tenseur de Schmid **R,** définie à partir de l'ensemble des directions et des plans de glissement, qui définie ces relations :

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}_{ij}^{vp} = \sum_{g} R_{ij}^{g} \dot{\gamma}^{g} \\ \tau^{g} = R_{ij} \sigma_{ij} \end{cases} \qquad \textbf{(2.35)}$$

où $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathbf{vp}}$ est le tenseur des taux de déformations viscoplastiques, $\boldsymbol{\sigma}$ le champ des contraintes macroscopiques, $\dot{\gamma}^{g}$ et $\tau^{g}$ le taux de déformation en cisaillement et la cission résolue du système de glissement « g » considéré.

Dans le cas de matériaux métalliques polycristallins, l'introduction du facteur de Taylor M permet de relier la contrainte macroscopique $\sigma$ à une contrainte moyenne $\langle\tau\rangle$ projetée selon l'ensemble des systèmes de glissement possibles [Tay38], [Koc70] :

$$\sigma = M\langle\tau\rangle \qquad \textbf{(2.36)}$$

Ce facteur de proportionnalité dépend du type de réseau cristallin pour un matériau isotrope et éventuellement de l'orientation moyenne des grains. Si l'on introduit le facteur de Taylor, l'équation d'Orowan pour un matériau isotrope, sans texture fortement marquée, s'écrira donc :

$$\dot{\varepsilon}_{eq}^{vp} = M\langle\dot{\gamma}_{p}\rangle = M\rho_{m} b v \qquad \textbf{(2.37)}$$

où $\dot{\varepsilon}_{eq}^{vp}$ est la vitesse de déformation viscoplastique équivalente.

### II.2.2 Formalisme de l'activation thermique

Les résultats expérimentaux indiquent clairement que si l'on réalise des essais de traction à différentes températures T et à différentes vitesses de déformation $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ données, la limite d'élasticité $\sigma_0$ diminue lorsque la température augmente jusqu'à atteindre un palier.

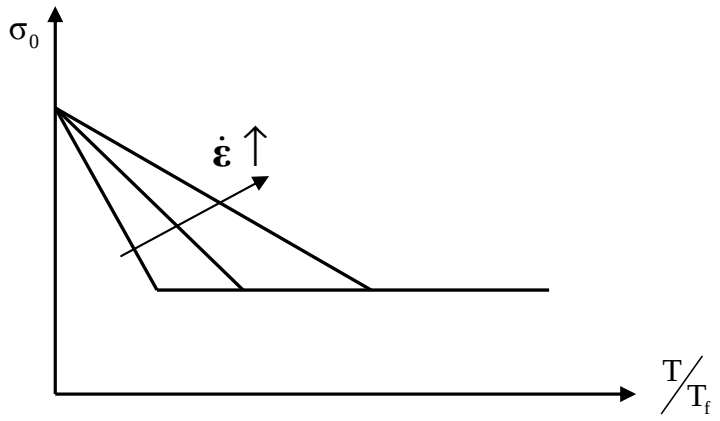



**Fig. 2.9 –** ***Evolution schématique de la limite d'élasticité en fonction de la température et de la vitesse de déformation, d'après [Ber01].***

Il a été constaté également que la température à laquelle est atteint ce palier évolue avec la vitesse de déformation : plus la vitesse de déformation $\dot{\varepsilon}$ est élevée, plus la température à laquelle est atteint le palier est élevée (**Fig. 2.9)**.

L'ensemble de ces résultats expérimentaux reflète l'effet de l'activation thermique sur le franchissement des obstacles par les dislocations : c'est le formalisme de l'activation thermique. Sans vouloir rentrer dans le détail de ce formalisme expliqué de façon très précise dans plusieurs ouvrages (comme par exemple [Poi76] ou plus récemment [Cai03]), nous nous efforçons ici de résumer les grandes lignes nécessaires à la compréhension de la forme de loi de comportement choisie.

**Contrainte interne et contrainte effective**

La déformation plastique est gouvernée par le mouvement des dislocations. Selon le formalisme de l'activation thermique, les processus responsables de ce mouvement peuvent toujours être expliqués par le franchissement d'obstacles par des segments de dislocations sous l'effet d'une contrainte effective assistée ou non thermiquement.

En dessous d'une contrainte seuil $\sigma_i$, la réponse à une sollicitation se fait sans modification permanente de la microstructure. La contrainte seuil $\sigma_i$ est une contrainte interne représentant l'ensemble des contraintes à longue portée variant en $\frac{1}{r}$ dues aux défauts du réseau (les autres dislocations). Elle fluctue spatialement avec une longueur d'onde si grande (dimension de la microstructure) que le champ de contraintes internes considéré ne peut pas être franchi par les seules fluctuations thermiques. Pour qu'une dislocation puisse se déplacer dans le réseau entre les obstacles, il faut que la contrainte $\sigma$ appliquée soit au moins supérieure à la contrainte interne moyenne $\sigma_i$ résistant au mouvement. Si $\sigma \langle \sigma_i$, il n'y a pas de mouvement de dislocation.

On appelle contrainte effective $\sigma^* = \sigma - \sigma_i$, la contrainte efficace c'est-à-dire la contrainte positive qui permet de mettre en mouvement la dislocation. Supposons qu'une dislocation se déplace entre les obstacles ($\sigma^* \rangle 0$) jusqu'à trouver une position stable contre un obstacle qui exerce également en retour sur la dislocation un champ de contraintes à courte portée $\sigma_{obst}$. En termes d'énergie, il est alors possible de dire que lorsqu'une ligne de dislocation rencontre un obstacle (précipité, joint de grain etc.), celui-ci constitue une barrière énergétique qui entrave son mouvement. Cette barrière d'énergie ne peut être franchie qu'avec l'aide d'une contrainte « effective » et/ou d'une agitation thermique. Il est pratique de se représenter une telle situation sur un diagramme force-distance (**Fig. 2.10**).

Le diagramme représente en ordonnée la force F ressentie par un segment de dislocation de longueur l et en abscisse la distance balayée par le segment. L'obstacle est représenté par une colline de hauteur $lb\sigma_{obst}$, b étant la norme du vecteur déplacement de Burgers. L'aire comprise sous la colline représente l'énergie totale que doit fournir le segment de dislocation pour franchir l'obstacle.

En fonction de la température, deux cas limites sont à considérer :

i) Si la température est nulle, alors la colline ne peut être franchie que si la contrainte appliquée est égale à $\sigma = \sigma_i + \sigma_{obst}$ ce qui équivaut à une contrainte effective supérieure ou égale au champ de contraintes généré par l'obstacle : $\sigma^* \geq \sigma_{obst}$.

ii) Si la température est grande telle que l'agitation thermique suffise à fournir une énergie égale à l'aire comprise sous la colline, alors une contrainte appliquée $\sigma = \sigma_i$ suffit et la colline générée par l'obstacle n'existe plus.

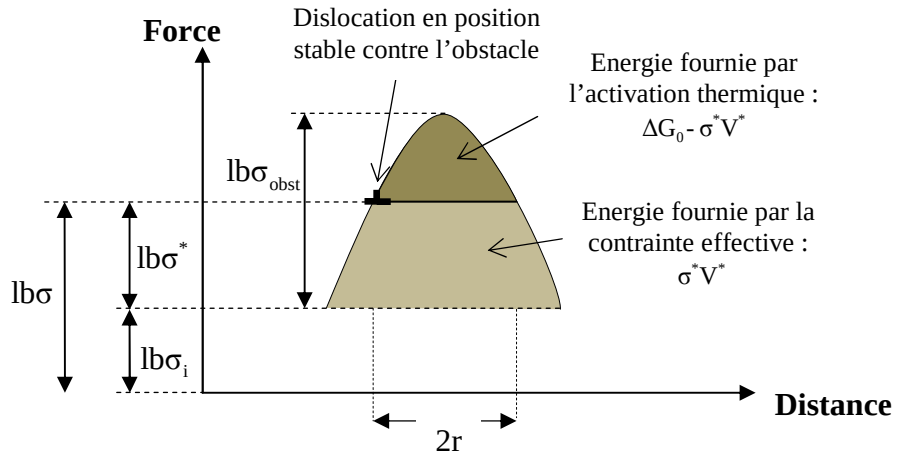



**Fig. 2.10 –** ***Diagramme force-distance pour le franchissement thermoactivé d'un obstacle.***

Nous nous intéressons ici au cas intermédiaire, c'est-à-dire au cas où la contrainte est activée thermiquement. Dans ce cas, l'énergie totale de franchissement est alors la somme de deux contributions :

i) Le travail fourni par la contrainte effective $\sigma^*$ sur le volume d'activation $V^*$,
ii) L'énergie fournie par activation thermique : $\Delta G_0 - \sigma^* V^*$. $\Delta G_0$ représente l'aire comprise sous la colline c'est-à-dire l'énergie à fournir pour franchir l'obstacle à contrainte nulle.

Il faut tenir compte du fait que le diagramme force-distance de la **Fig. 2.10** est un diagramme figé pour une vitesse de déformation et une température données. Ce diagramme figé représente le franchissement d'un type d'obstacle qui lui est un processus dynamique. En nous focalisant sur un seul type d'obstacle et donc sur un seul type de processus, le formalisme introduit ici nous permet de modéliser les actions combinées de la contrainte $\sigma^*$ et de la température T sur la vitesse moyenne des dislocations et donc sur la vitesse de déformation plastique.

**Modélisation en vitesse**

Nous avons vu que la vitesse de déformation plastique dépendait à la fois de la densité des dislocations mobiles mais aussi de leur vitesse moyenne. Dans le cadre de cette modélisation, c'est le comportement individuel mais moyenné des dislocations qui est pris en compte. On considère qu'il existe toujours une densité constante de dislocations mobiles pendant la variation de déformation $\Delta\varepsilon$ du solide auquel on s'intéresse. On néglige donc dans ce modèle, les cas où les densités de dislocations varient très rapidement avec le temps. Les crochets de traction, propres aux avalanches de dislocations, sont donc purement et

simplement négligés. Dans la loi d'Orowan (2.37), la vitesse des dislocations est une vitesse moyenne de déplacement, dans le sens où c'est un ensemble de déformations élémentaires qui est considéré. Cette vitesse moyenne dépend de la fréquence de franchissement des obstacles microstructuraux par les dislocations, processus dynamique thermiquement activé et assisté par la contrainte effective.

Intéressons nous donc au mouvement d'un segment de dislocation et plus particulièrement à l'arrivée d'un segment de dislocation sur des obstacles microstructuraux. La **Fig. 2.11** illustre une telle situation : un segment de dislocation se déplace librement vers une série d'obstacles microstructuraux espacés d'une distance L (**Fig. 2.11a**). Ce segment de dislocation se retrouve alors « épinglé » par les obstacles et voit donc son mouvement entravé (**Fig. 2.11b**). La **Fig. 2.11c** illustre le franchissement de l'obstacle central par la partie centrale du segment de dislocation. Celle-ci balaye une aire A lors du franchissement, puis éventuellement une aire B avant de rencontrer un nouvel obstacle (**Fig. 2.11d**).

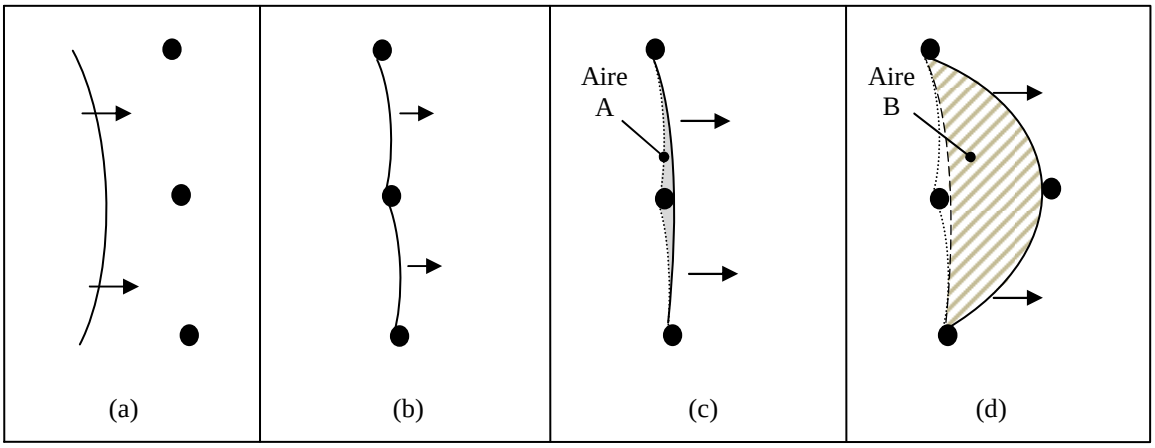



**Fig. 2.11 –** ***Franchissement d'un obstacle par un segment de dislocation.***

*(a) : Segment de dislocation se déplaçant librement vers une série d'obstacles microstructuraux. (b) : Segment de dislocation « épinglé » par les obstacles microstructuraux. (c) : Franchissement de l'obstacle central par le segment de dislocation. (d) : La partie centrale du segment, après avoir franchi l'obstacle central (aire A en grisé), se déplace librement vers un second obstacle central (aire B hachurée).*

Le schéma de la **Fig. 2.11** illustre la situation où la dislocation, une fois l'obstacle franchi, glisse rapidement vers un nouvel obstacle où elle se bloque. En d'autres termes, on néglige la probabilité de sauts retour, la dislocation s'éloignant très rapidement de l'obstacle franchi. Considérer la probabilité de sauts retour n'a de sens que dans deux cas [Poi76] :

i) L'obstacle est lié à la dislocation empêchant celle-ci de glisser de plus d'une distance interatomique. Le segment de dislocation ne se déplace plus librement entre les obstacles : une fois l'obstacle franchi, le segment de dislocation rencontre un nouvel obstacle, une nouvelle barrière d'énergie à traverser. Ce cas correspond par exemple à la situation où le glissement de la dislocation s'effectue par double décrochements sur les parties vis de la dislocation (voir plus loin).

ii) Le libre parcours des dislocations entre obstacles est comparable à la distance parcourue durant le franchissement, c'est-à-dire la norme b du vecteur déplacement de Burgers.

Dans ces conditions, l'aire B à considérer dans la séquence **Fig. 2.11** est nulle. La vitesse moyenne du segment équivaut alors à l'aire A parcourue divisée par la distance moyenne L entre deux obstacles et le temps t nécessaire au franchissement de l'obstacle. Le temps de vol $t_{vol}$ entre deux obstacles étant négligeable devant le temps d'attente $t_{attente}$ nécessaire au franchissement, la vitesse moyenne v du segment de dislocation revient à considérer seulement la vitesse de franchissement de l'obstacle et s'écrit :

$$v \approx \frac{A}{L}\frac{1}{t_{attente}} \approx \frac{A}{L}\nu_f$$

$A \approx Lb$ *est l'aire parcourue par le segment de dislocation lors du franchissement de l'obstacle.*

$\upsilon_f$ *est la fréquence de franchissement de l'obstacle, c'est-à-dire le nombre de fois par seconde que le segment de dislocation réussit à passer l'obstacle.*

La fréquence de franchissement $\upsilon_f$ s'écrit comme le produit entre la fréquence d'attaque $\upsilon_{attaque}$ et la probabilité de franchissement P : $\upsilon_f = \upsilon_{attaque} \times P$.
La probabilité P de franchir un obstacle microstructural dans la direction de la contrainte de cisaillement s'exprime comme la probabilité P d'un évènement élémentaire d'activation thermique $\Delta G = \Delta G_0 - \sigma^* V^*$. Une telle loi de probabilité s'écrit :

$$P = \exp\left(-\frac{\Delta G_0 - \sigma^* V^*}{kT}\right) \qquad \textbf{(2.38)}$$

où $\Delta G_0$ et $V^*$ sont respectivement l'énergie et le volume d'activation du processus, T est la température en Kelvin et k la constante de Boltzmann.

Le mouvement des dislocations est contrôlé par la fréquence d'attaque $\nu_{attaque}$ des dislocations et par leur probabilité $P_{aller}$ de franchir l'obstacle dans le sens de sollicitation et la probabilité $P_{retour}$ de le franchir dans le sens inverse [Poi76] :

$$\nu_{attaque} = \nu_{Debye}(P_{aller} - P_{retour}) \qquad \textbf{(2.39)}$$

$$\nu_{attaque} = \nu_{Debye}\left[\exp\left(-\frac{\Delta G_0 - \sigma^* V^*}{kT}\right) - \exp\left(-\frac{\Delta G_0 + \sigma^* V^*}{kT}\right)\right] \qquad \textbf{(2.40)}$$

où $\nu_{Debye}$ est la fréquence de Debye : fréquence de vibration atomique.

Le temps de vol entre deux obstacles est considéré comme négligeable par rapport au temps de franchissement des obstacles [Ver98], [All05], [All09]. La vitesse v s'exprime alors comme :

$$v = \frac{A}{L}\nu_f = \frac{Lb}{L}\nu_{attaque} = b\nu_{Debye}\left[\exp\left(-\frac{\Delta G_0 - \sigma^* V^*}{kT}\right) - \exp\left(-\frac{\Delta G_0 + \sigma^* V^*}{kT}\right)\right] \quad \textbf{(2.41)}$$

où b est la norme du vecteur de Burgers.

La relation d'Orowan lie la vitesse de déformation viscoplastique équivalente à la vitesse moyenne de mouvement des dislocations :

$$\dot{\varepsilon}_{eq}^{vp} = M\rho_m bv \quad \textbf{(2.42)}$$

où $\rho_m$ est la densité moyenne des dislocations mobiles.

En utilisant la relation **(2.41)**, la relation d'Orowan aboutit à une loi en sinus hyperbolique :

$$\dot{\varepsilon}_{eq}^{vp} = 2M\rho_m b^2 \nu_{Debye} \exp\left(-\frac{\Delta G_0}{kT}\right)\sinh\left(\frac{\sigma^* V^*}{kT}\right) \quad \textbf{(2.43)}$$

où M est le facteur de Taylor, $\rho_m$ la densité de dislocations mobiles, $\nu_{Debye}$ la fréquence de Debye, b la norme du vecteur de Burgers, $\Delta G_0$ l'énergie d'activation, $V^*$ le volume d'activation, k la constante de Boltzmann et T la température en Kelvin.

La forme de la loi de comportement en sinus hyperbolique tient donc au fait que l'on ait considéré la probabilité de saut retour du segment de dislocation. Si une telle probabilité avait été négligée, le calcul aurait mené de fait à une loi de forme exponentielle avec une aire parcourue différente. Négliger la probabilité de saut retour revient à dire que le segment de dislocation s'éloigne très vite, une fois l'obstacle franchi, annihilant de fait la probabilité du saut retour. Ceci est vrai pour de fortes contraintes uniquement, c'est pourquoi les lois de comportement exponentielles ne peuvent s'appliquer sur un domaine large de contraintes. Dans le modèle choisi pour notre étude, pour de fortes contraintes, la loi en sinus hyperbolique produit les mêmes effets qu'une loi de type exponentielle (cf. chapitres précédents). La prise en compte de la probabilité de saut retour permet donc d'expliquer les comportements asymptotiques mis en évidence par les résultats expérimentaux sur une large gamme de contraintes et de vitesses de déformation. La loi de comportement en sinus hyperbolique a été choisie sur la base physique de mécanismes microstructuraux contrastant avec des lois classiques (lois puissance par exemple) à pauvre signification physique.

### II.2.3 Couplage entre contrainte interne et contrainte effective

L'introduction de la contrainte effective dans l'expression de la contrainte d'écoulement (ce qui revient à particulariser le jeu de variables d'état du système thermodynamique) permet d'aboutir naturellement à la description des effets de vitesses et de température propres au comportement visqueux. Deux cas sont à distinguer suivant la cristallographie du matériau à considérer.

Pour les matériaux cubiques à faces centrées (CFC), l'écrouissage est principalement dépendant de l'augmentation des obstacles de la forêt de dislocations à l'intérieur des grains. De nombreux travaux sur différents matériaux montrent que la contrainte d'écoulement dépend de la racine carrée de la densité des dislocations : c'est le modèle de Taylor [Tay34], [Tay38]. La contrainte d'écoulement $\sigma_{CFC}$ peut donc être vue comme la contrainte nécessaire au mouvement des dislocations mobiles pour franchir l'ensemble des obstacles microstructuraux. Etant donné les différentes longueurs d'ondes des champs de contraintes générés, on considère que les contributions de ces obstacles s'additionnent dans le cas de matériaux CFC :

$$\sigma_{CFC} = \sigma_0 + \sigma^* + \sigma_i$$

- $\sigma_0$ représente la contribution des contraintes de friction et des éléments en solution solide. Même si elle dépend de la température, elle n'est pas activée thermiquement et dépend de la fraction volumique et de la taille des éléments en solution solide.

- $\sigma_i$ est la contrainte interne qui gêne le mouvement des dislocations. Elle est égale à la somme des contraintes à longue portée induites par la microstructure qui s'opposent au mouvement des dislocations. Elle dépend de la température au travers de la dépendance du module élastique à la température.

- $\sigma^*$ est la contrainte effective requise permettant aux dislocations mobiles de surmonter les obstacles locaux à l'aide des fluctuations thermiques. Elle est fortement dépendante de la température (agitation thermique) et dépend de la vitesse de déformation (fréquence de franchissement des obstacles).

Dans le cas de matériaux cubiques centrés (CC), la contrainte d'écoulement dépend également des trois mêmes contributions mais n'est plus considérée comme la simple somme de celles-ci. Le glissement des dislocations dans le cas de matériaux CC est beaucoup plus difficile en raison d'importantes contraintes de friction de réseau appelées contraintes de Peierls. Contrairement aux matériaux CFC, la forme à l'équilibre d'une ligne de dislocation épinglée par un défaut n'est plus simplement un arc de cercle : les parties « coin » se déplacent beaucoup plus rapidement que les parties « vis » et le mouvement des dislocations se fait par nucléation et propagation de doubles décrochements sur les partie vis de la ligne (**Fig. 2.12**). Le glissement des dislocations se retrouve au final directement impacté par une succession de doubles décrochements le long des parties vis.

La probabilité de nucléation d'un double décrochement est proportionnelle au nombre de sites de nucléation et donc à la longueur L de la ligne de dislocation [Lou79]. Le glissement des dislocations est donc non seulement thermiquement activé (contrainte effective $\sigma^*$) mais dépend également de la longueur entre les obstacles (contrainte interne $\sigma_i$). Par conséquent, pour les matériaux cubiques centrés, on peut considérer qu'à basses températures, la contrainte d'écoulement se caractérise par l'existence d'un couplage entre la contrainte interne $\sigma_i$ et la contrainte effective $\sigma^*$ :

$$\sigma_{CC} = \sigma_0 + h(\sigma^*, \sigma_i)$$

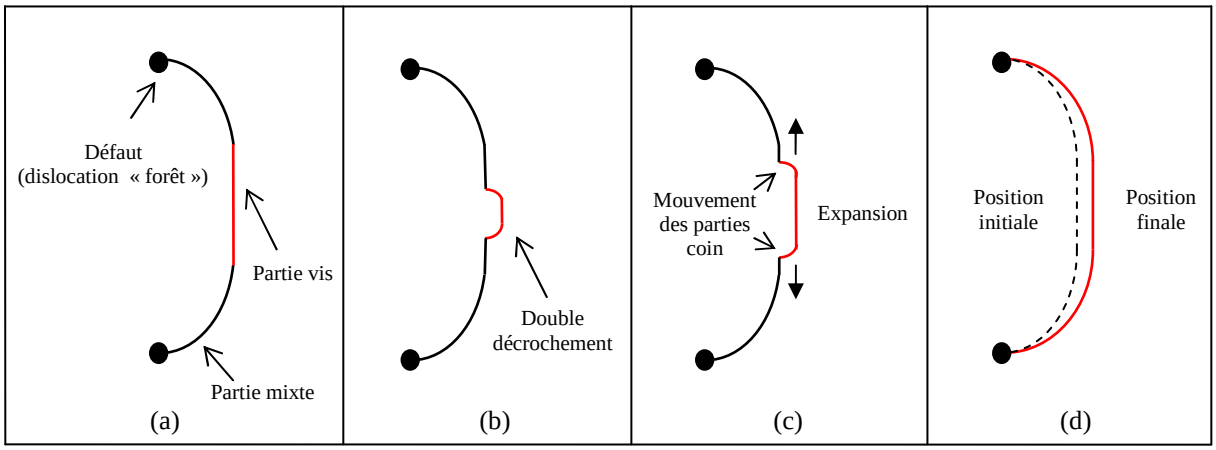



**Fig. 2.12 –** ***Description schématique du glissement sur les parties vis des dislocations pour les matériaux cubiques centrés, d'après [Rau94].***

*(a) Configuration initiale : la ligne de dislocation est épinglée par deux défauts et s'arcboute sous l'effet de la contrainte appliquée. (b) Création du double décrochement dans la partie vis. (c) Expansion du double décrochement dû au déplacement rapide des parties coins. (d) Position finale à la fin du processus.*

En se basant sur des considérations énergétiques, Rauch explicite par un calcul la fonction de couplage $h(\sigma^*,\sigma_i)$ qui lie la contrainte interne $\sigma_i$ et la contrainte effective $\sigma^*$ [Rau93]. En utilisant ce formalisme, la contrainte d'écoulement s'écrit :

$$\sigma = \sigma_0 + \frac{\sigma^*}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\left(\sigma^*\right)^2 + 4\left(\sigma_i\right)^2} \qquad \textbf{(2.44)}$$

En se basant sur la relation d'Orowan, où la vitesse des dislocations est déterminée par la fréquence de franchissement des obstacles, Allain *et al.* [All05, All09] couplent le formalisme de Rauch à une loi en sinus hyperbolique, proposant alors une loi de comportement originale pour les matériaux cubiques centrés :

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}_{eq}^{vp} = 2M\rho_m v_{debye} b^2 \exp\left(\frac{-\Delta G_0}{kT}\right)\sinh\left(\frac{\sigma^* V^*}{kT}\right) \\ \sigma = \sigma_0 + \frac{\sigma^*}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\left(\sigma^*\right)^2 + 4\left(\sigma_i\right)^2} \end{cases} \qquad \textbf{(2.45)}$$

Cette loi, développée initialement pour des chargements monotones, a été validée dans le cas unidimensionnel sur des aciers 100% ferritiques et des dual-phases [All05], [All09]. Dans la partie suivante, nous étendons la validité de cette loi au domaine tridimensionnel pour le cas de chargements dynamiques avec changements de trajets de déformation en tenant compte des écrouissages isotrope et cinématique.

## II.3 LOI DE COMPORTEMENT ELASTO-VISCOPLASTIQUE

Nous avons vu dans les paragraphes précédents que la forme choisie en sinus hyperbolique pour la partie viscoplastique de la loi de comportement visant à décrire le comportement élasto-viscoplastique des aciers multiphasés reposait à la fois :

i) sur des considérations asymptotiques visant à décrire sur un domaine le plus large possible la relation entre le tenseur des vitesses de déformations viscoplastiques $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathbf{vp}}$ et le tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$,
ii) sur des considérations physiques basées sur la compréhension des mécanismes microstructuraux mis en jeu.

Dans cette partie, nous vérifions que la loi de comportement choisie s'inscrit naturellement dans un cadre thermodynamique afin de pouvoir utiliser par la suite les propriétés de ce cadre.

### II.3.1 Potentiel de dissipation proposé

En considérant une température uniforme ($\overrightarrow{\mathbf{grad}\ T} = \vec{\mathbf{0}}$), l'équation de la chaleur est négligée. L'influence de la température interviendra donc uniquement en tant que paramètre dans le modèle. Même si la multiplication et la propagation des dislocations engendrent en toute rigueur une dilatation du réseau cristallin, son importance sera considérée du second ordre. Par conséquent, nous considérons que la déformation plastique s'effectue à volume constant et que l'effet de la pression hydrostatique sur la déformation plastique est négligeable dans le cas de matériaux sans défauts macroscopiques majeurs tels que des fissures ou des cavités [Poi70]. Enfin, parmi les phénomènes dissipatifs, seuls la déformation visqueuse et les phénomènes d'écrouissage du matériau sont pris en compte dans le modèle de comportement : les effets de recouvrance et de vieillissement ne sont pas considérés ici.

Dans ces conditions, le potentiel de dissipation de notre étude peut s'écrire sous la forme :

$$\Omega^{*} = \Omega_{p}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{X}, R, T, \boldsymbol{\alpha}, r) \qquad \textbf{(2.46)}$$

Le tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ est associé à sa variable interne conjuguée, le tenseur des vitesses de déformations viscoplastiques $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathbf{vp}}$, qui traduit toute l'histoire de déformation. La variable scalaire R et le tenseur $\mathbf{X}$ sont les deux variables internes qui décrivent respectivement l'écrouissage isotrope et l'écrouissage cinématique. T, $\boldsymbol{\alpha}$ et r jouent ici le rôle de paramètres.

Pour les matériaux métalliques, les hypothèses d'incompressibilité plastique et d'isotropie conduisent alors à considérer le tenseur des contraintes au travers de la contrainte équivalente au sens de von Mises $\sigma_{eq}$. Dans le cadre du modèle visé, le choix d'un critère isotrope est fait dans un souci de simplification. En effet, rien ne s'oppose dans le modèle à l'intégration d'un autre critère. Le critère isotrope de von Mises considère que le seuil de plasticité est lié à l'énergie élastique de cisaillement. Cette énergie dans l'espace à trois dimensions est équivalente à une énergie de traction pure dans l'espace unidimensionnel. En tenant compte du centre actuel du domaine d'élasticité $\mathbf{X}$, ce critère s'exprime :

$$\sigma_{eq} = J_2(\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{X}) = \sqrt{\frac{3}{2}(\boldsymbol{\sigma}' - \mathbf{X}) : (\boldsymbol{\sigma}' - \mathbf{X})} \qquad \textbf{(2.47)}$$

où $\boldsymbol{\sigma}'$ est le déviateur du tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ et $\mathbf{X}$ la variable interne tensorielle représentant l'écrouissage cinématique.

Le domaine d'élasticité est caractérisé par sa taille Y qui dépend elle-même de sa taille initiale $\sigma_0$ et de l'évolution de l'écrouissage isotrope R. Ce domaine définit l'ensemble des contraintes pour lequel le potentiel de dissipation plastique doit observer un minimum ce qui équivaut à une dissipation nulle. Le potentiel de dissipation s'écrit alors :

$$\Omega_p = \Omega_p(\sigma_{eq} - Y(\sigma_0, R), T, \boldsymbol{\alpha}, r) \qquad \textbf{(2.48)}$$

Afin de développer un modèle de comportement viscoplastique utilisant une loi de type sinus hyperbolique comme présentée dans le paragraphe précédent, on définit un potentiel de dissipation viscoplastique stable au sens des matériaux standard généralisés (positif, convexe admettant un minimum à l'origine) :

$$\Omega_p = AB\cosh\left(\frac{\langle \sigma_{eq} - Y \rangle}{A}\right) \qquad \textbf{(2.49)}$$

où A, B sont des paramètres du matériau à température T donnée et Y représente la taille du domaine d'élasticité.

Par dérivation de ce potentiel, la loi d'évolution de la déformation viscoplastique est obtenue par la relation de normalité :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathbf{vp}} = \frac{\partial \Omega_p}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial \Omega_p}{\partial \sigma_{eq}} \frac{\partial \sigma_{eq}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \qquad \textbf{(2.50)}$$

Pour un matériau de type von Mises, on obtient :

$$\frac{\partial \sigma_{eq}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{3}{2} \frac{(\boldsymbol{\sigma}' - \mathbf{X})}{\sigma_{eq}}$$

Par équivalence en dissipation plastique, on écrit que :

d'une part : $$(\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{X}) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathbf{vp}} = \frac{\partial \Omega_p}{\partial \sigma_{eq}} \frac{3}{2} \frac{(\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{X}) : (\dot{\boldsymbol{\sigma}} - \mathbf{X})}{\sigma_{eq}} = \frac{\partial \Omega_p}{\partial \sigma_{eq}} \frac{\sigma_{eq}^2}{\sigma_{eq}} = \frac{\partial \Omega_p}{\partial \sigma_{eq}} \sigma_{eq}$$

d'autre part : $$(\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{X}) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathbf{vp}} = \sigma_{eq} \dot{\varepsilon}_{eq}^{vp}$$

D'où:

$$\dot{\varepsilon}_{eq}^{vp} = \frac{\partial \Omega_p}{\partial \sigma_{eq}} \qquad \textbf{(2.51)}$$

L'expression du tenseur du taux de déformation viscoplastique se résume alors à :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathbf{vp}} = \frac{\partial \Omega_p}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \dot{\varepsilon}_{eq}^{vp} \frac{3}{2} \frac{(\boldsymbol{\sigma}' - \mathbf{X})}{\sigma_{eq}}, \qquad \textbf{(2.52)}$$

l'expression du taux de déformation viscoplastique équivalent suivant une loi de type sinus hyperbolique :

$$\dot{\varepsilon}_{eq}^{vp} = \frac{\partial \Omega_p}{\partial \sigma_{eq}} = B \sinh\left( \frac{\left\langle \sigma_{eq} - Y \right\rangle}{A} \right) \qquad \textbf{(2.53)}$$

## II.3.2 Evolution des variables internes d'écrouissage

L'évolution des variables internes d'écrouissage qui rendent compte de la position et de la taille de la surface de plasticité reste à expliciter afin de définir de manière complète la loi de comportement.

- R est la force thermodynamique associée à la variable interne scalaire r qui rend compte de l'état d'écrouissage isotrope du matériau. Elle est directement liée à la taille du domaine de plasticité et rend compte de l'état actuel de la densité de dislocation.

- **X** est la force thermodynamique associée à la variable interne tensorielle **α** qui rend compte de l'état d'écrouissage cinématique du matériau. **X** correspond au centre du domaine élastique dans l'espace des contraintes principales (**Fig. 2.13**). Elle rend compte des incompatibilités de déformations au sein du polycristal responsables notamment de l'effet Bauschinger. Son caractère tensoriel permet de prendre en compte de tels effets.

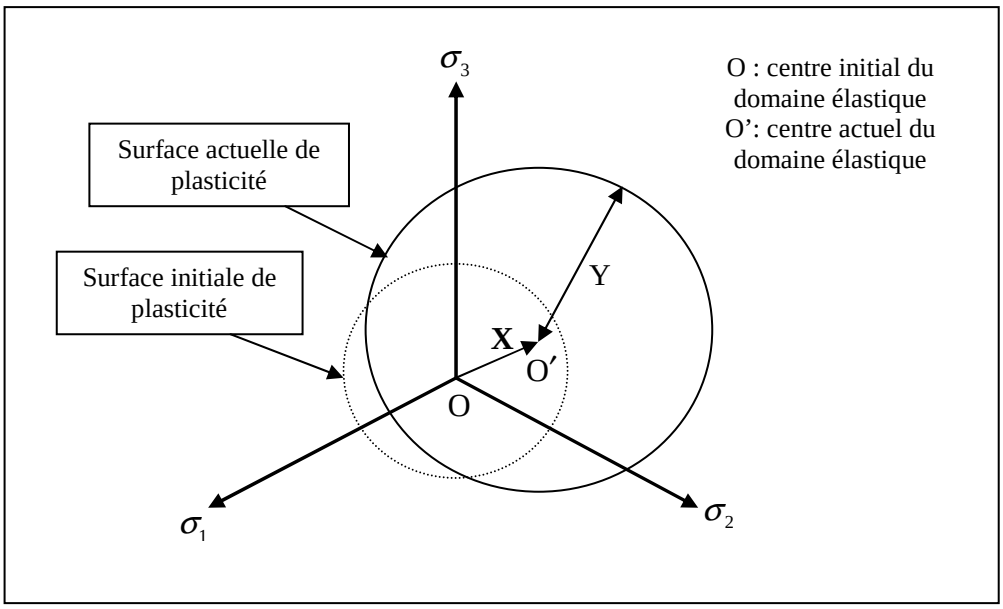



**Fig. 2.13 –** ***Evolution du centre et de la taille de la surface de plasticité en fonction de l'écrouissage cinématique et de l'écrouissage isotrope.***

La taille Y de la surface de plasticité évolue avec l'écrouissage isotrope et la contrainte effective :

$$Y = \sigma_0 + \sqrt{R^2 + \left(\sigma^*/2\right)^2} \qquad \textbf{(2.54)}$$

Le potentiel de dissipation viscoplastique dépend des variables flux au travers de la fonction de charge $f = \sigma_{eq} - Y$ . Dans le cas particulier des matériaux standard généralisés, il est possible d'écrire :

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = -\frac{\partial \Omega_p}{\partial f}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{X}} = -B\sinh\left(\frac{\langle \sigma_{eq} - Y \rangle}{A}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\frac{\left(\boldsymbol{\sigma}' - \mathbf{X}\right)}{\sigma_{eq}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathbf{vp}} \qquad \textbf{(2.55)}$$

$$\dot{r} = -\frac{\partial \Omega_p}{\partial f}\frac{\partial f}{\partial R} = -B\sinh\left(\frac{\langle \sigma_{eq} - Y \rangle}{A}\right)(-1) = \dot{\varepsilon}_{eq}^{vp} \qquad \textbf{(2.56)}$$

Les variables conjuguées de R et de **X** sont donc respectivement la vitesse de déformation plastique équivalente $\dot{\varepsilon}_{eq}^{vp}$ et le tenseur des vitesses de déformations viscoplastiques $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathbf{vp}}$ . Il convient alors d'exprimer l'évolution des forces thermodynamiques R et **X** en fonction des variables d'écrouissage ainsi explicitées de telle sorte que les courbes d'écrouissage soient bien représentées. Une façon avantageuse de représenter ces évolutions est la suivante :

La loi d'évolution décrivant l'écrouissage isotrope est une loi différentielle de type Voce [Voc48] :

$$\dot{R} = C_R\left(R^{sat} - R\right)\dot{\varepsilon}_{eq}^{vp} \qquad \textbf{(2.57)}$$

où $C_R$ et $R^{sat}$ sont des paramètres de matériau. $R^{sat}$ est la valeur de l'écrouissage isotrope à saturation, $C_R$ traduit la rapidité avec laquelle cette saturation est atteinte.

La loi d'évolution choisie décrivant l'écrouissage cinématique est une loi différentielle de type Armstrong-Frederick [Arm66], [Cha77] :

$$\dot{\mathbf{X}} = C_x\left(X^{sat}\mathbf{N} - \mathbf{X}\right)\dot{\varepsilon}_{eq}^{vp} \qquad \textbf{(2.58)}$$

où **N** est un tenseur normé directionnel défini comme :

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{V}}{\|\mathbf{V}\|} \qquad \text{avec : } \mathbf{V} = \frac{\partial \sigma_{eq}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$$

Il représente la direction du tenseur des vitesses de déformations viscoplastiques. $C_x$ et $X^{sat}$ sont des paramètres de matériau. $X^{sat}$ est la valeur de la norme de l'écrouissage cinématique à saturation, $C_x$ traduit la rapidité avec laquelle cette saturation est atteinte.

Afin de faciliter l'implantation numérique tridimensionnelle du modèle de comportement, l'écrouissage isotrope et l'écrouissage cinématique sont décrits dans le modèle

de manière purement phénoménologique. L'utilisation de variables internes phénoménologiques a été préférée aux variables internes physiques afin de décrire des changements de trajets de chargement. L'utilisation de variables internes physiques basées sur la microstructure comme la densité de dislocations ou le tenseur de Nye requiert des développements plus complexes comme nous le verrons dans le chapitre IV. Gardons à l'esprit que l'objectif final est d'obtenir une loi élasto-viscoplastique suffisamment précise sur une large gamme de vitesses de déformation et écrite dans un formalisme tensoriel afin d'être exploitable dans des logiciels de calcul par éléments finis.

### II.3.3 Loi élasto-viscoplastique tridimensionnelle

La loi de comportement sous sa forme complète est présentée dans le **Tab. 2.1**.

| | |
|---|---|
| Potentiel viscoplastique : | $\Omega_p = AB\cosh\left(\frac{\langle \sigma_{eq} - Y \rangle}{A}\right)$ |
| Déformation plastique équivalente : | $\dot{\varepsilon}_{eq}^{vp} = \frac{\partial \Omega_p}{\partial \sigma_{eq}} = B\sinh\left(\frac{\langle \sigma_{eq} - Y \rangle}{A}\right)$ |
| Vitesse de déformation viscoplastique : | $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathbf{vp}} = \frac{\partial \Omega_p}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \dot{\varepsilon}_{eq}^{vp} \frac{3}{2} \frac{(\boldsymbol{\sigma}' - \mathbf{X})}{\sigma_{eq}}$ |
| Ecrouissage isotrope non linéaire : | $\dot{R} = C_R (R^{sat} - R) \dot{\varepsilon}_{eq}^{vp}$ |
| Ecrouissage cinématique non linéaire : | $\dot{\mathbf{X}} = C_x (X^{sat}\mathbf{N} - \mathbf{X}) \dot{\varepsilon}_{eq}^{vp}$ |
| Taille du domaine d'élasticité : | $Y = \sigma_0 + \sqrt{R^2 + \left(\frac{\sigma^*}{2}\right)^2}$ |
| Contrainte visqueuse : | $\frac{\sigma^*}{2} = \langle \sigma_{eq} - Y \rangle$ |
| Surface de plasticité non visqueuse : | $f = \sigma_{eq} - Y = 0$ |

**Tab. 2.1 –** ***Récapitulatif des équations utilisées pour la loi de comportement élasto-viscoplastique.***

Les surfaces d'écoulement visqueux peuvent être représentées dans l'espace des contraintes principales (**Fig. 2.14**). Contrairement à la plasticité indépendante du temps, il n'existe pas de relation de cohérence en viscoplasticité : la contrainte d'écoulement n'est pas nécessairement située sur la frontière du domaine élastique. L'écart entre la surface d'écoulement et la surface du domaine élastique est entièrement contrôlée par la contrainte visqueuse $\sigma^*$ suivant la relation suivante :

$$\sigma^* = 2\langle \sigma_{eq} - Y \rangle \qquad \textbf{(2.59)}$$

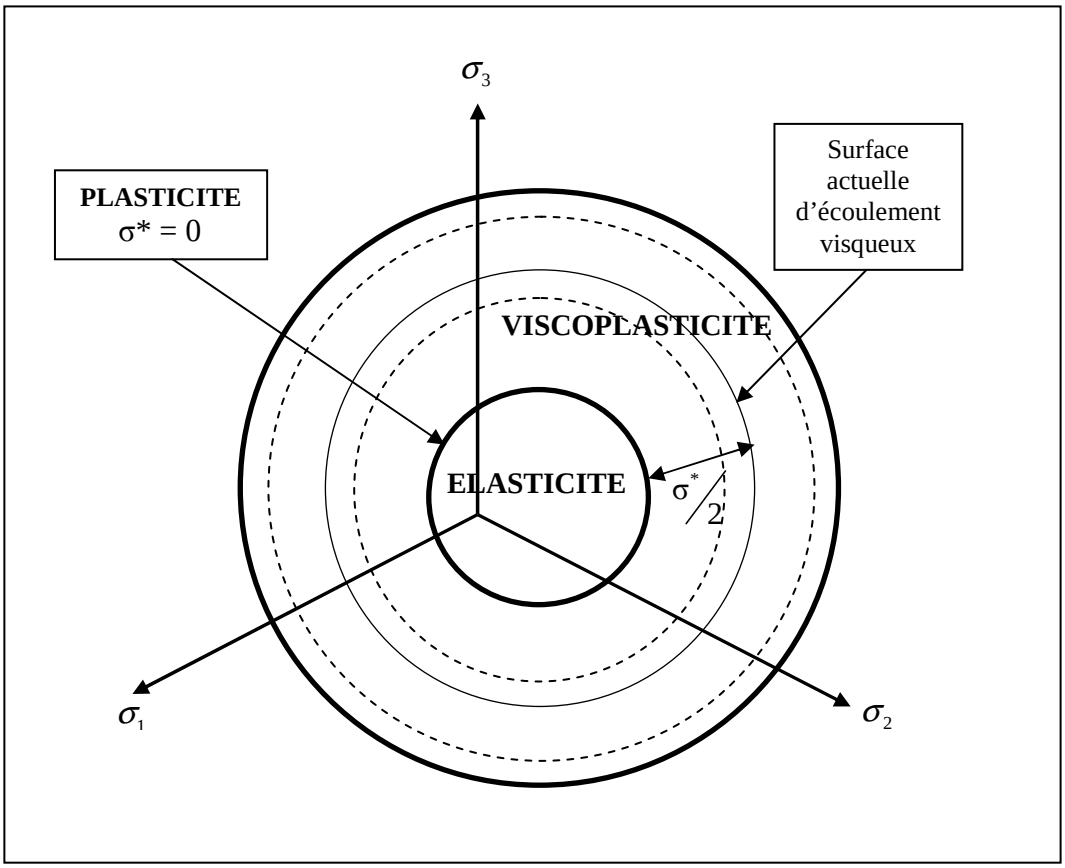



**Fig. 2.14 –** ***Domaines de comportement de la loi élasto-viscoplastique.***

Plusieurs cas limites existent et définissent les bornes des domaines de comportement (**Fig. 2.14**) :

- $\left(\sigma_{eq}\text{-}Y\right) < 0$ : la contrainte équivalente est inférieure à la taille actuelle du domaine d'élasticité : le comportement est purement élastique.
- $\left(\sigma_{eq}\text{-}Y\right) > 0$ : la contrainte équivalente est supérieure à la taille du domaine d'élasticité : le comportement est viscoplastique.
- $\left(\sigma_{eq}\text{-}Y\right) = 0$ : La surface d'écoulement se superpose à la surface du domaine d'élasticité ; ce cas limite de la viscoplasticité correspond à la plasticité indépendante du temps.

Considérant l'équation (2.54), le cas particulier de comportement indépendant du temps est obtenu lorsque :

i) la contrainte visqueuse est nulle : $\sigma^* = 0$, ce qui correspond à une vitesse de sollicitation infiniment lente laissant le temps au matériau de se relaxer lors du chargement : le comportement visqueux est ainsi effacé.
ii) la contrainte visqueuse $\sigma^* = +\infty$ est infinie, ce qui correspond à une vitesse de déformation si grande que le matériau n'a pas le temps d'exprimer son comportement visqueux.

Les surfaces visqueuses pour lesquelles la contrainte effective $\sigma^*$ est comprise strictement entre zéro et l'infini définissent ainsi le domaine de la viscoplasticité.

### II.3.4 Contrainte effective $\sigma^*$ : particularités

On a vu au paragraphe précédent que la contrainte effective détermine l'écart entre la contrainte d'écoulement et la taille du domaine d'élasticité ou encore l'écart entre la surface d'écoulement visqueux et la surface de plasticité : elle caractérise ainsi la viscosité.
Sa valeur dans notre modèle dépend uniquement de la vitesse de déformation équivalente et de la température via la relation suivante :

$$\frac{\sigma^*}{2} = \mathrm{Asinh}^{-1}\left(\frac{\dot{\varepsilon}_{eq}^{vp}}{B}\right)$$

La contrainte effective $\sigma^*$ représente la variation de la contrainte d'écoulement due à la dynamique thermiquement activée des dislocations. Cette contrainte aide les dislocations à franchir les obstacles microstructuraux à l'aide des fluctuations thermiques. Pour les structures de type cubique centré, différents auteurs [Con64, Rau93, All05] montrent que les dislocations se déplacent en formant des doubles décrochements appelés « double kinks » sur les potentiels de Peierls. Ce processus de formation étant thermiquement activé.

Cette dépendance vis-à-vis de la vitesse de déformation et de la température traduit au travers du modèle deux effets caractéristiques du comportement visqueux :

i) la sensibilité à la vitesse de déformation,
ii) l'adoucissement thermique.

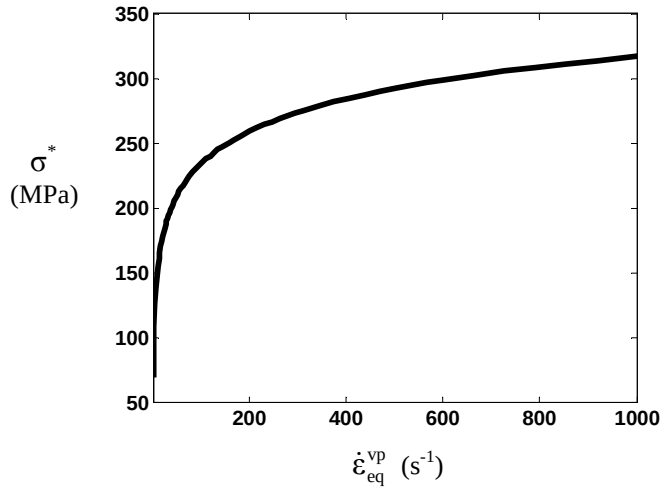



**Fig. 2.15 –** ***Contribution de la contrainte visqueuse à l'écoulement en fonction de la vitesse de déformation équivalente (A=18MPa, B=0,3s$^{-1}$).***

La **Fig. 2.15** exprime la contribution isotrope de cette contrainte supplémentaire à la contrainte d'écoulement pour un domaine de vitesse de déformation allant de $0{,}0001s^{-1}$ à $1000s^{-1}$ :

$$\sigma_{eq} = \sigma_0 + \frac{\sigma^*}{2} + \sqrt{\left(\sigma^*/2\right)^2 + R^2} \qquad \textbf{(2.60)}$$

Pour des vitesses de déformations équivalentes inférieures à $0{,}0001s^{-1}$, cette contribution est négligeable et n'est pas représentée. La contrainte effective croît très rapidement avec la vitesse de déformation équivalente puis atteint une valeur de saturation qui varie en fonction des paramètres A et B choisis.

La **Fig. 2.16** représente la contribution des différentes variables internes constituant la contrainte d'écoulement.

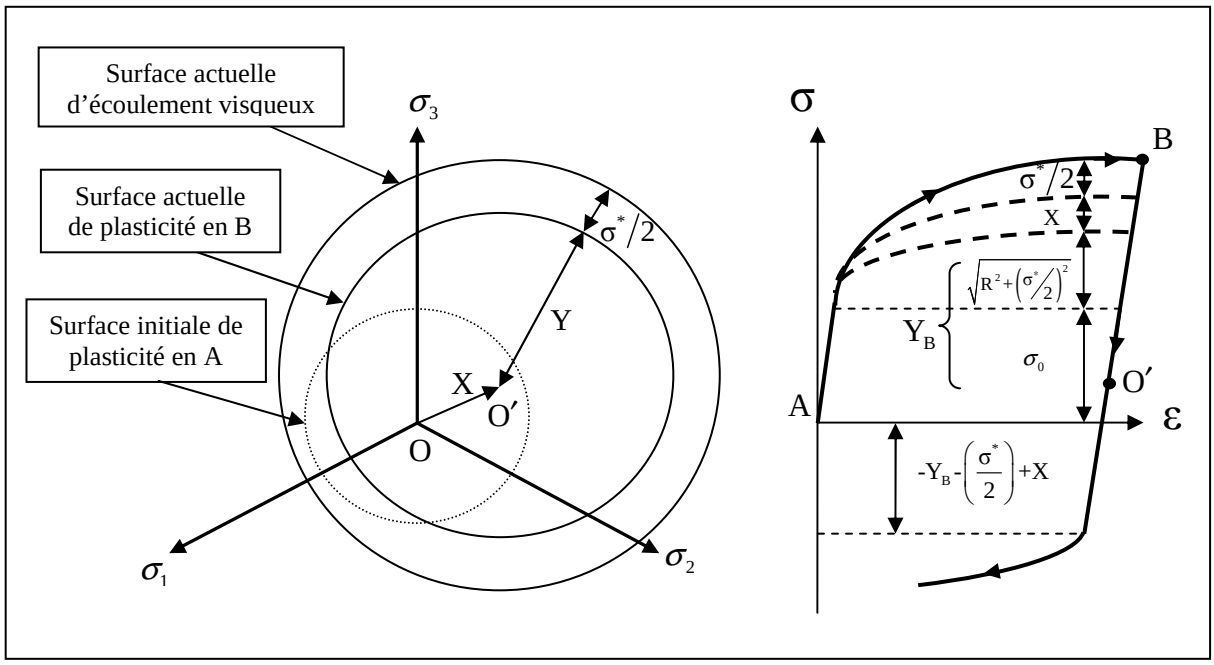



**Fig. 2.16 –** ***Surface d'écoulement visqueux - Description de la contrainte d'écoulement à l'aide des variables internes et de la contrainte visqueuse.***

La contrainte effective intervient également de façon couplée avec l'écrouissage isotrope dans l'expression de la taille du domaine d'élasticité où elle apparaît sous le terme en racine. Elle contribue également à augmenter la taille de la surface de plasticité et ce, de façon isotrope puisque scalaire, selon la relation **(2.54)** rappelée ici :

$$Y = \sigma_0 + \sqrt{R^2 + \left(\sigma^*/2\right)^2}$$

S'appuyant sur le mouvement thermiquement activé des dislocations, la contrainte effective $\sigma^*$ intervient donc de deux manières dans le modèle :

- Elle contribue tout d'abord de façon additive avec la contrainte interne à l'écoulement visqueux dont elle traduit deux caractéristiques majeures : la sensibilité à la vitesse de déformation et à la température ;
- Elle intervient de façon couplée dans l'expression de la contrainte interne. De cette manière, l'écrouissage se voit ainsi également affecté des deux effets du comportement visqueux.

### II.3.5 Sensibilité aux paramètres

La nouvelle loi en sinus hyperbolique présentée dans les paragraphes précédents comporte sept paramètres. La sensibilité du modèle d'une part vis-à-vis des paramètres d'écrouissage phénoménologiques présentés précédemment et d'autre part vis-à-vis de la limite initiale d'élasticité $\sigma_0$ est claire et ne sera pas expliquée dans cette partie. Nous nous intéressons plus particulièrement dans cette partie à l'étude des deux paramètres qui gouvernent la sensibilité à la vitesse de déformation et à la température. Ces deux paramètres, A et B, peuvent être explicités par des paramètres métallurgiques et des constantes physiques (**Tab. 2.2)**.

| | |
|---|---|
| $\dot{\varepsilon}_{eq}^{vp}=\frac{\partial\Omega_p}{\partial\sigma_{eq}}=B\sinh\left(\frac{\langle\sigma_{eq}-Y\rangle}{A}\right)$<br>$A=\frac{kT}{2V^*}$<br>$B=2M\rho_m\nu_{debye}b^2\exp\left(\frac{-\Delta G_0}{kT}\right)$ | Energie d'activation…….. $\Delta G_0$<br>Volume d'activation……... $V^*$<br>Coefficient de Taylor……. $M=3$<br>Densité des dislocations mobiles.……. $\rho_m=10^{10}m^{-2}$<br>Fréquence de Debye…….. $\nu_{debye}=10^{13}s^{-1}$<br>Vecteur de Burgers……. $b=2{,}5.10^{-10}m$<br>Constante de Boltzmann……. $k=1{,}38.10^{-23}J.K^{-1}$<br>Température en Kelvin...……..... T |

**Tab. 2.2 –** ***Paramètres et constantes physiques de la loi en sinus hyperbolique [All05], [All09].***

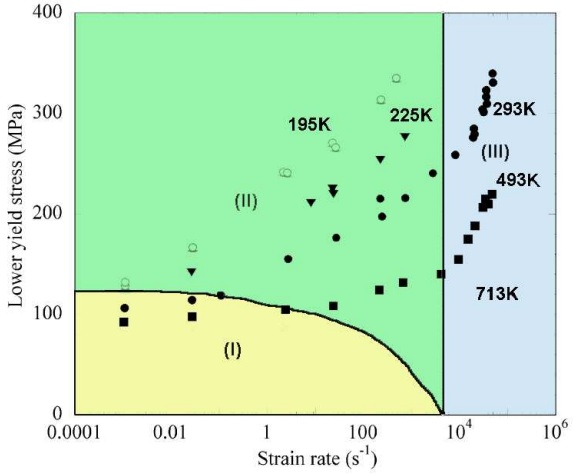
Si l'on exprime la loi de comportement élasto-viscoplastique avec l'ensemble de ces paramètres physiques, on s'aperçoit alors que :

i) le comportement viscoplastique est directement dépendant de la température T qui apparaît en tant que paramètre,
ii) la sensibilité à la vitesse de déformation dépend principalement de deux paramètres physiques : l'énergie d'activation $\Delta G_0$ et le volume d'activation $V^*$. Ces deux paramètres sont directement liés au phénomène thermiquement activé qui contrôle la déformation, à savoir le déplacement des crans sur les parties vis des dislocations.

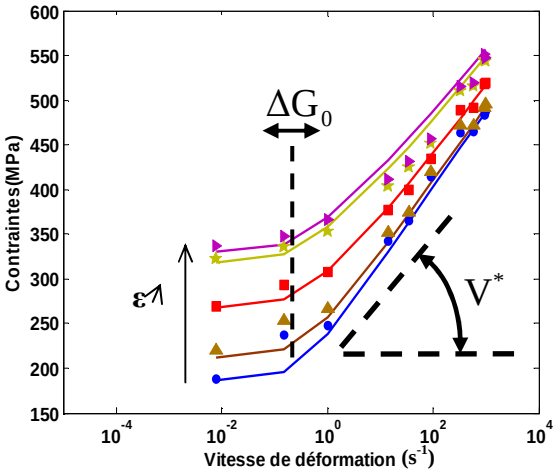
### L'énergie d'activation $\Delta G_0$

L'énergie d'activation $\Delta G_0$ correspond sur un diagramme force/distance (**Fig. 2.10)** à l'aire comprise sous la colline représentant l'obstacle microstructural, en d'autres termes à l'énergie qu'il faut fournir pour franchir cet obstacle. Elle dépend du type d'obstacle et varie

seulement avec la température via le module de cisaillement. Cette barrière énergétique est franchie sous l'action de deux contributions : l'énergie due à l'agitation thermique et le travail fourni par la contrainte effective. La valeur de $\Delta G_0$ fixe donc la frontière entre un régime athermique où la contrainte effective est faible voire nulle et un régime thermiquement activé où l'action combinée du travail généré par la contrainte effective et de l'agitation thermique permet le franchissement des obstacles par les dislocations. Cette frontière est représentée entre les régions (I) et (II) sur la (**Fig. 2.17a**). Sur un diagramme contraintes vs vitesses de déformation, le seuil au-delà duquel le comportement est dépendant de la vitesse de déformation (**Fig. 2.17b**) dépend à la fois de $\Delta G_0$ et de la température T. A température fixée, c'est la valeur de $\Delta G_0$ qui fixe le seuil de sensibilité à la vitesse de déformation dans le modèle.




*(a) Variation de la contrainte d'écoulement avec la vitesse de déformation pour un acier à 0,12%C [Cam70]. On distingue trois régions de sensibilité à la vitesse de déformation :*
*(I) : Domaine athermique : très faible sensibilité ;*
*(II) : Glissement thermiquement activé ;*
*(III) : Sensibilité très élevée (« phonon drag »).*




*(b) Représentation schématique :*
*L'énergie d'activation $\Delta G_0$ contrôle le seuil de sensibilité à la vitesse de déformation, le volume d'activation $V^*$ contrôle la sensibilité à la vitesse de déformation.*

**Fig. 2.17 – *Influence de l'énergie d'activation et du volume d'activation sur le comportement du modèle.***

## Le volume d'activation $V^*$

Le produit entre le volume d'activation $V^*$ et la contrainte effective $\sigma^*$ représente le travail fourni par la contrainte lors du processus de franchissement. Cette énergie diminue la hauteur de la colline (**Fig. 2.10**) et donc diminue la quantité d'énergie effective qu'il faut fournir pour franchir l'obstacle. Le volume d'activation $V^*$ est souvent exprimé en $b^3$ ce qui permet de se représenter la quantité d'atomes impliqués dans le processus de franchissement. Divisé par la norme du vecteur de Burgers b, il représente l'aire d'activation ($V^*/b$), c'est-à-dire l'aire balayée durant le franchissement de l'obstacle (aire A sur la **Fig. 2.11**) [Vig07]. Par définition, on le représente formellement comme un coefficient thermodynamique [Uen04] :

$$V^* = -\left.\frac{\partial(\Delta G)}{\partial \sigma^*}\right|_{T=const} \qquad \textbf{(2.61)}$$

$\Delta G$ étant l'énergie apparente d'activation, c'est-à-dire l'énergie $\Delta G_0$ nécessaire au franchissement de l'obstacle diminuée du travail fourni par la contrainte effective :

$$\Delta G = \Delta G_0 - \sigma^* V^* \qquad \textbf{(2.62)}$$

Il vient, en tenant compte de l'équation (2.43) :

$$V^* = -\left.\frac{\partial(\Delta G)}{\partial \sigma^*}\right|_{T=const} = kT \left.\frac{\partial\left(\sinh^{-1}\left(\dot{\varepsilon}_{eq}^{vp} / B\right)\right)}{\partial \sigma^*}\right|_{T=const} \qquad \textbf{(2.63)}$$

Cette dernière expression montre qu'il est possible d'accéder expérimentalement à la valeur du volume d'activation $V^*$ lors d'un saut de vitesse de déformation. La valeur $V^*$ ainsi mesurée donne des indications sur les mécanismes à l'échelle de la microstructure qui bloquent le mouvement des dislocations. L'équation (2.62) montre qu'une valeur faible de $V^*$ correspond à un mécanisme fortement influencé par la température et donc à une forte activation thermique. Ainsi, des mouvements de dislocations contrôlés par des mécanismes de montée se caractérisent par des volumes d'activation de l'ordre de l'unité, tandis que si la déformation est contrôlée par un durcissement de la forêt, le volume d'activation peut être de l'ordre de plusieurs milliers de $b^3$ [Vig07].

Une étude de sensibilité du modèle confirme ces résultats. Le volume d'activation $V^*$ caractérise la sensibilité de la contrainte d'écoulement à la vitesse de déformation dans le modèle. Plus précisément, il contrôle la sensibilité de la contrainte d'écoulement à l'activation thermique. Il est directement lié à la pente de la courbe sur la **Fig. 2.17b**.

Dans cette partie, la signification des paramètres physiques $\Delta G_0$ et $V^*$ a été clarifiée afin de bien comprendre leur influence sur la sensibilité du modèle vis-à-vis de la vitesse de déformation. Ces deux paramètres sont tous deux accessibles expérimentalement [Poi76]. Etant donné les mécanismes modélisés, on s'attendra donc à une faible valeur de l'énergie d'activation $\Delta G_0$ et à une valeur du volume d'activation $V^*$ de l'ordre de l'unité, caractérisant ainsi d'une part les frictions de réseau, et d'autre part le mouvement des dislocations induit par déplacement des doubles crans le long des parties vis des segments.

## II.4 VALIDATION ET APPLICATION POUR UN ACIER MONOPHASE

Dans cette partie, le modèle élasto-viscoplastique proposé est confronté d'une part aux résultats d'essais expérimentaux et d'autre part à d'autres modèles issus de la littérature. Le modèle de comportement proposé est appliqué dans le cas d'aciers monophasés afin de pouvoir déterminer ses limites d'application et de situer sa précision vis-à-vis d'autres modèles plus complexes. Cette validation est nécessaire avant de pouvoir implanter la loi de comportement dans un code d'éléments finis commercial afin de simuler des essais de mise en forme.

La validation du modèle est proposée sur la base de résultats expérimentaux fournis par ArcelorMittal. Les essais expérimentaux ont été effectués sur deux aciers doux, non alliés, laminés à froid et destinés à la mise en forme : l'acier DC05 et l'acier DC06. L'acier DC06 a la particularité d'être un acier IF (Interstitial Free), c'est-à-dire un acier contenant très peu de carbone (< à $5.10^{-3}$ pour cent massique) et dont les interstitiels sont stabilisés (ajout de titane et de niobium). Les aciers IF sont largement utilisés dans l'industrie automobile du fait de leur emboutissabilité élevée. La composition chimique de ces deux aciers est donnée dans le **Tab. 2.3**. Comme le révèle la micrographie de l'acier DC06 sur la **Fig. 2.18** : une seule phase cristallographique est présente : la ferrite. Ces deux aciers monophasés sont donc 100% ferritiques. La taille moyenne des grains de ferrite pour les deux aciers est de l'ordre de 20 microns.

| **Aciers doux** | **C** | **Mn** | **P** | **S** | **N** | **Al** | **Ti** | **Nb** | **Si** | **Cu** | **Cr** | **Ni** | **Zr** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Acier 1 : DC05 | 8,6 | 124 | 6 | 9 | 3,9 | 44 | 126 | <1 | 8 | 16 | 24 | 20 | <1 |
| Acier 2 : DC06 | 1,0 | 101 | 7 | 5 | 3,6 | 50 | 86 | - | 9 | 16 | 24 | 20 | - |

**Tab. 2.3 –** ***Compositions chimiques ($10^{-3}$ % poids) des deux aciers 100% ferritiques utilisés pour la confrontation du modèle avec les résultats expérimentaux.***

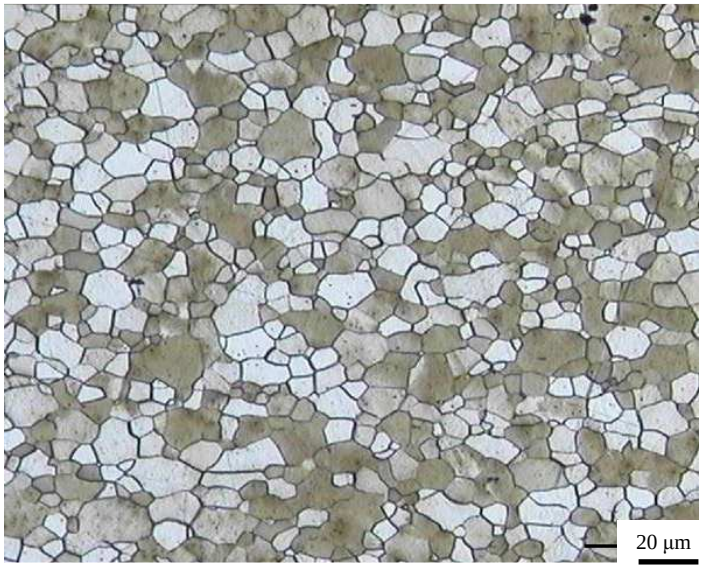



**Fig. 2.18 –** ***Micrographie (zoom x200) de l'Acier DC06.***

La confrontation du modèle à des résultats expérimentaux a été menée dans le but d'identifier les 7 paramètres du modèle de comportement élasto-viscoplastique à écrouissage isotrope et cinématique. Ces 7 paramètres peuvent être répartis selon leur nature en 3 ensembles :

- un ensemble de 3 paramètres propres au modèle élasto-viscoplastique,
- un ensemble de 2 paramètres pour la description de l'écrouissage isotrope,
- un ensemble de 2 paramètres pour la description de l'écrouissage cinématique.

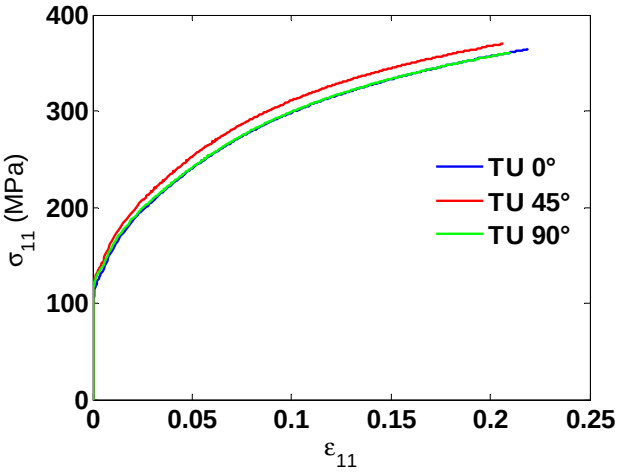
L'ensemble de ces paramètres ainsi que les équations dont ils proviennent sont rappelés dans le **Tab. 2.4 :**

| | Paramètres à identifier | Equations |
|---|---|---|
| **Loi élasto-viscoplastique** | A, B | $\dot{\varepsilon}_{eq}^{vp}=B\sinh\left(\frac{\langle\sigma_{eq}-Y\rangle}{A}\right)$ |
| | $\sigma_0$ | $Y=\sigma_0+\sqrt{R^2+\left(\sigma^*/2\right)^2}$ |
| **Ecrouissage isotrope** | $C_R$, $R^{sat}$ | $\dot{R}=C_R\,(R^{sat}-R)\dot{\varepsilon}_{eq}^{vp}$ |
| **Ecrouissage cinématique** | $C_x$, $X^{sat}$ | $\dot{\mathbf{X}}=C_x\,(X^{sat}\mathbf{N}-\mathbf{X})\dot{\varepsilon}_{eq}^{vp}$ |

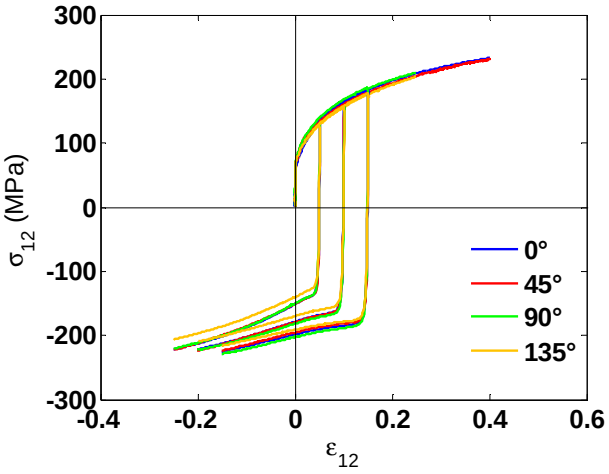
**Tab. 2.4 –** ***Paramètres du modèle à identifier.***

Comme expliqué dans la partie II.3.5, les paramètres A et B de la loi viscoplastique peuvent être exprimés à partir de paramètres métallurgiques. Une fois ceux-ci fixés, identifier les paramètres A et B revient à identifier les valeurs du volume d'activation $V^*$ et de l'énergie d'activation $\Delta G_0$. Là où le mécanicien verra deux paramètres d'ajustement A et B d'une loi de comportement, le métallurgiste verra un ensemble de paramètres physiques dont le volume d'activation $V^*$ et l'énergie d'activation $\Delta G_0$. Les paramètres métallurgiques ou constantes physiques utilisés dans le cadre des aciers 100% ferritiques sont donnés dans le **Tab. 2.2**.

