

Physique néoclassique pour la génération de courant dans les plasmas de tokamaks

François-Xavier Duthoit

▶ **To cite this version:**

François-Xavier Duthoit. Physique néoclassique pour la génération de courant dans les plasmas de tokamaks. Physique des plasmas [physics.plasm-ph]. Ecole Polytechnique X, 2012. Français. NNT : . pastel-00708795

HAL Id: pastel-00708795
https://pastel.hal.science/pastel-00708795

Submitted on 15 Jun 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Association Euratom-CEA
Institut de Recherche sur la Fusion par confinement Magnétique
CEA/DSM/IRFM/SCCP/GSEM
F-13118 Saint-Paul-lez-Durance cedex
France

École Polytechnique
Graduate School
91128 Palaiseau cedex
France

Physique néoclassique pour la génération de courant dans les plasmas de tokamaks

Thèse présentée devant

la Graduate School de l'École polytechnique

pour obtenir le grade de

Docteur (spécialité Physique et Applications)

par

François-Xavier Duthoit

soutenue le 15 mars 2012 devant le jury composé de

Jean-Marcel Rax	Professeur	Président du Jury
Yves Peysson	Professeur	Directeur de Thèse
Dominique Escande	Directeur de Recherches	Rapporteur
Laurent Villard	Professeur	Rapporteur
Vladimir Krasnoselskikh	Directeur de Recherches	
Pierre-Louis Sulem	Directeur de Recherches	
Alain Brizard	Professeur	
Joan Decker	Docteur	

Résumé

Le formalisme de la transformation de Lie est appliqué à la dynamique des particules chargées dans la topologie magnétique d'un tokamak, afin de construire un opérateur de type Fokker-Planck pour les collisions coulombiennes utilisable pour la génération de courant. Cette approche permet de réduire le problème à trois dimensions (deux dans l'espace des vitesses, une dans l'espace des configurations) tout en gardant la richesse des effets croisés entre les espaces résultant de la conservation du moment canonique toroïdal (axisymétrie). Cette approche cinétique permet de décrire des phénomènes physiques liés à la présence de forts gradients de pression dans des plasmas de forme quelconque, comme le courant « bootstrap » dont le rôle sera primordial pour le futur réacteur ITER. Le choix des coordonnées et la méthode utilisée sont particulièrement adaptés à la résolution numérique de l'équation de dérive cinétique permettant de calculer la distribution des particules, celle-ci pouvant présenter un fort écart à la maxwellienne sous l'effet d'un champ électrique (statique ou produit par une onde radio-fréquence). Les travaux dédiés principalement à la physique des plasmas de tokamak ont été étendus à ceux des plasmas de l'espace relevant d'une configuration magnétique dipolaire.

Abstract

The Lie transform formalism is applied to charged particle dynamics in tokamak magnetic topologies, in order to build a Fokker-Planck type operator for Coulomb collisions usable for current drive. This approach makes it possible to reduce the problem to three dimensions (two in velocity space, one in real space) while keeping the wealth of phase-space cross-term coupling effects resulting from conservation of the toroidal canonical momentum (axisymmetry). This kinetic approach makes it possible to describe physical phenomena related to the presence of strong pressure gradients in plasmas of an unspecified form, like the bootstrap current which role will be paramount for the future ITER machine. The choice of coordinates and the method used are particularly adapted to the numerical resolution of the drift kinetic equation making it possible to calculate the particle distributions, which may present a strong variation with respect to the Maxwellian under the effect of an electric field (static or produced by a radio-frequency wave). This work, mainly dedicated to plasma physics of tokamaks, was extended to those of space plasmas with a magnetic dipole configuration.

Remerciements

Ce manuscrit de thèse marque l'aboutissement de trois ans de travail riche en expériences. J'aimerais prendre le temps de remercier chaleureusement plusieurs personnes qui ont contribué de près ou de loin à cette aventure :

Tout d'abord, mon directeur de thèse Yves Peysson qui s'est montré attentif et compétent dans l'accompagnement de ces trois ans, tant dans son appréciation scientifique des calculs que dans le suivi humain.

Que soient aussi remerciés les membres du jury qui ont bien voulu faire don de leur temps afin d'évaluer et valider les travaux dans un contexte scientifique en pleine mutation.

Je souhaite saluer les membres de l'école doctorale de l'École polytechnique qui ont su fournir un cardre administratif dépourvu de lourdeurs et soucieux du bien de chacun.

Pour les collaborateurs proches, j'aimerais citer Alain Brizard pour sa pédagogie dans l'enseignement des transformées de Lie et sa présence pendant plusieurs mois malgré un calendrier d'enseignement chargé, ainsi que Joan Decker pour son expertise et ses bonnes remarques physiques.

La liste des thésards et postdocs dont j'ai apprécié la compagnie est longue ; aussi je ne citerai que les prénoms. Tout d'abord, la « vieille garde » : Alessandro, Christine, Emiel, Frédéric, Guilhem et Stanislas, vraies mines de conseils qui m'ont précédé dans l'acte. Ensuite, les « réguliers » avec lesquels le contact a été le plus long : Antoine (les deux !), Aurélien, David, Jérémie, Marc, Mélanie, Tom. Enfin, les « petits nouveaux » : Farah, Feng, François, Grégoire, Jonathan, Thomas et Timothée qui m'ont montré qu'on pouvait encore apprendre des choses même après trois années de présence.

L'encadrement administratif d'Alain Bécoulet, puis de Xavier Litaudon ainsi que Tuong Hoang pour les publications scientifiques a été très apprécié, il s'est révélé le fidèle reflet d'une équipe de l'IRFM disponible, attachée à connaître le travail de chacun. J'aimerais aussi remercier toutes les personnes du premier étage du bâtiment 513 que je n'ai pas pu citer ici, car ils ont tous été une belle contribution à une ambiance conviviale et chaleureuse.

Une pensée toute particulière pour ma famille qui a fourni un support moral important pendant la rédaction du manuscrit, constitué de paroles encourageantes et de simple disponibilité. J'aimerais aussi saluer les conseils d'Isabelle Secousse lors de nos conversations qui ont été capitaux dans la dernière ligne droite.

Enfin, j'aimerais remercier le lecteur pour sa patience et son courage dans la lecture de cette thèse.

Table des matières

Table des matières iv

Liste des tableaux ix

Table des figures x

Liste des symboles xi

1 Introduction 1
- 1.1 Contexte de la fusion nucléaire . . . 1
- 1.2 Plan de thèse . . . 3

2 Configuration magnétique et trajectoires des particules 5
- 2.1 Préambule : composantes d'un vecteur . . . 5
- 2.2 Configuration magnétique . . . 6
  - 2.2.1 Coordonnées spatiales . . . 6
    - 2.2.1.1 Coordonnées quasi-cylindriques . . . 6
    - 2.2.1.2 Coordonnées de flux . . . 6
    - 2.2.1.3 Jacobien spatial . . . 7
  - 2.2.2 Espace des vitesses . . . 7
    - 2.2.2.1 Coordonnées « pitch-angle » de vitesse . . . 7
    - 2.2.2.2 jacobien de l'espace des vitesses . . . 8
- 2.3 Orbites de particules . . . 9
  - 2.3.1 Rotation cyclotronique . . . 9
  - 2.3.2 Mouvement longitudinal . . . 9
  - 2.3.3 Invariant axisymétrique . . . 10
- 2.4 Coordonnées globales . . . 10
  - 2.4.1 Invariants d'orbite . . . 10
  - 2.4.2 jacobien . . . 11
  - 2.4.3 Moyenne d'orbite . . . 12
- 2.5 Résumé du chapitre . . . 13

3 Théorie cinétique des plasmas magnétisés 15
- 3.1 Distributions, equation de Liouville . . . 15
  - 3.1.1 Description statistique de l'évolution d'un système à N particules . . . 15
  - 3.1.2 Hiérarchie BBGKY . . . 16
- 3.2 Approche hamiltonnienne, réduction de l'espace des phases . . . 17
  - 3.2.1 Formalisme Lagrangien . . . 18
    - 3.2.1.1 Principe de Hamilton, équations d'Euler-Lagrange . . . 18
    - 3.2.1.2 Lagrangien pour une particule . . . 19
  - 3.2.2 Formalisme hamiltonien, coordonnées canoniques . . . 20
    - 3.2.2.1 Equations d'évolution . . . 20
    - 3.2.2.2 Invariants . . . 21
    - 3.2.2.3 1-forme lagrangienne . . . 21

3.2.3 Elimination de la dynamique de gyration : la transformée de Lie centre-guide 22
3.2.3.1 Transformée de Lie . . . 22
3.2.3.2 Lagrangien et coordonnées centre-guide . . . 23
3.2.3.3 Jacobien centre-guide . . . 25
3.2.3.4 Crochet de Poisson, équations de mouvement . . . 25
3.3 Résumé du chapitre . . . 26

4 Réduction de la dynamique parallèle : Cas de la géométrie dipolaire 29
4.1 Coordonnées spatiales . . . 29
4.1.1 Champ magnétique . . . 29
4.1.2 Abcisse curviligne . . . 31
4.1.3 Dynamique parallèle . . . 31
4.2 Coordonnées action-angle . . . 32
4.3 Approximation « fortement piégée » . . . 35
4.3.1 Dynamique harmonique fondamentale . . . 36
4.3.2 Corrections anharmoniques de premier ordre . . . 38
4.3.3 Transformation des coordonnées angle-action . . . 39
4.3.4 Dynamique anharmonique parallèle . . . 40
4.3.5 Dynamique de dérive . . . 41
4.4 Résumé du chapitre . . . 41

5 Collisions coulombiennes 43
5.1 Introduction à l'opérateur Fokker-Planck . . . 43
5.1.1 Equation de Boltzmann, intégrale de collision . . . 43
5.1.2 Ecrantage des charges . . . 44
5.1.3 Collisions aux petits angles . . . 44
5.1.4 l'intégrale de collision Landau . . . 45
5.1.5 Compétition avec le rayonnement de freinage . . . 46
5.2 L'équation Fokker-Planck pour les collisions . . . 47
5.2.1 Potentiels non relativistes . . . 47
5.2.2 Potentiels relativistes . . . 49
5.3 Opérateur collision linéarisé . . . 50
5.3.1 Collisions entre particules de même espèce . . . 50
5.3.2 Opérateur collision Fokker-Planck pour les électrons . . . 51
5.3.2.1 Contribution des ions . . . 51
5.3.2.2 Limite de Lorentz . . . 51
5.4 Résumé du chapitre . . . 51

6 Opérateur collision centre-guide 53
6.1 Coefficients de collision locaux anisotropes . . . 53
6.2 Transformation centre-guide d'un opérateur local anisotrope . . . 55
6.2.1 Dynamique centre-guide et transformation de l'opérateur collision . . . 55
6.2.2 Opérateur centre-guide moyenné . . . 56
6.3 Coordonnées globales $\left(\overline{\psi}, \theta, p, \xi_0\right)$ et vecteurs de projection . . . 59
6.4 Calcul des coefficients centre-guide . . . 60
6.5 Approximation « orbite fines » . . . 61
6.6 Coefficients centre-guide avec un fond isotrope . . . 63
6.7 Résumé du chapitre . . . 64

7 Dynamique moyennée sur les orbites 65
7.1 Approximation de faible collisionnalité . . . 65
7.2 Opérateur collision moyenné . . . 66
7.2.1 Jacobien d'orbite et moyenne d'orbite . . . 66
7.2.2 Opérateur collision moyenné . . . 66
7.2.3 Forme conservative pour l'opérateur différentiel . . . 67

7.3 Cas d'un fond isotrope dans l'approximation « orbites fines » . . . 68
7.3.1 Décalage de grille . . . 68
7.3.2 Coefficients d'orbite . . . 69
7.3.3 Coefficients pour la forme conservative de l'opérateur collision . . . 70
7.4 Courant « bootstrap » dans la limite de Lorentz . . . 70
7.4.1 Distribution centre-guide dans la limite de Lorentz . . . 71
7.4.2 Courant « bootstrap » . . . 72
7.4.3 Cas particulier de surfaces de flux circulaires concentriques . . . 73
7.5 Résumé du chapitre . . . 73

8 Conclusion **75**

Bibliographie **77**

A Introduction à la fusion **83**
A.1 Les plasmas de fusion et les tokamaks . . . 83
A.1.1 La réaction de fusion . . . 83
A.1.2 Confinement d'un plasma de fusion . . . 84
A.1.2.1 Critère de Lawson . . . 84
A.1.2.2 Méthodes de confinement . . . 85
A.1.2.3 Rendement énergétique . . . 86
A.1.2.4 Création du champ poloïdal . . . 86

B A vector derivation of the combined gradient and curvature drift **87**

C Operations on differential forms **89**
C.1 Wedge or exterior product . . . 89
C.2 Interior product . . . 89
C.3 Exterior derivative . . . 90
C.4 Examples for $V = \mathbb{R}^3$ . . . 90
C.4.1 0-forms f . . . 90
C.4.2 1-forms $\Gamma = \Gamma_\alpha \mathsf{d}z^\alpha$ . . . 90
C.4.3 2-forms $\omega = \frac{1}{2!}\omega_{\alpha\beta}\mathsf{d}z^\alpha \wedge \mathsf{d}z^\beta$ with $\omega_{\beta\alpha} = -\omega_{\alpha\beta}$ . . . 90
C.4.4 Other interesting remarks . . . 90

D Magnetic dipole dynamics **93**
D.1 Magnetic field produced by a magnetic dipole . . . 93
D.1.1 Expression of the magnetic field . . . 93
D.1.2 Magnetic field gradient . . . 95
D.1.3 Magnetic field line equations . . . 95
D.1.4 Flux coordinate . . . 96
D.2 Magnetic dipole and single coil magnetic fields in LUKE coordinates . . . 97
D.2.1 Single coil field . . . 97
D.2.2 Single coil flux coordinate . . . 100
D.2.3 Magnetic dipole field . . . 101
D.2.4 LUKE coordinates for the magnetic equilibrium . . . 101
D.2.4.1 Single coil magnetic field . . . 101
D.2.4.2 Magnetic dipole field . . . 102
D.3 Collisionless motion in a dipole magnetic field . . . 102
D.3.1 ξ_0 dependance of the magnetic bounce angle . . . 102
D.3.2 Influence of Earth's radius on particle motion . . . 103
D.3.3 Bounce time scale in a dipole magnetic field . . . 104
D.3.4 Drift time scale in a dipole magnetic field . . . 105
D.3.5 Bounce time scale and drift time scale comparison . . . 107
D.4 Values for f at $\xi_0 = 0$ and $\xi_0 = 1$ . . . 111

D.4.1 Calculation of $f(0)$ . . . 111
D.4.2 Calculation of $f(1)$ . . . 112

E Phase-space Lagrangian and Lie transform in $(\mathbf{x}, p, \xi, \theta)$ coordinates **113**
E.1 Local phase-space coordinates and Lagrangian . . . 113
E.2 Guiding-center phase-space Lagrangian . . . 113
E.3 First-order perturbation analysis . . . 115
E.4 Second-order perturbation analysis . . . 115
E.5 Third-order perturbation analysis . . . 117
E.6 Coordinate transformation . . . 120
E.7 Lie Transform . . . 120
E.8 First-order Lie Transform and Generating Vector . . . 121
E.9 Lie transform of the $(\mathbf{p}, \mathbf{e}_\xi, \mathbf{e}_\varphi)$ vector basis . . . 121
E.9.1 Calculation of $\mathsf{T}_\epsilon^{-1}\mathbf{p}$ . . . 121
E.9.2 Calculation of $\mathsf{T}_\epsilon^{-1}\mathbf{e}_\xi$ . . . 122
E.9.3 Calculation of $\mathsf{T}_\epsilon^{-1}\mathbf{e}_\varphi$ . . . 123
E.10 Orthogonality . . . 123
E.11 Lie transform of Gyro-independent Collision Coefficients . . . 124
E.12 $(\overline{\psi}, p, \xi_0)$ Coordinates and Projection Vectors . . . 124
E.13 Calculation of guiding-center coefficients . . . 125
E.13.1 Calculation of $\mathcal{K}_{gc}^{\overline{\psi}} \equiv \left\langle \mathbf{K}_\epsilon \cdot \mathbf{\Delta}^{\overline{\psi}} \right\rangle$ . . . 125
E.13.2 Calculation of $\mathcal{K}_{gc}^{p} \equiv \langle \mathbf{K}_\epsilon \cdot \mathbf{\Delta}^{p} \rangle$ . . . 125
E.13.3 Calculation of $\mathcal{K}_{gc}^{\xi_0} \equiv \left\langle \mathbf{K}_\epsilon \cdot \mathbf{\Delta}^{\xi_0} \right\rangle$ . . . 126
E.13.4 Calculation of $\mathcal{D}_{gc}^{\overline{\psi}\overline{\psi}} \equiv \left\langle \mathbf{\Delta}^{\overline{\psi}} \cdot \mathbb{D}_\epsilon \cdot \mathbf{\Delta}^{\overline{\psi}} \right\rangle$ . . . 126
E.13.5 Calculation of $\mathcal{D}_{gc}^{pp} \equiv \langle \mathbf{\Delta}^{p} \cdot \mathbb{D}_\epsilon \cdot \mathbf{\Delta}^{p} \rangle$ . . . 126
E.13.6 Calculation of $\mathcal{D}_{gc}^{\xi_0\xi_0} \equiv \left\langle \mathbf{\Delta}^{\xi_0} \cdot \mathbb{D}_\epsilon \cdot \mathbf{\Delta}^{\xi_0} \right\rangle$ . . . 126
E.13.7 Calculation of $\mathcal{D}_{gc}^{p\overline{\psi}} = \mathcal{D}_{gc}^{\overline{\psi}p} \equiv \left\langle \mathbf{\Delta}^{p} \cdot \mathbb{D}_\epsilon \cdot \mathbf{\Delta}^{\overline{\psi}} \right\rangle$ . . . 127
E.13.8 Calculation of $\mathcal{D}_{gc}^{p\xi_0} = \mathcal{D}_{gc}^{\xi_0 p} \equiv \left\langle \mathbf{\Delta}^{p} \cdot \mathbb{D}_\epsilon \cdot \mathbf{\Delta}^{\xi_0} \right\rangle$ . . . 127
E.13.9 Calculation of $\mathcal{D}_{gc}^{\overline{\psi}\xi_0} = \mathcal{D}_{gc}^{\xi_0\overline{\psi}} \equiv \left\langle \mathbf{\Delta}^{\overline{\psi}} \cdot \mathbb{D}_\epsilon \cdot \mathbf{\Delta}^{\xi_0} \right\rangle$ . . . 128
E.14 Thin-orbit approximation . . . 128
E.15 Guiding-center gyro-radius vector $\boldsymbol{\rho}_\epsilon$ . . . 129
E.16 Various scalar products . . . 130
E.17 Coordinate projections . . . 132

F Calculation of the guiding-center Poisson bracket **135**
F.1 Guiding-center Lagrangian matrix in $(\mathbf{X}, p_\parallel, \mu, \varphi)$ coordinates . . . 135
F.2 Calculation of the Poisson matrix . . . 136
F.3 Poisson bracket in $(\mathbf{X}, p, \xi, \varphi)$ coordinates . . . 137
F.4 Poisson bracket in $(\mathbf{X}, \mathcal{E}, \mu, \varphi)$ coordinates (non-relativistic case) . . . 139
F.5 Various calculations . . . 141
F.5.1 Calculation of $\mathbb{W}_{\mathbf{XX}}$ . . . 141
F.5.2 Inverse of a 4 by 4 antisymmetric matrix . . . 141
F.5.2.1 Calculation of C_{12} . . . 142
F.5.2.2 Calculation of C_{13} . . . 142
F.5.2.3 Calculation of C_{14} . . . 142
F.5.2.4 Calculation of C_{23} . . . 142
F.5.2.5 Calculation of C_{24} . . . 142
F.5.2.6 Calculation of C_{34} . . . 142
F.5.2.7 Calculation of $\det \mathbb{A}$ . . . 142
F.5.2.8 Expression for $\mathbb{A}^{-1}$ . . . 143

G Conservation laws for the FP collision operator **145**
G.1 Expression of the collision operator . . . 145
G.2 Conservation laws . . . 145
G.2.1 Particle conservation law . . . 145
G.2.2 Momentum conservation law . . . 146
G.2.3 Energy conservation law . . . 146
G.3 Collision operator with maxwellian test particle and field distributions . . . 147
G.4 H-theorem for the collision operator . . . 147

