

# Déformations d'algèbres de Hopf combinatoires et inversion de Lagrange non commutative

Jean-Paul Bultel

► **To cite this version:**

Jean-Paul Bultel. Déformations d'algèbres de Hopf combinatoires et inversion de Lagrange non commutative. Autre [cs.OH]. Université Paris-Est, 2011. Français. NNT: 2011PEST1006 . pastel-00674122

**HAL Id: pastel-00674122**

**<https://pastel.archives-ouvertes.fr/pastel-00674122>**

Submitted on 25 Feb 2012

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE DE DOCTORAT

pour l'obtention du grade de  
Docteur de l'Université Paris-Est  
Spécialité Informatique  
*au titre de l'École Doctorale I.C.M.S*

Présentée et soutenue publiquement par

Jean-Paul Bultel

le 25 novembre 2011

---

# Déformations d'algèbres de Hopf combinatoires et inversion de Lagrange non commutative

---

Sous la direction de :

Jean-Yves Thibon

Devant le jury composé par:

*Rapporteurs :* Loïc Foissy, maître de conférence (Reims)  
Florent Hivert, professeur des universités (Paris Sud)

*Examineurs :* Jean-Christophe Aval, chargé de recherche CNRS (Bordeaux)  
Frédéric Fauvet, maître de conférence (Strasbourg)  
Bernard Leclerc, professeur des universités (Caen)  
Jean-Christophe Novelli, professeur des universités (Marne-La-Vallée)

*Directeur de thèse :* Jean-Yves Thibon, professeur des universités (Marne-La-Vallée)



# Remerciements

Il me paraît très naturel de remercier en premier lieu mon directeur de thèse Jean-Yves Thibon de m'avoir proposé ce sujet. Je suis très impressionné par l'étendue de ses connaissances en mathématiques, et je le remercie également pour l'aide et le soutien qu'il m'a apporté pendant toute la durée de cette thèse. Il s'est toujours inquiété de la progression de mes travaux, en répondant volontiers à toutes mes questions et en faisant preuve d'une grande patience à mon égard, et ce malgré l'ampleur des lacunes que j'avais au début. Mes remerciements vont ensuite à Florent Hivert et Loïc Foissy qui ont accepté d'écrire un rapport sur cette thèse, et ont donc pris le temps de lire en détail ce mémoire. Je remercie également Loïc Foissy pour ses travaux qui ont servi de base à une grande partie de cette thèse.

Je remercie aussi, bien sûr, les autres membres du jury : Jean-Christophe Novelli, également membre de l'équipe combinatoire algébrique de Marne-La-Vallée et auteur de travaux dont je me suis servi ; Bernard Leclerc, qui m'a fait découvrir la combinatoire au cours du stage de master que j'ai effectué à Caen sous sa direction ; Jean-Christophe Aval, qui m'a accueilli cette année dans l'équipe de combinatoire du LABRI à Bordeaux ; et enfin Frédéric Fauvet, qui m'a invité à présenter un exposé à Strasbourg cet été.

J'adresse également mes remerciements à tous ceux qui ont été membres de l'équipe de combinatoire algébrique de Marne-La-Vallée pendant la période où j'en faisais partie, ainsi qu'aux visiteurs réguliers. Ainsi, je remercie Philippe Biane, Alain Lascoux, Jean-Gabriel Lucque, Yvan Leborgne, Nicolas Thiéry, Gérard Duchamp, François Bergeron, ainsi que ceux que j'ai déjà cités, pour l'intérêt qu'ils ont porté à certains de mes travaux et leurs remarques constructives pendant les séminaires hebdomadaires de l'équipe.

Mes remerciements vont également aux doctorants de l'équipe, ainsi qu'aux anciens doctorants et autres anciens collègues de bureau, qui ont contribué à une ambiance de travail agréable. Ainsi, je remercie Valentin Féray, Adrien Boussicault, Pierre-Loïc Méliot, Samuele Girardo, Viviane Pons, Hayat Cheballah, Marc Sage, Rémi Maurice et Yoann Dabrowski. Je remercie particulièrement Samuele Girardo déjà cité pour les nombreuses discussions constructives échangées avec lui, entre autres au sujet des algèbres de Hopf, des fonctions symétriques et de leurs généralisations.

Enfin, je remercie Adrien Brochier de m'avoir hébergé à Strasbourg pendant le séminaire dont j'ai parlé plus haut. Je le remercie également pour les discussions échangées avec lui qui

ont beaucoup contribué à améliorer ma culture en mathématiques d'une manière générale. Je remercie aussi mes parents, mon frère, mes anciens colocataires, ceux que j'aurais oubliés, et tous les amis qui m'ont entouré et avec qui j'ai passé de bons moments au cours de ces trois dernières années, qui resteront pour moi associées à un bon souvenir.

# Résumé

Cette thèse est consacrée à l'étude de familles à un paramètre de coproduits sur les fonctions symétriques et leurs analogues non commutatifs. On montre en introduisant une base appropriée qu'une famille à un paramètre d'algèbres de Hopf introduite par Foissy interpole entre l'algèbre de Faà di Bruno et l'algèbre de Farahat-Higman. Les constantes de structure dans cette base sont des déformations des constantes de structures de l'algèbre de Farahat-Higman dans la base des projections des classes de conjugaison. On obtient pour ces constantes de structure déformées un analogue des formules de Macdonald.

Foissy a également introduit un analogue non commutatif de cette famille d'algèbres de Hopf, qui interpole entre l'algèbre de Hopf des fonctions symétriques non commutatives et l'algèbre de Faà di Bruno non commutative. Après avoir donné une nouvelle interprétation combinatoire de la formule de Brouder-Frabetti-Krattenthaler pour l'antipode de l'algèbre de Faà di Bruno non commutative, qui est une forme de la formule d'inversion de Lagrange non commutative, on donne une déformation à un paramètre de cette formule. Plus précisément, on obtient une formule explicite pour l'antipode de la déformation de Foissy dans sa version non commutative.

On donne aussi d'autres propriétés combinatoires de l'algèbre de Faà di Bruno non commutative et d'autres résultats permettant d'étudier les deux familles d'algèbre de Hopf de Foissy. Ainsi, on généralise par exemple d'autres formes de la formule d'inversion de Lagrange non commutative en donnant d'autres formules qui calculent l'antipode de la deuxième déformation.



# Abstract

This thesis is devoted to study one-parameter families of coproducts on symmetric functions and their noncommutative analogues. We show, by introducing an appropriate basis, that a one-parameter family of Hopf algebras introduced by Foissy interpolates between the Faà di Bruno algebra and the Farahat-Higman algebra. The structure constants in this basis are deformations of the structure constants of the Farahat-Higman algebra in the basis of projections of conjugacy classes. For these deformed structure constants, we obtain an analogue of the Macdonald formulas.

Foissy has also introduced a noncommutative analogue of this family of Hopf algebras. It interpolates between the Hopf algebra of noncommutative symmetric functions and the noncommutative Faà di Bruno algebra. First, we give a new combinatorial interpretation of the Brouder-Frabetti-Krattenthaler formula for the antipode of the noncommutative Faà di Bruno algebra, that is a form of the noncommutative Lagrange inversion formula. Then, we give a one-parameter deformation of this formula. Namely, it is an explicit formula for the antipode of the noncommutative family.

We also give other combinatorial properties of the noncommutative Faà di Bruno algebra, and other results about the families of Hopf algebras of Foissy. In this way, we generalize other forms of the noncommutative Lagrange inversion formula. Namely, we give other formulas for the antipode of the noncommutative family.





# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>13</b>
1.1	Les centres des algèbres de $\mathfrak{S}_n$	14
1.2	Une déformation de $R$	15
1.3	Propriétés combinatoires de $\mathcal{H}^{NC}$	16
1.4	Généralisation à $\mathcal{H}_\gamma^{NC}$	16
<b>2</b>	<b>Rappels d'algèbre et de combinatoire</b>	<b>19</b>
2.1	Rappels sur certaines structures algébriques	19
2.1.1	Représentations linéaires des groupes	19
2.1.2	Algèbres de Lie et algèbres pré-Lie	20
2.1.3	Algèbres de Hopf	21
2.1.4	Algèbre enveloppante universelle d'une algèbre de Lie	23
2.2	L'algèbre $\Lambda$ des fonctions symétriques	24
2.2.1	Définition et premiers exemples	24
2.2.2	Partitions d'entiers et bases linéaires de $\Lambda$	25
2.2.3	Structure d'algèbre de Hopf de $\Lambda$	26
2.2.4	Fonctions de Schur	28
2.3	Fonctions symétriques non commutatives	29
2.3.1	Définition et structure d'algèbre de Hopf de <b>Sym</b>	29
2.3.2	Compositions d'entiers et bases linéaires de <b>Sym</b> et de son dual	30
<b>3</b>	<b>Les centres des algèbres des <math>\mathfrak{S}_n</math></b>	<b>33</b>
3.1	Elements remarquables de $Z_n$	33
3.1.1	Classes de conjugaison	33
3.1.2	Fonctions symétriques des éléments de Jucys-Murphy	34
3.2	Algèbre de Virasoro et opérateurs Vertex	35
3.2.1	Définition de l'algèbre de Virasoro	35
3.2.2	Espace de Fock bosonique	36
3.2.3	Espace de Fock fermionique	36
3.2.4	Une représentation de l'algèbre de Virasoro	38
3.2.5	Opérateurs vertex	40

3.3	Développement des $f(\Xi_n)$ sur les classes . . . . .	41
3.3.1	Le cas des fonctions complètes . . . . .	42
3.3.2	Le cas des sommes de puissances . . . . .	43
3.3.3	Le cas des produits de sommes de puissances . . . . .	44
3.3.4	Autres cas connus . . . . .	45
3.4	L'algèbre de Farahat-Higman . . . . .	45
3.4.1	Définition de l'algèbre de Farahat-Higman . . . . .	45
3.4.2	La base $(h_\mu^*)$ de $\Lambda$ . . . . .	46
3.4.3	Formules de Macdonald et isomorphisme entre $R$ et $\Lambda$ . . . . .	47
3.5	Projections des $f(\Xi_n)$ dans $R$ . . . . .	48
3.5.1	Un résultat de Murray . . . . .	48
3.5.2	Une nouvelle démonstration du résultat de Murray . . . . .	49
3.5.3	Autres résultats connus . . . . .	50
3.5.4	Un exemple d'utilisation du résultat de Murray . . . . .	51
3.5.5	Nombre de factorisations d'un cycle en un produit de cycles d'un type donné . . . . .	52
3.5.6	Généralisation . . . . .	53
<b>4</b>	<b>Une déformation de <math>R</math></b> . . . . .	<b>57</b>
4.1	L'algèbre de Faá di Bruno et sa déformation . . . . .	57
4.1.1	L'algèbre de Faá di Bruno . . . . .	57
4.1.2	Une famille à un paramètre d'algèbres de Hopf . . . . .	58
4.1.3	Dual gradué de l'algèbre de Faá di Bruno déformée . . . . .	60
4.1.4	Structure multiplicative de $\mathcal{H}'_\gamma$ . . . . .	60
4.1.5	Action de $q_n^\perp$ sur les $h_\mu$ . . . . .	61
4.1.6	Action de $q_n^\perp$ sur les $p_\mu$ . . . . .	62
4.2	Interpolation entre $\mathcal{H}'$ et $R$ . . . . .	64
4.2.1	Réurrences sur les constantes de structure de $\mathcal{H}'_\gamma$ . . . . .	64
4.2.2	Structure multiplicative de l'algèbre de Farahat-Higman déformée . . . . .	65
4.3	Une déformation de l'algèbre de Witt . . . . .	67
4.3.1	Structure d'algèbre de Lie correspondant à $\mathcal{H}'_\gamma$ . . . . .	67
4.3.2	Un exemple de produit pré-Lie . . . . .	68
<b>5</b>	<b>Propriétés combinatoires de <math>\mathcal{H}^{NC}</math></b> . . . . .	<b>69</b>
5.1	L'algèbre de Hopf $\mathcal{H}^{NC}$ . . . . .	69
5.1.1	La formule d'inversion de Lagrange non commutative . . . . .	69
5.1.2	Interprétation combinatoire en termes d'arbres . . . . .	71
5.1.3	Fonctions de parking croissantes . . . . .	72
5.1.4	Une involution . . . . .	73
5.2	Une formule de récurrence pour les $\beta_I$ . . . . .	75
5.2.1	Une formule de récurrence pour $S_n^*$ . . . . .	75
5.2.2	Un lemme préliminaire . . . . .	76
5.2.3	Découpages d'une composition . . . . .	77
5.2.4	Une première formule de récurrence . . . . .	80
5.2.5	Un exemple . . . . .	81

5.2.6	Démonstration du théorème . . . . .	82
5.3	Une formule de récurrence pour les $\delta_I$ . . . . .	84
5.3.1	Propriétés des $\delta_I$ . . . . .	84
5.3.2	Enoncé et démonstration de la formule de récurrence . . . . .	85
5.4	Interprétations combinatoires . . . . .	87
5.4.1	Interprétation combinatoire des $\beta_I$ . . . . .	87
5.4.2	Interprétation combinatoire des $\delta_I$ . . . . .	88
5.5	Interprétations algébriques . . . . .	89
5.6	Liens entre les $\alpha_I$ et les $\delta_I$ . . . . .	91
5.7	Développement de $S^{I^*}$ sur la base des rubans . . . . .	93
5.7.1	Une formule explicite pour $S^{I^*}$ . . . . .	93
5.7.2	Une interprétation combinatoire . . . . .	95
<b>6</b>	<b>Généralisation à <math>\mathcal{H}_\gamma^{NC}</math></b> . . . . .	<b>97</b>
6.1	L'algèbre $\mathcal{H}_\gamma^{NC}$ . . . . .	97
6.2	Calcul de l'antipode de $\mathcal{H}_\gamma^{NC}$ . . . . .	99
6.2.1	Un lemme préliminaire . . . . .	99
6.2.2	Démonstration de $\mathcal{B}_n \subseteq \mathcal{A}_n$ . . . . .	100
6.2.3	Démonstration de $\mathcal{A}_n \subseteq \mathcal{B}_n$ . . . . .	101
6.3	Un morphisme d'algèbres . . . . .	103
6.3.1	Définition du morphisme $\phi_\gamma$ et liens avec $\mathcal{H}_\gamma^{NC}$ . . . . .	103
6.3.2	Action de $\phi_\gamma$ sur les $\Lambda^I$ . . . . .	105
6.3.3	Action de $\phi_\gamma$ sur les $R_I$ . . . . .	106
6.4	Une autre formule pour l'antipode de $\mathcal{H}_\gamma^{NC}$ . . . . .	107
6.5	Détermination du coefficient $\tilde{\beta}_I$ . . . . .	107
6.5.1	Détermination de $\tilde{\beta}_I$ par récurrence . . . . .	108
6.5.2	Une formule explicite pour $\tilde{\beta}_{1^n}$ . . . . .	109
6.5.3	Une formule explicite pour $\tilde{\beta}_n$ . . . . .	111
6.5.4	Expression de $\tilde{\beta}_I$ en fonction des $\beta_J$ . . . . .	112
6.6	Tables . . . . .	114
6.7	Conclusion et perspectives . . . . .	115



# Chapitre 1

## Introduction

L'algèbre des fonctions symétriques possède de nombreuses interprétations, qui lui confèrent une structure très riche. Par exemple, comme l'a établi Frobenius, les tables de caractères des groupes symétriques sont les matrices de changement de base entre deux bases classiques (les produits de sommes de puissances, et les fonctions dites *de Schur*, étudiées par Jacobi dès 1850). Cet énoncé n'utilise que la structure linéaire, mais le produit usuel des polynômes possède aussi une interprétation dans ce cadre. Il correspond à l'induction à partir d'un produit de groupes symétriques. Et l'opération duale, la restriction, est décrite par un *coproduit*, qui revient à dédoubler l'ensemble des variables (remplacer  $X = \{x_i\}$  par  $X \sqcup Y = \{x_i, y_j\}$ ).

D'autres interprétations font apparaître d'autres produits et coproduits. Pour rester dans le cadre du groupe symétrique, le produit usuel des caractères se traduit par le *produit intérieur* des fonctions symétriques, lui-même dual d'une opération simple consistant à remplacer les variables  $x_i$  par des produits  $x_i y_j$ . On peut aussi encoder le produit des classes de conjugaison dans l'algèbre du groupe. Ceci fait apparaître un troisième produit, lui aussi dual d'une opération intéressante, qui peut s'interpréter en termes d'intégrales matricielles.

Le calcul complet d'un produit des classes de conjugaison est une opération complexe, mais comme l'ont montré Farahat et Higman [7], il est possible d'en calculer certains termes (dits *dominants*) au moyen de la structure classique des fonctions symétriques, dans une base spéciale, explicitée par Macdonald [24, ex. 24 p 35, ex. 24 p 131], et déterminée par application de la formule d'inversion de Lagrange à la série génératrice des fonctions symétriques complètes.

Il se trouve que cette dernière opération peut aussi s'interpréter au moyen d'une autre structure classique sur l'algèbre des fonctions symétriques, appelée *algèbre de Faà di Bruno*. Elle consiste à voir les fonctions symétriques comme des fonctions polynomiales sur le groupe des séries formelles de la forme  $f(t) = t + O(t^2)$  pour l'opération de composition. Le coproduit associé consiste à évaluer une fonction sur une composition  $f \circ g$ , et la formule d'inversion de Lagrange décrit son antipode.

Il est donc tentant de regarder la base de Macdonald comme appartenant à l'algèbre de Faà di Bruno. Ou plus exactement, à son dual. C'est là qu'une difficulté apparaît, car ce dual n'est pas commutatif, alors que l'algèbre de Farahat-Higman l'est.

Pour tenter de clarifier cette situation, nous avons déformé l'algèbre de Farahat-Higman au moyen d'une déformation de l'algèbre de Faà di Bruno introduite par Foissy, et obtenu

des déformations à un paramètre des formules de Macdonald. Ceci nous a conduit à étudier la déformation analogue des fonctions symétriques non commutatives, ce qui nous a permis d'obtenir une généralisation de l'inversion de Lagrange non commutative, ainsi que de nouveaux résultats combinatoires sur le cas classique.

Voici maintenant une description plus détaillée des principaux résultats de ce travail.

## 1.1 Les centres des algèbres des groupes symétriques

Le centre  $Z_n$  de l'algèbre  $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$  du groupe symétrique est linéairement engendré par les classes de conjugaison  $C_\mu$ , qui sont paramétrées par les partitions  $\mu$  de  $n$ . Une partition d'un entier  $n$  est une suite décroissante au sens large  $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \mu_r \geq 0$  de somme  $\sum_i \mu_i = n$ . La classe  $C_\mu$  est la somme formelle des permutations ayant des cycles de longueurs  $\mu_1, \dots, \mu_r$ . Les constantes de structure  $\alpha_{\mu\nu}^\lambda$  de  $Z_n$ , définies par

$$C_\mu C_\nu = \sum_{\lambda \vdash n} \alpha_{\mu\nu}^\lambda C_\lambda, \quad (1-1)$$

sont en règle générale très difficiles à évaluer, et ont d'importantes applications à de nombreux problèmes d'énumération. Elles servent également à calculer certaines intégrales matricielles. Pour toute partition  $\mu = (\mu_1, \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_r > 0)$ , on note

$$\bar{\mu} = (\mu_1 - 1, \mu_2 - 1, \dots, \mu_r - 1) \quad (1-2)$$

le *type cyclique modifié* des permutations de type cyclique  $\mu$ . En notant  $c_\rho(n)$  la classe de conjugaison  $C_\mu$  de  $\mathfrak{S}_n$  telle que  $\bar{\mu} = \rho$ , on peut réécrire (1-1) sous la forme

$$c_\mu(n) c_\nu(n) = \sum_{\lambda} a_{\mu\nu}^\lambda(n) c_\lambda(n). \quad (1-3)$$

Farahat et Higman [7] ont montré que les coefficients  $a_{\mu\nu}^\lambda(n)$  sont des fonctions polynomiales en  $n$ , et qu'ils sont de plus indépendants de  $n$  lorsque  $|\lambda| = |\mu| + |\nu|$ .

On peut utiliser les  $a_{\mu\nu}^\lambda$  correspondant à ce dernier cas pour définir une algèbre  $R$  engendrée par les symboles formels  $c_\mu$  indexés par toutes les partitions, avec la règle de multiplication

$$c_\mu c_\nu = \sum_{|\lambda|=|\mu|+|\nu|} a_{\mu\nu}^\lambda c_\lambda. \quad (1-4)$$

Cette algèbre est appelée l'*algèbre de Farahat-Higman*. Farahat et Higman prouvent aussi que  $R$  est isomorphe à l'algèbre des fonctions symétriques  $\Lambda$ . La construction d'un isomorphisme explicite  $\phi : \Lambda \rightarrow R$  est plus récente, et on la doit à Macdonald [24, ex. 24 p 131]. Plus précisément, Macdonald a construit une base  $(g_\mu)$  de  $\Lambda$  telle que

$$g_\mu g_\nu = \sum_{|\lambda|=|\mu|+|\nu|} a_{\mu\nu}^\lambda g_\lambda, \quad (1-5)$$

et a obtenu une formule de récurrence pour calculer  $a_{\mu\nu}^\lambda$ .

Après un chapitre de rappel des principales notions d'algèbre et de combinatoire qui nous

seront utiles au long de cette thèse, nous nous intéressons dans le chapitre 3 aux *éléments de Jucys-Murphy*  $\xi_i \in \mathfrak{S}_n$ , définis pour  $i \leq n$  par la somme de transpositions

$$\xi_i = \sum_{j < i} (j, i). \quad (1-6)$$

Ces éléments commutent deux à deux, et l'espace engendré par leurs fonctions symétriques coïncide avec  $Z_n$ . On obtient en regardant leur développement sur les  $C_\mu$  des propriétés indépendantes de  $n$ . Nous présentons à ce propos quelques résultats connus qui permettent de faire des liens avec d'autres domaines, en s'attardant sur un résultat de Lascoux et Thibon [21] qui permet d'évaluer pour tout  $n$  les coefficients du développement des sommes de puissances des éléments de Jucys-Murphy sur les classes. Les coefficients qui apparaissent dans ce développement sont indépendants de  $n$  lorsqu'on regarde les classes sous une certaine forme normalisée, et ce résultat a de plus un lien avec l'algèbre de Virasoro et les opérateurs Vertex, notions que nous présentons aussi en détail.

Murray [26] a rendu explicites les images des projections des fonctions symétriques des éléments de Jucys-Murphy dans  $R$  par l'isomorphisme  $\phi$ . On donne une nouvelle démonstration de ce résultat qui fait intervenir le résultat de Lascoux et Thibon, puis on l'utilise pour redémontrer des résultats de Matsumoto-Novak [25] et Biane [1] et pour déterminer explicitement les images des projections des sommes de puissances des éléments de Jucys-Murphy dans  $R$  par une nouvelle formule close.

## 1.2 Une déformation à un paramètre de l'algèbre de Farahat-Higman

On sait que l'algèbre des fonctions symétriques a une structure naturelle d'algèbre de Hopf. Son coproduit standard  $\Delta_0$  vient du fait que l'on puisse l'interpréter comme étant l'algèbre des fonctions polynomiales sur le groupe multiplicatif  $G_0$  des séries formelles de terme constant 1. En fait, elle a une autre structure intéressante d'algèbre de Hopf, que l'on appelle l'*algèbre de Faá di Bruno*, et qui vient cette fois du fait que l'on puisse aussi l'interpréter comme étant l'algèbre des fonctions polynomiales sur le groupe  $G_1 = \{ta(t) \mid a \in G_0\}$  des difféomorphismes formels de la droite tangents à l'identité, où la loi du groupe est cette fois la composition. En fait, la base  $g_\mu$  de Macdonald est la base duale de l'image  $h_\mu^* = S_1(h)$  de la base des fonctions symétriques complètes homogènes  $h_\mu$  par l'antipode  $S_1$  de l'algèbre de Faá di Bruno  $\mathcal{H}$ .

Cette remarque nous amène à interpréter  $g_\mu$  comme un élément du dual gradué  $\mathcal{H}'$  de  $\mathcal{H}$ . Or, contrairement à  $R$ , ce dual n'est pas commutatif (il s'agit de l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}_1$  de  $G_1$ ). Cette interprétation n'a donc pas de sens *a priori*.

Pour clarifier la situation, on utilise dans le chapitre 4 une déformation à un paramètre  $\mathcal{H}_\gamma$  de  $\mathcal{H}$  (telle que  $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}$ ) découverte récemment par Foissy au cours de ses recherches sur les équations combinatoires de Dyson-Schwinger dans l'algèbre de Connes-Kreimer. Cette déformation interpole entre les fonctions symétriques et l'algèbre de Faá di Bruno. Foissy montre que toutes ces algèbres sont isomorphes à l'algèbre de Faá di Bruno, sauf dans le cas  $\gamma = 0$  qui correspond à l'algèbre de Hopf des fonctions symétriques. On montre que cet



isomorphisme est en fait une transformation d'alphabet, et on obtient pour les constantes de structure du dual gradué  $\mathcal{H}'_\gamma$  de  $\mathcal{H}_\gamma$  dans la base duale de  $S_1(h_\mu)$  une déformation à un paramètre des formules de Macdonald, qui se ramène aux formules de Macdonald classiques lorsque  $\gamma = 0$ . On détermine aussi la structure d'algèbre de Lie qui correspond au dual gradué de  $\mathcal{H}_\gamma$ , et on obtient ainsi une déformation de l'algèbre de Witt.

### 1.3 Propriétés combinatoires de l'algèbre de Faá di Bruno non commutative

Le calcul de l'antipode  $S_1$  du cas  $\gamma = 1$  est en fait équivalent à l'inversion de Lagrange, puisque ce calcul revient à déterminer l'inverse au sens de la composition d'une série formelle inversible. Or, l'existence d'interprétations combinatoires de la formule d'inversion de Lagrange peut être reliée à l'existence de généralisations non commutatives.

Les séries formelles à une variable à coefficients dans une algèbre non commutative peuvent être composées par substitution de la variable, mais cette loi n'est pas associative, et ne forme donc pas un groupe. Cependant, l'analogue  $\mathcal{H}^{NC}$  de l'algèbre de Faá di Bruno existe quand même dans ce contexte. Il a été étudié par Brouder, Frabetti et Krattenthaler [2] en vue d'applications à la théorie quantique des champs. Leur formule explicite pour calculer son antipode a été redémontrée par Novelli et Thibon [28], qui ont aussi démontré qu'elle était équivalente à la formule de Lagrange non commutative de Gessel [11] et Pak-Postnikov-Retakh [29]. Dans le chapitre 5, on donne une nouvelle interprétation combinatoire de ces deux formules, et on montre que l'antipode correspondant est invariant par l'action d'un morphisme d'algèbres permettant de passer de l'une à l'autre de ces deux formules. On donne aussi une troisième formule explicite équivalente aux deux autres, qui détermine le développement de l'antipode des fonctions symétriques complètes non commutatives sur la base des rubans.

### 1.4 Une généralisation de la formule d'inversion de Lagrange non commutative

La déformation de Foissy a également un analogue non commutatif qui interpole entre les fonctions symétriques non commutatives et l'algèbre de Faá di Bruno non commutative. On donne dans le chapitre 6 une formule explicite qui détermine l'antipode de cette déformation  $\mathcal{H}_\gamma^{NC}$ . Plus précisément, il s'agit d'une déformation de la formule de Brouder-Frabetti-Krattenthaler dans sa version originale. Ainsi, on donne les coefficients du développement de l'antipode des fonctions symétriques complètes non commutatives sur la base des fonctions symétriques complètes non commutatives. On obtient une somme de produits de coefficients binomiaux sur un ensemble de cardinal Catalan, le haut de chaque coefficient binomial devenant une fonction simple du paramètre.

On obtient aussi une formule explicite du même type pour le développement de l'antipode des fonctions symétriques complètes non-commutatives sur la base des fonctions symétriques élémentaires non commutatives, qui est cette fois une déformation de la formule de Gessel et

Pak-Postnikov-Retakh. Enfin, on obtient une formule de récurrence pour le développement de l'antipode des fonctions symétriques complètes non-commutatives sur la base des rubans. On donne aussi quelques propriétés des trois familles de coefficients que l'on obtient, et on étudie certains liens entre elles.

Enfin, on étudie les liens entre l'antipode correspondant au cas  $\gamma = 1$  et l'antipode correspondant au cas quelconque. Foissy montre que dans tout comme dans le cas commutatif, les  $\mathcal{H}_\gamma^{NC}$  sont tous isomorphes à  $\mathcal{H}_1^{NC}$ , sauf  $\mathcal{H}_0^{NC}$ . On explicite cet isomorphisme, que l'on note  $\Psi_\gamma$ , et on montre qu'il se ramène encore à une simple transformation d'alphabet. On introduit aussi un morphisme d'algèbres  $\phi_\gamma$  qui relie l'antipode  $s_\gamma$  de  $\mathcal{H}^{NC}$  à l'antipode  $s_1$  de  $\mathcal{H}_1^{NC}$ , par  $s_\gamma = \phi_\gamma \circ s_1$ . On donne des propriétés de ce morphisme et on explicite son action sur plusieurs bases. On montre aussi, en utilisant  $\Psi_\gamma$  et  $\phi_\gamma$ , que  $s_1$  est solution d'une infinité d'équations fonctionnelles dont on donne explicitement la forme générale. Ces équations forment une famille dont chaque  $\gamma$  correspond à un représentant, et on en déduit de nouvelles équations reliant entre eux certains coefficients du développement de l'antipode de certaines fonctions symétriques non commutatives sur certaines bases.



# Chapitre 2

## Rappels d'algèbre et de combinatoire

Dans la première partie de ce chapitre, nous rappelons les définitions de certaines structures algébriques classiques que nous aurons besoin de considérer dans cette thèse, notamment la structure d'algèbre de Hopf. Nous donnons aussi quelques propriétés fondamentales usuelles de ces structures. Dans les autres parties de ce chapitre, nos rappels portent principalement sur l'algèbre de Hopf des fonctions symétriques et celle des fonctions symétriques non commutatives. Ces deux algèbres de Hopf interviendront constamment dans la suite de ce document.

### 2.1 Rappels sur certaines structures algébriques

#### 2.1.1 Représentations linéaires des groupes

La notion de représentation linéaire d'un groupe est fondamentale en combinatoire algébrique.

**Définition 2.1.1.** *Soit  $G$  un groupe quelconque, et  $GL(V)$  l'ensemble des applications linéaires inversibles d'un espace vectoriel  $V$  donné dans lui-même. On appellera alors représentation linéaire de  $G$  dans  $V$  tout homomorphisme de  $G$  dans  $GL(V)$ . La dimension de  $V$  est appelée le degré de la représentation.*

On identifiera deux représentations  $R$  et  $R'$  si elles sont *isomorphes*, au sens où il existe  $T \in GL(V)$  tel que

$$\forall s \in G, TR(s)T^{-1} = R'(s). \quad (2-7)$$

Soit  $\rho : G \rightarrow GL(V)$  une représentation, et  $W$  un sous-espace vectoriel de  $V$  stable par  $\rho$ , au sens

$$\forall x \in W \forall s \in G, \rho(s)(x) \in W. \quad (2-8)$$

L'application  $\rho^W : \begin{matrix} G & \rightarrow & GL(W) \\ s & \mapsto & \rho(s)|_W \end{matrix}$  est alors encore une représentation linéaire. On dira que c'est une *sous-représentation* de  $\rho$ . Une représentation est dite *irréductible* si elle n'admet que la représentation dans  $\{0\}$  et elle-même comme sous-représentations.

Soient  $\rho^{W_1} : G \rightarrow GL(W_1)$  et  $\rho^{W_2} : G \rightarrow GL(W_2)$  deux sous-représentations de  $\rho : G \rightarrow GL(V)$ . On dira alors que

$$\rho = \rho^{W_1} \oplus \rho^{W_2} \quad (2-9)$$

si  $V = W_1 \oplus W_2$ .

Un résultat fondamental de Frobenius est que dans le cas où  $G$  est un groupe fini, toute représentation  $\rho$  de  $G$  dans un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $V$  est décomposable en somme directe de représentations irréductibles. De même, Weyl montre que dans le cas où  $G$  est un groupe compact, cette propriété est vraie lorsque  $V$  est de dimension finie.

On rappelle à présent la définition suivante.

**Définition 2.1.2.** Soit  $\rho$  une représentation linéaire d'un groupe fini  $G$  dans un espace vectoriel  $V$  de dimension finie  $n$ . Pour tout  $s \in G$ , on note  $R_s$  la matrice correspondant à  $\rho(s)$ .

On définit alors le caractère  $\chi_\rho$  de  $\rho$  comme étant la forme linéaire

$$\chi_\rho : \begin{array}{ccc} G & \rightarrow & \mathbb{C} \\ s & \mapsto & \chi_\rho(s) = \text{Tr}(R_s) = \sum_{i=1}^n (R_s)_{ii} \end{array} \quad (2-10)$$

On montre facilement que  $\chi_\rho(1_G) = \dim(V) = n$ , que deux représentations isomorphes ont le même caractère, et que si  $\rho = \rho_1 \oplus \rho_2$ , alors  $\chi_\rho = \chi_{\rho_1} + \chi_{\rho_2}$ . Enfin, les caractères sont des fonctions *centrales*, c'est-à-dire que l'on a toujours

$$\chi_\rho(tst^{-1}) = \chi_\rho(s). \quad (2-11)$$

## 2.1.2 Algèbres de Lie et algèbres pré-Lie

**Définition 2.1.3.** Une algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  est un espace vectoriel sur un corps  $\mathbb{K}$  muni d'une loi de composition interne  $[\cdot, \cdot]$  appelée crochet de Lie, telle que

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall \beta \in \mathbb{K}, \forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}, [X, \alpha Y + \beta Z] = \alpha [X, Y] + \beta [X, Z] \\ \forall X \in \mathfrak{g}, \forall Y \in \mathfrak{g}, [X, Y] = -[Y, X] \\ \forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}, [X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0 \end{array} \right. \quad (2-12)$$

La dernière des trois identités dans (2-12) est appelée *identité de Jacobi*. De la même manière que pour les groupes, on peut parler de *représentations* d'une algèbre de Lie. On dit ainsi que  $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow GL(V)$  est une représentation de  $\mathfrak{g}$  dans  $V$  si

$$\forall X \in \mathfrak{g}, \forall Y \in \mathfrak{g}, \rho([X, Y]) = \rho(X)\rho(Y) - \rho(Y)\rho(X). \quad (2-13)$$

Les représentations des algèbres de Lie vérifient également certains théorèmes de décomposition. Ainsi, Cartan a montré que toute représentation d'une algèbre de Lie semi-simple est décomposable en somme directe d'irréductibles (on dit qu'une algèbre de Lie est semi-simple si elle ne contient pas d'idéal résoluble non trivial).

Notons que le crochet de Lie n'est pas associatif. A partir d'une algèbre associative quelconque, on peut toujours construire une algèbre de Lie en considérant le crochet de Lie défini par

$$[X, Y] = XY - YX. \quad (2-14)$$

Ce crochet est appelé le *commutateur*, et une algèbre de Lie construite ainsi à partir d'une algèbre de matrices est dite *linéaire*.

En fait, le produit dans (2-14) ne doit pas forcément être associatif pour que le crochet correspondant soit un crochet de Lie : il suffit que ce produit soit un produit *pré-Lie*. Les algèbres pré-Lie sont définies de la manière suivante.

**Définition 2.1.4.** *Une algèbre pré-Lie  $L$  est un espace vectoriel muni d'un produit linéaire  $\circ$  qui vérifie pour  $X, Y, Z \in L$*

$$X \circ (Y \circ Z) - (X \circ Y) \circ Z = X \circ (Z \circ Y) - (X \circ Z) \circ Y. \quad (2-15)$$

Les algèbres associatives sont des cas particuliers d'algèbres pré-Lie. On peut munir toute algèbre pré-Lie  $(L, \circ)$  d'une structure d'algèbre de Lie en considérant le crochet défini par

$$[X, Y] = X \circ Y - Y \circ X. \quad (2-16)$$

### 2.1.3 Algèbres de Hopf

Avant de définir ce qu'est une algèbre de Hopf, nous aurons besoin de quelques notions préliminaires.

**Définition 2.1.5.** *Soit  $\mathbb{K}$  un corps. Une  $\mathbb{K}$ -cogèbre est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $C$  muni de deux applications  $\mathbb{K}$ -linéaires*

$$\Delta : C \rightarrow C \otimes C \quad (2-17)$$

et

$$\epsilon : C \rightarrow \mathbb{K} \quad (2-18)$$

telles que

$$(Id_C \otimes \Delta) \circ \Delta = (\Delta \otimes Id_C) \circ \Delta \quad (2-19)$$

et

$$(Id_C \otimes \epsilon) \circ \Delta = Id_C = (\epsilon \otimes Id_C) \circ \Delta. \quad (2-20)$$

L'application  $\Delta$  est appelée *coproduit*. C'est la notion duale de celle de produit dans une algèbre. Le coproduit d'un élément de  $C$  est une combinaison linéaire de produits tensoriels de deux éléments de  $C$ .

De même, la propriété (5-3), appelée *coassociativité*, est duale de la propriété d'associativité dans une algèbre, et l'application  $\epsilon$  est appelée *co-unité*. Si l'on voit l'unité d'une  $\mathbb{K}$ -algèbre  $A$  comme une application de  $\mathbb{K}$  dans  $A$ , alors la notion de co-unité d'une cogèbre est duale de celle d'unité dans une algèbre.

**Définition 2.1.6.** *Soit  $\mathbb{K}$  un corps,  $B$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel muni d'une structure d'algèbre associative unitaire  $(B, \mu, \eta)$  et d'une structure de cogèbre  $(B, \Delta, \epsilon)$ . On dira alors que  $B$  est une bigèbre si la structure d'algèbre et la structure de cogèbre sont compatibles, au sens où*

$$(1) \Delta \text{ et } \epsilon \text{ sont des morphismes d'algèbre} \quad (2-21)$$

$$(2) \mu \text{ et } \eta \text{ sont des morphismes de cogèbre} \quad (2-22)$$

(l'application  $\mu : B \otimes B \rightarrow B$  est la multiplication, et l'application  $\eta : \mathbb{K} \rightarrow B$  est l'unité).

Nous sommes maintenant en mesure de définir ce qu'est une algèbre de Hopf.

**Définition 2.1.7.** Soit  $(\mathcal{H}, ; \mu, \eta, \Delta, \epsilon)$  une bigèbre. On définit alors la convolution  $\star$  par

$$f \star g = \mu \circ (f \otimes g) \circ \Delta \quad (2-23)$$

où  $f : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  et  $g : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  sont deux applications linéaires. Si l'identité est inversible par la convolution, on dit que  $\mathcal{H}$  est une algèbre de Hopf et on appelle antipode l'inverse  $S$  de l'identité par la convolution. L'antipode  $S$  est un antimorphisme d'algèbres

$$S(xy) = S(y)S(x). \quad (2-24)$$

De plus, il vérifie par définition

$$Id_{\mathcal{H}} \star S = S \star Id_{\mathcal{H}} = \eta \circ \epsilon, \quad (2-25)$$

c'est-à-dire

$$\mu \circ (Id_{\mathcal{H}} \otimes S) \circ \Delta = \mu(S \otimes Id_{\mathcal{H}}) \circ \Delta = \eta \circ \epsilon. \quad (2-26)$$

Nous pouvons à présent donner quelques exemples d'algèbres de Hopf.

**Exemple 2.1.1.** Pour tout groupe fini  $G$  et tout corps  $\mathbb{K}$ , on note  $\mathbb{K}[G]$  l'algèbre linéairement engendrée par les éléments de  $G$  et dont le produit restreint à  $G$  coïncide avec le produit du groupe. Il est alors possible de munir  $\mathbb{K}[G]$  d'une structure d'algèbre de Hopf en définissant le coproduit par

$$\Delta(g) = g \otimes g \quad (2-27)$$

pour tout  $g \in G$ . On peut construire l'antipode de cette algèbre de Hopf en étendant linéairement l'application qui envoie chaque élément du groupe sur son inverse. Les algèbres de Hopf sont une généralisation naturelle de cet exemple particulier, et le fait de donner à une algèbre une structure d'algèbre de Hopf permet d'une certaine manière de la faire ressembler à un groupe.

**Exemple 2.1.2.** On considère l'ensemble  $\mathbb{K}^G$  des applications d'un groupe fini  $G$  donné dans un corps  $\mathbb{K}$  donné. Cet ensemble est naturellement muni d'une structure d'algèbre associative unitaire, et on peut identifier  $\mathbb{K}^G \otimes \mathbb{K}^G$  à  $\mathbb{K}^{G \times G}$  identifiant  $g \otimes h$  à la fonction  $f$  qui vérifie

$$f(x, y) = g(x)h(y) \quad (2-28)$$

pour tout  $x$  et pour tout  $y$ . On peut alors définir un coproduit en posant

$$\Delta(f)(x, y) = f(xy), \quad (2-29)$$

et on peut vérifier que ce coproduit définit bien une bigèbre  $\mathcal{H}$ . De plus, l'antipode  $S$  correspondant existe, et il est défini par

$$S(f)(x) = f(x^{-1}). \quad (2-30)$$

La bigèbre  $\mathcal{H}$  est donc bien une *algèbre de Hopf*.

Soit  $\mathcal{H}$  une algèbre de Hopf. On dira que  $\mathcal{H}$  est *cocommutative* si pour tout  $x \in \mathcal{H}$ ,  $\Delta_{\mathcal{H}}(x)$  est invariant par  $x \otimes y \mapsto y \otimes x$ . On dira que  $\mathcal{H}$  est une algèbre de Hopf *graduée* si elle est graduée en temps qu'algèbre associative et que pour tout  $x \in \mathcal{H}$  homogène, chaque terme  $x_1 \otimes x_2$  dans la décomposition de  $\Delta_{\mathcal{H}}(x)$  en somme de produits tensoriels est tel que  $x_1$  et  $x_2$  sont homogènes et vérifient  $\deg(x_1) + \deg(x_2) = \deg(x)$ . On dira enfin que  $\mathcal{H}$  est *connexe* si elle est graduée et que sa composante homogène de degré 0 est de dimension 1.

