Le système d'Euler de Kato

Shanwen Wang

THÈSE DE DOCTORAT

présentée par

ShanWen WANG

pour obtenir

le grade de : Docteur de l'École Polytechnique
Spécialité : MATHÉMATIQUES

Le système d'Euler de Kato

Thèse présentée le 21 décembre 2010 devant la commission d'examen :

M.	Denis Benois	Rapporteur
M.	Laurent Berger	Examinateur
M.	Pierre Colmez	Directeur de thèse
M.	Jean Lannes	Examinateur
M.	Alexei Pantchichkine	Examinateur

Autre rapporteur : M.Fabrizio Andreatta

Remerciements

Je voudrais exprimer toute ma gratitude à Pierre Colmez, mon directeur de thèse, qui m'a initié au monde p-adique. Pendant ces années de thèse, j'ai eu la chance de profiter de ses visions profondes, de ses immenses connaissances mathématiques et culturelles, et de ses idées enrichissantes. J'ai bien guidé à travers ses encouragements constants. Ses idées et suggestions ont rendu cette thèse plus riche, en contenu et en forme. Sans lui, cette thèse n'a jamais vu le jour.

Je remercie sincèrement Fabrizio Andreatta et Denis Benois pour avoir accepté de rapporter cette thèse. Je tiens à remercier Denis Benois, Laurent Berger, Alexei Pantchichkine et Jean Lannes pour avoir fait partie du jury.

Cette thèse a été effectuée au sein du Centre de Mathématiques Laurent Schwartz de l'École Polytechnique dont je voudrais remercier tous les membres et particulièrement les secrétaires et les informaticiens pour leur aide et leur accueil chaleureux. Je suis reconnaissant à Michèle Lavallette pour avoir trouvé le financement pour mes derniers mois de la préparation de cette thèse. Je voudrais exprimer ma gratitude à Jean Lannes qui m'a aidé la préparation de ma soutenance. Gaëtan Chenevier a toujours pris le temps de répondre à mes questions, je lui sais gré. Je tiens à remercier Gabriel Dospinescu pour ses remarques sur les mathématiques et le français.

Je suis venu en Europe via le master programme ALGANT grâce a M. Jean-Marc Fontaine. J'étais très heureux d'avoir la chance de suivre son cours et celui de Pierre à l'Université Tsinghua à Beijing. Je voudrais les remercier, ainsi que tous les professeurs que j'ai rencontrés à l'Université de Tsinghua ou pendant mon étude comme ALGANT-étudiant : Fabrizio Andreatta, Francesco Baldassarri, Philippe Cassou-Noguès, Bruno Chiarellotto, Boas Erez, FENG Keqin, Marco Andrea Garuti, Adrian Iovita, LIU Qing, OU yangyi, Francis Sullivan, WEN zhiying, YIN Linsheng...

Je remercie aussi Ma Xiaonan, qui est très gentil avec tous les étudiants chinois.

Merci à tous mes amis chinois pour leurs amitiés, en particulier, CHEN Ke, CHEN Miaofen, HU Yong, HU Ruoyun, HU Yongquan, JIANG Zhi, LIANG xiangyu, LIANG Yongqi, LU chengyuan, LU Huajun, MA Li, NIE xin, SHAN Peng, SHEN Shu, TAN Fucheng, TANG Shun, TIAN Yichao, TONG Jilong, WANG Haoran, WANG Minmin, WANG Chunhui, WU Han, XU Qinghui, Xu Wenqing, ZHAO Heer, ZHENG Weizhe, ZHOU Guodong.

Enfin, je remercie mes parents de m'avoir toujours encouragé à choisir ma voie.

Résumé

Cette thèse est consacrée au système d'Euler de Kato, construit à partir des unités modulaires, et à son image par l'application exponentielle duale (loi de réciprocité explicite de Kato). La présentation que nous en donnons est sensiblement différente de la présentation originelle de Kato.

Abstract

This thesis is devoted to Kato's Euler system, which is constructed from the modular unites, and to its image under the dual exponential map (Kato's explicite reciprocity law). The presentation given in this thesis is quite different from Kato's original presentation.

Table des matières

Chapitre 1

Notations et Introduction

1.1 Notations

On note $\overline{\mathbb{Q}}$ la clôture algébrique de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{C}$, et on fixe, pour tout nombre premier p, une clôture algébrique $\overline{\mathbb{Q}}_p$ de $\mathbb{Q}_p$, ainsi qu'un plongement de $\overline{\mathbb{Q}}$ dans $\overline{\mathbb{Q}}_p$.

Si $N \in \mathbb{N}$, on note ζ_N la racine N-ième $e^{2i\pi/N} \in \overline{\mathbb{Q}}$ de l'unité, et on note $\mathbb{Q}^{\mathrm{cycl}}$ l'extension cyclotomique de $\mathbb{Q}$, réunion des $\mathbb{Q}(\zeta_N)$, pour $N \geq 1$, ainsi que $\mathbb{Q}_p^{\mathrm{cycl}}$ l'extension cyclotomique de $\mathbb{Q}_p$, réunion de $\mathbb{Q}_p(\zeta_N)$, pour $N \geq 1$.

1.1.1 Objets adéliques

Soient $\mathcal{P}$ l'ensemble des premiers de $\mathbb{Z}$ et $\hat{\mathbb{Z}}$ le complété profini de $\mathbb{Z}$, alors $\hat{\mathbb{Z}} = \prod_{p\in\mathcal{P}} \mathbb{Z}_p$. Soit $\mathbb{Q} \otimes \hat{\mathbb{Z}}$ l'anneau des adèles de $\mathbb{Q}$ (le produit restreint des $\mathbb{Q}_p$ par rapport aux sous-anneaux $\mathbb{Z}_p$ de $\mathbb{Q}_p$). Quel que soit $x \in \mathbb{Q} \otimes \hat{\mathbb{Z}}$, on note x_p (resp. $x^{]p[}$) la composante de x en p (resp. en dehors de p). Notons $\hat{\mathbb{Z}}^{]p[} = \prod_{l\neq p} \mathbb{Z}_l$. On a donc $\hat{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}_p \times \hat{\mathbb{Z}}^{]p[}$. Cela induit les décompositions suivantes : pour tout $d \geq 1$,

$$\mathbf{M}_d(\mathbb{Q} \otimes \hat{\mathbb{Z}}) = \mathbf{M}_d(\mathbb{Q}_p) \times \mathbf{M}_d(\mathbb{Q} \otimes \hat{\mathbb{Z}}^{]p[}) \text{ et } \mathrm{GL}_d(\mathbb{Q} \otimes \hat{\mathbb{Z}}) = \mathrm{GL}_d(\mathbb{Q}_p) \times \mathrm{GL}_d(\mathbb{Q} \otimes \hat{\mathbb{Z}}^{]p[}).$$

On définit les sous-ensembles suivants de $\mathbb{Q} \otimes \hat{\mathbb{Z}}$ et $\mathbf{M}_2(\mathbb{Q} \otimes \hat{\mathbb{Z}})$:

$$\hat{\mathbb{Z}}^{(p)} = \mathbb{Z}_p^* \times \hat{\mathbb{Z}}^{]p[} \text{ et } \mathbf{M}_2(\hat{\mathbb{Z}})^{(p)} = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p) \times \mathbf{M}_2(\hat{\mathbb{Z}}^{]p[}),$$
$$(\mathbb{Q} \otimes \hat{\mathbb{Z}})^{(p)} = \mathbb{Z}_p^* \times (\mathbb{Q} \otimes \hat{\mathbb{Z}}^{]p[}) \text{ et } \mathbf{M}_2(\mathbb{Q} \otimes \hat{\mathbb{Z}})^{(p)} = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p) \times \mathbf{M}_2(\mathbb{Q} \otimes \hat{\mathbb{Z}}^{]p[}).$$

1.1.2 Actions de groupes

Soient X un espace topologique localement profini, V un $\mathbb{Z}$-module. On note $\mathrm{LC}_c(X, V)$ le module des fonctions localement constantes sur X à valeurs dans V dont le support est compact dans X. On note $\mathfrak{D}_{\mathrm{alg}}(X, V)$ l'ensemble des distributions algébriques sur X à valeurs dans V, c'est à dire des applications $\mathbb{Z}$-linéaires de $\mathrm{LC}_c(X, \mathbb{Z})$ à valeurs dans V. On note $\int_X \phi\mu$ la valeur de μ sur ϕ où $\mu \in \mathfrak{D}_{\mathrm{alg}}(X, V)$ et $\phi \in \mathrm{LC}_c(X, \mathbb{Z})$.

Soit G un groupe localement profini, agissant continûment à droite sur X et V (c.-à-d. quels que soient $g_1, g_2 \in G, x \in X$, on a $(x * g_1) * g_2 = x * (g_1 g_2)$). On munit $\mathrm{LC}_c(X, \mathbb{Z})$ et $\mathfrak{D}_{alg}(X, V)$ d'actions de G à droite comme suit :

si $g \in G, x \in X, \phi \in \mathrm{LC}_c(X, \mathbb{Z}), \mu \in \mathfrak{D}_{\mathrm{alg}}(X, V)$, alors

$$(\phi * g)(x) = \phi(x * g^{-1}) \text{ et } \int_X \phi(\mu * g) = \Big(\int_X (\phi * g^{-1})\mu\Big) * g. \tag{1.1}$$

1.1.3 Formes modulaires

Soient A un sous-anneau de $\mathbb{C}$ et Γ un sous-groupe d'indice fini de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. On note $\mathcal{M}_k(\Gamma, \mathbb{C})$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des formes modulaires de poids k pour Γ. On note aussi $\mathcal{M}_k(\Gamma, A)$ le sous A-module de $\mathcal{M}_k(\Gamma, \mathbb{C})$ des formes modulaires dont le q-développement est à coefficients dans A. On pose $\mathcal{M}(\Gamma, A) = \oplus_{k=0}^{+\infty} \mathcal{M}_k(\Gamma, A)$. Et on note $\mathcal{M}_k(A)$ (resp. $\mathcal{M}(A)$) la réunion des $\mathcal{M}_k(\Gamma, A)$ (resp. $\mathcal{M}(\Gamma, A)$), où Γ décrit tous les sous-groupes d'indice fini de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. On peut munir l'algèbre $\mathcal{M}(\mathbb{C})$ d'une action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})_+ = \{\gamma \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}) | \det \gamma > 0\}$ de la façon suivante :

$$f * \gamma = (\det \gamma)^{1-k} f_{|_k}\gamma, \text{ pour } f \in \mathcal{M}_k(\mathbb{C}) \text{ et } \gamma \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})_+, \tag{1.2}$$

où $f_{|_k}\gamma$ est l'action modulaire usuelle de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})_+$(voir section §2.1.1 la formule (2.1)).

Définition 1.1.1. Soient $N \geq 1$ et $\Gamma_N = \{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \equiv \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)[N]\}$. Le groupe Γ_N est un sous-groupe de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ d'indice fini. On dit qu'un sous-groupe Γ de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ est un sous-groupe de congruence s'il contient Γ_N pour un certain $N \geq 1$.

Exemple 1.1.2. Les sous-groupes $\Gamma_0(N) = \{\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) | \gamma \equiv \left(\begin{smallmatrix} * & * \\ 0 & * \end{smallmatrix}\right) \mod N\}$ et $\Gamma_1(N) = \{\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) | \gamma \equiv \left(\begin{smallmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \mod N\}$ sont des sous-groupes de congruences.

On définit de même :

$$\mathcal{M}_k^{\mathrm{cong}}(A) = \bigcup_{\Gamma \text{ sous-groupe de congruence}} \mathcal{M}_k(\Gamma, A) \text{ et } \mathcal{M}^{\mathrm{cong}}(A) = \bigcup_k \mathcal{M}_k^{\mathrm{cong}}(A).$$

Soit K un sous-corps de $\mathbb{C}$ et soit $\overline{K}$ la clôture algébrique de K. On note Π_K le groupe des automorphismes de $\mathcal{M}(\bar{K})$ sur $\mathcal{M}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), K)$; c'est un groupe profini. On note $\Pi'_{\mathbb{Q}}$ le groupe des automorphismes de $\mathcal{M}(\overline{\mathbb{Q}})$ engendré par $\Pi_{\mathbb{Q}}$ et $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})_+$. Plus généralement, si $S \subset \mathcal{P}$ est fini, on note $\Pi_{\mathbb{Q}}^{(S)}$ le sous-groupe de $\Pi'_{\mathbb{Q}}$ engendré par $\Pi_{\mathbb{Q}}$ et $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}^{(S)})_+$, où $\mathbb{Z}^{(S)}$ est le sous-anneau de $\mathbb{Q}$ obtenu en inversant tous les nombres premiers qui n'appartiennent pas à S.

1.1.4 Objets p-adiques

Soit q une variable. On note $\mathfrak{K}^+ = \mathbb{Q}_p\{\frac{q}{p}\}$ l'anneau des fonctions analytiques sur le disque fermé $\{q \in \mathbb{C}_p : v_p(q) \geq 1\}$, que l'on munit de la valuation spectrale v_p (i.e. $v_p(f) = \inf_{v_p(q) \geq 1} v_p(f(q))$). On note $\mathfrak{K}$ le complété du corps des fractions de $\mathfrak{K}^+$. On fixe une clôture algébrique $\overline{\mathfrak{K}}$ de $\mathfrak{K}$ et on note $\overline{\mathfrak{K}}^+$ la clôture intégrale de $\mathfrak{K}^+$ dans $\overline{\mathfrak{K}}$. On note $\mathcal{G}_{\mathfrak{K}}$ le groupe galois de $\overline{\mathfrak{K}}$ sur $\mathfrak{K}$.

On choisit un système compatible $(q_M)_{M\geq 1}$ de racines M-ièmes de q dans $\overline{\mathfrak{K}}^+$ (i.e. $q_{NM}^N = q_M$, pour tous $N, M \geq 1$.) On note $F_M = \mathbb{Q}_p(\zeta_M)$, $F_{Mp^\infty} = \cup_{n\geq 1} F_{Mp^n}$ et $F_\infty = \cup_{M\geq 1} F_M$. Soit $\mathfrak{K}_M = \mathfrak{K}[q_M, \zeta_M]$; c'est une extension galoisienne de $\mathfrak{K}$. On note $\mathfrak{K}_\infty$ la réunion des $\mathfrak{K}_M$ pour tous $M \geq 1$ et $\mathfrak{K}_\infty^+$ la clôture intégrale de $\mathfrak{K}^+$ dans $\mathfrak{K}_\infty$. On note $P_{\mathbb{Q}_p}$ le groupe galois de $\overline{\mathbb{Q}}_p\mathfrak{K}_\infty$ sur $\mathfrak{K}$, et $P_{\mathbb{Q}_p}^{\mathrm{cycl}}$ le groupe galois de $\mathfrak{K}_\infty$ sur $\mathfrak{K}$.

L'application qui à une forme modulaire associe son q-développement, nous fournit une inclusion de $\mathcal{M}(\overline{\mathbb{Q}})$ dans $\overline{\mathbb{Q}}_p\mathfrak{K}_\infty^+$ et un morphisme $P_{\mathbb{Q}_p} \to \Pi_{\mathbb{Q}}$ car $P_{\mathbb{Q}_p}$ préserve l'espace $\mathcal{M}(\overline{\mathbb{Q}})$. Ceci induit un morphisme $\mathcal{G}_{\mathfrak{K}} \to \Pi_{\mathbb{Q}}$ et un morphisme “de localisation ” $\mathrm{H}^i(\Pi_{\mathbb{Q}}, W) \to \mathrm{H}^i(\mathcal{G}_{\mathfrak{K}}, W)$ pour tout $\Pi_{\mathbb{Q}}$-module W et tout $i \in \mathbb{N}$ (voir section §3.1.1).

On note $\mathcal{K}^+ = \mathbb{Q}_p[[q]]$ le complété q-adique de $\mathfrak{K}^+$. Soit $M \geq 1$ un entier ; on note $\mathcal{K}_M^+$ le complété q-adique de $\mathfrak{K}_M^+ = \mathfrak{K}^+[\zeta_M, q_M]$. Enfin, on note $\mathcal{K}_\infty^+ = \cup_{M\geq 1}\mathcal{K}_M^+$ et $\mathcal{K}_{Mp^\infty}^+ = \cup_{n\geq 1}\mathcal{K}_{Mp^n}^+$.

1.2 Introduction

1.2.1 Fonctions L p-adiques de formes modulaires

Soit $N \geq 1$ et ϵ un caractère de Dirichlet modulo N. Soit $f(\tau) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n q^n \in S_k(\Gamma_0(N), \epsilon)$ une forme primitive de poids $k \geq 2$ avec $q = e^{2i\pi\tau}$. Soient α, β les racines du polynôme $X^2 - a_p X + \epsilon(p)p^{k-1}$. Soit $v_p(\alpha) < k-1$, on pose $f_\alpha(\tau) = f(\tau) - \beta f(p\tau)$. C'est une forme de niveau Np, propre pour tous les T_l, normalisée, et avec la valeur propre α pour U_p. Soit $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n q^{n/N}$ le q-développement de f_α. Comme $v_p(\alpha) < k-1$ (en particulier $\alpha \neq 0$), on peut prolonger $n \mapsto b_n$ en une fonction sur $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$ en forçant l'équation fonctionelle $b_{np} = \alpha b_n$.

Soit $\phi \in \mathrm{LC}_c(\mathbb{Q}_p, \overline{\mathbb{Q}})$ une fonction localement constante à support compact dans $\mathbb{Q}_p$, à valeurs dans $\overline{\mathbb{Q}}$. On définit la fonction L complexe de la forme modulaire f associée à ϕ et α, par la formule

$$L(f_\alpha, \phi, s) = \sum_{n\in\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]} \phi(n) b_n n^{-s}.$$

La série converge pour $\mathrm{R}e(s) > \frac{k+1}{2}$ et la fonction $L(f_\alpha, \phi, s)$ admet un prolongement analytique à tout le plan complexe. De plus, il existe des nombres complexes non nuls Ω_f^+, Ω_f^- permettant de rendre algébriques les $L(f_\alpha, \phi, j)$, pour $1 \leq j \leq k-1$. Plus précisément, si $\phi \in \mathrm{LC}_c(\mathbb{Q}_p, \overline{\mathbb{Q}})$, alors

$$\frac{\Gamma(j)}{(-2i\pi)^j} L(f, \phi, j) \in \begin{cases} \mathbb{Q}(f_\alpha, \zeta_N) \cdot \Omega_f^+, & \text{si } 1 \leq j \leq k-1, \phi(-x) = (-1)^j \phi(x) \\ \mathbb{Q}(f_\alpha, \zeta_N) \cdot \Omega_f^-, & \text{if } 1 \leq j \leq k-1, \phi(-x) = (-1)^{j+1}\phi(x). \end{cases}$$

On pose

$$\tilde{L}(f_\alpha, \phi, j) = \frac{1}{2}\frac{\Gamma(j)}{(-2i\pi)^j}\left(\frac{L(f_\alpha, \phi + (-1)^j \phi \circ (-1), j)}{\Omega_f^+} + \frac{L(f_\alpha, \phi - (-1)^j \phi \circ (-1), j)}{\Omega_f^-}\right),$$

où $\phi \circ (-1)(x) = \phi(-x)$, ce qui est à valeurs dans $\overline{\mathbb{Q}}$ et permet de le considérer comme un nombre p-adique.

On définit une transformée de Fourier de $\mathrm{LC}_c(\mathbb{Q}_p, \overline{\mathbb{Q}}_p)$ dans $\mathrm{LC}_c(\mathbb{Q}_p, \overline{\mathbb{Q}}_p)$ par la formule

$$\hat{\phi}(x) = \int_{\mathbb{Q}_p} \phi(y) e^{-2i\pi xy}\, dy = p^{-m} \sum_{y \mod p^m} \phi(y) e^{-2i\pi xy},$$

où $m \in \mathbb{N}$ assez grand.

Théorème 1.2.1. *Si $v_p(\alpha) < k-1$, il existe une unique distribution $\mu_{f,\alpha}$ d'ordre $v_p(\alpha)$ sur $\mathbb{Z}_p$, telle que l'on ait*

$$\int_{\mathbb{Z}_p} \phi(x) x^{j-1} \mu_{f,\alpha} = \tilde{L}(f_\alpha, \hat{\phi}, j),$$

quels que soient $\phi \in \mathrm{LC}(\mathbb{Z}_p, \overline{\mathbb{Q}}_p)$, et $1 \leq j \leq k-1$. De plus, quel que soit $\phi \in \mathrm{LA}(\mathbb{Z}_p, \overline{\mathbb{Q}}_p)$, on a $\int_{p\mathbb{Z}_p} \phi(p^{-1}x)\mu_{f,\alpha} = \alpha^{-1} \int_{\mathbb{Z}_p} \phi(x) \mu_{f,\alpha}$.

Ce théorème a été démontré par plusieurs personnes par des méthodes très différentes. Celle de Kato [18] repose sur la construction d'un système d'Euler (via la K-théorie) et sur une loi de réciprocité explicite résultant d'un calcul délicat dans les anneaux de Fontaine, qui permet de montrer que la machine à fonctions L p-adiques de Perrin-Riou [23] fournit naturellement la distribution $\mu_{f,\alpha}$ quand on l'applique au système d'Euler de Kato. Colmez a esquissé dans [10] une variante de la méthode de Kato, et cette thèse est consacrée à vérifier que cette esquisse, convenablement modifiée, conduit bien au résultat de Kato.

1.2.2 Le système d'Euler de Kato

En bref, un système d'Euler est une collection de classes de cohomologie vérifiant une relation de distribution. On construit le système d'Euler de Kato comme suit :

À partir des unites de Siegel, on construit une distribution algébrique z_{siegel} sur $(\mathbb{Q} \otimes \hat{\mathbb{Z}})^2 - (0,0)$ à valeurs dans $\mathbb{Q} \otimes (\mathcal{M}(\bar{\mathbb{Q}})[\frac{1}{\Delta}])^*$, où $\Delta = q \prod_{n \geq 1} (1-q^n)^{24}$ est la forme modulaire de poids 12. Cette distribution z_{siegel} est invariante sous l'action du groupe $\Pi'_{\mathbb{Q}}$. La théorie de Kummer p-adique nous fournit un élément

$$z^{(p)}_{siegel} \in \mathrm{H}^1(\Pi'_{\mathbb{Q}}, \mathfrak{D}_{\mathrm{alg}}((\mathbb{Q} \otimes \hat{\mathbb{Z}})^2 - (0,0), \mathbb{Q}_p(1))).$$

Par cup-produit et restriction à $\Pi^{(p)}_{\mathbb{Q}} \subset \Pi'_{\mathbb{Q}}$ et $\mathbf{M}_2(\mathbb{Q} \otimes \hat{\mathbb{Z}})^{(p)} \subset ((\mathbb{Q} \otimes \hat{\mathbb{Z}})^2 - (0,0))^2$, on obtient une distribution algébrique :

$$z_{kato} \in \mathrm{H}^2(\Pi^{(p)}_{\mathbb{Q}}, \mathfrak{D}_{\mathrm{alg}}(\mathbf{M}_2(\mathbb{Q} \otimes \hat{\mathbb{Z}})^{(p)}, \mathbb{Q}_p(2))).$$

En modifiant z_{kato} par un opérateur $(c^2 - < c, 1 >)(d^2 - < 1, d >)$ (c.f. §2.3.2) qui fait disparaître les dénominateurs, on obtient une distribution algébrique à valeurs dans $\mathbb{Z}_p(2)$ (que l'on peut donc voir comme une mesure), et une torsion à la Soulé nous fournit enfin un élément

$$z_{kato,c,d}(k,j) \in \mathrm{H}^2(\Pi^{(p)}_{\mathbb{Q}}, \mathfrak{D}_{\mathrm{alg}}(\mathbf{M}_2(\mathbb{Q} \otimes \hat{\mathbb{Z}})^{(p)}, V_{k,j})),$$

où $V_{k,j} = \mathrm{Sym}^{k-2} V_p \otimes \mathbb{Q}_p(2-j)$, où V_p est la représentation standard de dimension 2 de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$.

1.2.3 La loi de réciprocité explicite de Kato

La loi de réciprocité explicite de Kato consiste à relier l'élément $z_{Kato,c,d}$, qui vit dans la cohomologie du groupe $\Pi_{\mathbb{Q}}^{(p)}$, à une distribution construite à partir de produits de deux séries d'Eisenstein (la produit scalaire de Petersson d'une forme primitive avec un tel produit fait apparaître les valeurs de la fonction L de f, et c'est cela qui permettrait de construire la fonction L p-adique). Ceci se fait en plusieurs étapes :

• On commence par "localiser" notre classe de cohomologie à $\mathcal{G}_{\mathfrak{K}}$ et à étendre les coefficients de $V_{k,j}$ à $\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^{+}(\bar{\mathfrak{K}}^{+}) \otimes V_{k,j}$, où $\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^{+}(\bar{\mathfrak{K}}^{+})$ est un énorme anneau de Fontaine.

• On constate que l'image de $z_{kato,c,d}(k,j)$ sous l'application "de localisation"

$$\mathrm{H}^2(\Pi_{\mathbb{Q}}^{(p)}, \mathfrak{D}_{\mathrm{alg}}(\mathbf{M}_2(\mathbb{Q}\otimes\hat{\mathbb{Z}})^{(p)}, V_{k,j})) \to \mathrm{H}^2(\mathcal{G}_{\mathfrak{K}}, \mathfrak{D}_{\mathrm{alg}}(\mathbf{M}_2(\mathbb{Q}\otimes\hat{\mathbb{Z}})^{(p)}, \mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^{+}(\overline{\mathfrak{K}}^{+}) \otimes V_{k,j}))$$

est l'inflation d'un 2-cocycle sur $P_{\mathbb{Q}_p}^{\mathrm{cycl}}$ à valeurs dans $\mathfrak{D}_{\mathrm{alg}}(\mathbf{M}_2(\mathbb{Q}\otimes\hat{\mathbb{Z}})^{(p)}, \mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^{+}(\mathfrak{K}_{\infty}^{+}) \otimes V_{k,j})$. Les méthodes de descente presque étale de Tate [27] et Sen [25], revisitées par Faltings [15] (cf. aussi Andreatta-Iovita [3]) permettraient de montrer que c'est toujours le cas, mais nous donnons une preuve directe pour l'élément de Kato (c.f. la construction dans §5.2).

• On construit une application exponentielle duale (c.f. § 5.1) :

$$\exp^* : \mathrm{H}^2(P_{\mathbb{Q}_p}, \mathfrak{D}_{\mathrm{alg}}(\mathbf{M}_2(\mathbb{Q}\otimes\hat{\mathbb{Z}})^{(p)}, \mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^{+}(\mathfrak{K}_{\infty}^{+}) \otimes V_{k,j})) \to \mathrm{H}^0(P_{\mathbb{Q}_p}, \mathfrak{D}_{\mathrm{alg}}(\mathbf{M}_2(\mathbb{Q}\otimes\hat{\mathbb{Z}})^{(p)}, \mathcal{K}_{\infty}^{+}));$$

et on calcule l'image de $z_{kato,c,d}(k,j)$. On obtient finalement le résultat fondamental suivant :

Théorème 1.2.2. *Si $k \geq 2$, $1 \leq j \leq k-1$, et $c, d \in \mathbb{Z}_p^*$, on a :*

$$\exp^*(z_{kato,c,d}(k,j)) = z_{Eis,c,d}^{(p)}(k,j),$$

où $z_{Eis,c,d}^{(p)}(k,j) \in \mathrm{H}^0(\mathcal{G}_{\mathfrak{K}}, \mathfrak{D}_{\mathrm{alg}}(\mathbf{M}_2(\mathbb{Q}\otimes\hat{\mathbb{Z}})^{(p)}, \mathfrak{K}_{\infty}^{+}))$ est la localisée d'une distribution $z_{Eis,c,d}(k,j)$ sur $\mathbf{M}_2(\mathbb{Q}\otimes\hat{\mathbb{Z}})$, à valeurs dans $\mathcal{M}_k^{\mathrm{cong}}(\mathbb{Q}_p^{\mathrm{cycl}}) \subset \mathfrak{K}_{\infty}^{+}$, fixe sous l'action de $\Pi_{\mathbb{Q}}$.

1.2.4 La cohomologie de P_m

Soit $M \geq 1$ tel que $v_p(M) = m \geq v_p(2p)$. On note $\mathfrak{K}_{Mp^\infty} = \cup_{n\geq 1}\mathfrak{K}_{Mp^n}$. La définition de l'application $\exp^*$ et le calcul de l'image de $z_{Kato,c,d}$ reposent sur une description explicite de la cohomologie du groupe de Galois $P_{\mathfrak{K}_M}$ de l'extension $\mathfrak{K}_{Mp^\infty}/\mathfrak{K}_M$; c'est un groupe analytique p-adique de rang 2, isomorphe à

$$\mathrm{P}_m = \{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p) : a = 1, c = 0, b \in p^m\mathbb{Z}_p, d \in 1 + p^m\mathbb{Z}_p\}.$$

Soit V une représentation analytique de P_m. On démontre le très utile résultat suivant, où l'on note (u,v) l'élément $\left(\begin{smallmatrix} 1 & u \\ 0 & e^v \end{smallmatrix}\right)$ de P_m :

Théorème 1.2.3. *(prop.4.1.8) Soit V une représentation analytique de P_m. Alors*

(i) tout élément de $\mathrm{H}^2(\mathrm{P}_m, V)$ est représentable par un 2-cocycle analytique ;

(ii) On a $\mathrm{H}^2(\mathrm{P}_m, V) \cong V/(\partial_1, \partial_2 - 1)$, et l'image d'un 2-cocycle analytique

$$((u,v),(x,y)) \to c_{(u,v),(x,y)} = \sum_{i+j+k+l\geq 2} c_{i,j,k,l}u^i v^j x^k y^l,$$

par cet isomorphisme, est celle de $\delta^{(2)}(c_{(u,v),(x,y)}) = c_{1,0,0,1} - c_{0,1,1,0}$.

Chapitre 2

Système d'Euler de Kato

2.1 Séries d'Eisenstein-Kronecker et la distribution z_{Eis}

2.1.1 Formes modulaires

Soient $\mathcal{H} = \{x + iy, y > 0\}$ le demi-plan de Poincaré, $A \subset \mathbb{R}$ un sous anneau. On note $\mathrm{GL}_2(A)_+ = \{\gamma \in \mathrm{GL}_2(A) |\det \gamma > 0\}$, et on définit une action à droite de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})_+$ sur l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathcal{H}$ dans $\mathbb{C}$ par la formule :

$$(f_{|_k}\gamma)(\tau) = \frac{(\det \gamma)^{k-1}}{(c\tau + d)^k} f(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}) \text{ si } \gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right). \tag{2.1}$$

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathcal{H}$ dans $\mathbb{C}$ fixée par un sous groupe Γ de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ d'indice fini. Alors cette fonction f est une fonction périodique de période N pour un certain entier $N \geq 1$. Le q-développement de f s'écrit sous la forme ci-dessous :

$$f(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{\frac{n}{N}} e^{\frac{2i\pi n\tau}{N}} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{\frac{n}{N}} q^{\frac{n}{N}}, \text{ où } q = e^{2i\pi\tau}.$$

Définition 2.1.1. Soit Γ un sous-groupe de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ d'indice fini. Une forme modulaire de poids k pour Γ est une fonction holomorphe $f : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ verifiant les propriétés suivantes :

(1) $f_{|_k}\gamma = f$ pour $\gamma \in \Gamma$;

(2) f est holomorphe en $i\infty$ (i.e. quel que soit $\gamma \in \Gamma \setminus \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, le q-développement de $f_{|_k}\gamma(\tau)$ est de la forme $\sum\limits_{n \in \mathbb{Q}_+} a_n q^n$, où $q = e^{2i\pi\tau}$: il n'y a pas de termes négatifs).

Si K est un corps algébriquement clos et si Γ est un sous-groupe distingué d'indice fini de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, alors le groupe des automorphisme de $\mathcal{M}(\Gamma, K)$ sur $\mathcal{M}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), K)$ est $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})/\Gamma$. Ceci implique $\Pi_K = \widehat{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}$, où $\widehat{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}$ est le complété profini de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Dans le cas général, on dispose d'une suite exacte :

$$1 \to \Pi_{\overline{K}} \to \Pi_K \to \mathcal{G}_K \to 1,$$

qui admet une section $\mathcal{G}_K \to \Pi_K$ naturelle, en faisant $\mathcal{G}_K$ agir sur les coefficients du q-développement des formes modulaires.

Soient $f \in \mathcal{M}_k(\Gamma, \overline{K})$ et $\alpha \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})_+$. Alors on peut verifier que, quel que soit $\gamma \in \Gamma$, $(f * \alpha)_{|_k}(\alpha^{-1}\gamma\alpha) = f * \alpha$. Donc $f * \alpha$ est invariante pour le groupe $\alpha^{-1}\Gamma\alpha \bigcap \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Comme α peut s'écrire sous la forme $\gamma\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right)$ avec $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, on déduit

$$(f * \alpha)(\tau) = d^{-k}(f * \gamma)(\frac{a\tau + b}{d}) = d^{-k}(f_{|_k}\gamma)(\frac{a\tau + b}{d}),$$

ce qui montre que $f * \alpha$ est holomorphe en $i\infty$. Donc $f * \alpha$ est une forme modulaire et $\mathcal{M}(\bar{K})$ est stable sous l'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})_+$. On définit $\Pi_K^{'}$ comme le groupe des automorphisme de $\mathcal{M}(\overline{K})$ engendré par Π_K et $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})_+$. Plus généralement, si $S \subset \mathscr{P}$ est fini, on note $\Pi_K^{(S)}$ le sous-groupe de $\Pi_K^{'}$ engendré par Π_K et $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}^{(S)})$, où $\mathbb{Z}^{(S)}$ est le sous-anneau de $\mathbb{Q}$ obtenu en inversant tous les nombres premiers qui n'appartiennent pas à S.

Le groupe des automorphimes de $\mathcal{M}^{\mathrm{cong}}(\mathbb{Q}^{\mathrm{cycl}})$ sur $\mathcal{M}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), \mathbb{Q}^{\mathrm{cycl}})$ est le groupe profini $\mathrm{SL}_2(\hat{\mathbb{Z}})$, le complété profini de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ par rapport aux sous-groupes de congruence. D'autre part, quel que soit $f \in \mathcal{M}^{\mathrm{cong}}(\mathbb{Q}^{\mathrm{cycl}})$, le groupe $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}}$ agit sur les coefficients du q-développement de f à travers son quotient $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}^{\mathrm{cycl}}/\mathbb{Q})$ qui est isomorphe à $\hat{\mathbb{Z}}^*$ par le caractère cyclotomique. On note H le groupe des automorphismes de $\mathcal{M}^{\mathrm{cong}}(\mathbb{Q}^{\mathrm{cycl}})$ sur $\mathcal{M}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), \mathbb{Q})$. La sous-algèbre $\mathcal{M}^{\mathrm{cong}}(\mathbb{Q}^{\mathrm{cycl}})$ est stable par $\Pi_{\mathbb{Q}}$ qui agit à travers H.

Théorème 2.1.2. *On a un diagramme commutatif de groupes :*

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & \Pi_{\bar{\mathbb{Q}}} \arrow[r] \arrow[d] & \Pi_{\mathbb{Q}} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{G}_{\mathbb{Q}} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[l, dotted, bend left] & 1 \\
1 \arrow[r] & \mathrm{SL}_2(\hat{\mathbb{Z}}) \arrow[r] \arrow[d] & H \arrow[r] \arrow[d, dotted, "\alpha"] & \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}^{\mathrm{cycl}}/\mathbb{Q}) \arrow[r] \arrow[d, "\chi_{\mathrm{cycl}}"] \arrow[l, dotted, bend left, "\iota_0"] & 1 \\
1 \arrow[r] & \mathrm{SL}_2(\hat{\mathbb{Z}}) \arrow[r] & \mathrm{GL}_2(\hat{\mathbb{Z}}) \arrow[r, "\det"] & \hat{\mathbb{Z}}^* \arrow[r] \arrow[l, dotted, bend left, "\iota"] & 1
\end{tikzcd}$$

où $\alpha : H \to \mathrm{GL}_2(\hat{\mathbb{Z}})$ est un isomorphisme, ce qui permet d'identifier H et $\mathrm{GL}_2(\hat{\mathbb{Z}})$. Dans cette identification la section de $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}}$ dans $\Pi_{\mathbb{Q}}$ décrite plus haut envoie $u \in \hat{\mathbb{Z}}^*$ sur la matrice $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{GL}_2(\hat{\mathbb{Z}})$.

La démonstration repose sur l'étude des séries d'Eisenstein qui se trouve plus loin, et donc on donne l'idée ici.

- Construire une bijection $\alpha : H \to \mathrm{GL}_2(\hat{\mathbb{Z}})$:
  Soit $u \in \hat{\mathbb{Z}}^*$ et soit $\sigma_u \in \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}^{\mathrm{cycl}}/\mathbb{Q})$ l'image inverse de u dans $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}^{\mathrm{cycl}}/\mathbb{Q})$ via l'isomorphisme $\chi_{\mathrm{cycl}} : \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}^{\mathrm{cycl}}/\mathbb{Q}) \cong \hat{\mathbb{Z}}^*$. On peut décomposer H (resp. $\mathrm{GL}_2(\hat{\mathbb{Z}})$) en l'ensemble $\mathrm{SL}_2(\hat{\mathbb{Z}})\sigma_u$ (resp. $\mathrm{SL}_2(\hat{\mathbb{Z}})\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u \end{smallmatrix}\right)$) par la classe à droite suivant $\mathrm{SL}_2(\hat{\mathbb{Z}})$. Alors, on définit une bijection de H sur $\mathrm{GL}_2(\hat{\mathbb{Z}})$ en envoyant la classe à droite $\gamma\sigma_u$ sur $\gamma\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u \end{smallmatrix}\right)$, si $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\hat{\mathbb{Z}})$.
- L'étude des séries d'Eisenstein (voir la proposition 2.1.11) montre que la bijection $\alpha : H \to \mathrm{GL}_2(\hat{\mathbb{Z}})$ construite dans l'étape précédente est un morphisme de groupes :
  En utilisant la bijection α, on définit une action de $\mathrm{GL}_2(\hat{\mathbb{Z}})$ sur $\mathcal{M}^{\mathrm{cong}}(\mathbb{Q}^{\mathrm{cycl}})$ induit par celle de H :

Définition 2.1.3. Si $\gamma = \gamma_0\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&u\end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{GL}_2(\hat{\mathbb{Z}})$ avec $\gamma_0 \in \mathrm{SL}_2(\hat{\mathbb{Z}})$ et $u \in \hat{\mathbb{Z}}^*$, et si $f \in \mathcal{M}^{\mathrm{cong}}(\mathbb{Q}^{\mathrm{cycl}})$, on définit

$$f * \gamma := f * (\alpha^{-1}(\gamma)) = f * (\gamma_0\sigma_u).$$

On définit une autre action du groupe $\mathrm{GL}_2(\hat{\mathbb{Z}})$ sur les séries d'Eisenstein (voir la définition 2.1.6) et on montre dans la proposition 2.1.11 que ces deux actions de $\mathrm{GL}_2(\hat{\mathbb{Z}})$ coïncident. Donc α est un morphisme de groupes et cela nous permet d'identifier le groupe H au groupe $\mathrm{GL}_2(\hat{\mathbb{Z}})$ naturellement.

2.1.2 Séries d'Eisenstein-Kronecker

Les résultats dans ce paragraphe peuvent se trouver dans le livre de Weil [28].

Définition 2.1.4. Si $(\tau, z) \in \mathcal{H}\times\mathbb{C}$, on pose $q = e^{2i\pi\tau}$ et $q_z = e^{2i\pi z}$. On introduit l'opérateur $\partial_z := \frac{1}{2i\pi}\frac{\partial}{\partial z} = q_z\frac{\partial}{\partial q_z}$. On aussi pose $e(a) = e^{2i\pi a}$. Si $k \in \mathbb{N}$, $\tau \in \mathcal{H}$, et $z, u \in \mathbb{C}$, la série d'Eisenstein-Kronecker est

$$\mathrm{H}_k(s,\tau,z,u) = \frac{\Gamma(s)}{(-2i\pi)^k}\left(\frac{\tau-\bar{\tau}}{2i\pi}\right)^{s-k}\sum_{\omega\in\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau}{}^{'}\frac{\overline{\omega+z}^k}{|\omega+z|^{2s}}e\left(\frac{\omega\bar{u}-u\bar{\omega}}{\tau-\bar{\tau}}\right),$$

qui converge pour $\mathrm{R}e(s) > 1+\frac{k}{2}$, et possède un prolongement méromorphe à tout le plan complexe avec des pôles simples en $s = 1$ (si $k = 0$ et $u \in \mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau$) et $s = 0$ (si $k = 0$ et $z \in \mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau$). Dans la formule ci-dessus $\sum'$ signifie (si $z \in \mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau$) que l'on supprime le terme correspondant à $\omega = -z$. De plus, elle vérifie l'équation fonctionnelle :

$$\mathrm{H}_k(s,\tau,z,u) = e\left(\frac{z\bar{u}-u\bar{z}}{\tau-\bar{\tau}}\right)\mathrm{H}_k(k+1-s,\tau,u,z).$$

Si $k \geq 1$, on définit les fonctions suivantes :

$$E_k(\tau,z) = \mathrm{H}_k(k,\tau,z,0)\left(=\frac{\Gamma(k)}{(-2i\pi)^k}\sum_{\omega\in\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau}{}^{'}\frac{1}{(\omega+z)^k}\text{ si } k\geq 3\right),$$

$$F_k(\tau,z) = \mathrm{H}_k(k,\tau,0,z)\left(=\frac{\Gamma(k)}{(-2i\pi)^k}\sum_{\omega\in\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau}{}^{'}\frac{1}{(\omega)^k}e\left(\frac{\omega\bar{z}-z\bar{\omega}}{\tau-\bar{\tau}}\right)\text{ si } k\geq 3\right).$$

Les fonctions $E_k(\tau,z)$ et $F_k(\tau,z)$ sont périodiques en z de période $\mathbb{Z}\tau+\mathbb{Z}$. De plus on a :

$$E_{k+1}(\tau,z) = \partial_z E_k(\tau,z),\ \text{si } k\in\mathbb{N} \text{ et } E_0(\tau,z) = \log|\theta(\tau,z)| \text{ si } z\notin\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau,$$

où $\theta(\tau,z)$ est donnée par le produit infini :

$$\theta(\tau,z) = q^{1/12}(q_z^{1/2}-q_z^{-1/2})\prod_{n\geq 1}((1-q^nq_z)(1-q^nq_z^{-1})).$$

On note $\Delta = (\partial_z\theta(\tau,z)|_{z=0})^{12} = q\prod_{n\geq 1}(1-q^n)^{24}$ la forme modulaire de poids 12.

Soient $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^2$ et $(a, b) \in \mathbb{Q}^2$ qui a pour image (α, β) dans $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^2$. Si $k = 2$ et $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$, ou si $k \geq 1$ et $k \neq 2$, on définit :

$$E^{(k)}_{\alpha,\beta} = E_k(\tau, a\tau + b) \text{ et } F^{(k)}_{\alpha,\beta} = F_k(\tau, a\tau + b).$$

Si $k = 2$ et $(\alpha, \beta) = (0, 0)$, on définit *

$$E^{(2)}_{0,0} = F^{(2)}_{0,0} := \lim_{s\to 2} H_2(s, \tau, 0, 0).$$

Lemme 2.1.5. *Les functions $E^{(k)}_{\alpha,\beta}, F^{(k)}_{\alpha,\beta}$ satisfont les relations de distribution suivantes, quel que soit l'entier $f \geq 1$:*

$$\sum_{f\alpha'=\alpha, f\beta'=\beta} E^{(k)}_{\alpha',\beta'} = f^k E^{(k)}_{\alpha,\beta} \quad et \quad \sum_{f\alpha'=\alpha, f\beta'=\beta} F^{(k)}_{\alpha',\beta'} = f^{2-k} F^{(k)}_{\alpha,\beta} \tag{2.2}$$

$$\sum_{f\beta'=\beta} E^{(k)}_{\alpha,\beta'}(\frac{\tau}{f}) = f^k E^{(k)}_{\alpha,\beta} \quad et \quad \sum_{f\beta'=\beta} F^{(k)}_{\alpha,\beta'}(\frac{\tau}{f}) = f F^{(k)}_{\alpha,\beta}. \tag{2.3}$$

Démonstration. Soit $(a, b) \in \mathbb{Q}^2$ un représentant de $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^2$. Les relations pour $E^{(k)}_{\alpha,\beta}$ se déduisent du calcul suivant pour $k \geq 3$ (pour $k = 1, 2$, il faut utiliser un prolongement analytique) :

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{f\alpha'=\alpha \\ f\beta'=\beta}} E^{(k)}_{\alpha',\beta'} &= \sum_{\substack{0\leq i\leq f-1 \\ 0\leq j\leq f-1}} E_k(\tau, \frac{a+i}{f}\tau + \frac{b+j}{f}) \\ &= \sum_{\substack{0\leq i\leq f-1 \\ 0\leq j\leq f-1}} \frac{\Gamma(k)}{(-2i\pi)^k} \sum_{w\in\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau}{}' \frac{1}{(w + \frac{a+i}{f}\tau + \frac{b+j}{f})^k} = f^k E^{(k)}_{\alpha,\beta};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{f\beta'=\beta} E^{(k)}_{\alpha,\beta'}(\frac{\tau}{f}) &= \sum_{0\leq j\leq f-1} E_k(\tau, \frac{a}{f}\tau + \frac{b+j}{f}) \\ &= \sum_{j=0}^{f-1} \frac{\Gamma(k)}{(-2i\pi)^k} \sum_{w\in\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\frac{\tau}{f}}{}' \frac{1}{(w + \frac{a\tau}{f} + \frac{b+j}{f})^k} = f^k E^{(k)}_{\alpha,\beta}.\end{aligned}$$

La relation $\sum_{f\beta'=\beta} F^{(k)}_{\alpha,\beta'}(\frac{\tau}{f}) = f F^{(k)}_{\alpha,\beta}$ se déduit du même genre de calculs que les relations $\sum_{\substack{f\alpha'=\alpha \\ f\beta'=\beta}} F^{(k)}_{\alpha',\beta'} = f^{2-k} F^{(k)}_{\alpha,\beta}$ et $\sum_{f\beta'=\beta} E^{(k)}_{\alpha,\beta'}(\frac{\tau}{f}) = f^k E^{(k)}_{\alpha,\beta}$; on va donner juste le calcul pour la relation $\sum_{\substack{f\alpha'=\alpha \\ f\beta'=\beta}} F^{(k)}_{\alpha',\beta'} = f^{2-k} F^{(k)}_{\alpha,\beta}$.

Les deux égalités suivantes vont jouer un rôle dans le calcul :

(1) Quels que soient $w \in \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau$ et $0 \leq i, j \leq f - 1$, on a

$$e(\frac{i(w\bar{\tau} - \tau\bar{w}) + j(w - \bar{w})}{\tau - \bar{\tau}}) = 1.$$

*. La série $H_2(s, \tau, 0, 0)$ converge pour $\mathrm{Re}(s) > 2$, mais pas pour $s = 2$.

(2) Quel que soient $w = fw' + m + n\tau$ avec $w' \in \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau$ et m ou $n \neq 0$, on a

$$\sum_{\substack{0\leq i\leq f-1\\0\leq j\leq f-1}} \frac{1}{w^k} e\Big(\frac{w(\frac{a+i}{f}\bar\tau + \frac{b+j}{f}) - (\frac{a+i}{f}\tau + \frac{b+j}{f})\bar w}{\tau-\bar\tau}\Big) = 0.$$

Donc, on a (pour $k \geq 3$; pour $k = 1, 2$, il faut utiliser un prolongement analytique).

$$\begin{aligned}
\frac{(-2i\pi)^k}{\Gamma(k)} \sum_{\substack{f\alpha'=\alpha\\f\beta'=\beta}} F^{(k)}_{\alpha',\beta'} &= \frac{(-2i\pi)^k}{\Gamma(k)} \sum_{\substack{0\leq i\leq f-1\\0\leq j\leq f-1}} F_k(\tau, \frac{a+i}{f}\tau + \frac{b+j}{f})\\
&= \sum_{\substack{0\leq i\leq f-1\\0\leq j\leq f-1}} \sum_{w\in\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau}{}' \frac{1}{w^k} e\Big(\frac{w(\frac{a+i}{f}\bar\tau + \frac{b+j}{f}) - (\frac{a+i}{f}\tau + \frac{b+j}{f})\bar w}{\tau-\bar\tau}\Big)\\
&= \sum_{\substack{0\leq i\leq f-1\\0\leq j\leq f-1}} \sum_{\substack{0\leq m\leq f-1\\0\leq n\leq f-1}} \sum_{\substack{w=fw'+m+n\tau\\w'\in\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau}}{}' \frac{1}{w^k} e\Big(\frac{w(\frac{a+i}{f}\bar\tau + \frac{b+j}{f}) - (\frac{a+i}{f}\tau + \frac{b+j}{f})\bar w}{\tau-\bar\tau}\Big)\\
&= \sum_{\substack{0\leq i\leq f-1\\0\leq j\leq f-1}} \sum_{w\in e(\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau)}{}' \frac{1}{w^k} f\Big(\frac{w(\frac{a+i}{f}\bar\tau + \frac{b+j}{f}) - (\frac{a+i}{f}\tau + \frac{b+j}{f})\bar w}{\tau-\bar\tau}\Big)\\
&= \sum_{\substack{0\leq i\leq f-1\\0\leq j\leq f-1}} \sum_{w\in(\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau)}{}' \frac{1}{(fw)^k} e\Big(\frac{fw(\frac{a+i}{f}\bar\tau + \frac{b+j}{f}) - (\frac{a+i}{f}\tau + \frac{b+j}{f})f\bar w}{\tau-\bar\tau}\Big)\\
&= f^{-k} \sum_{w\in(\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau)}{}' \Big[\frac{1}{w^k} e\Big(\frac{w(a\bar\tau+b) - (a\tau+b)\bar w}{\tau-\bar\tau}\Big)\Big(\sum_{\substack{0\leq i\leq f-1\\0\leq j\leq f-1}} e\Big(\frac{i(w\bar\tau - \tau\bar w) + j(w-\bar w)}{\tau-\bar\tau}\Big)\Big)\Big]\\
&= f^{2-k} \frac{(-2i\pi)^k}{\Gamma(k)} F^{(k)}_{\alpha,\beta}
\end{aligned}$$

□

On dispose d'une action du groupe $\mathrm{GL}_2(\hat{\mathbb{Z}})$ sur les séries d'Eisenstein, via son action sur $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^2$.

