



HAL
open science

Comportement en fatigue de pièces épaisses en matériaux composites

Nicolas Revest

► **To cite this version:**

Nicolas Revest. Comportement en fatigue de pièces épaisses en matériaux composites. Matériaux. École Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2011. Français. NNT : 2011ENMP0066 . pastel-00677076

HAL Id: pastel-00677076

<https://pastel.hal.science/pastel-00677076>

Submitted on 27 Mar 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

École doctorale n°432 : Sciences des Métiers de l'Ingénieur

Doctorat ParisTech

T H È S E

pour obtenir le grade de docteur délivré par

l'École Nationale Supérieure des Mines de Paris

Spécialité « Sciences et Génie des Matériaux »

présentée et soutenue publiquement par

Nicolas REVEST

le 14 novembre 2011

Comportement en fatigue de pièces épaisses en matériaux composites

Directeurs de thèse : **Jacques RENARD**
Alain THIONNET

Jury

Mme Michelle SALVIA , Maître de Conférence, LTDS-UMR 5513, Ecole Centrale de Lyon	Présidente
M. Damien HALM , Professeur HDR, UPR 3346, ENSMA	Rapporteur
M. Christian HOCHARD , Professeur HDR, LMA-CNRS UPR 7051, INSIS	Rapporteur
M. Philippe CASTAING , Docteur, CETIM Nantes	Examineur
M. Jacques RENARD , Me de recherche HDR, CDM-UMR 7633, MinesParisTech	Examineur
M. Alain THIONNET , Professeur, Université de Bourgogne	Examineur

MINES ParisTech
Centre des Matériaux P.M. Fourt
CNRS UMR 7633 BP 87 - 91003 EVRY cedex

**T
H
È
S
E**

REMERCIEMENTS

Je tiens tout d'abord à remercier mes directeurs de thèse Jacques RENARD et Alain THIONNET pour m'avoir accordé très largement leur confiance pour ces travaux de recherche et pour m'avoir permis de traiter un sujet pluridisciplinaire, aussi ouvert d'un point de vue expérimental que numérique.

Je tiens également à remercier le CETIM pour m'avoir donné l'opportunité de travailler sur ce sujet concret et motivant. Merci à Philippe CASTAING et Laurent BOULAY, qui en sont à l'origine et en ont suivi son évolution.

Merci également au directeur du Centre des Matériaux, Esteban BUSO, de m'avoir accueilli pendant ces trois années et de m'avoir permis de réaliser cette thèse dans ce laboratoire que j'estime être de grande qualité.

Pour l'attention qu'ils ont portée à mon travail et pour les échanges scientifiques qui ont pu en découler lors de la soutenance, je tiens à remercier les membres du jury. Merci à Michelle SALVIA d'avoir accepté de présider le jury. Merci à Damien HALM et Christian HOCHARD pour la relecture experte de mon manuscrit et la qualité de leur analyse qui a su enrichir et ouvrir de nouvelles perspectives à ce travail.

Je voudrais maintenant remercier l'ensemble des personnes qui ont contribué au bon déroulement de la thèse. Je pense notamment à Yves FAVRY et Jean-Christophe TESSEIDRE qui ont su apporter toutes leurs compétences à cette étude. Je pense également à mes anciens collègues doctorants avec qui j'ai partagé de très bons moments (Sébastien, Olivier, Céline, Pongsak, Josserand, Michel, Mamane, ...)

Enfin, je souhaite remercier mes parents et ma famille qui m'ont toujours soutenu et encouragé. Finalement, je remercie Hélène, pour m'avoir soutenu, motivé et encouragé tout au long de ces années.

*Le commencement de toutes les sciences, c'est l'étonnement
de ce que les choses sont ce qu'elles sont.^a*

^a. ARISTOTE (384 av. J.-C. - 384 av. J.-C.), extrait de *La Métaphysique*.

TABLE DES MATIÈRES

1	Introduction générale	1
2	Matériaux composites, endommagement et fatigue : quelques repères bibliographiques	5
2.1	Quelques définitions...	7
2.2	Le composite stratifié	9
2.2.1	Les échelles usuelles de travail	9
2.2.2	Les différents repères liés aux stratifiés	10
2.2.3	Comportement mécanique du pli unidirectionnel	10
2.3	Les mécanismes d'endommagement. Généralités	12
2.4	Intéactions entre les différents mécanismes d'endommagement	16
2.5	La fissuration intra-laminaire	18
2.5.1	Evolution et influence de l'épaisseur	21
2.5.2	Influence de la séquence d'empilement	25
2.6	Modélisation des stratifiés endommagés	28
2.6.1	Les approches micro-mécaniques	28
2.6.2	Les approches basées sur la Mécanique de l'Endommagement	31
2.7	La fatigue : étude critique et comparative de l'existant	33
2.7.1	Modèles visant à prédire la durée de vie	33
2.7.2	Approches phénoménologiques	35
2.7.3	Approches visant à décrire l'évolution de l'endommagement	37
2.8	Discussion	45
3	Etude expérimentale de l'endommagement dans les stratifiés	47
3.1	Introduction	49
3.2	Choix des stratifications	50
3.3	Élaboration des stratifiés	52
3.3.1	Préparation des échantillons	52
3.3.2	Observations microscopiques	54
3.4	Dispositif expérimental	55
3.4.1	Machines d'essais mécaniques et instrumentation des éprouvettes	55
3.4.2	Les moyens d'observation	57
3.4.3	Montage d'observation optique in-situ	58

3.5	Comportement mécanique du matériau unidirectionnel	60
3.5.1	Protocole expérimental	60
3.5.2	Essais de traction uni-axiale dans l'axe des fibres	61
3.5.3	Essais de traction uni-axiale dans le sens transverse	64
3.5.4	Essais de traction uni-axiale hors-axe	65
3.5.5	Conclusion	70
3.6	La fissuration intra-laminaire : aspects qualitatifs	71
3.6.1	Des chargements spécifiques	71
3.6.2	Caractéristiques physiques de la fissuration	73
3.6.3	Influence de l'épaisseur du pli fissuré	77
3.6.4	Interaction fissuration/délamination	79
3.7	Comportement du stratifié et analyse de l'endommagement sous solli- citations quasi-statiques	81
3.7.1	Introduction	81
3.7.2	Essais de traction quasi-statique monotone sur stratifiés	81
3.7.3	Analyse de la fissuration sous chargements quasi-statiques	83
3.8	Comportement du stratifié et analyse de l'endommagement en fatigue	90
3.8.1	Introduction	90
3.8.2	Analyse de l'évolution de l'endommagement	91
3.8.3	Comparaison quasi-statique/fatigue	106
3.8.4	Essais à deux niveaux de chargement	108
3.8.5	Cumul de l'endommagement	114
3.9	Conclusion	117
4	Une modélisation du matériau unidirectionnel	121
4.1	De l'expérience à la loi de comportement	122
4.2	Description du modèle de comportement retenu	126
4.2.1	Analyse physique de la fissuration	126
4.2.2	Cadre et hypothèses du modèle	129
4.2.3	Choix des variables d'état et description des fissures	131
4.2.4	Potentiel thermodynamique et Théorie des Invariants	137
4.2.5	Écriture des lois d'état	145
4.2.6	Lois complémentaires et évolution de l'endommagement	146
4.3	Conclusion	149
5	Une loi d'évolution en fatigue	151
5.1	Cadre et fonctionnement du modèle de fatigue	151
5.2	Stratégie de calcul de structure en fatigue	152
5.2.1	Principe	153
5.2.2	Implantation de la méthode	157
5.3	Le modèle de fatigue	159
5.4	Conclusion	162
6	Identification des paramètres du modèle de comportement et de la loi de fatigue	163
6.1	Introduction	164
6.2	Identification de la loi de comportement	164

6.2.1	Identification du tenseur de rigidité élastique	164
6.2.2	Identification des tenseurs de chutes de rigidité	165
6.3	Identification des variables m et r	169
6.4	Identification de la loi d'évolution	170
6.4.1	Cas quasi-statique	170
6.4.2	Identification de la fonction seuil d'endommagement en fatigue .	174
7	Calcul de structure en fatigue	185
7.1	Introduction	185
7.2	Implémentation du modèle de comportement	186
7.2.1	Intégration de la loi de comportement et des lois d'évolution . . .	186
7.2.2	Quelques éléments de programmation	187
7.3	Application au cas d'une éprouvette lisse en traction	191
7.4	Application au cas d'une plaque trouée	194
7.5	Conclusion	198
8	Conclusion & perspectives	199
A	Correspondance entre les angles d'Euler et les angles des coordonnées cylindriques et sphériques	203
A.1	Correspondance entre les angles d'Euler et les angles des coordonnées cylindriques	203
A.2	Correspondance entre les angles d'Euler et les angles des coordonnées sphériques	204
A.3	Lois de comportement élastique linéaire classiques d'un composite dans son repère local	206
A.4	Formules de changement de base	207
A.4.1	Formules de changement de base pour les tenseurs des contraintes et des déformations	207
A.4.2	Formules de changement de base pour les tenseurs de rigidité et de souplesse	207
A.5	Application : structure plane en composite stratifié	207
A.5.1	Les matrices de changement de base	207
A.6	Application : structure à symétrie sphérique en composite stratifié . . .	208
A.6.1	Les matrices de changement de base	209
B	Construction de la fonction d'état énergie libre par la théorie des invariants	211

LISTE DES FIGURES

2.1	Les échelles usuelles de travail	9
2.2	Nomenclature couramment utilisée pour la description d'un stratifié . .	10
2.3	Les différents mécanismes d'endommagement	12
2.4	Décohésion fibre/matrice (a) et coalescence en une fissure (b)	13
2.5	Concentration de contraintes dans un composites fibres/matrice	13
2.6	Réseau de fissures transverses	14
2.7	Délaminage de bord libre d'un stratifié $(20_3^\circ / -20_3^\circ)_s$	15
2.8	Illustration de l'endommagement par ruptures de fibres dans la sé- quence (0_5°)	15
2.9	Microdélaminage initié en tête de fissure dans un stratifié (a) $(0_n^\circ/90_m^\circ)_s$ et (b) $(90_n^\circ/0_m^\circ)_s$	16
2.10	Schéma représentant l'interaction entre la fissuration intra-laminaire et les ruptures de fibres dans un stratifié carbone/époxy	17
2.11	Chronologie des différents types d'endommagement	18
2.12	Radiographies aux rayons X d'un réseau de fissures parallèles aux fibres dans des stratifiés (a) $(0^\circ / \pm 55^\circ)_s$ et (b) $(0^\circ / 45_2^\circ / 90^\circ)_s$ sollicités en trac- tion uniaxiale	19
2.13	Radiographies aux rayons X d'un stratifié $(0_7^\circ/90^\circ)_s$ T300/914 sollicité en fatigue ($60\% \sigma_R$, $R = 0.1$, $f = 10$ Hz), (a) $N = 5 \cdot 10^3$ cycles, (b) $N =$ $5 \cdot 10^4$ cycles	20
2.14	Splitting dans un stratifié de type $(0^\circ/90^\circ)_s$ soumis à des sollicitations cycliques	21
2.15	Etat de fissuration à 1.6% de déformation pour trois épaisseurs (0.75, 1.5 et 2.6 mm) de la couche à 90° d'un stratifié $(0^\circ/90_n^\circ)_s$ sollicité en traction uniaxiale	21
2.16	Evolution de la déformation correspondant à l'apparition de la première fissure dans un stratifiés GFRP $(0^\circ/90_n^\circ)_s$ en fonction de l'épaisseur de la couche à 90°	22
2.17	Allure de la courbe d'évolution de la densité de fissures dans la couche à 90° d'un stratifié carbone/époxy T300/N174 de séquence $(\alpha^\circ/90_p^\circ)_s$ en fonction de la contrainte uni-axiale appliquée	23

2.18	Allure de la courbe d'évolution de la densité de fissures en fonction du nombre de cycles pour différents niveaux de sollicitations (indiqués comme un pourcentage de l'effort à rupture en quasi-statique)	23
2.19	Evolution de la contrainte transverse locale σ_{22} théorique au sein du pli à 90° dans un stratifié $(0^\circ/90^\circ)_s$	24
2.20	Exemple de distribution de fissure (a) et la variation correspondante de contrainte transverse moyenne locale (b) dans la couche à 90° d'un stratifié $(0^\circ/90^\circ)_s$ verre/époxy	25
2.21	Evolution de la distance inter-fissure en fonction de la déformation . . .	25
2.22	Schémas de fissuration dans des stratifiés croisés contenant une(des) couche(s) à 90° . (a) Réseau de fissures quasi-périodique dans un $(0_n^\circ/90_m^\circ)_s$. (b) Réseaux périodiques déphasés dans un $(90_m^\circ/0_n^\circ)_s$	26
2.23	Deux stratifiés présentant le même nombre de plis répartis de façons différentes	27
2.24	Deux stratifiés présentant le même nombre de plis répartis de façons différentes	27
2.25	Comparaison de la variation de densité de fissures au sein de stratifiés de type $(0_2^\circ/90_3^\circ)_s$ et $(\pm 45_2^\circ/90_3^\circ)_s$ sollicités en fatigue	27
2.26	Cellule périodique élémentaire considérée pour l'étude de la fissuration	29
2.27	Contraintes axiale et de cisaillement dans la couche à 90°	29
2.28	Courbes de WÖHLER d'un composite stratifié à plis croisés pour différentes orientations	34
2.29	Loi de cumul de l'endommagement : (a) cumul linéaire, (b) cumul non linéaire	38
2.30	(a) Chargement composé de plusieurs blocs de sollicitations, (b) description du i-ème bloc, (c) courbe S-N correspondante	39
2.31	Droite de MINER dans le cas d'un chargement à deux niveaux	39
2.32	Géométrie des fissures	44
3.1	Cycle de polymérisation de la résine R367-2	52
3.2	Découpe des éprouvettes dans les plaques stratifiées	53
3.3	Géométrie et dimensions des éprouvettes testées exprimées en mm . . .	53
3.4	Champ poli d'un stratifié de type $(0_3^\circ/90_3^\circ/0_3^\circ)$ mettant en évidence l'hétérogénéité de la distribution des fibres	54
3.5	Champ poli d'un stratifié de type $(0_3^\circ/90_3^\circ/0_3^\circ)$	55
3.6	Vue générale de la machine hydraulique utilisée pour les essais de traction cyclique et des mords auto-serrants	56
3.7	Instrumentation des éprouvettes	57
3.8	Schéma du dispositif expérimental de suivi de la fissuration	58
3.9	Montage expérimental pour l'observation de l'endommagement en fatigue	59
3.10	Reconstruction du champ d'une éprouvette	59
3.11	Schéma d'une éprouvette d'essai hors-axes et des repères (global et local) qui lui sont associés	60
3.12	Description du chargement appliqué lors d'un essai de charge-décharge	61
3.13	Représentation d'une éprouvette de traction à 0° et de ses repères associés	61
3.14	Courbes contrainte-déformation obtenues par des essais de traction quasi-statique monotone sur la séquence (0_3°)	62

3.15	Courbes contrainte-déformation obtenues par un essai de traction quasi-statique monotone sur la séquence (0_3°) et mise en évidence de la variation de pente	63
3.16	Représentation d'une éprouvette de traction à 90° et ses repères associés	64
3.17	Courbes contrainte-déformation obtenues par essais de traction quasi-statique monotone sur la séquence (90_3°)	65
3.18	Représentation d'une éprouvette de traction hors-axes et ses repères associés	66
3.19	Courbes contrainte - déformation d'un essai de traction à différentes vitesses de sollicitation sur la séquence (45_3°)	66
3.20	Photographies des éprouvettes rompues en traction quasi-statique monotone pour différentes orientations des fibres : 0° , 20° , 30° , 45° et 90° . .	67
3.21	Courbes contrainte vs déformation pour les essais de traction sur les séquences $(\pm 20_3^{\circ})_s$, $(\pm 30_3^{\circ})_s$ et $(\pm 45_3^{\circ})_s$	68
3.22	Courbes contrainte-déformation d'un essai de charge-décharge sur la séquence (45_3°)	69
3.23	Courbe contrainte - déformation d'un essai de traction sur la séquence (45_3°)	69
3.24	Type de chargement appliqué lors d'un essai de charge-décharge avec suivi de l'endommagement	72
3.25	Type de chargement appliqué lors d'un essai de fatigue avec suivi de l'endommagement	72
3.26	Réseau de fissures transverses quasi-périodique dans la couche à 90° d'un stratifié $(0_3^{\circ}/90_3^{\circ}/0_3^{\circ})$	73
3.27	Représentation schématique en trois dimensions d'un réseau de fissures transverses dans la couche à 90° d'un stratifié $(0_n^{\circ}/90_m^{\circ}/0_m^{\circ})$	73
3.28	Fissure transverse se propageant en suivant les interfaces entre les fibres et la matrice dans la couche à 90° d'un stratifié $(0_3^{\circ}/90_3^{\circ}/0_3^{\circ})$ sollicité en traction uni-axiale	74
3.29	Influence de la micro-structure (répartition des fibres, porosités...) sur le chemin suivi par les fissures	74
3.30	Influence de la micro-structure (répartition des fibres, porosités...) sur le chemin suivi par les fissures	75
3.31	Superposition du réseau de fissures transverses dans la couche à 90° d'un stratifié $(0_3^{\circ}/90_3^{\circ}/0_3^{\circ})$ observé sur les deux bords libres de l'éprouvette . .	75
3.32	Fissures transverses dans la couche à 90° d'un stratifié $(0_3^{\circ}/90_3^{\circ}/0_3^{\circ})$ sollicité en traction (a) quasi-statique, (b) cyclique	76
3.33	Réseau de fissures transverses dans les couches à 90° d'un stratifié $(90^{\circ}/0_2^{\circ}/90^{\circ})$ sollicité en traction quasi-statique	76
3.34	Réseau de fissures transverses dans la couche à 90° d'un stratifié $(0_3^{\circ}/90_6^{\circ}/0_3^{\circ})$ sollicité en traction quasi-statique à 30%, 40%, 50% et 60% de la contrainte à rupture	77
3.35	Influence de l'épaisseur de la couche à 90° sur la densité de fissures pour les stratifiés $(0_3^{\circ}/90_3^{\circ}/0_3^{\circ})$, $(0_3^{\circ}/90_6^{\circ}/0_3^{\circ})$ et $(0_3^{\circ}/90_{12}^{\circ}/0_3^{\circ})$ sollicités en traction cyclique	78
3.36	Apparition de fissures partielles sous sollicitations de fatigue sur stratifié de type $(0_3^{\circ}/90_{12}^{\circ}/0_3^{\circ})$, (a) 1000 cycles, (b) 55000 cycles	79

3.37 Délaminage en tête de fissure apparaissant après saturation de la densité de fissures dans un stratifié de type $(0^\circ/90^\circ/0^\circ)$ (a) délaminage symétrique, (b) délaminage dissymétrique 80

3.38 Délaminage en tête de fissure apparaissant après saturation de la densité de fissure dans un stratifié de type $(\pm 45^\circ)_s$, (a) $\sigma_{11} = 0.5\sigma_R$ et (b) $\sigma_{11} = 0.6\sigma_R$ 80

3.39 Courbes contraintes/déformations (σ_{11} vs ε_{11}) obtenues au cours d'essais de traction quasi-statique monotone sur les séquences (a) $(0^\circ_3/90^\circ_{n=3,9,12}/0^\circ_3)$, (b) $(0^\circ_3/\pm 45^\circ_3)_s$ et (c) $(0^\circ_3/\pm 55^\circ_3)_s$ 82

3.40 Évolution (a) de la densité de fissures d (mm^{-1}) dans la couche à 90° et (b) de la chute de rigidité longitudinale macroscopique E_{11}/E_{11}^0 en fonction de la contrainte σ_{11} (MPa) appliquée au stratifié pour les séquences $(0^\circ_3/90^\circ_{n=3,6,12}/0^\circ_3)$ sollicitées en traction quasi-statique. 84

3.41 Évolution (a) de la densité de fissures d (mm^{-1}) dans les couches à $+45^\circ$, -45° et (b) de la chute de rigidité longitudinale macroscopique E_{11}/E_{11}^0 en fonction de la contrainte σ_{11} (MPa) appliquée au stratifié pour la séquence $(0^\circ_3/\pm 45^\circ_3)_s$ sollicitée en traction quasi-statique. 85

3.42 Évolution (a) de la densité de fissures d (mm^{-1}) dans les couches à $+55^\circ$, -55° et (b) de la chute de rigidité longitudinale macroscopique E_{11}/E_{11}^0 en fonction de la contrainte σ_{11} (MPa) appliquée au stratifié pour la séquence $(0^\circ_3/\pm 55^\circ_3)_s$ sollicitée en traction quasi-statique. 85

3.43 Évolution (a) de la densité de fissures d (mm^{-1}) dans la couche à 90° , (b) de la rigidité résiduelle du stratifié en fonction de la contrainte σ_{11} appliquée, (c) de la rigidité résiduelle macroscopique R_{11}/R_{11}^0 en fonction de la densité de fissures d (mm^{-1}) dans la couche à 90° pour les séquences $(0^\circ_3/90^\circ_{n=3,6,12}/0^\circ_3)$ sollicitées en traction quasi-statique. 87

3.44 Évolution de la variable α dans la couche à 90° en fonction de la contrainte normalisée σ_{11} et de la chute de rigidité macroscopique R_{11}/R_{11}^0 de α pour les séquences $(0^\circ_3/90^\circ_{n=3,6,12}/0^\circ_3)$ sollicitées en traction quasi-statique. 87

3.45 Évolution (a) de la variable α dans les couches hors-axes en fonction de la contrainte σ_{11} appliquée au stratifié, (b) de la rigidité résiduelle macroscopique R_{11}/R_{11}^0 en fonction de α pour la séquence $(0^\circ_3/+45^\circ_3/-45^\circ_3)_s$ sollicitées en traction quasi-statique. 88

3.46 Évolution (a) de la variable α dans les couches hors-axes en fonction de la contrainte σ_{11} appliquée au stratifié, (b) de la rigidité résiduelle macroscopique R_{11}/R_{11}^0 en fonction de α pour la séquence $(0^\circ_3/+55^\circ_3/-55^\circ_3)_s$ sollicitées en traction quasi-statique. 88

3.47 Évolution (a) de la variable α dans les couches hors-axes en fonction de la contrainte σ_{11} appliquée au stratifié, (b) de la rigidité résiduelle macroscopique R_{11}/R_{11}^0 en fonction de α pour la séquence $(0^\circ_3/+45^\circ_3/-45^\circ_3)_s$ sollicitées en traction quasi-statique. 89

3.48 Évolution (a) de la variable α dans les couches hors-axes en fonction de la contrainte σ_{11} appliquée au stratifié, (b) de la rigidité résiduelle macroscopique R_{11}/R_{11}^0 en fonction de α pour la séquence $(0^\circ_3/+55^\circ_3/-55^\circ_3)_s$ sollicitées en traction quasi-statique. 89

3.49 Grandeurs caractéristiques d'un chargement de fatigue 90

3.50 Evolution de la densité de fissures dans la couche à 90° pour la séquence (0₃^o/90₆^o/0₃^o) avec R=0.1, f=1Hz, et $\sigma_{max} = 0.6\sigma_R$ 92

3.51 Evolution de la densité de fissures dans la couche à 90° pour la séquence (0₃^o/90₆^o/0₃^o) avec R=0.1, f=1Hz, et $\sigma_{max} = 0.6\sigma_R$ 93

3.52 Evolution de la densité de fissures d (mm⁻¹) dans la couche à 90° et en fonction du nombre de cycles pour les séquences (0₃^o/90_{n=3,6,12}^o/0₃^o) sollicitées en traction cyclique avec R=0.1, f=1Hz, $\sigma_{max} = 0.4\sigma_R, 0.5\sigma_R, 0.6\sigma_R$ 95

3.53 Evolution de la densité de fissures d (mm⁻¹) dans les couches à +45° et -45° en fonction du nombre de cycles pour les séquences (0₃^o/+45₃^o/-45₃^o)_s sollicitées en traction cyclique avec R=0.1, f=1Hz, $\sigma_{max} = 0.4\sigma_R, 0.5\sigma_R, 0.6\sigma_R$ 96

3.54 Evolution de la densité de fissures d (mm⁻¹) dans les couches à +55° et -55° en fonction du nombre de cycles pour les séquences (0₃^o/+55₃^o/-55₃^o)_s sollicitées en traction cyclique avec R=0.1, f=1Hz, $\sigma_{max} = 0.4\sigma_R, 0.5\sigma_R, 0.6\sigma_R$ 96

3.55 Évolution de la chute de rigidité longitudinale macroscopique E_{11}/E_{11}^0 en fonction du nombre de cycles pour les séquences (0₃^o/90_{n=3,6,12}^o/0₃^o) sollicitées en traction cyclique avec R=0.1, f=1Hz, $\sigma_{max} = 0.4\sigma_R, 0.5\sigma_R, 0.6\sigma_R$ 97

3.56 Évolution de la rigidité résiduelle macroscopique du stratifié E_{11}/E_{11}^0 en fonction du nombre de cycles pour la séquence (0₃^o/ + 45₃^o/ - 45₃^o)_s sollicitée en traction cyclique avec R=0.1, f=1Hz, $\sigma_{max} = 0.4\sigma_R, 0.5\sigma_R, 0.6\sigma_R$ 98

3.57 Évolution de la rigidité résiduelle macroscopique du stratifié E_{11}/E_{11}^0 en fonction du nombre de cycles pour la séquence (0₃^o/ + 55₃^o/ - 55₃^o)_s sollicitée en traction cyclique avec R=0.1, f=1Hz, $\sigma_{max} = 0.4\sigma_R, 0.5\sigma_R, 0.6\sigma_R$ 98

3.58 Evolution (a) de la densité de fissures dans la couche à 90° et (b) de la chute de rigidité macroscopique en fonction du nombre de cycles pour les séquences (0₃^o/90_{n=3,6,12}^o/0₃^o), avec R=0.1, f=1Hz et $\sigma_{11max} = 0.4\sigma_{11R}$. 100

3.59 Evolution (a) de la densité de fissures dans la couche à 90° et (b) de la chute de rigidité macroscopique en fonction du nombre de cycles pour les séquences (0₃^o/90_{n=3,6,12}^o/0₃^o), avec R=0.1, f=1Hz et $\sigma_{11max} = 0.5\sigma_{11R}$. 101

3.60 Evolution (a) de la densité de fissures dans la couche à 90° et (b) de la chute de rigidité macroscopique en fonction du nombre de cycles pour les séquences (0₃^o/90_{n=3,6,12}^o/0₃^o), avec R=0.1, f=1Hz et $\sigma_{11max} = 0.5\sigma_{11R}$. 102

3.61 Evolution (a) de $\alpha = d \times e$ dans la couche à 90° et (b) de la chute de rigidité macroscopique en fonction du nombre de cycles pour les séquences (0₃^o/90_{n=3,6,12}^o/0₃^o), avec R=0.1, f=1Hz et $\sigma_{11max} = 0.4\sigma_{11R}$ 103

3.62 Évolution (a) de la densité de fissures dans la couche à 90° et (b) de la chute de rigidité macroscopique en fonction du nombre de cycles pour les séquences (0₃^o/90_{n=3,6,12}^o/0₃^o), avec R=0.1, f=1Hz et $\sigma_{11max} = 0.5\sigma_{11R}$. 104

3.63 Évolution de la variable $\alpha = d$ (mm⁻¹) $\times e$ (mm) dans les couches à +45° et -45° en fonction du nombre de cycles pour la séquence (0₃^o/+45₃^o/-45₃^o)_s sollicitées en traction cyclique avec R=0.1, f=1Hz, $\sigma_{max} = 0.4\sigma_R, 0.5\sigma_R, 0.6\sigma_R$ 105

3.64 Évolution de la variable $\alpha = d \text{ (mm}^{-1}) \times e \text{ (mm)}$ dans les couches à $+55^\circ$ et -55° en fonction du nombre de cycles pour les séquences $(0_3^\circ / +55_3^\circ / -55_3^\circ)_s$ sollicitées en traction cyclique avec $R=0.1, f=1\text{Hz}, \sigma_{max} = 0.4\sigma_R, 0.5\sigma_R, 0.6\sigma_R$ 105

3.65 Évolution de la rigidité résiduelle du stratifié en fonction de la densité de fissures pour les séquences $(0_3^\circ / 90_3^\circ / 0_3^\circ), (0_3^\circ / 90_6^\circ / 0_3^\circ)$ et $(0_3^\circ / 90_{12}^\circ / 0_3^\circ)$ avec $R=0.1, f=1\text{Hz}$, pour les trois niveaux de contraintes $\sigma_{max} = 0.4\sigma_R, 0.5\sigma_R, 0.6\sigma_R$ et comparaison avec le cas quasi-statique 106

3.66 Évolution de la chute de rigidité longitudinale en fonction de la densité de fissures pour la séquence $(0_3^\circ / +45_3^\circ / -45_3^\circ)_s$ avec $R=0.1, f=1\text{Hz}$, pour les trois niveaux de contraintes $\sigma_{max} = 0.4\sigma_R, 0.5\sigma_R, 0.6\sigma_R$ et comparaison avec le cas quasi-statique 107

3.67 Évolution de la chute de rigidité longitudinale en fonction de la densité de fissures pour la séquence $(0_3^\circ / +55_3^\circ / -55_3^\circ)_s$ avec $R=0.1, f=1\text{Hz}$, pour les trois niveaux de contraintes $\sigma_{max} = 0.4\sigma_R, 0.5\sigma_R, 0.6\sigma_R$ et comparaison avec le cas quasi-statique 107

3.68 Réseau de courbes densité de fissures en fonction de N/N_f^s pour la séquence $(0_3^\circ / 90_6^\circ / 0_3^\circ)$ 108

3.69 Forme de la sollicitation appliquée lors d'un essais de traction-cyclique à deux niveaux : (a) chargement faible - chargement fort , (b) chargement fort - chargement faible 109

3.70 Schématisation d'un essai de fatigue à deux niveaux : niveau faible puis niveau fort avec accroissement de l'endommagement dû au rechargement statique 110

3.71 Cas 1 : Évolution de la densité de fissures dans la couche à 90° en fonction du nombre de cycles pour la séquence $(0_3^\circ / 90_6^\circ / 0_3^\circ)$ avec $R=0.1, f=1\text{Hz}$ soumise à 2 niveaux de chargements (chargement faible suivi d'un chargement fort avec accroissement quasi-statique de l'endommagement) 112

3.72 Cas 2 : Évolution de la densité de fissures dans la couche à 90° en fonction du nombre de cycles pour la séquence $(0_3^\circ / 90_6^\circ / 0_3^\circ)$ avec $R=0.1, f=1\text{Hz}$ soumise à 2 niveaux de chargements (chargement faible suivi d'un chargement fort) 113

3.73 Cas 3 : Évolution de la densité de fissures dans la couche à 90° en fonction du nombre de cycles pour la séquence $(0_3^\circ / 90_6^\circ / 0_3^\circ)$ avec $R=0.1, f=1\text{Hz}$ soumise à 2 niveaux de chargements (chargement fort suivi d'un chargement faible) 115

3.74 Cumul de l'endommagement lors d'essais de traction cyclique à deux niveaux 116

3.75 Courbes S-N représentant le nombre de cycles à saturation en fonction de σ_{MAX} (exprimée en pourcentage de la contrainte à rupture) appliquée pour les séquences $(0_3^\circ / 90_{n=3,6,12}^\circ / 0_3^\circ)$ 119

4.1 Représentation du système matériel \mathcal{S} considéré. $\Omega, \partial\Omega$ et $\bar{\Omega}$ forment une partition de \mathcal{S} 123

4.2 Représentation schématique de l'activation/désactivation de l'endommagement. 127

4.3	Exemple schématique de comportement avec un endommagement unilatéral (SiC/SiC) et endommagement unilatéral plus déformation résiduelle (C/SiC)	127
4.4	Cas du cisaillement	128
4.5	Trois directions de fissuration : (a) type 1, (b) type 2, (c) type 3.	132
4.6	Les trois modes d'ouverture d'un réseau de fissures.	133
4.7	Évolution de la chute de rigidité transverse sur les séquences $(0^\circ/90_n^\circ)_s$, (a) en fonction de d , (b) en fonction de α	135
5.1	Composantes approchées actives en fatigue de la variable « pilote »	152
5.2	Principe de la méthode des sauts de cycles	154
5.3	Calcul des sauts de cycle locaux ΔN_{loc}	155
5.4	Distribution des fréquences relatives	156
5.5	Distribution des fréquences relatives cumulées	157
5.6	Schéma général de la stratégie de calcul	158
5.7	Mise en évidence des zones de chargement statique ou de fatigue	159
5.8	Schéma du principe de fonctionnement du modèle de fatigue.	162
6.1	Résultats de l'identification des coefficients $E_{11}, E_{22}, \nu_{12}, \nu_{21}$	166
6.2	Résultats de l'identification du coefficient G_{12}	167
6.3	Caractéristiques mécaniques de l'unidirectionnel identifiées expérimentalement et coefficients de sa matrice de rigidité (obtenues par inversion de la matrice de souplesse) (Les valeurs indicées « * » ont été tirées de la littérature.)	167
6.4	Résultats de l'identification des coefficients de la fonction seuil d'endommagement	172
6.5	Résultat de l'identification du seuil d'endommagement pour les séquences $(0_3^\circ/90_{n=3,6,12}^\circ/0_3^\circ)$, $(0_3^\circ/\pm 55_3^\circ)_s$ et $(0_3^\circ/\pm 45_3^\circ)_s$ correspondant respectivement à $m = 1$, $m = 1.5$ et $m = 2$	172
6.6	Résultat de l'identification pour les séquences $(0_3^\circ/90_{n=3,6,12}^\circ/0_3^\circ)$, soit pour $m = 1$	173
6.7	Résultat de l'identification pour la séquence $(0_3^\circ/\pm 55_3^\circ)_s$, soit pour $m = 1.5$	173
6.8	Résultat de l'identification la séquence $(0_3^\circ/\pm 45_3^\circ)_s$, soit pour $m = 2$	173
6.9	Réseaux des seuils critiques iso-nombre de cycles pour pour la séquence $(0_3^\circ/90_6^\circ/0_3^\circ)$	177
6.10	Réseaux des seuils critiques iso-nombre de cycles pour pour la séquence $(0_3^\circ/\pm 55_3^\circ)_s$	178
6.11	Réseaux des seuils critiques iso-nombre de cycles pour pour la séquence $(0_3^\circ/\pm 45_3^\circ)_s$	179
6.12	Lissage des paramètres a, b et c en fonction du mode m	181
6.13	Surfaces seuils critiques iso-nombre de cycles $N=1,100,1000,10000$	183
6.14	Résultats de l'identification de l'évolution de la densité de fissures en fonction du nombre de cycle dans la couche à 90° de la séquence $(0_3^\circ/90_6^\circ/0_3^\circ)$ sollicitée en traction uni-axiale cyclique pour trois niveaux de contrainte	184
7.1	Repère local d'un élément permettant de définir son orientation par rapport au repère global de la structure	188
7.2	Les trois angles d'Euler	189

7.3	Algorithme d'implémentation de la loi de comportement pour un schéma d'intégration explicite	190
7.4	Simulation par éléments finis d'un essai de traction quasi-statique sur les séquences $(0_3^\circ/90_{n=3,6,12}^\circ/0_3^\circ)$	192
7.5	Simulation de l'évolution de l'endommagement en fonction du nombre de cycle sous sollicitation cyclique avec $\sigma_{max} = 0.4\sigma_R$ pour la séquence $(0_3^\circ/90_6^\circ/0_3^\circ)$	193
7.6	Schéma du dispositif expérimental pour l'observation de l'endommagement au sein d'un trou	195
7.7	Montage expérimental pour l'observation et le suivi de l'endommagement au sein d'un trou	195
7.8	Montage expérimental pour l'observation et le suivi de l'endommagement au sein d'un trou	196
7.9	Réseau de fissures à l'intérieur du trou d'une éprouvette trouée de séquence $(0_3^\circ/90_6^\circ/0_3^\circ)$ soumise à un chargement quasi-statique	196
7.10	Comparaison Essai/calcul du réseau de fissures à l'intérieur du trou d'une éprouvette trouée de séquence $(0_3^\circ/90_6^\circ/0_3^\circ)$ soumise à un chargement quasi-statique	197
7.11	Courbes Effort/Déplacement expérimentales et simulée de l'essai de traction quasi-statique sur éprouvette trouée.	197
A.1	Repère des coordonnées cylindriques	204
A.2	Mise en évidence des angles d'Euler	204
A.3	Repère des coordonnées sphériques	205
A.4	Mise en évidence des angles d'Euler	205
A.5	Repères global et local sur une éprouvette plane de type $[0^\circ, 90^\circ]_s$	208
A.6	Repères global et local sur une structure demisphérique	209

LISTE DES TABLEAUX

2.1	Propriétés mécaniques de la résine époxy	8
2.2	Caractéristiques mécaniques des fibres de carbone	8
3.1	Récapitulatif des stratifications utilisées pour la caractérisation du comportement de l'unidirectionnel	51
3.2	Récapitulatif des stratifications utilisées pour l'étude de l'endommagement	51
3.3	Caractéristiques du pré-imprégné (données fabricant)	52
3.4	Calcul du module sens fibres de la séquence (0_3°) , les valeurs sont exprimées en GPa	63
3.5	Résultats des essais de traction sur (0_3°) : caractéristiques mécaniques obtenues par ces essais	64
3.6	Résultats des essais de traction sur (90_3°) : caractéristiques mécaniques obtenues par ces essais	65
3.7	Influence la vitesse de sollicitation sur le module de cisaillement au cours d'essais de traction sur la séquence (45_3°)	66
3.8	Résultats des essais de traction sur (45_3°) : caractéristiques mécaniques obtenues par ces essais	69
3.9	Synthèse des données caractéristiques obtenues par les essais sous sollicitations cycliques sur les séquences $(0_3^{\circ}/90_{n=3,6,12}^{\circ}/0_3^{\circ})$ avec $ep_{90^{\circ}}$ l'épaisseur de la couche fissurée, d_{sat} la densité de fissures à saturation et $dist_{fissures}$ la distance inter-fissures	78
3.10	Valeurs des contraintes σ_{11R} et déformations ε_{11R} à rupture et des modules d'élasticité longitudinaux macroscopiques (E_{11}) pour les séquences $(0_3^{\circ}/90_{n=3,9,12}^{\circ}/0_3^{\circ})$, $(0_3^{\circ}/\pm 45_3^{\circ})_s$ et $(0_3^{\circ}/\pm 55_3^{\circ})_s$	83
3.11	Synthèse des données caractéristiques obtenues par les essais sous sollicitations quasi-statiques sur les séquences $(0_3^{\circ}/90_{n=3,6,12}^{\circ}/0_3^{\circ})$, $(0_3^{\circ}/+45_3^{\circ}/-45_3^{\circ})_s$ et $(0_3^{\circ}/+55_3^{\circ}/-55_3^{\circ})_s$	86
3.12	Tableau récapitulatif des essais de fatigue	92
3.13	Comparaisons des densités de fissures à saturation en statique et en fatigue pour les séquences $(0_3^{\circ}/90_{n=3,6,12}^{\circ}/0_3^{\circ})$, $(0_3^{\circ}/+45_3^{\circ}/-45_3^{\circ})_s$ et $(0_3^{\circ}/+55_3^{\circ}/-55_3^{\circ})_s$	93

3.14 Récapitulatif des essais de traction cyclique à deux niveaux de charge-
ment 111

3.15 Récapitulatif des essais de traction cyclique à deux niveaux de charge-
ment correspondants aux cas 1 111

3.16 Récapitulatif des essais de traction cyclique à deux niveaux de charge-
ment correspondants aux cas 2 113

3.17 Récapitulatif des essais de traction cyclique à deux niveaux de charge-
ment correspondants aux cas 3 114

3.18 Synthèse des données caractéristiques obtenues par les essais sous sol-
licitations cycliques sur les séquences $(0_3^{\circ}/90_{n=3,6,12}^{\circ}/0_3^{\circ})$ avec $ep_{90^{\circ}}$ l'épais-
seur de la couche fissurée, $d_{sat}^{statique}$ et $d_{sat}^{fatigue}$ les densités de fissures à
saturation et E_{11}^{sat}/R_{11}^0 la chute de rigidité à saturation 118

3.19 Synthèse des données caractéristiques obtenues par les essais sous sol-
licitations cycliques sur les séquences $(0_3^{\circ}/+45_3^{\circ}/-45_3^{\circ})_s$ et $(0_3^{\circ}/+55_3^{\circ}/-55_3^{\circ})_s$
avec $d_{sat}^{statique}$ et $d_{sat}^{fatigue}$ les densités de fissures à saturation et
 E_{11}^{sat}/R_{11}^0 la chute de rigidité à saturation 118

4.1 Variables d'état et les variables duales associées nécessaires à la modé-
lisation de l'endommagement. 136

4.2 Potentiels thermodynamique usuels, où S, T et V désignent respective-
ment l'entropie, la température et la pression. 137

6.1 Paramètres à identifier pour l'écriture du tenseur de comportement . . . 168

6.2 Valeur de la variable m pour les différentes séquences 171

6.3 Coefficients identifiés du seuil d'endommagement en statique A^c 171

6.4 Essais utiles à l'identification du seuil de fatigue 174

6.5 Lissage des réseaux de courbes expérimentales 175

6.6 Lissage des paramètres a, b et c en fonction du nombre de cycles 176

6.7 Lissages des seuils critiques iso-nombre de cycles pour $m=1$ 177

6.8 Lissages des seuils critiques iso-nombre de cycles pour $m=1.5$ 178

6.9 Lissages des seuils critiques iso-nombre de cycles pour $m=2$ 179

6.10 Coefficients identifiés du seuil d'endommagement en fatigue. 182

7.1 Déroulement du calcul 194

Chapitre 1

Introduction générale

Grâce à leurs propriétés mécaniques spécifiques, les matériaux composites sont devenus une alternative intéressante aux matériaux métalliques. De plus, l'utilisation de stratifications judicieusement choisies permet d'obtenir des propriétés mécaniques adaptées aux sollicitations de la structure. Enfin ils sont considérés comme peu sensibles à la fatigue. C'est pour ces raisons que, au cours de ces dernières années, l'emploi des matériaux composites pour la réalisation de structures aéronautiques, navales ou ferroviaires c'est considérablement répandu.

Si les matériaux composites présentent de très bonnes propriétés mécaniques, celles-ci peuvent rapidement se dégrader, pour de faibles niveaux de chargements voire même durant le cycle d'élaboration du matériau. Ces dégradations sont dues à la présence d'endommagement au sein des plis du stratifié. La ruine des matériaux composites n'est pas liée à un unique mécanisme d'endommagement mais elle résulte de la somme de différents phénomènes qui interviennent à différentes échelles et qui peuvent interagir entre eux. Ainsi, dans le cas d'un composite stratifié à base de plis unidirectionnels, il est admis que le scénario de dégradation est le suivant :

1. Apparition d'endommagement à l'échelle de la fibre et de la matrice, dite échelle microscopique, qui se traduit par des dé-cohésions à l'interface fibre/matrice et la micro-fissuration de la matrice ;
2. Coalescence des micro-dommages (micro-fissures et dé-cohésions fibres/matrices) qui conduisent à l'apparition de fissures intra-laminaires visibles à l'échelle du pli, dite échelle mésoscopique. Ces fissures, parallèles aux fibres, apparaissent dans les plis désorientés par rapport à l'axe de chargement et peuvent conduire à des micro-délaminages entre plis d'orientations différentes du fait de la concentration de contraintes en pointe de fissure ;
3. Apparition de délaminage sur le bord libre, entre les plis de différentes orientations et/ou développement des micro-délaminage à l'échelle macroscopique ;
4. Ruptures de fibres conduisant rapidement à la ruine complète du stratifié.

Les géométries de plus en plus complexes des structures en composites additionnées au fait que les chargements mécaniques aux quels elles sont soumises font que

le recours à des stratifiés de fortes épaisseurs est de plus en plus récurrent. Dans ces conditions, il devient primordial de pouvoir prévoir les effets des différents types d'endommagement sur le comportement du stratifié ainsi que leur cinétique d'évolution.

Dans ce cadre, les enjeux de cette thèse sont de proposer un modèle d'endommagement à l'échelle du pli, dont les variables présentent un réel caractère physique. Ce modèle devra, en outre permettre de modéliser la cinétique d'évolution de l'endommagement dans une structure épaisse. En d'autres termes, il devra prendre en compte l'influence des contraintes dans l'épaisseur du stratifié. Ensuite, parce qu'une structure peut-être soumise tant à des sollicitations quasi-statiques que cycliques, le modèle devra permettre de prédire l'apparition et l'évolution de l'endommagement qu'il soit dû à une sollicitation statique ou de fatigue.

Les objectifs de ce travail, réalisé au Centre des Matériaux de l'École des Mines de Paris en collaboration avec le Centre Technique de l'Industrie Mécanique de Nantes sont multiples. Il convient dans un premier temps d'identifier les différents mécanismes d'endommagement et de mettre en évidence les caractéristiques principales de l'endommagement dans un stratifié soumis à une sollicitation quasi-statique et/ou cyclique.

Dans cette étude nous nous intéresserons essentiellement à la fissuration intralaminare qui est le type d'endommagement prédominant à l'échelle du pli et peut être à l'origine d'autres types d'endommagement beaucoup plus néfastes tels que le délaminage ou les ruptures de fibres. Aussi, il est important de connaître l'influence de ces fissures sur les propriétés mécaniques du pli. Il est important d'être capable d'en prévoir la cinétique d'évolution afin de pouvoir ou non tolérer leur présence.

Dans le premier chapitre nous présenterons un état de l'art sur l'analyse de l'endommagement dans les matériaux composites stratifiés. Après avoir donné quelques définitions générales permettant d'appréhender ce type de matériau, nous nous attacherons à présenter plus en détails les principaux travaux sur la fissuration intralaminare présents dans la littérature. L'objectif est de donner une vision large et globale des différents types de modélisation de la fissuration intralaminare et des dégradations qui existent dans la littérature.

Ainsi, notre second objectif est de proposer une modélisation de la fissuration intralaminare et d'introduire le modèle dans le code de calcul par éléments finis, ZéBuLoN, afin de pouvoir calculer une structure industrielle.

Le chapitre 2 est un chapitre d'introduction dans lequel on présente, de façon assez générale, les matériaux composites stratifiés à plis unidirectionnels.

Dans le chapitre suivant nous nous focaliserons sur un seul mécanisme, la fissuration intralaminare. Ce type d'endommagement n'est pas catastrophique pour l'intégrité d'une structure mais peut être à l'origine d'autres types d'endommagement beaucoup plus néfastes. Nous proposons dans le troisième chapitre, une étude expérimentale de la fissuration sous chargements quasi-statiques et cycliques. Nous nous fixerons alors quatre objectifs :

-
1. obtenir des renseignements qualitatifs ;
 2. mettre en évidence les interactions entre les différents types d'endommagement ;
 3. identifier les facteurs qui influent sur la cinétique de fissuration ;
 4. quantifier l'endommagement par fissuration, son évolution et l'influence de l'apparition de fissures sur les propriétés mécaniques du matériau.

Notre but ultime étant de capitaliser un maximum de renseignements tant d'un point de vue qualitatif que quantitatif qui permettront de dégager les principales caractéristiques et paramètres à prendre en compte lors de la modélisation.

A partir de ces résultats expérimentaux, nous définirons dans le quatrième chapitre une modélisation de la fissuration intra-laminaire et de son influence sur les propriétés mécaniques du pli. La modélisation proposée est écrite à l'échelle du pli dans le contexte de la Mécanique de l'Endommagement visant à décrire la multiplication des fissures et à décrire les chutes de rigidités associées. La fissuration des plis est décrite par deux variables d'état internes : l'une scalaire qui caractérise l'état d'endommagement, l'autre vectorielle décrit l'aspect directionnel de l'endommagement. Ce choix permet notamment de déterminer, par homogénéisation, les chutes de rigidité dans toutes les directions et d'assurer la continuité des tenseurs des contraintes et des déformations lors du passage de l'état de traction à l'état de compression.

La loi d'évolution en fatigue est présentée dans le cinquième chapitre. Nous verrons qu'un calcul de structure en fatigue nécessite l'utilisation d'une stratégie particulière. En effet, dans le cas d'un problème de fatigue nous sommes confrontés à deux problématiques a priori contradictoires :

1. simuler le comportement de la structure étudiée avec une précision suffisante pour pouvoir prédire correctement l'apparition de l'endommagement, son évolution et les redistributions de contraintes que cela entraîne ;
2. résoudre un calcul de structure en fatigue dans des délais raisonnables.

Afin de satisfaire ces deux exigences nous avons choisi d'adopter une approche de type « saut de cycles ».

Après avoir identifié les différents paramètres du modèle proposé dans le chapitre 6, à partir des résultats expérimentaux obtenus dans le chapitre 3 nous proposerons une application du modèle au cas d'une structure afin de valider notre modèle. Pour cela, nous présenterons l'implémentation de la loi de comportement au sein du code de calcul ZeBuLoN que nous appliquerons au cas d'une structure de type plaque trouée.

Chapitre 2

Matériaux composites, endommagement et fatigue : quelques repères bibliographiques

*On propose dans ce premier chapitre un état de l'art sur
l'analyse de l'endommagement dans les matériaux
composites stratifiés. Après avoir mis en évidence les
caractéristiques des mécanismes en présence nous nous
intéresserons à leur modélisation*

Sommaire

2.1 Quelques définitions...	7
2.2 Le composite stratifié	9
2.2.1 Les échelles usuelles de travail	9
2.2.2 Les différents repères liés aux stratifiés	10
2.2.3 Comportement mécanique du pli unidirectionnel	10
2.3 Les mécanismes d'endommagement. Généralités	12
2.4 Interactions entre les différents mécanismes d'endommagement	16
2.5 La fissuration intra-laminaire	18
2.5.1 Evolution et influence de l'épaisseur	21
2.5.2 Influence de la séquence d'empilement	25
2.6 Modélisation des stratifiés endommagés	28
2.6.1 Les approches micro-mécaniques	28
2.6.1.1 Les méthodes de type <i>Shear-Lag</i>	29
2.6.1.2 Les approches variationnelles	30

2. Matériaux composites, endommagement et fatigue : quelques repères bibliographiques

2.6.1.3	Evolution de l'endommagement	30
2.6.2	Les approches basées sur la Mécanique de l'Endommagement	31
2.7	La fatigue : étude critique et comparative de l'existant	33
2.7.1	Modèles visant à prédire la durée de vie	33
2.7.1.1	Approches macroscopiques/globales	33
2.7.1.2	Utilisation d'un critère de rupture	34
2.7.2	Approches phénoménologiques	35
2.7.2.1	Rigidité résiduelle	35
2.7.2.2	Résistance résiduelle	36
2.7.3	Approches visant à décrire l'évolution de l'endommagement .	37
2.7.3.1	Approches basées sur la mécanique de la rupture . .	40
2.7.3.2	Approches utilisant un formalisme thermodynamique	41
2.8	Discussion	45

2.1 Quelques définitions...

Un matériau composite peut être défini comme un assemblage de plusieurs matériaux de natures différentes. Il est généralement constitué d'une matrice dans laquelle sont insérés des renforts. La matrice assure le maintien de l'assemblage et les transferts de charge entre les renforts qui assurent la tenue mécanique du composite grâce à leurs caractéristiques mécaniques élevées (module et limite d'élasticité, résistance mécanique,...)[Gay, 1991]. L'association de ces différents matériaux a pour but d'obtenir un matériau dont les propriétés mécaniques spécifiques¹ sont supérieures à celles de la matrice seule.

CLASSIFICATION - La nature du matériau constituant la matrice permet de classer les matériaux composites en trois catégories : les composites à matrice organique, les composites à matrice métallique et les composites à matrice minérale (céramique) [Berthelot, 1999]. Dans cette étude on s'intéressera uniquement aux composites à matrice organique.

LA MATRICE - Les matrices organiques se divisent en deux grandes familles, les résines *thermodurcissables* et les résines *thermoplastiques* :

- **les résines thermoplastiques** sont constituées de polymères à chaînes linéaires. Elles sont mises en forme par changement d'état, chauffage et durcissent au cours du refroidissement suivant une transformation réversible. L'intérêt des thermoplastiques réside dans leur faible coût qui reste cependant lié à des propriétés thermo-mécaniques faibles ;
- **les résines thermodurcissables** ont une structure réticulée sans point de fusion, c'est-à-dire qu'elles passent de manière irréversible de l'état liquide à l'état solide. Leur mise en oeuvre résulte d'une réaction chimique entre une résine de base et un durcisseur ou catalyseur. Après le durcissement il n'y a plus de fusion possible. Parmi les résines thermodurcissables on trouve principalement les résines polyester, époxydes et phénoliques.

Nous utilisons dans notre étude un matériau à matrice époxyde. L'époxy est une résine thermodurcissable qui présente un bon accrochage sur les fibres, un faible retrait lors du moulage (de l'ordre de 0.5%) et de bonnes propriétés mécaniques [Barrau and Laroze, 1987]. On présente dans le tableau 2.1 quelques caractéristiques générales de la résine époxy.

LES RENFORTS - Les renforts ont pour rôle d'assurer la tenue mécanique du composite. Ils sont souvent de nature filamentaire. Ils peuvent être discontinus (fibres courtes) ou continus (fibres longues). Les fibres longues se présentent sous forme de mat (nappe de fibres disposées dans un plan sans direction préférentielle), de nappe unidirectionnelle (nappe de fibres alignées dans la même direction) ou encore sous la forme d'une nappe tissée (deux ou trois directions de tissage).

1. Entendre par là, les propriétés mécaniques rapportées à la masse volumique

Propriétés mécaniques/physiques	Valeurs
Masse Volumique	1100 à 1500 kg/m ³
Module d'élasticité en traction	3 à 5 GPa
Contrainte à rupture en traction	60 à 80 MPa
Allongement à rupture	2 à 5%

TABLE 2.1 - *Propriétés mécaniques de la résine époxy [Berthelot, 1999]*

Dans cette étude nous utilisons des fibres de carbone. Les fibres de carbone sont produites par pyrolyse contrôlée sous contraintes mécanique de fibres organiques qui sont le plus souvent des fibres de polyacrylonitrile (PAN). Elle sont constituées en grande partie de graphite qui est la forme cristalline stable et peu dense du carbone. Les fibres de carbone tirent leur anisotropie et leur propriétés mécaniques élevées de la structure cristalline du graphite qui dans le sens parallèle aux plans hexagonaux graphitiques présente des propriétés mécaniques comparables à celles du diamant [Mercier et al., 1999].

Les fibres de carbone se différencient par le taux de carbone plus ou moins élevé qui modifie l'allongement, la contrainte à rupture et le module d'élasticité [Chatain, 2001]. Ainsi, on trouve trois principales classes de fibres :

- les fibres à haute résistance (HR) ;
- les fibres à haut module (HM) ;
- les fibres à très haut module (THM).

Dans le cadre de cette étude nous utilisons des fibres à haute résistance de type TR50. On présente dans le tableau 2.2 les caractéristiques mécaniques usuelles des différents types de fibre de carbone.

Caractéristiques	Nom (unité)	HR	HM	THM
Masse Volumique	ρ (kg/m ³)	1750	1810	1950
Module d'Young	E (GPa)	230	400	600
Contrainte à rupture	σ (MPa)	3500	2800	2000

TABLE 2.2 - *Caractéristiques mécaniques des fibres de carbone [Berthelot, 1999]*

Finalement, nous utiliserons un composite unidirectionnel à fibres longues (fibres de carbone HR) noyées dans une matrice therm durcissable (résine époxy).

2.2 Le composite stratifié

2.2.1 Les échelles usuelles de travail

Un composite stratifié² est constitué d'un empilement de plusieurs couches élémentaires (dans notre cas le pli unidirectionnel) orientées dans différentes directions. Usuellement, on définit trois échelles de travail (FIG. 2.1) :

- **celle des constituants** (échelle microscopique, les grandeurs caractéristiques sont de l'ordre de quelques μm) : on distingue alors les fibres de la matrice (FIG. 2.1 a) ;
- **celle des plis** (échelle mésoscopique, les grandeurs caractéristiques sont de l'ordre de quelques mm) : on ne distingue pas les fibres de la matrice dans chaque couche qui est considérée comme homogène (FIG. 2.1 b) ;
- **celle du stratifié** (échelle macroscopique, les grandeurs caractéristiques sont de l'ordre de quelques mm, voire plus) : on ne distingue pas les couches de la séquence d'empilement, le stratifié est considéré comme homogène (FIG. 2.1 c) .

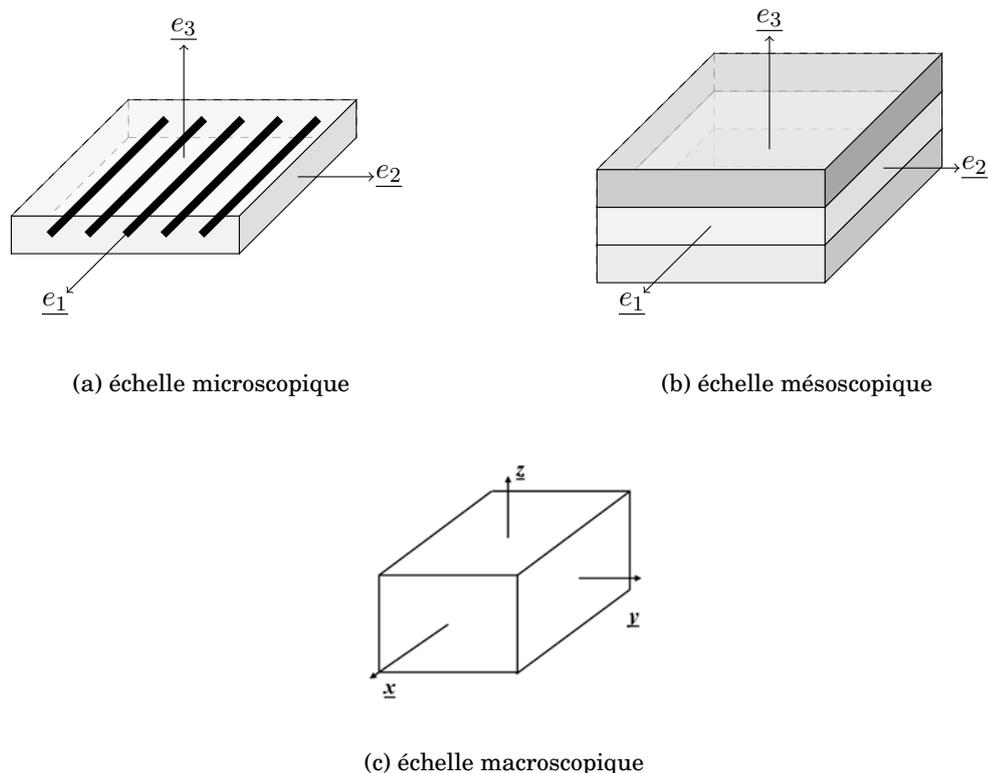


FIGURE 2.1 - *Les échelles usuelles de travail*

2. On parle aussi de matériau multicouche

2.2.2 Les différents repères liés aux stratifiés

Afin de préciser l'orientation de chacun des plis qui forment le stratifié, on a pour habitude de définir en premier lieu un repère orthonormé de référence associé au stratifié. On le note $R(O, \underline{x}, \underline{y}, \underline{z})$. Le vecteur \underline{x} définit la direction à partir de laquelle on compte les angles des différents plis. Dans le cas d'une éprouvette droite, soumise à un chargement uni-axial, on choisit généralement l'axe défini par la direction de chargement. Le vecteur \underline{z} définit la direction perpendiculaire au plan du stratifié (FIG. 2.2).

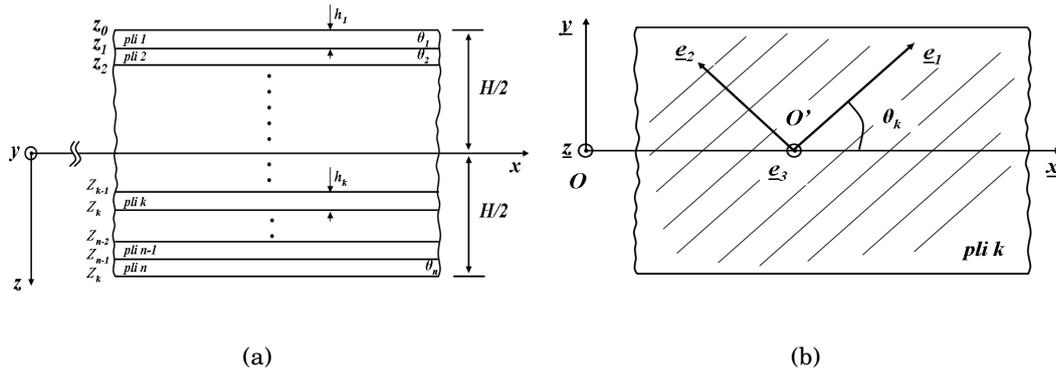


FIGURE 2.2 - Nomenclature couramment utilisée pour la description d'un stratifié

On définit ensuite un repère orthonormé local associé à chaque pli du stratifié. L'indice « k » définit le k-ième pli (en partant du haut) du stratifié. Le repère local de la couche k est alors noté $R_{loc}^k(O, \underline{e}_1^k, \underline{e}_2^k, \underline{e}_3^k)$. Le vecteur \underline{e}_1^k définit la direction des fibres et on pose $\theta_k = (\underline{x}, \underline{e}_1^k)$. Enfin, le repère local du pli hors du stratifié est noté $R_{loc}(O', \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$. La direction des fibres est définie par le vecteur \underline{e}_1 et \underline{e}_3 définit la direction orthogonale au plan moyen.

La description d'un stratifié constitué par l'empilement de n plis identiques mais désorientés dont les angles sont (en partant du haut) $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p, \dots, \theta_n$ se fait usuellement en écrivant les angles d'empilement des couches au travers de leurs angles de désorientation de la manière suivante : $(\theta_1^\circ, \theta_2^\circ, \dots, \theta_p^\circ, \dots, \theta_n^\circ)$.

2.2.3 Comportement mécanique du pli unidirectionnel

Dans le cadre de l'élasticité linéaire, le comportement d'un matériau considéré continu, peut être décrit par la loi de HOOKE généralisée qui se présente sous la forme $\underline{\underline{\sigma}} = [\underline{\underline{C}}] \underline{\underline{\varepsilon}}$ reliant le tenseur des contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$ au tenseur des déformations $\underline{\underline{\varepsilon}}$ par la matrice de rigidité $[\underline{\underline{C}}]$. En inversant cette relation on obtient $\underline{\underline{\varepsilon}} = [\underline{\underline{S}}] \underline{\underline{\sigma}}$ où $[\underline{\underline{S}}]$ représente la matrice des souplesses. Dans le cas le plus général d'un matériau continu, élastique et anisotrope les 4-tenseurs $[\underline{\underline{C}}]$ et $[\underline{\underline{S}}]$ dépendent de 21 coefficients indépendants. Il est toutefois possible de réduire le nombre de ces coefficients en posant certaines hypothèses simplificatrices. D'une manière générale, les architectures

classiques des renforts au sein d'un composite à fibres longues confèrent aux matériaux trois axes de symétries orthogonaux. Le comportement du milieu homogène équivalent peut alors être considéré comme orthotrope, ce qui permet de réduire le nombre de coefficients indépendants à 9 (Eq. 2.1) :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

Le pli de base utilisé dans cette étude est un composite unidirectionnel. Ce type de matériau est généralement considéré comme isotrope transverse. En d'autres termes, on considère qu'il a un comportement isotrope dans le plan $(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ perpendiculaire à l'axe des fibres. Cela se traduit au niveau de la relation contrainte-déformation par :

$$S_{22} = S_{33} \quad \text{et} \quad S_{12} = S_{13} \quad \text{et} \quad S_{55} = S_{66} \quad (2.2)$$

De plus les coefficients S_{ij} de la matrice des souplesses peuvent s'exprimer en fonction des propriétés mécaniques du matériau :

$$\begin{aligned} S_{11} &= \frac{1}{E_{11}} & S_{22} = S_{33} &= \frac{1}{E_{22}} & S_{44} &= \frac{2(1 + \nu_{23})}{E_{22}} \\ S_{12} = S_{13} &= -\frac{\nu_{12}}{E_{11}} = -\frac{\nu_{21}}{E_{22}} & S_{23} &= -\frac{\nu_{23}}{E_{22}} & S_{55} = S_{66} &= \frac{1}{G_{12}} = \frac{1}{G_{13}} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Finalement, dans le cas d'un pli unidirectionnel, la loi de HOOKE généralisée s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_{11}} & -\frac{\nu_{12}}{E_{11}} & -\frac{\nu_{12}}{E_{11}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu_{12}}{E_{11}} & \frac{1}{E_{22}} & \frac{\nu_{23}}{E_{22}} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_{11}} & \frac{\nu_{23}}{E_{22}} & \frac{1}{E_{22}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2(1 + \nu_{23})}{E_{22}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

Connaissant le comportement du pli, la théorie des plaques stratifiées permet d'homogénéiser un empilement et d'en déduire des constantes mécaniques équivalentes.

2.3 Les mécanismes d'endommagement. Généralités

La ruine des matériaux composites n'est pas initiée par un unique mécanisme d'endommagement, mais elle est la conséquence de l'accumulation de plusieurs modes de dégradations. En effet, par endommagement on entend le développement plus ou moins progressif de micro-défauts (micro-vides, micro-fissures...) qui conduisent par coalescence à des macro-défauts (fissures, dé-cohésions...) menant ainsi à la ruine de la structure.

Les mécanismes d'endommagement dans les composites stratifiés à fibres longues sont aujourd'hui clairement identifiés. Différents facteurs peuvent influencer l'apparition et le développement de ces dégradations : la séquence d'empilement, la nature de la matrice, le procédé de fabrication... Ainsi, soumis à des sollicitations externes, les matériaux composites sont le siège de dégradations au niveau des fibres (ruptures de fibres), de la matrice (micro-vides, fissures intra-laminaires) ou encore au niveau des interfaces fibre/matrice (dé-cohésions fibre/matrice) ou des interfaces inter-plies (délaminage). La figure 2.3 présente de façon schématisée les différents mécanismes d'endommagement. Dans ce qui suit nous proposons de détailler les caractéristiques des différents mécanismes.

Afin de fixer un cadre, précisons dès maintenant que les caractéristiques présentées dans la suite ont été dégagées d'observations effectuées lors d'essais sur des éprouvettes planes sollicitées en traction uni-axiale. Cela a pour principale conséquence d'entraîner un état de contrainte uniforme dans la zone utile de l'éprouvette mais aussi implique la présence de bords libres qui, nous le verrons, ont une influence sur l'endommagement.

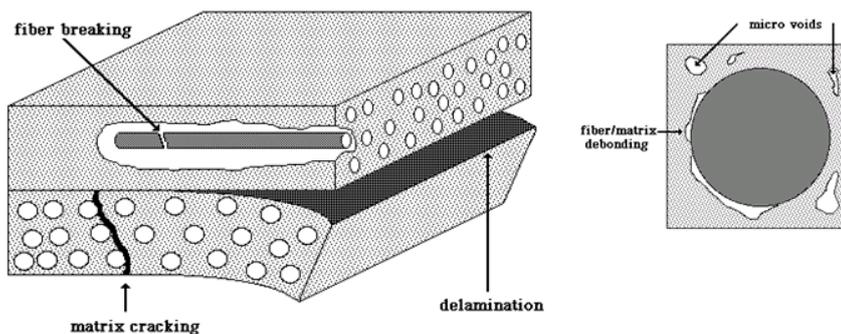


FIGURE 2.3 - Les différents mécanismes d'endommagement

LA DÉCOHÉSION FIBRE/MATRICE ET LES MICRO-VIDES - Au niveau microscopique, des dé-cohésions apparaissent aux interfaces entre les différents constituants (fibres et matrice). C'est le premier type d'endommagement qui apparaît au sein des matériaux composites. Les zones de dé-cohésion sont des lieux privilégiés pour l'amorçage de la fissuration intra-laminaire. Ces dégradations sont initiées par des micro-défauts au sein de chaque pli. Par ailleurs, du fait des processus de fabrication, la répartition des fibres dans la matrice est souvent aléatoire. VIOLEAU [Violeau, 2007] montre que la répartition des fibres peut être à l'origine de zones de

concentration de contraintes où peuvent s'initier des dé-cohésions (FIG. 2.5). Enfin le procédé de fabrication peut entraîner l'apparition de contraintes d'origine thermique responsables elles aussi de dé-cohésions. A cela s'ajoutent les problèmes d'adhésion entre les fibres et la matrice ainsi que des micro-vides qui peuvent coalescer pour former une fissure à l'échelle mésoscopique (FIG. 2.4). L'influence des dé-cohésions fibre/matrice sur le comportement du matériau reste toutefois difficile à évaluer.

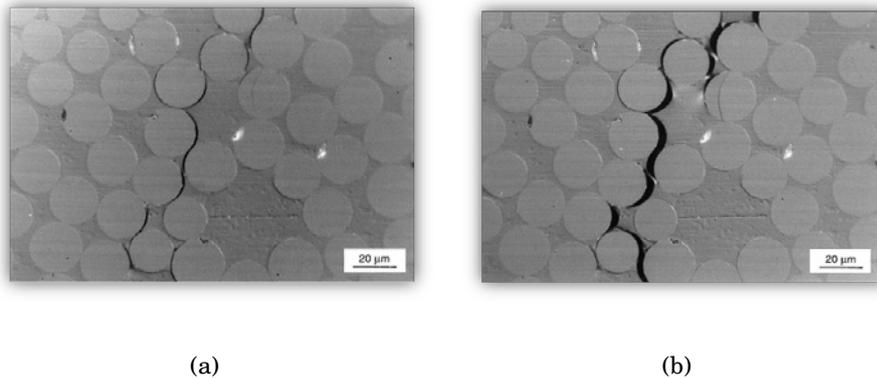


FIGURE 2.4 - *Décohésion fibre / matrice (a) et coalescence en une fissure (b) [Gamstedt and Sjören, 1999]*

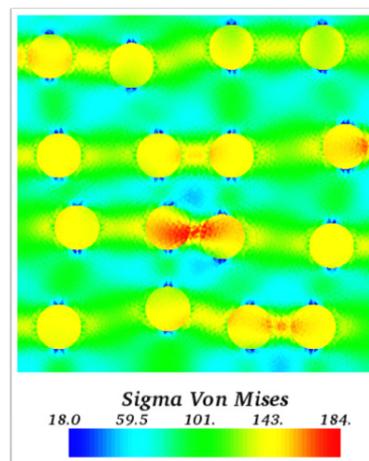


FIGURE 2.5 - *Concentration de contraintes dans un composite fibres / matrice [Violeau, 2007]*

LA FISSURATION INTRALAMINAIRE - Elle apparaît en premier lieu dans les plis les plus désorientés par rapport à la direction du chargement (on rappelle que l'on se place dans le cas d'une plaque en traction uni-axiale). Toutefois, la fissuration peut se produire dans n'importe quel pli k , de repère local associé $R_{loc}^k(O, \underline{e}_1^k, \underline{e}_2^k, \underline{e}_3^k)$, dès lors que les contraintes transverses dans les directions \underline{e}_1^k ou \underline{e}_2^k ou de cisaillement dans les plans $(\underline{e}_1^k, \underline{e}_2^k)$ ou $(\underline{e}_1^k, \underline{e}_3^k)$ au sein du pli atteignent les valeurs à rupture de

ce dernier. L'étude de la fissuration constitue le point central de notre étude. Aussi, nous y reviendrons plus en détails dans la suite de ce chapitre (§2.5).

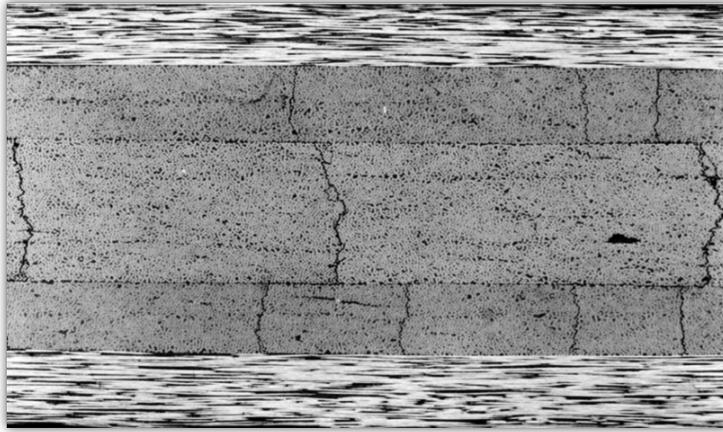


FIGURE 2.6 - Réseau de fissures transverses
[Thionnet et al., 2002]

LE DÉLAMINAGE - Dans le cas d'un composite stratifié, aux mécanismes élémentaires décrits précédemment, s'ajoute un mécanisme de décollement inter-couches appelé *délamination*. Les différentes orientations des plis formant le stratifié entraînent des différences d'anisotropie par rapport au repère de référence qui sont à l'origine de contraintes interlaminaires. Ce sont ces contraintes qui pilotent l'apparition et la propagation du délamination. Une structure de type plaque plane présente des bords libres qui peuvent être à l'origine de singularités au niveau des contraintes interlaminaires proches des bords libres. Ce phénomène, plus couramment appelé « l'effet de bord », peut accélérer le développement du délamination. D'abord étudiées de manière analytique [Pipes and Pagano, 1970], [Puppo and Evensen, 1970], les singularités de contraintes aux bords libres font depuis longtemps l'objet de nombreuses investigations numériques basées sur différentes techniques. Parmi les principales, on trouve la méthode des différences finies [Ye and Yang, 1988], la méthode des éléments finis [Engrand, 1981], des modèles multi-particulaires [Caron et al., 2006] ou encore des modèles de zones cohésives [Camanho and Dávilla, 2002].

LES RUPTURES de FIBRES - Au sein d'un composite stratifié sollicité en traction uni-axiale, les fibres sont sollicitées différemment suivant l'orientation du pli dans lequel elles se trouvent. Les ruptures de fibres interviennent de façon brutale dans les plis pour lesquels la contrainte suivant l'axe e_1 est suffisamment importante. Ce phénomène se produit majoritairement dans les plis orientés dans la direction de la sollicitation. Dans ces plis, les zones situées à proximité des fissures intra-laminaires présentes dans les plis adjacents sont des lieux privilégiés pour les ruptures de fibres. En effet, des auteurs [Gamstedt and Sjören, 2002][Stinchcomb, 1986] constatent que la présence des fissures est à l'origine de zones de concentrations de contraintes favorisant les ruptures de fibres. L'apparition de ruptures de fibres conduit généralement à la rupture totale du stratifié. COX [Cox, 1952] propose une approche analytique unidimensionnelle pour étudier les transferts de charges qui se produisent au sein

d'un unidirectionnel lors de la rupture d'une fibre. Il introduit ainsi le concept de « Shear Lag Analysis ». Son approche a été reprise et étendue aux cas bidimensionnel [Hedgepeth, 1961] et tridimensionnel [Hedgepeth and Van Dyke, 1967]. La puissance des ordinateurs permet aujourd'hui d'étudier ce phénomène au sein de structures réelles (type réservoir) par la méthode des éléments finis à l'aide d'un procédé multi-échelles [Blassiau et al., 2008].

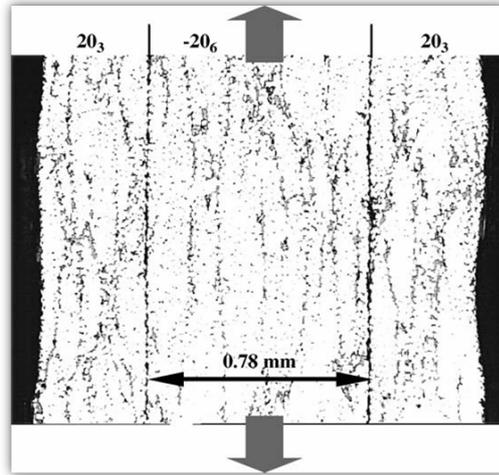


FIGURE 2.7 - Délaminage de bord libre d'un stratifié de type $(20_3 / -20_6)_s$ [Diaz Diaz and Caron, 2006]

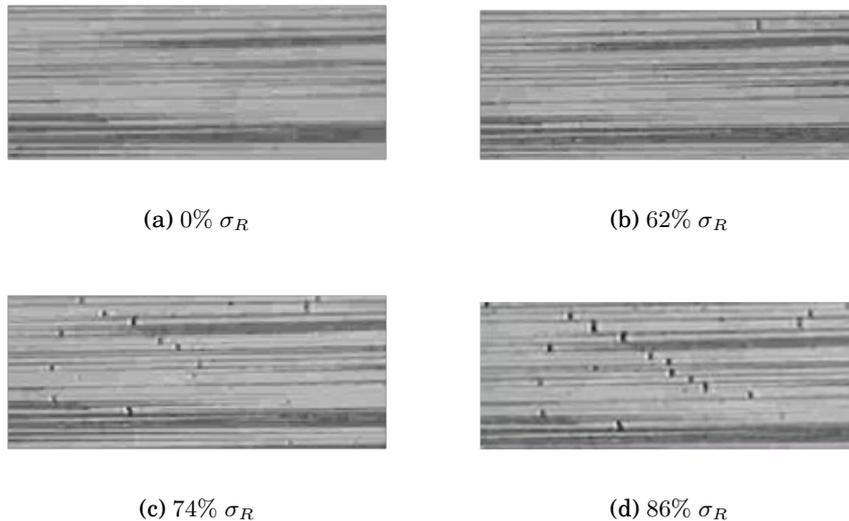


FIGURE 2.8 - Illustration de l'endommagement par ruptures de fibres dans la séquence (0_3^0) [Kim et al., 2003]

2.4 Interactions entre les différents mécanismes d'endommagement

Généralement l'endommagement s'initie au niveau microscopique par des décohésions aux interfaces fibre/matrice. Les décohésions coalescent ensuite jusqu'à former des fissures à l'échelle mésoscopique. Si la fissuration n'est pas catastrophique pour l'intégrité d'une structure, elle peut être à l'origine d'autres types de dégradations qui peuvent s'avérer beaucoup plus nocifs tels que le délaminage (FIG. 2.9) ou les ruptures de fibres.

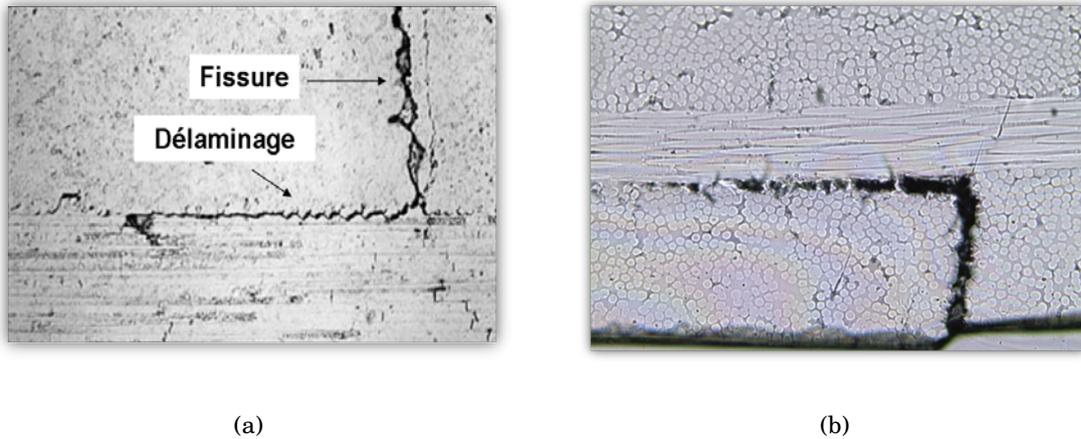


FIGURE 2.9 - *Microdélaminage initié en tête de fissure dans un stratifié (a) $(0_n^{\circ}/90_m^{\circ})_s$ [Gamstedt and Sjören, 2002] et (b) $(90_n^{\circ}/0_m^{\circ})_s$ [Okabe et al., 2008]*

Si le délaminage peut-être créé au niveau des bords libres, lorsqu'ils existent (§2.3), il peut également s'amorcer en pointe de fissure intra-laminaire. Lorsque des fissures intra-laminaires se développent dans un pli elles sont stoppées par les plis adjacents au pli fissuré qui ont une orientation différente. En pointe de fissure, les concentrations de contraintes induites sont telles que du délaminage peut apparaître entre les deux plis adjacents. On parle alors de micro-délaminage ou de délaminage local (FIG. 2.9). Nous verrons que l'apparition du délaminage, parce que celui-ci empêche le transfert de charge entre les plis, est une des causes responsables du phénomène de saturation de la fissuration [Wang and Crossman, 1980]. D'une manière générale, le délaminage est un mécanisme particulièrement endommageant qui peut conduire rapidement à la ruine totale par une perte considérable de rigidité de la structure. Ce phénomène est observé par de nombreux auteurs tels que XU [Xu, 1994], WANG et CROSSMAN [Wang and Crossman, 1980], GAMSTEDT et SJÖGREN [Gamstedt and Sjören, 2002], ou encore OKABE, NISHIKAWA et TAKEDA [Okabe et al., 2008]. HUCHETTE, VANDELLOS et CARRERE [Huchette et al., 2009] proposent une approche permettant d'étudier le couplage entre la fissuration et le délaminage basée sur un essai de traction sur une éprouvette pré-fissurée sur laquelle ils font une entaille à partir de laquelle s'initie et se propage le délaminage.

La présence de fissuration intra-laminaire peut favoriser l'apparition de ruptures de fibres en créant des zones de concentrations de contraintes en pointe de fissures [Stinchcomb, 1986] [Gamstedt and Sjören, 2002]. La figure (FIG. 2.10) propose une représentation schématique l'interaction entre la fissuration intra-laminaire et les ruptures de fibres dans le cas d'un stratifié de séquence $(0^\circ/90^\circ)_s$ en carbone/époxy.

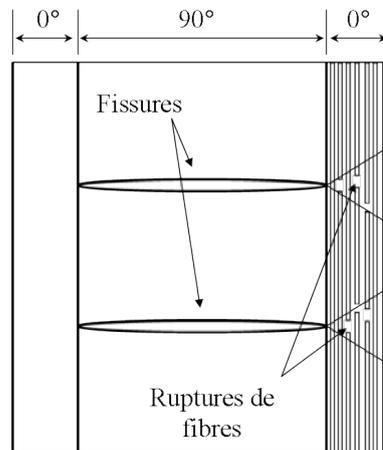


FIGURE 2.10 - Schéma représentant l'interaction entre la fissuration intra-laminaire et les ruptures de fibres dans un stratifié carbone /époxy [Stinchcomb, 1986]

L'analyse présentée dans ce qui précède montre que l'endommagement des composites stratifiés unidirectionnels est un phénomène complexe qui regroupent différents mécanismes. Bien sûr, tous ces mécanismes d'endommagements ne sont pas nécessairement présents simultanément et uniformément dans le matériau du fait de la géométrie de la structure étudiée et du type d'empilement. La ruine des stratifiés est le résultat de la combinaison de l'ensemble des mécanismes élémentaires d'endommagement du pli unidirectionnel (dé-cohésion fibre/matrice, fissuration intra-laminaire, rupture de fibres) auxquels s'ajoutent les mécanismes de décollement intra-laminaire (délaminage) (FIG. 2.11). Comme nous l'avons déjà précisé, dans cette étude nous nous intéressons principalement à la fissuration intra-laminaire. Ainsi, nous proposons maintenant un état de l'art plus approfondi sur ce type d'endommagement.

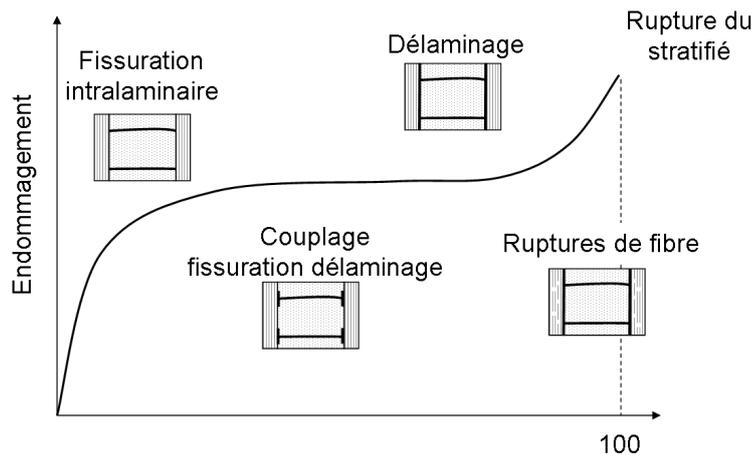


FIGURE 2.11 - Chronologie des différents types d'endommagement (d'après [Tang et al., 2004])

2.5 La fissuration intra-laminaire

Si un matériau composite unidirectionnel sollicité dans la direction des fibres présente d'excellentes propriétés mécaniques, ses caractéristiques vont rapidement se dégrader dès que ce dernier est sollicité dans les directions hors axes. Ces dégradations sont dues notamment à l'apparition d'endommagement. Lorsqu'un stratifié est sollicité en traction, les dé-cohésions aux interfaces fibre/matrice peuvent apparaître et se développer rapidement jusqu'à former une fissure à l'échelle du pli.

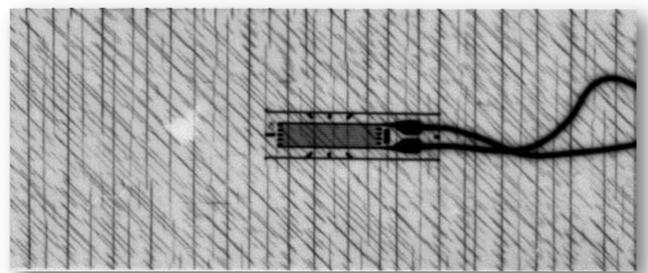
L'étude et l'observation de la fissuration dans les composites stratifiés soumis à des sollicitations quasi-statiques ou cycliques ont fait l'objet de nombreux travaux [Garret and Bailey, 1977] [Reifsnider, 1977][Parvizi et al., 1978][Manders et al., 1983] [Daniel and Charewicz, 1986]. Précisons cependant que dans toutes ces études, l'endommagement est observé dans le cas d'éprouvettes droites sollicitées en traction uni-axiale. Dans les matériaux à forte anisotropie tels que les composites unidirectionnels, la direction des fissures dépend fortement de l'arrangement géométrique des constituants et non de la direction du chargement comme cela peut être le cas pour les matériaux métalliques. Dans un stratifié sollicité en traction uni-axiale, les plis les plus désorientés (plis à 90°) par rapport à la direction de chargement sont les plus sensibles à la fissuration mais des fissures peuvent également apparaître dans les plis d'orientations différentes (FIG. 2.12).

Dans le cas d'une éprouvette plane, sollicitée en traction uni-axiale, les fissures apparaissent sur les bords libres et se propagent dans la largeur et dans l'épaisseur de l'échantillon. Sous l'effet d'un chargement quasi-statique, l'apparition et la propagation complète dans l'épaisseur et la largeur du pli sont quasi-instantanées. En revanche, sous l'effet d'un chargement de fatigue, les micro-fissures qui se forment sur le bord libre se propagent plus ou moins rapidement vers le centre de l'éprouvette sous l'effet des sollicitations cycliques. LAFFARIE-FRENOT et HENAFF-GARDIN [Lafarie-Frenot and Henaff-Gardin, 1990] étudient la propagation des fissures dans

un stratifié $(0^\circ/90^\circ)_s$ sollicité en fatigue et montrent que toutes les fissures ne sont pas traversantes (FIG. 2.13). D'autres auteurs [Boniface and Ogin, 1989] montrent que le taux d'accroissement de longueur par cycle d'une fissure dépend de la distance entre celle-ci et ses voisines mais pas de sa longueur. Toutefois, on peut rencontrer des fissures de fatigue qui se propagent quasi-instantanément dans la largeur de l'éprouvette, c'est le cas pour des chargements à plusieurs niveaux [Nairn, 2000]. Considérons par exemple un chargement faible suivi d'un chargement fort. Lors du chargement faible, des fissures se créent sur les bords libres et se propagent lentement vers le centre de l'éprouvette. En appliquant ensuite un deuxième chargement à un niveau de contrainte plus élevé, les fissures déjà initiées vont se propager instantanément dans la largeur du pli (comme pour un chargement quasi-statique) pendant que de nouvelles fissures apparaissent sur les bords libres de l'éprouvette et se propagent lentement vers le centre.