Un élément  $x$  d'une algèbre de Hopf  $\mathcal{H}$  est dit *de type groupe* si il vérifie  $\Delta_{\mathcal{H}}(x) = x \otimes x$ , et *primitif* si il vérifie  $\Delta_{\mathcal{H}}(x) = 1 \otimes x + x \otimes 1$ . On peut munir l'ensemble des éléments primitifs d'une algèbre de Hopf d'une structure d'algèbre de Lie en prenant comme crochet le commutateur.

On donne également la définition suivante.

**Définition 2.1.8.** Soit  $\mathcal{H} = \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{H}_n$  une algèbre de Hopf graduée. On munit alors le dual gradué  $\mathcal{H}' = \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{H}'_n$  de  $\mathcal{H}$  d'une structure d'algèbre de Hopf par

$$\langle fg, x \rangle = \langle f \otimes g, \Delta_{\mathcal{H}}(x) \rangle \quad (2-31)$$

et

$$\langle \Delta_{\mathcal{H}'}(f), x \otimes y \rangle = \langle f, xy \rangle, \quad (2-32)$$

où pour tout  $f \in \mathcal{H}'$  et pour tout  $x \in \mathcal{H}$ ,  $\langle f, x \rangle$  désigne l'action de  $f$  sur  $x$ , et où on a posé

$$\langle f \otimes g, x \otimes y \rangle = \langle f, x \rangle \langle g, y \rangle. \quad (2-33)$$

Soit maintenant  $(B_x)_{x \in X}$  une base de  $\mathcal{H}$  indexée par une certaine famille  $X$  d'objets. On définit alors la base duale  $(A_y)_{y \in X}$  de  $(B_x)$  comme étant la base de  $\mathcal{H}'$  qui vérifie

$$\langle A_x, B_y \rangle = \delta_{xy} \quad (2-34)$$

pour tout  $x \in X$  et pour tout  $y \in X$ .

Lorsque  $\mathcal{H}'$  est isomorphe à  $\mathcal{H}$ , on dit que  $\mathcal{H}$  est *auto-duale*, et le crochet de dualité s'identifie alors à un produit scalaire sur  $\mathcal{H}$ .

### 2.1.4 Algèbre enveloppante universelle d'une algèbre de Lie

Dans cette partie, on rappelle certains liens existant entre les algèbres de Lie et les algèbres de Hopf. On commence par définir ce qu'est une algèbre enveloppante.

**Définition 2.1.9.** Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie. On note  $T(\mathfrak{g})$  l'algèbre associative libre librement engendrée par les éléments de  $\mathfrak{g}$ . On définit alors l'algèbre enveloppante universelle  $U(\mathfrak{g})$  de  $\mathfrak{g}$  comme étant le quotient de  $T(\mathfrak{g})$  par l'idéal bilatère engendré par les

$$XY - YX - [X, Y] \quad (2-35)$$

tels que  $X \in \mathfrak{g}$  et  $Y \in \mathfrak{g}$ . On munit  $U(\mathfrak{g})$  d'une structure d'algèbre de Hopf en posant que les éléments de  $\mathfrak{g}$  sont primitifs.



Nous sommes à présent en mesure d'énoncer le théorème fondamental suivant.

**Théorème 2.1.1** (Cartier, Milnor-Moore). *Soit  $\mathcal{H}$  une algèbre de Hopf cocommutative, graduée et connexe sur corps de caractéristique 0. Alors, il existe une algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  telle que*

$$\mathcal{H} = U(\mathfrak{g}). \quad (2-36)$$

## 2.2 L'algèbre $\Lambda$ des fonctions symétriques

### 2.2.1 Définition et premiers exemples

On note  $\Lambda$  la  $\mathbb{C}$ -algèbre des fonctions polynomiales  $f$  symétriques sur un ensemble infini  $X$  de variables commutatives

$$X = \{x_i \mid i \geq 1\}, \quad (2-37)$$

que l'on désigne sous le terme d'*alphabet commutatif* (par "symétriques" on entend que la valeur de  $f(X) = f(x_1, x_2, \dots)$  ne change pas lorsqu'on permute les variables). L'algèbre  $\Lambda$  est connue sous le nom d'*algèbre des fonctions symétriques*. On note  $\Lambda^k$  la composante homogène de degré  $k$  de  $\Lambda$ . Pour toute  $f \in \Lambda$ , on identifie  $f$  à sa réalisation standard  $f(X)$ . Les notations que l'on utilise pour travailler dans  $\Lambda$  sont essentiellement celles de [24]. On définit la  $n$ -ième *fonction élémentaire*  $e_n \in \Lambda$  au moyen de la série génératrice

$$\sum_{n=0}^{\infty} e_n(X) z^n = \prod_{i \geq 1} (1 + x_i z). \quad (2-38)$$

On obtient en développant

$$e_n(X) = \sum_{i_1 < \dots < i_n} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_n}. \quad (2-39)$$

On définit également la  $n$ -ième *fonction complète*  $h_n \in \Lambda$  au moyen de la série génératrice

$$\sum_{n=0}^{\infty} h_n(X) z^n = \prod_{i \geq 1} (1 - x_i z)^{-1}. \quad (2-40)$$

On note  $\sigma_t(X)$  cette série génératrice. En développant, on trouve que  $h_n$  est la somme de tous les monômes en  $X$  homogènes de degré  $n$ , par exemple

$$h_2(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 \quad (2-41)$$

(lorsqu'on évalue une fonction symétrique sur un alphabet fini, on sous-entend qu'il y a une infinité de variables 0 en plus).

Enfin, on définit la  $n$ -ième *somme de puissances*  $p_n \in \Lambda$  par

$$p_n(X) = \sum_{i \geq 1} x_i^n. \quad (2-42)$$

Les  $p_n$  vérifient pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$  la *formule de Newton*

$$\prod_i (1 - x_i z)^{-\alpha} = \exp\left(\alpha \sum_{n=1}^{\infty} p_n(x) z^n\right). \quad (2-43)$$

Les  $e_n$  sont algébriquement indépendants les uns des autres, de même que les  $h_n$  et les  $p_n$ , et on a ainsi, par exemple,

$$\Lambda = \mathbb{C}[e_1, e_2, \dots]. \quad (2-44)$$

## 2.2.2 Partitions d'entiers et bases linéaires de $\Lambda$

Les bases de  $\Lambda$  sont indexées par les *partitions* des entiers. On dit qu'une suite (finie ou infinie) décroissante d'entiers positifs au sens large  $\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots)$  est une *partition* de  $n$  et on note  $\lambda \vdash n$  si les  $\lambda_i$  non nuls sont en nombre fini et que

$$\sum_i \lambda_i = n. \quad (2-45)$$

Les  $\lambda_i$  non nuls sont les *parts* de  $\lambda$ . On identifie deux partitions qui ne diffèrent que par une chaîne de 0 à la fin, par exemple

$$(4, 3, 1) = (4, 3, 1, 0) = (4, 3, 1, 0, 0). \quad (2-46)$$

On note  $l(\lambda)$  la *longueur* d'une partition  $\lambda$  (son nombre de parts), et on note  $|\lambda|$  son *poids*, défini par  $|\lambda| = \sum_i \lambda_i$ . Pour tout entier  $k$  et pour toute partition  $\lambda$ , on note  $m_k(\lambda)$  la *multiplicité* de  $k$  dans  $\lambda$ , c'est-à-dire est le nombre de parts de  $\lambda$  égales à  $k$ . On utilisera encore ces trois dernières notations pour des suites finies d'entiers qui ne sont pas des partitions. On pose aussi pour toute partition  $\lambda$

$$z_\lambda = \prod_i i^{m_i(\lambda)} m_i(\lambda)! \quad (2-47)$$

Enfin, on utilisera parfois la notation  $(1^{m_1(\lambda)}, 2^{m_2(\lambda)}, \dots)$  pour désigner une partition  $\lambda$ , par exemple on notera  $(1^2, 2^3, 4)$  pour désigner la partition  $(433222)$ .

On représente graphiquement les partitions par des dessins appelés *diagrammes de Ferrers* ou *diagrammes de Young*. Le diagramme de Young correspondant à une partition est un tableau dont les lignes sont justifiées à gauche et ont un nombre de cases décroissant de bas en haut. Les nombres de cases de ces lignes correspondent aux parts de la partition. Par exemple, la partition  $(4, 3, 3, 1) \vdash 11$  correspond au diagramme

$$\begin{array}{cccc} \square & & & \\ \square & \square & \square & \\ \square & \square & \square & \\ \square & \square & \square & \square \end{array} \quad (2-48)$$

A partir des familles  $(e_n)$ ,  $(h_n)$  et  $(p_n)$ , on construit les bases multiplicatives  $(e_\lambda)$ ,  $(h_\lambda)$  et  $(p_\lambda)$  de  $\Lambda$ , en posant par exemple

$$e_\lambda = e_{\lambda_1} e_{\lambda_2} \dots e_{\lambda_{l(\lambda)}}. \quad (2-49)$$

On peut montrer que  $(e_\lambda)$  et  $(h_\lambda)$  sont des  $\mathbb{Z}$ -bases de  $\Lambda$ , tandis que  $(p_\lambda)$  n'est qu'une  $\mathbb{Q}$ -base. On construit la base évidente  $(m_\lambda)$  des *fonctions monomiales* en posant

$$m_\lambda(X) = \sum_{\sigma} \prod_i x_{\sigma_i}^{\lambda_i} = \sum_{\mu \in \mathfrak{S}(\lambda)} x^\mu, \quad (2-50)$$

où  $\mathfrak{S}(\lambda)$  est l'ensemble des permutations distinctes de  $\lambda$ . Par exemple,

$$m_{21}(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 x_2 + x_1^2 x_3 + x_2^2 x_1 + x_2^2 x_3 + x_3^2 x_1 + x_3^2 x_2. \quad (2-51)$$

Notons que pour tout  $n$ , on a  $p_n = m_n$ ,  $e_n = m_{1^n}$ , et  $h_n = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda$ .

De nombreuses formules classiques permettent de faire des liens entre les différentes familles de fonctions symétriques. On utilisera par exemple

$$kh_k = p_1 h_{k-1} + p_2 h_{k-2} + \dots + p_k h_0. \quad (2-52)$$

### 2.2.3 Structure d'algèbre de Hopf de $\Lambda$

Pour deux alphabets commutatifs  $X$  et  $Y$  mutuellement indépendants et qui commutent entre eux, on note  $X + Y$  l'union disjointe de  $X$  et de  $Y$ . On peut vérifier que l'on a alors

$$p_n(X + Y) = p_n(X) + p_n(Y) \quad (2-53)$$

et

$$\sigma_t(X + Y) = \sigma_t(X) \sigma_t(Y). \quad (2-54)$$

On généralise en posant

$$p_n(\alpha X + \beta Y) = \alpha p_n(X) + \beta p_n(Y), \quad (2-55)$$

ou, de manière équivalente,

$$\sigma_t(\alpha X + \beta Y) = \sigma_t(X)^\alpha \sigma_t(Y)^\beta. \quad (2-56)$$

On vérifie alors que l'on a

$$h_n(X) = (-1)^n e_n(-X) \quad (2-57)$$

pour tout  $n$ , et on généralise facilement ce résultat à  $h_\lambda(X) = (-1)^{|\lambda|} e_\lambda(-X)$ .

Cette notion de somme d'alphabets nous permet de définir la structure usuelle d'algèbre de Hopf de  $\Lambda$ , qui est donnée par le coproduit  $\Delta_0$  défini par

$$\Delta_0(f) = f(X + Y), \quad (2-58)$$

où on identifie  $f \otimes g$  à  $f(X)g(Y)$  pour toute paire  $(f, g)$  de fonctions symétriques. De manière équivalente, on aurait aussi pu prendre comme définition de  $\Delta_0$

$$\Delta_0(h_n) = \sum_{k=0}^n h_k \otimes h_{n-k}. \quad (2-59)$$

Cette formule est bien suffisante pour définir  $\Delta_0$ , puisque  $\Lambda$  est engendrée par les  $h_n$ . L'antipode  $S_0$  correspondant se définit simplement par

$$S_0(f)(X) = f(-X). \quad (2-60)$$

Les  $p_n$  sont des éléments *primitifs* de cette algèbre de Hopf, qui est cocommutative et graduée par  $\deg(h_n) = n$ .

Cette structure d'algèbre de Hopf provient de l'identification de  $\Lambda$  à l'algèbre  $\mathcal{H}_0$  des fonctions du groupe  $G_0$  des séries formelles de terme constant 1 dans  $\mathbb{C}$  polynomiales en les  $a_n$  définis pour tout  $u \in G_0$  par

$$u(t) = 1 + a_1(u)t + a_2(u)t^2 + \dots \quad (2-61)$$

Les  $a_n$  de cette algèbre sont envoyés sur les  $h_n$  de  $\Lambda$  par un isomorphisme d'algèbres, et  $\Delta_0$  peut alors être défini par

$$\Delta_0(f)(u, v) = f(uv) \quad (2-62)$$

où  $f \in \mathcal{H}$ ,  $u \in G_0$ ,  $v \in G_0$ . Ici,  $\Delta_0(f)$  est identifiée à une fonction à deux variables en posant

$$(f \otimes g)(x, y) = f(x)g(y). \quad (2-63)$$

Notons que l'antipode  $S_0$  est tel que

$$S_0(f)(u) = f(u^{-1}). \quad (2-64)$$

Cette algèbre de Hopf est auto-duale, et le crochet de dualité correspondant peut donc s'identifier à un produit scalaire sur  $\Lambda$ . Les bases  $(m_\lambda)$  et  $(h_\lambda)$  sont duales l'une de l'autre, ainsi que les bases  $(p_\lambda)$  et  $(\frac{p_\lambda}{z_\lambda})$  (la base  $(p_\lambda)$  est donc orthogonale). Ainsi, on a par exemple

$$\langle m_\lambda, h_\mu \rangle = \delta_{\lambda\mu}. \quad (2-65)$$

On note  $p_n^\perp$  l'opérateur adjoint à la multiplication par  $p_n$ , au sens

$$\langle p_n f, g \rangle = \langle f, p_n^\perp(g) \rangle, \quad (2-66)$$

où  $f$  et  $g$  sont deux fonctions symétriques quelconques. L'opérateur  $p_n^\perp$  est une *dérivation*. Plus précisément,

$$p_n^\perp = n \frac{\partial}{\partial p_n}. \quad (2-67)$$

Cet opérateur agit sur les  $h_n$  de la manière suivante

$$p_n^\perp h_N = h_{N-n}, \quad (2-68)$$

et on a donc

$$p_n^\perp = \sum_{r \geq 0} h_r \frac{\partial}{\partial h_{n+r}}. \quad (2-69)$$

## 2.2.4 Fonctions de Schur

Dans cette partie, nous introduisons une base classique de  $\Lambda$  dont la définition est moins intuitive que celles des bases que l'on a défini auparavant, mais qui présente des propriétés très importantes.

Soit  $\lambda$  une partition quelconque et soit  $p$  tel que  $l(\lambda) \leq p$ . Pour  $X = (x_1, \dots, x_p)$ , on définit alors  $A_\lambda(X)$  par

$$A_\lambda(X) = \begin{vmatrix} x_1^{\lambda_1+p-1} & x_1^{\lambda_1+p-2} & \dots & x_1^{\lambda_p} \\ x_2^{\lambda_1+p-1} & x_2^{\lambda_1+p-2} & \dots & x_2^{\lambda_p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_p^{\lambda_1+p-1} & x_p^{\lambda_1+p-2} & \dots & x_p^{\lambda_p} \end{vmatrix}. \quad (2-70)$$

De même, on pose

$$\Delta(X) = \begin{vmatrix} x_1^{p-1} & \dots & x_p^{p-1} \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq p} (x_i - x_j). \quad (2-71)$$

Le polynôme  $A_\lambda$  est l'antisymétrisé de  $x^{\lambda+\rho}$ . Il est donc nécessairement divisible par  $\Delta$  et le quotient

$$s_\lambda(X) = \frac{A_\lambda(X)}{\Delta(X)} \quad (2-72)$$

est clairement un polynôme *symétrique*. Le déterminant  $\Delta(x)$  est appelé *déterminant de Vandermonde*, et les  $s_\lambda$  sont appelées *fonctions de Schur*. On peut étendre la définition de ces dernières à un nombre infini de variables en posant

$$s_\lambda(x_1, x_2, \dots, x_p, 0 \dots 0 \dots) = \begin{cases} s_\lambda(x_1, \dots, x_p) & \text{si } l(\lambda) \leq p \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2-73)$$

Les  $s_\lambda$  ainsi définies forment une base de  $\Lambda$ . De plus, cette base est *orthonormale* au sens du produit scalaire correspondant à la structure d'algèbre de Hopf de  $\Lambda$ . Elle est donc sa propre base duale

$$\langle s_\lambda, s_\mu \rangle = \delta_{\lambda\mu}. \quad (2-74)$$

Les  $s_\lambda$  vérifient la *formule de Cauchy*

$$\sigma_1(XY) = \sum_{\lambda} s_\lambda(X) s_\lambda(Y). \quad (2-75)$$

Ici, la somme porte sur toutes les partitions de tous les entiers positifs, et  $XY$  est défini par

$$XY = \{xy | x \in X, y \in Y\} \quad (2-76)$$

Notons que toutes les opérations que nous avons définies sur les alphabets sont compatibles entre elles dans un sens évident. Ainsi, on peut également poser pour tout scalaire  $\alpha$

$$p_n(\alpha) = \alpha \quad (2-77)$$

et ainsi donner un sens à  $f(\alpha)$  pour n'importe quelle fonctions symétrique  $f$ , puisque  $\Lambda$  est engendrée par les  $p_n$ .

La formule de Cauchy peut se généraliser à

$$\sigma_1(XY) = \sum_{\lambda} b_{\lambda}(X)b'_{\lambda}(Y), \quad (2-78)$$

où  $(b_{\lambda})$  désigne n'importe quelle base de  $\Lambda$  et  $b'_{\lambda}$  sa base duale.

Les fonctions de Schur jouent un rôle important dans la théorie des représentations des groupes symétriques  $\mathfrak{S}_n$ . Notons  $C_{\mu}$  la classe de conjugaison de  $\mathfrak{S}_n$  constituée des permutations de *type cyclique*  $\mu \vdash n$ . Les éléments de  $C_{\mu}$  sont les partitions  $\sigma$  qui admettent une décomposition en produit de cycles disjoints de type

$$\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{l(\lambda)} \quad (2-79)$$

où chaque  $\sigma_i$  est un cycle de longueur  $\lambda_i$ . Les caractères irréductibles de  $\mathfrak{S}_n$  peuvent alors être indexés par les partitions  $\lambda \vdash n$ , et chaque caractère irréductible  $\chi^{\lambda}$  peut être défini par

$$s_{\lambda} = \sum_{\mu \vdash n} \chi_{\mu}^{\lambda} \frac{p_{\mu}}{z_{\mu}}, \quad (2-80)$$

où  $\chi_{\mu}^{\lambda}$  désigne la valeur du caractère  $\chi^{\lambda}$  sur la classe de conjugaison  $C_{\mu}$ .

## 2.3 L'algèbre Sym des fonctions symétriques non commutatives

### 2.3.1 Définition et structure d'algèbre de Hopf de Sym

On définit l'algèbre **Sym** des fonctions symétriques non commutatives comme étant l'algèbre associative libre librement engendrée par une suite infinie  $(S_n)$  de générateurs non commutatifs. On utilisera essentiellement les notations de [10, 19] pour travailler dans cette algèbre.

On peut réaliser les fonctions symétriques non commutatives en termes de fonctions polynomiales sur un ensemble totalement ordonné  $A = \{a_i \mid i \geq 1\}$  de variables non commutatives que l'on désigne sous le terme d'*alphabet non commutatif*, en posant

$$\sum_{n \geq 0} S_n(A)t^n = \prod_{i \geq 1}^{\rightarrow} (1 - ta_i)^{-1}. \quad (2-81)$$

On note  $\sigma_t(A)$  cette série génératrice. Les  $S_n$  sont des analogues non commutatifs des  $h_n$ . De même, on construit des analogues non commutatifs  $\Lambda_n$  des  $e_n$  en posant

$$\sum_{n \geq 0} \Lambda_n(A)t^n = \prod_{i \geq 1}^{\leftarrow} (1 + ta_i). \quad (2-82)$$

On identifie toute fonction symétrique non commutative à sa réalisation standard  $F(A)$ . On définit la somme  $A + B$  de deux alphabets non commutatifs mutuellement indépendants qui

commutent entre eux comme étant leur réunion disjointe, que l'on munit d'un ordre total en étendant l'ordre sur  $A$  et celui sur  $B$  en posant que  $a < b$  si  $a \in A$  et  $b \in B$ . Cette notion de somme d'alphabets nous permet de définir un coproduit  $\Delta_0$  sur **Sym** par

$$\Delta_0 F = F(A + B) \quad (2-83)$$

au moyen de l'identification

$$F \otimes G = F(A)G(B). \quad (2-84)$$

Ce coproduit munit **Sym** d'une structure d'algèbre de Hopf cocommutative, graduée par  $\deg(S_n) = n$ . On peut vérifier que

$$\sigma_t(A + B) = \sigma_t(A)\sigma_t(B), \quad (2-85)$$

que

$$S^I(A) = (-1)^{|I|}\Lambda^I(-A) \quad (2-86)$$

et que

$$\Delta_0(S_n) = \sum_{k=0}^n S_k \otimes S_{n-k}. \quad (2-87)$$

L'antipode  $s_0$  de cette algèbre de Hopf peut être défini par

$$s_0(S_n)(A) = S_n(-A) \quad (2-88)$$

(de la même façon que dans le cas commutatif, on donne un sens à  $F(\alpha A + \beta B)$  où  $F$  et  $G$  sont deux fonctions symétriques non commutatives quelconques, et où  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux scalaires quelconques).

### 2.3.2 Compositions d'entiers et bases linéaires de **Sym** et de son dual

Les bases de  $\Lambda$  sont annexées par les *compositions* des entiers. On dit qu'une suite finie d'entiers strictement positifs  $I = (i_1, \dots, i_s)$  est une *composition* de  $n$  et on note  $I \vDash n$  si

$$\sum_{k=0}^s i_k = n. \quad (2-89)$$

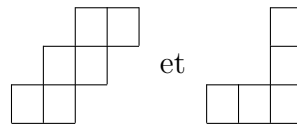
Chaque entier  $n \geq 1$  a un nombre de compositions égal à  $2^{n-1}$ . On définit les parts  $i_k$ , le poids  $|I|$ , la longueur  $l(I)$  et les multiplicités  $m_k(I)$  d'une composition  $I$  de la même manière que dans le cas des partitions. Pour deux compositions  $I$  et  $J$  données, on note  $I \cdot J$  la composition obtenue en concaténant  $I$  et  $J$ . Pour n'importe quelle suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  et n'importe quelle composition  $I$ , on pose

$$u^I = \prod_k u_{i_k}. \quad (2-90)$$

On dira qu'une composition  $J$  est un *raffinement* d'une composition  $I$  et on notera  $J \leq I$  si il existe une suite  $(J^{(1)}, J^{(2)}, \dots, J^{(s)})$  de compositions de longueur  $s = l(I)$  telle que pour tout  $k$ ,  $J^{(k)} \vDash i_k$  et

$$J = J^{(1)} \cdot J^{(2)} \cdot \dots \cdot J^{(s)}. \quad (2-91)$$

On dira qu'une composition  $I$  est un *grossissement* d'une composition  $J$  si  $J$  est un raffinement de  $I$ . On représentera graphiquement les compositions par des rubans de manière à identifier chaque composition  $I$  à un ruban dans lequel les longueurs des lignes, lues de gauche à droite et de bas en haut, sont égales aux parts de  $I$ . Par exemple, les compositions (222) et (311) seront respectivement représentées par



$$\quad \quad \quad \text{et} \quad \quad \quad (2-92)$$

On appellera *conjuguée* d'une composition  $I$  la composition dont les parts sont les longueurs des colonnes du ruban correspondant à  $I$ , lues de droite à gauche. Par exemple, (1221) est la conjuguée de (222) et (311) est sa propre conjuguée. Pour toute composition  $I$ , on désignera par  $I'$  la composition  $(i_{l(I)}, \dots, i_1)$ , par  $\tilde{I}$  la conjuguée de  $I$  et par  $I^\#$  la conjuguée de  $I'$ .

Les familles  $(S_n)$  et  $(\Lambda_n)$  peuvent être utilisées pour construire des bases multiplicatives de  $\Lambda$ . On définit ainsi la base  $(S^I)$  des *fonctions complètes non commutatives* et la base  $(\Lambda^I)$  des *fonctions élémentaires non commutatives* en posant par exemple

$$S^I = S_{i_1} S_{i_2} \dots S_{i_{l(I)}}. \quad (2-93)$$

On dit qu'un mot  $w = a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_n}$  a une *descente* en  $k$  si  $i_k > i_{k+1}$ , et on note  $\text{Des}(w)$  l'ensemble des  $k$  tels que  $w$  a une descente en  $k$ . On vérifie alors que  $S_n(A)$  est la somme de tous les mots de longueur  $n$  sans descente, et que  $\Lambda_n(A)$  est la somme des mots qui ont des descentes à toutes les places possibles. On vérifie également que  $S^I$  est la somme des mots  $w$  de longueur  $|I|$  tels que

$$\text{Des}(w) \subset \text{Des}(I) = \{i_1, i_1 + i_2, \dots, |I|\}. \quad (2-94)$$

Pour tout mot  $w$ , on note  $C(w)$  la composition  $I$  telle que  $\text{Des}(I) = \text{Des}(w)$ . Il est alors naturel d'introduire la base des *rubans*  $(R_I)$ , une base de **Sym** définie par

$$R_I(A) = \sum_{C(w)=I} w. \quad (2-95)$$

On a pour toute composition  $I$

$$S^I = \sum_{J \geq I} R_J. \quad (2-96)$$

Les  $R_I$  vérifient de plus la formule de multiplication

$$R_I R_J = R_{I \cdot J} + R_{I \triangleright J}, \quad (2-97)$$

où on a posé

$$I \triangleright J = (i_1, \dots, i_{l(I)-1}, i_{l(I)} + j_1, j_2, \dots, j_{l(J)}). \quad (2-98)$$



On désigne par  $QSym$  le dual gradué de l'algèbre de Hopf des fonctions symétriques non commutatives. L'algèbre de Hopf  $QSym$  est appelée *algèbre des fonctions quasi-symétriques* [12]. Elle est commutative mais pas cocommutative. On note  $(M_I)$  et  $(F_I)$  les bases de  $QSym$  respectivement duales de  $(S^I)$  et de  $(R_I)$ . La base  $(M_I)$  est la base des *fonctions quasi-monomiales*, tandis que  $(F_I)$  est la base des *quasi-rubans*. Ces bases sont liées entre elles par la formule

$$F_I = \sum_{J \leq I} M_J. \quad (2-99)$$

On obtient une réalisation polynomiale des fonctions quasi-symétriques sur un alphabet commutatif totalement ordonné  $Y$  en posant

$$M_I(X) = \sum_{y_1 < y_2 < \dots < y_k \in X} y_1^{i_1} y_2^{i_2} \dots y_k^{i_k}. \quad (2-100)$$

D'une manière générale, les fonctions quasi-symétriques sont alors les fonctions  $f$  polynomiales en  $X$  telle que pour tout couple  $((y_1 < y_2 < \dots < y_k), (z_1 < \dots < z_k))$  de suites d'éléments de  $X$  et pour toute suite  $(i_1, i_2, \dots, i_k)$  d'entiers naturels, les monômes  $y_1^{i_1} y_2^{i_2} \dots y_k^{i_k}$  et  $z_1^{i_1} z_2^{i_2} \dots z_k^{i_k}$  ont le même coefficient dans  $f(X)$ . En utilisant l'identification

$$F \otimes G = F(X)G(Y), \quad (2-101)$$

où  $X$  et  $Y$  sont deux alphabets commutatifs totalement ordonnés, mutuellement indépendants et qui commutent entre eux, on vérifie que le coproduit  $\gamma$  de  $QSym$  vérifie pour tout  $F \in QSym$

$$\gamma(F) = F(X + Y), \quad (2-102)$$

où  $X + Y$  est défini comme étant l'union disjointe des alphabets  $X$  et  $Y$ , que l'on munit d'un ordre total en étendant l'ordre sur  $X$  et celui sur  $Y$  en posant  $x < y$  si  $x \in X$  et  $y \in Y$ .

# Chapitre 3

## Les centres des algèbres des groupes symétriques

Dans ce chapitre, on s'intéresse aux centres  $Z_n$  des algèbres  $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$  des groupes symétriques  $\mathfrak{S}_n$ , et plus particulièrement à leurs propriétés de stabilité, c'est-à-dire aux formules ne dépendant pas du  $n$  considéré.

### 3.1 Elements remarquables de $Z_n$

#### 3.1.1 Classes de conjugaison

Pour toute partition  $\mu$ , on notera  $C_\mu$  l'élément de  $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$  défini par

$$C_\mu = \sum_{\text{type}(\sigma)=\mu} \sigma. \quad (3-103)$$

Chaque  $C_\mu$  est la somme formelle de tous les éléments d'une classe de conjugaison de  $\mathfrak{S}_n$  où  $n = |\mu|$ . On identifiera  $C_\mu$  à cette classe de conjugaison. Les  $C_\mu$  sont des éléments *centraux*. De plus, la famille  $(C_\mu)_{\mu \vdash n}$  est une *base* de  $Z_n$ . On dira qu'une fonction de  $\mathfrak{S}_n$  dans  $\mathbb{C}$  est *centrale* si elle est constante sur chaque classe de conjugaison de  $\mathfrak{S}_n$ , et on identifiera toute fonction centrale  $F$  à un élément de  $Z_n$  par

$$F = \sum_{\mu \vdash n} F(\mu) C_\mu, \quad (3-104)$$

où  $F(\mu)$  désigne la valeur de  $F$  sur la classe  $C_\mu$ .

Les constantes de structure  $\alpha_{\mu\nu}^\lambda$  de  $Z_n$  dans la base des  $C_\mu$ , définies par

$$C_\mu C_\nu = \sum_{\lambda \vdash n} \alpha_{\mu\nu}^\lambda C_\lambda, \quad (3-105)$$

sont en général très difficiles à calculer. Elles interviennent dans des problèmes énumératifs variés et dans des calculs d'intégrales matricielles [14]. La fonction caractéristique de Frobenius  $\text{ch} : \mathbb{C}[\mathfrak{S}_n] \rightarrow \Lambda^n$ , définie par  $\text{ch}(\sigma) = p_\mu$  lorsque  $\sigma$  est de type cyclique  $\mu$ , permet de

définir un nouveau produit sur  $\Lambda$  qui correspond au produit des classes dans les  $Z_n$ . Ainsi, on définit  $\times$  sur  $\Lambda^n$  par

$$\text{ch}(F) \times \text{ch}(G) = \text{ch}(FG), \quad (3-106)$$

et on l'étend à  $\Lambda$  en posant que  $u \times v = 0$  lorsque  $u$  et  $v$  sont des fonctions symétriques homogènes de degrés différents. Les liens entre la théorie des représentations de  $\mathfrak{S}_n$  et l'algèbre des fonctions symétriques permettent de montrer que  $\times$  est explicitement déterminé par

$$s_\lambda \times s_\mu = \frac{1}{f_\lambda} \delta_{\lambda\mu} s_\mu, \quad (3-107)$$

où  $f_\lambda$  désigne la dimension de la représentation irréductible de  $\mathfrak{S}_n$  correspondant à la partition  $\lambda$ . On en déduit en posant  $\tilde{p}_\mu = \frac{p_\mu}{z_\mu}$  que pour toute paire  $(\mu, \nu)$  de partitions de même poids  $n$ ,

$$\tilde{p}_\mu \times \tilde{p}_\nu = \sum_{\lambda \vdash n} \alpha_{\mu\nu}^\lambda \tilde{p}_\lambda. \quad (3-108)$$

### 3.1.2 Fonctions symétriques des éléments de Jucys-Murphy

Soient  $n \in \mathbb{N}$  et  $i \in \mathbb{N}$ , avec  $i \leq n$ . On définit alors le  $i$ -ème élément de Jucys-Murphy  $\xi_i$  par

$$\xi_i = \sum_{j < i} (j, i). \quad (3-109)$$

Cet élément de  $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$  est défini comme étant la somme formelle de toutes les transpositions  $(j, i)$  telles que  $j < i$ . Par exemple dans  $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_5]$  on a

$$\xi_5 = (1, 5) + (2, 5) + (3, 5) + (4, 5), \quad (3-110)$$

et on a  $\xi_1 = 0$  pour tout  $n$ . Ces éléments ne sont pas dans le centre de  $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$ . En revanche, ils engendrent une sous-algèbre commutative maximale de  $\mathfrak{S}_n$ , et l'ensemble de leurs fonctions symétriques coïncide exactement avec  $Z_n$ . La propriété fondamentale des éléments de Jucys-Murphy que nous allons à présent énoncer est un résultat de Jucys. Soit  $n \in \mathbb{N}$  et  $\lambda \vdash n$ . On remplit alors les cases du diagramme de Young associé à  $\lambda$  avec des 0 sur la diagonale principale, puis on remplit toutes les cases de manière à ce que le fait d'avancer d'une case vers la droite ou vers le bas revienne à ajouter 1, comme dans cet exemple correspondant à  $\lambda = (322)$ .

-2	-1	
-1	0	
0	1	2

(3-111)

Plus formellement, on pose pour  $j \leq \lambda_i$

$$c_{ij} = j - i \quad (3-112)$$

L'alphabet formé des éléments  $c_{ij}$ ,  $j \leq \lambda_i$ ,  $i \leq l(\lambda)$ , est appelé *alphabet des contenus*. On le note  $A_\lambda$ . Les contenus correspondent aux valeurs qu'on a associées aux cases du diagramme.

Soit à présent  $f$  une fonction symétrique, et  $T$  l'opérateur de multiplication par  $f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ . Le caractère  $\chi^\lambda$ , identifié à l'élément

$$\sum_{\sigma} \chi_{\lambda}(\sigma)\sigma, \quad (3-113)$$

est alors un vecteur propre de  $T$ , et sa valeur propre associée est  $f(A_{\lambda})$ .

$$f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)\chi^{\lambda} = f(A_{\lambda})\chi^{\lambda} \quad (3-114)$$

Les éléments de Jucys-Murphy interviennent ainsi dans la théorie des représentations de  $\mathfrak{S}_n$ , et l'étude de leurs fonctions symétriques usuelles permet de faire des liens avec des domaines variés. Par exemple, l'étude de leurs fonctions complètes permet de calculer certaines intégrales matricielles, et l'étude de leurs sommes de puissances a un lien avec l'algèbre de Virasoro et les opérateurs Vertex, comme nous allons le voir par la suite. La prochaine section contient des rappels sur l'algèbre de Virasoro et les opérateurs Vertex.

## 3.2 Algèbre de Virasoro et opérateurs Vertex

### 3.2.1 Définition de l'algèbre de Virasoro

L'algèbre de Virasoro est l'algèbre de Lie engendrée par l'élément  $C$  et les éléments  $L_n, n \in \mathbb{Z}$ , soumis aux relations suivantes.

$$\begin{cases} \forall m, n \in \mathbb{Z}, [L_m, L_n] = (m - n)L_{m+n} + \delta_{m+n,0} \frac{m^3 - m}{12} C \\ \forall n \in \mathbb{Z}, [C, L_n] = 0 \end{cases} \quad (3-115)$$

Cette algèbre est une extension centrale de l'algèbre de Witt, qui est l'algèbre des opérateurs différentiels du premier ordre sur  $\mathbb{C}[z, z^{-1}]$ . L'algèbre de Witt est engendrée par les  $l_n = -z^{n+1} \frac{d}{dz}$ .

Gelfand et Fuchs ont montré que l'algèbre de Virasoro est l'unique extension centrale non triviale de l'algèbre de Witt. Par extension centrale on entend que si l'on note  $\tilde{\mathfrak{g}}$  l'algèbre de Virasoro et  $\mathfrak{g}$  l'algèbre de Witt, alors il existe des éléments  $c_1, \dots, c_k$  appartenant à  $\tilde{\mathfrak{g}}$  qui vérifient  $\forall g \in \tilde{\mathfrak{g}}, \forall i, [c_i, g] = 0$  (on dit que les  $c_i$  sont *centraux*), et tels que

$$\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \oplus \mathbb{C}c_1 \oplus \mathbb{C}c_2 \oplus \dots \mathbb{C}c_k. \quad (3-116)$$

L'algèbre de Virasoro est une algèbre de Lie de dimension infinie qui a été considérée en premier lieu par les physiciens. Elle joue un rôle important dans plusieurs branches de la physique, en particulier en théorie quantique des champs. Or, il s'avère que beaucoup d'identités combinatoires classiques admettent maintenant une explication en termes de caractères de l'algèbre de Virasoro. Il est en effet possible de plonger les représentations de cette algèbre dans un espace dit "de Fock", que l'on peut voir comme étant celui des fonctions symétriques. Le terme "espace de Fock" n'est pas bien défini formellement. Il s'agit d'un terme employé pour désigner un certain type d'espaces utilisés par les physiciens. Nous allons définir l'*espace de Fock bosonique* et l'*espace de Fock fermionique*, puis voir comment faire le lien entre les deux, par ce que les physiciens appellent la *correspondance bosons-fermions*.

### 3.2.2 Espace de Fock bosonique

L'espace de Fock bosonique est obtenu à partir d'une représentation de l'*algèbre de Weyl*, qui est engendrée par les éléments  $a_k$  et les éléments  $a_k^\dagger$  ( $k \geq 1$ ), soumis aux relations suivantes.

$$[a_k, a_l] = 0, \quad [a_k^\dagger, a_l^\dagger] = 0, \quad [a_k, a_l^\dagger] = \delta_{kl}. \quad (3-117)$$

On peut construire une représentation de cette algèbre sur l'espace  $V = \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots]$  des polynômes en une infinité de variables à coefficients complexes, en identifiant  $a_k$  à l'opérateur  $\hat{x}_k$  de multiplication par  $x_k$ , et  $a_k^\dagger$  à  $\frac{\partial}{\partial x_k}$  pour  $k \geq 1$ .

On vérifie que ces opérateurs satisfont bien les relations de commutation de l'algèbre de Weyl, et qu'ils en définissent donc bien une *représentation*.

Les physiciens interprètent les éléments de  $V$  comme les états d'un système pouvant contenir un nombre variable de particules. Par exemple, l'écriture  $|4221\rangle$  correspond à une particule d'énergie 4, deux particules d'énergie 2 et une d'énergie 1. Cet état correspond au monôme  $x_4 x_2^2 x_1$ . De même, l'état vide  $|0\rangle$  correspond au polynôme constant 1.

De point de vue, l'opérateur  $a_k$  correspond à la création d'une particule d'énergie  $k$ . On l'appelle donc *opérateur de création*. De même, l'opérateur  $a_k^\dagger$  correspond à la destruction d'une particule d'énergie  $k$ . On l'appelle *opérateur d'annihilation*.

L'*"espace de Fock bosonique"* sera ainsi défini comme étant l'espace vectoriel engendré par tous les produits d'opérateurs  $a_k$  et  $a_k^\dagger$  appliqués à l'état vide  $|0\rangle$ . Cet espace coïncide avec  $V$  tout entier. De plus, en s'arrangeant pour réécrire chaque état comme une combinaison linéaire de monômes décroissants grâce à l'identité  $[X, Y] = XY - YX$ , on peut prendre comme base de cet espace les états

$$|k_1, k_2, \dots, k_r\rangle = a_{k_1} a_{k_2} \dots a_{k_r} |0\rangle, \quad k_1 \geq k_2 \geq \dots k_r. \quad (3-118)$$

Or, ces états peuvent être vus comme des partitions en identifiant un état  $|k_1, \dots, k_r\rangle$  à  $\lambda = (k_1, \dots, k_r)$ , et en notant cet état  $|\lambda\rangle$ . L'énergie totale de l'état  $|\lambda\rangle$  sera alors égale au poids  $|\lambda|$  de  $\lambda$ .

Cette identification permet d'assimiler l'espace de Fock bosonique à celui des fonctions symétriques, en posant

$$x_k = \frac{p_k}{k} \quad (3-119)$$

et en identifiant  $|\lambda\rangle$  à

$$x_\lambda = x_{\lambda_1} x_{\lambda_2} \dots x_{\lambda_r}. \quad (3-120)$$

L'opérateur  $a_k^\dagger$  devient alors, à un facteur près, l'*adjoint* de  $a_k$  au sens du produit scalaire standard sur  $\Lambda$ .

### 3.2.3 Espace de Fock fermionique

A présent, soit

$$V = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathbb{C}v_i \quad (3-121)$$

un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension infinie ayant pour base  $\{v_j | j \in \mathbb{Z}\}$ . On note  $gl(\infty)$  l'algèbre de Lie définie par

$$gl(\infty) = \{(a_{ij})_{i,j \in \mathbb{Z}} | \#\{a_{ij} | a_{ij} \neq 0\} < \infty\}. \quad (3-122)$$

Les éléments de  $gl(\infty)$  sont des matrices de dimension infinie ayant un nombre fini de coefficients non nuls. Le crochet de Lie dans  $gl(\infty)$  est le commutateur usuel défini par  $[A, B] = AB - BA$ .