Définition 2.1.6. Si $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b\\ c & d\end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{GL}_2(\hat{\mathbb{Z}})$, $k \geq 1$ et $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^2$, on définit

$$E^{(k)}_{\alpha,\beta} \circ \gamma = E^{(k)}_{a\alpha+c\beta, b\alpha+d\beta} \text{ et } F^{(k)}_{\alpha,\beta} \circ \gamma = F^{(k)}_{a\alpha+b\beta, c\alpha+d\beta}.$$

Nous allons vérifier que ces séries d'Eisenstein appartiennent à $\mathcal{M}^{\mathrm{cong}}(\mathbb{Q}^{\mathrm{cycl}})$ (c.f. prop. 2.1.7) et que l'action de $\mathrm{GL}_2(\hat{\mathbb{Z}})$ sur $\mathcal{M}^{\mathrm{cong}}(\mathbb{Q}^{\mathrm{cycl}})$ via la bijection $\alpha : H \to \mathrm{GL}_2(\hat{\mathbb{Z}})$, définie plus haut, induit l'action précédente sur les séries d'Eisenstein.

Proposition 2.1.7. *(1)* $E^{(2)}_{0,0} = F^{(2)}_{0,0} = \frac{-1}{24} E^*_2$, *où*

$$E^*_2 = \frac{6}{i\pi(\tau-\bar\tau)} + 1 - 24 \sum_{n=1}^{+\infty} \sigma_1(n) q^n$$

est la série d'Eisenstein non holomorphe de poids 2 habituelle.

(2) Si $N\alpha = N\beta = 0$, *alors*

(a) $\tilde{E}^{(2)}_{\alpha,\beta} = E^{(2)}_{\alpha,\beta} - E^{(2)}_{0,0} \in \mathcal{M}_2(\Gamma_N, \mathbb{Q}(\zeta_N))$ *et* $E^{(k)}_{\alpha,\beta} \in \mathcal{M}_k(\Gamma_N, \mathbb{Q}(\zeta_N))$ *si* $k \geq 1$ *et* $k \neq 2$.

(b) $F^{(k)}_{\alpha,\beta} \in \mathcal{M}_k(\Gamma_N, \mathbb{Q}(\zeta_N))$ *si* $k \geq 1, k \neq 2$ *ou si* $k = 2, (\alpha, \beta) \neq (0,0)$.

Les résultats au-dessus sont bien connus. Pour faciliter la lecture, on donne l'idée ; les détails se trouvent plus loin.

Démonstration. (1) Par définition, on a

$$E^{(2)}_{0,0} = F^{(2)}_{0,0} = \lim_{s\to 2} \frac{\Gamma(s)}{(-2i\pi)^k} (\frac{\tau - \bar{\tau}}{2i\pi})^{s-k} \sum_{\omega\in\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau}{}' \frac{\bar{\omega}^k}{|\omega|^{2s}}.$$

On applique la formule de Poisson pour la somme (voir la démonstration de la proposition (2.1.9)) et prend la limite.

(2) On considère le q-développement des séries d'Eisenstein et on va montrer dans la proposition 2.1.9 que les coefficients sont dans l'extension cyclotomique. Il reste à vérifier que les séries sont fixées par le sous-groupe de congruence Γ_N. Mais ce fait est vérifié par des formules plus générales dans la proposition 2.1.11.

□

2.1.3 Les q-développements de séries d'Eisenstein

Soit A un sous-anneau de $\mathbb{C}$. On note $\mathbf{Dir}(\mathbb{C})$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des séries de Dirichlet formelles à coefficients dans $\mathbb{C}$. On note $\mathbf{Dir}(A)$ le sous A-module de $\mathbf{Dir}(\mathbb{C})$ des séries de Dirichlet formelles dont les coefficients sont dans A. On définit une action du groupe de Galois $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}} = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ sur $\mathbf{Dir}(\overline{\mathbb{Q}})$ en agissant sur les coefficients.

Soit $\alpha \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. On définit les séries de Dirichlet formelles $\zeta(\alpha, s)$ et $\zeta^*(\alpha, s)$, appartenant à $\mathbf{Dir}(\mathbb{Q}^{\mathrm{cycl}})$, par les formules :

$$\zeta(\alpha, s) = \sum_{\substack{n\in\mathbb{Q}^*_+ \\ n=\alpha \mod \mathbb{Z}}} n^{-s} \text{ et } \zeta^*(\alpha, s) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{2i\pi\alpha n} n^{-s}.$$

La fonction $\zeta(\alpha, s)$ admet un prolongement méromorphe à tout le plan complexe, holomorphe en dehors de pôles simples en $s = 1$ de résidu 1. De plus, une fonction de type $g(t) = (a+t)^k$ avec $k \geq 1$ un entier et $a \in \mathbb{Q}$ admet une intégration de Riemann p-adique sur $\mathbb{Z}_p$ (qui s'appelle l'intégral de Volkenborn [24]) :

$$\int_{\mathbb{Z}_p} g(t)dt = \int_{n\to\infty} \frac{1}{p^n} \sum_{k=0}^{p^n-1} g(k).$$

On a le fait que $-\frac{1}{k}\int_{\mathbb{Z}_p}(a+t)^k dt = -\frac{B_k(a)}{k} = \zeta(a, 1-k)$, où $B_k(a)$ est le polynôme de Bernoulli.

Considérons l'application surjective $\chi_{\mathrm{cycl}} : \mathcal{G}_{\mathbb{Q}} \to \hat{\mathbb{Z}}^*$. Soit $d \in \hat{\mathbb{Z}}^*$ et soit σ_d un relèvement de d dans $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}}$. Alors on définit l'action de $d \in \hat{\mathbb{Z}}^*$ sur les séries de Dirichlet formelles $\zeta(\alpha, s)$ et $\zeta^*(\alpha, s)$ via σ_d agissant sur les coefficients †.

†. L'action de σ_d sur $e^{2i\pi\alpha}$ est donnée par $\sigma_d * e^{2i\pi\alpha} = e^{2i\pi d\alpha}$, où $d\alpha$ est bien défini car on a l'isomorphisme $(\mathbb{Q}\otimes\hat{\mathbb{Z}})/\hat{\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

Lemme 2.1.8. *On a* $\zeta(\alpha,s)*d=\zeta(\alpha,s)$ *et* $\zeta^*(\alpha,s)*d=\zeta^*(d\alpha,s)$.

La proposition suivante décrit les q-développements de séries d'Eisenstein et elle montre que les coefficients du q-développement des séries d'Eisenstein sont dans $\mathbb{Q}^{\mathrm{cycl}}$. En particulier, celle-ci nous permet de conclure le resultat de la proposition 2.1.7.

Proposition 2.1.9. *(i) Si* $k\geq 1, k\neq 2$ *et* $\alpha,\beta\in\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, *alors le* q*-développement* $\sum_{n\in\mathbb{Q}_+} a_nq^n$ *de* $E^{(k)}_{\alpha,\beta}$ *est donné par*

$$\sum_{n\in\mathbb{Q}_+^*}\frac{a_n}{n^s}=\zeta(\alpha,s)\zeta^*(\beta,s-k+1)+(-1)^k\zeta(-\alpha,s)\zeta^*(-\beta,s-k+1).$$

De plus, on a :
Soit $k\neq 1$. $a_0=0$ *(resp.* $a_0=\zeta^*(\beta,1-k)$ *) si* $\alpha\neq 0$ *(resp.* $\alpha=0$ *).*
Soit $k=1$. *On a* $a_0=\zeta(\alpha,0)$ *(resp.* $a_0=\frac{1}{2}(\zeta^*(\beta,0)-\zeta^*(-\beta,0))$ *) si* $\alpha\neq 0$ *(resp.* $\alpha=0$*).*

(ii) Si $k\geq 1$ *et* $\alpha,\beta\in\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ *(si* $k=2$, $(\alpha,\beta)\neq(0,0)$*), alors le* q*-développement* $\sum_{n\in\mathbb{Q}^+} a_nq^n$ *de* $F^{(k)}_{\alpha,\beta}$ *est donné par*

$$\sum_{n\in\mathbb{Q}_+^*}\frac{a_n}{n^s}=\zeta(\alpha,s-k+1)\zeta^*(\beta,s)+(-1)^k\zeta(-\alpha,s-k+1)\zeta^*(-\beta,s).$$

De plus, on a :
Soit $k\neq 1$, $a_0=\zeta(\alpha,1-k)$.
Soit $k=1$, $a_0=\zeta(\alpha,0)$ *(resp.* $a_0=\frac{1}{2}(\zeta^*(\beta,0)-\zeta^*(-\beta,0))$ *) si* $\alpha\neq 0$ *(resp.* $\alpha=0$ *).*

Démonstration. Choisisons une présentation $(\tilde{\alpha},\tilde{\beta})\in\mathbb{Q}^2$ de $(\alpha,\beta)\in(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^2$, alors la fonction $F^{(k)}_{\alpha,\beta}$ (resp. $E^{(k)}_{\alpha,\beta}$) est définie par évaluer la fonction $H_k(s,\tau,0,\tilde{\alpha}\tau+\tilde{\beta})$ (resp. $H_k(s,\tau,\tilde{\alpha}\tau+\tilde{\beta},0)$) en $k=s$. La fonction $H_k(s,\tau,z,u)$ converge si $\mathrm{Re}(s)>1+\frac{k}{2}$, possède un prolongement méromorphe à tout le plan complexe, holomorphe en dehors de pôle simple en $s=1$ (si $k=0$ et $u\in\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau$) et $s=0$ (si $k=0$ et $z\in\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau$).

Pour obtenir les formules dans la proposition, on applique juste la formule de Poisson (pour $k=1,2$, il faut utiliser un prolongement analytique.) Montrons (ii) en utilisant la formule de Poisson.

Pour simplifier la formule, on écrit $z=\tilde{\alpha}\tau+\tilde{\beta}$ et on pose $\tau=x+iy$ avec $x,y\in\mathbb{R}$ et $y>0$.

De la définition, on a :

$$
\begin{aligned}
H_k(s,\tau,0,z) &= \frac{\Gamma(s)}{(-2\pi i)^k}(\frac{-2iy}{2\pi i})^{s-k}\sum_{m,n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(m\tau+n)^k|m\tau+n|^{2(s-k)}}e(\frac{w\bar{z}-z\bar{w}}{\tau-\bar{\tau}}) \\
&= \frac{\Gamma(s)}{(-2\pi i)^s}\sum_{m,n\in\mathbb{Z}}\frac{(2iy)^{s-k}}{(m\tau+n)^s(m\bar{\tau}+n)^{s-k}}e(m\tilde{\beta}-n\tilde{\alpha}) \\
&= \frac{\Gamma(s)}{(-2\pi i)^s}(\sum_{m\geq 0}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{(2iy)^{s-k}}{(m\tau+n)^s(m\bar{\tau}+n)^{s-k}}e(m\tilde{\beta}-n\tilde{\alpha})+ \\
&+(-1)^{2s-k}\sum_{m>0}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{(2iy)^{s-k}}{(m\tau-n)^s(m\bar{\tau}-n)^{s-k}}e(-m\tilde{\beta}-n\tilde{\alpha}))
\end{aligned}
$$

Si $\mathrm{R}e(s)>1+\frac{k}{2}$, la fonction $f(t)=\frac{e(m\tilde{\beta}-t\tilde{\alpha})}{(m\tau+t)^s(m\bar{\tau}+t)^{s-k}}$ vérifie la condition de la formule de Poisson. Alors,

$$
\begin{aligned}
\sum_{n\in\mathbb{Z}}f(n) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}}\mathcal{F}(f)(n) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-2i\pi nt}e(m\tilde{\beta}-t\tilde{\alpha})}{(m\tau+t)^s(m\bar{\tau}+t)^{s-k}}dt \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}}e(m((n+\tilde{\alpha})x+\tilde{\beta}))\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-2i\pi(n+\tilde{\alpha})t}}{(imy+t)^s(-imy+t)^{s-k}}dt
\end{aligned}
$$

Alors, si $s=k$, on a $k\geq 3$ et on a

$$
\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-2i\pi(n+\tilde{\alpha})t}}{(imy+t)^k}dt=(-2i\pi)^k\Gamma(k)^{-1}(n+\tilde{\alpha})^{k-1}e^{-2\pi ym(n+\tilde{\alpha})};
$$

grâce à la méthode des résidus. Ceci nous donne

$$
\sum_{n\in\mathbb{Z}}f(n)=\sum_{n\in\mathbb{Q}_+,n\equiv\alpha[\mathbb{Z}]}(-2i\pi)^k\Gamma(k)^{-1}n^{k-1}q^{mn}e(m\tilde{\beta}).
$$

On peut aussi appliquer la formule de Poisson à la fonction $g(t)=\frac{e(-m\tilde{\beta}-t\tilde{\alpha})}{(m\tau-t)^s(m\bar{\tau}-t)^{s-k}}$ pour $s=k\geq 3$ et obtient

$$
\sum_{n\in\mathbb{Z}}g(n)=\sum_{n\in\mathbb{Q}_+,n\equiv-\alpha[\mathbb{Z}]}(-2i\pi)^k\Gamma(k)^{-1}n^{k-1}q^{mn}e(-m\tilde{\beta}).
$$

Donc on a

$$
\begin{aligned}
F^{(k)}_{\alpha,\beta} &= H_k(k,\tau,0,z)\\
&= \sum_{m\geq 0}\sum_{n\in\mathbb{Q}_+, n\equiv\alpha[\mathbb{Z}]} n^{k-1}q^{mn}e(m\tilde{\beta}) + (-1)^k \sum_{m>0}\sum_{n\in\mathbb{Q}_+, n\equiv-\alpha[\mathbb{Z}]} n^{k-1}q^{mn}e(-m\tilde{\beta})\\
&= \begin{cases} \zeta(\alpha,1-k) + \sum_{m>0}\sum_{n\in\mathbb{Q}_+, n\equiv\alpha[\mathbb{Z}]} n^{k-1}q^{mn}e(m\tilde{\beta}) + \\ + (-1)^k \sum_{m>0}\sum_{n\in\mathbb{Q}_+, n\equiv-\alpha[\mathbb{Z}]} n^{k-1}q^{mn}e(-m\tilde{\beta}); \text{ si } \alpha\neq 0, \\ \frac{1}{2}(\zeta^*(\beta,0)-\zeta^*(-\beta,0)) + \sum_{m>0}\sum_{n\in\mathbb{Q}^*_+, n\equiv\alpha[\mathbb{Z}]} n^{k-1}q^{mn}e(m\tilde{\beta}) + \\ + (-1)^k \sum_{m>0}\sum_{n\in\mathbb{Q}^*_+, n\equiv-\alpha[\mathbb{Z}]} n^{k-1}q^{mn}e(-m\tilde{\beta}); \text{ si } \alpha = 0 \text{ et } k=1; \end{cases}
\end{aligned}
$$

Donc,

$$
\begin{aligned}
\sum_{n\in\mathbb{Q}^*_+}\frac{a_n}{n^s} &= \sum_{n\in\mathbb{Q}^*_+, n\equiv\alpha[\mathbb{Z}]}\sum_{m=1}^{+\infty} e^{2i\pi m\beta}n^{k-1}\frac{1}{(mn)^s} + (-1)^k \sum_{n\in\mathbb{Q}^*_+, n\equiv-\alpha[\mathbb{Z}]}\sum_{m=1}^{+\infty} e^{-2i\pi m\beta}n^{k-1}\frac{1}{(mn)^s}\\
&= \sum_{\substack{n\in\mathbb{Q}^*_+,\\ n\equiv\alpha[\mathbb{Z}]}} \frac{1}{m^s}\sum_{m=1}^{+\infty} e^{2i\pi m\tilde{\beta}}\frac{1}{n^{s-k+1}} + (-1)^k \sum_{\substack{n\in\mathbb{Q}^*_+,\\ n\equiv-\alpha[\mathbb{Z}]}} \frac{1}{m^s}\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-2i\pi m\tilde{\beta}}\frac{1}{n^{s-k+1}}\\
&= \zeta(\alpha,s-k+1)\zeta^*(\beta,s) + (-1)^k\zeta(-\alpha,s-k+1)\zeta^*(-\beta,s).
\end{aligned}
$$

□

Remarque 2.1.10. (i) D'après cette proposition, on voit que $E^{(1)}_{\alpha,\beta}$ et $F^{(1)}_{\alpha,\beta}$ ont le même q-développement pour tous les $\alpha,\beta\in\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ (On peut aussi déduire ce résultat par l'équation fonctionnelle de $H_k(s,\tau,z,u)$).

(ii) Soit $d\in\hat{\mathbb{Z}}^*$ et soit σ_d un relèvement de d dans $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}}$. L'action de $\hat{\mathbb{Z}}^*$ induit par l'action de H sur les séries d'Eisenstein est donné par σ_d agissant sur les coefficients du q-développement de formes modulaires. Il équivaut à trouver l'action de $\hat{\mathbb{Z}}^*$ sur les séries de Dirichlet formelles associées. Soit $\sum_{n\in\mathbb{Q}_+} a_nq^n$ le q-développement de $E^{(k)}_{\alpha,\beta}$ (resp. $F^{(k)}_{\alpha,\beta}$). Alors le q-développement $\sum_{n\in\mathbb{Q}_+} b_nq^n$ de $E^{(k)}_{\alpha,\beta} * d$ est donné par

$$
\sum_{n\in\mathbb{Q}^*_+}\frac{b_n}{n^s} = \sum_{n\in\mathbb{Q}^*_+}\frac{a_n}{n^s} * d = \zeta(\alpha,s)\zeta^*(d\beta,s-k+1) + (-1)^k\zeta(-\alpha,s)\zeta^*(-d\beta,s-k+1),
$$

$$
b_0 = \begin{cases} 0(\text{ resp. } \zeta^*(d\beta,1-k)); \text{ si } k\neq 1, \alpha\neq 0(\text{ resp. si } \alpha=0),\\ \zeta(\alpha,0)\left(\text{ resp.}\frac{1}{2}(\zeta^*(d\beta,0)-\zeta^*(-d\beta,0))\right); \text{ si } k=1, \alpha\neq 0(\text{ resp. } \alpha=0); \end{cases}
$$

et celui de $F^{(k)}_{\alpha,\beta} * d$ est donné par

$$\sum_{n\in\mathbb{Q}_+^*}\frac{b_n}{n^s}=\zeta(\alpha,s-k+1)\zeta^*(d\beta,s)+(-1)^k\zeta(-\alpha,s-k+1)\zeta^*(-d\beta,s);$$

$$b_0=\begin{cases}\zeta(\alpha,1-k)); \text{ si } k\neq 1,\\ \zeta(\alpha,0)\left(\text{ resp.}\frac{1}{2}(\zeta^*(d\beta,0)-\zeta^*(-d\beta,0))\right); \text{ si } k=1,\alpha\neq 0(\text{ resp. } \alpha=0);\end{cases}.$$

Donc on a $E^{(k)}_{\alpha,\beta} * d = E^{(k)}_{\alpha,d\beta}$ et $F^{(k)}_{\alpha,\beta} * d = F^{(k)}_{\alpha,d\beta}$.

Proposition 2.1.11. *Si $\gamma=\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)\in \mathrm{GL}_2(\hat{\mathbb{Z}}), k\geq 1$ et $(\alpha,\beta)\in(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^2$, on a :*

$$E^{(k)}_{\alpha,\beta} * \gamma = E^{(k)}_{a\alpha+c\beta,b\alpha+d\beta} \text{ et } F^{(k)}_{\alpha,\beta} * \gamma = F^{(k)}_{a\alpha+c\beta,b\alpha+d\beta}.$$

Démonstration. Comme $\mathrm{GL}_2(\hat{\mathbb{Z}})=\cup_{d\in\hat{\mathbb{Z}}^*}\mathrm{SL}_2(\hat{\mathbb{Z}})\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&d\end{smallmatrix}\right)$, il suffit de vérifier pour $\gamma\in\mathrm{SL}_2(\hat{\mathbb{Z}})$ et $\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&d\end{smallmatrix}\right)$ avec $d\in\hat{\mathbb{Z}}^*$. Le cas de $\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&d\end{smallmatrix}\right)$ suit du lemme 2.1.8 et du q-développement de la proposition 2.1.9. Le cas de $\mathrm{SL}_2(\hat{\mathbb{Z}})$ suit du calcul ci-dessous pour $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ et se déduit par continuité.

Choisissons une présentation $(\tilde{\alpha},\tilde{\beta})\in\mathbb{Q}^2$ de $(\alpha,\beta)\in(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^2$, et si $\gamma=\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)\in\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, alors on a :

$$\begin{aligned}E^{(k)}_{\alpha,\beta}*\gamma=E^{(k)}_{\alpha,\beta}|_k\gamma(\tau)&=\frac{1}{(c\tau+d)^k}E_k(\gamma\tau,\tilde{\alpha}\gamma\tau+\tilde{\beta})\\&=\frac{1}{(c\tau+d)^k}\frac{\Gamma(k)}{(-2i\pi)^k}\sum_{\omega\in\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\gamma\tau}\frac{1}{(\omega+\tilde{\alpha}\gamma\tau+\tilde{\beta})^k}\\&=\frac{\Gamma(k)}{(-2i\pi)^k}\sum_{\omega\in\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau}\frac{1}{(\omega+\tilde{\alpha}(a\tau+b)+\tilde{\beta}(c\tau+d))^k}\\&=\frac{\Gamma(k)}{(-2i\pi)^k}\sum_{\omega\in\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau}\frac{1}{(\omega+(a\tilde{\alpha}+c\tilde{\beta})\tau+(b\tilde{\alpha}+d\tilde{\beta}))^k}\\&=E^{(k)}_{a\alpha+c\beta,b\alpha+d\beta}(\tau)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F^{(k)}_{\alpha,\beta}*\gamma=F^{(k)}_{\alpha,\beta}|_k\gamma(\tau)&=\frac{1}{(c\tau+d)^k}F_k(\gamma\tau,\tilde{\alpha}\gamma\tau+\tilde{\beta})\\&=\frac{1}{(c\tau+d)^k}\frac{\Gamma(k)}{(-2i\pi)^k}\sum_{\omega\in\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\gamma\tau}\frac{1}{w^k}e(\frac{w(\tilde{\alpha}\gamma\bar{\tau}+\tilde{\beta})-(\tilde{\alpha}\gamma\tau+\tilde{\beta})\bar{w}}{\gamma(\tau-\bar{\tau})})\\&=\frac{\Gamma(k)}{(-2i\pi)^k}\sum_{\omega\in\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau}\frac{1}{w^k}e(\frac{w(\tilde{\alpha}(a\bar{\tau}+b)+\tilde{\beta}(c\bar{\tau}+d))-(\tilde{\alpha}(a\tau+b)+\tilde{\beta}(c\tau+d))\bar{w}}{\tau-\bar{\tau}})\\&=\frac{\Gamma(k)}{(-2i\pi)^k}\sum_{\omega\in\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau}\frac{1}{w^k}e(\frac{w((a\tilde{\alpha}+c\tilde{\beta})\bar{\tau}+b\tilde{\alpha}+d\tilde{\beta})-((a\tilde{\alpha}+c\tilde{\beta})\tau+b\tilde{\alpha}+d\tilde{\beta})\bar{w}}{\tau-\bar{\tau}})\\&=F^{(k)}_{a\alpha+c\beta,b\alpha+d\beta}(\tau).\end{aligned}$$

□

2.1.4 Les distributions $z_{Eis}(k), z'_{Eis}(k)$, et $z_{Eis}(k,j)$

Soient $X = (\mathbb{Q}\otimes\hat{\mathbb{Z}})^2, G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}\otimes\hat{\mathbb{Z}})$ et $V = \mathcal{M}_k^{\mathrm{cong}}(\mathbb{Q}^{\mathrm{cycl}})$. Alors X est un espace topologique localement profini et G est un groupe localement profini, agissant continûment à droite sur X par la multiplication de matrices.

L'action de G sur V à droite, noté par $*$, se déduit de l'action de $\Pi'_{\mathbb{Q}}$ sur V et l'action de $\Pi_{\mathbb{Q}}$ se factorise à traver $\mathrm{GL}_2(\hat{\mathbb{Z}})$. Comme tout $\gamma\in\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}\otimes\hat{\mathbb{Z}})$ peut s'écrire sous la forme $\gamma = g_1\left(\begin{smallmatrix} r_0 & 0\\ 0 & r_0\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0\\ 0 & e\end{smallmatrix}\right)g_2$ avec $g_1,g_2\in\mathrm{GL}_2(\hat{\mathbb{Z}}), r_0\in\mathbb{Q}_+^*$ et e un entier ≥ 1, il suffit de donner les formules pour $\gamma\in\mathrm{GL}_2(\hat{\mathbb{Z}}), \gamma = \left(\begin{smallmatrix} r_0 & 0\\ 0 & r_0\end{smallmatrix}\right)$ et $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0\\ 0 & e\end{smallmatrix}\right)$ respectivement. Comme $\left(\begin{smallmatrix} r_0 & 0\\ 0 & r_0\end{smallmatrix}\right)$ et $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0\\ 0 & e\end{smallmatrix}\right)$ apparaissent dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})_+$, on prend ses actions par la formule (1.2) dans "notation". Si $\gamma\in\mathrm{GL}_2(\hat{\mathbb{Z}})$, en utilisant la décomposition $\mathrm{GL}_2(\hat{\mathbb{Z}}) = \cup_{d\in\hat{\mathbb{Z}}^*}\mathrm{SL}_2(\hat{\mathbb{Z}})\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0\\ 0 & d\end{smallmatrix}\right)$, on décompose l'action de γ en deux parties. Comme on est en poids k, l'action de $\mathrm{SL}_2(\hat{\mathbb{Z}})$ est l'action $|_k$. L'action de $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0\\ 0 & d\end{smallmatrix}\right)$ est via un relèvement σ_d dans $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}}$ agissant sur les coefficients du q-développement. En particulier, au cas des séries d'Eisenstein, la proposition 2.1.11 nous donne les formules explicites.

Alors, on peut appliquer les formules (1.1) dans "notation" au cas au-dessus.

Théorème 2.1.12. *Si $k\geq 1$, il existe une distribution algébrique $z_{Eis}(k)$ (resp. $z'_{Eis}(k)$) $\in\mathfrak{D}_{\mathrm{alg}}((\mathbb{Q}\otimes\hat{\mathbb{Z}})^2,\mathcal{M}_k^{\mathrm{cong}}(\mathbb{Q}^{\mathrm{cycl}}))$ vérifiant : quels que soient $r\in\mathbb{Q}^*$ et $(a,b)\in\mathbb{Q}^2$, on a*

$$\int_{(a+r\hat{\mathbb{Z}})\times(b+r\hat{\mathbb{Z}})} z_{Eis}(k) = r^{-k}E^{(k)}_{r^{-1}a,r^{-1}b}$$

$$\Big(resp. \int_{(a+r\hat{\mathbb{Z}})\times(b+r\hat{\mathbb{Z}})} z_{Eis}(k) = r^{-k}\tilde{E}^{(k)}_{r^{-1}a,r^{-1}b}\ si\ k=2\Big)$$

$$\int_{(a+r\hat{\mathbb{Z}})\times(b+r\hat{\mathbb{Z}})} z'_{Eis}(k) = r^{k-2}F^{(k)}_{r^{-1}a,r^{-1}b}.$$

De plus, si $\gamma\in\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}\otimes\hat{\mathbb{Z}})$, alors

$$z_{Eis}(k)*\gamma = z_{Eis}(k)\ et\ z'_{Eis}(k)*\gamma = |\det\gamma|^{1-k}z'_{Eis}(k).$$

Démonstration. L'existence de la distribution résulte des relations de distribution de $E^{(k)}_{\alpha,\beta}$ et $F^{(k)}_{\alpha,\beta}$ dans le lemme (2.1.5). Comme tout $\gamma\in\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}\otimes\hat{\mathbb{Z}})$ peut s'écrire sous la forme $\gamma = g_1\left(\begin{smallmatrix} r_0 & 0\\ 0 & r_0\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0\\ 0 & e\end{smallmatrix}\right)g_2$ avec $g_1,g_2\in\mathrm{GL}_2(\hat{\mathbb{Z}}), r_0\in\mathbb{Q}_+^*$ et e un entier ≥ 1. Alors, le calcul suivant montre la dernière assertion dans la proposition :

– si $\gamma\in\mathrm{GL}_2(\hat{\mathbb{Z}})$, on a $|\det\gamma| = 1$.

$$\begin{aligned}\int_{(a+r\hat{\mathbb{Z}})\times(b+r\hat{\mathbb{Z}})} z_{Eis}(k)*\gamma &= \left(\int_{((a+r\hat{\mathbb{Z}})\times(b+r\hat{\mathbb{Z}}))*\gamma^{-1}} z_{Eis}(k)\right)*\gamma\\ &= (r^{-k}E^{(k)}_{(r^{-1}a,r^{-1}b)*\gamma^{-1}})*\gamma\\ &= r^{-k}E^{(k)}_{r^{-1}a,r^{-1}b}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{(a+r\hat{\mathbb{Z}})\times(b+r\hat{\mathbb{Z}})} z'_{Eis}(k) * \gamma &= \left(\int_{((a+r\hat{\mathbb{Z}})\times(b+r\hat{\mathbb{Z}}))*\gamma^{-1}} z'_{Eis}(k)\right) * \gamma \\ &= r^{k-2} F^{(k)}_{(r^{-1}a,r^{-1}b)*\gamma^{-1}} * \gamma \\ &= r^{k-2} F^{(k)}_{r^{-1}a,r^{-1}b}.\end{aligned}$$

Les dernières équations dans les formules au-dessus se déduisent de la proposition 2.1.11.

– si $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} r_0 & 0 \\ 0 & r_0 \end{smallmatrix}\right)$, on a :

$$\begin{aligned}\int_{(a+r\hat{\mathbb{Z}})\times(b+r\hat{\mathbb{Z}})} z_{Eis}(k) * \gamma &= \left(\int_{(\frac{a}{r_0}+\frac{r}{r_0}\hat{\mathbb{Z}})\times(\frac{b}{r_0}+\frac{r}{r_0}\hat{\mathbb{Z}})} z_{Eis}(k)\right) * \gamma \\ &= (\frac{r}{r_0})^{-k}(E^{(k)}_{r^{-1}a,r^{-1}b}) * \gamma \\ &= (\frac{r}{r_0})^{-k}\frac{1}{(0\tau+r_0)^k} E^{(k)}_{r^{-1}a,r^{-1}b}(\gamma\tau) \\ &= r^{-k} E^{(k)}_{r^{-1}a,r^{-1}b};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{(a+r\hat{\mathbb{Z}})\times(b+r\hat{\mathbb{Z}})} z'_{Eis}(k) * \gamma &= \left(\int_{(\frac{a}{r_0}+\frac{r}{r_0}\hat{\mathbb{Z}})\times(\frac{b}{r_0}+\frac{r}{r_0}\hat{\mathbb{Z}})} z'_{Eis}(k)\right) * \gamma \\ &= (\frac{r}{r_0})^{k-2}(F^{(k)}_{r^{-1}a,r^{-1}b}) * \gamma \\ &= (\frac{r}{r_0})^{k-2}\frac{1}{(0\tau+r_0)^k} F^{(k)}_{r^{-1}a,r^{-1}b}(\gamma\tau) \\ &= r^{k-2}(\det\gamma)^{1-k} F^{(k)}_{r^{-1}a,r^{-1}b};\end{aligned}$$

– si $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e \end{smallmatrix}\right)$, on a :

$$\begin{aligned}\int_{(a+r\hat{\mathbb{Z}})\times(b+r\hat{\mathbb{Z}})} z_{Eis}(k) * \gamma &= (\int_{((a+r\hat{\mathbb{Z}})\times(b+r\hat{\mathbb{Z}}))*\gamma^{-1}} z_{Eis}(k)) * \gamma \\ &= (\int_{(a+r\hat{\mathbb{Z}})\times(\frac{b}{e}+\frac{r}{e}\hat{\mathbb{Z}})} z_{Eis}(k)) * \gamma \\ &= \sum_{i=0}^{e-1}(\int_{(a+r\hat{\mathbb{Z}})\times(\frac{b}{e}+\frac{ir}{e}+r\hat{\mathbb{Z}})} z_{Eis}(k)) * \gamma \\ &= \frac{1}{(0\tau+e)^k} r^{-k}\sum_{i=0}^{e-1} E^{(k)}_{r^{-1}a,\frac{r^{-1}b+i}{e}}(\frac{\tau}{e}) \\ &= r^{-k} E^{(k)}_{r^{-1}a,r^{-1}b},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{(a+r\hat{\mathbb{Z}})\times(b+r\hat{\mathbb{Z}})} z'_{Eis}(k)_{|_k}\gamma &= (\int_{((a+r\hat{\mathbb{Z}})\times(b+r\hat{\mathbb{Z}}))*\gamma^{-1}} z'_{Eis}(k))*\gamma \\ &= (\int_{(a+r\hat{\mathbb{Z}})\times(\frac{b}{e}+\frac{r}{e}\hat{\mathbb{Z}})} z'_{Eis}(k))*\gamma \\ &= \sum_{i=0}^{e-1}(\int_{(a+r\hat{\mathbb{Z}})\times(\frac{b}{e}+\frac{ir}{e}+r\hat{\mathbb{Z}})} z'_{Eis}(k))*\gamma \\ &= \frac{1}{(0\tau+e)^k} r^{k-2}\sum_{i=0}^{e-1} F^{(k)}_{r^{-1}a,\frac{r^{-1}b+i}{e}}(\frac{\tau}{e}) \\ &= r^{k-2}(\det\gamma)^{1-k}F^{(k)}_{r^{-1}a,r^{-1}b},\end{aligned}$$

et les dernières équations se déduisent des relations (2.3) dans le lemme 2.1.5.

□

On peut identifier $(\mathbb{Q}\otimes\hat{\mathbb{Z}})^2\times(\mathbb{Q}\otimes\hat{\mathbb{Z}})^2$ avec $\mathbf{M}_2(\mathbb{Q}\otimes\hat{\mathbb{Z}})$ via le morphisme $((a,b),(c,d))\mapsto \left(\begin{smallmatrix} a & b\\ c & d\end{smallmatrix}\right)$. En utilisant le fait que le produit de deux formes modulaires de poids i et j est une forme modulaire de poids $i+j$, on obtient une application naturelle :

$$\mathfrak{D}_{\mathrm{alg}}((\mathbb{Q}\otimes\hat{\mathbb{Z}})^2,\mathcal{M}_i(\overline{\mathbb{Q}}))\otimes\mathfrak{D}_{\mathrm{alg}}((\mathbb{Q}\otimes\hat{\mathbb{Z}})^2,\mathcal{M}_j(\overline{\mathbb{Q}}))\to\mathfrak{D}_{\mathrm{alg}}(\mathbf{M}_2(\mathbb{Q}\otimes\hat{\mathbb{Z}}),\mathcal{M}_{i+j}(\overline{\mathbb{Q}})).$$

Si $k\geq 2$ et $1\leq j\leq k-1$, on définit

$$z_{Eis}(k,j)=\frac{(-1)^j}{(j-1)!}z'_{Eis}(k-j)\otimes z_{Eis}(j)\in\mathfrak{D}_{\mathrm{alg}}(\mathbf{M}_2(\mathbb{Q}\otimes\hat{\mathbb{Z}}),\mathcal{M}_k(\overline{\mathbb{Q}})).$$

Par construction dans le théorème (2.1.12), on a les propriétés de cette distribution $z_{Eis}(k,j)$ suivantes :

(1) Si M,N sont deux entiers ≥ 1, on pose $O_{M,N}=\{\left(\begin{smallmatrix} a_0 & b_0\\ c_0 & d_0\end{smallmatrix}\right), a_0-1, b_0\in M\hat{\mathbb{Z}}, c_0, d_0-1\in N\hat{\mathbb{Z}}\}$ et $\phi_{M,N}$ la fonction caractéristique de $O_{M,N}$. Alors on a :

$$\int\phi_{M,N}z_{Eis}(k,j)=\frac{(-1)^j}{(j-1)!}M^{k-j-2}N^{-j}F^{(k-j)}_{\frac{1}{M},0}E^{(j)}_{0,\frac{1}{N}}.$$

(2)Par le théorème ci-dessus, on a :

$$\text{Si } \gamma\in\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}\otimes\hat{\mathbb{Z}}),\qquad z_{Eis}(k,j)_{|_k}\gamma=|\det\gamma|^{j-1}z_{Eis}(k,j).$$

2.1.5 Une variante des séries d'Eisenstein et la distribution $z_{Eis,c,d}(k,j)$

Soit $<\cdot>$: $\mathbb{Z}_p^*\to\hat{\mathbb{Z}}^*$ l'inclusion naturelle en envoyant x sur $<x>=(1,\cdots,x,1,\cdots)$, où x est à la place p. Considérons l'inclusion de $\hat{\mathbb{Z}}^*$ dans $\mathrm{GL}_2(\hat{\mathbb{Z}})$ en envoyant d sur $\left(\begin{smallmatrix} d & 0\\ 0 & d\end{smallmatrix}\right)$. D'après la proposition 2.1.11, cela définit une action de $d\in\hat{\mathbb{Z}}^*$ sur les séries d'Eisenstein par les formules : si $k\geq 1$ et $(\alpha,\beta)\in(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^2$, on a

$$d\cdot E^k_{\alpha,\beta}=E^{(k)}_{d\alpha,d\beta}=E^{(k)}_{\alpha,\beta}*\left(\begin{smallmatrix} d & 0\\ 0 & d\end{smallmatrix}\right) \text{ et } d\cdot F^{(k)}_{\alpha,\beta}=F^{(k)}_{d\alpha,d\beta}=F^{(k)}_{\alpha,\beta}*\left(\begin{smallmatrix} d & 0\\ 0 & d\end{smallmatrix}\right), \tag{2.4}$$

où l'action de $*$ est celle de $\mathrm{GL}_2(\hat{\mathbb{Z}})$ sur les séries d'Eisenstein.

Considérons l'injection de $\mathcal{M}_k^{\mathrm{cong}}(\overline{\mathbb{Q}})$ dans $\mathcal{M}_k^{\mathrm{cong}}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$. On peut définir une variante des séries d'Eisenstein à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}_p$ ci-dessous : On pose

$$(2.5)\qquad \begin{aligned} E^{(k)}_{c,\alpha,\beta} &= \begin{cases} c^2E^{(k)}_{\alpha,\beta} - c^kE^{(k)}_{<c>\alpha,<c>\beta}; \text{ si } k\geq 1 \text{ et } k\neq 2,\\ c^2\tilde{E}^{(2)}_{\alpha,\beta} - c^2\tilde{E}^{(2)}_{<c>\alpha,<c>\beta}; \text{ si } k=2; \end{cases}\\ F^{(k)}_{c,\alpha,\beta} &= c^2F^{(k)}_{\alpha,\beta} - c^{2-k}F^{(k)}_{<c>\alpha,<c>\beta} \text{ si } k\geq 1 \text{ et } k\neq 2, \text{ ou si } (\alpha,\beta)\neq(0,0) \text{ et } k=2. \end{aligned}$$

Elles sont des combinations linéaires des séries d'Eisenstein. On définit une dérivation ∂_z sur $E^{(k)}_{c,\alpha,\beta}$ par la formule :

$$\partial_zE^{(k)}_{c,\alpha,\beta} = \partial_z(c^2E_k(\tau,z) - c^kE_k(\tau,cz))|_{z=\alpha\tau+\beta}.$$

De la relation $E_{k+1}(\tau,z) = \partial_zE_k(\tau,z)$ si $k\in\mathbb{N}$, on déduit que :

Lemme 2.1.13. *On a* $\partial_zE^{(k)}_{c,\alpha,\beta} = E^{(k+1)}_{c,\alpha,\beta}$.

D'après le paragraphe §2.1.4. on déduit le résultat suivant :

Proposition 2.1.14. *(1) Soit $c\in\mathbb{Z}_p^*$. Si $k\geq 1$, il existe une distribution algébrique $z_{Eis,c}(k)$ (resp. $z'_{Eis,c}$) $\in\mathfrak{D}_{\mathrm{alg}}((\mathbb{Q}\otimes\hat{\mathbb{Z}})^2,\mathcal{M}_k^{\mathrm{cong}}(\mathbb{Q}_p^{\mathrm{cycl}}))$ vérifiant : quel que soient $r\in\mathbb{Q}^*$ et $(a,b)\in\mathbb{Q}^2$, on a*

$$\int_{(a+r\hat{\mathbb{Z}})\times(b+r\hat{\mathbb{Z}})} z_{Eis,c}(k) = r^{-k}E^{(k)}_{c,r^{-1}a,r^{-1}b}$$

$$(\textit{ resp. } \int_{(a+r\hat{\mathbb{Z}})\times(b+r\hat{\mathbb{Z}})} z'_{Eis,c}(k) = r^{k-2}F^{(k)}_{c,r^{-1}a,r^{-1}b}.)$$

De plus, si $\gamma\in\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}\otimes\hat{\mathbb{Z}})$, alors

$$z_{Eis,c}(k)*\gamma = z_{Eis,c}(k) \textit{ et } z'_{Eis,c}*\gamma = |\det\gamma|^{1-k}z'_{Eis,c}(k).$$

(2) Soient $c,d\in\mathbb{Z}_p^*$. Si $k\geq 2$ et $1\leq j\leq k-1$, la distribution

$$z_{Eis,c,d}(k,j) = \frac{(-1)^j}{(j-1)!}z'_{Eis,c}(k-j)\otimes z_{Eis,d}(j)$$

appartient à $\mathfrak{D}_{\mathrm{alg}}(\mathbf{M}_2(\mathbb{Q}\otimes\hat{\mathbb{Z}}),\mathcal{M}_k(\mathbb{Q}_p^{\mathrm{cycl}}))$. De plus, elle vérifie les propriétés suivantes :

- *Si M,N sont deux entiers ≥ 1, on pose $O_{M,N} = \{\left(\begin{smallmatrix} a_0 & b_0\\ c_0 & d_0\end{smallmatrix}\right), a_0-1, b_0\in M\hat{\mathbb{Z}}, c_0, d_0-1\in N\hat{\mathbb{Z}}\}$ et $\phi_{M,N}$ la fonction caractéristique de $O_{M,N}$. Alors on a :*

$$\int\phi_{M,N}z_{Eis,c,d}(k,j) = \frac{(-1)^j}{(j-1)!}M^{k-j-2}N^{-j}F^{(k-j)}_{c,\frac{1}{M},0}E^{(j)}_{d,0,\frac{1}{N}}.$$

- *Si $\gamma\in\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}\otimes\hat{\mathbb{Z}})$, $z_{Eis,c,d}(k,j)_{|_k}\gamma = |\det\gamma|^{j-1}z_{Eis,c,d}(k,j)$.*

2.2 Unités de Siegel et distribution z_{siegel}

Définition 2.2.1. Soit Γ un sous-groupe de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ d'indice fini.

(1) Une fonction modulaire de poids 0 pour Γ est une fonction holomorphe $f(\tau)$ sur $\mathcal{H}$ et méromorphe sur $(\mathcal{H} \cup \mathbb{P}^1(\mathbb{Q}))/\Gamma$, telle que,

$$f(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}) = (c\tau + d)^k f(z) \text{ pour } \gamma \in \Gamma;$$

(2) Une unité modulaire pour Γ est une unité de l'anneux des fonctions modulaires de poids 0 pour Γ .

Soit K un sous corps de $\mathbb{C}$. On note $\mathcal{U}(\Gamma, K)$ le groupe des unités modulaires pour Γ dont le q-développement est à coefficients dans K. On note $\mathcal{U}(K)$ la réunion des $\mathcal{U}(\Gamma, K)$, où Γ décrit tous les sous-groupes d'indice fini de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

La fonction theta $\theta(\tau, z)$ est définie par le produit infini

$$\theta(\tau, z) = q^{1/12}(q_z^{1/2} - q_z^{-1/2}) \prod_{n \geq 1}((1 - q^n q_z)(1 - q^n q_z^{-1})).$$

Rappelons ci-après les propriétés fondamentales de la fonction θ (voir [20] chapitre 19) :

– θ est homogène de degré 0.

– Soit $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Alors $\theta(\tau, z)$ satisfait une équation fonctionnelle de la forme suivante :

$$\theta(\gamma(\begin{smallmatrix} \tau \\ 1 \end{smallmatrix}), z) = \zeta_{12,\gamma}\theta(\tau, z)e(\frac{\pi i c_0 z^2}{(c_0\tau + d_0)})$$

où $\zeta_{12,\gamma}$ est une racine d'unité d'ordre 12 qui dépend de γ et $\gamma(\begin{smallmatrix} \tau \\ 1 \end{smallmatrix})$ est le produit de matrices usuel (i.e. $\gamma(\begin{smallmatrix} \tau \\ 1 \end{smallmatrix}) = (\begin{smallmatrix} a_0\tau + b_0 \\ c_0\tau + d_0 \end{smallmatrix})$).

Elle n'est pas périodique en z de période $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau$. Notons Λ_τ le réseau $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau$. Pour un entier $c > 2, (c, 6) = 1$, on définit une autre fonction $g_{0,c}(z) = \theta(\tau, z)^{c^2}\theta(\tau, cz)^{-1}$ à partir de la fonction theta. Soit a un entier ≥ 1 ; on note $\mathcal{O}(\mathbb{C}/\Lambda_\tau, a)$ l'anneau des fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}/\Lambda_\tau - (a^{-1}\Lambda_\tau)/\Lambda_\tau$ et on note $\mathcal{O}(\mathbb{C}/\Lambda_\tau, a)^*$ le groupe des unités de $\mathcal{O}(\mathbb{C}/\Lambda_\tau, a)$. Soit a, b deux entiers tels que $(a, b) = 1$; on définit une application de norme du groupe $\mathcal{O}(\mathbb{C}/\Lambda_\tau, ab)^*$ dans le groupe $\mathcal{O}(\mathbb{C}/\Lambda_\tau, b)^*$ comme suit : soit $f(z) \in \mathcal{O}(\mathbb{C}/\Lambda_\tau, ab)^*$, on a

$$N_a(f(z)) := \prod_{k=0}^{a-1}\prod_{j=0}^{a-1} f(\frac{z}{a} + \frac{k}{a} + \frac{j\tau}{a}).$$

Lemme 2.2.2. *(1) La fonction $g_{0,c}(z)$ est une fonction elliptique sur $\mathbb{C}/\Lambda_\tau$. De plus, elle est une unité de l'anneau $\mathcal{O}(\mathbb{C}/\Lambda_\tau, c)$ des fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}/\Lambda_\tau - (c^{-1}\Lambda_\tau)/\Lambda_\tau$.*

(2) Quel que soit a un entier ≥ 1 tel que $(a, c) = 1$, on a $N_a(g_{0,c}) = g_{0,c}$.

Démonstration. (1) La première assertion de (1) du lemme suit d'un calcul direct.

Observons que le diviseur associé à $g_{0,c}$ sur $\mathbb{C}/\Lambda_\tau$ est $c^2(\bar{0}) - c^{-1}\Lambda_\tau/\Lambda_\tau$ (cela suit de l'expression explicite de $g_{0,c}$

$$g_{0,c}(z) = q^{\frac{c^2-1}{12}}(-q_z)^{\frac{c-c^2}{2}} \frac{\prod_{n\geq 0}(1 - q^n q_z)^{c^2} \prod_{n\geq 1}(1 - q^n q_z^{-1})^{c^2}}{\prod_{n\geq 0}(1 - q^n q_z^c) \prod_{n\geq 1}(1 - q^n q_z^{-c})} :$$

les zeros $c^2(\bar{0})$ proviennent du terme $\prod_{n\geq 0}(1-q^nq_z)^{c^2}\prod_{n\geq 1}(1-q^nq_z^{-1})^{c^2}$ et les pôles $c^{-1}\Lambda_\tau/\Lambda_\tau$ proviennent du terme $\prod_{n\geq 0}(1-q^nq_z^c)\prod_{n\geq 1}(1-q^nq_z^{-c})$.) Il s'ensuit que $g_{0,c}$ est une unité de l'anneau des fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}/\Lambda_\tau-(c^{-1}\mathbb{Z}+c^{-1}\mathbb{Z}\tau)/\Lambda_\tau$.