Par simplicité de calculs, nous avons choisi d'ignorer la prise en compte de l'anisotropie plastique due par exemple à la texture morphologique de l'acier. Les effets de texture morphologique ne sont pas pris en compte dans notre modélisation du comportement élasto-viscoplastique. Les **Fig. 2.19a** et **Fig. 2.19b** montrent les résultats expérimentaux d'essais quasi-statiques de traction, de cisaillement et de cisaillement Bauschinger sur l'acier DC06 selon différentes directions de sollicitation par rapport à la direction de laminage de l'éprouvette. Pour les essais de traction, les éprouvettes ont été sollicitées selon trois directions : 0° (direction de laminage), 45° et 90° (direction transverse).




*(a) Essais quasi-statiques de traction sur l'acier DC06 selon trois directions différentes de sollicitation : 0°, 45° et 90°.*




*(b) Essais quasi-statiques de cisaillement simple et de cisaillement Bauschinger sur l'acier DC06 selon quatre directions différentes : 0°,45°,90° et 135°.*

**Fig. 2.19 –** ***Comportement mécanique anisotrope des aciers étudiés.***

Les résultats montrent très clairement un comportement identique entre les éprouvettes sollicitées selon la direction de laminage (0°) et la direction transverse (90°). Le comportement plastique de l'éprouvette sollicitée à 45° diffère légèrement en intensité d'une dizaine de MPa. Pour les essais de cisaillement les éprouvettes ont été sollicitées selon quatre directions différentes : 0°, 45°, 90° et 135°. Les essais de cisaillement indiquent un comportement quasi-identique pour les éprouvettes quelle que soit la direction de sollicitation considérée. Toutefois, un comportement légèrement différent (une dizaine de MPa) pour l'éprouvette sollicitée à 135° est visible sur les essais de cisaillement Bauschinger.

L'ensemble des résultats de la figure **Fig. 2.19** confirme un comportement peu anisotrope de ces aciers 100% ferritiques et valide notre choix de modélisation dans ce cas précis concernant l'anisotropie planaire.

### II.4.1 Identification des paramètres

Les sept paramètres ont été identifiés à partir de plusieurs types d'essais expérimentaux. Pour l'acier DC05, nous avons pu utiliser des essais dynamiques de traction uniaxiale à différentes vitesses de déformation (**Fig. 2.20**) tandis que pour l'acier DC06, nous avons eu recours à des essais quasi-statiques de traction, de cisaillement et de cisaillement Bauschinger avec différentes prédéformations (**Fig. 2.25**).

La stratégie d'identification adoptée est la suivante :

1) La limite d'élasticité $\sigma_0$ est mesurée sur la courbe de traction ou de cisaillement obtenue pour la vitesse de déformation la plus faible. Cette limite d'élasticité, qui dépend directement des éléments en solutions solides et de la taille de grains, est déterminée par lecture de la courbe expérimentale en traction.
2) Les paramètres A et B de la loi viscoplastique déterminent la sensibilité du modèle à la vitesse de déformation. Plus précisément, ils contrôlent respectivement la sensibilité à la vitesse de déformation et le seuil de cette sensibilité (**Fig. 2.17).** Ces deux paramètres ne peuvent donc être identifiés qu'à partir de données dynamiques ou par connaissance des données physiques de l'acier considéré. Ils ont donc été identifiés à partir de l'évolution de la limite d'élasticité des courbes de traction pour différentes vitesses de déformation obtenues à partir de l'acier DC05. N'ayant pas d'essais dynamiques à notre disposition pour l'acier DC06, nous avons postulé que les valeurs de A et B pour cet acier étaient identiques à celles identifiées pour l'acier DC05.
3) Les deux paramètres $X^{sat}$ et $C_x$ de la loi d'évolution de l'écrouissage cinématique sont identifiés à l'aide des courbes obtenues en accord avec les observations expérimentales concernant l'évolution de la contrainte interne de polycristaux de ferrite en fonction de la taille de grain [Bou06]. Pour un diamètre moyen de 20 microns, il apparaît que la contrainte cinématique à saturation en cisaillement est d'environ 9 MPa ce qui équivaut à une valeur à saturation $X^{sat}$ égale à $X^{sat}=X_{12}^{sat}\sqrt{2}$ soit environ 13 MPa. Cette valeur est en accord avec les résultats expérimentaux concernant cet acier. Nous verrons par la suite dans le chapitre suivant que de nouveaux développements confirment également ce résultat.
4) Les deux paramètres $R^{sat}$ et $C_r$ de la loi d'évolution de l'écrouissage isotrope sont identifiés à l'aide de la courbe en traction obtenue pour la vitesse de déformation la plus faible. En effet, si la vitesse de déformation viscoplastique est très faible, la contrainte visqueuse devient nulle et la contrainte d'écoulement s'écrit :

$$\sigma_{eq}\left(\sigma'_{ij}-X_{ij}\right)=\sigma_0+\cancel{\frac{\sigma^*}{2}}+\frac{1}{2}\sqrt{\cancel{\left(\sigma^*\right)^2}+4R^2}=\sigma_0+R \qquad \textbf{(2.64)}$$

La limite d'élasticité $\sigma_0$ et l'évolution de **X** fixées, la courbe ne dépend plus que de l'évolution de R c'est-à-dire des deux paramètres : Cr et $R^{sat}$.

L'ensemble des paramètres identifiés pour les deux aciers ferritiques est reporté dans le **Tab. 2.5** :

| | $\sigma_0$ (MPa) | A (MPa) | B ($s^{-1}$) | $C_R$ | $R^{sat}$ (MPa) | $C_x$ | $X^{sat}$ (MPa) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Acier 1 : DC05** | 155 | 18 | 0,3 | 13 | 200 | 100 | 13 |
| **Acier 2 : DC06** | 120 | 18 | 0,3 | 8 | 255 | 100 | 13 |

**Tab. 2.5 –** ***Paramètres identifiés pour les aciers 100% ferritiques.***

L'ensemble des paramètres a donc été identifié manuellement selon une stratégie visant à isoler autant que possible chaque paramètre ou couple de paramètres dans des situations où l'influence des autres paramètres est négligeable. Bien évidemment, cette identification est loin d'être aussi précise qu'une identification numérique mais repose sur un sens logique et reste facile à mettre en œuvre pour un modèle qui ne requiert qu'un petit nombre de paramètres à identifier.

### II.4.2 Sensibilité à la vitesse

Les essais expérimentaux utilisés sont des essais de traction uniaxiale à différentes vitesses de déformation effectués sur l'acier DC05. Etant donné la large gamme de vitesses de déformation considérées (cinq ordres de grandeur), différentes techniques expérimentales ont été utilisées.

| | **Type de Machine** | **Conditions expérimentales** | | | **Géométrie éprouvette** | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | Vitesse de déformation (s-1) | T (°C) | Direction de sollicitation (°) | L0 (mm) | Lar0 (mm) | e0 (mm) |
| **Essai 1** | Zwick (20kN) | 0,008 | 20 | 90 | 80 | 20 | 0,8 |
| **Essai 2** | TGV* | 0,15 | 20 | 90 | 100 | 13 | 0,8 |
| **Essai 3** | TGV | 1 | 20 | 90 | 100 | 13 | 0,8 |
| **Essai 4** | TGV | 14 | 20 | 90 | 100 | 13 | 0,8 |
| **Essai 5** | TGV | 35 | 20 | 90 | 40 | 13 | 0,8 |
| **Essai 6** | TGV | 92 | 20 | 90 | 40 | 13 | 0,8 |
| **Essai 7** | Barre Hopkinson | 333 | 20 | 90 | 10 | 4 | 0,8 |
| **Essai 8** | Barre Hopkinson | 583 | 20 | 90 | 10 | 4 | 0,8 |
| **Essai 9** | Barre Hopkinson | 947 | 20 | 90 | 10 | 4 | 0,8 |
| **Essai 10** | Barre Hopkinson | 983 | 20 | 90 | 10 | 4 | 0,8 |

*Traction grande vitesse

**Tab. 2.6 –** ***Conditions expérimentales et géométrie des éprouvettes utilisées pour les essais de traction sur l'acier DC05.***

Le **Tab. 2.6** indique pour chaque essai le type de machine utilisée, les conditions expérimentales et la géométrie de l'éprouvette ; les essais ont été réalisés par ArcelorMittal Research, Maizières-lès-Metz, partenaire industriel de l'étude. La **Fig. 2.20** représente la confrontation des résultats du modèle avec l'expérience sur quatre vitesses de déformation : 983s-1, 92s-1, 1s-1 et 0,008s-1. Le modèle capte bien l'évolution de la limite d'élasticité même s'il est connu que celle-ci est difficilement mesurable pour de très grandes vitesses de déformations compte tenu des méthodes expérimentales utilisées. Il a été montré que dans ces conditions, la géométrie de l'échantillon pouvait influencer de manière conséquente les courbes contraintes-déformation et ce, particulièrement en traction [Rus01]. L'écrouissage est très bien décrit sur tout le domaine de déformation pour les faibles vitesses de déformations (0,008s-1 et 1s-1). Pour de plus fortes vitesses de déformation, si l'écrouissage est toujours bien décrit au début de la déformation jusqu'à environ 10%, il se révèle un peu trop raide dans le reste du domaine de déformation où l'expérience montre qu'il sature très rapidement et d'autant plus vite que la vitesse de déformation est grande. Les différentes techniques expérimentales utilisées et la simplicité du modèle d'écrouissage isotrope utilisé (deux paramètres constants indépendants de la vitesse de déformation) expliquent en partie ces différences.

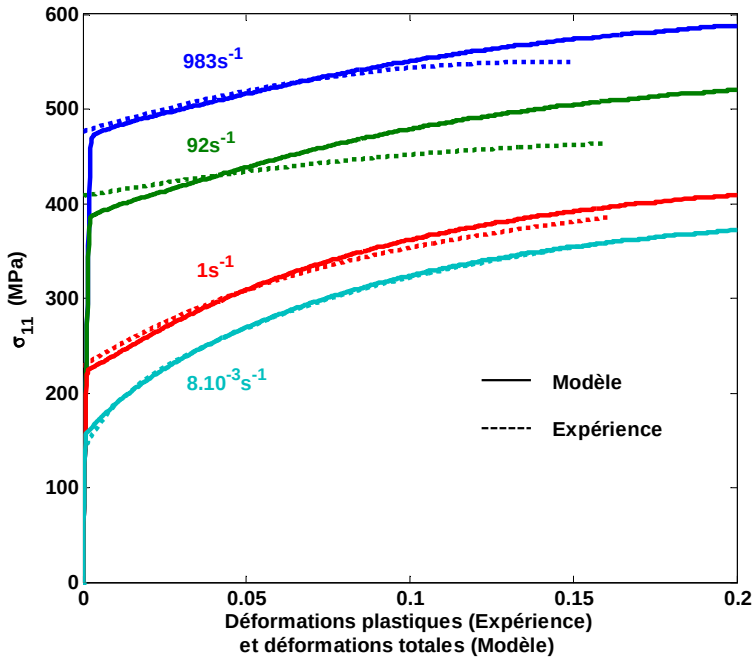



**Fig. 2.20 –** ***Courbes contraintes-déformations.***
***Comparaison entre l'expérience (en pointillés) et le modèle (en trait plein) pour des essais monotones de traction à différentes vitesses de déformations.***

La **Fig. 2.21** représente l'évolution de la contrainte vraie à différents niveaux de déformation 1%, 2%, 5%, 10% et 12% en fonction de la vitesse de déformation.

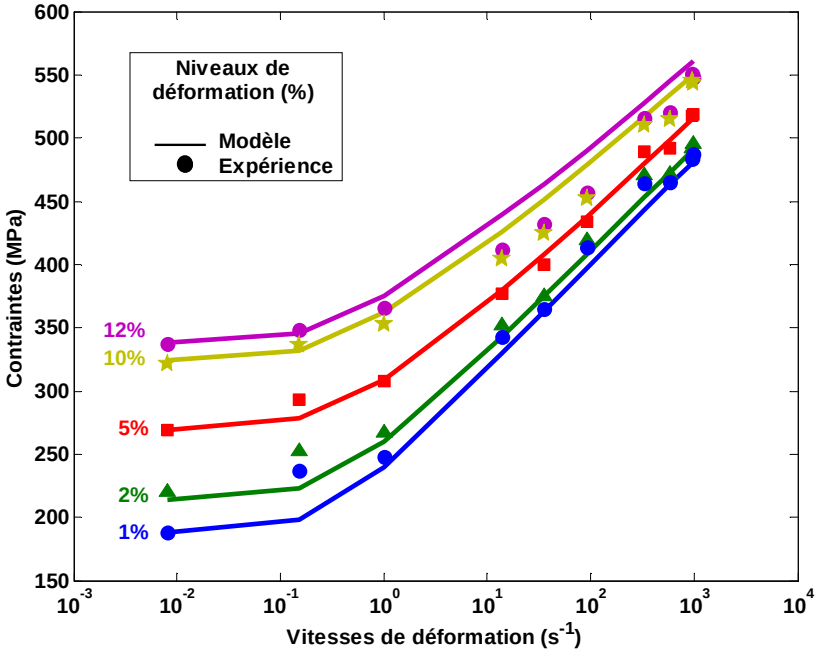



**Fig. 2.21 –** ***Evolution de la contrainte d'écoulement à différents niveaux de déformation en fonction de la vitesse de déformation. Comparaison entre l'expérience (symboles) et le modèle (en trait plein) pour des essais monotones de traction.***

A l'image de la **Fig. 2.20**, il apparaît que le modèle surestime légèrement les contraintes pour de forts niveaux de déformation aux grandes vitesses de déformations. Les contraintes d'écoulement sont globalement bien représentées par le modèle sur l'ensemble des vitesses de déformation des essais expérimentaux. La **Fig. 2.21** met particulièrement en évidence la très bonne description du modèle vis-à-vis de la sensibilité à la vitesse de déformation pour différents niveaux de déformations et sur une large gamme de vitesse de déformation.

### II.4.3 Sensibilité à la température

Des données d'essais isothermes à différentes températures étant disponibles, la robustesse du modèle vis-à-vis de la température a également été testée (**Fig. 2.23**). Même si nous avons décidé de ne pas tenir compte de l'équation de la chaleur, et par conséquent de l'élévation de température générée par dissipation du travail plastique, la température intervient indirectement dans le modèle élasto-viscoplastique comme paramètre.

L'influence de la température dans ce modèle isotherme se résume donc au travers des expressions des deux paramètres viscoplastiques A et B :

$$A = \frac{k_B T}{2V^*} \text{ et } B = 2M\rho_m \nu_{debye} b^2 \exp\left(-\frac{\Delta G_0}{k_B T}\right)$$

La limite d'élasticité évoluant avec la température, une loi d'évolution de cette limite en fonction de la température est également nécessaire afin de pouvoir confronter le modèle aux résultats expérimentaux. D'après les résultats sur les aciers IF de Uenishi et Teodosiu [Uen04]

présentés **Fig. 2.22**, une loi linéaire de la limite d'écoulement a été identifiée [All05], [All09] :

$$\sigma_0(T) = \sigma_0(293K) + K^T(T\text{-}293)$$

où $K^T$, la valeur de la pente, est égale à – 0,68 MPa.$K^{-1}$.

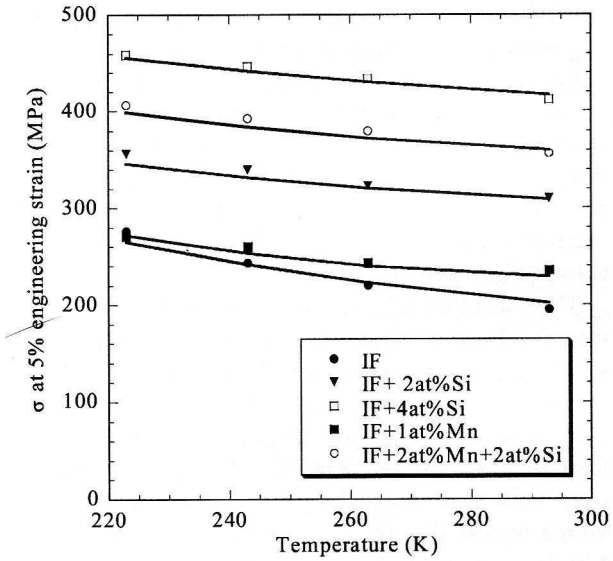



**Fig. 2.22 –** ***Variation de la contrainte d'écoulement à 5% de déformation en fonction de la température lors d'un essai de traction quasi-statique (à 0,0033s-1), d'après [Uen04].***

Nous avons considéré que la variation des modules élastiques avec la température était négligeable devant l'influence que pouvait avoir la température sur la partie visqueuse du modèle. Par conséquent, le module de Young reste inchangé pour les simulations en température. La **Fig. 2.23** représente pour deux niveaux de déformations donnés (5% et 10%) l'évolution de la contrainte vraie en fonction de la vitesse de déformation pour trois températures différentes : -40°C, 20°C et 100°C.

En dépit de nombreuses hypothèses simplificatrices, le modèle décrit de façon précise l'adoucissement de l'acier lorsque la température augmente, caractéristique d'un comportement visqueux. La **Fig. 2.23** témoigne du bon comportement du modèle en température. Le modèle réussit non seulement à décrire la diminution de la limite d'écoulement lorsque la température augmente mais aussi l'influence de la température sur la sensibilité à la vitesse. De façon plus précise, on observe un décalage des points expérimentaux avec la température ce qui se traduit par une translation du seuil de sensibilité à la vitesse de déformation. Cette translation du seuil de sensibilité à la vitesse est mise en évidence sur la **Fig. 2.24** où, pour plus de clarté, seuls les points expérimentaux à 10% de déformation sont représentés. Les traits plein représentent ici la tendance des points expérimentaux.

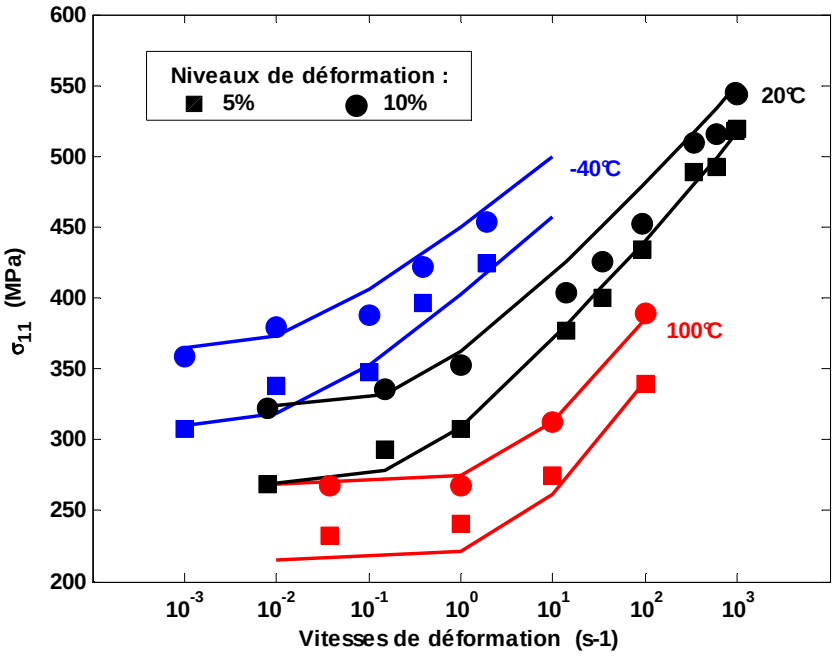



**Fig. 2.23 –** ***Evolution de la contrainte d'écoulement en fonction de la vitesse de déformation à différents niveaux de déformation pour trois températures (-40°C, 20°C et 100°C). Les points expérimentaux sont représentés par les symboles, les simulations par les traits continus.***

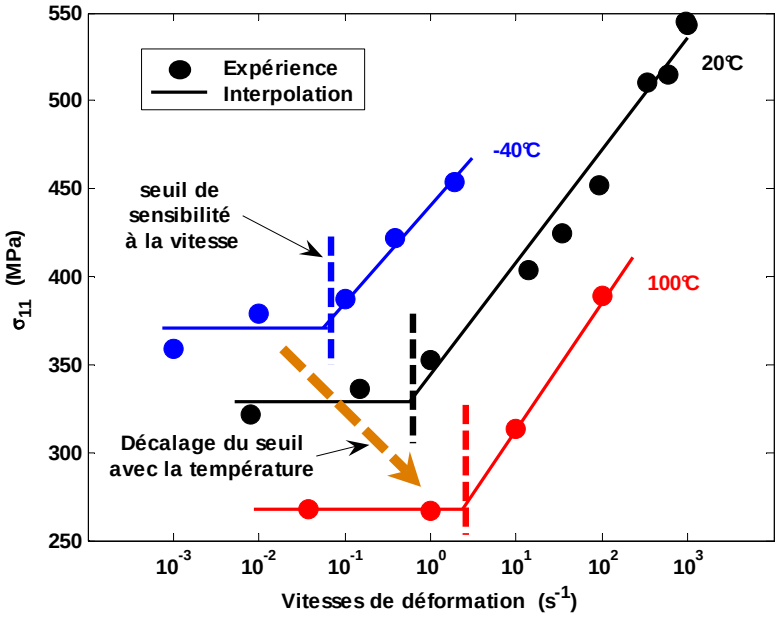



**Fig. 2.24 –** ***Mise en évidence du décalage du seuil de sensibilité avec la température.***

Le décalage des courbes n'est pas une simple translation verticale des courbes lorsque la température augmente mais bel et bien à la fois :

i) Une translation verticale due à la variation de la limite d'élasticité avec la température,

ii) Une translation horizontale du seuil de sensibilité à la vitesse de déformation avec la température : la transition entre le régime athermique et le régime thermiquement activé se retrouve décalée vers les grandes vitesses de déformation.

La nouvelle approche proposée est donc non seulement capable de décrire les effets de vitesse mais également les effets de température. La comparaison des résultats du modèle avec les résultats expérimentaux montre bien que le modèle ne se limite pas à un simple décalage vertical des courbes dans la description du comportement à différentes températures. Le modèle prend en compte l'influence de la température en tant que paramètre directement dans l'expression de la contrainte effective. Il en résulte une très bonne description du comportement : l'adoucissement de l'acier mais également le déplacement de la frontière entre le régime athermique et thermiquement activé vers les grandes vitesses de déformation est bien reproduit par le modèle lorsque la température augmente.

### II.4.4 Trajets complexes de chargement

Dans cette partie, le comportement du modèle est testé lors de trajets complexes de chargement. Dans ce but, nous disposons de plusieurs résultats expérimentaux d'essais quasi-statiques effectués sur l'acier DC06 :

- traction uniaxiale et cisaillement simple,
- cisaillement Bauschinger avec différentes prédéformations (5%, 10% et 15%),
- traction uniaxiale (20% déformation) suivie d'un cisaillement simple.

L'ensemble des caractéristiques de ces essais expérimentaux sont décrits dans le **Tab. 2.7**. Les paramètres de l'acier DC06 ont été identifiés sur la courbe de l'essai de cisaillement simple (courbe 2 sur la **Fig. 2.25**).

| **Numéro d'essai** | **Type d'essai** | **Conditions expérimentales** | | | **Géométrie éprouvette** | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | Vitesse de déformation ($s^{-1}$) | T (°C) | Direction de sollicitation (°) | $L_0$ (mm) | $Lar_0$ (mm) | $e_0$ (mm) |
| **Essai 1** | Traction uniaxiale | $8{,}10^{-3}$ | 20 | 90 | 80 | 20 | 1 |
| **Essai 2** | Cisaillement simple | $1{,}73.10^{-3}$ | 20 | 90 | 3 | 30 | 1 |
| **Essai 3** | Cisaillement Bauschinger (prédéformation à 5%) | $1{,}73.10^{-3}$ | 20 | 90 | 3 | 30 | 1 |
| **Essai 4** | Cisaillement Bauschinger prédéformation (10%) | $1{,}73.10^{-3}$ | 20 | 90 puis 90 | 3 | 30 | 1 |
| **Essai 5** | Cisaillement Bauschinger (prédéformation 15%) | $1{,}73.10^{-3}$ | 20 | 90 puis 90 | 3 | 30 | 1 |
| **Essai 6** | Traction uniaxiale 20% suivie d'un cisaillement simple | $1{,}73.10^{-3}$ | 20 | 90 puis 90 | - | - | - |
| **Essai 7** | Cisaillement simple | $1{,}73.10^{-3}$ | 20 | 90 puis 90 | - | - | - |

**Tab. 2.7 –** ***Conditions expérimentales et géométrie des éprouvettes utilisées pour les essais de traction, cisaillement simple, cisaillement Bauschinger et de traction-cisaillement effectués sur l'acier DC06. Les données non disponibles ne sont pas renseignées.***

Parmi les sept paramètres qui constituent le modèle, seuls la limite d'élasticité $\sigma_0$ et les paramètres de l'écrouissage isotrope $R^{sat}$ et $C_r$ ont été identifiés sur la courbe de cisaillement. Concernant les paramètres viscoplastiques A et B, n'ayant pas de données dynamiques à notre disposition, nous les avons considérés égaux à ceux identifiés pour l'acier DC05. Pour l'écrouissage cinématique, étant donné que la taille de grain des deux aciers est de 20 microns, nous avons également gardé les valeurs des paramètres de l'écrouissage cinématique $X^{sat}$ et $C_x$ trouvées précédemment.

La **Fig. 2.25** représente les cinq courbes (en traits pointillés) relatives aux cinq premiers essais présentés dans le **Tab. 2.7** et les cinq courbes (en traits continus) relatives aux simulations de ces essais par le modèle. Remarquons tout de suite que si le modèle a été identifié sur la courbe 2 de l'essai de cisaillement simple, il permet de bien décrire l'allure de la courbe 1 de l'essai de traction, sans que toutefois les deux courbes se superposent parfaitement. Concernant les essais de cisaillement Bauschinger, le modèle décrit bien la diminution de la limite d'élasticité lors du trajet inverse mais manque dans la description du changement de pente de l'écrouissage lors du trajet inverse.

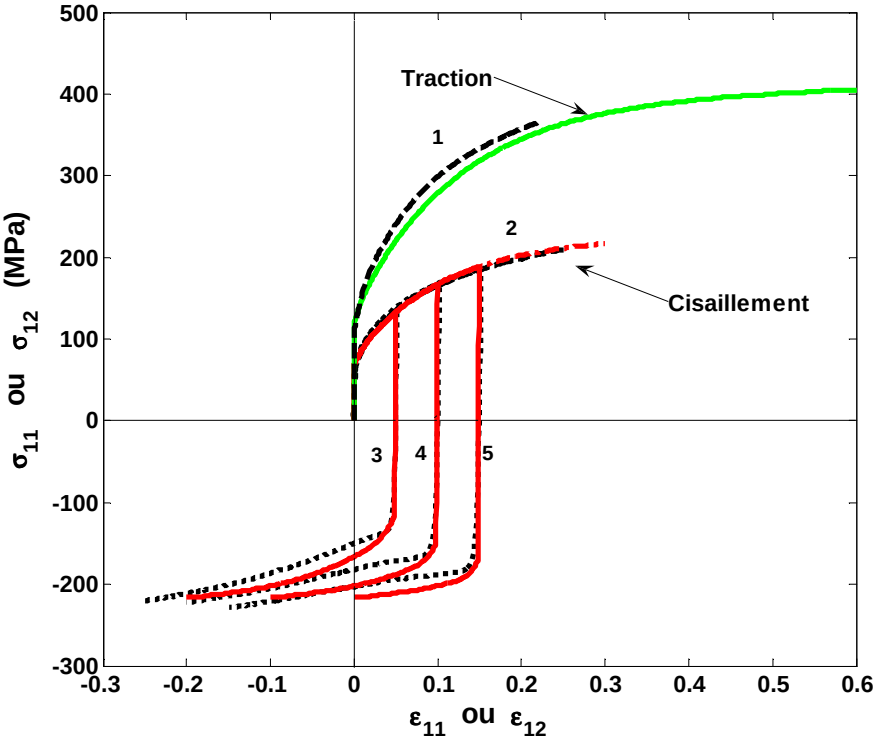



**Fig. 2.25 –** ***Comparaison entre l'expérience (en pointillés) et le modèle (en trait plein) des essais de traction, cisaillement et de cisaillement Bauschinger sur l'acier DC06. Les numéros des courbes sont relatifs aux essais décrits dans le Tab. 2.7.***

Deux raisons principales peuvent expliquer ces légères différences dans la description de l'expérience par le modèle : l'identification des paramètres et la simplicité des modèles d'écrouissage utilisés.

L'identification des paramètres a été menée pour cet acier uniquement sur trois paramètres. Les paramètres d'ordre dynamique identifiés sur l'acier DC05 ont été conservés pour l'acier DC06 ce qui signifie que nous faisons l'hypothèse que les deux aciers ont la

même sensibilité à la vitesse de déformation. Même si l'essai de traction a été effectué à une vitesse cinq fois plus grande que l'essai de cisaillement, la sensibilité à la vitesse de déformation joue très peu dans ce domaine de vitesses quasi-statiques : la contrainte visqueuse $\sigma^*$ ne dépasse pas 1 MPa. Ceci n'explique donc pas la légère différence observée sur la courbe de traction. L'erreur sur la courbe de traction provient sans doute de l'identification des trois paramètres sur la courbe de cisaillement ou bien encore des incertitudes liées aux résultats expérimentaux entre les différents essais. Concernant la description des essais Bauschinger, si le modèle se révèle incapable de décrire parfaitement l'écrouissage lors des trajets inverses, c'est tout simplement à cause de la loi d'écrouissage utilisée. En effet, celle-ci ne permet pas de décrire des changements de pente d'écrouissage lors d'un trajet inverse. Cependant, le modèle reste ouvert à l'utilisation d'autres lois.

La **Fig. 2.26** représente un essai de cisaillement simple précédé d'un essai de traction uniaxiale à 20% de déformation (essai 6). Les deux essais successifs, qui représentent un essai orthogonal, ont été opérés dans la direction transverse de la tôle, c'est-à-dire à 90° par rapport à la direction de laminage. L'essai de traction-cisaillement est bien reproduit par le modèle même si bien évidemment la description du régime transitoire de déformation lors du changement de trajet n'est pas décrite par la simulation.

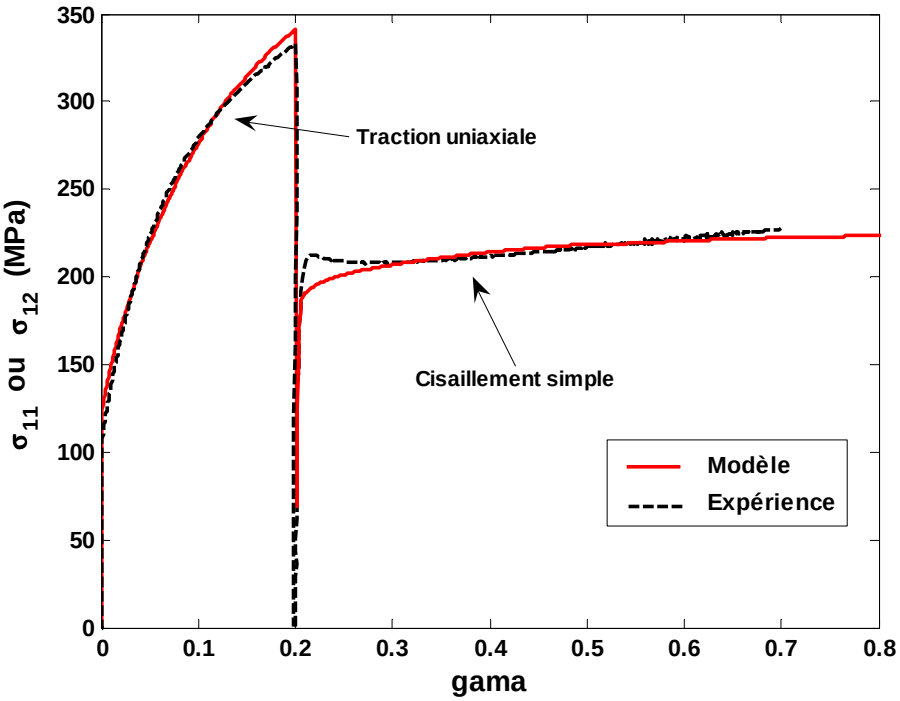



**Fig. 2.26 –** ***Trajet complexe de chargement :***
***Cisaillement simple après un essai de traction uniaxiale à 20% sur l'acier DC06.***

Sur la **Fig. 2.27**, nous comparons un essai de cisaillement simple (essai 7) avec l'essai orthogonal décrit précédemment. Cette figure illustre la bonne capacité du modèle à reproduire l'évolution de la contrainte d'écoulement sur un essai de cisaillement avec prédéformation. Le comportement est bien reproduit par le modèle dans les deux cas.

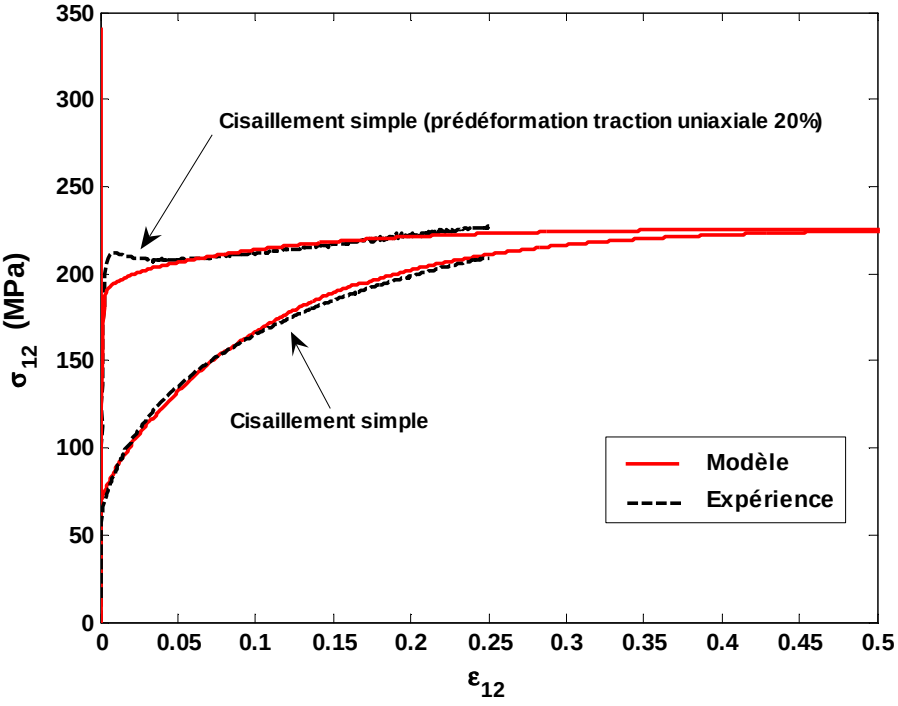



**Fig. 2.27 –** ***Trajet complexe de chargement : Comparaison entre un essai de cisaillement simple et un essai de cisaillement simple ayant subi une prédéformation à 20% en traction uniaxiale.***

La confrontation du modèle aux résultats expérimentaux lors de trajets complexes de chargement a permis de montrer de façon plus précise quelles étaient les limites du modèle. Il apparaît assez clairement que le faible nombre de paramètres utilisés pour l'écrouissage impose certaines limites dans la description des résultats expérimentaux. Les mécanismes physiques expliquant les régimes transitoires de déformation lors de changement de trajet méritent une modélisation plus fine afin de pouvoir être correctement décrits. Le modèle choisi permet cependant de décrire de façon suffisamment précise les résultats expérimentaux lors de trajets complexes de chargement, et notamment la sensibilité à la vitesse qui en est l'objectif premier.

### II.4.5 Comparaison à d'autres modèles viscoplastiques

Dans sa forme scalaire originale, le modèle de Allain *et al.* nécessite 6 paramètres dont la taille de grain [All05], [All09]. Les auteurs comparent leur modèle à deux modèles empiriques connus couramment utilisés dans les logiciels d'éléments finis commerciaux :

i) le modèle de Tanimura-Zhao qui nécessite 10 paramètres,
ii) le modèle de Cowper-Symonds ou de Johnson-Cook qui lui nécessite 5 paramètres.

Les 3 modèles sont comparés sur un acier IF sur différents essais monotones de traction à différentes vitesses de déformation et différentes températures. Les auteurs concluent principalement à trois résultats de cette comparaison :

i) Même si le nombre de paramètres à identifier est significativement moins élevé, le modèle de Allain *et al.* reproduit aussi bien les résultats expérimentaux que le modèle de Tanimura-Zhao et ce, sur un large domaine de vitesses de déformation.
ii) Le modèle de Allain *et al.*, qui requiert presque autant de paramètres à identifier que le modèle de Cowper-Symonds, prédit de façon beaucoup plus précise les résultats.
iii) La sensibilité à la température du modèle de Tanimura-Zhao semble insuffisante à en reproduire les principales caractéristiques. Le modèle de Tanimura-Zhao n'est pas applicable dans le domaine quasi-statique. Le modèle de Allain *et al.*, au contraire, est beaucoup plus précis en température, et s'applique sur tout le domaine de vitesses de déformation.

Le modèle proposé ici est une généralisation dans le domaine tridimensionnel du modèle scalaire de Allain *et al.* Afin de compléter la validation du modèle élasto-viscoplastique proposé dans le cas d'essais plus complexes (non-monotones et avec des changements de trajets de chargement notamment), nous comparons notre modèle dans cette partie à deux modèles récents tirés de la littérature :

i) le modèle viscoplastique de Uenishi et Teodosiu [Uen04],
ii) le modèle thermo-viscoplastique de Rusinek *et al.* [Rus07].

Avant de comparer les résultats et afin de mieux appréhender les différences dans les différentes modélisations, nous présentons ici brièvement les deux modèles.

**Le modèle de Uenishi et Teodosiu**

Teodosiu et Hu [Teo95] ont proposé un modèle phénoménologique basé sur l'observation microscopique et macroscopique d'essais expérimentaux. Souvent désigné comme modèle à base microstructurale reposant sur un modèle d'écrouissage intragranulaire basé sur la formation et la destruction de structures de dislocations, il permet de décrire de nombreux phénomènes transitoires d'écrouissage lors de changements de trajets de déformation. Ce modèle comporte un ensemble de quatre variables internes (**X**, **P**, **S** et R) décrivant le comportement macroscopique et nécessite l'identification de 13 paramètres matériau.

Le modèle de Uenishi et Teodosiu [Uen04] qui nous intéresse dans notre étude, est l'extension viscoplastique du modèle de Teodosiu et Hu. Ce modèle permet de prendre en compte la sensibilité à la vitesse de déformation. Il nécessite l'identification de 17 paramètres et comporte toujours quatre variables internes (**X**, **P**, **S** et R). Le tenseur **P** de polarité est un tenseur d'ordre 2 sans dimension. La contrainte d'écoulement $\sigma_{eq}$ s'exprime comme :

$$\sigma_{eq}(\boldsymbol{\sigma}' - \mathbf{X}) = Y_0 + R + f\|\mathbf{S}\|$$

où $Y_0$ est la limite d'écoulement initiale et f un paramètre matériau. Le terme $f\|\mathbf{S}\|$ représente la contribution à l'écrouissage isotrope des structures organisées de dislocations, f variant entre 0 et 1. La variable interne scalaire R, quant à elle, représente la contribution à l'écrouissage isotrope des dislocations statistiques. La loi d'évolution de R est une équation différentielle de type Voce :

$$\dot{R} = C_R (R_{sat} - R)\dot{\varepsilon}_{eq}^{vp}$$

où $C_R$ contrôle la vitesse de l'écrouissage isotrope. $R_{sat}$ et $Y_0$, initialement constants dans le modèle original de Teodosiu et Hu, sont désormais dépendants de la vitesse de déformation dans cette extension viscoplastique selon les deux équations suivantes :

$$Y_0 = \hat{Y}_0 + Y_0^* \left[ 1 - \frac{kT}{\Delta F_0} \ln\left( \frac{\dot{\varepsilon}_0^*}{\dot{\varepsilon}_{eq}^{vp}} \right) \right]^2$$

$$R_{sat} = R_{sat,0} \left( \frac{\dot{\varepsilon}_{eq}^{vp}}{\dot{\varepsilon}_0} \right)^{\nu}$$

où $\hat{Y}_0$, $Y_0^*$, $\Delta F_0$, $\dot{\varepsilon}_0^*$, $R_{sat,0}$ et $\nu$ sont des paramètres matériau et $\dot{\varepsilon}_0$ une vitesse de déformation de référence. La contrainte de rappel **X** est un tenseur d'ordre 2. Elle suit la loi d'évolution suivante :

$$\dot{\mathbf{X}} = C_x \left[ X_{sat} \frac{(\boldsymbol{\sigma}' - \mathbf{X})}{\sigma_{eq}} - \mathbf{X} \right] \dot{\varepsilon}_{eq}^{vp}$$

où $C_x$ est un paramètre contrôlant la vitesse de saturation et $X_{sat}$ la valeur de saturation. Cette dernière évolue avec les structures de dislocations au travers de la variable interne **S**, tenseur d'ordre 4, décrivant la résistance directionnelle de la microstructure. La variable interne **S** se décompose en 2 parties : $S_D$ et $\mathbf{S}_L$. Au final, la valeur de saturation $X_{sat}$ peut s'écrire :

$$X_{sat} = X_0 + (1-f)\sqrt{r \left\| \mathbf{S_L} \right\|^2 + S_D{}^2}$$

avec $\|\mathbf{S}\| = \sqrt{S_D{}^2 + \|\mathbf{S_L}\|^2}$, $S_D = \mathbf{N}:\mathbf{S}:\mathbf{N}$ et $\mathbf{N} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp} / \|\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp}\|$.

$X_0$ est la valeur de saturation initiale et r un paramètre matériau. La variable $S_D$ est associée à la densité des dislocations dans les systèmes de glissements actifs à l'instant t. Elle contribue à une augmentation générale de l'écrouissage. Le tenseur $\mathbf{S_L}$ d'ordre 4 contribue lui, à l'adoucissement du matériau suite à la destruction partielle des structures latentes de dislocations formées lors de déformations antérieures [Had06]. Leur évolution s'écrit :

$$\dot{\mathbf{S}}_\mathbf{L} = -C_{SL} \left( \frac{\|\mathbf{S_L}\|}{S_{sat}} \right)^{n_L} \mathbf{S_L} \dot{\varepsilon}_{eq}^{vp}$$

$$\dot{S}_D = C_{SD} \left[ g(S_{sat} - S_D) - h S_D \right] \dot{\varepsilon}_{eq}^{vp}$$

$C_{SL}$ et $n_L$ sont deux paramètres matériau positifs contrôlant la vitesse de saturation de $\mathbf{S_L}$. $C_{SD}$ contrôle la vitesse de saturation de la variable $S_D$ tandis que $S_{sat}$ est sa valeur à saturation. Les fonctions g et h complètent l'évolution de la variable $S_D$. La fonction g décrit pour un matériau ayant subi une prédéformation conséquente, la stagnation de l'écrouissage avant reprise lors du trajet inverse de déformation. La fonction h décrit la légère baisse $\Delta S_D$ de la variable $S_D$ lors d'un essai Bauschinger.

$$g=\begin{cases} 1-\dfrac{C_p}{C_{SD}+C_p}\left|\dfrac{S_D}{S_{sat}}-P_D\right| & \text{si} \quad P_D>0, \\ (1-P_D)^{n_p}\left(1-\dfrac{C_p}{C_{SD}+C_p}\dfrac{S_D}{S_{sat}}\right) & \text{sinon} \end{cases} \qquad h=\frac{1}{2}\left(1-\frac{\mathbf{X}:\mathbf{N}}{X_{sat}(\boldsymbol{\sigma}'-\mathbf{X}):\mathbf{N}}\sigma_{eq}\right)$$

$P_D$ est la projection du tenseur de polarité **P** suivant la direction courante **N** de la vitesse de déformation plastique : $P_D=\mathbf{P}:\mathbf{N}$. Le tenseur de polarité **P** qui rend compte de la polarisation de la microstructure suit la loi d'évolution suivante :

$$\dot{\mathbf{P}} = C_p(\mathbf{N}-\mathbf{P})\dot{\varepsilon}_{eq}^{vp}, \qquad \mathbf{P}(0)=\mathbf{0}$$

$C_p$ est un paramètre matériau caractérisant la vitesse de polarisation de la microstructure. Pour une analyse de sensibilité et une description complète des paramètres du modèle, le lecteur pourra se référer à l'article de Haddadi *et al.* [Had06]. Au final, l'ensemble des équations du modèle viscoplastique de Uenishi et Teodosiu nécessite 17 paramètres matériau à identifier.

**Le modèle RK**

Le modèle RK développé par Rusinek *et al*. [Rus07] est un modèle phénoménologique thermo-viscoplastique. Il est donc sensible à la température et à la vitesse de déformation au cours des essais. Construit sur la base du formalisme de l'activation thermique, ce modèle considère, contrairement à notre modèle, que la contrainte totale dans les matériaux cubiques centrés est la somme d'une contrainte interne $\sigma_\mu$ et d'une contrainte effective $\sigma^*$ :

$$\sigma_{eq}(\varepsilon_{eq}^{vp},\dot{\varepsilon}_{eq}^{vp},T) = \frac{E(T)}{E_0}\left[\sigma_\mu\left(\varepsilon_{eq}^{vp},\dot{\varepsilon}_{eq}^{vp},T\right) + \sigma^*\left(\dot{\varepsilon}_{eq}^{vp},T\right)\right]$$

Cette somme est elle-même normalisée par un terme qui décrit la dépendance du module de Young E(T) vis-à-vis de la température T. Cette dépendance s'exprime selon la loi suivante :

$$\frac{E(T)}{E_0} = 1 - \frac{T}{T_m}\exp\left(\theta^*\left(1-\frac{T_m}{T}\right)\right)$$

$\theta^*$ est la température homologue, c'est-à-dire la température du matériau en Kelvin exprimée en fraction de la température de fusion, $T_m$ est la température de fusion et $E_0$ le module de Young à 0K. Les effets de température et de sensibilité à la vitesse de déformation sont introduits au travers d'un module plastique $B(\dot{\varepsilon}_{eq}^{vp},T)$ et d'un coefficient d'écrouissage $n\left(\dot{\varepsilon}_{eq}^{vp},T\right)$ dans l'expression de la contrainte interne $\sigma_\mu$ de type Swift :

$$\sigma_\mu\left(\varepsilon_{eq}^{vp},\dot{\varepsilon}_{eq}^{vp},T\right) = B(\dot{\varepsilon}_{eq}^{vp},T)\left(\varepsilon_0+\varepsilon_{eq}^{vp}\right)^{n\left(\dot{\varepsilon}_{eq}^{vp},T\right)}$$

avec $\varepsilon_0$ un paramètre matériau.

Les expressions explicites du module de plasticité $B(\dot{\varepsilon}_{eq}^{vp},T)$ et du coefficient d'écrouissage $n\left(\dot{\varepsilon}_{eq}^{vp},T\right)$ sont données dans les équations suivantes où $\dot{\varepsilon}_{max}$, $\nu$, $B_0$, $D_2$, $n_0$ et $\dot{\varepsilon}_{min}$ sont des paramètres matériau :

$$B(\dot{\varepsilon}_{eq}^{vp},T) = B_0\left[\left(\frac{T}{T_m}\right)\log\left(\frac{\dot{\varepsilon}_{max}}{\dot{\varepsilon}_{eq}^{vp}}\right)\right]^{-\nu}$$

$$n\left(\dot{\varepsilon}_{eq}^{vp},T\right) = n_0\left(1 - D_2\left(\frac{T}{T_m}\right)\log\left(\frac{\dot{\varepsilon}_{eq}^{vp}}{\dot{\varepsilon}_{min}}\right)\right) \quad \text{avec} \quad n\left(\dot{\varepsilon}_{eq}^{vp},T\right)\rangle 0$$

Basée sur le formalisme de l'activation thermique, sans toutefois considérer la probabilité de saut retour, la contrainte effective $\sigma^*\left(\dot{\varepsilon}_{eq}^{vp},T\right)$ dans le modèle RK s'exprime comme :

$$\sigma^*\left(\dot{\varepsilon}_{eq}^{vp},T\right) = \sigma_0^*\left[1 - D_1\left(\frac{T}{T_m}\right)\log\frac{\dot{\varepsilon}_{max}}{\dot{\varepsilon}_{eq}^{vp}}\right]^{1/m}$$

avec $\sigma_0^*$, $D_1$ et m des paramètres matériau. Le modèle RK prend également en compte l'accroissement adiabatique de température $\Delta T_A$ résultant du travail plastique converti en chaleur. La température $T_A$ s'exprime donc comme :

$$T_A = T_0 + \Delta T_A \qquad T_A = T_0 + \frac{\beta}{\rho C_P}\int_0^{\varepsilon_{eq}^{vp}} \sigma_{eq}\left(\xi,\dot{\xi}(\xi),T\right)d\xi$$

avec $\rho$ et $C_P$ respectivement la masse volumique et la chaleur massique du matériau à pression constante et $\beta$ un coefficient matériau. Le modèle RK proposé dans sa forme thermo-viscoplastique, nécessite 17 paramètres dont 9 constantes fondamentales pour les aciers.

## Résultats

Dans cette partie, nous confrontons les résultats du modèle proposé aux résultats du modèle de Uenishi et Teodosiu et du modèle RK. Les résultats expérimentaux utilisés sont tirés de la littérature [Uen04]. Ils ont été effectués sur un acier IF dont la composition et la microstructure sont proches de celle de l'acier DC06 précédemment étudié [Uen04]. L'ensemble des paramètres pour les trois modèles sont donnés dans le **Tab. 2.8**. Concernant le modèle élasto-viscoplastique de ce travail de thèse, nous avons utilisé directement les paramètres identifiés précédemment pour l'acier DC06 en tenant compte du changement de température, c'est-à-dire en réactualisant les valeurs de $\sigma_0$, A et B. Seuls les paramètres A et B ont été réévalués afin de prendre en compte la sensibilité à la vitesse légèrement différente de cet acier IF.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **Modèle viscoplastique de Uenishi et Teodosiu**<br><br>**17 paramètres à identifier** | $C_p$ | 3,5 | 1 | Sensibilité à la polarisation |
| | $C_R$ | 50,8 | 1 | Sensibilité à la saturation de l'écrouissage isotrope |
| | $C_{SD}$ | 6,9 | 1 | Sensibilité à la saturation de la variable interne $S_D$ |
| | $C_{SL}$ | 6,67 | 1 | Sensibilité à la saturation de la variable interne $S_L$ |
| | $C_x$ | 145,1 | 1 | Sensibilité à la saturation de l'écrouissage cinématique |
| | f | 0,859 | 1 | Constante matériau |
| | $n_L$ | 1,0 | 1 | Constante matériau |
| | $n_p$ | 48,9 | 1 | Constante matériau |
| | r | 8,5 | 1 | Constante matériau |
| | $\hat{Y}_0$ | 114,9 | MPa | Limite d'élasticité initiale |
| | $Y_0^*$ | 465,1 | MPa | Constante matériau |
| | $\Delta F_0$ | 0,627 | eV | Energie libre apparente d'interaction |
| | $\dot{\varepsilon}_0^*$ | $1,81\text{x}10^{6}$ | 1 | Constante matériau |
| | $R_{sat,0}$ | 29,7 | MPa | Valeur initiale de saturation de l'écrouissage isotrope |
| | $\nu$ | 0,02 | 1 | Constante matériau |
| | $S_{sat}$ | 245,8 | MPa | Valeur à saturation de S |
| | $X_0$ | 16 | MPa | Valeur initiale de saturation de l'écrouissage cinématique |
| **Modèle thermo-viscoplastique RK**<br><br>**8 paramètres à identifier** | ***(a) Constantes matériau*** | | | |
| | $B_0$ | 552,89 | MPa | Module de plasticité |
| | $n_0$ | 0,285 | 1 | Exposant d'écrouissage |
| | $\varepsilon_0$ | $1,8\text{x}10^{-2}$ | 1 | Déformation initiale |
| | $D_1$ | 0,48 | 1 | Constante matériau |
| | $\nu$ | 0,2 | 1 | Sensibilité à la température |
| | $\sigma_0^*$ | 406,3 | MPa | Contrainte effective à 0K |
| | m | 2,8 | 1 | Sensibilité à la vitesse de déformation |
| | $D_2$ | 0,19 | 1 | Constante matériau |
| | ***(b) Constantes fondamentales*** | | | |
| | $E_0$ | 212 | GPa | Module de Young à 0K |
| | $\theta^*$ | 0,59 | 1 | Température homologue |
| | $T_m$ | 1600 | K | Température de fusion |
| | $\dot{\varepsilon}_{max}$ | $10^{7}$ | $s^{-1}$ | Vitesse de déformation à saturation |
| | $\dot{\varepsilon}_{min}$ | $10^{-5}$ | $s^{-1}$ | Vitesse de déformation minimale |
| | $C_p$ | 470 | $J.kg^{-1}.K^{-1}$ | Chaleur spécifique |
| | $\beta$ | 0,9 | 1 | Coefficient de Taylor-Quinney |
| | $\rho$ | 7800 | $kg.m^{-3}$ | Masse volumique |
| | $\alpha$ | $10^{-5}$ | $K^{-1}$ | Coefficient de dilatation thermique |
| **Modèle élasto-viscoplastique proposé**<br><br>**7 paramètres à identifier**<br><br>**(8 paramètres si prise en compte de la température)** | ***(a) Constantes matériau*** | | | |
| | $V^*$ | 9,74 | $b^3$ | Volume d'activation (équivaut à A=13,6 MPa à T=300K) |
| | $\Delta G_0$ | 0,35 | eV | Energie d'activation (équivaut à $B=0,046s^{-1}$ à T=300K) |
| | $C_R$ | 8 | 1 | Sensibilité à la saturation de l'écrouissage isotrope |
| | $R^{sat}$ | 255 | MPa | Valeur à saturation de l'écrouissage isotrope |
| | $C_x$ | 100 | 1 | Sensibilité à la saturation de l'écrouissage cinématique |
| | $X^{sat}$ | 13 | MPa | Valeur à saturation de l'écrouissage cinématique |
| | $\sigma_0$ | 115 | MPa | Limite initiale d'élasticité |
| | ***(b) Constantes fondamentales*** | | | |
| | E | 210 | GPa | Module de Young à 300K |
| | $\nu$ | 0,3 | 1 | Coefficient de Poisson |
| | $k_B$ | $1,38\text{x}10^{-23}$ | $J.K^{-1}$ | Constante de Boltzmann |
| | M | 3 | 1 | Coefficient de Taylor |
| | $\rho_m$ | $10^{10}$ | $m^{-2}$ | Densité de dislocations mobiles |
| | $\nu_{Debye}$ | $10^{13}$ | $s^{-1}$ | Fréquence de Debye |
| | b | $2,5\text{x}10^{-10}$ | m | Norme du vecteur de Burgers |

**Tab. 2.8 –** ***Constantes utilisées et paramètres matériau identifiés pour trois modèles viscoplastiques différents destinés à simuler le comportement d'un acier IF.***

La **Fig. 2.28** permet de confronter les résultats du modèle proposé avec d'une part les résultats expérimentaux et d'autre part les résultats du modèle de Uenishi et Teodosiu. Les deux modèles décrivent parfaitement les essais monotones quasi-statiques de traction (courbe 1) et de cisaillement simple (courbe 2). Concernant l'essai dynamique de traction ayant

préalablement subi une prédéformation à 8% (courbe 2), le modèle proposé décrit très bien les résultats expérimentaux et ce, mieux même que le modèle de Uenishi et Teodosiu. Sur la courbe 5 qui décrit l'essai quasi-statique de cisaillement simple suite à une prédéformation en traction à 20%, les deux modèles décrivent parfaitement le comportement du matériau, le modèle de Uenishi et Teodosiu décrivant de façon encore plus précise le régime transitoire de déformation suite au changement de trajet.

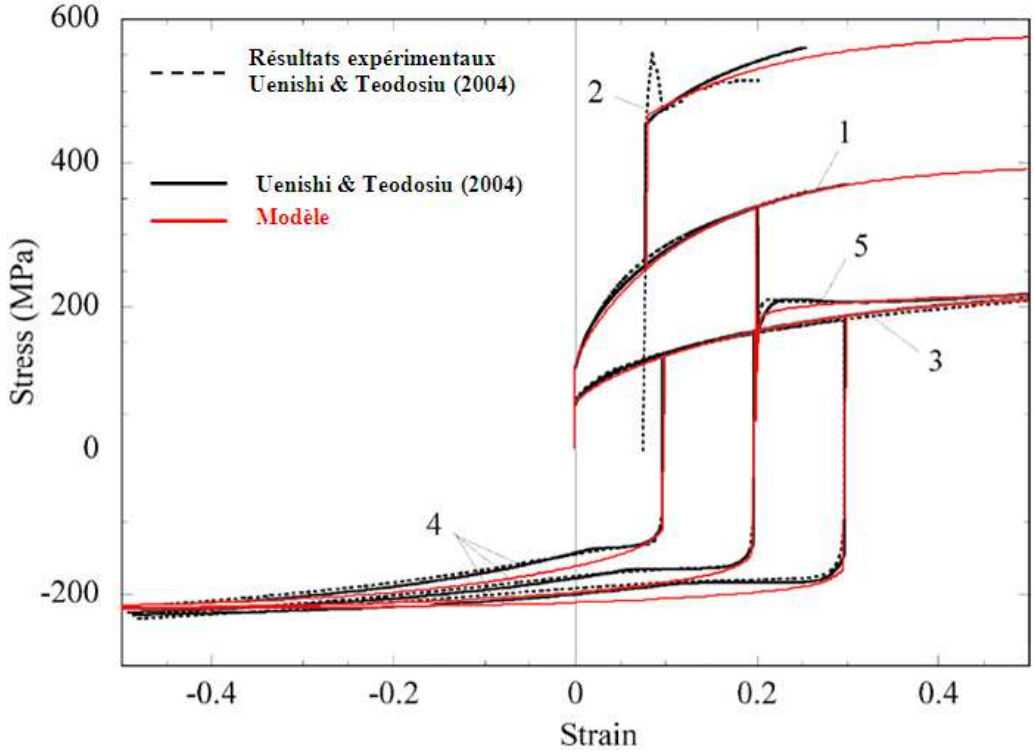


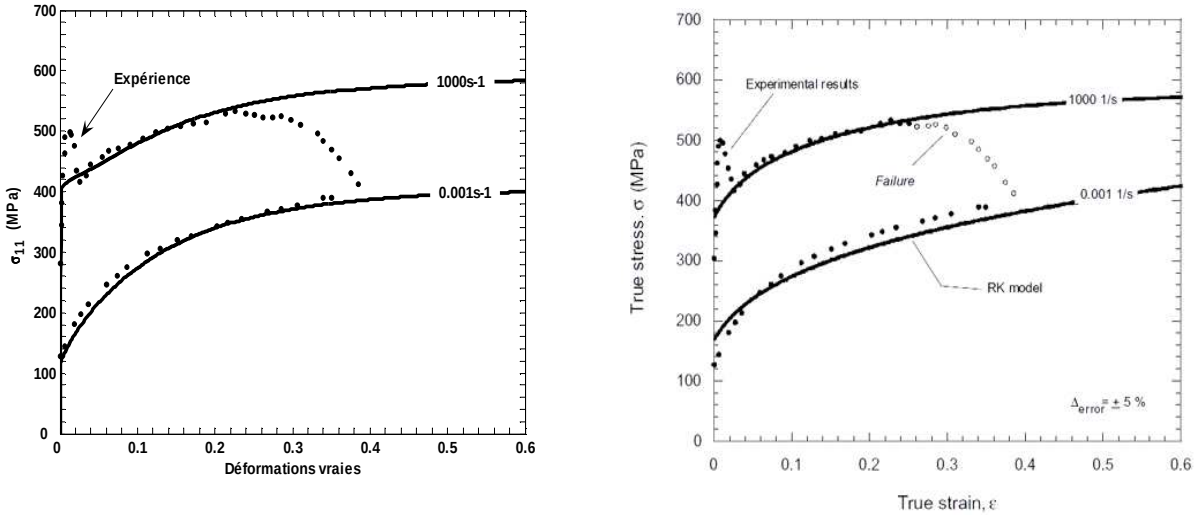

**Fig. 2.28 –** ***Comparaison entre le modèle proposé et le modèle de Uenishi et Teodosiu sur la base de résultats expérimentaux effectués sur un acier IF [Uen04].***

*(1) Essai monotone de traction à 0,001s-1 ; (2) Essai de traction à 1000s-1 après une prédéformation à 8% par un essai de traction à 0,001s-1 ; (3) Essai monotone de cisaillement simple réalisé à 0,001s-1 ; (4) Cisaillement simple retour suite à une prédéformation de 10, 20 et 30% par cisaillement simple aller ; (5) Cisaillement simple après une prédéformation de 20% par un essai de traction uniaxiale à 0,001s-1. Les déformations en abscisses sont les déformations vraies pour les essais de traction et la quantité de déformation en cisaillement pour les essais de cisaillement simples.*

Une différence plus marquée entre les résultats des deux modèles réside dans la description des essais de cisaillement Bauschinger à 10, 20 et 30% de déformation. Le modèle de Uenishi et Teodosiu décrit parfaitement le comportement du matériau lors des trajets inverses arrivant notamment à capter les phénomènes se passant au niveau des points d'inflexion des courbes expérimentales (grâce notamment au paramètre $n_p$). Le modèle proposé ici se révèle incapable de décrire les trajets inverses avec autant de précision : les régimes transitoires d'écrouissage dûs aux changements de trajets n'ayant pas été intégrés dans la modélisation. L'intégration d'autres lois d'écrouissage cinématique prenant en compte ces phénomènes reste cependant possible. En dépit de la simplicité de la loi d'écrouissage

cinématique utilisée, le modèle capte néanmoins avec précision la translation du domaine élastique lors des trajets inverses et décrit de manière correcte l'écrouissage.

Avec deux fois moins de paramètres que le modèle de Uenishi et Teodosiu, le modèle élasto-viscoplastique proposé permet de décrire de façon très précise le comportement de l'acier IF étudié lors de trajets de chargement complexes non-monotones. La sensibilité à la vitesse de déformation est même décrite de façon plus précise que le modèle de Uenishi et Teodosiu comme le montre la courbe expérimentale de traction à $1000s^{-1}$. Cependant le modèle plus complexe de Uenishi et Teodosiu permet de décrire avec une grande précision les régimes transitoires d'écrouissage suite aux changements de trajet de déformation. Ces phénomènes, n'ayant pas été intégrés dans notre modélisation, ne sont pas décrits par le modèle proposé.




(a) (b)

**Fig. 2.29 –** ***Essais de traction uniaxiale à $1000s^{-1}$ et à $0,001s^{-1}$ sur un acier IF [Uen04]. Comparaison entre le modèle proposé (a) et le modèle RK [Rus07] (b).***

Les **Fig. 2.29a** et **Fig. 2.29b** permettent de comparer le modèle proposé au modèle RK sur deux courbes expérimentales représentant respectivement un essai quasi-statique de traction à $0,001s^{-1}$ et un essai dynamique de traction réalisé à une vitesse de déformation de $1000s^{-1}$. Si la description de la courbe de traction à $1000s^{-1}$ est quasi-identique entre les deux modèles, le modèle proposé décrit de façon plus précise la limite d'élasticité et l'écrouissage de l'essai de traction quasi-statique. Avec autant de paramètres à identifier que le modèle RK, le modèle proposé permet donc de capter de façon très précise la sensibilité à la vitesse de déformation de l'acier IF au travers de la contrainte d'écoulement et de la description de l'écrouissage. N'ayant pas de résultats d'essais complexes disponibles pour le modèle RK, la comparaison entre les deux modèles se résume à des essais monotones.

Cette dernière partie a permis d'une part de préciser davantage les capacités du modèle à décrire le comportement élasto-viscoplastique lors de trajets complexes de déformation et d'autre part de situer cette nouvelle approche par rapport à deux modèles récents de la littérature. Au vu de ces dernières comparaisons, le modèle apparaît comme un excellent compromis entre simplicité d'identification et précision des résultats.

### II.4.6 Limites de la nouvelle approche

La nouvelle approche a été appliquée et validée dans ce chapitre sur des aciers doux 100% ferritiques. Le domaine de matériaux concerné par le modèle ne se limite pas pour autant aux aciers doux mais s'étend à l'ensemble des matériaux cubiques centrés où, en raison des fortes contraintes de friction de Peierls qui y règnent, le déplacement des dislocations mobiles a la particularité d'être beaucoup plus difficile et lent que pour les matériaux cubiques à faces centrées. Dans ce modèle, la contrainte d'écoulement est considérée, selon les travaux de Rauch [Rau93], comme une combinaison linéaire d'une contrainte athermique et d'une contrainte effective afin de rendre compte du mécanisme de glissement particulier des dislocations dans ces matériaux. Celui-ci s'effectue par nucléation et déplacement des doubles crans (ou doubles décrochements) des segments coins sur les parties vis des dislocations. Les limites de l'approche sont donc directement liées aux limites d'application de ce mécanisme.

L'approche a été validée sur une large gamme de vitesse de déformations et de températures. Dans ses travaux initiaux, Rauch [Rau93] limite l'utilisation de la combinaison linéaire entre contrainte effective et contrainte athermique pour des températures situées en dessous d'une température de transition $T_0 = 0{,}2T_f$ où $T_f$ est la température de fusion du matériau. Pour des températures supérieures à $T_0$, les propriétés mécaniques et le comportement des dislocations ne dépendent plus de la structure cristalline et le modèle ne s'applique plus. Le modèle s'applique donc pour des températures homologues inférieures à $T_0$ (inférieures à 373K pour les aciers). Le domaine de vitesse de déformation quant à lui s'étend jusqu'à l'apparition du phénomène de « phonon drag », aux alentours de 1000 s-1. Ces deux principales limites d'application de l'approche permettent cependant de traiter la majorité des problèmes de simulations de laminage à froid, d'emboutissage et de crash automobile ou de transport (**Fig. 2.30**).

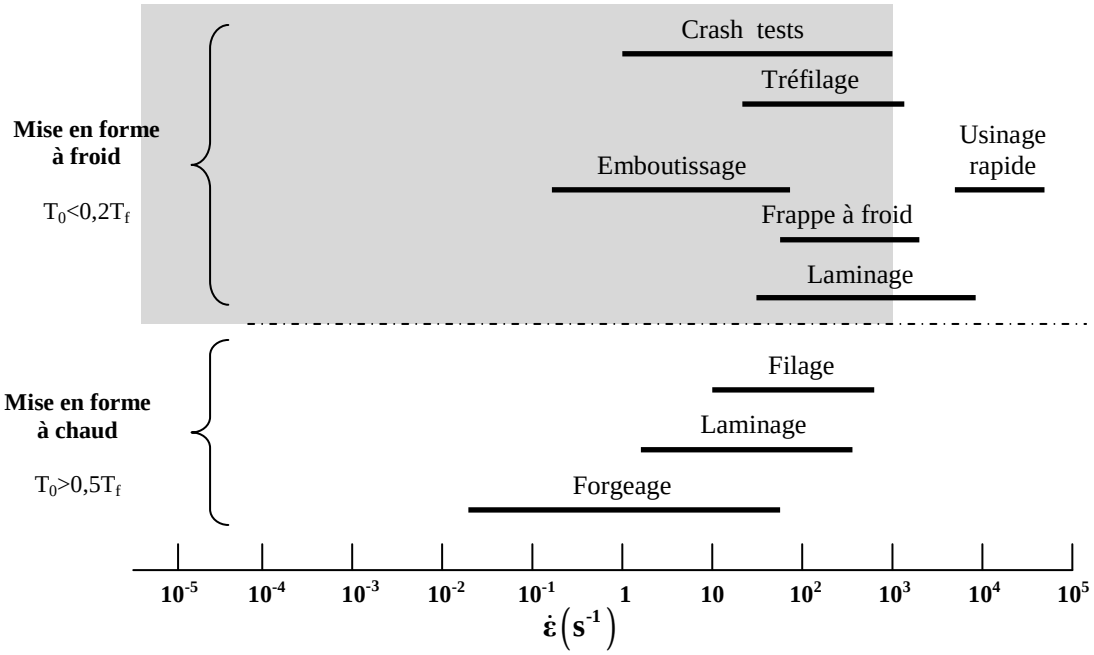



**Fig. 2.30 –** ***Situation du modèle (en grisé) parmi les gammes de vitesses de déformation imposées dans les principaux procédés de mise en forme (d'après [Mon96]) et crash tests.***

Enfin, pour des raisons de simplicité du modèle, certains paramètres ont été considérés comme constants tandis que certains phénomènes comme l'échauffement du matériau ont été négligés. L'énergie d'activation et le volume d'activation ont été considérés constants et donc indépendants de la quantité d'éléments en solution solide. Uenishi et Teodosiu suggèrent plutôt que l'énergie d'activation doit décroître avec la quantité d'éléments en solution solide et que le volume d'activation doit augmenter. L'écrouissage isotrope et l'écrouissage cinématique ont été modélisés de manière purement phénoménologique avec un minimum de paramètres afin de faciliter l'implantation numérique tridimensionnelle du modèle. Cette simplicité de modélisation a été faite au détriment du sens physique des paramètres d'écrouissage utilisés en vue d'une première implantation dans les codes d'éléments finis. Toutefois, le modèle reste entièrement ouvert à l'utilisation d'autres lois d'écrouissage plus physiques et comportant plus de paramètres microstructuraux afin de pouvoir appliquer une approche inverse d'autant plus riche (sujet abordé dans les chapitres suivants).

## II.5 CONCLUSIONS

Dans la première partie de ce chapitre, nous avons rappelé le formalisme thermodynamique utilisé pour la formulation de lois de comportement non-linéaire tridimensionnelles. La définition de l'énergie libre a permis d'obtenir les lois d'état, équations qui définissent d'une part les relations existantes entre les variables d'état de notre étude et les forces thermodynamiques qui leur sont associées et d'autre part les variables internes associées aux phénomènes irréversibles qui nous intéressent. L'évolution de ces variables internes a été définie par le potentiel de dissipation qui satisfait les conditions imposées par le formalisme des matériaux standard généralisés. Une comparaison des différentes formes de loi de comportement viscoplastique a été menée afin de retenir le meilleur candidat à une implantation dans un code d'éléments finis pour simuler des essais de mise en forme et de crash.