(a)



(b)

FIGURE 2.12 - Photographie aux rayons X d'un réseau de fissures parallèles aux fibres dans des stratifiés (a) $(0^\circ/\pm 55^\circ)_s$ [Thionnet et al., 2002] et (b) $(0^\circ/45^\circ/90^\circ)_s$ [Yokozeki et al., 2005] sollicités en traction uniaxiale

Jusque là, seules les fissures créées par des efforts d'origine mécanique ont été évoquées. Il est bien évident que ce n'est pas le seul moyen d'endommager un matériau. Ainsi, FAVRE, LEVADOUX, OCHIN et CINQUIN [Favre et al., 1996], LAFARIE-FRENOT et HENAFF-GARDIN [Henaff-Gardin and Lafarie-Frenot, 2002] puis LAFARIE-FRENOT et HO [Lafarie-Frenot and Ho, 2006] ou BURCHAM, EDULJEE et GILLESPIE [Burcham et al., 1995] étudient les phénomènes d'endommagement sous sollicitations cycliques d'origine thermique. Ils observent notamment l'apparition de fissures sur

les bords libres se propageant vers le centre de l'échantillon sous l'effet des cycles thermiques.

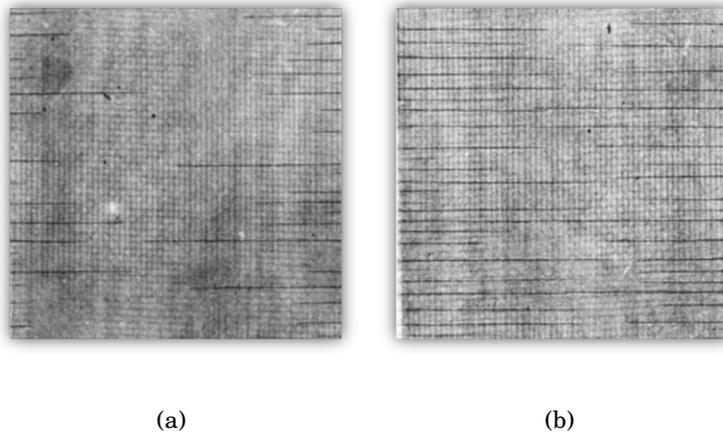


FIGURE 2.13 - Radiographies aux rayons X d'un stratifié ($0^\circ/90^\circ$), T300/914 sollicité en fatigue ($60\%\sigma_R$, $R = 0.1$, $f = 10$ Hz), (a) $N = 5 \cdot 10^3$ cycles, (b) $N = 5 \cdot 10^4$ cycles [Lafarie-Frenot et al., 2001]

Des fissures intra-laminaires peuvent également se produire dans les plis alignés dans la direction du chargement. Une sollicitation de traction longitudinale entraîne une déformation dans le sens transverse. Si cette déformation est suffisamment importante, et du fait des différences de coefficient de Poisson entre les plis à 0° et les plis désorientés par rapport à l'axe du chargement, des fissures parallèles aux fibres peuvent apparaître dans les plis à 0° . On parle alors de *splitting*. Ce type de fissure est généralement observé dans les zones à fort gradient (FIG. 2.14). BADER, BAILEY, CURTIS et PARVIZI [Bader et al., 1979] montrent que ce type de fissure est moins courant dans les composites carbone/époxy que dans les verre/époxy qui ont une déformation à rupture plus importante.

L'apparition et l'accumulation des fissures intra-laminaires influencent directement les propriétés thermo-mécaniques du stratifié et entraînent la détérioration de certaines de ses propriétés telles que les modules d'élasticité, les coefficients de Poisson ou les coefficients de dilatation thermique. Des auteurs, parmi lesquels HASHIN [Hashin, 1987], NUISMER et STAN [Nuismer and tan, 1988], LAWS et BROCKENBROUGH [Laws and Brockenbrough, 1987] ou encore LIM et HANG [Lim and Hong, 1989], ont montré que la chute de rigidité occasionnée par les fissures dépend du nombre de fissures et de l'épaisseur du pli fissuré. De plus, la présence des fissures entraîne l'apparition d'autres types d'endommagement (délaminage, ruptures de fibres). En effet, la fissuration induit des zones de concentrations de contraintes localisées en tête de fissures qui participent à l'apparition du délaminage. Enfin, l'endommagement crée des passages où diverses substances chimiques peuvent s'insérer et accélérer la dégradation du matériau [Bader et al., 1979].

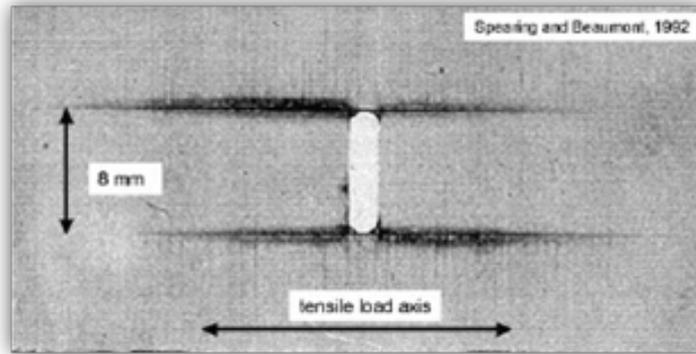


FIGURE 2.14 - *Splitting dans un stratifié de type $(0^\circ/90^\circ)_s$ soumis à des sollicitations cycliques [Spearing and Beaumont, 1992]*

2.5.1 Evolution et influence de l'épaisseur

REIFSNIDER [Reifsnider, 1977] et GARRET et BAILEY [Garret and Bailey, 1977] sont les premiers à étudier l'influence de l'épaisseur sur la fissuration intra-laminaire au sein d'un stratifié de type $(0^\circ/90^\circ)_s$. Ce type de stratifié a la particularité de s'endommager majoritairement par fissuration intra-laminaire ce qui facilite l'observation de ce type d'endommagement. Ces auteurs montrent, par des essais au cours desquels ils font varier l'épaisseur de la couche à 90° tout en gardant le même nombre de plis à 0° , que l'apparition des fissures, leur cinétique d'apparition, leur nombre et la distance inter-fissures dépendent de l'épaisseur du pli fissuré (FIG. 2.15).

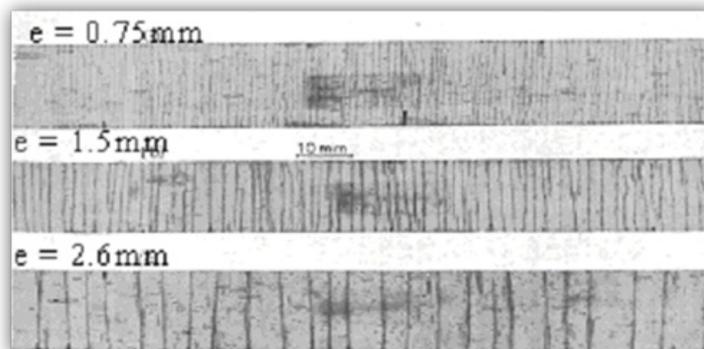


FIGURE 2.15 - *Etat de fissuration à 1.6% de déformation pour trois épaisseurs (0.75, 1.5 et 2.6 mm) de la couche à 90° d'un stratifié $(0^\circ/90^\circ)_s$ sollicité en traction uniaxiale [Garret and Bailey, 1977]*

Il apparaît notamment que le seuil d'endommagement du stratifié est d'autant plus faible que l'épaisseur du pli est importante. Les essais menés par GARRET et

BAILEY puis ceux de PARVIZI [Garret and Bailey, 1977],[Parvizi et al., 1978] montrent que la déformation pour laquelle la fissuration débute est inversement proportionnelle à l'épaisseur. Enfin, ils montrent que si l'épaisseur du pli est suffisamment faible ($<0.1\text{mm}$) aucune fissure n'apparaît avant la rupture du stratifié. Ils expliquent cela par un bilan énergétique du processus de rupture. D'après les travaux de AVESTON et KELLY [Aveston and Kelly, 1973], ils définissent une valeur minimale de la contrainte de rupture, en se basant sur le fait que l'équilibre thermodynamique du processus d'endommagement implique que l'énergie libérée lors de la création d'une fissure doit être supérieure ou égale à l'énergie de création d'une nouvelle surface de rupture.

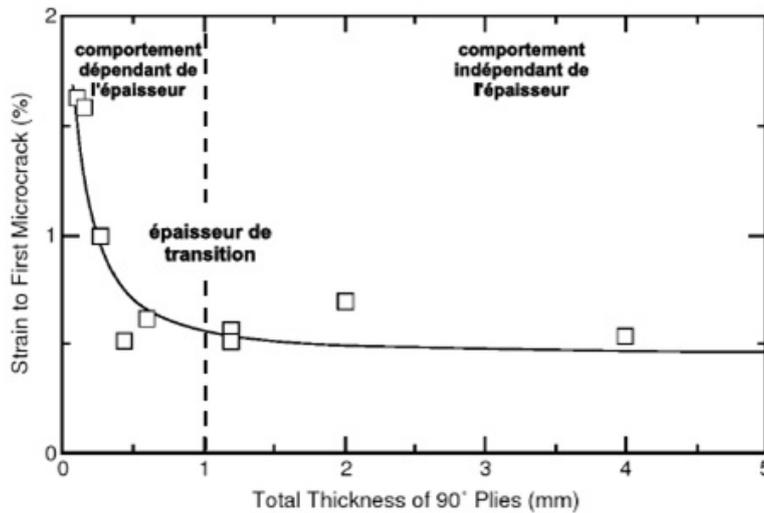


FIGURE 2.16 - Evolution de la déformation correspondant à l'apparition de la première fissure dans un stratifié GFRP ($0^\circ/90_n^\circ$)_s en fonction de l'épaisseur de la couche de 90° [Garret and Bailey, 1977]

Généralement, la densité de fissures intra-laminaires croît de façon monotone jusqu'à un état caractéristique appelé *état de saturation*. La vitesse de fissuration, d'abord lente, augmente rapidement avant de diminuer jusqu'à tendre vers une vitesse nulle correspondant à la saturation. Cet état est atteint lorsque le transfert de charge par cisaillement ne peut plus se faire entre les plis adjacents et le pli fissuré. L'espacement inter-fissures est alors quasi-uniforme. La courbe d'évolution de la densité de fissure en fonction du chargement appliqué (effort axial ou cycles de sollicitations respectivement en quasi-statique et fatigue) se présente sous la forme d'une sigmoïde (FIG. 2.17 et FIG. 2.18). Toutefois, il convient de signaler que l'état de saturation, qui dépend bien évidemment du matériau mais aussi de la séquence d'empilement, n'est pas toujours atteint, notamment dans le cas de chargements quasi-statiques pour lesquels la rupture du stratifié peut intervenir avant.

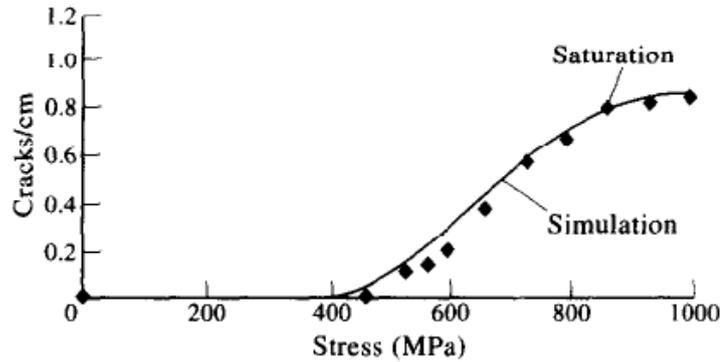


FIGURE 2.17 - Allure de la courbe d'évolution de la densité de fissures dans la couche à 90° d'un stratifié carbone/époxy T300/N174 de séquence $(\alpha^\circ/90^\circ)_s$ en fonction de la contrainte uni-axiale appliquée [Caron and Ehlacher, 1997b]

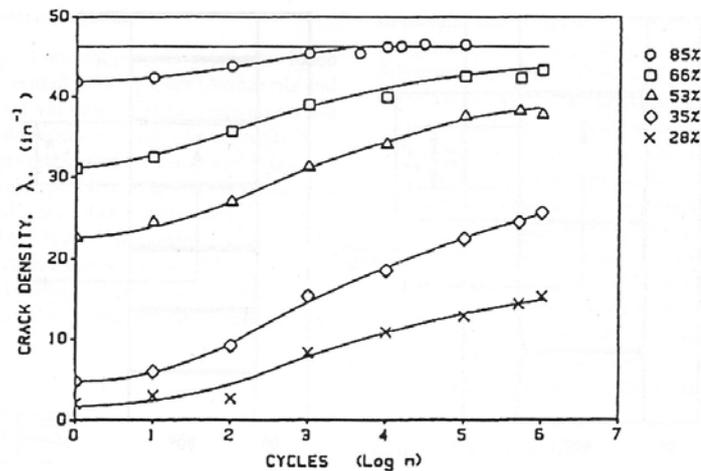


FIGURE 2.18 - Allure de la courbe d'évolution de la densité de fissures en fonction du nombre de cycles pour différents niveaux de sollicitations (indiqués comme un pourcentage de l'effort à rupture en quasi-statique) [Diao et al., 1995]

Afin de bien comprendre le phénomène de saturation, il convient d'expliquer le mécanisme de fissuration. La figure ci-après (FIG. 2.19) représente un stratifié $(0^\circ/90^\circ)_s$ sollicité en traction longitudinale. Lorsqu'une fissure se crée, aucun effort n'est transmis au travers la fissure. Les efforts sont alors repris par les plis adjacents orientés à 0° pour être transmis de nouveau à la couche à 90° par un mécanisme de transfert de charges au niveau de l'interface entre les plis d'orientations différentes. Lorsque le transfert de charge ne s'opère plus suffisamment pour atteindre la contrainte à rupture du pli et ainsi créer une nouvelle fissure, on considère que l'état de saturation est atteint. Cet état caractéristique d'endommagement dépend non seulement du matériau considéré mais également de l'épaisseur du pli fissuré. En outre, BONIFACE, SMITH, OGIN et BADER [Boniface et al., 1987] montrent dans le cas d'un stratifié de type

$(0^\circ/90^\circ)_s$ que l'épaisseur de la couche à 90° influence fortement la densité de fissures à saturation. Plus précisément, celle-ci est inversement proportionnelle à l'épaisseur du pli.

BERTHELOT [Berthelot et al., 1996] montrent qu'il existe une distance inter-fissure critique en-dessous de laquelle le transfert de charge ne s'opère plus suffisamment pour créer une nouvelle fissure (FIG. 2.20). Ces résultats rejoignent les travaux antérieurs de MANDERS, CHOU, JOHNS et ROCK [Manders et al., 1983] qui montrent, dans leur analyse statistique de la fissuration multiple que la distance inter-fissures décroît jusqu'à atteindre une valeur limite correspondant à la distance à saturation qui est dépendante de l'épaisseur du pli fissuré (FIG. 2.21).

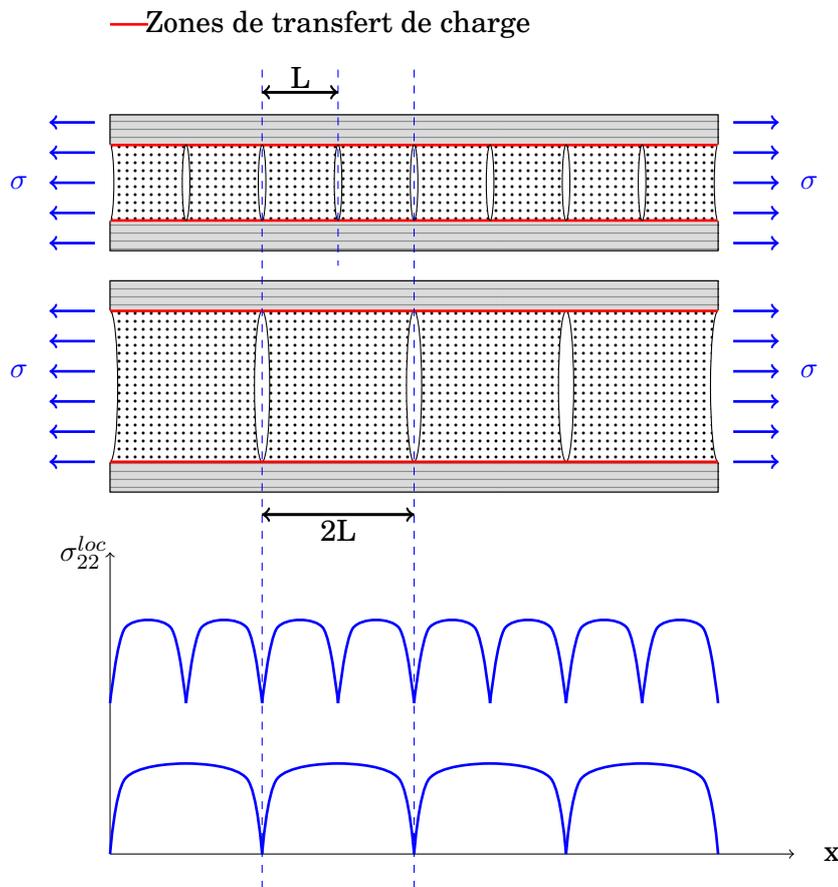


FIGURE 2.19 - Evolution de la contrainte transverse locale σ_{22} théorique au sein du pli à 90° dans un stratifié $(0^\circ/90^\circ)_s$

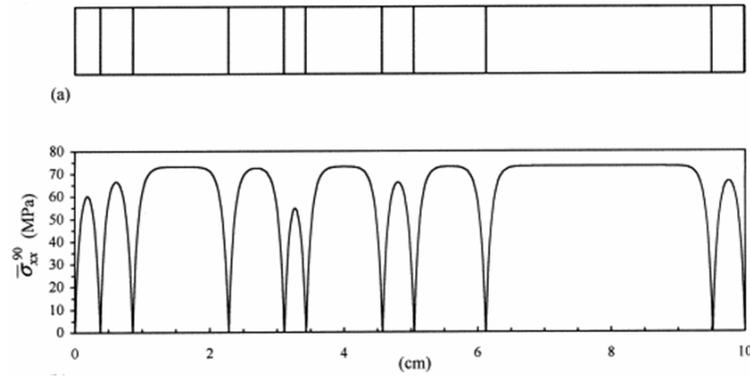


FIGURE 2.20 - Exemple de distribution de fissure (a) et la variation correspondante de contrainte transverse moyenne locale (b) dans la couche à 90° d'un stratifié $(0^\circ/90^\circ)_s$ verre/époxy [Manders et al., 1983]

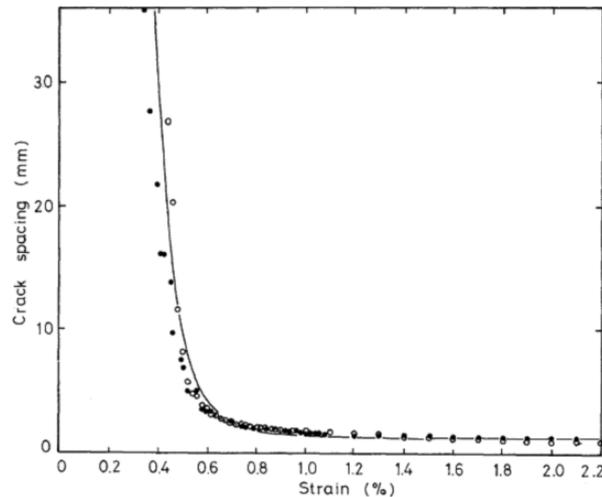


FIGURE 2.21 - Evolution de la distance inter-fissure en fonction de la déformation [Manders et al., 1983]

2.5.2 Influence de la séquence d'empilement

Outre l'épaisseur du pli, la séquence d'empilement influence également la cinétique de fissuration. Des auteurs comme BAILEY et PARVIZY [Bailey and Parvizi, 1981] et plus récemment SMITH, BONIFACE et GLASS [Smith et al., 1998] montrent que la déformation nécessaire pour créer une fissure est beaucoup plus faible dans le cas du $(90_m^\circ/0_n^\circ)_s$ que du $(0_n^\circ/90_m^\circ)_s$. De plus, pour un état de fissuration donné, celui-ci est beaucoup plus pénalisant au niveau des propriétés mécaniques, dans le cas du $(90_m^\circ/0_n^\circ)_s$ que du $(0_n^\circ/90_m^\circ)_s$ [Highsmith and Reifsnider, 1982]. Lorsque les plis à 90° se trouvent sur les couches extérieures ces derniers se fissurent suivant le même schéma que lorsqu'ils se trouvent dans les couches intérieures. Les fissures se présentent sous la forme d'un réseau périodique. Les observations HIGHSMITH et REIFSNIDER [Highsmith and Reifsnider, 1982] et NAIRN, HU et BARK [Nairn et al., 1993] montrent

un déphasage de 0.5 fois la distance inter-fissures entre chacune des deux couches à 90° (FIG. 2.22).

Au delà des différences sur les scénarios de fissuration entre les deux types de séquences, la cinétique de fissuration est elle aussi dépendante de l'empilement. Plus particulièrement, la densité de fissures à saturation et la contrainte d'apparition de la première fissure dépendent de la séquence d'empilement. La fissuration des plis extérieurs peut se produire de différentes façon : le « splitting », qui rappelons le, est dû aux différences de coefficients de Poisson, est une première forme de fissuration des plis externes. Ce phénomène peut être amplifié sous sollicitations d'origines thermiques car un pli unidirectionnel n'a pas les même coefficients de dilatation thermique dans le sens des fibres et dans le sens transverse. Enfin, dans une structure industrielle, le chargement est rarement uni-axial, ce qui peut là encore être à l'origine de fissuration dans les plis extérieurs.

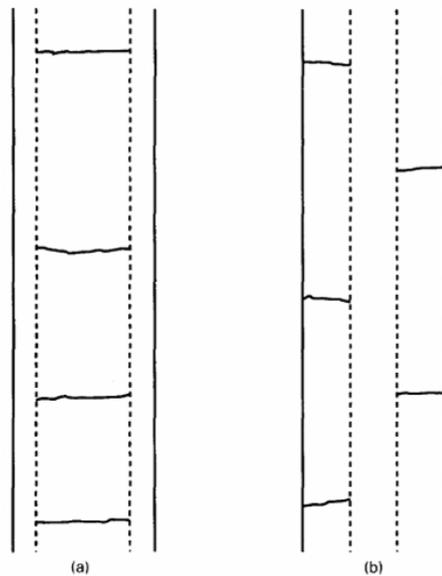


FIGURE 2.22 - Schémas de fissuration dans des stratifiés croisés contenant une(des) couche(s) à 90° . (a) Réseau de fissures quasi-périodique dans un $(0_n^\circ/90_m^\circ)_s$. (b) Réseaux périodiques déphasés dans un $(90_m^\circ/0_n^\circ)_s$ [Nairn et al., 1993]

SIHN, KIM, KAWABE et TSAI [Sihn et al., 2007] comparent deux stratifiés quasi-isotropes comportant chacun le même nombre de plis de chaque orientation mais empilés de manières différentes (regroupés ou dispersés) (FIG. 2.23). Ils montrent ainsi qu'un stratifié quasi-isotrope de type $[(0^\circ/\pm 45^\circ/0^\circ)_n]_s$ est plus résistant aux dommages qu'un stratifié de type $[0_n^\circ/\pm 45_n^\circ/0_n^\circ]_s$. En outre, ils montrent qu'il est possible de retarder, voire de supprimer l'endommagement (délaminage et splitting) en répartissant les plis sous la forme de couche mince (FIG. 2.24a).

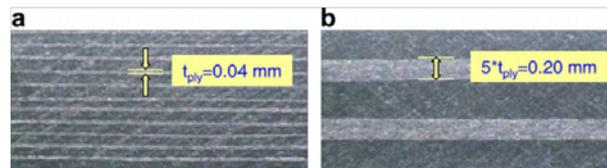


FIGURE 2.23 - Deux stratifiés présentant le même nombre de plis répartis de façons différentes [Sihn et al., 2007]

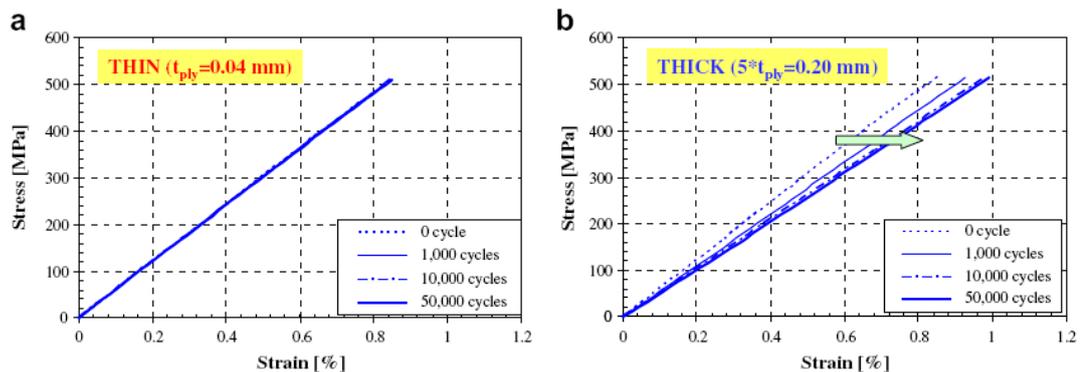


FIGURE 2.24 - Deux stratifiés présentant le même nombre de plis répartis de façons différentes [Sihn et al., 2007]

LI, ELLYIN et WHARMBY [Li et al., 2003] observent que l'orientation des plis voisins de la couche à 90° dans un stratifié $(\theta^\circ/90^\circ)_s$ influence la cinétique de fissuration et la densité de fissures à saturation. Ils comparent notamment les séquences $(0_2^\circ/90_3^\circ)_s$ et $(\pm 45_2^\circ/90_3^\circ)_s$ et montrent que la saturation est atteinte plus rapidement dans le cas du $(0_2^\circ/90_3^\circ)_s$ et que le nombre de fissures à saturation est plus important (FIG. 2.25).

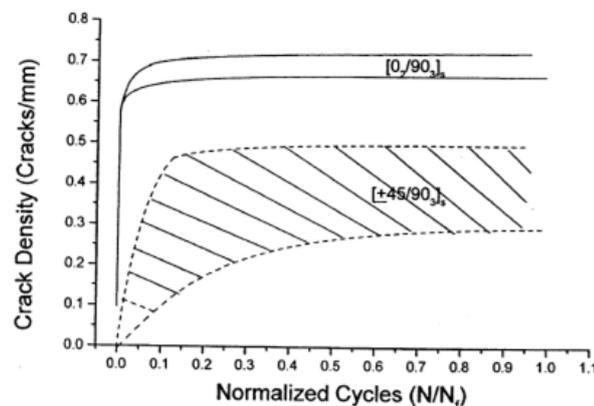


FIGURE 2.25 - Comparaison de la variation de densité de fissures au sein de stratifiés de type $(0_2^\circ/90_3^\circ)_s$ et $(\pm 45_2^\circ/90_3^\circ)_s$ sollicités en fatigue [Li et al., 2003]

Lors de l'apparition d'une fissure, un transfert de charge se produit entre le pli fissuré et les plis adjacents. L'intensité des efforts transmis par les plis adjacents dépend de leur orientation qui influe directement sur la cinétique de fissuration. OGIHARA et TAKEDA et KOBAYASHI [Ogihara et al., 1998] observant le même phénomène, montrent que l'augmentation de la rigidité des plis adjacents au pli fissuré, en d'autres termes le fait d'aligner les plis adjacents avec le chargement, a le même effet que de réduire l'épaisseur du pli fissuré.

2.6 Modélisation des stratifiés endommagés

L'endommagement dans un matériau peut être défini comme un ensemble de changements micro-structuraux qui interviennent sous l'effet d'un chargement thermo-mécanique et engendre une détérioration irréversible. Dans un matériau composite, nous l'avons vu, les mécanismes d'endommagement sont complexes et nombreux. Sous l'effet d'une sollicitation, une structure composite voit ses propriétés mécaniques se dégrader bien avant sa rupture finale. La fissuration intra-laminaire qui apparaît souvent en premier est une des causes de ces dégradations sans pour autant être réellement pénalisant pour l'intégrité de la structure. En revanche, elle est à l'origine de l'apparition d'autres types d'endommagement, comme le délaminage ou les ruptures de fibres, qui sont quant à eux beaucoup plus préjudiciables pour la tenue mécanique. On comprend alors l'importance de pouvoir prédire l'apparition et l'évolution de la fissuration intra-laminaire mais aussi son influence sur les propriétés mécaniques du matériau. La compréhension et la modélisation des mécanismes d'endommagement vont amener deux axes principaux de recherche :

- d'une part, l'amorçage et la propagation d'une fissure ;
- d'autre part, les dégradations des propriétés mécaniques de la structure endommagée et la multiplication des fissures, en ayant recours à la Mécanique de l'Endommagement.

L'enjeu de cette section est de donner une vision large et globale des différents types de modélisation de la fissuration intra-laminaire et des dégradations de la fissuration qui existent dans la littérature.

2.6.1 Les approches micro-mécaniques

Les approches micro-mécaniques visent à donner une description du champ de contrainte au sein du matériau fissuré afin de prédire l'influence de l'endommagement sur les propriétés mécaniques du stratifiés. Dans ce type d'approches les fissures sont modélisées de façon discrète et en se basant sur l'hypothèse que la propagation des fissures est quasi-instantanée dans la largeur de l'éprouvette, qu'elle n'apparaissent que dans les plis orientés à 90° par rapport à la direction du chargement et que leur répartition est périodique. Cela permet de simplifier la recherche du champ solution en faisant l'approximation que l'étude peut se restreindre à un problème (pseudo-)bidimensionnel se basant sur l'étude d'une cellule périodique élémentaire (FIG. 2.26) pour laquelle le comportement du matériau est supposé élastique.

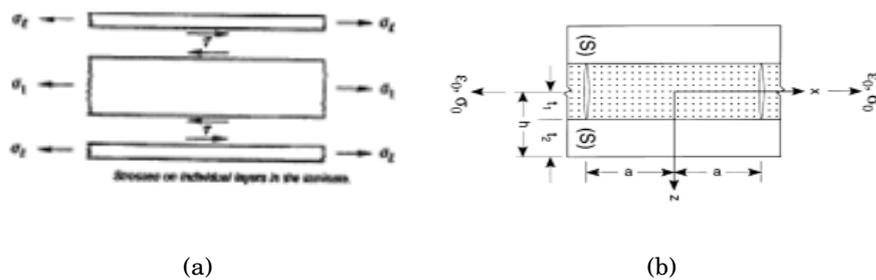


FIGURE 2.26 - Cellule périodique élémentaire considérée pour l'étude de la fissuration (a) Approche de type Shear-Lag [Laws and Dvorak, 1988], (b) Modèle de type HASHIN [Nairn, 2000]

2.6.1.1 Les méthodes de type *Shear-Lag*

En présence de fissures un transfert de charge se produit par cisaillement interlaminaire entre le pli fissuré et les plis adjacents. Suite aux travaux de COX [Cox, 1952] qui étudie l'interaction entre les fibres dans un composite unidirectionnel, GARRET et BAILEY [Garret and Bailey, 1977] proposent une approche dans laquelle ils analysent le cisaillement interlaminaire et contribuent alors à populariser le modèle « Shear-Lag Analysis ». Ils proposent pour les stratifiés de type $(0_n^{\circ}/90_m^{\circ})_s$ une approche basée sur l'analyse unidimensionnelle d'une cellule unitaire contenant une seule fissure en supposant que les champs sont uni-axiaux et uniformes suivant l'épaisseur de chaque couche du stratifié. L'approche unidimensionnelle qu'ils proposent, dans le cas d'un stratifié $(0^{\circ}/90^{\circ})_s$, postule que la contrainte de cisaillement τ à l'interface entre deux plis est proportionnelle à la différence des déplacements des plis à 0° et 90° .

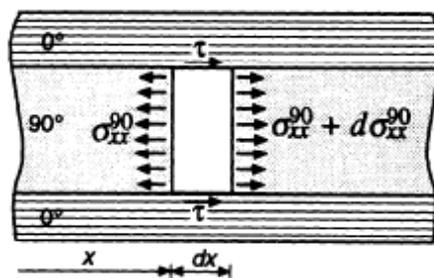


FIGURE 2.27 - Contraintes axiale et de cisaillement dans la couche à 90° [Berthelot et al., 1996]

La difficulté à trouver une solution analytique exacte au problème, contraint les auteurs à poser des hypothèses simplificatrices. Outre le fait de considérer le problème comme unidimensionnel, ils négligent les effets de bords ou les singularités de contraintes en pointe de fissures ou encore le déplacement dans l'épaisseur u_z est négligé devant le déplacement dans la direction longitudinale u_x .

Le modèle de Shear-Lag Analysis a été repris et généralisé dans de nombreux travaux tels que ceux de [Highsmith and Reifsnider, 1982] [Nuismer and tan, 1988] [Laws and Dvorak, 1988] [Macquire et al., 1992] [Berthelot et al., 1996] ou encore ceux de [Caron and Ehlacher, 1997b]. Nous pouvons aussi citer les travaux de MANDERS, CHOU, JOHNS et ROCK [Manders et al., 1983] qui ont développé l'approche initiale de GARRET et BAILEY [Garret and Bailey, 1977] qui ne considère qu'une seule fissure isolée afin de tenir compte des interactions entre les fissures. Ce type modèle ne peut traiter que les problèmes de chargement dans le plan de la plaque considérée et fait intervenir des caractéristiques de raideur d'interface qui restent encore sujettes à discussion.

2.6.1.2 Les approches variationnelles

Les approches variationnelles, qui constituent la seconde famille d'approches mécaniques présente dans la littérature, visent à analyser les champs de contraintes. HASHIN [Hashin, 1985] utilise le principe du minimum de l'énergie potentielle complémentaire pour donner une estimation de la rigidité du pli et du champ de contraintes local au sein d'un composite de type « *cross-ply* ». Dans son approche bidimensionnelle, la contrainte longitudinale dans la direction \underline{x} ne dépend que de la position x , elle est supposée constante dans l'épaisseur. Toutefois cette hypothèse est mise en défaut par LADEVÈZE et LUBINEAU [Ladevèze and Lubineau, 2001] qui montrent que la prédiction du champ de contraintes obtenue par une approche analytique de type HASHIN se dégrade lorsque l'épaisseur du pli fissuré diminue. Des auteurs comme VARNA et BERGLUND [Varna and Berglund, 1992] ou REBIÈRE [Rebiere, 2002] ont amélioré l'approche de HASHIN en affinant la recherche du champ de contrainte dans l'épaisseur (direction \underline{z}). Cette méthode est étendue au cas d'un stratifié « *cross-ply* » contenant deux plis fissurés adjacents ce qui permet d'analyser les interactions entre fissuration transverse et longitudinale [Hashin, 1987] ou plus récemment [Henaff-Gardin et al., 2002]. Le principal inconvénient de cette méthode réside dans le fait qu'elle est difficilement applicable à des stratifiés de séquences autres que $(0_n^{\circ}/90_m^{\circ})_s$.

Enfin, évoquons les méthodes de type *self-consistent* [Laws and Dvorak, 1985] ou encore les méthodes basées sur une analyse par éléments finis appliquée à la cellule élémentaire qui permettent d'avoir accès à une description tridimensionnelle du champ de contraintes. Ce type d'approche est utilisée pour suggérer la forme du champ de contraintes solution [Nairn and Hu, 1992] ou pour recalculer une formulation analytique en déplacement [Nairn, 1995]. Ce type d'approche à l'avantage de pouvoir prendre en compte une infinité de configurations de l'endommagement (épaisseur, densité de fissures...) mais cela constitue également son point faible dans la mesure où chaque configuration nécessite une simulation différente ce qui peut s'avérer rapidement très long et fastidieux.

2.6.1.3 Evolution de l'endommagement

Les trois catégories d'approches présentées dans ce qui précède permettent de déterminer le champ de contraintes dans un stratifié endommagé par fissuration. Il convient ensuite de définir des critères d'évolution de la fissuration.

Dès 1967, WU [Wu, 1967] étend l'utilisation de la Mécanique de la Rupture aux composites fibres/résine afin d'étudier l'amorçage et la propagation d'une fissure mais les premiers critères d'apparition de fissures ont été développés avec les méthodes de type *Shear-Lag*. Il s'agit alors de critères en contrainte [Garret and Bailey, 1977]. Ils considèrent qu'une fissure apparait dans le pli à 90° si la contrainte σ_{22}^{loc} dans le repère local du pli atteint la contrainte à rupture transverse du pli unidirectionnel. Cependant le principal défaut de cette approche est de dépendre de la géométrie de la structure et notamment de ne pas rendre compte des effets d'épaisseur. Un critère différent doit être identifié pour chaque séquence d'empilement.

Afin de palier aux faiblesses des critères en contrainte, d'autres auteurs sont amenés à introduire des critères énergétiques. Ainsi, en se basant sur des travaux antérieurs [Aveston and Kelly, 1973], PARVIZI, GARRET et BAILEY [Parvizi et al., 1978] proposent une description énergétique de la fissuration. Ils considèrent alors qu'une fissure peut apparaître lorsque le taux de restitution d'énergie G_f de cette fissure atteint une valeur critique G_{mc} qui est intrinsèque au matériau alors que le taux de restitution d'énergie G_m est une fonction linéaire par rapport à l'épaisseur du pli considéré. Si cette approche semble perdre en qualité pour les plis épais, elle rend compte parfaitement de la suppression de la fissuration observée dans les plis d'épaisseur inférieure ou égale à 0.1mm.

Enfin, il paraît important de citer les approches probabilistes qui sont souvent couplées aux critères en contrainte pour fournir une répartition de la résistance du pli à 90° permettant de prédire l'apparition des fissures dans des stratifiés de type *cross-ply* [Manders et al., 1983] [Fukunaga et al., 1984] [Berthelot and Le Corre, 2000].

Les approches présentées jusqu'ici permettent de représenter et d'étudier de façon relativement simple la fissuration et son influence sur les propriétés mécaniques en se basant sur des grandeurs qui ont un réel sens physique. Cependant, le niveau de description qu'elles demandent rend leur utilisation impossible à l'échelle d'une structure complète. De plus ces approches se limitent aux stratifications particulières que sont les stratifiés *cross-ply* $(0_n/90_m)_s$ sous certaines hypothèses simplificatrices. Enfin, ces méthodes fondées sur la Mécanique de la Rupture ne donnent généralement pas de loi d'évolution de l'endommagement.

2.6.2 Les approches basées sur la Mécanique de l'Endommagement

Les carences des modèles précédents nous conduisent à nous intéresser à un autre type d'approches basées sur la Mécanique de l'Endommagement, dans lesquelles l'étude de l'endommagement ne se fait plus à l'échelle microscopique mais à l'échelle supérieure que nous avons appelée précédemment l'échelle mésoscopique. Dès lors les fissures ne sont plus représentées de façon discrète se qui permet notamment de simplifier la description du champ de contraintes au sein du pli fissuré par homogénéisation du comportement du matériau endommagé.

Ces approches visent à décrire le comportement d'une structure endommagée au travers l'utilisation d'une ou plusieurs variables d'endommagement généralement reliée à la notion de contrainte effective ou à la densité de fissures. L'introduction de

variable d'endommagement fût initialement proposée par Kachanov [Kachanov, 1958] et Rabotnov [Rabotnov, 1968] pour décrire les discontinuités introduites par les dégradations dans les métaux ou les bétons. L'endommagement est alors décrit par une variable interne (au sens de la Thermodynamique des Processus Irréversibles), continue et prenant des valeurs comprises entre 0 et 1. Ce type de variable fournit une description globale de l'état d'endommagement et englobe généralement plusieurs mécanismes d'endommagement. D'autres auteurs proposent des variables liées à la cinétique d'endommagement (cinétique de fissuration par exemple). Ces variables peuvent être de nature : scalaire [Ladevèze and LeDantec, 1992], vectorielle [Talreja, 1986] ou tensorielle [Chaboche, 1979] et décrivent la géométrie et l'orientation du défaut considéré, le quantifie (au travers de la densité de fissures par exemple) ...

Dans les matériaux composites, du fait de l'anisotropie il devient important de pouvoir décrire la direction de l'endommagement. Talreja [Talreja, 1985] [Talreja, 1986], est un des précurseurs de l'approche directionnelle de l'endommagement dans les composites. Il propose un modèle construit à partir de la connaissance de la géométrie du défaut considéré dans lequel les fissures sont décrites par un vecteur défini par la normale au plan de la fissure et sa norme. L'écriture d'un potentiel à partir d'invariants des déformations et de ce vecteur lui permet d'obtenir la loi de comportement du matériau homogène équivalent. En revanche, il ne donne pas de loi d'évolution de l'endommagement. De plus la direction du vecteur est fixe ce qui rend difficile l'application de ce modèle à une structure présentant plusieurs directions d'endommagement dans la mesure où il serait alors nécessaire de définir un vecteur et un potentiel pour chaque direction.

Ce modèle a par la suite été repris et développé par THIONNET, RENARD et AUSSÉDAT [Thionnet, 1991] [Thionnet and Renard, 1993], [Aussédats-Yahia, 1997]. Ils décrivent alors l'endommagement par un doublet scalaire/vecteur (α, \underline{V}) caractérisant la densité de fissures et la direction de l'endommagement. Enfin l'introduction du mode de fissuration inspiré de la Mécanique de la Rupture leur permet de compléter la description des fissures et notamment de simuler les dégradations en cisaillement. Ce modèle qui sert de base à notre étude est décrit en détails dans la suite.

D'autres auteurs proposent des modèles utilisant plusieurs variables d'endommagement. LADEVÈZE, ALLIX et LE DANTEC [Ladevèze, 1986] [Allix and Ladevèze, 1992] [Ladevèze and LeDantec, 1992] pour les matériaux composites unidirectionnels, puis HOCHARD et PAYAN [Hochard et al., 2001] [Payan, 2004] pour les composites tissés définissent trois variables d'endommagement. Ces variables n'ont pas de signification précise mais ils en donnent toutefois une loi d'évolution. Les trois variables sont respectivement associées à la décroissance des raideurs E_{22} (le module de traction transverse), G_{12} (le module de cisaillement) et E_{11} (le module de traction longitudinale).

Enfin, Allen [Allen, 2001] propose une approche dans laquelle il définit un tenseur d'endommagement obtenu par homogénéisation d'un volume élémentaire représentatif contenant des micro-fissures puis intègre ce comportement dans une théorie classique des stratifiés.

2.7 La fatigue : étude critique et comparative de l'existant

L'étude du comportement en fatigue des matériaux composites, notamment la prévision de l'endommagement et de la durée de vie de ces matériaux, fait l'objet de nombreuses investigations. On trouve dans la littérature plusieurs types d'approches de ce problème. Les auteurs DEGRIEK et VAN PAEPEGEM [Degriek and Van Paepegem, 2001] en propose une revue détaillée. D'une façon générale, on peut les classer en trois grandes catégories [Van Paepegem and Degriek, 2002] [Philippidis and Vassilopoulos, 1999].

1. les modèles visant à prédire la durée de vie : ces approches, généralement macroscopiques, ne tiennent pas compte du mécanisme d'endommagement mais sont basées sur l'introduction d'un critère de rupture en fatigue et l'utilisation des courbes de WÖHLER³, qui définissent, pour une structure, une relation entre la contrainte appliquée et le nombre de cycles à rupture ;
2. les modèles phénoménologiques qui utilisent le concept de résistance ou la rigidité résiduelle ;
3. les modèles qui prennent en compte l'aspect progressif de l'endommagement et utilisent une ou plusieurs variables d'endommagement pour décrire l'accumulation de l'endommagement.

2.7.1 Modèles visant à prédire la durée de vie

Les premières études portant sur la modélisation des phénomènes de fatigue dans les matériaux composites ont consisté à transposer les connaissances acquises dans les matériaux métalliques aux matériaux composites. Il s'agissait alors de méthodes empiriques, basées sur des critères de rupture, qui permettaient d'aborder le comportement mécanique d'empilement quelconques, en occultant toutefois la physique de l'endommagement. Ainsi, on présente un premier type d'approche que nous appellerons approches macroscopiques ou globales dans la mesure où elles s'attachent à caractériser le comportement macroscopique du stratifié.

2.7.1.1 Approches macroscopiques/globales

Les approches macroscopiques ne tiennent pas compte des mécanismes d'endommagement mais permettent de prédire le nombre de cycles N_f à partir duquel intervient la rupture sous un chargement de fatigue fixe et donné. Ces données sont basées sur l'utilisation des courbes de WÖHLER, appelées aussi courbes S-N ou courbes d'endurance.

Les courbes de WÖHLER, développées initialement pour les matériaux métalliques, permettent de déterminer la durée de vie N_f (nombre de cycles à rupture) en fonction de l'amplitude de la sollicitation cyclique uni-axiale, pour un rapport de

3. Également appelées courbes S-N ou courbes d'endurance

charge $R = \sigma_{min}/\sigma_{max}$ et une fréquence f fixés (FIG. 2.28). Ces courbes sont obtenues par des essais de fatigue uni-axiale sous chargements cycliques d'amplitude constante.

Ces courbes peuvent être obtenues par l'utilisation du modèle de PALMGREEN (ou modèle de BASQUIN). Ce modèle est linéaire en échelle bi-logarithmique dans le repère $(\log \sigma, \log N)$ (EQ. 2.5).

$$\log N = A \log \sigma + B \quad (2.5)$$

D'une manière générale, l'obtention de ces courbes nécessite un grand nombre d'essais dans la mesure où il faut une identification par type de chargement. En d'autres termes chaque identification est faite pour un triplet (R, f, σ_{max}) donné, pour un matériau donné et pour une séquence donnée. Par conséquent, ce modèle ne permet pas de chargements complexes et ne peut être appliqué dans le cas d'une structure complexe.

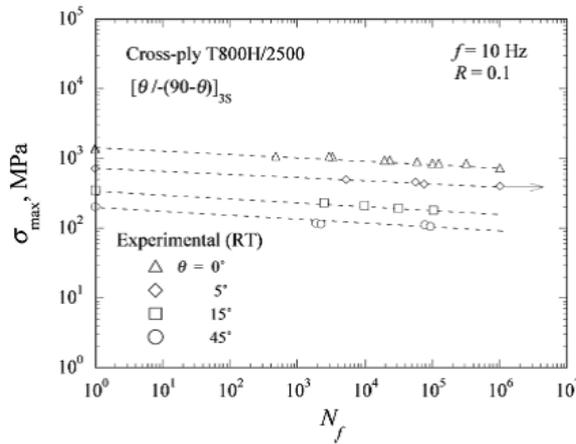


FIGURE 2.28 - Courbes de WÖHLER d'un composite stratifié à plis croisés pour différentes orientations [Kawai and Honda, 2008]

2.7.1.2 Utilisation d'un critère de rupture

Un des premiers critères de fatigue pour les matériaux composites fut proposé par HASHIN et ROTEM [Hashin and Rotem, 1977]. Ils font alors la distinction entre la rupture de fibres (EQ. 2.6) et la fissuration de la matrice (EQ. 2.7)

$$\sigma_A = \sigma_A^u \quad (2.6)$$

$$\left(\frac{\sigma_T}{\sigma_T^u}\right)^2 + \left(\frac{\tau}{\tau^u}\right)^2 = 1 \quad (2.7)$$

où σ_A et σ_T sont respectivement les contraintes dans l'axe des fibres et perpendiculaires aux fibres, τ est la contrainte de cisaillement, σ_A^u , σ_T^u et τ^u sont respectivement les contraintes ultimes en traction axiale, traction dans le sens transverse et en cisaillement. Là encore, les contraintes ultimes sont identifiées pour un triplet $(\sigma, R,$

N) fixé. Le critère est identifié à l'aide de trois courbes (S-N) obtenues pour des essais de traction uni-axiale cyclique sur un stratifié uni-axial dans les directions hors-axe.

Là encore, le critère ne permet pas de prendre en compte le caractère progressif des dégradations et ne donne pas de sens physique à l'endommagement. Par ailleurs, ce critère n'est valable que pour des composites unidirectionnels avec la condition d'être capable de différencier les deux types d'endommagement au moment de la rupture.

Le principal reproche que l'on peut faire aux différentes approches que nous venons de présenter réside dans le fait qu'elles nécessitent un grand nombre de données expérimentales pour chaque matériau, empilement ou type de chargement. De plus, ces approches sont difficilement extensibles au cas multi-axial. Enfin, elles ne donnent aucun sens physique à l'endommagement et occultent le caractère progressif de ce dernier. En revanche, ces approches ont l'avantage d'être très simples à mettre en oeuvre et nécessitent très peu d'informations sur les mécanismes d'endommagement.

2.7.2 Approches phénoménologiques

2.7.2.1 Rigidité résiduelle

Les modèles basés sur l'utilisation de la rigidité résiduelle visent à décrire la dégradation des propriétés élastiques d'un matériau soumis à un chargement de fatigue.

SIDOROFF et SUBAGIO [Sidoroff and Subagio, 1987] proposent un modèle uni-axial développé dans le cadre des matériaux composites unidirectionnels chargés dans la direction des fibres. Le modèle est écrit en déformations, ils introduisent une variable d'endommagement D et séparent les domaines de la traction et de la compression.

$$\sigma_{11} = E(D)\varepsilon_{11} \quad (2.8)$$

$$E(D) = E_0(1 - D) \quad (2.9)$$

$$\frac{dD}{dN} = \begin{cases} \frac{a \cdot (\Delta\varepsilon_{11})^c}{(1 - D)^b} & \text{en traction} \\ 0 & \text{en compression} \end{cases} \quad (2.10)$$

où $D = 1 - \frac{E}{E_0}$, avec E_0 le module d'YOUNG longitudinal de matériau non endommagé, a , b et c trois constantes caractéristiques du matériau à identifier, σ et ε respectivement la contrainte et la déformation uni-axiales et $\Delta\varepsilon$ l'amplitude de la déformation. Ils identifient le modèle par un essai de flexion 3 points. Le paramètre a joue le rôle d'un facteur d'échelle. Il est identifié par lissage de la courbe représentant l'évolution de la rigidité $\frac{E}{E_0}$ en fonction de $\frac{E}{E_{90}}$ où E_{90} correspond à la valeur de E pour une chute de rigidité de 10%. Le paramètre b contrôle le processus de dégradation et enfin c est identifié par lissage de la courbe $\sigma_{max} = f(N_{90})$.

La modélisation qu'ils proposent ne permet pas de renseigner sur l'état d'endommagement du matériau, de plus elle ne permet pas de prendre en compte l'influence du rapport de charge R et de la fréquence f .

Cette approche est reprise par la suite par d'autres auteurs et adaptée afin d'être pilotée en contraintes et non en déformations. Ainsi, VIELLEVIGNE, JEULIN, RENARD et SICOT [Viellevigne et al., 1997] définissent un taux d'évolution de l'endommagement sous la forme :

$$\frac{dD}{dN} = K_d \frac{\sigma_{11}^m}{(1-D)^n} \quad (2.11)$$

où σ_{11} est la contrainte maximale appliquée au stratifié, m et n des paramètres fixés identifiés pour des valeurs fixées de R et f et K_d un paramètre qui dépend de la dispersion. Enfin, ils considèrent que l'endommagement n'évolue pas en compression.

Enfin, KAWAI et TANIGUCHI [Kawai, 1999][Kawai and Taniguchi, 2006], modifient le modèle et l'applique au cas de composites unidirectionnels à fibres de carbone sollicités en-dehors de leurs axes.

$$\frac{dD}{dN} = K \frac{(\sigma_{MAX}^*)^n}{(1-D)^k} \quad (2.12)$$

où K , n et k sont des constantes qui dépendent du matériau, σ_{MAX}^* est défini tel que :

$$\sigma_{MAX}^* = MAX \left\{ \sqrt{\left(\frac{\sigma_{11}}{X}\right)^2 - \frac{\sigma_{11}\sigma_{22}}{X^2} + \left(\frac{\sigma_{22}}{Y}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{12}}{S}\right)^2} \right\} \quad (2.13)$$

avec X , Y et S les résistances à la rupture longitudinale, transverse et en cisaillement.

PHILIPPIDIS et VASSILOPOUDOS [Philippidis and Vassilopoulos, 1999], pour des stratifiés verre/époxy, proposent une loi normalisée de chute de rigidité qu'ils comparent aux approches basées sur l'utilisation des courbes S-N.

$$\frac{E_N}{E_1} = 1 - K \left(\frac{\Delta\sigma_{11}}{E_0} \right)^c \frac{N}{N_f} \quad (2.14)$$

où E_1 est la rigidité du matériau après 1 cycle, E_0 celle du matériau sain et E_N est la rigidité du matériau après N cycles. $\Delta\sigma_{11}$ est l'amplitude de la contrainte appliquée et c et K des constantes à identifier. L'évolution de la dégradation de la rigidité du matériau ne dépend que de l'amplitude de la contrainte appliquée, or on observe expérimentalement que la contrainte maximale a une influence non négligeable sur l'endommagement. Enfin, là encore, le modèle ne renseigne pas sur l'état d'endommagement du matériau mais uniquement sur la dégradation des propriétés mécaniques.

2.7.2.2 Résistance résiduelle

Le concept de résistance résiduelle a été développé dans de nombreux travaux. Citons ceux de [Reifsnider and Stinchcomb, 1986][Daniel and Charewicz, 1986] ou encore [Spearing and Beaumont, 1992]. Il est repris entre autres par SHOKRIEH et LESSARD

[Shokrieh and Lessard, 1997] qui proposent un modèle uni-axial basé sur celui proposé initialement par HALPIN, JERINA et JOHNSON [Halpin et al., 1973]. Ils considèrent dans leur étude que la résistance résiduelle $R_e(N)$ est une fonction monotone décroissante du nombre de cycles N . Ils prennent la loi d'évolution de la résistance résiduelle en fonction du nombre de cycles sous la forme suivante :

$$\frac{dR_e(N)}{dN} = -\frac{A(\sigma_{11}^{max})}{n[R_e(N)]^{m-1}} \quad (2.15)$$

où $A(\sigma_{11}^{max})$ est une fonction de la contrainte maximale σ_{11}^{max} et m une constante.

Il convient d'évoquer également les approches probabilistes proposées par CHOU et CROMAN [Chou and Croman, 1979] ou encore WHITNEY [Whitney, 1981].

Contrairement aux approches basées sur la rigidité résiduelle, la détermination de la résistance résiduelle impose la destruction de l'échantillon testé. Il est alors extrêmement difficile, voire impossible de comparer l'état d'endommagement de deux échantillons différents. De plus, ces modèles ont été développés dans le cas uni-axial et ne permettent pas de prendre en compte le cas d'une structure soumise à des chargements complexes.

2.7.3 Approches visant à décrire l'évolution de l'endommagement

L'endommagement de fatigue dans les matériaux composites correspond à la naissance et la coalescence de micro-fissures conduisant à la formation de macro-fissures. Or bien que certains modèles présentés jusque là permettent de rendre compte de l'aspect progressif des dégradations, aucun n'est en mesure de décrire l'évolution du matériau soumis à un chargement de fatigue. On présente donc dans ce qui suit un deuxième type d'approche dont l'objectif est la description de l'évolution de l'endommagement.

Du fait de sa simplicité, la loi de MINER [Miner, 1945] est sans doute la plus connue et la plus utilisée des bureaux d'étude. Il s'agit, du fait même de sa construction, d'une loi de cumul de l'endommagement linéaire, c'est à dire qu'elle considère qu'un chargement faible suivi d'un chargement fort provoque le même effet qu'un chargement fort suivi d'un chargement faible (FIG. 3.74). Il est toutefois important de préciser que cela n'est évidemment pas toujours vérifié expérimentalement.

REMARQUE

Bien que la règle de cumul soit linéaire, cette dernière peut s'appliquer également à des lois d'évolution non linéaires à condition qu'il existe une relation biunivoque entre la variable d'endommagement et la fraction de vie écoulée $\frac{N}{N_R}$.

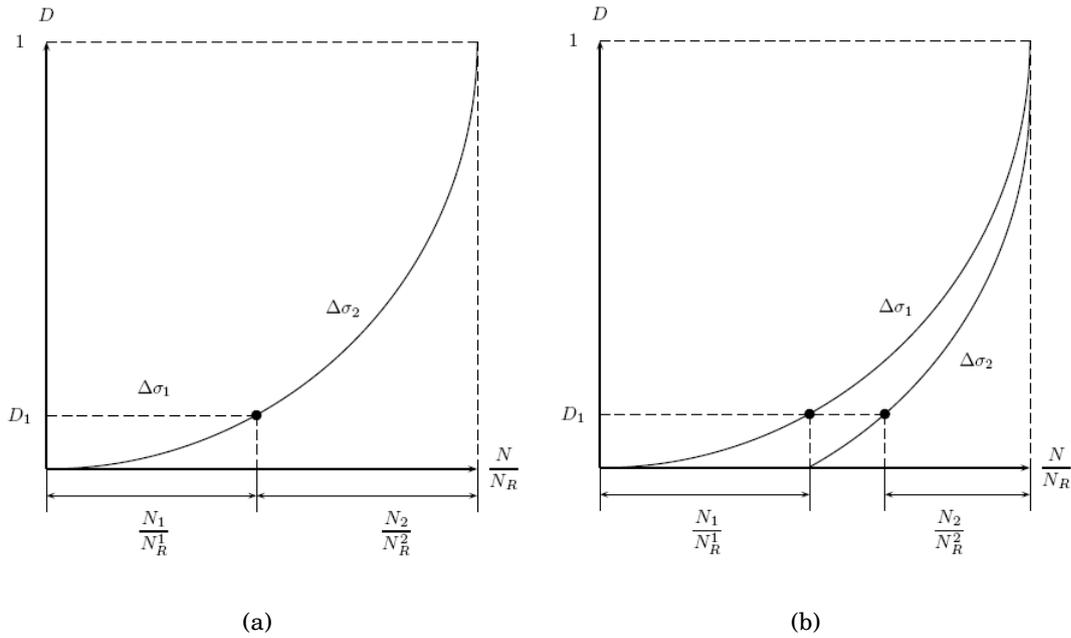


FIGURE 2.29 - Loi de cumul de l'endommagement : (a) cumul linéaire, (b) cumul non linéaire

MINER définit donc une variable d'endommagement supposée égale à la fraction de vie définie par (EQ. 2.16) :

$$D = \frac{N}{N_R} \quad (2.16)$$

où N est le nombre de cycles effectués et N_R le nombre de cycles à rupture pour le chargement considéré.

Ainsi, pour une sollicitation de fatigue constituée de k niveaux différents (FIG. 2.30), l'endommagement généré vaut (EQ. 2.17) :

$$D = \sum_{i=1}^k \frac{N_i}{N_{Ri}} = \sum_{i=1}^k r_i \quad (2.17)$$

où N_i est le nombre de cycles effectués avec le chargement i , pour lequel le nombre de cycles à rupture est N_{Ri} . Il apparait clairement que la loi de Miner est linéaire dans la mesure où elle découle d'une sommation linéaire des fractions de vie $r_i = \frac{N_i}{N_{Ri}}$.

La rupture du matériau est supposée atteinte lorsque la somme D vaut une valeur critique D_c égale à 1. La fraction de vie résiduelle r_k au niveau p de chargement, après $k - 1$ cycles de sollicitations s'écrit alors (EQ. 2.18) :

$$r_k = \frac{N_k}{N_{Rk}} = 1 - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{N_i}{N_{Ri}} \quad (2.18)$$

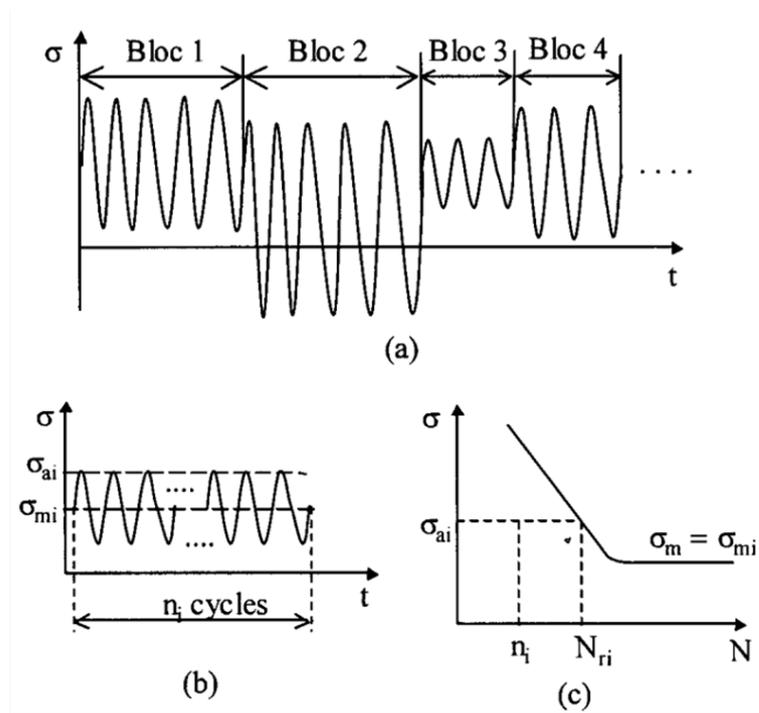


FIGURE 2.30 - (a) Chargement composé de plusieurs blocs de sollicitations, (b) description du i -ème bloc, (c) courbe S-N correspondante [Miner, 1945]

Dans le cas d'un chargement à deux niveaux de contrainte, l'équation Eq. 2.18 donne : $r_2 = 1 - r_1$, où r_1 et r_2 sont les fractions de vies respectivement aux niveaux 1 et 2. La représentation graphique de la loi de MINER, dans le repère des fractions de vie (r_1, r_2) est une droite, appelée droite de MINER indépendante du niveau de la sollicitation (FIG. 7.4)

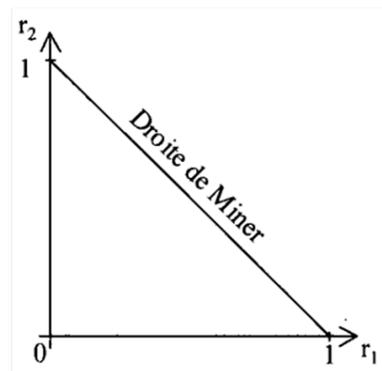


FIGURE 2.31 - Droite de MINER dans le cas d'un chargement à deux niveaux [Miner, 1945]

La loi de Miner est simple d'utilisation, elle n'a besoin d'aucun paramètre particulier à déterminer : elle nécessite simplement la connaissance de la courbe S-N du matériau. Cependant, la loi ne tient pas compte de l'historique du chargement : c'est la raison pour laquelle elle induit un cumul linéaire. Ainsi, elle ne prend pas

en compte l'effet de l'endommagement des cycles d'amplitude inférieure à la limite d'endurance du matériau même s'ils sont appliqués après que l'endommagement soit initié par un ou plusieurs cycles d'amplitude supérieure à cette limite. Enfin, elle ne donne pas un sens physique à l'endommagement.

2.7.3.1 Approches basées sur la mécanique de la rupture

Ce type d'approche est en général utilisé pour les matériaux métalliques pour lesquels une unique fissure peut s'initier, se propager et conduire à la ruine de la structure. Dans le cas des matériaux composites cette approche est modifiée afin de pouvoir prendre en compte l'apparition de multiples fissures.

CARON et EHRLACHER [Caron and Ehrlacher, 1997a],[Caron and Ehrlacher, 1997b] proposent dans leur travaux d'utiliser la résistance résiduelle R_e comme indicateur de l'endommagement. Ils proposent une loi de décroissance de la résistance résiduelle du pli transverse d'un stratifié $(0^\circ/90^\circ)_s$ au cours d'un cycle de sollicitations d'amplitude $(\Delta\sigma)$ et de rapport de charge R . Par un calcul élastique sur une cellule fissurée, ils utilisent une loi de PARIS qui donne la vitesse de fissuration en fonction du facteur d'intensité de contrainte. Il font l'hypothèse que la croissance des fissures est pilotée seulement par l'amplitude des contraintes $(\Delta\sigma)$ et pas par le rapport de charge R . Ils aboutissent ainsi à une loi d'évolution de la résistance résiduelle en fonction du nombre de cycles sous la forme (EQ. 2.19) :

$$\frac{dR_e}{dN} = g(R_e, \Delta\sigma_{11}) = -CR_e^{3-\eta}\Delta\sigma_{11}^\eta \geq 0 \quad (2.19)$$

où C et η sont les paramètres de la loi de PARIS. Ils sont identifiés expérimentalement par un lissage de la courbe représentant la probabilité de rupture du pli à 90° en fonction de R_e par une loi de type WEIBULL. Ils en déduisent une expression de la durée de vie résiduelle N_r d'un matériau de résistance résiduelle initiale R_e^{init} soumis au chargement cyclique défini par $(\Delta\sigma_{11}, R)$ (EQ. 2.20)

$$N_r = \int_{R_e^{\text{inti}}}^{\sigma_{11}} \frac{1}{g(R_e^{\text{init}}, \Delta\sigma_{11}, R)} dR_e \quad (2.20)$$

Ce modèle se limite au cas des composites de type $(0_n^\circ/90_m^\circ)_s$ soumis à un chargement de traction cyclique uni-axiale. De plus, la loi de décroissance de la résistance résiduelle est écrite en fonction de paramètres extérieurs $(\Delta\sigma, R)$. Or, une telle description du chargement ne serait pas suffisante dans le cas d'une structure dont la géométrie entrainerait un état de contrainte localement multi-axial.

FENG, GILCHRIST, KINLOCH et MATTHEWS [Feng et al., 1997] modélisent la croissance de la fissuration intralaminaire sous chargements cycliques dans les composites à fibres de carbone. Une analyse expérimentale leur permet de montrer que la propagation des fissures en mode I peut être modélisée par une loi de PARIS modifiée de la forme :

$$\frac{dA}{dN} = D \cdot G_{max}^n \quad (2.21)$$

où A la surface du dommage due à la fissuration intra-laminaire, G_{max}^n est le taux de restitution d'énergie maximum sur un cycle de fatigue et n et D des constantes matériaux.

HÉNAFF-GARDIN, LAFFARIE-FRENOT et GOUPILLAUD [Henaff-Gardin et al., 1997], [Henaff-Gardin and Lafarie-Frenot, 2002] proposent de caractériser l'endommagement par la surface fissurée. Ainsi, ils proposent une loi de la forme :

$$\frac{dS}{dN} = A \left(\frac{G_I}{G_{max}} \right)^n \quad (2.22)$$

où S représente la surface fissurée, G_I le taux de restitution d'énergie correspondant à l'énergie libérée lors de la création de la surface fissurée considérée en mode I, G_{max} la valeur du taux de restitution d'énergie lors de la création de la première fissure. Enfin, A et n sont des constantes déterminées expérimentalement pour une fréquence f et un rapport de charge R donnés.

2.7.3.2 Approches utilisant un formalisme thermodynamique

Les méthodes présentées dans ce qui suit s'appuient sur une description de l'état du matériau au travers l'utilisation de variables d'état. Ce type de description impose de prendre en compte l'aspect progressif des dégradations.

Approches basées sur la mécanique de l'endommagement

LADEVÈZE, LE DANTEC et ALLIX [Ladevèze, 1986], [Ladevèze and LeDantec, 1992] et [Allix and Ladevèze, 1992] utilisent la Mécanique de l'Endommagement pour étudier le comportement des composites stratifiés. Ils proposent un modèle formulé en contraintes, développé dans le cadre de la thermodynamique des processus irréversibles. Ils représentent l'endommagement dans les plis unidirectionnels par deux variables scalaires représentant respectivement la dégradation du module d'élasticité transverse E_t et du module de cisaillement plan G_{lt} . De plus, ils tiennent compte du caractère unilatéral de l'endommagement. Ainsi, ils définissent les deux variables scalaires de la façon suivante :

$$\begin{cases} G_{lt} = G_{lt}^0(1-d) & d \in [0, 1] \\ E_t = E_t^0(1-d') & \text{pour } \sigma_t > 0 \quad d' \in [0, 1] \\ E_t = E_t^0 & \text{pour } \sigma_t < 0 \end{cases} \quad (2.23)$$

Les variables d'endommagement sont supposées constantes dans l'épaisseur du pli et sont associées à des fissures parallèles à la direction des fibres. L'énergie élastique pour un pli endommagé peut donc s'écrire, à l'échelle mésoscopique, sous l'hypothèse des contraintes planes, où les indices « l et t » désignent respectivement les directions des fibres et transverses :

$$E_D = \frac{1}{2} \left[\frac{\langle \sigma_l \rangle_+^2}{E_l^0} + \frac{\varphi(\langle \sigma_l \rangle_-)}{E_l^0} - \frac{\nu_{lt} \sigma_l \sigma_t}{E_1^0} + \frac{\langle \sigma_t \rangle_+^2}{E_t^0(1-d')} + \frac{\langle \sigma_t \rangle_-^2}{E_t^0} + \frac{(\tau_{lt})^2}{2G_{lt}^0(1-d)} \right] \quad (2.24)$$

avec :

$$\begin{cases} \langle a \rangle_+ = a & \text{si } a \geq 0 & \text{sinon } \langle a \rangle_+ = 0 \\ \langle a \rangle_- = a & \text{si } a \leq 0 & \text{sinon } \langle a \rangle_- = 0 \end{cases} \quad (2.25)$$

Les forces thermodynamiques associées aux variables d'endommagement sont définies telles que :

$$Y_d = \frac{\partial E_D}{\partial d} = \frac{1}{2} \frac{\langle \langle \sigma_{lt} \rangle \rangle^2}{G_{lt}^0 (1-d)^2} \quad (2.26)$$

$$Y_{d'} = \frac{\partial E_D}{\partial d'} = \frac{\langle \langle \langle \sigma_t \rangle_+ \rangle \rangle^2}{E_t^0 (1-d')^2} \quad (2.27)$$

où $\langle \langle \dots \rangle \rangle$ signifie la moyenne dans l'épaisseur du pli.

Enfin, ils définissent les lois d'évolution suivantes :

$$\begin{aligned} d &= \frac{\langle Y(t) - Y_0 \rangle}{Y_c} & \text{si } d < 1 \text{ et } Y < Y_s \\ d' &= \frac{\langle Y'(t) - Y'_0 \rangle_-}{Y'_c} \end{aligned} \quad (2.28)$$

Ce modèle, par la suite, a été étendu au cas de la fatigue. Ainsi, PAYAN et HOCHARD [Payan, 2004] [Payan and Hochard, 2002] reprennent cette approche en ajoutant l'hypothèse d'un endommagement cumulé, c'est-à-dire que l'évolution des variables d'endommagement dépend à la fois des chargements monotones et des chargements cycliques. L'hypothèse d'un endommagement cumulé permet de décrire l'état du matériau indépendamment du chargement qu'il a subi. Ainsi ils décomposent les variables d et d' qui représentent l'endommagement global en deux parties couplées pilotées par la partie statique (le premier quart de cycle de la sollicitation) et la partie cyclique (le reste de la sollicitation) du chargement.

$$d = d_S + d_F \quad \text{et} \quad d' = d'_S + d'_F \quad d \quad \text{et} \quad d' \in [0, 1] \quad (2.29)$$

Ils proposent une loi d'évolution de l'endommagement en fatigue faisant intervenir les effets des chargements maximum et de l'amplitude du chargement.

$$\begin{aligned} \frac{\partial d_f}{\partial N} &= c \left\langle (Y_s - Y_m)^\alpha Y_s^\beta - Y_{0f} \right\rangle \\ d'_f &= b' d_f \end{aligned} \quad (2.30)$$

$$\text{avec } Y_s(t) = \sup_{t' \in \text{cycle}(t)} \sqrt{Y(t')} \quad \text{et} \quad Y_m(t) = \min_{t' \in \text{cycle}(t)} \sqrt{Y(t')}$$

Les coefficients c , α , β et Y_{0f} sont des caractéristiques du matériau. Y_{0f} correspond à la limite de fatigue du matériau, c'est à dire le seuil d'endurance en dessous duquel le matériau ne s'endommage pas sous une sollicitation de fatigue.

SEDRAKIAN et *et al.* [Sedrakian et al., 1997] [Sedrakian et al., 2002] reprennent la même approche mais celle-ci diffère du modèle de LADEVÈZE en ce sens que le

potentiel est écrit en déformations et non en contraintes de manière à simplifier l'intégration numérique. Ils définissent trois variables d'endommagement d_{11} , d_{22} et d_{33} respectivement associées à la rupture de fibres, la fissuration transverse et la décohésion fibre/matrice. Ils définissent le potentiel thermodynamique sous la forme :

$$\varphi = \frac{\alpha_{11}}{1 + \beta_{11}} Y_{11}^{\beta_{11}} + \frac{\alpha_{22}}{1 + \beta_{22}} Y_{22}^{\beta_{22}} + \frac{\alpha_{12}}{1 + \beta_{12}} Y_{12}^{\beta_{12}} \quad (2.31)$$

où les variables α_i et β_i sont des fonctions qui dépendent des paramètres expérimentaux (rapport de charge R , fréquence f , contrainte maximum σ_{11}^{max}). Y_{11} , Y_{22} , Y_{12} sont les variables thermodynamiques définies par :

$$Y_{ij} = \frac{\partial W_e}{\partial d_{ij}} \quad (2.32)$$

avec W_e l'énergie élastique de déformation. Les lois d'évolutions de l'endommagement sont alors définies par :

$$\frac{d(d_{ij})}{dN} = \frac{\partial \varphi(\sigma, R, f)}{dY_{ij}} \quad (2.33)$$

Les lois d'évolutions sont ensuite identifiées à l'aide d'essais de traction cyclique sur des éprouvettes de types $(0^\circ/90^\circ)_s$ et $(\pm 45^\circ)_s$.

Remarquons que les variables scalaires utilisées dans ces approches n'ont pas de réel sens physique dans la mesure où ils n'utilisent pas de grandeurs caractéristiques du défaut observées expérimentalement. Cette dernière remarque nous conduit à un dernier type d'approches basées sur une description physique des défauts.

Approches basées sur la description physique du défaut

Nous l'avons dit précédemment, TALREJA [Talreja, 1985] a été le premier développer dans ses travaux une approche directionnelle de l'endommagement dans les matériaux composites. Il a développé, rappelons le, dans le cadre de la thermodynamique des processus irréversibles, une approche physique de l'endommagement (fissuration) visant à décrire les fissures par un doublet scalaire/vecteur. Chaque fissure est alors caractérisée par la normale à son plan et par sa longueur.

Son approche est reprise par THIONNET et ses co-auteurs [Thionnet et al., 2002] [Thionnet and Renard, 1993] et appliquée à l'échelle du pli ce qui lui donne l'avantage d'un caractère intrinsèque au pli et lui permet de décrire le comportement d'un stratifié quelconque. Les fissures correspondent à des discontinuités de déplacement suivant les composantes normales, tangentielles ou intermédiaires. Ainsi, ils définissent deux variables internes m et r qui traduisent la géométrie évolutive des fissures. La variable m représente le mode de sollicitation alors que r permet de quantifier le déplacement relatif des lèvres de fissures (FIG. 2.32). La quantité d'endommagement est caractérisée par la densité de fissures représentée par la variable α .

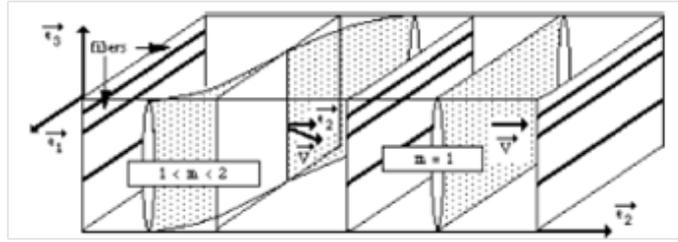


FIGURE 2.32 - Géométrie des fissures

Ils définissent un critère d'endommagement fonction de l'état local de déformation maximal ε qu'ils considèrent comme le paramètre le plus influant sur la fissuration, la variable d'endommagement α , les variables m et r ainsi que le nombre de cycles N :

$$c(\varepsilon, \alpha, m, r) = A^c(\alpha, m, r, N) - A(\varepsilon, \alpha, m, r) \leq 0 \quad (2.34)$$

où $A^c(\alpha, m, r, N)$ représente la fonction seuil d'endommagement qui est une propriété du matériau et doit être identifiée expérimentalement. L'influence des paramètres caractéristiques du chargement R et f interviennent uniquement dans les coefficients de la fonction seuil qui sera détaillée dans la suite. L'identification de la fonction seuil nécessite la donnée de courbes expérimentales donnant la densité de fissures en fonction du chargement appliqué. La dépendance du seuil vis-à-vis des variables m permet de tenir compte du fait que l'énergie nécessaire pour créer une fissure dépend du mode de chargement. Il est nécessaire d'avoir des renseignements expérimentaux où la densité de fissures est relevée pour des plis soumis à des valeurs différentes de m . Ensuite, par une procédure inverse, en donnant l'évolution des densités de fissures expérimentales, on calcule la variable A et on écrit qu'au cours du processus d'endommagement, on a $A = A^c$. Un lissage de ces résultats fournit la fonction $A^c(\alpha, m)$.

Ils obtiennent la loi d'évolution de l'endommagement en appliquant l'hypothèse de cohérence à ce critère :

$$d\alpha = \frac{\frac{\partial^2 \psi(\varepsilon, \alpha, m, r)}{\partial \alpha \partial \varepsilon} d\varepsilon - \frac{\partial A^c(\alpha, m, r, N)}{\partial N} dN}{\frac{\partial A^c(\alpha, m, r, N)}{\partial \alpha} - \frac{\partial^2 \psi(\varepsilon, \alpha, m, r)}{\partial \alpha^2}} \quad (2.35)$$

où ψ est la fonction énergie libre.

Cette approche présente l'avantage d'être multi-axiale et de traduire le caractère unilatéral du dommage c'est-à-dire qu'elle tient compte du fait que lors du passage en compression les fissures se referment et le matériau retrouve sa rigidité initiale. En revanche, la présence du nombre de cycles N dans la fonction seuil A^c est incorrecte dans la mesure où N n'est pas une variable d'état.

2.8 Discussion

Nous avons présenté dans ce chapitre un certain nombre de modèles d'endommagement en fatigue que nous avons classés en trois catégories principales :

- les approches visant à prédire la durée de vie :

Ces approches, souvent très simples à mettre en oeuvre, sont appliquées à l'échelle du stratifié, ne tiennent pas compte du mécanisme d'endommagement et par conséquent ne requièrent aucune connaissance du phénomène. Enfin, elles sont généralement basées sur l'introduction d'un critère de fatigue, inspiré des critères de rupture en statique, ou sur l'utilisation des courbes de WÖHLER qui demandent un grand nombre d'essais expérimentaux. De façon générale, ces approches ne permettent pas de chargements complexes et sont difficilement applicables au cas d'une structure complexe.

- les approches phénoménologiques ;

Ces approches utilisent généralement le concept de résistance ou rigidité résiduelle comme indicateur de l'endommagement. Elles ne donnent pas de renseignements sur l'état d'endommagement mais décrivent seulement la dégradation des propriétés mécaniques.

- les approches prenant en compte le caractère progressif du dommage.

Le principal avantage de ces méthodes réside dans le fait qu'elles permettent de suivre l'évolution de l'endommagement. Dans ce cadre, de part sa simplicité d'utilisation, la loi de MINER, qui propose un cumul linéaire de l'endommagement, reste la plus utilisée. Cependant elle présente l'inconvénient de ne pas tenir compte de l'histoire du chargement subie par le matériau.

Les autres modèles présentés se classent en deux catégories : les modèles basés sur une approche de type Mécanique de la Rupture qui décrivent l'amorçage et la propagation des fissures et les modèles utilisant un formalisme thermodynamique s'appuyant sur une description du matériau au travers l'utilisation de variables d'état.

L'ensemble de ces modèles, même s'ils admettent pour certains un état de contrainte multi-axial, sont écrits et identifiés dans le cas de sollicitations uni-axiales, ce qui est rarement le cas dans une structure réelle. Par ailleurs, ils font intervenir explicitement la variable N (nombre de cycles) dans la loi d'évolution de l'endommagement ce qui implique de pouvoir considérer au mieux un chargement à amplitude, valeur moyenne et fréquence constante par bloc ce qui n'est pas toujours représentatif de la réalité. De plus, on peut s'interroger sur la définition d'un cycle dans une structure. En effet, il s'agit d'une grandeur externe et macroscopique. Or, il semble légitime de penser que dans une structure à fort gradient de contraintes, tous les points de la structure ne sont pas soumis aux mêmes cycles de sollicitations.

Chapitre 3

Étude expérimentale de l'endommagement dans les stratifiés

La connaissance s'acquiert par l'expérience, tout le reste n'est que de l'information.

Albert Einstein

Sommaire

3.1 Introduction	49
3.2 Choix des stratifications	50
3.3 Élaboration des stratifiés	52
3.3.1 Préparation des échantillons	52
3.3.2 Observations microscopiques	54
3.3.2.1 Distribution des fibres	54
3.3.2.2 Les défauts d'élaboration	55
3.4 Dispositif expérimental	55
3.4.1 Machines d'essais mécaniques et instrumentation des éprouvettes	55
3.4.2 Les moyens d'observation	57
3.4.3 Montage d'observation optique in-situ	58
3.5 Comportement mécanique du matériau unidirectionnel	60
3.5.1 Protocole expérimental	60
3.5.2 Essais de traction uni-axiale dans l'axe des fibres	61
3.5.3 Essais de traction uni-axiale dans le sens transverse	64
3.5.4 Essais de traction uni-axiale hors-axe	65

3.5.5	Conclusion	70
3.6	La fissuration intra-laminaire : aspects qualitatifs	71
3.6.1	Des chargements spécifiques	71
3.6.2	Caractéristiques physiques de la fissuration	73
3.6.2.1	Un réseau quasi-périodique	73
3.6.2.2	Influence de la micro-structure	73
3.6.2.3	Propagation des fissures	75
3.6.2.4	Fissuration des plis externes	76
3.6.2.5	Ordre d'apparition des fissures	76
3.6.3	Influence de l'épaisseur du pli fissuré	77
3.6.4	Interaction fissuration/délamination	79
3.7	Comportement du stratifié et analyse de l'endommagement sous sollicitations quasi-statiques	81
3.7.1	Introduction	81
3.7.2	Essais de traction quasi-statique monotone sur stratifiés	81
3.7.3	Analyse de la fissuration sous chargements quasi-statiques	83
3.7.3.1	Cinétiques de fissuration et chutes de rigidités	83
3.7.3.2	Influence de l'épaisseur de la couche fissurée	86
3.8	Comportement du stratifié et analyse de l'endommagement en fatigue	90
3.8.1	Introduction	90
3.8.2	Analyse de l'évolution de l'endommagement	91
3.8.2.1	Influence du niveau de contrainte maximum	91
3.8.2.2	Analyse des chutes des rigidités longitudinales macroscopiques	94
3.8.2.3	Influence de l'épaisseur du pli fissuré	99
3.8.3	Comparaison quasi-statique/fatigue	106
3.8.4	Essais à deux niveaux de chargement	108
3.8.5	Cumul de l'endommagement	114
3.9	Conclusion	117

3.1 Introduction

Nous l'avons montré dans l'analyse de la littérature faite au chapitre précédent (CHAP. 2), l'endommagement des composites stratifiés est un phénomène complexe qui met en jeu plusieurs mécanismes. Aussi, nous faisons le choix d'axer notre étude sur un seul mécanisme : **la fissuration intra-laminaire**.

Bien que n'étant pas catastrophique pour l'intégrité d'une structure, la fissuration peut être soit à l'origine, soit être un facteur accélérant pour d'autres types de défauts tels que le délaminage ou les ruptures de fibres qui eux s'avèrent beaucoup plus nuisibles pour la tenue mécanique d'une structure [Thionnet, 1991] [Huchette et al., 2009]. Dans ce cadre, il devient important de pouvoir prédire l'apparition et l'évolution de la fissuration.

Aussi, nous proposons dans ce chapitre, une étude expérimentale de la fissuration sous chargements quasi-statiques et cycliques. Les objectifs que nous nous fixons sont les suivants :

1. obtenir des renseignements qualitatifs ;

L'idée est ici d'étudier la géométrie des fissures, leur orientation, leur mode de propagation ou de multiplication, l'historique d'apparition ... Ces observations sont capitales dans la mesure où nous souhaitons écrire un modèle basé sur les mécanismes physiques qui gouvernent l'endommagement.

2. mettre en évidence les interactions entre les différents types d'endommagement ;

Nous nous attacherons entre autre à déterminer quel est le rôle de la fissuration dans le processus d'apparition et la propagation du délaminage.

3. identifier les différents facteurs qui influent sur la cinétique de fissuration ;

Il s'agit ici d'étudier l'influence du niveau de chargement, de l'épaisseur de la couche fissurée, du mode d'ouverture des fissures ...

4. quantifier l'endommagement par fissuration, son évolution et l'influence de l'apparition de fissures sur les propriétés mécaniques du matériau.

Notre but ultime étant de capitaliser un maximum de renseignements tant d'un point de vue qualitatif que quantitatif qui nous permettront de dégager les principales caractéristiques et paramètres à prendre en compte lors de la modélisation. Ainsi, les résultats expérimentaux serviront de base à l'écriture et l'identification d'un modèle d'endommagement par fissuration intra-laminaire.

Dans ce qui suit nous commencerons par présenter et justifier l'utilisation des différentes stratifications étudiées. Nous présenterons ensuite les différents protocoles, équipements et essais expérimentaux mis en place pour caractériser le comportement mécanique du pli unidirectionnel et étudier l'endommagement au sein des stratifiés. En outre nous présenterons une technique de détection et de suivi de l'endommagement par une analyse optique in-situ. Un stratifié est un empilement de plusieurs plis, il est donc important de connaître le comportement du pli de base. Aussi, nous présenterons dans un premier temps les essais réalisés sur le pli unidirectionnel avant de proposer les résultats obtenus au cours des essais réalisés sur les stratifiés croisés sollicités en quasi-statique puis en fatigue. Nous présenterons tout d'abord les résultats obtenus d'un point de vue qualitatif qui découlent d'une simple observation visuelle. Nous en dégagerons entre autres les caractéristiques physiques de l'endommagement ou les interactions entre différents mécanismes d'endommagement. Enfin, nous terminerons par les résultats nous permettant de quantifier l'endommagement et notamment de déterminer des cinétiques de fissuration, ou d'évaluer les dégradations des propriétés mécaniques.

3.2 Choix des stratifications

Un composite stratifié est avant tout un empilement de plusieurs plis orientés dans différentes directions dont il est important de connaître le comportement. Pour cela, on réalise des essais de traction quasi-statique sur l'unidirectionnel, dans le sens des fibres, dans le sens transverse et dans les directions hors-axes. Nous utiliserons donc les séquences (0_n°) , (90_n°) , (45_n°) , $(\pm 45_n^\circ)_s$, $(\pm 30_n^\circ)_s$ et $(\pm 20_n^\circ)_s$ (TAB. 3.1). Ces essais servent notamment à l'identification des coefficients de la matrice de rigidité telle qu'elle a été définie par loi de HOOKE généralisée (EQ. 2.1).

Nous nous intéressons ensuite à l'endommagement par fissuration intra-laminaire. Il est bien évident que le choix de stratifications doit se faire en fonction des informations recherchées. L'analyse bibliographique faite au chapitre précédent (CHAP. 2) montre que l'épaisseur et la séquence d'empilement sont deux paramètres directement liés au choix de la stratification et qui ont une grande influence sur la fissuration.

Les séquences $(0_n^\circ/90_m^\circ)_s$, appelées également *cross-plyed*, se prêtent bien à l'étude de la fissuration car elles ont la particularité de s'endommager majoritairement par fissuration intra-laminaire. On parle alors de fissuration transverse. Ce type de séquence permet notamment d'étudier l'influence de l'épaisseur en faisant varier le nombre de plis orientés à 90° tout en fixant le nombre de plis à 0° . Ainsi, nous utiliserons les séquences $(0_3^\circ/90_3^\circ/0_3^\circ)$, $(0_3^\circ/90_6^\circ/0_3^\circ)$ et $(0_3^\circ/90_{12}^\circ/0_3^\circ)$.

La cinétique de fissuration d'un pli diffère en fonction de sa position dans l'empilement, plus particulièrement suivant qu'il se trouve sur les couches intérieures ou dans les couches de peau [Nairn et al., 1993]. Aussi des essais sur la séquence $(90^\circ/0_2^\circ/90^\circ)$ permettent d'étudier la fissuration des couches extérieures.

Enfin, des séquences de type $(0_n^\circ/\pm\theta_m^\circ)_s$ permettent d'étudier l'influence du mode d'apparition des fissures (fissures ouvertes ou cisailées). La séquence $(0_n^\circ/\pm 45_m^\circ)_s$

permet d'avoir des fissures sollicitées majoritairement en cisaillement, alors que la séquence $(0_n^\circ / \pm 55_m^\circ)_s$ est une configuration mixte entre le cisaillement et l'ouverture.

L'ensemble de ces stratifications soumises à un chargement adéquat permettent d'étudier les mécanismes d'endommagement et notamment d'isoler les différents paramètres qui influent sur la cinétique de fissuration. En outre, ils permettent de maîtriser le type d'endommagement, d'étudier l'influence de l'épaisseur, de la position du pli fissuré dans l'empilement et du mode d'apparition des fissures (TAB. 3.2).