(2) De la définition de l'application N_a, on a $N_a(N_b(g_{0,c}))=N_b(N_a(g_{0,c}))$ pour $a,b\in\mathbb{N}$ tels que $(ab,c)=1$. Comme $N_a(g_{0,c})$ et $g_{0,c}(z)$ ont le même diviseur, il existe une constante $u_a\in\mathbb{C}^2$ telle que $N_a(g_{0,c})=u_ag_{0,c}$. Par la relation $N_aN_b=N_bN_a$, on a $u_b^{a^2-1}=u_a^{b^2-1}$. Si on pose $g=u_2^{-3}u_3g_{0,c}$, alors on a

$$N_a(g)=u_2^{-3a^2}u_3^{a^2}u_ag_{0,c}=u_2^{-3(a^2-1)}u_3^{a^2-1}u_ag=u_a^{-3(2^2-1)}u_a^{3^2-1}u_ag=g.$$

L'assertion se déduit des relations $N_2(g_{0,c})=g_{0,c}$ et $N_3(g_{0,c})=g_{0,c}$. En effet, quel que soit $a\geq 1$ tel que $(a,c)=1$, de la formule $\prod_{i=0}^{a-1}(1-X\zeta_a^i)=1-x^a$, on a

$$N_a(1-q^nq_z^{\pm 1})=\prod_{j=0}^{a-1}(1-q^{an+j}q_z^{\pm 1})$$
$$N_a(1-q^nq_z^{\pm c})=\prod_{j=0}^{a-1}(1-q^{a_n\pm cj}q_{cz}^{\pm 1}).$$

Alors, on a la relation

$$N_a(\prod_{n\geq 0}(1-q^nq_z)\prod_{n\geq 1}(1-q^nq_z^{-1}))=\prod_{n\geq 0}(1-q^nq_z)\prod_{n\geq 1}(1-q^nq_z^{-1});$$

cela simplifie les calculs et on vérifie facilement pour $a=2,3$, $N_a(g_{0,c})=g_{0,c}$.

□

Soit d un autre entier vérifiant $(d,6)=1$. On définit $c^*g_{0,d}(z)=g_{0,d}(cz)$, de manière explicite, on a :

$$q^{\frac{d^2-1}{12}}(-q_z)^{\frac{(d-d^2)c}{2}}\frac{\prod_{n\geq 0}(1-q^nq_z^c)^{d^2}\prod_{n\geq 1}(1-q^nq_z^{-c})^{d^2}}{\prod_{n\geq 0}(1-q^nq_z^{cd})\prod_{n\geq 1}(1-q^nq_z^{-cd})}.$$

Lemme 2.2.3. *Soient c,d deux entiers tels que $(cd,6)=1$. Alors on a*

$$(g_{0,d})^{c^2}(c^*g_{0,d})^{-1}=(g_{0,c})^{d^2}(d^*g_{0,c})^{-1}. \tag{2.6}$$

Démonstration. Considérons les fonctions méromorphes $(g_{0,d})^{c^2}(c^*g_{0,d})^{-1}$ et $(g_{0,c})^{d^2}(d^*g_{0,c})^{-1}$, elles ont le même diviseur sur $\mathbb{C}/\Lambda_\tau$: $c^2d^2(\bar{0})-c^2(d^{-1}\Lambda_\tau/\Lambda_\tau)-d^2(c^{-1}\Lambda_\tau/\Lambda_\tau)+((cd)^{-1}\Lambda_\tau/\Lambda_\tau)$. Donc $\frac{(g_{0,d})^{c^2}(c^*g_{0,d})^{-1}}{(g_{0,c})^{d^2}(d^*g_{0,c})^{-1}}$ est une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}/\Lambda_\tau$; en particulier, elle est une fonction constante non nulle u. Comme $g_{0,c}$ est stable sous l'application de norme N_a pour $(a,c)=1$, il en résulte que pour $a=2$ (resp. 3), $u^4=u$ (resp. $u^9=u$). Donc $u=1$. □

Soit $(\alpha,\beta)\in(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^2$; on définit une action de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ à droite par le produit de matrices usuel :

$$\text{si } \gamma=\left(\begin{smallmatrix} a_0 & b_0\\ c_0 & d_0\end{smallmatrix}\right), (\alpha,\beta)*\gamma=(a_0\alpha+c_0\beta,b_0\alpha+d_0\beta).$$

Pour $(\alpha,\beta)\in(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^2$, choisissons un relèvement (a,b) de (α,β) dans $\mathbb{Q}^2$, et posons

$$g_{c,\alpha,\beta}(\tau)=g_{0,c}(a\tau+b).$$

Proposition 2.2.4. *Soient* $\alpha, \beta \in \frac{1}{N}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$.

(i) Si $(c,6)=1$ *et* $(c\alpha, c\beta) \neq (0,0)$, *alors* $g_{c,\alpha,\beta}$ *est une unité modulaire dans* $\mathcal{U}(\Gamma_N, \mathbb{Q}(\zeta_N))$.

(ii) Si $(c,6)=1$, *l'élément* $g_{\alpha,\beta} = g_{c,\alpha,\beta}^{1/(c^2-1)}$ *de* $\mathbb{Q} \otimes \mathcal{U}(\overline{\mathbb{Q}})$ *ne dépend pas du choix de* $c \equiv 1 \mod N$. *De plus, on a* $g_{c,\alpha,\beta} = g_{\alpha,\beta}^{c^2} g_{c\alpha,c\beta}^{-1}$.

Démonstration. (i) Comme $(c\alpha, c\beta) \neq (0,0)$, on obtient $a\tau + b \notin c^{-1}\mathbb{Z} + c^{-1}\mathbb{Z}\tau$. Comme $g_{0,c}$ est une unité de l'anneau des fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}/(\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau) - (c^{-1}\mathbb{Z} + c^{-1}\mathbb{Z}\tau)/(\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau)$, la fonction $g_{c,\alpha,\beta}(\tau)$ n'a ni zéros, ni pôles sur $\mathcal{H}$. De plus, la fonction $g_{c,\alpha,\beta}$ a la formule explicite :

$$q^{\frac{c^2-1}{12}}(-q^a e(2\pi i b))^{(\frac{c-c^2}{2})} \frac{\prod_{n\geq 0}(1-q^n q^a e(2\pi i b))^{c^2} \prod_{n \geq 1}(1-q^n q^{-a} e(-2\pi i b))^{c^2}}{\prod_{n\geq 0}(1-q^n q^{ac} e(2\pi i b c)) \prod_{n\geq 1}(1-q^n q^{-ac} e(-2\pi i b c))}. \tag{2.7}$$

Considérons le q-développement de cette formule, on trouve que les coefficients sont dans $\mathbb{Q}(\zeta_N)$. Donc il suffit de vérifier que c'est une fonction modulaire pour le sous groupe de congruence Γ_N.

Considérons la fonction $\theta(\tau, a\tau+b)$ sous l'action de $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Comme l'action de γ sur $\binom{\tau}{1}$ nous donne une base nouvelle du réseau $(\tau, 1)$, le point $a\tau + b$ ne change pas. Pour l'action de γ donnée par transformation de Möbius, le point $a\tau+b$ est envoyé en $a\gamma\tau + b$.

Alors, avec les propriétés fondamentales de la fonction θ rappelées ci-dessus, on a ‡

$$\begin{aligned} g_{c,\alpha,\beta}(\gamma\tau) &= \frac{\theta(\gamma\tau, a\gamma\tau+b)^{c^2}}{\theta(\gamma\tau, c(a\gamma\tau+b))} = \frac{\theta(\gamma\binom{\tau}{1}, (aa_0+bc_0)\tau + b_0 a + d_0 b)^{c^2}}{\theta(\gamma\binom{\tau}{1}, c((aa_0+bc_0)\tau + ab_0 + bd_0))} \\ &= \frac{\zeta_{12,\gamma}^{c^2}\theta(\tau, (aa_0+bc_0)\tau+b_0a+d_0b)^{c^2} e(\frac{c^2\pi i c_0((aa_0+bc_0)\tau+b_0a+d_0b)^2}{(c_0\tau+d_0)})}{\zeta_{12,\gamma}\theta(\tau, c((aa_0+bc_0)\tau+b_0a+d_0b)) e(\frac{\pi i c_0(c((aa_0+bc_0)\tau+b_0a+d_0b))^2}{(c_0\tau+d_0)})} \\ &= \zeta_{12,\gamma}^{c^2-1}\frac{\theta(\tau, (aa_0+bc_0)\tau+b_0a+d_0b)^{c^2}}{\theta(\tau, c((aa_0+bc_0)\tau+b_0a+d_0b))} = \zeta_{12,\gamma}^{c^2-1} g_{c,(\alpha,\beta)*\gamma}(\tau). \end{aligned}$$

Comme $(c,6)=1$, on a $12|(c^2-1)$. Si $\gamma \in \Gamma_N$, alors $(\alpha,\beta)*\gamma = (\alpha,\beta)$. Par conséquent $g_{c,\alpha,\beta}(\gamma\tau) = g_{c,\alpha,\beta}(\tau)$ si $\gamma \in \Gamma_N$.

(ii) Soit (a,b) un relèvement de (α,β) dans $\mathbb{Q}^2$. Si on évalue $c^* g_{0,d}(z)$ en $a\tau+b$, on obtient $c^* g_{0,d}(a\tau+b) = g_{0,d}(ca\tau+cb)$. Soient $c \equiv d \equiv 1[N]$. On a $c^* g_{0,d}(a\tau+b) = g_{d,\alpha,\beta}$ et $d^* g_{0,c}(a\tau+b) = g_{d,\alpha,\beta}$. On en déduit que $(g_{d,\alpha,\beta})^{c^2}(g_{d,\alpha,\beta})^{-1} = (g_{c,\alpha,\beta})^{d^2}(g_{c,\alpha,\beta})^{-1}$. Autrement dit, $g_{\alpha,\beta} = g_{c,\alpha,\beta}^{1/(c^2-1)}$ ne dépend pas du choix de $c \equiv 1 \mod N$.

Maintenant, soient $(c, 6N) = 1$ et $d \equiv 1 \mod N$. Si on évalue en $a\tau+b$, la rélation (2.6) se traduit en

$$(g_{d,\alpha,\beta})^{c^2} g_{d,c\alpha,c\beta}^{-1} = g_{c,\alpha,\beta}^{d^2} g_{c,\alpha,\beta}^{-1}.$$

Donc on a $g_{c,\alpha,\beta} = (g_{\alpha,\beta})^{c^2} g_{c\alpha,c\beta}^{-1}$. □

Remarque 2.2.5. Il y a une preuve geométrique de cette proposition, en utilisant l'espace de module des courbes elliptiques dans [18].

‡. le deuxième égalité est du fait que θ est homogène de degré 0 .

Lemme 2.2.6. *Soient $\alpha, \beta \in \frac{1}{N}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$. Si c est un entier tel que $(c,6)=1$ et $c \equiv 1 \mod N$, on a la relation suivante dans le corps $\overline{\mathbb{Q}}((q))$*

$$g_{c,\alpha,\beta} = \Big(q^{\frac{1}{12}-\frac{1}{2N}+\frac{a^2}{2N^2}} \prod_{n\geq 0}(1-q^n q_N^a \zeta_N^b) \prod_{n\geq 1}(1-q^n q_N^{-a}\zeta_N^{-b})\Big)^{c^2-1}.$$

Démonstration. On suppose $c = 1+kN$ et constate que

$$\frac{\prod_{n\geq 0}(1-q^n q_N^a\zeta_N^b)^{c^2}}{\prod_{n\geq 0}(1-q^n (q_N^a\zeta_N^b)^c)} = \prod_{n=0}^{ak-1}(1-q^n q_N^a\zeta_N^b)^{c^2} \prod_{n\geq ak}(1-q^n q_N^a\zeta_N^b)^{c^2-1}$$

$$\frac{\prod_{n\geq 1}(1-q^n (q_N^a\zeta_N^b)^{-1})^{c^2}}{\prod_{n\geq 1}(1-q^n (q_N^a\zeta_N^b)^{-c})} = \prod_{n=0}^{ak-1}(1-q^{-n} q_N^{-a}\zeta_N^{-b})^{-1} \prod_{n\geq 1}(1-q^n (q_N^a\zeta_N^b)^{-1})^{c^2-1}.$$

Le reste est un calcul direct. □

Remarque 2.2.7. On a la relation $\log|g_{c,\alpha,\beta}| = E^{(0)}_{c,\alpha,\beta} = c^2 E^{(0)}_{\alpha,\beta} - E^{(0)}_{c\alpha,c\beta}$; en particulier, $\log|g_{\alpha,\beta}| = E^{(0)}_{\alpha,\beta}$.

L'action de $\mathrm{GL}_2(\hat{\mathbb{Z}})$ sur $\mathcal{M}^{\mathrm{cong}}(\mathbb{Q}^{\mathrm{cycl}})$ induit celle de $\mathrm{GL}_2(\hat{\mathbb{Z}})$ sur $\mathbb{Q}\otimes\mathcal{U}^{\mathrm{cong}}(\mathbb{Q}^{\mathrm{cycl}})$.

Lemme 2.2.8. *Soit $(\alpha,\beta) \in (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^2$ et soit $\gamma \in \mathrm{GL}_2(\hat{\mathbb{Z}})$. Alors on a*

$$g_{\alpha,\beta} * \gamma = g_{(\alpha,\beta)*\gamma}.$$

Démonstration. Soient $\alpha,\beta \in \frac{1}{N}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$. Si $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\hat{\mathbb{Z}})$, on peut choisir un entier c tel que $(c,6)=1$, et $(c\alpha, c\beta) \neq (0,0)$. On a déja calculé l'action de $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ sur $g_{c,\alpha,\beta}$ dans la proposition ci-dessus :

$$g_{c,\alpha,\beta} * \gamma = g_{c,(\alpha,\beta)*\gamma}.$$

Celle-ci induit la formule de l'action de $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ sur $g_{\alpha,\beta}$:

$$g_{\alpha,\beta} * \gamma = g_{(\alpha,\beta)*\gamma}.$$

Elle se prolonge par continuité en une action de $\mathrm{SL}_2(\hat{\mathbb{Z}})$ avec la même formule. Si $\gamma = \left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&d\end{smallmatrix}\right)$ avec $d \in \hat{\mathbb{Z}}^*$, l'action de γ sur $g_{c,\alpha,\beta}$ est donnée par la formule :

$$g_{c,\alpha,\beta} * \gamma = g_{c,\alpha,d\beta} = g_{c,(\alpha,\beta)*\gamma},$$

cela se voit directement sur le q-développement (2.7) de $g_{c,\alpha,\beta}$ (on rappelle que $\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&d\end{smallmatrix}\right)$ agit par σ_d). Alors, l'action de $\gamma \in \mathrm{GL}_2(\hat{\mathbb{Z}})$ sur $g_{\alpha,\beta}$ est donnée par la formule :

$$g_{\alpha,\beta} * \gamma = g_{(\alpha,\beta)*\gamma}.$$

□

Théorème 2.2.9. *Il existe une distribution algébrique*

$$z_{siegel} \in \mathfrak{D}_{\mathrm{alg}}((\mathbb{Q}\otimes\hat{\mathbb{Z}})^2 - (0,0), \mathbb{Q}\otimes\mathcal{U}(\mathbb{Q}^{\mathrm{cycl}})),$$

telle que, quels que soient $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}^*$ et $(a,b) \in \mathbb{Q}^2 - (r_1\mathbb{Z}, r_2\mathbb{Z})$, on ait :

$$\int_{(a+r_1\hat{\mathbb{Z}})\times(b+r_2\hat{\mathbb{Z}})} z_{siegel} = g_{r_1^{-1}a, r_2^{-1}b}(\frac{r_1}{r_2}\tau).$$

De plus, z_{siegel} est invariante sous l'action de $\Pi'_{\mathbb{Q}}$.

Démonstration. Soient e, f deux entiers ≥ 1, $N = ord(r,a,b)$($:=$ le plus petit entier tel que Nr, Na et Nb sont des entiers). On peut trouver $c \in \mathbb{Z}$ tel que $(c, ef) = 1$ et $c \equiv 1 \mod N$. Alors

$$\begin{aligned}
&\prod_{l=0}^{e-1}\prod_{k=0}^{e-1} g_{(er)^{-1}(kr+a),(er)^{-1}(b+lr)} \\
=&\prod_{l=0}^{e-1}\prod_{k=0}^{e-1} g_{c,(er)^{-1}(kr+a),er^{-1}(b+lr)}^{1/(c^2-1)} \\
=&N_a(g_{c,r^{-1}a,r^{-1}b})^{1/(c^2-1)} = g_{c,r^{-1}a,r^{-1}b}^{1/(c^2-1)}; \\
&\prod_{l=0}^{e-1} g_{r^{-1}a,(er)^{-1}(b+lr)}(\frac{\tau}{e}) = \prod_{l=0}^{e-1} g_{c,r^{-1}a,er^{-1}(b+lr)}(\frac{\tau}{e})^{1/(c^2-1)} \\
=&(\prod_{l=0}^{e-1} q^{\frac{c^2-1}{12e}}(-q_{\frac{a\tau}{er}+\frac{b+lr}{er}})^{\frac{c-c^2}{2}} \frac{\prod_{n\geq 0}(1-q^{\frac{n}{e}}q_{\frac{a\tau}{er}+\frac{b+lr}{er}})^{c^2}\prod_{n\geq 1}(1-q^{\frac{n}{e}}q^{-1}_{\frac{a\tau}{er}+\frac{b+lr}{er}})^{c^2}}{\prod_{n\geq 0}(1-q^{\frac{n}{e}}q^{c}_{\frac{a\tau}{er}+\frac{b+lr}{er}})(1-q^{\frac{n}{e}}q^{-c}_{\frac{a\tau}{er}+\frac{b+lr}{er}})})^{\frac{1}{c^2-1}} \\
=&g_{c,r^{-1}a,r^{-1}b}^{1/(c^2-1)}.
\end{aligned}$$

Donc z_{siegel} est une distribution algébrique.

Par définition de z_{siegel} et $g_{\alpha,\beta}$, z_{siegel} est une distribution algébrique à valeurs dans $\mathbb{Q}\otimes\mathcal{U}(\mathbb{Q}^{\mathrm{cycl}})$. L'action de $\Pi'_{\mathbb{Q}}$ sur $\mathcal{M}^{\mathrm{cong}}(\mathbb{Q}^{\mathrm{cycl}})$ se factorise à travers $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}\otimes\hat{\mathbb{Z}})$. Donc en utilisant le même argument que dans le théorème 2.1.12, il suffit de vérifier l'invariance pour $\gamma \in \mathrm{GL}_2(\hat{\mathbb{Z}}), \gamma = \left(\begin{smallmatrix} r_0 & 0 \\ 0 & r_0 \end{smallmatrix}\right)$ et $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e \end{smallmatrix}\right)$ respectivement. L'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})_+$ sur l'espace des formes modulaires $\mathcal{M}(\overline{\mathbb{Q}})$ est donnée par la formule (1.2) dans "notations", c'est-à-dire, $(f*\gamma)(\tau) = f(\gamma\tau)$ car on est en poids 0.

– Si $\gamma \in \mathrm{GL}_2(\hat{\mathbb{Z}})$, du lemme 2.2.8, on a :

$$\begin{aligned}
\int_{(a+r\hat{\mathbb{Z}})\times(b+r\hat{\mathbb{Z}})} z_{siegel} * \gamma &= (\int_{((a+r\hat{\mathbb{Z}})\times(b+r\hat{\mathbb{Z}}))*\gamma^{-1}} z_{siegel}) * \gamma \\
&= (g_{(r^{-1}a,r^{-1}b)*\gamma^{-1}}) * \gamma \\
&= g_{r^{-1}a,r^{-1}b}.
\end{aligned}$$

– Si $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} r_0 & 0 \\ 0 & r_0 \end{smallmatrix}\right)$, on a :

$$\begin{aligned}\int_{(a+r\hat{\mathbb{Z}})\times(b+r\hat{\mathbb{Z}})} z_{siegel} * \gamma &= \Big(\int_{(\frac{a}{r_0}+\frac{r}{r_0}\hat{\mathbb{Z}})\times(\frac{b}{r_0}+\frac{r}{r_0}\hat{\mathbb{Z}})} z_{siegel}\Big) * \gamma \\ &= (g_{r^{-1}a,r^{-1}b}) * \gamma \\ &= (\det\gamma)^{1-k} g_{r^{-1}a,r^{-1}b}|_\gamma \\ &= g_{r^{-1}a,r^{-1}b};\end{aligned}$$

– Si $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e \end{smallmatrix}\right)$, on a :

$$\begin{aligned}\int_{(a+r\hat{\mathbb{Z}})\times(b+r\hat{\mathbb{Z}})} z_{siegel} * \gamma &= \Big(\int_{(a+r\hat{\mathbb{Z}})\times(\frac{b}{e}+\frac{r}{e}\hat{\mathbb{Z}})} z_{siegel}\Big) * \gamma \\ &= \prod_{i=0}^{e-1}\Big(\int_{(a+r\hat{\mathbb{Z}})\times(\frac{b}{e}+\frac{ir}{e}+r\hat{\mathbb{Z}})} z_{siegel}\Big) * \gamma \\ &= \prod_{i=0}^{e-1} g_{r^{-1}a,\frac{r^{-1}b+i}{e}}(\frac{\tau}{e}) \\ &= \prod_{i=0,j=0}^{e-1} g_{\frac{r^{-1}a+j}{e},\frac{r^{-1}b+i}{e}}(\tau) \\ &= g_{r^{-1}a,r^{-1}b}.\end{aligned}$$

□

2.3 Théorie de Kummer p-adique

2.3.1 Théorie de Kummer p-adique

Soit G un groupe localement profini. Soit X un espace topologique localement profini muni d'une action continue de G à droite. Soit M un G-module topologique muni d'une action à droite de G. On note $\mathrm{H}^i(G, M)$ le i-ième groupe de cohomologie continue de G à valeurs dans M. Si X est de plus muni d'une G-action à gauche (notée $(g, x) = g \cdot x$) commutant à l'action à droite de G, alors $\mathrm{H}^i(G, \mathfrak{D}_{\mathrm{alg}}(X, M))$ est muni d'une structure de G-module à gauche donnée par la formule :

$$\int_X g \cdot \mu = \int_{gX} \mu \text{ si } \mu \in \mathrm{H}^i(G, \mathfrak{D}_{\mathrm{alg}}(X, M)).$$

Pour notre cas, posons :

$$X_1 = (\mathbb{Q} \otimes \hat{\mathbb{Z}})^2 - (0, 0),$$

$$X_2 = \{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathbf{M}_2(\mathbb{Q} \otimes \hat{\mathbb{Z}}) | (a, b) \neq (0, 0), (c, d) \neq (0, 0)\} \text{ et } G = \Pi'_{\mathbb{Q}}.$$

D'autre part, on note

$$X_2^{(p)} := \mathbf{M}_2(\mathbb{Q} \otimes \hat{\mathbb{Z}})^{(p)} \subset X_2.$$

Dans la section précédente, on a obtenu une distribution algébrique

$$z_{siegel} \in \mathfrak{D}_{\mathrm{alg}}\big(X_1, \mathbb{Q} \otimes \mathcal{U}(\mathbb{Q}^{\mathrm{cycl}})\big),$$

qui est invariante sous l'action de $\Pi'_{\mathbb{Q}}$.

Notons $Z^0 = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} | x_n \in \mathcal{U}(\overline{\mathbb{Q}}), (x_{n+1})^p = x_n\}$ et $Z = Z^0 \otimes \mathbb{Q}$. Alors Z est muni d'une action de $\Pi'_{\mathbb{Q}}$, agissant sur chaque composante de Z.

On définit une projection θ de Z^0 sur $\mathcal{U}(\overline{\mathbb{Q}})$ en envoyant $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à x_0.

Lemme 2.3.1. *La projection $\theta : Z^0 \to \mathcal{U}(\overline{\mathbb{Q}})$ est surjective, dont le noyau est*

$$\mathrm{Ker}(\theta) = \{(1, \epsilon_p, \epsilon_{p^n}, ...\epsilon_{p^n}, ...)\} \cong \mathbb{Z}_p(1).$$

Démonstration. Soit Γ un sous-groupe de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ d'indice fini et soit $x \in \mathcal{U}(\overline{\mathbb{Q}})$ une unité modulaire pour Γ. Alors $x^{\frac{1}{p}}$ est encore une fonction holomorphes sur $\mathcal{H}$ et méromorphe sur $\mathcal{H} \cup \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$.

Soit $\gamma \in \Gamma$, alors $x^{\frac{1}{p}} * \gamma = \zeta_{p,\gamma} x^{\frac{1}{p}}$, où $\zeta_{p,\gamma}$ est une racine d'unité d'ordre p qui dépend de γ ; ce qui nous fournit un caractére χ de Γ sur μ_p le groupe des racine d'unité d'ordre p. Par conséquent, le noyau du caratère χ est un sous-groupe de Γ d'indice fini, qui fixe $x^{\frac{1}{p}}$. Ceci permet de conclure la surjectivité.

Le reste est immédiat. □

Comme $\mathbb{Q}$ est plat sur $\mathbb{Z}$, on obtient une suite exacte de $\Pi'_{\mathbb{Q}}$-modules :

$$0 \to \mathbb{Q}_p(1) \to Z \to \mathbb{Q} \otimes \mathcal{U}(\overline{\mathbb{Q}}) \to 0.$$

Cela nous fournit une suite exacte de $\Pi'_{\mathbb{Q}}$-modules :

$$0 \to \mathfrak{D}_{\mathrm{alg}}(X_1, \mathbb{Q}_p(1)) \to \mathfrak{D}_{\mathrm{alg}}(X_1, Z) \to \mathfrak{D}_{\mathrm{alg}}(X_1, \mathbb{Q} \otimes \mathcal{U}(\overline{\mathbb{Q}})) \to 0.$$

En prenant la cohomologie continue de $\Pi'_{\mathbb{Q}}$, on obtient une suite exacte longue :

$$\begin{aligned} 0 &\to \mathrm{H}^0(\Pi'_{\mathbb{Q}}, \mathfrak{D}_{\mathrm{alg}}(X_1, \mathbb{Q}_p(1))) \to \mathrm{H}^0(\Pi'_{\mathbb{Q}}, \mathfrak{D}_{\mathrm{alg}}(X_1, Z)) \\ &\to \mathrm{H}^0(\Pi'_{\mathbb{Q}}, \mathfrak{D}_{\mathrm{alg}}(X_1, \mathbb{Q} \otimes \mathcal{U}(\overline{\mathbb{Q}}))) \xrightarrow{\delta} \mathrm{H}^1(\Pi'_{\mathbb{Q}}, \mathfrak{D}_{\mathrm{alg}}(X_1, \mathbb{Q}_p(1))) \\ &\to \mathrm{H}^1(\Pi'_{\mathbb{Q}}, \mathfrak{D}_{\mathrm{alg}}(X_1, Z)) \to \cdots \end{aligned}$$

On appelle “application de Kummer" le morphisme δ . Notons

$$z^{(p)}_{siegel} \in \mathrm{H}^1(\Pi'_{\mathbb{Q}}, \mathfrak{D}_{\mathrm{alg}}(X_1, \mathbb{Q}_p(1))),$$

l'image de z_{siegel} par l'application de Kummer.

Lemme 2.3.2. *Il existe une distribution algébrique $\mu \in \mathfrak{D}_{\mathrm{alg}}(X_1, Z)$ telle que $z^{(p)}_{siegel}$ est l'image du 1-cocycle $\sigma \to \mu * \sigma - \mu$ dans $\mathrm{H}^1(\Pi'_{\mathbb{Q}}, \mathfrak{D}_{\mathrm{alg}}(X_1, \mathbb{Q}_p(1)))$.*

Démonstration. Soit $\{\phi_i\}_{i\in I}$ une base de $\mathrm{LC}_c(X_1,\mathbb{Z})$ sur $\mathbb{Z}$. On peut fabriquer une distribution algébrique $\mu \in \mathfrak{D}_{\mathrm{alg}}(X_1, Z)$ en prenant pour $\int_{X_1}\phi_i\mu$ n'importe quel relèvement dans Z de $\int_{X_1}\phi_i z_{siegel}$ et alors $z_{siegel}^{(p)}$ est l'image du 1-cocycle

$$\sigma \to \mu * \sigma - \mu$$

dans $\mathrm{H}^1(\Pi'_{\mathbb{Q}}, \mathfrak{D}_{\mathrm{alg}}(X_1, \mathbb{Q}_p(1)))$. □

En utilisant l'application de cup-produit, on obtient :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{H}^1(\Pi'_{\mathbb{Q}}, \mathfrak{D}_{\mathrm{alg}}(X_1,\mathbb{Q}_p(1))) \times \mathrm{H}^1(\Pi'_{\mathbb{Q}}, \mathfrak{D}_{\mathrm{alg}}(X_1,\mathbb{Q}_p(1))) & \longrightarrow & \mathrm{H}^2(\Pi'_{\mathbb{Q}}, \mathfrak{D}_{\mathrm{alg}}(X_2,\mathbb{Q}_p(2))) \\ z_{siegel}^{(p)} \times z_{siegel}^{(p)} & \longmapsto & z_{siegel}^{(p)} \otimes z_{siegel}^{(p)}. \end{array}$$

On définit z_{kato} comme l'image de $z_{siegel}^{(p)} \otimes z_{siegel}^{(p)}$ sous l'application de restriction :

$$\mathrm{H}^2(\Pi'_{\mathbb{Q}}, \mathfrak{D}_{\mathrm{alg}}(X_2,\mathbb{Q}_p(2))) \to \mathrm{H}^2(\Pi^{(p)}_{\mathbb{Q}}, \mathfrak{D}_{\mathrm{alg}}(X_2^{(p)},\mathbb{Q}_p(2))).$$

2.3.2 Passer à la mesure

Pour la construction de z_{kato}, on part des unités de Siegel

$$g_{\alpha,\beta} \in \mathbb{Q}\otimes\mathcal{U}(\overline{\mathbb{Q}}).$$

D'après la proposition 2.2.4, si $(\alpha,\beta) \in \frac{1}{N}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$ pour un certain entier N et si c est un entier tel que $(c, 6N) = 1$, alors $g_{c,\alpha,\beta} = g_{\alpha,\beta}^{c^2} g_{c\alpha,c\beta}^{-1}$ est dans $\mathcal{U}(\overline{\mathbb{Q}})$.

Soit $< \cdot >: \mathbb{Z}_p^* \to \hat{\mathbb{Z}}^*$ l'inclusion naturelle en envoyant x sur $< x >= (1,\cdots,x,1,\cdots)$, où x est à la place p. Considérons l'inclusion de $\hat{\mathbb{Z}}^*$ dans $\mathrm{GL}_2(\hat{\mathbb{Z}})$ en envoyant d sur $\left(\begin{smallmatrix} d & 0 \\ 0 & d\end{smallmatrix}\right)$. D'après le lemme 2.2.8, cela définit une action de $d \in \hat{\mathbb{Z}}^*$ sur $g_{\alpha,\beta}$ par la formule :

$$d\cdot g_{\alpha,\beta} = g_{d\alpha,d\beta} = g_{\alpha,\beta} * \left(\begin{smallmatrix} d & 0 \\ 0 & d\end{smallmatrix}\right),$$

où l'action $*$ est celle de $\mathrm{GL}_2(\hat{\mathbb{Z}})$ sur $g_{\alpha,\beta}$.

Rappelons que l'on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}_p(1) & \longrightarrow & Z^0 & \longrightarrow & \mathcal{U}(\overline{\mathbb{Q}}) & \longrightarrow & 0\ , \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{Q}_p(1) & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & \mathbb{Q}\otimes\mathcal{U}(\overline{\mathbb{Q}}) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

où Z^0 et $\mathcal{U}(\overline{\mathbb{Q}})$ sont des $\mathbb{Z}$-modules. En tensorant par $\mathbb{Z}_p$, on obtient un diagramme commutatif suivant de $\mathbb{Z}_p$-modules :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}_p(1) & \longrightarrow & \mathbb{Z}_p\otimes Z^0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}_p\otimes\mathcal{U}(\overline{\mathbb{Q}}) & \longrightarrow & 0\ . \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{Q}_p(1) & \longrightarrow & \mathbb{Q}_p\otimes Z & \longrightarrow & \mathbb{Q}_p\otimes\mathcal{U}(\overline{\mathbb{Q}}) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

De plus, la théorie de Kummer p-adique ci-dessus s'applique aussi à la suite exacte

$$0 \to \mathbb{Q}_p(1) \to \mathbb{Q}_p \otimes Z \to \mathbb{Q}_p \otimes \mathcal{U}(\overline{\mathbb{Q}}) \to 0.$$

Soit $u \in \mathbb{Z}_p^*$, on définit un opérateur r_u sur $g_{\alpha,\beta}$ par la formule $r_u g_{\alpha,\beta} = (u^2 - < u >) g_{\alpha,\beta}$, où l'action de u^2 est la multiplication par u^2 et l'action de $< u >$ est définie ci-dessus.

Lemme 2.3.3. *Soit $c \in \mathbb{Z}_p^*$. L'élément $r_c(g_{\alpha,\beta})$ appartient à $\mathbb{Z}_p \otimes \mathcal{U}(\mathbb{Q}^{\mathrm{cycl}})$.*

Démonstration. Rappelons que on a $N\alpha = N\beta = 0$. On choisit un entier d tel que $(d, 6N) = 1$; alors on a $g_{\alpha,\beta} = \frac{1}{d^2-1} \otimes g_{d,\alpha,\beta}$. Soit c_0 un entier congru à $< c >$ modulo pN. Alors $< c > g_{\alpha,\beta} = g_{c_0\alpha, c_0\beta}$.

On a la relation :

$$r_c(g_{\alpha,\beta}) = \frac{c^2 - c_0^2}{d^2 - 1} g_{d,\alpha,\beta} + (c_0^2 - < c >) g_{\alpha,\beta} = \frac{c^2 - c_0^2}{d^2 - 1} g_{d,\alpha,\beta} + g_{c_0,\alpha,\beta}.$$

Alors, $\frac{c^2-c_0^2}{d^2-1} g_{d,\alpha,\beta}$ appartient à $\mathbb{Z}_p \otimes \mathcal{U}(\mathbb{Q}^{\mathrm{cycl}})$ si la valuation p-adique de $c - c_0$ assez grande. Par conséquent, $r_c g_{\alpha,\beta}$ appartient à $\mathbb{Z}_p \otimes \mathcal{U}(\mathbb{Q}^{\mathrm{cycl}})$. □

D'après le lemme ci-dessus, si $c \in \mathbb{Z}_p^*$, alors on pose $g_{c,\alpha,\beta} = r_c(g_{\alpha,\beta})$; c'est un élément de $\mathbb{Z}_p \otimes \mathcal{U}(\mathbb{Q}^{\mathrm{cycl}})$. On définit l'action de $< c >$ sur $z_{siegel} \in \mathfrak{D}_{\mathrm{alg}}(X_1, \mathbb{Q} \otimes \mathcal{U}(\overline{\mathbb{Q}})) \subset \mathfrak{D}_{\mathrm{alg}}(X_1, \mathbb{Q}_p \otimes \mathcal{U}(\overline{\mathbb{Q}}))$ par la formule :

$$\int_{(a+r_1\hat{\mathbb{Z}})\times(b+r_2\hat{\mathbb{Z}})} < c > z_{siegel} = < c > g_{\frac{a}{r_1},\frac{b}{r_2}}.$$

Lemme 2.3.4. *$r_c(z_{siegel})$ est une distribution sur X_1 à valeurs dans $\mathbb{Z}_p \otimes \mathcal{U}(\mathbb{Q}^{\mathrm{cycl}})$, qui est invariante sous l'action de $\Pi'_{\mathbb{Q}}$.*

Démonstration. Par défintion, quel que soient $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}^*$ et $(a, b) \in \mathbb{Q}^2 - (r_1\mathbb{Z}, r_2\mathbb{Z})$, on a

$$\int_{(a+r_1\hat{\mathbb{Z}})\times(b+r_2\hat{\mathbb{Z}})} r_c z_{siegel} = r_c(g_{\frac{a}{r_1},\frac{b}{r_2}}).$$

D'après le lemme 2.3.3, on a que $r_c(g_{\frac{a}{r_1},\frac{b}{r_2}})$ appartient à $\mathbb{Z}_p \otimes \mathcal{U}(\mathbb{Q}^{\mathrm{cycl}})$. Par conséquent, $r_c(z_{siegel})$ est une distribution sur X_1 à valeurs dans $\mathbb{Z}_p \otimes \mathcal{U}(\mathbb{Q}^{\mathrm{cycl}})$ car z_{siegel} est une distribution algébrique.

Comme l'action de $\Pi'_{\mathbb{Q}}$ sur $\mathbb{Z}_p \otimes \mathcal{U}(\mathbb{Q}^{\mathrm{cycl}})$ se factorise à travers $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q} \otimes \hat{\mathbb{Z}})$, il suffit de vérifier l'invariance pour $\gamma \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q} \otimes \hat{\mathbb{Z}})$.

Si $\gamma \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q} \otimes \hat{\mathbb{Z}})$, on a

$$\begin{aligned}
&\int_{(a+r_1\hat{\mathbb{Z}})\times(b+r_2\hat{\mathbb{Z}})} (r_c(z_{siegel})) * \gamma \\
=&(\int_{(a+r_1\hat{\mathbb{Z}})\times(b+r_2\hat{\mathbb{Z}})*\gamma^{-1}} (r_c(z_{siegel})) * \gamma \\
=&c^2(\int_{(a+r_1\hat{\mathbb{Z}})\times(b+r_2\hat{\mathbb{Z}})*\gamma^{-1}} z_{siegel}) * \gamma - (\int_{(a+r_1\hat{\mathbb{Z}})\times(b+r_2\hat{\mathbb{Z}})*\gamma^{-1}} < c > z_{siegel}) * \gamma.
\end{aligned}$$

D'autre part, par définition de l'action de $< c > \in \hat{\mathbb{Z}}^*$ sur z_{siegel}, on a

$$\left(\int_{(a+r_1\hat{\mathbb{Z}})\times(b+r_2\hat{\mathbb{Z}})*\gamma^{-1}} < c > z_{siegel}\right) * \gamma = \left(\int_{(a+r_1\hat{\mathbb{Z}})\times(b+r_2\hat{\mathbb{Z}})*\gamma^{-1}} z_{siegel}\right) * \left(\begin{smallmatrix} <c> & 0 \\ 0 & <c> \end{smallmatrix}\right) * \gamma.$$

Par conséquent, l'action de $< c >$ sur z_{siegel} commute avec celle de γ sur z_{siegel}. Donc, on a

$$\int_{(a+r_1\hat{\mathbb{Z}})\times(b+r_2\hat{\mathbb{Z}})} (r_c(z_{siegel})) * \gamma = \int_{(a+r_1\hat{\mathbb{Z}})\times(b+r_2\hat{\mathbb{Z}})} r_c((z_{siegel} * \gamma)).$$

L'invariante de z_{siegel} sous l'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}\otimes\hat{\mathbb{Z}})$ permet de conclure le lemme. □

Par la théorie de Kummer, $z^{(p)}_{siegel}$ est l'image du 1-cocycle $\sigma \mapsto \mu * \sigma - \mu$, où $\mu \in \mathfrak{D}_{\mathrm{alg}}(X_1, \mathbb{Q}_p \otimes Z)$ un relèvement de z_{siegel} dans $\mathfrak{D}_{\mathrm{alg}}(X_1, \mathbb{Q}_p \otimes Z)$. Alors on définit $r_c(z^{(p)}_{siegel})$ l'image du 1-cocycle $\sigma \mapsto \mu' * \sigma - \mu'$, où $\mu' \in \mathfrak{D}_{\mathrm{alg}}(X_1, \mathbb{Z}_p \otimes Z)$ est un relèvement de $r_c(z_{siegel})$ dans $\mathfrak{D}_{\mathrm{alg}}(X_1, \mathbb{Z}_p \otimes Z)$. Donc $r_c(z^{(p)}_{siegel})$ est un élément de $\mathrm{H}^1(\Pi'_{\mathbb{Q}}, \mathfrak{D}_{\mathrm{alg}}(X^{(p)}_1, \mathbb{Z}_p(1)))$.

Soient $c, d \in \mathbb{Z}_p^*$, on définit un opérateur $r_{c,d}$ sur $z^{(p)}_{siegel} \otimes z^{(p)}_{siegel}$ par la formule

$$r_{c,d}(z^{(p)}_{siegel} \otimes z^{(p)}_{siegel}) = r_c(z^{(p)}_{siegel}) \otimes r_d(z^{(p)}_{siegel}).$$

Donc, pour tous $c, d \in \mathbb{Z}_p^*$, l'élément $r_{c,d}(z^{(p)}_{siegel} \otimes z^{(p)}_{siegel})$ appartient à $\mathrm{H}^2(\Pi'_{\mathbb{Q}}, \mathfrak{D}_0(X_2, \mathbb{Z}_p(2)))$. Ceci permet de définir $z_{kato,c,d} := r_{c,d} z_{kato}$ comme l'image de $r_{c,d}(z^{(p)}_{siegel} \otimes z^{(p)}_{siegel})$ sous l'application de restriction.

$$\mathrm{H}^2(\Pi'_{\mathbb{Q}}, \mathfrak{D}_{\mathrm{alg}}(X^{(p)}_2, \mathbb{Z}_p(2))) \to \mathrm{H}^2(\Pi^{(p)}_{\mathbb{Q}}, \mathfrak{D}_{\mathrm{alg}}(X^{(p)}_2, \mathbb{Z}_p(2))).$$

Maintenant, tout élément de $\mathfrak{D}_{\mathrm{alg}}(X_2, \mathbb{Z}_p(2))$ s'étend par continuité en une mesure (i.e. forme linéaire continue sur les fonctions continues) sur X_2 à valeurs dans $\mathbb{Z}_p(2)$ et donc $z_{kato,c,d}$ peut être vu comme un élément à valeurs dans l'espace $\mathfrak{D}_0(X_2, \mathbb{Z}_p(2))$.

2.3.3 Torsion à la Soulé

On note $t = (\zeta_{p^n})_{n\in\mathbb{N}}$, générateur canonique[§] de $\mathbb{Z}_p(1)$ et l'action de $\gamma \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ sur $\mathbb{Z}_p(1)$ est par multiplication par $\det\gamma$. On note $V_p = \mathbb{Q}_p e_1 \oplus \mathbb{Q}_p e_2$ la représentation de dimension 2 de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ donnée par les formules suivantes : si $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$, $e_1 * \gamma = ae_1 + be_2$ et $e_2 * \gamma = ce_1 + de_2$. Si $k \geq 2$ et $j \in \mathbb{Z}$, on note $V_{k,j} = \mathrm{Sym}^{k-2} V_p \otimes \mathbb{Q}_p(2-j)$.

Rappelons $X^{(p)}_2 := \mathbf{M}_2(\mathbb{Q}\otimes\hat{\mathbb{Z}})^{(p)} = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p) \times \mathbf{M}_2(\mathbb{Q}\otimes\hat{\mathbb{Z}}^{]p[})$. Soit $x \in X^{(p)}_2$; on note $x_p = \left(\begin{smallmatrix} a_p & b_p \\ c_p & d_p \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ la composante de x en p, qui est un élément dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$. On considère la multiplication d'une mesure $\mu \in \mathfrak{D}_0(X^{(p)}_2, \mathbb{Z}_p(2))$ par la fonction

$$x \mapsto (e_1^{k-2} t^{-j}) * x_p = (a_p e_1 + b_p e_2)^{k-2}((\det x_p)t)^{-j},$$

qui est donnée par l'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ sur $V_{k,j}$ et qui est continue sur $X^{(p)}_2$. Ceci nous donne une mesure $(e_1^{k-2} t^{-j}) * x_p \otimes \mu$ sur $X^{(p)}_2$ à valeurs dans $V_{k,j}$.

§. D'habitude, il n'y pas de générateur canonique de $\mathbb{Z}_p(1)$. Par contre, dans notre cas, on a fixé un prolongement de $\overline{\mathbb{Q}}$ dans $\mathbb{C}$ et $\overline{\mathbb{Q}}_p$ respectivement, et on pose $\zeta_{p^n} = e^{\frac{2i\pi}{p^n}}$.

Lemme 2.3.5. *La multiplication d'une mesure* $\mu \in \mathfrak{D}_0(X_2^{(p)}, \mathbb{Z}_p(2))$ *par la fonction* $x \mapsto (e_1^{k-2}t^{-j}) * x_p$ *induit un morphisme de* $\mathbb{Z}_p[[\Pi_{\mathbb{Q}}^{(p)}]]$*-modules de* $\mathfrak{D}_0(X_2^{(p)}, \mathbb{Z}_p(2))$ *dans* $\mathfrak{D}_0(X_2^{(p)}, V_{k,j})$.

Démonstration. On applique la formule (1.1)

$$(\phi * g)(x) = \phi(x * g^{-1}) \text{ et } \int_X \phi(\mu * g) = (\int_X (\phi * g^{-1})\mu) * g.$$

dans la "notation" au cas $X = X_2^{(p)}$, $G = \Pi_{\mathbb{Q}}^{(p)}$ et $V = \mathbb{Z}_p(2)$ ou $V = V_{k,j}$. Le groupe $G = \Pi_{\mathbb{Q}}^{(p)}$ agit continûment sur X à travers $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q} \otimes \hat{\mathbb{Z}})^{(p)} = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p) \times \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q} \otimes \hat{\mathbb{Z}}^{]p[})$ par la multiplication de matrices usuelle à droite.

Soient $\phi \in \mathrm{LC}_c(X_2^{(p)}, \mathbb{Z}_p)$, $\tau \in \Pi_{\mathbb{Q}}^{(p)}$ et $\mu \in \mathfrak{D}_0(X_2^{(p)}, \mathbb{Z}_p(2))$.

Si on considère $\mu * \tau \in \mathfrak{D}_0(X_2^{(p)}, \mathbb{Z}_p(2))$, alors τ agit sur $e_1^{k-2}t^{-j} * x_p$ comme l'action sur une fonction et la formule (1.1) se traduit par $\int \phi(x)(\mu * \tau) = \int \phi(x\tau)\chi_{\mathrm{cycl}}^2(\tau)\mu$, où $x\tau$ est donné par l'action de $\Pi_{\mathbb{Q}}^{(p)}$ sur $X_2^{(p)}$. Alors, on a la formule :

$$\int_{X_2^{(p)}} \phi(x)\big((e_1^{k-2}t^{-j} * x_p) \otimes (\mu * \tau)\big) = \int_{X_2^{(p)}} \chi_{\mathrm{cycl}}^2(\tau)\phi(x\tau)\big((e_1^{k-2}t^{-j} * (x\tau)_p) \otimes \mu\big).$$

Si on considère $\big((e_1^{k-2}t^{-j} * x_p) \otimes \mu\big) * \tau \in \mathfrak{D}_0(X_2^{(p)}, V_{k,j})$, alors l'action de τ sur $e_1^{k-2}t^{-j} * x_p$ est donnée par l'action de τ sur l'espace $V_{k,j}$ et la formule (1.1) se traduit par

$$\int_{X_2^{(p)}} \phi(x)\,\big((e_1^{k-2}t^{-j} * x_p) \otimes \mu\big) * \tau = \int_{X_2^{(p)}} \chi_{\mathrm{cycl}}^2(\tau)\phi(x\tau)\big((e_1^{k-2}t^{-j} * (x\tau)_p) \otimes \mu\big).$$

La comparaison des deux formules permet de conclure. □

D'après le lemme 2.3.5, la multiplication par $e_1^{k-2}t^{-j} * x_p$ induit un morphisme naturel :

$$\mathrm{H}^2(\Pi_{\mathbb{Q}}^{(p)}, \mathfrak{D}_0(X_2^{(p)}, \mathbb{Z}_p(2))) \to \mathrm{H}^2(\Pi_{\mathbb{Q}}^{(p)}, \mathfrak{D}_0(X_2^{(p)}, V_{k,j})).$$

Donc on peut définir, pour $j \in \mathbb{Z}$,

$$z_{kato,c,d}(k,j) = ((e_1^{k-2}t^{-j}) * x_p) \otimes z_{kato,c,d} \in \mathrm{H}^2(\Pi_{\mathbb{Q}}^{(p)}, \mathfrak{D}_0(X_2^{(p)}, V_{k,j})),$$

où $\Pi_{\mathbb{Q}}^{(p)}$ agit sur $V_{k,j}$ à travers son quotient $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$.

Chapitre 3

Les anneaux de Fontaine

3.1 Le corps $\mathfrak{K}$ et les formes modulaires

3.1.1 Le corps $\mathfrak{K}$

Soit $\mathfrak{K}^+ = \mathbb{Q}_p\{\frac{q}{p}\}$ l'algèbre des fonctions analytiques sur la boule $v_p(q) \geq 1$ à coefficients dans $\mathbb{Q}_p$; c'est un anneau principal complet pour la valuation $v_{p,\mathfrak{K}}$ définie par la formule :

$$v_{p,\mathfrak{K}}(f) = \inf_{n\in\mathbb{N}} v_p(a_n), \text{ si } f = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(\frac{q}{p})^n \in \mathfrak{K}^+.$$

Cette valuation est aussi la valuation spectrale : $v_{p,\mathfrak{K}}(f) = \inf_{v_p(q)\geq 1} v_p(f(q))$. La restriction de la valuation $v_{p,\mathfrak{K}}$ à $\mathbb{Q}_p$ coïncide avec la valuation p-adique normalisée v_p sur $\mathbb{Q}_p$. Dans la suite, on notera v_p au lieu de $v_{p,\mathfrak{K}}$.