H First-order Anisotropic Collision Operator **149**
H.1 Velocity-Space Coordinate System . . . 149
H.2 Local collision operator . . . 150
H.2.0.1 Isotropic field-particle distribution . . . 153
H.2.0.2 Gyro-independant first-order anisotropic field-particle distribution . . . 153
H.3 Relativistic-potential kernel expressions . . . 155
H.4 Local first-order Legendre integral term . . . 157

I Moments of the distribution function **159**
I.1 Flux-surface averaging . . . 159
I.2 Local expression . . . 159
I.3 Expression in the space of invariants . . . 160

J Publications **161**

Liste des tableaux

3.1 Calcul des composantes de $\mathbf{G}$ selon l'ordre en ϵ_B de résolution des équations du lagrangien centre-guide. 24

4.1 Périodes d'orbite et de dérive normalisées. 35

Table des figures

2.1 Coordonnées quasi-cylindriques. r correspond le petit rayon local, $R \equiv R_0 + r\cos\theta$ le grand rayon, θ l'angle poloïdal et ϕ l'angle toroïdal. R_0 est le grand rayon de l'axe magnétique et a le petit rayon de la dernière surface magnétique fermée. Une surface magnétique (flux poloïdal ψ constant) est représentée par le tube de lignes de champ rouge. 7

2.2 Vecteur impulsion $\mathbf{p}$ décomposé sur le vecteur unitaire magnétique $\widehat{\mathbf{b}}$. $p \equiv |\mathbf{p}|$ représente l'amplitude, $\xi \equiv \mathbf{p}\cdot\widehat{\mathbf{b}}/p$ correspond au cosinus du pitch-angle et φ (défini arbitrairement sur le plan perpendiculaire à $\widehat{\mathbf{b}}$, formant un repère direct avec celui-ci) la « gyrophase », ou orientation azimuthale. 8

2.3 Représentation schématique de plusieurs orbites de même surface de flux de référence $\overline{\psi}$ (pointillés), projetées sur le plan poloïdal. A la frontière passante/piégée, les points de rebroussement se rejoignent au maximum de champ. 11

3.1 Transformation de coordonnées [34]. Les coordonnées dans l'espace des phases local sont transformées vers l'espace centre-guide et inversement par les transformations $\mathcal{T}_{\mathrm{gc}}^{\pm 1}$ (lignes rouge uni). Les fonctions sont transformées (lignes bleu pointillées) de telle manière que la fonction locale et la fonction centre-guide donnent le même résultat : $f\left(z^\alpha\right) = f\left(\mathcal{T}_{\mathrm{gc}}^{-1} Z^\alpha\right) = \mathsf{T}_{\mathrm{gc}} F\left(z^\alpha\right) = F\left(Z^\alpha\right)$. 23

4.1 Lignes de champ produites par un dipôle magnétique sur un plan contenant le moment magnétique (vecteur noir). $\psi^* = \psi_{\mathrm{e}}\left(\rho_{\mathrm{e}}\right)/\psi_{\mathrm{e}}\left(R_{\mathrm{T}}\right)$ représente le flux équatorial normalisé par rapport à un cercle de rayon arbitraire R_{T}. Pour les application terrestres, on peut utiliser le rayon de la Terre comme référence. 30

4.2 Coordonnées sphériques. ρ représente le rayon depuis l'origine, ϑ la colatitude et ϕ l'angle azimuthal (ou longitude). 30

4.3 Tracé de la période d'orbite normalisée $f\left(\xi_{\mathrm{e}}\right)$ en fonction de la coordonnée de pitch-angle ξ_{e} (ligne unie rouge). Dans l'approximation « fortement piégée », l'ordre le plus bas remplace f par la fonction unité dans l'équation (D.48) et l'inclusion des corrections anharmoniques discutées dans la section 4.3.2 sont représentées par la ligne pointillés-tirets bleue. 34

4.4 Tracé de la période de dérive normalisée $g\left(\xi_{\mathrm{e}}\right)$ en fonction de la coordonnée de pitch-angle ξ_{e} (ligne unie rouge). Dans l'approximation « fortement piégée », l'ordre le plus bas remplace f par la fonction unité dans l'équation (D.55) et l'inclusion des corrections anharmoniques discutées dans la section 4.3.2 sont représentées par la ligne pointillés-tirets bleue. 35

4.5 Coordonnée de pitch-angle équatorial $|\xi_{\mathrm{e}}|$ trécée en fonction de la latitude de rebond normalisée σ_{b} (ligne unie rouge). La ligne pointillés-tirets noire représente l'approximation linéaire $|\xi_{\mathrm{e}}| \simeq 3\sigma_{\mathrm{b}}/\sqrt{2}$ et la ligne tirets bleue inclut les corrections d'ordre supérieur. . . 36

4.6 Trajectoire d'un centre-guide fortement piégé dans la limite harmonique. L'action J_0 représente l'aire balayée par l'orbite paramétrisée par l'angle ζ_0. 38

5.1 Evolution schématique d'une particule soumise à des interactions coulombiennes. Les collisions à faible angle (trait uni) contribuent beaucoup plus à la déviation des particules que les collisions directes (trait en pointillés) 45

6.1 Schéma d'une collision affectant une particule en gyration. Dans l'espace réel (repère noir), l'événement de collision affectant la trajectoire (bleu) est localisé en une position spatiale. Dans l'espace centre-guide (repère vert), la trajectoire de gyration est remplacée par celle d'un centre-guide (rouge). Dans ce repère, la collision devient un événement non local, dépendant de tout l'espace des phases. 57

A.1 Énergie de liaison d'un noyau atomique en fonction du nombre de nucléons, obtenue à partir des masses atomiques [2]. Les éléments plus légers que le fer seront plus propices à la fusion, les éléments plus lourds à la fission. 84
A.2 Section efficace de plusieurs réactions de fusion en fonction de la température. Les températures recherchées des particules dans un plasma de fusion de laboratoire sont de l'ordre de 10 keV. 84
A.3 Représentation schématique d'un tokamak. Le champ magnétique toroidal est assuré par les bobines situées dans le plan poloïdal et une partie du courant est générée par le solénoïde central. Les bobines toroïdales servent à contrôler la forme du plasma. 86

D.1 Coordinate systems used in this document. 94
D.2 Magnetic dipole field lines in a cylindrical (R, Z) plane. The blue circle corresponds to the radius of the Earth in the case of Earth's magnetic field. Flux ccordinate values are normalized to the absolute value at $Z = 0$ and $R = R_T$, i.e. $\psi^* = \frac{\mu_0 M}{4\pi R_T}$. 96
D.3 Magnetic dipole flux surface for $\psi = 1$. 97
D.4 Evolution of ξ with respect to $\frac{\vartheta_b}{\pi}$. 104
D.5 Earth radius limit ξ_{0max} with respect to a. Any particles with $\xi_0 > \xi_{0max}$ are lost. . . . 104
D.6 Bounce time scale function f with respect to ξ_0. 105
D.7 Drift time scale function g with respect to ξ_0. 107
D.8 $\frac{\tau_b^*}{\tau_d^*}$ for a proton in Earth's magnetic field with respect to ρ_0 and v. 108

Liste des symboles

Champs	
$\mathbf{A}$	Potentiel vecteur magnétique
$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$	Champ magnétique
$\mathbf{E} = -\nabla\Phi - \partial\mathbf{A}/\partial t$	Champ électrique
Φ	Potentiel électrique
$\widehat{\mathbf{b}} \equiv \mathbf{B}/B$	Vecteur unitaire du champ magnétique
Coordonnées spatiales	
$\mathbf{x}$	Vecteur de position
$\nabla \equiv \partial/\partial\mathbf{x}$	Gradient spatial
ϕ	Angle azimuthal
ψ	Flux poloïdal
ρ	Rayon sphérique
θ	Angle poloïdal
ϑ	Colatitude sphérique
R	Grand rayon local (toroïdal)
r	Petit rayon local (poloïdal)
Coordonnées de vitesse	
$\mathbf{p}$	Vecteur impulsion
$\partial/\partial\mathbf{p}$	Gradient dans l'espace des vitesses
φ	Gyrophase
$\xi \equiv \mathbf{p} \cdot \widehat{\mathbf{b}}/p$	Cosinus du pitch-angle
Invariants	
$\mathcal{E} \equiv p^2/2m$	Energie cinétique non relativiste (voir section correspondante pour la valeur relativiste)
$\mu \equiv p^2\left(1-\xi^2\right)/2mB$	Moment magnétique
$\overline{\psi} \equiv -\frac{1}{e}P_\phi$	Flux poloïdal d'orbite

$\sigma \equiv \pm 1$	Sens de circulation d'orbite (+1 pour les orbites piégées)
$\xi_0 \equiv \sigma\sqrt{1 - B_0\left(\overline{\psi}\right)\left(1-\xi^2\right)/B}$	Cosinus du pitch-angle d'orbite
P_ϕ	Moment canonique toroïdal

Distributions et quantités macroscopiques

$\mathbb{D}_{ss'}$	Tenseur de diffusion de l'opérateur collision Fokker-Planck partiel $C\left[f_s, f_{s'}\right]$
$\mathbf{K}_{ss'}$	Vecteur de convection de l'opérateur collision Fokker-Planck partiel $C\left[f_s, f_{s'}\right]$
$C\left[f_s, f_{s'}\right]$	Opérateur collision Fokker-Planck partiel agissant sur f_s ayant pour fond $f_{s'}$
$C\left[f_s\right]$	Opérateur collision Fokker-Planck total agissant sur f_s
f_s	Distribution des particules d'espèce s
m_s	Masse (au repos pour le cas relativiste) des particules d'espèce s
n_s	Densité des particules d'espèce s
q_s	Charge des particules d'espèce s
T_s	Température des particules d'espèce s (en eV)

Constantes physiques

ε_0	Permittivité du vide
e	Charge élémentaire

Quantités relativistes

$\gamma \equiv \sqrt{1 + u^2/c^2}$	Facteur de Lorentz relativiste
$\mathbf{u} \equiv \mathbf{p}/m$	Vecteur impulsion massique
$\mathbf{v} \equiv \mathbf{u}/\gamma$	Vecteur vitesse
$\mathcal{E} \equiv \gamma m c^2$	Energie relativiste (comprend l'énergie cinétique et l'énergie de repos mc^2)
$\mathsf{U}^\mu \equiv (\gamma c, \mathbf{u})$	Quadrivecteur vitesse
c	Vitesse de la lumière dans le vide
$r \equiv \mathsf{U}_\mu \mathsf{U}'^\mu/c^2 \equiv \gamma\gamma' - \mathbf{u}\cdot\mathbf{u}'/c^2$	Correction relativiste de la vitesse relative entre particules
$w \equiv c\sqrt{r^2-1}$	w/r est la vitesse relative entre particules exprimée de façon invariante

Dans la limite non relativiste ($c \to \infty$), $\gamma \to 1$, $\mathbf{u} \to \mathbf{v}$, $r \to 1$ et $w \to |\mathbf{v} - \mathbf{v}'|$.

Chapitre 1

Introduction

1.1 Contexte de la fusion nucléaire

La maîtrise des réactions de fusion entre deux isotopes d'hydrogène à des fins énergétiques fait l'objet de très nombreuses recherches depuis plus d'un demi-siècle. Si le concept élémentaire est désormais bien connu (voir Annexe A), la mise en oeuvre reste cependant un formidable défi scientifique et technique qui prend sa pleine dimension dans le contexte d'une demande en énergie toujours plus importante. Cette ressource est particulièrement attractive pour quatre raisons : une forte densité d'énergie massique, des ressources abondantes dans l'eau de mer notamment (deutérium, lithium), pas de déchets radioactifs à très longue durée de vie [1] et l'impossibilité d'une divergence des réactions pouvant amener à une situation accidentelle explosive (absence de médiateur de réaction). L'ensemble de ces qualités font de la fusion thermonucléaire contrôlée la source quasi-idéale d'énergie, et à ce titre, les espérances placées dans le réacteur expérimental ITER actuellement en construction sur le site de Cadarache (France) sont considérables [2]. Ce réacteur, basé sur le confinement magnétique d'un plasma, rassemble en effet l'état de l'art dans ce domaine.

Le problème du confinement des particules et de l'énergie d'un plasma par un champ magnétique a stimulé l'imagination des chercheurs qui ont proposé de nombreuses configurations pour le résoudre. Toutes sont basées sur le concept général qu'une particule chargée électriquement effectue un mouvement hélicoïdal le long d'une ligne de champ. Grâce au piégeage transversal caractérisé par le rayon de Larmor, une topologie magnétique appropriée permet en principe de confiner les particules dans un volume donné. La difficulté initiale du problème résulte du très grand libre parcours moyen des particules (distance moyenne parcourue entre deux collisions Coulombiennes) aux densités considérées pour réaliser la fusion thermonucléaire. Celui-ci étant de l'ordre de la dizaine de kilomètres, la solution la plus élégante consiste à refermer les surfaces de flux magnétiques sur elles-même afin que les lignes de champ n'aient ni début ni fin. La configuration torique permet ainsi de garder une taille acceptable aux machines mettant en oeuvre les réactions de fusion nucléaire [3].

En introduisant une courbure aux lignes de champ et en présence de gradients dans le plasma, les particules chargées dérivent verticalement le long de l'axe du tore, conduisant à une séparation des charges de signe opposé et une disparition rapide du plasma sous l'effet des forces de déchirement [51]. Cette difficulté majeure intrinsèquement liée à la configuration torique fut résolue en introduisant une hélicité aux lignes de champ elles-mêmes sur une surface de flux magnétique, afin qu'au cours de leur déplacement, les particules chargées dérivent alternativement vers le bord mais aussi vers le centre du plasma. Sur une révolution poloïdale de la ligne de champ magnétique, correspondant à

1. Le produit de la réaction de fusion D-T est un neutron dont la durée de vie est de l'ordre de 10 minutes, et une particule α qui n'est pas radio-active. Toutefois, la présence de neutrons conduit à l'activation des structures environnantes.

2. Pour plus d'informations, voir le site http://www-fusion-magnetique.cea.fr.

3. Pour les machines droites, il est nécessaire de créer des miroirs magnétiques aux extrémités afin de bloquer le mouvement longitudinal des particules. Cet effet est réalisé en faisant en sorte que l'intensité du champ magnétique soit maximale aux extrémités. De telles machines n'ont jamais atteint à ce jour des performances acceptables pour la fusion thermonucléaire, les particules dotées d'un grand moment magnétique réussissant malgré tout à s'échapper de l'enceinte de confinement, provoquant ainsi des pertes inacceptables.

une distance courte par rapport au libre parcours moyen des particules, la dérive balistique moyenne est alors nulle, permettant au plasma d'exister de manière durable avec un confinement de bonne qualité. La compréhension de ce problème donna naissance à plusieurs filières de machines toriques, les tokamaks où l'hélicité des lignes de champ est créée en faisant circuler un courant toroïdal dans le plasma, les RFP (Reverse Field Pinch) basés sur le même concept mais avec une enroulement différent des lignes de champ, et enfin les stellarator, où la topologie des lignes de champ est assurée de manière statique par des bobinages externes créant une configuration magnétique tridimensionnelle particulièrement complexe [4].

Des trois filières, celle offrant d'emblée les meilleures performances en terme de confinement de l'énergie fut le Tokamak [5]. En s'améliorant avec le courant toroïdal circulant dans le plasma mais aussi le grand rayon de la machine, les chercheurs tenaient enfin un concept viable pour la fusion par confinement magnétique permettant d'extrapoler au réacteur les résultats obtenus sur de petits appareils [41]. La relative simplicité de mise en oeuvre contribua également largement au succès du tokamak à travers le monde. De la loi d'échelle quasi-universelle liant le temps de confinement de l'énergie au courant circulant dans le plasma et au grand rayon de la machine est née la course au gigantisme des machines pour atteindre l'ignition du plasma, ou à défaut le break-even (voir Annexe A). Les tokamaks JET [6] (Royaume-Uni, Europe), JT-60 [7] (Japon) et maintenant ITER [8] ne dérogent pas à cette règle.

En offrant une excellente qualité de confinement de l'énergie lorsque le courant circulant dans le plasma est généré de manière inductive, l'espérance a été grande qu'un régime thermonucléaire puisse être facilement atteint de cette manière, malgré la nature intermittente intrinsèque de cette méthode. En effet, en régime inductif, le tokamak fonctionne sur le principe du transformateur, l'anneau torique formé par le plasma jouant le rôle de circuit secondaire. Cependant, le plasma devenant de moins en moins collisionnel au fur et à mesure que sa température augmente, il est impossible d'atteindre le régime thermonucléaire requis par le critère de Lawson pour le type de réactions D-T, qui est le plus favorable (voir Annexe A). Dans ce contexte, la physique des chauffages fut développée activement afin d'atteindre des températures de l'ordre de la dizaine de keV, et de manière concommittante la physique de la génération de courant non-inductive, pour entretenir de manière continue les décharges plasma, seule solution acceptable sur le plan économique, mais aussi pour réduire les effets délétères des cycles mécaniques sur la durée de vie de la machine [18].

La mise en oeuvre de ces nouveaux outils permit de mettre en évidence la dégradation du temps de confinement de l'énergie comme la racine carrée de la puissance injectée, phénomène dont l'explication reste encore incertaine. Grâce à l'injection d'ondes radio-fréquence, on démontra la faisabilité du concept de génération non-inductive de courant, bien que l'efficacité du processus n'atteigne jamais le niveau du régime non-inductif [40]. La conjonction de ces deux problèmes constitua une rupture majeure dans la stratégie suivie pour maîtriser l'énergie de fusion par confinement magnétique dans un tokamak, ouvrant l'ère des régimes *avancés* de fonctionnement, dans lesquels l'apport des sources externes de puissance consiste à favoriser une auto-organisation du plasma viable simultanément sur le plan confinement de l'énergie et de la génération de courant [49]. La clé de tels régimes passe par la maximisation du courant de bootstrap résultant des effets néoclassiques liés aux différentes orbites des particules dans le plasma, les nombreuses expériences ayant montré que pour de tels régimes, des barrières internes de transport apparaissent, limitant la dégradation du confinement avec le niveau de puissance injecté, en plus de la barrière externe de transport liée au mode-H lorsque la puissance injectée dans le plasma dépasse un seuil critique [50].

Cette rupture amena à un changement complet de paradigme concernant l'utilisation des sources de puissance et de courant en particulier pour porter et maintenir le plasma dans des régimes thermonucléaires. En effet, amener le plasma à un état d'auto-organisation stable et performant nécessite une mise en oeuvre d'outils de contrôle particulièrement précis concernant la localisation

4. À titre d'exemple, voir la configuration du stellarator Wendelstein 7-X à l'adresse http://www.ipp.mpg.de/ippcms/eng/for/projekte/w7x/ziele/index.html.

5. Acronyme russe signifiant **то**роидальная **ка**мера с **ма**гнитными **к**атушками, ou chambre toroïdale avec bobines magnétiques.

6. http://www.jet.efda.org/jet/jets-main-features/

7. http://www-jt60.naka.jeaea.go.jp/english/jt60/project/purpose.html

8. http://www.iter.org/proj/itermission

spatiale du dépôt de puissance, que cela soit pour chauffer localement le plasma ou générer du courant. Cet aspect clairement mis en évidence expérimentalement a des conséquences considérables sur la modélisation des effets physiques en jeu, en nécessitant notamment de prendre pleinement en compte les effets néoclassiques jusqu'alors ignorés où simplement pris en compte séparément [23]. Ainsi, dans la totalité des simulations mettant en oeuvre la génération non-inductive de courant, le courant « bootstrap », résultant du transfert d'impulsion entre les particules piégées et circulantes en présence de gradients de densité et de température, est calculé pour un plasma thermique, alors qu'il existe localement de très fortes distortions de la distribution en vitesse des électrons par rapport à la maxwellienne, sous l'effet des ondes radio-fréquences. La synergie potentielle entre les deux effets est ignorée, même au voisinage d'une barrière de transport, alors que localement celle-ci peut devenir très importante, en raison de l'importance du gradient de pression [45, 38]. De même, le transport radial des particules induit par les ondes n'est pas considéré de manière systématique, tandis que les exigences sur la précision du profil de courant ont considérablement augmenté [32, 36].

