UNIVERSITÉ PARIS-EST

ECOLE DOCTORALE SCIENCE INGÉNIERIE ET ENVIRONNEMENT

THÈSE

présentée pour l'obtention du diplôme de

DOCTEUR DE

L'UNIVERSITÉ PARIS-EST

Spécialité : *Structures et Matériaux*

par

Philippe PÉCOL

Sujet de la thèse :

Modélisation 2D discrète du mouvement des piétons - Application à l'évacuation des structures du génie civil et à l'interaction foule-passerelle

Soutenue le 09 Décembre 2011 devant le jury composé de :

Président :	**Michel FRÉMOND**
Rapporteurs :	**Louis JÉZÉQUEL** **Frédéric LEBON**
Examinateurs :	**Stefano DAL PONT** **Silvano ERLICHER**
Directeur de thèse :	**Pierre ARGOUL**

Remerciements

Avant tout je souhaite remercier mon directeur de thèse, Pierre Argoul, et mes deux conseillers d'étude, Stefano Dal Pont et Silvano Erlicher. Durant ces trois années de thèse, j'ai beaucoup appris à leurs côtés notamment grâce à leur complémentarité. Je les remercie chaleureusement pour la confiance et l'enthousiasme permanent qu'ils ont exprimé à mon encontre, ainsi que pour le temps et la qualité du suivi qu'ils m'ont consacré. J'ai également fortement apprécié leur rigueur scientifique, leurs précieux conseils et l'aide qu'ils m'ont accordé tout au long de cette thèse. Merci beaucoup pour ces relations humaines fortes que nous avons pu tisser. Les mardi ou mercredi soirs de Ligue des Champions vont me manquer !

Je tiens également à exprimer toute ma gratitude envers M. Michel Frémond qui a présidé mon jury, et envers M. Louis Jézéquel et M. Frédéric Lebon qui ont accepté d'évaluer ce manuscrit.

Un grand merci aussi aux permanents, aux post-doctorants, aux doctorants et aux stagiaires du Laboratoire Navier que j'ai côtoyé et avec qui j'ai partagé de très bons moments !

Enfin je remercie mon amie, mes parents, ma famille et mes amis pour leur amour, leurs encouragements et leur soutien durant toutes ces années.

Résumé

Développer un modèle de mouvement de foule capable de simuler l'évacuation d'un lieu public de moyenne ou forte affluence devient utile, voire nécessaire, afin que les futures constructions ou aménagements publics puissent offrir une qualité de sécurité optimale à leurs usagers. Les effets des piétons sur les structures du génie civil, comme l'interaction dynamique foule-structure, doivent aussi être pris en compte et modélisés.

Dans le cadre de cette thèse, un modèle de foule 2D discret est proposé dans lequel les actions et les décisions de chaque piéton sont traitées individuellement. Ce modèle est aussi capable de modéliser le chargement dynamique d'un piéton sur une structure vibrante. Trois étapes sont nécessaires à l'établissement du modèle proposé.
La première concerne la gestion du mouvement et des interactions piéton-piéton et piéton-obstacle. Nous nous sommes inspirés des milieux granulaires pour modéliser les interactions au sein de la foule. Nous avons étudié, implémenté et adapté dans l'environnement MATLAB, le modèle granulaire proposé par Frémond, entrant dans un cadre thermodynamique rigoureux dans lequel les interactions locales sont gérées par l'utilisation de pseudo-potentiels de dissipation, et dans lequel les collisions entre particules peuvent être élastiques ou inélastiques. Une comparaison de ce modèle à deux autres approches déjà adaptées aux mouvements de foule est présentée.
La seconde étape consiste à gérer le comportement des piétons. Cette gestion du comportement se fait en plusieurs niveaux de complexité. Dans le premier niveau qui est nécessaire, une stratégie de déplacement est affectée à chaque piéton. La stratégie du chemin le plus court pour qu'un piéton se déplace d'un lieu à un autre a été choisie. Elle a été implémentée à l'aide d'un algorithme de Fast Marching et utilisée pour obtenir la direction souhaitée de chaque piéton au cours du temps. Les autres niveaux de complexité permettent de décrire des comportements plus élaborés tels que l'évitement entre piétons ou le déplacement en sous-groupe, grâce à l'introduction de forces sociales. Une approche originale permettant de former des sous-groupes de piétons à l'aide d'un pseudo-potentiel de dissipation est proposée.
La dernière étape concerne le couplage piéton-structure, nous avons cherché à modéliser le chargement dynamique d'un piéton sur une structure vibrante. L'action du piéton sur le sol a été représentée par une force sinusoïdale qui modélise le mouvement d'oscillation de l'individu pendant la marche. En fixant notre attention sur les passerelles, on s'est intéressé au phénomène de synchronisation en fréquence qui peut apparaître entre la fréquence de marche de chaque piéton et la fréquence d'oscillation du système "foule-passerelle". Ce phénomène a été modélisé grâce à l'utilisation d'une équation différentielle de type Kuramoto qui gère la phase de la force de marche de chaque piéton. Un développement analytique du modèle proposé permet d'obtenir les expressions de certains paramètres liés à la synchronisation.
Des simulations numériques appliquent ce modèle de foule à l'évacuation des structures du génie civil et à l'interaction foule-passerelle.

Mots clés : Assemblée de grains, contact, mouvement de foule, évacuation d'urgence, interaction foule-structure, synchronisation, vibrations, algorithme numérique.

Abstract

The development of a model for crowd movement simulating the evacuation of public spaces becomes useful and necessary to determine the effectiveness of transportation infrastructures. The effects of pedestrians on civil engineering structures, such as crowd-structure dynamic interaction, must also be considered and modeled.

In this thesis, a 2D crowd model is proposed in which the movement of each pedestrian is represented both in time and space. This model is able to take into account the dynamical pedestrians' action on a moving floor.
Three steps are needed to assemble the proposed model. The first concerns the management of pedestrian-pedestrian and pedestrian-obstacle interactions. The non-smooth granular model proposed by Frémond to manage collisions between rigid particles is studied and implemented in a MATLAB environment. This discrete approach applies a rigorous thermodynamic framework in which the local interactions between particles are managed using pseudo-potentials of dissipation. A comparison between this model and two others, already adapted to the crowd, is performed.
The second step concerns the management of pedestrians' behavior. A displacement strategy has to be defined for each pedestrian. The strategy of the shortest path to get from one point to another is implemented through a Fast Marching algorithm and is used to obtain the instantaneous desired direction of each pedestrian. Social forces are also introduced in order to manage the interaction between each pedestrian and his nearest environment. An original approach allowing us to create and control subgroups, using pseudo-potentials of dissipation, is implemented.
The last step deals with the crowd-footbridge coupling for lateral and vertical oscillations of the structure. An alternating (sinusoidal) sideways force is used in order to take into account the pedestrian's oscillations around his trajectory. This force, due to his walking and his action on the bridge, allows one to define the acceleration of each pedestrian's oscillations around his trajectory. The synchronization of the walking frequency of each pedestrian with the oscillations frequency of the system "crowd-footbridge" is managed via a Kuramoto type differential equation which allows one to govern the evolution of the total phase of the walking force generated by each pedestrian on the bridge. An analytical study is also developed to determine the key parameters of the synchronization phenomenon.
Numerical simulations using the proposed model dealing with crowd evacuation of civil engineering structures and pedestrians-footbridge interaction are finally presented.

Keywords : granular assembly, contact, crowd movement, emergency evacuation, crowd-structure interaction, synchronization, vibrations, numerical algorithm.

Table des matières

Table des figures **11**

Liste des tableaux **17**

Introduction générale **19**

1 Etude bibliographique **23**
1.1 Introduction 25
1.2 La foule 25
1.2.1 Observations de la foule 26
1.2.2 État de l'art des modèles de mouvement de foule 29
1.3 Le piéton 35
1.3.1 Résultats expérimentaux des études réalisées sur la marche 35
1.3.2 Modélisation du piéton 40
1.4 La synchronisation 46
1.4.1 L'oscillateur auto-entretenu et ses propriétés 46
1.4.2 Définition de la synchronisation 50
1.4.3 Synchronisation d'un oscillateur auto-entretenu par une force extérieure 53
1.5 La perception des vibrations par les humains 54
1.6 Synthèse du chapitre 55

2 Gestion du contact **57**
2.1 Introduction 59
2.2 Mouvement des particules 61
2.3 La détection du contact 62
2.4 Traitement du contact 65
2.4.1 DEM 65
2.4.2 $NSM1$ 66
2.4.3 $NSM2$ 67
2.5 Aspects numériques des trois approches 70
2.5.1 DEM 71
2.5.2 $NSM1$ 72
2.5.3 $NSM2$ 72
2.6 Comparaison des trois approches 74
2.6.1 $NSM1$ vs $NSM2$ 74
2.6.2 DEM vs $NSM2$ 77
2.7 Synthèse du chapitre 78

3 Gestion du comportement des piétons **81**
3.1 Introduction . . . 83
3.2 Une volonté pour chaque piéton . . . 83
3.2.1 Introduction de la vitesse souhaitée dans le modèle de mouvement de particule . . . 83
3.2.2 La vitesse souhaitée . . . 84
3.2.3 Influence du paramètre τ . . . 86
3.3 Gestion des interactions avec l'environnement proche . . . 86
3.3.1 Forces socio-psychologiques . . . 87
3.3.2 Modélisation d'un sous-groupe . . . 88
3.4 Synthèse du chapitre . . . 96

4 Le modèle d'interaction foule-structure **97**
4.1 Introduction . . . 99
4.2 Modélisation du piéton . . . 99
4.2.1 Accélération absolue du piéton : cas général . . . 100
4.2.2 Cas 1 : Les piétons marchent dans un plan et les oscillations de la structure sont latérales . . . 101
4.2.3 Cas 2 : Les piétons marchent dans un plan et les oscillations de la structure sont verticales . . . 107
4.3 Modèle d'interaction foule-passerelle . . . 109
4.3.1 cas 1 : oscillations latérales de la passerelle . . . 109
4.3.2 cas 2 : oscillations verticales de la passerelle . . . 112
4.4 Synthèse du chapitre . . . 113

5 Etude analytique **115**
5.1 Introduction . . . 117
5.2 La notion de nombre critique de piétons N_c . . . 117
5.2.1 Nombre critique : relation basée sur des équations données par Clough et Penzien [1] : . . . 117
5.2.2 Nombre critique : relation établie à partir d'une équation différentielle pour la phase totale de la force latérale d'un piéton . . . 119
5.3 Calcul du nombre critique N_c dans le cas de vibrations latérales . . . 121
5.3.1 Normalisations et changement d'échelle temporelle . . . 122
5.3.2 Changement de repère et méthode de la moyenne . . . 123
5.3.3 Synchronisation partielle . . . 125
5.3.4 Synchronisation global foule-structure . . . 126
5.4 Calcul de l'amplitude du déplacement de la passerelle lorsque $N > N_c$ dans le cas de vibrations latérales . . . 132
5.5 Synthèse du chapitre . . . 133

6 Simulations numériques **135**
6.1 Introduction . . . 137
6.2 Simulations de mouvement de foule . . . 137
6.2.1 Phénomènes d'auto-organisation de la foule . . . 137
6.2.2 Exercices d'évacuation : comparaison entre résultats expérimentaux et numériques . . . 140
6.2.3 Un modèle prévisionnel . . . 149

6.2.4 Modélisation du mouvement de sous-groupes . . . 154
6.3 Simulations d'interactions foule-passerelle . . . 156
6.3.1 Traversée de la travée Nord du Millénium Bridge . . . 158
6.3.2 Calcul du nombre critique de piétons pour différentes passerelles . . . 168
6.4 Synthèse du chapitre . . . 169

Conclusions et perspectives **171**

Appendices **175**

A Optimisation avec contrainte convexe **177**
A.1 Relations de Kuhn-Tucker . . . 177
A.2 Interprétation des relations de Kuhn-Tucker . . . 177
A.3 Point-selles . . . 178
A.4 Lagrangien . . . 178
A.5 Point-selle du Lagrangien et solution du problème (P) . . . 178
A.6 Problème dual du problème (P) . . . 178
A.7 Méthode d'Uzawa . . . 179
A.7.1 Démarche . . . 179
A.7.2 Calcul de λ_{k+1} . . . 179
A.7.3 Calcul de $\nabla G(\lambda_k)$ . . . 179
A.7.4 Condition suffisante de convergence de la méthode d'Uzawa . . . 180

B Le Fast Marching **181**

C Analyse convexe **185**
C.1 Fonctions convexes . . . 185
C.1.1 Ensemble convexe . . . 185
C.1.2 Fonction convexe . . . 185
C.2 Sous différentiabilité . . . 185
C.2.1 Espace vectoriel dual . . . 185
C.2.2 Sous-gradient et sous-différentiel d'une fonction convexe . . . 186
C.3 Pseudopotentiel de dissipation . . . 186
C.3.1 Semi-continue inférieure . . . 186
C.3.2 Pseudopotentiel de dissipation . . . 186

D Réécriture du problème de minimisation Eq. (2.28) **187**

Bibliographie **189**

Table des figures

1.1 Phénomène d'arche d'après [2]. 28
1.2 Formation de ligne à contre courant d'après [3]. 28
1.3 Phénomène d'oscillation d'après [4]. 28
1.4 Corner hugging d'après [3]. 29
1.5 Formation de file indienne lors de l'évacuation d'après [5]. 29
1.6 Critères pour la classification des modèles de mouvement de foule [5]. 30
1.7 Les trois règles caractérisant le comportement des oiseaux [6]. 32
1.8 Les forces agissant sur le piéton i - les forces représentées : une force motrice d'accélération pour qu'il se déplace vers une destination souhaitée ; une force d'interaction à distance à cause du piéton j, et une autre à cause de l'obstacle ; et les forces non représentées : les forces de répulsion permettant de gérer les contacts piéton-piéton et piéton-obstacle et les forces attractives permettant d'introduire d'autres comportements [7]. 33
1.9 Exemple d'une simulation d'évacuation de salle réalisée avec un modèle d'automate cellulaire [8]. 34
1.10 Modèle de choix discret [9] - a) Concept du comportement de marche des piétons ; b) Représentation de l'ensemble des choix de mouvement du piéton, avec numérotation des alternatives. 34
1.11 Exemple d'une simulation d'évacuation d'un métro par un escalator réalisée avec le modèle mathématique de Venel [10]. 35
1.12 Distribution normale de la fréquence d'après Matsumoto et al. [11]. 37
1.13 Courbes typiques de la force pour la marche d'après [12] : (a) composante verticale, (b) composante normale à la direction de mouvement du piéton, (c) composante tangentielle à la direction de mouvement du piéton. 38
1.14 Marche périodique d'après [13] : (a) composante verticale, (b) composante normale à la direction de mouvement du piéton, (c) composante tangentielle à la direction de mouvement du piéton. 38
1.15 Relation entre la longueur du pas, la vitesse, la force maximale et le temps de contact pour différentes fréquences de mouvement d'après [14]. 39
1.16 Deux représentations du corps humain : (a) représentation du modèle de marche 2D de McGeer [15], (b,c,d) représentation du modèle de marche 3D [16]. 40
1.17 Représentation du piéton : (a) [17], (b) [18]. 41
1.18 Schéma simplifié de l'oscillateur qui représente le comportement dynamique latéral du piéton [19]. 42
1.19 (a) Cycle limite dans le plan de phases (repère fixe), (b) stabilité d'un point de phase sur le cycle limite (repère tournant). 48
1.20 Oscillateur conservatif. 49

1.21 Système dissipatif. 50
1.22 Systèmes dissipatifs : (a) auto-entretenu, et (b) forcé. 50
1.23 Repère tournant : (a) $\omega_0 > \omega$, (b) $\omega_0 = \omega$, (c) $\omega_0 < \omega$. 54
1.24 Le déphasage selon la position des points par rapport à la région de synchronisation : (a) la position des points par rapport à la région de synchronisation, (b) le déphasage en fonction du temps pour les différents points. 54

2.1 Représentation des trois étapes permettant de gérer les contacts. 61
2.2 Test de tous les contacts possibles [20]. 63
2.3 Triangulation de Delaunay. 63
2.4 Boîtes de Manhattan [20]. 64
2.5 VNL - Cercles imaginaires et stockage des particules dans des listes [21]. . . 64
2.6 LLL - Visualisation des boîtes englobantes, de leur projections sur le système d'axes, de la recherche du chevauchement des projections sur les axes, et de la détermination des contacts potentiels [20]. 65
2.7 Vitesse après contact toujours corrigée pour que la position de la particule soit admissible. 67
2.8 Vitesse normale après contact $\dot{u}_N^+$ en fonction de la valeur absolue de la vitesse normale avant contact $\dot{u}_N^-$ pour différentes valeurs de p, avec $m = 75\ kg$ et $K_N = 4m$. 70
2.9 Vitesse normale après contact $\dot{u}_N^+$ en fonction de la valeur absolue de la vitesse normale avant contact $\dot{u}_N^-$ pour différentes valeurs de K_N, avec $m = 75\ kg$ et $p = 2$. 71
2.10 Exemple de la representation de la vitesse de la $i^{ème}$ particule. Les intervalles de temps en jaune sont ceux où il y a un contact et\ou une force extérieure régulière non nulle appliquée sur la $i^{ème}$ particule ; on y trouve une discontinuité de la vitesse. 73
2.11 Collision d'une particule avec le sol pour les approches $NSM1$ et $NSM2$. Les figures a. et b. représentent la trajectoire dans le plan xy du centre de la particule (de rayon $r = 0.22\ m$) après une collision avec le sol. Les figures c. et d. représentent l'évolution de la vitesse du centre de la particule selon l'axe y en fonction du temps. Les figures b. et d. sont des zooms des rectangles verts qui sont dessinés dans les figures a. et c. respectivement. Les résultats pour $NSM1$ sont les lignes de pointillés rouges et ceux pour $NSM2$ sont les lignes bleues ; le sol est en gris. 76
2.12 Collision d'une particule avec le sol pour les approches DEM et $NSM2$. Les figures a. et b. représentent la trajectoire dans le plan xy du centre de la particule (de rayon $r = 0.22\ m$) après une collision avec le sol. Les figures c. et d. représentent l'évolution de la vitesse du centre de la particule selon l'axe y en fonction du temps. Les figures b. et d. sont des zooms des rectangles verts qui sont dessinés dans les figures a. et c. respectivement. Les résultats pour DEM sont les lignes de pointillés rouges et ceux pour $NSM2$ sont les lignes bleues ; le sol est en gris. 78

3.1 Représentation des trajectoires de deux piétons identiques i et j se déplaçant dans des directions opposées, pour des valeurs différentes de τ. Après la collision, pour chaque piéton, la force d'accélération intérieure permet de modifier progressivement la vitesse réelle après le choc pour retrouver la vitesse souhaitée. La rapidité du changement de vitesse dépend des valeurs de τ_i et τ_j. Dans cet exemple, $\tau_i = \tau_j = \tau$. 84
3.2 Distances géodésiques à la sortie d'une salle contenant un obstacle - Deux exemples de trajectoires les plus courtes sont tracées. 85
3.3 a. d_{fi} en fonction de τ et d_{in} ; b. t_{fi} en fonction de τ et d_{in}. La vitesse des piétons est de 1.5 $m.s^{-1}$ et leurs rayons sont de 0.25 m. 86
3.4 t_{fi} en fonction de τ et d_{in}. La vitesse des piétons est de 1.5 $m.s^{-1}$ et les rayons sont de 0.2 m et 0.25 m. 87
3.5 Interaction piéton-piéton, sans (colonne de gauche) et avec (colonne de droite) la force socio-psychologique. 88
3.6 Exemple d'interaction entre un sous-groupe formé de 4 personnes et un piéton. 90
3.7 Formation d'un sous-groupe de 4 personnes avec le modèle proposé par Singh [22]. 90
3.8 Exemple de formation d'un sous-groupe de 4 piétons. 91
3.9 Formation d'un sous-groupe de 3 personnes avec le modèle proposé par Moussaïd [23]. 91
3.10 Formation d'un sous-groupe de 2 personnes se tenant par la main. 93
3.11 Les différentes zones de l'approche "piétons se tenant par la main" - La zone bleue est la zone où les piétons sont "liés". La zone rouge est celle où ils sont "libres" et donc où la force attractive est appliquée. La zone verte est alternativement l'une ou l'autre zone : c'est la bleue lorsque les piétons sont liés, et la rouge lorsqu'ils sont libres. Cette zone permet d'éviter un comportement oscillant des piétons qui apparaît à la frontière commune des zones bleue et rouge lorsque la verte n'existe pas. 93
3.12 Exemple d'une collision de deux piétons se tenant par la main avec un piéton isolé. 94
3.13 Etude de trois paramètres après la rencontre "piétons liés - piéton libre" en fonction de la valeur de K_V, pour $\tau = 0.5\ s$, $h = 10^{-2}\ s$ - a. la distance finale d_{fi} entre les piétons liés ; b. le temps final t_{fi} mis par les piétons liés pour retrouver leurs vitesses souhaitées ; c. le nombre total de contact $N_{contact}$ entre un piéton lié et le piéton libre lors de la rencontre. 95
3.14 Exemple d'un sous-groupe formé de trois personnes entrant en collision avec un piéton isolé - chaque ligne correspond à une approche : Moussaïd [23] en haut, Singh [22] au milieu, et piétons "liés" en bas. 95

4.1 Systèmes de référence - Exemple de trajectoire du point C_i dans le cas général. 100
4.2 Systèmes de référence - Exemple de trajectoire dans le cas simplifié 1. 102
4.3 Définition de $\theta_i(t)$, l'angle entre la direction de la trajectoire moyenne du piéton i et la direction de l'axe longitudinal de la passerelle. 104

6.1 Modèle discret de mouvement de foule - fonctionnement du programme MATLAB. 138
6.2 Simulation d'une mêlée de 1500 piétons - a. $t = 0\ s$, b. $t = 40\ s$. 139

6.3 Simulation d'une évacuation de salle - Formation d'arche - a. $t = 0\ s$, 200 piétons veulent évacuer ; b. $t = 6\ s$, 187 piétons restent à évacuer ; c. $t = 12\ s$, 166 piétons restent à évacuer. 140
6.4 Evacuation de salle - Courbes d'évacuation pour NSM2, avec $h = 10^{-2}\ s$. Les courbes de couleur cyan résultent des 50 simulations. La régression linéaire des 50 simulations (droite noire) permet d'obtenir le débit moyen de piétons traversant la porte. 141
6.5 Evacuation d'une salle de classe - Exemple de progression de deux simulations numériques à différents instants. La première ligne est obtenue avec l'approche NSM2 adaptée alors que la seconde concerne l'approche NSM1 adaptée. Les murs sont en noir, les bureaux sont en bleu, la porte de sortie est en magenta et les individus sont les cercles rouges. 143
6.6 Evacuation d'une salle de classe - Temps d'évacuation moyen des étudiants à partir de leurs positions initiales. Les trois résultats présentés dans chaque cercle donnent les temps d'évacuation moyens obtenus à partir de l'exercice réel d'évacuation (en haut) et des simulations numériques (au milieu pour l'approche DEM adaptée et en bas pour l'approche NSM2 adpatée). 144
6.7 Représentation du cinéma lors d'une simulation numérique ; les sièges sont en bleu, les murs sont en noir, l'écran de cinéma est en gris, les escaliers sont en jaune, les portes sont en cyan et les sorties sont en magenta (sortie A en haut et sortie B en bas) ; en fonction du nombre de piétons dans les rectangles rouges (zones de contrôle numérotées 1, 2 ou 3), les piétons se déplacent dans la direction de la flèche magenta au lieu de la beige. 146
6.8 Exemple de progression d'une simulation numérique à différents instants. Les piétons sont les cercles rouges. 146
6.9 Nombre de piétons évacués en fonction du temps, comparaison entre résultat d'exercice réel et résultats de simulations numériques : les 100 simulations numériques sont les courbes de couleur cyan, la moyenne de ces courbes de simulations est la courbe en noire, et la courbe de l'exercice réel est en rouge. 147
6.10 Evacuation d'une école primaire - Exemple de progression d'une simulation numérique à différents instants. Les murs sont en noir, les obstacles sont en vert, les escaliers sont en jaune, les portes sont en magenta et les piétons sont les cercles rouges. 148
6.11 Evacuation d'une école primaire - Nombre de piétons évacués en fonction du temps, comparaison entre résultats d'exercice réel et résultats de simulations numériques : les courbes en cyan représentent les 100 simulations numériques, la moyenne de ces courbes de simulations est la courbe noire, et la courbe de l'exercice réel est la rouge. 149
6.12 Différentes positions de l'obstacle en fonction de L_o, p_1 et p_2. 151
6.13 Evacuation d'une salle ayant deux sorties proches - Les piétons sont colorés en fonction de la valeur de la percussion de contact : gris quand le piéton considéré n'est pas en contact avec son environnement proche, et sinon un spectre de couleur du jaune au rouge quand la valeur de la percussion de contact augmente. Le rectangle vert est la zone où les piétons pourraient être blessés. 152
6.14 Exemple de simulation d'échange quai/train sans et avec flèche. 155

6.15 Modélisation du mouvement de sous-groupes dans une foule de piétons - Comparaison entre séquences vidéos et simulations numériques. Les sous-groupes en correspondance sont entourés de la même couleur. 156
6.16 Modèle d'interactions foule-passerelle - fonctionnement du programme MATLAB. 157
6.17 La passerelle du Millénium. 158
6.18 Vérification que pour $\bar{\varepsilon} = 30\ m^{-1}s^{-1}$, nous retrouvons $N_c \simeq 166$ piétons. . . 160
6.19 Travée Nord du Millénium Bridge - Valeurs de N_c en fonction de $\frac{\bar{\omega}}{2\pi}$ pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$ et $\bar{\varepsilon} = 30\ m^{-1}s^{-1}$. 160
6.20 Travée Nord du Millénium Bridge - Cas 1 - Comparaison entre les amplitudes maximales du déplacement latéral de la passerelle trouvées analytiquement et numériquement. Nous retrouvons bien analytiquement $N_c \simeq 124$. 163
6.21 Travée Nord du Millénium Bridge - Cas 1 - Mise en évidence du non phénomène de synchronisation lorsque $N < N_c$ - une foule de 100 piétons traverse la travée Nord du Millenium bridge - a. Evolution temporelle du déplacement latéral de la structure U_y ; b. Evolution temporelle du paramètre d'ordre ; c. Evolution temporelle des fréquences de marche $\frac{\dot{\phi}_i(t)}{2\pi}$ des piétons sur la structure. La courbe rouge en gras représente la fréquence instantanée du système "piétons-passerelle". 164
6.22 Travée Nord du Millénium Bridge - Cas 1 - Mise en évidence du phénomène de synchronisation lorsque $N > N_c$ - une foule de 210 piétons traverse la travée Nord du Millenium bridge - a. Evolution temporelle du déplacement latéral de la structure U_y ; b. Evolution temporelle du paramètre d'ordre ; c. Evolution temporelle des fréquences de marche $\frac{\dot{\phi}_i(t)}{2\pi}$ des piétons synchronisés sur la structure ; d. Evolution temporelle des fréquences de marche $\frac{\dot{\phi}_i(t)}{2\pi}$ des piétons non synchronisés sur la structure. La courbe rouge en gras représente la fréquence instantanée du système "piétons-passerelle". 165
6.23 Travée Nord du Millénium Bridge - Cas 1 - Evolution temporelle des fréquences de marche $\frac{\dot{\phi}_i(t)}{2\pi}$ des piétons sur la structure en fonction de leur position. On remarque la non synchronisation des piétons lorsque $N < N_c$, et la synchronisation lorsque $N > N_c$. De part la présence de la forme modale dans l'équation de Kuramoto, les piétons les plus éloignés du centre de la passerelle ont plus de difficultés pour se synchroniser. 166

B.1 Maillage. 182
B.2 zones "noire", "rouge" et "verte". 182
B.3 Exemples de distances géodésiques entre les points d'un lieu considéré et le(s) point(s) de sortie (point(s) bleu(s) foncé(s)) de ce lieu. Quand $D(x)$ augmente, la couleur tend vers le rouge ; a) une seule sortie, un obstacle (rectangle marron) ; b) quatre sorties, un obstacle (rectangle marron). 184

C.1 La fonction convexe f n'est pas dérivable au point A. Elle a des dérivées généralisées en ce point, qui sont les pentes des droites qui passent par A et sont sous la courbe représentant la fonction. Ces pentes sont les sous-gradients qui forment le sous-différentiel. 186

Liste des tableaux

1.1 Niveaux de services de Fruin [24]. 31
1.2 Fréquence de marche. 36
1.3 Les coefficients de Fourier pour la force verticale engendrée par la marche (DLFs). 43
1.4 Les coefficients de Fourier pour la force normale engendrée par la marche (DLFs). 44
1.5 Valeurs de A_j , B_j et $\left(\check{F}_{Nj}^2/\check{F}_N^2\right)$ d'après [25]. 45
1.6 Les coefficients de Fourier pour la force tangente engendrée par la marche (DLFs). 46

2.1 Analogies entre les problèmes de minimisation dans le cas de la plasticité, et lors de l'utilisation des approches $NSM1$ et $NSM2$. 76

6.1 Evacuation de salle - Paramètres utilisés dans les simulations d'évacuation de la salle carrée (* uniformément distribués dans l'intervalle donné) ; le temps de réponse est le temps nécessaire au piéton i pour commencer à évacuer la salle, après le déclenchement du mouvement d'évacuation. 141
6.2 Evacuation de salle - Débit moyen Q (piétons/min) de piétons traversant la porte 142
6.3 Evacuation d'une salle de classe - Paramètres utilisés dans les simulations (* uniformément distribués dans l'intervalle donné) ; le temps de réponse est le temps nécessaire à l'étudiant i pour commencer à évacuer après le déclenchement du mouvement d'évacuation. 142
6.4 Evacuation d'un cinéma - Paramètres utilisés dans les simulations (* uniformément distribués dans l'intervalle donné) ; le temps de réponse est le temps nécessaire à l'étudiant i pour commencer à évacuer après le déclenchement du mouvement d'évacuation. 145
6.5 Comparaison entre exercice réel et simulations numériques pour l'évacuation d'un cinéma. 145
6.6 Evacuation d'une école primaire - Paramètres utilisés dans les simulations (* uniformément distribués dans l'intervalle donné) ; le temps de réponse est le temps nécessaire au piéton i pour commencer à évacuer après le déclenchement du mouvement d'évacuation. 147
6.7 Evacuation d'une salle carrée avec ou sans obstacle - Paramètres utilisés dans les simulations (* uniformément distribués dans l'intervalle donné) ; le temps de réponse est le temps nécessaire au piéton i pour commencer à évacuer, après le déclenchement du mouvement d'évacuation. 150

6.8 Evacuation d'une salle carrée avec ou sans obstacle - Débit moyen Q (piétons/min) de piétons passant la porte en fonction de τ, p_1, p_2, forme (rectangulaire ou circulaire) et taille (L_o ou D_o) de l'obstacle. 151
6.9 Evacuation d'une salle ayant deux sorties proches - Paramètres utilisés dans les simulations (* uniformément distribués dans l'intervalle donné). 152
6.10 Modélisation des voyageurs durant l'échange quai/wagon de métro - Paramètres utilisés dans les simulations (* uniformément distribués dans l'intervalle donné) ; le temps de réponse est le temps nécessaire au piéton i pour commencer à évacuer, après le déclenchement du mouvement d'évacuation. . 153
6.11 Résultats des simulations d'échange quai/wagon sans et avec flèche. 154
6.12 Travée Nord du Millénium Bridge - Paramètres utilisés dans les simulations. 159
6.13 Travée Nord du Millénium Bridge - Cas 1 - Probabilité de synchronisation dans les cas piétons sur place et avançant, lorsque la fréquence moyenne de marche libre des piétons est égale à la fréquence modale du système piétons-passerelle. 161
6.14 Travée Nord du Millénium Bridge - Cas 1 - Comparaison entre les fréquences de synchronisation trouvées numériquement, dans les situations piétons sur place et avançant, et celles trouvées analytiquement. 162
6.15 Travée Nord du Millénium Bridge - Cas 1 - Comparaison entre les amplitudes des oscillations de la passerelle à l'état stationnaire trouvées numériquement, pour les cas piétons sur place et avançant, et celles trouvées analytiquement. 162
6.16 Travée Nord du Millénium Bridge - Cas 2 - Probabilité de synchronisation dans les cas piétons sur place et avançant, lorsque la marche est libre. 165
6.17 Travée Nord du Millénium Bridge - Cas 2 - Comparaison entre les fréquences de synchronisation trouvées numériquement, dans les situations piétons sur place et avançant, et celles trouvées analytiquement. 167
6.18 Travée Nord du Millénium Bridge - Accélération latérale maximale $A_{cc,max}$ calculée numériquement, pour les nombres de piétons N et N_{eq}. Les résultats sont des moyennes de 5 simulations. 168
6.19 Caractéristiques modales des trois passerelles [26]. 168
6.20 Caractéristiques de la marche des piétons [26] - (T1) = marche libre très lente ; (T2) = marche libre lente ; (T3) = marche lente rythmée. 169
6.21 Nombres critiques expérimentaux et analytiques [26]. 169

Introduction générale

Ces dernières années, des mouvements de panique ont provoqué de nombreux morts, écrasés dans des bousculades, lors d'évènements de masse toujours plus fréquents et importants. Deux exemples marquants de l'année 2010 sont le mouvement de panique en marge de la Love Parade de Duisbourg (Allemagne), ayant coûté la vie à 20 personnes et fait environ 340 blessés, et celui sur un pont de Phnom Penh (Cambodge) ayant fait au moins 375 morts et 755 blessées, le dernier jour de la fête de l'eau. Ces drames ont des causes variées, mais tous font naître chez les piétons un sentiment d'insécurité qui les amène à vouloir évacuer très rapidement les lieux.
Pour atténuer l'ampleur de telles catastrophes, des études du comportement des piétons en situation d'évacuation et des théories capables de prédire la dynamique des foules sont réalisées. La modélisation du mouvement de la foule, pour simuler des situations d'évacuation, devient en outil intéressant pour améliorer la qualité de service des bâtiments et lieux publics, et reste un sujet ouvert.

Un autre problème émergeant, en dynamique des ouvrages pour le génie civil, est la modélisation de l'interaction dynamique foule-structure. Les structures telles que les passerelles piétonnes, qui oscillent à cause du passage d'un groupe de personnes, ou les gradins des stades ou salles de concert, qui vibrent à cause du mouvement rythmé du public, sont particulièrement concernées. Pour montrer l'importance de la modélisation d'un tel phénomène, il suffit de rappeler que plusieurs passerelles, construites récemment selon des critères architecturaux d'élancement et de légèreté, telles que la passerelle du Millénium à Londres et la passerelle de Solferino à Paris, se sont montrées sensibles à l'excitation induite par le passage de piétons. Plusieurs campagnes de mesures expérimentales ont permis une meilleure compréhension de ce phénomène : la foule se déplaçant sur une passerelle lui impose une excitation latérale qui a une fréquence proche de 1Hz. Lorsqu'un mode latéral de vibration du pont, souvent le premier, a une fréquence proche de cette valeur, un phénomène de résonance est activé, entraînant l'augmentation de l'amplitude des oscillations de la passerelle. Si le nombre de piétons est faible, l'amplitude des oscillations reste faible et les piétons continuent à marcher comme ils le feraient sur un sol rigide. Par contre, si ce nombre dépasse un certain nombre critique, l'amplitude des oscillations devient suffisamment grande pour que les piétons soient incités à changer leur manière de marcher afin de conserver leur équilibre, notamment leur fréquence de marche, jusqu'au moment où une synchronisation en fréquence entre piétons et structure s'initie. La densité de la foule est un autre facteur influençant le comportement du piéton. En effet, pour une foule de faible densité, chaque individu peut marcher librement comme s'il était seul. Au contraire, si la densité de la foule est élevée, chaque piéton a une marche contrainte par son entourage, l'obligeant à marcher au même rythme que les autres. Cette synchronisation piéton-piéton existe aussi sur sol rigide. Actuellement, très peu d'études prennent en compte ces deux types de synchronisation simultanément.

L'objectif de cette thèse est de proposer un modèle 2D discret de mouvement de foule capable, d'une part de gérer les interactions piéton-piéton et piéton-obstacle pour simuler des situations d'évacuation d'urgence, et d'autre part de gérer les interactions piéton-structure dans le cas des passerelles piétonnes pour prédire la dynamique de la structure. Trois étapes fondamentales seront développées :

- la gestion des contacts locaux piéton-piéton et piéton-obstacle sur sol rigide
- la mise en place d'une stratégie de déplacement et d'une allure souhaitée pour chaque piéton
- la gestion de l'intéraction piétons-passerelle

Le rapport de cette thèse est divisé en six chapitres.

Le premier chapitre est consacré à l'étude bibliographique. Nous avons regroupé les informations les plus importantes concernant la marche d'un piéton, son comportement, la modélisation du piéton et de la force qu'il exerce sur le sol, la modélisation de la foule, le phénomène de synchronisation et la perception des vibrations par les humains.

Dans le second chapitre, nous avons étudié la manière d'introduire dans le modèle les contacts locaux piéton-piéton et piéton-obstacle sur sol rigide. Nous avons choisi de gérer les contacts entre piétons similairement à ceux entre particules dans les milieux granulaires. Les étapes de gestion du mouvement des particules et de détection du contact sont présentées dans un cas général. En ce qui concerne le traitement du contact entre particules, 3 approches sont étudiées puis comparées : deux approches déjà adaptées aux mouvements de foule, et une troisième que nous avons choisie et qui nous semble la plus intéressante à utiliser pour traiter les collisions entre piétons. Les aspects numériques sont présentés.

Dans le troisième chapitre, nous affectons un comportement à chaque piéton dans le but d'obtenir notre modèle de foule. Ce comportement peut être décrit selon plusieurs niveaux de complexité afin de rendre le mouvement des piétons le plus réaliste possible. Le premier niveau nécessaire permet de donner une stratégie de déplacement et une allure spécifique à chaque piéton. Les autres niveaux de complexité permettent de décrire des comportements plus élaborés tels que l'évitement entre piétons ou le déplacement en sous-groupe.

Le modèle 2D discret d'interaction foule-passerelle est présenté dans le cas des oscillations latérales ou verticales d'une passerelle dans le quatrième chapitre. Pour prendre en compte le mouvement oscillatoire d'un individu pendant la marche, une force sinusoïdale représentant l'action du piéton sur le sol est utilisée. Cette force permet de définir l'accélération des oscillations de chaque piéton autour de sa trajectoire. La synchronisation de la fréquence de marche de chaque piéton avec la fréquence d'oscillation latérale du système "foule-passerelle" est réalisée grâce à l'utilisation d'une équation différentielle de type Kuramoto qui permet de gérer la phase de la force de marche de chaque piéton.

Dans le cinquième chapitre, un calcul analytique du nombre critique est proposé dans des cas particuliers, à partir des équations du modèle discret d'interaction foule-passerelle. Les expressions de l'amplitude post-critique du déplacement latéral de la passerelle ainsi que la fréquence de synchronisation sont aussi déterminées.

Dans le dernier chapitre de cette thèse, nous présentons plusieurs simulations numériques permettant de valider le modèle de foule et le modèle d'interaction foule-passerelle.

Enfin nous terminons ce rapport par des conclusions illustrant le travail réalisé et par des perspectives qui ouvrent sur le travail de recherche futur.

Chapitre 1

Etude bibliographique

Ce chapitre a pour objectif de présenter une étude bibliographique sur les problèmes suivants :

- ⋆ *Les caractéristiques du comportement des piétons*
- ⋆ *Les phénomènes d'auto-organisation observés dans le trafic piétonnier*
- ⋆ *Les modèles de mouvement de foule existants*
- ⋆ *Les caractéristiques de la marche des piétons*
- ⋆ *La modélisation du piéton et de la force qu'il exerce sur le sol*
- ⋆ *Le phénomène de synchronisation*
- ⋆ *La perception des vibrations par les humains*

PLAN DU CHAPITRE 1

1.1 Introduction 25
1.2 La foule 25
1.2.1 Observations de la foule 26
1.2.2 État de l'art des modèles de mouvement de foule 29
1.3 Le piéton 35
1.3.1 Résultats expérimentaux des études réalisées sur la marche 35
1.3.2 Modélisation du piéton 40
1.4 La synchronisation 46
1.4.1 L'oscillateur auto-entretenu et ses propriétés 46
1.4.2 Définition de la synchronisation 50
1.4.3 Synchronisation d'un oscillateur auto-entretenu par une force extérieure 53
1.5 La perception des vibrations par les humains 54
1.6 Synthèse du chapitre 55

1.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons une étude bibliographique sur les problèmes et notions qui seront abordés dans cette thèse. La première partie concerne la foule. Les différentes observations faites sur la foule ainsi que les modèles de mouvements de foule existants sont présentés. Les problèmes de gestion du contact entre piétons et de gestion du comportements des piétons seront détaillés dans leurs chapitres respectifs.
Dans la seconde partie nous nous intéressons à l'interaction foule-passerelle. Le modèle de structure classiquement utilisé dans le cas des passerelles étant un modèle de poutre d'Euler Bernoulli, nous avons choisi de ne pas le présenter dans cette étude bibliographique. Par contre, nous considérons les études réalisées sur la modélisation du piéton et la force qu'il exerce sur le sol rigide en marchant.
Dans la troisième partie, nous définissons la notion de synchronisation. Ce phénomène particulier peut apparaître lorsque des piétons traversent une passerelle. Nous voulons que notre modèle discret puisse simuler ce phénomène.
Enfin, dans la dernière partie, nous introduisons la notion de perception des vibrations car un piéton qui ressent des vibrations de la structure peut modifier son mouvement.

1.2 La foule

Par définition, une foule est une multitude de personnes regroupées dans un même lieu. Face à la complexité du comportement de l'homme, de nombreux modèles de simulations ont été proposés ces dernières années afin de reproduire un comportement ou une situation précise. Les premières études menées pour décrire le comportement des piétons durant la marche étaient des observations des piétons afin de recueillir des informations qualitatives (e.g. la détermination des préférences des piétons) et quantitatives (e.g. la vitesse de marche des piétons) sur la foule. Ces observations ont permis de lister certaines caractéristiques dans le comportement des piétons et de visualiser des phénomènes d'auto-organisation de la foule. Elles ont inspiré par la suite les chercheurs qui ont proposé des modèles de foule afin de les simuler efficacement. Les premiers modèles caractérisant le comportement des piétons ont été des modèles statistiques [24, 27]. Ils ont permis de définir les valeurs de densités et de débits observables, et ainsi de trouver les vitesses moyennes de déplacement des piétons. Les premiers modèles informatiques simulant les mouvements de foule sont les modèles de simulation macroscopique [24, 27–33]. Les comportements simulés restent simples car les piétons sont représentés dans leur ensemble. Pour prendre en compte des comportements de piétons plus complexes, les modèles de mouvement de foule microscopiques

ont été développés [6, 7, 10, 34, 35]. Chaque piéton a son propre comportement, prend ses propres décisions et réagit individuellement aux modifications de son environnement.

Cette section est formée de deux parties. La première partie 1.2.1 présente les observations faites sur la foule. Elles ont permis de lister les différents comportements des piétons dans des situations définies, et de noter les phénomènes d'auto-organisation de la foule, qui se mettent en place dans certaines situations précises. Dans la deuxième 1.2.2, les différentes catégories de modèles de mouvement de foule existants seront présentées.

1.2.1 Observations de la foule

Une liste des différentes observations faites sur la foule est donnée. Ces observations ont été utilisées par la suite pour proposer un modèle de mouvement de foule.

Comportement des piétons

Les caractéristiques du comportement des piétons, données dans de nombreux documents [4, 36, 37], sont :

- D'après [38], la vitesse moyenne des piétons en régime libre suit une loi gaussienne de moyenne 1.34 $m.s^{-1}$ et d'écart type 0.26 $m.s^{-1}$. Ces paramètres ont été recalculés à partir de données provenant de plusieur pays sur des observations faites dans un couloir non encombré [39].

- D'après [40], un piéton se déplace à une allure souhaitée qui dépend de ses caractéristiques personnelles (son âge, son genre, sa taille, son état de santé, etc.), des caractéristiques de son voyage (sa destination finale, sa familiarité avec le chemin utilisé, la longueur du chemin, la prise en compte ou non de bagages, etc.), des propriétés de l'infrastructure traversée (son type, son état, son attractivité, sa capacité à servir d'abri, etc.), et finalement les caractéristiques de l'environnement (conditions climatiques, etc.).

- les piétons sont adeptes du principe du moindre effort : ils n'aiment pas faire des détours ou se déplacer en sens inverse de la majorité des gens, même s'ils doivent aller dans une direction surpeuplée.

- en fonction de ses motivations, le piéton choisira de se déplacer selon le chemin le plus court, le plus rapide, ou le moins contraignant.

- les piétons changent de direction le moins possible : ils préfèrent marcher sur une route droite plutôt que sinueuse.

- chaque piéton préfère se déplacer avec sa propre allure souhaitée, celle où il est le plus à l'aise et donc dépense le moins d'énergie.

- les piétons aiment s'approprier un territoire : ils gardent une certaine distance entre eux et entre eux et les obstacles. Cette distance minimale dépend entre autres de la densité de la foule et de chaque individu.

- pour avancer plus vite parmi une foule, un piéton peut se faufiler entre les autres piétons en pivotant son corps pour passer dans des espaces peu larges [41].

- les piétons ne se déplacent pas tel un fluide continu, mais en petits groupes espacés. La majorité des personnes constituant une foule sont des groupes (e.g. amis ou famille) composés de deux à quatre membres [42] marchant comme "un seul homme".

- un groupe séparé pour une certaine raison cherche à se reformer.

- un groupe organisé hiérarchiquement (e.g. une famille) a un comportement différent d'un groupe n'ayant pas de hiérarchie (e.g. un groupe d'amis).

- en cas d'embouteillage, les individus suivent la personne devant eux et créent une sorte de flux.

- dans le cas d'une foule voulant sortir d'une pièce en urgence, les interactions entre individus eux-mêmes et entre individus et obstacles peuvent créer de grandes pressions, ce qui a pour conséquence de blesser des individus ou encore détruire des obstacles (comme des barrières ou des grillages).

- en situation de panique, un individu devient nerveux, ce qui induit un manque de lucidité et un comportement autiste. Ce type de comportement est visible généralement dans des lieux clos (e.g. un avion).

- en situation d'urgence, un individu se déplace considérablement plus vite que la normale.

- en situation d'urgence, les individus tendent à développer un phénomène de mimétisme : ils agissent de la même façon que leurs voisins.

Phénomènes d'auto-organisation observés

De nombreux travaux présentent les phénomènes d'auto-organisation observés dans le trafic piétonnier. Quelques uns de ces phénomènes sont retrouvés par certains modèles de foule. Ces phénomènes d'auto-organisation sont :

- L'effet "Faster is slower" : quand la voie se rétrécit et qu'il y a un phénomène d'entonnoir, les individus sont plus nerveux et veulent avancer plus vite. Ils "poussent" les autres individus et donc le mouvement devient moins fluide, la foule est plus dense et le temps nécessaire à la traversée de l'entonnoir augmente.

- l'embouteillage : quand une foule très dense essaie de se déplacer.

- le blocage et le phénomène d'arche (Figure 1.1) : quand une foule dense veut traverser un espace étroit tel qu'une porte, un blocage s'installe et une arche se forme autour de l'espace peu large.

- la formation de ligne (Figure 1.2) : quand une foule se déplace dans deux directions

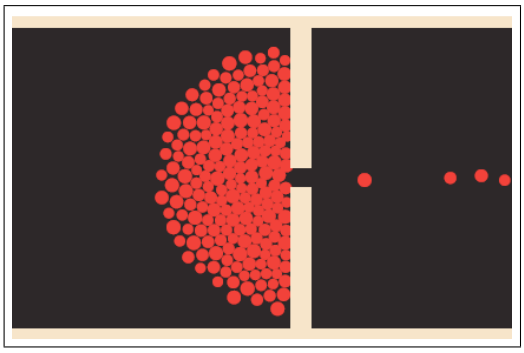


FIGURE 1.1 – Phénomène d'arche d'après [2].

opposées, il se crée naturellement des lignes de piétons qui se suivent, ce qui permet de réduire les collisions entre piétons et d'augmenter leur vitesse de déplacement.

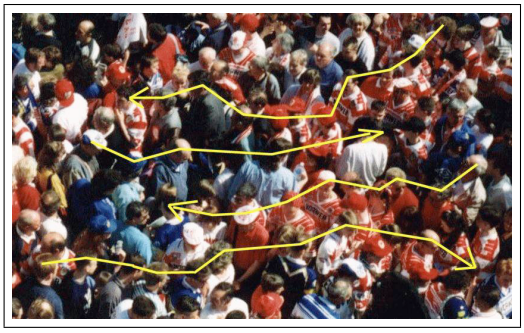


FIGURE 1.2 – Formation de ligne à contre courant d'après [3].

– le phénomène d'oscillation (Figure 1.3) : lorsqu'une porte est traversée par deux foules se déplaçant en sens contraire, les piétons composants chaque foule la traversent en alternance et un phénomène d'oscillation se crée.

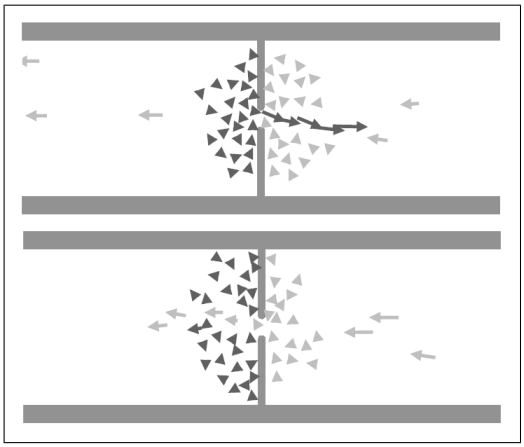


FIGURE 1.3 – Phénomène d'oscillation d'après [4].

– le "corner hugging"(Figure 1.4) : lorsque des piétons tourne dans un angle, ils ralentissent et la densité de piéton augmente près de l'angle.



FIGURE 1.4 – Corner hugging d'après [3].

– le comportement de compétition : lorsque des piétons sont en compétition pour évacuer un espace donné, l'évacuation est inefficace ou les comportements des individus sont inadaptés.

– la file (Figure 1.5) : lors d'une évacuation, les piétons se mettent en file indienne.

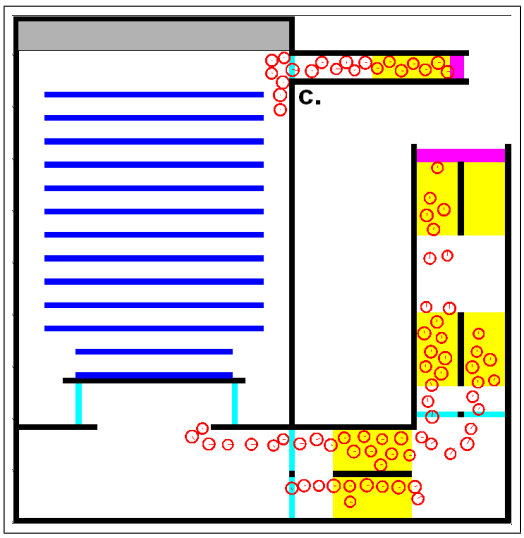


FIGURE 1.5 – Formation de file indienne lors de l'évacuation d'après [5].

– pendant une évacuation, les piétons ont tendance à aller vers la sortie qu'ils ont l'habitude d'utiliser.

1.2.2 État de l'art des modèles de mouvement de foule

Les modèles de mouvement de foule ont été développés idéalement pour reproduire tous les comportements des piétons ainsi que les phénomènes de foule observés. Évidemment, la complexité des comportements et phénomènes observés font que chaque modèle cible une ou des applications spécifiques. Les divers comportements peuvent être classés en trois catégories [39] : (i) le niveau stratégique qui regroupe les décisions que prend l'individu sur l'organisation générale de ses activités, comme le fait d'aller acheter un billet de train puis

d'aller acheter un journal [43] ; (ii) le niveau tactique qui relève de l'intégration de la topologie des lieux et de la planification de route pour réaliser chacune des tâches [39, 44] ; (iii) et enfin le niveau opérationnel qui relève du déplacement à court terme du piéton et de ses interactions avec les individus qu'il croise sur son chemin [7, 10, 23]. La modélisation de l'intégralité de ces comportements nécessite la mise en place d'une formalisation très lourde, intégrant un grand nombre de processus cognitifs comme la perception, le contrôle moteur, les motivations du piéton, sa mémoire, ses capacités de raisonnement, etc. Ce type de modélisation trouve son intérêt dans certains domaines de recherche comme l'intelligence artificielle, la psychologie expérimentale ou les neurosciences cognitives, dont les finalités sont différentes de notre problématique de travail. Nous nous intéresserons aux comportements des piétons qui relèvent du niveau opérationnel, comme l'évitement ou la bousculade. Parmi les modèles qui se focalisent sur ce niveau opérationnel, les différentes approches existantes peuvent être classées selon différents critères (Figure 1.6) : le mode de représentation de la foule, la représentation de l'espace de déplacement des piétons, la représentation du piéton, la représentation du contact, la représentation du mouvement des piétons, le phénomène de foule ciblé à analyser, le type de foule, etc. Nous avons choisi de classer et présenter

mode of representation of the crowd	macroscopic	(Henderson, 1971; Bodgi *et al.*, 2007)
	microscopic	(Reynolds, 1987; Helbing *et al.*, 1995) (Blue *et al.*, 2000; Hoogendoorn *et al.*, 2001) (Teknomo, 2006; Paris *et al.*, 2007; Venel, 2008) (Pécol *et al.*, 2010)
representation of the area of displacement	continuous space	(Reynolds, 1987; Helbing *et al.*, 1995) (Hoogendoorn *et al.*, 2001; Teknomo, 2006) (Paris *et al.*, 2007; Venel, 2008; Pécol *et al.*, 2010)
	discretized space	(Blue *et al.*, 2000)
representation of the contact	by using regularizing laws	(Helbing *et al.*, 1995; Hoogendoorn *et al.*, 2001) (Teknomo, 2006)
	by solving a local non linear problem	(Venel, 2008; Pécol *et al.*, 2010)
representation of the pedestrians' movement	rules	(Reynolds, 1987; Blue *et al.*, 2000) (Venel, 2008)
	data	(Paris *et al.*, 2007; Paris, 2007)
	forces	(Helbing *et al.*, 1995; Hoogendoorn *et al.*, 2001) (Teknomo, 2006; Pécol *et al.*, 2010)
target phenomena to be analyzed	counterflow lines	(Helbing *et al.*, 1995; Hoogendoorn *et al.*, 2001) (Teknomo, 2006; Paris *et al.*, 2007) (Venel, 2008; Pécol *et al.*, 2010)
	evacuation	(Helbing *et al.*, 1995; Hoogendoorn *et al.*, 2001) (Venel, 2008; Pécol *et al.*, 2010)
type of crowd walking	normal walking velocity	(Helbing *et al.*, 1995; Hoogendoorn *et al.*, 2001) (Teknomo, 2006; Paris *et al.*, 2007) (Paris, 2007; Pécol *et al.*, 2010)
	emergency walking	(Helbing *et al.*, 1995; Hoogendoorn *et al.*, 2001) (Venel, 2008)

FIGURE 1.6 – Critères pour la classification des modèles de mouvement de foule [5].

les modèles de niveau opérationnel selon le mode de représentation de la foule. Nous dénombrons deux grandes catégories : les modèles dits "macroscopiques" et les modèles dits "microscopiques".

Les modèles dits macroscopiques

Dans les modèles macroscopiques, les piétons ont un comportement collectif, la foule est considérée dans son ensemble. On peut les classer en deux sous-catégories : les modèles de régression et les modèles de dynamique des fluides ou gaz.

Modèles de régression : Dans les modèles de régression, le mouvement global des piétons est établi à partir de relations statistiques entre les variables de flot et dépend de l'infrastructure étudiée et des circonstances spécifiques au mouvement [24,27]. Pour bien comprendre le fonctionnement de ce type de modèles, nous présentons l'approche historique des niveaux de service introduite par Fruin [24]. Les différents modèles de régression sont expliqués dans [37]. Pour caractériser chaque lieu d'échange, Fruin met au point une graduation en niveaux de services. Chaque niveau correspond à un intervalle de densités de personnes, et à un débit moyen observé, allant de A pour le meilleur à F pour le moins bon (Tableau 1.1).

Niveau de service	Densités		Débit
	personnes/m^2	m^2/personnes	pers./min/m
A	$<$ 0.3	$>$ 3.2	$<$ 23
B	0.3 à 0.4	2.3 à 3.2	23 à 33
C	0.4 à 0.7	1.4 à 2.3	33 à 49
D	0.7 à 1.1	0.9 à 1.4	49 à 66
E	1.1 à 2	0.5 à 0.9	66 à 82
F	$>$ 2	$<$ 0.5	variable

TABLE 1.1 – Niveaux de services de Fruin [24].

La caractérisation de chaque niveau de service, du point de vue du comportement des piétons, est la suivante :

A Jusqu'à cette densité, chaque voyageur peut se déplacer à la vitesse qu'il désire, les collisions restant improbables.

B-C Les voyageurs peuvent encore se mouvoir avec une relative facilité, éviter les conflits et choisir leur vitesse.

C-D Les dépassements deviennent plus difficiles, la faible distance séparant chaque personne incite les piétons à réduire leur vitesse.

D-E Cette zone critique impose une vitesse générale faible, le déplacement des voyageurs devient irrégulier, les déplacements et autres changements de direction sont quasiment impossibles.

E-F Les contacts entre piétons sont inévitables, interdisant tout dépassement.

Modèles de dynamique des fluides ou gaz : Pour illustrer les modèles de dynamique des fluides ou gaz [28–33,45], on prend l'exemple du modèle de foule de Bodgi [31] dans lequel les piétons sont représentés dans leur ensemble par un fluide compressible. Cette approche est connue dans la modélisation du trafic de véhicules. On regarde le comportement de la foule en un point donné, les variables utilisées sont des variables locales qui dépendent du temps t et de l'espace x ($x \in [0; L]$ si l'on considère la position longitudinale des piétons sur

une passerelle de longueur L). Ainsi le comportement de la foule est assimilé à celui d'un liquide compressible gouverné par l'équation de conservation de la masse, où η représente la densité locale des piétons et v leur vitesse locale :

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\eta.v) = 0 \tag{1.1}$$

Ayant deux variables, une deuxième équation sera nécessaire pour compléter le système. Elle est généralement connue sous le nom d'équation de fermeture, et met en relation les variables η et v.
D'autres modèles de dynamique des fluides ou gaz sont présentés dans [37].

Synthèse : Si on se base sur les observations de la foule qui stipulent que les personnes se déplacent majoritairement en petites unités, ce type de modèles n'est plus adapté à la foule. Par contre, ils peuvent être utiles lorsque les foules sont denses et que l'on s'intéresse aux mouvements d'ensemble de la foule. Les autres inconvénients des modèles macroscopiques sont que les caractéristiques de chaque piéton ne peuvent pas être prises en compte, comme la position du piéton, la direction de son mouvement et ses caractéristiques physiques.

Les modèles dits microscopiques

Dans les modèles microscopiques, le mouvement de chaque individu est représenté dans le temps et l'espace. Chaque individu a son propre comportement, ses propres décisions et interagit avec les autres. On peut classer ces modèles en 5 sous-catégories : les modèles à base de règles, les modèles de forces sociales, les modèles d'automates cellulaires, les modèles de choix discret et les modèles mathématiques.

Modèle à base de règles : Le modèle "rule-based" introduit par Reynolds [6,46] s'inspire du vol en groupe des oiseaux pour modéliser la foule. En l'occurrence, trois règles décrivent le comportement des oiseaux qui restent à une certaine distance les uns des autres (Figure 1.18) : (i) la séparation : les oiseaux ne collisionnent pas ; (ii) l'alignement : ils essayent de garder une direction et une vitesse de mouvement commune ; et (iii) la cohésion : ils essayent de rester unis. La première règle consistant à ne pas faire collisionner les oiseaux ou futurs piétons a pour conséquence que la forme des individus n'est pas importante.

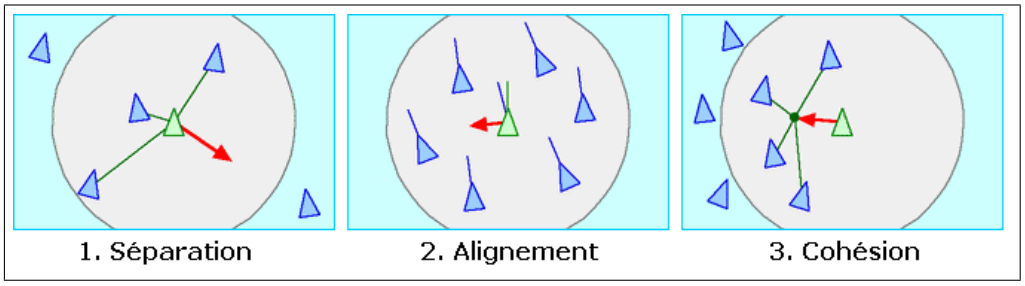


FIGURE 1.7 – Les trois règles caractérisant le comportement des oiseaux [6].

Le principal avantage de ce modèle est sa faible complexité, et son inconvénient majeur est qu'il n'est pas adapté aux foules trop denses car les collisions entre piétons sont évitées.

Modèles de forces sociales : Le modèle de forces sociales [2, 4, 7, 23, 47–53] développé principalement par Helbing est un modèle qui permet de gérer le mouvement de chaque piéton, représenté par un disque, par l'utilisation de 3 forces : une d'accélération, une de répulsion et une d'attraction (facultative) (Figure 1.8). La force motrice d'accélération permet

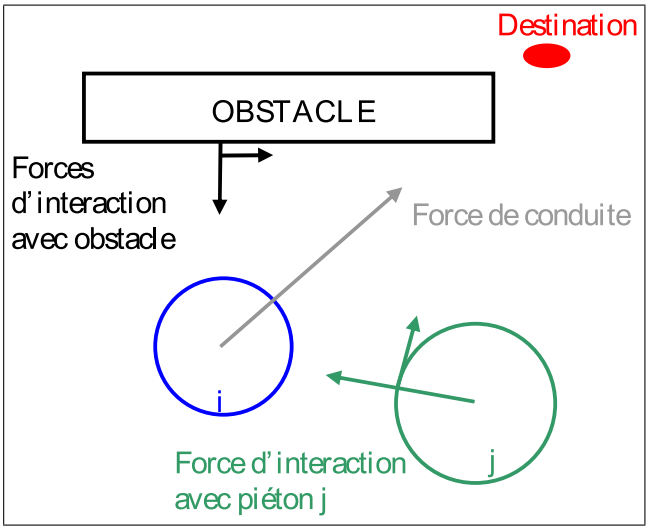


FIGURE 1.8 – Les forces agissant sur le piéton i - les forces représentées : une force motrice d'accélération pour qu'il se déplace vers une destination souhaitée ; une force d'interaction à distance à cause du piéton j, et une autre à cause de l'obstacle ; et les forces non représentées : les forces de répulsion permettant de gérer les contacts piéton-piéton et piéton-obstacle et les forces attractives permettant d'introduire d'autres comportements [7].

au piéton de se déplacer vers sa destination souhaitée. Elle est dirigée à chaque instant vers cette destination. La force de répulsion est inspirée d'une approche granulaire [54]. Chaque piéton a sa propre masse et a une certaine direction et allure qu'il adapte en fonction de l'environnement qui l'entoure (piétons et obstacles). Il peut se déplacer continûment dans un environnement 2D car il n'y a pas de discrétisation spatiale de la zone de déplacement. Ce modèle est principalement utilisé pour simuler des situations d'évacuation.

Le principal avantage de ce modèle est sa faible complexité, et son inconvénient majeur est qu'il n'est pas adapté aux foules trop denses car les piétons oscillent sur place de part l'utilisation de la force de répulsion à distance [53].

Modèles d'automates cellulaires : Les modèles d'automates cellulaires sont des modèles où la zone de déplacement 2D des piétons est discrétisée [8, 34, 55–59]. Une grille uniforme de cellules comporte des cellules inaccessibles pour représenter les obstacles, des cellules occupées par les piétons et des cellules vides (Figure 1.9). A chaque pas de temps, les piétons se déplacent de cellule en cellule voisine selon certaines règles. Il y a deux façons de déplacer les piétons à chaque pas de temps. Soit les piétons se déplacent chacun à leur tour (individu par individu) de manière aléatoire. La gestion du contact se fait alors de manière intrinsèque, le piéton ne peut pas se déplacer dans une cellule occupée. Soit la mise à jour de la position des piétons est globale (en même temps) et le hasard est utilisé si deux piétons veulent se déplacer dans la même cellule.

Le principal avantage de ce type de modèles est la réalisation de simulations dans des espaces vastes avec beaucoup de piétons car les temps de calcul des simulations sont inté-

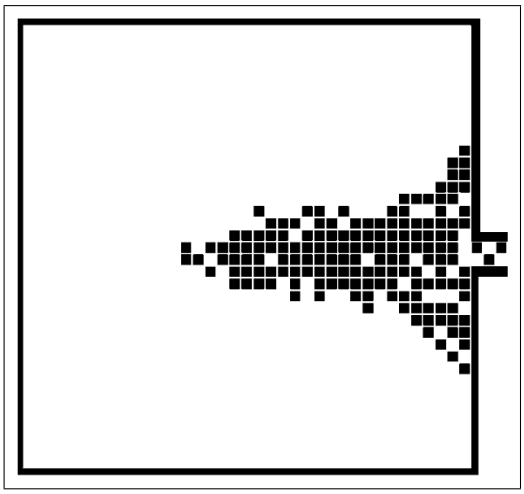


FIGURE 1.9 – Exemple d'une simulation d'évacuation de salle réalisée avec un modèle d'automate cellulaire [8].

ressants. L'inconvénient majeur est le manque de réalisme car le mouvement des piétons est restreint par la grille et les contacts ne sont pas gérés directement.

Modèles de choix discrets : Le modèle de choix discrets [9, 35, 60–62], qui est un mélange des modèles de forces sociales et d'automates cellulaires, repose sur l'identification de deux types de comportement : contraint et non contraint (Figure 1.10.a). Un comportement

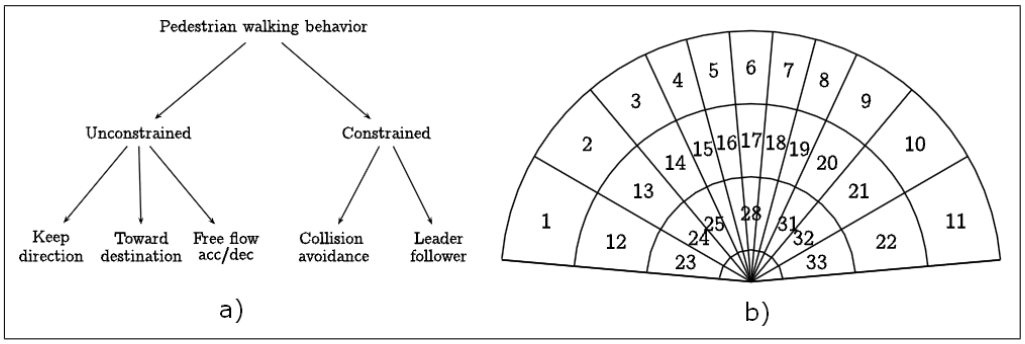


FIGURE 1.10 – Modèle de choix discret [9] - a) Concept du comportement de marche des piétons ; b) Représentation de l'ensemble des choix de mouvement du piéton, avec numérotation des alternatives.

non contraint est un comportement qui est indépendant des autres piétons. Le contraint prend en considération le phénomène de collision et le phénomène "d'entraînement". Ce modèle fait intervenir des forces qui dépendent de nombreux paramètres déduits de données expérimentales.

L'avantage du modèle est qu'il peut simuler beaucoup de situations différentes. Ces inconvénients sont le trop grand nombre de paramètres identifiés et le fait que le déplacement du piéton se réalise à l'aide d'un champ de vision discrétisé qui restreint son mouvement (Figure 1.10.b).

Modèle mathématique : Dans le modèle mathématique de mouvements de foule de Venel [10], les piétons sont représentés par des disques, ils avancent avec leur propre direction et allure, ils peuvent se contourner et le contact entre individus est géré par une contrainte géométrique qui empêche l'interpénétration. Une vitesse souhaitée actualisée à chaque instant permet aux piétons de se déplacer selon le chemin le plus court pour atteindre leur destination. Ce modèle est inspiré d'un modèle d'interactions granulaires [63] dans lequel les contacts entre grains sont des collisions inélastiques. Il est adapté aux foules denses dans les situations d'évacuation (Figure 1.11).

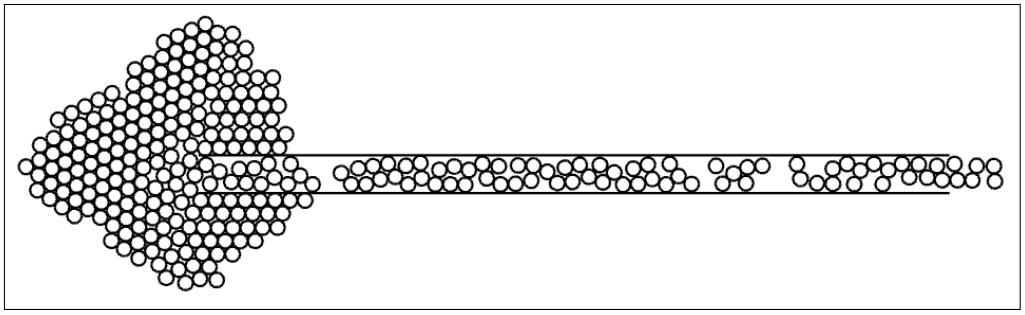


FIGURE 1.11 – Exemple d'une simulation d'évacuation d'un métro par un escalator réalisée avec le modèle mathématique de Venel [10].

L'avantage du modèle est que la condition de non-interpénétration entre les piétons est toujours respectée. Ses inconvénients sont qu'il ne prend pas en compte la masse des piétons, et que le contact piéton-piéton ou piéton-obstacle est uniquement parfaitement inélastique.

Synthèse : Les modèles microscopiques sont très intéressants pour représenter des scénarios très différents et variés : des piétons marchant dans plusieurs directions, des densités variables de piétons composant la foule, des évacuations d'urgence avec plusieurs sorties dont l'une est beaucoup plus empruntée que les autres, etc. Ces modèles sont en général moins adaptés aux foules très denses contenant beaucoup de piétons car la détection et le traitement des interactions piéton-piéton et piéton-obstacle peuvent être très lourds en temps de calcul.

1.3 Le piéton

Dans cette section, nous présentons tout d'abord les différents résultats expérimentaux des études réalisées sur la marche. Les caractéristiques de la marche des piétons ainsi que des forces engendrées par les piétons en marchant sur un sol rigid sont données [31]. Ensuite, nous exposons quelques uns des modèles de piéton existant.

1.3.1 Résultats expérimentaux des études réalisées sur la marche

Observations sur la marche

Marcher est l'action qui consiste à se déplacer en mettant un pied devant l'autre, et en gardant au moins un des deux pieds en contact avec le plancher sur lequel on bouge. Lorsqu'on marche, deux phases se succèdent : les deux pieds sont en contact avec le plancher

puis un seul. Le fait d'avoir les deux pieds en contact avec le sol permet de changer de jambe d'appui et de donner à la deuxième jambe l'impulsion nécessaire pour se lancer en avant. La durée d'un pas est définie comme la période de temps qui sépare le début de deux phases successives où les deux pieds sont simultanément en contact avec le sol. La longueur d'un pas est la distance qui sépare les deux pieds durant la phase de contact simultanée. Lorsque le piéton marche librement, i.e. lorsqu'il n'est influencé ni par son environnement proche ni par le plancher, la longueur moyenne d'un pas suit une loi normale de moyenne $L_0 = 0.71\ m$ et d'écart-type $0.071\ m$ [64]. La vitesse de marche est définie comme le rapport entre la longueur d'un pas et sa durée. La valeur moyenne de la vitesse de marche dans des conditions de marche libre suit un loi normale de moyenne $1.34\ m.s^{-1}$ et d'écart-type $0.26\ m.s^{-1}$ [38].

Périodicité et fréquences

La marche d'un piéton dans des conditions de marche libre est habituellement supposée périodique [65], i.e. la longueur d'un pas et sa durée sont sensiblement identiques d'un pas à l'autre pour un même piéton. La période de la marche est définie comme étant la durée moyenne d'un pas pour un piéton donné. La fréquence a été évaluée expérimentalement par plusieurs auteurs et a une valeur voisine de $2\ Hz$ (Tableau 1.2). La figure 1.12 montre la courbe de la distribution normale des fréquences selon Matsumoto et al. [11] d'après des expériences réalisées sur 505 personnes.

Auteurs	Fréquences
Matsumoto et al. [11] (505 personnes)	la fréquence suit une loi de distribution normale de moyenne $2\ Hz$ et d'écart-type $0.173\ Hz$
Kerr et Bishop [66] (40 personnes)	fréquence moyenne de $1.9\ Hz$
Leonard [67]	fréquence de la marche normale $1.7 - 2.3\ Hz$
Bachmann et al [68]	$1.6 - 2.4\ Hz$
Zivanovic et al. [64] (939 personnes)	loi normale de moyenne $1.87\ Hz$ et d'écart-type $0.186\ Hz$

TABLE 1.2 – Fréquence de marche.

Cependant, cette périodicité est contestée dans les travaux de Sahnaci et Kasperi [69] qui affirment que la durée d'un pas diffère selon la jambe d'appui. Ainsi, on aurait deux fréquences et donc deux périodes différentes.

Forces engendrées par la marche d'un piéton

Durant la marche, chaque pied, lors de son contact avec le plancher, engendre une force à trois composantes. Dans ce qui suit, les indices V, N et T indiquent respectivement les directions verticale, normale et tangente au mouvement du piéton, les indices d et g indiquent respectivement les jambes droites et gauches :

$$\underline{F}_{pd} = \begin{bmatrix} F_{Td}(t) \\ F_{Nd}(t) \\ F_{Vd}(t) \end{bmatrix} \qquad \underline{F}_{pg} = \begin{bmatrix} F_{Tg}(t) \\ F_{Ng}(t) \\ F_{Vg}(t) \end{bmatrix} \tag{1.2}$$

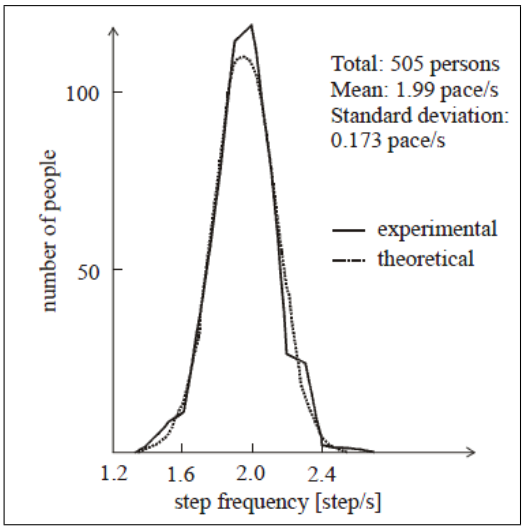


FIGURE 1.12 – Distribution normale de la fréquence d'après Matsumoto et al. [11].