Dans une deuxième partie, nous nous sommes attachés à décrire l'origine de la forme de la loi de comportement choisie au travers des mécanismes de glissement des dislocations responsables de la déformation dans les matériaux cubiques centrés. Le formalisme de l'activation thermique a permis, en tenant compte de la probabilité de sauts retour des segments de dislocations, de déterminer la forme en sinus hyperbolique de la loi de comportement. Cette dernière permet de décrire le mécanisme de glissement par double décrochement des parties coins sur les parties vis des dislocations, mécanisme propre aux matériaux cubiques centrés. En utilisant le formalisme de Rauch, la contrainte d'écoulement a été définie comme une combinaison linéaire d'une contrainte interne et d'une contrainte effective. Enfin, en suivant l'idée originale de Allain *et al.*, il a été montré que la forme en sinus hyperbolique de la loi de comportement couplée au formalisme de la contrainte d'écoulement de Rauch permettait d'obtenir une loi de comportement viscoplastique originale pour les matériaux cubiques centrés.

Cette loi, à l'origine scalaire, a été reformulée ici dans un cadre tensoriel et incrémental afin d'obtenir une loi de comportement élasto-viscoplastique tridimensionnelle. Le potentiel de dissipation ainsi que les variables internes d'écrouissage ont été définis afin de respecter le cadre thermodynamique posé dans la première partie du chapitre. Par souci de simplicité, l'écrouissage isotrope ainsi que l'écrouissage cinématique ont été définis à l'aide de lois phénoménologiques. Leur évolution est décrite respectivement par une équation différentielle de type Voce et une équation différentielle de type Armstrong-Frederick. La nouvelle approche ainsi définie fait intervenir sept paramètres. Une analyse des paramètres et des variables internes, portée plus particulièrement sur deux paramètres clairement liés aux

mécanismes responsables de la déformation, a permis de préciser la manière dont le modèle pouvait décrire la sensibilité à la vitesse de déformation et la sensibilité à la température.

Dans la dernière partie du chapitre, la nouvelle loi de comportement élasto-viscoplastique a été appliquée dans le cadre des aciers doux ferritiques. Afin de valider le modèle, les résultats des simulations ont été comparés aux résultats expérimentaux sur des essais effectués à différentes vitesses de déformation et à différentes températures ainsi que sur des essais comportant des changements de trajet de déformation (essais Bauschinger, essais orthogonaux). Cette confrontation a souligné la capacité du modèle à décrire très précisément les principales caractéristiques du comportement visqueux, à savoir la sensibilité à la vitesse de déformation et la sensibilité à la température. Enfin, afin de définir les limites du modèle et de situer plus précisément ses capacités et son domaine d'application, le modèle a été comparé à d'autres modèles viscoplastiques existants dans la littérature sur des trajets complexes de déformation et des essais séquentiels. L'ensemble de ces résultats très prometteurs, valide la nouvelle approche tridimensionnelle sur une large gamme de vitesses de déformation et de températures.

Ce chapitre a montré que la nouvelle loi de comportement proposée était un excellent candidat pour la modélisation du comportement élasto-viscoplastique d'un acier monophasé proposant à la fois une facilité d'identification des paramètres, une précision accrue des résultats sur un domaine d'application étendu en températures et en vitesses de déformation ainsi qu'une signification physique des paramètres responsables du comportement visqueux. Dans le cadre plus général de la modélisation des aciers multiphasés qui nous intéressent dans cette étude, il faut prendre en compte maintenant, la nature hétérogène des phases existantes dans de tels aciers. Si le comportement de chaque phase peut être décrit à l'aide de la nouvelle loi de comportement proposée dans ce chapitre, le chapitre suivant s'applique lui, afin d'obtenir le comportement macroscopique de l'acier multiphasé, à modéliser précisément les différentes interactions élasto-viscoplastiques existantes entre les différentes phases constitutives à l'aide de modèles micromécaniques.

## BIBLIOGRAPHIE


[All05] **ALLAIN S., BOUAZIZ O., LEMOINE X.** Balistik: A dynamic microstructure based behavior law for ferritic steels. *Rapport interne, Ref. IRD/AUP/2005/2476*, Arcelor, décembre 2005.

[All09] **ALLAIN S., BOUAZIZ O., LEMOINE X.** A viscoplastic behavior law for ferritic steels at low homologous temperature. *Rev. Met. Paris*, N°2 (Feb 2009), pp. 80-89, 2009.

[Arm66] **ARMSTRONG P.J., FREDERICK C.O.** A mathematical representation of the multiaxial Bauschinger effect. *Technical report RD/B/N 731, CEGB*, 1966.

[Bar65] **BARRETT C.R., NIX W.D**. A model for steady state creep based on the motion of jogged screw dislocations. *Acta. Met.*, **13**, Issue 12, pp. 1247-1258, 1965.

[Ber01] **BERVEILLER M., BRETHEAU T., FOUGERES R., GAUTIER E., MAIRE E.** Rappels sur les mécanismes de la plasticité et de l'endommagement. **In** *Homogénéisation en mécanique des matériaux 2. Comportements non linéaires et problèmes ouverts*. Paris : Hermes Science Europe Ltd, 2001, pp. 203-249.

[Bou97] **BOUAZIZ O.** Caractérisation et modélisation thermomécanique d'une poudre d'acier inoxydable. Application à la mise en forme par compression isostatique à chaud, *Thèse de doctorat de l'université J. Fourier*, Grenoble, 1997.

[Bou06] **BOUAZIZ O., DIRRAS G.** Effet de taille de grain sur les écrouissages isotrope et cinématique dans la gamme 0,35 à 75 microns. *Matériaux 2006*, Dijon, 13-17 Novembre 2006.

[Cai03] **CAILLARD D., MARTIN J.-L.** Thermally activated mechanisms in crystal plasticity. *Pergamon, Materials Series*, **8**, Elsevier, Oxford, 2003.

[Cam70] **CAMPBELL J.D., FERGUSON W.G.** The temperature and strain-rate dependence of the shear strength of mild steel. *Philos. Mag.* **21**, 63, 1970.

[Cam09] **©DoITPoMS, UNIVERSITY OF CAMBRIGDE**, United Kingdom, sur le site *DoITPoMS Teaching and Learning Packages*. Consulté le 09 sept. 2009.
http://www.doitpoms.ac.uk/

[Cha77] **CHABOCHE J.-L.** Sur l'utilisation des variables d'état internes pour la description de la viscoplasticité cyclique avec endommagement. In Problèmes non linéaires de mécanique, Symposium Franco-Polonais de rhéologie et mécanique, pp. 137-159, 1977.

[Con64] **CONRAD H.** Thermally activated deformation of metals. *J. Metals*, **16**, 582, 1964.

[Gar63] **GAROFALO F.** An empirical relation defining the stress dependence of minimum creep rate in metals, *Trans. AIME*, **227**, 351, 1963.

[Had06] **HADDADI H., BOUVIER S., BANU M., MAIER C., TEODOSIU C.** Towards an accurate description of the anisotropic behaviour of sheet metals under large plastic deformations: Modelling, numerical analysis and identification. *International Journal of Plasticity*, **22**, Issue 12, pp. 2226-2271, 2006.

[Hal74] **HALPHEN B., NGUYEN Q.-S.** Plastic and viscoplastic materials with generalized potential. *Mechanics Research Communication*. **1**, pp. 43-47, 1974.

[Hal75] **HALPHEN B., NGUYEN Q.-S.** Sur les matériaux standard généralisés. *J. de Mécanique*. **14**(1), pp. 39-63, 1975.

[Jon69] **JONAS J.J., SELLARS C.M., Mc G. TEGART W.J.** Strength and structure under hot working conditions. *Int. Met. Rev*. **14**, pp. 1-24, 1969.

[Koc70] **KOCKS U.F.** The relation between polycristal deformation and single crystal deformation. *Metall. Trans*, **1**, pp. 1121-1144, 1970.

[Lan99] **LANGKRUIS J. VAN DE, KOOL W.H., ZWAAG S. VAN DER.** Assessment of constitutive equations in modelling the hot deformability of some overaged Al-Mg-Si alloys with varying solute contents. *Mater. Sci. Eng*. **A266**, pp. 135-145, 1999.

[Lem88] **LEMAITRE J., CHABOCHE J.-L.** Mécanique des matériaux solides. *DUNOD 2ème édition*, Paris, 1988.

[Lou79] **LOUCHET F., KUBIN L.P.** Dislocations processes in B.C.C. metals. *Phys. Stat. Solidi.* **A56**, pp. 169-176, 1979.

[Mon96] **MONTHEILLET F.** Métallurgie en mise en forme. *Techniques de l'ingénieur*, Paris, **M600**, 17 p., 1996.

[Mor70] **MOREAU J.-J.** Sur les lois de frottements, de plasticité et de viscosité. *C. R. Acad. Sc.*, Paris, **271 A**, 608-611, 1970.

[Poi70] **POIRIER J.-P., FRANCOIS D., ADDA Y.** Les hautes pressions en métallurgie physique, *Ann. Phys.*, **5**, 291,1970.

[Poi76] **POIRIER J.-P.** Plasticité à hautes températures des solides cristallins, *Eds Eyrolles, Paris*, 1976.

[Rau93] **RAUCH E.** Etude de l'écrouissage des métaux : aspects microstructuraux et lois de comportement. *Mémoire d'habilitation à diriger des recherches*, ING-Grenoble, 1993.

[Rau94] **RAUCH E.** The relation between forest dislocations and stress in bcc metals. *Key Engineering Materials*, **97-98**, pp. 371-376, 1994.

[Rus01] **RUSINEK A., KLEPACZKO J.R.** Shear testing of a sheet steel at wide range of strain rates and a constitutive relation with strain-rate and temperature dependence of the flow stress. *Int. J. Plasticity*,**17**, 87, 2001.

[Rus07] **RUSINEK A., ZAERA R., KLEPACZKO J.R.** Constitutive relations in 3-D for a wide range of strain rates and temperatures – Application to mild steels. *International Journal of Solids and Structures*, **44**, issue 17, pp 5611-5634, 2007.

[Sel66] **SELLARS C.M., Mc G. TEGART W.J.** La relation entre la résistance et la structure dans la deformation à chaud. *Mém. Sci. Rev. Mét*., **63**, N°9, 731-746, 1966.

[Sah69] **SAH J.P., RICHARDSON G.J., SELLARS C.M.** Plane strain compression testing at elevated temperature. *J. Austr. Inst. Met.* **14**, 292, 1969.

[Tay34] **TAYLOR G.I.** The mechanism of plastic deformation of crystals. Part I. – Theoretical. *Proc. Roy. Soc. (London)*, **A145**, pp. 362-387, 1934.

[Tay38] **TAYLOR G.I.** Plastic strain in metals. *J. Inst. Metals*. **62**, 307-324, 1938.

[Teo95] **TEODOSIU C., HU Z.** Evolution of the intragranular microstructure at moderate and large strains: modelling and computational significance. **In:** Shen, S., Dawson, P.R. (Eds.), *Proceedings of Numiform'95 on Simulation of Materials Processing: Theory, Methods and Applications*, Balkema, Rotterdam, pp. 173-182, 1995.

[Uen04] **UENISHI A., TEODOSIU C.** Constitutive modelling of the high strain rate behaviour of interstitial-free steel. *Int. J. Plasticity*, **20**, pp. 915-936, 2004.

[Vig07] **VIGUIER B.** Plasticité : rappels de base et aspects microscopiques. *PlastOx 2007 : Mécanismes et Mécanique des Interactions Plasticité – Environnement*, Argelès-sur-Mer, France, 19-25 mai 2007.

[Voc48] **VOCE E.** The Relationship between stress and strain for homogeneous deformation. *The Journal of the Institute of Metals*, **74**, pp. 537-562, 1948.

[Ver98] **VERDIER M., BRECHET Y., GUYOT P.** Recovery of AlMg alloys: flow stress and strain-hardening properties. *Acta Materialia*, **47**, 127-134, 1998.

[Wee57] **WEERTMAN J.** Steady-state creep through dislocation climb. *J. App. Phys.*, **28**, 362-364, 1957.

# CHAPITRE III

# MODELISATION DES HETEROGENEITES DE COMPORTEMENT DE PHASES ELASTO-VISCOPLASTIQUES DANS LES ACIERS MULTIPHASES

## III.1 L'APPROCHE MICROMECANIQUE

Le chapitre précédent a permis de définir et de mettre en place une loi de comportement élasto-viscoplastique en se basant sur les mécanismes particuliers de glissement des dislocations des matériaux cubiques centrés. Cette loi a été validée dans le cadre d'aciers monophasés. Cependant, pour un acier multiphasé, les champs mécaniques régnant dans chacune des phases constitutives sont différents. Afin de décrire précisément le comportement global d'un acier multiphasé à l'échelle de la structure (éprouvette, pièce emboutie), il convient de bien tenir compte des hétérogénéités des propriétés mécaniques dues notamment au multiphasage à l'échelle de la microstructure. Dans cette optique, et afin de modéliser le comportement mécanique d'une structure à partir de la description de mécanismes physiques microstructuraux, une approche multi-échelle est nécessaire. Au sein du matériau, différentes échelles d'hétérogénéités peuvent être considérées (phases, grains, dislocations, molécules, atomes) et la modélisation du caractère hétérogène d'un matériau reste somme toute relative à cette échelle d'observation. Dans le cadre de ce travail, nous nous intéressons particulièrement aux effets du multiphasage, c'est-à-dire à la différence de comportement mécanique des phases constitutives d'un acier multiphasé et à leur influence sur le comportement macroscopique.

Ce chapitre est consacré à l'étude et l'analyse des interactions existantes entre les phases au sein d'un acier multiphasé. Dans un premier temps, afin de bien définir l'échelle des hétérogénéités concernées par cette étude, nous rappelons les bases des outils micromécaniques de changement d'échelles permettant de relier le microscopique (échelle d'observation des hétérogénéités) au macroscopique (comportement mécanique recherché). Au travers d'un aperçu des principaux modèles de transition d'échelles, une attention particulière est portée sur les approches à champs moyens à variables internes dont nous choisissons deux modèles pour cette étude. Enfin, nous comparons les deux modèles retenus afin d'en déterminer les limites pour une application en mise en forme.

### III.1.1 Nécessité d'une approche multi-échelles pour une modélisation prédictive

Dans le chapitre précédent une loi de comportement élasto-viscoplastique a été établie dans un cadre thermodynamique qui permet d'assurer sa cohérence. La comparaison entre les résultats des simulations et les essais expérimentaux a validé cette approche dans le cadre des aciers monophasés ferritiques. Concernant les aciers multiphasés, il est possible d'utiliser la même loi de comportement et d'identifier un nouveau jeu de paramètres afin de pouvoir décrire de nouveaux essais expérimentaux. Cette démarche, basée sur l'expérience, est purement phénoménologique. Si cette approche phénoménologique permet une bonne description du comportement des structures à diverses sollicitations et une bonne optimisation des géométries pour le concepteur de pièces, elle n'en demeure pas moins limitée sur plusieurs points :

i) La validité des simulations est directement tributaire des conditions dans lesquelles la loi de comportement a été identifiée. Il faut donc s'assurer qu'en tout point de la structure modélisée, les conditions sont à tout moment respectées au risque de sortir du cadre de validité de la loi.
ii) Un jeu de paramètres est valable pour un ensemble de conditions données (matériau, sollicitations, température…). Si l'une des conditions change, par exemple si la nuance de l'acier change, il faut recommencer l'ensemble du processus d'identification à partir de nouveaux essais expérimentaux.

L'objectif de ce chapitre est plus ambitieux dans le sens où la modélisation des aciers multiphasés s'y veut prédictive. Pour un acier biphasé par exemple, si l'intérêt est de savoir quel est l'impact de la fraction volumique de la phase ferritique ou encore de savoir comment la limite d'élasticité de la phase martensitique peut jouer un rôle sur les propriétés mécaniques de cet acier, alors le recours à une autre démarche de modélisation que la démarche phénoménologique est nécessaire. Une telle démarche permettant un retour sur la microstructure du matériau est précieuse car elle permet d'agir directement sur la source des propriétés mécaniques observées. Cette démarche « inverse » est au cœur d'un problème multi-échelle qui est celui de faire le lien entre les mécanismes observés par le physicien à l'échelle microscopique et le comportement mécanique macroscopique observé par le mécanicien à l'échelle de la structure. Ce passage nécessaire entre un domaine microscopique et un domaine macroscopique est assuré par une démarche micromécanique qui se situe à une échelle intermédiaire. La démarche micromécanique consiste à remplacer le milieu hétérogène du matériau réel en un milieu homogène d'un matériau fictif équivalent du point de vue mécanique. Cette transformation dont nous allons préciser la méthodologie dans la partie suivante a lieu à une échelle suffisamment petite pour pouvoir prétendre améliorer la prédictibilité des modèles en se basant sur des hétérogénéités microstructurales mais également suffisamment grande afin de pouvoir y appliquer les concepts de la mécanique des milieux continus.

### III.1.2 Echelle de description, longueurs caractéristiques et notions de V.E.R.

Cette échelle intermédiaire est intimement liée à la taille « h » des hétérogénéités ou des domaines hétérogènes visés. Tout matériau peut être considéré comme hétérogène à une échelle donnée. D'ailleurs, comme évoqué précédemment, son degré d'hétérogénéité est relatif à l'échelle d'observation. Si une éprouvette de traction d'un acier biphasé peut paraître homogène à l'œil nu, qu'en est-il à l'aide d'un microscope optique où apparaissent différents domaines de phases ou à l'aide d'un microscope à balayage électronique où apparait la structure polycristalline de l'acier ?

L'échelle de description est choisie directement en fonction de l'objectif visé et donc de la taille des hétérogénéités microstructurales que l'on désire modéliser. Ainsi, si l'on s'intéresse à l'impact de la forme des grains d'un polycristal sur le comportement mécanique du matériau, on s'attachera à considérer une taille « h » d'hétérogénéité équivalente à la taille des grains pour décrire une texture morphologique. Si au contraire, on s'intéresse à l'impact de la fraction de ferrite sur le comportement global d'un acier ferrito-martensitique alors on s'intéressera plutôt à une taille équivalente à la taille des domaines de phases.

Ces considérations étant entendues, il est alors possible au sein du matériau hétérogène de définir un volume élémentaire représentatif (V.E.R.) de taille caractéristique « l » qui correspond à la taille de l'ensemble des hétérogénéités à considérer. Cet ensemble doit répondre à plusieurs conditions :

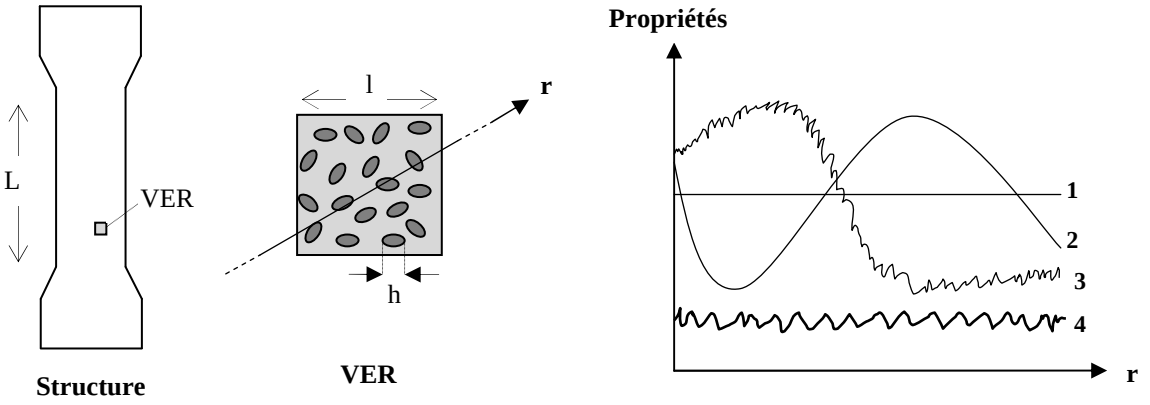
i) il doit être suffisamment grand pour pouvoir être considéré au sens statistique comme représentatif du matériau en tout point à l'échelle des hétérogénéités. Comprenons par là qu'il doit être suffisamment grand devant la taille « h » des hétérogénéités qui nous intéressent :

$$l >> h \qquad \textbf{(3.1)}$$

ii) il doit être suffisamment petit devant la taille « L » de la structure macroscopique de sorte qu'il puisse être considéré comme un domaine homogène à l'échelle de la structure.

$$l << L \qquad \textbf{(3.2)}$$

Cette dernière condition implique que le comportement global du V.E.R. dans le matériau réel peut être remplacé par un comportement homogène équivalent de telle sorte que le calcul de structure mené sur le matériau homogène équivalent apporte les mêmes solutions en contraintes et en déformations qu'un calcul de structure qui aurait été mené directement sur le matériau réel hétérogène. En d'autres termes, si le matériau peut être hétérogène microscopiquement à l'échelle du V.E.R., il doit être homogène macroscopiquement à l'échelle de la structure (**Fig. 3.1**).




*(1) : Milieu homogène - (2) : milieu microhomogène et macrohétérogène - (3) : milieu hétérogène - (4) : milieu microhétérogène et macrohomogène. Seuls les cas 1 et 4 peuvent prétendre à l'existence d'un VER.*

**Fig. 3.1 –** ***Tailles caractéristiques et conditions d'homogénéité macroscopique pour l'existence d'un volume élémentaire représentatif (VER).***

Enfin, la taille « h » des hétérogénéités considérées ne peut pas être plus petite qu'une taille « $\varphi_0$ » en deçà de laquelle la mécanique des milieux continus ne s'applique plus. En tenant compte de ces considérations physiques, on considèrera cette taille « $\varphi_0$ » de l'ordre du dixième de micron. L'ensemble des conditions peut être résumé par la triple inégalité suivante qui définit la séparation nécessaire des échelles :

$$\varphi_0 << h << l << L \qquad \textbf{(3.3)}$$

Si l'existence d'un V.E.R. de taille « l » peut ainsi être définie, tout l'intérêt et la difficulté des méthodes micromécaniques résident dans le passage du comportement du milieu réel constitué d'un ensemble hétérogène de domaines homogènes au comportement global d'un milieu homogène équivalent. La méthodologie adoptée dans ces approches micromécaniques est présentée dans la partie suivante.

### III.1.3 Rappel de la méthodologie de l'homogénéisation

Le V.E.R. représente un ensemble hétérogène de domaines plus petits considérés comme homogènes. L'objectif est maintenant de remplacer cette représentation fine du milieu réel par un milieu fictif homogène dont le comportement mécanique global est équivalent au comportement global du milieu réel. La méthodologie à adopter comporte classiquement trois étapes : la représentation, la localisation et l'homogénéisation.

#### L'étape de représentation

Le choix de l'échelle de description microscopique ne suffit pas. L'étape de représentation consiste à décrire géométriquement et mécaniquement le système considéré, c'est-à-dire le V.E.R. Il s'agit d'identifier les constituants élémentaires considérés comme homogènes du domaine hétérogène, de décrire leur arrangement dans l'espace (topologie), leur comportement mécanique et de déterminer quelles en sont les caractéristiques géométriques pertinentes pour la modélisation. Ainsi le comportement local sera représenté par :

$$\boldsymbol{\sigma}(r) = \mathbf{c}(r):\boldsymbol{\varepsilon}(r) \text{ dans le cas de l'élasticité linéaire,} \qquad \textbf{(3.4)}$$

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}(r) = \mathbf{l}(r):\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(r) \text{ dans le cas de l'élastoplasticité,} \qquad \textbf{(3.5)}$$

$$\boldsymbol{\sigma}(r) = \mathbf{b}(r):\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(r) \text{ dans le cas de la viscoplasticité,} \qquad \textbf{(3.6)}$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(r,t) = \mathbf{s}(r):\dot{\boldsymbol{\sigma}}(r,t)+\mathbf{m}\left(\boldsymbol{\sigma}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp}, r, ...\right):\boldsymbol{\sigma}(r,t) \text{ en élasto-viscoplasticité.} \qquad \textbf{(3.7)}$$

Il faudra recourir à des démarches développées dans le chapitre II pour identifier les différentes parties du comportement (**c**, **l**, **b**, **s**, **m**…). Dans le cas d'un acier biphasé, selon l'échelle de description retenue, les domaines considérés comme homogènes pourront être constitués d'un grain ou d'un agrégat de grains appartenant à l'une ou l'autre des phases. Suivant les cas, la distribution dans l'espace des domaines homogènes (grains ou agrégats de grains) sera considérée comme isotrope ou au contraire présentera une texture topologique qui engendrera une anisotropie des propriétés mécaniques. L'une des caractéristiques géométriques majeures et déterminantes du comportement global du V.E.R. sera bien entendue la fraction volumique des phases.

Bien évidemment cette description du V.E.R. reste une approximation de la microstructure à une échelle choisie. Gardons à l'esprit que les choix faits à ce niveau de modélisation sont déterminants dans l'approximation de la solution du comportement global du matériau réel dont l'hétérogénéité complexe est traduite au mieux au travers des modèles. On donnera en III.1.4. les équations de champs du problème hétérogène élastique linéaire à titre d'exemple de transition d'échelles pour un comportement linéaire simple.

#### L'étape de localisation

Cette étape consiste à relier les champs mécaniques locaux des domaines homogènes aux sollicitations mécaniques appliquées sur les contours du V.E.R. Ces relations s'écrivent formellement en élasticité linéaire de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{r}) &= \mathbf{A}(\mathbf{r}) : \mathbf{E} \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{r}) &= \mathbf{B}(\mathbf{r}) : \boldsymbol{\Sigma} \end{aligned} \qquad \textbf{(3.8)}$$

où **A(r)** et **B(r)** sont respectivement le tenseur de localisation des déformations et le tenseur de localisation des contraintes au point **r**. Compte tenu de la représentation statistique du polycristal, on considère généralement par simplification les champs locaux moyens par domaine homogène appelé « phase ». Pour une phase « (I) », les relations classiques de localisations s'écrivent :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}^{(I)} &= \langle \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{r}) \rangle^{(I)} = \langle \mathbf{A}(\mathbf{r}) \rangle^{(I)} : \mathbf{E} = \mathbf{A}^{(I)} : \mathbf{E} \\ \boldsymbol{\sigma}^{(I)} &= \langle \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{r}) \rangle^{(I)} = \langle \mathbf{B}(\mathbf{r}) \rangle^{(I)} : \boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{B}^{(I)} : \boldsymbol{\Sigma} \end{aligned} \qquad \textbf{(3.9)}$$

$\mathbf{A}^{(I)}$ et $\mathbf{B}^{(I)}$ sont des tenseurs d'ordre 4 qui dépendent de manière plus ou moins complexe du comportement local des domaines homogènes et plus généralement de la microstructure du matériau. Ces relations de localisation dépendent donc directement de la modélisation adoptée en particulier du choix de la loi de comportement locale et de la morphologie des domaines homogènes.

**L'étape d'homogénéisation**

Elle débouche sur la détermination du comportement macroscopique du V.E.R. obtenu par des opérations de moyenne sur les champs locaux de telle sorte que la moyenne spatiale $\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle$ des déformations locales des domaines homogènes soit égale à la déformations **E** observée sur les contours du V.E.R. De même, la moyenne spatiale $\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle$ des contraintes locales est égale à la contrainte appliquée $\boldsymbol{\Sigma}$ sur les contours du V.E.R. En d'autres termes, il est possible d'écrire :

$$\mathbf{E} = \langle \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{r}) \rangle = \frac{1}{V} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{r}) dv \qquad \textbf{(3.10)}$$

$$\boldsymbol{\Sigma} = \langle \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{r}) \rangle = \frac{1}{V} \int_V \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{r}) dv \qquad \textbf{(3.11)}$$

où V correspond au volume du V.E.R.

Par exemple, pour un problème formulé en conditions de déformations homogènes **E** au contour (**Fig. 3.2a**), l'étape d'homogénéisation consiste à déterminer la contrainte macroscopique $\boldsymbol{\Sigma}$ à partir de l'opération de moyenne correspondante (équation (3.11)) appliquée sur les champs de contraintes locaux $\boldsymbol{\sigma}^{(I)}$. La loi de comportement locale permet de connaitre les champs de contraintes locaux $\boldsymbol{\sigma}^{(I)}$ dans chaque domaine homogène à partir des champs de déformations locaux $\boldsymbol{\varepsilon}^{(I)}$. Ces derniers sont déterminés à l'aide de la relation de localisation.

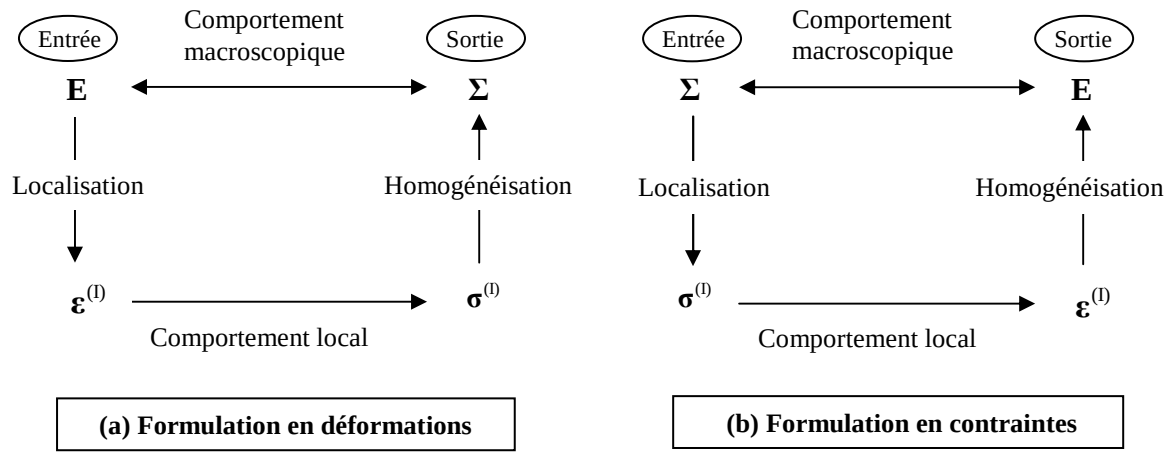



**Fig. 3.2 –** ***Schéma de résolution d'un problème de micromécanique formulé en déformations ou en contraintes***.

Au final, le problème multi-échelle, que l'approche micromécanique se propose de résoudre, repose sur deux types de relations :

i) les relations de moyenne qui par définition restent d'une validité très générale à condition que l'hypothèse de séparation des échelles exposée précédemment soit respectée.
ii) les relations de localisation qui traduisent les liens complexes existants entre le comportement local de chaque domaine homogène et le comportement macroscopique du V.E.R.

Toute la difficulté des modèles micromécaniques résulte dans la formulation et la résolution du problème de localisation. Dans la partie suivante, plusieurs modèles de transition d'échelles sont abordés afin de bien comprendre les tenants et les aboutissants des modèles choisis et développés dans ce travail de thèse.

### III.1.4 Estimations autocohérentes pour des comportements simples linéaires

Les premiers schémas autocohérents dans le domaine de la mécanique des matériaux hétérogènes ont été formulés par Hershey [Her54] et Kröner [Kro58] dans le cas de comportements linéaires de monocristaux et de polycristaux. Le principe du schéma autocohérent, qui consiste à prendre comme matrice directement le milieu homogène équivalent s'applique très bien à la morphologie du polycristal. En effet, si l'on considère que le polycristal est formé de N familles de grains regroupés selon leur comportement mécanique, alors le schéma autocohérent revient à considérer N problèmes matrice-inclusion d'Eshelby (cf. annexe 1) dans une matrice composée du milieu homogène équivalent (MHE). Les caractéristiques du comportement de ce dernier, inconnues et déterminées *a posteriori*, dépendent du comportement de chaque inclusion et des interactions inclusion/matrice (**Fig. 3.3**). L'utilisation du schéma autocohérent semble donc beaucoup plus pertinente dans la description du polycristal que l'approximation du milieu dilué d'Eshelby et constitue une avancée majeure dans la description mécanique des matériaux hétérogènes.

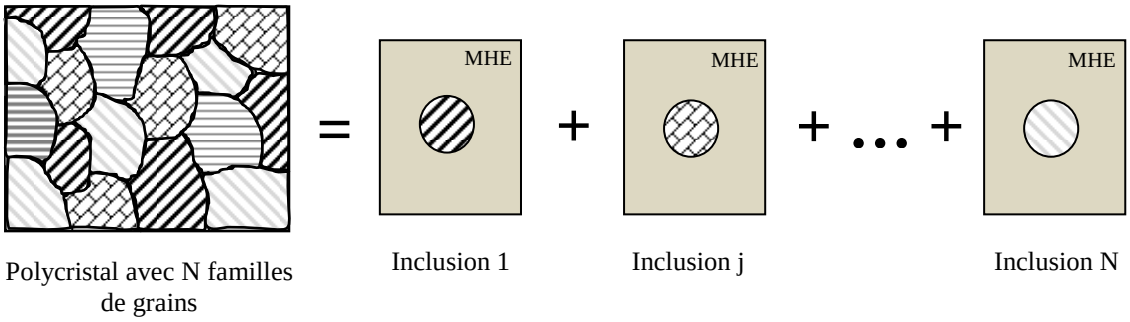



**Fig. 3.3 –** ***Principe du schéma autocohérent : description du polycristal en N problèmes d'Eshelby.***

L'estimation autocohérente pour des comportements simples (équations **(3.4)**, **(3.5)** et **(3.6)**) peut être traitée de la même façon quel que soit le comportement. L'illustration dans le cas de l'élasticité linéaire est donnée ici à titre d'exemple. Les équations du problème hétérogène élastique linéaire sont :

| | | |
|---|---|---|
| Loi de comportement : | $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{c}:\boldsymbol{\varepsilon}$ | **(3.12)** |
| Equation d'équilibre sur le champ $\boldsymbol{\sigma}$ : | $\mathrm{div}(\boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{0}$ | **(3.13)** |
| Condition de compatibilité cinématique : | $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \nabla^s \underline{\dot{\mathbf{u}}}$ | **(3.14)** |
| Conditions aux limites : | $\underline{\dot{\mathbf{u}}_\mathbf{d}} = \dot{\mathbf{E}}.\underline{\mathbf{x}}$ sur $\partial V$ | **(3.15)** |

On introduit un milieu homogène de référence **C** selon la décomposition suivante :

$$\mathbf{c}(\mathbf{r}) = \mathbf{C} + \boldsymbol{\delta}\mathbf{c}(\mathbf{r}) \qquad \textbf{(3.16)}$$

En utilisant simultanément cette décomposition, la loi de comportement **(3.12)**, la condition de compatibilité cinématique **(3.14)**, les conditions aux limites **(3.15)** et l'équation d'équilibre **(3.13)**, on obtient l'équation intégrale du problème élastique linéaire :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\mathbf{E}} - \boldsymbol{\Gamma}^C * (\boldsymbol{\delta}\mathbf{c} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) \qquad \textbf{(3.17)}$$

où $*$ désigne le produit de convolution spatial. $\Gamma^C_{ijkl} = -\frac{1}{2}\left(G^C_{ik,jl} + G^C_{jk,il}\right)$ est le tenseur de Green modifié associé au milieu de référence **C**.

L'approximation autocohérente consiste à choisir le milieu homogène de référence **C** comme le milieu effectif $\mathbf{C^e}$ du problème hétérogène élastique linéaire, ce qui conduit à la relation de localisation suivante :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{A}^{\mathbf{C^e}} : \dot{\mathbf{E}} \qquad \textbf{(3.18)}$$

Où $\mathbf{A}^{\mathbf{C^e}}$ est le tenseur de localisation du taux de déformation élastique associé au tenseur des modules élastiques effectifs $\mathbf{C^e}$ tel que :

$$\mathbf{A}^{C^e} = \left(\mathbf{I} + \boldsymbol{\Gamma}_1^{C^e} : \delta\mathbf{c}\right)^{-1} \qquad \textbf{(3.19)}$$

$\boldsymbol{\Gamma}_1^{C^e}$ est la partie locale de $\boldsymbol{\Gamma}^{C^e}$. A l'aide des relations de moyenne sur le volume ($\boldsymbol{\Sigma} = \overline{\dot{\boldsymbol{\sigma}}}$ , $\dot{\mathbf{E}} = \overline{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}$), l'expression du module autocohérent élastique est déterminé :

$$\mathbf{C}^e = \overline{\mathbf{c} : \mathbf{A}^{C^e}} \text{ avec } \mathbf{A}^{C^e} = \mathbf{I} \qquad \textbf{(3.20)}$$

La prédiction du champ cinématiquement admissible $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ défini par **(3.18)** est approchée par le choix de la solution autocohérente élastique.

## III.2 MODELISATION DES COMPORTEMENTS NON-LINEAIRES ELASTOPLASTIQUE ET VISCOPLASTIQUE

Nous nous efforçons ici de présenter un bref aperçu historique des principaux modèles de transition d'échelles afin de mieux appréhender les difficultés inhérentes à la modélisation de la transition d'échelles dans le cas de comportement élasto-viscoplastique et de justifier le choix des modèles dans notre étude.

### III.2.1 Les premiers principaux modèles en élastoplasticité

Ces deux modèles sont considérés comme les premiers modèles de transition d'échelles en plasticité cristalline. Basés sur des hypothèses opposées mais tout aussi simplistes concernant le lien existant entre le comportement d'un grain et le comportement du polycristal pour la prévision de la limite d'élasticité des polycristaux. Ces deux modèles constituent deux bornes extrêmes dans les modèles de transition d'échelles polycristallins.

**Le modèle de Taylor-Lin**

Taylor [Tay38] fait l'hypothèse que la déformation plastique locale $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ est uniforme dans chaque grain et est égale à la déformation macroscopique **E** appliquée au polycristal.

$$\boldsymbol{\varepsilon}^p = \mathbf{E} \qquad \textbf{(3.21)}$$

Ce modèle qui constitue une borne supérieure des modèles de transition d'échelles correspond au modèle de Voigt [Voi28] en élasticité. Lin [Lin57] étend le modèle de Taylor (qui avait négligé l'élasticité) à l'élastoplasticité en considérant cette fois que c'est la déformation totale locale $\boldsymbol{\varepsilon}$ qui est uniforme et égale à la déformation macroscopique **E** imposée sur le V.E.R. L'hypothèse de déformation uniforme implique que le tenseur de localisation des déformations **A(r)** est égal au tenseur identité **I** d'ordre 4 en tout point « **r** » de V. La relation de localisation (3.9)a s'écrit dans ce cas :

$$\mathbf{A}^{(I)} = \mathbf{I}, \qquad \boldsymbol{\varepsilon}^{(I)} = \mathbf{E} \qquad \forall I \qquad \textbf{(3.22)}$$

**Le modèle statique**

Dans le modèle statique de Batdorf et Budiansky [Bat49], la contrainte dans chaque grain est supposée égale à la contrainte appliquée à l'échelle du polycristal. Cette même

hypothèse conduit, en élasticité, au modèle de Reuss [Reu29]. L'hypothèse du modèle statique implique que le tenseur de localisation des contraintes **B(r)** est égal au tenseur identité **I** d'ordre 4 pour tout point « **r** » de V. Dans ces conditions, la relation de localisation (3.9)b s'écrit :

$$\mathbf{B}^{(I)} = \mathbf{I}, \qquad \boldsymbol{\sigma}^{(I)} = \boldsymbol{\Sigma} \tag{3.23}$$

Le modèle statique est souvent confondu avec le modèle de Sachs [Sac28] qui lui est antérieur [Ber01]. Ce dernier considère non pas une uniformité des champs de contraintes locaux mais une proportionnalité entre la contrainte locale et la contrainte macroscopique de telle sorte que c'est le système de glissement ayant le coefficient de Schmid le plus élevé qui s'active dans chaque grain.

Le modèle de Taylor-Lin et le modèle statique, basés tous deux sur l'uniformité des champs locaux, constituent respectivement une borne supérieure et une borne inférieure concernant l'estimation des contraintes du polycristal. Les interactions existantes entre les grains, surestimées dans le modèle de Taylor-Lin et sous-estimées dans le modèle statique, conduisent à un manque de précision dans la description des résultats expérimentaux. En réalité, l'hétérogénéité de la déformation plastique au sein du polycristal est source d'incompatibilités locales. Celles-ci sont compensées par des déformations élastiques générées par les contraintes internes qui assurent l'équilibre mécanique. L'uniformité des contraintes et des déformations dans les modèles statique et de Taylor ne permettent pas de prendre en compte ces contraintes internes d'origine élastique. C'est la solution du problème de l'inclusion d'Eshelby (cf. Annexe 1) qui, par la suite, a permis de véritablement prendre en considération ces contraintes internes dans les approches à champs moyens [Esh57].

### III.2.2 Le modèle autocohérent de Kröner en élastoplasticité

Si Budiansky *et al.* [Bud60] sont les premiers à appliquer la solution de l'inclusion d'Eshelby en élastoplasticité dans une matrice encore élastique en utilisant l'approximation du milieu dilué, c'est Kröner [Kro61] qui formule le premier schéma autocohérent en élastoplasticité en utilisant la solution du problème de l'inclusion d'Eshelby.

**Le schéma de Kröner**

Kröner étend la solution d'Eshelby du problème de l'inclusion plastique sphérique noyée dans une matrice élastique chargée à l'infini au cas où la matrice chargée est plastique. Contrairement aux travaux précédents où les grains plastifiés se retrouvent dans une matrice élastique, il utilise le schéma autocohérent et identifie la matrice directement au milieu homogène équivalent, c'est-à-dire au polycristal plastifié. Celui-ci est soumis à une déformation plastique homogène $\mathbf{E}^{\mathbf{p}}$, moyenne des déformations $\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{p}}$ de chaque ensemble de grains ayant même forme et même orientation de réseau. Chaque ensemble de grains est représenté suivant la mécanique d'Eshelby par une inclusion subissant la déformation libre $\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{p}}$ et immergée dans une matrice infinie subissant également une déformation libre $\mathbf{E}^{\mathbf{p}}$. La solution d'Eshelby aboutit alors à la loi d'interaction suivante :

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\Sigma} + \mathbf{C} : \left(\mathbf{I} - \mathbf{S}^{\mathbf{Esh}}\right) : \left(\mathbf{E}^{\mathbf{p}} - \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{p}}\right) \tag{3.24}$$

où **I** est le tenseur identité d'ordre 4. Dans le cas d'une inclusion sphérique, la loi d'interaction se simplifie :

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\Sigma} + 2\mu(1-\beta)\left(\mathbf{E}^{p} - \boldsymbol{\varepsilon}^{p}\right) \qquad \text{avec :} \quad \beta = \frac{2(4-5\nu)}{15(1-\nu)} \qquad \textbf{(3.25)}$$

où $\mu$ est le module de cisaillement de la matrice et $\beta$ un paramètre élastique dépendant du coefficient de Poisson $\nu$ de la matrice.

Malheureusement, la déformation plastique ayant été traitée comme une déformation libre au sens d'Eshelby, le comportement mécanique de la matrice pris en compte dans le modèle de Kröner est en fait élastique. En réalité, la déformation plastique de la matrice n'est pas libre et dépend de l'état de contrainte local. Même si une déformation libre plastique $\mathbf{E}^{p}$ est bien affectée à la matrice, celle-ci conserve bien un comportement mécanique élastique au vu des modules d'élasticité intervenant dans la loi de localisation en contraintes de l'équation de Kröner (équation (3.25)). Le traitement du problème de localisation est donc élastique et non plastique. Le milieu environnant de l'inclusion réagit au final de façon élastique ce qui n'est pas rigoureux dans l'application du schéma autocohérent en plasticité. D'ailleurs, si l'on tient compte des mêmes conditions (élasticité homogène isotrope, plasticité incompressible et inclusions sphériques), l'équation de localisation de Lin est très proche de celle de Kröner et s'écrit :

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\Sigma} + 2\mu\left(\mathbf{E}^{p} - \boldsymbol{\varepsilon}^{p}\right) \qquad \textbf{(3.26)}$$

L'équation de localisation de Kröner (3.25) ne diffère de celle de Lin que d'un terme $(1-\beta)$ soit environ 0,5 pour un coefficient de Poisson égal à 0,3, ce qui ne suffit pas à décrire correctement l'accommodation plastique et conduit à une estimation trop raide au même titre que les modèles de Taylor et de Lin [Bor01b].

Du fait d'imposer une déformation plastique libre au sens d'Eshelby, l'application du schéma autocohérent en élastoplasticité par Kröner n'est pas strictement rigoureuse mais a le mérite d'avoir ouvert une nouvelle voie dans le domaine de la modélisation des matériaux hétérogènes. Nombre de modèles s'en sont inspirés par la suite.

### III.2.3 Extensions non linéaires pour les comportements élastoplastique et viscoplastique

**Le modèle « incrémental » de Hill**

Suite aux travaux de Kröner, c'est à Hill que revient le mérite d'avoir traité le problème de l'homogénéisation non linéaire en élastoplasticité en affectant véritablement à la matrice un comportement élastoplastique. Il traite le même problème d'inclusion inhomogène que Kröner à la différence près qu'il impose la déformation totale comme déformation libre [Hil65]. De ce fait, la déformation plastique n'est plus considérée comme une déformation libre de contraintes. Il propose en outre une formulation générale sous forme incrémentale. Soit $\mathbf{L_i}$ et $\mathbf{L_M}$ les tenseurs d'ordre 4 des modules tangents élastoplastiques de l'inclusion et de la matrice. Les comportements de l'inclusion et de la matrice s'écrivent sous forme incrémentale ou comme ici en vitesse :

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{L}_{i} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \qquad \textbf{(3.27)}$$

$$\dot{\boldsymbol{\Sigma}} = \mathbf{L}_{M} : \dot{\mathbf{E}} \qquad \textbf{(3.28)}$$

La solution du problème de l'inclusion donne :

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \dot{\boldsymbol{\Sigma}} + \mathbf{L}^* : \left(\dot{\mathbf{E}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\right) \qquad \textbf{(3.29)}$$

où $\mathbf{L}^*$ est un tenseur d'ordre 4 appelé tenseur d'influence de Hill. Il dépend du tenseur inconnu $\mathbf{L_M}$ de la matrice et de la forme et de l'orientation de l'inclusion. En utilisant les équations (3.27), (3.28) et (3.29) on trouve :

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{L_i} : \left(\mathbf{L_i} + \mathbf{L}^*\right)^{-1} : \left(\mathbf{L_M} + \mathbf{L}^*\right) : \dot{\mathbf{E}} \qquad \textbf{(3.30)}$$

Le résultat de l'homogénéisation ($\dot{\boldsymbol{\Sigma}} = \langle \dot{\boldsymbol{\sigma}} \rangle$) conduit alors à la relation intégrale implicite suivante :

$$\mathbf{L_M} = \left\langle \mathbf{L_i} : \left(\mathbf{L_i} + \mathbf{L}^*\right)^{-1} : \left(\mathbf{L_M} + \mathbf{L}^*\right) \right\rangle \qquad \textbf{(3.31)}$$

En adoptant des modules tangents élastoplastiques uniformes (malgré l'hétérogénéité de la déformation) pour les domaines homogènes et la matrice, le modèle incrémental de Hill prend mieux en compte l'accommodation plastique que le modèle de Kröner. Cependant, si les interactions sont plus souples et plus réalistes que dans le modèle de Kröner, la mise en œuvre numérique du modèle incrémental de Hill reste plus délicate. Le caractère fortement implicite de la relation intégrale impose une lourdeur numérique dans sa résolution. Le tenseur d'influence de Hill $\mathbf{L}^*$ est calculé en fin de résolution après évaluation numérique du module tangent effectif $\mathbf{L_M}$. En dépit des difficultés numériques, le modèle de Hill pose la question de la linéarisation des problèmes d'homogénéisation non linéaires. Parti d'un problème d'homogénéisation non linéaire avec l'inclusion inhomogène d'Eshelby, Hill se ramène à un problème d'homogénéisation linéaire, en linéarisant de façon incrémentale, la relation non linéaire existante en élastoplasticité entre tenseur des contraintes et tenseurs des déformations.

Suite aux concepts générés par les travaux de Kröner et de Hill, de nombreux modèles viennent témoigner de l'intérêt grandissant de l'étude du comportement non linéaire des matériaux hétérogènes. Ces modèles, qui sont pour la plupart des extensions du schéma autocohérent, se distinguent par de nouveaux comportements modélisés (viscoélasticité, viscoplasticité …) mais plus particulièrement par de nouvelles méthodes de linéarisation du comportement non-linéaire local.

**Extension du modèle « incrémental » au cas viscoplastique par Hutchinson**

Hutchinson [Hut76] adapte la formulation incrémentale élastoplastique de Hill à la viscoplasticité pour l'étude du fluage en utilisant des complaisances tangentes:

$$\delta\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathbf{p}} = \mathbf{M}^{\mathbf{tgt}} : \delta\boldsymbol{\sigma} \qquad \textbf{(3.32)}$$

Pour le cas particulier des lois puissance avec même exposant « n » pour chacune des phases, il montre, en intégrant les équations liant les grandeurs incrémentales, que la complaisance tangente $\mathbf{M}^{\mathbf{tgt}}$ qui relie le taux de déformation local à la contrainte locale peut être remplacée par une complaisance « totale » sécante $\mathbf{M}^{\mathbf{sct}}$ liant directement les grandeurs finies (**Fig. 3.4**) :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathbf{p}} \approx \mathbf{M}^{\mathbf{sct}} : \boldsymbol{\sigma} \qquad \textbf{(3.33)}$$

Dans ces conditions, Hutchinson remarque que $\mathbf{M}^{\mathbf{tgt}} = n\mathbf{M}^{\mathbf{sct}}$ et que les formulations incrémentale et sécante conduisent au même résultat. Si cette formulation intégrée du modèle incrémental de Hill facilite sa mise en œuvre numérique, elle montre cependant des résultats trop raides proches de la borne supérieure de Taylor pour les fortes non-linéarités (lorsque l'exposant n tend vers l'infini).

**Le modèle « sécant » de Berveiller-Zaoui**

Berveiller et Zaoui [Ber79] définissent une formulation sécante isotrope à partir de la formulation intégrale de Hill dans le cas de polycristaux isotropes sous chargements monotones et radiaux en utilisant les équations de Hencky-Mises. En exprimant le tenseur d'influence de Hill $\mathbf{L}^{*}$ à partir du tenseur effectif inconnu **L**, ils montrent que la loi locale de Hill (3.29) peut s'écrire :

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \dot{\boldsymbol{\Sigma}} + \mathbf{L} : \left( \left( \mathbf{S}^{\mathbf{Esh}} \right)^{-1} - \mathbf{I} \right) : \left( \dot{\mathbf{E}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \right) \qquad \textbf{(3.34)}$$

où **I** est le tenseur identité d'ordre 4. Dans le cas d'un chargement extérieur monotone, et d'un comportement isotrope en se limitant au cas de l'inclusion sphérique, la solution du problème inhomogène d'Eshelby aboutit à la loi d'interaction suivante :

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\Sigma} + 2\alpha\mu(1-\beta)\left( \mathbf{E}^{\mathbf{P}} - \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{p}} \right) \qquad \textbf{(3.35)}$$

où $\beta$ est le même paramètre élastique que dans les modèles d'Eshelby et de Kröner. La variable $\alpha$ est une variable scalaire d'accommodation plastique qui peut être déterminée en fin de calcul soit par résolution d'un problème statistique soit plus simplement identifiée à partir d'un essai particulier puis utilisée pour la majorité des applications. Dans le cas d'une identification sur un essai de traction, l'expression de $\alpha$ vaut :

$$\alpha \approx \left( 1 + \frac{3\mu E^{p}_{Mises}}{2\Sigma_{Mises}} \right)^{-1} \qquad \textbf{(3.36)}$$

où $\Sigma_{Mises}$ et de $E^{p}_{Mises}$ représentent la contrainte et la déformation plastique équivalentes au sens de von Mises lors d'un essai de traction.

Même s'il est beaucoup plus restrictif que le modèle incrémental de Hill, le modèle de Berveiller-Zaoui a l'avantage de combiner la simplicité d'une loi d'interaction explicite de type Kröner avec la prise en compte partielle d'une accommodation plastique à l'image du modèle de Hill. Lors d'un essai de traction, lorsque le matériau est élastique ($E^{p}_{Mises} = 0$), la variable d'accommodation $\alpha$ est égale à 1 : le modèle se comporte exactement comme le modèle de Kröner. Dès que le matériau commence à plastifier, la valeur de $\alpha$ diminue rapidement vers zéro ce qui a pour conséquence de faire baisser les contraintes internes d'au moins un ordre de grandeur par rapport au modèle à interaction purement élastique de Kröner [Ber80].

**Le modèle en « Béta » (ou en « β ») de Pilvin-Cailletaud**

Inspiré du modèle de Cailletaud [Cai87], le modèle en Béta proposé par Pilvin [Pil90], consiste en une modification de la loi de localisation en contrainte de Kröner [Kro61] définie par l'équation **(3.25)** qui est une loi d'accommodation de nature purement élastique. L'idée originale du modèle en Béta revient à explorer une autre voie possible pour prendre en compte la nature élastoplastique des interactions entre phases. Celle-ci consiste à introduire une possibilité d'accommodation élastoplastique (ou élasto-viscoplastique) en remplaçant la variable de déformation $\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{vp}}$ (respectivement $\mathbf{E}^{\mathbf{vp}}$) par une variable tensorielle d'accommodation $\boldsymbol{\beta}^{\mathbf{vp}}$ (respectivement $\mathbf{B}^{\mathbf{vp}}$) de la manière suivante :

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\Sigma} + \underbrace{2\mu(1-\beta)}_{\substack{\text{accommodation}\\ \text{de nature}\\ \text{élastique}}} \underbrace{\left(\mathbf{B}^{\mathbf{vp}} - \boldsymbol{\beta}^{\mathbf{vp}}\right)}_{\substack{\text{possibilité}\\ \text{d'accommodation}\\ \text{plastique}\\ \text{ou viscoplastique}}} \quad \text{avec :} \quad \mathbf{B}^{\mathbf{vp}} = \sum f\boldsymbol{\beta}^{\mathbf{vp}} = \overline{\boldsymbol{\beta}^{\mathbf{vp}}} \qquad \textbf{(3.37)}$$

Le tenseur $\mathbf{B}^{\mathbf{vp}}$ représente la moyenne pondérée par les fractions volumiques des variables locales d'accommodation $\boldsymbol{\beta}^{\mathbf{vp}}$. Ces dernières suivent une loi d'évolution différente selon que l'on considère l'hypothèse des petites déformations ou les grandes déformations :

en petites déformations :
$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\beta}}^{\mathbf{vp}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathbf{vp}} - D\boldsymbol{\beta}^{\mathbf{vp}}\left(\dot{\varepsilon}_{eq}^{vp}\right) \\ \text{avec D paramètre scalaire à identifier} \end{cases} \qquad \textbf{(3.38)}$$

en grandes déformations :
$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\beta}}^{\mathbf{vp}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathbf{vp}} - D\left(\boldsymbol{\beta}^{\mathbf{vp}} - \delta\boldsymbol{\beta}^{'}\right)\left(\dot{\varepsilon}_{eq}^{vp}\right) \\ \dot{\boldsymbol{\beta}}^{'} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathbf{vp}} - D^{'}\boldsymbol{\beta}^{'}\left(\dot{\varepsilon}_{eq}^{vp}\right) \\ \text{avec D, } \delta\text{, } D^{'} \text{ 3 paramètres scalaires à identifier} \end{cases} \qquad \textbf{(3.39)}$$

L'avantage du modèle en Béta tient au fait qu'il n'est pas restrictif aux seuls chargements radiaux comme peut l'être le modèle de Berveiller et Zaoui. Il peut donc être appliqué dans le cadre d'essais cycliques. Dans le cas d'accommodation viscoplastique la loi d'interaction perd son caractère explicite puisque la variable d'accommodation $\boldsymbol{\beta}^{\mathbf{vp}}$ dépend de la vitesse de déformation viscoplastique elle-même liée à la contrainte (par exemple par un module sécant). Dans tous les cas, sa mise en œuvre numérique reste simple comparée à des modèles plus complexes à caractère implicite comme les modèles issus des approches héréditaires ou les modèles à champs translatés. En revanche, le modèle de Pilvin nécessite d'identifier le paramètre D pour chaque phase en petites déformations (respectivement $D, \delta, D^{'}$ en grandes déformations) afin d'ajuster le comportement autocohérent du changement d'échelles. Cette identification peut être effectuée par comparaison avec des simulations par éléments finis [Pil95], [For96] ou en comparant la réponse du modèle vis-à-vis d'un autre modèle de changement d'échelles [For99], [Gal05]. La précision de la transition d'échelles dépend donc directement de la qualité de cette identification et des conditions dans lesquelles elle est menée (maillage, modèle référent, sollicitations).

Le modèle de Pilvin, en dépit de l'identification qui doit être menée, constitue un modèle pragmatique, pratique pour la simulation numérique en raison de la forme de sa loi d'interaction. Le caractère ajustable du traitement de la transition d'échelles est intéressant du point de vue de l'étendue de son applicabilité mais pose le problème de son identification.

Dans la suite de ce chapitre, nous nous penchons sur les limites de cet ajustement afin de déterminer son applicabilité pour la mise en forme.

**Le modèle « tangent » de Molinari et *al.***

Par la suite, d'autres formulations destinées à linéariser le comportement non linéaire local font leur apparition. Molinari *et al.* [Mol87] proposent à l'aide d'une approximation isotrope une formulation tangente qui est ensuite implémentée dans un cadre plus général (en levant la condition d'isotropie notamment) par Lebensohn et Tomé dans le cas de polycristaux visqueux [Leb93]. La relation non linéaire locale entre contrainte et vitesse de déformation viscoplastique s'écrit dans le cas d'une formulation tangente :

$$\boldsymbol{\sigma} \approx \mathbf{L}^{\mathbf{tgt}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathbf{vp}} + \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{0}}\left(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\right) \quad \text{avec } \mathbf{L}^{\mathbf{tgt}} = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathbf{p}}} \qquad \textbf{(3.40)}$$

où $\mathbf{L}^{\mathbf{tgt}}$ est le module tangent.

La méthode tangente de Molinari *et al.*, restreinte aux lois puissance ayant même exposant « n » pour chacune des phases, nécessite dans son application de se donner à l'avance la forme du module macroscopique. Les auteurs font l'hypothèse que le module macroscopique est également tangent ce qui s'avère faux en général [Mas00]. Pour de fortes non-linéarités, Lebensohn et Tomé [Leb93] ont montré que la méthode tangente est trop souple et tend vers la borne de Reuss.

**L'approximation « affine » de Masson et *al.***

Initialement suggérée par Rougier *et al.* [Rou94b] puis précisée par Masson [Mas98] pour les comportements non-héréditaires et héréditaires, la formulation affine proposée par Masson *et al.* [Mas00] en viscoplasticité vient compléter l'approximation tangente et étendre son domaine d'application. Si la méthode affine se base également sur une linéarisation tangente du comportement local, elle utilise, contrairement à la méthode tangente de Molinari *et al.*, la notion de « milieu linéaire de comparaison » introduite par Ponte Castañeda [Pon91]. Ainsi, en utilisant un milieu de comparaison linéaire hétérogène élastique (ou thermoélastique), la méthode affine traite le problème d'homogénéisation différemment et permet de prendre en compte une partie de l'hétérogénéité au sein des phases. L'utilisation d'un milieu linéaire de comparaison autorise l'application des relations d'homogénéisations linéaires clairement établies en thermoélasticité afin de déterminer le module macroscopique, ceci sans préjuger à l'avance de sa forme analytique. Pour le seul cas particulier où il n'existe pas d'hétérogénéité au sein des phases, la méthode affine se réduit à la méthode tangente [Mol99]. Mais dans le cas général, les deux modèles donnent des résultats très différents. La solution du problème de localisation dans le milieu hétérogène est alors approchée par le comportement affine de l'inclusion et de la matrice dans un milieu linéaire analogue :

$$\boldsymbol{\sigma} \approx \mathbf{L}^{\mathbf{aff}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathbf{vp}} + \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{0}} \qquad \text{avec} \begin{cases} \mathbf{L}^{\mathbf{aff}}\left(\mathrm{x}\right) = \dfrac{\partial^2 \Omega}{\partial \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathbf{vp}} \partial \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathbf{vp}}} \\ \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{0}} = \dfrac{\partial \Omega}{\partial \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathbf{vp}}} - \mathbf{L}^{\mathbf{aff}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathbf{vp}} \end{cases} \qquad \textbf{(3.41)}$$

où $\Omega$ est le potentiel de dissipation.

L'ensemble de ces approximations du comportement non linéaire local est schématisé pour le cas d'un comportement viscoplastique sur la **Fig. 3.4** parmi les bornes les plus simples : la borne supérieure de Taylor et la borne inférieure du modèle statique.

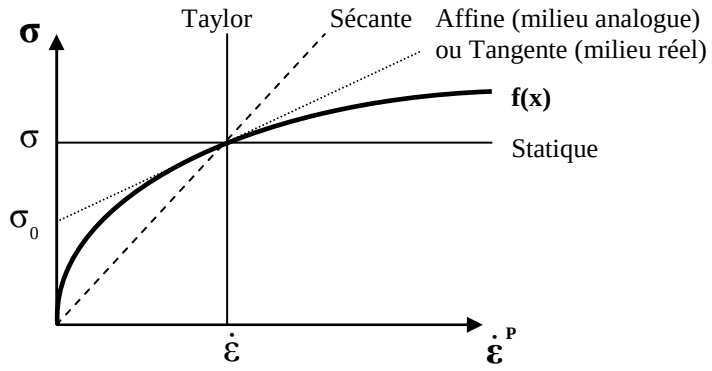



**Fig. 3.4 –** ***Différentes méthodes de linéarisation du comportement viscoplastique local.***

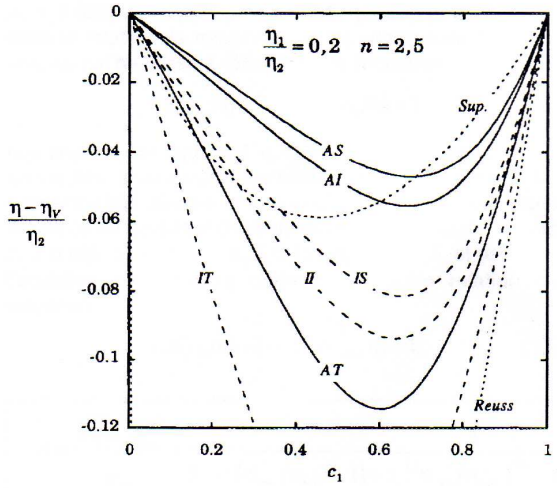
**Les approches variationnelles et l'établissement de nouvelles bornes**

Les approches variationnelles s'inscrivent dans un cadre thermodynamique dans lequel le comportement local des phases est décrit par un potentiel. En étendant les théorèmes énergétiques de l'élasticité linéaire au travers d'une formulation variationnelle, ces approches consistent à déterminer de nouvelles bornes supérieures par minimisation du potentiel effectif du matériau.

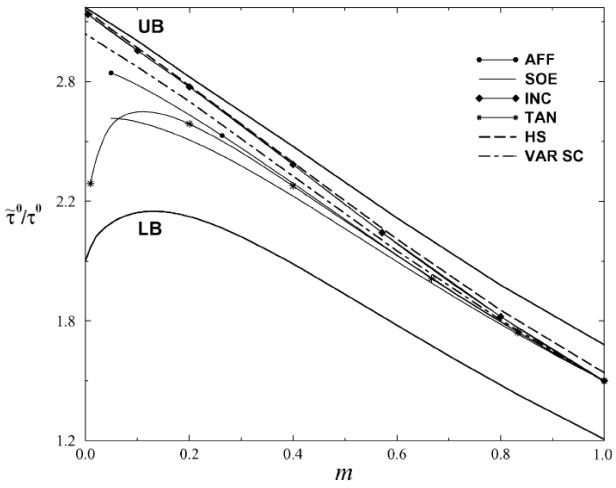
En se basant sur le travail initial de Hashin et Shtrikman [Has62] pour l'établissement de bornes en élasticité, Talbot et Willis [Tal85] puis Ponte Castañeda [Pon91] établissent de nouvelles bornes plus restrictives que la borne supérieure de Taylor dans le cas de comportements non linéaires. En utilisant un milieu linéaire de comparaison hétérogène, l'approche de Ponte Castañeda permet de transposer les bornes connues en élasticité linéaire aux cas où le comportement est non linéaire si toutefois celui-ci dérive d'un seul potentiel (viscoplasticité, élasticité non linéaire). Suquet [Suq95] a montré que cette approche pouvait se résumer à une approche par modules sécants où la déformation effective de chaque phase est mesurée par une norme quadratique du champ de déformation (moment d'ordre 2) et non simplement à partir de la déformation moyenne par phase (moment d'ordre 1). Ce résultat témoigne d'une amélioration dans la prise en compte de l'hétérogénéité intraphase même si, au final les approches variationnelles ne se révèlent être exactes en contraste qu'au premier ordre [Pon98].

Si les approches variationnelles ne permettent pas d'approcher directement la solution, elles permettent d'améliorer les bornes existantes et de comparer les différentes approximations autocohérentes du comportement viscoplastique des polycristaux lorsque le contraste entre phase et la non-linéarité du comportement local varient. L'ensemble des approximations autocohérentes coïncident pour des comportements linéaires. En revanche, pour des comportements non linéaires, les résultats diffèrent nettement compte tenu des approximations faites dans le traitement de la localisation. Dans le cas idéal d'un matériau biphasé incompressible, isotrope et viscoplastique en loi puissance, Gilormini compare différentes méthodes d'approximation (sécante, tangente et intermédiaire) en utilisant la borne supérieure de Ponte Castañeda, plus restrictive que la borne de Taylor (**Fig. 3.5a**). Quelle que soit l'approximation utilisée (incrémentale, sécante, tangente ou affine), il est toujours possible, pour un contraste donné de comportements des phases, de violer cette nouvelle borne [Gil96], [Gil97], [Bor01a]. Il en résulte que les méthodes sécantes et incrémentales sont en général plus raides que les méthodes tangentes et affines. Par ailleurs, Lebensohn et Tomé [Leb93] montrent que la méthode tangente tend vers la borne inférieure du modèle statique

pour des fortes non-linéarités, traduisant une souplesse excessive de la méthode tangente dans ces conditions. Masson [Mas00], par une étude comparative de sa formulation affine, a montré que la méthode affine était beaucoup moins raide que la méthode incrémentale et qu'elle ne déviait pas vers la borne statique pour des fortes linéarités comme le fait la méthode tangente. Bornert *et al.* [Bor01c] ont confirmé tous ces résultats en comparant différentes approximations autocohérentes du comportement d'un polycristal fcc non texturé (**Fig. 3.5b)**.




*(a) Confrontation des modèles sécant, intermédiaire et tangent à complaisances anisotropes (AS, AI, AT) et isotropes (IS, II, IT) avec la borne supérieure (Sup.) de P. Castañeda établie en 1991 et avec la borne inférieure de Reuss [Gil97].*




*(b) Evolution de la contrainte d'écoulement normalisée d'un polycristal cfc non texturé en fonction de sa sensibilité à la vitesse. Estimations autocohérentes utilisant différentes formulations : second ordre (SOE), affine (AFF), incrémentale (INC), tangent (TAN) et variationnelle (Var). Les bornes de Hashin-Shtrikman (HS), Taylor (UB) et de Reuss (LB) sont également représentées [Bor01c].*

**Fig. 3.5 –** ***Confrontation de différentes estimations autocohérentes du comportement viscoplastique.***

**La procédure du second ordre de Ponte Castañeda**

Afin d'approcher la solution du problème non linéaire de l'inclusion inhomogène d'Eshelby, l'ensemble des approximations classiques évoquées (incrémentale, sécante, tangente ou affine) néglige totalement ou en partie la distribution du taux de déformation plastique au sein de l'inclusion. Par opposition à ces approximations classiques où le module local est calculé à partir du moment d'ordre 1, c'est-à-dire à partir de la moyenne par phase de la déformation locale, les approches variationnelles puis d'autres approximations dites du second ordre font appel à une description accrue de l'hétérogénéité intraphase [Suq93], [Pon96].

La procédure du second ordre proposée par Ponte Castañeda [Pon96] repose sur une approximation du potentiel local non linéaire à l'aide d'un développement de Taylor au second ordre vis-à-vis d'états de référence locaux qui ne sont autres, dans cette première version, que les contraintes ou les déformations moyennes par phase. Le problème du composite non linéaire peut alors être remplacé par le problème d'un composite linéaire thermoélastique de même microstructure à phases anisotropes caractérisées par leur module tangent. La procédure du second ordre, contrairement aux approches variationnelles, est capable de générer des estimations du contraste de phase exactes au second ordre. Dans le cas particulier de fluctuations de champ importantes (phénomènes de percolation), cette approche

conduit à de mauvaises prédictions violant les bornes précédemment admises. Ceci s'explique à partir du fait que dans la version originale de la procédure du second ordre, seule l'information du moment d'ordre 1 des champs est utilisée pour décrire les phases du composite linéaire de comparaison alors que les bornes issues des formulations variationnelles sont construites à partir d'une description utilisant le moment d'ordre 2. Devant ce constat, Ponte Castañeda [Pon02] améliore sa procédure du second ordre en proposant une nouvelle version qui repose sur une description statistique accrue du composite linéaire de comparaison à l'aide notamment d'un tenseur de covariance des fluctuations de champs locaux. Cette nouvelle procédure du second ordre conserve son exactitude de prédiction en termes d'hétérogénéité de contraste sans jamais violer les nouvelles bornes.

Plus rigoureuses dans la description de l'hétérogénéité du matériau, les procédures du second ordre donnent des résultats plus souples que les approches classiques du premier ordre puisque tenant compte d'une accommodation supplémentaire liée à l'hétérogénéité intraphase. Cependant elles sont aussi en général plus difficiles à implémenter [Bor01c] et n'ont à ce jour, et à notre connaissance, pas encore été développées dans le cadre d'un comportement élasto-viscoplastique. De plus, et d'une manière générale, il existe un phénomène dit de « saut de dualité » : l'estimation du comportement local s'avère différente selon le choix de la linéarisation effectuée sur les champs locaux en contraintes ou en déformations.