C'est dans ce contexte que le développement d'une approche générale pour décrire le chauffage et la génération non-inductive de courant est effectué, prenant en compte les aspects néoclassiques couplant, par l'impulsion toroïdale généralisée, les dynamiques dans l'espace réel et celles dans l'espace des vitesses. Les fondations de ce qui constitue la trame de la thèse sont élaborées sur la base de la réduction des dynamiques rapides tout en gardant la richesse des effets physiques croisés résultant des trajectoires complexes, grâce à la transformation de Lie. L'objectif est que le cadre mathématique rigoureux ainsi développé soit particulièrement adapté aux simulations numériques intégrées [3, 1], dans lesquelles l'évolution de l'équilibre magnétohydrodynamique (MHD) toroïdal est calculé de manière cohérente avec les sources de puissance et de courant. Les calculs théoriques développés dans ce travail sont donc entrepris d'une part dans le but de valider les bases du code cinétique LUKE dédié à la physique des électrons [14, 37], et d'autre part d'étendre les capacités de cet outil à la physique des ions tout en prenant en compte les intercouplages entre particules et les effets néoclassiques. Le code LUKE, particulièrement optimisé sur le plan numérique, est en effet largement employé pour les calculs de chauffage et de génération de courant par électrons dans les tokamaks, et son extension pour prendre en compte tous les effets néoclassiques associés aux scénarios avancés constitue un développement potentiel très important pour la communauté de la fusion magnétique.

1.2 Plan de thèse

Le deuxième chapitre traite de la dynamique des particules chargées dans le champ magnétique statique et non-uniforme d'un tokamak. À partir des systèmes de coordonnées traditionnels (coordonnées toroïdales et de flux magnétique) et en utilisant les trois invariants du mouvement résultant des lois de conservation (énergie, moment magnétique) et de l'axisymétrie, on introduit un troisième système de coordonnées et sa métrique permettant de caractériser les orbites particulièrement adapté à une implémentation numérique des équations. Ce système de coordonnées globales présente l'avantage d'avoir une signification physique simple dans la limite classique adoptée par le code cinétique LUKE dans sa version actuelle [14]. Pour ce système de coordonnnées, on définit la moyenne sur l'orbite qui est utilisée dans les chapitres suivants.

Le troisième chapitre comporte deux parties. La première est consacrée à l'approche statistique pour décrire l'évolution de l'ensemble des particules dans le plasma, sur la base de la hiérarchie BBGKY permettant d'utiliser des fonctions de distribution à une particule. Le seconde porte sur la description lagrangienne de la dynamique d'une particule, permettant de reformuler l'équation d'évolution de la distribution en terme d'un hamiltonien et un crochet de Poisson. Le principe général de la transformée de Lie est introduit dans ce chapitre et appliqué au problème étudié pour éliminer l'échelle rapide associée à la gyration cyclotronique, et obtenir la dynamique du centre-guide. La transformation sur les coordonnées est proche de l'identité, fournissant des corrections linéaires correspondant à la non-uniformité magnétique.

Le chapitre quatre porte sur le cas particulier de la configuration magnétique dipolaire, qui outre son intérêt spécifique pour la physique des plasmas de l'espace (champ magnétique terrestre,

Jupiter, etc), représente un cas limite où des développements analytiques complets peuvent être effectués, permettant d'établir une base solide pour valider une implémentation numérique des équations valables dans la limite classique. En effet, le champ magnétique n'ayant pas de composante toroïdale, les particules n'effectuent aucune excursion radiale hors d'une surface de flux pour un mouvement libre. Les travaux présentés portent exclusivement sur les particules fortement piégées autour du plan équatorial, dont la dynamique est analogue à celle d'un oscillateur harmonique, à l'ordre le plus bas. Un développement autour de cette limite fournit des corrections anharmoniques qui sont comparées aux intégrales numériques.

Dans le cinquième chapitre, on introduit l'opérateur local de collision de type Fokker-Planck construit à partir des intégrales de Landau [31], en prenant en compte l'écrantage des champs électriques produits par les particules au delà de la longueur de Debye et la prééminence des collisions aux petits angles. C'est à partir de celui-ci que l'on calcule au chapitre suivant l'opérateur de collision centre-guide pour le système de coordonnées choisi, en utilisant le formalisme des transformées de Lie. Afin de limiter l'effort numérique pour calculer ces intégrales vectorielles et tensorielles, celles-ci sont exprimées à l'aide de potentiels, moments scalaires de la distribution. Dans le travail effectué et pour les besoins de la génération de courant dans les tokamaks, on considère le cas relativiste, puisque les particules accélérées par les champs électriques peuvent atteindre de très grandes énergies. On utilise alors le noyau de Beliaev et Budker dans les intégrales de Landau [4], celles-ci pouvant être reformulées en terme de potentiels calculés par Braams et Karney [10]. On considère également deux limites, la limite non-relativiste, correspondant aux potentiels classiques de Rosenbluth [43], et la limite de Lorentz pour des ions de masse et charge infinies. L'anisotropie dans l'espace des vitesses du fond de particules pour l'opérateur local de collision est prise en compte en effectuant un développement en polynômes de Legendre. Ce terme est très important pour la génération de courant [18].

Le calcul explicite de l'opérateur de collision centre-guide indépendant de la dynamique de gyration des particules est présenté dans le sixième chapitre. Des expressions simplifiées sont obtenues dans l'approximation « orbites fines », où l'excursion radiale de du centre guide est faible devant la surface de flux de référence. Pour l'opérateur général et celui correspondant à la limite des « orbites fines », des expressions correspondant aux cas où la distribution des particules de fond est isotrope sont également données.

Enfin, le septième chapitre est dédié au calcul de l'équation Fokker-Planck centre-guide moyennée sur les orbites des particules afin d'obtenir une évolution indépendante de l'angle poloïdal. Cette équation est celle qui sera implémentée numériquement pour décrire les effets néoclassiques de la génération de courant dans les tokamaks. La réduction de l'espace des phases est effectuée dans l'approximation dite de faible collisionnalité (le centre-guide a le temps de parcourir une orbite complète avant de subir une déviation due à une collision). Des expressions simplifiées correspondant à l'approximation « orbite fines » introduite au chapitre précédent sont obtenues et fournissent une forme conservative pour l'opérateur collision moyenné, particulièrement adaptée au calcul numérique. Dans la limite classique (orbite de largeur nulle), on retrouve la formulation de l'équation de Fokker-Planck centre-guide utilisée par le code LUKE actuel [14]. La dynamique pour le cas particulier d'un fond isotrope dans l'espace des vitesses permet d'exprimer l'opérateur en termes de coefficients d'orbite, moyennes indépendantes de la distribution de fond. Enfin, le calcul du courant « bootstrap » est explicitement effectué dans la limite de Lorentz, et les résultats obtenus par Rosenbluth sont retrouvés [42].

Dans le cadre de la conclusion, les perspectives résultant de ce travail sont tracées.

A noter que la plupart des calculs détaillés sont mis en annexe, ainsi que les publications résultant de ces travaux.

Chapitre 2

Configuration magnétique et trajectoires des particules

Dans ce chapitre sont considérés des systèmes de coordonnées adaptés à la géométrie des tokamaks exposée dans le chapitre 1. La dynamique des particules dans un champ magnétique statique non-uniforme peut être décrite en utilisant trois invariants créés en utilisant les lois de conservation et symétries suivantes : l'énergie, le moment magnétique et l'axisymétrie.

2.1 Préambule : composantes d'un vecteur

Pour un espace de dimension n doté d'un système de coordonnées $(z^\alpha)_{\alpha=1\dots n}$, le vecteur $\mathbf{z}$ dénotant la position [1] correspondant au n-uplet de coordonnées (z^α). Pourvu que le système de coordonnées soit indépendant, deux séries de vecteurs de base peuvent être construits : la base covariante $(\mathbf{e}_\alpha)_{\alpha=1\dots n}$, avec

$$\mathbf{e}_\alpha \equiv \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial z^\alpha}, \tag{2.1}$$

et la base contravariante $(\mathbf{e}^\alpha)_{\alpha=1\dots n}$ avec

$$\mathbf{e}^\alpha \equiv \frac{\partial z^\alpha}{\partial \mathbf{z}}. \tag{2.2}$$

Les dérivées selon une coordonnée sont effectuées en gardant les autres coordonnées constantes et l'opérateur $\partial/\partial\mathbf{z}$ désigne le gradient associé à l'espace. Immédiatement, il vient

$$\mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}^\beta = \delta_\alpha^\beta, \tag{2.3}$$

où δ_α^β désigne le symbole de Kronecker (il vaut 1 si $\alpha = \beta$, 0 sinon). Cependant, les vecteurs covariants et contravariants ne sont pas unitaires (de norme 1) ou ni même orthogonaux entre eux dans le cas général. Un vecteur $\mathbf{a}$ de l'espace a donc les décompositions covariantes et contravariantes suivantes (en adoptant la convention d'Einstein pour les indices répétés) :

$$\mathbf{a} = a^\alpha \mathbf{e}_\alpha = a_\alpha \mathbf{e}^\alpha. \tag{2.4}$$

L'utilisation de la propriété (2.3) donne les expressions suivantes pour les composantes,

$$a^\alpha = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}^\alpha, \tag{2.5}$$

$$a_\alpha = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_\alpha. \tag{2.6}$$

Les composantes *covariantes* sont donc calculées à partir des vecteurs de base *contravariants* et réciproquement. Ainsi, $a^\alpha = \left(\mathbf{e}^\alpha \cdot \mathbf{e}^\beta\right) a_\beta$ et $a_\alpha = \left(\mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}_\beta\right) a^\beta$. Pour un système de coordonnées

1. Ce terme est invoqué ici de manière générale. Dans l'espace réel, $\mathbf{z}$ correspond au vecteur position spatial $\mathbf{x}$. De même, dans l'espace des vitesses est utilisé le vecteur impulsion $\mathbf{p}$.

orthogonal ($\mathbf{e}^\alpha \cdot \mathbf{e}^\beta$ et $\mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}_\beta$ sont nuls sauf si $\alpha = \beta$), les relations ne dépendent que d'un seul indice α (pas de sommation) :

$$a_\alpha = (\mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}_\alpha)\, a^\alpha, \tag{2.7}$$
$$a^\alpha = (\mathbf{e}^\alpha \cdot \mathbf{e}^\alpha)\, a_\alpha, \tag{2.8}$$

ce qui implique $\mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}_\alpha = (\mathbf{e}^\alpha \cdot \mathbf{e}^\alpha)^{-1}$.

Dans le cadre de cette thèse, les décompositions respectives des vecteurs (ou tenseurs) respectent cette convention d'indices. Le vecteur unitaire (de norme 1) associé au vecteur $\mathbf{a}$ est désigné de la manière suivante :

$$\widehat{\mathbf{a}} \equiv \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}, \tag{2.9}$$

où $|\mathbf{a}| \equiv \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} = \sqrt{a_\alpha a^\alpha}$ est la norme du vecteur $\mathbf{a}$.

2.2 Configuration magnétique

2.2.1 Coordonnées spatiales

2.2.1.1 Coordonnées quasi-cylindriques

Dans l'étude de la géométrie tokamak, le système de coordonnées quasi-cylindriques est bien adapté à la production du champ magnétique produit par les bobines poloïdales et le courant dans le plasma (voir figure 2.1). Le résultat est un champ magnétique hélicoïdal qui est décomposé en ses composantes toroïdale et poloïdale. C'est un système de coordonnées orthogonal, relié aux coordonnées cartésiennes (x, y, z) de la manière suivante :

$$x = (R_0 + r\cos\theta)\cos\phi \equiv R\cos\phi, \tag{2.10}$$
$$y = (R_0 + r\cos\theta)\sin\phi \equiv R\sin\phi, \tag{2.11}$$
$$z = r\sin\theta, \tag{2.12}$$

où r désigne la distance depuis l'axe magnétique de rayon R_0 par rapport à l'axe de symétrie (la direction z). De ces expressions et du vecteur position $\mathbf{x} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$, on déduit les normes

$$\left|\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial r}\right| = |\nabla r|^{-1} = 1, \tag{2.13}$$
$$\left|\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta}\right| = |\nabla \theta|^{-1} = r, \tag{2.14}$$
$$\left|\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \phi}\right| = |\nabla \phi|^{-1} = R, \tag{2.15}$$

où $\nabla \equiv \partial/\partial\mathbf{x}$ désigne le gradient spatial.

2.2.1.2 Coordonnées de flux

On définit le flux poloïdal ψ comme la circulation du potentiel vecteur magnétique selon un contour de coordonnées $\mathcal{C} \equiv (r, \theta = 0, \phi)$. Ainsi, pour la distance infinitésimale le long de ce contour $\mathrm{d}\mathbf{l} \equiv \mathrm{d}\phi\,(\mathrm{d}\mathbf{x}/\mathrm{d}\phi)$:

$$\psi = \frac{1}{2\pi}\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\mathbf{l} = \mathbf{A}\cdot\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \phi} \equiv A_\phi. \tag{2.16}$$

En vertu du théorème de Stokes [35], la circulation de $\mathbf{A}$ selon le contour $\mathcal{C}$ est égal au flux du rotationnel $\nabla\times\mathbf{A}$ à travers la surface $\mathcal{S}$ orientée par $\mathcal{C}$, d'élément infinitésimal $\mathrm{d}^2S = R\mathrm{d}r\mathrm{d}\phi$ et de vecteur normal unitaire $\widehat{\mathbf{n}} \equiv r^{-1}\,(\partial\mathbf{x}/\partial\theta) = r\nabla\theta$:

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\mathbf{l} = \iint_{\mathcal{S}} (\nabla\times\mathbf{A})\cdot\widehat{\mathbf{n}}\mathrm{d}^2S.$$

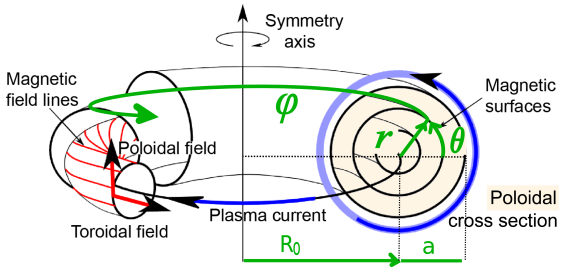


FIGURE 2.1 – Coordonnées quasi-cylindriques. r correspond le petit rayon local, $R \equiv R_0 + r\cos\theta$ le grand rayon, θ l'angle poloïdal et ϕ l'angle toroïdal. R_0 est le grand rayon de l'axe magnétique et a le petit rayon de la dernière surface magnétique fermée. Une surface magnétique (flux poloïdal ψ constant) est représentée par le tube de lignes de champ rouge.

Comme $\mathbf{B} \equiv \nabla \times \mathbf{A}$, l'expression intégrale du flux en fonction du champ magnétique vient naturellement :

$$\psi = \frac{1}{2\pi} \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{B} \cdot \widehat{\mathbf{n}} \mathrm{d}^2 S = \frac{1}{2\pi} \int_0^r \int_0^{2\pi} rR \left(\mathbf{B} \cdot \nabla\theta\right) \mathrm{d}r' \mathrm{d}\phi' = \int_0^r rRB^\theta \mathrm{d}r'. \tag{2.17}$$

De même, le flux toroïdal ψ_T est défini selon une section poloïdale $\mathcal{C}' \equiv (r, \theta, \phi = 0)$ de distance élémentaire $\mathrm{d}\mathbf{l} \equiv \mathrm{d}\theta \left(\partial\mathbf{x}/\partial\theta\right)$, ou selon la surface $\mathcal{S}'$ orientée par $\mathcal{C}'$, d'élément infinitésimal $\mathrm{d}^2 S = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$ et de vecteur normal unitaire $\widehat{\mathbf{n}} \equiv R^{-1} \left(\partial\mathbf{x}/\partial\phi\right) = R\nabla\phi$. Ainsi,

$$\psi_T = \frac{1}{2\pi} \oint_{\mathcal{C}'} \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = \mathbf{A} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta} \equiv A_\theta, \tag{2.18}$$

$$\psi_T = \frac{1}{2\pi} \iint_{\mathcal{S}'} \mathbf{B} \cdot \widehat{\mathbf{n}} \mathrm{d}^2 S = \frac{1}{2\pi} \int_0^r \int_0^{2\pi} rR \left(\mathbf{B} \cdot \nabla\phi\right) \mathrm{d}r' \mathrm{d}\theta' = \int_0^r rRB^\phi \mathrm{d}r'. \tag{2.19}$$

Les équations (2.17) et (2.19) permettent d'exprimer le potentiel vecteur (défini à un gradient de fonction quelconque près) en coordonnées de flux,

$$\mathbf{A} = -\psi\nabla\phi + \psi_T \nabla\theta, \tag{2.20}$$

et de définir le facteur de sécurité moyenné sur une surface de flux [14] $q_\psi \equiv \mathrm{d}\psi_T/\mathrm{d}\psi$ relié à l'hélicité magnétique [2],

$$q_\psi = \left(\frac{\partial \psi_T}{\partial r}\right) \left(\frac{\partial \psi}{\partial r}\right)^{-1} = \frac{B^\phi}{B^\theta}. \tag{2.21}$$

Le champ magnétique a donc l'expression suivante, en fonction des coordonnées de flux (ψ, θ, ϕ) :

$$\mathbf{B} \equiv \nabla \times \mathbf{A} = \nabla\phi \times \nabla\psi + q_\psi \nabla\psi \times \nabla\theta. \tag{2.22}$$

2.2.1.3 Jacobien spatial

De l'expression du champ magnétique 2.22, le jacobien [48] pour le système de coordonnées spatial (ψ, θ, ϕ) prend la forme :

$$\mathcal{V} \equiv \left(\nabla\psi \times \nabla\theta \cdot \nabla\phi\right)^{-1} = \left(\mathbf{B} \cdot \nabla\theta\right)^{-1} = \frac{1}{B^\theta}. \tag{2.23}$$

2.2.2 Espace des vitesses

2.2.2.1 Coordonnées « pitch-angle » de vitesse

La direction du champ magnétique constitue une direction privilégiée dans la dynamique d'une particule chargée soumise à celui-ci. C'est pourquoi le vecteur impulsion est décomposé en contributions parallèles au vecteur unitaire magnétique local $\widehat{\mathbf{b}}$ et perpendiculaire (voir figure 2.2).

2. $q_\psi = 0$ correspond à un champ uniquement poloïdal, $q_\psi \to \infty$ tend vers un champ uniquement toroïdal.

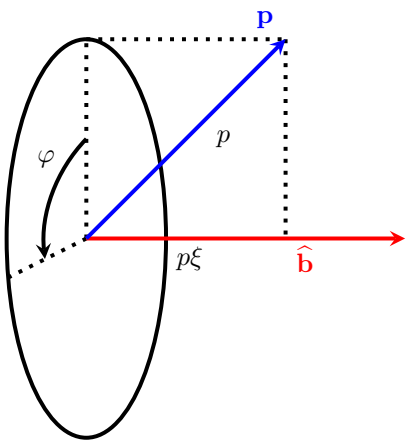


Figure 2.2 – Vecteur impulsion $\mathbf{p}$ décomposé sur le vecteur unitaire magnétique $\widehat{\mathbf{b}}$. $p \equiv |\mathbf{p}|$ représente l'amplitude, $\xi \equiv \mathbf{p} \cdot \widehat{\mathbf{b}}/p$ correspond au cosinus du pitch-angle et φ (défini arbitrairement sur le plan perpendiculaire à $\widehat{\mathbf{b}}$, formant un repère direct avec celui-ci) la « gyrophase », ou orientation azimuthale.

L'amplitude p du vecteur impulsion est liée à la conservation de l'énergie totale [3] (qui est l'énergie cinétique en l'absence de champs électriques) $\mathcal{E} \equiv p^2/2m$ et le cosinus du pitch-angle ξ est une coordonnée bien adaptée aux décompositions en polynômes de Legendre qui seront effectuées aux chapitres 5 et 6. Enfin, la « gyrophase » φ est liée avec le mouvement de gyration local de la particule autour d'une ligne de champ.

2.2.2.2 jacobien de l'espace des vitesses

En réécrivant le vecteur impulsion

$$\mathbf{p} = p\xi\widehat{\mathbf{b}} + p\sqrt{1-\xi^2}\,\widehat{\perp}, \tag{2.24}$$

où $\widehat{\perp}$ est le vecteur unitaire de la projection sur le plan perpendiculaire à $\widehat{\mathbf{b}}$, une base orthonormale tournante $\left(\widehat{\rho}, \widehat{\perp}, \widehat{\mathbf{b}}\right)$ peut être définie telle que $\widehat{\rho} = \widehat{\perp} \times \widehat{\mathbf{b}} = \partial\widehat{\perp}/\partial\varphi$. La base covariante correspondant aux coordonnées (p, ξ, φ) devient :

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial p} = \xi\widehat{\mathbf{b}} + \sqrt{1-\xi^2}\,\widehat{\perp}, \tag{2.25}$$

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \xi} = p\widehat{\mathbf{b}} - \frac{p\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\,\widehat{\perp}, \tag{2.26}$$

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \varphi} = p\sqrt{1-\xi^2}\,\widehat{\rho}. \tag{2.27}$$

Le jacobien de l'espace des vitesses devient [48] :

$$J \equiv \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial p} \times \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \varphi} = p^2. \tag{2.28}$$

3. $\mathcal{E} = \gamma mc^2 = c\sqrt{p^2 + m^2c^2}$ dans le cas relativiste. On ajoute à l'énergie cinétique $(\gamma - 1)\,mc^2$ l'énergie de masse au repos mc^2.