La force $\underline{F}_p$ engendrée par un piéton n'est autre que la somme des forces engendrées par chacune des jambes :

$$\underline{F}_p = \underline{F}_{pd} + \underline{F}_{pg} = \begin{bmatrix} F_{Td}(t) + F_{Tg}(t) \\ F_{Nd}(t) + F_{Ng}(t) \\ F_{Vd}(t) + F_{Vg}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_T(t) \\ F_N(t) \\ F_V(t) \end{bmatrix} \tag{1.3}$$

La force verticale : La force verticale est toujours dirigée vers le plancher, elle a donc un signe constant, que ce soit pour la jambe droite (F_{Vd}) ou la jambe gauche (F_{Vg}), qui est le même pour les deux jambes. La force verticale totale F_V a donc elle aussi le même signe, et elle a pour amplitude moyenne le poids du piéton (750 N à 800 N en moyenne) et varie de ± 250 N [70]. Durant un pas, la jambe qui est en contact avec le plancher engendre une force verticale dont le graphe est en "selle de cheval" et présente deux extrema [12,65,71–76], (Figure 1.13.a). La première partie de ce graphe s'apparente à un quart de sinus qui est dû au choc du talon sur le plancher et la dernière partie à un quart de sinus dû à la force provoquée par la pointe pour pouvoir lancer la jambe en avant. La force verticale totale $F_V(t)$ est représentée dans la Figure 1.14.a. Comme on peut le voir, si on suppose que les forces verticales engendrées par les deux jambes sont égales (même direction, même sens et même amplitude), la force verticale totale $F_V(t)$ peut être considérée comme périodique, de période égale à la durée d'un pas donc à la période de la marche.

La force normale au mouvement du piéton : La force normale a des sens opposés pour chacune des jambes : durant un pas où la jambe gauche est en contact avec le plancher, elle est dans un premier temps dirigée vers la droite puis vers la gauche ; c'est l'inverse dans le cas de la jambe droite. L'amplitude de cette force varie entre -35 N et $+35$ N d'après [77], et de -25 N à $+25$ N d'après [70,78] (Figure 1.13.b). Les variations de la force normale totale $F_N(t)$ (Figure 1.14.b) permettent d'identifier les phases de contact simultané et les phases de contact d'une seule jambe. Cette identification est basée sur les maxima et minima de la force ; i.e. le passage de l'accélération à la décélération, puis le retour à l'accélération, détermine le début et la fin de la phase de contact des deux jambes. Comme la force engendrée par une jambe est dans le sens contraire à celle engendrée par l'autre, la

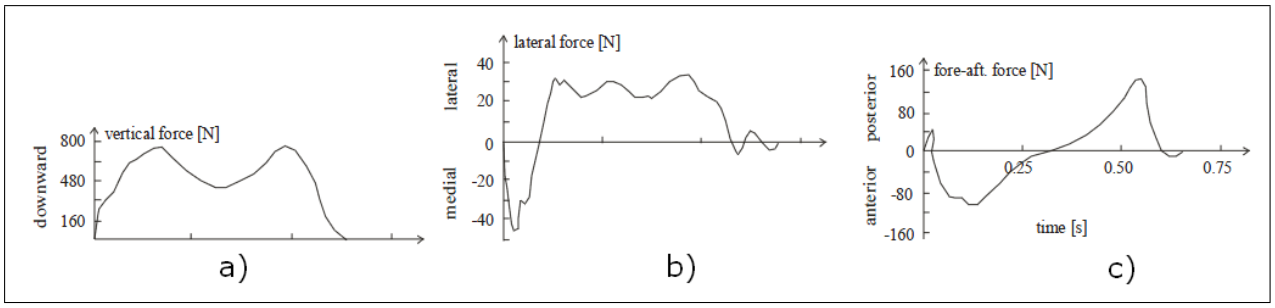


FIGURE 1.13 – Courbes typiques de la force pour la marche d'après [12] : (a) composante verticale, (b) composante normale à la direction de mouvement du piéton, (c) composante tangentielle à la direction de mouvement du piéton.

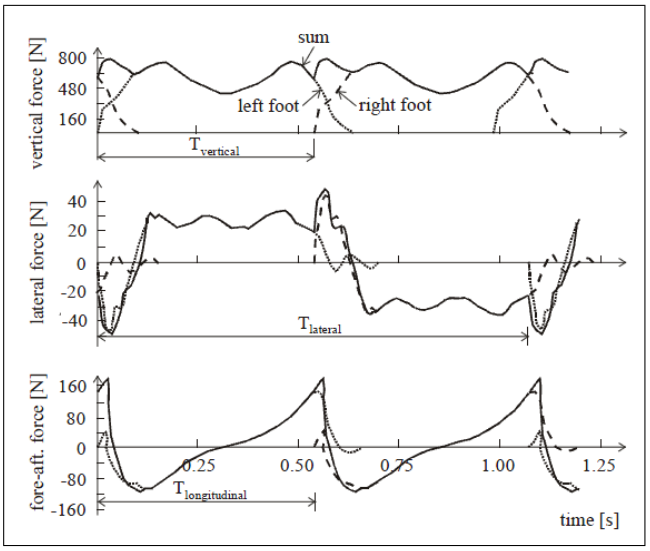


FIGURE 1.14 – Marche périodique d'après [13] : (a) composante verticale, (b) composante normale à la direction de mouvement du piéton, (c) composante tangentielle à la direction de mouvement du piéton.

force normale totale a une période qui correspond à la durée de deux pas. Elle a donc pour valeur le double de la période de la force verticale, entraînant une fréquence de moitié [79].

La force tangente au mouvement du piéton : Comme la force verticale, la force tangente au mouvement du piéton est supposée être la même pour les deux jambes. En considérant la force d'une seule jambe (Figure 1.13.c), on remarque que la première partie de la force est dirigée vers l'arrière (force négative), ce qui correspond au choc du talon, et la dernière partie est dirigée vers l'avant (force positive), ce qui correspond au choc de la pointe. En général, la force tangente totale (Figure 1.14.c) est considérée comme étant périodique de période égale à la durée d'un pas. Elle a donc la même période et la même fréquence que la force verticale.

L'hypothèse selon laquelle les forces engendrées par les deux jambes sont identiques est controversée : des mesures faites par Sahnaci et Kasperi [69] montrent que les paramètres de la force ne sont pas les mêmes pour les deux jambes. En effet, l'une des deux jambes,

qualifiée comme étant la jambe “forte”, a une longueur de pas supérieure à celle de l'autre, la jambe “faible” ; la différence entre les deux étant parfois supérieure à 5 %. La fréquence des pas n'est pas la même pour les deux jambes, l'une ayant une fréquence supérieure à l'autre. Des études probabilistes prennent en compte le fait qu'une personne ne peut pas répéter exactement les mêmes forces (en fonction du temps) au cours de différentes expériences. La force d'une seule personne est considérée périodique, mais le caractère aléatoire peut être pris en compte en considérant des fonctions de distribution du poids, de la fréquence, etc. [13].

Relations entre les différents paramètres

Des études ont montré que l'augmentation de la fréquence de marche entraîne l'augmentation de la vitesse de marche [14, 80], qui à son tour entraîne une augmentation de la longueur du pas ainsi que des maxima d'amplitudes de toutes les composantes de la force engendrée par un piéton [12, 14, 74, 80]. De plus, l'augmentation de la fréquence entraîne une diminution du temps de contact d'un pied avec le plancher. Ces relations sont illustrées dans la figure 1.15 [80] et sont valables non seulement pour la marche mais aussi pour la course.

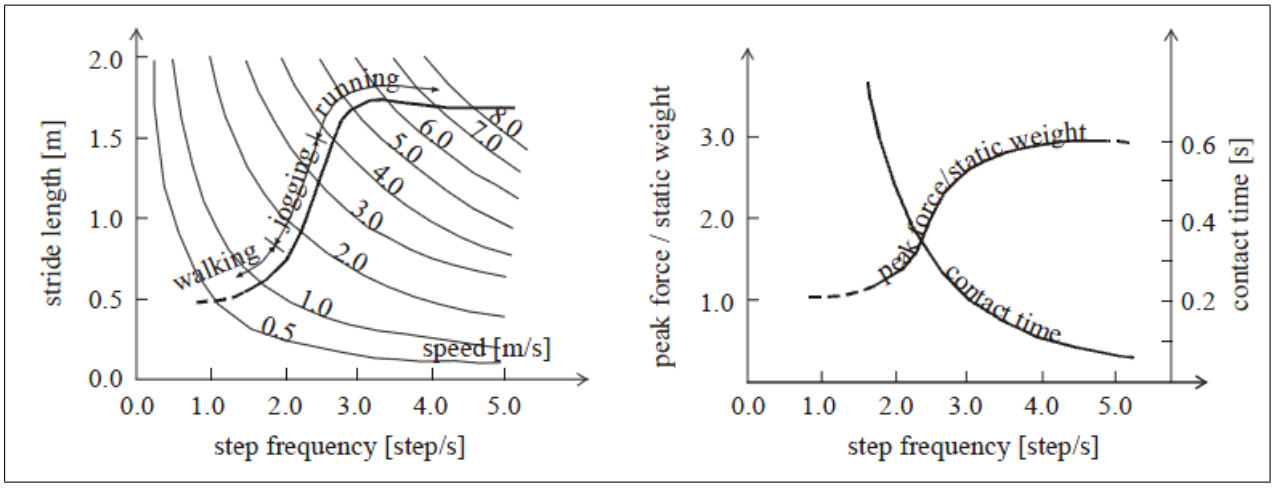


FIGURE 1.15 – Relation entre la longueur du pas, la vitesse, la force maximale et le temps de contact pour différentes fréquences de mouvement d'après [14].

Autres mouvements

Des mouvements de piétons autres que la marche existent : la course, le saut, le balancement et le rebondissement. Sans entrer dans les détails, les principales caractéristiques de ces mouvements sont présentées.

La course : Contrairement à la marche, la force engendrée par une jambe durant un pas de course présente un seul maximum [74]. Durant une course, les périodes de contact d'une seule jambe sont séparées par des périodes sans contact où la force induite est supposée nulle. La force engendrée par ce mouvement peut aussi être supposée périodique, et la fréquence fondamentale de la force verticale est dans la bande fréquentielle $1.8 - 3.4\ Hz$ [68].

Le saut : Durant le saut, on trouve aussi des périodes de temps avec contact et des périodes sans contact. Le maximum de la force verticale est égal à plusieurs fois le poids de la personne. De plus, des études ont montré que les forces horizontales dues aux sauts verticaux existent aussi, mais la composante tangentielle au mouvement du piéton reste plus importante que la composante normale. De même que les autres forces, la force engendrée par le saut peut être supposée périodique. La fréquence fondamentale de la force verticale est dans la bande fréquentielle $2 - 3.5\ Hz$ [68].

Le balancement : Le balancement peut être défini comme étant le fait de basculer son poids d'une jambe à l'autre tout en restant sur place et sans décoller les pieds du plancher. La force engendrée par le balancement est aussi supposée périodique. La fréquence fondamentale de la force verticale appartient à l'intervalle $0.4 - 0.7\ Hz$ [68].

Le rebondissement : Rebondir c'est faire un ou plusieurs bonds en touchant à chaque fois un corps solide. La force engendrée par ce mouvement peut être supposée périodique et la fréquence fondamentale de la force verticale appartient à l'intervalle $1.5 - 3\ Hz$ [68].

1.3.2 Modélisation du piéton

Le corps humain est un système mécanique très complexe, composé de plusieurs parties en interaction réciproque. Il peut être modélisé suivant le degré de raffinement souhaité et les objectifs à atteindre. Les différents modèles de la littérature peuvent se classer en trois catégories de modélisation selon leur degré de complexité.

1ère catégorie : Modèles complexes dans lesquels chaque partie du squelette du corps humain est représentée par un corps rigide connecté aux autres par des ressorts et amortisseurs et avec des couples qui imposent le mouvement relatif entre les corps rigides de façon à reproduire l'action de la marche. La figure 1.16 est un exemple de description de deux modèles [15, 16], inspirés de [81]. Ce type de modélisation est généralement utilisé en robotique.

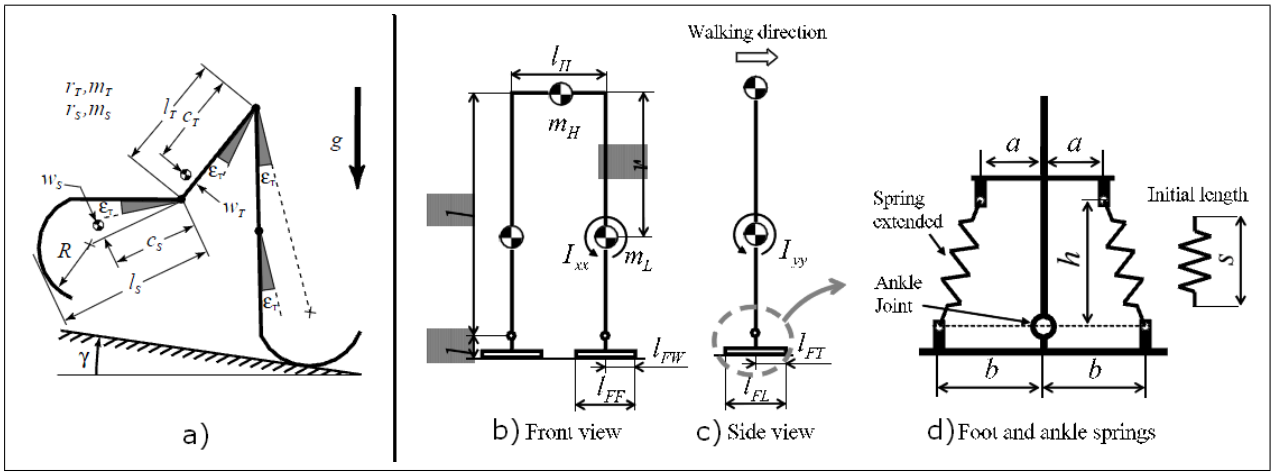


FIGURE 1.16 – Deux représentations du corps humain : (a) représentation du modèle de marche 2D de McGeer [15], (b,c,d) représentation du modèle de marche 3D [16].

2ème catégorie : Modèles dans lesquels le corps humain est schématisé comme un ensemble de masses, ressorts et amortisseurs, et chaque partie du modèle représente grossièrement une certaine partie du corps dans le but de reproduire la force d'impact d'un pied sur le sol pendant un pas [17, 18, 82]. La figure 1.17 montre deux représentations du piéton. Ces schémas ne prévoient pas de force motrice et ils ne peuvent donc pas représenter la marche. Cependant, ils permettent de reproduire correctement la force verticale d'impact d'un pied sur le sol pendant un pas. Dans la seconde représentation [18], l'influence de la raideur du sol sur la force d'impact du pied est prise en compte.

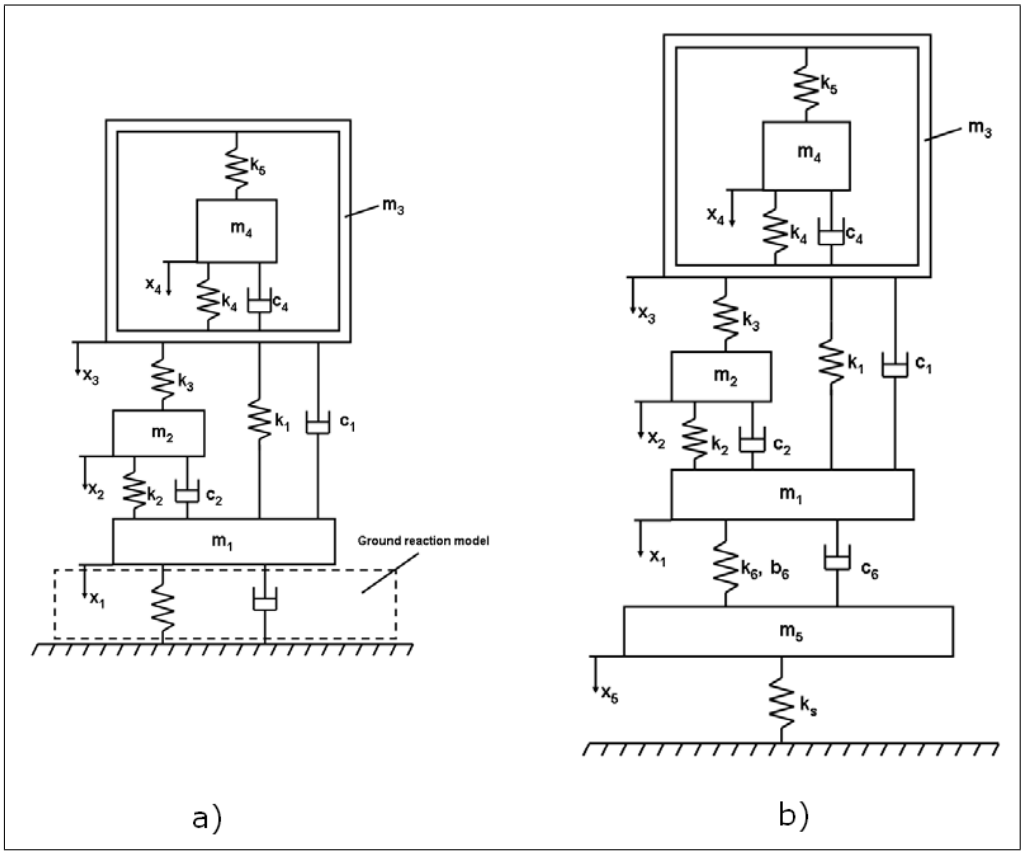


FIGURE 1.17 – Représentation du piéton : (a) [17], (b) [18].

3ème catégorie : Le corps humain est simplement représenté par une seule masse en interaction avec le sol. C'est l'expression de la force échangée entre l'individu et le sol qui permet de différencier les modèles. La figure 1.18 est un exemple de représentation du piéton [19].

Dans la situation qui nous intéresse pour cette thèse, i.e. la formulation d'un modèle de piéton pour représenter correctement le chargement dynamique de la foule sur une structure vibrante, nous sommes obligés de trouver un bon compromis entre l'exigence de simplicité du modèle du piéton, car il y en aura des centaines sur une passerelle, et l'exigence de représenter correctement un phénomène complexe comme la synchronisation entre piéton et structure. Cette 3ème catégorie de représentation du piéton est celle qui nous intéresse.

La modélisation de la force induite par un piéton est assez compliquée et ceci pour plusieurs raisons [13] :

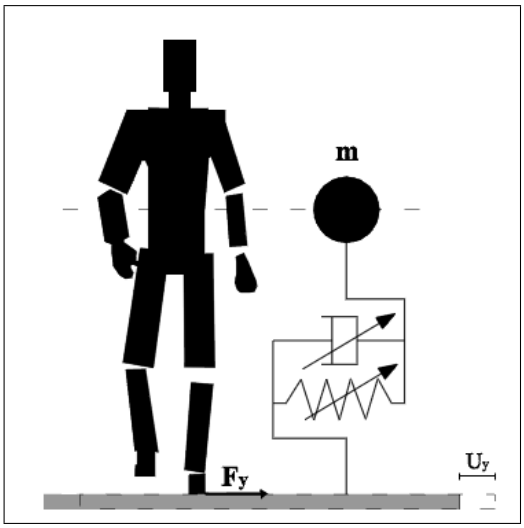


FIGURE 1.18 – Schéma simplifié de l'oscillateur qui représente le comportement dynamique latéral du piéton [19].

1. La force dépend de plusieurs paramètres, tels que le poids de la personne, la fréquence du mouvement, etc.
2. La force dynamique générée par un piéton est un processus à bande étroite assez difficile à modéliser et pas encore bien compris.
3. L'influence du nombre de personnes et leur degré de synchronisation/corrélation sont difficiles à généraliser.

D'après certains auteurs [13,25], la force est différente suivant que les vibrations sont perceptibles ou non. Cependant, des études réalisées par l'Association Française de Génie Civil [77] ont montré que l'amplitude de la force engendrée par un piéton est sensiblement la même que le plancher soit rigide ou souple. Par contre, lorsqu'un piéton perçoit les oscillations du plancher, il a tendance à adapter sa fréquence sur celles des oscillations de la structure. C'est donc la fréquence de la force qui varie et non son amplitude. Dans la littérature, on trouve deux types d'approches : la première consiste à modéliser la force d'un seul piéton, et la deuxième celle d'une foule ou d'un groupe de piétons. De plus, à l'intérieur de ces catégories, on rencontre des modèles temporels ou fréquentiels. Dans tous les cas, on distingue une approche déterministe qui propose un modèle général pour chaque type de mouvement, ou une approche probabiliste qui prend en compte le caractère aléatoire de certains paramètres qui influencent la force, tels que le poids, la fréquence du mouvement, etc. La plupart des études réalisées supposent que les deux jambes produisent la même force et que celle-ci est périodique [13]. La force totale engendrée est alors reconstruite à partir des mesures faites pour un pas comme dans la figure 1.14 [83]. Dans ce qui suit, on présente les modélisations proposées dans la littérature pour la force induite par une seule personne sur un plancher rigide.

La force verticale

En adoptant l'hypothèse selon laquelle les deux jambes engendrent la même force, et que ces forces sont périodiques, on peut supposer que la force verticale totale F_V engendrée par un piéton est périodique comme nous l'avons vu dans la section 1.3.1. De ce fait, on peut

Auteurs	a_i	ϕ_i	Commentaires
Blanchard et al. [65]	$a_1 = 0.257$		le DLF est plus faible pour des fréquences de 4 à 5 Hz
Bachmann et Ammann [68]	$a_1 = 0.4 - 0.5$ $a_2 = a_3 = 0.1$		fréquences entre 2 et 2.4 Hz fréquences autour de 2 Hz
Schulze (d'après [68])	$a_1 = 0.37$, $a_2 = 0.10$ $a_3 = 0.12$, $a_4 = 0.04$ $a_5 = 0.08$		A 2 Hz
Kerr [75]	$a_1 = a_2 = 0.07$ $a_3 \simeq 0.06$		a_1 dépend de la fréquence
Young [85]	$a_1 = 0.37(f - 0.95)$ ≤ 0.56 $a_2 = 0.054 + 0.0044f$ $a_3 = 0.026 + 0.0050f$ $a_4 = 0.04$		Valeurs moyennes
Seiler and Häuttner [86]	$a_1 = 0.4$ $a_2 = 0.15$ $a_3 = 0.1$ $a_4 = 0.05$	$\phi_1 = \frac{\pi}{2}$ $\phi_2 = -\frac{5\pi}{6}$ $\phi_3 = \frac{\pi}{2}$ $\phi_4 = -\frac{5\pi}{6}$	fréquences de l'ordre de $1.4 - 3.4$ Hz

TABLE 1.3 – Les coefficients de Fourier pour la force verticale engendrée par la marche (DLFs).

développer F_V en série de Fourier jusqu'à un ordre n à préciser [13,68] :

$$F_V(t) = P\left(1 + \sum_{i=1}^{n} a_i \sin\left(2\pi i f_p t - \phi_i^0\right)\right) \tag{1.4}$$

où :
P est le poids de la personne (N).
i est le numéro de l'harmonique.
n est le nombre total d'harmoniques qui contribuent à la force.
Pa_i est le coefficient de Fourier du i-ème harmonique.
a_i est le facteur de chargement dynamique (DLF) du i-ème harmonique.
f_p est la fréquence de marche du piéton (Hz).
ϕ_i^0 est la phase du i-ème harmonique pour un développement en sinus. La valeur de ϕ_1^0 est arbitraire et peut être nulle par exemple.
Le nombre n d'harmoniques varie selon les auteurs de 1 à 5. Les valeurs proposées pour les a_i sont données dans le tableau 1.3. Kerr [75] a trouvé des valeurs expérimentales pour les a_i dispersées pour différents sujets et même pour un même sujet qui répète l'expérience [83,84]. D'autre part, les valeurs des phases ϕ_i varient beaucoup pour les harmoniques $i \geq 2$ [68], ce qui montre le caractère aléatoire du chargement dû à la marche [83].

La force normale au mouvement du piéton

De même que pour la force verticale, la force normale peut aussi être considérée comme périodique. Elle est donc développable en série de Fourier :

$$F_N(t) = P\sum_{i=1}^{n} a_i \sin\left(2\pi i f_N t - \phi_i^0\right) \ . \tag{1.5}$$

On rappelle que P est le poids du piéton et f_N la fréquence de la force normale au mouvement du piéton qui est égale à la moitié de celle de la marche. Les valeurs des a_i sont données dans le tableau 1.4. Eriksson [87] a étudié les basses fréquences du spectre ($< 6\ Hz$), et a trouvé

Auteurs	DLFs pour les harmoniques considérés	Commentaires
Schulze (d'après [68])	$a_1 = 0.039$, $a_2 = 0.01$ $a_3 = 0.043$, $a_4 = 0.012$ $a_5 = 0.015$	fréquences de l'ordre de $2\ Hz$
Pizzimenti et Ricciardelli [25]	$a_1 = 0.04$ $a_2 = 0.008$ $a_3 = 0.023$ $a_4 = 0.005$ $a_5 = 0.011$	fréquences de l'ordre de $0.6-1.1\ Hz$ fréquences de l'ordre de $1.2-2.2\ Hz$ fréquences de l'ordre de $1.8-3.3\ Hz$ fréquences de l'ordre de $2.4-4.4\ Hz$ fréquences de l'ordre de $3.0-5.5\ Hz$

TABLE 1.4 – Les coefficients de Fourier pour la force normale engendrée par la marche (DLFs).

que la marche n'est pas parfaitement périodique, et donc ne peut pas être décrite en utilisant les DLFs comme dans les modèles précédents. En effet, comme les signaux de la force latérale mesurés ne sont pas périodiques, on ne peut pas les développer en série de Fourier, mais on peut obtenir leur spectre de Fourier et en déduire des DLFs "fictifs". Or, dans le spectre, on observe un "étalement" autour de la fréquence d'excitation : au lieu d'avoir un seul pic au niveau de cette fréquence, il y en a plusieurs. Ainsi, le DLF correspondant à cette fréquence, doit être calculé en tenant compte de cet étalement dans une bande de fréquences donnée entourant la fréquence centrale d'excitation. Pour cela, Eriksson [87] a supposé que le DLF n'est autre que la somme des pics dans une bande de fréquences centrée sur la fréquence f_N de la force latérale à étudier (i.e qui correspond au premier harmonique) et ayant pour largeur :

$$f \in \left[\frac{f_N}{2}, \frac{3f_N}{2}\right] \tag{1.6}$$

Cependant, d'après [25], sur plancher mobile tel que sur une passerelle, en prenant une telle bande de fréquences, on risque de surestimer la réponse vibratoire de la passerelle (transitoire dans le cas d'un plancher rigide). Ceci est expliqué en se basant sur le cas d'un système faiblement amorti, où l'amortissement intervient uniquement dans une bande de fréquences étroite autour de la fréquence de résonance. Ainsi, si dans le calcul des DLFs on prend en compte des composantes qui n'appartiennent pas à cet intervalle, on risque de surestimer la réponse vibratoire de la passerelle. C'est pourquoi, Pizzimenti et Ricciardelli [25] ont

préféré prendre pour chaque harmonique, une largeur de bande de fréquences qui dépend de l'amortissement ξ. Ainsi, pour le j-ème harmonique, la largeur de bande est :

$$\Delta f_j = j\pi\xi f_N \tag{1.7}$$

On remarque d'après les résultats obtenus (tableau 1.4) que l'excitation due aux harmoniques pairs est inférieure à celle due aux harmoniques impairs.

	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$	$j=5$
A_j	0.96	0.73	0.879	0.55	0.74
B_j	0.0616	0.039	0.0288	0.037	0.025
$\left(\check{F}_{Nj}^2/\check{F}_N^2\right)$	0.81	0.050	0.277	0.047	0.072

TABLE 1.5 – Valeurs de A_j , B_j et $\left(\check{F}_{Nj}^2/\check{F}_N^2\right)$ d'après [25].

Mais d'après ces derniers auteurs, qui ont étudié aussi les forces normales des piétons sur les planchers rigides, un modèle probabiliste serait mieux adapté au caractère aléatoire de la marche. Une approche statistique leur a montré que la force normale $F_N(t)$ peut être considérée comme étant un processus aléatoire de moyenne nulle, caractérisé dans le domaine fréquentiel par son spectre de densité de puissance S_{F_N} (PSD, Power Spectral Density). Une régression linéaire sur des données expérimentales montre que la variance du processus est donnée par :

$$var\left(F_N\right) = E\left[F_N^2(t)\right] - \left(E\left[F_N(t)\right]\right)^2 = (0.034P)^2 \tag{1.8}$$

où E désigne l'espérance. De plus, les PSDs des cinq premiers harmoniques vérifient l'expression gaussienne :

$$\frac{S_{F_N}(f).f}{\check{F}_{Nj}^2} = \frac{2A_j}{\sqrt{2\pi}.B_j}.\exp\left[-2\left(\frac{f/jf_N - 1}{B_j}\right)^2\right] \tag{1.9}$$

où j est le numéro de l'harmonique considéré, $\check{F}_{Nj}^2$ est l'aire du PSD autour du j-ème harmonique, A_j est un paramètre de normalisation du PSD et B_j est un paramètre de la largeur de bande. Les valeurs des différents paramètres sont données dans le tableau 1.5.

Erlicher et al. [88] ont proposé un oscillateur auto-entretenu à un degré de liberté capable de prédire avec précision la force normale au mouvement du piéton générée par le piéton sur sol rigide. L'expression de cette force est :

$$F_N = -2m\mu\omega_0\dot{u}_N(t)\left(1 - \beta u_N^2(t) - \frac{\gamma}{\omega_0}\dot{u}_N(t)u_N(t) - \frac{\delta}{\omega_0^2}\dot{u}_N^2(t)\right) + \omega_0^2 u_N(t) \tag{1.10}$$

F_N a une forme polynomiale d'ordre trois, avec cinq termes et cinq paramètres à identifier. Il s'agit d'un modèle de Van der Pol modifié par l'introduction des termes proportionnels à γ et δ. Lorsque $\mu > 0$ (et c'est le cas considéré ici), l'équation (1.10) définit la force de rappel d'un oscillateur auto-entretenu (self-sustained oscillator). Le caractère auto-entretenu est dû à la présence simultanée d'un terme linéaire d'amortissement négatif (source d'énergie) et d'un terme non linéaire d'amortissement positif (dissipation). Les oscillateurs auto-entretenus forcés peuvent présenter un comportement appelé "frequency entrainment", c'est-à-dire permettant la synchronisation de la fréquence de l'oscillateur avec celle de l'excitation extérieure.

La force tangente au mouvement du piéton

De même que pour les forces verticale et normale, la force tangente peut être considérée comme périodique. Elle est donc développable en série de Fourier :

$$F_T(t) = P \sum_{i=1}^{n} a_i \sin\left(2\pi i f_T t - \phi_i^0\right) \tag{1.11}$$

On rappelle que P est le poids du piéton et f_T la fréquence de la force tangente au mouvement du piéton qui est égale à celle de la marche. Les valeurs des a_i sont données dans le tableau 1.6.

Auteurs	DLFs pour les harmoniques considérés	Commentaires
Schulze (d'après [68])	$a_{1/2} = 0.037$, $a_1 = 0.204$ $a_{3/2} = 0.026$, $a_2 = 0.083$ $a_{5/2} = 0.024$	fréquences de l'ordre de 2 Hz
Blanchard et al. [65]	$a_{1/2} = 0.1$ $a_1 = 0.2$ $a_2 = 0.1$	fréquences de l'ordre de 2 Hz

TABLE 1.6 – Les coefficients de Fourier pour la force tangente engendrée par la marche (DLFs).

1.4 La synchronisation

Dans cette section, nous expliquons le phénomène de synchronisation [31, 89]. Nous introduisons tout d'abord des oscillateurs particuliers nécessaires pour que la synchronisation ait lieu : les oscillateurs auto-entretenus. Ensuite, nous définissons qualitativement ce phénomène tout en précisant les situations que l'on peut confondre avec une synchronisation mais qui ne le sont pas. Par la suite, on cite les différents types de synchronisation possibles. Puis on explique un cas particulier où un oscillateur auto-entretenu est soumis à l'action d'une force extérieure.

1.4.1 L'oscillateur auto-entretenu et ses propriétés

Définition d'un oscillateur auto-entretenu

Afin de bien définir le phénomène de synchronisation, il convient de commencer par présenter des oscillateurs particuliers qu'on appelle oscillateurs auto-entretenus :

- Un oscillateur auto-entretenu est un système actif. Il contient une source interne d'énergie qui génère son mouvement oscillatoire. Lorsque l'oscillateur est isolé, ses oscillations continuent au même rythme jusqu'à l'épuisement de la source d'énergie et son comportement ne dépend pas explicitement du temps. On dit alors que c'est un système dynamique autonome.

- Les caractéristiques des oscillations (amplitude, fréquence) sont déterminées par les paramètres internes de l'oscillateur et ne dépendent ni de la façon dont elles ont été déclenchées, ni de la réponse transitoire de l'oscillateur après leur déclenchement.
- Les oscillations sont stables aux perturbations relativement faibles : si une action extérieure à l'oscillateur vient perturber ses oscillations, après la perturbation, les oscillations reprennent leur forme initiale.

Par exemple, une horloge à pendule est un oscillateur auto-entretenu. L'énergie potentielle du poids suspendu est transformée en mouvement oscillatoire du pendule. Cette oscillation est transférée en une rotation des aiguilles de l'horloge. Le mécanisme prend donc l'énergie de la source et maintient une oscillation stable du pendule jusqu'à l'épuisement de la source d'énergie. Ces oscillations sont entièrement déterminées par les paramètres internes de l'horloge et ne dépendent pas de la façon dont le pendule a été mis en mouvement. De plus, elles ne sont pas influencées par les perturbations faibles ; en effet si une impulsion extérieure perturbe le mouvement du pendule, les oscillations reprennent leur rythme initial après avoir traversé une période transitoire.

Caractérisation d'un rythme : période et fréquence

Le mouvement d'un oscillateur auto-entretenu est périodique, et sa caractéristique principale est sa période T. On caractérise le rythme des oscillations par leur fréquence cyclique :

$$f_0 = \frac{1}{T_0} \tag{1.12}$$

La pulsation ou fréquence angulaire est donnée par :

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T_0} \tag{1.13}$$

On verra par la suite que la fréquence ou la pulsation d'un oscillateur peut être modifiée à cause d'une action extérieure sur l'oscillateur ou à cause de son interaction avec un autre oscillateur. La fréquence et la pulsation d'un oscillateur, lorsqu'il est autonome (non soumis à une action extérieure), sont appelées fréquence et pulsation naturelle, propre, ou libre.

Image géométrique d'oscillateurs auto-entretenus périodiques : cycle limite

Un oscillateur auto-entretenu génère un processus périodique $x(t)$. $x(t)$ seul ne permet pas de décrire l'état de l'oscillateur à un instant donné puisqu'a priori, on ne sait pas dans quel sens $x(t)$ varie. D'où l'intérêt d'introduire une deuxième variable $y(t)$. Dans le cas d'un pendule par exemple, $x(t)$ est l'angle qu'il forme avec la verticale, et $y(t) = \dot{x}(t)$ est sa vitesse angulaire. L'évolution du couple $(x(t), y(t))$ décrit le comportement du pendule et $x(t)$ et $y(t)$ sont appelés les coordonnées dans l'espace des phases.
Soit $G(x(t), y(t))$ la courbe représentant $y(t)$ en fonction de $x(t)$. Un point de la courbe $G(x(t), y(t))$ est appelé point de phase. Dans le cas d'oscillations périodiques, $G(x(t), y(t))$ est une courbe fermée appelée cycle limite C_l : il est déterminé par les paramètres internes de l'oscillateur. Le cycle limite "attire" les trajectoires qui sont dans son voisinage. En effet, si un point de $G(x(t), y(t))$ est au voisinage de C_l, cela revient à dire que le mouvement périodique de l'oscillateur a été faiblement perturbé. Or l'oscillateur étant auto-entretenu, il retrouve son rythme initial après une période transitoire. Ceci se traduit dans le plan de phases par la convergence de la courbe $G(x(t), y(t))$ vers le cycle limite. Dans le cas particulier où le

processus périodique est un sinus, l'oscillateur est dit quasi-linéaire ou quasi-harmonique et le cycle limite est un cercle.

Phase : définition et propriétés

Amplitude stable, phase libre : On considère un oscillateur quasi-linéaire. Le processus $x(t)$ qu'il engendre s'écrit sous la forme :

$$x(t) = Asin(\omega_0 t + \phi_0) \tag{1.14}$$

où :
$\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T_0}$: fréquence angulaire ou pulsation ;
T_0 : période des pulsations ;
$f_0 = \frac{1}{T_0}$: fréquence (cyclique) des oscillations ;
A : amplitude des oscillations ;
$\phi = \omega_0 t + \phi_0$: phase totale des oscillations.
La phase totale n'est pas bornée, mais on peut la ramener à l'intervalle $[0, 2\pi[$ grâce à la périodicité de la fonction sinus. ϕ_0 est la phase initiale, elle correspond à la réponse transitoire de l'oscillateur lorsqu'il a été mis en mouvement. Dans le cas où on ne s'intéresse qu'au régime stationnaire, ϕ_0 ne joue aucun rôle et peut donc être modifiée en changeant l'instant initial. Dans le plan de phase, le cycle limite d'un oscillateur quasi-linénaire est représenté par un cercle de rayon A. Le point de phase se déplace sur ce cercle avec une vitesse angulaire ω_0, et la droite qui le relie au centre du cercle, forme avec l'axe des abscisses un angle égal à $\phi(t)$ (Figure 1.19.a). T_0 est le temps nécessaire pour que le point de phase réalise un tour complet. Les coordonnées polaires du point de phase sont $(A, \phi(t))$.

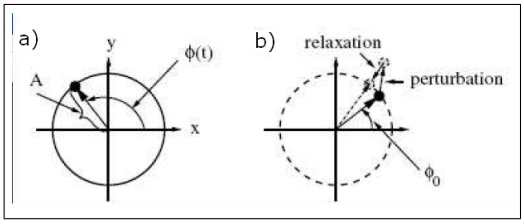


FIGURE 1.19 – (a) Cycle limite dans le plan de phases (repère fixe), (b) stabilité d'un point de phase sur le cycle limite (repère tournant).

Stabilité d'un point de phase sur le cycle limite : que se passe-t-il si on perturbe légèrement les oscillations d'un oscillateur auto-entretenu ? Pour mieux illustrer cette partie, on se place dans un repère qui effectue une rotation avec une vitesse angulaire ω_0. Les coordonnées du point de phase dans le nouveau repère sont donc $(A, \phi(t) - \omega_0 t)$. Dans le régime stationnaire, les coordonnées seront donc (A, ϕ_0) et le point de phase est fixe. Une perturbation consiste alors à déplacer le point de phase en dehors du cycle limite (Figure 1.19.b) :

- Si l'amplitude est perturbée, celle-ci revient à sa valeur initiale A.
- Si la phase est perturbée, elle garde sa nouvelle valeur : en effet, comme toutes les valeurs initiales sont équivalentes, cela revient à changer ϕ_0 en ϕ_1. La phase conserve alors cette nouvelle valeur jusqu'à ce qu'une nouvelle perturbation ait lieu.

Dans le cas général d'un oscillateur ayant une période T_0, la phase est donnée par

$$\phi(t) = \phi_0 + 2\pi \frac{t - t_0}{T_0} \tag{1.15}$$

où t_0 est un instant initial arbitraire. L'amplitude est la variable qui caractérise la déviation transversale par rapport au cycle limite.

Propriétés d'un oscillateur auto-entretenu : dissipation, stabilité et non-linéarité

Nous exposons dans cette partie les principales propriétés d'un oscillateur auto-entretenu.

Dissipation : les systèmes macroscopiques naturels dissipent leur énergie. A moins qu'ils soient constamment alimentés en énergie, leurs oscillations diminuent jusqu'à s'arrêter. Un oscillateur auto-entretenu doit donc posséder une source d'énergie interne.

Stabilité : la stabilité des oscillateurs auto-entretenus permet de les différencier des oscillateurs conservatifs. En effet, un oscillateur conservatif a un mouvement périodique, mais ne dissipe pas de l'énergie ni n'en gagne. Dans le plan des phases, les oscillations sont représentées par un ensemble de courbes fermées (Figure 1.20). Ainsi, si le système subit une perturbation, celle-ci persiste et donc la valeur de l'énergie perturbée est conservée ; le système n'oublie donc pas ses conditions initiales. Par conséquent, les oscillations dépendent de la manière dont elles ont été déclenchées, ce qui n'est pas le cas d'un oscillateur auto-entretenu.

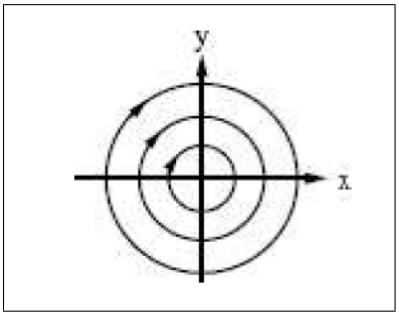


FIGURE 1.20 – Oscillateur conservatif.

Non-linéarité : la non-linéarité est essentielle dans le maintien d'un cycle limite stable d'oscillations. La stabilité équivaut à dire que le mouvement périodique existe uniquement avec une amplitude donnée. Les équations qui régissent le mouvement des oscillateurs linéaires sont évidemment linéaires. Ainsi, si $x(t)$ est une solution périodique de ces équations, pour tout facteur a, $ax(t)$ est aussi une solution périodique ce qui est contraire à la définition de la stabilité. D'où la nécessité de la non-linéarité pour le maintien de la stabilité.
Physiquement parlant, les oscillations stables expriment le fait que quelque soit le mécanisme de dissipation et d'alimentation en énergie, l'énergie de la source est transformée en mouvement oscillatoire : la quantité d'énergie dissipée E_d compense exactement la quantité d'énergie E_a fournie à l'oscillateur. En traçant E_d et E_a sur un cycle en fonction de l'amplitude des oscillations (Figure 1.21), l'amplitude des oscillations stationnaires est donnée par l'intersection de ces deux courbes. Ces courbes peuvent passer par l'origine et avoir une telle

intersection uniquement dans le cas d'un système non-linéaire (i.e. décrit par des équations différentielles non linéaires).

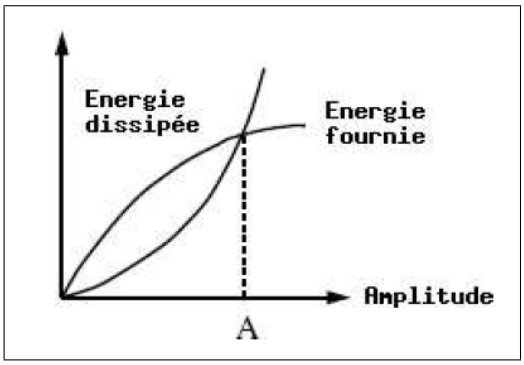


FIGURE 1.21 – Système dissipatif.

Systèmes auto-entretenus et systèmes forcés : la phase d'un système forcé n'est pas libre. Que le système soit autonome (auto-entretenu) ou forcé (son mouvement est dû à une force extérieure qui lui est appliquée), le mouvement du point de phase forme une courbe fermée qui attire les courbes de son voisinage. La différence essentielle entre un système autonome et un système forcé est que dans le cas d'un système forcé, la phase n'est pas libre et elle est en relation avec la force extérieure appliquée au système. Un oscillateur auto-entretenu peut donc se synchroniser alors qu'un système forcé ne le peut pas. Cette différence peut être mise en évidence lorsque l'on applique une perturbation au système. Dans chacun des cas, on considère 4 états différents de perturbations. Dans la figure 1.22 on représente le plan de phase pour chacun des oscillateurs. Chaque état perturbé est représenté par un point entouré d'un cercle vide dans la figure. Les 4 points correspondant à ces 4 états vont revenir vers le cycle limite, mais dans le cas du système forcé (Figure 1.22.b) ces points vont converger vers le même point, alors que pour le système auto-entretenu (Figure 1.22.a) on retrouvera 4 points distincts. Ceci s'explique par le fait que le système auto-entretenu a la mémoire de sa valeur perturbée, alors que le système forcé retrouve une certaine valeur imposée par la force extérieure et ne dépend pas de l'état initial.

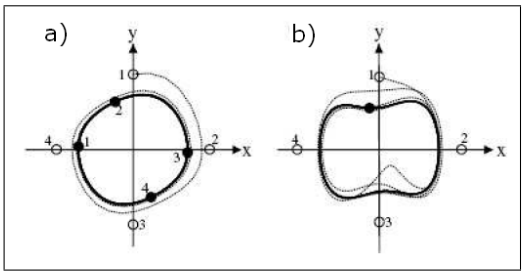


FIGURE 1.22 – Systèmes dissipatifs : (a) auto-entretenu, et (b) forcé.

1.4.2 Définition de la synchronisation

On désigne par synchronisation un ajustement des rythmes d'oscillations d'objets, dû à leur faible interaction entre eux. Pour expliquer qualitativement ce concept, on définit ce

qu'est une interaction entre objets oscillants et ce qu'on entend par ajustement de rythmes. Puis on présente des cas où la synchronisation n'a pas lieu mais où la situation prête à confusion, et enfin on présente les différents types de synchronisation.

Couplage d'objets oscillants

Supposons que l'on ait deux horloges. Même si les deux sont réalisées chez le même fabriquant et sont supposées avoir les mêmes paramètres intérieurs, elles sont néanmoins différentes : en effet, à un instant donné, elle ne donnent pas exactement la même heure et leurs pendules ne sont pas à la même position. On suppose maintenant que ces deux horloges sont couplées ; elles sont posées sur une poutre non rigide. L'interaction entre elles se fait à travers les vibrations de leur support commun. Ces vibrations, même faibles modifient le rythme des oscillations des deux horloges.

Ajustement de rythme : bloquage de fréquence et de phase

Les expériences montrent que même une faible interaction peut synchroniser deux oscillateurs. On considère deux oscillateurs ayant des pulsations propres f_1 et f_2 différentes quand ils sont isolés. Ils peuvent, s'ils sont couplés, et sous certaines conditions, osciller avec une même fréquence. Leur synchronisation ou leur non-synchronisation dépend des facteurs suivants :

1. La force du couplage : elle décrit si l'interaction est forte ou faible. Expérimentalement, il est souvent difficile de mesurer cette quantité. Dans l'exemple précédent, elle dépend de la souplesse du support. Si la poutre est absolument rigide, elle ne va pas être influencée par les oscillations du pendule, et l'interaction entre les deux horloges est inexistante. Par contre, si la poutre est souple, l'interaction peut avoir lieu.
2. La différence de fréquences $f_1 - f_2$: elle quantifie la différence entre les deux oscillateurs non couplés. Plus elles sont éloignées au départ, et plus il sera difficile que les oscillateurs se synchronisent. Etant couplés, deux oscillateurs ayant au départ des fréquences différentes et des phases indépendantes, ajustent leurs rythmes et commencent à osciller avec la même fréquence, ce qui implique une relation bien définie entre les phases des deux oscillateurs. On rappelle que la convergence vers cette fréquence commune dépend de $f_1 - f_2$.

Situations que l'on peut confondre avec une synchronisation

Il n'y a pas de synchronisation en l'abscence d'oscillations de systèmes autonomes : Tout d'abord, il faut différencier le phénomène de synchronisation et le phénomène de résonance. On considère une poutre ayant une pulsation propre f_0. On lui applique une force extérieure ayant une pulsation $f \neq f_0$. La poutre commence à osciller mais ces oscillations ne sont visibles que lorsque f est suffisamment proche de f_0. Dans ce cas, on parle de résonance. Ce n'est pas un phénomène de synchronisation parce que la poutre n'oscillerait pas sans action extérieure, elle n'est donc pas un oscillateur auto-entretenu.

La variation synchronisée de deux variables n'implique pas nécessairement une synchronisation : Lorsque deux oscillateurs ne sont que des coordonnées différentes d'un même système, on ne parle pas de synchronisation. Par exemple le déplacement et la vitesse

du pendule d'une horloge ont une même fréquence et leur différence de phase est bien définie. Cependant on ne peut pas parler d'un phénomène de synchronisation car il n'y a pas de déplacement sans vitesse de déplacement et vice versa. L'absence de synchronisation dans ce cas est évidente mais ce n'est pas le cas dans des exemples plus complexes.

Un couplage très fort unifie le système et on ne peut plus supposer qu'il y a une synchronisation : Un couplage très fort entre deux oscillateurs impose des limitations très fortes au mouvement des deux systèmes. C'est comme si les deux systèmes avaient été unifiés pour ne former qu'un seul oscillateur. Ce phénomène ne peut donc pas être considéré comme étant une synchronisation. Par exemple si on relie les pendules de deux horloges par un lien rigide, ces pendules sont "obligés" d'avoir des mouvements identiques et on ne peut plus parler de synchronisation parce qu'on n'a plus qu'un seul système.
L'introduction du couplage ne doit pas changer qualitativement le comportement des systèmes qui interagissent entre eux et ne doit pas les priver de leur "individualité". En particulier, l'arrêt des oscillations d'un des systèmes ne doit pas provoquer l'arrêt des oscillations du second système.

Conclusion : Pour que l'on puisse qualifier un phénomène de synchronisation, il faut que :
- l'analyse porte sur le comportement d'au moins un oscillateur auto-entretenu, i.e. capable de générer son rythme propre ;
- les systèmes concernés ajustent leurs rythmes en réponse à un couplage faible ;
- l'ajustement des rythmes a lieu lorsque les fréquences des deux oscillateurs sont assez proches ; en particulier, si la fréquence des oscillations d'un des oscillateurs varie lentement, la fréquence des oscillations du deuxième oscillateur suit ces variations.

Les différents types de synchronisations

On peut distinguer plusieurs types de synchronisation. Dans ce paragraphe, on explique brièvement les types les plus fréquents.

Synchronisation mutuelle : quand deux oscillateurs s'influencent mutuellement et de manière égale, ils ajustent leurs rythmes mutuellement. On parle de synchronisation mutuelle. Un exemple simple reflétant ce cas est l'exemple des deux horloges à pendule posées sur une poutre. La poutre véhicule les oscillations d'une horloge à l'autre.

Ensemble d'oscillateurs : dans plusieurs cas, l'interaction ne se fait pas uniquement entre deux oscillateurs mais entre plusieurs oscillateurs. Si on prend l'exemple des lucioles, celles-ci constituent un ensemble d'oscillateurs mutuellement couplés qui peuvent s'illuminer de manière synchronisée. Les lucioles communiquent à travers leurs "flashs" lumineux. On parle de couplage global.

Synchronisation de phases et synchronisation complète d'oscillateurs chaotiques : les oscillateurs auto-entretenus peuvent générer des signaux chaotiques. Un couplage de ces oscillateurs peut aussi entraîner leur synchronisation. Dans le cas de signaux "presque périodiques", les cycles se ressemblent mais ont des amplitudes et des périodes différentes. Dans

ce cas, on peut calculer une fréquence moyenne sur un large intervalle de temps τ :

$$\langle f \rangle = \frac{N_\tau}{\tau} \tag{1.16}$$

où N_τ est le nombre de cycles effectués durant l'intervalle τ. Cette fréquence moyenne permet de décrire le comportement collectif de ce système chaotique interactif.
Dans le cas d'un couplage assez fort entre deux oscillateurs auto-entretenus "chaotiques", leurs fréquences moyennes deviennent égales, mais cela n'implique pas que les signaux engendrés coïncident aussi. Les couplages faibles n'influencent pas la nature chaotique des oscillateurs : les amplitudes conservent leur caractère irrégulier et restent non liées alors que les fréquences coïncident et on peut parler de différence de phase entre les oscillateurs. Ce phénomène est appelé synchronisation de phases de systèmes chaotiques.
Un couplage très fort influence non seulement les fréquences mais aussi les amplitudes. Dans ce cas, on parle de synchronisation complète.

Synchronisation par une force extérieure : un oscillateur peut aussi être influencé par une action extérieure qui lui est appliquée. Ainsi l'ajustement de l'horloge biologique et des rythmes saisonniers des systèmes vivants allant de la bactérie aux humains, est un phénomène de synchronisation appliqué par la nature. Dans les paragraphes suivants, on s'attarde sur ce type de synchronisation lorsque l'oscillateur est un oscillateur quasi-linéaire, i.e. lorsque le processus qu'il génère est sinusoïdal.

1.4.3 Synchronisation d'un oscillateur auto-entretenu par une force extérieure

Dans ce paragraphe, nous présentons le cas où un oscillateur auto-entretenu se synchronise avec une force extérieure qui lui est appliquée. Nous étudions le cas particulier d'un oscillateur quasi-linéaire faiblement forcé.
Nous rappellons qu'un oscillateur quasi-linéaire génère un processus $x(t)$ qui vérifie $x(t) = A\sin(\omega_0 t+\phi_0)$ où ω_0 est sa fréquence angulaire libre et ϕ_0 sa phase initiale. La force extérieure qui lui est appliquée est supposée harmonique de fréquence ω. En d'autres termes, la force varie de la même façon que $\varepsilon\cos(\phi_e)$ où $\phi_e = \omega t + \bar{\phi}_e$ est la phase totale de la force et ε son amplitude. On suppose $\omega \neq \omega_0$ et on note $\Delta\omega = \omega_0 - \omega$ le "detuning". Comme nous l'avons déjà indiqué plus haut, l'amplitude de l'oscillateur est stable alors que la phase n'est ni stable, ni instable. Donc la force extérieure (faible) agit uniquement sur la phase.
On définit un repère tournant avec une vitesse angulaire ω dans le sens positif (dans le sens inverse de rotation des aiguilles d'une montre). La position du point de phase est déterminée par $\phi - \phi_e$. Dans le cas où l'amplitude de la force est nulle, le point de phase dans le nouveau repère peut avoir trois comportements différents :

- il continue à tourner dans le sens positif si $\omega_0 > \omega$: $\phi - \phi_e$ augmente avec une vitesse constante $\omega_0 - \omega$ (Figure 1.23.a)
- il est immobile si $\omega_0 = \omega$: $\phi - \phi_e$ reste constant (Figure 1.23.b)
- il tourne dans le sens des aiguilles d'une montre si $\omega_0 < \omega$: $\phi - \phi_e$ diminue avec une vitesse constante $\omega_0 - \omega$ (Figure 1.23.c)

Revenons au cas qui nous intéresse, lorsque l'amplitude $\varepsilon \neq 0$. Deux situations peuvent se présenter :

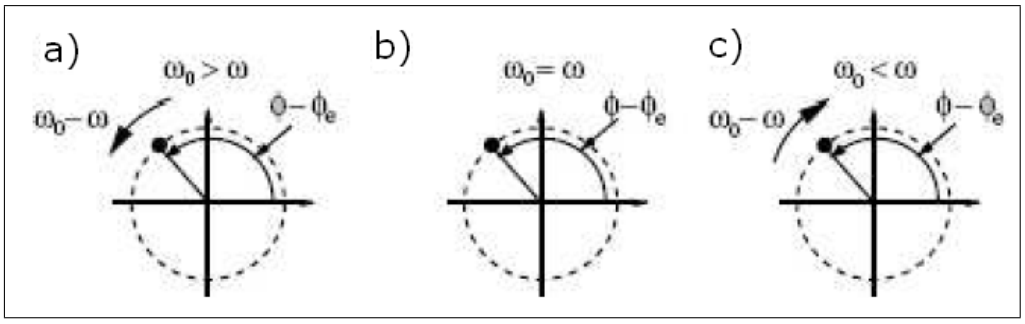


FIGURE 1.23 – Repère tournant : (a) $\omega_0 > \omega$, (b) $\omega_0 = \omega$, (c) $\omega_0 < \omega$.

- $\omega_0 = \omega$: Quelque soit la différence de phase initiale $\phi^0 = \phi_0 - \bar{\phi}_e$, cette différence de phase reste constante. La synchronisation dans ce cas trivial se manifeste par le maintien de cette stabilité dans le déphasage (cas 1 dans la figure 1.24).
- $\omega_0 \neq \omega$: On suppose par exemple que $\omega_0 > \omega$. Dans ce cas, la force tend à égaliser la phase de l'oscillateur $\phi(t)$ et la phase $\phi_e(t) + \phi^0$ ($\phi(t) - \phi_e(t)$ constante) (cas 2 dans la figure 1.24). Au contraire, le "detuning" $\Delta\omega = \omega_0 - \omega$ tend à les éloigner l'une de l'autre (cas 3, 4 et 5 de la figure 1.24). La relation entre l'amplitude ε de la force et le detuning $\Delta\omega$ détermine laquelle de ces deux actions l'emportera sur l'autre.

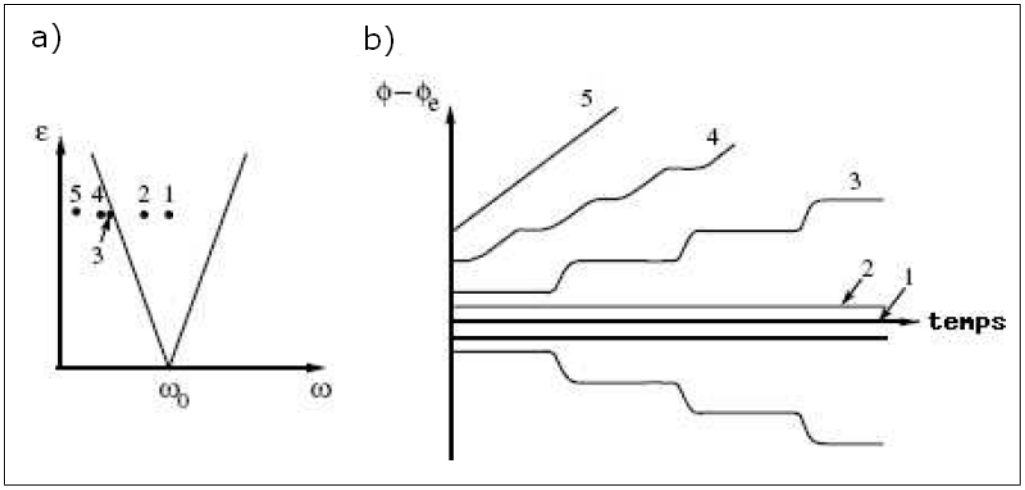


FIGURE 1.24 – Le déphasage selon la position des points par rapport à la région de synchronisation : (a) la position des points par rapport à la région de synchronisation, (b) le déphasage en fonction du temps pour les différents points.

1.5 La perception des vibrations par les humains

Les mesures faites sur des planchers rigides sont différentes de celles qui sont faites sur des planchers ayant des fréquences propres faibles : un piéton qui ressent des vibrations de la passerelle modifie son mouvement en conséquence et se synchronise (ou pas) avec celui de la passerelle. Il convient donc d'étudier la perception des vibrations par les humains. Cette notion est très subjective ; en effet, la perception des vibrations est différente d'une personne à l'autre. Il existe plusieurs seuils :

- le seuil de la perception des vibrations
- le seuil d'inconfort des vibrations
- le seuil où elles deviennent nuisibles (elles nuisent à la santé ou elles font perdre l'équilibre)

Des études sur la perception des vibrations verticales, montrent que les personnes debout ressentent plus les vibrations qu'une personne en mouvement [67]. De plus, le piéton ressent le maximum de vibration à côté de la mi-portée à cause de l'effet de la forme modale [90]. Kobori et Kajikawa [91] affirment que la vitesse du plancher est le paramètre principal qui influence la perception humaine et que l'on a une même sensibilité face aux vibrations ayant des valeurs efficaces identiques. L'utilisation de la vitesse des vibrations comme paramètre d'évaluation du confort est difficile en pratique, bien qu'utilisée au Japon, parce que généralement les mesures expérimentales sont faites avec des accéléromètres ; le signal mesuré est donc une accélération et il faut l'intégrer pour se ramener à la vitesse. Or cette intégration est parfois très compliquée. C'est pourquoi en général, on se réfère à l'accélération comme critère de confort. Blanchard et al [65], qui ont utilisé les résultats de Leonard [67] et Smith [90], ont évalué la limite maximale de l'accélération adaptée au confort du piéton :

$$a_{critique} = a_c = 0.5\sqrt{f_b}(m.s^{-2}) \tag{1.17}$$

f_b étant la fréquence fondamentale du mode vertical de la passerelle. Tilly et al. [92] ont affirmé que la valeur $\sqrt{f_b}$ pourrait être plus appropriée pour des fréquences en dehors de la plage $1.7 - 2.2\ Hz$, sans donner de détails sur l'élaboration de cette recommandation.
Bien que la perception des vibrations soit plus sensible dans la direction latérale de vibration du plancher, les mesures faites sont très rares, et la plupart d'entres elles portent sur des immeubles. L'AFGC [77, 93] estime que le seuil de perception se situe pour des accélérations critiques ayant des valeurs entre 0.10 *et* 0.15 $m.s^{-2}$, la valeur 0.10 $m.s^{-2}$ pouvant être retenue comme valeur sécuritaire. Pour les vibrations latérales de fréquence autour de 1 Hz, l'Eurocode 0 Annexe 2 propose une accélération critique horizontale de 0.2 $m.s^{-1}$ en utilisation normale et 0.4 $m.s^{-1}$ pour des conditions exceptionnelles de foule. Les essais expérimentaux réalisés par Nakamura [94] sur le T-bridge montrent que les piétons marchent normalement pour un déplacement de la passerelle de l'ordre de 10 mm (qui dans son cas correspond à une vitesse de 60 $mm.s^{-1}$ et à une accélération de 300 $mm.s^{-2}$). Pour des fréquences caractéristiques des réponses des tours d'immeubles de grandes hauteurs dues au vent (0.067 *à* $0.20\ Hz$), les facteurs les plus importants qui influencent la perception des vibrations latérales ont été déterminés [95], mais ce sont des facteurs valables en général : la fréquence des vibrations, le mouvement du corps, l'attente du mouvement (si on s'attend au mouvement, le seuil de perception est plus bas [95] mais on tolère mieux les vibrations [90], et la posture du corps. Dans cette bande de fréquences de l'immeuble, la perception des gens qui marchent est supérieure à celle des gens immobiles. Wheeler [14, 80] a remarqué que la perception d'une personne dans une foule est différente de celle d'une personne seule. Ainsi, des gens qui sautent en foule, ne se rendent pas compte des vibrations [96]. On ne sait pas exactement la cause de ce phénomène. Ceci pourrait être à cause du bruit, de la présence d'autres personnes ou pour des raisons totalement différentes.

1.6 Synthèse du chapitre

Les modélisations du comportement de la foule, du piéton, et de l'interaction piétons-structure dans le cas des passerelles, restent des sujets très complexes et encore ouverts.

L'objectif de cette thèse est de proposer un modèle 2D discret de mouvement de foule, dans lequel les piétons se déplacent continûment dans l'espace d'étude, composé de trois étapes fondamentales :

- gérer les contacts locaux piéton-piéton et piéton-obstacle,
- affecter un comportement à chaque piéton afin de pouvoir simuler des situations d'évacuations,
- gérer l'intéraction piétons-structure dans le cas des passerelles souples, avec prise en compte du phénomène de synchronisation.

Les modèles de la littérature se rapprochant de ce que l'on veut proposer, à savoir ceux traitant les contacts locaux entre piétons, sont le modèle de force sociale [7] et le modèle mathématique [10]. Ces modèles étant inspirés de modèles de mouvement de grains pour la gestion des contacts [54, 63], nous nous sommes intéressés à la gestion des contacts dans milieux granulaires.

Chapitre 2

Gestion du contact

Ce chapitre a pour objectif de présenter la manière dont les contacts piéton-piéton et piéton-obstacle sont gérés dans le modèle proposé. Seront détaillés dans ce chapitre :

- ⋆ *La détection du contact*
- ⋆ *Le traitement du contact*
- ⋆ *La comparaison de plusieurs approches permettant de gérer le contact*

PLAN DU CHAPITRE 2

2.1 Introduction 59
2.2 Mouvement des particules 61
2.3 La détection du contact 62
2.4 Traitement du contact 65
2.4.1 *DEM* 65
2.4.2 *NSM*1 66
2.4.3 *NSM*2 67
2.5 Aspects numériques des trois approches 70
2.5.1 *DEM* 71
2.5.2 *NSM*1 72
2.5.3 *NSM*2 72
2.6 Comparaison des trois approches 74
2.6.1 *NSM*1 vs *NSM*2 74
2.6.2 *DEM* vs *NSM*2 77
2.7 Synthèse du chapitre 78

2.1 Introduction

Le but de ce chapitre est d'expliquer la manière dont sont gérés les contacts piéton-piéton et piéton-obstacle dans le modèle de foule proposé. Dans la mesure où nous cherchons à réaliser un modèle 2D discret de mouvement de foule de niveau opérationel, nous nous sommes inspirés des modèles existants de la littérature de cette catégorie qui sont, de notre point de vue, les plus interessants : le modèle de force social de Helbing [2] qui reste simple d'utilisation et flexible, et le modèle mathématique de Venel [10] qui contrairement au modèle de Helbing, permet de modéliser efficacement les évacuations denses de piétons. Ces modèles étant des adaptations à la foule de modèles gérant le mouvement de grains, nous avons étudié certains modèles issus des milieux granulaires.

Un milieu granulaire est par définition un ensemble discret de particules qui interagissent par contacts avec ou sans frottement et avec ou sans cohésion. Les particules peuvent être de taille plus ou moins grande et de forme plus ou moins complexe. Pour étudier ces milieux, de nombreuses méthodes dynamiques de simulations de l'évolution de systèmes de solides parfaitement rigides ont été développées depuis plusieurs décennies. Les méthodes les plus performantes sont celles qui traitent simultanément les collisions multiples. Ces méthodes sont appelées "Discrete Element Methods". Elles consistent à suivre individuellement chaque particule et lorsqu'un contact interparticulaire se produit, une loi de comportement locale détermine les mouvements résultants des particules impliquées. Ces méthodes peuvent être classées en deux catégories : les méthodes régulières, dites "smooth", et les non-régulières dites "non-smooth".

Pour les méthodes régulières, des approximations régularisantes sont utilisées. Le calcul des forces de contact qui empêchent l'interpénétration se fait par un calcul direct, i.e. les forces sont proportionnelles à la distance entre les particules. L'utilisation de ces lois de répulsion raides conduit à une légère interpénétration numérique des particules, et oblige à garder un pas de temps petit pour assurer la stabilité du schéma d'intégration temporel. Deux méthodes "smooth" sont le plus utilisées : la première est la méthode "Distinct Element Method" (DEM) développée dans les années 70 par P.A.Cundall pour l'étude de systèmes composés de rocs [54] puis pour les milieux granulaires [97]. Cette méthode a inspiré par la suite d'autres méthodes telle que la "Granular Element method" (GEM) de Kishino [98]. La seconde méthode "smooth" est la méthode de dynamique moléculaire (MD : Molecular Dynamics) [99]. Comme son nom l'indique, c'est une extension des méthodes permettant de modéliser le comportement des molécules aux particules macroscopiques.

En ce qui concerne les méthodes non-régulières, le calcul des forces de contact se fait par la résolution de systèmes locaux non-linéaires. La non-régularité de la méthode se retrouve dans trois aspects : une non-linéarité spatiale à cause de la condition géométrique de non interpénétration (utilisation d'inégalités au lieu d'égalités), une non-linéarité temporelle due au chocs entre particules (discontinuités de vitesses) et une non-linéarité de la loi de contact de part l'utilisation de lois non-régulières pour lier les forces aux paramètres de configuration (contact unilatéral). La méthode la plus utilisée dans les simulations de milieux granulaires est la méthode de dynamique des contacts (NSCD : Non Smooth Contact Dynamics) développée par Moreau et Jean [100–104]. Ils introduisent la notion de pseudo-potentiel pour résoudre le problème de contact et utilisent la notion de coefficient de restitution pour gérer les rebonds entre particules. Une approche similaire basée sur la théorie des chocs a été proposée par Frémond [105–108], inspirée par les travaux de Moreau, où les particules peuvent être de forme polyédrique au lieu de circulaire. Les vitesses des particules après contact sont déterminées avec une contrainte sur les vitesses pour empêcher l'interpénétration des particules. Le système composé des particules est considéré comme déformable, ses équations de mouvement résultent du principe des travaux virtuels, et les lois de comportement sont données par un pseudo-potentiel de dissipation. Dans l'approche proposée par Frémond, le rebond est caractérisé par un coefficient de dissipation à la place d'un coefficient de restitution utilisé par Moreau. De nombreux comportements peuvent être décrits de cette manière, l'exception étant le frottement de Coulomb car le frottement ne relève pas d'un pseudo-potentiel. Ce type de problème est pourtant assez central lorsqu'on parle de contact. Cette limite s'explique par le fait que la théorie des collisions proposée par Frémond est seulement une déclinaison d'un cadre théorique bien plus large (qui couvre des problèmes tels que les changements de phase, l'endommagement, etc.). Toutefois, même le cas d'un frottement de type Coulomb peut être traité par la théorie proposée [108, 109]. Il convient de souligner que cette approche n'est pas la seule disponible dans la littérature, particulièrement lorsqu'on parle de frottement. En effet, à partir du concept de bipotentiel, De Saxcé [110, 111] a proposé une modélisation du contact unilatéral avec frottement qui abouti à un bipotentiel de contact. Cette formulation élargit le champ d'action du pseudo-potentiel tout en permettant de conserver les avantages d'une écriture de loi d'évolution à l'aide d'une fonction à variables scalaires et d'une loi de sous-normalité.
Une autre approche non régulière intéressante, inspirée par les travaux de Moreau, a été proposée par Maury [63]. Dans cette approche, les contacts sont traités par des collisions parfaitement inélastiques grâce à l'utilisation d'une contrainte sur la position des particules.

Nous retenons 3 de ces modèles. Helbing a appliqué l'approche régulière des éléments distincts (DEM) aux mouvements de foule [2, 7, 47]. La force de contact entre deux piétons en collision est proportionnelle à la distance d'interpénétration des piétons et le contact n'est jamais parfaitement inélastique.
Le modèle de foule mathématique de Venel [10] est inspiré de l'approche non régulière proposée par Maury [63], que l'on notera "$NSM1$". La force de contact entre deux piétons en collision est calculée avec une contrainte sur le positionnement des piétons pour qu'il n'y ait jamais de chevauchement entre eux, et le contact est parfaitement inélastique.
Nous avons décidé de proposer un modèle de foule dans lequel le frottement entre piétons n'est pas considéré. Ainsi nous avons choisi d'appliquer aux mouvements de foule l'approche non régulière proposée par Frémond [105–108], que l'on notera "$NSM2$". Cette approche a été préférée à la méthode de dynamique des contacts (NSCD) car il a été démontré que

l'utilisation du coefficient de restitution est appropriée pour gérer la collision de deux billes mais que son extension aux chocs multiples n'est pas nécessairement juste et nécessite des vérifications mécaniques et énergétiques [106]. La force de contact entre deux piétons en collision est calculée avec une contrainte sur la vitesse relative de déformation entre les piétons. Cette approche, qui permet de choisir le comportement des piétons en collision, est originale pour son adaptation aux mouvements de foule, et a fait l'objet de plusieurs publications [5, 112–114].

Dans la suite, nous présentons et comparons les trois approches existantes issues des milieux granulaires : DEM, $NSM1$ et $NSM2$. Trois étapes permettant de gérer les contacts seront étudiées pour chaque approche : la détection du contact, le traitement du contact et le mouvement des particules (Figure 2.1).

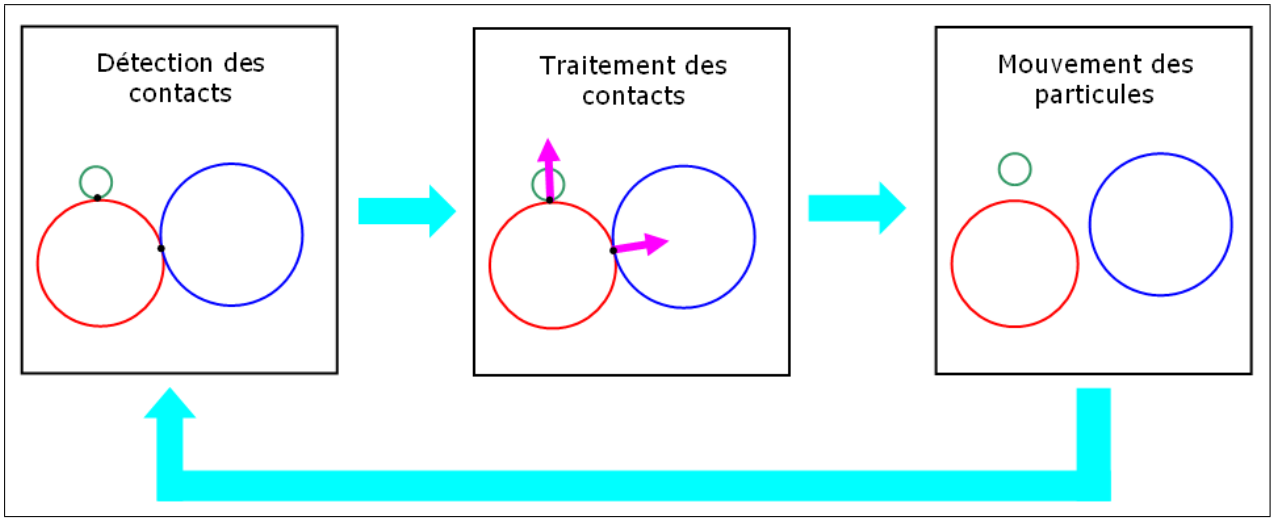


FIGURE 2.1 – Représentation des trois étapes permettant de gérer les contacts.

2.2 Mouvement des particules

Nous considérons un système constitué de N particules se déplaçant dans le plan. Nous notons ${}^t\underline{q}_i = (q_i^x, q_i^y) \in R^2$ et $\underline{\dot{u}}_i(t) = \frac{d\underline{q}_i(t)}{dt}$, respectivement la position et la vitesse du centre de la $i^{ème}$ particule. La rotation des particules est négligée (effets d'inertie négligés). Nous supposons que le vecteur de déplacement généralisé $\underline{q}$ de taille $2N$, ${}^t\underline{q} = ({}^t\underline{q}_1, {}^t\underline{q}_2, ..., {}^t\underline{q}_N)$, est suffisamment régulier pour nous permettre d'écrire l'équation de la dynamique pour chaque particule. Nous obtenons le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rl} \underline{\underline{M}}\ \underline{\ddot{u}}(t) & = \underline{f}(t) + \underline{g}(t) \\ \underline{\dot{q}}(t) & = \underline{\dot{u}}(t) \end{array} \right. \tag{2.1}$$

où $\underline{\underline{M}}$ est la matrice de masse des particules de taille $2N \times 2N$; $\underline{f}$ (resp. $\underline{g}$) est le vecteur de taille $2N$ des forces extérieures en l'absence de contact (resp. des forces de contact) appliquées au système.
Les trois approches s'appuient sur l'équation (2.1) mais en prenant toutes les trois des itinéraires différents pour déterminer le mouvement du système. L'équation (2.1) est discrétisée

en temps via un schéma d'intégration temporel. La détermination du mouvement des particules est liée au schéma d'intégration. Nous travaillons sur des intervalles de temps $[t^n, t^{n+1}]$, lorsque l'ensemble des forces est connu, nous cherchons à déterminer la position du système à l'instant t^{n+1}.