Une base de  $gl(\infty)$  est formée par les  $E_{i,j}$  tels que  $E_{i,j} = \delta_{k,i} \delta_{j,l}$ .

$$E_{i,j} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (3-123)$$

Le '1' est à ligne  $i$ , colonne  $j$ . Ainsi,  $gl(\infty)$  agit naturellement sur  $V$  en remplaçant  $v_j$  par  $v_i$  s'il le trouve.

$$E_{i,j}v_k = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq j \\ v_i & \text{sinon} \end{cases} \quad (3-124)$$

En identifiant  $v_k$  à  $z^k$  et  $V$  à  $\mathbb{C}[z, z^{-1}]$ , on s'aperçoit que les opérateurs  $d_k = -z^{k+1} \frac{d}{dz}$  agissent aussi naturellement sur  $V$ , par

$$d_k v_l = -z^{k+1} \frac{d}{dz}(z^l) = -l z^{k+l} = -l v_{k+l}, \quad (3-125)$$

c'est-à-dire comme la matrice

$$D_k = - \sum_{l \in \mathbb{Z}} l E_{k+l, l}. \quad (3-126)$$

On a donc pour  $k, l \in \mathbb{Z}$

$$[D_k, D_l] = (k - l) D_{k-l}. \quad (3-127)$$

Or, ces relations de commutation caractérisent l'algèbre de Witt, dont l'algèbre de Virasoro est une extension centrale. Le problème est que les  $D_k$  ont une infinité de coefficients non nuls, et ne sont donc pas des éléments de  $gl(\infty)$ . En revanche, ce sont des éléments de l'algèbre de Lie  $\overline{gl}(\infty)$ , définie de la manière suivante

$$\overline{gl}(\infty) = \{(a_{i,j})_{i,j \in \mathbb{Z}} | \exists k > 0, a_{i,j} = 0 \text{ pour } |i - j| > k\}. \quad (3-128)$$

L'algèbre  $\overline{gl}(\infty)$  est l'algèbre de Lie des matrices de dimension infinie ayant un nombre fini de diagonales non nulles, et  $gl(\infty)$  en est une sous-algèbre.

Le rapprochement ayant été fait entre l'algèbre de Witt et  $\overline{gl}(\infty)$ , une bonne étape pour trouver des représentations de l'algèbre de Virasoro serait de chercher des représentations de  $gl(\infty)$  et de  $\overline{gl}(\infty)$ , par exemple sur

$$\bigwedge^n V = \{(v_{i_1} \wedge v_{i_2} \wedge \dots \wedge v_{i_n}), i_1 > i_2 > \dots > i_n\}. \quad (3-129)$$

Dans les cas  $A \in gl(\infty)$  et  $A \in \overline{gl}(\infty)$ ,  $A$  agit sur  $\bigwedge^n V$  par

$$\begin{aligned} A(v_{i_1} \wedge v_{i_2} \wedge \dots \wedge v_{i_n}) &= ((Av_{i_1}) \wedge v_{i_2} \wedge \dots \wedge v_{i_n}) + (v_{i_1} \wedge (Av_{i_2}) \wedge \dots \wedge v_{i_n}) \\ &+ \dots + (v_{i_1} \wedge v_{i_2} \wedge \dots \wedge (Av_{i_n})). \end{aligned} \quad (3-130)$$

Dans le cas  $A \in gl(\infty)$ , on peut étendre cette action aux produits vectoriels semi-infinis. Posons  $|m\rangle = v_m \wedge v_{m-1} \wedge \dots$  jusqu'à l'infini et notons  $\mathcal{F}^{(m)}$  l'espace engendré par les  $v_{i_1} \wedge v_{i_2} \wedge \dots$  qui ne diffèrent de  $|m\rangle$  que pour un nombre fini de  $v_{i_k}$ .

L'espace  $\mathcal{F}^{(m)}$  est engendré par les éléments  $\psi$  tels que

$$\psi = v_{i_1} \wedge v_{i_2} \wedge \dots \wedge v_{i_{m-k}} \wedge v_{m-k-1} \wedge v_{m-k-2} \dots \quad (3-131)$$

avec  $\exists k/i_m > i_{m-1} > \dots > i_{m-k}$  et  $i_l = m - l$  pour  $l > m - k$ .

Un tel vecteur est entièrement déterminé par un entier  $m$  et une partition  $\lambda$ , en obtenant la dernière ligne par soustraction de la seconde à la première dans le tableau suivant.

$$\begin{array}{cccccc} \hline i_1 & i_2 & i_3 & i_4 & \dots & \\ \hline m & m-1 & m-2 & m-3 & \dots & \\ \hline \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 & \dots & \\ \hline \end{array} \quad (3-132)$$

Par exemple dans  $\mathcal{F}^{(0)}$ , l'élément correspondant à (742211) correspondrait à la première ligne dans

$$\begin{array}{ccccccccc} \hline 7 & 3 & 0 & -1 & -3 & -4 & -6 & -7 & \dots \\ \hline 0 & -1 & -2 & -3 & -4 & -5 & -6 & -7 & \dots \\ \hline 7 & 4 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ \hline \end{array} \quad (3-133)$$

On note alors

$$|0, (742211)\rangle = v_7 \wedge v_3 \wedge v_0 \wedge v_{-1} \wedge v_{-3} \wedge v_{-4} \wedge v_{-6} \wedge v_{-7} \wedge \dots \quad (3-134)$$

En physique  $\mathcal{F}^{(m)}$  est appelé *secteur de charge  $m$* , et l'espace  $\mathcal{F}$  défini par

$$\mathcal{F} = \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} \mathcal{F}^{(m)} \quad (3-135)$$

est appelé *espace de Fock fermionique*.

En identifiant  $|m, \lambda\rangle$  à  $q^m s_\lambda$ , où  $q$  est une indéterminée, on peut également lier l'espace de Fock fermionique aux fonctions symétriques, ce qui permet de passer de l'espace de Fock fermionique à l'espace de Fock bosonique. Cette identification est appelée la *correspondance bosons-fermions*.

### 3.2.4 Une représentation de l'algèbre de Virasoro

L'espace de Fock fermionique  $\mathcal{F}$  peut être utilisé pour construire une représentation de l'algèbre de Virasoro.

Considérons sur  $\mathcal{F}$  les opérateurs  $\psi_k$  et  $\psi_k^*$  définis par

$$\psi_k(v_{i_1} \wedge v_{i_2} \wedge \dots) = v_k \wedge v_{i_1} \wedge v_{i_2} \wedge \dots \quad (3-136)$$

et

$$\psi_k^*(v_{i_1} \wedge v_{i_2} \wedge \dots) = \begin{cases} 0 & \text{si } i_r \neq k \\ (-1)^{r-1} v_{i_1} \wedge v_{i_2} \wedge \dots \wedge v_{i_{r-1}} \wedge v_{i_{r+1}} \wedge \dots & \text{sinon} \end{cases} \quad (3-137)$$

$\psi_k^*$  est alors l'adjoint de  $\psi_k$  pour le produit scalaire défini par

$$\langle m; \lambda | n; \mu \rangle = \delta_{m,n} \delta_{\lambda\mu} \quad (3-138)$$

De plus, en notant  $\{; \}$  l'*anticommutateur*, c'est-à-dire la loi définie par  $\{a, b\} = ab + ba$ , on a

$$\begin{cases} \{\psi_i, \psi_j\} = 0 \\ \{\psi_i^*, \psi_j^*\} = 0 \\ \{\psi_i, \psi_j^*\} = \delta_{i,j} \end{cases} \quad (3-139)$$

L'algèbre engendrée par les  $\psi_k$  et les  $\psi_k^*$  est appelée *algèbre de Clifford*, et on peut vérifier que pour tout  $i$  et pour tout  $j$ , l'action de  $E_{ij}$  sur  $v_{i_1} \wedge v_{i_2} \wedge \dots$  est la même que celle de  $\psi_i \psi_j^*$ . Cependant, en essayant d'étendre à  $\overline{gl}(\infty)$  cette action de  $gl(\infty)$  sur  $\mathcal{F}$ , on rencontre un problème. En effet on a  $\sum_{i \in \mathbb{Z}} E_{i,i} \in \overline{gl}(\infty)$ . Or,

$$\begin{aligned} \left( \sum_{i \in \mathbb{Z}} E_{i,i} \right) |0\rangle &= \dots + E_{1,1} |0\rangle + E_{0,0} |0\rangle + E_{-1,-1} |0\rangle + \dots \\ &= (\dots + 0 + 1 + 1 + 1 + \dots) |0\rangle \end{aligned} \quad (3-140)$$

Chaque  $E_{i,i}$ , en agissant sur  $v_{i_1} \wedge v_{i_2} \wedge \dots \wedge v_{i_n}$ , apporte un 1 à la somme s'il trouve un des  $i_r$ , et un 0 sinon. On a donc une somme infinie de 1, et cette divergence empêche de considérer cette action telle qu'elle.

Pour résoudre ce problème, on modifie l'action des  $(E_{i,i})$  lorsque  $i$  est négatif, en faisant agir les  $E_{i,j}$  par l'opérateur  $:\psi_i \psi_j^*$  : défini par

$$:\psi_i \psi_j^* := \begin{cases} \psi_i \psi_j^* & \text{si } i \neq j \\ \psi_i \psi_i^* & \text{si } i = j > 0 \\ -\psi_i^* \psi_i & \text{si } i = j \leq 0 \end{cases} \quad (3-141)$$

Cet opérateur est le *produit normalement ordonné* bien connu des physiciens. La modification que nous venons de décrire consiste à faire agir  $E_{i,i}$  par l'action naturelle de  $E_{i,i} - I$  lorsque  $i \leq 0$ , et à faire agir normalement les  $E_{i,j}$  dans les autres cas, de manière à ce que la somme (3-140) s'annule.

Cependant,

$$\hat{r} : E_{i,j} \longmapsto : \psi_i \psi_j^* : \quad (3-142)$$

n'est pas une représentation linéaire de  $\overline{gl}(\infty)$ , mais seulement une représentation projective, au sens où l'on a une égalité de la forme

$$[\hat{r}(A), \hat{r}(B)] = \hat{r}([A, B]) + \alpha(A, B)I, \quad (3-143)$$

où  $\alpha$  est défini par

$$\alpha(E_{i,j}, E_{k,l}) = \begin{cases} 1 & \text{si } i \leq 0, j \geq 1 \\ -1 & \text{si } j \leq 0, i \geq 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3-144)$$



En revanche,  $\hat{r}$  est une représentation *linéaire* d'une *extension centrale* de  $\overline{gl}(\infty)$ , que l'on note  $\hat{gl}(\infty)$ , et dont le crochet de Lie  $[[, ]]$  est défini par

$$[[E_{i,j}, E_{k,l}]] = [E_{i,j}, E_{k,l}] + \alpha(E_{i,j}, E_{k,l})I. \quad (3-145)$$

L'algèbre de Witt étant incluse dans  $\overline{gl}(\infty)$ , on obtient par restriction une représentation linéaire de l'algèbre de Virasoro qui en est une extension centrale, en posant

$$r(L_n) = \hat{r}(d_n). \quad (3-146)$$

### 3.2.5 Opérateurs vertex

Dans cette partie, nous allons voir comment interpréter les éléments de l'algèbre de Virasoro comme des opérateurs différentiels sur l'espace des fonctions symétriques, en utilisant la représentation que nous venons d'évoquer.

Comme les  $h_\lambda$  forment une  $\mathbb{Z}$ -base de  $\Lambda$ , les  $s_\lambda$  peuvent s'exprimer comme des polynômes en les  $h_i$ . Leur expression est donnée par la *formule de Jacobi-Trudi*

$$s_\lambda = \det(h_{\lambda_i - i + j})_{1 \leq i, j \leq n}. \quad (3-147)$$

Cette égalité permet de donner un sens à  $s_\alpha$  pour toute suite finie  $\alpha$  d'entiers, même si  $\alpha$  n'est pas une partition.

Par ailleurs, les fonctions de Schur ainsi définies obéissent aux règles suivantes.

Si on prend une suite finie d'entiers quelconque  $\alpha$ , avec  $l(\alpha) = n$ , qu'on lui ajoute  $(n-1, n-2, \dots, 0)$ , puis qu'on réordonne le résultat de manière à obtenir une nouvelle partition, alors en appelant  $\tilde{\alpha}$  la partition obtenue en retranchant  $(n-1, n-2, \dots, 0)$  à cette partition, on peut montrer que  $s_\alpha$  et  $s_{\tilde{\alpha}}$  sont égales au signe près.

Par exemple avec  $\lambda = (2, 0, 5, 3)$  cela donne

$$\begin{array}{cccc} \hline 2 & 0 & 5 & 3 \\ \hline 3 & 2 & 1 & 0 \\ \hline 5 & 2 & 6 & 3 \\ \hline 6 & 5 & 3 & 2 \\ \hline 3 & 2 & 1 & 0 \\ \hline 3 & 3 & 2 & 2 \\ \hline \end{array} \quad (3-148)$$

et on en déduit que  $s_{2053}$  et  $s_{3322}$  sont égales au signe près.

Or, les mêmes règles s'appliquent dans l'espace de Fock fermionique, ce qui montre que l'identification des états dans l'espace de Fock fermionique aux fonctions de Schur n'est pas arbitraire.

A présent, soit  $n \in \mathbb{Z}$  et  $\lambda$  une partition quelconque. En considérant les séries génératrices des fonctions de Schur et en développant le déterminant de Jacobi-Trudi selon sa première ligne, on obtient

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} s_{(n, \lambda)} z^n = \left( \sum_{n \geq 0} z^n h_n \right) \left( \sum_{m \geq 0} \left( -\frac{1}{z} \right)^m D_{e_m} \right) s_\lambda. \quad (3-149)$$

En utilisant les définitions des séries génératrices des  $e_n$  et des  $h_n$  et la formule de Newton, cette égalité se réécrit

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} s_{(n,\lambda)} z^n = (\exp(\sum_{k \geq 0} p_k)) (\exp(-\sum_{l \geq 0} \frac{z^{-l}}{l} D_{p_l})) s_\lambda, \quad (3-150)$$

où pour tout  $f \in \Lambda$ ,  $D_f$  désigne l'opérateur adjoint à la multiplication par  $f$ . On définit ensuite l'opérateur  $\Gamma_z$  par

$$\Gamma_z = \exp(\sum_{k \geq 0} \frac{z^k}{k} p_k) \exp(-\sum_{l \geq 0} \frac{z^{-l}}{l} D_{p_l}), \quad (3-151)$$

ou encore, puisque  $D_{p_l} = l \frac{\partial}{\partial p_l}$ ,

$$\Gamma_z = \exp(\sum_{k \geq 0} \frac{z^k}{k} p_k) \exp(-\sum_{l \geq 0} \frac{z^{-l}}{l} \frac{\partial}{\partial p_l}). \quad (3-152)$$

Cet opérateur est appelé *opérateur vertex*. D'après (3-150), il vérifie

$$\Gamma_z s_\lambda = \sum_{n \in \mathbb{Z}} s_{(n,\lambda)} z^n. \quad (3-153)$$

En identifiant l'espace  $\mathcal{F}^{(0)}$  à l'espace de Fock bosonique  $\mathbb{C}[p_1, p_2, \dots]$  grâce à la correspondance bosons-fermions, et en utilisant les opérateurs vertex, il est possible de voir les  $\hat{r}(E_{ij})$  comme étant des opérateurs différentiels.

Ainsi, l'action des  $\hat{r}(E_{ij})$  sur  $\mathbb{C}[p_1, p_2, \dots]$  est donnée par le coefficient de  $\hat{u}v^{-j}$  dans

$$\frac{1}{1 - \frac{v}{u}} [\Gamma(u, v) - 1], \quad (3-154)$$

où  $\Gamma(u, v)$  est l'opérateur vertex défini par

$$\Gamma(u, v) = \exp(\sum_{k \geq 1} \frac{u^k - v^k}{k} p_k) \exp(-\sum_{l \geq 1} (u^{-1} - v^{-1}) \frac{\partial}{\partial p_l}). \quad (3-155)$$

En exprimant les  $d_n$  en fonction des  $E_{ij}$  et en appliquant  $\hat{r}$ , on obtient ainsi des expressions des éléments de l'algèbre de Virasoro sous forme d'opérateurs différentiels.

### 3.3 Développement de fonctions symétriques des éléments de Jucys-Murphy sur les classes

On note  $\Xi_n$  l'alphabet des éléments de Jucys-Murphy de  $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$ . Comme  $f(\Xi_n) \in Z_n$  pour toute fonction symétrique  $f$ , on peut s'intéresser aux coefficients  $\alpha_{f,\mu}$  qui apparaissent dans le développement de  $f(\Xi_n)$  sur les classes

$$f(\Xi_n) = f(\xi_1, \dots, \xi_n) = \sum_{\mu \vdash n} \alpha_{f,\mu} C_\mu. \quad (3-156)$$

Dans le cas où  $f$  est une fonction élémentaire, Jucys montre que ce développement est particulièrement simple, puisque  $e_k(\Xi_n)$  est la somme formelle de toutes les permutations de  $n$  qui se décomposent en un produit de  $n - k$  cycles. Or, ces permutations sont celles dont le type cyclique est une partition de  $n$  de longueur  $n - k$ . Autrement dit,

$$e_k(\Xi_n) = \sum_{\lambda \vdash n, \tilde{\lambda} \vdash k} C_\lambda, \quad (3-157)$$

où on note  $\tilde{\lambda}$  la partition obtenue en retranchant 1 à toutes les parts de  $\lambda$  (par exemple si  $\lambda = (4331)$  alors  $\tilde{\lambda} = (332)$ ).

D'autres cas, tels que  $f = h_k$  et  $f = p_k$ , amènent à des résultats intéressants, en lien avec d'autres problèmes. Le reste de cette partie est dédié à la présentation de quelques résultats connus.

### 3.3.1 Le cas des fonctions complètes

Dans cette partie, nous évoquons un lien étudié par Novak dans [27] entre les fonctions complètes des éléments de Jucys-Murphy et la théorie des matrices aléatoires. Un problème important dans le cadre de cette théorie est la valeur des intégrales matricielles de la forme

$$I_d(i, j, i', j') = \int_{\mathbb{U}_d} u_{i(1)j(1)} u_{i(2)j(2)} \dots u_{i(n)j(n)} \bar{u}_{i'(1)j'(1)} \bar{u}_{i'(2)j'(2)} \dots \bar{u}_{i'(n)j'(n)} dU, \quad (3-158)$$

où  $i, j, i'$  et  $j'$  sont des fonctions de  $\{1, 2, \dots, n\}$  à valeurs dans  $\{1, 2, \dots, d\}$ , et où  $\mathbb{U}_d$  désigne le groupe unitaire défini par

$$\mathbb{U}_d = \{U \in GL_d(\mathbb{C}) / U^* = U^{-1}\} \quad (3-159)$$

et muni de la mesure de Haar normalisée  $dU$ .

Or, il existe une fonction centrale  $Wg_d$ , appelée *fonction de Weingarten*, vérifiant

$$I_d(i, j, i', j') = \sum_{\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_n} \prod_{k=1}^n \delta_{i(k)i'(\sigma(k))} \delta_{j(k)j'(\tau(k))} Wg_d(\tau\sigma^{-1}). \quad (3-160)$$

Lorsque  $d \geq n$ ,  $Wg_d(\sigma)$  peut s'écrire sous la forme d'une intégrale, de la façon suivante.

$$Wg_d(\sigma) = \int_{\mathbb{U}_d} u_{11} \dots u_{nn} \bar{u}_{1\sigma(1)} \dots \bar{u}_{n\sigma(n)} dU. \quad (3-161)$$

La fonction  $Wg_d$  admet un développement asymptotique de la forme

$$Wg_d(\mu) = \frac{a_0(\mu)}{d^n} + \frac{a_1(\mu)}{d^{n+1}} + \dots, \quad (3-162)$$

où les  $a_k$  sont également des fonctions centrales.

Le résultat de Novak est l'égalité, au signe près, des coefficients du développement asymptotique de la fonction de Weingarten et des fonctions complètes des éléments de Jucys-Murphy.

$$a_k = (-1)^k h_k(\Xi_n) \quad (3-163)$$

Cette égalité peut aussi s'écrire

$$h_k(\Xi_n) = (-1)^k \sum_{\mu \vdash n} a_k(\mu) C_\mu. \quad (3-164)$$

### 3.3.2 Le cas des sommes de puissances

Dans cette partie, on utilisera une normalisation des classes de conjugaison de  $\mathfrak{S}_n$ , obtenue en posant

$$a_{\kappa,n} = \frac{z_{\kappa,1^{n-k}}}{(n-k)!} C_{\kappa,1^{n-k}}, \quad (3-165)$$

où  $k = |\kappa|$ , de sorte que  $\kappa, 1^{n-k}$  soit la partition obtenue à partir des parts de  $\kappa$  en complétant par des 1 jusqu'à obtenir une partition de  $n$ .

En utilisant un opérateur vertex, Lascoux et Thibon construisent dans [21] une série génératrice qui permet de développer les  $p_\lambda(\Xi_n)$  sur les  $a_{\kappa,n}$ . Or, les coefficients qu'ils obtiennent ne dépendent pas de  $n$ , ce qui revient à dire que cette méthode permet de calculer d'un coup une égalité dans le centre de l'algèbre de chaque groupe symétrique. Ainsi, en notant  $q = e^t$ , en posant pour tout  $\kappa \vdash k \geq 1$

$$\phi_\kappa(t) = \frac{(1 - q^{-1})^{k-1} p_\kappa(q-1)}{k! z_\kappa(q-1)} \quad (3-166)$$

et en considérant le développement

$$\phi_\kappa(t) = \sum_{m \geq |\kappa| + l(\kappa) - 2} \phi_{\kappa,m} \frac{t^m}{m!}, \quad (3-167)$$

Lascoux et Thibon montrent que les coefficients  $\phi_{\kappa,m}$  vérifient

$$p_m(\Xi_n) = \sum_{k=1}^{m+1} \sum_{\substack{\kappa \vdash k \\ l(\kappa) \leq m-k+2}} \phi_{\kappa,m} a_{\kappa,n}. \quad (3-168)$$

Nous allons brièvement décrire la méthode qu'ils utilisent pour obtenir ce résultat. Considérons la série génératrice

$$F_n(t) = \sum_{k \geq 1} p_k(\Xi_n) \frac{t^k}{k!} = \sum_{i=1}^n (e^{t\xi_i} - 1), \quad (3-169)$$

et notons  $D^{(n)}$  l'opérateur agissant sur  $\Lambda^n$  par

$$D^{(n)}P = \text{ch}(F_n(t)) \times P. \quad (3-170)$$

La première étape consiste à remarquer que la valeur propre de  $D^{(n)}$  sur  $s_\lambda$  est

$$\sum_{\square \in \lambda} (e^{tc_\square} - 1) = \sum_{\square \in \lambda} (q^{c_\square} - 1) \quad (3-171)$$

(c'est une conséquence de (3-114)). Ici,  $c_\square$  désigne le "contenu" associé à la case  $\square$  du diagramme de Young correspondant à  $\lambda$ .

On réévalue ensuite cette somme en fonction des parts de  $\lambda$ . Un calcul simple montre que

$$\sum_{\square \in \lambda} q^{c_\square} = \frac{q}{q-1} \sum_{i=1}^n (q^{\lambda_i-1} - q^{-i}). \quad (3-172)$$

On exprime ensuite l'opérateur induit par  $D^{(n)}$  sur l'espace  $\Lambda_n$  en termes des variables  $x_i$ . Ainsi, en posant  $\Delta_n = \prod_{i < j} (x_i - x_j)$ ,  $\square_n = (x_1 x_2 \dots x_n)^n$ , et  $D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ , on montre que

$$\frac{\square_n}{\Delta_n} \left( \sum_{i=1}^n q^{D_i} \right) \frac{\Delta_n}{\square_n} s_\lambda = \left( \sum_{i=1}^n q^{\lambda_i - i} \right) s_\lambda, \quad (3-173)$$

Ce qui implique que l'opérateur

$$\frac{q}{q-1} \frac{\square_n}{\Delta_n} \left( \sum_{i=1}^n q^{D_i} - q^{-i} \right) \frac{\Delta_n}{\square_n} - \sum_{i=1}^n D_i \quad (3-174)$$

a les mêmes valeurs propres que  $D^{(n)}$  sur les fonctions de Schur en  $n$  variables, et donc que cet opérateur est égal à  $D^{(n)}$ . En faisant tendre  $n$  vers l'infini, on obtient un opérateur

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} D^{(n)}. \quad (3-175)$$

L'opérateur  $D^{(n)}$  est la restriction de  $D$  à  $\Lambda^n$ . C'est grâce à cet opérateur  $D$  que l'on peut travailler simultanément dans tous les groupes symétriques.

On exprime l'action de  $D$  sur  $\Lambda(A)$  en terme des opérateurs  $a_k$  et  $a_k^\dagger$  définis et identifiés à des opérateurs différentiels sur  $\Lambda$  dans la partie 3.2.2 (ce procédé est appelé la *bosonisation*), et on en déduit une expression simple de  $D$  en fonction des opérateurs Vertex classiques, que l'on utilise pour obtenir la formule (3-168).

### 3.3.3 Le cas des produits de sommes de puissances

Pour développer  $p_\lambda(\Xi_n)$  sur les classes, Lascoux et Thibon construisent dans [21] la série génératrice

$$G(t; A, B) = e^{p_1(A)} \sigma_1(AB) \sum_{r \geq 1} \frac{h_r((q-1)A) h_r((1-q^{-1})(B+E))}{(q-1)(1-q^{-1})}. \quad (3-176)$$

Par  $E$  on désigne l'*alphabet exponentiel*, qui vérifie

$$p_k(E) = \delta_{1k}. \quad (3-177)$$

En développant  $\sigma_1(AB)$  et  $h_r$  sur les  $p_\lambda$ , on peut réécrire  $e^{-p_1(A)} G(t; A, B)$  sous la forme

$$\left( \sum \frac{p_\lambda(A) p_\lambda(B)}{z_\lambda} \right) \sum_{r \leq 1} \left( \frac{(\sum_{\lambda \vdash r} \frac{\prod_i (q^{\lambda_i} - 1) p_{\lambda_i}(A)}{z_\lambda}) (\sum_{\lambda \vdash r} \frac{\prod_i (1 - q^{-\lambda_i}) p_{\lambda_i}(B+E)}{z_\lambda})}{(q-1)(1-q^{-1})} \right). \quad (3-178)$$

Toutes les partitions, y compris la partition vide, entrent en compte dans la première somme. On a

$$q = e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} \dots \quad (3-179)$$

En développant  $e^{-p_1(A)} G(t; A, B)$  selon  $t$ , on trouve que pour  $\kappa$  et  $m$  donnés, le coefficient en  $\frac{t^m}{m!} \frac{p_\kappa(B)}{z_\kappa}$  est un polynôme de la forme

$$\sum_{\mu} d_{\kappa, m}^{\mu} p_{\mu}(A). \quad (3-180)$$

Par une méthode analogue à celle qui amène à (3-168), Lascoux et Thibon montrent que les coefficients  $d_{\kappa,m}^\mu$  vérifient

$$p_m(\Xi_n)a_{\kappa,n} = \sum_{\mu} d_{\kappa,m}^\mu a_{\mu,n}. \quad (3-181)$$

La formule (3-168) correspond au cas où  $B = 0$ . Notons qu'une fois encore les coefficients ne dépendent pas de  $n$ .

Ainsi, soit  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$  une partition de longueur  $l(\lambda) = 2$ . La formule (3-168) permet alors de développer  $p_{\lambda_2}(\Xi_n)$  sur les classes de conjugaison normalisées, ce qui permet de déterminer les  $\beta_\kappa$  dans

$$p_\lambda(\Xi_n) = p_{\lambda_1}(\Xi_n)p_{\lambda_2}(\Xi_n) = p_{\lambda_1}(\Xi_n) \sum_{\kappa} \beta_\kappa a_\kappa = \sum_{\mu} \beta_\kappa p_{\lambda_1}(\Xi_n)a_\kappa. \quad (3-182)$$

Or, la formule (3-181) permet de développer les  $p_m(\Xi_n)a_\kappa$  sur les  $a_{\mu,n}$ , et donc d'exprimer  $p_\lambda(\Xi_n)$  comme combinaison linéaire de classes de conjugaison normalisées, avec des coefficients indépendants de  $n$ .

Par récurrence, on obtient un algorithme permettant de développer  $p_\lambda(\Xi_n)$  de cette façon quelque soit la longueur de  $\lambda$ .

### 3.3.4 Autres cas connus

Récemment, Lassalle a présenté dans [22] une méthode analytique pour obtenir les coefficients du développement d'autres fonctions symétriques d'éléments de Jucys-Murphy sur les classes. Sa méthode permet de résoudre le problème pour le cas  $f = h_k$  et pour le cas du polynôme de Hall-Littlewood  $f = P_k(z)$  au moyen de formules de récurrence (les polynômes de Hall-Littlewood  $P_k(z)$  sont une famille de fonctions symétriques qui interpole entre  $h_k$  et  $p_k$ ). Sa méthode fonctionne aussi pour les cas  $f = h_k e_l$  et  $f = s_{(k,1^l)}$ . De plus, elle permet de retrouver le résultat de Jucys pour le cas  $f = e_k$  et le résultat de Lascoux et Thibon pour le cas  $f = p_k$ . Tout comme Lascoux et Thibon dans [21], il utilise une forme normalisée des classes de conjugaison de  $\mathfrak{S}_n$ , et obtient des résultats indépendants de  $n$ . Ses formules sont redémontrées par Féray [8], qui en donne cette fois une démonstration combinatoire.

## 3.4 L'algèbre de Farahat-Higman

Dans cette section, nous présentons une algèbre qui encode des propriétés de stabilité des  $Z_n$  : l'algèbre de Farahat-Higman.

### 3.4.1 Définition de l'algèbre de Farahat-Higman

Pour une partition  $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r)$  donnée, on note

$$\bar{\mu} = (\mu_1 - 1, \mu_2 - 1, \dots, \mu_r - 1) \quad (3-183)$$

le *type cyclique modifié* des permutations de type cyclique  $\mu$  (que l'on appellera aussi le *poids modifié* de  $\mu$ ). Par exemple, quelque soit le  $n$  considéré, le type cyclique des transpositions

de  $\mathfrak{S}_n$  est toujours

$$(2 - 1, 1 - 1, 1 - 1, \dots, 1 - 1) = (1). \quad (3-184)$$

En notant  $c_\rho(n)$  la classe de conjugaison  $C_\mu$  de  $\mathfrak{S}_n$  telle que  $\bar{\mu} = \rho$ , on peut réécrire (3-105) sous la forme

$$c_\mu(n)c_\nu(n) = \sum_{\lambda} a_{\mu\nu}^\lambda(n)c_\lambda(n). \quad (3-185)$$

Farahat et Higman ont montré dans [7] que les coefficients  $a_{\mu\nu}^\lambda(n)$  sont des fonctions polynomiales en  $n$ , et qu'ils sont de plus *indépendants* de  $n$  lorsque  $|\lambda| = |\mu| + |\nu|$ . Ce dernier cas correspond au plus grand poids possible pour  $\lambda$  (lorsque  $|\lambda| < |\mu| + |\nu|$ , on a  $a_{\mu\nu}^\lambda(n) = 0$ ). On peut utiliser les  $a_{\mu\nu}^\lambda$  correspondant aux  $\lambda$  de poids maximal pour définir une algèbre  $R$  engendrée par les symboles formels  $c_\mu$  indexés par toutes les partitions, avec la règle de multiplication

$$c_\mu c_\nu = \sum_{|\lambda|=|\mu|+|\nu|} a_{\mu\nu}^\lambda c_\lambda. \quad (3-186)$$

Cette algèbre est appelée l'*algèbre de Farahat-Higman* (voir [7] et [24, ex. 24 p 131]). Farahat et Higman ont aussi montré dans [7] que  $R$  est isomorphe à l'algèbre des fonctions symétriques  $\Lambda$ . La construction d'un isomorphisme explicite  $\Phi : R \rightarrow \Lambda$  est plus récente, et on la doit à Macdonald [24, ex. 25 p 132] (une autre démonstration a été donnée par Goulden et Jackson dans [13]). Afin d'introduire cet isomorphisme, nous aurons besoin d'évoquer une base particulière de  $\Lambda$  définie dans [24, ex. 24 p 35].

### 3.4.2 La base $(h_\mu^*)$ de $\Lambda$

Considérons la série formelle

$$u = t\sigma_t(X) = t + h_1 t^2 + h_2 t^3 + \dots \quad (3-187)$$

Cette série admet une série inverse pour la composition, dont les coefficients permettent d'écrire  $t$  comme une série en  $u$ , de la manière suivante

$$t = u + h_1^* u^2 + h_2^* u^3 + \dots \quad (3-188)$$

Les coefficients  $h_k^*$  sont des fonctions symétriques homogènes de degré  $k$ . De plus, l'homomorphisme d'algèbre  $\psi$  de  $\Lambda$  dans  $\Lambda$  défini par  $\psi(h_k) = h_k^*$  pour tout  $k$  vérifie

$$\psi^2 = Id_\Lambda. \quad (3-189)$$

La formule d'inversion de Lagrange (voir [24, ex. 24 p 35]) nous indique que  $(n+1)h_n^*$  est le coefficient de  $t^n$  dans  $\sigma_t(X)^{-(n+1)}$ , et donc que

$$h_n^* = \frac{h_n(-(n+1)X)}{n+1}. \quad (3-190)$$

On obtient de plus une  $\mathbb{Z}$ -base multiplicative de  $\Lambda$  en posant pour chaque partition  $\lambda$

$$h_\lambda^* = h_{\lambda_1}^* h_{\lambda_2}^* \dots \quad (3-191)$$

Une expression explicite du développement de  $h_n^*$  sur la base  $h_\lambda$  est donnée dans [24, ex. 24 p 35] par la formule

$$(n+1)h_n^* = \sum_{\lambda \vdash n} (-1)^{l(\lambda)} \binom{n+l(\lambda)}{n} u_\lambda h_\lambda, \quad (3-192)$$

avec

$$u_\lambda = \frac{l(\lambda)}{\prod_{i \geq 1} m_i(\lambda)!}. \quad (3-193)$$

On peut écrire  $h_n^*$  sous la forme

$$h_n^* = -h_n + \sum_{\mu < (n)} u_{(n)\mu} h_\mu, \quad (3-194)$$

et on en déduit que  $h_\lambda^*$  peut s'écrire sous la forme

$$h_\lambda^* = (-1)^{l(\lambda)} h_\lambda + \sum_{\mu < \lambda} u_{\lambda\mu} h_\mu. \quad (3-195)$$

La matrice  $S$  de passage de  $h^*$  dans  $h$  est strictement triangulaire supérieure, et vérifie  $S_{\lambda\lambda} = (-1)^{l(\lambda)}$ .

### 3.4.3 Formules de Macdonald et isomorphisme entre $R$ et $\Lambda$

Dans le cas où  $\mu$  et  $\nu$  sont des partitions de longueur 1 ( $\mu = (r)$  et  $\nu = (m)$ ), Macdonald donne dans [24, ex. 24 p 131] la formule explicite suivante pour  $a_{\lambda(r)}^{(m)}$ ,  $m = |\lambda| + r$ .

$$a_{\lambda(r)}^{(m)} = \begin{cases} \frac{(m+1)r!}{(r+1-l(\lambda)) \prod_{i>0} m_i(\lambda)!} & \text{si } l(\lambda) \leq r+1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3-196)$$

Macdonald donne également la formule de récurrence suivante, où  $\nu$  est une partition quelconque avec  $|\nu| = |\lambda| + r$ .

$$a_{\lambda(r)}^\nu = \sum_{(i,\mu)/\mu \cup \nu = \lambda \cup (\nu_i)} a_{\mu(r)}^{(\nu_i)} \quad (3-197)$$

Ces deux formules déterminent entièrement la structure multiplicative de  $R$ .

On considère maintenant la base  $(g_\lambda)$ , définie comme étant la base duale de la base  $(h_\lambda^*)$  au sens du produit scalaire usuel sur  $\Lambda$ , c'est-à-dire au sens où

$$\langle g_\lambda, h_\mu^* \rangle = \delta_{\lambda\mu}. \quad (3-198)$$

La matrice de passage de  $g$  dans  $m$  est la *transposée*  $S^T$  de la matrice de passage  $S$  de  $h^*$  dans  $h$ . Ainsi, on a

$$g_\lambda = (-1)^{l(\lambda)} m_\lambda + \sum_{\mu > \lambda} u_{\mu\lambda} m_\mu, \quad (3-199)$$

avec les mêmes  $u_{\lambda\mu}$  que dans (3-195).

On a en particulier

$$g_{(n)} = -m_{(n)} = -p_n. \quad (3-200)$$



La matrice  $S^T$  est également *auto-inversible*.

Macdonald montre que l'application linéaire  $\Phi$  de  $R$  dans  $\Lambda$  qui envoie les  $c_\lambda$  sur les  $g_\lambda$  est en fait un *isomorphisme d'algèbres*. Pour cela il montre que les constantes de structure  $a_{\mu\nu}^\lambda$  de  $R$  dans la base des  $g_\mu$  vérifient les formules de Macdonald. Or ces deux formules déterminent entièrement la structure de  $R$ , dont les  $c_\mu$  forment une base, de même que les  $g_\mu$  forment une base de  $\Lambda$ .

**Théorème 3.4.1** (Macdonald). *L'application linéaire*

$$\Phi : \begin{array}{l} R \rightarrow \Lambda \\ c_\mu \mapsto g_\mu \end{array} \quad (3-201)$$

*est un isomorphisme d'algèbres.*

## 3.5 Projections des fonctions symétriques des éléments de Jucys-Murphy dans l'algèbre de Farahat-Higman

### 3.5.1 Un résultat de Murray

Soit  $f$  une fonction symétrique homogène quelconque. Le développement

$$f(\Xi_n) = \sum_{\mu \vdash n} \alpha_{f,\mu} C_\mu \quad (3-202)$$

peut alors se réécrire en terme de types cycliques modifiés

$$f(\Xi_n) = \sum k_{f,\mu}(n) c_\mu(n). \quad (3-203)$$

Désignons par  $r$  le degré de  $f$ . Lorsque  $|\mu| = r$ ,  $k_{f,\mu}(n)$  ne dépend pas de  $n$ . On peut donc renommer ce coefficient  $k_{f,\mu}$  et définir un nouvel élément  $f(\Xi)$  de l'algèbre de Farahat-Higman  $R$  en considérant seulement les termes maximaux dans le développement de  $f(\Xi_n)$  sur les classes pour  $n \geq 2r$ , c'est-à-dire ceux qui correspondent aux  $c_\mu(n)$  associés aux partitions  $\mu$  de  $r$  (si on avait  $n < 2r$ , certains de ces  $c_\mu(n)$  n'existeraient pas, comme par exemple  $c_{1^r}$ ).

$$f(\Xi) = \sum_{\mu \vdash r} k_{f,\mu} c_\mu. \quad (3-204)$$

Murray [26] a montré que pour toute fonction symétrique  $f$ , l'isomorphisme  $\Phi$  de  $R$  dans  $\Lambda$  envoie  $f(\Xi)$  sur l'antipode  $f(-X)$  de  $f$ .

$$\Phi(f(\Xi)) = f(-X). \quad (3-205)$$

Comme on a de plus  $\Phi(c_\mu) = g_\mu$ , on obtient en utilisant la dualité entre les bases  $(g_\mu)$  et  $(h_\mu^*)$  que

$$k_{f,\mu} = \langle f(-X), h_\mu^* \rangle \quad (3-206)$$

pour toute partition  $\mu$ .

### 3.5.2 Une nouvelle démonstration du résultat de Murray

En utilisant l'opérateur vertex de Lascoux et Thibon, nous allons donner une démonstration de (3-205) différente de celle de Murray.

La formule (3-168) permet d'affirmer que la seule classe de poids modifié  $m$  qui peut apporter une contribution à  $p_m(\Xi_n)$  est  $C_{(m+1)\cup 1^{n-k}}$ . En effet, pour  $|\kappa| - l(\kappa) = m$ , si on avait  $l(\kappa) > 1$  on aurait  $|\kappa| > m + 1$ , or les  $\kappa$  vérifiant cette inégalité ne sont pas pris en compte dans la somme dans (3-168).

Ainsi, le développement

$$p_m(\Xi) = \sum_{\mu \vdash m} k_\mu c_\mu \quad (3-207)$$

peut se réduire à

$$p_m(\Xi) = k_m c_m. \quad (3-208)$$

Il reste à déterminer le coefficient  $k_m$ . Pour cela, on se place dans le cas où  $n = m + 1$ . Dans ce cas, on a

$$p_m(\Xi_{m+1}) = \xi_1^m + \xi_2^m + \dots + \xi_{m+1}^m, \quad (3-209)$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} p_m(\Xi_{m+1}) &= 0^m + (1, 2)^m + ((1, 3) + (2, 3))^m + \dots \\ &+ ((1, m+1) + (2, m+1) + \dots + (m, m+1))^m. \end{aligned} \quad (3-210)$$

Seul le dernier terme de cette somme peut apporter une contribution à  $C_{m+1}$ , or ce dernier terme peut s'écrire

$$\sum (i_1, m+1)(i_2, m+1) \dots (i_m, m+1), \quad (3-211)$$

où la somme porte sur tous les  $(i_1, i_2, \dots, i_m)$  où les  $i_k$  sont des entiers compris entre 1 et  $m$ . Dans cette nouvelle somme, seuls les termes correspondant à des  $i_k$  tous différents peuvent apporter une contribution à  $C_{m+1}$ . Or ces termes sont au nombre de  $m!$ , ce qui correspond au cardinal de  $C_{m+1}$ . Le coefficient de  $C_{m+1}$  dans  $p_m(\Xi_{m+1})$  vaut donc 1. Or ce coefficient ne dépend pas de  $n$  car  $(m+1)$  est de poids modifié maximal. Il correspond donc au coefficient de  $c_m$  dans  $p_m(\Xi)$ .

Le coefficient  $k_m$  vaut donc 1, et on a

$$p_m(\Xi) = c_m. \quad (3-212)$$

On en déduit que  $\Phi(p_m(\Xi)) = \Phi(c_m) = g_m = -p_m$  d'après (3-200), d'où

$$\Phi(p_\lambda(\Xi)) = \Phi\left(\prod_i p_{\lambda_i}(\Xi)\right) = \prod_i \Phi(p_{\lambda_i}(\Xi)). \quad (3-213)$$

On a donc  $\Phi(p_\lambda(\Xi)) = \prod_i (-p_{\lambda_i}) = (-1)^{l(\lambda)} p_\lambda = p_\lambda(-X)$ , et comme les  $p_\lambda$  forment une base de  $\Lambda$ , on a pour n'importe quelle fonction symétrique le résultat (3-205).