Séquences	Informations recherchées
(0_3°)	Module élastique : E_{11} Coefficients de Poisson : ν_{12}, ν_{21} Caractéristiques à rupture : $\sigma_{11R}, \varepsilon_{11R}$
(90_3°)	Module sens transverse : E_{22} Caractéristiques à rupture : $\sigma_{22R}, \varepsilon_{22R}$
(45_3°)	Module de cisaillement : G_{12} Caractéristiques à rupture : $\sigma_{12R}, \varepsilon_{12R}$
$(\pm 20_3^\circ)_s, (\pm 30_3^\circ)_s, (\pm 45_3^\circ)_s$	Comportement hors axes

TABLE 3.1 - *Récapitulatif des stratifications utilisées pour la caractérisation du comportement de l'unidirectionnel*

Séquences	Informations recherchées
$(0_3^\circ/90_3^\circ/0_3^\circ)$	Analyse de la fissuration intra-laminaire Influence de l'épaisseur de la couche fissurée et du niveau de chargement
$(0_3^\circ/90_6^\circ/0_3^\circ)$	
$(0_3^\circ/90_{12}^\circ/0_3^\circ)$	
$(90^\circ/0_2^\circ/90^\circ)$	Influence de la séquence d'empilement
$(0_3^\circ/\pm 45_3^\circ)_s$	Influence du mode de sollicitation
$(0_3^\circ/\pm 55_3^\circ)_s$	

TABLE 3.2 - *Récapitulatif des stratifications utilisées pour l'étude de l'endommagement*

3.3 Élaboration des stratifiés

L'ensemble des stratifiés utilisés dans cette étude ont été élaborés à partir du pré-imprégné fourni par la société STRUCTIL sous la forme d'une bobine dont les principales caractéristiques sont données dans le tableau (TAB. 3.3).

Type de fibre	Masse de fibre	Type de résine	Taux de résine
carbone (HR)	300g/m ²	R367-2	38 %
TR50	±15		±2

TABLE 3.3 - Caractéristiques du pré-imprégné (données fabricant)

3.3.1 Préparation des échantillons

Les différentes stratifications nécessaires pour cette étude ont été élaborées par plaques de 300 × 300 mm² moulées à partir d'empilements de 3 à 18 plis (environ 1 à 6 mm). La polymérisation a été effectuée dans un four autoclave par la société STRUCTIL suivant le cycle (pression,température) donné figure 3.1. L'application d'une pression d'environ 3.7 bars ayant pour but de favoriser la pénétration de l'époxy entre les fibres et d'éliminer l'excédent de résine présent initialement dans le pré-imprégné.

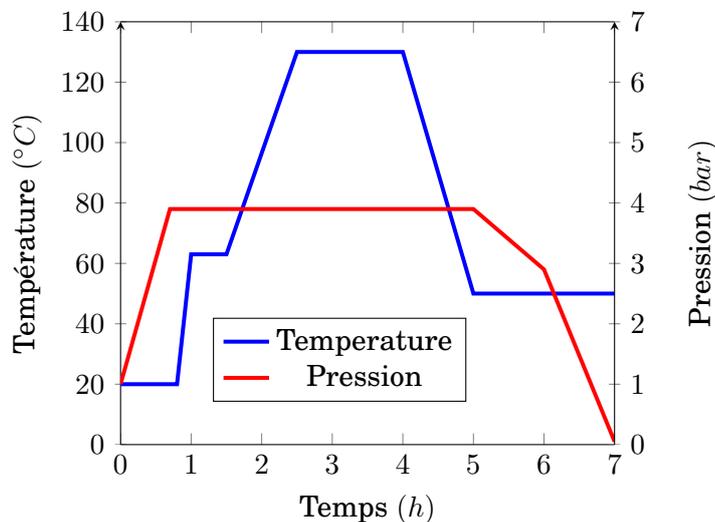


FIGURE 3.1 - Cycle de polymérisation de la résine R367-2

Les éprouvettes sont découpées à la meule diamant dans les plaques ainsi fabriquées. Les découpes sont réalisées dans différentes directions par rapport à l'axe des fibres de manière à obtenir les orientations souhaitées (FIG. 3.2). Enfin pour éviter tout endommagement provoqué par la pression des mâchoires des mors au cours des essais, les éprouvettes sont équipées de talons en composite verre/époxy tel que le

recommande la norme ISO 527-5. Les talons sont collés à l'aide d'une colle époxy bi-composants (Araldite).

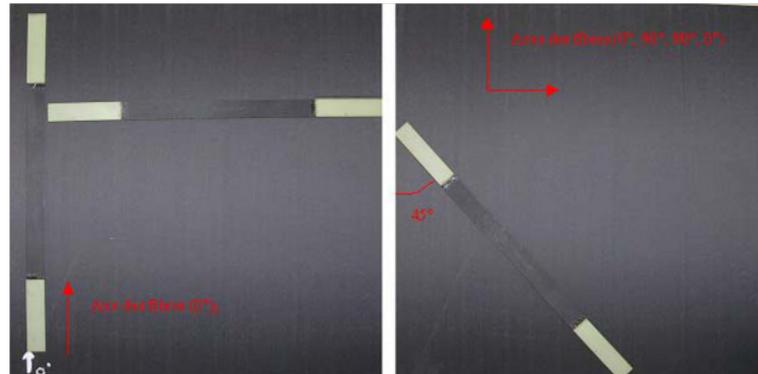


FIGURE 3.2 - Découpe des éprouvettes dans les plaques stratifiées [Blassiau, 2005]

Certaines normes (ASTM D 638 par exemple) préconisent d'utiliser des éprouvettes dites « haltères » ou à section réduite pour favoriser la rupture dans la zone utile lors d'un essai de traction. Toutefois, l'utilisation de ce type de géométrie introduit plusieurs problèmes dans le cas des matériaux composites à fibres continues. D'abord, se pose le problème de l'usinage qui peut sévèrement endommager le matériau [Ghidossi, 2003]. Ensuite, cela soulève de nombreuses interrogations quant aux concentrations de contraintes présentes dans les zones courbes. Finalement, bien que sensibles à toute contrainte parasite qui pourrait favoriser l'initiation de la rupture, les éprouvettes droites semblent le meilleur compromis [Levesque, 2000].

La géométrie et les dimensions des éprouvettes retenues sont présentées sur la figure (FIG. 3.3). La longueur des éprouvettes est de 250 mm tel que le recommande la norme ASTM D 3039 et elle est d'un ordre de grandeur largement supérieur aux autres dimensions ce qui permet de respecter le principe de SAINT-VENANT dans la zone utile de l'éprouvette.

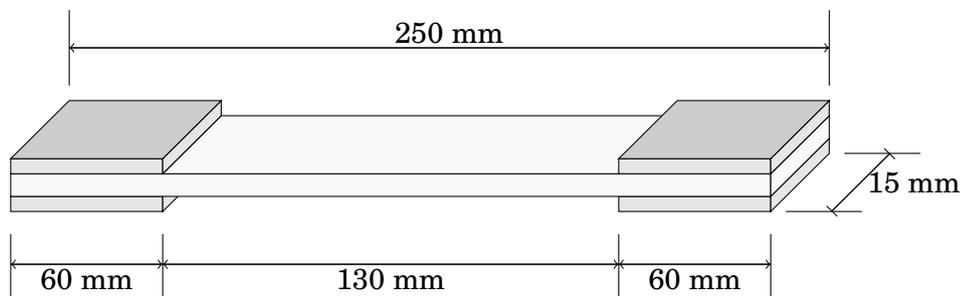


FIGURE 3.3 - Géométrie et dimensions des éprouvettes testées exprimées en mm

3.3.2 Observations microscopiques

3.3.2.1 Distribution des fibres

La figure 3.4 montre le champ poli d'un stratifié de type $(0_3^{\circ}/90_3^{\circ}/0_3^{\circ})$ et met en évidence l'hétérogénéité de la micro-structure. De part sa nature même, le composite est un matériau hétérogène puisqu'il est constitué de deux matériaux distincts et non miscibles : les fibres et la matrice (FIG. 3.4a). De plus, nous pouvons remarquer la distribution irrégulière des fibres dans la matrice. Il présente en effet des zones riches en fibres et d'autres riches en matrice (FIG. 3.4b). Comme nous l'avons expliqué précédemment, les stratifiés sont obtenus par empilement de différents plis de pré-imprégnés. Cette superposition est à l'origine de l'hétérogénéité dans la répartition des fibres. Elle est notamment à l'origine des zones inter-plis riches en résine. Enfin, notons qu'au sein même du pli, la répartition des fibres n'est pas uniforme. Les zones riches en résine observées dans chaque pli correspondent aux chemins empruntés par la résine entre les différentes mèches de fibres lors de l'élaboration du composite. ALBEROLA, MERLE et BENZARTI [Alberola et al., 1999] montrent, dans le cas d'un verre/époxy, que l'hétérogénéité de la répartition des fibres est indépendante de la fraction volumique de fibres et qu'elle est due au procédé de fabrication, à la viscosité de la matrice et aux interactions qui se développent entre les fibres.

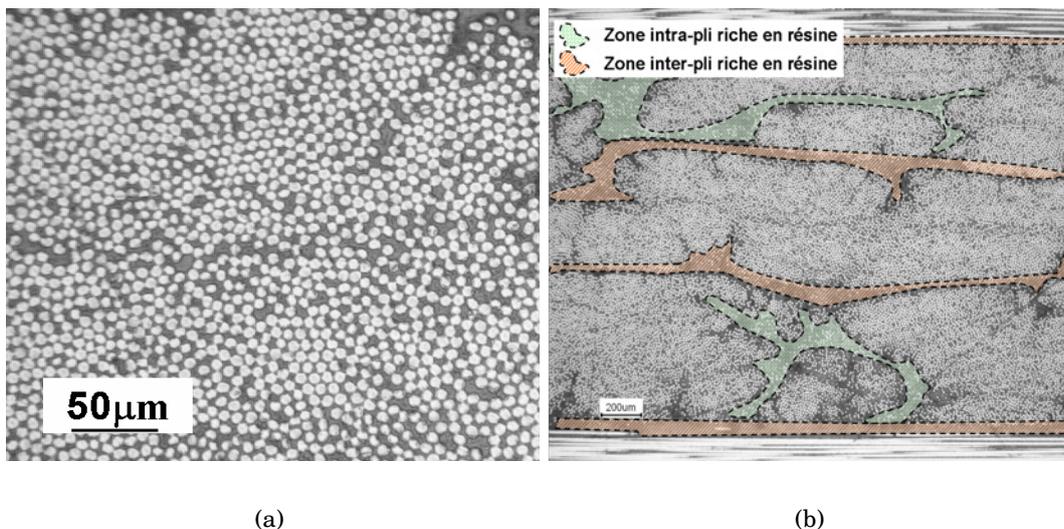


FIGURE 3.4 - *Champ poli d'un stratifié de type $(0_3^{\circ}/90_3^{\circ}/0_3^{\circ})$ mettant en évidence l'hétérogénéité de la distribution des fibres*

3.3.2.2 Les défauts d'élaboration

Les observations microscopiques révèlent la présence de défauts consécutifs à l'élaboration des stratifiés. Ces défauts sont essentiellement des porosités qui se trouvent majoritairement dans les zones riches en résine. Elles sont de formes circulaires ou allongées et leur taille (diamètre ou longueur) varie de quelques dizaines à une centaine de micromètres (FIG. 3.5).

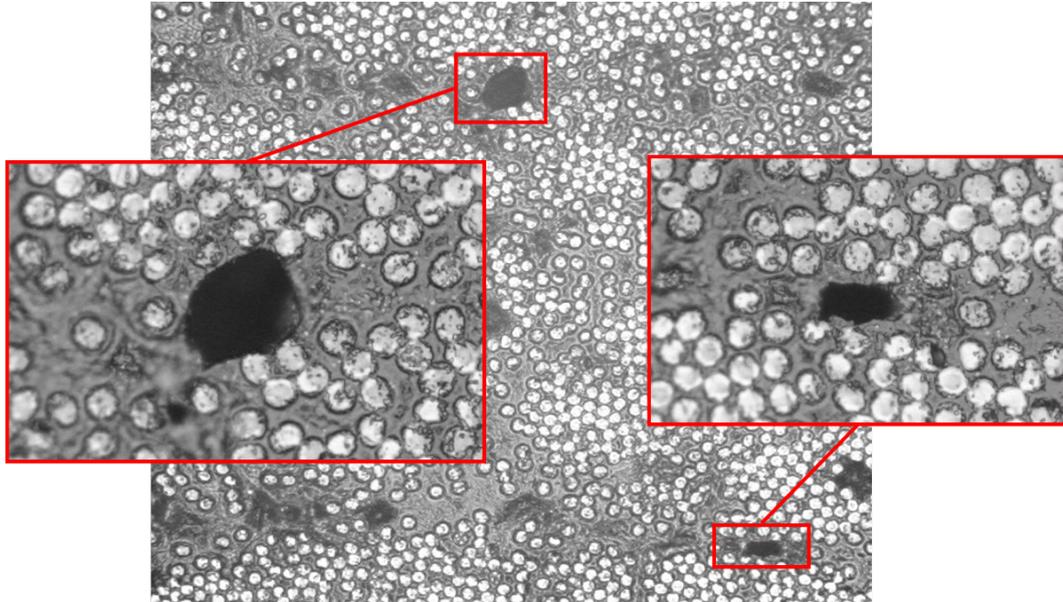


FIGURE 3.5 - Champ poli d'un stratifié de type $(0_3^{\circ}/90_3^{\circ}/0_3^{\circ})$

3.4 Dispositif expérimental

3.4.1 Machines d'essais mécaniques et instrumentation des éprouvettes

On peut classer les essais réalisés dans cette étude en deux catégories : les essais de traction quasi-statique (traction monotone ou charge/décharge) et les essais de traction cyclique.

Les essais de traction quasi-statique ont été réalisés sur une machine de traction électro-mécanique à vis de marque INSTRON. Cette machine permet un pilotage en charge (contrainte) ou en déplacement (déformation). Pour plus de stabilité et pour simplifier l'asservissement de certains essais (notamment les essais de charge-décharge) nous avons choisi un asservissement en contrainte. La contrainte appliquée à l'éprouvette est calculée à chaque instant à l'aide de la relation suivante (EQ. 3.1) :

$$\sigma = \sigma_{t_0} + \frac{\dot{F}}{S} \times (t - t_0) \quad (3.1)$$

où σ_{t_0} est la contrainte appliquée en (MPa) à l'éprouvette à l'instant t_0 , \dot{F} la vitesse de charge appliquée par la machine en ($N \cdot s^{-1}$) et S la section de l'éprouvette

3. Etude expérimentale de l'endommagement dans les stratifiés

en (mm^2). Nous avons choisi une vitesse de charge de $1MPa \cdot s^{-1}$. Afin d'avoir une meilleure précision sur les résultats, la cellule de charge est adaptée à la séquence testée. Ainsi, la machine a successivement été équipée d'une cellule de charge de 1000, 5000 ou 10000 *daN*.

Les essais de traction cyclique ont été réalisés sur une machine de traction hydraulique de marque MAYES. La machine est équipée d'une cellule de charge de 20000 *daN* (FIG. 3.7). Là encore, nous avons choisi un pilotage en charge.

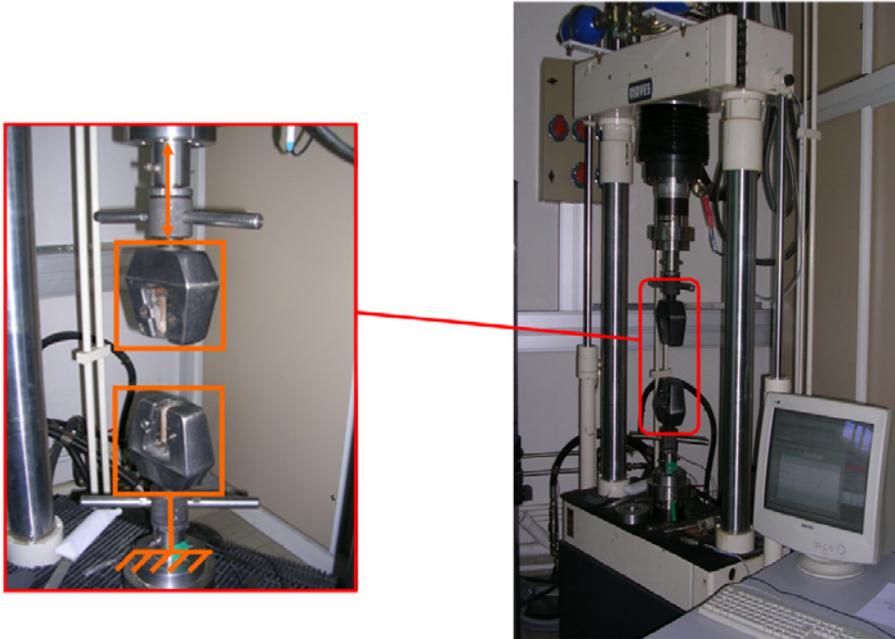


FIGURE 3.6 - *Vue générale de la machine hydraulique utilisée pour les essais de traction cyclique et des mors auto-serrants*

Les éprouvettes sont maintenues à l'aide de mors auto-serrants. Ce choix est justifié par les charges importantes en présence dans ces essais. Ce type de mors est le plus adapté pour éviter le glissement de l'éprouvette (FIG. 3.7). Nous rappelons que les éprouvettes sont équipées de talons en composite fibres de verre / résine époxy afin que celles-ci ne soient pas endommagées par les mâchoires des mors comme le préconise la norme ASTM D638.

Enfin, le suivi des propriétés mécaniques des stratifiés est fait par extensométrie. Les éprouvettes sont équipées d'un extensomètre (base de mesure 25 *mm*) pour mesurer le déplacement longitudinal permettant de calculer la déformation associée et, lorsque cela était nécessaire, d'une jauge de déformation donnant accès à la déformation dans le sens transverse.

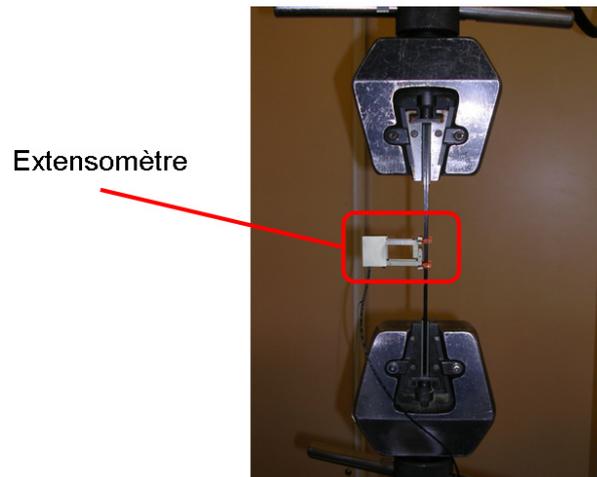


FIGURE 3.7 - *Instrumentation des éprouvettes*

3.4.2 Les moyens d'observation

De nos jours, il existe diverses méthodes de détection de l'endommagement dans les matériaux composites. Le ressuage et la réplique d'éprouvette, qui consistent à prendre une empreinte du champ de l'éprouvette, sont parmi les plus simples et les plus anciennes techniques d'observation. Cependant, elles présentent le gros inconvénient de nécessiter le démontage de l'éprouvette. Parmi les plus couramment utilisées on trouve les méthodes basées sur l'émission acoustique [Laroche, 1980], [Valentin and Bunsell, 1982], [Valentin, 1983] qui consistent à analyser la libération d'énergie sous forme d'ondes élastiques au sein du matériau lorsque ce dernier s'endommage. Toutefois, aucune étude ne démontre clairement que cette technique est capable de distinguer, ni de localiser les différents types d'endommagement dans le cas où plusieurs dégradations sont présentes simultanément. Enfin, les ondes acoustiques sont créées par l'apparition du dommage si bien que cette technique ne permet pas de détecter l'endommagement initialement présent au sein du matériau. Nous pouvons également citer les méthodes fondées sur la technologie des rayonnements X. L'inconvénient majeur de ce type de méthode réside dans l'impossibilité de faire des observations en cours d'essai. La micro-tomographie aux rayons X [Schilling et al., 2005] permet l'observation en cours d'essai et permet d'avoir accès à la géométrie en trois dimensions des défauts. Cependant, la petite taille de l'échantillon observé devient rapidement un facteur limitant. Il existe encore d'autres techniques telles que l'utilisation de fibres optiques [Wevers et al., 2006], les ultrasons [Scarponi and Briotti, 2000], les micro-ondes [Rossignol and Thionnet, 2006], les mesures de courant [Abry et al., 2001], la thermographie infrarouge [Miner et al., 2004]. Toutefois, la plupart des ces techniques sont lourdes à mettre en oeuvre. Aussi, nous préférons une technique plus légère basée sur une méthode optique de détection et de suivi de l'endommagement in-situ. Ce choix est motivé par le souhait que nous avons de capitaliser des informations à la fois qualitatives et quantitatives.

3.4.3 Montage d'observation optique in-situ

La technique consiste à observer et à photographier une zone de l'échantillon (dans notre cas le bord libre de l'éprouvette) à l'aide d'une caméra. Outre la simplicité de mise en oeuvre, l'avantage de cette méthode est d'éviter le démontage de l'éprouvette après chaque nouvelle sollicitation et ainsi de limiter le nombre d'opérations et par conséquent le risque d'erreur de positionnement lors du remontage. De plus, l'observation en cours d'essai facilite l'observation de l'endommagement puisqu'elle est faite sous charge, les fissures sont donc ouvertes ce qui simplifie grandement leur détection et leur observation. (FIG. 3.8).

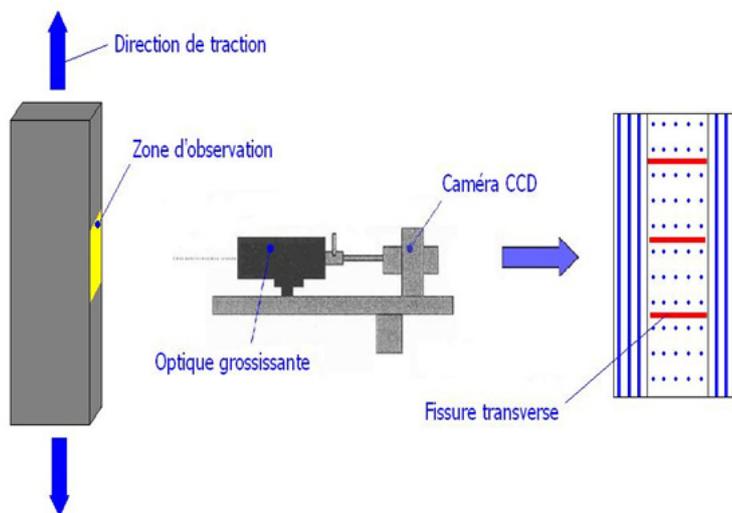


FIGURE 3.8 - Schéma du dispositif expérimental de suivi de la fissuration

Un montage spécifique d'observation a été mis au point (FIG. 3.9). Il est constitué d'une caméra numérique montée sur une colonne autorisant des déplacements dans les trois directions de l'espace permettant de balayer tout le champ de l'éprouvette. La caméra CCD couplée à un zoom optique grossissant jusqu'à 12 fois permet d'accéder aux détails de la micro-structure. Le bord libre de l'éprouvette doit être préalablement poli afin de faciliter l'observation. Ainsi nous avons réalisé un polissage mécanique au papier abrasif du grade 600 au grade 4000. Dans certains cas, afin de pouvoir faire des observations plus fines au microscope optique, nous avons réalisé un polissage jusqu'à $1 \mu m$.

Ce montage (FIG. 3.9) permet ainsi de photographier le bord libre de l'éprouvette en cours d'essai. Nous assemblons ensuite les images obtenues, qui doivent être prises avec un certain recouvrement, pour reconstruire le champ de l'éprouvette (FIG. 3.10).

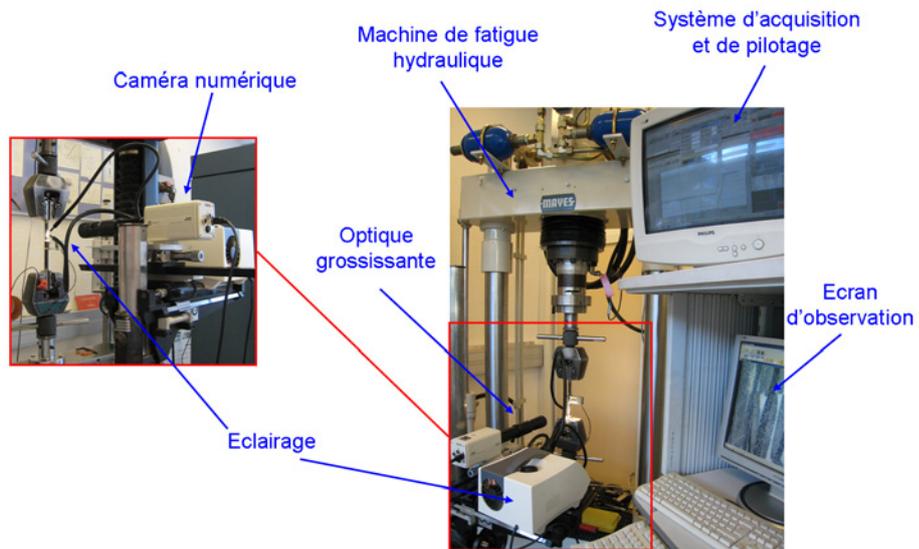


FIGURE 3.9 - *Montage expérimental pour l'observation de l'endommagement en fatigue*

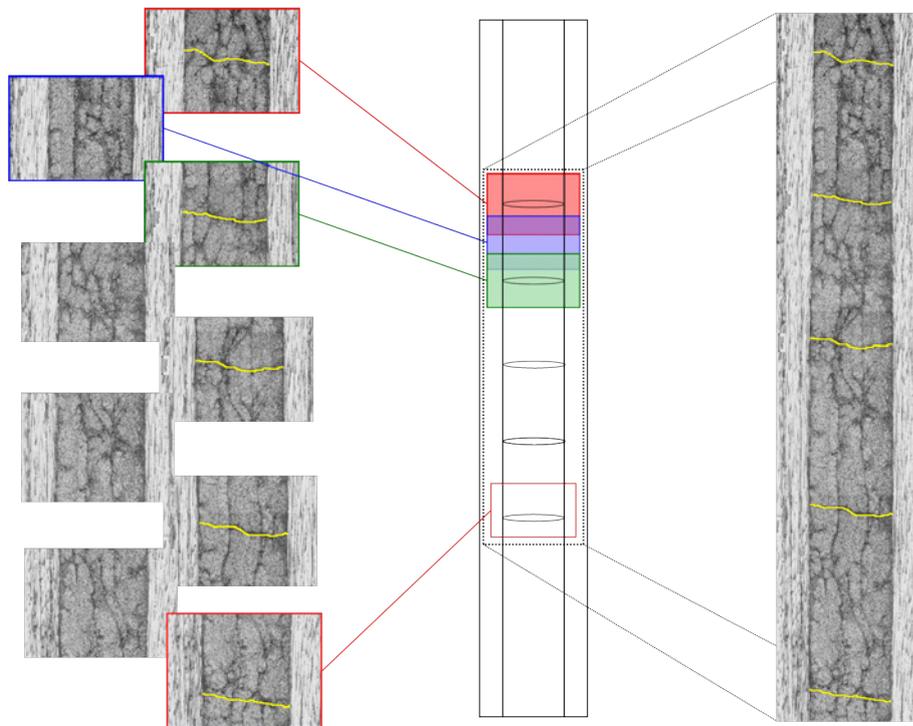


FIGURE 3.10 - *Reconstruction du champ d'une éprouvette*

3.5 Comportement mécanique du matériau unidirectionnel

3.5.1 Protocole expérimental

L'étude du comportement d'un matériau consiste, dans une première approche, à analyser sa réponse à des sollicitations simples dans le but d'identifier la forme de loi de comportement la mieux adaptée. Une fois le type de loi identifié, il s'agit d'en déterminer les différents paramètres. Pour ce faire, plusieurs types d'essais ont été réalisés :

- des essais de traction quasi-statique monotone uni-axiale, dans l'axe et hors-axe (FIG. 3.11), à différentes vitesses. Ces essais ont été menés jusqu'à rupture afin de déterminer les différents modules élastiques, les propriétés à rupture et leur évolution en fonction de la vitesse de sollicitation. Dès lors, pour plus de simplicité, nous désignerons respectivement par les indices « l » et « t » la direction des fibres et la direction transverse.

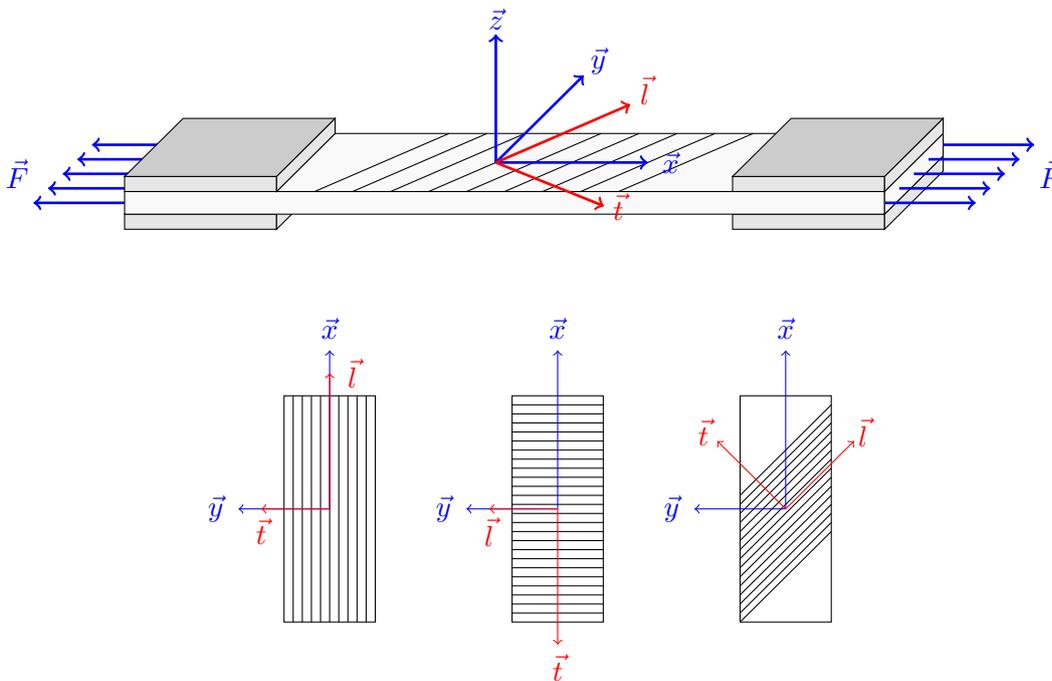


FIGURE 3.11 - Schéma d'une éprouvette d'essai hors-axes et des repères (global et local) qui lui sont associés

- des essais de charge-décharge en traction uni-axiale avec augmentation de la charge à chaque palier, un temps de maintien à contrainte nulle entre chaque palier et cela pour différentes vitesses (FIG. 3.12). L'objectif de ces essais est de mettre en évidence les phénomènes dissipatifs au sein du matériau (endommagement, phénomènes visqueux...).

Plusieurs essais de traction uni-axiale sont nécessaires pour déterminer les propriétés élastiques du pli unidirectionnel. Le module d'élasticité longitudinal E_{ll} et le coefficient de Poisson ν_{lt} sont déterminés à l'aide d'un essai de traction uni-axiale monotone sur la séquence (0_3°) . Le module d'élasticité transversal E_{tt} est obtenu à partir d'un essai de traction uni-axiale monotone sur la séquence (90_3°) . Enfin, le module de cisaillement G_{lt} est obtenu à l'aide d'un essai de traction uni-axiale monotone sur la séquence (45_3°) .

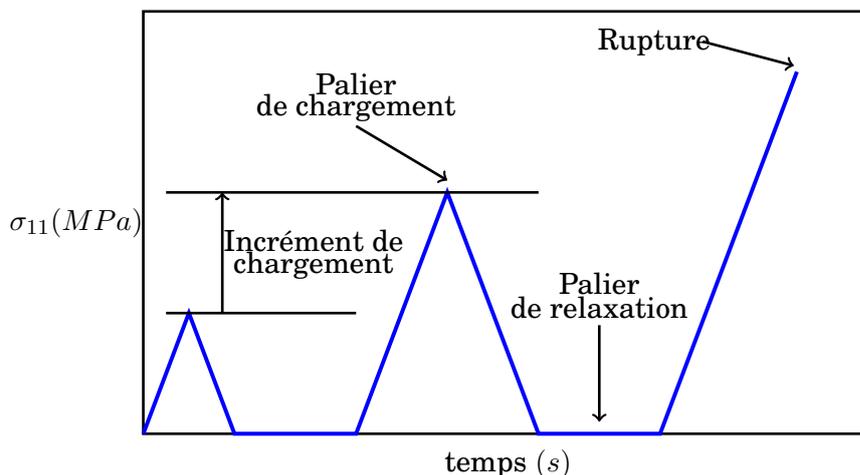


FIGURE 3.12 - Description du chargement appliqué lors d'un essai de charge-décharge

3.5.2 Essais de traction uni-axiale dans l'axe des fibres (0_3°)

Au regard des différents essais réalisés dans la direction longitudinale (axe des fibres), il apparaît que le comportement du pli dans l'axe des fibres est quasi-linéaire, caractéristique d'un comportement élastique. La rupture qui se produit de façon brutale témoigne du caractère fragile et entraîne la destruction totale de l'éprouvette (FIG. 3.14). D'autre part, les essais de traction monotone à différentes vitesses ainsi que les essais de charge-décharge montrent que le comportement longitudinal du pli est insensible aux effets de vitesse (Annexe 7.4 FIG. 7.4).

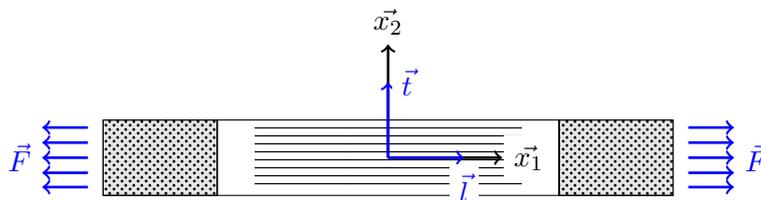


FIGURE 3.13 - Représentation d'une éprouvette de traction à 0° et de ses repères associés

Ce comportement, caractéristique des composites à fibres longues, est en fait prévisible. En effet, dans ce cas la grande majorité des efforts sont repris par les fibres, le

comportement du pli est donc guidé par le comportement élastique des fibres. Nous notons cependant un léger changement de pente sur les courbes de traction. Il est possible d'attribuer cette très légère augmentation de la rigidité au comportement des fibres. En effet, BLASSIAU [Blassiau, 2005] observe une augmentation de la rigidité des fibres en cours de déformation en réalisant des essais de traction sur des mèches de fibres de carbone T600s. HUCHETTE [Huchette, 2005] explique quant à lui ce changement de pente par le ré-alignement des fibres légèrement ondulées suite à la fabrication du stratifié. Il est tout à fait envisageable d'être ici en présence des deux phénomènes. La relation contrainte- déformation peut être représentée par deux segments linéaires de pentes voisines se raccordant à $\varepsilon_{11} \approx 0.6$ (FIG. 3.15). Pour le calcul du module d' YOUNG, du fait de la très faible variation de pente, considérerons que le comportement est quasi-linéaire dont le module est la moyenne pondérée des pentes des deux segments linéaires (EQ. 3.2).

$$E_{ll} = \frac{0.6}{1.5} E_{ll}^{(1)} + \frac{0.9}{1.5} E_{ll}^{(2)} \quad (3.2)$$

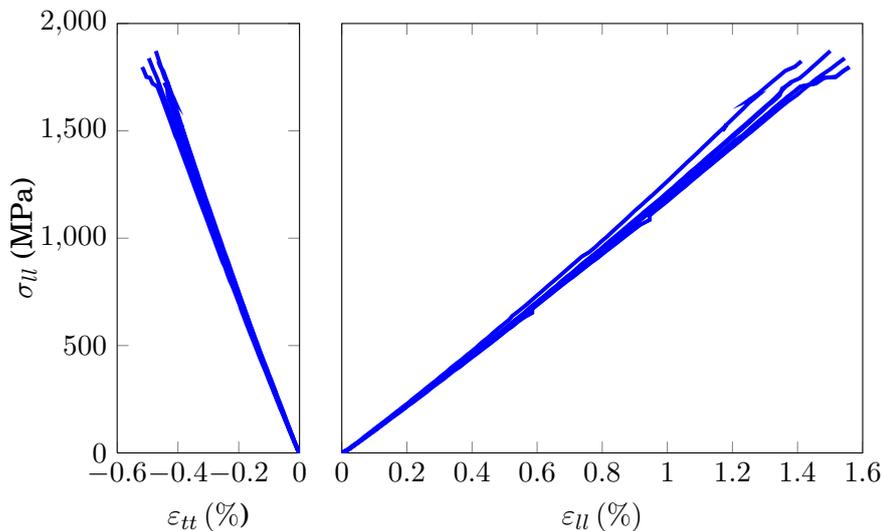


FIGURE 3.14 - Courbes contrainte-déformation obtenues par des essais de traction quasi-statique monotone sur la séquence (0_3^0)

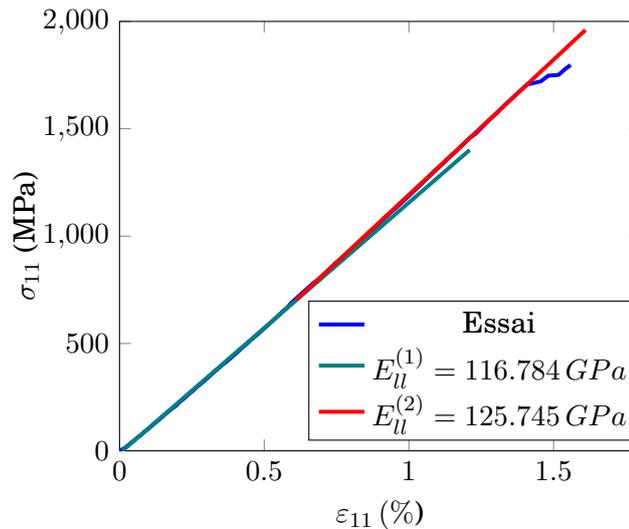


FIGURE 3.15 - Courbes contrainte-déformation obtenues par un essai de traction quasi-statique monotone sur la séquence (0_3°) et mise en évidence de la variation de pente

Le tableau (TAB. 3.4) présente les valeurs des modules déterminés pour chacun des essais. $E_{ll}^{(1)}$ et $E_{ll}^{(2)}$ représentent respectivement les valeurs des pentes déterminées sur les intervalles $\varepsilon_{ll} \in [0; 0.6]$ et $\varepsilon_{ll} \in]0.6; 1.5]$. $E_{ll}^{(pond)}$ représente la moyenne pondérée de $E_{ll}^{(1)}$ et $E_{ll}^{(2)}$. Enfin $E_{ll}^{(moy)}$ représente le module moyen déterminé sur la totalité de l'essai.

Essais	$E_{ll}^{(1)}$	$E_{ll}^{(2)}$	$E_{ll}^{(pond)}$	$E_{ll}^{(moy)}$
	0 → 0.6%	0.6 → 1.5%	0 → 1.5%	0 → 1.5%
1	112.399	131.237	123.701	120.729
2	123.577	138.817	132.721	131.643
3	116.784	125.745	122.161	121.948
4	117.887	130.392	125.391	125.394
5	113.592	123.469	119.518	120.108

TABLE 3.4 - Calcul du module sens fibres de la séquence (0_3°) , les valeurs sont exprimées en GPa

REMARQUE

L'ondulation des fibres évoquée précédemment pourrait être évitée en utilisant le procédé de pultrusion pour la fabrication du composite. En effet, avec ce procédé les fibres sont mises en tension lors de la fabrication ce qui empêche les ondulations.

Nous récapitulons dans le tableau (TAB. 3.5) les principales caractéristiques mécaniques dégagées des essais de traction sur la séquence (0_3°) (module élastique longitudinal E_{ll} , coefficient de Poisson ν_{lt} , contrainte et déformation à rupture σ_{UR} et ε_{UR})).

Essais	E_{ll} (GPa)	σ_{llR} (MPa)	ε_{llR} (%)	ε_{ttR} (%)	ν_{lt} -
1	123.701	1724.99	1.382	-0.445	0.322
2	132.721	1824.35	1.412	-0.465	0.329
3	122.161	1797.06	1.559	-0.518	0.332
4	125.391	1871.97	1.500	-0.473	0.315
5	119.518	1838.16	1.545	-0.496	0.321
Moyenne	124.699 ± 64.4	1811.313 ± 55.28	1.480 ± 0.079	-0.479 ± 0.028	0.324 ± 0.007

TABLE 3.5 - Résultats des essais de traction sur (0_3°) : caractéristiques mécaniques obtenues par ces essais

3.5.3 Essais de traction uni-axiale dans le sens transverse (90_3°)

De la même façon, les essais réalisés sur la séquence (90_3°) ne laissent apparaître aucune influence de la vitesse de sollicitation. Les essais de charge-décharge (Annexe 7.4 FIG. 7.4) montrent, là encore, un comportement élastique, linéaire réversible totalement indépendant du temps. Dans ce cas, bien que les efforts soient repris par la résine dont le comportement massif est non-linéaire [Blassiau, 2005], le comportement du pli reste linéaire élastique. Cela peut se justifier par le fait que la rupture intervient à l'interface fibre/matrice avant d'atteindre la limite élastique de la résine.

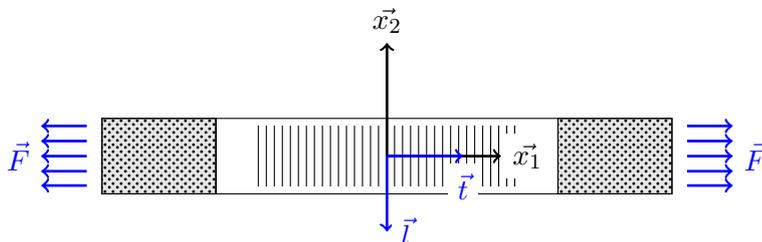


FIGURE 3.16 - Représentation d'une éprouvette de traction à 90° et ses repères associés

Le tableau (TAB. 3.6) présente les caractéristiques mécaniques dégagées des essais de traction sur la séquence (90_3°) (module élastique transverse E_{22} , coefficients de Poisson ν_{21} , contrainte et déformation à rupture σ_{22R} et ε_{22R}).

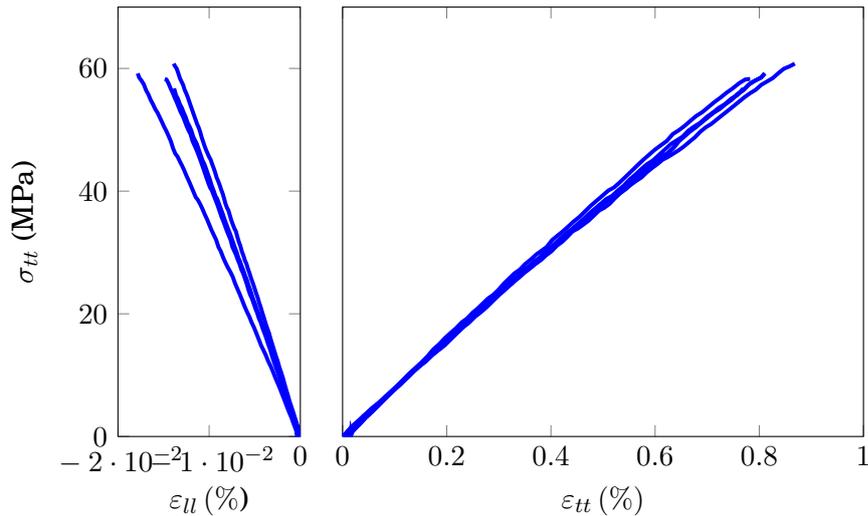


FIGURE 3.17 - Courbes contrainte-déformation obtenues par essais de traction quasi-statique monotone sur la séquence (90_3°)

Essais	E_{tt} (GPa)	σ_{ttR} (MPa)	ε_{ttR} (%)	ε_{llR} (%)	ν_{tl} -
1	7.584	58.292	0.782	-0.015	0.019
2	7.400	56.737	0.769	-0.014	0.018
3	7.464	59.192	0.811	-0.018	0.022
4	7.038	60.784	0.868	-0.014	0.016
Moyenne	7.372 ± 0.235	58.751 ± 55.28	0.808 ± 0.044	-0.015 ± 0.002	0.019 ± 0.003

TABLE 3.6 - Résultats des essais de traction sur (90_3°) : caractéristiques mécaniques obtenues par ces essais

3.5.4 Essais de traction uni-axiale hors-axe

Des essais de traction quasi-statique monotone ont été réalisés sur la séquence (45_3°) à différentes vitesses de sollicitations (FIG. 3.19). D'emblée, on note que le comportement du pli sollicité en cisaillement est non linéaire. De plus, on constate que le module $E_{45^{\circ}}$ est sensible à la vitesse de sollicitation. En outre, il augmente avec la vitesse de sollicitation. La formule (EQ. 3.3) permet de calculer le module de cisaillement G_{45} .

$$\frac{1}{G_{tt}} = \frac{4}{E_{45^{\circ}}} - \frac{1}{E_l} - \frac{1}{E_t} + 2\frac{\nu_{lt}}{E_l} \quad (3.3)$$

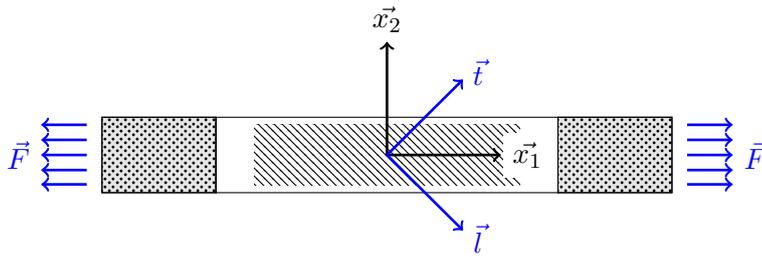


FIGURE 3.18 - Représentation d'une éprouvette de traction hors-axes et ses repères associés

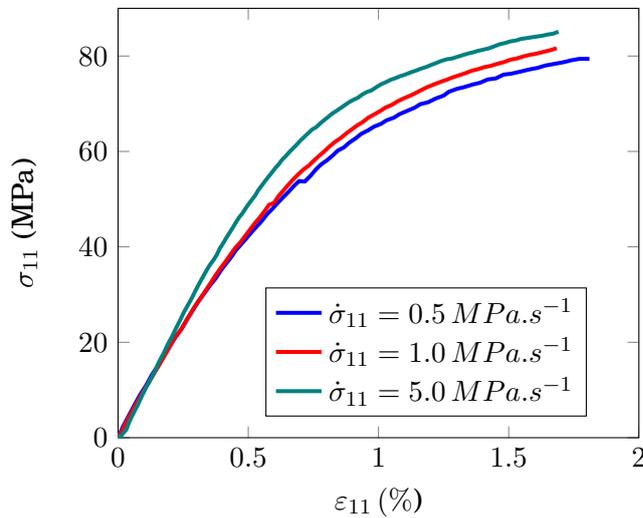


FIGURE 3.19 - Courbes contrainte - déformation d'un essai de traction à différentes vitesses de sollicitation sur la séquence (45°_3)

Vitesse de sollicitation (MPa.s^{-1})	E_{45} (GPa)	G_t (GPa)
0.5	8.69	3.12
1.0	9.05	3.29
5.0	10.49	4.12

TABLE 3.7 - Influence la vitesse de sollicitation sur le module de cisaillement au cours d'essais de traction sur la séquence (45°_3)

Nous avons testé quatre types de stratifiés dans le but d'identifier le comportement de pli sollicité en dehors de ses axes : (45_3°) , $(\pm 45_3^{\circ})_s$, $(\pm 20_3^{\circ})_s$ et $(\pm 30_3^{\circ})_s$. La figure 3.20 montre des éprouvettes rompues en traction quasi-statique monotone pour différentes orientations des fibres : 0° , 20° , 30° , 45° et 90° . Il apparaît clairement que la rupture totale du stratifié se produit le long des fibres.

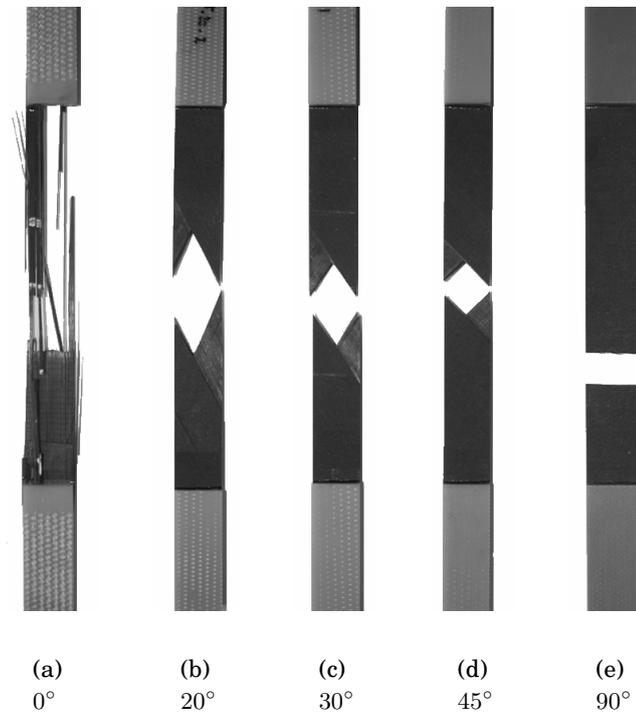


FIGURE 3.20 - Photographies des éprouvettes rompues en traction quasi-statique monotone pour différentes orientations des fibres : 0° , 20° , 30° , 45° et 90°

Au regard des essais menés sur les différentes orientations (FIG. 3.21), nous pouvons noter que la non linéarité de la réponse du matériau aux sollicitations de cisaillement augmente avec l'angle d'orientation des fibres pour atteindre un maximum pour un angle de 45° . Cette non linéarité peut avoir deux origines possibles : la viscosité de la résine et/ou de l'endommagement à l'échelle microscopique (micro-fissuration, dé-cohésion fibre/matrice). HUCHETTE [Huchette, 2005] montre, en utilisant la technique de l'émission acoustique, que la rupture des plis hors-axes n'est pas gouvernée par la rupture des fibres mais par la fissuration de la matrice.

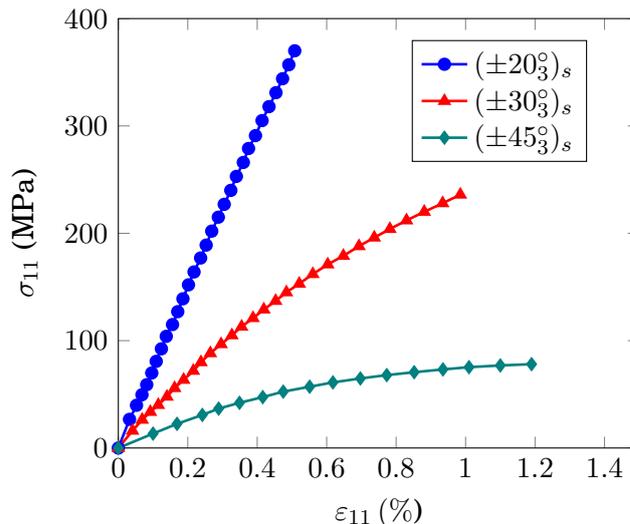


FIGURE 3.21 - Courbes contrainte vs déformation pour les essais de traction sur les séquences $(\pm 20^\circ)_s$, $(\pm 30^\circ)_s$ et $(\pm 45^\circ)_s$

Afin de mettre en évidence les phénomènes qui peuvent être à l'origine de la non-linéarité observée, nous proposons d'étudier la séquence $(45^\circ)_s$ qui est la séquence qui présente la plus forte non-linéarité (FIG. 3.23) en procédant à deux types d'essais :

1. des essais de traction quasi-statique monotone à différentes vitesses de sollicitations ;
2. des essais de charge-décharge qui consistent à imposer une succession de cycles par incrément de 10 MPa jusqu'à atteindre la rupture avec un temps de maintien à contrainte nulle entre chaque cycle permettant la relaxation du matériau (FIG. 3.12).

La figure 3.19 représente les courbes contrainte - déformation obtenues lors des essais de traction monotone à différentes vitesses de sollicitation (0.1, 0.5 et 1.0 $\text{MPa}\cdot\text{s}^{-1}$). Il apparaît que le module de cisaillement apparent augmente avec la vitesse de sollicitation (TAB. 3.7). Ce résultat met en évidence que le comportement de l'unidirectionnel sollicité en cisaillement est gouverné par le comportement visco-élastique de la résine.

Les résultats des essais de charge-décharge sont présentés figure 3.22. Nous constatons la formation d'une boucle d'hystérésis qui s'ouvre de plus en plus alors que la contrainte imposée augmente. Nous observons également une diminution de la déformation résiduelle lors des phases de maintien à contrainte nulle. PETITPAS [Petitpas, 1993] montre que la déformation résiduelle est imputable, dans un premier temps à la plastification de la matrice puis, pour un état de contrainte proche de la rupture, à un endommagement des interfaces fibres-matrice.

La figure (FIG. 3.23) représente les courbes contrainte-déformation obtenues lors d'essais de traction sur la séquence $(45^\circ)_s$.

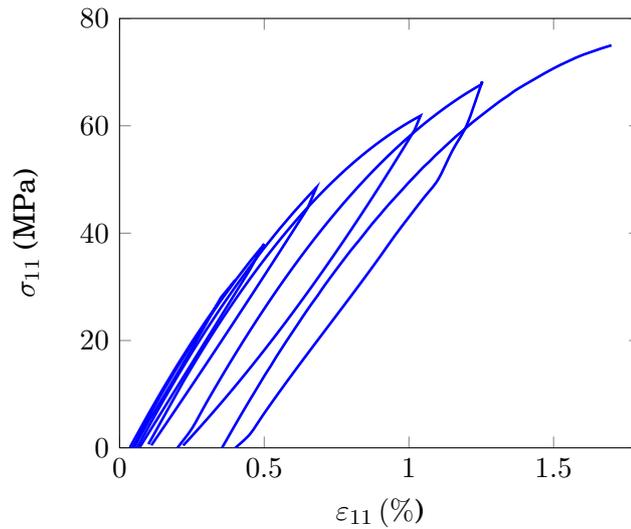


FIGURE 3.22 - Courbes contrainte-déformation d'un essai de charge-décharge sur la séquence (45_3°)

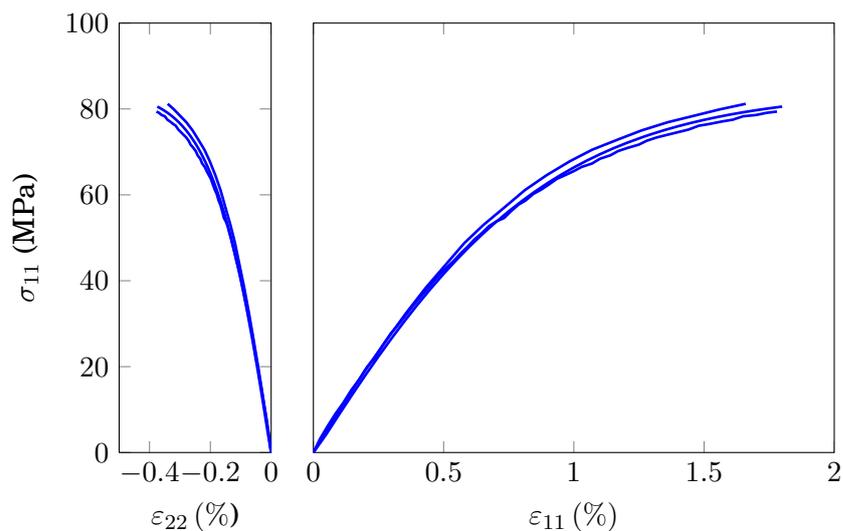


FIGURE 3.23 - Courbe contrainte - déformation d'un essai de traction sur la séquence (45_3°)

Essais	E_{11} (GPa)	σ_{11R} (MPa)	ε_{11R} (%)	ε_{22R} (%)
1	9.08	80.552	1.800	-0.374
2	8.89	80.200	1.660	-0.340
3	8.53	79.400	1.780	-0.377
Moyenne	8.836 ± 0.279	80.384 ± 0.912	1.747 ± 0.076	-0.364 ± 0.021

TABLE 3.8 - Résultats des essais de traction sur (45_3°) : caractéristiques mécaniques obtenues par ces essais

3.5.5 Conclusion

Le comportement de l'unidirectionnel est maintenant clairement identifié. Il est élastique linéaire dans les directions longitudinale et transverse. En revanche, dès lors qu'il est sollicité en cisaillement son comportement, guidé par celui de la résine, est non-linéaire et sensible aux effets de vitesse. Dans la suite nous travaillons à vitesse constante, aussi nous choisirons un module de cisaillement moyen et constant. Notre objectif est maintenant de caractériser les mécanismes d'endommagement au sein d'un stratifié.

3.6 La fissuration intra-laminaire : aspects qualitatifs

3.6.1 Des chargements spécifiques

Le but est ici d'étudier le mécanisme d'endommagement par fissuration dans un stratifié soumis à des chargements quasi-statiques ou cycliques et d'en suivre son évolution. Nous rappelons que le suivi de l'endommagement se fait par une analyse optique in-situ à l'aide d'une caméra munie d'un système de grossissement optique qui constituent un moyen simple et efficace qui permet de suivre l'endommagement sans interrompre l'essai. Le bord libre observé est préalablement poli. Une description détaillée du montage est donnée précédemment (§3.4.2). Outre l'analyse physique de la fissuration, les essais doivent permettre de mettre en évidence l'influence de l'endommagement sur les propriétés mécaniques. Ainsi, il est nécessaire d'avoir accès en cours d'essai à la rigidité du stratifié. On propose dans ce qui suit deux types de chargements qui ont été utilisés qui permettent de satisfaire les exigences que nous nous sommes fixées (FIG. 3.24 et 3.25).

L'analyse de la fissuration sous sollicitations quasi-statiques est réalisée au cours d'essais de charge-décharge avec augmentation de la charge à chaque palier (FIG. 3.24). Nous avons choisi d'effectuer un incrément de chargement de 50 MPa à chaque palier. Pour chaque niveau de chargement, le cycle d'analyse se décompose en deux étapes :

- (a) : l'évaluation de la rigidité du stratifié et création de l'endommagement ;
- (b) : observation de l'endommagement ;

La charge appliquée lors de l'étape (b) est plus faible que celle appliquée lors de la phase (a). Le but est d'ouvrir les fissures existantes sans en créer de nouvelles. Le temps de maintien correspond au temps nécessaire à l'observation (FIG. 3.24). Toutefois, il convient de minimiser cette durée au maximum afin d'éviter tout risque de création d'endommagement par fluage.

Suivant le même principe, on propose un chargement cyclique suivant (FIG. 3.25) :

- (a) : un cycle de charge-décharge permettant de déterminer la rigidité du stratifié ;
- (b) : une phase de sollicitation cyclique au cours de laquelle se créent les fissures de fatigue. Le chargement appliqué au cours de cette phase est sinusoïdal ;
- (c) : un palier pour l'observation de l'endommagement. L'observation est faite aux cycles 0, 10, 50, 100, 500, 1000, 2000, 3000, 4000, 5000, 10000, 15000, 20000, ...

Le principal avantage de cette technique réside dans le fait que l'observation se fait sous charge et donc fissures ouvertes ce qui simplifie la détection et l'observation des fissures.

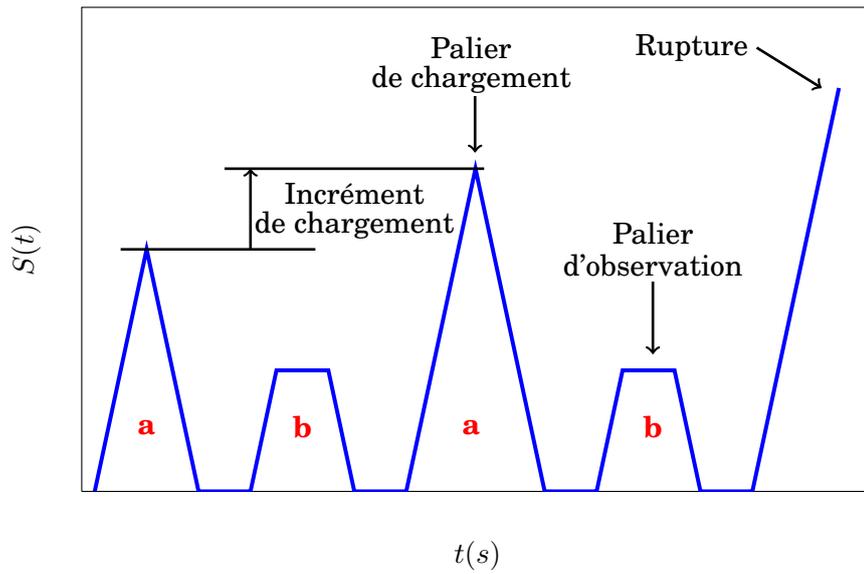


FIGURE 3.24 - Type de chargement appliqué lors d'un essai de charge-décharge avec suivi de l'endommagement

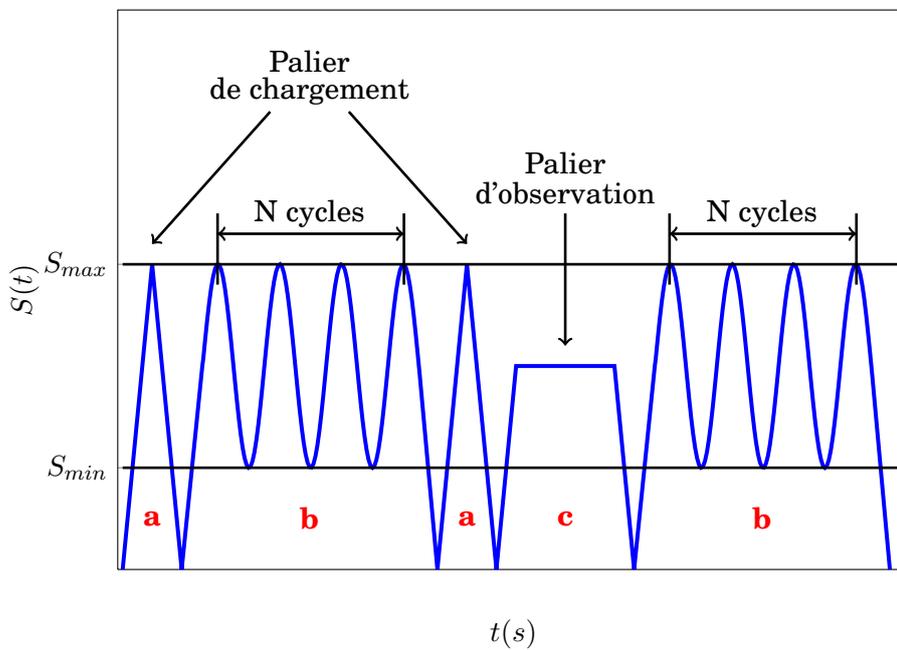


FIGURE 3.25 - Type de chargement appliqué lors d'un essai de fatigue avec suivi de l'endommagement

3.6.2 Caractéristiques physiques de la fissuration

3.6.2.1 Un réseau quasi-périodique

L'endommagement par fissuration intra-laminaire se présente sous la forme d'un réseau de fissures quasi-périodique (FIG. 3.26). Les fissures, qui s'initient sur le bord libre de l'éprouvette, sont parallèles entre elles et traversent la totalité de l'épaisseur de la couche fissurée (FIG. 3.26). Elles se propagent dans la largeur vers le centre de l'éprouvette parallèlement aux fibres qui leur servent de guide.

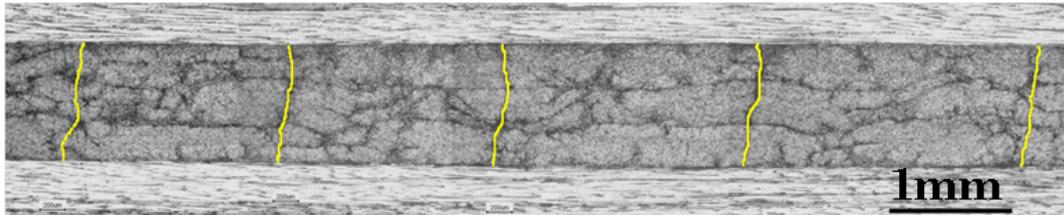


FIGURE 3.26 - Réseau de fissures transverses quasi-périodique dans la couche à 90° d'un stratifié $(0_3^\circ/90_3^\circ/0_3^\circ)$

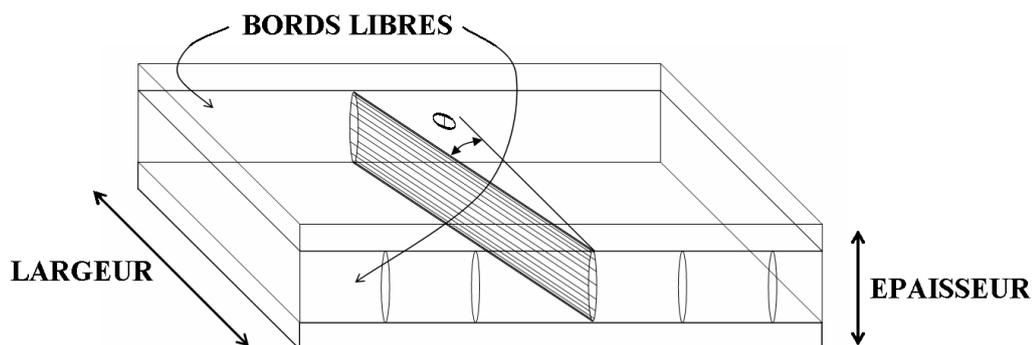


FIGURE 3.27 - Représentation schématique en trois dimensions d'un réseau de fissures transverses dans la couche à 90° d'un stratifié $(0_n^\circ/90_m^\circ/0_m^\circ)$

3.6.2.2 Influence de la micro-structure

L'analyse microscopique (FIG. 3.28) montre que les fissures se propagent au niveau des interfaces entre les fibres et la matrice par coalescence des décohésions fibres/matrice. Les figures (FIG. 3.29 et FIG. 3.30) montrent que les zones riches en résine semblent être des lieux privilégiés pour l'apparition de fissures. Les porosités initialement présentes dans le matériau semblent également favoriser l'apparition de fissures. En effet, le chemin emprunté par les fissures passe par des porosités et suit des zones riches en résine. Il est fort possible que les porosités soient les sites d'amorçage des fissures. Cependant, étant donné de la rapidité du phénomène de propagation, cette hypothèse, bien que tout à fait plausible, est difficilement vérifiable.

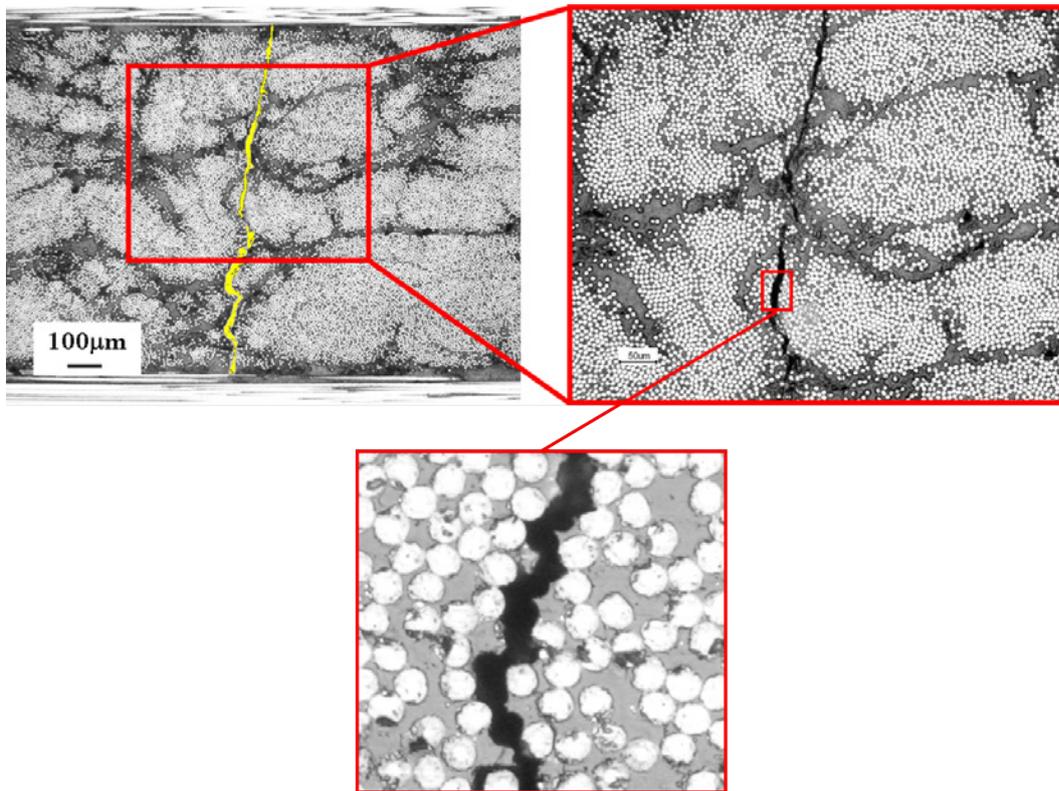


FIGURE 3.28 - Fissure transverse se propageant en suivant les interfaces entre les fibres et la matrice dans la couche à 90° d'un stratifié ($0_3^{\circ}/90_3^{\circ}/0_3^{\circ}$) sollicité en traction uni-axiale

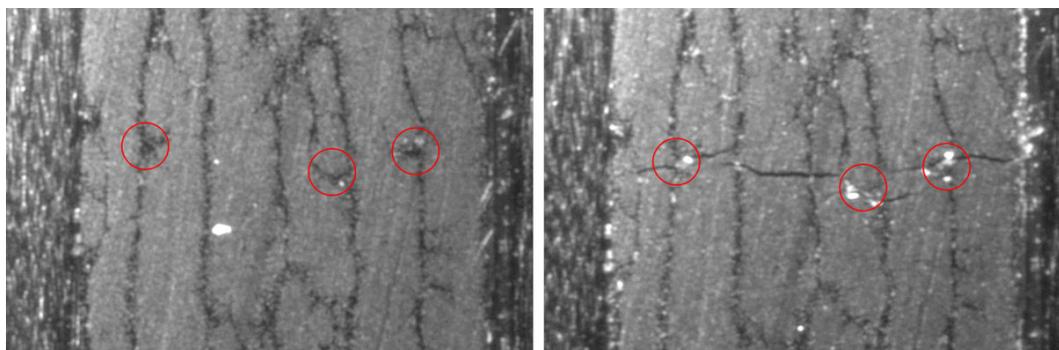


FIGURE 3.29 - Influence de la micro-structure (répartition des fibres, porosités...) sur le chemin suivi par les fissures

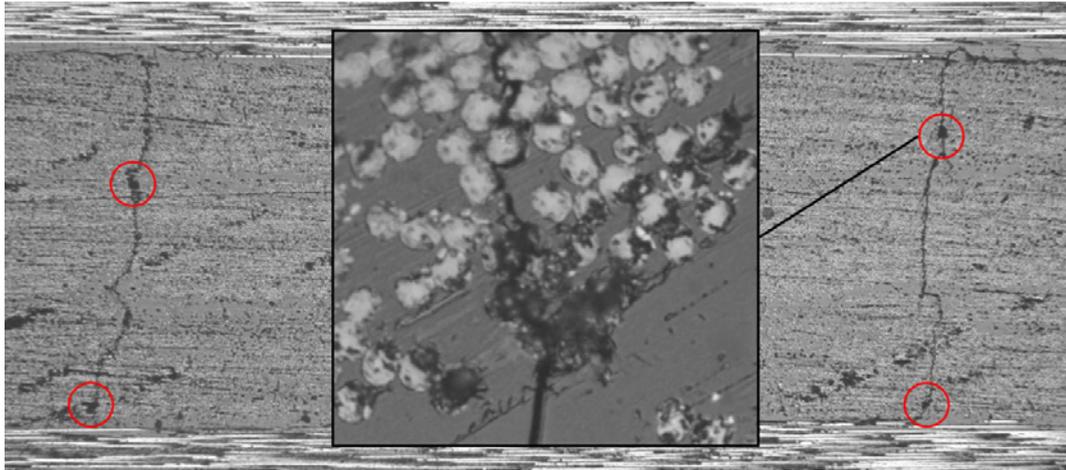


FIGURE 3.30 - *Influence de la micro-structure (répartition des fibres, porosités...) sur le chemin suivi par les fissures*

3.6.2.3 Propagation des fissures

Sous chargements quasi-statiques, les fissures se propagent de manière quasi-instantanée dans la largeur de l'éprouvette. La figure (FIG. 3.31) représente le réseau de fissures observé sur chacun des bords libres d'une éprouvette ($0_3^{\circ}/90_3^{\circ}/0_3^{\circ}$). L'excellente superposition confirme que les fissures sont bien traversantes et guidées par les fibres.

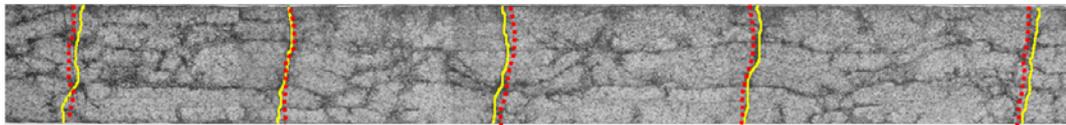
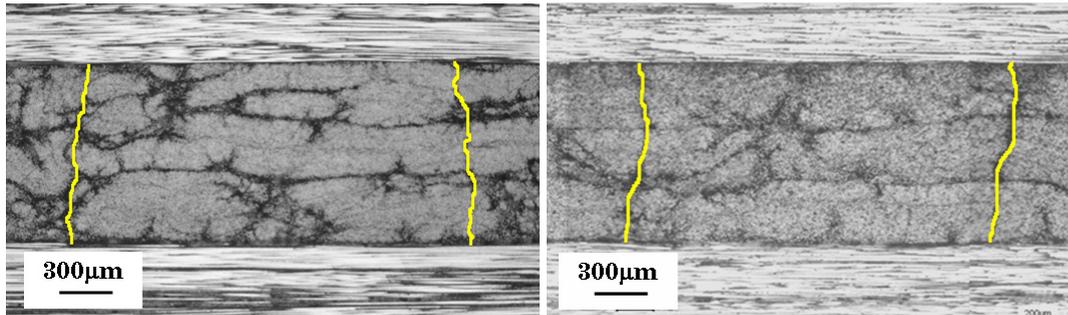


FIGURE 3.31 - *Superposition du réseau de fissures transverses dans la couche à 90° d'un stratifié ($0_3^{\circ}/90_3^{\circ}/0_3^{\circ}$) observé sur les deux bords libres de l'éprouvette*

En revanche, dans un stratifié soumis à des sollicitations cycliques, la propagation des fissures est plus lente. Citons BONIFACE et OGIN [Boniface and Ogin, 1989] ou LAFARIE-FRENOT et HENAFF-GARDIN [Lafarie-Frenot and Henaff-Gardin, 1990] qui montrent que, dans les plis à 90° d'une éprouvette ($0^{\circ}/90^{\circ}$)_s sollicitée en traction cyclique, certaines fissures ne sont pas traversantes suivant la largeur de l'éprouvette mais s'initient sur le bord libre et se propagent vers le centre sous l'effet de l'accumulation des cycles de sollicitations. Ainsi, l'endommagement par fissuration sous sollicitations quasi-statiques se caractérise par la multiplication des fissures alors que sous chargement cycliques il y a simultanément multiplication et propagation des fissures. Quoi qu'il en soit, l'observation du bord libre de l'éprouvette montre que les fissures sont géométriquement identiques qu'elles soient créées par un chargement quasi-statique ou cyclique (FIG. 3.32).



(a) chargement quasi-statique

(b) chargement cyclique

FIGURE 3.32 - *Fissures transverses dans la couche à 90° d'un stratifié (0°₃/90°₃/0°₃) sollicité en traction (a) quasi-statique, (b) cyclique*

3.6.2.4 Fissuration des plis externes

Des essais de traction réalisés sur un stratifié (90°/0°)_s nous permettent d'étudier la fissuration dans les couches extérieures (FIG. 3.33). Les fissures se présentent sous la forme d'un réseau régulier dans chacune des couches. Nous notons cependant un déphasage de l'ordre de la moitié de la distance inter-fissures entre les réseaux de chacune des couches externes. Ces résultats sont en accord avec ceux de NAIRN, HU et BARK [Nairn et al., 1993]. Ce déphasage peut s'expliquer par la dissymétrie engendrée par l'apparition de la première fissure sur l'une ou l'autre des couches externes.

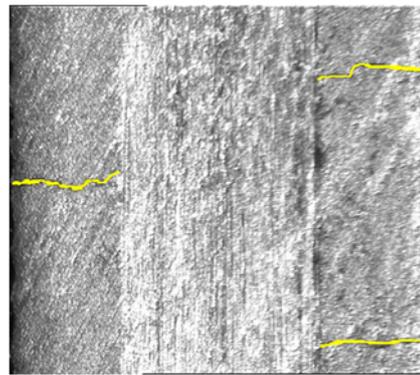


FIGURE 3.33 - *Réseau de fissures transverses dans les couches à 90° d'un stratifié (90°/0°₂/90°) sollicité en traction quasi-statique*

3.6.2.5 Ordre d'apparition des fissures

Les fissures apparaissent d'abord de façon aléatoire, formant un réseau irrégulier. Puis, avec l'augmentation du chargement (qui se traduit soit par l'augmentation de la contrainte appliquée soit par l'accumulation des cycles de sollicitation, respec-

tivement sous chargement quasi-statique ou cyclique), la distance inter-fissures diminue, jusqu'à créer un réseau de fissures qui devient rapidement quasi-périodique (FIG. 3.34). BERTHELOT et LE CORRE [Berthelot and Le Corre, 2000] proposent une approche statistique de ce phénomène dans laquelle ils considèrent une distribution statistique des contraintes à rupture dans la couche à 0° sur toute la longueur des éprouvettes.

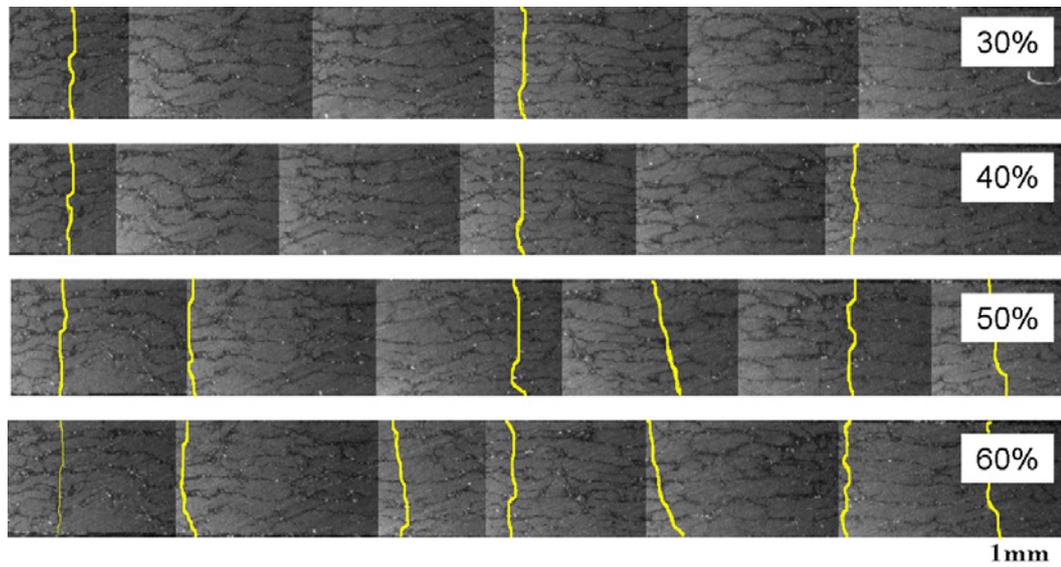


FIGURE 3.34 - Réseau de fissures transverses dans la couche à 90° d'un stratifié $(0^\circ/90^\circ/0^\circ)$ sollicité en traction quasi-statique à 30%, 40%, 50% et 60% de la contrainte à rupture

3.6.3 Influence de l'épaisseur du pli fissuré

Les essais menés sur les séquences $(0^\circ/90^\circ/0^\circ)$, $(0^\circ/90^\circ/0^\circ)$ et $(0^\circ/90^\circ_{12}/0^\circ)$ nous permettent d'étudier l'influence de l'épaisseur du pli fissuré sur les caractéristiques géométriques de la fissuration. Il apparaît clairement sur la figure 3.35 que la distance inter-fissures est d'autant plus grande que le pli fissuré est mince. On note en effet que la distance inter-fissures est proportionnelle à l'épaisseur du pli fissuré.

Le tableau 3.9 regroupe les valeurs des épaisseurs des plis fissurés, des densités de fissures et des distances inter-fissures pour les séquences $(0^\circ/90^\circ/0^\circ)$, $(0^\circ/90^\circ/0^\circ)$ et $(0^\circ/90^\circ_{12}/0^\circ)$ sollicitées en fatigue. A ce stade il convient de préciser que nous définissons la densité de fissures comme le rapport entre le nombre de fissures comptabilisées sur le bord libre de l'éprouvette et la longueur de la zone observée.

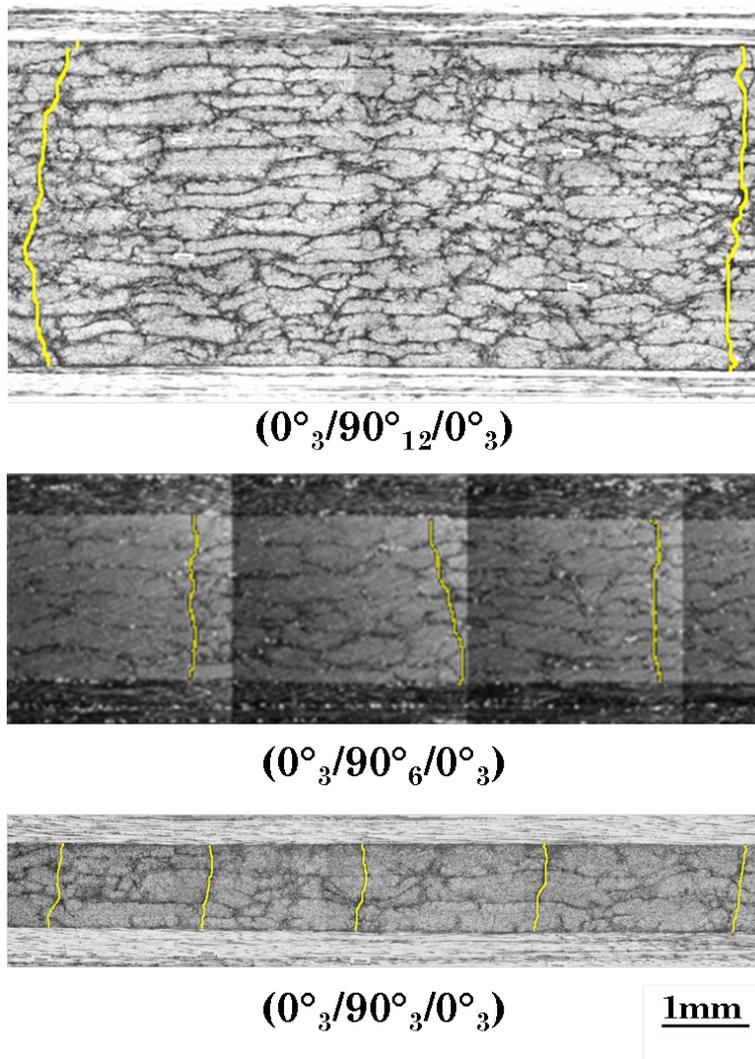


FIGURE 3.35 - Influence de l'épaisseur de la couche à 90° sur la densité de fissures pour les stratifiés $(0^\circ_3/90^\circ_3/0^\circ_3)$, $(0^\circ_3/90^\circ_6/0^\circ_3)$ et $(0^\circ_3/90^\circ_{12}/0^\circ_3)$ sollicités en traction cyclique

ep_{90° (mm)	d_{sat} (mm^{-1})	$dist_{fissures}$ (mm)
0.9	0.6	1.788
1.8	0.3	2.75
3.6	0.15	7.58

TABLE 3.9 - Synthèse des données caractéristiques obtenues par les essais sous sollicitations cycliques sur les séquences $(0^\circ_3/90^\circ_n/0^\circ_3)$ avec ep_{90° l'épaisseur de la couche fissurée, d_{sat} la densité de fissures à saturation et $dist_{fissures}$ la distance inter-fissures

On constate, dans le cas du stratifié le plus épais ($0_3^{\circ}/90_{12}^{\circ}/0_3^{\circ}$), l'apparition ponctuellement de fissures non traversantes à proximité des fissures totalement traversantes (FIG. 3.36). Ces fissures semblent s'initier à l'interface entre les plis à 0° et les plis à 90° et font un angle compris entre 40° et 60° par rapport aux fissures totalement traversantes. Contrairement aux fissures traversantes que nous qualifierons de fissures droites, ces fissures partielles se propagent progressivement dans l'épaisseur du pli. Ces fissures semblent indiquer l'existence de contraintes de cisaillement importantes dans la zone inter-plis [Bader and Boniface, 1985], [Ogihara et al., 1998]. Du fait de leur orientation, ces fissures peuvent faciliter l'apparition de délaminage et accélérer le processus de dégradation du stratifié. Précisons toutefois que ce phénomène reste très rare.

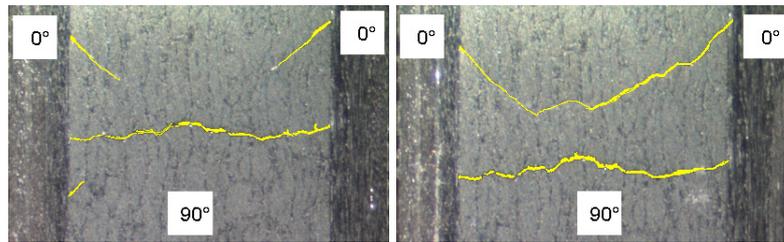


FIGURE 3.36 - Apparition de fissures partielles sous sollicitations de fatigue sur stratifié de type ($0_3^{\circ}/90_{12}^{\circ}/0_3^{\circ}$), (a) 1000 cycles, (b) 55000 cycles

3.6.4 Interaction fissuration/délaminage

On observe, après que l'état de saturation soit atteint, l'apparition de délaminage entre les plis à 0° et les plis à 90° (FIG. 3.37). Ce mécanisme d'endommagement s'initie principalement en tête des fissures transverses et se propagent progressivement en cours d'essai. En général, le délaminage croit symétriquement des deux cotés d'une fissure. Cependant, on observe, dans certains cas, que le délaminage ne se propage que dans une seule direction. GAMSTEDT et SJÖREN [Gamstedt and Sjören, 2002] expliquent que cette dissymétrie est due soit à des variations locales dans la microstructure le long de l'interface entre les plis à 0° et les plis à 90° , soit par la présence d'une autre fissure transverse à proximité qui peut créer une relaxation au sein du matériau pouvant bloquer la propagation du délaminage.

Si l'influence de l'apparition du délaminage en tête de fissure reste limitée dans le cas des stratifiés de type ($0^{\circ}/90^{\circ}/0^{\circ}$), l'endommagement s'avère être beaucoup plus sévère dans le cas du $(\pm 45^{\circ})_s$ (FIG. 3.37). Ce résultat montre que la présence d'un pli fissuré sur la couche externe d'un stratifié peut s'avérer être très néfaste pour l'intégrité d'une structure.