On note $\mathfrak{K}$ le complété du corps des fractions de l'anneau $\mathfrak{K}^+$ pour la valuation v_p. Fixons une clôture algébrique $\overline{\mathfrak{K}}$ de $\mathfrak{K}$. Comme $\mathfrak{K}$ est un corps complet pour la valuation v_p, on peut prolonger v_p sur $\mathfrak{K}$ à $\overline{\mathfrak{K}}$ de manière unique par la formule :

$$v_p(x) = \frac{1}{[\mathfrak{K}[x] : \mathfrak{K}]} v_p(N_{\mathfrak{K}[x]/\mathfrak{K}}(x)), \text{ si } x \in \overline{\mathfrak{K}}.$$

On note le groupe de Galois de $\overline{\mathfrak{K}}$ sur $\mathfrak{K}$ par $\mathcal{G}_{\mathfrak{K}}$.

Remarque 3.1.1. Il existe une manière de prolonger la valuation spectrale en une valuation spectrale sur $\overline{\mathfrak{K}}$: si $x \in \overline{\mathfrak{K}}$, on note $P(X) = X^n + a_1X^{n-1} + \cdots + a_n \in \mathfrak{K}[X]$ le polynôme caractéristique de $y \mapsto xy$, $\forall y \in \mathfrak{K}[x]$. On définit la valuation spectrale v_{sp} sur $\mathfrak{K}[x]$ par la formule :

$$v_{\mathrm{sp}}(x) = \min_{1\leq i\leq n} \frac{v_p(a_i)}{i}.$$

Elle coïncide avec la valuation v_p sur $\overline{\mathfrak{K}}$.

Soit $M \geq 1$ un entier. On note q_M (resp. ζ_M) une racine M-ième $q^{1/M}$ (resp. $\exp(\frac{2i\pi}{M})$) de q (resp. 1). On note $F_M = \mathbb{Q}_p[\zeta_M]$. Soit $\mathfrak{K}_M = \mathfrak{K}[q_M, \zeta_M]$; c'est une extension galoisienne de $\mathfrak{K}$. Soit $\mathfrak{F}_M = \mathfrak{K}[\zeta_M]$ la sous-extension galoisienne de $\mathfrak{K}_M$ sur $\mathfrak{K}$; la clôture intégrale $\mathfrak{F}_M^+$ de $\mathfrak{K}^+$ dans $\mathfrak{F}_M$ est $\mathfrak{K}^+[\zeta_M]$, qui est l'anneau des fonctions analytiques sur la boule $v_p(q) \geq 1$

à coefficients dans F_M. Alors, $\mathfrak{K}_M$ est une extension de Kummer de $\mathfrak{F}_M$ de groupe de Galois cyclique d'ordre M, dont un générateur σ_M est défini par son action sur q_M :

$$\sigma_M q_M = \zeta_M q_M.$$

On note $\mathfrak{K}_\infty$ (resp. $\mathfrak{F}_\infty, F_\infty$) la réunion des $\mathfrak{K}_M$ (resp. $\mathfrak{F}_M, F_M$) pour tous $M \geq 1$. On note $P_{\mathbb{Q}_p}$ (resp. $P_{\overline{\mathbb{Q}}_p}$) le groupe de Galois de $\overline{\mathbb{Q}}_p\mathfrak{K}_\infty$ sur $\mathfrak{K}$ (resp. $\overline{\mathbb{Q}}_p\mathfrak{K}$) . Le groupe $P_{\overline{\mathbb{Q}}_p}$ est un groupe profini qui isomorphe au groupe $\hat{\mathbb{Z}}$. De plus, on a une suite exacte :

$$0 \to P_{\overline{\mathbb{Q}}_p} \to P_{\mathbb{Q}_p} \to \mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p} \to 0.$$

Fixons M un entier ≥ 1. On note $\mathfrak{K}_{Mp^\infty}$ (resp. $\mathfrak{F}_{Mp^\infty}, F_{Mp^\infty}$) la réunion des $\mathfrak{K}_{Mp^n}$ (resp. $\mathfrak{F}_{Mp^n}, F_{Mp^\infty}$) pour tous $n \geq 1$. On note $P_{\mathfrak{K}_M}$ le groupe de Galois de $\mathfrak{K}_{Mp^\infty}$ sur $\mathfrak{K}_M$. On note $U_{\mathfrak{K}_M}$ le groupe de Galois de $\mathfrak{K}_{Mp^\infty}$ sur $\mathfrak{F}_{Mp^\infty}$, qui isomorphe au groupe $\mathbb{Z}_p$, et on note $\Gamma_{\mathfrak{K}_M}$ le groupe de Galois de $\mathfrak{F}_{Mp^\infty}$ sur $\mathfrak{K}_M$, qui isomorphe au groupe $\mathrm{Gal}(F_{Mp^\infty}/F_M)$. On a une suite exacte :

$$0 \to U_{\mathfrak{K}_M} \to P_{\mathfrak{K}_M} \to \Gamma_{\mathfrak{K}_M} \to 0.$$

Soit $\overline{\mathfrak{K}}^+$ la clôture intégrale de $\mathfrak{K}^+$ dans $\overline{\mathfrak{K}}$. La clôture intégrale de $\mathbb{Q}_p$ dans $\overline{\mathfrak{K}}$ est une clôture algébrique de $\mathbb{Q}_p$. Donc on a une inclusion $\overline{\mathbb{Q}}_p \subset \overline{\mathfrak{K}}^+$. On note $\mathfrak{K}_M^+$ la clôture intégrale de $\mathfrak{K}^+$ dans $\mathfrak{K}_M$, qui est aussi la clôture intégrale de $\mathfrak{F}_M^+$ dans $\mathfrak{K}_M$. L'anneau $\mathfrak{K}^+$ est un anneau de Dedekind, et donc chaque idéal premier de $\mathfrak{K}^+$ définit une valuation sur $\mathfrak{K}^+$. En particulier, on a la valuation normalisée v_q (i.e. $v_q(q) = 1$) correspondant à l'idéal premier (q) de $\mathfrak{K}^+$. La valuation normalisée v_q de $\mathfrak{K}^+$ s'étend de manière unique en une valuation v_q sur $(\mathrm{Frac}\,\mathfrak{K}^+)[\zeta_M, q_M]$ car (q) est totalement ramifié.

Lemme 3.1.2. *(1) Si $M \geq 1$ est un entier, on a $\mathfrak{K}_M^+ = \mathfrak{K}^+[\zeta_M, q_M]$. En particulier, $\mathfrak{K}_M^+$ est l'anneau des fonctions analytiques sur la boule $v_p(q_M) \geq \frac{1}{M}$ (i.e. tout l'élément de $\mathfrak{K}_M^+$ s'écrit de manière unique $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x) q_M^n$ où $a_n(x)$ est une suite d'éléments de F_M et la suite $\{v_p(a_n(x)) + \frac{n}{M}\}$ tend vers $+\infty$ quand n vers $+\infty$).*
(2) La valuation v_p sur $\mathfrak{K}_M^+$ est donnée par la formule :

$$v_p(x) = \inf_{v_p(q_M) \geq \frac{1}{M}} v_p(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x) q_M^n).$$

Démonstration. (1) Soit $x \in \mathfrak{K}_M^+$, il s'écrit uniquement sous la forme $x = \sum_{i=0}^{M-1} b_i q_M^i$ avec $b_i \in \mathfrak{F}_M$. On a $\mathrm{Tr}_{\mathfrak{K}_M/\mathfrak{F}_M}(xq^{M-i}) = b_i q \in \mathfrak{F}_M^+$ car $xq^{M-i} \in \mathfrak{K}_M^+$ et donc $x \in q^{-1}\mathfrak{F}^+[q_M] \subset (\mathrm{Frac}\,\mathfrak{F}_M^+)[q_M]$. On constate que $v_q(\mathrm{Frac}\,\mathfrak{F}_M^+) = \mathbb{Z}$ et les $v_q(b_i q_M^i)$ sont distincts deux à deux. Donc on a

$$0 \leq v_q(x) = \inf_i (v_q(b_i) + i v_q(q_M)) = \inf_i (v_q(b_i) + \frac{i}{M});$$

On déduit que $\inf_i v_q(b_i) \geq 0$. Alors $b_i \in \mathfrak{F}_M^+$ pour tous i.
Si $a \in \mathfrak{F}_M^+$, alors a peut s'écrire uniquement sous la forme $a = \sum_{j=0}^{+\infty} a_j q^j$, où a_j est une suite d'éléments de F_M telle que $\lim_{j \to +\infty} v_p(a_{ij}) + j = +\infty$. On applique cette écriture à b_i pour $0 \leq i \leq M-1$, et donc x peut s'écrire uniquement sous la

forme unique $\sum_{i=0}^{M-1}\sum_{j=0}^{+\infty} a_{ij}(x)q_M^{i+Mj}$, où $\lim_{j\to+\infty} v_p(a_{ij}(x))+j=+\infty$. Alors x peut s'écrire uniquement sous la forme $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x)q_M^n$ où $a_n(x)\in F_M$ est une suite telle que $v_p(a_n)+\frac{n}{M}$ tends vers $+\infty$.

(2) D'après (1), $\mathfrak{K}_M^+$ est l'anneau des fonctions analytiques sur la boule $v_p(q_M)\geq\frac{1}{M}$ à coefficients dans F_M et donc il est muni d'une valuation spectrale v donnée par la formule :

$$v(x)=\inf_{v_p(q_M)\geq\frac{1}{M}} v_p(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x)q_M^n).$$

L'anneau $\mathfrak{K}^+$ s'identifie à un sous anneux de $\mathfrak{K}_M^+$ par changement de variable : $f(q)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_nq^n=\sum_{n=0}^{+\infty} a_{Mn}q_M^{Mn}$ si $f(q)\in\mathfrak{K}^+$. Alors la restriction de la valuation spectrale v sur $\mathfrak{K}_M^+$ à $\mathfrak{K}^+$ coïncide avec la valuation v_p sur $\mathfrak{K}^+$. On déduit la formule pour la valuation dans le lemme car il existe une manière unique de prolonger la valuation v_p sur $\mathfrak{K}$ à $\mathfrak{K}_M$.

□

On note $I_n=\{\frac{a}{(p-1)p^{n-1}}|0\leq a\leq(p-1)p^{n-1}-1\}$ et $J_n=\{\frac{b}{p^n}|0\leq b\leq p^n-1\}$. On pose $I=\cup_nI_n$ et $J=\cup_nJ_n$.

Lemme 3.1.3. *Soit $M\geq 1$ un entier tel que $v_p(M)\geq v_p(2p)$ (resp. $v_p(M)<v_p(2p)$).*

(1) Les $\{q_M^j\}_{j\in J}$ forment une base de $\mathfrak{K}_{Mp^\infty}^+$ sur $\mathfrak{F}_{Mp^\infty}^+$. De plus, tout $x\in\mathfrak{K}_{Mp^\infty}^+$ peut s'écrire uniquement sous la forme $\sum_{j\in J}\sum_{k\in\mathbb{N}} a_{jk}(x)q_M^{j+k}$, pour une suite double $a_{jk}(x)\in F_{Mp^\infty}$, telle que,

(i) quel que soit $j\in J$, la série $\sum_{k\in\mathbb{N}} a_{jk}q_M^k$ converge dans $\mathfrak{F}_{Mp^\infty}^+$;

(ii) L'ensemble des $j\in J$ tels qu'il existe $k\in\mathbb{N}$ avec $a_{kj}\neq 0$ est fini .

(2) Les $\{\zeta_M^iq_M^j\}_{(i,j)\in J\times J}$ (resp. $\{\zeta_M^iq_M^j\}_{(i,j)\in I\times J}$) forment une base de $\mathfrak{K}_{Mp^\infty}^+$ sur $\mathfrak{K}_M^+$. De plus, tout $x\in\mathfrak{K}_{Mp^\infty}^+$ peut s'écrire uniquement sous la forme

$$\sum_{j\in J}\sum_{i\in J}\sum_{k\in\mathbb{N}} a_{ijk}(x)\zeta_M^iq_M^{j+k}(resp.\sum_{j\in J}\sum_{i\in I}\sum_{k\in\mathbb{N}} a_{ijk}\zeta_M^iq_M^{j+k}),$$

pour une suite triple $a_{ijk}(x)\in F_M$ telle que :

(i) Quel que soit $(i,j)\in J\times J$ (resp. $(i,j)\in I\times J$), la série $\sum_{k\in\mathbb{N}} a_{ijk}(x)q_M^k$ converge dans $\mathfrak{K}_M^+$ (i.e. $\lim_{k\to+\infty} v_p(a_{ijk}(x))+\frac{k}{M}=+\infty$.)

(ii) L'ensemble $\{(i,j)|\exists k\in\mathbb{N}, a_{ijk}(x)\neq 0\}$ est fini.

(3) Si $x\in\mathfrak{K}_{Mp^\infty}^+$, la valuation de x est donnée par la formule :

$$v_p(x)=\inf_{v_p(q)\geq 1}(v_p(\sum_{j\in J}\sum_{i\in J}\sum_{k\in\mathbb{N}} a_{ijk}(x)\zeta_M^iq_M^{j+k}))(resp.\inf_{v_p(q)\geq 1}(v_p(\sum_{j\in J}\sum_{i\in I}\sum_{k\in\mathbb{N}} a_{ijk}(x)\zeta_M^iq_M^{j+k}))).$$

Démonstration. Comme $\mathfrak{K}_{Mp^\infty}^+=\cup_n\mathfrak{K}_{Mp^n}^+$, ce lemme est une conséquence directe du lemme 3.1.2. □

3.1.2 Le théorème d'Ax-Sen-Tate

Soit L un anneau de caractéristique 0, muni d'une valuation v_p normalisée par $v_p(p)=1$. On note $\mathbb{C}(L)$ le complété de L pour la valuation v_p. Le reste de ce paragraphe est de montrer un analogue (le théorème 3.1.6) du théorème d'Ax-Sen-Tate et de donner une description de l'anneau $\mathbb{C}(\mathfrak{K}^+_{Mp^\infty})$ (le corollaire 3.1.7).

Soit H un sous-groupe fermé de $\mathcal{G}_{\mathfrak{K}_M}$; si $\alpha \in \overline{\mathfrak{K}}$, on définit le diamètre $\Delta_H(\alpha)$ par rapport à un sous-groupe fermé H de $\mathcal{G}_{\mathfrak{K}_M}$ par $\Delta_H(\alpha) = \inf_{g\in H}(v_p(g\alpha - \alpha))$. Notons que $\alpha \in \overline{\mathfrak{K}}^H$ si et seulement si $\Delta_H(\alpha) = +\infty$.

Lemme 3.1.4. *Soit $P(X) \in \overline{\mathfrak{K}}[X]$ (resp. $\in \overline{\mathfrak{K}}^+[X]$), unitaire de degré n, dont toutes les racines vérifient $v_p(\alpha) \geq u$.*

(1) Si $n = p^k d$ avec $(p, d) = 1$ et $d \geq 0$ et si $q = p^k$, alors le polynôme $P^{(q)}$, dérivée q-ième de P, a au moins une racine $\beta \in \overline{\mathfrak{K}}$ (resp. $\overline{\mathfrak{K}}^+$) vérifiant $v_p(\beta) \geq u$.

(2) Si $n = p^{k+1}$ et $q = p^k$, alors $P^{(q)}$ a au moins une racine $\beta \in \overline{\mathfrak{K}}$ (resp. $\overline{\mathfrak{K}}^+$) vérifiant $v_p(\beta) \geq u - \frac{1}{p^{k+1}-p^k}$.

Démonstration. La démonstration pour $P \in \overline{\mathfrak{K}}[X]$ se trouve dans les notes du cours* $M2$ de Colmez et elle marche aussi pour $P \in \overline{\mathfrak{K}}^+[X]$. Pour faciliter la lecture, on vérifie la démonstration pour $P \in \overline{\mathfrak{K}}^+[X]$ ci-dessous.

Soit $P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0$ avec $a_i \in \overline{\mathfrak{K}}^+$. On a $v_p(a_{n-i}) \geq iu$ d'après la théorie des polygônes de Newton. On a

$$\frac{1}{q!\binom{n}{q}} P^{(q)}(X) = \sum_{i=0}^{n-q} \frac{1}{\binom{n}{q}} \binom{n-i}{q} a_{n-i} X^{n-i-q},$$

qui est un polynôme unitaire à coefficients dans $\overline{\mathfrak{K}}^+$ et le produit des racines de $P^{(q)}$ est, au signe près, $\frac{a_q}{\binom{n}{q}}$. On a donc $\sum_\beta v_p(\beta) = v_p(a_q) - v_p(\binom{n}{q}) \geq (n-q)u - v_p(\binom{n}{q})$, et il existe $\beta \in \overline{\mathfrak{K}}^+$ vérifiant $v_p(\beta) \geq u - \frac{1}{n-q} v_p(\binom{n}{q})$. D'autre part, on a $\binom{n}{q} = \frac{n}{q}\prod_{i=1}^{q-1} \frac{n-i}{i}$ et, comme $q = p^k$ et $v_p(n) \geq k$, on a $v_p(\frac{n-i}{i}) = 0$ et $v_p(\binom{n}{q}) = v_p(n) - v_p(q)$. On en déduit le résultat. □

Lemme 3.1.5. *[Ax] Il existe une constante $C = \frac{p}{(p-1)^2}$ telle que*

(1) si $\alpha \in \overline{\mathfrak{K}}$, alors il existe $a \in \mathfrak{K}_{Mp^\infty}$ vérifiant $v_p(\alpha - a) \geq \Delta_{\mathcal{G}_{\mathfrak{K}_{Mp^\infty}}}(\alpha) - C$;

(2) si $\alpha \in \overline{\mathfrak{K}}^+$, alors il existe $a \in \mathfrak{K}^+_{Mp^\infty}$ vérifiant $v_p(\alpha - a) \geq \Delta_{\mathcal{G}_{\mathfrak{K}_{Mp^\infty}}}(\alpha) - C$;

Démonstration. Le (1) correspond au cas traité par Ax ; nous ne traiterons donc que le (2) (la démonstration est la même pour le (1)).

Soit $\alpha \in \overline{\mathfrak{K}}^+$ tel que $[\mathfrak{K}_{Mp^\infty}[\alpha] : \mathfrak{K}_{Mp^\infty}] = n$ et soit $l(n)$ est le plus grand entier l tel que $p^l \leq n$. On montre par récurrence sur n le résultat suivant : il existe $a \in \mathfrak{K}^+_{Mp^\infty}$ vérifiant $v_p(a-\alpha) \geq \Delta_{\mathcal{G}_{\mathfrak{K}_{Mp^\infty}}}(\alpha) - \sum_{i=1}^{l(n)} \frac{1}{p^i - p^{i-1}}$; ce qui permet de conclure le lemme car $\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{p^i - p^{i-1}} = \frac{1}{(p-1)^2}$.

On va appliquer le lemme précédent à $P(X) = Q(X + \alpha)$, où Q est le polynôme minimal de α sur $\mathfrak{K}^+_{Mp^\infty}$. Remarquons que les racines de P sont les $\sigma(\alpha) - \alpha$, pour $\sigma \in \mathcal{G}_{\mathfrak{K}_{Mp^\infty}}$. Donc la constante u dans le lemme précédent peut être prise égale à $\Delta_{\mathcal{G}_{\mathfrak{K}_{Mp^\infty}}}(\alpha)$.

D'après le lemme précédent, on a

*. http ://www.math.jussieu.fr/ colmez/nombres-p-adiques.pdf

(i) Si n n'est pas une puissance de p, il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que le polynôme $Q^{(q)} \in \mathfrak{K}^+_{Mp^\infty}[X]$ ait une racine $\beta \in \overline{\mathfrak{K}}^+$ vérifiant $v_p(\beta - \alpha) \geq \Delta_{\mathcal{G}_{\mathfrak{K}_{Mp^\infty}}}(\alpha)$. D'autre part, si $\sigma \in \mathcal{G}_{\mathfrak{K}_{Mp^\infty}}$, alors on a

$$v_p(\sigma(\beta)-\beta) = v_p(\sigma(\beta-\alpha)+\sigma(\alpha)-\alpha+\alpha-\beta) \geq \min(v_p(\sigma(\beta-\alpha)), v_p(\sigma(\alpha)-\alpha), v_p(\alpha-\beta)).$$

Comme on a $v_p(\sigma(\beta-\alpha)) = v_p(\beta-\alpha) \geq \Delta_{\mathcal{G}_{\mathfrak{K}_{Mp^\infty}}}(\alpha)$ et $v_p(\sigma(\alpha)-\alpha) \geq \Delta_{\mathcal{G}_{\mathfrak{K}_{Mp^\infty}}}(\alpha)$ par définition de $\Delta_{\mathcal{G}_{\mathfrak{K}_{Mp^\infty}}}(\alpha)$, on en tire l'inégalité $\Delta_{\mathcal{G}_{\mathfrak{K}_{Mp^\infty}}}(\beta) \geq \Delta_{\mathcal{G}_{\mathfrak{K}_{Mp^\infty}}}(\alpha)$. Par ailleurs, on a $[\mathfrak{K}_{Mp^\infty}[\beta] : \mathfrak{K}_{Mp^\infty}] = \deg Q^{(q)} < n$. Cela permet de conclure en utilisant l'hypothèse de récurrence.

(ii) Si $n = p^{k+1}$, on peut trouver une racine β de $Q^{(p^k)}(X)$ vérifiant les conditions

$$v_p(\beta - \alpha) \geq \Delta_{\mathcal{G}_{\mathfrak{K}_{Mp^\infty}}}(\alpha) - \frac{1}{p^{k+1}-p^k} \tag{3.1}$$

et $[\mathfrak{K}_{Mp^\infty}[\beta] : \mathfrak{K}_{Mp^\infty}] < n$. On tire l'existence de $a \in \mathfrak{K}^+_{Mp^\infty}$ vérifiant

$$v_p(\beta - a) \geq \Delta_{\mathcal{G}_{\mathfrak{K}_{Mp^\infty}}}(\beta) - \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{p^i - p^{i-1}} \geq \Delta_{\mathcal{G}_{\mathfrak{K}_{Mp^\infty}}}(\alpha) - \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{p^i - p^{i-1}}$$

de l'hypothèse de récurrence. Donc l'inégalité (3.1) permet de conclure le lemme.

□

Théorème 3.1.6. *[Ax-Sen-Tate]*

(1) Le corps $\mathfrak{K}_{Mp^\infty}$ est dense dans $\mathbb{C}(\overline{\mathfrak{K}})^{\mathcal{G}_{\mathfrak{K}_{Mp^\infty}}}$.

(2) L'anneau $\mathfrak{K}^+_{Mp^\infty}$ est dense dans $\mathbb{C}(\overline{\mathfrak{K}}^+)^{\mathcal{G}_{\mathfrak{K}_{Mp^\infty}}}$.

Démonstration. Comme d'habitude, on montre le cas particulier $\mathfrak{K}^+_{Mp^\infty}$ et le cas classique $\mathfrak{K}_{Mp^\infty}$ marche de la même manière.

L'inclusion $\mathbb{C}(\mathfrak{K}^+_{Mp^\infty}) \subset \mathrm{H}^0(\mathcal{G}_{\mathfrak{K}_{Mp^\infty}}, \mathbb{C}(\overline{\mathfrak{K}}^+))$ est évidente. Il suffit de montrer l'inverse. Si $\alpha \in \mathrm{H}^0(\mathcal{G}_{\mathfrak{K}_{Mp^\infty}}, \mathbb{C}(\overline{\mathfrak{K}}^+))$, il existe une suite $\alpha_n \in \overline{\mathfrak{K}}^+$ telle que $v_p(\alpha - \alpha_n) \geq n$. Quel que soit $\sigma \in \mathcal{G}_{\mathfrak{K}_{Mp^\infty}}$, on a

$$v_p(\sigma(\alpha_n) - \alpha_n) \geq \min\{v_p(\sigma(\alpha_n - \alpha)), v_p(\alpha_n - \alpha)\} \geq n.$$

Par ailleurs, le lemme d'Ax 3.1.5 dit que, si $\alpha \in \overline{\mathfrak{K}}^+$, alors il existe un $a \in \mathfrak{K}^+_{Mp^\infty}$ vérifiant $v_p(\alpha - a) \geq \Delta_{\mathcal{G}_{Mp^\infty}}(\alpha) - \frac{p}{(p-1)^2}$.

En conséquence, quel que soit $n \geq 1$, il existe un élément $a_n \in \mathfrak{K}^+_{Mp^\infty}$ tel que $v_p(\alpha_n - a_n) \geq \Delta_{\mathcal{G}_{\mathfrak{K}_{Mp^\infty}}}(\alpha_n) - \frac{p}{(p-1)^2} \geq n - \frac{p}{(p-1)^2}$. Alors $v_p(\alpha - a_n) \geq \inf\{v_p(\alpha_n - a_n), v_p(\alpha - \alpha_n)\} \geq n - \frac{p}{(p-1)^2}$. Par conséquent, $\alpha = \lim_{n\to\infty} a_n \in \mathbb{C}(\mathfrak{K}^+_{Mp^\infty})$. Donc le sous-anneau de $\mathbb{C}(\overline{\mathfrak{K}}^+)$ fixé par le groupe $\mathcal{G}_{\mathfrak{K}_{Mp^\infty}}$ est $\mathbb{C}(\mathfrak{K}^+_{Mp^\infty})$.

□

Corollaire 3.1.7. *(1) Soit $M \geq 1$ un entier tel que $v_p(M) \geq v_p(2p)$ (resp. $v_p(M) < v_p(2p)$). Tout élément x de $\mathbb{C}(\overline{\mathfrak{K}}^+)^{\mathcal{G}_{\mathfrak{K}_{Mp^\infty}}}$ s'écrit uniquement sous la forme*

$$\sum_{i\in J}\sum_{j\in J}\sum_{k\in\mathbb{N}} a_{ijk}(x)\zeta_M^i q_M^{j+k} (\text{ resp. } \sum_{i\in I}\sum_{j\in J}\sum_{k\in\mathbb{N}} a_{ijk}(x)\zeta^i q_M^{j+k}),$$

pour une suite triple $\{a_{ijk}(x)\}_{i\in J, j\in J, k\in\mathbb{N}}$ (resp. $\{a_{ijk}(x)\}_{i\in I, j\in J, k\in\mathbb{N}}$) d'éléments de F_M telle que, $\forall N \in \mathbb{N}$, $\{(i,j,k) \in J\times J\times\mathbb{N} : v_p(a_{ij}(x)) + \frac{j+k}{M} \leq N\}$ (resp. $\{(i,j,k) \in I\times J\times\mathbb{N} : v_p(a_{ij}(x)) + \frac{j+k}{M} \leq N\}$) est fini.

(2) La valuation v_p sur $\mathbb{C}(\mathfrak{K}^+_{Mp^\infty})$ est donnée par la formule :

$$v_p(x) = \inf_{v_p(q)\geq 1} v_p(\sum_{i\in J}\sum_{j\in J}\sum_{k\in\mathbb{N}} a_{ijk}(x)\zeta_M^i q_M^{j+k}) (\text{ resp. } \inf_{v_p(q)\geq 1} v_p(\sum_{i\in I}\sum_{j\in J}\sum_{k\in\mathbb{N}} a_{ijk}(x)\zeta_M^i q_M^{j+k})).$$

Démonstration. On déduit le corollaire du lemme 3.1.3 et du théorème d'Ax-Sen-Tate 3.1.6. □

3.1.3 Trace de Tate normalisée

On note $R = \mathbb{Z}_p\{\frac{q}{p}, \frac{p}{q}\}$ l'algèbre de Tate en variables $\frac{q}{p}, \frac{p}{q}$ à coefficients dans $\mathbb{Z}_p$. Si $m, n \in \mathbb{N}$, on note R_m^n(resp.R_m) la clôture intégrale de R dans $\mathrm{Frac}(R)[\zeta_{p^m}, (\frac{q}{p})^{\frac{1}{p^n}}]$(resp. $\mathrm{Frac}(R)[\zeta_{p^m}]$). On note $R_\infty^\infty = \cup_{n\in\mathbb{N}} R_n^n$, $R_\infty = \cup_{n\in\mathbb{N}} R_n$) et $R_\infty^n = \cup_{m\in\mathbb{N}} R_m^n$. On a $R_m^n = R_m \otimes_{R_n} R_n^n$ si $m \geq n$.

Comme $(\frac{q}{p})^{\frac{1}{p^n}} = u\frac{q_{p^n}}{(\pi_n)^{p-1}}$, où $\pi_n = \zeta_{p^{n+1}} - 1$ et u est une unité de $\mathcal{O}_{F_{p^{n+1}}}$, on a une inclusion naturelle $\mathfrak{K}^+_{p^n} \subset R^n_{n+1}[\frac{1}{p}]$. De plus, on a un isomorphisme de groupes de Galois $\mathrm{Gal}(R_\infty^\infty[\frac{1}{p}]/R_\infty[\frac{1}{p}]) \cong \mathrm{Gal}(\mathfrak{K}_{p^\infty}/\mathfrak{F}_{p^\infty}) \cong \mathbb{Z}_p$.

Si m est un entier ≥ 0, on définit une application $R_\infty^m[\frac{1}{p}]$-linéaire $\Lambda_m : R_\infty^\infty[\frac{1}{p}] \to R_\infty^m[\frac{1}{p}]$ par la formule :

$$\Lambda_m(x) = \frac{1}{p^{n-m}} \mathrm{Tr}_{R_n^n[\frac{1}{p}]/R_n^m[\frac{1}{p}]}(x), \text{ si } x \in R_n^n[\frac{1}{p}].$$

On note u_m un générateur de groupe de Galois $\mathrm{Gal}(R_\infty^\infty[\frac{1}{p}]/R_\infty^m[\frac{1}{p}]) \cong U_{\mathfrak{K}_{p^m}}$.

Lemme 3.1.8. *(1) Il existe une constante C telle que pour tout $m \in \mathbb{N}$ et $x \in R_{m+1}^{m+1}[\frac{1}{p}]$, on a $v_p((u_m - 1)x) \geq v_p(x) + \frac{1}{p-1} - Cp^{-m}$.*

(2) Λ_m est continue. Plus précisement, on a $v_p(\Lambda_m(x)) \geq v_p(x) - \frac{C}{p^{m-1}}$.

Démonstration. Ce lemme est un cas particulier dans ([2], lemme 3.7 et 3.8), et l'ingrédient principal est la contrôlation de ramification dans ([1], corollaire 3.10).

(1) D'après ([1], corollaire 3.10), il existe une constante C telle que, pour tous $m \geq 1$, on a

$$p^{C/p^m} R_{m+1}^{m+1} \subset \oplus_{i=0}^{p-1} R_{m+1}^m (\frac{q}{p})^{\frac{i}{p^{m+1}}} \subset R_{m+1}^{m+1}.$$

Si $x \in R_{m+1}^{m+1}[\frac{1}{p}]$, on peut écrire x sous la forme $x = \sum_{i=0}^{p-1} x_i (\frac{q}{p})^{\frac{i}{p^{m+1}}}$ avec $x_i \in R_{m+1}^m$ et $v(x_i) \geq v(x) - \frac{C}{p^m}$ pour $0 \leq i < p$. On a donc

$$(u_m - 1)(x) = \sum_{i=0}^{p-1} x_i(\zeta_p^i - 1)(\frac{q}{p})^{\frac{i}{p^{m+1}}}.$$

On en déduit que $v_p((u_m-1)x) \geq v_p(x) + \frac{1}{p-1} - \frac{C}{p^m}$.

(2) Par définition de Λ_m, on a $p\Lambda_m(x) = (\sum_{i=0}^{p-1} u_m^i)(x) = ((1-u_m)^{p-1} + pP(u_m))(x)$, où $P(X) \in \mathbb{Z}[X]$,$P(1) = 1$ et $x \in R_{m+1}^{m+1}[\frac{1}{p}]$. D'après le (1), on a

$$v_p((1-u_m)^{p-1}(x)) \geq v_p(x) + 1 - (p-1)\frac{C}{p^m}.$$

On en déduit que $v_p(\Lambda_m(x)) \geq v_p(x) - (p-1)\frac{C}{p^m}$ si $x \in R_{m+1}^{m+1}[\frac{1}{p}]$. Si $x \in R_n^n[\frac{1}{p}]$, on a

$$v_p(\Lambda_m(x)) \geq v_p(\Lambda_{m+1}(x)) - (p-1)\frac{C}{p^m} \geq \cdots \geq v_p(x) - (p-1)\frac{C}{p^m}(\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{p^i}) \geq v_p(x) - \frac{C}{p^{m-1}}.$$

□

On défnit une application $R_m^m[\frac{1}{p}]$-linéaire $\mathrm{T}_m : R_\infty^\infty[\frac{1}{p}] \to R_m^m[\frac{1}{p}]$ en composant Λ_m et la trace de Tate normalisée de F_∞ dans F_{p^m}. La restriction de T_m à $\mathfrak{K}_{p^\infty}^+$ est une application $\mathfrak{K}_{p^m}^+$-linéaire donnée par la formule :

$$\begin{aligned} \mathrm{T}_m : \mathfrak{K}_{p^\infty}^+ &\longrightarrow \mathfrak{K}_{p^m}^+ \\ \zeta_{p^n}^a q_{p^n}^b &\mapsto \begin{cases} \zeta_{p^n}^a q_{p^n}^b\,; & \text{si } p^{n-m}|a \text{ et } p^{n-m}|b; \\ 0\,; & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

Lemme 3.1.9. *Si $m \in \mathbb{N}$, l'application T_m est continue et elle s'étend par continuité en une application $\mathfrak{K}_{p^m}^+$-linéaire $\mathrm{T}_m : \mathbb{C}(\mathfrak{K}_{p^\infty}^+) \to \mathfrak{K}_{p^m}^+$ qui commute à l'action de $\mathcal{G}_{\mathfrak{K}}$.*

Démonstration. D'après Tate [27], la trace de Tate normalisée de F_∞ dans F_{p^m} est continue. Par définition de T_m, elle est continue car Λ_m est continue et T_m est la composition de Λ_m et la trace de Tate normalisée de F_∞ dans F_{p^m}.

Si $i \in I, j \in J$ et $\sigma \in \mathcal{G}_{\mathfrak{K}}$, on a $(\zeta^i q^j) * \sigma = \zeta^{(\chi_{\mathrm{cycl}}(\sigma)-1)i}\zeta^{c_q(\sigma)j}\zeta^i q^j$, où c_q est le 1-cocycle associé à q à valeurs dans $\mathbb{Z}_p(1)$ par la théorie de Kummer. La commutativité de T_m et $\mathcal{G}_{\mathfrak{K}}$ vient de la formule de l'action de $\mathcal{G}_{\mathfrak{K}}$ au-dessus et de la formule de T_m sur $\mathfrak{K}_{p^\infty}^+$. □

3.1.4 Lien avec l'algèbre $\mathcal{M}(\overline{\mathbb{Q}})$ des formes moduaires

En associant son q-développement à une forme modulaire, cela permet de voir les formes modulaires comme des éléments de $\overline{\mathbb{Q}}\mathfrak{K}_\infty^+$. Rappelons que l'on note $P_{\mathbb{Q}_p}$ le groupe de Galois de $\bar{\mathbb{Q}}_p\mathfrak{K}_\infty$ sur $\mathfrak{K}$ et $P_{\overline{\mathbb{Q}}_p}$ le groupe de Galois de $\bar{\mathbb{Q}}_p\mathfrak{K}_\infty$ sur $\mathfrak{K}\overline{\mathbb{Q}}_p$.

Lemme 3.1.10. *Le groupe $P_{\mathbb{Q}_p}$ préserve l'algèbre des formes modulaires $\mathcal{M}(\overline{\mathbb{Q}})$; c'est-à dire, $P_{\mathbb{Q}_p}$ est un sous-groupe de $\Pi_{\mathbb{Q}}$.*

Démonstration. Considérons la suite exacte :

$$0 \to P_{\overline{\mathbb{Q}}_p} \to P_{\mathbb{Q}_p} \to \mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p} \to 0.$$

Comme $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}$ preserve $\mathcal{M}(\overline{\mathbb{Q}})$, $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}$ est un sous-groupe de $\Pi_{\mathbb{Q}}$. D'autre part, on a un isomorphisme de groupes $P_{\overline{\mathbb{Q}}_p} \cong \left(\begin{smallmatrix} 1 & \hat{\mathbb{Z}} \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. On a deux actions de $\left(\begin{smallmatrix} 1 & \hat{\mathbb{Z}} \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ sur $\mathcal{M}(\overline{\mathbb{Q}})$:

(1) l'action induite par celle de $\mathbb{P}_{\overline{\mathbb{Q}}_p}$ sur $\overline{\mathbb{Q}}_p\mathfrak{K}_\infty^+$;

(2) l'action modulaire étendant par continuité celle de $\left(\begin{smallmatrix} 1 & \mathbb{Z} \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ sur $\mathcal{M}(\overline{\mathbb{Q}})$.

On constate que que ces deux actions de $\left(\begin{smallmatrix} 1 & \hat{\mathbb{Z}} \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ sur $\mathcal{M}(\overline{\mathbb{Q}})$ coïncident en comparant les formules : on a $\left(\begin{smallmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)q_M = q_M\zeta_M^b$ dans les deux cas. Donc $P_{\overline{\mathbb{Q}}_p}$ preserve l'algèbre $\mathcal{M}(\overline{\mathbb{Q}})$, ce qui permet de déduire le lemme. □

Par conséquent, ceci induit un morphisme $\mathcal{G}_{\mathfrak{K}} \to \Pi_{\mathbb{Q}}$ en composant les morphismes $\mathcal{G}_{\mathfrak{K}} \to P_{\mathbb{Q}_p}$ et $P_{\mathbb{Q}_p} \to \Pi_{\mathbb{Q}}$. De plus, si $M \geq 1$ un entier, $\mathcal{G}_{\mathfrak{K}_M}$ est un sous-groupe de $\mathcal{G}_{\mathfrak{K}}$ et donc on a un morphisme $\mathcal{G}_{\mathfrak{K}_M} \to \Pi_{\mathbb{Q}}$.

Enfin, on choisit un système compatible des q_M de racines de q, ce qui définir un morphisme $r \mapsto q^r$ de $\mathbb{Q}$ dans $\overline{\mathfrak{K}}$. On définit une action de $\mathbb{T}(\mathbb{Q})_+ = \{\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right), a, d \in \mathbb{Q}, ad \in \mathbb{Q}_+\} \subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})_+$ sur $\mathfrak{K}_\infty^+$ par la formule : $f(q_M) * \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right) = f(q_{dM}^a)$ quel que soient $f(q_M) \in \mathfrak{K}_\infty^+$ et $\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{T}(\mathbb{Q})_+$.

3.2 Application de la construction de Fontaine à l'anneau $\mathfrak{K}^+$

3.2.1 La construction de Fontaine

Soit L un anneau de caractéristique 0, qui est muni d'une valuation v_p telle que $v_p(p) = 1$. On note $\mathcal{O}_L = \{x \in L, v_p(x) \geq 0\}$ l'anneau des entiers de L pour la topologie p-adique. On note $\mathcal{O}_{\mathbb{C}(L)}$ le complété de $\mathcal{O}_L$ pour la valuation v_p. On pose $\mathbb{C}(L) = \mathcal{O}_{\mathbb{C}(L)}[\frac{1}{p}]$.

Définition 3.2.1. Soit $A_n = \mathcal{O}_L/p\mathcal{O}_L$ pour tous n ; alors $\{A_n\}$ muni des morphismes de transition $A_n \mapsto A_{n-1}$ définis par l'application de Frobenius absolu $x_n \mapsto x_n^p$ forme un système projectif. On note $\mathbb{R}(L) = \varprojlim A_n = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} | x_n \in \mathcal{O}_L/p\mathcal{O}_L$ et $x_{n+1}^p = x_n$, si $n \in \mathbb{N}\}$.

Si $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}(L)$, soit $\hat{x}_n$ un relèvement de x_n dans $\mathcal{O}_{\mathbb{C}(L)}$. La suite $(\hat{x}_{n+k}^{p^k})$, converge quand k tend vers l'infini. On note $x^{(n)}$ sa limite, qui ne dépend pas du choix des relèvements $\hat{x}_n$. On obtient ainsi une bijection : $\mathbb{R}(L) \to \{(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} | x^{(n)} \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}(L)}, (x^{(n+1)})^p = x^{(n)}, \forall n\}$. Si $x = (x^{(i)}), y = y^{(i)}$ sont deux éléments de $\mathbb{R}(L)$, alors leur somme $x + y$ et leur produit xy sont donnés par :

$$(x+y)^{(i)} = \lim_{j\to\infty}(x^{(i+j)} + y^{(i+j)})^{p^j} \text{ et } (xy)^{(i)} = x^{(i)}y^{(i)}.$$

L'anneau $\mathbb{R}(L)$ est un anneau parfait de caractéristique p (i.e. le morphisme $x \mapsto x^p$ est bijectif.). On note $\mathbb{A}_{\inf}(L)$ l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans $\mathbb{R}(L)$. Alors $\mathbb{A}_{\inf}(L)$ est un anneau p-adique (i.e. un anneau séparé et complet pour la topologie p-adique), d'anneau résiduel parfait de caractéristique p. Si $x \in \mathbb{R}(L)$, on note $[x] = (x, 0, 0, ...) \in \mathbb{A}_{\inf}(L)$ son représentant de Teichmüller. Alors tout élément a de $\mathbb{A}_{\inf}(L)$ peut s'écrire de manière unique sous la forme $\sum\limits_{k=0}^{\infty} p^k[x_k]$ avec une suite $(x_k) \in (\mathbb{R}(L))^{\mathbb{N}}$.

On définit un morphisme d'anneaux $\theta : \mathbb{A}_{\text{inf}}(L) \to \mathcal{O}_{\mathbb{C}(L)}$ par la formule

$$\sum_{k=0}^{+\infty} p^k[x_k] \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} p^k x_k^{(0)}.$$

On note $\mathbb{B}_{\text{inf}}(L) = \mathbb{A}_{\text{inf}}(L)[\frac{1}{p}]$, et on étend θ en un morphisme

$$\mathbb{B}_{\text{inf}}(L) \to \mathbb{C}(L).$$

On note $\mathbb{B}_m(L) = \mathbb{B}_{\text{inf}}(L)/(\text{Ker}\theta)^m$. On fait de $\mathbb{B}_m(L)$ un anneau de Banach en prenant l'image de $\mathbb{A}_{\text{inf}}(L)$ comme anneau d'entiers.

On définit $\mathbb{B}_{\text{dR}}^+(L) := \varprojlim \mathbb{B}_m(L)$ comme le complété Ker(θ)-adique de $\mathbb{B}_{\text{inf}}(L)$; on le munit de la topologie de la limite projective, ce qui en fait un anneau de Fréchet. Donc θ s'étend en un morphisme continu d'anneaux topologiques

$$\mathbb{B}_{\text{dR}}^+(L) \to \mathbb{C}(L).$$

On peut munir $\mathbb{B}_{\text{dR}}^+(L)$ d'une filtration de la façon suivante : pour $i \in \mathbb{N}$, notons $\text{Fil}^i\,\mathbb{B}_{\text{dR}}^+(L)$ la i-ème puissance de l'idéal Kerθ de $\mathbb{B}_{\text{dR}}^+(L)$.

L'anneaux $\mathbb{A}_{\text{inf}}(L)$ s'identifie canoniquement à un sous-anneau de $\mathbb{B}_{\text{dR}}^+(L)$ et si $k \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}$, on pose

$$U_{m,k} = p^m\mathbb{A}_{\text{inf}}(L) + (\text{Ker}\theta)^{k+1}\mathbb{B}_{\text{dR}}^+(L),$$

alors les $U_{m,k}$ forment une base de voisinages de 0 dans $\mathbb{B}_{\text{dR}}^+(L)$.

Exemple 3.2.2. (1) Si on prend $L = \mathbb{Q}_p$, alors la construction est triviale (i.e. on a $\mathbb{B}_{\text{dR}}^+(\mathbb{Q}_p) = \mathbb{Q}_p$.)

(2) Si $L = \overline{\mathbb{Q}}_p$, on note $\text{C}_p = \mathbb{C}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$, $\tilde{\text{E}}^+ = \mathbb{R}(\overline{\mathbb{Q}_p})$, $\tilde{\text{A}}^+ = \mathbb{A}_{\text{inf}}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$, $\tilde{\text{B}}^+ = \mathbb{B}_{\text{inf}}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ et $\text{B}_{\text{dR}}^+ = \mathbb{B}_{\text{dR}}^+(\overline{\mathbb{Q}}_p)$. On note $\tilde{\zeta}$ (resp. $\tilde{\zeta}_M$ pour un entier $M \geq 1$) le représentant de Teichmüler de $\zeta^{(1)} = (1, \zeta_p, \cdots, \zeta_{p^n}, \cdots)$ (resp. $\zeta^{(M)} = (\zeta_M, \cdots, \zeta_{Mp^n}, \cdots)$) dans $\mathbb{A}_{\text{inf}}(\overline{\mathfrak{K}}^+)$. Si $M|N$, alors on a $\tilde{\zeta}_N^{N/M} = \tilde{\zeta}_M$. Le noyau du morphisme $\theta : \tilde{\text{A}}^+ \to \mathcal{O}_{\text{C}_p}$ est un idéal principal engendré par $\omega = \frac{\tilde{\zeta}-1}{\tilde{\zeta}_p-1}$. On pose

$$t = \log\tilde{\zeta} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1-\tilde{\zeta})^n}{n};$$

c'est le $2\pi i$ p-adique de Fontaine, qui appartient à B_{dR}^+ et aussi engendre le noyau du morphisme $\theta : \text{B}_{\text{dR}}^+ \to \text{C}_p$.

(3) On va considérer les cas $L = \mathfrak{K}_{Mp^\infty}^+$ pour M un entier ≥ 1 et $L = \overline{\mathfrak{K}}^+$. Le $2\pi i$ p-adique de Fontaine $t = \log\tilde{\zeta}$ appartient à $\mathbb{B}_{\text{dR}}^+(\mathfrak{K}_{Mp^\infty}^+)$ pour tous $M \geq 1$. D'après la construction de Fontaine, on a un morphisme surjective d'anneaux :

$$\theta : \mathbb{A}_{\text{inf}}(\overline{\mathfrak{K}}^+) \to \mathcal{O}_{\mathbb{C}(\overline{\mathfrak{K}}^+)}(\text{ resp. } \theta : \mathbb{A}_{\text{inf}}(\mathfrak{K}_{Mp^\infty}^+) \to \mathcal{O}_{\mathbb{C}(\mathfrak{K}_{Mp^\infty}^+)})$$

avec le noyau engendré par $\omega = \frac{\tilde{\zeta}-1}{\tilde{\zeta}_p-1}$. De plus, θ s'étend en un morphisme continu d'anneaux

$$\theta : \mathbb{B}_{\text{dR}}^+(\overline{\mathfrak{K}}^+) \to \mathbb{C}(\overline{\mathfrak{K}}^+)(\text{ resp. } \theta : \mathbb{B}_{\text{dR}}^+(\mathfrak{K}_{Mp^\infty}^+) \to \mathbb{C}(\mathfrak{K}_{Mp^\infty}^+)),$$

dont le noyau est l'idéal principal engendré par t ou ω , sur lequel $\mathcal{G}_{\mathfrak{K}}$ agit par multiplication par χ_{cycl}.

3.2.2 Trace de Tate normalisée pour $\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+(\mathfrak{K}_{Mp^\infty}^+)$

Pour simplifier la notation, on note $\mathbb{A}_{\inf}$ (resp. $\mathbb{B}_{\inf}$ et $\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+$) l'anneau $\mathbb{A}_{\inf}(\overline{\mathfrak{K}}^+)$ (resp. $\mathbb{B}_{\inf}(\overline{\mathfrak{K}}^+)$ et $\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+(\overline{\mathfrak{K}}^+)$).

Soit $\tilde{q}$ (resp. $\tilde{q}_M$ si $M \geq 1$ est un entier) le représentant de Teichmüller dans $\mathbb{A}_{\inf}$ de $(q, q_p, \cdots, q_{p^n}, \cdots)$ (resp. $(q_M, \cdots, q_{Mp^n}, \cdots)$) . Si $M|N$, on a $\tilde{q}_N^{N/M} = \tilde{q}_M$.

On définit une application $\iota_{\mathrm{dR}} : \mathfrak{K}^+ \to \mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+$ par $f(q) \mapsto f(\tilde{q})$; ce qui permet d'identifier $\mathfrak{K}^+$ à un sous-anneau de $\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+(\overline{\mathfrak{K}}^+)$. On note $\alpha = \frac{\tilde{q}}{p} - [(\frac{q}{p}, (\frac{q}{p})^{\frac{1}{p}}, \cdots,)]$ et on a $\alpha \in \mathbb{A}_{\inf} \cap \mathrm{Ker}\theta$. Si $f(q) \in \mathfrak{K}^+$ est de valuation ≥ 0 (i.e. $f(q) = \sum_{n\in\infty} a_n(\frac{q}{p})^n \in \mathfrak{K}^+$ avec $a_n \in \mathbb{Z}_p$), on a

$$f(\tilde{q}) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(\alpha + [(\frac{q}{p}, (\frac{q}{p})^{\frac{1}{p}}, \cdots,)])^n = \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha^k \sum_{n\geq k} a_n \binom{n}{k} [(\frac{q}{p}, (\frac{q}{p})^{\frac{1}{p}}, \cdots,)]^k.$$

Comme la suite a_n tend vers 0, la séries $\sum_{n\geq k} a_n \binom{n}{k} [(\frac{q}{p}, (\frac{q}{p})^{\frac{1}{p}}, \cdots,)]^k$ converge dans $\mathbb{A}_{\inf}$ et donc ι_{dR} est continue. Mais il faut faire attention au fait que $\iota_{\mathrm{dR}}(\mathfrak{K}^+)$ n'est pas stable par $\mathcal{G}_{\mathfrak{K}}$ car $\tilde{q}\sigma = \tilde{q}\tilde{\zeta}^{c_q(\sigma)}$ si $\sigma \in \mathcal{G}_{\mathfrak{K}}$, où c_q est le 1-cocycle à valeur dans $\mathbb{Z}_p(1)$ associé à q par la théorie de Kummer.