2.3 Orbites de particules

2.3.1 Rotation cyclotronique

La force magnétique de Lorentz $\mathbf{F} \equiv (q/m)\,\mathbf{p} \times \mathbf{B}$ fournit l'équation de mouvement suivante :

$$\dot{\mathbf{p}} = \frac{q}{m}\mathbf{p} \times \mathbf{B} = \Omega_{\mathrm{g}}\mathbf{p}_{\perp} \times \widehat{\mathbf{b}}, \tag{2.29}$$

où la fréquence de gyration est définie $\Omega_{\mathrm{g}} \equiv qB/m$ et $\mathbf{p}_{\perp} \equiv \mathbf{p} - \left(\mathbf{p} \cdot \widehat{\mathbf{b}}\right)\widehat{\mathbf{b}}$. La conservation de l'énergie est assurée par l'absence de travail de la force de Lorentz magnétique, $\mathbf{F} \cdot \mathbf{p} = 0$. Ainsi, $\mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{p}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(p^2\right) = 0$, et il vient $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\mathcal{E}\left(p^2\right)\right] = 0$.

En considérant un champ magnétique uniforme, le mouvement est perpendiculaire à $\widehat{\mathbf{b}}$:

$$\mathrm{d}\mathbf{x} = \frac{\mathbf{p}_{\perp}}{m}\mathrm{d}t = \frac{\mathbf{p}_{\perp}}{m\Omega_{\mathrm{g}}}\mathrm{d}\varphi, \tag{2.30}$$

où $\varphi(t) \equiv \Omega_{\mathrm{g}}t$. La position effectue donc une rotation autour de $\widehat{\mathbf{b}}$ et a pour forme

$$\mathbf{x} = \frac{\widehat{\mathbf{b}} \times \mathbf{p}_{\perp}}{m\Omega_{\mathrm{g}}}. \tag{2.31}$$

Une expression possible pour le potentiel vecteur d'un champ uniforme est

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{B} \times \mathbf{x}}{2} = -\frac{1}{q}\mathbf{p}_{\perp}, \tag{2.32}$$

qui est aisément vérifiable en calculant $\frac{1}{2}\nabla \times (\mathbf{x} \times \mathbf{B}) = \frac{1}{2}\left[(\nabla \cdot \mathbf{x})\,\mathbf{B} - \mathbf{B} \cdot \nabla\mathbf{x}\right] = \mathbf{B}$. L'action pour le mouvement périodique de gyration, qui est une constante du mouvement périodique (voir chapitre 3) devient, avec le moment canonique perpendiculaire $\mathbf{P}_{\perp} = \mathbf{p}_{\perp} + q\mathbf{A}$:

$$J_{\mathrm{g}} \equiv \frac{1}{2\pi}\oint \mathbf{P}_{\perp} \cdot \mathrm{d}\mathbf{x} = \frac{1}{2\pi m\Omega_{\mathrm{g}}}\int_0^{2\pi} (\mathbf{p}_{\perp} + q\mathbf{A}) \cdot \mathbf{p}_{\perp}\mathrm{d}\varphi = \frac{p_{\perp}^2}{2m\Omega_{\mathrm{g}}} \equiv \frac{m}{q}\mu, \tag{2.33}$$

où $\mu \equiv p_{\perp}^2/(2mB)$ est le moment magnétique. Celui-ci est donc un invariant adiabatique pour la gyration autour des lignes de champ, pourvu que le rayon de gyration $\rho_0 \equiv \left|\mathbf{p}_{\perp} \times \widehat{\mathbf{b}}\right|/(m\Omega_{\mathrm{g}}) = p_{\perp}/(m\Omega_{\mathrm{g}})$ soit faible devant la longueur caractéristique de gradient du champ magnétique (localement, le champ est uniforme pour la dynamique de gyration).

2.3.2 Mouvement longitudinal

Du fait de l'axisymétrie, la dynamique parallèle est étudiée en projection sur un plan poloïdal. Ceci présente l'avantage d'avoir des trajectoires fermées pour le mouvement des centre-guides (les lignes de champ ne se referment pas sur elles-mêmes en parcourant une surface de flux magnétique). En utilisant la conservation de l'énergie $\mathcal{E}\left(p^2\right)$ et du moment magnétique $\mu = p^2\left(1-\xi^2\right)/(2mB)$, le rapport suivant reste constant dans le mouvement parallèle aux lignes de champ de la particule :

$$\frac{1-\xi^2}{B} = \mathrm{cte}. \tag{2.34}$$

La vitesse parallèle est donc *inversement proportionnelle* à l'amplitude du champ magnétique sur la trajectoire. En notant $B_{\min}$ la valeur de B au point de champ minimum de la trajectoire et $\xi_{\min}$ le pitch-angle au minimum de champ vérifiant

$$\frac{1-\xi_{\min}^2}{B_{\min}} = \frac{1-\xi^2}{B}, \tag{2.35}$$

il y a réflexion ($\xi = 0$) si

$$|\xi_{\min}| \leq \sqrt{1 - \frac{B_{\min}}{B_{\max}}}. \tag{2.36}$$

L'égalité de cette inéquation correspond au cas limite où les deux points de rebroussement se rejoignent à une amplitude maximum $B_{\max}$. Une définition plus précise de cette amplitude est donnée dans la section 2.4.1.

Selon la valeur de $\xi_{\min}$, il y aura donc deux catégories de trajectoires :

- Les *particules piégées* dont la trajectoire présente deux points de rebroussement et subissent la force diamagnétique les repoussant vers les zones de faible champ.
- Les *particules passantes* (ou circulantes) ont une vitesse parallèle suffisante pour vaincre la répulsion de la force diamagnétique et n'ont pas de points de rebroussement.

Le cosinus du pitch-angle pris au minimum de champ peut donc servir de critère discriminant entre ces deux familles d'orbites.

2.3.3 Invariant axisymétrique

L'axisymétrie du champ magnétique offre une troisième constante du mouvement. En projetant l'équation (2.29) sur ϕ, elle devient

$$\dot{p}_\phi = \frac{q}{m} (\mathbf{p} \times \mathbf{B}) \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \phi} = \frac{q}{m} \mathbf{p} \cdot \left(\mathbf{B} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \phi} \right). \tag{2.37}$$

En insérant l'expression (2.22), $\mathbf{B} \times (\partial \mathbf{x}/\partial \phi)$ devient $(\nabla \phi \times \nabla \psi) \times (\partial \mathbf{x}/\partial \phi) = \nabla \psi$. Comme $\mathbf{p} \cdot \nabla \psi = m \dot{\mathbf{x}} \cdot \nabla \psi = m \dot{\psi}$, il vient

$$\dot{p}_\phi = q \dot{\psi} \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} (p_\phi + q A_\phi) = \dot{P}_\phi = 0. \tag{2.38}$$

On reconnait ici l'expression du moment canonique toroidal P_ϕ dont l'origine est discutée plus en détail au chapitre (3),

$$P_\phi \equiv \mathbf{P} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \phi} = p_\phi + q A_\phi, \tag{2.39}$$

qui est donc un invariant lié à l'axisymétrie du champ magnétique. Si le rayon de Larmor est petit devant la longueur caractéristique de gradient magnétique, un développement de la vitesse du centre-guide donne à l'ordre le plus bas l'expression pour le moment canonique toroidal [11] :

$$P_\phi = -q\psi + p\xi b_\phi. \tag{2.40}$$

En l'absence de champ magnétique toroïdal, l'axisymétrie se réduit à l'invariance de flux poloïdal. L'effet produit est un *élargissement* des orbites au delà de leur surface de flux et un *couplage* entre la vitesse parallèle et l'espace réel. Ce sont les phénomènes (dits « néoclassiques ») liés à ce couplage qui seront étudiés, notamment dans la problématique des collisions. Un cas limite est la géométrie dipolaire (chapitre 4), où l'invariance du flux poloïdal est exacte.

2.4 Coordonnées globales

2.4.1 Invariants d'orbite

Afin de décrire l'évolution en mettant en valeur les effets néoclassiques, une transformation de coordonnées,

$$(\psi, \theta, \phi, p, \xi) \rightarrow \left(\overline{\psi}, \theta, \phi, p, \xi_0\right), \tag{2.41}$$

est effectuée sur les invariants cités dans la section 2.3. A partir du moment canonique toroidal P_ϕ, une coordonnée homogène à un flux magnétique est définie,

$$\overline{\psi} \equiv -\frac{1}{q} P_\phi = \psi - \frac{1}{q} p\xi b_\phi \equiv \psi - \delta\psi\left(\psi, \theta, p, \xi\right). \tag{2.42}$$

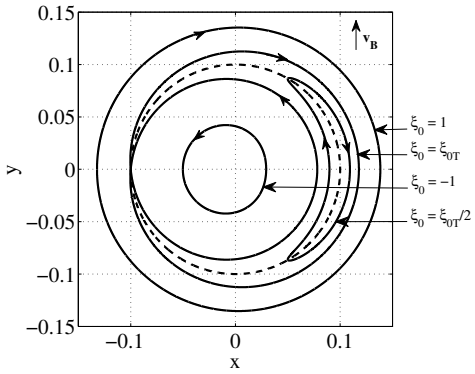


FIGURE 2.3 – Représentation schématique de plusieurs orbites de même surface de flux de référence $\overline{\psi}$ (pointillés), projetées sur le plan poloïdal. A la frontière passante/piégée, les points de rebroussement se rejoignent au maximum de champ.

Ainsi, la position radiale du centre-guide $\psi \equiv \overline{\psi} + \delta\psi$ est vue comme une *déviation* d'une surface de flux de référence $\overline{\psi}$ (voir figure 2.3). Celle-ci est traversée par la trajectoire uniquement s'il y a point de rebroussement $\xi = 0$; c'est-à-dire si la trajectoire est piégée. Il est possible de définir un autre invariant d'orbite,

$$\xi_0 \equiv \sigma \sqrt{1 - B_0\left(\overline{\psi}\right) \frac{1 - \xi^2}{B\left(\psi, \theta\right)}}, \tag{2.43}$$

qui dépend des quantités définies aux équations (2.36) et (2.42). $B_0\left(\psi\right)$ correspond ici à l'amplitude minimum du champ magnétique sur la surface de flux ψ et $\sigma \equiv \pm 1$ permet de discriminer la direction d'une particule circulante (pour les particules piégées, les orbites $\sigma = \pm 1$ sont identiques à cause de l'oscillation ; on fixe donc arbitrairement $\sigma = 1$). La frontière entre particules circulantes et piégées devient

$$|\xi_{0T}| = \sqrt{1 - \frac{B_0\left(\overline{\psi}\right)}{B_1\left(\overline{\psi}\right)}}, \tag{2.44}$$

en notant $B_1\left(\psi\right)$ l'amplitude maximum de champ sur la surface de flux ψ (ce point est atteint à la frontière passante/piégée car dans cette limite les points de rebroussement situés sur la surface $\psi = \overline{\psi}$ se rejoignent). La frontière ne dépend donc que de $\overline{\psi}$ dans ce système de coordonnées. Elle est aussi par construction de bornes fixes : $|\xi_{0T}| \in [0, 1]$, ce qui facilite une discrétisation directe dans les simulations informatiques.

L'avantage principal du système de coordonnées $\left(\overline{\psi}, \theta, p, \xi_0, \sigma\right)$ ainsi construit est qu'il se réduit à des coordonnées physiques dans la limite non néoclassique (où $\overline{\psi} = \psi$ et $\xi_0 = \xi_{\min}$ tel que défini dans l'équation (2.35)). Il y a donc continuité avec les résultats fournis par les codes de simulation opérant dans cette limite [14]. L'ensemble permet de caractériser les orbites de manière non ambiguë dans un espace des phases à quatre dimensions (ϕ peut être négligé grâce à l'axisymétrie et σ est un paramètre binaire).

2.4.2 jacobien

Le jacobien pour la transformation de coordonnées $(\psi, \xi) \to \left(\overline{\psi}, \xi_0\right)$ est l'inverse du déterminant de la matrice jacobienne définie par les dérivées des nouvelles coordonnées en fonction des anciennes,

$$\mathbb{J} \equiv \begin{pmatrix} \partial\overline{\psi}/\partial\psi & \partial\overline{\psi}/\partial\xi \\ \partial\xi_0/\partial\psi & \partial\xi_0/\partial\xi \end{pmatrix}.$$

D'après les définitions 2.42 et 2.43, les composantes de $\mathbb{J}$ ont pour expression

$$\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial\psi} =1-\frac{1}{q}p\xi\frac{\partial b_\phi}{\partial\psi}, \tag{2.45}$$

$$\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial\xi} =-\frac{1}{q}pb_\phi, \tag{2.46}$$

$$\frac{\partial\xi_0}{\partial\psi} =\frac{1-\xi^2}{2\xi_0 B}\frac{\mathrm{d}B_0\left(\overline{\psi}\right)}{\mathrm{d}\overline{\psi}}\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial\psi}+\frac{1-\xi^2}{2\xi_0}\frac{B_0\left(\overline{\psi}\right)}{B^2}\frac{\partial B}{\partial\psi}, \tag{2.47}$$

$$\frac{\partial\xi_0}{\partial\xi} =\frac{\xi}{\xi_0}\frac{B_0(\overline{\psi})}{B(\psi,\theta)}-\frac{1-\xi^2}{2\xi_0 B}\frac{\mathrm{d}B_0\left(\overline{\psi}\right)}{\mathrm{d}\overline{\psi}}\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial\xi}, \tag{2.48}$$

de telle façon que

$$\det\mathbb{J}=\frac{\xi}{\xi_0}\frac{B_0\left(\overline{\psi}\right)}{B(\psi,\theta)}\left[\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial\psi}-\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial\xi}\frac{1-\xi^2}{2\xi}\frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial\psi}\right]. \tag{2.49}$$

L'hypothèse d'axisymétrie ($\widehat{\mathbf{b}}\equiv b_\psi\nabla\psi+b_\theta\nabla\theta+b_\phi\nabla\phi$ ne dépend pas de ϕ) donne les relations suivantes, en utilisant l'expression du jacobien spatial de l'équation 2.23 :

$$\begin{aligned}\nabla\theta\cdot\nabla\times\hat{\mathbf{b}} &= \nabla\theta\cdot\left[\nabla b_\phi\times\nabla\phi+\nabla b_\theta\times\nabla\theta+\nabla b_\psi\times\nabla\psi\right]\\ &= \nabla\phi\times\nabla\theta\cdot\nabla b_\phi\\ &= \left(\nabla\phi\times\nabla\theta\cdot\nabla\psi\right)\frac{\partial b_\phi}{\partial\psi}\\ &= -B^\theta\frac{\partial b_\phi}{\partial\psi},\end{aligned} \tag{2.50}$$

et

$$\begin{aligned}\nabla\theta\cdot\hat{\mathbf{b}}\times\frac{\nabla B}{B} &= b_\phi\left(\nabla\theta\cdot\nabla\phi\times\nabla\psi\right)\frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial\psi}\\ &= B^\theta b_\phi\frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial\psi}.\end{aligned} \tag{2.51}$$

On en déduit les expressions :

$$\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial\xi}\frac{1-\xi^2}{2\xi}\frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial\psi} =-\frac{p}{qB^\theta}\frac{1-\xi^2}{2\xi}\nabla\theta\cdot\hat{\mathbf{b}}\times\frac{\nabla B}{B}, \tag{2.52}$$

$$\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial\psi}=1-\frac{1}{q}p\xi\frac{\partial b_\phi}{\partial\psi} =1+\frac{p\xi}{qB^\theta}\nabla\theta\cdot\nabla\times\hat{\mathbf{b}},. \tag{2.53}$$

En utilisant l'identité[4] $\nabla\times\widehat{\mathbf{b}}=\left(\widehat{\mathbf{b}}\cdot\nabla\times\widehat{\mathbf{b}}\right)\widehat{\mathbf{b}}+\widehat{\mathbf{b}}\times\left(\widehat{\mathbf{b}}\cdot\nabla\widehat{\mathbf{b}}\right)$, le jacobien de la transformation $(\psi,\xi)\to\left(\overline{\psi},\xi_0\right)$ devient :

$$J_{\overline{\psi},\xi_0}=\left|\det\mathbb{J}\right|^{-1}=\left|\frac{\xi_0}{\xi}\right|\frac{B}{B_0\left(\overline{\psi}\right)}\left|1+\frac{p\xi}{qB^\theta}\nabla\theta\cdot\left(\left(\widehat{\mathbf{b}}\cdot\nabla\times\widehat{\mathbf{b}}\right)\widehat{\mathbf{b}}+\widehat{\mathbf{b}}\times\left[\frac{1-\xi^2}{2\xi^2}\frac{\nabla B}{B}+\widehat{\mathbf{b}}\cdot\nabla\widehat{\mathbf{b}}\right]\right)\right|^{-1}. \tag{2.54}$$

2.4.3 Moyenne d'orbite

Le mouvement du centre-guide a pour variation élémentaire de temps sur la trajectoire[5] $\mathrm{d}t=\mathrm{d}\theta/\dot{\theta}$, où $\dot{\theta}$ est déduit des équations du mouvement déterminées dans le chapitre 3. La période

4. Cette identité est vérifiée en calculant $\widehat{\mathbf{b}}\times\left(\nabla\times\widehat{\mathbf{b}}\right)=\frac{1}{2}\nabla\left(\widehat{\mathbf{b}}\cdot\widehat{\mathbf{b}}\right)-\widehat{\mathbf{b}}\cdot\nabla\widehat{\mathbf{b}}=-\widehat{\mathbf{b}}\cdot\nabla\widehat{\mathbf{b}}$.

5. Ici, l'angle poloïdal θ est utilisé comme paramètre d'orbite. L'expression reste vraie en utilisant une autre paramétrisation (par exemple la distance le long d'une ligne de champ), avec l'équation de mouvement correspondante.

d'orbite a donc pour expression, en intégrant sur la trajectoire du centre-guide :

$$\tau_{\mathcal{O}} \equiv \oint \frac{\mathrm{d}\theta}{\dot{\theta}}. \tag{2.55}$$

Par construction, cette expression est uniquement fonction des invariants d'orbite $\left(\overline{\psi}, p, \xi_0\right)$. De même, une opération de moyenne sur une orbite de centre-guide est définie par la même intégration,

$$\langle \dots \rangle_{\mathcal{O}} \equiv \frac{1}{\tau_{\mathcal{O}}} \oint \frac{\mathrm{d}\theta}{\dot{\theta}} \left(\dots \right), \tag{2.56}$$

normalisée sur une période $\tau_{\mathcal{O}}$. Celle-ci sera utilisée dans le chapitre 7 pour l'élaboration d'une équation d'évolution ne dépendant que des invariants d'orbite, ramenant la dynamique à trois dimensions : $\overline{\psi}, p, \xi_0$.

2.5 Résumé du chapitre

Dans ce chapitre ont été définis les systèmes de coordonnées utilisés pour l'espace réel et l'espace des vitesses, ainsi que les invariants adiabatiques correspondants à la dynamique des particules. Le système de coordonnées global $\left(\overline{\psi}, \theta, p, \xi_0\right)$ construit à partir des invariants et l'opération de moyenne d'orbite associée sont très utiles pour l'expression de l'opérateur collision centre-guide (chapitre 6) de façon adaptée aux problématiques néoclassiques et la réduction de la dynamique du centre-guide (chapitre 7).

Chapitre 3

Théorie cinétique des plasmas magnétisés

Dans ce chapitre, des rappels sont présentés sur la théorie cinétique des particules dans un plama de fusion. L'évolution d'un système à N particules n'est pas intégrable dans le cas général, aussi faut-il procéder à une description statistique de l'évolution du système. La description équivalente selon la hiérarchie BBGKY permet de réduire l'évolution du système à des équations à une particule pour chaque espèce, avec pour fermeture un terme d'interaction entre particules.

Afin de procéder à une réduction supplémentaire de l'espace des phases, l'évolution est réexprimée selon la théorie hamiltonienne. Le formalisme des transformées de Lie permet d'obtenir une évolution indépendante des dynamiques rapides ; il est utilisé pour remplacer le mouvement de gyration de la particule par celui du centre-guide.