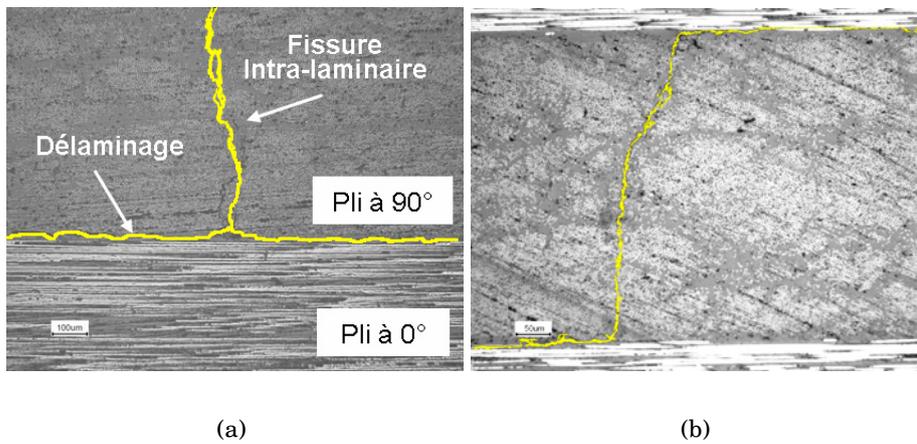


FIGURE 3.37 - *Délaminage en tête de fissure apparaissant après saturation de la densité de fissures dans un stratifié de type (0°/90°/0°) (a) délaminage symétrique, (b) délaminage dissymétrique*

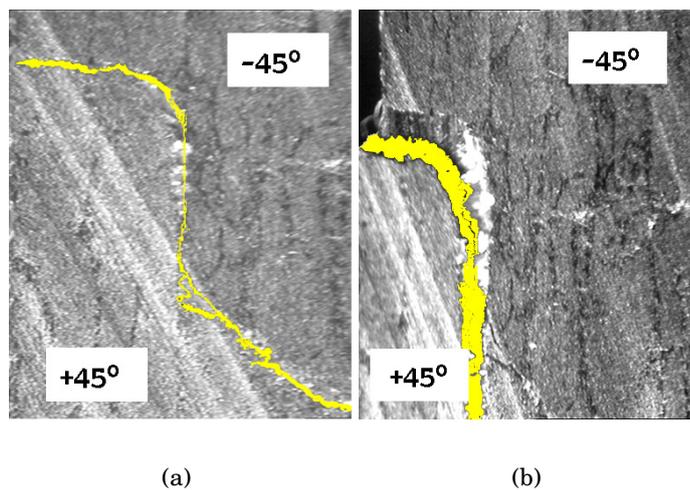


FIGURE 3.38 - *Délaminage en tête de fissure apparaissant après saturation de la densité de fissure dans un stratifié de type (±45°)_s, (a) $\sigma_{11} = 0.5\sigma_R$ et (b) $\sigma_{11} = 0.6\sigma_R$*

3.7 Comportement du stratifié et analyse de l'endommagement sous sollicitations quasi-statiques

3.7.1 Introduction

Dans la partie (§3.6.2) nous avons présenté des résultats purement qualitatifs issus d'une simple observation de l'endommagement. Si ces résultats nous ont renseigné sur les aspects physiques et géométriques des fissures, ils ne nous renseignent en aucun cas sur la quantité d'endommagement et l'influence de ce dernier sur les propriétés du matériaux. C'est là tout l'objet de la suite de ce chapitre. En effet, lorsqu'une structure est soumise à une sollicitation quelle qu'elle soit, la dégradation de ses propriétés mécaniques intervient bien avant la rupture et la fissuration en est une des premières causes. Ainsi, nous présentons dans cette partie les résultats de l'étude du comportement mécanique des différents empilements définis précédemment soumis à un chargement quasi-statique. L'objectif est de mettre en évidence les paramètres caractéristiques de l'endommagement par fissuration intra-laminaire et d'identifier l'influence de l'apparition des fissures sur le comportement mécanique du stratifié.

Dans un premier temps, il s'agit d'étudier le comportement mécanique des différents empilements, à savoir, les séquences $(0_3^\circ/90_3^\circ/0_3^\circ)$, $(0_3^\circ/90_6^\circ/0_3^\circ)$, $(0_3^\circ/90_{12}^\circ/0_3^\circ)$, $(0_3^\circ/\pm 45_3^\circ)_s$ et $(0_3^\circ/\pm 55_3^\circ)_s$. Une première série d'essais de traction quasi-statique monotone nous permet de caractériser le comportement macroscopique des stratifiés. Nous présenterons ensuite des essais de charge-décharge. Comme nous l'avons présenté en début de chapitre ces essais sont particulièrement indiqués pour l'analyse de l'endommagement. Ils nous permettent en outre de suivre parallèlement l'évolution des fissures et des propriétés mécaniques tout au long de l'essai.

3.7.2 Essais de traction quasi-statique monotone sur stratifiés

Nous présentons ici les résultats obtenus à partir des essais de traction longitudinale quasi-statique monotone sur les stratifiés $(0_3^\circ/90_{n=3,6,12}^\circ/0_3^\circ)$, $(0_3^\circ/\pm 45_3^\circ)_s$ et $(0_3^\circ/\pm 55_3^\circ)_s$. La figure 3.39 représente les relations contraintes-déformations (σ_{11} vs ε_{11}) obtenues pour les cinq séquences testées.

Linéaire sur la première partie de la courbe, le comportement des stratifiés présente ensuite une légère non-linéarité se traduisant par une diminution de la pente synonyme d'une chute du module longitudinal. Les essais de traction quasi-statique réalisés sur de l'unidirectionnel dans les directions longitudinale (0°) et transverse (90°) montrent que le comportement est quasi-linéaire ce qui nous amène à penser que la non-linéarité observée pour les stratifiés $(0_3^\circ/90_{n=3,6,12}^\circ/0_3^\circ)$ est une conséquence de l'apparition d'endommagement. En revanche, les essais de traction hors-axes, sur la séquence $(\pm 45_3^\circ)$ par exemple, montrent un comportement non-linéaire, à cause notamment du caractère visqueux de la matrice. À ce stade, il est donc difficile de dire si la non-linéarité observée pour les séquences $(0_3^\circ/\pm 45_3^\circ)_s$ et $(0_3^\circ/\pm 55_3^\circ)_s$ est due à l'apparition d'endommagement ou au comportement non linéaire du pli sollicité en

dehors de ses axes. Les résultats présentés dans la suite (§3.7.3) nous permettront de répondre à cette question. La rupture finale est quant à elle gouvernée par la rupture des plis à 0° . Les valeurs des contraintes et des déformations à rupture ainsi que les modules élastiques longitudinaux obtenus lors des essais de traction monotone quasi-statique sont présentés dans le tableau 3.10.

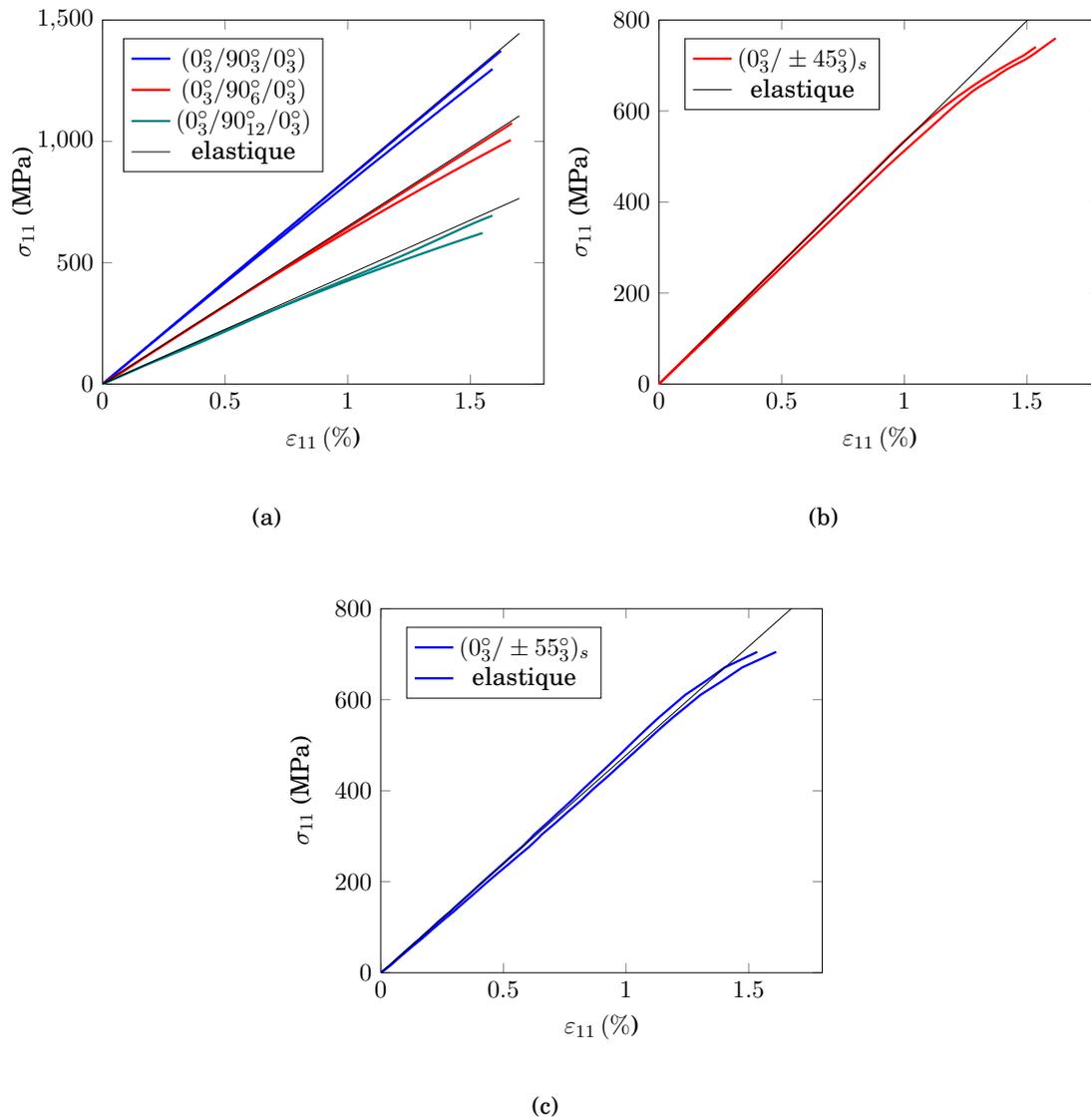


FIGURE 3.39 - Courbes contraintes/déformations (σ_{11} vs ε_{11}) obtenues au cours d'essais de traction quasi-statique monotone sur les séquences (a) $(0_3^0/90_{n=3,9,12}^0/0_3^0)$, (b) $(0_3^0/\pm 45_3^0)_s$ et (c) $(0_3^0/\pm 55_3^0)_s$

Séquences	σ_{11R} (MPa)	ε_{11R} (%)	E_{11} (GPa)
$(0_3^{\circ}/90_3^{\circ}/0_3^{\circ})$	1353 ± 54.8	1.64 ± 0.030	804.67
$(0_3^{\circ}/90_6^{\circ}/0_3^{\circ})$	965.10 ± 12.11	1.73 ± 0.096	590.51
$(0_3^{\circ}/90_{12}^{\circ}/0_3^{\circ})$	703.22 ± 7.22	1.83 ± 0.006	391.57
$(0_3^{\circ}/\pm 45_3^{\circ})_s$	789.78 ± 33.6	1.57 ± 0.051	480.08
$(0_3^{\circ}/\pm 55_3^{\circ})_s$	682.19 ± 15.5	1.61 ± 0.003	475.05

TABLE 3.10 - Valeurs des contraintes σ_{11R} et déformations ε_{11R} à rupture et des modules d'élasticité longitudinaux macroscopiques (E_{11}) pour les séquences $(0_3^{\circ}/90_{n=3,9,12}^{\circ}/0_3^{\circ})$, $(0_3^{\circ}/\pm 45_3^{\circ})_s$ et $(0_3^{\circ}/\pm 55_3^{\circ})_s$

3.7.3 Analyse de la fissuration sous chargements quasi-statiques

Comme nous l'avons présenté précédemment, l'évolution de l'endommagement est suivie en cours d'essai en comptabilisant les fissures dans la couche à 90° apparaissant sur le bord libre de l'éprouvette pour différents niveaux de chargement. Dans ce qui suit nous proposons une analyse de la cinétique de fissuration et de l'évolution du module longitudinal pour chacun des stratifiés. Nous nous attacherons à mettre en évidence l'influence de l'apparition de l'endommagement sur la dégradation des propriétés mécaniques.

REMARQUE

Nous avons vu (§3.6) que la propagation d'une fissure est un phénomène quasi-instantané. Aussi, nous définissons « la cinétique de fissuration » non pas comme la vitesse de propagation d'une fissure mais comme la vitesse de multiplication des fissures.

3.7.3.1 Cinétiques de fissuration et chutes de rigidités

Les figures (FIG. 3.40 , FIG. 3.41 et FIG. 3.42) présentent les évolutions (FIG. 3.40a, FIG. 3.41a et FIG. 3.42a) de la densité de fissures d (mm^{-1})¹ et (FIG. 3.40b , FIG. 3.41b et FIG. 3.42b) des chutes de rigidité longitudinale macroscopique E_{11}/E_{11}^0 du stratifié en fonction de la contrainte longitudinale σ_{11} appliquée à l'éprouvette pour les séquences $(0_3^{\circ}/90_{n=3,6,12}^{\circ}/0_3^{\circ})$, $(0_3^{\circ}/\pm 45_3^{\circ})_s$ et $(0_3^{\circ}/\pm 55_3^{\circ})_s$.

✓ Séquences $(0_3^{\circ}/90_{n=3,6,12}^{\circ}/0_3^{\circ})$

Les courbes d'évolution de la densité de fissures (FIG. 3.40a) se présentent sous la forme d'une sigmoïde présentant un seuil d'amorçage, une phase d'augmentation continue jusqu'à atteindre un état qui semble tendre vers un état de saturation défini comme un État Caractéristique de l'Endommagement par REIFSNIDER

1. On rappelle que l'on définit la densité de fissures comme le nombre de fissures par unité de longueur

[Reifsnider, 1977]. La vitesse d'apparition des fissures tend à diminuer à l'approche de la contrainte à rupture du stratifié, toutefois on ne note pas de saturation franche, la rupture intervenant avant. Par ailleurs, on constate que la contrainte d'apparition des premières fissures et la densité de fissures à rupture sont d'autant plus faibles que l'épaisseur de la couche à 90° est importante. Ces résultats sont en accord avec les travaux de GARRET et BAILEY [Garret and Bailey, 1977]. Enfin l'analyse comparative des figures FIG. 3.40a et FIG. 3.40b permet de relier la chute de rigidité à l'apparition des fissures. En effet, on remarque que le niveau de contrainte pour lequel débute la dégradation des propriétés mécaniques correspond au seuil d'apparition des premières fissures et coïncide avec le seuil de changement de pente observé sur la figure (FIG. 3.39a). Cette dernière observation confirme que la non-linéarité constatée est causée par l'apparition d'endommagement.

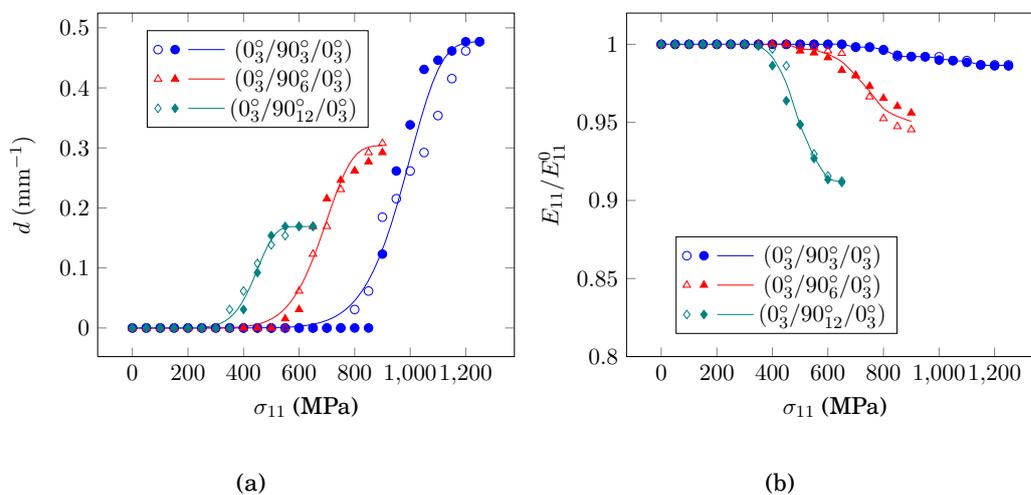


FIGURE 3.40 - Evolution (a) de la densité de fissures d (mm^{-1}) dans la couche à 90° et (b) de la chute de rigidité longitudinale macroscopique E_{11}/E_{11}^0 en fonction de la contrainte σ_{11} (MPa) appliquée au stratifié pour les séquences $(0_3^0/90_n^0/0_3^0)$ sollicitées en traction quasi-statique.

✓ **Séquences $(0_3^0/\pm 45_3^0)_s$ et $(0_3^0/\pm 55_3^0)_s$**

Contrairement aux séquences de type *cross-plyed*², dans le cas des séquences $(0_3^0/\pm 45_3^0)_s$ (FIG. 3.41) et $(0_3^0/\pm 55_3^0)_s$ (FIG. 3.42), la fissuration débute pour un niveau de contrainte très proche de la rupture. De ce fait, on n'observe aucune diminution ni saturation de la vitesse d'apparition des fissures. Malgré la faible densité de fissures observée, on constate que la chute de rigidité est relativement importante en comparaison avec celle observée pour les séquences de type *cross-plyed*. Ce phénomène peut s'expliquer, d'une part parce que les plis dans les directions hors-axes (ici à 45° et 55°) sollicités en cisaillement ont un comportement non-linéaire et d'autre part du fait de l'apparition de délaminage. En effet, ce type de séquence entraîne l'apparition de contraintes de cisaillement inter-plies qui sont à l'origine de l'apparition du

2. Comprendre ici les séquences de type $(0_m^0/90_n^0)_s$

délaminage. Enfin, les premières chutes de rigidité sont constatées avant l'apparition des premières fissures (FIG. 3.41 et 3.42). Ces constatations laissent penser que le changement de pente observé sur la figure FIG. 3.39 n'est pas dû essentiellement à l'endommagement mais peut être causé par le comportement non-linéaire des plis hors-axes.

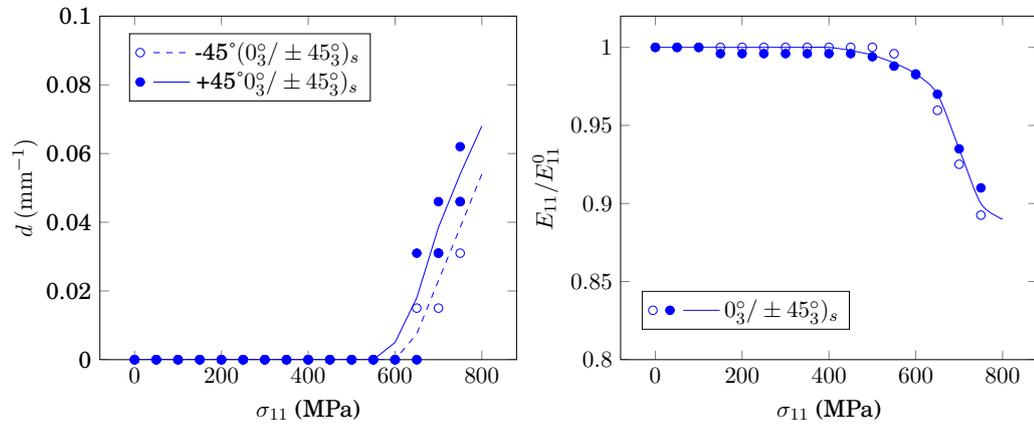


FIGURE 3.41 - Évolution (a) de la densité de fissures d (mm^{-1}) dans les couches à $+45^\circ$, -45° et (b) de la chute de rigidité longitudinale macroscopique E_{11}/E_{11}^0 en fonction de la contrainte σ_{11} (MPa) appliquée au stratifié pour la séquence $(0_3^\circ/\pm 45_3^\circ)_s$ sollicitée en traction quasi-statique.

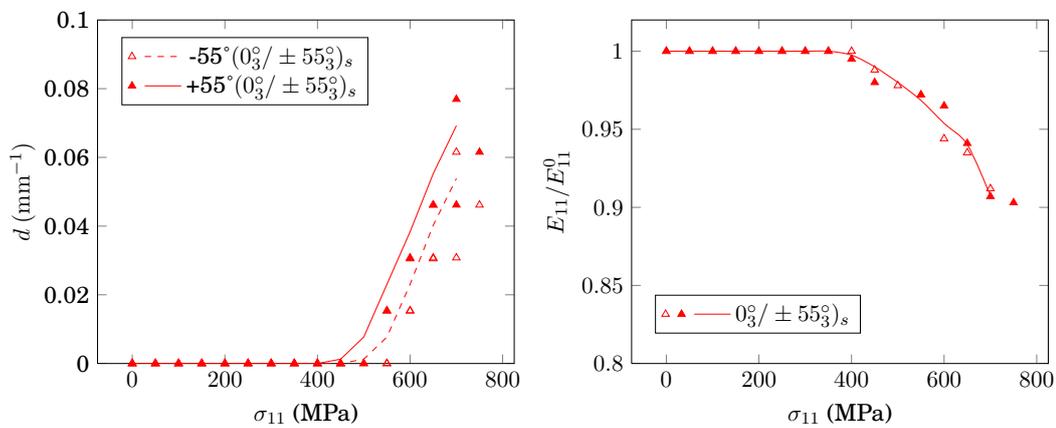


FIGURE 3.42 - Évolution (a) de la densité de fissures d (mm^{-1}) dans les couches à $+55^\circ$, -55° et (b) de la chute de rigidité longitudinale macroscopique E_{11}/E_{11}^0 en fonction de la contrainte σ_{11} (MPa) appliquée au stratifié pour la séquence $(0_3^\circ/\pm 55_3^\circ)_s$ sollicitée en traction quasi-statique.

3.7.3.2 Influence de l'épaisseur de la couche fissurée

Les essais réalisés sur les stratifiés *cross-plyed* ($0_3^{\circ}/90_{n=3,6,12}^{\circ}/0_3^{\circ}$) nous permettent d'étudier l'influence de l'épaisseur de la couche fissurée (respectivement 0.9, 1.8 et 3.6 mm) sur la cinétique de fissuration et la chute de rigidité longitudinale macroscopique.

La figure (FIG. 3.43) et le tableau (TAB. 3.11) mettent clairement en évidence l'influence de l'épaisseur sur la cinétique de fissuration et sur la détérioration de la rigidité des stratifiés. En outre, nous constatons que la fissuration est d'autant plus rapide et importante que la couche fissurée est mince (FIG. 3.43a). En revanche, la chute de rigidité croît avec l'épaisseur de la couche fissurée. Plus précisément, pour une densité de fissures donnée, la chute de rigidité est proportionnelle à l'épaisseur de la couche (FIG. 3.43b).

Afin de s'affranchir de l'effet d'épaisseur pour caractériser l'état d'endommagement, nous proposons d'introduire la variable adimensionnée α , qui fut initialement proposée par RENARD, FAVRE et JEGGY [Renard et al., 1990].

$$\alpha = d \text{ (mm}^{-1}\text{)} \times e \text{ (mm)} \quad (3.4)$$

où d représente la densité de fissures et e l'épaisseur du pli fissuré. Afin de justifier l'utilisation de cette variable nous retraçons les courbes présentées dans la figure (FIG. 3.43) en remplaçant la densité de fissure d par la variable α (FIG. 3.44). La figure (FIG. 3.44), qui représente l'évolution (a) de la variable adimensionnée α dans la couche à 90° en fonction de la contrainte normalisée et (b) de la chute de rigidité longitudinale macroscopique en fonction de α , pour les séquences ($0_3^{\circ}/90_{n=3,6,12}^{\circ}/0_3^{\circ}$) montre que chacun des deux réseaux de courbes peut se réduire à une courbe maîtresse indépendante de l'épaisseur de la couche fissurée.

Séquences	ep (mm)	d _R (mm ⁻¹)	1 - E _{11R} /E ₁₁ ⁰ (%)
(0 ₃ [°] /90 ₃ [°] /0 ₃ [°])	0.9	0.477	1.35
(0 ₃ [°] /90 ₆ [°] /0 ₃ [°])	1.8	0.300	4.92
(0 ₃ [°] /90 ₁₂ [°] /0 ₃ [°])	3.6	0.169	8.80
(0 ₃ [°] /+45 ₃ [°] /-45 ₃ [°]) _s	0.9/1.8	0.0385/0.059	9.90
(0 ₃ [°] /+55 ₃ [°] /-55 ₃ [°]) _s	0.9/1.8	0.0535/0.0689	9.25

TABLE 3.11 - Synthèse des données caractéristiques obtenues par les essais sous sollicitations quasi-statiques sur les séquences ($0_3^{\circ}/90_{n=3,6,12}^{\circ}/0_3^{\circ}$), ($0_3^{\circ}/+45_3^{\circ}/-45_3^{\circ}$)_s et ($0_3^{\circ}/+55_3^{\circ}/-55_3^{\circ}$)_s

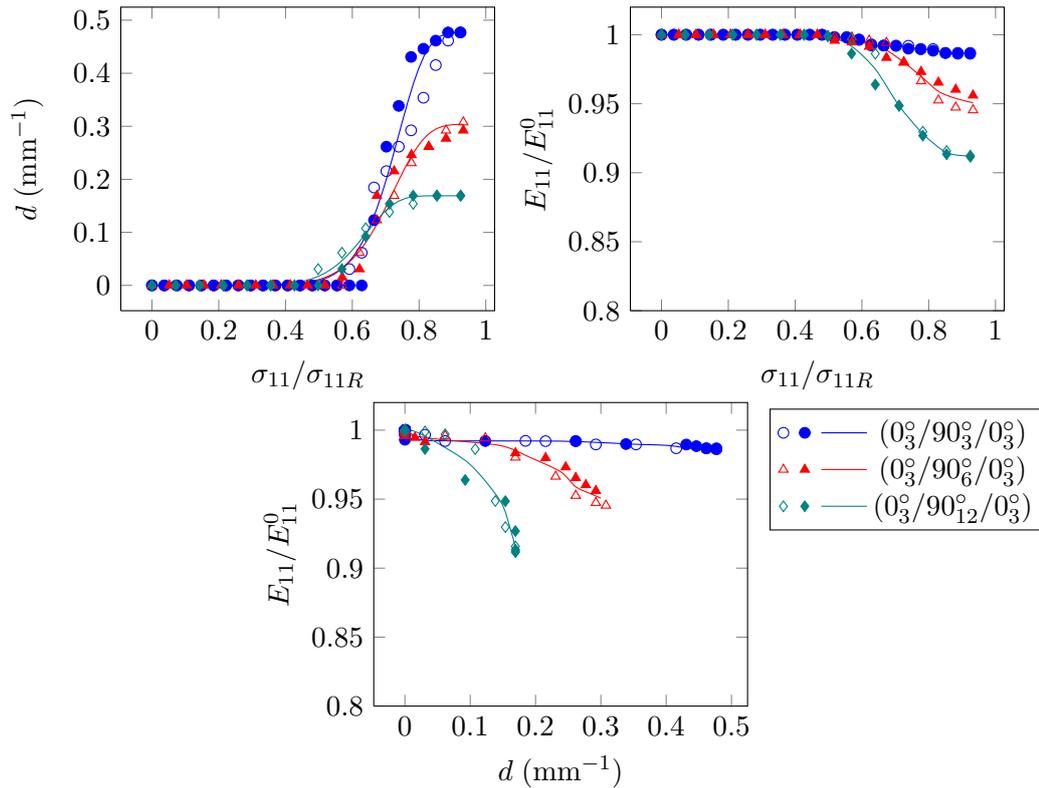


FIGURE 3.43 - Évolution (a) de la densité de fissures d (mm^{-1}) dans la couche à 90° , (b) de la rigidité résiduelle du stratifié en fonction de la contrainte σ_{11} appliquée, (c) de la rigidité résiduelle macroscopique R_{11}/R_{11}^0 en fonction de la densité de fissures d (mm^{-1}) dans la couche à 90° pour les séquences $(0_3^0/90_{n=3,6,12}^0/0_3^0)$ sollicitées en traction quasi-statique.

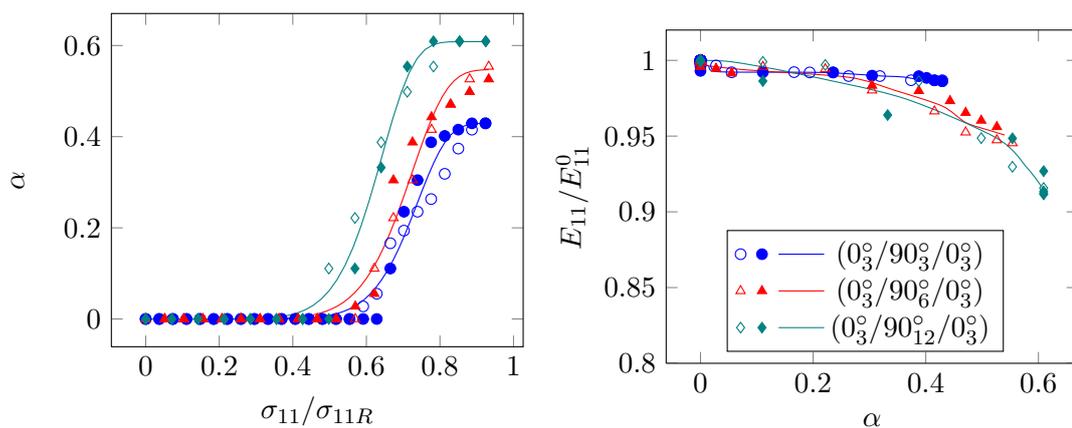


FIGURE 3.44 - Evolution de la variable α dans la couche à 90° en fonction de la contrainte normalisée σ_{11} et de la chute de rigidité macroscopique R_{11}/R_{11}^0 de α pour les séquences $(0_3^0/90_{n=3,6,12}^0/0_3^0)$ sollicitées en traction quasi-statique.

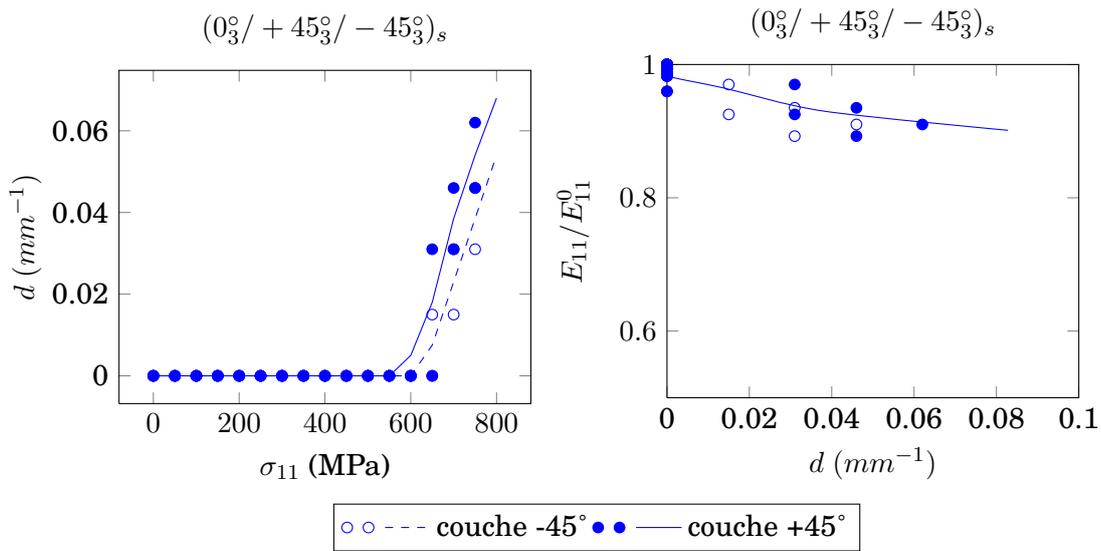


FIGURE 3.45 - Évolution (a) de la variable α dans les couches hors-axes en fonction de la contrainte σ_{11} appliquée au stratifié, (b) de la rigidité résiduelle macroscopique R_{11}/R_{11}^0 en fonction de α pour la séquence $(0_3^0 / +45_3^0 / -45_3^0)_s$ sollicitées en traction quasi-statique.

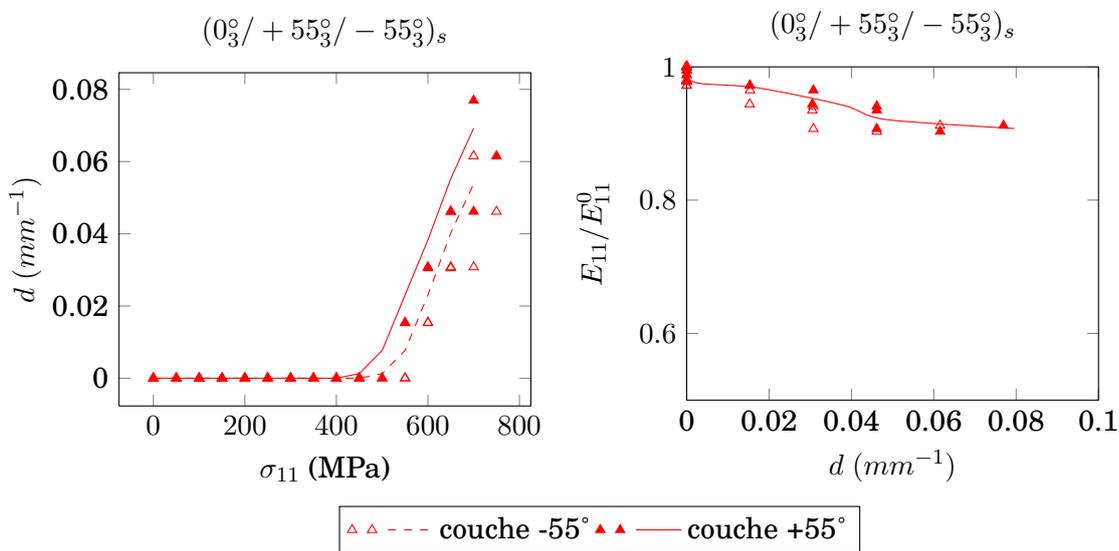


FIGURE 3.46 - Évolution (a) de la variable α dans les couches hors-axes en fonction de la contrainte σ_{11} appliquée au stratifié, (b) de la rigidité résiduelle macroscopique R_{11}/R_{11}^0 en fonction de α pour la séquence $(0_3^0 / +55_3^0 / -55_3^0)_s$ sollicitées en traction quasi-statique.

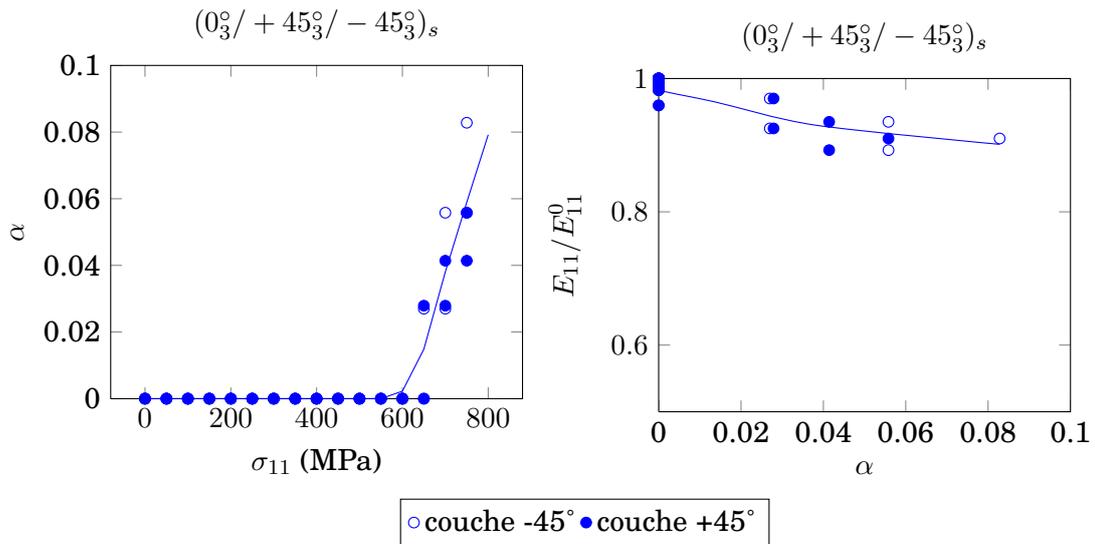


FIGURE 3.47 - Évolution (a) de la variable α dans les couches hors-axes en fonction de la contrainte σ_{11} appliquée au stratifié, (b) de la rigidité résiduelle macroscopique R_{11}/R_{11}^0 en fonction de α pour la séquence $(0_3^0 / +45_3^0 / -45_3^0)_s$ sollicitées en traction quasi-statique.

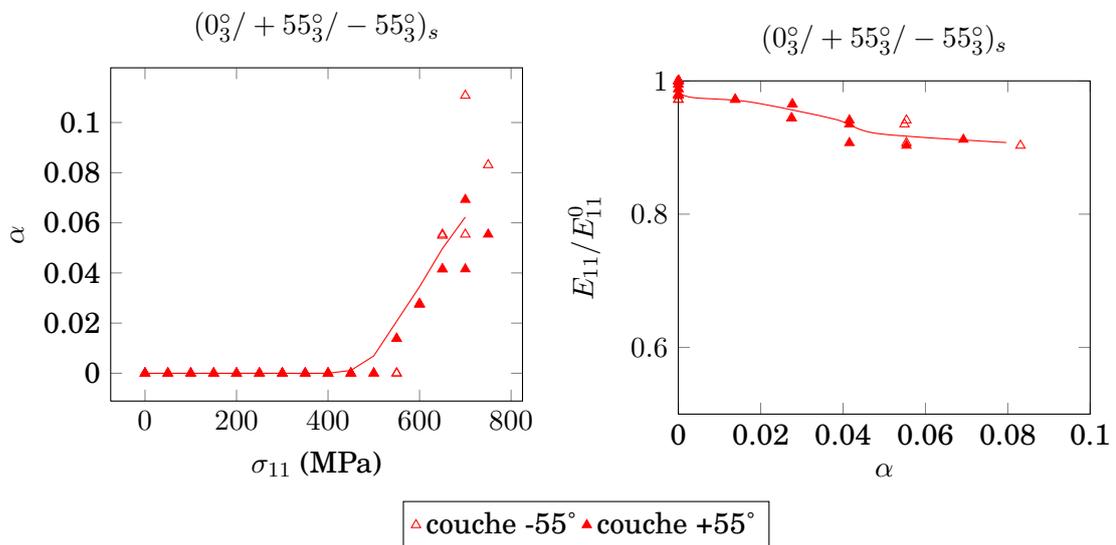


FIGURE 3.48 - Évolution (a) de la variable α dans les couches hors-axes en fonction de la contrainte σ_{11} appliquée au stratifié, (b) de la rigidité résiduelle macroscopique R_{11}/R_{11}^0 en fonction de α pour la séquence $(0_3^0 / +55_3^0 / -55_3^0)_s$ sollicitées en traction quasi-statique.

3.8 Comportement du stratifié et analyse de l'endommagement en fatigue

3.8.1 Introduction

Nous reprenons dans cette partie la même démarche que celle utilisée pour les chargements quasi-statiques (§3.7). Là encore notre objectif est d'étudier l'influence sur l'évolution de la fissuration intra-laminaire des différents paramètres (géométrie ou chargement) qui ont été mis en évidence dans les parties précédentes. Le couplage entre l'endommagement et le comportement mécanique est de nouveau déterminé par le suivi automatique du module longitudinal des stratifiés par extensométrie.

La fatigue est définie comme la réponse d'un matériau à une sollicitation cyclique en contrainte ou en déplacement. Pour les essais de fatigue la sollicitation est souvent prise sous la forme d'une sinusoïde décrite par l'équation EQ. 3.5.

$$S(t) = \Delta S \sin(\omega.t) \quad (3.5)$$

D'une manière générale, une sollicitation cyclique sinusoïdale $S(t)$ peut être décrite simplement à l'aide de trois paramètres caractéristiques (FIG. 3.49) :

- la période T ou la fréquence f ;
- l'amplitude ΔS ou le rapport de charge $R = \frac{S_{min}}{S_{max}}$;
- la valeur maximum S_{max} , la valeur minimum S_{min} ou la valeur moyenne S_{moy} .

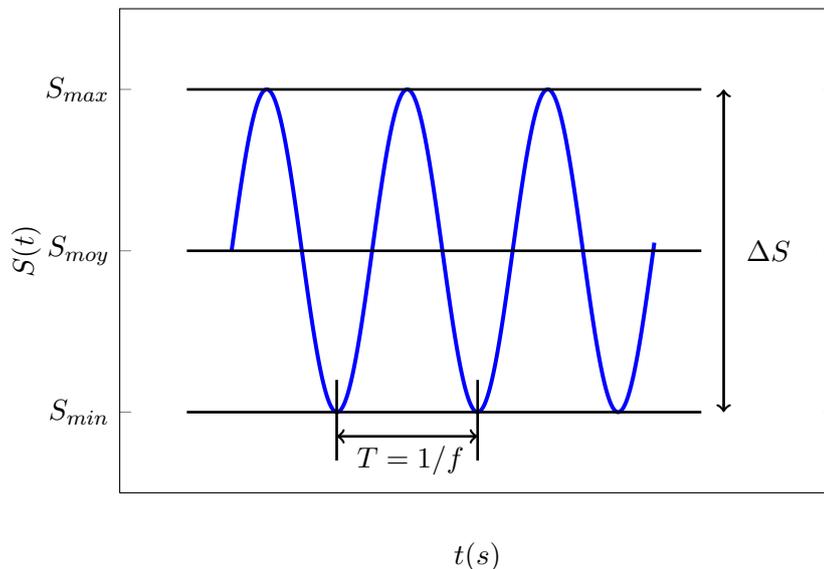


FIGURE 3.49 - *Grandeurs caractéristiques d'un chargement de fatigue*

REMARQUE

Nous rappelons que nous travaillons ici à contrainte imposée. La sollicitation $S(t)$ est donc la contrainte $\sigma_{11}(t)$ appliquée aux stratifiés testés. Dans la suite, σ_{11max} , σ_{11min} et σ_{11R} , σ_{11moy} et $\Delta\sigma_{11}$ sont respectivement la contrainte longitudinale maximale, minimale et moyenne appliquée au stratifié. $\Delta\sigma_{11}$ représente l'amplitude de la contrainte σ_{11} appliquée au stratifié et σ_{11R} la contrainte longitudinale à rupture. Le rapport de charge est défini par : $R = \sigma_{11min}/\sigma_{11max}$.

3.8.2 Analyse de l'évolution de l'endommagement

L'allure des courbes représentatives de la densité de fissures en fonction du nombre de cycles (FIG. 3.52, 3.53 et 3.54) est identique quel que soit le chargement ou la séquence. Comme dans le cas des chargements quasi-statiques, elle se présente sous la forme d'une sigmoïde et se décompose en trois phases :

1. une phase d'amorçage durant laquelle la cinétique de fissuration est relativement lente. Toutefois lorsque la contrainte maximale est élevée, cette phase a tendance à se réduire voire à disparaître totalement au profit de l'apparition directe de la seconde phase ;
2. une phase d'endommagement rapide ;
3. une dernière phase au cours de laquelle la vitesse de fissuration diminue jusqu'à atteindre un état de saturation ;

Contrairement aux résultats obtenus dans le cas des chargements quasi-statiques, l'état de saturation est clairement atteint et intervient bien avant la rupture qui n'a d'ailleurs jamais pu être atteinte au cours des essais de fatigue. Ces résultats sont en accord avec les travaux de REIFSINDER [Reifsnider, 1977] qui montrent que la densité de fissures dans les plis hors-axes d'un stratifié atteint un état asymptotique appelé l'état d'endommagement caractéristique (Characteristic Damage State CDS).

3.8.2.1 Influence du niveau de contrainte maximum

Parmi les paramètres qui affectent l'évolution de l'endommagement, le niveau de chargement maximum est sans doute celui qui a la plus grande influence. Afin de mettre en évidence et d'évaluer cette influence nous avons réalisé pour chacune des séquences une série d'essais pour plusieurs niveaux de contrainte maximum. Cependant, quelques essais réalisés à 70% de la contrainte à rupture montrent que la saturation est atteinte très rapidement (moins de 1000 cycles) ce qui n'a que peu d'intérêt dans le cadre de cette étude. Cependant, il est intéressant de remarquer que pour de tels niveaux de contraintes, la multiplication des fissures est continue dès les premiers cycles. On n'observe pas de palier à densité de fissures constante tel que cela peut-être le cas pour les niveaux de sollicitation inférieurs (FIG. 3.50). D'autre part, la durée des essais dans le cas d'une contrainte maximale égale à 30% de la

contrainte à rupture s'est avérée être beaucoup trop importante, aussi, nous avons fait le choix de nous focaliser sur trois niveaux : $0.4\sigma_R$, $0.5\sigma_R$, et $0.6\sigma_R$.

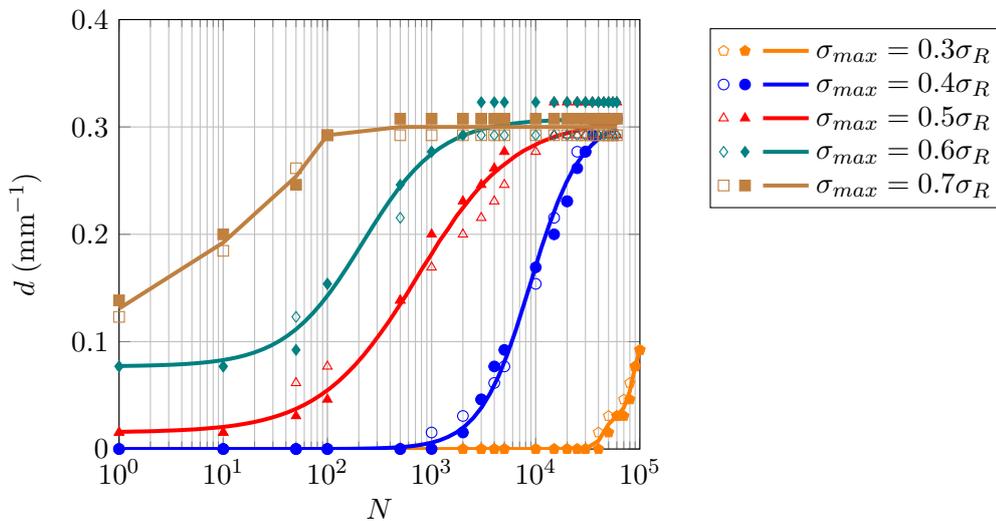


FIGURE 3.50 - Evolution de la densité de fissures dans la couche à 90° pour la séquence $(0_3^\circ/90_6^\circ/0_3^\circ)$ avec $R=0.1$, $f=1\text{Hz}$, et $\sigma_{max} = 0.6\sigma_R$

Le tableau 3.12 récapitule les valeurs des différentes grandeurs caractéristiques qui ont été retenues pour chacun des essais réalisés. Les valeurs σ_{11max} , σ_{11min} , σ_{11moy} , et $\Delta\sigma_{11}$ sont exprimées en pourcentage de la contrainte à rupture. L'ensemble des essais ont été réalisés sous sollicitations ondulées [Bathias and Bailon, 1980] en traction-traction, *i.e.* avec $0 \leq R < 1$ à la fréquence de 1 Hz .

σ_{11min} (%) $\cdot\sigma_{11R}$	σ_{11max} (%) $\cdot\sigma_{11R}$	R	f (Hz)
4	40	0.1	1
5	50	0.1	1
6	60	0.1	1

TABLE 3.12 - Tableau récapitulatif des essais de fatigue

Aux vues des résultats de ces essais, nous constatons d'emblée que le niveau de chargement influence fortement la cinétique de fissuration (FIG. 3.52). Il apparaît clairement que la multiplication des fissures est d'autant plus rapide que le chargement maximal est important. Par ailleurs, nous pouvons remarquer que lorsque la contrainte σ_{11max} est supérieure au seuil d'apparition de la première fissure sous chargement quasi-statique l'endommagement créé lors du premier cycle du chargement cyclique résulte en fait d'un chargement quasi-statique. En effet, il est toujours possible de supposer que le premier cycle est identique à une montée en charge quasi-statique. En revanche, la densité de fissure à saturation ne dépend pas du chargement et pour chaque séquence elle est sensiblement équivalente à celle observée

en quasi-statique (TAB. 3.13). Ce résultat confirme que la densité de fissure à saturation est une propriété intrinsèque au matériau et à la séquence d'empilement et donc indépendante du chargement appliqué pour atteindre cet état caractéristique. Dans le cas des séquences $(0_3^\circ/ + 45_3^\circ/ - 45_3^\circ)_s$ et $(0_3^\circ/ + 55_3^\circ/ - 55_3^\circ)_s$ qui sont plus sensibles à l'apparition de délaminage, on constate qu'une contrainte maximale élevée favorise l'apparition du délaminage qui tend à retarder ou ralentir le développement de la fissuration.

Séquences	$d_{\text{statique}} (mm^2)$	$d_{\text{fatigue}} (mm^2)$
$(0_3^\circ/90_3^\circ/0_3^\circ)$	0.477	0.6
$(0_3^\circ/90_6^\circ/0_3^\circ)$	0.3	0.307
$(0_3^\circ/90_{12}^\circ/0_3^\circ)$	0.169	0.169
$(0_3^\circ/ + 45_3^\circ/ - 45_3^\circ)_s$	–	$d_{\text{int}} = 0.289$ $d_{\text{ext}} = 0.505$
$(0_3^\circ/ + 55_3^\circ/ - 55_3^\circ)_s$	–	$d_{\text{int}} = 0.297$ $d_{\text{ext}} = 0.526$

TABLE 3.13 - Comparaisons des densités de fissures à saturation en statique et en fatigue pour les séquences $(0_3^\circ/90_{n=3,6,12}^\circ/0_3^\circ)$, $(0_3^\circ/ + 45_3^\circ/ - 45_3^\circ)_s$ et $(0_3^\circ/ + 55_3^\circ/ - 55_3^\circ)_s$

Afin de s'assurer que l'état atteint est effectivement la saturation et pas seulement un palier, certains essais ont été poursuivis jusqu'à atteindre 10^6 cycles. Comme le montre la figure 3.51 la densité de fissures atteint effectivement un état de saturation à partir duquel aucune nouvelle fissure n'apparaît. En revanche, d'autres types d'endommagement tels que le délaminage et les ruptures de fibres ont été observés.

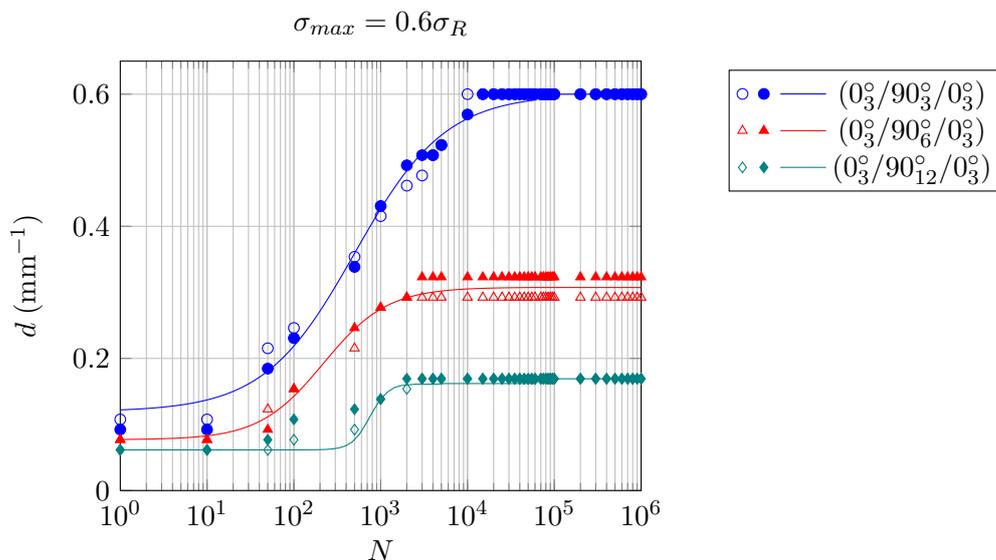


FIGURE 3.51 - Evolution de la densité de fissures dans la couche à 90° pour la séquence $(0_3^\circ/90_6^\circ/0_3^\circ)$ avec $R=0.1$, $f=1\text{Hz}$, et $\sigma_{\text{max}} = 0.6\sigma_R$

3.8.2.2 Analyse des chutes des rigidités longitudinales macroscopiques

Comme cela a été fait précédemment dans le cas des chargements quasi-statiques, nous avons suivi l'évolution de la rigidité longitudinale du stratifié en cours d'essai (FIG. 3.55). L'analyse des courbes montrant l'évolution de la rigidité en fonction du nombre de cycles montre que les propriétés mécaniques commencent à se dégrader dès l'apparition de la première fissure puis tend à se stabiliser lorsque l'on se rapproche de l'état de saturation. La chute de rigidité est proportionnelle à l'épaisseur de la couche fissurée, ici la couche à 90° . La chute de rigidité à saturation est d'environ 2% pour la séquence $(0_3^\circ/90_3^\circ/0_3^\circ)$, 4% pour la séquence $(0_3^\circ/90_6^\circ/0_3^\circ)$ et 8% pour la séquence $(0_3^\circ/90_{12}^\circ/0_3^\circ)$. Toutefois, la saturation des chutes de rigidité n'est pas aussi franche que celle observée pour la densité de fissures. Plus particulièrement, nous constatons que la stabilisation de la chute de rigidité est plus franche pour la séquence $(0_3^\circ/90_3^\circ/0_3^\circ)$ que pour la séquence $(0_3^\circ/90_{12}^\circ/0_3^\circ)$. Cela est bien mis en évidence par la figure (FIG. 3.60) qui représente l'évolution de la chute de rigidité en fonction de la densité de fissures. On constate, notamment pour le stratifié le plus épais que la chute de rigidité se poursuit alors même que la densité de fissures a cessé d'augmenter. Plusieurs mécanismes peuvent être à l'origine de ce phénomène :

- la densité de fissures est déterminée par une observation du bord libre des éprouvettes. Or, comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent (CHAP. 2), dans le cas des sollicitations cycliques, les fissures, qui s'initient sur les bords libres, se propagent plus ou moins rapidement vers le centre de l'éprouvette [Lafarie-Frenot and Henaff-Gardin, 1990]. Ainsi, bien qu'il n'y ait plus d'apparition de nouvelles fissures, il est possible que certaines des fissures existantes ne soient pas totalement traversantes et continuent de se propager entraînant une diminution de la rigidité ;
- l'observation du bord libre des éprouvettes testées montre que le délaminage est plus important dans le $(0_3^\circ/90_{12}^\circ/0_3^\circ)$. En effet on rappelle que dans le cas de cette séquence, qui est la plus épaisse, nous avons constaté la présence de fissures partielles inclinées qui ont tendance à favoriser l'apparition du délaminage. La présence et la propagation de ce délaminage peuvent expliquer le fait que la dégradation de la rigidité du stratifié se poursuit alors que la densité de fissures n'évolue plus. La présence de délaminage est plus importante dans le cas des séquences $(0_3^\circ/ + 45_3^\circ/ - 45_3^\circ)_s$ et $(0_3^\circ/ + 55_3^\circ/ - 55_3^\circ)_s$ et là encore il accentue la chute de rigidité ;
- les ruptures de fibres.

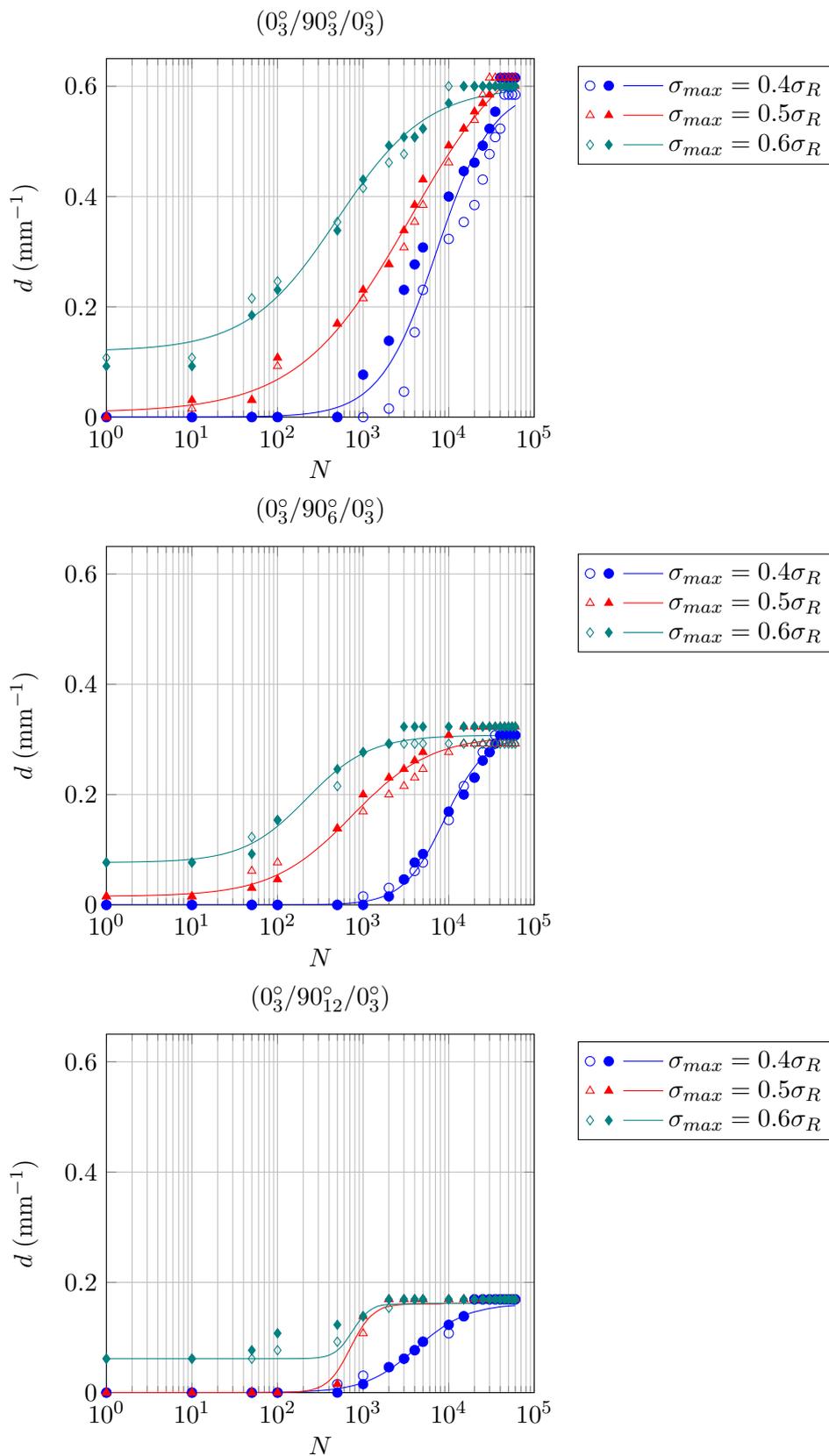


FIGURE 3.52 - Evolution de la densité de fissures d (mm^{-1}) dans la couche à 90° et en fonction du nombre de cycles pour les séquences $(0_3^\circ/90_n^\circ/0_3^\circ)$ sollicitées en traction cyclique avec $R=0.1$, $f=1\text{Hz}$, $\sigma_{max} = 0.4\sigma_R$, $0.5\sigma_R$, $0.6\sigma_R$.

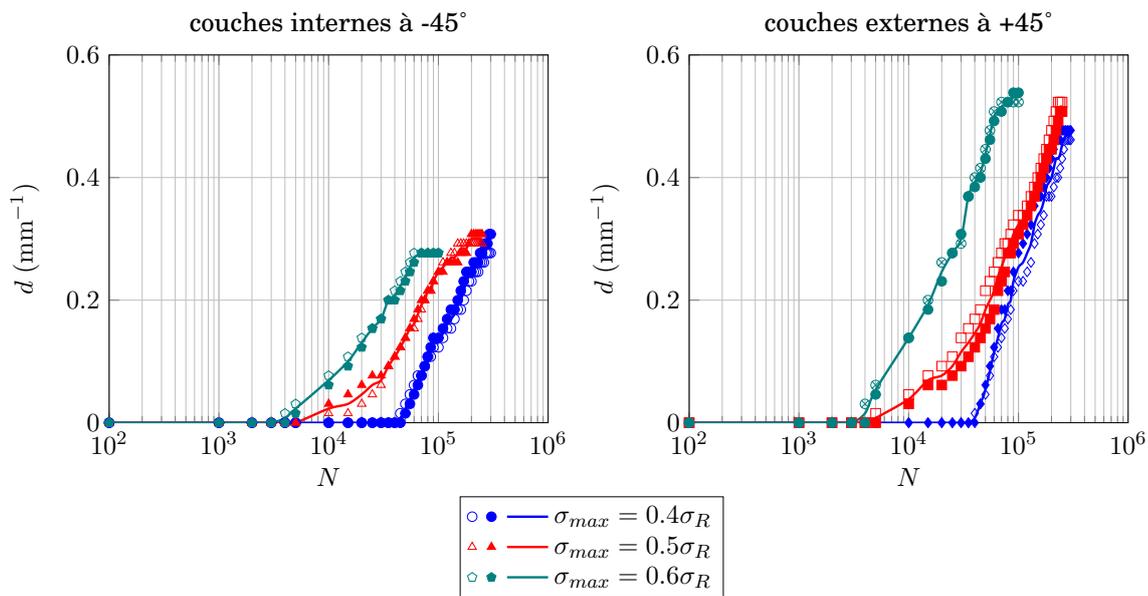


FIGURE 3.53 - Evolution de la densité de fissures d (mm^{-1}) dans les couches à $+45^\circ$ et -45° en fonction du nombre de cycles pour les séquences $(0_3^\circ / +45_3^\circ / -45_3^\circ)_s$ sollicitées en traction cyclique avec $R=0.1$, $f=1\text{Hz}$, $\sigma_{max} = 0.4\sigma_R$, $0.5\sigma_R$, $0.6\sigma_R$.

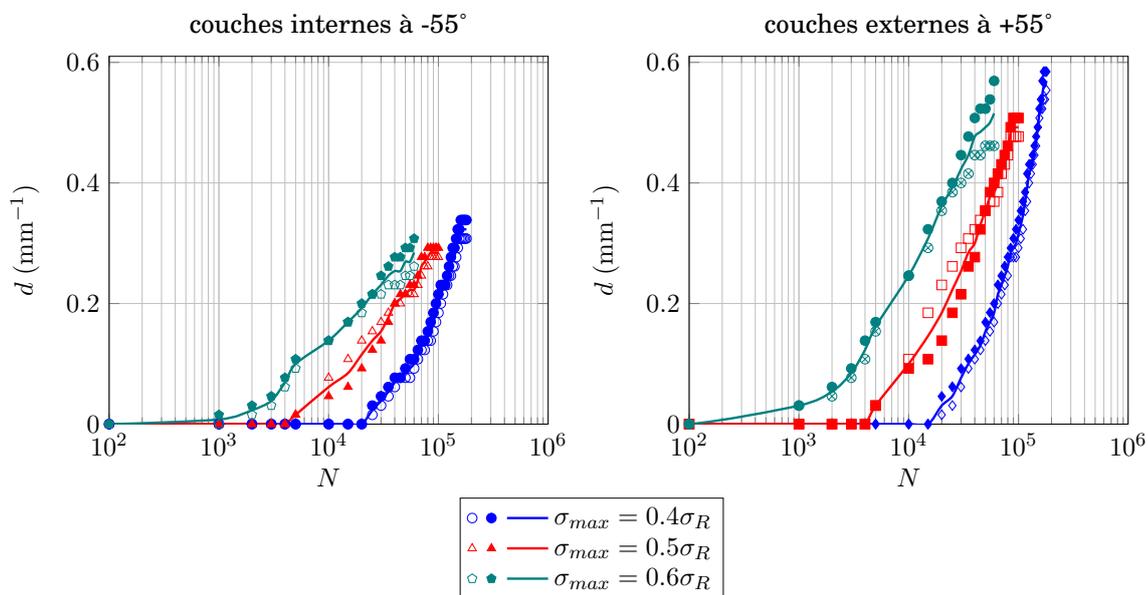


FIGURE 3.54 - Evolution de la densité de fissures d (mm^{-1}) dans les couches à $+55^\circ$ et -55° en fonction du nombre de cycles pour les séquences $(0_3^\circ / +55_3^\circ / -55_3^\circ)_s$ sollicitées en traction cyclique avec $R=0.1$, $f=1\text{Hz}$, $\sigma_{max} = 0.4\sigma_R$, $0.5\sigma_R$, $0.6\sigma_R$.

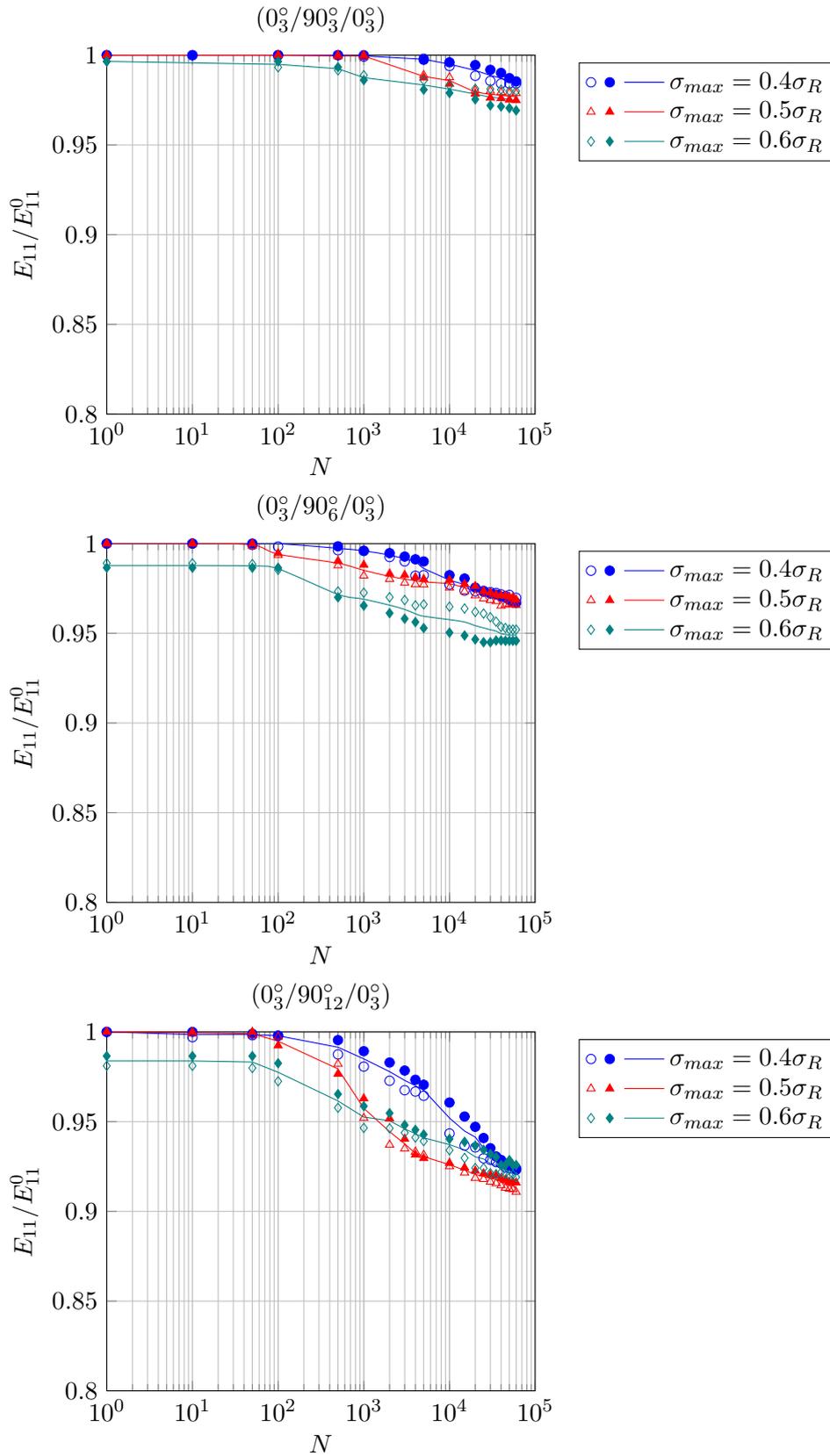


FIGURE 3.55 - Évolution de la chute de rigidité longitudinale macroscopique E_{11}/E_{11}^0 en fonction du nombre de cycles pour les séquences $(0_3^{\circ}/90_n^{\circ}/0_3^{\circ})$ sollicitées en traction cyclique avec $R=0.1$, $f=1\text{Hz}$, $\sigma_{max} = 0.4\sigma_R$, $0.5\sigma_R$, $0.6\sigma_R$.

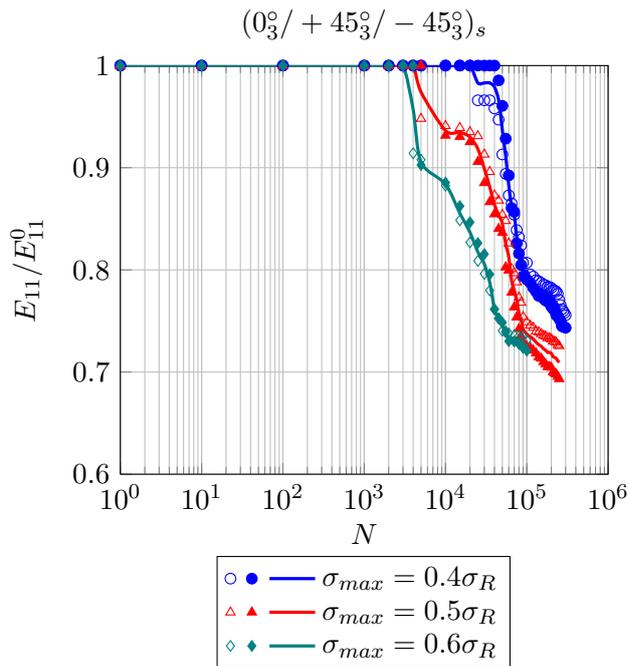


FIGURE 3.56 - Évolution de la rigidité résiduelle macroscopique du stratifié E_{11}/E_{11}^0 en fonction du nombre de cycles pour la séquence $(0_3^0 / +45_3^0 / -45_3^0)_s$ sollicitée en traction cyclique avec $R=0.1$, $f=1\text{Hz}$, $\sigma_{max} = 0.4\sigma_R$, $0.5\sigma_R$, $0.6\sigma_R$.

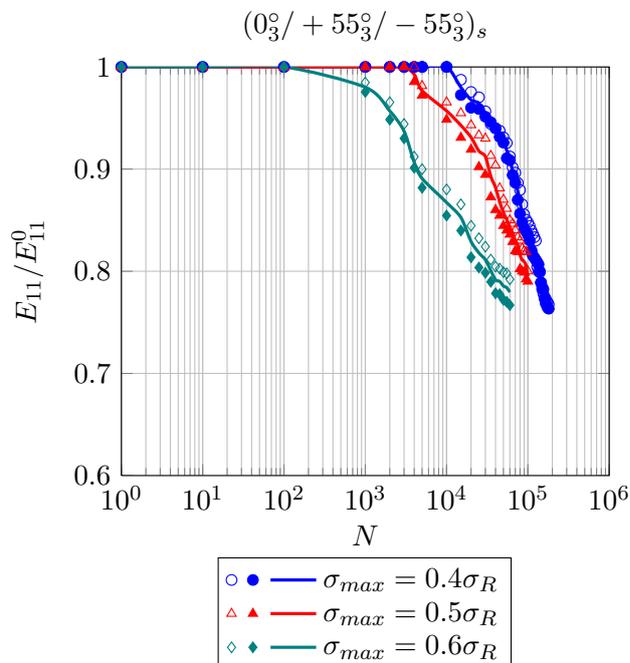


FIGURE 3.57 - Évolution de la rigidité résiduelle macroscopique du stratifié E_{11}/E_{11}^0 en fonction du nombre de cycles pour la séquence $(0_3^0 / +55_3^0 / -55_3^0)_s$ sollicitée en traction cyclique avec $R=0.1$, $f=1\text{Hz}$, $\sigma_{max} = 0.4\sigma_R$, $0.5\sigma_R$, $0.6\sigma_R$.

3.8.2.3 Influence de l'épaisseur du pli fissuré

La figure (FIG. 3.58) représente les courbes d'évolution de la densité de fissures en fonction du nombre de cycles pour les séquences $(0_3^{\circ}/90_{n=3,6,12}^{\circ}/0_3^{\circ})$ pour trois niveaux de chargements. Comme dans le cas d'un chargement quasi-statique, les courbes mettent en évidence une forte dépendance de la cinétique de fissuration vis à vis de l'épaisseur de la couche fissurée (ici la couche à 90°). En outre, la vitesse de fissuration comme la densité de fissures à saturation (donc le nombre de fissures) sont inversement proportionnelles à l'épaisseur de la couche fissurée. Bien évidemment, cet effet se retrouve sur les courbes de chutes de rigidité (FIG. 3.59) dans la mesure où ces dégradations sont directement liées à l'apparition de l'endommagement. Dans le cas des séquences $(0_3^{\circ}/+45_3^{\circ}/-45_3^{\circ})_s$ et $(0_3^{\circ}/+55_3^{\circ}/-55_3^{\circ})_s$ cet effet d'épaisseur se retrouve à l'intérieur même du stratifié. En effet, les plis à -45° , respectivement -55° , qui se trouvent au centre de l'éprouvette sont de fois plus épais que les plis à $+45^{\circ}$, respectivement $+55^{\circ}$. Aussi, la densité de fissures dans les plis intérieurs est environ deux fois plus importante que celle des plis externes (FIG. 3.53 et 3.54).

Afin de mettre en évidence ce phénomène, on se propose de tracer l'évolution de la variable α , que nous avons définie précédemment, en fonction du nombre de cycles. On rappelle que la variable α est définie comme le produit de la densité de fissures par l'épaisseur du pli fissuré $\alpha = d \times e$. Ainsi, les figures 3.61, 3.63 et 3.64 représentent l'évolution de α en fonction du nombre de cycles pour différentes épaisseurs et différents niveaux de chargement. On constate alors que l'utilisation de la grandeur α en lieu et place de la densité de fissures d permet de s'affranchir de l'effet d'épaisseur de la couche fissurée.

Nous avons suivi la même démarche, afin d'étudier l'influence de l'épaisseur du pli fissuré sur les chutes de rigidité. Nous nous intéressons alors à l'évolution de la chute de rigidité en fonction de la densité de fissures. La figure 3.60 met clairement en évidence que, comme dans le cas des chargements quasi-statiques, la chute de rigidité due à l'apparition d'une fissure est d'autant importante que le pli fissuré est épais. Aussi, nous avons, là encore, tracer l'évolution des chutes de rigidité en fonction de $\alpha = e \times d$ et on constate une nouvelle fois que l'utilisation de la variable α permet de s'affranchir des effets d'épaisseur (FIG. 3.62).

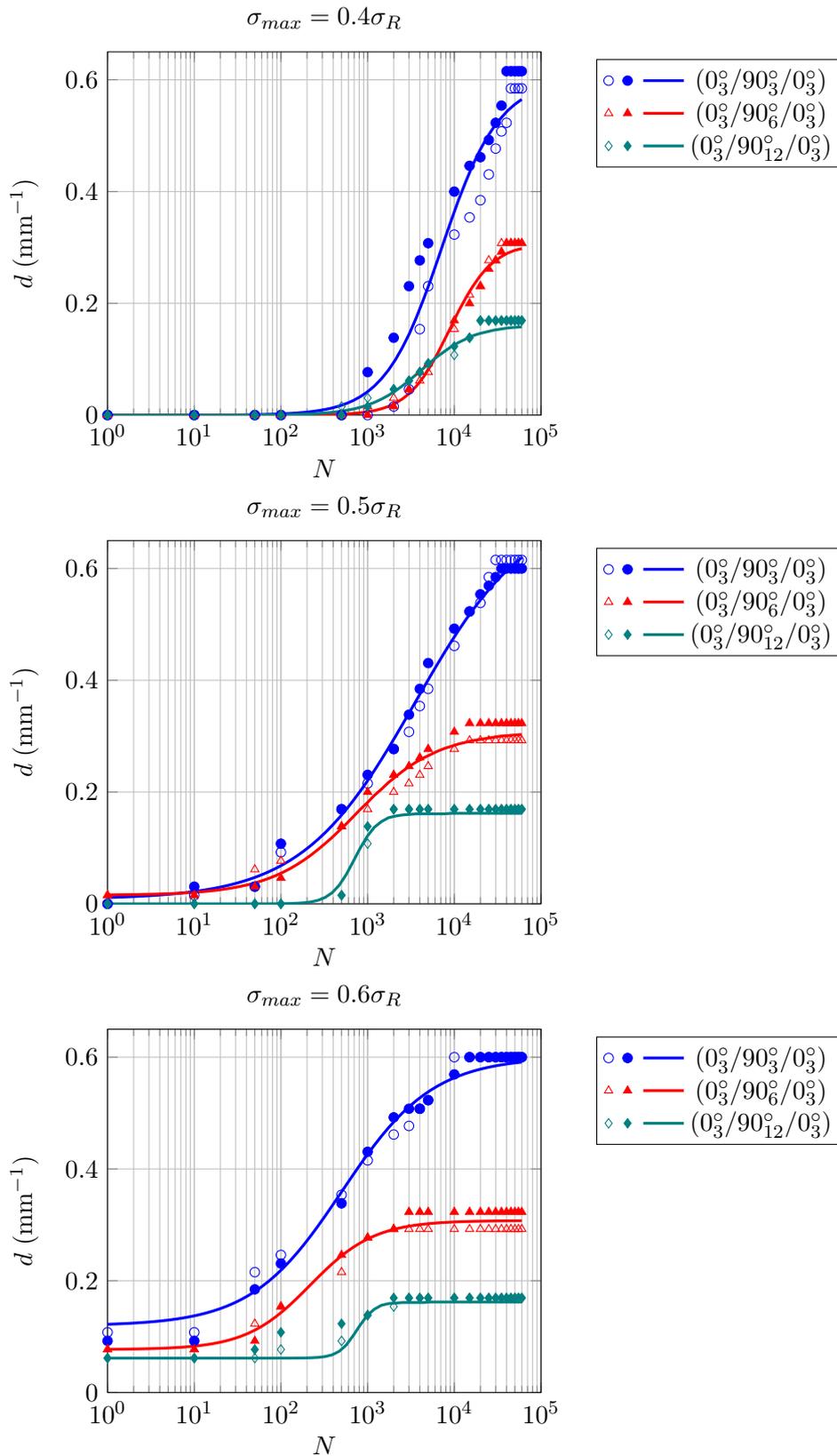


FIGURE 3.58 - Evolution (a) de la densité de fissures dans la couche à 90° et (b) de la chute de rigidité macroscopique en fonction du nombre de cycles pour les séquences $(0_3^{\circ}/90_{n=3,6,12}^{\circ}/0_3^{\circ})$, avec $R=0.1$, $f=1\text{Hz}$ et $\sigma_{11max} = 0.4\sigma_{11R}$

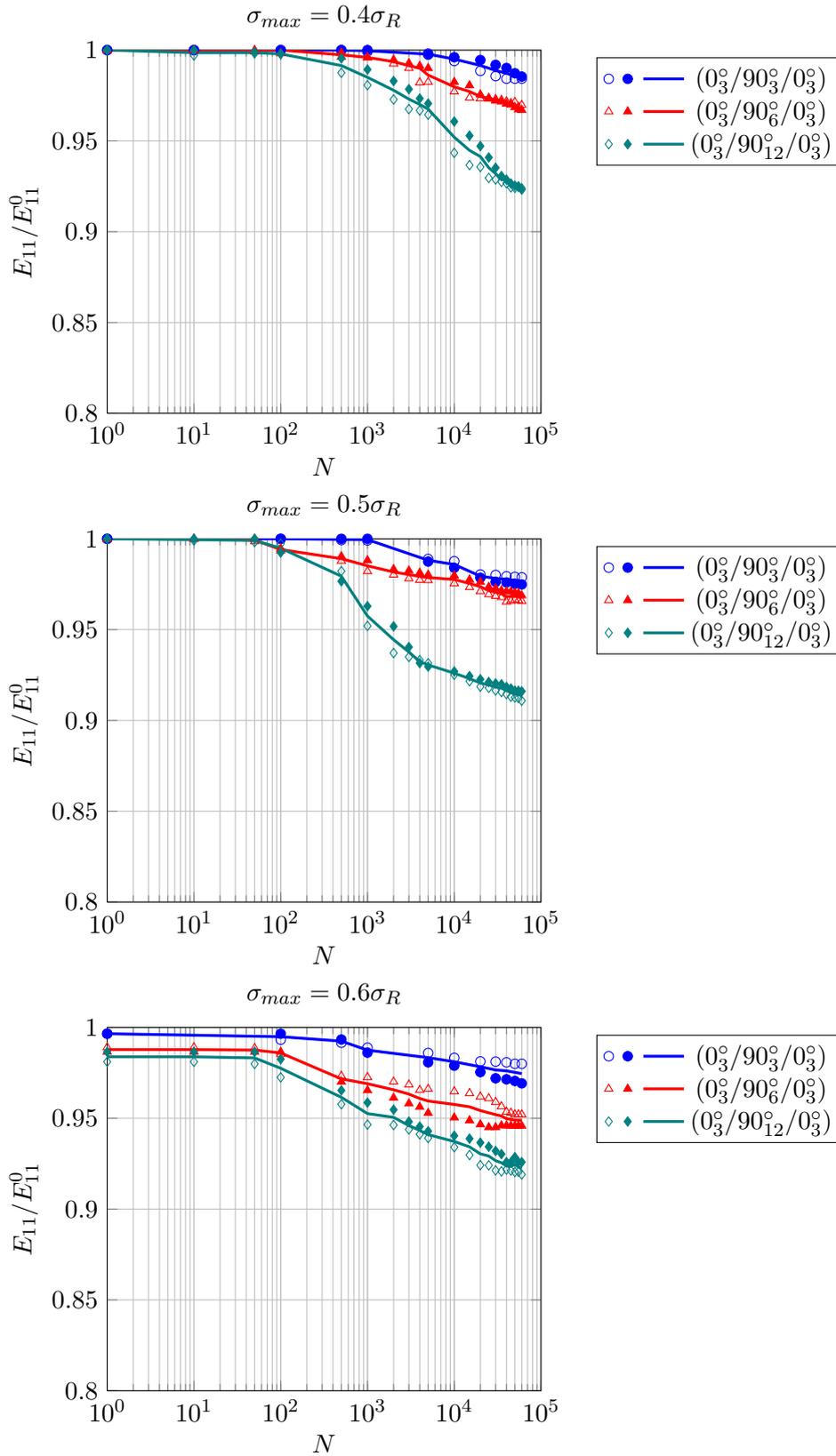


FIGURE 3.59 - Evolution (a) de la densité de fissures dans la couche à 90° et (b) de la chute de rigidité macroscopique en fonction du nombre de cycles pour les séquences $(0_3^0/90_n^0/0_3^0)$, avec $R=0.1$, $f=1\text{Hz}$ et $\sigma_{11max} = 0.5\sigma_{11R}$

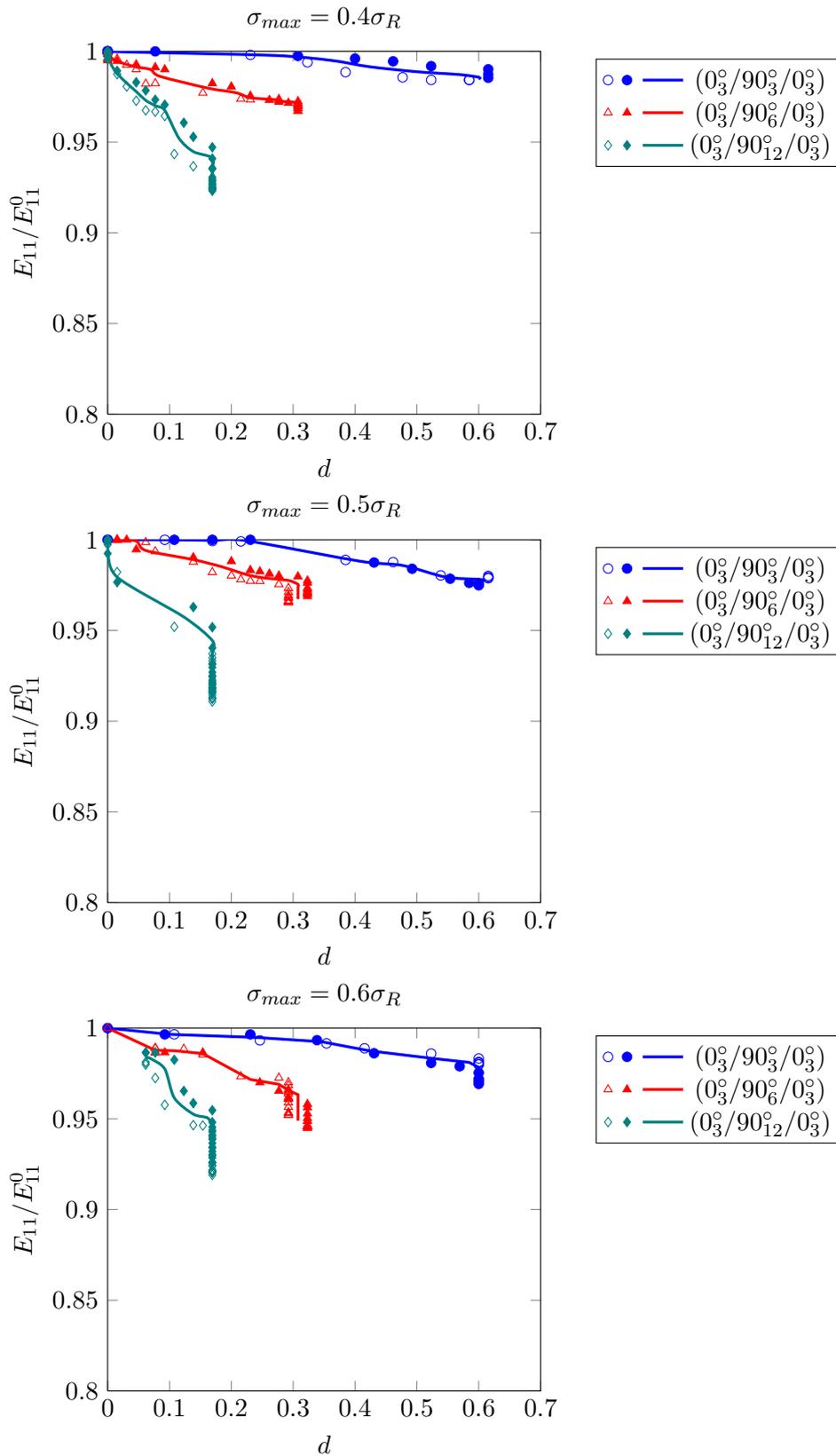


FIGURE 3.60 - Evolution (a) de la densité de fissures dans la couche à 90° et (b) de la chute de rigidité macroscopique en fonction du nombre de cycles pour les séquences $(0_3^0/90_{n=3,6,12}^0/0_3^0)$, avec $R=0.1$, $f=1\text{Hz}$ et $\sigma_{11max} = 0.5\sigma_{11R}$

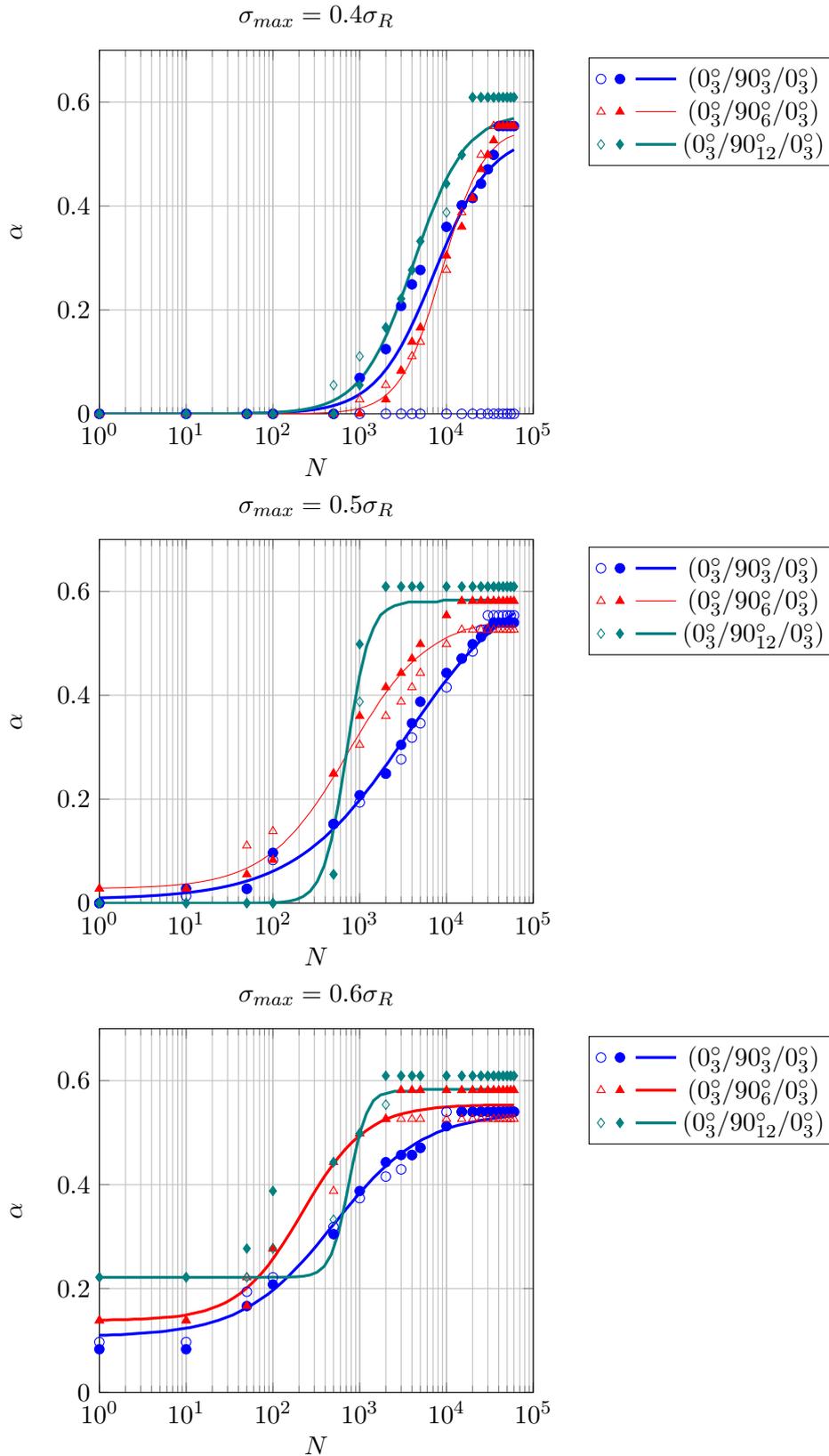


FIGURE 3.61 - Evolution (a) de $\alpha = d \times e$ dans la couche à 90° et (b) de la chute de rigidité macroscopique en fonction du nombre de cycles pour les séquences $(0_3^0/90_n^0/0_3^0)$, avec $R=0.1$, $f=1\text{Hz}$ et $\sigma_{11max} = 0.4\sigma_{11R}$

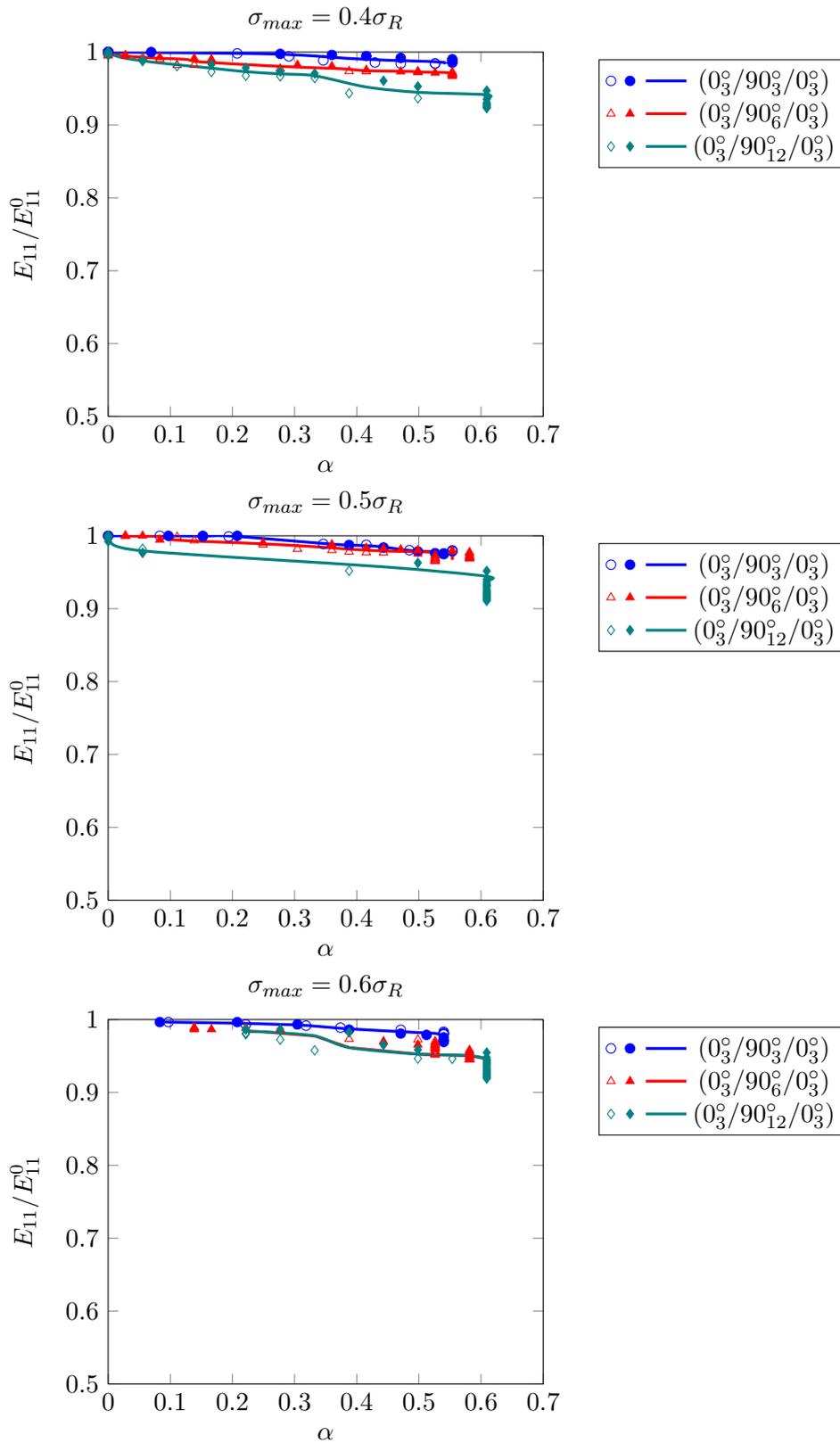


FIGURE 3.62 - Évolution (a) de la densité de fissures dans la couche à 90° et (b) de la chute de rigidité macroscopique en fonction du nombre de cycles pour les séquences $(0_3^{\circ}/90_n^{\circ}/0_3^{\circ})$, avec $R=0.1$, $f=1\text{Hz}$ et $\sigma_{11max} = 0.5\sigma_{11R}$

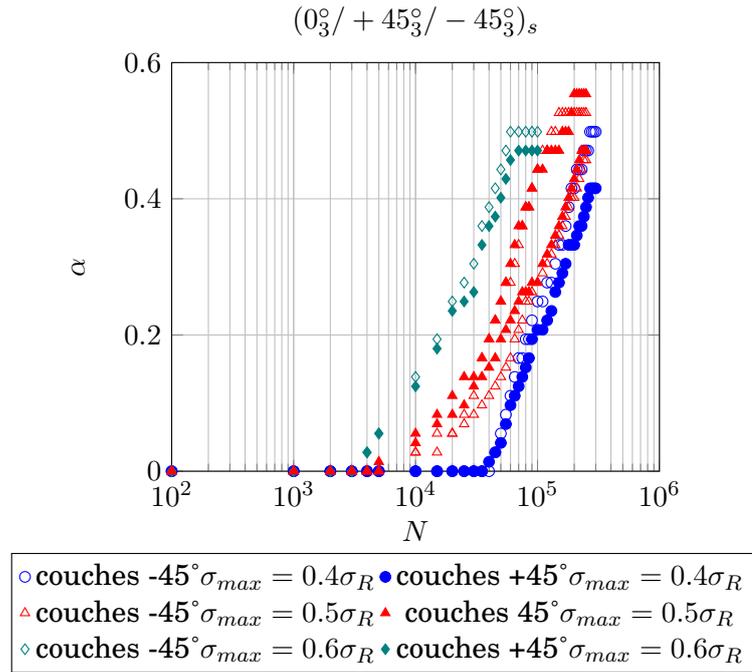


FIGURE 3.63 - Évolution de la variable $\alpha = d \text{ (mm}^{-1}) \times e \text{ (mm)}$ dans les couches à $+45^\circ$ et -45° en fonction du nombre de cycles pour la séquence $(0_3^\circ / +45_3^\circ / -45_3^\circ)_s$ sollicitées en traction cyclique avec $R=0.1$, $f=1\text{Hz}$, $\sigma_{max} = 0.4\sigma_R$, $0.5\sigma_R$, $0.6\sigma_R$.

