2011-ENAM-0042

École doctorale n° 432 : Sciences des Métiers de l'Ingénieur

Doctorat ParisTech

T H È S E

pour obtenir le grade de docteur délivré par

l'École Nationale Supérieure d'Arts et Métiers

Spécialité " Mécanique et Matériaux "

présentée et soutenue publiquement par

Guillaume ALTMEYER

le 29 novembre 2011

Modélisation théorique et numérique des critères d'instabilité plastique. Application à la prédiction des phénomènes de striction et de localisation lors d'opérations de mise en forme par emboutissage.

Directeur de thèse : **Farid ABED-MERAIM**
Co-encadrement de la thèse : **Tudor BALAN**

Jury

M. Michel POTIER-FERRY, Professeur, LEM3, Université de Metz	Président
M. Dorel BANABIC, Professeur, DME, Technical University from Cluj-Napoca	Rapporteur
Mme Nathalie BOUDEAU, Professeur, Institut FEMTO-ST, ENSMM	Rapporteur
M. Arnaud DELAMEZIERE, Maitre assistant, GIP-InSIC	Examinateur
M. Farid ABED-MERAIM, Professeur, LEM3, Arts et Métiers ParisTech	Examinateur
M. Tudor BALAN, Maitre de conférences, LEM3, Arts et Métiers ParisTech	Examinateur

T H È S E

Arts et Métiers ParisTech - Centre de Metz
Laboratoire d'Etude des Microstructures et de Mécanique des Matériaux - UMR CNRS 7239

Remerciements

Mes premiers remerciements sont adressés à Mme Boudeau, M. Banabic, M. Delamézière et M. Potier-Ferry pour avoir accepté l'évaluation de ce travail.

La réalisation de ce travail a été effectuée au Laboratoire de Physique et de Mécanique des Matériaux (LPMM) puis au Laboratoire d'Etude des Microstructures et de Mécanique des Matériaux (LEM3). Je tiens à en remercier les directeurs respectifs, M. Daya et L. Toth, pour l'intérêt porté à cette thèse. Je tiens à remercier M. Potier-Ferry pour son accueil au sein de l'équipe de Mécanique Numérique.

Je tiens à remercier tout particulièrement F. Abed-Meraim et T. Balan, respectivement directeur de thèse et encadrant, pour la confiance qu'ils m'ont accordée en me proposant ce sujet de recherche et pour l'ensemble de leurs conseils scientifiques durant la réalisation de cette thèse.

Je remercie X. Lemoine (Arcelor Mittal) ainsi que M. Brunet et F. Sabourin (LaMCoS, Insa Lyon), partenaires du projet ANR FORMEF, pour les échanges scientifiques et pour l'identification des paramètres des lois de comportements qui sont utilisées pour le tracé de certaines Courbes Limites de Formage.

Je remercie également D. Banabic, G. Ferron et A. Lejeune pour leur aide à la compréhension des modèles de M – K ou d'ALS.

Je remercie l'ensemble des personnels du centre Arts et Métiers ParisTech de Metz et du LEM3, notamment les doctorants, pour les échanges.

Table des notations

Principaux symboles

α	Trajet de chargement, défini à partir du rapport des composantes de contrainte mineure et majeure
α_{VS}	Coefficient de pondération entre les lois de Voce et de Swift pour la loi d'écrouissage isotrope combinée
α^{ep}	Indicateur de charge plastique
α^{epd}	Indicateur de charge plastique avec endommagement
α^{evp}	Indicateur de charge viscoplastique
β	Trajet de chargement, défini à partir du rapport des composantes du taux de déformation mineure et majeure
β_0	Trajet de chargement initial
β_d	Paramètre d'endommagement
$\boldsymbol{\varepsilon}$	Tenseur des déformations logarithmiques
$\bar{\varepsilon}$	Déformation plastique cumulée
$\bar{\varepsilon}_c$	Déformation équivalente critique à l'instabilité plastique
ε_{1c}	Déformation majeure critique à l'instabilité plastique
ε_{2c}	Déformation mineure critique à l'instabilité plastique
η	Taux de croissance d'une perturbation
η_c	Taux de croissance critique d'une perturbation

θ	Angle entre la normale à la bande de localisation et la direction principale majeure de chargement dans le plan de la tôle
$\dot{\lambda}$	Multiplicateur plastique
$\dot{\lambda}^{vp}$	Multiplicateur viscoplastique
ν	Coefficient de Poisson du matériau non endommagé
$\mathbf{\Pi}$	Premier tenseur de contraintes de Piola – Kirchhoff
ρ_0	Masse volumique du matériau
$\boldsymbol{\sigma}$	Tenseur de contraintes de Cauchy
$\boldsymbol{\sigma}_{eff}$	Tenseur de contrainte effective de Cauchy (modèles avec endommagement)
$\bar{\sigma}$	Contrainte équivalente
$\boldsymbol{\tau}$	Tenseur de contraintes de Kirchhoff
φ	Angle entre la normale à la bande de localisation et la normale au plan de la tôle
$\mathbf{C}$	Tenseur d'ordre quatre des modules d'élasticité
C_R	Vitesse de saturation de l'écrouissage isotrope R_V
C_X	Vitesse de saturation de la variable d'écrouissage cinématique
$\dot{\mathbf{c}}$	Vitesse relative de points situés de part et d'autre des plans de discontinuité du gradient des vitesses
$\mathbf{D}$	Taux de déformation totale
$\mathbf{D}^e$	Taux de déformation élastique
$\mathbf{D}^p$	Taux de déformation plastique
$\mathbf{D}^{vp}$	Taux de déformation viscoplastique
$\mathbf{D}^{vpd}$	Taux de déformation viscoplastique avec couplage à l'endommagement
d	Variable d'endommagement scalaire
E	Module de Young du matériau non endommagé
$\mathbf{e}$	Tenseur symétrique des déformations élastiques

$\mathbf{e}_1$	Direction principale majeure de chargement
$\mathbf{e}_2$	Direction principale mineure de chargement
e	Epaisseur de la tôle
e_0	Epaisseur initiale de la tôle
$\mathbf{F}$	Gradient de transformation
$\mathbf{F}^e$	Partie élastique du gradient de transformation
$\mathbf{F}^p$	Partie plastique du gradient de transformation
F_i	Composante de l'effort appliqué
F_n	Effort normal à la bande de localisation
FLD_0	Déformation majeure à localisation en traction plane
$\mathbf{f}_s$	Effort surfacique
$\mathbf{f}_v$	Effort volumique
f	Potentiel plastique
f_H	Fonction reliant la composante principale du tenseur des contraintes de Cauchy à la contrainte équivalente sous l'hypothèse de contraintes planes
f^{MK}	Taille du défaut du modèle M – K
f_0^{MK}	Taille initiale du défaut du modèle M – K
$\mathbf{G}$	Gradient eulérien des vitesses
g_H	Fonction reliant la composante principale du tenseur des déformations à la déformation équivalente
$\mathcal{H}$	Fonctionnelle de Hill
$\mathbf{H}_\mathbf{X}$	Module d'écrouissage cinématique
H_d	Module d'endommagement
H_R	Module d'écrouissage isotrope

J	Jacobien de la transformation
J_2	Second invariant d'un tenseur symétrique 3x3
k	Paramètre matériau lié à l'écrouissage isotrope
$\mathbf{L}^{ep}$	Module tangent élasto-plastique
$\mathbf{L}^{epd}$	Module tangent élasto-plastique couplé à l'endommagement
$\mathbf{L}_p$	Opérateur tangent perturbé
$\boldsymbol{\mathcal{L}}$	Module reliant le taux de contraintes nominales au gradient eulérien des vitesses
$\mathcal{L}$	Module reliant le taux de contraintes du 1er Piola – Kirchhoff au gradient lagrangien des vitesses
$\mathbf{M}$	Tenseur d'anisotropie de Hill'48
m	Coefficient de sensibilité à la vitesse de déformation
$\mathbf{N}$	Tenseur des contraintes nominales
$\mathbf{n}$	Normale au plan de la bande de localisation par rapport à la configuration de référence eulérienne
$\mathbf{n}_0$	Normale au plan de la bande de localisation par rapport à la configuration de référence lagrangienne
$\mathbf{n}_\mathbf{X}, \mathbf{n}_{\mathbf{X}d}$	Direction de saturation de l'écrouissage cinématique, direction d'écoulement de l'écrouissage cinématique après couplage avec l'endommagement
n	Coefficient d'écrouissage isotrope
$\mathcal{P}_{\text{int}}$, $\mathcal{P}_{\text{ext}}$	Puissance des efforts intérieurs, puissance des efforts extérieurs
r_0 , r_{45} , r_{90}	Coefficients de Lankford
$\mathbf{R}$	Tenseur de rotation propre élastique
R	Variable d'écrouissage isotrope
R_{sat}	Valeur de saturation de l'écrouissage isotrope
S	Surface élémentaire
S_d , s_d	Paramètres d'endommagement isotrope

S^{MK}	Paramètre seuil du modèle M – K
T	Température
t	Temps physique
$\mathbf{U}_s$	Déplacement imposé sur une frontière
$\mathbf{V}$	Direction d'écoulement plastique
$\mathbf{V}^*$	Champ de vitesse virtuel
$\mathbf{V}_g$	Tenseur de gauche de la transformation déformante
$\mathbf{W}$	Spin total
$\mathbf{X}$	Tenseur d'écrouissage cinématique
X_{sat}	Valeur de saturation de la variable d'écrouissage cinématique
Y , Y_0	Taille et taille initiale de la surface de charge
Y_1	Coefficient d'écrouissage dans le cas viscoplastique
Y_e	Taux de restitution de la densité d'énergie élastique
Y_{ei}	Seuil d'activation d'endommagement
$\mathbf{Z}$	Ensemble des variables observables et des variables internes
Z_C	Tangente critique de Considère
Z_H	Tangente critique de Hill
Z_S	Tangente critique de Swift

Principales abréviations

ALS	Analyse Linéaire de Stabilité
ANR	Agence Nationale de la Recherche
BG	Bifurcation Générale
BPL	Bifurcation par Point Limite
CFM	Critère de Force Maximum
CFME	Critère de Force Maximum Etendu
CFMM	Critère de Force Maximum Modifié
CLF	Courbe Limite de Formage
CPU	Central Processing Unit
CS	Chargement de cisaillement simple
DP	Dual Phase
EB	Chargement de traction équibiaxiale
EMFC	Extended Maximum Force Criterion
eMMFC	enhanced Modified Maximum Force Criterion
FB	Ferritic-Bainitic
GPU	Graphics Processing Units
IF	Interstitial Free
M – K	Modèle de Marciniak - Kuczynski
MFC	Maximum Force Criterion
MMFC	Modified Maximum Force Criterion
PE	Critère de Perte d'Ellipticité
PEF	Critère de Perte d'Ellipticité Forte
TP	Chargement de traction plane
TRIP	TRansformation Induced Plasticity steel
TU	Chargement de traction uniaxiale

Principaux opérateurs

Re	Opérateur partie réelle
$\langle \square \rangle$	Opérateur partie positive
$[\![\square]\!]$	Opérateur saut
$\cdot$	Contraction tensorielle simple
$:$	Contraction tensorielle double
$\det$	Déterminant
$\square^{-1}$	Inverse
$\square'$	Partie déviatorique d'un tenseur
$\square^{S}$	Partie symétrique
$\square^{T}$	Transposé

Table des matières

REMERCIEMENTS ..... **I**

TABLE DES NOTATIONS ..... **III**

Principaux symboles ..... **iii**

Principales abréviations ..... **viii**

Principaux opérateurs ..... **ix**

TABLE DES MATIERES ..... **XI**

1 INTRODUCTION **1**

1.1 Contexte général **2**

1.2 Cadre scientifique **3**

1.3 Problématique et objectifs de la thèse **3**

1.4 Organisation du manuscrit **4**

2 FORMABILITE DES TOLES METALLIQUES **7**

2.1 Introduction **8**

2.2 Emboutissage, formabilité et concept de Courbe Limite de Formage **8**
2.2.1 Emboutissage 8
2.2.2 Défauts de mise en forme et formabilité 10
2.2.3 Concept de Courbe Limite de Formage 11

2.3 Détermination expérimentale des CLF **13**

2.4 Critères pour la détection des limites de formabilité **14**
2.4.1 Approche empirique 14
2.4.2 Principe de Force Maximum 17
2.4.3 Méthodes multizones 18
2.4.4 Analyse de bifurcation 19
2.4.5 Analyse linéaire de stabilité 21

2.5 Simulation des essais de formabilité 21

2.6 Conclusion 24

3 MODELISATION DU COMPORTEMENT DES MATERIAUX 27

3.1 Introduction 28

3.2 Cinématique des grandes déformations 28

3.3 Comportement élasto-plastique 30
3.3.1 Modèle élasto-plastique 30
3.3.2 Modèle élasto-plastique endommageable 34

3.4 Comportement élasto-viscoplastique 38

3.5 Synthèse 39

4 CRITERES DE PREDICTION DE STRICTION DIFFUSE 41

4.1 Introduction 42

4.2 Méthode d'analyse de bifurcation 42
4.2.1 Critère de Bifurcation Générale 43
4.2.2 Critère de Bifurcation par Point Limite 45
4.2.3 Relation théorique entre les critères de Bifurcation Générale et de Bifurcation par Point Limite 45

4.3 Critère de striction diffuse issu du modèle de Cordebois – Ladevèze 46
4.3.1 Formulation du critère 46
4.3.2 Relation entre le critère de striction diffuse de Cordebois – Ladevèze et le critère de Bifurcation Générale 48

4.4 Principe de Force Maximum 49
4.4.1 Striction en traction uniaxiale 50
4.4.2 Extensions aux chargements bi-axiaux 52
4.4.3 Critère de Force Maximum 53
4.4.4 Extension du critère de Force Maximum au cas 3D 57
4.4.5 Relation entre le critère de Bifurcation Générale et le Critère de Force Maximum 59
4.4.6 Relation théorique entre le critère de Point Limite et le Critère de Force Maximum 60

4.5 Conclusion 62

5 CRITERES DE PREDICTION DE STRICTION LOCALISEE ET DE MODES INSTABLES INTERMEDIAIRES 65

5.1 Introduction 66

5.2 Prédiction de striction localisée 66
5.2.1 Extension du principe de Force Maximum à la striction localisée en retreint 66
5.2.2 Prédiction de la striction localisée par le modèle de C – L et relation avec le critère de Hill'52 72

5.3 Prédiction de modes intermédiaires 74
5.3.1 Extension du principe de Force Maximum à la prédiction de modes localisés en retreint et en expansion 74
5.3.2 Critère de Force Maximum Modifié 76
5.3.3 Développements et limites du Critère de Force Maximum Modifié 80
5.3.4 Critère de Force Maximum Etendu 83
5.3.5 Analyse Linéaire de Stabilité pour les modes intermédiaires 84

5.4 Synthèse 90

6 CRITERES DE PREDICTION DE LOCALISATIONS SOUS FORME DE MODES PRESENTANT DES DISCONTINUITES DU GRADIENT DES VITESSES 93

6.1 Introduction 94

6.2 Méthode d'analyse de bifurcation 94
6.2.1 Critère de Perte d'Ellipticité 95
6.2.2 Critère de Perte d'Ellipticité Forte 98
6.2.3 Relation théorique entre les critères de Perte d'Ellipticité et de Perte d'Ellipticité Forte 99

6.3 Méthode Multizone – Critère de Marciniak – Kuczynski 100
6.3.1 Formulation classique du modèle M – K avec une bande de défaut restreinte au plan 101
6.3.2 Influence des paramètres utilisateur 107
6.3.3 Reformulation tridimensionnelle du critère de Marciniak – Kuczynski 111
6.3.4 Relation théorique entre le critère de Marciniak – Kuczynski et le critère de Perte d'Ellipticité 113

6.4 Analyse Linéaire de stabilité 115
6.4.1 Notion de stabilité 116
6.4.2 Présentation générale de l'Analyse Linéaire de Stabilité 118
6.4.3 Application aux matériaux élasto-plastiques 119

6.5 Synthèse 121

7 APPLICATION AU TRACE DE COURBES LIMITES DE FORMAGE NUMERIQUES 123

7.1 Introduction 124

7.2 Classification numérique de critères 124
7.2.1 Critères issus du Principe de Force Maximum 124
7.2.2 Critères issus de l'analyse de bifurcation 129

7.3 Influence du choix des lois d'écrouissages sur les prédictions de formabilité 130
7.3.1 Lois d'écrouissage 130
7.3.2 Critère de Bifurcation par Point Limite : TRIP A 132

7.3.3 Critères de Hill et de Marciniak-Kuczynski : TRIP B 134
7.3.4 Critère de Force Maximum Modifié : Acier Doux 137
7.3.5 Critère de Force Maximum Etendu : Acier Dual Phase 138
7.3.6 Critère d'Analyse Linéaire de Stabilité : Acier Ferrite Bainite 140

7.4 Conclusion 142

8 CONCLUSION GENERALE 143

8.1 Synthèse 144

8.2 Perspectives 145

BIBLIOGRAPHIE 147

1 Introduction

1.1 Contexte général 2

1.2 Cadre scientifique 3

1.3 Problématique et objectifs de la thèse 3

1.4 Organisation des chapitres 4

1.1 Contexte général

L'augmentation du coût des matières premières et les fortes préoccupations environnementales visant une réduction des émissions de dioxyde de carbone soumettent les industriels à des pressions croissantes. Une des solutions envisageables pour répondre à ce double défi est l'allègement des structures. Dans les industries mécaniques, celui-ci conduit à la fois à une réduction de la quantité de matière nécessaire à l'obtention du produit fini, à une diminution de l'énergie nécessaire à sa mise en forme et à une consommation réduite lors de leur transport ou de leur utilisation. Si l'allègement des structures semble avoir des impacts environnementaux et sociétaux positifs, il conduit les entreprises à modifier leurs pratiques de conception de nouveaux produits du fait de l'utilisation de nouveaux matériaux et de méthodes de conception avancées permettant de mieux appréhender les limites de formabilité et les limites de tenue en service.

L'importance des mobilités interentreprises, liées à des facteurs tant économiques que démographiques, et l'utilisation de nouveaux matériaux métalliques peuvent rendre caduque le savoir faire des industriels concernant la prédiction des limites de formabilité des tôles, alors que celui-ci est souvent basé sur la capitalisation de décennies d'expériences. Cette incapacité à estimer de manière fiable les limites de formabilité pour des tôles constituées de nouvelles nuances d'aciers à haute résistance, à haute limite d'élasticité, à transformation de phase ou de matériaux de substitution, tels de nouveaux alliages d'aluminium ou de titane, engendre un risque accru d'initiation de défauts lors d'opérations d'emboutissage. Lors du formage de pièces d'aspect ou de structure dans les domaines du transport, du packaging ou encore de l'électroménager, l'apparition de strictions, de zones de localisation des déformations, de fissures ou de plissements peut alors conduire des séries de pièces au rebut et nécessiter de coûteuses modifications des outillages.

Afin d'éviter de telles déconvenues ayant un impact direct sur la productivité et la compétitivité des entreprises, le besoin d'outils d'aide à la conception fiables et prédictifs est grandissant. De tels outils sont basés sur des modélisations permettant de reproduire fidèlement le comportement des matériaux mais aussi sur l'utilisation de critères fiables de prédiction des phénomènes de bifurcations ou d'instabilités plastiques. De nombreuses approches ont été développées afin d'estimer la formabilité des tôles et de détecter l'apparition de striction diffuse, de striction localisée et de localisation sous forme de bandes. L'étude de tels critères a été initiée à partir du milieu du vingtième siècle et retrouve un regain d'intérêt comme l'illustre le nombre de communications qui leur sont dédiées à des conférences consacrées à la mise en forme telle Numisheet ou encore celles de l'European Scientific Association For Material Forming (ESAFORM) et l'International Deep Drawing Research Group (IDDRG). Différentes approches sont envisageables pour l'étude des instabilités plastiques, certaines sont purement expérimentales ou empiriques alors que d'autres sont basées sur des développements théoriques rigoureux ou sur des simulations numériques.

1.2 Cadre scientifique

Au sein du Laboratoire d'Etude des Microstructures et de Mécanique des Matériaux (UMR CNRS 7239), l'étude de la prédiction des instabilités plastiques survenant lors d'opérations de mise en forme de tôles minces par emboutissage est un sujet de recherche central depuis de nombreuses années, avec par exemple l'étude fine de la structure des matériaux, la proposition de modèles de comportements à base physique, des travaux expérimentaux de détermination de courbes limites de formage et le développement de critères prédictifs de bifurcations et d'instabilités plastiques.

Les travaux de thèse présentés dans ce mémoire sont consacrés à la modélisation des critères permettant la prédiction des instabilités matérielles de type strictions ou localisations.

Une partie des travaux réalisés au cours de cette thèse s'est inscrite dans le cadre d'une coopération scientifique avec le LaMCoS (INSA Lyon) et ArcelorMittal lors du projet ANR FORMEF, projet visant la comparaison de résultats expérimentaux avec des résultats théoriques ou issus de simulations numériques sur des applications propres aux problématiques de l'emboutissage, dont les instabilités plastiques de type matériau.

1.3 Problématique et objectifs de la thèse

Les nombreuses études conduites jusqu'à présent pour la formulation d'indicateurs de bifurcations ou d'instabilités plastiques ont mené à une grande diversité de critères prédictifs, diversité tant du point de vue de leurs fondements théoriques que de leurs domaines d'application. Le choix entre ces indicateurs est d'autre part un sujet qui manque de consensus du fait notamment de l'insuffisance, voire de l'absence, de confrontations entre eux sur des cas industriels pertinents et suffisamment représentatifs. Des études présentes dans la littérature permettent de comparer un critère (ou un nombre limité de critères) à des courbes limites de formage issues de résultats expérimentaux, mais l'insuffisance de comparaisons théoriques ou numériques plus générales constitue une limite au choix de la modélisation la plus adaptée pour l'application envisagée. D'autre part lorsque ces comparaisons existent, la validité de telles confrontations se voit parfois être remise en cause par l'utilisation de nouveaux matériaux qui peuvent conduire à l'apparition de modes instables non rencontrés et donc non recherchés auparavant.

Afin de lever ce problème, l'approche adoptée dans cette thèse consiste à :

- utiliser un cadre général commun pour la formulation du comportement des matériaux permettant de reproduire des comportements élasto-plastiques en transformations finies.
- reformuler dans ce cadre les principaux critères locaux d'instabilité plastique afin de rendre possible une comparaison de leurs bases théoriques.
- souligner l'existence de liens théoriques entre des modèles issus d'une même catégorie d'approches mais appliqués à des modes d'instabilité différents.

- établir des liens théoriques entre les critères issus d'approches différentes mais appliqués à la prédiction d'un mode instable commun.
- le cas échéant, proposer des critères alternatifs à partir de limitations théoriques mises en évidences.

Cette étude théorique est complétée par une approche à caractère numérique devant permettre :

- d'illustrer les résultats théoriques précédents à partir de l'implantation du modèle de comportement choisi et des critères dans un code développé à cet effet pour le tracé de courbes limites de formage.
- de compléter les résultats théoriques par une comparaison numérique des critères lorsqu'aucun rapprochement n'aura pu être établi précédemment.
- d'écrire un programme général et modulaire permettant une implantation aisée des modèles les plus pertinents dans un code de calcul par éléments finis commercial.

1.4 Organisation du manuscrit

Le manuscrit est articulé autour des six chapitres qui suivent cette introduction.

Le second chapitre est consacré à une présentation générale des problématiques liées à l'emboutissage. Après avoir défini certaines notions utiles tout au long du mémoire, les principales méthodes relatives à la détermination des limites de formabilité des tôles seront passées en revue à partir d'une étude bibliographique. Ceci permettra une première classification des critères locaux de bifurcations et d'instabilités plastiques et la détermination d'un schéma général pour l'intégration de ces critères dans un code de calcul.

Lors de la prédiction théorique ou de la simulation numérique de courbes limites de formage, la description du comportement du matériau occupe une place centrale. Le troisième chapitre sera consacré à la présentation des différents modèles de comportements utilisés lors des études théoriques ou numériques, incluant des modèles élasto-plastiques et élasto-viscoplastique prenant en compte les effets de l'anisotropie initiale, de l'anisotropie induite, de l'écrouissage ou encore de l'endommagement.

Dans le quatrième chapitre, les conditions d'apparition de striction diffuse seront analysées pour des matériaux élasto-plastiques. Parmi les approches qui y seront abordées, il est possible de citer les méthodes d'analyse de bifurcation et le principe de force maximum. Les bases de chacune de ces méthodes seront présentées afin d'établir des liens entre ces critères issus d'approches théoriques différentes.

La striction diffuse n'étant généralement pas considérée suffisamment critique pour constituer réellement une limite à la formabilité, des critères permettant la prédiction d'autres modes instables se produisant plus tardivement au cours du chargement seront étudiés au Chapitre 5. Ce sera notamment le cas de la striction localisée. Comme ces modes se situent entre une borne basse et une borne haute d'instabilité, constituées respectivement par la striction diffuse

et la localisation des déformations sous forme de bandes présentant une discontinuité du gradient des vitesses, ces modes sont qualifiés d'intermédiaires dans ce mémoire.

Un sixième chapitre, à dominante théorique, sera ensuite consacré aux instabilités et bifurcations plastiques associées à des localisations des déformations sous forme de bandes présentant des discontinuités du gradient des vitesses. Afin d'éviter cette source de confusion avec les critères présentés dans le chapitre précédent, cette appellation est préférée à celle plus courante de striction localisée pour qualifier ce mode. Les critères de bifurcation basés sur la perte d'ellipticité et sur la perte d'ellipticité forte, le modèle de Marcinial – Kuczynski basé sur une approche multizone et une méthode d'analyse de stabilité linéarisée seront comparés. Une autre originalité de la thèse réside dans la recherche de liens théoriques entre ces méthodes et notamment entre les critères de perte d'ellipticité et le modèle M – K.

Le septième chapitre sera plus particulièrement consacré aux applications numériques des critères précédemment étudiés. Il fournira ainsi des éléments de comparaison entre critères dont aucun rapprochement théorique n'aurait pu être établi auparavant, ainsi que des illustrations de courbes limites de formage. Une étude numérique de l'effet du choix des lois d'écrouissage et de l'identification de leurs paramètres sur les niveaux de localisation sera menée.

La synthèse des principaux résultats intermédiaires obtenus dans ces six chapitres permettra dans la conclusion finale de proposer une réponse à la problématique posée dans le paragraphe 1.3.

2 Formabilité des tôles métalliques

2.1 Introduction 8

2.2 Emboutissage, formabilité et concept de Courbe Limite de Formage 8
2.2.1 Emboutissage 8
2.2.2 Formabilité et défauts de mise en forme 10
2.2.3 Concept de Courbe Limite de Formage 11

2.3 Détermination expérimentale des CLF 13

2.4 Critères pour la détection des limites de formabilité 14
2.4.1 Approche empirique 14
2.4.2 Principe de Force Maximum 17
2.4.3 Méthodes multizones 18
2.4.4 Analyse de bifurcation 19
2.4.5 Analyse linéaire de stabilité 21

2.5 Simulation des essais de formabilité 21

2.6 Conclusion 24

2.1 Introduction

Les défauts issus de la mise en forme de tôles ayant un impact économique considérable, leur prédiction est depuis la seconde moitié du 20ème siècle devenue un enjeu industriel important. Après avoir présenté différents types de défauts pouvant impacter les propriétés mécaniques ou esthétiques de tôles embouties, les phénomènes de bifurcation et d'instabilité plastique, conduisant à certains de ces défauts, seront définis en mettant un accent particulier sur la striction diffuse, la striction localisée et plus généralement la localisation des déformations.

Différentes méthodes permettant la détermination des limites de formabilité seront alors abordées. Les méthodes expérimentales constituent historiquement la première approche utilisée. Elles ont été complétées par des approches prédictives permettant d'estimer un domaine d'états de déformations ou de contraintes admissibles avant l'occurrence de phénomènes instables. Ces méthodes permettent la détermination de domaines critiques à partir de la simple connaissance de paramètres concernant la géométrie de la tôle, le matériau utilisé et le chargement imposé. Face à l'importance du nombre de critères prédictifs présents dans la littérature, une première tentative de classement et de regroupement de ceux-ci sera menée en fonction du principe théorique ou empirique ayant servi à leur formulation.

Face au nombre de critères développés, l'utilisateur doit bien souvent se baser sur son expérience pour choisir le critère le mieux adapté à ses besoins. Afin de répondre à l'un des objectifs présentés en introduction visant à établir des relations théoriques ou des comparaisons numériques des critères de prédiction de strictions et de localisations des déformations, une comparaison de la structure de ces critères sera réalisée afin de dégager un algorithme permettant une implantation modulaire de ces critères dans un code de calcul.

2.2 Emboutissage, formabilité et concept de Courbe Limite de Formage

2.2.1 Emboutissage

L'emboutissage est un procédé de mise en forme de tôles par déformation plastique permettant la réalisation de produits aux formes non développables plus ou moins complexes. Des cadences de productions pouvant être élevées et des faibles pertes de matières en font un procédé particulièrement compétitif pour des applications comme la mise en forme de pièces de structure ou d'aspect en automobile, d'emballages dans l'industrie du packaging ou encore d'éléments d'électroménager et d'ustensiles.

Dans le cas d'un emboutissage à simple effet, le poinçon placé sur une presse impose un effort ou un déplacement à une tôle initialement plane, aussi appelée flan, jusqu'à ce que celle-ci prenne la forme imposée par la matrice.

Plus couramment utilisé dans l'industrie, l'emboutissage à double effet reprend l'outillage utilisé lors de l'emboutissage à simple effet en y ajoutant un serre-flan, permettant d'imposer un serrage sur le pourtour de la tôle au cours des opérations de formage. Après le positionnement du flan entre le poinçon et la matrice (Figure 2.1 (a)), la descente du serre-flan permet le maintien et le serrage du pourtour de la tôle pendant toute l'opération de formage

grâce au contrôle précis de la pression appliquée (Figure 2.1 (b)). Le déplacement du poinçon permet ensuite d'entrainer la tôle dans la matrice en lui imposant d'importantes déformations, allant au-delà de la limite d'élasticité. Cette phase peut être accompagnée de glissement de la tôle sur le serre-flan et sur la matrice. Les déformations irréversibles ainsi créées donnent à la pièce une forme proche du produit fini (Figure 2.1 (c)). Le relèvement du poinçon et du serre-flan permet de sortir la pièce qui, après retour élastique, prend sa forme finale (Figure 2.1 (d)).

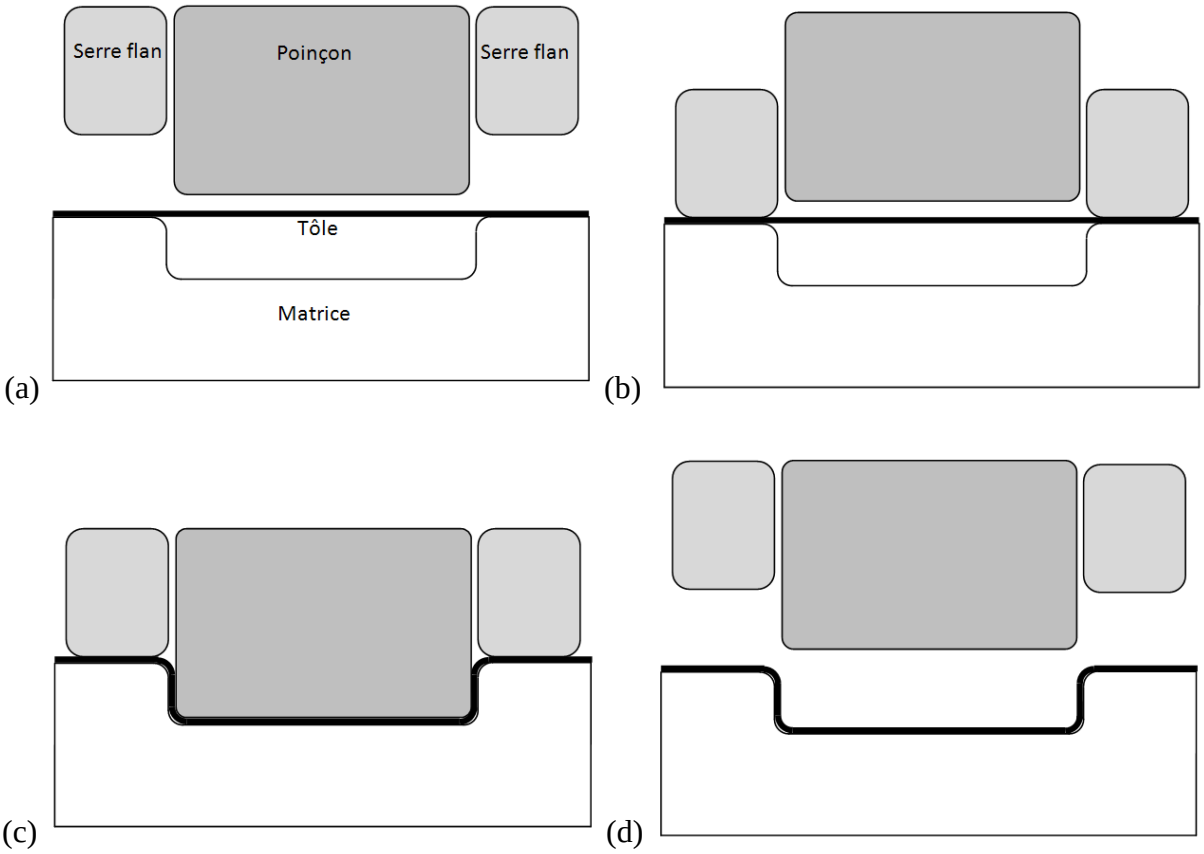


Figure 2.1 : Principales étapes d'une opération d'emboutissage. (a) Positionnement du flan, (b) serrage, (c) descente du poinçon et (d) remontée des outils mobiles.

Souvent précédée par la découpe du flan, cette opération d'emboutissage n'est généralement pas suffisante pour obtenir une pièce finie. Elle peut alors par exemple être suivie par d'autres opérations d'emboutissage incluant le réemboutissage et le contre-emboutissage, de détourage, de tombage des bords ou de sertissage.

Un procédé proche de l'emboutissage est l'hydroformage, pour lequel la force exercée par le poinçon sur la tôle est remplacée par un fluide sous pression. Ce procédé se révèle particulièrement adapté pour la mise en forme de pièces tubulaires pour lesquelles il peut permettre une réduction des coûts, du nombre d'opérations et de la masse du produit fini. Moyennant des adaptations permettant de prendre en compte les effets de la pression du fluide, plusieurs des modèles détaillés dans les prochains chapitres dans le cas de l'emboutissage sont aussi applicables à ce procédé (Boumaiza 2005).

Des évolutions récentes des procédés de mise en forme des tôles tendent au développement de procédés de formage incrémental. La forme et la taille du poinçon imposé sont très différentes de celles utilisées classiquement en emboutissage. Le poinçon n'est plus propre à une forme de pièce et de matrice, mais est au contraire généralement de petite taille et de forme hémisphérique. Le déplacement de ce poinçon sur toute la pièce en plusieurs passes permet de plastifier la pièce et de lui donner sa forme finale. L'utilisation d'un outil générique permet la réduction des coûts pour de petites séries et le contrôle fin du déplacement du poinçon permet la réalisation de pièces aux géométries complexes avec un seul outil. Toutefois, les cadences atteintes ne peuvent pour l'instant égaler celles obtenues avec le procédé classique d'emboutissage. La compréhension fine et la modélisation de l'influence de la trajectoire de l'outil sur la tôle, ayant une incidence capitale sur la forme finale, restent des objets de recherche. Les avantages mais aussi les limites de ce procédé en font plus un complément qu'un concurrent direct de l'emboutissage classique.

2.2.2 Défauts de mise en forme et formabilité

Si le principe général de mise en forme de tôles minces (dont l'épaisseur peut varier entre 300 µm et 3 ou 4 mm) est simple, de nombreux paramètres ont une influence sur la qualité finale des pièces et la mise au point des gammes permettant la fabrication d'une nouvelle pièce est délicate. Les principaux paramètres influents peuvent concerner les caractéristiques métallurgiques du flan ou le procédé précédemment utilisé pour son obtention, la qualité du contact entre la tôle et l'outil ou encore le trajet et l'état de déformation et de contraintes imposés à la tôle. Un choix inadapté du jeu de ces paramètres peut conduire à des défauts de mise en forme.

Parmi les défauts métallurgiques, on peut citer le phénomène de vermiculure, lié au vieillissement des aciers et se traduisant par l'apparition de fines veines sur la surface de la tôle emboutie. Sur des produits minces, une taille de grains importante (supérieure à 50 µm) peut provoquer un défaut sous forme de petites ondulations de la surface connu sous le nom de peau d'orange. La présence d'inclusions dans le flan peut conduire à des exfoliations et des déchirures superficielles sur la peau de la tôle lors du formage. La présence d'impuretés ou de défauts de surface sur les outils peuvent conduire à des rayures indésirables, à des fissures sur le produit fini, voire à la présence de picots à la surface de la pièce en contact avec le nez du poinçon ou à des phénomènes d'écaillage.

Des défauts de lubrification peuvent enfin perturber l'écoulement de la matière et être une des sources d'instabilités de type structurelles. Ces instabilités sont généralement liées à la présence de zones soumises à de fortes contraintes de compression. En l'absence de serre-flan ou en présence d'une pression insuffisante, des plissements peuvent se produire sur la collerette entourant la pièce ou sur une autre partie de l'embouti. La présence de contraintes résiduelles peut aussi conduire au voilage de pièces planes sans en être la cause unique. L'utilisation de nouveaux matériaux aux propriétés améliorées entraine parfois certaines difficultés pratiques en emboutissage. La mise en forme d'aciers à très haute limite d'élasticité est accompagnée d'un fort retour élastique qu'il convient de quantifier avec

précision afin d'atteindre des côtes finales satisfaisantes. La prévision du retour élastique nécessite la mise en œuvre de modèles de comportement du matériau et de moyens numériques avancés.

Une dernière catégorie d'instabilités est qualifiée de matérielle. La striction diffuse est une réduction non homogène de l'épaisseur de la tôle. Elle ne constitue généralement pas une limite pratique de formabilité. La localisation des déformations se produit à un niveau de chargement supérieur. Les déformations se concentrent alors dans un faible volume de la tôle, conduisant à un fort amincissement local souvent sous forme de bandes et à une dégradation des propriétés mécaniques. La localisation est un phénomène précurseur de la rupture et toutes deux conduisent au rebut des produits affectés. L'ensemble des chapitres suivants est consacré à l'étude de ces phénomènes de striction et de localisation.

2.2.3 Concept de Courbe Limite de Formage

Un outil utilisable en atelier a été développé pour représenter la formabilité d'une tôle : la Courbe Limite de Formage (CLF). Cette courbe représente sur un graphe la limite de formabilité d'une tôle (à matériau et épaisseur donnés) dans un espace approprié, souvent choisi à partir des déformations principales (Gensamer 1946; Keeler et Backhofen 1963; Keeler 1965; Goodwin 1968). Les limites indiquées peuvent être non seulement des limites à striction diffuse, à localisation mais aussi à rupture ou à plissement, comme l'illustre la Figure 2.2. Dans un procédé d'emboutissage, des défauts d'aspect ou des propriétés mécaniques dégradées sont constatés avant la rupture de la pièce. En première approche, la striction diffuse est caractérisée par un amincissement plus prononcé dans une large partie de l'éprouvette et donc par une perte d'homogénéité des champs mécaniques au sein de celle-ci. La striction diffuse est une instabilité dépendant de la géométrie du problème et donc une instabilité de type structure. Les CLF peuvent être utilisées pour comparer la formabilité de deux matériaux sans prendre en compte les effets de la géométrie. Dans ce cadre, les critères proposés seront écrits en suivant une approche matérielle. La striction localisée est caractérisée par un amincissement concentré dans une bande de largeur réduite (de l'ordre de quelques fois la grandeur de l'épaisseur de la tôle). Ce type de striction est couramment visible sur des aciers doux. La localisation sous forme de bandes de cisaillement est accompagnée par une forte concentration des déformations de cisaillement au sein de bandes d'épaisseur réduite délimitées par une discontinuité du gradient des vitesses. Les limites étudiées dans le reste du manuscrit seront donc constituées par les phénomènes de strictions et de localisations, bien que des critères de rupture de formes proches des critères d'instabilité plastiques présentés par la suite puissent être étudiés et implantés d'une manière tout à fait similaire à celle présentée au paragraphe 2.5. Le plissement est quant à lui une instabilité de structure liée à la présence de zones en compression notamment au niveau du serre-flan. Son étude sort elle aussi du cadre fixé.

La dispersion des données tant au niveau des propriétés des matériaux que des paramètres de contrôle du procédé conduit à ne pas définir une limite de formabilité unique mais un

ensemble de courbes ayant une probabilité donnée d'instabilité plastique (Banabic et Vos 2007).

De nombreux exemples de trajets de chargements montrent d'autre part des états de déformations situés au dessus de la CLF mais ne conduisant pourtant pas à un défaut dans la zone considérée de la pièce emboutie. Col propose d'expliquer ce paradoxe par les effets du rapport entre la courbure imposée à la pièce lors du formage et l'épaisseur du flan (Col 2010). Lors du passage de la tôle sur les rayons de l'outil, une flexion importante se produit et avec elle une déformation plastique d'une partie superficielle de la tôle. Le fort gradient de déformations et de contraintes suivant l'épaisseur n'est plus en accord avec les hypothèses d'homogénéité faites pour l'obtention de CLF. D'après l'auteur, ce rapport tend à augmenter la formabilité dans certains domaines comme la traction plane (TP) par exemple et la diminuer dans d'autres. La prise en compte des effets de courbure et d'épaisseur conduit à introduire le concept de Surface Limite de Formage plutôt que celui de CLF.

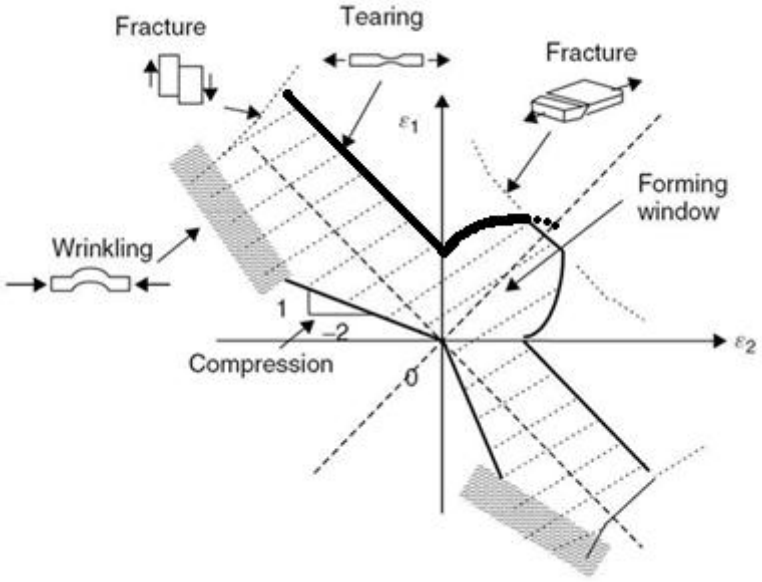


Figure 2.2 : Limites de formabilité en emboutissage et CLF à localisation (trait gras) d'après (Marciniak et al. 2002).

Sur des pièces présentant un fort degré de complexité et dont certaines parties sont soumises à des trajets de chargements non-linéaires critiques, la simulation de l'ensemble du procédé d'emboutissage à l'aide d'un code commercial de calcul par éléments finis disposant d'indicateurs fiables d'instabilités plastiques constitue une alternative pour s'affranchir des limites du concept des CLF. Celles-ci constituent néanmoins un outil pratique pour la comparaison de la formabilité de matériaux différents ou un indicateur de faisabilité d'un procédé d'emboutissage sur une pièce ne présentant pas de difficulté particulière. La popularité des CLF n'étant pas démentie, il réside un fort intérêt pour le développement de méthodes prédictives tant expérimentales que théoriques.

2.3 Détermination expérimentale des CLF

Une première approche pour la détermination des CLF est purement expérimentale. Il s'agit alors d'étudier le niveau de chargement ou l'état de déformation à partir duquel une éprouvette standardisée présente une localisation. Comme les machines de traction multiaxiales ne sont pas universellement répandues, différentes géométries d'éprouvettes montées sur une machine de traction ou sur un montage spécifique permettent de reproduire les trajets de chargements allant de la traction uniaxiale à la traction équibiaxiale dans la zone de l'éprouvette où la localisation se produit.

La méthode proposée par Keeler et Backofen consiste à tester différents niveaux de chargements sur plusieurs éprouvettes identiques et sur plusieurs outils conduisant à des localisations pour des trajets de chargements variés (Keeler et Backhofen 1963). La localisation est repérée de manière visuelle et tactile lorsqu'un défaut d'épaisseur devient perceptible à la surface de l'éprouvette. La détermination du chargement limite à partir duquel l'instabilité plastique devient perceptible permet pour chaque type d'éprouvettes testées, donc pour différents trajets de chargements, de tracer des courbes limites de formage. Les points reportés sur un même graphe permettent la détermination des zones saines, à localisation et à rupture. Si cette méthode se révèle simple à mettre en œuvre et utilisable en atelier, elle présente toutefois les inconvénients majeurs d'être dépendante de la sensibilité de l'opérateur et particulièrement longue puisque un nombre d'essais important est nécessaire au tracé d'une CLF.

Différents types d'essais mécaniques ont été mis au point pour reproduire les différents trajets de déformations linéaires permettant d'obtenir une CLF. La méthode IRSID utilisait des éprouvettes entaillées montées sur une machine de traction classique reproduisant des trajets de chargement allant de la traction uniaxiale à la traction plane. Cette méthode a l'avantage d'être réalisable avec des moyens d'essais courants, de ne pas soumettre l'éprouvette à du frottement avec les outils et de ne pas y introduire de flexion, mais les forts gradients de déformations au niveau des entailles rendent difficile l'exploitation des mesures de déformations dans ces zones critiques. Les points situés dans la partie droite de la CLF peuvent quant à eux être obtenus à partir d'essais de gonflement hydraulique réalisés sur des éprouvettes de formes proches d'ellipses (Ben Tahar 2005). Dans l'essai de Nakajima, des disques entaillés sont maintenus aux extrémités sur une presse munie d'un poinçon hémisphérique (Nakazima et al. 1968; Nakazima et Kikuma 1971). Le déplacement du poinçon jusqu'à rupture de l'éprouvette conduit à la localisation dans certaines zones. L'utilisation d'un poinçon hémisphérique directement en contact avec l'éprouvette introduit néanmoins de la flexion dans la zone testée et nécessite la prise en compte du frottement. Dans l'essai de Marciniak, le poinçon hémisphérique est remplacé par un poinçon cylindrique et un contre flan est placé entre la tôle et le poinçon. Le contre flan joue un rôle important, il doit être plus ductile que le flan testé et avoir un frottement beaucoup plus important avec lui qu'avec le poinçon. Sa mise en œuvre est donc plus délicate que l'essai de Nakajima, mais il permet d'éviter la flexion et le frottement entre la tôle et l'outil dans la zone critique. Le choix de techniques de dépouillement pertinentes est tout aussi important.

Afin de s'affranchir du nombre élevé d'essais à effectuer en utilisant la méthode de Keeler, des méthodes alternatives proposent d'estimer l'état de déformation à localisation sur une éprouvette ayant dépassé le niveau critique de chargement au cours de ces tests. Des grilles ou des cercles gravés sur la surface de l'éprouvette permettent en effet de déterminer de manière précise l'état de déformation en certains points de la surface déformée au cours du test. En considérant que les zones proches de la fissure sont dans un état précédant la rupture, il est possible en mesurant le gradient des déformations à la surface de l'éprouvette d'estimer par interpolation polynomiale la déformation à localisation (Bragard et al. 1972). Au moment de la localisation, la vitesse de déformation augmente fortement dans la zone critique alors qu'en dehors, la pièce cesse son chargement ou se décharge élastiquement. Les moyens actuels permettent de mesurer tout au long du chargement la déformation de l'éprouvette par des méthodes de corrélation d'images sur la surface ayant reçu un mouchetis. En fin d'essai, la zone critique est connue et il est possible de tracer l'évolution de sa vitesse de déformation (Marron et al. 1997). Cette méthode se révèle particulièrement efficace et rapide à utiliser, des similitudes entre le critère de localisation retenu et ceux utilisés par certaines approches développées dans les prochains chapitres, et notamment avec le modèle M – K, pourront être établies.

L'utilisation des méthodes expérimentales pour la détermination des CLF reste actuellement limitée par le coût de mise en œuvre et le manque de normes conduisant à une forte variabilité des résultats d'un laboratoire à l'autre (Ben Tahar 2005). De nouvelles normes devraient toutefois permettre de standardiser le choix du type d'éprouvettes, de l'essai conduisant à l'état de déformation critique et de l'indicateur de localisation (Col 2010).

2.4 Critères pour la détection des limites de formabilité

Face aux difficultés techniques de mise en œuvre et au coût des méthodes expérimentales, de nombreux travaux ont été menés depuis la seconde moitié du 20ème siècle pour développer des critères permettant la prédiction des limites de formabilité des tôles métalliques. Le nombre de critères développés rend peu probable une étude exhaustive, toutefois cinq approches différentes peuvent être dégagées parmi les critères les plus couramment employés : une approche empirique, une basée sur le principe de Force Maximum, les méthodes multizones, celles basées sur l'analyse de bifurcation et enfin les méthodes d'analyse de stabilité par perturbation linéarisée. La présentation successive de chacune de ces approches et des critères en étant issus fait l'objet des prochains paragraphes. Une démarche générale servant à l'implantation de ces critères pourra alors être déterminée.

2.4.1 Approche empirique

Afin de fournir un outil simple et rapidement applicable en atelier, des méthodes basées sur le traitement statistique de jeux de données expérimentales ont été développées.

L'étude des facteurs influençant la formabilité des tôles, menée notamment sur les aciers doux, a permis à Keeler et Brazier de montrer que les CLF d'une même famille de matériaux

présentaient une forme similaire (Keeler et Brazier 1975). En approchant les courbes limites de formage à instabilité plastique par deux droites, une dans le domaine du retreint et une dans le domaine de l'expansion, trois paramètres suffisent : la déformation critique en traction plane notée FLD_0 et les pentes des droites en retreint et en expansion.

La Figure 2.3 donne la forme de la CLF obtenue en utilisant cette approche. La détermination de ces différents paramètres a fait l'objet d'études statistiques. Les angles des droites en retreint et en expansion ainsi déterminés sont d'environ -45° et 20° par rapport à l'axe des abscisses (Bleck et al. 1998). La détermination du paramètre FLD_0 a fait l'objet de plusieurs formules, dont les plus usitées sont issues des travaux de la North American Deep Drawing Research Group (NADDRG) et de la Bethlehem Steel Corporation.

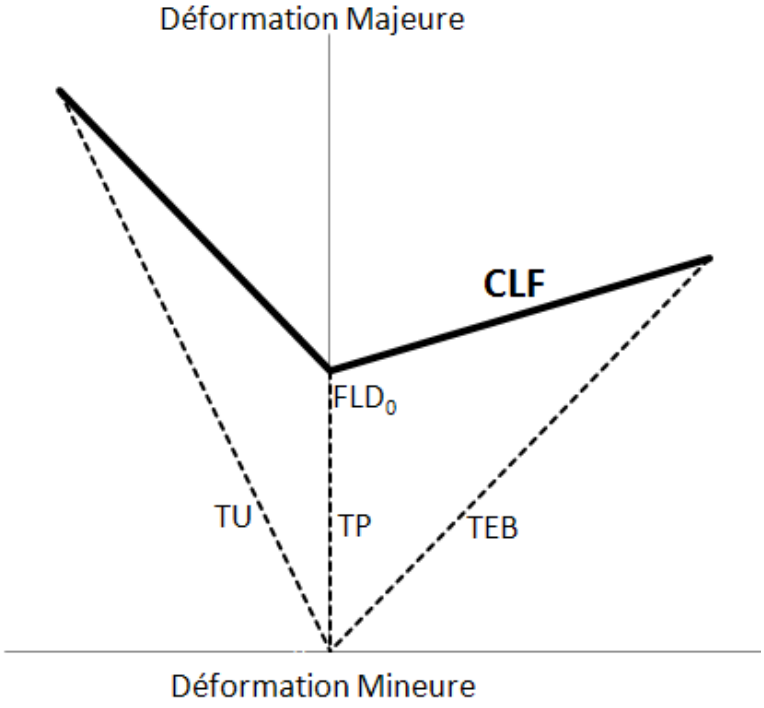


Figure 2.3 : Forme générale des CLF à localisation obtenues avec le modèle empirique de Keeler et Brazier.

Modèle NADDRG :

La formule de prédiction de FLD_0 proposée par la North American Deep Drawing Research Group a été développée pour les aciers dont l'évolution de l'écrouissage peut être représentée par la loi de Hollomon. Cette loi d'écrouissage isotrope non saturante de type puissance sera précisée au Chapitre 3. Cette formule prend en compte l'influence de l'épaisseur de la tôle :

$$FLD_0 = \frac{(23,3+14,13e_0)}{0,21} n \qquad (2.1)$$

avec e_0 l'épaisseur initiale de la tôle et n le coefficient d'écrouissage identifié pour des lois non saturantes. Physiquement le coefficient 0,21 correspondait à une valeur du coefficient d'écrouissage n au-delà de laquelle la déformation critique à localisation en déformation plane était censée ne plus évoluer. Cette valeur et la signification physique de ce facteur ont toutefois été remises en cause par la suite (Col 2010). Initialement identifiée sur des aciers doux, cette formule a été testée sur différentes familles d'aciers et les CLF et FLD_0 ont été comparés à ceux prédits par d'autres critères et à des résultats expérimentaux (Bleck et al. 1998). Si la Figure 2.4 présente des prédictions de formabilité qualitativement en bon accord avec les données expérimentales pour des aciers IF, HS et DP, ce résultat n'est toutefois pas généralisable à toutes les nuances d'aciers. Selon les auteurs, le critère (2.1) semble par exemple surestimer la formabilité d'aciers de nuances TRIP et austénitiques, ce qui peut conduire à l'obtention de pièces défectueuses lors d'opérations d'emboutissage pour des points situés bien en dessous de la CLF prédite. L'utilisation de ce critère pour d'autres nuances d'aciers que certaines nuances d'aciers doux, et notamment pour les nouvelles nuances d'aciers, ne peut donc être menée sans certaines précautions.