3.1 Distributions, equation de Liouville

3.1.1 Description statistique de l'évolution d'un système à N particules

Dans un plasma de fusion, la dynamique est régie par les équations newtoniennes [30] sur les particules i :

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{X}_i}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathbf{P}_i}{m_i}, \tag{3.1}$$

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{P}_i}{\mathrm{d}t} = \mathbf{F}_i, \tag{3.2}$$

où $\mathbf{X}_i(t)$ et $\mathbf{P}_i(t)$ désignent les positions et impulsions à l'instant t des particules individuelles $i \in \{1, 2, \ldots, N\}$ du plasma, $\mathbf{F}_i$ les forces agissant sur celles-ci et m_i leur masse. Nous pouvons en déduire une description équivalente en définissant une distribution exacte des particules f_N^{ex} de la façon suivante :

$$f_N^{\mathrm{ex}}(t, \mathbf{x}_1, \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{x}_N, \mathbf{p}_N) \equiv \prod_{i=1}^{N} \delta(\mathbf{x}_i - \mathbf{X}_i(t)) \, \delta(\mathbf{p}_i - \mathbf{P}_i(t)). \tag{3.3}$$

A tout instant t, cette distribution est nulle sauf aux positions $\mathbf{X}_i(t)$ et $\mathbf{P}_i(t)$ des particules respectives. L'évolution de cette distribution est déterminée en effectuant la dérivée partielle selon t,

$$\frac{\partial f_N^{\mathrm{ex}}}{\partial t} = -\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{X}_i}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\partial f_N^{\mathrm{ex}}}{\partial \mathbf{x}_i} + \frac{\mathrm{d}\mathbf{P}_i}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\partial f_N^{\mathrm{ex}}}{\partial \mathbf{p}_i} \right), \tag{3.4}$$

en utilisant la propriété $\partial\delta(x-y)/\partial y = -\partial\delta(x-y)/\partial x$. Comme la distribution est nulle sauf si $\mathrm{d}\mathbf{X}_i/\mathrm{d}t = \mathbf{P}_i/m_i = \mathbf{p}_i/m_i$ et $\mathrm{d}\mathbf{P}_i/\mathrm{d}t = \mathbf{F}_i$, l'équation d'évolution devient

$$\frac{\partial f_N^{\mathrm{ex}}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\mathbf{p}_i}{m_i} \cdot \frac{\partial f_N^{\mathrm{ex}}}{\partial \mathbf{x}_i} + \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial f_N^{\mathrm{ex}}}{\partial \mathbf{p}_i} \right) \equiv \frac{\mathrm{d} f_N^{\mathrm{ex}}}{\mathrm{d}t} = 0. \tag{3.5}$$

Cette équation exprime l'idée que le volume de l'*espace des phases* de dimension $6N$ formé par les N particules $(\mathbf{x}_1, \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{x}_N, \mathbf{p}_N)$ reste constant dans l'évolution du système.

Dans la pratique, l'intégration de ces équations pour un système à grand nombre de particules est impossible, car les forces dépendent des positions et impulsions de *toutes* les particules. Même dans le cas de forces simples, il serait nécessaire de connaître de façon précise les *conditions initiales* $\mathbf{X}_i(t=0)$, $\mathbf{P}_i(t=0)$ pour obtenir l'évolution, information qui n'est pas disponible en général car les quantités observables sont des valeurs macroscopiques intégrées. La résolution du couplage des forces nécessite la séparation de la description en N équations distinctes en utilisant la hiérarchie BBGKY, qui est expliquée dans la section 3.1.2. Afin de s'affranchir du problème des conditions initiales, il faut procéder à une interprétation *statistique* de la fonction de distribution : au lieu d'une distribution nulle partout sauf sur un point de l'espace des phases, nous définissons une densité de probabilité f_N telle que

$$f_N(t, \mathbf{x}_1, \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{x}_N, \mathbf{p}_N) \prod_{i=1}^{N} \mathrm{d}^3\mathbf{x}_i \mathrm{d}^3\mathbf{p}_i \tag{3.6}$$

donne la probabilité de trouver le système à l'instant t et au point $(\mathbf{x}_1, \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{x}_N, \mathbf{p}_N)$ dans l'élément de volume de l'espace des phases $\prod_{i=1}^{N} \mathrm{d}^3\mathbf{x}_i \mathrm{d}^3\mathbf{p}_i$. Cette description *continue* peut être déterminée de la manière suivante : on intègre f_N^{ex} sur un volume d'espace des phases $\Delta\mathbf{x}\Delta\mathbf{p}$ assez grand pour que le nombre de particules $N_V \gg 1$ à l'intérieur, mais suffisamment petit pour que la fonction f_N ainsi obtenue,

$$f_N(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}) = \frac{1}{\Delta\mathbf{x}\Delta\mathbf{p}} \int_{\Delta\mathbf{x}} \mathrm{d}^3\mathbf{x} \int_{\Delta\mathbf{p}} \mathrm{d}^3\mathbf{p} f_N^{\mathrm{ex}} = \frac{N_V}{\Delta\mathbf{x}\Delta\mathbf{p}}, \tag{3.7}$$

ne change pas trop au sein du volume [9]. En remplaçant la distribution exacte par cette densité de probabilité, l'équation (3.5) donne l'*équation de Liouville*,

$$L_N f_N \equiv \frac{\mathrm{d}f_N}{\mathrm{d}t} \equiv \frac{\partial f_N}{\partial t} + \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\mathbf{p}_i}{m_i} \cdot \frac{\partial f_N}{\partial \mathbf{x}_i} + \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial f_N}{\partial \mathbf{p}_i} \right) = 0, \tag{3.8}$$

qui sert de point de départ pour la description statistique d'un problème à grand nombre de particules.

3.1.2 Hiérarchie BBGKY

Afin de réduire la dynamique à des équations différentielles réduites plus faciles à résoudre, une série de distributions réduites est définie de la manière suivante [1] :

$$f_k(t, \mathbf{x}_1, \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{x}_k, \mathbf{p}_k) \equiv A_k \int f_N \prod_{j=k+1}^{N} \mathrm{d}^3\mathbf{x}_j \mathrm{d}^3\mathbf{p}_j, \tag{3.9}$$

où $A_k = 1/(N-k)$ représente un facteur de normalisation correspondant au nombre d'arrangements possibles de k particules, lié à l'indiscernabilité entre particules de même espèce. Ceci permet d'exprimer N équations pour f_k en intégrant (3.8) sur les coordonnées $(\mathbf{x}_{k+1}, \mathbf{p}_{k+1}, \ldots, \mathbf{x}_N, \mathbf{p}_N)$:

$$\frac{\partial f_k}{\partial t} + \sum_{i=1}^{k} \frac{\mathbf{p}_i}{m_i} \cdot \frac{\partial f_k}{\partial \mathbf{x}_i} + A_k \sum_{i=1}^{k} \int \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial f_N}{\partial \mathbf{p}_i} \prod_{j=k+1}^{N} \mathrm{d}^3\mathbf{x}_j \mathrm{d}^3\mathbf{p}_j = 0. \tag{3.10}$$

En séparant les forces $\mathbf{F}_i$ en une force extérieure $\mathbf{F}_i^{\mathrm{ext}}$ (champs extérieurs) et intérieure $\mathbf{F}_i^{\mathrm{int}}$ (interaction entre particules), il est possible de sortir la première de l'intégrale et d'obtenir une équation

1. Pour un traitement relativiste de cette section, voir les travaux de Polyakov [39]

sur f_k ne dépendant que d'elle-même et de f_{k+1}. Dans le cas non-relativiste [2], les forces intérieures correspondent aux forces électrostatiques

$$\mathbf{F}_i^{\text{int}} = -\sum_{j=1, j\neq i}^{N} \frac{\partial \Phi_{ij}}{\partial \mathbf{x}_i}, \tag{3.11}$$

où l'on a défini le potentiel coulombien $\Phi_{ij} \equiv (e_i e_j / 4\pi\varepsilon_0) \left|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\right|^{-1}$. L'équation (3.10) devient alors

$$\frac{\partial f_k}{\partial t} + \sum_{i=1}^{k} \frac{\mathbf{p}_i}{m_i} \cdot \frac{\partial f_k}{\partial \mathbf{x}_i} + \mathbf{F}_i^{\text{ext}} \cdot \frac{\partial f_k}{\partial \mathbf{p}_i} = \sum_{i=1}^{k} \int \frac{\partial \Phi_{ik+1}}{\partial \mathbf{x}_i} \cdot \frac{\partial f_{k+1}}{\partial \mathbf{p}_i} \mathrm{d}^3\mathbf{x}_{k+1} \mathrm{d}^3\mathbf{p}_{k+1}. \tag{3.12}$$

C'est la hiérarchie BBGKY, nommée d'après Bogolioubov [7], Born et Green [8], Kirkwood [27, 28] et Yvon [52]. Dans la pratique, la description est tronquée à $k = 1$ en supposant que les interactions entre paires de particules dominent dans le plasma, ce qui est raisonnable pour des milieux à faible densité. La fonction de distribution à deux particules est exprimée

$$f_2\left(t, \mathbf{x}_1, \mathbf{p}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{p}_2\right) \equiv f_1\left(t, \mathbf{x}_1, \mathbf{p}_1\right) f_1\left(t, \mathbf{x}_2, \mathbf{p}_2\right) + Q\left(t, \mathbf{x}_1, \mathbf{p}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{p}_2\right), \tag{3.13}$$

où Q est appelé fonction de corrélation. L'équation pour une particule peut donc être remaniée de la manière suivante de façon à isoler la dépendance en f_1,

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}_1}{m_1} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{x}_1} + \mathbf{F}_1^{\text{ext}} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{p}_1} - \frac{\partial f_1\left(t, \mathbf{x}_1, \mathbf{p}_1\right)}{\partial \mathbf{p}_1} \cdot \int \frac{\partial \Phi_{12}}{\partial \mathbf{x}_1} f_1\left(t, \mathbf{x}_2, \mathbf{p}_2\right) \mathrm{d}^3\mathbf{x}_2 \mathrm{d}^3\mathbf{p}_2 = \int \frac{\partial \Phi_{12}}{\partial \mathbf{x}_1} \cdot \frac{\partial Q}{\partial \mathbf{p}_1} \mathrm{d}^3\mathbf{x}_2 \mathrm{d}^3\mathbf{p}_2, \tag{3.14}$$

où le troisième terme du membre de gauche désigne le champ électrique produit par le milieu et ressenti par la particule. Regroupant les termes de force (extérieure et de « champ ») et en omettant les indices, on obtient une nouvelle équation d'évolution pour la distribution à une particule,

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}}{m} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{F} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = \mathcal{Q}\left(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}\right), \tag{3.15}$$

où le membre de droite est un *terme d'interaction* correspondant notamment aux collisions et dépendant essentiellement de la corrélation de la distribution à deux particules. Comme celle-ci dépend de f_2, une approche est de remplacer $\mathcal{Q}$ par un opérateur collision ne dépendant que de f_1 déterminé selon une théorie sur les collisions. C'est la méthode employée dans le cadre de cette thèse, exposée dans le chapitre 5. Cela permet de décrire l'évolution d'un plasma en utilisant des équations sur les distributions à une particule en séparant les espèces. L'espace des phases est ainsi réduit de $6N$ à 6 dimensions.

Dans le cas où on néglige totalement la corrélation, l'équation non collisionnelle obtenue est l'équation de Vlasov :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}}{m} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{F} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = 0. \tag{3.16}$$

3.2 Approche hamiltonnienne, réduction de l'espace des phases

Dans cette section, on note $\dot{a} \equiv \mathrm{d}a/\mathrm{d}t$ la dérivée totale de la quantité a par rapport au temps. Pour une approche plus détaillée de la mécanique lagrangienne et hamiltonienne, voir les cours de Landau et Lifschitz [30].

2. Dans le cas relativiste, il faut rajouter aux forces internes les forces de Bremsstrahlung (rayonnement de freinage). L'interaction entre deux charges dépend des coordonnées de *toutes* les particules, ainsi le découplage des équations (3.10) pour n'inclure que la distribution à $k+1$ particules nécessite une approximation supplémentaire. C'est le cas par exemple pour les particules faiblement relativistes, ce qui est suffisant pour la description cinétique des plasmas de fusion.

3.2.1 Formalisme Lagrangien

3.2.1.1 Principe de Hamilton, équations d'Euler-Lagrange

L'expérience montre que la donnée simultanée des coordonnées et des vitesses détermine complètement l'état d'un système mécanique. Selon le principe de Hamilton (aussi appelé principe de moindre action), tout système mécanique est caractérisé par une fonction scalaire

$$\mathcal{L}\left(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}\right), \tag{3.17}$$

Aux instants $t = t_1$ et $t = t_2$, le système occupe des positions déterminées par les valeurs des coordonnées $\mathbf{x}\left(t_1\right)$ et $\mathbf{x}\left(t_2\right)$. Le mouvement intermédiaire du système entre ces deux positions est de telle façon que l'intégrale

$$\mathcal{S} \equiv \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \mathcal{L}\left(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}\right) \tag{3.18}$$

passe par un extrémum [3] (la variation infinitésimale $\delta\mathcal{S}$ est nulle). $\mathcal{S}$ est appelée *intégrale d'action* et $\mathcal{L}$ est le *lagrangien* (ou fonction de Lagrange) du système. Soit $\mathbf{x}\left(t\right)$ une fonction de position telle que la condition d'extremum de $\mathcal{S}$ soit remplie. Si l'on effectue une variation infinitésimale $\delta\mathbf{x}$ petite devant $\mathbf{x}$, celle-ci doit vérifier

$$\delta\mathbf{x}\left(t_1\right) = \delta\mathbf{x}\left(t_2\right) = 0, \tag{3.19}$$

pour que les positions $\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}$ prennent les mêmes valeurs en t_1 et t_2. La variation [4] $\delta\mathcal{S}$ est donnée comme la différence infinitésimale en remplaçant la position $\mathbf{x}$ par $\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}$,

$$\delta\mathcal{S} = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \mathcal{L}\left(t, \mathbf{x} + \delta\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}} + \delta\dot{\mathbf{x}}\right) - \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \mathcal{L}\left(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}\right) = 0. \tag{3.20}$$

Ceci permet d'effectuer un développement de Taylor au premier ordre et donne

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\mathbf{x}} \cdot \delta\mathbf{x} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\mathbf{x}}} \cdot \delta\dot{\mathbf{x}}\right) = 0. \tag{3.21}$$

En remarquant que $\delta\dot{\mathbf{x}} = \mathrm{d}\delta\mathbf{x}/\mathrm{d}t$, il est possible d'effectuer une intégration par parties du second terme, ce qui donne (en éliminant le terme non intégral $\left[\partial\mathcal{L}/\partial\dot{\mathbf{x}} \cdot \delta\mathbf{x}\right]_{t_1}^{t_2}$ à cause de l'équation (3.19)) :

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\mathbf{x}} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\mathbf{x}}}\right) \cdot \delta\mathbf{x} = 0.$$

Comme cette relation doit être verifiée quelle que soit la variation infinitésimale $\delta\mathbf{x}$, l'expression sous le signe d'intégration doit être nulle. On obtient ainsi les équations du mouvement appelées équations d'Euler-Lagrange,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\mathbf{x}}} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\mathbf{x}}. \tag{3.22}$$

Il faut bien noter que les coordonnées $\mathbf{x}$ et $\dot{\mathbf{x}}$ sont traitées de manière indépendantes pour la dérivation, le temps n'apparaît donc pas explicitement dans l'expression du lagrangien. De plus, le lagrangien est défini à une *dérivée exacte temporelle près* : l'ajout d'une fonction $\mathrm{d}f/\mathrm{d}t$ laisse inchangée la variation de l'intégrale d'action $\delta\mathcal{S}$ qui détermine l'évolution du système.

3. La dénomination « principe de moindre action » est donc ici un peu abusive, car $\mathcal{S}$ ne passe pas forcément par un minimum.

4. La formulation du principe de Hamilton est ici sous sa forme faible : on ne s'intéresse qu'aux états initial et final du système (aux temps t_1 et t_2 respectivement) et non à la trajectoire empruntée.

3.2.1.2 Lagrangien pour une particule

Le lagrangien pour une particule de masse m évoluant dans un champ de force extérieur a pour forme

$$\mathcal{L}\left(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}\right) \equiv \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{x}}^2 - V\left(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}\right), \tag{3.23}$$

où V désigne un potentiel généralisé lié aux forces agissant sur celle-ci. Pour une force conservative, donc dérivant d'une énergie potentielle, (notamment le champ électrique dans les plasmas de fusion), elle ne dépend pas des vitesses. Ainsi, pour la force électrique, il correspond à l'énergie potentielle électrique $V \equiv q\Phi\left(t, \mathbf{x}\right)$ telle que $\mathbf{E} = -\partial\Phi/\partial\mathbf{x}$. On définit ensuite l'impulsion généralisée (appelée moment canonique en mécanique hamiltonienne)

$$\mathbf{P} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{x}}} = m\dot{\mathbf{x}} - \frac{\partial V}{\partial \dot{\mathbf{x}}}, \tag{3.24}$$

et la force agissant sur la particule

$$\mathbf{F} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{x}} = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}}. \tag{3.25}$$

Dans le cas d'une particule évoluant dans un champ électromagnétique déterminé par les potentiels $\mathbf{A}\left(t, \mathbf{x}\right)$ et $\Phi\left(t, \mathbf{x}\right)$, en notant $\nabla \equiv \partial/\partial\mathbf{x}$, les champs électrique et magnétique ont pour forme

$$\mathbf{B} \equiv \nabla \times \mathbf{A}, \tag{3.26}$$

$$\mathbf{E} \equiv -\nabla\Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \tag{3.27}$$

Les expressions des champs $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$ sont inchangées lors d'un changement de jauge $\eta\left(t, \mathbf{x}\right)$ tel que $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\eta$, $\Phi' = \Phi - \partial\eta/\partial t$. En utilisant la condition de jauge de Coulomb $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, la force de Lorentz $\mathbf{F}_\mathrm{e} \equiv q\left(\mathbf{E} + \dot{\mathbf{x}} \times \mathbf{B}\right)$ peut être exprimée en fonction d'un potentiel généralisé dépendant de la position et de la vitesse

$$q\Phi - q\mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{x}}. \tag{3.28}$$

En effet, l'équation d'Euler-Lagrange 3.22 devient

$$-\nabla\left(q\Phi - q\mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{x}}\right) = m\ddot{\mathbf{x}} + q\frac{\mathrm{d}\mathbf{A}}{\mathrm{d}t}. \tag{3.29}$$

Un remaniement de l'équation donne

$$m\ddot{\mathbf{x}} = q\left[-\nabla\Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + (\nabla\mathbf{A}) \cdot \dot{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{x}} \cdot \nabla\mathbf{A}\right] = q\left[\mathbf{E} + \dot{\mathbf{x}} \times \mathbf{B}\right] = \mathbf{F}_\mathrm{e}, \tag{3.30}$$

ou est utilisée l'identité $\dot{\mathbf{x}} \times \mathbf{B} = \dot{\mathbf{x}} \times (\nabla \times \mathbf{A}) = (\nabla\mathbf{A}) \cdot \dot{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{x}} \cdot \nabla\mathbf{A}$. La seconde équation de Newton $m\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}_\mathrm{e}$ est ainsi bien retrouvée. Le lagrangien prend donc la forme

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m\dot{\mathbf{x}}^2 + q\mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{x}} - q\Phi. \tag{3.31}$$

Si l'on effectue un changement de jauge η, le nouveau lagrangien donne

$$\mathcal{L}' = \frac{1}{2} m\dot{\mathbf{x}}^2 + q\mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{x}} - q\Phi + q\left(\frac{\partial}{\partial t} + \dot{\mathbf{x}} \cdot \nabla\right)\eta = \mathcal{L} + q\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}t}, \tag{3.32}$$

qui diffère d'une dérivée exacte temporelle de $\mathcal{L}$ (la dynamique déterminée par le principe de Hamilton est donc inchangée). Il est ainsi équivalent de considérer $\mathcal{L}$ ou $\mathcal{L}'$ pour l'évolution du système ; la forme obtenue est bien invariante par changement de jauge. Enfin, l'écriture du Lagrangien en utilisant le moment canonique donne

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{P} + q\mathbf{A}\right) \cdot \dot{\mathbf{x}} - q\Phi. \tag{3.33}$$

3.2.2 Formalisme hamiltonien, coordonnées canoniques

3.2.2.1 Equations d'évolution

Pour une particule, l'hamiltonien représente l'énergie totale du système et a pour forme

$$H = \frac{(\mathbf{P} - q\mathbf{A})^2}{2m} + q\Phi(\mathbf{x}). \tag{3.34}$$

C'est la transformée de Legendre de l'hamiltonien H, qui donne en coordonnées canoniques $(\mathbf{x}, \mathbf{P})$:

$$H(t, \mathbf{x}, \mathbf{P}) = \mathbf{P} \cdot \dot{\mathbf{x}} - \mathcal{L}. \tag{3.35}$$

Un remaniement des équations d'Euler-Lagrange (3.22) donne des équations quasi-symétriques (dites « canoniques ») sur l'hamiltonien,

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{P}}, \tag{3.36}$$

$$\dot{\mathbf{P}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}, \tag{3.37}$$

transformant les équations du second ordre en une série d'équations au premier ordre. Le crochet de Poisson $\{\,,\,\}$ est défini comme suit :

$$\{A, B\} \equiv \frac{\partial A}{\partial \mathbf{x}}\frac{\partial B}{\partial \mathbf{P}} - \frac{\partial A}{\partial \mathbf{P}}\frac{\partial B}{\partial \mathbf{x}}. \tag{3.38}$$

C'est un opérateur bilinéaire anticommutatif possédant la propriété de Jacobi

$$\{A, \{B, C\}\} + \{B, \{C, A\}\} + \{C, \{A, B\}\} = 0. \tag{3.39}$$

Il permet d'exprimer les équations du mouvement (3.36) et (3.37) comme suit :

$$\dot{\mathbf{x}} = \{\mathbf{x}, H\} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, \tag{3.40}$$

$$\dot{\mathbf{P}} = \{\mathbf{P}, H\} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}. \tag{3.41}$$

La dérivée totale de l'hamiltonien par rapport au temps vaut alors

$$\dot{H} = \dot{\mathbf{x}} \cdot \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} + \dot{\mathbf{P}} \cdot \frac{\partial H}{\partial \mathbf{P}} = \{H, H\} \equiv 0. \tag{3.42}$$

L'hamiltonien est donc une constante du mouvement, ce qui n'est pas surprenant à cause de la conservation de l'énergie. De même, le terme gauche l'équation de Liouville (3.15) présent dans la section 3.1 devient

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \dot{\mathbf{x}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} + \dot{\mathbf{P}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial \mathbf{P}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{P}} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\}. \tag{3.43}$$

L'évolution de la distribution est donc exprimée à l'aide de l'hamiltonien,

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\} = \left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{\text{interactions}}, \tag{3.44}$$

où les interactions particules-particules (mais aussi onde-particule le cas échéant) ont pour effet de placer la particule sur une *nouvelle* orbite hamiltonienne.