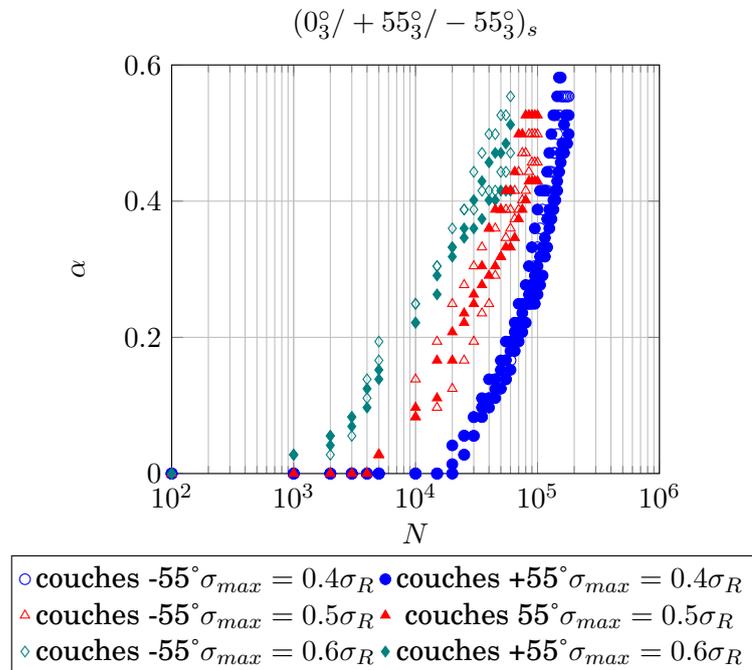


FIGURE 3.64 - Évolution de la variable $\alpha = d \text{ (mm}^{-1}) \times e \text{ (mm)}$ dans les couches à $+55^\circ$ et -55° en fonction du nombre de cycles pour les séquences $(0_3^\circ / +55_3^\circ / -55_3^\circ)_s$ sollicitées en traction cyclique avec $R=0.1$, $f=1\text{Hz}$, $\sigma_{max} = 0.4\sigma_R$, $0.5\sigma_R$, $0.6\sigma_R$.

3.8.3 Comparaison quasi-statique/fatigue

Nous l'avons montré, la densité de fissures à saturation, lorsqu'elle est représentée par la variable α , est une propriété intrinsèque au matériau et donc par définition indépendante du chargement. On propose maintenant de comparer les chutes de rigidité engendrées par un endommagement quasi-statique à celles dues à un endommagement dit de fatigue (FIG. 3.65, 3.66 et 3.67).

Ainsi pour chacune des stratifications on trace l'évolution de la rigidité résiduelle en fonction de la variable α et cela pour chaque niveau de chargement. Au regard de la figure FIG. 3.65, il apparaît clairement que la chute de rigidité ne dépend pas de l'histoire du chargement dans la mesure où le réseau des courbes représentant l'évolution de la rigidité en fonction de la densité de fissures peut se réduire à une courbe unique pour chacune des stratifications. Dans le cas des stratifications $(0_3^{\circ}/+45_3^{\circ}/-45_3^{\circ})_s$ et $(0_3^{\circ}/+55_3^{\circ}/-55_3^{\circ})_s$ ne peut se faire que pour de faibles densité de fissures dans la mesure où la rupture sous l'effet d'un chargement quasi-statique se produit pour de faibles densité de fissures.

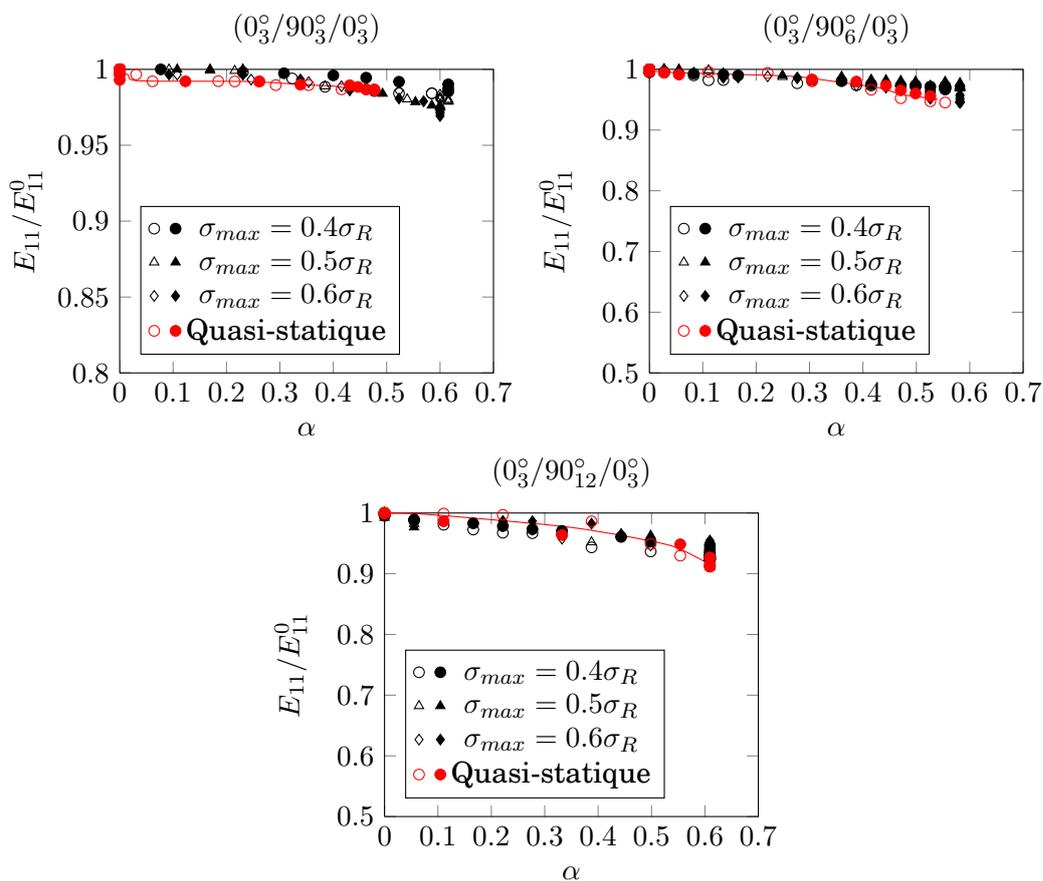


FIGURE 3.65 - *Évolution de la rigidité résiduelle du stratifié en fonction de la densité de fissures pour les séquences $(0_3^{\circ}/90_3^{\circ}/0_3^{\circ})$, $(0_3^{\circ}/90_6^{\circ}/0_3^{\circ})$ et $(0_3^{\circ}/90_{12}^{\circ}/0_3^{\circ})$ avec $R=0.1$, $f=1\text{Hz}$, pour les trois niveaux de contraintes $\sigma_{max} = 0.4\sigma_R, 0.5\sigma_R, 0.6\sigma_R$ et comparaison avec le cas quasi-statique*

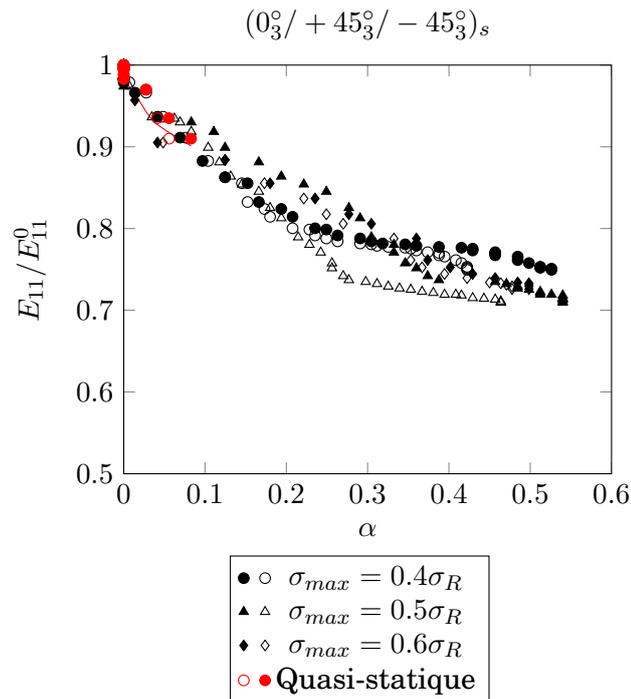


FIGURE 3.66 - Évolution de la chute de rigidité longitudinale en fonction de la densité de fissures pour la séquence $(0_3^\circ / +45_3^\circ / -45_3^\circ)_s$ avec $R=0.1$, $f=1\text{Hz}$, pour les trois niveaux de contraintes $\sigma_{max} = 0.4\sigma_R, 0.5\sigma_R, 0.6\sigma_R$ et comparaison avec le cas quasi-statique

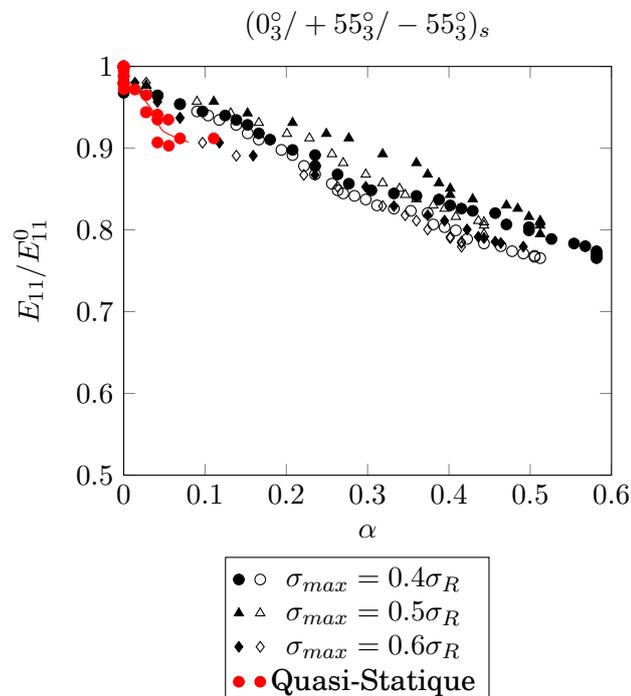


FIGURE 3.67 - Évolution de la chute de rigidité longitudinale en fonction de la densité de fissures pour la séquence $(0_3^\circ / +55_3^\circ / -55_3^\circ)_s$ avec $R=0.1$, $f=1\text{Hz}$, pour les trois niveaux de contraintes $\sigma_{max} = 0.4\sigma_R, 0.5\sigma_R, 0.6\sigma_R$ et comparaison avec le cas quasi-statique

3.8.4 Essais à deux niveaux de chargement

Nous proposons de terminer l'étude de la fissuration par une analyse de l'évolution de l'endommagement au cours d'essais à plusieurs niveaux de chargement, l'objectif étant de déterminer de quelle manière se fait le cumul de l'endommagement. Nous avons montré que les niveaux de chargement influent sur la cinétique de fissuration. Pour illustrer cela on trace le réseau de courbes densité de fissures en fonction de N/N_f^s , N et N_f^s désignant respectivement le nombre de cycles et le nombre de cycles pour atteindre la saturation (FIG. 3.68). Il apparaît clairement sur cette figure que le réseau ne se réduit pas à une courbe unique, la relation entre le nombre de cycles et la densité de fissures n'est donc pas biunivoque, ce qui témoigne d'un cumul non-linéaire de l'endommagement.

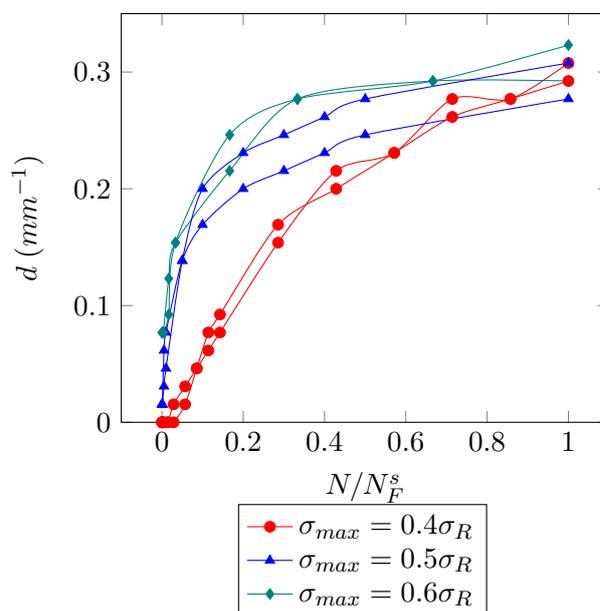


FIGURE 3.68 - Réseau de courbes densité de fissures en fonction de N/N_f^s pour la séquence $(0_3^0/90_6^0/0_3^0)$

Les essais de cumul de l'endommagement sont réalisés sur des éprouvettes de type *cross-ply* $(0_3^0/90_6^0/0_3^0)$ sollicitées avec deux niveaux de contrainte maximale longitudinale σ_{11MAX} . De la même façon que pour les essais déjà présentés jusque là, on suit en cours d'essai l'évolution de la fissuration par une méthode optique et le suivi de la rigidité longitudinale macroscopique en fonction du nombre de cycles se fait par extensométrie.

Pour les deux niveaux choisis nous avons effectué des essais avec le chargement faible suivi du chargement fort puis des essais avec le chargement fort suivi du chargement faible (FIG. 3.69). On note \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 les deux niveaux de chargement appliqués successivement pendant \mathcal{N}_1 et \mathcal{N}_2 cycles et on désigne par D_1^0 et D_2^0 les endommagements atteints si \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 étaient appliqués -de manière quasi-statique.

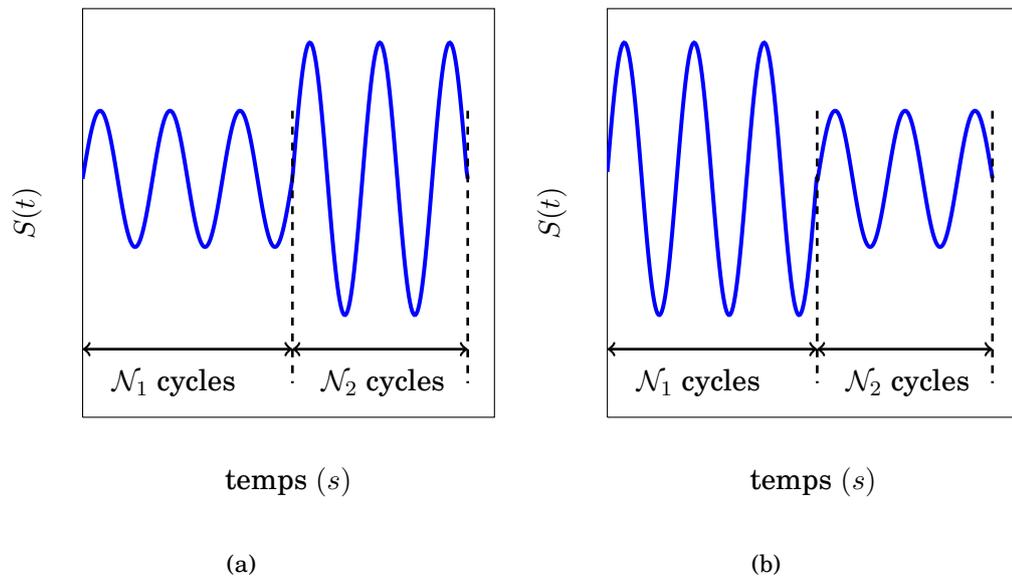


FIGURE 3.69 - *Forme de la sollicitation appliquée lors d'un essai de traction-cyclique à deux niveaux : (a) chargement faible - chargement fort , (b) chargement fort - chargement faible*

Les niveaux de chargements ont été choisis de manière à tester les trois cas possibles :

- cas 1 : chargement faible C_1 suivi du chargement fort C_2 de manière à ce que le niveau d'endommagement D_1 atteint à la fin de C_1 soit inférieur à D_2^0 celui de la mise en charge statique de C_2 . Au changement de niveau, il y a donc, d'abord un accroissement de l'endommagement de D_1 à D_2^0 dû au rechargement statique puis un endommagement de fatigue lors des cyclages à C_2 (FIG. 3.74a).
- cas 2 : chargement faible C_1 suivi du chargement fort C_2 de manière ce que le niveau d'endommagement D_1 atteint à la fin de C_1 soit supérieur à D_2^0 celui de la mise en charge statique de C_2 . Au changement de palier, il y a donc directement un endommagement de fatigue lors des cyclages à C_2 (FIG. 3.74b).
- cas 3 : chargement fort C_1 suivi du chargement faible C_2 . Au changement de palier l'endommagement est alors immédiatement dû au phénomène de fatigue lors des cyclages à C_2 (FIG. 3.74c).

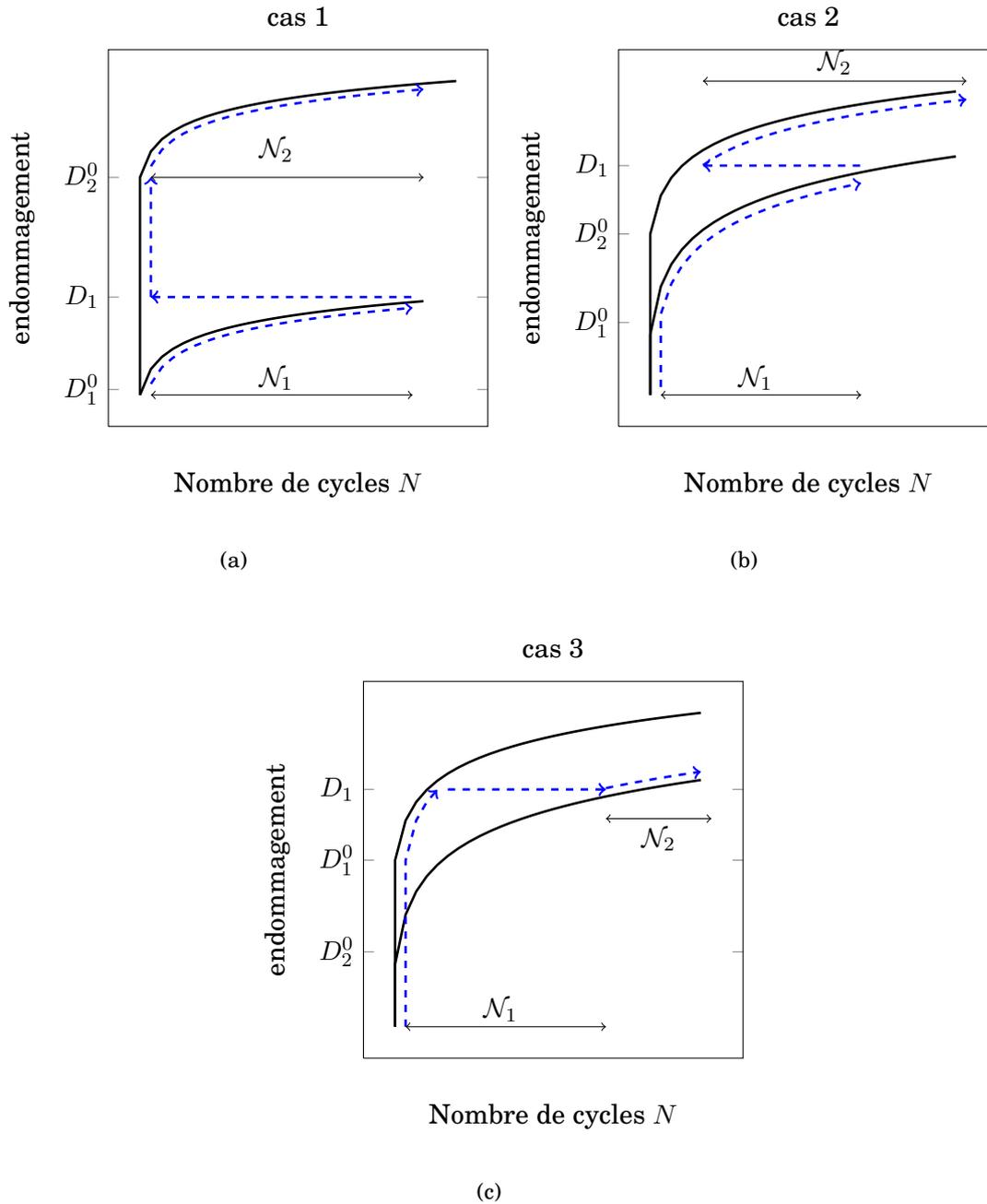


FIGURE 3.70 - Schématisation d'un essai de fatigue à deux niveaux : niveau faible puis niveau fort avec accroissement de l'endommagement dû au rechargement statique

Sur la base des essais précédents effectués à un seul niveau de chargement, nous pouvons définir les niveaux de contraintes et les nombres de cycles \mathcal{N}_1 à utiliser pour pouvoir tester les trois cas que nous venons d'évoquer. Les conditions de ces essais sont présentées dans le tableau TAB. 3.14. Tous les essais sont effectués avec un rapport de charge $R = 0.1$ à une fréquence de 1 Hz. Le nombre de cycles \mathcal{N}_2 n'est pas défini à l'avance mais il est conditionné par l'atteinte de l'état de saturation.

Paramètres	cas 1	cas 2	cas 3
$\sigma_{\mathcal{N}_1}^{MAX}$	$0.4\sigma_R$	$0.4\sigma_R$	$0.6\sigma_R$
$\sigma_{\mathcal{N}_2}^{MAX}$	$0.6\sigma_R$	$0.6\sigma_R$	$0.4\sigma_R$
\mathcal{N}_1	1000	10000	500
\mathcal{N}_1	3000	20000	1000
\mathcal{N}_1	5000	30000	2000

TABLE 3.14 - Récapitulatif des essais de traction cyclique à deux niveaux de chargement

Cas 1 : Chargement faible suivi d'un chargement fort avec accroissement quasi-statique de l'endommagement.

La figure (FIG. 3.72) illustre l'évolution de l'endommagement lors d'essais réalisés dans les conditions correspondant au cas 1 pour trois valeurs de \mathcal{N}_1 10000, 20000 et 30000 cycles. Dans les trois cas le cyclage \mathcal{C}_1 n'a pas endommagé le stratifié, ou à un faible niveau d'endommagement, loin du niveau d'endommagement qui aurait été créé par une montée en charge quasi-statique du même niveau que le chargement \mathcal{C}_2 . En revanche, dès le premier cycle du chargement \mathcal{C}_2 on constate une brusque augmentation de l'endommagement. Notons que la densité de fissures atteinte lors de ce premier cycle est comparable à celle atteinte lors du premier cycle d'un essai à un seul niveau de chargement (FIG. 3.72a). Cette remarque nous permet d'affirmer que l'endommagement créé lors de ce premier cycle est la conséquence de la montée en charge quasi-statique. En revanche les fissures créées dans les cycles suivant sont dues au phénomène de fatigue. Les courbes donnant l'évolution de la rigidité résiduelle (FIG. 3.72b) laisse apparaître une brusque variation lors du premier cycle du chargement \mathcal{C}_2 .

Paramètres	Essai 1	Essai 2	Essai 3
$\sigma_{\mathcal{N}_1}^{MAX} = 0.4\sigma_R$ (MPa)	386	386	386
$\sigma_{\mathcal{N}_2}^{MAX} = 0.6\sigma_R$ (MPa)	579	579	579
\mathcal{N}_1	1000	3000	5000
\mathcal{N}_2	3000	2000	1000

TABLE 3.15 - Récapitulatif des essais de traction cyclique à deux niveaux de chargement correspondants aux cas 1

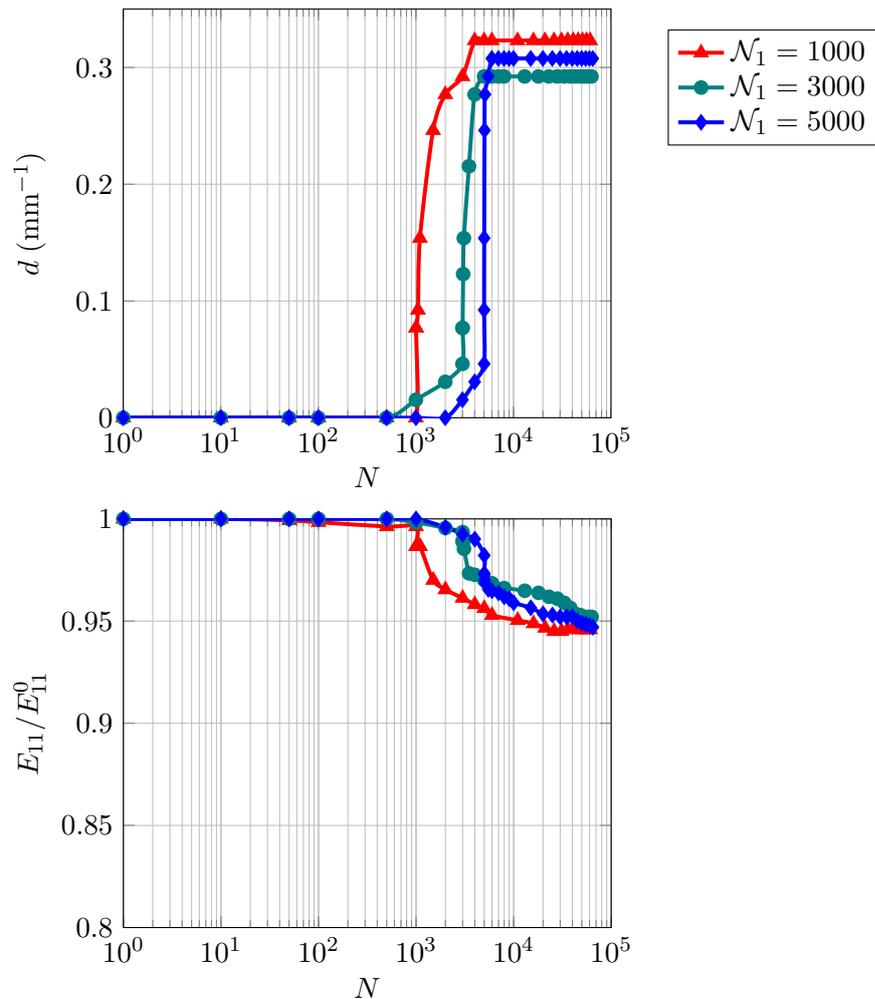


FIGURE 3.71 - Cas 1 : Évolution de la densité de fissures dans la couche à 90° en fonction du nombre de cycles pour la séquence $(0_3^\circ/90_6^\circ/0_3^\circ)$ avec $R=0.1$, $f=1\text{Hz}$ soumise à 2 niveaux de chargements (chargement faible suivi d'un chargement fort avec accroissement quasi-statique de l'endommagement)

Cas 2 : Chargement faible suivi d'un chargement fort sans accroissement quasi-statique de l'endommagement.

Ce cas est comparable au cas 1 à la différence près que le niveau d'endommagement atteint à l'issue du cyclage \mathcal{C}_1 est supérieur au niveau d'endommagement qui serait créé par une montée en charge au niveau \mathcal{C}_2 et qui par conséquent empêche un accroissement quasi-statique de l'endommagement au changement de palier. Ainsi, même si la vitesse de fissuration s'accroît lors du passage au chargement fort, le changement n'est pas aussi brutal que celui observé dans le cas précédent.

Paramètres	Essai 1	Essai 2	Essai 3
$\sigma_{\mathcal{N}_1}^{MAX} = 0.4\sigma_R$ (MPa)	386	386	386
$\sigma_{\mathcal{N}_2}^{MAX} = 0.6\sigma_R$ (MPa)	579	579	579
\mathcal{N}_1	10000	20000	30000
\mathcal{N}_2	2500	2000	500

TABLE 3.16 - Récapitulatif des essais de traction cyclique à deux niveaux de chargement correspondants aux cas 2

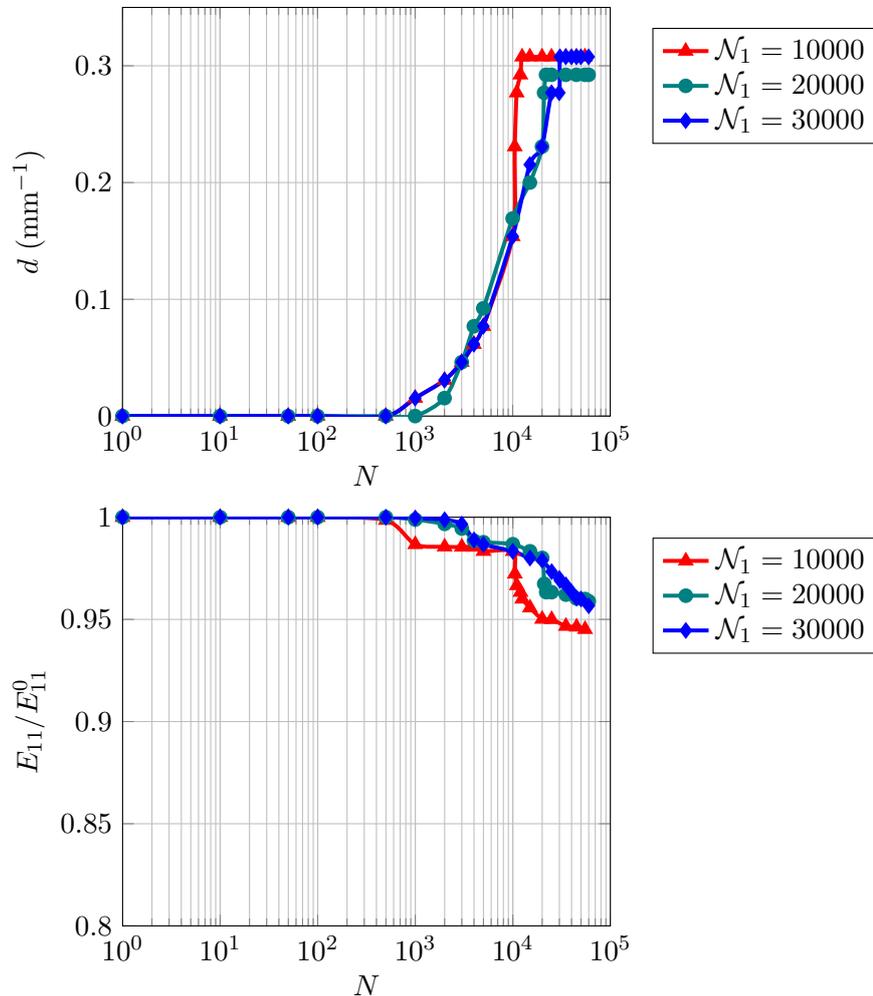


FIGURE 3.72 - Cas 2 : Évolution de la densité de fissures dans la couche à 90° en fonction du nombre de cycles pour la séquence $(0_3^\circ/90_6^\circ/0_3^\circ)$ avec $R=0.1$, $f=1\text{Hz}$ soumise à 2 niveaux de chargements (chargement faible suivi d'un chargement fort)

Cas 3 : Chargement fort suivi d'un chargement faible (FIG. 3.73).

Bien évidemment dans ce cas il est impossible il n'y a pas d'accroissement quasi-statique de l'endommagement au passage du chargement C_1 au chargement C_2 . En revanche l'endommagement créé lors du premier cycle est une endommagement quasi-statique.

Paramètres	Essai 1	Essai 2	Essai 3
$\sigma_{N_1}^{MAX} = 0.6\sigma_R$ (MPa)	386	386	386
$\sigma_{N_2}^{MAX} = 0.4\sigma_R$ (MPa)	579	579	579
N_1	500	1000	2000
N_2	11000	4000	2000

TABLE 3.17 - Récapitulatif des essais de traction cyclique à deux niveaux de chargement correspondants aux cas 3

3.8.5 Cumul de l'endommagement

Nous venons d'étudier les courbes donnant l'évolution de la densité de fissures en fonction du nombre de cycles pour des essais à plusieurs niveaux de chargement (chargement faible puis chargement fort et chargement fort puis chargement faible). Ces essais mettent en évidence l'influence de la chronologie des évènements sur l'évolution de l'endommagement. Dans chacun des cas nous avons fixé plusieurs valeurs du nombre de cycles \mathcal{N} du premier niveau puis le nombre de cycles du second niveau \mathcal{N}_2 est conditionné par l'atteinte de l'état de saturation. Une manière d'illustrer le cumul de l'endommagement consiste à tracer les courbes \mathcal{N}_f/N_f^s en fonction de \mathcal{N}_F/N_F^s . \mathcal{N}_f décrivant \mathcal{N}_1 lorsque le chargement faible est appliqué en premier et \mathcal{N}_F décrivant \mathcal{N}_1 lorsque le chargement fort est appliqué en premier. N_f^s et N_F^s représentent le nombre de cycles nécessaires pour atteindre la saturation respectivement sous chargement faible et fort.

Il apparait clairement (FIG. 3.74) que le cumul n'est pas linéaire. Toutefois, on constate que la non linéarité est plus importante dans le cas où le chargement fort est appliqué en premier. La connaissance du mode de cumul de l'endommagement est nécessaire dans la mesure où nous souhaitons, dans la suite de cette étude donner une modélisation de l'endommagement. Il est important de comprendre que la façon dont se fait le cumul de l'endommagement impose une formulation de la loi d'évolution de l'endommagement dans où les variables représentatives de l'endommagement et du nombre de cycles N ne sont pas séparables.

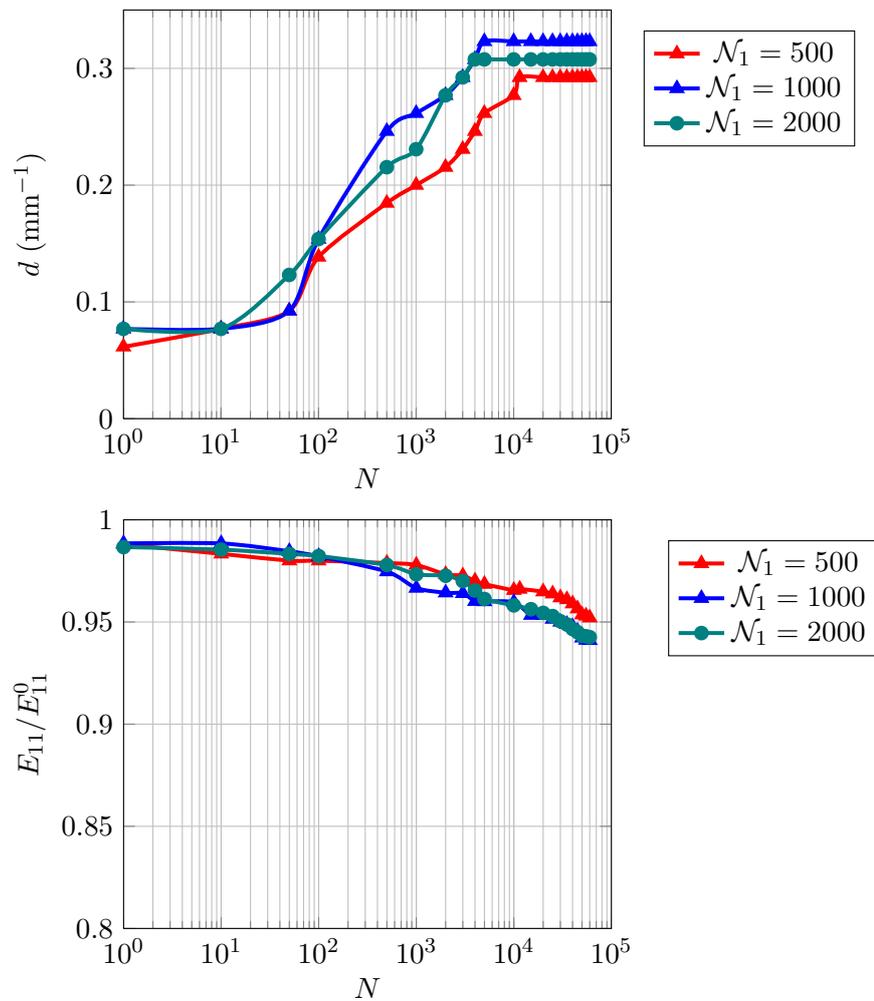


FIGURE 3.73 - Cas 3 : Évolution de la densité de fissures dans la couche à 90° en fonction du nombre de cycles pour la séquence $(0_3^\circ/90_6^\circ/0_3^\circ)$ avec $R=0.1$, $f=1\text{Hz}$ soumise à 2 niveaux de charge-ments (chargement fort suivi d'un chargement faible)

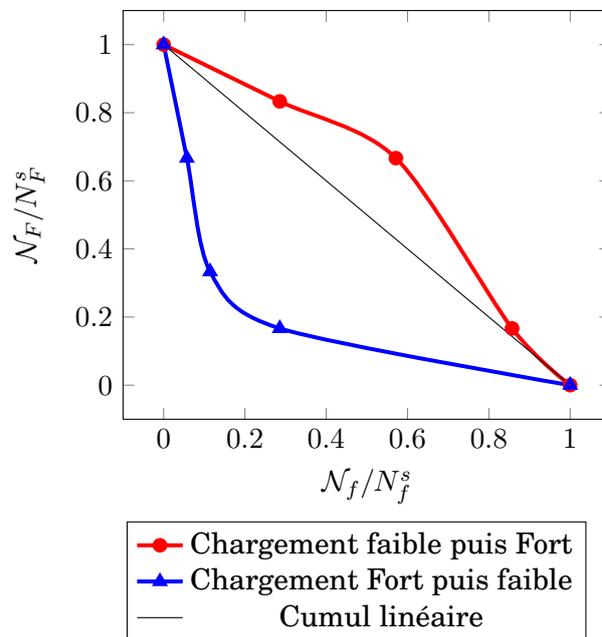


FIGURE 3.74 - *Cumul de l'endommagement lors d'essais de traction cyclique à deux niveaux*

3.9 Conclusion

Les résultats des essais expérimentaux présentés dans ce chapitre ont pour objectif de dégager des renseignements importants relatifs à l'endommagement par fissuration dû aussi bien à des sollicitations quasi-statiques que cycliques. Il est important de garder à l'esprit que ces résultats nous serviront de base pour l'écriture et l'identification d'un modèle d'endommagement. Ils nous ont permis de dégager les principales caractéristiques de la fissuration suivant les deux aspects qualitatif puis quantitatif.

Le premier point important dégagé de ces essais concerne la similitude que l'on peut observer entre l'endommagement créé par un chargement quasi-statique et celui créé par un chargement de fatigue.

D'abord, d'un point de vue géométrique, les fissures sont identiques dans les deux cas et se présentent sous la forme d'un réseau quasi-périodique de fissures qui se propagent dans la direction des fibres qui leur servent de guide. La principale différence réside dans la propagation. En effet, si dans le cas d'un chargement quasi-statique il est clair que les fissures apparaissent et se propagent quasi-instantanément dans l'épaisseur et la largeur de l'éprouvette la propagation semble plus lente dans le cas de la fatigue. Ces observations nous ont conduit à nous intéresser à la multiplication des fissures plus qu'à leur propagation.

Concernant, l'évolution de l'endommagement, dans notre cas nous avons considéré l'évolution de la densité de fissures, là encore on constate de forte similitude dans le comportement. La différence résidant dans le fait que l'évolution de la densité de fissures est pilotée par l'augmentation de la contrainte (ou déformation) appliquée dans le cas d'un chargement quasi-statique alors qu'elle est pilotée par l'accumulation du nombre de cycles de sollicitations à contrainte (ou déformation) constante en fatigue.

Les essais nous permettent également d'identifier les paramètres qui ont une influence sur l'évolution de la fissuration. D'abord il est clair que l'orientation des plis par rapport à la direction de chargement à une influence sur la cinétique de fissuration. Ensuite nous avons montré que la densité de fissure est inversement proportionnelle à l'épaisseur du pli fissuré. La principale conséquence de cette propriété est que la densité de fissures n'est pas une propriété intrinsèque au matériau mais qu'elle dépend de la géométrie de la structure. Cette observation nous a conduit à introduire une autre variable α qui est le produit de la densité de fissures par l'épaisseur du pli fissuré et nous avons montré que cette variable permet de s'affranchir des effets d'épaisseur. Enfin, dans le cas de chargement de fatigue, le niveau de contrainte maximal influence la cinétique de fissuration.

L'autre propriété importante mise en évidence est le phénomène de saturation de la densité de fissures c'est-à-dire que la densité de fissures croît de façon monotone jusqu'à atteindre une valeur critique à partir de laquelle plus aucune fissure ne peut être créée. Nous avons montré que cette valeur est une propriété qui dépend de la structure et du matériau mais qui est totalement indépendante du type de chargement.

3. Etude expérimentale de l'endommagement dans les stratifiés

En suivant l'évolution de la rigidité du stratifié parallèlement à celle de l'endommagement nous avons pu déterminer l'influence de la fissuration sur les propriétés mécaniques des différents stratifiés testés. On montre que la chute de rigidité est proportionnelle à l'épaisseur du pli fissuré. Ensuite la comparaison des chutes de rigidité dues à un endommagement quasi-statique aux chutes de rigidité dues à un endommagement de fatigue, montre que pour une densité de fissures donnée et une stratification donnée, la chute de rigidité ne dépend pas de l'histoire du chargement. En d'autres termes, pour une stratification donnée, la chute de rigidité dépend de la densité de fissure et non de la façon dont ont été créées les fissures.

Les tableaux TAB. 3.18 TAB. 3.19 présentent une synthèse des caractéristiques principales de l'endommagement qui ont été identifiés par les essais présentés précédemment.

séquence	ep_{90° (mm)	$d_{sat}^{statique}$ (mm^{-1})	$d_{sat}^{fatigue}$ (mm^{-1})	$1 - E_{11}^{sat}/E_{11}^0$ (%)
$(0_3^\circ/90_3^\circ/0_3^\circ)$	0.9	0.477	0.6	2.12
$(0_3^\circ/90_6^\circ/0_3^\circ)$	1.8	0.300	0.307	3.84
$(0_3^\circ/90_{12}^\circ/0_3^\circ)$	3.6	0.169	0.169	8.01

TABLE 3.18 - Synthèse des données caractéristiques obtenues par les essais sous sollicitations cycliques sur les séquences $(0_3^\circ/90_{n=3,6,12}^\circ/0_3^\circ)$ avec ep_{90° l'épaisseur de la couche fissurée, $d_{sat}^{statique}$ et $d_{sat}^{fatigue}$ les densités de fissures à saturation et E_{11}^{sat}/R_{11}^0 la chute de rigidité à saturation

séquence	d_{sat}^{int} (mm^{-1})	d_{sat}^{ext} (mm^{-1})	$1 - E_{11}^{sat}/E_{11}^0$ (%)
$(0_3^\circ/+45_3^\circ/-45_3^\circ)_s$	0.289	0.505	27.1
$(0_3^\circ/+55_3^\circ/-55_3^\circ)_s$	0.297	0.525	22.0

TABLE 3.19 - Synthèse des données caractéristiques obtenues par les essais sous sollicitations cycliques sur les séquences $(0_3^\circ/+45_3^\circ/-45_3^\circ)_s$ et $(0_3^\circ/+55_3^\circ/-55_3^\circ)_s$ avec $d_{sat}^{statique}$ et $d_{sat}^{fatigue}$ les densités de fissures à saturation et E_{11}^{sat}/R_{11}^0 la chute de rigidité à saturation

Nous avons vu que la fissuration, bien qu'elle ne soit pas catastrophique pour l'intégrité d'une structure peut être à l'origine d'autres types d'endommagement beaucoup plus néfastes tels que le délaminage ou les ruptures de fibres. Il est donc important de prévoir son évolution. Dans la mesure où la fissuration ne conduit pas à la rupture, nous considérerons que la durée de vie correspond au nombre de cycles nécessaires pour atteindre la saturation. On propose donc de construire des courbes que nous pouvons comparer à des courbes S-N qui représentent le nombre de cycles nécessaires pour atteindre l'état de saturation en fonction du niveau de contrainte

maximal (FIG. 3.75). Cependant, il est important de souligner que la réalisation de ce type de courbe nécessite en grand nombre d'essais afin de disposer d'un nombre significatif de points permettant de construire les courbes. Aussi, ces courbes ne sont données qu'à titre d'information.

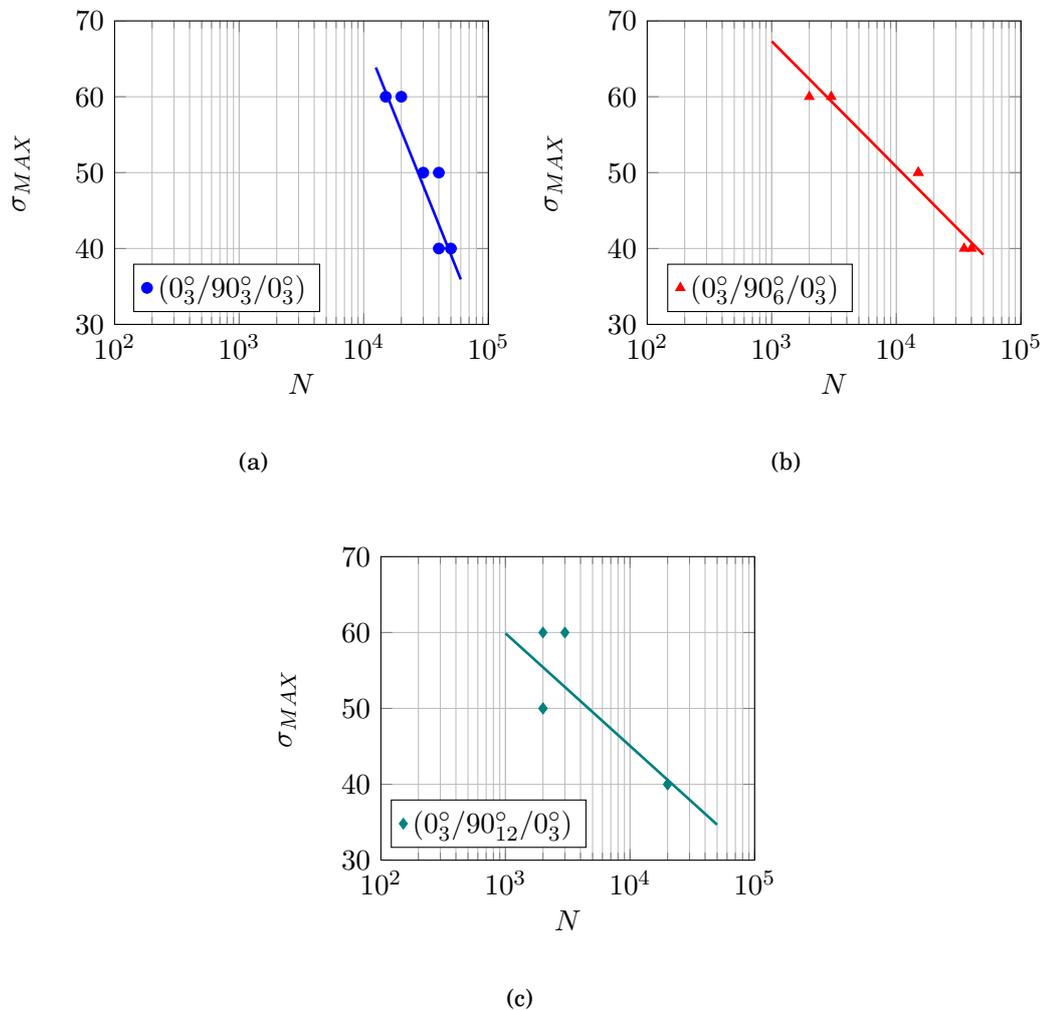


FIGURE 3.75 - Courbes S-N représentant le nombre de cycles à saturation en fonction de σ_{MAX} (exprimée en pourcentage de la contrainte à rupture) appliquée pour les séquences $(0_3^\circ/90_{n=3,6,12}^\circ/0_3^\circ)$

L'ensemble des résultats présenté dans ce chapitre vont servir de base à l'écriture d'un modèle d'endommagement et à son identification qui sont développés dans les chapitre qui suivent.

Chapitre 4

Une modélisation du comportement du matériau unidirectionnel

Sommaire

4.1 De l'expérience à la loi de comportement	122
4.2 Description du modèle de comportement retenu	126
4.2.1 Analyse physique de la fissuration	126
4.2.2 Cadre et hypothèses du modèle	129
4.2.3 Choix des variables d'état et description des fissures	131
4.2.4 Potentiel thermodynamique et Théorie des Invariants	137
4.2.4.1 Loi de comportement et Théorie des Invariants	137
4.2.4.2 Écriture du potentiel thermodynamique	139
4.2.4.3 Explicitation des tenseurs de chute de rigidité	141
4.2.4.4 Explicitation de la fonction $f(\alpha)$	142
4.2.4.5 Explicitation des fonctions m et r	142
4.2.4.6 Explicitation des sauts de déplacements U_N et U_T	144
4.2.5 Écriture des lois d'état	145
4.2.6 Lois complémentaires et évolution de l'endommagement	146
4.3 Conclusion	149

4.1 De l'expérience à la loi de comportement

La rédaction de la section suivante s'appuie sur l'ouvrage de THIONNET et MARTIN [Thionnet et al., 2004].

Dès lors que l'on souhaite donner un sens physique à une loi de comportement, il est important que son écriture s'appuie sur des constatations expérimentales. Elle doit ensuite obéir à un certain nombre de concepts généraux.

L'objectif que l'on se fixe ici est de proposer un modèle de comportement prenant en compte la fissuration intra-laminaire. Généralement, la compréhension des mécanismes de fissuration est abordée de deux manières distinctes :

- par la **Mécanique de la Rupture**, quand les fissures ont une taille de l'ordre de celle de la structure dans laquelle elles se développent. Dans ce cas, on s'intéresse à leur amorçage et leur propagation ;
- par la **Mécanique de l'Endommagement**, quand les fissures ont une taille de l'ordre de l'élément de volume du matériau dans lequel elles se développent. On s'intéresse alors à l'influence de la fissuration sur les propriétés mécaniques du matériau.

Il est clair que le choix de la façon d'aborder le problème ne résulte pas d'une décision arbitraire mais doit se faire en cohérence avec les constatations expérimentales. Ainsi, on se place dans le cadre de la Mécanique de l'Endommagement. Ce choix est motivé, d'une part du fait de la taille et du nombre de fissures constatées, d'autre part parce que l'on fait l'hypothèse que l'amorçage et la propagation complète des fissures sont quasi-simultanés. Dans ce cadre, on choisit de baser l'écriture de la loi de comportement sur la Thermodynamique des Milieux Continus qui fournit un cadre pour le développement de modèles mécaniques. Ce choix impose de se placer à une échelle suffisamment grande de façon à ce qu'il soit possible de faire l'hypothèse de continuité de la matière. Nous nous placerons dans ce cadre jusqu'à la fin de ce chapitre. La finalité de cette partie est de définir le cadre thermodynamique classiquement utilisé pour décrire les phénomènes physiques qui apparaissent au sein d'un matériau. Le second objectif est de présenter la démarche à suivre pour l'établissement d'une loi de comportement.

Afin de fixer clairement quel est le problème physique à résoudre, on décrit dans les lignes qui suivent ce qui constitue ce que l'on appelle un problème de calcul de structure. En fait, un problème de calcul de structure n'est finalement qu'un problème de Mécanique des Milieux Continus posé sur toute ou partie d'une structure industrielle et pour lequel on a l'objectif de le résoudre par une technique numérique adéquate, ici celle des éléments finis. Ce que l'on rappelle dans les lignes qui suivent est donc tout à fait classique.

Le système matériel étudié S est en mouvement dans l'espace physique rapporté au référentiel $\zeta = (\mathcal{R}, H)$, \mathcal{R} désignant le repère d'espace dont $\underline{\mathbf{b}} = (\underline{\mathbf{x}}_1, \underline{\mathbf{x}}_2, \underline{\mathbf{x}}_3)$ est la base cartésienne orthonormée directe, O son origine et H le repère de temps. A chaque instant t , la position du point matériel M est notée $\underline{\mathbf{x}}$, son déplacement $\underline{\mathbf{u}}$, sa

vitesse \underline{v} et son accélération $\underline{\gamma}$. Le système coïncide au cours du temps avec le domaine \mathcal{D} représenté dans l'espace par un ensemble continu (connexe par arc), fermé et borné de l'espace physique. Soit $\Omega \subset \mathcal{D}$ une partie de \mathcal{D} formant un sous-système fermé de \mathcal{D} . On note $\partial\Omega$ sa frontière de normale unitaire sortante \underline{n} et $\bar{\Omega}$ le sous ensemble complémentaire tels que Ω , $\partial\Omega$ et $\bar{\Omega}$ forment une partition de \mathcal{D} . Plus précisément, \mathcal{D} coïncide avec $\mathcal{D}(t) = \Omega(t) \cup \partial\Omega(t) \cup \bar{\Omega}(t)$ à l'instant t et avec $\mathcal{D}_0 = \Omega(t_0) \cup \partial\Omega(t_0) \cup \bar{\Omega}(t_0)$ à l'instant t_0 . Un élément de volume de Ω est noté dV et un élément d'aire de $\partial\Omega$ est noté dA .

L'évolution du domaine est étudiée entre les instants t_0 et t_{MAX} .

On se place sous l'Hypothèse des Petites Perturbations (HPP). On estime que la masse volumique du milieu étudié est constante au cours du temps et qu'elle ne dépend éventuellement que des variables d'espace, indiquant ainsi que le milieu n'est pas homogène. On la note $\rho(M)$.

Les sollicitations appliquées au domaine peuvent être : des actions à distance agissant dans $\Omega(t)$ et des actions de contact agissant sur $\partial\Omega(t)$. Ainsi, en tout point M de $\Omega(t)$ le système est soumis à une densité volumique d'efforts notée $\rho(M)\underline{f}(M, t)$ (celle induite par la Pesanteur par exemple) et reçoit une densité volumique de chaleur $r(M, t)$. À la frontière $\partial\Omega$, un vecteur contrainte $\underline{T} = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}$ schématise les actions mécaniques de $\bar{\Omega}$ sur Ω et un flux de chaleur \underline{q} est échangé.

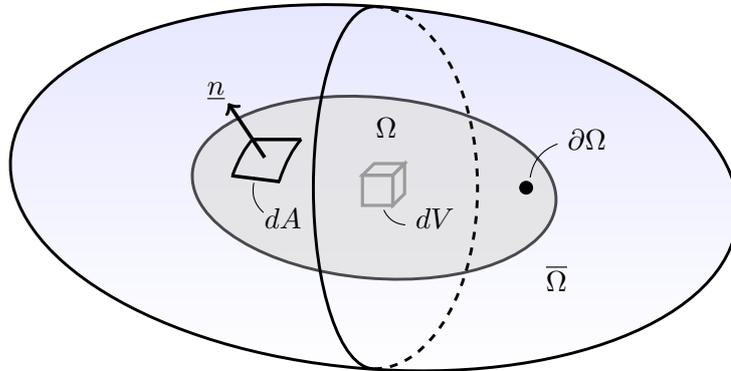


FIGURE 4.1 - Représentation du système matériel S considéré. Ω , $\partial\Omega$ et $\bar{\Omega}$ forment une partition de S .

Pour construire un cadre général à ses actions de contact, on découpe la frontière du domaine en trois parties distinctes $\partial\Omega_U$, $\partial\Omega_F$, $\partial\Omega_{FU}$. On suppose que ce découpage est indépendant du temps et qu'il forme une partition de $\partial\Omega(t)$, c'est-à-dire notamment que la réunion de ces différentes parties redonne la totalité de $\partial\Omega(t)$ et que leur intersection deux à deux est égale à l'ensemble vide. Soit :

$$\partial\Omega(t) = \partial\Omega_U \cup \partial\Omega_F \cup \partial\Omega_{FU} \quad \begin{cases} \partial\Omega_U \cap \partial\Omega_F = \emptyset \\ \partial\Omega_F \cap \partial\Omega_{FU} = \emptyset \\ \partial\Omega_U \cap \partial\Omega_{FU} = \emptyset \end{cases} \quad (4.1)$$

Chaque partie peut se réduire à l'ensemble vide. En revanche, dès lors qu'une partie n'est pas réduite à l'ensemble vide, sa mesure est strictement positive. Sur la base de ce découpage, on définit les conditions aux limites suivantes :

- sur $\partial\Omega_F$, on donne la densité surfacique d'efforts $\underline{\mathbf{F}}(M, t)$;
- sur $\partial\Omega_U$, on donne le déplacement $\underline{\mathbf{U}}(M, t)$ en chaque point ;
- sur $\partial\Omega_{FU}$, on donne un vecteur $\underline{\mathbf{D}}(M, t)$ de renseignements locaux dont les composantes sont celles, soit d'un déplacement, soit d'une densité surfacique d'efforts, par exemple :

$$\underline{\mathbf{D}}(M, t) = \begin{pmatrix} F'_1(M, t) \\ U'_2(M, t) \\ F'_3(M, t) \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

Sans plus de précisions sur la forme que peuvent prendre l'ensemble des sollicitations, ces conditions aux limites sont celles d'un problème dit standard.

Le problème consiste à trouver, en tout point du domaine, les inconnues suivantes :

- le vecteur déplacement $\underline{\mathbf{u}}(M, t)$;
- le tenseur des contraintes $\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}(M, t)$;
- les variables d'état internes (et leur variable associée) incluses dans la modélisation du comportement. Ici, ces variables sont :
 - . n_a scalaires notés $(a^m(M, t))_{m=1, \dots, n_a}$ dont les variables associées sont notées $(A^m(M, t))_{m=1, \dots, n_a}$;
 - . n_b vecteurs notés $(\underline{\mathbf{b}}^n(M, t))_{n=1, \dots, n_b}$ dont les variables associées sont notées $(B^n(M, t))_{n=1, \dots, n_b}$;
 - . n_c 2-tenseurs notés $(\underline{\underline{\mathbf{c}}}^p(M, t))_{p=1, \dots, n_c}$ dont les variables associées sont notées $(C^p(M, t))_{p=1, \dots, n_c}$.

Les équations (EQPB) locales données en tout point $M(t)$ de $\Omega(t)$ sont :

- l'équation d'équilibre (EQL) :

$$\underline{\text{div}} \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}(M, t) + \rho(M)\underline{\mathbf{f}}(M, t) = \rho(M) \frac{\partial^2 \underline{\mathbf{u}}(M, t)}{\partial t^2} \quad (4.3)$$

- le loi de comportement constituée par :
 - . les lois d'état (EQETAT) ($\psi(M, t)$ étant une fonction d'état donnée) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \psi(M, t)}{\partial \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}} = \frac{1}{\rho(M)} \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}(M, t) \\ \frac{\partial \psi(M, t)}{\partial a^m} = A^m(M, t) \\ \frac{\partial \psi(M, t)}{\partial \underline{\mathbf{b}}^n} = B^n(M, t) \\ \frac{\partial \psi(M, t)}{\partial \underline{\underline{\mathbf{c}}}^p} = C^p(M, t) \end{array} \right. \quad (4.4)$$

. les lois d'évolutions (EQEVOL) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{da^m(M, t)}{dt} = \dots \\ \frac{d\mathbf{b}^n(M, t)}{dt} = \dots \\ \frac{d\mathbf{c}^p(M, t)}{dt} = \dots \end{array} \right. \quad (4.5)$$

– les conditions aux limites (CL) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{sur } \partial\Omega_F : \quad \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}(M \in \partial\Omega_F, t) \times \underline{\mathbf{n}}(M \in \partial\Omega_F, t) \\ \text{sur } \partial\Omega_U : \quad \underline{\mathbf{u}}(M \in \partial\Omega_U, t) = \underline{\mathbf{U}}(M, t) \\ \text{sur } \partial\Omega_{FU} : \quad \left\{ \begin{array}{l} \{\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}(M \in \partial\Omega_{FU}, t) \times \underline{\mathbf{n}}(M \in \partial\Omega_{FU}, t)\}_1 = F'_1(M, t) \\ \{\underline{\mathbf{u}}(M \in \partial\Omega_{FU}, t)\}_2 = U'_2(M, t) \\ \{\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}(M \in \partial\Omega_{FU}, t) \times \underline{\mathbf{n}}(M \in \partial\Omega_{FU}, t)\}_3 = F'_3(M, t) \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (4.6)$$

Lorsque le comportement du milieu constituant le domaine est élastique linéaire (non-homogène, anisotrope), ces problèmes types sont qualifiés de problèmes standards d'élasticité linéaire. Dans ce cas, des théorèmes portant sur l'existence et l'unicité des solutions sont connus, ces problèmes répondent au Théorème de Superposition, en raison de la linéarité de tous les opérateurs qui entrent dans leur formulation et de ce fait, leurs solutions sont linéaires par rapport aux données.

Le problème à résoudre est maintenant clairement posé. Nous présentons dans la suite de ce chapitre les bases d'une approche thermodynamique qui nous permettront de déterminer les différentes variables du problème et d'aboutir à une formulation des différentes équations (EQL, EQETAT, EQEVOL) et des conditions aux limites (CL) évoquées jusque là.

4.2 Description du modèle de comportement retenu

La description du comportement d'un matériau dans le cadre de la thermodynamique des milieux continus, passe en premier lieu par le choix des variables d'état qui permettront de décrire l'état de ce dernier. De plus, rappelons le, c'est le choix totalement subjectif, du nombre et de la nature de ces variables qui conditionne la finesse de la description et la formulation du modèle. Aussi, il est important de comprendre et d'analyser avec précision le phénomène que l'on souhaite modéliser. C'est là tout l'objet du paragraphe suivant (§4.2.1).

4.2.1 Analyse physique de la fissuration

Au-delà du fait que l'endommagement par fissuration se présente sous la forme d'un réseau de fissures planes, parallèles et réparties de façon homogène, il est important de rappeler que la direction des fissures, pour le matériau étudié ici dépend essentiellement de l'orientation des renforts. En effet, nous avons constaté expérimentalement que ces derniers servent de guides contraignant les fissures à se propager dans une direction indépendante du chargement contrairement à ce que l'on peut observer dans les matériaux métalliques. En revanche, la géométrie des fissures dépend du chargement. Deux points essentiels doivent dès lors être pris en compte : la direction et la géométrie des fissures.

TALREJA [Talreja, 1986] est un des premiers à développer dans ses travaux une approche directionnelle de l'endommagement. Il a développé, dans le cadre de la thermodynamique des processus irréversibles, une approche physique de l'endommagement visant à décrire les fissures, non pas par un scalaire mais par un doublet (scalaire/vecteur). Chaque fissure est alors caractérisée par la normale à son plan et par sa longueur. Cette approche est reprise par THIONNET [Thionnet, 1991] et appliquée à l'échelle du pli élémentaire. L'approche mésoscopique qu'il propose permet de prendre en compte l'aspect géométrique de l'endommagement et présente l'avantage d'un caractère intrinsèque au pli qui permet ainsi d'en déduire le comportement de n'importe quel empilement complexe. Ce modèle, développé en premier lieu, pour modéliser l'endommagement au sein d'un pli unidirectionnel a été étendu au cas d'une nappe élémentaire d'un composite tissé par AUSSEDAT [Aussedat-Yahia, 1997]. Ils décrivent chaque famille de fissure parallèles par un doublet : un scalaire qui caractérise l'état d'endommagement et une grandeur vectorielle qui traduit l'aspect directionnel de l'endommagement.

Une autre caractéristique importante de la fissuration intra-laminaire est son caractère *unilatéral*. S'il est clair que l'endommagement est un phénomène irréversible, son effet peut toutefois être actif ou inactif. Afin d'illustrer ce phénomène, examinons les exemples suivants.

EXEMPLE 1

Considérons un élément de volume d'un matériau élastique contenant une unique famille de fissures planes et parallèles. Sollicité en traction dans le sens normal au plan des fissures, les fissures s'ouvrent, le comportement est alors celui d'un matériau endommagé (FIG. 4.2a). Sollicité ensuite en compression, les fissures se referment, les lèvres viennent en contact et transmettent l'effort imposé. Le comportement est alors équivalent à celui du matériau sain (FIG. 4.2b). Il est bien évident que ceci n'est valable que dans un domaine limité proche de $\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{0}}$ (ou $\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{0}}$) au delà duquel le matériau s'endommage en compression entraînant une dégradation de ses propriétés mécaniques.

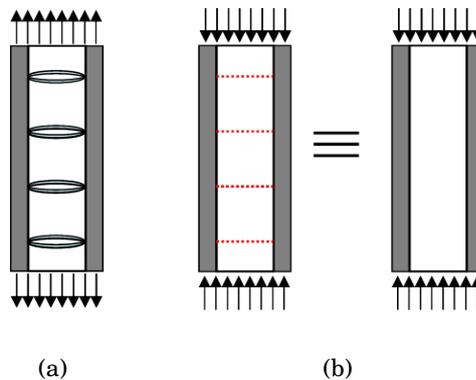


FIGURE 4.2 - Représentation schématique de l'activation/désactivation de l'endommagement.

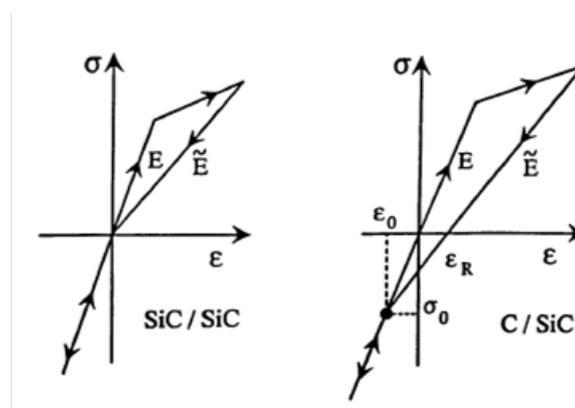


FIGURE 4.3 - Exemple schématique de comportement avec un endommagement unilatéral (SiC/SiC) et endommagement unilatéral plus déformation résiduelle (C/SiC) [Chaboche et al., 1994].

Bien que l'endommagement soit présent, ce dernier n'est pas actif dans la direction des sollicitations. On parle alors du caractère unilatéral du dommage ou d'activation/désactivation de l'endommagement.

EXEMPLE 2

Imaginons maintenant un chargement $S(t)$ (FIG. 4.4) de valeur moyenne nulle, dont les extrémums sont $S_{min} = -a$ et $S_{max} = a$, symétriques l'un de l'autre par rapport à la valeur nulle, qui induit localement un état de contrainte de cisaillement qui fait glisser les lèvres de fissures l'un par rapport à l'autre.

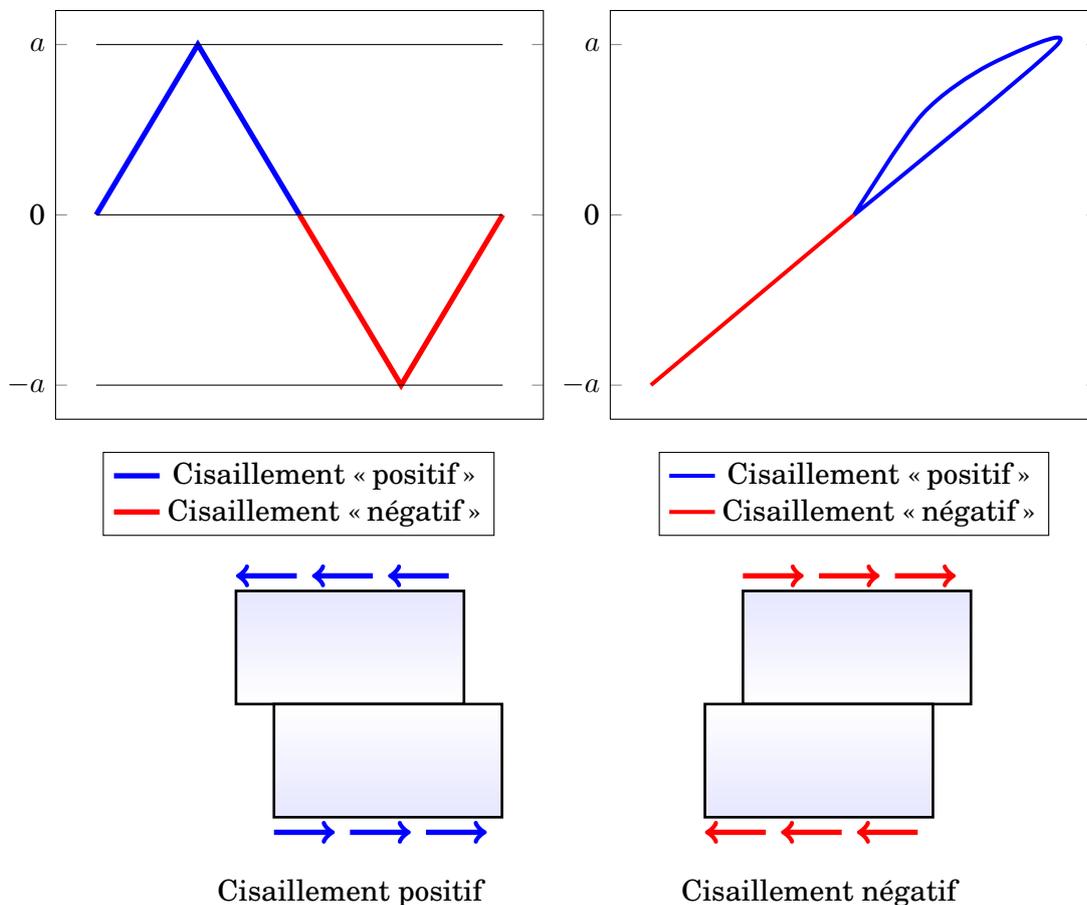


FIGURE 4.4 - Cas du cisaillement

S'il est normal de distinguer le cas de la traction de celui de la compression, lorsque, localement l'état de contrainte uni-axial est orthogonal au plan des fissures, dans le cas du cisaillement, les fissures ne transmettent aucun effort¹. Aussi, dès lors que l'état de fissuration est stabilisé², dans la mesure où l'on reste dans le do-

1. On fait ici l'hypothèse qu'il n'y a pas de frottement entre les lèvres des fissures

2. Entendre par là, lorsque les fissures ne se propagent plus et que la densité de fissures n'évolue plus

maine élastique, le comportement mécanique est identique en cisaillement « positif » et « négatif ».

LADEVÈZE et LEMAITRE [Ladevèze and Lemaitre, 1984], sont parmi les premiers à avoir proposé une approche de la désactivation de l'endommagement dans le cas d'un matériau initialement isotrope et qui le reste au cours du processus d'endommagement. Dans le cas anisotrope (anisotropie initiale ou anisotropie induite par l'endommagement), on trouve dans la littérature un certain nombre d'approches scalaires [La Borderie et al., 1992], vectorielles [Krajcinovic and Fonseka, 1981] ou tensorielles. On note cependant que ces approches présentent des problèmes de continuités au niveau de la frontière entre les états de traction et de compression. CHABOCHE [Chaboche, 1994] résume les défauts d'un certain nombre de théories avec dommage anisotrope. Toutefois, certaines parviennent à satisfaire la continuité et à tenir compte de l'anisotropie induite par l'endommagement. On peut citer notamment les travaux de CHABOCHE [Chaboche, 1992]. Cependant, dans son approche, il est amené à définir arbitrairement des directions principales d'endommagement qui conduisent à des résultats qui dépendent du choix de ces directions.

D'une manière générale, les différentes approches présentées ici séparent le domaine de la traction de celui de la compression. Afin d'éviter cette rupture, et ainsi d'avoir la continuité du comportement lors du passage de l'état de traction à celui de compression, AUSSEDAT [Aussedat-Yahia, 1997], puis THIONNET et RENARD [Thionnet and Renard, 2001] introduisent deux variables d'état scalaires pour décrire l'endommagement. Ces variables permettent de donner à la Mécanique de l'Endommagement la notion de mode de sollicitation d'un réseau de micro-fissures équivalente à la notion de mode de sollicitation d'une macro-fissure en Mécanique de la Rupture.

4.2.2 Cadre et hypothèses du modèle

Nous pouvons maintenant dégager de l'analyse des caractéristiques de l'endommagement les conditions à satisfaire pour modéliser au mieux le phénomène. Ainsi, une modélisation du comportement élastique endommageable d'un matériau microfissuré devra être écrite en tenant compte :

C1. des discontinuités dans les relations contraintes/déformations ;

C'est-à dire que notre modélisation doit être continue au passage de la frontière entre les états de traction et de compression.

C2. de l'anisotropie induite par l'endommagement ;

C3. des chutes de rigidité induites par l'endommagement ;

L'apparition de fissures entraîne la dégradation de certaines caractéristiques mécaniques qui peut induire de l'anisotropie.

C4. : de l'activation/désactivation de l'endommagement.

La modélisation doit également respecter les Principes de la Physique et de la Mécanique, c'est-à-dire que le modèle doit être :

C5. S -invariant (où S représente le groupe des symétries matérielles du matériau);

Les relations constitutives du modèle de comportement doivent respecter les symétries du matériau.

C6. objectif

Le modèle ne dépend pas du référentiel d'observation.

C7. en accord avec le Second Principe de la Thermodynamique.

Afin de satisfaire au mieux les conditions énoncées précédemment, nous sommes amenés à poser certaines hypothèses.

Le modèle développé dans cette étude est basé sur celui initialement proposé par THIONNET et RENARD [Thionnet and Renard, 1993]. Ce modèle, développé dans le cadre de structures minces est écrit sous l'hypothèse des contraintes planes et ne permet de prendre en compte que deux directions d'endommagement. L'originalité de notre approche réside dans le fait de prendre en compte les contraintes hors-plan, négligées dans les structures minces. On propose donc de rajouter une troisième direction d'endommagement afin d'aboutir à un modèle 3D et ainsi de pouvoir étendre le modèle au cas des structures épaisses.

On choisit de travailler à l'échelle mésoscopique, c'est-à-dire l'échelle du pli. L'écriture du modèle à l'échelle du pli permet de pouvoir l'étendre sans difficulté au cas d'un stratifié quelconque.

On suppose que le comportement du matériau est de type élastique endommageable, c'est-à-dire que pour un état d'endommagement donné et stable, le comportement est élastique.

L'endommagement considéré est un réseau de fissures planes et parallèles et ce dernier est indépendant du temps.

On considère que l'apparition et la propagation complète dans l'épaisseur et la largeur de l'éprouvette sont quasi-simultanées.

On suppose qu'il n'y a pas de frottement entre les lèvres de fissures.

On se place sous l'Hypothèse des Petites Perturbations (HPP). On regroupe sous le nom de petites perturbations par rapport à un état d'équilibre, les petits déplacements, les petites déformations et les petites variations de températures. Toutefois, le matériau utilisé ici étant faiblement conducteur de chaleur, on estime que les variations de température au sein du milieu sont suffisamment faibles pour n'induire aucune modification notable des propriétés du matériau. Ainsi nous supposons que l'on travaille à température constante.

On se place dans le cadre de la Mécanique de l'Endommagement décrit précédemment.

Enfin, la loi de comportement est écrite à partir de la *méthode de l'état local* issue de la Thermodynamique des Milieux Continus [Germain, 1973]. L'état du matériau est donc décrit par un ensemble fini de variables internes.

De manière générale, les variables internes utilisées dans les modèles écrits dans le cadre de la Mécanique de l'Endommagement peuvent être de nature scalaire, vectorielle ou tensorielle. Dans cette étude nous nous sommes basés sur l'approche vectorielle de THIONNET et RENARD [Thionnet and Renard, 1993] elle-même issue des travaux de TALREJA [Talreja, 1986]. Cette approche basée sur une description microscopique des phénomènes de fissuration permet de tenir compte de la géométrie de l'endommagement et de traduire le caractère unilatéral de l'endommagement.

4.2.3 Choix des variables d'état et description des fissures

La *méthode de l'état local* sur laquelle se base la thermodynamique des processus irréversibles [Germain, 1973] postule que *l'état thermo-mécanique d'un milieu, en un point et à un instant donnés, est complètement défini par la donnée d'un certain nombre de grandeurs thermodynamiques, appelées variables d'état, ne dépendant que du point considéré* [Besson et al., 2001, Lemaitre and Chaboche, 1986]. Les dérivées temporelles de ces variables n'intervenant pas pour définir l'état du milieu implique que toute évolution puisse être considérée comme une succession d'états d'équilibre, ce qui exclut par conséquent les phénomènes ultra-rapides. C'est le choix, totalement subjectif bien que guidé par l'expérience, de la nature et du nombre des ces variables qui va conditionner l'écriture du modèle et la précision de la description du phénomène physique. Les variables d'état (ou variables thermodynamiques) se divisent en deux catégories : les variables observables et les variables internes.

Les variables observables sont définies ainsi dans la mesure où elles sont mesurables par observation directe. Dans le cadre de la thermo-élasticité (phénomènes réversibles), l'état du milieu dépend à chaque instant de seulement deux variables :

- le tenseur de déformations $\underline{\varepsilon}$;
- la température T .

Précisons d'ores et déjà que nous avons fait l'hypothèse que l'on travaille à température constante. Aussi, la seule variable observable qui nous intéressera dans la suite est le tenseur de déformations $\underline{\varepsilon}$.

Dans un cadre plus général (élasto-plasticité ou visco-plasticité), en petites perturbations, on suppose généralement qu'il y a partition de la déformation totale $\underline{\varepsilon}_{\approx tot}$ qui se décompose en une déformation purement élastique $\underline{\varepsilon}_{\approx el}$ et une déformation inélastique réversible $\underline{\varepsilon}_{\approx ir}$ sous la forme $\underline{\varepsilon}_{\approx el} = \underline{\varepsilon}_{\approx tot} - \underline{\varepsilon}_{\approx ir}$. Toutefois, nous verrons dans la suite que le milieu étudié est élastique endommageable, le seul phénomène dissipatif étant l'endommagement. Aussi, la déformation se limitera à la déformation élastique. Ainsi, nous avons : $\underline{\varepsilon}_{\approx tot} = \underline{\varepsilon}_{\approx el} = \underline{\varepsilon}_{\approx}$.

Pour modéliser les phénomènes irréversibles (l'endommagement par exemple), afin de décrire l'état interne du milieu, il est nécessaire d'introduire des variables

de nature plus cachée appelées variables internes qui, par opposition avec les variables observables, ne peuvent être mesurées par observation directe. Ces variables peuvent être de différentes natures : scalaires [Ladevèze and LeDantec, 1992], vectorielles [Talreja, 1986] ou tensorielles [Chaboche, 1979]. Là encore le choix sera guidé par l'expérience.

Dans l'approche que nous avons suivie, le phénomène d'endommagement par fissuration intra-laminaire est modélisé par un vecteur caractérisant la densité et la direction du réseau de fissures. L'approche de TALREJA, qui a été reprise par THIONNET et RENARD [Thionnet and Renard, 1993], dans le cas des composites unidirectionnels est étendue aux composites tissés par AUSSÉDAT [Aussedat-Yahia, 1997] qui introduit une deuxième direction d'endommagement. On propose d'introduire une troisième direction de fissuration afin de modéliser l'apparition de fissures dues aux contraintes perpendiculaires à l'empilement dans le cas d'un stratifié épais pour lequel les contraintes dans l'épaisseur ne sont pas négligeables. Ainsi, les trois réseaux de fissures sont définis de la façon suivante :

Soit un pli unidirectionnel et $R(O, \underline{x}_1, \underline{x}_2, \underline{x}_3)$ le repère local lié au pli, avec \underline{x}_1 représentant la direction des fibres et \underline{x}_3 la direction normale au pli. On considère trois types de fissures (FIG. 4.5) : les fissures parallèles au plan $(\underline{x}_1, \underline{x}_3)$ (type 1), les fissures parallèles au plan $(\underline{x}_2, \underline{x}_3)$ (type 2) et les fissures parallèles au plan $(\underline{x}_1, \underline{x}_2)$ (type 3).

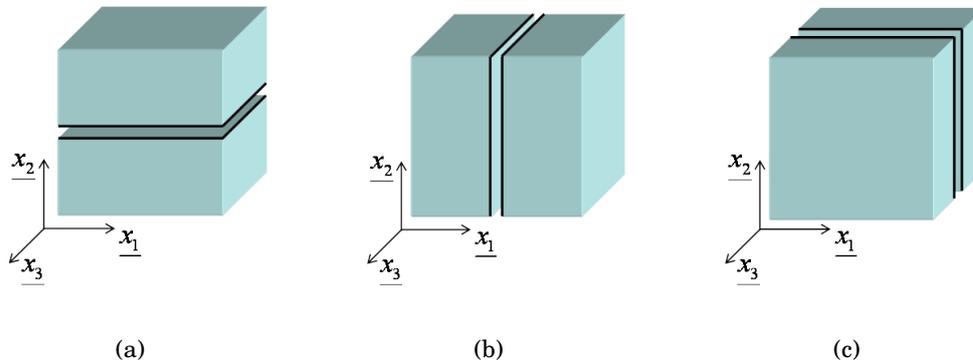


FIGURE 4.5 - Trois directions de fissuration : (a) type 1, (b) type 2, (c) type 3.