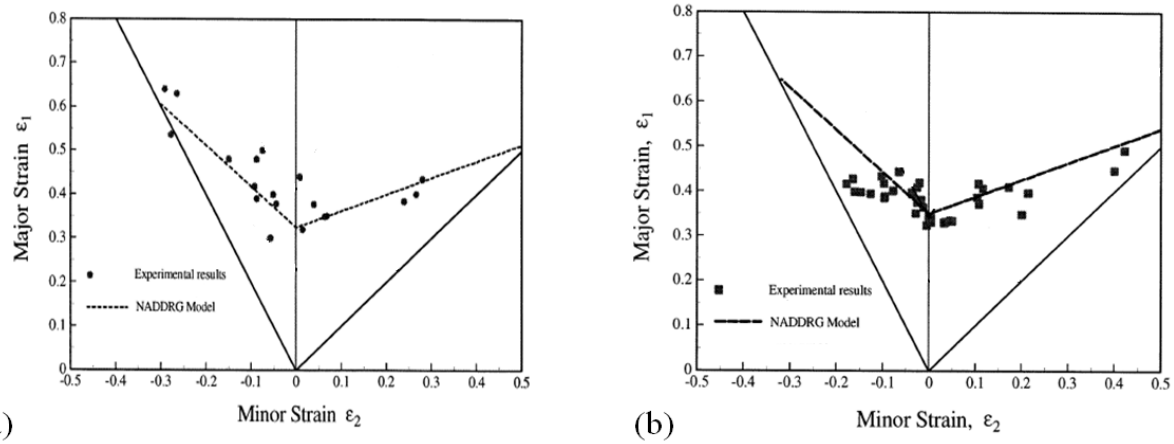


Figure 2.4 : Exemples de CLF obtenues avec le modèle empirique de la NADDRG pour a) un acier Interstitial Free High Strength et b) un acier Dual Phase d'après (Bleck et al. 1998).

Modèle BSC :

Un modèle alternatif, basé sur le même principe expérimental, a été proposé par la Bethlehem Steel Corporation. La formule pour la détermination de FLD_0 basée sur l'allongement à rupture devient :

$$FLD_0 = 2,78 + 3,244e_0 + 0,892A \tag{2.2}$$

avec e_0 l'épaisseur initiale de la tôle exprimée en mm et A un coefficient de formabilité déterminé de manière empirique. Cette formule semble toutefois donner de moins bonnes prédictions que celle déterminée par la NADDRG.

Les modèles présentés ci-dessus ne font intervenir qu'un nombre limité de paramètres, ce qui les rend très simples. Afin de rendre compte de manière plus précise du comportement réel des matériaux, Cayssials propose un modèle permettant de prendre en compte un nombre plus important de paramètres ayant une influence sur la détermination de FLD_0 puis sur le reste de la CLF, avec notamment la sensibilité à la vitesse de déformation, l'écrouissage, l'épaisseur de la tôle et l'endommagement (Cayssials 1998).

2.4.2 Principe de Force Maximum

La première étude historique fréquemment citée concernant la prédiction d'instabilités plastiques est due à Considère. Suite à de nombreuses observations expérimentales sur la traction uniaxiale de barres en acier, celui-ci postule que la striction diffuse se produit lorsque l'effort appliqué par la machine de traction atteint son maximum lors d'un essai monotone (Considère 1885). Initialement limité à la prédiction de la striction diffuse en traction uniaxiale, ce critère a été étendu par la suite à la prédiction de modes diffus lors de chargements plans de tôles minces (Swift 1952). La striction diffuse est alors associée aux maxima simultanés des chargements dans les directions principales. Violant certaines observations expérimentales, ce postulat nécessite toutefois une réinterprétation (Habbad 1994). D'autres extensions du critère de Considère concernent la prévision de modes localisés de produits plats soumis à des chargements bi-axiaux.

Selon l'approche de Hill, la striction localisée se produit dans des zones présentant la stationnarité d'une composante particulière du tenseur des déformations (Hill 1952). De telles zones existant uniquement dans le domaine du retreint, le critère de Hill est restreint au tracé de la partie gauche des CLF. Entre la traction uniaxiale et la traction plane, la localisation est alors prédite si l'effort normal à cette bande à déformation stationnaire atteint un maximum. Les prévisions de ce critère sont généralement considérées être en bon accord avec les données expérimentales. Il a alors été parfois associé aux critères de Swift ou au modèle de Marciniak et Kuczynski (Marciniak et Kuczyński 1967) pour le tracé de la partie droite de la CLF. Le critère de Hora est une autre extension du critère de Considère (Hora et al. 1996). La localisation est alors associée au maximum des efforts principaux majeurs ou mineurs au cours d'un essai monotone avec prise en compte des effets de bi-axialité du chargement. La popularité de ce critère est due à la fois à la simplicité de sa mise en œuvre numérique, à son faible coût en temps CPU et à ses prédictions proches des CLF expérimentales (Brunet et Clerc 2007).

Plus récemment, une extension du critère de Swift à la striction localisée à été proposée (Mattiasson et al. 2006). Après un chargement monotone linéaire jusqu'à striction diffuse, celui-ci est libre d'évoluer vers un trajet de déformation plane, associé à la localisation. Ce critère a été comparé par les auteurs à des prédictions numériques issues de la simulation par éléments finis d'essais présentés dans le paragraphe 2.3.

Un inconvénient majeur de cette approche est qu'elle repose sur un postulat empirique difficilement vérifiable. D'autres voies ont alors été adoptées pour la proposition de modèles aptes à prédire les instabilités plastiques.

2.4.3 Méthodes multizones

Une autre approche, de type ingénieur, considère l'évolution des états de déformations dans deux ou plusieurs zones de la tôle présentant initialement des différences de propriétés géométriques ou mécaniques. Deux démarches différentes sont proposées. La première est basée sur la comparaison de l'évolution de propriétés mécaniques de deux zones dont une représente un défaut initial. La seconde est basée sur la simulation numérique du chargement d'une tôle dont l'épaisseur n'est pas constante.

Le modèle présenté par Marciniak et Kuczynski, qui sera souvent noté M – K par la suite, est basé sur l'hypothèse selon laquelle la striction localisée se produit à un endroit des éprouvettes où se trouve un défaut (Marciniak et Kuczyński 1967). Bien que différentes causes puissent être à l'origine du défaut, celui-ci est introduit sous la forme d'une bande d'épaisseur réduite par les auteurs. Après le chargement de la zone saine, les états mécaniques des deux zones sont calculés grâce aux équations de passage de la zone saine à la zone affectée par le défaut. La localisation est prédite lorsque les déformations dans la partie défectueuse tendent à évoluer beaucoup plus rapidement que celles de la zone saine.

Il a été montré que l'orientation initiale de la bande par rapport aux directions de chargement avait une influence sur le niveau de localisation prédit (Hutchinson et Neale 1978). Il est donc nécessaire de tester différentes orientations initiales de la bande défectueuse et de ne sélectionner que l'orientation permettant de minimiser la valeur de la déformation critique pour chaque trajet de chargement. Le temps CPU est donc conséquent puisque pour chaque point de la CLF les états mécaniques de deux zones doivent être calculés pour plusieurs orientations de la bande. Ce critère reste néanmoins populaire et se révèle particulièrement facile à adapter à de nouvelles lois de comportements, celles-ci n'apparaissant pas directement lors de la formulation du critère. Différents paramètres définis arbitrairement par l'utilisateur sont introduits lors de la formulation de ce modèle, le plus influent étant la taille du défaut d'épaisseur initial.

En suivant une démarche similaire, Hart étudie une éprouvette dans le cas d'une traction uniaxiale comportant un défaut initial sous forme d'un faible défaut mécanique (par exemple endommagement ou plus fort écrouissage d'une partie de l'éprouvette) (Hart 1967). Au cours du chargement, si l'amplitude de la différence de vitesse de déformation des sections reste proche d'une constante, alors la déformation au niveau du défaut est considérée stable. Si au contraire une forte variation entre les sections avec et sans défaut est observée, alors le mode instable est considérée atteint. Des similitudes formelles entre ce critère et celui de Considère sont obtenues dans le cas de comportements indépendants du temps. Le modèle de Ghosh, apportant quelques modifications à la proposition de Hart, est quant à lui basé sur un défaut d'origine géométrique (Ghosh 1974). Ces méthodes ne semblent toutefois plus utilisées.

Une approche plus récente s'appuie sur les avancées en termes de puissance de calcul. L'épaisseur réelle des tôles ne peut être constante, du fait d'irrégularités lors des opérations de laminage, des effets de la microstructure ou encore de la rugosité. Une tôle non homogène est alors modélisée par une plaque dont les éléments ont des épaisseurs variables, définies de manière aléatoire autour d'une valeur moyenne (Reyes et al. 2008). En utilisant un modèle non local, les auteurs étudient l'évolution de l'état mécanique de la tôle par la méthode des éléments finis et prédisent la localisation lorsque la déformation se concentre dans une zone de la tôle.

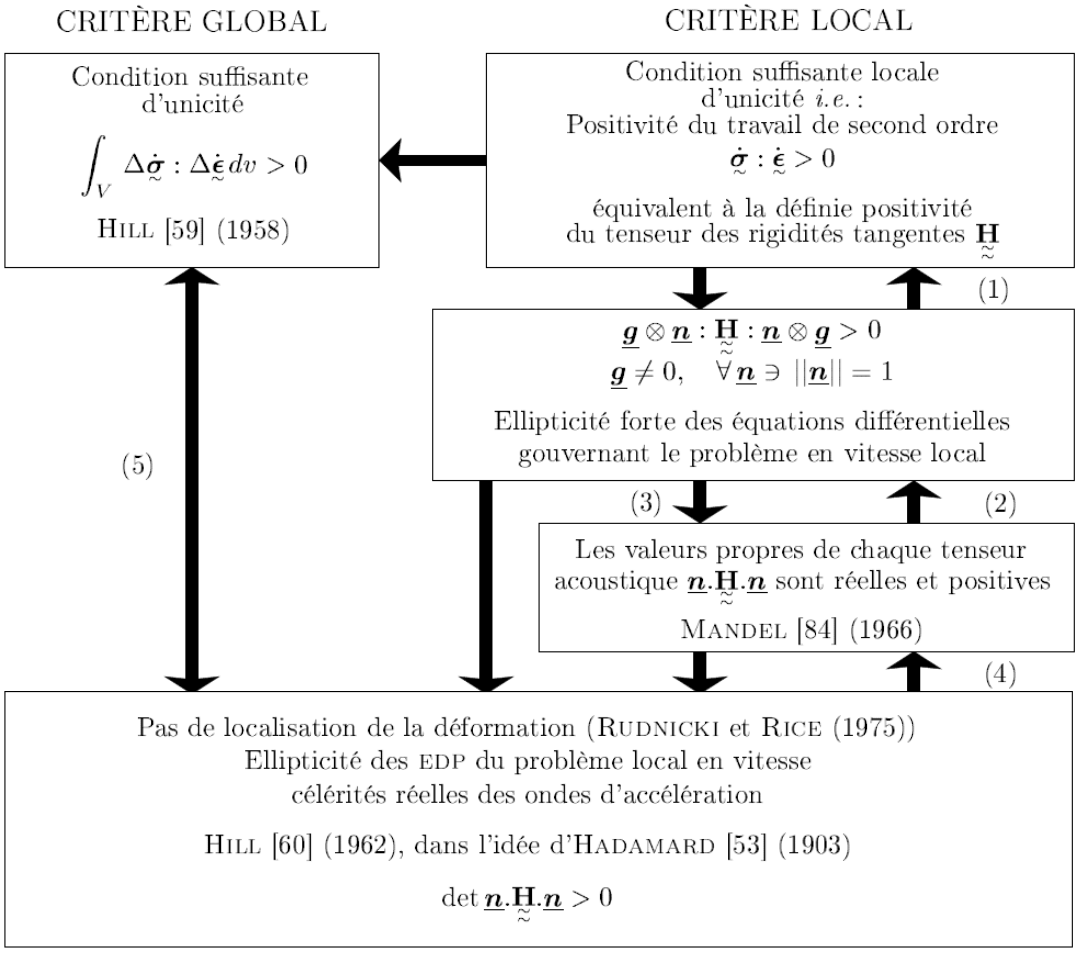
Tous ces critères nécessitent toutefois l'introduction d'une taille de défaut initial et de critères d'arrêt définis par l'utilisateur. Afin d'éviter d'avoir recours à ces paramètres, des méthodes basées sur l'analyse de bifurcation peuvent être utilisées pour les matériaux indépendants du temps.

2.4.4 Analyse de bifurcation

La striction diffuse peut être perçue comme le passage d'un état homogène de déformation dans l'éprouvette à un état quasi-homogène et peut donc être vue comme un problème de bifurcation liée à la perte d'unicité de la solution du problème d'équilibre. La théorie de la bifurcation permet d'établir des conditions sous lesquelles une bifurcation est possible ou non. Le critère de Bifurcation Générale repose sur le principe de perte de positivité de travail de second ordre (Drucker 1950; Drucker 1956), (Hill 1958) dans le cas du flambage. Un critère moins conservatif reposant sur la stationnarité des efforts correspond à la bifurcation par Point Limite (Valanis 1989). Ces critères intrinsèques ont l'avantage de ne s'appuyer que sur la seule connaissance du comportement du matériau et ne nécessitent plus, comme le modèle M – K, de paramètres définis arbitrairement.

Dans le cas de la prédiction de modes localisés sous forme de bandes, les premiers travaux sont basés sur l'étude des conditions de stationnarité des ondes d'accélération dans les solides élastiques linéaires puis non linéaires (Thomas 1961; Hill 1962; Mandel 1964). Une approche équivalente est développée pour les matériaux élasto-plastiques à partir des travaux de (Hill et Hutchinson 1975; Rudnicki et Rice 1975; Stören et Rice 1975; Rice 1976). La bifurcation est associée à la perte d'ellipticité des équations du système, ce qui n'est possible dans le cas de la plasticité incrémentale associée qu'avec un régime adoucissant. Dans le cas de géomatériaux, l'utilisation de lois de plasticité non associée permet une localisation avant le pic de la courbe contrainte de Cauchy – déformation vraie (i.e. dans le régime d'écrouissage positif) (Desrues 1984; Chambon 1986; Sulem et Vardoulakis 1990; Darve 1994). Pour la mise en forme de matériaux métalliques, le régime adoucissant peut être introduit par le couplage des lois de comportement avec de l'endommagement en plasticité associée (Doghri et Billardon 1995; Haddag 2007; Haddag et al. 2009). Une autre possibilité pour l'obtention d'une localisation dans le régime d'écrouissage positif consiste à introduire des points de vertex sur la surface de plasticité, ce qui peut être obtenu par l'usage de la théorie de déformation totale de la plasticité (Stören et Rice 1975) ou encore par l'utilisation de lois de comportement micromécaniques (Lorrain et al. 2005; Franz et al. 2009). La formulation du

critère repose sur la présence d'une discontinuité du gradient des vitesses à travers la bande de localisation dans un milieu homogène. Dans le cas où le module tangent est le même à l'intérieur et à l'extérieur de la bande jusqu'à la localisation, la bifurcation est qualifiée de continue, et de discontinue dans le cas contraire. Une condition plus conservative est donnée par la condition de perte d'ellipticité forte (Bigoni et Hueckel 1991). Ces derniers présentent d'ailleurs un tableau, valable en petites déformations, synthétisant les liens existant entre les critères issus de l'analyse de bifurcation, reproduit en Figure 2.5.



(1) pour un mouvement plan isochore

(2) pour une plasticité associée

(3) seulement si toutes les valeurs propres du tenseur $\underline{\boldsymbol{n}}.\underset{\sim}{\mathbf{H}}.\underline{\boldsymbol{n}}$ sont réelles

(4) pour une plasticité associée

(5) pour une plasticité associée, une cinématique contrainte sur toute la frontière du corps et des conditions homogènes avant bifurcation, RICE [108] (1976))

Figure 2.5 : Relations entre les critères de bifurcation plastique d'après (Bigoni et Hueckel 1991) et repris par (Keryvin 1999).

2.4.5 Analyse linéaire de stabilité

Les méthodes d'analyse de stabilité matérielle sont probablement les plus récentes et leurs difficultés de mise en œuvre, tant théoriques que numériques, sont probablement à l'origine de leur utilisation plus limitée que les approches précédemment citées. Elles constituent toutefois une alternative aux méthodes d'analyse de bifurcation dans le cas de matériaux dépendant du temps. Dans le cas de modes localisés, deux approches d'analyse de stabilité sont présentes dans la littérature.

La première méthode permet d'étudier la stabilité d'un équilibre formulé à partir du travail de premier ordre d'un solide rigide plastique. La méthode d'analyse de stabilité, basée sur les travaux de Lyapunov (Lyapunov 1904; 1907), conduit à étudier le taux de croissance d'une perturbation introduite dans les équations d'équilibre. La stabilité de la solution est conservée tant que la solution du système perturbé reste « proche » de la solution du système non perturbé, c'est-à-dire tant que le taux de croissance de la perturbation n'excède pas une valeur critique. Initiée par Clifton pour la prédiction de conditions critiques permettant l'apparition d'un mode instable en cisaillement (Clifton et al. 1984; Shawki et Clifton 1989), cette méthode a ensuite été appliquée par Molinari et ses collaborateurs aux solides thermoviscoplastiques modélisés par des lois phénoménologiques en cisaillement simple (Fressengeas et Molinari 1987; Dudzinski et Molinari 1991) puis aux matériaux modélisés par des lois micromécaniques (Boudeau et Gelin 1994; Toth et al. 1996; Boudeau et al. 1998).

La seconde approche repose sur les mêmes bases mathématiques. L'écriture du problème initial est toutefois différente et applicable par exemple aux matériaux élasto-viscoplastiques (Cano 1996; Benallal 2000; Benallal et Comi 2003) ou aux matériaux viscoélastiques endommageables (Keryvin 1999). La perturbation des équations d'équilibre écrites sous forme incrémentale conduit toutefois à un problème différent du précédent. Il a pu être montré que lorsque le comportement élasto-viscoplastique tend vers un comportement élasto-plastique, le critère de perte d'ellipticité peut être vu comme un cas limite du critère basé sur l'analyse de stabilité (Barbier et al. 1998).

Bien que les notions de bifurcations plastiques et d'instabilités plastiques fassent appel à des problématiques et des méthodes de résolutions différentes, il n'est pas rare que les phénomènes de striction diffuse, de striction localisée et de localisation sous forme de bandes présentant des discontinuités du gradient des vitesses soient qualifiés d'instabilités plastiques ou matérielles dans la littérature. Par abus de langage, le terme d'instabilité plastique sera fréquemment utilisé dans ce mémoire, indépendamment de la méthode de résolution choisie, pour qualifier ces phénomènes.

2.5 Simulation des essais de formabilité

Différents principes, regroupés en quatre classes, sont à la base de la formulation des principaux critères théoriques permettant la prédiction des phénomènes de striction diffuse, de striction localisée et de localisation sous forme de bandes au niveau d'un point matériel. Bien que les formulations de ces critères puissent paraître très différentes au premier abord, les

critères sont a priori tous développés pour prédire une instabilité plastique et devraient donc présenter des similitudes importantes dans leur mise en oeuvre. Mis à part les critères basés sur des méthodes multizones pour lesquels l'analyse requiert quelques étapes supplémentaires, tous les critères peuvent être implantés en suivant un schéma d'intégration commun.

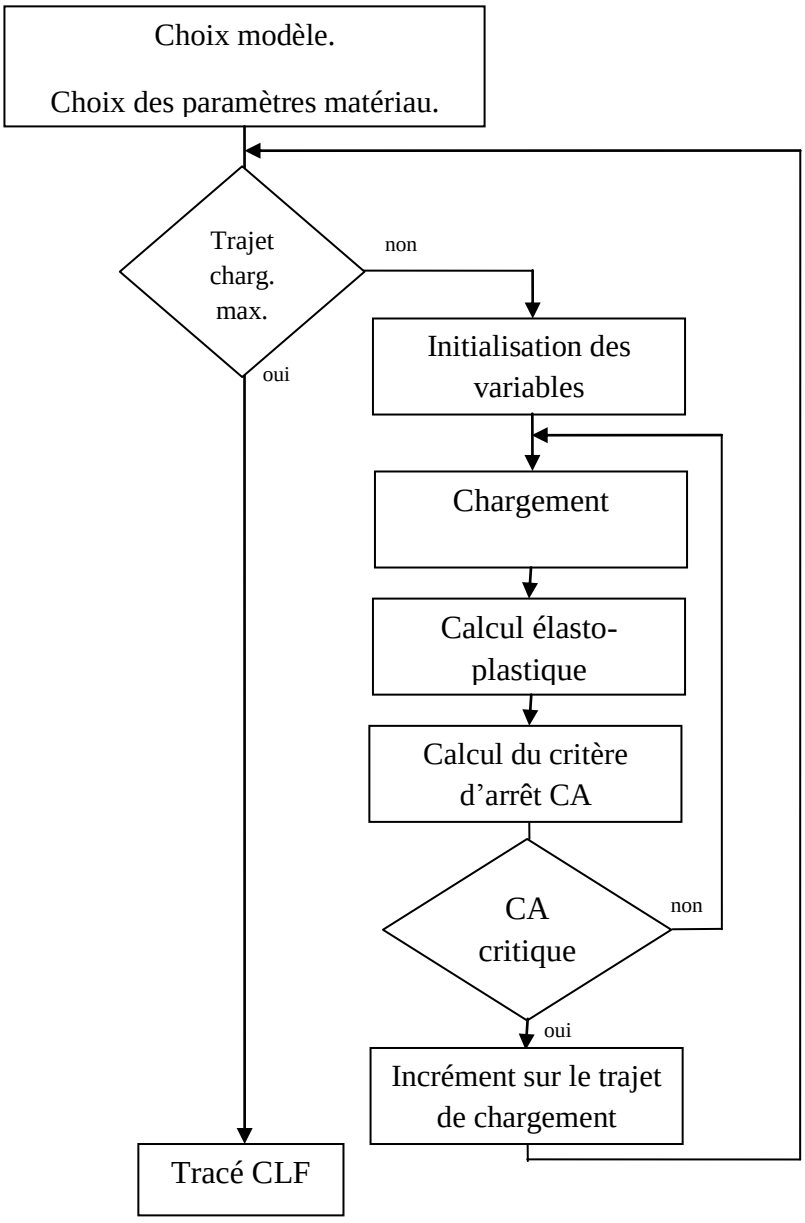


Figure 2.6 : Schéma général d'implantation des critères d'instabilité plastique.

Après avoir initialisé les paramètres concernant le matériau et le chargement, un incrément de chargement dépendant du trajet choisi est appliqué à la tôle. A partir de la connaissance de l'état mécanique de la tôle en début d'incrément et de la valeur de l'incrément de chargement, les états de contrainte et de déformation, les variables internes et le module tangent peuvent être actualisés en fin d'incrément. Un critère de prédiction d'instabilité plastique est alors

appliqué pour évaluer la criticité du nouvel état de la tôle. Tant que l'instabilité n'est pas atteinte, la tôle peut être chargée. Une fois le niveau critique de localisation atteint pour un trajet de chargement, cette procédure est appliquée pour d'autres trajets. La CLF est finalement tracée avec l'ensemble des points critiques obtenus pour les différents trajets, comme le résume la Figure 2.6.

Ce schéma a servi de base pour l'intégration des modèles de comportement et des critères dans un code spécifique développé sous Matlab. Le choix du chargement fera l'objet du prochain paragraphe. La seconde étape, concernant la définition du modèle de comportement, sera présentée dans le prochain chapitre. Les écritures des critères d'instabilité plastique seront développées dans les Chapitres 4 à 6. Des applications de cette méthode seront finalement données dans le Chapitre 7.

Il est à noter que dans le cas du modèle M – K basé sur la méthode à deux zones, la base du schéma reste la même, toutefois des étapes supplémentaires sont nécessaires pour effectuer le chargement des différentes zones à partir d'équations de passage, pour déterminer l'état mécanique dans la bande défectueuse et pour tester l'influence de l'orientation initiale de la bande sur le niveau de localisation. Le schéma d'intégration de ce critère sera présenté de manière plus détaillée en même temps que le critère au Chapitre 6.

Le chargement à imposer aux tôles lors des développements théoriques des critères de striction et de localisation ou de leurs simulations numériques n'est pas unique et plusieurs facteurs peuvent guider le choix. Le premier est la raison d'usage, certains critères étant classiquement associés avec tel ou tel type de chargements. Un second tend à reproduire le plus fidèlement possible les conditions expérimentales. Une troisième raison peut être liée à la possibilité parfois de simplifier les développements théoriques de certains critères lors de l'utilisation d'un trajet de chargement particulier. Dans la plupart des cas, le choix du trajet de chargement n'est pas imposé directement par le choix du critère et ils peuvent donc être présentés séparément. Le premier type de chargement linéaire direct est le chargement radial ou de la forme :

$$\Delta\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \Delta A_{11}^0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta A_{22}^0 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta A_{33}^0 \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

avec $\Delta\mathbf{A}$ l'incrément de la variable considérée et ΔA_{ii}^0 les incréments des composants de ce tenseur. Généralement les termes non diagonaux sont nuls. Dans le cas où la variable est liée à une contrainte, le terme ΔA_{33}^0 est imposé nul, ce qui correspond alors à un état plan de contraintes. Le rapport constant entre ΔA_{22}^0 et ΔA_{11}^0 est alors noté α. Dans le cas où elle est liée à une déformation plastique, le rapport est noté β et la relation $\Delta A_{33}^0 = -\Delta A_{11}^0 - \Delta A_{22}^0$ permet d'avoir une trace de la déformation plastique nulle.

Un chargement mixte, alliant certains éléments diagonaux du tenseur d'incréments de déformations à des éléments du tenseur des incréments de contraintes, permet d'imposer un

chargement en déformation tout en vérifiant un état plan de contraintes. Ce chargement conserve la forme (2.3), mais les deux premiers termes de la diagonale sont des termes d'incréments de déformations alors que le troisième est un terme nul en contraintes.

Des chargements bilinéaires sont parfois présents dans la littérature, il s'agit d'effectuer une première partie du trajet de chargement avec une valeur constante de α ou de β jusqu'à une valeur de déformation (ou de contrainte) prédéfinie puis de changer brutalement cette valeur et de continuer le chargement avec un autre rapport constant. Ces trajets sont utilisés pour montrer l'influence du trajet de chargement sur la CLF.

Lors d'opérations réelles de mise en forme, il est généralement constaté qu'une zone de la tôle subit différents rapports de chargements au cours de l'essai. Le trajet de chargement a une grande influence sur le niveau de déformation acceptable par une pièce. Les trajets linéaires proposés ci-dessus peuvent devenir insuffisants pour juger de la criticité du procédé et il convient de simuler le trajet réellement suivi par un point sur une pièce. Afin de mieux reproduire ce type de trajets, un chemin non linéaire quelconque peut être imposé lors de la simulation. Une alternative est la simulation du procédé dans un code de calcul par éléments finis. Dans ce cas, les critères développés peuvent être facilement couplés au code (par le biais d'une routine UVARM par exemple dans Abaqus).

2.6 Conclusion

L'emboutissage est un procédé largement utilisé pour la mise en forme de tôles métalliques. La mise au point des outils et du procédé pour une nouvelle pièce reste néanmoins une opération délicate nécessitant un savoir faire pointu, notamment avec l'arrivée de nouvelles nuances d'acier, et de nombreux défauts peuvent apparaitre sur la pièce lors du formage. La striction diffuse présente par exemple une perte d'homogénéité des champs mécaniques dans la pièce au cours du chargement sous forme d'un amincissement dans une zone étendue. La striction localisée, intervenant plus tardivement, est associée à un amincissement de la tôle lié à une concentration des déformations dans une bande de faible épaisseur. Son évolution est très rapide et conduit à la rupture de la pièce. La localisation des déformations sous forme de bandes comporte les mêmes caractéristiques sans nécessairement être liée à un amincissement. Afin de réduire ces risques, des Courbes Limites de Formage ont été mises au point pour donner une idée du domaine de formabilité d'une tôle.

Des approches variées ont été proposées pour définir des critères théoriques permettant de tracer de telles courbes à partir de la simple connaissance du comportement du matériau. Parmi ces approches, les principales sont le principe de force maximum, les méthodes multizones, l'analyse de bifurcation et l'analyse linéaire de stabilité. Dans la plupart des cas, les démarches d'implantation de ces méthodes sont similaires, comprenant des étapes de chargement, la détermination du nouvel état mécanique à l'aide d'un calcul élasto-plastique ou élasto-viscoplastique et l'application d'un critère d'arrêt pour la détermination de la déformation critique à instabilité plastique.

L’étape du chargement a été présentée dans ce chapitre, les suivantes feront l’objet des chapitres 3 à 6.

3 Modélisation du comportement des matériaux

3.1 Introduction 28

3.2 Cinématique des grandes déformations 28

3.3 Comportement élasto-plastique 30
3.3.1 Modèle élasto-plastique 30
3.3.2 Modèle élasto-plastique endommageable 34

3.4 Comportement élasto-viscoplastique 38

3.5 Synthèse 39

3.1 Introduction

Lors d'opérations de formage, les tôles métalliques sont soumises à de grandes transformations qui conduisent à des déformations irréversibles. De nombreux modèles ont été développés pour caractériser les déformations plastiques se produisant au sein d'un volume élémentaire du matériau. Ils sont généralement basés sur des observations physiques ou sur des approches phénoménologiques, ces dernières étant privilégiées ici. L'objectif principal de la thèse étant la comparaison théorique et numérique des critères d'instabilité plastique, seuls des modèles classiques seront utilisés pour la représentation de l'élasticité, de l'évolution de la surface de charge plastique, de l'écrouissage, de l'anisotropie ou encore de l'endommagement. L'utilisation de lois de comportement plus avancées présentes dans la littérature permettrait bien souvent d'améliorer la qualité des prédictions de formabilité et pourrait être entreprise sans difficultés particulières.

Certains modèles de striction et de localisation nécessitent des comportements particuliers, élasto-plastiques ou élasto-viscoplastiques, couplés ou non à l'endommagement. Après avoir rappelé des notions sur le formalisme des transformations finies, offrant un cadre adéquat pour la formulation des lois de comportement utilisées en mise en forme, les différents modèles utilisés par la suite, élasto-plastiques et élasto-viscoplastiques avec ou sans couplage à l'endommagement, sont présentés dans ce chapitre.

3.2 Cinématique des grandes déformations

La cinématique choisie pour représenter les grandes transformations rencontrées en mise en forme est basée sur une décomposition multiplicative du gradient de transformation $\mathbf{F}$:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \cdot \mathbf{F}^p \tag{3.1}$$

où $\mathbf{F}^e$ et $\mathbf{F}^p$ sont respectivement la partie élastique et la partie plastique du gradient de la transformation $\mathbf{F}$. Le gradient des vitesses $\mathbf{G}$ est ensuite obtenu par différentiation du tenseur $\mathbf{F}$:

$$\mathbf{G} = \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1} = \dot{\mathbf{F}}^e \cdot \left(\mathbf{F}^e\right)^{-1} + \mathbf{F}^e \cdot \dot{\mathbf{F}}^p \cdot \left(\mathbf{F}^p\right)^{-1} \cdot \left(\mathbf{F}^e\right)^{-1} \tag{3.2}$$

En utilisant la décomposition polaire gauche du gradient de transformation élastique, il est possible d'obtenir :

$$\mathbf{F}^e = \mathbf{V}_g \cdot \mathbf{R} \tag{3.3}$$

où $\mathbf{V}_g$ est le tenseur gauche de la transformation déformante et $\mathbf{R}$ le tenseur de rotation propre élastique, vérifiant la propriété d'orthogonalité :

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}^T = \mathbf{1} \tag{3.4}$$

où $\square^T$ désigne le transposé d'une grandeur. L'emboutissage à froid de tôles métalliques est caractérisé par de faibles déformations élastiques mais éventuellement des rotations importantes. Il est alors possible de découper la partie élastique du tenseur gradient $\mathbf{F}$ par :

$$\mathbf{F}^e \cong \left(\mathbf{1}+\mathbf{e}\right)\cdot\mathbf{R} \tag{3.5}$$

où $\mathbf{e}$ est le tenseur symétrique des déformations élastiques, dont la norme est petite par rapport à l'unité. En combinant les équations précédentes, une approximation du gradient des vitesses peut être obtenue en utilisant un développement polynomial de $\left(\mathbf{F}^e\right)^{-1}$ limité au premier ordre :

$$\mathbf{G} = \dot{\mathbf{R}}\cdot\mathbf{R}^{-1} + \overset{\circ}{\mathbf{e}} + \mathbf{R}\cdot\dot{\mathbf{F}}^p\cdot\left(\mathbf{F}^p\right)^{-1}\cdot\mathbf{R}^{-1} \tag{3.6}$$

où

$$\overset{\circ}{\mathbf{e}} = \dot{\mathbf{e}} + \mathbf{e}\cdot\dot{\mathbf{R}}\cdot\mathbf{R}^{-1} - \dot{\mathbf{R}}\cdot\mathbf{R}^{-1}\cdot\mathbf{e} \tag{3.7}$$

est une dérivée temporelle objective de $\mathbf{e}$ calculée à partir du spin élastique $\dot{\mathbf{R}}\cdot\mathbf{R}^{-1}$. Le taux de déformation totale $\mathbf{D}$ et le taux de rotation $\mathbf{W}$ sont définis respectivement comme la partie symétrique et la partie antisymétrique du gradient des vitesses $\mathbf{G}$, soit :

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{G}+\mathbf{G}^T\right) \qquad \text{et} \qquad \mathbf{W} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{G}-\mathbf{G}^T\right) \tag{3.8}$$

Une décomposition additive du taux de déformation total et du spin total en leurs parties élastiques et plastiques peut être définie telle que :

$$\mathbf{D} = \overset{\circ}{\mathbf{e}} + \mathbf{D}^p \qquad \text{et} \qquad \mathbf{W} = \dot{\mathbf{R}}\cdot\mathbf{R}^{-1} + \mathbf{W}^p \tag{3.9}$$

L'expression du taux de déformation plastique peut alors être déduite des équations précédentes comme :

$$\mathbf{D}^p = \mathbf{R}\cdot\left(\dot{\mathbf{F}}^p\cdot\left(\mathbf{F}^p\right)^{-1}\right)^S\cdot\mathbf{R}^{-1} \tag{3.10}$$

où $\square^S$ désigne la partie symétrique d'une grandeur mécanique. Dans la plupart des développements théoriques effectués pour l'expression des critères d'instabilité plastique, des conditions particulières de chargements seront choisies afin d'imposer un spin nul, la dérivée temporelle de la déformation pouvant alors être assimilée à la dérivée temporelle objective. Cette remarque sera utilisée pour simplifier l'écriture des modèles de comportement élasto-plastique couplé ou non à l'endommagement et des modèles élasto-viscoplastiques présentés dans les prochaines parties de ce chapitre. Dans des cas plus généraux, il est pratique de formuler les lois de comportement dans un repère tournant dans lequel les équations de comportement sont formellement identiques à une formulation en hypothèse de petites

perturbations. Le repère d'orthotropie du matériau, supposé rester orthogonal et évoluer avec la matrice de rotation générée par le spin $\mathbf{W}$, peut être utilisé pour cela, ce qui revient à l'emploi de dérivées de Jaumann. Pour plus de détails concernant la mécanique des milieux continus en grandes déformations, le lecteur pourra se référer à (Sidoroff 1981; 1982; Rougée 1997) ou encore à (Garrigues 2007).

3.3 Comportement élasto-plastique

3.3.1 Modèle élasto-plastique

La démarche adoptée pour modéliser le comportement repose sur le choix d'une approche phénoménologique pouvant être écrite dans le cadre de la thermodynamique des processus irréversibles et appliquée aux matériaux élasto-plastiques. L'application visée étant l'emboutissage de tôles minces, le modèle développé dans ce paragraphe permet de prendre en compte les effets de l'anisotropie initiale, de l'anisotropie induite et de l'évolution de l'écrouissage mais est restreint aux déformations à froid et aux matériaux indépendants du temps physique. Cette dernière restriction sera levée dans les dernières parties de ce chapitre. Des détails complémentaires sur ce modèle peuvent être consultés dans (Lemaitre et Chaboche 1990) ou encore dans (Haddag 2007; Abed-Meraim 2009).

La relation entre le taux de contrainte de Cauchy et le taux de déformation élastique est décrite par une loi hypo-élastique :

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C} : \left(\mathbf{D} - \mathbf{D}^{p} \right) \tag{3.11}$$

où $\mathbf{C}$ est le tenseur d'ordre quatre représentant les modules d'élasticité permettant de relier le taux de contraintes de Cauchy $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ au taux de déformation élastique $\mathbf{D}^{e}$ défini comme la différence entre le taux de déformation totale $\mathbf{D}$ et le taux de déformation plastique $\mathbf{D}^{p}$, exprimés dans le repère corotationnel. Une loi d'écoulement plastique associée permet d'exprimer l'évolution de ce tenseur :

$$\mathbf{D}^{p} = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \dot{\lambda} \mathbf{V} \tag{3.12}$$

où $\dot{\lambda}$ et $\mathbf{V}$ sont respectivement le multiplicateur plastique et la direction d'écoulement plastique, normale à la surface de charge délimitée par le potentiel f. Le critère de charge peut s'écrire sous la forme de Kuhn – Tucker :

$$\begin{aligned} f &= \bar{\sigma}\left(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{X}\right) - Y \leq 0 \\ \dot{\lambda} &\geq 0 \\ \dot{\lambda} f &= 0 \end{aligned} \tag{3.13}$$

avec Y et $\mathbf{X}$ respectivement la taille de la surface de charge, reliée à la variable d'écrouissage isotrope, et la variable d'écrouissage cinématique.

Deux définitions classiques seront utilisées pour calculer la contrainte équivalente $\bar{\sigma}$: la contrainte équivalente de von Mises dans le cas isotrope et la contrainte équivalente de Hill'48 dans le cas anisotrope. La première s'exprime sous la forme suivante :

$$\bar{\sigma}(\boldsymbol{\sigma},\mathbf{X}) = \sqrt{\frac{3}{2}(\boldsymbol{\sigma}'-\mathbf{X}):(\boldsymbol{\sigma}'-\mathbf{X})} \tag{3.14}$$

où la notation $\square'$ est utilisée pour représenter la partie déviatorique de la grandeur considérée. La direction d'écoulement devient alors :

$$\mathbf{V} = \frac{3}{2}\frac{\boldsymbol{\sigma}'-\mathbf{X}}{\bar{\sigma}} \tag{3.15}$$

La fonction anisotrope et quadratique de Hill'48 est quant à elle :

$$\bar{\sigma}(\boldsymbol{\sigma},\mathbf{X}) = \sqrt{(\boldsymbol{\sigma}'-\mathbf{X}):\mathbf{M}:(\boldsymbol{\sigma}'-\mathbf{X})} \tag{3.16}$$

où le tenseur $\mathbf{M}$, représentant l'anisotropie initiale de la tôle, peut être exprimé à partir des coefficients de Hill'48 en utilisant la représentation vectorielle des tenseurs $\boldsymbol{\sigma}'$ et $\mathbf{X}$:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} G_H+H_H & -H_H & -G_H & 0 & 0 & 0 \\ -H_H & F_H+H_H & -F_H & 0 & 0 & 0 \\ -G_H & -F_H & F_H+G_H & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_H & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M_H & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L_H \end{pmatrix} \tag{3.17}$$

où les coefficients de Hill'48 peuvent être définis pour des chargements plans à partir des coefficients de Lankford r_0, r_{45} et r_{90} :

$$F_H = \frac{r_0}{r_{90}(1+r_0)} \qquad G_H = \frac{1}{1+r_0} \qquad H_H = \frac{r_0}{1+r_0}$$

$$L_H = M_H = N_H = \frac{r_0+r_{90}}{2r_{90}(1+r_0)}(1+2r_{45})$$

où r_0, r_{45} et r_{90} sont définis à partir des rapports des déformations plastiques pris respectivement dans des directions orientées à 0°, 45° et 90° par rapport à la direction de laminage et la déformation plastique dans l'épaisseur de la tôle mesurées au cours d'un essai mécanique. Lorsque les trois coefficients de Lankford sont égaux, il est possible de montrer que les critères de Hill'48 et von Mises sont équivalents ; le critère de von Mises peut alors être considéré comme un cas particulier du critère de Hill'48. Avec la définition du critère de Hill'48, la direction d'écoulement devient :

$$\mathbf{V} = \frac{\mathbf{M} : (\boldsymbol{\sigma}' - \mathbf{X})}{\bar{\sigma}} \tag{3.18}$$

De nombreux critères de plasticité alternatifs ont été développés afin d'améliorer la prise en compte de l'anisotropie de la tôle pour différents types de matériaux, avec par exemple les travaux de (Hill 1979; Barlat et al. 1991; Hill 2000; Banabic et al. 2003; Barlat et al. 2005). Seuls les critères de von Mises dans le cas isotrope et le critère de Hill'48 dans le cas anisotrope seront considérés par la suite, leur utilisation étant suffisante pour l'objectif fixé de comparaison théorique des critères d'instabilité plastique. Il a par ailleurs été montré que le choix de critères de plasticité plus avancés permette bien souvent une nette amélioration des prédictions réelles de CLF (Kuroda et Tvergaard 2000; Banabic et Dannenmann 2001).

D'autre part, l'évolution de la variable d'écrouissage cinématique peut être représentée par la loi non-linéaire d'Armstrong – Frederick :

$$\dot{\mathbf{X}} = C_X \left(X_{sat} \mathbf{n}_{\mathbf{X}} - \mathbf{X} \right) \dot{\lambda} = \mathbf{H}_{\mathbf{X}} \dot{\lambda} \tag{3.19}$$

avec C_X et X_{sat} deux constantes du matériau représentant respectivement la vitesse de saturation et la valeur de saturation de la variable d'écrouissage cinématique et $\mathbf{n}_{\mathbf{X}}$ la direction de saturation définie par :

$$\mathbf{n}_{\mathbf{X}} = \frac{\boldsymbol{\sigma}' - \mathbf{X}}{\bar{\sigma}} \tag{3.20}$$

Lorsque le critère de von Mises est utilisé, il peut être noté que les directions d'écoulement plastique et de saturation de l'écrouissage cinématique sont confondues. Dans l'équation (3.13), la taille courante de la surface de charge est reliée à la variable d'écrouissage isotrope par :

$$Y = Y_0 + R \tag{3.21}$$

où Y_0 représente la taille initiale du domaine élastique. La variable d'écrouissage isotrope R est utilisée pour représenter l'évolution de la taille de la surface de charge et est physiquement reliée à la densité des dislocations réparties aléatoirement dans le volume de matière. Différentes lois peuvent être utilisées pour décrire son évolution. La loi saturante de Voce semble adaptée aux matériaux dont l'écrouissage isotrope présente un seuil :

$$\dot{R} = C_R \left(R_{sat} - R \right) \dot{\lambda} = H_R \dot{\lambda} \tag{3.22}$$

où C_R et R_{sat} sont les constantes matérielles représentant la vitesse de saturation et la valeur de saturation de l'écrouissage isotrope ; leur identification peut être réalisée à partir des essais monotones classiques. En l'absence d'endommagement, il est possible de montrer à partir de la définition du taux de déformation plastique cumulée que le multiplicateur plastique $\dot{\lambda}$ est égal au taux de déformation plastique cumulée $\dot{\bar{\varepsilon}}$. La loi (3.22) peut alors être intégrée sous la forme :

$$R = R_{sat}\left(1 - e^{-C_R \bar{\varepsilon}}\right) \tag{3.23}$$

Dans le cas de matériaux ne présentant pas de saturation de l'écrouissage, des lois de type puissance, et notamment la loi de Swift, sont couramment utilisées :

$$\dot{R} = nk\left(\frac{R + Y_0}{k}\right)^{\frac{n-1}{n}} \dot{\lambda} = H_R \dot{\lambda} \tag{3.24}$$

avec $Y_0 = k\varepsilon_0^n$ la limite élastique initiale définissant la taille de la surface de charge avant l'entrée en plasticité et n, k et ε_0 trois paramètres matériaux liés au taux de croissance de la surface de plasticité. Une forme équivalente de cette loi peut être obtenue :

$$Y = k\left(\varepsilon_0 + \bar{\varepsilon}\right)^n = Y_0 + R \tag{3.25}$$

La loi de type puissance de Hollomon, utilisée dans les prochains chapitres pour le développement théorique dans des cas de comportement simplifié, est un cas particulier de la loi de Swift pour lequel la taille initiale de la surface de plasticité est nulle, ce qui se traduit par :

$$R = k\bar{\varepsilon}^n = Y \tag{3.26}$$

Cette relation découle de l'équation (3.25) en prenant $\varepsilon_0 = 0$ et peut être écrite sous une forme équivalente :

$$\dot{R} = nk\left(\frac{R}{k}\right)^{\frac{n-1}{n}} \dot{\lambda} = H_R \dot{\lambda} \tag{3.27}$$

En choisissant $Y_0 = 0$ dans l'équation (3.24), la loi de Hollomon est retrouvée. Les trois lois d'écrouissage présentées peuvent être combinées et le taux de croissance de l'écrouissage isotrope s'écrit alors sous la forme générique suivante :

$$\dot{R} = H_R \dot{\lambda} \qquad \text{ou} \qquad \dot{Y} = H_Y \dot{\lambda} \tag{3.28}$$

avec H_R et H_Y des modules scalaires identiques reliés à l'écrouissage isotrope et exprimés à partir des relations précédentes. La condition de cohérence est d'autre part définie à partir du critère de plasticité par :

$$\dot{f} = \dot{\bar{\sigma}} - \dot{Y} = 0 \tag{3.29}$$

En y introduisant les relations d'évolution des variables internes et la loi d'écoulement plastique, l'expression du multiplicateur plastique est obtenue :

$$\dot{\lambda} = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{C}}{\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{C} : \dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{H}_{\mathbf{X}} + H_Y} : \mathbf{D} \tag{3.30}$$

En remplaçant le multiplicateur plastique par son expression dans la loi d'écoulement plastique et dans la loi d'hypo-élasticité, la relation entre le taux de contrainte et le taux de déformation totale devient :

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \left(\mathbf{C} - \alpha^{ep} \frac{\left(\mathbf{C} : \dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right) \otimes \left(\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{C} \right)}{\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{C} : \dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{H}_{\mathbf{X}} + H_Y} \right) : \mathbf{D} = \mathbf{L}^{ep} : \mathbf{D} \tag{3.31}$$

où α^{ep} représente un indicateur de charge plastique, égal à un au cours de la charge plastique ou à zéro sinon. Le module $\mathbf{L}^{ep}$ est le module tangent élasto-plastique.

La démarche développée offre un cadre général pour la modélisation d'une large classe de comportements des matériaux. En la suivant, la description du comportement peut être améliorée par la prise en compte d'effets supplémentaires, comme l'endommagement.

3.3.2 Modèle élasto-plastique endommageable

Certains critères d'instabilité plastique, notamment ceux développés pour la prédiction de modes localisés sous forme de bandes présentant des discontinuités du gradient de la vitesse (Chapitre 6), nécessitent l'utilisation de modèles de plasticité non-associée ou encore la présence d'un régime adoucissant. De tels effets adoucissants peuvent être introduits par le couplage des équations constitutives avec l'endommagement en plasticité associée.

Différentes approches ont été développées ces dernières décennies pour modéliser l'endommagement. Le modèle de Gurson est utilisé pour décrire l'endommagement dans des milieux poreux présentant un comportement élasto-plastique ductile (Gurson 1977; Needleman et Rice 1978; Tvergaard et Needleman 1984). Ce modèle est basé sur la représentation de la germination de cavités et de microfissures à l'intérieur du volume élémentaire représentatif (VER), de leur croissance puis de leur coalescence conduisant à la rupture. La mécanique de l'endommagement continu constitue une seconde approche, dont les bases reposent sur la thermodynamique des processus irréversibles (Rabotnov 1969; Kachanov 1986). Selon ce modèle, la variable tensorielle d'endommagement est reliée à la densité surfacique des micro-défauts, constitués par exemple de vides, de cavités ou de microfissures pouvant être présents sur une surface du VER. Cette grandeur d'endommagement peut être d'ordre quatre dans le cas d'endommagement anisotrope ou un scalaire dans le cas d'endommagement isotrope. Le choix d'une variable scalaire, plus simple à mettre en œuvre et à identifier, a été privilégié ici. Le couplage du modèle élasto-plastique avec l'endommagement est alors mené en suivant l'approche de Lemaitre, reliant

l'endommagement au rapport entre la surface des micro-défauts et la surface totale sur un VER (Lemaitre 1985) :

$$d = \frac{S_{def}}{S} \tag{3.32}$$

avec d la variable d'endommagement, S_{def} la surface des micro-défauts sur une surface élémentaire S d'un VER. La contrainte effective est alors reliée à la contrainte usuelle par :

$$\boldsymbol{\sigma}_{eff} = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{1-d} \tag{3.33}$$

En adoptant le principe d'équivalence en déformation, le comportement d'un matériau endommagé relie le taux de déformation au taux de contrainte effective par les équations constitutives du matériau non endommagé dans lesquelles la contrainte est remplacée par la contrainte effective (Lemaitre et Chaboche 1990). La forme incrémentale de la loi d'élasticité devient alors :

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{eff} = \mathbf{C} : \left(\mathbf{D} - \mathbf{D}^p \right) \tag{3.34}$$

ou encore :

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \left(1-d\right)\mathbf{C} : \left(\mathbf{D} - \mathbf{D}^p \right) - \frac{\dot{d}}{1-d}\boldsymbol{\sigma} \tag{3.35}$$

où le taux de déformation plastique $\mathbf{D}^p$ peut être exprimé à partir d'une loi d'écoulement associée vérifiant la relation de normalité :

$$\mathbf{D}^p = \dot{\lambda}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \tag{3.36}$$

La surface de charge et le critère d'écoulement plastique deviennent après couplage avec l'endommagement :

$$\begin{gathered} f = \bar{\sigma}\left(\boldsymbol{\sigma}_{eff}, \mathbf{X}\right) - Y \leq 0 \\ \dot{\lambda} \geq 0 \\ \dot{\lambda} f = 0 \end{gathered} \tag{3.37}$$

Si la contrainte équivalente de Hill'48 est utilisée, il est possible d'en déduire l'expression du taux de déformation plastique :

$$\mathbf{D}^p = \frac{\dot{\lambda}}{\left(1-d\right)} \frac{\mathbf{M} : \left(\boldsymbol{\sigma}'_{eff} - \mathbf{X} \right)}{\sqrt{\left(\boldsymbol{\sigma}'_{eff} - \mathbf{X} \right) : \mathbf{M} : \left(\boldsymbol{\sigma}'_{eff} - \mathbf{X} \right)}} \tag{3.38}$$

Dans cette équation, la variable d'écrouissage cinématique est affectée par l'endommagement à travers la modification de sa direction de saturation, alors notée $\mathbf{n}_{\mathbf{X}d}$:

$$\dot{\mathbf{X}} = C_X \left(X_{sat} \mathbf{n}_{\mathbf{X}d} - \mathbf{X} \right) \dot{\lambda} = \mathbf{H}_{\mathbf{X}} \dot{\lambda} \tag{3.39}$$

avec :

$$\mathbf{n}_{\mathbf{X}d} = \frac{\boldsymbol{\sigma}'_{eff} - \mathbf{X}}{\bar{\sigma}\left(\boldsymbol{\sigma}'_{eff}, \mathbf{X} \right)}$$

Par commodité, la notation $\mathbf{H}_{\mathbf{X}}$ utilisée dans le cas élasto-plastique est réutilisée ici bien qu'il ne s'agisse pas exactement des mêmes fonctions, la direction de saturation étant affectée par l'endommagement. Il peut toutefois être montré que $\mathbf{n}_{\mathbf{X}}$ et $\mathbf{n}_{\mathbf{X}d}$ sont égaux en l'absence d'endommagement.

Par contre, comme la contrainte n'apparait pas explicitement dans les expressions d'évolution de l'écrouissage isotrope, ces équations restent valables sans modification et pourront être écrites sous la forme générique précédente, soit :

$$\dot{R} = H_R \dot{\lambda} \qquad \text{ou} \qquad \dot{Y} = H_Y \dot{\lambda} \tag{3.40}$$

où il est intéressant de noter la relation entre le multiplicateur plastique et le taux de déformation plastique équivalente :

$$\dot{\lambda} = \dot{\bar{\varepsilon}} \left(1 - d \right) \tag{3.41}$$

L'évolution de la variable d'endommagement isotrope est reliée à l'évolution de la microstructure du matériau et plus particulièrement au taux de déformation plastique équivalente $\dot{\bar{\varepsilon}}$. La loi d'évolution de l'endommagement isotrope du modèle de Lemaitre relie cette variable à la déformation plastique équivalente et au taux de restitution de la densité d'énergie élastique, dont l'expression est (Lemaitre 1992) :

$$Y_e = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^e : \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}^e \tag{3.42}$$

Dans le cas de l'élasticité isotrope linéaire, l'écriture de cette grandeur est simplement donnée par :

$$Y_e = \frac{J_2^2}{2E} \left[\frac{2}{3} \left(1 + \nu \right) + 3 \left(1 - 2\nu \right) \left(\frac{\sigma_{eff}^H}{J_2} \right)^2 \right] \tag{3.43}$$

où $J_2\left(\boldsymbol{\sigma}_{eff}\right)=\sqrt{\frac{3}{2}\boldsymbol{\sigma}'_{eff}:\boldsymbol{\sigma}'_{eff}}$ est le second invariant de la contrainte effective déviatorique, $\sigma^H_{eff}=\frac{1}{3}tr\left(\boldsymbol{\sigma}_{eff}\right)$ la contrainte effective hydrostatique, E et ν le module de Young et le coefficient de Poisson du matériau non endommagé.

Des améliorations de la loi de Lemaitre ont été proposées et appliquées récemment à la simulation d'opérations de formage de tôles minces par emboutissage. Un seuil d'activation Y_{ei}, agissant sur le taux de restitution de la densité d'énergie élastique et à partir duquel l'endommagement peut évoluer, est introduit :

$$\dot{d}=H_d\dot{\lambda}=\begin{cases}\dfrac{1}{\left(1-d\right)^{\beta_d}}\left(\dfrac{Y_e-Y_{ei}}{S_d}\right)^{s_d}\dot{\lambda} & \text{si } Y_e\geq Y_{ei}\\ 0 & \text{sinon}\end{cases} \tag{3.44}$$

avec S_d, s_d et β_d des paramètres matériaux. A partir de la condition de cohérence, $\dot{f}=0$, et de la dérivée partielle de la contrainte équivalente, la relation suivante est obtenue :

$$\frac{\partial\bar{\sigma}\left(\boldsymbol{\sigma}_{eff},\mathbf{X}\right)}{\partial\boldsymbol{\sigma}'_{eff}}:\dot{\boldsymbol{\sigma}}'_{eff}+\frac{\partial\bar{\sigma}\left(\boldsymbol{\sigma}_{eff},\mathbf{X}\right)}{\partial\mathbf{X}}:\dot{\mathbf{X}}-H_Y\dot{\lambda}=0 \tag{3.45}$$

En combinant les équations (3.34)-(3.45), cette condition conduit à :

$$\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{\sigma}_{eff}}:\left(\mathbf{C}:\left(\mathbf{D}-\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{\sigma}}\dot{\lambda}\right)-\mathbf{H}_{\mathbf{X}}\dot{\lambda}\right)-H_Y\dot{\lambda}=0 \tag{3.46}$$

L'expression du multiplicateur plastique devient alors :

$$\dot{\lambda}=\frac{\dfrac{\partial f}{\partial\boldsymbol{\sigma}_{eff}}:\mathbf{C}}{\dfrac{\partial f}{\partial\boldsymbol{\sigma}_{eff}}:\mathbf{C}:\dfrac{\partial f}{\partial\boldsymbol{\sigma}}+\dfrac{\partial f}{\partial\boldsymbol{\sigma}_{eff}}:\mathbf{H}_{\mathbf{X}}+H_Y}:\mathbf{D} \tag{3.47}$$

La relation entre le taux de contrainte et le taux de déformation dans le cas de comportements élasto-plastiques couplés à l'endommagement prend la forme suivante :

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}=\left(\left(1-d\right)\mathbf{C}-\alpha^{epd}\frac{\left(\mathbf{C}:\dfrac{\partial f}{\partial\boldsymbol{\sigma}_{eff}}\right)\otimes\left(\dfrac{\partial f}{\partial\boldsymbol{\sigma}_{eff}}:\mathbf{C}\right)+H_d\boldsymbol{\sigma}_{eff}\otimes\left(\dfrac{\partial f}{\partial\boldsymbol{\sigma}_{eff}}:\mathbf{C}\right)}{\dfrac{\partial f}{\partial\boldsymbol{\sigma}_{eff}}:\mathbf{C}:\dfrac{\partial f}{\partial\boldsymbol{\sigma}}+\dfrac{\partial f}{\partial\boldsymbol{\sigma}_{eff}}:\mathbf{H}_{\mathbf{X}}+H_Y}\right):\mathbf{D}=\mathbf{L}^{epd}:\mathbf{D} \tag{3.48}$$

où α^{epd} est un indicateur de charge plastique, égal à un dans le cas de charge plastique ou zéro sinon. En l'absence d'endommagement, le module tangent élasto-plastique couplé à l'endommagement $\mathbf{L}^{epd}$ devient égal au module tangent élasto-plastique classique.