L'étude du champ électrique ne rentre pas dans le cadre de cette thèse, où l'intérêt est porté sur les effets néoclassiques liés à la non-uniformité magnétique. Ce terme de potentiel est donc omis par la suite. L'hamiltonien utilisé a donc la forme [5] :

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m}. \tag{3.45}$$

5. $H = \gamma mc^2$ dans le cas relativiste.

Si les coordonnées $(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ sont utilisées au lieu de $(\mathbf{x}, \mathbf{P})$, la relation $\mathbf{p} = \mathbf{P} - q\mathbf{A}$ donne une nouvelle forme pour le crochet de Poisson :

$$\{A, B\} = \frac{\partial A}{\partial \mathbf{x}} \cdot \frac{\partial B}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial A}{\partial \mathbf{p}} \cdot \frac{\partial B}{\partial \mathbf{x}} + q\mathbf{B} \cdot \frac{\partial A}{\partial \mathbf{p}} \times \frac{\partial B}{\partial \mathbf{p}}. \tag{3.46}$$

Cette forme est dite « non canonique », car il existe un couplage entre composantes du vecteur impulsion. Le terme de couplage est appelé « gyro-crochet », car il est lié à la dynamique de gyration des particules autour des lignes de champ magnétique. De manière générale, on peut utiliser un système de coordonnées quelconques $\mathbf{z}$ pour l'espace des phases. Le terme de Liouville 3.43 devient

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\} = \frac{\partial f}{\partial t} + \dot{\mathbf{z}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{z}}, \tag{3.47}$$

et les équations de mouvement sont déduites de la relation $\dot{\mathbf{z}} = (\partial \mathbf{z}/\partial \mathbf{x}) \cdot \dot{\mathbf{x}} + (\partial \mathbf{z}/\partial \mathbf{P}) \cdot \dot{\mathbf{P}}$:

$$\dot{\mathbf{z}} = \{\mathbf{z}, H\}. \tag{3.48}$$

3.2.2.2 Invariants

Si l'hamiltonien est indépendant d'une coordonnée spatiale ϕ, l'équation d'évolution 3.37 devient, en projetant selon le vecteur de base covariant $\partial \mathbf{x}/\partial \phi$:

$$\dot{\mathbf{P}} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \phi} \equiv \dot{P}_\phi = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \phi} = -\frac{\partial H}{\partial \phi} = 0. \tag{3.49}$$

La composante correspondante du moment canonique constitue donc un invariant. C'est le cas notamment pour l'axisymétrie exprimée dans le chapitre 2.

Pour un mouvement périodique, l'action est définie par l'intégration suivante sur la trajectoire,

$$J \equiv \frac{1}{2\pi} \oint \mathbf{P} \cdot \mathrm{d}\mathbf{x}. \tag{3.50}$$

L'utilisation du principe de Hamilton (3.20) pour la trajectoire donne la relation suivante :

$$\delta \left(\oint \mathcal{L} \mathrm{d}t \right) = \delta \left(\oint \mathbf{P} \cdot \mathrm{d}\mathbf{x} - \oint H \mathrm{d}t \right) = 0. \tag{3.51}$$

Comme H est une constante de la trajectoire par définition, $\oint H \mathrm{d}t = 0$ et l'action J pour le mouvement périodique est donc un invariant. Pour un mouvement quasi-périodique, où la période d'oscillation est faible devant le temps caractéristique de variation de la position au cours d'une période, la dérivée temporelle $\dot{J}$ de l'action est non nulle, mais exponentiellement petite (voir [30], §49). On dit dans ce cas que J est un invariant adiabatique. Ainsi, pour le mouvement de gyration, l'action de gyration $J_\mathrm{g} \equiv m\mu/q$ définie dans le chapitre 2 est un invariant adiabatique si les temps d'évolution sont longs face à la période de gyration $\Omega_\mathrm{g} \equiv qB/m$.

3.2.2.3 1-forme lagrangienne

La quantité $\mathcal{L}\mathrm{d}t \equiv \Gamma$ peut être vue comme une forme différentielle de premier ordre, ou 1-forme. Ainsi, on écrit à partir de l'équation (3.35) en notant d l'opération de *dérivée extérieure* (voir appendice C) :

$$\Gamma = (q\mathbf{A} + \mathbf{p}) \cdot \mathsf{d}\mathbf{x} - H\mathsf{d}t. \tag{3.52}$$

Tout comme le lagrangien était défini à une dérivée exacte en temps près (voir fin de section 3.2.1.2), cette expression est définie à une dérivée extérieure exacte près : comme la composition de deux dérivées extérieures $\mathsf{d}^2 = 0$, on peut rajouter au lagrangien n'importe quelle fonction de jauge $\mathsf{d}S$ qui disparait lorsqu'on calcule $\mathsf{d}\Gamma$. Les équations d'évolution et le crochet de Poisson qui sont déterminées à partir de dérivées premières de la partie temporelle et de la partie spatiale respectivement restent alors inchangées. Ceci est important pour la réduction de l'espace des phases en utilisant les transformées de Lie. Pour la suite, il est utile de séparer le vecteur impulsion en ses composantes parallèles et perpendiculaires $\mathbf{p} \equiv p\xi\widehat{\mathbf{b}} + \mathbf{p}_\perp$, ce qui permet d'avoir un lagrangien avec les trois dynamiques distinctes exposées au chapitre 2 :

- La gyration de la particule autour des lignes de champ, représentée par $\mathbf{p}_\perp$.
- La dynamique d'orbite décrit l'évolution parallèle des centre-guides.
- La précession des orbites de particules décrit une dérive due à la non-uniformité magnétique (gradient, courbure magnétiques).

Le but dans la suite est donc d'exprimer un lagrangien indépendant de la dynamique rapide de gyration (lagrangien « centre-guide »), par une transformation perturbative selon le petit paramètre $\rho_\mathrm{L}/L_\mathrm{B} \ll 1$ correspondant au rapport entre le rayon de Larmor ρ_L et la longueur caractéristique L_B de gradient du champ magnétique.

3.2.3 Elimination de la dynamique de gyration : la transformée de Lie centre-guide

3.2.3.1 Transformée de Lie

A présent, la 1-forme lagrangienne (3.52) est exprimée en séparant les dynamiques parallèles et perpendiculaires. En affichant l'ordre en $\epsilon_\mathrm{B} \sim 1/e$ des termes, on déduit la forme suivante :

$$\Gamma \equiv \epsilon_\mathrm{B}^{-1}\Gamma_0 + \Gamma_1 = \left(\epsilon_\mathrm{B}^{-1} q\mathbf{A} + p\xi\widehat{\mathbf{b}} + \mathbf{p}_\perp\right)\cdot \mathsf{d}\mathbf{x} - H\mathsf{d}t. \tag{3.53}$$

Bien que l'hamiltonien soit indépendant de l'angle de gyration φ, le Lagrangien et le crochet de Poisson en ont tous deux une dépendance explicite due à $\mathbf{p}_\perp$. L'idée d'éliminer les dynamiques rapides en utilisant des transformées de Lie a été avancée par Littlejohn [34]. Elle permet d'obtenir un système hamiltonien centre-guide à partir du système local, possédant les propriétés liées à un système hamiltonien (conservation de l'énergie, équation de Liouville, ...). En utilisant la transformation perturbative de coordonnées sur l'espace des phases z^α,

$$\mathcal{T}_\mathrm{gc} \,:\, z^\alpha \to \overline{z}^\alpha = \exp\left(\mathbf{G}\right) z^\alpha, \tag{3.54}$$

la 1-forme lagrangienne est transformée par l'opérateur « push-forward » correspondant :

$$\mathsf{T}_\mathrm{gc}^{-1} \,:\, \Gamma \to \overline{\Gamma} = \exp\left(-\mathcal{L}_\mathbf{G}\right)\Gamma. \tag{3.55}$$

Le champ vectoriel $\mathbf{G} \equiv G^\alpha \partial/\partial z^\alpha$ est appelé *générateur* de la transformation et $\mathcal{L}_\mathbf{G}$ désigne la dérivée de Lie selon $\mathbf{G}$, dont l'expression est donnée plus loin. De même, à la transformation de coordonnées inverse

$$\mathcal{T}_\mathrm{gc}^{-1} \,:\, \overline{z}^\alpha \to z^\alpha = \exp\left(-\mathbf{G}\right)\overline{z}^\alpha, \tag{3.56}$$

correspond l'opérateur « pull-back » sur la 1-forme lagrangienne :

$$\mathsf{T}_\mathrm{gc} \,:\, \overline{\Gamma} \to \Gamma = \exp\left(\mathcal{L}_\mathbf{G}\right)\overline{\Gamma}. \tag{3.57}$$

Les transformations sont représentées schématiquement sur la figure 3.1. Ce sont des transformations proches de l'identité qui permettent de traiter les quantités centre-guide facilement comme des développements en ϵ_B.

En effectuant une expansion du générateur $\mathbf{G} \equiv \epsilon_\mathrm{B}\mathbf{G}_1 + \epsilon_\mathrm{B}^2\mathbf{G}_2 + \ldots$ et en notant $\mathcal{L}_n$ la dérivée de Lie selon $\mathbf{G}_n$, les transformations de coordonnées prennent la forme

$$\overline{z}^\alpha = \mathcal{T}_\mathrm{gc} z^\alpha = \ldots \exp\left(\epsilon_\mathrm{B}^2 G_2\right)\exp\left(\epsilon_\mathrm{B} G_1\right) z^\alpha = z^\alpha + \epsilon_\mathrm{B} G_1^\alpha + \epsilon_\mathrm{B}^2\left(G_2^\alpha + \frac{1}{2}G_1^\alpha \frac{\partial G_1^\beta}{\partial z^\alpha}\right) + \ldots, \tag{3.58}$$

$$z^\alpha = \mathcal{T}_\mathrm{gc}^{-1}\overline{z}^\alpha = \exp\left(-\epsilon_\mathrm{B} G_1\right)\exp\left(-\epsilon_\mathrm{B}^2 G_2\right)\ldots\overline{z}^\alpha = \overline{z}^\alpha - \epsilon_\mathrm{B} G_1^\alpha + \epsilon_\mathrm{B}^2\left(\frac{1}{2}G_1^\alpha \frac{\partial G_1^\beta}{\partial \overline{z}^\alpha} - G_2^\alpha\right) + \ldots, \tag{3.59}$$

et les opérateurs « push-forward » et « pull-back » deviennent :

$$\overline{\Gamma} = \mathsf{T}_\mathrm{gc}^{-1}\Gamma = \ldots \exp\left(-\epsilon_\mathrm{B}^2\mathcal{L}_2\right)\exp\left(-\epsilon_\mathrm{B}\mathcal{L}_1\right)\Gamma = \Gamma - \epsilon_\mathrm{B}\mathcal{L}_1\Gamma + \epsilon_\mathrm{B}^2\left(\frac{1}{2}\mathcal{L}_1^2 - \mathcal{L}_2\right)\Gamma + \ldots, \tag{3.60}$$

$$\Gamma = \mathsf{T}_\mathrm{gc}\overline{\Gamma} = \exp\left(\epsilon_\mathrm{B}\mathcal{L}_1\right)\exp\left(\epsilon_\mathrm{B}^2\mathcal{L}_2\right)\ldots\overline{\Gamma} = \overline{\Gamma} + \epsilon_\mathrm{B}\mathcal{L}_1\overline{\Gamma} + \epsilon_\mathrm{B}^2\left(\frac{1}{2}\mathcal{L}_1^2 + \mathcal{L}_2\right)\overline{\Gamma} + \ldots. \tag{3.61}$$

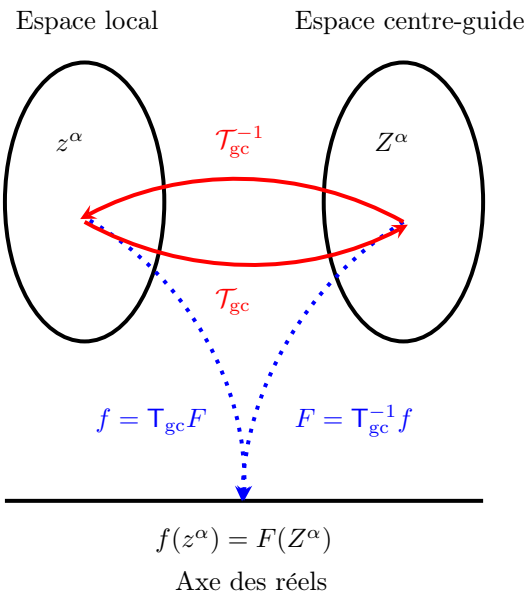


FIGURE 3.1 – Transformation de coordonnées [34]. Les coordonnées dans l'espace des phases local sont transformées vers l'espace centre-guide et inversement par les transformations $\mathcal{T}_{\rm gc}^{\pm 1}$ (lignes rouge uni). Les fonctions sont transformées (lignes bleu pointillées) de telle manière que la fonction locale et la fonction centre-guide donnent le même résultat : $f\left(z^\alpha\right) = f\left(\mathcal{T}_{\rm gc}^{-1} Z^\alpha\right) = \mathsf{T}_{\rm gc} F\left(z^\alpha\right) = F\left(Z^\alpha\right)$.

L'expression de la dérivée de Lie pour une forme différentielle (voir appendice C pour les définitions des opérations) est déterminée à l'aide de l'identité de Cartan (ou formule d'homotopie) [34] :

$$\mathcal{L}_{\mathbf{G}} \omega = \iota_{\mathbf{G}} \cdot \mathsf{d}\omega + \mathsf{d}\left(\iota_{\mathbf{G}} \cdot \omega\right). \tag{3.62}$$

Ainsi, la dérivée de Lie d'un scalaire (ou 0-forme) est la simple dérivée selon la direction $\mathbf{G}$:

$$\mathcal{L}_{\mathbf{G}} f = G^\alpha \frac{\partial f}{\partial z^\alpha}. \tag{3.63}$$

Pour une 1-forme différentielle $\Gamma \equiv \Gamma_\alpha \mathsf{d}z^\alpha$,

$$\mathcal{L}_{\mathbf{G}} \Gamma = G^\alpha \left(\frac{\partial \Gamma_\beta}{\partial z^\alpha} - \frac{\partial \Gamma_\alpha}{\partial z^\beta} \right) \mathsf{d}z^\beta + \mathsf{d}\left(\iota_{\mathbf{G}} \cdot \Gamma\right). \tag{3.64}$$

L'expression de la dérivée exacte $\mathsf{d}\left(\iota_{\mathbf{G}} \cdot \Gamma\right) \equiv \partial\left(G^\alpha \Gamma_\alpha\right) / \partial z^\beta \mathsf{d}z^\beta$ n'est pas nécessaire pour la transformation du lagrangien qui suit.

3.2.3.2 Lagrangien et coordonnées centre-guide

Le lagrangien est ainsi transformé en un lagrangien centre-guide $\overline{\Gamma} \equiv \mathsf{T}_{\rm gc}^{-1}\Gamma + \mathrm{d}S \equiv \epsilon_{\rm B}^{-1}\overline{\Gamma}_0 + \overline{\Gamma}_1 + \epsilon_{\rm B}\overline{\Gamma}_2 + \ldots$. En séparant les termes par ordre en $\epsilon_{\rm B}$ et en choisissant une fonction de jauge $\mathsf{d}S \equiv \mathsf{d}S_1 + \epsilon_{\rm B}\mathsf{d}S_2 + \ldots$ pour restaurer à chaque ordre l'indépendance en angle de gyration, les

1	ϵ_B	ϵ_B^2	...
$\widehat{\mathbf{b}} \times \mathbf{G}_1^{\mathbf{x}}$	$\widehat{\mathbf{b}} \times \mathbf{G}_2^{\mathbf{x}}$	$\widehat{\mathbf{b}} \times \mathbf{G}_3^{\mathbf{x}}$	...
	$\mathbf{G}_1^{\mathbf{x}} \cdot \widehat{\mathbf{b}}$	$\mathbf{G}_2^{\mathbf{x}} \cdot \widehat{\mathbf{b}}$	...
	G_1^p, G_1^ξ	G_2^p, G_2^ξ	...
		G_1^φ	...

Table 3.1 – Calcul des composantes de $\mathbf{G}$ selon l'ordre en ϵ_B de résolution des équations du lagrangien centre-guide.

composantes du vecteur générateur $\mathbf{G}$ sont calculées en résolvant les équations suivantes :

$$\overline{\Gamma}_0 = \Gamma_0, \tag{3.65}$$
$$\overline{\Gamma}_1 = \Gamma_1 - \mathcal{L}_1\Gamma_0 + \mathsf{d}S_1, \tag{3.66}$$
$$\overline{\Gamma}_2 = -\mathcal{L}_2\Gamma_0 + \frac{1}{2}\mathcal{L}_1^2\Gamma_0 - \mathcal{L}_1\Gamma_1 + \mathsf{d}S_2, \tag{3.67}$$
$$\overline{\Gamma}_3 = -\mathcal{L}_3\Gamma_0 + \mathcal{L}_2\mathcal{L}_1\Gamma_0 - \frac{1}{6}\mathcal{L}_1^3\Gamma_0 - \mathcal{L}_2\Gamma_1 + \frac{1}{2}\mathcal{L}_1^2\Gamma_1 + \mathsf{d}S_3, \tag{3.68}$$
$$\ldots$$

Selon l'ordre auquel le lagrangien centre-guide est déterminé, il est possible de calculer les composantes de $\mathbf{G}_n$ (voir tableau 3.1).