On modélise alors chaque type de fissure par un vecteur qui possède deux composantes, dans le repère local du pli, susceptibles d'être non nulles (EQ. 4.7). En d'autres termes, la direction du vecteur est variable. Nous verrons dans la suite qu'il est possible relier ce vecteur aux déplacements des lèvres de fissures observés à l'échelle microscopique.

$$\underline{\mathbf{V}}_{[1]}^{FI1} = \begin{pmatrix} V_{T[1]}^{FI1} \\ V_{N[1]}^{FI1} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{V}}_{[2]}^{FI2} = \begin{pmatrix} V_{N[2]}^{FI2} \\ V_{T[2]}^{FI2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{V}}_{[3]}^{FI3} = \begin{pmatrix} V_{T[3]}^{FI3} \\ 0 \\ V_{N[3]}^{FI3} \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

où V_N et V_T représentent respectivement la composante normale et la composante tangentielle au plan de la fissure.

Dans tout ce qui suit, afin d'alléger les écritures dans un but de clarté, nous limiterons le détail de la démarche au cas de la fissuration de type 1. L'approche est identique pour les autres types de fissuration.

Nous prendrons donc :

$$\underline{\mathbf{V}} = \begin{pmatrix} V_T \\ V_N \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

Les observations expérimentales montrent que les fissures se comportent différemment suivant les sollicitations auxquelles elles sont soumises. Afin de bien comprendre le phénomène, on propose d'examiner une fissure « modèle » caractéristique du réseau fissuré, dont les lèvres sont représentées par deux plans parallèles (FIG. 4.6). L'état de contrainte local au niveau des lèvres des fissures peut engendrer trois modes particuliers de fissuration : le **mode I** correspond à une ouverture dans la direction normale au plan des lèvres des fissures (les lèvres sont ouvertes mais non cisailées), le **mode II** correspond à un glissement des lèvres de fissures (les lèvres sont fermées mais cisailées), enfin, le **mode MIXTE** est une combinaison des deux modes précédents. Le **mode III** est quant à lui exclu.

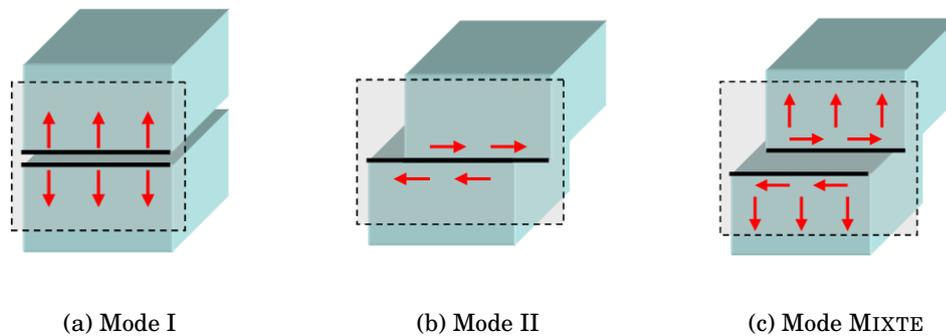


FIGURE 4.6 - Les trois modes d'ouverture d'un réseau de fissures.

De plus, les fissures introduisent, à l'échelle microscopique, des discontinuités dans les relations contraintes/déformations au passage de la frontière entre les états de traction et de compression. Afin de tenir compte de l'influence du chargement extérieur sur la géométrie des fissures et d'assurer la continuité du comportement, on introduit deux variables m et r . L'introduction de ces variables nous conduit donc à donner à la Mécanique de l'Endommagement, la notion de mode de sollicitation d'une macro-fissure rencontrée en Mécanique de la Rupture.

La première variable interne, notée, m , caractérise le mode d'ouverture d'une fissure. L'information sur la géométrie de la fissure est complétée par la deuxième variable interne, notée r , qui caractérise le rayon d'ouverture de la fissure. Les effets conjugués de ces deux variables entraînent une évolution continue du tenseur des rigidités au passage de l'état de traction à l'état de compression. L'introduction de ces variables permet également de tenir compte du fait que les fissures ont un comportement différent en fonction des sollicitations.

Les variables m et r permettent de décrire la géométrie des fissures et sont inspirées, en tout cas pour m , de la notion de mode d'ouverture d'une fissure en Mécanique de la Rupture.

On distingue trois configurations différentes :

1. les lèvres de fissure s'écartent (Mode I) : $m = 1$
 $\Rightarrow U_T = 0$ et $U_N \neq 0$
2. les lèvres de fissure glissent l'une par rapport à l'autre (Mode II) : $m = 2$
 $\Rightarrow U_N = 0$ et $U_T \neq 0$
3. les lèvres de fissure se trouvent dans une configuration mixte (Mode MIXTE) :
 $1 < m < 2$
 $\Rightarrow U_N \neq 0$ et $U_T \neq 0$

où U_N et U_T représentent respectivement les déplacements normaux et tangentiels des lèvres de fissures. A ce niveau de l'étude, il n'est pas nécessaire de donner plus de détails sur la forme des variables m , r et des sauts de déplacements U_N et U_T .

Nous avons jusque là décrit la direction des fissures par l'utilisation d'une description vectorielle en introduisant le vecteur \mathbf{V} . La géométrie évolutive des fissures est décrite par l'introduction des variables d'état m et r qui traduisent respectivement le mode et le rayon d'ouverture des fissures et assurent la continuité du tenseur des rigidité au passage de l'état de traction à l'état de compression. Il reste maintenant à évaluer le niveau d'endommagement.

De nombreux auteurs utilisent la chute de rigidité, la rigidité ou encore la résistance résiduelle comme une variable macroscopique directement liée à l'endommagement. Nous pouvons citer par exemple les travaux de HIGHSMITH et REIFSNIDER [Highsmith and Reifsnider, 1982], SIDOROFF et SUBAGIO [Sidoroff and Subagio, 1987], SHOKRIEH et LESSARD [Shokrieh and Lessard, 1997] ou encore ceux de PHILIPPIDIS et VASSILOPOUDOS [Philippidis and Vassilopoulos, 1999]. La fissuration étant un phénomène relativement *diffus*, il semble, a priori, que la densité de fissures³ soit une grandeur adaptée pour quantifier l'endommagement. Or, nous avons montré expérimentalement qu'il existe une dépendance de l'apparition des premières fissures et de leur multiplication vis à vis de l'épaisseur de la couche fissurée. Ces résultats sont corroborés par de nombreux travaux, nous pouvons citer par exemple ceux de REIFSNIDER [Reifsnider, 1977] ou de BADER, BAILEY, CURTIS et PARVIZI

3. On rappelle que la densité de fissures a été définie comme le nombre de fissures par unité de longueur

[Bader et al., 1979]. Ces résultats remettent en question le choix de la densité de fissures comme variable d'état. En effet, dans la mesure où cette grandeur dépend de la géométrie (ici de l'épaisseur de la couche) de la structure, elle ne présente pas un caractère intrinsèque au matériau. Afin de s'affranchir de l'effet d'épaisseur, nous proposons d'utiliser la variable adimensionnée α comme variable d'état caractéristique du niveau d'endommagement définie selon (EQ. 4.9).

$$\alpha = e \times d \quad (4.9)$$

où e (mm) représente l'épaisseur de la couche fissurée et d (mm^{-1}) la densité de fissures.

Cette variable, initialement introduite dans leurs travaux par RENARD, FAVRE et JEGGY [Renard et al., 1990], permet de s'affranchir de l'effet d'épaisseur du pli fissuré sur la variable d'endommagement (qui devient alors intrinsèque au matériau) et ainsi de normaliser la loi d'évolution de l'endommagement. Ils observent une certaine stabilité sur les courbes de chute de rigidité pour des séquences de type $(0^\circ/90_n^\circ)_s$, sollicitées en traction, en fonction de la variable α , que l'on ne retrouve pas si l'on trace les mêmes courbes en fonction de la densité de fissures d (FIG. 4.7).

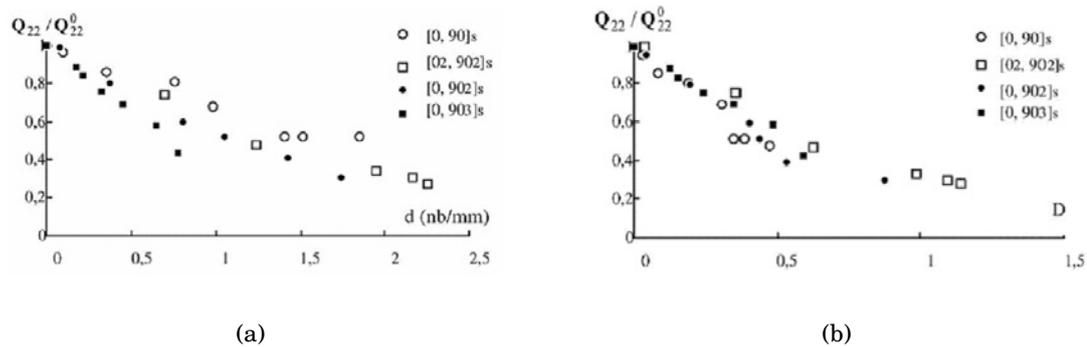


FIGURE 4.7 - Évolution de la chute de rigidité transverse sur les séquences $(0^\circ/90_n^\circ)_s$, (a) en fonction de d , (b) en fonction de α [Renard et al., 1990].

Enfin, comme nous l'avons précisé précédemment, nous travaillons à température constante, la seule variable observable est donc le tenseur de déformations $\underline{\underline{\varepsilon}}$.

Finalement, pour décrire l'état du matériau endommagé nous utiliserons une variable d'état observable, le tenseur des déformations $\underline{\underline{\varepsilon}}$ dont la variable duale est le tenseur des contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$ et trois variables internes α , m et r dont les variables duales sont respectivement A , M et R (TAB. 4.1).

Les variables internes qui décrivent la géométrie des fissures étant introduites, nous pouvons établir la forme du vecteur \underline{V} qui est une fonction des variables d'état (EQ. 4.10) :

Phénomènes	Variables d'état	Variables associées
Élasticité	$\underline{\varepsilon}$	$\underline{\sigma}$
Niveau de fissuration	α	A
Mode de sollicitation	m	M
Rayon d'ouverture des fissures	r	R

TABLE 4.1 - Variables d'état et les variables duales associées nécessaires à la modélisation de l'endommagement.

$$\underline{\mathbf{V}} = \underline{\mathbf{V}}(\alpha, m, r) \quad (4.10)$$

L'analyse expérimentale montre que la direction des fissures, du fait de la présence des fibres, ne dépend pas de la densité de fissures. Afin de tenir compte de cela nous décomposons le vecteur $\underline{\mathbf{V}}$ en deux termes indépendants f et $\underline{\mathbf{U}}$ respectivement caractéristiques du niveau d'endommagement et de la géométrie des fissures. Le vecteur $\underline{\mathbf{V}}$ s'écrit alors :

$$\underline{\mathbf{V}} = \underline{\mathbf{V}}(\alpha, m, r) = f(\alpha) \cdot \underline{\mathbf{U}}(m, r) \quad (4.11)$$

Finalement, les composantes du vecteur $\underline{\mathbf{V}}$ (V_N et V_T) s'écrivent en fonction des déplacements tangentiels $U_T(m, r)$ et normaux $U_N(m, r)$ des lèvres de fissures et d'une fonction $f(\alpha)$ caractéristique du niveau d'endommagement :

$$V_N(\alpha, m, r) = f(\alpha) \cdot U_N(m, r) \quad (4.12)$$

$$V_T(\alpha, m, r) = f(\alpha) \cdot U_T(m, r) \quad (4.13)$$

Nous pouvons d'ores et déjà préciser que la fonction f doit être définie telle que le vecteur $\underline{\mathbf{V}}$ soit nul lorsque le matériau est vierge de tout endommagement, c'est-à-dire :

$$f(\alpha = 0) = 0 \quad (4.14)$$

REMARQUE

Il convient de préciser que V_N et V_T (ou U_N et U_T) ne sont pas des variables d'état mais seulement des variables intermédiaires permettant de faciliter l'écriture de la fonction d'état.

4.2.4 Potentiel thermodynamique et Théorie des Invariants

Dès lors que les variables d'état ont été définies, on peut postuler l'existence d'un potentiel d'état ou potentiel thermodynamique. De la même manière que l'énergie potentielle en mécanique, le potentiel thermodynamique décrit l'énergie stockée localement au sein du matériau. Il est minimal lorsque le système est en équilibre. Ce potentiel étant une fonction des variables d'état, il est possible de déduire les différentes propriétés du milieu (loi de comportement par exemple) par dérivation par rapport à chacune des variables.

Les quatre potentiels les plus couramment utilisés sont donnés dans le tableau TAB. 4.2.

Potentiel thermodynamique	Formule
Energie interne	\mathcal{U}
Energie libre de HELMHOLTZ	\mathcal{F} (ou ψ) = $\mathcal{U} - TS$
Enthalpie	$\mathcal{H} = \mathcal{U} + PV$
Enthalpie libre GIBBS	$\mathcal{G} = \mathcal{U} + PV - TS$

TABLE 4.2 - Potentiels thermodynamique usuels, où S, T et V désignent respectivement l'entropie, la température et la pression.

Dans le cas d'un matériau élastique endommageable, on utilise généralement l'énergie libre de GIBBS ou de HELMHOLTZ. Le choix entre ces deux potentiels dépasse le cadre thermodynamique pour lequel ces deux approches sont équivalentes. En revanche, dans la mesure ou le potentiel thermodynamique de HELMHOLTZ dépend des déformations alors que celui de GIBBS est dépendant des contraintes, ce choix induit des différences significatives dans le cadre de la Mécanique de l'endommagement. CHABOCHE [Chaboche, 1994] propose une comparaison de ces deux approches. Dans le cas de notre étude, l'énergie libre de HELMHOLTZ, parce qu'elle dépend des déformations, apparaît plus adaptée notamment pour traduire le caractère unilatéral de l'endommagement.

Le potentiel énergie libre de HELMHOLTZ (ou spécifique) est une fonction des variables d'état (observables et internes). Dans notre cas il sera de la forme :

$$\varphi = \varphi(\underline{\varepsilon}, \underline{\mathbf{V}}(\alpha, m, r)) = \varphi(\underline{\varepsilon}, \alpha, m, r) \quad (4.15)$$

4.2.4.1 Loi de comportement et Théorie des Invariants

L'écriture de la loi de comportement d'un milieu continu, qui rappelons-le décrit la réponse de son Volume Élémentaire Représentatif à une excitation, doit respecter un certain nombre de critères. Elle est soumise, en particulier, à des conditions de cohérence au regard des grands Principes de la Mécanique et de la Physique [Thionnet and Martin, 2004]. Elle doit :

- **être objective**, ou plus précisément, vérifier le **Principe d'Indifférence Matérielle** ;

Le *Principe d'objectivité*, également connu sous le nom de *Principe d'Indifférence matérielle*, postule que les propriétés d'un milieu matériel ne dépendent pas du référentiel d'observation. Les relations traduisant les lois de comportement doivent donc relier des grandeurs objectives à l'aide de fonctions indépendantes du référentiel choisi pour étudier le mouvement.

- **respecter l'anisotropie du milieu**, c'est-à-dire respecter les invariances géométriques de la micro-structure qu'elle modélise ;

La plupart des matériaux présente une anisotropie qui résulte d'une distribution particulière de éléments micro-structuraux (les fibres dans le cas des matériaux composites). Toutefois, le matériau peut présenter des symétries locales (isotropie transverse, orthotropie...). La formulation des relations constitutives doit prendre en compte et respecter ces symétries matérielles qui traduisent l'arrangement de la matière.

- **conduire à des processus thermodynamiquement admissibles**, c'est-à-dire être en accord avec le Second Principe de la Thermodynamique.

Ce type de loi est souvent difficile à formuler et pour des fonctions d'état choisies polynomiales, la Théorie des Invariants nous aide alors à résoudre ce problème de manière structurée et très générale. L'ouvrage de THIONNET, MARTIN et BARRADAS [Thionnet et al., 2004], propose une démarche générale et systématique de l'utilisation de cette théorie, reprise dans [Thionnet and Martin, 2006], que l'on peut résumer de la manière suivante :

A partir de la donnée de l'ensemble \mathcal{V} des variables d'état et des éléments du groupe \mathcal{S} représentant les symétries matérielles du milieu considéré, la Théorie des Invariants peut se résumer, de manière très succincte, en trois étapes :

1. construire une famille génératrice \mathcal{F} d'invariants polynomiaux de \mathcal{V} , à partir des composantes des éléments de \mathcal{V} et par application du théorème de NOETHER ;
2. construire le polynôme choisi le plus général, invariant sous l'action de \mathcal{S} , à partir des éléments de la famille génératrice introduite ci-dessus, en se fixant des conditions sur les degrés partiel ou totaux ;
3. écrire l'objectivité du polynôme précédent afin de respecter le Principe d'Indifférence Matérielle. Cela revient à postuler que les coefficients du polynôme sont des composantes de tenseurs.

4.2.4.2 Écriture du potentiel thermodynamique

Les variables d'état se résument ici au 2-tenseur symétrique des déformations $\underline{\underline{\varepsilon}}$ et aux vecteurs $\underline{\underline{\mathbf{V}}}_{[i]}(\alpha_{[i]}, m_{[i]}, r_{[i]})(i=1,2,3)$ qui modélisent les trois types de fissures intralaminaires. Pour simplifier, nous faisons l'hypothèse que les trois types de fissures sont indépendants. Cela se traduit mathématiquement par le fait que l'évolution de $\underline{\underline{\mathbf{V}}}_{[i]}$ est indépendante de l'évolution de $\underline{\underline{\mathbf{V}}}_{[j], j \neq i}$. On se limitera donc à l'ensemble des variables d'état $\mathcal{V} = \{\underline{\underline{\mathbf{V}}}, \underline{\underline{\varepsilon}}\}$, le vecteur $\underline{\underline{\mathbf{V}}}$ représentant de manière quelconque un des trois types de fissures. Toutes les composantes de \mathcal{V} sont exprimées dans un repère orthonormé direct $(\underline{\mathbf{x}}_1, \underline{\mathbf{x}}_2, \underline{\mathbf{x}}_3)$:

$$\underline{\underline{\mathbf{V}}} = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} \quad \underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \quad (4.16)$$

Dans le cas d'un composite unidirectionnel à fibres longues, en présence des trois types de fissures, les transformations qui laissent invariante la géométrie du milieu sont l'identité $\underline{\underline{\mathbf{I}}}$ et son opposée $\hat{\underline{\underline{\mathbf{I}}}}$, les rotations $\underline{\underline{\mathbf{R}}}_{\approx_1}$, $\underline{\underline{\mathbf{R}}}_{\approx_2}$ et $\underline{\underline{\mathbf{R}}}_{\approx_3}$ et les symétries $\underline{\underline{\mathbf{D}}}_{\approx_1}$, $\underline{\underline{\mathbf{D}}}_{\approx_2}$ et $\underline{\underline{\mathbf{D}}}_{\approx_3}$. L'ensemble de ces transformations forment le groupe \mathcal{S}_8

$$\mathcal{S}_8 = \left\{ \underline{\underline{\mathbf{I}}}, \hat{\underline{\underline{\mathbf{I}}}}, \underline{\underline{\mathbf{R}}}_{\approx_1}, \underline{\underline{\mathbf{R}}}_{\approx_2}, \underline{\underline{\mathbf{R}}}_{\approx_3}, \underline{\underline{\mathbf{D}}}_{\approx_1}, \underline{\underline{\mathbf{D}}}_{\approx_2}, \underline{\underline{\mathbf{D}}}_{\approx_3} \right\} \quad (4.17)$$

$$\underline{\underline{\mathbf{I}}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \hat{\underline{\underline{\mathbf{I}}}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (4.18)$$

$$\underline{\underline{\mathbf{R}}}_{\approx_1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & +1 \end{pmatrix} \quad \underline{\underline{\mathbf{R}}}_{\approx_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \underline{\underline{\mathbf{R}}}_{\approx_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (4.19)$$

$$\underline{\underline{\mathbf{D}}}_{\approx_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \underline{\underline{\mathbf{D}}}_{\approx_2} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \underline{\underline{\mathbf{D}}}_{\approx_3} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.20)$$

Pour des raisons liées à des considérations physiques, on souhaite écrire la fonction énergie libre comme un polynôme invariant sous \mathcal{S}_8 de degré partiel 0 ou 2 par rapport aux composantes de $\underline{\underline{\varepsilon}}$ et $\underline{\underline{\mathbf{V}}}$. L'application de la Théorie des Invariants nous conduit à écrire l'énergie libre sous la forme (Eq. (4.21)) où \mathcal{P}_{20} , \mathcal{P}_{02} et \mathcal{P}_{22} sont les polynômes les plus généraux répondant aux impératifs que l'on s'est fixés. Le détail de tous les calculs présentés ici est disponible en annexe B.

$$\varphi(\underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{\mathbf{V}}}) = \mathcal{P}_{20}(\underline{\underline{\varepsilon}}) + \mathcal{P}_{02}(\underline{\underline{\mathbf{V}}}) + \mathcal{P}_{22}(\underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{\mathbf{V}}}) \quad (4.21)$$

L'application de la troisième étape de la démarche présentée précédemment permet de formuler \mathcal{P}_{20} , \mathcal{P}_{02} et \mathcal{P}_{22} à partir de coefficients tensoriels assurant ainsi l'objectivité de la loi. Ainsi, on peut exprimer \mathcal{P}_{20} en fonction du $\underline{\underline{C}}^0$ caractérisant la rigidité du matériau sain d'endommagement, et \mathcal{P}_{22} en fonction de trois tenseurs de comportement $\underline{\underline{C}}^N$, $\underline{\underline{C}}^T$ et $\underline{\underline{C}}^{NT}$ décrivant les chutes de rigidité dues aux différents mode de fissuration. Par ailleurs, \mathcal{P}_{02} s'annule si l'on considère qu'aucune énergie n'est stockée lorsque les fissures sont fermées. Ce qui implique de supposer qu'aucune inclusion n'empêche les fissures de se refermer. L'énergie libre peut donc s'écrire sous la forme :

$$\varphi(\underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\mathbf{V}}) = \varphi^0(\underline{\underline{\varepsilon}}) + \varphi^N(\underline{\underline{\varepsilon}}, V_N) + \varphi^T(\underline{\underline{\varepsilon}}, V_T) + \varphi^{NT}(\underline{\underline{\varepsilon}}, V_N, V_T) \quad (4.22)$$

où les polynômes φ^0 , φ^N , φ^T et φ^{NT} sont de la forme suivante :

$$\begin{aligned} \varphi^0(\underline{\underline{\varepsilon}}) &= A_1\varepsilon_{11}^2 + A_2\varepsilon_{11}\varepsilon_{22} + A_3\varepsilon_{11}\varepsilon_{33} + A_4\varepsilon_{22}^2 + A_5\varepsilon_{22}\varepsilon_{33} \\ &+ A_6\varepsilon_{23}^2 + A_7\varepsilon_{33}^2 + A_8\varepsilon_{12}^2 + A_9\varepsilon_{13}^2 \\ &= F_0(\underline{\underline{\varepsilon}}) \end{aligned} \quad (4.23)$$

$$\begin{aligned} \varphi^N(\underline{\underline{\varepsilon}}, V_N) &= (B_1\varepsilon_{11}^2 + B_2\varepsilon_{11}\varepsilon_{22} + B_3\varepsilon_{11}\varepsilon_{33} + B_4\varepsilon_{22}^2 + B_5\varepsilon_{22}\varepsilon_{33} \\ &+ B_6\varepsilon_{23}^2 + B_7\varepsilon_{33}^2 + B_8\varepsilon_{12}^2 + B_9\varepsilon_{13}^2)V_N^2 \\ &= F_N(\underline{\underline{\varepsilon}})V_T^2 = F_N(\underline{\underline{\varepsilon}})f^2(\alpha)U_N^2(m, r) \end{aligned} \quad (4.24)$$

$$\begin{aligned} \varphi^T(\underline{\underline{\varepsilon}}, V_T) &= (C_1\varepsilon_{11}^2 + C_2\varepsilon_{11}\varepsilon_{22} + C_3\varepsilon_{11}\varepsilon_{33} + C_4\varepsilon_{22}^2 + C_5\varepsilon_{22}\varepsilon_{33} \\ &+ C_6\varepsilon_{23}^2 + C_7\varepsilon_{33}^2 + C_8\varepsilon_{12}^2 + C_9\varepsilon_{13}^2)V_T^2 \\ &= F_T(\underline{\underline{\varepsilon}})V_T^2 = F_T(\underline{\underline{\varepsilon}})f^2(\alpha)U_T^2(m, r) \end{aligned} \quad (4.25)$$

$$\begin{aligned} \varphi^{NT}(\underline{\underline{\varepsilon}}, V_N, V_T) &= (D_1\varepsilon_{11}\varepsilon_{12} + D_2\varepsilon_{11}\varepsilon_{33} + D_3\varepsilon_{33}\varepsilon_{12} + D_4\varepsilon_{13}\varepsilon_{23})V_NV_T \\ &= F_{NT}(\underline{\underline{\varepsilon}})V_NV_T = F_{NT}(\underline{\underline{\varepsilon}})f^2(\alpha)U_N(m, r)U_T(m, r) \end{aligned} \quad (4.26)$$

Finalement, dans le cadre de l'élasticité endommageable, le potentiel thermodynamique (l'énergie libre) s'écrit sous la forme :

$$\varphi((\underline{\underline{\varepsilon}}), \underline{\mathbf{V}}(\alpha, m, r)) = \frac{1}{2}(\underline{\underline{\varepsilon}}) : \underline{\underline{C}}(\alpha, m, r) : (\underline{\underline{\varepsilon}}) \quad (4.27)$$

$$\underline{\underline{C}}(\alpha, m, r) = \underline{\underline{C}}^0 - f^2(\alpha)\underline{\underline{C}}_d(m, r) \quad (4.28)$$

$$\begin{aligned} \underline{\underline{C}}_d(m, r) &= \underline{\underline{C}}^N U_N^2(m, r) \dots \\ &\dots + \underline{\underline{C}}^T U_T^2(m, r) \dots \\ &\dots + \underline{\underline{C}}^{NT} U_N(m, r)U_T(m, r) \end{aligned} \quad (4.29)$$

Avec :

$$\underset{\approx}{\mathbf{C}}^0 = \begin{pmatrix} 2A_1 & A_2 & A_3 & 0 & 0 & 0 \\ A_2 & 2A_4 & A_5 & 0 & 0 & 0 \\ A_3 & A_5 & 2A_7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2A_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2A_8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2A_9 \end{pmatrix} \quad \underset{\approx}{\mathbf{C}}^N = \begin{pmatrix} 2B_1 & B_2 & B_3 & 0 & 0 & 0 \\ B_2 & 2B_4 & B_5 & 0 & 0 & 0 \\ B_3 & B_5 & 2B_7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2B_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2B_8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2B_9 \end{pmatrix} \quad (4.30)$$

$$\underset{\approx}{\mathbf{C}}^T = \begin{pmatrix} 2C_1 & C_2 & C_3 & 0 & 0 & 0 \\ C_2 & 2C_4 & C_5 & 0 & 0 & 0 \\ C_3 & C_5 & 2C_7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2C_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2C_8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2C_9 \end{pmatrix} \quad \underset{\approx}{\mathbf{C}}^{NT} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_4 & 0 & 0 \\ D_1 & D_2 & D_3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.31)$$

4.2.4.3 Explicitation des tenseurs de chute de rigidité

Le tenseur $\underset{\approx}{\mathbf{C}}^N$ représente la chute de rigidité due à la composante V_N du vecteur \mathbf{V} caractérisant l'endommagement lorsque les fissures sont ouvertes mais non cisailées. Dans ce cas, l'apparition des fissures est due exclusivement à ε_{22} , ainsi on a $B_6 = B_8 = B_9 = 0$.

Le tenseur $\underset{\approx}{\mathbf{C}}^T$ représente la chute de rigidité due à la composante V_N du vecteur \mathbf{V} caractérisant l'endommagement lorsque les fissures sont cisailées mais non ouvertes. Dans ce cas, l'apparition des fissures est due exclusivement à ε_{12} , ainsi on a $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = C_5 = C_7 = 0$.

Enfin, le tenseur $\underset{\approx}{\mathbf{C}}^{NT}$ représente la chute de rigidité due au couplage des effets des composantes V_N et V_T .

Finalement, le tenseur de comportement s'écrit :

$$\underset{\approx}{\mathbf{C}} = \underset{\approx}{\mathbf{C}}^0 - f^2(\alpha) \times \begin{pmatrix} 2B_1U_N^2 & B_2U_N^2 & B_3U_N^2 & 0 & 0 & D_1U_N^2 \\ B_2U_N^2 & 2B_4U_N^2 & B_5U_N^2 & 0 & 0 & D_2U_N^2 \\ B_3U_N^2 & B_5U_N^2 & 2B_7U_N^2 & 0 & 0 & D_3U_N^2 \\ 0 & 0 & 0 & 2C_6U_T^2 & D_4U_N^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_4U_N^2 & 2C_8U_T^2 & 0 \\ D_1U_N^2 & D_2U_N^2 & D_3U_N^2 & 0 & 0 & 2C_9U_T^2 \end{pmatrix} \quad (4.32)$$

Il apparaît clairement (EQ. 4.32) que la perte de raideur due au couplage des effets des composantes normales et tangentielles se traduit par la perte d'orthotropie

au profit de la monoclinicité. Dans le cas de notre matériau, nous faisons l'hypothèse que ces effets sont négligeables. Nous prendrons donc le tenseur C^{NT} nul.

Afin de mettre en évidence comment se traduit le caractère unilatéral de l'endommagement, on simule la fermeture des fissures. En d'autres termes, on évalue la relation précédente pour $m = 2$, pour cela on applique la relation (4.40). Ainsi, la relation (4.33) devient :

$$\underline{\underline{\zeta}} = \underline{\underline{\zeta}}^0 - f^2(\alpha) \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2C_6U_T^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2C_8U_T^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2C_9U_T^2 \end{pmatrix} \quad (4.33)$$

Conformément aux observations expérimentales, on constate que les composantes liées aux effets de traction/compression se restaurent alors que celles liées au cisaillement restent dégradées.

4.2.4.4 Explicitation de la fonction $f(\alpha)$

$f(\alpha)$ est la fonction de lissage des chutes de rigidité en fonction de l'endommagement α . Nous définissons f selon (EQ. 4.34).

$$f^2(\alpha) = \frac{\alpha}{1 + \alpha} \quad (4.34)$$

La fonction $f(\alpha)$ est construite de telle sorte que :

- lorsque le matériau est sain (vierge de tout endommagement), il n'y a pas de chutes de rigidité on retrouve bien $f(\alpha = 0) = 0$;
- elle est croissante : plus le matériau est endommagé plus la chute de rigidité est importante.

4.2.4.5 Explicitation des fonctions m et r

Deux solutions sont possibles pour identifier les fonctions $m(\varepsilon, \alpha)$ et $r(\varepsilon, \alpha)$:

- soit on a accès à une description et une identification microscopique des fonctions saut de déplacement U_N et U_T au niveau des lèvres de fissures. On est alors capable de calculer $m(\varepsilon, \alpha)$ et $r(\varepsilon, \alpha)$ par une procédure multi-échelles ;
- soit on ne connaît pas les fonctions saut de déplacement. On est alors incapable de calculer $m(\varepsilon, \alpha)$ et $r(\varepsilon, \alpha)$ par une approche micro-macro. C'est dans cette dernière situation que se situe notre étude. Les identifications de $m(\varepsilon, \alpha)$ et $r(\varepsilon, \alpha)$ doivent être faites au niveau mésoscopique.

L'identification des fonctions m et r est fondée sur le sens que l'on souhaite donner à ces quantités. En outre, nous considérons ces variables comme des fonctions décrivant respectivement le mode et le rayon d'ouverture des fissures. Plus précisément, m est une fonction continue à valeurs dans $[1; 2]$ construite de sorte que :

- $m = 1$ lorsque la sollicitation est telle qu'elle n'induit aucun saut de déplacement tangentiel ;
- $m = 2$ lorsque la sollicitation est telle qu'elle n'induit aucun saut de déplacement normal nul ;
- $m \in]1; 2[$ dans toutes les configurations mixtes.

r est une fonction continue et positive ou nulle représentative de l'écart entre les lèvres de fissures.

Les quelques remarques suivantes nous permettront de simplifier l'identification des fonctions m et r :

- la frontière entre les états de traction et de compression est $\varepsilon_{22} = 0$ pour les fissures de type 1, $\varepsilon_{11} = 0$ pour les fissures de type 2 et $\varepsilon_{33} = 0$ pour les fissures de type 3 ;
- la rupture en mode 1 est due exclusivement à ε_{22} pour les fissures de type 1, ε_{11} pour les fissures de type 2 et ε_{33} pour les fissures de type 3 ;
- la rupture en mode 2 est due exclusivement à ε_{12} pour les fissures de types 1 et 2 et ε_{13} pour les fissures de type 3.

De plus, nous faisons l'hypothèse que la déformation ε_{22} n'a pas d'influence sur l'apparition des fissures de types 2 et 3, la déformation ε_{11} n'a pas d'influence sur l'apparition des fissures de types 1 et 3 et enfin, la déformation ε_{33} n'a pas d'influence sur l'apparition des fissures de type 1 et 2.

Ainsi, compte-tenu de ces remarques, les fonctions $m((\varepsilon, \alpha))$ et $r(\varepsilon, \alpha)$ sont écrites en s'inspirant d'un critère classique d'apparition de première fissure. Elles sont prises sous les formes (EQ. 4.35, 4.36 et 4.37). Les quantités ε_{11}^R et ε_{22}^R représentent les déformations à rupture en traction et les quantités ε_{12}^R et ε_{13}^R représentent les déformations à rupture en cisaillement.

– pour les fissures de type 1 :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{si } \varepsilon_{22} > 0, \quad m_1 = \frac{\left(\frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{22}^R}\right)^2 + 2\left(\frac{\varepsilon_{12}}{\varepsilon_{12}^R}\right)^2}{\left(\frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{22}^R}\right)^2 + \left(\frac{\varepsilon_{12}}{\varepsilon_{12}^R}\right)^2} \quad \text{sinon } m_1 = 2 \\ \text{si } \varepsilon_{22} > 0, \quad r_1 = \sqrt{\varepsilon_{22}^2 + \varepsilon_{12}^2} \quad \text{sinon } r_1 = \sqrt{\varepsilon_{12}^2} \end{array} \right. \quad (4.35)$$

– pour les fissures de type 2 :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{si } \varepsilon_{11} > 0, \quad m_2 = \frac{\left(\frac{\varepsilon_{11}}{\varepsilon_{11}^R}\right)^2 + 2\left(\frac{\varepsilon_{12}}{\varepsilon_{12}^R}\right)^2}{\left(\frac{\varepsilon_{11}}{\varepsilon_{11}^R}\right)^2 + \left(\frac{\varepsilon_{12}}{\varepsilon_{12}^R}\right)^2} \quad \text{sinon } m_2 = 2 \\ \text{si } \varepsilon_{11} > 0, \quad r_1 = \sqrt{\varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{12}^2} \quad \text{sinon } r_2 = \sqrt{\varepsilon_{12}^2} \end{array} \right. \quad (4.36)$$

– pour les fissures de type 3 :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{si } \varepsilon_{33} > 0, \quad m_3 = \frac{\left(\frac{\varepsilon_{33}}{\varepsilon_{33}^R}\right)^2 + 2\left(\frac{\varepsilon_{13}}{\varepsilon_{13}^R}\right)^2}{\left(\frac{\varepsilon_{33}}{\varepsilon_{33}^R}\right)^2 + \left(\frac{\varepsilon_{13}}{\varepsilon_{13}^R}\right)^2} \quad \text{sinon } m_3 = 2 \\ \text{si } \varepsilon_{33} > 0, \quad r_3 = \sqrt{\varepsilon_{33}^2 + \varepsilon_{13}^2} \quad \text{sinon } r_3 = \sqrt{\varepsilon_{13}^2} \end{array} \right. \quad (4.37)$$

4.2.4.6 Explicitation des sauts de déplacements U_N et U_T

Dans le cas d'un état de déformation nulle et dans le but d'assurer la continuité du tenseur de comportement lors du passage de l'état de traction à l'état de compression, les sauts de déplacement U_N et U_T doivent respecter les relations (4.38) et (4.39).

$$\forall m, \quad U_N(m, r = 0) = 0 \quad (4.38)$$

$$\forall m, \quad U_T(m, r = 0) = 0 \quad (4.39)$$

De plus, lorsqu'une fissure est ouverte en mode 1 ou en mode 2, le vecteur modélisant l'endommagement ne doit posséder qu'une seule composante (normale ou tangentielle). En mode mixte le vecteur retrouve évidemment ses deux composantes non-nulles. Cela impose donc les relations (4.40) et (4.41).

$$\forall r, \quad U_N(m = 2, r) = 0 \quad (4.40)$$

$$\forall r, \quad U_T(m = 1, r) = 0 \quad (4.41)$$

Dans le but de simplifier l'identification des sauts de déplacements, on souhaite, sur la base de considérations physiques, limiter l'influence des variables m et r . En particulier, THIONNET et RENARD [Thionnet and Renard, 1993] montrent, par un calcul d'homogénéisation sur une cellule fissurée, que le comportement du milieu fissuré ne doit pas dépendre de l'amplitude des contraintes. Aussi, afin de garantir une restauration progressive des propriétés du matériau au passage de la frontière entre les états de traction et de compression, on utilise une forme exponentielle avec un paramètre d'atténuation x conduisant aux relations (4.42) et (4.43).

$$U_N(m, r) = h_N(m)j(r) = (1 - e^{x(2-m)})(1 - e^{-xr}) \quad (4.42)$$

$$U_T(m, r) = h_T(m)j(r) = (1 - e^{x(1-m)})(1 - e^{-xr}) \quad (4.43)$$

L'ensemble des termes nécessaires à l'écriture du tenseur de comportement sont maintenant explicités. Ce dernier s'écrit finalement (EQ. 4.44) :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{C}} &\approx \underline{\underline{C}}^0 - f^2(\alpha)(1 - e^{-xr}) \dots \\ &\dots \times \begin{pmatrix} 2B_1U_N^2.h_N^2 & B_2U_N^2.h_N^2 & B_3U_N^2.h_N^2 & 0 & 0 & 0 \\ B_2U_N^2.h_N^2 & 2B_4U_N^2.h_N^2 & B_5U_N^2.h_N^2 & 0 & 0 & 0 \\ B_3U_N^2.h_N^2 & B_5U_N^2.h_N^2 & 2B_7U_N^2.h_N^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2C_6U_T^2.h_T^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2C_8U_T^2.h_T^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2C_9U_T^2.h_T^2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.44)$$

On retrouve bien (EQ. 4.44), à l'exception du cas où l'état de déformation est nul, que le comportement dépend de l'orientation du tenseur des contraintes (ici de la variable m au travers les fonctions $h_N(m)$ et $h_T(m)$) et quasiment pas de son amplitude (c'est à dire de r).

4.2.5 Écriture des lois d'état

Le potentiel thermodynamique $\varphi(\underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{V}}) = \psi(\underline{\underline{\varepsilon}}, \alpha, m, r)$ est une fonction d'état des variables d'état $\underline{\underline{\varepsilon}}$, α , m et r dont les variables duales sont respectivement $\underline{\underline{\sigma}}$, A , M et R . Cela nous permet d'écrire :

$$d\psi = \frac{\partial\psi}{\partial\underline{\underline{\varepsilon}}} d\underline{\underline{\varepsilon}} + \frac{\partial\psi}{\partial\alpha} d\alpha + \frac{\partial\psi}{\partial m} dm + \frac{\partial\psi}{\partial r} dr = \underline{\underline{\sigma}} d\underline{\underline{\varepsilon}} + Ad\alpha + Mdm + Rdr \quad (4.45)$$

Les lois d'état s'obtiennent en identifiant terme à terme l'égalité (4.45) :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{\partial \psi(\underline{\underline{\varepsilon}}, \alpha, m, r)}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} = \underline{\underline{C}}(\alpha, m, r) : \underline{\underline{\varepsilon}} \quad (4.46)$$

$$A(\underline{\underline{\varepsilon}}, \alpha, m, r) = \frac{\partial \psi(\underline{\underline{\varepsilon}}, \alpha, m, r)}{\partial \alpha} = \frac{1}{2} \underline{\underline{\varepsilon}} : \left[-\frac{\partial f^2(\alpha)}{\partial \alpha} \underline{\underline{C}}_d(m, r) \right] : \underline{\underline{\varepsilon}} \quad (4.47)$$

$$M(\underline{\underline{\varepsilon}}, \alpha, m, r) = \frac{\partial \psi(\underline{\underline{\varepsilon}}, \alpha, m, r)}{\partial m} \quad (4.48)$$

$$R(\underline{\underline{\varepsilon}}, \alpha, m, r) = \frac{\partial \psi(\underline{\underline{\varepsilon}}, \alpha, m, r)}{\partial r} \quad (4.49)$$

Nous avons fait l'hypothèse que lorsque les fissures sont fermées il n'y a pas de frottement entre leurs lèvres. Les variables m et r ne sont donc pas dissipatives, ce qui se traduit par $M = 0$ et $R = 0$. Enfin, l'application du théorème des fonctions implicites conduit à écrire que $m = m(\underline{\underline{\varepsilon}}, \alpha)$ et $r = r(\underline{\underline{\varepsilon}}, \alpha)$.

4.2.6 Lois complémentaires et évolution de l'endommagement

La loi d'évolution de l'endommagement doit respecter le second principe de la thermodynamique qui se traduit par l'inégalité de CLAUSIUS-DUHEM (4.50) :

$$\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} - \dot{\psi} \geq 0 \quad (4.50)$$

Par ailleurs, l'équation (4.45), nous permet d'écrire :

$$\dot{\psi} = \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} + A\dot{\alpha} + M\dot{m} + R\dot{r} \quad (4.51)$$

L'endommagement est un phénomène irréversible (une fissure apparue ne peut disparaître) ce qui implique que $\dot{\alpha} \geq 0$. L'inégalité fondamentale s'écrit alors :

$$- A(\underline{\underline{\varepsilon}}, \alpha, m, r)\dot{\alpha} - M(\underline{\underline{\varepsilon}}, \alpha, m, r)\dot{m} - R(\underline{\underline{\varepsilon}}, \alpha, m, r)\dot{r} \geq 0 \quad \forall \dot{\alpha} \geq 0, \forall \dot{m}, \forall \dot{r} \quad (4.52)$$

Enfin, comme nous l'avons vu précédemment, $M(\underline{\underline{\varepsilon}}, \alpha, m, r) = 0$ et $R(\underline{\underline{\varepsilon}}, \alpha, m, r) = 0$. Finalement, l'inégalité de CLAUSIUS-DUHEM se réduit à :

$$- A(\underline{\underline{\varepsilon}}, \alpha, m, r)\dot{\alpha} \geq 0 \quad \forall \dot{\alpha} \geq 0 \quad (4.53)$$

L'inégalité (4.53) traduit le caractère irréversible de l'endommagement. En effet, elle impose que :

- si $A(\underline{\underline{\varepsilon}}, \alpha, m, r) > 0$ alors $\frac{d\alpha}{dt} = 0$, l'endommagement ne peut décroître, il reste donc stable ;
- si $A(\underline{\underline{\varepsilon}}, \alpha, m, r) \leq 0$ alors $\frac{d\alpha}{dt} \geq 0$, le phénomène de fissuration peut se produire ;

Le phénomène d'endommagement étant indépendant du temps (il faut entendre par là que l'on fait l'hypothèse qu'il n'y a pas de viscosité), on peut écrire la loi d'évolution de la variable d'endommagement α à l'aide d'une loi seuil qui utilise un critère convexe tel que pour $c(\underline{\underline{\varepsilon}}, \alpha, m, r) \leq 0$ le matériau ne subit pas d'endommagement. On définit le critère suivant (4.54) :

$$c(\underline{\underline{\varepsilon}}, \alpha, m, r) = A^c(\alpha, m, r) - A(\underline{\underline{\varepsilon}}, \alpha, m, r) \leq 0 \quad (4.54)$$

où $A^c(\alpha, m, r)$ représente la fonction seuil d'endommagement qui est une propriété du matériau et qui doit donc être identifiée. La dépendance du seuil d'endommagement $A^c(\alpha, m, r)$ des variables m et r permet de tenir compte du fait que l'énergie nécessaire pour créer une fissure dépend du mode de chargement.

On déduit alors la loi d'évolution en écrivant que l'on est et que l'on reste sur le seuil lors de la phase d'endommagement (l'hypothèse de consistance) :

$$c(\underline{\underline{\varepsilon}}, \alpha, m, r) = A^c - A = 0 \quad (4.55)$$

$$dc(\underline{\underline{\varepsilon}}, \alpha, m, r) = dA^c - dA = 0 \quad (4.56)$$

On peut alors écrire :

$$dA = \frac{\partial A}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} d\underline{\underline{\varepsilon}} + \frac{\partial A}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial A}{\partial m} dm + \frac{\partial A}{\partial r} dr \quad (4.57)$$

$$dA^c = \frac{\partial A^c}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial A^c}{\partial m} dm + \frac{\partial A^c}{\partial r} dr \quad (4.58)$$

On rappelle que :

$$A(\underline{\underline{\varepsilon}}, \alpha, m, r) = \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} \quad (4.59)$$

En remplaçant (4.59) dans (4.57) on obtient :

$$dA(\underline{\underline{\varepsilon}}, \alpha, m, r) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}} \partial \alpha} d\underline{\underline{\varepsilon}} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \alpha^2} d\alpha + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \alpha \partial m} dm + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \alpha \partial r} dr \quad (4.60)$$

En injectant (4.60) et (4.58) dans (4.56), on a :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial A^c}{\partial \alpha} \mathbf{d}\alpha + \frac{\partial A^c}{\partial m} \mathbf{d}m + \frac{\partial A^c}{\partial r} \mathbf{d}r - \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \underline{\varepsilon} \partial \alpha} \mathbf{d}\underline{\varepsilon} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \alpha^2} \mathbf{d}\alpha + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \alpha \partial m} \mathbf{d}m + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \alpha \partial r} \mathbf{d}r \right) = 0 \\ \Leftrightarrow & \left(\frac{\partial A^c}{\partial \alpha} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial \alpha^2} \right) \mathbf{d}\alpha + \left(\frac{\partial A^c}{\partial m} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial \alpha \partial m} \right) \mathbf{d}m + \left(\frac{\partial A^c}{\partial r} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial \alpha \partial r} \right) \mathbf{d}r - \frac{\partial^2 \psi}{\partial \underline{\varepsilon} \partial \alpha} \mathbf{d}\underline{\varepsilon} = 0 \end{aligned}$$

Finalement, l'accroissement du paramètre d'endommagement s'exprime en fonction de l'accroissement des déformations locales de la couche fissurée et des accroissements de m et r . La loi d'évolution de la variable d'endommagement α s'écrit alors sous la forme (EQ. 4.61) :

$$\mathbf{d}\alpha = - \frac{\frac{\partial^2 \psi}{\partial \underline{\varepsilon} \partial \alpha} \mathbf{d}\underline{\varepsilon} + \left(\frac{\partial A^c}{\partial m} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial \alpha \partial m} \right) \mathbf{d}m + \left(\frac{\partial A^c}{\partial r} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial \alpha \partial r} \right) \mathbf{d}r}{\frac{\partial^2 \psi}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial A^c}{\partial \alpha}} \quad (4.61)$$

Sans plus de détails pour l'instant, on précise que la fonction seuil $A^c(\alpha, m)$ est prise sous la forme (EQ. 4.62) :

$$A^c(\alpha, m) = -b(m) \exp \frac{\ln \left[-\ln \left(1 - \frac{\alpha}{c(m)} \right) \right]}{a(m)} \quad (4.62)$$

Où les coefficients $a(m)$, $b(m)$ et $c(m)$ sont intrinsèques au matériau, c'est à dire, entre autres, indépendant de l'épaisseur de la couche fissurée et de son orientation dans la structure. La dépendance du seuil d'endommagement vis-à-vis des variables m et r au travers des trois coefficients a , b , c prend en compte le fait que l'énergie requise pour créer une fissure dépend du mode de sollicitation. Nous supposons dans cette étude que l'influence de r est négligeable par rapport à celle de m sur l'évolution de l'endommagement. Nous verrons dans la suite comment identifier cette fonction seuil et quels sont les essais nécessaires à son identification.

4.3 Conclusion

L'objectif de chapitre était de proposer une modélisation de l'endommagement du matériau unidirectionnel par fissuration intra-laminaire lorsque celle-ci se développe aussi bien lorsque le matériau est soumis à un chargement quasi-statique qu'un chargement de fatigue. Le développement d'un tel modèle passe par plusieurs étapes.

Dans un premier temps, nous nous sommes attachés à décrire et fixer un cadre à notre modélisation nous permettant de définir clairement le choix des variables décrivant le processus physique de dégradation. Plus particulièrement, l'analyse des résultats expérimentaux nous a montré que l'utilisation de la variable α (définie comme la produit de la densité de fissures dans le pli considéré par l'épaisseur de ce dernier) s'y prête particulièrement bien dans la mesure ou elle permet de s'affranchir de l'effet d'épaisseur. Enfin l'introduction des deux autres variables m mode et r rayon d'ouverture permettent de rendre compte l'influence du mode de sollicitation des fissures.

La description du phénomène d'endommagement se fait via une approche mésoscopique (écrite à l'échelle du pli) qui permet d'écrire une loi d'évolution de la fissuration sur le pli homogène équivalent. L'apparition et la propagation des fissures étant supposées quasi-instantanées, l'évolution de la fissuration est caractérisée, non pas par la propagation des fissures, mais par la multiplication de ces dernières.

Le chapitre suivant présente le cas de la fatigue.

Chapitre 5

Une loi d'évolution en fatigue

Dans ce chapitre, nous commencerons par décrire le cadre et le fonctionnement du modèle de fatigue. Ensuite, nous verrons qu'un calcul de structure en fatigue nécessite l'utilisation d'une stratégie particulière que nous décrirons. Enfin, nous présenterons notre modèle de fatigue.

Sommaire

5.1 Cadre et fonctionnement du modèle de fatigue	151
5.2 Stratégie de calcul de structure en fatigue	152
5.2.1 Principe	153
5.2.2 Implantation de la méthode	157
5.3 Le modèle de fatigue	159
5.4 Conclusion	162

5.1 Cadre et fonctionnement du modèle de fatigue

Le problème de la fatigue réside dans le fait qu'elle est avant tout un concept structural plutôt que local. Ainsi, si l'on s'assure de la rigoureuse périodicité des sollicitations périodiques appliquées à la structure, et donc l'existence de la notion d'un compteur « *nombre de cycles* », rien n'assure cela au niveau local.

Pour s'affranchir de cette difficulté, on suppose en premier lieu que toutes les sollicitations qui seront appliquées aux structures que nous étudierons, auront des fréquences identiques. Ensuite, et cela est une conséquence induite par le type de comportement du modèle utilisé : en raison du fait que le modèle est élastique (non linéaire), la notion de cycle structural, se transmet sans distorsion au niveau local.

Cela légitime donc le fait de pouvoir écrire et utiliser une loi de fatigue où figure une partie de l'évolution de la variable écrite avec l'incrément « dN » de nombre de cycles.

Il subsiste toutefois une autre difficulté : la redistribution des champs de contraintes ou déformations (la variable pilote du phénomène) empêche a priori que localement, cette variable pilote soit rigoureusement périodique.

Pour cette raison, on va lui substituer une variable que l'on qualifiera d'approchée, que l'on imposera rigoureusement périodique et pour laquelle on vérifiera régulièrement, au cours de l'intégration de la loi, si cette variable pilote approchée reste proche au sens d'un critère de la variable pilote « réelle ».

Définition - Composantes approchées en fatigue de la variable « pilote ». La composante $\tilde{Q}_{ij}^*(M, t)$ est une composante approchée (au point M , sur l'intervalle I) de la composante $Q_{ij}^*(M, t)$, au sens du critère $c(Q_{ij}^*, \tilde{Q}_{ij}^*, M)$, si le critère est tel que $c(Q_{ij}^*, \tilde{Q}_{ij}^*, M) \leq C_{max}$ (C_{max} étant un nombre réel positif donné). Le critère $c(Q_{ij}^*, \tilde{Q}_{ij}^*, M)$ peut prendre par exemple la forme suivante :

$$c(Q_{ij}^*, \tilde{Q}_{ij}^*, M) = \frac{\int_{t_a}^{t_b} |Q_{ij}^*(M, t) - \tilde{Q}_{ij}^*(M, t)| dt}{\int_{t_a}^{t_b} |Q_{ij}^*(M, t)| dt} \quad (5.1)$$

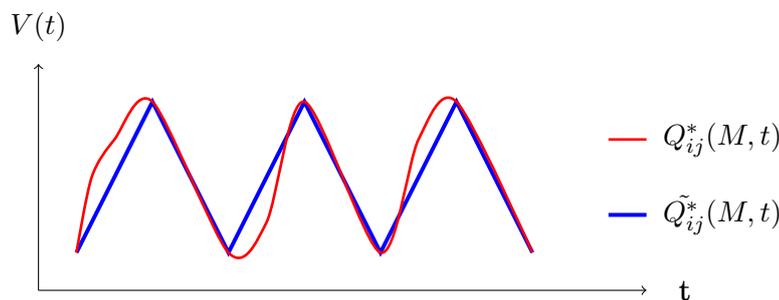


FIGURE 5.1 - Composantes approchées actives en fatigue de la variable « pilote »

Ensuite, parce qu'un calcul de structure en fatigue conduit rapidement à des temps de calculs importants, il devient nécessaire de développer une stratégie de calcul qui permette de réduire les temps de calculs sans pour autant dégrader la qualité de la prédiction.

Aussi, afin de se préserver des problèmes de redistribution de contraintes (déformations) évoqués ci-dessus et de limiter les temps de calculs, on met en place une stratégie que l'on développe dans la suite de ce chapitre.

5.2 Stratégie de calcul de structure en fatigue

Dans le but de pouvoir valider notre modèle de fatigue il est important de pouvoir l'appliquer au cas d'une structure. Pour cela il est nécessaire de l'implémenter, dans

un modèle éléments finis. Comme nous avons pu l'expliquer précédemment, dans le cas d'un problème de fatigue, nous sommes confrontés à deux problématiques a priori contradictoires :

1. simuler le comportement de la structure étudiée avec une précision suffisante pour pouvoir prédire correctement l'apparition de l'endommagement et son évolution et les redistributions de contraintes que cela entraîne ;
2. résoudre un calcul de structure en fatigue dans des délais raisonnables.

Afin de satisfaire ces deux exigences nous avons choisi d'adopter une approche de type « saut de cycles ».

5.2.1 Principe

Un calcul par éléments finis d'une structure soumise à un cycle de sollicitation nécessite généralement un nombre important d'itérations. Aussi, nous l'avons vu, simuler tous les cycles d'une structure sollicitée en fatigue n'est, dans la majorité des cas, pas réalisable dans des délais de temps raisonnable. Il est alors nécessaire de développer des méthodes qui permettent d'accélérer les analyses par éléments finis. Ainsi, des approches numériques ont été développées afin d'alléger les simulations en utilisant le concept de saut de cycles qui consiste à ne modéliser que certains cycles de la sollicitation. Ainsi, [Boisse et al., 1990] proposent une approche dite à « grand incrément de temps » qui consiste à séparer les équations du problème en deux groupes : les équations de comportement locales non-linéaires et les équations d'équilibres global considérées comme linéaires. FISH et YU [Fish and Yu, 2002] ont développé une méthode dans laquelle ils utilisent deux échelles de temps : une échelle micro-chronologique qui correspond au comportement cyclique et une échelle macro-chronologique qui correspond au comportement global de la structure. KIEWEL, AKTAA et MUNZ [Kiewel and Aktaa, 2000] ont développé une approche qui vise à extrapoler la valeur des variables internes sur un certain nombre de cycles. Les extrapolations sont basées sur l'utilisation de fonctions spline développées en chaque point de Gauss du modèle par éléments finis. L'approche de VAN PAEPEGEM et DEGRIEK [Van Paepegem and Degriek, 2001] est basée sur une extrapolation de la variable d'endommagement utilisant une formule d'intégration explicite d'Euler. Le pas d'intégration est calculé automatiquement. Nous reviendrons sur cette approche dans la suite.

Il est clair qu'il est impossible de procéder au calcul par élément finis sur la structure complète pour chaque cycle de la sollicitation de fatigue. Notre stratégie consiste donc à coupler notre modèle éléments finis, qui permet d'évaluer les champs de contraintes (déformations) locaux pour certains cycles judicieusement choisis, à un post-traitement externe qui permet d'évaluer l'évolution de l'endommagement.

Remarque importante - Notons que le grand intérêt de cette méthode est qu'elle est totalement indépendante du modèle de comportement utilisé.

Ainsi, la stratégie consiste dans un premier temps à réaliser un calcul par éléments finis en quasi-statique sur la structure complète. Ce calcul permet d'évaluer l'état de contrainte (déformation) local à l'issue de la première montée en charge de

la sollicitation de fatigue. Le comportement est de type élastique endommageable, la loi de comportement est décrite dans le chapitre précédent (CHAP. 4 §4.2). On connaît alors l'état de contrainte (déformation) en chaque point d'intégration. Dans un deuxième temps, la loi d'évolution de l'endommagement en fatigue est intégrée en chaque point de Gauss via un post-traitement externe développé en Fortran. Nous reviendrons dans la suite sur l'évaluation du pas d'intégration ΔN . A l'issue de l'intégration de la loi d'évolution, on dispose en chaque point de Gauss de l'état d'endommagement au cycle $\Delta N + 1$. Un second calcul par éléments finis sur la structure complète permet de réévaluer l'état de contrainte ainsi que les redistributions de contraintes. L'algorithme complet est présenté FIG. 5.6.

A ce stade il est important d'évaluer le pas d'intégration ΔN de la loi d'évolution. En effet, l'augmentation de l'endommagement entraîne une redistribution des contraintes qu'il est très difficile de prévoir notamment dans le cas d'un état de contrainte multiaxial. Deux possibilités se présentent alors à nous pour estimer la valeur optimale de ΔN :

- La première méthode consiste à fixer arbitrairement un pas ΔN , intégrer la loi d'évolution et effectuer un nouveau calcul par éléments finis sur la structure et vérifier que les redistributions de contraintes (déformations) sont acceptables en se fixant un critère qui peut être de la forme suivante :

$$c(\varepsilon(N_1), \varepsilon(N_2), N) = \frac{\int_0^{T_{ij}(M)} |\varepsilon(N_1, t, M) - \varepsilon(N_2, t, M)| dt}{\int_0^{T_{ij}(M)} |\varepsilon(N_2, t, M)| dt} - c_{max} \leq 0 \quad (5.2)$$

Cette méthode a l'avantage d'être relativement simple, en revanche elle requiert un nombre conséquent d'itérations et donc beaucoup de temps de calcul ce qui n'est pas acceptable. Nous avons donc choisi une deuxième stratégie qui est présentée dans ce qui suit.

- La seconde stratégie consiste à utiliser l'approche de type saut de cycles proposée par VAN PAEPEGEM et DEGRIEK [Van Paepegem and Degriek, 2001]. Dans l'approche qu'ils proposent le saut de cycles ΔN n'est pas fixé à l'avance mais il est calculé de manière automatique. La méthode est décrite dans ce qui suit.

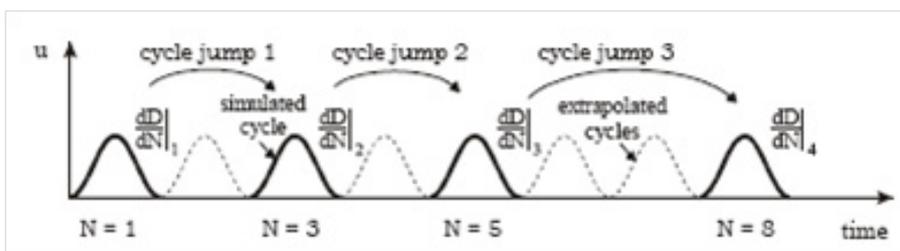


FIGURE 5.2 - Principe de la méthode des sauts de cycles [Van Paepegem and Degriek, 2001]

Le principe consiste à imposer un incrément d'endommagement (dans notre cas, un incrément de la variable α) et d'évaluer le saut de cycle local ΔN_{loc} en chaque point

de Gauss correspondant à cet incrément d'endommagement. Pour cela, une méthode simple consiste à utiliser une intégration explicite d'Euler (Eq. 5.3).

$$\alpha_{N+\Delta N} = \alpha_N + \Delta N_{loc} \left. \frac{d\alpha}{dN} \right|_N \quad (5.3)$$

Ainsi, pour calculer la valeur du saut de cycles local ΔN_{loc} , on choisit d'imposer une variation de l'endommagement correspondant à 1% de la valeur à saturation. On appellera cette variation le paramètre d'extrapolation P . Il est choisi de manière empirique sur la base des résultats expérimentaux.

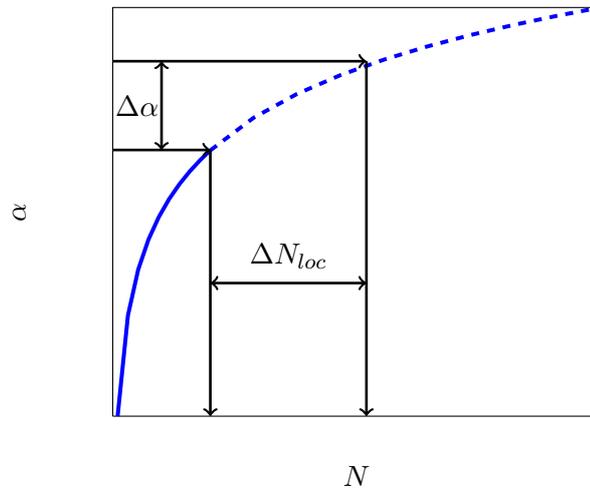


FIGURE 5.3 - Calcul des sauts de cycle locaux ΔN_{loc}

La valeur du saut de cycle est alors donnée par :

$$\Delta N_{loc} = \frac{\alpha_{N+\Delta N} - \alpha_N}{\left. \frac{d\alpha}{dN} \right|_N} = \frac{(P-1)\alpha_N}{\left. \frac{d\alpha}{dN} \right|_N} \quad (5.4)$$

Dès lors, on dispose d'une valeur de saut de cycle local ΔN_{loc} en chaque point de Gauss.

Remarque - Dans une structure, l'état de contrainte n'est en général pas uniforme. Dans le cas de la plaque trouée que nous étudions ici, le trou joue un rôle de concentrateur de contrainte et, nous l'avons vu, favorise l'apparition de l'endommagement. Aussi, la valeur du saut de cycle ΔN_{loc} calculée en chaque point de Gauss va varier en fonction de sa position dans la structure. En effet, dans les zones éloignées du trou, les niveaux de contraintes sont plus faibles et les redistributions de contraintes seront moins importantes. Ainsi, l'extrapolation de l'évolution de l'endommagement pourra se faire sur un plus grand nombre de cycle. En revanche, dans les zones à fort niveau de contrainte (proches du trou), l'endommagement croît plus rapidement et les contraintes se redistribuent. Aussi, afin de ne pas dégrader la qualité de la prédiction, il est nécessaire de réduire la valeur du saut de cycles ΔN_{loc} .

Cependant, il est important de comprendre que la valeur du saut de cycle doit être unique pour toute la structure. En effet, chaque cycle et donc chaque saut de cycle ΔN_{loc} représente un intervalle de temps. Or, si le saut de cycle est différent pour chaque point d'intégration, le calcul par éléments finis effectué sur la structure complète n'a plus aucun sens dans la mesure où cela reviendrait à simuler le comportement à des instants différents pour chaque points de Gauss.

Au regard de ce qui vient d'être présenté, il apparait clairement qu'il est nécessaire de déterminer un saut de cycle ΔN global et unique pour toute la structure. Une méthode simple consiste à choisir le minimum des sauts de cycles locaux comme saut de cycle global ΔN . Cependant cette solution peut rapidement conduire à de faibles sauts de cycles dans la mesure où il suffit d'un point de Gauss présentant une augmentation importante de l'endommagement pour réduire le pas d'intégration et donc conduire à un ralentissement du calcul. Pour éviter cela nous avons choisi la méthode proposée par VAN PAEPEGEM et DEGRIEK [Van Paepegem and Degriek, 2001] que nous décrivons dans ce qui suit.

Connaissant le saut de cycles local en chaque point de Gauss ΔN_{loc} , on calcule la distribution des fréquences relatives de chaque saut. Pour cela, on définit des intervalles de n cycles, où n représente la longueur des intervalles. La fréquence relative est définie comme le nombre de valeurs ΔN_{loc} comprises dans chaque intervalle divisé par le nombre total de points de Gauss (FIG. 5.4).

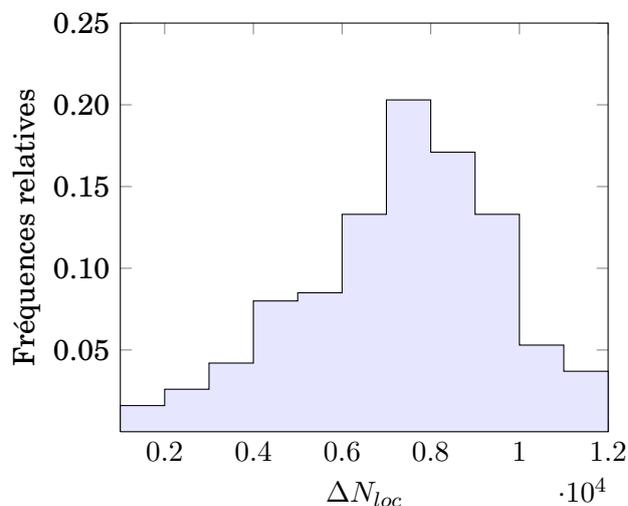


FIGURE 5.4 - *Distribution des fréquences relatives*

On calcule ensuite la distribution des fréquences relatives cumulées croissantes (FIG. 5.5). Le saut de cycle global sur la structure est alors pris comme l'abscisse pour laquelle la distribution statistique cumulée des saut de cycles locaux atteint un certain pourcentage qui est défini de façon empirique par l'utilisateur.

Remarque - Suivant cette méthode, certains points de Gauss se verront appliquer un saut de cycle ΔN supérieur au saut de cycle local ΔN_{loc} calculé. Cependant, ces points sont supposés être déjà sévèrement endommagés voire même déjà saturés.

Ainsi l'erreur commise sur l'extrapolation de l'état d'endommagement pour ces points de Gauss est négligeable.

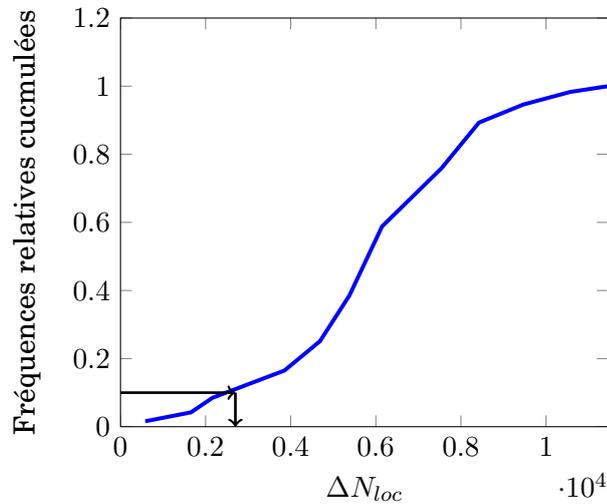


FIGURE 5.5 - *Distribution des fréquences relatives cumulées*

5.2.2 Implantation de la méthode

L'algorithme de calcul est expliqué par l'organigramme de la figure 5.6 . Un premier calcul sur le premier cycle permet d'obtenir les champs de contraintes (déformations) locaux et les valeurs des variables internes. Ces valeurs sont utilisées comme données d'entrées du post-traitement qui permet d'évaluer le nombre de cycles à sauter ΔN et d'intégrer la loi d'évolution de l'endommagement en fatigue. Une seconde résolution du problème permet de rééquilibrer la structure après extrapolation des variables internes représentatives de l'endommagement, c'est-à-dire que l'on actualise la redistribution de contraintes. La tentative de saut est réputée réussie si l'on obtient une convergence numérique à cette étape. On recalcule ensuite une nouvelle valeur de saut à partir du nouvel état trouvé. L'ensemble du processus se déroule de façon automatique.

Un fichier d'initialisation permet à l'utilisateur de fixer la valeur du paramètre d'extrapolation P , ainsi que la longueur n des intervalles utilisés pour le calcul de la distribution des fréquences relatives des sauts de cycles locaux.

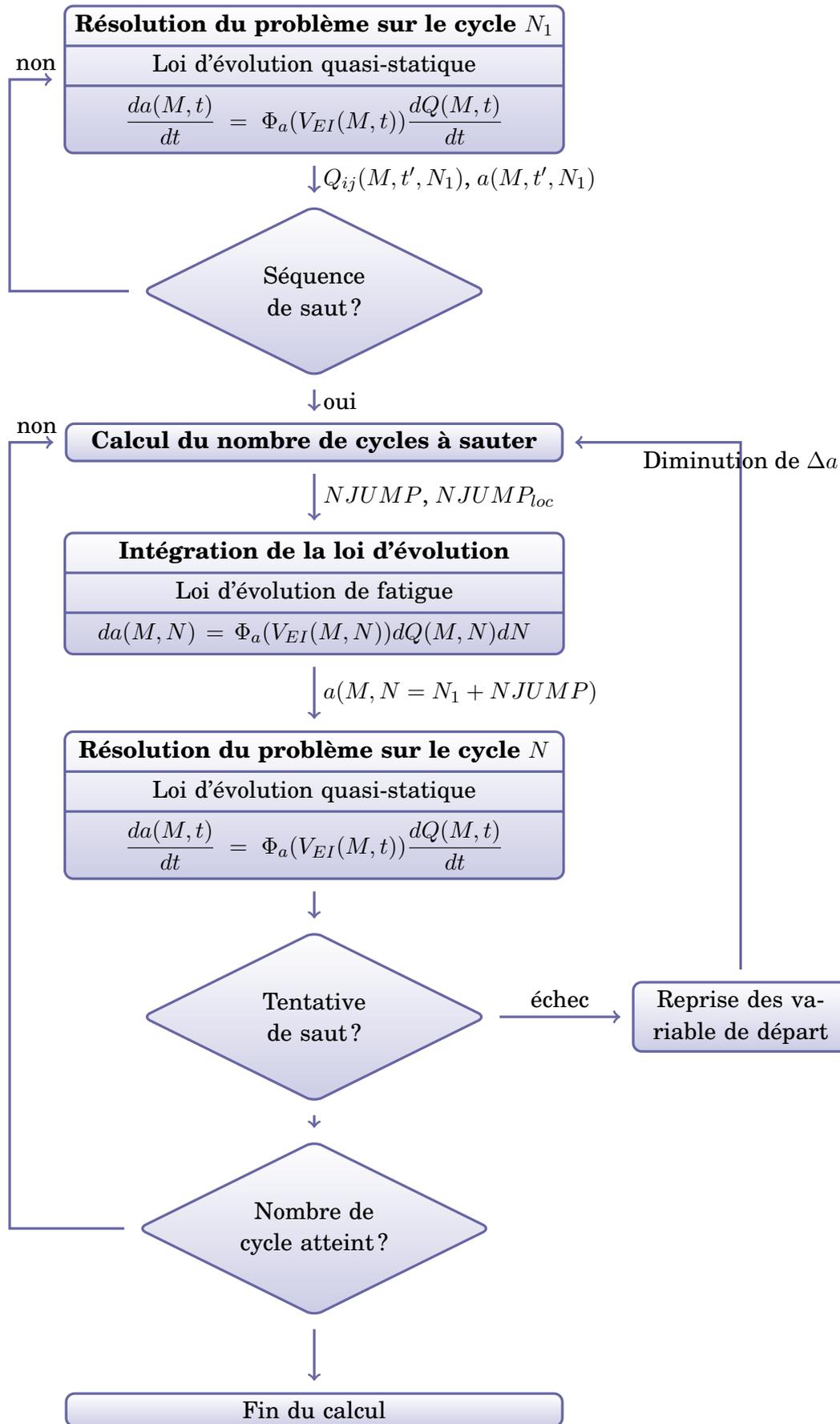


FIGURE 5.6 - Schéma général de la stratégie de calcul

5.3 le modèle de fatigue

Tout comme nous avons pu l'observer expérimentalement, des auteurs tels que [Daniel and Charewicz, 1986][Petitpas et al., 1987][Diao et al., 1995] s'accordent sur le fait que, parmi les différents paramètres qui influent sur le phénomène de fatigue, le niveau de chargement semblent être celui qui a le plus d'influence sur la cinétique de fissuration. Si l'effet du rapport de charge R semble lui aussi important [Kawai and Kato, 2006], l'effet de la fréquence est faible et l'effet de l'humidité ambiante est quasi-nul.

Rappelons dès à présent que nous avons montré, par notre analyse expérimentale, que le cumul de l'endommagement, lors d'un essai à plusieurs niveaux de sollicitation, est non linéaire (§3.8.5).

La remarque précédente impose une formulation de la loi d'évolution de l'endommagement dans laquelle les variables représentatives de l'endommagement et du nombre de cycles N sont non séparables. En revanche, il est important de comprendre que la façon dont se fait le cumul n'est pas en relation avec la forme (linéaire ou non) de la loi d'évolution.

Le cadre étant posé on peut maintenant proposer une écriture de la loi de fatigue.

On désire rendre compte de l'endommagement induit par les effets de fatigue mais aussi éventuellement statiques dans la mesure où nous avons montré par l'expérience que la première montée en charge lors d'un chargement de fatigue correspond à un chargement quasi-statique. De même lors d'un chargement à plusieurs niveaux, notamment un chargement faible suivi d'un chargement fort nous avons vu que l'accroissement de l'endommagement peut être dû, sous certaines conditions à un rechargement statique (FIG. 5.7).

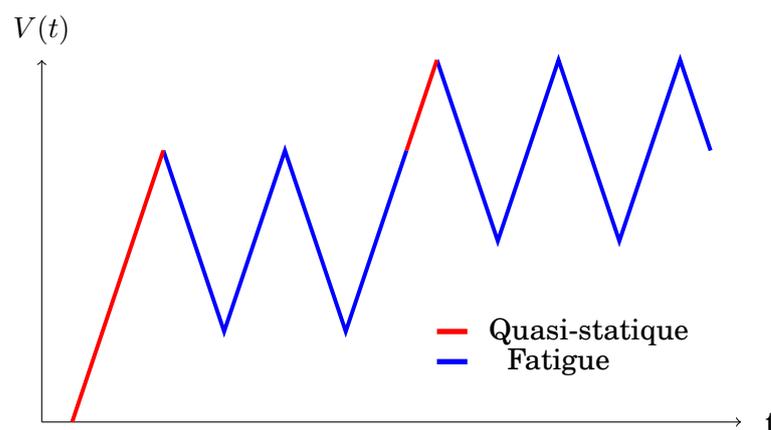


FIGURE 5.7 - Mise en évidence des zones de chargement statique ou de fatigue

Aussi, on va chercher à écrire une loi d'évolution sous la forme (EQ. 5.5) :

$$\begin{aligned}
 d\alpha &= f_1(\underline{\underline{\varepsilon}}, \alpha, m, R, f) d\underline{\underline{\varepsilon}} + f_2(\underline{\underline{\varepsilon}}, \alpha, m, R, f) dN \dots \\
 \dots &+ f_3(\underline{\underline{\varepsilon}}, \alpha, m, R, f) dm + f_4(\underline{\underline{\varepsilon}}, \alpha, m, R, f) dr
 \end{aligned}
 \tag{5.5}$$

où $\underline{\underline{\varepsilon}}$ représente l'état de déformation dans l'élément de volume lorsque le chargement atteint sa valeur maximale. La partie liée aux accroissements de déformation tient compte d'un endommagement quasi-statique alors que celle liée aux accroissement du nombre de cycles est purement un effet de fatigue. Enfin, les parties liée aux variables m et r rendent compte des effets du mode de chargement. De plus il faut noter que les paramètres caractéristiques du chargement extérieur R et f peuvent être inclus dans la loi dans la mesure où nous restons dans le cadre fixé précédemment, c'est à dire que les sollicitations appliquées à la structure sont périodiques et de fréquences identiques, ce qui permet un report local de ces grandeurs structurales.

Afin d'obtenir une telle formulation, on propose d'étendre le seuil critique d'endommagement développer dans le cas quasi-statique au cas de la fatigue. Il est important de préciser que cette extension est possible dans la mesure où l'on fait l'hypothèse, dans une première approximation, que l'endommagement est physiquement et géométriquement identique en quasi-statique et en fatigue. Dans le cas de la plupart des matériaux métalliques, une telle extension est impossible, les mécanismes d'endommagement étant fondamentalement différents dans les deux cas.

Ainsi, on choisit de le faire dépendre de α et m comme en statique, mais aussi du nombre de cycles N et de paramètres décrivant le chargement local tels que R et f . On a donc $A^c = A^c(m, N, R, f)$, où l'on doit bien sûr retrouver le seuil statique pour $N = 0$. Finalement, il n'y a qu'un seuil unique qui joue le rôle de mémoire de l'état d'endommagement du matériau. Il est pris sous la même forme que le seuil quasi-statique (5.6) :

$$A^c(\alpha, m, N, R, f) = -b(m, N, R, f) \exp \frac{\ln \left[-\ln \left(1 - \frac{\alpha}{c(m, N, R, f)} \right) \right]}{a(m, N, R, f)}
 \tag{5.6}$$

REMARQUES

- les variables α et N sont non séparables ce qui a pour conséquence d'entraîner un cumul non linéaire de l'endommagement.
- l'influence des paramètres caractéristiques du chargement (R, f, \dots) intervient dans les coefficients a, b et c du seuil critique A^c et seulement ici. Pour l'identification expérimentale du seuil il suffit donc de conduire les essais montrant l'effet de tel ou tel paramètre afin dans tenir compte dans le lissage des coefficients a, b et c .

L'équation du critère reste quant à elle inchangée par rapport à l'approche quasi-statique (EQ. 5.7) :

$$c(\underline{\varepsilon}, \alpha, m, N, R, f) = A^c(\alpha, m, N, R, f) - A(\varepsilon, \alpha, m) \quad (5.7)$$

La loi d'évolution se déduit en écrivant, comme dans le cas quasi-statique, que l'on est et que l'on reste sur le seuil lors de la phase d'endommagement (hypothèse de consistance).

$$c = 0 \Rightarrow A^c - A = 0 \quad (5.8)$$

$$dc = 0 \Rightarrow dA^c - dA = 0 \quad (5.9)$$

avec :

$$dA = \frac{\partial A}{\partial \varepsilon} d\varepsilon + \frac{\partial A}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial A}{\partial m} dm + \frac{\partial A}{\partial r} dr \quad (5.10)$$

$$dA^c = \frac{\partial A^c}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial A^c}{\partial m} dm + \frac{\partial A^c}{\partial r} dr + \frac{\partial A^c}{\partial N} dN \quad (5.11)$$

En tenant compte du fait que : $A(\underline{\varepsilon}, \alpha, m, r) = \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}$, on abouti à la loi d'évolution en fatigue sous la forme :

$$d\alpha = \frac{\frac{\partial^2 \psi}{\partial \varepsilon \partial \alpha}}{\frac{\partial^2 \psi}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial A^c}{\partial \alpha}} d\varepsilon + \frac{\left(\frac{\partial A^c}{\partial m} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial \alpha \partial m} \right)}{\frac{\partial^2 \psi}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial A^c}{\partial \alpha}} dm \quad (5.12)$$

$$\dots + \frac{\left(\frac{\partial A^c}{\partial r} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial \alpha \partial r} \right)}{\frac{\partial^2 \psi}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial A^c}{\partial \alpha}} dr + \frac{\frac{\partial A^c}{\partial N}}{\frac{\partial^2 \psi}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial A^c}{\partial \alpha}} dN$$

REMARQUES

Il est important de préciser que le modèle ne peut fonctionner que parce que le seuil critique est une fonction décroissante du nombre de cycles. En d'autres termes, pour chaque cycle (FIG. 5.8) :

1. on a une phase d'endommagement jusqu'à ce que la déformation ε atteigne son maximum (courbe rouge). On a alors $A^c - A = 0$;
2. ensuite le seuil critique A^c diminue pendant le cycle (courbe verte) ;
3. au cours du cycle suivant on retrouve de nouveau une phase d'endommagement débutant avant que la déformation n'atteigne sa valeur maximale.

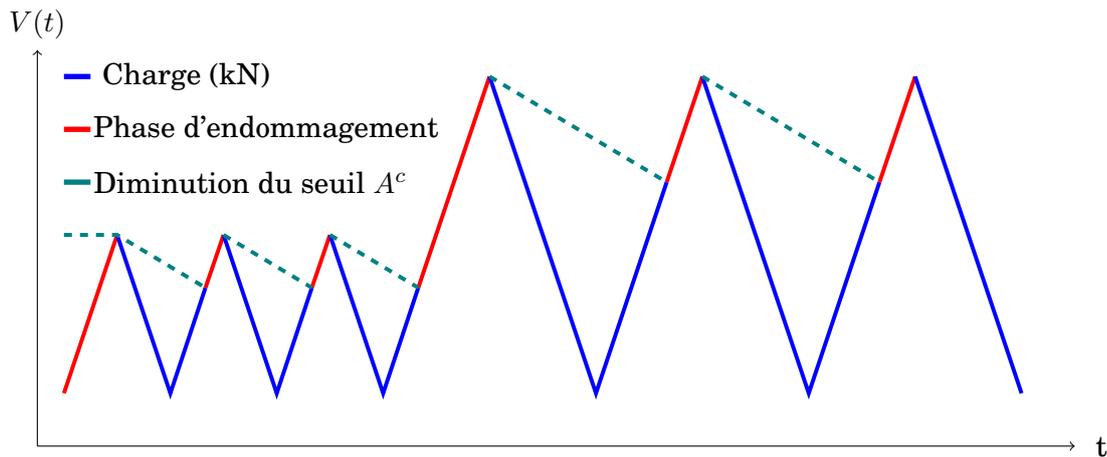


FIGURE 5.8 - Schéma du principe de fonctionnement du modèle de fatigue.

5.4 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre une loi d'évolution de l'endommagement en fatigue. La similitude entre les endommagements quasi-statiques et de fatigue a permis d'écrire une loi d'évolution déduite du formalisme utilisé en statique. Cette approche permet notamment de prendre en compte le caractère non linéaire du cumul de l'endommagement tel que cela a été mis en évidence expérimentalement. Finalement, le modèle possède un seuil d'endommagement unique qui joue le rôle de mémoire de l'endommagement et permet de prendre en compte d'éventuels chargement statiques. Dans le cadre que nous avons défini pour la fatigue, contrairement à ce qui est fait assez souvent, le chargement extérieur appliqué à la structure ne figure pas explicitement dans la loi dans la mesure où les paramètres inclus sont des paramètres locaux. La principale conséquence est que la modélisation est intrinsèque au matériau.

Contrairement à un calcul quasi-statique, qui peut se faire simplement de manière incrémentale, le cas de la fatigue s'avère plus complexe si l'on souhaite limiter les temps de calcul. Aussi, nous avons choisit une approche de type saut de cycles. L'avantage de cette méthode réside dans le fait qu'elle est totalement indépendante du modèle de comportement utilisé.

Chapitre 6

Identification des paramètres du modèle de comportement et de la loi de fatigue

Le but de ce chapitre est de présenter l'identification des paramètres du modèle qui a été développé dans le chapitre précédent. Cela passe dans un premier temps par l'identification du tenseur d'élasticité, des tenseurs de chute de rigidité et ensuite par l'identification des lois d'évolution de l'endommagement d'abord en quasi-statique puis en fatigue.

Sommaire

6.1 Introduction	164
6.2 Identification de la loi de comportement	164
6.2.1 Identification du tenseur de rigidité élastique	164
6.2.2 Identification des tenseurs de chutes de rigidité	165
6.3 Identification des variables m et r	169
6.4 Identification de la loi d'évolution	170
6.4.1 Cas quasi-statique	170
6.4.2 Identification de la fonction seuil d'endommagement en fatigue	174
6.4.2.1 Méthodologie	174
6.4.2.2 Identification	175

6.1 Introduction

Le modèle de comportement présenté dans le chapitre précédent (CHAP. 4) dépend d'un certain nombre de paramètres qu'il convient d'identifier. C'est là tout l'objet de ce chapitre. L'identification se décompose en trois étapes : dans un premier temps, il convient d'identifier la loi de comportement du matériau. Cela passe par l'identification des propriétés mécaniques du matériau sain (tenseur de rigidité élastique $\underline{\underline{C}}^0$) ainsi que les tenseurs de chutes de rigidité qui représentent les chutes de rigidité dues à l'apparition de l'endommagement. Ensuite, nous identifierons les paramètres de la loi d'évolution quasi-statique (EQ. 4.61). Enfin nous terminerons par l'identification des paramètres de la loi d'évolution en fatigue (EQ. 5.12).

6.2 Identification de la loi de comportement

Afin de bien comprendre quels sont les termes à identifier, on rappelle ici la forme du tenseur de comportement donnée par les équations (4.28) à (4.31) définies précédemment (§4.2.4.2) :

$$\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{C}}^0 - f(\alpha) \left[\underline{\underline{C}}^N U_N^2 + \underline{\underline{C}}^T U_T^2 + \underline{\underline{C}}^{NT} U_N U_T \right] \quad (6.1)$$

Il apparaît clairement que l'identification revient à déterminer les coefficients des quatre tenseurs d'ordre 4 $\underline{\underline{C}}^0$, $\underline{\underline{C}}^N$, $\underline{\underline{C}}^T$, $\underline{\underline{C}}^{NT}$ correspondants au tenseur de rigidité élastique et aux trois tenseurs de chute de rigidité. La forme des composantes U_N et U_T du vecteur \underline{U} a été donnée au chapitre précédent.

6.2.1 Identification du tenseur de rigidité élastique

Le tenseur de rigidité élastique $\underline{\underline{C}}^0$ dépend, dans le cas la plus général, c'est-à-dire pour un matériau ne présentant aucune symétrie, de 21 coefficients indépendants. Dans le cas de notre matériau, nous avons pu observer expérimentalement que ce dernier présente un plan d'isotropie du fait de l'orientation des fibres. Cela nous permet de considérer le comportement du pli unidirectionnel comme *isotrope transverse*¹. Ainsi, l'identification de $\underline{\underline{C}}^0$ se réduit à déterminer 6 coefficients indépendants qui s'obtiennent par inversion de la matrice de souplesse du pli unidirectionnel (EQ. 6.2). Les différents coefficients de la matrice de souplesse sont obtenus par les essais de traction uni-axiale quasi-statique sur le pli unidirectionnel dans différentes directions par rapport à son axe d'isotropie transverse.

1. Un comportement isotrope transverse est invariant par rotation d'un angle quelconque autour d'un axe perpendiculaire au plan d'isotropie

$$\underline{\underline{S}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_{11}} & -\frac{\nu_{12}}{E_{11}} & -\frac{\nu_{12}}{E_{11}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu_{12}}{E_{11}} & \frac{1}{E_{11}} & -\frac{\nu_{23}}{E_{11}} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_{11}} & -\frac{\nu_{23}}{E_{22}} & -\frac{\nu_{23}}{E_{22}} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_{11}} & -\frac{\nu_{23}}{E_{22}} & -\frac{\nu_{23}}{E_{22}} & \frac{2(1+\nu_{23})}{E_{22}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \quad (6.2)$$

Ainsi, le module d'élasticité longitudinal E_{11} et le coefficient de Poisson ν_{12} sont obtenus par un essai de traction monotone quasi-statique sur un stratifié unidirectionnel de séquence (0_3°) au cours duquel on mesure l'évolution des déformations longitudinale et transverse en fonction du chargement appliqué (FIG. 6.1a).

$$\begin{cases} E_{11} = 124699 \pm 46.5(\text{MPa}) \\ \nu_{12} = 0.323 \pm 0.007 \end{cases} \quad (6.3)$$

Un essai effectué dans le sens transverse (90_3°) au cours duquel on mesure la déformation dans l'axe du chargement permet d'accéder à E_{22} (FIG. 6.1b).

$$\begin{cases} E_{22} = 7372 \pm 2.35(\text{MPa}) \\ \nu_{21} = 0.019 \pm 0.003 \end{cases} \quad (6.4)$$

Un essai effectué à 45° par rapport à l'axe des fibres au cours duquel on mesure les déformations dans l'axe du chargement et dans le sens transverse permet d'accéder au module de cisaillement G_{12} (FIG. 6.2).

$$G_{12} = 3290 \pm 35(\text{MPa}) \quad (6.5)$$

6.2.2 Identification des tenseurs de chutes de rigidité

Le tenseur $\underline{\underline{C}}^N$ représente la chute de rigidité due à la composante V_N du vecteur \underline{V} caractérisant l'endommagement lorsque les fissures sont ouvertes mais non cisailées. Dans ce cas, l'apparition des fissures est due exclusivement à ε_{22} , ainsi on a $B_6 = B_8 = B_9 = 0$.