3.4 Comportement élasto-viscoplastique

Les modèles présentés dans ce paragraphe sont issus d'un formalisme proche de celui utilisé pour l'écriture des modèles élasto-plastiques développés précédemment. L'attention sera donc plutôt portée sur la mise en évidence de différences entre ces modèles lors de la formulation du cas de comportement élasto-viscoplastique.

La relation entre la contrainte de Cauchy et le taux de déformation élastique reste inchangée :

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C} : \mathbf{D}^e \tag{3.49}$$

La décomposition additive du taux de déformation en une partie élastique instantanément réversible et une déformation inélastique est postulée. Cette déformation inélastique peut être composée dans le cas général d'une déformation élastique à effet retardé, d'une déformation plastique instantanée et d'une déformation viscoplastique, cette dernière étant plus particulièrement considérée ici :

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}^e + \mathbf{D}^{vp} \tag{3.50}$$

En choisissant une loi d'écrouissage visqueuse additive, la fonction de charge peut s'exprimer par :

$$f = \bar{\sigma} - Y = \bar{\sigma} - R - Y_0 - Y_1 \dot{\bar{\varepsilon}}^m \tag{3.51}$$

où Y_1 et m sont respectivement un coefficient et l'exposant de viscosité qui dépendent du matériau. Différentes lois additives peuvent être formulées en fonction de l'application choisie et du comportement réel du matériau, la loi exposée en (3.51) présente les avantages de la simplicité et l'appartenance au formalisme des matériaux standard.

La principale différence de ce modèle par rapport au modèle élasto-plastique réside dans l'expression du multiplicateur viscoplastique qui, en plasticité associée, peut être calculé directement à partir de la fonction de charge viscoplastique :

$$\dot{\lambda}^{vp} = \dot{\bar{\varepsilon}} = \left\langle \frac{\bar{\sigma} - R - Y_0}{Y_1} \right\rangle^{1/m} \tag{3.52}$$

où la notation $\langle \square \rangle$ représente l'opérateur partie positive de la grandeur considérée. Un autre choix d'une loi d'écrouissage visqueuse multiplicative peut être réalisé. Dans ce cas, une écriture possible de la fonction de charge est donnée par :

$$f = \bar{\sigma} - Y = \bar{\sigma} - Y_0 - R\dot{\bar{\varepsilon}}^m \tag{3.53}$$

L'expression du multiplicateur viscoplastique est alors donnée par :

$$\dot{\lambda}^{vp} = \dot{\bar{\varepsilon}} = \left\langle \frac{\bar{\sigma} - Y_0}{R} \right\rangle^{1/m} \tag{3.54}$$

L'avantage de cette formulation est qu'elle permet de retrouver le modèle élasto-plastique présenté précédemment (avec comme surface de charge $f = \bar{\sigma} - Y_0 - R$) lorsque le paramètre de sensibilité à la vitesse m tend vers zéro. Le taux de déformation viscoplastique peut être exprimé à partir du potentiel viscoplastique ou de la définition de la surface de charge et du multiplicateur viscoplastique $\dot{\lambda}^{vp}$:

$$\mathbf{D}^{vp} = \dot{\lambda}^{vp} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \tag{3.55}$$

Les lois d'évolution des variables d'écrouissages isotropes et cinématiques deviennent alors :

$$\begin{aligned} \dot{R} &= H_R \dot{\lambda}^{vp} \\ \dot{\mathbf{X}} &= \mathbf{H}_\mathbf{X} \dot{\lambda}^{vp} \end{aligned} \tag{3.56}$$

où les modules H_R et $\mathbf{H}_\mathbf{X}$ peuvent être pris identiques à ceux définis dans le cas élasto-plastique. Des compléments sur l'implantation numérique de ce modèle sont présents dans (Lemaitre et Chaboche 1990).

3.5 Synthèse

Différents modèles ont été proposés afin de représenter le comportement plastique du matériau en grandes déformations. Ceux-ci sont basés sur une approche phénoménologique, pouvant être qualifiés de classiques. Dans un premier temps, un modèle élasto-plastique indépendant du temps a été exposé, celui-ci permet de prendre en compte les effets de l'anisotropie initiale de la tôle, de l'anisotropie induite et de l'écrouissage. Son choix a été dicté par la simplicité et la généralité de sa formulation. Il sera appliqué dans le Chapitre 4 lors de l'étude des critères de prédiction de la striction diffuse et au cours du Chapitre 5 pour certains critères prédisant des modes localisés.

Dans le cas des critères de prédiction de localisation sous forme de bandes étudiés au Chapitre 6, il sera montré qu'un comportement adoucissant est nécessaire. Ce phénomène a été introduit par un couplage du comportement élasto-plastique avec de l'endommagement ductile isotrope en suivant l'approche de Lemaitre.

La localisation est caractérisée par une concentration des déformations dans un faible volume de la structure, accompagnée d'une forte augmentation de la vitesse de déformation dans cette zone. En suivant cette observation, il semble naturel de prendre en compte la sensibilité à la vitesse de déformation par l'usage d'un modèle élasto-viscoplastique pour mieux représenter le comportement réel du matériau.

Ces éléments sur la modélisation du comportement du matériau étant présentés, les prochains chapitres se consacreront à l'étude théorique des critères d'instabilité plastique pour la

prédiction de modes diffus puis localisés. L'implantation des modèles de comportement du matériau dans un code développé sous Matlab permettra enfin au Chapitre 7 d'obtenir des courbes rhéologiques et des courbes limites de formage pour les différents matériaux étudiés.

4 Critères de prédiction de striction diffuse

4.1 Introduction 42

4.2 Méthode d'analyse de bifurcation 42
4.2.1 Critère de Bifurcation Générale 43
4.2.2 Critère de Bifurcation par Point Limite 45
4.2.3 Relation théorique entre les critères de Bifurcation Générale et de Bifurcation par Point Limite 45

4.3 Critère de striction diffuse issu du modèle de Cordebois – Ladevèze 46
4.3.1 Formulation du critère 46
4.3.2 Relation entre le critère de striction diffuse de Cordebois – Ladevèze et le critère de Bifurcation Générale 48

4.4 Principe de Force Maximum 49
4.4.1 Striction en traction uniaxiale 50
4.4.2 Extensions aux chargements bi-axiaux 52
4.4.3 Critère de Force Maximum 53
4.4.4 Extension du critère de Force Maximum au cas 3D 57
4.4.5 Relation entre le critère de Bifurcation Générale et le Critère de Force Maximum 59
4.4.6 Relation théorique entre le critère de Point Limite et le Critère de Force Maximum 60

4.5 Conclusion 62

4.1 Introduction

Nous avons vu dans le Chapitre 2 que la striction diffuse se caractérise expérimentalement par l'apparition d'un amincissement marqué dans une zone relativement large, d'environ 15 à 30 mm pour une éprouvette de traction normalisée, particulièrement visible sur celles constituées de matériaux ductiles comme par exemple les aciers doux. En pratique, l'apparition de striction diffuse peut constituer une source de défauts suffisante pour conduire au rebut des pièces d'aspect mises en forme par emboutissage, comme les carrosseries de voiture par exemple.

La striction diffuse peut être interprétée comme une évolution progressive d'un état de déformation homogène vers un état de déformation quasi-homogène ou hétérogène. Un des problèmes engendrés par cette perte d'homogénéité est par exemple l'impossibilité d'identifier les propriétés d'un matériau avec des essais classiques au-delà du point de striction diffuse. C'est aussi un phénomène avant-coureur de la striction localisée, plus néfaste. La capacité à prévoir ce phénomène n'est donc pas dénuée d'intérêt, comme peut en témoigner le nombre de critères qui y sont consacrés.

Parmi les critères développés afin de prévoir l'apparition de striction diffuse, les critères de Bifurcation Générale et de Bifurcation par Point Limite, auxquels on pourrait rajouter le critère de Cordebois – Ladevèze, vont être présentés dans les premiers paragraphes. L'approche semi-empirique basée sur le principe de Force Maximum sera développée dans le cas de matériaux rigides plastiques, élasto-plastiques puis élasto-plastiques endommageables.

Une attention particulière sera accordée à l'établissement de liens entre ces différents critères.

4.2 Méthode d'analyse de bifurcation

Le changement de mode de déformation d'un état homogène vers un état hétérogène peut être vu comme un problème de bifurcation de la solution du problème aux limites en vitesse. La recherche des conditions permettant l'apparition de striction diffuse est alors associée à l'étude de la perte d'unicité des solutions de ce problème.

Soit Ω un domaine soumis à des efforts volumiques $\mathbf{f}_v$, à des efforts surfaciques $\mathbf{f}_s$ imposés sur une partie $\partial\Omega_1$ de sa frontière ayant une normale $\mathbf{n}_0$ dans la configuration de référence et à des déplacements $\mathbf{U}_s$ imposés sur la partie complémentaire de sa frontière $\partial\Omega_2$. Les équations d'équilibre quasi-statiques et les conditions aux limites peuvent s'écrire :

$$\begin{cases} div\boldsymbol{\Pi} + \rho_0 \mathbf{f}_v = \mathbf{0} & \text{sur } \Omega \\ \boldsymbol{\Pi} \cdot \mathbf{n}_0 = \mathbf{f}_s & \text{sur } \partial\Omega_1 \\ \mathbf{U} = \mathbf{U}_s & \text{sur } \partial\Omega_2 \end{cases} \tag{4.1}$$

où $\boldsymbol{\Pi}$ est le premier tenseur de Piola – Kirchhoff et ρ_0 la masse volumique du matériau. Les parties de frontières $\partial\Omega_1$ et $\partial\Omega_2$ vérifient :

$$\partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2 = \partial\Omega \qquad \text{et} \qquad \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2 = \varnothing \tag{4.2}$$

où $\partial\Omega$ représente l'ensemble de la frontière. La dérivée temporelle du principe des puissances virtuelles conduit alors à :

$$\int_\Omega \dot{\mathbf{\Pi}} : \frac{\partial \mathbf{V}^*}{\partial \mathbf{X}}\, dV_0 = \int_\Omega \rho_0 \dot{\mathbf{f}}_v \cdot \mathbf{V}^* dV_0 + \int_{\partial\Omega_1} \left(\dot{\mathbf{\Pi}} \cdot \mathbf{n}_0\right) \cdot \mathbf{V}^* dS_0 \tag{4.3}$$

pour tout champ de vitesse virtuel cinématiquement admissible $\mathbf{V}^*$. Les critères de Bifurcation Générale et de Bifurcation par Point Limite, basés sur l'étude des conditions d'unicité de la solution du problème aux limites, sont présentés dans les deux paragraphes suivants.

4.2.1 Critère de Bifurcation Générale

Le critère de Bifurcation Générale a été introduit par (Drucker 1950; Drucker 1956) puis (Hill 1958; Hill 1962; Hill 2001) comme une condition suffisante d'unicité de la solution du problème (4.3) pour des matériaux indépendants du temps physique.

Soient $\dot{\mathbf{\Pi}}^A$ et $\dot{\mathbf{\Pi}}^B$ deux champs de taux de contraintes et $\mathbf{V}^A$ et $\mathbf{V}^B$ les champs de vitesses cinématiquement admissibles qui leur sont respectivement associés. Le principe des puissances virtuelles peut être appliqué à ces deux champs, soit :

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega \dot{\mathbf{\Pi}}^A : \frac{\partial \mathbf{V}^*}{\partial \mathbf{X}}\, dV_0 = \int_\Omega \rho_0 \dot{\mathbf{f}}_v \cdot \mathbf{V}^* dV_0 + \int_{\partial\Omega_1} \dot{\mathbf{f}}_S \cdot \mathbf{V}^* dS_0 \\ \displaystyle\int_\Omega \dot{\mathbf{\Pi}}^B : \frac{\partial \mathbf{V}^*}{\partial \mathbf{X}}\, dV_0 = \int_\Omega \rho_0 \dot{\mathbf{f}}_v \cdot \mathbf{V}^* dV_0 + \int_{\partial\Omega_1} \dot{\mathbf{f}}_S \cdot \mathbf{V}^* dS_0 \end{cases} \tag{4.4}$$

Cette équation est en particulier vérifiée pour le champ virtuel $\mathbf{V}^* = \mathbf{V}^A - \mathbf{V}^B = [\mathbf{V}]$. En écrivant la différence des Equations (4.4) dans le cas de ce champ virtuel, la condition de perte d'unicité des solutions devient :

$$\int_\Omega \left[\dot{\mathbf{\Pi}}\right] : \left[\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{X}}\right] dV_0 = 0 \tag{4.5}$$

pour $\left(\dot{\mathbf{\Pi}}^A, \mathbf{V}^A\right) \neq \left(\dot{\mathbf{\Pi}}^B, \mathbf{V}^B\right)$, avec $\left[\dot{\mathbf{\Pi}}\right] = \dot{\mathbf{\Pi}}^A - \dot{\mathbf{\Pi}}^B$, soit en utilisant les relations de comportement :

$$\int_\Omega \left(\mathcal{L}^A : \frac{\partial \mathbf{V}^A}{\partial \mathbf{X}} - \mathcal{L}^B : \frac{\partial \mathbf{V}^B}{\partial \mathbf{X}} \right) : \left[\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{X}}\right] dV_0 = 0 \tag{4.6}$$

avec $\mathcal{L}$ le module reliant pour le champ considéré le taux de contraintes de Piola – Kirchhoff au gradient des vitesses : $\dot{\mathbf{\Pi}} = \mathcal{L} : \dot{\mathbf{F}}$. Pour la classe de matériaux considérée, la forme $\mathcal{L}$ est

initialement définie positive. On voit ainsi de ce qui précède que l'unicité de la solution est conservée tant que :

$$\mathcal{J}\left(\mathbf{V}^A,\mathbf{V}^B\right)=\int_\Omega\left(\mathcal{L}^A:\frac{\partial\mathbf{V}^A}{\partial\mathbf{X}}-\mathcal{L}^B:\frac{\partial\mathbf{V}^B}{\partial\mathbf{X}}\right):\left[\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial\mathbf{X}}\right]dV_0>0 \tag{4.7}$$

Hill a montré dans le cas de matériaux rigides plastiques puis dans le cas de matériaux élasto-plastiques que la fonctionnelle $\mathcal{J}$ est minorée par $\mathcal{H}$, lorsque le taux d'écrouissage est positif (Hill 1957; Hill 1958) :

$$\mathcal{J}\left(\mathbf{V}^A,\mathbf{V}^B\right)\geq\mathcal{H}\left(\mathbf{V}^A,\mathbf{V}^B\right) \tag{4.8}$$

où la fonctionnelle $\mathcal{H}$ est définie par :

$$\mathcal{H}\left(\mathbf{V}^A,\mathbf{V}^B\right)=\int_\Omega\left(\mathcal{L}:\left[\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial\mathbf{X}}\right]\right):\left[\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial\mathbf{X}}\right]dV_0=\int_\Omega\nabla\Delta\mathbf{V}:\mathcal{L}:\nabla\Delta\mathbf{V}dV_0 \tag{4.9}$$

La condition suffisante d'unicité (4.9) exige la définie positivité de la fonctionnelle $\mathcal{H}$ pour tout champ de vitesse $\Delta\mathbf{V}$ cinématiquement admissible (i.e., $\Delta\mathbf{V}=\mathbf{0}$ sur $\partial\Omega_2$). Une condition plus restrictive revient à élargir cet espace où la définie positivité de $\mathcal{L}$ est exigée en écrivant :

$$\int_\Omega\nabla\mathbf{V}:\mathcal{L}:\nabla\mathbf{V}dV_0>0 \tag{4.10}$$

pour tout champ de vitesse, sans imposer qu'il doit être nul sur la frontière $\partial\Omega_2$. Cette dernière condition est évidemment suffisante pour exclure toute bifurcation pour le problème considéré, quelles que soient les conditions aux limites qui lui sont imposées (de type force ou déplacement). Il peut être noté que les conditions écrites ci-dessus sont seulement suffisantes pour garantir l'unicité ; pour montrer qu'elles sont nécessaires il faut exhiber un champ de vitesse compatible avec les conditions aux limites imposées et violant la condition (4.9) comme cela est traditionnellement fait en flambage plastique.

Ces critères sont en toute rigueur des critères d'exclusion d'instabilités géométriques (structurelles), car ils dépendent de la géométrie de la structure et des conditions aux limites. Pour les appliquer en mise en forme dans l'esprit des CLF à striction diffuse, la condition (4.10) est appliquée localement :

$$\dot{\mathbf{F}}:\mathcal{L}:\dot{\mathbf{F}}=\nabla\mathbf{V}:\mathcal{L}:\nabla\mathbf{V}>0\qquad\qquad\forall\mathbf{V}\text{ non uniforme} \tag{4.11}$$

Cette dernière condition est clairement plus forte que les conditions précédentes (4.9) et (4.10), mais il est possible de montrer qu'elle est équivalente à (4.10) dans le cas où l'état de pré-bifurcation est homogène. L'écriture locale (4.11) justifie la terminologie « instabilité matérielle » alors que cette condition est issue d'un critère d'instabilité structurelle (striction diffuse). Une condition suffisante d'unicité de la solution du problème aux limites (4.1) est

donc la définie positivité de la forme quadratique $\mathcal{H}$. En adoptant une approche lagrangienne actualisée, le module $\mathcal{L}$ peut être exprimé par :

$$\mathcal{L}_{ijkl} = L_{jikl} + \sigma_{ji}\delta_{kl} - \frac{1}{2}\left(\sigma_{li}\delta_{jk} + \sigma_{ki}\delta_{jl}\right) - \frac{1}{2}\left(\sigma_{jk}\delta_{il} - \sigma_{jl}\delta_{ik}\right) \tag{4.12}$$

où les composantes de L_{jikl} sont les composantes du module tangent élasto-plastique couplé ou non à l'endommagement, défini respectivement par les équations (3.48) ou (3.31).

Une condition nécessaire de perte d'unicité de la solution du problème aux limites correspond à la perte de positivité du travail de second ordre, ce qui peut aussi se traduire par la singularité de la partie symétrique du module tangent $\mathcal{L}$. Une condition suffisante d'unicité est donc donnée par la vérification de la positivité du travail de second ordre donné en (4.11) ou en pratique à la vérification de la positivité de toutes les valeurs propres de la partie symétrique de $\mathcal{L}$. Le critère de Bifurcation Générale peut être vu comme une borne inférieure d'exclusion de la striction diffuse.

4.2.2 Critère de Bifurcation par Point Limite

Dans un cas particulier de Bifurcation Générale, la striction est associée à un état de contrainte nominale stationnaire, conduisant à la condition suivante (Valanis 1989; Neilsen et Schreyer 1993) :

$$\dot{\mathbf{\Pi}} = \mathbf{0} \tag{4.13}$$

En combinant cette condition aux équations de comportement détaillées dans le chapitre précédent, il est possible d'obtenir :

$$\mathcal{L} : \dot{\mathbf{F}} = \mathbf{0} \tag{4.14}$$

Ce critère est associé à la singularité du module tangent $\mathcal{L}$ et le point limite est atteint lors de la première annulation d'une de ses valeurs propres. Il prédit la perte d'unicité des solutions du problème d'équilibre associé à un état de contrainte nominale stationnaire.

4.2.3 Relation théorique entre les critères de Bifurcation Générale et de Bifurcation par Point Limite

Pour établir l'ordre de prédiction de la striction obtenue avec les deux critères présentés ci-dessus, une propriété d'algèbre va être utilisée. Soit $\mathcal{M}$ une matrice carrée de dimension p et $\mathcal{M}^S$ sa matrice symétrique, définie par $\mathcal{M}^S = \frac{1}{2}\left(\mathcal{M} + \mathcal{M}^T\right)$, avec $\mathcal{M}^T$ la transposée de $\mathcal{M}$. Soient $\lambda_i^{\mathcal{M}}$ et $\lambda_i^{\mathcal{M}^S}$ les valeurs propres respectivement associées à $\mathcal{M}$ et à $\mathcal{M}^S$, alors (Abed-Meraim 1999b) :

$$\min_{Sp\left(\mathcal{M}^S\right)}\left(\lambda_i^{\mathcal{M}^S}\right) \leq \operatorname{Re}_{Sp(\mathcal{M})}\left(\lambda_i^{\mathcal{M}}\right) \leq \max_{Sp\left(\mathcal{M}^S\right)}\left(\lambda_i^{\mathcal{M}^S}\right) \tag{4.15}$$

Les valeurs propres de $\mathcal{L}^S$ étant initialement positives, la perte de positivité de la partie réelle d'une valeur propre du module $\mathcal{L}$ est donc atteinte après la perte de positivité d'une valeur propre de $\mathcal{L}^S$. En d'autres termes, la singularité du tenseur $\mathcal{L}$ est obtenue après la singularité de sa partie symétrique $\mathcal{L}^S$. Le critère de Bifurcation par Point Limite est donc moins conservatif que le critère de Bifurcation Générale.

Dans le cas de petites déformations et de l'utilisation d'un modèle de plasticité associée, le module tangent est symétrique. Les critères de Bifurcation Générale et de Bifurcation par Point Limite prédisent alors l'occurrence de striction diffuse pour le même état mécanique.

4.3 Critère de striction diffuse issu du modèle de Cordebois – Ladevèze

De nombreuses observations expérimentales permettent de mettre en évidence l'influence des conditions aux limites sur les états de déformation et de contrainte lors de l'initiation de la striction diffuse et de la localisation. Les critères usuels de striction et de localisation sont généralement écrits dans des cas particuliers de conditions aux limites, notamment l'absence de blocage pour le cas de la striction diffuse. Cordebois et Ladevèze proposent la formulation d'un critère ou plus précisément d'une famille de critères, bornée par un critère de striction diffuse (borne inférieure), dont la formulation s'effectue sans blocage additionnel et par un critère de striction localisée (borne supérieure) associé à un maximum de blocages (Cordebois 1983; Cordebois et Ladevèze 1984; 1986). L'objet de ce paragraphe est de présenter le critère de striction diffuse puis de montrer les liens existant entre ce critère et les critères précédents basés sur une analyse de bifurcation.

4.3.1 Formulation du critère

L'initiation de la striction diffuse est associée à un niveau d'effort à partir duquel le milieu devient instable et, plus précisément, « le comportement instable se caractérise par le fait que, lorsque l'on maintient le chargement extérieur constant, le champ des vitesses de la zone instable n'est pas nécessairement nul » (Cordebois 1983). Dans le cas de comportement stable, le champ des vitesses dans le domaine considéré doit au contraire s'annuler (à un mouvement de corps rigide près) lorsque le chargement est maintenu constant. Cette remarque permet de préciser que ce critère ne s'applique qu'aux matériaux indépendants du temps physique (excluant les comportements visqueux), le calcul se rapportant dans le cas contraire à un calcul de fluage (Mouric 2002). L'initiation de la striction diffuse est alors définie comme l'instant à partir duquel la solution du problème variationnel en vitesses admet une solution non nulle lorsque la dérivée par rapport au temps des efforts extérieurs est nulle (Cordebois 1983). Pour tout champ de vitesse virtuel cinématiquement admissible $\mathbf{V}^*$, le principe des puissances virtuelles s'écrit :

$$\mathcal{P}_{\text{int}}\left(\mathbf{V}^*\right)+\mathcal{P}_{\text{ext}}\left(\mathbf{V}^*\right)=0 \tag{4.16}$$

avec $\mathcal{P}_{\text{int}}$ et $\mathcal{P}_{\text{ext}}$ les puissances virtuelles des efforts intérieurs et extérieurs respectivement, définies en l'absence d'efforts de volume par :

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_{\text{int}}\left(\mathbf{V}^*\right)&=-\int_{\Omega} Tr\left(\underline{\boldsymbol{\tau}}\cdot\underline{\mathbf{D}}\left(\mathbf{V}^*\right)\right)\frac{dV}{J}\\ \mathcal{P}_{\text{ext}}\left(\mathbf{V}^*\right)&=\int_{\partial\Omega_1}\mathbf{f}_s\cdot\mathbf{V}^* dS\end{aligned} \tag{4.17}$$

où $\boldsymbol{\tau}$ est le tenseur de contraintes de Kirchhoff, utilisé pour aboutir à une formulation variationnelle symétrique, simplifiant le calcul de minimisation à la base de l'expression du critère de striction. Le soulignage est utilisée par les auteurs pour indiquer une grandeur transportée dans le référentiel corotationnel $\underline{\mathcal{R}}$ au référentiel eulérien $\mathcal{R}$. Le calcul de la dérivée temporelle du principe des puissances virtuelles exprimées dans un tel référentiel conduit à (Pierre 1990) :

$$\dot{\mathcal{P}}_{\text{int}}\left(\mathbf{V}^*\right)=-\int_{\Omega}\left(Tr\left(\dot{\underline{\boldsymbol{\tau}}}\cdot\underline{\mathbf{D}}\left(\mathbf{V}^*\right)\right)-Tr\left(\underline{\boldsymbol{\tau}}\cdot\left(2\underline{\mathbf{D}}\left(\mathbf{V}\right)\cdot\underline{\mathbf{D}}\left(\mathbf{V}^*\right)-\mathbf{Q}\cdot\mathbf{G}^T\left(\mathbf{V}\right)\cdot\mathbf{G}\left(\mathbf{V}^*\right)\cdot\mathbf{Q}^T\right)\right)\right)\frac{dV}{J}=0 \tag{4.18}$$

avec $\mathbf{Q}$ l'opérateur de rotation locale, $\mathbf{D}$ le taux de déformation et $\mathbf{G}$ le gradient des vitesses. Les efforts extérieurs étant maintenus constants, la dérivée temporelle de la puissance des efforts extérieurs est nulle. Ce problème peut être réécrit sous la forme condensée suivante pour tout champ de vitesse $\mathbf{V}^*$ cinématiquement admissible :

$$\mathcal{A}\left(\mathbf{V},\mathbf{V}^*\mid\underline{\boldsymbol{\tau}}\right)=0 \tag{4.19}$$

avec $\mathcal{A}$ une fonction strictement convexe et positive s'annulant pour la solution triviale $\mathbf{V}$ nulle. La minimisation d'une fonction approchée de $\mathcal{A}$ permet d'obtenir une condition sur le champ de contraintes, ou plus précisément sur un scalaire représentant l'intensité des contraintes, permettant l'existence d'un champ de vitesse vérifiant l'approximation de (4.19) et différent de la solution triviale. Il est montré que cette condition correspond à la perte de convexité de $\mathcal{A}$ et qu'elle peut s'écrire sous la forme :

$$\mathcal{D}\left(\underline{\boldsymbol{\tau}}\right)=0 \tag{4.20}$$

Cette condition d'instabilité en striction diffuse dépend du modèle de comportement choisi, aucune condition de blocage n'étant ajoutée dans ce cas. La forme de $\mathcal{D}$ est explicitée pour différents modèles de comportement phénoménologiques, par exemple dans le cadre élasto-plastique avec écrouissage isotrope, dans le cadre rigide-plastique (Cordebois 1983) et dans le cadre élasto-plastique à écrouissage mixte utilisant le modèle de Boucher – Cordebois (Mouric 2002).

Dans le cas simplifié de tôles soumises à des chargements linéaires en contraintes planes et suivant un comportement rigide plastique à écrouissage isotrope modélisé par une loi non

saturante de type Hollomon et une surface de charge de von Mises, la forme développée du critère peut être écrite en fonction des paramètres d'écrouissage et de chargement (Cordebois 1983) :

$$\varepsilon_{1c} = \frac{4n\left(1-\alpha/2\right)\left(1-\alpha+\alpha^2\right)}{4-3\alpha-3\alpha^2+4\alpha^3}$$
$$\varepsilon_{2c} = \frac{4n\left(\alpha-1/2\right)\left(1-\alpha+\alpha^2\right)}{4-3\alpha-3\alpha^2+4\alpha^3} \qquad (4.21)$$

avec ε_{1c} et ε_{2c} les déformations critiques principales majeure et mineure à l'initiation de la striction diffuse, n le coefficient d'écrouissage de la loi de Hollomon et α le rapport des composantes principales du tenseur de contraintes de Cauchy, constant au cours du chargement.

4.3.2 Relation entre le critère de striction diffuse de Cordebois – Ladevèze et le critère de Bifurcation Générale

Les critères de striction diffuse de Cordebois – Ladevèze (4.16)-(4.20) et de Bifurcation Générale (4.9) sont tous les deux basés sur les conditions d'annulation de la dérivée du principe des puissances virtuelles mais utilisent des méthodes de résolution et des configurations différentes, respectivement eulérienne et lagrangienne. Cependant, le problème physique initialement traité par ces deux méthodes est le même. Si une comparaison directe de l'expression (4.9) et des formes développées de (4.20) n'est pas aisée, il n'est toutefois pas surprenant d'observer en Figure 4.1 des résultats numériques identiques pour ces deux critères.

Une autre relation entre ce critère de striction de Cordebois – Ladevèze et le critère de striction localisée de Rice est parfois énoncée dans la littérature. Le modèle de Rice est alors vu comme un cas particulier du critère de striction de C – L, appliqué à un sous ensemble de l'espace des champs de déformation cinématiquement admissibles (Habbad 1994).

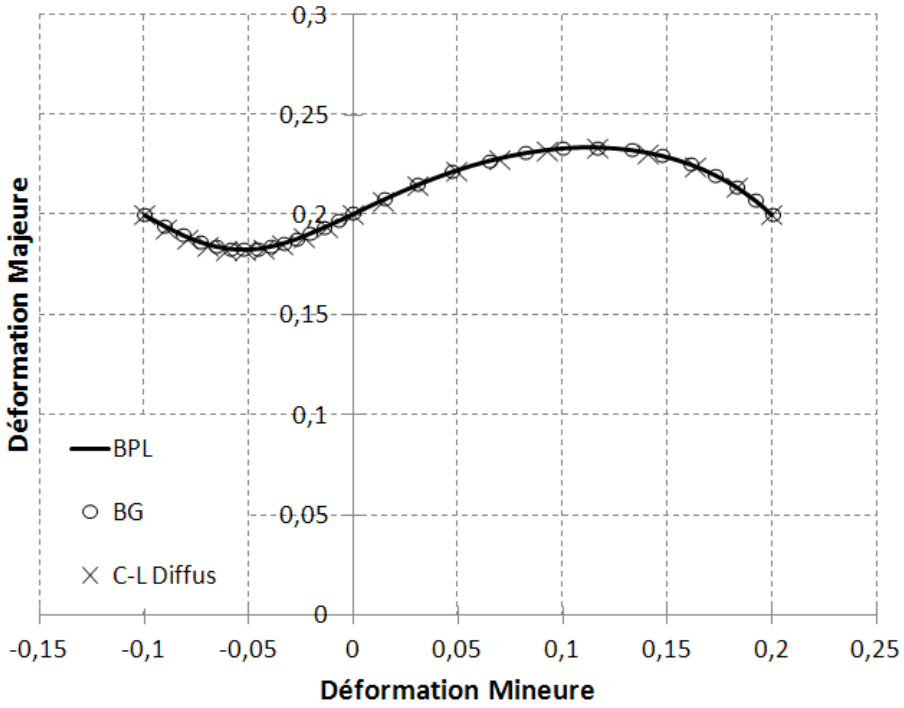


Figure 4.1 : Courbes Limites de Formage en striction diffuse obtenues avec les critères de Bifurcation par Point Limite (BPL), de Bifurcation Générale (BG) et la borne basse du modèle de Cordebois – Ladevèze (C – L diffus) pour un matériau isotrope à écrouissage modélisé par la loi de Hollomon avec $k = 580MPa$ et $n = 0,2$.

4.4 Principe de Force Maximum

Les critères de striction diffuse issus du principe de force maximum sont basés sur des observations expérimentales selon lesquelles l'instabilité plastique se produit lorsque l'effort principal atteint son maximum au cours d'un chargement (Considère 1885). Initialement développé pour la prédiction de la striction diffuse dans le cas d'un chargement uni-axial, ce principe a ensuite été étendu au cas de chargements bi-axiaux pour la prédiction de la striction diffuse ou de la localisation de la déformation dans des tôles soumises à des opérations d'emboutissage.

Il a été montré que l'élasticité joue un rôle négligeable sur le niveau d'instabilité prédit (Habbad 1994). Sauf indication contraire, le principe de force maximum de Considère est écrit dans les paragraphes suivants pour un chargement uni-axial et pour une classe de matériaux rigides plastiques, avant d'être appliqué dans le cas particulier d'un modèle de comportement simplifié permettant d'obtenir une formule analytique explicite du critère. Le choix de comportements rigides plastiques n'est pas nécessaire à la formulation de ces critères, mais il permet d'en simplifier les écritures.

L'attention sera ensuite portée sur le critère de Force Maximum, proposé par (Swift 1952) pour des chargements bidimensionnels. Ce critère est dans un premier temps formulé pour différents types de comportements incluant des comportements rigide plastique simplifié et

rigide plastique couplé à l'endommagement. Une formulation 3D du critère est ensuite proposée, permettant l'établissement de relations théoriques entre ce critère et les critères de Bifurcation Générale et de Bifurcation par Point Limite. D'autres extensions du principe de Force Maximum, appliquées à la prédiction de la striction diffuse ou localisée seront présentées au Chapitre 5.

4.4.1 Striction en traction uniaxiale

Dès 1885, Considère propose un premier critère pour la prédiction de l'apparition de la striction diffuse (Considère 1885). Ce critère repose sur des observations expérimentales réalisées sur des éprouvettes cylindriques d'acier soumises à un chargement direct de traction uniaxiale. Suivant celles-ci, la striction diffuse commence lorsque l'effort exercé sur la barre atteint un maximum.

Dans le cas d'un essai de traction uniaxiale en chargement monotone sur une barre, la condition d'effort maximum se traduit par :

$$\dot{F}_1 = 0 \tag{4.22}$$

où F_1 est l'effort appliqué sur la barre, l'indice 1 indiquant la direction du chargement principal. Ce qui, en introduisant les contraintes de Cauchy, conduit à :

$$\frac{\dot{F}_1}{F_1} = \frac{\dot{\sigma}_1}{\sigma_1} + \frac{\dot{S}}{S} = 0 \tag{4.23}$$

avec S la section de la barre et σ_1 la composante principale majeure du tenseur des contraintes de Cauchy, vérifiant la relation $F_1 = \sigma_1 S$. En introduisant les déformations logarithmiques et en utilisant la propriété d'incompressibilité plastique, la relation (4.23) devient :

$$\frac{\dot{\sigma}_1}{\sigma_1} - \dot{\varepsilon}_1 = 0 \tag{4.24}$$

où ε_1 est la composante principale majeure du tenseur des déformations logarithmiques. Cette expression constitue une forme du critère de striction diffuse de Considère, équivalente à la forme courante :

$$\frac{\dot{\sigma}_1}{\sigma_1 \dot{\varepsilon}_1} = \frac{1}{Z_c} = 1 \tag{4.25}$$

où Z_c est la sous-tangente critique du critère de Considère, illustrée en Figure 4.2 :

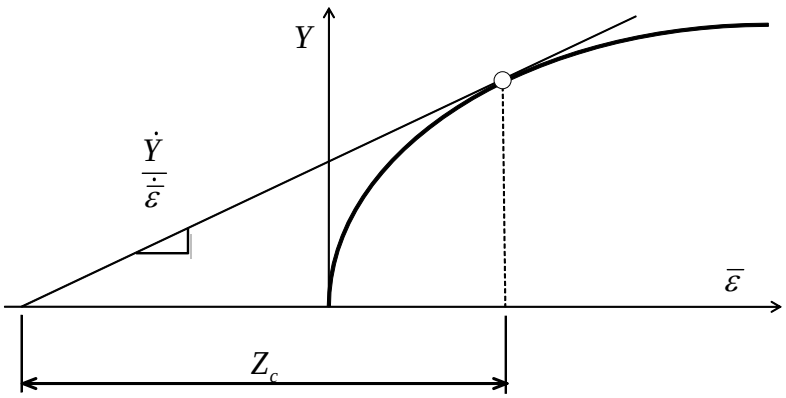


Figure 4.2 : Définition de la sous-tangente Z_c sur le graphe de la contrainte d'écoulement Y en fonction de la déformation plastique équivalente $\bar{\varepsilon}$.

Communément calculée pour les critères issus du principe de force maximum, cette tangente permet d'écrire ces critères sous une forme unifiée, ce qui simplifie leur comparaison théorique. Dans le cas d'une tôle métallique homogène et isotrope soumise à un chargement plan et proportionnel en force, des résultats particuliers peuvent être obtenus. Le comportement simplifié de la tôle est modélisé avec le critère de plasticité de von Mises et un écrouissage isotrope de type Hollomon dépendant uniquement de la déformation plastique équivalente $\bar{\varepsilon}$. Sous ces hypothèses, la relation entre la contrainte équivalente de von Mises et la contrainte de Cauchy devient :

$$\bar{\sigma} = \sigma_1 \tag{4.26}$$

D'autre part, en appliquant les relations de Levy – Mises, on peut obtenir :

$$\dot{\varepsilon}_1 = \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_1} \dot{\lambda} \tag{4.27}$$

Dans le cas d'un solide rigide plastique et dont l'écrouissage isotrope est modélisé par une loi de type Hollomon, l'évolution de la variable d'écrouissage s'écrit :

$$\frac{\dot{Y}}{\dot{\bar{\varepsilon}}} = nk\bar{\varepsilon}^{n-1} = \frac{nY}{\bar{\varepsilon}} \tag{4.28}$$

avec Y la taille de la surface de charge. Dans le cas de la traction uniaxiale et en l'absence d'écrouissage cinématique, cette variable est égale à la contrainte de traction. L'expression particulière du critère de Considère s'obtient en combinant les équations (4.24)-(4.28) et en tenant compte de la condition de charge plastique $\left(\bar{\sigma} = Y\right)$ et de la relation $\dot{\lambda} = \dot{\bar{\varepsilon}}$:

$$\frac{\dot{\bar{\sigma}}}{\bar{\sigma}\ \dot{\bar{\varepsilon}}} = \frac{n}{\bar{\varepsilon}_c} = 1 \tag{4.29}$$

où $\bar{\varepsilon}_c$ est la déformation critique à l'instabilité plastique. Dans le cas d'une tôle soumise à un chargement de traction uniaxiale et dont le comportement simplifié est modélisé à l'aide d'une loi de Hollomon, la déformation critique à striction est égale au coefficient d'écrouissage n et est atteinte lorsque l'effort passe par son maximum comme l'illustre la Figure 4.3, obtenue pour un alliage fictif.

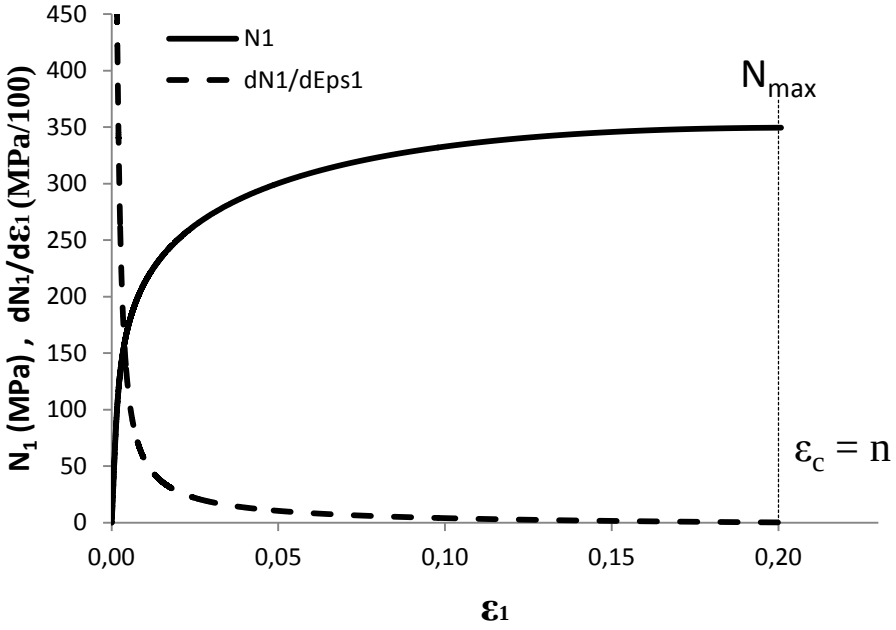


Figure 4.3 : Evolution de la contrainte nominale jusqu'à la détection de la striction diffuse, correspondant au maximum de l'effort au cours du chargement de traction uniaxiale pour une barre en utilisant le critère de plasticité de von Mises et la loi d'écrouissage d'Hollomon avec les constantes $k = 580MPa$ et $n = 0,2$.

4.4.2 Extensions aux chargements bi-axiaux

L'approche développée par Considère est toutefois restreinte à la prévision de la striction diffuse pour des barres soumises à des chargements de traction uniaxiale. Des extensions de ce critère sont donc nécessaires pour prévoir les instabilités plastiques se produisant lors de la mise en forme de tôles métalliques soumises à des trajets de chargements plus complexes, comme par exemple en emboutissage. Différentes extensions ont été proposées afin d'étendre l'application de ce critère à la prévision de la striction diffuse et à la prévision de la localisation des déformations dans le cas de chargements plans.

Des hypothèses et notations communes sont utilisées pour la formulation des critères courants basés sur les extensions du principe de force maximum. Les directions 1, 2 et 3 désignent les directions principales de la contrainte et du taux de déformation. Ces directions sont confondues avec les directions de chargement et avec les directions principales d'anisotropie. La direction 1 est la direction de la contrainte principale majeure tandis que la direction 3 désigne la direction de l'épaisseur ; un état de contraintes planes est supposé dans toute cette

partie ($\sigma_{33}=0$, $\sigma_{13}=0$ et $\sigma_{23}=0$). Les trajets de chargement étant considérés directs et linéaires, les rapports des composantes dans le plan des contraintes de Cauchy et de vitesse de déformation sont considérés constants, sauf indication contraire.

4.4.3 Critère de Force Maximum

A partir des équations du modèle de Considère, différentes extensions ont été proposées pour prévoir la striction diffuse au cours de chargements bi-axiaux de tôles métalliques. Dans cette partie, seule la formulation du critère de Force Maximum (Swift 1952) sera détaillée, du fait de l'importance de la place qu'il occupe dans la littérature, pour des matériaux élasto-plastiques dont le comportement est couplé ou pas à l'endommagement. Parmi les autres extensions existantes, on peut citer les formulations liées au maximum de l'effort principal majeur ou mineur, mais celles-ci ne seront brièvement présentées qu'au cours du Chapitre 5, en même temps que le critère de Force Maximum Modifié dont elles constituent le point de départ.

Le critère de Force Maximum est basé sur l'hypothèse selon laquelle la striction diffuse se produit dans une tôle mince métallique soumise à un chargement bi-axial lorsque l'effort atteint un état stationnaire. La simultanéité de la stationnarité des composantes de l'effort se traduit par :

$$\dot{F}_1 = 0 \qquad \text{et} \qquad \dot{F}_2 = 0 \tag{4.30}$$

La composante de l'effort dans la direction 3 de l'épaisseur étant toujours nulle sous les hypothèses de chargement plan. En utilisant la même démarche que celle utilisée pour le critère de Considère, présentée par exemple dans (Habbad 1994) et reprise dans (Ben Tahar 2005), la condition précédente peut être exprimée en fonction des contraintes de Cauchy, soit :

$$\frac{\dot{\sigma}_1}{\sigma_1} - \dot{\varepsilon}_1 = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{\dot{\sigma}_2}{\sigma_2} - \dot{\varepsilon}_2 = 0 \tag{4.31}$$

La dérivation de la contrainte équivalente conduit à :

$$\dot{\bar{\sigma}} = \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_1}\dot{\sigma}_1 + \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_2}\dot{\sigma}_2 \tag{4.32}$$

En tenant compte des relations (4.31), il est possible d'écrire à l'instabilité :

$$\dot{\bar{\sigma}} = \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_1}\sigma_1\dot{\varepsilon}_1 + \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_2}\sigma_2\dot{\varepsilon}_2 \tag{4.33}$$

En exprimant $\dot{\varepsilon}_1$ et $\dot{\varepsilon}_2$ à partir de la loi d'écoulement plastique, la relation précédente devient :

$$\dot{\bar{\sigma}} = \left(\left(\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_1} \right)^2 \sigma_1 + \left(\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_2} \right)^2 \sigma_2 \right) \dot{\bar{\varepsilon}} \tag{4.34}$$

D'autre part, le travail plastique est défini par :

$$\bar{\sigma}\ \dot{\bar{\varepsilon}} = \sigma_1 \dot{\varepsilon}_1 + \sigma_2 \dot{\varepsilon}_2 \tag{4.35}$$

La combinaison des relations (4.34) et (4.35) en tenant compte de la loi d'écoulement plastique permet d'écrire le critère de Force Maximum sous une forme comparable à celle du critère de Considère :

$$\frac{\dot{\bar{\sigma}}}{\bar{\sigma}\ \dot{\bar{\varepsilon}}} = \frac{1}{Z_S} = \frac{\sigma_1 \left(\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_1} \right)^2 + \sigma_2 \left(\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_2} \right)^2}{\sigma_1 \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_1} + \sigma_2 \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_2}} \tag{4.36}$$

où Z_S est la tangente du critère de Swift.

Cas du comportement rigide plastique simplifié :

Des expressions analytiques simples du critère de Force Maximum peuvent être obtenues dans le cas de matériaux obéissant au comportement simplifié présenté au paragraphe 4.4.1 et basé sur un comportement rigide plastique, une loi d'écrouissage isotrope de type Hollomon ne dépendant que de la déformation équivalente $\bar{\varepsilon}$ et le critère de plasticité isotrope de von Mises, dont l'écriture est la suivante :

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2} \boldsymbol{\sigma}' : \boldsymbol{\sigma}'} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2} \tag{4.37}$$

Pour un chargement linéaire direct et proportionnel en contrainte de Cauchy, le rapport α des contraintes principales est constant et tel que :

$$\alpha = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{d\sigma_2}{d\sigma_1} \tag{4.38}$$

Les dérivées partielles de la contrainte équivalente peuvent donc être exprimées en fonction de α :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_1} &= \frac{1 - \alpha/2}{\sqrt{1 - \alpha + \alpha^2}} \\ \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_2} &= \frac{\alpha - 1/2}{\sqrt{1 - \alpha + \alpha^2}} \end{aligned} \tag{4.39}$$

L'introduction de ces relations dans l'expression du critère de Force Maximum (4.36), conduit à :

$$\frac{\dot{\bar{\sigma}}}{\bar{\sigma}\,\dot{\bar{\varepsilon}}} = \left(1-\frac{3}{4}\alpha-\frac{3}{4}\alpha^2+\alpha^3\right)\left(1-\alpha+\alpha^2\right)^{-\frac{3}{2}} \tag{4.40}$$

Lorsque la loi d'écrouissage isotrope de Hollomon est utilisée, la relation entre la contrainte équivalente de von Mises, la déformation équivalente et la variable d'écrouissage isotrope peut être obtenue durant le chargement plastique :

$$\frac{\dot{\bar{\sigma}}}{\bar{\sigma}\,\dot{\bar{\varepsilon}}} = \frac{\dot{Y}}{Y\dot{\bar{\varepsilon}}} = \frac{n}{\bar{\varepsilon}} \tag{4.41}$$

A l'initiation de la striction diffuse selon les hypothèses de Swift, la relation entre la déformation équivalente critique $\bar{\varepsilon}_c$ et le trajet de chargement α devient :

$$\bar{\varepsilon}_c = \frac{4n\left(1-\alpha+\alpha^2\right)^{\frac{3}{2}}}{4-3\alpha-3\alpha^2+4\alpha^3} \tag{4.42}$$

Les déformations critiques principales à l'initiation de la striction diffuse s'en déduisent à l'aide de la loi d'écoulement plastique :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{1c} &= \frac{4n\left(1-\alpha/2\right)\left(1-\alpha+\alpha^2\right)}{4-3\alpha-3\alpha^2+4\alpha^3} \\ \varepsilon_{2c} &= \frac{4n\left(\alpha-1/2\right)\left(1-\alpha+\alpha^2\right)}{4-3\alpha-3\alpha^2+4\alpha^3} \end{aligned} \tag{4.43}$$

Il est intéressant de comparer cette formulation analytique du critère de Swift à celle du critère de striction diffuse de Cordebois – Ladevèze (4.21) obtenue dans le même cadre simplifié et d'observer des similitudes entre ces deux critères (Cordebois 1983).

Les relations (4.43) permettent de tracer des courbes limites de formage à striction diffuse selon le critère de Force Maximum (Figure 4.4). Pour un matériau dont les caractéristiques sont données en Figure 4.3, différentes courbes sont obtenues pour plusieurs valeurs du coefficient d'écrouissage n. Dans le cas du chargement en traction plane ($\alpha = 1/2$ et $\beta = 0$, avec β le rapport des composantes principales mineure et majeure du taux de déformation), la déformation principale mineure est nulle et il peut être remarqué que la valeur de la déformation principale majeure critique est égale au coefficient d'écrouissage n ; des valeurs identiques de la déformation principale majeure critique sont obtenues pour des chargements de traction uniaxiale ($\alpha = 0$ ou $\beta = -1/2$) et de expansion équibiaxiale ($\alpha = 1$ ou $\beta = 1$).

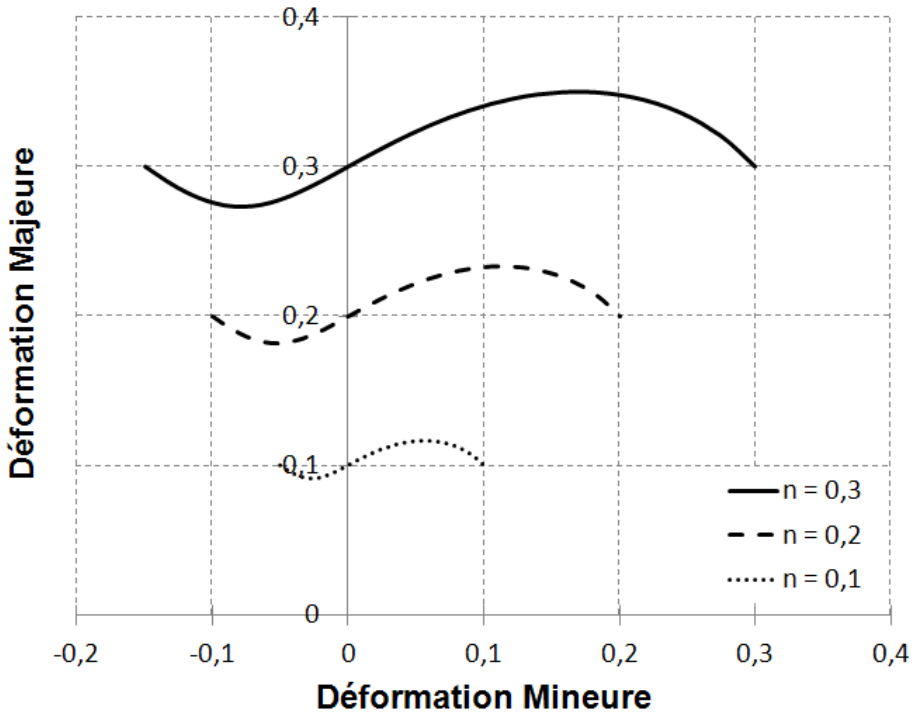


Figure 4.4 : Courbes limites de formage à striction diffuse selon le critère de Force Maximum de Swift pour un alliage d'aluminium pour différentes valeurs du coefficient d'écrouissage isotrope n.

Cas rigide plastique couplé à l'endommagement :

Après avoir formulé le CFM avec un modèle de comportement simplifié afin d'obtenir des résultats remarquables bien connus, notamment en traction uniaxiale, en traction plane et en expansion équibiaxiale, ce critère est maintenant réécrit avec un modèle de comportement rigide plastique comprenant un couplage à l'endommagement ductile. Les relations entre la contrainte et la contrainte effective, la définition de la contrainte équivalente et la loi d'écoulement, définies au Chapitre 3 dans le cas d'un comportement élasto-plastique couplé à l'endommagement, restent valables pour ce comportement rigide plastique avec couplage.

En adoptant la démarche développée dans les deux parties précédentes, la condition d'instabilité matérielle s'écrit en utilisant l'incompressibilité :

$$\begin{aligned} \frac{\dot{\sigma}_1}{\sigma_1} - \dot{\varepsilon}_1 = 0 \\ \frac{\dot{\sigma}_2}{\sigma_2} - \dot{\varepsilon}_2 = 0 \end{aligned} \tag{4.44}$$

où σ_i et $\dot{\varepsilon}_i$ sont respectivement des composantes du tenseur de contrainte de Cauchy et du tenseur taux de déformation. La différentielle de la contrainte équivalente peut s'écrire :

$$\dot{\bar{\sigma}} = \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_1^{eff}} \dot{\sigma}_1^{eff} + \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_2^{eff}} \dot{\sigma}_2^{eff} + \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \mathbf{X}} : \dot{\mathbf{X}} \tag{4.45}$$

La relation entre contraintes et contraintes effectives est telle que :

$$\dot{\sigma}_i^{eff} = \frac{\dot{\sigma}_i}{1-d} + \frac{\dot{d}}{1-d} \sigma_i^{eff} \tag{4.46}$$

En tenant compte des relations de comportement et de la condition d'instabilité (4.44), il est possible d'obtenir :

$$\dot{\sigma}_i^{eff} = \sigma_i^{eff} \left(\frac{\partial \bar{\sigma}\left(\boldsymbol{\sigma}^{eff}, \mathbf{X}\right)}{\partial \sigma_i} + \frac{H_d}{1-d} \right) \dot{\lambda} \tag{4.47}$$

Une condition d'instabilité peut donc être obtenue combinant les équations (4.44)-(4.47) :

$$\dot{\bar{\sigma}} = \left(\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_1^{eff}} \sigma_1^{eff} \left(\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_1} + \frac{H_d}{1-d} \right) + \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_2^{eff}} \sigma_2^{eff} \left(\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_2} + \frac{H_d}{1-d} \right) + \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \mathbf{X}} : \mathbf{H}_{\mathbf{X}} \right) \dot{\lambda} \tag{4.48}$$

La définition du travail plastique équivalent permet d'autre part d'obtenir :

$$\bar{\sigma}\ \dot{\bar{\varepsilon}} = \sum_{i=1}^{3} \left(\sigma_i^{eff} - X_i \right) \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_i} \dot{\lambda} \tag{4.49}$$

Le rapport des expressions (4.45) et (4.49) permet d'obtenir une formulation du critère de Force Maximum dans le cas rigide plastique couplé avec l'endommagement :

$$\frac{\dot{\bar{\sigma}}}{\bar{\sigma}\ \dot{\bar{\varepsilon}}} = \frac{\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_1} \sigma_1 \left(\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_1} + \frac{H_d}{1-d} \right) + \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_2} \sigma_2 \left(\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_2} + \frac{H_d}{1-d} \right) - \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{H}_{\mathbf{X}}}{\sum_{i=1}^{3} \left(\sigma_i^{eff} - X_i \right) \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_i}} \tag{4.50}$$

En l'absence d'écrouissage cinématique et d'endommagement, cette expression est équivalente à l'expression (4.36).