2.3 La détection du contact

Une méthode efficace de détection des contacts ou des proches voisins, dans un modèle 2D discret de mouvement de grains dans lequel les particules peuvent se déplacer continûment dans l'espace d'étude, est nécessaire quand le nombre de particules considérées est très grand, dans le but de réduire le temps de calcul numérique. Dans la suite, nous considérerons uniquement les interactions particule-particule dans la mesure où les interactions particule-obstacle sont gérées analogiquement.
Pour détecter les contacts entre particules, deux étapes sont à dissocier :

- la détermination des couples de particules susceptibles d'être en contact
- le calcul de la distance entre les deux particules

Cette seconde étape peut être plus ou moins complexe en fonction de la forme des particules modélisées. Les piétons étant représentés par des formes convexes, nous choisissons les particules de forme circulaire, de taille plus ou moins grande, pour deux raisons : d'une part, un disque représente assez bien un individu (vu de haut) et est une forme très simple ; d'autre part, d'un point de vue plus pratique, cette forme permet de réduire le coût de calcul des simulations numériques car elle permet de définir de façon simple certaines notions comme celle de normale à une particule par rapport à une autre ou encore de distance relative entre deux particules. Mais, il serait tout à fait envisageable de considérer d'autres représentations. Ainsi la distance relative D_{ij} entre les particules i et j, d'un système constitué de N particules se déplaçant dans le plan, est directement définie par :

$$D_{ij}(\underline{q}) = |\underline{q}_j - \underline{q}_i| - (r_i + r_j) \tag{2.2}$$

où r_i est le rayon de la particule i, et $|\underline{q}_j - \underline{q}_i| = \sqrt{\left(q_j^x - q_i^x\right)^2 + \left(q_j^y - q_i^y\right)^2}$
Il y a contact entre les particules i et j lorsque $D_{ij}(\underline{q}) = 0$, et un chevauchement lorsque $D_{ij}(\underline{q}) < 0$.
La difficulé est de proposer une méthode qui définisse la liste des contacts potentiels. Cette méthode doit être efficace pour ne pas consommer la majeure partie du temps de calcul. On trouve de nombreuses méthodes [21, 115–117] robustes, apparaissant souvent comme des extensions de celles présentées ci-dessous. Certaines possèdent des versions parallèles permettant de bénéficier des super-calculateurs [118]. Les différents algorithmes de détection ne seront pas détaillés ici même si ceux-ci sont d'un très grand intérêt.
Nous présentons quelques méthodes de détection du contact dans la suite.

Test de tous les contacts possibles :

La première idée est de tester tous les contacts possibles (Figure 2.2). Evidemment, cette méthode est la plus grossière car pour un système de N particules, il faudrait tester $\frac{N(N-1)}{2}$ couples de particules, soit un nombre d'opération de l'ordre de $O(N^2)$. Par exemple, quand le nombre de particules considérées est très grand, de l'ordre de 10^4 particules ou

plus, il faudrait calculer au minimun 49995000 distances à chaque pas de temps du schéma d'intégration, ce qui pourrait devenir très coûteux en temps de calcul.

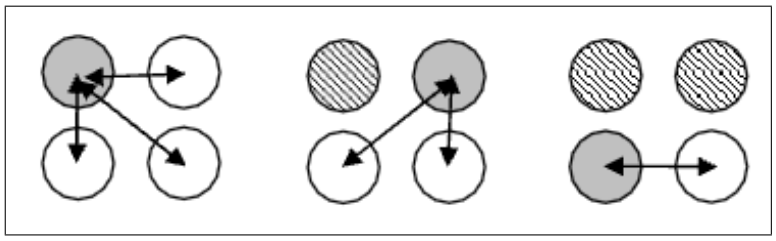


FIGURE 2.2 – Test de tous les contacts possibles [20].

Triangulation de Delaunay [118, 119] :

Cette méthode consiste à réaliser un maillage triangulaire entre les centres des corps du système, nous permettant ainsi d'obtenir directement la liste des arêtes correspondant aux contacts potentiels (Figure 2.3). Les contacts sont alors recherchés en calculant la distance relative entre les particules en contact potentiel.

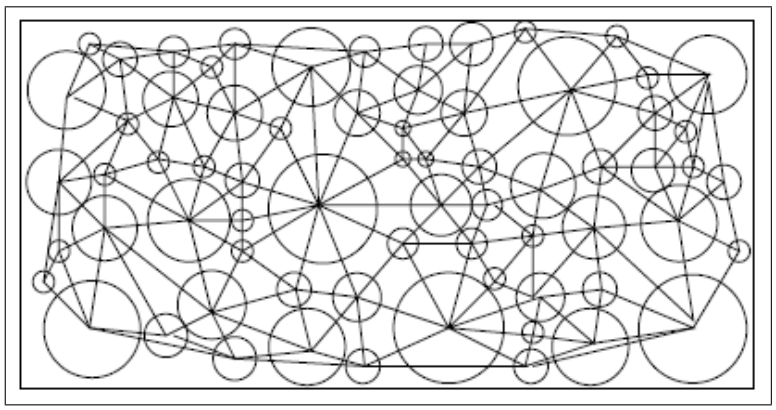


FIGURE 2.3 – Triangulation de Delaunay.

Linked Cell Method (LCM) ou Boîtes de Manhattan [20, 120] :

Cette méthode consiste à découper l'espace d'évolution des particules en boîtes de mêmes tailles, en fonction de la taille des particules (Figure 2.4). Les particules sont ensuite réparties dans les boîtes correspondantes. Les contacts, entre les particules d'une même boîte, ainsi qu'entre les particules appartenant aux boîtes adjacentes, sont recherchés en calculant la distance relative entre particules. Suivant l'ordre de parcours des boîtes, toutes les boîtes adjacentes ne sont pas parcourues car des détections entre boîtes ont déjà pu être faites, ce qui permet de limiter le nombre de tests effectués. Cette méthode est plus adaptée aux systèmes composés de particules de tailles équivalentes. Dans une configuration optimale, le nombre d'opérations nécessaires pour trouver les contacts potentiels est de l'ordre de $O(N)$.

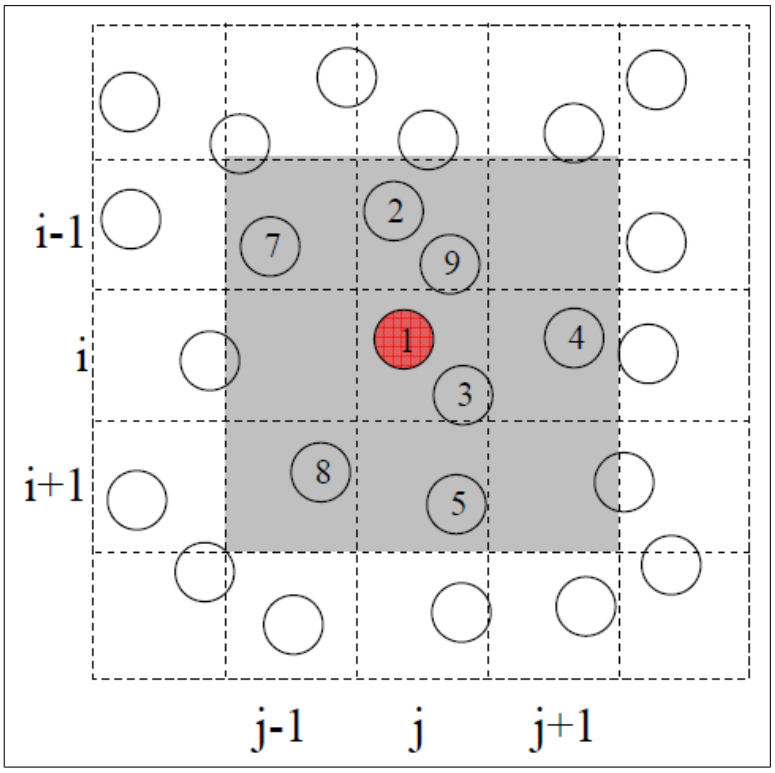


FIGURE 2.4 – Boîtes de Manhattan [20].

Verlet Neighbour List (VNL) [21, 99] :

Le principe de la méthode est de dessiner un cercle imaginaire autour de chaque particule du système puis de créer une liste des particules voisines se trouvant dans le cercle (Figure 2.5). Les distances relatives entre particules sont alors calculées. L'extension optimale de la zone circulaire autour des particules dépend de leur vitesse et de la densité de l'ensemble du système. La création de la liste de voisins nécessite $\frac{N(N-1)}{2}$ calculs, soit un nombre d'opérations de l'ordre de $O(N^2)$. Cette méthode est donc plus adaptée pour les systèmes quasi-statiques dans lesquels la liste n'est pas actualisée tous les pas de temps. La fréquence d'actualisation dépend de la densité du système, de la vitesse des particules et du rayon des cercles imaginaires.

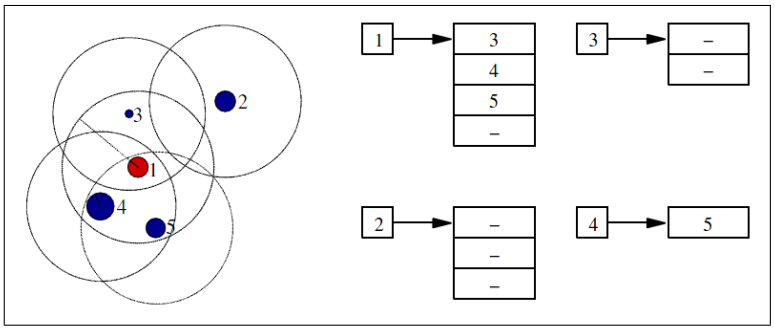


FIGURE 2.5 – VNL - Cercles imaginaires et stockage des particules dans des listes [21].

Linked Linear List (LLL) ou Sweep and Prune [20, 21, 121, 122] :

Cette méthode fonctionne en trois étapes. La première consiste à créer des boîtes rectangulaires englobants parfaitement chaque particule, et ayant les côtés alignés parallèlement à un système d'axe. Dans la seconde étape, les boîtes sont projetées séparement sur le système d'axe. Enfin, pour les boîtes ayant leur projections se chevauchant sur les deux axes, un contact potentiel est déterminé (Figure 2.6). Cette méthode est difficile à implémenter,

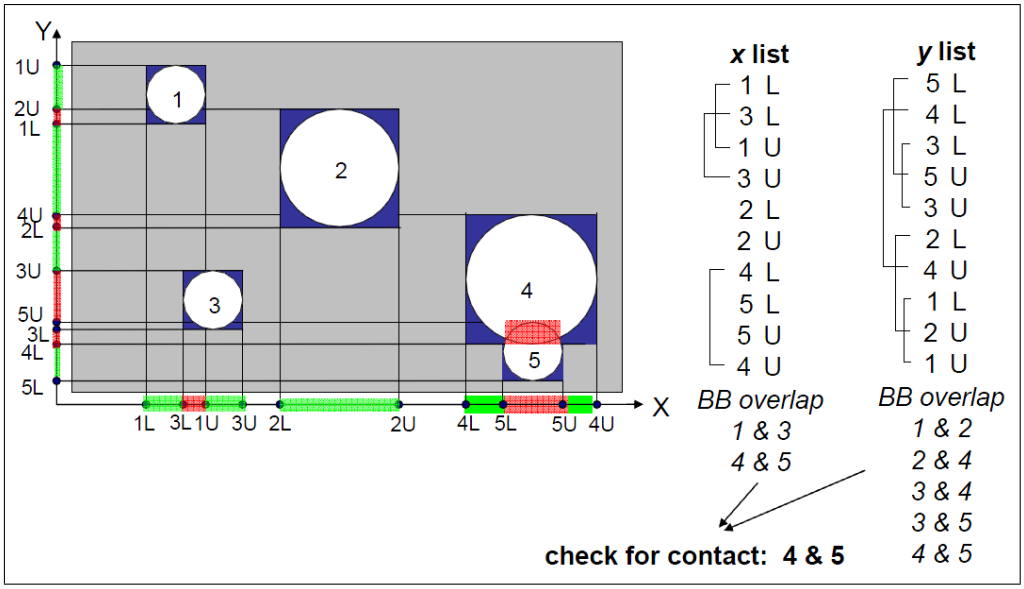


FIGURE 2.6 – LLL - Visualisation des boîtes englobantes, de leur projections sur le système d'axes, de la recherche du chevauchement des projections sur les axes, et de la détermination des contacts potentiels [20].

mais dans une configuration optimale [20], le nombre d'opérations nécessaires pour trouver les contacts potentiels est de l'ordre de $O(N)$. Cette méthode est bien adaptée aux systèmes composés de particules de tailles très différentes.

Conclusion :

Les performances de ces méthodes sont comparées dans [21,119]. Les méthodes des boîtes de Manhattan et de triangulation de Delaunay sont performantes. Nous avons retenu la méthode de triangulation de Delaunay pour cette thèse.

2.4 Traitement du contact

Nous présentons la manière dont est traité le contact dans les trois approches DEM, $NSM1$ et $NSM2$.

2.4.1 DEM

Dans cette approche régulière introduite par P.A.Cundall dans les années 70 [54,97], le contact est traité par l'utilisation de forces régulières. L'expression de la force de répulsion

représentant l'interaction locale due au contact entre les particules i et j, appliquée sur la $i^{ème}$ particule, est donnée par :

$$\underline{g}_{ij}(t) = k \min\left(0, D_{ij}(\underline{q}(t))\right) \underline{e}_{ij}(t) \tag{2.3}$$

où k est une constante de raideur et $\underline{e}_{ij} = \frac{\underline{q}_j - \underline{q}_i}{|\underline{q}_j - \underline{q}_i|}$ est le vecteur directeur unitaire dirigé de la particule i vers la particule j. La valeur numérique de k, choisie par Helbing [2] pour ses simulations de foule, est $1.2 \times 10^5\ kg.s^{-2}$.
Avec cette approche, l'interpénétration des particules est nécessaire pour contrôler le contact. S'il n'y a pas d'interpénétration entre deux particules i et j ($D_{ij}(\underline{q}) \geq 0$), alors $\underline{g}_{ij} = \underline{0}$.
La force de contact totale appliquée sur la $i^{ème}$ particule est :

$$\underline{g}_i(t) = \sum_{j=1}^{N} \underline{g}_{ij}(t) \ . \tag{2.4}$$

2.4.2 $NSM1$

Cette approche [63] est une approche d'interactions granulaires dans laquelle les contacts entre les grains circulaires sont des collisions parfaitement inélastiques. Son adaptation aux autres types de collisions (inélastique ou élastique) n'est pas évidente [63]. Les positions des particules doivent être toujours admissibles, i.e. qu'il ne doit jamais y avoir de chevauchement entre les grains. A l'instant de la collision, il y a une discontinuité de la vitesse $\underline{\dot{u}}$. La vitesse après choc $\underline{\dot{u}}^+$ est alors déterminée pour que les positions des particules en collision soient possibles, i.e. $\underline{\dot{u}}^+$ a une signification "géométrique" plus que "physique".

Les vitesses des particules après contact $\underline{\dot{u}}^+$ doivent appartenir à l'ensemble des vitesses admissibles définit par :

$$C_{\underline{q}} = \left\{\underline{\dot{v}} \in R^{2N} : \forall i < j, \ \ {}^t\underline{G}_{ij}(\underline{q})\underline{\dot{v}} \geq 0 \text{ dès que } D_{ij}(\underline{q}) = 0\right\} \tag{2.5}$$

$$\begin{aligned} \text{où} \quad {}^t\underline{G}_{ij}(\underline{q}) &= \nabla D_{ij}(\underline{q}) \\ &= \big(0, ..., 0, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{particule } i}}{-\,{}^t\underline{e}_{ij}}, 0, ..., 0, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{particule } j}}{{}^t\underline{e}_{ij}}, 0, ..., 0\big) \in R^{2N} \ . \end{aligned} \tag{2.6}$$

Ainsi, comme le chevauchement est interdit en vertu de la condition ${}^t\underline{G}_{ij}(\underline{q})\underline{\dot{u}}^+ \geq 0$, deux particules i et j déjà en contact peuvent seulement augmenter ou préserver leur distance relative. Le cône polaire $N_{\underline{q}}$ de $C_{\underline{q}}$ est introduit [63, 123] :

$$\begin{aligned} N_{\underline{q}} &= \left\{\underline{\dot{w}} \in R^{2N}, \ \ {}^t\underline{\dot{w}}\ \underline{\dot{v}} \leq 0 \quad \forall \underline{\dot{v}} \in C_{\underline{q}}\right\} \\ &= \left\{ -\sum_{i<j} \mu_{ij}\underline{G}_{ij}(\underline{q}), \ \ \mu_{ij} = 0 \text{ si } D_{ij}(\underline{q}) > 0, \ \mu_{ij} \in R^+ \text{ si } D_{ij}(\underline{q}) = 0 \right\} \ . \end{aligned} \tag{2.7}$$

Le système (2.1) est réécrit dans cette approche à l'aide d'une inclusion différentielle :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{M}}\ \underline{\ddot{u}} + N_{\underline{q}} \ni \underline{f} \\ \underline{\dot{u}}^+ = P_{C_{\underline{q}}}\underline{\dot{u}}^- \end{array} \right. \tag{2.8}$$

où $P_{C_{\underline{q}}}$ est la projection euclidienne sur le cône convexe fermé $C_{\underline{q}}$. L'existence d'une solution à ce problème a été étudiée dans [124, 125].
Quand il n'y a pas de contact, la première équation de (2.8) se lit comme l'équation différentielle ordinaire $\underline{\underline{M}}\ \underline{\ddot{u}} = \underline{f}$. Quand un contact est détecté, cette équation peut être lue comme : $\exists \underline{g} \in -N_{\underline{q}}$ tel que $\underline{\underline{M}}\ \underline{\ddot{u}} = \underline{f} + \underline{g}$ où l'expression de la force de contact totale est $\underline{g} = \sum_{1 \leq i < j \leq N} \mu_{ij} \underline{G_{ij}}(\underline{q})$. La seconde équation de (2.8) donne le modèle de collision. $\underline{\dot{u}}^+$ est alors définie comme la projection euclidienne de la vitesse avant choc $\underline{\dot{u}}^-$ sur l'ensemble $C_{\underline{q}}$. Ce modèle conduit à résoudre le problème de minimisation sous contrainte suivant :

$$\underline{\dot{u}}^+ = \underset{\underline{\dot{v}} \in C_{\underline{q}}}{\arg\min} \left[\frac{1}{2} \| \underline{\dot{v}} - \underline{\dot{u}}^- \|^2_{\underline{\underline{M}}} \right] \tag{2.9}$$

où $\|\underline{\dot{X}}\|^2_M = {}^t\underline{\dot{X}}\ \underline{\underline{M}}\ \underline{\dot{X}}$. La détection du contact est ici prise en compte dans la contrainte. Ce qui explique pourquoi la condition de non-interpénétration entre les particules est toujours respectée (voir Figure 2.7).

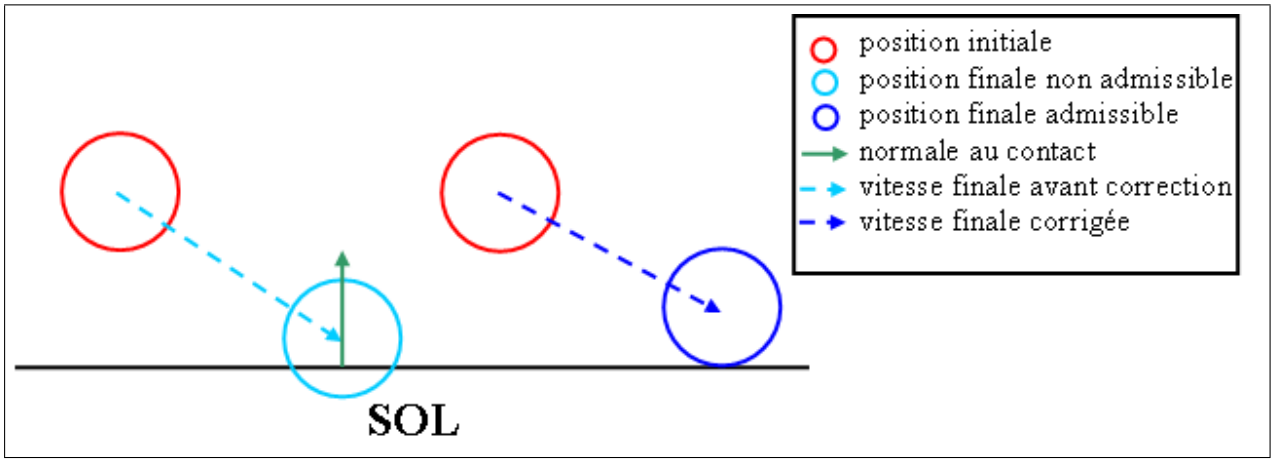


FIGURE 2.7 – Vitesse après contact toujours corrigée pour que la position de la particule soit admissible.

.

2.4.3 *NSM2*

NSM2 est une approche originale basée sur la théorie des collisions des corps rigides proposée par Frémond [105, 106] dans un cadre thermodynamique rigoureux, et inspirée des travaux de Moreau [126]. Les collisions entre particules peuvent être parfaitement inélastiques, inélastiques ou élastiques. Des forces de friction peuvent être considérées [108]. La description du comportement d'une collection de corps discrets est basée sur la considération que le système global est déformable même si les particules sont rigides. Les aspects numériques ont ensuite été proposés dans [107, 108].
Considérons l'ensemble des N particules comme un système déformable composé de solides rigides. Nous introduisons $\underline{\Delta_{ij}}(\underline{\dot{u}}(t))$, la vitesse de déformation locale (vitesse relative) entre les $i^{ème}$ et $j^{ème}$ particules en contact au point $A_{i,j}$:

$$\underline{\Delta_{ij}}(\underline{\dot{u}}(t)) = \underline{\dot{u}_i}(G_i) + \underline{\dot{\Omega}_i} \wedge \underline{G_i A_{i,j}} - \left(\underline{\dot{u}_j}(G_j) + \underline{\dot{\Omega}_j} \wedge \underline{G_j A_{i,j}} \right) \tag{2.10}$$

où G_i est le centre de masse de la particule i, et $\underline{\dot{\Omega}}_i$ sa vitesse angulaire.
La rotation des particules étant négligée (effets d'inertie négligés), l'équation (2.10) devient :

$$\begin{aligned} \underline{\Delta}_{ij}(\underline{\dot{u}}(t)) &= \underline{\dot{u}}_i(G_i) - \underline{\dot{u}}_j(G_j) \\ &= \underline{\dot{u}}_i(t) - \underline{\dot{u}}_j(t) \ . \end{aligned} \tag{2.11}$$

La description de l'évolution du système multi-particules doit être réalisée aussi bien pendant l'évolution régulière que pendant l'évolution non-régulière des particules, à savoir à l'instant de la collision. La discontinuité de la vitesse des particules à l'instant de la collision ne permet pas de résoudre l'équation régulière de mouvement classique car la vitesse n'est pas différentiable. Le système (2.1) est réécrit dans cette approche :

$$\begin{cases} \underline{\underline{M}}\ \underline{\ddot{u}}(t) = -\underline{f}^{int}(t) + \underline{f}^{ext}(t) & \text{presque partout} \\ \underline{\underline{M}}\ (\underline{\dot{u}}^+(t) - \underline{\dot{u}}^-(t)) = -\underline{p}^{int}(t) + \underline{p}^{ext}(t) & \text{partout} \end{cases} \tag{2.12}$$

où $\underline{f}^{ext}$ (resp. $\underline{f}^{int}$) est le vecteur de dimension $2N$ des forces extérieures (resp. forces intérieures) appliquées au système. Une solution à ce système existe [106, 108, 127].
La première équation du système (2.12), qui décrit l'évolution régulière du système multi-particules, est appliquée presque partout, excepté à l'instant de la collision où elle est remplacée par la seconde. Quand le contact est détecté, les vitesses des particules en collision sont discontinues, et nous introduisons dans la seconde équation de (2.12) des percussions intérieures $\underline{p}^{int}$ et des percussions extérieures $\underline{p}^{ext}$ au système. Par définition, ces percussions ont la dimension d'une force multipliée par un temps. Les percussions intérieures $\underline{p}^{int}$ sont des inconnues du problème. Des lois de comportement sont utilisées pour décrire les différents comportements collisionnels des différentes particules et assurer leur non interpénétration lors d'une collision. Afin de distinguer ces deux aspects, les percussions intérieures sont divisées en deux parties, les percussions dissipatives $\underline{p}^d$ qui prennent en compte les interactions dissipatives entre les particules qui collisionnent, et les percussions réactives $\underline{p}^r$ qui comprennent les forces de réaction qui empêchent l'interpénétration entre particules : $\underline{p}^{int} = \underline{p}^d + \underline{p}^r$. Frémond a montré dans [105,106] que ces percussions intérieures sont définies en dualité avec la vitesse de déformation à l'instant du choc $\underline{\Delta}\left(\frac{\underline{\dot{u}}^+ + \underline{\dot{u}}^-}{2}\right)$, au sens du travail des efforts intérieurs. Il utilise la notion de pseudo-potentiel de dissipation, qui est une fonction positive, convexe et nulle à l'origine [128], pour définir les percussions intérieures. Les percussions dissipatives $\underline{p}^d$ sont définies par :

$$\underline{p}^d \in \partial\Phi^d\left(\frac{\underline{\dot{u}}^+ + \underline{\dot{u}}^-}{2}\right) \tag{2.13}$$

où l'opérateur ∂ est le sous différentiel qui généralise la dérivée pour les fonctions convexes [106] (voir C), et Φ^d est le pseudo-potentiel de dissipation qui permet de définir les percussions intérieures dissipatives.

Les percussions réactives $\underline{p}^r$ sont les réactions à la condition de non-interpénétration qui s'écrit : ${}^t\underline{\dot{u}}^+\ \underline{N} \geq 0$, où $\underline{\mathrm{N}}$ est la normale sortante au contact. $\underline{p}^r$ sont nulles lorsque ${}^t\underline{\dot{u}}^+\ \underline{N} > 0$, sont actives lorsque ${}^t\underline{\dot{u}}^+\ \underline{N} = 0$ et empêchent que la solution de l'équation du choc vérifie ${}^t\underline{\dot{u}}^+\ \underline{N} < 0$.
Ainsi nous pouvons écrire [106, 109] :

$$\underline{p}^r \in \partial\Phi^r\left(\frac{\underline{\dot{u}}^+ + \underline{\dot{u}}^-}{2}\right) \tag{2.14}$$

où Φ^r est le pseudo-potentiel de dissipation qui permet de définir les percussions intérieures réactives. Il est défini par $\Phi^r = I_K(\frac{{}^t\underline{\dot{u}}^+ + {}^t\underline{\dot{u}}^-}{2}\underline{N})$, où K est l'ensemble convexe $K = \left[\frac{{}^t\underline{\dot{u}}^-\underline{N}}{2}, +\infty\right[$ et I_K est son indicatrice.
Nous pouvons donc exprimer la percussion intérieure sous la forme d'un seul pseudo-potentiel :

$$\underline{p}^{int} \in \partial\Phi\left(\frac{\underline{\dot{u}}^+ + \underline{\dot{u}}^-}{2}\right) \tag{2.15}$$

avec $\Phi = \Phi^d + \Phi^r$.
Dans la seconde équation du système (2.12), pour déterminer $\underline{\dot{u}}^+$, il faut résoudre le problème de minimisation sous contraintes suivant :

$$\underline{\dot{X}} = \underset{\underline{\dot{Y}} \in \mathbf{R}^{2N}}{\arg\min} \left[{}^t\underline{\dot{Y}}\ \underline{\underline{M}}\ \underline{\dot{Y}} + \Phi(\underline{\Delta}(\underline{\dot{Y}})) - {}^t(2\underline{\dot{u}}^- + \underline{\underline{M}}^{-1}\underline{p}^{ext})\underline{\underline{M}}\ \underline{\dot{Y}}\right] \tag{2.16}$$

où la solution $\underline{\dot{X}} = \frac{\underline{\dot{u}}^+ + \underline{\dot{u}}^-}{2}$.
Dans cette approche, la vitesse d'une particule après contact ($\underline{\dot{u}}^+$) a une signification physique. Une démonstration de l'existence et de l'unicité des vitesses après la collision simultanée de plusieurs solides rigides, ainsi que de la dissipativité de la collision, est faite dans [105–108].

Loi de comportement

Pour contrôler le comportement après contact de particules en collisions, une loi de comportement doit être établie pour définir Φ^d [106, 129]. Le pseudo-potentiel Φ^d permet de choisir un type de collision : parfaitement inélastique, inélastique ou élastique. Pendant la collision, les percussions intérieures ont des composantes normale et tangentielle. Pour le cas des piétons, nous choisissons la même loi de comportement pour exprimer les deux composantes. Ainsi, pour déterminer la percussion intérieure normale, la loi de comportement suivante peut être choisie [129] :

$$p_N^{int,d}(\dot{z}) \in \partial\Phi^d(\dot{z}) = K_N \dot{z}|\dot{z}|^{p-2} \text{ pour } p > 1 \text{ avec } \Phi^d(\dot{z}) = \frac{K_N}{p}|\dot{z}|^p \tag{2.17}$$

où K_N est le coefficient de dissipation pour la composante normale de la percussion.
L'influence de p sur le comportement après contact des particules est étudié sur un exemple de collision entre une particule circulaire rigide et le sol (plan). La particule tombe sur le sol avec une vitesse avant contact $\dot{u}^-$. La Figure 2.8 représente le graphe de la vitesse normale après contact $\dot{u}_N^+$, calculée avec l'équation (2.16), en fonction de la vitesse normale avant contact $\dot{u}_N^-$ pour différentes valeurs de p. Des résultats similaires à ceux obtenus par Cholet [129] sont trouvés avec $\dot{z} = \underline{\Delta}\left(\underline{\dot{Y}}_N\right) = \underline{\Delta}\left(\frac{\underline{\dot{u}}_N^+ + \underline{\dot{u}}_N^-}{2}\right)$ et $K_N = 4m$.
Le choix de $p = 2$, i.e. un pseudo-potentiel quadratique, permet de redonner les résultats classiques du coefficient de restitution de Newton. Les autres choix de Φ^d [106, 109, 129] permettent d'obtenir une large variété de comportements après contact [106, 129].
Pour $p < 2$, le choc peut être modélisé avec écrasement, i.e. il y a rebond quand la valeur de $\dot{u}_N^-$ est petite et contact maintenu quand cette valeur est grande.
Pour $p > 2$, le choc peut être modélisé avec adhésion, i.e. il y a contact maitenu quand la valeur de $\dot{u}_N^-$ est en dessous d'une valeur critique et rebond quand la valeur de $\dot{u}_N^-$ augmente.

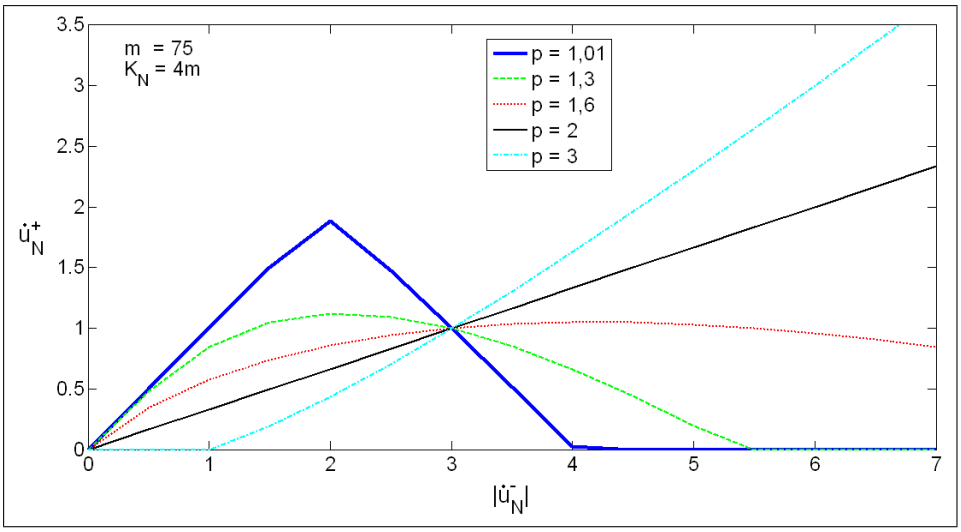


FIGURE 2.8 – Vitesse normale après contact $\dot{u}_N^+$ en fonction de la valeur absolue de la vitesse normale avant contact $\dot{u}_N^-$ pour différentes valeurs de p, avec $m = 75\ kg$ et $K_N = 4m$.

Dans la suite, le pseudo-potentiel quadratique est préféré pour utiliser une loi constitutive linéaire :

$$\Phi^d(\underline{q}, \underline{\dot{Y}}) = \sum_{1 \leq i < j \leq N} \frac{1}{2} K_T \left({}^t\underline{\Delta}_{ij}(\underline{\dot{Y}})\ {}^{\perp}\underline{e}_{ji} \right)^2 + \frac{1}{2} K_N \left({}^t\underline{\Delta}_{ij}(\underline{\dot{Y}}) \underline{e}_{ji} \right)^2 \tag{2.18}$$

où $\underline{e}_{ji}$ est la normale au contact ; ${}^{\perp}\underline{e}_{ji}$ est la tangente au contact ; K_T est le coefficient de dissipation pour la composante tangentielle de la percussion. K_N reflète la nature inélastique des collisions entre les particules et K_T peut être associé aux effets de type visqueux. K_T est pris égal à zéro dans la suite. Pour déterminer la valeur de K_N pour les simulations numériques, la vitesse normale après contact $\dot{u}_N^+$ est déterminée et tracée en fonction de la valeur absolue de la vitesse normale avant contact $\dot{u}_N^-$, pour plusieurs valeurs de K_N (Figure 2.9). Une valeur infinie de K_N correspond au cas d'une loi de collision parfaitement élastique [106]. En pratique, pour les valeurs de $K_N > 10^4\ kg$, nous constatons que les courbes se superposent. Ainsi, une valeur de $K_N = 10^5\ kg$ est suffisante pour nos simulations [5].

2.5 Aspects numériques des trois approches

La difficulté liée à la résolution numérique des trois approches porte sur le fait que plusieurs collisions peuvent se produire en même temps. Deux types de méthodes permettent de résoudre les problèmes exposés. Celles du premier type sont les méthodes gérées par les évènements (*event-driven methods*). Elles consistent à identifier l'instant de la prochaine collision, à faire avancer le système jusqu'à cet instant, et à calculer les vitesses des particules après contact. Ces méthodes deviennent rapidement inefficaces numériquement lorsque le nombre de particules augmente. Le second type de méthodes porte sur l'approche proposée par Moreau et Jean [102, 130], dite de *time-stepping*. Dans ce cas, le pas de temps ne dépend pas des évènements, et l'ensemble des forces de contact du système est déterminé de manière itérative. C'est cette deuxième option que nous avons retenu.
L'intervalle de temps $[0, T]$ est discrétisé en N_{int} intervalles réguliers $[t^n, t^{n+1}]$ de longueur $h = \frac{T}{N_{int}}$. Soit $\underline{q}^0 = \underline{q}(0)$ et $\underline{\dot{u}}^0 = \underline{\dot{u}}(0)$ respectivement les positions et vitesses initiales des

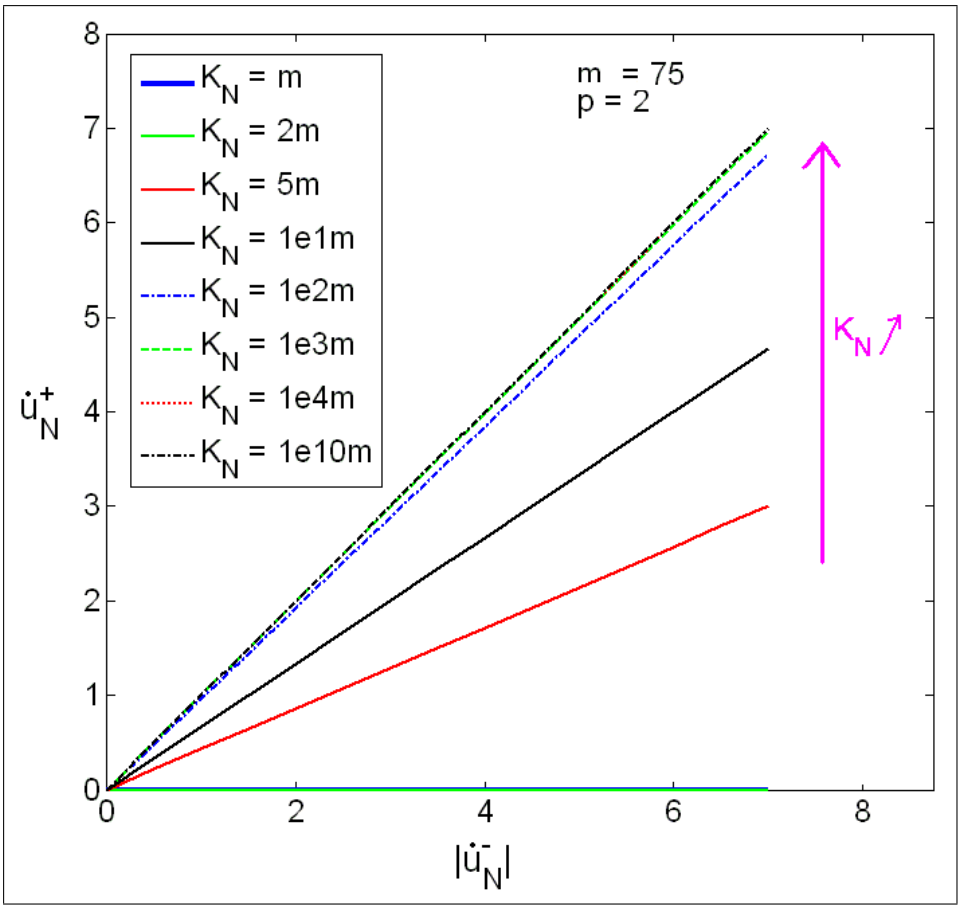


FIGURE 2.9 – Vitesse normale après contact $\dot{u}_N^+$ en fonction de la valeur absolue de la vitesse normale avant contact $\dot{u}_N^-$ pour différentes valeurs de K_N, avec $m = 75\ kg$ et $p = 2$.

particules.
Connaissant $\underline{q}^n$ et $\underline{\dot{u}}^n$ au temps t^n, nous devons déterminer $\underline{q}^{n+1}$ et $\underline{\dot{u}}^{n+1}$ au temps t^{n+1} pour chaque approche.

2.5.1 *DEM*

Les positions et les vitesses des particules sont données par le schéma explicite suivant :

$$\begin{cases} \underline{\dot{u}}^{n+1} & = \underline{\dot{u}}^n + h\underline{\underline{M}}^{-1}(\underline{f}^n + \underline{g}^n) \\ \underline{q}^{n+1} & = \underline{q}^n + h\underline{\dot{u}}^{n+1} \end{cases} \tag{2.19}$$

où $\underline{f}^n$ est le vecteur des forces extérieures en l'absence de contact (ou forces à distance) et $\underline{g}^n$ est le vecteur des forces de contact à l'instant t^n (Equation (2.1)). A partir des équations (2.4) et (2.3), la force de contact appliquée sur la particule i à l'instant t^n peut être exprimée par :

$$\underline{g}_i^n = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} k \min(0, D_{ij}(\underline{q}^n))\underline{e}_{ij}^n \ . \tag{2.20}$$

Le choix du pas de temps h est essentiel car le chevauchement entre les particules en dépend [5, 54], et par suite la stabilité du schéma d'intégration.

2.5.2 $NSM1$

La position des particules à l'instant t^{n+1} est donnée par l'équation :

$$\underline{q}^{n+1} = \underline{q}^n + h\underline{\dot{u}}^{n+1} \tag{2.21}$$

$\underline{\dot{u}}^{n+1}$ doit être trouvée tel que $D_{ij}(\underline{q}^{n+1}) \geq 0$.
Comme D_{ij} est convexe, la relation suivante peut être établie :

$$D_{ij}(\underline{q}^{n+1}) = D_{ij}(\underline{q}^n + h\underline{\dot{u}}^{n+1}) \geq D_{ij}(\underline{q}^n) + h\ {}^t\underline{G}_{ij}(\underline{q}^n)\underline{\dot{u}}^{n+1} \geq 0 \tag{2.22}$$

$D_{ij}(\underline{q}^n)$ est une condition sur les distances. ${}^t\underline{G}_{ij}(\underline{q}^n)\underline{\dot{u}}^{n+1}$ est une condition sur les vitesses. Elles sont liées par l'approximation de $D_{ij}(\underline{q}^{n+1})$ donnée par l'équation (2.22).
On cherche donc $\underline{\dot{u}}^{n+1}$ tel que l'approximation de la distance finale entre chaque couple de particules $D_{ij}(\underline{q}^n) + h\underline{G}_{ij}(\underline{q}^n)\underline{\dot{u}}^{n+1}$ soit positive ou nulle.

Pour calculer $\underline{\dot{u}}^{n+1}$, il faut résoudre le problème de minimisation sous contraintes suivant :

$$\underline{\dot{u}}^{n+1} = \underset{\underline{\dot{v}}^{n+1} \in R^{2N}}{\arg\min} \left[\frac{1}{2}\|\underline{\dot{v}}^{n+1} - \underline{\dot{V}}_{trial}\|^2_{\underline{\underline{M}}} - \sum_{1\leq i<j\leq N} \mu_{ij}^{n+1}(D_{ij}(\underline{q}^n) + h\ {}^t\underline{G}_{ij}(\underline{q}^n)\underline{\dot{v}}^{n+1}) \right]$$
$$\text{avec } \underline{\dot{V}}_{trial} = \underline{\dot{u}}^n + h\underline{\underline{M}}^{-1}\underline{f}^n \tag{2.23}$$

où μ_{ij}^{n+1} est un multiplicateur de Lagrange et a la dimension d'une force ; μ_{ij}^{n+1} et $\underline{\dot{u}}^{n+1}$ vérifient les inégalités de Kuhn-Tucker :

$$\begin{cases} \mu_{ij}^{n+1} & \geq 0 \\ D_{ij}(\underline{q}^n) + h\ {}^t\underline{G}_{ij}(\underline{q}^n)\underline{\dot{u}}^{n+1} & \geq 0 \\ \mu_{ij}^{n+1}\left(D_{ij}(\underline{q}^n) + h\ {}^t\underline{G}_{ij}(\underline{q}^n)\underline{\dot{u}}^{n+1}\right) & = 0\ . \end{cases} \tag{2.24}$$

Ce problème est résolu en utilisant l'algorithme d'Uzawa classique (voir A). La convergence du schéma (2.21), (2.23), (2.24) est prouvée dans [124]. La loi de collision inélastique est implicitement contenue dans la contrainte de minimisation. La contrainte affecte les positions des particules à la fin du pas de temps considéré ; les vitesses finales $\underline{\dot{u}}^{n+1}$ sont telles que les positions sont admissibles.
Les expressions de $\underline{\dot{u}}^{n+1}$ et μ_{ij}^{n+1} sont liées par :

$$\underline{\underline{M}}\ \underline{\dot{u}}^{n+1} = \underline{\underline{M}}\ \underline{\dot{u}}^n + h\underline{f}^n + h\sum_{1\leq i<j\leq N} \mu_{ij}^{n+1}\underline{G}_{ij}(\underline{q}^n) \tag{2.25}$$

quand μ_{ij}^{n+1} et $\underline{\dot{u}}^{n+1}$ satisfont les conditions de Kuhn-Tucker (2.24).

2.5.3 $NSM2$

Sur chaque intervalle de temps $[t^n, t^{n+1}]$, les forces extérieures régulières sont atomisées, i.e. remplacées par des percussions appliquées à l'instant $\theta^n = t^n + \frac{h}{2}$, et toutes les forces non-régulières, ou les percussions appliquées durant les collisions, sont appliquées sur le système à l'instant θ^n. Les percussions exercées aux instants θ^n sont les percussions résultant de l'atomisation des efforts réguliers qui s'exercent pendant $[t^n, t^{n+1}]$ ainsi que les percussions dues aux collisions survenant pendant $[t^n, t^{n+1}]$. Il en découle que les vitesses sont discontinues aux instants θ^n où des percussions sont exercées et qu'elles sont constantes partout ailleurs.

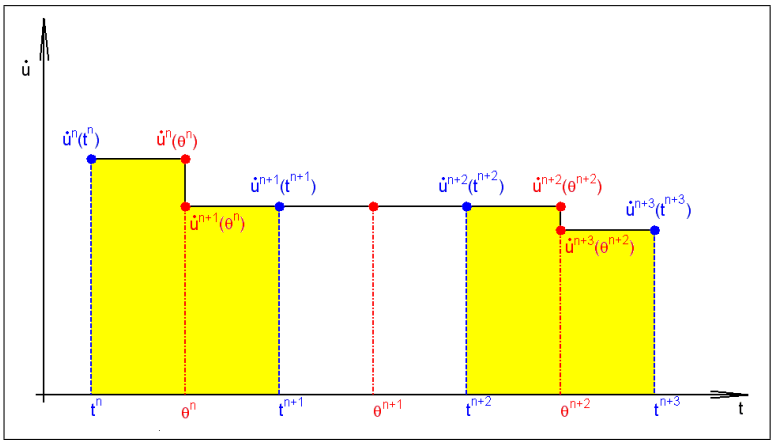


FIGURE 2.10 – Exemple de la representation de la vitesse de la $i^{ème}$ particule. Les intervalles de temps en jaune sont ceux où il y a un contact et\ou une force extérieure régulière non nulle appliquée sur la $i^{ème}$ particule ; on y trouve une discontinuité de la vitesse.

La fonction $\underline{\dot{u}}^n(t)$ est une fonction en escalier qui subit des discontinuités aux instants θ^n (Figure 2.10). L'équation régissant une discontinuité sur $[t^n, t^{n+1}]$ est :

$$\underline{\dot{u}}^{n+1}(\theta^n) - \underline{\dot{u}}^n(\theta^n) = \underline{\underline{M}}^{-1}\left(-\underline{p}^{int}(\tfrac{\underline{\Delta}(\underline{\dot{u}}^{n+1}(\theta^n))+\underline{\Delta}(\underline{\dot{u}}^n(\theta^n))}{2}) + \underline{p}^{ext}(\theta^n)\right) . \tag{2.26}$$

Soit $\underline{\dot{X}}^{n+1} = \frac{\underline{\dot{u}}^{n+1}(\theta^n)+\underline{\dot{u}}^n(\theta^n)}{2}$. L'équation (2.26) devient :

$$2\underline{\dot{X}}^{n+1} + \underline{\underline{M}}^{-1}\underline{p}^{int}(\underline{\Delta}(\underline{\dot{X}}^{n+1})) = 2\underline{\dot{u}}^n(\theta^n) + \underline{\underline{M}}^{-1}\underline{p}^{ext}(\theta^n) . \tag{2.27}$$

D'après les équations (2.16) et (2.27), l'obtention de $\underline{\dot{X}}^{n+1}$ s'effectue part la résolution d'un problème de minimisation sous contrainte :

$$\underline{\dot{X}}^{n+1} = \underset{\underline{\dot{Y}}^{n+1} \in \mathbf{R}^{2N}}{\arg\min} \left[{}^t\underline{\dot{Y}}^{n+1}\underline{\underline{M}}\,\underline{\dot{Y}}^{n+1} + \Phi(\underline{q}^n, \underline{\Delta}(\underline{\dot{Y}}^{n+1})) - {}^t(2\underline{\dot{u}}^n(\theta^n) + \underline{\underline{M}}^{-1}\underline{p}^{ext}(\theta^n))\underline{\underline{M}}\,\underline{\dot{Y}}^{n+1}\right] \tag{2.28}$$

avec $\underline{\dot{Y}}^{n+1} = \frac{\underline{\dot{u}}^{n+1}(\theta^n)+\underline{\dot{u}}^n(\theta^n)}{2}$.

La loi constitutive utilisée est la loi linéaire correspondant au pseudo-potentiel quadratique :

$$\Phi^d(\underline{q}^n, \underline{\Delta}(\underline{\dot{Y}}^{n+1})) = \sum_{1\le i<j\le N} \tfrac{1}{2} K_N \left({}^t\underline{\Delta}_{ij}(\underline{\dot{Y}}^{n+1})\underline{e}^n_{ji}\right)^2 . \tag{2.29}$$

La contrainte qui doit être vérifiée quand il a un contact entre deux particules i et j, est l'inégalité suivante :

$$-\,{}^t\underline{\Delta}_{ij}(\underline{\dot{Y}}^{n+1})\underline{e}^n_{ji} + {}^t\underline{\Delta}_{ij}(\frac{\underline{\dot{u}}^n(\theta^n)}{2})\underline{e}^n_{ji} \le 0 . \tag{2.30}$$

Ainsi

$$\Phi^r(\underline{q}^n, \underline{\Delta}(\underline{\dot{Y}}^{n+1})) = \sum_{1\le i<j\le N} \mu^{n+1}_{ij}\left[-\,{}^t\underline{\Delta}_{ij}(\underline{\dot{Y}}^{n+1})\underline{e}^n_{ji} + {}^t\underline{\Delta}_{ij}(\frac{\underline{\dot{u}}^n(\theta^n)}{2})\underline{e}^n_{ji}\right] \tag{2.31}$$

où μ_{ij}^{n+1} est un multiplicateur de lagrange et a la dimension d'une percussion ; μ_{ij}^{n+1} et $\underline{\dot{u}}^{n+1}$ satisfont les conditions de Kuhn-Tucker :

$$\left\{\begin{array}{rl} \mu_{ij}^{n+1} & \geq 0 \\ {}^t\underline{\Delta}_{ij}(\underline{\dot{Y}}^{n+1})\underline{e}_{ji}^n - {}^t\underline{\Delta}_{ij}(\frac{\underline{\dot{u}}^n(\theta^n)}{2})\underline{e}_{ji}^n & \geq 0 \\ \mu_{ij}^{n+1}\left[{}^t\underline{\Delta}_{ij}(\underline{\dot{Y}}^{n+1})\underline{e}_{ji}^n - {}^t\underline{\Delta}_{ij}(\frac{\underline{\dot{u}}^n(\theta^n)}{2})\underline{e}_{ji}^n\right] & = 0\ . \end{array}\right. \tag{2.32}$$

Le problème de minimisation (2.28) est résolu en utilisant l'algorithme d'Uzawa classique [106, 108, 109, 131] (voir A). La convergence du schéma numérique a été prouvée dans [109] pour le cas d'une loi de Coulomb.
Les vitesses et positions en fin de pas de temps sont :

$$\left\{\begin{array}{rl} \underline{\dot{u}}^{n+1}(\theta^n) & = \underline{\dot{u}}^{n+1}(\theta^{n+1}) = 2\underline{\dot{X}}^{n+1} - \underline{\dot{u}}^n(\theta^n) \\ \underline{q}^{n+1} & = \underline{q}^n + h\frac{\underline{\dot{u}}^{n+1}(\theta^n)+\underline{\dot{u}}^n(\theta^n)}{2}\ . \end{array}\right. \tag{2.33}$$

2.6 Comparaison des trois approches

Après avoir présenté les schémas numériques des approches étudiées, nous allons mettre en évidence leurs points communs et différences. Les approches n'étant pas adaptées aux mêmes types de collision, nous comparerons $NSM1$-$NSM2$ puis DEM-$NSM2$.

2.6.1 $NSM1$ vs $NSM2$

Dans cette partie, les deux approches non-régulières $NSM1$ et $NSM2$ sont comparées. Ces approches semblent différentes lorsqu'on examine leurs problèmes de minimisation sous contraintes (2.23) et (2.28) respectifs. Pourtant, ils peuvent être réécrits sous une forme identique à celle de la plasticité en faisant quelques hypothèses et simplifications. Rappelons le problème de minimisation dans le cas de la plasticité [132] :

$$\begin{array}{rcl} \underline{\underline{\sigma}}^{n+1} & = & \underset{\underline{\underline{\sigma}}}{\arg\min}\left[\frac{1}{2}\|\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}_{trial}\|^2_{\underline{\underline{\underline{C}}}^{-1}} + \Delta\lambda f(\underline{\underline{\sigma}})\right] \\ \text{avec} & \underline{\underline{\sigma}}_{trial} = \underline{\underline{\sigma}}^n + \underline{\underline{\underline{C}}} : \Delta\underline{\underline{\varepsilon}} & \end{array} \tag{2.34}$$

où $\|\underline{\underline{X}}\|^2_{\underline{\underline{\underline{C}}}^{-1}} = {}^t\underline{\underline{X}} : \underline{\underline{\underline{C}}}^{-1} : \underline{\underline{X}}$; $\underline{\underline{\underline{C}}}$ est le tenseur élastique ; $\Delta\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\varepsilon}}^{n+1} - \underline{\underline{\varepsilon}}^n$ est l'incrément de déformation totale ; $\Delta\lambda$ est le multiplicateur de plasticité ; $f(\underline{\underline{\sigma}})$ est le domaine élastique ; $\Delta\lambda$ et $\underline{\underline{\sigma}}$ satisfont les inégalités :

$$\left\{\begin{array}{rl} f(\underline{\underline{\sigma}}^{n+1}) & \leq 0 \\ \Delta\lambda & \geq 0 \\ \Delta\lambda f(\underline{\underline{\sigma}}^{n+1}) & = 0\ . \end{array}\right. \tag{2.35}$$

En d'autres termes, après simplifications, les problèmes de minimisation obtenus avec $NSM1$ et $NSM2$ peuvent aussi être résolus en utilisant des algorithmes connus de résolution proposés (par exemple dans [132]).
Le problème de minimisation (2.23) obtenu avec $NSM1$ est déjà exprimé sous la forme recherchée. Pour écrire l'équation (2.28) avec le même formalisme que les équations (2.34) et

(2.23), seules les collisions parfaitement inélastiques doivent être considérées, comme dans l'approche $NSM1$. Nous choisissons $K_T = K_N = 0$, ainsi l'équation (2.28) devient (voir D) :

$$\underline{\dot{u}}^{n+1} = \underset{\underline{\dot{v}}^{n+1} \in R^{2N}}{\arg\min} \left[\frac{1}{2} \|\underline{\dot{v}}^{n+1}(\theta^n) - \underline{\dot{V}}_{trial}\|^2_{\underline{\underline{M}}} - \sum_{1 \le i < j \le N} \mu_{ij}^{n+1} \, {}^t\underline{G}_{ij}(\underline{q}^n) \underline{\dot{v}}^{n+1}(\theta^n) \right] \quad (2.36)$$
$$\text{avec} \quad \underline{\dot{V}}_{trial} = \underline{\dot{u}}^n(\theta^n) + \underline{\underline{M}}^{-1} \underline{p}^{ext}(\theta_n) \ .$$

En conséquence, avec $K_N = K_T = 0$, les expressions de $\underline{\dot{u}}^{n+1}$ et de μ_{ij}^{n+1} sont liées par :

$$\underline{\underline{M}} \ \underline{\dot{u}}^{n+1}(\theta^n) = \underline{\underline{M}} \ \underline{\dot{u}}^n(\theta^n) + \underline{p}^{ext}(\theta^n) + \sum_{1 \le i < j \le N} \mu_{ij}^{n+1} \underline{G}_{ij}(\underline{q}^n) \quad (2.37)$$

avec μ_{ij}^{n+1} et $\underline{\dot{u}}^{n+1}$ satisfaisant les conditions de Kuhn-Tucker (2.32).

En introduisant $\underline{\mu}^{n+1}$ le vecteur de taille $N_{contact} \times 1$ où chaque ligne contient un multiplicateur de Lagrange μ_{ij}^{n+1}, et $\underline{\underline{G}}^n$ la matrice de taille $N_{contact} \times 2N$ où chaque ligne contient un vecteur ${}^t\underline{G}_{ij}(\underline{q}^n)$ et où $N_{contact}$ est le nombre de contacts détectés à chaque instant, les expressions (2.25) et (2.37) peuvent être respectivement réécrites :

$$\underline{\underline{M}} \ \underline{\dot{u}}^{n+1} = \underline{\underline{M}} \ \underline{\dot{u}}^n + h\underline{f}^n + h \ {}^t\underline{\underline{G}}^n \underline{\mu}^{n+1} \quad (2.38)$$

et

$$\underline{\underline{M}} \ \underline{\dot{u}}^{n+1}(\theta^n) = \underline{\underline{M}} \ \underline{\dot{u}}^n(\theta^n) + \underline{p}^{ext}(\theta^n) + \ {}^t\underline{\underline{G}}^n \underline{\mu}^{n+1} \ . \quad (2.39)$$

Les équations (2.38) et (2.39) ont des expressions similaires ; pourtant, le calcul du multiplicateur de lagrange μ_{ij}^{n+1} est différent. Pour $NSM1$, la contrainte est sur la position de la particule et dépend du pas de temps h, ainsi l'interpénétration entre particules est toujours évitée. La vitesse de la particule a une "signification géométrique" parce qu'elle est calculée à partir de la position précédemment déterminée. Par contre pour $NSM2$, la contrainte est sur la vitesse de la particule et est indépendante du pas de temps h, ainsi le chevauchement de particules est possible. La vitesse ici a une signification physique, et il est accepté que la position de la particule après un contact "viole" la condition de non interpénétration.
Le tableau 2.1 montre les analogies entre les problèmes de minimisation dans le cas de la plasticité, et lors de l'utilisation des approches $NSM1$ et $NSM2$ (Equations (2.34), (2.23) et (2.36)).
Nous pouvons illustrer sur un exemple les différences du traitement du contact pour les deux approches $NSM1$ et $NSM2$. Dans le plan xy, nous considérons une particule de rayon $r = 0.22 \ m$, de position initiale $\underline{q}_{initiale} =^t (0.5, 0.5)$ et de vitesse initiale $\underline{\dot{u}}_{initiale} =^t (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$. Le sol est délimité par $y \le 0$. On choisit $K_N = 0 \ kg$, $T = 0.8 \ s$ et $h = 10^{-2} \ s$. Aucune force extérieure est appliquée à la particule. La position dans le plan xy et la vitesse selon l'axe y de la particule après collision avec le sol, en fonction du temps, sont données pour les deux approches $NSM1$ et $NSM2$ dans la figure 2.11.
Considérant la trajectoire du centre de la particule dans le plan xy, les remarques faites à partir des équations (2.25) et (2.37), ainsi que la différence entre les équations (2.21) et (2.33), sont illustrées sur les figures 2.11b. et d. La figure 2.11b. (zoom d'une partie de la figure 2.11a.) montre qu'avec $NSM2$, une faible erreur numérique peut exister sur la position de la particule. En effet, nous avons choisi comme approximation numérique que, lorsqu'un contact existe, il est réalisé au milieu de l'intervalle de temps considéré. Dans le cas étudié,

	Plasticité	$NSM1$	$NSM2$
Variable inconnue	$\underline{\underline{\sigma}}^{n+1}$	$\underline{\dot{u}}^{n+1}$	$\underline{\dot{u}}^{n+1}(\theta^n)$
Valeur trial	$\underline{\underline{\sigma}}_{trial} = \underline{\underline{\sigma}}^n + \underline{\underline{\underline{C}}} : \Delta\underline{\underline{\varepsilon}}$	$\underline{\dot{V}}_{trial} = \underline{\dot{u}}^n + h\underline{\underline{M}}^{-1}\underline{f}^n$	$\underline{\dot{V}}_{trial} = \underline{\dot{u}}^n(\theta^n) + \underline{\underline{M}}^{-1}\underline{p}^{ext}(\theta^n)$
"action" extérieure	$\Delta\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\varepsilon}}^{n+1} - \underline{\underline{\varepsilon}}^n$	$h\underline{f}^n$	$\underline{p}^{ext}(\theta^n)$
Contrainte	$f(\underline{\underline{\sigma}}^{n+1}) \leq 0$	$D_{ij}(\underline{q}^n) + h\ {}^t\underline{G}_{ij}(\underline{q}^n)\underline{\dot{u}}^{n+1} \geq 0 \quad (m)$	${}^t\underline{G}_{ij}(\underline{q}^n)\underline{\dot{u}}^{n+1}(\theta^n) \geq 0 \quad (m.s^{-1})$
Multiplicateur de Lagrange	$\Delta\lambda$	$\mu_{ij}^{n+1} \quad (N)$	$\mu_{ij}^{n+1} \quad (N.s)$

TABLE 2.1 – Analogies entre les problèmes de minimisation dans le cas de la plasticité, et lors de l'utilisation des approches $NSM1$ et $NSM2$.

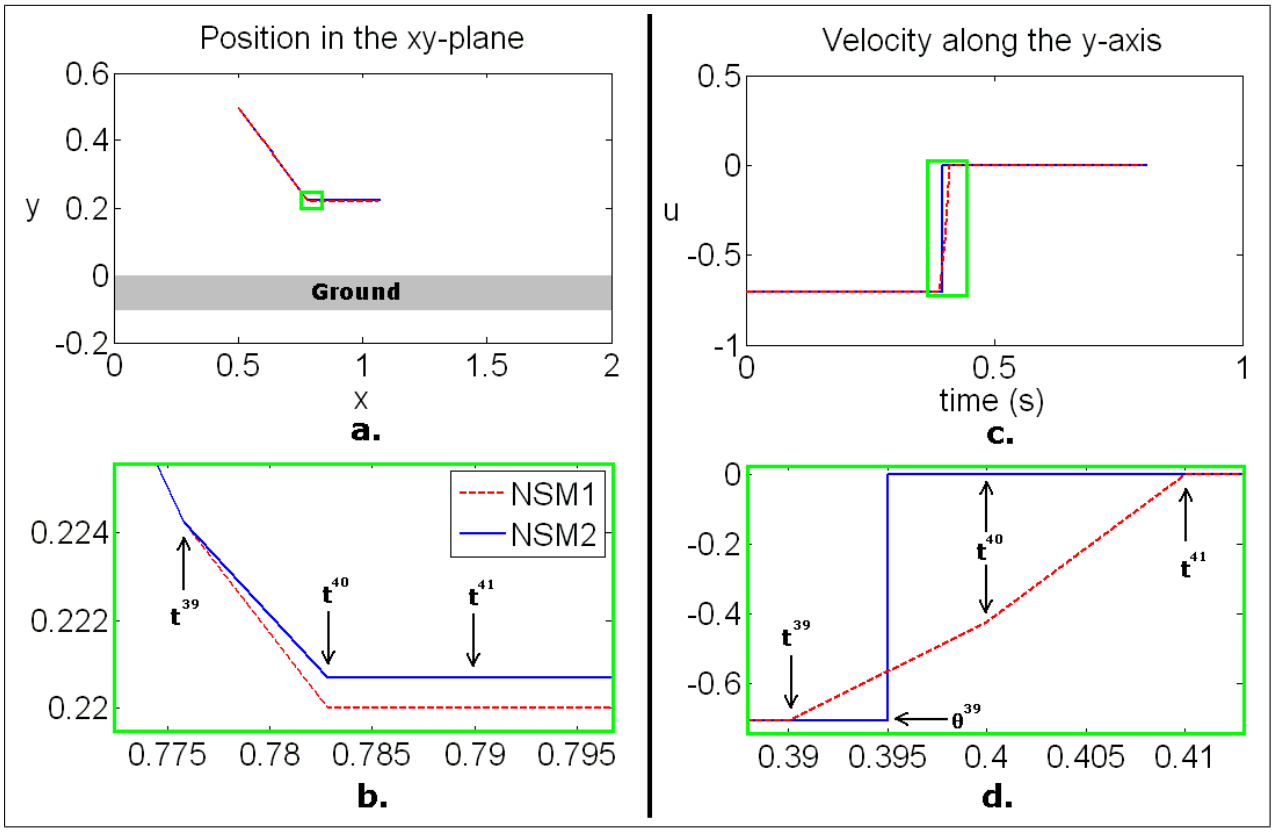


FIGURE 2.11 – Collision d'une particule avec le sol pour les approches $NSM1$ et $NSM2$. Les figures a. et b. représentent la trajectoire dans le plan xy du centre de la particule (de rayon $r = 0.22\ m$) après une collision avec le sol. Les figures c. et d. représentent l'évolution de la vitesse du centre de la particule selon l'axe y en fonction du temps. Les figures b. et d. sont des zooms des rectangles verts qui sont dessinés dans les figures a. et c. respectivement. Les résultats pour $NSM1$ sont les lignes de pointillés rouges et ceux pour $NSM2$ sont les lignes bleues ; le sol est en gris.

le collision a lieu dans l'intervalle $[t^{39}, t^{40}]$. Si l'instant réel de la collision est θ^{39}, le contact particule-sol est parfait, il se fait en un point, et donc le centre de la particule a pour ordonnée $0.22\ m$ (rayon de la particule) en t^{40}. Si l'instant réel de la collision est dans l'intervalle de temps $[t^{39}, \theta^{39}[$, une faible interpénétration numérique existe en t^{40}. Dans le cas présenté en figure 2.11b, l'instant réel de la collision a lieu dans l'intervalle $]\theta^{39}, t^{40}]$, et donc une erreur numérique ne permet pas à la particule d'être en contact avec le sol à partir de t^{40}. Avec $NSM1$, nous remarquons que la particule reste parfaitement en contact avec le sol à partir de t^{40}. La figure 2.11d. (zoom d'une partie de la figure 2.11c.) montre que quand le contact est détecté, une vitesse intermédiaire sans signification physique est trouvée avec le modèle $NSM1$ en t^{40}. On vérifie aussi que la discontinuité de vitesse, pour l'approche $NSM2$ est en θ^{39}.

2.6.2 DEM vs $NSM2$

Pour comparer les approches régulière DEM et non-régulière $NSM2$, qui permettent de gérer des collisions inélastiques, nous avons écrit les expressions de $\underline{\dot{u}}^{n+1}$ sous un même formalisme. Ainsi, pour l'approche DEM, l'expression recherchée est

$$\underline{\underline{M}}\ \underline{\dot{u}}^{n+1} \ = \underline{\underline{M}}\ \underline{\dot{u}}^{n} + h\underline{f}^{n} + h\underline{g}^{n} \text{ avec } \ \underline{g}_i^n = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} k \min(0, D_{ij}(\underline{q}^n))\underline{e}_{ij}^n \ , \tag{2.40}$$

et pour l'approche $NSM2$, elle est (voir D)

$$\left[\underline{\underline{M}} + \frac{1}{2}K_N\ {}^t\underline{\underline{G}}^n\underline{\underline{G}}^n\right]\underline{\dot{u}}^{n+1}(\theta^n) = \left[\underline{\underline{M}} - \frac{1}{2}K_N\ {}^t\underline{\underline{G}}^n\underline{\underline{G}}^n\right]\underline{\dot{u}}^{n}(\theta^n) + \underline{p}^{ext}(\theta^n) + \ {}^t\underline{\underline{G}}^n\underline{\mu}^{n+1} \ . \tag{2.41}$$

Nous remarquons dans l'équation (2.40), d'une part que l'interpénétration est nécessaire pour gérer le rebond, et d'autre part que les gestions de l'interpénétration et du rebond sont réalisées par le même terme $h\underline{g}^n$. Ainsi, il ne peut pas y avoir de contrôle sur le rebond sauf si la situation est quasi-statique. En revanche, dans l'équation (D.11) le terme ${}^t\underline{\underline{G}}^n\underline{\mu}^{n+1}$ permet de gérér la non-interpénétration des particules alors que les termes $\frac{1}{2}K_N\ {}^t\underline{\underline{G}}^n\underline{\underline{G}}^n$ permettent de gérer le type de collision choisie. Quand $K_N = 0$, nous retrouvons l'équation (2.39) permettant de gérer des collisions parfaitement inélastiques ; et quand $K_N \longrightarrow \infty$, nous retrouvons que la vitesse normale après contact est de même amplitude mais de direction opposée à la vitesse normale avant contact.

Sur le même exemple que précédemment, nous illustrons les différences du traitement du contact pour ces deux approches. Nous rappelons que la particule est dans le plan xy, son rayon est $r = 0.22\ m$, sa position initiale est $\underline{q}_{initial} =^t (0.5, 0.5)$ et sa vitesse initiale est $\underline{\dot{u}}_{initial} =^t (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$. Le sol est délimité par $y \leq 0$. On choisit $k = 1.2 \times 10^5\ kg.s^{-2}$ [2], $K_N = 10^4\ kg$, $T = 0.8\ s$ et $h = 10^{-2}\ s$. La position dans le plan xy et la vitesse selon l'axe y de la particule après collision avec le sol, en fonction du temps, sont données pour les deux approches DEM et $NSM2$ dans la figure 2.12. Nous remarquons sur la figure 2.12b. et de l'équation (2.33) que pour l'approche $NSM2$, la somme des vitesses normales avant et après contact se neutralisant pour la collision élastique, il n'y aura jamais d'interpénétration entre la particule et le plan. De plus, pour qu'il n'y ait pas de faible erreur numérique due au choix du pas de temps, i.e. un contact parfait entre le sol et la particule, il faudrait que le contact réel détecté dans l'intervalle $[t^{39}, t^{40}]$ ait lieu à l'instant t^{39}.

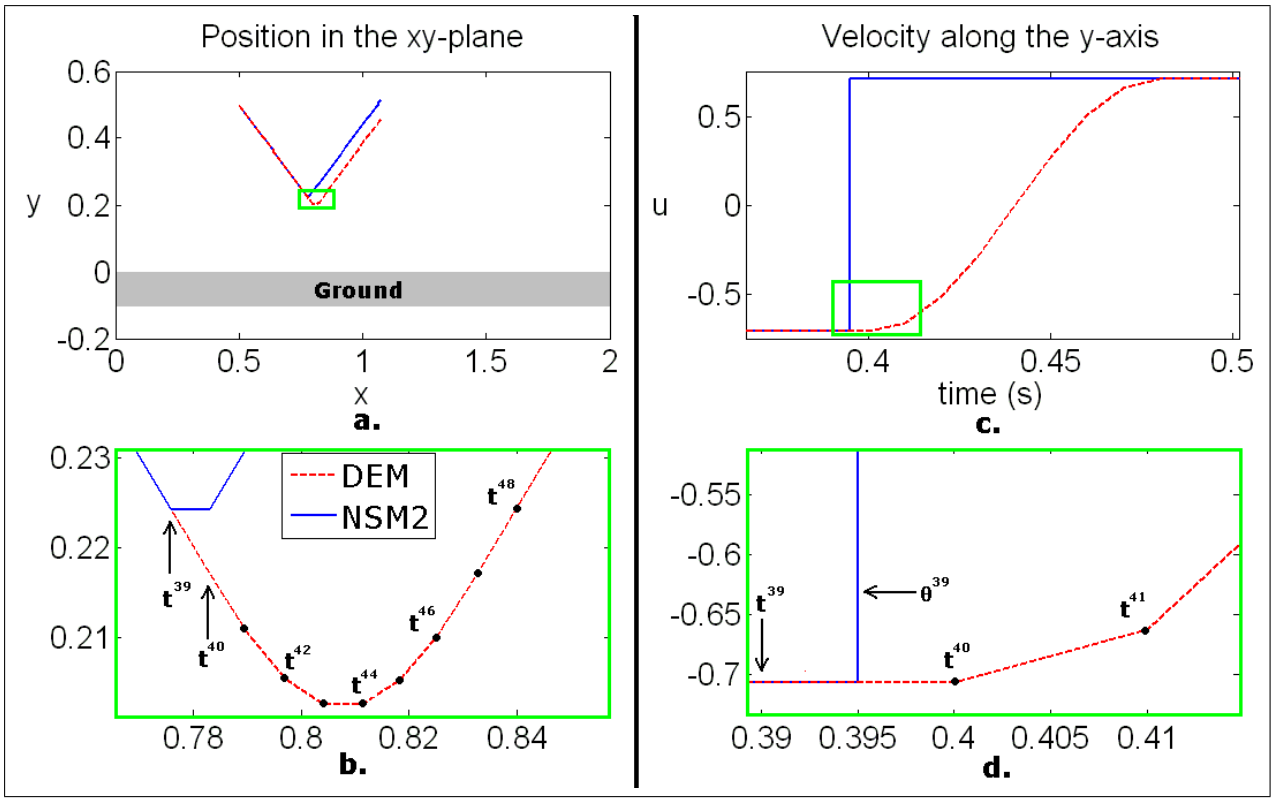


FIGURE 2.12 – Collision d'une particule avec le sol pour les approches DEM et $NSM2$. Les figures a. et b. représentent la trajectoire dans le plan xy du centre de la particule (de rayon $r = 0.22\ m$) après une collision avec le sol. Les figures c. et d. représentent l'évolution de la vitesse du centre de la particule selon l'axe y en fonction du temps. Les figures b. et d. sont des zooms des rectangles verts qui sont dessinés dans les figures a. et c. respectivement. Les résultats pour DEM sont les lignes de pointillés rouges et ceux pour $NSM2$ sont les lignes bleues ; le sol est en gris.

En ce qui concerne l'approche DEM, l'utilisation d'une force régularisante nécessite de nombreux pas de temps pour corriger l'interpénétration de la particule dans le sol avant d'obtenir le rebond élastique. La collision a lieu durant l'intervalle $[t^{39}, t^{40}]$ et il n'y a plus d'interpénétration dans l'intervalle $[t^{47}, t^{48}]$.

2.7 Synthèse du chapitre

Nous gérons les interactions piéton-piéton et piéton-obstacle en nous inspirant des milieux granulaires. La gestion de l'interaction particule-particule est présentée dans ce chapitre. Elle se décompose en trois étapes : la détection du contact, le traitement du contact et la gestion du mouvement des particules. Trois approches, une régulière et deux non-régulières, sont présentées théoriquement et numériquement. Pour les deux approches non-régulières, en faisant quelques hypothèses (collisions parfaitement inélastiques, etc.), le problème de contact est écrit avec le même formalisme que celui utilisé dans la plasticité. Les approches $NSM1$-$NSM2$ et DEM-$NSM2$ sont comparées entre elles sur des types de collision identiques. L'avantage majeur de l'approche $NSM2$ est qu'elle n'est pas limitée à un type de collision,

comme le sont DEM et $NSM1$.

Chapitre 3

Gestion du comportement des piétons

Ce chapitre a pour objectif de présenter la manière dont un comportement est affecté à chaque piéton :

⋆ *une "volonté" est donnée à chaque piéton*

⋆ *les interactions entre un piéton et son environnement proche sont gérées*

PLAN DU CHAPITRE 3

3.1 Introduction 83

3.2 Une volonté pour chaque piéton 83

3.2.1 Introduction de la vitesse souhaitée dans le modèle de mouvement de particule 83

3.2.2 La vitesse souhaitée 84

3.2.3 Influence du paramètre τ 86

3.3 Gestion des interactions avec l'environnement proche 86

3.3.1 Forces socio-psychologiques 87

3.3.2 Modélisation d'un sous-groupe 88

3.4 Synthèse du chapitre 96

3.1 Introduction

Nous avons vu dans le chapitre précédent qu'une approche de mouvement de particules rigides peut être utilisée pour gérer les contacts entre piétons et le mouvement des piétons. Dans ce chapitre, nous proposons une modélisation du comportement des piétons, publiée dans les articles [5, 113, 114]. Cette modélisation se fait en deux étapes : la première "nécessaire" permet de définir la stratégie de déplacement d'un piéton, comme s'il était seul dans un espace donné. Une "volonté" de se déplacer dans une direction particulière avec une allure spécifique à chaque instant est déterminée pour chaque piéton. La seconde étape permet à chaque piéton de gérer les interactions avec son environnement proche pour rendre son comportement plus réaliste.