### 3.5.3 Autres résultats connus

On peut directement déduire de (3-157) que pour toute partition  $\mu$  de poids  $m$ ,

$$k_{e_m, \mu} = 1. \quad (3-214)$$

De même, en étudiant les liens entre les fonctions complètes simples des éléments de Jucys-Murphy et la théorie des matrices aléatoires dans [27], Novak donne une formule explicite pour les coefficients associés aux classes de type cyclique modifié maximal dans le développement des fonctions complètes simples des éléments de Jucys-Murphy sur les classes. Cette formule peut s'écrire

$$k_{h_m, \mu} = \prod_i \text{Cat}_{\mu_i - 1}. \quad (3-215)$$

On désigne ici par  $\text{Cat}_n$  le  $n$  ième nombre de catalan  $\text{Cat}_n$ , défini par

$$\text{Cat}_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}. \quad (3-216)$$

Les nombres de Catalan peuvent encore s'écrire sous la forme

$$\text{Cat}_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}. \quad (3-217)$$

Ce sont des entiers naturels qui interviennent dans de nombreux problèmes en combinatoires. Le nombre de Catalan  $\text{Cat}_n$  correspond au nombre de combinaisons cohérentes envisageables de  $n$  parenthèses ouvrantes et  $n$  parenthèses fermantes. Par exemple pour  $n = 3$ , il y en a 5.

$$((())), ((()()), ((()()()), ()()()), ()()(). \quad (3-218)$$

La séquence suivante correspond à la liste des premiers  $\text{Cat}_n$  en partant de  $n = 0$ .

$$1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429... \quad (3-219)$$

Dans [25], Matsumoto et Novak s'intéressent aux coefficients  $k_{m_\lambda, \mu}$  associées aux classes de type cyclique modifié maximal dans le développement des monomiales des éléments de Jucys-Murphy sur les classes, que l'on notera encore  $L_\mu^\lambda$ .

$$m_\lambda(\Xi) = \sum_{|\lambda|=|\mu|} L_\mu^\lambda c_\mu. \quad (3-220)$$

Pour cela, ils considèrent un raffinement des nombres de Catalan, qu'ils construisent à partir d'une des nombreuses interprétations de cette famille de nombres.

Pour un entier  $k$  donné, on note  $\mathfrak{C}(k)$  l'ensemble des suites croissantes au sens large  $(i_1, \dots, i_k)$  de  $k$  entiers vérifiant pour tout  $p$

$$i_p \geq p \quad (3-221)$$

et

$$i_k = k. \quad (3-222)$$

Par exemple, on a

$$\mathfrak{C}(4) = \{(1234), (1244), (1334), (1344), (1444), (2234), (2244), (2334), (2344), (2444), (3334), (3344), (3444), (4444)\}. \quad (3-223)$$

On voit que  $\#\mathfrak{C}(4) = 14$ , et d'une manière générale

$$\#\mathfrak{C}(k) = \text{Cat}_k. \quad (3-224)$$

A présent, soit  $\lambda \vdash k$ . On dira qu'un élément  $(i_1, \dots, i_k)$  de  $\mathfrak{C}(k)$  est de type  $\lambda$  si  $\lambda$  est une permutation de la suite des multiplicités de chaque entier dans  $(i_1, \dots, i_k)$ . Par exemple dans  $\mathfrak{C}(4)$ ,  $(2244)$  et  $(3344)$  sont de type  $(2, 2)$ , tandis que  $(1244)$ ,  $(1334)$ ,  $(2234)$ ,  $(2334)$  et  $(2344)$  sont de type  $(2, 1, 1)$ .

Par la suite, on notera  $RC(\lambda)$  le nombre d'éléments de type  $\lambda$  dans  $\mathfrak{C}(k)$ ,  $\lambda \vdash k$ . On a ainsi  $RC(2, 2) = 2$  et  $RC(2, 1, 1) = 5$ . Et d'une manière générale, comme  $\#\mathfrak{C}(k) = \text{Cat}_k$ , on a

$$\sum_{\lambda \vdash k} RC(\lambda) = \text{Cat}_k. \quad (3-225)$$

Pour n'importe quelle partition d'entier  $\lambda$ , on a une évaluation explicite de  $RC(\lambda)$ , donnée par la formule suivante

$$RC(\lambda) = \frac{|\lambda|!}{(|\lambda| - l(\lambda) + 1)! \prod_{i \geq 1} m_i(\lambda)!} = \frac{1}{|\lambda| + 1} m_\lambda(1^{|\lambda|+1}). \quad (3-226)$$

A présent, soient  $\lambda$  et  $\mu$  deux partitions d'un même entier  $k$  donné. On note alors  $\mathfrak{R}(\lambda, \mu)$  l'ensemble de suites de partitions défini de la manière suivante.

$$\mathfrak{R}(\lambda, \mu) = \{(\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \dots) / \forall i, \lambda^{(i)} \vdash \mu_i \text{ et } \lambda = \lambda^{(1)} \cup \lambda^{(2)} \cup \dots\} \quad (3-227)$$

Cette définition permet de donner la formule explicite de Matsumoto et Novak pour  $L_\mu^\lambda$ , qui correspond à l'égalité

$$L_\mu^\lambda = \sum_{(\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \dots) \in \mathfrak{R}(\lambda, \mu)} RC(\lambda^{(1)}) RC(\lambda^{(2)}) \dots \quad (3-228)$$

### 3.5.4 Un exemple d'utilisation du résultat de Murray

En utilisant son résultat (3-205), Murray obtient les formules (3-214) et (3-215) à partir de calculs relativement simples dans l'algèbre  $\Lambda$  des fonctions symétriques. De la même façon, on se propose de redémontrer le résultat (3-228) de Matsumoto et Novak à partir de (3-205). On a, pour  $|\lambda| = |\mu|$ ,

$$\begin{aligned} L_\mu^\lambda &= \langle m_\lambda(-X), h_\mu^* \rangle \\ &= \langle m_\lambda, h_\mu^*(-X) \rangle \\ &= \left\langle m_\lambda, \frac{h_{\mu_1}((\mu_1 + 1)X) h_{\mu_2}((\mu_2 + 1)X) \dots}{(\mu_1 + 1)(\mu_2 + 1) \dots} \right\rangle. \end{aligned} \quad (3-229)$$

Le coefficient  $L_\mu^\lambda$  est donc égal au produit de  $\frac{1}{\prod_i(\mu_i+1)}$  par

$$\left\langle m_\lambda, \left( \sum_{\lambda^{(1)} \vdash \mu_1} m_{\lambda^{(1)}}(\mu_1 + 1) h_{\lambda^{(1)}} \right) \left( \sum_{\lambda^{(2)} \vdash \mu_2} m_{\lambda^{(2)}}(\mu_2 + 1) h_{\lambda^{(2)}} \right) \dots \right\rangle. \quad (3-230)$$

En développant la partie à droite du produit scalaire, on n'obtient des termes non nuls que si  $h_{\lambda^{(1)}} h_{\lambda^{(2)}} \dots = h_\lambda$ , car sinon on a  $\langle m_\lambda, h_{\lambda^{(1)}} h_{\lambda^{(2)}} \dots \rangle = 0$ . On en déduit

$$L_\mu^\lambda = \frac{1}{\prod_i(\mu_i + 1)} \sum (m_{\lambda^{(1)}}(\mu_1 + 1)) (m_{\lambda^{(2)}}(\mu_2 + 1)) \dots \langle m_\lambda, h_\lambda \rangle. \quad (3-231)$$

Cette somme porte sur les  $(\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \dots)$  qui vérifient  $\lambda^{(i)} \vdash \mu_i$  pour tout  $i$ , et  $\bigcup_i \lambda^{(i)} = \lambda$ . Autrement dit, cette somme porte sur l'ensemble  $\mathfrak{R}(\lambda, \mu)$ . De plus on a  $\langle m_\lambda, h_\lambda \rangle = 1$ , donc

$$L_\mu^\lambda = \sum_{(\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \dots) \in \mathfrak{R}(\lambda, \mu)} \frac{m_{\lambda^{(1)}}(\mu_1 + 1)}{\mu_1 + 1} \frac{m_{\lambda^{(2)}}(\mu_2 + 1)}{\mu_2 + 1} \dots, \quad (3-232)$$

et on retombe donc bien sur

$$L_\mu^\lambda = \sum_{(\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \dots) \in \mathfrak{R}(\lambda, \mu)} RC(\lambda^{(1)}) RC(\lambda^{(2)}) \dots \quad (3-233)$$

### 3.5.5 Nombre de factorisations d'un cycle en un produit de cycles d'un type donné

On définit le type cyclique modifié d'un produit de cycles comme étant la suite formée à partir des longueurs des cycles auxquelles on retire 1. Par exemple, le produit (13)(234) est de type cyclique modifié  $(2 - 1, 3 - 1) = (1, 2)$ . On voit que le type cyclique modifié d'un produit de cycles n'est pas forcément une partition.

Dans [1], Biane obtient une formule explicite pour le nombre  $\alpha_\lambda$  de factorisations d'un cycle de longueur  $n + 1$  en un produit de cycles de type cyclique modifié donné  $\lambda$ , avec  $|\lambda| = n$ . Cette formule est la suivante

$$\alpha_\lambda = (n + 1)^{l(\lambda) - 1}. \quad (3-234)$$

Nous allons à présent redémontrer cette formule à partir de calculs sur des fonctions symétriques. Pour cela, on considère dans  $R$  le produit

$$c^\lambda = c_{\lambda_1} c_{\lambda_2} \dots \quad (3-235)$$

Comme l'algèbre de Farahat-Highman est isomorphe à l'algèbre des fonctions symétriques, elle est *commutative*, et l'ordre des éléments de  $\lambda$  n'a donc aucune importance. On peut donc considérer que  $\lambda$  est une partition.

On a d'après (3-200)

$$\begin{aligned} \Phi(c^\lambda) &= g_{\lambda_1} g_{\lambda_2} \dots = (-p_{\lambda_1})(-p_{\lambda_2}) \dots \\ &= (-1)^{l(\lambda)} p_\lambda = p_\lambda(-X), \end{aligned} \quad (3-236)$$

et on déduit de (3-205)

$$c^\lambda = p_\lambda(\Xi). \quad (3-237)$$

De plus,  $c^\lambda$  est la somme de tous les produits de cycles de type modifié  $\lambda$ , et  $c_n$  est la somme de tous les cycles de longueur  $n + 1$ . Ainsi, le nombre total de produits de cycles de type modifié  $\lambda$  est  $k_n^\lambda \text{card}(c_n)$ , où  $k_n^\lambda$  désigne le coefficient en  $c_n$  dans  $c^\lambda$ . Le nombre  $\alpha_\lambda$  de ces factorisations ne dépendant pas du choix du cycle, on a

$$\alpha_\lambda = k_n^\lambda \frac{\text{card}(c_n)}{\text{card}(c_n)} = k_n^\lambda. \quad (3-238)$$

Or d'après (3-237), ce coefficient est aussi le coefficient en  $c_n$  dans  $p_\lambda(\Xi)$ , ce qui d'après (3-205) revient à dire que

$$\alpha_\lambda = (-1)^{l(\lambda)} \langle p_\lambda, h_n^* \rangle. \quad (3-239)$$

D'autrepart, on a  $h_n^* = \frac{h_n(-(n+1)X)}{n+1}$  (3-190), d'où

$$\begin{aligned} \alpha_\lambda &= \langle (-1)^{l(\lambda)} p_\lambda, h_n^* \rangle \\ &= \left\langle p_\lambda(-X), \frac{1}{n+1} h_n(-(n+1)X) \right\rangle \\ &= \frac{1}{n+1} \langle p_\lambda((n+1)X), h_n \rangle \\ &= \frac{1}{n+1} (n+1)^{l(\lambda)} \langle p_\lambda, h_n \rangle \\ &= (n+1)^{l(\lambda)-1} \langle p_\lambda, h_n \rangle. \end{aligned} \quad (3-240)$$

Or les bases  $(m_\lambda)$  et  $(h_\lambda)$  sont *duales* au sens du produit scalaire usuel sur  $\Lambda$ . On en déduit que  $\langle p_\lambda, h_n \rangle$  correspond au coefficient en  $m_n$  dans  $p_\lambda$ , et vaut donc 1, ce qui achève de démontrer (3-234).

**Remarque 3.5.1.** On a

$$\langle p_\lambda, h_n^* \rangle = (-1)^{l(\lambda)} (n+1)^{l(\lambda)-1}. \quad (3-241)$$

Cette égalité permet de développer  $h_n^*$  sur la base des  $p_\mu$ .

$$h_n^* = \sum_{\mu \vdash n} (-1)^{l(\mu)} (n+1)^{l(\mu)-1} \frac{p_\mu}{z_\mu} \quad (3-242)$$

Ce développement nous resservira ultérieurement.

### 3.5.6 Généralisation

On a vu que  $p_\lambda(\Xi)$  était égal à  $c_{\lambda_1} c_{\lambda_2} \dots$  dans l'algèbre de Farahat-Highman. D'autre part, on a

$$p_\lambda(\Xi) = \sum_{|\lambda|=|\mu|} \langle p_\lambda(-X), h_\mu^* \rangle c_\mu, \quad (3-243)$$

d'où

$$c_{\lambda_1} c_{\lambda_2} \dots = \sum_{|\lambda|=|\mu|} \langle p_\lambda(-X), h_\mu^* \rangle c_\mu. \quad (3-244)$$

Le coefficient  $\langle p_\lambda(-X), h_\mu^* \rangle$  correspond donc au nombre total de décompositions d'un produit de cycles disjoints de type modifié  $\mu$  en un produit quelconque de cycles de type modifié  $\lambda$  (c'est le même type d'argument que celui utilisé dans la partie 3.5.5). Dans une telle décomposition, chaque  $c_{\mu_i}$  doit provenir d'un certain  $\prod_i c_{\lambda^{(i)}}$ , où  $\lambda^{(i)} \vdash \mu_i$  est une sous-partition de  $\lambda$ , avec  $\lambda^{(1)} \cup \lambda^{(2)} \cup \dots = \lambda$  (celà revient à dire que  $(\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \dots) \in \mathfrak{R}(\lambda, \mu)$ ). De plus, chaque  $(\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \dots)$  doit être compté un certain nombre de fois  $m(\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \dots)$ , que nous expliciterons par la suite.

D'autre part, pour  $c_{\mu_i}$  donné, le nombre de décompositions de  $c_{\mu_i}$  d'un certain type  $\prod_i c_{\lambda^{(i)}}$  correspond au coefficient associé à  $c_{\mu_i}$  dans  $p_{\lambda^{(i)}}(\Xi)$ , soit  $\langle p_{\lambda^{(i)}}(-X), h_{\mu_i}^* \rangle$ . Or on a vu dans la partie 3.5.5 que

$$\langle p_{\lambda^{(i)}}(-X), h_{\mu_i}^* \rangle = (\mu_i + 1)^{l(\lambda^{(i)})-1}, \quad (3-245)$$

d'où

$$\langle p_\lambda(-X), h_\mu^* \rangle = \sum_{(\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \dots) \in \mathfrak{R}(\lambda, \mu)} m(\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \dots) \prod_i (\mu_i + 1)^{l(\lambda^{(i)})-1}. \quad (3-246)$$

En particulier, ce coefficient est nul si  $\lambda$  n'est pas un raffinement de  $\mu$ .

Finalement, on a donc

$$p_\lambda(\Xi) = \sum_{|\lambda|=|\mu|} \left( \sum_{(\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \dots) \in \mathfrak{R}(\lambda, \mu)} m(\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \dots) \prod_i (\mu_i + 1)^{l(\lambda^{(i)})-1} \right) c_\mu. \quad (3-247)$$

Il reste à déterminer la valeur de  $m(\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \dots)$ . Ce coefficient correspond au nombre de manières de répartir les parts  $\lambda_j$  de  $\lambda$  dans les  $\lambda^{(i)}$ . Par exemple, calculons  $m((2, 1), (2), (1, 1))$ . Dans cet exemple, on a  $\lambda = \bigcup_i \lambda^{(i)} = (2, 2, 1, 1, 1)$ . On peut donc choisir de mettre  $\lambda_1 = 2$  dans  $\lambda^{(1)} = (2, 1)$  ou dans  $\lambda^{(2)} = (2)$ , et  $\lambda_2$  sera automatiquement mis à la place qui reste. De plus, une fois qu'on a choisi quel 1 entre  $\lambda_3, \lambda_4$  et  $\lambda_5$  on met dans  $\lambda^{(1)} = (2, 1)$ , on est obligé de mettre les deux autres dans  $\lambda^{(3)} = (1, 1)$ . On a donc  $2 \times 3 = 6$  configurations possibles, d'où

$$m((2, 1), (2), (1, 1)) = 6, \quad (3-248)$$

et dans le cas général on a

$$m(\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \dots) = \prod_{j \geq 1} \frac{m_j(\lambda)!}{m_j(\lambda^{(1)})! m_j(\lambda^{(2)})! \dots}. \quad (3-249)$$

On en déduit une nouvelle formule explicite pour  $p_\lambda(\Xi)$ .

**Théorème 3.5.1.** *Les coefficients de poids modifié maximal dans le développement de  $p_\lambda(\Xi_n)$  sur les classes sont explicitement déterminés par*

$$p_\lambda(\Xi) = \sum_{|\lambda|=|\mu|} \left( \sum_{(\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \dots) \in \mathfrak{R}(\lambda, \mu)} \left( \prod_j \frac{m_j(\lambda)!}{m_j(\lambda^{(1)})! m_j(\lambda^{(2)})! \dots} \right) \times \left( \prod_i (\mu_i + 1)^{l(\lambda^{(i)})-1} \right) \right) c_\mu. \quad (3-250)$$

**Exemple 3.5.1.** On se propose ici de calculer le coefficient en  $C_{322}$  dans  $p_{22111}(\Xi_n)$ , pour  $n$  suffisamment grand. Ce coefficient vaut  $\langle p_{22111}(-X), h_{322}^* \rangle$ , or on a

$$\mathfrak{R}((22111), (322)) = \{((21), (2), (11)), ((21), (11), (2)), ((111), (2), (2))\}. \quad (3-251)$$

. Donc, d'après (3-245),

$$\langle p_{22111}(-X), h_{322}^* \rangle = \frac{2!}{1!1!} \frac{3!}{2!1!} (4^1 \times 3^0 \times 3^1 + 4^1 \times 3^1 \times 3^0) + \frac{2!}{1!1!} \frac{3!}{3!} (4^2 \times 3^0 \times 3^0), \quad (3-252)$$

c'est-à-dire

$$\langle p_{22111}(-X), h_{322}^* \rangle = 176. \quad (3-253)$$

**Exemple 3.5.2.** Dans le cas où  $\lambda = \mu$ , on a

$$\mathfrak{R}(\lambda, \mu) = \mathfrak{R}(\lambda, \lambda) = \{((\lambda_1), (\lambda_2), \dots)\}. \quad (3-254)$$

Donc pour tout  $\lambda^{(i)}$  on a  $l(\lambda^{(i)}) = 1$ , d'où

$$(\mu_i + 1)^{l(\lambda^{(i)})-1} = 1, \quad (3-255)$$

donc

$$\langle p_\lambda(-X), h_\lambda^* \rangle = \prod_{j \geq 1} \frac{m_j(\lambda)!}{m_j(\lambda_1)! m_j(\lambda_2)! \dots}. \quad (3-256)$$

Or  $\forall i \forall j$ ,  $m_j(\lambda_i)$  vaut 0 ou 1, d'où

$$\langle p_\lambda(-X), h_\lambda^* \rangle = \prod_{i \geq 1} m_i(\lambda)! \quad (3-257)$$

Une fois encore, ce résultat peut être retrouvé à partir de calculs simples effectués dans  $\Lambda$ . En effet, on a

$$\langle p_\lambda(-X), h_\lambda^* \rangle = (-1)^{l(\lambda)} \langle p_\lambda, h_\lambda^* \rangle \quad (3-258)$$

Or,  $h_\lambda^* = \prod_i h_{\lambda_i}^*$ . Pour trouver la partie en  $p_\lambda$  de  $h_\lambda^*$ , il faut donc trouver les parties en  $p_{\lambda_i}$  des  $h_{\lambda_i}^*$  (les autres parties en  $p_\mu$  dans  $h_{\lambda_i}^*$  correspondraient à des parties en  $p_\nu$  dans  $h_\lambda^*$ , où  $\nu$  serait une partition plus fine que  $\lambda$ ). Or, on a d'après (3-242)

$$h_{\lambda_i}^* = \sum_{\mu \vdash \lambda_i} (-1)^{l(\mu)} (\lambda_i + 1)^{l(\mu)-1} \frac{p_\mu}{z_\mu}. \quad (3-259)$$

La partie en  $p_{\lambda_i}$  de  $h_{\lambda_i}^*$  vaut donc  $-\frac{p_{\lambda_i}}{\lambda_i}$ , d'où

$$\langle p_\lambda(-X), h_\lambda^* \rangle = (-1)^{l(\lambda)} \langle p_\lambda, (-1)^{l(\lambda)} \frac{p_\lambda}{\prod_i \lambda_i} \rangle, \quad (3-260)$$

c'est-à-dire

$$\langle p_\lambda(-X), h_\lambda^* \rangle = \frac{z_\lambda}{\prod_i \lambda_i}, \quad (3-261)$$

et on en déduit le résultat (3-257).





# Chapitre 4

## Une déformation à un paramètre de l'algèbre de Farahat-Higman

Dans ce chapitre, nous faisons le lien entre l'algèbre de Farahat-Higman et l'algèbre de Hopf  $\mathcal{H}$  des fonctions polynomiales sur le groupe des difféomorphismes formels de la droite tangents à l'identité munis de la composition, connue sous le nom d'*algèbre de Faá di Bruno*. Plus précisément, nous montrons comment la déformation de l'algèbre de Faá di Bruno introduite par Foissy interpole entre l'algèbre de Faá di Bruno et l'algèbre de Farahat-Higman.

### 4.1 L'algèbre de Faá di Bruno et sa déformation

#### 4.1.1 L'algèbre de Faá di Bruno

Soit  $G_1$  le groupe

$$G_1 = \{\alpha \mid \alpha(t) = t + a_1 t^2 + a_2 t^3 + \dots\} = t + t^2 \mathbb{C}[[t]] \quad (4-262)$$

des difféomorphismes formels de la droite tangents à l'identité, munis de la composition. Pour tout  $n$ , on note alors  $k_n$  la forme linéaire

$$k_n : \alpha(t) = t + a_1 t^2 + a_2 t^3 + \dots \mapsto a_n, \quad (4-263)$$

et on note  $\mathcal{H}$  l'algèbre des fonctions de  $G_1$  dans  $\mathbb{C}$  polynomiales en les  $k_n$ . Soit maintenant  $\Delta_1$  le coproduit sur  $\mathcal{H}$  tel que pour tous  $\alpha \in \mathcal{H}$  et  $\beta \in \mathcal{H}$ ,  $\Delta k_n(\alpha, \beta)$  soit le coefficient en  $t^{n+1}$  dans

$$(\alpha \circ \beta)(t) = \alpha(\beta(t)) \quad (4-264)$$

(ici, les éléments  $f \otimes g \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$  sont identifiés aux fonctions à deux variables  $(\alpha, \beta) \mapsto f(\alpha)g(\beta)$ ). Ce coproduit munit  $\mathcal{H}$  d'une structure d'*algèbre de Hopf*, connue sous le nom d'*algèbre de Faá di Bruno*. Cette algèbre de Hopf n'est pas cocommutative. L'antipode  $S_1$  correspondant est défini par

$$(S_1(f))(\alpha) = f(\alpha^{\langle -1 \rangle}), \quad (4-265)$$

où  $\alpha^{<-1>}$  désigne l'inverse de  $\alpha$  pour la composition.

En temps qu'algèbre associative,  $\mathcal{H}$  est isomorphe à l'algèbre  $\Lambda$  des fonctions symétriques, et l'isomorphisme correspondant envoie  $k_n$  sur la fonction complète simple  $h_n$ . Le coproduit  $\Delta_1$  peut alors être défini par

$$\Delta_1 h_n = \sum_{k=0}^n h_k(X) \otimes h_{n-k}((k+1)X). \quad (4-266)$$

On peut réécrire cette égalité sous la forme

$$\Delta_1 h_n = \sum_{k=0}^n \sum_{\mu \vdash n-k} m_\mu(k+1) h_k \otimes h_\mu, \quad (4-267)$$

et l'antipode  $S_1$  est l'involution qui envoie  $h_\mu$  sur  $h_\mu^*$ .

### 4.1.2 Une famille à un paramètre d'algèbres de Hopf

On désigne par  $\mathbb{T}_{CK}$  l'ensemble des *arbres enracinés*, c'est-à-dire l'ensemble des graphes finis connexes sans cycle munis d'un sommet spécial appelé la *racine*. On désigne par  $\mathcal{H}_{CK}$  l'algèbre de Connes-Kreimer des arbres enracinés [18]. Il s'agit de l'algèbre associative commutative libre librement engendrée par  $\mathbb{T}_{CK}$ . Les monômes en les arbres enracinés forment une base linéaire de cette algèbre.

Une *coupe admissible* d'un arbre enraciné  $T$  est une coupe non vide telle que chaque chemin de  $T$  rencontre au moins une arrête coupée. L'ensemble des coupes admissibles de  $T$  est notée  $Adm(T)$ . Pour chaque  $c \in Adm(T)$ , un des arbres obtenu après application de  $c$  contient la racine de  $T$ . On appellera cet arbre  $R^c(T)$ , et le produit des autres arbres ainsi obtenus sera appelé  $P^c(T)$ . Ces définitions permettent de munir  $\mathcal{H}_{CK}$  de sa structure usuelle d'algèbre de Hopf, en définissant le coproduit  $\Delta_{CK}$  associé comme étant le morphisme d'algèbres tel que pour tout  $T \in \mathbb{T}_{CK}$ ,

$$\Delta_{CK}(T) = T \otimes 1 + 1 \otimes T + \sum_{c \in Adm(T)} R^c(T) \otimes P^c(T). \quad (4-268)$$

Cette algèbre de Hopf est graduée par le nombre de sommets des arbres. Dans [9], Foissy s'intéresse à l'équation de Dyson-Schwinger

$$X_P = B^+(P(X_P)) \quad (4-269)$$

d'inconnue  $X_P$  dans l'algèbre de Connes-Kreimer. Ici,  $B^+$  est l'opérateur de greffage sur une racine commune, et  $P$  est une série formelle de terme constant 1. En déterminant dans quels cas la sous-algèbre de  $\mathcal{H}_{CK}$  engendrée par les coefficients de  $X_P$  est une algèbre de Hopf, Foissy obtient une famille à deux paramètres  $\mathcal{H}_{\alpha,\gamma}$  de sous-algèbres de Hopf de  $\mathcal{H}_{CK}$ . Pour une des valeurs du premier paramètre, il montre que l'algèbre obtenue est isomorphe à l'algèbre de Hopf des polynômes en une variable. Il montre également que pour les valeurs de  $\alpha$  autres que cette valeur particulière, les  $\mathcal{H}_{\alpha,\gamma}$  avec  $\gamma$  fixé sont toutes trivialement isomorphes entre elles, de telle sorte que l'on puisse fixer le premier paramètre, et ainsi se restreindre à

l'étude d'une famille à un paramètre d'algèbres de Hopf  $\mathcal{H}_\gamma$ .

En temps qu'algèbre associative,  $\mathcal{H}_\gamma$  est isomorphe à l'algèbre des fonctions symétriques. En termes de fonctions symétriques, le coproduit correspondant  $\Delta_\gamma$  est donné pour tout réel  $\gamma$  par

$$\Delta_\gamma h_n = \sum_{k=0}^n h_k(X) \otimes h_{n-k}((k\gamma + 1)X), \quad (4-270)$$

ou, de manière équivalente,

$$\Delta_\gamma h_n = \sum_{k=0}^n \sum_{\mu+n-k} m_\mu(k\gamma + 1) h_k \otimes h_\mu. \quad (4-271)$$

Le cas  $\gamma = 1$  correspond au coproduit de l'algèbre de Faá di Bruno sous sa forme classique, et le cas  $\gamma = 0$  correspond au coproduit usuel sur  $\Lambda$ . Cette famille interpole donc entre l'algèbre de Hopf des fonctions symétriques et l'algèbre de Faá di Bruno. Lorsque  $\gamma \neq 1$ , Foissy montre que  $\mathcal{H}_\gamma$  est *isomorphe* à l'algèbre de Faá di Bruno  $\mathcal{H}_1$ . Nous allons à présent donner une forme compacte de l'isomorphisme correspondant.

**Proposition 4.1.1.**

$$\Phi : \begin{array}{ccc} \mathcal{H}_\gamma & \rightarrow & \mathcal{H}_1 \\ F(X) & \mapsto & F(\frac{1}{\gamma}X) \end{array} \quad (4-272)$$

est un isomorphisme d'algèbres de Hopf.

*Démonstration.* On a

$$\begin{aligned} \Delta_1(\sigma_1) &= \sum_n \sum_{k=0}^n h_k \otimes h_{n-k}((k+1)X) \\ &= \sum_{k \geq 0} \sum_{m \geq 0} h_k \otimes h_m((k+1)X) \\ &= \sum_{k \geq 0} h_k \otimes \sigma_1((k+1)X), \end{aligned} \quad (4-273)$$

c'est-à-dire

$$\Delta_1(\Phi(\sigma_1)) = (\Delta_1(\sigma_1))^{\frac{1}{\gamma}} = \left( \sum_{k \geq 0} h_k \otimes \sigma_1^{k+1} \right)^{\frac{1}{\gamma}} = (1 \otimes \sigma_1)^{\frac{1}{\gamma}} \left( \sum_{k \geq 0} h_k \otimes \sigma_1^k \right)^{\frac{1}{\gamma}}. \quad (4-274)$$

D'autre part, on a

$$\sigma_{\sigma_1(Y)}(X) = \sum_{k \geq 0} \sigma_1(Y)^k h_k(X). \quad (4-275)$$

En utilisant l'identification

$$F \otimes G = F(X)G(Y), \quad (4-276)$$

on obtient donc

$$\left( \sum_{k \geq 0} h_k \otimes \sigma_1^k \right)^{\frac{1}{\gamma}} = \sigma_{\sigma_1(Y)}\left(\frac{1}{\gamma}X\right) = \sum_{k \geq 0} h_k\left(\frac{1}{\gamma}X\right) \otimes \sigma_1^k, \quad (4-277)$$

c'est-à-dire

$$\Delta_1(\Phi(\sigma)) = (1 \otimes \sigma_1)^{\frac{1}{\gamma}} \sum_{k \geq 0} h_k\left(\frac{1}{\gamma}X\right) \otimes \sigma_1^k = (1 \otimes \sigma_1\left(\frac{1}{\gamma}X\right)) \sum_{k \geq 0} h_k\left(\frac{1}{\gamma}X\right) \otimes \sigma_1\left(\frac{1}{\gamma}X\right)^{k\gamma}. \quad (4-278)$$

Finalement, on a donc

$$\Delta_1(\Phi(\sigma_1)) = \sum_{k \geq 0} h_k\left(\frac{1}{\gamma}X\right) \otimes \sigma_1\left(\frac{1}{\gamma}X\right)^{k\gamma+1} = \Phi(\Delta_\gamma(\sigma_1)). \quad (4-279)$$

□

### 4.1.3 Dual gradué de l'algèbre de Faá di Bruno déformée

On s'intéresse à présent à l'algèbre de Hopf  $\mathcal{H}'_\gamma$  définie comme étant le *dual gradué* de  $\mathcal{H}_\gamma$ , et on note  $\star_\gamma$  le produit dans cette algèbre. Pour tout  $f \in \mathcal{H}_\gamma$  et toute fonction symétrique  $g$ , on note  $\langle f, g \rangle$  l'action de  $f$  sur  $g$ . Pour tous  $f \in \mathcal{H}'_\gamma$ ,  $g \in \mathcal{H}'_\gamma$  et  $h \in \Lambda$ , on a par définition d'une algèbre de Hopf duale

$$\langle f \star_\gamma g, h \rangle = \langle f \otimes g, \Delta_\gamma(h) \rangle. \quad (4-280)$$

On désigne par  $(d_\lambda)$ ,  $(q_\lambda)$  et  $(b_\lambda)$  les bases de  $\mathcal{H}'_\gamma$  respectivement duales de  $(h_\lambda)$ ,  $\left(\frac{p_\lambda}{z_\lambda}\right)$  et  $(h_\lambda^*)$ , au sens où l'on a par exemple

$$\langle d_\lambda, h_\mu \rangle = \delta_{\lambda\mu}. \quad (4-281)$$

Les  $b_n$  sont *primitifs*. D'autre part, ils engendrent  $\mathcal{H}'_\gamma$ , et on a

$$q_n = d_n = -b_n \quad (4-282)$$

quelque soit la valeur du  $\gamma$  considéré. L'algèbre  $\mathcal{H}_0$  est *auto-duale*, et on a donc dans le cas où  $\gamma = 0$

$$d_\lambda = m_\lambda, \quad q_\lambda = p_\lambda \text{ et } b_\lambda = g_\lambda. \quad (4-283)$$

Lorsque  $\gamma \neq 0$ ,  $\mathcal{H}'_\gamma$  n'est ni auto-duale ni commutative, puisque le coproduit  $\Delta_\gamma$  de  $\mathcal{H}_\gamma$  n'est pas cocommutatif.

### 4.1.4 Structure multiplicative de $\mathcal{H}'_\gamma$

Soient maintenant  $f$  et  $g$  deux éléments de  $\mathcal{H}'_\gamma$ . On aura alors pour toute partition  $\mu$

$$\begin{aligned} \langle f \star_\gamma g, h_\mu \rangle &= \langle f \otimes g, \Delta_\gamma(h_\mu) \rangle \\ &= \langle f \otimes g, \Delta_\gamma(h_{\mu_1}) \Delta_\gamma(h_{\mu_2}) \dots \rangle \\ &= \left\langle f \otimes g, \prod_i \sum_{k_i+l_i=\mu_i} h_{k_i} \otimes h_{l_i}((\gamma k_i + 1)X) \right\rangle \\ &= \left\langle f \otimes g, \sum_{k_i+l_i=\mu_i} \prod_i h_{k_i} \otimes h_{l_i}((\gamma k_i + 1)X) \right\rangle \\ &= \sum \left\langle f \otimes g, \prod_i h_{k_i} \otimes h_{l_i}((\gamma k_i + 1)X) \right\rangle \end{aligned} \quad (4-284)$$

où les paramètres de la somme restent les mêmes. On a donc

$$\begin{aligned} \langle f \star_\gamma g, h_\mu \rangle &= \sum \langle f, h_{(k_1, k_2, \dots)} \rangle \langle g, \prod_i h_{l_i}((\gamma k_i + 1)X) \rangle \\ &= \sum \langle f, h_{(k_1, k_2, \dots)} \rangle \langle g, \prod_i \sum_{\rho \vdash l_i} m_\rho(\gamma k_i + 1) h_\rho \rangle. \end{aligned} \quad (4-285)$$

On effectue un changement de variable en paramétrant la somme par les partitions  $\rho_i$  telles que  $|\rho_i| = l_i$  et donc  $k_i = \mu_i - |\rho_i|$ . La somme est donc maintenant paramétrée par les  $(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{l(\mu)})$  tels que pour tout  $i$ ,  $|\rho_i| \leq \mu_i$ , et  $\rho$  est l'union des  $\rho_i$  recombinaée en une partition. On obtient

$$\langle f \star_\gamma g, h_\mu \rangle = \sum \langle f, h_{(\mu_1 - |\rho_1|, \mu_2 - |\rho_2|, \dots)} \rangle \langle g, \prod_i m_{\rho_i}(\gamma \mu_i - \gamma |\rho_i| + 1) h_{\rho_i} \rangle, \quad (4-286)$$

c'est-à-dire

$$\langle f \star_\gamma g, h_\mu \rangle = \sum \left( \prod_i m_{\rho_i}(\gamma \mu_i - \gamma |\rho_i| + 1) \right) \langle f, h_{(\mu_1 - |\rho_1|, \mu_2 - |\rho_2|, \dots)} \rangle \langle g, h_\rho \rangle. \quad (4-287)$$

Cette formule permet de développer  $f \star_\gamma g$  sur la base des  $d_\mu$  pour n'importe quels éléments  $f$  et  $g$  de  $\mathcal{H}'_\gamma$ .

#### 4.1.5 Action de $q_n^\perp$ sur les $h_\mu$

On s'intéresse à présent à l'opérateur linéaire  $q_n^\perp$  sur  $\Lambda$ , défini pour  $f \in \mathcal{H}'_\gamma$  et  $g \in \mathcal{H}_\gamma$  par

$$\langle f \star_\gamma q_n, g \rangle = \langle f, q_n^\perp g \rangle. \quad (4-288)$$

Il s'agit de l'opérateur *adjoint* à la multiplication par  $q_n$  au sens de la dualité des algèbres de Hopf. Or, un résultat classique sur les algèbres de Hopf est que l'opérateur adjoint à la multiplication à droite par un élément primitif est une *dérivation*. L'opérateur  $q_n^\perp$  vérifie donc la formule de Leibniz

$$q_n^\perp(fg) = f q_n^\perp(g) + q_n^\perp(f)g. \quad (4-289)$$

On aura besoin pour la suite de l'action de cet opérateur sur les  $h_\mu$ . Soient  $n > 0$  et  $\mu$  une partition quelconque. On aura alors d'après (4-287)

$$\langle f \star_\gamma q_n, h_\mu \rangle = \sum \left( \prod_i m_{\rho_i}(\gamma \mu_i - \gamma |\rho_i| + 1) \right) \langle f, h_{(\mu_1 - |\rho_1|, \mu_2 - |\rho_2|, \dots)} \rangle \langle q_n, h_\rho \rangle. \quad (4-290)$$

Comme on a  $q_n = d_n$  pour tout  $n$ , on en déduit que  $\langle q_n, h_\rho \rangle = \delta_{n\rho}$ . Pour qu'un terme apporte une contribution non nulle à cette somme, il faut donc que l'on ait

$$\rho = (n), \quad (4-291)$$

auquel cas on a aussi  $\langle q_n, h_\rho \rangle = 1$ , et donc

$$\langle f \star_\gamma q_n, h_\mu \rangle = \sum_{i/\mu_i \geq n} m_n(\gamma \mu_i - \gamma n + 1) \langle f, h_{\mu \setminus \mu_i \cup (\mu_i - n)} \rangle. \quad (4-292)$$

Comme  $m_n(\gamma\mu_i - \gamma n + 1) = \gamma(\mu_i - n) + 1$ , on en déduit

$$q_n^\perp h_\mu = \sum_{i/\mu_i \geq n} (\gamma\mu_i - \gamma n + 1) h_{\mu \setminus \mu_i \cup (\mu_i - n)}. \quad (4-293)$$

Lorsque  $\mu$  se réduit à une part  $N$ , cette formule se réécrit

$$q_n^\perp h_N = (\gamma N - \gamma n + 1) h_{N-n}. \quad (4-294)$$

Comme  $q_n^\perp$  est une dérivation, (4-294) suffit à rendre son action sur la base multiplicative  $h_\mu$  totalement explicite. Ainsi, on a  $q_n^\perp = D_n + E_n$ , où  $D_n$  et  $E_n$  sont les dérivations définies par

$$D_n h_n = h_{N-n} \quad (4-295)$$

et

$$E_n h_n = \gamma(N - n) h_{N-n}, \quad (4-296)$$

c'est-à-dire

$$D_n = \sum_{r \geq 0} h_r \frac{\partial}{\partial h_{n+r}} \quad (4-297)$$

et

$$E_n = \gamma \sum_{r \geq 0} r h_r \frac{\partial}{\partial h_{n+r}}. \quad (4-298)$$

On en déduit

$$q_n^\perp = \sum_{r \geq 0} (1 + \gamma r) h_r \frac{\partial}{\partial h_{n+r}}, \quad (4-299)$$

et on peut constater que ce résultat reste vrai dans le cas dégénéré  $\gamma = 0$ .