### III.2.4 Discussion

Parmi les approches dites classiques, c'est la méthode du premier ordre de type affine qui, dans sa construction et dans ses résultats, se rapproche le plus de la procédure du second ordre notamment en viscoplasticité polycristalline de type loi puissance [Leb07]. En approximant la relation entre contraintes et déformations moyennes locales par une loi de comportement locale, et en négligeant l'hétérogénéité de déformation (de contrainte et de taux de déformation) à l'intérieur de l'inclusion dans l'étape de linéarisation, la méthode affine donne des résultats plus raides que la procédure du second ordre tout en restant plus précise que les méthodes incrémentales, sécantes et tangentes pour des fortes non linéarités. Si la méthode affine possède des avantages certains en viscoplasticité, comme on le verra dans le paragraphe suivant, elle possède dans le cas de l'élasto-viscoplasticité des difficultés de mise en œuvre supplémentaires du fait du caractère héréditaire du comportement. Dans ces conditions, les recours aux méthodes sécantes et tangentes restent un bon compromis dans le choix de la méthode d'homogénéisation et des méthodes de linéarisation. Ce choix n'est pas anodin puisqu'il détermine l'estimation du comportement local et des interactions locales au sein du matériau. Il doit cependant tenir compte en pratique de la statistique disponible sur le matériau modélisé et de la pertinence des interactions vis-à-vis des phénomènes visés par la modélisation. Le problème micromécanique du matériau hétérogène en élasto-viscoplasticité comporte des spécificités liées à la nature spatio-temporelle des interactions existantes entre les constituants du matériau. Dans la partie suivante, nous présentons les modèles utilisés dans notre étude au travers d'une analyse de ces spécificités dans le cas d'un comportement local maxwellien.

## III.3 LE PROBLEME MICROMECANIQUE HETEROGENE ELASTO-VISCOPLASTIQUE

Dans le cas d'un comportement élastique linéaire, le schéma autocohérent permet de déterminer de façon exacte les propriétés effectives du milieu hétérogène [Her54], [Kro58]. Lorsque le comportement est élastoplastique ou viscoplastique, une linéarisation du comportement non linéaire local permet de se ramener à un comportement de type « élastique » à chaque pas de résolution du problème. Comme nous l'avons vu dans le paragraphe précédent, le résultat de l'homogénéisation dépend alors fortement du choix de l'approximation faite lors de la linéarisation du comportement local.

Dans le cas du comportement élasto-viscoplastique (ou viscoélastique), la loi de comportement locale s'écrit, en tenant compte de la partition des déformations et selon l'hypothèse des petites déformations :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{s}:\dot{\boldsymbol{\sigma}} + \mathbf{m}:\boldsymbol{\sigma} \qquad \textbf{(3.42)}$$

où $\mathbf{s}$ et $\mathbf{m}$ désignent les complaisances élastique et viscoplastique locales (complaisances élastique et visqueuse en viscoélasticité). Compte tenu de la présence d'un mécanisme instantané (élasticité) et d'un mécanisme dépendant du temps (viscosité), le champ local des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ apparaît à différents ordres de dérivation : $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ et $\boldsymbol{\sigma}$. La réponse actuelle du matériau dépend à la fois de la sollicitation actuelle mais également de toute son histoire révélant ainsi le caractère héréditaire de ces comportements. Le traitement d'un modèle d'homogénéisation pour un matériau hétérogène est alors plus compliqué à mettre en œuvre du fait de l'existence d'un couplage spatio-temporel : il faut veiller à tenir compte à la fois de l'hétérogénéité spatiale mais également de l'hétérogénéité temporelle des champs mécaniques due au caractère héréditaire du comportement. Suquet [Suq87] a montré en viscoélasticité qu'un assemblage d'éléments Maxwelliens (assemblage en série d'un ressort et d'un amortisseur) ne se comportait pas comme un élément de Maxwell à l'échelle macroscopique. La loi de comportement macroscopique d'un tel assemblage comporte un terme intégral supplémentaire appelé « mémoire longue du matériau » :

$$\dot{\mathbf{E}} = \mathbf{S}:\dot{\boldsymbol{\Sigma}} + \mathbf{M}:\boldsymbol{\Sigma} + \int_0^t \mathbf{J}\left(t-u\right):\dot{\boldsymbol{\Sigma}}\left(u\right)du \qquad \textbf{(3.43)}$$

où $\mathbf{S}$ et $\mathbf{M}$ désignent respectivement les complaisances élastiques et visqueuses macroscopiques de l'assemblage obtenues par homogénéisation des complaisances élastiques $\mathbf{s}$ et des complaisances visqueuses $\mathbf{m}$ de chaque constituant viscoélastique. Le terme intégral supplémentaire et la présence de différents ordres de dérivation des champs locaux traduisent le caractère complexe du comportement macroscopique pour lequel il n'est pas possible d'écrire directement un module sécant ou tangent comme pour les comportements issus d'un seul potentiel.

La présence simultanée de plusieurs ordres de dérivation des champs locaux ajoute donc au problème de l'hétérogénéité du matériau la nécessité de prendre en compte le caractère héréditaire de son comportement. Le couplage espace-temps résultant est une difficulté majeure dans le traitement de l'homogénéisation et ne permet pas l'utilisation directe d'une extension classique du schéma autocohérent. L'homogénéisation des matériaux hétérogènes élasto-viscoplastiques est complexe et a fait l'objet de nombreuses études. Actuellement, deux voies de résolution sont possibles : les approches de type héréditaire et les

approches à variables internes. Dans la suite de ce chapitre, nous retraçons brièvement, les principaux résultats et conclusions des deux approches. Une attention particulière est portée aux approches à variables internes que nous utilisons dans le cadre de notre étude au travers de deux modèles.

### III.3.1 Les approches héréditaires

Les approches héréditaires consistent à ramener le problème viscoélastique linéaire ou non linéaire (élasto-viscoplastique) à un problème pseudo-élastique dans l'espace de Stieljes ou à un problème élastique symbolique dans l'espace de Laplace-Carson.

Dans le cadre de la viscoélasticité linéaire sans vieillissement, Laws et McLaughlin [Law78] ont montré que le traitement de l'homogénéisation est possible en utilisant une représentation convoluée du comportement viscoélastique linéaire issue du principe de superposition de Boltzmann :

$$\boldsymbol{\sigma}(t)=\int_{-\infty}^{t}\mathbf{f}\left(t-u\right):d\boldsymbol{\varepsilon}\left(u\right)\ \text{ou}\ \ \boldsymbol{\sigma}(t)=\mathbf{f}\otimes\boldsymbol{\varepsilon} \qquad \textbf{(3.44)}$$

où la fonctionnelle **f**(t) correspond à la fonction de relaxation du matériau viscoélastique et où le produit $\otimes$ est le produit de convolution de Stieljes. Comme le montre l'équation (3.44), l'expression de la loi de comportement viscoélastique sous sa forme convoluée au sens de Stieljes permet de ramener le problème viscoélastique à un problème pseudo-élastique pour lequel la démarche autocohérente classique est alors possible. Pour une lecture plus détaillée de la méthode, le lecteur pourra se référer aux travaux de Paquin [Paq98] qui montre clairement l'effet du couplage spatio-temporel dans la formulation intégrale du problème viscoélastique linéaire et la nécessité de conserver toute l'histoire de la sollicitation dans l'approche héréditaire de Laws et McLaughin.

Cette démarche été menée par Hashin [Has69] et Rougier [Rou94a] en utilisant également le principe de correspondance entre viscoélasticité et élasticité mais cette fois-ci en traitant dans l'espace de Laplace-Carson le problème élastique symbolique correspondant au problème viscoélastique linéaire dans l'espace temps réel. En effet, dans l'espace de Laplace-Carson, les produits de convolution de Stieljes se retrouvent être des produits ordinaires et les variables espace et temps ne sont plus couplées ce qui simplifie les calculs. La méthode héréditaire « symbolique », appliquée au cas viscoélastique linéaire, permet donc de traiter un problème connu de transition d'échelles en élasticité symbolique dans l'espace de Laplace-Carson. La difficulté réside alors dans l'application de la transformée inverse de la solution homogénéisée lors du retour à l'espace temps réel.

L'extension élasto-viscoplastique de la méthode a été réalisée par Rougier *et al.* [Rou94b]. L'homogénéisation étant non linéaire, une linéarisation tangente simplifiée du comportement local est réalisée à chaque pas afin de se ramener à une homogénéisation linéaire. Le problème hétérogène élasto-viscoplastique est transformé en un problème hétérogène élastique symbolique à déformations libres symboliques (sans sens physique dans l'espace temps réel) dont le traitement est connu du fait des travaux ayant fait suite à la voie ouverte par Kröner. Pouya et Zaoui [Pou99] ont proposé une généralisation de la procédure de linéarisation proposée par Rougier. Masson et Zaoui [Mas99] et Masson *et al.* [Mas00] ont proposé une formulation affine en utilisant la notion de milieu hétérogène de comparaison de Ponte Castañeda [Pon91]. Brenner a modifié la formulation affine de Masson afin de mieux prendre en compte l'hétérogénéité intraphase et l'a appliqué sur les alliages de Zirconium [Bre01], [Bre02a], [Bre02b]. Motivés par le récent développement des approches variationnelles, Brenner et Masson [Bre05] ont proposé une nouvelle formulation affine

visant à prendre en compte les fluctuations de champs locaux dans l'estimation du comportement homogénéisé. Elle consiste en une linéarisation couplant la formulation affine de Masson et Zaoui [Mas99] avec la nouvelle procédure variationnelle de second ordre proposée par Ponte Castañeda [Pon02]. Le comportement macroscopique et les comportements locaux sont estimés, dans cette approche, à l'aide du modèle de Mori-Tanaka [Mor73].

Les approches héréditaires, du fait de la représentation convoluée de la loi de comportement et du traitement intégral, nécessitent de connaître à chaque instant t toute l'histoire des sollicitations ce qui engendre des lourdeurs conséquentes dans la mise en œuvre numérique. Si l'utilisation de la transformée de Laplace permet de simplifier les calculs des produits de convolution et de simplifier la transition d'échelles en découplant les variables espace-temps, le calcul des transformées inverses lors du retour à l'espace temps réel n'est en revanche pas trivial et nécessite un traitement numérique adéquat. De plus, contrairement au cas viscoélastique linéaire où les méthodes héréditaires sont rigoureuses et aboutissent à un calcul exact, la solution obtenue dans le cas élasto-viscoplastique reste une approximation. La précision du modèle utilisé dépend alors directement de la méthode d'inversion choisie et de la précision envisagée pour le calcul des transformées inverses.

Récemment, Pierard et Doghri [Pie06] ont proposé une extension de la formulation affine pouvant s'appliquer à un domaine plus étendu de microstructures. Ne se limitant plus aux cas de polycristaux à symétrie cristalline particulière comme les alliages de zirconium, la nouvelle formulation peut s'appliquer désormais au cas de matériaux biphasés élasto-viscoplastiques. Malgré une implantation un peu plus complexe que pour la formulation affine classique, les auteurs intègrent dans le développement de leur approche la prise en compte de variables internes permettant ainsi, pour la première fois dans le cadre d'une formulation affine, de simuler des trajets inverses de chargement. L'homogénéisation linéaire est traitée selon la méthode de Mori-Tanaka. Plusieurs comparaisons avec des simulations numériques menées sur un code d'éléments finis montrent la bonne tenue du modèle dans le cadre de matériaux composites sur différents trajets de chargements et à différentes vitesses de déformation [Pie06], [Pie07]. Le traitement numérique lors du calcul des transformées inverses de Laplace-Carson (qui peuvent s'avérer être nombreuses par exemple pour un polycristal) reste lourd et les auteurs notent également des problèmes de convergence pour de petites vitesses de déformations, la convergence de la méthode ne pouvant pas être garantie dans ce cas.

### III.3.2 Les approches à variables internes

**Introduction**

Dans le paragraphe précédent, nous avons montré l'intérêt des approches héréditaires dans le traitement du problème micromécanique hétérogène élasto-viscoplastique. En se plaçant dans l'espace de Laplace-Carson, ces approches permettent de transformer le problème hétérogène élasto-viscoplastique en un problème pseudo-élastique contournant ainsi le traitement complexe du couplage espace-temps existant dans l'espace réel entre les variables d'état. Malheureusement, la nécessité pour ces formulations de connaître à l'instant $t_n$ toute l'histoire des sollicitations passées se traduit par une lourdeur numérique conséquente qui constitue le défaut majeur des approches héréditaires.

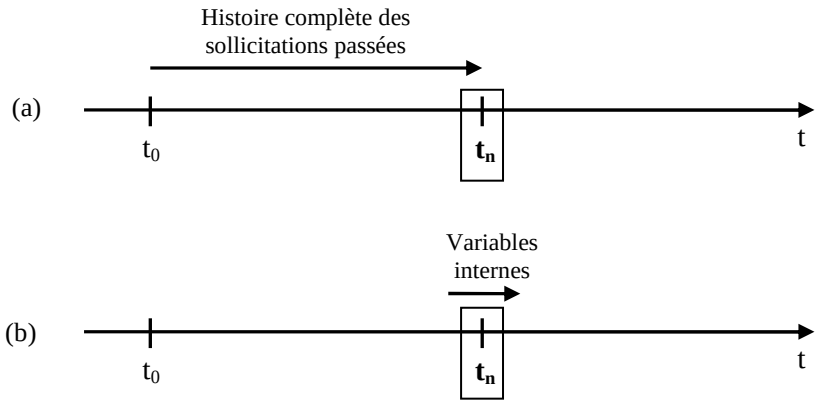



**Fig. 3.6 –** ***Comparaison schématique entre (a) approches de type héréditaire et (b) approches à variables internes.***

Les approches dites « à variables internes » reposent sur une formulation thermodynamique pour décrire l'état actuel du matériau. Le caractère héréditaire du comportement dépend non pas d'une fonctionnelle entre $\boldsymbol{\sigma}$ et $\boldsymbol{\varepsilon}$ sur toute l'histoire des sollicitations passées comme pour les approches héréditaires mais de la valeur instantanée d'un ensemble de variables internes décrivant l'état actuel du matériau. Toute l'histoire de chargement est donc contenue dans ces variables internes dont les lois d'évolution sont connues. En contre partie, le traitement du couplage espace-temps ne peut être contourné. Toute la difficulté étant de parvenir à traduire les effets du couplage espace-temps induits par le caractère hétérogène et héréditaire du matériau à l'aide de variables internes décrivant l'état local des phases constitutives.

La formulation à variables internes du problème micromécanique hétérogène élasto-viscoplastique conduit au final à la loi locale de comportement élasto-viscoplastique donnée par l'équation (3.42) contenant la variable interne $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathbf{vp}}$ dont la loi d'évolution $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathbf{vp}} = \mathbf{m}:\boldsymbol{\sigma}$ est connue.

**Le modèle de Weng (ou Kröner-Weng)**

Suite à l'extension élastoplastique du schéma autocohérent proposé par Kröner, Weng [Wen81] propose de traiter l'extension élasto-viscoplastique du schéma autocohérent en considérant la vitesse de déformation viscoplastique $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathbf{vp}}$ comme une vitesse de déformation « libre de contraintes » au sens d'Eshelby.

Soit un matériau hétérogène de volume V et d'élasticité **c(r)** soumis à une vitesse de déformation uniforme $\dot{\mathbf{E}}$ à l'infini et dans lequel règne un champ de vitesse de déformation libre $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathbf{vp}}$. Les équations de champs du problème mécanique s'écrivent :

| | | |
|---|---|---|
| Loi de comportement : | $\dot{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{r}) = \mathbf{c}(\mathbf{r}) : \left(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{r}) - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathbf{vp}}(\mathbf{r})\right)$ | **(3.45)** |
| Equation d'équilibre : | $\mathrm{div}(\dot{\boldsymbol{\sigma}}) = \mathbf{0}$ | **(3.46)** |
| Condition de compatibilité cinématique : | $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \nabla^s \underline{\dot{\mathbf{u}}}$ | **(3.47)** |
| Conditions aux limites : | $\underline{\dot{\mathbf{u}}_{\mathbf{d}}} = \dot{\mathbf{E}}.\underline{\mathbf{x}}$ sur $\partial V$ | **(3.48)** |

où $\mathbf{r}(x_1, x_2, x_3)$ représente la position du point M dans le volume V.

Weng introduit un milieu homogène de référence d'élasticité $\mathbf{C}$ soumis à un champ de vitesses de déformation viscoplastique de référence uniforme $\dot{\mathbf{E}}^{vp}$ tel que :

$$\mathbf{c}(\mathbf{r}) = \mathbf{C}+\boldsymbol{\delta}\mathbf{c}(\mathbf{r}) \qquad \textbf{(3.49)}$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp}(\mathbf{r}) = \dot{\mathbf{E}}^{vp}+\boldsymbol{\delta}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp}(\mathbf{r}) \qquad \textbf{(3.50)}$$

La formulation du problème hétérogène à l'aide de l'équation de Navier et des fonctions de Green conduit à l'équation intégrale suivante [Wen81] :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{r}) = \dot{\mathbf{E}} - \int_V \boldsymbol{\Gamma}^{\mathbf{C}}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') : \left[\boldsymbol{\delta}\mathbf{c}(\mathbf{r}') : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{e}(\mathbf{r}') - \mathbf{C} : \boldsymbol{\delta}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp}(\mathbf{r}')\right] dV' \qquad \textbf{(3.51)}$$

où $\Gamma^{C}_{ijkl} = -\frac{1}{2}\left(G^{C}_{ik,jl} + G^{C}_{jk,il}\right)$ désigne le tenseur de Green modifié associé au milieu infini élastique de module $\mathbf{C}$.

Il est remarquable de constater que l'équation intégrale **(3.51)** comporte des termes locaux (en $\mathbf{r}$) et des termes non locaux (en $\mathbf{r}'$). L'approximation autocohérente va permettre de ramener cette équation sous une forme plus locale. Dans ce but, il est nécessaire de décomposer le tenseur de Green modifié $\boldsymbol{\Gamma}^{\mathbf{C}}$ en une partie locale $\boldsymbol{\Gamma}^{\mathbf{C}}_{\mathbf{l}}$ et une partie non locale $\boldsymbol{\Gamma}^{\mathbf{C}}_{\mathbf{nl}}$ [Ded73] :

$$\boldsymbol{\Gamma}^{\mathbf{C}}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\boldsymbol{\Gamma}^{\mathbf{C}}_{\mathbf{l}} + \boldsymbol{\Gamma}^{\mathbf{C}}_{\mathbf{nl}}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \qquad \textbf{(3.52)}$$

où $\delta(\mathbf{r})$ est la fonction de Dirac. L'équation intégrale **(3.51)** s'écrit alors :

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{r}) = \dot{\mathbf{E}} &- \boldsymbol{\Gamma}^{\mathbf{C}}_{\mathbf{l}}(\mathbf{r}) : \left(\boldsymbol{\delta}\mathbf{c}(\mathbf{r}) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{e}(\mathbf{r}) - \mathbf{C} : \boldsymbol{\delta}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp}(\mathbf{r})\right) \\ &- \int_{\substack{V \\ r'\neq r}} \boldsymbol{\Gamma}^{\mathbf{C}}_{\mathbf{nl}}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') : \left[\boldsymbol{\delta}\mathbf{c}(\mathbf{r}') : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{e}(\mathbf{r}') - \mathbf{C} : \boldsymbol{\delta}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp}(\mathbf{r}')\right] dV' \end{aligned} \qquad \textbf{(3.53)}$$

Weng applique l'approximation autocohérente de Kröner dont l'objectif est de choisir $\mathbf{C}$ et $\dot{\mathbf{E}}^{vp}$ afin d'affaiblir la contribution non locale de l'équation intégrale (3.53). Le terme non local décroît rapidement en $\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$ [Kro89] et peut être négligé en imposant la condition de moyenne sur le volume :

$$\overline{\boldsymbol{\delta}\mathbf{c}(\mathbf{r}) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{e}(\mathbf{r}) - \mathbf{C} : \boldsymbol{\delta}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp}(\mathbf{r})} = \mathbf{0} \qquad \textbf{(3.54)}$$

L'application de cette condition de moyenne sur la loi de comportement (3.45) en utilisant les fluctuations de champs (3.49) et (3.50) conduit à la loi macroscopique suivante :

$$\dot{\boldsymbol{\Sigma}} = \mathbf{C} : \left(\dot{\mathbf{E}} - \dot{\mathbf{E}}^{vp}\right) \qquad \textbf{(3.55)}$$

où $\mathbf{C}$ et $\dot{\mathbf{E}}^{vp}$ se retrouvent être respectivement le module élastique et le taux de déformation viscoplastique effectifs par application de l'approximation autocohérente. L'équation intégrale se retrouve également réduite à sa partie locale :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\mathbf{E}} - \boldsymbol{\Gamma}_1^C : \left(\boldsymbol{\delta c} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e - \mathbf{C} : \boldsymbol{\delta}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp}\right) \qquad \textbf{(3.56)}$$

La relation de localisation s'écrit au final :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{A}^C : \dot{\mathbf{E}} + \mathbf{A}^C : \boldsymbol{\Gamma}_1^C : \left(\mathbf{c} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp} - \mathbf{C} : \dot{\mathbf{E}}^{vp}\right) \qquad \textbf{(3.57)}$$

où $\mathbf{A}^C = \left(\mathbf{I} + \boldsymbol{\Gamma}_1^C : \boldsymbol{\delta c}\right)^{-1}$ est le tenseur de localisation élastique. Les conditions de moyenne $\overline{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}} = \dot{\mathbf{E}}$ et $\overline{\dot{\boldsymbol{\sigma}}} = \dot{\boldsymbol{\Sigma}}$ permettent d'obtenir respectivement les expressions du taux de déformation viscoplastique effectif $\dot{\mathbf{E}}^{vp}$ et du module élastique effectif $\mathbf{C}$ :

$$\dot{\mathbf{E}}^{vp} = \mathbf{C}^{-1} : \boldsymbol{\Gamma}_1^{C^{-1}} : \overline{\mathbf{A}^C : \boldsymbol{\Gamma}_1^C : \mathbf{c} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp}} \qquad \textbf{(3.58)}$$

$$\mathbf{C} = \overline{\mathbf{c} : \mathbf{A}^C} \qquad \textbf{(3.59)}$$

En injectant la loi de localisation (3.57) dans la loi de comportement (3.45), on aboutit à la loi d'interaction suivante pour le modèle de Weng :

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{c} : \mathbf{A}^C : \mathbf{C}^{-1} : \dot{\boldsymbol{\Sigma}} - \mathbf{c} : \mathbf{A}^C : \left(\mathbf{I} - \mathbf{S}^{Esh}\right) : \left(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp} - \dot{\mathbf{E}}^{vp}\right) \qquad \textbf{(3.60)}$$

Dans le cas de l'élasticité homogène isotrope, la loi d'interaction que l'on obtient est celle de Kröner formulée en vitesse :

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \dot{\boldsymbol{\Sigma}} - \mathbf{C} : \left(\mathbf{I} - \mathbf{S}^{Esh}\right) : \left(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp} - \dot{\mathbf{E}}^{vp}\right) \qquad \textbf{(3.61)}$$

Dans le cas d'inclusions sphériques et de façon similaire au modèle de Kröner, la loi d'interaction se simplifie davantage et s'écrit simplement à l'aide du module de cisaillement $\mu$ et du coefficient d'accommodation $\beta$ :

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \dot{\boldsymbol{\Sigma}} + 2\mu\left(1-\beta\right)\left(\dot{\mathbf{E}}^{vp} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp}\right) \qquad \text{avec :} \quad \beta = \frac{2\left(4-5\nu\right)}{15\left(1-\nu\right)} \qquad \textbf{(3.62)}$$

Pour des vitesses de déformation quasi-statiques, il est aisé de constater que les modèles de Weng et de Kröner sont confondus et conduisent tous deux à des résultats trop raides proches du modèle de Taylor-Lin (cf. **III.2.2** )

Weng cumule ainsi dans son approche deux approximations fortes. En considérant la vitesse de déformation libre $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp}$ comme une vitesse de déformation libre de contraintes, il adopte, à l'image de l'approximation de Kröner en élastoplasticité, une accommodation purement élastique et non élasto-viscoplastique entre la matrice et l'inclusion. Ceci se vérifie aisément en remarquant que les tenseurs d'interaction dans les lois (3.61) et (3.62) sont de nature purement élastique. Enfin, en attribuant une vitesse de déformation viscoplastique $\dot{\mathbf{E}}^{vp}$

uniforme à la matrice, il ne prend pas en compte la variation spatiale du champ de vitesse de déformation (accommodation viscoplastique) au sein de la matrice due à la présence de l'inclusion. Hill, qui avait également attribué des modules uniformes à la matrice, avait pris le soin préalable de rendre le problème linéaire ce qui n'est pas le cas ici [Bor01b]. Ainsi, un point de la matrice qu'il soit situé proche de l'inclusion ou au contraire loin de son voisinage se voit attribuer la même vitesse de déformation viscoplastique dans le modèle de Weng ce qui est peu réaliste et conduit à des résultats trop raides.

### III.3.3 Insuffisance du schéma autocohérent classique

En considérant la déformation viscoplastique figée pendant la transition d'échelles, le modèle de Weng, à l'image du modèle de Kröner en élastoplasticité, ne peut décrire qu'une accommodation élastique. Afin de tenir compte d'une véritable accommodation élasto-viscoplastique de la matrice autour de l'inclusion, il semble nécessaire de considérer l'évolution de la vitesse de déformation viscoplastique $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathbf{vp}}$ dans l'étape de localisation. Dans cette optique, il faut compléter les équations du problème en précisant l'évolution de $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathbf{vp}}$ dans la loi de comportement. Les équations du problème deviennent alors [Paq98] :

Loi de comportement : $\dot{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{r}) = \mathbf{c}(\mathbf{r}) : \left(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{r}) - \mathbf{m(r)} : \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{r})\right)$ **(3.63)**

Equation d'équilibre : $\mathrm{div}(\dot{\boldsymbol{\sigma}}) = \mathbf{0}$ **(3.64)**

Condition de compatibilité cinématique : $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \nabla^{s}\underline{\dot{\mathbf{u}}}$ **(3.65)**

Conditions aux limites : $\underline{\dot{\mathbf{u}}_{\mathbf{d}}} = \dot{\mathbf{E}}.\underline{\mathbf{x}}$ sur $\partial V$ **(3.66)**

où $\mathbf{m(r)}$ est le module de viscosité tel que : $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathbf{vp}}\mathbf{(r)} = \mathbf{m(r)} : \boldsymbol{\sigma}\mathbf{(r)}$. Dans le cas d'un matériau hétérogène viscoélastique, l'équation intégrale s'écrit [Paq98] :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\mathbf{E}} - \underbrace{\boldsymbol{\Gamma}^{\mathbf{C}} * \left(\boldsymbol{\delta}\mathbf{c} : \left(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \mathbf{m} : \boldsymbol{\sigma}\right) - \mathbf{C} : \boldsymbol{\delta}\mathbf{m} : \boldsymbol{\sigma}\right)}_{\text{terme 1}} + \underbrace{\boldsymbol{\Gamma}^{\mathbf{C}} * \left(\mathbf{C} : \mathbf{M} : \boldsymbol{\sigma}\right)}_{\text{terme 2}} \qquad \textbf{(3.67)}$$

où $*$ désigne le produit de convolution spatial et $\mathbf{C}$ le module d'élasticité du milieu homogène de référence et le module homogène de viscosité $\mathbf{M}$ sont tels que :

$$\mathbf{c}(\mathbf{r}) = \mathbf{C} + \boldsymbol{\delta}\mathbf{c}(\mathbf{r}) \qquad \textbf{(3.68)}$$

$$\mathbf{m}(\mathbf{r}) = \mathbf{M} + \boldsymbol{\delta}\mathbf{m}(\mathbf{r}) \qquad \textbf{(3.69)}$$

Comme nous l'avons vu précédemment, l'application de l'approximation autocohérente vise à simplifier l'équation intégrale (3.67) en affaiblissant la contribution non locale des termes 1 et 2 de manière à rendre l'équation la plus locale possible. Paquin [Paq98] a montré que le terme 2 se prêtait difficilement au traitement autocohérent classique et qu'au lieu de se contenter de le réduire à sa partie locale, il convenait de l'évaluer au mieux sous peine de dénaturer le problème. Kouddane *et al.* [Kou94] propose d'effectuer un choix particulier du milieu de référence $\mathbf{M}$ permettant d'annuler le terme gênant de l'équation intégrale (terme 2). Basé sur de fortes hypothèses comme la forme arbitraire du tenseur $\mathbf{M}$ ($\mathbf{C} : \mathbf{M} = \lambda\mathbf{I}$, $\lambda$ réel ), le modèle de Kouddane manque de précision dans la description des interactions viscoélastiques. Si dans le cas particulier d'un matériau biphasé maxwellien isotrope et incompressible, le modèle de Kouddane est en bon accord lors de la charge du matériau avec la solution

analytique de Rougier *et al.* [Rou94b], il montre des instabilités numériques lors de la décharge [Paq98]. Dans le cas général, les conditions trop restrictives du modèle de Kouddane visant à éliminer le terme 2 de l'équation intégrale entraînent certaines incohérences dans les résultats. Il convient donc selon l'analyse menée par Paquin de mieux évaluer ce terme intégral.

L'application classique du schéma autocohérent se révèle insuffisante du fait de la présence d'un terme intégral dont l'évaluation est difficile. Au travers de l'analyse des modèles de Weng et de Kouddane, Paquin se pose la question de la genèse du terme « gênant » apparaissant dans l'équation intégrale. Celui-ci est dû à la présence « non naturelle » du milieu de référence de module $\mathbf{M}$ du fait du traitement privilégié de l'élasticité dans la formulation intégrale. Cette réflexion amène alors Paquin à définir une formulation plus générale et plus complète du problème, basée sur un traitement symétrique de l'élasticité et de la viscoplasticité donnant naissance à un nouveau type de modèles nécessitant une application non classique de l'approximation autocohérente.

### III.3.4 Les modèles à champs translatés

Deux modèles se sont succédé : le modèle de Paquin *et al.* [Paq98] suivi chronologiquement du modèle de Berbenni *et al.* [Ber02].

**Equations du problème**

La formulation complète du problème hétérogène viscoplastique repose sur la résolution du système suivant :

Loi de comportement : $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{r},t) = \mathbf{s}(\mathbf{r}) : \dot{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{r},t) + \mathbf{m}(\mathbf{r},\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\varepsilon}^{vp},...) : \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{r},t)$ **(3.70)**

Equation d'équilibre sur le champ $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ inconnu : $\mathrm{div}(\dot{\boldsymbol{\sigma}}) = \mathbf{0}$ **(3.71)**

Equation d'équilibre sur le champ $\boldsymbol{\sigma}$ connu à t : $\mathrm{div}(\boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{0}$ **(3.72)**

Condition de compatibilité cinématique : $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \nabla^s \dot{\underline{\mathbf{u}}}$ **(3.73)**

Conditions aux limites : $\dot{\underline{\mathbf{u}}}_{\mathbf{d}} = \dot{\mathbf{E}}.\underline{\mathbf{x}}$ sur $\partial V$ **(3.74)**

L'adjonction de l'équation (3.72), qui représente l'équilibre statique sur le champ $\boldsymbol{\sigma}$ connu à chaque instant t, vient compléter en s'inspirant du modèle de Kouddane les équations de champ du problème. On dispose donc d'un système d'équations composé d'une loi de comportement élasto-viscoplastique (où la partie visqueuse qui évolue est décrite ici à l'aide d'un module sécant mais pas nécessairement) et d'équations mécaniques propres à chacun des champs intervenants. Toute l'histoire du matériau est contenue dans les variables internes $\boldsymbol{\sigma}$ et $\boldsymbol{\varepsilon}^{vp}$.

**Les opérateurs de projection**

Afin de traiter le système complet d'équations, les modèles à champs translatés utilisent les opérateurs de projection $\boldsymbol{\Pi}^{\mathbf{C}}$ et $\boldsymbol{\Pi}^{\mathbf{B}}$ introduits par Kunin [Kun81a], [Kun81b], [Kun83] :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\Pi}^{\mathbf{C}} = \boldsymbol{\Gamma}^{\mathbf{C}} : \mathbf{C} \\ \boldsymbol{\Pi}^{\mathbf{B}} = \boldsymbol{\Gamma}^{\mathbf{B}} : \mathbf{B} \end{cases} \quad \textbf{(3.75)}$$

où **C** et **B** sont respectivement les tenseurs d'ordre 4 des modules d'élasticité et des modules (sécants) de viscoplasticité.

Ces opérateurs, de par leur propriétés, se révèlent être plus commodes que les opérateurs de Green pour traiter le problème du matériau hétérogène élasto-viscoplastique [Paq98]. Sans vouloir entrer dans le détail de la démonstration de ces propriétés, nous nous contentons ici de rappeler les deux propriétés utilisées dans la méthode des champs translatés :

$$\mathbf{P1:}\quad \begin{cases} \forall \text{ le champ équilibré } \dot{\boldsymbol{\sigma}}, \\ \operatorname{div} \dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \boldsymbol{\Pi}^{\mathbf{C}} * \mathbf{S} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{0} \end{cases} \qquad \textbf{(3.76)}$$

$$\mathbf{P2:}\quad \begin{cases} \forall \text{ le champ cinématique admissible } \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}, \\ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \nabla^{s} \underline{\dot{\mathbf{u}}},\ \underline{\dot{\mathbf{u}}}^{\mathbf{d}} = \dot{\mathbf{E}}.\underline{\mathbf{x}} \Leftrightarrow \boldsymbol{\Pi}^{\mathbf{C}} * \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\mathbf{E}} \end{cases} \qquad \textbf{(3.77)}$$

**Système équivalent d'équations**

L'application des propriétés des opérateurs de projections transforme le premier système d'équations en un nouveau système équivalent :

Loi de comportement : $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{r},t) = \mathbf{s}(\mathbf{r}) : \dot{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{r},t) + \mathbf{m}(\mathbf{r},\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{vp}},\ldots) : \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{r},t)$ **(3.78)**

Equation d'équilibre sur $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ inconnu : $\boldsymbol{\Pi}^{\mathbf{C}} * \mathbf{S} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{0}$ **(3.79)**

Equation d'équilibre sur $\boldsymbol{\sigma}$ connu : $\boldsymbol{\Pi}^{\mathbf{B}} * \mathbf{M} : \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}$ (ou $\boldsymbol{\Pi}^{\mathbf{C}} * \mathbf{S} : \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}$) **(3.80)**

Condition de compatibilité cinématique : $\boldsymbol{\Pi}^{\mathbf{C}} * \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\mathbf{E}}$ **(3.81)**

**Le modèle de Paquin *et al.***

La démarche de Paquin [Paq98], [Paq99], [Paq01] vise à respecter la symétrie entre élasticité et viscoplasticité du problème hétérogène viscoplastique. Dans cette optique, Paquin introduit un milieu de référence de complaisances élastiques homogènes **S** et de complaisances viscoplastiques homogènes **M** permettant de décrire les modules $\mathbf{s}(\mathbf{r})$ et $\mathbf{m}(\mathbf{r})$ ainsi que leurs tenseurs inverses $\mathbf{c}(\mathbf{r})$ et $\mathbf{b}(\mathbf{r})$ en terme de fluctuations :

$$\begin{cases} \mathbf{s}(\mathbf{r}) = \mathbf{S} + \boldsymbol{\delta}\mathbf{s}(\mathbf{r}) \\ \mathbf{c}(\mathbf{r}) = \mathbf{C} + \boldsymbol{\delta}\mathbf{c}(\mathbf{r}) \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \mathbf{c} = \mathbf{s}^{-1} \\ \mathbf{C} = \mathbf{S}^{-1} \end{cases} \qquad \textbf{(3.82)}$$

$$\begin{cases} \mathbf{m}(\mathbf{r}) = \mathbf{M} + \boldsymbol{\delta}\mathbf{m}(\mathbf{r}) \\ \mathbf{b}(\mathbf{r}) = \mathbf{B} + \boldsymbol{\delta}\mathbf{b}(\mathbf{r}) \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \mathbf{b} = \mathbf{m}^{-1} \\ \mathbf{B} = \mathbf{M}^{-1} \end{cases} \qquad \textbf{(3.83)}$$

L'application de l'opérateur $\boldsymbol{\Pi}^{\mathbf{CB}} = \boldsymbol{\Pi}^{\mathbf{C}} + \boldsymbol{\Pi}^{\mathbf{B}}$ à la loi de comportement (3.78) préalablement modifiée par l'introduction des termes de fluctuations (3.82) et (3.83) conduit à l'équation intégrale suivante :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\mathbf{E}} + \underbrace{\boldsymbol{\Pi}^{\mathbf{C}} * (\boldsymbol{\delta}\mathbf{s} : \dot{\boldsymbol{\sigma}})}_{\text{terme } \alpha} + \underbrace{\boldsymbol{\Pi}^{\mathbf{B}} * (\boldsymbol{\delta}\mathbf{m} : \boldsymbol{\sigma})}_{\text{terme } \beta} + \underbrace{(\boldsymbol{\Pi}^{\mathbf{C}} - \boldsymbol{\Pi}^{\mathbf{B}}) * (\mathbf{m} : \boldsymbol{\sigma})}_{\text{terme } \gamma} \qquad \textbf{(3.84)}$$

L'auteur souligne la richesse sur le plan mécanique de cette équation intégrale qui, de manière symétrique, traduit les différentes interactions mécaniques existantes. La vitesse de déformation locale $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ dépend de la vitesse de déformation macroscopique $\dot{\mathbf{E}}$ mais aussi de trois termes :

- un terme $\alpha$ de nature élastique liant l'opérateur $\boldsymbol{\Pi}^{\mathbf{C}}$ au terme élastique $\boldsymbol{\delta s : \dot{\sigma}}$,
- un terme $\beta$ de nature viscoplastique liant l'opérateur $\boldsymbol{\Pi}^{\mathbf{B}}$ au terme viscoplastique $\boldsymbol{\delta m : \sigma}$,
- un terme $\gamma$ de nature mixte, sans fluctuation, dépendant de la différence $\left(\boldsymbol{\Pi}^{\mathbf{C}} - \boldsymbol{\Pi}^{\mathbf{B}}\right)$ et de la vitesse de déformation viscoplastique $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathbf{vp}} = \mathbf{m : \sigma}$.

L'introduction symétrique des opérateurs de projection $\boldsymbol{\Pi}^{\mathbf{C}}$ et $\boldsymbol{\Pi}^{\mathbf{B}}$ a permis de prendre en compte l'ensemble des différentes équations mécaniques du problème hétérogène élasto-viscoplastique tout en respectant les conditions d'équilibre statique et les conditions d'équilibre en vitesse comme le suggérait la nouvelle formulation. La résolution de l'équation intégrale reste difficile à mettre en œuvre du fait de la présence des produits de convolution, et des termes non locaux qui apparaissent non seulement dans les tenseurs de Green dont dépendent les opérateurs de projection $\boldsymbol{\Pi}^{\mathbf{C}}$ et $\boldsymbol{\Pi}^{\mathbf{B}}$ mais aussi dans les champs $\mathbf{c}\left(\mathbf{r}'\right)$ et $\mathbf{b}\left(\mathbf{r}'\right)$.

L'équation intégrale nécessite d'être simplifiée afin d'être résolue. Le principe du schéma autocohérent consiste à affaiblir les interactions non locales en se reposant sur la décomposition du tenseur de Green modifié en une partie locale et une partie non locale négligeable sous certaines conditions. A l'image des modèles précédents, l'approximation autocohérente classique dans la démarche de Paquin conduit également à une impasse et ce, malgré les efforts effectués afin de rendre plus riche l'équation intégrale. Face à l'échec de l'approche autocohérente classique, Paquin développe une approche autocohérente originale en cherchant à trouver des champs fictifs particuliers mettant à profit les propriétés des opérateurs de projection. En se basant sur les états asymptotiques du comportement que sont l'élasticité pure et la viscoplasticité pure, Paquin propose un nouveau type d'approximation autocohérente basée sur la translation des champs de vitesses de déformation élastiques $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathbf{e}}$ et viscoplastiques $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathbf{vp}}$ par rapport à des champs fictifs $\dot{\mathbf{e}}^{\mathbf{e}}$ et $\dot{\mathbf{e}}^{\mathbf{vp}}$ :

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathbf{e}}\left(\mathbf{r}\right) = \dot{\mathbf{e}}^{\mathbf{e}}\left(\mathbf{r}\right) + \boldsymbol{\delta}\dot{\mathbf{e}}^{\mathbf{e}}\left(\mathbf{r}\right) \\ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathbf{vp}}\left(\mathbf{r}\right) = \dot{\mathbf{e}}^{\mathbf{vp}}\left(\mathbf{r}\right) + \boldsymbol{\delta}\dot{\mathbf{e}}^{\mathbf{vp}}\left(\mathbf{r}\right) \end{cases} \qquad \textbf{(3.85)}$$

Le champ fictif $\dot{\mathbf{e}}^{\mathbf{e}}$ correspond au champ fictif des vitesses de déformation élastiques qui règnerait si le matériau était purement élastique, soumis à un champ de vitesses uniformes $\dot{\mathbf{X}}$ à l'infini de telle sorte qu'il soit dans le même état de contraintes que le matériau hétérogène viscoplastique. Le champ fictif $\dot{\mathbf{e}}^{\mathbf{vp}}$ est son homologue pour le problème du matériau purement viscoplastique soumis à un champ de vitesses uniformes $\dot{\mathbf{Y}}$ à l'infini. Ces deux problèmes peuvent être résolus par l'approche autocohérente classique. Les champs fictifs $\dot{\mathbf{e}}^{\mathbf{e}}$ et $\dot{\mathbf{e}}^{\mathbf{vp}}$ sont donc cinématiquement admissibles et reliés aux champs uniformes $\dot{\mathbf{X}}$ et $\dot{\mathbf{Y}}$ tels que :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{e}}^{\mathbf{e}}(\mathbf{r}) = \mathbf{A}^{\mathbf{C}^e}(\mathbf{r}) : \dot{\mathbf{X}} \\ \dot{\mathbf{e}}^{\mathbf{vp}}(\mathbf{r}) = \mathbf{A}^{\mathbf{B}^e}(\mathbf{r}) : \dot{\mathbf{Y}} \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \mathbf{A}^{\mathbf{C}^e} = \left(\mathbf{I} + \boldsymbol{\Gamma}^{\mathbf{C}^e} * \delta\mathbf{c}\right)^{-1} \\ \mathbf{A}^{\mathbf{B}^e} = \left(\mathbf{I} + \boldsymbol{\Gamma}^{\mathbf{B}^e} * \delta\mathbf{b}\right)^{-1} \end{cases} \tag{3.86}$$

où $\mathbf{A}^{\mathbf{C}^e}$ est le tenseur de localisation des déformations du problème purement élastique associé au module homogène élastique de référence $\mathbf{C}^e$ du même problème. De manière analogue, $\mathbf{A}^{\mathbf{B}^e}$ est le tenseur de localisation des déformations du problème viscoplastique pur associé au module homogène viscoplastique de référence $\mathbf{B}^e$ du même problème viscoplastique pur.

En utilisant les propriétés des opérateurs sur les champs cinématiquement admissibles $\dot{\mathbf{e}}^e$ et $\dot{\mathbf{e}}^{vp}$, l'application du schéma autocohérent sur le problème « à champs translatés » aboutit à la relation de localisation suivante :

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = {} & \mathbf{A}^{\mathbf{C}^e} : \dot{\mathbf{E}} \\ & + \mathbf{A}^{\mathbf{C}^e} : \boldsymbol{\Gamma}_1^{\mathbf{C}^e} : \left( \delta\mathbf{c} : \mathbf{m} : \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{c} : \mathbf{A}^{\mathbf{C}^e} : \overline{{}^t\mathbf{B}^{\mathbf{C}^e} : \left( \mathbf{m} : \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{A}^{\mathbf{B}^e} : \overline{\mathbf{m} : \boldsymbol{\sigma}} \right)} \right) \\ & - \mathbf{A}^{\mathbf{C}^e} : \boldsymbol{\Gamma}_1^{\mathbf{B}^e} : \left( \delta\mathbf{b} : \mathbf{m} : \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} : \mathbf{A}^{\mathbf{B}^e} : \overline{\delta\mathbf{m} : \boldsymbol{\sigma}} \right) \\ & + \mathbf{A}^{\mathbf{C}^e} : \left( \boldsymbol{\Gamma}_1^{\mathbf{C}^e} : \mathbf{C}^e - \boldsymbol{\Gamma}_1^{\mathbf{B}^e} : \mathbf{B}^e \right) : \left( \mathbf{m} : \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{A}^{\mathbf{B}^e} : \overline{\mathbf{m} : \boldsymbol{\sigma}} \right) \end{aligned} \tag{3.87}$$

où $\mathbf{B}^{\mathbf{C}^e} = \mathbf{c} : \mathbf{A}^{\mathbf{C}^e} : \mathbf{S}^e$ est le tenseur de localisation des contraintes pour le problème purement élastique avec ${}^tB^{C^e}_{ijkl} = B^{C^e}_{klij}$ . La relation de localisation en contraintes s'obtient en injectant la relation (3.87) dans la loi de comportement (3.78) :

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\sigma}} = {} & \mathbf{c} : \mathbf{A}^{\mathbf{C}^e} : \dot{\mathbf{E}} - \mathbf{c} : \mathbf{m} : \boldsymbol{\sigma} \\ & + \mathbf{c} : \mathbf{A}^{\mathbf{C}^e} : \boldsymbol{\Gamma}_1^{\mathbf{C}^e} : \left( \delta\mathbf{c} : \mathbf{m} : \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{c} : \mathbf{A}^{\mathbf{C}^e} : \overline{{}^t\mathbf{B}^{\mathbf{C}^e} : \left( \mathbf{m} : \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{A}^{\mathbf{B}^e} : \overline{\mathbf{m} : \boldsymbol{\sigma}} \right)} \right) \\ & - \mathbf{c} : \mathbf{A}^{\mathbf{C}^e} : \boldsymbol{\Gamma}_1^{\mathbf{B}^e} : \left( \delta\mathbf{b} : \mathbf{m} : \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} : \mathbf{A}^{\mathbf{B}^e} : \overline{\delta\mathbf{m} : \boldsymbol{\sigma}} \right) \\ & + \mathbf{c} : \mathbf{A}^{\mathbf{C}^e} : \left( \boldsymbol{\Gamma}_1^{\mathbf{C}^e} : \mathbf{C}^e - \boldsymbol{\Gamma}_1^{\mathbf{B}^e} : \mathbf{B}^e \right) : \left( \mathbf{m} : \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{A}^{\mathbf{B}^e} : \overline{\mathbf{m} : \boldsymbol{\sigma}} \right) \end{aligned} \tag{3.88}$$

En adaptant le schéma autocohérent aux spécificités du problème hétérogène élasto-viscoplastique (notamment en appliquant l'approximation autocohérente sur des champs fictifs permettant de tirer profit des propriétés des opérateurs de projection), Paquin parvient à traiter convenablement l'étape de localisation. Le modèle de Paquin aboutit à une équation de localisation cohérente vis-à-vis des champs mécaniques impliqués en fonction de champs fictifs correspondants aux états asymptotiques purement élastique et purement visqueux.

**Le modèle de Berbenni *et al.***

Inspiré par la démarche à champs translatés du modèle de Paquin *et al.* [Paq98], [Paq99], le modèle de Berbenni *et al.* [Ber02], [Sab02], [Ber04] suit une démarche similaire mais simplifiée, sans toutefois respecter un traitement symétrique entre élasticité et viscoplasticité. Les équations du problème hétérogène élasto-viscoplastique (équations (3.78)

à (3.81)) restent les mêmes que pour le problème posé par Paquin si ce n'est que l'équation d'équilibre statique (3.80) est écrite à l'aide de l'opérateur de projection $\mathbf{\Pi}^{\mathbf{C}}$ et non à l'aide de $\mathbf{\Pi}^{\mathbf{B}}$.

L'application de l'opérateur $\mathbf{\Pi}^{\mathbf{C}}$ à la loi de comportement (3.78) préalablement modifiée par l'introduction des termes de fluctuations (3.82) sur $\mathbf{c}(\mathrm{r})$ et $\mathbf{s}(\mathrm{r})$ conduit à l'équation intégrale suivante :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\mathbf{E}} + \mathbf{\Pi}^{\mathbf{C}} * \left( \boldsymbol{\delta}\mathbf{s} : \mathbf{c} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathbf{e}} + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathbf{vp}} \right) \qquad \textbf{(3.89)}$$

L'originalité consiste à choisir comme milieu de référence de module $\mathbf{C}$ directement le module effectif $\mathbf{C}^{\mathbf{e}} = \overline{\mathbf{c} : \mathbf{A}^{\mathbf{C}^{\mathbf{e}}}}$ issu de l'opérateur de Navier et de l'approximation autocohérente en élasticité. En effet, le module $\mathbf{C}^{\mathbf{e}} = \overline{\mathbf{c} : \mathbf{A}^{\mathbf{C}^{\mathbf{e}}}}$ remplit déjà les propriétés de compatibilité cinématique requises par les opérateurs de projection. L'équation intégrale devient :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\mathbf{E}} + \mathbf{\Pi}^{\mathbf{C}^{\mathbf{e}}} * \left( \boldsymbol{\delta}\mathbf{s}^{\mathbf{e}} : \mathbf{c} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathbf{e}} + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathbf{vp}} \right) \qquad \textbf{(3.90)}$$

avec : $\begin{cases} \mathbf{c}(\mathbf{r}) = \mathbf{C}^{\mathbf{e}} + \boldsymbol{\delta}\mathbf{c}^{\mathbf{e}}(\mathbf{r}) \\ \mathbf{s}(\mathbf{r}) = \mathbf{S}^{\mathbf{e}} + \boldsymbol{\delta}\mathbf{s}^{\mathbf{e}}(\mathbf{r}) \end{cases}$ et $\mathbf{A}^{\mathbf{C}^{\mathbf{e}}} = \left( \mathbf{I} + \mathbf{\Gamma}^{\mathbf{C}^{\mathbf{e}}} * \boldsymbol{\delta}\mathbf{c}^{\mathbf{e}} \right)^{-1}$.

Berbenni *et al.* translatent uniquement le champ des vitesses de déformation viscoplastiques $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathbf{vp}}$ à l'aide d'un champ cinématiquement admissible $\dot{\mathbf{e}}^{\mathbf{vp}}(\mathrm{r})$ solution de l'approximation autocohérente effectué sur un matériau purement viscoplastique soumis à un champ uniforme $\dot{\mathbf{Z}}$ :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{e}}^{\mathbf{vp}}(\mathbf{r}) = \mathbf{A}^{\mathbf{B}^{\mathbf{e}}}(\mathbf{r}) : \dot{\mathbf{Z}} \\ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathbf{vp}}(\mathbf{r}) = \dot{\mathbf{e}}^{\mathbf{vp}}(\mathbf{r}) + \boldsymbol{\delta}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathbf{vp}}(\mathbf{r}) \end{cases} \qquad \textbf{(3.91)}$$

où $\mathbf{A}^{\mathbf{B}^{\mathbf{e}}}$ est le tenseur de localisation des déformations du problème viscoplastique pur dont le module homogène viscoplastique de référence est $\mathbf{B}^{\mathbf{e}}$ tel que : $\mathbf{B}^{\mathbf{e}} = \mathbf{b} : \mathbf{A}^{\mathbf{B}^{\mathbf{e}}}$ , $\overline{\mathbf{A}^{\mathbf{B}^{\mathbf{e}}}} = \mathbf{I}$.

Les propriétés de l'opérateur de projection $\mathbf{\Pi}^{\mathbf{C}}$ sont appliquées sur le champ cinématiquement admissible $\dot{\mathbf{e}}^{\mathbf{vp}}(\mathbf{r})$ afin de transformer l'équation intégrale. L'approximation autocohérente consiste alors à choisir le module $\dot{\mathbf{Z}}$ afin d'affaiblir les contributions non locales pour simplifier l'équation intégrale. Celui-ci est identifié comme étant égal au tenseur des vitesses de déformation viscoplastiques effectif : $\dot{\mathbf{Z}} = \dot{\mathbf{E}}^{\mathbf{vp}} = \overline{{}^{\mathbf{t}}\mathbf{B}^{\mathbf{C}^{\mathbf{e}}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathbf{vp}}}$. La relation de localisation en déformation obtenue est finalement :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{A}^{\mathbf{C}^{\mathbf{e}}} : \left( \dot{\mathbf{E}} - \dot{\mathbf{E}}^{\mathbf{vp}} \right) + \mathbf{A}^{\mathbf{C}^{\mathbf{e}}} : \mathbf{A}^{\mathbf{B}^{\mathbf{e}}} : \dot{\mathbf{E}}^{\mathbf{vp}} + \mathbf{A}^{\mathbf{C}^{\mathbf{e}}} : \mathbf{\Gamma}_{\mathbf{l}}^{\mathbf{C}^{\mathbf{e}}} : \left( \mathbf{c} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathbf{vp}} - \mathbf{C}^{\mathbf{e}} : \mathbf{A}^{\mathbf{B}^{\mathbf{e}}} : \dot{\mathbf{E}}^{\mathbf{vp}} \right) \qquad \textbf{(3.92)}$$

La relation de localisation en contrainte s'obtient en injectant la relation de localisation en déformations dans la loi de comportement :

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{c} : \mathbf{A}^{C^e} : \mathbf{S}^e : \dot{\boldsymbol{\Sigma}} - \mathbf{c} : \mathbf{A}^{C^e} \left( \mathbf{I} - \mathbf{S}^{Esh} \right) : \left( \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp} - \mathbf{A}^{B^e} : \dot{\mathbf{E}}^{vp} \right) \qquad \textbf{(3.93)}$$

Les deux états asymptotiques utilisés pour la formulation du modèle se déduisent bien évidemment de la loi d'interaction obtenue :

$$\begin{cases} \text{élasticité pure :} \\ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp} = \dot{\mathbf{E}}^{vp} = \mathbf{0} \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} \dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{c} : \mathbf{A}^{C^e} : \mathbf{S}^e : \dot{\boldsymbol{\Sigma}} \\ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{A}^{C^e} : \dot{\mathbf{E}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{viscoplasticité pure :} \\ \dot{\boldsymbol{\sigma}} = \dot{\boldsymbol{\Sigma}} = \mathbf{0} \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{b} : \mathbf{A}^{B^e} : \mathbf{M} : \boldsymbol{\Sigma} \\ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp} = \mathbf{A}^{B^e} : \dot{\mathbf{E}} \end{cases}$$

Par rapport à la loi d'interaction du modèle de Weng (équation (3.60)), la loi d'interaction obtenue à l'aide du modèle de Berbenni *et al.* comporte un terme supplémentaire : le tenseur de localisation viscoplastique $\mathbf{A}^{B^e}$. Celui-ci est responsable d'une relaxation des contraintes de nature viscoplastique dans le modèle des champs translatés à la différence des modèles de Weng et de Kröner. Dans ces conditions, le modèle des champs translatés développé par Berbenni permet de prendre en compte des incompatibilités élasto-viscoplastiques qui ne sont pas « figées » ou « libres de contrainte » durant la transition d'échelles mais qui dépendent véritablement de l'état de contrainte local du matériau.

Par ailleurs, ce modèle paraît beaucoup plus simple à mettre en œuvre que le modèle de Paquin tout en restant rigoureux dans le traitement du problème micromécanique du matériau hétérogène élasto-viscoplastique. C'est donc vers le modèle de Berbenni que notre choix s'est porté pour traiter un tel problème. Dans la suite du manuscrit, nous nous permettons de nommer « modèle à champs translatés » le modèle de Berbenni *et al*.

## III.3.5 Conclusion

Le premier volet de ce chapitre nous a permis d'appréhender le domaine de la micromécanique au travers d'une présentation visant à montrer quels pouvaient être les avantages et les inconvénients des modèles micromécaniques vis-à-vis des approches phénoménologiques. L'avantage majeur de ces modèles réside dans la possibilité de mener une démarche inverse permettant un retour sur la microstructure. Cette démarche propose donc d'agir directement sur la source des propriétés mécaniques observées garantissant ainsi une prédictibilité accrue.

Afin de bien appréhender les différents aspects du domaine de la micromécanique qui sont utilisés et développés dans la suite de ce travail de thèse, nous avons mené une étude bibliographique des différents modèles de transition d'échelles. L'analyse des spécificités du problème micromécanique du matériau hétérogène élasto-viscoplastique a abouti au choix de deux modèles : le modèle à champs translatés de Berbenni *et al.* et le modèle en Béta de Pilvin.

Dans la suite de ce chapitre, nous nous appliquons à déterminer les limites de ces deux modèles afin de définir une solution applicable pour la simulation en mise en forme pour l'industrie.

## III.4 APPLICATION AUX ACIERS MULTIPHASES

Dans la partie précédente, nous avons présenté les principes fondamentaux de l'approche micromécanique au travers des principaux modèles de transition d'échelles avant de détailler les spécificités inhérentes au problème micromécanique hétérogène élasto-viscoplastique. L'étude de ce travail de thèse porte, rappelons-le, sur la modélisation du comportement élasto-viscoplastique des aciers multiphasés pour une utilisation finale en mise en forme. Cette étude s'inscrit pleinement dans le cadre d'une approche micromécanique visant à relier les caractéristiques microstructurales de l'acier, et plus particulièrement le multiphasage, à son comportement macroscopique. L'objectif est ici de décrire à l'aide d'un modèle de transition d'échelles les effets du multiphasage, c'est-à-dire les effets liés à la présence de plusieurs phases au sein du même acier et aux différentes interactions de nature élasto-viscoplastique qui peuvent exister entre ces phases. Le premier volet de ce chapitre nous a permis de retenir deux candidats de modèles de transition d'échelles issus des méthodes à variables internes.

Dans cette partie, nous définissons dans un premier temps le système considéré et discutons des hypothèses sous-jacentes à la modélisation appliquée. Dans un second temps, nous comparons les deux modèles sous différents angles (schéma de résolution, mise en œuvre numérique, temps de calculs etc.) afin d'en déterminer les limites. Enfin, cette comparaison nous amènera à déterminer une solution finale pour les simulations en mise en forme qui sont présentées au chapitre 5.

### III.4.1 Cadre de l'étude : un modèle multiphasé

Le matériau cible est un acier multiphasé comportant une à plusieurs phases cristallographiques (ferrite, martensite etc.). L'acier multiphasé est représenté comme un ensemble hétérogène de domaines homogènes : les phases. On considère la répartition de ces dernières suffisamment désordonnée afin de permettre l'application d'un schéma autocohérent. Considérant une seule échelle de phase, nous adoptons le schéma autocohérent à un site. Le changement d'échelles permet de relier les variables locales de chacune des phases dont le comportement est défini individuellement aux variables macroscopiques de l'acier multiphasé. Chaque phase est représentée dans le schéma autocohérent par une inclusion noyée dans le milieu homogène équivalent qui représente le comportement homogénéisé recherché.

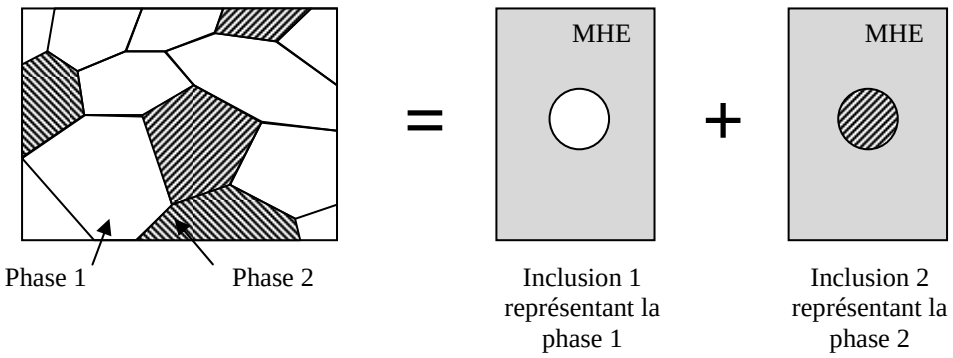


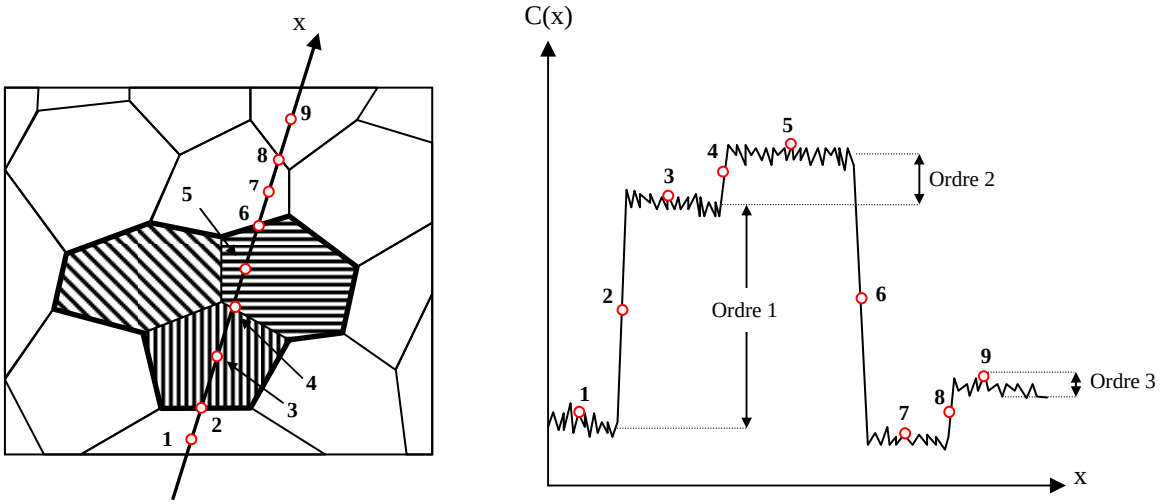

**Fig. 3.7 –** ***Application du schéma autocohérent à un site dans le cas d'un modèle multiphasé à l'échelle de la phase : cas d'un acier biphasé.***

La **Fig. 3.7** illustre cette modélisation pour le cas d'un acier biphasé. Les inclusions sont de forme sphérique : nous n'étudierons pas le cas où il existe une texture morphologique entre les phases même si le programme le permet. De même, il n'existe pas de relation topologique particulière entre les phases : la distribution des phases est isotrope.

**Comparaison avec un modèle polycristallin multiphasé**

Le schéma autocohérent, comme nous l'avons vu, se prête bien à la microstructure d'un matériau polycristallin. Dans les modèles polycristallins, l'orientation cristalline constitue généralement le critère d'hétérogénéité qui permet de regrouper les grains par famille d'orientation au sein d'une même phase. Ainsi, à chaque famille d'orientation et de phase donnée correspond une inclusion dans le schéma autocohérent.

Dans notre modèle multiphasé, nous faisons l'hypothèse forte de négliger les interactions entre grains dans la transition d'échelles. Si l'on prend l'exemple d'un acier biphasé ferrito-martensitique, le nombre de domaines homogènes différents, et donc d'inclusions dans le schéma autocohérent, sera seulement de deux : une inclusion pour la phase ferritique et une inclusion pour la phase martensitique. Les relations d'orientation entre les grains au sein d'une même phase sont négligées dans l'étape de représentation devant l'effet au premier ordre du contraste de phase (**Fig. 3.8**). Cette hypothèse forte nous conduit d'une part à nous focaliser uniquement sur les effets du multiphasage sans être perturbé par des effets de second ou de troisième ordre et permet d'autre part de réduire considérablement les temps de calculs sur le plan numérique.




*Les zones hachurées représentent des grains appartenant à une seconde phase.*

*C(x) représente une propriété de l'acier au point x (par exemple le module élastique).*

**Fig. 3.8 –** ***Profil et ordre de grandeur des hétérogénéités dans un acier multiphasé.***

Le passage d'un modèle classique polycristallin multiphasé à un modèle simplement multiphasé se fait donc au détriment d'un niveau de description d'hétérogénéités, celui de l'orientation des grains au sein d'une phase (**Fig. 3.8**). Notons que d'autres hétérogénéités microstructurales qui ont leur importance sur le comportement global, comme les joints de grain ou la taille de grain, ne sont prises en compte au travers de la transition d'échelles ni dans un modèle polycristallin ni dans un modèle multiphasé.

L'aspect cristallin n'est ici pas considéré dans la transition d'échelles mais peut être injecté en partie dans la loi de comportement affectée à chaque phase. Si la description statistique de la microstructure nécessaire à la modélisation s'en trouve simplifiée (nul besoin de recourir à des distributions d'orientations), cette simplification appelle légitimement à quelques questions auxquelles il nous faudra répondre dans les parties suivantes :

- Une loi de comportement par phase suffit-elle à décrire le comportement macroscopique d'un acier polycristallin multiphasé ?
- Une phase ferritique dans un multiphasé A se comporte-elle de la même façon qu'une phase ferritique dans un multiphasé B ?

Ces questions trouveront une partie de leurs réponses dans le chapitre IV traitant de l'introduction de longueurs internes microstructurales dans les approches à champs moyens.

### III.4.2 Transition d'échelles : Comparaison entre le modèle à champs translatés et le modèle en Béta dans le cas d'une loi de comportement en sinh

Nous avons choisi précédemment deux modèles de transition d'échelles à variables internes pour des raisons très différentes :

- le modèle à champs translatés de Berbenni *et al.*, qui constitue un modèle rigoureux sur le plan mécanique permettant de décrire avec précision les interactions élasto-viscoplastique entre constituants du matériau hétérogène,
- le modèle en Béta de Pilvin, plus pragmatique et dont la loi d'interaction est plus simple à mettre en œuvre numériquement, qui nécessite néanmoins l'identification d'un paramètre « D » permettant d'étalonner la précision de l'estimation autocohérente du modèle.

Dans cette partie nous essayons de déterminer les limites des deux méthodes au travers de cas simples afin de pouvoir dégager une solution applicable pour la simulation en mise en forme. Dans cette optique, deux solveurs écrits sous le langage Fortran permettant de réaliser des chargements séquentiels ont été réalisés afin de pouvoir comparer les résultats des deux modèles.

***Schéma de résolution pour le modèle à champs translatés***

La **Fig. 3.9** décrit de manière simplifiée le schéma complet de résolution du modèle à champs translatés de Berbenni et *al.* La résolution du problème consiste à déterminer le taux des contraintes locales $\dot{\boldsymbol{\sigma}}_i$ et le taux des déformations locales $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_i$ satisfaisant l'ensemble des équations du problème hétérogène élasto-viscoplastique. Dans ce schéma, les tenseurs de contraintes $\boldsymbol{\sigma}_i$ et les tenseurs de déformations viscoplastiques $\boldsymbol{\varepsilon}_i^{vp}$ représentent les variables internes contenant toute l'histoire de chacune des phases i constitutives de l'acier multiphasé considéré.

L'intégration numérique adoptée est le schéma d'Euler, le pas de temps est constant. Des boucles de convergence sont nécessaires pour le calcul des modules effectifs, en particulier le module effectif du problème purement viscoplastique calculé à chaque instant t (le module effectif du problème purement élastique est lui déterminé qu'une seule fois). Le reste des calculs est purement explicite.

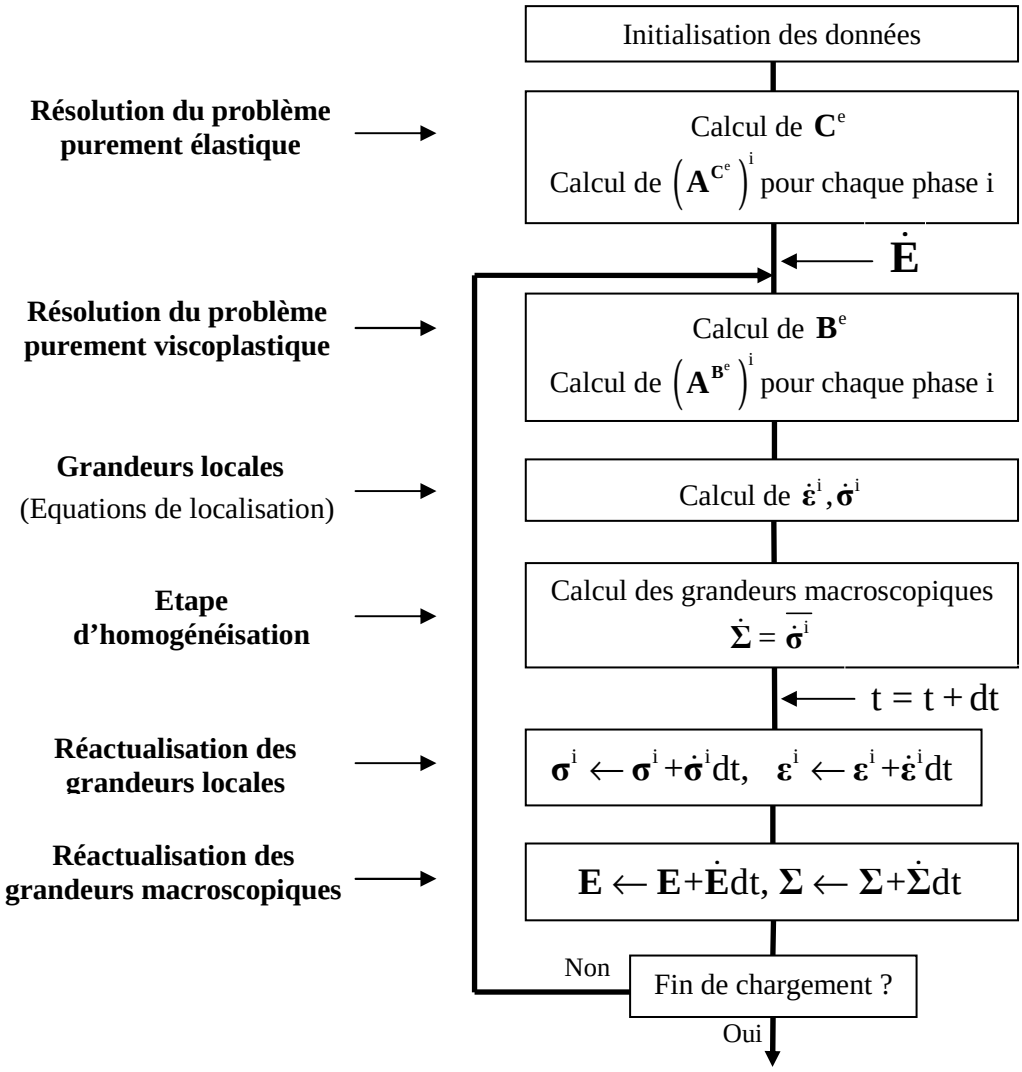



**Fig. 3.9 –** ***Schéma de résolution simplifié pour le modèle à champs translatés [Ber02].***

Notons pour finir que nous utilisons une linéarisation sécante du terme viscoplastique $\mathbf{m}^{vp}$, contribution viscoplastique de la complaisance visqueuse $\mathbf{m}$ reliant le tenseur des vitesses de déformation locales $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp}$ (cherché) au tenseur des contraintes locales $\boldsymbol{\sigma}$ (connu à chaque instant t) suivant la relation : $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp} = \mathbf{m} : \boldsymbol{\sigma}$. La complaisance visqueuse $\mathbf{m}$ est écrite comme la somme d'une contribution viscoélastique linéaire et d'une contribution viscoplastique : $\mathbf{m} = \mathbf{m}^{vl} + \mathbf{m}^{vp}$. Le tenseur $\mathbf{m}^{vp}$ est un tenseur incompressible anisotrope non inversible. Le terme viscoélastique linéaire déterminé par Berbenni [Ber02] permet d'inverser le tenseur $\mathbf{m}$ dans les premiers pas de calcul puis devient négligeable devant le terme viscoplastique qui augmente sous forme exponentielle (**Fig. 3.10**).