3.2 Une volonté pour chaque piéton

Un piéton est représenté par une particule ayant une direction et une allure souhaitées. Dans la littérature, il existe trois méthodes pour donner une volonté au piéton : (i) l'utilisation de règles [6, 8, 34, 55–59] comme dans les modèles "rule-based" et d'automate cellulaire ; (ii) l'utilisation de forces [2, 4, 7, 9, 23, 35, 47–53, 60–62] comme dans les modèles de type force sociale et de choix discret ; ou (iii) l'utilisation directe d'une vitesse souhaitée [10] comme dans le modèle mathématique.
Nous avons décidé d'utiliser les deux dernières méthodes. La vitesse souhaitée, actualisée à chaque instant, permet de donner une volonté au piéton, et la force permet d'introduire cette vitesse souhaitée dans le modèle de mouvement de particule.

3.2.1 Introduction de la vitesse souhaitée dans le modèle de mouvement de particule

L'idée est d'introduire, dans le modèle de mouvement de particule, une force $\underline{f}^a(t)$ qui permet de donner une vitesse souhaitée aux piétons à chaque instant. Cette force ajoutée est une des composantes de la force intérieure $\underline{f}^{int}(t)$ présente dans l'équation (2.12) (ou f dans les équations (2.1) et (2.8)). Si c'est la seule composante, on peut noter : $\underline{f}^{int}(t) = \underline{f}^a(t)$ où $\underline{f}^a(t)$ est la force d'accélération intérieure introduite par Helbing [7]. Nous avons choisi d'utiliser cette force car elle décrit un comportement réaliste avec peu de paramètres utilisés. $\underline{f}^a(t)$ est la force motrice des piétons. Elle est nécessaire pour donner la trajectoire et l'allure désiré de chaque piéton. Chaque composante $\underline{f}^a_i(t)$ du vecteur force de dimension $2N$:

${}^t\underline{f}^a = ({}^t\underline{f}^a_1, {}^t\underline{f}^a_2, ..., {}^t\underline{f}^a_N)$, est associée au piéton i et a pour expression :

$$\underline{f}^a_i(t) = m_i \frac{\|\dot{\underline{u}}_{d,i}\|\underline{e}_{d,i}(t) - \dot{\underline{u}}_i(t)}{\tau_i} \tag{3.1}$$

où $\dot{\underline{u}}_{d,i}$ est la vitesse désirée du piéton i ; $\underline{e}_{d,i}$ est sa direction désirée ; $\dot{\underline{u}}_i$ est sa vitesse réelle ; τ_i est un temps de relaxation permettant au piéton i de retrouver sa vitesse désirée après un contact ou un changement soudain de direction pendant la marche. Plus la valeur de τ_i est petite, plus le piéton est "agressif" [2] et retrouve rapidement sa vitesse souhaitée lorsqu'elle est différente de sa vitesse réelle. Helbing a choisi $\tau = 0.5\ s$. Un exemple est illustré sur la figure 3.1, les trajectoires de deux piétons identiques i et j se déplaçant dans des directions opposées, après une collision, en fonction de différentes valeurs de τ, sont données.

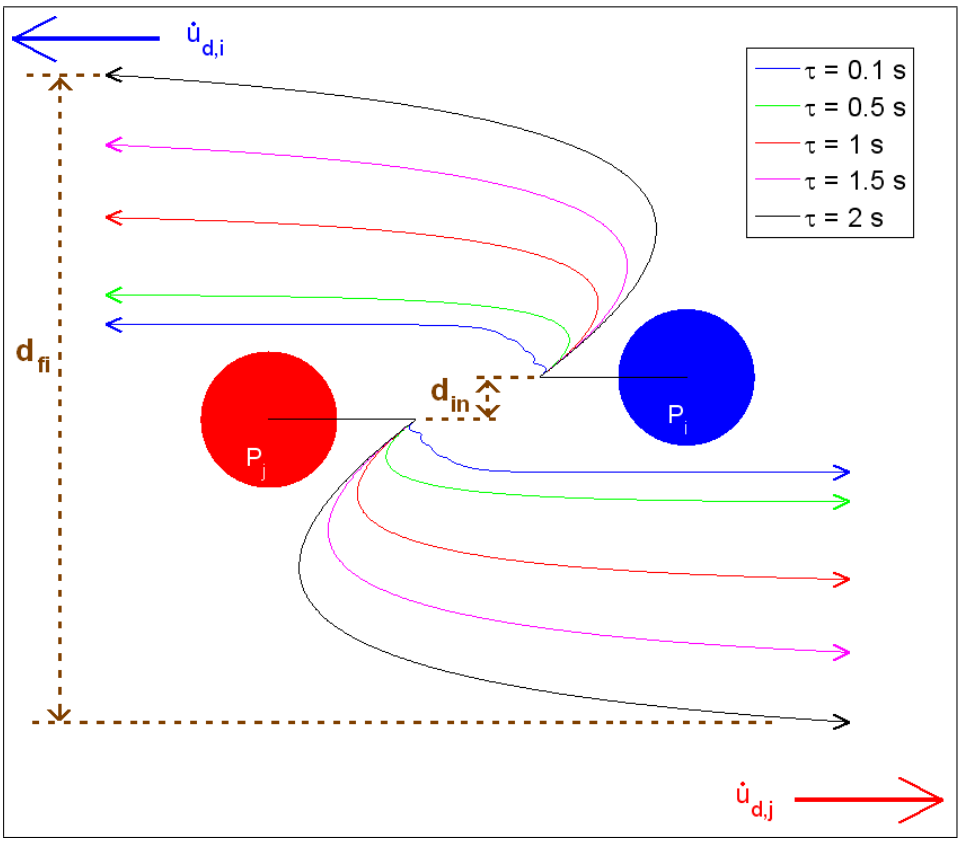


FIGURE 3.1 – Représentation des trajectoires de deux piétons identiques i et j se déplaçant dans des directions opposées, pour des valeurs différentes de τ. Après la collision, pour chaque piéton, la force d'accélération intérieure permet de modifier progressivement la vitesse réelle après le choc pour retrouver la vitesse souhaitée. La rapidité du changement de vitesse dépend des valeurs de τ_i et τ_j. Dans cet exemple, $\tau_i = \tau_j = \tau$.

3.2.2 La vitesse souhaitée

Les expressions de $\|\dot{\underline{u}}_{d,i}\|$ et $\underline{e}_{d,i}(t)$ doivent être déterminées pour trouver $\underline{f}^a_i(t)$.
L'amplitude $\|\dot{\underline{u}}_{d,i}\|$ de la vitesse souhaitée représente l'allure à laquelle le piéton i veut se mouvoir sur la structure considérée et peut être influencée par sa nervosité. En générale,

la vitesse est choisie dans une distribution normale de moyenne 1.34 $m.s^{-1}$ et d'écart type 0.26 $m.s^{-1}$ [38]. Elle peut aussi être définie en fonction de la longueur de pas souhaitée $L_{pas,0,i}$ du piéton i et de la fréquence angulaire latérale ω_i de sa marche libre souhaitée [31], par l'expression :

$$\|\underline{\dot{u}}_{d,i}\| = \frac{L_{pas,0,i}}{\pi}\omega_i \ . \tag{3.2}$$

Plusieurs définitions de la trajectoire souhaitée $\underline{e}_{d,i}(t)$ d'un piéton i peuvent être données : soit (i) la trajectoire la plus confortable pour lui, i.e. celle qui lui demande le moins d'effort (e.g. éviter les escaliers, etc.), et où il y a le moins de changement de direction possible, etc. ; ou (ii) la trajectoire du chemin le plus court ou (iii) celle du chemin le plus rapide pour se déplacer d'un lieu à un autre [133]. Il est possible de combiner plusieurs stratégies de déplacement dans la même simulation, ou de modifier la stratégie choisie pendant la simulation si nécessaire.
La stratégie du chemin le plus court pour joindre un point à un autre a été implémentée en utilisant un algorithme de Fast Marching [134] pour obtenir $\underline{e}_{d,i}$ (voir B). Cette direction dépend de l'espace d'évolution considéré (obstacles, etc.), du temps, et aussi des caractéristiques de l'individu (genre, âge, comportement pressé ou non, etc.). Elle est définie par : $\underline{e}_{d,i}(t) = \frac{\dot{u}_{d,i}(t)}{\|\underline{\dot{u}}_{d,i}\|}$.

La figure 3.2 illustre sur un exemple les distances géodésiques à la sortie d'une salle contenant un obstacle. Deux exemples de trajectoires les plus courtes sont tracées en fonction de la position initiale du piéton dans la salle.

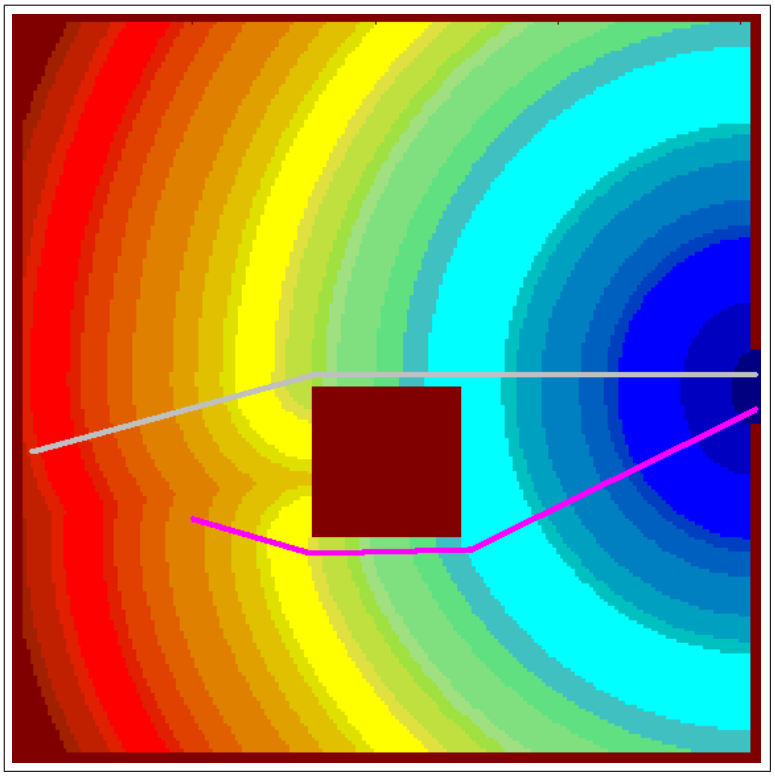


FIGURE 3.2 – Distances géodésiques à la sortie d'une salle contenant un obstacle - Deux exemples de trajectoires les plus courtes sont tracées.

3.2.3 Influence du paramètre τ

Les trajectoires de deux piétons se déplaçant dans des directions opposées, après collision, sont considérées. Une étude a été réalisée pour déterminer l'influence du temps de relaxation τ sur le temps t_{fi} nécessaire aux piétons pour retrouver leur trajectoire désirée après la collision, et sur la distance finale d_{fi} entre le centre des deux piétons après la collision (Figure 3.1).
Quand la distance initiale d_{in} entre les centres des piétons est petite, et que la valeur de τ reste faible ($< 0.5\ s$), plusieurs contacts peuvent avoir lieu parce que les piétons marchent "agressivement" et retrouvent leur vitesse souhaitée immédiatement après la dernière collision.
Quand la valeur de τ est supérieure à $0.5\ s$, il y a seulement une collision, et t_{fi} et d_{fi} augmentent linéairement en fonction de τ (Figure 3.3). L'observation des résultats obtenus

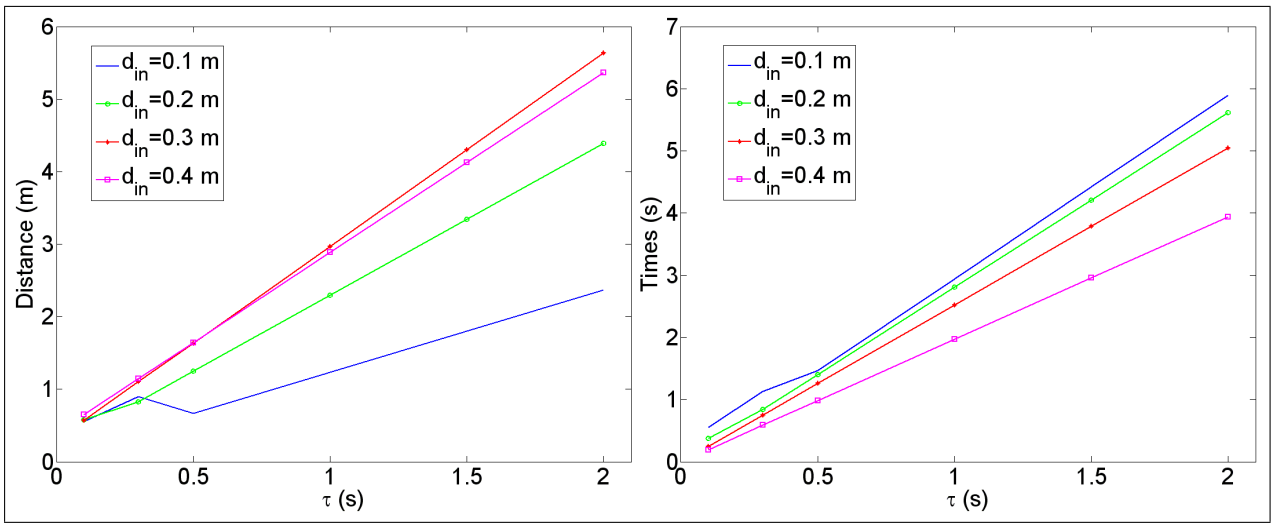


FIGURE 3.3 – a. d_{fi} en fonction de τ et d_{in} ; b. t_{fi} en fonction de τ et d_{in}. La vitesse des piétons est de $1.5\ m.s^{-1}$ et leurs rayons sont de $0.25\ m$.

après la collision entre deux piétons de rayons différents, mais de même vitesse (Figure 3.4), montre que le piéton le plus léger (rayon de $0.2\ m$) nécessite plus de temps après le contact pour retrouver sa trajectoire désirée que le piéton le plus lourd (rayon de $0.25\ m$). Quelques soient les conditions initiales, cette observation peut être réalisée car le contact entraîne une grande déviation de la trajectoire et de la vitesse du piéton le plus léger.

3.3 Gestion des interactions avec l'environnement proche

Pour rendre le comportement du piéton plus réaliste, ses interactions avec son environnement proche doivent être gérées. Dans la littérature, les modèles opérationnels présentent quatre types d'interactions à distance possibles : les interactions attractives [7,62] ; les interactions répulsives piéton-obstacle [2] ; les interactions répulsives piéton-piéton [2,23,50,62,135] ; et les interactions gérant les sous-groupes [22, 23].
Dans notre modèle de foule, les interactions attractives ne sont pas nécessaires car la stratégie de déplacement choisie pour un piéton peut être modifiée pendant la simulation. Les interactions avec les obstacles de l'environnement sont déjà prises en compte par le Fast mar-

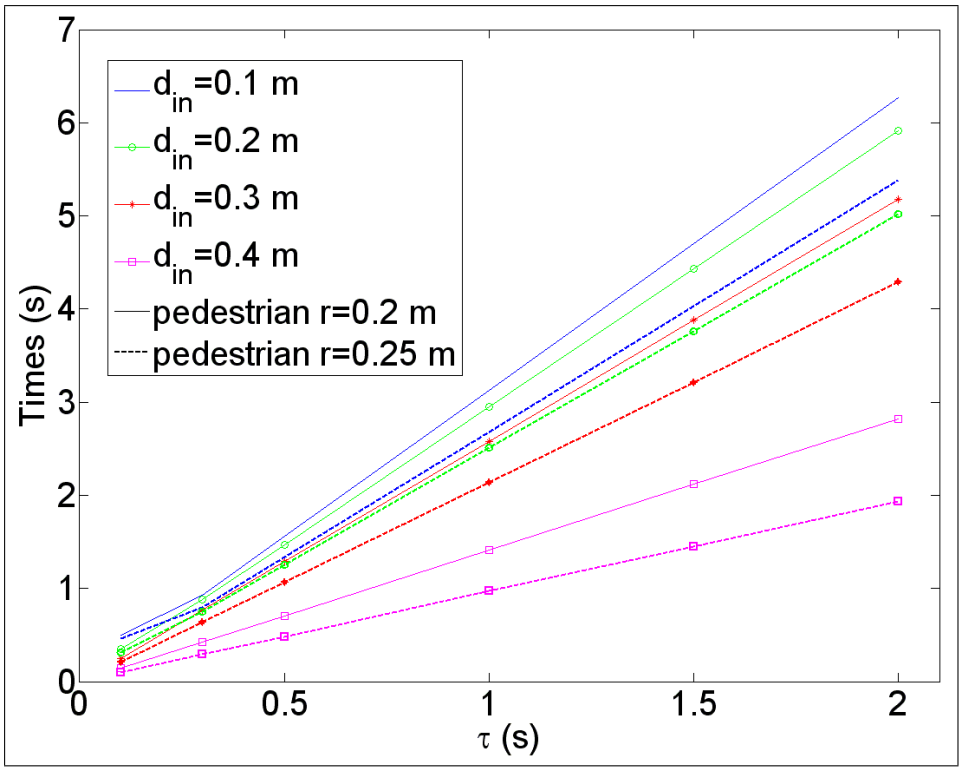


FIGURE 3.4 – t_{fi} en fonction de τ et d_{in}. La vitesse des piétons est de 1.5 $m.s^{-1}$ et les rayons sont de 0.2 m et 0.25 m.

ching qui permet au piéton de les contourner. Seules les interactions répulsives piéton-piéton et les interactions gérant les sous-groupe doivent être introduites.
Toute interaction représentée par une force peut être ajoutée à notre modèle de foule. Dans la suite, nous présentons deux exemples de forces introduites dans $\underline{f}^{int}(t)$ en plus de la force d'accélération intérieure $\underline{f}^{a}(t)$, $\underline{f}^{int}(t) = \underline{f}^{a}(t) + \underline{f}^{soc}(t) + \underline{f}^{sgr}(t)$ où $\underline{f}^{soc}(t)$ est une force socio-psychologique [2] qui reflète la tendance des piétons à garder une certaine distance les uns des autres ; et $\underline{f}^{sgr}(t)$ est une force de "sous-groupe " [22, 23] qui permet de modéliser les comportements de groupes de personnes dans les mouvements de foule. Une autre alternative à l'utilisation de forces est proposée par la suite, pour gérer un cas particulier de sous-groupe : des piétons "se tenant par la main".

3.3.1 Forces socio-psychologiques

Dans la littérature, les variantes des forces répulsives piéton-piéton [2, 23, 50, 62, 135] sont nombreuses. Toutes peuvent être introduites dans notre modèle de foule, mais pour comprendre leur fonctionnement, nous avons choisi de présenter le type de force proposée par Helbing [2], qui en a inspiré d'autres.
L'expression de la force socio-psychologique [2, 47], appliquée sur le piéton i et due à l'interaction avec le piéton j, est donnée par :

$$\underline{f}_{ij}^{soc}(t) = A_i \exp\left(\frac{-D_{ij}(\underline{q}(t))}{B_i}\right)\left(\Lambda_i + (1-\Lambda_i)\frac{1+\cos\varphi_{ij}}{2}\right)\underline{e}_{ij} \tag{3.3}$$

où A_i caractérise l'amplitude de l'interaction (N) ; B_i est la portée de l'interaction répulsive (m) ; $\Lambda_i < 1$ permet de considérer le caractère anisotropique des interactions des piétons, i.e.

la situation devant le piéton a plus d'impact sur son comportement que ce qui se passe dans son dos ; φ_{ij} est l'angle entre la direction $\underline{e}_{d,i}(t)$ du mouvement désiré et la direction $-\underline{e}_{ij}$ du piéton exerçant la force de répulsion.
$\underline{f}_{ij}^{soc}$ est une force à distance : plus les piétons i et j sont éloignés l'un de l'autre, moins l'amplitude de la force à distance est élevée, ceci à cause du terme exponentiel.
La figure 3.5 est un exemple d'interaction piéton-piéton, sans et avec la force socio-psychologique. La colonne de gauche montre une interaction sans la force socio-psychologique, il y a une

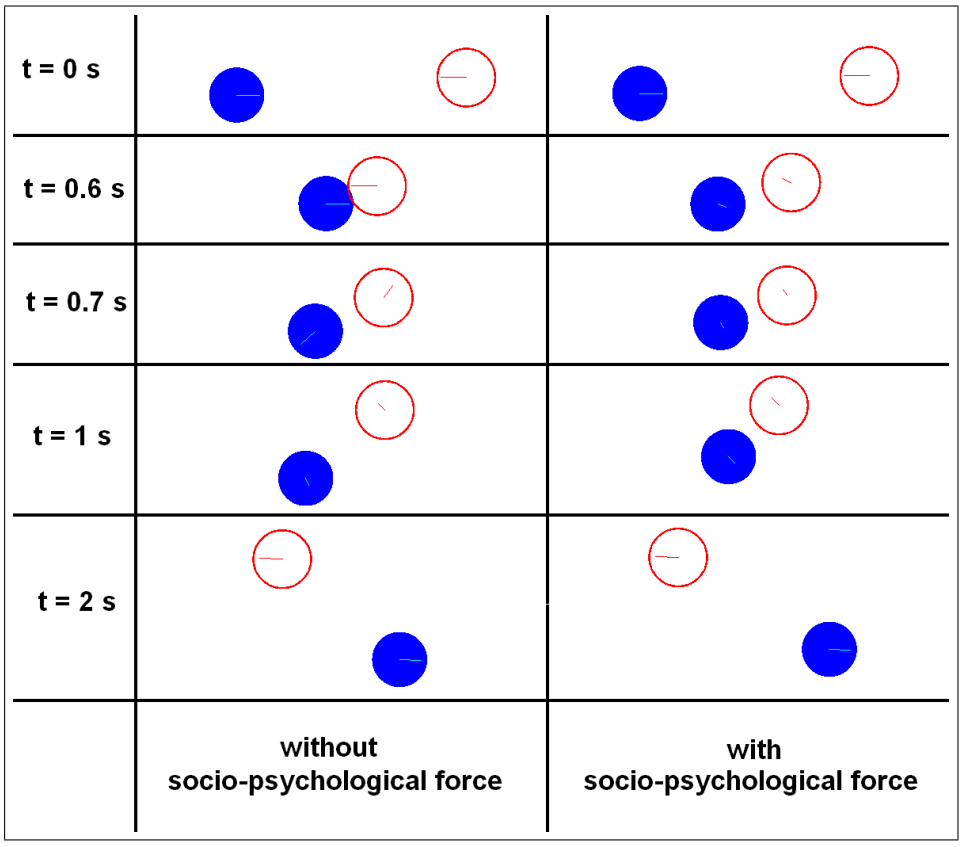


FIGURE 3.5 – Interaction piéton-piéton, sans (colonne de gauche) et avec (colonne de droite) la force socio-psychologique.

collision entre les deux piétons. La colonne de droite montre une interaction avec la force socio-psychologique, il n'y a pas de collision. L'interaction à distance permet à chaque piéton d'éviter son voisin en lui tournant autour.

3.3.2 Modélisation d'un sous-groupe

Un "groupe " est défini comme une collection physique de personnes suivant le même itinéraire, mais qui peuvent ou ne peuvent pas faire partie du même groupe social ; tandis qu'un "sous-groupe " est défini comme des personnes appartenant au même "groupe " physique qui veulent rester ensemble. Des études ont révélé que les sous-groupes les plus petits comme ceux d'amis ou de membres d'une famille constituent la majorité de la population d'une foule [42]. Les premières observations ont montré que les groupes composés de deux à quatre membres sont les plus fréquents, tandis que les groupes de la taille de cinq personnes et plus, sont rares [23, 59].

En général, cette problématique de la gestion des sous-groupes est totalement négligée lorsque l'on s'interesse aux problèmes d'évacuation de bâtiment. Pourtant, il semble naturel de penser que l'évacuation d'un espace occupé par des personnes seules nécessite moins de temps que l'évacuation de ce même espace par des familles ayant des enfants à surveiller. Savoir modéliser des sous-groupes peut donc être très intéressant, en vue de futures études.

Dans la littérature, à notre connaissance, uniquement deux modèles de sous-groupe existent [22, 23]. Ces deux modèles fonctionnent à l'aide de forces. Nous proposons une alternative originale aux forces : l'utilisation d'une vitesse de déformation. Cette notion permet de gérer un cas particulier de sous-groupe, des piétons "se tenant par la main".

La gestion du sous-groupe se fait en deux étapes : la formation du sous-groupe et la gestion des interactions entre un sous-groupe et son environnement proche. Cette dernière est la même pour les trois modèles.

Pour gérer l'interaction entre un sous-groupe et son environnement le plus proche, deux types d'interaction doivent être prises en compte : l'interaction sous-groupe / sous-groupe et l'interaction sous-groupe / piéton. La gestion de ces interactions se justifie par la tendance des personnes à contourner les sous-groupes et non pas les traverser.
Le principe de la méthode est de représenter le sous-groupe comme une seule entité et d'appliquer à chacun de ces membres, une force répulsive d'évitement $\underline{f}_{soc}^{sgr}$ similaire à la force socio-psychologique (Equation (3.3)). Le centre géométrique et la vitesse moyenne du sous-groupe doivent être définis pour l'application de cette force.
Le centre géométrique de chaque sous-groupe est calculé en faisant la moyenne arithmétique des positions des membres du sous-groupe :

$$\begin{cases} C_x = \sum \frac{q_i^x}{nb} \\ C_y = \sum \frac{q_i^y}{nb} \end{cases} \tag{3.4}$$

où (q_i^x, q_i^y) est la position du membre i du sous-groupe, nb est le nombre total de personnes composant le sous-groupe.
La vitesse moyenne de chaque sous-groupe est calculée en faisant la moyenne arithmétique des vitesses des membres.
La figure 3.6 montre un exemple d'interaction entre un sous-groupe formé de 4 personnes et un piéton.

Dans la suite, nous présentons et comparons les trois modèles permettant de former les sous-groupes : celui de Singh [22], celui de Moussaïd [23], et celui des piétons "se tenant par la main".

Modèle proposé par Singh [22]

Le concept de "sous-groupe" est introduit par la mise en place de "points d'attraction" pour les membres du sous-groupe (suiveurs), fixe par rapport à un leader de référence du sous-groupe. Nous supposons dans la suite que les sous-groupes se composent d'au plus quatre personnes.
Les positions relatives des points d'attraction sont fixées conformément aux expressions

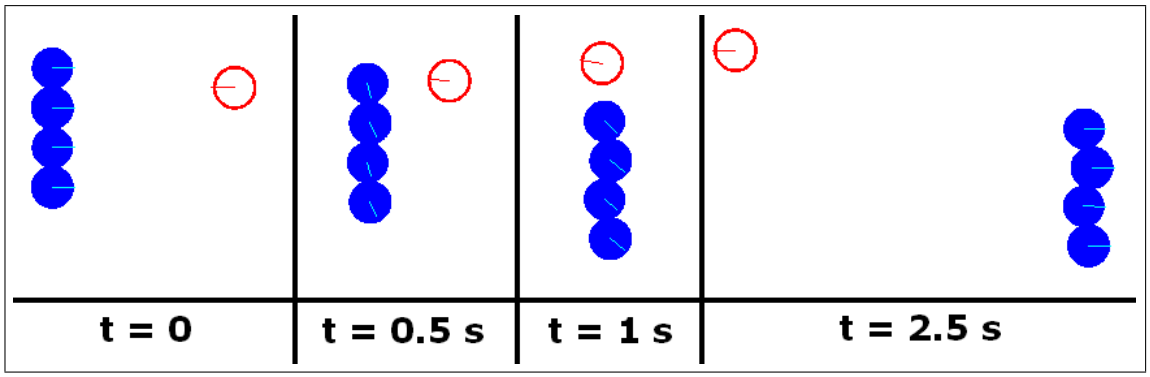


FIGURE 3.6 – Exemple d'interaction entre un sous-groupe formé de 4 personnes et un piéton.

suivantes :

$$\begin{cases} A_{f,x} = q_l^x \pm d_{l,f}\cos(\varphi_{l,f}) \\ A_{f,y} = q_l^y \pm d_{l,f}\sin(\varphi_{l,f}) \end{cases} \tag{3.5}$$

où $(A_{f,x}, A_{f,y})$ sont les coordonnées du point d'attraction de chaque suiveur ; (q_l^x, q_l^y) sont les coordonnées du leader de référence ; $d_{l,f}$ est la distance souhaitée entre deux membres consécutifs, le leader de référence et un suiveur ; $\varphi_{l,f}$ est l'orientation angulaire désirée du sous-groupe. Les valeurs des paramètres $d_{l,f}$ et $\varphi_{l,f}$ peuvent être trouvés dans [23].
Si les membres du sous-groupe sont dans une formation en ligne, la deuxième personne à partir de la gauche est considérée comme le leader de référence pour les première et troisième personnes (Figure 3.7), alors que la troisième personne est le leader de référence pour la quatrième (Figure 3.7). Chaque membre du sous-groupe se déplace de façon autonome selon

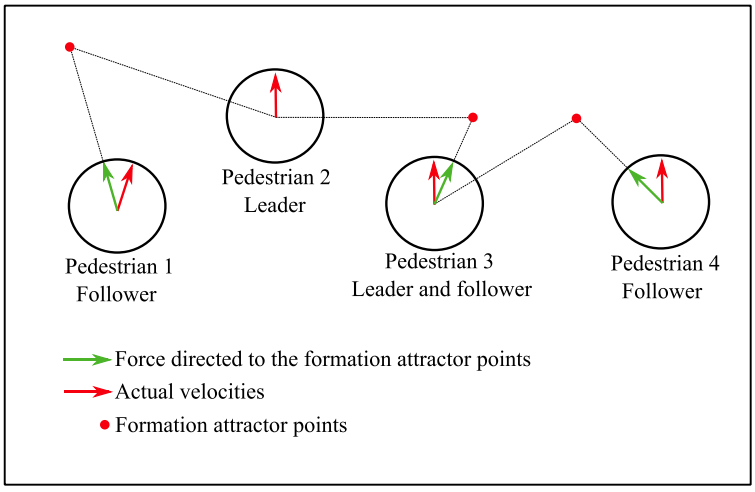


FIGURE 3.7 – Formation d'un sous-groupe de 4 personnes avec le modèle proposé par Singh [22].

sa vitesse souhaitée. Les membres suiveurs sont également attirés par leurs propres points d'attraction. Une force attractive est introduite pour que le sous-groupe se forme. Pour le suiveur i, cette force de "formation" est :

$$\underline{f}_{for,i}^{sgr}(t) = m_i \frac{k_{sgr} d_i \underline{e}_{sgr,i}(t)}{\tau_i} \tag{3.6}$$

où k_{sgr} est la constante de vitesse du sous-groupe ; d_i est la distance entre le suiveur et son point d'attraction ; et $\underline{e}_{sgr,i}(t)$ est le vecteur unitaire dirigé du suiveur i vers son point d'attraction.
La figure 3.8 montre un exemple de formation d'un sous-groupe de 4 piétons. Le sous-groupe

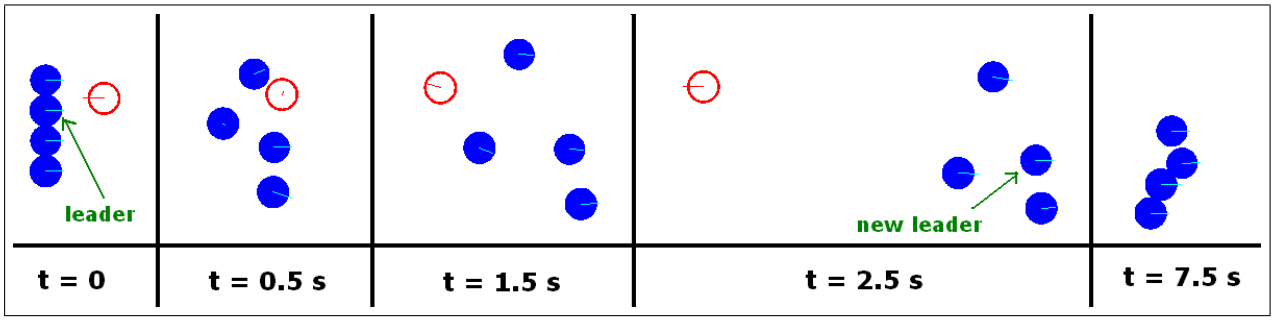


FIGURE 3.8 – Exemple de formation d'un sous-groupe de 4 piétons.

se dissocie à cause de la collision avec le piéton isolé, puis se forme de nouveau. La rapidité de la reformation du sous-groupe dépend du paramètre k_{sgr}. On remarque que le leader de référence du sous-groupe change au court de la simulation car le contact modifie l'ordre des membres.

Modèle proposé par Moussaid [23]

La force de formation du sous-groupe $\underline{f}^{sgr}_{for,i}(t)$ appliquée au piéton i est définie comme la somme de trois forces (Figure 3.9) :

$$\underline{f}^{sgr}_{for,i}(t) = \underline{f}^{vis}_{i}(t) + \underline{f}^{att}_{i}(t) + \underline{f}^{rep}_{i}(t) \tag{3.7}$$

Le premier terme $\underline{f}^{vis}_{i}(t)$ de l'équation (3.7) prend en compte la direction du regard, et il est

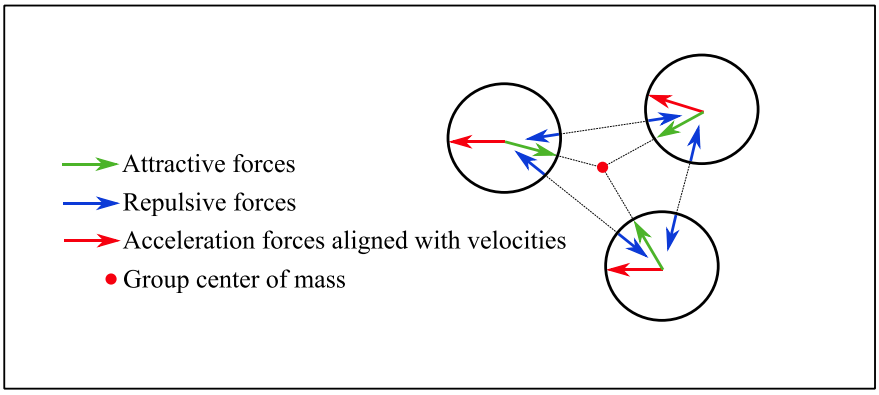


FIGURE 3.9 – Formation d'un sous-groupe de 3 personnes avec le modèle proposé par Moussaïd [23].

supposé proportionnel à la rotation de la tête α_i par rapport à la direction du mouvement du piéton i, qui à son tour prend en compte le centre de masse du sous-groupe. Cette force donne de l'importance au champ visuel. En effet, lorsqu'on marche en sous-groupe, on a tendance à garder les autres membres dans son champ de vision pour faciliter l'échange de

paroles. Plus α_i est grand, moins la marche est confortable. Ainsi, on suppose que le piéton i ajuste sa position pour réduire la rotation de sa tête. L'expression de la force visqueuse de visualisation est :

$$\underline{f}_i^{vis}(t) = -\beta_1 m_i \alpha_i \underline{\dot{u}}_i \tag{3.8}$$

où β_1 est un paramètre décrivant l'amplitude de la force d'interaction entre les membres du sous-groupe ; m_i est la masse du piéton i ; et $\underline{\dot{u}}_i$ est sa vitesse réelle.

A partir d'observations [23], il a été remarqué que le piéton essaie de garder une certaine distance par rapport au centre de masse du sous-groupe. Cette distance augmente avec la taille du sous-groupe. Ainsi, une force attractive est définie :

$$\underline{f}_i^{att}(t) = q_A \beta_2 m_i \underline{e}_{ic} \tag{3.9}$$

où β_2 est un paramètre décrivant l'amplitude de la force attractive ; $\underline{e}_{ic}$ est le vecteur directeur unitaire dirigé du piéton i vers le centre de masse. Le paramètre $q_A = 1$ si la distance entre le piéton et le centre de masse du sous-groupe dépasse une distance critique, sinon $q_A = 0$. Cette distance critique peut être approchée par la valeur $\frac{nb-1}{2}$ (en mètres) [23], où on rappelle que nb est le nombre de membres du sous-groupe.

Enfin, le dernier terme est une force de répulsion qui empêche les piétons de trop se rapprocher les uns des autres. Il est défini par :

$$\underline{f}_i^{rep}(t) = \sum_k q_R \beta_3 m_i \underline{e}_{ik} \tag{3.10}$$

où β_3 est un paramètre décrivant l'amplitude de la force répulsive ; $\underline{e}_{ik}$ est le vecteur directeur unitaire dirigé du piéton i vers le membre k du sous-groupe. Le paramètre $q_R = 1$ lorsque la distance entre les piétons est inférieure à une distance de sécurité d_0, sinon $q_R = 0$.

Les valeurs numériques de β_1, β_2 et β_3 sont données dans [23].

Modélisation de piétons "se tenant par la main"

Nous proposons ensuite un cas particulier de sous-groupe, des piétons "se tenant par la main", que l'on nommera dans la suite piétons "liés". Alors que les méthodes existantes décrivent la cohésion du sous-groupe avec des forces [22, 23], la méthode proposée pour décrire ce comportement original, inspirée de l'article [136] décrivant l'interaction à distance entre particules rigides, est de modéliser les effets du sous-groupe comme une déformation continue du système pour les deux piétons "liés".

La vitesse de déformation à distance est une vitesse d'écartement entre les deux piétons considérés, elle est la dérivée du carré de la distance entre les centres des deux piétons. En prenant l'exemple de deux piétons "liés" i et j, cette vitesse de déformation à distance a pour expression :

$$\Delta_{ij}^* \left(\underline{q}(t), \underline{\dot{u}}(t)\right) = 2 \left({}^t\underline{q}_i(t) - {}^t\underline{q}_j(t) \right) \left(\underline{\dot{u}}_i(t) - \underline{\dot{u}}_j(t) \right) \tag{3.11}$$

Ainsi, le pseudopotentiel de dissipation (Equation (2.18)) devient :

$$\Phi^d(\underline{q}, \underline{\dot{Y}}) = \sum_{1 \le i < j \le N} \tfrac{1}{2} K_V \left(\Delta_{ij}^*(\underline{q}, \underline{\dot{Y}}) \right)^2 + \tfrac{1}{2} K_N \left({}^t\underline{\Delta}_{ij}(\underline{\dot{Y}}) \underline{e}_{ji} \right)^2 \tag{3.12}$$

où K_V est un coefficient de dissipation visqueuse.

Lorsque la distance séparant les deux piétons dépasse une valeur seuil (Figure 3.11), soit lorsque l'on considère que les piétons ne sont plus "liés", nous remplaçons l'action de la vitesse de déformation à distance par une force de rappel élastique appliquée sur les deux piétons considérés pour les rapprocher l'un de l'autre. L'expression de cette force intérieure attractive (Figure 3.10), exercée par le piéton i, en relation avec le piéton j, est :

$$\underline{f}_{ij}^{int,el} = -m_i K_e \left(\underline{q}_i - \underline{q}_j \right) \tag{3.13}$$

où K_e est le coefficient positif de la force attractive élastique.

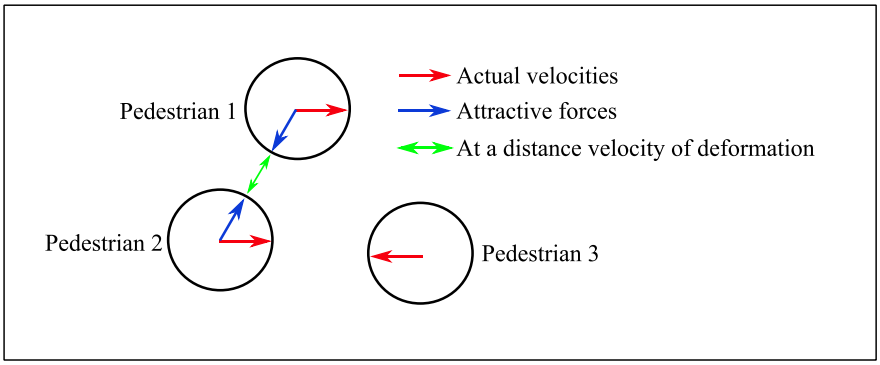


FIGURE 3.10 – Formation d'un sous-groupe de 2 personnes se tenant par la main.

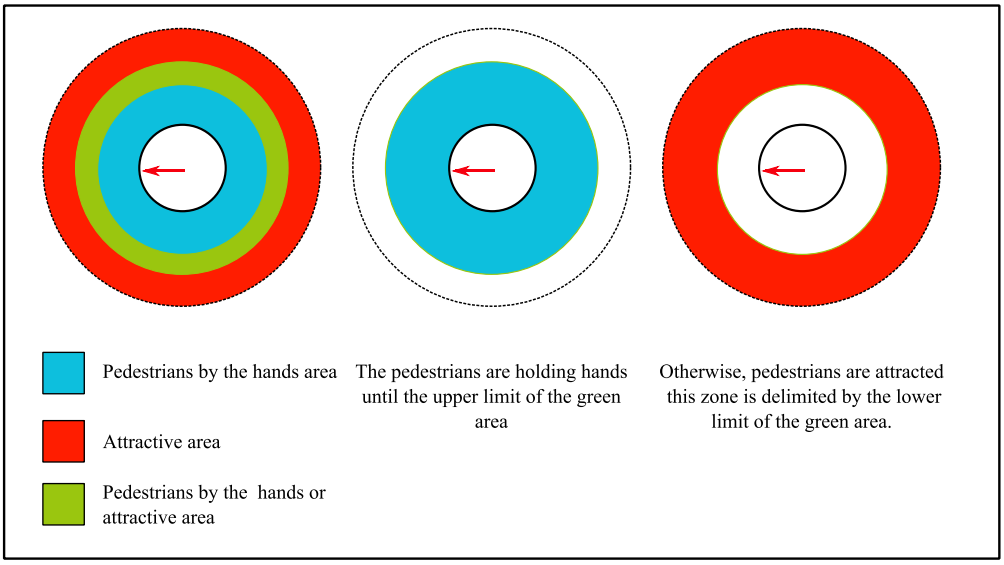


FIGURE 3.11 – Les différentes zones de l'approche "piétons se tenant par la main" - La zone bleue est la zone où les piétons sont "liés". La zone rouge est celle où ils sont "libres" et donc où la force attractive est appliquée. La zone verte est alternativement l'une ou l'autre zone : c'est la bleue lorsque les piétons sont liés, et la rouge lorsqu'ils sont libres. Cette zone permet d'éviter un comportement oscillant des piétons qui apparaît à la frontière commune des zones bleue et rouge lorsque la verte n'existe pas.

Nous avons étudié sur un exemple l'influence du paramètre K_V sur la liaison entre deux piétons. Considérons trois piétons identiques de rayon $r = 0.24\ m$ et d'allure $1.3\ m.s^{-1}$. Les deux piétons liés sont espacés de $0.26\ m$ et marchent à contre sens du piéton isolé qui vient les percuter perpendiculairement à leur formation. La collision a lieu "parfaitement" au milieu du sous-groupe (Figure 3.12). Le piéton libre essaie donc de passer entre les piétons liés. Nous avons étudié trois paramètres après la rencontre "piétons liés - piéton libre" en

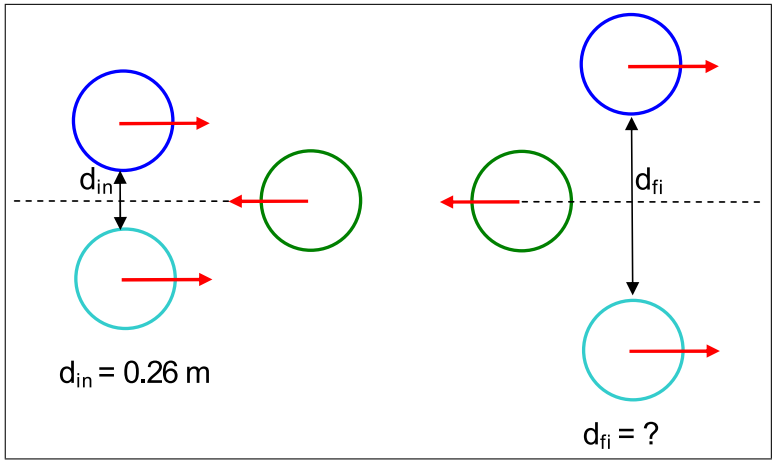


FIGURE 3.12 – Exemple d'une collision de deux piétons se tenant par la main avec un piéton isolé.

fonction de la valeur de K_V (Figure 3.13) :

- la distance finale d_{fi} entre les piétons liés
- le temps final t_{fi} mis par les piétons liés pour retrouver leur vitesses souhaitées
- le nombre total de contacts $N_{contact}$ entre un piéton lié et le piéton libre lors de la rencontre.

La figure 3.13a. montre que la distance finale d_{fi} tend vers le diamètre du piéton libre lorsque K_V augmente, soit $0.48\ m$. Pour $K_V < 1.8\ kg\ m^{-1}$, le nombre de contact est $N_{contact} = 1$, d_{fi} décroit et t_{fi} est constant. Pour $K_V > 3.4\ kg\ m^{-1}$, $N_{contact}$ et t_{fi} croissent linéairement et $d_{fi} \simeq 0.48\ m$. Ainsi, plus K_V est grand, plus la liaison entre les deux piétons liés est rigide, et donc plus le piéton libre a des difficultés pour traverser le sous-groupe.

Comparaison des trois méthodes de formation des sous-groupes

Pour illustrer les atouts et faiblesses des trois approches permettant de former des sous-groupes, nous avons choisi de les comparer à l'aide d'un exemple numérique.
Un sous-groupe de trois piétons entre en collision avec un piéton isolé, puis se reforme. Les conditions initiales sont identiques pour les trois approches. Chaque ligne de la figure 3.14 correspond à une approche : celle de Moussaïd en haut, celle de Singh au milieu, et les piétons "liés" en bas. Nous remarquons que les approches de Moussaïd et Singh permettent au sous-groupe de retrouver sa configuration initiale en "V" après la collision, au contraire du sous-groupe formé des piétons liés qui perd son orientation. La ligne du haut met bien en évidence que le sous-groupe de Moussaïd se réorganise autour de son centre de masse. Dans la ligne du milieu, le sous-groupe se réorganise autour du leader de référence qui est le piéton du milieu. Celui ci s'étant déporté vers le haut à cause de la collision, le sous-groupe est décalé en conséquence. La ligne du bas montre une limite de l'approche piétons

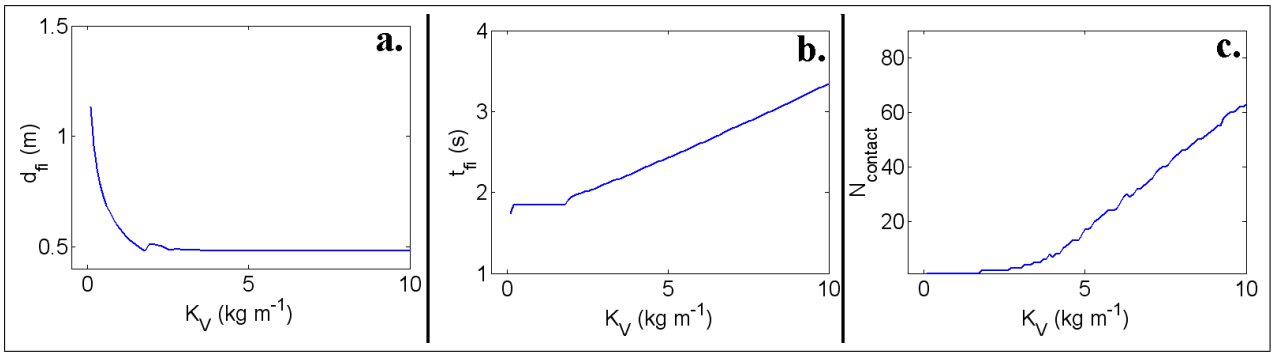


FIGURE 3.13 – Etude de trois paramètres après la rencontre "piétons liés - piéton libre" en fonction de la valeur de K_V, pour $\tau = 0.5\ s$, $h = 10^{-2}\ s$ - a. la distance finale d_{fi} entre les piétons liés ; b. le temps final t_{fi} mis par les piétons liés pour retrouver leurs vitesses souhaitées ; c. le nombre total de contact $N_{contact}$ entre un piéton lié et le piéton libre lors de la rencontre.

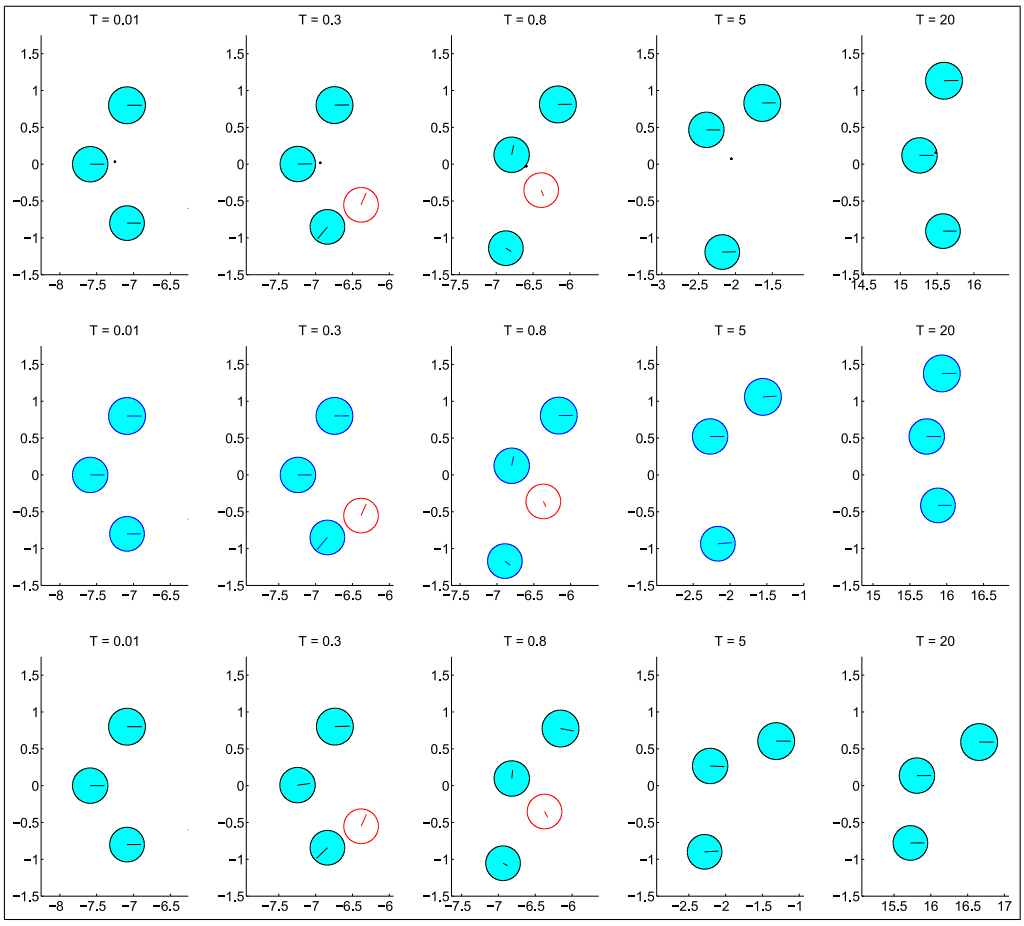


FIGURE 3.14 – Exemple d'un sous-groupe formé de trois personnes entrant en collision avec un piéton isolé - chaque ligne correspond à une approche : Moussaïd [23] en haut, Singh [22] au milieu, et piétons "liés" en bas.

"liés" telle que proposée : les interactions à distance se réalisant dans l'axe piéton-piéton, rien ne permet de réorganiser le sous-groupe. La prise en compte de la rotation des piétons

devrait permettre de contrôler l'organisation du sous-groupe, en plus de maîtriser la rigidité des liaisons entre membres du sous-groupe. Sinon, une solution hybride "modèle Moussaïd / piétons liés" ou "modèle Singh / piétons liés" pourrait être intéressante si l'on choisit de continuer de négliger la rotation des piétons sur eux-mêmes.

3.4 Synthèse du chapitre

Dans le chapitre, un comportement a été affecté à chaque piéton. Deux étapes sont nécessaires pour modéliser ce comportement. Dans la première obligatoire, une "volonté" de se déplacer dans une direction particulière avec une allure spécifique à chaque instant est déterminée pour chaque piéton. Une méthode de Fast Marching permet de définir la stratégie de déplacement du chemin le plus court, et donc la direction de la vitesse souhaitée. L'amplitude de la vitesse souhaitée est choisie dans la littérature. Cette vitesse souhaitée est ensuite introduite dans les approches de mouvement de particules à l'aide d'une force. Le modèle de mouvement de foule est alors créé.
La seconde étape permet de gérer les interactions à distance entre chaque piéton et son environnement proche, afin de rendre son comportement plus réaliste. Des forces sociales sont utilisées. Une approche originale permettant de former des sous groupes de piétons à l'aide d'un pseudo-potentiel de dissipation est proposée. Une comparaison des méthodes permettant de gérer les sous-groupes est réalisée.

Chapitre 4

Le modèle d'interaction foule-structure

Ce chapitre a pour objectif de présenter le modèle d'interaction foule-structure :

⋆ *Modélisation du piéton*

⋆ *Modèle d'interaction foule-structure (passerelle)*

PLAN DU CHAPITRE 4

4.1 Introduction 99

4.2 Modélisation du piéton 99

4.2.1 Accélération absolue du piéton : cas général 100

4.2.2 Cas 1 : Les piétons marchent dans un plan et les oscillations de la structure sont latérales 101

4.2.3 Cas 2 : Les piétons marchent dans un plan et les oscillations de la structure sont verticales 107

4.3 Modèle d'interaction foule-passerelle 109

4.3.1 cas 1 : oscillations latérales de la passerelle 109

4.3.2 cas 2 : oscillations verticales de la passerelle 112

4.4 Synthèse du chapitre 113

4.1 Introduction

Le modèle d'interaction foule-structure pour le cas des passerelles piétonnes est présenté. Après avoir détaillé la modélisation du piéton dans un cas général, deux cas particuliers seront étudiés : les piétons marchant dans un plan et les oscillations de la structure étant latérales, puis verticales. Ces modélisations du piéton seront ensuite utilisées pour présenter le modèle d'interaction foule-passerelle.

4.2 Modélisation du piéton

Nous souhaitons modéliser le chargement dynamique de la foule sur une structure vibrante telle qu'une passerelle, et étudier le phénomène de synchronisation piéton-structure. Les connaissances de la trajectoire de chaque piéton et de son effet sur la structure sont suffisantes pour notre étude sur la synchronisation. Ainsi, nous représentons un piéton i par une masse m_i, i.e. la masse totale de son corps, supposée concentrée au centre de gravité du piéton et soumise à la force d'inertie, à la gravité et à la force échangée entre le piéton et le sol. Dans un repère Galiléen $(O, \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$, le principe fondamental de la dynamique appliqué à chaque piéton i donne :

$$m_i \ddot{\underline{u}}_i^{abs}(t) + \underline{F}_i(t) = m_i \underline{g} \tag{4.1}$$

où le point superposé indique la dérivation par rapport au temps ; $\underline{g}$ est le vecteur de l'accélération de gravité ; $\ddot{\underline{u}}_i^{abs}(t)$ est l'accélération absolue de m_i ; $\underline{q}_i$ est la position du piéton i dans le repère Galiléen ; et $\underline{F}_i(t)$ est la force échangée par le piéton i avec le sol.
L'expression de cette accélération absolue est :

$$\begin{aligned} \ddot{\underline{u}}_i^{abs}(t) &= \ddot{\underline{u}}_i^{ent}(t) + \ddot{\underline{u}}_i^{rel}(t) + \ddot{\underline{u}}_i^{cor}(t) \\ &= \ddot{\underline{u}}_i^{ent}(t) + \ddot{\underline{u}}_i^{tr}(t) + \ddot{\underline{u}}_i^{osc}(t) + \ddot{\underline{u}}_i^{cor}(t) \end{aligned} \tag{4.2}$$

où $\ddot{\underline{u}}_i^{ent}(t)$, $\ddot{\underline{u}}_i^{rel}(t)$ et $\ddot{\underline{u}}_i^{cor}(t)$ sont respectivement les accélérations d'entraînement, relative et de Coriolis de m_i ; $\ddot{\underline{u}}_i^{tr}(t)$ est l'accélération du piéton i selon sa trajectoire moyenne par rapport au sol ; $\ddot{\underline{u}}_i^{osc}(t)$ est l'accélération des oscillations du piéton autour de sa trajectoire moyenne, oscillations dues à sa façon naturelle de marcher.
Nous choisissons de négliger l'accélération de Coriolis de chaque piéton i, $\ddot{\underline{u}}_i^{cor}(t) = \underline{0}$. Dans la suite, nous cherchons à expliciter les différents termes composants l'accélération absolue du piéton i. Pour cela, une étude cinématique est réalisée pour exprimer $\ddot{\underline{u}}_i^{abs}(t)$.

4.2.1 Accélération absolue du piéton : cas général

Nous donnons dans cette partie l'expression générale de l'accélération absolue $\underline{\ddot{u}}_i^{abs}(t)$ de la masse m_i du piéton i, supposée concentrée au centre de gravité du piéton représenté par le point P_i. Elle nous permettra par la suite de justifier les équations simplifiées de l'oscillation latérale puis verticale pure d'une passerelle, souvent adoptées dans la littérature sans justifications.
Nous voulons décrire le mouvement de P_i par rapport au repère inertiel $(O, \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$. Pour faire cela, deux repères cartésiens mobiles sont définis (Figure 4.1). Le premier repère mobile $\left(C_i, \underline{e}_{C_i}^T(t), \underline{e}_{C_i}^N(t), \underline{e}_{C_i}^V(t)\right)$ a son origine au point de contact C_i représentant la trajectoire moyenne des pieds du piéton i sur le plancher, avec une position absolue donnée par $\underline{q}_{OC_i}(t)$. Le vecteur de norme unitaire $\underline{e}_{C_i}^T(t)$ est tangent à la trajectoire tracée par C_i sur le plancher de la passerelle. Ce vecteur est aussi tangent à la surface du plancher en C_i. Le vecteur $\underline{e}_{C_i}^V(t)$ est orthogonal à la surface du plancher et $\underline{e}_{C_i}^N(t)$ est orthogonal à $\underline{e}_{C_i}^T(t)$ et à $\underline{e}_{C_i}^V(t)$. L'origine D_i du deuxième repère mobile $\left(D_i, \underline{e}_{D_i}^T(t), \underline{e}_{D_i}^N(t), \underline{e}_{D_i}^V(t)\right)$ correspond à la position d'équilibre de m_i, qui se trouve sur la verticale du point de contact C_i. Les vecteurs $\underline{e}_{D_i}^T(t)$ et $\underline{e}_{D_i}^N(t)$ sont obtenus en projetant $\underline{e}_{C_i}^T(t)$ et $\underline{e}_{C_i}^N(t)$ sur le plan horizontal, tandis que $\underline{e}_{C_i}^V(t)$ est supposé vertical. Ce choix est lié au fait que la position d'équilibre du piéton est toujours verticale, même si le plancher n'est pas horizontal.

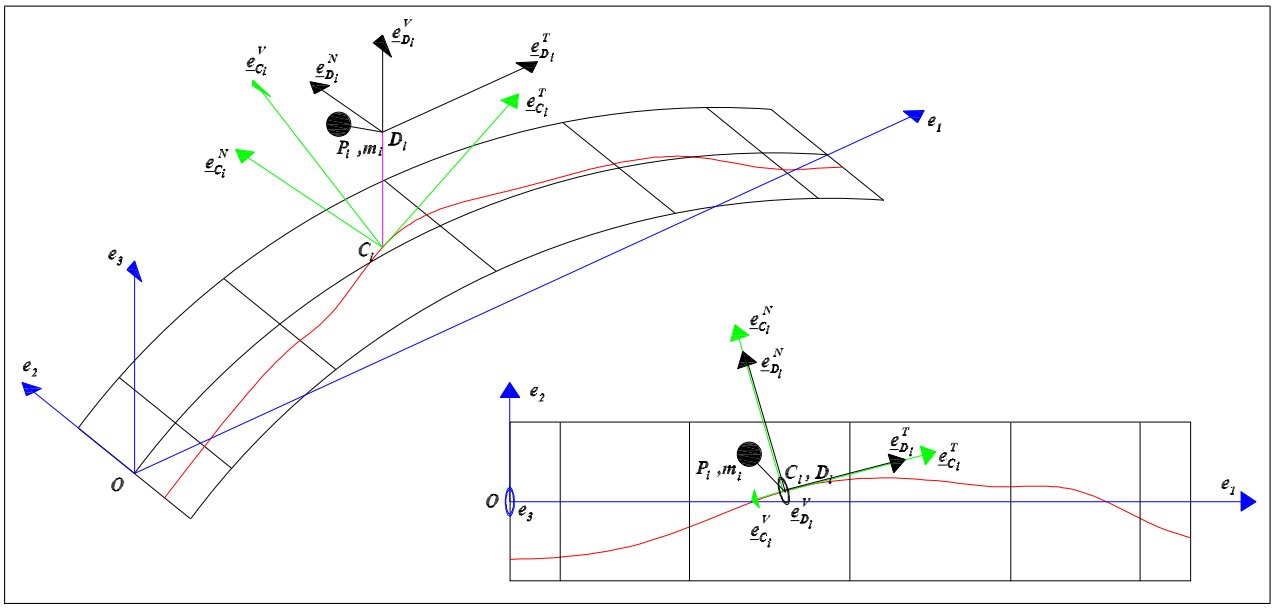


FIGURE 4.1 – Systèmes de référence - Exemple de trajectoire du point C_i dans le cas général.

La position de P_i par rapport au repère inertiel $(O, \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ est exprimée par :

$$\begin{aligned} \underline{u}_i^{abs}(t) = \underline{OP_i}(t) &= \underline{OC_i}(t) + \underline{C_iD_i}(t) + \underline{D_iP_i}(t) \\ &= {}^t\begin{bmatrix} q_{OC_i}^1(t) \\ q_{OC_i}^2(t) \\ q_{OC_i}^3(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{e}_1 \\ \underline{e}_2 \\ \underline{e}_3 \end{bmatrix} + {}^t\begin{bmatrix} q_{C_iD_i}^T(t) \\ q_{C_iD_i}^N(t) \\ q_{C_iD_i}^V(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{e}_{C_i}^T(t) \\ \underline{e}_{C_i}^N(t) \\ \underline{e}_{C_i}^V(t) \end{bmatrix} \\ &+ {}^t\begin{bmatrix} q_{D_iP_i}^T(t) \\ q_{D_iP_i}^N(t) \\ q_{D_iP_i}^V(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{e}_{D_i}^T(t) \\ \underline{e}_{D_i}^N(t) \\ \underline{e}_{D_i}^V(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{4.3}$$

où les composantes des vecteurs $\underline{q}_{C_iD_i}(t) = {}^t[q_{C_iD_i}^T(t), q_{C_iD_i}^N(t), q_{C_iD_i}^V(t)]$ et

$\underline{q}_{D_iP_i}(t) = {}^t[q^T_{D_iP_i}(t), q^N_{D_iP_i}(t), q^V_{D_iP_i}(t)]$ sont des coordonnées dans les repères locaux mobiles.
Par dérivation temporelle de (4.3), la vitesse absolue de P_i est donnée par :

$$\begin{aligned}\underline{\dot{u}}_i^{abs}(t) = \frac{d\underline{OP_i}(t)}{dt} &= {}^t\begin{bmatrix} \frac{dq^1_{OC_i}(t)}{dt} \\ \frac{dq^2_{OC_i}(t)}{dt} \\ \frac{dq^3_{OC_i}(t)}{dt} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{e}_1 \\ \underline{e}_2 \\ \underline{e}_3 \end{bmatrix} + {}^t\begin{bmatrix} \frac{dq^T_{C_iD_i}(t)}{dt} \\ \frac{dq^N_{C_iD_i}(t)}{dt} \\ \frac{dq^V_{C_iD_i}(t)}{dt} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{e}^T_{C_i}(t) \\ \underline{e}^N_{C_i}(t) \\ \underline{e}^V_{C_i}(t) \end{bmatrix} \\ &+ {}^t\begin{bmatrix} q^T_{C_iD_i}(t) \\ q^N_{C_iD_i}(t) \\ q^V_{C_iD_i}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{d\underline{e}^T_{C_i}(t)}{dt} \\ \frac{d\underline{e}^N_{C_i}(t)}{dt} \\ \frac{d\underline{e}^V_{C_i}(t)}{dt} \end{bmatrix} + {}^t\begin{bmatrix} \frac{dq^T_{D_iP_i}(t)}{dt} \\ \frac{dq^N_{D_iP_i}(t)}{dt} \\ \frac{dq^V_{D_iP_i}(t)}{dt} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{e}^T_{D_i}(t) \\ \underline{e}^N_{D_i}(t) \\ \underline{e}^V_{D_i}(t) \end{bmatrix} \\ &+ {}^t\begin{bmatrix} q^T_{D_iP_i}(t) \\ q^N_{D_iP_i}(t) \\ q^V_{D_iP_i}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{d\underline{e}^T_{D_i}(t)}{dt} \\ \frac{d\underline{e}^N_{D_i}(t)}{dt} \\ \frac{d\underline{e}^V_{D_i}(t)}{dt} \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Par dérivation temporelle de (4.4), l'accélération absolue de P_i est donnée par :

$$\begin{aligned}\underline{\ddot{u}}_i^{abs}(t) = \frac{d^2\underline{OP_i}(t)}{dt^2} &= {}^t\begin{bmatrix} \frac{d^2q^1_{OC_i}(t)}{dt^2} \\ \frac{d^2q^2_{OC_i}(t)}{dt^2} \\ \frac{d^2q^3_{OC_i}(t)}{dt^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{e}_1 \\ \underline{e}_2 \\ \underline{e}_3 \end{bmatrix} + {}^t\begin{bmatrix} \frac{d^2q^T_{C_iD_i}(t)}{dt^2} \\ \frac{d^2q^N_{C_iD_i}(t)}{dt^2} \\ \frac{d^2q^V_{C_iD_i}(t)}{dt^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{e}^T_{C_i}(t) \\ \underline{e}^N_{C_i}(t) \\ \underline{e}^V_{C_i}(t) \end{bmatrix} \\ &+2\,{}^t\begin{bmatrix} \frac{dq^T_{C_iD_i}(t)}{dt} \\ \frac{dq^N_{C_iD_i}(t)}{dt} \\ \frac{dq^V_{C_iD_i}(t)}{dt} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{d\underline{e}^T_{C_i}(t)}{dt} \\ \frac{d\underline{e}^N_{C_i}(t)}{dt} \\ \frac{d\underline{e}^V_{C_i}(t)}{dt} \end{bmatrix} + {}^t\begin{bmatrix} q^T_{C_iD_i}(t) \\ q^N_{C_iD_i}(t) \\ q^V_{C_iD_i}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{d^2\underline{e}^T_{C_i}(t)}{dt^2} \\ \frac{d^2\underline{e}^N_{C_i}(t)}{dt^2} \\ \frac{d^2\underline{e}^V_{C_i}(t)}{dt^2} \end{bmatrix} \\ &+ {}^t\begin{bmatrix} \frac{d^2q^T_{D_iP_i}(t)}{dt^2} \\ \frac{d^2q^N_{D_iP_i}(t)}{dt^2} \\ \frac{d^2q^V_{D_iP_i}(t)}{dt^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{e}^T_{D_i}(t) \\ \underline{e}^N_{D_i}(t) \\ \underline{e}^V_{D_i}(t) \end{bmatrix} + 2\,{}^t\begin{bmatrix} \frac{dq^T_{D_iP_i}(t)}{dt} \\ \frac{dq^N_{D_iP_i}(t)}{dt} \\ \frac{dq^V_{D_iP_i}(t)}{dt} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{d\underline{e}^T_{D_i}(t)}{dt} \\ \frac{d\underline{e}^N_{D_i}(t)}{dt} \\ \frac{d\underline{e}^V_{D_i}(t)}{dt} \end{bmatrix} \\ &+ {}^t\begin{bmatrix} q^T_{D_iP_i}(t) \\ q^N_{D_iP_i}(t) \\ q^V_{D_iP_i}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{d^2\underline{e}^T_{D_i}(t)}{dt^2} \\ \frac{d^2\underline{e}^N_{D_i}(t)}{dt^2} \\ \frac{d^2\underline{e}^V_{D_i}(t)}{dt^2} \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Les dépendances du temps de $\underline{q}_{C_iD_i}(t)$ et $\underline{q}_{D_iP_i}(t)$, associées au fait que le piéton i peut changer de direction pendant la marche, complexifient l'expression précédente. Nous simplifions cette expression par la suite en adoptant certaines hypothèses suivant deux cas particuliers discutés dans la section suivante.

4.2.2 Cas 1 : Les piétons marchent dans un plan et les oscillations de la structure sont latérales

Dans le cas étudié, les piétons marchent sur une passerelle dont le mouvement est gouverné par ses oscillations latérales. Dans une première partie, nous simplifions l'expression de $\underline{\ddot{u}}_i^{abs}(t)$ à l'aide d'hypothèses simplificatrices. Dans une seconde partie, nous donnons l'expression de la force échangée entre le piéton et le sol $\underline{F}_i(t)$ dans le cas des vibrations latérales.

Hypothèses simplificatrices

Nous simplifions les expressions générales (4.3), (4.4) et (4.5) en adoptant certaines hypothèses définissant le cas particulier où le mouvement de la passerelle, de longueur L_{str} et largeur l_{str}, est gouverné par l'oscillation latérale, et la marche du piéton i est dans le plan de la passerelle (Figure 4.2).

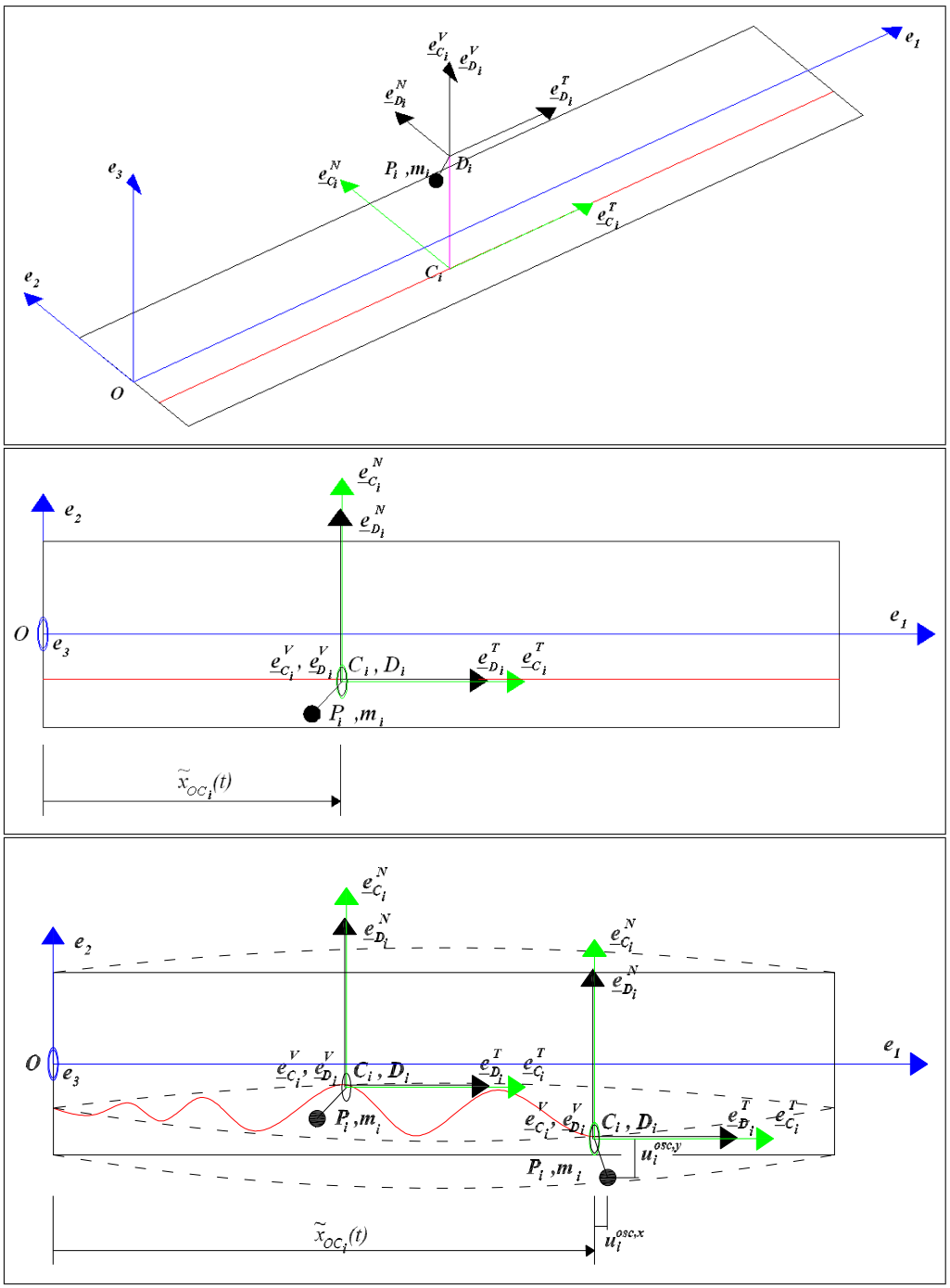


FIGURE 4.2 – Systèmes de référence - Exemple de trajectoire dans le cas simplifié 1.

On suppose que :

(cas1-H1) le tablier est plan et horizontal ; d'où $\underline{e}_{C_i}(t) = \underline{e}_{D_i}(t)$, $\underline{e}^V_{C_i}(t) = \underline{e}^V_{D_i}(t) = \underline{e}_3$, $q^T_{C_iD_i}(t) = q^N_{C_iD_i}(t) = 0$ et $q^V_{C_iD_i}(t) = h_{D_i}$, où h_{D_i} dépend de la taille du piéton i.

(cas1-H2) l'axe principal longitudinal du pont est rectiligne. On définit un repère cartésien avec l'axe x parallèle à l'axe principal du tablier, l'axe z vertical et l'axe y orienté en conséquence. Le repère $(O, \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ devient $\left(O, \underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z\right)$. Les coordonnées initiales des points du plancher sont $\underline{q} = {}^t[q^x, q^y, 0]$; il s'en suit que le déplacement du plancher ne dépend pas de z : $\underline{U}\left(\underline{q}, t\right) = \underline{U}\left(q^x, q^y, t\right)$;

(cas1-H3) la vibration du plancher est dans le plan horizontal, i.e. $U_z\left(q^x, q^y, t\right) = 0$;

(cas1-H4) l'oscillation longitudinale est négligeable, i.e. $U_x\left(q^x, q^y, t\right) \simeq 0$;

(cas1-H5) les déplacements $U_y\left(q^x, q^y, t\right)$ sont supposés constants le long de l'axe y, i.e. $U_y = U_y\left(q^x, t\right)$.