En insérant l'expression (3.62) de la dérivée de Lie, les équations sur le lagrangien centre-guide deviennent en regroupant toutes les dérivées exactes dans une nouvelle fonction de jauge $\mathsf{d}\sigma \equiv \mathsf{d}\sigma_1 + \epsilon_\mathrm{B}\mathsf{d}\sigma_2 + \ldots$:

$$\overline{\Gamma}_0 = \Gamma_0, \tag{3.69}$$
$$\overline{\Gamma}_1 = \Gamma_1 - \iota_1 \cdot \mathsf{d}\Gamma_0 + \mathsf{d}\sigma_1, \tag{3.70}$$
$$\overline{\Gamma}_2 = -\iota_2 \cdot \mathsf{d}\Gamma_0 - \frac{1}{2}\iota_1 \cdot \mathsf{d}\left(\Gamma_1 + \overline{\Gamma}_1\right) + \mathsf{d}\sigma_2, \tag{3.71}$$
$$\overline{\Gamma}_3 = -\iota_3 \cdot \mathsf{d}\Gamma_0 - \iota_2 \cdot \mathsf{d}\overline{\Gamma}_1 + \frac{1}{3}\iota_1 \cdot \mathsf{d}\left(\iota_1 \cdot \mathsf{d}\Gamma_1 + \frac{1}{2}\iota_1 \cdot \mathsf{d}\overline{\Gamma}_1\right) + \mathsf{d}\sigma_3, \tag{3.72}$$
$$\ldots$$

où ι_n désigne la contraction par rapport au générateur $\mathbf{G}_n$. Après une série de calculs (détaillée dans l'appendice E), on obtient le lagrangien centre-guide (où $\mathbf{R}^* \equiv \mathbf{R} + \frac{1}{2}\left(\widehat{\mathbf{b}} \cdot \nabla \times \widehat{\mathbf{b}}\right)\widehat{\mathbf{b}}$ assure que l'expression est invariante du choix de jauge pour la gyrophase [12]),

$$\overline{\Gamma} = \left(\epsilon_\mathrm{B}^{-1} q\mathbf{A} + \overline{p}\overline{\xi}\widehat{\mathbf{b}}\right) \cdot \mathsf{d}\overline{\mathbf{x}} + \epsilon_\mathrm{B}\frac{\overline{p}^2\left(1-\overline{\xi}^2\right)}{m\Omega_\mathrm{g}}\left(\mathsf{d}\overline{\varphi} - \mathbf{R}^* \cdot \mathsf{d}\overline{\mathbf{x}}\right) - H\mathsf{d}t, \tag{3.73}$$

et les composantes suivantes pour le générateur :

$$\mathbf{G}_1^{\mathbf{x}} = -\boldsymbol{\rho}_0, \tag{3.74}$$

$$G_1^p = 0, \tag{3.75}$$

$$G_1^\xi = -\xi\widehat{\mathbf{b}}\cdot\nabla\widehat{\mathbf{b}}\cdot\boldsymbol{\rho}_0 + \frac{p\left(1-\xi^2\right)}{2m\Omega_\mathrm{g}}\left(\widehat{\mathbf{b}}\cdot\nabla\times\widehat{\mathbf{b}} + \mathbb{A}_1 : \nabla\widehat{\mathbf{b}}\right), \tag{3.76}$$

$$G_1^\varphi = -\boldsymbol{\rho}_0\cdot\mathbf{R} + \frac{p\xi}{m\Omega}\mathbb{A}_2 : \nabla\widehat{\mathbf{b}} + \frac{\partial\boldsymbol{\rho}_0}{\partial\varphi}\cdot\nabla\ln B + \frac{\xi^2}{1-\xi^2}\widehat{\mathbf{b}}\cdot\nabla\widehat{\mathbf{b}}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\rho}_0}{\partial\varphi}, \tag{3.77}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{G}_2^{\mathbf{x}} = &\left[\frac{2p\xi}{m\Omega_\mathrm{g}}\widehat{\mathbf{b}}\cdot\nabla\widehat{\mathbf{b}}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\rho}_0}{\partial\varphi} + \frac{p^2\left(1-\xi^2\right)}{2m^2\Omega_\mathrm{g}^2}\mathbb{A}_2 : \nabla\widehat{\mathbf{b}}\right]\widehat{\mathbf{b}}\\ &+ \frac{p\xi}{m\Omega_\mathrm{g}}\left(\widehat{\mathbf{b}}\cdot\nabla\times\widehat{\mathbf{b}}\right)\boldsymbol{\rho}_0 + \frac{1}{2}G_1^\xi\frac{\partial\boldsymbol{\rho}_0}{\partial\xi} + \frac{1}{2}\left[G_1^\varphi + \boldsymbol{\rho}_0\cdot\mathbf{R}\right]\frac{\partial\boldsymbol{\rho}_0}{\partial\varphi}.\end{aligned} \tag{3.78}$$

La transformation de coordonnées devient, au premier ordre dans la transformation :

$$\overline{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \epsilon_\mathrm{B}\boldsymbol{\rho}_0 + \epsilon_\mathrm{B}^2\left[G_2^{\mathbf{x}} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\rho}_0\cdot\nabla\boldsymbol{\rho}_0 - \frac{1}{2}G_1^\xi\frac{\partial\boldsymbol{\rho}_0}{\partial\xi} - \frac{1}{2}G_1^\varphi\frac{\partial\boldsymbol{\rho}_0}{\partial\varphi}\right] + \ldots, \tag{3.79}$$

$$\overline{p} = p, \tag{3.80}$$

$$\overline{\xi} = \xi + \epsilon_\mathrm{B}\left[-\xi\widehat{\mathbf{b}}\cdot\nabla\widehat{\mathbf{b}}\cdot\boldsymbol{\rho}_0 + \frac{p\left(1-\xi^2\right)}{2m\Omega_\mathrm{g}}\left(\widehat{\mathbf{b}}\cdot\nabla\times\widehat{\mathbf{b}} + \mathbb{A}_1 : \nabla\widehat{\mathbf{b}}\right)\right] + \ldots, \tag{3.81}$$

$$\overline{\varphi} = \varphi + \epsilon_\mathrm{B}\left[-\boldsymbol{\rho}_0\cdot\mathbf{R} + \frac{p\xi}{m\Omega_\mathrm{g}}\mathbb{A}_2 : \nabla\widehat{\mathbf{b}} + \frac{\partial\boldsymbol{\rho}_0}{\partial\varphi}\cdot\nabla\ln B + \frac{\xi^2}{1-\xi^2}\widehat{\mathbf{b}}\cdot\nabla\widehat{\mathbf{b}}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\rho}_0}{\partial\varphi}\right] + \ldots, \tag{3.82}$$

où les tenseurs $\mathbb{A}_1 \equiv \frac{1}{2}\left(\widehat{\rho}\widehat{\perp} + \widehat{\perp}\widehat{\rho}\right) \equiv \partial\mathbb{A}_2/\partial\varphi$ et $\mathbb{A}_2 \equiv \frac{1}{4}\left(\widehat{\perp}\widehat{\perp} - \widehat{\rho}\widehat{\rho}\right)$, sont exprimés avec les vecteurs unitaires déterminés dans le chapitre 2.

Plusieurs remarques sont à faire sur ce résultat. Premièrement, l'amplitude p est inchangée par la transformation, ce qui est cohérent avec la conservation de l'énergie $\mathcal{E}\left(p^2\right)$. Ensuite, les coordonnées centre-guide sont en général différentes de leur valeur moyenne sur une période de gyration. Les termes qui ne disparaissent pas avec l'opération de moyenne témoignent de l'influence de la non-uniformité magnétique sur la dynamique des centre-guides. Enfin, seule la transformation de la gyrophase dépend du choix de jauge $\mathbf{R}$ (car $\frac{1}{2}\boldsymbol{\rho}_0\cdot\nabla\boldsymbol{\rho}_0 = \cdots + \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\rho}_0\cdot\mathbf{R}\right)\partial\boldsymbol{\rho}_0/\partial\varphi$), ce qui correspond aux attentes. À l'ordre le plus bas (champ uniforme), les coordonnées de vitesse locales coïncident et la position du centre-guide $\overline{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \boldsymbol{\rho}_0$ est simplement déterminée par le rayon de gyration $\boldsymbol{\rho}_0 \equiv \widehat{\mathbf{b}}\times\mathbf{p}_\perp/\left(m\Omega_\mathrm{g}\right)$.

3.2.3.3 Jacobien centre-guide

Le jacobien centre-guide [12] est déduit des expressions des coordonnées centre-guides. En fonction du jacobien local pour les coordonnées $(\mathbf{x}, p, \xi, \varphi)$, $J = p^2$, on obtient :

$$\mathcal{J}_\mathrm{gc} = J - \frac{\partial}{\partial z^\alpha}\left(JG_1^\alpha\right) + \ldots. \tag{3.83}$$

En insérant les expressions correspondantes (3.74)-(3.77), le jacobien centre-guide devient, au premier ordre en ϵ_B,

$$\mathcal{J}_\mathrm{gc} = \overline{p}^2\left(1 + \epsilon_\mathrm{B}\frac{\overline{p}\overline{\xi}}{m\Omega_\mathrm{g}}\widehat{\mathbf{b}}\cdot\overline{\nabla}\times\widehat{\mathbf{b}}\right), \tag{3.84}$$

exprimé en coordonnées centre-guide.

3.2.3.4 Crochet de Poisson, équations de mouvement

Le crochet de Poisson est calculé à partir de la 2-forme lagrangienne $\mathsf{d}\overline{\Gamma}$. Un calcul détaillé est présenté dans l'appendice F, et le crochet de Poisson centre-guide de la référence [12] est aussi

retrouvé. Il a pour forme en coordonnées centre-guide $\left(\overline{\mathbf{x}}, \overline{p}, \overline{\xi}, \overline{\varphi}\right)$, en notant $\overline{\nabla} \equiv \partial/\partial\overline{\mathbf{x}}$:

$$\begin{aligned}\{F,G\}_{gc} =& \frac{m\Omega_{\mathrm{g}}}{\overline{p}^2}\left[\frac{\partial F}{\partial\overline{\varphi}}\left(\overline{p}\frac{\partial G}{\partial\overline{p}} - \overline{\xi}\frac{\partial G}{\partial\overline{\xi}}\right) - \left(\overline{p}\frac{\partial F}{\partial\overline{p}} - \overline{\xi}\frac{\partial F}{\partial\overline{\xi}}\right)\frac{\partial G}{\partial\overline{\varphi}}\right] \\ &+ \frac{1-\overline{\xi}^2}{2\overline{p}\overline{\xi}}\left(\mathbf{p}_{\mathrm{gc}}\cdot\overline{\nabla}\ln B\right)\left(\frac{\partial F}{\partial\overline{p}}\frac{\partial G}{\partial\overline{\xi}} - \frac{\partial F}{\partial\overline{\xi}}\frac{\partial G}{\partial\overline{p}}\right) \\ &+ \frac{\mathbf{p}_{\mathrm{gc}}}{\overline{p}}\cdot\left(\nabla^* F\frac{\partial G}{\partial\overline{p}} - \frac{\partial F}{\partial\overline{p}}\nabla^* G\right) \\ &+ \frac{1-\overline{\xi}^2}{\overline{p}^2\overline{\xi}}\left(\mathbf{p}_{\mathrm{gc}} - \frac{\overline{p}^2}{2m\Omega_{\parallel}^*}\widehat{\mathbf{b}}\times\overline{\nabla}\ln B\right)\cdot\left(\nabla^* F\frac{\partial G}{\partial\overline{\xi}} - \frac{\partial F}{\partial\overline{\xi}}\nabla^* G\right) \\ &- \frac{\widehat{\mathbf{b}}}{m\Omega_{\parallel}^*}\cdot\nabla^* F\times\nabla^* G, \end{aligned} \tag{3.85}$$

où $\Omega_{\parallel}^* \equiv \epsilon_{\mathrm{B}}^{-1}\Omega_{\mathrm{g}} + \left(\overline{p}\overline{\xi}/m\right)\widehat{\mathbf{b}}\cdot\overline{\nabla}\times\widehat{\mathbf{b}}$, l'opérateur ∇^* représente un gradient avec une correction correspondant à la non-uniformité magnétique,

$$\nabla^* \equiv \overline{\nabla} + \mathbf{R}^*\frac{\partial}{\partial\overline{\varphi}}. \tag{3.86}$$

et le vecteur $\mathbf{p}_{\mathrm{gc}}$ correspond à la gyro-moyenne du vecteur impulsion en coordonnées centre-guide (voir chapitre 6) :

$$\mathbf{p}_{\mathrm{gc}} \equiv \overline{p}\overline{\xi}\widehat{\mathbf{b}} + \frac{\overline{p}^2}{m\Omega_{\parallel}^*}\widehat{\mathbf{b}}\times\left(\frac{1-\overline{\xi}^2}{2}\overline{\nabla}\ln B + \overline{\xi}^2\widehat{\mathbf{b}}\cdot\overline{\nabla}\widehat{\mathbf{b}}\right). \tag{3.87}$$

Il est possible de déduire les équations du mouvement à partir de l'hamiltonien centre-guide [6] $\overline{H} = \overline{p}^2/2m$:

$$\dot{\overline{\mathbf{x}}} \equiv \left\{\overline{\mathbf{x}}, \overline{H}\right\}_{\mathrm{gc}} = \frac{\mathbf{p}_{\mathrm{gc}}}{m}, \tag{3.88}$$

$$\dot{\overline{p}} \equiv \left\{\overline{p}, \overline{H}\right\}_{\mathrm{gc}} = 0, \tag{3.89}$$

$$\dot{\overline{\xi}} \equiv \left\{\overline{\xi}, \overline{H}\right\}_{\mathrm{gc}} = -\frac{1-\overline{\xi}^2}{2\overline{\xi}}\left(\frac{\mathbf{p}_{\mathrm{gc}}}{m}\cdot\nabla\ln B\right), \tag{3.90}$$

$$\dot{\overline{\varphi}} \equiv \left\{\overline{\varphi}, \overline{H}\right\}_{\mathrm{gc}} = \Omega_{\mathrm{g}} + \frac{\mathbf{p}_{\mathrm{gc}}}{m}\cdot\mathbf{R}^*. \tag{3.91}$$

À l'ordre le plus bas en ϵ_{B} (champ magnétique uniforme, donc $\mathbf{R} = 0$), on retrouve $\dot{\mathbf{x}} = p\xi/m$ et $\dot{\varphi} = \Omega_{\mathrm{g}}$. De plus, l'expression de $\dot{p}_{\parallel} = p\dot{\xi} = -\mu\left(\widehat{\mathbf{b}}\cdot\nabla B\right)$ fait apparaître explicitement la force miroir agissant sur le centre-guide, repoussant celui-ci vers les zones de faible champ. Enfin, l'invariance adiabatique du moment magnétique $\overline{\mu}$ est retrouvée en calculant

$$\dot{\overline{\mu}} = -\frac{\overline{p}^2\left(1-\overline{\xi}^2\right)}{2m}\nabla\ln B\cdot\dot{\overline{\mathbf{x}}} - \frac{\overline{p}^2\overline{\xi}}{mB}\dot{\overline{\xi}} = \mathcal{O}\left(\epsilon_{\mathrm{B}}^2\right),$$

et la conservation de l'énergie procède directement de la relation $\dot{\overline{p}} = 0$.

3.3 Résumé du chapitre

Dans ce chapitre ont été rappelés les principes de la description cinétique des particules dans un plasma de fusion, permettant de représenter l'évolution de celui-ci par des équations différentielles

6. Dans le cas relativiste, $\overline{H} = \overline{\gamma}mc^2 \equiv mc^2\sqrt{1+\overline{p}^2/(mc)^2}$, donc $\mathrm{d}\overline{H}/\mathrm{d}\overline{p} = \overline{p}/m\overline{\gamma}$ au lieu de simplement $\overline{p}/m$. Les équations du mouvement gardent donc la même forme, pourvu que les dérivées temporelles soient exprimées en fonction du temps propre défini de manière infinitésimale : $\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}t/\overline{\gamma}$.

sur les distributions à une seule particule correspondant aux espèces présentes. Ces équations sont couplées par un terme d'interaction qui prend la forme d'un opérateur collision (explicité au chapitre 5) dans le cadre des collisions coulombiennes. Afin d'effectuer la réduction de la dynamique au moyen des transformées de Lie, une description lagrangienne est adoptée et les résultats principaux sont rappelés pour la transformation centre-guide. Celle-ci est importante pour la réduction de l'échelle rapide de gyration pour l'opérateur collision (chapitre 6).

Chapitre 4

Réduction de la dynamique parallèle : Cas de la géométrie dipolaire

Dans ce chapitre, la réduction du mouvement parallèle des centre-guides est explorée dans le cas simplifié de la géométrie dipolaire. Celle-ci est effectuée dans la limite non-relativiste, à partir des expressions analytiques de l'action dérivée pour un mouvement (chapitre 3). Des calculs explicites sont effectués dans l'approximation des particules fortement piégées autour du plan équatorial, montrant un comportement en oscillateur harmonique. Un développement autour de cette limite fournit des corrections anharmoniques qui sont comparées aux intégrales numériques.

La géométrie dipolaire représente un cas extrême d'une géométrie tokamak, où on aurait ramené l'axe magnétique sur l'axe de révolution azimuthal. Comme le champ magnétique n'a pas de composante toroïdale, il n'y a pas d'excursion radiale hors d'une surface de flux pour un mouvement libre de particule ; l'intérêt des résultats obtenus est de valider les résultats théoriques auprès de codes de simulation opérant dans la limite non-néoclassique. De plus, ces calculs présentent une utilité supplémentaire pour les plasmas spaciaux où des champs magnétiques de type dipolaire sont plus répandus (champ magnétique terrestre, Jupiter, ...).

4.1 Coordonnées spatiales

4.1.1 Champ magnétique

La dynamique des centre-guides est étudiée ici dans une géométrie dipolaire (voir appendice D), caractérisée par un moment dipolaire $\mathbf{M}$ et les valeurs suivantes pour le potentiel vecteur $\mathbf{A}$ et le champ magnétique $\mathbf{B}$, en notant $\mathbf{x}$ le vecteur position (à partir du dipôle magnétique) et $\rho = |\mathbf{x}|$ le rayon sphérique :

$$\mathbf{A} \equiv \frac{\mathbf{M} \times \mathbf{x}}{\rho^3}, \tag{4.1}$$

$$\mathbf{B} \equiv \nabla \times \mathbf{A} = \frac{3\left(\mathbf{M} \cdot \mathbf{x}\right)\mathbf{x} - \mathbf{M}\rho^2}{\rho^5}. \tag{4.2}$$

Les lignes de champ produites par un dipôle magnétique sont montrées dans la figure 4.1.

Le champ magnétique prend une expression simple dans le système de coordonnées sphériques (ρ, ϑ, ϕ) (Figure 4.2), où le vecteur moment dipolaire est situé sur l'axe de révolution vertical, comme montré dans la figure 4.1. En prenant pour base orthonormée $\left(\widehat{\boldsymbol{\rho}}, \widehat{\boldsymbol{\vartheta}}, \widehat{\boldsymbol{\phi}}\right) = (\nabla\rho, \rho\nabla\vartheta, \rho\sin\vartheta\nabla\phi)$ selon les mêmes conventions que le chapitre 2, on obtient :

$$\mathbf{B} \equiv \frac{\mathcal{M}}{\rho^3}\left(2\cos\vartheta\widehat{\boldsymbol{\rho}} + \sin\vartheta\widehat{\boldsymbol{\vartheta}}\right), \tag{4.3}$$

où $\mathcal{M} \equiv (\mu_0/4\pi)\,|\mathbf{M}| \equiv B_\mathrm{e}\rho_\mathrm{e}^3$ est calculé à partir de l'amplitude du champ magnétique à la position radiale équatoriale $\rho\,(\vartheta = \pi/2) \equiv \rho_\mathrm{e}$. L'amplitude du champ magnétique est déduite de

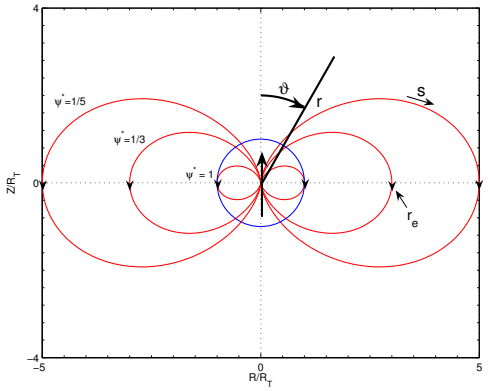


Figure 4.1 – Lignes de champ produites par un dipôle magnétique sur un plan contenant le moment magnétique (vecteur noir). $\psi^* = \psi_\mathrm{e}\left(\rho_\mathrm{e}\right)/\psi_\mathrm{e}\left(R_\mathrm{T}\right)$ représente le flux équatorial normalisé par rapport à un cercle de rayon arbitraire R_T. Pour les application terrestres, on peut utiliser le rayon de la Terre comme référence.