#### 4.1.6 Action de $q_n^\perp$ sur les $p_\mu$

On a d'après (4-294)

$$q_n^\perp h_N = p_n^\perp h_N + \gamma(N - n) h_{N-n}. \quad (4-300)$$

D'autre part, on a aussi

$$(N - n) h_{N-n} = p_1 h_{N-n-1} + p_2 h_{N-n-2} + p_3 h_{N-n-3} + \dots \quad (4-301)$$

Donc

$$\begin{aligned} q_n^\perp h_N &= p_n^\perp h_N + \gamma p_1 h_{N-n-1} + \gamma p_2 h_{N-n-2} + \dots \\ &= p_n^\perp h_N + \gamma p_1 (p_{n+1}^\perp h_N) + \gamma p_2 (p_{n+2}^\perp h_N) + \dots \\ &= p_n^\perp h_N + \gamma \sum_{r > n} p_{r-n} p_r^\perp h_N, \end{aligned} \quad (4-302)$$

d'où

$$q_n^\perp = p_n^\perp + \gamma \sum_{r > n} p_{r-n} p_r^\perp. \quad (4-303)$$

**Exemple 4.1.1.** On peut se servir du résultat (4-303) pour développer  $q_\lambda \star_\gamma q_n$  sur la base des  $q_\mu$ . On a

$$q_\lambda \star_\gamma q_n = \sum_{\mu} \frac{1}{z_\mu} \langle q_\lambda \star_\gamma q_n, p_\mu \rangle q_\mu. \quad (4-304)$$

On en déduit

$$q_\lambda \star_\gamma q_n = \sum_{\mu} \frac{1}{z_\mu} \langle q_\lambda, q_n^\perp(p_\mu) \rangle q_\mu. \quad (4-305)$$

Or, on a d'après (4-303)

$$q_n^\perp p_\mu = p_n^\perp p_\mu + \gamma \sum_{r>n} p_{r-n} p_r^\perp p_\mu, \quad (4-306)$$

donc

$$\begin{aligned} q_n^\perp p_\mu &= p_n^\perp p_\mu + \gamma \sum_{r>n} r p_{r-n} \frac{\partial p_\mu}{\partial p_r} \\ &= p_n^\perp p_\mu + \gamma \sum_{r>n} r m_r(\mu) p_{\mu \setminus (r) \cup (r-n)}. \end{aligned} \quad (4-307)$$

Pour que  $q_\mu$  apporte à  $q_\lambda \star_\gamma q_n$  une contribution en  $\gamma$ , il faut donc qu'il existe un  $r > 0$  tel que

$$\mu = \lambda \setminus (r) \cup (r+n) \quad (4-308)$$

(le  $r$  dans cette formule correspond au  $r-n$  considéré auparavant), auquel cas on a

$$\langle q_\lambda, q_n^\perp p_\mu \rangle = \gamma(r+n) m_{r+n}(\mu) z_\lambda. \quad (4-309)$$

Finalement, on a donc

$$q_\lambda \star_\gamma q_n = q_{\lambda \cup (n)} + \sum_{\mu} \frac{1}{z_\mu} \langle q_\lambda, q_n^\perp(p_\mu) \rangle q_\mu, \quad (4-310)$$

c'est-à-dire

$$q_\lambda \star_\gamma q_n = q_{\lambda \cup (n)} + \gamma \sum_{r \in \lambda} \frac{(r+n) m_{\lambda \setminus (r) \cup (r+n)}(r+n) z_\lambda}{z_{\lambda \setminus (r) \cup (r+n)}} q_{\lambda \setminus (r) \cup (r+n)}. \quad (4-311)$$

On en déduit

$$\begin{aligned} q_n &= q_{\lambda \cup (n)} + \gamma \sum_{r \in \lambda} \frac{(r+n) m_{\lambda \setminus (r) \cup (r+n)}(r+n) r m_\lambda(r) z_{\lambda \setminus (r)}}{(r+n) m_{\lambda \setminus (r) \cup (r+n)}(r+n) z_{\lambda \setminus (r)}} q_{\lambda \setminus (r) \cup (r+n)} \\ &= q_{\lambda \cup (n)} + \gamma \sum_{r \in \lambda} r m_\lambda(r) q_{\lambda \setminus (r) \cup (r+n)}. \end{aligned} \quad (4-312)$$

Cette formule peut se réécrire

$$q_\lambda \star_\gamma q_n = q_{\lambda \cup (n)} + \gamma \sum_{i \geq 1} \lambda_i q_{\lambda \setminus (\lambda_i) \cup (\lambda_i+n)}. \quad (4-313)$$



## 4.2 Une déformation de l'algèbre de Farahat-Higman

### 4.2.1 Récurrences sur les constantes de structure de $\mathcal{H}'_\gamma$

On désigne par  $a_{\lambda,\mu}^\nu(\gamma)$  les constantes de structure de  $\mathcal{H}'_\gamma$  dans la base  $(b_\mu)$ .

$$b_\lambda \star_\gamma b_\mu = \sum_\nu a_{\lambda,\mu}^\nu(\gamma) b_\nu \quad (4-314)$$

Lorsque  $\gamma = 0$ , les  $b_\mu$  sont identifiables aux  $g_\mu$ , et les  $a_{\lambda,\mu}^\nu(0)$  coïncident donc avec les constantes de structure  $a_{\lambda,\mu}^\nu$  de l'algèbre de Farahat-Higman définies en 3.4.1.

Comme  $b_n = -p_n$ , on a

$$a_{\lambda,(n)}^\nu(\gamma) = \langle b_\lambda \star_\gamma b_n, h_\nu^* \rangle = -\langle b_\lambda \star_\gamma q_n, h_\nu^* \rangle, \quad (4-315)$$

c'est-à-dire

$$a_{\lambda,(n)}^\nu(\gamma) = -\langle b_\lambda, q_n^\perp h_\nu^* \rangle. \quad (4-316)$$

Comme  $q_n^\perp$  est une dérivation, on peut réécrire cette formule sous la forme

$$a_{\lambda,(n)}^\nu(\gamma) = -\sum_i \langle b_\lambda, h_{\nu \setminus (\nu_i)} q_n^\perp(h_{\nu_i}^*) \rangle. \quad (4-317)$$

Le  $i$ ème terme de cette somme correspond au coefficient de  $h_\lambda^*$  dans

$$h_{\nu \setminus (\nu_i)} q_n^\perp(h_{\nu_i}^*) \quad (4-318)$$

Ce terme n'apporte donc une contribution non nulle que si il existe une partition  $\mu$  qui vérifie

$$(\nu \setminus (\nu_i)) \cup \mu = \lambda, \quad (4-319)$$

c'est-à-dire

$$\mu \cup \nu = \lambda \cup (\nu_i). \quad (4-320)$$

Ainsi, le  $i$ ème terme correspond au coefficient de  $h_\mu^*$  dans  $q_n^\perp(h_{\nu_i}^*)$ . Or, ce coefficient est  $a_{\mu,(n)}^{\nu_i}(\gamma)$ . En résumé, on a donc démontré :

**Théorème 4.2.1.** *Les constantes de structure  $a_{\lambda,(n)}^\nu(\gamma)$  satisfont la relation de récurrence*

$$a_{\lambda,(n)}^\nu(\gamma) = \sum a_{\mu,(n)}^{\nu_i}(\gamma), \quad (4-321)$$

où la somme porte sur les couples  $(i, \mu)$  qui vérifient

$$\mu \cup \nu = \lambda \cup (\nu_i). \quad (4-322)$$

Cette formule est une généralisation de (3-197), qui correspond au cas  $\gamma = 0$ .

### 4.2.2 Structure multiplicative de l'algèbre de Farahat-Higman déformée

Dans le cas où  $\nu$  a seulement une part, le coefficient  $a_{\lambda,(r)}^\nu$  est donné par la formule explicite suivante.

**Théorème 4.2.2.** *Pour tous  $r \in \mathbb{N}$ ,  $N \in \mathbb{N}$  et toute partition  $\lambda$ ,*

$$a_{\lambda,(r)}^{(N)}(\gamma) = \left(1 - \frac{N-r}{N+1}\gamma\right) a_{\lambda,(r)}^{(N)}(0). \quad (4-323)$$

Les  $a_{\lambda,(r)}^{(N)}(0)$  sont les  $a_{\lambda,(r)}^{(N)}$  donnés par la formule (3-196) en remplaçant  $N$  par  $m$ .

Cette formule et la formule (4-321) déterminent ensemble complètement la structure multiplicative de  $\mathcal{H}'_\gamma$ , puisque cette algèbre est engendrée par les  $b_n$ . Afin de démontrer (4-323), nous aurons besoin d'introduire les deux lemmes suivants.

**Lemme 4.2.1.** *Pour tout couple  $(r, n)$  d'entiers tels que  $0 < r < n$ , on a*

$$p_r^\perp h_n^* = \sum_{\rho \vdash n-r} (-1)^{l(\rho)-1} (n+1)^{l(\rho)-1} \frac{p_\rho}{z_\rho}. \quad (4-324)$$

*Démonstration.* On a d'après (3-242)

$$p_r^\perp h_n^* = \sum_{\mu \vdash n} \frac{(-1)^{l(\mu)} (n+1)^{l(\mu)-1}}{z_\mu} p_r^\perp(p_\mu). \quad (4-325)$$

L'action de  $p_r^\perp$  sur  $p_\mu$  est donnée par

$$p_r^\perp(p_\mu) = r \frac{\partial p_\mu}{\partial p_r} = r m_\mu(r) p_{\mu \setminus (r)}. \quad (4-326)$$

D'autre part,

$$z_{\mu \setminus (r)} = \frac{z_\mu m_{\mu \setminus (r)}(r)!}{r m_\mu(r)!} \quad (4-327)$$

Or  $m_{\mu \setminus (r)}(r) = m_\mu(r) - 1$ , donc  $\frac{m_\mu(r)!}{m_{\mu \setminus (r)}(r)!} = m_\mu(r)$  et donc

$$\frac{z_\mu}{r m_\mu(r)} = z_{\mu \setminus (r)}. \quad (4-328)$$

On en déduit

$$\frac{p_r^\perp(p_\mu)}{z_\mu} = \frac{p_{\mu \setminus (r)}}{z_{\mu \setminus (r)}}. \quad (4-329)$$

Ainsi, (4-325) se réécrit

$$p_r^\perp h_n^* = \sum_{\mu \vdash n} (-1)^{l(\mu)} (n+1)^{l(\mu)-1} \frac{p_{\mu \setminus (r)}}{z_{\mu \setminus (r)}}, \quad (4-330)$$

ou, de façon équivalente,

$$p_r^\perp h_n^* = \sum_{\rho \vdash n-r} (-1)^{l(\rho \cup (r))} (n+1)^{l(\rho \cup (r))-1} \frac{p_\rho}{z_\rho}. \quad (4-331)$$

Comme  $l(\rho \cup (r)) = l(\rho) + 1$ , on en déduit le résultat (4-324).  $\square$

**Lemme 4.2.2.** *Pour tout couple  $(r, N)$  d'entiers tels que  $0 < r < N$ , on a*

$$\sum_{n>r} p_{n-r} (p_n^\perp h_N^*) = -\frac{N-r}{N+1} p_r^\perp h_N^*. \quad (4-332)$$

*Démonstration.* On a d'après (4-324)

$$\sum_{n>r} p_{n-r} (p_n^\perp h_N^*) = \sum_{n>r} \sum_{\rho \vdash n-r} (-1)^{l(\rho)-1} (n+1)^{l(\rho)} \frac{p_{\rho \cup (n-r)}}{z_\rho}. \quad (4-333)$$

En effectuant les changements de paramètres  $\mu = \rho \cup (n-r)$  et  $k = n-r$ , on obtient

$$\sum_{n>r} p_{n-r} (p_n^\perp h_N^*) = \sum_{\mu \vdash N-r} \sum_{k \in \mu} (-1)^{l(\mu)} (N+1)^{l(\mu)-1} \frac{p_\mu}{z_{\mu \setminus (k)}}, \quad (4-334)$$

c'est-à-dire

$$\sum_{n>r} p_{n-r} (p_n^\perp h_N^*) = \sum_{\mu \vdash N-r} (-1)^{l(\mu)} (N+1)^{l(\mu)-1} \left( \sum_{k \in \mu} \frac{1}{z_{\mu \setminus (k)}} \right) p_\mu. \quad (4-335)$$

D'autre part, on a d'après (4-328)

$$\sum_{k \in \mu} \frac{1}{z_{\mu \setminus (k)}} = \sum_{k \in \mu} \frac{km_\mu(k)}{z_\mu}. \quad (4-336)$$

On en déduit

$$\sum_{k \in \mu} \frac{1}{z_{\mu \setminus (k)}} = \frac{1}{z_\mu} \sum_{k \in \mu} km_\mu(k) = \frac{|\mu|}{z_\mu}, \quad (4-337)$$

et on peut ainsi réécrire (4-335) sous la forme

$$\sum_{n>r} p_{n-r} (p_n^\perp h_N^*) = \sum_{\mu \vdash N-r} (-1)^{l(\mu)} (N+1)^{l(\mu)-1} \frac{N-r}{z_\mu} p_\mu, \quad (4-338)$$

c'est-à-dire

$$\sum_{n>r} p_{n-r} (p_n^\perp h_N^*) = \frac{N-r}{N+1} \sum_{\mu \vdash N-r} (-1)^{l(\mu)} (N+1)^{l(\mu)} \frac{p_\mu}{z_\mu}. \quad (4-339)$$

En utilisant (4-324), on peut réécrire (4-339) de manière à obtenir (4-332).  $\square$

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le théorème 4.2.2.

*Démonstration.* – (du théorème 4.2.2). Comme  $b_r = -q_r$  et  $g_r = -p_r$ , on a

$$\langle b_\lambda \star_\gamma b_r, h_N^* \rangle = -\langle b_\lambda, q_r^\perp h_N^* \rangle. \quad (4-340)$$

Donc d'après (4-303) et le lemme 4.2.2,

$$\begin{aligned} \langle b_\lambda \star_\gamma b_r, h_N^* \rangle &= -\langle b_\lambda, p_r^\perp h_N^* \rangle - \gamma \langle b_\lambda, \sum_{n>r} p_{n-r} (p_n^\perp h_N^*) \rangle \\ &= -\langle g_\lambda, p_r^\perp h_N^* \rangle + \gamma \frac{N-r}{N+1} \langle b_\lambda, p_r^\perp h_N^* \rangle \\ &= -\langle g_\lambda p_r, h_N^* \rangle + \gamma \frac{N-r}{N+1} \langle g_\lambda, p_r^\perp h_N^* \rangle \\ &= \langle g_\lambda g_r, h_N^* \rangle - \gamma \frac{N-r}{N+1} \langle g_\lambda g_r, h_N^* \rangle \\ &= \left( 1 - \gamma \frac{N-r}{N+1} \right) \langle g_\lambda g_r, h_N^* \rangle, \end{aligned} \quad (4-341)$$

d'où la formule (4-323).  $\square$

## 4.3 Une déformation de l'algèbre de Witt

### 4.3.1 Structure d'algèbre de Lie correspondant à $\mathcal{H}'_\gamma$

En spécialisant (4-313) à  $\lambda = (k)$ , on obtient la formule de multiplication

$$q_k \star_\gamma q_n = q_{(k,n)} + k\gamma q_{k+n}, \quad (4-342)$$

dans laquelle  $(k, n)$  représente la partition formée de  $k$  et de  $n$ .

Cette formule, beaucoup plus simple que (4-287), suffit à déterminer entièrement la structure multiplicative de  $\mathcal{H}'_\gamma$ . De plus, le cas  $\gamma = 1$  est cohérent avec le résultat de [6].

A présent, supposons que  $\gamma \neq 0$ . Comme  $\mathcal{H}'_\gamma$  est une algèbre de Hopf connexe cocommutative, le théorème de Cartier-Milnor-Moore nous indique qu'elle est l'algèbre enveloppante universelle d'une certaine algèbre de Lie  $\mathcal{L}_\gamma$ . Le crochet de Lie dans  $\mathcal{L}_\gamma$  est déterminé par la formule suivante

$$[q_k, q_n]_\gamma = \gamma(k-n)q_{k+n}, \quad (4-343)$$

obtenue à partir de (4-342). Or, les opérateurs différentiels

$$d_{n,\gamma} = t^{1-n\gamma} \frac{d}{dt} \quad (4-344)$$

satisfont la même relation (4-343) que les  $q_n$  de  $\mathcal{L}_\gamma$ . Cette remarque permet d'interpréter  $\mathcal{L}_\gamma$  comme une algèbre de Lie d'opérateurs différentiels : il s'agit de l'algèbre de Lie engendrée par les  $d_{n,\gamma}$ . Dans le cas  $\gamma = 1$ , on a  $d_{n,1} = t^{1-n} \frac{d}{dt}$ . Ces opérateurs engendrent une sous-algèbre de l'algèbre de Witt définie en 3.2.1. Cette sous-algèbre est la partie positive de l'algèbre de Witt (si on avait autorisé les  $n < 0$ , les  $d_{n,\gamma}$  auraient engendré l'algèbre de Witt toute entière). L'algèbre de Lie  $\mathcal{L}_\gamma$  est donc une déformation à un paramètre de l'algèbre de Witt, ou plus précisément, de sa partie positive  $\mathcal{L}_1$ . Le fait que l'algèbre de Faà di Bruno soit l'algèbre enveloppante de cette algèbre de Lie est un résultat connu. De plus, on remarque que comme  $\mathcal{H}'_0$  est une algèbre commutative, la formule (4-343) est encore valable dans le cas dégénéré  $\gamma = 0$ .

### 4.3.2 Un exemple de produit pré-Lie

Soit  $(L, \circ)$  une algèbre pré-Lie, que l'on munit d'une structure d'algèbre de Lie de la façon usuelle. On appelle  $(S(L), \cdot)$  l'algèbre associative commutative libre librement engendrée par les éléments de l'ensemble sous-jacent à l'algèbre  $L$ . L'algèbre  $S(L)$  peut alors être munie d'une structure d'algèbre de Hopf en posant que les éléments de  $L$  sont primitifs pour le coproduit (auquel cas  $S(L)$  et  $U(L)$  sont isomorphes en tant que cogèbres). Dans [15], Oudom et Guin montrent que  $\circ$  peut être étendu de manière unique à l'espace vectoriel  $V$  correspondant à  $S(L)$  de manière à ce que les axiomes suivants soient vérifiés.

$$\begin{cases} (i) & A \circ 1 = A \\ (ii) & T \circ (B \cdot X) = (T \circ B) \circ X - T \circ (B \circ X) \\ (iii) & (A \cdot B) \circ C = \sum_{(C_1, C_2)} (A \circ C_1) \cdot (B \circ C_2) \end{cases} \quad (4-345)$$

Ici,  $A, B$  et  $C$  sont des éléments de  $V$ ,  $X$  est un élément de  $L$  et

$$\Delta(C) = \sum_{(C_1, C_2)} C_1 \otimes C_2. \quad (4-346)$$

Oudom et Guin montrent également que le produit  $\star$  défini sur  $V$  par

$$A \star B = A \cdot B + C \circ B \quad (4-347)$$

est un produit associatif isomorphe au produit dans  $U(L)$ . Or, on peut vérifier que le produit  $\circ$  défini par

$$q_k \circ q_n = k\gamma q_{k+n} \quad (4-348)$$

est bien un produit pré-Lie. L'algèbre de Lie correspondante est engendrée par les  $q_n$  et c'est encore l'algèbre de Witt déformée  $\mathcal{L}_\gamma$ . Le produit  $\cdot$  défini par

$$q_k \cdot q_n = q_{(k,n)}, \quad (4-349)$$

où  $(k, n)$  représente la partition dont les parts sont  $k$  et  $n$ , est donc bien isomorphe au produit dans  $S(L)$ , et la formule (4-342) est donc une spécialisation de (4-348) (le produit  $\star_\gamma$  dans (4-342) correspond au produit  $\star$  dans (4-348)). Or, on a vu que  $\star_\gamma$  était bien le produit dans l'algèbre enveloppante de  $\mathcal{L}_\gamma$ , ce qui est cohérent avec le résultat d'Oudom et Guin.

# Chapitre 5

## Propriétés combinatoires de l'algèbre de Faá di Bruno non commutative

Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'analogue non commutatif  $\mathcal{H}^{NC}$  de l'algèbre de Faá di Bruno. On donne en particulier une nouvelle interprétation combinatoire de plusieurs formes de la *formule d'inversion de Lagrange non commutative* qui détermine l'antipode de  $\mathcal{H}^{NC}$ .

### 5.1 L'algèbre de Hopf $\mathcal{H}^{NC}$ des difféomorphismes formels non commutatifs

#### 5.1.1 La formule d'inversion de Lagrange non commutative

Comme on l'a vu dans le chapitre précédent, la formule d'inversion de Lagrange classique pour l'inversion des séries formelles au sens de la composition peut être interprétée en termes de fonctions symétriques classiques (pour plus de détails, on pourra consulter [24], Ex. 24 p. 35, Ex. 25 p. 132, [20] Section 2.4 et [23]). De même, pour beaucoup d'analogues non commutatifs de l'inversion de Lagrange (voir [11], [29] et [2]), Novelli et Thibon donnent dans [28] des interprétations en terme de fonctions symétriques non commutatives.

Brouder, Frabetti et Krattenthaler obtiennent dans [2] une forme de l'inversion de Lagrange non commutative qui est une formule explicite pour l'antipode de l'algèbre de Hopf  $\mathcal{H}^{NC}$  des difféomorphismes formels non commutatifs, également appelée *algèbre de Faá di Bruno non commutative*. Les éléments de  $\mathcal{H}^{NC}$  peuvent être identifiés à des fonctions symétriques non commutatives par la correspondance  $a_n$  (de [2]) =  $S_n$  (de **Sym**) qui identifie  $\mathcal{H}^{NC}$  à **Sym** en tant qu'algèbre associative. Le coproduit  $\Delta$  de  $\mathcal{H}^{NC}$  prend alors la forme

$$\Delta S_n(A) = \sum_{k=0}^n S_k(A) \otimes S_{n-k}((k+1)A). \quad (5-350)$$

On désigne par  $s : F \mapsto F^*$  l'antipode de  $\mathcal{H}^{NC}$ . On définit les coefficients  $\alpha_I$ ,  $\beta_I$  et  $\delta_I$  par

$$S_n^* = \sum_{I=n} \beta_I R_I = \sum_{I=n} \alpha_I S^I = \sum_{I=n} \delta_I \Lambda^I. \quad (5-351)$$

De même, on définit les coefficients  $\hat{\alpha}_I$ ,  $\hat{\beta}_I$  et  $\hat{\delta}_I$  par

$$S_n^*(-A) = \sum_{I \models n} \hat{\beta}_I R_I = \sum_{I \models n} \hat{\alpha}_I S^I = \sum_{I \models n} \hat{\delta}_I \Lambda^I. \quad (5-352)$$

Nous aurons également besoin de la définition suivante.

**Définition 5.1.1.** *Pour tout  $n$ , on appelle  $\mathcal{A}_n$  l'ensemble des suites finies  $a = (a_1, a_2, \dots)$  de longueur  $n$  où les  $a_i$  sont des entiers positifs tels que*

$$\begin{cases} a_1 + \dots + \dots + a_n = n - 1 \\ \quad \quad a_2 + \dots + a_n \leq n - 2 \\ \quad \quad \quad \ddots \quad \quad \quad \vdots \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad a_n \leq 0 \end{cases} \quad (5-353)$$

En retranchant chaque ligne à la première, on peut réécrire le système (5-353) sous la forme

$$\begin{cases} a_n + \dots + \dots + a_1 = n - 1 \\ \quad \quad a_{n-1} + \dots + a_1 \geq n - 1 \\ \quad \quad \quad \ddots \quad \quad \quad \vdots \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad a_1 \geq 1 \end{cases} \quad (5-354)$$

La valeur du coefficient  $\alpha_I$  est donné dans [2] par

$$\alpha_I = (-1)^{l(I)} \sum_{a \in \mathcal{A}_l(I)} \prod_{k=1}^{l(I)-1} \binom{i_k + 1}{a_k}. \quad (5-355)$$

La raison pour laquelle on a donné deux formes équivalentes du système d'inéquations de la définition 5.1.1 est que l'on utilisera plutôt (5-353) dans ce document, bien que ce soit (5-354) qui soit utilisé dans [28].

Gessel [11] et Pak-Postnikov-Retakh [29] donnent une autre version de la formule d'inversion de Lagrange non commutative. Novelli et Thibon montrent dans [28] que cette formule peut aussi être interprétée en termes de fonctions symétriques non commutatives, et qu'elle est de plus équivalente à la formule de Brouder-Frabetti-Krattenthaler. Plus précisément, la formule de Gessel et Pak-Postnikov-Retakh correspond à l'évaluation du coefficient  $\hat{\alpha}_I$ , et peut s'écrire

$$\hat{\alpha}_I = \sum_{a \in \mathcal{A}_l(I)} \prod_{k=1}^{l(I)-1} \binom{i_k}{a_k}. \quad (5-356)$$

### 5.1.2 Interprétation combinatoire en termes d'arbres

Novelli et Thibon donnent dans [28] l'interprétation combinatoire suivante pour le coefficient  $\alpha_I$ . On a

$$\begin{aligned} \Delta(\sigma_1(A)) &= \sum_{n \geq 0} \sum_{k=0}^n S_k(A) \otimes S_{n-k}((k+1)A) \\ &= \sum_{k \geq 0} S_k(A) \otimes \sigma_1((k+1)A) \\ &= \sum_{k \geq 0} S_k \otimes \sigma_1(A)^{k+1}, \end{aligned} \tag{5-357}$$

c'est-à-dire

$$1 = \sum_{k \geq 0} S_k(S_0^* + S_1^* + S_2^* + \dots)^{k+1}. \tag{5-358}$$

On peut réécrire cette formule sous la forme

$$\sigma_1^{*-1} = S_0 + S_1\sigma_1^* + S_2\sigma_1^{*2} + \dots \tag{5-359}$$

En posant  $c = S_0^{-1}$  et  $d_n = -S_0^{-1}S_n$ , on obtient

$$\sigma_1^* = c + d_1\sigma_1^{*2} + d_2\sigma_1^{*3} + \dots \tag{5-360}$$

Cette formule permet de calculer récursivement  $S_0^*, S_1^*, \dots$

$$S_0^* = c, \quad S_1^* = d_1cc, \quad S_2^* = d_1cd_1cc + d_1d_1ccc + d_2ccc, \quad \dots \tag{5-361}$$

Chaque  $d_i$  peut être interprété comme le symbole d'une opération  $(i+1)$ -aire en notation polonaise de la façon suivante.

$$S_0^* = c, \quad S_1^* = d_1(c, c), \quad S_2^* = d_1(c, d_1(c, c)) + (d_1(d_1(c, c), c) + d_2(c, c, c)), \quad \dots \tag{5-362}$$

Ainsi,  $\sigma_1^*$  correspond à la somme d'arbres ordonnés de la figure 5.1.

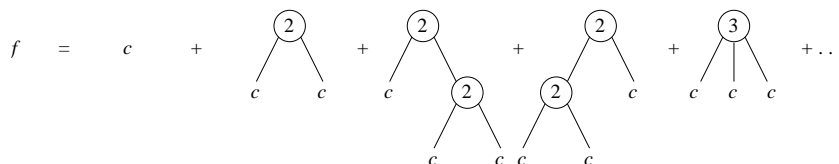


FIGURE 5.1 – Les termes  $S_0^*, S_1^*$  et  $S_2^*$  exprimés comme une somme d'arbres ordonnés.

Cette interprétation permet de voir  $S_n^*$  comme la somme de tous les codes polonais des arbres ordonnés à  $n+1$  feuilles sans sommet d'arité 1. Etant donné un arbre  $T$  vérifiant ces conditions, on définit son *squelette* comme étant l'arbre obtenu à partir de  $T$  en supprimant ses feuilles et en étiquetant ses sommets internes avec leurs arités.



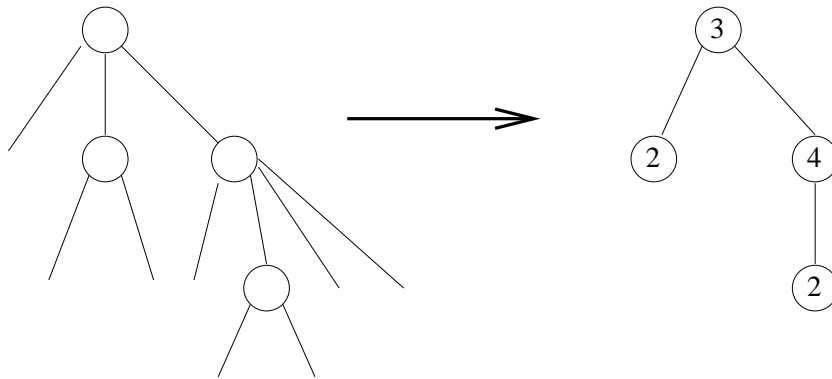


FIGURE 5.2 – Un arbre et son squelette.

Etant donné un squelette  $S$ , on définit sa *1-composition*  $I_1(S)$  comme étant la suite  $(j_1 - 1, j_2 - 1, \dots)$ , où les  $j_k$  sont les étiquettes des sommets donnés dans l'ordre préfixe. Novelli and Thibon montrent que le nombre d'arbres de squelette  $S$  est

$$\prod_{k=1}^p \binom{i_k + 1}{a_k}, \quad (5-363)$$

où  $(i_1, \dots, i_p) = I_1(S)$  et où  $a_k$  est l'arité du  $k$ -ième sommet de  $S$  dans l'ordre préfixe. Soit  $I = (i_1, \dots, i_p)$  une composition de  $n$ . La valeur absolue  $|\alpha_I| = (-1)^{l(I)} \alpha_I$  du coefficient  $\alpha_I$  de  $S^I$  dans  $S_n^*$  est alors égale au nombre d'arbres ordonnés à  $n + 1$  feuilles dont la suite des arités non nulles moins un dans l'ordre préfixe est  $I$ . C'est de cette interprétation combinatoire que Novelli et Thibon déduisent la formule (5-355), dans laquelle l'ensemble des  $(a_1, \dots, a_{p-1})$  correspond à l'ensemble des squelettes de ces arbres.

### 5.1.3 Fonctions de parking croissantes

Une *fonction de parking croissante* de taille  $n$  est une suite croissante  $F = (f_1 \dots f_n)$ ,  $f_i \leq i$  de  $n$  entiers positifs majorée terme à terme par  $(123 \dots n)$ . Le terme de *fonction subexcédente* est également employé pour désigner une telle suite d'entiers. On notera  $NDPF(n)$  l'ensemble des fonctions de parking croissantes de taille  $n$ . Pour toute composition  $I \vDash n$ , on notera  $p(I)$  la fonction de parking  $F$  de taille  $n$  telle que  $m_k(F) = i_k$  pour tout  $k$ . Par exemple, on aura  $p(321) = (111223)$ . Pour toute fonction de parking croissante  $F$  de taille  $n$ , on notera  $\text{ev}(F)$  la composition obtenue en enlevant toutes les parts égales à zéro dans  $(m_1(F), m_2(F), \dots)$ , et on dira que cette composition est l'*évaluation* de  $F$ . Ainsi, on aura par exemple  $\text{ev}(1224) = (121)$ . Comme on peut le constater,  $\text{ev}$  est surjective mais pas injective, et on a pour tout  $I$

$$\text{ev}(p(I)) = I. \quad (5-364)$$

S'il existe une composition  $I$  telle que  $F = p(I)$ , alors on dira que  $F$  est une fonction de parking croissante *tassée*. Enfin, on notera  $F \leq G$  pour dire que  $F$  est inférieure terme à terme à  $G$ , où  $F$  et  $G$  sont deux fonctions de parking croissantes de même taille. Par exemple,  $(112234) \leq (122345)$ .

L'ensemble  $\mathcal{A}_n$  défini dans la partie 5.1.1 est en bijection avec  $NDPF(n-1)$ . Une bijection explicite peut être obtenue en associant  $(\rho_1, \rho_2, \dots) \in \mathcal{A}_n$  à la fonction de parking

$$\underbrace{(1, \dots, 1)}_{\rho_1 \text{ fois}}, \underbrace{(2, \dots, 2)}_{\rho_2 \text{ fois}}, \dots. \quad (5-365)$$

Cette remarque nous permet de réécrire (5-355) sous la forme

$$\alpha_I = (-1)^{l(I)} \sum_{F \in NDPF(l(I)-1)} \prod_{k=1}^{l(I)-1} \binom{i_k + 1}{m_k(F)} \quad (5-366)$$

et (5-356) sous la forme

$$\hat{\alpha}_I = \sum_{F \in NDPF(l(I)-1)} \prod_{k=1}^{l(I)-1} \binom{i_k}{m_k(F)}. \quad (5-367)$$

Le cardinal des ensembles  $\mathcal{A}_{n+1}$  et  $NDPF(n)$  est le  $n$ -ième nombre de Catalan  $\text{Cat}_n$  (3-216).

### 5.1.4 Une involution

Novelli et Thibon montrent dans [28] que la série  $g$  définie par

$$g(A) = \sigma_1^*(-A) = \sum_{n \geq 0} S_n^*(-A) \quad (5-368)$$

est invariante par l'involution

$$\nu : S^I \mapsto S^{\tilde{I}}. \quad (5-369)$$

Comme on a  $S^I(A) = (-1)^{|I|} \Lambda^I(A)$ , on obtient

$$g(-A) = \sum_I (-1)^{|I|} \hat{\alpha}_I \Lambda^I = (-1)^{|I|} \hat{\alpha}_I \Lambda^{\tilde{I}}, \quad (5-370)$$

et on en déduit la proposition suivante.

**Proposition 5.1.1.** *Les  $\delta_I$  vérifient la relation*

$$\delta_I = \delta_{\tilde{I}}. \quad (5-371)$$

D'autre part, Novelli et Thibon montrent que  $\nu$  envoie  $R_I$  sur  $(-1)^{l(I)-1} \Lambda^{\tilde{I}}$ . On a donc

$$g = \sum_I \hat{\beta}_I R_I = \sum_I (-1)^{l(I)+1} \hat{\beta}_I \Lambda^{\tilde{I}}, \quad (5-372)$$

d'où

$$\sigma_1^*(A) = \sum_I \hat{\beta}_I R_I(-A) = \sum_I (-1)^{|I|+l(I)+1} \hat{\beta}_I S^{\tilde{I}}. \quad (5-373)$$

Nous allons avoir besoin du développement des  $\Lambda_I$  sur la base  $(R_J)$  et de celui des  $R_I$  sur la base  $(\Lambda^J)$ . Lorsque  $I$  est une composition à deux parts, on a

$$\Lambda^I = R_{1^{i_1}} R_{1^{i_2}} = R_{1^{i_1+i_2}} + R_{1^{i_1-1}, 2, 1^{i_2-1}}. \quad (5-374)$$

Par récurrence, on obtient dans le cas général

$$\Lambda^I = \sum_{J \leq I^\#} R_J. \quad (5-375)$$

Notons à présent  $(\Xi_I)$  la base définie par  $\Xi_I = \Lambda^{I^\#}$ . On obtient alors

$$\Xi_I = \sum_{J \leq I} R_J, \quad (5-376)$$

d'où

$$R_I = \sum_{J \leq I} (-1)^{l(I)+l(J)} \Xi_J = \sum_{J \geq I^\#} (-1)^{l(J^\#)+l(I)} \Lambda^J. \quad (5-377)$$

Comme on a de plus  $l(J) + l(J^\#) = |J| + 1 = |I| + 1$ , cette égalité se réécrit

$$R_I = \sum_{J \geq I^\#} (-1)^{|I|+1+l(I)+l(J)} \Lambda^J, \quad (5-378)$$

et on en déduit

$$R_I(-A) = \sum_{J \geq I^\#} (-1)^{l(J)+l(I)+1} S^J. \quad (5-379)$$

D'autre part, on a

$$S^I = \sum_{J \geq I} R_J. \quad (5-380)$$

On en déduit que (5-373) peut se réécrire

$$\sigma_1^*(A) = \sum_I \hat{\beta}_I \sum_{J \geq I^\#} (-1)^{l(J)+l(I)+1} S^J = \sum_I (-1)^{|I|+l(I)+1} \hat{\beta}_I \sum_{J \geq \tilde{I}} R_J, \quad (5-381)$$

et donc

$$\sigma_1^*(A) = \sum_J \left( \sum_{I \geq J^\#} (-1)^{l(J)+l(I)+1} \hat{\beta}_I \right) S^J = \sum_J \left( \sum_{I \geq \tilde{J}} (-1)^{|I|+l(I)+1} \hat{\beta}_I \right) R_J. \quad (5-382)$$

Finalement, on a donc

$$\begin{aligned} \sigma_1^*(A) &= \sum_J (-1)^{l(J)} \left( \sum_{I \geq \tilde{J}} (-1)^{l(I)+1} \hat{\beta}_I \right) S^J \\ &= \sum_J (-1)^{|J|} \left( \sum_{I \geq \tilde{J}} (-1)^{l(I)+1} \hat{\beta}_I \right) R_J. \end{aligned} \quad (5-383)$$

On en déduit la proposition suivante.

**Proposition 5.1.2.** *Le développement de  $\sigma_1^*$  sur les  $R_I$  se ramène à son développement sur les  $S^I$ . Plus précisément, on a*

$$\beta_I = (-1)^{|I|-l(I)}\alpha_I. \quad (5-384)$$

**Remarque 5.1.1.** Comme on sait que  $\alpha_I$  est du signe de  $l(I)$ , on déduit de cette proposition que  $\beta_I$  est du signe de  $|I|$ . De plus, comme  $\alpha_I$  ne dépend pas de la dernière part de  $I$  d'après (5-366), on en déduit que  $\beta_I$  est indépendant au signe près de la première part de  $I$ . Plus précisément,

$$\beta_{n.I} = (-1)^{n+1}\beta_{1.I}. \quad (5-385)$$

La proposition 5.1.2 montre que la formule de Brouder-Frabetti-Krattenthaler est équivalente à l'évaluation des coefficients  $\beta_I$ . D'autre part, (5-370) nous indique que la formule de Gessel et Pak-Postnikov-Retakh est équivalente à l'évaluation des coefficients  $\delta_I$ . Dans les deux parties suivantes, on donne une formule de récurrence simple pour chacune de ces deux familles de coefficients. Ces formules nous permettront par la suite d'en donner de nouvelles interprétations combinatoires.

## 5.2 Une formule de récurrence pour les $\beta_I$

Dans cette partie, on se propose de montrer le théorème suivant.

**Théorème 5.2.1.** *Les coefficients  $\beta_I$  sont déterminés par récurrence par*

$$\beta_n = (-1)^n \quad (5-386)$$

*lorsque  $I = (n)$ , et*

$$\beta_I = \beta_{i_1, i_2, \dots, i_{s-1}+1, i_s-1} + \beta_{i_1, i_2, \dots, i_{s-1}}\beta_{i_s} \quad (5-387)$$

*lorsque  $l(I) > 1$ .*

### 5.2.1 Une formule de récurrence pour $S_n^*$

On pose  $X = \sigma_1(A)^*$ , et on désigne par  $X_k = S_k^*$  la  $k$ -ième composante homogène de  $X$ . Un calcul similaire à celui qui mène à la formule (5-358) donne alors

$$1 = \sum_{k \geq 0} S_k (1 + X_1 + X_2 + \dots)^{k+1}. \quad (5-388)$$

Posons  $Y = X - 1$ . Comme on a

$$X^{k+1} = (Y + 1)^{k+1} = 1 + (k+1)Y + \binom{k+1}{2}Y^2 + \dots, \quad (5-389)$$

on en déduit

$$\begin{aligned}
1 &= \sum_{k \geq 0} S_k (1 + (k+1)X_1 + (k+1)X_2 + \dots \\
&+ \binom{k+1}{2} X_1 X_1 + \binom{k+1}{2} X_1 X_2 + \binom{k+1}{2} X_2 X_1 + \dots \\
&+ \dots
\end{aligned} \tag{5-390}$$

Pour toute composition  $I = (i_1, i_2, \dots, i_r)$ , on pose  $X^I = X_{i_1} X_{i_2} \dots X_{i_r}$ . On obtient alors

$$1 = S_0(1 + X_1 + X_2 + \dots) + \sum_{k \geq 1} \left( S_k \sum_I \binom{k+1}{l(I)} X^I \right) \tag{5-391}$$

(la deuxième somme porte sur toutes les compositions de tous les entiers positifs ou nuls). En extrayant la composante homogène de degré  $n$ , on obtient

$$0 = X_n + \sum_{k=1}^n S_k \left( \sum_{I \models n-k} \binom{k+1}{l(I)} X^I \right), \tag{5-392}$$

c'est-à-dire

$$X_n = - \sum_{k=1}^n \sum_{I \models n-k} \binom{k+1}{l(I)} S_k X^I. \tag{5-393}$$

## 5.2.2 Un lemme préliminaire

Nous aurons besoin du lemme suivant.

**Lemme 5.2.1.** *Pour toute composition  $I$ ,*

$$\alpha_I = - \sum_{K \models l(I)-1} \binom{i_1+1}{l(K)} \alpha_{(i_2, \dots, i_1+k_1)} \alpha_{(i_2+k_1, \dots, i_1+k_1+k_2)} \dots \tag{5-394}$$

*Démonstration.* Pour tout

$$F = \sum_I a_I S^I, \tag{5-395}$$

on pose  $F|_I = a_I S^I$ . On a alors pour toute composition  $I \models n$

$$\alpha_I S^I = X_{n|I} = - \left( \sum_{k=1}^n \sum_{J \models n-k} \binom{k+1}{l(J)} S_k X^J \right) |_I. \tag{5-396}$$

On remarque que pour qu'un terme de la première somme apporte une contribution non nulle, il faut que l'on ait  $k = i_1$ . On a donc

$$\alpha_I S^I = - \left( \sum_{J \models n-i_1} \binom{i_1+1}{l(J)} S_{i_1} X^J \right) |_I. \tag{5-397}$$

En posant  $\tilde{I} = I \setminus i_1 = (i_2, i_3, \dots)$ , on peut réécrire cette formule sous la forme

$$\alpha_I S^{\tilde{I}} = - \left( \sum_{|J|=|\tilde{I}|} \binom{i_1+1}{l(J)} X^J \right)_{|\tilde{I}}. \quad (5-398)$$

Pour tout entier  $n$ , toute composition  $J = (j_1, j_2, \dots) \vDash n$  et toute composition  $I = (i_1, i_2, \dots) \vDash l(J)$ , on pose

$$C_I(J) = (j_1 + \dots + j_{i_1}, j_{i_1+1} + \dots + j_{i_1+i_2}, j_{i_1+i_2+1} + \dots + j_{i_1+i_2+i_3}, \dots). \quad (5-399)$$

On a alors  $C_I(J) \vDash n$  et  $l(C_I(J)) = l(I)$ . On pose aussi

$$\mathfrak{C}(J) = \{C_I(J) | I \vDash l(J)\}. \quad (5-400)$$

Pour que  $X^J$  ait un terme en  $\tilde{I}$  non nul dans (5-398), il faut que  $J \in \mathfrak{C}(\tilde{I})$ , donc qu'il existe  $K \vDash l(I) - 1$  tel que  $J = C_K(\tilde{I})$ .

$$\alpha_I S^{\tilde{I}} = - \left( \sum_{K \vDash l(I)-1} \binom{i_1+1}{l(K)} X^{C_K(\tilde{I})} \right)_{|\tilde{I}}. \quad (5-401)$$

Or

$$X^{C_K(\tilde{I})} = X_{i_2+\dots+i_{1+k_1}} X_{i_2+k_1+\dots+i_{1+k_1+k_2}} \dots, \quad (5-402)$$

donc

$$\left( X^{C_K(\tilde{I})} \right)_{|\tilde{I}} = \alpha_{i_2, \dots, i_{1+k_1}} \alpha_{i_2+k_1, \dots, i_{1+k_1+k_2}} \dots S^{\tilde{I}}. \quad (5-403)$$

De (5-401) et (5-403), on déduit le résultat du lemme.  $\square$

### 5.2.3 Découpages d'une composition

Nous aurons besoin des définitions suivantes.