Posons $\tilde{\mathfrak{K}}^+ = \iota_{\mathrm{dR}}(\mathfrak{K}^+)[[t]]$. Si $M \geq 1$ est un entier, on note $\tilde{\mathfrak{K}}_M^+$ l'anneau $\tilde{\mathfrak{K}}^+[\tilde{q}_M, \tilde{\zeta}_M]$. On peut étendre l'application ι_{dR} en un morphisme continu de $\mathfrak{K}^+$-modules $\iota_{\mathrm{dR}} : \mathfrak{K}_M^+ \to \mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+(\overline{\mathfrak{K}}^+)$ en envoyant ζ_M et q_M sur $\tilde{\zeta}_M$ et $\tilde{q}_M$ respectivement. Alors, on a $\tilde{\mathfrak{K}}_M^+ = \iota_{\mathrm{dR}}(\mathfrak{K}_M^+)[[t]]$. On pose on pose $\tilde{\mathfrak{K}}_{Mp^\infty}^+ = \bigcup_n \tilde{\mathfrak{K}}^+[\tilde{\zeta}_{Mp^n}, \tilde{q}_{Mp^n}]$.

Remarque 3.2.3. Le module $\iota_{\mathrm{dR}}(\mathfrak{K}_M^+)$ n'est pas un anneau car $\tilde{\zeta} = \tilde{\zeta}_M^M \notin \iota_{\mathrm{dR}}(\mathfrak{K}_M^+)$. Donc le morphisme $\iota_{\mathrm{dR}} : \mathfrak{K}_M^+ \to \mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+(\overline{\mathfrak{K}}^+)$ n'est plus un morphisme d'anneaux car $\iota_{\mathrm{dR}}(1) = 1$ et $\iota_{\mathrm{dR}}(\zeta_M)^M = \tilde{\zeta} \neq 1 = \iota_{\mathrm{dR}}(\zeta_M^M)$.

Lemme 3.2.4. *(1) $\tilde{\mathfrak{K}}^+$ est stable sous l'action de $\mathcal{G}_{\mathfrak{K}}$.*
(2) Le $\tilde{\mathfrak{K}}^+$-module $\tilde{\mathfrak{K}}_M^+$ est égal au $\tilde{\mathfrak{K}}^+$-module $\tilde{\mathfrak{K}}^+[\zeta_M, \tilde{q}_M]$.

Démonstration. (1) Si $\sigma \in \mathcal{G}_{\mathfrak{K}}$, $\sigma\tilde{q} = \tilde{q}\tilde{\zeta}^{c_q(\sigma)}$ et $\tilde{\zeta} \in \mathfrak{K}[[t]]$. Alors $\sigma\tilde{q} \in \mathfrak{K}[[t]]$. Par ailleurs, on a $\sigma t = \chi_{cycl}(\sigma)t$. Cela permet de conclure le (1).
(2) Il se déduit du fait : $\zeta_M = \tilde{\zeta}_M \exp(-\frac{t}{M})$.

□

Lemme 3.2.5. *Tout élément x de $(\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+)^{\mathcal{G}_{\mathfrak{K}_{p^\infty}}}$ s'écrit de manière unique sous la forme*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \omega^k (\sum_{i\in I, j\in J} a_{ijk}(x)\tilde{\zeta}^i \tilde{q}^j),$$

où $a_{ijk}(x)$ est une suite triple d'éléments de $\iota_{\mathrm{dR}}(\mathfrak{K}^+)$ avec la propriété suivante : pour k fixé et $N \in \mathbb{N}$, $\{(i,j) \in I \times J : v_p(a_{ijk}(x)) + j \leq N\}$ est fini.

Démonstration. En composant l'application θ, l'application $\mathrm{T}_1 : \mathbb{C}(\overline{\mathfrak{K}}^+)^{\mathcal{G}_{\mathfrak{K}_{p^\infty}}} \to \mathfrak{K}^+$ et l'application ι_{dR}, on définit une suite d'applications :

$$\theta_{ij} : (\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+)^{\mathcal{G}_{\mathfrak{K}_{p^\infty}}} \to \iota_{\mathrm{dR}}(\mathfrak{K}^+); x \mapsto \theta_{ij}(x) = \frac{1}{\tilde{q}}\big(\iota_{\mathrm{dR}} \circ \mathrm{T}_1(\theta(x)\zeta^{-i}q^{1-j})\big).$$

Soit η l'application de $(\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+)^{\mathcal{G}_{\mathfrak{K}_{p^\infty}}}$ dans $(\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+)^{\mathcal{G}_{\mathfrak{K}_{p^\infty}}}$ définie par

$$\eta(x) = \omega^{-1}(x - \sum_{i\in I, j\in J} \theta_{ij}(x)\tilde{\zeta}^i\tilde{q}^j).$$

Si $x \in (\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+)^{\mathcal{G}_{\mathfrak{K}_{p^\infty}}}$ et $n \in \mathbb{N}$, on a

$$x = \omega^{n+1}\eta^{n+1}(x) + \sum_{k=0}^{n} \omega^k (\sum_{i\in I, j\in J} \theta_{ij}(x)\tilde{\zeta}^i\tilde{q}^j),$$

ce qui montre que l'on peut poser $a_{ijk}(x) = \theta_{ij}(\eta^k(x))$; d'où l'existence d'une telle écriture. D'autre part, l'unicité se déduit de la construction de θ_{ij} et de l'unicité d'écriture d'élément dans $\mathbb{C}(\overline{\mathfrak{K}}^+)^{\mathcal{G}_{\mathfrak{K}_{p^\infty}}}$. □

Remarque 3.2.6. (1) Tout élément x de $(\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+)^{\mathcal{G}_{\mathfrak{K}_{p^\infty}}}$ s'écrit aussi de manière unique sous la forme

$$\sum_{k=0}^{+\infty} t^k (\sum_{i\in I, j\in J} a_{ijk}(x)\tilde{\zeta}^i\tilde{q}^j)),$$

où la suite triple $a_{ijk}(x)$ d'éléments de $\iota_{\mathrm{dR}}(\mathfrak{K}^+)$ vérifie la même propriété dans le lemme.

(2) Le lemme précédent montre que $\tilde{\mathfrak{K}}_{p^\infty}$ est dense dans $(\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+)^{\mathcal{G}_{\mathfrak{K}_{p^\infty}}}$.

Proposition 3.2.7. *Si X est un ouvert compact de $\mathbb{Q}_p$ vérifiant $X + p^{-1}\mathbb{Z}_p = X$, il existe une unique application $\iota_{\mathrm{dR}}(\mathfrak{K}^+)$-linéaire Res_X continue de $(\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+)^{\mathcal{G}_{\mathfrak{K}_{p^\infty}}}$ dans $(\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+)^{\mathcal{G}_{\mathfrak{K}_{p^\infty}}}$ telle que l'on ait $\mathrm{Res}_X(\tilde{\zeta}^x\tilde{q}^y) = \tilde{\zeta}^x\tilde{q}^y$ si $x \in X, y \in X \cap \mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$ et $\mathrm{Res}_X(\tilde{\zeta}^x\tilde{q}^y) = 0$ sinon.*

Démonstration. Comme $\omega = \sum_{i=0}^{p-1}\tilde{\zeta}_p^i$ est un polynôme en $\tilde{\zeta}_p$, on voit que s'il existe une telle application, Res_X doit être donnée par la formule

$$\mathrm{Res}_X(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \omega^k (\sum_{(i,j)\in(I\cap X)\times(J\cap X)} a_{ijk}(x)\tilde{\zeta}^i\tilde{q}^j). \tag{3.2}$$

Ceci implique que

$$\mathrm{Res}_X(\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}^{\mathcal{G}_{\mathfrak{K}_{p^\infty}}}) \subset \mathbb{A}_{\mathrm{inf}}^{\mathcal{G}_{\mathfrak{K}_{p^\infty}}} \text{ et } \mathrm{Res}_X((\mathrm{Ker}\theta)^{k+1}) = \mathrm{Res}_X(\omega^{k+1}(\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+)^{\mathcal{G}_{\mathfrak{K}_{p^\infty}}}) \subset (\mathrm{Ker}\theta)^{k+1},$$

et donc que $\mathrm{Res}_X(U_{m,k}) \subset U_{m,k}$, ce qui permet de conclure que l'application Res_X définie par la formule (3.2) est continue.

Il ne reste donc plus qu'à donner la formule explicite pour $\mathrm{Res}_X(\tilde{\zeta}^x)$ si $x \in \mathbb{Q}_p$. Ceci a fait dans ([12] prop.4.2) : $\mathrm{Res}_X(\tilde{\zeta}^x) = \tilde{\zeta}^x$ si $x \in X$ et $\mathrm{Res}_X(\tilde{\zeta}^x) = 0$ sinon. Ceci permet de conclure. □

Si $M = M_0p^m \geq 1$ est un entier tel que $m \geq v_p(2p)$ et $p \nmid M_0$, soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $[F_M[\zeta_{p^n}] : F_{p^n}] = [F_{Mp^\infty} : F_{p^\infty}]$ et soit $e_1, \cdots e_d$ une base de $F_M[\zeta_{p^n}]$ sur F_{p^n}.

Lemme 3.2.8. *Tout éléments de $(\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+)^{\mathcal{G}_{\mathfrak{K}_{Mp^\infty}}}$ peut s'écrire sous la forme*

$$x = \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=0}^{M_0-1} a_{ij}(x) e_i \tilde{q}_{M_0}^j, \text{ avec } a_{ij}(x) \in (\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+)^{\mathcal{G}_{p^\infty}}.$$

De plus, $\tilde{\mathfrak{K}}_{Mp^\infty}^+$ est dense dans $(\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+)^{\mathcal{G}_{Mp^\infty}}$.

Démonstration. D'après le corollaire 3.1.7, on peut définir une application $\iota_{\mathrm{dR}} : \mathbb{C}(\overline{\mathfrak{K}}^+)^{\mathcal{G}_{p^\infty}} \to (\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+)^{\mathcal{G}_{\mathfrak{K}_{p^\infty}}}$ en envoyant $\zeta^i q^j$ sur $\tilde{\zeta}\tilde{q}^j$ si $i \in I, j \in J + \mathbb{N}$. Par ailleurs, les $e_i q_{M_0}^j$ forment une base de $\mathbb{C}(\overline{\mathfrak{K}}^+)^{\mathcal{G}_{Mp^\infty}}$ sur $\mathbb{C}(\overline{\mathfrak{K}}^+)^{\mathcal{G}_{p^\infty}}$. Si $x \in (\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+)^{\mathcal{G}_{\mathfrak{K}_{Mp^\infty}}}$, on peut écrire $\theta(x)$ uniquement sous la forme $\theta(x) = \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=0}^{M_0-1} a_{ij}^{(0)}(x) e_i q_{M_0}^j$, avec $a_{ij}^{(0)}(x) \in \mathbb{C}(\overline{\mathfrak{K}}^+)^{\mathcal{G}_{p^\infty}}$.

On définit deux séries $\{a_{ij}^{(k)}(x) \in \mathbb{C}(\overline{\mathfrak{K}}^+)^{\mathcal{G}_{p^\infty}}\}_{k\in\mathbb{N}}$ et $x^{(k)}$ par récurrence :

$$x^{(0)} = x, \theta(x^{(k)}) = \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=0}^{M_0-1} a_{ij}^{(k)}(x) e_i q_{M_0}^j,$$
$$x^{(k+1)} = \omega^{-1}(x^{(k)} - \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=0}^{M_0-1} \iota_{\mathrm{dR}}(a_{ij}^{(k)}(x)) e_i \tilde{q}_{M_0}^j).$$

Donc, on a $x = \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=0}^{M_0-1} (\sum_{k=0}^{+\infty} \omega^k \iota_{\mathrm{dR}}(a_{ij}^{(k)}(x))) e_i \tilde{q}_{M_0}^j$, d'où on a l'écriture dans le lemme.

Comme $\tilde{\mathfrak{K}}_{p^\infty}^+$ est dense dans $(\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+)^{\mathcal{G}_{p^\infty}}$ et les $e_i \tilde{q}_M^{p^m j}$ appartient à $\tilde{\mathfrak{K}}_{Mp^\infty}^+$, on obtient que $\tilde{\mathfrak{K}}_{Mp^\infty}^+$ est dense dans $(\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+)^{\mathcal{G}_{Mp^\infty}}$. □

Proposition 3.2.9. *Si $M \geq 1$ est un entier tel que $m = v_p(M) \geq v_p(2p)$, il existe une unique application*

$$\mathbf{R}_M : \mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+(\mathfrak{K}_{Mp^\infty}^+) \to \tilde{\mathfrak{K}}_M^+$$

qui est $\tilde{\mathfrak{K}}_M^+$-linéaire et continue et telle que la restriction de $\mathbf{R}_M$ à $\tilde{\mathfrak{K}}_{Mp^\infty}^+$ est donnée par la formule :

$$\mathbf{R}_M : \tilde{\mathfrak{K}}_{Mp^\infty}^+ \longrightarrow \tilde{\mathfrak{K}}_M^+$$
$$\tilde{\zeta}_{Mp^n}^a \tilde{q}_{Mp^n}^b \mapsto \begin{cases} \tilde{\zeta}_{Mp^n}^a \tilde{q}_{Mp^n}^b\,; & \text{si } p^n | a \text{ et } p^n | b; \\ 0\,; & \text{sinon.} \end{cases}$$

De plus, $\mathbf{R}_M$ commutes à l'action de $\mathcal{G}_{\mathfrak{K}}$.

Démonstration. Commençons par traiter le cas $M = p^m$ pour $m \geq v_p(2p)$. S'il existe une telle application, elle est unique par continue de $\mathbf{R}_M$.

Passons à l'existence. Soit S_m le sous-$\iota_{\mathrm{dR}}(\mathfrak{K}^+)$-module de $\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+$ engendré par les $\tilde{\zeta}^x \tilde{q}^y$ pour $x \in p^{-m}\mathbb{Z}_p, y \in p^{-m}\mathbb{Z}$. L'adhérence de S_n dans $\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+$ est $\tilde{\mathfrak{K}}_{p^{-m}}^+$. En appliquant la proprosition 3.2.7 à $X = p^{-m}\mathbb{Z}_p$, on obtient une application $\tilde{\mathfrak{K}}_{p^m}^+$-linéaire continue $\mathrm{Res}_{p^{-m}\mathbb{Z}_p}$ de $(\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+)^{\mathcal{G}_{\mathfrak{K}_{p^\infty}}}$ dans $(\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+)^{\mathcal{G}_{\mathfrak{K}_{p^\infty}}}$ telle que la restriction de $\mathrm{Res}_{p^{-m}\mathbb{Z}_p}$ à $\tilde{\mathfrak{K}}_{p^\infty}^+$ vérifie la formule voulue.

Passons au cas général. Soit $M = M_0 p^m$ un entier tel que $m \geq v_p(2p)$ et $p \nmid M_0$. On a $[\mathfrak{K}_M^+ : \mathfrak{K}_{p^m}^+] = [\mathfrak{K}_{Mp^\infty}^+ : \mathfrak{K}_{p^\infty}^+]$. Soit $e_1, \cdots, e_d$ une base de $\mathfrak{K}_M^+$ sur $\mathfrak{K}_{p^n}^+$. On idéntifie $\mathfrak{K}_M^+$ à un sous-anneau de $(\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+)^{\mathcal{G}_{\mathfrak{K}_{Mp^\infty}}}$, qui est l'anneau des fonctions analytiques sur la boule $v_p(\tilde{q}_M) \geq \frac{1}{M}$ à coefficients dans F_M. Donc les e_i forment aussi une base de $(\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+)^{\mathcal{G}_{\mathfrak{K}_{Mp^\infty}}}$ sur $(\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+)^{\mathcal{G}_{\mathfrak{K}_{p^\infty}}}$. Soit $\mathrm{T} = \mathrm{Tr}_{(\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+)^{\mathcal{G}_{\mathfrak{K}_{Mp^\infty}}}/(\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+)^{\mathcal{G}_{\mathfrak{K}_{Mp^\infty}}}}$. La restriction de T à $\mathfrak{K}_M^+$ est égale à $\mathrm{Tr}_{\mathfrak{K}_M^+/\mathfrak{K}_{p^n}^+}$, ce qui fait la base $e_1^*, \cdots e_d^*$ de $(\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+)^{\mathcal{G}_{\mathfrak{K}_{Mp^\infty}}}$ sur $(\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+)^{\mathcal{G}_{\mathfrak{K}_{p^\infty}}}$ duale de $e_1, \cdots, e_d$ est constituée d'éléments de $\mathfrak{K}_M^+$. D'après le lemme 3.2.8, si $x \in (\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+)^{\mathcal{G}_{\mathfrak{K}_{Mp^\infty}}}$, on a

$$x = \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=0}^{M_0-1} a_{ij}(x) e_i \tilde{q}_M^{p^m j}, \text{ avec } a_{ij}(x) \in (\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+)^{\mathcal{G}_{p^\infty}}.$$

On peut définit $\mathbf{R}_M$ par la formule $\mathbf{R}_M(x) = \sum_{i=1}^d \sum_{j=0}^{M_0-1} \mathbf{R}_{p^m}(a_{ij}(x)) e_i \tilde{q}_M^{p^m j}$. Comme $\mathbf{R}_{p^m}$ est $\tilde{\mathfrak{K}}_{p^m}^+$-linéaire continue et les $e_i \tilde{q}_M^{p^m j}$ forment aussi une base de $\tilde{\mathfrak{K}}_M^+$ sur $\tilde{\mathfrak{K}}_{p^m}^+$, on obtient que $\mathbf{R}_M$ est $\tilde{\mathfrak{K}}_M^+$-linéaire continue.

Il ne reste donc plus qu'à vérifier la restriction de $\mathbf{R}_M$ à $\tilde{\mathfrak{K}}_{Mp^\infty}$ satisfait la formule voulue. On a

$$\tilde{\zeta}_{Mp^n}^a \tilde{q}_{Mp^n}^b = \exp(\frac{a}{Mp^n} t) \zeta_{M_0}^a \zeta_{p^{m+n}}^a \tilde{q}_{M_0}^b \tilde{q}_{p^{m+n}}^b.$$

De la définition de $\mathbf{R}_M$ et de la propriété de $\mathbf{R}_{p^m}$, on déduite que

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_M(\tilde{\zeta}_{Mp^n}^a \tilde{q}_{Mp^n}^b) &= \exp(\frac{a}{Mp^n} t) \zeta_{M_0}^a \tilde{q}_{M_0}^b \mathbf{R}_{p^m}(\zeta_{p^{m+n}}^a \tilde{q}_{p^{m+n}}^b) \\ &= \begin{cases} \tilde{\zeta}_{Mp^n}^a \tilde{q}_{Mp^n}^b\,; \text{ si } p^n | a \text{ et } p^n | b; \\ 0\,; \text{ sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

Ceci permet de montrer l'existence. Comme les $\{\tilde{\zeta}_M^i \tilde{q}_M^j\}_{i,j \in J}$ forment une base de $\tilde{\mathfrak{K}}_{Mp^\infty}^+$ sur $\tilde{\mathfrak{K}}_M^+$, on a pas le choix pour la restriction de $\mathbf{R}_M$ à $\tilde{\mathfrak{K}}_{Mp^\infty}^+$ et donc aussi à $(\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+)^{\mathcal{G}_{\mathfrak{K}_{Mp^\infty}}}$ par continuité de $\mathbf{R}_M$ et densité de $\tilde{\mathfrak{K}}_{Mp^\infty}^+$ dans $(\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+)^{\mathcal{G}_{\mathfrak{K}_{Mp^\infty}}}$. La commutativité de $\mathbf{R}_M$ et $\mathcal{G}_{\mathfrak{K}}$ vient de la formule de l'action de $\mathcal{G}_{\mathfrak{K}}$ sur les $\tilde{\zeta}_{Mp^n}^a \tilde{q}_{Mp^n}^b$ et de celle de $\mathbf{R}_M$ sur les $\tilde{\zeta}_{Mp^n}^a \tilde{q}_{Mp^n}^b$. □

On résume les resultats ci-dessus dans le théorème suivant :

Théorème 3.2.10. *Soit $M \geq 1$ un entier ; alors :*

(*i*) $\mathrm{H}^0(\mathcal{G}_{\mathfrak{K}_{Mp^\infty}}, \mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+) = \mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+(\mathfrak{K}_{Mp^\infty}^+)$;

(*ii*) $\tilde{\mathfrak{K}}_{Mp^\infty}^+$ *est dense dans* $\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+(\mathfrak{K}_{Mp^\infty}^+)$;

(*iii*) *Si $v_p(M) \geq v_p(2p)$, alors $\mathbf{R}_M$ s'étend par continuité en une application $\tilde{\mathfrak{K}}_M^+$-linéaire $\mathbf{R}_M : \mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+(\mathfrak{K}_{Mp^\infty}^+) \to \tilde{\mathfrak{K}}_M^+$ qui commute à l'action de $\mathcal{G}_{\mathfrak{K}}$.*

3.3 Une application logarithme log

On note $U_0(\overline{\mathfrak{K}}^+)$ l'ensemble des éléments x de $\mathbb{R}(\overline{\mathfrak{K}}^+)$ tels que $v_p(x^{(0)} - 1) > 0$.

Lemme 3.3.1. *Il existe une unique application logarithme* $x \mapsto \log[x]$ *de* $U_0(\overline{\mathfrak{K}}^+)$ *dans* $\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+(\overline{\mathfrak{K}}^+)$ *qui vérifie* $\log[xy] = \log[x] + \log[y]$*, et* $\log[x] = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}([x]-1)^n}{n}$ *. De plus, on a* $\sigma(\log[x]) = \log[\sigma x]$ *si* $\sigma \in \mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}$*.*

Démonstration. Si $x \in U_0(\overline{\mathfrak{K}}^+)$, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $kv_p(x^{(0)} - 1) \geq 1$. On constate que $([x]-1)^k - p\alpha$, où $\alpha = [\frac{(x^{(0)}-1)^k}{p}]$, appartient à $\mathrm{Ker}\theta$ et donc on a $([x]-1)^k = p\alpha + \omega\beta$.

Si $n \in \mathbb{N}$, on a $n = km + r$ avec $0 \leq r \leq k-1$. Donc on peut écrire

$$\begin{aligned} \frac{([x]-1)^n}{n} &= \frac{([x]-1)^r(p\alpha+\omega\beta)^m}{n} \\ &= ([x]-1)^r \sum_{i=0}^{m} (\omega\beta)^i \frac{\binom{m}{i}(p\alpha)^{m-i}}{km+r}. \end{aligned}$$

Donc on a $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}([x]-1)^n}{n} = \sum_{r=0}^{k-1}([x]-1)^r \sum_{i=0}^{+\infty}(\omega\beta)^i \sum_{m\geq i} \frac{\binom{m}{i}(p\alpha)^{m-i}}{km+r}$.

Si k est fixé et m tend vers $+\infty$, on a $v_p(\binom{m}{i}) - v_p(km+r) + m - i \geq m - i - v_p(km + r) - v_p(i)$ tend vers $+\infty$; ce qui montre que $\sum_{m\geq i} \frac{\binom{m}{i}(p\alpha)^{m-i}}{km+r}$ converge dans $\mathbb{B}_{\mathrm{inf}}$ et la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}([x]-1)^n}{n}$ est donc convergente pour la topologie faible dans $\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+$. La relation $\log[xy] = \log[x] + \log[y]$ se déduit par un argument de séries formelles.

□

On note $\bar{q} = (q, q^{\frac{1}{p}}, \cdots,) \in \mathbb{R}(\overline{\mathfrak{K}}^+)$; son représentant de Teichmüler est $\tilde{q}$. Il est évident que $\bar{q}$ n'appartient pas à $\tilde{\mathrm{E}}^+U_0(\overline{\mathfrak{K}}^+)$. On aimerait bien que l'application logarithme $\log \circ []$ s'étend à $\tilde{\mathrm{E}}^+U_0(\overline{\mathfrak{K}}^+) \times \bar{q}^{\mathbb{Q}}$. On a $\sigma\tilde{q} = \tilde{q}\tilde{\zeta}^{c_q(\sigma)}$, où c_q est le 1-cocycle à valeurs dans $\mathbb{Z}_p(1)$ associé à q par la théorie de Kummer, et le minimum que l'on puisse demander à $u_q = \log\tilde{q}$ est de vérifier la formule $\sigma u_q = u_q + c_q(\sigma)t$, quel que soit $\sigma \in \mathcal{G}_{\mathfrak{K}}$. Mais on a le résultat suivant qui dit qu'il n'existe pas un élément u_q dans $\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+$ et, de plus, un tel u_q est transcendant sur $\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+$.

Théorème 3.3.2. u_q *est transcendant sur* $\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+$*.*

Démonstration. Supposons que u_q est algébrique sur $\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+$. Soit $P(X) = X^n + a_1X^{n-1} + \cdots + a_0 \in \mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+[X]$ le polynôme minimal de u_q sur $\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+$. Si $\sigma \in \mathcal{G}_{\mathfrak{K}}$, alors on a

$$0 = \sigma(P(X)) = (X + c_q(\sigma)t)^n + \sigma(a_1)(X + c_q(\sigma)t)^{n-1} + \cdots + \sigma(a_n).$$

Comme $P(X)$ est le polynôme minimal de u_q, on a $\sigma(P(X)) = P(X)$. Ceci permet de déduire $\sigma(a_1) = a_1 - nc_q(\sigma)t$ et donc $\sigma(\frac{a_1}{n}) = \frac{a_1}{n} - c_q(\sigma)t$. Ceci n'est pas possible car il n'existe pas d'élément x de $\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+$ tel que, si $\sigma \in \mathcal{G}_{\mathfrak{K}}$, $\sigma x = x + c_q(\sigma)t$, où $j \in \mathbb{Z}$.

En effet, s'il existe un tel élément x dans $\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+$, alors il est stable sous l'action de $\mathcal{G}_{\mathfrak{K}_{Mp^\infty}}$ pour tous $M \geq 1$ et donc appartient à $(\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+)^{\mathcal{G}_{\mathfrak{K}_{Mp^\infty}}} = \mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+(\mathfrak{K}_{Mp^\infty}^+)$. Appliquons la trace de Tate normalisée $\mathbf{R}_M : \mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+(\mathfrak{K}_{Mp^\infty}^+) \to \tilde{\mathfrak{K}}_M^+$ à x, et donc on obtient que $\mathbf{R}_M(x)$ appartient à $\tilde{\mathfrak{K}}_M^+$ tel que

$$\sigma\mathbf{R}_M(x) = \mathbf{R}_M(x) + c_q(\sigma)t, \text{ pour tous } \sigma \in P_{\mathfrak{K}}, \tag{3.3}$$

Par ailleurs, la filtration sur $\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+$ est stable sous l'action de $\mathcal{G}_{\mathfrak{K}}$, alors on peut supposer $\mathbf{R}_M(x) = a_1 + a_2(\tilde{q}_M)t \mod t^2$ avec $a_i \in \tilde{\mathfrak{K}}_M^+$ pour $i = 1, 2$. On déduit la relation suivante de la formule (3.3) : $\sigma\theta(a_2) = \theta(a_2) + c_q(\sigma)$ pour tout $\sigma \in \mathcal{G}_{\mathfrak{K}}$, ce qui est impossible car $\theta(a_2) \in \mathfrak{K}_M^+$ n'a qu'un nombre fin de conjugués et $c_q(\sigma)$ prend un nombre d'infini de valeurs pour $\sigma \in U_m \subset P_{\mathfrak{K}}$.

□

Remarque 3.3.3. On peut montrer de la même manière que $\log t$ est transcendant sur $\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+$.

On pose $\mathbb{B}_{\log}^+ = \mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+[u_q]$ avec $\sigma(u_q) = u_q + c_q(\sigma)t$. Comme $(1, \zeta_p, \cdots) \in U_0(\overline{\mathfrak{K}}^+)$ et $\sigma\bar{q} = \bar{q}(1, \zeta_p, \cdots)$ si $\sigma \in \mathcal{G}_{\mathfrak{K}}$, on a bien que $U_0(\overline{\mathfrak{K}}^+) \times \bar{q}^{\mathbb{Q}}$ est stable sous l'action de $\mathcal{G}_{\mathfrak{K}}$. Alors l'application $\log \circ [\cdot] : U_0(\overline{\mathfrak{K}}^+) \to \mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+(\overline{\mathfrak{K}}^+)$ s'étend à $U_0(\overline{\mathfrak{K}}^+) \times \bar{q}^{\mathbb{Q}}$ à valeurs dans $\mathbb{B}_{\log}^+$ telle que $\log[\bar{q}^a] = au_q$ si $a \in \mathbb{Q}$, et $\sigma(\log x) = \log(\sigma x)$ si $\sigma \in \mathcal{G}_{\mathfrak{K}}$. On pose $\mathbb{A}_{\inf}^{**} = \{x = \sum_{k=0}^{+\infty} p^k[x_k] \in \mathbb{A}_{\inf}(\overline{\mathfrak{K}}^+) : x_0 \in U_0(\overline{\mathfrak{K}}^+), x_k \in \mathbb{R}(\overline{\mathfrak{K}}^+) \text{ si } k \geq 1\}$.

Proposition 3.3.4. *(1) Si $1 + x \in \mathbb{A}_{\inf}^{**}$, alors la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$ converge dans $\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+(\overline{\mathfrak{K}}^+)$.*

(2) L'application $\log \circ [\cdot] : U_0(\overline{\mathfrak{K}}^+) \times \bar{q}^{\mathbb{Q}} \to \mathbb{B}_{\log}^+$ s'étend en une application $\log : \mathbb{A}_{\inf}^{**} \times \tilde{q}^{\mathbb{Q}} \to \mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+[u_q]$ telle que

- $\log([x]) = \log[x]$, $\log \tilde{q}^a = au_q$ *si* $a \in \mathbb{Q}$ *;*
- $\log(xy) = \log(x) + \log(y)$ *;*
- $\log(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}(x-1)^n}{n}$, *si la série converge.*

De plus, on a $\sigma(\log x) = \log(\sigma x)$ si $\sigma \in \mathcal{G}_{\mathfrak{K}}$.

Démonstration. (1) Si $1 + x \in \mathbb{A}_{\inf}^{**}$, alors il existe $k \in \mathbb{N}$, tel que $x^k - p\alpha$, où $\alpha = [\frac{(\bar{x}^{(0)})^k}{p}]$, appartient à $\mathrm{Ker}\theta$. Donc on a $x^k = p\alpha + \omega\beta$ avec $\beta \in \mathbb{A}_{\inf}$. Donc l'argument dans 3.3.1 s'adapte à montrer la convergence.

(2) Il suffit de montrer que $\log : \mathbb{A}_{\inf}^{**} \to \mathbb{B}_{\log}^+$ est bien définie. Si $x_0 \in U_0(\overline{\mathfrak{K}}^+)$, alors $[x_0]$ est inversible dans $\mathbb{A}_{\inf}^{**}$. Donc pout tout $x = \sum_{k=0}^{+\infty} p^k[x_k] \in \mathbb{A}_{\inf}^{**}$, on a $x = [x_0](1 + pa)$ avec $a \in \mathbb{A}_{\inf}(\overline{\mathfrak{K}}^+)$. On constate que $\log(1 + pa) = \sum_{n\geq 1} \frac{(-pa)^n}{n}$ converge dans $\mathbb{A}_{\inf}(\overline{\mathfrak{K}}^+)$. Alors $\log x$ est bien défini par multiplicativité.

□

Chapitre 4

Cohomologie des représentations du groupe $P_{\mathfrak{K}_M}$

Soit M un entier ≥ 1 et soit $m = v_p(M)$. Le corps $\mathfrak{K}_{Mp^\infty}$ est une extension galoisienne de $\mathfrak{K}_M$ dont le groupe de Galois

$$P_{\mathfrak{K}_M} \cong \{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p) : a = 1, c = 0, b \in p^m\mathbb{Z}_p, d \in 1 + p^m\mathbb{Z}_p\} =: \mathrm{P}_m$$

est un groupe analytique p-adique de rang 2. Si g est l'élément de $P_{\mathfrak{K}_M}$ correspondant à une matrice $\left(\begin{smallmatrix} 1 & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right)$, l'action de g sur $\zeta_M^i q_M^j$ avec $(i,j) \in J \times J$ est donnée par la formule :

$$g(\zeta_M^i q_M^j) = \zeta_M^i q_M^j \zeta_M^{i(d-1)+jb}.$$

Si $u, v \in p^m\mathbb{Z}_p$, on pose (u,v) l'élément $\left(\begin{smallmatrix} 1 & u \\ 0 & e^v \end{smallmatrix}\right)$ de P_m. La loi de groupe s'écrit alors sous la forme :

$$(u_1, v_1)(u_2, v_2) = (e^{v_2}u_1 + u_2, v_1 + v_2).$$

Soient U_m et Γ_m les sous-groupes de P_m engéndrés par $u_m = (p^m, 0)$ et $\gamma_m = (0, p^m)$ respectivement. Si $(u, 0) \in U_m$ et $(0, v) \in \Gamma_m$, on a $(0,v)(u,0)(0,v)^{-1} = (e^{-v}u, 0) \in U_m$. Donc U_m est distingué dans P_m, et on a $\Gamma_m \cong \mathrm{P}_m/U_m$. Ces deux sous-groupes U_m et Γ_m sont isomorphes à $\mathbb{Z}_p$; ils sont donc de dimension cohomologique 1. Cela implique P_m est de dimension cohomologique ≤ 2.

Si G est un groupe topologique, si V est une $\mathbb{Q}_p$-représentation de G, on note le groupe de cohomologie $\mathrm{H}^i(G, V)$ la cohomologie continue de G à valeurs dans la représentation V. Si G est procyclique, si g_0 est un générateur de G, on a :

$$\mathrm{H}^1(G, V) \cong V/(g_0 - 1), \tag{4.1}$$

où un 1-cocycle $(g \mapsto c_g)$ est envoyé sur l'image de c_{g_0} dans $V/(g_0 - 1)$.

Lemme 4.0.5. *L'action $\circ$ de Γ_m sur $V/((p^m, 0) - 1)$ induite par celle sur $\mathrm{H}^1(U_m, V)$, est obtenue en tordant l'action originale $*$ sur V par le caractère $\gamma_m^a \mapsto e^{-ap^m}$, où $\gamma_m = (0, p^m)$. Plus précisement, si $x \in V/(u_m - 1)$ avec $u_m = (p^m, 0)$ et si $(0, v) \in \Gamma_m$,*

$$x \circ (0, v) = e^{-v}x * (0, v).$$

Démonstration. On démontre le lemme par le calcul suivant : si $(0,v) \in \Gamma_m$, on a

$$\begin{aligned}(c*((0,v)-1))_{u_m} &= c_{(0,v)u_m(0,v)^{-1}} * (0,v) - c_{u_m}\\ &= c_{(e^{-v}p^m,0)} * (0,v) - c_{u_m}\\ &= c_{u_m^{e^{-v}}} * (0,v) - c_{u_m};\end{aligned}$$

de plus, la formule de 1-cocycle et l'identité $c_{(p^m,0)} * (p^m,0) = c_{(p^m,0)}$ dans $V/((p^m,0)-1)$, nous donnent $c_{u_m^a} = ac_{u_m}$ pour tout $a \in \mathbb{Z}_p$ et donc

$$\begin{aligned}c_{(p^m,0)^{e^{-v}}} * (0,v) - c_{(p^m,0)} &= (e^{-v}c_{(p^m,0)}) * (0,v) - c_{(p^m,0)}\\ &= c_{(p^m,0)} * (e^{-v}(0,v)-1),\end{aligned}$$

où e^{-v} agit sur $c_{(p^m,0)}$ par multiplication par e^{-v}. □

Lemme 4.0.6. *Soit V une $\mathbb{Q}_p$-représentation de P_m ; alors on a*

$$\mathrm{H}^2(\mathrm{P}_m, V) \cong V/((p^m,0)-1, (0,p^m)-e^{p^m}).$$

Démonstration. On a une suite exacte de groupes $1 \to U_m \to \mathrm{P}_m \to \Gamma_m \to 1$ et la dimension cohomologique de P_m est ≤ 2. Donc la suite spectrale de Hochschild-Serre nous fournit un isomorphisme :

$$\mathrm{H}^2(\mathrm{P}_m, V) \cong \mathrm{H}^1(\Gamma_m, \mathrm{H}^1(U_m, V)),$$

où l'action de Γ_m sur $\mathrm{H}^1(U_m,V)$ est donnée par $(u \mapsto c_u) \mapsto (u \mapsto (c*\gamma)_u := c_{\gamma u\gamma^{-1}} * \gamma)$.

Les U_m, Γ_m sont des groupes procycliques avec les générateurs $(p^m,0)$ et $(0,p^m)$ respectivement. Soit $(u \mapsto c_u)$ un 1-cocycle représentant un élément c de $\mathrm{H}^1(U_m,V)$. Alors, par l'isomorphisme (4.1), c a pour l'image $c_{(p^m,0)}$ dans $V/((p^m,0)-1)$. D'après le lemme ci-dessus, l'action $\circ$ de Γ_m sur $V/(u_m-1)$ induite par celle sur $\mathrm{H}^1(U_m,V)$ est donnée par la formule :

$$x \circ (0,v) = e^{-v}x * (0,v).$$

Donc on conclut par les isomorphismes suivants :

$$\mathrm{H}^1(\Gamma_m, \mathrm{H}^1(U_m,V)) \cong (V/(u_m-1))/(\gamma_m-1) \cong V/(u_m-1, e^{-p^m}\gamma_m-1).$$

□

4.1 Cohomologie des représentations analytiques du groupe P_m

Définition 4.1.1. Si $n \geq 1$, on note $\mathrm{u} = (u_1, \cdots, u_n) \in \mathbb{C}_p^n$. On note $D(\mathrm{u},m)$ la boule fermée

$$\{\mathrm{x} = (x_1,\cdots,x_n) \in \mathbb{C}_p^n, v_p(\mathrm{x}-\mathrm{u}) = \inf_{1\leq i\leq n} v_p(x_i-u_i) \geq m\}.$$

Une fonction f sur $D(\mathrm{u},m)$ à valeurs dans $\mathbb{C}_p$ est $\mathbb{Q}_p$-analytique s'il existe $\{a_{\mathrm{i}}(f,\mathrm{u}) \in \mathbb{Q}_p\}_{(\mathrm{i}\in\mathbb{N}^n)}$ tels que $\lim\limits_{i_1+\cdots+i_n\to+\infty} v_p(a_{\mathrm{i}}(f,\mathrm{u}))+(\sum_{j=1}^n i_j)m = +\infty$ et $f(\mathrm{x}) = \sum_{\mathrm{i}\in\mathbb{N}^n} a_{\mathrm{i}}(f,\mathrm{u})(\mathrm{x}-\mathrm{u})^{\mathrm{i}}$ quel que soit $\mathrm{x} \in D(\mathrm{u},m)$.

On note $\mathcal{C}^{\mathrm{an}}(D(0,m),\mathbb{Q}_p)$ l'anneau des fonctions $\mathbb{Q}_p$-analytiques sur $D(\mathrm{u}=0,m)$. On définit une valuation v_0 sur $\mathcal{C}^{\mathrm{an}}(D(0,m),\mathbb{Q}_p)$ à valeurs dans $\mathbb{Z}$:

$$v_0:\mathcal{C}^{\mathrm{an}}(D(0,m),\mathbb{Q}_p)\to\mathbb{Z}; v_0(\sum_{\mathrm{i}\in\mathbb{N}^n}a_{\mathrm{i}}(f)\mathrm{x}^{\mathrm{i}})=\inf_{\mathrm{i}\in\mathbb{N}^n}\{\sum_{j=1}^{n}i_j|a_{\mathrm{i}}(f)\neq 0\}.$$

Cette valuation induit une filtration sur $\mathcal{C}^{\mathrm{an}}(D(0,m),\mathbb{Q}_p)$: pour tous $k\in\mathbb{Z}$,

$$\mathrm{Fil}^k\,\mathcal{C}^{\mathrm{an}}(D(0,m),\mathbb{Q}_p)=\{f\in\mathcal{C}^{\mathrm{an}}(D(0,m),\mathbb{Q}_p):v_0(f)\geq k\}.$$

Rappelons que : si $m\geq v_p(2p)$ est un entier, on pose $\mathrm{P}_m=\{\left(\begin{smallmatrix}1&b\\0&d\end{smallmatrix}\right)|b\in p^m\mathbb{Z}_p,d\in 1+p^m\mathbb{Z}_p\}$. C'est un groupe analytique p-adique compact. Si $u,v\in p^m\mathbb{Z}_p$, on note (u,v) l'élément $\left(\begin{smallmatrix}1&u\\0&e^v\end{smallmatrix}\right)$ de P_m. La loi de groupe s'écrit alors sous la forme :

$$(u_1,v_1)(u_2,v_2)=(e^{v_2}u_1+u_2,v_1+v_2).$$

Définition 4.1.2. (1) Une fonction f sur P_m à valeurs dans $\mathbb{Q}_p$ est $\mathbb{Q}_p$-analytique s'il existe $\tilde{f}:D(0,m)\to\mathbb{C}_p$ une fonction $\mathbb{Q}_p$-analytique, telle que, $\forall u,v\in p^m\mathbb{Z}_p$,

$$f((\begin{smallmatrix}1&u\\0&e^v\end{smallmatrix}))=\tilde{f}(u,v).$$

(2) Une représentation analytique V de P_m est un $\mathbb{Q}_p$ espace vectoriel de dimension finie muni d'une action continue de P_m, et les coordonnées de la matrice de $(u,v)\in\mathrm{P}_m$ dans une base de V soient $\mathbb{Q}_p$-analytiques.

Soit V une représentation analytique de P_m. Comme V est une représentation analytique, on dispose des opérateurs $\partial_i:V\to V$, pour $i=1,2$, définis par :

$$x*(u,v)=x+u\partial_1x+v\partial_2x+O((u,v)^2), \tag{4.2}$$

où $O((u,v)^2)$ est une fonction analytique sur P_m de valuation ≥ 2.

Lemme 4.1.3. *Ces opérateurs ont des propriétés de dérivations : si $x_1\in V_1,x_2\in V_2$, où V_1,V_2 sont des représentations analytiques de P_m, et si $i=1,2$, on a*

$$\partial_i(x_1\otimes x_2)=(\partial_ix_1)\otimes x_2+x_1\otimes\partial_ix_2.$$

Démonstration. Soit $(u,v)\in\mathrm{P}_m$ et soient $x_1\in V_1$ et $x_2\in V_2$. De la définition de ∂_i, on a

$$(x_1\otimes x_2)*(u,v)=x_1\otimes x_2+u\partial_1(x_1\otimes x_2)+v\partial_2(x_1\otimes x_2)+O((u,v)^2).$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}&(x_1\otimes x_2)*(u,v)\\=&(x_1*(u,v))\otimes(x_2*(u,v))\\=&(x_1+u\partial_1x_1+v\partial_2x_2+O((u,v)^2))\otimes(x_2+u\partial_1x_2+v\partial_2x_2+O((u,v)^2))\\=&x_1\otimes x_2+u((\partial_1x_1)\otimes x_2+x_1\otimes(\partial_1x_2))+v((\partial_2x_1)\otimes x_2+x_1\otimes(\partial_2x_2))+O((u,v)^2).\end{aligned}$$

On déduit les propriétés des dérivations de ∂_i pour $i=1,2$ en comparant les deux formules ci-dessus. □

Soit $\gamma \in \mathrm{P}_m$; l'image de la fonction analytique $\alpha_\gamma : \mathbb{Z}_p \to \mathrm{P}_m, \alpha_\gamma(x) = \gamma^x$ est un sous-groupe à un paramètre. Alors on peut définir une dérivation $\partial_\gamma : V \to V$ par rapport à α_γ par la formule :

$$\partial_\gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x * \gamma^{p^n} - x}{p^n}.$$

Lemme 4.1.4. *On a les relations suivantes :*

$$\partial_1 = p^{-m}\partial_{u_m}, \partial_2 - 1 = p^{-m}\partial_{e^{-p^m}\gamma_m}.$$

Démonstration. Soit $x \in V$. Par définition, on a

$$\begin{aligned}\partial_{u_m} x &= \lim_{n\to\infty} \frac{x * (p^m, 0)^{p^n} - x}{p^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x * (p^{m+n}, 0) - x}{p^n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{p^{m+n}\partial_1 x + O((p^{m+n}, 0)^2)}{p^n} = p^m \partial_1 x.\end{aligned}$$

Alors $\partial_1 = p^{-m}\partial_{u_m}$. De la même manière, on a $\partial_2 = p^{-m}\partial_{\gamma_m}$.

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}\partial_{e^{-p^m}\gamma_m} x &= \lim_{n\to\infty} \frac{x * (e^{-p^m}(0, p^m))^{p^n} - x}{p^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x * e^{-p^{n+m}}(0, p^{m+n}) - x}{p^n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{(e^{-p^{n+m}} - 1)x + p^{m+n}\partial_2 e^{-p^{n+m}} x + O((p^{m+n}, 0)^2)}{p^n} \\ &= -p^m x + p^m \partial_2 x = p^m(\partial_2 - 1)x;\end{aligned}$$

donc on a $\partial_2 - 1 = p^{-m}\partial_{e^{-p^m}\gamma_m}$. □

Remarque 4.1.5. Si V est une représentation analytique de P_m munie d'un $\mathbb{Z}_p$-réseau* T tel que T est stable sous l'action de P_m, et si $x \in T$, alors du lemme précédent, on déduit

$$x * (u, v) = \sum_{n=0}^{+\infty} u^i v^j \frac{\partial_1^i \partial_2^j x}{i!j!}$$

avec $\frac{\partial_1^i \partial_2^j x}{i!j!} \in p^{-s(i+j)}T \subset p^{-m(i+j)}T$ pour certain $s < m$.

Si $x \in V$ est dans le noyau de l'opérateur $u_m - 1$ (resp. $e^{-p^m}\gamma_m - 1$) sur V, alors x est dans le noyau de l'opérateur $\partial_1 = p^{-m} \lim_{n\to+\infty} \frac{u_m^{p^n} - 1}{p^n}$ (resp. $\partial_2 - 1$) sur V. Ceci nous fournit une application surjective naturelle :

$$\phi : V/(\partial_1, \partial_2 - 1) \to V/((p^m, 0) - 1, (0, p^m) - e^{p^m}).$$

Lemme 4.1.6. *ϕ est un isomorphisme.*

*. Il existe tel réseau si m assez grand.

Démonstration. On est ramené à montrer que $\mathrm{Ker}\partial_1 = \mathrm{Ker}(u_m - 1)$ (resp. $\mathrm{Ker}(\partial_2 - 1) = \mathrm{Ker}(e^{-p^m}\gamma_m - 1)$). On a montré l'inclusion $\mathrm{Ker}(u_m - 1) \subset \mathrm{Ker}\partial_1$ (resp. $\mathrm{Ker}(e^{-p^m}\gamma_m - 1) \subset \mathrm{Ker}(\partial_2 - 1)$). Alors il reste à montrer l'inclusion inverse.

Soit $x \in \mathrm{Ker}\partial_1$. Comme on a $\partial_1 u_m = u_m \partial_1$, l'espace $\mathrm{Ker}\partial_1$ est stable sous l'action de u_m. De plus, il existe une base S de $\mathrm{Ker}\partial_1$ telle que la matrice de u_m peut se mettre sous forme de Jordan. Soit λ une valeurs propre de $u_m|_{\mathrm{Ker}\partial_1}$. Comme V est une représentation analytique de P_m, λ^x est une fonction analytique sur $\mathbb{Z}_p$. Comme la matrice de ∂_1 dans cette base est 0, on a $\log\lambda = 0$. Ceci implique que λ est une racine de unité ζ. De plus, ζ^x est une fonction analytique en variable x sur $\mathbb{Z}_p$ si et seulement si $\zeta = 1$. Donc la matrice de u_m dans la base S est unipotente et on peut supposer qu'elle est de la forme $I + A$ avec A une matrice nilpotente.