4.4.4 Extension du critère de Force Maximum au cas 3D

Le critère de Force Maximum classique et tel que présenté dans les parties ci-dessus est écrit avec un modèle de comportement 3D, mais appliqué pour un chargement plan adapté au cas de la mise en forme de tôles métalliques minces par emboutissage et conduisant à des états de contraintes planes. Afin de lever cette restriction, une généralisation du critère de Force Maximum au cas de chargements 3D généraux est proposée.

La condition de stationnarité des efforts du principe de Force Maximum est donnée par les équations (4.30) ou (4.61). Dans le cas d'un chargement 3D général, cette condition généralisée conduit à trois relations sur les vecteurs forces appliquées au solide telles que :

$$\dot{F}_i = 0 \tag{4.51}$$

avec i l'indice de la direction principale de chargement variant de 1 à 3. Dans le cas de chargements radiaux dans les axes d'anisotropie ou des matériaux isotropes pour lesquels les termes de cisaillement sont nuls, ces relations peuvent aussi être exprimées en fonction du tenseur des contraintes nominales $\mathbf{N}$, conduisant à neuf relations tant que l'état de déformation et de contrainte est uniforme :

$$\dot{N}_{ij} = 0 \tag{4.52}$$

avec i et j des entiers variant de 1 à 3. La relation entre les contraintes nominales et les contraintes de Cauchy peut être exprimée dans le cadre d'une configuration lagrangienne actualisée, par exemple (Sidoroff 1982) :

$$\dot{\mathbf{N}} = \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{W} + tr\left(\mathbf{D}\right)\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{D}\cdot\boldsymbol{\sigma} \tag{4.53}$$

Dans le cas de matériaux rigides plastiques, la trace du tenseur des taux de déformations est nulle. D'autre part, dans le cas de tôles chargées dans les axes principaux de contraintes et de déformations, le taux de rotation $\mathbf{W}$ est nul. En tenant compte de ces observations, les relations (4.52) et (4.53) permettent d'écrire :

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} - \mathbf{D}\cdot\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} \tag{4.54}$$

En adoptant la démarche détaillée précédemment, le critère de Force Maximum généralisé au cas 3D peut être réécrit sous la forme :

$$\frac{\dot{\bar{\sigma}}}{\bar{\sigma}\ \dot{\bar{\varepsilon}}} = \frac{\dfrac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\boldsymbol{\sigma}} : \left(\dfrac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\boldsymbol{\sigma}}\cdot\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{H}_{\mathbf{X}}\right)}{\dfrac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\boldsymbol{\sigma}} : \left(\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{X}\right)} \tag{4.55}$$

En plus de la simultanéité de l'annulation des trois composantes du taux de l'effort, seule l'hypothèse de négliger l'élasticité, dont l'utilisation a été justifiée précédemment, a été utilisée lors de la formulation de ce critère applicable à une tôle homogène. Cette hypothèse n'est pas nécessaire, mais a simplement permis de simplifier les calculs et l'expression finale du critère de Force Maximum. Il est à noter que cette formulation fait appel à un chargement tridimensionnel non nécessairement proportionnel (contrairement à ce qui est généralement utilisé dans la littérature). La prédiction de la striction ne dépend donc que de l'état mécanique actuel du matériau.

L'expression du critère de Swift généralisée au cas tridimensionnel peut aussi être obtenue dans le cas de matériaux rigides plastiques endommageables. Dans ce cas la condition (4.52)

est toujours valable, de même que la relation entre contraintes nominales et contraintes de Cauchy (4.53). La trace de la déformation plastique et le taux de rotation étant nuls avec les hypothèses choisies, il est possible de négliger les deuxième et troisième termes à droite de l'égalité (4.53). La condition d'instabilité plastique (4.52) peut alors s'écrire sous la forme suivante dans le cas de matériaux rigides plastiques couplés à l'endommagement :

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} - \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} \tag{4.56}$$

Le taux de contrainte équivalente peut être exprimé par :

$$\dot{\bar{\sigma}} = \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{eff}} : \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{eff} + \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \mathbf{X}} : \dot{\mathbf{X}} \tag{4.57}$$

Dans cette équation, le taux de contrainte effective peut être remplacé par son expression calculée au Chapitre 3 :

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{eff} = \frac{1}{1-d}\left(\dot{\boldsymbol{\sigma}} + \dot{d}\boldsymbol{\sigma}_{eff}\right) \tag{4.58}$$

D'autre part, le travail plastique se développe sous la forme :

$$\bar{\sigma}\ \dot{\bar{\varepsilon}} = \left(\boldsymbol{\sigma}_{eff} - \mathbf{X}\right) : \mathbf{D}^{p} \tag{4.59}$$

En combinant les relations (4.56)-(4.59) et en utilisant les relations de comportement, le critère de Force Maximum généralisé au cas tridimensionnel dans le cas de matériaux rigides plastiques endommageables s'écrit :

$$\frac{\dot{\bar{\sigma}}}{\bar{\sigma}\ \dot{\bar{\varepsilon}}} = \frac{\dfrac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{eff}} : \left(\dfrac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{eff} + \dfrac{H_d}{1-d}\boldsymbol{\sigma}_{eff} - \mathbf{H}_{\mathbf{X}}\right)}{\dfrac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \left(\boldsymbol{\sigma}_{eff} - \mathbf{X}\right)} \tag{4.60}$$

En l'absence d'endommagement, il est possible de vérifier que cette expression du critère de Force Maximum est identique à celle calculée en (4.55) dans le cas rigide plastique sans couplage à l'endommagement.

4.4.5 Relation entre le critère de Bifurcation Générale et le Critère de Force Maximum

Les premiers critères présentés dans ce chapitre consacré à la prédiction de la striction diffuse sont basés sur l'analyse de bifurcation, dont le principe peut sembler éloigné de l'observation expérimentale ayant conduit à la formulation du Critère de Force Maximum. Toutefois, conformément aux objectifs fixés, des relations entre les formulations théoriques de ces critères sont recherchées afin de classer les critères selon leur ordre de prédiction de striction ou d'établir l'équivalence de deux critères. Avec toutes les hypothèses exposées

précédemment, le critère de Force Maximum est basé sur la stationnarité des efforts principaux au moment de l'apparition de la striction diffuse, soit :

$$\begin{aligned} \dot{F}_1 &= 0 \\ \dot{F}_2 &= 0 \end{aligned} \tag{4.61}$$

De plus, pour un chargement dans le plan, on a :

$$F_3 = 0 \qquad \text{et} \qquad \dot{F}_3 = 0 \tag{4.62}$$

Ce qui se traduit en terme de contraintes nominales par :

$$\begin{aligned} \dot{N}_1 &= 0 \\ \dot{N}_2 &= 0 \\ \dot{N}_3 &= 0 \end{aligned} \tag{4.63}$$

Considérons un solide homogène vérifiant ces conditions. Soient $\mathbf{G}_A$ et $\mathbf{G}_B$ deux champs gradients des vitesses cinématiquement admissibles. La différence du travail de second ordre produit par ces deux champs conduit à :

$$\dot{\mathbf{N}} : [\mathbf{G}] = 0 \tag{4.64}$$

avec $[\mathbf{G}]$ la différence des champs $\mathbf{G}_A$ et $\mathbf{G}_B$. Ainsi lorsque le critère de Force Maximum est vérifié, le critère de Bifurcation Générale est nécessairement atteint. Le critère de Force Maximum est une condition suffisante de Bifurcation Générale.

4.4.6 Relation théorique entre le critère de Point Limite et le Critère de Force Maximum

Une écriture du critère de Force Maximum généralisée aux chargements tridimensionnels a été présentée dans le paragraphe précédent. Ce développement va être utilisé pour établir la relation théorique entre les critères de Force Maximum et le critère de bifurcation par Point Limite. En reprenant l'équation (4.52), il a été vu auparavant que la condition d'instabilité de Swift pouvait s'écrire avec un chargement respectant les conditions de contraintes planes et appliqué dans les axes d'anisotropie :

$$\dot{\mathbf{N}} = \mathbf{0} \tag{4.65}$$

Soit encore en exprimant le taux de contrainte nominale en fonction du gradient des vitesses :

$$\boldsymbol{L} : \mathbf{G} = \mathbf{0} \tag{4.66}$$

Pour un chargement $\mathbf{G}$ non nul, la condition d'instabilité de Swift est donc reliée à la recherche d'une singularité du module tangent $\boldsymbol{L}$. Il devient évident après la réécriture du critère de Force Maximum dans un cadre généralisé que cette condition d'instabilité est

équivalente au critère de Bifurcation par Point Limite, soit à la recherche de la première annulation d'une valeur propre du module $\boldsymbol{L}$. Cette dernière écriture est toutefois un peu plus générale que le critère obtenu à l'équation (4.60), dont l'utilisation devrait rigoureusement être limitée au cas de matériaux rigides plastiques dont le taux de rotation est négligeable.

Cette nouvelle formulation du critère de Force Maximum, équivalente au critère de Bifurcation par Point Limite (4.14), permet d'avoir un nouveau regard sur certaines hypothèses couramment utilisées lors de la formulation du critère de Swift et de son interprétation physique. En effet, il a été noté que la condition d'instabilité de Swift (4.30) est associée à la stationnarité simultanée des efforts principaux et à un effort nul dans l'épaisseur. Or les efforts principaux ne peuvent être stationnaires simultanément que dans des cas particuliers de chargements (Boumaiza 2005), ce qui limite le sens physique de ce critère. Afin de lever ce paradoxe, une autre interprétation du critère a été proposée, selon laquelle la striction se produit si pour un état mécanique donné il existe un chemin incrémental permettant de vérifier la condition de Swift (Habbad 1994). Le lien établi entre les critères de Force Maximum et de Bifurcation par Point Limite permet de donner une autre interprétation de ce critère. La striction est associée à la singularité du module tangent $\boldsymbol{L}$, soit à la perte d'unicité de la solution du problème d'équilibre (4.9). Aucune hypothèse concernant la linéarité des trajets de chargement appliqués dans les axes d'anisotropie n'a été utilisée lors de la formulation du CFM (voir par exemple les équations (4.51)-(4.55)) et n'est donc nécessaire. Toutefois, l'utilisation de trajets de chargements radiaux permet d'obtenir des formes simplifiées du critère dans des cas particuliers et de paramétrer le tracé des CLF.

Il est possible de vérifier que les prévisions de CLF réalisées avec la formulation classique du CFM sont en parfait accord avec les prévisions obtenues à l'aide du critère de BPL associé à des chargements plans, conformément aux observations théoriques, comme l'illustre la Figure 4.5.

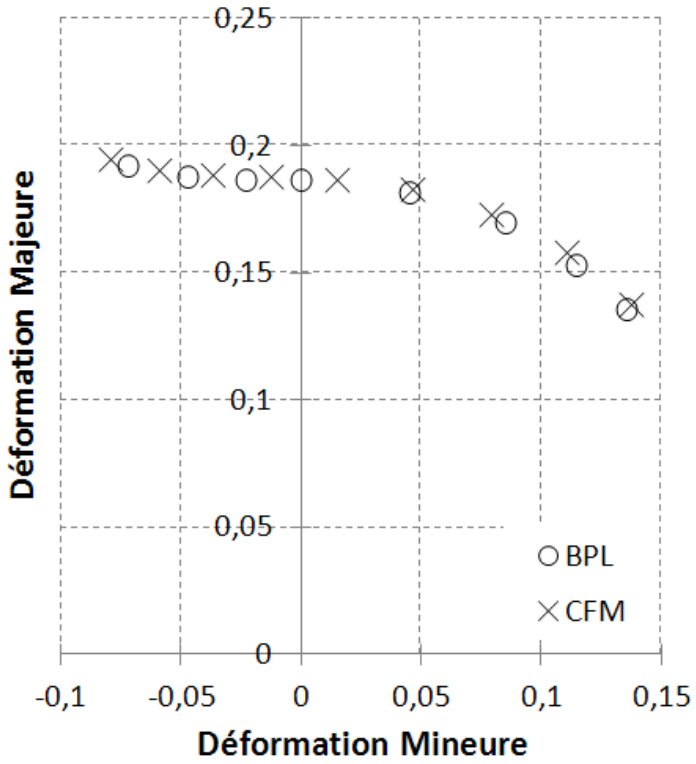


Figure 4.5 : Courbes limites de formage à striction diffuse selon les critères de Bifurcation par Point Limite et de Force Maximum (4.60) pour un acier DP600 modélisé d'après (Haddag 2007) à l'aide d'un écrouissage purement cinématique avec $X_{sat} = 551\text{MPa}$, $C_X = 9,3$ et $Y_0 = 356\text{MPa}$.

Les résultats numériques confirment les discussions théoriques précédentes, les très faibles écarts entre ces critères pouvant être imputés à des différences dans certains choix réalisés lors de leur implantation. Pour des modèles de comportement avancés, l'écriture du critère de Force Maximum peut devenir lourde voire nécessiter quelques simplifications contrairement à l'utilisation équivalente du critère de BPL. Pour une utilisation industrielle, le temps CPU lié au CFM semble par contre rester inférieur à celui nécessité par le critère de BPL. Dans le second cas, la recherche des valeurs propres du tenseur est en effet pénalisante en termes de temps de calcul.

4.5 Conclusion

Dans ce chapitre, différentes méthodes ont été utilisées pour la prédiction des phénomènes de striction diffuse pour des classes de matériaux élasto-plastiques formulées dans le cadre des transformations finies.

Les méthodes d'analyse de bifurcation basées sur la perte d'unicité des solutions de la dérivée temporelle du principe des puissances virtuelles ont été utilisées, permettant l'écriture de deux critères de striction diffuse, une condition suffisante de stabilité énoncée à travers le critère de Bifurcation Générale (Drucker 1950) et le critère de Bifurcation par Point Limite (Valanis

1989) atteint en même temps ou après la Bifurcation Générale. Issu d'hypothèses de formulation très proches des critères précédents et basé sur une approche énergétique, le critère de striction diffuse de Cordebois – Ladevèze (Cordebois et Ladevèze 1984) donne des résultats identiques à ceux-ci dans le cas de modèles de comportement simplifié. Cette classe de comportements est la seule pour laquelle la comparaison a été facile à mener, mais ces résultats devraient pouvoir être étendus plus généralement aux matériaux élasto-plastiques.

La méthode de Force Maximum, basée sur l'observation expérimentale de Considère (Considère 1885) selon laquelle la striction diffuse intervient lorsque l'effort atteint son maximum au cours d'un essai de traction, a été étudiée. Le critère de Force Maximum (Swift 1952) constitue la principale extension de ce critère à la prédiction de striction diffuse dans le cas de chargements bidimensionnels. Une écriture de ce critère pour des matériaux élasto-plastiques endommageables a été proposée ainsi qu'une formulation tridimensionnelle du critère ayant ensuite permis d'établir un rapprochement théorique entre ce critère et le critère de Bifurcation par Point Limite.

Les résultats obtenus concernant la prédiction de striction diffuse dans le cas de matériaux élasto-plastiques se sont avérés très proches pour l'ensemble des critères étudiés. Le choix d'un critère peut donc être effectué sans véritable contrainte, mais plus par la simplicité et l'efficacité de sa mise en œuvre en fonction de l'application visée.

La striction diffuse constitue une borne basse d'instabilité plastique. Les critères prédisant ces modes restent trop conservatifs pour des applications telles que la prédiction de défauts d'emboutissage. L'écriture de critères de striction localisée, moins conservatifs, semble nécessaire pour traiter cette question. L'objectif du prochain chapitre est de présenter les critères de prédiction de modes instables localisés et d'établir des liens théoriques entre eux lorsque cela est possible.

5 Critères de prédiction de striction localisée et de modes instables intermédiaires

5.1 Introduction 66

5.2 Prédiction de striction localisée 66

5.2.1 Extension du principe de Force Maximum à la striction localisée en retreint 66

5.2.2 Prédiction de la striction localisée par le modèle de C – L et relation avec le critère de Hill 72

5.3 Prédiction de modes intermédiaires 74

5.3.1 Extension du principe de Force Maximum à la prédiction de modes localisés en retreint et en expansion 74

5.3.2 Critère de Force Maximum Modifié 76

5.3.3 Développements et limites du Critère de Force Maximum Modifié 80

5.3.4 Critère de Force Maximum Etendu 83

5.3.5 Analyse Linéaire de Stabilité pour les modes intermédiaires 84

5.4 Synthèse 90

5.1 Introduction

La striction diffuse se caractérise par la première apparition d'une perte d'unicité ou d'une instabilité de la solution du problème d'équilibre. Ce phénomène de première instabilité plastique n'est généralement pas critique lors de la mise en forme de tôles métalliques minces, contrairement aux phénomènes de striction localisée et plus généralement de localisation des déformations sous différents modes. Ceux-ci constituent des phénomènes d'instabilités qui peuvent se produire après l'apparition de striction diffuse.

La striction localisée est caractérisée par une diminution locale de l'épaisseur d'une tôle au cours du chargement, généralement observée sous la forme d'une bande de largeur réduite et du même ordre de grandeur que l'épaisseur. La striction localisée est particulièrement visible pour les matériaux ductiles tels les aciers doux et les aciers HSLA. Les conditions de son apparition, associée à une instabilité de l'écoulement dans une direction privilégiée, ont été étudiées à partir du milieu du 20ème siècle (Hill 1952) et seront précisées dans la première partie de ce chapitre. Basé sur des principes énergétiques, le critère de striction localisée de Cordebois – Ladevèze (Cordebois 1983; Cordebois et Ladevèze 1986) sera ensuite étudié en vue d'un rapprochement avec le premier critère.

D'autres critères d'instabilité plastique, plus difficilement classables jouent un rôle important en pratique dans la prédiction de limites de formabilité des tôles. Parmi ceux-ci figurent les critères de Force Maximum Modifié (Hora et al. 1996) ou encore de Force Maximum Etendu (Extended Maximum Force Criterion) (Mattiasson et al. 2006) dont les bases théoriques sont, comme leurs noms l'indiquent, issues de modifications du principe de Force Maximum de Considère pour le premier et du critère de Force Maximum de Swift pour le second. La seconde partie de ce chapitre leur sera consacrée.

Dans la dernière partie de ce chapitre, une méthode basée sur l'analyse de stabilité par perturbation linéarisée proposera une alternative pour la prédiction de modes localisés dans le cas de matériaux élasto-plastiques aussi bien que dans le cas de comportements viscoplastiques (Molinari 1988; Boudeau et Gelin 1994).

5.2 Prédiction de striction localisée

Cette partie est consacrée à la définition des conditions d'apparition de strictions localisées en suivant l'approche de Hill (Hill 1952). Un rapprochement avec l'approche de Cordebois – Ladevèze est ensuite précisé (Cordebois 1983).

5.2.1 Extension du principe de Force Maximum à la striction localisée en retreint

Le critère de striction localisée de Hill est basé sur le principe de Force Maximum de Considère et spécifiquement modifié pour pouvoir prévoir l'apparition de modes de striction localisée (Hill 1952; 2001). Ce type de striction est caractérisé par l'apparition d'une zone de faible largeur (généralement observée de l'ordre de l'épaisseur de la tôle) dans laquelle une forte déformation se produit dans la direction de l'épaisseur de la tôle.

La direction critique dans laquelle peut se produire une localisation est associée à un état de déformation plane dans un plan contenant la direction de l'épaisseur de la tôle. La localisation ne peut alors être prédite que s'il existe une direction dans le plan de la tôle pour laquelle la déformation est instantanément stationnaire. Cette condition se traduit par l'existence d'une direction orientée d'un angle θ par rapport à la direction principale majeure de chargement $\mathbf{e}_1$ telle que (voir Figure 5.1) :

$$D_{tt} = 0 \tag{5.1}$$

avec D_{tt} le taux de déformation dans cette direction.

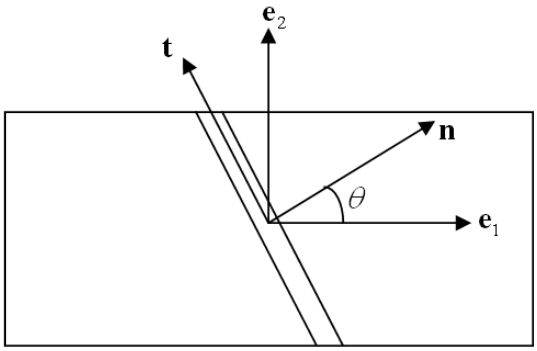


Figure 5.1 : Orientation de la bande de striction localisée par rapport aux directions principales de chargement.

Soit un chargement tel que dans le repère principal de chargement :

$$D_2 = \beta D_1 \tag{5.2}$$

Par rotation dans le repère où une bande de déformation stationnaire est susceptible d'exister, la vitesse de déformation dans cette direction peut être exprimée à partir des vitesses de déformations D_1 et D_2 :

$$D_{tt} = D_1 \sin^2(\theta) + D_2 \cos^2(\theta) \tag{5.3}$$

La condition d'existence de cette direction en fonction du rapport de chargement β est alors obtenue en combinant les équations précédentes :

$$\theta = \mathrm{Arctan}\left(\sqrt{-\beta}\right) \tag{5.4}$$

La condition d'existence d'une déformation stationnaire ne peut donc être satisfaite que pour des rapports de chargements β négatifs. Le critère de Hill ne permet la prédiction de striction localisée que dans le domaine du retreint, celle-ci se produit alors sous forme de bande orientée d'un angle θ par rapport à la direction majeure de chargement. Dans le cas de

cisaillement pur, cet angle prend une valeur de 45° $(\beta = -1)$, de 35,26° dans le cas de traction uniaxiale $\left(\beta = -\frac{1}{2}\right)$ et de 0° en traction plane $(\beta = 0)$.

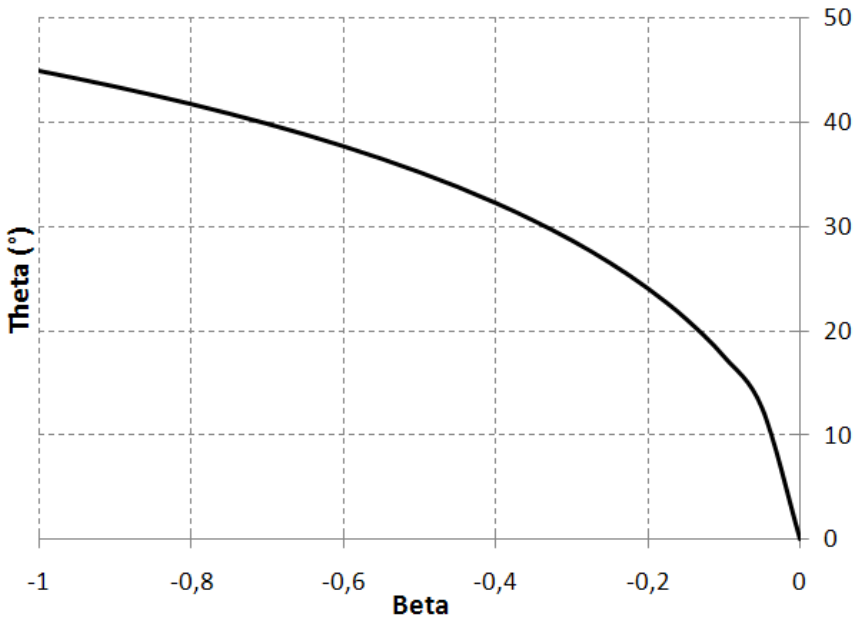


Figure 5.2 : Orientation de la bande de striction localisée en fonction du rapport de chargement β.

La seconde condition de localisation de ce critère est le passage de l'effort dans la direction normale à la bande de striction par un maximum :

$$\dot{F}_n = 0 \tag{5.5}$$

ce qui conduit, en utilisant la condition (5.1) , à l'expression suivante :

$$\frac{\dot{F}_n}{F_n} = \frac{\dot{\sigma}_{nn}}{\sigma_{nn}} + D_3 = 0 \tag{5.6}$$

ou encore en utilisant la condition (5.1) et l'incompressibilité :

$$\frac{\dot{\sigma}_{nn}}{\sigma_{nn} D_{nn}} = 1 \tag{5.7}$$

Cette forme est similaire à celle du critère de Considère, mais exprimée dans une direction particulière. Une autre forme de ce critère peut être obtenue en utilisant l'incompressibilité plastique et en négligeant la contribution des déformations élastiques, $D_3 = -D_1 - D_2$, qui conduit pour des trajets proportionnels à :

$$\frac{\dot{\sigma}_1}{\sigma_1 D_1} = 1 + \beta \tag{5.8}$$

Enfin, une dernière forme peut être obtenue en observant la relation entre la contrainte σ_{nn} et la contrainte équivalente dans le cas de chargements vérifiant un état plan de contraintes :

$$\frac{\dot{\bar{\sigma}}}{\bar{\sigma}} = \frac{\dot{\sigma}_{nn}}{\sigma_{nn}} \tag{5.9}$$

L'introduction de cette relation dans (5.6) en tenant compte des hypothèses citées et de la règle d'écoulement plastique permet d'écrire :

$$\frac{1}{Y}\frac{\dot{Y}}{\dot{\bar{\varepsilon}}} = \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_1} + \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_2} = \frac{1}{Z_H} \tag{5.10}$$

avec Z_H la tangente associée au critère de Hill. Des expressions analytiques simples du critère de Hill'52 peuvent être obtenues dans le cas de matériaux obéissant à un comportement simplifié. Ce développement fera l'objet de le prochain paragraphe, la section suivante étant consacrée à l'écriture du critère dans le cas du modèle de comportement rigide plastique à écrouissage cinématique et couplé à l'endommagement isotrope de Lemaitre.

Cas du comportement rigide plastique simplifié :

Ce développement reprend la démarche utilisée pour l'écriture du critère ce Swift dans le cas du comportement rigide plastique simplifié. Dans le cas d'un chargement conduisant à un état de contraintes planes, la contrainte équivalente du critère de plasticité de von Mises s'écrit de la manière suivante :

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2}\boldsymbol{\sigma}' : \boldsymbol{\sigma}'} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2} \tag{5.11}$$

Pour un chargement linéaire direct et proportionnel en contrainte de Cauchy, le rapport α des contraintes principales est constant et tel que :

$$\alpha = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{\dot{\sigma}_2}{\dot{\sigma}_1} \tag{5.12}$$

L'introduction des dérivées partielles dans l'expression du critère de striction localisée de Hill permet d'obtenir :

$$\frac{\dot{\bar{\sigma}}}{\bar{\sigma}\,\dot{\bar{\varepsilon}}} = \frac{1}{2}(1+\alpha)\left(1-\alpha+\alpha^2\right)^{-\frac{1}{2}} \tag{5.13}$$

Lorsque la loi d'écrouissage isotrope de Hollomon est utilisée, la relation entre la contrainte équivalente de von Mises, la déformation équivalente et la variable d'écrouissage isotrope peut être obtenue durant le chargement plastique :

$$\frac{\dot{\bar{\sigma}}}{\bar{\sigma}\,\dot{\bar{\varepsilon}}} = \frac{\dot{Y}}{Y\dot{\bar{\varepsilon}}} = \frac{n}{\bar{\varepsilon}} \tag{5.14}$$

A l'initiation de la striction localisée, la relation entre la déformation équivalente critique $\bar{\varepsilon}_c$ et le trajet de chargement α devient :

$$\bar{\varepsilon}_c = \frac{2n\sqrt{1-\alpha+\alpha^2}}{1+\alpha} \tag{5.15}$$

Les déformations critiques principales à l'initiation de la striction localisée s'en déduisent à l'aide de la loi d'écoulement :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{1c} &= \frac{n(2-\alpha)}{1+\alpha} \\ \varepsilon_{2c} &= \frac{n(2\alpha-1)}{1+\alpha} \end{aligned} \tag{5.16}$$

Ce résultat n'est autre que l'expression paramétrique d'une fonction affine. La courbe limite de formage est donc une droite d'équation :

$$\varepsilon_{1c}(\alpha) = \varepsilon_{1c}(½) - \varepsilon_{2c}(\alpha) \tag{5.17}$$

En traction uniaxiale $(\alpha = 0 \text{ et } \beta = -½)$, la déformation principale majeure critique prend comme valeur remarquable deux fois la valeur du coefficient d'écrouissage n. Celle-ci est égale à n dans le cas de traction plane $(\alpha = ½ \text{ et } \beta = 0)$ et est rejetée à l'infini en cas de cisaillement pur. Il peut être noté que la relation entre α et β est donnée dans le cas de trajets proportionnels par :

$$\alpha = \frac{1+2\beta}{2+\beta} \tag{5.18}$$

ou encore :

$$\beta = \frac{2\alpha-1}{2-\alpha} \tag{5.19}$$

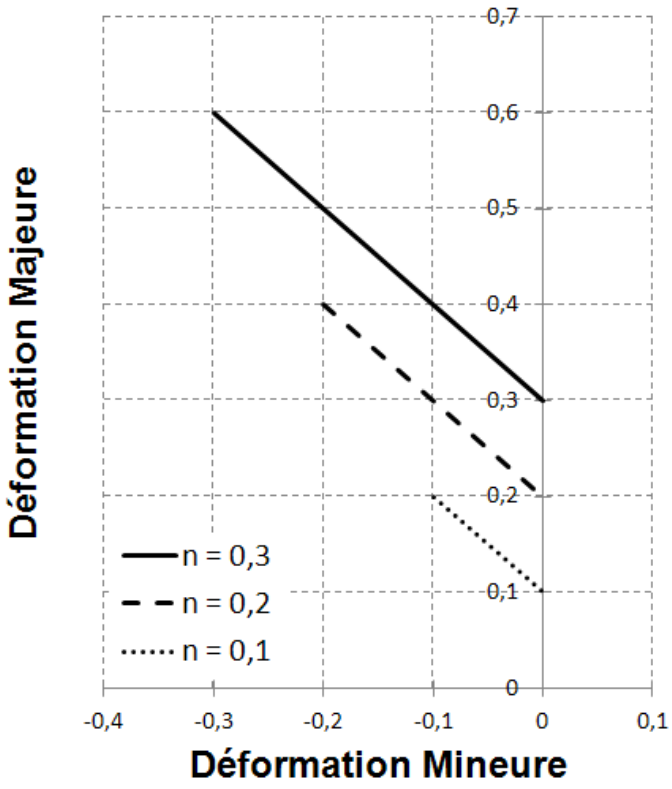


Figure 5.3 : Courbes limites de formage à striction localisée selon le critère de Hill'52 pour différentes valeurs du coefficient d'écrouissage isotrope n.

Cas du comportement rigide plastique couplé à l'endommagement :

Le modèle simplifié est insuffisant pour reproduire fidèlement le comportement réel du matériau. Une amélioration peut être apportée à la prédiction de striction localisée avec le critère de Hill'52 par l'utilisation d'un modèle de comportement plus avancé, prenant en compte les effets de l'anisotropie initiale, de l'écrouissage isotrope, de l'écrouissage cinématique ou encore de l'endommagement. L'objectif de ce paragraphe est d'obtenir une formulation du critère de Hill'52 pour un tel comportement. La démarche et les hypothèses utilisées sont similaires à celles développées et utilisées dans le cas du critère de striction diffuse de Swift et seules les principales étapes seront donc écrites dans le cas du critère de striction localisée.

En adoptant la démarche développée dans les deux parties précédentes, la condition d'instabilité matérielle s'écrit d'après l'équation (5.8) :

$$\frac{\dot{\sigma}_i}{\sigma_i} = (1+\beta) D_1 \qquad \text{i=1,2} \tag{5.20}$$

Le taux de la contrainte équivalente peut s'écrire :

$$\dot{\bar{\sigma}} = \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_1^{eff}} \dot{\sigma}_1^{eff} + \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_2^{eff}} \dot{\sigma}_2^{eff} + \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \mathbf{X}} : \dot{\mathbf{X}} \tag{5.21}$$

La relation entre contraintes et contraintes effectives est telle que :

$$\dot{\sigma}_i^{eff} = \frac{\dot{\sigma}_i}{1-d} + \frac{\dot{d}}{1-d}\sigma_i^{eff} \tag{5.22}$$

En tenant compte de la loi d'écoulement plastique et de la condition d'instabilité, il est possible d'obtenir :

$$\dot{\sigma}_i^{eff} = \sigma_i^{eff}\left(\frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\sigma_1} + \frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\sigma_2} + \frac{H_d}{1-d}\right)\dot{\lambda} \tag{5.23}$$

Une condition d'instabilité peut alors être obtenue combinant ces dernières équations :

$$\dot{\bar{\sigma}} = \left(\left(\frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\sigma_1^{eff}}\sigma_1^{eff} + \frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\sigma_2^{eff}}\sigma_2^{eff}\right)\left(\frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\sigma_1} + \frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\sigma_2} + \frac{H_d}{1-d}\right) + \frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\mathbf{X}} : \mathbf{H}_\mathbf{X}\right)\dot{\lambda} \tag{5.24}$$

La définition du travail plastique équivalent permet d'autre part d'obtenir en tenant compte de la condition d'instabilité :

$$\bar{\sigma}\ \dot{\bar{\varepsilon}} = \sum_{i=1}^{3}\left(\sigma_i^{eff} - X_i\right)\frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\sigma_i}\dot{\lambda} \tag{5.25}$$

Le rapport des expressions (5.24) et (5.25) permet d'obtenir une formulation du critère de Force Maximum dans le cas rigide plastique couplé avec l'endommagement :

$$\frac{\dot{\bar{\sigma}}}{\bar{\sigma}\ \dot{\bar{\varepsilon}}} = \frac{1}{Z_H} = \frac{\left(\frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\sigma_1^{eff}}\sigma_1^{eff} + \frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\sigma_2^{eff}}\sigma_2^{eff}\right)\left(\frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\sigma_1} + \frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\sigma_2} + \frac{H_d}{1-d}\right) + \frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\mathbf{X}} : \mathbf{H}_\mathbf{X}}{\sum_{i=1}^{3}\left(\sigma_i^{eff} - X_i\right)\frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\sigma_i}} \tag{5.26}$$

En l'absence d'écrouissage cinématique et d'endommagement, cette expression est équivalente à l'expression (5.10).

5.2.2 Prédiction de la striction localisée par le modèle de C – L et relation avec le critère de Hill'52

Dans le cas de la détermination de limites de formabilité en striction diffuse, le modèle de Cordebois – Ladevèze repose sur la minimisation d'une fonctionnelle sans conditions de blocage sur la frontière (paragraphe 4.2). Dans le cas localisé, les conditions de blocage imposées correspondent notamment à des états de contraintes planes nécessitant l'écriture de la forme duale du problème en vitesse. Après réécriture du problème avec les conditions de blocage dans sa forme en vitesse, l'étude d'apparition de modes de striction localisée revient à la minimisation d'une fonctionnelle pouvant être écrite sous la forme :

$$\mathcal{B}\left(\mathbf{V},\mathbf{V}^{*}\mid\underline{\boldsymbol{\tau}}\right)=0 \tag{5.27}$$

avec $\mathcal{B}$ une fonction strictement convexe et positive s'annulant pour la solution triviale $\mathbf{V}$ nulle. La minimisation d'une fonction approchée de $\mathcal{B}$ conduit à une condition d'instabilité plastique pouvant s'écrire sous la forme :

$$\mathcal{D}\left(\underline{\boldsymbol{\tau}}\right)+\mathcal{K}_{E}\left(\underline{\boldsymbol{\tau}}\right)=0 \tag{5.28}$$

où $\mathcal{K}_{E}$ est la contribution des blocages nouvellement introduits par rapport au mode de striction diffuse. Les formes de $\mathcal{D}$ et de $\mathcal{K}_{E}$ sont explicitées pour différents modèles de comportement phénoménologiques en (Cordebois et Ladevèze 1986; Pierre 1990; Mouric 2002). Comme la recherche de minima s'effectue dans un sous-espace de celui utilisé pour la recherche de modes de striction diffuse, ce critère est moins conservatif que le critère de striction diffuse. La CLF en striction localisée obtenue sera donc plus haute que celle obtenue lors de la recherche d'un mode diffus.

Dans le cas de tôles suivant un comportement rigide plastique simplifié et soumises à des chargements linéaires, la forme développée du critère peut être écrite en fonction des paramètres d'écrouissage et de chargement (Cordebois 1983) :

$$\begin{aligned}\varepsilon_{1c}&=\frac{n}{1+\beta}\\ \varepsilon_{2c}&=\beta\varepsilon_{1c}\end{aligned} \tag{5.29}$$

avec ici ε_{1c} et ε_{2c} les déformations critiques principales à l'initiation de la striction localisée, n le coefficient d'écrouissage de la loi de Hollomon et β le rapport de chargement en déformations, constant et négatif. En utilisant la relation entre les rapports de chargement en contrainte et ceux en déformation dans le cas d'un chargement proportionnel et de l'utilisation d'une surface de charge de von Mises, le rapport de chargement β s'exprime :

$$\beta=\frac{\alpha-1/2}{1-\alpha/2} \tag{5.30}$$

La relation (5.29) devient alors :

$$\begin{aligned}\varepsilon_{1c}&=\frac{n\left(2-\alpha\right)}{1+\alpha}\\ \varepsilon_{2c}&=\frac{n\left(2\alpha-1\right)}{1+\alpha}\end{aligned} \tag{5.31}$$

Il est intéressant de constater, dans le cas du modèle de comportement simplifié, que la formulation en striction localisée du critère de Cordebois – Ladevèze est équivalente à celle proposée par Hill (Equation (5.16)). Des études complémentaires restent toutefois nécessaires pour établir cette relation théorique dans un cas de comportement plus général.

5.3 Prédiction de modes intermédiaires

Cette partie est dédiée à des critères présentant différents modes intermédiaires d'instabilité plastique, souvent qualifiés de localisés. Ces critères sont fréquemment construits à partir d'extensions des critères de striction diffuse pour la prédiction de modes localisés. Ces modes localisés ne correspondent toutefois pas aux prédictions de striction localisée obtenues à partir du modèle de Hill (paragraphe 5.2.1) mais leurs prédictions se situent avant les modes de localisation sous forme de bandes obtenues avec les critères présentés dans le Chapitre 6. Comme les prédictions obtenues avec ces critères se situent entre une borne basse d'instabilité obtenue avec les critères de striction diffuse et une borne haute constituée par les critères de localisation détaillés au prochain chapitre, les modes d'instabilité prédits par ces critères sont ici qualifiés d'intermédiaires.

Bien qu'il n'existe pas nécessairement de liens théoriques d'équivalence avec les critères précédents, l'importance de l'utilisation pratique de certains critères, comme le Critère de Force Maximum Modifié (CFMM ou MMFC) (Hora et al. 1994) et l'Analyse Linéaire de Stabilité (Molinari 1985; Boudeau 1995), conduit à les présenter. La formulation du récent Critère de Force Maximum Etendu (CFMe ou eMFC) (Mattiasson et al. 2006) sera aussi évoquée.

5.3.1 Extension du principe de Force Maximum à la prédiction de modes localisés en retreint et en expansion

Différentes extensions du critère de Considère pour la prédiction d'instabilité plastique par modes localisés ont été proposées. L'une des plus marquante est le Critère de Force Maximum Modifié (CFMM), qui joue un rôle important dans la prédiction de CLF tant par une bonne corrélation entre ses prédictions de formabilité et les résultats expérimentaux que par sa facilité de mise en œuvre. Contrairement à ce que peut laisser penser le nom du critère, celui-ci n'est pas basé sur le Critère de Force Maximum, mais plutôt sur une extension aux modes localisés du critère de l'effort principal maximum (Habbad 1994), présenté dans le prochain paragraphe, et constituant une extension aux chargements bidimensionnels du principe de Force Maximum de Considère (Considère 1885). Après avoir brièvement présenté les bases du CFMM à travers la présentation du critère de l'effort principal maximum, la formulation du CFMM sera détaillée dans un cadre général puis des formules analytiques explicites seront obtenus pour le modèle de comportement simplifié.

Critères de l'effort principal maximum et bases du Critère de Force Maximum Modifié :

Deux conditions d'instabilité matérielle et une condition de chargement linéaire sont classiquement utilisées pour la formulation du critère de Force Maximum et doivent être réalisées simultanément pour prédire la striction diffuse :

$$\frac{dF_1}{F_1} = 0$$
$$\frac{dF_2}{F_2} = 0 \qquad (5.32)$$
$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \text{constante}$$

Expérimentalement, ces relations ne sont toutefois que rarement obtenues simultanément et constituent donc une limite à l'interprétation classique de ce critère. Afin de surmonter cette contradiction apparente, les critères de l'effort principal maximal ont été proposés. Ils combinent la première ou la seconde hypothèse (5.32) avec la troisième. Dans le cas du comportement rigide plastique simplifié, les déformations critiques calculées avec ces deux critères sont respectivement pour tout trajet de chargement :

$$\varepsilon_{1cF_1} = n$$
$$\varepsilon_{2cF_2} = n \qquad (5.33)$$

avec ε_{1cF_1} et ε_{2cF_2} les déformations critiques calculées avec les critères du maximum de l'effort principal maximal majeur et mineur respectivement, comme l'illustre la Figure 5.4.

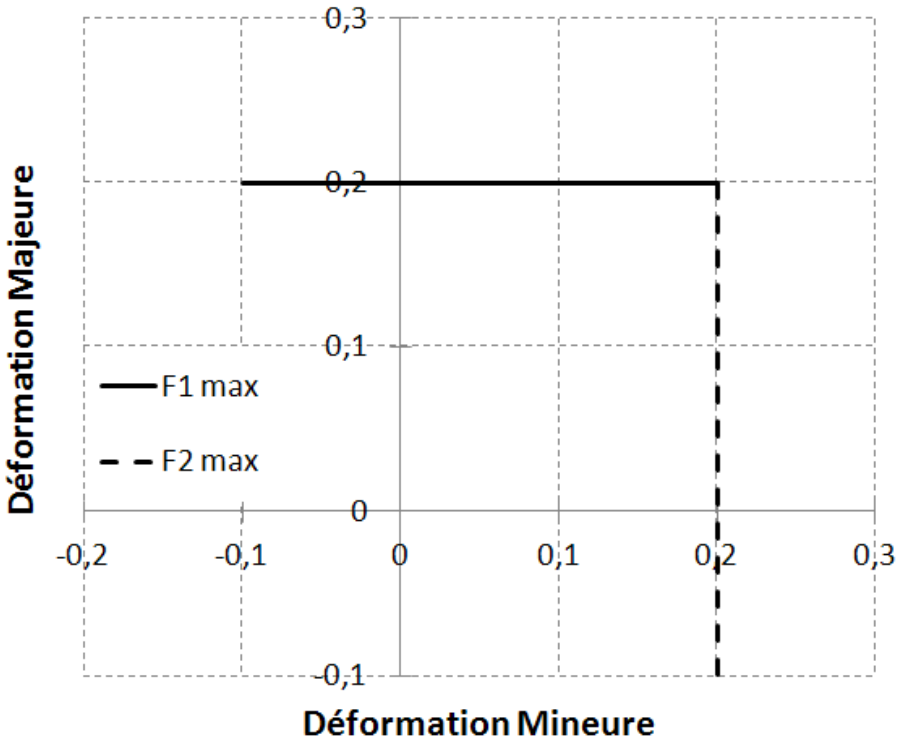


Figure 5.4 : Courbes limites de formage à striction diffuse selon les critère de l'effort principal majeur maximum et de l'effort principal mineur maximum pour une tôle métallique modélisée avec le modèle rigide plastique simplifié et un coefficient d'écrouissage $n = 0,2$.

On peut noter que le critère de l'effort principal majeur est en accord avec les prédictions du critère de Swift dans le cas de chargements de traction uniaxiale, de traction plane et de tension équibiaxiale. Les deux critères de l'effort principal maximum n'ont pas d'application directe pour la prédiction d'instabilité en mise en forme, mais le critère de l'effort principal majeur maximum constitue la base de l'écriture du critère de Force Maximum Modifié, largement utilisé pour la prédiction de striction localisée et présenté en détail dans le prochain paragraphe.

5.3.2 Critère de Force Maximum Modifié

Face aux insuffisances du critère de Considère pour la prédiction d'instabilités plastiques de tôles soumises à des chargements bi-axiaux et à celles des critères des efforts principaux maximaux pour prédire des modes localisés, Hora propose de modifier ceux-ci par la prise en compte du caractère bi-axial de l'état de déformation (Considère 1885; Hora et al. 1994; Hora et al. 1996). Les contraintes principales majeure et mineure sont alors considérées comme ne plus dépendre uniquement de fonctions des déformations principales majeure et mineure respectivement, mais aussi du trajet de chargement β, ce qui peut se traduire par :

$$\sigma_1 = \sigma_1(\varepsilon_1, \beta) \qquad \text{et} \qquad \sigma_2 = \sigma_2(\varepsilon_2, \beta) \tag{5.34}$$

et le respect de l'une des deux premières conditions d'instabilité de l'Equation (5.32), soit :

$$dF_1 = 0 \qquad \text{ou} \qquad dF_2 = 0 \tag{5.35}$$

Deux conditions doivent donc être étudiées et l'instabilité plastique est prédite par le CFMM lorsque l'une des deux est atteinte. Dans la pratique, la condition sur la composante majeure de l'effort F_1 est généralement la première à être atteinte. La forme développée de ce critère est alors généralement écrite uniquement sur cette composante. Dans certains cas particuliers, comme par exemple pour des matériaux fortement anisotropes ou pour certains chargements non linéaires ou linéaires par morceaux, la condition d'instabilité sur l'effort mineur F_2 peut être la première atteinte. Afin de ne pas surestimer la formabilité d'une tôle dans un cas général, il convient donc de suivre les deux conditions de l'Equation (5.35). En utilisant la méthode présentée au paragraphe 4.3.1 sur le Principe de Force Maximum, il est possible d'obtenir en utilisant l'hypothèse d'incompressibilité :

$$\begin{aligned} \frac{dF_1}{F_1} &= \frac{d\sigma_1}{\sigma_1} - d\varepsilon_1 = 0 \\ \frac{dF_2}{F_2} &= \frac{d\sigma_2}{\sigma_2} - d\varepsilon_2 = 0 \end{aligned} \tag{5.36}$$

Afin d'alléger les développements du CFMM et conformément à ce qui est le plus couramment présenté dans la littérature, seule l'écriture de la condition sur l'effort majeur F_1 est détaillée par la suite, une démarche similaire permettant l'obtention de la condition sur F_2

. Ceci se justifie par le fait qu'en pratique, avec les hypothèses précédemment formulées pour cette étude (chargements linéaires directs notamment dans la plupart des cas), la condition privilégiée d'instabilité concernera l'effort majeur F_1.

A partir de l'Equation (5.34), la différentielle de la contrainte peut s'exprimer comme :

$$d\sigma_1 = \frac{\partial \sigma_1}{\partial \varepsilon_1} d\varepsilon_1 + \frac{\partial \sigma_1}{\partial \beta} d\beta \tag{5.37}$$

La condition d'instabilité sur l'effort principal majeur devient donc :

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial \varepsilon_1} + \frac{\partial \sigma_1}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial \varepsilon_1} - \sigma_1 = 0 \tag{5.38}$$

Le premier terme de la différentielle peut être développé en utilisant les relations entre les termes de contraintes et déformations principales majeures et les contraintes et déformations équivalentes :

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial \bar{\sigma}} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \bar{\varepsilon}} \frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial \varepsilon_1} + \frac{\partial \sigma_1}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial \varepsilon_1} - \sigma_1 = 0 \tag{5.39}$$

Sous les hypothèses de chargement bi-axial engendrant un état de contraintes planes et de chargement proportionnel linéaire dans le cas d'un matériau rigide plastique à écrouissage isotrope, il est possible d'écrire :

$$\begin{gathered} \sigma_1 = f_H(\alpha)\bar{\sigma} \\ d\bar{\varepsilon} = g_H(\beta) d\varepsilon_1 \\ \beta = \beta(\alpha) \end{gathered} \tag{5.40}$$

avec f_H et g_H deux fonctions reliant σ_1 et ε_1 aux contraintes et déformations équivalentes respectivement dans le cas de trajets linéaires. Les expressions exactes de (5.40) dépendent du choix de la surface de plasticité et seront explicitées dans le prochain paragraphe dans le cas des surfaces isotropes de von Mises. La fonction g_H peut être exprimée à partir de l'expression du travail de premier ordre :

$$g_H(\beta) = (1+\alpha\beta) f_H(\alpha) \tag{5.41}$$

Les différentielles du premier terme de l'Equation (5.39) peuvent alors être exprimées par :

$$\begin{gathered} \frac{\partial \sigma_1}{\partial \bar{\sigma}} = f_H \\ \frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial \varepsilon_1} = g_H \end{gathered} \tag{5.42}$$

Celle du second terme se déduit par :

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial \beta} = \frac{\partial f_H}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial \beta} \bar{\sigma} \tag{5.43}$$

En utilisant l'identité entre $\bar{\sigma}$ et Y au moment de la charge plastique, il est possible de réécrire (5.39) en tenant compte de (5.40)-(5.43) sous la forme suivante :

$$\frac{1}{Y}\frac{dY}{d\bar{\varepsilon}} = \frac{1}{f_H g_H}\left(f_H - \frac{\frac{\partial f_H}{\partial \alpha}\frac{\partial \beta}{\partial \varepsilon_1}}{\frac{\partial \beta}{\partial \alpha}} \right) \tag{5.44}$$

Le rapport de chargement β est défini par :

$$\beta = \frac{d\varepsilon_2}{d\varepsilon_1} \tag{5.45}$$

Dans le cas de chargements proportionnels constants en déformations, il est possible d'écrire que :

$$\beta = \frac{d\varepsilon_2}{d\varepsilon_1} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \tag{5.46}$$

La dérivée partielle de β en fonction de ε_1 devient dans ce cas :

$$\frac{\partial \beta}{\partial \varepsilon_1} = -\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1^2} = -\frac{\beta}{\varepsilon_1} \tag{5.47}$$

La condition de localisation du Critère de Force Maximum Modifié s'exprime alors sous la forme :

$$\frac{1}{Y}\frac{dY}{d\bar{\varepsilon}} = \frac{1}{g_H} + \frac{\beta}{\bar{\varepsilon} f_H}\frac{df_H}{d\alpha}\left(\frac{d\beta}{d\alpha}\right)^{-1} \tag{5.48}$$

Un intéressant développement permettant d'obtenir une forme équivalente du critère peut être consulté dans (Aretz 2004; 2007). Cette formulation classique du CFMM a été obtenue grâce à une hypothèse de chargement proportionnel et constant en déformation. Ce n'est donc rigoureusement que dans le cadre de cette hypothèse que le critère devrait être utilisé ; ce n'est toutefois pas toujours le cas. Pour d'autres trajets de chargements, la relation (5.47) est admise par linéarisation locale (Brunet et Morestin 2001). D'autre part, l'utilisation de ce critère n'entraine qu'une faible consommation CPU, ce qui en fait un modèle adapté aux problèmes d'optimisation en emboutissage (Ben Ayed et al. 2005).

Cas du comportement rigide plastique simplifié :

En adoptant la démarche déjà utilisée avec les critères de Considère (paragraphe 4.4.1), de Swift'52 (paragraphe 4.4.3) et de Hill'52 (paragraphe 5.2.1), il est possible d'obtenir des résultats remarquables en écrivant le CFMM dans le cadre d'un matériau dont le comportement rigide plastique est modélisé par le modèle simplifié.

Lorsque la surface de plasticité de von Mises est utilisée, il a été vu précédemment que $\beta = \frac{\alpha - 1/2}{1 - \alpha/2}$. L'expression de la dérivée de β par rapport à α peut alors être exprimée par :

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{3}{\left(2-\alpha\right)^2} \tag{5.49}$$

La relation entre la contrainte principale majeure et la contrainte équivalente est donnée par :

$$\sigma_1 = \frac{\bar{\sigma}}{\sqrt{1-\alpha+\alpha^2}} \tag{5.50}$$

d'où il est possible de déduire l'expression de la fonction f_H à partir de (5.40) :

$$f_H\left(\alpha\right) = \left(1-\alpha+\alpha^2\right)^{-\frac{1}{2}} \tag{5.51}$$

La fonction g_H devient alors :

$$g_H\left(\alpha\right) = \frac{\sqrt{1-\alpha+\alpha^2}}{1-\alpha/2} \tag{5.52}$$

Lors de l'utilisation d'une loi d'écrouissage isotrope de Hollomon, l'introduction des relations (5.49)-(5.52) dans l'expression du CFMM (5.48) permet d'établir une relation entre la déformation équivalente critique $\bar{\varepsilon}_c$ et le coefficient d'écrouissage n pour le trajet de chargement linéaire direct α :

$$\bar{\varepsilon}_c = \frac{n\sqrt{1-\alpha+\alpha^2}}{1-\alpha/2} + \frac{4}{3}\frac{\left(1/2-\alpha\right)^2}{\sqrt{1-\alpha+\alpha^2}} \tag{5.53}$$

Les déformations principales majeure et mineure peuvent alors être déterminées en utilisant la loi d'écoulement plastique :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{1c} &= n + \frac{4}{3}\frac{\left(1/2-\alpha\right)^2\left(1-\alpha/2\right)}{1-\alpha+\alpha^2} \\ \varepsilon_{2c} &= \frac{\alpha-1/2}{1-\alpha/2}n + \frac{4}{3}\frac{\left(\alpha-1/2\right)^3}{1-\alpha+\alpha^2} \end{aligned} \tag{5.54}$$

comme l'illustre la Figure 5.5 :

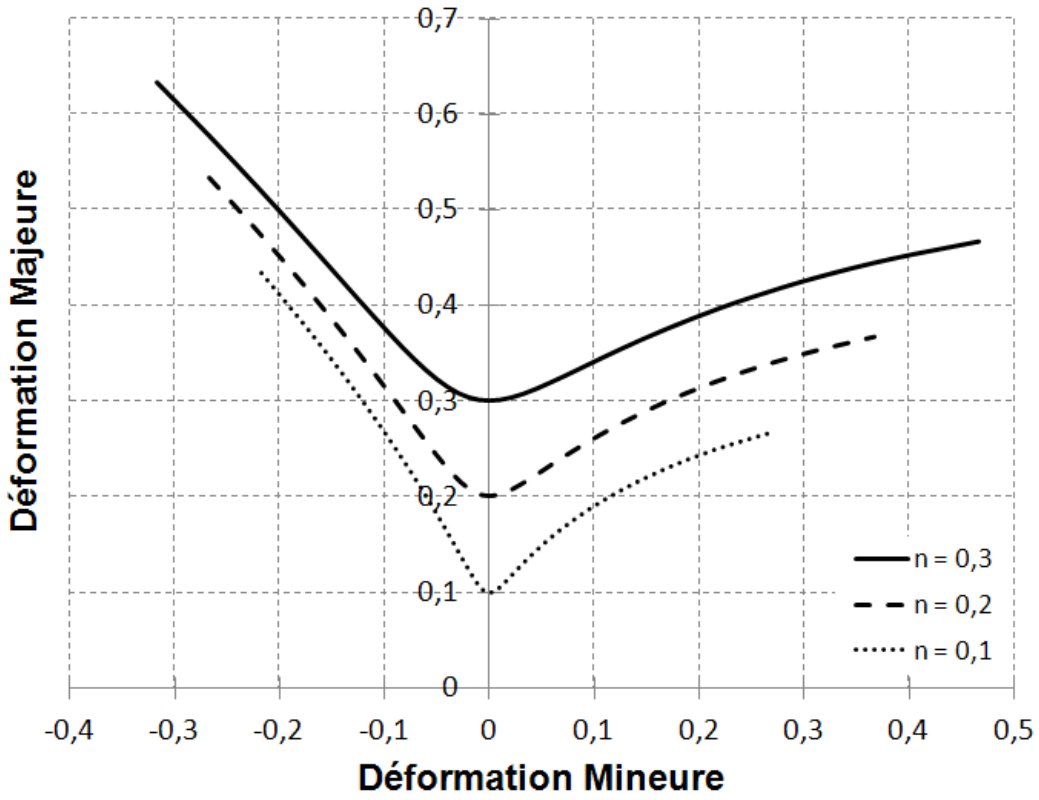


Figure 5.5 : Courbes limites de formage selon le Critère de Force Maximum Modifié pour une tôle métallique modélisée avec le modèle rigide plastique simplifié.