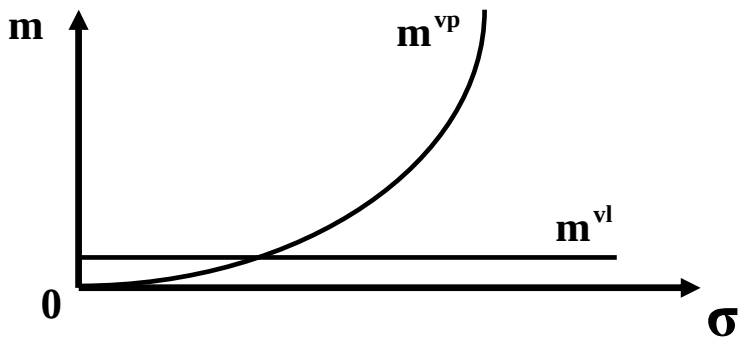



**Fig. 3.10 –** ***Evolution schématique avec la contrainte des tenseurs de complaisances viscoélastiques linéaires $m^{vl}$ et viscoplastiques $m^{vp}$ [Ber02].***

***Schéma de résolution pour le modèle en Béta***

Le schéma de résolution simplifié, en petites déformations, est représenté sur la **Fig. 3.11**. L'intégration est purement explicite et il n'y aucune boucle de convergence.

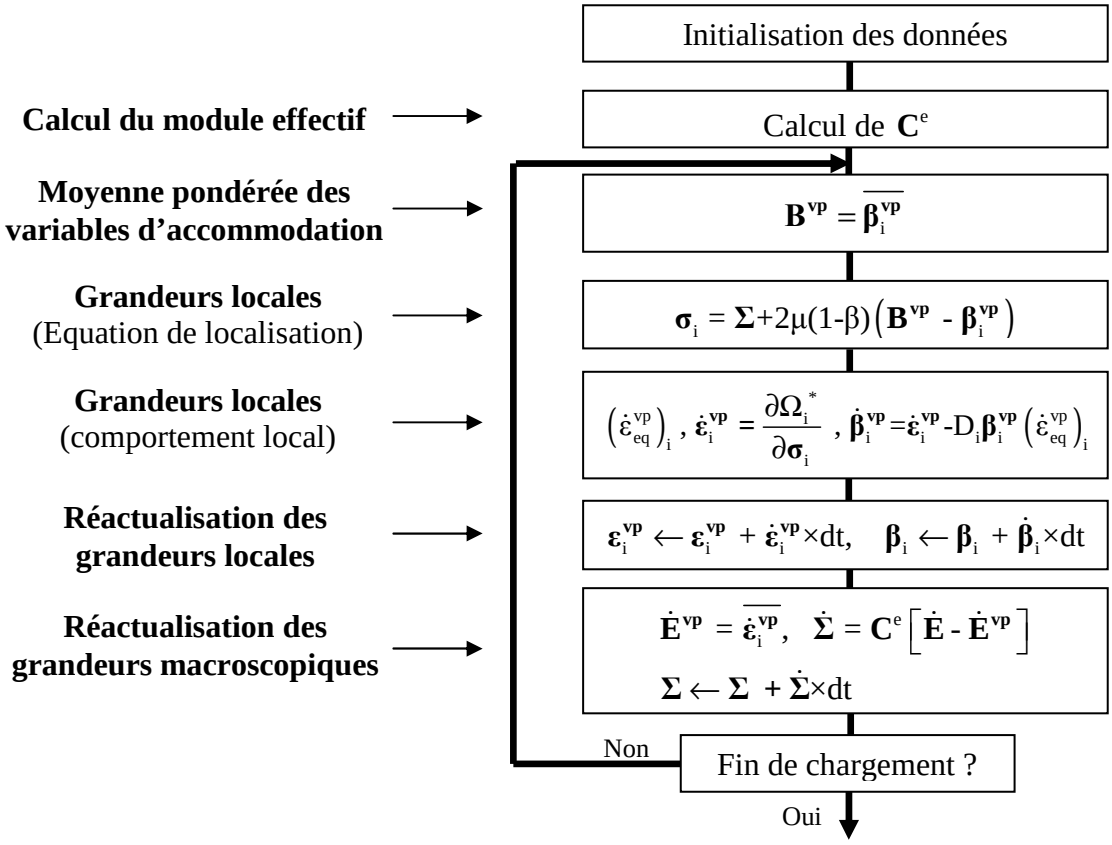



**Fig. 3.11 –** ***Schéma de résolution simplifié pour le modèle en Béta.***

***Comparaison des temps de calculs***

La mise en œuvre numérique du modèle à champs translatés, sans être compliqué, reste moins simple que celle du modèle en Béta. Le caractère implicite du schéma

autocohérent impose d'utiliser des boucles de convergence pour le calcul du module effectif viscoplastique et d'inverser des matrices à chaque pas de temps. La programmation du modèle en Béta en petites déformations est immédiate puisque ne requiert ni inversion de matrice ni itération : toutes les relations sont explicites. Le caractère autocohérent étant identifié par les variables d'accommodation $D_i$. D'un point de vue numérique, le modèle en Béta est donc d'exécution plus rapide. En contrepartie, l'approximation autocohérente du modèle en Béta dépend de la précision et de la validité de cette identification. Plusieurs simulations de matériaux biphasés ont confirmé ce constat. Pour chaque simulation les paramètres sont identiques (matériau, sollicitation, pas de temps). Le matériau utilisé pour cette comparaison est un acier biphasé pour lequel le comportement local des phases est donné dans Tab. 3.1.

| Comportement local des phases de l'acier biphasé | Fraction volumique | E (GPa) | $\nu$ | $Y_0$ (MPa) | $C_R$ | $R^{sat}$ (MPa) | $C_X$ | $X^{sat}$ (MPa) | A (MPa) | B ($s^{-1}$) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Phase 1 | 0,5 | 210 | 0,3 | 800 | 16 | 200 | 100 | 12 | 18 | 0,3 |
| Phase 2 | 0,5 | 210 | 0,3 | 160 | 16 | 200 | 100 | 12 | 18 | 0,3 |

**Tab. 3.1 –** ***Paramètres des lois de comportement locales utilisés dans les simulations du comportement d'un acier biphasé.***

A titre d'illustration, le **Tab. 3.2** montre une comparaison des temps de calculs entre les différents modèles de transition d'échelles utilisés pour cette simulation, incluant le modèle de Taylor-Lin. Rappelons que pour le cas particulier où les paramètres $D_i$ sont nuls, le modèle en Béta est équivalent au modèle de Kröner-Weng. Les temps de calcul sont relatifs ici aux routines VUMAT construites à partir des solveurs (cf. Chapitre V) et appliquées à un élément C3D8R sollicité en traction uniaxiale.

| | Temps de calcul pour la simulation d'un essai de traction uniaxiale réalisé à une vitesse de déformation de $10^{-2}s^{-1}$ (950000 incréments). | Temps de calcul pour la simulation d'un essai de traction uniaxiale réalisé à une vitesse de déformation de $1s^{-1}$ (9500 incréments). |
|---|---|---|
| Modèle à Champs translatés | 1560s | 30s |
| Modèle en Béta ($D_1$=0, $D_2$=0, Kröner-Weng) | 84s | 16s |
| Modèle en Béta ($D_1$=100, $D_2$=50) | 84s | 17s |
| Modèle de Taylor-Lin | 76s | 12s |

**Tab. 3.2 –** ***Simulation du comportement d'un biphasé en traction uniaxiale : comparaison des temps de calculs entre les différents modèles de transition d'échelles.***

Quelle que soit la vitesse de déformation imposée par la simulation, le modèle en Béta se révèle d'exécution plus rapide. La différence entre le modèle à champs translatés et les autres modèles peut s'avérer conséquente suivant le nombre d'incréments à l'image de la simulation de traction uniaxiale réalisée à une vitesse de $10^{-2}s^{-1}$. Cette différence résulte du traitement itératif de l'estimation autocohérente du modèle à champs translatés à chaque pas de temps. Les paramètres d'accommodation $D_i$ gérant le caractère autocohérent du modèle en Béta ne semblent pas influencer les temps de calculs. Gardons à l'esprit que cette comparaison de temps de calculs pour des simulations de comportement d'un acier biphasé ne prend pas en compte le temps nécessaire à l'identification du modèle en Béta sur un modèle à

champs moyens. Et que celle-ci nécessite sans nul doute de fortes précautions car il faut aussi l'estimer avant de conclure.

### III.4.3 Discussion

La **Fig. 3.12** illustre la différence de comportement macroscopique entre les différents modèles de transition d'échelles utilisés dans les simulations précédentes.

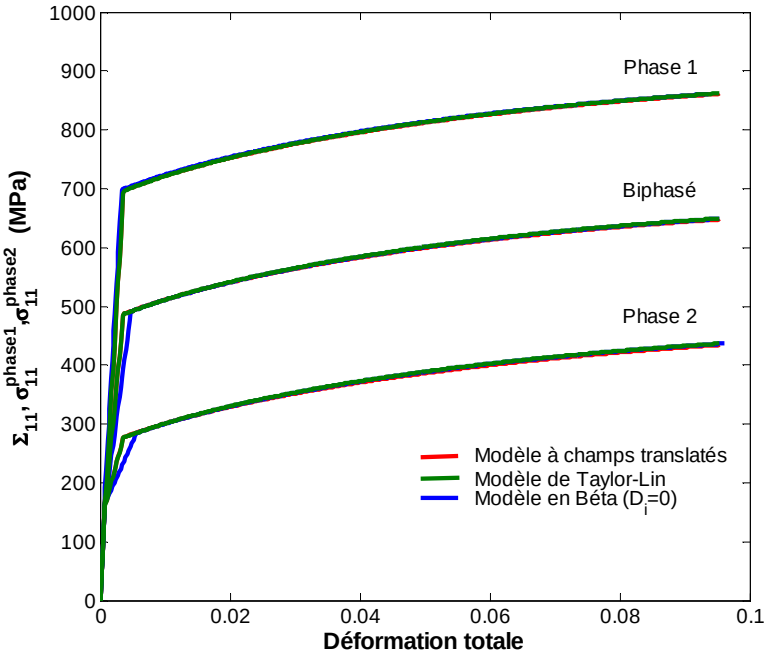



**Fig. 3.12 –** ***Comparaison du comportement macroscopique d'un acier biphasé obtenu à partir de différents modèles de transition d'échelles.***

Force est de constater que les comportements macroscopiques sont quasi-confondus quel que soit le modèle de transition d'échelles utilisé dans notre simulation. Ce résultat est *a priori* très surprenant. En effet, le modèle à champs translatés prend en compte des interactions de nature élasto-viscoplastique tandis que les interactions dans le cas du modèle de Taylor-Lin sont purement élastique. On s'attend donc à un comportement macroscopique très différent entre ces deux modèles. Dans cette simulation, le modèle à champs translatés se comporte pourtant comme le modèle de Taylor-Lin : les courbes sont confondues. Le modèle en Béta, lorsque les paramètres $D_i$ sont nuls, est équivalent au modèle de Kröner-Weng. Sur la **Fig. 3.12**, les trois modèles sont quasi-confondus en termes de description du comportement macroscopique de l'acier biphasé. Ceci n'est pas surprenant pour les modèles de Taylor-Lin et de Kröner-Weng compte tenu de leurs similarités (cf. III.2.2) mais l'est beaucoup plus concernant le modèle à champs translatés.

Toutefois, ce résultat peut s'expliquer par la forte non-linéarité des lois de comportement locales utilisées dans le cadre de cette thèse. La loi de comportement de type sinh est fortement linéaire. Il est donc probable au vu de la **Fig. 3.12** que la linéarisation sécante des modules viscoplastiques locaux (qui reste le schéma de linéarisation possible le plus simple parmi d'autres) ne permette pas de capter avec précision le caractère fortement non-linéaire de ce type de loi.

Dans le cadre d'une simulation d'un essai de cisaillement sur un matériau biphasé, nous avons comparé la réponse du modèle à champs translatés pour deux lois de comportement différentes :

- la loi de type sinh développée dans le chapitre 2 :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp} = B\sinh\left(\frac{\left\langle \sigma_{eq}-Y\right\rangle}{A}\right)\frac{3}{2}\frac{(\boldsymbol{\sigma}'-\mathbf{X})}{\sigma_{eq}},\ \text{avec}\ \ Y=\sigma_0+\sqrt{R^2+\left(\frac{\sigma^*}{2}\right)^2} \qquad \textbf{(3.94)}$$

- une loi en puissance d'exposant « n » pour laquelle nous avons fait varier la valeur de l'exposant, c'est-à-dire la non-linéarité :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp} = \left(\frac{\sigma_{eq}}{Y}\right)^n \frac{3}{2}\frac{(\boldsymbol{\sigma}'-\mathbf{X})}{\sigma_{eq}},\ \text{avec}\ Y=Y_0+R \qquad \textbf{(3.95)}$$

Les paramètres des lois de comportement de chacune des phases ainsi que leur fraction volumique sont donnés dans le **Tab. 3.3** :

| Comportement local des phases de l'acier biphasé | Fraction volumique | E (GPa) | ν | $Y_0$ (MPa) | $C_R$ | $R^{sat}$ (MPa) | $C_X$ | $X^{sat}$ (MPa) | A (MPa) | B ($s^{-1}$) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Phase 1 | 0,1 | 210 | 0,3 | 1600 | 10 | 50 | 100 | 160 | 37 | 0,3 |
| Phase 2 | 0,9 | 210 | 0,3 | 200 | 15 | 300 | 100 | 16 | 37 | 0,3 |

**Tab. 3.3 –** ***Paramètres des lois de comportement locales utilisés dans la simulation d'un essai de cisaillement sur un acier biphasé.***

Les valeurs obtenues du module viscoplastique $m^{vp}_{1212}$ en fonction de la contrainte $\sigma_{12}$ sont reportées sur la **Fig. 3.13**. Celles-ci semblent bien confirmer notre hypothèse : dans le cadre d'un modèle biphasé, l'utilisation d'une loi de comportement non-locale de type sinus hyperbolique correspondrait à l'utilisation d'une loi en puissance pour de fortes valeurs de l'exposant « n » c'est-à-dire pour de fortes linéarités (n>20). Une étude de sensibilité (non détaillée ici) des deux paramètres A et B gouvernant le caractère visqueux de la loi de comportement en sinh ne permet pas de réduire cette non-linéarité qui semble intrinsèquement liée à la forme de la loi en sinus hyperbolique.

Au vu de ses résultats, l'utilisation de la loi de comportement locale de type sinh semble compromis en l'état actuel du schéma de linéarisation sécant utilisé dans le modèle à champs translatés. Du fait de ces courbes, nous pouvons en déduire qu'il faut établir pour ce type de matériau multiphasé une nouvelle batterie de comparaison en fonctions des différentes extensions non linéaires dans le cas du schéma autocohérent à champs translatés, notamment l'influence d'une extension affine. Comme dans le cas de modèles autocohérents polycristallins viscoplastiques ([Mas00], [Bor01c], [Leb07]), une meilleure estimation pourrait provenir d'une extension affine à la place d'une extension sécante jusqu'ici menée dans le cas du comportement asymptotique de nature viscoplastique pur. Cet aspect mérite de plus amples investigations qui sortent du cadre de cette thèse.

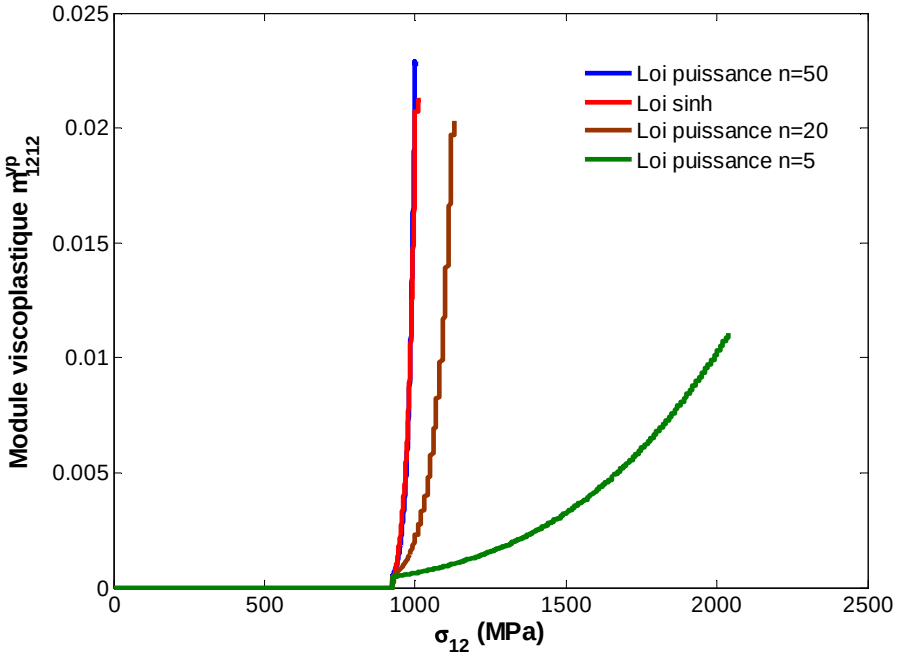



**Fig. 3.13 –** ***Variation du module viscoplastique sécant*** $m^{vp}_{1212}$ ***de la phase 1 en fonction de la contrainte*** $\sigma_{12}$ **.**

Dans le cas particulier du type de matériau étudié, il faudrait également étudier l'influence de la vitesse de déformation imposée. En effet, dans le cadre d'un modèle multiphasé et pour ce type de comportement élasto-viscoplastique, il n'existe aujourd'hui ni de solutions exactes ni de bornes de référence comme il peut en exister pour d'autres types de comportements (de type viscoplastique pur) pour les matériaux polycristallins [Leb07]. Enfin, la comparaison des réponses du modèle à champs translatés dans le régime transitoire (entre l'état élastique pur et l'état viscoplastique pur) à des méthodes à champs complets (FFT, éléments finis : etc…) mériterait d'être menée directement avec la loi locale de type sinh au lieu de celle en loi puissance (Norton) comme menée par Lahellec et Suquet [Lah07].

## III.5 CONCLUSIONS

Dans le cadre de la modélisation du comportement élasto-viscoplastique des aciers multiphasés, l'objectif de ce chapitre était de définir un outil d'homogénéisation du comportement élasto-viscoplastique des aciers multiphasés applicable en mise en forme.

Après une introduction des approches micromécaniques, une analyse historique des principales méthodes de transition d'échelles a été menée afin d'appréhender les conséquences des choix opérés dans la modélisation du comportement macroscopique du matériau hétérogène. Les spécificités liées à la prise en compte du comportement élasto-viscoplastique dans un modèle de transition d'échelles ont été présentées afin de bien cerner les difficultés liées au couplage espace-temps du problème micromécanique du matériau élasto-viscoplastique hétérogène. Ces difficultés supplémentaires nous ont amenés à choisir deux modèles autocohérents : le modèle à champs translatés de Berbenni *et al.* et le modèle en Béta de Pilvin plus pragmatique. La confrontation des deux modèles, en vue d'une application en mise en forme sur des aciers au comportement élasto-viscoplastique, a permis d'apprécier leurs limites et de dégager une solution pour la mise en forme.

De façon plus précise, l'objectif visé de cette thèse est la modélisation du comportement macroscopique d'un acier multiphasé à partir des lois de comportement locales en sinus hyperbolique de ses phases constitutives. L'outil numérique qui doit en résulter, en vue d'une application finale en simulation de la mise en forme, ne peut être restreint qu'au modèle de Taylor-Lin ou à celui de Kröner en l'état actuel des choses. Même si cela semble sortir du cadre de cette thèse, le modèle à champs translatés et le modèle en Béta ont tout de même été implantés dans cet outil numérique destiné à ArcelorMittal. Ceci, dans la perspective proche de pouvoir utiliser le modèle en Béta, ou une extension de celui-ci à partir de l'identification :

- du modèle à champs translatés avec un schéma de linéarisation différent (affine par exemple),
- d'un modèle à champs complets ou d'un autre modèle à champs moyens que le modèle à champs translatés à linéarisation sécante.

En effet, le modèle à champs translatés est un modèle rigoureux sur le plan mécanique permettant de capter avec précision les interactions de nature élasto-viscoplastique entre les phases. Son utilisation avec une loi fortement linéaire de type sinus hyperbolique dans un modèle multiphasé semble compromis dans le cadre d'une linéarisation sécante des modules viscoplastiques locaux. Pour autant, le modèle à champs translatés n'est pas limité à une linéarisation sécante et pourrait être développé selon différentes extensions non-linéaires dans un avenir proche pour être testé pour ce cas concret de loi sinus hyperbolique.

Enfin, il semble que le modèle en Béta constitue un excellent candidat pour la simulation en mise en forme du fait de sa rapidité d'exécution. La principale limitation de ce modèle reste l'identification d'un ou de plusieurs paramètres permettant d'approcher l'estimation autocohérente. Cette identification peut être menée à partir de modèles à champs complets mais la mise en œuvre reste difficile. L'identification à partir d'un modèle de transition d'échelles pour le comportement élasto-viscoplastique reste donc un problème ouvert. Il faudra en particulier :

- déterminer si les paramètres responsables de la précision de l'estimation autocohérente sont capables d'approcher la solution autocohérente du problème hétérogène élasto-viscoplastique donnée par des modèles rigoureux tel que le modèle à champs translatés,
- déterminer dans quelle proportion ces paramètres scalaires sont dépendants des conditions de l'identification (sollicitations, vitesses de déformation, contraste entre les phases etc.).

Gageons, dans un avenir proche, que ces modèles à champs moyens puissent être pleinement utilisés dans des simulations de mise en forme. Il faudra cependant veiller à bien identifier les comportements locaux des phases. Cette dernière remarque fait écho à certaines questions soulevées dans ce chapitre concernant l'hypothèse forte d'identifier les phases d'un acier multiphasé à partir d'une loi phénoménologique. Dans le chapitre suivant, nous proposons comme premiers éléments de réponse un nouveau type d'approche visant à introduire des longueurs internes microstructurales dans les approches à champs moyens.

## BIBLIOGRAPHIE


[Bat49] **BATDORF S.B, BUDIANSKY B.** A mathematical theory of plasticity based on the concept of slip, *NACA Technical Note, No. 1871*, 33 pages, 1949.

[Ber01] **BERVEILLER M., BRETHEAU T., FOUGERES R., GAUTIER E., MAIRE E.** Rappels sur les mécanismes de la plasticité et de l'endommagement. **In:** *Homogénéisation en mécanique des matériaux 2. Comportements non linéaires et problèmes ouverts*. Paris : Hermès Science Europe Ltd, 2001, pp. 203-249.

[Ber79] **BERVEILLER M., ZAOUI A.** An extension of the self-consistent scheme to plastically-flowing polycrystals. *J. Mech. Phys. Solids*, **26**, pp. 325-344, 1979.

[Ber80] **BERVEILLER M., ZAOUI A.** Méthodes self-consistentes en mécanique des solides hétérogènes. **In:** Comptes Rendus du 15ème colloque du Groupe Français de Rhéologie (Paris), pp. 175-198, 1980.

[Ber02] **BERBENNI S.** Elastoviscoplasticité des aciers polycristallins : Modélisation micromécanique et physique. Applications au comportement dynamique et à l'effet Bake-Hardening. *Thèse de Doctorat de l'ENSAM de Metz*, 2002.

[Ber04] **BERBENNI S., FAVIER V., LEMOINE X., BERVEILLER M.** Micromechanical modeling of the elastic-viscoplastic behavior of polycrystalline steels having different microstructures. *Materials Science and Engineering A*, **372**, Issues 1-2, pp. 128-136, 2004.

[Bor01a] **BORNERT M., BRETHEAU T., GILORMINI P.** *Homogénéisation en mécanique des matériaux, Tome 1 : Matériaux aléatoires élastiques et milieux périodiques.* 250 p., Hermès Science, traité MIM, série alliages métalliques, 2001.

[Bor01b] **BORNERT M., BRETHEAU T., GILORMINI P.** *Homogénéisation en mécanique des matériaux, Tome 2 : Comportements non linéaires et problèmes ouverts.* 250 p., Hermès Science, traité MIM, série alliages métalliques, 2001.

[Bor01c] **BORNERT M., MASSON R., PONTE CASTANEDA P., ZAOUI A.** Second order estimates for the effective behaviour of viscoplastic polycristalline materials. *J. Mech. Phy. Solids*, **49**, pp. 2737-2764, 2001.

[Bre01] **BRENNER R., CASTELNAU O., GILORMINI P.** A modified affine theory for the overall properties of nonlinear composites. *C.R. Acad. Sci. Paris Sér. IIb*, **329**, pp. 649-654, 2001.

[Bre02a] **BRENNER R., MASSON R., CASTELNAU O., ZAOUI A.** A "quasi-elastic" affine formulation for the homogenised behaviour of nonlinear viscoelastic polycrystals and composites. *Eur. J. Mech. A/Solids*, **21**, pp. 943-960, 2001.

[Bre02b] **BRENNER R., BECHADE J.-L., CASTELNAU O., BACROIX B.** Thermal creep of Zr-Nb1%-O alloys: experimental analysis and micromechanical modelling. *J. Nucl. Matt.*, **305**, pp. 175-186, 2002.

[Bre05] **BRENNER R., MASSON R.** Improved affine estimates for nonlinear viscoelastic composites. *Eur. J. Mech. A/Solids*, **24**, pp. 1002-1015, 2005.

[Bud60] **BUDIANSKY B., HASHIN Z., SANDERS J.L**. The stress field of a slipped crystal and the early plastic behavior of polycrystalline materials. **In:** *Plasticity, Proc. 2nd Symp. Naval. Struct. Mech.*, page 239, Pergamond, Oxford, 1960.

[Cai87] **CAILLETAUD G.** Une approche micromécanique phénoménologique du comportement inélastique des métaux, *Thèse, Univ. Paris VI*, 1987.

[Ded73] **DEDERICHS P.H., ZELLER R.** Variational treatment of the elastic constants of disordered materials. *Z. Phys.*, **259**, pp. 103-116, 1973.

[Esh57] **ESHELBY J.D.** The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion and related problems. *Proc. Roy. Soc. London*, **A 241**, pp. 376-396, 1957.

[For96] **FOREST S., PILVIN P.** Modelling the cyclic behavior of two-phase single crystal nickel-base superalloys. **In**: *A. Pineau and A. Zaoui, editors, IUTAM Symposium on Micromechanics of Plasticity and Damage of Multiphase Materials,* pp. 51-58. Kluwer, 1996.

[For99] **FOREST S., PILVIN P.** Modelling finite deformation of polycristals using local objective frames. *ZAMM Z. Angew. Math. Mech.* **79**, pp. S199–S202, 1999.

[Gal05] **GALLEE S.** Caractérisation expérimentale et simulation numérique des procédés d'emboutissage profond : application aux aciers inoxydables austénitiques, *Thèse de Doctorat, Université de Bretagne-Sud,* 2005.

[Gil96] **GILORMINI P.** A critical evaluation for various nonlinear extensions of the self-consistent model. **In** *Proceedings of the IUTAM Symposium on "Micromechanics of plasticity and damage"*, A. Pineau and A. Zaoui (Eds), Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, pp. 67-74, 1996.

[Gil97] **GILORMINI P.** Une insuffisance de plusieurs extensions du modèle autocohérent au comportement des milieux hétérogènes non linéaires. *La revue de métallurgie – CIT/Science et génie des matériaux*, pp. 1081-1087, septembre 1997.

[Has62] **HASHIN Z., SHTRIKMAN S.** A variational approach to the theory of the elastic behaviour of polycrystals. *J. Mech. Phys. Solids*, **10**, pp. 343-352, 1962.

[Has69] **HASHIN Z.** The inelastic inclusion problem. *Int. J. Engng. Sci.*, 7, pp. 11-36, 1969.

[Her54] **HERSHEY A.V.** The elasticity of an isotropic aggregate of anisotropic cubic crystals. *J. Appl. Mech.*, **21**, pp. 236-240, 1954.

[Hil65] **HILL R.** Continuum micro-mechanics of elastoplastic polycrystals. *J. Mech. Phys. Solids*, **13**, 89-101, 1965.

[Hut76] **HUTCHINSON J.W.** Bounds and self-consistent estimates for creep of polycrystalline materials. *Proc. Roy. Soc. London*, **A 348**, pp. 101-127, 1976.

[Kou94] **KOUDDANE R.** *Approche autocohérente élastoviscoplastique des matériaux hétérogènes*. Thèse de Doctorat de l'université de Metz, France,1994.

[Kro58] **KRÖNER E.** Berechnung der elastischen Konstanten des Vielkristalls aus den Konstanten den Einkristalls. *Z. Physik*, **151**, pp. 504-518, 1958.

[Kro61] **KRÖNER E.** Zur plastischen Verformung des Vielkristalls. *Acta Metall. Mater.*, **9**, pp. 155-161, 1961.

[Kro89] **KRÖNER E.** Modified Green functions in the theory of heterogeneous and/or anisotropic linearly elastic media. **In:** *Micromechanics and inhomogeneity, Weng G.J., Taya M., Abe M. (eds.), Springer Verlag, Berlin, Germany*, pp. 197-211, 1989.

[Kun81a] **KUNIN I.A.** An algebra of tensor operators and its applications to elasticity. *Int. J. Engng. Sci*., **19**, Issue 12, pp. 1551-1561, 1981.

[Kun81b] **KUNIN I.A.** Projection operator in continuum mechanics. **In:** *Continuum models of discrete systems 4, North-Holland, Amsterdam*, pp. 179-187, 1981.

[Kun83] **KUNIN I.A.** Elastic media with microstructure II: Three dimensional models. **In**: *Springer series in solid state sciences, 44, Kröner E. (ed.), Springer Verlag, Berlin*, 1983.

[Lah07] **LAHELLEC N., SUQUET P.** On the effective behavior of non linear inelastic composites : I. Incremental variational principles. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, **55**, pp. 1932-1963, 2007.

[Law78] **LAWS N., McLAUGHLIN R.** Self-consistent estimates for the viscoelastic creep compliances of composite materials. *Proc. Roy. Soc. London*, **A 359**, pp. 251-273, 1978.

[Leb93] **LEBENSOHN R.A., TOME C.N.** A self-consistent anisotropic approach for the simulation of plastic-deformation and texture development of polycristals – Application to zirconium alloys. *Acta Metallurgica and Materialia*, **41** (9), pp. 2611-2624, 1993.

[Leb07] **LEBENSOHN R.A., TOME C.N., PONTE CASTANEDA P.** Self-consistent modelling of the mechanical behaviour of viscoplastic polycrystals incorporating intragranular field fluctuations. *Philosophical Magazine*, **87** (28), pp. 4287-4322, 2007.

[Lin57] **LIN T.H.** Analysis of elastic and plastic strains of a fcc crystal. *J. Mech. Phys. Solids*, **5**, pp. 143-149, 1957.

[Mas98] **MASSON R.** Estimations non linéaires du comportement global de matériaux hétérogènes en formulation affine : Application aux alliages de zirconium. Thèse de Doctorat, Ecole Polytechnique, Paris, 1998.

[Mas99] **MASSON R., ZAOUI A.** Self-consistent estimates for the rate-dependent elastoplastic behavior of polycrystalline materials. *J. Mech. Phys. Solids*, **47**, pp. 1543-1568, 1999.

[Mas00] **MASSON R., BORNERT M., SUQUET P., ZAOUI A.** An affine formulation for the prediction of the effective properties of nonlinear composites and polycrystals. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, **48**, pp. 1203-1227, 2000.

[Mol87] **MOLINARI A., CANOVA G.R., AHZI S.** A self-consistent approach of the large deformation polycrystal viscoplasticity. *Acta Metall.*, **35**(12), pp. 2983-2994, 1987.

[Mol99] **MOLINARI A.** Extensions of the self-consistent tangent model. *Model. Simul. Mater. Sci. Eng.*, 7, pp. 683-697, 1999.

[Mor73] **MORI T., TANAKA K.** Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions. *Acta Metall.*, **21**, pp. 571-574, 1973.

[Paq98] **PAQUIN A.** Modélisation micromécanique du comportement élastoviscoplastique des matériaux hétérogènes. *Thèse de Doctorat de l'université de Metz, France*, 1998.

[Paq99] **PAQUIN A., SABAR H., BERVEILLER M.** Integral formulation and self-consistent modelling of elastoviscoplastic behavior of heterogeneous materials. *Arch. Appl. Mechanics*, **69**, pp. 14-35, 1999.

[Paq01] **PAQUIN A., BERBENNI S., FAVIER V., LEMOINE X., BERVEILLER M.** Micromechanical modeling of the elastic-viscoplastic behavior of polycrystalline steels. *Int. J. Plasticity*, **17**, 1267-1302, 2001.

[Pie06] **PIERARD O., DOGHRI I.** An enhanced affine formulation and the corresponding numerical algorithms for the mean-field homogenization of elasto-viscoplastic composites. *International Journal of Plasticity*, **22**, pp. 131-157, 2006.

[Pie07] **PIERARD O., LLORCA J., SEGURADO J., DOGHRI I.** Micromechanics of particle-reinforced elasto-viscoplastic composites: Finite element simulations versus affine homogenization. *International Journal of Plasticity*, **23**, pp. 1041-1060, 2007.

[Pil90] **PILVIN P.** Approches multiéchelles pour la prévision du comportement anélastique des métaux. *Thèse de l'Université Paris VI*, 1990.

[Pil95] **PILVIN P., FAUGEAS X., CLAVEL M.** A micro-macro structural approach of the cyclic behavior of a two-phase alloy. **In:** IUTAM Symposium on Micromechanics of Plasticity and Damage of Multiphase Materials, Sèvres, France, pp. 141-148, 1995.

[Pon91] **PONTE CASTANEDA P.** The effective mechanical properties of nonlinear isotropic composites. *J. Mech. Phys. Solids*, **39**, pp. 45-71, 1991.

[Pon96] **PONTE CASTANEDA P.** Exact second-order estimates for the effective mechanical properties of nonlinear composite materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, **44** (6), pp. 827-862, 1996.

[Pon98] **PONTE CASTANEDA P., SUQUET P.M.** Nonlinear composites. *Adv. Appl. Mech.*, **34**, pp. 171-302, 1998.

[Pon02] **PONTE CASTANEDA P.** Second order homogenization estimates for nonlinear composites incorporating field fluctuations. I-Theory. *J. Mech. Phys. Solids*, **50,** pp. 737-757, 2002.

[Pou99] **POUYA A., ZAOUI A.** Linéarisation et homogénéisation en viscoélasticité. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. II b*, **327**, pp. 365-370, 1999.

[Rou94a] **ROUGIER Y.** Etude du comportement sous irradiation : modélisation micromécanique de l'élastoviscoplasticité. *Thèse de Docteur de l'Ecole Polytechnique*, 1994.

[Rou94b] **ROUGIER Y., STOLZ C., ZAOUI A.** Self-consistent modelling of elastic-viscoplastic polycrystals. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. II*, **318**, 145-151, 1994.

[Reu29] **REUSS A**. Berechnung der Fliessgrenze von Mischkristallen auf Grund der Plastizitätsbedingung für Einkristalle. *Z. Angew. Math. Mech.*, **9**, pp. 49-58, 1929.

[Sab02] **SABAR H., BERVEILLER M., FAVIER V., BERBENNI S**. A new class of micro-macro models for elastic-viscoplastic heterogeneous materials. *Int. J. Solids. Struct.*, **39**, pp. 3257-3276, 2002.

[Sac28] **SACHS G.** Zur ableitung einer flieβbedingung. *Z. ver. Deut. Ing.*, **72**, pp. 734-736, 1928.

[Suq87] **SUQUET P.M.** Elements of homogenization for inelastic solid mechanics. **In:** *Homogenization techniques for composite media*, Sanchez-Palencia E. and Zaoui A. Editors, Springer Verlag, Berlin, Germany, 193-278, 1987.

[Suq93] **SUQUET P.M.** Overall potentials and extremal surfaces of power-law or ideally plastic composites. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, **41** (6), pp. 981-1002, 1993.

[Suq95] **SUQUET P.M.** Overall properties of nonlinear composites: a modified secant moduli theory and its link with Ponte Castaneda nonlinear variational procedure. *C.R. Acad. Sci. Paris*, **320** (IIb), pp. 563-571, 1995.

[Tal85] **TALBOT D.R.S., WILLIS J.R.** Variational principles for nonlinear inhomogeneous media, *IMA J. Appl. Math.* **35**, pp. 39-54, 1985.

[Tay38] **TAYLOR G.I.** Plastic strain in metals. *J. Inst. Metals*, **62**, pp. 307-324, 1938.

[Voi28] **VOIGT W.** Lehrbuch des Kritallphysik, Leipzig, BG Teubner Verlag, pp. 6, 1928.

[Wen81] **WENG G.J.** Self-consistent determination of time-dependent behavior of metals. *ASME J. Appl. Mech.*, **48**, pp. 41-46, 1981.

# CHAPITRE IV

# PRISE EN COMPTE DE LONGUEURS INTERNES DANS LES APPROCHES A CHAMPS MOYENS

## IV.1 PRINCIPALES LIMITATIONS DES APPROCHES A CHAMPS MOYENS

Comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent, les approches à champs moyens permettent de décrire le comportement macroscopique d'un matériau à partir de la description locale des constituants qui le composent. Durant les vingt dernières années, le développement de ces approches s'est principalement focalisé à améliorer la description des interactions pouvant exister entre les différents constituants (tenseurs d'interaction), à étudier l'impact de la morphologie des constituants sur le comportement macroscopique (tenseur d'Eshelby) ou encore à améliorer la description statistique des constituants au sein du matériau (fraction volumique, covariance, hétérogénéité intraphase des déformations etc.).

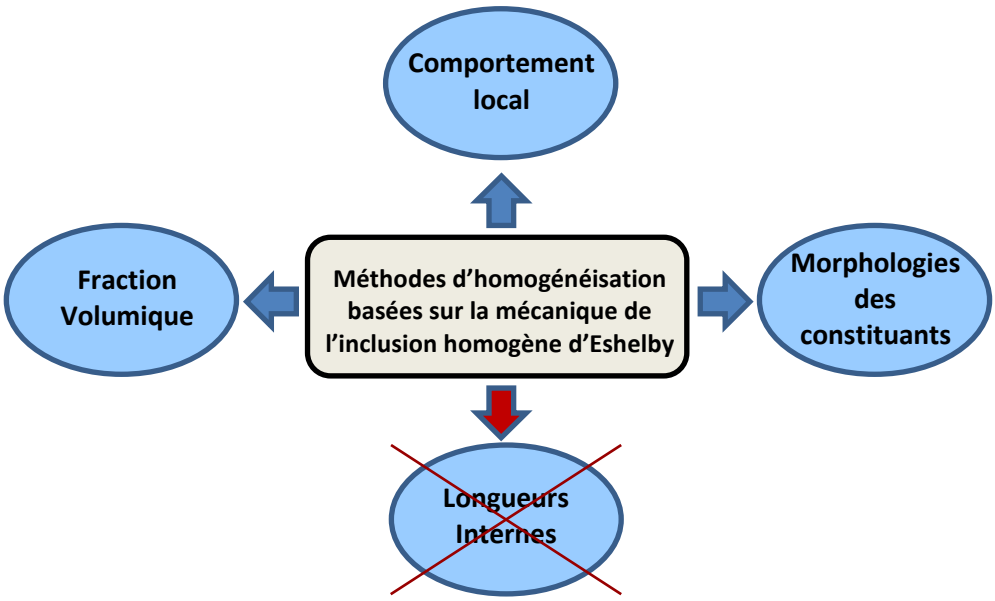



**Fig. 4.1 –** ***Limitations des approches micromécaniques classiques dans la prise en compte de longueurs internes microstructurales.***

La principale lacune de ces approches réside aujourd'hui encore dans l'incapacité de ces méthodes à reproduire les effets de taille absolue des longueurs internes microstructurales sur le comportement macroscopique. Ainsi, la taille de grain d'un polycristal n'a aucune incidence directe du point de vue micromécanique sur le modèle. Un acier à gros grains (100 microns) est représenté classiquement dans un modèle de micromécanique de la même façon qu'un acier à grains fins (2 microns) : la taille absolue des inclusions est la même. Les effets de taille de grain ou de toute autre longueur interne microstructurale, s'ils sont pris en compte, sont généralement modélisés indirectement, à l'aide de paramètres introduits dans la loi de comportement locale.

Dans ce chapitre, nous nous attachons à présenter et analyser une nouvelle approche visant à intégrer de manière originale la prise en compte de longueurs internes microstructurales (taille de grain, taille de particules etc.) dans les approches à champs moyens.

## IV.2 PRISE EN COMPTE DES EFFETS DE LONGUEURS INTERNES MICROSTRUCTURALES

### IV.2.1 Approche phénoménologique

Weng [Wen83] propose un premier modèle en plasticité cristalline visant à prendre en compte la taille moyenne « D » de grains d'un polycristal et l'applique dans le cas d'agrégats polycristallins de cuivre pour des tailles de grain variant de 12 µm à 220 µm. Il introduit une loi de Hall-Petch [Hal51, Pet53] évoluant en $D^{-1/2}$ dans la définition de la cission critique de chaque système de glissement :

$$\tau = \tau_0 + \underbrace{kD^{-1/2}}_{\text{Hall-Petch}} + \underbrace{\left(h + aD^{-1/2}\right)}_{\text{terme d'écrouissage}}\left(\gamma^p\right)^n \qquad \textbf{(4.1)}$$

où $\tau_0$ est la cission critique initiale, k le paramètre de la loi de Hall-Petch, h et a sont les paramètres du terme d'écrouissage évoluant en $D^{-1/2}$, $\gamma^p$ est l'amplitude du glissement plastique sur le système de glissement considéré et n la sensibilité plastique.

En utilisant le modèle autocohérent de Berveiller et Zaoui [Ber79], Weng parvient à décrire un effet de taille de grain sur la limite d'élasticité ainsi que sur l'écrouissage du polycristal. La prise en compte de l'effet de taille de grain reste cependant purement phénoménologique. Si le modèle de transition d'échelles utilisé permet de relier le comportement du monocristal au comportement du polycristal, la taille de grain est introduite uniquement dans la loi de comportement à l'échelle du monocristal via le paramètre « D ». La transition d'échelles est donc menée classiquement c'est-à-dire indépendamment de la taille de grain. De plus, l'utilisation d'une loi phénoménologique macroscopique de Hall-Petch (valable pour les polycristaux à gros grains) à l'échelle du grain reste discutable d'un point de vue physique. Enfin, la nécessité de connaître au préalable les paramètres de la loi de Hall-Petch à l'échelle du grain limite le caractère prédictif du modèle.

Une autre approche consiste à introduire de manière phénoménologique la taille de grain directement à l'échelle du polycristal sans avoir recours à une transition d'échelles mais en se basant toutefois sur des mécanismes physiques. Parmi les différents travaux relatés dans la littérature, notons l'effet de taille de grain « D » obtenu par Sinclair *et al.* [Sin06] sur l'écrouissage de polycristaux de cuivre. Ce modèle, basé sur le mouvement et la multiplication des dislocations au cours de la plastification du polycristal, utilise comme variable interne la densité moyenne de dislocations « ρ ». Les auteurs considèrent le stockage et l'annihilation des dislocations comme responsables d'une double contribution de l'écrouissage dans la loi d'écoulement du polycristal : une contribution isotrope de type forêt [Mec81a] et une contribution cinématique due aux dislocations stoppées aux joints de grains. La loi d'écoulement s'écrit :

$$\sigma = \sigma_0 + M\left[\underbrace{\frac{\mu b}{D} n\left(1-\frac{n}{n^*}\right)}_{\substack{\text{contribution}\\ \text{cinématique}}} + \underbrace{\alpha\mu b\sqrt{\rho}}_{\substack{\text{contribution}\\ \text{isotrope}}}\right] \qquad \textbf{(4.2)}$$

$$\text{avec : } \begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial \varepsilon} = M\left[ k_1\sqrt{\rho} - k_2\rho + k_3 \dfrac{1}{bD}\left(1 - \dfrac{n}{n^*}\right)\right] \\ \dfrac{dn}{d\varepsilon} = \dfrac{\lambda}{b}\left(1 - \dfrac{n}{n^*}\right) \end{cases}$$

où $\sigma_0$ est la limite initiale d'élasticité due à la friction de réseau, M le coefficient de Taylor, $\mu$ le module de cisaillement, b la norme du vecteur de Burgers et $\alpha$ une constante. La variable « n », qui représente le nombre de dislocations bloquées au joint de grain, évolue selon une loi saturante dépendant du nombre maximal « $n^*$ » de dislocations pouvant être stockées au joint de grain. La densité moyenne de dislocations suit une loi d'évolution saturante dépendant des paramètres $k_1$, $k_2$ et $k_3$ qui sont ajustés afin de reproduire les résultats expérimentaux (**Fig. 4.2**).

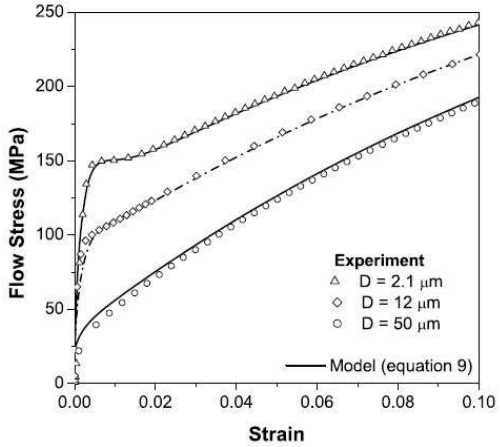



**Fig. 4.2 –** ***Modélisation de l'effet de la taille de grain sur la contrainte d'écoulement pour des polycristaux de cuivre [Sin06].***

L'introduction phénoménologique de la taille de grain D dans la loi d'évolution de la densité de dislocations et donc dans la loi d'écoulement permet de rendre compte de manière efficace de l'effet de taille sur l'écrouissage de polycristaux de cuivre pour des tailles de grain comprises entre 2 et 50 microns (**Fig. 4.2**). Ici aussi, la prise en compte phénoménologique de l'effet de la taille de grain est tributaire de l'identification au préalable de paramètres ce qui limite le caractère prédictif du modèle.

De manière quelque peu similaire, Delincé *et al.* [Del07] proposent un modèle pour le comportement d'aciers dual-phase ferrito-martensitique. Les auteurs introduisent dans le comportement de la ferrite plusieurs longueurs internes microstructurales :

- une longueur moyenne qui représente la distance entre deux dislocations aux joints de grain et qui évolue en fonction de la déformation plastique,
- une longueur caractéristique des arrangements de dislocations aux joints de grain,
- le diamètre des grains de ferrite.

Les longueurs internes introduites permettent de préciser l'écriture de lois d'évolution décrivant l'accumulation et la saturation des dislocations le long des joints de grain de ferrite. La loi d'écrouissage pour la phase ferritique combine au final un terme de friction, un terme

de Hall-Petch en $D^{-1/2}$ ainsi qu'une contribution isotrope et cinématique des densités de dislocations. Le comportement de la martensite est lui supposé élastique parfaitement plastique avec une contrainte d'écoulement qui dépend de la teneur en carbone. Le comportement macroscopique de l'acier dual-phase est obtenu par homogénéisation en appliquant le modèle de Mori-Tanaka [Mor73]. L'homogénéisation s'effectue indépendamment des longueurs internes microstructurales introduites dans le modèle : elle permet seulement de rendre compte de l'effet « composite » de la seconde phase sur le comportement global de l'acier, c'est-à-dire de l'effet de fraction volumique des îlots de martensite. Ce modèle, à l'image de celui de Weng, utilise une méthode d'homogénéisation indépendante des longueurs internes introduites dans la loi de comportement de la ferrite.

Par l'introduction de lois phénoménologiques de type Hall-Petch destinées à décrire les mécanismes physiques de déformations, les trois modèles précédents permettent de décrire un effet de taille de grain sur le comportement d'agrégats polycristallins. Cette introduction phénoménologique de longueurs internes dans le comportement est réalisée à trois échelles différentes :

- au niveau du comportement du grain dans un polycristal pour le modèle de Weng,
- directement au niveau du comportement du polycristal et sans utiliser de transition d'échelles pour le modèle de Sinclair *et al.*,
- au niveau du comportement de la phase ferritique dans un acier biphasé pour le modèle de Delincé *et al.*.

L'introduction phénoménologique de la taille de grain paraît certes efficace au vu des résultats mais reste limitée du point de vue de la prédictibilité des modèles puisqu'il faut au préalable identifier les paramètres de la loi pour chaque cas particulier. Lorsqu'une transition d'échelles est utilisée, celle-ci n'interagit pas avec les longueurs internes introduites qui restent cantonnées au comportement local auquel elles sont affectées.

La question de savoir si la taille de grain (ou toute autre longueur interne microstructurale) doit être prise en compte uniquement d'un point de vue local dans le comportement peut donc légitimement être posée. Introduire les effets de longueurs internes dans des modèles à champs moyens prends alors tout son sens si l'on désire répondre à cette question. Par ailleurs, contrairement à l'approche phénoménologique, il est possible à l'aide des approches micromécaniques d'obtenir des modèles dotés d'une plus grande prédictibilité. L'idée est alors d'intégrer des longueurs internes dans des approches à champs moyens afin d'obtenir naturellement, en sortie de ces modèles, des effets de taille de microstructure sur le comportement macroscopique.

### IV.2.2 Introduction dans une approche non-locale à champs moyens

L'approche locale, communément utilisée en plasticité et en plasticité cristalline, consiste à considérer que la contrainte en un point donné du matériau étudié dépend uniquement de la déformation en ce point. Cette modélisation tend à perdre sa validité lorsque l'échelle de la microstructure étudiée devient proche de celle des longueurs internes microstructurales impliquées dans les mécanismes physiques de déformation plastique. A cette échelle, il existe une contribution non-locale à longue distance des entités microstructurales considérées (taille de grain, particule etc.). En négligeant cet effet d'échelle, la plasticité conventionnelle qui se base sur une approche locale, échoue dans la description

des effets de taille de longueurs internes. Afin de décrire correctement ces effets, des théories de plasticité non-locales basées sur les gradients de déformation plastique sont apparues.

**Dislocations géométriquement nécessaires**

Les résultats expérimentaux [Tho73, Sun00, Hug03] montrent que les joints de grain sont sources de gradients de déformations plastiques causés par l'incompatibilité de déformation plastique régnant entre grains voisins. Afin d'assurer la courbure du réseau cristallin et donc la cohésion de la matière de grain à grain, des dislocations nommées par Ashby [Ash70] « géométriquement nécessaires » (GND) se réorganisent autour des joints de grain.

Les théories de mécanique des dislocations montrent que ces dislocations géométriquement nécessaires (GND) peuvent être définies par le tenseur de Nye $\boldsymbol{\alpha}$ [Nye53] dont l'évolution est donnée par la relation suivante [Mur63] :

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}}_{jl} = -\in_{jmn} \dot{\boldsymbol{\beta}}^{p}_{nl,m} \qquad \textbf{(4.3)}$$

$\in_{jmn}$ est l'opérateur de permutation, $\dot{\boldsymbol{\beta}}^{p} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p} + \dot{\boldsymbol{\omega}}^{p}$ décrit l'évolution de la distorsion plastique [Kro60], $\dot{\boldsymbol{\omega}}^{p}$ représente l'évolution de la rotation plastique définie comme la partie antisymétrique de $\dot{\boldsymbol{\beta}}^{p}$. Dans un souci de simplification, la nature cristallographique des GND n'est pas prise en compte dans le modèle développé dans ce chapitre. A l'échelle du grain, l'évolution des GND est décrite de manière collective à l'aide de la densité $\rho_G$. Par conséquent, et d'après les travaux d'Ashby [Ash70] nous considérons que la densité $\rho_G$ évolue avec le gradient de déformation plastique selon une direction normale au joint de grain :

$$\dot{\rho}_G = \frac{\bar{r}}{b}\frac{\partial \dot{\gamma}^{P}}{\partial x} \qquad \textbf{(4.4)}$$

où b est la norme du vecteur de Burgers, $\dot{\gamma}^{P}$ est le taux de cisaillement plastique et $\bar{r}$ est le facteur de Nye qui dépend du gradient macroscopique imposé [Ars99] et de l'orientation des systèmes de glissement [Gao01].

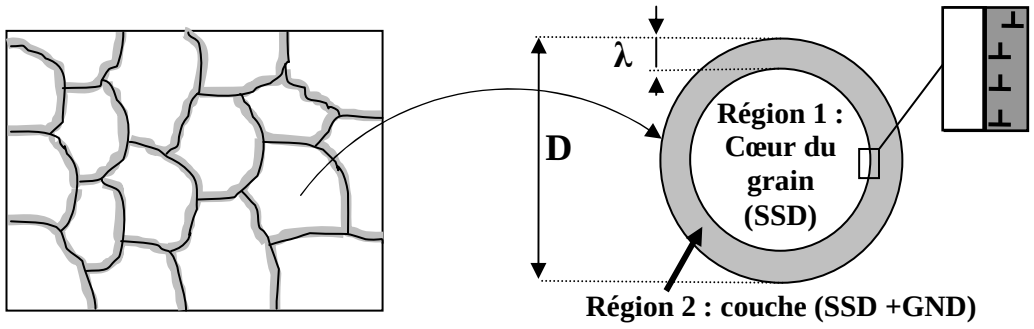
Le concept des GND a depuis suscité un grand intérêt au sein de la communauté scientifique tant est si bien qu'aujourd'hui le nombre de modèles de mécanique basé sur une théorie du gradient plastique de déformation est relativement vaste dans un domaine varié d'applications. Dans la partie suivante, nous introduisons le concept des GND dans une approche non locale à champs moyens afin de décrire dans un premier temps l'effet de taille de grain observé sur les aciers IF. Dans un deuxième temps, nous étudions l'extension de cette approche à l'étude de l'effet d'autres longueurs internes microstructurales comme par exemple la taille de particule.

## IV.2.3 Effet de taille de grain

**Représentation de la structure du grain de ferrite**

En s'inspirant de la représentation géométrique proposée par différents auteurs [Mec81b, Bou06a, Del07], la structure physique du grain du polycristal de ferrite, considéré ici comme sphérique, peut conceptuellement être modélisée comme un composite à deux

phases, chacune contrôlée par différents mécanismes de déformation liés aux densités de dislocations.




(a) (b)

*(a) Représentation du matériau polycristallin en un composite à deux phases.*
*(b) Décomposition du grain de diamètre D en deux régions. Le cœur du grain (région 1), affecté par la présence de SSD, est entouré de la couche (région 2) d'épaisseur $\lambda$ qui elle est affectée par la présence de SSD et de GND. Seules les GND sont représentées sur le dessin. Les SSD sont uniformément réparties sur les deux régions. D'après [Pip09].*

**Fig. 4.3 –** ***Représentation géométrique de la structure du polycristal de ferrite en un composite à deux phases.***

La première phase, appelée « cœur du grain » représente l'intérieur du grain. Dans cette région (nommée région 1 sur la **Fig. 4.3**), la déformation plastique est contrôlée par l'évolution de la densité « $\rho_S^1$ » des dislocations statistiquement stockées (SSD). L'évolution de cette densité dépend directement de la création et de l'annihilation de dislocations qui collectivement présentent un vecteur de Burgers net nul sur le volume considéré. La population des SSD ne se cantonne pas uniquement à cette région mais est répartie uniformément sur tout le volume du grain de diamètre D.

La seconde phase, nommée « couche » représente une couche sphérique d'épaisseur $\lambda$ proche du joint de grain et englobant celui-ci (région 2 sur la **Fig. 4.3**). Elle se situe autour du cœur de grain et est le siège de gradients de déformations plastiques dus à l'empilement de dislocations aux joints de grain. La déformation plastique dans cette zone dépend non seulement de l'évolution de la densité « $\rho_S^2$ » des dislocations SSD dans le volume mais également et plus particulièrement de l'évolution de la densité « $\rho_G$ » des dislocations GND stoppées au joint de grain. Ces dernières assurent la courbure de réseau et la compatibilité plastique autour du joint de grain.

Comme illustré **Fig. 4.3**, la fraction volumique $f^{(2)}$ de couche est définie de telle sorte que les deux régions remplissent entièrement l'ensemble du matériau polycristallin ( $f^{(1)} + f^{(2)} = 1$ ) :

$$f^{(2)} = 1-\left(\frac{D - 2\lambda}{D}\right)^3 \qquad \textbf{(4.5)}$$

Pour une épaisseur $\lambda$ donnée de couche (voir plus loin pour l'identification), l'évolution de la fraction de couche est reportée sur la **Fig. 4.4**.

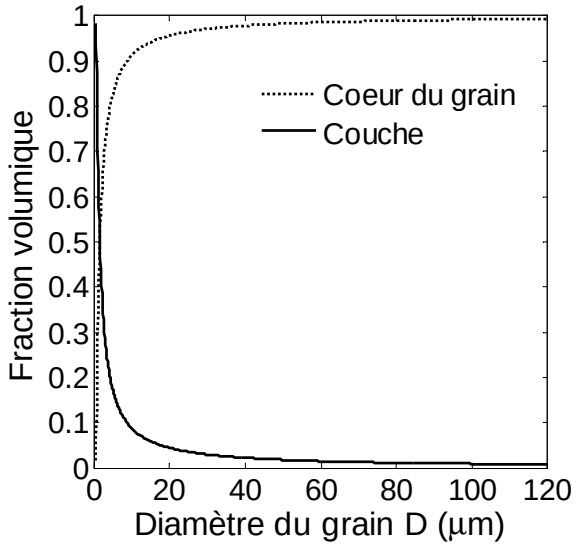



**Fig. 4.4 –** ***Evolution des fractions volumiques*** $f^{(1)}$ ***(cœur du grain) et*** $f^{(2)}$ ***(région proche du joint de grain) en fonction du diamètre D du grain (de 1μm à 120 μm) pour une épaisseur de couche donnée*** $\lambda$ ***=0,15 μm.***

Pour des grains de fort diamètre, la fraction volumique de la couche (région englobant les joints de grain) est négligeable devant la fraction volumique du cœur du grain. Dans ces conditions, la contribution de la couche à l'écrouissage et à l'écoulement est négligeable et le modèle se comporte de façon tout à fait classique. A l'inverse, pour de petits grains, la fraction volumique de joint de grain n'est plus négligeable et le rôle des mécanismes physiques de déformation contrôlés par l'évolution des GND devient alors primordial pour le comportement macroscopique de l'agrégat polycristallin.

Rappelons, avant de préciser les lois d'évolution des variables internes, que le modèle prend en compte un effet de taille dès cette étape de représentation du volume élémentaire représentatif. En effet, la définition des fractions volumiques qui dépend de deux longueurs internes microstructurales, à savoir le diamètre D du grain et l'épaisseur $\lambda$ de la région contenant le joint de grain, est responsable d'un effet composite sur le comportement de l'agrégat polycristallin. Cet effet composite n'est pas seul acteur de l'effet de taille dans le modèle comme nous allons le voir dans la présentation des lois d'évolution des densités de dislocations mais participe déjà, dès l'étape de représentation, à l'implication de longueurs internes microstructurales dans un modèle à champs moyens.

**Lois de comportement locales et évolution des variables internes**

Les deux phases (régions) sont supposées suivre un comportement élasto-viscoplastique où la vitesse de déformation totale $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(I)}$ de chaque phase (I) est décomposée en une partie élastique $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{e(I)}$ et une partie viscoplastique $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp(I)}$ :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(I)} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathbf{e}(I)} + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathbf{vp}(I)} \qquad \textbf{(4.6)}$$

Le comportement pour chacune des phases est donc défini par deux lois constitutives : l'une élastique et l'autre viscoplastique. L'hypothèse des petites déformations est suffisante dans le cadre de ce modèle où nous nous attachons à décrire de petites déformations. Pour la partie élastique, dans le cadre d'une élasticité linéaire et homogène, la vitesse de déformation élastique $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{e(I)}$ est reliée au tenseur taux de contrainte de Cauchy via la loi de Hooke généralisée :

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{(I)} = \mathbf{C} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{e(I)} \qquad \textbf{(4.7)}$$

où $\mathbf{C}$ est le tenseur des modules élastiques définis par les coefficients de Lamé. Pour la partie viscoplastique, la vitesse de déformation viscoplastique suit une loi puissance de type Prandtl-Reuss :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp\,(I)} = \frac{3}{2}\dot{\varepsilon}_0 \left( \frac{\sigma_{eq}^{(I)}}{\sigma_{ref}^{(I)}} \right)^n \frac{\boldsymbol{\sigma}'^{(I)}}{\sigma_{eq}^{(I)}} \qquad \textbf{(4.8)}$$

$\sigma_{eq}^{(I)}$ est la contrainte équivalente de von Mises définie classiquement à partir du déviateur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}'^{(I)}$, $\dot{\varepsilon}_0$ est une vitesse de déformation plastique de référence égale ici à 1, $\sigma_{ref}^{(I)}$ est la contrainte d'écoulement (dite de référence), l'exposant « n » est fixé afin de caractériser une faible sensibilité de la loi à la vitesse de déformation du matériau. Notons que le modèle ne se limite pas aux lois viscoplastiques en puissance. Ce choix, arbitraire, est indépendant du modèle. Cependant, nous avons vu au chapitre 3 que le schéma de linéarisation était sensible à la non-linéarité de la loi choisie (cas de la loi en sinh développée au chapitre 2). Le choix d'une loi en puissance se justifie ici dans le cadre d'une collaboration [Pip09].

Les dislocations statistiquement stockées (SSD) sont réparties aléatoirement sur tout le volume du grain (cœur + couche) et présentent un vecteur de Burgers net résultant nul. Les dislocations géométriquement nécessaires (GND) sont localisées dans la couche d'épaisseur $\lambda$ près du joint de grain. Cette différence de topologie entre les deux populations de dislocations aboutit à des différences notables dans les lois d'écoulement des deux phases. Dans la phase 1 (cœur du grain), seules les densités de SSD contribuent au nombre total d'obstacles forêt à travers lesquels une dislocation en mouvement doit passer. Dans la phase 2 (couche), ce sont à la fois les densités de SSD et de GND qui contribuent au nombre total d'obstacles forêt. Dans ces conditions, la loi d'écoulement fait apparaître comme variables internes les deux populations de densités de dislocation $\rho_S^{(I)}$ et $\rho_G^{(I)}$ présentes ou non dans la phase (I) considérée (I variant de 1 à 2) :

$$\sigma_{ref}^{(I)} = \sigma_0^{(I)} + M\alpha\mu b\sqrt{\rho_S^{(I)} + \rho_G^{(I)}} \qquad \textbf{(4.9)}$$

$\sigma_0^{(I)}$ est la limite initiale d'élasticité qui dépend des éléments en solution solide et de la friction de réseau, M est le facteur de Taylor et $\alpha$ est un paramètre constant typiquement égal à 0,4. Après dérivation, l'évolution de la contrainte d'écoulement s'écrit :

$$\dot{\sigma}_{ref}^{(I)} = \frac{M\alpha\mu b}{2\sqrt{\rho_S^{(I)} + \rho_G^{(I)}}} \left( \dot{\rho}_S^{(I)} + \dot{\rho}_G^{(I)} \right) \qquad \textbf{(4.10)}$$

$$\text{avec} \quad \dot{\rho}_G^{(1)} = 0 \quad \text{(coeur du grain)}$$

Cette description géométrique du grain rappelle celle des travaux de Mughrabi [Mug83, Mug04] : le grain est considéré comme un composite composé d'une phase dure constituée par la couche (phase 2) et d'une phase molle constituée par le cœur du grain (phase 1). Dans ces conditions, il est possible d'écrire la relation suivante :

$$0 < \varepsilon_{eq}^{vp(2)} < \varepsilon_{eq}^{vp(1)} \qquad \textbf{(4.11)}$$

L'évolution de la densité des GND dans la couche (I=2) s'écrit : $\dot{\rho}_G^{(2)} = \frac{\bar{r}}{b}\frac{\partial \dot{\gamma}^P}{\partial x}$. Le coefficient de Taylor M permet de relier les taux de glissement plastique $\partial\dot{\gamma}^P$ aux taux de déformation plastique équivalent $\partial\dot{\varepsilon}_{eq}^{vp}$ : $\partial\dot{\gamma}^{vp} = M\partial\dot{\varepsilon}_{eq}^{vp}$. La loi d'évolution de la densité des GND devient alors :

$$\dot{\rho}_G^{(2)} = M\frac{\bar{r}}{b}\frac{\partial \dot{\varepsilon}_{eq}^{vp(2)}}{\partial x} \qquad \textbf{(4.12)}$$

En première approximation, l'hypothèse de l'existence d'un gradient de déformation plastique linéaire au travers de la couche d'épaisseur $\lambda$ revient à considérer l'évolution de la densité des GND comme dépendante du saut du taux de déformation plastique équivalente entre les deux phases contrôlé par l'épaisseur de couche $\lambda$ :

$$\dot{\rho}_G^{(2)} = M\frac{\bar{r}}{b}\frac{\dot{\varepsilon}_{eq}^{vp(1)} - \dot{\varepsilon}_{eq}^{vp(2)}}{\lambda} \qquad \textbf{(4.13)}$$

$$\text{avec} \quad \dot{\varepsilon}_{eq}^{vp} = \left(\frac{2}{3}\dot{\varepsilon}_{ij}^{vp}\dot{\varepsilon}_{ij}^{vp}\right)^{1/2}$$

La loi d'évolution de la densité des SSD revient à modifier une loi de Kocks-Mecking en faisant intervenir la densité des GND :

$$\dot{\rho}_S^{(I)} = M\left(\frac{k}{b}\sqrt{\rho_S^{(I)} + \rho_G^{(I)}} - f\rho_S^{(I)}\right)\dot{\varepsilon}_{eq}^{vp(I)} \qquad \textbf{(4.14)}$$

où k et f sont des paramètres matériau contrôlant respectivement la création (et stockage) et l'annihilation des dislocations. Dans la phase 1 (cœur du grain), la densité de GND est nulle et l'équation (4.14) aboutit à une loi classique de Kocks-Mecking [Mec81a, Koc03]. Dans la phase 2 (couche de joints de grain), puisque les GND sont localement du même signe et ne peuvent s'annihiler, la densité des GND n'affecte que le terme de création des dislocations. Dans ces conditions, la loi d'évolution des SSD peut au final être considérée comme une loi modifiée de Kocks-Mecking incluant dans son terme de création la contribution des GND aux obstacles de type forêt.

**Transition d'échelles et comportement macroscopique**

Le comportement macroscopique du polycristal est obtenu en utilisant le schéma autocohérent basé sur la technique des champs translatés (modèle de Berbenni *et al.*)

présentée dans le chapitre précédent. Pour chaque phase, le comportement élasto-viscoplastique est défini par les relations suivantes :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{S} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathbf{vp}} \qquad \textbf{(4.15)}$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathbf{vp}} = \mathbf{m}(\boldsymbol{\sigma}) : \boldsymbol{\sigma} \qquad \textbf{(4.16)}$$

où la complaisance viscoplastique sécante $\mathbf{m}$ est définie pour chacune des phases en comparant l'équation (4.8) avec l'équation (4.16) :

$$m_{ijkl} = \frac{3}{2}\dot{\varepsilon}_0 \left(\frac{\sigma_{eq}}{\sigma_{ref}}\right)^n \frac{\eta_{ijkl}}{\sigma_{eq}} \qquad \text{avec:} \begin{cases} \eta_{ijkl} = I_{ijkl} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{kl} \\ I_{ijkl} = \frac{1}{2}\left(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}\right) \end{cases} \qquad \textbf{(4.17)}$$

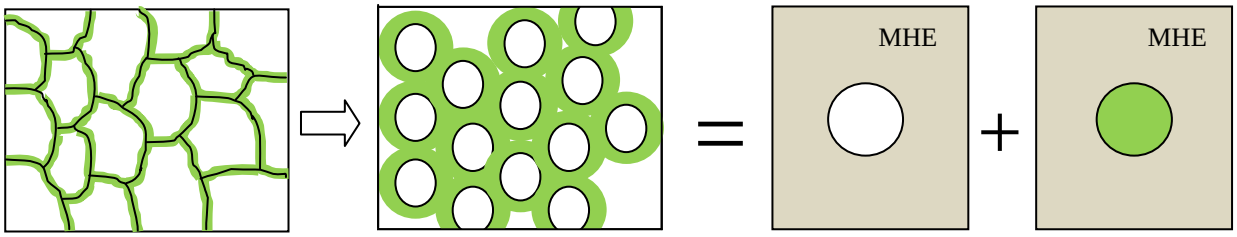
$\boldsymbol{\eta}$ est un tenseur d'ordre 4 défini à partir du tenseur unité $\mathbf{I}$ d'ordre 4. Le modèle de Berbenni *et al.*, dans le cadre d'une élasticité homogène, aboutit à la loi d'interaction suivante :

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \dot{\boldsymbol{\Sigma}} + \mathbf{C} : \left(\mathbf{S}^{\mathbf{E}} - \mathbf{I}\right) : \left(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathbf{vp}} - \mathbf{A}^{\mathbf{B}^{\varepsilon}} : \dot{\mathbf{E}}^{\mathbf{vp}}\right) \qquad \textbf{(4.18)}$$

Le comportement macroscopique du polycristal est obtenu par homogénéisation sur le volume élémentaire représentatif :

$$\dot{\mathbf{E}} = \overline{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}} \text{ et } \dot{\boldsymbol{\Sigma}} = \overline{\dot{\boldsymbol{\sigma}}}\,. \qquad \textbf{(4.19)}$$

Au final, la modélisation micromécanique effectuée sur le polycristal revient à appliquer le schéma autocohérent à un site sur un composite à deux phases en adoptant toutefois une représentation géométrique particulière du grain (**Fig. 4.5**) :




Représentation physique du matériau polycristallin en 2 phases.