Comme $\partial_1 = 0$ sur $\mathrm{Ker}\partial_1$, on a $\log(I + A) = 0$. D'autre part, on a $\log(I + A) = A(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-A)^n}{(n+1)!})$, où $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-A)^n}{(n+1)!}$ est une somme finie. Comme $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-A)^n}{(n+1)!}$ est inversible, on obtient $A = 0$. Ceci équivaut à la condition $\mathrm{Ker}\partial_1 \subset \mathrm{Ker}(u_m - 1)$. De la même manière, on obtient $\mathrm{Ker}(\partial_2 - 1) \subset \mathrm{Ker}(e^{-p^m}\gamma_m - 1)$. □

Par conséquent, on obtient le corollaire suivant :

Corollaire 4.1.7. *On a un isomorphisme naturel*

$$\mathrm{H}^2(\mathrm{P}_m, V) \cong V/(\partial_1, \partial_2 - 1). \tag{4.3}$$

Rappelons que le groupe de cohomologie $\mathrm{H}^2(\mathrm{P}_m, V)$ est la cohomologie continue d'un groupe p-adique à valeurs dans la représentation analytique V. On pose $\mathcal{C}^0(\mathrm{P}_m, V) = V$ et note $\mathcal{C}^n(\mathrm{P}_m, V)$ le groupe des homomorphismes continus de P_m^n à valeurs dans V. On peut le calculer par le complexe nonhomogène des cochaines continues

$$\mathcal{C}^\bullet : 0 \longrightarrow \mathcal{C}^0(\mathrm{P}_m, V) \xrightarrow{d_0} \cdots \xrightarrow{d_{n-2}} \mathcal{C}^{n-1}(\mathrm{P}_m, V) \xrightarrow{d_{n-1}} \mathcal{C}^n(\mathrm{P}_m, V) \longrightarrow \cdots,$$

avec les différentielles d_n données par les formules

$$\begin{aligned} d_n(f(\gamma_1, \cdots, \gamma_{n+1})) =& f(\gamma_2, \cdots, \gamma_n) * \gamma_1 + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i f(\gamma_1, \cdots, \gamma_{i-1}, \gamma_i\gamma_{i+1}, \cdots, \gamma_{n+1}) \\ &+ (-1)^{n+1} f(\gamma_1, \cdots, \gamma_n). \end{aligned}$$

Comme V est une représentation analytique, le complexe $\mathcal{C}^\bullet$ des cochaines continues contient un sous-complexe des cochaines analytiques avec les mêmes différentielles :

$$\mathcal{C}^{\mathrm{an},\bullet} : 0 \longrightarrow \mathcal{C}^{\mathrm{an},0}(\mathrm{P}_m, V) \xrightarrow{d_0} \cdots \xrightarrow{d_{n-2}} \mathcal{C}^{\mathrm{an},n-1}(\mathrm{P}_m, V) \xrightarrow{d_{n-1}} \mathcal{C}^{\mathrm{an},n}(\mathrm{P}_m, V) \longrightarrow \cdots,$$

où $\mathcal{C}^{\mathrm{an},0}(\mathrm{P}_m, V) = V$ et $\mathcal{C}^{\mathrm{an},n}(\mathrm{P}_m, V)$ est le sous-module des fonctions analytiques sur P_m^n à valeurs dans V de $\mathcal{C}^n(\mathrm{P}_m, V)$. En particulier, tout élément de $\mathcal{C}^{\mathrm{an},2}(\mathrm{P}_m, V)$ peut s'écrire sous la forme : $c_{(u,v),(x,y)} = \sum_{i,j,k,l \geq 0} c_{i,j,k,l} u^i v^j x^k y^l$ avec $c_{i,j,l,k} \in V$.

La filtration sur $\mathcal{C}^{\mathrm{an},n}(D(0, m), \mathbb{Q}_p)$ définie par la valuation v_0 induit celle sur le complexe $\mathcal{C}^{\mathrm{an},\bullet}$. Quel que soit $k \geq 1$, on a $\mathrm{Fil}^0 \mathcal{C}^{\mathrm{an},\bullet} / \mathrm{Fil}^k \mathcal{C}^{\mathrm{an},\bullet} \cong \mathcal{P}^{\leq k,\bullet}$, où $\mathcal{P}^{\leq k,\bullet}$ est le complexe

$$\mathcal{P}^{\leq k,\bullet} : 0 \longrightarrow \mathcal{P}^0_{\leq k}(\mathrm{P}_m, V) \xrightarrow{d_0} \cdots \xrightarrow{d_{n-2}} \mathcal{P}^{n-1}_{\leq k}(\mathrm{P}_m, V) \xrightarrow{d_{n-1}} \mathcal{P}^n_{\leq k}(\mathrm{P}_m, V) \longrightarrow \cdots,$$

où $\mathcal{P}^i_{\leq k}$ l'ensemble des polynômes de degré $\leq k$ sur P^i_m à coefficients dans V et les differentielles sont ceux du complexe $\mathcal{C}^{\mathrm{an},\bullet}$ modulo les termes de valuation $k+1$.

Considérons le complété du complexe $\mathcal{C}^{\mathrm{an},\bullet}$ pour sa filtration au-dessus, on obtient un complexe suivant :

$$\mathcal{S}^\bullet : 0 \longrightarrow \mathcal{S}^0(\mathrm{P}_m, V) \xrightarrow{d_0} \cdots \xrightarrow{d_{n-2}} \mathcal{S}^{n-1}(\mathrm{P}_m, V) \xrightarrow{d_{n-1}} \mathcal{S}^n(\mathrm{P}_m, V) \longrightarrow \cdots,$$

où $\mathcal{S}^i(\mathrm{P}_m, V)$ l'ensemble des séries formelles sur P^i_m à coefficients dans V et les differentielles sont ceux du complexe $\mathcal{C}^{\mathrm{an},\bullet}$. Alors $\mathcal{C}^{\mathrm{an},\bullet}$ est un sous-complexe du complexe $\mathcal{S}^\bullet$.

On note $\mathrm{H}^{\mathrm{an},i}(\mathrm{P}_m, V)$ le groupe de cohomologie calcule par le complexe $\mathcal{C}^{\mathrm{an},\bullet}$. La proposition suivante montre que le sous-complexe $\mathcal{C}^{\mathrm{an},\bullet}$ calcule le groupe de cohomologie $\mathrm{H}^2(\mathrm{P}_m, V)$:

Proposition 4.1.8. *Soit V une représentation analytique de P_m. Alors*

(i) tout élément de $\mathrm{H}^2(\mathrm{P}_m, V)$ est représentable par un 2-cocycle analytique ;

(ii) l'image d'un 2-cocycle analytique,

$$((u,v),(x,y)) \to c_{(u,v),(x,y)} = \sum_{i+j+k+l\geq 2} c_{i,j,k,l} u^i v^j x^k y^l,$$

sous l'isomorphisme (4.1.7) est aussi celle de $\delta^{(2)}(c_{(u,v),(x,y)}) = c_{1,0,0,1} - c_{0,1,1,0}$ dans $V/(\partial_1, \partial_2 - 1)$.

Par l'isomorphisme (4.1.7), il suffit de montrer (ii) et montrer que l'application

$$\delta^{(2)} : \{\text{2-cocycle analytique}\} \to V$$

induit une surjection de $\mathrm{H}^{\mathrm{an},2}(\mathrm{P}_m, V) \to V/(\partial_1, \partial_2 - 1)$.

La démonstration de la proposition (4.1.8) se sépare en trois étapes :

(1) On calcule la cohomologie $\mathrm{H}^2(\mathcal{P}^{\leq k,\bullet})$. On est ramené à étudier la cohomologie des quotients complexes $\mathrm{Fil}^i\, \mathcal{C}^{\mathrm{an},\bullet} / \mathrm{Fil}^{i+1}\, \mathcal{C}^{\mathrm{an},\bullet}$:

$$\mathcal{P}^{i,\bullet} : 0 \longrightarrow \mathcal{P}^0_i(\mathrm{P}_m, V) \xrightarrow{d_0} \cdots \xrightarrow{d_{n-2}} \mathcal{P}^{n-1}_i(\mathrm{P}_m, V) \xrightarrow{d_{n-1}} \mathcal{P}^n_i(\mathrm{P}_m, V) \longrightarrow \cdots,$$

où $\mathcal{P}^n_i$ est l'ensemble des polynômes homogènes de degré i sur P^n_m à coefficients dans V. C'est le sujet du lemme (4.1.10).

(2) On montre que, soit $c_{(u,v),(x,y)}$ un 2-cocycle

$$((u,v),(x,y)) \to c_{(u,v),(x,y)} = \sum_{i+j+k+l>0} c_{i,j,k,l} u^i v^j x^k y^l$$

du complexe $\mathcal{S}^\bullet$, alors $c_{(u,v),(x,y)} - (c_{1,0,0,1} - c_{0,1,1,0})uy$ est un 2-cobord du complexe $\mathcal{S}^\bullet$, ce qui le sujet du lemme (4.1.11). En effet, l'étape (1) nous permet de montrer le résultat à la main.

(3) On montre que, quel que soit $c_{(u,v),(x,y)}$ un 2-cocycle analytique dans $\mathcal{C}^{\mathrm{an},\bullet}$

$$((u,v),(x,y)) \to c_{(u,v),(x,y)} = \sum_{i+j+k+l>0} c_{i,j,k,l} u^i v^j x^k y^l,$$

alors $c_{(u,v),(x,y)} - (c_{1,0,0,1} - c_{0,1,1,0})uy$ est un cobord analytique. En effet, on peut contrôler le 2-cobord dans l'étape (2), ce qui permet de montrer qu'il est un 2-cobord analytique.

Tout d'abord, on fait une remarque sur la relation de 2-cocycle du complexe $\mathcal{P}^{n,\bullet}$. Soit $c_{(u,v),(x,y)}$ un 2-cocycle du complexe $\mathcal{P}^{n,\bullet}$, il vérifie la relation par définition :

$$c_{(x,y),(\alpha,\beta)} * (u,v) - c_{(u,v)(x,y),(\alpha,\beta)} + c_{(u,v),(x,y)(\alpha,\beta)} - c_{(u,v),(x,y)} \equiv 0(\mod \mathrm{Fil}^{n+1}\mathcal{C}^{\mathrm{an},3}).$$

Mais dans ce cas, la loi de groupe de P_m devient simple : $c_{(u,v)(x,y),(\alpha,\beta)} = c_{(u+v,v+y),(\alpha,\beta)}$. D'autre part, soit $(u_i,v_i) \in \mathrm{P}_m$ pour $i = 1,2,3$; si $f((u_2,v_2),(u_3,v_3))$ est un polynôme homogène de degré n à valeurs dans V, alors il est de la forme $\sum\limits_{i+j+k+l=n} a_{i,j,k,l}u_2^iv_2^ju_3^kv_3^l$ avec $a_{i,j,k,l} \in V$ et (u_1,v_1) agit sur f à travers l'action de P_m sur V :

$$(4.4) \qquad (\sum_{i+j+k+l=n} a_{i,j,k,l}u_2^iv_2^ju_3^kv_3^l) * (u_1,v_1) = \sum_{i+j+k+l=n} a_{i,j,k,l} * (u_1,v_1)u_2^iv_2^ju_3^kv_3^l.$$

Comme l'action de (u_1,v_1) sur les coefficients d'un 2-cocyle $c_{(u_2,v_2),(u_3,v_3)}$ se factorise à travers les opérateurs ∂_1 et ∂_2 dans la formule (4.2), l'action de (u_1,v_1) est triviale dans la formule (4.4).

Donc, la relation de 2-cocycle dans $\mathcal{P}^{n,\bullet}$ se simplifie

$$(4.5) \qquad c_{(x,y),(\alpha,\beta)} - c_{(u+x,v+y),(\alpha,\beta)} + c_{(u,v),(x+\alpha,y+\beta)} - c_{(u,v),(x,y)} = 0.$$

De la même raison, la relation de 2-cobord se simplifie

$$(dQ)_{(u,v),(x,y)} = Q_{(u,v)} - Q_{(u+x,v+y)} + Q_{(x,y)},$$

où $Q \in \mathcal{P}_n^1(\mathrm{P}_m, V)$.

Définition 4.1.9. On dira qu'un polynôme $P((u,v),(x,y)) = \sum\limits_{i+j+k+l=n} c_{i,j,k,l}u^iv^jx^ky^l \in \mathcal{P}_n^2$ est de valuation faible m si $m = \min\{i+j, k+l : c_{i,j,k,l} \neq 0\}$.

Si $n \geq 2$, soit $c_{(u,v),(x,y)}$ un 2-cocycle du complexe $\mathcal{P}^{n,\bullet}$. On note la dérivation en la i-ième variable par D_i pour $1 \leq i \leq 4$.

Lemme 4.1.10. *(1) Si $n = 1$, alors tout 2-cocycle de $\mathcal{P}^{1,\bullet}$ est nul.*

(2) Si $n = 2$, tout 2-cocycle du complexe $\mathcal{P}^{2,\bullet}$ peut s'écrire sous la forme suivante :

$$c_{(u,v),(x,y)} = \sum_{i+j+k+l=2} c_{i,j,k,l}u^iv^jx^ky^l,$$

où c_{ijkl} sont dans V. Alors, son image dans le groupe de cohomologie $\mathrm{H}^2(\mathcal{P}^{2,\bullet})$ est aussi celle de $(c_{1,0,0,1} - c_{0,1,1,0})uy$.

(3) Si $n \geq 3$, le groupe de cohomologie $\mathrm{H}^2(\mathcal{P}^{n,\bullet})$ est nul. En particulier, si

$$c_{(u,v),(x,y)} = \sum_{i+j+k+l=n} c_{i,j,k,l}u^iv^jx^ky^l$$

est un 2-cocycle du complexe $\mathcal{P}^{n,\bullet}$, alors le polynôme homogène de degré n

$$Q(X,Y) = \frac{1}{n}(c_{1,0,n-1,0}X^n + c_{0,n-1,0,1}Y^n) + \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{k+1} c_{n-k-1,k,0,1}X^{n-k-1}Y^{k+1}$$

vérifie la relation $c = -dQ$.

Démonstration. (1) Si $n=1$, un 2-cocycle $c_{(u,v),(x,y)}$ de $\mathcal{P}^{1,\bullet}$ s'écrit sous la forme $c_{(u,v),(x,y)} = a_1u+a_2v+a_3x+a_4y$ avec $a_i \in V$ pour $1 \le i \le 4$. Alors la relation de 2-cocycle (4.5) se traduit en la relation :

$$a_1x+a_2y+a_3\alpha+a_4\beta = 0,$$

ce qui implique $a_1=a_2=a_3=a_4=0$.

(2) Si $n=2$, soit $c_{(u,v),(x,y)}$ un 2-cocycle du complexe $\mathcal{P}^{2,\bullet}$. Alors, $c_{(u,v),(x,y)}$ peut se ranger par la valuation faible sous la forme :

$$c_{(u,v),(x,y)} = P_{01}(u,v)+P_{02}(x,y)+P_1(u,v,x,y),$$

où $P_{01}(u,v) = c_uu^2+c_vv^2+c_{uv}uv$, $P_{02}(x,y) = c_xx^2+c_yy^2+c_{xy}xy$ sont de valuation faible 0, et $P_1(u,v,x,y) = \sum_{\substack{i+j+k+l=2\\(i,j)\neq(0,0),(k,l)\neq(0,0)}} c_{i,j,k,l}u^iv^jx^ky^l$ est de valuation faible 1.

Pour les termes $c_{1,0,1,0}ux+c_{0,1,0,1}vy$ et $c_{1,0,0,1}uy+c_{0,1,1,0}vx$, on pose $Q_1(x,y) = \frac{1}{2}(c_{1,0,1,0}x^2+c_{0,1,0,1}y^2) \in \mathcal{P}_2^1$ et $Q_{22}(x,y) = c_{0,1,1,0}xy \in \mathcal{P}_2^1$ respectivement. Donc on a

$$\begin{aligned}
&Q_{21}(u+x,v+y)-Q_{21}(u,v)-Q_{21}(x,y) = c_{1,0,1,0}ux+c_{0,1,0,1}vy;\\
&Q_{22}(u+x,v+y)-Q_{22}(x,y)-Q_{22}(u,v) = c_{0,1,1,0}(uy+vx).
\end{aligned}$$

On pose $Q_2 = Q_{21}+Q_{22}$ et alors

$$c_{(u,v),(x,y)} = P_{01}(u,v)+P_{02}(x,y)-d(Q_1+Q_2)+(c_{1,0,0,1}-c_{0,1,1,0})uy.$$

De plus, $(c_{1,0,0,1}-c_{0,1,1,0})uy$ est un 2-cocycle. Par conséquent, on peut supposer que le 2-cocycle $c_{(u,v),(x,y)}$ est de la forme

$$P_{01}(u,v)+P_{02}(x,y).$$

La relation de 2-cocycle (4.5) nous fournit la relation suivante :

$$P_{01}(x,y)-P_{01}(u+x,v+y)+P_{02}(x+\alpha,y+\beta)-P_{02}(x,y) = 0.$$

Si on évalue en $(x,y)=(0,0)$, alors on a $-P_{01}(u,v)+P_{02}(\alpha,\beta)=0$, cela implique que $P_{01}=P_{02}=0$.

(3) Si $n \ge 3$, La relation de 2-cocycle (4.5) nous dit que la fonction analytique $g(u,v,x,y,\alpha,\beta)$ en six variable $c_{(x,y),(\alpha,\beta)}-c_{(u+x,v+y),(\alpha,\beta)}+c_{(u,v),(x+\alpha,y+\beta)}-c_{(u,v),(x,y)}$ est identiquement nulle. On développe cette fonction g en variable (u,v), et on obtient la forme suivante :

$$\begin{aligned}
&-u(\mathrm{D}_1c)_{(x,y),(\alpha,\beta)}-v(\mathrm{D}_2c)_{(x,y),(\alpha,\beta)}+u(\mathrm{D}_1c)_{(0,0),(x+\alpha,y+\beta)}+v(\mathrm{D}_2c)_{(0,0),(x+\alpha,y+\beta)}\\
&+c_{(0,0),(x+\alpha,y+\beta)}-c_{(0,0),(x,y)}-u(\mathrm{D}_1c)_{(0,0),(x,y)}-v(\mathrm{D}_2c)_{(0,0),(x,y)}+O((u,v)^2),
\end{aligned}$$

où $O((u,v)^2)$ note les termes de valuation faible ≥ 2 de variable (u,v). Alors, pour $i=1,2$, on a

$$(\mathrm{D}_ic)_{(x,y),(\alpha,\beta)} = (\mathrm{D}_ic)_{(0,0),(x+\alpha,y+\beta)}-(\mathrm{D}_ic)_{(0,0),(x,y)}. \tag{4.6}$$

De la même manière, si on développe la fonction fournit par la relation 2-cocycle (4.5) en variable (α, β), on obtient les relations suivantes pour $j = 3, 4$:

$$(\mathrm{D}_j c)_{(u,v),(x,y)} = (\mathrm{D}_j c)_{(u+x,v+y),(0,0)} - (\mathrm{D}_j c)_{(x,y),(0,0)}.$$

On pose un polynôme homogène de degré $n-1 \geq 2$ de variable (x, y) :

$$\begin{aligned} Q_X(X,Y) &= (\mathrm{D}_1 c)_{(0,0),(X,Y)} = \sum_{1+k+l=n} c_{1,0,k,l} X^k Y^l; \\ Q_Y(X,Y) &= (\mathrm{D}_4 c)_{(X,Y),(0,0)} = \sum_{1+i+j=n} c_{i,j,0,1} X^i Y^j. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Maintenant, on développe la fonction g de variable (u, v, α, β) et on obtient

$$\begin{aligned} &- u\big((\mathrm{D}_1 c)_{(x,y),(0,0)} + \alpha(\mathrm{D}_3\mathrm{D}_1 c)_{(x,y),(0,0)} + \beta(\mathrm{D}_4\mathrm{D}_1 c)_{(x,y),(0,0)}\big) \\ &- v\big((\mathrm{D}_2 c)_{(x,y),(0,0)} + \alpha(\mathrm{D}_3\mathrm{D}_2 c)_{(x,y),(0,0)} + \beta(\mathrm{D}_4\mathrm{D}_2 c)_{(x,y),(0,0)}\big) + O((\alpha,\beta)^2) \\ &+ \alpha\big((\mathrm{D}_3 c)_{(0,0),(x,y)} + u(\mathrm{D}_1\mathrm{D}_3 c)_{(0,0),(x,y)} + v(\mathrm{D}_2\mathrm{D}_3 c)_{(0,0),(x,y)}\big) \\ &+ \beta\big((\mathrm{D}_4 c)_{(0,0),(x,y)} + u(\mathrm{D}_2\mathrm{D}_4 c)_{(0,0),(x,y)} + v(\mathrm{D}_2\mathrm{D}_4 c)_{(0,0),(x,y)}\big) + O((u,v)^2). \end{aligned}$$

Alors, les coefficients des termes u, v, α, β, $u\alpha$, $u\beta$, $v\alpha$ et $v\beta$ nous donnent les relations :

$$(\mathrm{D}_1 c)_{(x,y),(0,0)} = (\mathrm{D}_2 c)_{(x,y),(0,0)} = (\mathrm{D}_3 c)_{(0,0),(x,y)} = (\mathrm{D}_4 c)_{(0,0),(x,y)} = 0; \tag{4.8}$$

$$\begin{aligned} &(\mathrm{D}_3\mathrm{D}_1 c)_{(x,y),(0,0)} = (\mathrm{D}_1\mathrm{D}_3 c)_{(0,0),(x,y)}; (\mathrm{D}_4\mathrm{D}_1 c)_{(x,y),(0,0)} = (\mathrm{D}_1\mathrm{D}_4 c)_{(0,0),(x,y)}; \\ &(\mathrm{D}_3\mathrm{D}_2 c)_{(x,y),(0,0)} = (\mathrm{D}_2\mathrm{D}_3 c)_{(0,0),(x,y)}; (\mathrm{D}_4\mathrm{D}_2 c)_{(x,y),(0,0)} = (\mathrm{D}_2\mathrm{D}_4 c)_{(0,0),(x,y)}. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Alors, on obtient

$$\partial_Y Q_X(X,Y) = (\mathrm{D}_4\mathrm{D}_1 c)_{(0,0),(X,Y)} = (\mathrm{D}_1\mathrm{D}_4 c)_{(X,Y),(0,0)} = \partial_X Q_Y(X,Y).$$

Par ailleurs, on a $Q_X(0,0) = Q_Y(0,0) = 0$. On en déduit qu'il existe un polynôme homogène de degré n

$$Q(X,Y) = \frac{1}{n}(c_{1,0,n-1,0}X^n + c_{0,n-1,0,1}Y^n) + \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{k+1} c_{n-k-1,k,0,1} X^{n-k-1} Y^{k+1}$$

tel que $\partial_X Q = Q_X$ et $\partial_Y Q = Q_Y$. Ceci nous donne un cobord

$$dQ(x,y,\alpha,\beta) = Q(x,y) - Q(x+\alpha, y+\beta) + Q(\alpha,\beta)$$

vérifiant la relation $\mathrm{D}_1 c = -\mathrm{D}_1 dQ$ et $\mathrm{D}_4 c = -\mathrm{D}_4 dQ$.
On remplace le cocycle $c_{(x,y),(\alpha,\beta)}$ par le cocycle $c'_{(x,y),(\alpha,\beta)} = (c + dQ)_{(x,y),(\alpha,\beta)}$ vérifiant la relation $\mathrm{D}_1 c' = \mathrm{D}_4 c' = 0$, ce qui montre que c' est de la forme $\sum_{j+k=n} c_{j,k} y^j \alpha^k$.
Maintenant, on a

$$\begin{aligned} (\mathrm{D}_2 c')_{(x,y,\alpha,\beta)} &= \sum_{j+k=n} j c_{j,k} y^{j-1} \alpha^k; \\ (\mathrm{D}_2 c')_{(0,0,x+\alpha,v+\beta)} &= c_{1,n-1}(x+\alpha)^{n-1}; \\ (\mathrm{D}_2 c')_{(0,0,x,y)} &= c_{1,n-1} x^{n-1}. \end{aligned}$$

Alors la relation (4.6)

$$(\mathrm{D}_2 c')_{(x,y,\alpha,\beta)} = (\mathrm{D}_2 c')_{(0,0,x+\alpha,v+\beta)} - (\mathrm{D}_2 c')_{(0,0,x,y)}$$

dit que $c_{j,k} = 0$ si $j \neq 0$. Donc on a $c'_{(x,y,\alpha,\beta)} = c_{0,n}\alpha^n$. Par ailleurs, la relation (4.8) nous permet de conclure que tout 2-cocycle du complexe $\mathcal{P}^{n,\bullet}$ pour $n \geq 3$ n'a pas les termes de valuation faible 0. Alors on conclut que le 2-cocycle c est nul.

□

Lemme 4.1.11. *Soit V une représentation analytique de P_m.*

(1) Quel que soit $c \in V$, la fonction $((u,v),(x,y)) \to c_{(u,v),(x,y)} = cuy$ est un 2-cocycle.

(2) Réciproquement, tout élément de la cohomologie $\mathrm{H}^2(\mathcal{S}^\bullet)$ est présenté par un 2-cocycle de cette forme.

(3) Si $c_{(u,v),(x,y)} = \sum_{i+j+k+l\geq 2} c_{i,j,k,l} u^i v^j x^k y^l$ est un 2-cocycle analytique, alors il existe une suite de polynôme homogènes $\{Q_n \in \mathcal{P}_1^n, n \geq 2\}$ telle que

$$c_{(u,v),(x,y)} = (c_{1,0,0,1} - c_{0,1,1,0})uy - \sum_{i=2}^{+\infty} dQ_i,$$

où Q_n est defini par récurrence : $Q_2(X,Y) = \frac{1}{2}(c_{1,0,1,0}X^2 + c_{0,1,0,1}Y^2) + c_{0,1,1,0}XY$ et si $Q_n(X,Y) = \sum\limits_{k=0}^{n} b_k^{(n)} X^{n-k}Y^k$, alors

$$\begin{aligned}
b_n^{(n)} &= \frac{1}{n} c_{0,n-1,0,1}^{(n)} = \frac{1}{n} c_{0,n-1,0,1} \\
b_0^{(n)} &= \frac{1}{n}(c_{1,0,n-1,0} - \partial_1 b_0^{(n-1)}) \qquad (4.10)\\
b_k^{(n)} &= \frac{1}{k}(c_{n-k,k-1,0,1} - (n-k)b_{k-1}^{(n-1)}), \ \textit{si } 1 \leq k \leq n-1.
\end{aligned}$$

Démonstration. La premiere assertion est immédiate. La deuxiéme est une conséquence directe de la troisième. Il suffit de montrer la (3).

Soit $c_{((u,v),(x,y))} = \sum_{i+j+k+l\geq 1} c_{i,j,k,l} u^i v^j x^k y^l$ un 2-cocycle du complexe $\mathcal{S}^\bullet$.

D'après le lemme (4.1.10), par récurrence, il existe une suite de polynômes homogènes $\{Q_n \in \mathcal{P}_n^1\}_{n\geq 3}$ telle que l'on peut écrire c sous la forme

$$c_{(u,v),(x,y)} = (c_{1,0,0,1} - c_{0,1,1,0})uy - \sum_{i=2}^{n-1} dQ_i + P_n,$$

où P_n est une fonction analytique sur P_m^2 de valuation $\geq n$.

On peut écrire P_n sous la forme $P_n(u,v,x,y) = \sum_{i+j+k+l\geq n} c_{i,j,k,l}^{(n)} u^i v^j x^k y^l$. Par la formule explicite du polynôme homogène de degré n dans le lemme (4.1.10), on s'intéresse aux coefficients $c_{n-k-1,k,0,1}^{(n)}$ et $c_{1,0,n-1,0}^{(n)}$ dans P_n pour $0 \leq k \leq n-1$. D'autre part, la relation de

2-cobord

$$\begin{aligned}(dQ_e)_{(u,v),(x,y)} =& Q_e(x,y)*(u,v) - Q_e(e^y u + x, v+y) + Q(u,v)\\ =& Q_e(x,y) + \sum_{i+j\geq 1} u^i v^j \frac{\partial_1^i \partial_2^j Q_e(x,y)}{i!j!}\\ &- \left(Q_e(u+x, v+y) + \sum_{l=1}^{+\infty} \frac{1}{l!}((e^y-1)u)^l \partial_X^l Q_e(X,Y)|_{u+x,v+y} \right) + Q_e(u,v)\end{aligned}$$

nous dit que les termes de degŕe n dans P_n provennant du cobord dQ_e avec $2 \leq e \leq n-1$ sont dans les termes $\sum_{i+j+e\geq n} u^i v^j \frac{\partial_1^i \partial_2^j Q_e(x,y)}{i!j!}$ et $\sum_{l=1}^{+\infty} \frac{1}{l!}((e^y-1)u)^l \partial_X^l Q_e(X,Y)|_{u+x,v+y}$.

Si $Q_n(X,Y) = \sum_{k=0}^{n} b_k^{(n)} X^{n-k} Y^k$, on a la relation récurrence pour $c_{n-k-1,k,0,1}^{(n)}$ et $c_{1,0,n-1,0}^{(n)}$:

$$\begin{aligned}c_{0,n-1,0,1}^{(n)} &= c_{0,n-1,0,1}\\ c_{1,0,n-1,0}^{(n)} &= c_{1,0,n-1,0} - \partial_1 b_0^{(n-1)}\\ c_{n-k-1,k,0,1}^{(n)} &= c_{n-k-1,k,0,1} - (n-k-1) b_k^{(n-1)}, \text{ si } 0 \leq k \leq n-2\end{aligned}$$

D'après le lemme (4.1.10), on a donc $Q_n(X,Y) = \frac{1}{n} c_{1,0,n-1,0}^{(n)} X^n + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1} c_{n-k-1,k,0,1}^{(n)} X^{n-k-1} Y^{k+1}$ et on en déduit que

$$\begin{aligned}b_n^{(n)} &= \frac{1}{n} c_{0,n-1,0,1}^{(n)} = \frac{1}{n} c_{0,n-1,0,1}\\ b_0^{(n)} &= \frac{1}{n} c_{1,0,n-1,0}^{(n)} = \frac{1}{n}(c_{1,0,n-1,0} - \partial_1 b_0^{(n-1)})\\ b_k^{(n)} &= \frac{1}{k} c_{n-k,k-1,0,1}^{(n)} = \frac{1}{k}(c_{n-k,k-1,0,1} - (n-k) b_{k-1}^{(n-1)}), \text{ si } 1 \leq k \leq n-1.\end{aligned}$$

□

Soit V une représentation analytique de P_m munie d'un $\mathbb{Z}_p$-réseau T qui est stable sous l'action de P_m. On définit une valuation v_T sur V par rapport à T :

$$\text{si } x \in V, v_T(x) = \min\{n : x \in p^n T\}.$$

Soit $x \in T$ et soit $(u,0) \in \mathrm{P}_m$; on a $x*(u,0) = x + u\partial_1 x + O(u^2)$ et on a donc $\partial_1 x \in p^{-m} T$.

Lemme 4.1.12. *Soit V une représentation analytique de P_m munie d'un $\mathbb{Z}_p$-réseau T qui est stable sous l'action de P_m. Soit $c = \sum_{i+j+k+l\geq 2} c_{ijkl} u^i v^j x^k y^l$ un 2-cocycle analytique du complexe $\mathcal{C}^{\mathrm{an},\bullet}$ avec $v_T(c_{i,j,k,l}) \geq -m(i+j+k+l)$. Si $\{Q_n(x,y) = \sum_{k=0}^{n} b_k^{(n)} x^{n-k} y^k \in \mathcal{P}_n^1\}$ est la suite des polynômes homogènes construit dans le lemme précédent, pour tous $n \geq 2$ et $0 \leq k \leq n$, on a*

$$v_T(b_k^{(n)}) \geq -mn - v_p(n!).$$

Démonstration. Si $n=2$, le lemme est vrai par la formule $Q_2(x,y)=\frac{1}{2}(c_{1,0,1,0}x^2+c_{0,1,0,1}y^2)+c_{0110}xy$. La relation de récurrence (4.10) de $b_k^{(n)}$ nous donne la relation suivante :

$$
\begin{aligned}
b_n^{(n)} &= \frac{1}{n}c_{0,n-1,0,1}^{(n)} = \frac{1}{n}c_{0,n-1,0,1}\\
b_0^{(n)} &= \frac{1}{n}(c_{1,0,n-1,0}-\partial_1 b_0^{(n-1)})\\
b_{n-1}^{(n)} &= \sum_{i=0}^{n-3}\frac{(-1)^i}{(n-1)\cdots(n-1-i)}c_{1,n-2-i,0,1}+\frac{(-1)^{n-2}}{(n-1)!}b_1^{(2)}\\
b_k^{(n)} &= \sum_{i=0}^{k-1}\frac{(k-n)^i}{k\cdots(k-i)}c_{n-k,k-1-i,0,1}+\frac{(k-n)^k}{k!}b_0^{(n-k)},\ \text{si } 1\le k\le n-2.
\end{aligned}
\tag{4.11}
$$

On en déduit que le lemme est vrai pour $b_n^{(n)}$.

On montrera par récurrence que $v_T(b_0^{(n)})\geq -nm-v_p(n!)$ pour tous $n\geq 2$. Supposons $v_T(b_0^{(e)})\geq -em-v_p(e!)$ pour tous $2\leq e\leq n-1$. Par ailleurs, on a $v_T(\partial_1 b_0^{(e)})\geq v_T(b_0^{(e)})-m$ pour tous $e\geq 2$. Donc on a $v_T(\partial_1 b_0^{(n-1)})\geq -nm-v_p((n-1)!)$. On déduit de la relation de récurrence

$$b_0^{(n)}=\frac{1}{n}(c_{1,0,n-1,0}-\partial_1 b_0^{(n-1)}),$$

que $v_T(b_0^{(n)})\geq -nm-v_p(n!)$ pour tous $n\geq 2$.

On a donc, si $1\leq k\leq n-2$,

$$v_T(\frac{(k-n)^k}{k!}b_0^{(n-k)})\geq -m(n-k)-v_p((n-k)!)-v_p(k!)\geq -mn-v_p(n!).$$

Par ailleurs, on a $v_p(\frac{(k-n)^i}{k\cdots(k-i)}c_{n-k,k-1-i,0,1})\geq -m(n-i)-v_p(k!)$ pour tous $1\leq i\leq k-1$. On en déduit que pour $1\leq k\leq n-2$, on a

$$v_T(b_k^{(n)})\geq -mn-v_p(n!).$$

Enfin, on a

$$v_T(b_{n-1}^{(n)})\geq \inf_{1\leq i\leq n-3}\{v_p(\frac{(-1)^i}{(n-1)\cdots(n-1-i)}c_{1,n-2-i,0,1}),v_T(\frac{(-1)^{n-2}}{(n-1)!}b_1^{(2)})\}\geq -mn-v_p(n!).$$

Ceci permet de conclure le lemme.

□

On revient à la démonstration de la proposition (4.1.8) : Soit

$$c_{(u,v),(x,y)}=\sum_{i+j+k+l\geq 2}c_{ijkl}u^iv^jx^ky^l$$

un 2-cocycle analytique du complexe $\mathcal{C}^{\mathrm{an},\bullet}$. Il existe une constante N assez grande telle que $q^N c_{ijkl}\in p^{-(m-1)(i+j+k+l)}T$. Alors, on peut remplacer $c_{(u,v),(x,y)}$ par un 2-cocycle $c'_{(u,v),(x,y)}$ comme celui dans le lemme 4.1.12. Si on voit $c'_{(u,v),(x,y)}$ comme un 2-cocycle du complexe $\mathcal{S}^\bullet$, alors il existe une série de polynômes homogènes $\{Q_n(x,y)=\sum_{i=0}^{n} b_i^{(n)}x^iy^{n-i}\in\mathcal{P}_n^1\}_{n\geq 2}$ telle que $v_T(b_i^{(n)})\geq -mn-v_p(i!)>-(m+v_p(2p))n$ et

$$c'_{(u,v),(x,y)}=(c'_{1,0,0,1}-c'_{0,1,1,0})uy-\sum_{i=2}^{+\infty}dQ_i.$$

Par conséquent, la série $\sum_{n=2}^{+\infty}Q_n(u,v)$ converge vers une fonction analytique $Q(u,v)$ sur $\mathrm{P}_{m+v_p(2p)}$.

Par la suite exacte d'inflation-restriction, on a

$$0\longrightarrow \mathrm{H}^2(\mathrm{P}_m/\mathrm{P}_{m+v_p(2p)},V^{\mathrm{P}_{m+v_p(2p)}})\longrightarrow \mathrm{H}^2(\mathrm{P}_m,V)\longrightarrow \mathrm{H}^2(\mathrm{P}_{m+v_p(2p)},V)\ .$$

L'argument ci-dessus donne que $c'_{((u,v),(x,y))}-(c'_{1,0,0,1}-c'_{0,1,1,0})uy$ est nul sous l'application de restriction. Par ailleurs, comme $V^{\mathrm{P}_{m+v_p(2p)}}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{Q}_p$ de dimension finie et $\mathrm{P}_m/\mathrm{P}_{m+v_p(2p)}$ est un groupe fini, on obtient $\mathrm{H}^2(\mathrm{P}_m/\mathrm{P}_{m+v_p(2p)},V^{\mathrm{P}_{m+v_p(2p)}})=0$. Autrement dit, l'application de restriction est injective. Donc $c'_{((u,v),(x,y))}-(c'_{1,0,0,1}-c'_{0,1,1,0})uy\in\mathrm{H}^2(\mathrm{P}_m,V)$ est nul.

Enfin, comme uy est un 2-cocycle, on peut prendre n'importe quel coefficient $c_{1,0,0,1}-c_{0,1,1,0}\in V$. Donc tout élément de $V/(\partial_1,\partial_2-1)$ est représentable par un 2-cocycle analytique.

4.2 Cohomologie des $\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^{+}(\mathfrak{K}_{Mp^\infty}^{+})$-représentations du groupe $P_{\mathfrak{K}_M}$

Proposition 4.2.1. *Soit $M\geq 1$ un entier tel que $v_p(M)=m\geq v_p(2p)$; et soit V une $\mathbb{Q}_p$-représentation de $P_{\mathfrak{K}_M}$ munie d'un $\mathbb{Z}_p$-réseau T tel que $P_{\mathfrak{K}_M}$ agit trivialement sur $T/2pT$, alors, pour $i\in\mathbb{N}$, Tr_M induit un isomorphisme :*

$$\mathrm{Tr}_M:\mathrm{H}^i(P_{\mathfrak{K}_M},\mathbb{C}(\mathfrak{K}_{Mp^\infty}^{+})\otimes V)\cong\mathrm{H}^i(P_{\mathfrak{K}_M},\mathfrak{K}_M^{+}\otimes V).$$

Pour démontrer cette proposition, on a besoin de lemmes préparatoires :

On a une décomposition $\mathbb{C}(\mathfrak{K}_{Mp^\infty}^{+})=\mathfrak{K}_M^{+}\oplus X_M$ comme $\mathfrak{K}_M^{+}$-module de Banach, où $X_M=\{x\in\mathbb{C}(\mathfrak{K}_{Mp^\infty}^{+})|\,\mathrm{Tr}_M(x)=0\}$. On note $J'=\cup_n\frac{1}{p^n}\mathbb{N}$. D'après le corollaire 3.1.7, un élément x de X_M s'écrit de manière unique sous la forme

$$x=\sum_{(i,j)\notin(0,\mathbb{N}),(i,j)\in J\times J'}a_{ij}(x)\zeta_M^iq_M^j, \tag{4.12}$$

où $a_{ij}(x)$ est une suite d'élément de F_M vérifiée que $v_p(a_{ij}(x))+\frac{j}{M}$ tend vers $+\infty$ à l'infini (i.e. quel que soit N, l'ensemble de $(i,j)\in J\times J'$ tel que $v_p(a_{ij}(x))+\frac{j}{M}\leq N$ est un ensemble fini).

Lemme 4.2.2. *(1) Soit M un entier ≥ 1 et soit $v_p(M)=m\geq v_p(2p)$. Un élément x de X_M est fixé par U_m si et seulement si $a_{ij}(x)=0$ si $j\notin\mathbb{N}$;*

(2) On a une décomposition $X_M = X_M^{U_m} \oplus Y_M$ comme $\mathfrak{K}_M^+$-module de Banach, où

$$Y_M = \{x = \sum_{(i,j)\in\{0\}\times(J'-\mathbb{N})} a_{ij}(x)\zeta_M^i q_M^j \in X_M\}.$$

Démonstration. On déduit les resultats du corollaire 3.1.7. □

Soit $e_1, \cdots, e_d$ une $\mathbb{Z}_p$-base de T. Tout élément $x \in X_M \otimes T$ s'écrit sous la forme $\sum_{i=1}^d x_i \otimes e_i$ avec $x_i \in X_M$. On défint une valuation v sur $X_M \otimes T$ par la formule :

$$v(x) = \inf_{1\leq i\leq d} v_p(x_i).$$

Lemme 4.2.3. *Il existe des isomorphismes de $\mathfrak{K}_M^+$-module :*
(1) $(X_M \otimes T)^{U_m} \cong (X_M^{U_m} \otimes T)^{U_m} \cong X_M^{U_m} \otimes T^{U_m}$;
(2) $Z_M := \big(X_M^{U_m} \otimes T\big)/(u_m - 1) \to \mathrm{H}^1(U_m, X_M \otimes T)$.

Démonstration. Comme $X_M \otimes T = (X_M^{U_m} \otimes T) \oplus (Y_M \otimes T)$, on se ramène à montrer que l'opérateur $u_m - 1$ est inversible sur le $\mathfrak{K}_M^+$-module $Y_M \otimes T$.

D'après le lemme 4.2.2, on peut écrire l'élément $x \otimes t$ dans $Y_M \otimes T$ sous la forme :

$$(\sum_{j\in J', j\notin\mathbb{N}} a_j q_M^j) \otimes t,$$

où les $\{a_j\}$ est une suite d' éléments de F_M telle que $v_p(a_j) + \frac{j}{M}$ tend vers $+\infty$ à l'infini.

Par ailleurs, on a la formule explicite de $u_m - 1$ sur $x = \sum_{j\in J', j\notin\mathbb{N}} a_j q_M^j \in Y_M$:

$$(u_m - 1)(x) = \sum_{j\in J', j\notin\mathbb{N}} a_j(\zeta_M^{jM} - 1)q_M^j.$$

Comme $0 \leq v_p(\zeta_M^{jM} - 1) < \frac{1}{p-1}$, on a $\sum_{j\in J', j\notin\mathbb{N}} a_j(\zeta_M^{jM} - 1)^{-1}q_M^j$ est encore un élément de Y_M. Donc l'opérateur $u_m - 1$ est inversible sur Y_M et on a $v_p((u_m - 1)^{-1}x) \geq v_p(x) - \frac{1}{p-1}$. Alors l'opérateur $u_m - 1$ sur $Y_M \otimes T$ se décompose comme suit :

$$u_m - 1 = (u_m \otimes 1 - 1) + (u_m \otimes 1)(1 \otimes u_m - 1) = (u_m \otimes 1 - 1)(1 + u'),$$

où $u' = (u_m \otimes 1 - 1)^{-1}(u_m \otimes 1)(1 \otimes u_m - 1)$. Si $x = \sum_i x_i \otimes e_i \in Y_m \otimes T$, on a $v((1 \otimes u_m - 1)(x_i \otimes e_i)) \geq v(x_i \otimes e_i) + v_p(2p)$ car P_m agit trivialement sur $T/2pT$. Donc on a

$$v((1 \otimes u_m - 1)x) = \inf_i v((1 \otimes u_m - 1)x_i \otimes e_i) \geq \inf_i v(x_i \otimes e_i) + v_p(2p) = v(x) + v_p(2p).$$

Par conséquent, on a $v(u'(x)) \geq v(x) + v_p(2p) - \frac{1}{p-1}$. Ceci permet de montrer que la série $\sum_{n=0}^{+\infty}(-u')^n$ converge et sa somme est l'inverse de $(1 + u')$ sur $Y_M \otimes T$. Donc $u_m - 1$ est inversible sur $Y_M \otimes T$. □

Lemme 4.2.4. *Si $a \in \mathbb{Z}_p^*$, l'opérateur $a\gamma_m - 1$ est inversible sur $X_m^{U_m}$.*

Démonstration. D'après le lemme 4.2.2, on a la formule explicite de $a\gamma_m - 1$ sur un élément $x = \sum_{i\in J, i\neq 0}\sum_{k\in\mathbb{N}} a_{ik}\zeta_M^i q_M^k \in X_m^{U_m}$:

$$(a\gamma_m - 1)x = \sum_{i\in J, i\neq 0}\sum_{k\in\mathbb{N}} a_{ik}(a\zeta_M^{i(e^{p^m}-1)} - 1)\zeta_M^i q_M^k.$$

Comme $i \neq 0$, on a $0 \leq v_p(a\zeta_M^{i(e^{p^m}-1)} - 1) \leq \frac{1}{p-1}$. On en déduit que $a\gamma_m - 1$ est inversible sur $X_m^{U_m}$ avec la formule de l'action de $(a\gamma_m - 1)^{-1}$ sur $X_m^{U_m}$ donnée par

$$(a\gamma_m - 1)^{-1}x = \sum_{i\in J, i\neq 0}\sum_{k\in\mathbb{N}} a_{ik}(a\zeta_M^{i(e^{p^m}-1)} - 1)^{-1}\zeta_M^i q_M^k.$$

De plus, on a $v_p((a\gamma_m - 1)^{-1}x) \geq v_p(x) - \frac{1}{p-1}$.

□

Revenons à la démonstration de la proposition 4.2.1 :

Démonstration. On doit montrer que $\mathrm{H}^i(P_{\mathfrak{K}_M}, X_M \otimes T) = 0$. Rappelons que l'on a un isomorphisme de groupes analytiques $P_{\mathfrak{K}_M} \cong \mathrm{P}_m$; on se ramène à prouver

$$\mathrm{H}^i(\mathrm{P}_m, X_M \otimes T) = 0,$$

et on note $Z_M = \big(X_M^{U_m} \otimes T\big)/(u_m - 1)$. Comme $e^{-p^m}\gamma_m \otimes 1 - 1$ est inversible sur $X_M^{U_m} \otimes T$ d'après le lemme 4.2.4, on peut factoriser l'opérateur $e^{-p^m}\gamma_m - 1$ sur $X_M^{U_m} \otimes T$ comme suit :

$$e^{-p^m}\gamma_m - 1 = (e^{-p^m}\gamma_m \otimes 1 - 1) + (e^{-p^m}\gamma_m \otimes 1)(1 \otimes e^{-p^m}\gamma_m - 1) = (e^{-p^m}\gamma_m \otimes 1 - 1)(1 + \gamma'),$$

où $\gamma' = (e^{-p^m}\gamma_m \otimes 1 - 1)^{-1}(e^{-p^m}\gamma_m \otimes 1)(1 \otimes e^{-p^m}\gamma_m - 1)$.

Par ailleurs, si $x = \sum_i x_i \otimes e_i \in X_M^{U_m} \otimes T$, on a $v((1\otimes e^{-p^m}\gamma_m - 1)(x)) \geq v_p(2p) + v(x)$ car P_m agit trivialement sur $T/2pT$. Ceci permet de montrer que la série $\sum_{n=0}^{+\infty}(-\gamma')^n$ converge et sa somme est l'inverse de $(1+\gamma')$ sur $X_M^{U_m} \otimes T$. Donc $e^{-p^m}\gamma_m - 1$ est inversible sur $X_M^{U_m} \otimes T$.

D'après le lemme 4.2.3, on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Z_M \arrow[r] \arrow[d, "e^{-p^m}\gamma_m - 1"] & \mathrm{H}^1(U_m, X_M \otimes T) \arrow[r] \arrow[d, "\gamma_m - 1"] & 0 \\
0 \arrow[r] & Z_M \arrow[r] & \mathrm{H}^1(U_m, X_M \otimes T) \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Comme l'opérateur $e^{-p^m}\gamma_m - 1$ est inversible sur Z_M, on a

$$\mathrm{H}^1(U_m, X_M \otimes T)^{\Gamma_m} = 0 \text{ et } \mathrm{H}^1(U_m, X_M \otimes T)/(\gamma_m - 1) = 0.$$

(1) si $i = 1$, par la suite exacte d'inflation-restriction, on a :

$$0 \to \mathrm{H}^1(\Gamma_m, (X_M \otimes T)^{U_m}) \to \mathrm{H}^1(\mathrm{P}_m, X_M \otimes T) \to \mathrm{H}^1(U_m, X_M \otimes T)^{\Gamma_m} = 0 \to 0.$$

Il suffit de prouver que $\mathrm{H}^1(\Gamma_m, (X_M \otimes T)^{U_m}) = 0$. D'après le lemme 4.2.3, on a l'isomorphisme $(X_M \otimes T)^{U_m} \cong X_M^{U_m} \otimes T^{U_m}$. L'opérateur $\gamma_m \otimes 1 - 1$ est inversible sur $X_M^{U_m} \otimes T$ d'après le lemme 4.2.4. Par ailleurs, Γ_m agit trivialement sur $T/2pT$. Ceci permet de montrer que $\gamma_m - 1$ est inversible sur $X_M^{U_m} \otimes T^{U_m}$. Donc $\mathrm{H}^1(\Gamma_m, (X_M \otimes T)^{U_m})$ est nul.