Au cours d'un chargement de traction plane $(\alpha = 1/2)$, la déformation principale majeure critique est de nouveau égale au coefficient d'écrouissage n. D'autres valeurs particulières peuvent être obtenues pour des chargements de cisaillement simple $(\alpha = -1)$, de traction uniaxiale $(\alpha = 0)$ et de traction équibiaxiale $(\alpha = 1)$, pour lesquelles les déformations majeures critiques sont égales à $n + 3/2$, $n + 1/3$ et $n + 1/6$ respectivement.

5.3.3 Développements et limites du Critère de Force Maximum Modifié

Le CFMM ayant rapidement montré un bon potentiel pour l'estimation de la formabilité de tôles métalliques et pour la reproduction de résultats expérimentaux, de nombreuses études ont été menées afin d'affiner les prédictions en prenant en compte davantage de phénomènes et variables physiques susceptibles d'influencer les CLF. L'objectif de ce paragraphe n'est pas de faire un inventaire exhaustif de ces études, mais simplement de préciser certains développements et couplages marquants effectués, parmi lesquels il est possible de citer la prise en compte de la sensibilité à la vitesse de déformation, de la température, de l'endommagement, de l'épaisseur des tôles ou encore de la triaxialité des contraintes.

Influence de la vitesse de déformation :

Afin de réduire les écarts observés entre les CLF obtenues expérimentalement et celles obtenues à partir du CFMM, il a été proposé de prendre en compte l'influence de la vitesse de déformation (Knockaert 2001). Cette influence peut être introduite par la dépendance de la contrainte principale à la vitesse de déformation, soit :

$$\sigma_1 = \sigma_1\left(\varepsilon_1, \beta, \dot{\bar{\varepsilon}}\right) \tag{5.55}$$

Le critère d'instabilité s'écrit alors :

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial \varepsilon_1} + \frac{\partial \sigma_1}{\partial \beta}\frac{\partial \beta}{\partial \varepsilon_1} + \frac{\partial \sigma_1}{\partial \dot{\bar{\varepsilon}}}\frac{\partial \dot{\bar{\varepsilon}}}{\partial \varepsilon_1} - \sigma_1 = 0 \tag{5.56}$$

Le premier terme correspond à la prévision de la striction diffuse, le second à la prise en compte de l'influence du trajet de chargement (Hora et al. 1996; Tong et al. 2002) et le troisième à la sensibilité à la vitesse de déformation. Ce dernier terme peut d'ailleurs être développé sous la forme (Ben Tahar 2005) :

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial \dot{\bar{\varepsilon}}}\frac{\partial \dot{\bar{\varepsilon}}}{\partial \varepsilon_1} = \frac{\partial \sigma_1}{\partial \bar{\sigma}}\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \dot{\bar{\varepsilon}}}\frac{\partial \dot{\bar{\varepsilon}}}{\partial \bar{\varepsilon}}\frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial \varepsilon_1} \tag{5.57}$$

Ce qui conduit à l'expression du CFMM avec prise en compte de la sensibilité à la vitesse de déformation :

$$\frac{1}{Y}\left(\frac{\partial Y}{\partial \bar{\varepsilon}} + \frac{\ddot{\bar{\varepsilon}}}{\dot{\bar{\varepsilon}}}\frac{\partial Y}{\partial \dot{\bar{\varepsilon}}}\right) = \frac{1}{g_H} + \frac{\beta}{\bar{\varepsilon} f_H}\frac{df_H}{d\alpha}\left(\frac{d\beta}{d\alpha}\right)^{-1} \tag{5.58}$$

Dans le cas de matériaux suivant une loi d'écrouissage de Hollomon avec une sensibilité à la vitesse de déformation de type puissance $\left(Y = k\bar{\varepsilon}^n \dot{\bar{\varepsilon}}^m\right)$, cette expression se réduit à :

$$\frac{n}{\bar{\varepsilon}} + m\frac{\ddot{\bar{\varepsilon}}}{\dot{\bar{\varepsilon}}^2} = \frac{1}{g_H} + \frac{\beta}{\bar{\varepsilon} f_H}\frac{df_H}{d\alpha}\left(\frac{d\beta}{d\alpha}\right)^{-1} \tag{5.59}$$

Lors d'opérations d'emboutissage à froid ou de tests de détermination des CLF, la vitesse de déformation est considérée faible avant l'apparition d'un mode localisé. A partir de ce moment, toute la déformation se concentre dans une petite zone du solide, avec une vitesse de déformation élevée. L'influence de la vitesse de déformation peut alors jouer un rôle important sur le niveau de localisation. Pour les matériaux ayant une forte sensibilité à la vitesse de déformation, cela se traduit par une augmentation de la formabilité des tôles.

Influence de la température :

Dans les procédés de mise en forme à chaud, la température de la pièce a une influence sur l'apparition de la striction puis sur son évolution vers des modes localisés. Cet effet peut être

introduit dans le CFMM par une fonction d'adoucissement thermique agissant sur l'écrouissage isotrope. La contrainte principale majeure dépend alors de la déformation principale majeure ε_1 (ou de la déformation plastique équivalente), du trajet de chargement et de la température, soit $\sigma_1 = \sigma_1(\varepsilon_1, \beta, T)$. L'écriture du CFMM devient avec la prise en compte des effets de la température (Hora et al. 1994) :

$$\frac{\partial \sigma_1(\varepsilon_1,\beta,T)}{\partial \varepsilon_1} + \frac{\partial \sigma_1(\varepsilon_1,\beta,T)}{\partial \beta}\frac{\partial \beta}{\partial \varepsilon_1} + \frac{\partial \sigma_1(\varepsilon_1,\beta,T)}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial \varepsilon_1} - \sigma_1(\varepsilon_1,\beta,T) = 0 \qquad (5.60)$$

L'influence de la température peut être introduite par couplage avec la fonction d'écrouissage isotrope. Celui-ci peut alors s'écrire sous la forme : $R = R_T(\bar{\varepsilon}, T)$ avec R_T une loi d'écrouissage dépendant de la température T qu'il est parfois possible d'écrire sous la forme : $R_T(\bar{\varepsilon}, T) = \Theta(T) R(\bar{\varepsilon})$.

Influence de l'endommagement :

La ruine de certains métaux peut être précédée et influencée par l'apparition, la croissance et la coalescence de microcavités à l'intérieur du volume. A partir d'un certain niveau de déformation, souvent considéré comme le point de striction diffuse bien que l'expérience puisse remettre en cause cette considération, ces phénomènes d'endommagement semblent donc devoir être pris en compte pour améliorer la fiabilité des prédictions de CLF. En se basant sur des travaux concernant l'utilisation du modèle d'endommagement de Gurson-Tvergaard modifié lors de la prévision de CLF (Needleman et Tvergaard 1977), Brunet et ses coauteurs proposent une extension du CFMM permettant de prendre en compte l'influence de l'endommagement dans la prédiction des CLF, pour des chemins de chargement linéaires ou non (Brunet et al. 1998; Brunet et Morestin 2001). Testé sur des alliages d'aluminium, d'acier ou de titane, ce couplage du CFMM avec l'endommagement donne des prédictions de formabilité plus conservatives qu'en son absence, le phénomène étant particulièrement marqué sur l'alliage de titane considéré dans l'article cité.

Influence de l'épaisseur de la tôle :

Des expériences ont d'autre part permis de montrer une augmentation de l'écart entre les CLF théoriques et expérimentales avec l'accroissement de l'épaisseur de la tôle. Pour des tôles devenant épaisses, il semble donc nécessaire de prendre en compte l'influence de l'épaisseur des tôles. L'introduction d'un facteur de correction géométrique conduit à l'expression suivante du CFMM, parfois appelée enhanced Modified Maximum Force Criterion (eMMFC, Critère de Force Maximum Modifié amélioré ou CFMMa) (Hora et Tong 2006a; b) :

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial \varepsilon_1} f_{cor}(e, r_t) + \frac{\partial \sigma_1}{\partial \beta}\frac{\partial \beta}{\partial \varepsilon_1} - \sigma_1 = 0 \qquad (5.61)$$

avec f_{cor} une fonction de correction géométrique dépendant de l'épaisseur e et du rayon de courbure r_t de la tôle. L'expression de cette fonction peut être approximée

expérimentalement ou numériquement, les auteurs proposent ainsi une correction de la forme :

$$f_{cor}(e, r_t) = 1 + \frac{e}{2r_t} + \varepsilon_{0cor}\left(\frac{e}{e_{0cor}}\right)^{p_{cor}} \tag{5.62}$$

avec ε_{0cor}, e_{0cor} et p_{cor} trois constantes dépendant du matériau déterminées à partir de données expérimentales. Appliqué à différents aciers et aluminiums, l'eMMFC semble généralement conduire à des CLF moins conservatives que celles obtenues avec le CFMM.

Influence de la triaxialité des contraintes :

Une démarche proche de celle présentée ci-dessus mais moins empirique consiste à prendre en compte la triaxialité des contraintes à l'intérieur de la tôle (Brunet et Morestin 2001), en introduisant un facteur correctif sur la contrainte majeure basé sur les travaux expérimentaux de Bridgman (Bridgman 1952). La fonction de correction peut alors être exprimée comme :

$$f_{cor}(e, r_t, z) = 1 + \log\left(1 + \frac{e}{4r_t}\left(1 - \frac{4z^2}{e^2}\right)\right) \tag{5.63}$$

avec r_t le rayon de courbure au niveau de la zone de striction et z la distance d'un point par rapport au plan moyen de la tôle.

Influence de la surface de charge :

De nombreuses études ont permis de mettre en évidence l'influence du choix de la surface de plasticité sur la prédiction de CLF théoriques, par exemple (Berg et al. 1998). Une limitation a été mise en évidence par Aretz lors de l'utilisation de surfaces de charges montrant des facettes planes. Dans ce cas, une singularité apparait dans (5.48) lorsque la dérivée $d\beta/d\alpha$ devient nulle pour certains trajets de chargements et la prédiction de CLF ne devient plus réaliste (Aretz 2004). Le CFMM reste toutefois applicable pour les surfaces de charges quadratiques présentées au Chapitre 3.

5.3.4 Critère de Force Maximum Etendu

Une modélisation originale basée sur le Critère de Force Maximum (Swift 1952) et sur la condition de Considère a été proposée par Mattiasson et ses coauteurs pour prendre en compte l'évolution du trajet de chargement après l'apparition de la striction diffuse, celui-ci variant du rapport β imposé vers un état de déformation plane (Mattiasson et al. 2006).

Jusqu'à l'apparition de la striction diffuse prédite par le CFM, un trajet de chargement initial constant β_0 est imposé. La variation du rapport de déformation dans la zone de striction est

ensuite autorisée et β devient variable au cours du chargement. Celui-ci est calculé à partir de l'hypothèse selon laquelle la condition de Considère doit être vérifiée à chaque instant à l'intérieur de la zone de striction. Le trajet varie alors progressivement vers un chargement de déformation plane, considéré comme critique, et la localisation est alors prédite lorsque celui-ci s'en approche. Le critère d'arrêt proposé à localisation est :

$$\frac{\dot{\varepsilon}_2}{\dot{\varepsilon}_1} < \frac{\beta_0}{10} \tag{5.64}$$

Ce critère est désigné sous de nom de Critère de Force Maximum Etendu (CFME, Extended Maximum Force Criterion ou EMFC). L'utilisation d'une base $\left(\varepsilon_2, \varepsilon_2/\beta_0\right)$ permet selon les auteurs le tracé des points de la CLF le long du trajet de chargement linéaire initial, donc dans une base comparable à celle utilisée avec les autres critères.

Les prédictions de formabilité du CFME sont moins conservatives que celles issues du CFM sur lequel il est basé, sauf dans le cas de la traction plane pour laquelle les conditions de Swift et de Mattiasson sont vérifiées simultanément.

5.3.5 Analyse Linéaire de Stabilité pour les modes intermédiaires

La localisation des déformations est parfois interprétée comme une instabilité de l'écoulement de la matière, instabilité pouvant être prédite grâce à une analyse de stabilité par méthode de perturbation linéarisée dans le cas de matériaux dépendant ou non du temps. Cette méthode est parfois nommée Analyse Linéaire de Stabilité (ALS).

Basée sur des travaux pour la prédiction d'instabilités plastiques en cisaillement simple, l'approche présentée dans cette section repose sur l'étude de stabilité d'une tôle mince dont le matériau peut être modélisé par un comportement rigide plastique ou rigide viscoplastique et pour laquelle l'hypothèse de contraintes planes est faite (Molinari et Clifton 1983; Molinari 1985). Les comportements considérés dans cette section sont à base phénoménologique (Lejeune 2002; Lejeune et al. 2003), bien que cette méthode puisse être utilisée avec d'autres modèles de comportements, notamment micromécaniques (Toth et al. 1996; Boudeau et al. 1998). L'hypothèse de l'utilisation de comportements rigides plastiques ou rigides viscoplastiques peut être justifiée par le fait que les déformations élastiques restent faibles comparées aux déformations plastiques en mise en forme.

Dans un cas tridimensionnel, l'écriture des différentes équations du comportement, de l'équilibre et des compatibilité des déformations conduit à un problème de dimension 14 dont les inconnues peuvent s'écrire sous la forme vectorielle suivante : $\mathbf{U}^T = \left(\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{23}, \bar{\sigma}, D_{11}, D_{22}, D_{33}, D_{12}, D_{13}, D_{23}, \dot{\bar{\varepsilon}}\right)$. Dans le cas bidimensionnel, faisant appel à l'hypothèse d'un état plan de contraintes, le problème n'est que de dimension 9 avec comme inconnues : $\mathbf{U}^T = \left(\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}, \bar{\sigma}, D_{11}, D_{22}, D_{33}, D_{12}, \dot{\bar{\varepsilon}}\right)$

L'approche développée dans (Lejeune 2002) sous l'hypothèse des contraintes planes est présentée ci-dessous. Une démarche similaire peut être utilisée pour traiter le cas 3D. Le choix de matériaux rigides plastiques ou rigide viscoplastique conduit à utiliser une relation entre les contraintes et le taux de déformation et non plus comme précédemment une relation incrémentale entre les taux de déformation et de contrainte. Les équations d'équilibre à travers le plan de localisation de largeur h peuvent s'écrire :

$$\mathrm{div}\left(h\boldsymbol{\sigma}\right)=\mathbf{0} \tag{5.65}$$

La compatibilité des déformations conduit aux relations suivantes :

$$\frac{\partial^2 D_{11}}{\partial^2 x_2}+\frac{\partial^2 D_{22}}{\partial^2 x_1}-2\frac{\partial^2 D_{12}}{\partial x_1 \partial x_2}=0 \tag{5.66}$$

L'incompressibilité s'exprime par :

$$D_{11}+D_{22}+D_{33}=0 \tag{5.67}$$

où les taux de déformation sont définis à partir du taux de déformation plastique cumulée et de la règle d'écoulement :

$$\mathbf{D}=\dot{\bar{\varepsilon}}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \tag{5.68}$$

En plasticité associée, la fonction f peut être définie à partir du critère de charge plastique, soit lors de la charge plastique :

$$f\left(\bar{\sigma},\bar{\varepsilon},\dot{\bar{\varepsilon}}\right)=\bar{\sigma}-Y\left(\bar{\varepsilon},\dot{\bar{\varepsilon}}\right)=0 \tag{5.69}$$

où $\bar{\sigma}$ est la contrainte équivalente. Dans le cas de l'utilisation d'une surface de charge quadratique anisotrope de Hill'48, cette contrainte peut être exprimée par :

$$\bar{\sigma}=\sqrt{\boldsymbol{\sigma}':\mathbf{M}:\boldsymbol{\sigma}'} \tag{5.70}$$

avec $\mathbf{M}$ le tenseur d'ordre 4 de Hill caractérisant l'anisotropie initiale. La taille Y de la surface de charge, liée à l'écrouissage isotrope et sensible à la vitesse de déformation, peut par exemple être quant à elle définie par :

$$Y=k\left(\varepsilon_0+\bar{\varepsilon}\right)^n\dot{\bar{\varepsilon}}^m \qquad \text{ou} \qquad Y=Y_0+R\left(\frac{\dot{\bar{\varepsilon}}}{\dot{\varepsilon}_0}\right)^m \tag{5.71}$$

Le problème d'équilibre et d'évolution du solide est donc constitué d'un système de neuf équations non linéaires à neuf inconnues $\mathbf{U}^T=\left(\sigma_{11},\sigma_{22},\sigma_{12},\bar{\sigma},D_{11},D_{22},D_{33},D_{12},\dot{\bar{\varepsilon}}\right)$.

Soit $\delta\mathbf{U}$ une perturbation appliquée à la solution $\mathbf{U}_0$ du problème d'équilibre, telle que :

$$\mathbf{U}(t) = \mathbf{U}_0(t) + \delta\mathbf{U}(t) \tag{5.72}$$

et définie dans le cas d'un solide semi-infini par (Cano 1996) :

$$\delta\mathbf{U}(t) = \delta\mathbf{U}_0 e^{\eta t} e^{i\xi \mathbf{x}\cdot\mathbf{n}} \tag{5.73}$$

avec $\delta\mathbf{U}_0$ l'amplitude initiale de la perturbation, η son taux de croissance et trois composantes spatiales ξ, $\mathbf{x}$ et $\mathbf{n}$ représentant un nombre d'onde, le vecteur position du point matériel et la normale au plan de localisation. Dans un espace tridimensionnel, la définition de cette normale est précisée sur la Figure 5.6.

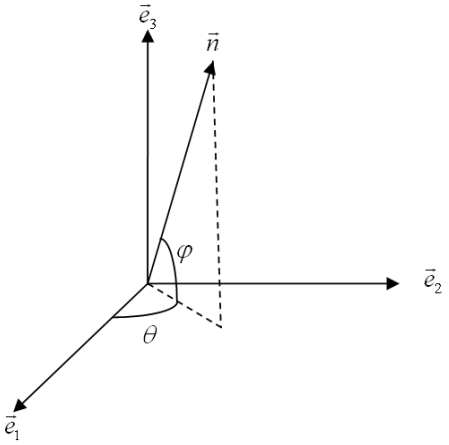


Figure 5.6 : Orientation de la normale au plan de localisation selon le critère d'ALS par rapport aux directions principales de chargement $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ et à la normale au plan de la tôle $\mathbf{e}_3$.

La perturbation des équations précédentes conduit à l'écriture d'un système non linéaire qu'il est possible d'écrire sous la forme condensée suivante :

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}(\mathbf{U}_0 + \delta\mathbf{U}) = \mathbf{0} \tag{5.74}$$

Après linéarisation, le problème peut être écrit :

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}(\mathbf{U}_0) + \boldsymbol{\mathcal{B}} \cdot \delta\mathbf{U} = \mathbf{0} \tag{5.75}$$

Or $\mathbf{U}_0$ vérifie les équations d'équilibre du système, l'Equation (5.75) entraine donc pour une perturbation non nulle :

$$\det\left(\boldsymbol{\mathcal{B}}(\eta)\right) = 0 \tag{5.76}$$

En un point matériel donné, la résolution de ce système d'équations conduit donc à rechercher les racines d'un polynôme de variable η et qui dépend de l'orientation de la normale $\mathbf{n}$. Les solutions associées aux valeurs propres dont les parties réelles sont négatives correspondent à des perturbations dont l'amplitude est décroissante et sont considérées stables. Les valeurs

propres comportant au moins une composante dont la partie réelle est positive sont associées à des perturbations d'amplitude croissante, donc à des solutions considérées instables.

Les simulations numériques effectuées avec ce critère montrent toutefois que des modes instables dont le taux de croissance est faible peuvent se produire à de faibles niveaux de chargement situés bien avant les prédictions usuelles de striction localisée. Ces modes, bien qu'instables, ne sont pas critiques et ne constituent pas une limite de formabilité. Une condition supplémentaire sur le taux de croissance des perturbations semble donc nécessaire pour la prédiction des courbes limites de formage.

Différentes solutions ont été proposées dans la littérature pour définir cette condition supplémentaire, parmi lesquelles il est possible de distinguer celles basées sur la prédiction d'instabilités absolues de celles basées sur la prédiction d'instabilités relatives. Les premières et les plus simples consistent à définir un seuil de croissance positif fixe. L'instabilité est alors prédite si le taux de croissance de la perturbation est supérieur à ce seuil η_c ; soit jusqu'à l'instabilité (Dudzinski et Molinari 1991) :

$$\mathrm{Re}(\eta) < \eta_c \tag{5.77}$$

Le choix d'un seuil nul conduit à l'étude classique de stabilité, considérée trop conservative. Une valeur parfois rencontrée pour le choix de ce seuil est $\eta_c = 2$ (Knockaert 2001), mais le choix d'une valeur fixe de ce seuil ne semble pas forcément adapté à tous les trajets de chargements. L'influence de la valeur du seuil sur la CLF a été discutée dans (Boudeau 1995). Le choix arbitraire de la valeur du seuil peut avoir une forte influence sur le niveau de localisation prédit et constitue donc une limite de cette méthode.

Une seconde méthode consiste à comparer le taux de croissance de la perturbation à une grandeur physique du problème, généralement le taux de déformation plastique équivalente. L'instabilité plastique est alors prédite lorsque le taux de croissance relatif de la perturbation excède un seuil défini comme le rapport du taux de croissance et du taux de déformation plastique équivalente. Le système est alors considéré stable tant que (Toth et al. 1996) :

$$\mathrm{Re}\left(\frac{\eta}{\dot{\bar{\varepsilon}}}\right) < \eta_c' \tag{5.78}$$

avec η_c' une constante positive. En fixant la valeur du seuil égale à un, l'utilisation de cette méthode dans un code à vocation industrielle ne nécessite plus l'entrée d'un paramètre défini par l'utilisateur.

Un exemple permet de mieux mettre en évidence l'influence de ces choix de critères d'arrêt. L'évolution du maximum de la partie réelle du taux de croissance est tracée en Figure 5.7 pour différents trajets linéaires lors du chargement d'une tôle constituée d'un matériau fictif, dont l'écrouissage est modélisé par une loi non saturante avec $n = 0{,}17$, $k = 500$ MPa et $\varepsilon_0 = 0{,}012$.

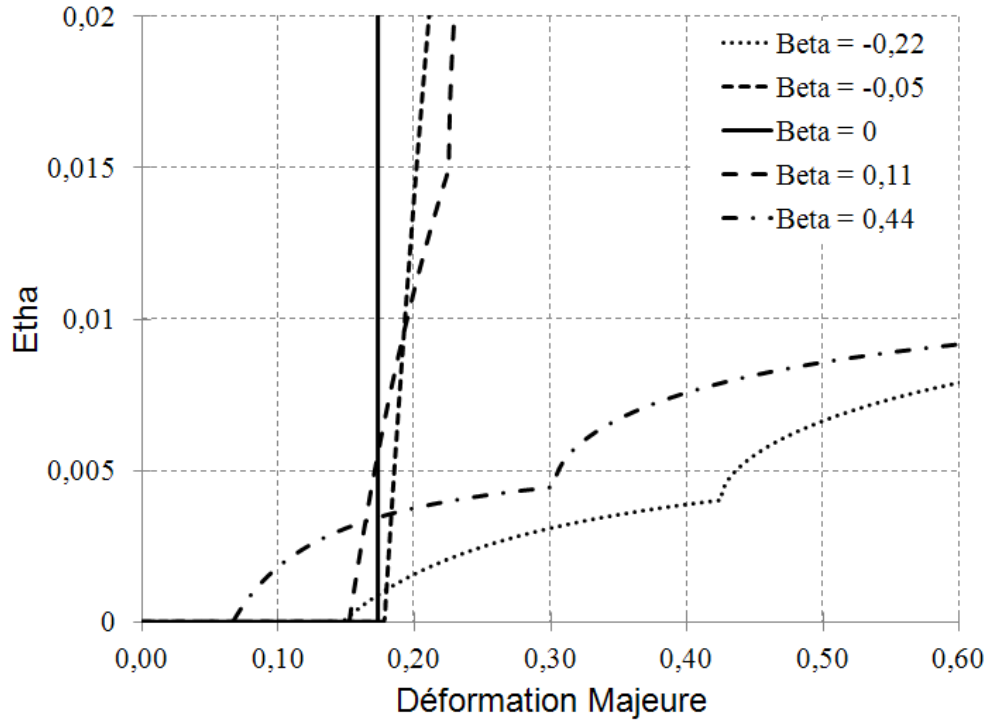


Figure 5.7 : Evolution du maximum de la partie réelle du taux de croissance pour différents trajets de chargements.

L'évolution du maximum de la partie réelle du taux de croissance est marquée par trois phases pour les différents trajets de chargements. La première phase est marquée par un maximum du taux de croissance nul, lié au fait que le polynôme caractéristique donné par l'Equation (5.76) puisse s'écrire sous la forme $\eta^2\left(a\eta^2+b\eta+c\right)=0$ avec a, b et c trois fonctions des grandeurs du problème (Lejeune 2002). La condition d'instabilité $\mathrm{Re}(\eta)=0$ est donc trop restrictive puisqu'elle conduit à une prédiction de localisation dès le début du chargement.

Une seconde phase est marquée par un taux de croissance positif (Figure 5.7) avec une première discontinuité de la partie réelle de la vitesse de η, indiquée en Figure 5.8. Un mode instable avec faible taux de croissance apparait donc en premier. Ce mode semble plus conservatif que les prédictions effectuées avec les critères de prédiction de striction diffuse développés dans le Chapitre 4.

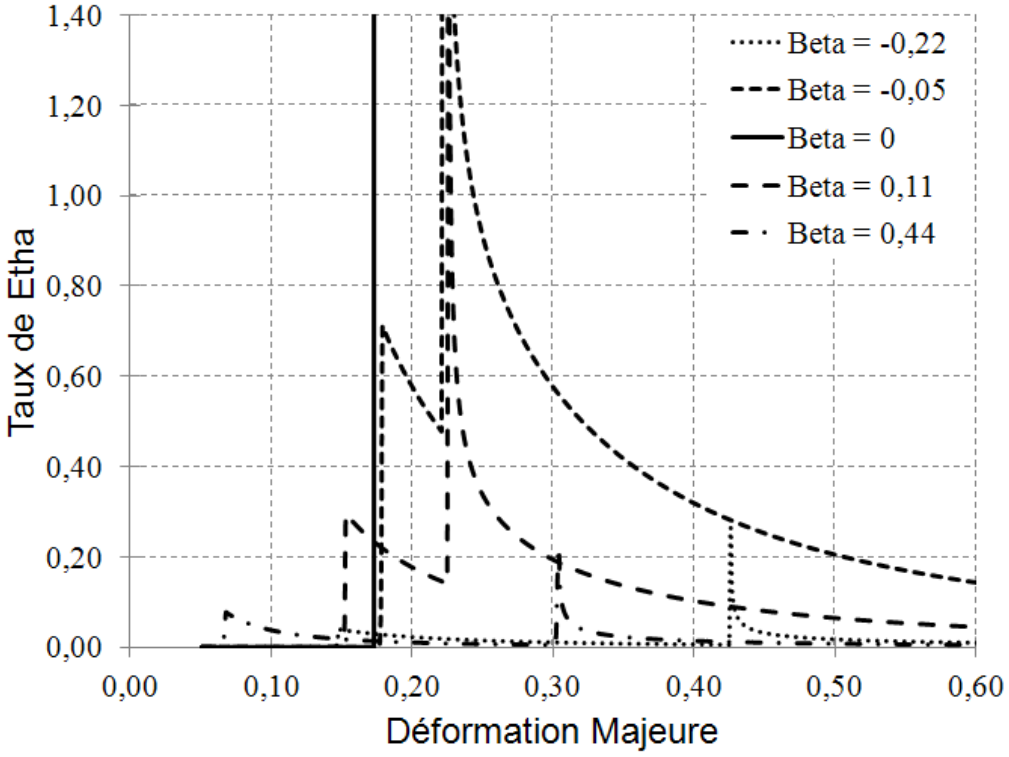


Figure 5.8 : Evolution du maximum de la partie réelle du taux de η pour différents trajets de chargements.

Le passage à une troisième phase est atteint lorsqu'une seconde discontinuité du taux de croissance de la perturbation apparait. L'apparition de ce mode de déformation instable avec un fort taux de croissance de la perturbation peut être détecté lorsque $\dot{\eta}$ dépasse un seuil (par un critère similaire à (5.77) ou (5.78)) et elle peut être considérée comme l'instant critique de localisation. En traction plane, ces deux modes instables sont confondus.

Un exemple de CLF, obtenue pour un alliage de laiton dont le comportement est identifié dans (Lejeune et al. 2003) est donné en Figure 5.9.

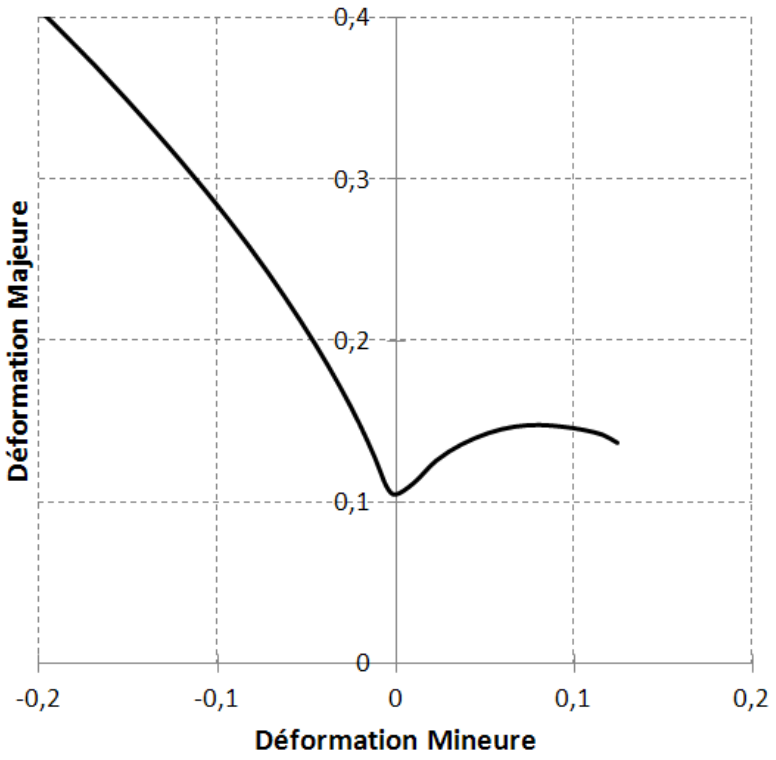


Figure 5.9 : Exemple de CLF obtenue avec le critère d'ALS pour une tôle en laiton identifiée dans (Lejeune et al. 2003) avec $k = 618\text{MPa}$, $n = 0{,}118$ et $\varepsilon_0 = 0{,}014$.

5.4 Synthèse

Après la striction diffuse, différents modes instables peuvent apparaitre suivant les matériaux considérés et conduire à des phénomènes de localisation de la déformation. Les modèles présentés dans ce chapitre permettent de prédire des modes localisés apparaissant après la striction diffuse étudiée au cours du Chapitre 4.

Pour les matériaux ductiles, la déformation peut se concentrer au cours du chargement dans une bande de faible épaisseur et dont la normale aux plans délimitant la zone localisée est comprise dans le plan de la tôle. Cette localisation étant alors accompagnée d'une importante réduction de l'épaisseur de la tôle, le mode d'instabilité correspondant est un mode de striction localisée. Hill a été le premier à proposer un modèle basé sur une extension du principe de Force Maximum de Considère pour la prédiction de ce mode de striction localisée (Hill 1952). Ses travaux reposent sur l'étude des conditions d'existence d'une bande dont la direction d'extension est nulle dans le plan de la tôle et sur la recherche de la stationnarité de l'effort normal à cette bande. La prédiction de ce critère est limitée au domaine du retreint, mais donne alors une prédiction de localisation souvent jugée satisfaisante pour les matériaux ductiles. Une écriture générale de ce critère permettant de prendre en compte les effets de l'anisotropie initiale, de l'écrouissage isotrope, de l'écrouissage cinématique et de l'endommagement a été proposée. Un rapprochement avec les critères de bifurcation basés sur des approches énergétiques et notamment avec le critère de striction localisée de Cordebois –

Ladevèze a été souligné. L'équivalence de ces deux critères a été établie dans le cadre de matériaux rigides plastiques qui suivent un comportement simplifié (Cordebois 1983).

Afin de pouvoir prédire la formabilité de tôles métalliques dans les domaines du retreint et de l'expansion, d'autres extensions du principe de Force Maximum de Considère ont été proposées plus récemment. De par sa simplicité de mise en œuvre, son faible coût CPU et ses prédictions de CLF généralement en bon accord avec les résultats expérimentaux, le Critère de Force Maximum Modifié occupe une place privilégiée chez les industriels et dans la communauté de la mise en forme (Hora et al. 1994). Les fondements théoriques et les limitations de ce critère prenant en compte les effets du trajet de chargement sur la contrainte principale majeure ont été soulignés, avant que son écriture ne soit détaillée pour des matériaux dont le comportement peut être modélisé avec une loi d'écrouissage isotrope. Certains développements de ce critère ont été présentés, ils permettent selon leurs auteurs d'améliorer les prédictions de formabilité par la prise en compte des effets de la sensibilité à la vitesse de déformation, de la température, de la triaxialité des contraintes ou encore de l'endommagement.

Un second modèle original basé sur le principe de Force Maximum a été développé plus récemment. L'Extended Maximum Force Criterion proposé par Mattiasson et ses co-auteurs repose sur l'idée selon laquelle le trajet de chargement peut évoluer librement dans la zone de striction après l'apparition de la striction diffuse (Mattiasson et al. 2006). La localisation est alors prédite lorsque l'état de déformation à l'intérieur de la zone de striction tend vers un état de déformation plane.

Dans le cas de matériaux rigides plastiques ou viscoplastiques, une approche basée sur l'Analyse Linéaire de Stabilité a été proposée par (Molinari 1985). Elle repose sur l'étude de l'évolution d'une perturbation appliquée au problème d'équilibre pour un solide rigide plastique. Le choix de ce modèle de comportement semble avoir une forte influence sur la prédiction de modes d'instabilités, de même que le choix d'un seuil critique pour le taux de croissance de perturbation.

Selon les matériaux considérés, différents modes d'instabilité plastique apparaissant après la striction diffuse peuvent conduire à la ruine, constituant donc une limite de formabilité. Différentes approches théoriques ont alors été développées pour tracer des CLF en privilégiant l'un de ces modes d'instabilité. Les critères présentés dans ce chapitre ayant chacun été formulé pour des modes localisés pouvant être différents, le choix de leur utilisation semble dépendre du mode d'instabilité réellement observé expérimentalement pour le matériau considéré. Ces critères n'ayant pas toujours été développés pour la prédiction du même mode d'instabilité, il n'existe pas nécessairement de liens théoriques entre eux.

6 Critères de prédiction de localisations sous forme de modes présentant des discontinuités du gradient des vitesses

6.1 Introduction 94

6.2 Méthode d'analyse de bifurcation 94
6.2.1 Critère de Perte d'Ellipticité 95
6.2.2 Critère de Perte d'Ellipticité Forte 98
6.2.3 Relation théorique entre les critères de Perte d'Ellipticité et de Perte d'Ellipticité Forte 99

6.3 Méthode Multizone – Critère de Marciniak – Kuczynski 100
6.3.1 Formulation classique du modèle M – K avec une bande de défaut restreinte au plan 101
6.3.2 Influence des paramètres utilisateur 107
6.3.3 Reformulation tridimensionnelle du critère de Marciniak – Kuczynski 111
6.3.4 Relation théorique entre le critère de Marciniak – Kuczynski et le critère de Perte d'Ellipticité 113

6.4 Analyse Linéaire de stabilité 115
6.4.1 Notion de stabilité 116
6.4.2 Présentation générale de l'Analyse Linéaire de Stabilité 118
6.4.3 Application aux matériaux élasto-plastiques 119

6.5 Synthèse 121

6.1 Introduction

Au cours des deux précédents chapitres, les conditions d'apparition des phénomènes de striction diffuse, de striction localisée et de certains modes de localisation continus ont été précisées, la striction localisée étant principalement observée dans le cas de matériaux ductiles. Une autre limite de formabilité peut être donnée par la localisation des déformations (ou de l'endommagement) sous forme de bandes présentant des discontinuités du gradient des vitesses. Dans le cas de matériaux ne présentant pas un comportement ductile marqué, ce phénomène précurseur de la rupture est plus couramment observé que celui de striction localisée. L'objectif de ce chapitre est de préciser les conditions d'apparition de localisation des déformations sous forme de telles bandes.

Dans le cas de matériaux indépendants du temps physique, la prévision du changement de mode de déformation vers un mode présentant des discontinuités peut être menée par des méthodes basées sur l'analyse de bifurcations, ayant débouchées sur la formulation du Critère de perte d'Ellipticité (Rudnicki et Rice 1975; Rice 1976) et sur la condition plus conservative de Perte d'Ellipticité Forte (Bigoni et Hueckel 1991). La présentation de ces critères fera l'objet de la première partie de ce chapitre.

Une seconde catégorie de critères, développée pour des matériaux tant élasto-plastiques qu'élasto-viscoplastiques est constituée par la méthode multizones, basée sur la comparaison de l'évolution des propriétés mécaniques d'une zone saine avec celles d'une zone comportant un défaut initial. Le critère de Marciniak – Kuczynski est sans conteste le plus populaire de ces critères (Marciniak et Kuczyński 1967). Sa formulation classique repose sur l'existence dans une tôle d'une bande plane présentant initialement un défaut d'épaisseur ; elle sera détaillée dans ce chapitre. Une reformulation originale de ce critère dans le cadre de bandes de défaut tridimensionnelles sera ensuite proposée, en vue d'établir un lien théorique entre ce critère et le Critère de Perte d'Ellipticité (Altmeyer et al. 2009).

L'analyse linéaire de stabilité, applicable pour des classes de matériaux élasto-plastiques mais aussi élasto-viscoplastiques constitue une alternative à l'utilisation des méthodes d'analyse de bifurcation. Après une présentation des bases théoriques de la méthode, celle-ci sera appliquée dans le cas d'un comportement élasto-plastique. Un rapprochement entre cette méthode et celle basée sur l'analyse de bifurcation sera finalement souligné.

6.2 Méthode d'analyse de bifurcation

Lors de l'utilisation de critères de localisation sous forme de bandes basés sur l'analyse de bifurcation, la localisation dans un solide soumis à un trajet de chargement donné est vue comme une évolution brutale d'un état quasi-homogène du gradient des vitesses vers un état hétérogène présentant des plans de discontinuité. La déformation se concentre alors dans des bandes de localisation, définies par deux plans de discontinuités de normale unitaire $\mathbf{n}$ illustrés par la Figure 6.1.

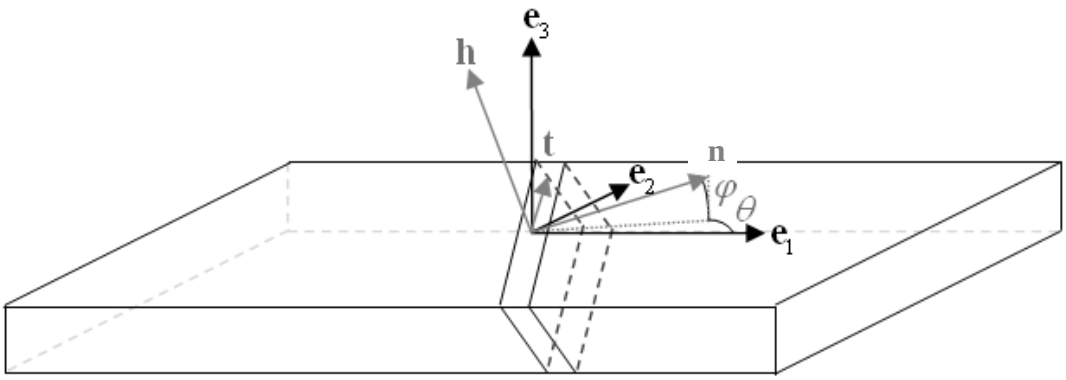


Figure 6.1 : Orientation tridimensionnelle d'une bande de localisation par rapport aux directions principales de chargement.

Les critères de Perte d'Ellipticité et de Perte d'Ellipticité Forte sont présentés dans les deux paragraphes qui suivent, avant qu'une classification en termes de caractère conservatif de prédiction ne soit précisée.

6.2.1 Critère de Perte d'Ellipticité

Le critère de Perte d'Ellipticité, donné aussi par l'analyse de bifurcation de Rice, est notamment basé sur la discontinuité du champ gradient des vitesses vérifiant les conditions de compatibilité cinématique et une condition d'équilibre.

En considérant les champs des gradients de vitesse à l'intérieur et à l'extérieur d'une possible bande de localisation, notés respectivement $\mathbf{G}^B$ et $\mathbf{G}$, la différence entre eux peut être exprimée à l'aide de l'opérateur $[\cdot]$ représentant leur saut par :

$$[\mathbf{G}] = \mathbf{G}^B - \mathbf{G} \tag{6.1}$$

Le champ des vitesses devant rester continu à travers la surface de localisation, la discontinuité de son gradient doit avoir une forme particulière qui vérifie la condition cinématique de compatibilité de Hadamard (Hadamard 1903). Il doit donc exister un vecteur non nul $\dot{\mathbf{c}}$ représentant les vitesses relatives de points situés de part et d'autre des plans de discontinuité du gradient des vitesses de sorte que :

$$\mathbf{G}^B = \mathbf{G} + \dot{\mathbf{c}} \otimes \mathbf{n} \tag{6.2}$$

La discontinuité du gradient des vitesses pour des champs vérifiant la condition cinématique peut donc s'écrire :

$$[\mathbf{G}] = \dot{\mathbf{c}} \otimes \mathbf{n} \tag{6.3}$$

ou encore :

$$[\mathbf{G}]\cdot\mathbf{n}=\dot{\mathbf{c}} \tag{6.4}$$

La signification physique de la position relative des vecteurs $\dot{\mathbf{c}}$ et $\mathbf{n}$ est illustrée en Figure 6.2 :

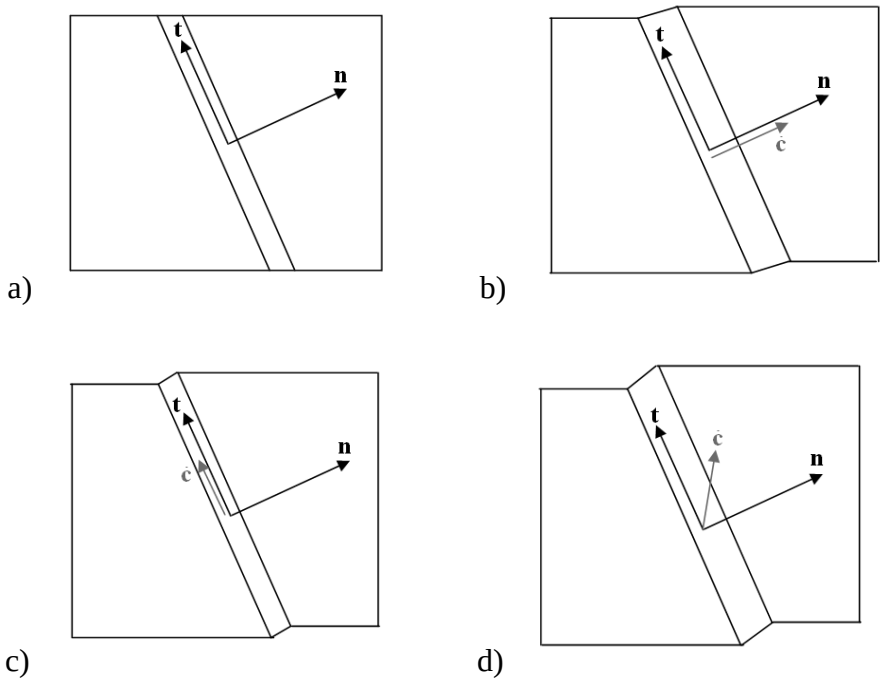


Figure 6.2 : a) Orientation de la bande de localisation à l'initiation de la localisation. Cinématiques de la bande de localisation b) pour un mode d'ouverture, c) pour un mode de cisaillement et d) pour un mode quelconque.

Les vecteurs $\dot{\mathbf{c}}$ et $\mathbf{n}$ sont notamment colinéaires pour des modes d'ouverture, orthogonaux dans le cas de modes de cisaillement et une infinité de modes intermédiaires existent dans les autres cas.

La seconde condition concernant la continuité de l'effort à travers les plans définissant la bande de localisation doit être vérifiée. Cette condition d'équilibre peut être écrite en vitesse dans la configuration courante à partir du tenseur du taux des contraintes nominales :

$$\mathbf{n}\cdot\left[\dot{\mathbf{N}}\right]=\mathbf{0} \tag{6.5}$$

En introduisant la relation de comportement reliant le taux des contraintes nominales et le gradient des vitesses, la relation précédente devient :

$$\mathbf{n}\cdot[\boldsymbol{L}:\mathbf{G}]=\mathbf{0} \tag{6.6}$$

Jusqu'à l'initiation de la localisation sous forme de bandes, le module tangent est continu dans le solide. En le supposant continu à la traversée de la bande de localisation au moment de l'initiation de la bande d'instabilité plastique, il est possible d'écrire :

$$[\boldsymbol{L}] = \boldsymbol{L}^B - \boldsymbol{L} = \mathbf{0} \tag{6.7}$$

La condition d'équilibre (6.5) devient alors :

$$\mathbf{n} \cdot \left(\boldsymbol{L} : [\mathbf{G}] \right) = \mathbf{0} \tag{6.8}$$

En tenant compte de l'écriture (6.3) sur la forme du saut du gradient des vitesses vérifiant la condition cinématique, il est possible d'écrire :

$$\mathbf{n} \cdot \left(\boldsymbol{L} : \left(\dot{\mathbf{c}} \otimes \mathbf{n} \right) \right) = \mathbf{0} \tag{6.9}$$

La condition d'instabilité plastique sous forme de bandes peut aussi s'écrire sous la forme :

$$\left(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{L} \cdot \mathbf{n} \right) \cdot \dot{\mathbf{c}} = \mathbf{0} \tag{6.10}$$

En excluant la solution triviale $\dot{\mathbf{c}} = \mathbf{0}$ correspondant à une absence de discontinuité du gradient des vitesses, la condition nécessaire d'apparition d'une bande de localisation est donnée par l'annulation du déterminant du tenseur acoustique $\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{L} \cdot \mathbf{n}$:

$$\det \left(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{L} \cdot \mathbf{n} \right) = 0 \tag{6.11}$$

Il est à noter qu'une formulation équivalente du critère de Perte d'Ellipticité peut être obtenue dans la configuration de référence (Abed-Meraim 2009). Le saut du gradient de la vitesse vérifiant les conditions de Maxwell peut alors s'écrire sous la forme :

$$\left[\dot{\mathbf{F}} \right] = \dot{\mathbf{F}}^B - \dot{\mathbf{F}} = \dot{\mathbf{c}}_0 \otimes \mathbf{n}_0 \tag{6.12}$$

avec $\dot{\mathbf{F}}^B$ et $\dot{\mathbf{F}}$ les gradients lagrangiens de la vitesse à l'intérieur et à l'extérieur de la bande de localisation. $\dot{\mathbf{c}}_0$ représente la vitesse relative de points situés de part et d'autre des plans de localisation de normale $\mathbf{n}_0$, repérés dans la configuration de référence. La condition d'équilibre écrite en vitesses peut alors être exprimée à partir du premier tenseur de contraintes de Piola – Kirchhoff :

$$\left[\dot{\mathbf{II}} \right] \cdot \mathbf{n}_0 = \mathbf{0} \tag{6.13}$$

En appliquant aux conditions (6.12) et (6.13) la même démarche que celle précédemment utilisée dans la configuration courante et en introduisant la relation de comportement $\dot{\mathbf{II}} = \mathcal{L} : \dot{\mathbf{F}}$ ou plus particulièrement de sa transposée $\dot{\mathbf{II}}^T = \mathcal{L}^T : \dot{\mathbf{F}}$, il est possible de montrer que la condition nécessaire d'apparition d'une bande de localisation exprimée dans la configuration de référence lagrangienne est obtenue par l'annulation du déterminant du tenseur acoustique $\mathbf{n}_0 \cdot \mathcal{L}^T \cdot \mathbf{n}_0$:

$$\det \left(\mathbf{n}_0 \cdot \mathcal{L}^T \cdot \mathbf{n}_0 \right) = 0 \tag{6.14}$$

avec $\mathcal{L}^{T}_{jikl} = \mathcal{L}_{ijkl}$. Le choix entre les formulations équivalentes (6.11) et (6.14) peut dépendre de la simplicité de mise en œuvre numérique.

Différentes méthodes permettent la recherche de l'existence d'une normale $\mathbf{n}$ ou $\mathbf{n}_0$ permettant de vérifier la condition (6.11) ou (6.14) respectivement. Une première méthode repose sur la minimisation d'une fonctionnelle reliée au déterminant du tenseur acoustique en fonction des angles définissant l'orientation de la normale au plan de localisation. La minimisation peut être effectuée par des méthodes itératives de type gradient conjugué, mais la convergence n'est assurée que pour des fonctionnelles suffisamment régulières (Keryvin 1999). Dans le cas d'une bande dont la normale reste dans le plan de la tôle, le problème est bidimensionnel et l'orientation de la bande est définie à partir d'une seule variable, contrairement au cas tridimensionnel pour lequel deux variables sont nécessaires, ce qui complique alors la mise en œuvre de cette méthode de résolution numérique. Certaines précautions sont d'autre part nécessaires pour s'assurer de prédire l'ensemble des directions critiques et donc l'ensemble des orientations possibles des bandes de localisation, plusieurs minima locaux pouvant apparaitre simultanément en fonction du modèle de comportement choisi.

Le minimum global de cette fonctionnelle peut être obtenu en explorant numériquement l'ensemble des directions possibles, en adoptant une discrétisation fine des espaces de variation des angles θ et φ définissant l'orientation de la normale au plan de localisation (Haddag 2007). A chaque pas de chargement, le calcul du déterminant (6.11) est effectué pour les différentes valeurs de θ et φ issues de la discrétisation. La déformation et les directions critiques à localisation sont obtenues pour la première annulation du déterminant du tenseur acoustique. La précision de l'orientation des bandes prédites dépend toutefois de la discrétisation de l'espace. Des discrétisations encore plus fines peuvent être adoptées dans un voisinage de la solution trouvée, pour affiner la solution jusqu'à atteindre le niveau de précision souhaité.

6.2.2 Critère de Perte d'Ellipticité Forte

Un second indicateur de localisation sous forme de bandes de cisaillement est basé sur le critère de Bifurcation Générale (Drucker 1950) avec des conditions additionnelles d'admissibilité cinématique des modes de déformation. En adoptant les mêmes démarches que celles utilisées au Chapitre 4 pour l'obtention des conditions de perte d'unicité de la solution du principe des travaux virtuels avec un mode cinématiquement admissible, il est possible d'obtenir la condition de perte de positivité du travail de second ordre suivante dans la configuration de référence :

$$\left[\dot{\mathbf{\Pi}}\right] : \left[\dot{\mathbf{F}}\right] = 0 \tag{6.15}$$

soit dans la configuration courante en remplaçant le premier tenseur de Piola – Kirchhoff par le transposé du tenseur des contraintes nominales :

$$\left[\dot{\mathbf{N}}^T\right]:\left[\mathbf{G}\right]=0 \tag{6.16}$$

En introduisant un gradient des vitesses satisfaisant les conditions de compatibilité de Hadamard, une condition suffisante d'exclusion de localisation sous forme de bandes de cisaillement peut être donnée par la condition d'ellipticité forte des équations différentielles gouvernant le problème incrémental d'équilibre local :

$$\dot{\mathbf{c}}\cdot\left(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{L}\cdot\mathbf{n}\right)\cdot\dot{\mathbf{c}}>0 \qquad \forall\mathbf{n}\neq\mathbf{0},\forall\dot{\mathbf{c}}\neq\mathbf{0} \tag{6.17}$$

Cette condition d'ellipticité forte implique la vérification de la définie positivité de la forme quadratique $\dot{\mathbf{c}}\cdot\left(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{L}\cdot\mathbf{n}\right)\cdot\dot{\mathbf{c}}$ et donc la vérification de la positivité de chaque valeur propre de la partie symétrique du tenseur acoustique, définie par $\left(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{L}\cdot\mathbf{n}\right)^S$ (Neilsen et Schreyer 1993). Dans (Bigoni et Hueckel 1991), la condition suffisante d'exclusion de localisation est développée dans le cas des matériaux élasto-plastiques et est reliée à des modules d'écrouissage positifs dans le cas de plasticité associée.

6.2.3 Relation théorique entre les critères de Perte d'Ellipticité et de Perte d'Ellipticité Forte

Pour établir l'ordre de prédiction de la localisation obtenue avec les deux critères présentés ci-dessus, une propriété d'algèbre va être utilisée. Soit $\mathcal{M}$ une matrice carrée de dimension p et $\mathcal{M}^S$ sa matrice symétrique, définie par $\mathcal{M}^S=\frac{1}{2}\left(\mathcal{M}+\mathcal{M}^T\right)$, avec $\mathcal{M}^T$ la transposée de $\mathcal{M}$. Soient $\lambda_i^{\mathcal{M}}$ et $\lambda_i^{\mathcal{M}^S}$ les valeurs propres respectivement associées à $\mathcal{M}$ et à $\mathcal{M}^S$, alors (Abed-Meraim 1999b) :

$$\min_{Sp\left(\mathcal{M}^S\right)}\left(\lambda_i^{\mathcal{M}^S}\right)\leq\operatorname*{Re}_{Sp(\mathcal{M})}\left(\lambda_i^{\mathcal{M}}\right)\leq\max_{Sp\left(\mathcal{M}^S\right)}\left(\lambda_i^{\mathcal{M}^S}\right) \tag{6.18}$$

La condition d'ellipticité forte est donc plus conservative que la condition d'ellipticité.