Le tenseur $\underline{\underline{C}}^T$ représente la chute de rigidité due à la composante V_N du vecteur \underline{V} caractérise l'endommagement lorsque les fissures sont cisailées mais non ouvertes. Dans ce cas, l'apparition des fissures est due exclusivement à ε_{12} , ainsi on a $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = C_5 = C_7 = 0$.

le tenseur $\underline{\underline{C}}^{NT}$ représente la chute de rigidité due au couplage des effets des composantes V_N et V_T . Cependant, rappelons que nous avons fait l'hypothèse que ces effets sont négligeables dans le cas de notre matériau.

Les termes à identifier sont résumés dans le tableau 6.1

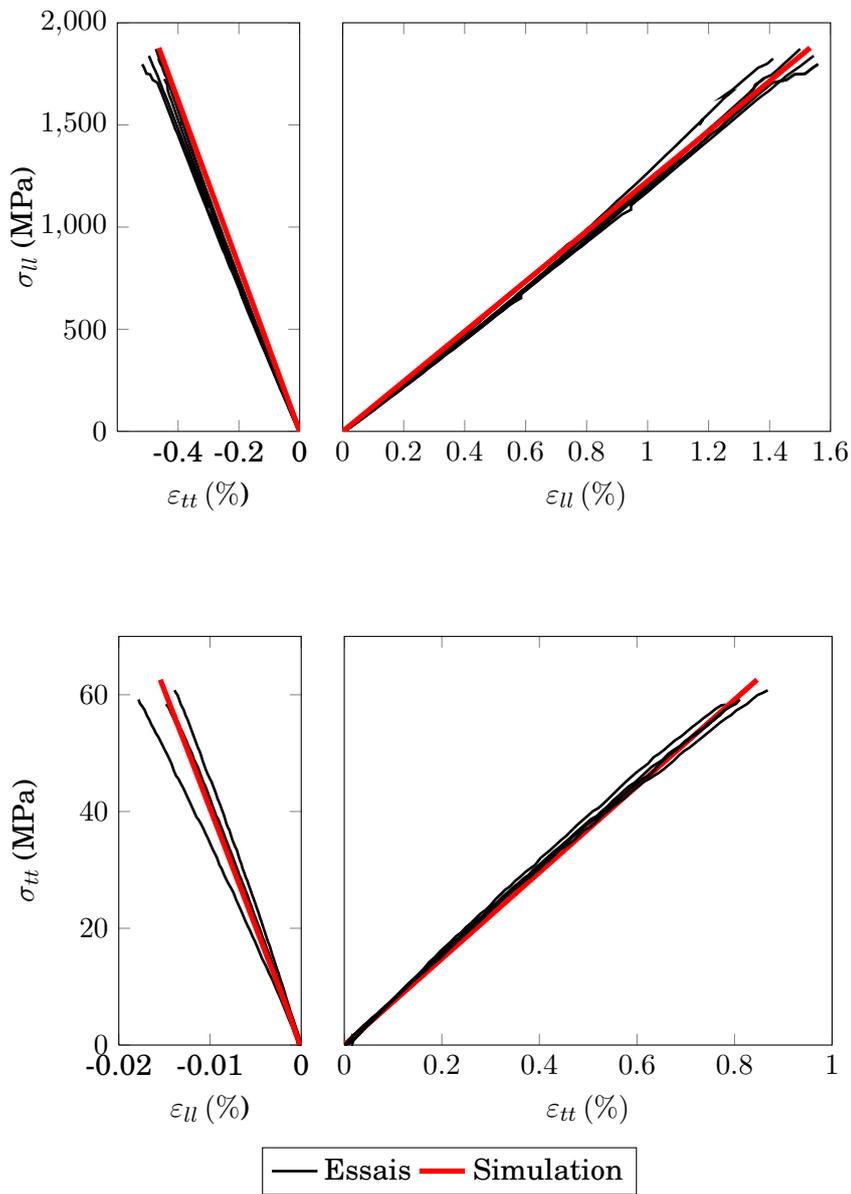


FIGURE 6.1 - Résultats de l'identification des coefficients E_{11} , E_{22} , ν_{12} , ν_{21}

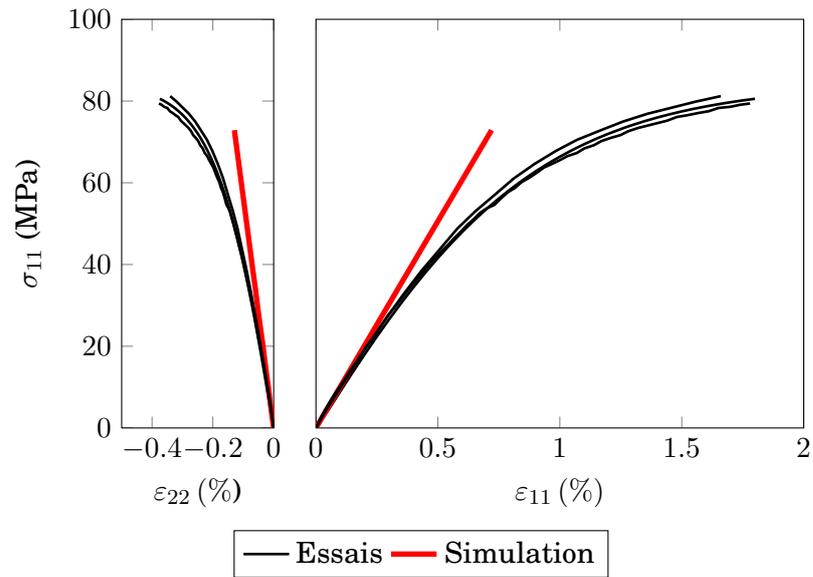


FIGURE 6.2 - Résultats de l'identification du coefficient G_{12}

Caractéristiques	Valeurs	Unité
E_1	124.345	(GPa)
$E_2 = E_3$	7.372	(GPa)
$G_{12} = G_{13}$	3.290	(GPa)
G_{23}	5.205*	(GPa)
$\nu_{12} = \nu_{13}$	0.323	
$\nu_{21} = \frac{E_{22}}{E_{11}}\nu_{12}$	0.019	
ν_{23}	...*	

R_{11}^0	125.324	(GPa)
$R_{22}^0 = R_{33}^0$	9.652	(GPa)
$R_{66}^0 = R_{55}^0$	3.204	(GPa)
R_{44}^0	5.205*	(GPa)
R_{12}^0	4.457	(GPa)
R_{13}^0	4.612	(GPa)
R_{23}^0	4.626	(GPa)

FIGURE 6.3 - Caractéristiques mécaniques de l'unidirectionnel identifiées expérimentalement et coefficients de sa matrice de rigidité (obtenues par inversion de la matrice de souplesse) (Les valeurs indicées « * » ont été tirées de la littérature.)

Paramètres	Nombres de coefficients	Nature mathématique	Coefficients
\mathcal{r}_{C^0}	6	4-tenseur	$\begin{pmatrix} 2A_1 & A_2 & A_2 & 0 & 0 & 0 \\ & 2A_4 & A_5 & 0 & 0 & 0 \\ & & 2A_4 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 2A_6 & 0 & 0 \\ (S) & & & & 2A_8 & 0 \\ & & & & & 2A_8 \end{pmatrix}$
\mathcal{r}_{C^N}	6	4-tenseur	$\begin{pmatrix} 2B_1 & B_2 & B_3 & 0 & 0 & 0 \\ & 2B_4 & B_5 & 0 & 0 & 0 \\ & & 2B_7 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ (S) & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$
\mathcal{r}_{C^T}	3	4-tenseur	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2C_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2C_8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2C_9 \end{pmatrix}$
$\mathcal{r}_{C^{NT}}$	4	4-tenseur	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_1 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & D_2 \\ & & 0 & 0 & 0 & D_3 \\ & & & 0 & D_4 & 0 \\ (S) & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$

TABLE 6.1 - Paramètres à identifier pour l'écriture du tenseur de comportement

6.3 Identification de m des variables m et r

Pour comprendre comment identifier les fonctions m et r il convient d'en rappeler leur forme :

– pour les fissures de type 1 :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{si } \varepsilon_{22} > 0, \quad m_1 = \frac{\left(\frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{22}^R}\right)^2 + 2\left(\frac{\varepsilon_{12}}{\varepsilon_{12}^R}\right)^2}{\left(\frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{22}^R}\right)^2 + \left(\frac{\varepsilon_{12}}{\varepsilon_{12}^R}\right)^2} \quad \text{sinon } m_1 = 2 \\ \text{si } \varepsilon_{22} > 0, \quad r_1 = \sqrt{\varepsilon_{22}^2 + \varepsilon_{12}^2} \quad \text{sinon } r_1 = \sqrt{\varepsilon_{12}^2} \end{array} \right. \quad (6.6)$$

– pour les fissures de type 2 :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{si } \varepsilon_{11} > 0, \quad m_2 = \frac{\left(\frac{\varepsilon_{11}}{\varepsilon_{11}^R}\right)^2 + 2\left(\frac{\varepsilon_{12}}{\varepsilon_{12}^R}\right)^2}{\left(\frac{\varepsilon_{11}}{\varepsilon_{11}^R}\right)^2 + \left(\frac{\varepsilon_{12}}{\varepsilon_{12}^R}\right)^2} \quad \text{sinon } m_2 = 2 \\ \text{si } \varepsilon_{11} > 0, \quad r_1 = \sqrt{\varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{12}^2} \quad \text{sinon } r_2 = \sqrt{\varepsilon_{12}^2} \end{array} \right. \quad (6.7)$$

– pour les fissures de type 3 :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{si } \varepsilon_{33} > 0, \quad m_3 = \frac{\left(\frac{\varepsilon_{33}}{\varepsilon_{33}^R}\right)^2 + 2\left(\frac{\varepsilon_{13}}{\varepsilon_{13}^R}\right)^2}{\left(\frac{\varepsilon_{33}}{\varepsilon_{33}^R}\right)^2 + \left(\frac{\varepsilon_{13}}{\varepsilon_{13}^R}\right)^2} \quad \text{sinon } m_3 = 2 \\ \text{si } \varepsilon_{33} > 0, \quad r_3 = \sqrt{\varepsilon_{33}^2 + \varepsilon_{13}^2} \quad \text{sinon } r_3 = \sqrt{\varepsilon_{13}^2} \end{array} \right. \quad (6.8)$$

Au vues de la forme de la fonction m , il apparait clairement que son identification revient à déterminer les déformations à rupture du pli unidirectionnel dans certaines directions particulières. Plus précisément, il nous faut déterminer les déformations à ruptures dans les directions \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 et \mathbf{e}_3 (ε_{11}^R , ε_{22}^R , ε_{33}^R) ainsi que les déformations à rupture en cisaillement dans les plans $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ ($\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$) ($\varepsilon_{12}^R, \varepsilon_{13}^R$). Cependant, compte tenu du fait des propriétés de symétries particulières (isotropie transverse) que présente le matériau, l'identification du paramètre m se limite en fait à déterminer seulement 3 déformations à rupture dans la direction transverse et en cisaillement du plis unidirectionnel. Celles ci sont obtenues par les essais de traction quasi-statique monotone sur les séquences (90_3^0) et (45_3^0) .

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{11}^R = \varepsilon_{22}^R = \varepsilon_{33}^R = 0.808 \pm 0.044 \% \\ \varepsilon_{12}^R = \varepsilon_{13}^R = 1.747 \pm 0.076 \% \end{array} \right. \quad (6.9)$$

La loi de comportement, c'est-à-dire la loi qui relie le comportement du matériau à son état d'endommagement est maintenant identifiée. Il convient alors d'identifier la loi d'évolution de l'endommagement, c'est-à-dire la loi qui donne l'évolution de l'endommagement en fonction des sollicitations appliquées au matériau.

6.4 Identification de la loi d'évolution

6.4.1 Cas quasi-statique

La loi d'évolution décrite dans le chapitre 4, dérivée de l'inégalité de Clausius-Duhem est écrite en utilisant le critère c (eq. 4.54). Ce critère dépend d'un seuil critique $A^c(\alpha, m, r)$ qui doit être identifié à partir des données expérimentales.

On rappelle que l'on a défini dans le chapitre précédent trois types de fissures intra-laminaires. En conséquence de cela, il existe trois seuils critiques à identifier $A_1^c(\alpha_1, m_1, r_1)$, $A_2^c(\alpha_2, m_2, r_2)$, $A_3^c(\alpha_3, m_3, r_3)$. Toutefois, dans le cas de notre matériau, du fait des propriétés de symétries, on a $A_1^c(\alpha_1, m_1, r_1) = A_2^c(\alpha_2, m_2, r_2) = A_3^c(\alpha_3, m_3, r_3)$.

Le processus d'identification du seuil critique A^c est identique à celui proposé par THIONNET *et al.* [Thionnet et al., 2002]. L'identification nécessite la donnée de courbes expérimentales donnant la densité de fissures en fonction du chargement appliqué. La dépendance des seuils vis-à-vis des variables m et r permet de tenir compte du fait que l'énergie nécessaire pour créer une fissure dépend du mode de chargement. Nous faisons toutefois l'hypothèse que l'influence de r est négligeable par rapport à celle de m . On a donc besoin de renseignements expérimentaux où la densité de fissure est relevée pour des plis soumis à des valeurs différentes de m . Ensuite, par une procédure inverse, en donnant l'évolution des densités de fissures expérimentales, on calcule la variable A et on écrit qu'au cours du processus d'endommagement, on a $A = A^c$. Un lissage de ces résultats fournit la fonction $A^c(\alpha, m)$. Le lissage est pris sous la forme :

$$A^c(\alpha, m) = -b(m) \exp \frac{\ln \left[-\ln \left(1 - \frac{\alpha}{c(m)} \right) \right]}{a(m)} \quad (6.10)$$

où $a(m)$, $b(m)$ et $c(m)$ sont les paramètres à identifier.

Comme nous venons de l'expliquer, pour identifier le seuil A^c nous avons besoin d'au moins trois empilements permettant d'avoir trois valeurs différentes de m . Le mieux étant que ces valeurs soient régulièrement réparties entre 1 et 2 (idéalement 1,15 et 2). D'après la définition que nous avons donnée de m et les propriétés mécaniques du pli unidirectionnel, il ressort que les trois séquences testées $(0_3^\circ/90_6^\circ/0_3^\circ)$, $(0_3^\circ/\pm 55_3^\circ)_s$ et $(0_3^\circ/\pm 45_3^\circ)_s$ permettent d'avoir respectivement $m = 1$, 1.523 et 1.928. Les séquences $(0_3^\circ/90_3^\circ/0_3^\circ)$ et $(0_3^\circ/90_{12}^\circ/0_3^\circ)$ donnent également $m = 1$, toutefois nous avons choisi d'utiliser la séquence intermédiaire $(0_3^\circ/90_6^\circ/0_3^\circ)$ pour l'identification alors que les deux autres serviront de validation.

Séquences	m
$(0_3^\circ/90_{n=3,6,12}^\circ/0_3^\circ)$	1
$(0_3^\circ/\pm 55_3^\circ/0_3^\circ)$	1.523
$(0_3^\circ/\pm 45_3^\circ/0_3^\circ)$	1.928

TABLE 6.2 - Valeur de la variable m pour les différentes séquences

L'idée consiste donc, dans un premier temps, à simuler un essai de traction sur chacune des trois séquences retenues. Il faut ensuite comparer les courbes expérimentales et simulées donnant la densité de fissures (ou la variable d'endommagement α) en fonction du chargement appliqué et ajuster les paramètres a , b et c de la fonction seuil jusqu'à ce que les courbes simulées et expérimentales soient concordantes.

REMARQUE

Le paramètre c est facilement identifiable dans la mesure où il correspond à la valeur de α lorsque la fissuration a atteint son état de saturation. On peut donc le déduire directement des courbes expérimentales.

On obtient ainsi trois jeux de paramètres (a, b, c) (un pour chaque séquence) puis on effectue alors un lissage de chacun des paramètres en fonction de la variable m . Le lissage est pris sous une forme polynomiale (Eq. 6.11 à 6.13) :

$$a(m) = a_0 + a_1 \times m + a_2 \times m^2 + a_3 \times m^3 + a_4 \times m^4 + a_5 \times m^5 \quad (6.11)$$

$$b(m) = b_0 + b_1 \times m + b_2 \times m^2 + b_3 \times m^3 + b_4 \times m^4 + b_5 \times m^5 \quad (6.12)$$

$$c(m) = c_0 + c_1 \times m + c_2 \times m^2 + c_3 \times m^3 + c_4 \times m^4 + c_5 \times m^5 \quad (6.13)$$

Les coefficients ainsi identifiés sont donnés dans le tableau 6.3.

	a	b	c		
a_0	37.0751	b_0	-4.04025	c_0	0.26015
a_1	-3.87171	b_1	2.81454	c_1	0.42307
a_2	-5.00351	b_2	1.93482	c_2	-0.10806
a_3	-1.52086	b_3	0.30735	c_3	-0.00160
a_4	0.20949	b_4	-0.23807	c_4	0.00047
a_5	0.86458	b_5	-0.18852	c_5	0.00098

TABLE 6.3 - Coefficients identifiés du seuil d'endommagement en statique A^c

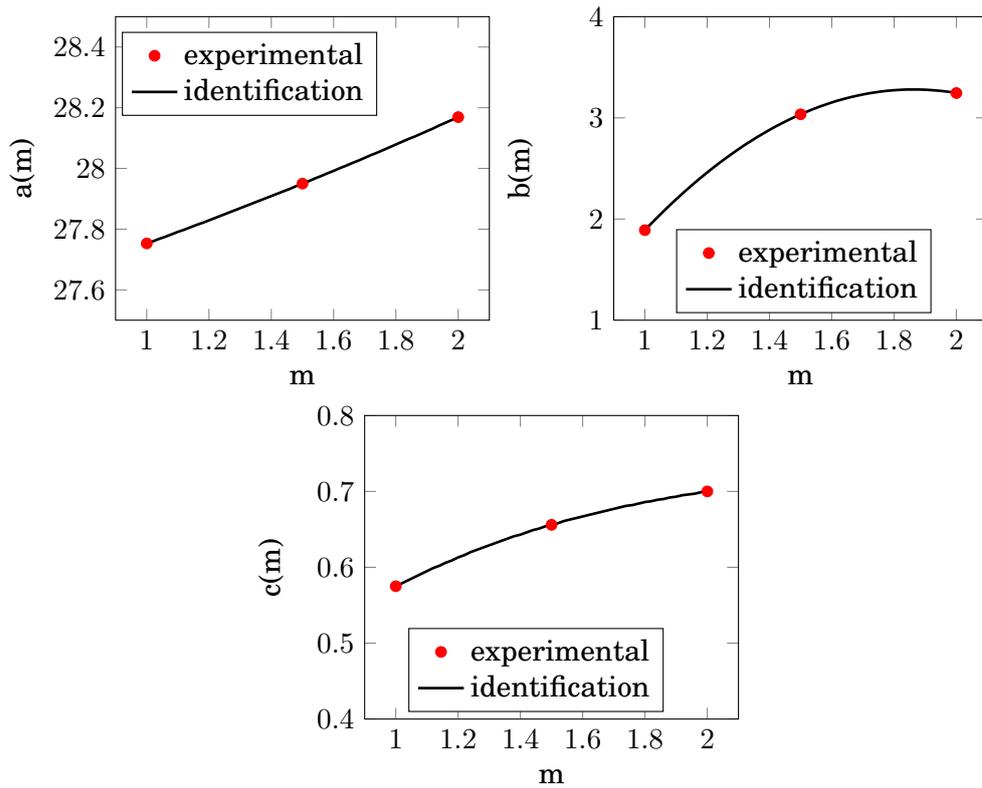


FIGURE 6.4 - Résultats de l'identification des coefficients de la fonction seuil d'endommagement

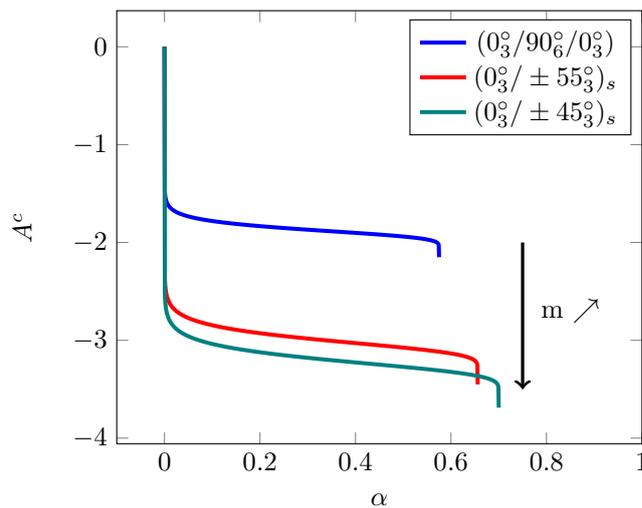


FIGURE 6.5 - Résultat de l'identification du seuil d'endommagement pour les séquences $(0_3^{\circ}/90_n^{\circ}/0_3^{\circ})$, $(0_3^{\circ}/\pm 55_3^{\circ})_s$ et $(0_3^{\circ}/\pm 45_3^{\circ})_s$ correspondant respectivement à $m = 1$, $m = 1.5$ et $m = 2$

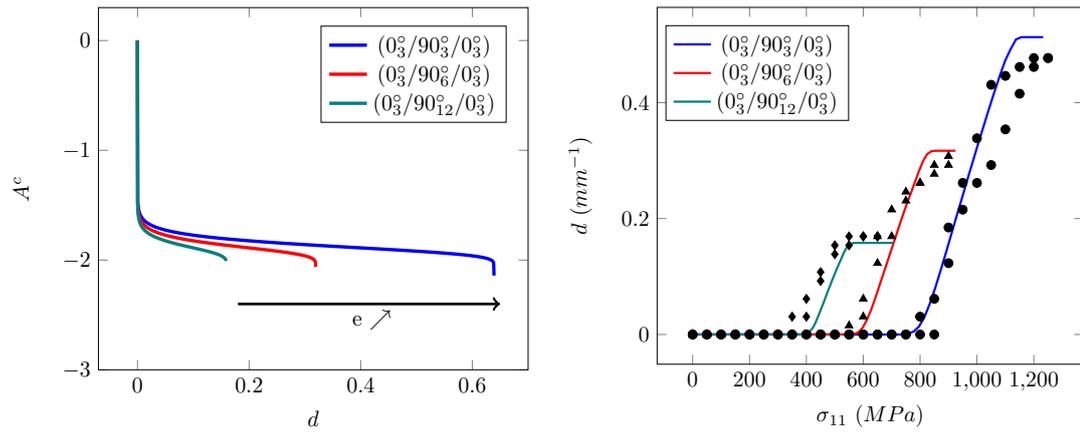


FIGURE 6.6 - Résultat de l'identification pour les séquences $(0_3^0/90_n^0/0_3^0)$, soit pour $m = 1$

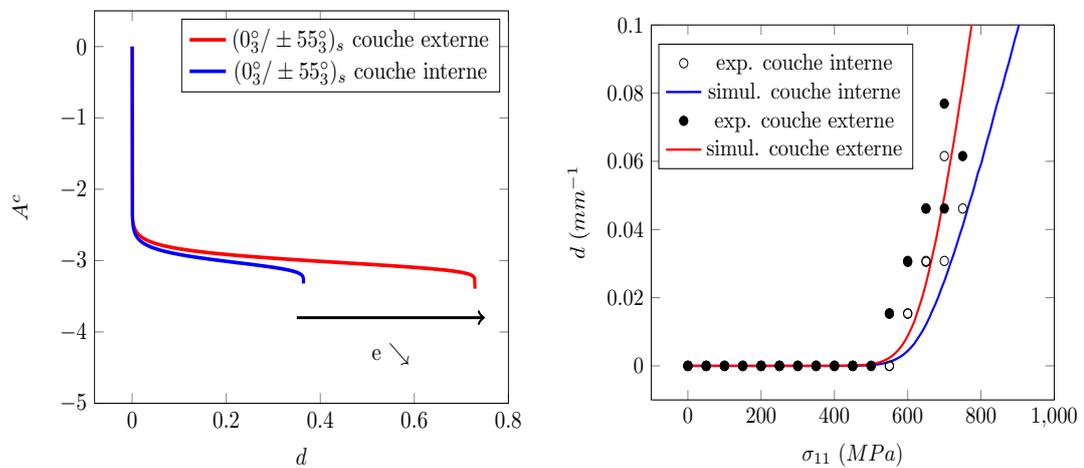


FIGURE 6.7 - Résultat de l'identification pour la séquence $(0_3^0/\pm 55_3^0)_s$, soit pour $m = 1.5$

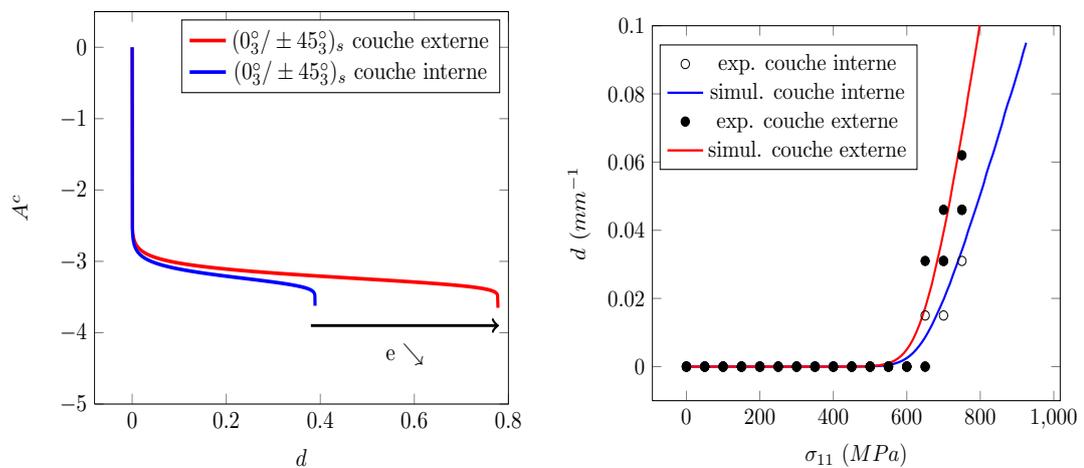


FIGURE 6.8 - Résultat de l'identification la séquence $(0_3^0/\pm 45_3^0)_s$, soit pour $m = 2$

6.4.2 Identification de la fonction seuil d'endommagement en fatigue

6.4.2.1 Méthodologie

Dans le cas de la fatigue, le procédé d'identification est tout à fait comparable puisque l'on utilise la variable $A(\varepsilon, \alpha, m, r)$ pour calculer le seuil critique. La différence par rapport au cas quasi-statique réside dans le fait qu'il y a plusieurs seuils à identifier (dans l'absolu, autant que de cycles) et le calcul est effectué pour chacune des courbes du réseau de courbes expérimentales qui donnent, pour chacun des empilements, pour chaque niveau de contrainte, la densité de fissures en fonction du nombre de cycles. Sur le même modèle que dans le cas quasi-statique, la fonction seuil est prise sous la forme (EQ. 6.14) :

$$A^c(\alpha, m, N, R, F) = -b(m, N, R, f) \exp \frac{\ln \left[-\ln \left(1 - \frac{\alpha}{c(m, N, R, f)} \right) \right]}{a(m, N, R, f)} \quad (6.14)$$

L'identification du seuil nécessite, comme pour le cas quasi-statique, au moins trois séquences qui permettent de rendre compte de l'influence du mode de sollicitation. Nous reprendrons donc les séquences $(0_3^{\circ}/90_6^{\circ}/0_3^{\circ})$, $(0_3^{\circ}/\pm 55_3^{\circ})_s$ et $(0_3^{\circ}/\pm 45_3^{\circ})_s$ qui, rappelons le donnent respectivement $m_0 = 1$, $m_0 = 1.523$ et $m_0 = 1.928$.

Ensuite, afin de rendre compte de l'effet de la contrainte maximum appliquée, nous avons besoin d'essais à différents niveaux de contrainte longitudinale maximum. Ainsi nous utiliserons les résultats des essais effectués à 40%, 50% et 60% de la contrainte à rupture présentés précédemment (CHAP. 3 §3.8).

Enfin, si l'on souhaite rendre compte des effets du rapport de charge R et f dans l'identification du seuil, il est nécessaire de disposer d'essais à différentes fréquences et différents rapport de charge. Toutefois, nous ne disposons ici que d'essais à fréquence fixée à 1 Hz, de plus on montre expérimentalement que la variation de la contrainte maximale, à plus d'influence que celle du rapport de charge. Nous nous limiterons donc à l'influence du mode de chargement et de la contrainte longitudinale maximum. Précisons toutefois que dans le cas où l'on souhaiterait rendre compte des effets de f et R , la méthode serait identique à celle que nous allons présenter. Finalement, neuf essais sont nécessaires pour l'identification de la fonction seuil (TAB. 6.4) :

Séquences	Mode	σ_{MAX}
$(0_3^{\circ}/90_6^{\circ}/0_3^{\circ})_s$	1	$0.4\sigma_R/0.5\sigma_R/0.6\sigma_R$
$(0_3^{\circ}/\pm 55_3^{\circ})_s$	1.523	$0.4\sigma_R/0.5\sigma_R/0.6\sigma_R$
$(0_3^{\circ}/\pm 45_3^{\circ})_s$	1.928	$0.4\sigma_R/0.5\sigma_R/0.6\sigma_R$

TABLE 6.4 - Essais utiles à l'identification du seuil de fatigue

Ensuite, pour chaque valeur m_0 de m , c'est à dire pour chaque séquence d'empilement :

1. Pour chaque niveau de contrainte, les courbes donnant l'évolution la densité de fissures α en fonction du nombre de cycles N sont utilisées comme données d'entrée du notre simulation. On peut alors calculer la valeur du seuil $A^c(\alpha, m_0, r)$ en considérant que lors du processus d'endommagement on a : $A = A^c$;
2. Pour différentes valeurs de N (dans l'absolu pour chaque cycle), les valeurs discrètes $A^c(\alpha, m_0, r)$ sont lissées en fonction de α ;
3. Finalement le réseau complet de $A^c(\alpha, m_0, r)$ s'obtient par un lissage en fonction de m .

6.4.2.2 Identification

Afin d'identifier les seuils critiques, nous réalisons dans un premier temps un lissage du réseau de courbes expérimentales en fonction du nombre de cycles, l'objectif étant de simplifier leur introduction dans notre programme informatique. Le lissage est pris sous la forme suivante (EQ. 6.15) :

$$\alpha = \alpha(N) = p_3 \left(1 - e^{-\left(\frac{\log(N) + p_4}{p_1}\right)^{p_2}} \right) \quad (6.15)$$

Notons que p_3 correspond à la valeur de α à saturation qui, rappelons le, est constante et indépendante du chargement. Ainsi $p_3 = 0.549$ pour la séquence $(0_3^\circ/90_3^\circ)_s$, $p_3 = 0.658$ pour la séquence $(0_3^\circ/\pm 55_3^\circ)_s$ et $p_3 = 0.695$ pour la séquence $(0_3^\circ/\pm 45_3^\circ)_s$. Les deux autres paramètres sont ensuite déterminés à l'aide d'une méthode des moindres carrés pour chacun des trois niveaux de contrainte (TAB. 6.5).

	$(0_3^\circ/90_3^\circ)_s$				$(0_3^\circ/\pm 55_3^\circ)_s$				
	p_1	p_2	p_3	p_4	p_1	p_2	p_3	p_4	
$0.4\sigma_R$	4.05	12.15	0.549	0.00	$0.4\sigma_R$	5.07	20.41	0.658	0.00
$0.5\sigma_R$	7.26	8.28	0.549	4.06	$0.5\sigma_R$	4.76	8.78	0.658	0.00
$0.4\sigma_R$	49.02	40.56	0.549	46.61	$0.6\sigma_R$	4.58	6.59	0.658	0.00
	$(0_3^\circ/\pm 45_3^\circ)_s$								
	p_1	p_2	p_3	p_4					
$0.4\sigma_R$	5.34	15.27	0.695	0.00					
$0.5\sigma_R$	5.07	10.71	0.695	0.00					
$0.6\sigma_R$	4.73	8.97	0.695	0.00					

TABLE 6.5 - Lissage des réseaux de courbes expérimentales

Ensuite, l'introduction de ces courbes dans notre programme permet d'obtenir pour chaque valeur m_0 et chaque niveau de contrainte les valeurs des seuils d'endommagement pour chaque cycle. Puis, par un lissage des coefficients a , b et c de

6. Identification des paramètres du modèle de comportement et de la loi de fatigue

la fonction seuil en fonction du nombre de cycles on obtient le réseau des seuils à iso-valeurs de N . Notons d'ores et déjà que le paramètre c correspond à la valeur de l'endommagement à saturation qui est indépendante du nombre de cycle mais dépend de m . Ensuite, on constate que la seule variation du paramètre b suffit à rendre compte du réseau complet des seuils à iso-nombre de cycles. On propose de prendre un lissage du paramètre b en fonction du nombre de cycles N sous la forme Eq. 6.17. Les paramètres a et c sont quant à eux indépendants du nombre de cycles et sont pris respectivement sous la forme Eq. 6.16 et 6.18. Les résultats du lissage sont donnés dans les tableaux TAB. 6.6.

$$a(N) = a_0 \quad (6.16)$$

$$b(N) = b_0 \times \exp \left(- \exp \left(b_1 \times \ln \left(\frac{\log(N) + b_4}{b_2} \right) \right) \right) + b_3 \quad (6.17)$$

$$c(N) = c_0 \quad (6.18)$$

$(0_3^{\circ}/90_3^{\circ})_s$					
a		b		c	
a_{00}	27.75	b_{00}	-1.86	c_{00}	0.549
a_{01}	/	b_{01}	1.44	c_{01}	/
a_{02}	/	b_{02}	1.45	c_{02}	/
a_{03}	/	b_{03}	-0.23	c_{03}	/
a_{04}	/	b_{04}	-1.09	c_{04}	/
$(0_3^{\circ}/\pm 55_3^{\circ})_s$					
a		b		c	
a_0	27.95	b_0	-1.48	c_0	0.658
a_1	/	b_1	2.3	c_1	/
a_2	/	b_2	2.19	c_2	/
a_3	/	b_3	-1.59	c_3	/
a_4	/	b_4	-0.59	c_4	/
$(0_3^{\circ}/\pm 45_3^{\circ})_s$					
a		b		c	
a_{00}	28.169	b_{00}	-1.48	c_{00}	0.695
a_{01}	/	b_{01}	2.3	c_{01}	/
a_{02}	/	b_{02}	2.19	c_{02}	/
a_{03}	/	b_{03}	-1.8	c_{03}	/
a_{04}	/	b_{04}	-0.59	c_{04}	/

TABLE 6.6 - Lissage des paramètres a , b et c en fonction du nombre de cycles

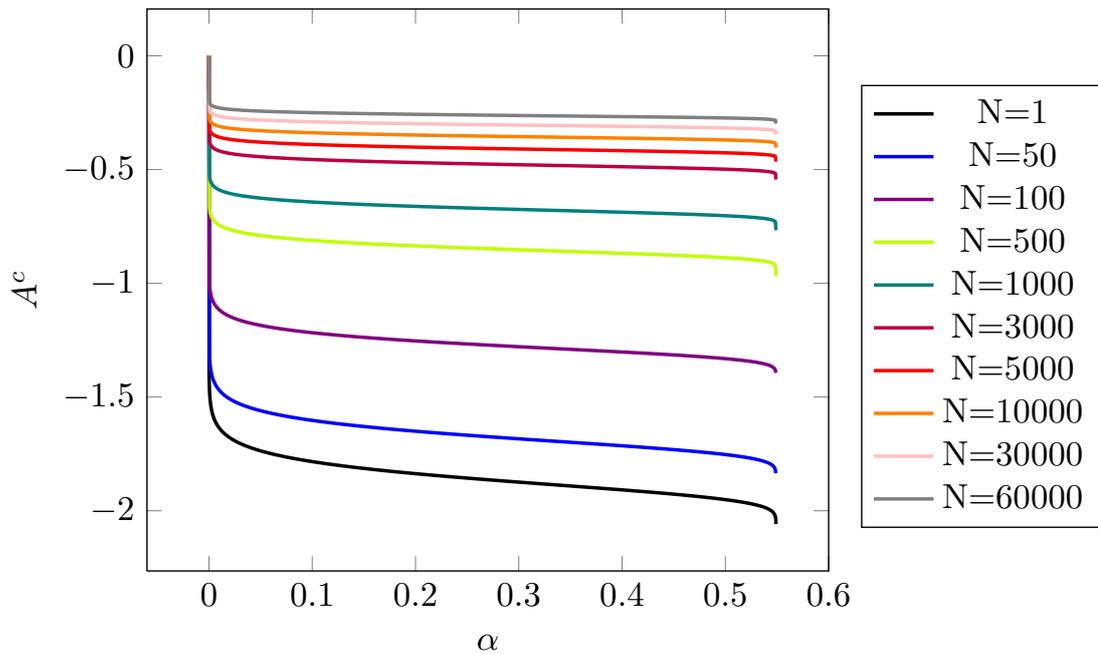


FIGURE 6.9 - Réseaux des seuils critiques iso-nombre de cycles pour pour la séquence $(0_3^{\circ}/90_6^{\circ}/0_3^{\circ})$

$(0_3^{\circ}/90_6^{\circ}/0_3^{\circ})_s$			
N	a	b	c
1	27.753	-1.890	0.549
50	27.753	-1.698	0.549
100	27.753	-1.289	0.549
500	27.753	-0.859	0.549
1000	27.753	-0.680	0.549
5000	27.753	-0.413	0.549
10000	27.753	-0.358	0.549
30000	27.753	-0.307	0.549
60000	27.753	-0.264	0.549

TABLE 6.7 - Lissages des seuils critiques iso-nombre de cycles pour $m=1$.

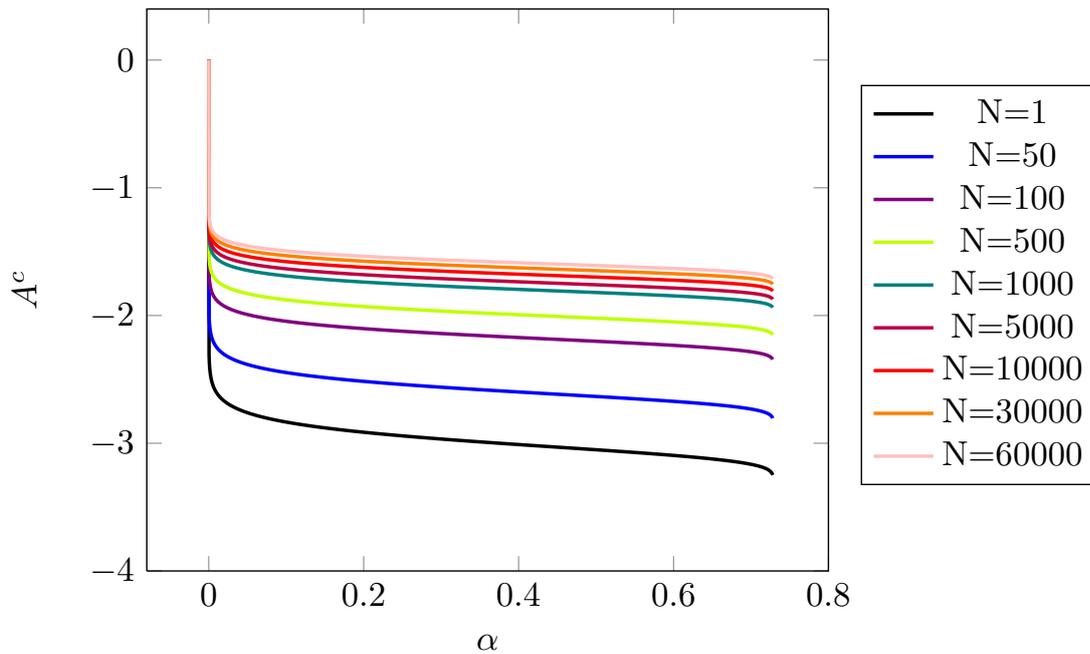


FIGURE 6.10 - Réseaux des seuils critiques iso-nombre de cycles pour la séquence $(0_3^0 / \pm 55_3^0)_s$.

$(0_3^0 / \pm 55_3^0)_s$			
N	a	b	c
1	27.950	-3.03	0.658
50	27.950	-2.62	0.658
100	27.950	-2.19	0.658
500	27.950	-2.01	0.658
1000	27.950	-1.81	0.658
5000	27.950	-1.75	0.658
10000	27.950	-1.69	0.658
30000	27.950	-1.64	0.658
60000	27.950	-1.60	0.658

TABLE 6.8 - Lissages des seuils critiques iso-nombre de cycles pour $m=1.5$.

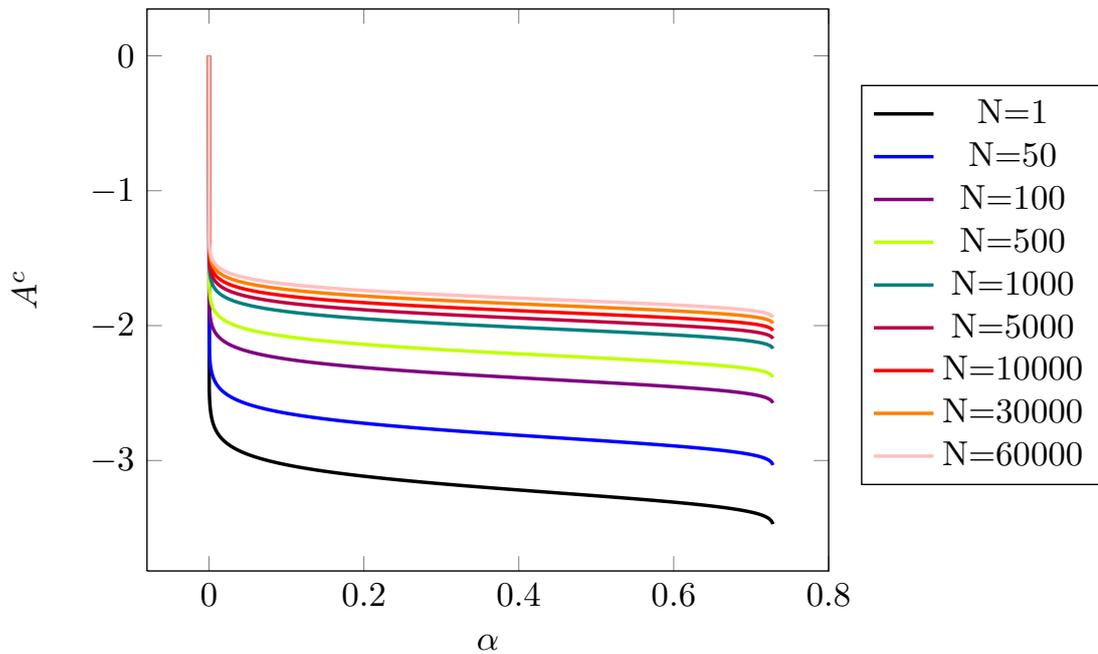


FIGURE 6.11 - Réseaux des seuils critiques iso-nombre de cycles pour la séquence $(0_3^\circ / \pm 45_3^\circ)_s$.

$(0_3^\circ / \pm 45_3^\circ)_s$			
N	a	b	c
1	28.169	-3.245	0.695
50	28.169	-2.836	0.695
100	28.169	-2.406	0.695
500	28.169	-2.227	0.695
1000	28.169	-2.09	0.695
5000	28.169	-1.960	0.695
10000	28.169	-1.905	0.695
30000	28.169	-1.854	0.695
60000	28.169	-1.811	0.695

TABLE 6.9 - Lissages des seuils critiques iso-nombre de cycles pour $m=2$.

6. Identification des paramètres du modèle de comportement et de la loi de fatigue

Nous disposons maintenant de trois réseaux de courbes. Chaque courbe est associée à un triplet de paramètres (a, b, c) . Il nous reste alors à lisser les coefficients a , b et c en fonction de la variable m . Nous obtiendrons ainsi, pour chaque cycle, une surface seuil d'endommagement qui dépend de l'endommagement α et du mode m (FIG. 6.13). Le lissage est pris sous une forme polynomiale pour chacun des paramètres (Eq. 6.19,6.20,6.21) :

$$a_0(m) = a_{00} + a_{10} \times m + a_{20} \times m^2 + a_{30} \times m^3 + a_{40} \times m^4 + a_{50} \times m^5 \quad (6.19)$$

$$b_i(m) = b_{0i} + b_{1i} \times m + b_{2i} \times m^2 + b_{3i} \times m^3 + b_{4i} \times m^4 + b_{5i} \times m^5 \quad (6.20)$$

$$c(m) = c_{00} + c_{10} \times m + c_{20} \times m^2 + c_{30} \times m^3 + c_{40} \times m^4 + c_{50} \times m^5 \quad (6.21)$$

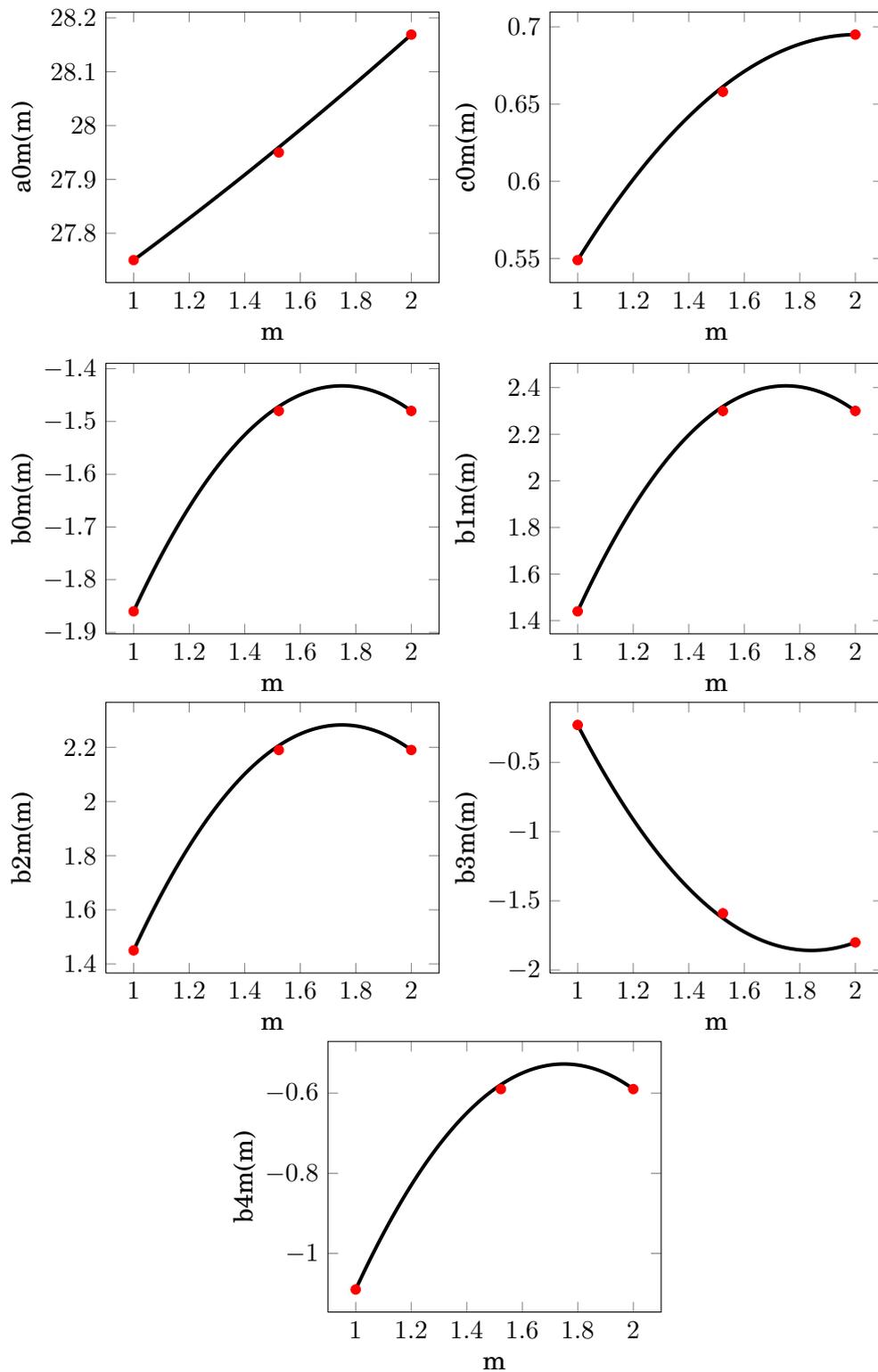


FIGURE 6.12 - Lissage des paramètres a , b et c en fonction du mode m .

a_{00}	27.407	a_{10}	0.00	a_{20}	0.00	a_{30}	0.00	a_{40}	0.00	a_{50}	0.00
a_{01}	0.305	a_{11}	0.00	a_{21}	0.00	a_{31}	0.00	a_{41}	0.00	a_{51}	0.00
a_{02}	0.038	a_{12}	0.00	a_{22}	0.00	a_{32}	0.00	a_{42}	0.00	a_{52}	0.00
a_{03}	0.00	a_{13}	0.00	a_{23}	0.00	a_{33}	0.00	a_{43}	0.00	a_{53}	0.00
a_{04}	0.00	a_{14}	0.00	a_{24}	0.00	a_{34}	0.00	a_{44}	0.00	a_{54}	0.00
a_{05}	0.00	a_{15}	0.00	a_{25}	0.00	a_{35}	0.00	a_{45}	0.00	a_{55}	0.00
b_{00}	-3.76	b_{10}	-2.86	b_{20}	-2.25	b_{30}	5.94	b_{40}	-3.59	b_{50}	0.00
b_{01}	2.66	b_{11}	6.02	b_{21}	5.18	b_{31}	-8.47	b_{41}	3.50	b_{51}	0.00
b_{02}	-0.76	b_{12}	-1.72	b_{22}	-1.48	b_{32}	2.3	b_{42}	-1.00	b_{52}	0.00
b_{03}	0.00	b_{13}	0.00	b_{23}	0.00	b_{33}	0.00	b_{43}	0.00	b_{53}	0.00
b_{04}	0.00	b_{14}	0.00	b_{24}	0.00	b_{34}	0.00	b_{44}	0.00	b_{54}	0.00
b_{05}	0.00	b_{15}	0.00	b_{25}	0.00	b_{35}	0.00	b_{45}	0.00	b_{55}	0.00
c_{00}	0.115	c_{10}	0.00	c_{20}	0.00	c_{30}	0.00	c_{40}	0.00	c_{50}	0.00
c_{01}	0.578	c_{11}	0.00	c_{21}	0.00	c_{31}	0.00	c_{41}	0.00	c_{51}	0.00
c_{02}	-0.144	c_{12}	0.00	c_{22}	0.00	c_{32}	0.00	c_{42}	0.00	c_{52}	0.00
c_{03}	0.00	c_{13}	0.00	c_{23}	0.00	c_{33}	0.00	c_{43}	0.00	c_{53}	0.00
c_{04}	0.00	c_{14}	0.00	c_{24}	0.00	c_{34}	0.00	c_{44}	0.00	c_{54}	0.00
c_{05}	0.00	c_{15}	0.00	c_{25}	0.00	c_{35}	0.00	c_{45}	0.00	c_{55}	0.00

TABLE 6.10 - Coefficients identifiés du seuil d'endommagement en fatigue.

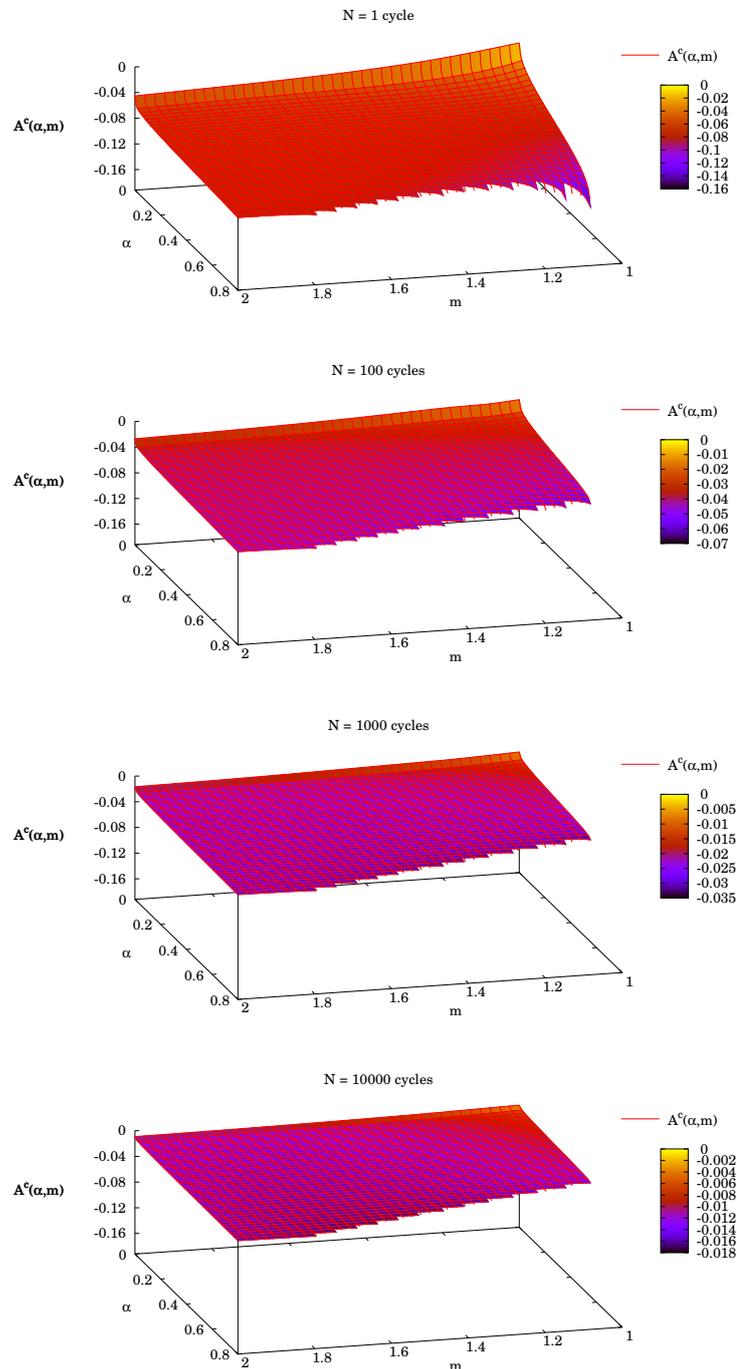


FIGURE 6.13 - Surfaces seuils critiques iso-nombre de cycles $N=1,100,1000,10000$

Finalement, on présente (FIG. 6.14) les résultats de l'identification de la loi d'évolution de l'endommagement en fatigue dans le cas de la séquence $(0_3^\circ/90_6^\circ/0_3^\circ)$.

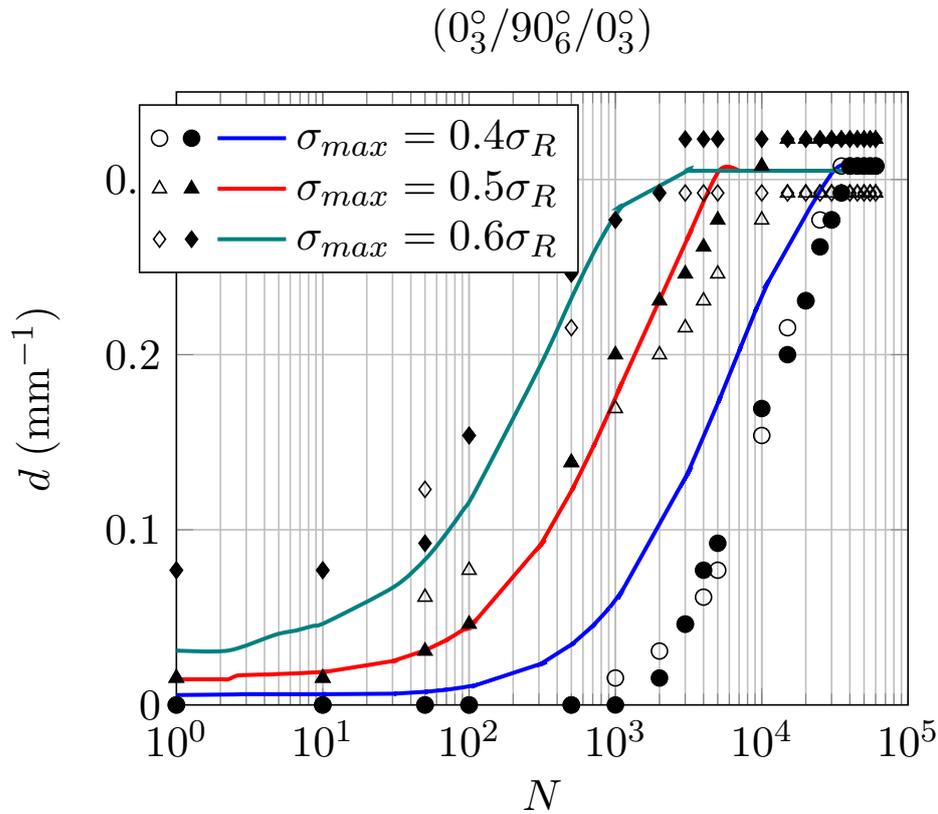


FIGURE 6.14 - Résultats de l'identification de l'évolution de la densité de fissures en fonction du nombre de cycle dans la couche à 90° de la séquence $(0_3^\circ/90_6^\circ/0_3^\circ)$ sollicitée en traction uni-axiale cyclique pour trois niveaux de contrainte

Chapitre 7

Calcul de structure en fatigue

Sommaire

7.1 Introduction	185
7.2 Implémentation du modèle de comportement	186
7.2.1 Intégration de la loi de comportement et des lois d'évolution .	186
7.2.2 Quelques éléments de programmation	187
7.3 Application au cas d'une éprouvette lisse en traction	191
7.4 Application au cas d'une plaque trouée	194
7.4.0.1 Dispositif expérimental	194
7.4.0.2 Corrélation essai/calcul	196
7.5 Conclusion	198

7.1 Introduction

On propose dans ce chapitre une application de notre modèle de comportement dans le cas d'une structure. Nous avons choisis d'étudier une structure de type plaque trouée. Les avantages de ce type de structure sont multiples. D'abord, il s'agit d'une géométrie relativement récurrente dans les structures industrielles comme les panneaux de fuselage dans l'industrie aéronautique par exemple, mais également dans de nombreux assemblages. Or, le trou est un concentrateur de contraintes qui peut favoriser l'apparition de l'endommagement. Il apparaît donc important d'être capable de prédire son apparition et son évolution dans ce type de structure. De plus la présence du trou entraîne un état de contrainte multi-axial sous un chargement uni-axial qui nous permettra de tester notre modèle. Enfin, il s'agit d'une structure relativement simple à fabriquer et à tester.

Afin d'être utilisé pour un calcul de structure, nous verrons dans un premier temps que le modèle a été implanté dans le code de calcul par éléments finis Zé-BuLoN. Enfin, nous terminerons par une application de notre modèle sur un calcul de plaque trouée.

7.2 Implémentation du modèle de comportement

7.2.1 Intégration de la loi de comportement et des lois d'évolution

Le modèle de comportement élastique endommageable développé dans le chapitre 4 a été implanté dans le code de calcul ZéBuLoN développé au Centre des Matériaux. Sa structure de programmation orientée *objet* offre un cadre pratique pour l'implémentation de nouveaux modèles de comportement. Ainsi, sa bibliothèque matériau Z-Mat peut-être complétée via le pré-processeur ZebFront qui permet de développer de nouvelles lois de comportement de façon relativement simple grâce à la pré-programmation de deux méthodes d'intégration : l'une est explicite : la méthode de Runge-Kutta et la seconde est implicite, la θ -méthode.

L'état thermodynamique d'un matériau est défini par un ensemble de variables d'état ($\underline{\underline{\varepsilon}}, \alpha, m$ et r dans notre cas) aux quelles sont associées une loi d'état et une loi d'évolution.

Les lois d'état sont des relations mathématiques qui permettent de calculer les variables associées aux variables d'état ($\underline{\underline{\sigma}}, A, M, R$). Ces relations étant définies de façon explicite aucune intégration n'est requise.

Les lois d'évolution des variables d'état, en revanche, se présentent sous la forme d'équations différentielles. Si dans la majorité des cas l'obtention de la solution nécessite l'intégration de la loi d'évolution, il arrive que l'on dispose d'une solution analytique de l'équation. Ainsi, lors de l'implémentation, les variables d'état peuvent donc être traitées de deux manières différentes :

1. l'intégration de la loi d'évolution est nécessaire, la variable est alors traitée comme une variable à intégrer. L'ensemble des variables à intégrer est noté V_{int} ;
Ici, l'ensemble V_{int} se réduit à un seul élément, la variable d'endommagement α , $V_{int} = \{\alpha\}$.
2. on dispose de la forme analytique de son évolution, la variable est alors traitée comme une variable dite auxiliaire. L'ensemble des variables auxiliaires est noté V_{aux} .

Ici, l'ensemble V_{aux} contient les variables m et r . Précisons toutefois que l'on intègre également à l'ensemble des variables auxiliaires, les variables, qui ne nécessitent pas d'intégration, et que l'on souhaite utiliser durant le calcul et dont on souhaite disposer lors d'un post-traitement. Dans le cas de notre modèle, il s'agit de la force thermodynamique de A associée à l'endommagement. Ainsi, l'ensemble des variables auxiliaires est : $V_{aux} = \{m, r, A\}$

Comme nous l'avons vu, parmi les relations constitutives du comportement, les lois d'évolution des variables d'état (dans notre cas la loi d'évolution de la variable d'endommagement α) se présentent sous la forme d'une équation différentielle qu'il faut intégrer (EQ. 7.1).

$$\frac{d\alpha}{dt} = \dot{\alpha} = \dot{\alpha}(\underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}, m, r, \underline{\underline{C}}^0) \quad (7.1)$$

Un modèle élément fini classique est basé sur une formulation en déplacement. De ce fait, le tenseur de déformation $\underline{\underline{\varepsilon}}$ et sa dérivée par rapport au temps $\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}$ sont des grandeurs directement accessibles et constituent donc des données d'entrées de l'équation précédente. Dans le cadre d'une évaluation incrémentale de cette équation différentielle, on impose un incrément de temps $\Delta t = t_1 - t_0$ qui se traduit mécaniquement par un incrément de déformation $\Delta \underline{\underline{\varepsilon}}$. A l'instant t_0 l'ensemble des grandeurs $\underline{\underline{\sigma}}^{t_0}, \alpha^{t_0}, A^{t_0}, \dots$ sont connues. Les lois constitutives du comportement et l'intégration de la loi d'évolution via un schéma d'intégration adapté doit permettre de déterminer les valeurs des grandeurs $\underline{\underline{\sigma}}^{t_1}, \alpha^{t_1}, A^{t_1}, \dots$ actualisées à l'instant t_1 ainsi que la matrice tangente (Eq. 7.2) nécessaire au calcul de la matrice de rigidité élémentaire.

$$\underline{\underline{L}} = \frac{\partial \Delta \underline{\underline{\sigma}}}{\partial \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}} \quad (7.2)$$

Comme nous l'avons expliqué, l'intérêt de l'utilisation de ZebFront réside dans la pré-programmation des deux schémas d'intégrations explicite et implicite. Nous avons choisi le schéma d'intégration explicite de Runge-Kutta qui est stable et fournit une bonne précision. En revanche le coût de calcul peut parfois être plus important.

7.2.2 Quelques éléments de programmation

De part sa programmation orientée objet couplée à l'utilisation du pré-processeur ZebFront, l'intégration de nouvelles lois de comportement dans le code de calcul Zé-BuLoN est relativement simple. Ainsi, l'implémentation se résume à la définition de trois blocs qui constituent les trois étapes clés de l'implémentation :

1. La déclaration d'un modèle de comportement passe par la définition d'une classe qui est introduite par l'instruction `@Class` Un objet de cette classe contient alors :
 - un couple de variables primale (`@Grad`) et duale (`@Flux`). `@Grad` correspond à la variable `eto` et `@Flux` à la variable `sig` qui représentent respectivement le tenseur des déformations $\underline{\underline{\varepsilon}}$ et le tenseur des contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$.
 - un ensemble de variables internes (`@VarInt`), on retrouve sous ce mot-clé l'ensemble V_{int} des variables à intégrer ;
 - un ensemble de variables auxiliaires (`@VarAux`), on retrouve sous ce mot-clé l'ensemble V_{aux} des variables auxiliaires. On rappelle qu'en plus des variables d'état m et r nous définissons deux autres variables auxiliaires qui sont : A et A^c ;
 - un ensemble de coefficients matériau (`@Coeff`).
2. L'évaluation des dérivées temporelles de chacune des variables à intégrer suivant un schéma explicite `@Derivative` ;

Ici, nous n'avons qu'une seule variable d'état à intégrer : $\dot{\alpha}$. L'utilisation de la commande @Derivative permet de faire appel à un schéma d'intégration explicite, les équations différentielles sont alors résolues de manière séquentielle. L'algorithme d'implémentation est présenté FIG. 7.3.

- Détermination de la variable duale et les variables auxiliaires ainsi que la matrice tangente @StrainPart ;

Notons que la matrice tangente du comportement est approximée par la matrice de rigidité : $\underline{L} \simeq \underline{C}$.

Le modèle de comportement développé modélise le comportement endommageable du matériau unidirectionnel. En présence ou non d'endommagement, ce comportement est anisotrope. Au cours d'un calcul par éléments finis, les relations constitutives du comportement sont prises en compte localement au sein de chaque élément. La description du comportement doit être indépendante du modèle éléments finis, aussi il est important de tenir compte de l'orientation locale que l'on souhaite employer. Ainsi, il devient nécessaire de définir un repère associé à chaque élément (FIG. 7.1).

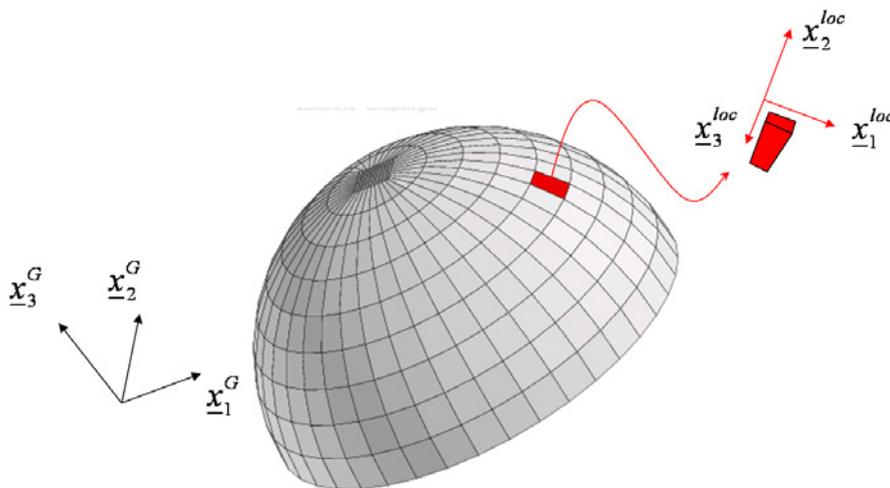


FIGURE 7.1 - Repère local d'un élément permettant de définir son orientation par rapport au repère global de la structure

Les transformations entre ces repères locaux et le repère global de la structure sont exprimées par l'intermédiaire des angles d'Euler. Les angles d'Euler permettent définir totalement l'orientation d'une base orthonormée locale $b^L(x_1^L, x_2^L, x_3^L)$ par rapport à une base orthonormée globale $b^G(x_1^G, x_2^G, x_3^G)$. Ils sont au nombre de trois et sont généralement notés ψ (précession), θ (nutation) et φ (rotation propre). Ils correspondent aux rotations définies FIG. 7.2.

La matrice de changement de base de b^L à b^G , que l'on notera $[P]$ peut être déterminée par l'expression 7.3 :

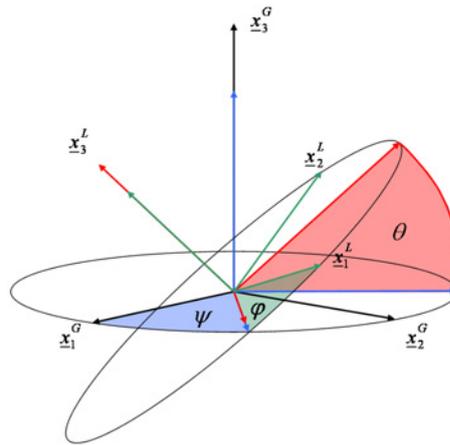


FIGURE 7.2 - Les trois angles d'Euler

$$[P] = [P_\varphi][P_\theta][P_\psi] \quad (7.3)$$

$$[P_\varphi] = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) & 0 \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.4)$$

$$[P_\theta] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad (7.5)$$

$$[P_\psi] = \begin{bmatrix} \cos(\psi) & \sin(\psi) & 0 \\ -\sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.6)$$

On présente en annexe A les correspondances entre les angles d'Euler et les angles des coordonnées cylindriques et sphériques.

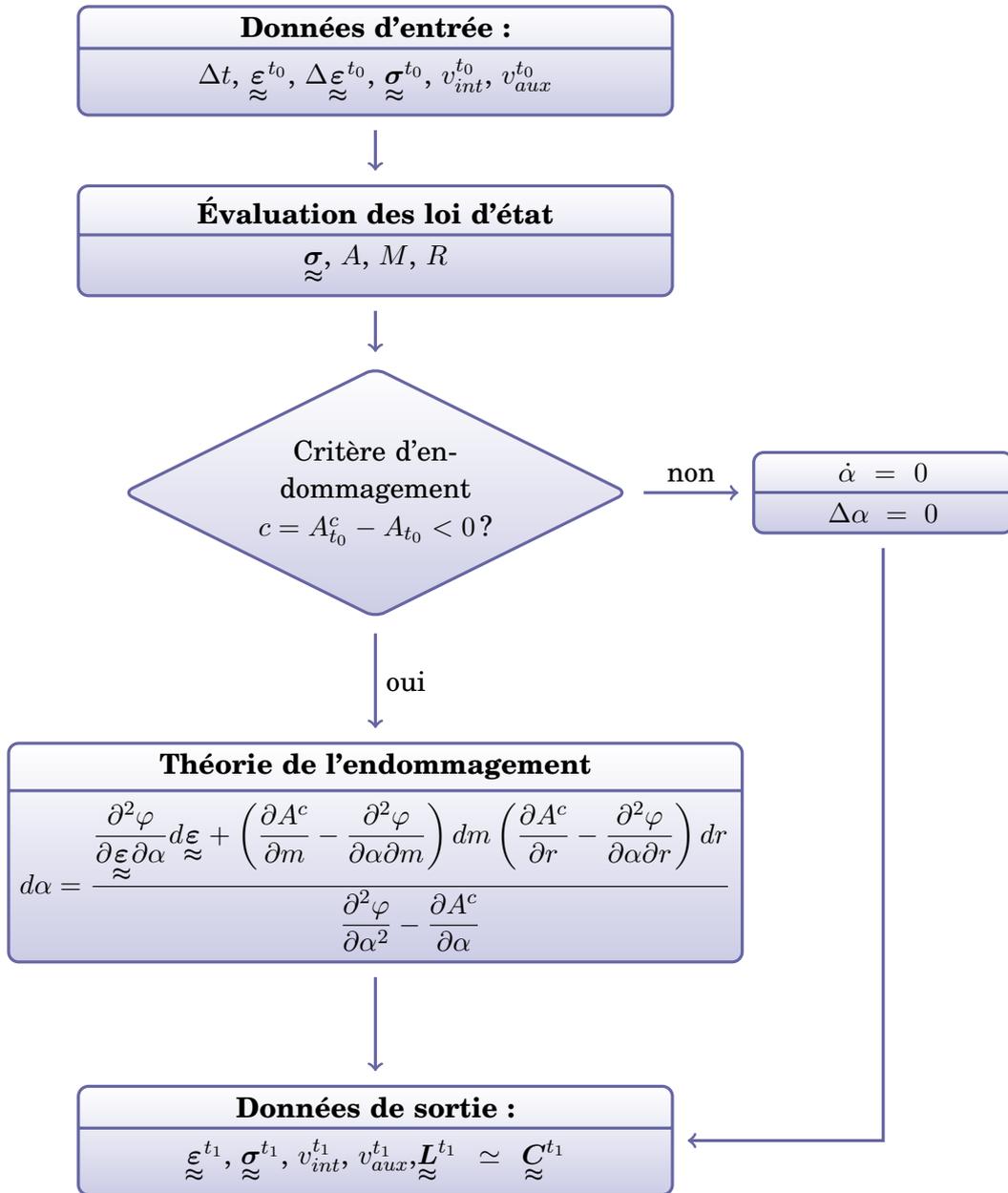


FIGURE 7.3 - Algorithme d'implémentation de la loi de comportement pour un schéma d'intégration explicite

7.3 Application au cas d'une éprouvette lisse en traction

Nous avons, depuis le début de ce chapitre, présenté l'implémentation de notre modèle de comportement dans le code de calcul ZéBuLoN ainsi que la stratégie de calcul utilisée pour le cas de la fatigue. L'identification présentée dans le chapitre précédent a été réalisée dans le cas d'un élément de volume. Notre objectif est maintenant de valider notre modèle dans le cas d'un calcul de structure. Ainsi nous présentons, dans ce qui suit, les essais qui ont été réalisés dans un but de validation.

Nous avons procédé à l'identification de notre modèle via une simulation sur un élément de volume. La première étape de la validation consiste donc à comparer cette approche sur l'élément de volume au calcul par éléments finis sur une éprouvette lisse. Puis, dans un deuxième temps, nous l'appliquerons à une structure plus complexe.

Comme nous le disions au début de ce chapitre, nous avons choisis d'étudier une structure de type *plaque trouée*. Les avantages de ce type de structure sont multiples. D'abord, il s'agit d'une géométrie relativement récurrente dans les structures industrielles (aéronautique, ferroviaire,...). Des assemblages sont alors nécessaires entre les différentes parties de la structure. C'est liaisons sont généralement réalisées par collage et rivetage ou boulonnage. C'est alors dans ces zones, où les trous agissent comme des concentrateurs de contraintes, que naissent les premiers endommagements. Il devient alors primordial d'être capable de prédire leur apparition et leur évolution afin de pouvoir prédire la durée de vie de la structure. De plus la présence du trou entraîne un état de contrainte multi-axial sous un chargement uni-axial qui nous permettra de tester notre modèle. Enfin, il s'agit d'une structure relativement simple à fabriquer et à tester. Le dispositif expérimental que nous avons mis en place pour ces essais est décrit dans la suite (§7.4.0.1).

– Cas quasi-statique :

Afin de valider l'identification de notre modèle, nous proposons ici une comparaison d'une approche analytique sur un élément de volume avec un calcul par éléments finis. L'implémentation de notre modèle dans le code de calcul a été présentée précédemment.

La figure suivante présente les résultats des simulations obtenues pour les séquences $(0_3^{\circ}/90_{n=3,6,12}^{\circ}/0_3^{\circ})$. Il apparaît clairement que l'on a une très bonne corrélation entre la simulation sur un élément de volume et le calcul par éléments finis.

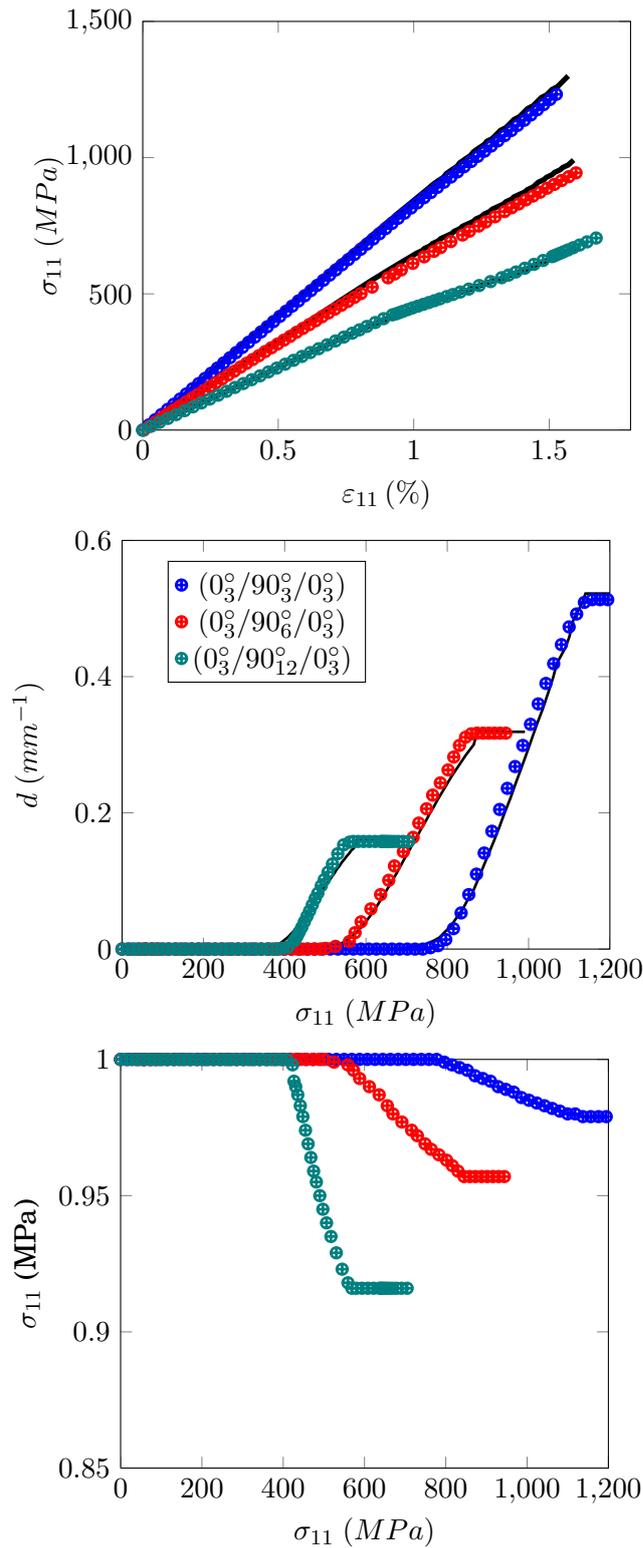


FIGURE 7.4 - Simulation par éléments finis d'un essai de traction quasi-statique sur les séquences $(0_3^{\circ}/90_n^{\circ}/0_3^{\circ})$

– Cas de la fatigue :

Le cas de la fatigue, nous l'avons vu, est plus complexe dans la mesure où le calcul par élément finis doit être couplé au post-processeur qui permet d'appliquer la méthode de saut de cycles précédemment décrite.

On présente ici le cas de la séquence ($0_3^{\circ}/90_6^{\circ}/0_3^{\circ}$) sollicitée en traction cyclique à un niveau de contrainte maximum égal à $\sigma_{max} = 0.4\sigma_R$.

On rappelle qu'il est nécessaire de fixer la valeur du paramètre d'extrapolation ainsi que la longueur des intervalles utilisés pour le calcul de la distribution des fréquences relatives des saut de cycles locaux. Ainsi, nous avons fixé la valeur du paramètre d'extrapolation à 10% de la densité de fissure à saturation et la longueur des intervalles est prise égale à 1000 cycles.

La figure ci-dessous (FIG. 7.5) présente le résultat de la simulation. On constate que l'on a une bonne corrélation avec les résultats expérimentaux. Seulement 13 cycles sont calculés pour atteindre la saturation de l'endommagement au lieu des 17640 ce qui fait gagner un temps considérable tout en gardant une précision acceptable au regard de la comparaison avec les résultats expérimentaux. Le tableau ci-dessous (TAB. 7.1) présente le déroulement du calcul.

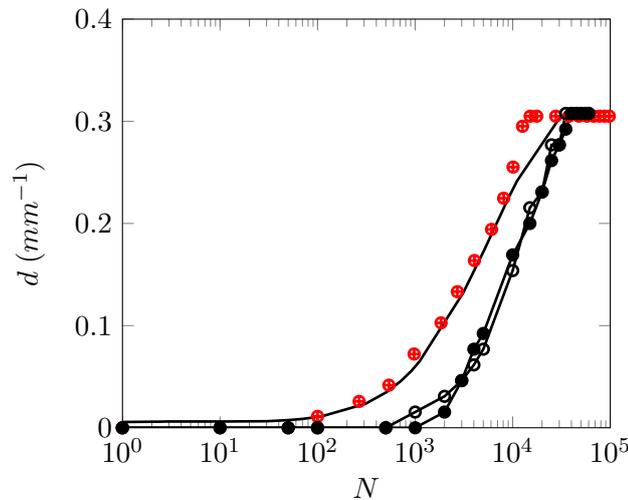


FIGURE 7.5 - Simulation de l'évolution de l'endommagement en fonction du nombre de cycle sous sollicitation cyclique avec $\sigma_{max} = 0.4\sigma_R$ pour la séquence ($0_3^{\circ}/90_6^{\circ}/0_3^{\circ}$)

Cycle simulé	ΔN
1	100
101	166
267	272
539	438
977	867
2711	867
4056	1345
6070	2014
8084	2014
10098	2014
12612	2514
15126	2514
17640	2514

TABLE 7.1 - *Déroulement du calcul*

7.4 Application au cas d'une plaque trouée

Maintenant que nous avons validé notre modèle et son identification dans le cas d'une éprouvette lisse, on propose une application au cas d'une plaque trouée. Dans un premier temps, nous présentons la procédure expérimentale utilisée.

7.4.0.1 Dispositif expérimental

Notre objectif est ici de suivre l'évolution de l'endommagement en cours d'essai sur le bord libre à l'intérieur du trou d'une éprouvette trouée. Pour cela, un dispositif expérimental spécifique a été développé. A l'instar de ce qui a été fait précédemment sur des éprouvettes planes, on utilise là encore une méthode optique en suivant l'évolution de la fissuration in-situ à l'aide d'une caméra.

Le montage se compose d'un miroir orienté à 45° par rapport à l'axe du trou qui permet de réfléchir l'image du bord libre du trou vers la caméra (FIG. 7.6). Ce dernier est monté sur une platine permettant une translation dans chacune des directions et une rotation autour de l'axe défini par son support. Ainsi, il est possible d'observer tout le périmètre du trou sur toute l'épaisseur de l'éprouvette.

Le protocole reste identique à celui utilisé pour les éprouvettes droites. Plusieurs photographies sont prises aux différents paliers d'observation de façon à pouvoir reconstruire une image du bord libre du trou et analyser les endommagements en présence. Là encore, un polissage du bord libre doit être effectué préalablement de manière à simplifier l'observation.

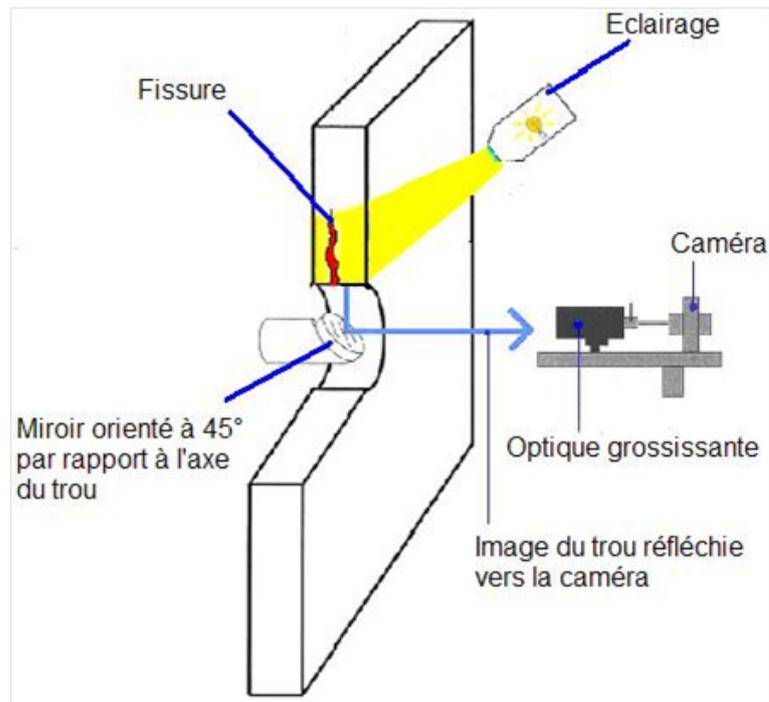


FIGURE 7.6 - Schéma du dispositif expérimental pour l'observation de l'endommagement au sein d'un trou



FIGURE 7.7 - Montage expérimental pour l'observation et le suivi de l'endommagement au sein d'un trou

Les éprouvettes ont été découpées à la meule diamant dans des plaques stratifiées. Le trou est ensuite usiné par perçage refroidi à l'eau de manière à limiter l'échauffement dans la zone de contact entre le matériau et l'outil. Le perçage crée des endommagements, en général superficiels, qui sont en grande partie supprimés par le polissage.

Les éprouvettes ont été dimensionnées de manière à s'assurer que le champ de contrainte sur le bord du trou ne soit perturbé ni par la présence des autres bords libres qui induisent leurs propres effets de bords, ni par les zones sur lesquelles les mors appliquent leur effort. La géométrie et les dimensions des éprouvettes sont présentées dans la figure qui suit (FIG. 7.8).

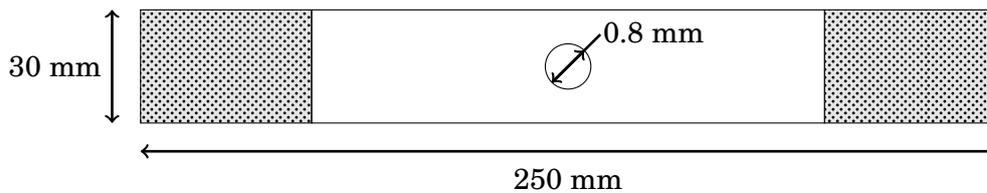


FIGURE 7.8 - Montage expérimental pour l'observation et le suivi de l'endommagement au sein d'un trou

7.4.0.2 Corrélation essai/calcul

La figure FIG. 7.9 représente le bord libre à l'intérieur du trou d'une éprouvette de séquence ($0_3^0/90_6^0/0_3^0$). Afin de clairement identifier la direction selon laquelle sont faites les observations et de repérer la position des fissures sur le trou, on définit un angle θ qui représente l'angle entre la direction de l'observation et la direction de l'effort (7.4)

On constate que le trou a joué son rôle de concentrateur de contraintes favorisant l'apparition de fissures dans la zone comprise en $+45^\circ$ et -45° . La fissuration est le premier type d'endommagement à apparaître mais on constate également l'apparition de délaminage.

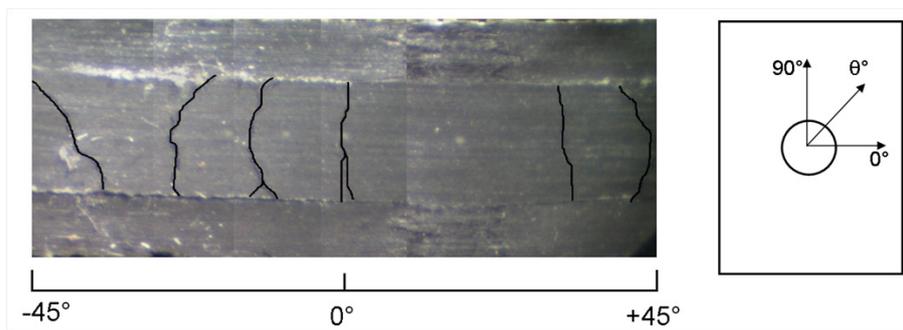


FIGURE 7.9 - Réseau de fissures à l'intérieur du trou d'une éprouvette trouée de séquence ($0_3^0/90_6^0/0_3^0$) soumise à un chargement quasi-statique

La figure FIG. 7.10 représente la cartographie de la densité de fissures sur le bord libre à l'intérieur du trou. Cette cartographie correspond à l'état de fissuration juste avant la rupture, qui correspond à l'état de saturation. On constate une bonne corrélation entre la zone fissurée prédite par la simulation et la fissuration observée expérimentalement. Précisons toutefois que des fissures ont également été observées sur les bords libres extérieurs de l'éprouvette.

La figure FIG. 7.11 représente la comparaison entre les courbes expérimentale et simulées de l'effort appliqué en fonction du déplacement. Il apparaît là encore que l'on a une bonne corrélation entre la simulation et l'expérience. En effet, on constate que l'on est capable de prédire avec une bonne précision la chute de rigidité consécutive à l'apparition de la fissuration.