(2) si $i = 2$, d'après la suite spectrale de Hochschild-Serre, on a l'isomorphisme :

$$\mathrm{H}^2(\mathrm{P}_m, X_M \otimes T) \cong \mathrm{H}^1(\Gamma_m, \mathrm{H}^1(U_m, X_M \otimes T)) = \mathrm{H}^1(U_m, X_M \otimes T)/(\gamma_m - 1) = 0.$$

□

Proposition 4.2.5. *Soit $v_p(M) \geq v_p(2p)$; si V est une $\mathbb{Q}_p$-représentation de $P_{\mathfrak{K}_M}$ munie d'un $\mathbb{Z}_p$-réseau T tel que $P_{\mathfrak{K}_M}$ agit trivialement sur $T/2pT$, alors pour $i \in \mathbb{N}$, $\mathbf{R}_M$ induit un isomorphisme :*

$$\mathbf{R}_M : \mathrm{H}^i(P_{\mathfrak{K}_M}, \mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+(\mathfrak{K}_{Mp^\infty}^+) \otimes V) \cong \mathrm{H}^i(P_{\mathfrak{K}_M}, \tilde{\mathfrak{K}}_M^+ \otimes V).$$

Démonstration. On pose $\tilde{X}_M = \{x \in \mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+(\mathfrak{K}_{Mp^\infty}^+) | \mathbf{R}_M(x) = 0\}$. Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, on a une décomposition de $\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+(\mathfrak{K}_{Mp^\infty}^+)/t^n$ comme $\tilde{\mathfrak{K}}^+/t^n$-module :

$$\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+(\mathfrak{K}_{Mp^\infty}^+)/t^n = \tilde{\mathfrak{K}}_M^+/t^n \oplus \tilde{X}_M/t^n.$$

Cela induit une décomposition de $\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+(\mathfrak{K}_{Mp^\infty}^+)$ comme $\tilde{\mathfrak{K}}^+$-module :

$$\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+(\mathfrak{K}_{Mp^\infty}^+) = \tilde{\mathfrak{K}}_M^+ \oplus \tilde{X}_M.$$

On se ramène donc à montrer :

$$\mathrm{H}^i(P_{\mathfrak{K}_M}, \tilde{X}_M \otimes T) = 0.$$

Soit c_0 un i-cocycle qui présente un élément dans $\mathrm{H}^i(P_{\mathfrak{K}_M}, \tilde{X}_M \otimes T)$. D'après la proposition 4.2.1, $\theta(c_0)$ est un cobord dans $\mathrm{H}^i(P_{\mathfrak{K}_M}, X_M \otimes T)$ et donc $\theta c_0 = db_0$. Donc l'élément $c_0 - d(\iota_{\mathrm{dR}}(b_0))$ est encore un i-cocycle dans $\mathrm{H}^i(P_{\mathfrak{K}_M}, \tilde{X}_M \otimes T)$, qui est à valeurs dans $t\tilde{X}_M \otimes T$. On définit une suites $(db_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de i-cobords dans $\mathrm{H}^i(P_{\mathfrak{K}_M}, X_M \otimes T(-n))$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de i-cocycles dans $\mathrm{H}^i(P_{\mathfrak{K}_M}, \tilde{X}_M \otimes T(-n))$ par récurrence :

$$db_{n-1} = \theta(c_{n-1}) \text{ et } c_n = t^{-1}(c_{n-1} - d(\iota_{\mathrm{dR}} b_{n-1}))), \text{ si } n \geq 1.$$

Donc, on a

$$c_0 = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n d(\iota_{\mathrm{dR}}(b_n)),$$

qui est une somme des cobords qui converge dans $\mathrm{H}^i(P_{\mathfrak{K}_M}, \tilde{X}_M \otimes T)$. Ceci permet de conclure la proposition. □

Chapitre 5

La loi de réciprocité explicite de Kato

5.1 Construction de l'application exponentielle duale de Kato

On note $\mathcal{K}^+ = \mathbb{Q}_p[[q]]$ le complété q-adique de $\mathfrak{K}^+$ et $\mathcal{K}_M^+$ le complété q-adique de $\mathfrak{K}^+$-module $\mathfrak{K}_M^+ = \mathfrak{K}^+[\zeta_M, q_M]$. On a donc $\mathcal{K}_M^+ = F_M[[q_M]]$. On note $\tilde{\mathcal{K}}^+ = \mathbb{Q}_p[[\tilde{q}, t]]$ le complété $\tilde{q}$-adique de $\tilde{\mathfrak{K}}^+ = \iota_{\mathrm{dR}}(\mathfrak{K}^+)[[t]]$, où l'application ι_{dR} identifie $\mathfrak{K}^+$ à un sous-anneau de $\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+(\overline{\mathfrak{K}}^+)$. On note $\tilde{\mathcal{K}}_M^+$ le complété $\tilde{q}$-adique de $\tilde{\mathfrak{K}}_M^+$ comme $\tilde{\mathfrak{K}}^+$-module. D'après le lemme 3.2.4, on a bien

$$\tilde{\mathcal{K}}_M^+ = \tilde{\mathcal{K}}^+[\tilde{\zeta}_M, \tilde{q}_M] = \tilde{\mathcal{K}}^+[\zeta_M, \tilde{q}_M] = F_M[[t, \tilde{q}_M]].$$

On définit une application $\theta : \tilde{\mathcal{K}}_M^+ \to F_M[[q_M]]$ par réduction modulo t. Elle coïncide avec l'application θ sur $\tilde{\mathfrak{K}}_M^+$.

La représentation $(\tilde{\mathcal{K}}_M^+ \otimes V_{k,j})$ de P_m n'est pas une représentation analytique ; mais c'est la limite projective des représentations analytiques $\{(\tilde{\mathcal{K}}_M^+ \otimes V_{k,j})/(\tilde{q}, t)^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de P_m. Les actions de ∂_1 et $\partial_2 - 1$ sur t et $\tilde{q}_M$ sont données par les formules suivantes :

$$\begin{aligned}
\partial_1(t) &= (p^{-m}\partial_{u_m})t = p^{-m} \lim_{n\to+\infty} t * \frac{u_m^{p^n} - 1}{p^n} = p^{-m} \lim_{n\to+\infty} \frac{\det\left(\begin{smallmatrix} 1 & p^{n+m} \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) - 1}{p^n} t = 0 \\
\partial_1(\tilde{q}_M) &= (p^{-m}\partial_{u_m})\tilde{q}_M = p^{-m} \lim_{n\to+\infty} \tilde{q}_M * \frac{u_m^{p^n} - 1}{p^n} = p^{-m} \lim_{n\to+\infty} \frac{\tilde{\zeta}_M^{p^{m+n}} - 1}{p^n} \tilde{q}_M \\
&= p^{-m} \lim_{n\to\infty} \frac{\exp(\frac{p^{m+n}}{M}\log\tilde{\zeta}) - 1}{p^n} \tilde{q}_M = \frac{t}{M}\tilde{q}_M; \\
\partial_2(t) &= (p^{-m}\partial_{\gamma_m})t = p^{-m} \lim_{n\to+\infty} t * \frac{\gamma_m^{p^n} - 1}{p^n} = p^{-m} \lim_{n\to+\infty} \frac{\det\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{p^{m+n}} \end{smallmatrix}\right) - 1}{p^n} t = t \\
\partial_2(\tilde{q}_M) &= (p^{-m}\partial_{\gamma_m})\tilde{q}_M = p^{-m} \lim_{n\to+\infty} \tilde{q}_M * \frac{\gamma_m^{p^n} - 1}{p^n} = 0.
\end{aligned}$$

Donc, les actions de ∂_1 et $\partial_2 - 1$ s'étendent à $\tilde{\mathcal{K}}_M^+$ par continuité pour la topologie $(t, \tilde{q})$-adique.

On note $\mathcal{K}_{M,n}^+ = \mathcal{K}_M^+/(q_M)^{n-1}$ et $(\tilde{\mathcal{K}}_M^+ \otimes V_{k,j})_n = (\tilde{\mathcal{K}}_M^+ \otimes V_{k,j})/(t, \tilde{q}_M)^n$.

Proposition 5.1.1. *Si $v_p(M) = m \geq v_p(2p)$ et $1 \leq j \leq k-1$, alors l'application*

$$f(q_M) \mapsto te_1^{k-2} f(\tilde{q}_M)$$

induit un isomorphisme de $\mathcal{K}_{M,n}^+$ sur $(\tilde{\mathcal{K}}_M^+ \otimes V_{k,j})_n/(\partial_1, \partial_2 - 1)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration. Les $\{e_1^i e_2^{k-2-i} t^l q_M^v : 0 \leq i \leq k-2, l \geq 2-j, v \geq 0, v+l \leq n-1\}$ forment une F_M-base de $(\tilde{\mathcal{K}}_M^+ \otimes V_{k,j})_n$. Rappelons que l'action de $P_{\mathfrak{K}} \cong \mathrm{P}_m$ sur $V_{k,j}$ est donnée par la formule : $e_1 * \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) = ae_1 + be_2$ et $e_2 * \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) = ce_1 + de_2$, si $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{P}_m$. On a donc les formules suivantes pour l'opérateur ∂_1 :

$$\partial_1(e_1) = (p^{-m}\partial_{u_m})e_1 = p^{-m} \lim_{n \to +\infty} e_1 * \frac{u_m^{p^n} - 1}{p^n} = e_2$$
$$\partial_1(e_2) = (p^{-m}\partial_{u_m})e_2 = p^{-m} \lim_{n \to +\infty} e_2 * \frac{u_m^{p^n} - 1}{p^n} = 0.$$

On en déduit que

$$\partial_1(e_1^i e_2^{k-2-i} t^l \tilde{q}_M^v)) = ie_1^{i-1} e_2^{k-1-i} t^l f(\tilde{q}_M) + e_1^i e_2^{k-2-i} t^l v \tilde{q}_M^v \frac{t}{M}. \tag{5.1}$$

Ceci nous fournit la relation suivante dans $(\tilde{\mathcal{K}}_M^+ \otimes V_{k,j})_n/\partial_1$:

$$e_1^i e_2^{k-2-i} t^l \tilde{q}_M^v = \frac{-1}{i+1} e_1^{i+1} e_2^{k-3-i} t^{l+1} \tilde{q}_M^v \frac{v}{M} = \frac{(-1)^{k-2-i} i!}{(k-2)!} e_1^{k-2} t^{l+k-2-i} \tilde{q}_M^v (\frac{v}{M})^{k-2-i}.$$

Donc chaque élément de $(\tilde{\mathcal{K}}_M^+ \otimes V_{k,j})_n/\partial_1$ peut être représenté par un élément de $\tilde{\mathcal{K}}_{M,n}^+(1 \otimes (e_1^{k-2} t^{2-j}))$. Ceci implique que le morphisme naturel de F_M-espaces

$$\phi : \tilde{\mathcal{K}}_{M,n}^+(1 \otimes (e_1^{k-2} t^{2-j})) \to (\tilde{\mathcal{K}}_M^+ \otimes V_{k,j})_n/\partial_1$$

est surjectif. La formule (5.1) montre qu'il n'existe pas d'élément x dans $(\tilde{\mathcal{K}}_M^+ \otimes V_{k,j})_n$ tel que $\partial_1 x$ appartient à $\tilde{\mathcal{K}}_{M,n}^+(1 \otimes (e_1^{k-2} t^{2-j}))$. En conséquence, ϕ est un isomorphisme.

Par ailleurs, on a les formules suivantes pour l'opérateur $\partial_2 - 1$ sur $(\tilde{\mathcal{K}}_M^+ \otimes V_{k,j})_n$:

$$\partial_2(e_1) = (p^{-m}\partial_{\gamma_m})e_1 = p^{-m} \lim_{n \to +\infty} e_1 * \frac{\gamma_m^{p^n} - 1}{p^n} = 0$$
$$\partial_2(e_2) = (p^{-m}\partial_{\gamma_m})e_2 = p^{-m} \lim_{n \to +\infty} e_2 * \frac{\gamma_m^{p^n} - 1}{p^n} = p^{-m} \lim_{n \to +\infty} \frac{e^{p^{m+n}} - 1}{p^n} e_2 = p^{-m} \log(e^{p^m}) e_2 = e_2$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} &(\partial_2 - 1)(e_1^i e_2^{k-2-i} t^l \tilde{q}_M^v) \\ =&(k-2-i) e_1^i e_2^{k-2-i} t^l \tilde{q}_M^v + l e_1^i e_2^{k-2-i} t^l \tilde{q}_M^v - e_1^i e_2^{k-2-i} t^l \tilde{q}_M^v \\ =&(k-3-i+l) e_1^i e_2^{k-2-i} t^l \tilde{q}_M^v. \end{aligned} \tag{5.2}$$

De la formule (5.1) et de la formule (5.2), on a la relation suivante :

$$\begin{aligned}(\partial_2 - 1)(\partial_1 e_1^i e_2^{k-2-i} t^l \tilde{q}_M^v) &= (\partial_2 - 1)(i e_1^{i-1} e_2^{k-1-i} t^l \tilde{q}_M^v + e_1^i e_2^{k-2-i} t^{l+1} \tilde{q}_M^v \frac{v}{M}) \\ &= (k-2-i+l)(i e_1^{i-1} e_2^{k-1-i} t^l \tilde{q}_M^v + e_1^i e_2^{k-2-i} t^{l+1} \tilde{q}_M^v \frac{v}{M}) \\ &= \partial_1\big((\partial_2 - 1) e_1^i e_2^{k-2-i} t^l \tilde{q}_M^v\big).\end{aligned}$$

Ceci implique que ∂_1 et $\partial_2 - 1$ commutent sur $(\tilde{\mathcal{K}}_M^+ \otimes V_{k,j})_n$ et on a donc le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
(e_1^{k-2} t^{2-j} \otimes \tilde{\mathcal{K}}_M^+)/(t, \tilde{q}_M)^n \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "\partial_2 - 1"] & (\tilde{\mathcal{K}}_M^+ \otimes V_{k,j})_n/\partial_1 \arrow[d, "\partial_2 - 1"] \\
(e_1^{k-2} t^{2-j} \otimes \tilde{\mathcal{K}}_M^+)/(t, \tilde{q}_M)^n \arrow[r, "\cong"] & (\tilde{\mathcal{K}}_M^+ \otimes V_{k,j})_n/\partial_1
\end{tikzcd} .$$

Or $e_1^i e_2^{k-2-i} t^l \tilde{q}_M^v$ est vecteur propre de $\partial_2 - 1$ pour la valeur propre $(k-3-i+l)$. Donc $\tilde{\mathcal{K}}_{M,n}^+(1 \otimes (e_1^{k-2} t^{2-j})$ est dans l'image de $\partial_2 - 1$ si $l - 1 \neq 0$ et donc on obtient

$$(\tilde{\mathcal{K}}_M^+ \otimes V_{k,j})_n/(\partial_1, \partial_2 - 1) \cong \mathcal{K}_{M,n}^+ t e_1^{k-2},$$

ce qui permet de conclure. □

Maintenant, en composant les applications obtenues dans les paragraphes précédents , on obtient le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H}^2(\mathcal{G}_{\mathfrak{K}_M}, \mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+(\overline{\mathfrak{K}}^+) \otimes V_{k,j}) & & \\
\mathrm{H}^2(P_{\mathfrak{K}_M}, \mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+(\mathfrak{K}_{Mp^\infty}^+) \otimes V_{k,j}) \arrow[u, "(1)"] \arrow[rr, "(2)"] \arrow[dd, dotted, "\exp^*"] & & \mathrm{H}^2(P_{\mathfrak{K}_M}, \tilde{\mathfrak{K}}_M^+ \otimes V_{k,j}) \arrow[d, "(3)"] \\
 & & \varprojlim_n \mathrm{H}^2(P_{\mathfrak{K}_M}, (\tilde{\mathcal{K}}_M^+ \otimes V_{k,j})_n) \arrow[d, "(4)"] \\
\mathcal{K}_M^+ & & \varprojlim_n (\tilde{\mathcal{K}}_M^+ \otimes V_{k,j})_n/(\partial_1, \partial_2 - 1) \arrow[ll, "(5)", "\cong"']
\end{tikzcd},$$

où

- l'application (1), d'inflation, est injective car $\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+(\overline{\mathfrak{K}}^+)^{\mathcal{G}_{\mathfrak{K}_{Mp^\infty}}} = \mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+(\mathfrak{K}_{Mp^\infty}^+)$ et $\mathcal{G}_{\mathfrak{K}_{Mp^\infty}}$ agit trivialement sur $V_{k,j}$.
- (2) est l'isomorphisme induit par "la trace de Tate normalisée " $\mathbf{R}_M$ (c.f prop. 4.2.5) ;
- (3) est l'application naturelle induit par la projection $\tilde{\mathfrak{K}}_M^+ \otimes V_{k,j} \to (\tilde{\mathcal{K}}_M^+ \otimes V_{k,j})_n$;
- (4) est l'isomorphisme du corollaire 4.1.7 car $(\tilde{\mathcal{K}}_M^+ \otimes V_{k,j})_n$ est analytique pour tout n ;
- Comme $(\tilde{\mathcal{K}}_M^+ \otimes V_{k,j})_n$ est une représentation analytique pour tout n, l'application (4) se calcule grâce à la prop 4.1.8 . Plus précisément, cela se fait comme suit :

Recette 5.1.2. On définit une application $\mathrm{res}_{k,j}^{(n)} : (\tilde{\mathcal{K}}_M^+ \otimes V_{k,j})_n \to \mathcal{K}_{M,n}^+$ en composant la projection $(\tilde{\mathcal{K}}_M^+ \otimes V_{k,j})_n \to (\tilde{\mathcal{K}}_M^+ \otimes V_{k,j})_n/(\partial_1, \partial_2 - 1)$ avec l'inverse de l'isomorphisme dans la proposition 5.1.1. En prenant la limite projective, on obtient un morphisme $\mathrm{res}_{k,j} : \tilde{\mathcal{K}}_M^+ \otimes V_{k,j} \to \mathcal{K}_M^+$. Si $c = (c^{(n)}) \in \varprojlim \mathrm{H}^2(P_{\mathfrak{K}_M}, (\tilde{\mathcal{K}}_M^+ \otimes V_{k,j})_n)$ est représenté par une limite de 2-cocycle analytique $(\sigma, \tau) \mapsto c_{\sigma,\tau}^{(n)}$ sur $P_{\mathfrak{K}_M}$ à valeurs dans $(\tilde{\mathcal{K}}_M^+ \otimes V_{k,j})_n$, alors l'image de c sous l'application (5) est $\mathrm{res}_{k,j}(\delta^{(2)}(c))$.

On définit l'application $\exp^*$ en composant les applications (2), (3), (4), (5).

Proposition 5.1.3. *(1) Soit $v_p(M) \geq v_p(2p)$; si V est une $\mathbb{Q}_p$-représentation de $P_{\mathfrak{K}_M}$ munie d'un $\mathbb{Z}_p$-réseau T tel que $P_{\mathfrak{K}_M}$ agit trivialement sur $T/2pT$, alors l'application*

$$\mathrm{proj} = (\mathrm{proj}_n)_{n\geq 1} : \mathrm{H}^2(P_{\mathfrak{K}_M}, \tilde{\mathfrak{K}}_M^+ \otimes V) \to \varprojlim_n \mathrm{H}^2(P_{\mathfrak{K}_M}, (\tilde{\mathfrak{K}}_M^+ \otimes V)_n)$$

est injective.

(2) L'application $\exp^*$ *est injective.*

Démonstration. (1) Soit c un 2-cocycle qui représnete un élément du noyau de l'application proj. Appliquons θ à c, alors $\mathrm{proj}_n(\theta(c))$ est nul pour tout n. On note $(\mathfrak{K}_M^+ \otimes T)_n = (\mathfrak{K}_M^+ \otimes T)/(q_M)^n$. Alors, il existe un 2-cobord db de $\mathrm{H}^2(P_{\mathfrak{K}_M}, (\mathfrak{K}_M^+ \otimes T)_n)$ tel que $\mathrm{proj}_n(\theta(c)) = db$ et b est un polynôme de degré $\leq n$ en q_M. Si $\sigma, \tau \in P_{\mathfrak{K}_M}$, on a la relation de 2-cobord $(db^{(0,n)})_{\sigma,\tau} = b_\tau^{(0,n)} * \sigma - b_{\sigma\tau}^{(0,n)} + b_\sigma^{(0,n)}$ et la formule pour l'action de σ sur $\mathfrak{K}_M^+$:

$$\sigma q_M = \zeta_M^{c_q(\sigma)} q_M, \tag{5.3}$$

où c_q est un 1-cocycle à valeurs dans $\mathbb{Z}_p(1)$ associé à q par la théorie de Kummer. Ces relations nous disent que $db^{(0,n)}$ est encore un polynôme de degré $\leq n$ en variable q_M. Ceci permet de construire le 2-cobord db_0 de $\mathrm{H}^2(P_{\mathfrak{K}_M}, \mathcal{K}_M^+ \otimes T)$ tel que $\theta(c) = db_0$ par récurrence :

$$b_0 = \sum_{n=0}^{+\infty} b^{(0,n)}, \text{ où } db^{(0,0)} = \mathrm{proj}_1(\theta(c)), db^{(0,n)} = \mathrm{proj}_n(\theta(c)) - \sum_{i=0}^{n-1} db^{(0,i)}.$$

De plus, par la formule (5.3), on déduit que b_0 est à valeurs dans $\mathfrak{K}_M^+ \otimes T$.

On pose $c - d\iota_{\mathrm{dR}}(b_0)$, qui est encore un 2-cocycle de $\mathrm{H}^2(P_{\mathfrak{K}_M}, \tilde{\mathfrak{K}}_M^+ \otimes T)$ et à valeurs dans $t\tilde{\mathfrak{K}}_M^+ \otimes T$. On définit une suites $(db_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de 2-cobords de $\mathrm{H}^2(P_{\mathfrak{K}_M}, \tilde{\mathfrak{K}}_M^+ \otimes T(-n))$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de 2-cocycles de $\mathrm{H}^2(P_{\mathfrak{K}_M}, \tilde{\mathfrak{K}}_M^+ \otimes T(-n))$ par récurrence :

$$db_{n-1} = \theta(c_{n-1}) \text{ et } c_n = t^{-1}(c_{n-1} - d(\iota_{\mathrm{dR}} b_{n-1})), \text{ si } n \geq 1.$$

Donc on a $c = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n d(\iota_{\mathrm{dR}}(b_n))$, qui est une somme des cobords qui converge dans $\mathrm{H}^2(P_{\mathfrak{K}_M}, \tilde{\mathfrak{K}}_M^+ \otimes T)$.

(2) On constate par construction qu'il reste à montrer que l'application

$$(3) : \mathrm{H}^2(P_{\mathfrak{K}_M}, \tilde{\mathfrak{K}}_M^+ \otimes V_{k,j}) \to \varprojlim_n \mathrm{H}^2(P_{\mathfrak{K}_M}, (\tilde{\mathcal{K}}_M^+ \otimes V_{k,j})_n)$$

est injective. C'est une conséquence directe du (1).

□

5.2 Application au système d'Euler de Kato

5.2.1 Esquise de la preuve du Théorème (1.2.2)

Soient $M \geq 1$ et $A = \left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{smallmatrix}\right)$ avec $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \{1, \cdots, M\}$ et $\det A \in \mathbb{Z}_p^*$. On note $\psi_{M,A} = 1_{A+M\mathbf{M}_2(\hat{\mathbb{Z}})}$ la fonction caractéristique de $A + M\mathbf{M}_2(\hat{\mathbb{Z}})$. C'est une fonction invariante sous l'action de $\mathcal{G}_{\mathfrak{K}_M}$. Par ailleurs, la distribution $z_{kato,c,d}(k,j)$ appartient à $\mathrm{H}^2(\mathcal{G}_{\mathfrak{K}_M}, \mathfrak{D}_{\mathrm{alg}}(\mathbf{M}_2(\mathbb{Q} \otimes \hat{\mathbb{Z}})^{(p)}, V_{k,j}))$. Alors, on a

$$\int \psi_{M,A} z_{kato,c,d}(k,j) \in \mathrm{H}^2(\mathcal{G}_{\mathfrak{K}_M}, V_{k,j})$$

et on note son image dans $\mathrm{H}^2(\mathcal{G}_{\mathfrak{K}_M}, \mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+(\mathfrak{K}_{Mp^\infty}^+) \otimes V_{k,j})$ par $z_{M,A}$. En outre, on note $z_{Eis,c,d}^{(p)}(k,j)$ la distribution sur $\mathbf{M}_2(\mathbb{Q} \otimes \hat{\mathbb{Z}})^{(p)}$ à valeurs dans $\mathfrak{K}_\infty^+$ obtenue en restreignant la distribution $z_{Eis,c,d}(k,j) \in \mathfrak{D}_{\mathrm{alg}}(\mathbf{M}_2(\mathbb{Q} \otimes \hat{\mathbb{Z}}), \mathcal{M}_k(\mathbb{Q}_p^{\mathrm{cycl}}))$ à $\mathbf{M}_2(\mathbb{Q} \otimes \hat{\mathbb{Z}})^{(p)}$, et en utilisant l'injection de $\mathcal{M}_k(\mathbb{Q}_p^{\mathrm{cycl}})$ dans $\mathfrak{K}_\infty^+$.

Lemme 5.2.1. *Soit k un entier ≥ 2 et soit $j \in \mathbb{N}$ tel que $1 \leq j \leq k-1$. La distribution $z_{Eis,c,d}^{(p)}(k,j)$ est invariante sous l'action de $\mathcal{G}_{\mathfrak{K}}$.*

Démonstration. Le groupe $\mathcal{G}_{\mathfrak{K}}$ agit sur $\mathcal{M}^{\mathrm{cong}}(\mathbb{Q}_p^{\mathrm{cycl}})$ à travers son quotient $P_{\mathbb{Q}_p}^{\mathrm{cycl}}$ vu comme sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(\hat{\mathbb{Z}})$. D'après le théorème (2.1.12), on a :

$$\text{si } \gamma \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q} \otimes \hat{\mathbb{Z}}), z_{Eis,c,d}(k,j)_{|_k}\gamma = |\det \gamma|^{j-1} z_{Eis,c,d}(k,j).$$

En particulier, si $\gamma \in \mathrm{GL}_2(\hat{\mathbb{Z}})$, alors on a $|\det \gamma| = 1$. Donc la distribution $z_{Eis,c,d}^{(p)}(k,j)$ est invariante sous l'action de $\mathrm{GL}_2(\hat{\mathbb{Z}})$. $\square$

Donc pour montrer le théorème (1.2.2), il suffit de prouver :

Proposition 5.2.2. *Pour toute paire (M, A) ci-dessus et $v_p(M) \geq v_p(2p)$, $\det A \in \mathbb{Z}_p^*$, on a*

$$\begin{aligned}
\exp^*(z_{M,A}) &= \frac{1}{(j-1)!} M^{k-2-2j} F_{\alpha/M,\beta/M,c}^{(k-j)} E_{\gamma/M,\delta/M,d}^{(j)} \\
&= \frac{1}{(j-1)!} M^{k-2-2j} (c^2 F_{\alpha/M,\beta/M}^{(k-j)} - c^{2-k+j} F_{c\alpha/M,c\beta/M}^{(k-j)})(d^2 E_{\gamma/M,\delta/M}^{(j)} - d^j E_{d\gamma/M,d\delta/M}^{(j)}).
\end{aligned}$$

Pour démontrer ceci, nous aurons besoin d'écrire un 2-cocycle explicite représentant $z_{M,A}$ et le suivre à travers les étapes de la construction de l'application $\exp^*$.

5.2.2 Construction d'un 2-cocycle

Soient $a_0, b_0, c_0, d_0 \in \{1, \cdots, p^n M\}$ verifiant :

$$a_0 \equiv \alpha, b_0 \equiv \beta, c_0 \equiv \gamma, d_0 \equiv \delta \mod M.$$

On note les fonctions caractéristiques $1_{(a_0+Mp^n\mathbb{Z}_p)\times(b_0+Mp^n\mathbb{Z}_p)}$, $1_{(c_0+Mp^n\mathbb{Z}_p)\times(d_0+Mp^n\mathbb{Z}_p)}$, et $1_{\left(\begin{smallmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0\end{smallmatrix}\right)+Mp^n\mathbf{M}_2(\mathbb{Z}_p)}$ par $\psi^{(n)}_{a_0,b_0}$, $\psi^{(n)}_{c_0,d_0}$, et $\psi^{(n)}_{a_0,b_0,c_0,d_0}$ respectivement. Notons U_1 et U_2 respectivement les ouverts $(\alpha+M\mathbb{Z}_p)\times(\beta+M\mathbb{Z}_p)$ et $(\gamma+M\mathbb{Z}_p)\times(\delta+M\mathbb{Z}_p)$ de $\mathbb{Z}_p^2$, et $U=U_1\times U_2$ que l'on voit comme un ouvert de $\mathbf{M}_2(\mathbb{Z}_p)$ et même de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ puisque $\det A\in\mathbb{Z}_p^*$ et $p|M$.

Pour $i=1,2$, on définit les mesures algébriques $\mu_i\in \mathrm{H}^1(\mathcal{G}_{\mathfrak{K}_M},\mathfrak{D}_0(U_i,\mathbb{Z}_p(1)))$ par les formules suivantes :

$$\begin{aligned}\int \psi^{(n)}_{a_0,b_0}\mu_1 &= \int_{(a_0+Mp^n\hat{\mathbb{Z}})\times(b_0+Mp^n\hat{\mathbb{Z}})} r_c(z^{(p)}_{siegel})\\ \int \psi^{(n)}_{c_0,d_0}\mu_2 &= \int_{(c_0+Mp^n\hat{\mathbb{Z}})\times(d_0+Mp^n\hat{\mathbb{Z}})} r_d(z^{(p)}_{siegel}).\end{aligned}$$

On note $\nu=\mu_1\otimes\mu_2$ l'élément de $\mathrm{H}^2(\mathcal{G}_{\mathfrak{K}_M},\mathfrak{D}_0(U,\mathbb{Z}_p(2)))$. Comme on a $z_{kato,c,d}(k,j)=(e_1^{k-2}t^{-j})*x_pz_{kato,c,d}$, on a

$$\begin{aligned} z_{M,A} &= \int \psi_{M,A}z_{kato,c,d}(k,j)\\ &= \int \psi_{M,A}(e_1^{k-2}t^{-j})*x_pr_{c,d}\big(z^{(p)}_{siegel}\otimes z^{(p)}_{siegel}\big)\\ &= \int_U (e_1^{k-2}t^{-j})*x\nu. \end{aligned}\tag{5.4}$$

Considérons le q-développement d'une unité modulaire, on a une décomposition du groupe des unités modulaire $\mathcal{U}^{\mathrm{cong}}(\mathbb{Q}^{\mathrm{cycl}})$:

$$\mathcal{U}^{\mathrm{cong}}(\mathbb{Q}^{\mathrm{cycl}})=(\mathbb{Q}^{\mathrm{cycl}})^*\times q^{\mathbb{Q}}\times\mathcal{U}_1^{\mathrm{cong}}(\mathbb{Q}^{\mathrm{cycl}}),$$

où $\mathcal{U}_1^{\mathrm{cong}}(\mathbb{Q}^{\mathrm{cycl}})$ est l'ensemble d'éléments $x\in\mathcal{U}^{\mathrm{cong}}(\mathbb{Q}^{\mathrm{cycl}})$ vérifiant $v_q(x-1)>0$. Alors on a une inclusion de $\mathcal{U}^{\mathrm{cong}}(\mathbb{Q}^{\mathrm{cycl}})$ dans $(\mathfrak{K}^+_\infty[q^{-1}])^*$.

Si N un entier ≥ 1, si $0\leq a,b\leq N-1$, soit i un entier tel que $(i,6)=1$ et (ia,ib) n'appartient pas à $N\mathbb{Z}^2$. Rappelons que l'expression explicite de $g_i(q,q_N^a\zeta_N^b)\in\mathcal{U}(\mathbb{Q}^{\mathrm{cycl}})$ est comme suit (on note $g_i(q,q_N^a\zeta_N^b)$, ce qui est noté $g_{i,\frac{a}{N},\frac{b}{N}}$ dans la section §2.2, même chose pour la fonction θ et les séries d'Eisenstein) :

$$g_i(q,q_N^a\zeta_N^b)=q^{\frac{i^2-1}{12}}(-q_N^a\zeta_N^b)^{\frac{i-i^2}{2}}\frac{\prod_{n\geq0}(1-q^nq_N^a\zeta_N^b)^{i^2}\prod_{n\geq1}(1-q^n(q_N^a\zeta_N^b)^{-1})^{i^2}}{\prod_{n\geq0}(1-q^n(q_N^a\zeta_N^b)^i)\prod_{n\geq1}(1-q^n(q_N^a\zeta_N^b)^{-i})}.\tag{5.5}$$

Fixons i un entier tel que $(i,6)=1$ et $i\equiv1 \mod N$. Rappelons que si $c\in\mathbb{Z}_p^*$, on a défini un élément $g_c(q,q_n^a\zeta_N^b)$ de $\mathbb{Z}_p\otimes\mathcal{U}(\mathbb{Q}^{\mathrm{cycl}})\subset\mathbb{Z}_p\otimes(\overline{\mathfrak{K}}^+[q^{-1}])^*$ dans la section 2.3.2 :

$$g_c(q,q_n^a\zeta_N^b)=r_c(g_{a/N,b/N})=\frac{c^2-c_1^2}{i^2-1}g_{i,a/N,b/N}+g_{c_1,a/N,b/N}$$

avec $c_1\equiv c \mod pN$ et $v_p(c-c_1)$ assez grand.

Soit $g\in\overline{\mathfrak{K}}^+$; on note $\bar{g}=(g,g^{\frac{1}{p}},\cdots,)$ un relèvement de g dans $\mathbb{R}(\overline{\mathfrak{K}}^+)$ et $[\bar{g}]$ son représentant de Teichmüller dans $\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}(\overline{\mathfrak{K}}^+)$. Alors l'élément $\overline{g_c(q,q_n^a\zeta_N^b)}$ dans $\mathbb{Z}_p\otimes(\mathbb{R}(\overline{\mathfrak{K}}^+[q^{-1}]))^*$ est bien défini et appartient à $\mathbb{Z}_p \otimes (U_0(\overline{\mathfrak{K}}^+)[\bar{q}^{-1}])^*$, à multiplication d'un élément de $(1, \zeta_p, \cdots,)^{\mathbb{Q}}$ près .

Pour tout $n \geq 0$ (resp. $n \geq 1$), $[\overline{1 - q^n q_N^a \zeta_N^b}]$ (resp. $[\overline{1 - q^n q_N^{-a} \zeta_N^{-b}}]$) est un élément inversible de $\mathbb{A}_{\inf}^{**}$. Rappelons que l'on a défini une application logarithme log sur $\mathbb{A}_{\inf}^{**} \times \tilde{q}^{\mathbb{Q}}$ à valeurs dans $\mathbb{B}_{\log}^+$ (c.f §3.3). En appliquant l'application log à $[\overline{1 - q^n q_N^a \zeta_N^b}]$ (resp. $[\overline{1 - q^n q_N^{-a} \zeta_N^{-b}}]$) pour $n \geq 0$ (resp. $n \geq 1$) et on obtient que $\log[\overline{1 - q^n q_N^a \zeta_N^b}]$ (resp. $\log[\overline{1 - q^n q_N^{-a} \zeta_N^{-b}}]$) est un élément de $\mathbb{B}_{\log}^+$, pour tout $n \geq 0$ (resp. $n \geq 1$).

Comme q est de valuation 1 pour la valuation p-adique sur $\overline{\mathfrak{K}}^+$, on a $\prod_{n\geq 0} \overline{(1 - q^n q_N^a \zeta_N^b)}$ converge dans $U_0(\overline{\mathfrak{K}}^+)$. Ceci implique $\prod_{n\geq 0}[\overline{(1 - q^n q_N^a \zeta_N^b)}]$ converge dans $\mathbb{A}_{\inf}^{**}$. De la même manière, on obtient que $O = \frac{\prod_{n\geq 0}[\overline{(1-q^n q_N^a \zeta_N^b)}]^{i^2} \prod_{n\geq 1}[\overline{(1-q^n (q_N^a \zeta_N^b))}^{-1}]^{i^2}}{\prod_{n\geq 0}[\overline{(1-q^n (q_N^a \zeta_N^b))}^{i}] \prod_{n\geq 1}[\overline{(1-q^n (q_N^a \zeta_N^b))}^{-i}]}$ converge dans $\mathbb{A}_{\inf}^{**}$. Donc l'élément $[\overline{g_i(q, q_N^a, q_N^b)}] \in \mathbb{A}_{\inf}(\overline{\mathfrak{K}})$ est donné par la formule explicite suivante :

$$[\overline{g_i(q, q_N^a, q_N^b)}] = \tilde{q}^{\frac{i^2-1}{12}} (-\tilde{q}_N^a \tilde{\zeta}_N^b)^{\frac{i-i^2}{2}} \times O;$$

ceci implique qu'il est dans $\mathbb{A}_{\inf}^{**} \times \tilde{q}^{\mathbb{Q}}$. Comme $\log \tilde{\zeta}_N = \frac{t}{N}$, on a :

$$\begin{aligned}
\log[\bar{g}_{i,\frac{a}{N},\frac{b}{N}}] &= \frac{i^2-1}{12} \log \tilde{q} + \frac{(i-i^2)a}{2N} \log \tilde{q} + \frac{(i-i^2)b}{2N} t \\
&+ \sum_{n\geq 0} (\log[(1 - q^n q_N^a \zeta_N^b)] - \log[(1 - q^n q_N^{ia} \zeta_N^{ib})]) \\
&+ \sum_{n\geq 1} (\log[(1 - q^n q_N^{-a} \zeta_N^{-b})] - \log[(1 - q^n q_N^{-ia} \zeta_N^{-ib})]).
\end{aligned}$$

On définit $\log[\bar{g}_{c,\frac{a}{N},\frac{b}{N}}]$ par la formule :

$$\log[\bar{g}_{c,\frac{a}{N},\frac{b}{N}}] = \frac{c - c_1}{i^2 - 1} \log[\bar{g}_{i\frac{a}{N},\frac{b}{N}}] + \log[\bar{g}_{c_1,\frac{a}{N},\frac{b}{N}}],$$

où c_1 est un entier tel que $v_p(\frac{c-c_1}{i^2-1}) \geq 0$, $c \equiv c_1 \mod N$ et $(c_1, 6) = 1$; ceci ne depend pas du choix de i et c_1 à addition d'un élément de $\mathbb{Q}_p t$ près . Alors, $\log[g_{c,\frac{a}{N},\frac{b}{N}}]$ est un élément de $\mathbb{B}_{\log}^+$, défini à addition d'un élément de $\mathbb{Q}_p t$ près .

Si $i = 1, 2$, soit Ψ_i une base du $\mathbb{Z}$-module des fonctions localement constantes sur U_i constituée de fonctions du type $\psi_{a_0,b_0}^{(n)}$ (resp. $\psi_{c_0,d_0}^{(n)}$), avec $n \in \mathbb{N}$ et a_0, b_0 (resp. c_0, d_0) comme ci-dessus. On définit une distribution algébrique μ_{1,Ψ_1} (resp. μ_{2,Ψ_2}) sur U_1 (resp. U_2) à valeurs dans $\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+(\overline{\mathfrak{K}}^+)[u_q]$ par la formule : si $\psi_{a_0,b_0}^{(n)} \in \Psi_1$ (resp. $\psi_{c_0,d_0}^{(n)} \in \Psi_2$),

$$\int \psi_{a_0,b_0}^{(n)} \mu_{1,\Psi_1} = \log[\overline{g_c(q, q_{Mp^n}^{a_0} \zeta_{Mp^n}^{b_0})}]$$

(resp. $\int \psi_{c_0,d_0}^{(n)} \mu_{2,\Psi_2} = \log[\overline{g_d(q, q_{Mp^n}^{c_0} \zeta_{Mp^n}^{d_0})}]$).

On identifie $\mathbb{Z}_p(1)$ au sous-module de $\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+$ via l'ismorphisme de $\mathbb{Z}_p[\mathcal{G}_{\mathfrak{K}}]$-modules

$$\log \circ [\cdot] : \mathbb{Z}_p(1) \to \mathbb{Z}_p t.$$

Lemme 5.2.3. *Si $i = 1, 2$, alors μ_i est l'image du 1-cocycle*

$$\sigma \mapsto \mu_{i,\Psi_i} * (\sigma - 1)$$

dans $\mathrm{H}^1(\mathcal{G}_{\mathfrak{K}_M}, \mathfrak{D}_0(U_i, \mathbb{Z}_p(1)))$ *pour tout choix de Ψ_i, qui ne dépend pas du choix des valeurs* $\log[\bar{g}_{c,\frac{a_0}{Mp^n},\frac{b_0}{Mp^n}}]$ *ou* $\log[\bar{g}_{c,\frac{c_0}{Mp^n},\frac{d_0}{Mp^n}}]$.

Démonstration. La démonstration est la même pour $i = 1, 2$. On peut donc supposer que $i = 1$ et $\psi_{a_0,b_0} \in \Psi_1$. Rappelons que $\log[\bar{g}_{c,\frac{a_0}{Mp^n},\frac{b_0}{Mp^n}}]$ est bien défini à $\mathbb{Q}_p t$ près. Comme $\sigma \mapsto t*(\sigma-1)$ est un cobord dans $\mathrm{H}^1(\mathcal{G}_{\mathfrak{K}_M}, \mathbb{Z}_p(1))$, μ_{i,Ψ_i} ne dépend du choix de $\log[\bar{g}_{c,\frac{a_0}{Mp^n},\frac{b_0}{Mp^n}}]$.

Si $\psi^{(n)}_{a_0,b_0} \in \Psi_1$, on a $\int \psi^{(n)}_{a_0,b_0}\mu_1 = g_{c,\frac{a_0}{Mp^n},\frac{b_0}{Mp^n}}$. D'après la théorie de Kummer p-adique (c.f. §2.3), μ_1 est représenté par le 1-cocycle $\sigma \mapsto \mu * (\sigma - 1)$ de $\mathrm{H}^1(\Pi'_{\mathbb{Q}}, \mathfrak{D}_{\mathrm{alg}}(X_1, \mathbb{Z}_p(1)))$ avec $\mu \in \mathrm{H}^1(\Pi'_{\mathbb{Q}}, \mathfrak{D}_{\mathrm{alg}}(X_1, Z^0))$ vérifiant :

$$\int \psi^{(n)}_{a_0,b_0}\mu = \bar{g}_{c,\frac{a_0}{Mp^n},\frac{b_0}{Mp^n}}.$$

Appliquons l'isomorphisme $\log\circ[\cdot] : \mathbb{Z}_p(1) \to \mathbb{Z}_p t$ à $\mu * (\sigma - 1)$; on déduit le lemme de la formule $\log[\sigma x] = \sigma \log[x]$. □

5.2.3 Descente de $\overline{\mathfrak{K}}$ à $\mathfrak{K}_{Mp^\infty}$

Lemme 5.2.4. *Les produits infinis* $\prod_{n\geq 0}(1 - \tilde{q}\tilde{q}_N^a\tilde{\zeta}_N^b)$ *et* $\prod_{n\geq 1}(1 - \tilde{q}\tilde{q}_N^{-a}\tilde{\zeta}_N^{-b})$ *convergent dans* $\mathbb{A}^{**}_{\mathrm{inf}} \cap \mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}}(\mathfrak{K}^+_{Mp^\infty})$ *avec $pN|M$.*

Démonstration. La démonstration pour $\prod_{n\geq 0}(1-\tilde{q}\tilde{q}_N^a\tilde{\zeta}_N^b)$ et $\prod_{n\geq 1}(1-\tilde{q}\tilde{q}_N^{-a}\tilde{\zeta}_N^{-b})$ est la même. Donc on montre le lemme pour le produit $\prod_{n\geq 0}(1 - \tilde{q}\tilde{q}_N^a\tilde{\zeta}_N^b)$.

Comme q est de valuation 1 pour la valuation p-adique dans $\overline{\mathfrak{K}}^+$, on a $\tilde{q} = p\alpha(1 + \omega\beta) \in \mathbb{A}_{\mathrm{inf}}$ et $v_p(\tilde{q}) \geq 1$. Donc on a

$$\prod_{n\geq 0}(1 - \tilde{q}\tilde{q}_N^a\tilde{\zeta}_N^b) = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k\tilde{q}_N^{ak}\zeta_N^{bk}c_k,$$

où $c_k = \sum_{0\leq i_1<i_2<\cdots<i_k} \tilde{q}^{\sum_{1\leq j\leq k} i_j}$ converge dans $\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}$ pour la topologie p-adique. D'autre part, on a $v_p(c_k) \geq k(k-1)/2$ et $v_p(\tilde{q}_N^{ak}\zeta_N^{bk}c_k) \geq \frac{ak}{N} + \frac{k(k-1)}{2} > 0$; ceci implique le produit converge pour la topologie p-adique dans $\mathbb{A}^{**}_{\mathrm{inf}}$. Il est évident que le produit est un élément de $\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}}(\mathfrak{K}_{Mp^\infty})$. □

D'après le lemme ci-dessus, si $i \in \mathbb{Z}$ est tel que $(i, 6) = 1$, alors $g_i(\tilde{q}, \tilde{q}_N^a\tilde{\zeta}_N^b)$ appartient à $(\mathbb{A}^{**}_{\mathrm{inf}} \cap \mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}}(\mathfrak{K}_{Mp^\infty})) \times \tilde{q}^{\mathbb{Q}}$. Alors on peut appliquer l'application log à $g_i(\tilde{q}, \tilde{q}_N^a\tilde{\zeta}_N^b)$ et on peut aussi définir $\log g_c(q, \tilde{q}_N^a\tilde{\zeta}_N^b) = \frac{c^2-c_1^2}{i^2-1}\log g_i(\tilde{q}, \tilde{q}_N^a\tilde{\zeta}_N^b) + \log g_{c_1}(\tilde{q}, \tilde{q}_N^a\tilde{q}_N^b)$ à addition d'un élément de $\mathbb{Q}_p t$ près , où i est un entier tel que $(i, 6) = 1$ et $i \equiv 1 \mod N$, et c_1 est un entier tel que $v_p(c - c_1)$ soit assez grand.

Lemme 5.2.5. *(1) Si $n \geq 0$(resp. $n \geq 1$), $1-\tilde{q}^n\tilde{q}_N^a\tilde{\zeta}_N^b$ (resp. $1-\tilde{q}^n\tilde{q}_N^{-a}\tilde{\zeta}_N^{-b}$) est inversible dans $\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}(\overline{\mathfrak{K}}^+)$.*

(2) Si $n \geq 0$(resp. $n \geq 1$), $\frac{[\overline{1-q^nq_N^a\zeta_N^b}]}{1-\tilde{q}^n\tilde{q}_N^a\tilde{\zeta}_N^b}$ (resp. $\frac{[\overline{1-q^nq_N^{-a}\zeta_N^{-b}}]}{1-\tilde{q}^n\tilde{q}_N^{-a}\tilde{\zeta}_N^{-b}}$) est un élément dans $1+\omega\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}(\overline{\mathfrak{K}}^+)$;

Démonstration. On montrera le lemme pour le cas $n \geq 0$ et l'autre cas se déduit de la même manière.

Comme q est de valuation 1 pour la valuation p-adique dans $\overline{\mathfrak{K}}^+$, $\tilde{q}$ peut s'écrire sous la forme $p\beta+\omega\alpha$ avec $\alpha,\beta \in \mathbb{A}_{\mathrm{inf}}(\overline{\mathfrak{K}}^+)$. Donc on a

$$\sum_{m=0}^{+\infty}(\tilde{q}^n\tilde{q}_N^a\tilde{\zeta}_N^b)^m = 1+\sum_{k=0}^{+\infty}\omega^k\sum_{mn\geq k, m\geq 1}\binom{mn}{k}\alpha^k(p\beta)^{mn-k}\tilde{q}_N^a\tilde{\zeta}_N^b.$$

La série $\sum\limits_{mn\geq k,m\geq 1}\binom{mn}{k}\alpha^k(p\beta)^{mn-k}\tilde{q}_N^a\tilde{\zeta}_N^b$ converge dans $\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}(\overline{\mathfrak{K}}^+)$ et donc $1+\sum_{m=1}^{+\infty}(\tilde{q}^n\tilde{q}_N^a\tilde{\zeta}_N^b)^m$ converge dans $\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}(\overline{\mathfrak{K}}^+)$ pour la topologie faible. Ceci donne l'inverse de $1-\tilde{q}^n\tilde{q}_N^a\tilde{\zeta}_N^b$ dans $\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}(\overline{\mathfrak{K}}^+)$ et implique que $\frac{[\overline{1-q^nq_N^a\zeta_N^b}]}{1-\tilde{q}^n\tilde{q}_N^a\tilde{\zeta}_N^b}$ est un élément dans $\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}(\overline{\mathfrak{K}}^+)$. Par ailleurs, $\theta(\frac{[\overline{1-q^nq_N^a\zeta_N^b}]}{1-\tilde{q}^n\tilde{q}_N^a\tilde{\zeta}_N^b})$ a pour image 1 dans $\mathbb{C}(\overline{\mathfrak{K}}^+)$, ce qui permet de conclure. □

Si $i=1,2$, on définit une distribution algébrique $\tilde{\mu}_{i,\Psi_i}$ sur U_i par la formule : pour $\psi_{a_0,b_0}^{(n)} \in \Psi_1$ (resp. $\psi_{c_0,d_0}^{(n)} \in \Psi_2$),

$$\int \psi_{a_0,b_0}^{(n)}\tilde{\mu}_{1,\Psi_1} = \log g_c(\tilde{q},\tilde{q}_{Mp^n}^{a_0}\tilde{\zeta}_{Mp^n}^{b_0})$$
$$(\text{resp.} \int \psi_{c_0,d_0}^{(n)}\tilde{\mu}_{2,\Psi_2} = \log g_d(\tilde{q},\tilde{q}_{Mp^n}^{c_0}\tilde{\zeta}_{Mp^n}^{d_0})).$$

De la formule explicite (5.5) de $g_c(q,q_N^a\zeta_N^b)$, on obtient que $g_c(\tilde{q},\tilde{q}_{Mp^n}^{a_0}\tilde{\zeta}_{Mp^n}^{b_0})$ appartient à $\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+(\mathfrak{K}_{Mp^\infty}^+)\oplus\mathbb{Q}_p\tilde{q}$, et son image par θ dans $\mathbb{C}(\mathfrak{K}_{Mp^\infty}^+)\oplus\mathbb{Q}_pq$ est $g_c(q,q_{Mp^n}^{a_0}\zeta_{Mp^n}^{b_0})$. Donc on obtient que $\log g_c(\tilde{q},\tilde{q}_{Mp^n}^{a_0}\tilde{\zeta}_{Mp^n}^{b_0})$ et $\log g_d(\tilde{q},\tilde{q}_{Mp^n}^{c_0}\tilde{\zeta}_{Mp^n}^{d_0})$ appartiennent à $\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+(\mathfrak{K}_{Mp^\infty}^+)\oplus\mathbb{Q}_pu_q$.