Dans le cas de petites déformations et de l'utilisation d'un modèle de plasticité associée, le module tangent possède les symétries majeures et mineures. Les critères d'Ellipticité Forte et d'Ellipticité deviennent alors équivalents.

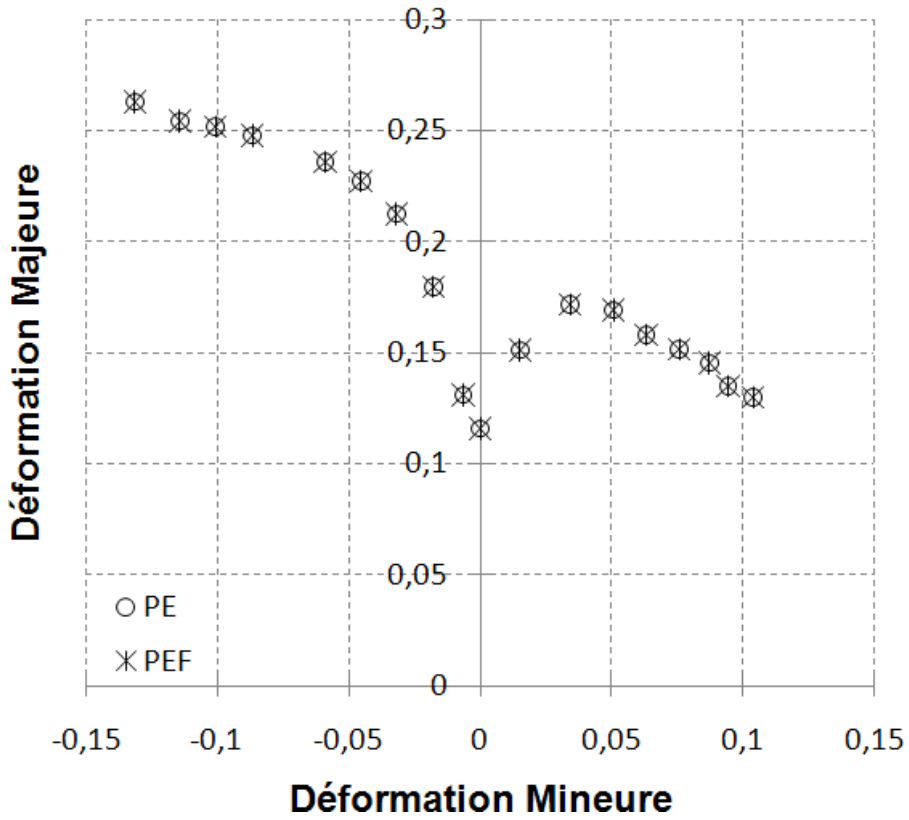


Figure 6.3 : CLF obtenues à partir des critères de Perte d'Ellipticité et de Perte d'Ellipticité Forte pour un acier Dual Phase DP600 modélisé avec une loi d'écrouissage isotrope saturante ($C_R = 10$, $R_{sat} = 550MPa$ et $Y_0 = 350MPa$) et couplé à l'endommagement ($\beta_{end} = 12$, $S_{end} = 20$ et $s_{end} = 0,5$) d'après (Altmeyer et al. 2010).

Pour un comportement élasto-plastique avec plasticité associée et surface de charge sans points de vertex, et en l'absence d'adoucissement, la condition de perte d'ellipticité ne peut être atteinte et la localisation ne peut être prédite à l'aide de ces critères.

Une alternative aux critères basés sur l'analyse de bifurcation est constituée par le critère de Marciniak – Kuczynski, issu des méthodes multizones et ne nécessitant pas d'adoucissement dans sa formulation classique, pour la prédiction de localisation sous forme de bande dans le cas de matériaux élasto-plastiques.

6.3 Méthode Multizone – Critère de Marciniak – Kuczynski

Une autre catégorie de critères utilisée pour la prédiction de modes localisés est basée sur les méthodes multizones, présentant des tôles non homogènes. Les propriétés mécaniques ou l'évolution des champs dans ces différentes zones sont alors comparées lors du chargement de la tôle et la localisation est prédite lorsque la déformation plastique (ou une autre grandeur mécanique) se concentre dans l'une de ces zones. Parmi les critères issus de cette méthode on

peut citer les travaux de Hart, introduisant un défaut de propriétés mécaniques dans une zone de l'éprouvette testée (Hart 1967), ou ceux de Ghosh, introduisant une imperfection géométrique (Ghosh 1974), mais le critère le plus populaire est le critère de Marciniak – Kuczynski (M – K) basé sur l'existence d'un défaut d'épaisseur initialement présent au sein de la tôle (Marciniak et Kuczyński 1967).

Après avoir présenté la formulation classique de ce critère et discuté certaines de ses limites, une reformulation plus générale avec une orientation tridimensionnelle de la bande défectueuse sera proposée en vue d'établir une relation entre la méthode d'introduction d'un défaut initial et la méthode d'analyse de bifurcation.

6.3.1 Formulation classique du modèle M – K avec une bande de défaut restreinte au plan

Le modèle M – K est basé sur l'hypothèse selon laquelle la localisation se développe à partir d'une hétérogénéité d'épaisseur initialement présente dans la tôle. Il est alors postulé que l'imperfection de type géométrique introduite dans ce modèle est constituée par une bande présentant un défaut initial d'épaisseur et dont la normale $\mathbf{n}$ est orientée suivant la direction principale majeure du chargement. Les directions principales d'anisotropie et de chargement seront par la suite considérées confondues. Pour des cas plus généraux ne faisant pas appel à cette hypothèse, le lecteur intéressé pourra se référer par exemple à (Habbad 1994). La striction localisée est détectée lorsque le rapport d'une grandeur mécanique (généralement liée aux déformations) entre les zones défectueuse et saine atteint une valeur critique.

La comparaison entre les CLF expérimentales et théoriques obtenues à l'aide du modèle M – K montre des résultats généralement qualifiés de satisfaisants dans le domaine de l'expansion (Mesrar et al. 1998). Cet accord entre résultats théoriques et expérimentaux n'étant plus vérifié dans le domaine du retreint, une adaptation du modèle a été proposée par Hutchinson et Neale pour qui l'orientation initiale de la normale à la bande permettant de minimiser la CLF n'est pas forcément celle de la direction principale majeure du chargement et doit être prise en compte dans le domaine du retreint (Hutchinson et Neale 1978). La normale au plan de localisation est alors définie dans le plan de la tôle et repérée d'un angle θ par rapport à la direction principale majeure de chargement, comme l'indique la Figure 6.4.

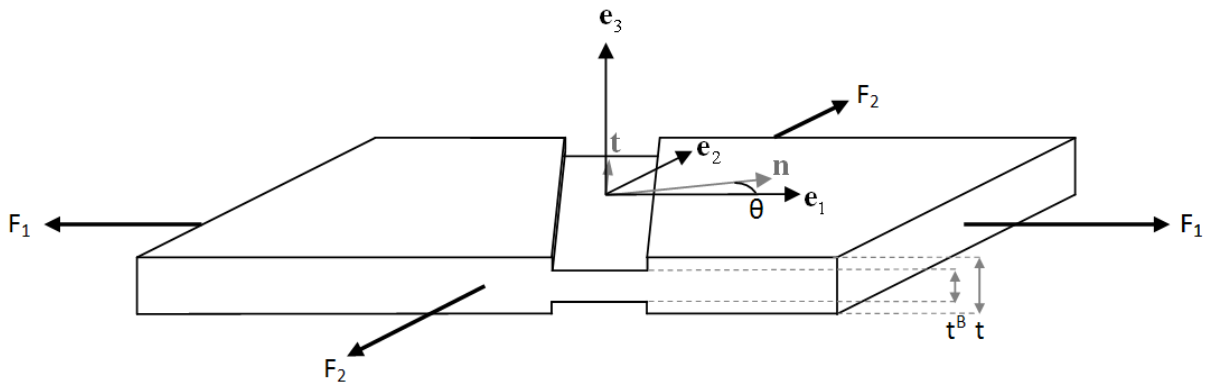


Figure 6.4 : Orientation de la bande de localisation suivant le critère de Marciniak – Kuczynski modifié par Hutchinson et Neale.

L'évolution de l'angle θ entre la direction principale majeure du chargement et la normale de la bande peut être calculée à partir de méthodes géométriques dépendant de la cinématique du problème dans la zone saine. Une première méthode permet de calculer la valeur de l'angle à partir de la connaissance de sa valeur à l'incrément de chargement précédent et de la valeur des incréments de déformation, et est par exemple utilisée par (Butuc et al. 2002), :

$$\tan(\theta + d\theta) = \frac{1 + d\varepsilon_1^A}{1 + d\varepsilon_2^A} \tan(\theta) \tag{6.19}$$

Une seconde méthode permet de relier la valeur de l'angle directement à la valeur initiale de celui-ci dans le cas de chargements linéaires en déformation (Hutchinson et Neale 1978; Cao et al. 2000) :

$$\tan(\theta) = \exp(\varepsilon_1^A - \varepsilon_2^A) \tan(\theta_0) \tag{6.20}$$

Dans le cas de tôles pour lesquelles les directions principales de chargement et d'anisotropie ne sont pas confondues, des analyses complémentaires sur l'analyse de l'orientation de la bande peuvent être consultées dans (Kuroda et Tvergaard 2000) ou dans (Hill 2001).

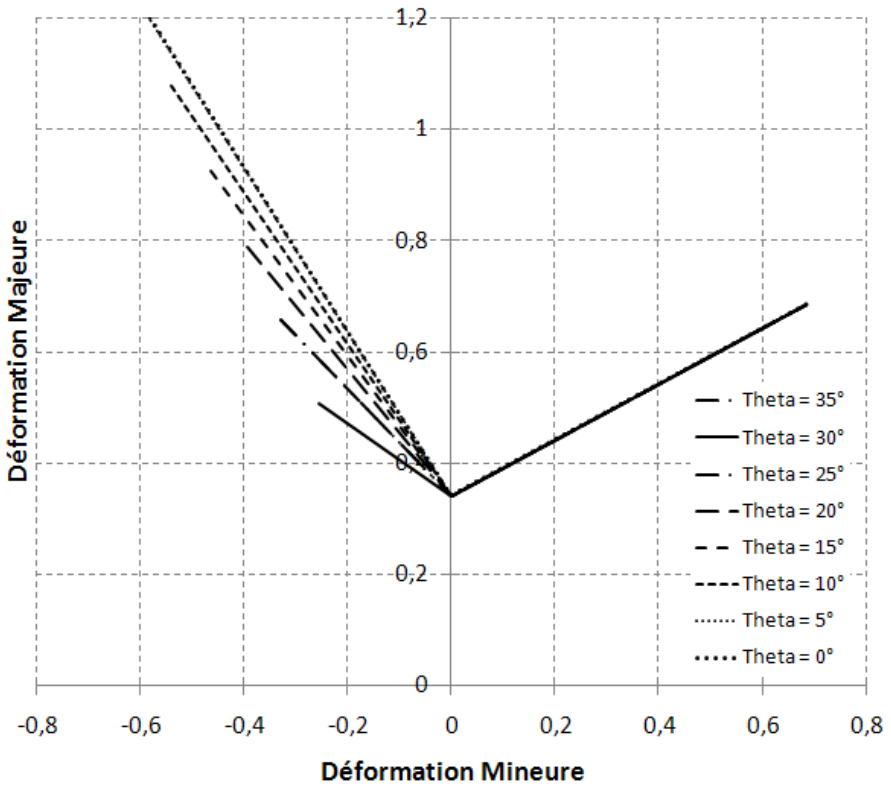


Figure 6.5 : Exemple d'influence de l'orientation initiale de la bande du défaut initial sur les déformations critiques à localisation pour des trajets de traction uniaxiale, de traction plane et de traction équibiaxiale.

D'après les simulations numériques effectuées, l'influence de l'orientation initiale de la bande défectueuse sur le niveau de déformation à localisation se manifeste dans le domaine du retreint et est particulièrement marquée pour des trajets de chargements proches de la traction uniaxiale.

Pour chaque trajet de chargement et pour chaque orientation initiale de la bande, les principales étapes nécessaires à la mise en œuvre du modèle M – K sont donc le chargement de la zone saine, la détermination des propriétés élasto-plastiques dans cette zone, le chargement de la zone défectueuse à partir des équations d'équilibre et de compatibilité, la détermination des propriétés élasto-plastiques dans cette zone puis l'application d'un critère d'arrêt reliant l'évolution des propriétés mécaniques dans les deux zones et permettant de détecter la localisation. Ces étapes sont synthétisées en Figure 6.6.

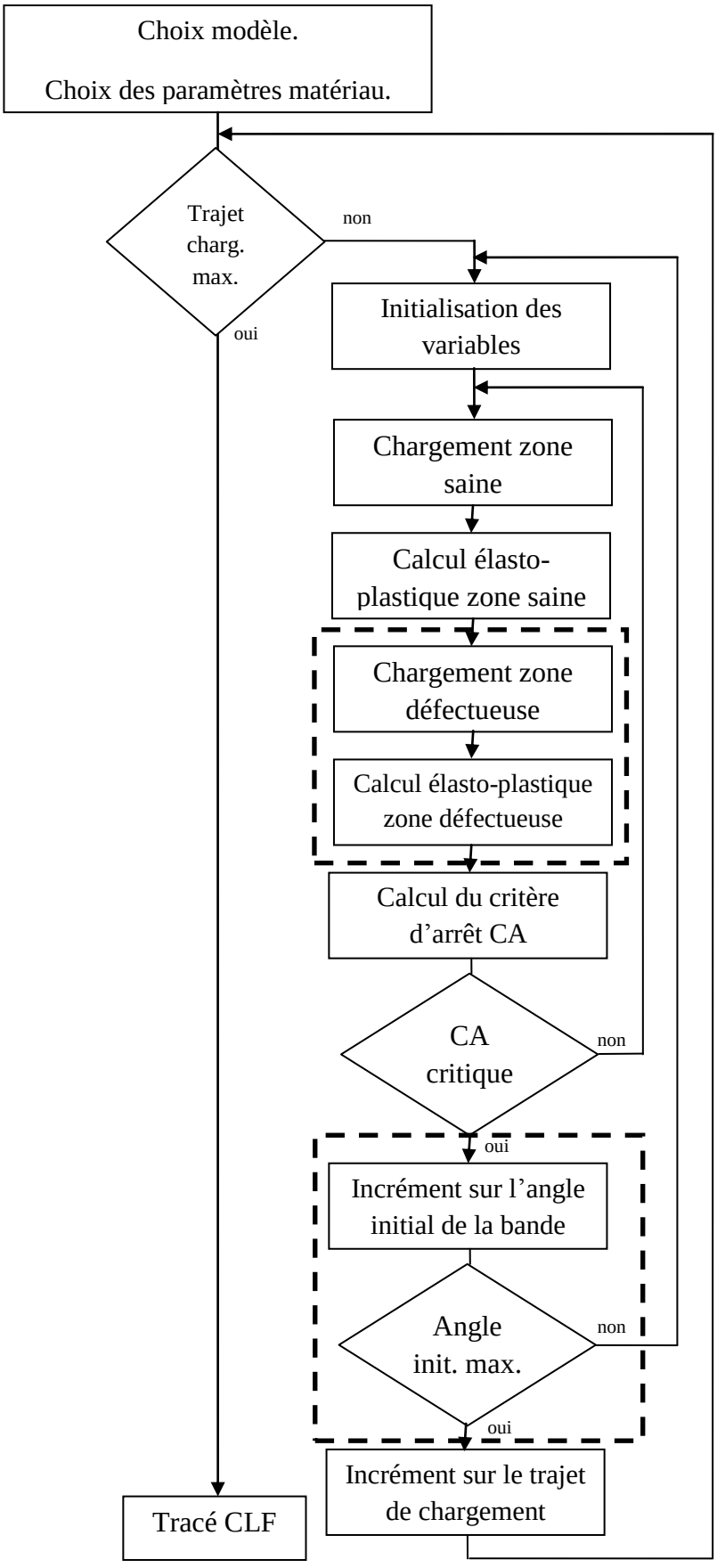


Figure 6.6 : Schéma d'intégration du modèle M – K.

Chargement et calcul élasto-plastique dans la zone saine :

Le chargement et le calcul des propriétés élasto-plastiques dans la zone saine sont identiques à ceux utilisés pour l'ensemble des critères de détection d'instabilité plastique et présentés au Chapitre 3. Il est intéressant de noter que différents trajets de chargements ont été utilisés pour le chargement de la zone saine. Un premier type de chargement, proportionnel en taux de déformation ou proportionnel en gradient des vitesses, offre un cadre particulièrement adapté pour certaines études théoriques (Hutchinson et Neale 1978; Habbad 1994; Aretz 2007; Eyckens et al. 2009). Un chargement mixte en taux de contraintes et en taux de déformations permet quant à lui de vérifier l'état de contraintes planes souvent observé lors du chargement plan de tôles (Knockaert 2001). Il est enfin aussi possible de charger cette zone avec des chargements radiaux en contraintes (Butuc 2004). Quel que soit le type de chargement choisi, il est alors possible de connaitre les états de contrainte et de déformation ainsi que le module tangent dans la zone saine à chaque pas de chargement.

Chargement et calcul élasto-plastique dans la bande défectueuse :

Une fois l'état de déformation connu dans la zone saine, l'orientation de la bande peut être actualisée à partir des formules (6.19) ou (6.20). L'état mécanique à l'intérieur de la zone géométriquement affectée est ensuite déterminé à partir des conditions d'équilibre et de compatibilité des déformations au niveau de la bande.

La condition de compatibilité des déformations impose qu'au passage dans la bande :

$$D_{tt}^{B} = D_{tt} \tag{6.21}$$

Dans le cas de bandes dont l'orientation est restreinte au plan de chargement, les trois conditions suivantes peuvent être formulées à partir de la continuité des efforts à travers la bande dans le repère de chargement :

$$\begin{aligned}
\left(n_1\sigma_{11}^{B} + n_2\sigma_{21}^{B}\right)e^{B} &= \left(n_1\sigma_{11} + n_2\sigma_{21}\right)e \\
\left(n_1\sigma_{12}^{B} + n_2\sigma_{22}^{B}\right)e^{B} &= \left(n_1\sigma_{12} + n_2\sigma_{22}\right)e \\
\left(n_1\sigma_{13}^{B} + n_2\sigma_{23}^{B}\right)e^{B} &= \left(n_1\sigma_{13} + n_2\sigma_{23}\right)e
\end{aligned} \tag{6.22}$$

ou dans le repère associé à la bande :

$$\begin{aligned}
\sigma_{nn}^{B}e^{B} &= \sigma_{nn}e \\
\sigma_{nt}^{B}e^{B} &= \sigma_{nt}e \\
\sigma_{n3}^{B}e^{B} &= \sigma_{n3}e
\end{aligned} \tag{6.23}$$

où l'exposant ^{B} réfère à une grandeur à l'intérieur de la bande du défaut alors que l'absence d'indice indique une grandeur de la zone saine. n_i représente la $i^{ème}$ composante de la

normale $\mathbf{n}$ prise dans le repère du chargement et e l'épaisseur de la tôle, à partir de laquelle est définie le rapport d'épaisseur f^{MK} (parfois appelé taille du défaut) à chaque instant :

$$f^{MK} = \frac{e^B}{e} = f_0^{MK} \exp\left(\varepsilon_{33}^B - \varepsilon_{33}\right) \tag{6.24}$$

où le rapport initial f_0^{MK} des épaisseurs introduit par l'utilisateur est défini par :

$$f_0^{MK} = \frac{e_0^B}{e_0} \tag{6.25}$$

Ce paramètre joue un rôle primordial dans la prévision de formabilité avec le modèle M – K ; l'étude de son influence fera l'objet d'une partie du prochain paragraphe. En plus des équations de compatibilité des déformations et des conditions d'équilibre, des hypothèses complémentaires de chargement plan identiques à celles imposées dans la zone saine permettent de déterminer complètement le chargement de la zone d'imperfection géométrique. La pleine connaissance du chargement dans la bande permet alors la détermination de l'état mécanique et l'actualisation des états de contraintes, de déformation et du module tangent.

Application du critère d'arrêt :

Dans le modèle M – K, les états de contrainte et de déformation évoluent de manière différente dans la zone saine et dans une bande présentant un défaut d'épaisseur. Expérimentalement, il est observé que la localisation des déformations se produit dans une zone affaiblie d'une éprouvette. Numériquement, il est constaté une accélération de la déformation dans cette zone, conduisant à l'instabilité plastique. Au cours du chargement, la prédiction de la localisation peut alors être effectuée à partir de la comparaison de certaines grandeurs mécaniques pertinentes au cours du chargement.

Le critère d'arrêt du modèle M – K permettant de comparer le rapport des valeurs d'une grandeur mécanique $\square$ dans chaque zone à une valeur critique prend alors la forme suivante :

$$\frac{\square^B}{\square} \geq S^{MK} \tag{6.26}$$

avec S^{MK} le seuil du modèle. Les grandeurs remplacées par $\square$ peuvent être des composantes du tenseur de déformations dans une direction privilégiée, des déformations équivalentes ou leur taux. La localisation est prédite dès que la valeur seuil est atteinte.

Pour chaque orientation initiale de la bande, les valeurs critiques de déformations (ou de contraintes) sont déterminées et la valeur minimale est retenue comme valeur critique. La Courbe Limite de Formage peut ensuite être tracée à partir des points critiques calculés pour chaque trajet de chargement.

Après la taille initiale du défaut, deux autres paramètres doivent être arbitrairement introduits par l'utilisateur : le choix de la valeur du seuil à localisation et le choix des grandeurs mécaniques à comparer. De nombreuses propositions sont disponibles dans la littérature, leur pertinence et leur influence sur le niveau de localisation prédit seront ensuite discutées.

6.3.2 Influence des paramètres utilisateur

Contrairement au critère de Perte d'Ellipticité, trois paramètres doivent être introduits arbitrairement par l'utilisateur lors de l'utilisation du modèle M – K. L'objectif des prochains paragraphes est de présenter les différents choix possibles pour ces paramètres et de mettre en évidence leur influence sur le niveau de formabilité prédit.

Choix de la taille initiale du défaut :

Le premier paramètre utilisateur introduit est la taille du défaut initial. Physiquement, ce paramètre représente la taille d'un défaut d'épaisseur, donc un affaiblissement structurel, dans une zone de l'éprouvette où la localisation puis la rupture ont une plus forte probabilité de se produire. Ce faible défaut d'épaisseur peut être comparé à un défaut réel présent dans la structure ou à la rugosité de la structure ; aucune étude expérimentale visant à introduire un défaut dans la structure ou à mesurer la rugosité d'une éprouvette n'a toutefois semblé permettre d'établir un lien entre la taille du défaut initialement introduit et les propriétés géométriques réelles d'une éprouvette (Hiroi et Nishimura 1997). Ce défaut peut alors être vu comme un défaut géométrique équivalent aux imperfections présentes dans la pièce et ayant différentes origines physiques comme par exemple une épaisseur variable, une hétérogénéité de l'écrouissage ou encore la présence de microcavités.

Face à l'impossibilité de relier ce paramètre à des grandeurs physiques mesurables, des choix arbitraires sont proposés, par exemple $f_0^{MK} = 0,998$ dans (Banabic et al. 2006), sans autre justification que l'expérience de l'utilisateur. Généralement, les valeurs choisies sont telles que :

$$0,98 \leq f_0^{MK} \leq 0,999 \tag{6.27}$$

Numériquement, l'influence de la valeur de l'imperfection sur le niveau de formabilité prédite est mise en évidence en Figure 6.7, présentant le tracé d'une CLF pour différentes valeurs de f_0^{MK} :

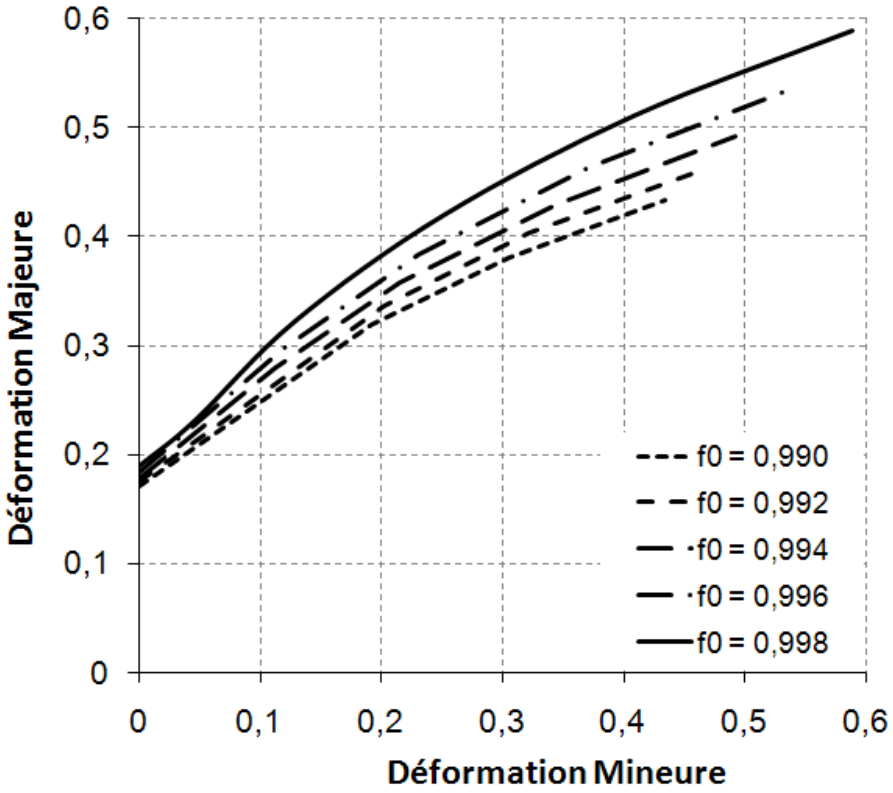


Figure 6.7 : Influence de la valeur du défaut initial sur le tracé de CLF. Application à un matériau fictif à écrouissage isotrope ($n = 0,2$ et $k = 580\text{MPa}$).

La formabilité prédite augmente avec l'augmentation de f_0^{MK}, en particulier dans les domaines proches de la traction uniaxiale et de l'expansion équibiaxiale. Lorsque le rapport f_0^{MK} tend vers 1, la déformation critique est toutefois rejetée à l'infini (en l'absence d'endommagement), ce qui est en désaccord avec les observations expérimentales.

Le choix du défaut initial a une forte influence sur les niveaux des déformations critiques prédits à partir du modèle M – K. L'impossibilité de relier et d'identifier ce paramètre à des grandeurs physiques ainsi que les résultats irréalistes de formabilité obtenus pour des valeurs de ce paramètre proches de 1 dans le cas de matériaux élasto-plastiques sans endommagement constituent une limite majeure de ce critère. Un complément à cette discussion sur l'interprétation du rôle de ce paramètre sera apporté dans le cas de matériaux élasto-plastiques endommageables dans le paragraphe 6.3.4 concernant le rapprochement entre le modèle M – K et le critère de Perte d'Ellipticité.

Choix des grandeurs du rapport du critère d'arrêt :

Dans les nombreux travaux relatifs à l'utilisation du modèle M – K, différentes grandeurs mécaniques à comparer dans le critère d'arrêt (6.26) ont été utilisées. Les principales méthodes, répertoriées dans (Lejeune 2002), relient l'état de déformation ou son taux dans la

zone d'imperfection à celui dans la partie saine de la tôle. Lorsque les déformations principales majeures dans ces zones sont considérées, le critère est défini par :

$$\frac{\varepsilon_1^B}{\varepsilon_1} \geq S^{MK} \tag{6.28}$$

Il peut être constaté numériquement que leur rapport ne croit que lentement (Figure 6.8). Ce choix ne semble donc pas le plus pertinent pour mettre en évidence la brusque accélération de la déformation associée à la localisation dans la bande. Une formulation basée sur les taux de déformations semble dès lors plus adaptée. D'autres auteurs proposent d'utiliser des composantes du tenseur taux de déformations choisies dans certaines directions privilégiées, comme par exemple la direction principale majeure de chargement ou les directions normales et tangentielles à la bande (Cao et al. 2000). La détection de modes localisés dans ces directions est alors privilégiée et la formabilité peut être surestimée si le mode critique n'est pas orienté suivant cette direction. Ce problème peut toutefois être facilement surmonté par l'utilisation d'une grandeur scalaire pertinente, comme par exemple le taux de déformation plastique équivalente (Dudzinski et Molinari 1991; Boudeau et al. 1998) :

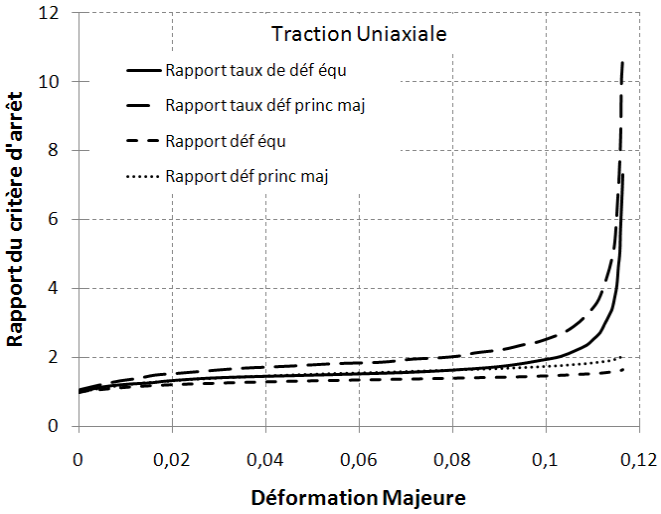
$$\frac{\dot{\bar{\varepsilon}}^B}{\dot{\bar{\varepsilon}}} \geq S^{MK} \tag{6.29}$$

Ce choix a été privilégié pour l'implantation du modèle M – K et utilisé lors des simulations numériques.

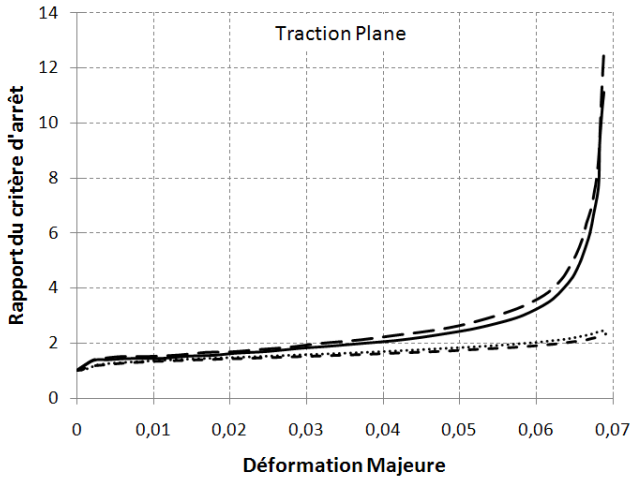
Choix du seuil du critère d'arrêt :

Un dernier paramètre arbitrairement introduit par l'utilisateur est la valeur critique du seuil d'arrêt S^{MK}. Dans le cas où le rapport (6.28) est choisi, l'évolution est assez progressive jusqu'à la localisation et le choix de la valeur du seuil peut s'avérer délicat et avoir un impact sur les CLF. Si au contraire le choix plus pertinent du rapport (6.29) est effectué, la localisation est accompagnée par une augmentation brutale de ce rapport et le choix d'une valeur du seuil supérieure à 10 n'a qu'une influence marginale sur les CLF, soit finalement :

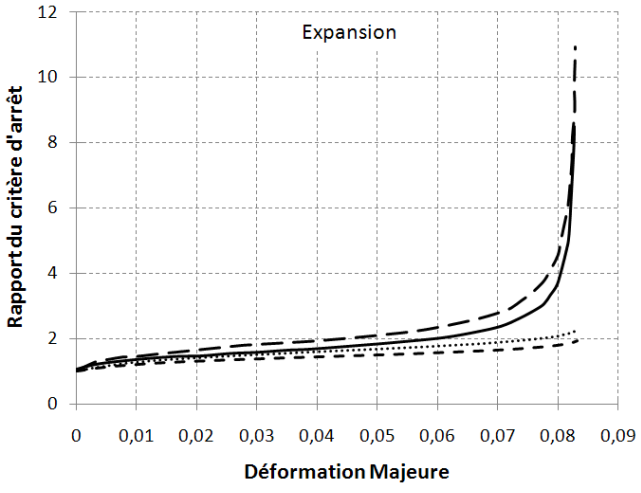
$$S^{MK} \geq 10 \tag{6.30}$$



a)



b)



c)

Figure 6.8 : Exemple d'évolution des rapports des déformations équivalentes, des déformations principales majeures ou de leurs taux dans les zones défectueuses et saines a) en traction uniaxiale, b) en traction plane et c) en expansion.

L'exemple présenté en Figure 6.8 met en évidence une forte et rapide évolution des rapports des taux de déformation principale majeure et des taux de déformation équivalente précédant la localisation, contrairement à l'évolution des rapports de déformations équivalentes et principales majeures. Le choix de rapports formulés à partir des taux d'une fonction des déformations peut donc sembler pertinent. D'autre part, l'augmentation de ces rapports étant brusque et rapide à l'approche de la localisation, le choix du seuil S^{MK} n'a qu'une influence limitée à partir d'une certaine valeur, supérieure à sept dans cet exemple.

6.3.3 Reformulation tridimensionnelle du critère de Marciniak – Kuczynski

Une écriture alternative du critère M – K a été proposée dans le cas de comportements bidimensionnels par (Kuroda et Tvergaard 2000). Un formalisme différent et proche de celui utilisé au cours du paragraphe 6.2.1 lors du développement du critère de Rice est réutilisé pour relier les champs mécaniques des deux zones hétérogènes du modèle. Après quelques éléments sur la cinématique du problème, une extension de cette écriture du modèle M – K aux comportements tridimensionnels est proposée dans ce paragraphe.

Soit Ω un domaine d'une tôle mince soumise à un chargement linéaire et radial en gradient des vitesses tel que :

$$\mathbf{G} = D_{11}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & -1-\beta \end{pmatrix} \tag{6.31}$$

La définition du tenseur gradient de la transformation $\left(\dot{\mathbf{F}} = \mathbf{G}\cdot\mathbf{F}\right)$ permet de déduire à partir de cette expression que :

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \exp(\varepsilon_{11}) & 0 & 0 \\ 0 & \exp(\beta\varepsilon_{11}) & 0 \\ 0 & 0 & \exp\left(-(1+\beta)\varepsilon_{11}\right) \end{pmatrix} \tag{6.32}$$

où ε_{11} est l'intégrale de D_{11}. La relation entre la normale à la bande dans la configuration actuelle $\mathbf{n}$ et celle prise dans la configuration initiale $\mathbf{n}_0$ est exprimée à l'aide de relations de mécanique des milieux continus :

$$\mathbf{n} = J\mathbf{F}^{-T}\frac{dS_0}{dS}\cdot\mathbf{n}_0 \tag{6.33}$$

où dS et dS_0 sont les éléments de surface de normales $\mathbf{n}$ et $\mathbf{n}_0$ respectivement, J le jacobien de la transformation et $\mathbf{F}^{-T}$ est l'inverse de la transposée du tenseur $\mathbf{F}$. En utilisant les notations introduites en Figure 6.2, les normales peuvent être définies dans le repère de chargement par :

$$\mathbf{n}_0 = \begin{pmatrix} \cos\theta_0 \cos\varphi_0 \\ \sin\theta_0 \cos\varphi_0 \\ \sin\varphi_0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{n} = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} \tag{6.34}$$

A partir de l'Equation (6.33), des relations peuvent être établies entre les angles définissant l'orientation 3D de la normale au plan de la bande exprimés dans les configurations actuelle et de référence :

$$\begin{aligned} \tan\theta &= \exp\left(\left(1-\beta\right)\varepsilon_{11}\right)\tan\theta_0 \\ \tan\varphi &= \frac{\sin\theta}{\sin\theta_0}\exp\left(\left(1+2\beta\right)\varepsilon_{11}\right)\tan\varphi_0 \end{aligned} \tag{6.35}$$

D'autre part, la relation (6.24) entre le rapport actuel des épaisseurs et le rapport initial est toujours valable avec cette formulation. Le modèle M – K tel qu'il a été présenté précédemment est basé sur les équations d'équilibre et de compatibilité des déformations entre les zones saine et défectueuse. Dans une configuration lagrangienne actualisée, les équations d'équilibre au niveau de la bande conduisent à :

$$e^B \mathbf{n}\cdot\dot{\mathbf{N}}^B = e\mathbf{n}\cdot\dot{\mathbf{N}} \tag{6.36}$$

avec e l'épaisseur de la tôle, soit en utilisant la définition (6.25) de la taille du défaut initial :

$$f^{MK}\mathbf{n}\cdot\dot{\mathbf{N}}^B = \mathbf{n}\cdot\dot{\mathbf{N}} \tag{6.37}$$

avec $\mathbf{n}$ la normale au plan de la bande, définie dans un espace tridimensionnel. $\dot{\mathbf{N}}$ est le tenseur taux de contrainte nominale, relié au gradient des vitesses $\mathbf{G}$ par le module $\boldsymbol{L}$ à l'intérieur et à l'extérieur de la bande :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{N}}^B &= \boldsymbol{L}^B : \mathbf{G}^B \\ \dot{\mathbf{N}} &= \boldsymbol{L} : \mathbf{G} \end{aligned} \tag{6.38}$$

Le saut du gradient des vitesses au passage dans la bande devant vérifier la condition de compatibilité de Hadamard (Hadamard 1903), il peut être exprimé par :

$$\left[\mathbf{G}\right] = \mathbf{G}^B - \mathbf{G} = \dot{\mathbf{c}} \otimes \mathbf{n} \tag{6.39}$$

avec $\dot{\mathbf{c}}$ le vecteur de vitesse relative entre les deux parties de la tôle. L'introduction de la condition de compatibilité et de la relation de comportement dans l'équation d'équilibre conduit à :

$$f^{MK}\mathbf{n}\cdot\left(\boldsymbol{L}^B : \left(\mathbf{G} + \dot{\mathbf{c}} \otimes \mathbf{n}\right)\right) = \mathbf{n}\cdot\left(\boldsymbol{L} : \mathbf{G}\right) \tag{6.40}$$

Le vecteur de vitesse relative peut alors être déterminé :

$$\dot{\mathbf{c}} = \left(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{L}^{B}\cdot\mathbf{n}\right)^{-1}\cdot\mathbf{n}\cdot\left(\frac{\boldsymbol{L}}{f^{MK}}-\boldsymbol{L}^{B}\right):\mathbf{G} \tag{6.41}$$

L'expression de $\dot{\mathbf{c}}$ permet de connaitre entièrement le chargement à appliquer à la bande. Les taux de déformations étant déterminés dans les deux zones, il est possible d'appliquer l'ensemble de la démarche du modèle M – K synthétisée en Figure 6.6 et présentée précédemment. Cette écriture utilise un formalisme proche de celui utilisé lors du développement du critère de Perte d'Ellipticité et permettra donc de faciliter la comparaison théorique de ces deux critères dans le prochain paragraphe.

6.3.4 Relation théorique entre le critère de Marciniak – Kuczynski et le critère de Perte d'Ellipticité

Les critères de Perte d'Ellipticité et de Marciniak – Kuczynski sont basés sur des théories différentes, toutefois certaines équations communes sont utilisées lors de leur formulation, notamment les équations d'équilibre et de compatibilité au niveau des plans délimitant la bande de localisation. En utilisant ces similitudes et un formalisme commun, des relations entre ces deux critères vont maintenant être recherchées.

Une écriture tridimensionnelle équivalente du modèle M – K peut être obtenue dans la configuration initiale. Les équations d'équilibre entre la bande et la partie saine conduisent alors à :

$$e_0^{B}\dot{\mathbf{\Pi}}^{B}\cdot\mathbf{n}_0 = e_0\dot{\mathbf{\Pi}}\cdot\mathbf{n}_0 \tag{6.42}$$

ou encore en utilisant la définition (6.25) de la taille du défaut initial :

$$f_0^{MK}\dot{\mathbf{\Pi}}^{B}\cdot\mathbf{n}_0 = \dot{\mathbf{\Pi}}\cdot\mathbf{n}_0 \tag{6.43}$$

avec $\mathbf{n}_0$ la normale au plan de la bande, définie dans un espace tridimensionnel. $\mathbf{\Pi}$ est le premier tenseur de contrainte de Piola – Kirchhoff, dont le taux est relié au tenseur gradient $\dot{\mathbf{F}}$ par le module $\mathcal{L}$ à l'intérieur et à l'extérieur de la bande du défaut respectivement par :

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{\Pi}}^{B} &= \mathcal{L}^{B}:\dot{\mathbf{F}}^{B}\\ \dot{\mathbf{\Pi}} &= \mathcal{L}:\dot{\mathbf{F}}\end{aligned} \tag{6.44}$$

Le saut de $\dot{\mathbf{F}}$ au passage de la bande doit vérifier la condition de compatibilité, soit :

$$\left[\dot{\mathbf{F}}\right] = \dot{\mathbf{F}}^{B} - \dot{\mathbf{F}} = \dot{\mathbf{c}}_0 \otimes \mathbf{n}_0 \tag{6.45}$$

avec $\dot{\mathbf{c}}_0$ le vecteur de vitesse relative entre les deux parties de la tôle. L'introduction de la condition de compatibilité (6.45) et de la relation de comportement (6.44) dans l'équation d'équilibre (6.43) conduit à :

$$f_0^{MK}\left(\mathcal{L}^B:\left(\dot{\mathbf{F}}+\dot{\mathbf{c}}_0\otimes\mathbf{n}_0\right)\right)\cdot\mathbf{n}_0=\left(\mathcal{L}:\dot{\mathbf{F}}\right)\cdot\mathbf{n}_0 \tag{6.46}$$

Le vecteur de vitesse relative peut alors être déterminé :

$$\dot{\mathbf{c}}_0=\left(\mathbf{n}_0\cdot\mathcal{L}^{BT}\cdot\mathbf{n}_0\right)^{-1}\cdot\left(\left(\frac{\mathcal{L}}{f_0^{MK}}-\mathcal{L}^B\right):\dot{\mathbf{F}}\right)\cdot\mathbf{n}_0 \tag{6.47}$$

où la transposée $\mathcal{L}^{BT}$ du tenseur $\mathcal{L}^B$ est définie par $\mathcal{L}^{BT}_{ijkl}=\mathcal{L}^B_{jikl}$. Lorsque le rapport d'épaisseur initialement introduit tend vers 1 (absence de défaut d'épaisseur), il est possible de vérifier que le comportement à l'intérieur de la bande tend vers celui de la zone saine, ce qui implique en particulier :

$$\lim_{f_0^{MK}\to 1}\mathcal{L}^B=\mathcal{L} \tag{6.48}$$

d'où l'on déduit :

$$\lim_{f_0^{MK}\to 1}\frac{\mathcal{L}}{f_0^{MK}}-\mathcal{L}^B=\mathbf{0} \tag{6.49}$$

d'après la relation (6.47), on a nécessairement :

$$\lim_{f_0^{MK}\to 1}\left(\mathbf{n}_0\cdot\mathcal{L}^T\cdot\mathbf{n}_0\right)\cdot\dot{\mathbf{c}}_0=\mathbf{0} \tag{6.50}$$

Ce qui redonne le critère de Rice, à savoir :

$$\det\left(\mathbf{n}_0\cdot\mathcal{L}^T\cdot\mathbf{n}_0\right)=\mathbf{0} \tag{6.51}$$

Cette relation théorique peut être illustrée et vérifiée en traçant sur un même graphe les CLF obtenues avec le critère de Rice et de M – K pour différentes valeurs du défaut initial dans le cas d'un acier Dual Phase modélisé avec un comportement élasto-plastique couplé à l'endommagement.

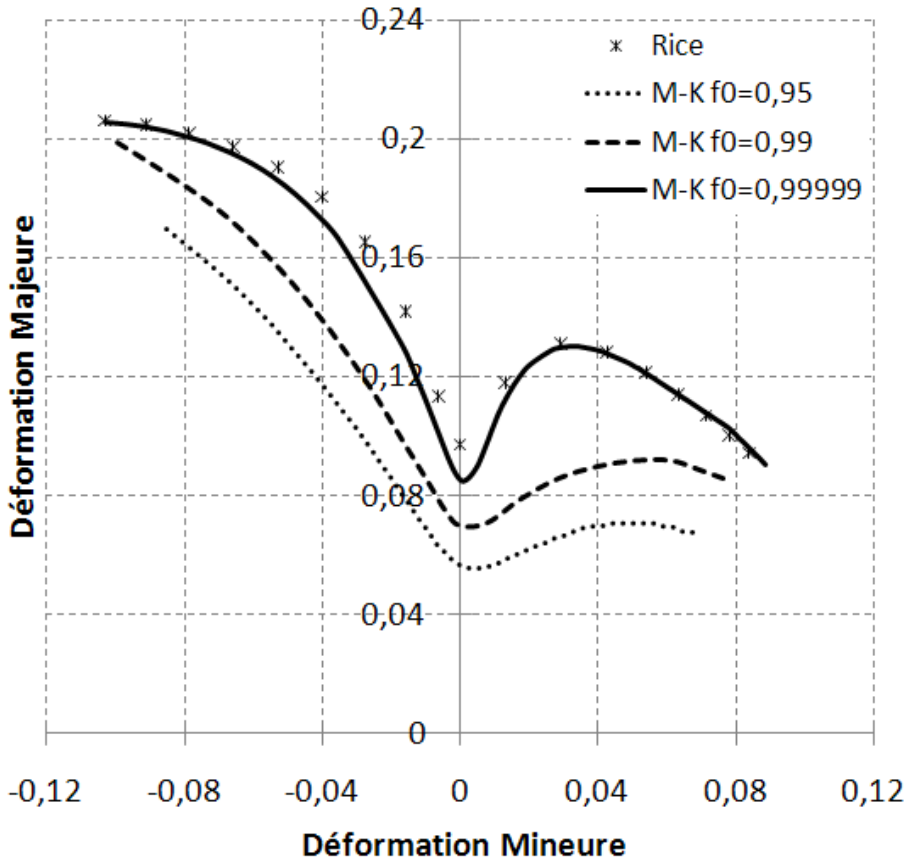


Figure 6.9 : CLF obtenues avec les critères de Rice et de M – K pour différentes valeurs de la taille du défaut initial pour un acier Dual Phase modélisé à l'aide d'une loi d'écrouissage de Voce ($C_R = 9,3$, $R_{sat} = 551,4MPa$ et $Y_0 = 356MPa$) et une loi d'endommagement isotrope de type Lemaitre ($\beta_{end} = 5$, $S_{end} = 20$ et $s_{end} = 0,01$) identifiée dans (Haddag 2007).

6.4 Analyse Linéaire de stabilité

Nous avons vu que les méthodes précédentes basées sur l'analyse de bifurcations ne sont pas adaptées à l'étude des problèmes de localisation dans des matériaux dont le comportement dépend du temps physique, excluant donc les matériaux à comportement visqueux. Pour la résolution de tels problèmes, il est possible d'utiliser des méthodes générales basées sur l'analyse de stabilité d'un système mécanique, comme la méthode directe de Lyapunov (Lyapunov 1907) ou l'analyse de stabilité par perturbation linéarisée (Benallal 2000). Ces méthodes permettent l'étude de stabilité tant pour des matériaux élasto-viscoplastiques que pour des matériaux élasto-plastiques, toutefois l'existence de résultats théoriques optimaux dépend de la nature du problème à traiter. Il peut donc être utile de rappeler certains résultats avant l'étude de stabilité matérielle. Seule la méthode d'analyse de stabilité par méthode de perturbation linéarisée sera considérée par la suite.

6.4.1 Notion de stabilité

Au cours d'une expérience, de nombreuses imperfections géométriques ou matérielles peuvent perturber les propriétés mécaniques d'un système ou ses conditions aux limites. La simple connaissance des positions d'équilibre d'un système n'a donc qu'un intérêt limité et il devient important pour l'expérimentateur de connaitre les conditions sous lesquelles des perturbations des conditions initiales du système différentiel n'entraineront que de faibles variations de sa réponse globale. Les bases théoriques de la réponse à cette question reposent sur le théorème de stabilité de Lyapunov dans le cas de systèmes différentiels autonomes. Le lecteur pourra se référer à (Abed-Meraim 1999b) pour une présentation plus détaillée, seules les principales définitions et les conclusions sur les critères concernant la stabilité étant reprises ici.

Cas des systèmes autonomes :

Soit un système différentiel décrit par l'équation différentielle :

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{g}\left(\mathbf{x}(t)\right) \tag{6.52}$$

et dont une position d'équilibre $\mathbf{x}_e$ vérifie les propriétés suivantes :

$$\mathbf{x}_e(t) = \mathbf{x}_e \qquad \forall t \geq 0 \tag{6.53}$$

Si le système reste proche de sa position d'équilibre lorsqu'il en est écarté par l'application d'une perturbation en position ou en vitesse suffisamment faible, cet équilibre est dit stable ; ce qui se traduit par :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0\ /\ \forall x_p(0) \in \square,\ \left|\mathbf{x}_p(0) - \mathbf{x}_e\right| < \eta \ \Rightarrow\ \forall t \in \square^+,\ \left|\mathbf{x}_p(t) - \mathbf{x}_e\right| < \varepsilon \tag{6.54}$$

avec $\mathbf{x}_p(t)$ une solution perturbée. De plus, si pour tout mouvement perturbé :

$$\lim_{t \to +\infty} \mathbf{x}_p(t) - \mathbf{x}_e = \mathbf{0} \tag{6.55}$$

l'équilibre est dit asymptotiquement stable.

Face aux difficultés soulevées par une résolution directe de l'étude de stabilité du système, une méthode de linéarisation peut être utilisée. Cette méthode repose sur l'introduction d'une petite perturbation $\delta\mathbf{x}$ autour de la position d'équilibre, telle que :

$$\mathbf{x}_p(t) = \mathbf{x}_e + \delta\mathbf{x}(t) \tag{6.56}$$

où $\delta\mathbf{x}$ est une fonction continue sur son intervalle de définition. Le développement limité au premier ordre du système différentiel ordinaire perturbé autour d'une position d'équilibre s'écrit :

$$\delta\dot{\mathbf{x}}(t) = \left.\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_e} \cdot \delta\mathbf{x}(t) + \mathbf{h}\left(\delta\mathbf{x}(t)\right) \tag{6.57}$$

avec $\mathbf{h}\left(\delta\mathbf{x}(t)\right) = o\left(\delta\mathbf{x}(t)\right)$ (i.e. $\mathbf{h}\left(\delta\mathbf{x}(t)\right) \to \mathbf{0}$ lorsque $\delta\mathbf{x}(t) \to \mathbf{0}$ et où la matrice jacobienne $\mathbf{B} = \left.\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_e}$ est indépendante du temps. La linéarisation du système (6.57) conduit au système à opérateur linéaire autonome suivant :

$$\delta\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{B} \cdot \delta\mathbf{x}(t) \tag{6.58}$$

dont les solutions sont de la forme :

$$\delta\mathbf{x}(t) = e^{t\mathbf{B}} \cdot \delta\mathbf{x}(0) \tag{6.59}$$

ou encore :

$$\delta\mathbf{x}(t) = \sum_{i=1}^{p} \left(\sum_{k=1}^{q} b_{ik} t^{k-1} \right) \mathbf{b}_i e^{t\lambda_i} \tag{6.60}$$

avec dans cette formule p et λ_i respectivement le nombre de valeurs propres distinctes et la $i^{ème}$ valeur propre de multiplicité q, les vecteurs $\mathbf{b}_i$ étant des vecteurs associés constituant une base propre de la matrice jacobienne $\mathbf{B}$. Les constantes b_{ik} sont déterminées en fonction des conditions initiales. Une condition nécessaire et suffisante de stabilité asymptotique du système linéarisé est la stricte négativité des parties réelles des valeurs propres de la matrice jacobienne. Une condition nécessaire et suffisante de stabilité est assurée par la négativité de la partie réelle de ses valeurs propres si la multiplicité des valeurs propres à partie réelle nulle est un au plus (ce qui permet d'assurer pour ces valeurs propres que $t^{k-1} = 1$). Dans les autres situations où les valeurs propres sont à partie réelle négative et en comportent au moins une à partie réelle nulle, la stabilité dépend du terme non linéaire $\mathbf{h}\left(\delta\mathbf{x}\right)$ de l'Equation (6.57) et il n'est donc pas possible de conclure sans l'étude de l'évolution de ce terme.

Cas des systèmes non autonomes :

Contrairement au cas autonome, la négativité des valeurs propres de $\mathbf{B}$ n'est plus une condition suffisante de stabilité (Abed-Meraim 1999b). Une condition suffisante de stabilité, plus restrictive, est dans ce cas la définie négativité de la partie symétrique de $\mathbf{B}$.

Le cadre théorique sur lequel est basée l'analyse de stabilité par méthode de perturbation linéarisée étant rappelé, il est maintenant possible d'appliquer cette méthode pour la prédiction de la localisation puis de comparer les résultats à ceux obtenus avec les critères basés sur des méthodes d'analyse de bifurcation précédemment présentés.

6.4.2 Présentation générale de l'Analyse Linéaire de Stabilité

Afin de pouvoir appliquer les résultats de stabilité, il convient de réécrire les équations régissant le comportement du matériau ou du système mécanique sous la forme (6.52). Une méthode générale peut ensuite être appliquée à l'analyse de stabilité d'une structure (Abed-Meraim 1999a) ou d'un matériau évoluant lentement auquel une perturbation est appliquée. Cette méthode a par exemple été appliquée à différentes classes de matériaux incluant des modèles viscoélastiques endommageables (Keryvin 1999), élasto-plastiques et élasto-viscoplastiques (Cano 1996; Barbier et al. 1998; Benallal 2000; Benallal et Comi 2002), dans le cas de matériaux élasto-plastiques montrant un vieillissement dynamique (Mazière 2007) et dans le cas de géomatériaux en élasto-plasticité non-associée (Diouta et Shahrour 2006).

En notant $\mathbf{Z}$ l'ensemble des variables observables et des variables internes régissant l'état mécanique d'un point matériel, il est supposé que les équations de comportement du modèle élasto-viscoplastique considéré peuvent s'écrire sous la forme suivante :

$$\dot{\mathbf{Z}} = \mathcal{F}\left(\mathbf{Z}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\right) \tag{6.61}$$

avec $\mathcal{F}$ un opérateur générique construit à partir des équations d'équilibre, des lois d'état, des lois complémentaires et des conditions initiales. Pour la classe de matériaux élasto-viscoplastiques présentée au Chapitre 3, on vérifiera ensuite que les lois de comportement peuvent s'écrire sous la forme (6.61). Soit $\delta\mathbf{u}$ une perturbation infinitésimale en déplacement de la forme :

$$\delta\mathbf{u}\left(t\right) = \delta\mathbf{u}_0 \exp\left(\eta t + i\xi\mathbf{x}\cdot\mathbf{n}\right) \tag{6.62}$$

avec $\delta\mathbf{u}_0$ l'amplitude initiale de cette perturbation et ξ le nombre d'onde. Son application conduit au système différentiel perturbé suivant après une éventuelle linéarisation :

$$\delta\dot{\mathbf{Z}} = \frac{\partial\mathcal{F}\left(\mathbf{Z}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\right)}{\partial\mathbf{Z}}\cdot\delta\mathbf{Z} + \frac{\partial\mathcal{F}\left(\mathbf{Z}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\right)}{\partial\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}\cdot\delta\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \tag{6.63}$$

Dans le cas d'un système autonome, les solutions d'un système différentiel de premier ordre sont supposées être des exponentielles de même forme que la perturbation appliquée (Cano 1996), le système précédent devient (Barbier et al. 1998) :

$$\delta\mathbf{Z} = \left(\mathbf{1} - \frac{1}{\eta}\frac{\partial\mathcal{F}\left(\mathbf{Z}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\right)}{\partial\mathbf{Z}}\right)^{-1}\cdot\frac{\partial\mathcal{F}\left(\mathbf{Z}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\right)}{\partial\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}\cdot\delta\boldsymbol{\varepsilon} = \mathcal{G}\cdot\delta\boldsymbol{\varepsilon} \tag{6.64}$$

avec $\mathbf{1}$ un tenseur unité dont l'ordre dépend du modèle de comportement choisi. Après prise en compte des équations d'équilibre et de la relation entre déplacement et déformation, l'étude de stabilité du système est un problème aux valeurs propres, dont la résolution conduit alors à la recherche des conditions d'annulation du taux de croissance de la perturbation en fonction de l'orientation du plan de localisation.