Ces cinq hypothèses impliquent que la position instantanée $\bar{\underline{q}}(t)$ du point $\underline{q}$ du plancher devient :

$$\bar{\underline{q}}(t) = \underline{q} + \underline{U}\left(\underline{q}, t\right) = \begin{bmatrix} q^x \\ q^y \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ U_y\left(q^x, t\right) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q^x \\ q^y + U_y\left(q^x, t\right) \\ 0 \end{bmatrix} . \tag{4.6}$$

De plus, on suppose :

(cas1-H6) les déplacements $U_y\left(q^x, t\right)$ sont de faible amplitude, la structure a un comportement géométriquement linéaire ;

(cas1-H7) la trajectoire des piétons est dans le plan du plancher, d'où la vitesse du piéton i selon sa trajectoire sur le plancher est $\underline{\dot{u}}_i^{tr}(t) = {}^t\left[\dot{u}_i^{tr,x}(t), \dot{u}_i^{tr,y}(t), 0\right]$.

Ainsi, on peut écrire :

$$\frac{d\underline{OC_i}(t)}{dt} = \begin{bmatrix} \dot{u}_i^{tr,x}(t) \\ \dot{u}_i^{tr,y}(t) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\partial U_y\left(q^x_{OC_i}, t\right)}{\partial t} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{u}_i^{tr,x}(t) \\ \dot{u}_i^{tr,y}(t) + \frac{\partial U_y\left(q^x_{OC_i}, t\right)}{\partial t} \\ 0 \end{bmatrix} . \tag{4.7}$$

Sous les hypothèses simplificatrices de (cas1-H1) jusqu'à (cas1-H7), la vitesse absolue de la masse m_i en P_i du piéton i devient alors :

$$\begin{aligned} \underline{\dot{u}}_i^{abs}(t) = \tfrac{d\underline{OP_i}(t)}{dt} \quad &= {}^t\begin{bmatrix} \dot{u}_i^{tr,x}(t) \\ \dot{u}_i^{tr,y}(t) + \frac{\partial U_y\left(q^x_{OC_i}, t\right)}{\partial t} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{e}_x \\ \underline{e}_y \\ \underline{e}_z \end{bmatrix} + {}^t\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{e}^T_{C_i}(t) \\ \underline{e}^N_{C_i}(t) \\ \underline{e}_z \end{bmatrix} \\ &+ {}^t\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ h_{D_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{d\underline{e}^T_{C_i}(t)}{dt} \\ \frac{d\underline{e}^N_{C_i}(t)}{dt} \\ 0 \end{bmatrix} + {}^t\begin{bmatrix} \dot{u}_i^{osc,T}(t) \\ \dot{u}_i^{osc,N}(t) \\ \dot{u}_i^{osc,V}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{e}^T_{D_i}(t) \\ \underline{e}^N_{D_i}(t) \\ \underline{e}_z \end{bmatrix} \\ &+ {}^t\begin{bmatrix} q^T_{D_iP_i}(t) \\ q^N_{D_iP_i}(t) \\ q^V_{D_iP_i}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{d\underline{e}^T_{D_i}(t)}{dt} \\ \frac{d\underline{e}^N_{D_i}(t)}{dt} \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{4.8}$$

où $\dot{u}_i^{osc,T}(t)$, $\dot{u}_i^{osc,N}(t)$ et $\dot{u}_i^{osc,V}(t)$ sont la vitesse d'oscillation de m_i autour de la trajectoire moyenne de sa position d'équilibre, respectivement tangente, normale et verticale aux mouvement du piéton.

De manière analogue, on peut calculer l'accélération absolue :

$$\underline{\ddot{u}}_i^{abs}(t) = \frac{d^2\underline{OP_i}(t)}{dt^2} = {}^t\begin{bmatrix} \ddot{u}_i^{tr,x}(t) \\ \ddot{u}_i^{tr,y}(t) + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U_y\left(q^x_{OC_i},t\right)}{\partial t}\right) \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \underline{e}_x \\ \underline{e}_y \\ \underline{e}_z \end{bmatrix} + {}^t\begin{bmatrix} \ddot{u}_i^{osc,T}(t) \\ \ddot{u}_i^{osc,N}(t) \\ \ddot{u}_i^{osc,V}(t) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \underline{e}^T_{D_i}(t) \\ \underline{e}^N_{D_i}(t) \\ \underline{e}_z \end{bmatrix}$$
$$+2\,{}^t\begin{bmatrix} \dot{u}_i^{osc,T}(t) \\ \dot{u}_i^{osc,N}(t) \\ \dot{u}_i^{osc,V}(t) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{d\underline{e}^T_{D_i}(t)}{dt} \\ \frac{d\underline{e}^N_{D_i}(t)}{dt} \\ 0 \end{bmatrix} + {}^t\begin{bmatrix} q^T_{D_iP_i}(t) \\ q^N_{D_iP_i}(t) \\ q^V_{D_iP_i}(t) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{d^2\underline{e}^T_{D_i}(t)}{dt^2} \\ \frac{d^2\underline{e}^N_{D_i}(t)}{dt^2} \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{4.9}$$

Soit $\theta_i(t)$ l'angle entre la direction de la trajectoire moyenne du piéton i et la direction de l'axe longitudinal de la passerelle (Figure 4.3).

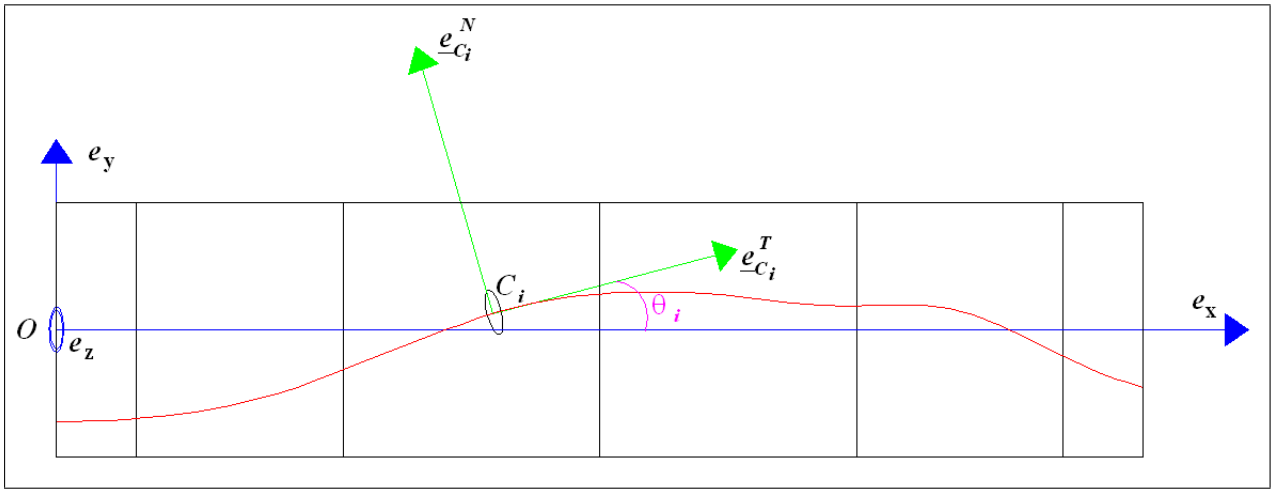


FIGURE 4.3 – Définition de $\theta_i(t)$, l'angle entre la direction de la trajectoire moyenne du piéton i et la direction de l'axe longitudinal de la passerelle.

D'après la définition de $\theta_i(t)$, les expressions suivantes peuvent être établies :

$$\begin{cases} \underline{u}_i^{osc,x}(t) = \left(u_i^{osc,T}(t)\cos(\theta_i(t)) - u_i^{osc,N}(t)\sin(\theta_i(t))\right)\underline{e}_x \\ \underline{u}_i^{osc,y}(t) = \left(u_i^{osc,T}(t)\sin(\theta_i(t)) + u_i^{osc,N}(t)\cos(\theta_i(t))\right)\underline{e}_y \\ \underline{u}_i^{osc,z}(t) = \left(u_i^{osc,V}(t)\right)\underline{e}_z\,. \end{cases} \tag{4.10}$$

L'accélération absolue (4.9) est réécrite :

$$\underline{\ddot{u}}_i^{abs}(t) = {}^t\begin{bmatrix} \ddot{u}_i^{tr,x}(t) + \ddot{u}_i^{osc,x}(t) \\ \ddot{u}_i^{ent,y}(t) + \ddot{u}_i^{tr,y}(t) + \ddot{u}_i^{osc,y}(t) \\ \ddot{u}_i^{osc,z}(t) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \underline{e}_x \\ \underline{e}_y \\ \underline{e}_z \end{bmatrix} \tag{4.11}$$

où $\ddot{u}_i^{ent,y}(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U_y\left(q^x_{OC_i},t\right)}{\partial t}\right)$.

Expression de $\underline{F}_i(t)$ pour le cas de vibrations latérales

Après avoir trouvé l'expression de l'accélération absolue d'un piéton i, représenté par sa masse m_i, pour le cas général et pour celui d'une vibration de la passerelle gouvernée par

le mouvement latéral, dans l'équation de la dynamique de l'oscillateur (4.1) qui représente le piéton, les accélérations $\underline{\ddot{u}}_i^{ent}(t)$, $\underline{\ddot{u}}_i^{tr}(t)$ et $\underline{\ddot{u}}_i^{osc}(t)$ doivent être définies pour déterminer la «force de rappel» $\underline{F}_i(t)$.
Comme nous nous intéressons aux oscillations latérales de la passerelle, nous projetons l'équation (4.1) dans la direction y :

$$m_i \ddot{u}_i^{abs,y}(t) + F_i^y(t) = 0 \ . \tag{4.12}$$

Soit

$$F_i^y(t) = -m_i \left(\ddot{u}_i^{ent,y}(t) + \ddot{u}_i^{tr,y}(t) + \ddot{u}_i^{osc,y}(t) \right) \ , \tag{4.13}$$

F_i^y étant la composante latérale de $\underline{F}_i = {}^t[F_i^x, F_i^y, F_i^z]$. L'équation (4.13) représente la dynamique du centre de gravité du piéton i dans la direction latérale. Le premier terme est l'accélération de la passerelle à la position $q_{OC_i}^x(t)$ instantanément occupée par le piéton (i.e. l'accélération *locale*), c'est la quantité physique qui agit sur le piéton. Ce terme est un terme d'entraînement. Les second et troisième termes composent l'accélération relative du piéton : le second concerne l'accélération de la position d'équilibre de la masse (représentant le piéton) selon sa trajectoire, et le troisième correspond aux oscillations de cette masse autour de sa position d'équilibre lors de la marche du piéton.
Dans la suite, nous définissons ces trois accélérations permettant d'obtenir l'expression de F_i^y.

Expression de $\ddot{u}_i^{osc,y}(t)$: Lorsqu'un piéton i se déplace en marchant sur un sol rigide, son centre de gravité oscille autour de sa trajectoire moyenne. Ainsi, pour définir l'accélération des oscillations du piéton i autour de sa trajectoire $\underline{\ddot{u}}_i^{osc}(t)$, nous introduisons $\underline{F}_i^{osc}(t)$ les forces appliquées par les deux jambes du piéton sur le sol fixe. Nous supposons que ces forces sont identiques pour les deux jambes. Ainsi

$$\underline{\ddot{u}}_i^{osc}(t) = -\frac{1}{m_i} \underline{F}_i^{osc}(t) \ . \tag{4.14}$$

Comme chaque piéton marche sur un plan, la force appliquée par le piéton i sur le sol a une composante normale $\underline{F}_i^{osc,N}$ et une composante tangentielle $\underline{F}_i^{osc,T}$ à son mouvement. Nous supposons que chaque piéton exerce une force sinusoïdale sur la passerelle [31,137]. Comme la fréquence de $\underline{F}_i^{osc,T}$ est le double de la fréquence de $\underline{F}_i^{osc,N}$ [31], l'expression de $\underline{F}_i^{osc}$ est la suivante :

$$\begin{aligned} \underline{F}_i^{osc}(t) &= F_i^{osc,T}(t)\underline{e}_i^{tr}(t) + F_i^{osc,N}(t)\underline{e}_i^{tr,\perp}(t) \\ &= T_i \sin(2\phi_i(t))\, \underline{e}_i^{tr}(t) + N_i \sin(\phi_i(t))\underline{e}_i^{tr,\perp}(t) \end{aligned} \tag{4.15}$$

où T_i (resp. N_i) est l'amplitude maximale de $F_i^{osc,T}$ (resp. $F_i^{osc,N}$) ; $\underline{e}_i^{tr}$ (resp. $\underline{e}_i^{tr,\perp}$) est le vecteur directeur unitaire tangent (resp. normal) au mouvement du piéton i, $\underline{e}_i^{tr} = \frac{\dot{\underline{u}}_i^{tr}(t)}{\|\dot{\underline{u}}_i^{tr}(t)\|}$ avec $\dot{\underline{u}}_i^{tr}(t)$ la vitesse du piéton i selon sa trajectoire moyenne par rapport au sol ; et $\phi_i(t)$ est la phase totale de la force de marche générée par le piéton i sur le sol, tel que $\dot{\phi}_i(t) = \omega_i$ où ω_i est la fréquence angulaire latérale de sa marche libre.
D'après (4.14) et (4.15), $\underline{\ddot{u}}_i^{osc}(t)$ est déterminée à partir de l'équation suivante :

$$\underline{\ddot{u}}_i^{osc}(t) = -\frac{1}{m_i} \left(T_i \sin(2\phi_i(t))\, \underline{e}_i^{tr}(t) + N_i \sin(\phi_i(t))\underline{e}_i^{tr,\perp}(t) \right) \ . \tag{4.16}$$

La projection de l'équation précédente selon la direction y donne :

$$\ddot{u}_i^{osc,y}(t) = -\frac{1}{m_i} \left(T_i \sin(2\phi_i(t)) \sin(\theta_i(t)) + N_i \sin(\phi_i(t)) \cos(\theta_i(t)) \right) \ . \tag{4.17}$$

Expression de $\ddot{u}_i^{tr,y}(t)$: Pour déterminer l'accélération $\ddot{u}_i^{tr,y}(t)$ de chaque piéton i selon sa trajectoire moyenne, nous devons contrôler les mouvements des N piétons dans le plan en prenant en compte les interactions locales piéton-piéton et piéton-obstacle. Nous utilisons le modèle de foule microscopique présenté dans les chapitres 2 et 3, et dans [5, 112–114] pour obtenir $\underline{\ddot{u}}_i^{tr}(t)$. Nous rappelons qu'il est fondé sur le modèle proposé par Frémond [105, 106] pour modéliser le mouvement de grains rigides, adapté à la foule.
Lorsqu'il n'y a pas de contact, l'équation $(2.12)_1$ donne directement la valeur réelle de $\underline{\ddot{u}}_i^{tr}(t)$. Lorsqu'un contact est détecté, l'équation $(2.12)_2$ donne une valeur approchée de $\underline{\ddot{u}}_i^{tr}(t)$ après la détermination de $\underline{\dot{u}}_i^{tr,+}$:

$$\underline{\ddot{u}}_i^{tr}(t) \simeq \frac{\underline{\dot{u}}_i^{tr,+}(t) - \underline{\dot{u}}_i^{tr,-}(t)}{h} \tag{4.18}$$

où h est le pas de temps choisi dans le schéma numérique.
$\ddot{u}_i^{tr,y}(t)$ s'obtient en projetant $\underline{\ddot{u}}_i^{tr}(t)$ selon la direction y.

Expression de $\ddot{u}_i^{ent,y}(t)$: D'après l'expression de l'accélération absolue du piéton i dans l'équation (4.11), l'accélération d'entrainement de la passerelle à la position $q^x_{OC_i}(t)$ instantanément occupée par le piéton i est :

$$\ddot{u}_i^{ent,y}(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U_y\left(q^x_{OC_i}, t\right)}{\partial t}\right) . \tag{4.19}$$

La réponse d'une structure linéaire peut être décomposée en la somme de réponses modales. Pour la composante latérale, en se limitant aux N_m premiers modes, nous trouvons :

$$U_y(q^x, t) = \sum_{j=1}^{N_m} \psi_j(q^x) U_{y,j}(t) \tag{4.20}$$

où $\psi_j(q^x)$ est la $j^{ème}$ forme modale et $U_{y,j}(t)$ est la $j^{ème}$ coordonnée modale du déplacement latéral de la passerelle.
Nous introduisons une nouvelle hypothèse. L'excitation latérale du piéton due à la marche a une fréquence toujours proche de $0.9 - 1\ Hz$, ainsi on accepte deux choix d'approximation :

(cas1-H8) seul le mode latéral avec la fréquence la plus proche de celle de la marche, est suffisant pour représenter correctement la dynamique de la passerelle :

$$U_y(q^x, t) \simeq \psi_1(q^x) U_y(t) \tag{4.21}$$

où $U_y(t) = A_y(t)\sin\left(\psi_{str}(t)\right)$ est le déplacement modal latéral de la passerelle avec la phase instantanée $\psi_{str}(t)$ et l'amplitude instantanée $A_y(t)$, et $\psi_1\left(q^x\right)$ est la première forme modale latérale de la passerelle normée par : $\max_{q^x \in [0; L_{str}]}\left(\psi_1\left(q^x\right)\right) = 1$.
Ainsi, l'accélération d'entrainement de la passerelle à la position $q^x_{OC_i}(t)$ instantanément occupée par le piéton i devient :

$$\begin{aligned} \ddot{u}_i^{ent,y}(t) &= \tfrac{d}{dt}\left(\psi_1(q^x_{OC_i})\dot{U}_y(t)\right) \\ &= \psi_1(q^x_{OC_i})\ddot{U}_y(t) + \tfrac{\partial \psi_1(q^x_{OC_i})}{\partial q^x}\tfrac{dq^x_{OC_i}(t)}{dt}\dot{U}_y(t) \\ &= \psi_1(q^x_{OC_i})\ddot{U}_y(t) + \tfrac{\partial \psi_1(q^x_{OC_i})}{\partial q^x}\dot{u}_i^{tr,x}(t)\dot{U}_y(t) . \end{aligned} \tag{4.22}$$

(cas1-H8 bis) L'amplitude d'oscillation latérale de la passerelle est la même sur toute sa longueur (i.e. $\psi_1(q^x) = 1$) :

$$U_y(q^x, t) \simeq U_y(t) \ . \tag{4.23}$$

Ainsi, l'accélération d'entrainement de la passerelle à la position $q^x_{OC_i}(t)$ instantanément occupée par le piéton i devient :

$$\begin{aligned} \ddot{u}_i^{ent,y}(t) &= \tfrac{d}{dt}\left(\dot{U}_y(t)\right) \\ &= \ddot{U}_y(t) \ . \end{aligned} \tag{4.24}$$

4.2.3 Cas 2 : Les piétons marchent dans un plan et les oscillations de la structure sont verticales

La même démarche que celle réalisée pour le cas 1 est présentée ici, mais avec des piétons marchant sur une passerelle dont le mouvement est gouverné par ses oscillations verticales. Dans une première partie, nous donnons les hypothèses pour simplifier l'expression de $\underline{\ddot{u}}_i^{abs}(t)$. Dans une seconde partie, nous donnons l'expression de $\underline{F}_i(t)$ pour le cas de vibrations verticales.

Hypothèses simplificatrices

Nous simplifions les expressions générales (4.3), (4.4) et (4.5) en adoptant certaines hypothèses définissant le cas particulier où le mouvement de la passerelle, de longueur L_{str} et largeur l_{str}, est gouverné par l'oscillation verticale, et la marche du piéton i est dans le plan de la passerelle.
Les hypothèses **(cas2-H1)**, **(cas2-H2)**, **(cas2-H4)** et **(cas2-H7)** sont les mêmes que celles exposées dans le cas 1. Les hypothèses **(cas2-H3)**, **(cas2-H5)** et **(cas2-H6)** sont :

(cas2-H3) la vibration du plancher est dans le plan vertical, i.e. $U_y(q^x, q^y, t) = 0$;

(cas2-H5) les déplacements $U_z(q^x, q^y, t)$ sont supposés constants le long de l'axe y, i.e. $U_z = U_z(q^x, t)$.

(cas2-H6) les déplacements $U_z(q^x, t)$ sont de faible amplitude, la structure a un comportement géométriquement linéaire ;

Ces hypothèses impliquent que la position instantanée $\underline{\bar{q}}(t)$ du point $\underline{q}$ du plancher devient :

$$\underline{\bar{q}}(t) = \underline{q} + \underline{U}\left(\underline{q}, t\right) = \begin{bmatrix} q^x \\ q^y \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ U_z(q^x, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q^x \\ q^y \\ U_z(q^x, t) \end{bmatrix} \ . \tag{4.25}$$

Par analogie avec le cas 1, l'accélération absolue $\underline{\ddot{u}}_i^{abs}(t)$ de la masse m_i en P_i du piéton i s'exprime par :

$$\underline{\ddot{u}}_i^{abs}(t) = {}^t \begin{bmatrix} \ddot{u}_i^{tr,x}(t) + \ddot{u}_i^{osc,x}(t) \\ \ddot{u}_i^{tr,y}(t) + \ddot{u}_i^{osc,y}(t) \\ \ddot{u}_i^{ent,z}(t) + \ddot{u}_i^{osc,z}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{e}_x \\ \underline{e}_y \\ \underline{e}_z \end{bmatrix} \tag{4.26}$$

où $\ddot{u}_i^{ent,z}(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U_z\left(q^x_{OC_i}, t\right)}{\partial t}\right)$.

Expression de $\underline{F}_i(t)$ pour le cas de vibrations verticales

En utilisant la même procédure que dans le cas de vibrations latérales, dans l'équation (4.1) de la dynamique de l'oscillateur qui représente le piéton, les accélérations $\underline{\ddot{u}}_i^{ent}(t)$ et $\underline{\ddot{u}}_i^{osc}(t)$ sont définies pour déterminer la «force de rappel» $\underline{F}_i(t)$.
Comme nous nous intéressons aux oscillations verticales de la passerelle, nous projetons l'équation (4.1) dans la direction z :

$$m_i \ddot{u}_i^{abs,z}(t) + F_i^z(t) = -m_i g \ . \tag{4.27}$$

Soit

$$F_i^z(t) = -m_i \left(\ddot{u}_i^{ent,z}(t) + \ddot{u}_i^{osc,z}(t) + g \right) \ , \tag{4.28}$$

F_i^z étant la composante verticale de $\underline{F}_i = [F_i^x, F_i^y, F_i^z]^T$.
Dans la suite, nous définissons les deux accélérations permettant d'obtenir l'expression de F_i^y

Expression de $\ddot{u}_i^{osc,z}(t)$: Lorsqu'un piéton se déplace en marchant sur un sol rigide, son centre de gravité oscille autour de sa trajectoire moyenne. Ainsi, pour définir l'accélération des oscillations verticales du piéton i autour de sa trajectoire $\underline{\ddot{u}}_i^{osc,z}(t)$, nous considérons le cas où le piéton marche sur place. Nous supposons que les forces $\underline{F}_i^{osc}(t)$ appliquées par les deux jambes du piéton sur le sol fixe sont identiques. L'équation (4.27) devient :

$$m_i \ \ddot{u}_i^{osc,z}(t) + F_i^{osc,z}(t) = -m_i g \ . \tag{4.29}$$

Nous supposons que chaque piéton exerce une force verticale sinusoïdale sur la passerelle [31, 70, 137], ayant la même fréquence que $\underline{F}_i^{osc,T}$ [31]. Elle a pour amplitude moyenne le poids du piéton et varie de $\pm V_i$ N. L'expression de $F_i^{osc,z}$ est la suivante :

$$F_i^{osc,z}(t) = m_i g + V_i \sin\left(2\phi_i(t)\right) \tag{4.30}$$

et donc l'accélération des oscillations verticales $\ddot{u}_i^{osc,z}(t)$ du piéton i est :

$$\ddot{u}_i^{osc,z}(t) = -2g - \frac{V_i}{m_i} \sin\left(2\phi_i(t)\right) \ . \tag{4.31}$$

Expression de $\ddot{u}_i^{ent,z}(t)$: D'après l'expression de l'accélération absolue du piéton i dans l'équation (4.26), l'accélération d'entrainement de la passerelle à la position $q_{OC_i}^x(t)$ instantanément occupée par le piéton i est :

$$\ddot{u}_i^{ent,z}(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U_z\left(q_{OC_i}^x, t\right)}{\partial t} \right) \ . \tag{4.32}$$

Comme pour le cas 1, on décompose la réponse de la structure en somme de réponses modales. Pour la composante verticale, en se limitant aux N_m premiers modes, nous trouvons :

$$U_z(q^x, t) = \sum_{j=1}^{N_m} \psi_j(q^x) U_{z,j}(t) \tag{4.33}$$

où $\psi_j(q^x)$ est la $j^{ème}$ forme modale et $U_{z,j}(t)$ est la $j^{ème}$ coordonnée modale du déplacement vertical de la passerelle.
Nous acceptons deux choix d'approximation :

(cas2-H8) seul le mode vertical avec la fréquence la plus proche du double de celle de la marche latérale, est suffisant pour représenter correctement la dynamique de la passerelle :

$$U_z(q^x,t) \simeq \psi_1(q^x)U_z(t) \tag{4.34}$$

où $U_z(t) = A_z(t)\sin(\psi_{str}(t))$ est le déplacement modal vertical de la passerelle avec la phase instantanée $\psi_{str}(t)$ et l'amplitude instantanée $A_z(t)$, et $\psi_1(q^x)$ est la première forme modale verticale de la passerelle normée par : $\max_{q^x\in[0;L_{str}]}(\psi_1(q^x)) = 1$.
Ainsi, l'accélération d'entrainement de la passerelle à la position $q^x_{OC_i}(t)$ instantanément occupée par le piéton i devient :

$$\begin{aligned} \ddot{u}_i^{ent,z}(t) &= \tfrac{d}{dt}\left(\psi_1(q^x_{OC_i})\dot{U}_z(t)\right) \\ &= \psi_1(q^x_{OC_i})\ddot{U}_z(t) + \tfrac{\partial\psi_1(q^x_{OC_i})}{\partial q^x}\tfrac{dq^x_{OC_i}(t)}{dt}\dot{U}_z(t) \\ &= \psi_1(q^x_{OC_i})\ddot{U}_z(t) + \tfrac{\partial\psi_1(q^x_{OC_i})}{\partial q^x}\dot{u}_i^{tr,x}(t)\dot{U}_z(t)\ . \end{aligned} \tag{4.35}$$

(cas2-H8 bis) L'amplitude d'oscillation verticale de la passerelle est la même sur toute sa longueur (i.e. $\psi_1(q^x) = 1$) :

$$U_z(q^x,t) \simeq U_z(t)\ . \tag{4.36}$$

Ainsi, l'accélération d'entrainement de la passerelle à la position $q^x_{OC_i}(t)$ instantanément occupée par le piéton i devient :

$$\begin{aligned} \ddot{u}_i^{ent,z}(t) &= \tfrac{d}{dt}\left(\dot{U}_z(t)\right) \\ &= \ddot{U}_z(t)\ . \end{aligned} \tag{4.37}$$

4.3 Modèle d'interaction foule-passerelle

Nous présentons ici les équations du modèle d'interaction foule-passerelle pour les cas oscillations latérales puis verticales de la passerelle. Pour chaque direction étudiée, nous présenterons l'équation de la dynamique de la passerelle, l'équation permettant de gérer la variation de la phase de la force exercée par un piéton sur le sol en oscillant autour de sa position d'équilibre, et l'équation permettant de gérer l'allure de la marche des piétons.

4.3.1 cas 1 : oscillations latérales de la passerelle

Equation de la dynamique de la passerelle concernant les oscillations latérales

Nous présentons l'équation de la dynamique de la passerelle lorsqu'un seul piéton est sur la structure, puis lorsqu'une foule de piétons la traverse. Pour chaque situation, les cas sans et avec forme modale sont explicités.

système couplé *piéton-structure* : On considère ici un système couplé formé par *un seul* piéton et une passerelle et on en étudie seulement les oscillations latérales.
En prenant en compte les hypothèses **(cas1-H1)** jusqu'à **(cas1-H7)**, l'équation de la dynamique de la structure projetée sur le premier mode latéral de vibration s'exprime par :

$$M_{str}\ddot{U}_y(t) + C_{str}\dot{U}_y(t) + K_{str}U_y(t) = \psi_1\left(q^x_{OC_i}\right)F_i^y(t) \tag{4.38}$$

soit

$$M_{str}\ddot{U}_y(t) + C_{str}\dot{U}_y(t) + K_{str}U_y(t) = -m_i\psi_1\left(q^x_{OC_i}\right)\left(\ddot{u}_i^{ent,y}(t) + \ddot{u}_i^{tr,y}(t) + \ddot{u}_i^{osc,y}(t)\right) \quad (4.39)$$

où M_{str}, C_{str} et K_{str} sont la masse, l'amortissement et la raideur modales de la structure.

- En ne prenant pas en compte la forme modale (hypothèse (cas1-H8 bis)), l'équation (4.39) devient :

$$M_{str}\ddot{U}_y(t) + C_{str}\dot{U}_y(t) + K_{str}U_y(t) = -m_i\left(\frac{d}{dt}\left(\dot{U}_y(t)\right) + \ddot{u}_i^{tr,y}(t) + \ddot{u}_i^{osc,y}(t)\right) \quad (4.40)$$

soit

$$\left(M_{str} + m_i\right)\ddot{U}_y(t) + C_{str}\dot{U}_y(t) + K_{str}U_y(t) = -m_i\left(\ddot{u}_i^{tr,y}(t) + \ddot{u}_i^{osc,y}(t)\right) \ . \quad (4.41)$$

- En prenant en compte la forme modale (hypothèse (cas1-H8)), l'équation (4.39) devient :

$$\begin{aligned} &M_{str}\ddot{U}_y(t) + C_{str}\dot{U}_y(t) + K_{str}U_y(t) = \\ &\quad -m_i\psi_1\left(q^x_{OC_i}\right)\left(\psi_1(q^x_{OC_i})\ddot{U}_y(t) + \frac{\partial\psi_1(q^x_{OC_i})}{\partial q^x}\dot{u}_i^{tr,x}(t)\dot{U}_y(t) + \ddot{u}_i^{tr,y}(t) + \ddot{u}_i^{osc,y}(t)\right) \end{aligned} \quad (4.42)$$

soit

$$\begin{aligned} &\left(M_{str} + m_i\psi_1^2(q^x_{OC_i})\right)\ddot{U}_y(t) + \left(C_{str} + m_i\psi_1\left(q^x_{OC_i}\right)\frac{\partial\psi_1(q^x_{OC_i})}{\partial q^x}\dot{u}_i^{tr,x}(t)\right)\dot{U}_y(t) + K_{str}U_y(t) = \\ &\quad -m_i\psi_1\left(q^x_{OC_i}\right)\left(\ddot{u}_i^{tr,y}(t) + \ddot{u}_i^{osc,y}(t)\right) \ . \end{aligned} \quad (4.43)$$

système couplé *foule-structure* : On considère le système couplé formé par N piétons. L'équation (4.38) écrite pour un piéton devient, lorsque l'on en considère N :

$$M_{str}\ddot{U}_y(t) + C_{str}\dot{U}_y(t) + K_{str}U_y(t) = \sum_{i=1}^{N}\psi_1\left(q^x_{OC_i}\right)F_i^y(t) \ . \quad (4.44)$$

- L'équation (4.41) ne prenant pas en compte la forme modale devient :

$$\left(M_{str} + \sum_{i=1}^{N} m_i\right)\ddot{U}_y(t) + C_{str}\dot{U}_y(t) + K_{str}U_y(t) = -\sum_{i=1}^{N} m_i\left(\ddot{u}_i^{tr,y}(t) + \ddot{u}_i^{osc,y}(t)\right) \ . \quad (4.45)$$

- L'équation (4.43) prenant en compte la forme modale devient :

$$\begin{aligned} &\left(M_{str} + \sum_{i=1}^{N} m_i\psi_1^2(q^x_{OC_i})\right)\ddot{U}_y(t) + \left(C_{str} + \sum_{i=1}^{N} m_i\psi_1\left(q^x_{OC_i}\right)\frac{\partial\psi_1(q^x_{OC_i})}{\partial q^x}\dot{u}_i^{tr,x}(t)\right)\dot{U}_y(t) \\ &\quad + K_{str}U_y(t) = -\sum_{i=1}^{N} m_i\psi_1\left(q^x_{OC_i}\right)\left(\ddot{u}_i^{tr,y}(t) + \ddot{u}_i^{osc,y}(t)\right) \ . \end{aligned} \quad (4.46)$$

Gestion de la variation de la phase de la force exercée par le piéton sur le sol lors de la marche en oscillant autour de sa position d'équilibre

Nous souhaitons prendre en compte la synchronisation dans le modèle d'interaction foule-structure, i.e. l'adaptation de la fréquence de la force générée par chaque piéton sur le sol lors de la marche à la fréquence d'oscillation du système "foule-structure". Une équation gérant la variation de la phase de la force exercée par le piéton sur le sol lors de la marche en oscillant autour de sa position d'équilibre, permet de mettre en évidence le phénomène de synchronisation. Notre choix de modélisation de l'accélération $\ddot{u}_i^{osc,y}(t)$ fait que l'utilisation d'une équation différentielle de type Kuramoto permet de gérer l'évolution de la phase $\phi_i(t)$ du piéton i. Plusieurs types d'équations de Kuramoto existent. On peut citer Strogatz qui a proposé une équation qui dépend de l'amplitude des oscillations latérales de la passerelle [137], Bodgi qui a déterminé une équation qui est fonction de l'accélération latérale de la passerelle [31], ou Erlicher qui a trouvé une équation de type Kuramoto à partir d'un modèle de Van der Pol Modifié [19]. Ces équations permettent de faire converger la fréquence angulaire de marche de chaque piéton vers celle du système "foule-structure".
Nous avons choisi d'utiliser l'équation proposée par Strogatz, modifiée pour prendre en compte la forme modale de la passerelle. Dans le cas des oscillations latérales, les piétons sont sensibles à l'amplitude du déplacement latéral de la passerelle :

$$\dot{\phi}_i(t) = \omega_i + \varepsilon_i A_y(t)\psi_1(q^x_{OC_i}) \sin\left(\psi_{str}(t) - \phi_i(t) + \alpha\right) \qquad i = 1...N \tag{4.47}$$

comme dans [137], mais leur fréquence instantannée dépend aussi de la forme modale de la passerelle. ε_i quantifie la sensibilité du piéton i aux vibrations de la structure, sa valeur a été estimée par Strogatz [137], dans le cas latéral, en comparant ses résultats (sans forme modale) avec les résultats expérimentaux réalisés sur le Millenium Bridge [70]. Strogatz a choisi $\alpha = \frac{\pi}{2}$ pour avoir la force latérale exercée par le piéton i sur le plancher en phase avec la vitesse latérale de la passerelle quand la synchronisation est déclenchée.

Gestion de l'allure de la marche des piétons

Pour prendre en compte les oscillations latérales de la structure dans le modèle de mouvement de foule, l'amplitude de la vitesse souhaitée du $i^{ème}$ piéton définie dans l'équation (3.2) est modifiée et est notée $\|\underline{\dot{u}}_{d,i}\|_{mod}(t)$. Elle dépend de $A_y(t)$ et $\psi_{str}(t)$ présents dans la longueur de pas instantanée $L_{pas,i}(t)$ et la fréquence angulaire instantanée $\dot{\phi}_i(t)$:

$$\|\underline{\dot{u}}_{d,i}\|_{mod}(t) = \frac{L_{pas,i}(t)}{\pi}\dot{\phi}_i(t). \tag{4.48}$$

$\dot{\phi}_i(t)$ est obtenue à partir de l'équation (4.47), et $L_{pas,i}(t)$ peut être choisie dépendante de $A_y(t)$ pour prendre en compte la décélération des piétons :

$$L_{pas,i}(t) = \begin{cases} L_{pas,0,i} & \text{sans décélération} \\ L_{pas,0,i}\max\left(0, 1 - \frac{A_y(t)\psi_1(q^x_{OC_i})}{A_{max,i}}\right) & \text{avec décélération .} \end{cases} \tag{4.49}$$

$A_{max,i}$ est l'amplitude maximale du déplacement latéral de la passerelle que le piéton i peut tolérer. Quand $A_y(t)\psi_1(q^x_{OC_i})$ atteint $A_{max,i}$, les oscillations deviennent intolérables pour le piéton i qui s'arrête de marcher.

4.3.2 cas 2 : oscillations verticales de la passerelle

Par analogie avec le cas latéral, nous donnons les équations en utilisant des paramètres en rapport avec la direction verticale.

Equation de la dynamique de la passerelle concernant les oscillations verticales

système couplé *piéton-structure* :

- Sans forme modale :

$$(M_{str} + m_i)\,\ddot{U}_z(t) + C_{str}\dot{U}_z(t) + K_{str}U_z(t) = -m_i\left(\ddot{u}_i^{osc,z}(t) + g\right) \ . \tag{4.50}$$

- Avec forme modale :

$$\left(M_{str} + m_i\psi_1^2(q^x_{OC_i})\right)\ddot{U}_z(t) + \left(C_{str} + m_i\psi_1\left(q^x_{OC_i}\right)\frac{\partial\psi_1(q^x_{OC_i})}{\partial q^x}\dot{u}_i^{tr,x}(t)\right)\dot{U}_z(t) + K_{str}U_z(t) = -m_i\psi_1\left(q^x_{OC_i}\right)\left(\ddot{u}_i^{osc,z}(t) + g\right) \ . \tag{4.51}$$

système couplé *foule-structure* :

- Sans forme modale :

$$\left(M_{str} + \sum_{i=1}^{N} m_i\right)\ddot{U}_z(t) + C_{str}\dot{U}_z(t) + K_{str}U_z(t) = -\sum_{i=1}^{N} m_i\left(\ddot{u}_i^{osc,z}(t) + g\right) \ . \tag{4.52}$$

- Avec forme modale :

$$\left(M_{str} + \sum_{i=1}^{N} m_i\psi_1^2(q^x_{OC_i})\right)\ddot{U}_z(t) + \left(C_{str} + \sum_{i=1}^{N} m_i\psi_1\left(q^x_{OC_i}\right)\frac{\partial\psi_1(q^x_{OC_i})}{\partial q^x}\dot{u}_i^{tr,x}(t)\right)\dot{U}_z(t) + K_{str}U_z(t) = -\sum_{i=1}^{N} m_i\psi_1\left(q^x_{OC_i}\right)\left(\ddot{u}_i^{osc,z}(t) + g\right) \ . \tag{4.53}$$

Gestion de la variation de la phase de la force exercée par le piéton sur le sol lors de la marche en oscillant autour de sa position d'équilibre

Dans le cas des oscillations verticales, les piétons sont sensibles à l'amplitude du déplacement vertical de la passerelle, et l'équation de Kuramoto correspondante est :

$$\dot{\phi}_i(t) = \omega_i + \varepsilon_i A_z(t)\psi_1(q^x_{OC_i})\sin\left(\psi_{str}(t) - \phi_i(t) + \alpha\right) \qquad i = 1...N \ . \tag{4.54}$$

Gestion de l'allure de la marche des piétons

L'amplitude de la vitesse souhaitée du $i^{ème}$ piéton est :

$$\|\underline{\dot{u}}_{d,i}\|_{mod}(t) = \frac{L_{pas,i}(t)}{\pi}\dot{\phi}_i(t) \ , \tag{4.55}$$

avec

$$L_{pas,i}(t) = \begin{cases} L_{pas,0,i} & \text{sans décélération} \\ L_{pas,0,i}\max\left(0, 1 - \frac{A_z(t)\psi_1(q^x_{OC_i})}{A_{max,i}}\right) & \text{avec décélération .} \end{cases} \tag{4.56}$$

$A_{max,i}$ est l'amplitude maximale du déplacement vertical de la passerelle que le piéton i peut tolérer.

4.4 Synthèse du chapitre

Nous avons proposé dans une première partie une modélisation du piéton et défini l'expression générale de son accélération absolue. Ensuite, pour les cas particuliers d'un piéton marchant dans un plan, sur une structure oscillant latéralement puis verticalement, nous avons donné l'expression de la force échangée entre le piéton et le sol.
Dans une seconde partie, les équations du modèle d'interaction foule-passerelle pour les cas oscillations latérales puis verticales ont été présentées.

Chapitre 5

Etude analytique

Ce chapitre a pour objectif de présenter, dans des cas particuliers, le calcul analytique de certains paramètres :

⋆ *le nombre critique de piétons* N_c

⋆ *la fréquence de synchronisation*

⋆ *l'amplitude stationnaire post-critique du déplacement latéral de la passerelle*

PLAN DU CHAPITRE 5

5.1 Introduction 117

5.2 La notion de nombre critique de piétons N_c 117

5.2.1 Nombre critique : relation basée sur des équations données par Clough et Penzien [1] : 117

5.2.2 Nombre critique : relation établie à partir d'une équation différentielle pour la phase totale de la force latérale d'un piéton 119

5.3 Calcul du nombre critique N_c dans le cas de vibrations latérales 121

5.3.1 Normalisations et changement d'échelle temporelle 122

5.3.2 Changement de repère et méthode de la moyenne 123

5.3.3 Synchronisation partielle 125

5.3.4 Synchronisation global foule-structure 126

5.4 Calcul de l'amplitude du déplacement de la passerelle lorsque $N > N_c$ dans le cas de vibrations latérales 132

5.5 Synthèse du chapitre 133

5.1 Introduction

Depuis le chapitre bibliographique 1, nous avons vu que dès que l'amplitude des mouvements d'une structure, comme une passerelle, devient perceptible, le comportement de la foule n'est plus aléatoire mais une forme de synchronisation se développe. Le passage du régime aléatoire sur support fixe, au régime synchronisé sur support mobile se produit lorsque l'on dépasse un certain seuil, caractérisé par une accélération critique. Evidemment, comme les accélérations, vitesses et déplacement sont liés, un seuil en accélération peut se traduire en seuil de déplacement.
Un autre critère, lié à l'accélération critique, est présent dans la littérature : le nombre critique de piéton N_c. L'accélération critique est l'accélération produite par le nombre critique de piétons ; ils marchent aléatoirement avant que les oscillations de la structure atteignent le seuil critique, puis sont contraints après.

Après avoir présenté quelques unes des expressions du nombre critique trouvées dans la littérature pour le cas d'oscillations latérales de la passerelle, nous calculons analytiquement ce nombre, dans des cas particuliers, à partir des équations du modèle discret d'interaction foule-passerelle proposé. Nous déterminons aussi l'amplitude stationnaire post-critique du déplacement latéral de la passerelle ainsi que la fréquence de synchronisation.

5.2 La notion de nombre critique de piétons N_c

Nous rappelons dans cette partie quelques unes des expressions du nombre critique trouvées dans la littérature pour le cas d'oscillations latérales de la passerelle. Ces expressions peuvent être classées en deux catégories : celles qui sont basées sur des équations données par Clough et Penzien [1], et celles qui ont été établies à partir d'une équation différentielle gérant la phase totale de la force latérale engendrée par un piéton.

5.2.1 Nombre critique : relation basée sur des équations données par Clough et Penzien [1] :

Des essais réalisés sur la passerelle du Millenium montrent que même si de plus en plus de personnes marchent sur la structure, aucun indice d'instabilité n'apparaît jusqu'à ce qu'un nombre critique N_c de piétons ne soit atteint [137]. Plusieurs auteurs ont essayé de relier ce nombre aux paramètres du comportement de la structure et de la foule. Certains d'entre eux

se sont basés sur les équations suivantes données par Clough et Penzien [1] :

$$\begin{aligned} M_{str}\ddot{U}_y(t) + C_{str}\dot{U}_y(t) + K_{str}U_y(t) &= F^y \\ M_p\ddot{u}_p^{abs,y}(t) &= -F^y \end{aligned} \tag{5.1}$$

où l'indice p réfère au piéton, $u_p^{abs,y}$ étant le déplacement latéral des piétons (marchant rectilignement sur l'axe principal de la passerelle). Dallard et al. [70, 78, 138] ont supposé que les conditions critiques ont lieu lorsque $C_{str}\dot{U}_y(t) = F^y$.
En admettant les relations théoriques suivantes :

$$\omega_{str} = 2\pi f_{str} = \sqrt{\frac{K_{str}}{M_{str}}} \ , \tag{5.2}$$

$$\xi_{str} = \frac{C_{str}}{2M_{str}\omega_{str}} \ , \tag{5.3}$$

ξ_{str} étant le taux d'amortissement de la passerelle, et en admettant que la force induite par un groupe ou foule de piétons est $F^y = \frac{N}{2}k\dot{U}_y$ [70, 78, 138], le nombre critique de piétons selon Dallard s'écrit :

$$\boxed{N_c = \frac{8\pi\xi_{str}f_{str}M_{str}}{k}} \ . \tag{5.4}$$

Une autre définition du nombre critique a été proposée par Newland [138–140] qui a utilisé la même condition pour le passage à l'état critique, en admettant toutefois que c'est un cas particulier où $\omega_{str} = \omega_p$ et la marche des piétons est exactement à $\frac{\pi}{2}$ par rapport au déplacement de la passerelle. Il a donc supposé que

$$F^y(t) = \bar{N}\sin(\omega_p t) = \bar{N}\sin(\omega_{str}t) \ . \tag{5.5}$$

Ainsi, une solution particulière au système d'équations (5.1) est :

$$u_p^{abs,y}(t) = \frac{\bar{N}}{M_p\omega_{str}^2}\sin(\omega_{str}t) \ , \tag{5.6}$$

$$U_y(t) = \frac{\bar{N}}{2\xi_{str}M_{str}\omega_{str}^2}\sin\left(\omega_{str}t - \frac{\pi}{2}\right) \ . \tag{5.7}$$

De plus, il a considéré que les synchronisations instables ont lieu lorsqu'une proportion β de piétons est synchronisée avec la passerelle, et que l'amplitude U_y du déplacement de la structure est proportionnelle à $u_p^{abs,y}$ (on note γ le coefficient de proportionnalité). Ceci se traduit mathématiquement en remplaçant la masse des piétons M_p par βM_p, et en posant :

$$U_y = \gamma u_p^{abs,y} \ . \tag{5.8}$$

Newland a aussi utilisé la relation donnée par Clough et Penzien [1], dans le cas où les piétons sont uniformément répartis sur une portée de longueur L_{str} :

$$\frac{M_p}{M_{str}} = \frac{\int_0^{L_{str}} \frac{N\ m_p}{L_{str}}\psi_m^2(x)dx}{\int_0^{L_{str}} m_{str}\psi_m^2(x)dx} = \frac{N\ m_p}{L_{str}\ m_{str}} \ , \tag{5.9}$$

x étant la distance le long de la portée, m_p étant la masse moyenne d'un piéton, m_{str} la masse de la passerelle par unité de longueur, et $\psi_m(x)$ représentant le mode de vibration normalisé (amplitude maximale unitaire).
En prenant les valeurs particulières : $\gamma = 1.5$ et $\beta = 0.4$, il a obtenu

$$\boxed{N_c = \frac{7.5\xi_{str} m_{str} L_{str}}{m_p}} \ . \tag{5.10}$$

Roberts [138,141] a utilisé les équations (5.1), et le fait que $F^y(t) = \bar{N}\sin(\omega_p t)$. Des solutions particulières de l'équation (5.1) sont :

$$u_p^{abs,y}(t) = \frac{\bar{N}}{M_p \omega_p^2}\sin(\omega_p t) \ , \tag{5.11}$$

$$U_y(t) = \frac{\bar{N} D}{M_{str}\omega_{str}^2}\sin(\omega_p t - \Psi) \ , \tag{5.12}$$

où $\omega_r = \frac{\omega_p}{\omega_{str}}$, $\Psi = \arctan\left(\frac{2\xi_{str}\omega_r}{1-\omega_r^2}\right)$, et $D = \left(\frac{1}{(1-\omega_r)^2 - (2\xi_{str}\omega_r)^2}\right)^{1/2}$.
Il a supposé que la synchronisation instable a lieu lorsque le maximum de l'amplitude latérale de la passerelle dépasse le maximum de l'amplitude du mouvement latéral des piétons. Il a obtenu

$$\boxed{N_c = \frac{1+\alpha_{str}^2}{2}\frac{m_{str} L_{str}}{m_p \omega_r^2 D}} \ , \tag{5.13}$$

α_{str} étant la proportion de la portée sur laquelle marchent les piétons à la position la plus défavorable (ventre d'un mode).
Ces relations ont été comparées avec des mesures expérimentales réalisées sur trois passerelles : la passerelle de Toda Park au Japon (T-bridge), la passerelle de Singapore Changi Airport (C-bridge) et la passerelle du Millenium à Londres. Des différences sont apparues entre les résultats théoriques et les résultats expérimentaux. D'après Roberts [138], ceci s'explique par le fait qu'il y a deux phases de synchronisation. La première phase, stable, peut avoir lieu avec n'importe quel nombre de piétons, et l'amplitude des vibrations ne dépasse pas une valeur limite de $10 - 15\ mm$ comme c'est le cas pour le C-bridge et le T-bridge. La phase instable a lieu lorsque l'amplitude des vibrations dépasse la valeur limite, ce qui a pour conséquence d'augmenter l'amplitude de la force latérale des piétons parce qu'ils changent leur façon de marcher. C'est ce qui a eu lieu pour le Millenium Bridge. Dans cette optique, Roberts [138] déduit que l'équation (5.4) correspond à la phase stable, alors que les deux autres équations (5.10) et (5.13) correspondent à la phase instable, l'équation (5.13) étant la plus générale car elle n'impose pas des valeurs aux paramètres.

5.2.2 Nombre critique : relation établie à partir d'une équation différentielle pour la phase totale de la force latérale d'un piéton

Dans [31, 137, 142, 143], les auteurs utilisent la première équation de (5.1). En notant $\phi_i(t) = 2\pi f_i t + \phi_i^0$ la phase totale de la force engendrée par le $i^{ème}$ piéton, la force latérale totale engendrée par la foule est donnée par :

$$F^y = \sum_{i=1}^{N} \bar{N}\sin(\phi_i(t)) \tag{5.14}$$

avec $\bar{N} = 35\ N$.
Comme la synchronisation est une adaptation de la fréquence de la force engendrée par un piéton à la fréquence de la structure, une idée naturelle est d'introduire une équation différentielle gérant l'évolution de la phase ϕ_i. Cette équation devrait permettre de faire converger la pulsation instantanée du $i^{ème}$ piéton $\frac{d\phi_i}{dt}$ vers celle de la structure. L'équation différentielle choisie est appelée équation de Kuramoto [89]. Dans le cas particulier de la marche, d'après [137, 142], elle peut être écrite sous la forme discrète :

$$\frac{d\phi_i(t)}{dt} = \omega_i + \epsilon_1 A_y(t) \sin\left(\psi_{str}(t) - \phi_i(t) + \alpha\right) \tag{5.15}$$

- ω_i est la fréquence naturelle du $i^{ème}$ piéton, c'est-à-dire la fréquence qu'il aurait eue dans le cas d'une marche libre. Les ω_i sont distribuées aléatoirement avec une densité de distribution $g(\omega)$ qui reflète la diversité des fréquences naturelles des forces latérales dans une population.
- ϵ_1 quantifie la sensibilité des piétons aux déplacements latéraux de la passerelle.
- $A_y(t)$ est l'amplitude maximale des oscillations.
- $\psi_{str}(t)$ est la phase totale des oscillations de la passerelle, définie par $U_y(t) = A_y(t) \sin \psi_{str}(t)$.
- α est un paramètre de différence de phase ("phase lag") qui indique si la force des piétons se synchronise à la même phase que le déplacement, la vitesse ou l'accélération de la passerelle.

Dans le cas où $\alpha = \frac{\pi}{2}$ et $g(\omega)$ est une gaussienne de moyenne ω_{str}, Strogatz et al. [137] établissent, à partir de leur modèle d'interaction foule-structure discret, que l'expression du nombre critique est la suivante :

$$\boxed{N_c = \frac{4\xi_{str}}{\pi} \frac{K_{str}}{\bar{N}\epsilon_1 g(\omega_{str})}} \ . \tag{5.16}$$

$\xi_{str} = \frac{C_{str}}{2\sqrt{M_{str}K_{str}}}$ est le taux d'amortissement proportionnel. Le seul paramètre inconnu est ϵ_1. En comparant la simulation réalisée et les données obtenues par les essais sur le Millenium Bridge, ϵ_1 a été estimé à 16 $m^{-1}s^{-1}$ [137].
Dans les travaux de Eckhardt et al. [143], l'équation de Kuramoto utilisée est de la forme discrète suivante :

$$\frac{d\phi_i}{dt} = \omega_i - \epsilon_2 \ddot{U}_y(t) \cos\left(\psi_{str}(t) + \phi_i(t)\right) \ . \tag{5.17}$$

ϵ_2 quantifie la sensibilité des piétons à l'accélération latérale de la passerelle. Sa valeur, obtenue par comparaison avec les essais réalisés sur le Millenium Bridge, est $\epsilon_2 = \frac{1}{\tau_0 g_0} \simeq 1.75\ s/m$, où $\tau_0 = 1.9\ s$ et $g_0 = 0.3\ m/s^2$. L'expression du nombre critique établie par Eckhardt et al. [143] est :

$$\boxed{N_c = \frac{8\sqrt{2}\xi_{str} M_{str} \omega_{str} \sigma_\omega}{\bar{N}\sqrt{pi}\epsilon_2}} \ . \tag{5.18}$$

Dans les travaux de Bodgi [31], l'équation de Kuramoto continue utilisée est de la forme suivante :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}(x,t) = \omega(x) + \frac{\varepsilon}{2} A_y(t) \left|\psi_1(x)\right| \left(\dot{\Psi}_{str}(t)\right)^2 \sin\left(\Psi_s(t) - \Phi(x,t) + \frac{\pi}{2}\right) \ . \tag{5.19}$$

ε quantifie aussi la sensibilité des piétons à l'accélération latérale de la passerelle. La valeur de ε trouvée pour que le modèle corresponde dans le cas du Millenium Bridge est fonction des

paramètres choisis. Dans [31], la résolution de l'équation (5.20) d'ordre 3 donne le nombre critique N_c :

$$\boxed{\begin{array}{ll} a_3 & \Gamma^3 + a_2\Gamma^2 + a_1\Gamma + a_0 = 0 \\ & \\ & \text{où} \\ & \\ \Gamma & = \frac{N_c \bar{N} \omega_T \varepsilon}{2K_{str}} \\ a_3 & = -\frac{n^3 \pi K_{str} \omega_T^4}{2\sqrt{2\pi}\sigma_\omega} \\ a_2 & = n^2\omega_T^4 C_{str} - \frac{4n^2\pi^2\sigma_\omega K_{str}\omega_T^2}{\sqrt{2\pi}} \\ a_1 & = -\frac{8\pi^3 n \sigma_\omega^3 K_{str}}{\sqrt{2\pi}} + \frac{4\pi^3 n \sigma_\omega K_{str}(\bar{\omega}-\omega_T)^2}{\sqrt{2\pi}} + 8n\pi C_{str}\sigma_\omega^2\omega_T^2 \\ a_0 & = 16\pi^2 C_{str}\sigma_\omega^4 \end{array}} \quad . \tag{5.20}$$

5.3 Calcul du nombre critique N_c dans le cas de vibrations latérales

Nous présentons ici le calcul du nombre critique N_c dans le cas où les piétons sont sensibles au déplacement latéral de la passerelle.

Le système d'équations différentielles pour le modèle d'interaction foule-passerelle avec forme modale est :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(M_{str} + \sum_{i=1}^{N} m_i \psi_1^2(q^x_{OC_i})\right) \ddot{U}_y(t) + \left(C_{str} + \sum_{i=1}^{N} m_i \psi_1\left(q^x_{OC_i}\right) \frac{\partial \psi_1(q^x_{OC_i})}{\partial q^x} \dot{u}_i^{tr,x}(t)\right) \dot{U}_y(t) \\ \qquad + K_{str} U_y(t) = -\sum_{i=1}^{N} m_i \psi_1\left(q^x_{OC_i}\right) \ddot{u}_i^{tr,y}(t) \\ \qquad + \sum_{i=1}^{N} \psi_1\left(q^x_{OC_i}\right) \left(T_i \sin\left(2\phi_i(t)\right) \sin\left(\theta_i(t)\right) + N_i \sin(\phi_i(t)) \cos\left(\theta_i(t)\right)\right) \\ \dot{\phi}_i(t) = \omega_i + \varepsilon_i A_y(t) \psi_1(q^x_{OC_i}) \sin\left(\psi_{str}(t) - \phi_i(t) + \alpha\right) \qquad i = 1...N \\ \text{avec} \\ A_y(t) = \sqrt{U_y^2(t) + \frac{\dot{U}_y^2(t)}{\omega_{str}^2}} \\ \psi_{str}(t) = \arctan\left(\frac{\omega_{str} U_y}{\dot{U}_y}\right) \end{array} \right. \tag{5.21}$$

Les différences entre ce modèle et celui proposé par Strogatz [137] sont que les piétons se déplacent dans le plan de la passerelle, que l'effet de la forme modale est pris en compte, et que la masse modale des piétons n'est pas négligée dans l'équation de la dynamique de la passerelle.

Lorsque le système foule-structure atteint un état stationnaire, la densité des piétons, leur fréquence, ainsi que l'amplitude et la fréquence du déplacement de la passerelle ne varient plus en fonction du temps. On commence donc par supposer que la densité est constante en temps. La conséquence est que l'on peut étudier un cas où le nombre de piétons N est constant sur la longueur de la passerelle, et que les piétons marchent sur place. Pour le calcul du nombre critique, nous simplifions le système (5.21) en posant $\theta_i(t) = 0$, les piétons

marchent rectilignement et parallèlement à l'axe principal de la passerelle.
La procédure permettant d'établir l'expression du nombre critique est la suivante [137] : (i) nous faisons un changement d'echelle temporelle et une normalisation des variables afin de mettre en évidence les termes petits et les termes dominants dans les équations du système ; (ii) ensuite, on passe aux coordonnées polaires afin d'obtenir un système d'équations nous permettant d'appliquer la méthode de la moyenne. Le système obtenu après l'application de cette méthode donne l'évolution lente de l'amplitude et de la variable d'angle de la passerelle et du piéton ; (iii) en étudiant le cas de la synchronisation partielle, l'équation de la phase permet d'obtenir la condition de synchronisation piéton-structure sous la forme d'une inégalité ; (iv) en considérant le cas où la fréquence initiale des piétons suit une loi gaussienne, la résolution du système d'équations final obtenu après les différentes étapes permet de trouver une expression du nombre critique de piétons N_c.

5.3.1 Normalisations et changement d'échelle temporelle

La normalisation des variables et le changement d'échelle temporelle vont permettre de mettre en évidence les termes petits et les termes dominants dans les équations du système. On pose :
$M_T = M_{str} + \sum_{i=1}^{N} m_i \psi_1^2(q_{OC_i}^x)$ la masse modale totale constante, où $\sum_{i=1}^{N} m_i \psi_1^2(q_{OC_i}^x)$ est la masse modale des piétons contante,
$\omega_T = \sqrt{\frac{K_{str}}{M_T}}$ la fréquence modale constante du système piétons-passerelle,
$\xi_T = \frac{C_{str}\omega_T}{2K_{str}}$,
$\langle . \rangle$ indiquant l'opérateur de la moyenne : $\langle f_i \rangle = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f_i$,
$\langle m_i \rangle = \bar{m}$ la masse moyenne des piétons,
$\langle N_i \rangle = \bar{N}$ l'amplitude maximale moyenne de $F_i^{osc,N}$,
$\langle \varepsilon_i \rangle = \bar{\varepsilon}$ la sensibilité moyenne des piétons aux oscillations latérales de la structure.

Afin de normaliser le système d'équations (5.21), on introduit les deux longueurs suivantes :

$$L_1 = \frac{N\bar{N}}{K_{str}} \quad \text{et} \quad L_2 = \frac{\omega_T}{\bar{\varepsilon}}. \tag{5.22}$$

On définit alors une troisième longueur caractéristique comme la moyenne géométrique entre L_1 et L_2 et le paramètre C comme la racine carrée de leur rapport :

$$L = \sqrt{L_1 L_2} = \sqrt{\frac{N\bar{N}\omega_T}{K_{str}\bar{\varepsilon}}} \quad \text{et} \quad C = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} = \sqrt{\frac{N\bar{N}\bar{\varepsilon}}{K_{str}\omega_T}}. \tag{5.23}$$

Ces constantes de normalisation sont inspirées de [19,31,137,142]. On fait l'hypothèse :

(cas1-H9) $C << 1$, i.e. la constante C est faible. En effet, si on considère le cas de la travée Nord du pont du Millenium, et que nous cherchons la valeur de N pour avoir $C = 1$, nous trouvons $N \simeq 1511$ piétons, soit une densité d'environ 5 $p\ m^{-2}$ qui est impossible car le jour de l'inauguration du pont, la densité maximale estimée était de 1.5 $p\ m^{-2}$.

Ceci permet de normaliser le déplacement modale de la passerelle et son amplitude avec la longueur L, et à cause de la forme modale, la variable position du piéton est normalisée par

rapport à la longueur de la passerelle L_{str} :

$$x = \frac{U_y}{L}, \quad a = \frac{A}{L} \quad \text{et} \quad z_i = \frac{q^x_{OC_i}}{L_{str}}. \tag{5.24}$$

En introduisant la nouvelle variable de temps "rapide"

$$\tau = \omega_T t, \tag{5.25}$$

le système (5.21) devient

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{d\tau^2} + 2\xi_T \frac{dx}{d\tau} + x = C \left\langle \frac{N_i}{N} \psi_1 (z_i) \sin(\phi_i) \right\rangle \\ \frac{d\phi_i}{d\tau} = \frac{\omega_i}{\omega_T} + C \frac{\varepsilon_i}{\bar{\varepsilon}} a \psi_1 (z_i) \sin(\psi_{str} - \phi_i + \alpha) \qquad i = 1...N \ . \end{cases} \tag{5.26}$$

5.3.2 Changement de repère et méthode de la moyenne

Considérons un repère en rotation horaire à une vitesse constante ω_T (fréquence circulaire modale du système foule-passerelle). Dans ce nouveau repère, la phase totale du $i^{ème}$ piéton Φ_i et celle de la structure Ψ_{str} sont définies par :

$$\begin{aligned} \Phi_i(t) &= \phi_i(t) - \omega_T t \\ \Psi_{str}(t) &= \psi_{str}(t) - \omega_T t \ . \end{aligned} \tag{5.27}$$

On fait l'hypothèse :

(cas1-H10) On définit les variables b et Ω_i d'après les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} \xi_T &= Cb \\ \frac{\omega_i}{\omega_T} &= 1 + C\Omega_i \ , \end{aligned} \tag{5.28}$$

en rappelant que $C << 1$.

Ainsi, le système (5.26) devient :

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{d\tau^2} + x = C \left[-2b \frac{dx}{d\tau} + \left\langle \frac{N_i}{N} \psi_1 (z_i) \sin(\Phi_i(\tau) + \tau) \right\rangle \right] \\ \frac{d\Phi_i}{d\tau} = C \left[\Omega_i + \frac{\varepsilon_i}{\bar{\varepsilon}} a \psi_1 (z_i) \sin(\Psi_{str} - \Phi_i + \alpha) \right] \qquad i = 1...N \ . \end{cases} \tag{5.29}$$

La présence de $C << 1$ dans les deux équations de (5.29) nous permet d'appliquer une méthode de la moyenne (averaging method) [144], qui est une technique classique en dynamique non linéaire.
Si $C = 0$, la solution de l'équation $(5.29)_1$ serait $x = a\sin(\tau + \Psi_{str})$, avec a et Ψ_{str} constants. De même, la solution de l'équation $(5.29)_2$ serait $\Phi_i(\tau) = cst$. Pour le cas qui nous intéresse $(0 < C << 1)$, les variables d'amplitude et de phase ne sont pas tout à fait constantes, elles ont des dérivées temporelles d'ordre C. Cependant, on peut dire qu'elles sont presque constantes dans le sens où elles sont à variations lentes, sur une échelle de temps τ. La méthode de la moyenne est une procédure standard pour dériver les équations qui régissent ces variations lentes.
Pour appliquer cette méthode, effectuons une transformation de Van der Pol de la variable x :

$$x = a\sin(\tau + \Psi_{str}), \qquad \frac{dx}{d\tau} = a\cos(\tau + \Psi_{str}). \tag{5.30}$$

Cela correspond à définir a et Ψ_{str}, amplitude et variable d'angle instantanées de x dans un repère tournant avec vitesse angulaire ω_T.
En calculant la vitesse par dérivation du déplacement x donné dans (5.30), on obtient :

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{da}{d\tau}\sin(\tau + \Psi_{str}) + a\left(1 + \frac{d\Psi_{str}}{d\tau}\right)\cos(\tau + \Psi_{str}). \tag{5.31}$$

En imposant l'égalité entre les expressions (5.30) et (5.31) pour la vitesse, nous obtenons la condition de compatibilité :

$$\frac{da}{d\tau}\sin(\tau + \Psi_{str}) = -a\frac{d\Psi_{str}}{d\tau}\cos(\tau + \Psi_{str}). \tag{5.32}$$

La compatibilité étant assurée par l'équation (5.32), l'accélération est obtenue par dérivation de la vitesse donnée par (5.30) :

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} = \frac{da}{d\tau}\cos(\tau + \Psi_{str}) - a\left(1 + \frac{d\Psi_{str}}{d\tau}\right)\sin(\tau + \Psi_{str}). \tag{5.33}$$

En remplaçant (5.30), (5.32) et (5.33) dans (5.29), on obtient :

$$\begin{cases} \frac{da}{d\tau} = C\left[-2ab\cos^2(\tau + \Psi_{str}) + \left\langle \frac{N_i}{N}\psi_1(z_i)\sin(\Phi_i + \tau)\cos(\tau + \Psi_{str})\right\rangle\right] \\ -a\frac{d\Psi_{str}}{d\tau} = C\left[-2ab\cos(\tau + \Psi_{str})\sin(\tau + \Psi_{str}) + \left\langle \frac{N_i}{N}\psi_1(z_i)\sin(\Phi_i + \tau)\sin(\tau + \Psi_{str})\right\rangle\right] \\ \frac{d\Phi_i}{d\tau} = C\left[\Omega_i + \frac{\varepsilon_i}{\bar{\varepsilon}}a\psi_1(z_i)\sin(\Psi_{str} - \Phi_i + \alpha)\right] \qquad i = 1...N. \end{cases} \tag{5.34}$$

En utilisant les identités trigonométriques suivantes :

$$\begin{array}{l} \sin x \sin y = \frac{1}{2}\left[\cos(x - y) - \cos(x + y)\right] \\ \cos x \cos y = \frac{1}{2}\left[\cos(x - y) + \cos(x + y)\right] \\ \sin x \cos y = \frac{1}{2}\left[\sin(x - y) + \sin(x + y)\right] \end{array} \tag{5.35}$$

les équations (5.34) deviennent

$$\begin{cases} \frac{da}{d\tau} = C\left[-ab - \frac{1}{2}\left\langle \frac{N_i}{N}\psi_1(z_i)\sin(\Psi_{str} - \Phi_i)\right\rangle + h_1(\tau)\right] \\ -a\frac{d\Psi_{str}}{d\tau} = C\left[\frac{1}{2}\left\langle \frac{N_i}{N}\psi_1(z_i)\cos(\Psi_{str} - \Phi_i)\right\rangle + h_2(\tau)\right] \\ \frac{d\Phi_i}{d\tau} = C\left[\Omega_i + \frac{\varepsilon_i}{\bar{\varepsilon}}a\psi_1(z_i)\sin(\Psi_{str} - \Phi_i + \alpha)\right] \qquad i = 1...N\ , \end{cases} \tag{5.36}$$

où les termes de fréquence élevée sont

$$\begin{array}{l} h_1(\tau) = -ba\cos(2\tau + 2\Psi_{str}) + \frac{1}{2}\left\langle \frac{N_i}{N}\psi_1(z_i)\sin(\Psi_{str} + \Phi_i + 2\tau)\right\rangle \\ h_2(\tau) = -ba\sin(2\tau + 2\Psi_{str}) - \frac{1}{2}\left\langle \frac{N_i}{N}\psi_1(z_i)\cos(\Psi_{str} + \Phi_i + 2\tau)\right\rangle. \end{array} \tag{5.37}$$

La méthode de la moyenne appliquée à la première équation donne :

$$\begin{array}{rl} \frac{da}{d\tau} & \simeq \frac{1}{2\pi}\int_{\tilde{\tau}}^{2\pi+\tilde{\tau}} -C\left[ab + \frac{1}{2}\left\langle \frac{N_i}{N}\psi_1(z_i)\sin(\Psi_{str} - \Phi_i)\right\rangle + h_1(\tau)\right]d\tau \\ & = -C\left[ab + \frac{1}{2}\left\langle \frac{N_i}{N}\psi_1(z_i)\sin(\Psi_{str} - \Phi_i)\right\rangle\right]\ , \end{array} \tag{5.38}$$

$\tilde{\tau}$ étant arbitraire. L'intégrale sur la période 2π des termes $h_1(\tau)$ et $h_2(\tau)$ est nulle. Ainsi le système (5.36) devient

$$\begin{cases} \frac{da}{d\tau} = -C\left[ab + \frac{1}{2}\left\langle \frac{N_i}{N}\psi_1(z_i)\sin(\Psi_{str} - \Phi_i)\right\rangle\right] \\ a\frac{d\Psi_{str}}{d\tau} = -\frac{C}{2}\left\langle \frac{N_i}{N}\psi_1(z_i)\cos(\Psi_{str} - \Phi_i)\right\rangle \\ \frac{d\Phi_i}{d\tau} = C\left[\Omega_i + \frac{\varepsilon_i}{\bar{\varepsilon}}a\psi_1(z_i)\sin(\Psi_{str} - \Phi_i + \alpha)\right] \qquad i = 1...N. \end{cases} \tag{5.39}$$

Nous introduisons la variable de temps lent $T = C\tau$ afin d'éliminer le paramètre C dans le système (5.39) :

$$\begin{cases} \frac{da}{dT} = -ab - \frac{1}{2}\left\langle \frac{N_i}{N}\psi_1(z_i)\sin(\Psi_{str} - \Phi_i)\right\rangle \\ a\frac{d\Psi_{str}}{dT} = -\frac{1}{2}\left\langle \frac{N_i}{N}\psi_1(z_i)\cos(\Psi_{str} - \Phi_i)\right\rangle \\ \frac{d\Phi_i}{dT} = \Omega_i + \frac{\varepsilon_i}{\bar{\varepsilon}}a\psi_1(z_i)\sin(\Psi_{str} - \Phi_i + \alpha) \qquad i = 1...N. \end{cases} \tag{5.40}$$

Ce système met en évidence le fait que l'amplitude et les phases (normalisées) ont une évolution lente par rapport à la période d'oscillation.

5.3.3 Synchronisation partielle

On étudie le cas où un certain nombre de piétons est synchronisé avec la passerelle. On veut donc trouver analytiquement l'état stationnaire correspondant à la synchronisation piétons-structure, i.e. $\frac{da}{dT} = 0$ et $\frac{d\Psi_{str}}{dT} = cst = q$. Les inconnues à déterminer sont l'amplitude a constante et la fréquence normalisée q de la passerelle et des piétons synchronisés (ou fréquence de bloquage), qui vaut zéro si et seulement si la structure sous l'action de la foule synchronisée vibre à la fréquence ω_T. $\frac{d\Psi_{str}}{dT} = q = 0$ implique $U_y(t) = A\sin(\Psi_{str} + \omega_T t)$ avec Ψ_{str} constante.
On introduit alors un nouveau repère qui effectue une rotation avec une vitesse angulaire q.

(cas1-H11) On peut faire l'hypothèse suivante :

$$\Psi_{str}(T) = qT - \alpha \tag{5.41}$$

où α est déjà utilisé dans (4.47), et on introduit $\varphi_i(T)$ défini par :

$$\Phi_i(T) = qT + \varphi_i(T). \tag{5.42}$$

Pour simplifier le système, dans la suite nous supposons :

(cas1-H12) Les variables caractérisant un piéton sont supposées identiques pour chaque piéton : $m_i = \bar{m}$, $N_i = \bar{N}$, $\varepsilon_i = \bar{\varepsilon}$.

Le système (5.40) devient donc

$$\begin{cases} a(T)\,b = \frac{1}{2}\left\langle \psi_1(z_i)\sin(\varphi_i(T) + \alpha)\right\rangle \\ a(T)\,q = -\frac{1}{2}\left\langle \psi_1(z_i)\cos(\varphi_i(T) + \alpha)\right\rangle \\ \frac{d\varphi_i}{dT}(T) = \Omega_i - q - a(T)\,\psi_1(z_i)\sin(\varphi_i(T)) \qquad i = 1...N. \end{cases} \tag{5.43}$$

La résolution de ce système nécessite la détermination de $\varphi_i(T)$ à partir de l'équation $(5.43)_3$. Or l'évolution de $\varphi_i(T)$ doit être étudiée suivant que les piétons sont synchronisés ou non avec la passerelle.
La phase des piétons synchronisés vérifie $\frac{d\Phi_i}{dT}(T) = q$ donc $\frac{d\varphi_i}{dT}(T) = 0$. Ainsi, de l'équation $(5.43)_3$, on peut définir une phase constante φ_i^* pour chaque piéton i, tel que :

$$\varphi_i^* = \arcsin\left(\frac{\Omega_i - q}{a\psi_1(z_i)}\right). \tag{5.44}$$

La condition de synchronisation devant être satisfaite par les piétons synchronisés est :

$$|\Omega_i - q| \leq a\,|\psi_1(z_i)|. \tag{5.45}$$

Les piétons non synchronisés avec la passerelle sont ceux qui ont des fréquences naturelles assez éloignées de la fréquence des oscillations de la passerelle :

$$|\Omega_i - q| > a\,|\psi_1(z_i)| \quad . \tag{5.46}$$

La détermination d'une forme analytique de φ à partir de l'équation $(5.43)_3$ est impossible à notre connaissance. On propose donc de faire une étude statistique [19,31,137,142,143].

5.3.4 Synchronisation global foule-structure

La procédure pour l'étude de la synchronisation globale foule-structure, dans le but de déterminer le nombre critique de piétons N_c, est fondée sur une représentation statistique de la foule. Elle est présentée dans la suite.
On note $p(\Omega)$ la distribution des fréquences normalisées de marche libre des piétons (ou fréquences naturelles des piétons), et $h(z)$ la densité de probabilité représentant la distribution spatiale de la foule sur la longueur de la passerelle. Si la distribution est constante sur $z \in [0,1]$, on a $h(z) = 1$. On pourrait considérer une distribution non constante pour représenter un groupe de piétons qui marchent sur place sur une longueur z_1 autour du centre de la travée. Dans ce cas $h(z) = \frac{1}{z_1}$ pour $z \in \left[\frac{1-z_1}{2}, \frac{1+z_1}{2}\right]$ et zéro ailleurs. Cette expression représente aussi le cas où les piétons font des aller-retours sur cette portion de la passerelle. Selon l'approche statistique qu'on veut adopter ici, il faut définir une distribution statistique couplée de la forme

$$\rho(\varphi, \Omega, z) = \rho(\varphi|\Omega, z)\, p(\Omega)\, h(z) \quad .$$

La quantité $\rho(\varphi, \Omega, z)\, d\varphi d\Omega dz$ est la probabilité qu'un groupe "infinitésimal" de piétons ait une phase comprise entre φ et $\varphi + d\varphi$, un décalage en fréquence compris entre Ω et $\Omega + d\Omega$ et une position normalisée entre z et $z + dz$. Chacune des distributions statistiques est supposée indépendante du temps, car on veut étudier l'état synchronisé stationnaire.
Pour déterminer $\rho(\varphi|\Omega, z)$, deux situations sont à distinguer : les piétons synchronisés respectant la condition (5.45), et les piétons non synchronisés respectant la condition (5.46).
Pour les piétons synchronisés, à partir de (5.44) et (5.45), on a :

$$\rho_s(\varphi|\Omega, z) = \delta\left(\varphi - \arcsin\frac{\Omega - q}{a\psi_1(z)}\right) \qquad |\Omega - q| \leq a\,|\psi_1(z)|\,, z \in [0,1]\,, \tag{5.47}$$

où δ représente la distribution delta de Dirac et $\int_0^{2\pi} \rho_s(\varphi|\Omega, z)\, d\varphi = 1$.
Pour les piétons non synchronisés, la distribution statique est de la forme [137] :

$$\rho_{ns}(\varphi|\Omega, z) = \frac{1}{2\pi}\frac{\sqrt{(\Omega - q)^2 - a^2\psi_1^2(z)}}{|\Omega - q - a\psi_1(z)\sin(\varphi)|} \qquad |\Omega - q| > a\,|\psi_1(z)|\,, z \in [0,1]\,, \tag{5.48}$$

où $\int_0^{2\pi} \rho_{ns}(\varphi|\Omega, z)\, d\varphi = 1$.