Microstructure tapissée par le motif micromécanique.

Schéma autocohérent – cas du biphasé

**Fig. 4.5 –** ***Passage de la représentation physique du polycristal au modèle autocohérent à 2 phases.***

Cette approche micromécanique visant à prendre en compte l'effet de taille de grain sur le comportement du polycristal est appliquée dans la partie suivante pour le cas particulier des aciers IF puis étendue par la suite à l'étude de l'effet d'autres tailles microstructurales.

## IV.3 APPLICATION : EFFET DE TAILLE DE GRAIN DANS LES ACIERS IF

### IV.3.1 Paramètres matériau et identification

L'approche micromécanique développée dans la partie précédente est appliquée sur des aciers IF (Interstitial Free) pour quatre tailles moyennes de grain variant de 5,5µm à 120µm. Ces aciers sont composés principalement d'une phase cristallographique cubique centrée de ferrite et ne présente, comme leur nom l'indique, pas ou très peu de composés interstitiels. Les autres éléments en solution solide sont Mn, P, Si, Ti et Al. Afin d'obtenir des tailles moyennes de grain différentes, ces éléments en solution solide ont été introduits en différentes proportions impactant alors la limite d'élasticité initiale $\sigma_0$ de chaque acier IF. En considérant la loi d'écoulement (4.9), la limite d'élasticité initiale $\sigma_0$ a été identifiée à partir de données expérimentales sur différents aciers IF. Les résultats de cette identification ainsi que le diamètre moyen des grains et la composition chimique des éléments d'alliage sont donnés dans le **Tab. 4.1** :

| $D_{moyen}$ (µm) | $\sigma_0$ (MPa) | Mn | P | Si | Ti | Al |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 120 | 95 | 100 | 10 | 5 | 50 | 37 |
| 15 | 150 | 201 | 11,1 | 5 | 61,3 | 37 |
| 8,5 | 200 | 199 | 73,4 | 5 | 60,8 | 37 |
| 5,5 | 330 | 1475 | 68,7 | 5 | 60 | 37 |

**Tab. 4.1 –** ***Diamètre moyen des grains, composition chimique (en $10^{-3}$% de poids) et limite d'élasticité initiale identifiée pour 4 aciers IF (ArcelorMittal).***

Les modules élastiques retenus (module de cisaillement, coefficient de Poisson) sont respectivement $\mu$=80000 MPa et $\nu$=0,3 pour chacun des quatre aciers IF présentés. La sensibilité à la vitesse du matériau est considérée come faible : $m=(1/n)=0{,}02$. Les chargements sont considérés homogènes et l'effet dû à l'orientation des grains n'est pas pris en compte. Par conséquent, le facteur de Nye présent dans la loi d'évolution des GND (équation (4.12)) est $\bar{r}=1$. Le coefficient de Taylor est M=3. La norme du vecteur de Burgers est $|b|=2{,}5.10^{-10}$m. $\alpha$ est un paramètre constant typiquement égal à $\alpha$ = 0,4 [Mug83, Mug04]. Les densités initiales de dislocations sont faibles et correspondent à un état recuit. L'ensemble des paramètres matériau est récapitulé dans le **Tab. 4.2** :

| $\mu$ (MPa) | $\nu$ | n | $\bar{r}$ | M | $\|b\|$ (m) | $\alpha$ | $\rho^0_{SSD}$ (m-2) | $\rho^0_{GND}$ (m-2) | k | f | $\lambda$ (µm) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 80000 | 0,3 | 50 | 1 | 3 | $2{,}5.10^{-10}$ | 0,4 | $10^6$ | $10^7$ | 0,022 | 6 | 0,15 |

**Tab. 4.2 –** ***Paramètres matériau et valeurs identifiées de k, f et $\lambda$ pour les aciers IF.***

Les valeurs de k et f qui décrivent les mécanismes de stockage et d'annihilation des dislocations dans les lois d'évolution des SSD et des GND ont été identifiées à partir de la courbe expérimentale de traction pour un diamètre de grain D=120µm. Pour ce diamètre de grain, l'effet de la couche contenant les joints de grain est négligeable (**Fig. 4.4**). Les valeurs obtenues k=0,022 et f=6 sont cohérentes avec celles obtenues par Sevillano et Aldazabal [Sev04] sur le polycristal de cuivre et celles obtenues par une relation classique de Kocks-Mecking par Fang et Dahl [Fan95] sur des aciers ferritiques. La valeur $\lambda$ définissant l'épaisseur de la couche a été identifiée à partir des différentes courbes contraintes-déformation afin de simuler l'effet de taille de grain sur les aciers IF. Le résultat de l'identification est reporté sur la **Fig. 4.6** :

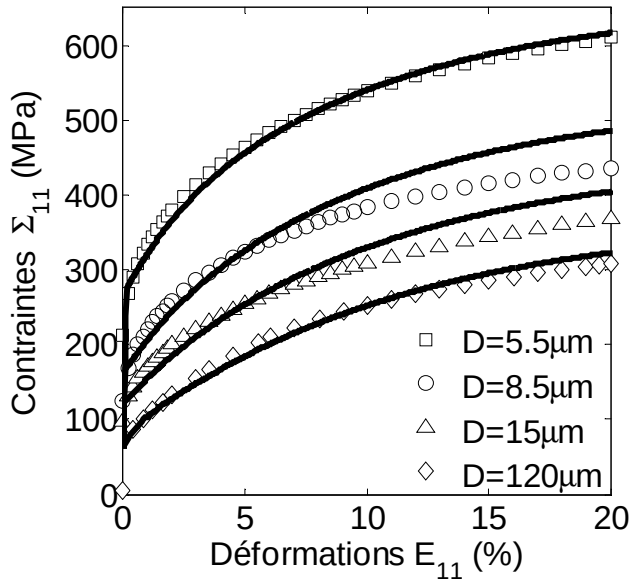



**Fig. 4.6 –** ***Courbes contraintes/déformations simulées (traits plein) et expérimentales (symboles) pour 4 tailles moyennes de grain : D=5,5 µm, D=8,5µm, D=15µm et D=120 µm***.

## IV.3.2 Résultats

### Comportement macroscopique

La meilleure identification est obtenue pour une valeur d'épaisseur de couche égale à $\lambda$=0,15µm ce qui paraît réaliste au vu des tailles de grain étudiées. Par souci de simplification dans cette première approche, $\lambda$ est considérée comme indépendante de la taille de grain et de la déformation. Dans ces conditions, des simulations de traction simple à un taux de déformation macroscopique imposé $\left|\dot{E}\right|=10^{-4}s^{-1}$ sont menées jusqu'à 20% de déformation. Les courbes simulées, reportées sur la **Fig. 4.6**, reproduisent bien l'effet de la taille de grain sur l'écrouissage et ce, malgré les fortes hypothèses envisagées.

Sur la **Fig. 4.7**, les résultats des simulations sont confrontés aux résultats expérimentaux à l'aide d'un diagramme de Hall-Petch pour trois niveaux de déformations : 2%, 5% et 10%. Cette représentation permet de bien constater les capacités du modèle à bien reproduire l'évolution du taux d'écrouissage en fonction de la taille de grain jusqu'à une déformation de 10%.

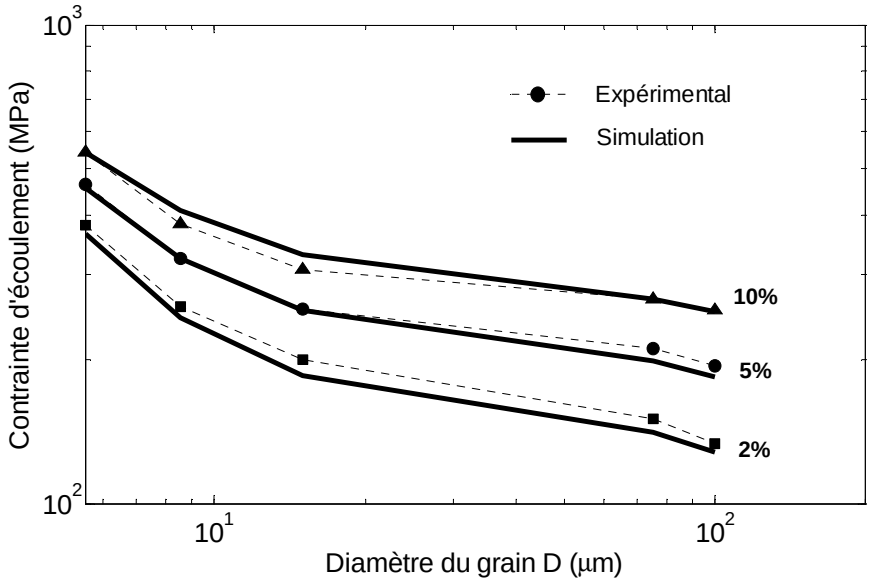



**Fig. 4.7 –** ***Diagramme de Hall-Petch : les contraintes d'écoulement expérimentales (symboles) et simulées (traits plein) sont représentées à différents niveaux de déformation : 2% (carrés), 5% (ronds) et 10% (triangles).***

Afin de conforter nos hypothèses sur la valeur du paramètre $\lambda$, notons que celui-ci peut être déterminé soit expérimentalement par détermination des contraintes locales à partir de mesures de déformation et/ou de désorientations locales autour des joints de grain soit numériquement à partir de modèles discrets de dislocations ou de modèles à éléments finis en introduisant les milieux généralisés. L'évolution de l'épaisseur de couche en fonction de la taille de grain et de la déformation mérite également de plus vastes investigations afin de préciser la pertinence du modèle notamment aux larges déformations.

**Comportement local**

Afin de tenter de comprendre les mécanismes physiques responsables de l'effet de taille de grain sur l'écrouissage, les évolutions des contraintes locales en fonction des déformations plastiques locales dans les deux phases sont reportées sur la **Fig. 4.8** pour deux tailles différentes de grain (5,5µm et 120µm) :

La **Fig. 4.8** met clairement en évidence le très haut niveau des contraintes dans la couche contenant les joints de grain. Pour une taille de grain D égale à 5,5 µm, les contraintes locales approchent une valeur de 1000MPa dans la région proche des joints de grain. Lorsque la taille de grain D est égale à 120µm, la déformation plastique macroscopique dépend essentiellement du comportement du cœur du grain. A l'inverse, lorsque la taille moyenne des grains D est égale à 5,5 µm, la déformation plastique macroscopique dépend non seulement du comportement du cœur du grain mais également de la région proche des joints de grain dont l'évolution dépend des gradients de déformation plastique. La figure met en évidence la capacité du modèle à prendre en considération les gradients de déformation plastique lorsque la taille de grain devient de l'ordre du micron.

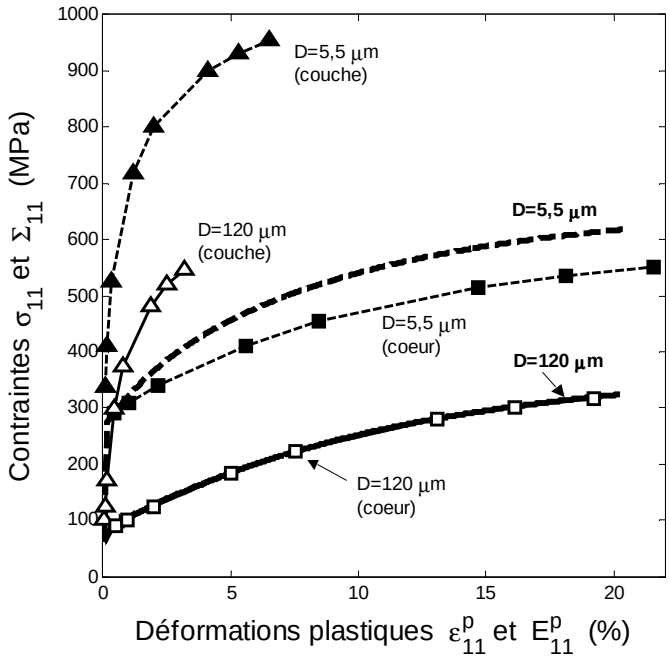



**Fig. 4.8 –** ***Contraintes locales (triangles et carrés) des phases pour deux tailles de grain : D=120µm (traits plein) et D=5,5 µm (traits en pointillés). La réponse macroscopique est également représentée (traits épais).***

**Evolution des densités de dislocations**

Les évolutions des densités de dislocations SSD et GND en fonction de la déformation plastique locale dans chaque phase sont représentées sur la **Fig. 4.9**. Il apparaît, malgré l'échelle logarithmique utilisée, que l'évolution des GND est plus sensible à la taille de grain que celle des SSD. Ceci s'explique bien entendu par les lois d'évolution choisies. De manière générale, les dislocations SSD et GND sont plus importantes en nombre dans la couche entourant les joints de grain ce qui s'avère cohérent avec ce qu'il est possible d'observer au microscope électronique à transmission.

Lorsque D=120µm, la densité des GND semble plus importante que lorsque D=5,5 µm. Ce résultat peut paraître surprenant à priori puisque la fraction volumique de joint de grain (et donc la fraction volumique de régions à accommoder) est plus importante lorsque la taille de grain diminue. Ceci s'explique tout simplement dans notre modèle par le volume attribué aux GND. Gardons à l'esprit que lorsque le diamètre D de grain varie, le volume de couche auquel sont affectées les GND varie également. Pour les petites tailles de grain, la phase accommodante (couche englobant les joints de grain) représente une fraction volumique plus importante que pour les grandes tailles de grains. Ainsi, si l'on pondère la densité des GND par la fraction volumique de couche présente dans le matériau, on s'aperçoit que le nombre total de GND augmente bien lorsque D diminue. Ces résultats montrent que les mécanismes de déformation plastique sont bien reproduits à l'échelle du grain.

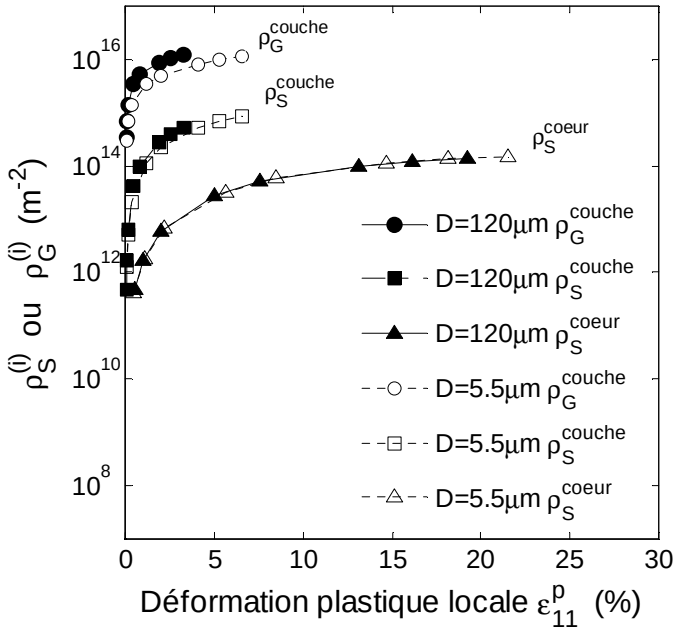



**Fig. 4.9 –** ***Evolution des densités de dislocations SSD et GND au sein des deux phases (couche et cœur du grain) pour deux tailles différentes de grain : D=120μm (symboles en noir) et D=5,5 μm (symboles en blanc).***

**Effet de taille de grain sur la contrainte cinématique**

Si l'on désire décrire de façon plus précise l'évolution de la densité des GND et les contraintes internes qui leur sont associées, des efforts de développement doivent être menés notamment en utilisant le tenseur de Nye (Eq. 4.3). L'approche micromécanique développée présentée dans ce chapitre considère par simplification uniquement un écrouissage isotrope dans les lois d'évolution de ses variables internes. Cependant, si l'écrouissage cinématique intraphase (intrinsèque à chaque phase) a été négligé, il n'en est pas de même pour l'écrouissage cinématique résultant du mélange des deux phases. L'incompatibilité plastique entre la couche englobant le joint de grain et le cœur du grain est responsable de contraintes internes dans les deux phases.

Afin de mettre en évidence la présence d'une contrainte cinématique macroscopique appelée back stress, il est courant de mener des essais suivant des trajets de chargement inverses. Dans le cas de chargements monotones menés sur des aciers biphasés ferrito-perlitiques, Allain *et al.* [All06, All08] ont identifié la contribution cinématique $\mathbf{X}'$ issue du mélange des deux phases (ferrite et perlite) :

$$\mathbf{X}' = f^{(1)} f^{(2)} \mathbf{\Delta X} \qquad \textbf{(4.20)}$$

où $f^{(1)}$ et $f^{(2)}$ représentent respectivement les fractions volumiques des deux phases ($f^{(1)} + f^{(2)} = 1$) et $\mathbf{\Delta X} = \boldsymbol{\sigma}_1 - \boldsymbol{\sigma}_2$ représente le saut de contraintes internes entre ces deux phases. En utilisant la relation de moyenne sur les contraintes ( $\boldsymbol{\Sigma} = \overline{\boldsymbol{\sigma}_i}$ ), la relation (4.20) aboutit à :

$$\mathbf{X}' = f^{(1)} f^{(2)} \mathbf{\Delta X} = f^{(1)} \left( \boldsymbol{\sigma}_1 - \boldsymbol{\Sigma} \right) = -f^{(2)} \left( \boldsymbol{\sigma}_2 - \boldsymbol{\Sigma} \right) \qquad \textbf{(4.21)}$$

L'effet Bauschinger issu de la contrainte cinématique $\mathbf{X}'$ due au mélange des deux phases peut être déterminé directement à partir de la contrainte interne et de la fraction volumique d'une des deux phases. L'équation (4.21) permet de vérifier aisément que la moyenne volumique des contraintes internes est bien nulle ( $\overline{(\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{\Sigma})}=\sum_{i=1}^{2} f^{(i)}\left(\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{i}}-\boldsymbol{\Sigma}\right)=\mathbf{0}$ ).

Ce résultat acquis, nous appliquons l'équation (4.21) dans le cadre de notre approche micromécanique afin de déterminer la relation entre l'effet de la taille de grain et l'effet Bauschinger. Le polycristal de ferrite est considéré comme un composite (**Fig. 4.3**). Ainsi, compte tenu de cette représentation particulière, la contrainte cinématique du mélange composite (cœur+couche) représente la contrainte cinématique intrinsèque des aciers IF. En simulant la réponse du composite à des essais de cisaillement pour différents diamètres de grain, nous enregistrons les contraintes internes présentes dans le cœur du grain et dans la couche (sorties naturelles d'un modèle micromécanique). Afin de déterminer la contrainte cinématique $\mathbf{X}'$ issue du mélange des deux phases (contrainte cinématique des aciers IF), il suffit d'appliquer la relation (4.21) en utilisant les contraintes internes de chaque phase. Les résultats des simulations sont comparés sur la **Fig. 4.10** à l'effet Bauschinger mesuré par Bouaziz *et al.* [Bou06b] et Aouafi [Aou09] sur les aciers IF :

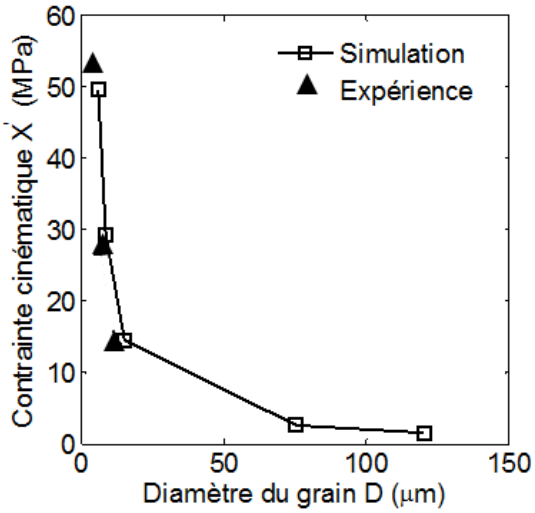



**Fig. 4.10 –** ***Comparaison simulation/expérience de la contrainte cinématique en fonction de la taille de grain lors d'essais de cisaillement Bauschinger. Les essais simulés (carrés) sont comparés aux données expérimentales obtenues sur des aciers IF (triangles).***

La **Fig. 4.10** montre la bonne capacité du modèle à prédire la contribution de l'effet de la taille de grain sur l'écrouissage cinématique (et donc l'effet Bauschinger) dans le cas d'aciers IF pour la gamme de points expérimentaux disponibles. En dépit du faible nombre de points expérimentaux disponibles, ce résultat supplémentaire vient conforter la pertinence de la valeur identifiée pour l'épaisseur $\lambda$ de la couche.

### IV.3.3 Discussion

L'approche micromécanique visant à prendre en compte des effets de taille de microstructure a été utilisée afin de reproduire l'effet de taille de grain sur les aciers IF. Dans ce modèle, le polycristal de ferrite est décrit géométriquement comme un composite à deux phases :

- une phase « molle » qui constitue le cœur du grain et qui correspondrait au comportement d'un polycristal de ferrite à gros grains, c'est-à-dire avec une fraction volumique de joint de grain négligeable,
- une phase « dure » qui constitue une couche enveloppant les joints de grain. Cette région accommodante dépend des gradients de déformation plastique existants entre les deux « phases » qui permettent d'assurer la compatibilité de réseau.

Le comportement de chacune des phases est gouverné par les dislocations (modélisées de manière collective sous forme de densité) que l'on a décomposées en deux populations :

- une population de dislocations mobiles, les SSD, qui sont distribuées aléatoirement dans le matériau (résultante du vecteur de Burgers nulle),
- une population de dislocations géométriquement nécessaires, les GND, qui sont localisées au niveau de la couche enveloppant les joints de grain (résultante non nulle du vecteur de Burgers).

L'originalité de l'approche consiste au final en deux points majeurs. Le premier point est la représentation géométrique du grain lors de l'étape de représentation du VER. Décomposer le grain de ferrite en deux régions distinctes revient à considérer d'un point de vue systémique un polycristal de ferrite, donc un monophasé en un composite à deux phases. Cette « discrétisation » du polycristal permet d'introduire deux longueurs internes microstructurales (l'épaisseur $\lambda$ de la couche enveloppant les joints de grain et le diamètre moyen D des grains) dans la définition de la fraction volumique de chacune des phases. Le second point original de cette approche réside dans le fait d'exprimer de manière non-locale le comportement de la couche. En effet, son comportement dépend directement de l'évolution de la densité des GND, c'est-à-dire du gradient de déformation plastique existant entre les deux phases (lui-même défini à l'aide de l'épaisseur de couche $\lambda$). La contrainte locale dans la couche dépend donc à la fois de la déformation dans la couche mais également de la déformation au cœur du grain. Ces considérations sur la manière d'introduire les longueurs internes dans le modèle sont résumées sur la **Fig. 4.11**.

Dans la littérature, on constate que dans la plupart des cas, l'effet de taille de grain est modélisé par l'introduction de longueurs internes dans la loi de comportement (locale ou macroscopique). Dans ce modèle, l'introduction est faite de manière différente et l'effet de taille de grain résulte :

- d'une représentation géométrique particulière du grain. Celle-ci est postulée en première approximation par l'introduction de longueurs internes dans les fractions volumiques des phases,

- de l'introduction d'un paramètre microstructural $\lambda$ dans la loi « non locale » de comportement de la couche.

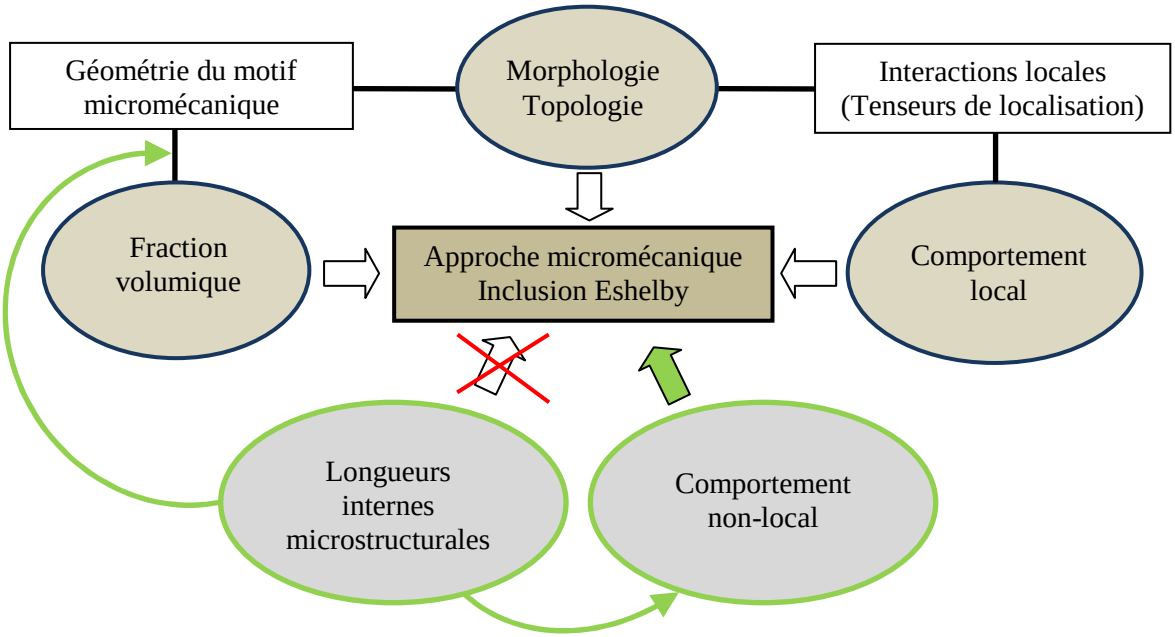



**Fig. 4.11 –** ***Représentation schématique de l'introduction de longueurs internes microstructurales dans l'approche micromécanique non-locale proposée.***

Comme le montre le schéma de la **Fig. 4.11**, cette introduction reste une voie possible parmi d'autres pour introduire des longueurs internes microstructurales dans une approche micromécanique. Dans notre modèle, dans un souci de simplification, nous nous limitons à modifier la géométrie du grain seulement d'un point de vue géométrique au travers de la description statistique au premier ordre du matériau (fraction volumique). Si la représentation géométrique du grain en un composite biphasé impacte la définition des fractions volumiques, elle n'impacte pas la morphologie et la topologie des phases d'un point de vue micromécanique. En effet, le schéma autocohérent est appliqué classiquement et chaque phase est représentée par une sphère. La prise en compte de la topologie réelle de la couche (calotte sphérique) mérite d'être étudiée, des efforts sont actuellement menés dans ce sens [Tau10].

Récemment, Bouaziz *et al.* [Bou09] ont montré dans le cadre du modèle en Béta de Pilvin qu'il était possible de relier le paramètre d'accommodation du modèle à la taille des particules et de la densité maximale de dislocations pouvant être accommodées à l'interface d'une particule et de sa matrice. Cette introduction de taille de microstructure correspondrait sur notre schéma (croix rouge sur la **Fig. 4.11**) à une introduction directe de longueur interne dans la transition d'échelles. Cependant, ce résultat qui s'applique particulièrement bien au modèle en Béta pour le cas particulier du mécanisme de boucles d'Orowan se formant autour de particules dures dans une matrice molle, semble plus compliqué à mettre en œuvre dès lors que les lois d'interaction se complexifient.

L'introduction de longueurs internes microstructurales dans une approche micromécanique reste donc un vaste champ d'investigations à peine ébauché au travers du modèle présenté dans ce chapitre. Des efforts doivent être consentis au niveau expérimental afin de pouvoir mieux éclairer le domaine de la modélisation sur la manière de prendre en compte les effets de taille de microstructure. Dans la fin de ce chapitre, nous étendons cette approche micromécanique à la prise en compte de l'effet de taille de particule dure.

## IV.4 MODELISATION DE L'EFFET DE TAILLE DE PARTICULES DURES

Dans cette partie, nous appliquons le modèle développé précédemment au cas où il existe une fraction de particules dures dans le matériau polycristallin. Dans ces conditions, nous faisons l'hypothèse qu'il existe deux sources principales d'hétérogénéités :

- les joints de grains de la matrice,
- les particules dures qui sont considérées comme élastiques non cisaillables.

Ces deux sources d'hétérogénéités sont accommodées localement par la matrice dans une première région située autour des joints de grain et dans une seconde région située autour des particules (régions représentées en couleur sur la **Fig. 4.12**). On désire décrire deux effets de taille de la microstructure : l'effet de la taille de grains et l'effet de la taille des particules.

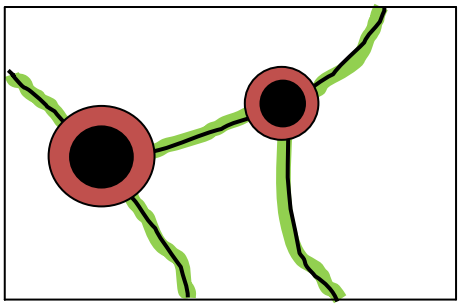


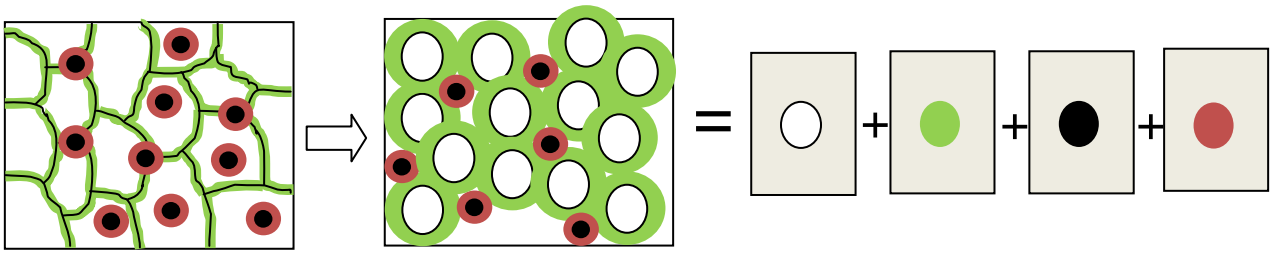
**Fig. 4.12 –** ***Représentation schématique des zones d'accommodation dans le matériau polycristallin (régions autour des joints de grain et régions des particules dures).***

### IV.4.1 Modèle micromécanique à 4 phases

Dans cette optique, nous « discrétisons » le matériau biphasé (réseau polycristallin et particules dures) en quatre régions ce qui permet d'identifier géométriquement les zones d'accommodation. Le matériau biphasé (matrice + particules dures) est alors représenté à l'aide d'un modèle à 4 phases :

i) une phase regroupant les particules,
ii) une phase décrivant la région de la matrice perturbée par la présence des particules dures,
iii) une phase décrivant la région de la matrice perturbée par la présence des joints de grains,
iv) une phase décrivant la région de la matrice non perturbée par les 2 types d'obstacles interfaciaux (joints de grain et particules dures), typiquement appelée « cœur du grain » dans le modèle précédent.

Le passage de la représentation physique du matériau au schéma autocohérent à 4 phases utilisé dans le modèle est représenté sur la **Fig. 4.13** :



Représentation physique du matériau polycristallin en 4 phases.

Microstructure tapissée par le motif micromécanique.

Schéma autocohérent – 4 phases

**Fig. 4.13 –** ***Passage de la représentation physique du matériau au schéma autocohérent à 4 phases.***

Afin de modéliser les deux effets de taille (grains et particules), quatre longueurs internes sont introduites dans le modèle (**Fig. 4.14**) :




*(a) Description géométrique du grain en 2 phases.*

*(b) Description géométrique d'une particule et de son proche environnement.*

**Fig. 4.14 –** ***Introduction de quatre longueurs internes dans la représentation géométrique du grain et des particules.***

i) le diamètre moyen « D » des grains du polycristal,

ii) l'épaisseur « $\lambda$ » de la région entourant les joints de grains. Cette région accommodante est le lieu des gradients de déformation plastique entre la matrice et les joints de grain,

iii) le diamètre moyen « $d_p$ » des particules dures présentes dans le polycristal,

iv) l'épaisseur « $\lambda_p$ » de la région entourant les particules. Cette région accommodante est le lieu des gradients de déformation plastique entre la matrice et les particules dures.

Le calcul des fractions volumiques de chacune des quatre phases découle directement de cette représentation géométrique. Nous faisons l'hypothèse que le matériau peut être pavé entièrement en suivant cette représentation géométrique ($f_{coeur}+f_{\lambda}+f_p+f_{\lambda_p}=1$). Le **Tab. 4.3** récapitule pour chacune des phases la description géométrique envisagée, la fraction volumique, le type de comportement envisagé ainsi que la longueur interne microstructurale qui la caractérise.

| | Description | Fraction volumique | Comportement | Dislocations | Longueur interne |
|---|---|---|---|---|---|
| **Phase 1**  | Particule dure non cisaillable | $f_p$ (connue) | Elastique | Aucune | $d_p$ |
| **Phase 2**  | Joints de particules + région de la matrice entourant les joints de particules | $f_{\lambda_p}=f_p\left[\left(\frac{d_p+2\lambda_p}{d_p}\right)^3-1\right]$ | Matrice élasto-viscoplastique | $\rho_G^{(2)}$ $\rho_S^{(2)}$ | $\lambda_p$ |
| **Phase 3**  | Matrice sans région de joint de grains | $f_{coeur}=\left(1-f_p-f_{\lambda_p}\right)\left(\frac{D-2\lambda}{D}\right)^3$ | Matrice élasto-viscoplastique | $\rho_S^{(3)}$ | D |
| **Phase 4**  | Joints de grains + région de la matrice entourant les joints de grains | $f_\lambda=f_{coeur}\left[\left(\frac{D}{D-2\lambda}\right)^3-1\right]$ | Matrice élasto-viscoplastique | $\rho_S^{(4)}$ $\rho_G^{(4)}$ | $\lambda$ |

**Tab. 4.3 –** ***Tableau récapitulatif du modèle à 4 phases visant à prendre en compte les effets de taille de grain et de taille de particule.***

Comme pour le premier modèle décrivant l'effet de taille de grain, l'effet de taille de particule attendu est dû à l'introduction de longueurs internes dans la description géométrique de la particule et à l'existence d'une région accommodante au comportement non-local. Cette région, qui se situe autour des particules, correspond au comportement de la matrice affectée par l'hétérogénéité des déformations entre les particules et la matrice. Plusieurs mécanismes ont été expliqués dans la littérature ou observés par microscopie électronique [Bro71, Atk74, Hum79, Ped83].

Dans ce modèle, par souci de simplification, nous n'avons pas pris en compte de tels mécanismes (boucles d'Orowan entourant les particules, boucles prismatiques etc.) même si le modèle permet de les ajouter. Nous avons seulement considéré que la présence des GND permettait d'accommoder les gradients de déformation plastique ou plutôt le saut de déformation plastique entre la particule et la matrice, c'est-à-dire classiquement comme nous l'avons fait pour le premier modèle décrivant l'effet de taille de grain. Par conséquent, la zone affectée par la présence des particules dures constitue une région au comportement élasto-viscoplastique dont le seuil d'écoulement est identique à celui gouvernant le cœur du grain ferritique et sa couche (équation (4.9)). Seules les variables internes diffèrent selon les régions considérées.

Ainsi, l'évolution du seuil d'écoulement s'écrit :

$$\dot{\sigma}_{ref}^{(I)} = \frac{M\alpha\mu b}{2\sqrt{\rho_S^{(I)}+\rho_G^{(I)}}}\left(\dot{\rho}_S^{(I)} + \dot{\rho}_G^{(I)}\right) \qquad \textbf{(4.22)}$$

$$\text{avec :}\begin{cases}\text{I=1 (particule élastique) : } \dot{\rho}_S^{(1)}=0 \text{ et } \dot{\rho}_G^{(1)}=0\\ \text{I=2 (couche de particule avec GND) : } \dot{\rho}_S^{(2)}\neq 0 \text{ et } \dot{\rho}_G^{(2)}\neq 0\\ \text{I=3 (coeur du grain) : } \dot{\rho}_S^{(3)}\neq 0 \text{ et } \dot{\rho}_G^{(3)}=0\\ \text{I=4 (couche de joint de grain avec GND) : } \dot{\rho}_S^{(4)}\neq 0 \text{ et } \dot{\rho}_G^{(4)}\neq 0\end{cases}$$

L'évolution des GND dans la phase 2 dépend du gradient de déformation plastique entre la matrice (cœur du grain) et la particule au travers de l'épaisseur de couche $\lambda_p$ située autour de la particule. Les particules étant considérées élastiques non-cisaillables, l'évolution de la densité de GND dans la phase 2 s'écrit :

$$\dot{\rho}_G^{(2)}=\frac{M}{b}\frac{\dot{\varepsilon}_{eq}^{vp(3)}-\dot{\varepsilon}_{eq}^{vp(1)}}{\lambda_p}=\frac{M}{b}\frac{\dot{\varepsilon}_{eq}^{vp(3)}}{\lambda_p} \qquad \textbf{(4.23)}$$

Les évolutions des variables internes (densités de GND et de SSD) régissant le comportement élasto-viscoplastique des grains du polycristal (cœur du grain et couche de joint de grain) sont identiques à celles décrites dans le premier modèle :

$$\begin{cases}\dot{\rho}_S^{(I)}=M\left(\frac{k}{b}\sqrt{\rho_S^{(I)}+\rho_G^{(I)}}-f\rho_S^{(I)}\right)\dot{\varepsilon}_{eq}^{vp(I)}\\ \dot{\rho}_G^{(4)}=\frac{M}{b}\frac{\dot{\varepsilon}_{eq}^{vp(3)}-\dot{\varepsilon}_{eq}^{vp(4)}}{\lambda}\end{cases} \qquad \textbf{(4.24)}$$

L'objectif dans cette modélisation à 4 phases est d'estimer si les effets de taille de particule attendus sont réalistes ou non et d'essayer de comprendre si ces effets de taille peuvent être suffisamment portés par la fraction volumique et l'évolution des GND dans le modèle. Afin de remplir ces deux objectifs, des simulations d'essais de traction sont menées systématiquement pour deux diamètres de grain différents : 5,5µm et 120µm. Lorsque D=120µm, comme nous l'avons déjà évoqué précédemment, l'effet de taille de grain est négligeable. Dans ces conditions, le modèle à 4 phases permet de bien distinguer l'effet de taille de particule sur le comportement macroscopique indépendamment de l'effet de taille de grain.

### IV.4.2 Résultats

Les simulations d'essais de traction sont effectuées à taille de grain (D=5µm ou D=120µm), épaisseur de joint de grain ($\lambda$=0,15µm), épaisseur de joint de particule ($\lambda_p$=0,5µm) et fraction volumique de particules constants ($f_p$=2%). Seul le diamètre $d_p$ des particules varie de 0,5 à 5 microns. Les lois de comportement élasto-viscoplastique et les paramètres matériau associés sont les mêmes que ceux identifiés pour les aciers IF (**Tab. 4.1** et **Tab. 4.2**) dans le premier modèle. Les constantes élastiques pour les particules sont identiques à celles utilisées pour les phases élasto-viscoplastiques. La **Fig. 4.15** représente ces résultats pour 2 configurations de taille de grains : D=5µm et D=120µm.

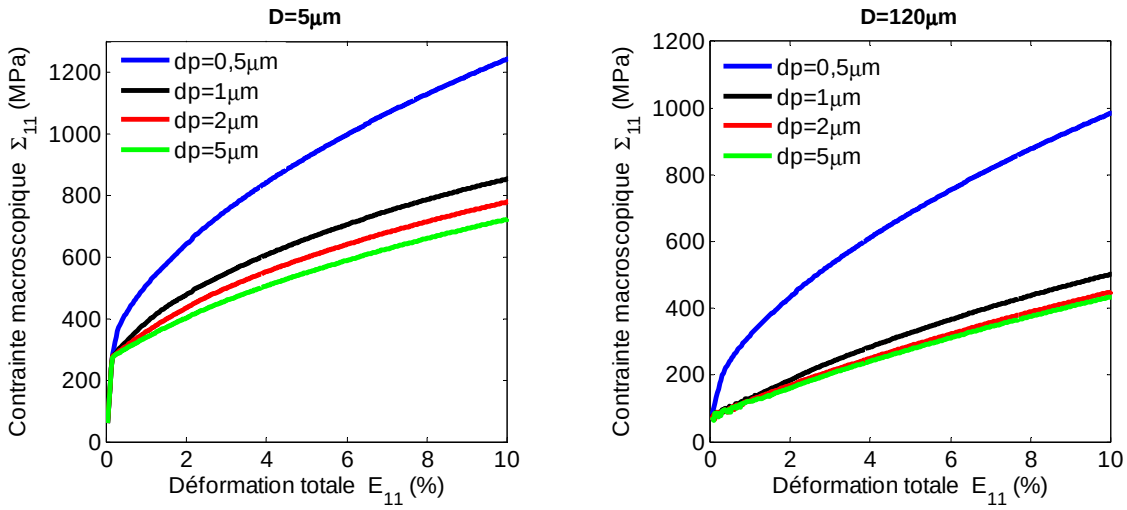



**Fig. 4.15 –** ***Effet de taille de particules élastiques non-cisaillables sur un matériau polycristallin pour deux tailles de grain (D=5µm et D=120µm).***

L'effet de la taille de particules est particulièrement important lorsque le rapport $\lambda_p/d_p$ devient proche de 1, c'est-à-dire lorsque le diamètre des particules avoisine 0,5µm dans le cadre de ces simulations. Lorsque ce rapport devient nul, c'est-à-dire lorsque le diamètre des particules devient grand à $\lambda_p$ fixé, l'épaisseur de couche de particule est négligeable et les effets de taille de particule disparaissent. Dans ces conditions, seul l'effet de taille de grain (important pour D=5µm) et l'effet composite dû à la présence de particules dures subsistent.

Dans le cas où la taille de grain « D » est importante, les effets de couche de joint de grain s'estompent permettant d'apprécier un seul effet de longueur interne décrit par le modèle : celui de la taille des particules. Dans ces conditions, c'est toujours le rapport $\lambda_p/d_p$ qui gouverne le comportement : plus celui-ci est proche de 1, plus les effets de taille de particules sont importants.

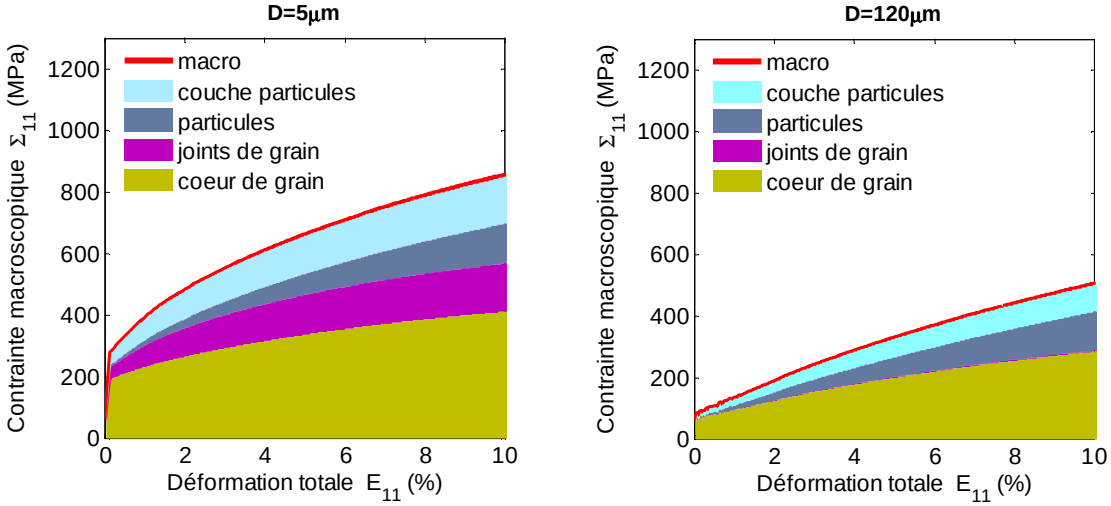



**Fig. 4.16 –** ***Contribution sur la contrainte macroscopique des effets de taille de microstructure pour un matériau polycristallin contenant 2% de particules ($d_p$=1µm) pour deux tailles de grain différentes.***

La **Fig. 4.16** décrit la contribution en contrainte « $f_i\boldsymbol{\sigma}_i$ » de chaque phase sur le comportement macroscopique du polycristal lorsque la taille de particule est fixée à 1µm. La distribution des contraintes dans chaque phase permet de bien comprendre quels sont les effets de taille de microstructure pris en compte dans le modèle lorsque la taille de grain est petite ou grande. Lorsque D=5µm, deux effets de taille de microstructure sont pris en compte : la taille de grain et la taille des particules. A l'inverse, lorsque la taille de grain est importante (D=120µm), la fraction volumique de joints de grain est négligeable devant celle du cœur du grain et les effets de taille de grain sont négligeables.

### IV.4.3 Discussion

Cette étude qualitative sur la prise en compte de l'effet de taille de particules dures élastiques non-cisaillables dans une approche à champs moyens montre que la transposition du premier modèle à l'étude de l'effet de longueurs internes autres que la taille de grain est possible. Toutefois, il convient de constater que ces effets dépendent directement des valeurs attribuées aux longueurs internes introduites et que celles-ci nécessitent d'être déterminées expérimentalement (mesures de la désorientation du réseau, nano-indentation, diffraction des rayons X etc.). Les données expérimentales présentes dans la littérature sont encore trop peu nombreuses ce qui freine le développement de ce type de modélisation. Des efforts expérimentaux considérables doivent être effectués afin d'identifier, de confirmer, de rectifier, et d'affiner les valeurs de ces longueurs internes microstructurales. Ce type d'approche, basée sur l'identification et l'introduction de longueurs internes microstructurales, pose un certain nombre de questions dont seules les techniques expérimentales sont en mesure de répondre :

- les contraintes internes simulées à l'intérieur de la particule et autour de celle-ci sont-elles réalistes ?
- l'épaisseur de la couche affectée par la présence de particules ou de joints de grain correspond-t-elle à une région physique perturbée du réseau cristallin ?
- Dans quelle mesure peut-on considérer un profil linéaire du gradient de déformation plastique ?

## IV.5 CONCLUSIONS

Les approches classiques à champs moyens basées sur l'inclusion d'Eshelby ne permettent pas de prendre en compte des effets de taille de microstructure. Afin de décrire de tels effets, ce type d'approche nécessite d'être modifié. Nous avons vu dans ce chapitre, qu'il était possible d'introduire des longueurs internes microstructurales dans ces approches afin de rendre compte de l'effet de taille de grain dans les aciers IF et de l'effet de particules dures élastiques non-cisaillables dans un polycristal.

Pour que les effets de taille résultent naturellement du modèle micromécanique, l'introduction de longueurs internes ne doit pas se réduire à l'incorporation de paramètres dans les lois de comportement des phases auquel cas, l'effet de taille se réduit simplement à un effet composite dû au mélange de phases. Nous avons fait le choix, à l'aide d'hypothèses simplificatrices, d'intervenir dans l'étape de représentation des motifs micromécaniques en incorporant les longueurs internes microstructurales dans la représentation géométrique du matériau. Ce choix reste une possibilité parmi d'autres (**Fig. 4.11**) et montre à quel point les approches à champs moyens constituent un vaste terrain d'investigations et d'applications.

Outre l'effet de taille de grain et de taille de particule, on peut raisonnablement penser appliquer ce modèle à l'étude de la taille absolue de seconde phase dans un matériau multiphasé. Dans un acier biphasé ferrito-martensitique, un tel modèle reviendrait à étudier la taille des ilots de martensite après avoir identifié des tailles de microstructures significatives comme la taille moyenne des îlots, la distance moyenne entre les îlots etc.

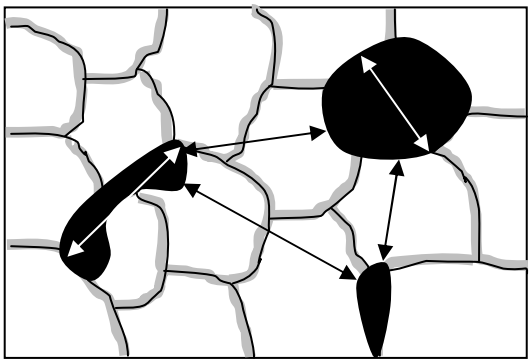


**Fig. 4.17 –** ***Effet de taille de phase : quelles longueurs internes microstructurales choisir?***

Si l'introduction de longueurs internes microstructurales dans les approches à champ moyen permet de prendre en compte des effets de taille de microstructure, elle s'accompagne également d'un lot non négligeable de questions. Il est en effet légitime de vouloir connaître par exemple quelle est l'erreur (nécessaire dans une approche continue pour reproduire les effets ?) faite sur l'épaisseur de couche lorsque le gradient de déformation plastique est considéré linéaire. La région de la matrice affectée par la présence d'obstacles interfaciaux (joints de grain, particules dures) présente très probablement un profil plus souple et évolue certainement avec la déformation plastique. Ces questions, parmi tant d'autres, nécessitent plus que jamais une étroite collaboration entre expérimentateurs et modélisateurs afin de confirmer et d'améliorer ces modèles et d'en déterminer les limites.

Par ailleurs, l'application classique des méthodes à champs moyens ne permet pas, à l'image de la plasticité conventionnelle, d'apprécier les effets de taille de microstructure sur le comportement macroscopique du matériau hétérogène. Dans cette optique, une approche non locale visant à prendre en compte les effets de longueurs internes microstructurales a été développée dans ce chapitre. Celle-ci a été validée dans le cadre de l'étude de l'effet de taille de grain sur les aciers IF puis étendue à l'étude de l'effet de taille de particules.

Enfin, le caractère non local de cette approche apporte également une réponse au problème d'homogénéisation des aciers multiphasés. D'un point de vue physique, deux aciers multiphasés aux caractéristiques très différentes ne présentent *a priori* pas la même ferrite. Il est légitime alors de se poser la question de la validité d'un modèle d'homogénéisation multiphasé pour lequel un comportement local serait affecté à la ferrite et à chacune des autres phases présentes. L'approche micromécanique développée dans ce chapitre, en s'appuyant sur une taille de microstructure pertinente comme la taille de grain de ferrite, permet de modéliser un comportement non-local de la ferrite. Celle-ci dépend alors directement de son environnement, c'est-à-dire des autres phases présentes, quel que soit l'acier multiphasé étudié.

Au travers de ces différents résultats très prometteurs, ce nouveau type d'approche micromécanique visant à prendre en compte les effets de taille de microstructure pose un certain nombre de nouvelles questions. Celles-ci doivent être prises sérieusement en

considération en vue d’améliorer, de confirmer ou d’infirmer ces nouveaux modèles. Afin d’y parvenir, le modélisateur doit s’appuyer plus que jamais sur les nouvelles techniques expérimentales de caractérisation des matériaux afin de développer ces modèles qui constituent un énorme potentiel d’applications.

## BIBLIOGRAPHIE


[Aou09] **AOUAFI A.** Analyse et modélisation du comportement en chargement inversé d'aciers ferritiques et micro-alliés : prise en compte de la taille de grains et des précipités dans des lois d'écrouissage mixte. *Thèse de doctorat*, Université Paris XIII, 2009.

[All06] **ALLAIN S., BOUAZIZ O.** Modèle à base microstructurale pour la prévision des propriétés mécaniques des aciers ferrito-perlitiques découplant les sources d'écrouissages isotropes et cinématiques. **In:** Proceedings of French National Conference 'Matériaux 2006', Dijon, France, 13-17 Novembre 2006.

[All08] **ALLAIN S., BOUAZIZ O.** Microstructure based modeling for the mechanical behavior of ferrite-pearlite steels suitable to capture isotropic and kinematic hardening. *Materials Science and Engineering A*, **496**, pp. 329-336, 2008.

[Ars99] **ARSENLIS A., PARKS D.M.** Crystallographic aspects of geometrically-necessary and statistically stored dislocation density. *Acta Mater.*, **47**, pp. 1597-1611, 1999.

[Ash70] **ASHBY M.F.** The deformation of plastically non-homogenous materials. *Phil. Mag.*, **21**, pp. 399-424, 1970.

[Atk74] **ATKINSON J.D., BROWN L.M., STOBBS W.M.** The work-hardening of copper-silica – IV. The Bauschinger effect and plastic relaxation. *Phil. Mag*, **30**, pp. 1247-1280, 1974.

[Ber79] **BERVEILLER M., ZAOUI A.** An extension of the self-consistent scheme to plastically-flowing polycrystals. *J. Mech. Phys. Solids*, **26**, pp. 325-344, 1979.

[Bou06a] **BOUAZIZ O.** Modélisations des matériaux hétérogènes appliqués aux aciers multiphasés. **In:** Proceedings of French National Colloquium 'MECAMAT', Aussois, France, 2006.

[Bou06b] **BOUAZIZ O., DIRRAS G.** Effet de la taille de grain sur les écrouissages isotrope et cinématique dans la gamme 0,35µm à 75 µm. **In:** *Proceedings of French National Conference 'Matériaux 2006'*, Dijon, France, 2006.

[Bou09] **BOUAZIZ O., BRECHET Y.** Physical relationship between mean-field micro-mechanical approach and Orowan looping in particle-strengthened materials. *Scripta Materialia*, **60**, pp. 366-368, 2009.

[Bro71] **BROWN L.M., STOBBS W.M.** The work-hardening of copper-silica - II. The role of plastic relaxation. *Phil. Mag.*, **23**, pp. 1201-1231, 1971.

[Del07] **DELINCE M., BRECHET Y., EMBURY D., GEERS M.G.D., JACQUES P.J., PARDOEN T.** Structure-property optimization of ultrafine-grained dual-phase steels using a microstructure-based strain hardening model. *Acta Materalia*, **55**, pp. 2337-2350, 2007.

[Fan95] **FANG X.F., DAHL W.** Strain hardening of steels at large strain deformation. Part I: Relationship between strain hardening and microstructures of b.c.c. steels. *Mater. Sci. Engng.*, **A203**, pp. 14-25, 1995.

[Gao01] **GAO H., HUANG Y.** Taylor-based nonlocal theory of plasticity. *Int. J. Solids Struct.*, **38**, pp. 2615-2637, 2001.

[Hal51] **HALL E.O.** The deformation and ageing of mild steel: III Discussion of results. *Proc. Phys. Soc. London*, **B 64**, pp. 747-753, 1951.

[Hug03] **HUGHES D.A., HANSEN N., BAMMANN D.J.** Geometrically necessary boundaries, incidental dislocation boundaries and geometrically necessary dislocations. *Scripta Mater.*, **48**, pp. 147-153, 2003.

[Hum79] **HUMPHREYS F.J.** Local lattice rotations at second phase particles in deformed metals. *Acta Matallurgica*, **27**, pp. 1801-1814, 1979.

[Koc03] **KOCKS U.F., MECKING H.** The physics and phenomenology of strain hardening. *Prog. Mater. Sci.*, **48/3**, pp. 171-273, 2003.

[Kro60] **KRÖNER E.** Allgemeine kontinuumstheorie der versetzungen und eigenspannungen, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, **4**, pp. 273-334, 1960.

[Mec81a] **MECKING H., KOCKS U.F.** Kinetics of flow and stain-hardening. *Acta Metall.*, **29**, pp.1865-1875, 1981.

[Mec81b] **MECKING H.** Low temperature deformation of polycrystals. **In:** Deformation of polycrystals, *Hansen N. et al. (Eds.). Riso National Laboratory, Roskilde, Denmark*, pp. 73-86, 1981.

[Mor73] **MORI T., TANAKA K.** Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions. *Acta Metall.*, **21**, pp. 571-574, 1973.

[Mug83] **MUGHRABI H.** Dislocation wall and cell structures and long-range internal stresses in deformed metal crystals. *Acta Metall.*, **31**, pp. 1367-1379, 1983.

[Mug04] **MUGHRABI H.** On the current understanding of strain gradient plasticity. *Mater. Sci. Eng. A*, **387–389**, pp. 209–213, 2004.

[Mur63] **MURA T.** Continuous distribution of moving dislocations. *Phil. Mag.*, **8**, pp. 843-857, 1963.

[Nye53] **NYE J.F.** Some geometrical relations in dislocated crystal. *Acta Metall.*, **1**, pp. 153-162, 1953.

[Ped83] **PEDERSEN O.B., BROWN L.M.** The strength of heterogeneous materials, continuum models and discrete models. **In:** Deformation of multiphase and particle containing materials. *Proceedings of the 4th Riso international symposium on metallurgy and materials science*, Riso, 5-9 september, pp. 83-102, 1983.

[Pet53] **PETCH N.J.** The cleavage strength of polycrystals. *J. Iron Steel Inst.*, **174**, pp. 25-28, 1953.

[Pip09] **PIPARD J.-M., NICAISE N., BERBENNI S., BOUAZIZ O., BERVEILLER M.** A new mean field micromechanical approach to capture grain size effects. *Computational Materials Science*, **45**, pp. 604-610, 2009.

[Sev04] **SEVILLANO J. GIL, ALDAZABAL J.** Ductilization of nanocrystalline materials for structural applications. *Scripta Mater.*, **51**, pp. 795-800, 2004.

[Sin06] **SINCLAIR C.W., POOLE W.J., BRECHET Y.** A model for the grain size dependent work hardening of copper. *Scripta Materialia*, **55**, pp. 739-742, 2006.

[Sun00] **SUN S., ADAMS B.L., KING W.** Observations of lattice curvature near the interface of a deformed aluminium bicrystal. *Phil. Mag.*, **A 80**, pp. 9-25, 2000.

[Tau10] **TAUPIN V., BERBENNI S., FRESSENGEAS C., BOUAZIZ O.** On particle size effects: an internal length mean field approach using field dislocation dynamics. *Acta Mater.*, **58**, issue 16, pp. 5532-5544, 2010.

[Tho73] **THOMPSON W., BASKES M.I., FLANAGAN W.F.** The dependence of polycrystal work hardening on grain size. *Acta Metall.*, **21**, pp. 1017-1028, 1973.

[Wen83] **WENG G.J.** A micromechanical theory of grain-size dependence in metal plasticity. *J. Mech. Phys. Solids*, **31**, pp. 193-203, 1983.

# CHAPITRE V

# INTEGRATION D'OUTILS D'HOMOGENEISATION DANS LE CODE D'ELEMENTS FINIS ABAQUS POUR LA SIMULATION EN MISE EN FORME DES ACIERS MULTIPHASES

## V.1 PRESENTATION DES ROUTINES UTILISATEURS

L'un des objectifs de cette thèse est la création d'un outil pour la simulation numérique capable de modéliser le comportement d'un acier multiphasé à partir des lois de comportement élasto-viscoplastique individuel des phases. En particulier, à partir de la loi en sinus hyperbolique développée dans un cadre tensoriel et incrémental au chapitre 2. Un modèle de transition d'échelles est nécessaire afin de relier le comportement individuel des phases au comportement macroscopique de l'acier multiphasé. Le logiciel Abaqus ne dispose pas de tels modèles mais offre néanmoins la possibilité d'utiliser des routines utilisateurs UMAT ou VUMAT.

Dans le cadre de cette thèse, les modèles à champs moyens nécessaires à la modélisation d'un acier multiphasé ont été implantés via une routine utilisateur. L'objet de cette première partie du chapitre est de résumer succinctement les choix quant à cette implantation dans le logiciel de calcul Abaqus en vue d'une simulation en mise en forme.

### V.1.1 Méthode de résolution

Suivant la méthode de résolution choisie, deux codes existent sous Abaqus : Abaqus Standard (résolution implicite) et Abaqus Explicit (résolution explicite). Notre choix s'est porté sur la méthode de résolution dynamique explicite qui est la plus couramment utilisée en milieu industriel pour simuler l'emboutissage. Celle-ci présente les avantages suivants :

- La mise en donnée est relativement simple et permet davantage de souplesse,
- La convergence vers un résultat (pas toujours le résultat exact) est assurée, malgré les nonlinéarités inhérentes aux problèmes de mise en forme (géométrique, comportement, contact, problème instationnaire).

En contrepartie, la méthode de résolution explicite a plusieurs désavantages :

- Elle nécessite un pas de temps très faible afin d'éviter les instabilités de calcul liées à la méthode. Au-delà d'un pas de temps dit critique, des instabilités apparaissent.
- Le pas de temps est défini à partir du plus petit élément de la structure. Les temps de calculs peuvent donc s'avérer excessivement longs et dépendent de la taille des éléments. Il faut donc systématiquement faire une étude de convergence afin de déterminer l'influence du maillage.
- Les problèmes de mise en forme que l'on étudie dans ce chapitre ne comportent pas d'effets dynamiques réels. Il faut donc s'assurer que les effets dynamiques restent faibles dans la simulation (énergie interne >> énergie cinétique), notamment lorsque des masses volumiques / vitesses artificielles sont utilisées afin d'optimiser les temps de calcul.

### V.1.2 Implantation de modèles à champs moyens dans une routine utilisateur VUMAT

***Routine utilisateur VUMAT***

Dans le code Abaqus/Explicit, le modèle de comportement utilisateur peut être implanté via la programmation d'une routine VUMAT (Vectorized User Material) écrite en Fortran. Ce type de routine comme son nom l'indique est optimisée pour le calcul vectoriel et impose à l'utilisateur de programmer toutes ses variables en vecteurs. La VUMAT utilise une architecture binaire : les valeurs du pas précédent (ou initiales) sont rangées dans les vecteurs OLD et les variables du pas courant sont rangées dans les vecteurs NEW. A chaque pas de

temps, Abaqus fournit en entrée de la routine un incrément de déformation. La VUMAT doit être programmée de telle sorte à fournir en sortie le tenseur de Cauchy à chaque pas, ainsi que les éventuelles variables internes du modèle. Nul besoin de calculer de matrice jacobienne ou de calculer la rotation des matrices comme dans Abaqus/Standard, celle-ci n'étant pas requise pour la méthode de résolution d'Abaqus/Explicit [Aba10]. Une fois calculé, le tenseur des contraintes est rangé dans le vecteur « stressNEW ». Il réapparaît au pas suivant comme le vecteur « stressOLD ».

***Implantation de modèles à champs moyens dans une VUMAT***

L'implantation de modèles à champs moyens écrit en Fortran paraît donc simple. Schématiquement, elle se résume pour des algorithmes simples à :

- Calculer, à l'aide des lois de localisation, les vitesses de déformations locales à partir de l'incrément de déformation macroscopique fourni en entrée de VUMAT par Abaqus. Le schéma d'intégration utilisé est celui d'Euler compte tenu des incréments de temps infinitésimaux.
- Déterminer les contraintes locales à l'aide de la loi comportement locale,
- Déterminer la contrainte macroscopique par homogénéisation nécessaire à Abaqus en sortie de routine VUMAT.

Cependant, l'utilisateur doit prendre un certain nombre de précautions quant à la programmation d'une VUMAT et peut rendre l'implantation du programme Fortran beaucoup plus difficile qu'il n'y paraît aux premiers abords :

- Au lancement d'un calcul, durant la phase initiale de vérification, ABAQUS appelle la VUMAT afin de tester le modèle de comportement utilisateur. Il lui fournit des déformations fictives afin de calculer l'incrément de temps critique au-delà duquel la stabilité n'est plus garantie. Il faut s'assurer que les propriétés élastiques sont utilisées durant cet appel sinon le pas de temps critique est surestimé ce qui conduit à des instabilités.
- Le code est exécuté de la même manière quel que soit le comportement en cours, élastique ou viscoplastique.
- Quelques techniques de programmations doivent être suivies pour l'écriture de VUMAT : aucune subroutine externe ne doit être appelée à l'intérieur d'une boucle et les itérations non fixes doivent être évitées.

### V.1.3 Validation des algorithmes

Plusieurs modèles à champs moyens ont ainsi été programmés en VUMAT à partir des solveurs Fortran existants :

- Le modèle de Taylor-Lin,
- Le modèle à champs translatés de Berbenni *et al.*,
- Le modèle en Béta de Pilvin-Cailletaud.

Les algorithmes ont été modifiés de sorte à tenir compte des principales contraintes liées à l'utilisation de VUMAT. Les routines ont été validées à partir de sollicitations simples sur un élément en traction uniaxiale et en cisaillement pur. Les résultats ont été comparés à ceux des solveurs Fortran et ont été validés.

## V.2 SIMULATION D'UN ESSAI DE TRACTION UNIAXIALE

Après quelques rappels sur l'essai de traction, qui permettent d'introduire le matériau et les lois de comportement étudiés, ce paragraphe apporte une première validation de l'outil numérique développé à travers la simulation d'un essai de traction et l'illustration des effets de la loi de comportement (notamment la sensibilité à la vitesse).

### V.2.1 Rappels et spécificités de l'essai de traction uniaxiale

L'essai de traction uniaxiale sur une tôle d'acier peut paraître simple de prime abord, parce que la géométrie de la pièce, la déformation et le chemin de déformation qui lui sont imposés, sont de représentation facile. Avant d'appréhender la description de chemins de déformation plus complexes comme c'est le cas lors d'un emboutissage par exemple, il convient de bien comprendre les spécificités de l'essai de traction, des possibilités de description de la physique du matériau qu'offre cet essai ainsi que les conséquences du choix d'une loi de comportement sur les résultats en simulation numérique. L'objectif de cette partie n'est pas de décrire de façon exhaustive un tel essai mais plutôt de mettre en relief certaines de ses spécificités qui ont un lien direct avec le travail de cette thèse sur les lois de comportement. Rappelons tout d'abord que l'essai de traction uniaxiale consiste, à l'aide d'une machine de traction, à imposer un allongement croissant à une éprouvette usinée dans la tôle de l'acier à caractériser. La géométrie de l'éprouvette étant définie par une norme [ISO6892].

#### Courbe conventionnelle

En résistant à la déformation imposée par la machine de traction, l'éprouvette oppose une force de résistance. C'est cette force ainsi que l'allongement de l'éprouvette qui sont mesurés au cours de l'essai de traction. L'enregistrement classique d'un essai de traction est représenté par la courbe conventionnelle **Fig. 5.1**.

Le tracé de cette courbe conventionnelle, dans le cadre d'un acier doux, parcourt quatre zones de déformations :

**Zone 1 :** C'est la zone de déformations élastiques. Le point O représente le début de l'essai sur la **Fig. 5.1**. L'éprouvette tenue par les mors de la machine est alors contrainte à s'allonger. Aux premiers instants de déformations, l'éprouvette résiste de façon élastique à cet allongement imposé, jusqu'au point A qui symbolise ici la limite d'élasticité $R_e$ au-delà de laquelle le comportement devient plastique. En réalité cette transition est rarement aussi prononcée sauf cas particulier de palier élastique que nous ne traiterons pas par souci de simplification. C'est pourquoi, dans le cas général, la norme définit une limite « conventionnelle » de contrainte $R_{p0,2}$ correspondant à un allongement permanent très faible de 0,2%. Celle-ci est déterminée comme la contrainte représentant l'intersection entre une parallèle à la partie linéaire OA de la courbe passant par le point d'abscisse 0,2% et la courbe d'enregistrement. Considérons, pour l'explication, que la transition élastique-plastique est franche et que le point A délimite deux domaines :

- un domaine élastique représenté par la zone 1 où les déformations sont réversibles,
- un domaine plastique (au sens large) représenté par trois zones : 2, 3 et 4.

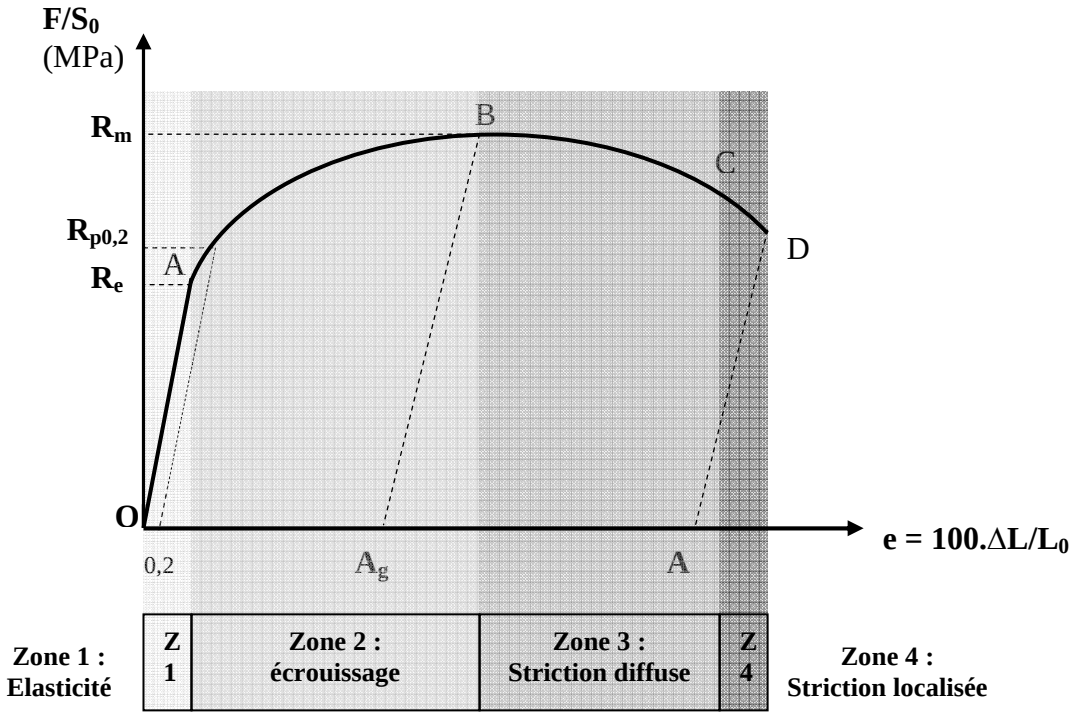



**Fig. 5.1 –** ***Courbe conventionnelle : cas d'un acier doux.***

$S_0$ étant la section initiale de l'éprouvette dans sa longueur utile, $\Delta L$ la différence de longueur entre l'instant t et la longueur initiale $L_0$ de l'éprouvette. $F/_{S0}$ est la contrainte conventionnelle, e est l'allongement pour cent.