6.4.3 Application aux matériaux élasto-plastiques

L'écriture du critère de stabilité est basée sur la formulation en vitesse du problème d'équilibre, dont seules les principales étapes sont évoquées ici. Les équations du problème en vitesse s'écrivent :

$$\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{\sigma}} &= \mathbf{C} : \left(\mathbf{D} - \mathbf{D}^p \right) \\
\mathbf{D}^p &= \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \\
\dot{R} &= H_R \dot{\lambda} \\
\dot{\mathbf{X}} &= \mathbf{H}_{\mathbf{X}} \dot{\lambda} \\
\dot{f}\left(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{X}, R \right) &= 0
\end{aligned} \tag{6.65}$$

La perturbation et la linéarisation de ce système conduit au système perturbé linéaire suivant :

$$\begin{aligned}
\delta\dot{\boldsymbol{\sigma}} &= \mathbf{C} : \left(\delta\mathbf{D} - \delta\mathbf{D}^p \right) \\
\delta\mathbf{D}^p &= \delta\dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \dot{\lambda} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \boldsymbol{\sigma}^2} : \delta\boldsymbol{\sigma} + \frac{\partial^2 f}{\partial \boldsymbol{\sigma} \partial \mathbf{X}} : \delta\mathbf{X} + \frac{\partial^2 f}{\partial \boldsymbol{\sigma} \partial R} \delta R \right) \\
\delta\dot{R} &= H_R \delta\dot{\lambda} + \dot{\lambda} \frac{\partial H_R}{\partial R} \delta R \\
\delta\dot{\mathbf{X}} &= \mathbf{H}_{\mathbf{X}} \delta\dot{\lambda} + \dot{\lambda} \left(\frac{\partial \mathbf{H}_{\mathbf{X}}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \delta\boldsymbol{\sigma} + \frac{\partial \mathbf{H}_{\mathbf{X}}}{\partial \mathbf{X}} : \delta\mathbf{X} \right) \\
\frac{\partial^2 f}{\partial \boldsymbol{\sigma}^2} : \left(\delta\boldsymbol{\sigma} - \delta\mathbf{X} \right) : \left(\dot{\boldsymbol{\sigma}} - \dot{\mathbf{X}} \right) &+ \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \left(\delta\dot{\boldsymbol{\sigma}} - \delta\dot{\mathbf{X}} \right) + \frac{\partial f}{\partial R} \delta\dot{R} = 0
\end{aligned} \tag{6.66}$$

Le système ci-dessus pouvant s'écrire sous la forme différentielle (6.61), la relation suivante peut être obtenue, en se basant par exemple sur la démarche proposée dans (Diouta et Shahrour 2006) :

$$\delta\boldsymbol{\sigma} = \left(\mathbf{C} - \frac{\left(\mathbf{C} : \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right) \otimes \left(\eta \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{C} + \mathbf{B}_{pert} \right)}{\eta \left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{C} : \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : H_{\mathbf{X}} + H_Y \right) + F_{pert}} \right) : \delta\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L}_p(\eta) : \delta\boldsymbol{\varepsilon} \tag{6.67}$$

avec $\boldsymbol{\varepsilon}$ la déformation totale. Les termes $\mathbf{B}_{pert}$ et F_{pert} sont définis par :

$$\mathbf{B}_{pert} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \boldsymbol{\sigma}^2} : \left(\dot{\boldsymbol{\sigma}} - \dot{\mathbf{X}} \right) + \frac{\partial^2 f}{\partial \boldsymbol{\sigma} \partial Y} \dot{Y} \right) : \mathbf{C} - \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \left(\left(\mathbf{C} : \frac{\partial^2 f}{\partial \boldsymbol{\sigma}^2} : \mathbf{C} \right) + \dot{\lambda} \frac{\partial \mathbf{H}_{\mathbf{X}}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{C} \right)$$

$$F_{pert} = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \left(\mathbf{C} : \frac{\partial^2 f}{\partial \boldsymbol{\sigma}^2} : \mathbf{C} : \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \mathbf{C} : \frac{\partial^2 f}{\partial \boldsymbol{\sigma}^2} : \mathbf{H}_{\mathbf{X}} - \frac{\partial \mathbf{H}_{\mathbf{X}}}{\partial \mathbf{X}} : \mathbf{H}_{\mathbf{X}} + \frac{\partial \mathbf{H}_{\mathbf{X}}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{C} : \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right) ...$$
$$... - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \boldsymbol{\sigma}^2} : \left(\dot{\boldsymbol{\sigma}} - \dot{\mathbf{X}} \right) \right) : \left(\mathbf{C} : \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \mathbf{H}_{\mathbf{X}} \right) - \frac{\partial H_R}{\partial R} \dot{\lambda} H_R$$

Le cas des matériaux élasto-plastiques couplés à l'endommagement peut être traité en utilisant la même démarche. Les équations d'équilibre du système en l'absence de forces d'inertie et de forces intérieures peuvent s'écrire sous la forme :

$$div\left(\boldsymbol{\sigma}\right) = \mathbf{0} \tag{6.68}$$

La perturbation du système conduit à :

$$div\left(\delta\boldsymbol{\sigma}\right) = \mathbf{0} \tag{6.69}$$

Soit en utilisant (6.67) :

$$div\left(\mathbf{L}_p\left(\eta\right) : \delta\boldsymbol{\varepsilon}\right) = \mathbf{0} \tag{6.70}$$

puis en exprimant $\delta\boldsymbol{\varepsilon}$ en fonction de la perturbation en déplacement imposée :

$$div\left(\mathbf{L}_p\left(\eta\right) : i\xi\left(\mathbf{n} \otimes \delta\mathbf{u}\right)\right) = \mathbf{0} \tag{6.71}$$

Ce qui est équivalent à :

$$\left(i\xi\right)^2 \left(\mathbf{n} \cdot \mathbf{L}_p\left(\eta\right) \cdot \mathbf{n}\right) \cdot \delta\mathbf{u}_0 \exp\left(\eta t + i\xi \mathbf{x} \cdot \mathbf{n}\right) = \mathbf{0} \tag{6.72}$$

Les solutions non triviales de (6.72) sont ensuite calculées en fonction de l'orientation de la bande et du taux de croissance de la perturbation par :

$$\det\left(\mathbf{n} \cdot \mathbf{L}_p\left(\eta\right) \cdot \mathbf{n}\right) = 0 \tag{6.73}$$

La perte de stabilité est prédite lorsqu'une des racines du problème aux valeurs propres précédent est supérieure à une vitesse caractéristique η_0.

A partir de (3.31) et (6.67), la relation entre le module perturbé $\mathbf{L}_p$ et le module tangent analytique élasto-plastique $\mathbf{L}^{ep}$ est donnée par :

$$\lim_{\eta \to +\infty} \mathbf{L}_p\left(\eta\right) = \mathbf{L}^{ep} \tag{6.74}$$

Il a pu être montré à partir de cette relation que l'analyse de bifurcation proposée par Rice (Rice 1976) est un cas limite d'analyse linéaire de stabilité, les deux méthodes étant équivalentes lorsque le taux de croissance tend vers l'infini (Barbier et al. 1998).

6.5 Synthèse

Au cours des deux précédents chapitres, des critères permettant la prédiction d'instabilités plastiques en modes diffus, constituant une borne basse d'instabilité, ou en modes intermédiaires ont été présentés. Ceux-ci ont été complétés dans cette partie par des critères pour lesquels la localisation se produit sous forme de bandes présentant des discontinuités du gradient de la vitesse et dans lesquelles se concentrent la déformation ou l'endommagement à l'instabilité. Trois approches théoriques différentes ont été utilisées ou développées au cours de l'étude : l'analyse de bifurcation, la méthode multizones et l'analyse de stabilité linéarisée.

Les critères de Perte d'Ellipticité (Rice 1976) et de Perte d'Ellipticité Forte (Bigoni et Hueckel 1991) bénéficient de fondements théoriques justifiés et constituent une borne haute pour la prédiction d'instabilités plastiques. Dans le cas de comportements élasto-plastiques modélisés par des lois phénoménologiques en plasticité associée et avec des surfaces de charges ne présentant pas de points de vertex, ils ne peuvent prévoir un état critique que pour des matériaux adoucissants. Cet effet a été introduit par le couplage du modèle avec un modèle d'endommagement isotrope de type Lemaitre.

L'approche multizone constitue une approche alternative au critère de Perte d'Ellipticité. Le très populaire modèle M – K est basé sur l'existence d'une bande affaiblie au sein de la tôle dans laquelle les déformations vont se concentrer au cours du chargement, ce qui conduit à la localisation. Bien que populaire, ce critère nécessite une mise en œuvre numérique plus délicate que le critère de Rice et l'introduction de paramètres arbitrairement définis par l'utilisateur. L'un de ces paramètres, la taille du défaut initial, a une importance cruciale sur le niveau de localisation prédit. Une réécriture totalement tridimensionnelle du modèle dans un formalisme proche de celui utilisé pour l'écriture du critère de Perte d'Ellipticité a permis d'établir un rapprochement théorique original entre ces deux critères. Il est alors montré que les CLF obtenues avec le modèle de Marciniak – Kuczynski tendent vers les prédictions du second lorsque le rapport initial des épaisseurs tend vers 1 (absence de défaut). L'utilisation de ce critère pour des matériaux non adoucissants ne semble dès lors pas pertinente, la prédiction de localisation étant dans ce cas pilotée par un paramètre numérique arbitraire et n'ayant aucune justification physique.

L'analyse de stabilité linéarisée (ALS) présente alors une alternative aux critères basés sur l'analyse de bifurcation pour les matériaux élasto-plastiques et peut être utilisée dans le cas élasto-viscoplastique. Il a été montré que l'analyse de bifurcation est un cas limite de l'analyse linéaire de stabilité et que les résultats de ces deux méthodes sont liés lorsque le taux de croissance tend vers l'infini (Barbier et al. 1998).

Après s'être intéressé à l'étude des bases théoriques des critères d'instabilité plastique et après avoir proposé des rapprochements théoriques entre certains d'entre eux au cours des Chapitres 4 à 6, des applications numériques de ces critères vont être proposées dans le prochain chapitre afin de fournir des compléments de comparaison de ces critères et d'illustrer l'influence de certains paramètres liés au chargement ou à la modélisation du matériau sur les CLF.

7 Application au tracé de courbes limites de formage numériques

7.1 Introduction 124

7.2 Classification numérique de critères 124
7.2.1 Critères issus du Principe de Force Maximum 124
7.2.2 Critères issus de l'analyse de bifurcation 129

7.3 Influence du choix des lois d'écrouissages sur les prédictions de formabilité 130
7.3.1 Lois d'écrouissage 130
7.3.2 Critère de Bifurcation par Point Limite : TRIP A 132
7.3.3 Critères de Hill et de Marciniak-Kuczynski : TRIP B 134
7.3.4 Critère de Force Maximum Modifié : Acier Doux 137
7.3.5 Critère de Force Maximum Etendu : Acier Dual Phase 138
7.3.6 Critère d'Analyse Linéaire de Stabilité : Acier Ferrite Bainite 140

7.4 Conclusion 142

7.1 Introduction

Au cours des trois précédents chapitres, une comparaison théorique des formulations des critères de bifurcation et d'instabilité plastique a été proposée afin d'établir des relations ou de mettre en évidence des équivalences entre critères issus d'approches différentes mais servant à la prédiction d'un mode instable commun. Quelques exemples numériques sont venus illustrer les résultats théoriques mis en évidence. Une autre démarche, plus courante et évoquée au Chapitre 2, peut être suivie pour la comparaison de ces critères ; elle repose sur la comparaison et la classification de critères issus d'une même approche théorique. Dans ce chapitre, une première section sera consacrée d'une part à la comparaison de critères issus du principe de force maximum dans le cas de comportements rigides plastiques et élasto-plastiques puis d'autre part à ceux issus d'analyses de bifurcations.

La prédiction fiable de courbes limites de formage reste un problème auquel de nombreuses études expérimentales et numériques sont consacrées. D'un point de vue expérimental, le manque de normalisation des essais conduit à une forte dispersion des résultats d'essais effectués sur un même matériau mais par des laboratoires différents. Du côté numérique, la modélisation du comportement des matériaux et l'identification des paramètres de ces lois ont un fort impact sur le niveau d'instabilité plastique prédit. A partir de données issues d'une collaboration entre ArcelorMittal, le LaMCoS (Insa-Lyon) et le LEM3 (Arts et Métiers ParisTech) dans le cadre du projet ANR FORMEF, une mise en évidence de l'influence du choix des lois d'écrouissage sur les CLF est présentée pour différentes nuances d'aciers.

7.2 Classification numérique de critères

7.2.1 Critères issus du Principe de Force Maximum

Plusieurs critères ont été formulés à partir du principe de Force Maximum, dans le cas de la striction diffuse au Chapitre 4 (MFC) puis dans le cas de modes localisés au Chapitre 5 (Hill'52, MMFC et EMFC), en se basant sur des hypothèses différentes. Si l'analyse des bases théoriques du Critère de Force Maximum a pu mettre en évidence la relation entre ce critère et le critère de Bifurcation par Point Limite (Paragraphe 4.4.6), la comparaison théorique des critères issus du principe de l'observation empirique de Considère n'est globalement pas aisée. La formulation de l'EMFC permet toutefois de montrer que ce dernier ne peut être atteint qu'en même temps ou après le MFC (Paragraphe 5.3.4).

Deux méthodes peuvent alors être utilisées pour la comparaison et la classification des critères par ordre de prédiction d'apparition d'une striction. La première repose sur la comparaison des formules analytiques exprimées dans le cas d'un comportement rigide plastique avec un écrouissage isotrope de type Hollomon et une surface de charge de von Mises (disponibles pour le MFC, le MMFC et le critère de Hill'52 mais non pour le critère EMFC). La simulation numérique des CLF constitue une alternative en étendant la comparaison à d'autres classes de comportement.

Comparaison des critères basés sur le principe de Force Maximum dans le cas du comportement rigide plastique avec un écrouissage isotrope de type Hollomon et une surface de charge de von Mises :

Les relations entre les déformations principales majeures et mineures à l'apparition de la striction ont été développées dans les chapitres précédents pour les critères de Swift'52, de Hill'52 et de Hora'96. Un simple rappel de ces formules permet d'écrire pour le critère de striction diffuse de Swift que :

$$\bar{\varepsilon}_c = \frac{4n\left(1-\alpha+\alpha^2\right)^{\frac{3}{2}}}{4-3\alpha-3\alpha^2+4\alpha^3} \tag{7.1}$$

avec $\bar{\varepsilon}_c$ la déformation équivalente critique à striction diffuse, en fonction du coefficient d'écrouissage n et de α le trajet de chargement exprimé en fonction du rapport des contraintes principales mineures et majeures. Il est possible d'en déduire que :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{1c} &= \frac{4n\left(1-\alpha/2\right)\left(1-\alpha+\alpha^2\right)}{4-3\alpha-3\alpha^2+4\alpha^3} \\ \varepsilon_{2c} &= \frac{4n\left(\alpha-1/2\right)\left(1-\alpha+\alpha^2\right)}{4-3\alpha-3\alpha^2+4\alpha^3} \end{aligned} \tag{7.2}$$

avec ε_{1c} et ε_{2c} les déformations principales respectivement majeures et mineures critiques à striction. De même pour le critère de striction localisée de Hill'52, ces relations deviennent :

$$\bar{\varepsilon}_c = \frac{2n\sqrt{1-\alpha+\alpha^2}}{1+\alpha} \tag{7.3}$$

et :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{1c} &= \frac{n\left(2-\alpha\right)}{1+\alpha} \\ \varepsilon_{2c} &= \frac{n\left(2\alpha-1\right)}{1+\alpha} \end{aligned} \tag{7.4}$$

Dans le cas du critère de Hora'96, il a été vu précédemment qu'il est possible d'écrire que :

$$\bar{\varepsilon}_c = \frac{n\sqrt{1-\alpha+\alpha^2}}{1-\alpha/2} + \frac{4}{3}\frac{\left(1/2-\alpha\right)^2}{\sqrt{1-\alpha+\alpha^2}} \tag{7.5}$$

et que :

$$\varepsilon_{1c} = n + \frac{4}{3}\frac{\left(1/2-\alpha\right)^2\left(1-\alpha/2\right)}{1-\alpha+\alpha^2}$$
$$\varepsilon_{2c} = \frac{\alpha-1/2}{1-\alpha/2}n + \frac{4}{3}\frac{\left(\alpha-1/2\right)^3}{1-\alpha+\alpha^2} \qquad (7.6)$$

A partir de ces équations, il est possible de dresser un tableau permettant de synthétiser les valeurs des déformations principales critiques obtenues avec ces critères pour des trajets de chargements particuliers, à savoir le cisaillement simple (CS), la traction uniaxiale (TU), la traction plane (TP) et la tension équibiaxiale (EB).

Tableau 1. Prédictions analytiques de limites de formabilité obtenues avec les critères basés sur le principe de Force Maximum pour différents trajets de chargements particuliers.

	Déformation principale majeure			
	CS	TU	TP	EB
Considère	-	n	-	-
Swift'52	$+\infty$	n	n	n
Hill'52	$+\infty$	$2n$	n	-
Hora'96	$n+3/2$	$n+1/3$	n	$n+1/6$

La déformation principale mineure peut en être déduite à partir de la relation : $\varepsilon_{2c} = \beta\varepsilon_{1c}$.

A partir des relations (7.1) à (7.6), les courbes limites de formage peuvent être tracées pour les critères de Swift'52, de Hill'52 et de Hora'96 (Figure 7.1). L'ensemble des critères prévoit un niveau de localisation identique pour des trajets de traction plane, pour lequel la déformation majeure principale critique est égale au coefficient d'écrouissage n pour le comportement considéré. A proximité de ce trajet dans le domaine de l'expansion, il peut être noté que la limite de formabilité issue de la prédiction du MFC est supérieure à celle calculée à partir du MMFC, ce qui peut paraitre étonnant étant donné que le premier critère a été développé pour la prédiction de la striction diffuse, qu'il est considéré avec les critères de Bifurcation Générale et de la Bifurcation par Point Limite comme une borne basse pour la prédiction de la striction, alors que le second a été développé pour la prédiction de modes localisés. Dans le domaine du retreint, les prédictions effectuées avec les critères de Hill'52 et le MMFC restent proches lorsque β est compris entre -0,75 et 0. Dans le cas du cisaillement simple, un fort écart apparait néanmoins entre les valeurs de ces deux critères, seule la déformation critique prédite à partir du MMFC étant finie.

Dans le domaine de l'expansion, les critères de MFC et de MMFC offrent des méthodes simples à mettre en œuvre et peu coûteuses en termes de CPU pour la prédiction de modes respectivement diffus et localisés de striction.

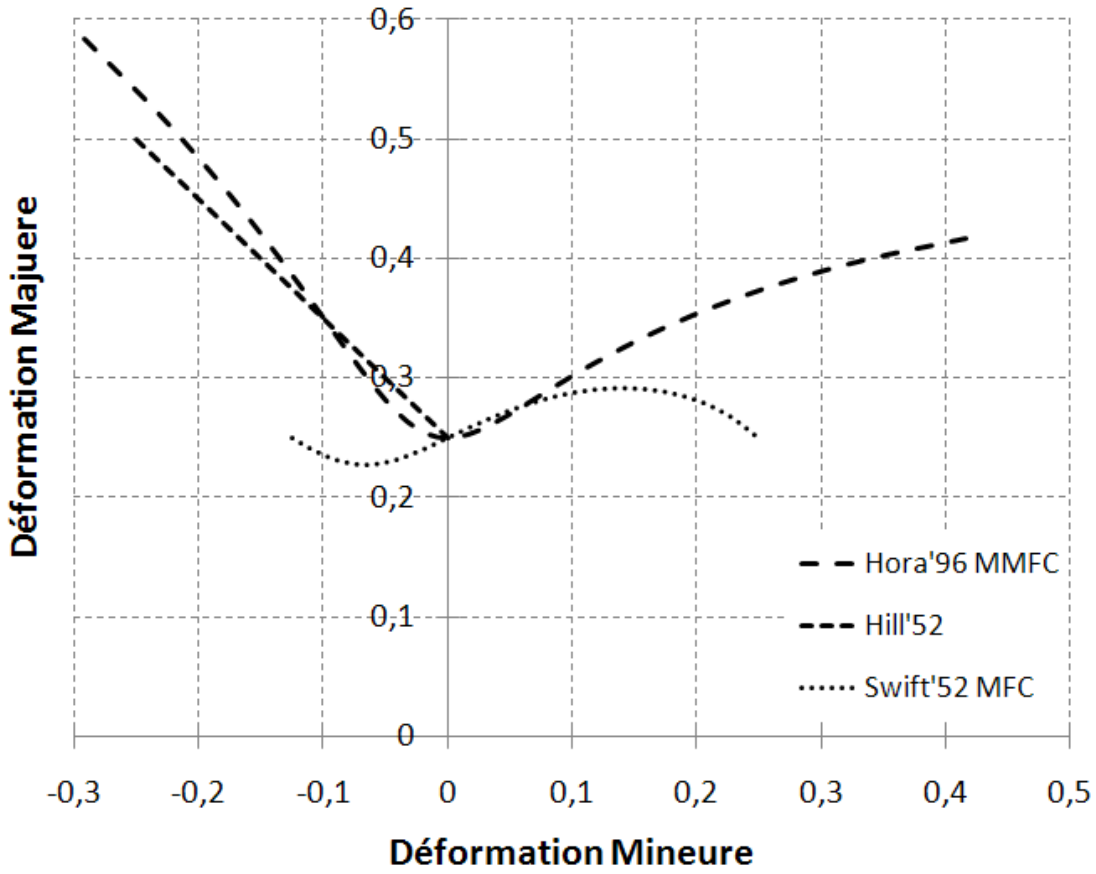


Figure 7.1 : CLF obtenues avec les critères de Swift'52, Hill'52 et Hora'96 à partir du modèle de comportement simplifié avec $n = 0,25$.

Comparaison des critères basés sur le principe de Force Maximum dans le cas du comportement élasto-plastique à écrouissage isotrope :

Dans des cas de modèles de comportements plus généraux que celui évoqué dans le paragraphe précédent, il devient plus difficile d'établir des relations analytiques pour définir les déformations critiques. La simulation numérique des CLF permet alors de pallier ce problème. Un exemple de comparaison numérique de CLF obtenues à partir des critères de MFC, de MMFC, d'EMFC et de Hill'52 est proposé en Figure 7.2 pour un matériau virtuel modélisé par un comportement élasto-plastique à écrouissage isotrope dont les principaux paramètres sont répertoriés dans le Tableau 2. :

Tableau 2. Paramètres matériau d'un alliage virtuel.

k (MPa)	n	ε_0	r_0	r_{45}	r_{90}
580	0,2	0,004	1	1,5	2

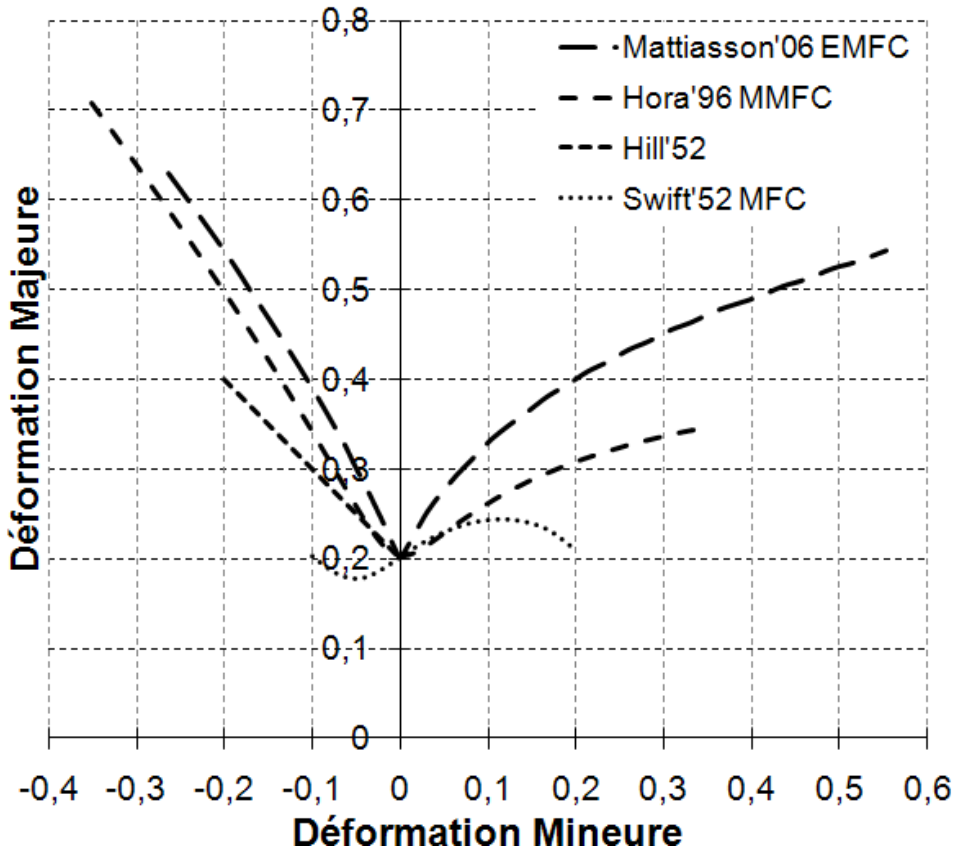


Figure 7.2 : CLF obtenues pour un alliage fictif pour les critères de Swift'52, Hill'52 et Hora'96 et Mattiasson'2006 (Altmeyer et al. 2008)

Le modèle de comportement élasto-plastique utilisé faisant appel à une loi d'écrouissage isotrope non saturante de type Swift, celui-ci est très proche du modèle rigide plastique précédemment utilisé. Il n'est alors pas surprenant d'observer que les courbes obtenues à partir de simulations numériques des formules générales des critères basés sur le principe de Force Maximum sont très proches de celles obtenues à partir des formules particulières développées dans le cas du comportement rigide-plastique simplifié. Les remarques précédentes restent donc valables dans ce cas. D'autre part, il a été possible par cette méthode d'obtenir des limites de formabilité avec l'EMFC.

Les prédictions obtenues avec les critères basés sur le principe de Force Maximum ne nécessitent qu'un temps CPU faible, mais dans le cas de modèles de comportements avancés il est nécessaire de reformuler le critère pour prendre en compte des effets supplémentaires.

De telles adaptations ont toutefois été proposées pour la prise en compte de l'écrouissage cinématique et de l'endommagement dans le Chapitre 4.

7.2.2 Critères issus de l'analyse de bifurcation

Quatre critères basés sur les méthodes d'analyse de bifurcations ont été présentés lors de l'étude des conditions d'apparition de striction diffuse et de localisation des déformations sous forme de bandes présentant une discontinuité du gradient des vitesses.

Ordre de prédiction des bifurcations :

Les résultats théoriques permettent de montrer que le critère de Bifurcation Générale (Drucker 1950) est plus conservatif que les critères de Bifurcation par Point Limite (Valanis 1989) et de Perte d'Ellipticité Forte (Bigoni et Hueckel 1991). Ce dernier est lui-même plus conservatif que le critère de Perte d'Ellipticité (Rice 1976). Ces résultats peuvent être illustrés par des CLF à striction diffuse et à localisation, par exemple dans le cas d'un acier Dual Phase.

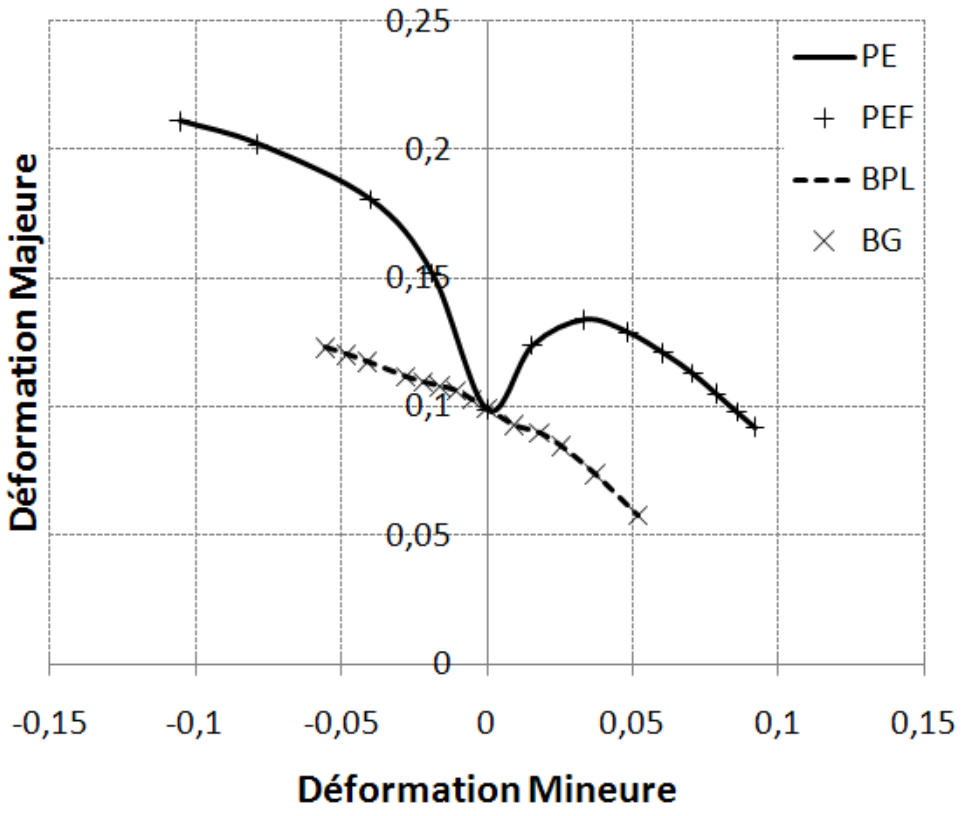


Figure 7.3 : CLF obtenues pour un acier Dual Phase avec les critères de Bifurcation Générale, Bifurcation par Point Limite, Perte d'Ellipticité et Perte d'Ellipticité Forte.

En plasticité associée et avec les hypothèses effectuées de chargement dans les axes d'anisotropie, les modules tangents gardent la symétrie majeure. Les prédictions des critères

de BPL et de PE sont donc respectivement égales à celles obtenues avec les critères de BG et de PEF.

Influence du formalisme des transformations finies :

Le choix d'écriture des critères de Bifurcation Générale et de Bifurcation par Point Limite dans le cadre des grandes déformations joue un rôle important sur le niveau de localisation. En effet, en l'absence d'endommagement, une écriture du critère en petite déformation ne permet pas de détecter des niveaux de bifurcation à des niveaux de déformations réalistes alors que l'écriture en grande déformation conduit aux résultats présentés et en parfaite cohérence avec les prédictions obtenues avec le Critère de Force Maximum (Swift 1952) et le critère de Cordebois – Ladevèze (Cordebois et Ladevèze 1986). En présence d'endommagement, les différences sont moins remarquables. La formulation en grandes déformations conduit toutefois à des résultats légèrement plus conservatifs.

Dans le cas des critères de localisation sous forme de bandes, les simulations menées ne permettent pas de mettre en évidence une influence des termes liés aux grandes déformations sur les niveaux de localisation observés.

7.3 Influence du choix des lois d'écrouissages sur les prédictions de formabilité

De nombreuses études présentes dans la littérature ont concerné la sensibilité des CLF prédites à partir d'un critère aux coefficients d'écrouissage (Butuc 2004), à l'endommagement (Haddag et al. 2009), au choix de la surface de charge (Banabic et Dannenmann 2001) et plus généralement aux différents paramètres utilisés lors de la modélisation du comportement du matériau. L'objectif des prochains paragraphes est de montrer l'influence du choix de la loi d'écrouissage et de l'identification de ses coefficients sur le niveau de formabilité prédit. Les lois utilisées seront présentées dans un premier temps. Dans le cadre du projet ANR FORMEF mené en partenariat avec ArcelorMittal et le LaMCoS de l'Insa de Lyon, les coefficients matériaux de ces lois ont été identifiés pour différentes nuances d'aciers, ce qui permettra de mettre en évidence le rôle du choix de la loi et de son identification pour différentes nuances d'aciers proposées par ArcelorMittal et différents critères de striction ou de localisation.

7.3.1 Lois d'écrouissage

Les lois d'écrouissages de cette section sont utilisées par ArcelorMittal et le LaMCoS pour modéliser le comportement des aciers. Les trois premières lois présentées ont été proposées et identifiées par ArcelorMittal alors que les trois suivantes l'ont été par le LaMCoS. Bien que ces lois aient déjà été détaillées pour la plupart, il parait utile de les rappeler pour plus de clarté ou pour les présenter sous des formes équivalentes.

La première loi, nommée par la suite Loi 1, est la loi d'écrouissage de Swift, non saturante et construite à partir de la loi de Hollomon de type puissance :

$$R_S = k\left(\varepsilon_0 + \bar{\varepsilon}\right)^{n_S} \tag{7.7}$$

où n_S représente le coefficient d'écrouissage de Swift. La troisième loi est la loi saturante de Voce :

$$R_V = R_{sat} - \left(R_{sat} - R_0\right) e^{-n_V \bar{\varepsilon}} \tag{7.8}$$

où R_0 et R_{sat} représentent respectivement la valeur initiale et la valeur à saturation de la variable d'écrouissage isotrope. Afin de mieux reproduire le comportement du matériau, une combinaison des lois de Swift et de Voce peut être utilisée. Elle se formule de la manière suivante :

$$R = \alpha_{VS} R_V + \left(1 - \alpha_{VS}\right) R_S \tag{7.9}$$

avec α_{VS} un coefficient de pondération des lois de Swift et de Voce compris entre zéro et un. Lorsque $\alpha_{VS} = 0$ ou $\alpha_{VS} = 1$, les loi de Swift ou de Voce sont respectivement retrouvées. Cette loi étant intermédiaire entre la Loi 1 et la Loi 3, elle sera nommée Loi 2 par la suite.

La Loi 4 est aussi basée sur la loi de Voce, mais son identification a été réalisée par le LaMCoS :

$$Y = R_0 + R_{sup}\left(1 - e^{-n\bar{\varepsilon}}\right) \tag{7.10}$$

Cette forme de la loi de Voce est équivalente à la précédente, que l'on retrouve pour $R_{sat} = R_0 + R_{sup}$. Afin d'améliorer la prise en compte des effets de changement de trajet de déformation et d'affiner la prédiction de phénomènes tels que le retour élastique lors d'opérations d'emboutissage, cette loi peut être combinée à des lois d'écrouissage cinématique, dont une loi à deux paramètres écrite sous forme incrémentale :

$$\dot{\mathbf{X}} = \left(C_p \frac{\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{X}}{\bar{\sigma}} - \gamma_p \mathbf{X}\right)\dot{\lambda} \tag{7.11}$$

et une loi à quatre paramètres :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{X}}_1 &= \left(C_p \frac{\boldsymbol{\sigma} - \left(\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2\right)}{\bar{\sigma}} - \gamma_p \mathbf{X}_1\right)\dot{\lambda} \\ \dot{\mathbf{X}}_2 &= \left(C_s \frac{\boldsymbol{\sigma} - \left(\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2\right)}{\bar{\sigma}} - \gamma_s \mathbf{X}_2\right)\dot{\lambda} \end{aligned} \tag{7.12}$$

Les lois mixtes, combinant écrouissages isotrope de Voce et cinématiques, à deux et quatre paramètres seront respectivement appelées Loi 5 et Loi 6.

L'utilisation de ces six lois ou d'une partie d'entre elles dans les prochains paragraphes permettra de tracer des courbes rhéologiques dans le cas de chargements de traction uniaxiale pour deux nuances d'aciers TRIP, pour un acier doux, pour un Dual Phase et pour un Ferrite Bainite. L'application des critères de Bifurcation par Point Limite, de Hill, de Marciniak – Kuczynski, de Force Maximum Modifié, de Force Maximum Etendu et l'Analyse Linéaire de Stabilité à ces différents matériaux permettra de déterminer leur limites de formage à striction diffuse ou à striction localisée.

7.3.2 Critère de Bifurcation par Point Limite : TRIP A

La première tôle considérée a une épaisseur de 1,26 mm et est constituée d'un acier de grade TRIP. Les caractéristiques mécaniques de cette tôle sont reportées dans le tableau suivant :

Tableau 3. Caractéristiques mécaniques de l'acier TRIP A.

	k	ε_0	n_S	R_{sat}	R_0	n_V	α_{VS}	r_0	r_{45}	r_{90}
Loi 1	1741	0,0175	0,312					0,95	1,12	1,38
Loi 2	1741	0,0175	0,312	1133	492	10,098	0,716	0,95	1,12	1,38
Loi 3				1133	492	10,098		0,95	1,12	1,38

avec k, R_{sat} et R_0 en MPa.

	R_0	R_{sup}	n	C_p	γ_p	C_s	γ_s	r_0	r_{45}	r_{90}
Loi 4	448,58	712,247	10,768					1,05	0,87	0,87
Loi 5	448,58	400,961	14,484	2139,7	6,0006			1,05	0,87	0,87
Loi 6	448,58	400,961	14,484	2139,7	6,0006	31454	220,889	1,05	0,87	0,87

avec R_{sup}, R_0, C_p et C_s en MPa.

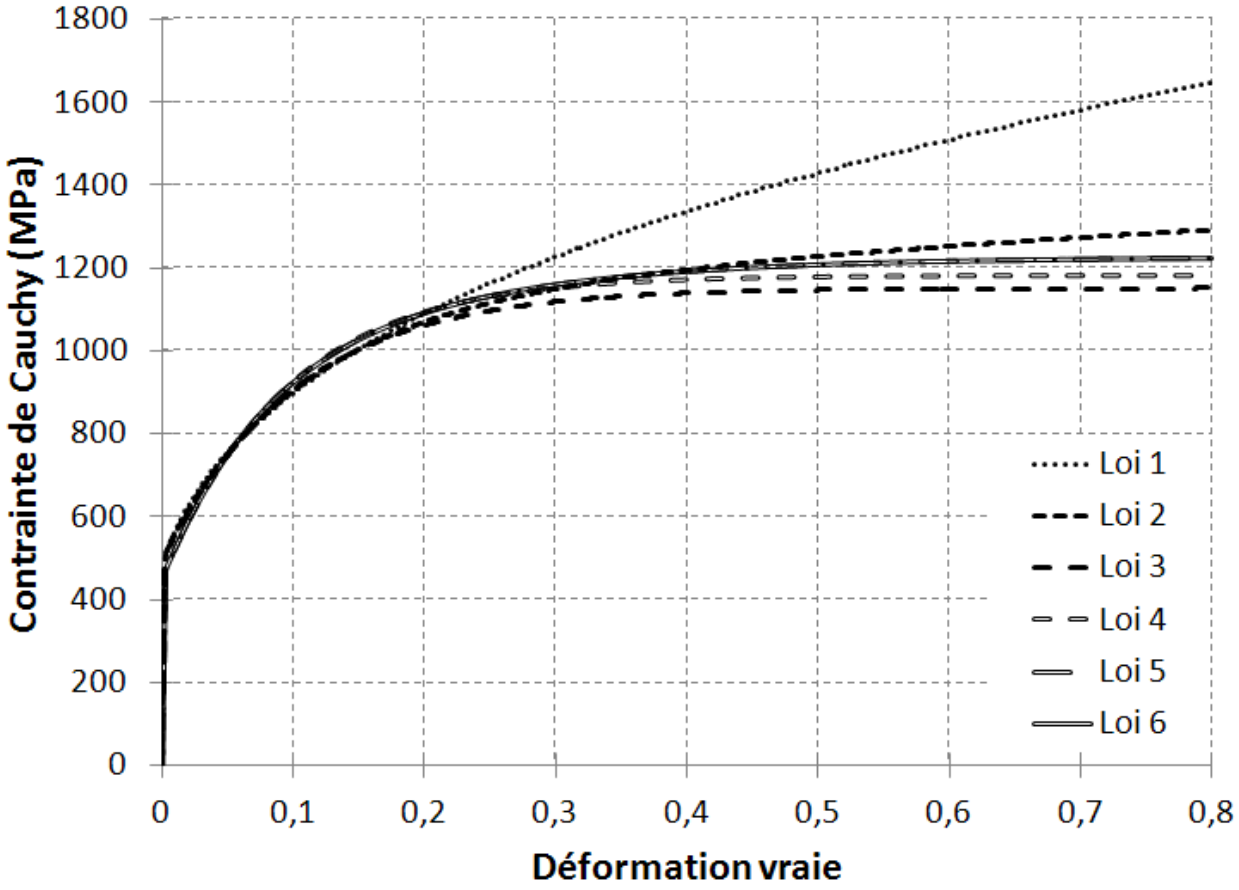


Figure 7.4 : Courbes de comportement en traction uniaxiale de l'acier TRIP A.

L'application du critère de Bifurcation par Point Limite à cet acier conduit à la prédiction des CLF à striction diffuse suivantes :

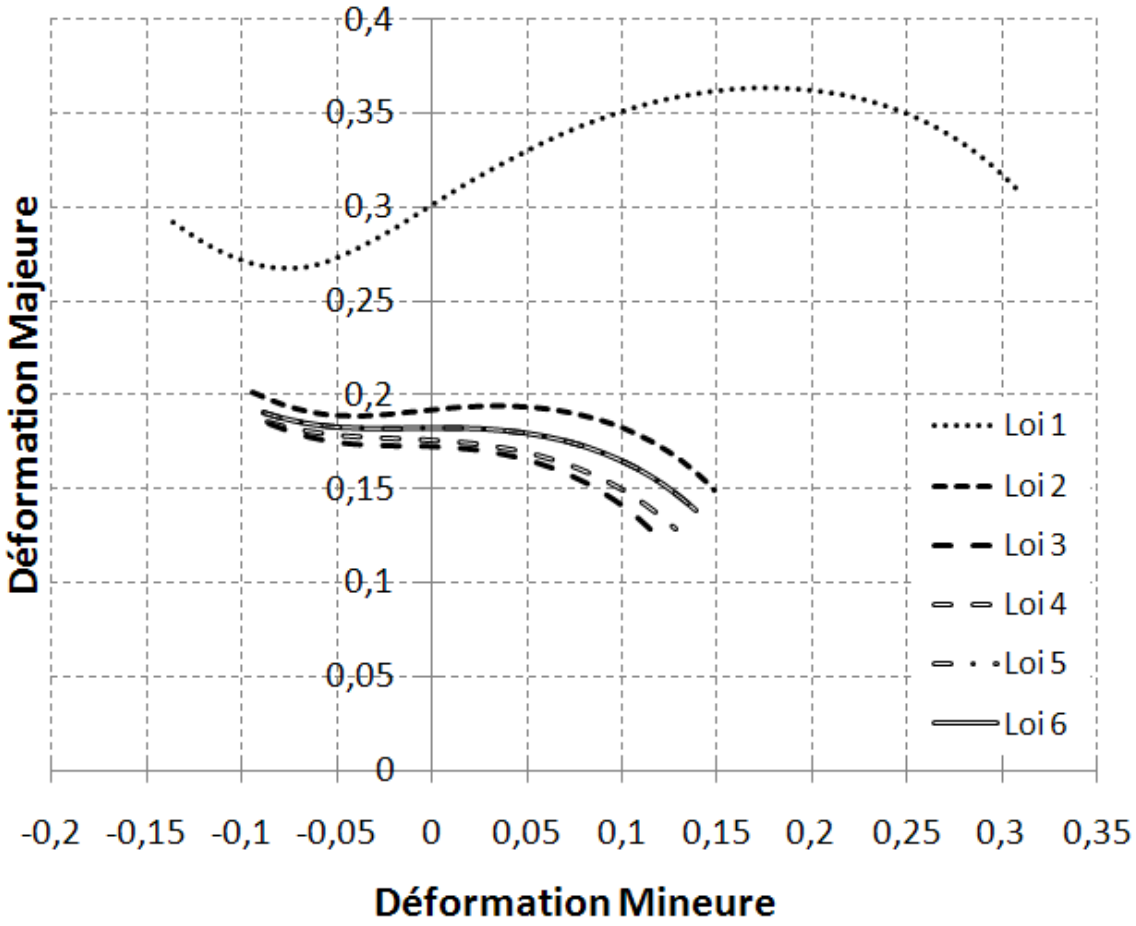


Figure 7.5 : CLF à striction diffuse prédites avec le critère de Bifurcation par Point Limite pour l'acier TRIP A.

7.3.3 Critères de Hill et de Marciniak-Kuczynski : TRIP B

Une seconde tôle, constituée aussi d'un acier TRIP mais d'épaisseur 2 mm, a les propriétés identifiées suivantes :

Tableau 4. Caractéristiques mécaniques de l'acier TRIP B.

	k	ε_0	n_S	R_{sat}	R_0	n_V	α_{VS}	r_0	r_{45}	r_{90}
Loi 1	1595	0,1875	0,296					0,99	0,94	1,31
Loi 2	1595	0,1875	0,296	1103	495	9,033	0,539	0,99	0,94	1,31
Loi 3				1103	495	9,033		0,99	0,94	1,31

avec k , R_{sat} et R_0 en MPa.

	R_0	R_{sup}	n	C_p	γ_p	C_s	γ_s	r_0	r_{45}	r_{90}
Loi 4	498,20	665,336	8,399					0,90	0,91	1,16

avec R_{sup}, R_0, C_p et C_s en MPa.

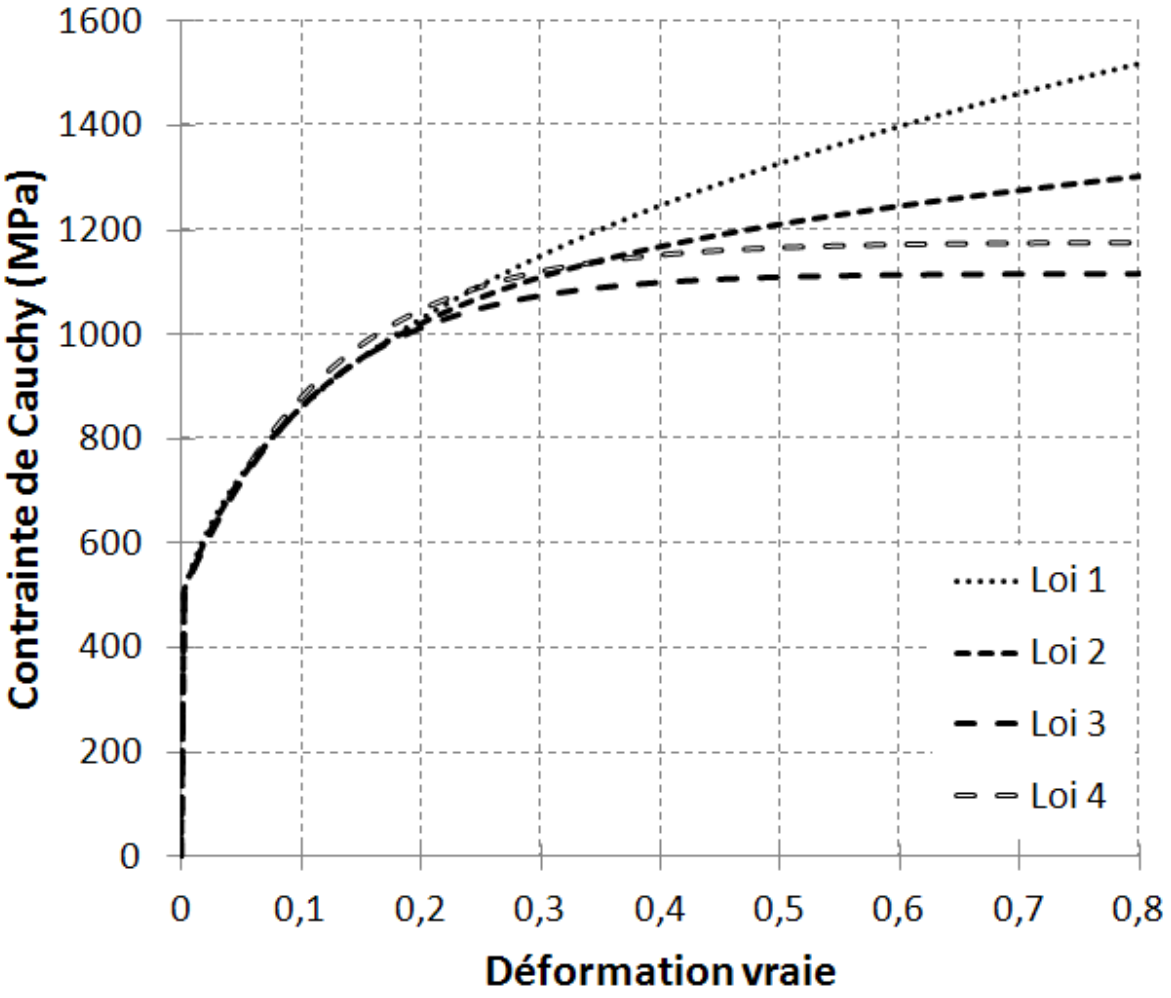


Figure 7.6 : Courbes de comportement en traction uniaxiale de l'acier TRIP B.

L'application des critères de Hill dans le domaine du retreint et de Marciniak – Kuczynski dans le domaine de l'expansion conduit aux courbes limites à striction localisée suivantes :

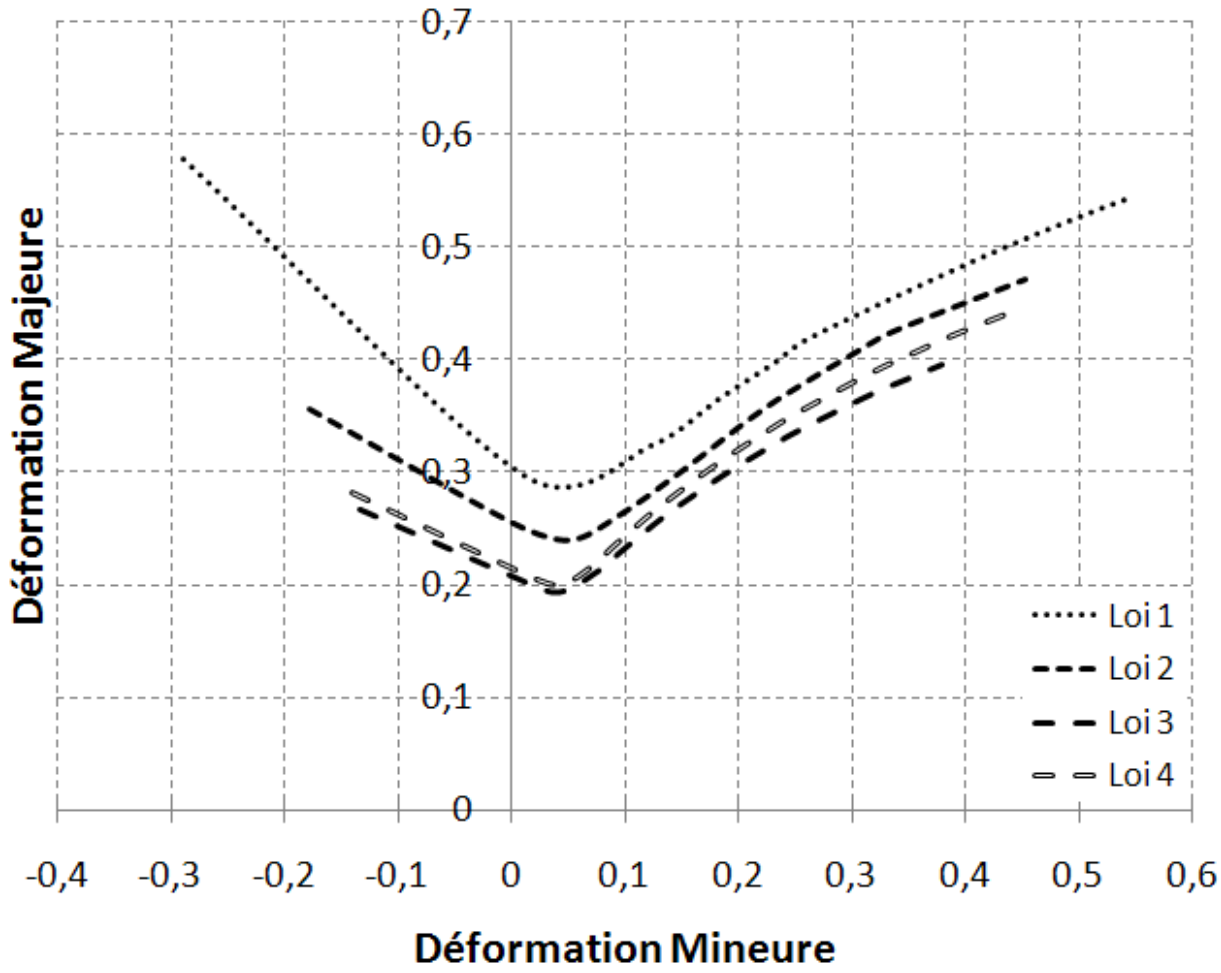


Figure 7.7 : CLF à striction localisée prédites avec les critères de Hill et de Marciniak – Kuczynski pour l'acier TRIP B.

Les lois 3 et 4 sont des lois équivalentes mais identifiées par des laboratoires différents. Il est intéressant de noter de faibles écarts entre ces deux courbes, écarts relatifs très faibles dans le domaine du retreint augmentant vers l'expansion équi-biaxiale pour avoisiner 10%. Une partie des écarts entre les courbes est donc imputable au choix de la loi d'écrouissage, mais une autre partie peut aussi venir de la méthodologie suivie pour identifier les paramètres de ces lois. Généralement, l'identification est réalisée sur l'éprouvette tant que la déformation reste homogène dans l'éprouvette, c'est-à-dire jusqu'à l'apparition de striction diffuse. Au-delà de ce point, les courbes sont extrapolées. Sur la Figure 7.6, il est possible d'observer que les courbes de comportement des quatre lois restent proches jusqu'à 20% de déformation environ en TU, soit tant que l'identification avec des données expérimentales reste possible, mais qu'elles divergent ensuite ; ceci se traduit par d'importants écarts sur les CLF. Les développements récents de méthodes d'identification avancées basées sur les mesures de champs semblent une voie intéressante pour étendre le domaine d'identification et pour limiter les écarts entre les courbes basées sur des lois saturantes ou non-saturantes.