Nous cherchons à expliciter les expressions $\langle \psi_1(z_i)\cos(\varphi_i(T))\rangle$ et $\langle \psi_1(z_i)\sin(\varphi_i(T))\rangle$, afin de déduire des équations $(5.43)_{1,2}$ les expressions du nombre critique de piétons, de la fréquence de synchronisation et de l'amplitude stationnaire post-critique du déplacement latéral de la passerelle.

De manière cohérente avec cette approche statistique, dans le cas d'un grand nombre de piétons $N >> 1$, on peut écrire :

$$\begin{aligned}\langle \psi_1(z_i)\cos(\varphi_i(T))\rangle &= \int_0^1 \left[\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_0^{2\pi}\psi_1(z)\cos(\varphi)\,\rho(\varphi|\Omega,z)\,d\varphi\right)p(\Omega)\,d\Omega\right]h(z)\,dz\ ,\\ \langle \psi_1(z_i)\sin(\varphi_i(T))\rangle &= \int_0^1 \left[\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_0^{2\pi}\psi_1(z)\sin(\varphi)\,\rho(\varphi|\Omega,z)\,d\varphi\right)p(\Omega)\,d\Omega\right]h(z)\,dz\ .\end{aligned} \tag{5.49}$$

En mettant en évidence les distributions statiques pour les cas des piétons synchronisés et non synchronisés, on pose :

$$\langle \psi_1(z_i)\cos(\varphi_i(T))\rangle = I_1 + I_2 \tag{5.50}$$

avec

$$\begin{aligned}I_1 &= \int_0^1\left[\int_{|\Omega-q|\le a|\psi_1(z)|}\cos(\arcsin(\varphi^*))\,p(\Omega)\,d\Omega\right]\psi_1(z)\,h(z)\,dz\ ,\\ I_2 &= \tfrac{1}{2\pi}\int_0^1\left[\int_{|\Omega-q|>a|\psi_1(z)|}\left(\int_0^{2\pi}\tfrac{\cos(\varphi)}{|\Omega-q-a\psi_1(z)\sin(\varphi)|}d\varphi\right)\sqrt{(\Omega-q)^2-a^2\psi_1^2(z)}p(\Omega)\,d\Omega\right]\psi_1(z)\,h(z)\,dz\ .\end{aligned} \tag{5.51}$$

Or

$$\int_0^{2\pi}\frac{\cos(\varphi)}{|\Omega-q-a\psi_1(z)\sin(\varphi)|}d\varphi = 0 \tag{5.52}$$

et

$$\cos(\arcsin(\varphi^*)) = \sqrt{1-\varphi^{*\,2}} = \frac{\sqrt{a^2\psi_1^2(z)-(\Omega-q)^2}}{a\psi_1(z)} \tag{5.53}$$

donc

$$\langle \psi_1(z_i)\cos(\varphi_i(T))\rangle = \int_0^1\left[\int_{|\Omega-q|\le a|\psi_1(z)|}\frac{\sqrt{a^2\psi_1^2(z)-(\Omega-q)^2}}{a\psi_1(z)}p(\Omega)\,d\Omega\right]\psi_1(z)\,h(z)\,dz\ . \tag{5.54}$$

De même, nous posons :

$$\langle \psi_1(z_i)\sin(\varphi_i(T))\rangle = I_3 + I_4 \tag{5.55}$$

avec

$$\begin{aligned}I_3 &= \int_0^1\left[\int_{|\Omega-q|\le a|\psi_1(z)|}\tfrac{\Omega-q}{a}p(\Omega)\,d\Omega\right]h(z)\,dz\\ I_4 &= \tfrac{1}{2\pi}\int_0^1\left[\int_{|\Omega-q|>a|\psi_1(z)|}\left(\int_0^{2\pi}\tfrac{\sin(\varphi)}{|\Omega-q-a\psi_1(z)\sin(\varphi)|}d\varphi\right)\sqrt{(\Omega-q)^2-a^2\psi_1^2(z)}p(\Omega)\,d\Omega\right]\psi_1(z)\,h(z)\,dz.\end{aligned} \tag{5.56}$$

Or

$$\int_0^{2\pi}\frac{\sin(\varphi)}{|\Omega-q-a\psi_1(z)\sin(\varphi)|}d\varphi = \frac{2\pi}{a\psi_1(z)}\left[\frac{\Omega-q}{\sqrt{(\Omega-q)^2-a^2\psi_1^2(z)}} - sign(\Omega-q)\right] \tag{5.57}$$

donc

$$\langle \psi_1(z_i) \sin(\varphi_i(T)) \rangle = \int_0^1 \left[\int_{|\Omega-q| \le a|\psi_1(z)|} \frac{\Omega-q}{a} p(\Omega)\, d\Omega \right] h(z)\, dz + \int_0^1 \left[\int_{|\Omega-q| > a|\psi_1(z)|} \frac{1}{a} \left[\Omega - q - sign(\Omega-q) \sqrt{(\Omega-q)^2 - a^2\psi_1^2(z)} \right] p(\Omega)\, d\Omega \right] h(z)\, dz. \tag{5.58}$$

Pour calculer le nombre critique N_c, nous considérons un cas post-critique, i.e. $N > N_c$ et $A > 0$ et $a > 0$, puis on fait tendre a vers 0^+ dans le but de faire tendre N vers N_c.

Comme on veut considérer le cas où a tend vers 0^+, nous pouvons faire l'hypothèse que $a << 1$. L'équation (5.54) est :

$$\langle \psi_1(z_i) \cos(\varphi_i(T)) \rangle = \int_0^1 \left[\int_{|\Omega-q| \le a|\psi_1(z)|} \sqrt{1 - \frac{(\Omega-q)^2}{a^2\psi_1^2(z)}}\, p(\Omega)\, d\Omega \right] \psi_1(z)\, h(z)\, dz\ . \tag{5.59}$$

La condition de synchronisation (5.45) permet d'effectuer le changement de variables $\Omega = q + a\psi_1(z)\sin(\chi)$. En notant q_0 la limite de q lorsque a tend vers 0^+, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \langle \psi_1(z_i) \cos(\varphi_i(T)) \rangle &= \int_0^1 \left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(\chi)\, a\psi_1(z)\, p(q + a\psi_1(z)\sin(\chi))\, d\chi \right] \psi_1(z)\, h(z)\, dz \\ &\simeq a p(q_0) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(\chi)\, d\chi \int_0^1 \psi_1^2(z)\, h(z)\, dz\ . \end{aligned} \tag{5.60}$$

Ainsi

$$\boxed{\langle \psi_1(z_i) \cos(\varphi_i(T)) \rangle = \frac{\pi a n}{2} p(q_0) \qquad \text{avec} \quad n = \int_0^1 \psi_1^2(z)\, h(z)\, dz}\ . \tag{5.61}$$

Pour calculer $\langle \psi_1(z_i) \sin(\varphi_i(T)) \rangle$ (5.58), il faut déterminer I_3 et I_4. Pour évaluer I_3, on peut remarquer que $|\Omega - q| << 1$ car $a << 1$. Ainsi on peut faire le développement de Taylor suivant :

$$p(\Omega) = p(q) + p'(q)(\Omega - q) + O\left((\Omega-q)^2\right)\ . \tag{5.62}$$

En remplaçant dans l'expression de I_3, on obtient :

$$I_3 = \int_0^1 \left[\int_{q-a\psi_1(z)}^{q+a\psi_1(z)} \frac{(\Omega-q)\, p(q) + (\Omega-q)^2 p'(q) + O\left((\Omega-q)^3\right)}{a} d\Omega \right] h(z)\, dz. \tag{5.63}$$

Or

$$\int_{q-a\psi_1(z)}^{q+a\psi_1(z)} (\Omega - q)\, d\Omega = 0$$

et

$$\int_{q-a\psi_1(z)}^{q+a\psi_1(z)} (\Omega-q)^2\, d\Omega = \frac{2}{3} (a\psi_1(z))^3$$

donc

$$I_3 = \frac{2}{3} a^2 p^{'}(q) \int_0^1 \psi_1^3(z)\, h(z)\, dz. \tag{5.64}$$

Pour évaluer I_4, on peut remarquer que $a << 1$ permet d'écrire $\sqrt{1-\frac{a^2\psi_1^2(z)}{(\Omega-q)^2}} = 1 - \frac{1}{2}\frac{a^2\psi_1^2(z)}{(\Omega-q)^2}$. Ainsi

$$\begin{aligned} I_4 &= \int_0^1 \left[\int_{|\Omega-q|>a|\psi_1(z)|} \frac{1}{a}\left[\Omega - q - (\Omega-q)\sqrt{1-\frac{a^2\psi_1^2(z)}{(\Omega-q)^2}}\right] p(\Omega)\, d\Omega \right] h(z)\, dz \\ &= \int_0^1 \left[\int_{|\Omega-q|>a|\psi_1(z)|} \frac{a\psi_1^2(z)}{2}\frac{p(\Omega)}{\Omega-q} d\Omega \right] h(z)\, dz. \end{aligned} \tag{5.65}$$

Or

$$\lim_{a\longrightarrow 0} \int_{|\Omega-q|>a|\psi_1(z)|} \frac{p(\Omega)}{\Omega-q} d\Omega = PV \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p(\Omega)}{\Omega-q_0} d\Omega = \pi \tilde{p}(q_0) \tag{5.66}$$

où PV représente la valeur principale de Cauchy et $\tilde{p}(q_0) = \mathcal{H}[p(\Omega)]$, avec $\mathcal{H}[p(\Omega)]$ la transformée de Hilbert de p en q_0. Donc

$$I_4 = \frac{a\pi}{2}\tilde{p}(q_0) \int_0^1 \psi_1^2(z)\, h(z)\, dz\ . \tag{5.67}$$

Comme on propose de limiter le développement de Taylor à l'ordre 1 en a, on obtient :

$$\boxed{\langle \psi_1(z_i) \sin(\varphi_i(T)) \rangle \simeq I_4 = \tfrac{a\pi n}{2}\tilde{p}(q_0) \qquad \text{avec} \quad n = \int_0^1 \psi_1^2(z)\, h(z)\, dz}\ . \tag{5.68}$$

Les équations $(5.43)_{1,2}$ peuvent s'écrire :

$$\begin{aligned} 2b_c a &= \langle \psi_1(z_i) \sin(\varphi_i + \alpha) \rangle \\ &= \langle \psi_1(z_i) \sin(\varphi_i) \rangle \cos(\alpha) + \langle \psi_1(z_i) \cos(\varphi_i) \rangle \sin(\alpha)\ , \\ 2q_0 a &= -\langle \psi_1(z_i) \cos(\varphi_i + \alpha) \rangle \\ &= \langle \psi_1(z_i) \sin(\varphi_i) \rangle \sin(\alpha) - \langle \psi_1(z_i) \cos(\varphi_i) \rangle \cos(\alpha)\ , \end{aligned} \tag{5.69}$$

où $\lim_{a\longrightarrow 0} b = b_c$ est l'amortissement critique normalisé. Dans le cas qui nous intéresse, $a > 0$ et donc à partir des équations (5.61), (5.68) et (5.69), nous trouvons les expressions :

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{ll} b_c &= \frac{\pi n}{4}\tilde{p}(q_0)\cos(\alpha) + \frac{\pi n}{4} p(q_0)\sin(\alpha) \\ q_0 &= \frac{\pi n}{4}\tilde{p}(q_0)\sin(\alpha) - \frac{\pi n}{4} p(q_0)\cos(\alpha) \end{array} \right.}\ . \tag{5.70}$$

Dans le cas particulier $\alpha = \frac{\pi}{2}$ généralement choisi dans la littérature [31, 137, 142], les équations précédentes simplifiées s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{ll} b_c &= \frac{\pi n}{4} p(q_0) \\ q_0 &= \frac{\pi n}{4}\tilde{p}(q_0)\ . \end{array} \right. \tag{5.71}$$

Cas où $p(\Omega)$ est une distribution gaussienne de moyenne $\bar{\Omega}$ et d'écart type σ_Ω

L'objectif de cette partie est de déterminer le nombre critique de piétons N_c à partir duquel les piétons engendrent des oscillations suffisemment importantes de la passerelle pour déclencher la synchronisation, dans le cas où $p(\Omega)$ est une distribution gaussienne de moyenne $\bar{\Omega}$ et d'écart type σ_Ω. Ce cas est équivalent à dire que la fréquence dimensionnelle ω des piétons suit également une distribution gaussienne de moyenne $\bar{\omega} = \omega_T\left(1 + C\bar{\Omega}\right)$ et d'écart type $\sigma_\omega = \omega_T C \sigma_\Omega$ (équation $(5.28)_2$).

Pour déterminer les expressions de q_0 et b_c, qui nous permettront de définir N_c, nous devons dans un premier temps exprimer $\tilde{p}(q_0)$ et $p(q_0)$.
Si la fréquence moyenne adimensionnalisée des piétons $\bar{\Omega}$ est non nulle, mais reste très petite (la fréquence moyenne dimensionnelle $\bar{\omega}$ est donc très proche de ω_T), alors on peut écrire [143] :

$$p(\Omega) = p\left(\left(\Omega + \bar{\Omega} - q_0\right) - \left(\bar{\Omega} - q_0\right)\right) \ . \tag{5.72}$$

En faisant un développement limité pour "$q_0 - \bar{\Omega}$" petit, on obtient :

$$p(\Omega) = p\left(\Omega + \bar{\Omega} - q_0\right)\left(1 + \frac{\left(\bar{\Omega} - q_0\right)(\Omega - q_0)}{\sigma_\Omega^2}\right) \ , \tag{5.73}$$

et ainsi

$$\tilde{p}(q_0) = \frac{1}{\pi} PV \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p(\Omega)}{\Omega - q_0} d\Omega \simeq \frac{1}{\pi}\frac{\left(\bar{\Omega} - q_0\right)}{\sigma_\Omega^2} \ . \tag{5.74}$$

L'expression de $p(q_0)$ est la suivante :

$$p(q_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\Omega} e^{-\frac{(q_0 - \bar{\Omega})^2}{2\sigma_\Omega^2}} \ . \tag{5.75}$$

En faisant un développement limité pour "$q_0 - \bar{\Omega}$" petit, on obtient :

$$p(q_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\Omega}\left(1 - \frac{\left(q_0 - \bar{\Omega}\right)^2}{2\sigma_\Omega^2}\right) \ . \tag{5.76}$$

L'équation $(5.70)_2$ devient

$$q_0 = \frac{n}{4}\frac{\left(\bar{\Omega} - q_0\right)}{\sigma_\Omega^2}\sin(\alpha) - \frac{\pi n}{4\sqrt{2\pi}\sigma_\Omega}\left(1 - \frac{\left(q_0 - \bar{\Omega}\right)^2}{2\sigma_\Omega^2}\right)\cos(\alpha) \ , \tag{5.77}$$

donc q_0 est solution du polynôme d'ordre 2 suivant :

$$\begin{array}{l} -\pi n\cos(\alpha)\, q_0^2 \ + \left[2\pi n\bar{\Omega}\cos(\alpha) + 2\sqrt{2\pi}n\sigma_\Omega\sin(\alpha) + 8\sqrt{2\pi}\sigma_\Omega^3\right] q_0 \\ \qquad\qquad + \left[2\pi n\sigma_\Omega^2\cos(\alpha) - 2\sqrt{2\pi}n\sigma_\Omega\bar{\Omega}\sin(\alpha) - \pi n\bar{\Omega}^2\cos(\alpha)\right] = 0 \end{array} \ , \tag{5.78}$$

et l'équation $(5.70)_1$ donne l'expression de b_c en fonction de q_0 :

$$\boxed{b_c = \frac{n}{4}\frac{\left(\bar{\Omega} - q_0\right)}{\sigma_\Omega^2}\cos(\alpha) + \frac{n\pi}{4\sqrt{2\pi}\sigma_\Omega}\left(1 - \frac{\left(q_0 - \bar{\Omega}\right)^2}{2\sigma_\Omega^2}\right)\sin(\alpha)} \ . \tag{5.79}$$

Le passage aux variables dimensionnelles permet de trouver l'expression de N_c.

Cas particulier, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ et $\bar{\Omega} = 0$: Cette valeur particulière de α est celle choisie généralement dans la littérature [31,137,142]. Elle met en évidence une relation de proportionnalité entre la force latérale engendrée par les piétons et la vitesse du déplacement de la passerelle. Le cas $\bar{\Omega} = 0$ implique que $\bar{\omega} = \omega_T$, la fréquence moyenne des piétons est la fréquence modale du système passerelle-piétons. Ce cas est le plus critique pour la passerelle. Les équations (5.78) et (5.79) deviennent :

$$\begin{cases} q_0 = 0 \\ b_c = \frac{n\pi}{4\sqrt{2\pi}\sigma_\Omega} \end{cases} . \tag{5.80}$$

Le passage aux variables dimensionnelles, conduit à l'égalité suivante :

$$N_c = \frac{2\sqrt{2\pi}C_{str}\sigma_\omega}{n\pi\bar{N}\bar{\varepsilon}}\omega_T \tag{5.81}$$

avec $\omega_T = \sqrt{\frac{K_{str}}{M_T}} = \sqrt{\frac{K_{str}}{M_{str}+\sum_{i=1}^{N} m_i\psi_1^2(q^x_{OC_i})}} = \sqrt{\frac{K_{str}}{M_{str}+n\bar{m}N_c}}$.

Le carré de l'équation (5.81) donne un polynôme d'ordre 3 en N_c :

$$N_c^3 + \frac{M_{str}}{n\bar{m}}N_c^2 - \frac{K_{str}}{n\bar{m}}\gamma^2 = 0 \qquad \text{avec} \quad \gamma = \frac{2\sqrt{2\pi}C_{str}\sigma_\omega}{n\pi\bar{N}\bar{\varepsilon}} . \tag{5.82}$$

Si $\bar{\varepsilon}$ est connu, la résolution de l'équation (5.82) nous permet de trouver N_c dans le cas particulier où $\alpha = \frac{\pi}{2}$ et $\bar{\Omega} = 0$.

Cas particulier, $\alpha = \frac{\pi}{2}$: Les équations (5.78) et (5.79) deviennent :

$$\begin{cases} q_0 = \frac{n\bar{\Omega}}{n+4\sigma_\Omega^2} \\ b_c = \frac{n\pi}{4\sqrt{2\pi}\sigma_\Omega}\left(1 - \frac{\left(\frac{n\bar{\Omega}}{n+4\sigma_\Omega^2} - \bar{\Omega}\right)^2}{2\sigma_\Omega^2}\right) \end{cases} . \tag{5.83}$$

En passant aux variables dimensionnelles, l'équation $(5.83)_1$ permet de donner l'expression de la fréquence de synchronisation ω_{syn} :

$$\begin{aligned} \omega_{syn} &= \omega_T\left(1 + \frac{n\bar{\Omega}}{n+4\sigma_\Omega^2}C\right) \\ &= \frac{4K_{str}\sigma_\omega^2 + nN\bar{N}\bar{\varepsilon}\bar{\omega}}{4K_{str}\sigma_\omega^2 + nN\bar{N}\bar{\varepsilon}\omega_T}\omega_T . \end{aligned} \tag{5.84}$$

On peut remarquer que lorsque les piétons marchent à une fréquence moyenne égale à la fréquence modale du système passerelle-piétons, i.e. $\bar{\omega} = \omega_T$, nous retrouvons que la fréquence de synchronisation est $\omega_{syn} = \omega_T$.

Le passage aux variables dimensionnelles de l'équation $(5.83)_2$ nous conduit à un polynôme d'ordre 3 en $\bar{\varepsilon}N_c$:

$$a_3\left(\bar{\varepsilon}N_c\right)^3 + a_2\left(\bar{\varepsilon}N_c\right)^2 + a_1\left(\bar{\varepsilon}N_c\right) + a_0 = 0 \tag{5.85}$$

où

$$\begin{aligned} a_3 &= \frac{n^3\pi\bar{N}^3\omega_T}{2\sqrt{2\pi}C_{str}\sigma_\omega K_{str}^2} , \\ a_2 &= \frac{4n^2\pi\sigma_\omega\bar{N}^2}{\sqrt{2\pi}K_{str}C_{str}} - \frac{n^2\bar{N}^2\omega_T^2}{K_{str}^2} , \\ a_1 &= \frac{8\pi n\sigma_\omega^3\bar{N}}{\sqrt{2\pi}C_{str}\omega_T} - \frac{4\pi n\sigma_\omega\bar{N}(\bar{\omega}-\omega_T)^2}{\sqrt{2\pi}C_{str}\omega_T} - \frac{8n\sigma_\omega^2\bar{N}\omega_T}{K_{str}} , \\ a_0 &= -16\sigma_\omega^4 . \end{aligned} \tag{5.86}$$

La connaissance de N_c pour la travée Nord de la passerelle du Millenium de Londres nous permet de déterminer le paramètre $\bar{\varepsilon}$ à l'aide du polynôme (5.85). Par contre, dans la mesure où ω_T est fonction du nombre de piétons N, le polynôme (5.85) n'est pas une bonne expression pour déterminer analytiquement N_c quand $\bar{\varepsilon}$ est connu. On pourrait cependant déterminer N_c implicitement à l'aide de (5.85), en traçant la courbe qui représente le polynôme en fonction du nombre de piétons N. Cette courbe coupe l'axe des abscisses en $N = N_c$.

En remplaçant ω_T par son expression $\omega_T = \sqrt{\frac{K_{str}}{M_{str}+n\bar{m}N_c}}$ quand $N \longrightarrow N_c$ dans (5.85) et (5.88), nous obtenons :

$$\begin{array}{ll} \gamma_6\sqrt{M_{str}+n\bar{m}N_c}N_c^3 + \gamma_5 N_c^3 & +\gamma_4\sqrt{M_{str}+n\bar{m}N_c}N_c^2 + \gamma_3 N_c^2 \\ & +\gamma_2\sqrt{M_{str}+n\bar{m}N_c}N_c + \gamma_1 N_c + \gamma_0 = 0 \end{array} \tag{5.87}$$

où

$$\begin{array}{rl} \gamma_6 & = \frac{n^3\pi\bar{N}^3\bar{\varepsilon}^3\sqrt{K_{str}}}{2\sqrt{2\pi}C_{str}\sigma_\omega K_{str}^2} \ , \\ \gamma_5 & = \frac{4n^3\pi\bar{m}\sigma_\omega\bar{N}^2\bar{\varepsilon}^2}{\sqrt{2\pi}C_{str}K_{str}} \ , \\ \gamma_4 & = \frac{4n^2\pi\bar{m}\sigma_\omega\bar{N}\bar{\varepsilon}\left(2\sigma_\omega^2-\bar{\omega}^2\right)}{\sqrt{2\pi}C_{str}\sqrt{K_{str}}} \ , \\ \gamma_3 & = \frac{4n^2\pi\sigma_\omega\bar{N}^2\bar{\varepsilon}^2M_{str}}{\sqrt{2\pi}C_{str}K_{str}} - \frac{n^2\bar{N}^2\bar{\varepsilon}^2}{K_{str}} + \frac{8n^2\pi\sigma_\omega\bar{N}\bar{\omega}\bar{\varepsilon}\bar{m}}{\sqrt{2\pi}C_{str}} \ , \\ \gamma_2 & = \frac{4n\pi\sigma_\omega\bar{N}\bar{\varepsilon}M_{str}\left(2\sigma_\omega^2-\bar{\omega}^2\right)}{\sqrt{2\pi}\sqrt{K_{str}}C_{str}} - 4\pi n\sigma_\omega\bar{N}\bar{\varepsilon}\sqrt{K_{str}}\left(\frac{2\sigma_\omega}{\pi K_{str}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}C_{str}}\right) \ , \\ \gamma_1 & = \frac{8\pi n\sigma_\omega\bar{N}\bar{\omega}\bar{\varepsilon}M_{str}}{\sqrt{2\pi}C_{str}} - 16\sigma_\omega^4 n\bar{m} \ , \\ \gamma_0 & = -16\sigma_\omega^4 M_{str} \ . \end{array} \tag{5.88}$$

En posant $\Gamma = \sqrt{M_{str}+n\bar{m}N_c}$, l'équation (5.87) devient un polynôme d'ordre 7 en Γ :

$$\begin{array}{l} \frac{\gamma_6}{n^3\bar{m}^3}\Gamma^7 + \frac{\gamma_5}{n^3\bar{m}^3}\Gamma^6 + \left[\frac{\gamma_4}{n^2\bar{m}^2} - \frac{3M_{str}\gamma_6}{n^3\bar{m}^3}\right]\Gamma^5 + \left[\frac{\gamma_3}{n^2\bar{m}^2} - \frac{3M_{str}\gamma_5}{n^3\bar{m}^3}\right]\Gamma^4 + \left[\frac{3M_{str}^2\gamma_6}{n^3\bar{m}^3} - \frac{2M_{str}\gamma_4}{n^2\bar{m}^2} + \frac{\gamma_2}{n\bar{m}}\right]\Gamma^3 \\ + \left[\frac{3M_{str}^2\gamma_5}{n^3\bar{m}^3} - \frac{2M_{str}\gamma_3}{n^2\bar{m}^2} + \frac{\gamma_1}{n\bar{m}}\right]\Gamma^2 + \left[-\frac{M_{str}^3\gamma_6}{n^3\bar{m}^3} + \frac{M_{str}^2\gamma_4}{n^2\bar{m}^2} - \frac{M_{str}\gamma_2}{n\bar{m}}\right]\Gamma \\ + \left[-\frac{M_{str}^3\gamma_5}{n^3\bar{m}^3} + \frac{M_{str}^2\gamma_3}{n^2\bar{m}^2} - \frac{M_{str}\gamma_1}{n\bar{m}} + \gamma_0\right] = 0 \ . \end{array} \tag{5.89}$$

La résolution du polynôme (5.89) permet de déterminer N_c (lorsque $\bar{\varepsilon}$ est connu).

5.4 Calcul de l'amplitude du déplacement de la passerelle lorsque $N > N_c$ dans le cas de vibrations latérales

Nous cherchons à déterminer l'amplitude post-critique du déplacement latéral de la passerelle dans le cas stationnaire. Nous nous limitons au cas particulier où $\alpha = \frac{\pi}{2}$ et $p(\Omega)$ est une distribution gaussienne de moyenne $\bar{\Omega}$.

Les équations $(5.43)_{1,2}$ deviennent :

$$\left\{ \begin{array}{l} a(T)\, b = \frac{1}{2}\left\langle \psi_1(z_i)\cos\left(\varphi_i(T)\right)\right\rangle \\ a(T)\, q = \frac{1}{2}\left\langle \psi_1(z_i)\sin\left(\varphi_i(T)\right)\right\rangle . \end{array} \right. \tag{5.90}$$

$q = 0$ est une solution de l'équation $(5.90)_2$ lorsque $\langle \psi_1(z_i) \sin(\varphi_i(T)) \rangle$ est remplacé par son expression (5.58). D'après (5.54), l'équation $(5.90)_1$ devient :

$$\begin{aligned} 2a(T)\, b &= \int_0^1 \left[\int_{|\Omega| \le a|\psi_1(z)|} \frac{\sqrt{a^2\psi_1^2(z) - \Omega^2}}{a\psi_1(z)} p(\Omega)\, d\Omega \right] \psi_1(z)\, h(z)\, dz \\ &= \int_0^1 \left[\int_{|\Omega| \le a|\psi_1(z)|} \sqrt{1 - \left(\frac{\Omega}{a\psi_1(z)}\right)^2} p(\Omega)\, d\Omega \right] \psi_1(z)\, h(z)\, dz \ . \end{aligned} \tag{5.91}$$

Ce choix de q implique $\bar{\Omega} = 0$ et donc le cas étudié est celui où la fréquence moyenne des piétons est égale à la fréquence modale du système piétons-passerelle.

De part la condition de synchronisation, on peut poser $\Omega = a\psi_1(z) \sin(\chi)$ avec $a > 0$. Ainsi, l'équation (5.91) devient :

$$b = \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(\chi)\, p(a\psi_1(z) \sin(\chi))\, d\chi \right] \psi_1^2(z)\, h(z)\, dz \ . \tag{5.92}$$

En introduisant la fonction de Bessel modifiée $I_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(n\theta)\, e^{x\cos(\theta)} d\theta$, l'équation (5.92) s'écrit sous la forme :

$$b = \frac{\sqrt{2\pi}}{8\sigma_\Omega} \int_0^1 e^{-\frac{a^2\psi_1^2(z)}{4\sigma_\Omega^2}} \left[I_0\left(\frac{a^2\psi_1^2(z)}{4\sigma_\Omega^2}\right) + I_1\left(\frac{a^2\psi_1^2(z)}{4\sigma_\Omega^2}\right) \right] \psi_1^2(z)\, h(z)\, dz \ , \tag{5.93}$$

soit, en passant aux variables dimensionnelles

$$\frac{4C_{str}L_{str}\sigma_\omega\omega_T}{\sqrt{2\pi}N\bar{N}\bar{\varepsilon}} = \int_0^{L_{str}} e^{-\frac{A_y^2\psi_1^2(x)\bar{\varepsilon}^2}{4\sigma_\omega^2}} \left[I_0\left(\frac{A_y^2\psi_1^2(x)\bar{\varepsilon}^2}{4\sigma_\omega^2}\right) + I_1\left(\frac{A_y^2\psi_1^2(x)\bar{\varepsilon}^2}{4\sigma_\omega^2}\right) \right] \psi_1^2(x)\, h(x)\, dx \ . \tag{5.94}$$

La résolution de cette équation permet de déterminer l'amplitude stationnaire A_y du déplacement latéral de la passerelle lorsque $N > N_c$ dans le cas particulier où $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\bar{\Omega} = 0$ et $p(\Omega)$ est une distribution gaussienne de moyenne $\bar{\Omega}$.

5.5 Synthèse du chapitre

Pour le cas des vibrations latérales d'une passerelle, les expressions analytiques du nombre critique N_c, de l'amplitude stationnaire post-critique du déplacement latéral de la passerelle, et de la fréquence de synchronisation sont définies selon certains cas particuliers. Ces expressions obtenues à partir du modèle discret d'interaction foule-passerelle proposé sont très proches de celles obtenues à partir du modèle continue [31].

Chapitre 6

Simulations numériques

Ce chapitre a pour objectif de présenter les simulations numériques réalisées avec notre modèle :

⋆ *formation de lignes à contre-courant*

⋆ *formation d'arche*

⋆ *évacuation de salle*

⋆ *évacuation d'une salle de classe*

⋆ *évacuation d'un cinéma*

⋆ *évacuation d'une école primaire*

⋆ *évacuation avec un obstacle devant la sortie*

⋆ *évacuation d'une salle ayant deux sorties proches*

⋆ *modélisation des voyageurs durant l'échange quai/wagon*

⋆ *modélisation du mouvement de sous-groupes*

⋆ *interaction foule-passerelle dans le cas de la traversée du pont du Millénium*

PLAN DU CHAPITRE 6

6.1 Introduction 137

6.2 Simulations de mouvement de foule 137

6.2.1 Phénomènes d'auto-organisation de la foule 137

6.2.2 Exercices d'évacuation : comparaison entre résultats expérimentaux et numériques 140

6.2.3 Un modèle prévisionnel 149

6.2.4 Modélisation du mouvement de sous-groupes 154

6.3 Simulations d'interactions foule-passerelle 156

6.3.1 Traversée de la travée Nord du Millénium Bridge 158

6.3.2 Calcul du nombre critique de piétons pour différentes passerelles . 168

6.4 Synthèse du chapitre 169

6.1 Introduction

Nous présentons dans ce chapitre les simulations numériques réalisées avec notre modèle discret de mouvement de piétons, NSM2 adapté, implémenté dans l'environnement MATLAB. Deux types d'applications de ce modèle sont détaillés : l'étude des mouvements de foule, puis l'étude de l'interaction foule-passerelle. Les algorithmes utilisés pour ces applications sont donnés.

6.2 Simulations de mouvement de foule

Les différentes étapes du programme MATLAB du modèle discret de mouvement de foule sont représentées sur le figure 6.1. Les simulations de mouvement de foule réalisées sont scindées en 4 catégories : (i) la reproduction des phénomènes d'auto-organisation de la foule observés (voir section 1.2.1) ; (ii) la simulation d'exercices d'évacuation d'urgence avec comparaisons entre les résultats expérimentaux et numériques ; (iii) l'utilisation du modèle pour améliorer la qualité de service d'un espace étudié ; et (iv) la modélisation de mouvements de sous-groupes.
Trois paramètres sont proposés et calculés pour comparer puis commenter les différents résultats : (i) la courbe d'évacuation, représentant l'évolution temporelle du nombre de piétons quittant un lieu donné par une ou plusieurs sorties ; (ii) le débit moyen Q de piétons traversant une sortie, obtenu par dérivation temporelle de la courbe précédente ; et (iii) le temps d'évacuation à partir d'une position initiale, qui est le temps moyen nécessaire à une personne pour évacuer une structure en fonction de sa position initiale.

6.2.1 Phénomènes d'auto-organisation de la foule

La première façon de valider un modèle de mouvement de foule est d'essayer de reproduire des phénomènes d'auto-organisation de la foule observés dans la vie courante [2]. Avec les trois approches adaptées, nous avons tenté de reproduire deux phénomènes classiques [10,47] : la formation de lignes à contre-courant et la formation d'arche.

Formation de lignes à contre-courant

Les observations faites sur les piétons montrent que lorsque deux flux de piétons, ayant des directions opposées, se rencontrent, les piétons se mettent à marcher en ligne afin d'avancer le plus efficacement possible : on parle de formation de lignes à contre-courant.

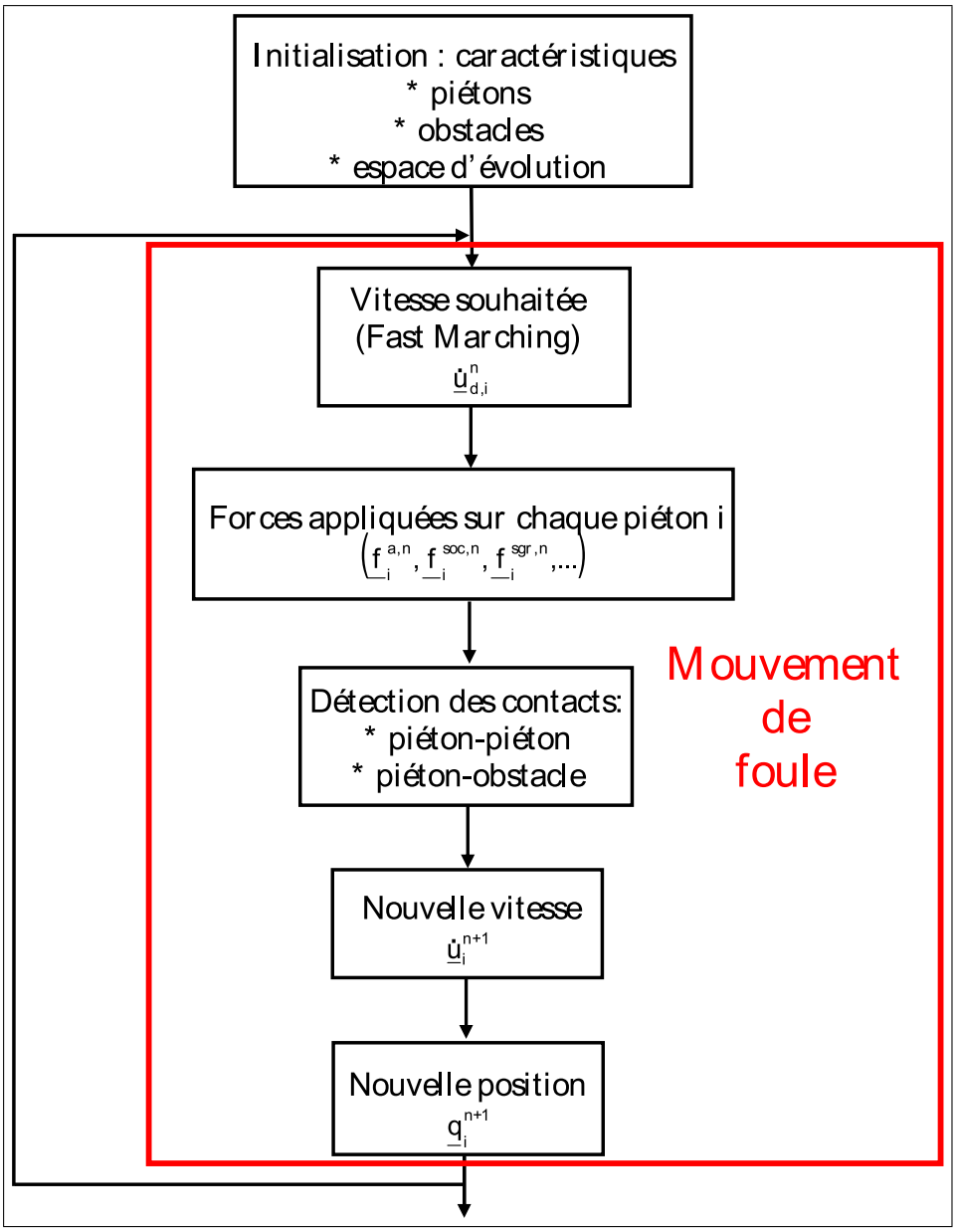


FIGURE 6.1 – Modèle discret de mouvement de foule - fonctionnement du programme MATLAB.

Nous avons essayé de reproduire ce type de phénomène avec notre modèle de mouvement de foule. Pour cela, nous avons simulé une mêlée de 1500 piétons. Initialement, les piétons sont aléatoirement positionnés dans un rectangle de 80 m de longueur et 25 m de large. 750 piétons représentés par des cercles pleins bleus veulent se déplacer vers la droite et 750 autres piétons représentés par des cercles vides rouges veulent se déplacer vers la gauche (Figure 6.2 a.). Les forces sociales ne sont pas introduites, ainsi seule la force d'accélération intérieure est considérée et permet aux piétons de se diriger vers leur destination souhaitée après une collision. Les piétons sont choisis avec des caractéristiques identiques (taille, masse, allure souhaitée, etc.). Pour garder un nombre de piétons marchant dans le domaine considéré constant, dès qu'un piéton sort du domaine par un côté, un piéton similaire entre dans le domaine de l'autre côté avec une position aléatoire selon l'axe y.

Sur la figure 6.2 b., nous observons la formation de lignes à contre-courant. Le nombre de lignes formées dépend de la largeur du domaine considéré et de la densité de piétons présents [4, 7, 47]. Ce phénomène n'a jamais été quantifié en conditions expérimentales.

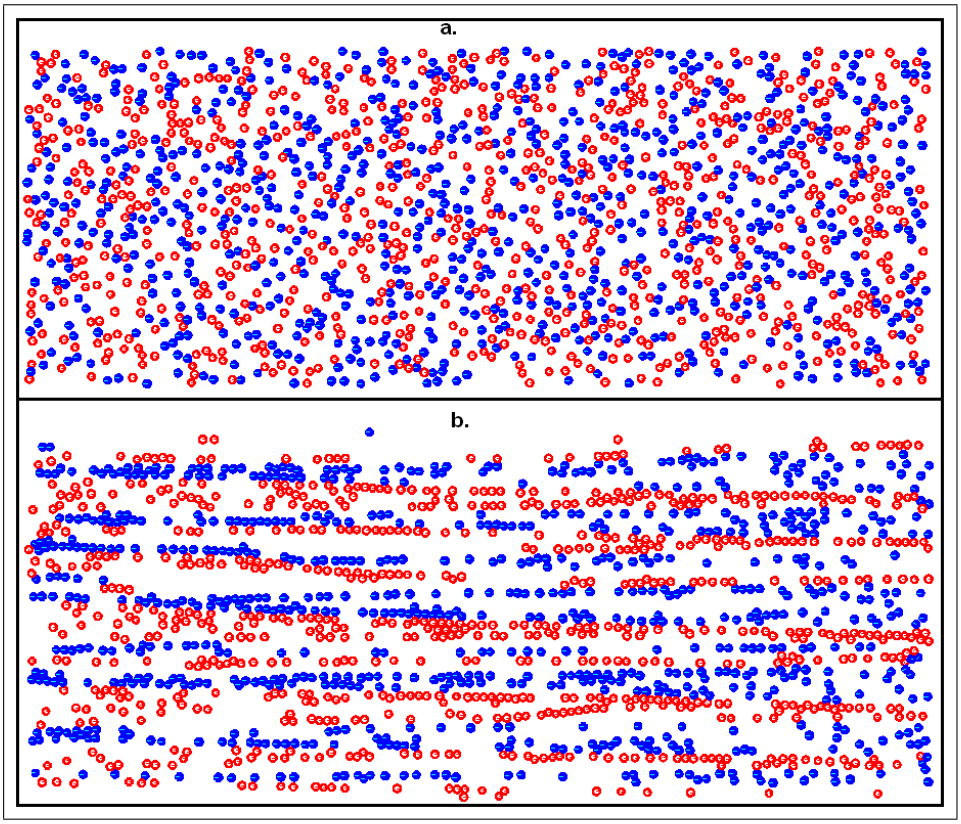


FIGURE 6.2 – Simulation d'une mêlée de 1500 piétons - a. $t = 0\ s$, b. $t = 40\ s$.

Les simulations semblent montrer que par collisions successives (ou évitements successifs lorsque des forces sociales sont ajoutées), un piéton finit par se retrouver derrière un autre se déplaçant dans le même sens, ce qui constitue une position de marche ne nécessitant plus d'évitement. Au fur et à mesure que des files de piétons se forment, il devient de plus en plus difficile de marcher ailleurs que dans une file. Le comportement de suivi ne résulte pas de la volonté explicite du piéton, mais d'une conséquence de son comportement.

Formation d'arche

Les observations faites sur les piétons montrent que lorsqu'une foule dense veut traverser une ouverture étroite, les piétons se positionnent autour de l'ouverture pour sortir au plus vite : on observe donc la formation d'une arche autour de l'ouverture.
Notre modèle de mouvement de foule permet de reproduire ce type de phénomène. Nous avons considéré 200 piétons voulant évacuer une salle carrée, de côté 20 m et dont l'ouverture sur le côté droit fait 1 m de large (Figure 6.3 a.). Les forces sociales ne sont pas introduites. Les piétons sont choisis avec des caractéristiques identiques (taille, masse, allure souhaitée, etc.).
Sur les figures 6.2 b. et c., nous observons la formation d'une arche, phénomène expérimentalement observé dans le cas d'une évacuation d'urgence.

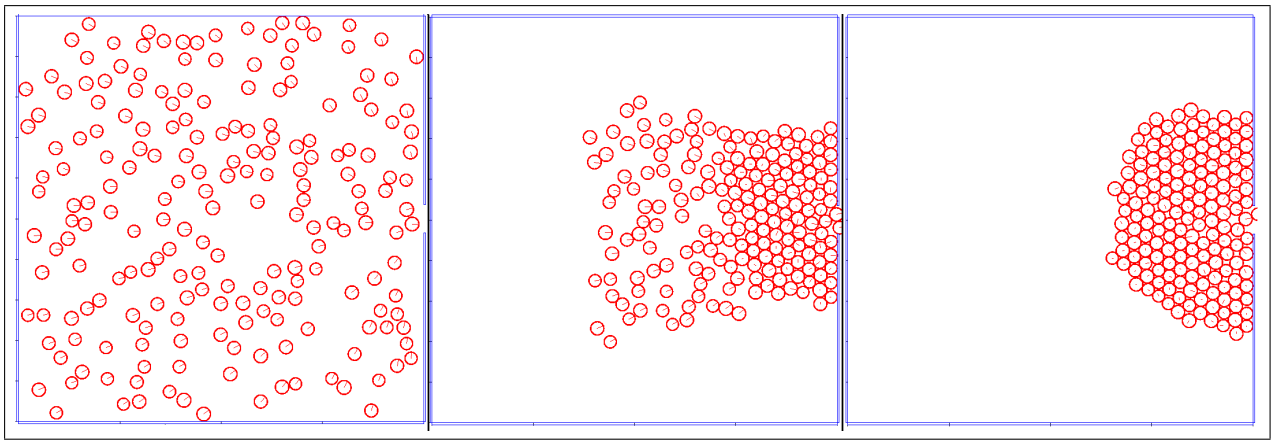


FIGURE 6.3 – Simulation d'une évacuation de salle - Formation d'arche - a. $t = 0\ s$, 200 piétons veulent évacuer ; b. $t = 6\ s$, 187 piétons restent à évacuer ; c. $t = 12\ s$, 166 piétons restent à évacuer.

6.2.2 Exercices d'évacuation : comparaison entre résultats expérimentaux et numériques

Dans cette partie, nous présentons des comparaisons de résultats obtenus à partir d'expérimentations réelles et de simulations numériques. Les simulations d'évacuation de quatre lieux différents sont analysées : une salle, une salle de classe, un cinéma et une école primaire.

Evacuation de salle

Le but de cette partie est de comparer une situation d'évacuation simulée avec les trois approches adaptées, en considérant uniquement leur manière de traiter les contacts locaux piéton-piéton et piéton-obstacle. Ainsi, les forces sociales ne sont pas introduites.
Nous considérons une salle carrée de 5 m de côté contenant 20 piétons voulant sortir par une porte de 82 cm de large. Les paramètres utilisés dans les simulations sont donnés dans le tableau 6.1.
Les paramètres concernant les piétons sont générés de manière aléatoire dans un intervalle donné (Tableau 6.1), ainsi 50 simulations sont effectuées (Figure 6.4) avec les pas de temps $h = 10^{-2}\ s$, $h = 10^{-3}\ s$ et $h = 10^{-4}\ s$ respectivement, pour chaque approche adaptée. Les conditions initiales de ces simulations sont identiques pour chaque approche adaptée.
La figure 6.4 montre la droite obtenue par régression linéaire des 50 simulations réalisées avec l'approche NSM2 adaptée, pour $h = 10^{-2}\ s$. La pente de cette droite permet d'obtenir le débit moyen Q de piétons traversant la porte. Les valeurs de Q, obtenues à partir des simulations réalisées avec les trois approches adaptées, pour les différents pas de temps, et celle obtenue à partir d'un exercice réel imitant des conditions d'évacuation d'urgence [145], sont rassemblées dans le tableau 6.2.
Le tableau 6.2 montre que l'influence sur Q du pas de temps choisi est négligeable, tant que la stabilité du schéma d'intégration temporelle est assurée. De plus, la valeur de Q obtenue avec l'approche NSM2 adaptée est très proche de celle obtenue à partir de l'exercice réel d'évacuation dans des conditions d'urgence. Les piétons évacuent plus rapidement avec l'approche NSM1 adaptée qu'avec les deux autres approches. Ces résultats sont probablement dus à la manière de traiter le contact : parfaitement inélastique pour l'approche NSM1

Paramètre		Symbole	Valeur	Unité
piéton i	allure *	$\|\underline{u}_{d,i}\|$	$[1.5, 2]$	$m.s^{-1}$
	rayon *	r_i	$[0.2, 0.25]$	m
	masse *	m_i	$[60, 100]$	kg
	temps de réponse	$t_{r,i}$	0	s
	temps de relaxation *	τ_i	$[0.1, 0.5]$	s
approche DEM	constante de raideur	k	1.2×10^5	$kg.s^{-2}$
approche NSM2	coefficient de dissipation normal	K_N	10^5	kg
	coefficient de dissipation tangentiel	K_T	0	kg
	pas de temps	h	$10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}$	s

TABLE 6.1 – Evacuation de salle - Paramètres utilisés dans les simulations d'évacuation de la salle carrée (* uniformément distribués dans l'intervalle donné) ; le temps de réponse est le temps nécessaire au piéton i pour commencer à évacuer la salle, après le déclenchement du mouvement d'évacuation.

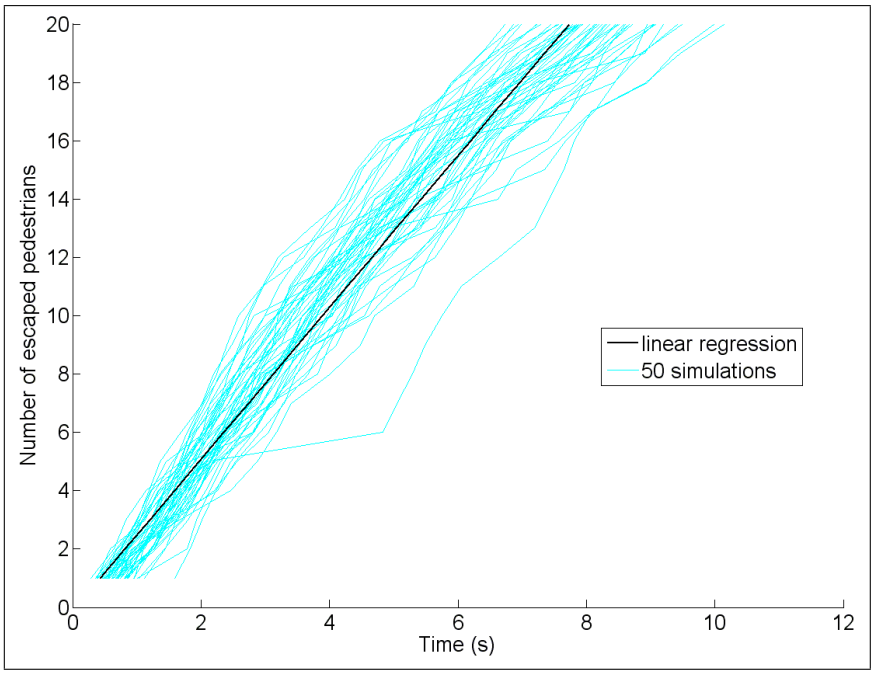


FIGURE 6.4 – Evacuation de salle - Courbes d'évacuation pour NSM2, avec $h = 10^{-2}$ s. Les courbes de couleur cyan résultent des 50 simulations. La régression linéaire des 50 simulations (droite noire) permet d'obtenir le débit moyen de piétons traversant la porte.

adaptée et élastique pour les approches DEM et NSM2 adaptées. La différence entre les valeurs de Q obtenues avec les approches DEM et NSM2 adaptées pourrait être due au phénomène de chevauchement qui est nécessaire pour traiter le contact avec l'approche DEM adaptée. Prendre en compte les collisions élastiques semble être nécessaire pour prendre en compte les piétons qui se bousculent.

Simulations ou expérience réelle	Q (piétons/min)		
	$h = 10^{-2}\ s$	$h = 10^{-3}\ s$	$h = 10^{-4}\ s$
Simulations avec l'approche DEM adaptée	182	182	181
Simulations avec l'approche NSM1 adaptée	279	276	278
Simulations avec l'approche NSM2 adaptée	156	154	155
Exercice réel	160		

TABLE 6.2 – Evacuation de salle - Débit moyen Q (piétons/min) de piétons traversant la porte .

Evacuation d'une salle de classe

Nous réalisons une comparaison entre exercice réel et simulations numériques pour l'évacuation d'une salle de classe. L'exercice réel d'évacuation de la salle de classe composée de 30 étudiants est présenté dans [146]. La largeur de la salle de classe est de 5.85 m et sa longueur 6.75 m. Elle contient 30 bureaux, répartis en six lignes et cinq colonnes. Les distances longitudinale et transversale entre les bureaux sont respectivement de 0.9 m et 1.35 m. La seule porte de sortie de la salle mesure 0.5 m de large. L'exercice d'évacuation est enregistré par deux caméras vidéo. Au signal du caméraman, tous les élèves se lèvent de leurs chaises et se précipitent vers la sortie. Les paramètres utilisés dans les simulations numériques sont donnés dans le tableau 6.3. Certains de ces paramètres sont répartis uniformément dans un intervalle donné. 50 simulations sont effectuées.

Paramètre		Symbole	Valeur	Unité
étudiant i	allure *	$\|\|\underline{u}_{d,i}\|\|$	$[1.2, 2]$	$m.s^{-1}$
	rayon *	r_i	$[0.18, 0.22]$	m
	masse *	m_i	$[50, 75]$	kg
	temps de réponse	$t_{r,i}$	0	s
	temps de relaxation *	τ_i	$[0.1, 0.5]$	s
approche NSM2	coefficient de dissipation normal	K_N	10^5	kg
	coefficient de dissipation tangentiel	K_T	0	kg
	pas de temps	h	0.01	s

TABLE 6.3 – Evacuation d'une salle de classe - Paramètres utilisés dans les simulations (* uniformément distribués dans l'intervalle donné) ; le temps de réponse est le temps nécessaire à l'étudiant i pour commencer à évacuer après le déclenchement du mouvement d'évacuation.

La figure 6.5 montre des exemples de progression de deux simulations numériques obtenues avec les approches adaptées NSM1 et NSM2. La progression obtenue avec l'approche DEM, qui ressemble à celle obtenue avec l'approche NSM2, n'est pas donnée. Pour les trois approches adaptées, la formation d'une arche autour de la porte de sortie est observée. Pour les approches DEM et NSM2 adaptées, les piétons évacuent la salle de classe (première ligne de la figure 6.5) sans problème alors que pour l'approche NSM1 adaptée, les piétons sont souvent bloqués (deuxième ligne de la figure 6.5).
L'approche NSM1 adaptée semble ne pas être efficace pour cette situation. Ainsi, nous limitons notre étude aux deux autres approches. La figure 6.6 indique le temps d'évacuation moyen des étudiants à partir de leurs positions initiales (i.e. positions des bureaux). Les

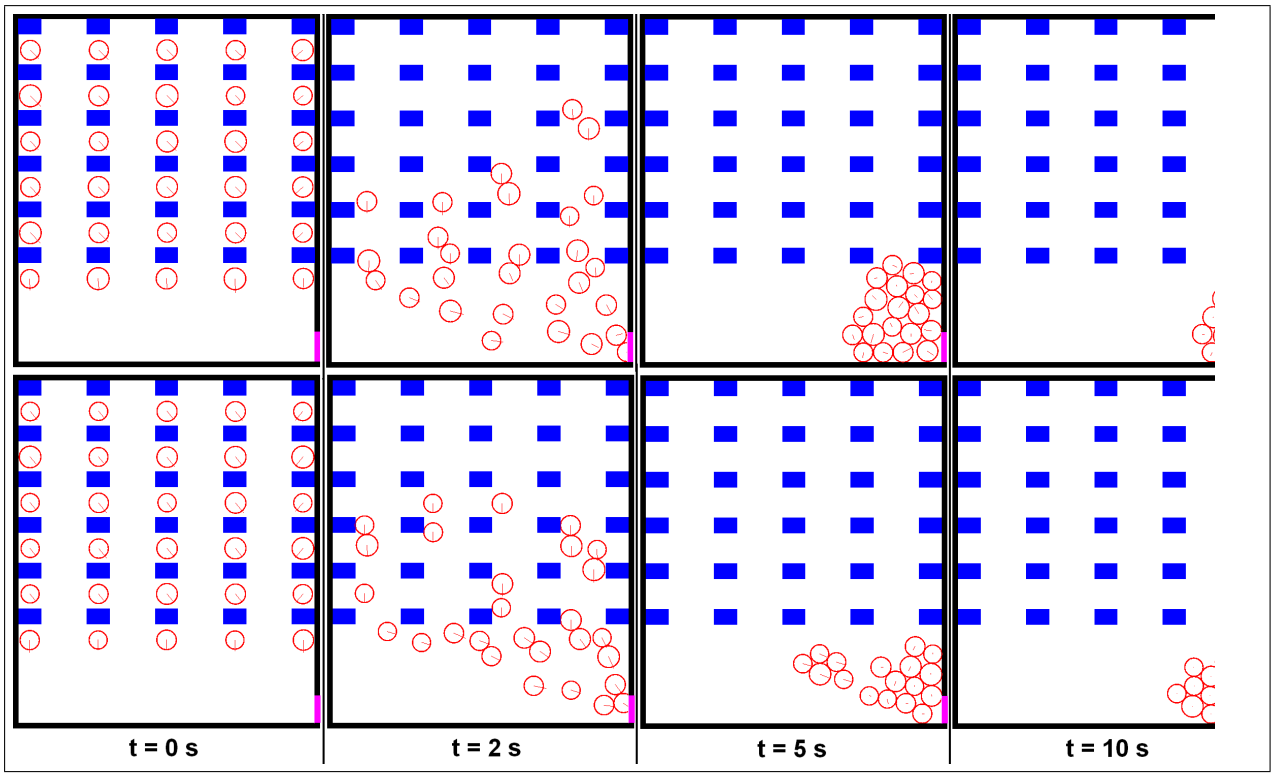


FIGURE 6.5 – Evacuation d'une salle de classe - Exemple de progression de deux simulations numériques à différents instants. La première ligne est obtenue avec l'approche NSM2 adaptée alors que la seconde concerne l'approche NSM1 adaptée. Les murs sont en noir, les bureaux sont en bleu, la porte de sortie est en magenta et les individus sont les cercles rouges.

temps d'évacuation moyens obtenus à partir de l'exercice réel d'évacuation sont en haut, ceux obtenus à partir des 50 simulations numériques réalisées avec l'approche adaptée DEM sont au milieu, et ceux obtenus avec l'approche NSM2 adaptée sont en bas. Des similitudes sont observées entre les temps d'évacuation moyens obtenus à partir de l'exercice réel d'évacuation et ceux obtenus par les simulations numériques. Tout d'abord, en considérant chaque colonne, le temps d'évacuation moyen augmente en fonction de la distance d_{b-s} : position du bureau - sortie. Ensuite, même si le temps d'évacuation augmente en fonction de d_{b-s}, les étudiants des deux premières colonnes (les plus proches de la porte de sortie) ont besoin d'un temps disproportionné pour évacuer. L'explication donnée par Helbing [146] à partir de l'exercice réel d'évacuation est que les étudiants utilisent naturellement les couloirs entres les colonnes de bureaux qui sont les plus près de la porte de sortie (à savoir le couloir de gauche lorsqu'ils sont assis à leur bureau et veulent aller vers la sortie), ainsi les étudiants des deux premières colonnes utilisent le même couloir, ce qui augmente la densité de personnes dans ce couloir et donc le temps d'évacuation des étudiants de ces colonnes. L'explication que nous pouvons donner de ces simulations est que, lorsque la densité des étudiants autour de l'étroite porte de sortie devient trop importante au cours de l'évacuation d'urgence, les étudiants qui arrivent face à la porte sortent plus facilement de la salle de classe que ceux qui arrivent par un côté et qui ont du mal à s'insérer dans le flux des piétons sortants.

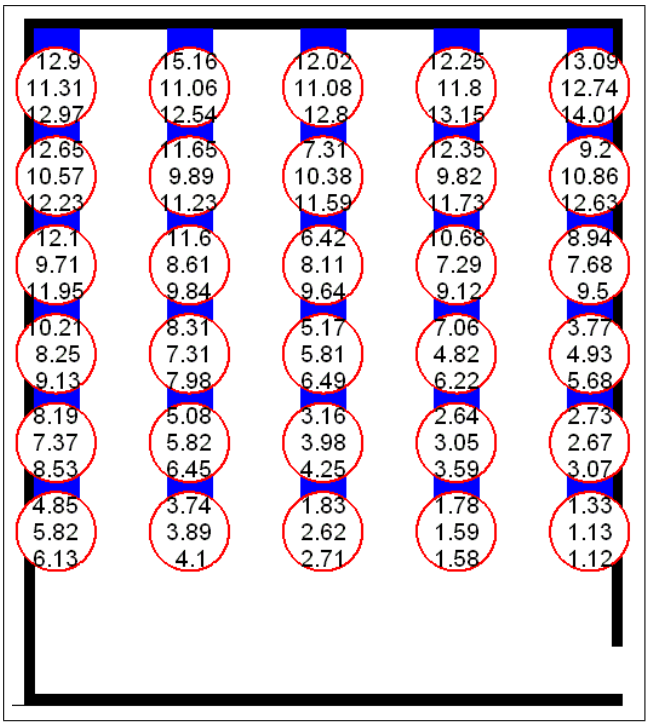


FIGURE 6.6 – Evacuation d'une salle de classe - Temps d'évacuation moyen des étudiants à partir de leurs positions initiales. Les trois résultats présentés dans chaque cercle donnent les temps d'évacuation moyens obtenus à partir de l'exercice réel d'évacuation (en haut) et des simulations numériques (au milieu pour l'approche DEM adaptée et en bas pour l'approche NSM2 adpatée).

Evacuation d'un cinéma

Nous effectuons également une comparaison entre exercice réel et simulations numériques réalisées avec l'approche adaptée NSM2 pour l'évacuation d'une salle de cinéma. L'exercice réel d'évacuation est présenté dans [56]. 101 étudiants sont assis dans un cinéma qui contient 174 sièges, leurs positions initiales sont fixées. Deux itinéraires d'évacuation sont disponibles, la sortie A et la B (Figure 6.7). Toutes les personnes ont pour consigne d'agir avec prudence afin d'éviter les blessures. Lorsque l'alarme est déclenchée, les étudiants commencent à évacuer en fonction de leur temps de réaction.
Les résultats de l'exercice réel d'évacuation sont les temps d'évacuation de chaque piéton. En accord avec les observations faites pendant l'exercice réel, les paramètres utilisés dans les simulations sont résumés dans le tableau 6.4. Certains paramètres sont uniformément répartis dans un intervalle donné.
100 simulations numériques sont effectuées avec l'approche NSM2 adaptée. L'approche NSM2 adaptée contient les forces d'accélération intérieure et socio-psychologique mises en place dans le chapitre 3. Les piétons utilisent le chemin le plus court pour évacuer. Quelques "zones de contrôle" sont ajoutées pour rendre le mouvement des piétons plus réaliste et éviter les zones de congestion (Figure 6.7).
Si le nombre de piétons est au moins égal à 5 dans les premier et second rectangles en rouge, ou au moins égal à 15 dans le troisième rectangle en rouge, les autres piétons se déplacent dans la direction de la flèche en magenta au lieu de celle en beige.
Un exemple de progression d'une simulation numérique est montré sur la figure 6.8.

Paramètre		Symbole	Valeur	Unité
piéton i	allure *	$\|\|\underline{u}_{d,i}\|\|$	$[1.2, 2]$	$m.s^{-1}$
	allure dans les escaliers	$\|\|\underline{u}_{d,i}\|\|$	0.5	$m.s^{-1}$
	rayon *	r_i	$[0.2, 0.25]$	m
	masse *	m_i	$[60, 100]$	kg
	temps de réponse *	$t_{r,i}$	$[0, 4]$	s
	temps de relaxation *	τ_i	$[0.1, 0.5]$	s
approche NSM2	coefficient de dissipation normal	K_N	10^5	kg
	coefficient de dissipation tangentiel	K_T	0	kg
Force sociale pour l'étudiant i	amplitude de l'interaction	A_i	2000	N
	portée de l'interaction répulsive	B_i	0,08	m
	caractère anisotropique des interactions	Λ_i	0	
	angle entre $\underline{e}_{d,i}(t)$ et $-\underline{e}_{ij}$	φ_{ij}	90	$degree$
	pas de temps	h	0.01	s

TABLE 6.4 – Evacuation d'un cinéma - Paramètres utilisés dans les simulations (* uniformément distribués dans l'intervalle donné) ; le temps de réponse est le temps nécessaire à l'étudiant i pour commencer à évacuer après le déclenchement du mouvement d'évacuation.

Les résultats de l'exercice réel et des simulations numériques sont résumés dans le tableau 6.5.

	Exercice réel	Simulations numériques
Nombre d'étudiants	101	101
Nombre de places	174	174
Nombre de simulations	1	100
Sortie A		
Temps d'évacuation (dernière personne)	45 s	49.4 s
Moyenne des temps d'évacuation	31.1 s	30.7 s
Sortie B		
Temps d'évacuation (dernière personne)	66 s	62 s
Moyenne des temps d'évacuation	53.1 s	48.6 s
Ensemble des sorties		
Temps d'évacuation (dernière personne)	66 s	62 s
Moyenne des temps d'évacuation	44 s	41.9 s

TABLE 6.5 – Comparaison entre exercice réel et simulations numériques pour l'évacuation d'un cinéma.

D'après les résultats résumés dans ce tableau, il n'y a pratiquement pas de différence entre les résultats de l'exercice réel et ceux des simulations numériques, ou du moins les différences sont acceptables.
La figure 6.9 montre que la courbe du nombre de piétons évacués en fonction du temps, obtenue à partir des simulations numériques, est très proche de celle obtenue à partir de l'exercice réel.

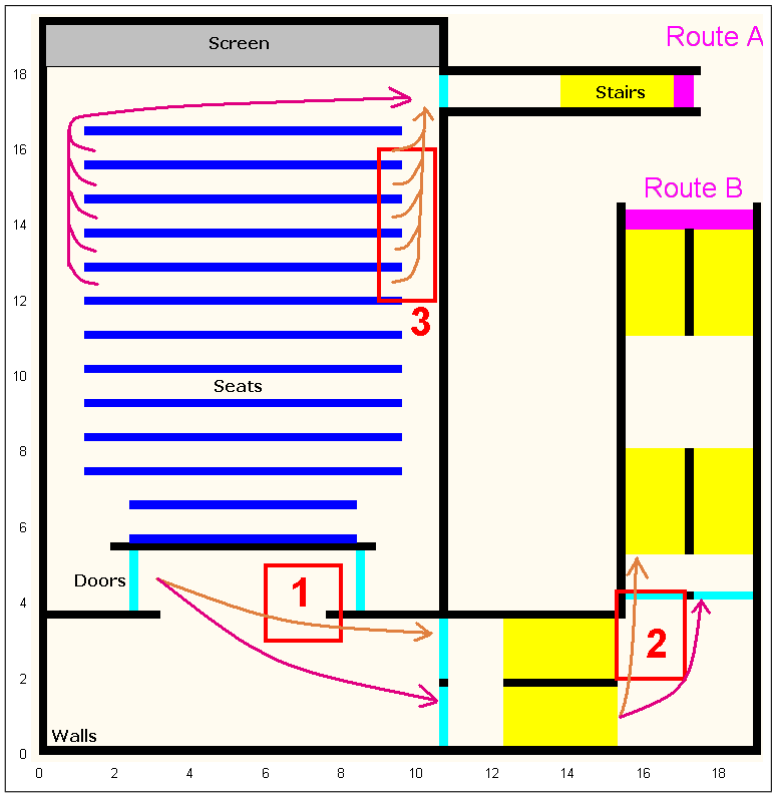


FIGURE 6.7 – Représentation du cinéma lors d'une simulation numérique ; les sièges sont en bleu, les murs sont en noir, l'écran de cinéma est en gris, les escaliers sont en jaune, les portes sont en cyan et les sorties sont en magenta (sortie A en haut et sortie B en bas) ; en fonction du nombre de piétons dans les rectangles rouges (zones de contrôle numérotées 1, 2 ou 3), les piétons se déplacent dans la direction de la flèche magenta au lieu de la beige.

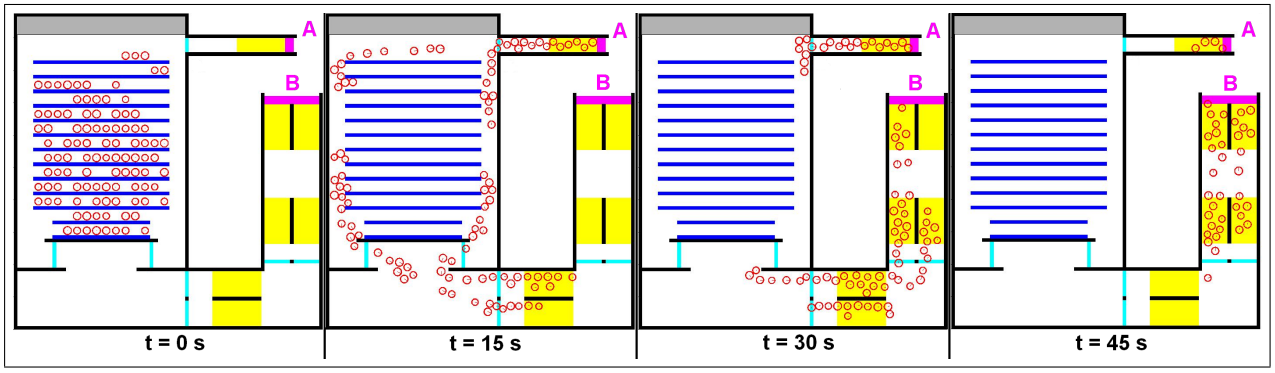


FIGURE 6.8 – Exemple de progression d'une simulation numérique à différents instants. Les piétons sont les cercles rouges.

Evacuation d'une école primaire

L'approche adaptée NSM2 est ensuite appliquée à l'exercice d'évacuation d'une école primaire, présenté dans [56]. Cet exemple montre qu'il est possible d'étudier un problème 3D en utilisant une approche 2D. Le bâtiment est composé de 3 étages et dispose de 6 salles de classe, avec environ 130 élèves (âgés de 6 à 10 ans). Le nombre initial de personnes dans chaque salle de classe est donné dans [56]. Lorsque l'alarme est déclenchée, les élèves

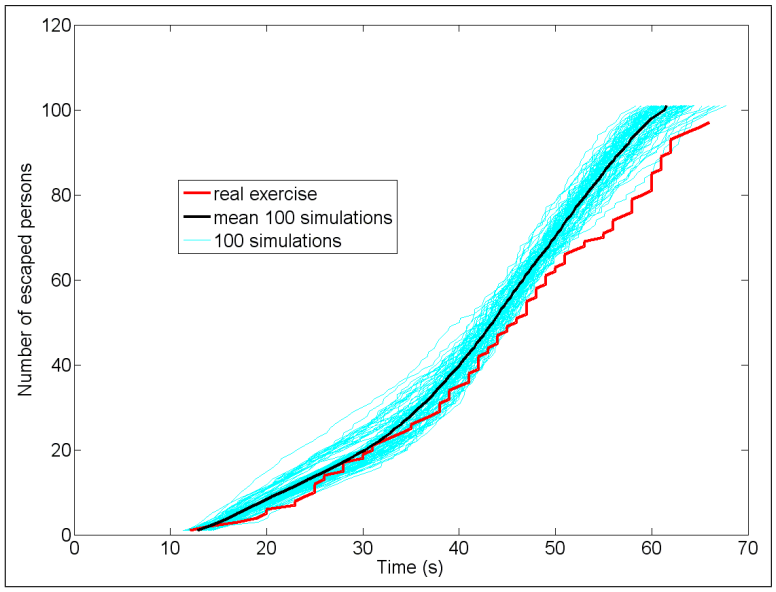


FIGURE 6.9 – Nombre de piétons évacués en fonction du temps, comparaison entre résultat d'exercice réel et résultats de simulations numériques : les 100 simulations numériques sont les courbes de couleur cyan, la moyenne de ces courbes de simulations est la courbe en noire, et la courbe de l'exercice réel est en rouge.

commencent l'évacuation. Une classe d'élèves suit son maître. Des films vidéo sont réalisés au cours de l'exercice réel d'évacuation et les résultats expérimentaux sont basés sur eux. Pour simuler cet exercice, nous proposons les paramètres résumés dans le tableau 6.6, obtenus à partir de $[2, 56]$ pour représenter une population quelconque. Certains paramètres sont uniformément répartis dans un intervalle donné.

Paramètre		Symbole	Valeur	Unité
piéton i	allure *	$\|\|\underline{u}_{d,i}\|\|$	$[1.2, 2]$	$m.s^{-1}$
	allure dans les escaliers	$\|\|\underline{u}_{d,i}\|\|$	$[0.5, 1]$	$m.s^{-1}$
	rayon *	r_i	$[0.2, 0.25]$	m
	masse *	m_i	$[60, 100]$	kg
	temps de réponse *	$t_{r,i}$	$[0, 10]$	s
	temps de relaxation *	τ_i	$[0.1, 0.5]$	s
approche NSM2	coefficient de dissipation normal	K_N	10^5	kg
	coefficient de dissipation tangentiel	K_T	0	kg
Force sociale pour le piéton i	amplitude de l'interaction	A_i	2000	N
	portée de l'interaction répulsive	B_i	0,08	m
	caractère anisotropique des interactions	Λ_i	0	
	angle entre $\underline{e}_{d,i}(t)$ et $-\underline{e}_{ij}$	φ_{ij}	90	$degree$
	pas de temps	h	0.01	s

TABLE 6.6 – Evacuation d'une école primaire - Paramètres utilisés dans les simulations (* uniformément distribués dans l'intervalle donné) ; le temps de réponse est le temps nécessaire au piéton i pour commencer à évacuer après le déclenchement du mouvement d'évacuation.

100 simulations numériques sont effectuées avec l'approche NSM2 adaptée. L'approche NSM2 adaptée contient les forces d'accélération intérieure et socio-psychologique mises en place dans le chapitre 3. Les piétons utilisent le chemin le plus court pour évacuer. Un exemple de progression d'une simulation numérique est montré sur la figure 6.10.