**Définition 5.2.1.** Soit  $n > 0$  un entier, et  $\phi$  une fonction de l'ensemble des  $n$  premiers entiers non nuls dans lui-même. On dira alors que  $\phi$  est une fonction de découpage de taille  $n$  si elle vérifie

$$\phi(1) = 1 \quad (5-404)$$

et

$$0 \leq \phi(k+1) - \phi(k) \leq 1 \quad (5-405)$$

pour tout  $k$  tel que cette égalité ait un sens.

En fait, les fonctions de découpage de taille  $n$  coïncident avec les fonctions de parking croissantes tassées de taille  $n$ , au sens où chaque fonction de découpage  $\phi$  peut être identifiée à la fonction de parking

$$(\phi(1), \phi(2), \dots, \phi(n)). \quad (5-406)$$

Par la suite, on identifiera chaque fonction de découpage  $\phi$  à la fonction de parking croissante tassée qui lui correspond.

**Définition 5.2.2.** *Pour toute composition  $J$  et toute fonction de découpage  $\phi$  de taille  $l(J)$ , on appellera découpage de  $J$  selon  $\phi$  la suite finie de compositions*

$$D_{J,\phi} = (J^{(1)}, J^{(2)}, \dots) \quad (5-407)$$

où pour tout  $n$ ,  $J^{(n)}$  est défini par

$$J^{(n)} = (j_k, j_{k+1}, j_{k+2}, \dots, j_s), \quad (5-408)$$

où  $k$  et  $s$  sont tels que  $\phi$  prend la valeur  $n$  en tous les entiers compris entre  $k$  et  $s$  au sens large, et nulle part ailleurs.

$$\phi(k) = \phi(k+1) = \dots = \phi(s) = n \quad (5-409)$$

On appellera longueur d'un découpage le nombre de compositions dont il est composé. Enfin, on dira qu'un découpage  $D_{J,\phi}$  est un raffinement d'un découpage  $D_{\tilde{J},\tilde{\phi}}$  si chaque  $J^{(k)}$  du premier est un raffinement du  $\tilde{J}^{(k)}$  correspondant dans le deuxième. Ainsi on écrira

$$(J^{(1)}, J^{(2)}, \dots) \leq (\tilde{J}^{(1)}, \tilde{J}^{(2)}, \dots) \quad (5-410)$$

lorsque

$$J^{(1)} \leq \tilde{J}^{(1)}, J^{(2)} \leq \tilde{J}^{(2)}, \dots \quad (5-411)$$

**Exemple 5.2.1.** En considérant la composition  $J = (13122)$  et la fonction de découpage  $\phi = (11233)$  de taille  $l(J)$ , on obtient

$$D_{J,\phi} = ((13), (1), (22)), \quad (5-412)$$

et la longueur de ce découpage est 3.

**Définition 5.2.3.** *Soit  $I$  une composition d'entier et  $J$  un raffinement de  $I$ . On appelle alors  $I$ -découpage de  $J$  le découpage*

$$(J^{(1)}, J^{(2)}, \dots) \quad (5-413)$$

tel que pour tout  $k$ ,  $J^{(k)} \models i_k$ . On appelle  $\phi_{I,J}$  la fonction de découpage correspondante. Elle vérifie pour tout  $s$

$$\sum_{\phi_{I,J}(k)=s} j_k = i_s. \quad (5-414)$$

**Exemple 5.2.2.** On considère la composition  $I = (323)$ . La composition  $J = (212111)$  est un raffinement de  $I$ , et le  $I$ -découpage de  $J$  est

$$((21), (2), (111)). \quad (5-415)$$

On a donc

$$\phi_{I,J} = (112333). \quad (5-416)$$

**Définition 5.2.4.** Soient  $I$  et  $J$  deux compositions d'un même entier  $n$  telles que  $J$  soit un raffinement de  $I$ . On dira alors qu'un découpage  $D_{\psi,J}$  est  $I$ -admissible et que la fonction de découpage  $\psi$  correspondante est  $(I, J)$ -admissible si d'une part

$$\psi(2) = 2 \quad (5-417)$$

et d'autre part, pour tous  $k$  et  $s$  tels que  $\phi_{I,J}(k) = \phi_{I,J}(s)$ ,

$$\psi(k) \neq \psi(s). \quad (5-418)$$

Par exemple si  $J \neq I$ , le  $I$ -découpage sur  $J$  n'est pas  $I$ -admissible.

**Exemple 5.2.3.** On reste dans le cas  $I = (323)$  et  $J = (212111)$ . Le découpage

$$((2), (121), (1), (1)) \quad (5-419)$$

de  $J$  est  $I$ -admissible, puisque la fonction de découpage correspondante  $(122234)$  est  $(I, J)$ -admissible. Le découpage

$$((2), (12), (1), (1), (1)) \quad (5-420)$$

est lui aussi  $I$ -admissible, puisque la fonction de découpage correspondante  $(122345)$  est aussi  $(I, J)$ -admissible. En revanche, le découpage

$$((2), (12), (11), (1)) \quad (5-421)$$

n'est pas  $I$ -admissible. En effet, la fonction de découpage correspondante est  $\psi = (122334)$ , or on a  $\phi_{I,J} = (112333)$ . On a donc  $\psi(4) = \psi(5)$  et  $\phi_{I,J}(4) = \phi_{I,J}(5)$ , ce qui contredit (5-418).

Soient  $J$  et  $I$  deux compositions d'un même entier, avec

$$J \leq I, \quad (5-422)$$

et soit

$$D_{J,\phi} = (J_{\phi}^{(1)}, J_{\phi}^{(2)}, \dots) \quad (5-423)$$

un découpage quelconque de  $J$  tel que

$$\phi(2) = 2 \quad (5-424)$$

(ou, de manière équivalente,  $J_{\phi}^{(1)} = (j_1)$ ). Alors on peut construire à partir de  $D_{J,\phi}$  un découpage  $I$ -admissible

$$D_{\tilde{J},\tilde{\phi}} = \mathcal{N}(D_{J,\phi}) \quad (5-425)$$

en remplaçant chaque  $J_{\phi}^{(k)} = (j_x, j_{x+1}, \dots, j_y)$  par la composition dont chaque part est la somme de tous les  $j_s$  associés à des  $s$  vérifiant  $x \leq s \leq y$  et qui ont une même image  $n$  par  $\phi_{I,J}$ . Les parts du  $\tilde{J}_{\tilde{\phi}}^{(k)}$  ainsi construit doivent être rangées par ordre croissant du  $n$  correspondant, et tous les  $n$  que l'on peut considérer doivent entrer en compte. On peut vérifier que le découpage ainsi construit est  $I$ -admissible, et que pour chaque  $k$ , on a

$$J_{\phi}^{(k)} \leq \tilde{J}_{\tilde{\phi}}^{(k)}. \quad (5-426)$$

Autrement dit,  $D_{J,\phi}$  est un raffinement de  $D_{\tilde{J},\tilde{\phi}}$ . De plus, l'ensemble

$$\mathcal{D}_{\tilde{J},\tilde{\phi}} = \{D_{J,\phi} / \phi(2) = 2 \text{ et } D_{\tilde{J},\tilde{\phi}} = \mathcal{N}(D_{J,\phi})\} \quad (5-427)$$

coïncide exactement avec l'ensemble des raffinements de  $D_{\tilde{J},\tilde{\phi}}$  qui vérifient

$$J^{(1)} = (j_1). \quad (5-428)$$



### 5.2.4 Une première formule de récurrence

La formule (5–394) peut se réécrire

$$\alpha_J = - \sum_{D_{J,\phi}} \binom{j_1 + 1}{l(D_{J,\phi}) - 1} \alpha_{J_\phi^{(2)}} \alpha_{J_\phi^{(3)}} \dots \alpha_{J_\phi^{(l(D_{J,\phi}))}}, \quad (5-429)$$

où la somme porte sur tous les découpages  $D_{J,\phi}$  de  $J$  qui vérifient

$$\phi(2) = 2. \quad (5-430)$$

D'autre part, on obtient en développant les  $S^I$  sur les  $R_J$  dans (5–351)

$$\beta_I = \sum_{J \leq I} \alpha_J. \quad (5-431)$$

On déduit donc de (5–429) la formule suivante

$$\beta_I = - \sum_{D_{J,\phi}, J \leq I} \binom{j_1 + 1}{l(D_{J,\phi}) - 1} \alpha_{J_\phi^{(2)}} \alpha_{J_\phi^{(3)}} \dots \alpha_{J_\phi^{(l(D_{J,\phi}))}}, \quad (5-432)$$

où la somme porte cette fois sur tous les découpages  $D_{J,\phi}$  de tous les raffinements  $J$  de  $I$  qui vérifient (5–430). En posant

$$D_{\tilde{J},\tilde{\phi}} = \mathcal{N}(D_{J,\phi}), \quad (5-433)$$

on obtient

$$\beta_I = - \sum_{J \leq I, D_{\tilde{J},\tilde{\phi}}, D_{J,\phi} \in \mathcal{D}_{\tilde{J},\tilde{\phi}}} \binom{j_1 + 1}{l(D_{J,\phi}) - 1} \alpha_{J_\phi^{(2)}} \alpha_{J_\phi^{(3)}} \dots \alpha_{J_\phi^{(l(D_{J,\phi}))}}, \quad (5-434)$$

où la somme porte cette fois sur tous les découpages de tous les raffinements de  $I$  appartenant à un  $\mathcal{D}_{\tilde{J},\tilde{\phi}}$  pour un certain découpage  $I$ -admissible  $D_{\tilde{I},\tilde{\phi}}$ . Autrement dit, la somme porte sur tous les raffinements de tous les découpages  $I$ -admissibles dont le premier élément est réduit à une part. En posant  $K = \tilde{J}$ , on déduit donc de (5–431)

$$\beta_I = - \sum_{D_{K,\psi} I\text{-admissible}} \binom{k_1 + 1}{l(D_{K,\psi}) - 1} \beta_{K_\psi^{(2)}} \beta_{K_\psi^{(3)}} \dots \beta_{K_\psi^{(l(D_{K,\psi}))}}. \quad (5-435)$$

En notant  $\hat{I}$  la composition obtenue en remplaçant la première part de  $I$  par 1, la remarque 5.1.1 nous permet de réécrire cette égalité sous la forme

$$\beta_I = (-1)^{i_1} \sum_{D_{K,\psi} \hat{I}\text{-admissible}} \binom{2}{l(D_{K,\psi}) - 1} \beta_{K_\psi^{(2)}} \beta_{K_\psi^{(3)}} \dots \beta_{K_\psi^{(l(D_{K,\psi}))}}. \quad (5-436)$$

En effet, comme les  $K$  sont des raffinements de  $\hat{I}$  dans cette formule, on a  $k_1 = 1$ , donc  $k_1 + 1 = 2$ .

Pour la suite, nous aurons besoin de la définition suivante.

**Définition 5.2.5.** Soit  $I$  une composition de poids  $n$  et  $k$  un entier compris entre 0 et  $n$ . Il existe alors un entier  $s$  vérifiant

$$i_1 + \dots + i_s \leq k \leq i_1 + \dots + i_s + i_{s+1}. \quad (5-437)$$

On définit alors  $I_g(k)$  et  $I_d(k)$  comme étant les deux compositions vérifiant

$$I_g(k) = (i_1, i_2, \dots, i_s, k - i_1 - i_2 - \dots - i_s) \quad (5-438)$$

et

$$I_d(k) = (i_1 + \dots + i_s + i_{s+1} - k, i_{s+1}, i_{s+2}, \dots). \quad (5-439)$$

On a dans tous les cas  $I_g(0) = I_d(n) = \emptyset$  et  $I_g(n) = I_d(0) = I$ . On a par exemple pour  $I = (2, 3, 4)$

$$I_g(3) = (2, 1), I_d(7) = (2), I_g(8) = (2, 3, 3), I_d(3) = (2, 4). \quad (5-440)$$

Dans l'égalité (5-436), le coefficient binomial s'annule pour les découpages de longueur supérieure à 4. Cette remarque nous permet de ne prendre en compte que les découpages de longueur inférieure à 3. De plus, on sait d'après (5-417) que la première part de ces découpages est  $k_1 = \hat{i}_1 = 1$ . Les parts suivantes de ces découpages, au nombre de une ou deux, doivent former un raffinement de  $(i_2, i_3, \dots)$ .

La restriction sur le nombre de parts nous permet d'après (5-418) d'affirmer que ce raffinement ne peut être obtenu qu'en coupant en deux au plus une part de  $(i_2, i_3, \dots)$ . Or, la seule possibilité pour construire un découpage  $I$ -admissible en coupant une part en deux est de construire une part à partir de tout ce qu'il y a à gauche de l'endroit où l'on a coupé, et une autre à partir de tout ce qu'il y a à droite. Si l'on ne coupe aucune part de la composition  $(i_2, i_3, \dots)$ , alors n'importe quel découpage considéré sera  $I$ -admissible.

En posant  $\bar{I} = (i_2, \dots, i_{l(I)})$ , on peut donc reformuler (5-436) de la manière suivante

$$\beta_I = (-1)^{i_1} \left( \binom{2}{1} \beta_{\bar{I}} + \binom{2}{2} \sum_{k=1}^{|\bar{I}|-1} \beta_{\bar{I}_g(k)} \beta_{\bar{I}_d(k)} \right), \quad (5-441)$$

c'est-à-dire

$$\beta_I = (-1)^{i_1} \sum_{k=0}^{|\bar{I}|} \beta_{\bar{I}_g(k)} \beta_{\bar{I}_d(k)}. \quad (5-442)$$

### 5.2.5 Un exemple

Nous allons déterminer  $\beta_I$  pour  $I = (2, 4, 3)$ . La figure suivante est une représentation graphique de  $I$ , dans laquelle les tailles des rectangles sont les valeurs des parts.

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \quad (5-443)$$

Considérons un raffinement quelconque de  $I$ , par exemple  $J = (2, 1, 3, 2, 1)$ . Le  $I$ -découpage de  $J$  correspond alors à la fonction de découpage  $\phi$  telle que

$$\phi(1) = 1, \phi(2) = 2, \phi(3) = 2, \phi(4) = 3, \phi(5) = 3. \quad (5-444)$$

Le  $I$ -découpage de  $J$  peut être représenté par

$$\boxed{1 \parallel 2 \parallel 2 \parallel 3 \parallel 3} \quad (5-445)$$

Essayons à présent de construire un découpage  $I$ -admissible de  $J$ , et appelons  $\psi$  la fonction de découpage correspondante. La condition  $\psi(2) = 2$  impose que le raffinement choisi vérifie  $i_1 = j_1$ , ce qui est le cas pour  $J$ . L'autre condition impose que  $\psi(i) \neq \psi(j)$  lorsque  $\phi(i) = \phi(j)$ . Le plus petit découpage  $I$ -admissible de  $J$  que l'on puisse obtenir est donc

$$\boxed{1 \parallel 2 \parallel 3 \parallel 3 \parallel 4} \quad (5-446)$$

Ce découpage est de longueur 4, et on constate que les seules possibilités pour construire un découpage de taille inférieure à 3 sont les trois suivantes. Ou bien on construit  $J$  en coupant en deux une part de  $I$  (autre que la première) et en modifiant la valeur de  $\psi$  à l'endroit correspondant, comme ci-dessous

$$\boxed{1 \parallel 2 \parallel 3 \parallel 3} \text{ ,} \quad (5-447)$$

ou bien on considère que  $I = J$  et on coupe une deuxième fois n'importe où à droite de la première part (dans notre exemple nous n'avons pas le choix puisque  $l(I) = 3$ )

$$\boxed{1 \parallel 2 \parallel 3} \text{ ,} \quad (5-448)$$

ou bien enfin on considère que  $I = J$  et on ne change la valeur de  $\psi$  qu'entre la première et la deuxième part. Dans ce cas  $\psi$  garde la valeur 2 partout à droite, et on obtient un découpage à 2 parts.

Les deux premières constructions apportent une contribution au terme en  $\binom{2}{2}$  dans (5-441), et la troisième apporte une contribution au terme en  $\binom{2}{1}$ . On obtient ainsi la spécialisation de la formule (5-442) correspondant à notre exemple, et on a donc finalement

$$\beta_{(243)} = 2\beta_{(43)} + \beta_1\beta_{(33)} + \beta_2\beta_{(23)} + \beta_3\beta_{(13)} + \beta_4\beta_3 + \beta_{(41)}\beta_2 + \beta_{(42)}\beta_1. \quad (5-449)$$

## 5.2.6 Démonstration du théorème

On peut immédiatement déduire de (5-355) et (5-384) que le théorème 5.2.1 est vrai dans le cas où  $|I| \leq 2$ . Lorsque  $I$  est une partition à deux parts, on obtient en effet

$$\beta_I = (-1)^{i_1+i_2} \binom{i_2+1}{1} \binom{i_1+1}{0}. \quad (5-450)$$

On a ainsi  $\beta_I = (-1)^{i_1+i_2}(i_2+1)$ , et  $\beta_I$  vérifie donc le théorème.

À présent, on se place dans le cas où est  $I$  une partition à 3 parts ou plus, et on se propose de démontrer le théorème par récurrence sur le poids de  $I$ . Pour cela, on suppose que (5-387) est vrai pour toutes les compositions de poids strictement inférieur à celui de  $I$ . On note  $s$  l'avant-dernière part de  $I$ ,  $n$  sa dernière part, et  $J$  la composition obtenue en retirant à  $I$  sa

première part et ses deux dernières parts. On pose également  $D = \beta_I - \beta_{(i_1) \cdot J \cdot (s+1, n-1)}$ , et on désigne par  $A$  et  $B$  les entiers définis par

$$\begin{aligned} A &= \sum_{k=0}^{|J|} (\beta_{J_g(k)} \beta_{J_d(k) \cdot (s, n)} - \beta_{J_g(k)} \beta_{J_d(k) \cdot (s+1, n-1)}) \\ &+ \sum_{k=1}^{s-1} (\beta_{J \cdot (k)} \beta_{(s-k, n)} - \beta_{J \cdot (k)} \beta_{(s-k+1, n-1)}) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} B &= \beta_{J \cdot (s)} \beta_n - \beta_{J \cdot (s)} \beta_{(1, n-1)} \\ &+ \sum_{k=1}^n (\beta_{J \cdot (s, k)} \beta_{n-k} - \beta_{J \cdot (s+1, k-1)} \beta_{n-k}). \end{aligned}$$

On déduit alors de (5-442) que

$$(-1)^{i_1} D = A + B. \quad (5-451)$$

De plus, en posant  $\hat{J} = J \cdot (s)$  et en appliquant le théorème 5.2.1 à des compositions de poids strictement inférieur à celui de  $I$ , on obtient

$$A = \sum_{k=0}^{|\hat{J}|-1} \beta_{\hat{J}_g(k)} \beta_{\hat{J}_d(k)} \beta_n. \quad (5-452)$$

On déduit alors de (5-442) que

$$A + \beta_{\hat{J}} \beta_n = (-1)^{i_1} \beta_{(i_1) \cdot \hat{J}} \beta_n. \quad (5-453)$$

Posons  $C = B - \beta_{\hat{J}} \beta_n$ . D'après (5-451), il nous reste plus qu'à démontrer que  $C = 0$  pour démontrer le théorème.

Comme  $\hat{J} = J \cdot (s)$ , on peut constater en développant  $B$  que le terme  $\beta_{\hat{J}} \beta_n$  apparaît deux fois avec des signes opposés dans le développement de  $C$ . On en déduit

$$C = -\beta_{\hat{J}} \beta_{(1, n-1)} + \sum_{k=1}^n (\beta_{\hat{J} \cdot (k)} \beta_{n-k} - \beta_{J \cdot (s+1, k-1)} \beta_{n-k}). \quad (5-454)$$

Or, pour  $1 \leq k \leq n$ , l'application du théorème à la composition  $\hat{J} \cdot k$  de poids strictement inférieur à  $|I|$  donne

$$\beta_{\hat{J} \cdot (k)} - \beta_{J \cdot (s+1, k-1)} = \beta_{\hat{J}} \beta_k. \quad (5-455)$$

En multipliant le tout par  $\beta_{n-k}$  dans cette égalité, on peut réécrire (5-454) sous la forme

$$C = -\beta_{\hat{J}} \beta_{(1, n-1)} + \sum_{k=1}^n \beta_{\hat{J}} \beta_k \beta_{n-k}. \quad (5-456)$$

Or la composition  $(1, n-1)$  est de poids strictement inférieur à  $|I|$ . On peut donc lui appliquer le théorème, et on obtient par itérations

$$\beta_{(1, n-1)} = \beta_{(2, n-2)} + \beta_1 \beta_{n-1} = \beta_{(3, n-3)} + \beta_2 \beta_{n-2} + \beta_1 \beta_{n-1} = \dots \quad (5-457)$$

La dernière étape de ce processus est

$$\beta_{(1,n-1)} = \sum_{k=1}^n \beta_k \beta_{n-k}. \quad (5-458)$$

On déduit alors de (5-456) que  $C = 0$ , ce qui achève de démontrer le théorème.

## 5.3 Une formule de récurrence pour les $\delta_I$

### 5.3.1 Propriétés des $\delta_I$

Soient  $I$  et  $J$  deux compositions de même longueur. Comme on a

$$l(J^\sharp) + l(I) = l(J) + l(I) + |I| + 1 = l(I^\sharp) + l(J), \quad (5-459)$$

on peut réécrire (5-377) sous la forme

$$R_I = \sum_{J \geq I^\sharp} (-1)^{l(J)+l(I^\sharp)} \Lambda^J. \quad (5-460)$$

On en déduit

$$\delta_I = \sum_{I \geq J^\sharp} (-1)^{l(J)+l(I^\sharp)} \beta_J = \sum_{J \geq I^\sharp} (-1)^{l(J)+l(I^\sharp)} \beta_J. \quad (5-461)$$

Or on a pour toute composition  $I$  l'identité  $\delta_I = \delta_{\bar{I}}$  (5-371), donc

$$\delta_I = \sum_{J \geq I'} (-1)^{l(I)+l(J)} \beta_J. \quad (5-462)$$

On déduit de cette formule et du théorème 5.2.1 la valeur de  $\delta_n$ , et donc celle de  $\delta_{1^n}$  puisque  $(\tilde{n}) = (1^n)$ .

**Proposition 5.3.1.** *Les coefficients  $\delta_n$  et  $\delta_{1^n}$  sont donnés par*

$$\delta_n = \delta_{1^n} = (-1)^n. \quad (5-463)$$

De plus, on déduit de (5-462) et de (5-384) la proposition suivante.

**Proposition 5.3.2.** *La valeur de  $|\delta_I|$  ne dépend pas de la dernière part de  $I$ . De plus, cette valeur ne change pas lorsqu'on ajoute une part égale à 1 au début de  $I$ . Plus précisément, on a pour tout  $I$  et pour tout  $n$*

$$\delta_{I.(n)} = (-1)^{n-1} \delta_{I.(1)} \quad (5-464)$$

et

$$\delta_{(1^n).I} = (-1)^n \delta_I. \quad (5-465)$$

On peut déduire ces deux égalités l'une de l'autre à partir de l'identité  $\delta_I = \delta_{\bar{I}}$ . L'exemple numérique suivant permet de comprendre comment on obtient (5-464)

$$\delta_{(23)} = \beta_{(32)} - \beta_5 = -(\beta_{(42)} - \beta_6) = -\delta_{(24)}. \quad (5-466)$$

### 5.3.2 Enoncé et démonstration de la formule de récurrence

On donne le théorème suivant.

**Théorème 5.3.1.** *Pour toute composition  $J$ ,  $\delta_J$  est donné par les propositions 5.3.1 et 5.3.2 et la formule de récurrence suivante*

$$\delta_{(n)\cdot(k)\cdot I} = -(\delta_{(n-1)\cdot k\cdot I} + \delta_{(n+k-1)\cdot I}), \quad (5-467)$$

où  $n > 1$ ,  $k > 0$  et  $l(I) \leq 0$ . Une conséquence directe de ce théorème est

**Corrolaire 5.3.1.** *En appliquant (5-371) au théorème 5.3.1, on obtient pour toute composition  $I$ , pour tout  $k > 1$  et pour tout  $n > 0$*

$$\delta_{I\cdot(k)\cdot(1^n)} = -(\delta_{I\cdot(k)\cdot(1^{n-1})} + \delta_{I\cdot(k-1)\cdot(1^n)}). \quad (5-468)$$

*Cette formule, combinée aux propositions 5.3.1 et 5.3.2, suffit également à déterminer tous les  $\delta_I$ .*

Le reste de cette partie est consacré à la démonstration du théorème 5.3.1. Pour le démontrer, nous aurons besoin du lemme suivant.

**Lemme 5.3.1.** *Soit  $I$  une composition de longueur  $s > 1$ . Le coefficient  $\beta_I$  vérifie alors*

$$\beta_I - \beta_{(i_1, \dots, i_{s-2}, i_{s-1}+i_s)} + \beta_{(i_1, \dots, i_{s-1}, i_s-1)} = 0. \quad (5-469)$$

*Démonstration.* En appliquant plusieurs itérations de (5-387) comme dans (5-457), et en tenant compte du fait que  $\beta_n = (-1)^n$ , on obtient

$$\beta_I = \sum_{k=0}^{i_s} (-1)^{i_s-k} \beta_{(i_1, \dots, i_{s-2}, i_{s-1}+k)}. \quad (5-470)$$

En développant ainsi  $\beta_I$  et  $\beta_{(i_1, \dots, i_{s-1}, i_s-1)}$  dans le membre de gauche de (5-469), on obtient une somme de termes qui s'annulent entre eux. Par exemple pour  $I = (2, 2, 2)$  on obtient

$$\beta_{(222)} - \beta_{(24)} + \beta_{(221)} = (\beta_{(24)} - \beta_{(23)} + \beta_{(22)}) - \beta_{(24)} + (\beta_{(23)} - \beta_{(22)}) = 0. \quad (5-471)$$

□

Nous pouvons à présent démontrer le théorème 5.3.1. Soit  $I$  une composition vérifiant les conditions d'application du théorème, et notons  $J$  la composition obtenue en retranchant 1 à la première part de  $I$ . Tout grossissement de  $J$  est alors ou bien la concaténation de  $(j_1)$  et d'un grossissement de  $\bar{I} = (j_2, j_3, \dots)$ , ou bien un grossissement de  $K = (j_1 + j_2, j_3, \dots)$ , et comme on a

$$\delta_J + \delta_K = \sum_{L \geq J} (-1)^{l(J)+l(L)} \beta_L + \sum_{L \geq K} (-1)^{l(L)+l(K)} \beta_L, \quad (5-472)$$

on a donc

$$\begin{aligned}\delta_J + \delta_K &= \sum_{L \geq K} (-1)^{l(J)+l(L)} \beta_L + \sum_{L \geq \bar{I}} (-1)^{l(J)+l(L)+1} \beta_{(j_1) \cdot L} \\ &+ \sum_{L \geq K} (-1)^{l(K)+l(L)} \beta_L.\end{aligned}\tag{5-473}$$

Or  $l(J) = 1 + l(K)$ , donc

$$\delta_J + \delta_K = \sum_{L \geq \bar{I}} (-1)^{l(J)+l(L)+1} \beta_{(j_1) \cdot L}.\tag{5-474}$$

On en déduit

$$\delta_I + \delta_J + \delta_K = \sum_{L \geq I} (-1)^{l(I)+l(L)} \beta_L + \sum_{L \geq \bar{I}} (-1)^{l(J)+l(L)+1} \beta_{(j_1) \cdot L},\tag{5-475}$$

c'est-à-dire, en posant  $M = (i_1 + i_2, i_3, \dots)$ ,

$$\begin{aligned}\delta_I + \delta_J + \delta_K &= \sum_{L \geq \bar{I}} (-1)^{l(I)+l(L)+1} \beta_{(i_1) \cdot L} \\ &+ \sum_{L \geq M} (-1)^{l(I)+l(L)} \beta_L + \sum_{L \geq \bar{I}} (-1)^{l(J)+l(L)+1} \beta_{(j_1) \cdot L}\end{aligned}\tag{5-476}$$

D'autre part, on a  $j_1 = i_1 - 1$ ,  $l(I) = l(J)$  et  $l(M) = l(I) - 1$ . De plus, les raffinements de  $M$  sont exactement les compositions obtenues en ajoutant  $i_1$  à la première part des raffinements de  $\bar{I}$ . On en déduit

$$\begin{aligned}\delta_I + \delta_J + \delta_K &= \sum_{L \geq \bar{I}} (-1)^{l(I)+l(L)+1} \beta_{(i_1) \cdot L} \\ &+ \sum_{L \geq \bar{I}} (-1)^{l(I)+l(L)} \beta_{(i_1+l_1, l_2, \dots)} + \sum_{L \geq \bar{I}} (-1)^{l(I)+l(L)+1} \beta_{(i_1-1) \cdot L},\end{aligned}\tag{5-477}$$

c'est-à-dire

$$\delta_I + \delta_J + \delta_K = \sum_{L \geq \bar{I}} (-1)^{l(I)+l(L)+1} (\beta_{(i_1) \cdot L} - \beta_{(i_1+l_1, l_2, \dots)} + \beta_{(i_1-1) \cdot L}).\tag{5-478}$$

Les termes de cette somme s'annulent tous d'après le lemme 5.3.1, ce qui achève de démontrer le théorème 5.3.1.

## 5.4 Interprétations combinatoires

### 5.4.1 Interprétation combinatoire des $\beta_I$

Nous aurons besoin pour la suite de la définition suivante.

**Définition 5.4.1.** Soit  $I$  une composition de longueur  $s$ . On appelle alors  $\Phi_I$  l'ensemble des suites finies d'entiers de longueur  $s - 1$  vérifiant  $\phi_1 \leq i_s$  et pour tout  $k$  compris entre 1 et  $s - 2$

$$\phi_{k+1} \leq i_{s-k} + \phi_k. \quad (5-479)$$

On appellera cet ensemble l'ensemble des flux circulant à gauche dans  $I$ . Pour  $\phi \in \Phi_I$ , on désignera par  $\phi(I)$  la composition obtenue en enlevant les parts égales à zéro dans

$$\phi(I) = (i_1 + \phi_{s-1}, i_2 + \phi_{s-2} - \phi_{s-1}, \dots, i_{s-1} + \phi_1 - \phi_2, i_s - \phi_1) \quad (5-480)$$

(la définition est faite pour que toutes les parts ainsi construites soient positives).

Cette définition va nous permettre d'interpréter combinatoirement la récurrence (5-387). Après plusieurs itérations de (5-387), on obtient pour toute composition  $I$  telle que  $|I| \geq 0$  et tout couple  $(k, n)$  d'entiers positifs

$$\beta_{I \cdot (k) \cdot (n)} = \sum_{s=0}^n \beta_{I \cdot (k+s)} \beta_{n-s}. \quad (5-481)$$

Cette formule est une généralisation de (5-458).

**Exemple 5.4.1.** Soient  $I = (2)$ ,  $k = 3$  et  $n = 4$ . On a alors

$$\beta_{(234)} = \beta_{(243)} + \beta_{(23)}\beta_4 = \beta_{(252)} + \beta_{(24)}\beta_3 + \beta_{(23)}\beta_4 + \dots \quad (5-482)$$

La dernière étape de ce processus est

$$\beta_{(234)} = \beta_{(23)}\beta_4 + \beta_{(24)}\beta_2 + \beta_{(25)}\beta_2 + \beta_{(26)}\beta_1 + \beta_{(27)}. \quad (5-483)$$

Après plusieurs itérations de (5-481), on obtient pour toute composition  $I$  de poids strictement positif

$$\beta_I = \sum_{\phi \in \Phi_I} \beta^{\phi(I)}. \quad (5-484)$$

**Exemple 5.4.2.** Soit  $I = (211)$ . Après deux itérations de (5-481), on obtient

$$\beta_I = \beta_{(22)} + \beta_{(21)}\beta_1 = \beta_4 + \beta_3\beta_1 + \beta_2\beta_2 + \beta_3\beta_1 + \beta_2\beta_1\beta_1. \quad (5-485)$$

Notons que les  $\beta_n$  sont interprétés ici comme des variables non commutatives. Notons aussi qu'il y a deux occurrences de la composition (31) dans ce développement, puisque le flux (1, 1) envoie  $I$  sur (310), tandis que le flux (1, 0) l'envoie sur (301).

Les flux ont une interprétation liée aux fonctions de parking croissantes. En effet, chaque flux  $\phi \in \Phi_I$  permet d'obtenir une fonction de parking croissante  $F \leq p(I)$  en remplaçant



dans  $p(I)$  les  $\phi_{s-1}$  premières parts égales à  $s$  par des parts égales à  $s - 1$ , les  $\phi_{s-2}$  premières parts égales à  $s - 1$  par des parts égales à  $s - 2$ , et ainsi de suite.

Par exemple, pour  $I = (2222)$  on a

$$p(I) = (11223344), \tag{5-486}$$

et le flux  $\phi = (1, 0, 1)$  correspond à la fonction de parking  $(11123334)$ , d'évaluation  $(3131) = \phi(I)$ . En fait, cette construction permet de mettre en bijection l'ensemble  $\Phi_I$  avec l'ensemble des fonctions de parking croissantes inférieures à  $p(I)$ , et de reformuler ainsi (5-484) de la façon suivante

$$\beta_I = \sum_{F \leq p(I)} \beta^{\text{ev}(F)}. \tag{5-487}$$

Le fait que certaines compositions apparaissent plusieurs fois dans ce développement s'explique par le fait que plusieurs fonctions de parking croissantes puissent avoir la même évaluation. Sachant que  $\beta_n = (-1)^n$  et que l'on ne fait intervenir que des compositions de même poids, nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le théorème suivant.

**Théorème 5.4.1.** *Le coefficient  $\beta_I$  est donnée par*

$$\beta_I = (-1)^{|I|} \#\{F \in NDPF(|I|) / F \leq p(I)\}. \tag{5-488}$$

Ce théorème permet de déduire de (5-366) et de (5-384) l'identité combinatoire suivante.

**Corrolaire 5.4.1.** *Soit  $F$  une fonction de parking croissante tassée et  $s$  la longueur de son évaluation. Le nombre  $N$  de fonctions de parking croissantes  $G$  de même taille que  $F$  et telles que  $G \leq F$  est alors donné par*

$$N = \sum_{F \in NDPF(s-1)} \prod_{k=1}^{s-1} \binom{i_{s+1-k} + 1}{m_k(F)}. \tag{5-489}$$

### 5.4.2 Interprétation combinatoire des $\delta_I$

Dans cette partie, nous introduisons une nouvelle manière de représenter graphiquement les compositions. Plus précisément, nous représentons chaque composition  $I$  par le ruban qui lui correspond, puis nous remplissons chaque case de ce ruban avec la valeur de la part de  $I$  qu'elle représente. Par exemple,  $(222)$  et  $(311)$  correspondent respectivement à

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline & 3 & 3 \\ \hline & 2 & 2 \\ \hline 1 & 1 & \\ \hline \end{array}
 \quad \text{et} \quad
 \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 \\ \hline 2 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}
 \tag{5-490}$$

On peut obtenir  $p(I)$  en lisant le dessin correspondant à  $I$  de gauche à droite et de bas en haut. Par exemple, on a  $p(222) = (112233)$ , et  $p(311) = (11123)$ . A présent, notons  $\delta'_I$  le nombre de compositions  $J$  dont le ruban passe en haut à gauche de celui qui correspond à  $I$  dans le même rectangle, et appelons  $A_I$  l'ensemble de ces compositions. Par exemple, pour  $I = (222)$ , on aura

$$A_I = \{(213), (132), (123), (114), (222)\}. \tag{5-491}$$

Les éléments de cet ensemble sont représentés par les dessins suivants

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & 3 & 3 & 3 \\ \hline & 2 & & \\ \hline 1 & 1 & & \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & 3 & 3 \\ \hline 2 & 2 & 2 & \\ \hline 1 & & & \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & 3 & 3 & 3 \\ \hline 2 & 2 & & \\ \hline 1 & & & \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 3 & 3 & 3 & 3 \\ \hline 2 & & & \\ \hline 1 & & & \\ \hline \end{array}$$

et

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline & 3 & 3 \\ \hline & 2 & 2 \\ \hline 1 & 1 & \\ \hline \end{array} \quad (5-492)$$

Formellement,  $A_I$  est l'ensemble des compositions  $J$  de même poids et de même longueur que  $I$  vérifiant

$$p(J) \geq p(I). \quad (5-493)$$

En fait, on a aussi

$$\delta'_I = (-1)^{|I|} \delta_I. \quad (5-494)$$

En effet, on peut constater en étudiant les dessins que  $(-1)^{|I|} \delta'_I$  vérifie les propositions 5.3.1 et 5.3.2. De plus, si on suppose que  $j_1 > 1$  et que  $J$  est la composition obtenue en retranchant 1 à la première part de  $I$ , on peut alors voir que  $A_J$  est exactement constitué de l'ensemble des rubans de  $A_I$  qui commencent en partant vers la droite, auxquels on coupe la première case. De même en appelant  $K$  la composition obtenue en additionnant les deux premières parts de  $J$ , on obtient un ensemble  $A_K$  qui coïncide exactement avec l'ensemble des rubans de  $A_I$  qui commencent en partant vers le haut, auxquels on coupe la première case. On a donc

$$\delta'_I = \delta'_J + \delta'_K, \quad (5-495)$$

et on en déduit que  $(-1)^{|I|} \delta_I$  vérifie le théorème 5.2.1, ce qui achève de démontrer (5-494).

**Théorème 5.4.2.** *Le coefficient  $\delta_I$  est donné pour toute composition  $I$  par*

$$\delta_I = (-1)^n \#\{J \models |I|/l(J) = l(I) \text{ et } p(J) \geq p(I)\}. \quad (5-496)$$

Notons que connaissant ce théorème, on peut aussi comprendre la propriété  $\delta_I = \delta_{\bar{I}}$  en étudiant les dessins.

## 5.5 Interprétations algébriques

Soit  $I$  une composition, et soient  $k$  et  $n$  deux entiers strictement positifs. D'après le lemme 5.3.1, on a

$$\beta_{I \cdot (k,n)} = \beta_{I \cdot (k+n)} - \beta_{I \cdot (k,n-1)}. \quad (5-497)$$

D'après (5-384), on a donc également, en posant  $J = I'$ ,

$$\begin{aligned} (-1)^{k+n+|I|+l(I)} \alpha_{(n,k) \cdot J} &= (-1)^{k+n+|I|+l(I)+1} \alpha_{(n+k) \cdot J} \\ &+ (-1)^{k+n+|I|+l(I)} \alpha_{(n-1,k) \cdot J}, \end{aligned} \quad (5-498)$$

c'est-à-dire

$$\alpha_{(n,k) \cdot J} = \alpha_{(n-1,k) \cdot J} - \alpha_{(n+k) \cdot J}. \quad (5-499)$$

On déduit de (5-497) et de (5-499) la proposition suivante.

**Proposition 5.5.1.** *Soit  $I$  une composition quelconque, et soient  $k$  et  $n$  deux entiers strictement positifs. Alors,*

$$\alpha_{(n,k)\cdot I} = \alpha_{(n+k+1)\cdot I} + \alpha_{(n+1,k)\cdot I} \quad (5-500)$$

et

$$\beta_{I\cdot(k,n)} = \beta_{I\cdot(k+n+1)} - \beta_{I\cdot(k,n+1)}. \quad (5-501)$$

Pour toute composition  $I$ , on pose  $P_I = (-1)^{l(I)} R_I$ . Soient à présent  $A$  et  $B$  deux alphabets non commutatifs, mutuellement indépendants et qui commutent entre eux. On note  $f_1$ ,  $f_2$  et  $f_3$  les formes linéaires à valeurs dans les fonctions symétriques non commutatives de  $A$ , respectivement définies par

$$f_1\left(\sum_I R_I(A) S^I(B)\right) = \sigma_1^*(B), \quad (5-502)$$

$$f_2\left(\sum_I (-1)^{l(I)} R_I(A) R_I(B)\right) = \sigma_1^*(B), \quad (5-503)$$

$$f_3\left(\sum_I R_I(A) \Lambda^I(B)\right) = \sigma_1^*(B). \quad (5-504)$$

Ces définitions sont équivalentes à

$$f_1(R_I(A)) = \alpha_I, \quad f_2(P_I(A)) = \beta_I, \quad \text{et} \quad f_3(R_I(A)) = \delta_I. \quad (5-505)$$

On déduit du théorème 5.3.1 que pour tout  $n > 1$  et toute composition  $I$ ,

$$\begin{aligned} f_3(R_{(n)\cdot I}(A)) &= \delta_{(n)\cdot I} \\ &= -\delta_{(n-1)\cdot I} - \delta_{(n-1+i_1)\cdot(i_2, i_3, \dots)} \\ &= -f_3(R_{(n-1)\cdot I}(A)) - f_3(R_{(n-1+i_1)\cdot(i_2, i_3, \dots)}(A)). \end{aligned}$$

On a donc

$$f_3(R_{(n)\cdot I}(A)) = -f_3(R_{(n-1)\cdot I}(A)) + R_{(n-1+i_1)\cdot(i_2, i_3, \dots)}(A), \quad (5-506)$$

c'est-à-dire

$$f_3(R_{(n)\cdot I}(A)) = -f_3(R_{n-1}(A) R_I(A)). \quad (5-507)$$

La proposition 5.3.2 nous indique que cette égalité reste vraie pour  $n = 1$ , et en suivant un raisonnement analogue à partir de la proposition 5.5.1, on obtient

$$f_1(R_{(n)\cdot I}(A)) = f_1(R_{n+1}(A) R_I(A)). \quad (5-508)$$

De plus, on a

$$P_I P_{n+1} = (-1)^{l(I)+1} (R_{I\cdot(n+1)} + R_{(i_1, \dots, i_{s-1}, i_s+n+1)}), \quad (5-509)$$

où  $s$  est la longueur de  $I$ , d'où

$$P_I P_{n+1} = P_{I\cdot(n+1)} - P_{(i_1, \dots, i_{s-1}, i_s+n+1)}. \quad (5-510)$$

La formule (5-501) donne donc une équation fonctionnelle dont  $f_2$  est solution. En résumé, on a donc :

**Proposition 5.5.2.** *Les formes linéaires  $f_1$ ,  $f_2$  et  $f_3$  sont respectivement solutions des équations fonctionnelles*

$$f_1(R_{(n).I}(A)) = f_1(R_{n+1}(A)R_I(A)), \quad (5-511)$$

$$f_2(P_{I.(n)}(A)) = -f_2(P_I(A)P_{n+1}(A)), \quad (5-512)$$

et

$$f_3(R_{(n).I}(A)) = -f_3(R_{n-1}(A)R_I(A)). \quad (5-513)$$

## 5.6 Liens entre les $\alpha_I$ et les $\delta_I$

D'après (5-367) et (5-370), on a pour toute composition  $I$

$$\lambda_I = \sum_{F \in NDPF(l(I)-1)} \prod_k \binom{i_k}{m_k(F)}. \quad (5-514)$$

En comparant cette formule avec (5-366), on peut voir que les  $\alpha_I$  et les  $\delta_I$  sont liés entre eux par

$$\alpha_I = (-1)^{|I|+l(I)-l(I)} \delta_{(i_1+1, i_2+1, \dots)} = (-1)^{|I|} \delta_{(i_1+1, i_2+1, \dots)}. \quad (5-515)$$

On remarque que l'on peut déduire (5-511) de (5-513) en utilisant cette formule.