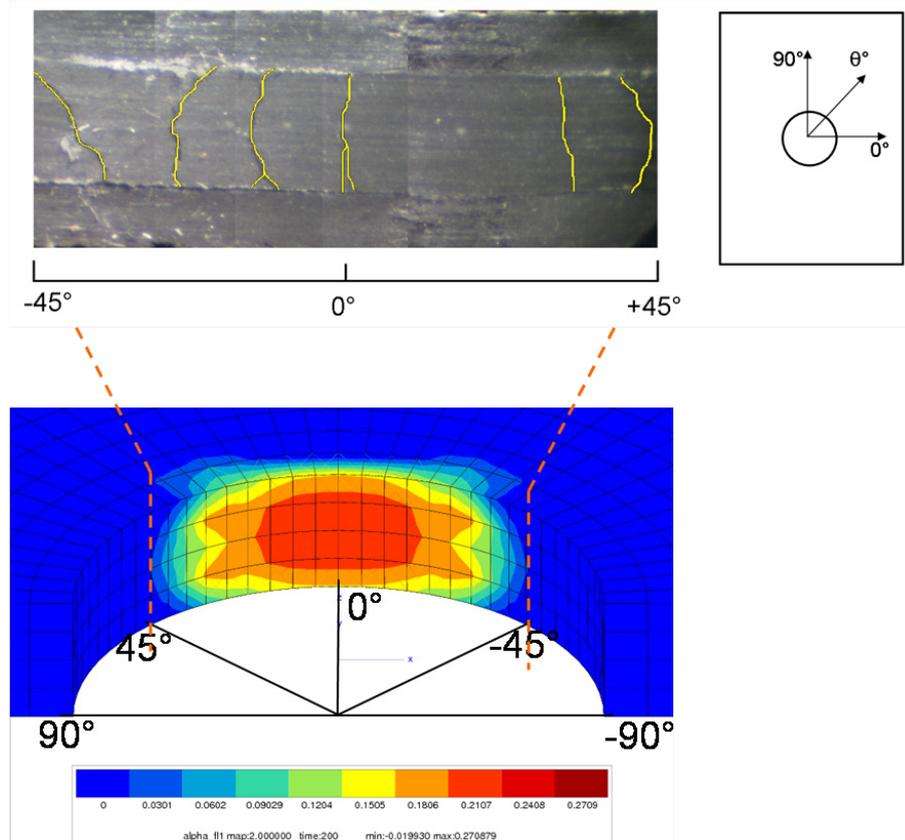


FIGURE 7.10 - Comparaison *Essai/calcul* du réseau de fissures à l'intérieur du trou d'une éprouvette trouée de séquence $(0_3^{\circ}/90_6^{\circ}/0_3^{\circ})$ soumise à un chargement quasi-statique

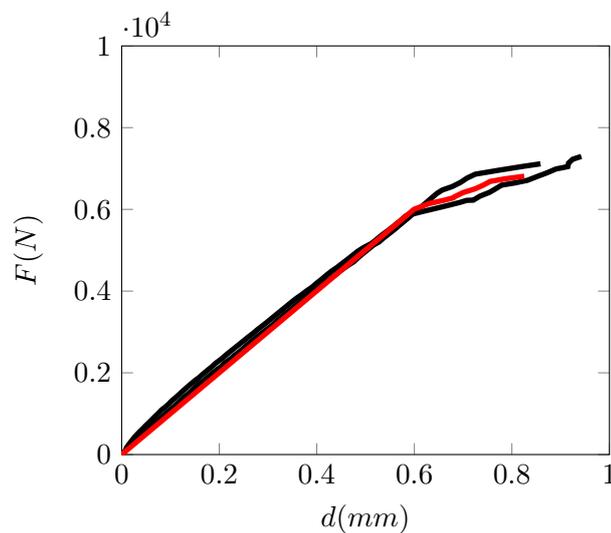


FIGURE 7.11 - Courbes *Effort/Déplacement* expérimentales et simulée de l'essai de traction quasi-statique sur éprouvette trouée.

7.5 Conclusion

Dans ce dernier chapitre, nous venons de présenter l'implémentation du modèle d'endommagement par fissuration intra-laminaire dans le code de calcul ZéBuLoN. Si le calcul quasi-statique peut se faire simplement de manière incrémentale, dans le cas de la fatigue cela s'avère plus complexe si l'on souhaite limiter les temps de calcul. Aussi, nous avons fait le choix d'adopter une approche de type saut de cycles. Dans le but de valider notre modèle et son identification, nous avons proposé une comparaison des résultats obtenus par la simulation d'un élément de volume avec les résultats d'un calcul par éléments finis sur une éprouvette lisse. Enfin, nous terminons par une application sur une structure plus complexe : une plaque trouée.

Chapitre 8

Conclusion & Perspectives

Les matériaux composites à matrice organique renforcée de fibres continues sont de plus en plus utilisés dans de nombreux domaines tels que l'industrie aéronautique, navale ou ferroviaire. Malgré les bonnes propriétés mécaniques qu'ils présentent ces matériaux sont sujets à plusieurs mécanismes d'endommagements qui se cumulent et peuvent nuire à la tenue de la structure, conduisant dans certains cas à la ruine totale. Il est donc important de pouvoir prédire les effets et les évolutions des différents types d'endommagement sur le comportement du stratifié afin de pouvoir dimensionner au mieux ce type de structures.

Ainsi, l'objectif de cette étude était de développer une démarche à la fois expérimentale et numérique permettant d'aboutir au développement d'un modèle permettant de prédire l'apparition et l'évolution de l'endommagement dans les structures composites soumises aussi bien à des sollicitations quasi-statiques que cycliques. La fissuration intra-laminaire étant l'endommagement prédominant à l'échelle du pli nous nous sommes limités à ce type d'endommagement dans cette étude.

Dans un premier temps, l'enjeu était de capitaliser un maximum d'informations, que ce soit sur le plan qualitatif ou sur le plan quantitatif. Le but étant d'identifier les principales caractéristiques de l'endommagement et les paramètres à prendre en compte dans notre modélisation. Pour cela nous avons mené notre étude expérimentale sur des stratifiés formés de plis unidirectionnels pour trois séquences d'empilement judicieusement choisies ($(0_3^{\circ}/90_{n=3,6,12}^{\circ})$, $(0_3^{\circ}/\pm 55_3^{\circ})$ et $(0_3^{\circ}/\pm 45_3^{\circ})$) soumises à des sollicitations quasi-statiques et cycliques.

Les principales caractéristiques mises en évidence lors de ces essais sont les suivantes :

- les fissures se présentent sous la forme d'un réseau de fissures planes et parallèles entre elles ;
- elles sont géométriquement identiques qu'elles soient créées par un chargement quasi-statique ou un chargement de fatigue ;
- l'apparition et la propagation complète des fissures sont quasi-simultanées ;
- les fissures sont réparties de façon homogène dans les plis fissurés ;
- la densité de fissures atteint un état de saturation en statique comme en fatigue.

D'autres parts, nous avons montré que la densité de fissures est inversement proportionnelle à l'épaisseur du pli fissuré. Aussi, nous avons introduit la grandeur α qui correspond au produit de la densité de fissures et de l'épaisseur du pli fissuré. L'introduction de cette grandeur permet de alors de s'affranchir de l'effet d'épaisseur.

En revanche, nous avons fait l'hypothèse que les phénomènes de viscosité et plasticité n'intervenaient pas dans le phénomène de fissuration. Si cela se vérifie dans les couches à 90° , pour les orientations intermédiaires, il est probable que ces phénomènes aient une plus forte influence.

S'appuyant sur ces observations expérimentales, nous avons proposé un modèle de comportement basé sur la thermodynamique des milieux continus. Ce type de formulation permettra dans le futur d'étoffer le modèle en prenant en compte d'autres mécanismes d'endommagement tels que les ruptures de fibres ou le délaminage. Le modèle, écrit à l'échelle du pli dans le cadre de la Mécanique de l'Endommagement, vise à modéliser la multiplication des fissures et à déterminer les chutes de rigidité associées. La fissuration est décrite par deux variables internes : l'une scalaire qui caractérise l'état d'endommagement, l'autre vectorielle qui traduit l'aspect directionnel de l'endommagement. La description du phénomène d'endommagement a été faite via une approche mésoscopique (écrite à l'échelle du pli) qui nous a permis d'écrire une loi d'évolution de la fissuration sur le pli homogène équivalent. L'apparition et la propagation des fissures étant supposées quasi-instantanées, l'évolution de la fissuration est caractérisée, non pas par la propagation des fissures, mais par la multiplication des ces dernières.

La loi d'évolution de l'endommagement a été déduite du formalisme utilisé dans le cas quasi-statique. Cela a été possible du fait de la similitude entre les endommagements quasi-statiques et de fatigue. Cette approche nous a en outre permis notamment de prendre en compte le caractère non linéaire du cumul de l'endommagement tel que cela a été mis en évidence expérimentalement. Finalement, le modèle possède un seuil d'endommagement unique qui joue le rôle de mémoire de l'endommagement et permet de prendre en compte d'éventuels chargement statiques.

Le rôle que nous avons souhaité attribuer au concept de fatigue est de considérer que les lois locales d'évolution sont écrites en utilisant comme variable d'intégration, non plus la variable temps, mais celle associée au nombre d'application d'une ou plusieurs sollicitations répétitives. De ce fait, l'intégration numérique de ces lois supprime les itérations temporelles inscrites au sein de la notion de cycle et les temps de calcul sont diminués.

Le problème de la fatigue résidant dans le fait qu'il s'agit avant tout d'un concept structural plutôt que local, nous avons montré, qu'il est important que les grandeurs structurales se reportent, sans distorsion, au niveau local afin de s'assurer de l'existence d'un compteur de « nombre de cycles » au niveau local. Dans le cadre que nous avons fixé, ce report des grandeurs structurales au niveau local est assuré ce qui nous a permis de légitimer le fait de pouvoir écrire et utiliser une loi de fatigue où figure une partie de l'évolution de la variable écrite avec l'incrément « dN » de nombre de cycles et ainsi de justifier la forme de la loi dévolution $d\alpha(M, N) = \Phi_\alpha(\dots)dN$ à partir de la forme originelle $d\alpha(M, t) = \Phi_\alpha(\dots)dt$ le plus indépendamment possible du phénomène considéré.

L'écriture du modèle l'échelle du pli, implémenté dans le code de calcul ZéBuLoN, permet de modéliser n'importe quel type d'empilement. Toutefois, nous avons vu que, si un calcul quasi-statique peut se faire simplement de manière incrémentale, le cas de la fatigue s'avère être plus complexe si l'on souhaite limiter les temps de calcul. C'est pourquoi nous avons choisis une approche de type saut de cycles. Cette méthode présentant l'avantage d'être totalement indépendante du modèle de comportement utilisé.

Enfin, dans une dernière partie, nous avons présenté une application du modèle au cas d'une plaque trouée, qui est une structure simple à fabriquer et qui se prêtait particulièrement bien à la validation de notre modèle dans la mesure où le trou, qui agit comme un concentrateur de contraintes, entraîne un état de contrainte multiaxial sous un chargement multiaxial.

Annexe A

Correspondance entre les angles d'Euler et les angles des coordonnées cylindriques et sphériques

A.1 Correspondance entre les angles d'Euler et les angles des coordonnées cylindriques

L'espace est rapporté au repère orthonormé $R_0 = (O, \vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$. On considère le repère des coordonnées cylindriques $R_C = (O, \vec{e}_l, \vec{e}_\varphi, \vec{x}_3) = (O, \vec{e}_\varphi, \vec{x}_3, \vec{e}_l)$ pour lequel, au point M (Fig. A.1) :

- H désigne la projection du point M dans le plan $(O, \vec{x}_1, \vec{x}_2)$;
- $l = \|\vec{OH}\|$;
- $\varphi_C = \widehat{(\vec{x}_1, \vec{OH})}$.

On considère également le repère $R = (O, \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$. R peut-être par exemple le repère local d'anisotropie d'un matériau. Il coïncide au départ avec R_0 . La valeur de φ_C étant fixée, on cherche quels sont les angles d'Euler (respectivement, ψ , la précession, θ , la nutation, φ , la rotation propre) qui permettent de mettre en coïncidence les repères R et R_C , c'est-à-dire d'avoir :

- $\vec{I} = \vec{e}_\varphi$;
- $\vec{J} = \vec{x}_3$;
- $\vec{K} = \vec{e}_l$,

sachant que pour $\psi = 0$, $\theta = 0$, $\varphi = 0$, $\vec{I} = \vec{x}_1$, $\vec{J} = \vec{x}_2$, $\vec{K} = \vec{x}_3$.

La première des rotations qui définit les angles d'Euler est la rotation d'angle ψ autour de l'axe (O, \vec{x}_3) et $\psi = \varphi_C + \frac{3\pi}{2}$. Le vecteur \vec{I} devient le vecteur qui oriente la ligne des noeuds. En tournant autour de cet axe, on met alors le vecteur \vec{K} en coïncidence avec le vecteur \vec{e}_l . L'angle de la rotation est $\theta = \frac{3\pi}{2}$ (afin de tourner dans

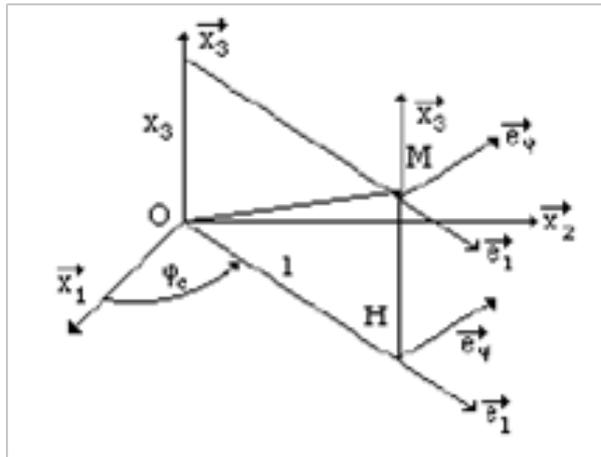


FIGURE A.1 - Repère des coordonnées cylindriques

le sens trigonométrique). Enfin, il convient de faire la rotation propre (autour de l'axe (O, \vec{K})). L'angle de la rotation propre est $\varphi = \pi$ (Fig. A.2).

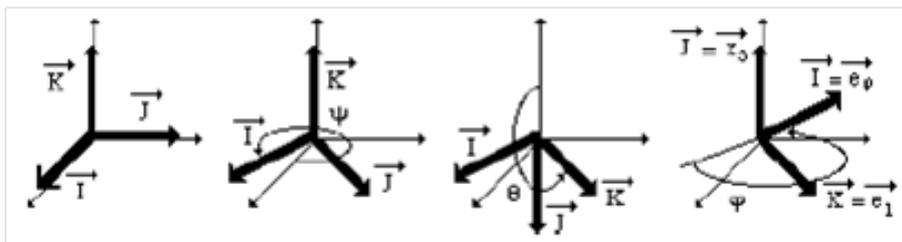


FIGURE A.2 - Mise en évidence des angles d'Euler

Remarque - L'angle φ permet d'indiquer l'angle d'inclinaison des couches d'un composite unidirectionnel. Dans ce cas, compte tenu des choix faits pour les différents repères, c'est le vecteur \vec{I} qui est choisi pour être aligné avec l'axe des fibres. Par exemple, si la structure composite est un cylindre dont l'axe est l'axe (O, \vec{x}_3) pour laquelle le processus d'enroulement est tel que les fibres sont parallèles à l'axe du cylindre alors $\vec{I} = -\vec{x}_3$ et $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

A.2 Correspondance entre les angles d'Euler et les angles des coordonnées sphériques

L'espace est rapporté au repère orthonormé $R_0 = (O, \vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$. On considère le repère des coordonnées sphériques $R_S = (O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi) = (O, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_r)$ pour lequel, au point M (Fig. A.6) :

- H désigne la projection du point M dans le plan $(O, \vec{x}_1, \vec{x}_2)$;
- $r = \|\vec{OM}\|$;
- $\theta_S = (\vec{x}_3, \vec{OM})$ et $\varphi_S = (\vec{x}_1, \vec{OH})$.

On considère également le repère $R = (O, \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$. R peut-être par exemple le repère local d'anisotropie d'un matériau. Il coïncide au départ avec R_0 . Les valeurs de φ_S

et θ_S étant fixées, on cherche quels sont les angles d'Euler (respectivement, ψ , la précession, θ , la nutation, φ , la rotation propre) qui permettent de mettre en coïncidence les repères R et R_S , c'est-à-dire d'avoir :

- $\vec{I} = \vec{e}_\theta$;
- $\vec{J} = \vec{e}_\varphi$;
- $\vec{K} = \vec{e}_r$,

sachant que pour $\psi = 0, \theta = 0, \varphi = 0, \vec{I} = \vec{x}_1, \vec{J} = \vec{x}_2, \vec{K} = \vec{x}_3$.

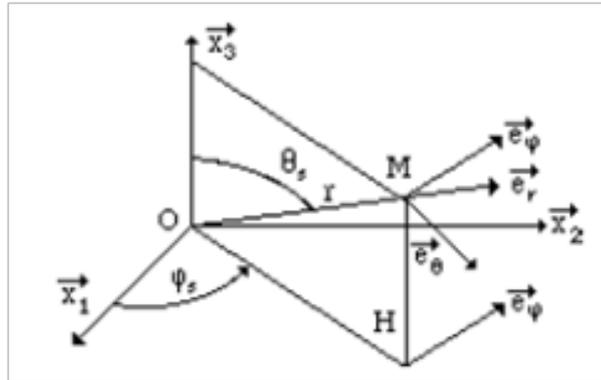


FIGURE A.3 - Repère des coordonnées sphériques

La première des rotations qui définit les angles d'Euler est la rotation d'angle ψ autour de l'axe (O, \vec{x}_3) et $\psi = \varphi_S + \frac{3\pi}{2}$. Le vecteur \vec{I} devient le vecteur qui oriente la ligne des noeuds. En tournant autour de cet axe, on met alors le vecteur \vec{K} en coïncidence avec le vecteur \vec{e}_r . L'angle de la rotation est $\theta = 2\pi - \theta_S$ (afin de tourner dans le sens trigonométrique). Enfin, il convient de faire la rotation propre (autour de l'axe (O, \vec{K})). L'angle de la rotation propre est $\varphi = \frac{\pi}{2}$ (voir Fig. A.6).

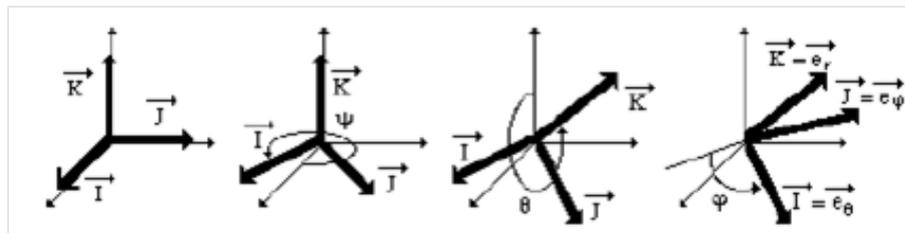


FIGURE A.4 - Mise en évidence des angles d'Euler

Remarque - L'angle φ permet d'indiquer l'angle d'inclinaison des couches d'un composite unidirectionnel. Dans ce cas, compte tenu des choix faits pour les différents repères, c'est le vecteur \vec{I} qui est choisi pour être aligné avec l'axe des fibres. Par exemple, si la structure composite est une sphère dont les pôles sont indiqués par l'axe (O, \vec{x}_3) pour laquelle le processus d'enroulement est tel que les fibres passent par les pôles et sont alignées avec les méridiens alors $\vec{I} = \vec{e}_\theta$ et $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

A.3 Lois de comportement élastique linéaire classiques d'un composite dans son repère local

La disposition géométrique des fibres dans un matériau composite entraîne généralement un comportement orthotrope ou isotrope transverse. Dans le repère local du pli, la loi de comportement linéaire élastique la plus générale s'écrit, en notation de Voigt :

$$\sigma_{loc} = C_{loc} * \varepsilon_{loc} \Leftrightarrow \varepsilon_{loc} = S_{loc} * \sigma_{loc}$$

Pour un matériau orthotrope on a :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & -\frac{\nu_{13}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix}$$

Pour un matériau isotrope transverse, on a :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & -\frac{\nu_{13}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\nu_{23})}{E_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix}$$

où :

- E_1, E_2, E_3 sont les modules d'élasticité longitudinaux ;
- G_{23}, G_{12}, G_{13} les modules de cisaillement ;
- $\nu_{12}, \nu_{13}, \nu_{23}$ les coefficients de Poisson.

Afin d'étudier le comportement du stratifié, il faut ramener la loi de comportement de chaque pli, dans le repère global du stratifié. Pour cela on utilise les formules de changement de base définies dans ce qui suit.

A.4 Formules de changement de base

A.4.1 Formules de changement de base pour les tenseurs des contraintes et des déformations

Les relations entre les contraintes et les déformations respectivement dans le repère du stratifié R et le repère local du pli R_{loc} , sont les suivantes :

$$\begin{cases} \sigma_R = P_\sigma * \sigma_{loc} \Leftrightarrow \sigma_{loc} = \overline{P}_\sigma * \sigma_R \\ \varepsilon_R = P_\varepsilon * \varepsilon_{loc} \Leftrightarrow \varepsilon_{loc} = \overline{P}_\varepsilon * \varepsilon_R \end{cases}$$

Les matrices de changement de base P_σ , \overline{P}_σ , P_ε et \overline{P}_ε seront définies dans la suite.

A.4.2 Formules de changement de base pour les tenseurs de rigidité et de souplesse

Dans le repère local et celui du stratifié, la loi de comportement s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \sigma_{R_{loc}} = C_{loc} * \varepsilon_{loc} \Leftrightarrow \varepsilon_{R_{loc}} = S_{loc} * \sigma_{loc} \\ \sigma_R = C_R * \varepsilon_R \Leftrightarrow \varepsilon_R = S_R * \sigma_R \end{cases}$$

Les relations entre les différents tenseurs sont les suivantes :

$$\begin{cases} C_{loc} = \overline{P}_\sigma : C_R : P_\varepsilon & \begin{cases} S_{loc} = \overline{P}_\varepsilon : S_R : P_\sigma \\ S_R = P_\varepsilon : S_{loc} : \overline{P}_\sigma \end{cases} \end{cases}$$

A.5 Application : structure plane en composite stratifié

On considère une structure stratifiée plane de type $[0^\circ, 90^\circ]_s$. Le repère orthonormé direct $R = (O, \vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ est le repère global du stratifié, où \vec{x}_1 est la direction principale de l'empilement et \vec{x}_3 la direction orthogonale à son plan. Le processus d'empilement est tel que les plis unidirectionnels (donc les fibres) sont parallèles au plan (\vec{x}_1, \vec{x}_2) . Enfin on définit un repère orthonormé local $R_{loc}^i = (\vec{x}_1^i, \vec{x}_2^i, \vec{x}_3^i)$, associé à chacun des plis, l'indice i définissant la i -ème couche (en partant du bas) du stratifié. Ainsi, chaque pli unidirectionnel se trouve dans une configuration telle que ses angles d'Euler sont : $\psi = 90^\circ$ (inclinaison de la couche), $\varphi = 0$ et $\theta = 0$. Il est clair, ici, que les repères R_{loc}^1 et R_{loc}^4 sont orientés comme R . Les repères R_{loc}^2 et R_{loc}^3 sont quant à eux désorientés par rapport à R d'une rotation de 90° autour de l'axe (O, \vec{x}_3) , voir Fig. A.5. On a donc la matrice $Q_{2,3}$ de passage des repères R_{loc}^2 et R_{loc}^3 à R et la matrice $Q_{1,4}$ de passage des repères R_{loc}^1 et R_{loc}^4 à R . Ces matrices seront données dans la suite.

A.5.1 Les matrices de changement de base

Pour chaque pli unidirectionnel i , orienté d'un angle ψ , on a :

$$\begin{cases} \vec{x}_1^i = \cos \psi \vec{x}_1 + \sin \psi \vec{x}_2 \\ \vec{x}_2^i = -\sin \psi \vec{x}_1 + \cos \psi \vec{x}_2 \end{cases}$$

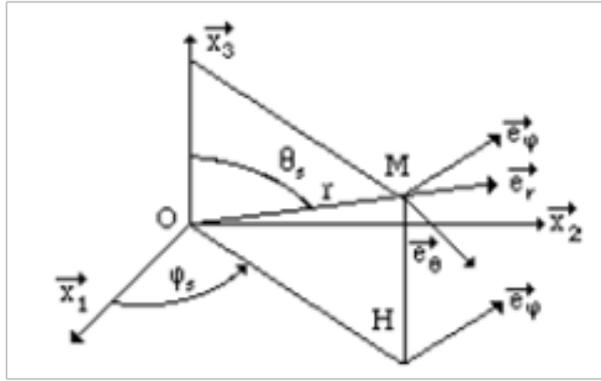


FIGURE A.5 - Repères global et local sur une éprouvette plane de type $[0^\circ, 90^\circ]_s$

Ainsi, on a la matrice Q de passage de R à R_{loc} , correspondant à la rotation d'angle ψ et sa transposée Q^T :

$$Q = \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad Q^T = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dans le cas considéré, les différentes matrices nécessaires au changement de base en notation de Voigt sont :

$$P_\sigma = \begin{pmatrix} c^2 & s^2 & 0 & 0 & 0 & -2cs \\ s^2 & c^2 & 0 & 0 & 0 & 2cs \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s & c & 0 \\ sc & -sc & 0 & 0 & 0 & c^2 - s^2 \end{pmatrix} \quad \overline{P}_\sigma = \begin{pmatrix} c^2 & s^2 & 0 & 0 & 0 & 2cs \\ s^2 & c^2 & 0 & 0 & 0 & -2cs \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s & c & 0 \\ -sc & sc & 0 & 0 & 0 & c^2 - s^2 \end{pmatrix}$$

$$P_\varepsilon = \begin{pmatrix} c^2 & s^2 & 0 & 0 & 0 & -cs \\ s^2 & c^2 & 0 & 0 & 0 & cs \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s & c & 0 \\ 2sc & -2sc & 0 & 0 & 0 & c^2 - s^2 \end{pmatrix} \quad \overline{P}_\varepsilon = \begin{pmatrix} c^2 & s^2 & 0 & 0 & 0 & cs \\ s^2 & c^2 & 0 & 0 & 0 & -cs \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s & c & 0 \\ -2sc & 2sc & 0 & 0 & 0 & c^2 - s^2 \end{pmatrix}$$

On peut ainsi effectuer le changement de base sur le tenseur des contraintes, le tenseur des déformations et les tenseurs de rigidité et de souplesse en utilisant les formules de changement de base définies précédemment.

A.6 Application : structure à symétrie sphérique en composite stratifié

On considère maintenant une structure stratifiée qui a la forme d'une demi-sphère de rayon extérieur r_{ext} et de rayon intérieur r_{int} . Soit le repère orthonormé $R =$

$(O, \vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ le repère global de la structure dont le pôle de la demi-sphère est indiqué par l'axe (O, \vec{x}_3) . Le processus d'enroulement est tel que les fibres passent par les pôles et sont alignées avec les méridiens. De la même manière que pour une structure plane, on définit un repère orthonormé local $R_{loc}^i = (\vec{x}_1^i, \vec{x}_2^i, \vec{x}_3^i)$, associé à chacune des couches, l'indice i définissant la i -ème couche (en partant du bas) du stratifié, voir Fig. A.6. La difficulté réside ici dans le fait que la direction des fibres d'un pli unidirectionnel varie le long de la structure. Or, comme nous l'avons vu précédemment, le repère local d'un pli est orienté par la direction des fibres. L'orientation du repère local de chaque pli va donc varier tout au long de la structure. Les matrices de passage des repères locaux R_{loc}^i au repère global de la structure vont donc dépendre du point considéré contrairement au cas des structures planes pour lesquelles les matrices sont constantes dans un pli. Il faut donc, dans ce cas, calculer la matrice de rotation en chaque point de Gauss de la structure. Ainsi, la valeur des angles d'Euler pour mettre en coïncidence R_{loc} et R dépend également du point considéré.

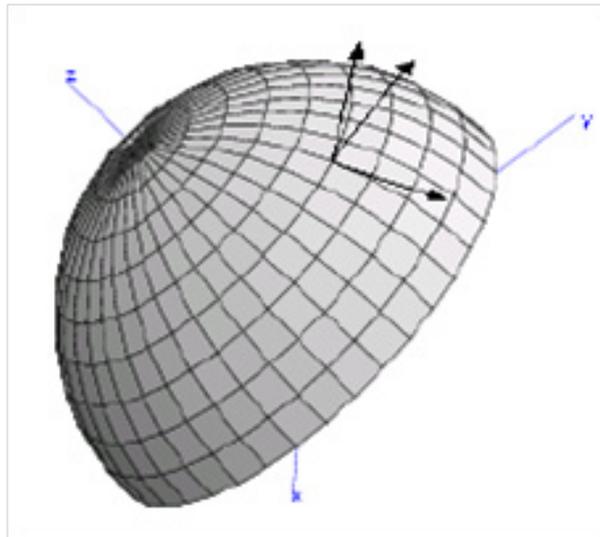


FIGURE A.6 - Repères global et local sur une structure demi-sphérique

A.6.1 Les matrices de changement de base

Le passage du repère local du pli au repère global de la structure se fait au travers de trois rotations respectivement d'angle ψ , θ et ϕ . Les trois matrices de rotation correspondantes sont :

$$Q_\psi = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad Q_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad Q_\phi = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice correspondant à la composition des trois rotations est :

A. Correspondance entre les angles d'Euler et les angles des coordonnées cylindriques et sphériques

$$Q_T = \left(\begin{array}{c|c|c} \cos \psi \cos \phi - \sin \psi \cos \theta \sin \varphi & -\cos \psi \sin \varphi - \sin \psi \cos \theta \cos \varphi & \sin \psi \sin \theta \\ \sin \psi \cos \phi - \cos \psi \cos \theta \sin \varphi & -\sin \psi \sin \varphi - \cos \psi \cos \theta \cos \varphi & -\cos \psi \sin \theta \\ \hline \sin \theta \sin \varphi & \sin \theta \cos \varphi & \cos \theta \end{array} \right)$$

La difficulté réside ici dans le fait que cette matrice n'est pas constante. En effet le repère local est tel que la direction des fibres est donnée par le vecteur \vec{x}_1^i . Or, par rapport au repère de référence, la direction des fibres évolue en fonction de la position du point considéré au sein de la structure, l'orientation du repère local est donc différente selon le point considéré, la valeur des angles d'Euler ψ, φ, θ est donc variable.

Annexe B

Construction de la fonction d'état énergie libre par la théorie des invariants

On souhaite construire la fonction d'état énergie libre Ψ dans la cas où l'on suppose au sein du domaine étudié :

- l'Hypothèse des Petites Perturbations ;
- la température constante et uniforme ;
- l'existence d'un phénomène interne modélisé par un vecteur \vec{V} ;
- que le groupe des symétries matérielles est le groupe $S_8 = \{I, \hat{I}, R_1, R_2, R_3, D_1, D_2, D_3\}$ avec :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \hat{I} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$R_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad R_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad D_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad D_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ici, les variables d'état se résument au 2-tenseur (symétrique) des déformations ε et aux trois vecteurs \vec{V}_1, \vec{V}_2 et \vec{V}_3 qui modélisent les phénomènes internes (les trois types de fissuration intralaminare). Cependant, nous faisons l'hypothèse que les trois types d'endommagement ne sont pas couplés, on peut donc limiter la recherche à l'ensemble des variables $V = \{\vec{V}, \varepsilon\}$ avec :

$$\vec{V} = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} \quad \varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}$$

Pour des raisons liées à des considérations physiques, on souhaite écrire la fonction énergie libre comme un polynôme invariant sous S_8 de degré partiel 0 ou 2 par rapport aux composantes de ε et \vec{V} . L'espace est ici $W = \mathbb{R}^3 \oplus M_{3sym}(\mathbb{R})$, avec $w = \vec{V} + \varepsilon$, ainsi :

$$X_w = X = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^9$$

Le problème à résoudre consiste à construire f telle que :

$$\forall g \in S_8, f(\rho_W(g)(w)) = f(w) \quad \text{où} \quad \rho_w(g)(w) = g * \vec{V} + g : \varepsilon : g^t$$

On cherche donc à construire le sous-groupe G_5 défini ci-dessous :

$$\begin{cases} G_8 = \{\rho_w(g), g \in S_8\} = \{\rho_w(I), \rho_w(\hat{I}), \rho_w(R_1), \rho_w(R_2), \rho_w(R_3), \rho_w(D_1), \rho_w(D_2), \rho_w(D_3)\} = \rho_w(S_8) \\ |G| \leq 8 \end{cases}$$

Afin de trouver $|G|$, il convient de faire les calculs explicites de l'ensemble G_5 . C'est ce qui est fait dans la suite.

Ecrivons :

$$\begin{cases} \vec{V}' = g * \vec{V} \\ \varepsilon' = g : \varepsilon : g^T \end{cases}$$

Si $g = I$, on a :

$$\vec{V}' = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} \varepsilon' = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow X' = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{33} \end{pmatrix}$$

La matrice $\rho_W(I)$ telle que $X' = \rho_W(I) * X$ est donc :

$$\rho_W(I) = I_9 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si $g = \hat{I}$, on a :

$$\vec{V}' = \begin{pmatrix} -V_1 \\ -V_2 \\ -V_3 \end{pmatrix} \varepsilon' = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow X' = \begin{pmatrix} -V_1 \\ -V_2 \\ -V_3 \\ \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{33} \end{pmatrix}$$

La matrice $\rho_W(\hat{I})$ telle que $X' = \rho_W(\hat{I}) * X$ est donc :

$$\rho_W(\hat{I}) = I_9 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si $g = R_1$, on a :

$$\vec{V}' = \begin{pmatrix} -V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} \varepsilon' = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & -\varepsilon_{12} & -\varepsilon_{13} \\ -\varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ -\varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow X' = \begin{pmatrix} -V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ \varepsilon_{11} \\ -\varepsilon_{12} \\ -\varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{33} \end{pmatrix}$$

La matrice $\rho_W(R_1)$ telle que $X' = \rho_W(R_1) * X$ est donc :

$$\rho_W(R_1) = R'_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si $g = R_2$, on a :

$$\vec{V}' = \begin{pmatrix} V_1 \\ -V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} \varepsilon' = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & -\varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ -\varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & -\varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} & -\varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow X' = \begin{pmatrix} V_1 \\ -V_2 \\ V_3 \\ \varepsilon_{11} \\ -\varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{22} \\ -\varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{33} \end{pmatrix}$$

La matrice $\rho_W(R_2)$ telle que $X' = \rho_W(R_2) * X$ est donc :

$$\rho_W(R_2) = R'_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si $g = R_3$, on a :

$$\vec{V}' = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ -V_3 \end{pmatrix} \varepsilon' = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & -\varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & -\varepsilon_{23} \\ -\varepsilon_{13} & -\varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow X' = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ -V_3 \\ \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{12} \\ -\varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{22} \\ -\varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{33} \end{pmatrix}$$

La matrice $\rho_W(R_3)$ telle que $X' = \rho_W(R_3) * X$ est donc :

$$\rho_W(R_3) = R'_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si $g = D_1$, on a :

$$\vec{V}' = \begin{pmatrix} V_1 \\ -V_2 \\ -V_3 \end{pmatrix} \varepsilon' = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & -\varepsilon_{12} & -\varepsilon_{13} \\ -\varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ -\varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow X' = \begin{pmatrix} V_1 \\ -V_2 \\ -V_3 \\ \varepsilon_{11} \\ -\varepsilon_{12} \\ -\varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{33} \end{pmatrix}$$

La matrice $\rho_W(D_1)$ telle que $X' = \rho_W(D_1) * X$ est donc :

$$\rho_W(D_1) = D'_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si $g = D_2$, on a :

$$\vec{V}' = \begin{pmatrix} -V_1 \\ V_2 \\ -V_3 \end{pmatrix} \varepsilon' = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & -\varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ -\varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & -\varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} & -\varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow X' = \begin{pmatrix} -V_1 \\ V_2 \\ -V_3 \\ \varepsilon_{11} \\ -\varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{22} \\ -\varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{33} \end{pmatrix}$$

La matrice $\rho_W(D_2)$ telle que $X' = \rho_W(D_2) * X$ est donc :

$$\rho_W(D_2) = D'_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si $g = D_3$, on a :

$$\vec{V}' = \begin{pmatrix} -V_1 \\ -V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} \varepsilon' = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & -\varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ -\varepsilon_{13} & -\varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow X' = \begin{pmatrix} -V_1 \\ -V_2 \\ V_3 \\ \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{12} \\ -\varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{22} \\ -\varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{33} \end{pmatrix}$$

La matrice $\rho_W(D_3)$ telle que $X' = \rho_W(D_3) * X$ est donc :

$$\rho_W(D_3) = D'_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Finalement, on a :

$$\begin{cases} G_8 = \{\rho_w(g), g \in S_5\} = \{\rho_w(I), \rho_w(\hat{I}), \rho_w(R_1), \rho_w(R_2), \rho_w(R_3), \rho_w(D_1), \rho_w(D_2), \rho_w(D_3)\} = \rho_w(S_8) \\ |G| = 8 \end{cases}$$

avec :

$$\begin{aligned} \rho_W(I) &= \text{diagonal}(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1) \\ \rho_W(\hat{I}) &= \text{diagonal}(-1, -1, -1, 1, 1, 1, 1, 1, 1) \\ \rho_W(R_1) &= \text{diagonal}(-1, 1, 1, 1, -1, -1, 1, 1, 1) \\ \rho_W(R_2) &= \text{diagonal}(1, -1, 1, 1, -1, 1, 1, -1, 1) \\ \rho_W(R_3) &= \text{diagonal}(1, 1, -1, 1, 1, -1, 1, -1, 1) \\ \rho_W(D_1) &= \text{diagonal}(1, -1, -1, 1, -1, -1, 1, 1, 1) \end{aligned}$$

$$\rho_W(D_2) = diagonal(-1, 1, -1, 1, -1, 1, 1, -1, 1)$$

$$\rho_W(D_3) = diagonal(-1, -1, 1, 1, 1, -1, 1, -1, 1)$$

On souhaite maintenant construire une famille génératrice des invariants polynômiaux, sous S_8 , des variables \vec{V} et ε . Pour cela on applique le Théorème de Noether.

$$F'_8 = \left\{ \begin{array}{l} R_{G_8}(X^\alpha) = \frac{1}{8} \left\{ (\rho_W(I) * X)^\alpha + (\rho_W(\hat{I}) * X)^\alpha + (\rho_W(R_1) * X)^\alpha + (\rho_W(R_2) * X)^\alpha \right. \\ \quad \left. + (\rho_W(R_3) * X)^\alpha + (\rho_W(D_1) * X)^\alpha + (\rho_W(D_2) * X)^\alpha + (\rho_W(D_3) * X)^\alpha \right\} \\ \forall \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_9) \in \mathbb{N}^9 \text{ avec } |\alpha| \leq 8 \end{array} \right\}$$

Cependant, compte-tenu du fait que l'on cherche la fonction énergie libre sous la forme d'un polynôme de degré total inférieur ou égal à 4 et puisque les matrices $\rho_W(g)$, $g \in G_8$ sont diagonales, on peut se restreindre à une sous-famille de degré 4, ce qui revient à prendre $\alpha \leq 4$.

On considère α quelconque

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_9) \Rightarrow X^\alpha = V_1^{\alpha_1} V_2^{\alpha_2} V_3^{\alpha_3} \varepsilon_{11}^{\alpha_4} \varepsilon_{12}^{\alpha_5} \varepsilon_{13}^{\alpha_6} \varepsilon_{22}^{\alpha_7} \varepsilon_{23}^{\alpha_8} \varepsilon_{33}^{\alpha_9}$$

$$(\rho_w(I) * X)^\alpha = V_1^{\alpha_1} V_2^{\alpha_2} V_3^{\alpha_3} \varepsilon_{11}^{\alpha_4} \varepsilon_{12}^{\alpha_5} \varepsilon_{13}^{\alpha_6} \varepsilon_{22}^{\alpha_7} \varepsilon_{23}^{\alpha_8} \varepsilon_{33}^{\alpha_9}$$

$$(\rho_w(\hat{I}) * X)^\alpha = (-V_1)^{\alpha_1} (-V_2)^{\alpha_2} (-V_3)^{\alpha_3} \varepsilon_{11}^{\alpha_4} \varepsilon_{12}^{\alpha_5} \varepsilon_{13}^{\alpha_6} \varepsilon_{22}^{\alpha_7} \varepsilon_{23}^{\alpha_8} \varepsilon_{33}^{\alpha_9}$$

$$(\rho_w(R_1) * X)^\alpha = (-V_1)^{\alpha_1} V_2^{\alpha_2} V_3^{\alpha_3} \varepsilon_{11}^{\alpha_4} (-\varepsilon_{12})^{\alpha_5} (-\varepsilon_{13})^{\alpha_6} \varepsilon_{22}^{\alpha_7} (-\varepsilon_{23})^{\alpha_8} \varepsilon_{33}^{\alpha_9}$$

$$(\rho_w(R_2) * X)^\alpha = V_1^{\alpha_1} (-V_2)^{\alpha_2} V_3^{\alpha_3} \varepsilon_{11}^{\alpha_4} (-\varepsilon_{12})^{\alpha_5} \varepsilon_{13}^{\alpha_6} \varepsilon_{22}^{\alpha_7} (-\varepsilon_{23})^{\alpha_8} \varepsilon_{33}^{\alpha_9}$$

$$(\rho_w(R_3) * X)^\alpha = V_1^{\alpha_1} V_2^{\alpha_2} (-V_3)^{\alpha_3} \varepsilon_{11}^{\alpha_4} (-\varepsilon_{12})^{\alpha_5} (-\varepsilon_{13})^{\alpha_6} \varepsilon_{22}^{\alpha_7} \varepsilon_{23}^{\alpha_8} \varepsilon_{33}^{\alpha_9}$$

$$(\rho_w(D_1) * X)^\alpha = V_1^{\alpha_1} (-V_2)^{\alpha_2} (-V_3)^{\alpha_3} \varepsilon_{11}^{\alpha_4} (-\varepsilon_{12})^{\alpha_5} (-\varepsilon_{13})^{\alpha_6} \varepsilon_{22}^{\alpha_7} \varepsilon_{23}^{\alpha_8} \varepsilon_{33}^{\alpha_9}$$

$$(\rho_w(D_2) * X)^\alpha = (-V_1)^{\alpha_1} V_2^{\alpha_2} (-V_3)^{\alpha_3} \varepsilon_{11}^{\alpha_4} (-\varepsilon_{12})^{\alpha_5} \varepsilon_{13}^{\alpha_6} \varepsilon_{22}^{\alpha_7} (-\varepsilon_{23})^{\alpha_8} \varepsilon_{33}^{\alpha_9}$$

$$(\rho_w(D_3) * X)^\alpha = (-V_1)^{\alpha_1} (-V_2)^{\alpha_2} V_3^{\alpha_3} \varepsilon_{11}^{\alpha_4} \varepsilon_{12}^{\alpha_5} (-\varepsilon_{13})^{\alpha_6} \varepsilon_{22}^{\alpha_7} (-\varepsilon_{23})^{\alpha_8} \varepsilon_{33}^{\alpha_9}$$

L'application stricte du Théorème de Noether donne une première famille F'_5 de générateurs :

$$F'_8 = \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, V_1^2, V_2^2, V_3^2, \varepsilon_{11}^2, \varepsilon_{12}^2, \varepsilon_{13}^2, \varepsilon_{11}\varepsilon_{22}, \varepsilon_{22}^2, \varepsilon_{23}^2, \varepsilon_{11}\varepsilon_{33}, \varepsilon_{22}\varepsilon_{33}, \varepsilon_{33}^2, \\ V_1^2\varepsilon_{11}, V_2^2\varepsilon_{11}, V_3^2\varepsilon_{11}, \varepsilon_{11}^3, V_1V_2\varepsilon_{12}, \varepsilon_{11}\varepsilon_{12}^2, V_1V_3\varepsilon_{13}, \varepsilon_{11}\varepsilon_{13}^2, V_1^2\varepsilon_{22}, V_2^2\varepsilon_{22}, V_3^2\varepsilon_{22}, \\ \varepsilon_{11}^2\varepsilon_{22}, \varepsilon_{12}^2\varepsilon_{22}, \varepsilon_{13}^2\varepsilon_{22}, \varepsilon_{11}\varepsilon_{22}^2, \varepsilon_{22}^3, V_2V_3\varepsilon_{23}, \varepsilon_{12}\varepsilon_{13}\varepsilon_{23}, \varepsilon_{11}\varepsilon_{23}^2, \varepsilon_{22}\varepsilon_{23}^2, V_1^2\varepsilon_{33}, V_2^2\varepsilon_{33}, \\ V_3^2\varepsilon_{33}, \varepsilon_{11}^2\varepsilon_{33}, \varepsilon_{12}^2\varepsilon_{33}, \varepsilon_{13}^2\varepsilon_{33}, \varepsilon_{11}\varepsilon_{22}\varepsilon_{33}, \varepsilon_{22}^2\varepsilon_{33}, \varepsilon_{23}^2\varepsilon_{33}, \varepsilon_{11}\varepsilon_{33}^2, \varepsilon_{22}\varepsilon_{33}^2, \varepsilon_{33}^3, V_1^4, \\ V_1^2V_2^2, V_2^4, V_1^2V_3^2, V_2^2V_3^2, V_3^4, V_1^2\varepsilon_{11}^2, V_2^2\varepsilon_{11}^2, V_3^2\varepsilon_{11}^2, \varepsilon_{11}^4, V_1V_2\varepsilon_{11}\varepsilon_{12}, V_1^2\varepsilon_{12}^2, \\ V_2^2\varepsilon_{12}^2, V_3^2\varepsilon_{12}^2, \varepsilon_{11}^2\varepsilon_{12}^2, \varepsilon_{12}^4, V_1V_3\varepsilon_{11}\varepsilon_{13}, V_2V_3\varepsilon_{12}\varepsilon_{13}, V_1^2\varepsilon_{13}^2, V_2^2\varepsilon_{13}^2, V_3^2\varepsilon_{13}^2, \\ \varepsilon_{11}^2\varepsilon_{13}^2, \varepsilon_{12}^2\varepsilon_{13}^2, \varepsilon_{13}^4, V_1^2\varepsilon_{11}\varepsilon_{22}, V_2^2\varepsilon_{11}\varepsilon_{22}, V_3^2\varepsilon_{11}\varepsilon_{22}, \varepsilon_{11}^3\varepsilon_{22}, V_1V_2\varepsilon_{12}\varepsilon_{22}, \varepsilon_{11}\varepsilon_{12}^2\varepsilon_{22}, \\ V_1V_3\varepsilon_{13}\varepsilon_{22}, \varepsilon_{11}\varepsilon_{13}^2\varepsilon_{22}, V_1^2\varepsilon_{22}^2, V_2^2\varepsilon_{22}^2, V_3^2\varepsilon_{22}^2, \varepsilon_{11}^2\varepsilon_{22}^2, \varepsilon_{12}^2\varepsilon_{22}^2, \varepsilon_{13}^2\varepsilon_{22}^2, \varepsilon_{11}\varepsilon_{22}^2, \varepsilon_{22}^4, \\ V_2V_3\varepsilon_{11}\varepsilon_{23}, V_1V_3\varepsilon_{12}\varepsilon_{23}, V_1V_2\varepsilon_{13}\varepsilon_{23}, \varepsilon_{11}\varepsilon_{12}\varepsilon_{13}\varepsilon_{23}, V_2V_3\varepsilon_{22}\varepsilon_{23}, \varepsilon_{12}\varepsilon_{13}\varepsilon_{22}\varepsilon_{23}, V_1^2\varepsilon_{23}^2, V_2^2\varepsilon_{23}^2, \\ V_3^2\varepsilon_{23}^2, \varepsilon_{11}^2\varepsilon_{23}^2, \varepsilon_{12}^2\varepsilon_{23}^2, \varepsilon_{13}^2\varepsilon_{23}^2, \varepsilon_{11}\varepsilon_{22}\varepsilon_{23}^2, \varepsilon_{22}^2\varepsilon_{23}^2, \varepsilon_{23}^4, V_1^2\varepsilon_{11}\varepsilon_{33}, V_2^2\varepsilon_{11}\varepsilon_{33}, V_3^2\varepsilon_{11}\varepsilon_{33}, \\ \varepsilon_{11}^3\varepsilon_{33}, V_1V_2\varepsilon_{12}\varepsilon_{33}, \varepsilon_{11}\varepsilon_{12}^2\varepsilon_{33}, V_1V_3\varepsilon_{13}\varepsilon_{33}, \varepsilon_{11}\varepsilon_{13}^2\varepsilon_{33}, V_1^2\varepsilon_{22}\varepsilon_{33}, V_2^2\varepsilon_{22}\varepsilon_{33}, V_3^2\varepsilon_{22}\varepsilon_{33}, \\ \varepsilon_{11}^2\varepsilon_{22}\varepsilon_{33}, \varepsilon_{12}^2\varepsilon_{22}\varepsilon_{33}, \varepsilon_{13}^2\varepsilon_{22}\varepsilon_{33}, \varepsilon_{22}^3\varepsilon_{33}, V_2V_3\varepsilon_{23}\varepsilon_{33}, \varepsilon_{12}\varepsilon_{13}\varepsilon_{23}\varepsilon_{33}, \varepsilon_{11}\varepsilon_{23}^2\varepsilon_{33}, \varepsilon_{22}\varepsilon_{23}^2\varepsilon_{33}, \\ V_1^2\varepsilon_{33}^2, V_2^2\varepsilon_{33}^2, V_3^2\varepsilon_{33}^2, \varepsilon_{11}^2\varepsilon_{33}^2, \varepsilon_{12}^2\varepsilon_{33}^2, \varepsilon_{13}^2\varepsilon_{33}^2, \varepsilon_{11}\varepsilon_{22}\varepsilon_{33}^2, \varepsilon_{22}^2\varepsilon_{33}^2, \varepsilon_{23}^2\varepsilon_{33}^2, \varepsilon_{11}\varepsilon_{33}^3, \\ \varepsilon_{22}\varepsilon_{33}^3, \varepsilon_{33}^4 \end{array} \right.$$

Il existe des relations entre les éléments de cette famille. En utilisant toutes ces relations afin de déduire de F'_8 une famille d'éléments dont aucun n'est en relation, sous la forme $I_i = f()$ avec un autre, on construit ainsi par définition, une base d'intégrité. On la note F_8 :

$$F_8 = \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, V_1^2, V_2^2, V_3^2, \varepsilon_{12}^2, \varepsilon_{13}^2, \varepsilon_{23}^2, V_1V_2\varepsilon_{12}, V_1V_3\varepsilon_{13}, V_2V_3\varepsilon_{23}, \\ V_2V_3\varepsilon_{12}\varepsilon_{13}, V_1V_3\varepsilon_{12}\varepsilon_{23}, V_2V_3\varepsilon_{13}\varepsilon_{23}, V_1V_2\varepsilon_{13} \end{array} \right.$$

Ainsi, le polynôme recherché peut s'écrire sous la forme $\Psi(\varepsilon, \vec{V}) = \varphi_{20}(\varepsilon) + \varphi_{02}(\vec{V}) + \varphi_{22}(\varepsilon, \vec{V})$ avec :

$$\varphi_{20}(\varepsilon) = A_1\varepsilon_{11}^2 + A_2\varepsilon_{11}\varepsilon_{22} + A_3\varepsilon_{11}\varepsilon_{33} + A_4\varepsilon_{22}^2 + A_5\varepsilon_{22}\varepsilon_{33} + A_6\varepsilon_{23}^2 + A_7\varepsilon_{33}^2 + A_8\varepsilon_{12}^2 + A_9\varepsilon_{13}^2$$

$$\begin{aligned} \varphi_{22}(\varepsilon, \vec{V}) = & (B_1\varepsilon_{11}^2 + B_2\varepsilon_{11}\varepsilon_{22} + B_3\varepsilon_{11}\varepsilon_{33} + B_4\varepsilon_{22}^2 + B_5\varepsilon_{22}\varepsilon_{33} + B_6\varepsilon_{23}^2 + B_7\varepsilon_{33}^2 + B_8\varepsilon_{12}^2 + B_9\varepsilon_{13}^2)V_1^2 \\ & + (C_1\varepsilon_{11}^2 + C_2\varepsilon_{11}\varepsilon_{22} + C_3\varepsilon_{11}\varepsilon_{33} + C_4\varepsilon_{22}^2 + C_5\varepsilon_{22}\varepsilon_{33} + C_6\varepsilon_{23}^2 + C_7\varepsilon_{33}^2 + C_8\varepsilon_{12}^2 + C_9\varepsilon_{13}^2)V_2^2 \\ & + (D_1\varepsilon_{11}^2 + D_2\varepsilon_{11}\varepsilon_{22} + D_3\varepsilon_{11}\varepsilon_{33} + D_4\varepsilon_{22}^2 + D_5\varepsilon_{22}\varepsilon_{33} + D_6\varepsilon_{23}^2 + D_7\varepsilon_{33}^2 + D_8\varepsilon_{12}^2 + D_9\varepsilon_{13}^2)V_3^2 \\ & + (E_1\varepsilon_{11}\varepsilon_{12} + E_2\varepsilon_{12}\varepsilon_{22} + E_3\varepsilon_{12}\varepsilon_{33} + E_4\varepsilon_{13}\varepsilon_{23})V_1V_2 \\ & + (F_1\varepsilon_{11}\varepsilon_{13} + F_2\varepsilon_{22}\varepsilon_{13} + F_3\varepsilon_{33}\varepsilon_{13} + F_4\varepsilon_{12}\varepsilon_{23})V_1V_3 \\ & + (G_1\varepsilon_{11}\varepsilon_{23} + G_2\varepsilon_{22}\varepsilon_{23} + G_3\varepsilon_{33}\varepsilon_{23} + G_4\varepsilon_{12}\varepsilon_{13})V_2V_3 \end{aligned}$$

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [Abry et al., 2001] Abry, J., Choi, Y., Chateauminois, A., and Dalloz, B. and Salvi, M. (2001). In situ monitoring of damage in CFRP laminates by means of ac and dc measurement. *Composites Sciences and Technology*, vol. 61 :855–864.
- [Alberola et al., 1999] Alberola, N.-D., Merle, G., and Benzarti, K. (1999). Unidirectional reinforced polymers : analytical morphology approach and mechanical modeling based on percolation concept. *Polymers*, vol. 40 :315–3284.
- [Allen, 2001] Allen, D. (2001). Homogenization principles and their application to continuum. *Composites Sciences and Technology*, vol. 61(15) :2223–2230.
- [Allix and Ladevèze, 1992] Allix, O. and Ladevèze, P. (1992). Interlaminar interface modelling for the prediction of delamination. *Composite Structures*, vol.22 :235–242.
- [Aussedat-Yahia, 1997] Aussedat-Yahia, E. (1997). *Comportement et endommagement du composite tissé Carbone/PMR15 soumis à des chargements mécaniques et thermiques*. PhD thesis, École Nationale Supérieure des Mines de Paris.
- [Aveston and Kelly, 1973] Aveston, J. and Kelly, A. (1973). Theory of multiple fracture of fibrous composites. *Journal of Material Science*, vol. 8(3) :352–362.
- [Bader et al., 1979] Bader, M., Bailey, J., Curtis, P., and Parvizi, A. (1979). The mechanisms of initiation and development of damage in multi-axial fibre-reinforced plastic laminates. In *ICM 3*. Proceedings.
- [Bader and Boniface, 1985] Bader, M. and Boniface, L. (1985). Damage development during quasi-static and cyclic loading in GRP and CFRP laminates containing 90° plies. In *Fifth International Conference on Composite Materials*, pages 221–232. The Metallurgical Society. Proceedings.
- [Bailey and Parvizi, 1981] Bailey, J. and Parvizi, A. (1981). On fibre debonding effects and the mechanisms of transverse-ply failure in cross-ply laminates of glass fiber/thermoset composites. *Journal of Material Science*, vol. 16 :649–659.
- [Barrau and Laroze, 1987] Barrau, J. and Laroze, S. (1987). *Calcul des structures en matériaux composites*. Eyrolles et Masson.
- [Bathias and Bailon, 1980] Bathias, C. and Bailon, J. (1980). *La fatigue des matériaux et des structures*. Les Presses de l'Université de Montréal.

- [Berthelot, 1999] Berthelot, J. (1999). *Matériaux composites, Comportement mécanique et analyse des structures*. Tec & Doc, 3^{ème} édition.
- [Berthelot and Le Corre, 2000] Berthelot, J.-M. and Le Corre, J.-F. (2000). Statistical analysis of the progression of transverse cracking and delamination in cross-ply laminates. *Composites Sciences and Technology*, vol. 60 :2659–2669.
- [Berthelot et al., 1996] Berthelot, J.-M., Leblond, P., Mahi, E., and Le Corre, J.-F. (1996). Transverse cracking of cross-ply laminates : Part 1. analysis. *Composites Part A*, vol. 27A :989–1001.
- [Besson et al., 2001] Besson, J., Cailletaud, G., Chaboche, J., and Forest, S. (2001). *Mécanique non linéaire des matériaux*. Hermes.
- [Blassiau, 2005] Blassiau, S. (2005). *Modélisation des phénomènes microstructuraux au sein d'un composite unidirectionnel carbone / epoxy et prediction de durée de vie : contrôle et classification de réservoirs bobinés*. PhD thesis, École Nationale Supérieure des Mines de Paris.
- [Blassiau et al., 2008] Blassiau, S., Thionnet, A., and Bunsell, A. (2008). Micromechanisms of load transfer in a unidirectional carbon-fibre epoxy composite due to fibre failures. Part 3 : Multiscale reconstruction of composite behavior. *Composite Structures*, vol. 83 :312–323.
- [Boisse et al., 1990] Boisse, P., Bussy, P., and Ladevèze, P. (1990). A new approach in non-linear mechanics - the large time increment method. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, vol. 29 :647–663.
- [Boniface and Ogin, 1989] Boniface, L. and Ogin, S. (1989). Application of the paris equation to the fatigue growth of transverse ply cracks. *Journal of Composite Materials*, vol. 23 :735–754.
- [Boniface et al., 1987] Boniface, L., Smith, P., Ogin, S., and Bader, M. (1987). Observation on transverse ply crack growth in ($0^\circ/90^\circ$)_s CFRP laminate under monotonic and cyclic loading. In *Sixth International Conference on Composite Materials (ICCM 6) and Second European Conference on Composite Materials (ECCM 2)*, volume 3, pages 3156–3165. New York Elsevier. Proceedings.
- [Burcham et al., 1995] Burcham, L., Eduljee, R., and Gillespie, J. (1995). Investigation of the microcracking behavior of bismaleimide composites during thermal aging. *Polymer Composites*, vol. 16 :507–517.
- [Camanho and Dàvilla, 2002] Camanho, P.-P. and Dàvilla, C.-G. (2002). Mixed-mode decohesion finite elements for the simulation of delamination in composite materials. In *NASA/TM 2002-211-737*.
- [Caron et al., 2006] Caron, J., Diaz Diaz, A., Carreira, R., Chabot, A., and Ehlacher, A. (2006). Multi-particle modelling for the prediction of delamination in multi-layered materials. *Composites Sciences and Technology*, vol. 66 :755–765.
- [Caron and Ehlacher, 1997a] Caron, J. and Ehlacher, A. (1997a). Modelling of fatigue microcracking kinetics in crossply and experimental validation. In Degallaix, S., Bathias, C., and Fougères, R., editors, *International Conference on fatigue of composites*, pages 378–385. La Société Française de Métallurgie et des Matériaux. Proceedings.

- [Caron and Ehrlacher, 1997b] Caron, J. and Ehrlacher, A. (1997b). Modelling the kinetics of transverse cracking in composite laminates. *Composites Sciences and Technology*, vol.57 :1261–1270.
- [Chaboche, 1979] Chaboche, J. (1979). Le concept de contrainte effective appliqué à l'élasticité et la viscoplasticité en présence d'endommagement anisotrope. In Boehler, J.-P., editor, *Colloque EUROMECH 115*, pages 737–760. Editions du CNRS. Proceedings.
- [Chaboche, 1992] Chaboche, J. (1992). Damage induce anisotropy : On the difficulties associated with the active/passive unilateral condition. *International Journal of damage mechanics*, vol.1 :–.
- [Chaboche, 1994] Chaboche, J. (1994). Mécanique de l'endommagement, anisotropie et désactivation du dommage. In 7^{ème} colloque Mecamat. Proceedings.
- [Chaboche et al., 1994] Chaboche, J., P.M., L., and Maire, J. (1994). Macroscopic modelling of inelastic and damage processes with unilateral effects in thermostructural composite materials. In *ASME Winter Annual Meeting*. Proceedings.
- [Chatain, 2001] Chatain, M. (2001). Matériaux composites : Présentation générale. *Techniques de l'ingénieur*, AM5000.
- [Chou and Croman, 1979] Chou, P. and Croman, R. (1979). Degradation and Sudden-Death Models of Fatigue of Graphite/ Epoxye-Laminates. In : *Composite Materials : Testing and Design*, Tsai SW Ed., ASTM STP 674 :431–454.
- [Cox, 1952] Cox, H. (1952). The elasticity and strength of paper and other fibrous material. *British Journal of Applied Physics*, vol.3 :72–79.
- [Daniel and Charewicz, 1986] Daniel, I. and Charewicz, A. (1986). Fatigue damage mechanisms and residual properties of graphite/epoxy laminates. *Engineering Fracture Mechanics*, vol.25 :793–808.
- [Degriek and Van Paepegem, 2001] Degriek, J. and Van Paepegem, W. (2001). Fatigue damage modelling of fibre-reinforced composite materials :review. *Applied Mechanics Review*, vol.54 :279–300.
- [Diao et al., 1995] Diao, X., Ya, L., and Mai, Y.-W. (1995). Simulation of Fatigue Performance of Cross-ply laminates. *Applied Composites Materials*, vol. 3 :391–406.
- [Diaz Diaz and Caron, 2006] Diaz Diaz, A. and Caron, J.-F. (2006). Prediction of the onset of mode III delamination in carbon-epoxy laminates. *Composites Structures*, vol.72 :438–445.
- [Engrand, 1981] Engrand, E. (1981). A boundary layer approach to the calculation of transverse stresses along free edges of a symmetric laminated plate of arbitrary width under in-plane loading. *Composite Structures*, vol. 198 :247–261.
- [Favre et al., 1996] Favre, J.-P., Levadoux, H., Ochin, T., and Cinquin, J. (1996). Vieillissement des composites à matrice organique aux températures moyennes. un premier bilan. In *Compte-rendu des 10^{ème} Journées Nationales sur les Composite (JNC 10)*.
- [Feng et al., 1997] Feng, G., Gilchrist, M., Kinloch, J., and Matthews, F. (1997). Development of a method for predicting the fatigue life of CFRP components. In Degallaix, S., Bathias, C., and Fougères, R., editors, *International Conference on*

- fatigue of composites*, pages 407–414. La Société Française de Métallurgie et des Matériaux. Proceedings.
- [Fish and Yu, 2002] Fish, J. and Yu, Q. (2002). Computational mechanics of fatigue and life predictions for composite materials and structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 191 :4827–4849.
- [Fukunaga et al., 1984] Fukunaga, H., Chou, T.-W., Peters, P., and Schulte, K. (1984). Probabilistic failure strength analysis of graphite/epoxy cross-ply laminates. *Journal of Composite Materials*, vol. 18 :339–356.
- [Gamstedt and Sjören, 2002] Gamstedt, E. and Sjören, B. (2002). An experimental investigation of sequence effect in block amplitude loading of cross-ply composite laminates. *International Journal of Fatigue*, vol. 24 :437–446.
- [Gamstedt and Sjören, 1999] Gamstedt, E. and Sjören, B. (1999). Micromechanisms in tension-compression fatigue of composite laminates containing transverse plies. *Composites Science and Technology*, vol. 59 :167–178.
- [Garret and Bailey, 1977] Garret, K. and Bailey, J. (1977). Multiple transverse fracture in 90° cross-ply laminates of a glass fiber-reinforced polyester. *Journal of Composite Materials*, vol.12 :157–168.
- [Gay, 1991] Gay, D. (1991). *Matériaux composites*. Hermes.
- [Germain, 1973] Germain, P. (1973). *Cours de Mécanique des Milieux Continus*. Masson.
- [Ghidossi, 2003] Ghidossi, P. (2003). *Contribution à l'étude de l'effet des conditions d'usage d'éprouvettes en composite à matrice polymère sur leur réponse mécanique*. PhD thesis, Ecole Nationale Supérieure des Arts et Métiers.
- [Halpin et al., 1973] Halpin, J., Jerina, K., and TA, J. (1973). Characterization of composites for the purpose of reliability evaluation. In *ASTM STP 521*.
- [Hashin, 1985] Hashin, Z. (1985). Analysis of cracked laminates : A variational approach. *Mechanics of Materials*, 4 :121–136.
- [Hashin, 1987] Hashin, Z. (1987). Analysis of orthogonally cracked laminates under tension. *Journal of Composite Materials*, 54 :872–849.
- [Hashin and Rotem, 1977] Hashin, Z. and Rotem, A. (1977). A fatigue criterion for fibre reinforced composite materials. *Journal of Composite Materials*, vol.7 :448–464.
- [Hedgepeth, 1961] Hedgepeth, J.-M. (1961). Stress concentrations in filamentary structures. In *NASA/TND 882*.
- [Hedgepeth and Van Dyke, 1967] Hedgepeth, J.-M. and Van Dyke, P. (1967). Local stress concentrations in imperfect filamentary composite materials. *Journal of Composite Materials*, vol.1 :294–309.
- [Henaff-Gardin et al., 2002] Henaff-Gardin, C., Gamby, D., and Lafarie-Frenot, M. (2002). Doubly periodic matrix cracking in composite laminates. part 1 : General in-plane loading. *Composites Structures*, vol.36 :113–130.
- [Henaff-Gardin and Lafarie-Frenot, 2002] Henaff-Gardin, C. and Lafarie-Frenot, M. (2002). The use of a characteristic damage variable in the study of transverse cracking development under fatigue loading in cross-ply laminates. *International journal of solids and structures*, vol.24 :389–395.

- [Henaff-Gardin et al., 1997] Henaff-Gardin, C., M.C., L.-F., and Goupillaud, I. (1997). Prediction of cracking evolution under uniaxial fatigue loading in cross-ply composite laminates. In Degallaix, S., Bathias, C., and Fougères, R., editors, *International Conference on fatigue of composites*, pages 189–196. La Société Française de Métallurgie et des Matériaux. Proceedings.
- [Highsmith and Reifsnider, 1982] Highsmith, A. and Reifsnider, K. (1982). Stiffness reduction mechanism in composite laminate. In : *Damage in composite materials*, Reifsnider K.L. Ed., ASTM STP 775 :103–117.
- [Hochard et al., 2001] Hochard, C., Aubourg, P., and Charles, J. (2001). Modelling the mechanical behaviour of woven-fabric CFRP laminates up to failure. *Composites Science and Technology*, vol.61 :221–230.
- [Huchette, 2005] Huchette, C. (2005). *Sur la complémentarité des approches expérimentales et numériques pour la modélisation des mécanismes d'endommagement dans les composites stratifiés*. PhD thesis, Université Paris VI.
- [Huchette et al., 2009] Huchette, C., Vandellos, T., and Carrere, N. (2009). Identification et modélisation de l'influence de l'endommagement intralaminare sur la propagation de délaminage dans les composites. In *Compte-rendu des 16^{eme} Journées Nationales sur les Composite (JNC 16)*.
- [Kachanov, 1958] Kachanov, L. (1958). On creep rupture time. *Proc. Acad. Sci*, vol. 8 :26–31.
- [Kawai, 1999] Kawai, M. (1999). Damage mechanics for off-axis fatigue behavior of unidirectional carbon fiber-reinforced composites at room and high temperatures. In Massard, T. and Vautrain, A., editors, *International Conference on Composite materials*. Proceedings of the Twelfth International Conference on Composite Materials (ICCM 12). Paris, France.
- [Kawai and Honda, 2008] Kawai, M. and Honda, N. (2008). Off-axis fatigue behavior of carbon/epoxy cross-ply laminate and predictions considering inelasticity and in-situ strength of embedded plies. *International Journal of Fatigue*, vol. 30 :1743–1755.
- [Kawai and Kato, 2006] Kawai, M. and Kato, K. (2006). Effects of R-ratio on the off-axis fatigue behavior of unidirectional hybrid GFRP/Al laminates at room temperature. *International Journal of Fatigue*, vol.28 :1226–1238.
- [Kawai and Taniguchi, 2006] Kawai, M. and Taniguchi, T. (2006). Off-axis fatigue behavior of plain weave carbon/epoxy fabric laminates at room and high temperatures and its mechanical modeling. *Composites : Part A Applied Science and Manufacturing*, vol.37 :243–256.
- [Kiewel and Aktaa, 2000] Kiewel, H. and Aktaa, J. and Munz, D. (2000). Application of an extrapolated method in thermocyclic failure analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 182 :55–71.
- [Kim et al., 2003] Kim, J., Kim, C., and Song, D. (2003). Strength evaluation and failure analysis of unidirectional composites using Monte Carlo simulation. *Materials Science and Engineering A*, vol. 340 :33–40.
- [Krajcinovic and Fonseka, 1981] Krajcinovic, D. and Fonseka, G. (1981). The continuous damage theory of brittle materials, part 1 : General theory. *Journal of Applied Mechanics*, vol.48.

- [La Borderie et al., 1992] La Borderie, C., Pijaudier-Chabot, G., and Mazard, J. (1992). Computational modelling of concrete and reinforced concrete based on damage mechanics. In *Third International Conference of Computational Plasticity*, pages 681–692.
- [Ladevèze, 1986] Ladevèze, P. (1986). Sur la mécanique de l'endommagement des composites. In Bathias, C. and Menkès, D., editors, *Comptes-rendus des JNC 5*, pages 667–683. Pluralis. Paris.
- [Ladevèze and LeDantec, 1992] Ladevèze, P. and LeDantec, E. (1992). Damage modelling of the elementary ply for laminated composites. *Composites Sciences and Technology*, vol. 43(3) :257–267.
- [Ladevèze and Lemaitre, 1984] Ladevèze, P. and Lemaitre, J. (1984). Damage effective stress in quasi-unilateral condition. In *IUTAM Congress*.
- [Ladevèze and Lubineau, 2001] Ladevèze, P. and Lubineau, G. (2001). On a damage mesomodel for laminates : micromeso relationships, possibilities and limits. *Composites Sciences and Technology*, vol. 61(15) :2149–2158.
- [Lafarie-Frenot and Henaff-Gardin, 1990] Lafarie-Frenot, M. and Henaff-Gardin, C. (1990). Analyse locale de la fissuration des plis à 90° de stratifiés croisés carbone/époxy. In *Comptes Rendus des 7^{ème} Journées Nationales sur les Composites*.
- [Lafarie-Frenot et al., 2001] Lafarie-Frenot, M., Henaff-Gardin, C., and Gamby, D. (2001). Matrix cracking induced by cyclic ply stresses in composite laminates. *Composites Sciences and Technology*, vol. 61 :2327–2336.
- [Lafarie-Frenot and Ho, 2006] Lafarie-Frenot, M. and Ho, N. (2006). Influence of free edge intralaminar stresses on damage process in CFRP laminates under thermal cycling conditions. *Composites Sciences and Technology*, vol. 66 :1354–1365.
- [Laroche, 1980] Laroche, D. (1980). *Accumulation d'endommagement dans le carbone époxyde détecté par emission acoustique*. PhD thesis, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris.
- [Laws and Brockenbrough, 1987] Laws, N. and Brockenbrough, J. (1987). The effects of microcrack systems on the loss of stiffness of brittle solids. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 23(9) :1247–1268.
- [Laws and Dvorak, 1985] Laws, N. and Dvorak, G. (1985). The loss of stiffness of cracked laminates. pages 119–127.
- [Laws and Dvorak, 1988] Laws, N. and Dvorak, G. (1988). Progressive transverse cracking in composite laminates. *Journal of Composite Materials*, vol. 22 :900–916.
- [Lemaitre and Chaboche, 1986] Lemaitre, J. and Chaboche, J.-L. (1986). *Mécanique des Matériaux Solides*. Dunod.
- [Levesque, 2000] Levesque, M. (2000). L'essai de traction de matériaux composites à fibres continues. Master's thesis, Ecole Polytechnique de Montréal.
- [Li et al., 2003] Li, C., Ellyin, F., and Wharmby, A. (2003). On matrix crack saturation in composite laminats. *Composites : Part B*, vol. 34 :473–480.
- [Lim and Hong, 1989] Lim, S. and Hong, C. (1989). Prediction of transverse cracking and stiffness reduction in cross ply laminated composites. *Journal of Composites Materials*, vol. 23 :695–713.

- [Macquire et al., 1992] Macquire, B., Petitpas, E., and Valentin, D. (1992). Experimental and theoretical damage accumulation in glass-epoxy tubes under torsion loading. *Composite Polymers*, vol. 5(3) :174–193.
- [Manders et al., 1983] Manders, P., Chou, T.-W., Jones, F., and Rock, J. (1983). Statistical analysis of multiple fracture in $0^\circ/90^\circ/0^\circ$ glass fibre/epoxy resin laminates. *Journal of Materials Science*, vol. 18 :2876–2889.
- [Mercier et al., 1999] Mercier, J.-P., Zambelli, G., and Kurz, W. (1999). *Introduction à la science des matériaux, Traité des matériaux*, volume 1. Pplur.
- [Miner et al., 2004] Miner, A., Han, X., Islam, S., and Newaz, G. (2004). Fatigue damage detection in graphite/epoxy composites using sonic infrared imaging technique. *Composites Sciences and Technology*, vol. 64 :657–666.
- [Miner, 1945] Miner, K. (1945). Cumulative damage in fatigue. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 67 :A159–A164.
- [Nairn, 2000] Nairn, J. (2000). *Comprehensive Composite Materials*, volume 2. Elsevier, r. talreja and j.-a. e. manson edition.
- [Nairn and Hu, 1992] Nairn, J. and Hu (1992). The initiation and growth of delaminations induced by matrix microcracks in laminated composites. *Engineering fracture mechanics*, vol. 57 :1–24.
- [Nairn et al., 1993] Nairn, J., Hu, S., and Bark, J. (1993). A critical evaluation of theories for predicting microcracking in composites materials. *Journal of Material Science*, vol. 28 :5099–5111.
- [Nairn, 1995] Nairn, J.-A. (1995). Some new variational mechanics results on composite microcracking. pages 14–18.
- [Nuismer and tan, 1988] Nuismer, R. and tan, S. (1988). Constitutive relations of cracked composite lamina. *Journal of Composite Materials*, vol. 22(4) :306–321.
- [Ogihara et al., 1998] Ogihara, S., Takeda, N., Kobayashi, N., and Kobayashi, A. (1998). Effects on stacking sequence on microscopic fatigue damage development in quasi-isotropic CFRP laminates with interlaminar toughened layers. *Composites Sciences and Technology*, vol. 59 :1387–1398.
- [Okabe et al., 2008] Okabe, T., Nishikawa, M., and Takeda, N. (2008). Numerical modelling of progressive damage in fiber reinforced plastic cross-ply laminates. *Composites Sciences and Technology*, vol. 68 :2282–2289.
- [Parvizi et al., 1978] Parvizi, A., Garret, K., and Bailey, J. (1978). Constrained cracking in glass fiber-reinforced epoxy cross-ply laminate. *Journal of Materials Science*, vol.13 :195–201.
- [Payan, 2004] Payan, J. (2004). *Étude du comportement de composites stratifiés sous chargement statique et de fatigue*. PhD thesis, Université Aix-Marseille 2.
- [Payan and Hochard, 2002] Payan, J. and Hochard, C. (2002). Damage modelling of laminated carbon/epoxy composites under static and cyclic loadings. *International journal of solids and structures*, vol.24 :299–306.
- [Petitpas, 1993] Petitpas, E. (1993). *Comportement et endommagement des matériaux composites stratifiés*. PhD thesis, École Nationale Supérieure des Mines de Paris.

- [Petitpas et al., 1987] Petitpas, E., Valentin, D., and Bunsell, A. (1987). La fatigue des stratifiés carbone/résine : étude du mode de fissuration transverse. In *Communication au groupe Fragilité/Rupture*, pages 14–18.
- [Philippidis and Vassilopoulos, 1999] Philippidis, T. and Vassilopoulos, A. (1999). Fatigue of composite laminates under off-axis loading. *International journal of Fatigue*, vol.21 :253–362.
- [Pipes and Pagano, 1970] Pipes, R. and Pagano, N. (1970). Interlaminar Stress in Composite Laminates under Uniform Axial Tension. *Journal of Composite Materials*, vol.7 :–.
- [Puppo and Evensen, 1970] Puppo, A. and Evensen, H. (1970). Interlaminar shear in laminated composites under generalised plane stress. *Journal of Composite Materials*, vol. 4 :204–220.
- [Rabotnov, 1968] Rabotnov, Y. (1968). Creep rupture. In Springer, B., editor, *Proceedings of the XII International Congress on Applied Mechanics*. Stanford.
- [Rebiere, 2002] Rebiere, J.-L. (2002). Evolution de l'endommagement par fissuration et délaminage dans les stratifiés croisés à l'aide d'une approche variationnelle. In *Proceedings de la conférence Matériaux 2002*.
- [Reifsnider, 1977] Reifsnider, K. (1977). Some fundamental aspects of fatigue and fracture response of composite materials. In *Proceedings of the 14th Meeting of Society of Engineering Science*, pages 373–384.
- [Reifsnider and Stinchcomb, 1986] Reifsnider, K. and Stinchcomb, W. (1986). A Critical-Element Model of the Residual Strength and Life of Fatigue-Loaded Composite Coupons. In : *Composite Materials : Fatigue and Fracture*, Thomas Haln.H Ed., ASTM STP 907 :298–313.
- [Renard et al., 1990] Renard, J., Favre, J., and Jeggy, T. (1990). Modélisation de la fissuration transverse dans les carbone-résine à l'aide d'une description physique du défaut. In *Compte-rendu des 7^{me} JNC*, pages 643–653.
- [Rossignol and Thionnet, 2006] Rossignol, J. and Thionnet, A. (2006). Une nouvelle technique de détection des endommagements dans les composites basée sur l'utilisation des micro-ondes et des circuits micro-rubans résonants. *Comptes Rendus de Mécanique*, vol. 334 :719–724.
- [Scarponi and Briotti, 2000] Scarponi, C. and Briotti, G. (2000). Ultrasonic technique for evaluation of delaminations on CFRP, GFRP and KFRP composites materials. *Composites : Part B*, vol. 31 :237–243.
- [Schilling et al., 2005] Schilling, P., Karedla, B., Tatiparthi, A.K. Verges, M., and P.D., H. (2005). X-ray computed microtomography of internal damage in fibre polymer matrix composites. *Composites Sciences and Technology*, 65 :2071–2078.
- [Sedrakian et al., 1997] Sedrakian, A., Ben Zineb, T., and Billoet, J. (1997). A numerical model of fatigue behaviour for composite plates : application to a three point bending test. In Degallaix, S., Bathias, C., and Fougères, R., editors, *International Conference on fatigue of composites*, pages 415–423. La Société Française de Métallurgie et des Matériaux. Proceedings.
- [Sedrakian et al., 2002] Sedrakian, A., Ben Zineb, T., and Billoet, J. (2002). Contribution of industrial composite parts to fatigue behaviour simulation. pages 307–318.

- [Shokrieh and Lessard, 1997] Shokrieh, M. and Lessard, L. (1997). Multiaxial fatigue behaviour of unidirectional plies based on uniaxial fatigue experiments - 1. modelling. *International Journal of fatigue*, vol.19 :201–207.
- [Sidoroff and Subagio, 1987] Sidoroff, F. and Subagio, B. (1987). Fatigue damage modelling of composite materials from bending tests. In *Second European Conference on Composite Materials (ECCM-II)*, volume 4, pages 4.32–4.39. Londres, UK, Elsevier. Proceedings.
- [Sihn et al., 2007] Sihn, S., Kim, R., Kawabe, K., and Tsai, S. (2007). Experimental studies of thin-ply laminated composites. *Composites Sciences and Technology*, 67 :996–1008.
- [Smith et al., 1998] Smith, P., Boniface, L., and Glass, N. (1998). A comparison of transverse cracking phenomena in $(0/90)_s$ and $(90/0)_s$ CFRP lamintes. *Applied Composites Materials*, 5 :11–23.
- [Spearing and Beaumont, 1992] Spearing, . and Beaumont, L. (1992). Fatigue damage of composites materials. *Composites Sciences and Technology*, 44 :299–307.
- [Stinchcomb, 1986] Stinchcomb, W.-W. (1986). Nondestructive Evaluation od Damage Accumulation Processes in Composite Laminates. *Composites Science and Technology*, 25 :103–118.
- [Talreja, 1985] Talreja, R. (1985). Transverse cracking and stiffness reduction in composites laminates. *Journal of Composite Materials*, vol.19 :355–375.
- [Talreja, 1986] Talreja, R. (1986). Stiffness properties of composite laminates with matrix cracking and interior delamination. *Engineering Fracture Mechanics*, vol.25 :751–762.
- [Tang et al., 2004] Tang, R., Guo, Y.-J., and Weitsman, Y. (2004). An appropriate stiffness degradation parameter to monitor fatigue damage evolution in composites. *International Journal of Fatigue*, vol. 26 :421–427.
- [Thionnet, 1991] Thionnet, A. (1991). *Prévision d'endommagement sous chargements quasi-statiques et cycliques des structures composites stratifiées*. PhD thesis, Université Paris 6.
- [Thionnet et al., 2002] Thionnet, A., Chambon, L., and Renard, J. (2002). A theoretical and experimental study to point out the notion of loading mode in damage mechanics : Application to the identification and validation of a fatigue damage modelling for laminates composites. *International journal of solids and structures*, vol.24 :147–154.
- [Thionnet and Martin, 2004] Thionnet, A. and Martin (2004). *Mécanique et comportement des milieux continus, Concepts Généraux*, volume 1. Editions Ellipses, ISBN 2-7298-1807-3.
- [Thionnet and Martin, 2006] Thionnet, A. and Martin, C. (2006). A new constructive method using the theory of invariants to obtain material behavior laws. *International Journal of Solids and Structures*, 43/2 :325–345.
- [Thionnet et al., 2004] Thionnet, A., Martin, C., and Barradas, S. (2004). *Mécanique et comportement des milieux continus, Applications et théorie des invariants*, volume 2. Editions Ellipses, ISBN 2-7298-1807-3.

- [Thionnet and Renard, 1993] Thionnet, A. and Renard, J. (1993). Meso-macro approach to transverse cracking in laminated composites using talreja's model. *Composites engineering*, vol.3 :851–871.
- [Thionnet and Renard, 2001] Thionnet, A. and Renard, J. (2001). Une étude théorique et expérimentale pour mettre en évidence la notion de mode en mécanique de l'endommagement. *Revue des composites et des matériaux avancés*, vol. 11(3) :349–364.
- [Valentin, 1983] Valentin, D. (1983). *Etude par émission acoustique de l'endommagement sous sollicitations mécaniques des composites carbone-époxy*. PhD thesis, Ecole Nationale Supérieurs des Mines de Paris.
- [Valentin and Bunsell, 1982] Valentin, D. and Bunsell, A. (1982). A study of damage accumulation in carbon fibre reinforced epoxy resin structures during mechanical loading monitored by acoustic emission. *Journal of Plastics and composites*, vol. 1 :314–334.
- [Van Paepegem and Degriek, 2001] Van Paepegem, W. and Degriek, J. (2001). Modelling strategies for fatigue damage behaviour fibre-reinforced polymer composites. *European Journal of Mechanical and Environmental Engineering*, vol. 46(4) :217–227.
- [Van Paepegem and Degriek, 2002] Van Paepegem, W. and Degriek, J. (2002). A new coupled approach of residual stiffness and strength for fatigue of fibre-reinforced composites. *International journal of solids and structures*, vol.24 :747–762.
- [Varna and Berglund, 1992] Varna, J. and Berglund, L. (1992). A model for prediction of the transverse cracking strain in cross-ply laminates. *Journal of Reinforce Plastics Composites*, vol. 11 :708–728.
- [Vieilleigne et al., 1997] Vieilleigne, S., Jeulin, D., Renard, J., and Sicot, N. (1997). Modelling of the fatigue behaviour of an unidirectional glass epoxy composite submitted to fatigue loadings. In Degallaix, S., Bathias, C., and Fougères, R., editors, *International Conference on fatigue of composites*, pages 424–430. La Société Française de Métallurgie et des Matériaux. Proceedings.
- [Violeau, 2007] Violeau, D. (2007). *Une stratégie de calcul pour l'analyse à l'échelle "micro" des endommagements jusqu'à rupture des composites stratifiés*. PhD thesis, Ecole Normale Supérieure de Cachan.
- [Wang and Crossman, 1980] Wang, A. and Crossman, F. (1980). Initiation and growth of transverse cracks and edge delamination in composite laminates. *Journal of Composite Materials*, vol. 14 :71–87.
- [Wevers et al., 2006] Wevers, M., Rippert, L., Papy, J., and Van Hufel, S. (2006). Processing of transient signals from damage in CFRP composite materials monitored with embedded intensity-modulated fibre optic sensor. *NDT& International*, vol. 39 :229–235.
- [Whitney, 1981] Whitney, J. (1981). Fatigue Characterization of Composite Materials. In : *Fatigue of Fibrous Materials, Lauratis KN. Ed.*, ASTM STP 723 :133–151.
- [Wu, 1967] Wu, E. (1967). Application of the fracture mechanics to anisotropic plates. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 27A :1003–1010.

- [Xu, 1994] Xu, L. (1994). Interaction between matrix cracking and edge delamination in composite laminates. *Composites Science and Technology*, vol. 50 :469–478.
- [Ye and Yang, 1988] Ye, L. and Yang, B. (1988). A boundary layer approach to interlaminar stresses in composite with curved edges. *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, vol. 7 :179–198.
- [Yokozeki et al., 2005] Yokozeki, T., Aoki, T., and Ishikawa, T. (2005). Consecutive matrix cracking in contiguous plies of composite laminates. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 42 :2785–2802.

Comportement en fatigue de pièces épaisses en matériaux composites

Résumé :

Grâce à leurs propriétés mécaniques spécifiques, les matériaux composites sont devenus une alternative intéressante aux matériaux métalliques. De plus, l'utilisation de stratifications judicieusement choisies permet d'obtenir des propriétés mécaniques adaptées aux sollicitations de la structure. Enfin ils sont considérés comme peu sensibles à la fatigue. C'est pour ces raisons que, au cours de ces dernières années, l'emploi des matériaux composites pour la réalisation de structures aéronautiques, navales ou ferroviaires c'est considérablement répandu. Nous proposons dans cette étude une modélisation de la fissuration intra-laminaire dans les composites stratifiés soumis à des sollicitations quasi-statiques ou cycliques. L'analyse expérimentale nous permet dans un premier temps de capitaliser les renseignements permettant de dégager les caractéristiques et paramètres à prendre en compte lors de la modélisation. Sur la base de ces résultats nous proposerons une modélisation de la fissuration intra-laminaire. Nous proposons une loi d'évolution de l'endommagement en fatigue que nous avons implémenté dans le code de calcul par éléments finis ZeBuLoN. Après avoir identifié les différents paramètres du modèle à partir des résultats expérimentaux nous proposerons une application du modèle au cas d'une structure afin de valider notre modèle. Pour cela, nous avons développé une stratégie de calcul basée sur la méthode des sauts de cycles. Notre modèle est finalement appliqué au cas d'une structure de type plaque trouée.

Mots clés : Matériaux composites, fatigue, endommagement, fissuration

Fatigue behaviour of thick composite structures

Abstract:

Due to their specific mechanical properties composite materials have become an interesting alternative to metallic materials. Moreover, the use of well chosen lay-up allows to get mechanical properties convenient with the structure sollicitations. Finally, they are considered insensitive to fatigue. For these reasons, during the last years, the use of composite materials in aeronautical, shipbuilding or train industries significantly increased. In this study, we propose a modelisation of matrix cracking in composite materials subjected to quasi-static or cyclic loading. In a first time, the experimental analysis allows us to capitalize information to identify characteristics and parameters to be considered in modelling. Based on these results, we propose a modelling of matrix-cracking. We propose an fatigue damage evolution law that we implemented in the finite element code called ZeBuLoN. After identifying different model parameters from experimental results we propose an application of the model in the case of a structure to validate our model. For this, we developed a computational strategy based on the skip cycles method. Finally, we applied our model to the case of a perforated plate structure.

Keywords: Composite materials, fatigue, damage, matrix cracking