**Zone 2 :** Dans cette zone, alors que la section de l'éprouvette diminue, l'allongement est uniforme et homogène. Au cours du trajet AB, même si la section diminue, la force mesurée par la machine de traction, produit de la contrainte par la section, grandit. C'est donc que la contrainte que peut supporter le métal augmente plus vite que sa section ne diminue [Col10]. Cette consolidation du métal, l'écrouissage, s'explique par plusieurs phénomènes physiques (ancrage et multiplication des dislocations au sein du métal etc.). La consolidation, et donc les phénomènes qui la nourrissent, ralentit pourtant progressivement tant et si bien que la diminution de section au cours de l'allongement de l'éprouvette est de moins en moins compensée jusqu'à ne plus l'être au-delà du point B qui constitue une sorte d'équilibre. Le point B représente la contrainte maximale $R_m$, nommée résistance à la traction, à laquelle est associée l'allongement plastique uniformément réparti $A_g$.

**Zone 3 :** A partir du point B, seule la zone centrale de l'éprouvette se rétrécit et s'amincit : on parle de striction diffuse par opposition à la striction localisée (cf. zone 4) qui précède la rupture au point D. Selon le type d'acier, l'allongement supplémentaire peut être conséquent (20% pour les aciers doux) ou au contraire négligeable (aciers TRIP par exemple). Pour les aciers ductiles représentés par la **Fig. 5.1**, la striction diffuse revient à retarder la rupture : le matériau continue de résister malgré le fait que la consolidation ne compense plus la diminution de section. Cette résistance plutôt inattendue s'explique par la sensibilité à la vitesse. Nous avons vu dans les chapitres précédents que les aciers doux avaient une sensibilité positive à la vitesse de déformation : la contrainte d'écoulement augmente avec la

vitesse de déformation. Alain Col [Col10] explique la striction diffuse de la manière suivante :

Rappelons que la force de résistance qu'oppose l'éprouvette, c'est-à-dire la tension de l'éprouvette, est la même tout au long de l'éprouvette indépendamment des variations locales de section. Dans la partie centrale de l'éprouvette, la section diminue plus vite que le matériau ne se consolide : c'est pourquoi la force qu'oppose l'éprouvette décroît. La valeur de cette force de résistance, fixée par cette partie affaiblie de l'éprouvette, décroît sur l'ensemble de l'éprouvette. Sur certaines parties de l'éprouvette, il n'y a plus de déformation : le matériau s'étant écroui et la section n'évoluant plus, il n'y a plus de raisons à ce qu'il s'allonge davantage alors que l'effort est moindre. Tout l'allongement de l'éprouvette est en fait « produit » par la partie centrale de l'éprouvette. La vitesse de déformation imposée par les mors de la machine étant constante d'une part et l'allongement se concentrant dans la partie centrale de l'éprouvette d'autre part, la vitesse de déformation y augmente très localement. Une sensibilité positive à la vitesse permet alors au métal de résister localement davantage et de reporter les déformations sur les zones adjacentes ce qui a pour effet d'élargir (de diffuser) la zone de striction. A cette sensibilité positive à la vitesse s'ajoute une sensibilité négative à la température due aux frottements internes du métal qui au contraire abaisse la contrainte d'écoulement. Cette compétition rend impossible la prédiction de l'allongement à rupture.

**Zone 4 :** Sans rentrer dans le détail qui nous sortirait du cadre de cette étude, la zone 4 correspond à la striction localisée. Celle-ci consiste en un amincissement très localisé provoquant de l'endommagement et conduisant à la rupture de l'éprouvette (point D). Rappelons que pour des aciers à très hautes caractéristiques, la striction diffuse est négligeable et la rupture intervient rapidement après que la contrainte $R_m$ ait été atteinte.

L'allongement à rupture A correspond à l'allongement permanent en pour cent après rupture. Contrairement à l'allongement réparti $A_g$ qui peut représenter une caractéristique relativement intrinsèque du métal, l'allongement à rupture A est une caractéristique conventionnelle qui dépend fortement de la géométrie de l'éprouvette. La comparaison de cette caractéristique mécanique entre deux métaux ne peut se faire qu'à géométrie d'éprouvette identique. La **Fig. 5.2** montre l'influence de la longueur de la base de mesure d'une éprouvette sur l'allongement d'un acier DC04 :

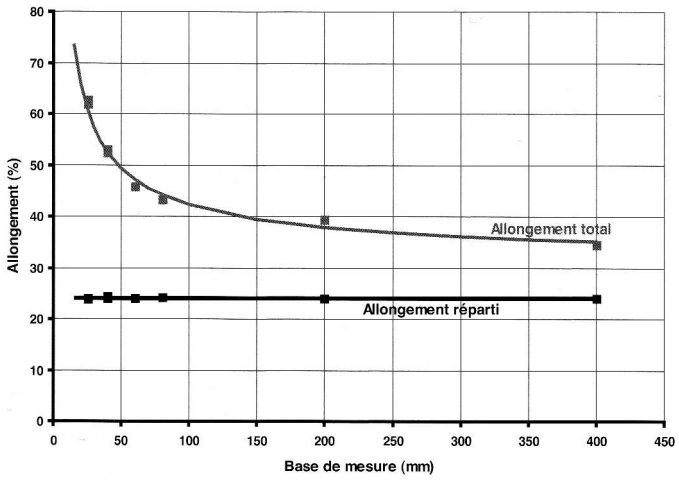



**Fig. 5.2 –** ***Influence de la base de mesure sur l'allongement à rupture pour l'acier DC04 [Col10]***

L'allongement réparti reste constant quelle que soit la base de mesure considérée et constitue bien une caractéristique intrinsèque du matériau. En revanche, l'allongement à rupture augmente lorsque la base de mesure diminue. Il en est de même concernant la section $S_0$ de l'éprouvette. D'où l'utilité d'une norme définissant la géométrie des éprouvettes suivant les épaisseurs de tôles à caractériser.

La courbe conventionnelle permet donc de définir des caractéristiques mécaniques d'un matériau, en s'appuyant sur des normes afin de s'affranchir un maximum de l'influence de la géométrie des éprouvettes. Ces propriétés mécaniques permettent alors de comparer différents matériaux à géométrie d'éprouvette identique. Cependant, la courbe conventionnelle ne permet pas de définir directement une loi de comportement du matériau : elle ne donne que très peu d'information quant à la relation entre contraintes et déformations réelles en un point de l'éprouvette. Ceci s'explique par le fait que par convention, elle ne prend pas en compte la diminution de section de l'éprouvette au cours de l'essai mais s'appuie sur sa section initiale $S_0$.

## Nécessité d'une courbe de traction rationnelle pour les lois de comportement

D'un point de vue physique, la description conventionnelle de l'essai de traction ne suffit donc pas. La contrainte conventionnelle, comme nous l'avons vue, est définie comme la force instantanée qu'oppose l'éprouvette divisée par la section initiale $S_0$. Or, lorsque l'éprouvette s'allonge, sa section ne reste pas constante mais diminue. La contrainte conventionnelle n'est donc pas la contrainte réellement supportée par l'éprouvette. Cette dernière, la contrainte vraie ou rationnelle s'écrit comme le rapport de la force sur la section instantanée :

$$\sigma = F/S$$

où S représente la section actuelle au moment de la mesure.

Comme la section S est plus petite que $S_0$, la contrainte vraie est toujours supérieure à la contrainte conventionnelle. Les physiciens se sont attachés à décrire la déformation autrement qu'en considérant l'allongement instantané par rapport à la longueur initiale de l'éprouvette. La déformation vraie ou rationnelle est :

$$\varepsilon = \ln\left(L/L_0\right)$$

A partir de courbes rationnelles de traction $\sigma$-$\varepsilon$, il devient ainsi plus naturel d'essayer de déduire des lois de comportement tentant de décrire la physique du matériau se déformant. La déformation rationnelle est déterminée par la mesure de $L_0$ et de L à l'aide d'un extensomètre. Pour la contrainte vraie, il faut déterminer la section S instantanée, difficilement mesurable. Cependant, en faisant l'hypothèse que le volume est conservé ($V=S.L$ d'une part et $V=S_0.L_0$ d'autre part), il est possible de calculer la surface instantanée S de l'éprouvette : $S= S_0.L_0/L$.

Tracer une courbe rationnelle revient donc à utiliser les mêmes mesures que pour tracer une courbe conventionnelle. Cependant, la détermination de S par le calcul (même en faisant l'hypothèse d'incompressibilité) n'est valable que lorsque la diminution de section est uniforme, c'est-à-dire jusqu'à ce que la contrainte maximale que supporte l'éprouvette soit atteinte, soit la contrainte $R_m$ de la courbe conventionnelle. Au-delà d'un domaine de déformation correspondant à l'allongement réparti du métal caractérisé, la courbe rationnelle n'est plus exploitable réduisant le domaine de déformation utile des lois de comportement et donc leur utilité en simulation numérique où le comportement en grandes déformations est nécessaire.

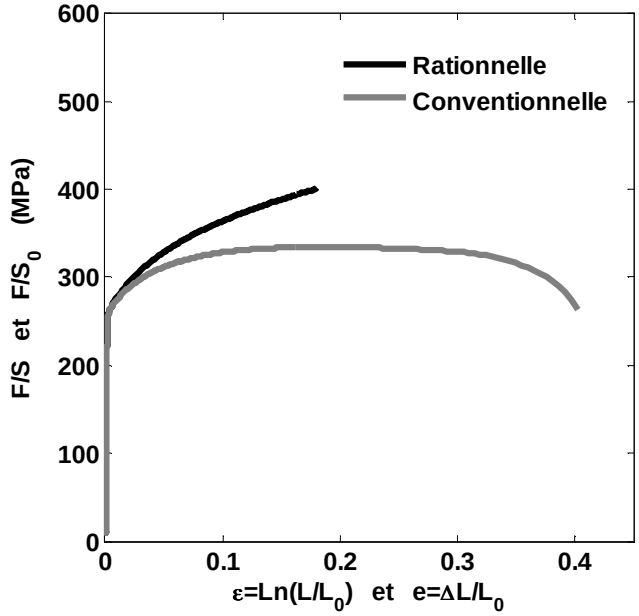



**Fig. 5.3 –** ***Courbe rationnelle (stoppée à Ag) et conventionnelle d'un essai de traction sur un acier DD14. Réalisé à une vitesse de déformation de 10-2s$^{-1}$ sur éprouvettes 20mmx80mmx3mm.***

S'appuyant sur les résultats d'éprouvettes cylindriques, dont la surface instantanée peut être mesurée directement à l'aide d'un capteur de diamètre, la courbe rationnelle est souvent prolongée de façon linéaire au-delà de l'apparition de la striction [Col10]. En pratique, ceci n'est pas valable et un compromis doit être trouvé entre extrapolation linéaire de la courbe (ce qui est physiquement critiquable) et saturation de l'écrouissage.

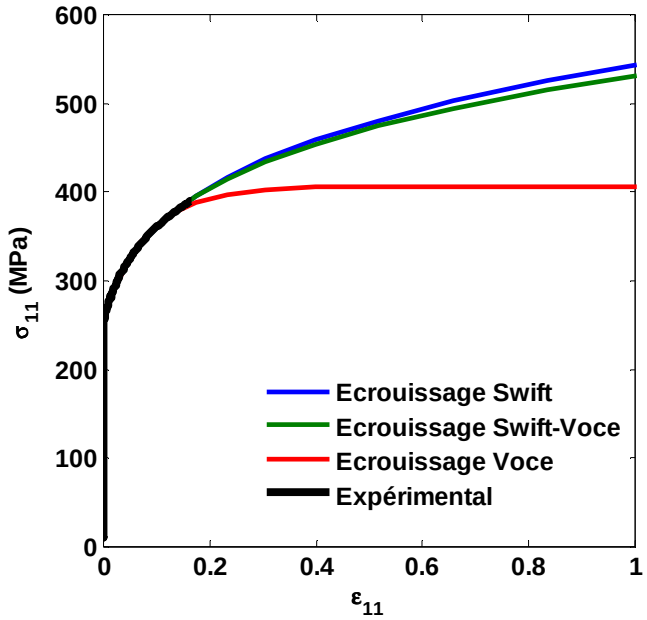



**Fig. 5.4 –** ***Extrapolation de la courbe rationnelle d'un essai de traction suivant trois lois de comportement.***

La **Fig. 5.4** représente sur un même graphe la courbe rationnelle d'un essai de traction réalisée à une vitesse de déformation de $10^{-2}s^{-1}$ sur un acier DD14 et son extension, au delà de son allongement uniforme, modélisée à l'aide de trois lois différentes d'écrouissage :

- une prolongation par une loi puissance de type Swift :

$$\sigma_{11} = K\left(\varepsilon_0 + \varepsilon_{11}^p\right)^n$$

- une loi avec écrouissage saturant de type Voce :

$$\sigma_{11} = \sigma_0 + R^{sat}\left[1 - \exp\left(-C_r\varepsilon_{11}^p\right)\right]$$

- une combinaison linéaire entre Swift et Voce :

$$\sigma_{11} = (1-\alpha)K\left(\varepsilon_0 + \varepsilon_{11}^p\right)^n + \alpha\left[\sigma_0 + R^{sat}\left[1 - \exp\left(-C_r\varepsilon_{11}^p\right)\right]\right]$$

Les coefficients utilisés dans les trois lois de comportement sont regroupés dans le **Tab. 5.1** :

| | K (MPa) | $\varepsilon_0$ | n | $\sigma_0$ (MPa) | $R^{sat}$ (MPa) | $C_r$ | $\alpha$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Swift** | 543 | 0,02 | 0,193 | | | | |
| **Voce** | | | | 259 | 147 | 12,064 | |
| **Swift-Voce** | 543 | 0,02 | 0,193 | 259 | 147 | 12,064 | 0,091 |

**Tab. 5.1 –** ***Coefficients des lois de comportement utilisées dans la*** **Fig. 5.4.**

Force est de constater qu'il est possible de décrire d'une multitude de façons le prolongement de la courbe au-delà de l'allongement uniforme de l'éprouvette. En particulier, l'écrouissage Swift-Voce résultant d'une combinaison linéaire entre un écrouissage de type Swift et un écrouissage saturant de type Voce permet de décrire les différentes extrapolations possibles entre deux asymptotes que représentent la courbe bleue et la courbe rouge sur la **Fig. 5.4**. Nous verrons que le choix de l'extrapolation n'est pas sans conséquences sur les résultats de simulations numériques.

## Conclusion

Si l'essai de traction uniaxiale, de par sa conception et son utilisation universelle dans de nombreux laboratoires paraît simple, on conçoit pourtant que la description du comportement d'un acier lors de cet essai peut s'avérer plus complexe qu'il n'y paraît et nécessite de tenir compte de nombreux mécanismes et phénomènes physiques si l'on désire par la suite décrire des sollicitations plus complexes. Si l'allongement à rupture ne constitue pas une propriété intrinsèque de l'acier que l'on désire caractériser, il constitue néanmoins un sujet d'étude intéressant montrant en particulier l'importance de la prise en compte de la sensibilité à la vitesse dans une loi de comportement comme nous allons le voir dans la partie suivante.

## V.2.2 Simulation numérique de l'essai

La simulation numérique d'un essai de traction uniaxiale est confrontée aux données expérimentales d'un essai de traction réalisé sur un acier industriel ArcelorMittal. La comparaison permet d'étudier l'importance du choix de la loi d'écrouissage et de la prise en compte de la sensibilité à la vitesse dans les lois de comportement. La simulation a été réalisée sur le logiciel de calcul par éléments finis Abaqus.

***Matériau :***

L'acier DD14 est un acier doux pour emboutissage obtenu après laminage à chaud. Il ne présente pas de texture particulière et son coefficient d'anisotropie est proche de 1. Cela permet d'écarter les effets d'anisotropie lors de l'interprétation.

***Données expérimentales :***

L'essai de traction uniaxiale a été réalisé sur une éprouvette usinée dans la direction transverse de la tôle, à une vitesse de déformation de $10^{-2}s^{-1}$ à une température de 20°C. Le format de l'éprouvette respecte la norme (20mm×80mm×3mm) et présente par conséquent une longueur utile de 44mm.

***Mise en donnée de l'éprouvette de traction***

Afin d'économiser d'importantes ressources matérielles, seul le quart de l'éprouvette est modélisé, les plans de symétrie $\vec{x}O\vec{y}$ et $\vec{x}O\vec{z}$ étant mis à profit. Le maillage de la structure est constitué de 20000 éléments volumiques C3D8R de 0,5 mm de coté. L'épaisseur de l'éprouvette comporte 6 éléments, soit 3 éléments dans l'épaisseur pour le quart d'éprouvette. L'éprouvette est bloquée d'un coté et tirée de l'autre à une vitesse de déformation quasi-statique de $10^{-2}$ $s^{-1}$.

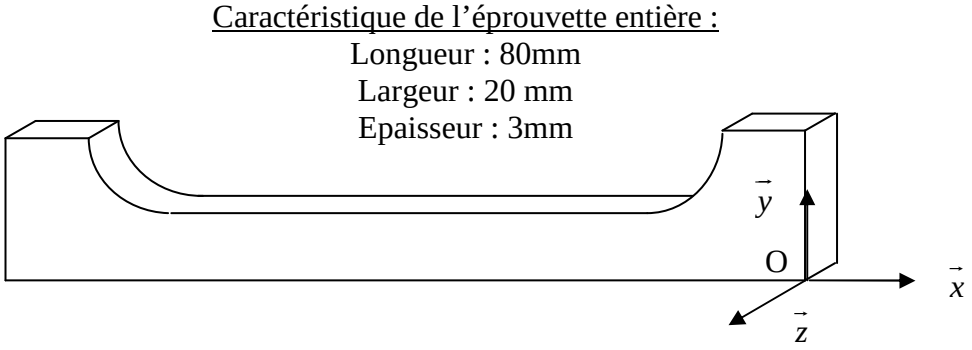



**Fig. 5.5 –** ***Schéma du quart d'éprouvette modélisé.***

***Modélisation du comportement***

Il est possible de modéliser le comportement de plusieurs façons dans Abaqus :

- par des lois de comportement directement proposées par le logiciel : celles-ci peu nombreuses sont également peu flexibles pour l'utilisateur,
- en utilisant un tableau de points contraintes-déformations, obtenu par l'expérience ou par simulation. Le logiciel offre la possibilité d'utiliser plusieurs tableaux de points (faisceau de courbes) réalisés à différentes vitesses de déformation.
- en utilisant une subroutine utilisateur calculant à chaque incrément le comportement et faisant appel à un programme externe.

Afin d'étudier les limites de l'utilisation de lois de comportement utilisées dans ce travail de thèse, nous avons porté notre choix sur les deux dernières possibilités.

### V.2.3 Influence de l'écrouissage

La courbe rationnelle obtenue par l'essai de traction a été utilisée, conjointement à un solveur Fortran, pour identifier les paramètres de la loi de comportement élasto-viscoplastique en sinus hyperbolique développée dans le chapitre 2. Pour chacune des identifications, un écrouissage isotrope différent a été utilisé afin d'étudier l'influence du choix du type d'écrouissage sur l'extension de la courbe rationnelle expérimentale. Pour cette comparaison, deux modèles sont à distinguer selon le type de loi d'écrouissage isotrope utilisé :

- un écrouissage isotrope saturant de type Voce :

$$\dot{R}=C_R\,(R^{sat}-R)\dot{\varepsilon}_{eq}^{vp}$$

- un écrouissage isotrope non-saturant de type Swift-Voce :

$$\dot{R} = \left(1 - \alpha_{SV}\right) nK\left(\varepsilon_{eq}^{vp}+\varepsilon_0\right)^{n-1}\dot{\varepsilon}_{eq}^{vp} + \alpha_{SV}C_R R^{sat}\exp(-C_R\varepsilon_{eq}^{vp})\dot{\varepsilon}_{eq}^{vp}$$

L'ensemble des paramètres de ces deux modèles a été identifié à une vitesse de déformation de $10^{-2}s^{-1}$ et est résumé dans le tableau **Tab. 5.2**.

| | E (GPa) | ν | $Y_0$ (MPa) | $C_R$ | $R^{sat}$ (MPa) | $C_X$ | $X^{sat}$ (MPa) | A (MPa) | B ($s^{-1}$) | $\alpha_{SV}$ | K (MPa) | $\varepsilon_0$ | n |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Voce** | 210 | 0,3 | 259 | 12 | 147 | 100 | 0,1 | 28,46 | 0,3 | | | | |
| **Swift-Voce** | 210 | 0,3 | 259 | 12 | 147 | 100 | 0,1 | 28,46 | 0,3 | 0,1 | 543 | 0,02 | 0,193 |

**Tab. 5.2 –** ***Paramètres des lois de comportement utilisées pour l'étude de l'effet de l'écrouissage dans la simulation de l'essai de traction.***

Afin de faciliter la comparaison des deux types d'écrouissage isotrope, l'écrouissage cinématique est négligé ($X^{sat} \approx 0\,MPa$) dans les deux modèles. Dans chacun des cas, le solveur Fortran a généré un tableau contrainte-déformation correspondant à la relation de comportement de chaque modèle figée à une vitesse de $10^{-2}s^{-1}$. Ce sont ces tableaux qui ont été utilisés par le logiciel Abaqus dans la simulation de l'essai de traction afin d'étudier l'influence du choix de la loi d'écrouissage dans l'extension de la courbe rationnelle expérimentale. Dans ces conditions, nous avons appelé « quasi-statique Voce » et « quasi-statique Swift-Voce » l'utilisation des tables de données correspondantes comme lois de comportement lors de la simulation de l'essai de traction dans Abaqus (cf. **Fig. 5.6**).

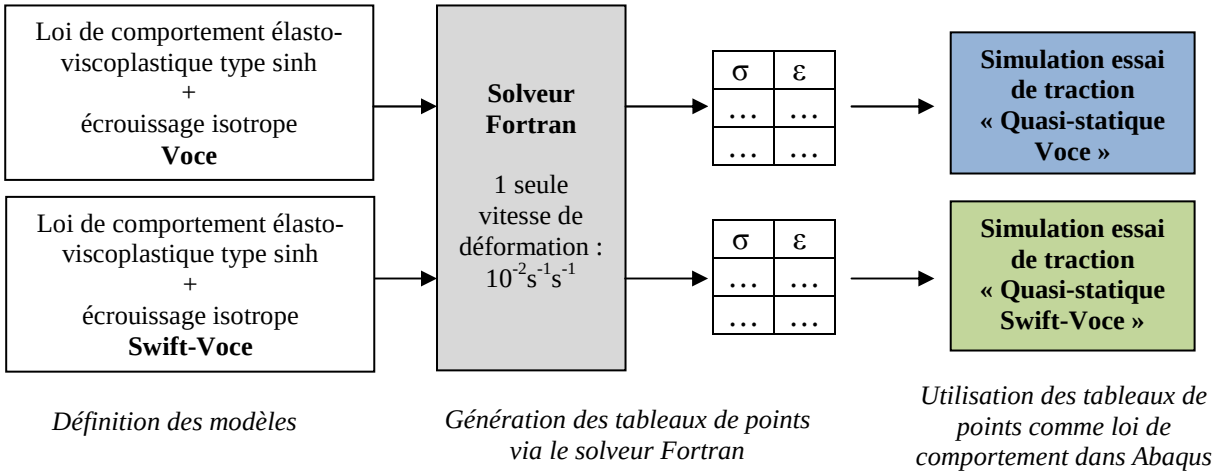



**Fig. 5.6 –** ***Génération des fichiers input correspondant à l'étude de l'influence de l'écrouissage sur le résultat de la simulation de l'essai de traction.***

Les deux simulations d'essai de traction ont été menées à géométrie et vitesse de traverse identiques à ceux de l'essai expérimental. Les résultats des deux simulations sont confrontés à la courbe conventionnelle de l'essai expérimental sur la **Fig. 5.7** :

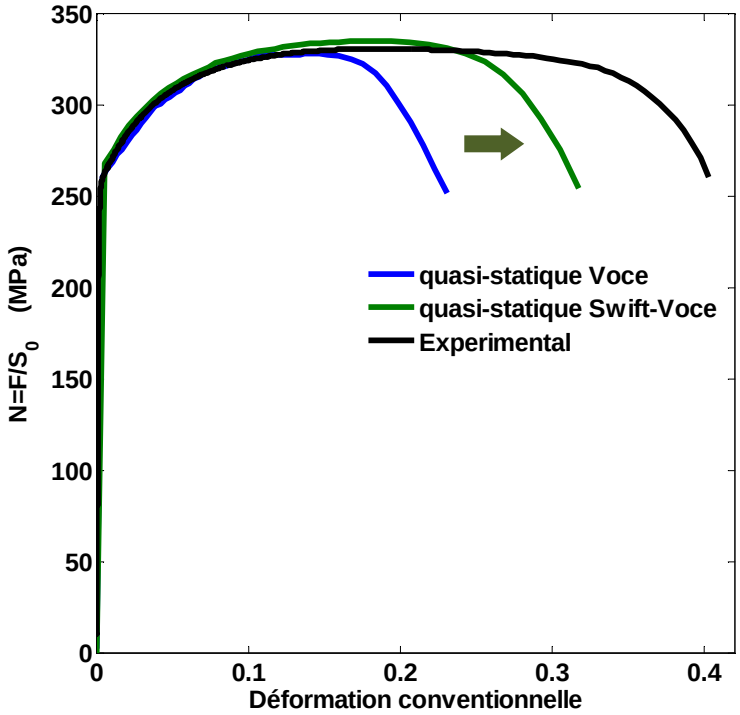



**Fig. 5.7 –** ***Simulation numérique d'un essai de traction uniaxiale : effet de l'écrouissage.***

On s'aperçoit tout de suite que le modèle quasi-statique de Voce, tel qu'il a été identifié, est loin de reproduire la courbe expérimentale au-delà du domaine de déformations utilisé pour l'identification. Le modèle quasi-statique Swift-Voce produit de meilleurs résultats sans toutefois reproduire fidèlement la courbe expérimentale sur l'ensemble du

domaine d'allongement. Identifier la courbe rationnelle expérimentale jusqu'à $R_m$ ne suffit donc pas à modéliser correctement le comportement du matériau. La relation entre contrainte et déformation exprimée par la courbe rationnelle **Fig. 5.4** n'est valable que lorsque l'allongement de l'éprouvette est uniforme. Au-delà, d'autres mécanismes prennent place et la courbe rationnelle ne permet plus d'identifier correctement une loi de comportement. Dès que la striction diffuse s'amorce, l'amincissement de la section n'est plus uniforme mais hétérogène.

Les différences entre écrouissage non-saturant et écrouissage saturant peuvent être remarquables au-delà de $A_g$. Si les deux lois choisies décrivent bien le comportement jusqu'à 18% de déformation totale sur une courbe rationnelle contrainte-déformation, on conçoit aisément que la description du comportement du matériau passé ce domaine sera très différente. L'éprouvette subissant un allongement croissant jusqu'à rupture ne se déforme pas de façon homogène lors de l'essai : certaines zones de l'éprouvette se déforment au-delà de 18% de déformation et le choix s'impose alors d'une unique loi de comportement, celle capable de décrire le comportement du matériau dans des gammes de déformations et de sollicitations les plus larges possibles. La **Fig. 5.7** montre que ce choix n'est pas anodin et que dans notre cas, l'utilisation d'une loi d'écrouissage de type Swift-Voce décrit mieux au final l'expérience que la loi d'écrouissage saturante de Voce. Pour autant, décrit-elle mieux la physique du matériau ? Dans une certaine mesure oui : elle permet de prendre en compte un écrouissage supplémentaire retardant la déformation de l'éprouvette. Malheureusement, comme nous l'avons vu précédemment cela ne suffit pas puisqu'il faut également tenir compte d'une augmentation locale de la vitesse de déformation. Or, dans ces simulations le comportement a été identifié à $10^{-2}s^{-1}$ et ne varie pas en fonction de la vitesse de déformation. Ceci explique en partie l'incapacité de ces modèles à bien décrire la courbe expérimentale conventionnelle.

### V.2.4 Effet de la sensibilité à la vitesse

Dans la comparaison suivante, on utilise le modèle élasto-viscoplastique en sinus hyperbolique couplé à un écrouissage isotrope de type Swift-Voce suivant les mêmes paramètres que ceux cités dans le tableau **Tab. 5.2**. Ce modèle est pris en compte via une subroutine utilisateur VUMAT appelée à chaque incrément de temps par le logiciel ABAQUS. La sensibilité à la vitesse de déformation, propre au modèle EVP utilisé est donc prise en compte dans cette simulation. Si lors de la simulation de l'essai, la vitesse de déformation d'un élément croît, la contrainte dans cet élément croît également du fait de la sensibilité positive à la vitesse du matériau. La **Fig. 5.8** représente la courbe expérimentale conventionnelle ainsi que les courbes conventionnelles relatives aux trois simulations. L'endommagement n'étant pas pris en compte dans le modèle, ces dernières sont représentées jusqu'à une contrainte proche de la contrainte à rupture expérimentale.

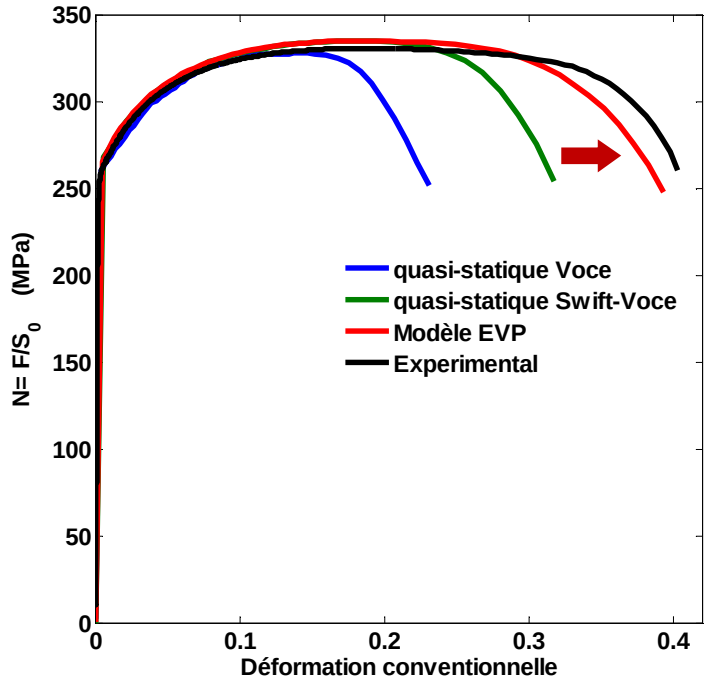



**Fig. 5.8 –** ***Simulation numérique d'un essai de traction uniaxiale : effet de la sensibilité à la vitesse.***

Les résultats montrent une bien meilleure description de la VUMAT vis-à-vis des courbes tabulées. La différence entre le modèle quasi-statique Swift-Voce et la VUMAT réside uniquement dans la prise en compte de la sensibilité à la vitesse de déformation. La description de l'essai se révèle être nettement améliorée par la prise en compte de la sensibilité positive à la vitesse de déformation, allant dans le sens d'une physique mieux maîtrisée.

Comme expliqué dans la première partie de ce chapitre, lorsque la striction s'amorce l'allongement se localise dans la zone centrale de l'éprouvette. La vitesse d'allongement macroscopique imposée par les mors de la machine ne varie pas puisque fixée une fois pour toute par l'expérimentateur et imposée par la machine. L'hétérogénéité de section le long de l'éprouvette fait que la vitesse de déformation croît dans la zone centrale de l'éprouvette. Ceci est mis en évidence sur la **Fig. 5.9** où sont tracées la courbe conventionnelle issue de la

VUMAT, les déformations locales d'un élément situé dans la zone de striction et celles d'un élément situé dans une zone de déformation homogène. La courbe orange représente la déformation dans l'élément situé dans la zone de striction tandis que la courbe verte représente un élément situé loin de la zone de striction. En suivant la courbe conventionnelle en bleu, on s'aperçoit que les éléments se déforment de la même manière jusqu'à un allongement correspondant à $A_g$. Au delà, les déformations deviennent hétérogènes : la déformation dans la zone de striction croît très rapidement tandis que la déformation loin de la zone de striction n'évolue plus.

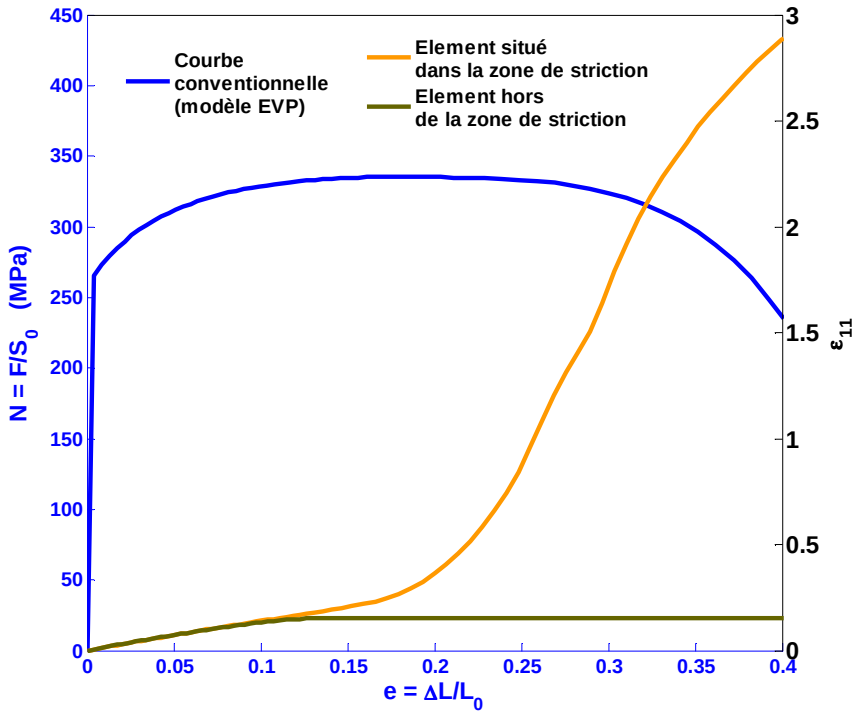
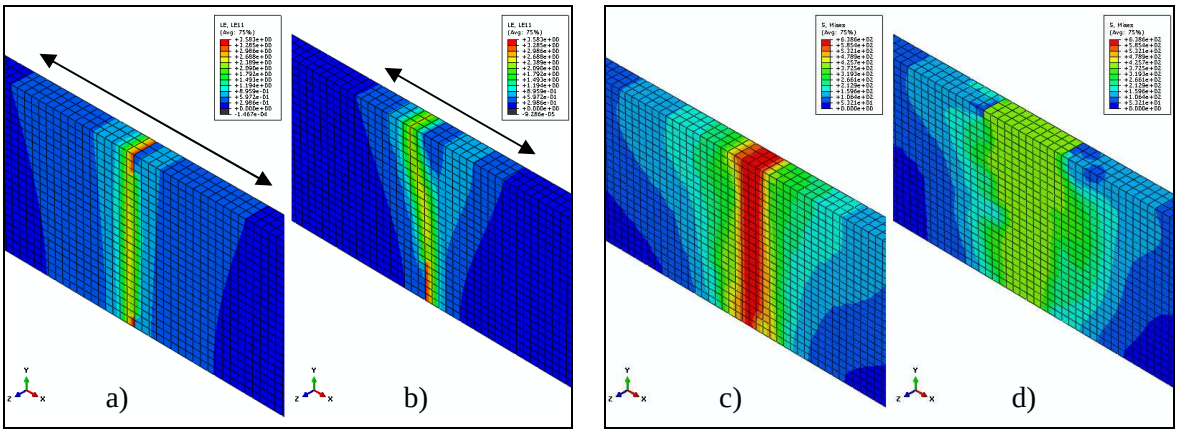



**Fig. 5.9 –** ***Hétérogénéités des vitesses de déformations et des déformations dans la simulation d'un l'essai de traction.***

En effet, au-delà de l'allongement uniforme, la vitesse de déformation est nulle en dehors de la zone de striction et croît dans la zone de striction. Une sensibilité positive à la vitesse permet alors au matériau de consolider davantage et de reporter les déformations sur les zones adjacentes ce qui a pour effet d'élargir (de diffuser) la zone de striction et de retarder la rupture. La VUMAT reproduit fidèlement ce constat sur la **Fig. 5.10**. Dans cette figure, les déformations et la contrainte équivalente de von Mises des deux modèles utilisant l'écrouissage Swift-Voce sont confrontés (quasi-statique et VUMAT). L'ensemble des données est représenté en configuration non déformée pour plus de lisibilité.

Dans le cas où la sensibilité à la vitesse est prise en compte, il s'avère bien que :

- le matériau consolide davantage : les contraintes sont plus grandes et plutôt localisées dans la zone de striction,
- le matériau reporte davantage les déformations sur les zones adjacentes : la zone de fortes et moyennes déformations est plus étendue.




***Déformations logarithmiques***

*c) Modèle EVP sensible à la vitesse de déformation*
*d) Modèle quasi-statique non sensible à la vitesse*

***Contrainte de von Mises***

*a) Modèle EVP sensible à la vitesse de déformation*
*b) Modèle quasi-statique non sensible à la vitesse*

**Fig. 5.10 –** ***Agrandissement de la partie centrale du quart d'éprouvette modélisé : Effet de l'augmentation locale de la vitesse sur les contraintes et les déformations locale.***

## V.2.5 Conclusions

La prise en compte de la sensibilité à la vitesse de déformation accroît de façon conséquente la description du comportement du matériau dans le cadre de la simulation d'un essai de traction uniaxiale. Bien évidemment, si dans le cas d'une traction uniaxiale, la sollicitation est simple, la simulation via un code de calcul par éléments finis doit fournir une courbe conventionnelle la plus proche possible de celle obtenue expérimentalement. Ce n'est pas tant la description macroscopique de la courbe expérimentale qui est en jeu mais plutôt le comportement du matériau qui se cache derrière. La question est de savoir comment identifier ce comportement à partir de la courbe rationnelle, limitée par un domaine de déformation utile.

Il apparaît, au vu de ces quelques résultats, que la prise en compte de la sensibilité à la vitesse de déformation est une des clés de cette identification. Le modélisateur pourra donc ajuster la sensibilité positive de sa loi de comportement à travers différents essais de traction ce que l'auteur n'a pas fait ici, faute de données expérimentales sur le matériau. Reste alors le choix de la loi d'écrouissage et donc de la modélisation de la consolidation du matériau dans des domaines de déformations supérieurs à ceux observés macroscopiquement à l'échelle de l'éprouvette. Pour ce choix qui n'est pas anodin mais qui devrait l'être un peu plus une fois la sensibilité à la vitesse identifiée, il ne semble pas y avoir de réponse évidente.

Pour conclure, la prise en compte de la sensibilité à la vitesse dans cette simulation de traction ne semble au final utile qu'à la description de ce qui se passe au delà de l'allongement uniforme. Il faut se convaincre que si cet aspect peut paraître anecdotique dans le cas d'une simulation de traction uniaxiale, il peut être primordial voire déterminant dans des procédés de mise en forme où l'éprouvette subit également des hétérogénéités de déformations, de contraintes ou de vitesses de déformation.

## V.3 SIMULATION D'UN ESSAI DE PLIAGE EN V

Dans la simulation précédente d'un essai de traction, l'écrouissage cinématique n'a pas été pris en compte afin de faciliter l'étude du type d'écrouissage isotrope utilisé et de l'effet de la sensibilité à la vitesse. Dans cette partie, l'étude se focalise particulièrement sur l'influence de la prise en compte de l'écrouissage cinématique dans la modélisation du comportement et ses effets sur la simulation numérique.

L'écrouissage cinématique permet de tenir compte des effets liés aux changements de trajets comme l'effet Bauschinger. Afin de mettre en évidence de tels effets, nous avons décidé de comparer deux modèles au travers de simulations numériques de pliage en V d'une tôle ayant subie préalablement une traction.

**Description de l'essai de pliage en V**

La recherche de l'allègement des pièces pour l'automobile passe en partie dans la réduction de l'épaisseur des tôles utilisées. Afin de compenser cette diminution d'épaisseur, les caractéristiques mécaniques des nouveaux aciers ne cessent d'augmenter. Ceci a pour conséquence de réduire leur formabilité rendant du même coup la mise en forme des pièces bien plus difficile qu'auparavant. Le pliage restant une opération *a priori* simple, son utilisation dans les pièces de structure pour l'automobile est plus que jamais d'actualité.

L'essai consiste, à l'aide d'un poinçon de rayon donné, à plier une tôle prenant appui sur deux cylindres supports. L'aptitude d'un acier au pliage est mesurée par le rayon minimum de pliage atteint sans endommagement constaté. L'essai de pliage est contrôlé par une norme [ISO7438]. Pour des raisons évidentes de place dans ce manuscrit, l'essai ne sera pas analysé de manière approfondie mais simplement décrit. De plus, nous ne nous attacherons pas à comparer des caractéristiques mécaniques (ex : rayon minimum de pliage) mais plutôt à analyser les effets de l'écrouissage cinématique sur le comportement de la tôle lors du pliage au travers de simulations numériques.

L'essai de pliage en V a été choisi parce que l'acier subit, tout au long de l'essai, de fortes contraintes de compression et de traction. L'évolution des contraintes dans l'épaisseur d'une tôle subissant un pliage indique que la surface intérieure (côté poinçon) subit une compression sous l'action du poinçon et qu'à l'inverse la surface extérieure est étirée et subit une traction.

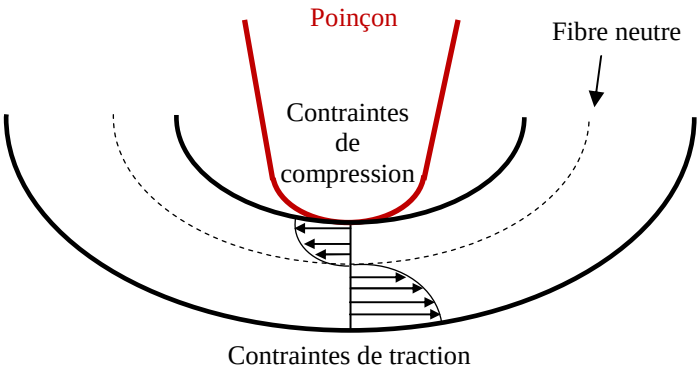



**Fig. 5.11 –** ***Contraintes de compression et de traction dans un pli.***

La **Fig. 5.11** représente la coupe d'un pli. La fibre intérieure (côté outil) subit une compression tandis que la fibre extérieure subit une traction. Il existe un gradient de

compression et de traction dans l'épaisseur et la fibre neutre représente la frontière entre ces deux zones. Elle représente une fibre qui ne serait ni étirée (traction) ni comprimée (compression). Ces deux zones évoluent durant l'essai de pliage tant et si bien que certaines zones en compression passent en traction. La localisation de la fibre neutre dans l'épaisseur n'est donc pas fixe et évolue : elle dépend de l'avancement de l'essai mais également de plusieurs paramètres comme les frottements entre l'outil et la tôle qui empêchent la compression.

Afin d'accentuer l'effet du changement de trajet dans notre simulation, nous avons décidé de rajouter une légère traction avant l'essai de pliage (environ 4%). De ce fait, l'ensemble des éléments opèrent un changement de trajet (traction→compression) lorsque le poinçon vient comprimer la tôle. Certains éléments opèrent même deux changements de trajets, le deuxième changement étant dû au processus de pliage. Ceci dans l'optique d'obtenir des conditions très favorables à l'étude de l'écrouissage cinématique. L'utilisation d'une pré-déformation homogène avant un essai d'emboutissage, afin d'étudier l'effet des changements de trajet et notamment l'écrouissage cinématique, est courante. Récemment, un benchmark de la conférence Numisheet 2011 [Chu11] utilisait également une traction préalable (8%) afin d'étudier l'effet sur le retour élastique lors de l'emboutissage d'un profil en « Oméga ».

**Mise en donnée de l'essai de traction + pliage en V**

Par le jeu des symétries, seul le quart de l'éprouvette est modélisé (**Fig. 5.12**). Le maillage utilisé est progressif : il est très raffiné dans une zone proche du lieu du contact entre le poinçon et l'éprouvette (18 éléments dans l'épaisseur) et il devient plus grossier dans des zones plus éloignées jusqu'à atteindre seulement deux éléments dans l'épaisseur à l'extrémité de l'éprouvette. De la même façon que pour l'essai de traction uniaxiale, la structure est entièrement maillée en éléments C3D8R.

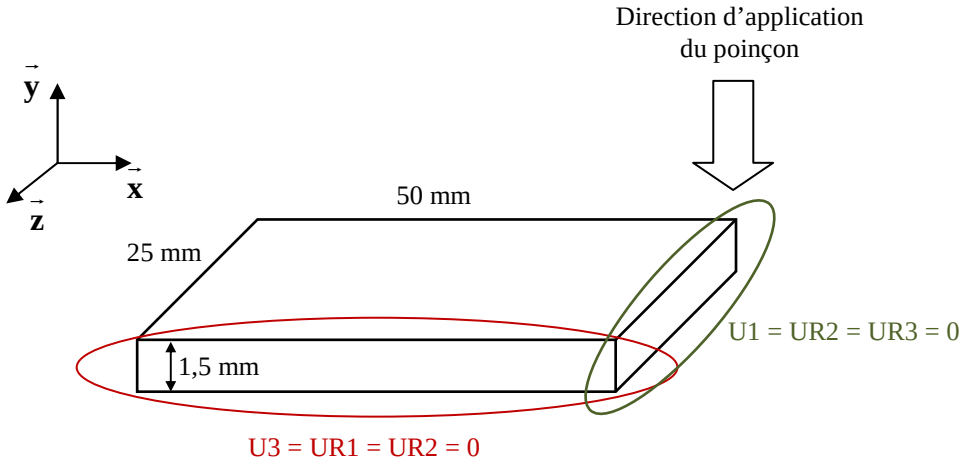



**Fig. 5.12 –** ***Géométrie du quart d'éprouvette et conditions aux limites.***

Le rayon du poinçon est de 0,1mm. La géométrie des différents outils (poinçon et cylindres support) respecte celles utilisées pour les essais industriels et est donnée en annexe 2. La course du poinçon est de 40mm.

**Modèles de comportement**

Le comportement est décrit à l'aide du modèle élasto-viscoplastique en sinus hyperbolique à écrouissage isotrope et cinématique défini dans le chapitre 2. Deux séries de simulations ont été effectuées. L'écrouissage cinématique est introduit de manière phénoménologique dans la première série tandis qu'il est généré par la transition d'échelles dans un modèle biphasé dans la deuxième série.

## V.3.1 Effet de l'écrouissage cinématique : approche phénoménologique

Dans cette première série de simulations sont comparés :

- un modèle monophasé dit « combiné » à écrouissage mixte isotrope et cinématique,
- un modèle monophasé dit « isotrope » dans lequel la composante cinématique est nulle : la contribution est reportée sur la composante isotrope.

Les deux modèles ont été identifiés de telle sorte que le comportement soit le même lors d'un trajet de chargement monotone. La **Fig. 5.13** présente le comportement des deux modèles lors d'essais de traction-compression uniaxiale. Les paramètres de chacun des modèles sont résumés dans le **Tab. 5.3**.

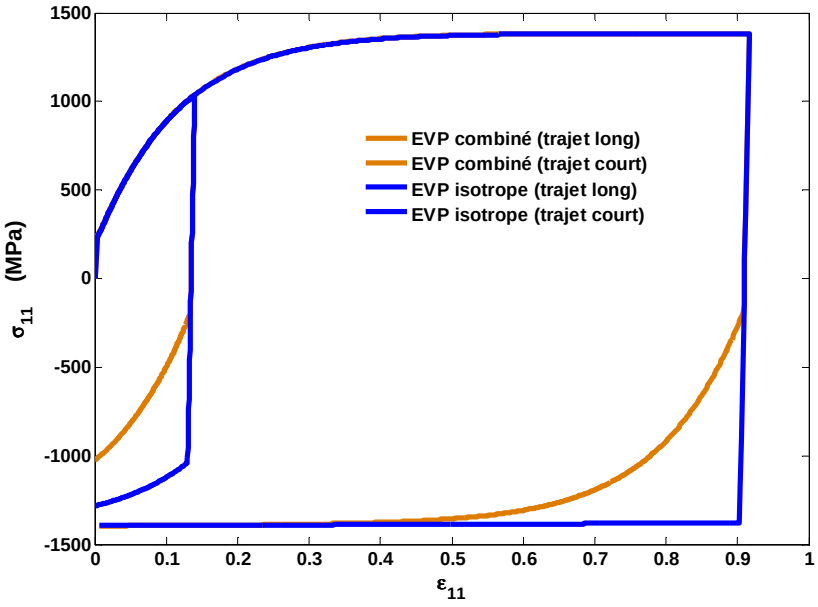



**Fig. 5.13 –** ***Comportement du modèle à écrouissage isotrope et du modèle à écrouissage combiné en traction-compression uniaxiale.***

Comme le montre la **Fig. 5.13**, les prédictions des deux modèles sont identiques lors du trajet aller mais diffèrent nettement lors du trajet retour. Dans le cas du modèle à écrouissage isotrope, la surface de charge grandit seulement de façon homothétique. Dans le cas du modèle à écrouissage combiné, la surface de charge grandit d'une part de manière homothétique mais dans une moindre mesure (rapport de 2) et d'autre part se déplace du fait de la contribution cinématique. Les coefficients des deux modèles ont été choisis de manière à faciliter l'effet de la contribution cinématique en utilisant deux matériaux fictifs aux propriétés avantageuses (**Tab. 5.3**).

| | E (GPa) | ν | $Y_0$ (MPa) | $C_R$ | $R^{sat}$ (MPa) | $C_X$ | $X^{sat}$ (MPa) | A (MPa) | B ($s^{-1}$) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Modèle EVP à écrouissage combiné** | 210 | 0,3 | 160 | 9 | 600 | 9 | 530 | 18 | 0,3 |
| **Modèle EVP à écrouissage isotrope** | 210 | 0,3 | 160 | 9 | 1200 | 0 | 0 | 18 | 0,3 |

**Tab. 5.3 –** ***Paramètres des lois de comportement utilisées pour l'étude de l'effet de l'écrouissage cinématique dans la simulation de traction + pliage en V.***

Les deux modèles ont été utilisés dans une simulation de traction + pliage en V. La **Fig. 5.14** représente en valeur absolue pour chacune des deux simulations, la force du poinçon en fonction de sa course.

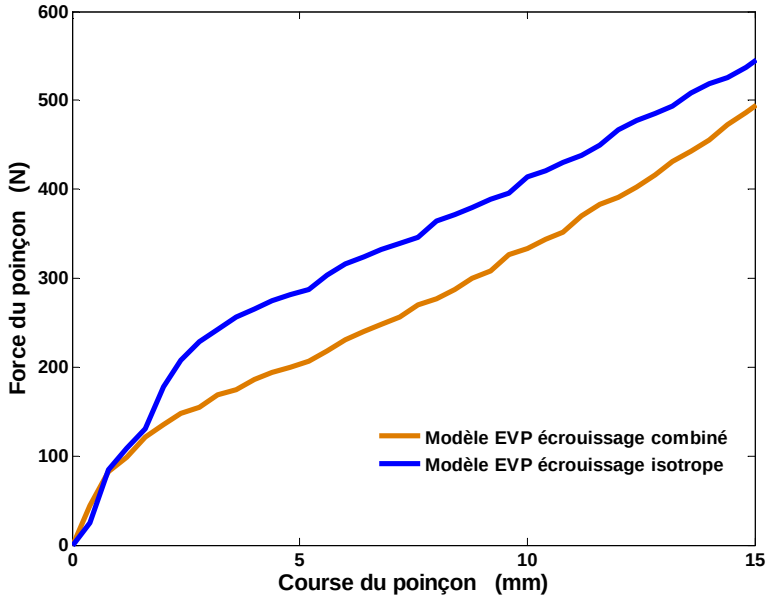



**Fig. 5.14 –** ***Effet de l'écrouissage cinématique sur la simulation d'un essai de pliage en V sur une éprouvette ayant subi préalablement un essai de traction uniaxiale : phase d'augmentation de l'effort.***

L'interprétation des deux courbes peut être décomposée en deux parties : une phase d'augmentation de l'effort et une phase de diminution de l'effort (cf. **Fig. 5.17**).

***Phase d'augmentation de l'effort : observation de l'effet Bauschinger***

Les deux courbes sont quasi-superposées au tout début de l'essai (chargement essentiellement élastique) puis la force du poinçon devient rapidement plus faible dans le cas du modèle combiné. Cette première différence s'explique par la composante cinématique de l'écrouissage du modèle combiné. En effet, lors de la traction uniaxiale, les deux modèles se sont écrouis de manière *a priori* équivalente (cf. trajet aller **Fig. 5.13**). Or, si la distance à la surface de charge pour les deux modèles est de même valeur ce premier trajet, elle correspond à la somme de deux composantes dans le cas du modèle combiné : une composante isotrope et une composante cinématique. Dans le cadre du modèle combiné à écrouissage mixte isotrope et cinématique, lorsque le poinçon vient comprimer l'éprouvette il y a inversion de la direction de chargement et donc diminution de la limite d'élasticité. L'éprouvette, en résistant moins à la déformation imposée par le poinçon, oppose une force de résistance moindre. C'est ce qui est observé sur la figure. La **Fig. 5.16** permet de visualiser l'état de contraintes et de

déformations longitudinales dans l'éprouvette par élément. Ces derniers sont numérotés de 1 à 18 sur la **Fig. 5.15**, l'élément portant le numéro 1 se référant à l'élément en contact avec l'outil.

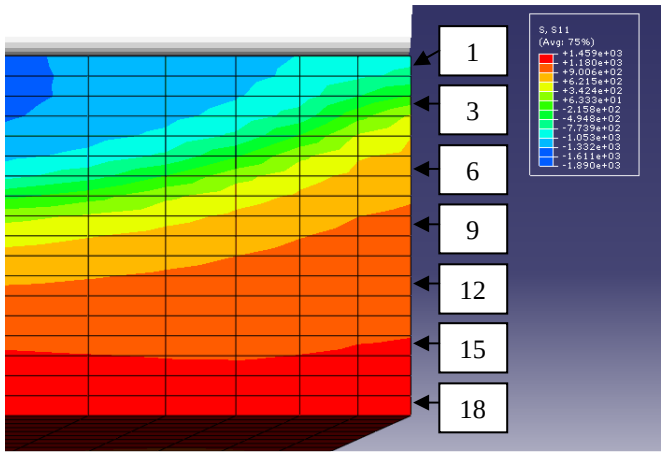



**Fig. 5.15 –** ***Contraintes dans le pli (configuration non déformée) : identification des différents éléments dans l'épaisseur (plan xOy, surface libre).***

Pour un même modèle, il existe une forte hétérogénéité de contraintes et de déformations dans l'épaisseur entre les éléments. Les éléments situés dans la demi-épaisseur supérieure côté outil (éléments 3 et 6) passent d'un état de traction à un état de compression tandis que les éléments situés dans la demi-épaisseur inférieure (éléments 12 à 18) sont majoritairement en traction.

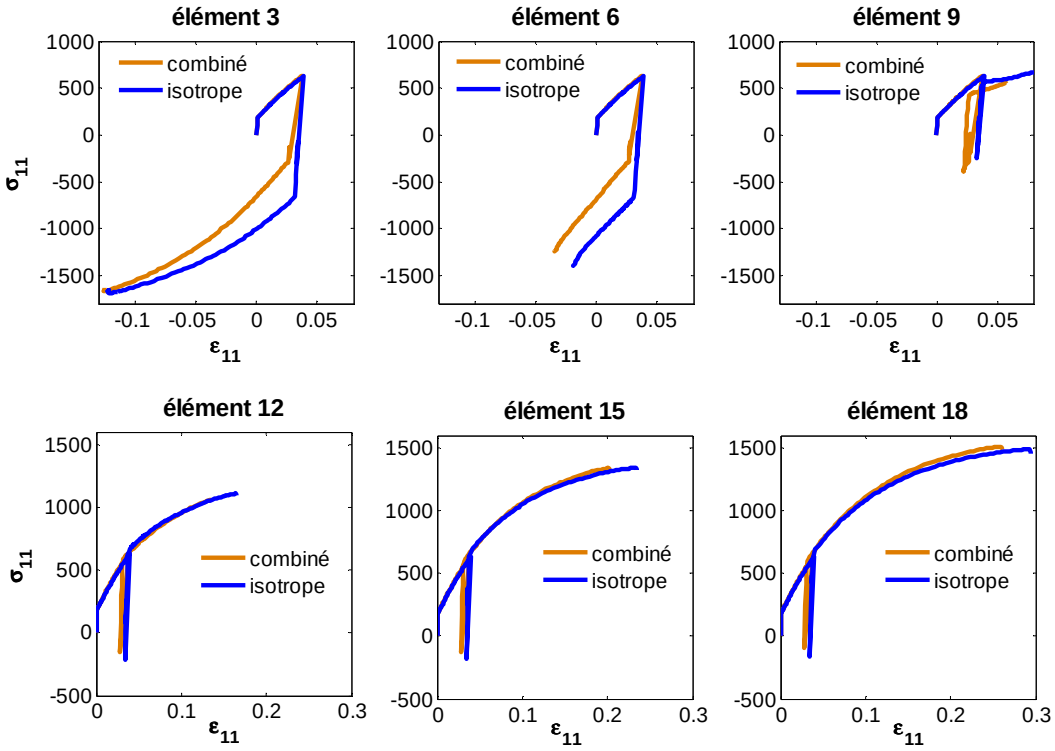



**Fig. 5.16 –** ***Contraintes et déformations dans l'épaisseur : confrontation des résultats entre écrouissage combiné et isotrope.***

L'élément 9 passe d'un état de traction à compression lors du début de l'essai de pliage puis passe d'un état de compression à un état de traction au cours du pliage. Ceci s'explique par le fait qu'au cours de l'essai de pliage, la fibre neutre s'est déplacée au travers de cet élément. La comparaison entre les deux modèles met en évidence dans la majorité des cas la réduction de la limite d'élasticité pour le modèle combiné (courbes orange).

***Phase de diminution de l'effort : des effets couplés matériau/structure***

Lorsque la course du poinçon atteint environ 20 mm, les courbes des deux modèles se croisent : la force du poinçon du modèle combiné devient supérieure à celle du modèle isotrope (**Fig. 5.17**). Un comportement similaire est observé [Thu10] dans le cadre d'une simulation double-punch où les auteurs confrontent différents modèles à contribution isotrope, cinématique etc. à un essai expérimental. La saturation plus rapide de l'écrouissage cinématique induit logiquement un rapprochement des deux valeurs d'efforts ; cependant, le fait que la force de poinçon devienne plus grande pour le modèle combiné nécessite une analyse plus approfondie.

Dans notre simulation, les comportements différents des deux modèles induisent des contraintes différentes dans le plan de symétrie comme le montre la **Fig. 5.16**. Ces contraintes sont responsables d'un moment de flexion (ou couple) différent pour chaque modèle dans la section du plan de symétrie. C'est la force, induite par ce moment, qui est mesurée sur la **Fig. 5.17**.

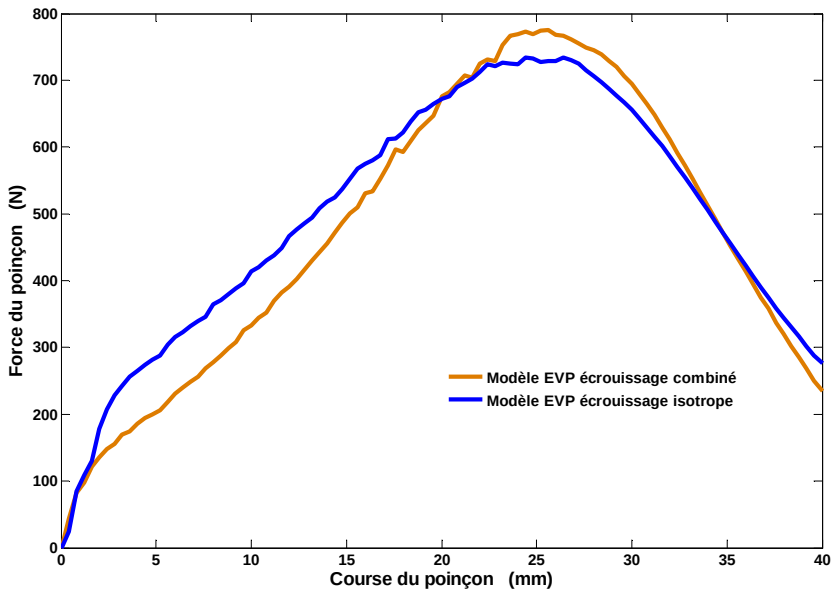



**Fig. 5.17 –** ***Effet de l'écrouissage cinématique sur la simulation d'un essai de pliage en V sur une éprouvette ayant subi préalablement un essai de traction uniaxiale : courbe complète.***

Cette force est égale au moment divisé par le bras de la force, bras qui diminue au cours de l'essai. Dans notre cas particulier, il est notoire que le rayon très grand des appuis provoque une variation très importante du bras de la force au cours de l'essai. Il est donc possible que des effets combinés de matériau (force, effet Bauschinger) et de structure (géométrie, bras) interviennent simultanément. En effet, du fait d'une distribution de contraintes et de déformations différentes entre les deux modèles, le contact entre outil et éprouvette ne se fait pas de la même façon conduisant à des géométries différentes et donc des effets de structure. La **Fig. 5.18** superpose les déformées des deux modèles à deux courses différentes du

poinçon (25 et 40mm) : les géométries d'éprouvettes sont bien différentes pour les deux modèles.

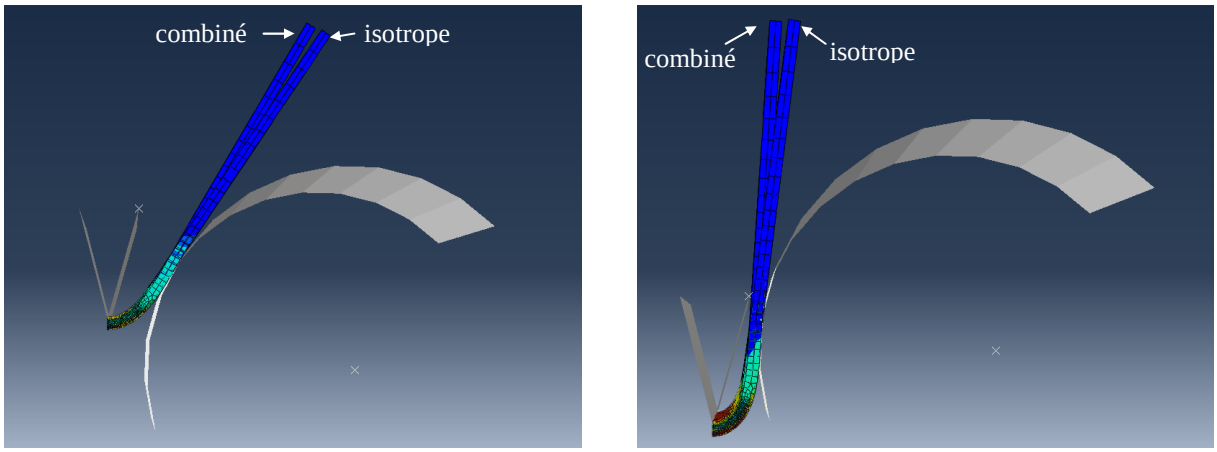



**Fig. 5.18 –** ***Superposition de la déformée des deux simulations à 25mm et 40mm de course du poinçon.***

La rotation plus importante des « branches » du V dans le cas de l'écrouissage combiné, par rapport au cas de l'écrouissage isotrope traduit le fait que le point de contact avec les appuis est plus proche de l'axe du poinçon. On comprend ainsi que, à course égale, le bras de la force est plus court pour l'écrouissage combiné ; les valeurs des couples étant maintenant sensiblement égales, s'ensuit une valeur de la force mesurée supérieure pour le cas de l'écrouissage combiné. On constate donc que plus l'essai progresse, et plus cet effet de structure devient prédominant. D'ailleurs, la diminution franche de l'effort de pliage après une course de 25-28 mm (alors que son bras continue à diminuer) indique une décharge élastique quasi-complète de l'éprouvette ; la réponse de la structure dépend de moins en moins de la plasticité du matériau.

**Introduction phénoménologique de l'écrouissage cinématique : conclusions**

Cette première série de simulation de traction + pliage en V a permis de mettre en relief les effets d'une composante cinématique dans la loi d'écrouissage. L'effet Bauschinger, important dans le cadre de notre simulation, est responsable à la fois d'un comportement et d'une géométrie différente de l'éprouvette. Ces changements de trajets, courants lors des procédés de mise en forme, nécessitent donc de tenir compte de l'écrouissage cinématique si toutefois le matériau présente un « comportement à risques ». La question est donc de savoir quels sont les matériaux à risques ?

Afin d'apporter une réponse, dans la dernière partie de ce chapitre, l'écrouissage cinématique est introduit non pas de manière phénoménologique mais par transition d'échelles du fait de l'hétérogénéité entre constituants isotropes d'un acier multiphasé.

## V.3.2 Effet de l'écrouissage cinématique : approche micromécanique

En modélisation du comportement, l'écrouissage cinématique est généralement introduit de manière phénoménologique. Nous nous focalisons ici sur une approche micromécanique. Bien entendu, il est possible de se contenter d'introduire un écrouissage cinématique dans les lois locales des phases pour obtenir un effet macroscopique sur la simulation numérique semblable à celui de la simulation précédente.

Dans cette dernière comparaison de simulations, c'est l'écrouissage cinématique résultant du mélange de deux phases isotropes à l'intérieur d'un acier biphasé qui est étudié. Ceci dans le but d'observer si un tel effet cinématique, dont on connaît les conséquences sur une simulation numérique, peut être introduit à travers une transition d'échelles.

Trois simulations de traction + pliage en V ont été effectuées à l'aide de deux modèles de comportement :

- un modèle biphasé à phases isotropes géré par une routine utilisateur (VUMAT). Le modèle micromécanique utilisé, du fait des limites évoquées dans le chapitre 3 pour le cas particulier d'une loi en sinh, est soit le modèle de Taylor-Lin, soit le modèle en Béta dans lequel les paramètres d'accommodation $D_i$ sont nuls : cela revient à utiliser le modèle de Kröner-Weng.
- Un modèle monophasé constitué d'un faisceau de courbes tabulées. Chaque courbe contrainte-déformation correspond au résultat macroscopique du modèle biphasé (modèle de Taylor-Lin) à une vitesse de déformation donnée, en chargement de traction uniaxiale.

Le **Tab. 5.4** résume les paramètres utilisés dans les lois de comportement locales des phases constituants le matériau biphasé. C'est le modèle élasto-viscoplastique en sinus hyperbolique développé dans le chapitre 2 qui est utilisé pour le comportement local, les paramètres relatifs à l'écrouissage cinématique sont nuls afin d'obtenir un comportement purement isotrope.

| | E (GPa) | $\nu$ | $Y_0$ (MPa) | $C_R$ | $R^{sat}$ (MPa) | $C_X$ | $X^{sat}$ (MPa) | A (MPa) | B ($s^{-1}$) | Fraction volumique |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Phase 1** | 210 | 0,3 | 1600 | 10 | 50 | 0 | 0 | 37 | 0,3 | 0,1 |
| **Phase 2** | 210 | 0,3 | 200 | 15 | 300 | 0 | 0 | 37 | 0,3 | 0,9 |

**Tab. 5.4 –** ***Paramètres des lois de comportement isotropes locales utilisées dans le modèle biphasé (VUMAT).***

La **Fig. 5.19** présente le comportement des deux modèles lors d'essais de traction-compression uniaxiale. Celle-ci illustre, pour une vitesse de déformation donnée, la différence de comportement lors du trajet retour entre le modèle biphasé géré par la VUMAT (pour deux transitions d'échelles différentes : modèle de Taylor-Lin et le modèle de Kröner-Weng) et le modèle monophasé (faisceau de courbes tabulées).

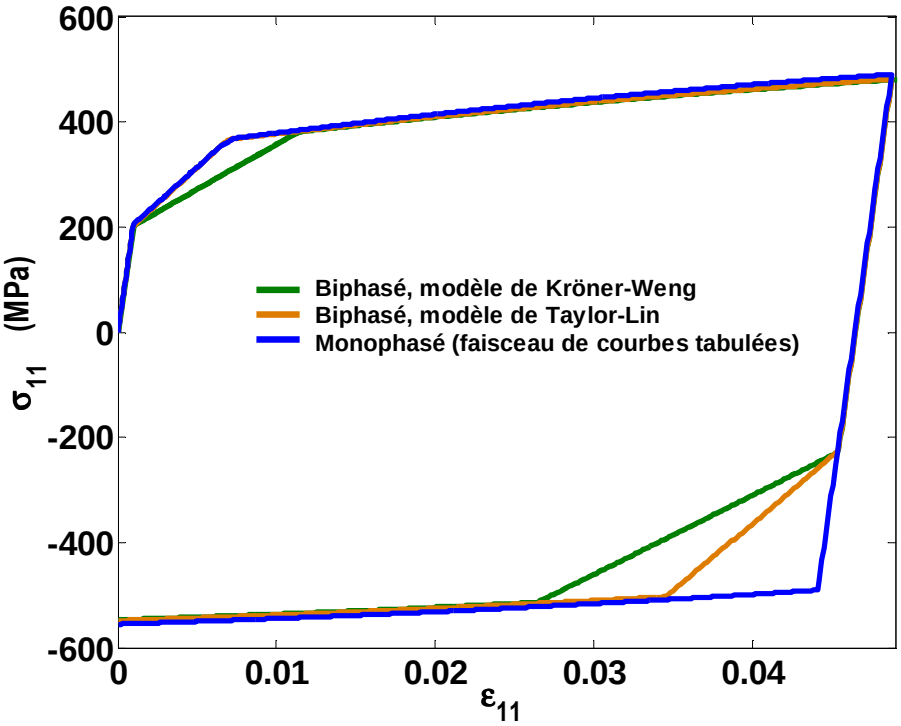



**Fig. 5.19 –** ***Comportement du modèle biphasé (VUMAT) pour deux transitions d'échelles différentes et du modèle monophasé (tabulé) à écrouissage isotrope en traction-compression uniaxiale pour une vitesse de déformation de $10^{-2}s^{-1}$.***

Remarquons qu'en dépit d'une forte hétérogénéité de comportement entre les phases, l'écrouissage cinématique dû au mélange des deux phases s'estompe rapidement. Ceci est dû certainement à la faiblesse des transitions d'échelles de type Taylor-Lin et Kröner-Weng qui semblent limitées à reproduire l'effet cinématique dû au mélange de deux phases élasto-viscoplastiques. La comparaison entre les deux simulations est présentée sur la **Fig. 5.20**.