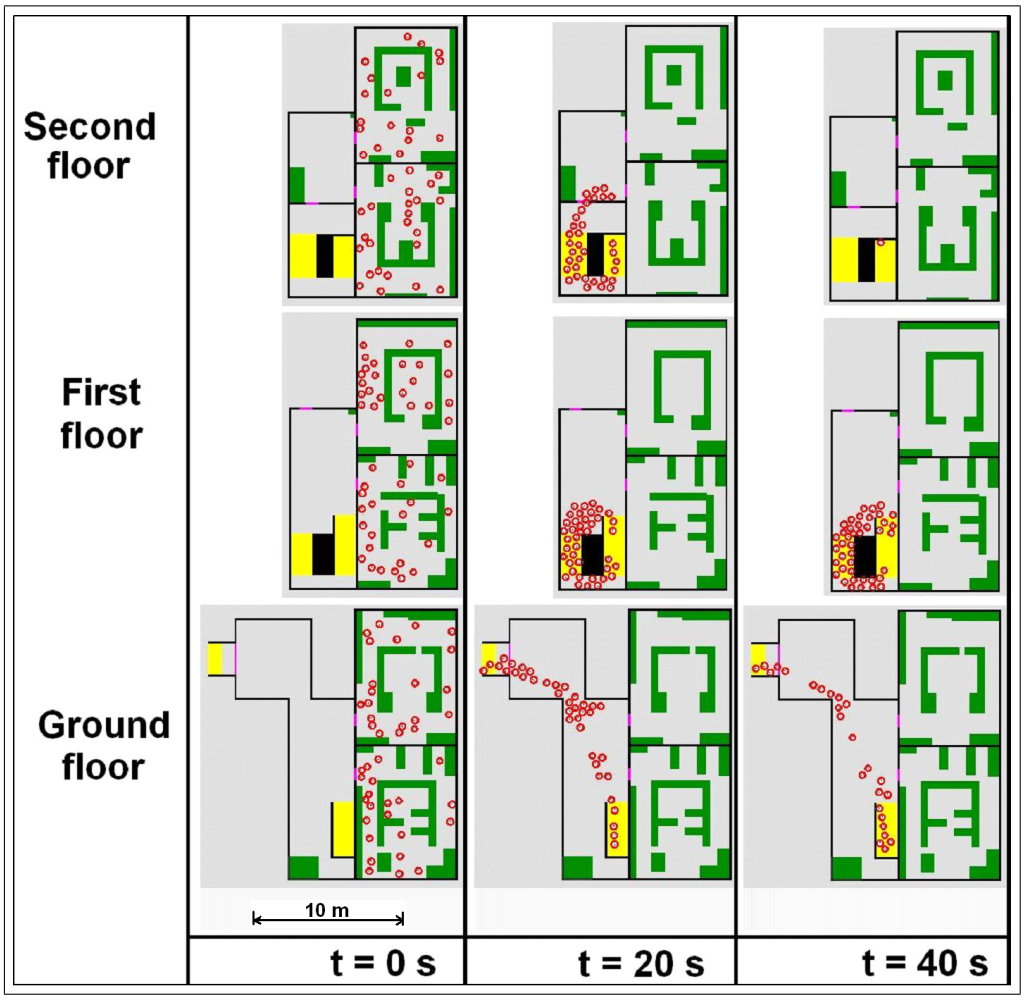


FIGURE 6.10 – Evacuation d'une école primaire - Exemple de progression d'une simulation numérique à différents instants. Les murs sont en noir, les obstacles sont en vert, les escaliers sont en jaune, les portes sont en magenta et les piétons sont les cercles rouges.

La figure 6.11 montre les courbes du nombre de piétons évacués en fonction du temps, obtenues à partir des résultats de l'exercice réel d'évacuation et de la moyenne des résultats des simulations numériques. En utilisant des paramètres permettant de simuler le comportement d'une population standard, les résultats des simulations numériques sont très proches de ceux obtenus à partir de l'exercice réel. Il peut être noté que sur la courbe d'évacuation obtenue à partir des résultats de l'exercice réel, le flot décroît soudainement à $t \simeq 38\ s$, puis croit de nouveau après $t \simeq 48\ s$. Ce phénomène (embouteillage ?) n'est pas reproduit par notre modèle. Une explication possible est que les piétons sont bloqués quelque part dans le bâtiment, probablement dans les escaliers lorsque deux classes se rencontrent, car les enfants sont sous la responsabilité de leur maître des écoles.

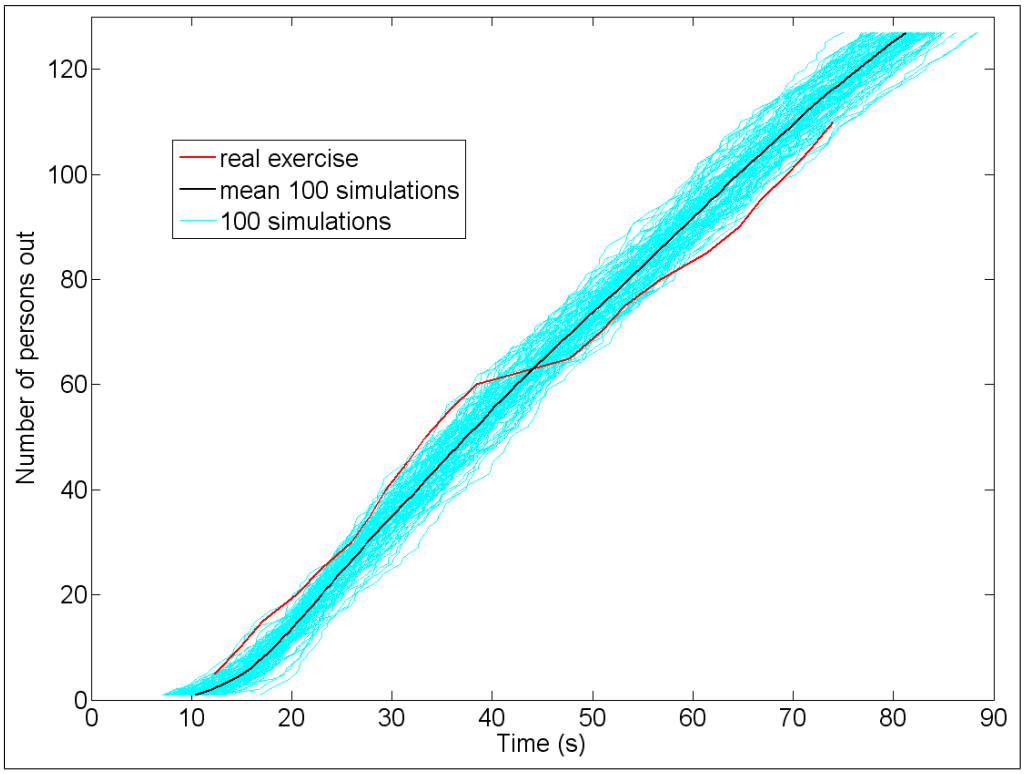


FIGURE 6.11 – Evacuation d'une école primaire - Nombre de piétons évacués en fonction du temps, comparaison entre résultats d'exercice réel et résultats de simulations numériques : les courbes en cyan représentent les 100 simulations numériques, la moyenne de ces courbes de simulations est la courbe noire, et la courbe de l'exercice réel est la rouge.

6.2.3 Un modèle prévisionnel

Cette partie a pour objectif de montrer que l'approche $NSM2$ adaptée peut être utilisée pour améliorer la qualité de service d'un espace étudié. Dans la première étude, nous cherchons à voir si l'ajout d'un obstacle devant une porte peut améliorer la qualité de service d'un espace étudié, s'il est bien choisi. Dans la seconde étude, nous cherchons à déterminer si le modèle de foule proposé peut être utilisé pour localiser les zones d'un espace considéré dans lesquelles les piétons pourraient être blessés lors d'une évacuation d'urgence. La troisième étude concernant la modélisation des voyageurs durant l'échange quai/train propose une solution pour faciliter l'évacuation des quais.

Ajout d'un obstacle devant une porte

Nous considérons une foule qui veut évacuer une salle par une porte étroite. Dans ce genre de simulations d'évacuation dites "entonnoirs", les chercheurs ont mis en évidence un effet de "blocage" qui peut apparaitre au niveau de la porte. Cet effet a pour conséquence de réduire l'efficacité de l'évacuation, et de produire de fortes pressions de contact au niveau de la foule bloquée. Une solution pour remédier à ce problème serait de placer un obstacle devant la porte, comme l'a testé expérimentalement Helbing [4].
En se basant sur ces considérations, nous essayons de déterminer dans cette partie si notre approche NSM2 adaptée peut modéliser ce type de problème et permettre d'améliorer la qualité de service lors d'évacuation d'urgence de certains espaces.

Nous considérons une salle carrée de 5 m de côté contenant 20 piétons voulant sortir par une porte de 82 cm de large, avec la présence ou non d'un obstacle (par exemple un pilier, etc.) devant la sortie. Le débit moyen Q (piétons/min) de piétons passant la porte est déterminé, en fonction de τ et des paramètres de l'obstacle (position, distance à la sortie, forme et taille). Les paramètres utilisés dans les simulations sont donnés dans le tableau 6.7 et sont uniformément distribués dans leur intervalle mentionné.

Paramètre		Symbole	Valeur	Unité
piéton i	allure *	$\|\|\underline{u}_{d,i}\|\|$	$[1.2, 2]$	$m.s^{-1}$
	rayon *	r_i	$[0.2, 0.25]$	m
	masse *	m_i	$[60, 100]$	kg
	temps de réponse	$t_{r,i}$	0	s
	temps de relaxation *	τ_i	$[0.1, 0.5]$	s
approche NSM2	coefficient de dissipation normal	K_N	10^5	kg
	coefficient de dissipation tangentiel	K_T	0	kg
obstacle	position {non centrale, centrale}	p_1	$\{0, 0.41\}$	m
	distance à la sortie	p_2	$\{0.7, 0.9\}$	m
	largeur (rectangle)	l_o	0.45	m
	longueur (rectangle)	L_o	$\{0.45, 0.636, 0.8, 1\}$	m
	diamètre (cercle)	D_o	$\{0.45, 0.636\}$	m
	pas de temps	h	0.01	s

TABLE 6.7 – Evacuation d'une salle carrée avec ou sans obstacle - Paramètres utilisés dans les simulations (* uniformément distribués dans l'intervalle donné) ; le temps de réponse est le temps nécessaire au piéton i pour commencer à évacuer, après le déclenchement du mouvement d'évacuation.

Les simulations numériques sont réalisées avec l'approche $NSM2$ adaptée, sans introduction de forces sociales. Dans ces situations d'évacuation d'urgence, les piétons utilisent le chemin le plus court pour évacuer. Plusieurs cas sont simulés en considérant différentes valeurs de τ et plusieurs positions, formes et longueurs de l'obstacle qui conserve une largeur de 0.45 m pour toutes les simulations (Figure 6.12). 50 simulations sont réalisées pour chaque position de l'obstacle.
Les valeurs de Q, pour les différentes simulations, sont collectées dans le tableau 6.8.
D'après les résultats obtenus, quand τ varie de 0.5 s à 0.1 s, le nombre de piétons évacués augmente considérablement. Plus la valeur de τ est faible, plus les piétons sont agressifs, n'hésitent pas à se bousculer, et retrouvent rapidement leur vitesse désirée après collision.
Quand $\tau = 0.1$ s et que l'obstacle est central ($p_1 = 0.41$ m), Q augmente en rapport avec la dimension de l'obstacle. Pourtant, l'évacuation des piétons est facilitée uniquement lorsque l'obstacle est assez près de la sortie ($p_2 = 0.7$ m). Au contraire, quand $\tau = 0.5$ s et que l'obstacle est loin de la sortie ($p_2 = 0.9$ m), les valeurs de Q sont pratiquement les mêmes avec ou sans obstacle ; et quand l'obstacle est près de la sortie ($p_2 = 0.7$ m), il n'améliore pas la qualité de service de l'évacuation.
Des situations similaires aux précédentes sont obtenues lorsque l'obstacle n'est pas centré sur la sortie ($p_1 = 0$ m) dans les deux cas $\tau = 0.1$ s et $\tau = 0.5$ s. Dans ces situations, lorsque les dimensions de l'obstacle augmentent, Q diminue.
Les simulations montrent qu'un obstacle près de la sortie et centré sur celle-ci augmente Q

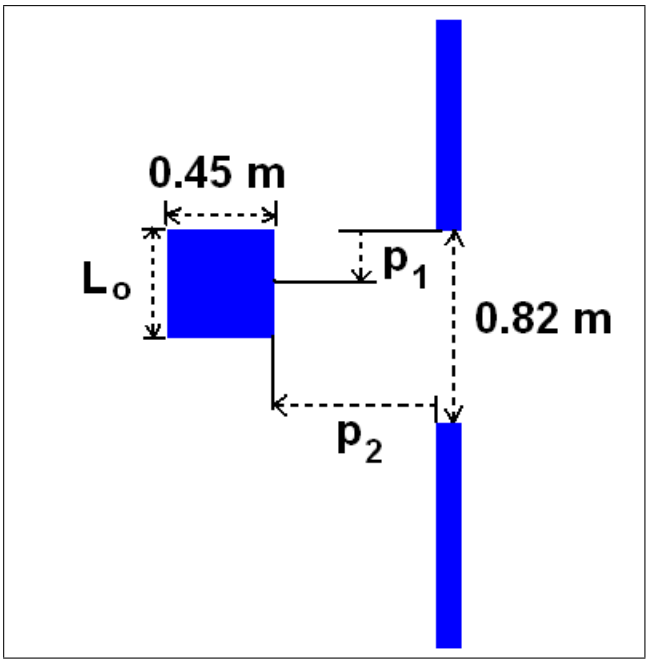


FIGURE 6.12 – Différentes positions de l'obstacle en fonction de L_o, p_1 et p_2.

τ			0.1 s			0.5 s		
p_1			0.41 m		0 m	0.41 m		0 m
p_2			0.7 m	0.9 m	0.7 m	0.7 m	0.9 m	0.7 m
Q (peds/min)	pas d'obstacle		230	230	230	116	116	116
	rectangulaire L_o	0.45 m	231	213	212	115	115	111
		0.636 m	247	217	206	109	116	107
		0.8 m	251	223	203	102	116	106
		1 m	264	222	200	101	112	106
	circulaire D_o	0.45 m	202	222	222	112	114	110
		0.636 m	238	207	208	122	107	112

TABLE 6.8 – Evacuation d'une salle carrée avec ou sans obstacle - Débit moyen Q (piétons/min) de piétons passant la porte en fonction de τ, p_1, p_2, forme (rectangulaire ou circulaire) et taille (L_o ou D_o) de l'obstacle.

proportionnellement à la longueur de l'obstacle.
Des simulations numériques ont aussi été réalisées avec un obstacle de forme circulaire. En fonction des valeurs des paramètres τ, p_1, p_2, et D_o, l'obstacle circulaire augmente le débit de piétons sortants Q, i.e. améliore le processus d'évacuation, dans certains cas (e.g. $\tau = 0.1s$, $p_1 = 0.41m$, $p_2 = 0.7m$, et $D_o = 0.636m$). D'autres études sont nécessaires pour déterminer les valeurs optimales des paramètres τ, p_1, p_2, et L_o/D_o des obstacles rectangulaires et circulaires.

Evacuation d'une salle ayant deux sorties proches

Le but de cette partie est de montrer que le modèle de foule proposé peut être utilisé pour estimer les zones d'une salle où les piétons sont soumis à de fortes pressions dans une

situation d'évacuation d'urgence. Les tolérances humaines dépendent des caractéristiques de la force de contact : son amplitude, sa durée d'application, sa direction et la localisation de son application. Par exemple, en situation réelle, une gifle sur le visage peut brièvement imposer des centaines de g (accélération de la gravité) localement, mais ne produit aucun dommage réel ; une constante de 16 g pendant une minute, cependant, peut être mortelle. La position, l'âge et la santé du piéton peuvent aussi affecter les tolérences humaines. A cause du grand nombre de propriétés de la force de contact et du piéton, déterminer si une collision entre deux piétons peut les blesser est un problème complexe. Ainsi, seules les zones de la salle considérée, où la percussion de contact est la plus élevée durant l'évacuation, sont recherchées.
L'évacuation d'une salle, contenant 500 personnes qui veulent s'enfuir par deux sorties proches, est simulée. La distance entre les deux sorties est de 4 m. Les paramètres utilisés dans la simulation sont résumés dans le tableau 6.9. La figure 6.13 présente un exemple

Paramètre		Symbole	Valeur	Unité
piéton i	allure *	$\|\|\underline{u}_{d,i}\|\|$	$[1.2, 2]$	$m.s^{-1}$
	rayon *	r_i	$[0.2, 0.25]$	m
	masse *	m_i	$[60, 100]$	kg
	temps de relaxation *	τ_i	$[0.1, 0.5]$	s
approche NSM2	coefficient de dissipation normal	K_N	10^5	kg
	coefficient de dissipation tangentiel	K_T	0	kg
	pas de temps	h	0.01	s

TABLE 6.9 – Evacuation d'une salle ayant deux sorties proches - Paramètres utilisés dans les simulations (* uniformément distribués dans l'intervalle donné).

de simulation d'évacuation.

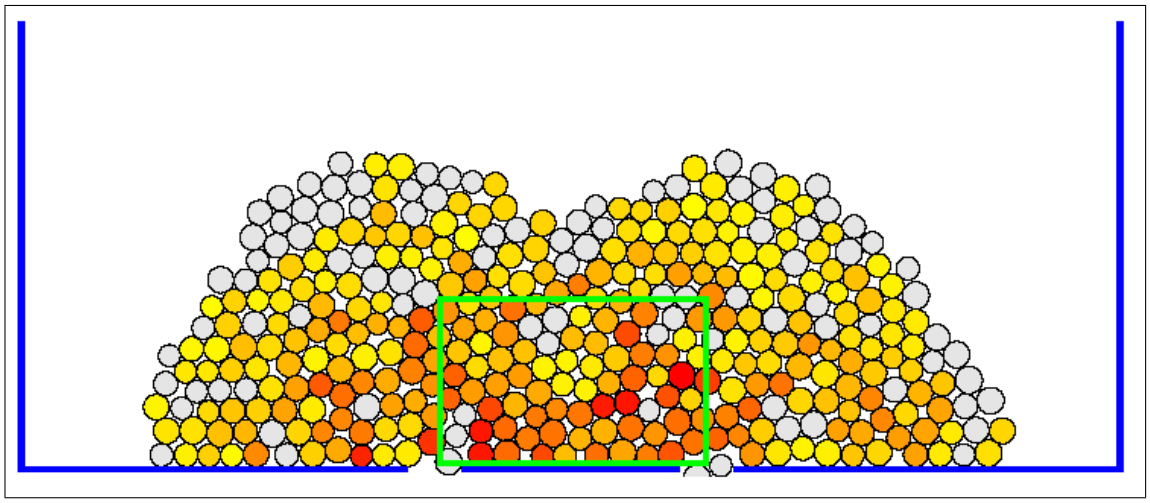


FIGURE 6.13 – Evacuation d'une salle ayant deux sorties proches - Les piétons sont colorés en fonction de la valeur de la percussion de contact : gris quand le piéton considéré n'est pas en contact avec son environnement proche, et sinon un spectre de couleur du jaune au rouge quand la valeur de la percussion de contact augmente. Le rectangle vert est la zone où les piétons pourraient être blessés.

La formation d'une arche, fonction de la valeur de la percussion de contact, est observée devant chaque sortie. Les piétons qui sont en train de sortir ne sont pas sous pression, comme s'ils étaient protégés par d'autres. De même, les piétons les plus éloignés des sorties ne peuvent pas être blessés car ils ne subissent pas de fortes pressions. Les personnes bloquées entre les deux portes par les deux flux de piétons sortant sont sujettes à de fortes pressions. Une zone dans laquelle les piétons pourraient être blessés est définie (rectangle vert sur la figure 6.13).

Modélisation des voyageurs durant l'échange quai/wagon

Cette application est issue d'une collaboration informelle avec l'ENSA Malaquais pour la présentation à la RATP d'un projet visant la diminution du temps d'évacuation d'une voiture de métro dans les gares à une seule sortie. La proposition consistait à installer dans ces gares une flèche clignotante, complètement invisible quand éteinte, indiquant la direction de la sortie pendant la phase d'arrêt du train.
Ce système est censé diminuer le temps de permanence des usagers sur l'échangeur train/quai, l'analyse numérique étant un outil pour optimiser le dispositif. Il convient de signaler que, afin d'estimer les flux de personnes dans les gares et dans les voitures du métro, la RATP s'appuie, à l'heure actuelle, sur un logiciel dédié.
Deux scénarios sont considérés : sans et avec la présence de la flèche de signalisation. Deux temps sont comparés dans les deux scénarios considérés : le temps mis par les piétons hors du métro pour entrer dans un wagon et le temps nécessaire aux piétons se trouvant initialement dans le métro pour atteindre la sortie du quai.
Nous considérons une partie d'un quai et un wagon du métro. Pour simuler les deux scénarios, nous proposons les paramètres donnés dans le tableau 6.10 pour représenter une population standard. Certains paramètres sont uniformément répartis dans un intervalle donné.

Paramètre		Symbole	Valeur	Unité
piéton i	allure *	$\|\|\underline{u}_{d,i}\|\|$	$[1.2, 1.5]$	$m.s^{-1}$
	allure dans les escaliers	$\|\|\underline{u}_{d,i}\|\|$	0.5	$m.s^{-1}$
	rayon *	r_i	$[0.2, 0.25]$	m
	masse *	m_i	$[60, 100]$	kg
	temps de réponse *	$t_{r,i}$	0	s
	temps de relaxation *	τ_i	$[0.1, 0.5]$	s
approche NSM2	coefficient de dissipation normal	K_N	10^5	kg
	coefficient de dissipation tangentiel	K_T	0	kg
Force sociale pour le piéton i	amplitude de l'interaction	A_i	2000	N
	portée de l'interaction répulsive	B_i	$0,08$	m
	caractère anisotropique des interactions	Λ_i	0	
	angle entre $\underline{e}_{d,i}(t)$ et $-\underline{e}_{ij}$	φ_{ij}	90	$degree$
	pas de temps	h	0.01	s

TABLE 6.10 – Modélisation des voyageurs durant l'échange quai/wagon de métro - Paramètres utilisés dans les simulations (* uniformément distribués dans l'intervalle donné) ; le temps de réponse est le temps nécessaire au piéton i pour commencer à évacuer, après le déclenchement du mouvement d'évacuation.

50 simulations numériques sont effectuées avec l'approche $NSM2$ adaptée pour les deux scénarios. Pour chaque simulation, les conditions initiales sont exactement les mêmes pour les deux scénarios, i.e. 20 piétons veulent entrer dans le wagon et 25 piétons sur 34 présents dans le wagon veulent en sortir, les piétons étant positionnés aléatoirement. Les deux scénarios, sans et avec flèche, sont :

* $0 \Rightarrow 10\ s$: le métro arrive, la flèche clignote.
* $10 \Rightarrow 15\ s$: la flèche clignote, les piétons se positionnent autour des portes.
* $15\ s$: les portent s'ouvrent, les piétons commencent à sortir. Les piétons hors du métro attendent que les piétons sortent du wagon pour pouvoir y entrer.
* $15 \Rightarrow 20\ s$: la flèche reste allumée.
* $20\ s$: si les piétons n'ont pas fini de sortir du wagon, les personnes hors du métro forcent leur entrée.

Quand les piétons atteignent la bande tactile jaune :

* avec la flèche : pendant $0.5\ s$ (temps de réaction), ils se déplacent aléatoirement devant eux puis se dirigent vers la sortie, à droite du quai.
* sans la flèche : pendant $3\ s$ (temps de réaction + recherche de la sortie), ils se déplacent aléatoirement devant eux pour chercher la sortie en ralentissant puis se dirigent vers la sortie, à droite du quai.

Un exemple de simulation d'échange quai/wagon sans et avec flèche est représenté sur la figure 6.14. Les dimensions du wagon sont celles d'un métro de la ratp. Les personnes en bleu sont des hommes et en rose des femmes. Dès qu'une personne a trouvé la sortie du quai, il se colore en couleur chair.
Les résultats des simulations d'échange quai/wagon obtenus pour les deux scénarios sont résumés dans le tableau 6.11.

	Moyenne des temps mis par le dernier piéton pour entrer dans un wagon	Moyenne des temps nécessaires au dernier piéton pour atteindre la sortie du quai
Scénario sans flèche	$\simeq 21.5\ s$	$\simeq 31\ s$
Scénario avec flèche	$\simeq 21.5\ s$	$\simeq 28.5\ s$

TABLE 6.11 – Résultats des simulations d'échange quai/wagon sans et avec flèche.

La présence de la flèche bleue ne modifie pas la rapidité d'entrance des piétons dans le wagon, par contre elle facilite l'évacuation du quai par les piétons sortant du métro.

6.2.4 Modélisation du mouvement de sous-groupes

L'approche $NSM2$ adaptée est maintenant utilisée pour modéliser le mouvement de sous-groupes. Des situations spécifiques de mouvement à contre-courant de plusieurs sous-groupes ont été filmées. Des séquences vidéo ont été choisies dans [22]. Les paramètres tels que le nombre de personnes, le nombre de sous-groupes et les considérations physiques ont été notés. Les sous-groupes marchant à contre-courant, comprenant 2 à 4 personnes, dans lequels

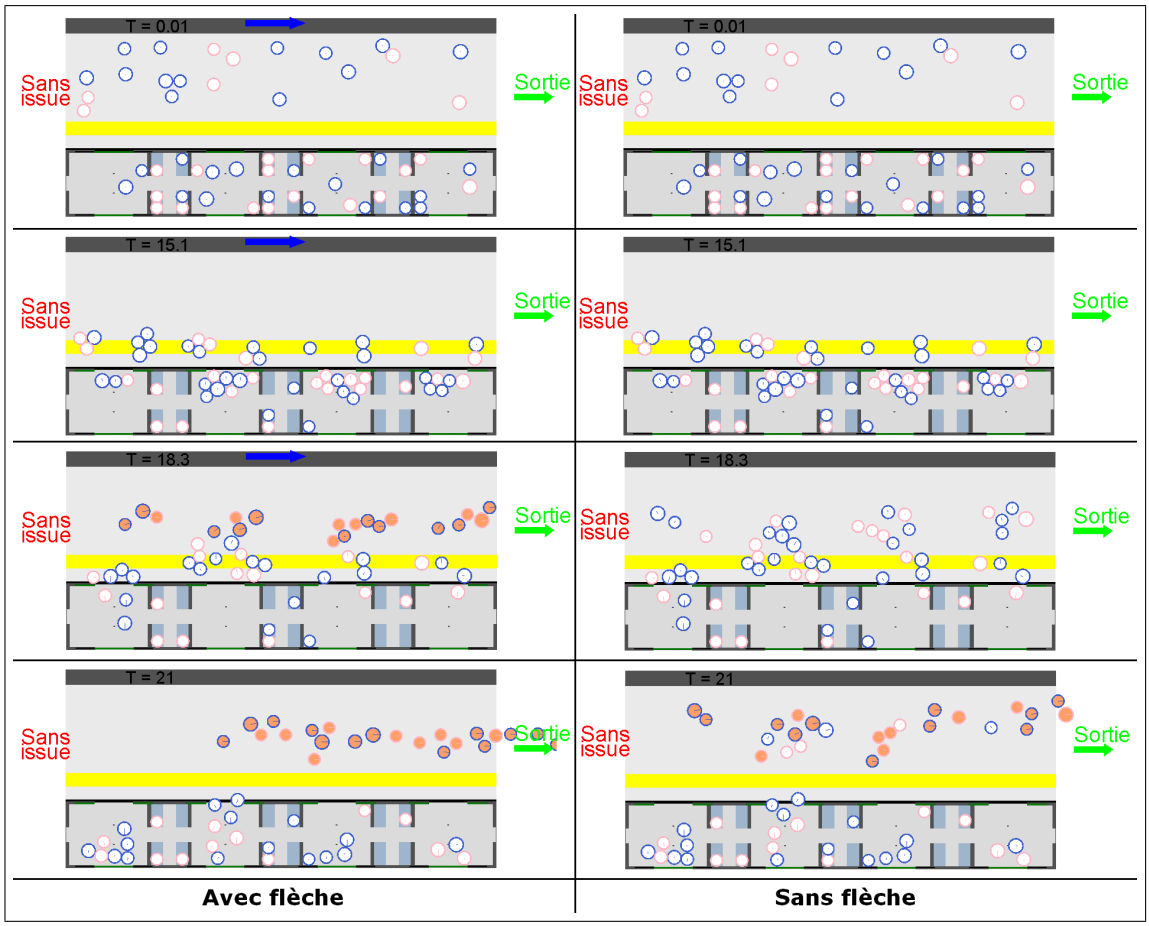


FIGURE 6.14 – Exemple de simulation d'échange quai/train sans et avec flèche.

des membres ont dû prendre des mesures d'évitement, ont été sélectionnés.
Les situations choisies sont reproduites avec le modèle de mouvement de foule proposé. Les simulations sont réalisées avec le modèle de sous-groupe de Singh [22]. Les valeurs des paramètres sont $d_{l,f} = 0.7\ m$, $\varphi_{l,f} = \pm\frac{\pi}{2}$ et $k_{sgr} = 0.15\ s^{-1}$ [22, 23].
Deux scénarios simulés sont présentés dans la figure 6.15. Nous trouvons une bonne corrélation entre les vidéos et les simulations numériques.

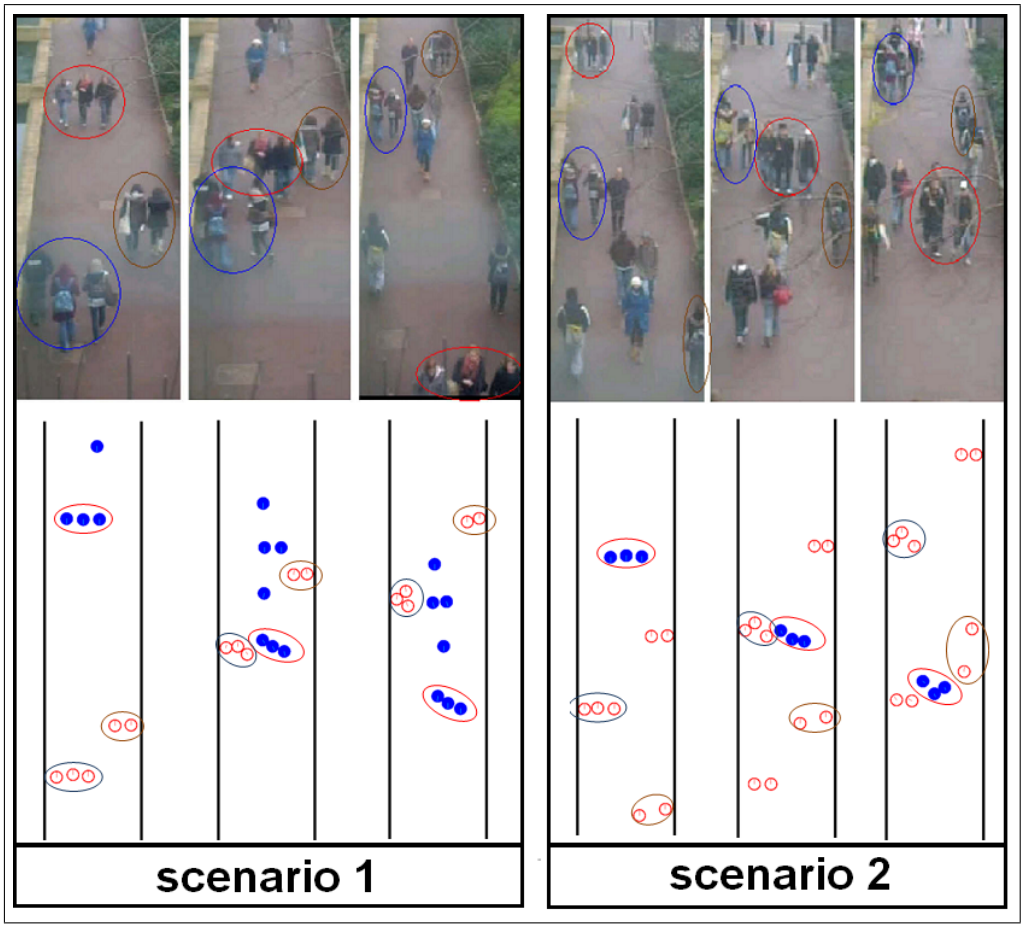


FIGURE 6.15 – Modélisation du mouvement de sous-groupes dans une foule de piétons - Comparaison entre séquences vidéos et simulations numériques. Les sous-groupes en correspondance sont entourés de la même couleur.

6.3 Simulations d'interactions foule-passerelle

Les différentes étapes du programme MATLAB du modèle discret d'interactions foule-passerelle sont représentées sur le figure 6.16.

Pour résoudre le système d'équations différentielles (Figure 6.16), une représentation d'état est d'abord utilisée par l'introduction du vecteur d'état $\underline{Z}_y^{n+1} = {}^t\left(U_y^{n+1}, \dot{U}_y^{n+1}, \phi_1^{n+1}, ..., \phi_N^{n+1}\right)$. Nous obtenons :

$$\dot{\underline{Z}}_y^{n+1} = \begin{bmatrix} \dot{U}_y^{n+1} \\ \ddot{U}_y^{n+1} \\ \dot{\phi}_1^{n+1} \\ \cdots \\ \dot{\phi}_N^{n+1} \end{bmatrix} \tag{6.1}$$

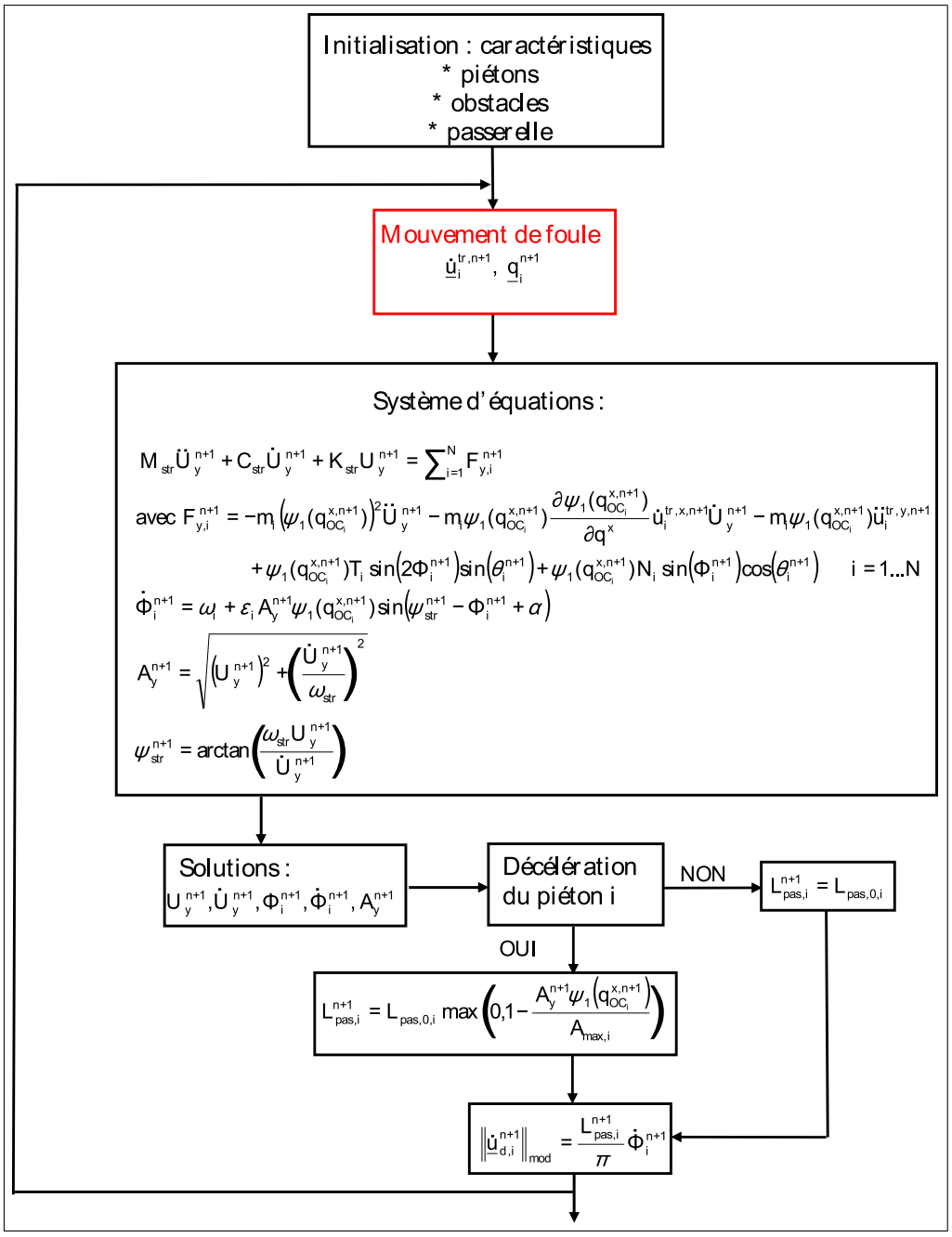


FIGURE 6.16 – Modèle d'interactions foule-passerelle - fonctionnement du programme MATLAB.

avec

$$\ddot{U}_y^{n+1} = \frac{1}{M_{str}+\sum_{i=1}^{N} m_i \psi_1^2\left(q_{OC_i}^{x,n+1}\right)} \left[-\left(C_{str} + \sum_{i=1}^{N} m_i \psi_1\left(q_{OC_i}^{x,n+1}\right) \frac{\partial \psi_1(q_{OC_i}^{x,n+1})}{\partial q^x} \dot{u}_i^{tr,x,n+1}(t) \right) \dot{U}_y^{n+1} \right.$$
$$- K_{str} U_y^{n+1} - \sum_{i=1}^{N} m_i \psi_1\left(q_{OC_i}^{x,n+1}\right) \ddot{u}_i^{tr,y,n+1}$$
$$\left. + \sum_{i=1}^{N} \psi_1\left(q_{OC_i}^{x,n+1}\right) T_i \sin\left(2\phi_i^{n+1}\right) \sin\left(\theta_i^{n+1}\right) + \psi_1\left(q_{OC_i}^{x,n+1}\right) N_i \sin(\phi_i^{n+1}) \cos\left(\theta_i^{n+1}\right) \right] \tag{6.2}$$

et

$$\dot{\phi}_i^{n+1} = \omega_i + \varepsilon_i A_y^{n+1} \psi_1(q_{OC_i}^{x,n+1}) \sin\left(\psi_{str}^{n+1} - \phi_i^{n+1} + \alpha\right) \quad \text{pour} \quad i = 1...N. \tag{6.3}$$

Ensuite, une méthode explicite de Runge-Kutta d'ordre 2 et 3 basée sur la méthode de Bogacki-Shampine est appliquée à l'équation (6.1) (*ode*23 toolbox du software MATLAB).

6.3.1 Traversée de la travée Nord du Millénium Bridge

La passerelle du Millennium est formée de trois travées : la travée Nord, la travée centrale et la travée Sud (Figure 6.17). Nous nous intéressons uniquement à la travée Nord dans cette partie.

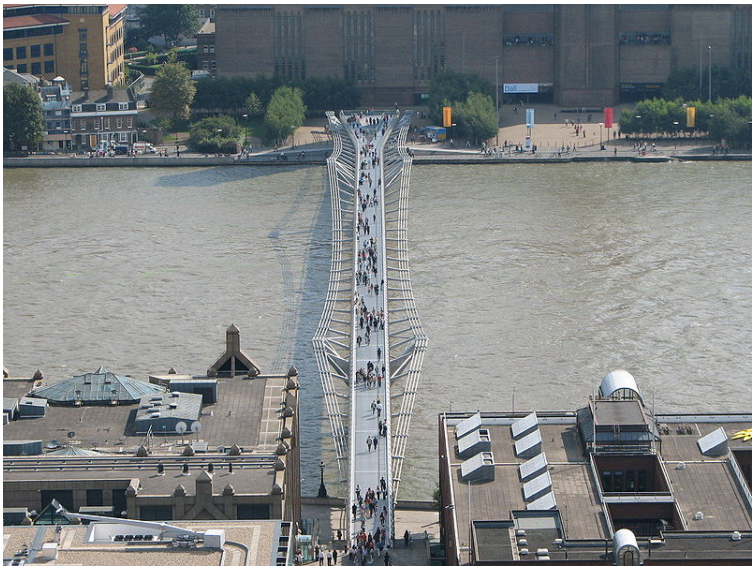


FIGURE 6.17 – La passerelle du Millénium.

Les essais réalisés par Arup [70] sur la travée Nord de la passerelle du Millénium ont montré que lorsque les piétons marchent librement sur la structure, le nombre critique de piétons N_c à partir duquel la synchronisation latérale en fréquence, entre une partie de la foule et la structure, risque de se déclencher est : $N_c = 166$ piétons.

Dans un premier temps, ce résultat nous permet de déterminer analytiquement la valeur de $\bar{\varepsilon}$ qui pourra être utilisée sur les passerelles présentant un couplage entre les mouvements latéral et de torsion.
Ensuite, nous considérons le cas où les piétons traversent la travée Nord de la passerelle du Millénium de Londres et présentons les résultats numériques obtenus lorsque les piétons sont sensibles au déplacement latéral de la passerelle. Pour chaque simulation, le nombre de piétons sur la structure est constant, et deux situations sont comparées :

- les piétons marchent sur place. Nous les nommons "piétons sur place" dans la suite.
- les piétons se déplacent tous suivant la même direction, ainsi lorsqu'un piéton sort par un côté de la passerelle, un piéton similaire entre par l'autre côté avec une position aléatoire le long de l'axe y. Nous les nommons "piétons avançant" dans la suite.

Les différents paramètres utilisés dans les simulations sont rassemblés dans le tableau 6.12.

Paramètres concernant les piétons		Paramètres concernant la passerelle	
symbole	valeur	symbole	valeur
r_i	répartition aléatoire dans $[0.2m,\ 0.25m]$	L_{str}	81 m
m_i	$500\pi r_i^2\ kg$	l_{str}	4 m
$L_{pas,0,i}$	distribution normale : moyenne 0.71 m écart-type 0.071 m	M_{str}	113000 kg
N_i	35 N	C_{str}	11000 $kg\ s^{-1}$
T_i	120 N	K_{str}	4730000 $kg\ s^{-2}$
ω_i	marche libre, distribution normale : moyenne $\bar{\omega} = 2\pi \times 0.93\ rad\ s^{-1}$ écart-type $\sigma_\omega = 2\pi \times 0.093\ rad\ s^{-1}$	$U_{y,0}$	0 m
$A_{max,i}$	0.2 m	$\dot{U}_{y,0}$	0 $m.s^{-1}$
$\phi_{0,i}$	répartition aléatoire dans $[-\pi,\ \pi]$ avec pour valeur moyenne 0	$\psi_1(x)$	avec forme modale : $\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$ sans forme modale : 1

TABLE 6.12 – Travée Nord du Millénium Bridge - Paramètres utilisés dans les simulations.

Détermination de $\bar{\varepsilon}$

Pour calculer analytiquement N_c à l'aide des équations présentées dans le chapitre précédent, nous devons d'abord connaître la valeur du paramètre de sensibilité des piétons aux oscillations latérales de la passerelle $\bar{\varepsilon}$. Cette valeur est trouvée à l'aide de $N_c = 166$ piétons, déterminée par les résultats des essais expérimentaux réalisés par Arup. En supposant que les piétons marchent sur place, les valeurs des paramètres choisis étant $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\bar{m} = 75\ kg$, $n = \frac{1}{2}$ et $N_c = 166$, la résolution du polynôme (5.85) donne $\bar{\varepsilon} \simeq 30\ m^{-1}s^{-1}$. Nous gardons cette valeur de $\bar{\varepsilon}$ dans la suite de cet exemple, mais pour l'appliquer à d'autres passerelles ayant des mouvements latéraux de torsion, il faudrait déterminer une valeur moyenne représentative pour ce type de passerelles.

Nous vérifions qu'avec ce choix de $\bar{\varepsilon}$, nous retrouvons $N_c = 166$ piétons. La première méthode, qui est la détermination de N_c implicitement à l'aide de (5.85), nécessite le tracé de la courbe qui représente le polynôme en fonction du nombre de piétons N.

La figure 6.18 montre cette courbe qui coupe l'axe des abscisses en $N = N_c \simeq 166$ piétons.

La seconde méthode est la résolution du polynôme (5.89) d'ordre 7 en Γ, qui étant impair possède au moins une racine réelle. Seules les racines réelles positives sont conservées. Sachant que $N_c = \frac{\Gamma^2 - M_{str}}{n\bar{m}}$, la plus petite valeur positive donne comme résultat : $N_c \simeq 166$ piétons.

La connaissance de $\bar{\varepsilon}$ permet de tracer N_c en fonction de $\frac{\bar{\omega}}{2\pi}$ pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$ à l'aide d'un calcul implicite du système d'équations (5.83) (Figure 6.19).

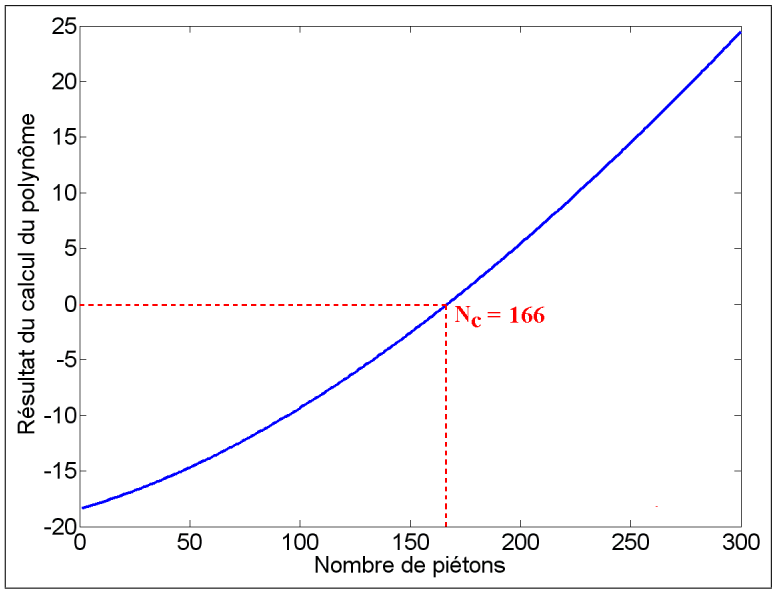


FIGURE 6.18 – Vérification que pour $\bar{\varepsilon} = 30\ m^{-1}s^{-1}$, nous retrouvons $N_c \simeq 166$ piétons.

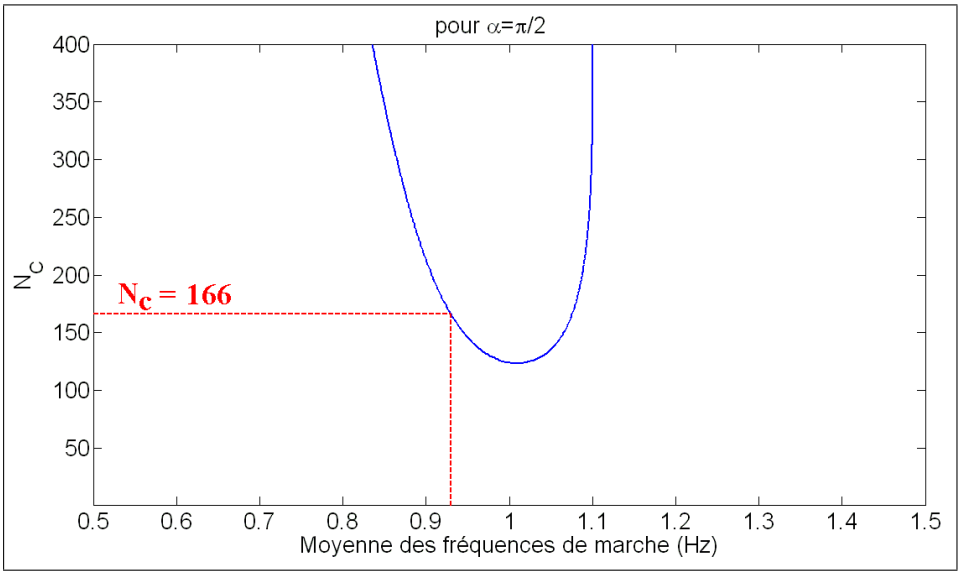


FIGURE 6.19 – Travée Nord du Millénium Bridge - Valeurs de N_c en fonction de $\frac{\bar{\omega}}{2\pi}$ pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$ et $\bar{\varepsilon} = 30\ m^{-1}s^{-1}$.

Comparaison simulations numériques / résultats analytiques

Nous présentons deux cas de simulations numériques que nous comparons aux résultats analytiques correspondants. Le premier cas concerne une foule qui se déplace en rythme à la fréquence modale du système passerelle-piétons. Dans le second cas, les piétons marchent librement sur la passerelle.

Pour chacun des deux cas étudiés, nous avons réalisé des simulations de 600 secondes en considérant les nombres de piétons suivant : N = 100, 130, 150, 170, 180, 210, 250, et 300. Pour chaque valeur de N, plusieurs simulations ont été réalisées avec des tirages différents des paramètres, et en considérant que les piétons marchent sur place ou avancent sur la

passerelle. Pour chaque simulation où les dernières secondes de simulation correspondent à l'état stationnaire, la synchronisation a été atteinte.

Nous nous sommes alors intéressés à la probabilité de la synchronisation, et dans les cas où la synchronisation est déclenchée, à deux facteurs à l'état stationnaire :
- l'amplitude du déplacement de la passerelle
- la fréquence de synchronisation

Cas 1 : La marche est rythmée, la fréquence de marche libre des piétons suit une loi gaussienne centrée sur la fréquence modale du système passerelle-piétons : C'est le cas le plus critique pour la passerelle, $\bar{\omega} = \omega_T$ et $\sigma_\omega = 2\pi \times 0.093\ rad\ s^{-1}$ [64]. La résolution des équations (5.82) ou (5.89) donne un nombre critique $N_c \simeq 124$.
Le tableau 6.13 montre la probabilité de synchronisation pour le cas étudié en fonction du nombre de piétons sur la travée Nord, dans les situations piétons sur place et piétons avançant. Lorsque $N < N_c$, aucune synchronisation n'est déclenchée numériquement. Nous remarquons que lorsque $N > N_c$, la synchronisation n'a pas lieu pour toutes les distributions de fréquence. Les piétons avançant ont plus de difficultés à déclencher le phénomène de synchronisation que les piétons sur place. Ceci s'explique par la présence de la forme modale dans l'équation de Kuramoto (4.47) qui donne de l'importance à la distribution spatiale des piétons selon la longueur de la portée de la passerelle. La probablilité de synchronisation augmente lorsque $N - N_c$ augmente.

Nombre de piétons N	Piétons sur place			Piétons avançant		
	Nb essais effectués	Nb essais synchronisés	% de syn-chronisation	Nb essais effectués	Nb essais synchronisés	% de syn-chronisation
100	5	0	0	5	0	0
130	10	3	30	10	1	10
150	5	5	100	5	3	60
170	5	5	100	5	4	80
180	5	5	100	5	4	80
210	5	5	100	5	5	100
250	5	5	100	5	5	100
300	5	5	100	5	5	100

TABLE 6.13 – Travée Nord du Millénium Bridge - Cas 1 - Probabilité de synchronisation dans les cas piétons sur place et avançant, lorsque la fréquence moyenne de marche libre des piétons est égale à la fréquence modale du système piétons-passerelle.

Le tableau 6.14 montre que dans les situations post-critiques, quelque soit le nombre de piétons sur la travée Nord, la fréquence de synchronisation numérique, dans les cas piétons sur place et piétons avançant, est égale à la fréquence modale du système piétons-passerelle, conformément à la prévision faite dans le chapitre précédent.
Dans le tableau 6.15 et sur la figure 6.20, nous remarquons que lorsque la synchronisation est déclenchée, l'amplitude numérique des oscillations de la passerelle à l'état stationnaire, dans les cas piétons sur place et piétons avançant, est en général très proche de l'amplitude trouvée analytiquement. Les cas où l'erreur relative entre l'amplitude analytique et l'amplitude numérique est élevée, correspondent au cas où N est proche de N_c. Des explications

Nombre de piétons N	Fréq. de synchronisation numérique (Hz)		Fréquence de synchronisation analytique (Hz)	erreur (%) relative, piétons	
	piétons sur place	piétons avançant		sur place	avançant
130	1.0085	1.0086	1.0085	0.00	0.01
150	1.0050	1.0048	1.0053	0.03	0.05
170	1.0020	1.0028	1.0021	0.01	0.07
180	1.0004	1.0001	1.0005	0.01	0.04
210	0.9955	0.9961	0.9959	0.04	0.02
250	0.9893	0.9896	0.9898	0.05	0.02
300	0.9818	0.9821	0.9823	0.05	0.02

TABLE 6.14 – Travée Nord du Millénium Bridge - Cas 1 - Comparaison entre les fréquences de synchronisation trouvées numériquement, dans les situations piétons sur place et avançant, et celles trouvées analytiquement.

possibles de ces écarts proviennent du fait que le nombre de fois où la synchronisation s'est déclenchée est faible pour avoir des estimations correctes de l'amplitude, ou que le nombre de simulations réalisées est trop faible pour donner des résultats plus représentatifs.

Nombre de piétons N	Amplitude de déplacement numérique (m)		Amplitude de déplacement analytique (m)	erreur (%) relative, piétons	
	piétons sur place	piétons avançant		sur place	avançant
130	0.016	0.026	0.014	14.0	81.5
150	0.033	0.031	0.030	10.8	3.8
170	0.042	0.044	0.041	4.3	5
180	0.048	0.047	0.045	5.2	0.9
210	0.060	0.060	0.058	4.3	1.4
250	0.075	0.074	0.073	2.5	1.3
300	0.093	0.095	0.092	1.6	0.8

TABLE 6.15 – Travée Nord du Millénium Bridge - Cas 1 - Comparaison entre les amplitudes des oscillations de la passerelle à l'état stationnaire trouvées numériquement, pour les cas piétons sur place et avançant, et celles trouvées analytiquement.

Les figures 6.21 et 6.22 montrent des exemples de résultats de non synchronisation et de synchronisation, obtenus dans le cas 1. La figure 6.21 présente un cas de non synchronisation obtenu avec 100 piétons traversant la structure.
Le déplacement latéral de la passerelle reste très faible (Figure 6.21a.) et les piétons ne synchronisent pas leur fréquence de marche avec celle du système "piétons-passerelle" (Figure 6.21c.).
Pour estimer le degré de cohérence de la phase des piétons, nous calculons le paramètre d'ordre PO introduit dans [137]. Ce paramètre est défini comme le module de la somme des exponentielles complexes dont les arguments sont les phases de chaque piéton :

$$PO(t) = \frac{1}{N}\left|\sum_{j}^{N} e^{i\phi_j(t)}\right| \tag{6.4}$$

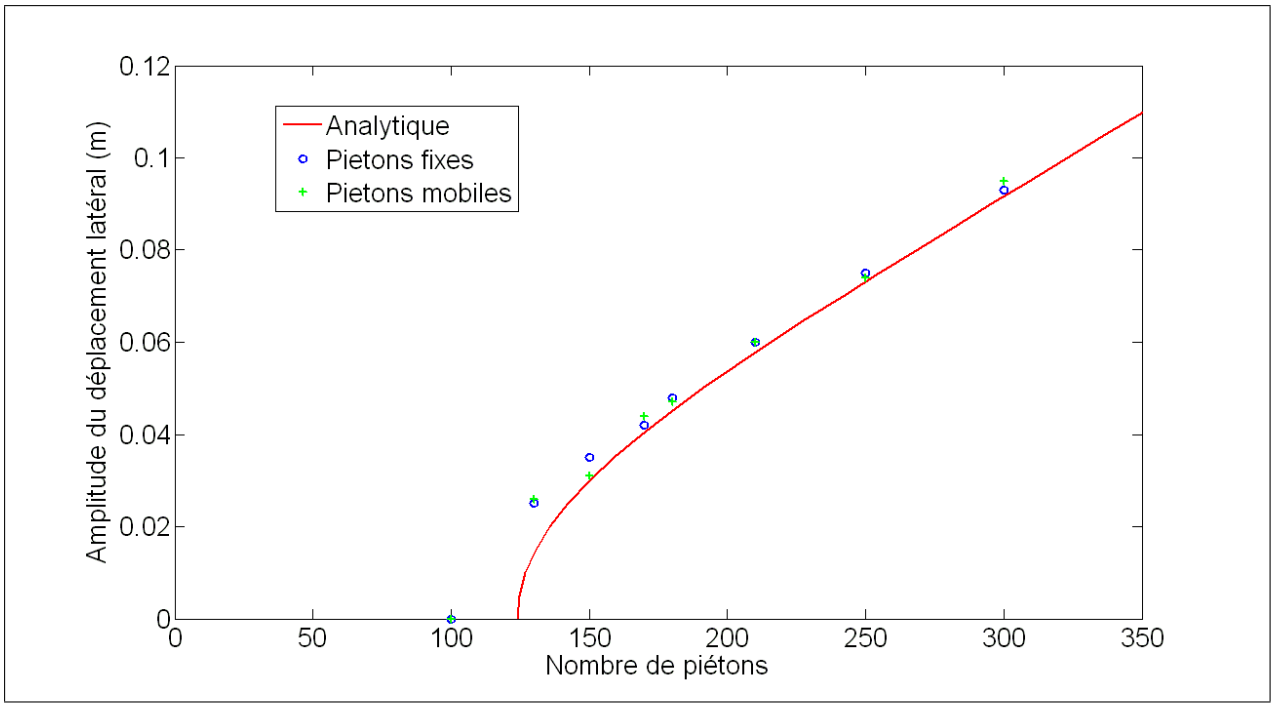


FIGURE 6.20 – Travée Nord du Millénium Bridge - Cas 1 - Comparaison entre les amplitudes maximales du déplacement latéral de la passerelle trouvées analytiquement et numériquement. Nous retrouvons bien analytiquement $N_c \simeq 124$.

Une augmentation de ce paramètre reflète le fait que les piétons se synchronisent un par un avec la structure pour atteindre un nombre maximum de piétons synchronisés ($PO = 1$). Pour chaque nombre de piétons sur le pont, quand il y a une synchronisation, le calcul du paramètre d'ordre donne la limite inférieure du pourcentage de piétons synchronisés.
La figure 6.21b. montre que le paramètre d'ordre pour les 100 piétons reste faible et donc le phénomène de synchronisation n'est pas déclenché.

La figure 6.22 expose un cas de synchronisation obtenu avec 210 piétons traversant la structure. Le déplacement latéral de la passerelle augmente avec le déclenchement de la synchronisation et atteint 0.06 m (Figure 6.21a.). Une partie des piétons synchronisent leur fréquence de marche avec celle du système "piétons-passerelle" (Figure 6.21c.). La figure 6.21b. montre que l'évolution du paramètre d'ordre est bien en accord avec celle du déplacement latéral de la passerelle.

Nous pouvons visualiser l'évolution temporelle des fréquences de marche $\frac{\dot{\phi}_i(t)}{2\pi}$ des piétons i sur la structure en fonction de leur position, pour le cas des piétons sur place. Nous remarquons sur la figure 6.23 que lorsque le phénomène de synchonisation est déclenché, de part la présence de la forme modale dans l'équation de Kuramoto (4.47), les piétons les plus éloignés du centre de la passerelle ont plus de difficultés pour se synchroniser.

Cas 2 : La marche des piétons est libre : Nous rappelons que $\bar{\omega} = 2\pi \times 0.93\ rad\ s^{-1}$ et $\sigma_\omega = 2\pi \times 0.093\ rad\ s^{-1}$ [64], et que la résolution des équations (5.82) ou (5.89) donne un nombre critique $N_c \simeq 166$.
Le tableau 6.16 montre la probabilité de synchronisation pour le cas étudié en fonction

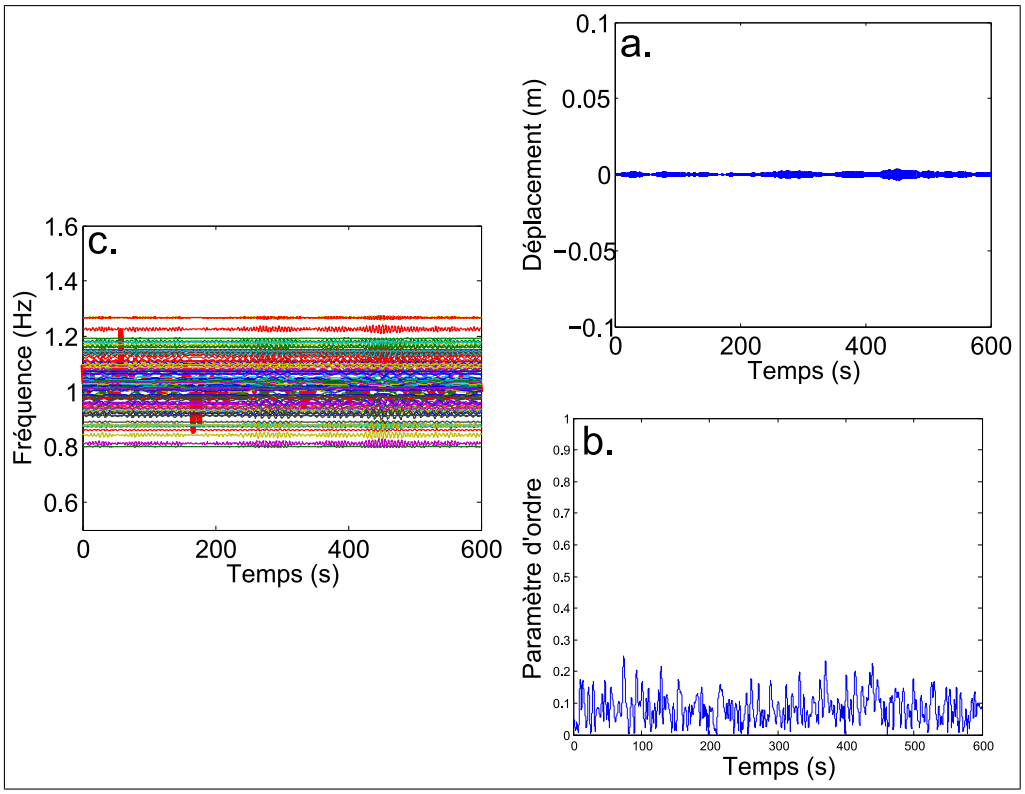


FIGURE 6.21 – Travée Nord du Millénium Bridge - Cas 1 - Mise en évidence du non phénomène de synchronisation lorsque $N < N_c$ - une foule de 100 piétons traverse la travée Nord du Millenium bridge - a. Evolution temporelle du déplacement latéral de la structure U_y ; b. Evolution temporelle du paramètre d'ordre ; c. Evolution temporelle des fréquences de marche $\frac{\dot{\phi}_i(t)}{2\pi}$ des piétons sur la structure. La courbe rouge en gras représente la fréquence instantanée du système "piétons-passerelle".

du nombre de piétons sur la travée Nord, dans les situations piétons sur place et piétons avançant. Les mêmes conclusions que pour le cas précédent peuvent être faites. Lorsque $N < N_c$, aucune synchronisation n'est déclenchée numériquement. Lorsque $N > N_c$, la synchronisation n'a pas lieu pour toutes les distributions de fréquence. Les piétons avançant ont plus de difficultés à déclencher le phénomène de synchronisation que les piétons sur place. La probablilité de synchronisation augmente lorsque $N - N_c$ augmente.
Le tableau 6.17 vérifie les conclusions faites dans le cas 1, à savoir que dans les situations post-critiques, quelque soit le nombre de piétons sur la travée Nord, la fréquence de synchronisation numérique, dans les cas piétons sur place et piétons avançant, est égale à la fréquence modale du système piétons-passerelle. Nous considérons que les erreurs présentées, inférieures à 1%, sont acceptables pour valider le modèle.

La notion de nombre équivalent

L'Association Française de Génie Civil (AFGC) [93,147] a modélisé une foule réelle constituée de piétons marchant à des fréquences et à des phases différentes, par une foule théorique équivalente. Cette foule équivalente est formée d'un nombre d'individus plus faible, mais qui sont uniformément répartis sur une partie de l'ouvrage, qui marchent sur place, et qui sont

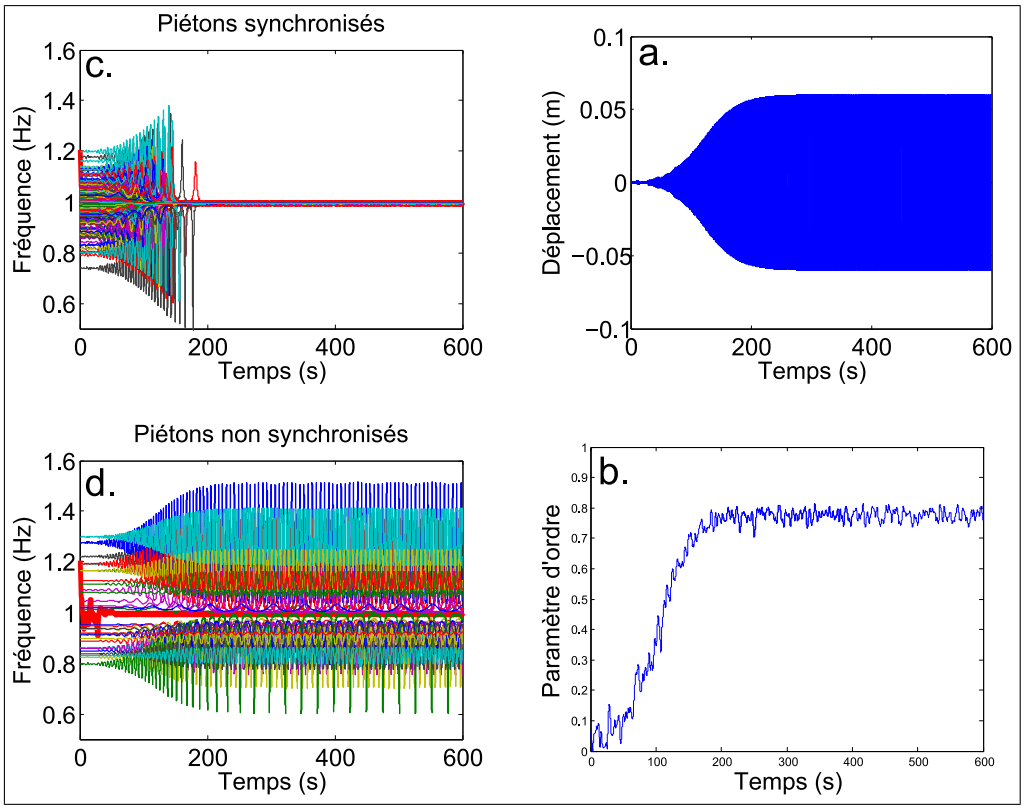


FIGURE 6.22 – Travée Nord du Millénium Bridge - Cas 1 - Mise en évidence du phénomène de synchronisation lorsque $N > N_c$ - une foule de 210 piétons traverse la travée Nord du Millenium bridge - a. Evolution temporelle du déplacement latéral de la structure U_y ; b. Evolution temporelle du paramètre d'ordre ; c. Evolution temporelle des fréquences de marche $\frac{\dot{\phi}_i(t)}{2\pi}$ des piétons synchronisés sur la structure ; d. Evolution temporelle des fréquences de marche $\frac{\dot{\phi}_i(t)}{2\pi}$ des piétons non synchronisés sur la structure. La courbe rouge en gras représente la fréquence instantanée du système "piétons-passerelle".

Nombre de piétons N	Piétons sur place			Piétons avançant		
	Nb essais effectués	Nb essais synchronisés	% de syn-chronisation	Nb essais effectués	Nb essais synchronisés	% de syn-chronisation
100	5	0	0	5	0	0
130	10	0	0	10	0	0
150	10	0	0	10	0	0
170	10	8	80	10	2	20
180	5	5	100	5	3	60
210	5	5	100	5	5	100
250	5	5	100	5	5	100
300	5	5	100	5	5	100

TABLE 6.16 – Travée Nord du Millénium Bridge - Cas 2 - Probabilité de synchronisation dans les cas piétons sur place et avançant, lorsque la marche est libre.

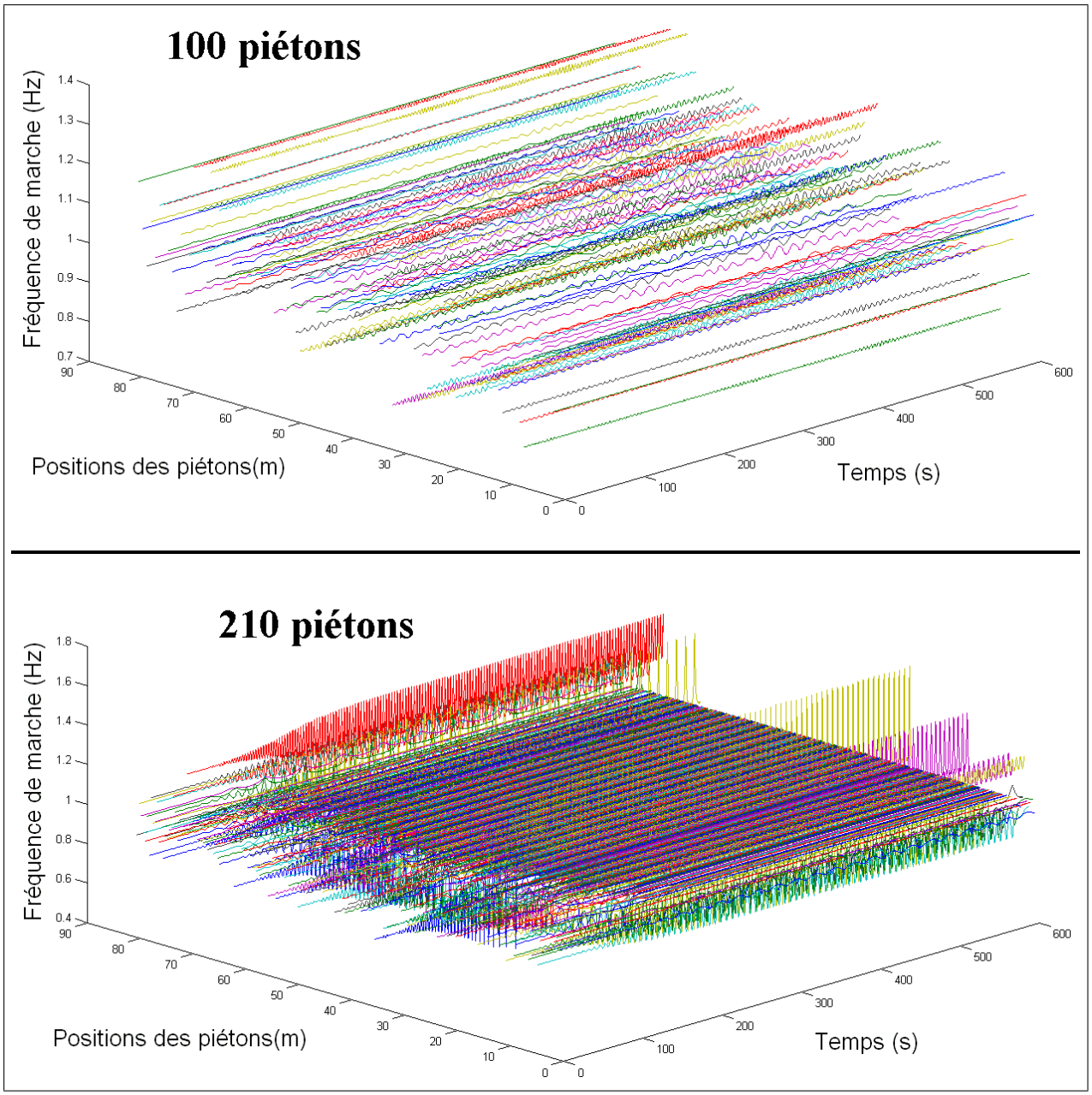


FIGURE 6.23 – Travée Nord du Millénium Bridge - Cas 1 - Evolution temporelle des fréquences de marche $\frac{\dot{\phi}_i(t)}{2\pi}$ des piétons sur la structure en fonction de leur position. On remarque la non synchronisation des piétons lorsque $N < N_c$, et la synchronisation lorsque $N > N_c$. De part la présence de la forme modale dans l'équation de Kuramoto, les piétons les plus éloignés du centre de la passerelle ont plus de difficultés pour se synchroniser.

tous en phase et à la même fréquence. Les deux foules doivent avoir le même effet sur la structure, i.e. les forces latérales engendrées par chacune des foules sont égales ou l'accélération maximale des oscillations de la structure obtenue durant une durée de temps significative est la même pour les deux foules.
Des essais ont permis d'établir les deux lois suivantes :

- $N_{eq} = 10.8\sqrt{N\xi_{str}}$ pour une foule peu dense (fréquences et phases aléatoires)
- $N_{eq} = 1.85\sqrt{N}$ pour une foule dense (phases aléatoires seulement)

Nombre de piétons N	Fréq. de synchronisation numérique (Hz)		Fréquence de synchronisation analytique (Hz)	erreur (%) relative, piétons	
	piétons sur place	piétons avançant		sur place	avançant
170	0.9971	0.9985	0.9968	0.03	0.17
180	0.9978	0.9954	0.9950	0.28	0.04
210	0.9930	0.9912	0.9900	0.30	0.12
250	0.9878	0.9868	0.9836	0.43	0.33
300	0.9806	0.9790	0.9761	0.46	0.29

TABLE 6.17 – Travée Nord du Millénium Bridge - Cas 2 - Comparaison entre les fréquences de synchronisation trouvées numériquement, dans les situations piétons sur place et avançant, et celles trouvées analytiquement.

Ainsi, il suffit de répartir les N_{eq} piétons sur l'ouvrage, de leur appliquer une force dont le signe de l'amplitude est le même que le signe de la déformée modale, de considérer cette force à la fréquence propre de la structure et de calculer l'accélération maximale obtenue à la résonance.

Nous voulons vérifier l'utilité de la notion de nombre équivalent pour la travée Nord du Millenium bridge. La fréquence propre du mode latéral nous intéressant est 1.03 Hz, elle se trouve dans la plage 1 de fréquence définie dans [93]. Elle correspond à un risque maximal de mise en résonance. La plage d'accélération latérale correspondante est $[0,\ 0.15\ m.s^{-2}]$. Il est stipulé dans [93] que l'accélération critique d'accrochage a_c pour l'accélération latérale est limitée dans tous les cas à 0.10 $m.s^{-2}$ pour éviter la synchronisation forcée.
Nous avons testé numériquement cette notion avec le modèle d'interaction proposé. Dans un premier temps, nous avons réparti aléatoirement N piétons avançant sur la structure, ces piétons ayant des fréquences et phases aléatoires (tableau 6.12). Nous avons trouvé numériquement l'accélération latérale maximale $A_{cc,max}$ de la passerelle pour une simulation de 110 s. Comme indiquée dans [93], cette durée correspond au temps nécessaire à un piéton pour franchir deux fois la passerelle à la vitesse de 1.5 $m.s^{-1}$.

Dans un second temps, nous avons réalisé les mêmes tests numériques mais avec un nombre de piétons équivalent N_{eq}, également réparti sur la portée de la passerelle, marchant sur place à la même fréquence, celle de la passerelle, et en phase. N_{eq} a été calculé à partir des deux lois données précedemment.

Les résultats sont présentés dans le tableau 6.18.

Pour $a_c = 0.10\ m.s^{-2}$ [93], d'après les simulations réalisées avec N_{eq}, le nombre critique correspondant est $N_c < 100$ piétons, et celui correspondant numériquement à l'utilisation des N piétons est $100 < N_c < 130$ piétons. L'utilisation du nombre équivalent est plus restrictive et donc plus sécuritaire.
Pour $a_c = 0.15\ m.s^{-2}$, qui est la valeur maximale de l'accélération pour la plage de confort $n°1$ du guide méthodologique du SETRA [93], d'après les simulations réalisées avec N_{eq}, le nombre critique correspondant est $170 < N_c < 180$ piétons, et celui correspondant numériquement à l'utilisation de N piétons est $150 < N_c < 170$ piétons. Nous rappelons que les essais réalisés par Arup [70] sur la travée Nord de la passerelle du Millénium ont montré que

N	N_{eq}	$A_{cc,max}$ $(m.s^{-2})$ pour N	$A_{cc,max}$ $(m.s^{-2})$ pour N_{eq}
100	9	0.079	0.105
130	10	0.103	0.118
150	11	0.136	0.131
170	12	0.187	0.144
180	13	0.298	0.158
210	14	1.418	0.171

TABLE 6.18 – Travée Nord du Millénium Bridge - Accélération latérale maximale $A_{cc,max}$ calculée numériquement, pour les nombres de piétons N et N_{eq}. Les résultats sont des moyennes de 5 simulations.