A présent, appelons  $\phi$  le morphisme d'algèbres de **Sym** dans **Sym** qui envoie  $\Lambda_1$  sur 0 et  $\Lambda_n$  sur  $(-1)^{n-1} S_{n-1}$  lorsque  $n > 1$ . On a alors

$$\phi(\sigma_1^*) = \phi\left(\sum_I \delta_I \Lambda^I\right) = \sum_I (-1)^{|I|} \delta_{(i_1+1, i_2+1, \dots)} S^I, \quad (5-516)$$

et on en déduit que

$$\phi(\sigma_1^*) = \sum_I \alpha_I S^I = \sigma_1^*, \quad (5-517)$$

et donc que  $\sigma_1^*$  est *invariant* par ce morphisme.

Enfin, on peut voir à l'aide des dessins de la partie 5.4.2 et du théorème 5.4.2 que  $|\delta_I|$  est aussi le nombre de fonctions de parking croissantes tassées  $F$  dont la dernière part est la même que celle de  $p(I')$ , et telles que  $F \leq p(I')$  (il suffit de faire effectuer un demi-tour aux dessins correspondants pour s'en rendre compte). L'identité

$$|\alpha_I| = |\beta_{I'}| = |\delta_{(i_1+1, i_2+1, \dots)}| \quad (5-518)$$

obtenue à partir de (5-515) et de (5-384) donne donc, combinée avec (5.4.2), l'identité combinatoire suivante.

**Proposition 5.6.1.** *Soit  $F$  une fonction de parking croissante tassée de taille  $n$  dont on note  $s$  la dernière part, et soit  $\tilde{F}$  la fonction de parking obtenue à partir de  $F$  en rajoutant une part de chaque valeur comprise entre 1 et  $s$  (par exemple si  $F = (1123)$ , alors  $\tilde{F} = (1112233)$ ).*

Le nombre de fonctions de parking croissantes tassées  $G$  de même taille que  $F$ , ayant la même dernière part que  $\tilde{F}$  et vérifiant  $G \leq \tilde{F}$  est alors égal au nombre total de fonctions de parking  $G$  de taille  $n$  vérifiant  $G \leq F$ .

Nous allons à présent donner une bijection explicite. Pour cela, nous aurons besoin d'une seconde représentation graphique des fonctions de parking croissantes. Cette fois, on considèrera des rubans dont la colonne la plus à droite ne contient qu'une case. On considèrera que la première case d'un ruban est à la hauteur 1, et on fera correspondre à chaque ruban la suite obtenue en lisant de gauche à droite la hauteur de la case la plus basse de chaque colonne du ruban, en commençant par la seconde colonne en partant de la gauche. Par exemple, le ruban correspondant à  $(1, 1, 3, 3, 4)$  sera



Les fonctions de parking croissantes inférieures à une fonction de parking croissante  $F$  donnée et de même taille que  $F$  correspondent exactement aux rubans qui passent en bas à droite de celui qui correspond à  $F$  et qui ont la même longueur.

A présent, supposons que  $F$  est une fonction de parking croissante tassée, et soit  $\tilde{F}$  la fonction de parking obtenue à partir de  $F$  de la même manière que dans la proposition 5.6.1. Le ruban correspondant à  $F$  est alors le même que celui obtenu à partir de  $\tilde{F}$  en suivant la construction de la partie 3.4.2.

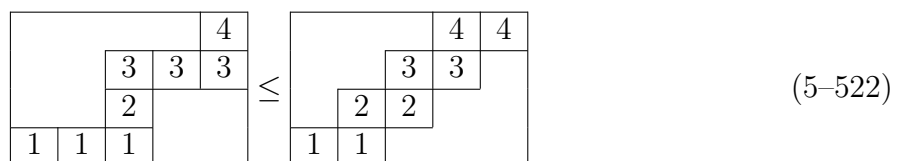
Soit maintenant une fonction de parking croissante  $G$  de même taille que  $F$  et vérifiant  $G \leq F$ . En construisant le ruban correspondant à  $G$  de la manière que nous avons décrite dans cette partie, et en lui rajoutant des cases en haut de la dernière jusqu'à ce qu'il atteigne la hauteur du ruban correspondant à  $F$ , on obtient selon le point de vue de la partie 5.4.2 une fonction de parking tassée  $\tilde{G}$  de même taille et de même dernière part que  $\tilde{F}$ , et telle que  $\tilde{G} \leq \tilde{F}$ . Par exemple, l'inégalité  $(1133) \leq (1234)$ , qui est vraie du fait que le ruban



passé en bas à droite du ruban



permet d'obtenir l'inégalité  $(11123334) \leq (11223344)$ , comme on peut le voir sur ce dessin.



Soit  $F$  une fonction de parking tassée de taille  $n$ ,  $\tilde{F}$  la fonction de parking obtenue à partir de  $F$  comme dans la proposition 5.6.1,  $t$  sa taille,  $A_F$  l'ensemble des  $G \in NDPF(n)$  vérifiant  $G \leq F$ , et  $B_F$  l'ensemble des  $G \in NDPF(t)$  tassées, de même dernier terme que  $\tilde{F}$  et vérifiant  $G \leq \tilde{F}$ . On obtient alors une bijection

$$f : A_F \rightarrow B_F \quad (5-523)$$

en posant que pour tout  $G \in A_F$ ,  $f(G)$  est obtenue en ajoutant à  $G$  une part  $s$  pour chaque  $s$  contenu entre 1 et le dernier terme de  $\tilde{F}$ .

Par exemple, pour  $F = (12334)$  et  $G = (11333)$ , on obtient  $\tilde{F} = (112233344)$  et  $f(G) = (111233334)$ .

## 5.7 Développement de $S^{I^*}$ sur la base des rubans

### 5.7.1 Une formule explicite pour $S^{I^*}$

Dans cette partie, on définit  $s^\perp$  comme étant l'opérateur *adjoint* à  $s$ . Cet opérateur est défini de  $QSym$  dans elle-même par

$$\langle F, s(G) \rangle = \langle s^\perp(F), G \rangle. \quad (5-524)$$

Ici,  $F$  est une fonction quasi-symétrique,  $G$  est une fonction symétrique non commutative, et le crochet correspond à la dualité entre **Sym** et  $QSym$  munies de leurs structures usuelles d'algèbres de Hopf.

Soient à présent  $I$  et  $J$  deux compositions de même poids. En découpant les  $j_1$  premières cases du ruban correspondant à  $I$ , on peut former une composition  $I^{(1)}$ . On construit de même une composition  $I^{(2)}$  en coupant les  $j_2$  cases suivantes, et ainsi de suite. On définit alors  $\alpha_{I,J}$  par

$$\alpha_{I,J} = \prod_k \alpha_{I^{(k)}}. \quad (5-525)$$

On définit de manière analogue  $\beta_{I,J}$ . Par exemple, on a

$$\beta_{(32222),(51131)} = \beta_{(32)}\beta_1\beta_1\beta_{(21)}\beta_1. \quad (5-526)$$

Nous allons à présent déterminer l'action de  $s^\perp$  sur les  $M_I$ . Soit  $I$  une composition de longueur  $r$ . Comme on a

$$s(S^I) = S_{i_r}^* S_{i_{r-1}}^* \dots S_{i_1}, \quad (5-527)$$

on en déduit

$$s(S^I) = \prod_{k=r}^1 \sum_{J=i_k} \alpha_J S^J = \sum_{J \leq I'} \alpha_{J,I'} S^J. \quad (5-528)$$

On a donc

$$\langle s^\perp(M_I), S^J \rangle = \langle M_I, s(S^J) \rangle = \alpha_{I,J'} \quad (5-529)$$

si  $J \geq I'$ , et

$$\langle s^\perp(M_I), S^J \rangle = 0 \quad (5-530)$$

sinon. On en déduit que

$$s^\perp(M_I) = \sum_{J \geq I'} \alpha_{I,J'} M_J. \quad (5-531)$$

Par exemple,

$$s^\perp(M_{112}) = \alpha_1 \alpha_1 \alpha_2 M_{(211)} + \alpha_1 \alpha_{(12)} M_{(31)} + \alpha_{(11)} \alpha_2 M_{(22)} + \alpha_{(112)} M_4. \quad (5-532)$$

A présent, on s'intéresse à l'action de  $s^\perp$  sur les  $F_I$ . D'après (5-531), on a

$$s^\perp(F_I) = \sum_{J \leq I} \left( \sum_{K \geq J'} \alpha_{J,K'} M_K \right). \quad (5-533)$$

On en déduit

$$s^\perp(F_I) = \sum_{K \models |I|} \left( \sum_{J \leq \text{pgrc}(I, K')} \alpha_{J, K'} M_K \right), \quad (5-534)$$

où pour toute paire  $(I, J)$  de compositions de même poids,  $\text{pgrc}(I, J)$  désigne le plus grand raffinement commun à  $I$  et à  $J$ .

La formule (5-431) permet de réécrire cette égalité sous la forme

$$s^\perp(F_I) = \sum_{K \models |I|} \beta_{\text{pgrc}(I, K'), K'} M_K. \quad (5-535)$$

Or, on a pour tout couple  $(I, J)$  de compositions de même poids

$$\beta_{\text{pgrc}(I, J), J} = \beta_{I, J}. \quad (5-536)$$

Finalement, on a donc

$$s^\perp(F_I) = \sum_{J \models |I|} \beta_{I, J'} M_J. \quad (5-537)$$

A titre d'exemple, l'application de cette formule donne

$$\begin{aligned} s^\perp(F_{(13)}) &= \beta_{(13)} M_4 + \beta_1 \beta_3 M_{(31)} + \beta_{(11)} \beta_2 M_{(22)} + \beta_{(12)} \beta_1 M_{(13)} \\ &+ \beta_1 \beta_1 \beta_2 M_{(211)} + \beta_1 \beta_2 \beta_1 M_{(121)} + \beta_{(11)} \beta_1 \beta_1 M_{(112)} \\ &+ \beta_1 \beta_1 \beta_1 \beta_1 M_{(1111)}. \end{aligned} \quad (5-538)$$

On voit que l'on a pour toute paire de compositions  $(I, J)$  de même poids

$$\langle s^\perp(F_I), S^J \rangle = \beta_{I, J'}, \quad (5-539)$$

et on en déduit la proposition suivante.

**Proposition 5.7.1.** *Le développement de  $S^{I^*}$  sur la base  $(R_J)$  est donné pour toute composition  $I$  de poids  $n$  par*

$$S^{I^*} = \sum_J \beta_{J, I'} R_J. \quad (5-540)$$

On déduit par ailleurs de (5-529), (5-530) et (5-539) que

$$\langle s^\perp(M_I), S^J \rangle = \begin{cases} (-1)^{|I|-l(I)} \langle s^\perp(F_{I'}), S^{J'} \rangle & \text{si } J \geq I' \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (5-541)$$

### 5.7.2 Une interprétation combinatoire

Nous allons voir que les  $\langle s^\perp(F_I), S^J \rangle$  peuvent s'interpréter combinatoirement. Pour cela, nous donnerons une interprétation combinatoire d'un produit de  $\beta_I$  dans le cas général.

Considérons une suite finie de compositions  $\mathfrak{J}$  quelconque

$$\mathfrak{J} = (I^{(1)}, I^{(2)}, \dots). \quad (5-542)$$

Posons alors

$$\beta_{\mathfrak{J}} = \prod_k \beta_{I^{(k)}} \quad (5-543)$$

et

$$|\mathfrak{J}| = \prod_k |I^{(k)}|. \quad (5-544)$$

D'après (5-488),  $\beta_{\mathfrak{J}}$  est le cardinal de l'ensemble

$$A_{p(I^{(1)})} \times A_{p(I^{(2)})} \times \dots, \quad (5-545)$$

où  $A_F$  est défini pour toute fonction de parking croissante  $F$  comme dans la partie 4.6. On note  $+$  la somme terme à terme des suites finies d'entiers de même taille, et on note  $u(\mathfrak{J})$  la suite de longueur  $|\mathfrak{J}|$  composée de  $|I^{(1)}|$  parts de valeur 0,  $|I^{(2)}|$  parts de valeurs  $l(I^{(1)})$ ,  $|I^{(3)}|$  parts de valeur  $l(I^{(1)}) + l(I^{(2)})$ , et ainsi de suite. Par exemple, pour

$$\mathfrak{J} = ((13), (12), (111), (11)), \quad (5-546)$$

on aura

$$u(\mathfrak{J}) = (0000/222/444/77). \quad (5-547)$$

On désigne par  $\cdot$  la concaténation des suites d'entiers. Soit  $A_{\mathfrak{J}}$  l'ensemble des fonctions de parking  $F$  vérifiant

$$u(\mathfrak{J}) + (1^{|\mathfrak{J}|}) \leq F \leq u(\mathfrak{J}) + p(I^{(1)}) \cdot p(I^{(2)}) \cdot \dots, \quad (5-548)$$

c'est-à-dire dans notre exemple

$$(1111/333/555/88) \leq F \leq (1222/344/567/89). \quad (5-549)$$

L'ensemble défini en (5-545) est en bijection avec  $A_{\mathfrak{J}}$ . Une bijection explicite est donnée par

$$(F_1, F_2, \dots) \rightarrow u(\mathfrak{J}) + F_1 \cdot F_2 \cdot \dots \quad (5-550)$$

On a donc

$$\beta_{\mathfrak{J}} = \#A_{\mathfrak{J}}. \quad (5-551)$$

Connaissant cette formule et la formule (5-539), la représentation graphique des fonctions de parking croissantes introduite dans la partie 5.6 peut nous permettre d'interpréter combinatoirement les coefficients  $\langle s^\perp(F_I), S^J \rangle$ .

On donne à présent la démarche qui nous mène à cette interprétation combinatoire dans le cas général, tout en l'illustrant sur l'exemple numérique correspondant à  $I = (122)$  et



$J = (311)$ .

On commence par dessiner le ruban  $R_1$  correspondant à  $p(I)$ , qui vaut (12233) dans notre exemple.



On construit ensuite le ruban  $R_2$  correspondant à  $p(J)$ , qui vaut (12333) dans notre exemple



On construit à présent un nouveau ruban  $R$ , qui contient deux cases dans chaque colonne si un des deux rubans que l'on vient de dessiner en contient deux dans la même colonne, et une seule si aucun des deux rubans que l'on vient de dessiner n'y en contient plus d'une. Le ruban  $R$  se dessinera donc ainsi.



On construit ensuite un ruban  $R'$  dont les coins entrants sont situés aux mêmes endroits sur l'axe gauche-droite que ceux de  $R_2$ . On impose que leur hauteur soit la même que celle des coins situés aux mêmes endroits sur l'axe gauche-droite dans  $R$ . Enfin, on complète ce ruban en rajoutant des cases en haut de la dernière, de manière à ce qu'il soit inscrit dans le même rectangle que  $R$ . Les coins entrants sont repérés par des points dans ce dessin de  $R'$ .



La valeur absolue du coefficient  $\langle F_I, S^J \rangle$  est alors le nombre de rubans inscrits dans le même rectangle que  $R$  et  $R'$ , et bornés au sens large par  $R$  et  $R'$ . Ce coefficient est de plus du signe de  $l(I)$ . Dans notre exemple, nous avons donc

$$\langle F_I, S^J \rangle = -3. \tag{5-556}$$

# Chapitre 6

## Une généralisation de la formule d'inversion de Lagrange non commutative

Dans ce chapitre, on étudie la deuxième famille d'algèbres de Hopf de Foissy, qui interpole entre  $\mathcal{H}^{NC}$  et l'algèbre de Hopf des fonctions symétriques non commutatives. En particulier, on généralise plusieurs formes de la formule d'inversion de Lagrange non commutative en donnant diverses formules qui permettent de calculer l'antipode de cette déformation. Les notations introduites dans le chapitre précédent seront encore utilisées dans ce chapitre.

### 6.1 L'algèbre de Faá di Bruno non commutative déformée

Dans [9], Foissy étudie également les équations de Dyson-Schwinger dans l'analogie non commutatif de l'algèbre de Connes-Kreimer. Par un travail similaire à celui qu'on a évoqué dans le chapitre 4, il construit ainsi une famille à un paramètre d'algèbres de Hopf qui interpole entre l'algèbre des fonctions symétriques non commutatives et l'algèbre de Faá di Bruno non commutative. En temps qu'algèbres associatives, ces algèbres sont toutes isomorphes à l'algèbre des fonctions symétriques non commutatives, ce qui nous permettra de voir le coproduit correspondant comme un coproduit sur cette algèbre.

On note  $\mathcal{H}_\gamma^{NC}$  l'algèbre de Faá di Bruno non commutative déformée,  $\Delta_\gamma$  son coproduit et  $s_\gamma$  son antipode, où  $\gamma$  est un paramètre réel. Comme  $\mathcal{H}_\gamma^{NC}$  est isomorphe à **Sym** en temps qu'algèbre associative, il suffit pour définir  $\mathcal{H}_\gamma^{NC}$  de donner une formule de définition pour  $\Delta_\gamma(S_n)$ . En effet, **Sym** est engendrée par les  $S_n$  et  $\Delta_\gamma$  est un coproduit, donc un morphisme d'algèbres. Ainsi, on définit  $\Delta_\gamma$  par

$$\Delta_\gamma(S_n(A)) = \sum_{k=0}^n S_k(A) \otimes S_{n-k}((k+1)A). \quad (6-557)$$

Foissy montre que les  $\mathcal{H}_\gamma^{NC}$  sont toutes isomorphes à  $\mathcal{H}^{NC}$ , sauf  $\mathcal{H}_0^{NC}$  qui est isomorphe à **Sym** munie de sa structure usuelle d'algèbre de Hopf. Dans un premier temps, nous

allons donner une forme compacte de l'isomorphisme en termes de fonctions symétriques non commutatives, comme nous l'avons fait dans le cas commutatif.

**Proposition 6.1.1.**

$$\Phi : \begin{array}{ccc} \mathcal{H}_\gamma^{NC} & \rightarrow & \mathcal{H}_1^{NC} \\ F(A) & \mapsto & F(\frac{1}{\gamma}A) \end{array} \quad (6-558)$$

est un isomorphisme d'algèbres de Hopf.

*Démonstration.* En notant  $\bar{\Delta}_\gamma$  le coproduit qui envoie chaque  $F$  sur l'image de  $\Delta_\gamma(F)$  par l'isomorphisme

$$G \otimes H \mapsto H \otimes G, \quad (6-559)$$

on obtient par un raisonnement analogue à celui qui conduit à (4-274)

$$\bar{\Delta}_1(\Phi(\sigma_1)) = (\sigma_1 \otimes 1)^{\frac{1}{\gamma}} \left( \sum_{k \geq 0} \sigma_1^k \otimes S^k \right)^{\frac{1}{\gamma}}. \quad (6-560)$$

D'autrepart, on a

$$\sigma_{\sigma_1(A)}(B) = \sum_{k \geq 0} \sigma_1(A)^k S^k(B). \quad (6-561)$$

En utilisant l'identification

$$F \otimes G = F(A)G(B), \quad (6-562)$$

on obtient donc

$$\left( \sum_{k \geq 0} \sigma_1^k \otimes S^k \right)^{\frac{1}{\gamma}} = \sigma_{\sigma_1(A)}\left(\frac{1}{\gamma}B\right) = \sum_{k \geq 0} \sigma_1^k \otimes S^k\left(\frac{1}{\gamma}A\right), \quad (6-563)$$

c'est-à-dire

$$\bar{\Delta}_1(\Phi(\sigma_1)) = (\sigma \otimes 1)^{\frac{1}{\gamma}} \sum_{k \geq 0} \sigma_1^k \otimes S^k\left(\frac{1}{\gamma}A\right) = (\sigma_1\left(\frac{1}{\gamma}A\right) \otimes 1) \sum_{k \geq 0} \sigma\left(\frac{1}{\gamma}A\right)^{k\gamma} \otimes S^k\left(\frac{1}{\gamma}A\right). \quad (6-564)$$

Finalement, on a donc

$$\Delta_1(\Phi(\sigma_1)) = \sum_{k \geq 0} S^k\left(\frac{1}{\gamma}A\right) \otimes \sigma_1\left(\frac{1}{\gamma}A\right)^{k\gamma+1} = \Phi(\Delta_\gamma(\sigma_1)). \quad (6-565)$$

□

Dans toute la suite, on désignera par  $\tilde{\alpha}_I$ ,  $\tilde{\beta}_I$  et  $\tilde{\delta}_I$  les coefficients définis par

$$s_\gamma(S_n) = \sum_{I=n} \tilde{\alpha}_I S^I = \sum_{I=n} \tilde{\delta}_I S^I = \sum_{I=n} \tilde{\beta}_I R_I. \quad (6-566)$$

## 6.2 Calcul de l'antipode de $\mathcal{H}_\gamma^{NC}$

On donne le théorème suivant, qui est une déformation naturelle de la formule de Brouder-Frabetti-Krattenthaler.

**Théorème 6.2.1.** *Pour toute composition  $I$ , le coefficient  $\tilde{\alpha}_I$  est donné par*

$$\tilde{\alpha}_I = (-1)^{l(I)} \sum_{F \in NDPF(l(I)-1)} \prod_{k=1}^{l(I)-1} \binom{i_k \gamma + 1}{m_k(F)}. \quad (6-567)$$

De la même manière que (5-366) est équivalente à (5-355), la formule (6-567) est équivalente à

$$\tilde{\alpha}_I = (-1)^{l(I)} \sum_{a \in \mathcal{A}_l(I)} \prod_{k=1}^{l(I)-1} \binom{i_k \gamma + 1}{a_k}. \quad (6-568)$$

Pour  $x$  et  $i$  quelconques, on pose

$$x^{i\downarrow} = x(x-1)(x-2)\dots(x-i+1). \quad (6-569)$$

A partir de l'interprétation combinatoire de (5-355) donnée dans la partie 5.1.2, on peut réécrire (6-568) sous la forme

$$\tilde{\alpha}_I = (-1)^{l(I)} \sum_T \prod_{k=1}^{l(I)} \frac{(i_k \gamma - 1)^{a_k(T)\downarrow}}{(i_k + 1)^{a_k(T)\downarrow}}. \quad (6-570)$$

La somme porte sur l'ensemble des arbres ordonnés  $T$  à  $n+1$  feuilles dont la somme des arités non nulles moins un dans l'ordre préfixe est  $I$ , et pour tout arbre  $T$ ,  $a_k(T)$  désigne l'arité du  $k$ -ième sommet du *squelette* de  $T$ .

Le reste de cette partie est consacré à la démonstration du théorème 6.2.1.

### 6.2.1 Un lemme préliminaire

Avant d'introduire un lemme préliminaire, nous aurons besoin de la définition suivante.

**Définition 6.2.1.** *Soit  $\mathcal{B}_1 = \{0\}$ . On définit par récurrence  $\mathcal{B}_n$  comme étant l'ensemble des suites de  $n$  entiers  $(a_1, \dots, a_n)$  tels qu'il existe une composition  $I \vDash n-1$  de longueur  $a_1$  vérifiant*

$$\begin{cases} (a_2, \dots, a_{i_1+1}) \in \mathcal{B}_{i_1} \\ (a_{i_1+2}, \dots, a_{1+i_1+i_2}) \in \mathcal{B}_{i_2} \\ \vdots \end{cases}$$

A présent, nous sommes en mesure de donner une première formule explicite pour  $\tilde{\alpha}_I$ .

**Lemme 6.2.1.** *Le coefficient  $\tilde{\alpha}_I$  est donné pour toute composition  $I$  par*

$$\tilde{\alpha}_I = (-1)^{l(I)} \sum_{a \in \mathcal{B}_l(I)} \prod_{k=1}^{l(I)-1} \binom{i_k \gamma + 1}{a_k}. \quad (6-571)$$

*Démonstration.* Par un raisonnement analogue à celui qui amène à (5-394), on trouve

$$\tilde{\alpha}_I = - \sum_{K=l(I)-1} \binom{i_1\gamma + 1}{l(K)} \tilde{\alpha}_{(i_2, \dots, i_{1+k_1})} \tilde{\alpha}_{(i_{2+k_1}, \dots, i_{1+k_1+k_2})} \cdots \quad (6-572)$$

A partir de cette formule, on obtient par récurrence sur  $l(I)$

$$\tilde{\alpha}_I = (-1)^{l(I)} \sum \binom{i_1\gamma + 1}{l(K)} \binom{i_2\gamma + 1}{a_1^{(1)}} \binom{i_3\gamma + 1}{a_2^{(1)}} \cdots \binom{i_{2+k_1}\gamma + 1}{a_1^{(2)}} \binom{i_{3+k_1}\gamma + 1}{a_2^{(2)}} \cdots,$$

où la somme porte sur l'ensemble des suites  $(K, a^{(1)}, a^{(2)}, \dots)$  telles que  $K \models l(I) - 1$  et  $a^{(s)} \in \mathcal{B}_{k_s}$  pour tout  $s$ .

De cette égalité, on déduit notre résultat.  $\square$

Pour finir de démontrer le théorème, il ne nous reste plus qu'à montrer que  $\mathcal{A}_n = \mathcal{B}_n$  pour tout  $n$ . En effet, en remplaçant  $\mathcal{B}_{l(I)}$  par  $\mathcal{A}_{l(I)}$  dans (6-571), on obtient précisément la formule (6-568) qui est équivalente au résultat du théorème. Comme on a  $\mathcal{A}_1 = \mathcal{B}_1$ , on fixe  $n$  et on suppose que  $\mathcal{A}_k = \mathcal{B}_k$  pour tout  $k < n$ , de manière à démontrer  $\mathcal{A}_n = \mathcal{B}_n$  par récurrence.

## 6.2.2 Démonstration de $\mathcal{B}_n \subseteq \mathcal{A}_n$

Soit  $a \in \mathcal{B}_n$ . Il existe alors une composition  $I \models n - 1$  de longueur  $a_1$  telle que  $a$  et  $I$  vérifient les relations (6-571).

Réécrivons  $a$  sous la forme  $(a_1, a^{(1)}, a^{(2)}, \dots)$ , où pour tout  $s$ ,  $a^{(s)} \in \mathcal{B}_{i_s}$ . On a par hypothèse  $\mathcal{B}_{i_s} = \mathcal{A}_{i_s}$ , d'où

$$a_1 + \dots + a_n = l(I) + (i_1 - 1) + (i_2 - 1) + \dots = n - 1. \quad (6-573)$$

Soit  $s$  tel que  $2 \leq s \leq n$ . Le terme  $a_s$  sera alors le  $j$ ème élément d'un certain  $a^{(k)} \in \mathcal{B}_{i_s}$ , et on aura

$$s = n + j - i_{k+1} - i_{k+2} - \dots \quad (6-574)$$

Comme  $a^{(k)} \in \mathcal{B}_{i_k} = \mathcal{A}_{i_k}$ , on aura également

$$a_s + \dots + \rho_{1+i_1+i_2+\dots+i_k} \leq i_k - j. \quad (6-575)$$

De plus,

$$a^{(k+1)} \in \mathcal{B}_{i_{k+1}} = \mathcal{A}_{i_{k+1}}, \quad a^{(k+2)} \in \mathcal{B}_{i_{k+2}} = \mathcal{A}_{i_{k+2}}, \quad \dots \quad (6-576)$$

On a donc

$$\begin{aligned} a_s + \dots + a_n &\leq i_k - j + (i_{k+1} - 1) + (i_{k+1} - 2) + \dots \\ &\leq i_k - j + i_{k+1} + i_{k+2} + \dots \\ &\leq n - s, \end{aligned} \quad (6-577)$$

et on en déduit que  $a \in \mathcal{A}_n$ , d'où

$$\mathcal{B}_n \subseteq \mathcal{A}_n. \quad (6-578)$$

**Exemple 6.2.1.** Supposons que  $\mathcal{B}_2 = \mathcal{A}_2$  et considérons la suite  $a = (2, 1, 0, 1, 0)$ . Cette suite appartient à  $\mathcal{B}_5$  car  $(1, 0) \in \mathcal{A}_2 = \mathcal{B}_2$ .

$$\boxed{2} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline \leq 1 & \leq 0 \\ \hline 1 & 0 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline \leq 1 & \leq 0 \\ \hline 1 & 0 \\ \hline \end{array} \quad (6-579)$$

Dans ce dessin, on a écrit au-dessus de chaque boîte un nombre plus grand que la somme de sa valeur et des valeurs correspondant aux boîtes situées à sa droite dans le même bloc. En rassemblant les différents blocs, on obtient le dessin suivant

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 4 & \leq 2 & \leq 1 & \leq 1 & \leq 0 \\ \hline 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline \end{array} \quad (6-580)$$

et on en déduit que les nombres placés au-dessus des boîtes dans le dessin suivant

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 4 & \leq 3 & \leq 2 & \leq 1 & \leq 0 \\ \hline 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline \end{array} \quad (6-581)$$

ont les mêmes propriétés, ce qui montre que  $a \in \mathcal{A}_5$ .

### 6.2.3 Démonstration de $\mathcal{A}_n \subseteq \mathcal{B}_n$

Soit  $a \in \mathcal{A}_n$ , et supposons

$$a = (a_1, a^{(1)}, a^{(2)}, \dots), \quad (6-582)$$

où chaque  $a^{(s)}$  autre que le dernier appartient à un certain  $\mathcal{B}_{i_s} = \mathcal{A}_{i_s}$ . Désignons par  $\lambda$  le dernier des  $a_s$ . Toutes les inégalités nécessaires pour avoir  $\lambda \in \mathcal{A}_{l(\lambda)}$  sont vérifiées car  $a \in \mathcal{A}_n$ . Le seul problème qui puisse survenir est donc que l'on ait  $|\lambda| \neq l(\lambda) - 1$ . Or, on a dans tous les cas

$$|\lambda| \leq l(\lambda) - 1 \quad (6-583)$$

car  $a \in \mathcal{A}_n$ . Dans le cas où  $|\lambda| < l(\lambda) - 1$ , supposons qu'on ne puisse pour aucun  $j$  construire un élément de  $\mathcal{A}_j$  à partir des  $j$  premiers termes de  $\lambda$ . On aurait alors

$$\begin{aligned} & (\lambda_1 \neq 0) \\ \text{et } & (\lambda_1 + \lambda_2 \neq 1 \text{ ou } \lambda_2 > 0) \\ \text{et } & (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \neq 2 \text{ ou } \lambda_2 + \lambda_3 > 1 \text{ ou } \lambda_3 > 0) \\ \text{et } & \dots \end{aligned} \quad (6-584)$$

Démontrons à présent le lemme suivant.

**Lemme 6.2.2.** *Les conditions (6-584) impliquent pour tout  $j$  l'inégalité*

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_j > j - 1. \quad (6-585)$$

*Démonstration.* Sous les conditions (6-584), on a  $\lambda_1 \neq 0$  donc  $\lambda_1 > 0$ . Afin de montrer le résultat du lemme par récurrence sur  $j$ , fixons  $j$  et supposons qu'il est vrai si on remplace  $j$  par n'importe quel  $k < j$ . En regardant (6-584), on se rend compte que deux cas sont envisageables.

1er cas :

$$\lambda_1 + \dots + \lambda_j \neq j - 1 \quad (6-586)$$

auquel cas comme on a par hypothèse

$$\lambda_1 + \dots + \lambda_{j-1} > j - 2, \quad (6-587)$$

ou bien  $\lambda_1 + \dots + \lambda_{j-1} = j - 1$ , auquel cas si on avait  $\lambda_j = 0$  on aurait  $\lambda_1 + \dots + \lambda_j = j - 1$ , ce qui contredirait les hypothèses, donc  $\lambda_j > 0$  et l'inégalité (6-585) est vraie,

ou bien  $\lambda_1 + \dots + \lambda_{j-1} > j - 1$ , auquel cas l'inégalité (6-585) est encore vraie.

2ème cas : il existe un entier  $k$  tel que  $2 \leq k \leq j$  vérifiant

$$\lambda_k + \dots + \lambda_j > j - k. \quad (6-588)$$

On sait par hypothèse que

$$\lambda_1 + \dots + \lambda_{k-1} > k - 2. \quad (6-589)$$

Comme les  $\lambda_i$  sont des entiers, (6-588) et (6-589) se réécrivent

$$\lambda_k + \dots + \lambda_j \geq j - k + 1 \quad (6-590)$$

et

$$\lambda_1 + \dots + \lambda_{k-1} \geq k - 1. \quad (6-591)$$

On a donc

$$\lambda_1 + \dots + \lambda_j \geq j \quad (6-592)$$

et l'inégalité reste vraie dans ce cas, ce qui achève de montrer qu'elle est vraie dans tous les cas.  $\square$

En posant  $j = l(\lambda)$  dans (6-585), on obtient

$$|\lambda| > l(\lambda) - 1. \quad (6-593)$$

Ce résultat est en contradiction avec (6-583), ce qui montre que l'on peut toujours construire à partir de la suite  $(a_1, a^{(1)}, \dots, a^{(k)})$  un  $a^{(k+1)}$  tel qu'un  $i_{k+1}$  vérifiant

$$a^{(k+1)} \in \mathcal{B}_{i_{k+1}} \quad (6-594)$$

existe. En répétant ce procédé, on peut construire une suite

$$(a_1, a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, \dots, a_1^{(2)}, a_2^{(2)}, \dots) = a \quad (6-595)$$

telle que pour tout  $s$  il existe un  $i_s$  qui vérifie  $a^{(s)} \in \mathcal{B}_{i_s}$ . On constate que l'on a bien  $I \vDash l(a) - 1$ , et (6-573) implique que  $a_1 = l(I)$ . Ainsi on a  $a \in \mathcal{B}_n$ , donc  $\mathcal{A}_n \subseteq \mathcal{B}_n$ , et donc

$$\mathcal{A}_n = \mathcal{B}_n. \quad (6-596)$$

Le lemme 6.2.1 est donc bien équivalent au théorème 6.2.1.

### 6.3 Un morphisme d'algèbres

On suppose dans cette partie que  $\gamma$  est un entier strictement positif, et on introduit un morphisme d'algèbres  $\phi_\gamma$  tel que

$$\phi_\gamma \circ s = s_\gamma. \quad (6-597)$$

#### 6.3.1 Définition du morphisme $\phi_\gamma$ et liens avec $\mathcal{H}_\gamma^{NC}$

Soit  $\gamma$  un entier strictement positif, et soit  $\phi_\gamma$  le morphisme d'algèbres défini de **Sym** dans elle-même par

$$\phi_\gamma(S_n) = \begin{cases} S_{n/\gamma} & \text{si } \gamma|n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (6-598)$$

Il est facile de voir que  $\phi_\gamma$  vérifie

$$\phi_\gamma \circ \phi_{\gamma'} = \phi_{\gamma\gamma'} \quad (6-599)$$

On appelle  $\psi_\gamma$  l'opérateur *adjoint* à  $\phi_\gamma$ , au sens où

$$\langle \phi_\gamma(F), G \rangle = \langle F, \psi_\gamma(G) \rangle. \quad (6-600)$$

Ici,  $F$  est une fonction symétrique non commutative,  $G$  est une fonction quasi-symétrique, et le crochet correspond à la dualité entre  $\mathcal{H}_0$  et l'algèbre des fonctions quasi-symétriques munie de sa structure classique d'algèbre de Hopf. Il est facile de voir que  $\psi_\gamma$  est défini de  $QSym$  dans elle-même par

$$\psi_\gamma(M_I) = M_{(\gamma i_1, \gamma i_2, \dots)}. \quad (6-601)$$

L'action de cet opérateur sur une fonction quasi-symétrique  $F$  quelconque consiste à élever tous les monômes à la puissance  $\gamma$  dans la réalisation polynomiale de  $F$ . On en déduit que  $\psi_\gamma$  est également un *morphisme d'algèbres*. On peut aussi déduire de  $\sigma_1^* = \sum_I \alpha_I S^I$  et de la définition de  $\phi_\gamma$  que

$$\phi_\gamma(\sigma_1^*) = \sum_I \alpha_{(\gamma i_1, \gamma i_2, \dots)} S^I. \quad (6-602)$$

D'autre part, on a d'après (5-366)

$$\tilde{\alpha}_I = \alpha_{(\gamma i_1, \gamma i_2, \dots)}. \quad (6-603)$$

Les formules (5-384) et (5-488) donnent une interprétation combinatoire de  $\alpha_I$ , qui est

$$\alpha_I = (-1)^{l(I)} \#\{F \in NDPF(|I|) / F \leq p(I')\}. \quad (6-604)$$

L'identité (6-603) permet d'en déduire l'interprétation combinatoire suivante pour  $\tilde{\alpha}_I$ .

**Proposition 6.3.1.** *Lorsque  $\gamma$  est un entier strictement positif, le coefficient  $\tilde{\alpha}_I$  correspondant est donné pour toute composition  $I$  par*

$$\tilde{\alpha}_I = (-1)^{l(I)} \#\{F \in NDPF(\gamma|I|) / F \leq p(I')^\gamma\}, \quad (6-605)$$



où pour toute fonction de parking croissante  $F$ ,  $F^\gamma$  est la fonction de parking construite en concaténant  $\gamma$  fonctions de parking égales à  $F$  et en réordonnant la suite ainsi obtenue. Par exemple,  $(1123)^3 = (111111222333)$ .

On peut déduire de (6–602) et (6–603) la proposition suivante.

**Proposition 6.3.2.** *L'antipode  $s$  de  $\mathcal{H}$  et l'antipode  $s_\gamma$  de  $\mathcal{H}_\gamma$  sont liés entre eux par la formule*

$$s_\gamma = \phi_\gamma \circ s. \quad (6-606)$$

A présent, soit

$$\Psi_\gamma : \mathbf{Sym} \rightarrow \mathbf{Sym} \quad (6-607)$$

l'isomorphisme d'algèbres défini par  $\Psi_\gamma(F(A)) = F(\gamma A)$ . Son inverse pour la composition envoie  $F(A)$  sur  $F(\frac{1}{\gamma}A)$ , et on a donc d'après la proposition 6.1.1

$$s \circ \Psi_\gamma^{-1} = \Psi_\gamma^{-1} \circ s_\gamma, \quad (6-608)$$

c'est-à-dire

$$s = \Psi_\gamma^{-1} \circ s_\gamma \circ \Psi_\gamma. \quad (6-609)$$

De (6–609) et (6–606), on déduit la proposition suivante.

**Proposition 6.3.3.** *L'antipode  $s$  de  $\mathcal{H}_1$  est solution d'une infinité d'équations fonctionnelles dont la forme générale est*

$$s = \Psi_\gamma^{-1} \circ \phi_\gamma \circ s \circ \Psi_\gamma, \quad (6-610)$$

où  $\gamma$  est un entier strictement positif.

Ce résultat permet de réécrire  $\alpha_I$  en fonction des  $\alpha_J$  correspondant à des compositions  $J$  de poids plus gros que  $|I|$ , d'une infinité de façons différentes (pour une composition  $I$  donnée, chaque  $\gamma$  donne une identité de ce type). Posons  $I = (11)$ . A titre d'exemple, nous calculerons ces identités pour  $\gamma = 2$  et pour  $\gamma = 3$ .