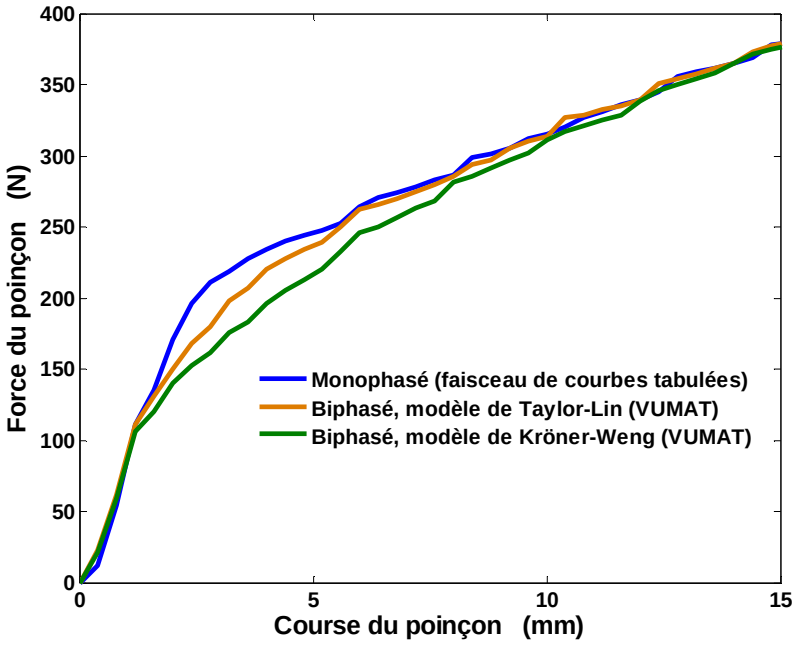



**Fig. 5.20 –** ***Effet de l'écrouissage cinématique sur la simulation d'un essai de pliage en V sur une éprouvette ayant subie préalablement un essai de traction uniaxiale.***

***Phase d'augmentation de l'effort : observation de l'effet Bauschinger***

Les courbes sont quasi-superposées au tout début de l'essai (chargement essentiellement élastique) puis la force du poinçon devient rapidement plus faible dans le cas du modèle biphasé quelle que soit la transition d'échelles utilisées : entre 2mm et 6mm de course du poinçon pour le modèle de Taylor-Lin et entre 2mm et 8mm de course du poinçon pour le modèle de Kröner-Weng. Cette première différence s'explique par la composante cinématique due au mélange des deux phases du modèle biphasé. L'effet sur la simulation de pliage est moins prononcé que pour la simulation précédente où l'écrouissage cinématique a été introduit de manière phénoménologique. Ceci s'explique par l'ampleur et la portée moins grandes de l'écrouissage cinématique dans le modèle (par rapport au modèle phénoménologique). Il représente toutefois une différence de 10 à 20% sur la force de résistance de l'éprouvette à la déformation imposée par le poinçon.

La **Fig. 5.21** permet de visualiser l'état de contraintes et de déformations longitudinales dans l'éprouvette par élément. Ces derniers sont numérotés comme précédemment de 1 à 18 sur la **Fig. 5.15**, l'élément portant le numéro 1 se référant à l'élément en contact avec l'outil. L'élément 6 passe par des états successifs de traction - compression - traction et illustre ainsi le fait que la fibre neutre s'est déplacée davantage vers l'outil que pour la simulation précédente (élément 9). Les déformations subies pour chaque trajet sont loin d'être négligeables traduisant la complexité des chemins de déformation rencontrés même dans les plus simples des essais, et justifiant le besoin de lois de comportement assez fidèles.

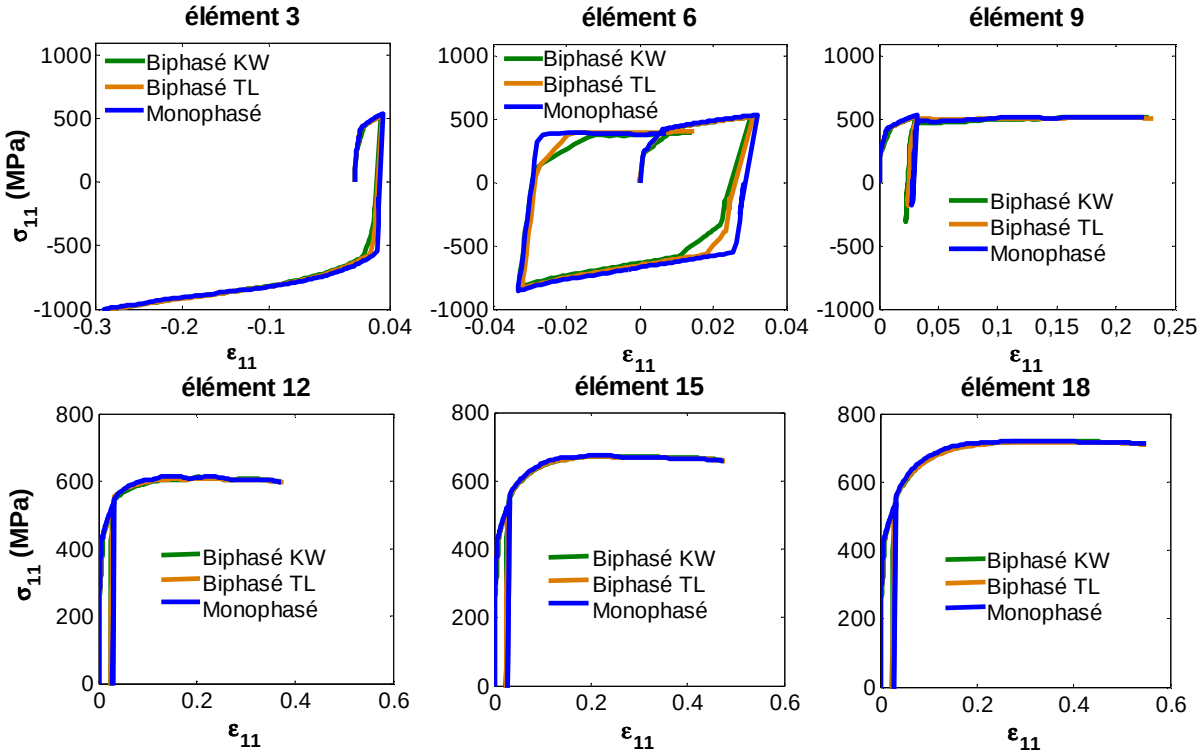
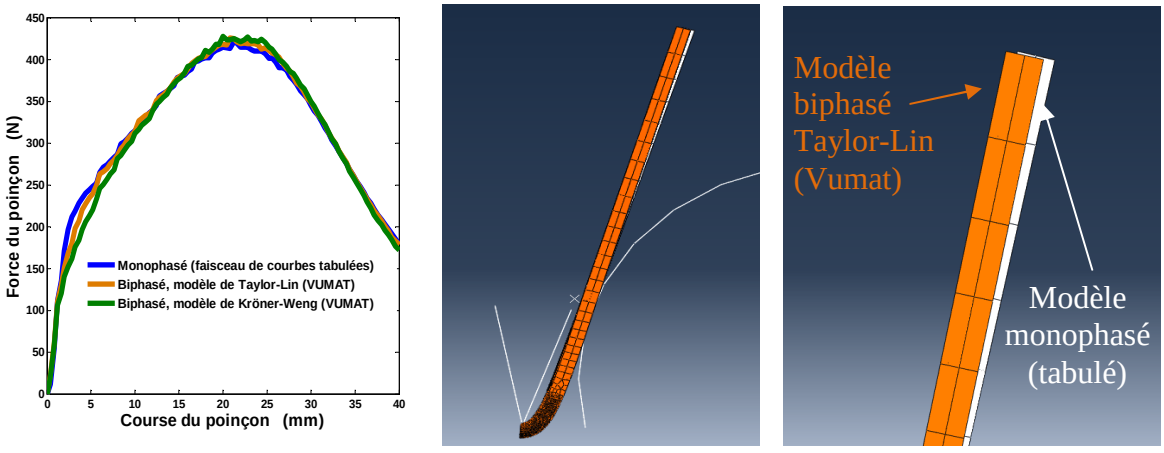



**Fig. 5.21 –** ***Contraintes et déformations dans l'épaisseur : confrontation des résultats entre le modèle biphasé (VUMAT) pour deux transitions d'échelles (KW : modèle de Kröner-Weng, TL : modèle de Taylor-Lin) et le modèle monophasé (faisceau de courbes tabulées).***

***Phase de diminution de l'effort***

Contrairement à la simulation précédente, où la présence de moments de flexion induits par des relations complexes matériau/structure était plus évidente, les courbes semblent quasiment superposées dans la phase de diminution de l'effort (**Fig. 5.22a**). La **Fig. 5.22b** superpose les déformées en fin de course du poinçon pour le modèle macroscopique tabulé et le modèle biphasé (Taylor-Lin seulement pour plus de lisibilité). L'agrandissement de l'extrémité de l'éprouvette **Fig. 5.22c** montre cependant une légère différence dans les déformées des deux modèles dû à l'effet cinématique traduit par la transition d'échelles. Rappelons que dans ces simulations nous avons volontairement négligé l'écrouissage cinématique au sein de chaque phase, afin de focaliser la discussion uniquement sur l'effet de l'homogénéisation.




(a) Force du poinçon en fonction de sa course

(b) Vue d'ensemble

(c) Agrandissement sur l'extrémité de l'éprouvette

**Fig. 5.22 –** ***Superposition de la déformée des deux simulations à 40mm de course du poinçon***

## V.4 CONCLUSIONS

Le modèle élasto-viscoplastique avec transition d'échelles a été implanté dans Abaqus avec un schéma d'intégration explicite à l'aide d'une routine utilisateur de type VUMAT. Celui-ci permet de modéliser le comportement élasto-viscoplastique macroscopique d'un acier multiphasé de deux manières :

- phénoménologiquement au travers d'une loi de comportement macroscopique,
- à l'aide d'une transition d'échelles (modèle de Taylor-Lin ou modèle en Béta) permettant de relier le comportement individuel des phases au comportement macroscopique.

L'application de ce modèle à l'essai de traction, en maillant l'éprouvette, met en évidence la contribution de la sensibilité à la vitesse, qui devient prépondérante même sur un tel essai apparemment quasi-statique dès lors que des hétérogénéités de déformation se développent. La choix de la loi d'écrouissage a également retenu notre attention et illustre

l'importance de l'identification. En effet, l'écart entre la courbe conventionnelle expérimentale et les courbes simulées peut être expliqué à la fois par une faiblesse d'identification de la sensibilité à la vitesse mais également par le choix de l'extension de la loi d'écrouissage au-delà de son domaine d'identification. Il convient donc de bien séparer les deux contributions en identifiant les paramètres visqueux de la loi de comportement à partir d'essais de traction uniaxiale réalisées avec saut de vitesses de déformation.

La simulation d'un essai de pliage en V a permis de mettre en évidence l'écrouissage cinématique dû à la transition d'échelles et son effet sur les efforts et les géométries prédites par un calcul de type éléments finis. L'écrouissage cinématique peut être introduit de deux façons au travers du modèle :

- par une contribution résultant du mélange des phases constitutives de l'acier multiphasés. Cette contribution traduit les interactions existantes régnant entre les phases dues à l'hétérogénéité de leur comportement. Cette contribution dépend directement de la capacité du modèle de transition d'échelles utilisé à traduire les interactions élasto-viscoplastiques entre les phases. Compte tenu des limitations de notre modèle dues à l'utilisation d'une linéarisation sécante du module visqueux, ce point mérite d'être davantage développé dans le futur.
- par une contribution cinématique intrinsèque à chacune des phases. Celle-ci est entrée phénoménologiquement dans la loi de comportement individuelle des phases et traduit une certaine prise en compte d'hétérogénéités microstructurales (joints de grain, texture de grain etc.) au sein de chacune.

Cette implantation numérique robuste et efficace s'avère ainsi un outil de simulation utile pour les sidérurgistes, afin d'étudier l'effet des lois de comportement en mise en forme et, à terme, aider au « design des matériaux » en vue des propriétés de mise en forme et d'usage.

## BIBLIOGRAPHIE

[Aba10] **ABAQUS (2010)**. Abaqus/Explicit User's Manual, Dassault Systèmes.

[Chu11] **CHUNG K., KUWABARA T., VERMA R.K., PARK T**. Pre-strain effect on spring-back of 2-D Draw bending. *Numisheet 2011, Benchmark 4*, updated February 18, 2011.

[Col10] **COL A.** L'emboutissage des aciers. *Dunod*, 544 pages, 2010.

[ISO6892] **NORME ISO EN 6892-1**. Matériaux métallique - Essai de traction, 67 pages, Octobre 2009.

[ISO7438] **NORME ISO 7438:2005**. Matériaux métalliques - Essai de pliage.

[Thu10] **THUILLIER S., MANACH P.Y., MENEZES L.F.** Occurrence of strain path changes in a two-stage deep drawing process. *Journal of Materials Processing and Technology*, **210**, pp. 226-232, 2010.

# CHAPITRE VI

# CONCLUSIONS GÉNÉRALES ET PERSPECTIVES

## CONCLUSIONS GENERALES

### *Un challenge ambitieux*

Les constructeurs automobiles se retrouvent aujourd'hui confrontés à de fortes exigences en matière de réduction des émissions de $CO_2$ de leurs véhicules. Ces exigences ont été initiées ces dernières années par une récente prise de conscience des états et des sociétés sur la consommation des ressources et des émissions de gaz à effet de serre. Cette réduction passe avant tout par l'allégement des véhicules, c'est-à-dire la réduction en épaisseur des pièces. Le métallurgiste doit donc relever le challenge de concevoir des aciers à plus hautes caractéristiques mécaniques tout en garantissant :

- un même niveau de sécurité à épaisseur plus faible,
- une bonne formabilité, celle-ci diminuant classiquement avec l'augmentation des caractéristiques.

Parallèlement, l'augmentation du poids des équipements (GPS, radar de contrôle, etc.) à l'intérieur des véhicules ces vingt dernières années vient compliquer davantage ce défi. Le multiphasage constitue l'une des voies de réponse proposées par le métallurgiste. Ce dernier a besoin d'outils numériques efficaces permettant de modéliser le comportement de ces nouveaux aciers à hautes caractéristiques durant leur principale application : la mise en forme de produits plats pour l'automobile : les tôles. Dans cette optique, l'outil numérique idéal doit répondre à plusieurs critères :

- d'identification aisée, il doit être pertinent dans la description des caractéristiques du comportement rhéologique de ces aciers sur toute la gamme de déformations et de vitesses de déformations que comporte les procédés de mise en forme,
- au-delà de cette description, il doit capter une certaine physique de la microstructure du matériau afin d'une part d'agir sur les sources des propriétés mécaniques observées pour concevoir de nouvelles nuances et afin d'autre part d'être pertinent dans la description du comportement au-delà du domaine pour lequel il a été identifié,
- il doit être facilement implantable dans un code d'éléments finis en vue de simuler le comportement des produits pour leurs applications finales : la mise en forme et la tenue au crash.

L'objectif de cette thèse s'est inscrit pleinement dans la réalisation d'un tel outil numérique en proposant un outil de modélisation du comportement élasto-viscoplastique des aciers multiphasés implantable dans le logiciel de calcul par éléments finis Abaqus. L'hétérogénéité du comportement des phases étant prise en compte au travers d'une transition d'échelles.

### *Une description pertinente du comportement adaptée à l'application visée*

Dans cette optique, une loi de comportement élasto-viscoplastique tridimensionnelle a été formulée dans un cadre tensoriel et exprimée sous forme incrémentale. La forme de cette loi, en sinus hyperbolique, a été choisie du fait de son applicabilité dans un large domaine de déformations, de contraintes mais aussi de vitesses de déformation compatibles avec ceux des procédés de mise en forme. En utilisant le formalisme de l'activation thermique, nous avons

conforté ce choix en illustrant que le mécanisme de glissement des dislocations conduisait naturellement à cette forme en sinus hyperbolique du fait de la prise en compte de la probabilité de sauts retour des segments de dislocations à la rencontre d'un obstacle microstructural. En se basant sur le formalisme de Rauch, nous avons montré qu'il est alors possible de décrire le mécanisme de glissement des dislocations par double décrochement des parties coins sur les parties vis des dislocations, mécanisme propre aux matériaux cubiques centrés. De ce fait, la contrainte d'écoulement a été définie comme une combinaison linéaire d'une contrainte interne et d'une contrainte effective. L'utilisation combinée de ces deux formalismes à contribué à formuler une nouvelle loi de comportement élasto-viscoplastique tridimensionnelle respectant le cadre thermodynamique des matériaux standard généralisés.

Par souci de simplicité d'implantation dans un code d'éléments finis, l'évolution de l'écrouissage isotrope et cinématique a été définie en premier lieu à l'aide de lois phénoménologiques, respectivement par une loi de type Voce et une loi de type Armstrong-Frederick. Le modèle complet, ayant seulement sept paramètres, a été validé sur un ensemble d'essais expérimentaux réalisés à différentes vitesses de déformation, températures selon des trajets monotones ou séquentiels. Ces résultats illustrent la capacité du modèle à capter de façon précise deux caractéristiques du comportement visqueux à savoir la sensibilité positive de la contrainte d'écoulement à la vitesse de déformation et une sensibilité négative à la température. Confronté à d'autres modèles issus de la littérature (modèle de Uenishi et Teodosiu, modèle de Rusinek), à plus grand nombre de paramètres, le modèle développé dans ce travail de thèse apparaît comme un excellent compromis entre simplicité d'identification et précision des résultats. Notons toutefois que si les lois d'écrouissage utilisées restent relativement simples, le modèle est ouvert à une intégration de nouvelles lois d'écrouissage plus avancées ou à plus fort contenu physique. De même, si notre étude s'est focalisée sur le mécanisme de glissement des dislocations pour les matériaux cubiques centrés, le modèle est également capable de modéliser d'autres structures cristallographiques comme les matériaux CFC : la contrainte d'écoulement n'est alors plus caractérisée par le couplage retenu ici entre la contrainte interne et la contrainte effective, mais plus simplement comme leur somme.

La loi de comportement élasto-viscoplastique ainsi proposée dans ce travail de thèse constitue un bon candidat à la modélisation du comportement élasto-viscoplastique des aciers pour la mise en forme. La comparaison des résultats du modèle et des essais expérimentaux a validé cette approche dans le cadre d'aciers doux monophasés ferritiques destinés à l'emboutissage.

***Une description qui se veut prédictive, hors du domaine initial d'identification***

Au-delà de la capacité à bien décrire le comportement élasto-viscoplastique de manière phénoménologique, une partie de ces travaux a été consacrée à l'étude de la prise en compte de l'hétérogénéité de comportement des constituants d'un acier multiphasé. Ceci, dans l'optique d'étudier les effets de cette hétérogénéité sur le comportement macroscopique en vue d'élaborer de nouvelles nuances. Il est aisé de remarquer que la validité des simulations dans une approche phénoménologique est directement tributaire des conditions dans lesquelles le jeu de paramètres a été identifié. C'est pourquoi l'un des objectifs de cette thèse a été d'utiliser une autre démarche : celle de la micromécanique. Celle-ci consiste à faire le lien entre deux échelles de description, dans notre cas celle des mécanismes physiques à l'échelle de la microstructure et celle du comportement mécanique à l'échelle macroscopique. Tout l'objet du chapitre 3 a été de définir cette approche et de choisir les modèles susceptibles de nous intéresser. Après un rappel général de la méthodologie et une analyse bibliographique des différentes approches, une analyse des extensions classiques du schéma autocohérent en

élastoplasticité a été effectuée afin de pouvoir bien appréhender les subtilités du problème micromécanique hétérogène élasto-viscoplastique.

De manière plus approfondie, les enjeux et défis que constitue l'utilisation d'une approche micromécanique dans le cadre de l'élasto-viscoplasticité ont été examinés. En particulier, la présence simultanée de plusieurs ordres de dérivation des champs locaux nécessite la prise en compte du caractère héréditaire du comportement et ne permet plus d'utiliser les extensions classiques du schéma autocohérent. Le couplage spatio-temporel résultant constitue une difficulté majeure dans le traitement du problème micromécanique hétérogène élasto-viscoplastique. Parmi les deux voies de résolution proposées dans la littérature, nous avons choisi d'utiliser les approches à variables internes qui se révèlent d'une part être moins lourdes numériquement que les approches héréditaires et d'autre part largement utilisées au laboratoire. Un effort particulier a été porté sur l'analyse de ces modèles : l'insuffisance de l'extension classique du schéma autocohérent en élasto-viscoplasticité par Weng a permis d'illustrer précisément les spécificités inhérentes au comportement élasto-viscoplastique. De fait, le modèle à champs translatés est apparu naturellement comme la solution retenue dans le cadre de ce travail de thèse. Une solution pragmatique, le modèle en Béta, a toutefois attiré notre attention du fait des propriétés avantageuses en termes de rapidité de calcul même s'il nécessite au préalable une identification d'un paramètre scalaire gérant l'accommodation viscoplastique. Néanmoins, dans le cadre d'une modélisation d'un acier biphasé, où les hétérogénéités considérées sont les phases constitutives de cet acier, les simulations ont abouti à deux résultats majeurs :

- la non-linéarité de la loi locale en sinus hyperbolique semble trop importante pour pouvoir être correctement prise en compte par une linéarisation sécante du comportement viscoplastique. Dans ces conditions, le comportement macroscopique résultant est proche des modèles de Taylor-Lin et de Kröner-Weng, limitant l'intérêt de coupler loi de comportement locale en sinus hyperbolique et modèle à champs translatés à linéarisation sécante.
- l'utilisation du modèle en Béta après identification sur le modèle à champs translatés permet un gain numérique conséquent du fait que l'on s'affranchit du caractère implicite de résolution numérique du modèle à champs translatés. Cependant son identification n'est pas aisée si l'on ne dispose pas des outils numériques adéquats.

Enfin, il est légitime de se poser la question de l'approximation faite dans ce travail de thèse en ne considérant que les phases comme seules hétérogénéités. L'utilisation d'une approche à champs moyens à l'échelle des phases implique que les effets de longueurs internes microstructurales (taille de grain par exemple) à l'intérieur de ces phases doivent être pris en compte de manière phénoménologique par la loi de comportement locale. Or ceci constitue une limite dans l'utilisation de notre modèle : une phase ferritique à gros grains doit être identifiée différemment d'une phase ferritique à grains plus fins. Cette réflexion a été l'objet d'un effort particulier durant cette thèse sortant du cadre initialement posé.

***La prise en compte des longueurs internes dans les approches à champs moyens***

Comme il a été souligné en début de chapitre 4, les approches classiques à champs moyens sont incapables de reproduire les effets de taille absolue de longueurs internes microstructurales. L'analyse de la littérature a montré que ces longueurs microstructurales sont (jusqu'à encore très récemment) injectés phénoménologiquement au travers de la loi de comportement locale. De fait, leur effet est limité d'un point de vue de la modélisation

puisque cantonné au domaine d'identification initial. Une partie de cette thèse a donc été de proposer une approche micromécanique visant à intégrer de manière originale des longueurs internes dans les approches à champs moyens afin d'obtenir naturellement en sortie des effets de taille de microstructure sur le comportement macroscopique.

Dans le cadre d'une modélisation de la taille de grain dans un acier IF, le concept des dislocations géométriquement nécessaires a été introduit dans une approche non locale à champs moyens. L'originalité de l'approche a reposé principalement sur deux aspects :

- une discrétisation du grain en un composite à deux phases : une phase « molle » qui constitue le cœur du grain et une phase « dure » qui constitue une couche enveloppant les joints de grain. Cette représentation du grain a permis d'introduire deux longueurs internes : la taille de grain et l'épaisseur de couche.
- une définition du comportement non-local de la couche qui dépend du gradient de déformation plastique régnant entre le cœur et la couche. Cette approche non-locale de la plasticité est en accord avec l'échelle de la microstructure étudiée où il existe une contribution non-locale à longue distance des joints de grains.

Ainsi l'acier ferritique monophasé est considéré dans cette nouvelle approche comme un acier biphasé. Les longueurs internes microstructurales n'ont pas été introduites « classiquement » via des paramètres dans les lois de comportement locales mais au travers de l'étape de représentation du motif géométrique du grain d'une part et au travers d'une approche non-locale du comportement de la couche d'autre part. Le modèle a été confronté à des résultats expérimentaux sur plusieurs aciers IF à différentes tailles de grain. Les résultats de ces simulations révèlent que cette approche originale permet de capter l'effet de la taille de grain sur l'évolution de l'écrouissage de ces aciers. L'analyse des sorties naturelles du modèle (densité de dislocations, contraintes et déformations locales etc.) est cohérente avec les observations de la littérature. Une évaluation de la contrainte cinématique de l'acier à l'aide des sorties du modèle se révèle être également en bon accord avec des résultats d'essais Bauschinger. Une extension du modèle aux particules dures a été écrite et révèle également de nouvelles possibilités de description quant à la prise en compte de l'effet de taille de particules dures dans les approches à champs moyens.

Si les résultats de cette nouvelle approche non-locale à champs moyens promettent de nouveaux horizons de développement, il convient toutefois de nuancer certains aspects. En effet si la taille de grain, longueur mesurable déterminée expérimentalement, a été rentrée en tant que paramètre, l'épaisseur de couche dans notre modèle a du être fixée afin de reproduire les résultats expérimentaux. Cette épaisseur qui représente le lieu du gradient de déformations permettant d'accommoder la présence du joint de grain n'a pas été déterminée expérimentalement. Par souci de simplification, la forme du gradient a été considéré comme linéaire ce qui reste également un point à déterminer par des moyens d'investigations spécifiques. De plus, il est naturel de penser que ce gradient et donc cette épaisseur de couche pourrait évoluer avec la déformation. Ici encore, la nécessité de recourir à des moyens expérimentaux devrait contribuer à confirmer ou à infirmer nos hypothèses.

Au travers de ces travaux, il apparaît que la prise en compte de longueurs internes au travers de modèles à champs moyens ne semble plus être une limitation. Ce développement original permet d'injecter davantage de physique du matériau dans les modèles de mécanique de milieux continus et est venu enrichir l'objectif initial de cette thèse. Si une telle approche permet de répondre à certaines interrogations apparues naturellement au cours de ce travail de thèse, elle ouvre également le débat sur la manière d'introduire la physique du matériau dans les modèles de mécanique des milieux continus.

***Un outil multi-échelle, multi-approche***

L'objectif initial était de construire un outil numérique capable de modéliser le comportement macroscopique d'un acier multiphasé en tenant compte de l'hétérogénéité de comportement de ses phases constitutives en vue de simuler la mise en forme. Cet outil a été réalisé : le comportement local des phases est défini à partir de la loi de comportement élasto-viscoplastique développée dans cette thèse. La transition d'échelles est assurée soit par le modèle à champs translatés, soit par le modèle en Béta identifié sur le précédent et qui se présente comme une solution très avantageuse du point de vue de la rapidité d'exécution des calculs. Le modèle complet de comportement a été programmé dans une routine utilisateur VUMAT tournant dans le logiciel de calcul par éléments finis Abaqus. Il est ainsi possible de simuler le comportement d'un acier multiphasé pour lequel le comportement de chacune des phases a été identifié. N'ayant pas de données expérimentales concernant le comportement des phases constitutives d'un acier multiphasé, l'outil n'a pas encore pu être confronté à des résultats expérimentaux.

Néanmoins, la confrontation de la simulation d'un essai de traction sur un acier monophasé à un essai expérimental, a conforté la nécessité d'une prise en compte de la sensibilité positive de la contrainte d'écoulement à la vitesse de déformation. Les résultats illustrent le fait que la description des mécanismes physiques par la loi de comportement est pertinente, en particulier elle décrit correctement le mécanisme de striction diffuse apparaissant après allongement uniforme. Une analyse de simulations d'un essai de traction + pliage en V a permis également de mettre en évidence la nécessité de la prise en compte d'un écrouissage cinématique dans ces simulations à l'aide d'une approche phénoménologique mais également à l'aide d'une approche à champs moyens dans le cadre d'un acier biphasé.

Etudier les effets du multiphasage sur la mise en forme est un travail qui nécessite :

- de pouvoir modéliser le lien entre microstructure et propriétés mécaniques ; c'est l'intérêt d'une approche à champs moyens,
- de pouvoir modéliser le lien entre propriétés mécaniques et structure ; c'est l'intérêt de l'utilisation d'une loi de comportement avancée dans un logiciel de calcul par éléments finis.

Il est remarquable de constater qu'une telle étude demande non seulement une démarche multi-échelle mais également et par voie de conséquence une démarche « multi-approche ». C'est finalement tout l'objet de ce travail de thèse qui a été de combiner ces différentes approches à différentes échelles. Cette thèse a donc contribué à réaliser un outil de simulation numérique utile à la compréhension du multiphasage. Toutefois, il s'est révélé que deux de ses composantes les plus riches ne semblent pas compatibles entre elles : à savoir la loi locale de comportement élasto-viscoplastique et le modèle de transition d'échelles dans sa forme actuelle où une linéarisation sécante est utilisée. Dans ces conditions, l'accommodation élasto-viscoplastique entre constituants est réduite à une accommodation élastique de type Taylor-Lin ou Kröner-Weng.

Concluons enfin sur le fait qu'il est nécessaire de déterminer expérimentalement les hétérogénéités ou longueurs internes microstructurales responsables du comportement macroscopique. On conçoit facilement que pour un acier Dual-Phase ou un acier TWIP, celles-ci peuvent être très différentes. Si les modèles à champs moyens disposent désormais d'approches permettant de prendre en compte ces longueurs internes microstructurales (taille de grain, gradient de déformations etc.), il est indispensable de les déterminer expérimentalement. Dans le cadre d'une étude sur le multiphasage, cette confrontation

conditionne la pertinence de ces modèles mais également celle des autres approches à un plus haut niveau d'échelle.

## PERSPECTIVES

### *Validation poussée de l'outil numérique*

Une première perspective serait de confronter l'outil numérique à de nombreux essais expérimentaux de caractérisation ou de mise en forme réalisés sur différents aciers multiphasés afin de préciser davantage la pertinence des choix de modélisation effectués dans ce travail de thèse. Cette confrontation nécessite en premier lieu un effort expérimental d'identification du comportement des phases et/ou des longueurs internes microstructurales au sein de ces dernières.

### *Améliorations envisagées*

L'utilisation du modèle de comportement élasto-viscoplastique développé dans cette thèse en tant que loi locale de comportement dans les phases d'un acier multiphasé se révèle limitée d'un point de vue micromécanique. En effet, il est fort probable que la linéarisation sécante du module viscoplastique dans nos modèles ne permette pas de capter la forte non-linéarité de cette loi. Ce point de blocage mérite donc de se pencher vers d'autres voies de linéarisation. Une première perspective d'amélioration serait de modifier la linéarisation sécante du module viscoplastique dans le modèle à champs translatés par une linéarisation affine qui semble plus à même de traiter des comportements fortement non-linéaires. Il est en effet frustrant de constater que le traitement rigoureux des interactions élasto-viscoplastiques dans le cadre du modèle à champs translatés soit réduit à un traitement purement élastique de type Taylor-Lin du fait de la faiblesse du schéma de linéarisation du module viscoplastique.

L'utilisation du modèle en Béta, dans le cadre d'un outil d'homogénéisation dédié à la simulation en mise forme, semble judicieuse du fait de la rapidité du modèle d'un point de vue numérique à traiter l'estimation autocohérente. Une deuxième perspective d'amélioration serait donc de définir précisément les conditions pour lesquelles le modèle en Béta peut être identifié sur le modèle à champs translatés dans le cadre d'un comportement élasto-viscoplastique. Ce travail nécessite de définir si le paramètre scalaire D gérant la précision de l'estimation autocohérente du modèle en Béta est dépendant de la vitesse de déformation, de l'évolution du module viscoplastique local, des trajets de déformation etc. Dans le cas où ces conditions seraient trop restrictives, le modèle en Béta pourrait être modifié (par exemple une extension tensorielle de son paramètre D) afin que l'identification à partir du modèle à champs translatés soit facilitée.

Enfin, l'introduction de longueurs internes microstructurales dans les approches à champs moyens a permis de prendre en compte des effets de taille microstructurale de manière originale. Cette nouvelle approche visant à traiter les effets de longueurs internes non pas de manière phénoménologique au travers de la loi de comportement locale mais directement au sein de l'approche micromécanique mérite également de plus amples investigations. Une troisième perspective serait dans un premier temps de pouvoir vérifier les longueurs internes introduites à l'aide de moyens expérimentaux spécifiques. Dans un deuxième temps, il faudrait étendre la description isotrope et scalaire de l'évolution des

densités de dislocations géométriquement nécessaires à une formulation tensorielle pour pouvoir traiter le cas d'essais séquentiels.

***Potentiel d'utilisation***

La majorité du potentiel de cet outil réside au final dans la possibilité :

- de modéliser le comportement des aciers multiphasés lors de leur mise en forme en optimisant certaines caractéristiques de leur microstructure suivant les hétérogénéités considérées (phases et/ou longueurs internes introduites) : fraction volumique, comportement local, taille de grain, taille de particule etc.,
- d'analyser en sortie du modèle les champs locaux à l'échelle des phases et/ou à l'échelle des longueurs internes introduites.

Concernant ce dernier aspect, nous pouvons ainsi espérer visualiser en un lieu précis d'une tôle mise en forme (là où est localisée la déformation par exemple) ce qu'il se passe en termes de saut de contraintes, de déformations ou de vitesses de déformation à l'interface des hétérogénéités considérées (phases ou longueurs internes microstructurales). Ces sorties naturelles d'un modèle de transition d'échelles pourraient s'avérer être très utiles non seulement à la compréhension des mécanismes responsables du comportement macroscopique des aciers multiphasés mais également à la compréhension des mécanismes d'endommagement (saut de contraintes à l'interface).

# ANNEXES

## ANNEXE 1 : L'INCLUSION D'ESHELBY

### Le problème homogène

Eshelby propose une démarche mathématique rigoureuse visant à calculer l'état de déformation élastique $\boldsymbol{\varepsilon}$ d'une inclusion de forme ellipsoïdale subissant une déformation $\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{T}}$ dans une matrice infinie élastique. Il résout le problème de façon élégante en visualisant le problème par une série de coupes, de transformations et de collages :

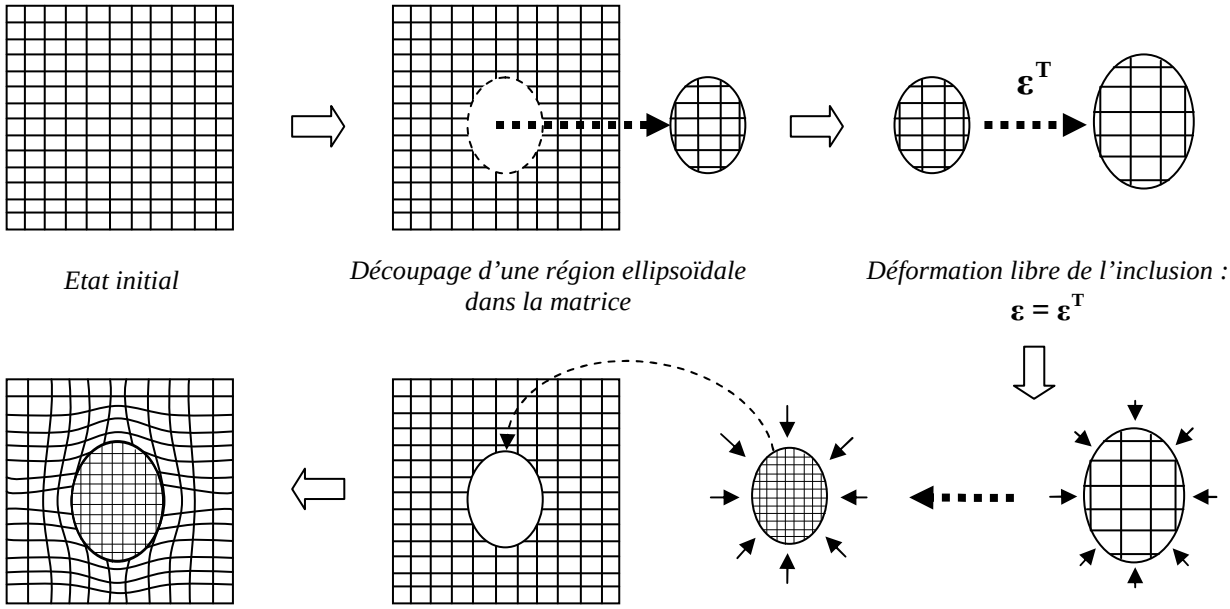



**Fig. A1.1 –** ***Problème de l'inclusion homogène d'Eshelby : coupes, transformations et collages d'une région ellipsoïdale soumise à une déformation libre dans une matrice élastique non contrainte.***

La matrice est constituée d'un matériau élastique homogène de module élastique $\mathbf{C_M}$. Une région de forme ellipsoïdale, l'inclusion, est prélevée de cette matrice non contrainte. Imaginons que cette inclusion, hors de la matrice, subit une transformation locale homogène $\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{T}}$ (dilatation thermique, transformation de phase) telle que sa forme change. Cette déformation « libre de contrainte » est nommée « eigenstrain » ou « déformation propre ». Afin de repositionner l'inclusion dans la matrice, des contraintes sont appliquées à sa surface de telle sorte que l'inclusion retrouve sa forme initiale. Tout en maintenant les contraintes appliquées à sa surface, l'inclusion est alors replacée et « recollée » dans la matrice de manière à ce qu'aucun mouvement de l'interface n'ait lieu. Dans cette position, lorsque les contraintes sont relâchées, la présence de la matrice empêche l'inclusion de retrouver son état de déformation libre : il y a alors incompatibilité de déformation et un champ de contraintes et un champ de déplacements sont générés dans tout le milieu. Matrice et inclusion se déforment et l'équilibre est atteint pour une déformation « contrainte » $\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{C}}$ de l'inclusion qui obtient sa forme finale. Le calcul d'Eshelby (non développé ici) montre que la contrainte $\boldsymbol{\sigma}$ et la

déformation $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^{C}$ sont homogènes dans l'inclusion. Les contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ dans l'inclusion peuvent être déterminées par un simple calcul d'élasticité en utilisant la loi de Hooke :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}_{M} : \left(\boldsymbol{\varepsilon}^{C} - \boldsymbol{\varepsilon}^{T}\right) \qquad \textbf{(3.96)}$$

Eshelby a montré qu'il était possible de déterminer les déformations « contraintes » $\boldsymbol{\varepsilon}^{C}$ de la matrice ou de l'inclusion à partir des déformations libres de contraintes $\boldsymbol{\varepsilon}^{T}$ grâce au tenseur $\mathbf{S}^{Esh}$ d'ordre 4 nommé « tenseur d'Eshelby » :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{C} = \mathbf{S}^{Esh} : \boldsymbol{\varepsilon}^{T} \qquad \textbf{(3.97)}$$

Le tenseur d'Eshelby dépend de la forme de l'inclusion et du coefficient de Poisson de la matrice. La déformation propre, rappelons-le, correspond à la déformation que l'inclusion subirait si elle n'était pas contrainte par la matrice. Eshelby, dans son article, admet déjà faussement l'idée que cette déformation libre pourrait être la déformation plastique $\boldsymbol{\varepsilon}^{p}$.

Dans le cas d'une inclusion sphérique, à élasticité isotrope, ayant subi une déformation $\boldsymbol{\varepsilon}^{p}$ et plongée dans une matrice élastique isotrope, le résultat d'Eshelby permet d'écrire :

$$\boldsymbol{\sigma} = -2\mu\left(1-\beta\right)\boldsymbol{\varepsilon}^{p} \qquad \text{avec :} \quad \beta = \frac{2\left(4-5\nu\right)}{15\left(1-\nu\right)} \qquad \textbf{(3.98)}$$

Si la matrice est de plus chargée par une contrainte $\boldsymbol{\Sigma}$ appliquée à l'infini, alors il est possible d'écrire la relation suivante :

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\Sigma} - 2\mu\left(1-\beta\right)\boldsymbol{\varepsilon}^{p} \qquad \textbf{(3.99)}$$

**Le problème inhomogène**

Dans le cas d'une inclusion inhomogène, c'est-à-dire une inclusion de module élastique $\mathbf{C}_{I}$ dans une matrice de module élastique $\mathbf{C}_{M}$, le champ des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ à l'intérieur de l'inclusion peut être déterminé par la même série de coupes, de transformations et de collages en réduisant le problème inhomogène à un problème fictif « équivalent » homogène. Pour cela, il suffit de réintroduire dans le logement laissé par la coupe de l'inclusion inhomogène, une inclusion homogène fictive de même forme et de même taille. En termes d'équations, cette équivalence se traduit comme l'égalité des contraintes entre l'inclusion homogène du problème fictif équivalent et l'inclusion inhomogène du problème réel :

$$\boldsymbol{\sigma}^{\text{homogène}} = \boldsymbol{\sigma}^{\text{inhomogène}} \qquad \textbf{(3.100)}$$

soit :

$$\mathbf{C}_{M} : \left(\boldsymbol{\varepsilon}^{C} - \boldsymbol{\varepsilon}^{T}\right) = \mathbf{C}_{I} : \left(\boldsymbol{\varepsilon}^{C} - \boldsymbol{\varepsilon}^{T*}\right) \qquad \textbf{(3.101)}$$

où $\boldsymbol{\varepsilon}^{T*}$ représente la déformation libre de l'inclusion inhomogène, $\boldsymbol{\varepsilon}^{C}$ représente la déformation contrainte de l'inclusion homogène fictive ou de l'inclusion inhomogène. Il vient, en utilisant le résultat (3.97) du problème homogène :

$$\mathbf{C}_{M} : \left(\mathbf{S}^{Esh} - \mathbf{I}\right) : \boldsymbol{\varepsilon}^{T} = \mathbf{C}_{I} : \left(\mathbf{S}^{Esh} : \boldsymbol{\varepsilon}^{T} - \boldsymbol{\varepsilon}^{T*}\right) \qquad \textbf{(3.102)}$$

La transformation $\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{T}}$ de l'inclusion homogène fictive s'exprime comme une fonction du contraste des phases et de la transformation $\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{T*}}$ de l'inclusion inhomogène :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{T}} = \left[ \left( \mathbf{C}_{\mathbf{I}} - \mathbf{C}_{\mathbf{M}} \right) : \mathbf{S}^{\mathbf{Esh}} + \mathbf{C}_{\mathbf{M}} \right]^{-1} : \mathbf{C}_{\mathbf{I}} : \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{T*}} \qquad \textbf{(3.103)}$$

On vérifie bien que si l'inclusion et la matrice ont le même module élastique, les deux transformations sont égales. En utilisant l'équivalence en contraintes des deux inclusions, on aboutit à l'expression de la contrainte dans l'inclusion inhomogène :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}_{\mathbf{M}} : \left( \mathbf{S}^{\mathbf{Esh}} - \mathbf{I} \right) : \left[ \left( \mathbf{C}_{\mathbf{I}} - \mathbf{C}_{\mathbf{M}} \right) : \mathbf{S}^{\mathbf{Esh}} + \mathbf{C}_{\mathbf{M}} \right]^{-1} : \mathbf{C}_{\mathbf{I}} : \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{T*}} \qquad \textbf{(3.104)}$$

Ces résultats fondamentaux d'Eshelby qui permettent de connaître l'état de contrainte local d'une inclusion homogène ou inhomogène noyée dans une matrice élastique chargée ou non à l'infini est à la base de nombreux modèles de transition d'échelles et fait date à la fin des années cinquante et au début des années soixante.

## ANNEXE 2 : GEOMETRIES DU POINÇON ET DES CYLINDRES UTILISEES DANS LA SIMULATION DE PLIAGE EN V

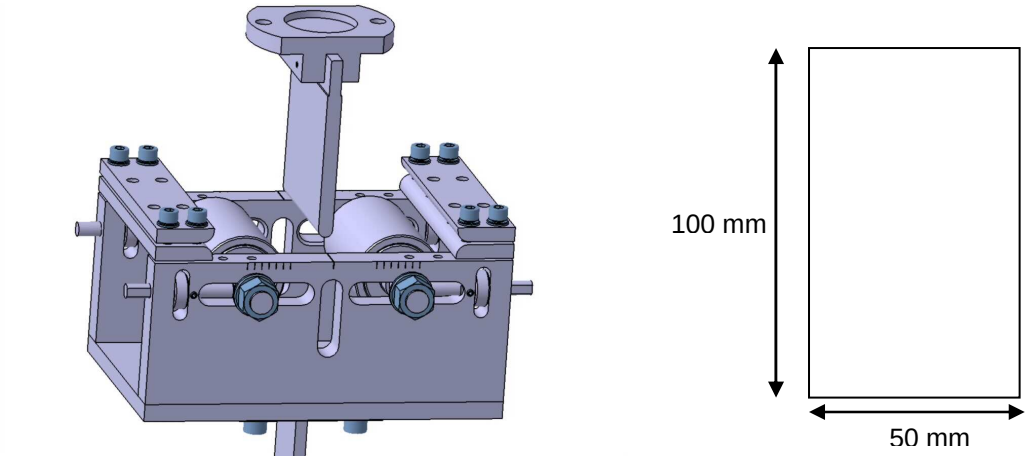



**Fig. A2.1 –** ***Exemple de système de pliage en V et géométrie réelle de l'éprouvette.***

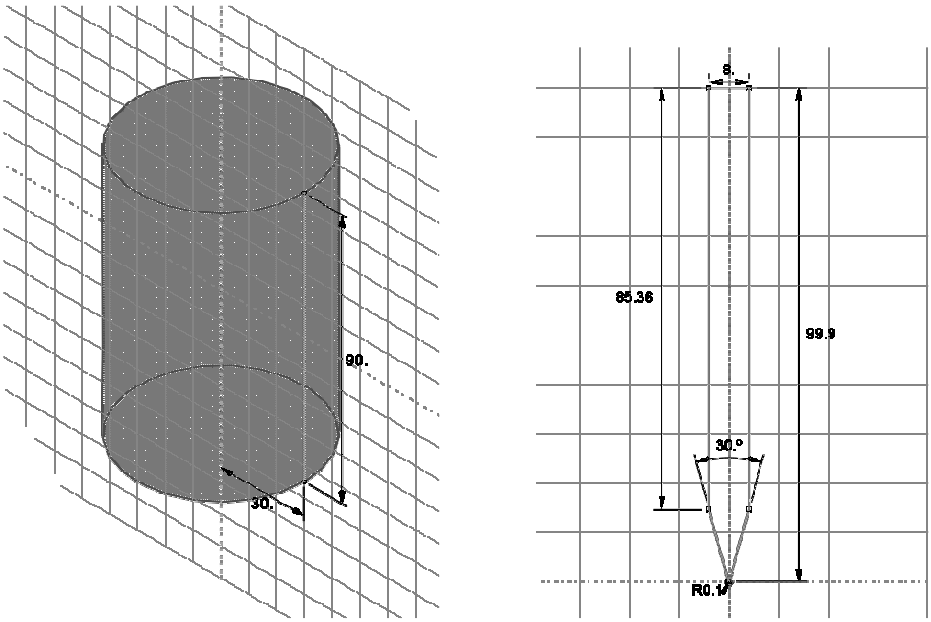



**Fig. A2.2 –** ***Géométries des cylindres support et du poinçon de rayon 0,1mm [Tif09].***

[Tif09] **TIFFON G.** Simulation numérique de test en pliage de mise en forme. *Rapport confidentiel ArcelorMittal*, 2009.

# TABLE DES FIGURES

## Chapitre I : Introduction générale


**Fig. 1.1 –** *Exemple d'aciers multiphases : les aciers Dual-Phase.* ..... 12
**Fig. 1.2 –** *Relation entre resistance mecanique et emboutissabilite pour les differentes familles d'aciers [Arc11].* 13
**Fig. 1.3 –** *Optimisation de la microstructure pour l'amelioration des proprietes mecaniques : un probleme a differentes echelles.* ..... 14


## Chapitre II : Lois de comportement élasto-viscoplastique


**Fig. 2.1 –** *Representation schematique de la sensibilite de la contrainte* ..... 28
**Fig. 2.2 –** *Transformation reversible puis irreversible de la microstructure* ..... 31
**Fig. 2.3 –** *Mise en evidence de marches a la surface d'un monocristal* ..... 32
**Fig. 2.4 –** *Deplacement schematique d'un tapis au sol facilite par creation et la propagation d'une bosse.* ..... 32
**Fig. 2.5 –** *Deplacement elementaire d'un bloc cristallin sur un plan de glissement* ..... 33
**Fig. 2.6 –** *Schema d'un monocristal cisaille de part et d'autre par le glissement d'une dislocation coin, d'apres [Vig07].* ..... 34
**Fig. 2.7 –** *Geometrie d'un cristal cisaille partiellement par une seule dislocation (a) ou par plusieurs dislocations (b), d'apres [Vig07].* ..... 35
**Fig. 2.8 -** *Determination du coefficient de Schmid dans le cas particulier d'un monocristal sollicite en traction [Vig07].* ..... 36
**Fig. 2.9 –** *Evolution schematique de la limite d'elasticite en fonction de la temperature et de la vitesse de deformation, d'apres [Ber01].* ..... 37
**Fig. 2.10 –** *Diagramme force-distance* ..... 39
**Fig. 2.11 –** *Franchissement d'un obstacle par un segment de dislocation.* ..... 40
**Fig. 2.12 –** *Description schematique du glissement sur les parties vis des dislocations pour les materiaux cubiques centres, d'apres [Rau94].* ..... 44
**Fig. 2.13 –** *Evolution du centre et de la taille de la surface de plasticite en fonction de l'ecrouissage cinematique et de l'ecrouissage isotrope.* ..... 47
**Fig. 2.14 –** *Domaines de comportement de la loi elasto-viscoplastique.* ..... 50
**Fig. 2.15 –** *Contribution de la contrainte visqueuse a l'ecoulement en fonction de la vitesse de deformation equivalente (A=18MPa, B=0,3s$^{-1}$).* ..... 51
**Fig. 2.16 –** *Surface d'ecoulement visqueux - Description de la contrainte d'ecoulement a l'aide des variables internes et de la contrainte visqueuse.* ..... 52
**Fig. 2.17 –** *Influence de l'energie d'activation et du volume d'activation sur le comportement du modele.* ..... 54
**Fig. 2.18 –** *Micrographie (zoom x200) de l'Acier DC06.* ..... 56
**Fig. 2.19 –** *Comportement mecanique anisotrope des aciers etudies.* ..... 57
**Fig. 2.20 –** *Courbes contraintes-deformations.* ..... 60
**Fig. 2.21 –** *Evolution de la contrainte d'ecoulement a differents niveaux de deformation en fonction de la vitesse de deformation. Comparaison entre l'experience (symboles) et le modele (en trait plein) pour des essais monotones de traction.* ..... 61
**Fig. 2.22 –** *Variation de la contrainte d'ecoulement a 5% de deformation en fonction de la temperature lors d'un essai de traction quasi-statique (a 0,0033s-1), d'apres [Uen04].* ..... 62
**Fig. 2.23 –** *Evolution de la contrainte d'ecoulement en fonction de la vitesse de deformation a differents niveaux de deformation pour trois temperatures (-40°C, 20°C et 100°C). Les points experimentaux sont representes par les symboles, les simulations par les traits continus.* ..... 63
**Fig. 2.24 –** *Mise en evidence du decalage du seuil de sensibilite avec la temperature.* ..... 63
**Fig. 2.25 –** *Comparaison entre l'experience (en pointilles) et le modele (en trait plein) des* ..... 65
**Fig. 2.26 –** *Trajet complexe de chargement :* ..... 66
**Fig. 2.27 –** *Trajet complexe de chargement :* ..... 67
**Fig. 2.28 –** *Comparaison entre le modele propose et le modele de Uenishi et Teodosiu sur la base de resultats experimentaux effectues sur un acier IF [Uen04].* ..... 73
**Fig. 2.29 –** *Essais de traction uniaxiale a 1000s$^{-1}$ et a 0,001s$^{-1}$ sur un acier IF [Uen04]. Comparaison entre le modele propose (a) et le modele RK [Rus07] (b).* ..... 74
**Fig. 2.30 –** *Situation du modele (en grise) parmi les gammes de vitesses de deformation imposees dans les principaux procedes de mise en forme (d'apres [Mon96]) et crash tests.* ..... 75

## Chapitre III : Modélisation des hétérogénéités de comportement de phases élasto-viscoplastiques dans les aciers multiphasés


**Fig. 3.1 –** *Tailles caracteristiques et conditions d'homogeneite macroscopique pour l'existence d'un volume elementaire representatif (VER).* ..... 87

**Fig. 3.2 –** *Schema de resolution d'un probleme de micromecanique formule en deformations ou en contraintes*... 90

**Fig. 3.3 –** *Principe du schema autocoherent : description du polycristal en N problemes d'Eshelby.* ..... 91

**Fig. 3.4 –** *Differentes methodes de linearisation du comportement viscoplastique local.* ..... 99

**Fig. 3.5 –** *Confrontation de differentes estimations autocoherentes du comportement viscoplastique.* ..... 100

**Fig. 3.6 –** *Comparaison schematique entre (a) approches de type hereditaire et (b) approches a variables internes.* ..... 105

**Fig. 3.7 –** *Application du schema autocoherent a un site dans le cas d'un modele multiphase a l'echelle de la phase : cas d'un acier biphase.* ..... 115

**Fig. 3.8 –** *Profil et ordre de grandeur des heterogeneites dans un acier multiphase.* ..... 116

**Fig. 3.9 –** *Schema de resolution simplifie pour le modele a champs translates [Ber02].* ..... 118

**Fig. 3.10 –** *Evolution schematique avec la contrainte des tenseurs de complaisances viscoelastiques lineaires* $M^{VL}$ *et viscoplastiques* $M^{VP}$ *[Ber02].* ..... 119

**Fig. 3.11 –** *Schema de resolution simplifie pour le modele en Beta.* ..... 119

**Fig. 3.12 –** *Comparaison du comportement macroscopique d'un acier biphase obtenu a partir de differents modeles de transition d'echelles.* ..... 121

**Fig. 3.13 –** *Variation du module viscoplastique secant* $m^{vp}_{1212}$ *de la phase 1 en fonction de la contrainte* $\sigma_{12}$ *.* .. 123


## Chapitre IV : Prise en compte de longueurs internes dans les approches à champs moyens


**Fig. 4.1 –** *Limitations des approches micromecaniques classiques dans la prise en compte de longueurs internes microstructurales.* ..... 133

**Fig. 4.2 –** *Modelisation de l'effet de la taille de grain sur la contrainte d'ecoulement pour des polycristaux de cuivre [Sin06].* ..... 135

**Fig. 4.3 –** *Representation geometrique de la structure du polycristal de ferrite en un composite a deux phases.* . 138

**Fig. 4.4 –** *Evolution des fractions volumiques* $f^{(1)}$ *(cœur du grain) et* $f^{(2)}$ *(region proche du joint de grain) en fonction du diametre D du grain (de 1µM a 120 µM) pour une epaisseur de couche donnee* $\lambda$ *=0,15 µM.* ..... 139

**Fig. 4.5 –** *Passage de la representation physique du polycristal au modele autocoherent a 2 phases.* ..... 142

**Fig. 4.6 –** *Courbes contraintes/deformations simulees (traits plein) et experimentales (symboles) pour 4 tailles moyennes de grain : D=5,5 µM, D=8,5µM, D=15µM et D=120 µM* ..... 144

**Fig. 4.7 –** *Diagramme de Hall-Petch : les contraintes d'ecoulement experimentales (symboles) et simulees (traits plein) sont representees a differents niveaux de deformation : 2% (carres), 5% (ronds) et 10% (triangles).* ..... 145

**Fig. 4.8 –** *Contraintes locales (triangles et carres) des phases pour deux tailles de grain : D=120µM (traits plein) et D=5,5 µM (traits en pointilles). La reponse macroscopique est egalement representee (traits epais).* ..... 146

**Fig. 4.9 –** *Evolution des densites de dislocations SSD et GND au sein des deux phases (couche et cœur du grain) pour deux tailles differentes de grain : D=120µM (symboles en noir) et D=5,5 µM (symboles en blanc).* ..... 147

**Fig. 4.10 –** *Comparaison simulation/experience de la contrainte cinematique en fonction de la taille de grain lors d'essais de cisaillement Bauschinger. Les essais simules (carres) sont compares aux donnees experimentales obtenues sur des aciers IF (triangles).* ..... 148

**Fig. 4.11 –** *Representation schematique de l'introduction de longueurs internes microstructurales dans l'approche micromecanique non-locale proposee.* ..... 150

**Fig. 4.12 –** *Representation schematique des zones d'accommodation dans le materiau polycristallin (regions autour des joints de grain et regions des particules dures).* ..... 151

**Fig. 4.13 –** *Passage de la representation physique du materiau au schema autocoherent a 4 phases.* ..... 152

**Fig. 4.14 –** *Introduction de quatre longueurs internes dans la representation geometrique du grain et des particules.* ..... 152

**Fig. 4.15 –** *Effet de taille de particules elastiques non-cisaillables sur un materiau polycristallin pour deux tailles de grain (D=5µM et D=120µM).* ..... 155

**Fig. 4.16 –** *Contribution sur la contrainte macroscopique des effets de taille de microstructure pour un materiau polycristallin contenant 2% de particules (*$D_P$*=1µM) pour deux tailles de grain differentes.* ..... 155

**Fig. 4.17 –** *Effet de taille de phase : quelles longueurs internes microstructurales choisir?* ..... 157

## Chapitre V : Intégration d'outils d'homogénéisation dans le code d'éléments finis Abaqus pour la simulation en mise en forme des aciers multiphasés


**Fig. 5.1 –** *Courbe conventionnelle : cas d'un acier doux.* ..... 168
**Fig. 5.2 –** *Influence de la base de mesure sur l'allongement a rupture pour l'acier DC04 [Col10]* ..... 169
**Fig. 5.3 –** *Courbe rationnelle (stoppee a Ag) et conventionnelle d'un essai de traction sur un acier DD14. Realise a une vitesse de deformation de* $10\text{-}2s^{-1}$ ..... 171
**Fig. 5.4 –** *Extrapolation de la courbe rationnelle d'un essai de traction* ..... 171
**Fig. 5.5 –** *Schema du quart d'eprouvette modelise.* ..... 173
**Fig. 5.6 –** *Generation des fichiers input correspondant a l'etude de l'influence de l'ecrouissage sur le resultat de la simulation de l'essai de traction.* ..... 175
**Fig. 5.7 –** *Simulation numerique d'un essai de traction uniaxiale :* ..... 175
**Fig. 5.8 –** *Simulation numerique d'un essai de traction uniaxiale :* ..... 177
**Fig. 5.9 –** *Heterogeneites des vitesses de deformations et des deformations dans la simulation d'un l'essai de traction.* ..... 178
**Fig. 5.10 –** *Agrandissement de la partie centrale du quart d'eprouvette modelise : Effet de l'augmentation locale de la vitesse sur les contraintes et les deformations locale.* ..... 179
**Fig. 5.11 –** *Contraintes de compression et de traction dans un pli.* ..... 180
**Fig. 5.12 –** *Geometrie du quart d'eprouvette et conditions aux limites.* ..... 181
**Fig. 5.13 –** *Comportement du modele a ecrouissage isotrope et du modele a ecrouissage combine en traction-compression uniaxiale.* ..... 182
**Fig. 5.14 –** *Effet de l'ecrouissage cinematique sur la simulation d'un essai de pliage en V sur une eprouvette ayant subi prealablement un essai de traction uniaxiale : phase d'augmentation de l'effort.* ..... 183
**Fig. 5.15 –** *Contraintes dans le pli (configuration non deformee) : identification des differents elements dans l'epaisseur (plan xOy, surface libre).* ..... 184
**Fig. 5.16 –** *Contraintes et deformations dans l'epaisseur : confrontation des resultats entre ecrouissage combine et isotrope.* ..... 184
**Fig. 5.17 –** *Effet de l'ecrouissage cinematique sur la simulation d'un essai de pliage en V sur une eprouvette ayant subi prealablement un essai de traction uniaxiale : courbe complete.* ..... 185
**Fig. 5.18 –** *Superposition de la deformee des deux simulations a 25mm et 40mm de course du poinçon.* ..... 186
**Fig. 5.19 –** *Comportement du modele biphase (VUMAT) pour deux transitions d'echelles differentes et du modele monophase (tabule) a ecrouissage isotrope en traction-compression uniaxiale pour une vitesse de deformation de* $10^{-2}s^{-1}$. ..... 188
**Fig. 5.20 –** *Effet de l'ecrouissage cinematique sur la simulation d'un essai de pliage en V sur une eprouvette ayant subie prealablement un essai de traction uniaxiale.* ..... 188
**Fig. 5.21 –** *Contraintes et deformations dans l'epaisseur : confrontation des resultats entre le modele biphase (VUMAT) pour deux transitions d'echelles (KW : modele de Kröner-Weng, TL : modele de Taylor-Lin) et le modele monophase (faisceau de courbes tabulees).* ..... 189
**Fig. 5.22 –** *Superposition de la deformee des deux simulations* ..... 190


## Annexes


**Fig. A1.1 –** *Probleme de l'inclusion homogene d'Eshelby : coupes, transformations et collages d'une region ellipsoïdale soumise a une deformation libre dans une matrice elastique non contrainte.* ..... 207

**Fig. A2.1 –** *Exemple de systeme de pliage en V et geometrie reelle de l'eprouvette.* ..... 211
**Fig. A2.2 –** *Geometries des cylindres support et du poinçon de rayon 0,1mm [Tif09].* ..... 211

# TABLE DES TABLEAUX

## Chapitre II : Lois de comportement élasto-viscoplastique


**TAB. 2.1 –** *RECAPITULATIF DES EQUATIONS UTILISEES* ..... 49
**TAB. 2.2 –** *PARAMETRES ET CONSTANTES PHYSIQUES* ..... 53
**TAB. 2.3 –** *COMPOSITIONS CHIMIQUES ($10^{-3}$ % POIDS) DES DEUX ACIERS 100% FERRITIQUES UTILISES POUR LA CONFRONTATION DU MODELE AVEC LES RESULTATS EXPERIMENTAUX.* ..... 56
**TAB. 2.4 –** *PARAMETRES DU MODELE A IDENTIFIER.* ..... 57
**TAB. 2.5 –** *PARAMETRES IDENTIFIES POUR LES ACIERS 100% FERRITIQUES.* ..... 59
**TAB. 2.6 –** *CONDITIONS EXPERIMENTALES ET GEOMETRIE DES EPROUVETTES UTILISEES POUR LES ESSAIS DE TRACTION SUR L'ACIER DC05.* ..... 59
**TAB. 2.7 –** *CONDITIONS EXPERIMENTALES ET GEOMETRIE DES EPROUVETTES UTILISEES POUR LES ESSAIS DE TRACTION, CISAILLEMENT SIMPLE, CISAILLEMENT BAUSCHINGER ET DE TRACTION-CISAILLEMENT EFFECTUES SUR L'ACIER DC06. LES DONNEES NON DISPONIBLES NE SONT PAS RENSEIGNEES.* ..... 64
**TAB. 2.8 –** *CONSTANTES UTILISEES ET PARAMETRES MATERIAU IDENTIFIES POUR TROIS MODELES VISCOPLASTIQUES DIFFERENTS DESTINES A SIMULER LE COMPORTEMENT D'UN ACIER IF.* ..... 72


## Chapitre III : Modélisation des hétérogénéités de comportement de phases élasto-viscoplastiques dans les aciers multiphasés


**TAB. 3.1 –** *PARAMETRES DES LOIS DE COMPORTEMENT LOCALES UTILISES DANS LES SIMULATIONS DU COMPORTEMENT D'UN ACIER BIPHASE.* ..... 120
**TAB. 3.2 –** *SIMULATION DU COMPORTEMENT D'UN BIPHASE EN TRACTION UNIAXIALE : COMPARAISON DES TEMPS DE CALCULS ENTRE LES DIFFERENTS MODELES DE TRANSITION D'ECHELLES.* ..... 120
**TAB. 3.3 –** *PARAMETRES DES LOIS DE COMPORTEMENT LOCALES UTILISES DANS LA SIMULATION D'UN ESSAI DE CISAILLEMENT SUR UN ACIER BIPHASE.* ..... 122


## Chapitre IV : Prise en compte de longueurs internes dans les approches à champs moyens


**TAB. 4.1 –** *DIAMETRE MOYEN DES GRAINS, COMPOSITION CHIMIQUE (EN $10^{-3}$% DE POIDS) ET LIMITE D'ELASTICITE INITIALE IDENTIFIEE POUR 4 ACIERS IF (ARCELORMITTAL).* ..... 143
**TAB. 4.2 –** *PARAMETRES MATERIAU ET VALEURS IDENTIFIEES DE K, F ET $\lambda$ POUR LES ACIERS IF.* ..... 143
**TAB. 4.3 –** *TABLEAU RECAPITULATIF DU MODELE A 4 PHASES VISANT A PRENDRE EN COMPTE LES EFFETS DE TAILLE DE GRAIN ET DE TAILLE DE PARTICULE.* ..... 153


## Chapitre V : Intégration d'outils d'homogénéisation dans le code d'éléments finis Abaqus pour la simulation en mise en forme des aciers multiphasés


**TAB. 5.1 –** *COEFFICIENTS DES LOIS DE COMPORTEMENT UTILISEES* ..... 172
**TAB. 5.2 –** *PARAMETRES DES LOIS DE COMPORTEMENT UTILISEES POUR L'ETUDE DE L'EFFET DE L'ECROUISSAGE DANS LA SIMULATION DE L'ESSAI DE TRACTION.* ..... 174
**TAB. 5.3 –** *PARAMETRES DES LOIS DE COMPORTEMENT UTILISEES POUR L'ETUDE DE L'EFFET DE L'ECROUISSAGE CINEMATIQUE DANS LA SIMULATION DE TRACTION + PLIAGE EN V.* ..... 183
**TAB. 5.4 –** *PARAMETRES DES LOIS DE COMPORTEMENT ISOTROPES LOCALES UTILISEES DANS LE MODELE BIPHASE (VUMAT).* ..... 187

# MODELISATION DU COMPORTEMENT ELASTO-VISCOPLASTIQUE DES ACIERS MULTIPHASES POUR LA SIMULATION DE LEUR MISE EN FORME

**RESUME :** En raison du durcissement des normes d'émissions de $CO_2$ par l'Union Européenne, les constructeurs automobiles sont contraints d'alléger leurs véhicules, particulièrement en diminuant l'épaisseur des pièces. Par conséquent, les fournisseurs d'acier doivent proposer de nouveaux aciers capables, à épaisseur plus faible, de garantir une sécurité des passagers identique voire meilleure. Augmenter la résistance mécanique ne suffit pas puisque les propriétés de mise en forme se retrouvent diminuées. Un compromis peut être trouvé en optimisant la microstructure en combinant par exemple les bonnes propriétés de différentes phases comme dans les nouvelles générations d'aciers multiphasés. L'optimisation de la microstructure peut demander un nombre d'essais expérimentaux conséquent. La simulation numérique représente un outil efficace permettant de diminuer le temps et les coûts de conception en diminuant considérablement les campagnes expérimentales. Ce travail de thèse vise à développer un outil numérique capable de modéliser le comportement élasto-viscoplastique des aciers multiphasés lors de simulations numériques 3D de mise forme dans le logiciel de calcul par éléments finis Abaqus. Une loi phénoménologique à base physique a été formulée de manière incrémentale dans un cadre tensoriel afin de modéliser le comportement élasto-viscoplastique des phases constitutives. Cette loi originale a été confrontée à la fois à des essais expérimentaux et à d'autres modèles issus de la littérature. Le comportement macroscopique de l'acier multiphasé est obtenu en utilisant un schéma autocohérent écrit spécifiquement pour des matériaux hétérogènes élasto-viscoplastiques. Par ailleurs, une nouvelle approche micromécanique visant à introduire des effets de longueurs internes microstructurales (taille de grain, taille de particule, etc.) est proposée et validée à l'aide de données expérimentales. Enfin, l'outil numérique développé dans ce travail de thèse est appliqué à la simulation d'essais de traction uniaxiale et de pliage en V afin d'évaluer la pertinence des phénomènes physiques (tels que la striction, les effets de vitesse de déformation sur la localisation et l'effet Bauschinger) dus au mélange de phases élasto-viscoplastiques.

**Mots clés :** aciers multiphasés, élasto-viscoplasticité, schéma autocohérent, approches à champs moyens, hétérogénéités, longueurs internes, effet de taille de grain, effet de taille de particule, simulation numérique, mise en forme.

# ELASTIC-VISCOPLASTIC BEHAVIOR MODELING IN MULTIPHASE STEELS FOR METAL FORMING SIMULATION

**ABSTRACT :** Due to the restriction imposed by EU on the $CO_2$ emission performance standards for the automobile sector, the automobile manufacturers need to produce lighter vehicles, mostly by reducing the thickness of the automobile parts. As a consequence, the steel companies have to propose new steels capable to ensure similar or higher passenger safety. Increasing the mechanical properties is not a viable solution as that can decrease the metal formability. A balance between the both can be obtained by microstructure optimization. This can be achieved through a combination of good properties of different phases, as for example in new generation multiphase steels. The microstructure optimization can require a large number of experimental trials. Numerical simulation is an efficient tool to diminish the time and the costs of product conception by reducing the number of experimental campaigns. This present research aims at the development of a numerical solution to model the elastic-viscoplastic behavior of multiphase steels grades during 3D finite element simulations of metal forming processes with Abaqus software. A phenomenological physics-based constitutive model is proposed for the elastic-viscoplastic behavior of the constitutive phases. This original tensorial constitutive law (incremental formulation) is verified by the experimental data and other constitutive laws proposed in the literature. The macroscopic behavior of the multiphase steel is obtained by using a self-consistent approach written specifically for heterogeneous elastic-viscoplastic materials. In addition, a new micromechanical approach is considered to capture microstructure size effects (grain size, particle size, etc.) and is validated on previously published experimental results. The numerical tool developed in the current research is applied on the tensile and V-bending simulations to evaluate its ability to predict accurately physical phenomena (such as striction, strain-rate effects on localization and Bauschinger effect) in a composite elastic-viscoplastic structure.

**Keywords** : Multiphase steels, elastic-viscoplasticity, self-consistent model, mean field modeling, heterogeneities, internal lengths, grain size effect, particle size effect, numerical simulation, metal forming.



ARTS ET MÉTIERS ParisTech

ParisTech
INSTITUT DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES
PARIS INSTITUTE OF TECHNOLOGY