$N_c = 166$ piétons. Ainsi, l'utilisation de N_{eq} ne serait pas sécuritaire pour cette valeur de a_c, alors que l'utilisation normale du modèle d'interaction proposé donnerait de bons résultats. Nous pouvons aussi faire la remarque que pour la valeur $a_c = 0.2\ m.s^{-2}$ de l'Eurocode 0 Annexe 2, l'utilisation de N_{eq} donnerait des résultats erronés. La notion de nombre de piéton équivalent étant définie pour une foule désynchronisée, lorsque $N_c > 166$ piétons, son utilisation semble inadaptée.

L'utilisation de N_{eq} associé à un critère très restrictif sur a_c est sécuritaire vis-à-vis du phénomène de synchronisation latéral, mais peut provoquer un surdimensionnement de la passerelle.

6.3.2 Calcul du nombre critique de piétons pour différentes passerelles

Nous appliquons à différentes passerelles le calcul analytique du nombre critique de piétons, et comparons nos résultats avec ceux obtenus expérimentalement ou analytiquement, dans la littérature [26]. Trois passerelles sont étudiées, la travée Nord du pont du Millénium et la passerelle de Solférino qui ont des modes latéraux de torsion, et la passerelle Pedro e Inês qui a des modes latéraux purs.
A chaque type d'oscillations de la passerelle, correspond une valeur différente de $\bar{\varepsilon}$. La connaissance de N_c pour plusieurs passerelles ayant des modes latéraux purs et latéraux de torsion, nous a permis de trouver $\bar{\varepsilon} \simeq 42\ m^{-1}s^{-1}$ pour les mouvements en torsion, et $\bar{\varepsilon} \simeq 30.3\ m^{-1}s^{-1}$ pour les mouvements latéraux purs.
Les caractéristiques modales des trois passerelles sont présentées dans le tableau 6.19.

Passerelle	L_{str} (m)	ξ_{str} $(\%)$	ω_{str} $(rad.s^{-1})$	M_{str} (kg)	$\psi_1(x)$
Millenium	81	0.75	$2\pi(1.03)$	113000	$\sin\left(\frac{\pi x}{L_{str}}\right)$
Pedro e Inês	143	0.58	$2\pi(0.91)$	165100	$\frac{1}{2}\left(1-\cos\left(\frac{2\pi x}{L_{str}}\right)\right)$
Solferino	106	0.83	$2\pi(0.716)$	400000	$\sin\left(\frac{\pi x}{L_{str}}\right)$

TABLE 6.19 – Caractéristiques modales des trois passerelles [26].

Différents types de tests sont réalisés sur les passerelles : les piétons marchent librement sur

la travée Nord du Millenium Bridge [70] et sur la passerelle Pedro e Inês [148], alors que sur la passerelle de Solférino il y a (T1) une marche libre très lente, (T2) une marche libre lente, et (T3) une marche lente rythmée. Les paramètres définissant chaque type de marche, lors des essais sur les passerelles, sont données dans le tableau 6.20.

	Millenium	Pedro e Inês	Solférino		
	marche libre		(T1)	(T2)	(T3)
$\bar{\omega}$ $(rad\ s^{-1})$	$2\pi(0.93)$		$2\pi(0.7)$	$2\pi(0.75)$	$2\pi(0.75)$
σ_ω $(rad\ s^{-1})$	$2\pi(0.093)$		$2\pi(0.093)$	$2\pi(0.093)$	$2\pi(0.0775)$

TABLE 6.20 – Caractéristiques de la marche des piétons [26] - (T1) = marche libre très lente ; (T2) = marche libre lente ; (T3) = marche lente rythmée.

Les résultats des nombres critiques expérimentaux et analytiques sont regroupés dans le tableau 6.21.

Passerelle	Millenium	Pedro e Inês	Solférino		
test	marche libre		(T1)	(T2)	(T3)
N_c expérimental	166	70	138-207	160-184	114-160
Notre modèle discret	166	70	170	184	159
Bodgi [31]	133	70	168	184	155
Dallard [70, 78]	73	73	91	91	91
Roberts [138, 141]	144	120	97	97	97
Newland [139, 140]	181	205	325	325	325
Abrams [137, 142]	149	131	128	128	128
Eckhardt [143]	70	79	125	125	125

TABLE 6.21 – Nombres critiques expérimentaux et analytiques [26].

Nous remarquons que les différents résultats trouvés par notre modèle concordent avec les valeurs expérimentales pour les différents essais réalisés sur chaque passerelle, et sont très proches de ceux trouvés par Bodgi [26, 31] avec son modèle continu.

6.4 Synthèse du chapitre

Nous avons présenté, dans un premier temps, des simulations numériques pour valider notre modèle de foule discret. Après avoir retrouvé des phénomènes d'auto-organisation de la foule, nous avons appliqué le modèle à l'évacuation de structures du génie civil. Les simulations d'évacuation de salle et de salle de classe ont montré que le modèle proposé est capable de reproduire des situations réelles de manière très satisfaisante par rapport à deux modèles de foule existants [2, 10]. Les évacuations d'un cinéma et d'une école primaire prouvent que des situations complexes peuvent être simulées correctement.
A travers les simulations d'évacuation avec un obstacle devant la sortie, d'évacuation d'une salle ayant deux sorties proches, d'échange de voyageur quai/wagon, nous avons montré que le modèle de foule proposé peut être utilisé pour améliorer la qualité de service d'un espace donné. Enfin, l'exemple de modélisation de mouvements de sous-groupe ouvre à d'autres

types de simulations plus complexes, telle que la prise en compte des sous-groupes lors de l'évacuation de structure.

Dans un second temps, nous avons validé notre modèle d'interaction foule-structure à travers l'étude de l'exemple de la traversée de la travée Nord du Millénium Bridge et du calcul analytique du nombre critique pour différentes passerelles. Nous avons aussi montré que la méthodologie utilisant la notion de nombre équivalent pour déterminer le niveau de confort est peut-être trop sécuritaire, ce qui pourrait provoquer un surdimensionnement des passerelles.

Conclusions et perspectives

Le but de cette thèse était de développer un modèle 2D discret de mouvement de foule dans la perspective de l'appliquer à l'évacuation des structures du génie civil et à l'interaction foule-passerelle. Ce modèle devait pouvoir simuler le comportement des piétons, gérer les interactions locales piéton-piéton et piéton-obstacle, simuler le comportement d'une passerelle et prendre en compte les interactions piétons-passerelle.

La première partie de ce rapport est une étude bibliographique permettant de collecter des informations sur différentes notions importantes : le piéton, à savoir les caractéristiques de son comportement, de sa marche et la manière dont on peut le modéliser ; la foule, à savoir les observations du trafic piétonnier et les différents modèles de foule existants ; et les interactions piétons-passerelle , i.e. le couplage entre les deux systèmes, la définition du phénomène de synchronisation et de la notion de perception des vibrations.

Les deuxième et troisième parties présentent la modélisation de la foule qui se fait en deux étapes : la gestion du mouvement et des interactions piéton-piéton et piéton-obstacle, et la gestion du comportement des piétons.
Nous nous sommes inspirés des milieux granulaires pour modéliser les interactions au sein de la foule. Ainsi, dans la deuxième partie de la thèse, les trois étapes composant ces interactions sont expliquées : la détection du contact, le traitement du contact et la gestion du mouvement des particules. En ce qui concerne le traitement du contact entre particules rigides, trois approches, une régulière et deux non-régulières, sont présentées théoriquement et numériquement : les approches nommées DEM [54,97] et $NSM1$ [63] ont déjà été appliquées à la modélisation des mouvements de foule, et l'approche $NSM2$ est celle que nous proposons d'utiliser. Les schémas numériques de ces approches sont réécrits avec le même formalisme, ce qui permet de les comparer deux à deux, en fonction du type de collision qu'ils décrivent. On se rend compte que l'avantage majeur de l'approche $NSM2$ est qu'elle n'est pas limitée à un type de collision, comme peuvent l'être DEM et $NSM1$.

La troisième partie concerne la modélisation du comportement des piétons réalisée en deux étapes. La première qui est nécessaire est la définition d'une stratégie de déplacement du piéton. Le piéton est doté d'une volonté de déplacement par la définition d'une direction et d'une allure souhaitée à chaque instant. Le choix du chemin le plus court pour aller d'un point à un autre est utilisé. Un algorithme de Fast Marching [134] définit les directions souhaitées instantannées. La seconde étape permet à chaque piéton de gérer les interactions avec son environnement proche pour rendre son comportement plus réaliste. Des interactions permettant aux piétons de s'éviter les uns les autres sont introduites [2, 23, 50, 62, 135]. Une approche originale permettant de former des sous-groupes de piétons à l'aide d'un pseudo-potentiel de dissipation est proposée. Une comparaison des méthodes [22, 23] permettant de

gérer les sous-groupes est enfin présentée.

Dans la partie suivante, le modèle 2D discret d'interaction foule-passerelle est analysé dans le cas des oscillations latérales et verticales d'une passerelle. Une force sinusoïdale représentant l'action du piéton sur le sol modélise le mouvement d'oscillation de l'individu pendant la marche. Le comportement de la passerelle est restreint au mode propre dont la fréquence est proche de celle de la force latérale ou verticale des piétons. La synchronisation de la fréquence de marche de chaque piéton avec la fréquence d'oscillation du système "foule-passerelle" est modélisée grâce à l'utilisation d'une équation différentielle de type Kuramoto [137] qui gère la phase de la force de marche de chaque piéton. L'influence de la forme modale n'est pas négligée.

Dans la cinquième partie, nous avons étudié analytiquement un cas particulier de notre modèle, ce qui a permis de déterminer les expressions de certains paramètres liés à la synchronisation et de valider l'implémentation numérique. Des expressions du nombre critique de piétons à partir duquel la synchronisation peut se déclencher, de la fréquence de synchronisation, ainsi que de l'amplitude du déplacement latéral de la passerelle sont proposés selon certains cas particuliers.

Un ensemble de simulations numériques composent la dernière partie. Les simulations de mouvement de foule sont d'abord présentées afin de valider le modèle de foule proposé. Ces simulations sont scindées en quatre catégories. Dans la première, nous retrouvons des phénomènes d'auto-organisation de la foule déjà observés expérimentalement. Ensuite, des simulations d'exercices d'évacuation d'urgence avec comparaisons entre les résultats expérimentaux et numériques sont réalisées. Dans la troisième partie, nous montrons que l'utilisation du modèle peut servir à l'amélioration de la qualité de service d'un espace étudié. Enfin, un exemple de modélisation de mouvements de sous-groupes est présenté.
En ce qui concerne l'interaction foule structure, la connaissance du nombre critique de piétons, pour plusieurs passerelles ayant des modes latéraux purs et latéraux de torsion, nous a permis de déterminer le paramètre de sensibilité $\bar{\varepsilon}$ pour ces deux types d'oscillations. Pour la travée Nord de la passerelle du Millénium, nous avons comparé les résultats numériques et analytiques concernant les fréquences de synchronisation et l'amplitude post-critique stationnaire en fonction du nombre de piétons traversant la structure. Une bonne concordance des résultats a été observée. Nous avons aussi mis en évidence que la méthodologie utilisant la notion de nombre équivalent pour déterminer le niveau de confort est peut-être trop sécuritaire. Enfin, le calcul analytique du nombre critique pour différentes passerelles donne des résultats proches de ceux obtenus expérimentalement dans la littérature.

Pour la suite, nous avons listé les tâches qu'il serait intéressant d'étudier afin de compléter le modèle :

* La foule
  - Proposer d'autres choix de stratégie de déplacement. Nous pensons notamment à la stratégie du chemin le plus rapide pour se déplacer d'un point à un autre. Cette stratégie pourrait être mise en oeuvre à partir d'un algorithme de contrôle optimal [133].
  - Amélioration du modèle de sous-groupes "piétons liés" soit en prenant en compte

la rotation des piétons, soit en proposant une solution hybride “modèle Moussaïd / piétons liés” ou “modèle Singh / piétons liés” lorsque cette rotation est négligée. La première solution paraît être l'évolution la plus naturelle du modèle.
  - Modéliser les piétons comme des particules déformables, ce qui permettrait de mettre en évidence les efforts de contact.
  - Proposer d'autres formes pour représenter les piétons (e.g. ellipse).
  - Gérer les situations de panique. Lorsque les piétons sont en panique, ils ont tendance à avoir un mouvement chaotique. Il faudrait donc étudier, par exemple, l'ajout de termes de fluctuation sur les choix de la direction souhaitée et de l'allure souhaitée pour perturber le comportement du piéton.

* L'interaction foule-structure
  - Réaliser des simulations numériques sur d'autres passerelles.
  - Etudier les oscillations verticales et longitudinales.
  - Etudier des situations où deux modes affectent le comportement de la foule.
  - Trouver analytiquement les expressions de N_c et A_y dans le cas général, avec α et $\bar{\omega}$ quelconque, pour tous les types d'oscillations de la structure.
  - Comparer les résultats avec ceux de différents guides (Setra, BS 5400, Eurocode, etc.).

Appendices

Annexe A

Optimisation avec contrainte convexe

Dans cette annexe, on rappelle les notions relatives à la formulation point-selle et à l'algorithme d'Uzawa. Toutes ces notions sont tirées de [131].

A.1 Relations de Kuhn-Tucker

Soit une fonction $f : \Omega \subset E = R^n \longrightarrow R$, dérivable en $x^* \in K$ avec
Ω ouvert convexe,
$K = \{x \in \Omega,\ \varphi_i(x) \leq 0,\ i = 1, ..., m\} \neq$, et
les $\varphi_i : \Omega \longrightarrow R$ sont convexes, dérivables en x^*.
1. Si x^* est solution de

$$(P) \begin{cases} f(x^*) = \inf_{x \in K} f(x) \\ x^* \in K \end{cases} \tag{A.1}$$

et si les contraintes sont "qualifiées", i.e. φ_i sont affines ou $\exists \omega \in K$ tel que $\varphi_i(\omega) < 0$ pour les φ_i non affines,
alors il existe des multiplicateurs de Lagrange $\lambda_i \geq 0$, vérifiant les relations dites de Kuhn-Tucker

$$\begin{cases} \nabla f(x^*) + \sum_1^m \lambda_i \nabla \varphi_i(x^*) &= 0 \\ \lambda_i \varphi_i(x^*) &= 0, \quad i = 1, ..., m. \end{cases} \tag{A.2}$$

2. Réciproquement, si $f : \Omega \longrightarrow R$ est convexe et dérivable, si $x^* \in K$, s'il existe des multiplicateurs $\lambda_i \geq 0$ vérifiant les relations de Kuhn-Tucker, alors x^* est solution de (P).

A.2 Interprétation des relations de Kuhn-Tucker

K étant convexe, on sait déjà que

$$(-\nabla f(x^*), x - x^*) \leq 0 \quad \forall x \in K\ , \tag{A.3}$$

qui implique que $-\nabla f(x^*)$ fait un angle $\geq \frac{\pi}{2}$ avec les directions intérieures $x - x^*$.
Les relations de Kuhn-Tucker précisent que

$$-\nabla f(x^*) = \sum \lambda_i \nabla \varphi_i(x^*), \quad \lambda_i \geq 0\ , \tag{A.4}$$

i.e. $-\nabla f(x^*)$ appartient au cône

$$\sum \alpha_i \nabla \varphi_i(x^*),\ \alpha_i \geq 0\ . \tag{A.5}$$

D'autre part, les relations de Kuhn-Tucker expriment que x^* est solution du problème de minimisation sans contrainte de la fonctionnelle

$$x \in \Omega \longrightarrow f(x) + \sum_1^m \lambda_i(x^*)\varphi_i(x) \tag{A.6}$$

dont la solution correspond à l'annulation de la dérivée.

A.3 Point-selles

Soient E et M deux espaces normés et $L : E \times M \longrightarrow R$.
$(x^*, \lambda) \in E \times M$ est un point-selle si x^* est un minimum pour $x \longrightarrow L(x, \lambda)$ et si λ est un maximum pour $\mu \longrightarrow L(x^*, \mu)$.
En un tel point on a

$$\inf_{x\in E} \sup_{\mu\in M} L(x,\mu) = \sup_{\mu\in M} L(x^*,\mu) = L(x^*,\lambda) = \inf_{x\in E} L(x,\lambda) = \sup_{\mu\in M} \inf_{x\in E} L(x,\mu)\ . \tag{A.7}$$

A.4 Lagrangien

Le Lagrangien associé au problème (P) est la fonction de $E \times R_+^m \longrightarrow R$ définie par

$$L(x,\mu) = f(x) + \sum_1^m \mu_i \varphi_i(x)\ . \tag{A.8}$$

A.5 Point-selle du Lagrangien et solution du problème (P)

Si $(x^*, \lambda) \in E \times R_+^m$ est un point-selle du Lagrangien du problème (P), alors $x^* \in K$ et x^* est solution de (P).
Si les fonctions f et φ_i sont convexes, dérivables en $x^* \in K$, si les contraintes sont qualifiées, si x^* est solution de (P), alors il existe au moins un $\lambda \in R_+^m$ tel que $(x^*, \lambda) \in E \times R_+^m$ soit un point-selle de L.

A.6 Problème dual du problème (P)

1. On suppose que les φ_i sont continues et que pour tout $\mu \in R_+^m$ le problème

$$(P_\mu) \left\{ \begin{array}{c} L(x_\mu,\mu) = \inf_{x\in E} L(x,\mu) \\ x_\mu \in E \end{array} \right. \tag{A.9}$$

a une solution et une seule x_μ qui dépend continûment de μ.
Alors si λ est solution du problème

$$(Q)\left\{\begin{array}{c} G(\lambda)=\sup_{\mu\geq 0} G(\mu) \\ \lambda\in R_+^m \end{array}\right. \tag{A.10}$$

avec

$$G(\mu)=\inf_{x\in E} L(x,\mu)=L(x_\mu,\mu), \tag{A.11}$$

la solution x_λ de (P_λ) est solution de (P).
(Q) s'appelle problème dual du problème primal (P), μ s'appelle variable duale de la variable primale x.
2. On suppose que (P) a au moins une solution x^*, que les fonctions f et φ_i sont convexes et dérivables en x^*, et que les contraintes sont qualifiées.
Alors le problème (Q) a au moins une solution.

A.7 Méthode d'Uzawa

On résout le problème (P) dont les contraintes sont

$$K=\{x\in E,\ \varphi_i(x)\leq 0\}, \tag{A.12}$$

à l'aide du problème dual dont les contraintes $\mu\in R_+^m$ sont plus simples.

A.7.1 Démarche

Partant de $\lambda_0\in R_+^m$ quelconque, on calcule une double suite (λ_k,x_k) de la façon suivante :

A.7.2 Calcul de λ_{k+1}

λ_k et x_{k-1} étant calculés, on cherche λ_{k+1} comme approximation de la solution de (Q), en évaluant $\lambda_k+\rho\nabla G(\lambda_k)$, et en prenant la projection de cette valeur sur le domaine $\mu\geq 0$ (méthode du gradient projeté à pas fixe ρ).

A.7.3 Calcul de $\nabla G(\lambda_k)$

Lors de la démonstration du théorème précédent, on établit que G est dérivable et que :

$$\nabla G_\mu=(\varphi_i(x_\mu))_i\ . \tag{A.13}$$

Pour calculer $\nabla G(\lambda_k)$, on doit donc calculer au préalable x_{λ_k}. On posera $x_k=x_{\lambda_k}$. Ce point est obtenu par une méthode d'optimisation sans contrainte comme solution de

$$f(x_k)+\sum\lambda_{ki}\varphi_i(x_k)=\inf_{x\in E}(f(x)+\sum\lambda_{ki}\varphi_i(x))\ . \tag{A.14}$$

Si tout se passe bien la suite $((\lambda_k,x_k))_k$ converge vers un point-selle de L, (x^*,λ), x^* étant la solution de (P).

A.7.4 Condition suffisante de convergence de la méthode d'Uzawa

On suppose que $f : E \longrightarrow R$ est elliptique et que α est son coefficient d'ellipticité. On suppose que K non vide est défini par des contraintes inégalités affines

$$K = \{x \in E,\ Cx \leq d\}\ , \tag{A.15}$$

et alors si

$$0 < \rho < \frac{2\alpha}{\|C\|^2}\ , \tag{A.16}$$

la suite (x_k) de la méthode d'Uzawa converge vers l'unique solution de (P).
En plus, si le rang de C est m, la suite (λ_k) converge également vers l'unique solution du problème dual (Q).

Annexe B

Le Fast Marching

Considérons une situation d'évacuation normale i.e. que chaque individu désire sortir tranquillement d'une pièce contenant des obstacles. Nous supposons alors que les individus choisissent le chemin le plus court pour atteindre la sortie. Pour définir la direction souhaitée pour chaque individu, on crée un champ de direction souhaitée. Pour cela, pour l'espace donné, on définit la distance géodésique $D(x)$ entre la position x et la sortie. La méthode de Fast Marching, introduite par R. Kimmel et J.A. Sethian [134], permet de calculer les lignes de niveau de la distance géodésique dans une pièce : la direction souhaitée pour l'individu dont le centre (un individu est représenté par un disque) se situe à la position x sera $-\nabla D(x)$.

Description de la méthode

L'objectif est de calculer numériquement $D(x)$, distance minimale entre un point x de l'espace et la sortie. Cette distance vérifie l'équation stationnaire : $|\nabla D(x)| = 1$.

On se place en dimension 2 sur un maillage cartésien de pas h (le pas est identique selon l'axe x ou y) (Figure B.1), l'équation discrétisée à vérifier est :

$$\max\left(\frac{D_{i,j}-D_{i-1,j}}{h},-\frac{D_{i+1,j}-D_{i,j}}{h},0\right)^2+\max\left(\frac{D_{i,j}-D_{i,j-1}}{h},-\frac{D_{i,j+1}-D_{i,j}}{h},0\right)^2=1\ .$$

Pour résoudre l'équation précédente, on utilise une méthode de Fast Marching qui est une méthode à "passage unique". Contrairement aux méthodes itératives (très longues), ces méthodes ne nécessitent pas de critère d'arrêt mais ont besoin d'une structure permettant le tri d'une pile de données. On va ainsi calculer les $D_{i,j}$ en ordre croissant.

Pour cela, les noeuds du maillage $x_{i,j}$ sont répartis en trois régions :
- la zone "noire", constituée des noeuds où D est déjà fixée.
- la zone "rouge", constituée des noeuds où D a déjà été déterminée mais pas fixée.
- la zone "verte", constituée des noeuds où D n'a pas encore été déterminée.

En résumé, nous avons la zone "noire" séparée de la zone "verte" par la zone "rouge" (exemple de l'avancée d'un feu de forêt) (Figure B.2).

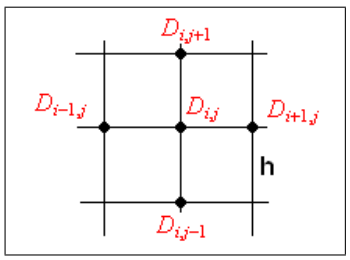


FIGURE B.1 – Maillage.

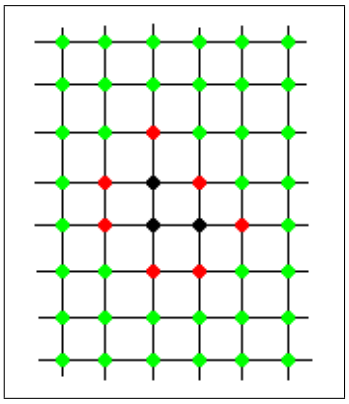


FIGURE B.2 – zones "noire", "rouge" et "verte".

Algorithme

L'algorithme de la méthode de Fast Marching est le suivant [149] :

Initialisation :
- Espace d'évolution des piétons, tous les noeuds sont dans la zone "verte".
- On définit les noeuds composant la sortie de notre espace d'évolution des piétons, ils sont placés dans la zone "noire". D est initialisé à 0 sur ces noeuds.
- On définit les noeuds voisins de la zone "noire". Ces noeuds sont placés dans la zone "rouge" et tous les autres noeuds restent dans la zone "verte". On initialise D pour les noeuds de la zone "rouge" avec les formules :

$$\frac{D_{i,j}^2}{h^2} = 1, \quad \frac{D_{i,j}^2}{h^2} = 1 \quad \text{où} \quad \frac{D_{i,j}^2}{h^2} + \frac{D_{i,j}^2}{h^2} = 1$$

On initialise D pour les noeuds de la zone "verte" à $+\infty$.

Boucle :
- On cherche le noeud de la zone "rouge" ayant la plus petite valeur de D. Ce noeud passe dans la zone "noire". On redéfinit la zone "rouge" en la complétant avec les voisins du nouveau noeud "noir".
- On recalcule la valeur de D sur les noeuds voisins du nouveau noeud "noir" en résolvant la discrétisation de l'équation stationnaire.

Implémentation numérique de la méthode

Pour utiliser cette méthode, nous introduisons :

- un tableau $D(i,j)$ contenant les valeurs $D_{i,j}$ aux noeuds $x_{i,j}$.

- un tableau $TAB(i,j)$ indiquant la nature du noeud $x_{i,j}$: $TAB(i,j) = 1$ si le noeud est dans la zone "noir", $TAB(i,j) = -1$ si le noeud est dans la zone rouge et $TAB(i,j) = 0$ pour les noeuds de la zone "verte".
- un tableau $Pile(i,j,D(i,j))$ contenant les noeuds de la zone "rouge". Un algorithme de tri par tas (heapsort) est utilisé pour classer les lignes de $Pile$ selon les valeurs croissantes de la troisième colonne.
- un tableau $Pile_test(i,j)$ contenant les indices des noeuds voisins d'un nouveau noeud "noir". S'il ne sont pas déjà dans la zone "noir", ces noeuds seront ajoutés à la zone "rouge" (s'ils ne sont pas déjà dedans) et donc au tableau $Pile(i,j,D(i,j))$ et les valeurs de $D(i,j)$ seront calculées (ou recalculées).

Nous rappelons l'équation discrétisée à vérifier :

$$\max\left(\frac{D_{i,j}-D_{i-1,j}}{h}, -\frac{D_{i+1,j}-D_{i,j}}{h}, 0\right)^2 + \max\left(\frac{D_{i,j}-D_{i,j-1}}{h}, -\frac{D_{i,j+1}-D_{i,j}}{h}, 0\right)^2 = 1 \ .$$

Les valeurs $(t_1,t_2) = (D_{i-1,j}\ ,\ D_{i+1,j})$ et $(t_3,t_4) = (D_{i,j-1}\ ,\ D_{i,j+1})$ étant fixées, pour mettre à jour le noeud $D_{i,j}$ de la zone "rouge" à chaque itération on doit trouver θ solution de :

$$\max\left(\frac{\theta-t_1}{h}, -\frac{t_2-\theta}{h}, 0\right)^2 + \max\left(\frac{\theta-t_3}{h}, -\frac{t_4-\theta}{h}, 0\right)^2 = 1 \ ,$$

soit

$$\frac{1}{h^2}\left(\theta - \min\left(t_1,t_2,\theta\right)\right)^2 + \frac{1}{h^2}\left(\theta - \min\left(t_3,t_4,\theta\right)\right)^2 = 1 \ .$$

En posant $v_1 = \min(t_1,t_2)$ et $v_2 = \min(t_3,t_4)$, l'équation devient

$$\frac{1}{h^2}\left(\theta - \min\left(v_1,\theta\right)\right)^2 + \frac{1}{h^2}\left(\theta - \min\left(v_2,\theta\right)\right)^2 = 1 \ .$$

Deux cas se présentent pour résoudre cette équation :

- soit $\theta > v_1$ et $\theta > v_2$, on doit alors résoudre le polynôme :

$$\frac{1}{h^2}\left(\theta - v_1\right)^2 + \frac{1}{h^2}\left(\theta - v_2\right)^2 = 1 \ .$$

  La plus grande des deux racines du polynôme est donnée par :

$$\theta = \frac{v_1 + v_2 + \sqrt{2h^2 - (v_1 - v_2)}}{2}$$

  et elle vérifie les contraintes $\theta > v_1$ et $\theta > v_2$ sous la condition :

$$|v_1 - v_2| < h \ .$$

- soit $\min(v_1,v_2) < \theta \leq \max(v_1,v_2)$, on doit alors résoudre le polynôme :

$$\frac{1}{h^2}\left(\theta - \min\left(v_1,v_2\right)\right)^2 = 1 \ .$$

  Ceci nous donne

$$\theta = \min(v_1,v_2) + h$$

  et les contraintes $\min(v_1,v_2) < \theta \leq \max(v_1,v_2)$ sont vérifiées sous la condition :

$$|v_1 - v_2| \geq h \ .$$

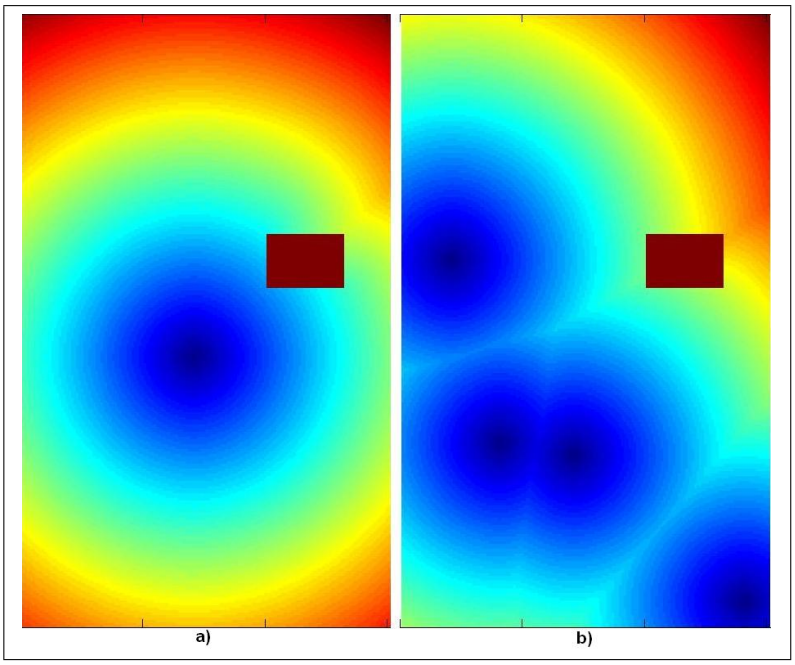


FIGURE B.3 – Exemples de distances géodésiques entre les points d'un lieu considéré et le(s) point(s) de sortie (point(s) bleu(s) foncé(s)) de ce lieu. Quand $D(x)$ augmente, la couleur tend vers le rouge ; a) une seule sortie, un obstacle (rectangle marron) ; b) quatre sorties, un obstacle (rectangle marron).

Une fois $D(x)$ déterminée (e.g. Figure B.3) sur l'espace d'évolution des piétons, la vitesse souhaitée du piéton i en position x_i à l'instant considéré est : $-v_i \nabla D(x_i)$ où v_i est l'allure souhaitée du piéton i.

Annexe C

Analyse convexe

Nous rappelons ici quelques concepts et résultats d'analyse convexe.

C.1 Fonctions convexes

C.1.1 Ensemble convexe

Soit X un espace vectoriel sur R. Un ensemble $C \subset X$ est appelé convexe si pour tout x et y de C et tout θ de $]0,1[$,

$$\theta x + (1-\theta)y \in C \ . \tag{C.1}$$

C.1.2 Fonction convexe

Une fonction f définie sur un ensemble C de X à valeurs dans $\overline{R} = R \cup \{+\infty\}$ est appelée une fonction convexe si pour tout x et y de C et tout θ de $]0,1[$,

$$f(\theta x + (1-\theta)y) \leq \theta f(x) + (1-\theta) f(y) \tag{C.2}$$

où l'addition et la multiplication dans R sont prolongés par

$$(+\infty) + (+\infty) = +\infty \tag{C.3}$$

$$\lambda(+\infty) = (+\infty) \ \text{ if } \ \lambda > 0 \ . \tag{C.4}$$

Nous appelons domaine de définition de f l'ensemble :

$$dom(f) = \{x \in C / f(x) \neq +\infty\} \ . \tag{C.5}$$

C.2 Sous différentiabilité

C.2.1 Espace vectoriel dual

Deux espaces vectoriels V et V^* sont en dualité si il existe une forme bilinéaire $\{\cdot,\cdot\}$ définie sur $V \times V^*$ tel que :

$$\begin{array}{l} \forall x \in V, \ \ x \neq 0, \ \ \exists y^* \in V^* \text{ tel que } \ \{x, y^*\} \neq 0 \ , \\ \forall y^* \in V^*, \ \ y^* \neq 0, \ \ \exists x \in V \text{ tel que } \ \{x, y^*\} \neq 0. \end{array} \tag{C.6}$$

C.2.2 Sous-gradient et sous-différentiel d'une fonction convexe

Soit V et V^* deux espaces vectoriels mis en dualité par une forme bilinéaire $\{\cdot,\cdot\}$. Une fonction convexe f de V dans $\overline{R}$ est sous-différentiable au point $x_0 \in V$ s'il existe $x^* \in V^*$ tel que pour tout $x \in V$

$$\{x - x_0, x^*\} + f(x_0) \leq f(x) \ . \tag{C.7}$$

x^* est un sous-gradient. L'ensemble des sous-gradients est le sous-différentiel $\partial f(x_0)$ (Figure C.1), et il est convexe et fermé sur V^*.

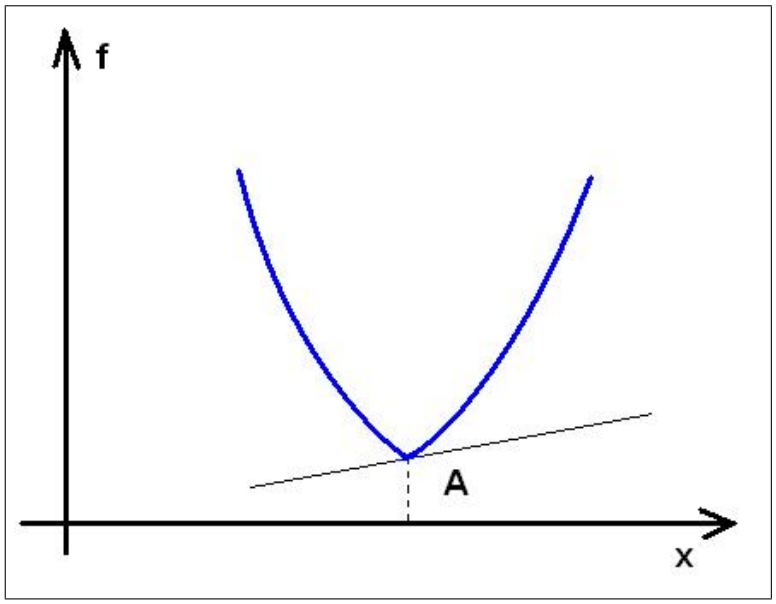


FIGURE C.1 – La fonction convexe f n'est pas dérivable au point A. Elle a des dérivées généralisées en ce point, qui sont les pentes des droites qui passent par A et sont sous la courbe représentant la fonction. Ces pentes sont les sous-gradients qui forment le sous-différentiel.

C.3 Pseudopotentiel de dissipation

C.3.1 Semi-continue inférieure

Une fonction convexe définie sur un espace de Banach X est appelée semi-continue inférieure, si pour tout réel r

$$\{x \in X / f(x) \leq r\} \ \text{ est fermé.} \tag{C.8}$$

C.3.2 Pseudopotentiel de dissipation

Ce concept a été défini par Moreau [128]. Un pseudopotentiel de dissipation est une fonction convexe, positive, semi-continue inférieure et nulle à l'origine.

Annexe D

Réécriture du problème de minimisation sous contrainte (Equation (2.28)) de $NSM2$

Soit L_{NSM2} le lagrangien associé au problème de minimisation sous contrainte (Equation (2.28)) :

$$L_{NSM2} = {}^t\dot{\underline{Y}}^{n+1}\underline{\underline{M}}\,\dot{\underline{Y}}^{n+1} + \Phi(\underline{q}^n, \underline{\Delta}(\dot{\underline{Y}}^{n+1})) - {}^t(2\dot{\underline{u}}^n(\theta_n) + \underline{\underline{M}}^{-1}\underline{p}^{ext}(\theta_n))\underline{\underline{M}}\,\dot{\underline{Y}}^{n+1} \ . \quad \text{(D.1)}$$

Nous savons que
${}^t\underline{\underline{M}} = \underline{\underline{M}}$,
$\underline{\underline{M}} = cte$,
${}^t\dot{\underline{u}}^n(\theta_n)\underline{\underline{M}}\,\dot{\underline{u}}^{n+1}(\theta_n) = {}^t\dot{\underline{u}}^{n+1}(\theta_n)\underline{\underline{M}}\,\dot{\underline{u}}^n(\theta_n)$,
$\dot{\underline{Y}}^{n+1} = \frac{\dot{\underline{u}}^{n+1}(\theta_n)+\dot{\underline{u}}^n(\theta_n)}{2}$,
$\|\underline{X}\|^2_{\underline{\underline{M}}} = {}^t\underline{X}\,\underline{\underline{M}}\,\underline{X}$.
Nous supposons que la rotation des particules est négligée.
Nous savons aussi que

$$\begin{aligned}\|\dot{\underline{Y}}^{n+1} & -\tfrac{1}{2}\left(2\dot{\underline{u}}^n(\theta_n) + \underline{\underline{M}}^{-1}\underline{p}^{ext}(\theta_n)\right)\|^2_{\underline{\underline{M}}} \\ &= {}^t\left[\dot{\underline{Y}}^{n+1} - \tfrac{1}{2}\left(2\dot{\underline{u}}^n(\theta_n) + \underline{\underline{M}}^{-1}\underline{p}^{ext}(\theta_n)\right)\right]\underline{\underline{M}}\left[\dot{\underline{Y}}^{n+1} - \tfrac{1}{2}\left(2\dot{\underline{u}}^n(\theta_n) + \underline{\underline{M}}^{-1}\underline{p}^{ext}(\theta_n)\right)\right] \\ &= {}^t\dot{\underline{Y}}^{n+1}\underline{\underline{M}}\,\dot{\underline{Y}}^{n+1} - {}^t\left(2\dot{\underline{u}}^n(\theta_n) + \underline{\underline{M}}^{-1}\underline{p}^{ext}(\theta_n)\right)\underline{\underline{M}}\dot{\underline{Y}}^{n+1}... \\ &+\tfrac{1}{4}\,{}^t\left(2\dot{\underline{u}}^n(\theta_n) + \underline{\underline{M}}^{-1}\underline{p}^{ext}(\theta_n)\right)\underline{\underline{M}}\left(2\dot{\underline{u}}^n(\theta_n) + \underline{\underline{M}}^{-1}\underline{p}^{ext}(\theta_n)\right) \ .\end{aligned} \quad \text{(D.2)}$$

Ainsi l'équation (D.1) devient

$$\begin{aligned}L_{NSM2} &= \|\dot{\underline{Y}}^{n+1} - \tfrac{1}{2}\left(2\dot{\underline{u}}^n(\theta_n) + \underline{\underline{M}}^{-1}\underline{p}^{ext}(\theta_n)\right)\|^2_{\underline{\underline{M}}} + \Phi^d(\underline{q}^n, \underline{\Delta}(\dot{\underline{Y}}^{n+1})) + \Phi^r(\underline{q}^n, \underline{\Delta}(\dot{\underline{Y}}^{n+1}))... \\ &-\tfrac{1}{4}\,{}^t\left(2\dot{\underline{u}}^n(\theta_n) + \underline{\underline{M}}^{-1}\underline{p}^{ext}(\theta_n)\right)\underline{\underline{M}}\left(2\dot{\underline{u}}^n(\theta_n) + \underline{\underline{M}}^{-1}\underline{p}^{ext}(\theta_n)\right) \ .\end{aligned} \quad \text{(D.3)}$$

Trouver le minimum de L_{NSM2} est équivalent de minimiser

$$\begin{aligned}L'_{NSM2} &= \|\dot{\underline{Y}}^{n+1} - \tfrac{1}{2}\left(2\dot{\underline{u}}^n(\theta_n) + \underline{\underline{M}}^{-1}\underline{p}^{ext}(\theta_n)\right)\|^2_{\underline{\underline{M}}} + \Phi^d(\underline{q}^n, \underline{\Delta}(\dot{\underline{Y}}^{n+1}))... \\ &+ \sum_{1\le i<j\le N}\mu_{ij}^{n+1}\left[-\left({}^t\dot{\underline{Y}}_i^{n+1} - {}^t\dot{\underline{Y}}_j^{n+1}\right)\underline{e}_{ji}^n + \left(\frac{{}^t\dot{\underline{u}}_i^n(\theta_n)}{2} - \frac{{}^t\dot{\underline{u}}_j^n(\theta_n)}{2}\right)\underline{e}_{ji}^n\right]\end{aligned} \quad \text{(D.4)}$$

car $-\frac{1}{4}\ {}^t\left(2\underline{\dot{u}}^n(\theta_n)+\underline{\underline{M}}^{-1}\underline{p}^{ext}(\theta_n)\right)\underline{\underline{M}}\left(2\underline{\dot{u}}^n(\theta_n)+\underline{\underline{M}}^{-1}\underline{p}^{ext}(\theta_n)\right)$ est connu.
On peut noter

$$\|\underline{\dot{Y}}^{n+1}\ -\frac{1}{2}\left(2\underline{\dot{u}}^n(\theta_n)+\underline{\underline{M}}^{-1}\underline{p}^{ext}(\theta_n)\right)\|^2_{\underline{\underline{M}}}=\frac{1}{4}\|\underline{\dot{u}}^{n+1}(\theta_n)-\left(\underline{\dot{u}}^n(\theta_n)+\underline{\underline{M}}^{-1}\underline{p}^{ext}(\theta_n)\right)\|^2_{\underline{\underline{M}}}\ . \tag{D.5}$$

D'après la définition de ${}^t\underline{\underline{G}}_{ij}(\underline{q})$ (Equation (2.6))

$$-\left({}^t\underline{\dot{Y}}_i^{n+1}-\ {}^t\underline{\dot{Y}}_j^{n+1}\right)\underline{e}^n_{ji}+\left(\frac{{}^t\underline{\dot{u}}_i^n(\theta_n)}{2}-\frac{{}^t\underline{\dot{u}}_j^n(\theta_n)}{2}\right)\underline{e}^n_{ji}=-\ {}^t\underline{\underline{G}}_{ij}(\underline{q}^n)\frac{\underline{\dot{u}}^{n+1}(\theta_n)}{2}\ , \tag{D.6}$$

et

$${}^t\underline{\Delta}_{ij}(\underline{\dot{Y}}^{n+1})\underline{e}^n_{ji}=\ {}^t\underline{\underline{G}}_{ij}(\underline{q}^n)\underline{\dot{Y}}^{n+1}\ . \tag{D.7}$$

Soit $\underline{\underline{G}}^n$ la matrice de taille $N_{contact}\times 2N$ où chaque ligne contient un vecteur ${}^t\underline{\underline{G}}_{ij}(\underline{q}^n)$. $N_{contact}$ est le nombre de contacts détectés à chaque instant. Ainsi, on a

$$\begin{aligned}\Phi^d(\underline{q}^n,\underline{\Delta}(\underline{\dot{Y}}^{n+1}))\ &=\sum_{1\le i<j\le N}\frac{1}{2}K_N\left({}^t\underline{\Delta}_{ij}(\underline{\dot{Y}}^{n+1})\underline{e}^n_{ji}\right)^2\\ &=\frac{1}{2}K_N\ {}^t\underline{\dot{Y}}^{n+1}\ {}^t\underline{\underline{G}}^n\underline{\underline{G}}^n\underline{\dot{Y}}^{n+1}\\ &=\frac{1}{2}K_N\frac{{}^t\underline{\dot{u}}^{n+1}+\ {}^t\underline{\dot{u}}^n}{2}\ {}^t\underline{\underline{G}}^n\underline{\underline{G}}^n\frac{\underline{\dot{u}}^{n+1}+\underline{\dot{u}}^n}{2}\\ &=\frac{1}{8}K_N\left[\ {}^t\underline{\dot{u}}^{n+1}\ {}^t\underline{\underline{G}}^n\underline{\underline{G}}^n\underline{\dot{u}}^{n+1}+2\ {}^t\underline{\dot{u}}^{n+1}\ {}^t\underline{\underline{G}}^n\underline{\underline{G}}^n\underline{\dot{u}}^n+\ {}^t\underline{\dot{u}}^n\ {}^t\underline{\underline{G}}^n\underline{\underline{G}}^n\underline{\dot{u}}^n\right]\ .\end{aligned} \tag{D.8}$$

Soit $\underline{\mu}^{n+1}$ le vecteur de taille $N_{contact}\times 1$ où chaque ligne contient un multiplicateur de Lagrange μ^{n+1}_{ij}. Ainsi, on a

$$\begin{aligned}\Phi^r(\underline{q}^n,\underline{\Delta}(\underline{\dot{Y}}^{n+1}))\ &=\sum_{1\le i<j\le N}\mu^{n+1}_{ij}\left[-\ {}^t\underline{\Delta}_{ij}(\underline{\dot{Y}}^{n+1})\underline{e}^n_{ji}+\ {}^t\underline{\Delta}_{ij}(\frac{\underline{\dot{u}}^n(\theta^n)}{2})\underline{e}^n_{ji}\right]\\ &=-\frac{1}{2}\sum_{1\le i<j\le N}\mu^{n+1}_{ij}\ {}^t\underline{\underline{G}}_{ij}(\underline{q}^n)\underline{\dot{u}}^{n+1}(\theta_n)\\ &=-\frac{1}{2}\ {}^t\underline{\mu}^{n+1}\underline{\underline{G}}^n\underline{\dot{u}}^{n+1}(\theta_n)\ .\end{aligned} \tag{D.9}$$

${}^t\underline{\dot{u}}^n\ {}^t\underline{\underline{G}}^n\underline{\underline{G}}^n\underline{\dot{u}}^n$ étant connu, le problème de minimisation sous contrainte peut alors être écrit sous la forme

$$\begin{aligned}\underline{\dot{u}}^{n+1}=\ \underset{\underline{\dot{v}}^{n+1}\in R^{2N}}{\arg\min}\ &\left[\frac{1}{2}\|\underline{\dot{v}}^{n+1}(\theta_n)-\left(\underline{\dot{u}}^n(\theta_n)+\underline{\underline{M}}^{-1}\underline{p}^{ext}(\theta_n)\right)\|^2_{\underline{\underline{M}}}\right.\\ &\left.+\frac{1}{4}K_N\ {}^t\underline{\dot{v}}^{n+1}(\theta_n)\ {}^t\underline{\underline{G}}^n\underline{\underline{G}}^n\left(\underline{\dot{v}}^{n+1}(\theta_n)+2\underline{\dot{u}}^n(\theta_n)\right)-\ {}^t\underline{\mu}^{n+1}\underline{\underline{G}}^n\underline{\dot{v}}^{n+1}(\theta_n)\right]\ .\end{aligned} \tag{D.10}$$

Les expressions de $\underline{\dot{u}}^{n+1}$ et de $\underline{\mu}^{n+1}$ sont liées par :

$$\left[\underline{\underline{M}}+\frac{1}{2}K_N\ {}^t\underline{\underline{G}}^n\underline{\underline{G}}^n\right]\underline{\dot{u}}^{n+1}(\theta^n)=\left[\underline{\underline{M}}-\frac{1}{2}K_N\ {}^t\underline{\underline{G}}^n\underline{\underline{G}}^n\right]\underline{\dot{u}}^n(\theta^n)+\underline{p}^{ext}(\theta^n)+\ {}^t\underline{\underline{G}}^n\underline{\mu}^{n+1}\ . \tag{D.11}$$

Bibliographie

[1] R.W. Clough and J. Penzien. Dynamics of structures, 1975.

[2] D. Helbing, I. Farkas, and T. Vicsek. Simulating dynamic features of escape panic. *Nature*, 407 :487–490, 2000.

[3] G. Keith Still. *Crowd Dynamics.* PhD thesis, University of Warwick, Department of Mathematics, 2000.

[4] D. Helbing. Traffic and related self-driven many-particle systems. *Reviews of Modern Physics*, 73 :1067–1141, 2002.

[5] P. Pécol, S. Dal Pont, S. Erlicher, and P. Argoul. Discrete approaches for crowd movement modelling. *European Journal of Computational Mechanics*, 20(1-4) :189–206, 2011.

[6] C. Reynolds. Flocks, herds, and schools : a distributed behavioral model. *Computer Graphics*, 21 :25–34, 1987.

[7] D. Helbing and P. Molnár. Social force model for pedestrian dynamics. *Physical Review E*, 51(5) :4282–4286, 1995.

[8] W-G. Song, Y-F. Yu, B-H. Wang, and W-C. Fan. Evacuation behaviors at exit in ca model with force essentials : a comparison with social force model. *Physica A*, 371 :658–666, 2006.

[9] Th. Robin, G. Antonini, M. Bierlaire, and J. Cruz. Specification, estimation and validation of a pedestrian walking behavior model. *Transportation Research Part B*, 2008.

[10] J. Venel. *Modélisation mathématique des mouvements de foule.* PhD thesis, Laboratoire de Mathématiques, Université Paris XI, Orsay, France, 2008.

[11] Y. Matsumoto, S. Sato, T. Nishioka, and H. Shiojiri. A study on design of pedestrian over-bridges. *Transactions of JSCE*, 4 :50–51, 1972.

[12] T.P. Andriacchi, J.A. Ogle, and J.O. Galante. Walking speed as a basis for normal and abnormal gait measurements. *Journal of Biomechanics*, 10, 1977.

[13] S. Živanovič, A. Pavič, and P. Reynolds. Vibration serviceability of footbridges under human-induced excitation : a litterature review. *Journal of Sound and Vibration*, 279, 2005.

[14] J.E. Wheeler. Prediction and control of pedestrian induced vibration in footbriges. *ASCE Journal of the Structural Division*, 108(ST9), 1982.

[15] M. Garcia. *Stability, scaling, and chaos in passive-dynamic gait models.* PhD thesis, Cornell University, 1999.

[16] T. Narukawa, K. Yokoyama, M. Takahashi, and K. Yoshida. An experimental study of three-dimensional passive dynamic walking with flat feet and ankle springs. *Cutting Edge Robotics 2010, Vedran Kordic (Ed.)*, 2010.

[17] A.A. Zadpoor, A.A. Nikooyan, and A.R Arshi. A model-based parametric study of impact force during running. *Journal of Biomechanics*, 40, 2007.

[18] Q.H. Ly, A. Alaoui, and S. Erlicher L. Baly. Influence of shoe midsoles dynamic properties and of the ground stiffness on the impact force during running. *Journal of Biomechanics*. sounmis.

[19] S. Erlicher. Modèles non linéaires et leur identification dans le génie civil et sismique. *Mémoire d'Habilitation, Université Paris-Est, Marne-la-Vallé, France*, 2009.

[20] C. Wassgren. Dem modeling : Lecture 11 coarse contact detection. *Cours, Purdue University 1*.

[21] B. Muth, M.K. Müller, P. Eberhard, and S. Luding. Collision detection and administration methods for many particles with different sizes. *Preprint submitted to Elsevier Science*, 2007.

[22] H. Singh, R. Arter, L. Dodd, and J. Drury. Modelling subgroup behavior in crowd dynamics dem simulation. *Applied Mathematical Modelling*, 33 :4408–4423, 2009.

[23] M. Moussaïd, N. Perozo, S. Garnier, D. Helbing, and G. Theraulaz. The walking behaviour of pedestrian social groups and its impact on crowd dynamics. *PLoS ONE*, 5(4), 2010. e10047. doi :10.1371/journal.pone.0010047.

[24] J.J. Fruin. Designing for pedestrians : a level of service concept. *Highway Research Record*, pages 1–15, 1971.

[25] A.D. Pizzimenti and R. Ricciardelli. Experimental evaluation of the dynamic lateral loading of footbridges by walking pedestrians. *Eurodyn*, 2005.

[26] J. Bodgi, S. Erlicher, and P. Argoul. Pedestrian - footbridge synchronization : analytical study of a macroscopic model.

[27] J.S. Milazzo, N.M. Rouphail, J.E. Hummer, and D.P. Allen. The effect of pedestrians on the capacity of signalized intersections. *Transportation Research Record : Journal of the Transportation Research Board*, 1646 :37–46, 1998.

[28] N. Bellomo, V. Coscia, and M. Delitala. On the mathematical theory of vehicular traffic flow i. fluid dynamic and kinetic modelling. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 12(12) :1801–1843, 2002.

[29] R.L. Hughes. A continuum theory for the flow of pedestrians. *Transportation Research Part B : Methodological*, 36 :507–535, 2002.

[30] R.L. Hughes. The flow of human crowds. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 35 :169–182, 2003.

[31] J. Bodgi. *Synchronisation piétons-structure : Application aux vibrations des passerelles souples*. PhD thesis, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 2008.

[32] B. Piccoli and A. Tosin. Pedestrian flows in bounded domains with obstacles. *Continuum Mech. Thermodyn.*, 21 :85–107, 2009.

[33] B. Piccoli and A. Tosin. Time-evolving measures and macroscopic modeling of pedestrian flow. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 199 :707–738, 2011.

[34] V. Blue and J. Adler. Cellular automata microsimulation of bi-directional pedestrian flows. *Journal of the Transportation Research Board*, 1678 :135–141, 2000.

[35] G. Antonini, S. Venegas, J-P. Thiran, and M. Bierlaire. A discrete choice pedestrian behavior model for pedestrian detection in visual tracking systems. In *Proceedings of the Advanced Concepts for Intelligent Vision Systems*, Belgium, Brussels, 2004.

[36] The Cabinet Office. *Understanding Crowd Behaviours.* Emergency Planning College, University of Leeds, 2009.

[37] S. Paris. *Characterisation of levels of services and modelling of flows of people inside exchange areas.* PhD thesis, Université de Rennes 1, 2007.

[38] L.F. Henderson. The statistics of crowd fluids. *Nature*, 229 :381–383, 1971.

[39] W. Daamen. *Modelling passenger flows in public transport facilities.* PhD thesis, Technische Universiteit Delft, 2004.

[40] U. Weidmann. *Transporttechnik der Fussgänger.* ETH-Zürich, Schriftenreihe IVT-Berichte 90, 1993.

[41] M. Fuckamachi and T. Nagatani. Sidle effect on pedestrian counter flow. *Physica A*, 377 :269–278, 2007.

[42] S. Reicher. The st. pauls riot an explanation of the limits of crowd action in terms of asocial identity model. *EUR. J. SOCIAL PSYCHOL.*, 14 :1–21, 1984.

[43] H. Timmermans, X. Vanderhagen, and A. Borgers. Transportation systems, retail environments and pedestrian trip chaining behaviour : Modelling issues and applications. *Transportation Research Part B*, 26, 1992.

[44] S.P. Hoogendoorn. Walker behaviour modelling by differential games. In *Proc. of the Computational Physics of Transport and Interface Dynamics Seminar. Springer*, 2002.

[45] L. Bruno and F. Venuti. Crowd-structure interaction in footbridges : modelling, application to a real case-study and sensitivity analyses. *Journal of Sound and Vibration*, 323 :475–493, 2009.

[46] C. Reynolds. Steering behaviors for autonomous characters. *Game Developers Conference*, pages 763–782, 1999.

[47] D.Helbing, I.Farkas, P.Molnár, and T.Vicsek. Simulation of pedestrians crowds in normal and evacuation situations. *M. Schreckenberg and S.Deo Sarma (Eds.), Pedestrian and evacuation dynamics*, pages 21–58, 2002.

[48] M. Apel. *Simulation of pedestrian flows based on the Social Force Model using the Verlet Link Cell Algorithm.* PhD thesis, Poznan University of Technology, 2004.

[49] D.R. Parisi and C.O. Dorso. Microscopic dynamics of pedestrian evacuation. *Physica A*, 354 :606–618, 2005.

[50] T.I Lakoba and N.M. Finkelstein. Modifications of the helbing-molnár-farkas-vicsek social force model for pedestrian evolution. *SIMULATION*, 81(5) :339–352, 2005.

[51] D.R. Parisi and C.O. Dorso. Morphological and dynamical aspects of the room evacuation process. *Physica A*, 385 :343–355, 2007.

[52] D.R. Parisi, M. Gilman, and H. Moldovan. A modification of the social force model can reproduce experimental data of pedestrian flows in normal conditions. *Physica A*, 388 :3600–3608, 2009.

[53] N. Pelechano, J.M. Addler, and N.I. Badler. Controlling individual agents in high-density crowd simulation. In *Proc. of the 2007 ACM SIGGRAPH/ Eurographics Symposium on Computer Animation*, pages 99–108, 2007.

[54] P.A. Cundall. A computer model for simulating progressive large scale movements of blocky rock systems. In *Proc. of the symposium of the international society of rock mechanics*, volume 1, pages 132–150, 1971.

[55] A. Kirchner, H. Klüpfel, K. Nishinari, A. Schadschneider, and M. Schreckenberg. Simulation of competitive egress behavior : comparison with aircraft evacuation data. *Physica A*, 324 :689–697, 2003.

[56] H. Klüpfel. *A Cellular Automaton Model for Crowd Movement and Egress Simulation.* PhD thesis, Universitat Duisburg - Essen, 2003.

[57] D. Zhao, L. Yang, and J. Li. Exit dynamics of occupant evacuation in an emergency. *Physica A*, 363 :501–511, 2006.

[58] K. Yamamoto, S. Kokubo, and K. Nishinari. Simulation for pedestrian dynamics by real-coded cellular automata (rca). *Physica A*, 379 :654–660, 2007.

[59] H. Yue, H. Hao, X. Chen, and C. Shao. Simulation of pedestrian flow on square lattice based on cellular automata model. *Physica A*, 384 :567–588, 2007.

[60] G. Antonini, M. Bierlaire, and M. Weber. Simulation of pedestrian behavior using a discrete choice model calibrated on actual motion data. In *Proceedings of the 4th STRC Swiss Transport Research Conference*, Monte Verita, Ascona, Switzerland, 2004.

[61] G. Antonini. *A discrete choice modeling framework for pedestrian walking behavior with application to human tracking in video sequences.* PhD thesis, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, 2005.

[62] G. Antonini, M. Bierlaire, and M. Weber. Discrete choice models of pedestrian walking behavior. *Transportation Research Part B*, 40 :667–687, 2006.

[63] B. Maury. A time-stepping scheme for inelastic collisions. *Numerische Mathematik*, 102(4) :649–679, 2006.

[64] S. Živanovič, V. Racič, I. El-Bahnasy, and A. Pavič. Statistical characterisation of parameters defining human walking as observed on an indoor passerelle. In *In Experimental Vibration Analysis for Civil Engineering Structures, EVACES'07, Porto, Portugal*, 2007.

[65] J. Blanchard, B.L. Davies, and J.W. Smith. Design criteria and analysis for dynamic loading of footbridges. In *Procceedings of the DEO and DOT TRRL Symposium on Dynamic Behaviour of Bridges, Crowthorne, UK*, 1977.

[66] S.C. Kerr and N.W.M. Bishop. Human induced loading on exible staircases. *Engineering Structure*, 23 :37–45, 2001.

[67] D.R.Leonard. Human tolerence level for bridge vibrations. *TRRL Report, Road Research Laboratory*, 34, 1966.

[68] H. Bachmann, A.J. Pretlove, and H. Rainer. Dynamic forces from rythnical human body motions. *in. Vibration problems in structures : practical guidelines, Appendix G*, 1995.

[69] C. Sahnaci and M. Kasperski. Random loads induced by walking. *Eurodyn*, pages 441–446, 2005.

[70] P. Dallard, A.J. Fitzpatrick, A. Flint, A. Low, and R.M. Ridsdill-Smith. The millenium bridge london - problems and solutions. *The Structural Engineer*, 79(8), 2001.

[71] R. Cross. Standing, walking, running and jumping on a force plate. *American Journal of Physics*, 67(4) :304–309, 1999.

[72] F.C. Harper, W.J. Warlow, and B.L. Clarke. The forces applied to the oor by the foot in walking. *National Building Studies, Departement of Scientific and Industrial Research, Building Research Station, Research Paper*, 32, 1961.

[73] F.C. Harper. The mechanics of walking. *Research applied in Industry*, 15(1), 1962.

[74] F.W. Galbraith and M.V. Barton. Ground loading from footsteps. *Journal of Accoustic Society of America*, 48(5), 1970.

[75] S.C. Kerr. *Human induced loading on staircases.* PhD thesis, Mechanical Engineering Department, University College Londo, UK, 1998.

[76] S.V. Ohlsson. *Floor vibration and human disconfort.* PhD thesis, Chalmers University of Technology, Goteborg, Sweden, 1982.

[77] P. Charles, C. Delavaud, A. Hekimian, J. Renault, and T. Saez. *Dispositif d'essais sur un modèle de passerelle - rapport d'essais.* SETRA, 2005.

[78] P. Dallard, A.J. Fitzpatrick, A. Flint, S. Le Bourva, A. Low, R.M. Ridsdill-Smith, and M. Willford. The london millenium footbridge. *The Structural Engineer*, 79(22), 2001.

[79] H. Bachmann and W. Ammann. Vibrations in structures - induced by man and machines. *Structural Engineering Documents, International Association of Bridge and Structural Engineering (IABSE)*, (3), 1987.

[80] J.E. Wheeler. Pedestrian-induced vibrations in footbridges. *Proceedings of the 10th Australian Road Research Board (ARRB) Conference, Sydney, Australia*, 10(3), 1980.

[81] T. McGeer. Passive dynamic walking. *International Journal of Robotics Research*, 9, 1990.

[82] B.M. Nigg and W. Liu. The effect of the muscle stiffness and damping on simulated impact force peaks during running. *Journal of Biomechanics*, 32, 1999.

[83] J.M.W Brownjohn, A. Pavic, and P.Omenzetter. A spectral density approach for modelling continuous vertical forces on pedestrian structures due to walking. *Canadian Journal of Civil Engineer*, 31, 2004.

[84] M.R. Willford and P. Young. Improved methodologies for the prediction of footfall-induced vibration. *Eurodyn*, 2005.

[85] P. Young. Improved floor vibration methodologies. *In ARUP Vibration Seminar*, 2001.

[86] C. Seiler and S. HÄuttner. A uniform model for pedestrian induced loads for different types of motion-theory, experimental tests and practical application. *Eurodyn*, 2005.

[87] P. Eriksson. *Vibration of low-frequency floors - dynamic forces and response prediction.* PhD thesis, Chalmers University of Technology, 1994.

[88] S. Erlicher, A. Trovato, and P. Argoul. Modeling the lateral pedestrian force on a rigid floor by a self-sustained oscillator. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 24, 2010.

[89] A. Pikovsky, M. Rosenblum, and J.Kurths. Synchronization-a universal concept in nonlinear sciences. *Cambridge University Press*, 12, 2001.

[90] J.W. Smith. *The Vibration of Highway Bridges and the effect on Human Comfort.* PhD thesis, University of Bristol, UK, 1969.

[91] T. Kobori and Y. Kajikawa. Ergonomic evaluation methods for bridge vibrations. *Transactions of JSCE*, 6 :40–41, 1974.

[92] G.P. Tilly, D.W.Cullington, and R.Eyre. Dynamic behaviour of footbridges. *IABSE Surveys S-26/84, IABSE Periodica*, 2(84) :13–24, 1984.

[93] SETRA/AFGC. *Guide méthodologique : Passerelles piétonnes - évaluation du comportement vibratoire sous l'action des piétons.* SETRA, 2006.

[94] S. Nakamura. Field measurements of lateral vibration on a pedestrian suspension bridge. *The Structural Engineer*, 81(22) :22–26, 2003.

[95] P.W. Chen and L.E. Robertson. Human perception tresholds of horizontal motion. *ASCE Journal of Structural Division*, 92(8) :1681–1695, 1972.

[96] B.R. Ellis and T. Ji. On the loads produced by crowds jumping on floors. In *Proc. of the Fourth International Conference on Structural Dynamics, Eurodyn, Munich, Germany*, pages 1203–1208, 2008.

[97] P.A. Cundall and O.D.L. Strack. A discrete numerical model for granular assemblies. *Geotechnique*, 29(1) :47–65, 1979.

[98] Y. Kishino. Disk model analysis of granular media. *Micromechanics of Granular Materials*, pages 143–152, 1988.

[99] M.P. Allen and D.J. Tildesley. *Computer simulation of liquids.* Oxford University Press, 1987.

[100] M. Jean and J.J. Moreau. Unilaterality and dry friction in the dynamics of rigid bodies collection. *Contact Mechanics International Symposium*, pages 31–48, 1992.

[101] J.J. Moreau. New computation methods in granular dynamics. *Thornton, editor, Powder & Grains*, pages 227–232, 1993.

[102] J.J. Moreau. Some numerical methods in multibody dynamics : Application to granular materials. *Eur.J.Mech.A/Solids*, 13 :93–114, 1994.

[103] M. Renouf. *Optimisation numérique et calcul parallele pour l'étude des milieux divisés bi- et tridimensionnels.* PhD thesis, Université Montpellier II - Sciences et Techniques du Languedoc -, 2004.

[104] G. Saussine, C. Cholet, P.E. Gautier, F. Dubois, C. Bohatier, and J.J. Moreau. Modelling ballast behaviour under dynamic loading. part 1 : a 2d polygonal discrete element method approach. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg*, 195 :2841–2859, 2006.

[105] M. Frémond. Rigid bodies collisions. *Physics Letters A*, 204 :33–41, 1995.

[106] M. Frémond. *Collisions.* Edizioni del Dipartimento di Ingegneria Civile dell' Universita di Roma Tor Vergata, 2007.

[107] S. Dal Pont and E. Dimnet. A theory for multiple collisions of rigid solids and numerical simulation of granular flow. *Int.J.Solids and Structures*, 43/20 :6100–6114, 2006.

[108] S. Dal Pont and E. Dimnet. Theoretical approach to instantaneous collisions and numerical simulation of granular media using the A-CD^2 method. *Communications in Applied Mathematics and Computational Science -Berkeley*, 3/1 :1–24, 2008.

[109] E. Dimnet. *Mouvement et collisions de solides rigides ou déformables.* PhD thesis, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 2002.

[110] G. de Saxcé and Z.Q. Feng. New inequation and functional for contact with friction : the implicit standard material approach. *Mech. Struct. and Mach.*, 19(3) :301–325, 1991.

[111] G. de Saxcé and Z.Q. Feng. The bipotential method : a constructive approach to design the complete contact law with friction and improved numerical algorithms. *Math. Comput.*, 28(4-8) :225–245, 1998.

[112] P. Pécol, S. Dal Pont, S. Erlicher, and P. Argoul. Modelling crowd-structure interaction. *Mécanique & Industries, EDP Sciences*, 11(6) :495–504, 2010.

[113] P. Pécol, S. Dal Pont, S. Erlicher, and P. Argoul. Smooth/non-smooth contact modelling of human crowds movement : numerical aspects and application to emergency evacuations. *Annals of Solid and Structural Mechanics*, 2(2-4) :69–85, 2011. DOI :10.1007/s12356-011-0019-3.

[114] P. Pécol, P. Argoul, S. Dal Pont, and S. Erlicher. The non smooth view for contact dynamics by michel frémond extended to the modelling of crowd movements. *AIMS' Journals*, 2011. accepted.

[115] H.C.J. Bruneel and I. De Rycke. Quicktrace : a fast algorithm to detect contact. *Int. J. Numer. Meth. Engng*, 54, 2002.

[116] Y.T. Feng, K. Han, and D.R.J. Owen. Filling domains with disks : An advancing front approach. *Int. J. Numer. Meth. Engng*, 56(5), 2003.

[117] C. Ericson. *Real Time Collision Detection.* Morgan Haufmann Publishers, 2004.

[118] N. Chrisochoides and D. Nave. Parallel delaunay mesh generation kernel. *Int. J. Numer. Meth. Engng*, 58, 2003.

[119] D.L.M. Tavares and J.L.D. Comba. Broad-phase collision detection using delaunay triangulation.

[120] J. Fortin and P. Coorevits. Selecting contact particles in dynamics franular mechanics systems. *In ACOMEN, Liège (Belgium), May 28-31*, 2002.

[121] A. Schinner. Fast algorithms for the simulations of polygonal particles. *Granular Matter*, 2(1), 1999.

[122] E. Perkins and J.R. Williams. A fast contact detection algorithm insensitive to object sizes. *Engineering Computations*, 18(1/2).

[123] J.J. Moreau. Décomposition orthogonale d'un espace hilbertien selon deux cones mutuellement polaires. *C. R. Acad. Sci, Ser. I*, 255 :238–240, 1962.

[124] F. Bernicot and A. Lefebvre-Lepot. Existence results for non-smooth second order differential inclusions, convergence result for a numerical scheme and application to the modelling of inelastic collisions. *Confluentes Mathematici*, 2 :445–471, 2010.

[125] B. Maury and J. Venel. A discrete contact model for crowd motion. *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 45 :145–168, 2011. doi :10.1051/m2an/2010035.

[126] J.J. Moreau. Unilateral contact and dry friction in finite freedom dynamics. In J.J. Moreau and eds. P.-D. Panagiotopoulos, editors, *Non Smooth Mechanics and Applications, CISM Courses and Lectures*, volume 302 (Springer-Verlag, Wien, New York), pages 1–82, 1988.

[127] C. Cholet. Collision d'un point et d'un plan. *Compte rendu de l'Académie des Sciences de Paris*, 328 :455–458, 1999.

[128] J.J. Moreau. Sur les lois du frottement, de la viscosité et de la plasticité. *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, 271 :608–611, 1970.

[129] C. Cholet. *Chocs de solides rigides*. PhD thesis, Université Paris VI, 1998.

[130] M. Jean. The non smooth contact dynamics method. *Compt. Methods Appl. Math. Engrg.*, 177 :235–257, 1999.

[131] P. Ciarlet. *Introduction to numerical linear algebra and optimisation*. Cambridge Univ. Press, 1989.

[132] J.C. Simo and T.J.R. Hughes. *Elastoplasticity and Viscoplasticity Computational Aspects*. Springer, Berlin, 1996.

[133] S.P. Hoogendoorn, P.H.L. Bovy, and W. Daamen. Microscopic pedestrian wayfinding and dynamics modelling. *Pedestrian and Evacuation Dynamics*, pages 123–154, 2001.

[134] R. Kimmel and J.A. Sethian. Fast marching methods for computing distance maps and shortest paths. *Technical Report 669, CPAM, University of California, Berkeley*, 1996.

[135] A. Seyfried, B. Steffen, and T. Lippert. Basics of modelling the pedestrian flow. *Physica A*, 368 :232–238, 2006.

[136] F. Caselli and M. Frémond. Collision of three balls on a plane. *Computational Mechanics*, 43(6), 2008.

[137] S. Strogatz, D. Abrams, A. McRobie, B. Eckhardt, and E. Ott. Theoretical mechanics : Crowd synchrony on the millennium bridge (and supplementary information). *Nature*, 438, 2005.

[138] T.M. Roberts. Synchronised pedestrian lateral excitation of footbridges. *Eurodyn*, 2005.

[139] D.E. Newland. Vibration of the london millenium bridge : Cause and cure. *Int T Acoustics and Vibration*, 8(1).

[140] D.E. Newland. Pedestrian excitation of bridges. *Proc Instn Mech Engrs*, 218 Part C, 2003.

[141] T.M. Roberts. Lateral pedestrian excitation of footbridges. *Journal of bridge engineering*, 2005.

[142] D.M. Abrams. *Two coupled oscillator models : the millennium bridge and the chimera state*. PhD thesis, Cornell University, 2006.

[143] B. Eckhardt, E. Ott, S.H. Strogatz, D.M. Abrams, and A.McRobie. Modeling walker synchronization on the millennium bridge. *Physical Review E*, 75, 2007.

[144] J. Guckenheimer and P. Holmes. *Nonlinear oscillations, Dynamical systemes and Bifurcations of Vector Fields*. Applied Mathematical Sciences 42, Springer-Verlag, New-York, 1983.

[145] D. Helbing, L. Buzna, A. Johansson, and T. Werner. Self-organized pedestrian crowd dynamics : Experiments, simulations, and design solutions. *Transportation Science*, 39 :1–24, 2005.

[146] D. Helbing, M. Isobe, T. Nagatani, and K. Takimoto. Lattice gas simulation of experimentally studied evacuation dynamics. *Physical review E*, 67, 2003.

[147] P. Charles. Comportement dynamique des passerelles piétonnes-comportement latéral d'une foule de piétons.

[148] E. Caetano, *Á*. Cunha, F. Magalhães, and C. Moutinho. Studies for controlling human-induced vibration of the pedro e inês footbridge, portugal. part 1 : Assessment of dynamic behaviour. *Engineering Structures*, 32 :1069–1081, 2010.

[149] C. Chalons. La méthode fast-marching pour la propagation de fronts. *cours ENSTA*, 2009.

Productions scientifiques

Ce travail de thèse a fait l'objet de plusieurs publications :

Articles :

- P.Pécol, S. Dal Pont, S. Erlicher, P. Argoul. Modelling crowd-structure interaction, Mechanics & Industry, EDP Sciences, Vol. 11, n° 6, pp. 495-504, 2010.
- P.Pécol, S. Dal Pont, S. Erlicher, P. Argoul. Discrete approaches for crowd movement modelling, European Journal of Computational Mechanics, Vol. 20, n° 1-4, pp. 189-206, 2011.
- P.Pécol, S. Dal Pont, S. Erlicher, P. Argoul. Smooth/non-smooth contact modelling of human crowds movement : numerical aspects and application to emergency evacuations, Annals of Solid and Structural Mechanics, Vol. 2, n° 2-4, pp. 69-85, 2011, DOI :10.1007/s12356-011-0019-3.
- P.Pécol, P. Argoul , S. Dal Pont, S. Erlicher. The non-smooth view for contact dynamics by Michel Frémond extended to the modelling of crowd movements, AIMS' Journals, 2011, accepted

Conférences :

- P.Pécol, S. Dal Pont, S. Erlicher, P. Argoul. Modélisation du mouvement d'une foule sur une structure en vibration, 19ème Congrès Français de Mécanique, 24-28 août 2009, Marseille, France.
- P.Pécol, S. Dal Pont, S. Erlicher, P. Argoul. Interaction foule-structure, 2ème colloque francophone international de la Plate-Forme Intégratrice COPIE, 5-6 novembre 2009, Lyon-Ecully, France.
- P. Pécol, S. Erlicher, S. Dal Pont, P. Argoul. Modèles pour les assemblées de particules : application aux mouvements de foule, Premier Colloque International IMPACT'2010, 22-24 Mars 2010, Djerba, Tunisie.
- P.Pécol, S. Dal Pont, S. Erlicher, P. Argoul. Modelling crowd-structure interaction, XVIIth Symposium Vibrations Chocs et Bruit, 16-17 June 2010, Lyon, France.
- P.Pécol, S. Dal Pont, S. Erlicher, P. Argoul. Modélisation discrète des mouvements de foule. Application à l'interaction foule-structure, 10ème Colloque National en Calcul des Structures (CSMA 2011), 9-13 Mai 2011, Presqu'île de Giens, Var, France.
- P.Pécol, S. Dal Pont, S. Erlicher, J. Bodgi, P. Argoul. 2D discrete model for crowd-structure interaction, 4th International Conference, Footbridge 2011, July 6-8, Wroclaw, Pologne.
- P.Pécol, S. Dal Pont, S. Erlicher, P. Argoul. Discrete modeling of crowd movements and crowd-structure coupling, Comp.Meth.Coupled Problems in Science and Engineering, June 20-22, Kos, Greece.