**Exemple 6.3.1.** On a

$$\Psi_2(\sigma_1(A)) = \sigma_1(2A) = \sigma_1(A)^2. \quad (6-611)$$

On en déduit que le terme de degré 4 dans  $\Psi_2(\sigma_1^*(A))$  est

$$2S^{(4)} + S^{(31)} + S^{(22)} + S^{(13)}. \quad (6-612)$$

Comme on a  $S_n^* = \sum_{I \vdash n} \alpha_I S^I$ , et que  $s$  est un antipode, donc un antimorphisme d'algèbres, on peut appliquer  $s$  à (6–612). On en déduit que dans  $s(\Psi_2(\sigma_1(A)))$ , le coefficient associé à  $S^{(4)}$  est  $2\alpha_4$ , et celui associé à  $S^{(22)}$  est  $2\alpha_{(22)} + \alpha_2\alpha_2$ . Par définition de  $\phi_\gamma$ , on en déduit que le terme de degré 2 dans  $\phi_2(s(\Psi_2(\sigma_1)))$  est

$$2\alpha_4 S^2 + (2\alpha_{(22)} + \alpha_2\alpha_2) S^{(11)}. \quad (6-613)$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}\Psi_2^{-1}(\sigma_1(A)) &= \sigma_1\left(\frac{1}{2}(A)\right) = \sigma_1(A)^{\frac{1}{2}} \\ &= \sum_{n \geq 0} \binom{\frac{1}{2}}{n} \sum_{l(I)=n} S^I.\end{aligned}\quad (6-614)$$

On en déduit que  $\Psi_2^{-1}(S^1) = \frac{1}{2}S^1$  et que  $\Psi_2^{-1}(S^2) = \frac{1}{2}S^2 - \frac{1}{8}S^{(11)}$ . Comme  $\Psi_2^{-1}$  est un morphisme d'algèbres, on peut ainsi l'appliquer à (6-613) pour obtenir le coefficient en  $S^{(11)}$  dans

$$\Psi_2^{-1}(\phi_2(s(\Psi_2(\sigma_1(A))))). \quad (6-615)$$

On trouve qu'il vaut

$$-\frac{1}{4}\alpha_4 + \frac{1}{2}\alpha_{(22)} + \frac{1}{4}\alpha_2\alpha_2. \quad (6-616)$$

Par un calcul similaire, on obtient que le coefficient en  $S^{(11)}$  dans

$$\Psi_3^{-1}(\phi_3(s(\Psi_3(\sigma_1(A)))))) \quad (6-617)$$

vaut

$$-\frac{1}{3}\alpha_6 + \frac{1}{3}\alpha_{(33)} + \frac{1}{3}\alpha_3\alpha_3, \quad (6-618)$$

et on pourrait continuer ainsi avec  $\gamma = 4$ ,  $\gamma = 5$ , et ainsi de suite. D'après (6-610), cela nous donne

$$\begin{aligned}\alpha_{(11)} &= -\frac{1}{4}\alpha_4 + \frac{1}{2}\alpha_{(22)} + \frac{1}{4}\alpha_2\alpha_2 \\ &= -\frac{1}{3}\alpha_6 + \frac{1}{3}\alpha_{(33)} + \frac{1}{3}\alpha_3\alpha_3 \\ &= \dots\end{aligned}\quad (6-619)$$

### 6.3.2 Action de $\phi_\gamma$ sur les $\Lambda^I$

Pour n'importe quelle fonction symétrique non commutative homogène  $F$  dont le degré n'est pas multiple de  $\gamma$ , on a toujours par définition de  $\phi_\gamma$

$$\phi_\gamma(F) = 0. \quad (6-620)$$

Soit maintenant  $n$  un multiple quelconque de  $\gamma$ , et posons  $k = n/\gamma$ . On aura alors

$$\Lambda_n = (-1)^n \sum_{I \models n} (-1)^{l(I)} S^I. \quad (6-621)$$

Dans cette équation, les  $S^I$  qui peuvent apporter une contribution à  $\phi_\gamma(\Lambda_n)$  correspondent aux compositions  $I$  dont toutes les parts sont des multiples de  $\gamma$ . Or, ces  $I$  sont exactement les  $(\gamma j_1, \gamma j_2, \dots)$  où  $J \models k$ , et on a pour ces compositions

$$\phi_\gamma(S^I) = S^J. \quad (6-622)$$

On en déduit

$$\phi_\gamma(\Lambda_n) = (-1)^n \sum_{J=k} (-1)^{l(J)} S^J = (-1)^{n-k} \Lambda_k, \quad (6-623)$$

ce qui nous permet d'énoncer la proposition suivante.

**Proposition 6.3.4.** *L'action de  $\phi_\gamma$  sur  $\Lambda_n$  est donnée pour tout  $n$  par*

$$\phi_\gamma(\Lambda_n) = \begin{cases} (-1)^{n-\frac{n}{\gamma}} \Lambda_{n/\gamma} & \text{si } \gamma|n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (6-624)$$

Notons que comme  $\phi_\gamma$  est un morphisme, on peut en déduire son action sur les  $\Lambda^I$ .

### 6.3.3 Action de $\phi_\gamma$ sur les $R_I$

Soit  $I$  une composition quelconque dont le poids  $n$  est un multiple de  $\gamma$ , et posons  $k = \frac{n}{\gamma}$ . On a alors

$$R_I = \sum_{J \geq I} (-1)^{l(I)-l(J)} S^J. \quad (6-625)$$

Pour qu'un  $S^J$  apporte une contribution à  $\phi_\gamma(R_I)$ , il faut que toutes les parts de  $J$  soient des multiples de  $\gamma$ , et donc que l'on ait  $J \geq K$ , où  $K$  est la composition constituée de  $k$  parts, toutes de valeur  $\gamma$ . On a donc

$$\phi_\gamma(R_I) = \sum_{J \geq I, J \geq K} (-1)^{l(I)-l(J)} \phi_\gamma(S^J). \quad (6-626)$$

Soit  $L$  le plus petit grossissement commun à  $I$  et à  $K$ . Cette égalité se réécrit alors

$$\phi_\gamma(R_I) = \sum_{J \geq L} (-1)^{l(I)-l(J)} \phi_\gamma(S^J). \quad (6-627)$$

Soit maintenant  $\tilde{L}$  la composition obtenue en divisant par  $\gamma$  toutes les parts de  $L$ . Par définition de  $\phi_\gamma$ , on obtient alors

$$\phi_\gamma(R_I) = \sum_{J \geq \tilde{L}} (-1)^{l(I)-l(J)} S^J = (-1)^{l(I)-l(L)} R_L. \quad (6-628)$$

On en déduit la proposition suivante.

**Proposition 6.3.5.** *Soit  $I$  une composition. Si  $|I|$  n'est pas un multiple de  $\gamma$ , alors*

$$\phi_\gamma(R_I) = 0. \quad (6-629)$$

*Si  $|I|$  est un multiple de  $\gamma$ , alors*

$$\phi_\gamma(R_I) = (-1)^{l(I)-l(J)} R_J, \quad (6-630)$$

*où  $J$  est la composition obtenue en divisant par  $\gamma$  toutes les parts du plus petit grossissement commun à  $I$  et à la composition de même poids que  $I$  dont toutes les parts ont pour valeur  $\gamma$ .*

## 6.4 Une autre formule pour l'antipode de $\mathcal{H}_\gamma^{NC}$

D'après la proposition 6.3.4, on a

$$\phi_\gamma(\sigma_1^*) = \sum_I \delta_I \phi_\gamma(\Lambda^I) = \sum_I (-1)^{|I|(\gamma-1)} \delta_{(i_1\gamma, i_2\gamma, \dots)} \Lambda^I. \quad (6-631)$$

Comme

$$\phi_\gamma(\sigma_1^*) = \sum_I \tilde{\delta}_I \Lambda^I, \quad (6-632)$$

on en déduit que

$$\tilde{\delta}_I = (-1)^{|I|(\gamma-1)} \delta_{(i_1\gamma, i_2\gamma, \dots)}. \quad (6-633)$$

On a donc

$$|\tilde{\delta}_I| = |\delta_{(i_1\gamma, i_2\gamma, \dots)}|. \quad (6-634)$$

D'autre part, on sait d'après (5-496) que le signe de  $\delta_J$  est  $(-1)^{|J|}$  pour toute composition  $J$ . Le signe de  $\tilde{\delta}_I$  est donc

$$(-1)^{|I|(\gamma-1)+|I|\gamma} = (-1)^{|I|}. \quad (6-635)$$

Ainsi, on peut donner une formule explicite pour  $\tilde{\delta}_I$  lorsque  $\gamma$  est un entier strictement positif. En fait, cette dernière condition n'est pas nécessaire, puisque  $\tilde{\delta}_I$  est *polynomial* en  $\gamma$ .

On obtient la proposition suivante, qui est une déformation de la formule de Gessel et Pak-Postnikov-Retakh.

**Proposition 6.4.1.** *La valeur de  $\tilde{\delta}_I$  est donnée pour  $\gamma \in \mathbb{R}^*$ , par*

$$\delta_I = (-1)^{|I|} \sum_{F \in PF(l(I)-1)} \prod_k \binom{i_k \gamma}{m_k(F)}. \quad (6-636)$$

On remarque que  $\tilde{\alpha}_I$  et  $|\tilde{\delta}_I|$  ne dépendent pas de la dernière part de  $I$ .

Lorsque  $\gamma$  est un entier strictement positif, on déduit de (6-634) et de (5-496) l'interprétation combinatoire suivante pour  $\tilde{\delta}_I$ .

**Proposition 6.4.2.** *Lorsque  $\gamma$  est un entier strictement positif, le coefficient  $\tilde{\delta}_I$  correspondant est donné pour toute composition  $I$  par*

$$\tilde{\delta}_I = (-1)^{|I|} \#\{J \models \gamma|I|/l(J) = l(I) \text{ et } p(J) \geq p(I)^\gamma\}, \quad (6-637)$$

où pour toute fonction de parking croissante  $F$ ,  $F^\gamma$  est la fonction de parking construite en concaténant  $\gamma$  fonctions de parking égales à  $F$  et en réordonnant la suite ainsi obtenue.

## 6.5 Détermination du coefficient $\tilde{\beta}_I$

Dans cette partie, on s'intéresse aux coefficients  $\tilde{\beta}_I$  qui apparaissent dans le développement de  $s_\gamma(S_n)$  sur la base  $(R_I)$ .

### 6.5.1 Détermination de $\tilde{\beta}_I$ par récurrence

On peut donner une première expression de  $\tilde{\beta}_I$  en développant les  $S^J$  sur les  $R_I$ . Cette expression est la suivante

$$\tilde{\beta}_I = \sum_{J \leq I} \tilde{\alpha}_J. \quad (6-638)$$

Les  $\tilde{\beta}_I$  sont également liés entre eux par certaines relations. Par exemple, on donne la proposition suivante.

**Proposition 6.5.1.** *Soit  $J$  une composition de longueur  $s$  dont la dernière part  $j_s$  est telle que  $j_s > 1$ . Alors,*

$$\tilde{\beta}_J = \tilde{\beta}_{(j_1, \dots, j_{s-1}, j_s-1, 1)} + \tilde{\beta}_{(j_1, \dots, j_{s-1}, j_s-1)}. \quad (6-639)$$

*Démonstration.* Notons  $\tilde{J}$  la composition obtenue en retranchant 1 à la dernière part de  $J$ , et notons  $\hat{J}$  la composition obtenue en rajoutant une part de valeur 1 à la fin de  $\tilde{J}$ . La formule (6-638) nous permet alors d'écrire

$$\tilde{\beta}_J = \sum_{K \leq \hat{J}} \tilde{\alpha}_K + \sum_{K \leq \tilde{J}} \tilde{\alpha}_{K'}, \quad (6-640)$$

où  $K'$  est la composition obtenue en incrémentant de 1 la dernière part de  $K$ .

En effet, les raffinements de  $J$  dont la dernière part est 1 sont exactement les raffinements de  $\tilde{J}$  avec une part supplémentaire de valeur 1 rajoutée à la fin, et sont donc les raffinements de  $\hat{J}$ . D'autre part, les raffinements de  $J$  dont la dernière part a une valeur autre que 1 sont exactement les compositions obtenues à partir des raffinements de  $\tilde{J}$  en incrémentant leur dernière part de 1. Comme les  $\alpha_I$  ne dépendent pas de la dernière part de  $I$ , l'équation (6-640) se réécrit sous la forme

$$\tilde{\beta}_J = \sum_{K \leq \hat{J}} \tilde{\alpha}_K + \sum_{K \leq \tilde{J}} \tilde{\alpha}_K, \quad (6-641)$$

et on déduit de (6-638) que

$$\tilde{\beta}_J = \tilde{\beta}_J + \tilde{\beta}_{\tilde{J}}. \quad (6-642)$$

□

En tenant compte du fait que  $\beta_1 = -1$ , on peut remarquer que dans le cas où  $\gamma = 1$ , la proposition que l'on vient de démontrer est une spécialisation de la formule (5-387) au cas où la dernière part de  $I$  vaut 1 (il faut retirer au  $I$  de (5-387) sa dernière part 1 pour obtenir l'analogue du  $I$  de (6-639)).

On peut également donner un analogue de (5-435) pour le cas  $\gamma \neq 1$ , de manière à exprimer  $\tilde{\beta}_I$  en fonction des  $\tilde{\beta}_J$  tels que  $|J| < |I|$ . En effet, par un calcul similaire à celui qui permet de passer de (5-394) et (5-431) à (5-435), on obtient à partir de (6-572) et (6-638) :

**Proposition 6.5.2.** *Les coefficients  $\tilde{\beta}_I$  satisfont la formule de récurrence suivante*

$$\tilde{\beta}_I = - \sum_{D_{K,\psi} I \text{ admissible}} \binom{k_1 \gamma + 1}{l(D_{K,\psi}) - 1} \tilde{\beta}_{K_\psi^{(2)}} \tilde{\beta}_{K_\psi^{(3)}} \cdots \tilde{\beta}_{K_\psi^{(l(D_{K,\psi}))}}. \quad (6-643)$$

A présent, on s'intéresse au cas particulier où  $I$  est une composition à deux parts

$$I = (i_1, i_2). \quad (6-644)$$

Dans ce cas, on constate que pour tout  $J \leq I$ , le  $I$ -découpage de  $J$  prend la forme  $(J^{(1)}, J^{(2)})$ , avec

$$J^{(1)} \vDash i_1 \text{ et } J^{(2)} \vDash i_2. \quad (6-645)$$

Ainsi, les découpages  $I$ -admissibles de  $J$  sont exactement ceux qui peuvent d'écrire soit sous la forme

$$((j_1), (j_2), \dots, (j_{l(J)})), \quad (6-646)$$

soit sous la forme

$$((j_1^{(1)}), (j_2^{(1)}), \dots, (j_{l(J^{(1)})}^{(1)}), j_1^{(2)}, (j_2^{(2)}), \dots). \quad (6-647)$$

Dans ce cas, la formule (6-643) se réécrit donc ainsi

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}_I &= - \sum_{J \vDash i_1, K \vDash i_2} \binom{j_1 \gamma + 1}{l(J) + l(K) - 1} \tilde{\beta}_{j_2} \tilde{\beta}_{j_3} \cdots \tilde{\beta}_{j_{l(J)}} \tilde{\beta}_{k_1} \tilde{\beta}_{k_2} \cdots \tilde{\beta}_{k_{l(K)}} \\ &\quad - \sum_{J \vDash i_1, K \vDash i_2} \binom{j_1 \gamma + 1}{l(J) + l(K) - 2} \tilde{\beta}_{j_2} \tilde{\beta}_{j_3} \cdots \tilde{\beta}_{(j_{l(J)}, k_1)} \tilde{\beta}_{k_2} \cdots \tilde{\beta}_{k_{l(K)}}. \end{aligned}$$

On en déduit la proposition suivante.

**Proposition 6.5.3.** *Le coefficient  $\tilde{\beta}_I$  correspondant à une composition  $I = (i_1, i_2)$  à deux parts vérifie la formule de récurrence*

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}_I &= - \sum_{J \vDash i_1, K \vDash i_2} \binom{j_1 \gamma + 1}{l(J) + l(K) - 1} \left( \prod_{j \in \tilde{J}} \tilde{\beta}_j \right) \left( \prod_{k \in K} \tilde{\beta}_k \right) \\ &\quad - \sum_{0 < |J| < i_1, 0 \leq |K| < i_2} \binom{j_1 \gamma + 1}{l(J) + l(K)} \left( \prod_{j \in \tilde{J}} \tilde{\beta}_j \right) \left( \prod_{k \in K} \tilde{\beta}_k \right) \tilde{\beta}_{(i_1 - |J|, i_2 - |K|)}, \end{aligned}$$

où on a utilisé la notation

$$\tilde{J} = (j_2, j_3, \dots, j_{l(J)}). \quad (6-648)$$

### 6.5.2 Une formule explicite pour $\tilde{\beta}_{1^n}$

Pour tout  $n$ , on note  $\eta_n$  le coefficient  $\tilde{\beta}_{1^n}$ . En partant de (6-638), on obtient que ce coefficient est identique à  $\tilde{\alpha}_{1^n}$ , et on déduit donc de (6-572) que

$$\eta_n = - \sum_{I \vDash n-1} \binom{\gamma + 1}{l(I)} \prod_{i \in I} \eta_i. \quad (6-649)$$

On peut donc réécrire la série  $L(t) = \sum_{n \geq 0} \eta_n t^n$  sous la forme

$$L(t) = 1 - t \sum_{n \geq 1} \sum_{I \vDash n-1} \binom{\gamma + 1}{l(I)} \prod_{i \in I} (\eta_i t^i), \quad (6-650)$$

c'est-à-dire

$$L(t) = 1 - t \sum_I \binom{\gamma+1}{l(I)} \prod_{i \in I} \eta_i t^i, \quad (6-651)$$

où la somme porte sur toutes les compositions  $I$ . En posant  $\tilde{L}(t) = L(t) - 1$ , on obtient donc

$$L(t) = 1 - t \left( \binom{\gamma+1}{0} + \binom{\gamma+1}{1} \tilde{L}(t) + \binom{\gamma+1}{2} \tilde{L}(t)^2 + \dots \right), \quad (6-652)$$

c'est-à-dire

$$L(t) = 1 - tL(t)^{\gamma+1}. \quad (6-653)$$

On a ainsi  $1 - L(t) = tL(t)^{\gamma+1}$ , et la série  $y(t) = 1 - L(t)$  est donc solution de l'équation

$$t = \frac{y(t)}{(1 - y(t))^{\gamma+1}} = y\sigma_y(\gamma + 1). \quad (6-654)$$

D'après la formule d'inversion de Lagrange classique (voir partie 3.4.2), on obtient donc

$$y(t) = t\sigma_t^*(\gamma + 1), \quad (6-655)$$

où  $F \mapsto F^*$  désigne l'antipode de l'algèbre de Faá di Bruno classique, c'est-à-dire celui du cas commutatif avec  $\gamma = 1$ . On déduit de ceci que pour tout  $n > 0$ ,

$$-\eta_n = h_{n-1}^*(\gamma + 1), \quad (6-656)$$

c'est-à-dire

$$\eta_n = -\frac{1}{n} h_{n-1}(-n(\gamma + 1)) \quad (6-657)$$

$$= -\frac{1}{n} \binom{-n(\gamma + 1) + (n - 1) - 1}{n - 1} \quad (6-658)$$

$$= -\frac{1}{n} \binom{-n\gamma - 2}{n - 1}. \quad (6-659)$$

D'autre part, on a

$$\binom{-n\gamma - 2}{n - 1} = \frac{(-n\gamma - 2)(-n\gamma - 3) \dots (-n\gamma - n)}{(n - 1)!} = (-1)^{n-1} \binom{n(\gamma + 1)}{n - 1}. \quad (6-660)$$

En résumé, on a donc démontré la proposition suivante.

**Proposition 6.5.4.** *Le coefficient  $\tilde{\beta}_{1^n}$  est donné par*

$$\tilde{\beta}_{1^n} = (-1)^n \frac{1}{n} \binom{n(\gamma + 1)}{n - 1}. \quad (6-661)$$

### 6.5.3 Une formule explicite pour $\tilde{\beta}_n$

D'après (6-638), on a

$$\tilde{\beta}_n = \sum_{I \models n} \tilde{\alpha}_I. \quad (6-662)$$

La formule (6-572) permet de réécrire cette égalité sous la forme

$$\tilde{\beta}_n = - \sum_{I \models n} \sum_{K \models l(I)-1} \binom{i_1 \gamma + 1}{l(K)} \tilde{\alpha}_{(i_2, \dots, i_{1+k_1})} \tilde{\alpha}_{(i_{2+k_1}, \dots, i_{1+k_1+k_2})} \dots \quad (6-663)$$

En posant

$$J = (i_1, i_2 + \dots + i_{1+k_1}, i_{2+k_1} + \dots + i_{1+k_1+k_2}, \dots), \quad (6-664)$$

on en déduit

$$\tilde{\beta}_n = - \sum_{J \models n} \binom{j_1 \gamma + 1}{l(J) - 1} \sum_{J^{(2)} \models j_2, J^{(3)} \models j_3, \dots} \alpha_{J^{(2)}} \alpha_{J^{(3)}} \dots \quad (6-665)$$

D'après (6-638) et cette équation on a

$$\tilde{\beta}_n = - \sum_{J \models n} \binom{j_1 \gamma + 1}{l(J) - 1} \beta_{j_2} \beta_{j_3} \dots \quad (6-666)$$

A présent, posons

$$\beta(t) = \sum_{n \geq 1} \tilde{\beta}_n t^n. \quad (6-667)$$

On obtient alors

$$\beta(t) = - \sum_{r \geq 1} \sum_{l(I)=r} \binom{i_1 \gamma + 1}{r - 1} t^{i_1} \tilde{\beta}_{i_2} t^{i_2} \tilde{\beta}_{i_3} t^{i_3} \dots \tilde{\beta}_{i_r} t^{i_r} \quad (6-668)$$

$$= - \sum_{i_1 \geq 1, r \geq 1} \binom{i_1 \gamma + 1}{r - 1} t^{i_1} \beta(t)^{r-1} \quad (6-669)$$

$$= - \sum_{k \geq 1, s \geq 0} t^k \binom{k \gamma + 1}{s} \beta(t)^s \quad (6-670)$$

$$= - \sum_{k \geq 1} t^k \left( \sum_{s \geq 0} \binom{k \gamma + 1}{s} \beta(t)^s \right) \quad (6-671)$$

$$= - \sum_{k \geq 1} t^k (1 + \beta(t))^{k \gamma + 1} \quad (6-672)$$

$$= -(1 + \beta(t)) \sum_{k \geq 1} (t(1 + \beta(t))^\gamma)^k, \quad (6-673)$$

c'est-à-dire

$$\beta(t) = - \frac{(1 + \beta(t)) t (1 + \beta(t))^\gamma}{1 - t(1 + \beta(t))^\gamma}. \quad (6-674)$$

On peut réécrire cette égalité sous la forme

$$\beta(t) - t \beta(t) (1 + \beta(t))^\gamma = -t (1 + \beta(t))^\gamma - t \beta(t) (1 + \beta(t))^\gamma. \quad (6-675)$$



On a alors  $\beta(t) = -t(1 + \beta(t))^\gamma$ , et la série

$$B(t) = \sum_{n \geq 0} \tilde{\beta}_n t^n = 1 + \beta(t) \quad (6-676)$$

est donc solution de

$$B(t) = 1 - tB(t)^\gamma. \quad (6-677)$$

Cette équation est exactement la même que celle dont  $L(t)$  est solution, dans laquelle  $\gamma + 1$  est remplacé par  $\gamma$ . Nous sommes donc en mesure de donner la proposition suivante.

**Proposition 6.5.5.** *Le coefficient  $\tilde{\beta}_n$  est donné par*

$$\tilde{\beta}_n = (-1)^n \frac{1}{n} \binom{n\gamma}{n-1}. \quad (6-678)$$

#### 6.5.4 Expression de $\tilde{\beta}_I$ en fonction des $\beta_J$

D'après (5-431), on peut réécrire (6-638) sous la forme

$$\tilde{\beta}_I = \sum_{J \leq I} \alpha_{(j_1\gamma, j_2\gamma, \dots)}. \quad (6-679)$$

Pour toute composition  $I$ , notons  $\gamma I$  la composition obtenue en multipliant par  $\gamma$  toutes les parts de  $I$ . La formule (6-679) se réécrit alors

$$\tilde{\beta}_I = \sum_{\gamma(1^{|I|}) \leq J \leq \gamma I} \alpha_J, \quad (6-680)$$

c'est-à-dire, d'après (5-384),

$$\tilde{\beta}_I = (-1)^{\gamma|I|} \sum_{\gamma(1^{|I|}) \leq J \leq \gamma I'} (-1)^{l(J)} \beta_J. \quad (6-681)$$

Par exemple, pour  $\gamma = 2$ , on a

$$\tilde{\beta}_{(31)} = \beta_{(2222)} - \beta_{(242)} - \beta_{(224)} + \beta_{(26)}. \quad (6-682)$$

Il est possible d'obtenir une autre expression de  $\tilde{\beta}_I$  à partir de la proposition 6.3.5. Ainsi, on a

$$\sum_I \tilde{\beta}_I R_I = \phi_\gamma(\sigma_1^*) = \sum_I \beta_I \phi_\gamma(R_I). \quad (6-683)$$

Pour toute composition  $I$ , notons  $\mathcal{A}(I)$  l'ensemble des compositions  $J$  vérifiant

$$\phi_\gamma(R_J) = \pm R_I. \quad (6-684)$$

On déduit alors de (6-683) et de la proposition 6.3.5 que

$$\tilde{\beta}_I = \sum_{J \in \mathcal{A}(I)} (-1)^{l(J) - l(I)} \beta_J. \quad (6-685)$$

Or,  $J \in \mathcal{A}(I)$  si et seulement si  $\gamma I$  est le plus petit grossissement commun à  $J$  et à la composition de poids  $\gamma|I|$  dont toutes les parts ont pour valeur  $\gamma$ . Par exemple, pour  $\gamma = 2$ , on a

$$\tilde{\beta}_{(2)} = \beta_{(4)} - \beta_{(31)} - \beta_{(13)} + \beta_{(121)} \quad (6-686)$$

et

$$\tilde{\beta}_{(11)} = \beta_{(22)} - \beta_{(112)} - \beta_{(211)} + \beta_{(1111)}. \quad (6-687)$$

*Remarque* : Il est également possible de retrouver la formule (6-681) à partir de (6-685), en développant les  $\beta_I$  sur les  $\alpha_J$  grâce au développement de  $S^I$  sur les  $R_J$ , puis en repassant des  $\alpha_J$  aux  $\beta_K$  grâce à la formule (5-384).

## 6.6 Tables

Pour chaque composition  $I, |I| \leq 6$ , on donne dans les tableaux suivants les valeurs de  $\tilde{\alpha}_I, \tilde{\beta}_I$  et  $\tilde{\delta}_I$  correspondant à  $\gamma = 1, 2, 3$  et 4.

$I$	$\gamma = 1$			$\gamma = 2$			$\gamma = 3$			$\gamma = 4$		
	$\tilde{\alpha}_I$	$\tilde{\beta}_I$	$\tilde{\delta}_I$	$\tilde{\alpha}_I$	$\tilde{\beta}_I$	$\tilde{\delta}_I$	$\tilde{\alpha}_I$	$\tilde{\beta}_I$	$\tilde{\delta}_I$	$\tilde{\alpha}_I$	$\tilde{\beta}_I$	$\tilde{\delta}_I$
(1)	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
(2)	-1	1	1	-1	2	1	-1	3	1	-1	4	1
(11)	2	2	1	3	3	2	4	4	3	5	5	4
(3)	-1	-1	-1	-1	-5	-1	-1	-12	-1	-1	-22	-1
(21)	3	-2	-2	5	-7	-4	7	-15	-6	9	-26	-8
(12)	2	-3	-1	3	-9	-2	4	-18	-3	5	-30	-4
(111)	-5	-5	-1	-12	-12	-5	-22	-22	-12	-35	-35	-22
(4)	-1	1	1	-1	14	1	-1	55	1	-1	140	1
(31)	4	2	3	7	19	6	10	67	9	13	162	12
(22)	3	3	2	5	23	4	7	76	6	9	178	8
(211)	-9	5	3	-25	30	14	-49	91	33	-81	204	60
(13)	2	4	1	3	28	2	4	88	3	5	200	4
(121)	-7	7	2	-18	37	9	-34	106	21	-55	230	38
(112)	-5	9	1	-12	43	5	-22	118	12	-35	250	22
(1111)	14	14	1	55	55	14	140	140	55	285	285	140
(5)	-1	-1	-1	-1	-42	-1	-1	-273	-1	-1	-969	-1
(41)	5	-2	-4	9	-56	-8	13	-328	-12	17	-1109	-16
(32)	4	-3	-3	7	-66	-6	10	-364	-9	13	-1197	-12
(311)	-14	-5	-6	-42	-85	-27	-85	-431	-63	-143	-1359	-114
(23)	3	-4	-2	5	-76	-4	7	-400	-6	9	-1285	-8
(221)	-12	-7	-5	-35	-99	-22	-70	-476	-51	-117	-1463	-92
(212)	-9	-9	-3	-25	-113	-14	-49	-521	-33	-81	-1567	-60
(2111)	28	-14	-4	130	-143	-48	357	-612	-182	759	-1771	-456
(14)	2	-5	-1	3	-90	-2	4	-455	-3	5	-1425	-4
(131)	-9	-9	-3	-24	-118	-13	-46	-543	-30	-75	-1625	-54
(122)	-7	-12	-2	-18	-136	-9	-34	-597	-21	-55	-1745	-38
(1211)	23	-19	-3	100	-173	-34	266	-703	-127	555	-1975	-316
(113)	-5	-14	-1	-12	-151	-5	-22	-645	-12	-35	-1855	-22
(1121)	19	-23	-2	79	-194	-24	206	-763	-91	425	-2105	-228
(1112)	14	-28	-1	55	-218	-14	140	-829	-55	285	-2245	-140
(11111)	-42	-42	-1	-273	-273	-42	-969	-969	-273	-2530	-2530	-969

$I$	$\gamma = 1$			$\gamma = 2$			$\gamma = 3$			$\gamma = 4$		
	$\tilde{\alpha}_I$	$\tilde{\beta}_I$	$\tilde{\delta}_I$	$\tilde{\alpha}_I$	$\tilde{\beta}_I$	$\tilde{\delta}_I$	$\tilde{\alpha}_I$	$\tilde{\beta}_I$	$\tilde{\delta}_I$	$\tilde{\alpha}_I$	$\tilde{\beta}_I$	$\tilde{\delta}_I$
(6)	-1	1	1	-1	132	1	-1	1428	1	-1	7084	1
(51)	6	2	5	11	174	10	16	1701	15	21	8053	20
(42)	5	3	4	9	202	8	13	1866	12	17	8613	16
(411)	-20	5	10	-63	258	44	-130	2194	102	-221	9722	184
(33)	4	4	3	7	227	6	10	2010	9	13	9097	12
(321)	-18	7	9	-56	293	39	-115	2374	90	-195	10294	162
(312)	-14	9	6	-42	331	27	-85	2575	63	-143	10942	114
(3111)	48	14	10	245	416	110	700	3006	408	1521	12301	1012
(24)	3	5	2	5	255	4	7	2175	6	9	9657	8
(231)	-15	9	7	-45	331	30	-91	2575	69	-153	10942	124
(222)	-12	12	5	-35	377	22	-70	2803	51	-117	11654	92
(2211)	43	19	9	215	476	96	609	3279	353	1317	13117	872
(213)	-9	14	3	-25	412	14	-49	2983	33	-81	12226	60
(2121)	37	23	7	180	525	76	504	3504	281	1083	13793	696
(2112)	28	28	4	130	585	48	357	3777	182	759	14609	456
(21111)	-90	42	5	-700	728	165	-2695	4389	1020	-7371	16380	3542
(15)	2	6	1	3	297	2	4	2448	3	5	10626	4
(141)	-11	11	4	-30	387	17	-58	2903	39	-95	12051	70
(132)	-9	15	3	-24	443	13	-46	3167	30	-75	12851	54
(1311)	34	24	6	157	561	62	428	3710	226	905	14476	556
(123)	-7	18	2	-18	488	9	-34	3383	21	-55	13511	38
(1221)	30	30	5	136	624	52	368	3980	190	775	15256	468
(1212)	23	37	3	100	698	34	266	4298	127	555	16176	316
(12111)	-76	56	4	-557	871	123	-2083	5001	747	-5600	18151	2573
(114)	-5	20	1	-12	530	5	-22	3603	12	-35	14211	22
(1131)	24	34	3	103	681	34	272	4248	127	565	16066	316
(1122)	19	43	2	79	767	24	206	4602	91	425	17066	228
(11211)	-66	66	3	-467	961	95	-1719	5365	582	-4580	19171	2013
(1113)	14	48	1	55	827	14	140	4866	55	285	17836	140
(11121)	-56	76	2	-383	1045	70	-1389	5695	438	-3670	20081	1529
(11112)	-42	90	1	-273	1155	42	-969	6115	273	-2530	21221	969
(111111)	132	132	1	1428	1428	132	7084	7084	1428	23751	23751	7084

## 6.7 Conclusion et perspectives

Dans ce chapitre, nous avons donné des formules closes et des interprétations combinatoires pour les coefficients  $\tilde{\alpha}_I$  et  $\tilde{\delta}_I$ . Cependant, nous n'avons encore aucune formule satisfaisante pour le coefficient  $\tilde{\beta}_I$ . Or, l'étude de résultats numériques montre que pour toute composition  $I$  de poids inférieur à 10, la formule (5–387) reste vraie si on remplace les  $\beta$  par des  $\tilde{\beta}$  dans le cas où  $\gamma$  est un entier strictement positif quelconque. Autrement dit, on a pour

toute composition  $I$  de longueur  $s > 1$  et de poids  $|I| \leq 10$

$$\tilde{\beta}_I = \tilde{\beta}_{(i_1, \dots, i_{s-2}, i_{s-1}+1, i_s-1)} + \tilde{\beta}_{(i_1, \dots, i_{s-1})} \tilde{\beta}_{i_s}, \quad (6-688)$$

ce qui entraîne de manière équivalente que la formule (5-487) est elle aussi indépendante de  $\gamma$  pour ces compositions, au sens où pour toute composition  $I$  de poids inférieur à 10,

$$\tilde{\beta}_I = \sum_{F \leq p(I)} \tilde{\beta}^{\text{ev}(F)}. \quad (6-689)$$

Cette formule, combinée à l'expression des  $\tilde{\beta}_n$  donnée par (6-678), entraîne la formule explicite suivante pour  $\tilde{\beta}_I$  lorsque  $|I| \leq 10$ .

$$\tilde{\beta}_I = (-1)^{|I|} \sum_{F \leq p(I)} \prod_k \frac{1}{m_k(F)} \binom{\gamma m_k(F)}{m_k(F) - 1} \quad (6-690)$$

Une idée pour poursuivre le travail commencé dans ce chapitre serait de chercher à voir si ces formules restent vraies lorsque  $I$  est une composition de poids quelconque, et si elles sont vraies, de les démontrer et de comprendre d'où elles viennent. Dans le cas où la formule (6-690) serait vraie pour toute composition  $I$ , il existerait des polynômes universels  $P_I$ , explicitement déterminés et indépendants de  $\gamma$ , vérifiant pour toute composition  $I$

$$\tilde{\beta}_I = P_I(\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2, \dots, \tilde{\beta}_{|I|}). \quad (6-691)$$

En fait, on peut aussi constater en s'appuyant sur des données numériques que si l'on note  $Q_I$  le polynôme défini par

$$\sum_I Q_I(B) R_I(A) = \sum_I P_I(B) \phi_\gamma(R_I(A)), \quad (6-692)$$

où  $B$  et  $A$  sont deux alphabets respectivement commutatif et non commutatif, mutuellement indépendants et qui commutent entre eux, alors l'alphabet

$$\tilde{B} = [Q_1(B), Q_2(B), \dots] \quad (6-693)$$

vérifie

$$Q_I(B) = P_I(\tilde{B}) \quad (6-694)$$

dans tous les cas où  $\gamma|I| \leq 8$ . Si cette propriété était vraie pour n'importe quelle valeur de  $I$  et de  $\gamma$ , alors on remarque en tenant compte du fait que  $\beta_n = (-1)^n$  d'après (6-678), que la formule (6-690) serait la spécialisation de cette identité à l'alphabet

$$B = [\beta_1, \beta_2, \dots] = [-1, 1, -1, 1, \dots]. \quad (6-695)$$

Par ailleurs, la formule (6–690) peut se réécrire

$$\begin{aligned}
\tilde{\beta}_I &= \sum_{G \leq p(I)} \tilde{\beta}_{m_1(G)} \tilde{\beta}_{m_2(G)} \cdots \\
&= \sum_{G \leq p(I)} \langle s_\gamma(\sigma_1), F_{m_1(G)} \rangle \langle s_\gamma(\sigma_1), F_{m_2(G)} \rangle \cdots \\
&= \sum_{G \leq p(I)} \langle \phi_\gamma(s(\sigma_1)), F_{m_1(G)} \rangle \langle \phi_\gamma(s(\sigma_1)), F_{m_2(G)} \rangle \cdots \\
&= \sum_{G \leq p(I)} \langle \sigma_1, s^\perp(\psi_\gamma(F_{m_1(G)})) \rangle \langle \sigma_1, s^\perp(\psi_\gamma(F_{m_2(G)})) \rangle \cdots \\
&= \sum_{G \leq p(I)} \langle \sigma_1 \otimes \sigma_1 \otimes \cdots, s^\perp(\psi_\gamma(F_{m_1(G)})) \otimes s^\perp(\psi_\gamma(F_{m_2(G)})) \otimes \cdots \rangle.
\end{aligned}$$

Or, on a

$$\Delta_0(\sigma_1) = \sigma_1(A + B) = \sigma_1(A)\sigma_1(B) = \sigma_1 \otimes \sigma_1. \quad (6-696)$$

La formule (6–690) est donc équivalente à

$$\tilde{\beta}_I = \sum_{G \leq p(I)} \langle \sigma_1, s^\perp(\psi_\gamma(F_{m_1(G)})) s^\perp(\psi_\gamma(F_{m_2(G)})) \cdots \rangle. \quad (6-697)$$

D'autre part, on a par définition  $\tilde{\beta}_I = \langle \sigma_1, s^\perp(\psi_\gamma(F_I)) \rangle$ . Les propriétés de l'action de  $s^\perp$  étudiées dans la partie 5.7 pourraient donc éventuellement servir à déterminer si (6–690) reste vraie lorsque  $I$  est de poids quelconque.



# Bibliographie

- [1] P. BIANE, *Minimal factorizations of a Cycle and Central Multiplicative Functions on the Infinite Symmetric Group*, J. Combin. Theor. A **76** (1996), 97–212.
- [2] C. BROUDER, A. FRABETTI and C. KRATTENTHALER, *Non-commutative Hopf algebra of formal diffeomorphisms*, QA/0406117, 2004 - arxiv.org
- [3] J.-P. BULTEL, *A one-parameter deformation of the Farahat-Higman algebra*, European Journal of Combinatorics **32** (2011), 308–323.
- [4] J.-P. BULTEL, *A one-parameter deformation of the noncommutative Lagrange inversion formula*, International Journal of Algebra and Computation (to appear).
- [5] S. CORTEEL, A. GOUPIL and G. SCHAEFFER, *Content evaluation and class symmetric functions*, Adv. Math. **188** (2004), no. 2, 315–336.
- [6] H. FIGUEROA and J. M. GRACIA-BONDIA, *Combinatorial Hopf algebras in quantum field theory I*, Rev.Math.Phys. **17** (2005), 881–976.
- [7] H. K. FARAHAT and G. HIGMAN, *The centres of symmetric group rings*, Proc. Roy. Soc. London Ser. A **250** (1959), 212–221.
- [8] V. FÉRAY, *On complete functions in Jucys-Murphy elements*, Annals of Combinatorics (to appear).
- [9] L. FOISSY, *Faà di Bruno subalgebras of the Hopf algebra of planar trees from combinatorial Dyson-Schwinger equations*, Adv. Math. **218** (2008), no. 1, 136–162.
- [10] I.M. GELFAND, D. KROB, A. LASCoux, B. LECLERC, V. S. RETAKH, and J.-Y. THIBON, *Noncommutative symmetric functions*, Adv. in Math. **112** (1995), 218–348.
- [11] I. GESSEL, *Noncommutative Generalization and  $q$ -analog of the Lagrange Inversion Formula*, Trans. Amer. Math. Soc. **257** (1980), no. 2, 455–482.
- [12] I. GESSEL, *Multipartite  $P$ -partitions and inner products of skew Schur functions*, combinatorics and algebra, Contemp. Math. **34** (1983), 289–317.
- [13] I. P. GOULDEN and D. M. JACKSON, *Symmetric functions and Macdonald’s result for top connexion coefficients in the symmetric group*, J. Algebra **166** (1994), no. 2, 364–378.



- [14] I. P. GOULDEN and D. M. JACKSON, *Connexion coefficients for the symmetric group, free products in operator algebras and random matrices*, in Fields Institute Communications : Free Probability Theory, D.-V. Voiculescu, Ed. Providence, RI : Amer. Math. Soc., 1997, vol. 12, pp. 105–125.
- [15] D. GUIN and J.-M. OUDOM, *On the Lie enveloping algebra of a pre-Lie algebra*, J. K-Theory 2. **1** (2008), 147–167.
- [16] S. A. JONI and G.-C. ROTA, *Coalgebras and bialgebras in combinatorics*, Contemp. Math. **6** (1982), 1–47.
- [17] A.-A.A. JUCYS, *Symmetric polynomials and the center of the symmetric group ring*, Rep. Mathematical Phys. **5** (1974), no. 1, 107–112.
- [18] D. KREIMER, *On the Hopf algebra structure of perturbative quantum field theories*, Adv. Theor. Math. Phys. **2** (1998), no. 2, 303–334, q-alg/97 07029.
- [19] D. KROB, B. LECLERC and J.-Y. THIBON, *Noncommutative symmetric functions II : Transformations of alphabets*, Intern. J. Alg. Comput. **7** (1997), 181–264.
- [20] A. LASCoux, *Symmetric functions and combinatorial operators on polynomials*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics **99**, American Math. Soc., Providence, RI, 2003 ; xii+268 pp.
- [21] A. LASCoux and J.-Y. THIBON, *Vertex operators and the class algebras of symmetric groups*, Zap. Nauchn. Sem. S.-Peterburg. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (POMI) **283** (2001), Teor. Predst. Din. Sist. Komb. i Algoritm. Metody. 6, 156–177, 261 ; also in J. Math. Sci. (N. Y.) **121** (2004), no. 3, 2380–2392
- [22] M. LASSALLE, *Class expansion of some symmetric functions in Jucys-Murphy elements*, arXiv :1005.2346, 2010.
- [23] C. LENART, *Lagrange inversion and Schur functions*, J. Algebraic Combin. **11** (2000), 1, 69–78.
- [24] I. G. MACDONALD, *Symmetric functions and Hall polynomials*, 2nd ed., Oxford University Press, 1995.
- [25] S. MATSUMOTO and J. NOVAK, *Jucys-Murphy Elements and Unitary Matrix Integrals*, arXiv :0905.1992v2.
- [26] J. MURRAY, *Generators for the centre of the group algebra of a symmetric group*, J. Algebra **271** (2004), 725–748.
- [27] J. NOVAK, *Complete symmetric polynomials in Jucys-Murphy elements and the Weingarten function*, Banach Center Publ. **89** (2010), 231–235.
- [28] J.-C. NOVELLI and J.-Y. THIBON, *Noncommutative symmetric functions and Lagrange inversion*, Adv. in Appl. Math. **40** (2008), 8–35.
- [29] I. PAK, A. POSTNIKOV, and V. S. RETAKH, *Noncommutative Lagrange Theorem and Inversion Polynomials*, preprint, 1995, available at <http://www-math.mit.edu/~pak/research.html>.
- [30] G. N. RANEY, *Functional composition patterns and power series reversion*, Trans. Amer. Math. Soc. **94** (1960), 441–451.