Lemme 5.2.6. *Si $i=1,2$, alors :*

(i) $\tilde{\mu}_{i,\Psi_i}-\mu_{i,\Psi_i}$ est une mesure à valeurs dans $t\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+$;

(ii) Considérons l'application : $\mathrm{H}^1(\mathcal{G}_{\mathfrak{K}_M},\mathfrak{D}_0(U_i,\mathbb{Z}_p(1)))\to\mathrm{H}^1(\mathcal{G}_{\mathfrak{K}_M},\mathfrak{D}_0(U_i,t\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+))$. L'image de μ_i est représenté par le cocycle

$$\sigma\mapsto\tilde{\mu}_{i,\Psi_i}*(\sigma-1),$$

qui est l'inflation d'un cocycle sur $P_{\mathfrak{K}_M}$ à valeurs dans $\mathfrak{D}_0(U_i,t\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+(\mathfrak{K}_{Mp^\infty}^+))$.

Démonstration. Le (ii) est une conséquence immédiate du (i). En effet, comme $(\tilde{\mu}_{i,\Psi_i}-\mu_{i,\Psi_i})$ est une mesure à valeurs dans $t\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+$, on obtient que $(\tilde{\mu}_{i,\Psi_i}-\mu_{i,\Psi_i})*(\sigma-1)$ est un cobord dans $\mathrm{H}^1(\mathcal{G}_{\mathfrak{K}_M},\mathfrak{D}_0(U_i,t\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+))$. D'autre part, on a

$$\tilde{\mu}_{i,\Psi_i}*(\sigma-1)=\mu_{i,\Psi_i}*(\sigma-1)+(\tilde{\mu}_{i,\Psi_i}-\mu_{i,\Psi_i})*(\sigma-1),$$

et donc $\sigma \mapsto \tilde{\mu}_{i,\Psi_i} * (\sigma - 1)$ est un 1-cocycle à valeurs dans $t\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^{+}$ qui représente $\mu_i \in \mathrm{H}^1(\mathcal{G}_{\mathfrak{K}_M}, \mathfrak{D}_0(U_i, t\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^{+}))$.

Le (1) est déduit du lemme 5.2.5. □

Soient Λ_1, Λ_2 deux G-modules à droite. Si $x_1 \in \Lambda_1, x_2 \in \Lambda_2$ et $\sigma, \tau \in G$, on définit un élément $\{x_1 \otimes x_2\}_{\sigma,\tau} := (x_1 * (\tau\sigma - \sigma) \otimes (x_2 * (\sigma - 1))) \in \Lambda_1 \otimes \Lambda_2$.

Corollaire 5.2.7. *Considérons l'application :*

$$\mathrm{H}^2(\mathcal{G}_{\mathfrak{K}_M}, \mathfrak{D}_0(U, \mathbb{Z}_p(2))) \to \mathrm{H}^2(\mathcal{G}_{\mathfrak{K}_M}, \mathfrak{D}_0(U, t^2\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^{+}(\overline{\mathfrak{K}}^{+}))).$$

L'image de $\nu = \mu_1 \otimes \mu_2$ *peut être représenté par le* 2*-cocycle*

$$(\sigma, \tau) \mapsto \{\tilde{\mu}_{1,\Psi_1} \otimes \tilde{\mu}_{1,\Psi_2}\}_{\sigma,\tau},$$

qui est l'inflation du 2*-cocycle sur* $P_{\mathfrak{K}_M}$ *à valeurs dans* $\mathfrak{D}_0(U, t^2\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^{+}(\mathfrak{K}_{Mp^\infty}^{+}))$.

Démonstration. Ce corollaire résulte du lemme précédent et de la formule du cup-produit. La formule du cup-produit de deux cocycles est : soient G un groupe, A, B deux G-module à droite. Si $f_1 \in \mathrm{H}^i(G, A)$ et $f_2 \in \mathrm{H}^j(G, B)$, on a $f_1 \cup f_2 \in \mathrm{H}^{i+j}(G, A \otimes B)$ où

$$f_1 \cup f_2(\sigma_{i+j}, \cdots, \sigma_{i+1}, \sigma_i, \cdots, \sigma_1) = (f_1(\sigma_i, \cdots, \sigma_1) * \sigma_{i+1} * \cdots * \sigma_{i+j}) \otimes f_2(\sigma_{i+j}, \cdots, \sigma_{i+1}).$$

On applique cette formule à $f_1 = \tilde{\mu}_{1,\Psi_1} * (\sigma - 1)$ et $f_2 = \tilde{\mu}_{2,\Psi_2} * (\sigma - 1)$ et on obtient un 2-cocycle

$$(\sigma, \tau) \mapsto \{\tilde{\mu}_{1,\Psi_1} \otimes \tilde{\mu}_{1,\Psi_2}\}_{\sigma,\tau},$$

qui représente ν et à valeurs dans $\mathfrak{D}_0(U, t^2\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^{+}(\mathfrak{K}_{Mp^\infty}^{+}))$. Donc il est l'inflation du 2-cocycle sur $P_{\mathfrak{K}_M}$ à valeurs dans $\mathfrak{D}_0(U, t^2\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^{+}(\mathfrak{K}_{Mp^\infty}^{+}))$. □

5.2.4 Descente de $\mathfrak{K}_{Mp^\infty}$ à $\mathfrak{K}_M$

Définition 5.2.8. Si $v_p(M) \geq v_p(2p)$, on pose $\mathbb{B}_{\log}^{+}(\mathfrak{K}_{Mp^\infty}^{+}) = \mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^{+}(\mathfrak{K}_{Mp^\infty}^{+})[u_q]$, où $u_q = \log \tilde{q}$. On définit une application $\tilde{\mathfrak{K}}_M^{+}[u_q]$-linéaire :

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{M,\log} : \mathbb{B}_{\log}^{+}(\mathfrak{K}_{Mp^\infty}^{+}) &\longrightarrow \tilde{\mathfrak{K}}_M^{+}[u_q] \\ \sum_k x_k u_q^k &\mapsto \sum_k \mathbf{R}_M(x_k) u_q^k, \end{aligned}$$

où $\mathbf{R}_M$ est la trace de Tate normalisée (c.f Théorème 3.2.10) sur $\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^{+}(\mathfrak{K}_{Mp^\infty}^{+})$ à valeurs dans $\tilde{\mathfrak{K}}_M^{+}$.

Comme $\tilde{\mathfrak{K}}_M^{+}[u_q]$ est stable sous l'action de $P_{\mathfrak{K}_M}$ et $\mathbf{R}_M$ commute avec l'action de $P_{\mathfrak{K}_M}$, on déduit que $\mathbf{R}_{M,\log}$ commute avec l'action de $P_{\mathfrak{K}_M}$. Ceci implique que, si V est une représentation de $P_{\mathfrak{K}_M M}$, l'image d'un 2-cocycle de $\mathrm{H}^2(P_{\mathfrak{K}_M}, \mathbb{B}_{\log}^{+}(\mathfrak{K}_{Mp^\infty}) \otimes V)$ sous l'application $\mathbf{R}_{M,\log}$ est encore un 2-cocycle. Par simplifier la notation, on va noter $\mathbf{R}_{M,\log}$ encore par $\mathbf{R}_M$.

D'après ce qui précède et de la relation (5.4), $z_{M,A}$ est la classe du 2-cocycle

$$(\sigma, \tau) \mapsto \int_U ((e_1^{k-2} t^{-j}) * g)\{\tilde{\mu}_{1,\Psi_1} \otimes \tilde{\mu}_{2,\Psi_2}\}_{\sigma,\tau},$$

qui est aussi la classe du 2-cocycle par "la trace de Tate normalisée "

$$(\sigma,\tau)\mapsto \mathbf{R}_M\Big(\int_U \big((e_1^{k-2}t^{-j})*g\big)\{\tilde{\mu}_{1,\Psi_1}\otimes\tilde{\mu}_{2,\Psi_2}\}_{\sigma,\tau}\Big).$$

Lemme 5.2.9. *Si $ad-bc\in\mathbb{Z}_p^*$, alors*

$$\begin{aligned}&\mathbf{R}_M(\log\theta(\tilde{q},\tilde{q}^a_{Mp^n}\tilde{\zeta}^b_{Mp^n})\log\theta(\tilde{q},\tilde{q}^c_{Mp^n}\tilde{\zeta}^d_{Mp^n}))\\ &=p^{-2n}\log\theta(\tilde{q}^{p^n},\tilde{q}^a_M\tilde{\zeta}^b_M)\log\theta(\tilde{q}^{p^n},\tilde{q}^c_M\tilde{\zeta}^d_M).\end{aligned}$$

Démonstration. On a la formule explicite pour $\log\theta(\tilde{q},\tilde{q}^a_{Mp^n}\tilde{\zeta}^b_{Mp^n})$:

$$\begin{aligned}\log\theta(\tilde{q},\tilde{q}^a_{Mp^n}\tilde{\zeta}^b_{Mp^n})=&(\frac{1}{12}+\frac{a}{2Mp^n})u_q+\frac{b}{2Mpn}t+\\ &+(\sum_{m=1}^{+\infty}\log(1-\tilde{q}^m\tilde{q}^a_{Mp^n}\tilde{\zeta}^b_{Mp^n})+\sum_{m=0}^{\infty}\log(1-\tilde{q}^m\tilde{q}^{-a}_{Mp^n}\tilde{\zeta}^{-b}_{Mp^n})).\end{aligned}$$

Comme $\mathbf{R}_M(u_q)=u_q=p^{-n}u_q^{p^n}$ et $\mathbf{R}_M(t)=t=p^{-n}\log\tilde{\zeta}^{p^n}$, il suffit de vérifier les relations suivantes :

$$\mathbf{R}_M(\log(1-\tilde{q}^m\tilde{q}^a_{Mp^n}\tilde{\zeta}^b_{Mp^n}))=p^{-n}\log(1-\tilde{q}^{p^nm}\tilde{q}^a_M\tilde{\zeta}^b_M)$$
$$\mathbf{R}_M(\log(1-\tilde{q}_1^m\tilde{q}^a_{Mp^n}\tilde{\zeta}^b_{Mp^n})\log(1-\tilde{q}_2^m\tilde{q}^c_{Mp^n}\tilde{\zeta}^d_{Mp^n}))=p^{-2n}\log(1-\tilde{q}^{p^nm}\tilde{q}^a_M\tilde{\zeta}^b_M)\log(1-\tilde{q}^{p^nm}\tilde{q}^a_M\tilde{\zeta}^b_M)$$

On utilise le fait que

$$\log(1-\tilde{q}^m\tilde{q}^a_{Mp^n}\tilde{\zeta}^b_{Mp^n})=-\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(\tilde{q}^m\tilde{q}^a_{Mp^n}\tilde{\zeta}^b_{Mp^n})^i}{i}.$$

Comme $ad-bc\in\mathbb{Z}_p^*$, a et b ne sont pas divisibles par p^n à la fois. Donc pour $p^n\nmid i$, on obtient $\mathbf{R}_M((\tilde{q}^m\tilde{q}^a_{Mp^n}\tilde{\zeta}^b_{Mp^n})^i)=0$. On en déduit que

$$\mathbf{R}_M\log(1-\tilde{q}^m\tilde{q}^a_{Mp^n}\tilde{\zeta}^b_{Mp^n})=p^{-n}\log(1-(\tilde{q}^{p^n})^m\tilde{q}^a_M\tilde{\zeta}^b_M).$$

Pour le terme

$$(\log(1-\tilde{q}^m\tilde{q}^a_{Mp^n}\tilde{\zeta}^b_{Mp^n}))(\log(1-\tilde{q}^m\tilde{q}^c_{Mp^n}\tilde{\zeta}^d_{Mp^n})),$$

on développe le produit :

$$\begin{aligned}&(\log(1-\tilde{q}^{m_1}\tilde{q}^a_{Mp^n}\tilde{\zeta}^b_{Mp^n}))(\log(1-\tilde{q}^{m_2}\tilde{q}^c_{Mp^n}\tilde{\zeta}^d_{Mp^n}))\\ =&(\sum_{i=1}^{+\infty}-\frac{(\tilde{q}^{m_1}\tilde{q}^a_{Mp^n}\tilde{\zeta}^b_{Mp^n})^i}{i})(\sum_{j=1}^{+\infty}-\frac{(\tilde{q}^{m_2}\tilde{q}^c_{Mp^n}\tilde{\zeta}^d_{Mp^n})^j}{j})\\ =&\sum_{i,j=1}^{+\infty}\frac{(\tilde{q}^{m_1}\tilde{q}^a_{Mp^n}\tilde{\zeta}^b_{Mp^n})^i(\tilde{q}^{m_2}\tilde{q}^c_{Mp^n}\tilde{\zeta}^d_{Mp^n})^j}{ij}\end{aligned}$$

Comme $ad-bc\in\mathbb{Z}_p^*$, cela équivaut à dire que "$p^n|ai+cj$ et $p^n|bi+dj$ sont équivalent à $p^n|i$ et $p^n|j$". Donc en appliquant $\mathbf{R}_M$ à la formule ci-dessus, on obtient :

$$\begin{aligned}&\mathbf{R}_M\left((\log(1-\tilde{q}^{m_1}\tilde{q}^a_{Mp^n}\tilde{\zeta}^b_{Mp^n}))(\log(1-\tilde{q}^{m_2}\tilde{q}^c_{Mp^n}\tilde{\zeta}^d_{Mp^n}))\right)\\ =&p^{-2n}\sum_{i,j=1}^{+\infty}\frac{(\tilde{q}^{p^nm_1}\tilde{q}^a_M\tilde{\zeta}^b_M)^i(\tilde{q}^{p^nm_2}\tilde{q}^c_M\tilde{\zeta}^d_M)^j}{ij}\\ =&p^{-2n}(\log(1-\tilde{q}^{p^nm_1}\tilde{q}^a_M\tilde{\zeta}^b_M))(\log(1-\tilde{q}^{p^nm_2}\tilde{q}^c_M\tilde{\zeta}^d_M))\end{aligned}$$

En composant les résultats ci-dessus, on obtient la formule voulue dans le lemme. □

Corollaire 5.2.10. *Si on note*

$$\log^{(\sigma,\tau)}_{\begin{pmatrix}a_0&b_0\\c_0&d_0\end{pmatrix}}=\left\{\log\left((c^2-<c>)\theta(\tilde{q}^{p^n},\tilde{q}^{a_0}_M\tilde{\zeta}^{b_0}_M)\right)\otimes\log\left((d^2-<d>)\theta(\tilde{q}^{p^n},\tilde{q}^{c_0}_M\tilde{\zeta}^{d_0}_M)\right)\right\}_{\sigma,\tau},$$

$z_{M,A}$ *peut se représenter par le* 2*-cocycle*

$$(\sigma,\tau)\mapsto\lim_{n\to+\infty}p^{-2n}\sum\frac{(a_0e_1+b_0e_2)^{k-2}}{(a_0d_0-b_0c_0)^jt^j}\log^{(\sigma,\tau)}_{\begin{pmatrix}a_0&b_0\\c_0&d_0\end{pmatrix}},$$

la somme portant sur l'ensemble

$$U^{(n)}:=\{(a_0,b_0,c_0,d_0)\in\{1,\cdots,Mp^n\}^4|a_0\equiv\alpha,b_0\equiv\beta,c_0\equiv\gamma,d_0\equiv\delta\mod M\}.$$

Démonstration. $z_{M,A}$ peut se représenter par le 2-cocycle

$$(\sigma,\tau)\mapsto\mathbf{R}_M(\int_U((e_1^{k-2}t^{-j})*g)\{\tilde{\mu}_{1,\Psi_1}\otimes\tilde{\mu}_{2,\Psi_2}\}_{\sigma,\tau}).$$

Par la définition de l'intégration sur U, on a

(5.6)

$$\begin{aligned}&\mathbf{R}_M(\int_U((e_1^{k-2}t^{-j})*g)\{\tilde{\mu}_{1,\Psi_1}\otimes\tilde{\mu}_{2,\Psi_2}\}_{\sigma,\tau})\\ =&\lim_{n\to\infty}\sum_{g=\begin{pmatrix}a_0&b_0\\c_0&d_0\end{pmatrix}\in U^{(n)}}\mathbf{R}_M(\int\psi^{(n)}_{a_0,b_0}\otimes\psi^{(n)}_{c_0,d_0}((e_1^{k-2}t^{-j})*g)\{\tilde{\mu}_{1,\Psi_1}\otimes\tilde{\mu}_{2,\Psi_2}\}_{\sigma,\tau})\\ =&\lim_{n\to\infty}\sum_{g=\begin{pmatrix}a_0&b_0\\c_0&d_0\end{pmatrix}\in U^{(n)}}((e_1^{k-2}t^{-j})*g)\cdot r_{c,d}\left(\mathbf{R}_M\left(\{\log\theta(\tilde{q},\tilde{q}^{a_0}_{Mp^n}\tilde{\zeta}^{b_0}_{Mp^n})\otimes\log\theta(\tilde{q},\tilde{q}^{c_0}_{Mp^n}\tilde{\zeta}^{d_0}_{Mp^n})\}_{\sigma,\tau}\right)\right)\end{aligned}$$

D'après le lemme précédent, on a

$$\begin{aligned}(5.6)=&\lim_{n\to\infty}\sum_{g=\begin{pmatrix}a_0&b_0\\c_0&d_0\end{pmatrix}\in U^{(n)}}((e_1^{k-2}t^{-j})*g)\cdot r_{c,d}\left(p^{-2n}\{\log\theta(\tilde{q}^{p^n},\tilde{q}^{a_0}_M\tilde{\zeta}^{b_0}_M)\otimes\log\theta(\tilde{q}^{p^n},\tilde{q}^{c_0}_M\tilde{\zeta}^{d_0}_M)\}_{\sigma,\tau}\right)\\ =&\lim_{n\to\infty}p^{-2n}\sum_{g=\begin{pmatrix}a_0&b_0\\c_0&d_0\end{pmatrix}\in U^{(n)}}\frac{(a_0e_1+b_0e_2)^{k-2}}{(a_0d_0-b_0c_0)^jt^j}\cdot r_{c,d}\left(\{\log\theta(\tilde{q}^{p^n},\tilde{q}^{a_0}_M\tilde{\zeta}^{b_0}_M)\log\theta(\tilde{q}^{p^n},\tilde{q}^{c_0}_M\tilde{\zeta}^{d_0}_M)\}_{\sigma,\tau}\right).\end{aligned}$$

□

5.2.5 Passage à l'algèbre de Lie

Comme le 2-cocycle $(\sigma, \tau) \mapsto \lim_{n\to+\infty} p^{-2n} \sum \frac{(a_0e_1+b_0e_2)^{k-2}}{(a_0d_0-b_0c_0)^j t^j} \log^{(\sigma,\tau)}_{\left(\begin{smallmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{smallmatrix}\right)}$ obtenu dans la section précédente est la limite de 2-cocycles surconvergents à valeurs dans $\mathcal{K}_M^+ \otimes V_{k,j}$, on peut utiliser les techniques différentielles dans la section (4.1) pour calculer son image dans $\mathcal{K}_M^+$ par l'application exp^*.

Si $f(x_1, x_2)$ est une fonction en deux variables, on note D_1 (resp. D_2) l'opérateur $x_1 \frac{d}{dx_1}$ (resp. $x_2 \frac{d}{dx_2}$). Si $n \in \mathbb{N}$ et $a, b \in \mathbb{Z}$, on pose $f_{a,b}^{(n)} = f(\tilde{q}^{p^n}, \tilde{q}_M^a \tilde{\zeta}_M^b)$.

Lemme 5.2.11. *On note* $\delta^{(2)}_{a_0,b_0,c_0,d_0} = \delta^{(2)}\left(\left\{\log\left(r_c\theta^{(n)}_{a_0,b_0}\right) \otimes \log\left(r_d\theta^{(n)}_{c_0,d_0}\right)\right\}_{\sigma,\tau}\right)$. *On a*

$$\delta^{(2)}_{a_0,b_0,c_0,d_0} = \frac{(a_0d_0 - b_0c_0)t^2}{M^2} \cdot D_2 \log\left(r_c\theta^{(n)}_{a_0,b_0}\right) \cdot D_2 \log\left(r_d\theta^{(n)}_{c_0,d_0}\right).$$

Démonstration. Soit $f_{a,b}^{(n)}$ définie comme ci-dessus. Alors l'action habituelle de $(u, v) \in P_m$ sur $f_{a,b}^{(n)}$ est :

$$(u, v)f_{a,b}^{(n)} = f(\tilde{q}^{p^n}, \tilde{q}_M^a \tilde{\zeta}_M^{au+be^v}).$$

Du développement limité du terme de droite en u et v, on a

$$\begin{aligned} f(\tilde{q}^{p^n}, \tilde{q}_M^a \tilde{\zeta}_M^{au+be^v}) &= f(\tilde{q}^{p^n}, \tilde{q}_M^a \tilde{\zeta}_M^b) + u(\frac{\partial f}{\partial u}|_{(0,0)}) + v(\frac{\partial f}{\partial v}|_{(0,0)}) + O((u,v)^2) \\ &= f(\tilde{q}^{p^n}, \tilde{q}_M^a \tilde{\zeta}_M^b) + u(\frac{at}{M} D_2 f_{a,b}^{(n)}) + v(\frac{bt}{M} D_2 f_{a,b}^{(n)}) + O((u,v)^2) \end{aligned}$$

et donc on définit l'action de $\left(\begin{smallmatrix} 1 & u \\ 0 & e^v \end{smallmatrix}\right) - 1$ par :

$$f_{a,b}^{(n)} * (\left(\begin{smallmatrix} 1 & u \\ 0 & e^v \end{smallmatrix}\right) - 1) = \frac{au + bv}{M} t D_2 f_{a,b}^{(n)} + O((u,v)^2). \tag{5.7}$$

Soient $\sigma = (u, v)$,$\tau = (x, y) \in \mathrm{P}_m$. Par un calcul explicite de

$$f_{a_0,b_0}^{(n)} * \left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & ue^y+x \\ 0 & e^{v+y} \end{smallmatrix}\right) - \left(\begin{smallmatrix} 1 & x \\ 0 & e^y \end{smallmatrix}\right)\right) \otimes g_{c_0,d_0}^{(n)} * (\left(\begin{smallmatrix} 1 & x \\ 0 & e^y \end{smallmatrix}\right) - 1)$$

à $O((u, v, x, y)^3)$ près, en utilisant la formule que l'on vient juste d'établir, on a :

$$\begin{aligned} &\left\{\log\left(r_c\theta^{(n)}_{a_0,b_0}\right) \otimes \log\left(r_d\theta^{(n)}_{c_0,d_0}\right)\right\}_{\sigma,\tau} \\ =&\frac{a_0c_0xu + a_0d_0xv + b_0c_0uy + c_0d_0vy}{M^2} t^2 D_2 \log\left(r_c\theta^{(n)}_{a_0,b_0}\right) \cdot D_2 \log\left(r_d\theta^{(n)}_{c_0,d_0}\right). \end{aligned}$$

Alors, par la définition de l'application $\delta^{(2)}$, on a

$$\delta^{(2)}\left(\left\{\log\left(r_c\theta^{(n)}_{a_0,b_0}\right) \otimes \log\left(r_d\theta^{(n)}_{c_0,d_0}\right)\right\}_{\sigma,\tau}\right) = \frac{(b_0c_0 - a_0d_0)t^2}{M^2} \cdot D_2 \log\left(r_c\theta^{(n)}_{a_0,b_0}\right) \cdot D_2 \log\left(r_d\theta^{(n)}_{c_0,d_0}\right)$$

□

Lemme 5.2.12. *Si $s \geq 2-j$ et $a,b,c,d \in \mathbb{Z}$, alors*

$$(ae_1+be_2)^{k-2}t^s f_{a,b}^{(n)} \cdot g_{c,d}^{(n)} = \frac{(ae_1+be_2)^{k-2}}{a(1-s)} \cdot (ad-bc) \cdot \frac{t}{M} f_{a,b}^{(n)} \cdot D_2 g_{c,d}^{(n)}$$

dans $(\tilde{\mathcal{K}}_M^+ \otimes V_{k,j})/(\partial_1, 1-\partial_2)$.

Démonstration. Pour $(u,v) \in \mathrm{P}_m$, on a

$$f_{a,b}^{(n)} * ((u,v)-1) = u\partial_1 f_{a,b}^{(n)} + v\partial_2 f_{a,b}^{(n)} + O((u,v)^2).$$

En comparant avec la formule (5.7), on obtient que $\partial_1 f_{a,b}^{(n)} = \frac{at}{M} D_2 f_{a,b}^{(n)}$ et $\partial_2 f_{a,b}^{(n)} = \frac{bt}{M} D_2 f_{a,b}^{(n)}$. En composant les formules dans la démonstration de la proposition (5.1.1), on obtient :

$$\begin{aligned}
&(a\,(1-\partial_2)+b\partial_1)\left((ae_1+be_2)^{k-2}\,t^s f_{a,b}^{(n)} g_{c,d}^{(n)}\right)\\
=&a(ae_1+be_2)^{k-2}t^s f_{a,b}^{(n)} g_{c,d}^{(n)} - a(k-2)be_2(ae_1+be_2)^{k-3}t^s f_{a,b}^{(n)} g_{c,d}^{(n)}\\
&- as(ae_1+be_2)^{k-2}t^s f_{a,b}^{(n)} g_{c,d}^{(n)} - a(ae_1+be_2)^{k-2}t^s \frac{bt}{M} D_2 f_{a,b}^{(n)} g_{c,d}^{n}\\
&- a(ae_1+be_2)^{k-2}t^s f_{a,b}^{(n)} \frac{dt}{M} D_2 g_{c,d}^{(n)} + b(k-2)(ae_2)(ae_1+be_2)^{k-3}t^s f_{a,b}^{(n)} g_{c,d}^{(n)}\\
&+ b(ae_1+be_2)^{k-2}t^s \frac{at}{M} D_2 f_{a,b}^{(n)} g_{c,d}^{(n)} + b(ae_1+be_2)^{k-2}t^s f_{a,b}^{(n)} \frac{ct}{M} D_2 g_{c,d}^{(n)}\\
=&a(1-s)(ae_1+be_2)^{k-2}t^s f_{a,b}^{(n)} g_{c,d}^{(n)} + \frac{(bc-ad)t}{M}(ae_1+be_2)^{k-2}t^s f_{a,b}^{(n)} D_2 g_{c,d}^{(n)},
\end{aligned}$$

qui est nul dans $(\tilde{\mathfrak{K}} \otimes V_{k,j})/(\partial_1, 1-\partial_2)$ pour $s \geq 2-j$. Donc :

$$(ae_1+be_2)^{k-2}t^s f_{a,b}^{(n)} g_{c,d}^{(n)} = \frac{(ad-bc)}{a(1-s)} \frac{t}{M} (ae_1+be_2)^{k-2}t^s f_{a,b}^{(n)} D_2 g_{c,d}^{(n)}.$$

□

On a définit une application $\mathrm{res}_{k,j} : \tilde{\mathcal{K}}_M^+ \otimes V_{k,j} \to \mathcal{K}_M^+$ dans le recette 5.1.2. Elle permet de calculer l'image de $z_{M,A}$ dans $\mathcal{K}_M^+$.

Corollaire 5.2.13. *On a*

$$\begin{aligned}
\mathrm{res}_{k,j}\left(\frac{(a_0e_1+b_0e_2)^{k-2}}{(a_0d_0-b_0c_0)^j t^j} \cdot \delta^{(2)}_{a_0,b_0,c_0,d_0}\right) &= M^{-1-j} \cdot \frac{1}{(j-1)!} \cdot a_0^{k-1-j}\\
&\cdot D_2 \log(r_c \theta^{(n)}_{a_0,b_0}) \cdot D_2^j \log(r_d \theta^{(n)}_{c_0,d_0}).
\end{aligned}$$

Démonstration. D'après le lemme (5.2.11), on a

$$\begin{aligned}
\frac{(a_0e_1+b_0e_2)^{k-2}}{(a_0d_0-b_0c_0)^j t^j} \cdot \delta^{(2)}_{a_0,b_0,c_0,d_0} &= \frac{(a_0e_1+b_0e_2)^{k-2}t^{2-j}}{(a_0d_0-b_0c_0)^{j-1}M^2} \cdot\\
&\cdot D_2 \log\left(r_c \theta^{(n)}_{a_0,b_0}\right) \cdot D_2 \log\left(r_d \theta^{(n)}_{c_0,d_0}\right).
\end{aligned} \tag{5.8}$$

Donc par l'identité dans le lemme (5.2.12), on obtient :

$$\begin{aligned}(5.8) =&\frac{(a_0e_1+b_0e_2)^{k-2}t^{2-j}}{(a_0d_0-b_0c_0)^{j-1}M^2}\cdot D_2\log\left(r_c\theta^{(n)}_{a_0,b_0}\right)\cdot\frac{a_0d_0-b_0c_0}{a_0(j-1)}\frac{t}{M}\cdot D_2^2\log\left(r_d\theta^{(n)}_{c_0,d_0}\right)\\ =&\cdots\\ =&\frac{(a_0e_1+b_0e_2)^{k-2}t^{2-j}}{(a_0d_0-b_0c_0)^{j-1}M^2}\cdot D_2\log\left(r_c\theta^{(n)}_{a_0,b_0}\right)\cdot\frac{(a_0d_0-b_0c_0)^{j-1}}{a_0^{j-1}(j-1)!}\frac{t^{j-1}}{M^{j-1}}D_2^j\log\left(r_d\theta^{(n)}_{c_0,d_0}\right)\\ =&M^{-1-j}\frac{(a_0e_1+b_0e_2)^{k-2}t}{a_0^{j-1}(j-1)!}\cdot D_2\log\left(r_c\theta^{(n)}_{a_0,b_0}\right)\cdot D_2^j\log\left(r_d\theta^{(n)}_{c_0,d_0}\right)\end{aligned}$$

Par la definition de $\mathrm{res}_{k,j}$, on a :

$$\mathrm{res}_{k,j}\left(\frac{(a_0e_1+b_0e_2)^{k-2}}{(a_0d_0-b_0c_0)^jt^j}\cdot\delta^{(2)}_{a_0,b_0,c_0,d_0}\right)=\frac{M^{-1-j}a_0^{k-1-j}}{(j-1)!}\cdot D_2\log\left(r_c\theta^{(n)}_{a_0,b_0}\right)\cdot D_2^j\log\left(r_d\theta^{(n)}_{c_0,d_0}\right).$$

□

Les fonctions $E^{(k)}_{c,\alpha,\beta}$ pour $k\in\mathbb{N}$ vérifient la relation (c.f. lemme 2.1.13) :

$$E^{(k+1)}_{c,\alpha,\beta}=\partial_zE^{(k)}_{c,\alpha,\beta}\text{ et }E^{(0)}_{c,\alpha,\beta}=\log|g_c(\tilde{q},\tilde{q}^\alpha\tilde{\zeta}^\beta)|\text{ pour }(\alpha,\beta)\neq(0,0),$$

où $\partial_z=q_z\frac{\partial}{\partial q_z}=D_2$. Donc $D_2^r\log r_c\theta(x_1,x_2)=c^2E_r(x_1,x_2)-c^rE_r(x_1,x_2^c)$.

On note $E_{c,r}(x_1,x_2)=c^2E_r(x_1,x_2)-c^rE_r(x_1,x_2^c)$. Si $b\equiv\beta \mod M$ and $d\equiv\delta \mod M$, on a $\zeta_M^b=\zeta_M^\beta,\zeta_M^d=\zeta_M^\delta$. Donc par le corollaire (5.2.10) et le calcul que nous avons fait, on obtient :

$$\begin{aligned}\exp^*(z_{M,A}) =&M^{-1-j}\frac{1}{(j-1)!}\cdot\lim_{n\to\infty}p^{-2n}\sum_{U^{(n)}}a_0^{k-1-j}E_{c,1}(q^{p^n},q_M^{a_0}\zeta_M^{b_0})E_{d,j}(q^{p^n},q_M^{c_0}\zeta_M^{d_0})\\ =&M^{-1-j}\frac{1}{(j-1)!}\cdot\lim_{n\to\infty}p^{-2n}\sum_{\substack{a_0\equiv\alpha[M]\\ c_0\equiv\gamma[M]\\ 1\le a_0,c_0\le Mp^n}}a_0^{k-1-j}E_{c,1}(q^{p^n},q_M^{a_0}\zeta_M^{\beta})E_{d,j}(q^{p^n},q_M^{c_0}\zeta_M^{\delta})\end{aligned}$$

Lemme 5.2.14. *(1) On a* $\sum_{\substack{c_0\equiv\gamma[M]\\ 1\le c_0\le Mp^n}}E_j(q^{p^n},q_M^{c_0}\zeta_M^\delta)=E_j(q,q_M^\gamma\zeta_M^\delta)=E^{(j)}_{\gamma/M,\delta/M}$. *En particulier, on a*

$$\sum_{\substack{c_0\equiv\gamma[M]\\ 1\le c_0\le Mp^n}}E_{d,j}(q^{p^n},q_M^{c_0}\zeta_M^\delta)=E^{(j)}_{d,\gamma/M,\delta/M}.$$

(2) Si $r\in\mathbb{N}$, alors

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{\substack{a_0\equiv\alpha[M]\\ 1\le a_0\le Mp^n}}a_0^rE_1(q^{p^n},q_M^{a_0}\zeta_M^\beta)=M^rF_{r+1}(q,q_M^\alpha\zeta_M^\beta)=M^rF^{(r+1)}_{\alpha/M,\beta/M}.$$

(3) Si $r \in \mathbb{N}$, et si $c \in \mathbb{Z}_p^*$, on a

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{\substack{a_0\equiv\alpha[M]\\ 1\le a_0\le Mp^n}} a_0^r E_{c,1}(q^{p^n}, q_M^{a_0}\zeta_M^{\beta}) = M^r F_{r+1}(q, q_M^{\alpha}\zeta_M^{\beta}) = M^r F^{(r+1)}_{c,\alpha/M,\beta/M}.$$

Démonstration. (1) Par définition, on obtient

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{c_0\equiv\gamma[M]\\ 1\le c_0\le Mp^n}} E_j(q^{p^n}, q_M^{c_0}\zeta_M^{\delta}) &= \frac{\Gamma(j)}{(-2i\pi)^j} \sum_{\substack{c_0\equiv\gamma[M]\\ 1\le c_0\le Mp^n}} \sum_{\omega\in\mathbb{Z}+p^n\mathbb{Z}\tau} \frac{1}{(w+\frac{c_0}{M}\tau+\frac{\delta}{M})^k}\\ &= \frac{\Gamma(j)}{(-2i\pi)^j} \sum_{\omega\in\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau} \frac{1}{(w+\frac{\gamma}{M}\tau+\frac{\delta}{M})^k}\\ &= E_j(q, q_M^{\gamma}\zeta_M^{\delta}) = E^{(j)}_{\gamma/M.\delta/M}.\end{aligned}$$

(2) D'après la proposition (2.1.9), on a :

$$E_1(q^{p^n}, q_M^{a_0}\zeta_M^{\beta}) = E^{(1)}_{a_0/Mp^n,\beta/M} = F^{(1)}_{a_0/Mp^n,\beta/M}(q^{p^n}).$$

Donc :

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{\substack{a_0\equiv\alpha[M]\\ 1\le a_0\le Mp^n}} a_0^r E_1(q^{p^n}, q_M^{a_0}\zeta_M^{\beta}) = \lim_{n\to\infty} \sum_{\substack{a_0\equiv\alpha[M]\\ 1\le a_0\le Mp^n}} a_0^r F^{(1)}_{a_0/Mp^n,\beta/M}(q^{p^n}).$$

Soit $F^{(1)}_{a_0/Mp^n,\beta/M}(q) = \sum_{m\in\mathbb{Q}^+} b_m q^m$. La série de Dirichlet formelle $\sum_{m\in\mathbb{Q}^+} \frac{b_m}{m^s}$, à coefficients dans $\mathbb{Q}^{\text{cycl}}$, associée à $F^{(1)}_{a_0/Mp^n,\beta/M}(q)$ vérifie la relation suivante :

$$\sum_{m\in\mathbb{Q}^+} \frac{b_m}{m^s} = \zeta(a_0/Mp^n, s)\zeta^*(\beta, s) - \zeta(-a_0/Mp^n, s)\zeta^*(-\beta, s).$$

Donc la série de Dirichlet formelle à coefficients dans $\mathbb{Q}^{\text{cycl}}$ associée à $F^{(1)}_{a_0/Mp^n,\beta/M}(q^{p^n})$ satisfait :

$$\begin{aligned}\sum_{m\in\mathbb{Q}^+} \frac{b_m}{(p^n m)^s} &= p^{-ns} \sum_{m\in\mathbb{Q}^+} \frac{b_m}{n^s}\\ &= p^{-ns}(\zeta(a_0/Mp^n, s)\zeta^*(\beta/M, s) - \zeta(-a_0/Mp^n, s)\zeta^*(-\beta/M, s)).\end{aligned} \tag{5.9}$$

Soit $\sum_{m\in\mathbb{Q}^+} b_{m,n} m^{-s}$ la série de Dirichlet formelle à coefficients dans $\mathbb{Q}^{\text{cycl}}$ associée au q-développement de $\sum_{\substack{a_0\equiv\alpha[M]\\ 1\le a_0\le Mp^n}} a_0^r F^{(1)}_{a_0/Mp^n,\beta/M}(q^{p^n})$.
Alors, de la formule (5.9), on a :

(5.10)

$$\begin{aligned}
\sum_{m\in\mathbb{Q}_+^*}\frac{b_{m,n}}{m^s} &= \sum_{\substack{a_0\equiv\alpha[M]\\1\leq a_0\leq Mp^n}} a_0^r p^{-ns}(\zeta(a_0/Mp^n,s)\zeta^*(\beta/M,s)-\zeta(-a_0/Mp^n,s)\zeta^*(-\beta/M,s))\\
&= \sum_{\substack{a_0\equiv\alpha[M]\\1\leq a_0\leq Mp^n}} a_0^r p^{-ns}(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(k+\frac{a_0}{Mp^n})^s}\zeta^*(\beta/M,s)-\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(k-\frac{a_0}{Mp^n})^s}\zeta^*(-\beta/M,s))\\
&= \sum_{\substack{a_0\equiv\alpha[M]\\1\leq a_0\leq Mp^n}} (\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{a_0^r}{(kp^n+\frac{a_0}{M})^s}\zeta^*(\beta/M,s)-\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{a_0^r}{(kp^n-\frac{a_0}{M})^s}\zeta^*(-\beta/M,s))\\
&= \sum_{i=0}^{p^n-1}(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(\alpha+iM)^r}{(kp^n+\frac{\alpha}{M}+i)^s}\zeta^*(\beta/M,s)-\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(\alpha+iM)^r}{(kp^n-\frac{\alpha}{M}-k)^s}\zeta^*(-\beta/M,s))
\end{aligned}$$

Considérons l'injection de $\mathbf{Dir}(\mathbb{Q}^{\mathrm{cycl}})$ dans $\mathbf{Dir}(\mathbb{Q}_p^{\mathrm{cycl}})$. Alors la série de Dirichlet formelle, à coefficients dans $\mathbb{Q}_p^{\mathrm{cycl}}$, associée au q-développement de

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{\substack{a_0\equiv\alpha[M]\\1\leq a_0\leq Mp^n}} a_0^r F^{(1)}_{a_0/Mp^n,\beta/M}(q^{p^n}),$$

est la limite p-adique $\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{m\in\mathbb{Q}_+^*}\frac{b_{m,n}}{m^s}$. Alors, de la formule (5.10) et en prenant la limite p-adique, on a :

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\sum_{m\in\mathbb{Q}_+^*}\frac{b_{m,n}}{m^s}\\
&=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{p^n-1}(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(\alpha+iM)^r}{(kp^n+\frac{\alpha}{M}+i)^s}\zeta^*(\beta/M,s)-\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(\alpha+iM)^r}{(kp^n-\frac{\alpha}{M}-k)^s}\zeta^*(-\beta/M,s))\\
&=M^r\sum_{i=0}^{p^\infty}(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\frac{\alpha}{M}+i)^r}{(\frac{\alpha}{M}+i+kp^\infty)^s}\zeta^*(\beta/M,s)-\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(\frac{\alpha}{M}+i)^r}{(kp^\infty-\frac{\alpha}{M}-i)^s}\zeta^*(-\beta/M,s))\\
&=M^r(\sum_{j\equiv\frac{\alpha}{M}\mod\mathbb{Z}}\frac{1}{j^{s-r}}\zeta^*(\beta/M,s)+(-1)^{r+1}\sum_{j\equiv-\frac{\alpha}{M}\mod\mathbb{Z}}\frac{1}{j^{s-r}}\zeta^*(-\beta/M,s))\\
&=M^r(\zeta(\alpha/M,s-r)\zeta^*(\beta/M,s)+(-1)^{r+1}\zeta(-\alpha/M,s-r)\zeta^*(-\beta/M,s)).
\end{aligned}$$

C'est la même série de Dirichlet à coefficients dans $\mathbb{Q}_p^{\mathrm{cycl}}$ associée au q-développement de $M^rF^{(r+1)}_{\alpha/M,\beta/M}$. Il reste à montrer l'égalité pour le terme constant. Soient $x\in\mathbb{Q}$ et $k\in\mathbb{N}$; on a la relation de distribution pour les polynômes de Bernoulli :

$$\sum_{j=0}^{N-1}B_k(x+\frac{j}{N})=\frac{B_k(Nx)}{N^{k-1}}.$$

Ceci permet de définir une distribution μ_x, pour $x \in \mathbb{Q}$, vérifiant :

$$\int_{\mathbb{Z}_p} (x+t)^{k-1}\mu_x(t) = -\frac{B_k(x)}{k} \text{ et } \int_{b+p^m\mathbb{Z}_p} \mu_x = -B_1((x+b)/p^m).$$

D'après la définition de la distribution $\mu_{\alpha/M}$, on a

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{Z}_p} (\alpha/M+t)^r \mu_{\alpha/M}(t) &= \lim_{m\to\infty} \sum_{b=0}^{p^m-1} (\alpha/M+b)^r \int_{b+p^m\mathbb{Z}_p} \mu_{\alpha/M}(t)\\ &= \lim_{m\to\infty} \sum_{b=0}^{p^m-1} (\alpha/M+b)^r(-B_1(\alpha/Mp^m+b/p^m)).\end{aligned}$$

D'autre part, on a $-\frac{1}{k}B_k(\alpha/Mp^m+b/p^m) = \zeta(\frac{\alpha+bM}{Mp^m}, 1-k)$. On en déduit que

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \sum_{\substack{a_0\equiv\alpha[M]\\ 1\le a_0\le Mp^n}} a_0^r \zeta(a_0/Mp^n, 0) &= M^r \lim_{n\to+\infty} \sum_{\substack{a_0\equiv\alpha[M]\\ 1\le a_0\le Mp^n}} (\alpha/M+t)^r \zeta(\frac{a_0}{Mp^n}, 0)\\ &= M^r \int_{\mathbb{Z}_p} (\alpha/M+t)^r \mu_{\alpha/M}(t) = M^r\zeta(\frac{\alpha}{M}, 1-k).\end{aligned}$$

(3) Rappelons que l'on a $E_{c,1}(q^{p^n}, q_M^{a_0}\zeta_M^{b_0}) = c^2E_1(q^{p^n}, q_M^{a_0}\zeta_M^{b_0}) - cE_1(q^{p^n}, q_M^{ca_0}\zeta_M^{cb_0})$. Alors, d'après (2), il reste à montrer

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{\substack{a_0\equiv\alpha[M]\\ 1\le a_0\le Mp^n}} a_0^r cE_1(q^{p^n}, q_M^{ca_0}\zeta_M^{c\beta}) = M^r c^{1-r} F^{(r+1)}_{\alpha/M,\beta/M}.$$

Comme $c\mathbb{Z}_p^*$, c est inversible dans $\mathbb{Z}/Mp^n$. Ceci permet de conclure le (3) en appliquant le (2) à

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{\substack{a_0\equiv\alpha[M]\\ 1\le a_0\le Mp^n}} a_0^r cE_1(q^{p^n}, q_M^{ca_0}\zeta_M^{c\beta}) = c^{-r} \lim_{n\to\infty} \sum_{\substack{a_0\equiv\alpha[M]\\ 1\le a_0\le Mp^n}} (ca_0)^r cE_1(q^{p^n}, q_M^{ca_0}\zeta_M^{c\beta}).$$

□

Appliquons le lemme (5.2.14) à $\exp^*(z_{M,A})$, on obtient :

$$\begin{aligned}\exp^*(z_{M,A}) =& M^{-1-j}\frac{1}{(j-1)!}\cdot \lim_{n\to\infty} \sum_{\substack{a_0\equiv\alpha[M]\\ c_0\equiv\gamma[M]\\ 1\le a_0,c_0\le Mp^n}} a_0^{k-1-j} E_{c,1}(q^{p^n}, q_M^{a_0}\zeta_M^{\beta}) E_{d,j}(q^{p^n}, q_M^{c_0}\zeta_M^{d_0})\\ =& M^{-1-j}\frac{1}{(j-1)!}\cdot \lim_{n\to\infty} \sum_{\substack{a_0\equiv\alpha[M]\\ 1\le a_0\le Mp^n}} a_0^{k-1-j} E_{c,1}(q^{p^n}, q_M^{a_0}\zeta_M^{\beta}) E^{(j)}_{d,\gamma/M,\delta/M}\\ =& \frac{M^{k-2-2j}}{(j-1)!} F^{(k-j)}_{c,\alpha/M,\beta/M} E^{(j)}_{d,\gamma/M,\delta/M}.\end{aligned}$$

Bibliographie

[1] F.ANDREATTA - *Generalized ring of norms and generalized (φ, Γ)-modules* , *Ann.Scient.Éc.Norm.Sup.* (4)**39** (2006), p.599-647

[2] F.ANDREATTA ; O.BRINON - *Surconvergence des reprľęsentations p-adiques : le cas relatif* , *Astérisque* **319** (2008), p.39ĺC116.

[3] F. ANDREATTA ; A. IOVITA - *Comparison Isomorphisms for Formal Schemes* préprint

[4] L.BERGER - *Représentation p-adique et équations différentielles* , *Invent. Math.* **148** (2002), p.219-284

[5] L.BERGER - *Équations différentielles p-adiques et (φ, N)-modules filtrés* , *Astérisque* **319** (2008)

[6] A.BOREL ; N.WALLACH - *Continuous cohomology, Discrete subgroups, and representations of reductive groups*, *Annals of Mathematics Studies* **94** (1980)

[7] H.CARTAN ; S.EILENBERG - *Homological algebra.* *Princeton Math.Ser.,* **19** Princeton 1956

[8] F.CHERBONNIER ; P.COLMEZ - *Théorie d'Iwasawa des représentations p-adiques d'un corps local* *J.A.M.S* vol. **12** Number 1 (1999) p.241-268

[9] P.COLMEZ - *Les Conjectures de Monodromie p-adique* , *Astérisque* **290** (2003).

[10] P.COLMEZ - *La Conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer p-adique* , *Astérisque* **294** (2004).

[11] P.COLMEZ - *Fonctions d'une variable p-adique* , *Astérisque* **330** (2010), p. 13ĺC59.

[12] P.COLMEZ - *Théorie d'Iwasawa des représentations de de Rham d'un corps local* , *Annals of Mathematics*, vol **148** (1998), p. 485-571

[13] P.COLMEZ - *Espaces vectoriels de dimension finie et représentation de de Rham* , *Astérique* **319** (2008)

[14] IVAN FESENKO, MASATO KURIHARA - *Invitation to higer dimensional local fields*, *Geometry & Topology Monographs*, Vol. **3**

[15] G. FALTINGS - *Almost étale extensions* , *Astérisque* **279** (2002), p.185ĺC270.

[16] J.-M. FONTAINE - *Arithmétique des représentations galoisiennes p-adiques* , *Astérisque* **295** (2004).

[17] O.HYODO - *On the Hodge-Tate decomposition in the imperfect residue field case* , *J. Reine Angew. Math.* **365** (1986) p.97-113,

[18] K.KATO - *p-adic Hodge theory and values of zeta functions of modular forms* , *Astérisque* **295** (2004).

[19] D.KUBERT, S.LANG - *Units in the modular function fields II*, *Math. Ann.* **218** (1975) 175-189.

[20] S.LANG - *Elliptic functions* , *Addison-Wesley* (1973).

[21] T. MIYAKE - *Modular forms*, *Springer-Verlag* (1989)

[22] A. PANCHISHKIN - *A new method of constructiong p-adic L-functions associated with modular forms* , *Moscow Mathematical Journal* Vol. **2** No.**2** (2002)

[23] B.PERRIN-RIOU - *Fonctions L p-adiques des représentations p-adiques Astérique* **229** (1995)

[24] A. ROBERT - *A course in p-adic analysis* , *Graduate Texts in Math.* **198** Springer-Verlag (2000)

[25] S. SEN - *Lie algebres of Galois groups arising from Hodge-Tate modules* , *Ann.of Math.* **97** (1973) **160-170**.

[26] J-P SERRE - *Algèbre locale·multiplicités* , *Lecture notes in Mathematics* Vol. **11** (1962) **69-85**

[27] J.TATE - *p-divisible groups* , *Proc. of a conference on local field* , Nuffic summer school at Driebergen, Springer, Berlin (1967) p.158-183

[28] A.WEIL - *Elliptic functions according to Eisenstein and Kronecker* , *Classics in Mathematics*