7.3.4 Critère de Force Maximum Modifié : Acier Doux

L'exemple suivant est basé sur une tôle d'acier doux de grade DC 06 et d'épaisseur 0,8 mm.

Tableau 5. Caractéristiques mécaniques de l'acier doux DC 06.

	k	ε_0	n_S	R_{sat}	R_0	n_V	α_{VS}	r_0	r_{45}	r_{90}
Loi 1	567	0,0075	0,265					2,30	1,92	2,98
Loi 2	567	0,0075	0,265	384	163	12,008	0,422	2,30	1,92	2,98
Loi 3				384	163	12,008		2,30	1,92	2,98

avec k , R_{sat} et R_0 en MPa.

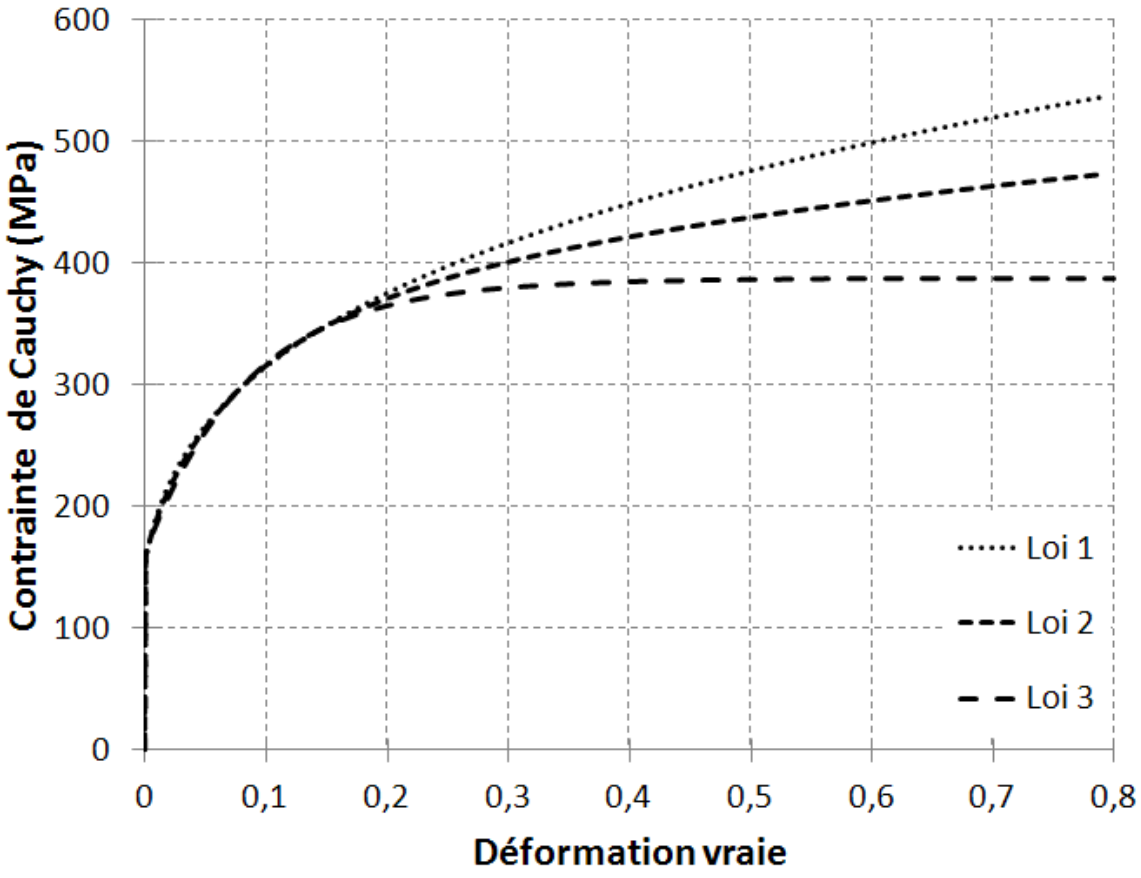


Figure 7.8 : Courbes de comportement en traction uniaxiale de l'acier doux.

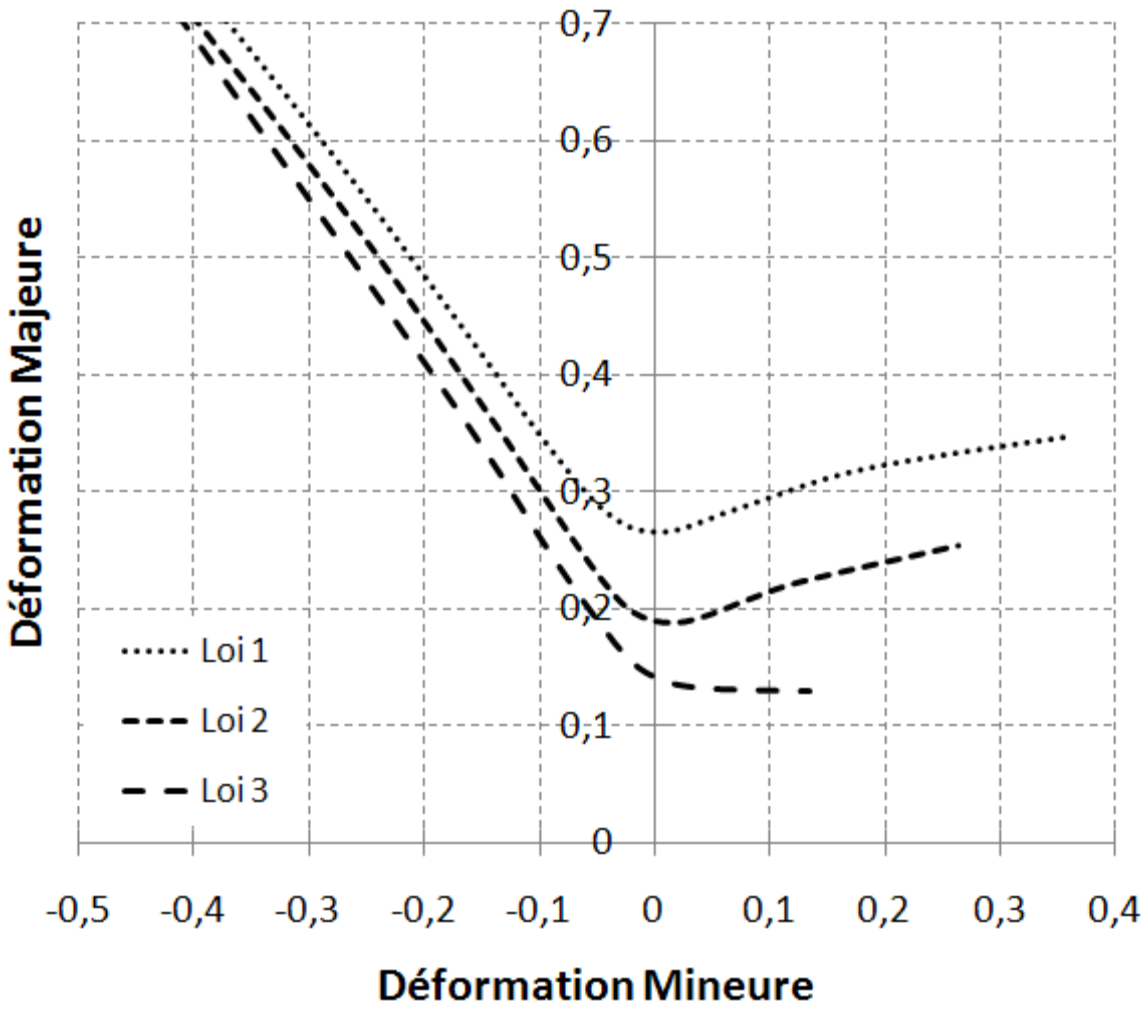


Figure 7.9 : CLF à striction localisée prédites avec le critère de Force Maximum Modifié pour l'acier doux.

La Loi 2 étant construite à partir d'une pondération entre la Loi 1 non saturante et de la Loi 3 saturante, les CLF de cette loi sont intermédiaires pour tous les critères de localisation testés.

7.3.5 Critère de Force Maximum Etendu : Acier Dual Phase

Le critère de Force Maximum Etendu est une extension récente du critère de Force Maximum. Sur cet exemple, il est appliqué à une tôle d'acier Dual Phase d'épaisseur 1,5 mm et dont les propriétés mécaniques sont résumées dans le Tableau 6 :

Tableau 6. Caractéristiques mécaniques de l'acier Dual Phase.

	k	ε_0	n_S	R_{sat}	R_0	n_V	α_{VS}	r_0	r_{45}	r_{90}
Loi 1	1244	0,002813	0,166					0,94	1,07	1,05
Loi 2	1244	0,002813	0,166	918	500	19,246	0,333	0,94	1,07	1,05
Loi 3				918	500	19,246		0,94	1,07	1,05

avec k , R_{sat} et R_0 en MPa.

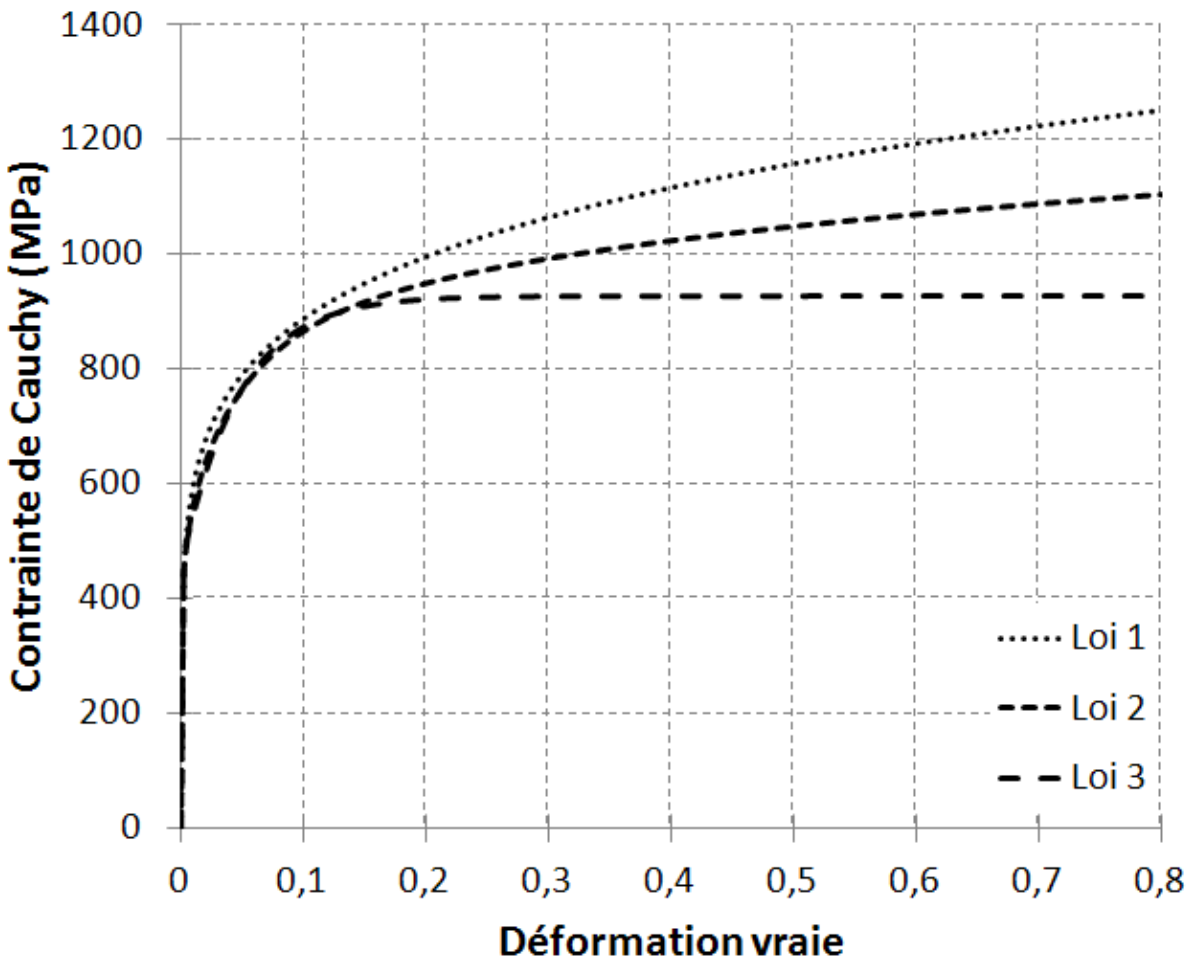


Figure 7.10 : Courbes de comportement en traction uniaxiale de l'acier Dual Phase.

Les CLF correspondantes sont tracées sur la figure suivante :

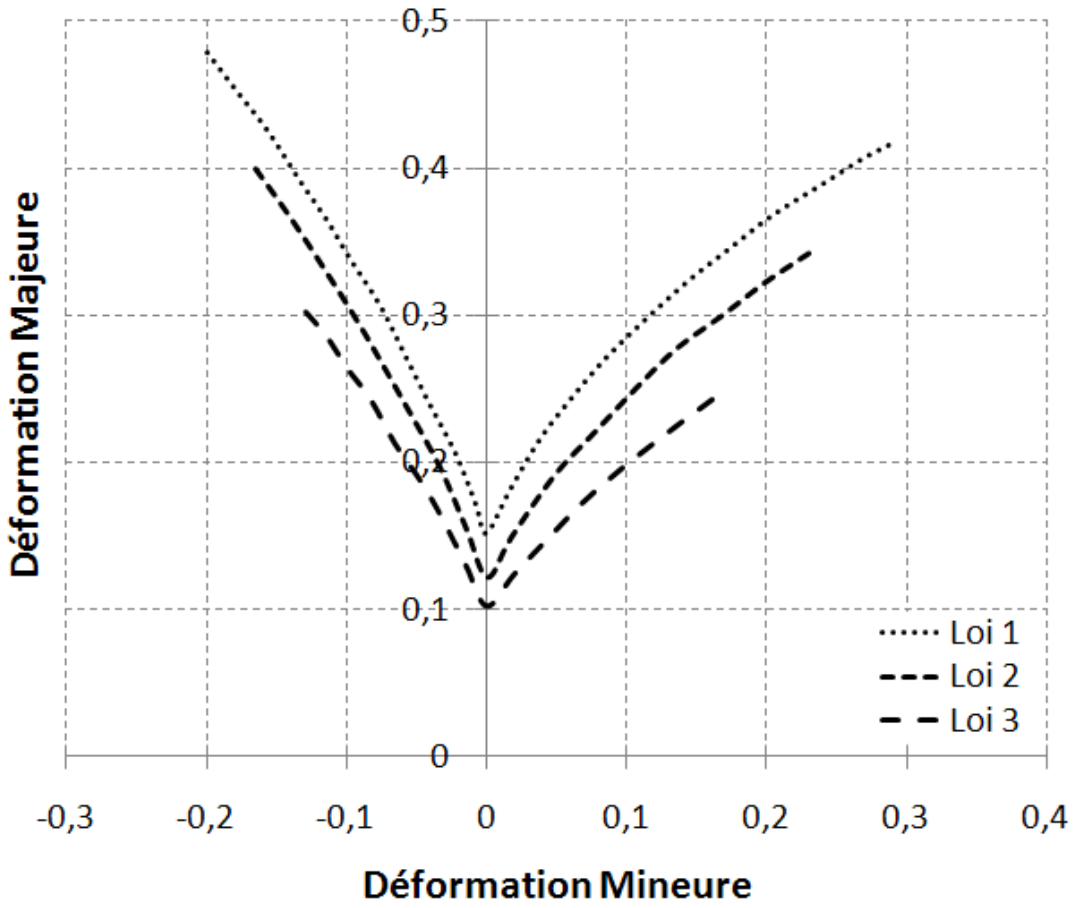


Figure 7.11 : CLF à striction localisée prédite avec le critère de Force Maximum Etendu pour l'acier Dual Phase.

7.3.6 Critère d'Analyse Linéaire de Stabilité : Acier Ferrite Bainite

Un dernier exemple de CLF est obtenu à partir du critère d'Analyse Linéaire de Stabilité présenté au Chapitre 5, sur une tôle d'acier Ferrite Bainite d'épaisseur 4 mm :

Tableau 7. Caractéristiques mécaniques de l'acier Ferrite Bainite.

	k	ε_0	n_S	R_{sat}	R_0	n_V	α_{VS}	r_0	r_{45}	r_{90}
Loi 1	927	0,015	0,162					0,61	1,05	0,84
Loi 2	927	0,015	0,162	708	477	0,162	0,276	0,61	1,05	0,84
Loi 3				708	477	0,162		0,61	1,05	0,84

avec k , R_{sat} et R_0 en MPa.

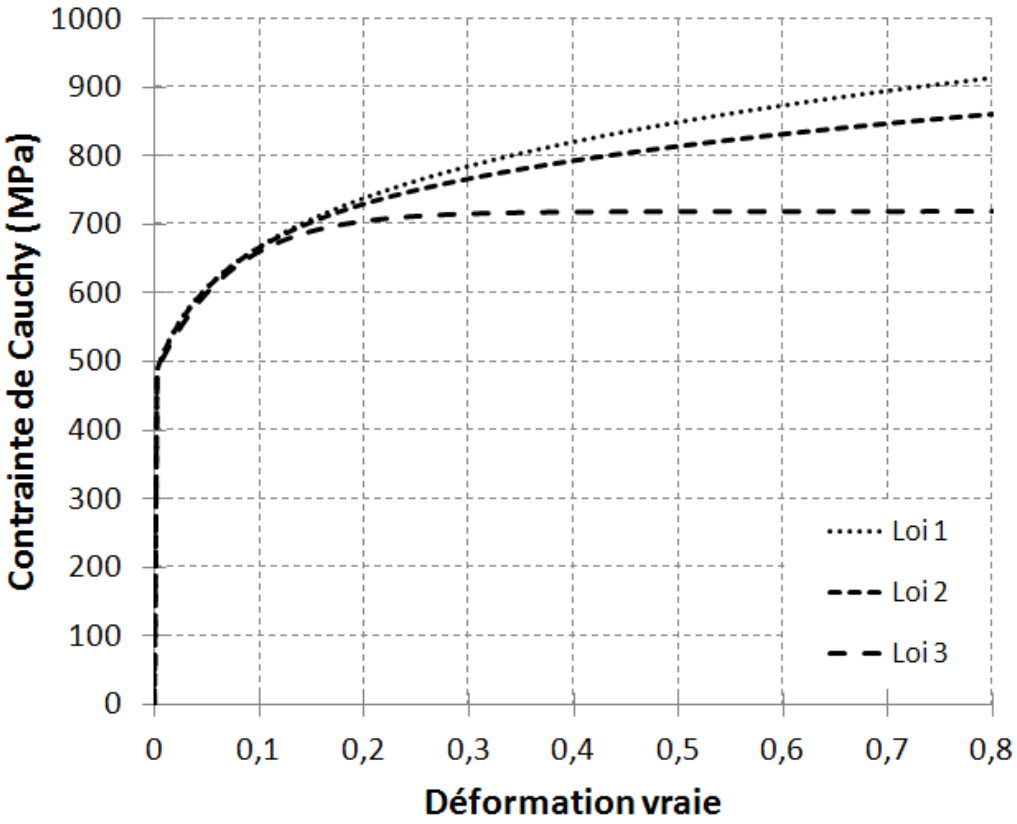


Figure 7.12 : Courbes de comportement en traction uniaxiale de l'acier Ferrite Bainite.

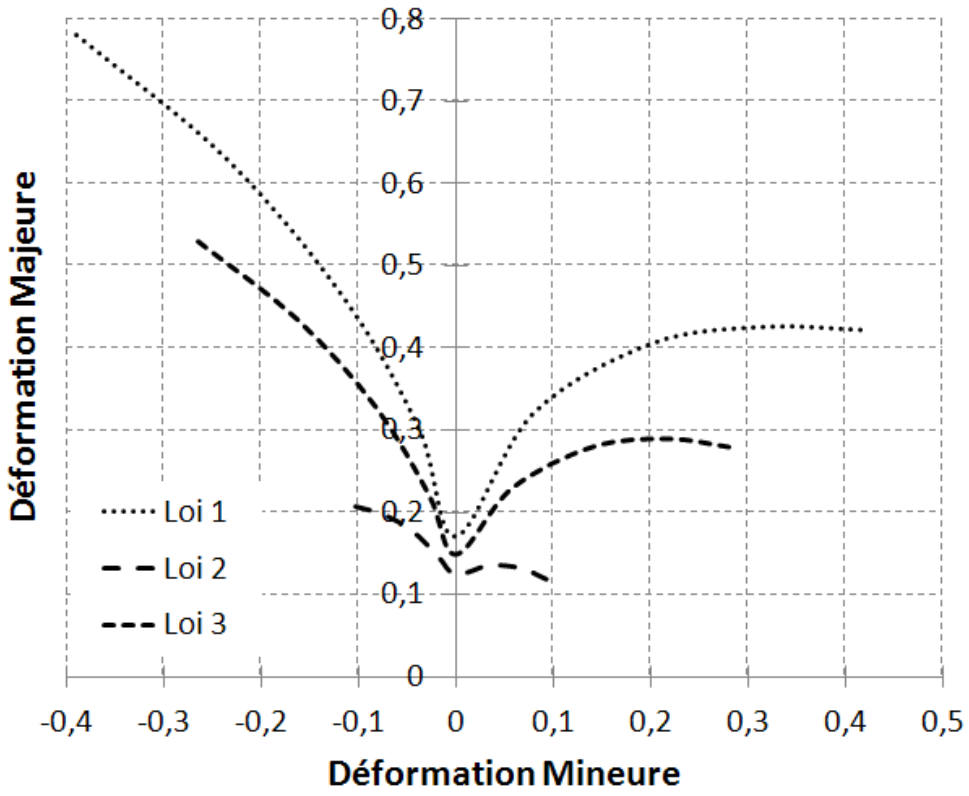


Figure 7.13 : CLF à striction localisée prédites avec le critère d'Analyse Linéaire de Stabilité pour l'acier Ferrite Bainite.

7.4 Conclusion

Alors que les premiers chapitres ont été principalement consacrés à la modélisation théorique des principaux critères de bifurcations et d'instabilités plastiques présents dans la littérature permettant de prévoir les phénomènes de strictions et de localisation des déformations se produisant au cours du chargement de tôles métalliques, ce dernier chapitre a lui été consacré aux applications numériques des critères précédemment étudiés.

Dans un premier temps, la comparaison numérique a été réalisée sur des critères issus d'un même principe théorique. Cette comparaison est donc complémentaire de l'étude théorique pour laquelle les critères ont plutôt été comparés en fonction du mode de bifurcation ou d'instabilité prédit. Dans le cas des critères basés sur le principe de Force Maximum, la simulation numérique permet d'avoir une idée de l'ordre de prédiction des instabilités dans des cas où l'établissement de relations théoriques est délicat à mener. Ainsi, le Critère de Force Maximum, développé pour la striction diffuse, donne les prédictions les plus conservatives. Dans le domaine du retreint, les prévisions des critères de Hill'52 et de Force Maximum Modifié restent relativement proches avec un écart relatif ne dépassant pas 16% entre la traction plane et la traction uniaxiale. Dans le cas du cisaillement simple par contre, seule la prédiction du CFMM est bornée. Le CFMM offre en outre une possibilité d'estimation des limites de formabilité particulièrement peu coûteuse. Le Critère de Force Maximum Etendu, récemment développé, semble donner sur les exemples numériques traités les prédictions les moins conservatives. Dans le cas des critères basés sur l'analyse de bifurcation, la classification théorique des critères est plus aisée et a été proposée dans les chapitres précédents.

Une étude menée dans le cas du projet ANR FORMEF en partenariat avec ArcelorMittal Research et le LaMCoS (Insa de Lyon) a permis de mettre en évidence l'influence du choix de la loi utilisée pour modéliser l'écrouissage et de l'identification des paramètres matériaux sur le niveau de formabilité pour différents critères de localisation et une large gamme de nuances d'aciers. Des écarts relatifs importants sont observés entre une loi d'écrouissage isotrope non saturante de type Swift et une loi saturante de type Voce, pouvant dépasser 100%. Une des raisons semblant pouvoir expliquer ces écarts est liée à l'identification des paramètres matériaux. Avec des méthodes classiques, l'identification n'est possible que dans le domaine au sein duquel la déformation reste homogène dans l'éprouvette. La localisation intervenant bien plus tardivement, les données utilisées pour modéliser le comportement du matériau sont alors basées sur des extrapolations de la relation entre contrainte et déformation qui peuvent s'éloigner de valeurs expérimentales. L'utilisation de tests complémentaires et les avancées récentes des méthodes d'identification par mesure de champs pourraient toutefois constituer des voies prometteuses pour la résolution de ce type de problèmes.

8 Conclusion générale

8.1 Synthèse 144

8.2 Perspectives 145

8.1 Synthèse

Les apparitions de striction diffuse, de striction localisée et de localisation des déformations sous forme de bandes présentant des discontinuités du gradient des vitesses constituent des sources de défauts lors de la mise en forme de structures métalliques minces par emboutissage, qu'il convient donc de prévoir et d'éviter.

Durant ces dernières décennies, de nombreux modèles théoriques ont été développés en parallèle des méthodes expérimentales afin de pouvoir prédire de manière fiable les limites de formage des tôles métalliques. Une étude bibliographique présentée au Chapitre 2 a permis de regrouper les principaux critères existant en cinq catégories : l'approche empirique, les formulations basées sur le Principe de Force Maximum, la méthode multizone, la recherche des conditions de bifurcation et enfin l'analyse de stabilité. Bien que certains des critères issus de ces catégories aient été auparavant utilisés avec succès, l'apparition de nouvelles nuances d'aciers peut remettre en cause leur validité. De plus, face au nombre de critères développés pour prévoir ces phénomènes, il n'est pas aisé pour le concepteur d'effectuer un choix. L'objectif de ce travail était une comparaison des bases théorique des critères afin de mettre en évidence et d'établir les liens pouvant exister entre critères issus d'une même catégorie et entre critères servant à prédire l'apparition d'un même phénomène (striction diffuse, striction localisée ou localisation des déformations sous forme de bandes).

Dans le cas de la striction diffuse, les critères de Bifurcation Générale (Drucker 1950) et de Bifurcation par Point Limite (Valanis 1989) (moins conservatif que le précédent) ont été présentés. Un lien avec le critère diffus du modèle de Cordebois – Ladevèze (Cordebois et Ladevèze 1986) a été rappelé et mis en évidence dans le cas d'un modèle de comportement rigide plastique avec un écrouissage isotrope modélisé par une loi de type puissance. Basé sur le principe de Force Maximum (Considère 1885), le Critère de Force Maximum (Swift 1952) prédit l'apparition de la striction diffuse lorsque les efforts principaux atteignent simultanément leur maximum. Ce critère a été couplé avec un comportement élasto-plastique à base phénoménologique prenant en compte les effets de l'anisotropie initiale et induite, de l'écrouissage isotrope et de l'endommagement. Après une reformulation originale de ce critère dans un cadre tridimensionnel, un lien avec le critère Bifurcation par Point Limite a pu être établi et illustré par le tracé de CLF dans le cas d'un matériau élasto-plastique.

Après la striction diffuse, constituant une borne basse de bifurcation ou d'instabilité plastique, différents modes indésirables peuvent être prédits avant la localisation des déformations sous forme de bandes, constituant une borne haute de bifurcation ou d'instabilité plastique. Dans le cas de matériaux ductiles, un amincissement peut apparaitre dans une bande avant la déchirure de la tôle. Le critère de Hill (Hill 1952) permet de prédire ce mode de striction localisée. Le lien avec le critère localisé de Cordebois – Ladevèze a été précisé. D'autres critères basés sur le principe de Force Maximum ont été développés plus récemment pour la prédiction de modes localisés. Le Critère de Force Maximum Modifié (Hora et al. 1996), permettant de prendre en compte les effets du trajet de chargement, est couramment utilisé en recherche et en industrie. La comparaison des critères de Considère, de Swift, de Hill et de Hora a pu être menée à partir de formules analytiques obtenues dans le cadre du modèle de comportement rigide plastique simplifié combinant un écrouissage isotrope de type Hollomon

et une surface de charge de von Mises. Basé sur le CFM, le critère de Force Maximum Etendu (Mattiasson et al. 2006) permet de prendre en compte l'évolution du trajet de chargement après la striction diffuse jusqu'à la localisation. La comparaison numérique de CLF issues de ces critères permet d'établir une classification de ces critères suivant l'ordre d'apparition des modes diffus ou localisés prédits. Une application dans le cas d'un comportement élasto-plastique est proposée au Chapitre 7.

La localisation des déformations sous forme de bandes présentant des discontinuités du gradient des vitesses constitue un précurseur de la rupture des tôles métalliques. Dans le cas de matériaux élasto-plastiques adoucissants, elle peut être prédite à l'aide du critère de Perte d'Ellipticité (Rice 1976). Le modèle de M – K (Marciniak et Kuczyński 1967) est basé sur la méthode multizone. La localisation des déformations se produit dans une bande présentant un défaut initial. Une reformulation tridimensionnelle du modèle M – K a permis d'établir le lien théorique entre ce modèle et le critère de PE. Les prédictions du modèle à deux zones, plus conservatives que celles de Rice, tendent vers celles-ci lorsque la taille du défaut initiale tend vers zéro (absence de défaut). Ce résultat théorique original a été illustré par des CLF numériques.

L'ensemble des observations théoriques précédentes a pu être vérifié à l'aide d'un outil de simulation numérique des courbes rhéologiques et des courbes limites de formage entièrement conçu et programmée sous Matlab dans le cadre de ce projet. Le programme permet le tracé de CLF pour chacun des critères cités précédemment pour des modèles de matériaux à base phénoménologique allant du cas rigide plastique simple au cas élasto-plastique prenant en compte les effets de l'anisotropie initiale, des écrouissages combinés et de l'endommagement. Une étude réalisée avec ce logiciel dans le cadre du projet ANR FORMEF (Réseau National Matériaux et Procédés) en partenariat avec ArcelorMittal et le LaMCoS, dont certains résultats sont proposés au Chapitre 7, permet de mettre en évidence l'influence du choix de la loi d'écrouissage sur les CLF pour différents critères sur une large gamme de nuances d'aciers.

8.2 Perspectives

Après les conclusions issues des principaux résultats obtenus et détaillés dans ce mémoire, différentes perspectives peuvent être identifiées. Elles seront classées suivant trois points de vue : théorique, numérique et expérimental.

Au-delà des objectifs théoriques initiaux atteints, certaines voies complémentaires peuvent sembler intéressantes. La prédiction fiable de CLF passe par l'utilisation de critères de localisation adéquats mais aussi par une modélisation fine du comportement du matériau. La prise en compte de modèles à bases phénoménologiques avancés ou à bases physiques semble une voie d'amélioration des prévisions de limites de formabilité. Avant d'aller plus loin dans ce sens, certaines hypothèses simplificatrices mais non nécessaires ont été utilisées lors de la formulation des critères, notamment le choix de chargement dans les axes d'anisotropie. La levée de ces hypothèses augmenterait la généralité des résultats. D'autre part, la comparaison

des bases de critères de striction et de localisation pourrait être enrichie par la prise en compte de critères récents, comme le Through Thickness Instability Shear Criterion (Brunet et Clerc 2007). La poursuite des travaux concernant le développement de critères basés sur les méthodes d'analyse de stabilité constituent un autre axe.

D'un point de vue numérique, les temps de calculs nécessaires pour certains critères (M – K, PE et ALS notamment) peuvent être importants, ce qui constitue encore une limite à leur utilisation industrielle. L'optimisation du code, le passage d'un schéma d'intégration explicite à des schémas implicites, la parallélisation et l'utilisation des nouvelles possibilités offertes par les GPU permettraient une réduction importante du coût CPU de ces critères, ouvrant la voie à leur utilisation dans des codes de calcul par éléments finis pour la simulation d'opérations d'emboutissage sur des pièces réelles.

La validation des modèles théoriques et numériques passe aussi par une confrontation des résultats avec des CLF expérimentales. Certaines difficultés liées à un manque de normalisation des procédures expérimentales conduisent toutefois à une dispersion des résultats, limitant les possibilités de comparaison entre les résultats numériques et les résultats expérimentaux. L'obtention de résultats numériques requiert d'autre part la connaissance des paramètres matériaux. L'identification de ces paramètres jusqu'à la localisation reste un sujet ouvert.

Bibliographie

Abed-Meraim, F. (1999a). Conditions suffisantes de stabilité pour les solides visqueux. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, 327, Série II b, 25-31.

Abed-Meraim, F. (1999b). Quelques problèmes de stabilité et de bifurcation des solides visqueux. PhD Thesis, Ecole Polytechnique, Palaiseau.

Abed-Meraim, F. (2009). Contributions à la prédiction d'instabilités de type structure et matériau : modélisation de critères et formulation d'éléments finis adaptés à la simulation des structures minces. Mémoire d'HDR, Université de Metz, Metz.

Altmeyer, G., Abed-Meraim, F. et Balan, T. (2008). Comparison of forming limit diagrams predicted with different localization criteria. *Steel Research International*, 79, 24–31.

Altmeyer, G., Abed-Meraim, F. et Balan, T. (2009). Modélisation de critères de localisation : prédiction de l'orientation des bandes de localisation et tracé de courbes limites de formage. Proceedings of *19th CFM*, Marseille.

Altmeyer, G., Abed-Meraim, F. et Balan, T. (2010). Investigation of some localization criteria and their relevance to the prediction of forming limit diagrams. Proceedings of *13th International Conference on Metal Forming*.

Aretz, H. (2004). Numerical restrictions of the modified maximum force criterion for prediction of forming limits in sheet metal forming. *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering*, 12(4), 677-692.

Aretz, H. (2007). Numerical analysis of diffuse and localized necking in orthotropic sheet metals. *International Journal of Plasticity*, 23(5), 798-840.

Banabic, D., Comsa, S., Jurco, P., Cosovici, G., Paraianu, L. et Julean, D. (2006). FLD theoretical model using a new anisotropic yield criterion. *Journal of Materials Processing Technology*, 157-158, 23-27.

Banabic, D. et Dannenmann, E. (2001). Prediction of the influence of yield locus on the limit strains in sheet metals. *Journal of Materials Processing Technology*, 109, 9-12.

Banabic, D., Kuwabara, T., Balan, T., Comsa, D. S. et Julean, D. (2003). Non-quadratic yield criterion for orthotropic sheet metals under plane-stress conditions. *International Journal of Mechanical Science*, 45, 797-811.

Banabic, D. et Vos, M. (2007). Modelling of the Forming Limit Band - A new Method to Increase the Robustness in the Simulation of Sheet Metal Forming Processes. *CIRP Annals - Manufacturing Technology*, 56(1), 249-252.

Barbier, G., Benallal, A. et Cano, V. (1998). Relation théorique entre la méthode de perturbation linéaire et l'analyse de bifurcation pour la prédiction de la localisation des déformations. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series IIB*, 326(3), 153-158.

Barlat, F., Aretz, H., Yoon, J. W., Karabin, M. E., Brem, J. C. et Dick, R. E. (2005). Linear transformation-based anisotropic yield functions. *International Journal of Plasticity*, 21, 1009-1039.

Barlat, F., Lege, D. J. et Brem, J. C. (1991). A six-component yield function for anisotropic materials. *International Journal of Plasticity*, 7(7), 693-712.

Ben Ayed, L., Delamézière, A. et Batoz, J. L. (2005). Influence des critères de rupture dans le cadre de l'optimisation du procédé d'emboutissage des tôles. Proceedings of *17ème Congrès Français de Mécanique*, Troyes.

Ben Tahar, M. (2005). Contribution à l'étude et la simulation du procédé l'hydroformage. PhD Thesis, ENSMP, Nice.

Benallal, A. (2000). Perturbation and stability of rate-dependent solids. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 19 (special issue), 45-60.

Benallal, A. et Comi, C. (2002). Material instabilities in inelastic saturated porous media under dynamic loadings. *International Journal of Solids and Structures*, 39(13-14), 3693-3716.

Benallal, A. et Comi, C. (2003). Perturbation growth and localization in fluid-saturated inelastic porous media under quasi-static loadings. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 51(5), 851-899.

Berg, H., Hora, P., Feurer, U. et Reissner, J. (1998). Improved experimental and numerical description of the yielding behaviour of sheet material. Proceedings of *6th International Conference on Sheet Metal*, 355-364.

Bigoni, D. et Hueckel, T. (1991). Uniqueness and localization – associative and non-associative elastoplasticity. *International Journal of Solid and Structures*, 28(2), 197-213.

Bleck, W., Deng, Z., Papamantellos, K. et Gusek, C. O. (1998). A comparative study of the forming-limit diagram models for sheet steels. *Journal of Materials Processing Technology*, 83, 223-230.

Boudeau, N. (1995). Prédiction des instabilités élasto-plastiques locales. Application à l'emboutissage. PhD Thesis, Université de Franche-Comté.

Boudeau, N. et Gelin, J. C. (1994). Prediction of the localized necking in 3D sheet metal forming processes from FE simulations. *Journal of Materials Processing Tech.*, 45(1-4), 229-235.

Boudeau, N., Gelin, J. C. et Salhi, S. (1998). Computational prediction of the localized necking in sheet forming based on microstructural material aspects. *Computational Materials Science*, 11(1), 45-64.

Boumaiza, S. (2005). Prédiction des instabilités au cours de l'hydroformage des tubes. PhD Thesis, Insa de Lyon, Lyon.

Bragard, A., Baret, J. C. et Bonnarens, H. (1972). A simplified technique to determine the FLD at the onset of necking. *IDDRG*.

Bridgman, P. W. (1952). *Studies in large plastic flow and fracture*, McGraw-Hill, New York.

Brunet, M. et Clerc, P. (2007). Two prediction methods for ductile sheet metal failure. In: *Proceedings of the 10th ESAFORM Conference*, Zaragoza, 297-302.

Brunet, M., Mguil, S. et Morestin, F. (1998). Analytical and experimental studies of necking in sheet metal forming processes. *Journal of Materials Processing Technology*, 80-81, 40-46.

Brunet, M. et Morestin, F. (2001). Experimental and analytical necking studies of anisotropic sheet metals. *Journal of Materials Processing Technology*, 112(2-3), 214-226.

Butuc, M. C. (2004). Forming limit diagrams. Definition of plastic instability criteria. PhD Thesis, University of Porto, Porto.

Butuc, M. C., Rocha, A. B. d., Gracio, J. J. et Duarte, J. F. (2002). A more general model for forming limit diagrams prediction. *Journal of Materials Processing Technology*, 125-126, 213-218.

Cano, V. (1996). Instabilité et rupture dans les solides élastoviscoplastiques. PhD Thesis, ENS Cachan - Paris VI, Paris.

Cao, J., Yao, H. et Karafillis, A. (2000). Prediction of localized thinning in sheet metal using a general anisotropic yield criterion. *International Journal of Plasticity*, 16, 1105-1129.

Cayssials, F. (1998). A new method for predicting FLC. In: *IDDRG 1998*, Bruxelles, Belgique, 443-454.

Chambon, R. (1986). Bifurcation par localisation en bande de cisaillement, une approche avec des lois incrémentalement non linéaires. *Journal de Mécanique Théorique et Appliquée*, 5, 277-298.

Clifton, R. J., Duffy, J., Hartley, K. A. et Shawki, T. G. (1984). On critical conditions for shear band formation at high strain rates. *Scripta Metallurgica*, 18(5), 443-448.

Col, A. (2010). *L'emboutissage des aciers*, Dunod.

Considère, A. (1885). Mémoire sur l'emploi du fer et de l'acier dans les constructions. *Annales des Ponts et Chaussées*, 9, 574.

Cordebois, J. P. (1983). Critères d'instabilité plastique et endommagement ductile en grandes déformations. Thèse de Doctorat d'Etat, Université de Paris 6, Cachan.

Cordebois, J. P. et Ladevèze, P. (1984). Détermination et étude des courbes limites d'emboutissage des tôles minces. *Mémoires Scientifiques de la Revue de Métallurgie*, 81(1), 19-28.

Cordebois, J. P. et Ladevèze, P. (1986). Sur la prévision des courbes limites d'emboutissage. *Journal de Mécanique Théorique et Appliquée*, 5(3), 341-370.

Darve, F. (1994). Stability and uniqueness in geomaterials constitutive modelling. In: *Localisation and Bifurcation Theory for Soils and Rock*, Rotterdam, 73-88.

Desrues, J. (1984). La localisation de la déformation dans les matériaux granulaires. PhD Thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble, Grenoble.

Diouta, N. G. et Shahrour, I. (2006). A full 3-D material stability analysis of a classical elasto-plastic medium through a linear perturbation approach. *European Physical Journal of Applied Physics*, 34, 85-96.

Doghri, I. et Billardon, R. (1995). Investigation of localization due to damage in elasto-plastic materials. *Mechanics of Materials*, 19(2-3), 129-149.

Drucker, D. C. (1950). Some implications of work hardening and ideal plasticity. *Quarterly of Applied Mathematics*, 7, 411-418.

Drucker, D. C. (1956). On uniqueness in the theory of plasticity. *Quart. Appl. Math.*, 14, 35-42.

Dudzinski, D. et Molinari, A. (1991). Perturbation analysis of thermoviscoplastic instabilities in biaxial loading. *International Journal of Solids and Structures*, 27(5), 601-628.

Eyckens, P., Bael, A. V. et Houtte, P. V. (2009). Marciniak-Kuczynski type modelling of the effect of Through-Thickness Shear on the forming limits of sheet metal. *International Journal of Plasticity*, 25, 2249-2268.

Franz, G., Abed-Meraim, F., Lorrain, J. P., Ben Zineb, T., Lemoine, X. et Berveiller, M. (2009). Ellipticity loss analysis for tangent moduli deduced from a large strain elastic-plastic self-consistent model. *International Journal of Plasticity*, 25(2), 205-238.

Fressengeas, C. et Molinari, A. (1987). Instability and localization of plastic flow in shear at high strain rates. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 35(2), 185-211.

Garrigues, J. (2007). *Fondements de la mécanique des milieux continus*, Hermes - Lavoisier.

Ghosh, A. K. (1974). Strain localization in the diffuse neck in sheet metal *Metallurgical and Materials Transactions B*, 5(7), 1607-1616.

Gurson, A. L. (1977). Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth: Part 1 - yield criteria and flow rules for porous ductile media. *Journal of Engineering Materials and Technology, Transactions of the ASME*, 99 Ser H(1), 2-15.

Habbad, M. (1994). Instabilités plastiques en elasto-plasticité anisotrope et grandes déformations. PhD Thesis, Ecole Centrale de Lyon, Lyon.

Hadamard, J. (1903). *Leçons sur la propagation des ondes et les équations de l'hydrodynamique*.

Haddag, B. (2007). Contribution à la mise en forme des tôles métalliques : application au retour élastique et à la localisation. PhD Thesis, ENSAM, Metz.

Haddag, B., Abed-Meraim, F. et Balan, T. (2009). Strain localization analysis using a large deformation anisotropic elastic-plastic model coupled with damage. *International Journal of Plasticity*, 25(10), 1970-1996.

Hart, E. W. (1967). Theory of the tensile test. *Acta Metallurgica*, 15(2), 351-355.

Hill, R. (1952). On discontinuous plastic states, with special reference to localized necking in thin sheets. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1(1), 19-30.

Hill, R. (1957). On uniqueness and stability in the theory of finite elastic strain. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 5(4), 229-241.

Hill, R. (1958). A general theory of uniqueness and stability in elastic-plastic solids. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 6(3), 236-249.

Hill, R. (1962). Acceleration waves in solids. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 10, 1-16.

Hill, R. (1979). Theoretical plasticity of textured aggregates. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 85, 179-191.

Hill, R. (2000). Plastic anisotropy and the geometry of yield surfaces in stress space. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 48(6-7), 1093-1106.

Hill, R. (2001). On the mechanics of localized necking in anisotropic sheet metals. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 49(9), 2055-2070.

Hill, R. et Hutchinson, J. W. (1975). Bifurcation phenomena in the plane tension test. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 23, 239-264.

Hiroi, T. et Nishimura, H. (1997). The influence of surface defects on the forming-limit diagram of sheet metal. *Journal of Materials Processing Technology*, 72, 102-109.

Hora, P., Longchang, T. et Reissner, J. (1994). Prediction methods for ductile sheet metal failure using FE-simulation. Proceedings of *IDDRG'94*.

Hora, P. et Tong, L. (2006a). Numerical prediction of FLC using the Enhanced Modified Maximum Force Criterion (EMMFC). Proceedings of *FLC Zurich 2006*.

Hora, P. et Tong, L. (2006b). Prediction of forming limits in virtual sheet metal forming - Yesterday, today and tomorrow. Proceedings of *FLC Zurich 2006*.

Hora, P., Tong, L. et Reissner, J. (1996). A prediction method of ductile sheet metal failure in FE simulation. Proceedings of *Numisheet 1996*, 252-256.

Hutchinson, J. W. et Neale, K. W. (1978). Sheet Necking-I. Validity of plane stress assumption of the long-wave length approximation. In: *Mechanics of Sheet Metal Forming*, K. a. Wang, Plenum Press, New York, 127-153.

Kachanov, L. M. (1986). *Introduction to continuum damage mechanics*. Dordrecht.

Keeler, S. P. et Backhofen, W. A. (1963). Plastic instability and fracture in sheets stretched over rigid punches. *Transactions of the American Society of Mechanical Engineers*, 56, 25-48.

Keeler, S. P. et Brazier, W. G. (1975). Relationship between Laboratory Material Characterization and Press-Shop Formability. *Microalloying*, 75, 517-530.

Keryvin, V. (1999). Contribution à la modélisation de l'endommagement localisé. PhD Thesis, University of Poitiers, Poitiers.

Knockaert, R. (2001). Etude expérimentale et numérique de la localisation de la déformation lors de la mise en forme de produits minces. PhD Thesis, ENSMP, Nice.

Kuroda, M. et Tvergaard, V. (2000). Forming limit diagrams for anisotropic metal sheets with different yield criteria. *International Journal of Solids and Structures*, 37(37), 5037-5059.

Lejeune, A. (2002). Modélisation et simulation de striction et de plissement en emboutissage de tôles minces et hydroformage de tubes minces. PhD Thesis, Besançon.

Lejeune, A., Boudeau, N. et Gelin, J. C. (2003). Influence of material and process parameters on bursting during hydroforming process. *Journal of Materials Processing Technology*, 143-144(1), 11-17.

Lemaitre, J. (1985). Continuous damage mechanics model for ductile fracture. *Journal of Engineering Materials and Technology, Transactions of the ASME*, 107(1), 83-89.

Lemaitre, J. (1992). *A Course on Damage Mechanics*.

Lemaitre, J. et Chaboche, J. L. (1990). *Mechanics of Solid Materials*, Cambridge University Press.

Lorrain, J. P., Ben Zineb, T., Abed-Meraim, F. et Berveiller, M. (2005). Ductility loss modelling for BCC single crystals. *International Journal of Forming Processes*, 8(2/3), 135-158.

Lyapunov, A. M. (1904). Sur la stabilité des figures ellipsoïdales d'équilibre d'un liquide animé d'un mouvement de rotation. *Annales de la faculté des sciences de Toulouse*, 6(1), 5-116.

Lyapunov, A. M. (1907). Problème général de la stabilité du mouvement. *Annales de la faculté des sciences de Toulouse*, 9(2), 203-474.

Mandel, J. (1964). Condition de stabilité et postulat de Drucker. Proceedings of *IUTAM Symposiuym, Rhéologie et Mécanique des Sols*, Grenoble.

Marciniak, Z., Duncan, J. L. et Hu, S. J. (2002). *Mechanics of Sheet Metal Forming*, Butterworth-Heinemann, London.

Marciniak, Z. et Kuczyński, K. (1967). Limit Strains in the Processes of Stretch-Forming Sheet Metal. *International Journal of Mechanical Sciences*, 9(9), 613-620.

Marron, G., Moinier, L., Patou, P. et Celeski, J. C. (1997). A new necking criterion for the forming limit diagrams. *Revue de Metallurgie, Cahiers d'Informations Techniques*, 94(6), 837-845.

Mattiasson, K., Sigvant, M. et Larson, M. (2006). Methods for forming limit prediction in ductile metal sheets. Proceedings of *IDDRG 2006*, Porto, 1-9.

Mazière, M. (2007). Eclatement des disques de turbomachines. PhD Thesis, ENSMP, Evry.

Mesrar, R., Fromentin, S., Makkouk, R., Martiny, M. et Ferron, G. (1998). Limits to the ductility of metal sheets subjected to complex strain-paths. *International Journal of Plasticity*, 14(4-5), 391-411.

Molinari, A. (1985). Instabilité thermoviscoplastique en cisaillement simple. *Journal de Mécanique Théorique et Appliquée*, 4(5).

Molinari, A. (1988). Shear band analysis. *Diffusion and defect data*, 3-4, 447-468.

Molinari, A. et Clifton, R. J. (1983). Localisation de la déformation viscoplastique en cisaillement simple : résultats exacts en théorie non linéaire. *Compte Rendu de l'Académie des Sciences*, 296, Série II, 1-4.

Mouric, L. (2002). Prévision de la striction des tôles élastoplastiques anisotropes embouties. PhD Thesis, ENS Cachan, Cachan.

Nakazima, K. et Kikuma, T. (1971). Effects of the deforming conditions and mechanical properties on the stretch forming of steel sheets. *Trans. Iron and steel Institute of Japan*, 11, 827-839.

Nakazima, K., Kikuma, T. et Hasuka, K. (1968). Study on the formability of steel sheets. *Yamata technical report*, 264, 8517-8530.

Needleman, A. et Rice, J. R. (1978). *Mechanics of sheet metal forming*. Plenum Press, New-York.

Needleman, A. et Tvergaard, V. (1977). Necking of biaxially stretched elastic-plastic circular plate. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 25, 159-183.

Neilsen, M. K. et Schreyer, H. L. (1993). Bifurcations in elastic-plastic materials. *International Journal of Solids and Structures*, 30(4), 521-544.

Pierre, P. (1990). Critères d'instabilité plastique. Influence de gradients de contraintes dans l'épaisseur des tôles embouties. PhD Thesis, Université de Paris 6, Paris.

Rabotnov, Y. N. (1969). *Creeps problems in structural members*. North-Holland Publishing Company, Amsterdam.

Reyes, A., Hopperstad, O. S., Berstad, T. et Lademo, O. G. (2008). Prediction of necking for two aluminium alloys under non-proportional loading by using an FE-based approach. *International Journal of Material Forming*, 1(4), 211-232.

Rice, J. R. (1976). The localization of plastic deformation. In: *14th IUTAM Congress*, Koiter, ed., Amsterdam.

Rougée, P. (1997). *Mécanique des grandes transformations*, Springer, Cachan.

Rudnicki, J. W. et Rice, J. R. (1975). Conditions for the localization of deformation in pressure-sensitive dilatant materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 23(6), 371-394.

Shawki, T. G. et Clifton, R. J. (1989). Shear band formation in thermal viscoplastic materials. *Mechanics of Materials*, 8(1), 13-43.

Sidoroff, F. (1981). Formulations élastoplastiques en grandes déformations. *Rapport G.R.E.C.O. N°29.*

Sidoroff, F. (1982). Cours sur les grandes déformations. *Rapport G.R.E.C.O. N°51*.

Stören, S. et Rice, J. R. (1975). Localized necking in thin sheets. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 23(6), 421-441.

Sulem, J. et Vardoulakis, I. (1990). Bifurcation analysis of the triaxial test on rock specimens. *Acta mechanica*, 83, 195 – 212.

Swift, H. W. (1952). Plastic instability under plane stress. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1(1), 1-18.

Thomas, T. Y. (1961). *Plastic flow and fracture in solids*, Academic Press, New York.

Tong, L., Hora, P. et Reissner, J. (2002). Prediction of forming limit with nonlinear deformation paths using Modified Maximum Force Criterion. Proceedings of *Numisheet'2002*.

Toth, L. S., Dudzinski, D. et Molinari, A. (1996). Forming limit predictions with the perturbation method using stress potential functions of polycristal viscoplasticity. *International Journal of Mechanical Sciences*, 38(8-9), 805-824.

Tvergaard, V. et Needleman, A. (1984). Analysis of the cup-cone fracture in a round tensile bar. *Acta Metallurgica*, 32(1), 157-169.

Valanis, K. C. (1989). Banding and stability in plastic materials. *Acta Mechanica*, 79(1-2), 113-141.

MODELISATION THEORIQUE ET NUMERIQUE DES CRITERES D'INSTABILITE PLASTIQUE. APPLICATION A LA PREDICTION DES PHENOMENES DE STRICTION ET DE LOCALISATION LORS D'OPERATIONS D'EMBOUTISSAGE

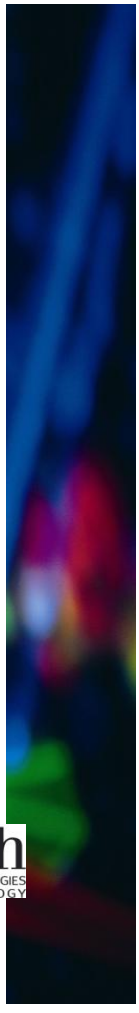
RESUME : L'objectif est d'apporter une contribution à la prédiction des phénomènes de striction et de localisation sous forme de bandes par la modélisation des critères d'instabilité plastique, par la comparaison de leurs bases théoriques et par le tracé de Courbes Limites de Formage (CLF) numériques. Une étude bibliographique permet de distinguer quatre approches principales : le principe de force maximum, l'analyse de bifurcation, l'analyse linéaire de stabilité et les méthodes multizones. Afin de permettre une comparaison, les principaux critères sont réécrits dans un cadre commun. Pour la striction diffuse, un rapprochement entre les critères de force maximum et de bifurcation par point limite est proposé. Pour la localisation, les prédictions de CLF obtenues avec le modèle M – K tendent vers celles du critère de Rice lorsque la taille du défaut initial tend vers zéro. Des tracés de CLF illustrent ces résultats et mettent en évidence l'influence du choix de la loi d'écrouissage sur les CLF.

Mots clés : striction diffuse, striction localisée, localisation, bifurcation plastique, instabilité plastique, Courbe Limite de Formage.

THEORETICAL AND NUMERICAL MODELLING OF PLASTIC INSTABILITY CRITERIA. APPLICATION TO THE PREDICTION OF NECKING AND LOCALISATION PNENOMENA DURING DEEP-DRAWING OPERATIONS

ABSTRACT : The aim of this work is to contribute to the prediction of diffuse necking, localized necking and localization by the comparison of the theoretical basis of plastic instability criteria and by the numerical simulation of Forming Limit Diagrams. Four main categories of criteria may be distinguished. They are based on the maximum force principle, on the bifurcation analysis, on the stability analysis or on the multizone method. To allow a comparison, main criteria are then rewritten in a common frame. For diffuse necking, a theoretical relation is established between the force maximum criterion (MFC) and limit point bifurcation criterion. For localization, the predictions obtained with Marciniak – Kuczynski model tend to Rice criterion when M – K initial defect tends to zero. Some elements of comparison of plastic instability criteria are given by numerical simulation of FLD. The influence of the choice of hardening laws and their identification is highlighted.

Keywords : diffuse necking, localized necking, localization, plastic bifurcation, plastic instability, Forming Limit Diagram.



ARTS ET MÉTIERS ParisTech

ParisTech INSTITUT DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES PARIS INSTITUTE OF TECHNOLOGY