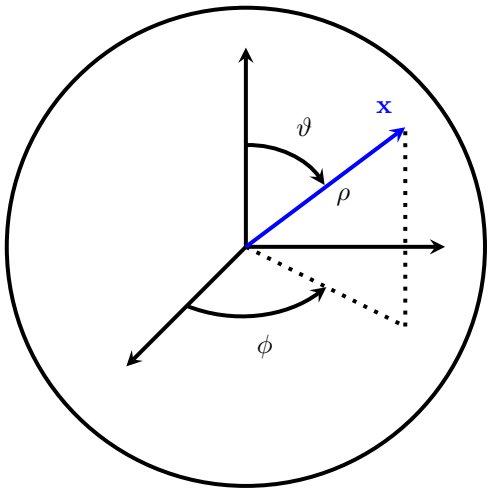


Figure 4.2 – Coordonnées sphériques. ρ représente le rayon depuis l'origine, ϑ la colatitude et ϕ l'angle azimuthal (ou longitude).

l'équation (4.3),

$$B = \frac{B_\mathrm{e}\rho_\mathrm{e}^3}{\rho^3}\sqrt{1+3\cos^2\vartheta}, \tag{4.4}$$

et le vecteur unitaire vaut $\widehat{\mathbf{b}} \equiv \mathbf{B}/B$. Si on représente $\mathbf{B}$ en termes de coordonnées de flux,

$$\mathbf{B} = \nabla\psi \times \nabla\phi, \tag{4.5}$$

où

$$\psi = \frac{B_\mathrm{e}\rho_\mathrm{e}^3}{\rho}\sin^2\vartheta \equiv \frac{\psi_\mathrm{e}\rho_\mathrm{e}}{\rho}\sin^2\vartheta \tag{4.6}$$

désigne le flux poloïdal. Le système de coordonnées sphériques adapté à la géométrie dipolaire peut être rapproché de la description en coordonnées toroïdales en réduisant à zéro le rayon R_0 de l'axe magnétique (voir la figure 2.1 du chapitre 2) et en effectuant la transformation $\vartheta = \pi/2 - \theta$. Le champ magnétique dipolaire n'ayant pas de composante azimuthale (ou toroïdale), le facteur de

sécurité q_ψ est nul et l'expression (2.22) devient similaire à l'équation (4.3) (avec un changement de signe dû à l'orientation contraire des deux repaires). Le potentiel vecteur prend donc la forme

$$\mathbf{A} = \psi \nabla \phi, \tag{4.7}$$

à un choix de jauge près. Le long d'une ligne de champ à $\psi = \psi_\mathrm{e}$ constant, on déduit l'équation de ligne de champ de l'expression (4.6) :

$$\rho = \rho_\mathrm{e} \sin^2 \vartheta. \tag{4.8}$$

4.1.2 Abcisse curviligne

L'abcisse curviligne s qui mesure la distance le long d'une ligne de champ est déduite du mouvement infinitésimal $(\mathrm{d}s)^2 = (\mathrm{d}\rho)^2 + (\rho \mathrm{d}\vartheta)^2$ avec l'équation (4.8),

$$\mathrm{d}s = \rho_\mathrm{e} \sin\vartheta \sqrt{1 + 3\cos^2\vartheta}\, \mathrm{d}\vartheta. \tag{4.9}$$

Il vient immédiatement

$$s\left(\rho_\mathrm{e}, \vartheta\right) \equiv \rho_\mathrm{e} \int_{\pi/2}^{\vartheta} \sqrt{1 + 3\cos^2\vartheta'} \sin\vartheta' \mathrm{d}\vartheta', \tag{4.10}$$

$$= \frac{\rho_\mathrm{e}}{2\sqrt{3}} \left[\ln\left(\sqrt{1 + 3\cos^2\vartheta} - \sqrt{3}\cos\vartheta \right) - \sqrt{3}\cos\vartheta \sqrt{1 + 3\cos^2\vartheta} \right]. \tag{4.11}$$

Cette coordonnée est définie comme nulle à l'équateur ($\vartheta = \pi/2$), positive au-dessous ($\vartheta > \pi/2$) et positive au-dessus ($\vartheta < \pi/2$). La distance radiale équatoriale ρ_e sert ainsi de marqueur pour les surfaces à ψ constant. La longueur $L_\mathrm{e} \equiv s\left(\rho_\mathrm{e}, \pi\right) - s\left(\rho_\mathrm{e}, 0\right)$ d'une ligne de champ est calculée à partir de l'équation (4.11) et vaut

$$L_\mathrm{e} = \rho_\mathrm{e} \left[2 + \ln\left(2 + \sqrt{3} \right) \right] \simeq \frac{11}{4} \rho_\mathrm{e}. \tag{4.12}$$

Il est important de noter que les coordonnées ψ et s ne sont *pas orthogonales* ; la décomposition sur la base contravariante du vecteur unitaire magnétique,

$$\widehat{\mathbf{b}} \equiv \nabla s + a\left(\psi, s\right) \nabla \psi, \tag{4.13}$$

donne $a \equiv -\nabla\psi \cdot \nabla s / \left|\nabla\psi\right|^2$ pour satisfaire les relations $\widehat{\mathbf{b}} \cdot \nabla\psi = \widehat{\mathbf{b}} \cdot \nabla\phi = 0$ qui découlent de l'équation (4.5). En identifiant les expressions, on obtient

$$a\left(\rho, \vartheta\right) = \frac{\rho}{\psi} \left(\frac{s}{r} - \frac{2\cos\vartheta}{\sqrt{1 + 3\cos^2\vartheta}} \right) \neq 0, \tag{4.14}$$

ce qui démontre que $\nabla\psi \cdot \nabla s \neq 0$ sauf sur le plan équatorial où $\vartheta = \pi/2$. Enfin, la courbure magnétique $\widehat{\mathbf{b}} \cdot \nabla \widehat{\mathbf{b}} = \left(\partial a / \partial s\right) \nabla\psi$ est perpendiculaire à la surface de flux.

4.1.3 Dynamique parallèle

À partir de l'expression du vecteur unitaire magnétique

$$\widehat{\mathbf{b}} \cdot \dot{\mathbf{x}} = \dot{s} + a\dot{\psi} \tag{4.15}$$

tirée de l'équation (4.13), on déduit l'expression du lagrangien centre-guide de l'équation (3.73), en supprimant les barres des coordonnées centre-guide pour alléger les notations et en omettant la dynamique de gyration d'ordre supérieur en ϵ_B :

$$\mathcal{L}\left(t, z^i, \dot{z}^i\right) = \left(q\mathbf{A} + p_\parallel \widehat{\mathbf{b}} \right) \cdot \dot{\mathbf{x}} - H = q\psi\dot{\phi} + p_\parallel a\dot{\psi} + p_\parallel \dot{s} - \left(\frac{p_\parallel^2}{2m} + \mu B \right). \tag{4.16}$$

Ceci permet d'écrire les équations d'Euler-Lagrange (3.22) pour les coordonnées de flux (ψ, ϕ) :

$$\dot{\psi} = 0, \tag{4.17}$$

$$\dot{\phi} = \frac{\epsilon_B}{q}\left[\mu\frac{\partial B}{\partial \psi} + \frac{p_\parallel}{m}\frac{\partial\left(p_\parallel a\right)}{\partial s}\right], \tag{4.18}$$

et le flux poloïdal est un *invariant exact* lié à la dynamique de dérive des orbites de centre-guides. Autrement dit, dans la géométrie dipolaire, le moment canonique toroïdal (invariant pour l'axis-symétrie) est réduit à $P_\phi = q\psi$.

En calculant l'amplitude du champ magnétique le long d'une ligne de champ,

$$B\left(\vartheta\right) = B_\mathrm{e}\frac{\sqrt{1+3\cos^2\vartheta}}{\sin^6\vartheta}, \tag{4.19}$$

on note que le champ devient infini quand $\vartheta \to 0$ ou π, et qu'il présente un minimum B_e atteint à l'équateur $\vartheta = \pi/2$. On retrouve une symétrie par rapport au plan de l'équateur telle que $B\left(\vartheta\right) = B\left(\pi - \vartheta\right)$. La conservation du moment magnétique impose des trajectoires de *particules piégées*, la vitesse parallèle de la particule étant nulle aux points de rebroussement $\vartheta = \vartheta_\mathrm{b}$ et $\vartheta = \pi - \vartheta_\mathrm{b}$. En utilisant les mêmes conventions de notation pour le cosinus du pitch-angle $\xi \equiv p_\parallel/p$, la conservation de l'énergie et du moment magnétique donne (voir chapitre 2) :

$$\frac{1-\xi^2\left(\vartheta\right)}{B\left(\vartheta\right)} = \frac{1-\xi_\mathrm{e}^2}{B_\mathrm{e}} = \frac{1}{B\left(\vartheta_\mathrm{b}\right)}. \tag{4.20}$$

L'angle de rebroussement ϑ_b correspondant à $\xi = 0$ dépend donc essentiellement de la valeur équatoriale de la coordonnée pitch-angle ξ_e. En utilisant l'équation (4.18), on peut déduire la fréquence de précession angulaire équatoriale d'une orbite piégée de centre-guide,

$$\dot{\phi}_\mathrm{e}\left(\vartheta\right) = \frac{3\mathcal{E}}{qB_\mathrm{e}\rho_\mathrm{e}^2}\frac{\sin^2\vartheta\left(1+\cos^2\vartheta\right)}{\left(1+3\cos^2\vartheta\right)^2}\left[2-\left(1-\xi_\mathrm{e}^2\right)\frac{\sqrt{1+3\cos^2\vartheta}}{\sin^6\vartheta}\right]. \tag{4.21}$$

Les équations du mouvement pour les coordonnées parallèles $\left(p_\parallel, s\right)$ issues de l'équation (3.22) donnent

$$\dot{s} = \frac{p_\parallel}{m}, \tag{4.22}$$

$$\dot{p}_\parallel = -\mu\frac{\partial B}{\partial s}, \tag{4.23}$$

qui correspondent bien aux attentes (vitesse parallèle pour $\dot{s}$, force miroir magnétique pour $\dot{p_\parallel}$).

4.2 Coordonnées action-angle

Les expressions (4.22)-(4.23) montrent que l'action d'orbite (voir chapitre 3) est conservée dans la géométrie dipolaire axisymétrique car elle est une fonction explicite des invariants centre-guides $(P_\phi \equiv e\psi, \mathcal{E}, \mu)$. En effet, en utilisant le moment canonique parallèle

$$\mathbf{P}_\parallel \equiv \left[\left(\mathbf{p}+q\mathbf{A}\right)\cdot\widehat{\mathbf{b}}\right]\nabla s = p_\parallel\nabla s, \tag{4.24}$$

de telle sorte que $\mathbf{P}_\parallel \cdot \mathrm{d}\mathbf{x} = p_\parallel \mathrm{d}s$, l'équation (3.50) devient :

$$J\left(\psi;\mathcal{E},\mu\right) = \frac{1}{2\pi}\oint p_\parallel \mathrm{d}s, \tag{4.25}$$

où l'impulsion parallèle est fonction des coordonnées magnétiques (ψ, s) ainsi que des invariants centre-guides $(\mathcal{E}, \mu)$:

$$\left|p_\parallel\right|\left(\psi, s; \mathcal{E}, \mu\right) = \sqrt{2m\left(\mathcal{E} - \mu B\left(\psi, s\right)\right)}. \tag{4.26}$$

À cette action est associée un angle canoniquement conjugué ζ tel que (J, ζ) est une paire canonique, c'est-à-dire que le crochet de Poisson pour ces deux coordonnées prend la forme :

$$\{F, G\}_{\parallel} = \frac{\partial F}{\partial \zeta}\frac{\partial G}{\partial J} - \frac{\partial F}{\partial J}\frac{\partial G}{\partial \zeta}. \tag{4.27}$$

L'angle ζ est calculé à partir de l'équation d'Hamilton analogue à l'expression en coordonnées canoniques (3.36), avec $H \equiv \mathcal{E}$:

$$\dot{\zeta} = \left.\frac{\partial H}{\partial J}\right|_{\psi,s} = \left(\left.\frac{\partial J}{\partial \mathcal{E}}\right|_{\psi,s}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{2\pi}\oint \frac{\partial p_{\parallel}}{\partial \mathcal{E}}\mathrm{d}s\right)^{-1} = 2\pi\left(\oint \frac{m\mathrm{d}s}{p_{\parallel}}\right)^{-1} = \omega_{\mathrm{b}},$$

en définissant la pulsation d'orbite $\omega_{\mathrm{b}} \equiv \dot{\zeta}$. On reconnaît la période d'orbite

$$\tau_{\mathrm{b}}\left(\psi; \mathcal{E}, \mu\right) \equiv \oint \frac{m\mathrm{d}s}{p_{\parallel}} = \frac{2\pi}{\omega_{\mathrm{b}}} \tag{4.28}$$

qui procède de l'équation (2.55), avec $\dot{s} = p_{\parallel}/m$. Ainsi, ζ parcourt l'orbite dans l'espace des phases et est défini à une constante près, modulo 2π ($\zeta = 0$ marquant l'origine de la trajectoire). La formule pour ζ devient, en effectuant la transformation $\mathrm{d}t = \mathrm{d}s/\dot{s}$ valable sur une trajectoire :

$$\zeta \equiv \omega_{\mathrm{b}} \int_{s_{\mathrm{b}}}^{s} \frac{m\mathrm{d}s'}{p_{\parallel}\left(s'\right)} + \mathrm{cte}. \tag{4.29}$$

Ici, on choisit $\zeta = 0$ pour l'origine $s = s_{\mathrm{b}}$. Dans le même ordre d'idée, la moyenne sur une orbite $\langle \cdots \rangle_{\mathrm{b}} \equiv (2\pi)^{-1} \oint \cdots \mathrm{d}\zeta$ devient, avec $\mathrm{d}\zeta = \omega_{\mathrm{b}}\mathrm{d}t = m\omega_{\mathrm{b}}\mathrm{d}s/p_{\parallel}$:

$$\langle \cdots \rangle_{\mathrm{b}} = \frac{1}{\tau_{\mathrm{b}}} \oint \cdots \frac{m\mathrm{d}s}{p_{\parallel}}, \tag{4.30}$$

et on retrouve une expression analogue à l'équation (2.56). Enfin, on montre que

$$\left\{p_{\parallel}, s\right\}_{\parallel} = \left(\frac{\partial J}{\partial p_{\parallel}}\right)^{-1}\left(\frac{\partial \zeta}{\partial s}\right)^{-1} = \left(\frac{\partial J}{\partial \mathcal{E}}\right)^{-1}\dot{\zeta} = 1. \tag{4.31}$$

Ceci est un critère utile pour vérifier les expressions analytiques des coordonnées d'angle-action, notamment dans l'approximation de trajectoires fortement piégées abordées dans la section 4.3.

En utilisant les équations (4.26) et (4.20), on peut obtenir une expression pour la coordonnée de pitch-angle $|\xi|$:

$$|\xi|\left(\vartheta, \xi_{\mathrm{e}}\right) = \sqrt{1 - \left(1 - \xi_{\mathrm{e}}^2\right)\frac{\sqrt{1 + 3\cos^2\vartheta}}{\sin^6\vartheta}}. \tag{4.32}$$

Ceci permet d'obtenir les expressions de l'action et l'angle d'orbite

$$J\left(\rho_{\mathrm{e}}, p, \xi_{\mathrm{e}}\right) = \frac{\rho_e p}{\pi}\int_{\vartheta_{\mathrm{b}}}^{\pi-\vartheta_{\mathrm{b}}} |\xi|\left(\vartheta, \xi_{\mathrm{e}}\right)\sqrt{1 + 3\cos^2\vartheta}\sin\vartheta\mathrm{d}\vartheta, \tag{4.33}$$

$$\zeta\left(\rho_{\mathrm{e}}, p, \xi_{\mathrm{e}}, \vartheta\right) = \pi \pm \frac{m\rho_{\mathrm{e}}\omega_{\mathrm{b}}}{p}\int_{\vartheta_{\mathrm{b}}}^{\vartheta} \frac{\sqrt{1 + 3\cos^2\vartheta}\sin\vartheta}{|\xi|\left(\vartheta', \xi_{\mathrm{e}}\right)}\mathrm{d}\vartheta, \tag{4.34}$$

où la convention $\zeta\left(\vartheta = \vartheta_{\mathrm{b}}\right) = \pi$ est prise et $\pm$ désigne le signe de $p_{\parallel}$. Une orbite complète voit donc varier ζ sur l'intervalle $[0, 2\pi[$. La fréquence d'orbite ω_{b} est obtenue à partir de l'équation (4.28),

$$\omega_{\mathrm{b}}^{-1}\left(\rho_{\mathrm{e}}, p, \xi_{\mathrm{e}}\right) = \frac{\tau_{\mathrm{b}}}{2\pi} = \frac{m\rho_{\mathrm{e}}}{\pi p}\int_{\vartheta_{\mathrm{b}}}^{\pi-\vartheta_{\mathrm{b}}} \frac{\sqrt{1 + 3\cos^2\vartheta}\sin\vartheta}{|\xi|\left(\vartheta', \xi_{\mathrm{e}}\right)}\mathrm{d}\vartheta. \tag{4.35}$$

On note que la relation

$$\omega_{\mathrm{b}} = \left(\frac{\partial J}{\partial \mathcal{E}}\right)^{-1}, \tag{4.36}$$

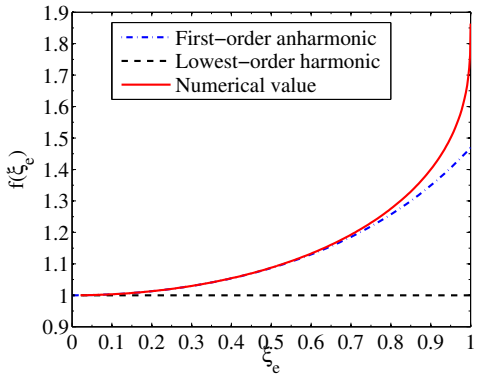


Figure 4.3 – Tracé de la période d'orbite normalisée $f(\xi_e)$ en fonction de la coordonnée de pitch-angle ξ_e (ligne unie rouge). Dans l'approximation « fortement piégée », l'ordre le plus bas remplace f par la fonction unité dans l'équation (D.48) et l'inclusion des corrections anharmoniques discutées dans la section 4.3.2 sont représentées par la ligne pointillés-tirets bleue.

offre une technique de calcul alternative de la fréquence d'orbite permettant de vérifier les expressions analytiques. De même, la fréquence de dérive moyennée peut être définie de deux manières : l'une en exprimant la moyenne d'orbite de la fréquence angulaire équatoriale,

$$\omega_d = \left\langle \dot{\phi}_e \right\rangle_b = \frac{3\rho_{Le}}{\tau_b \rho_e} \int_{\vartheta_b}^{\pi-\vartheta_b} \frac{\left(1+\cos^2\vartheta\right)}{\left(1+3\cos^2\vartheta\right)^{3/2}} \frac{2\sin^6\vartheta - \left(1-\xi_e^2\right)\sqrt{1+3\cos^2\vartheta}}{\sqrt{\sin^6\vartheta - \left(1-\xi_e^2\right)\sqrt{1+3\cos^2\vartheta}}} \mathrm{d}\vartheta, \tag{4.37}$$

l'autre en utilisant les équations de Hamilton,

$$\omega_d = \left\langle \dot{\phi} \right\rangle_b = \left\langle \frac{\partial H}{\partial P_\phi} \right\rangle_b = \frac{\mu}{e} \left\langle \frac{\partial B}{\partial \psi} \right\rangle_b . \tag{4.38}$$

La deuxième expression peut être vérifiée en utilisant l'équation (4.18), où le dernier terme est nul en effectuant la moyenne d'orbite. Pour étudier la dépendance en pitch-angle des fréquences d'orbite et de dérive moyennée, les équations (4.35) et (4.37) sont normalisées de façon à obtenir les formes suivantes pour les périodes respectives

$$\tau_b = \frac{2\pi}{\Omega_b} f(\xi_e), \tag{4.39}$$

$$\tau_d = \frac{2\pi}{\Omega_d} g(\xi_e). \tag{4.40}$$

On peut écrire les facteurs de normalisation en fonction du rayon de Larmor équatorial $\rho_{Le} \equiv p/(m|\omega_{ge}|)$ et de la fréquence de gyration équatoriale ω_{ge} :

$$\Omega_b \equiv \frac{3p}{\sqrt{2} m \rho_e} = \frac{3\rho_{Le}}{\sqrt{2}\rho_e} |\omega_{ge}|, \tag{4.41}$$

$$\Omega_d \equiv \frac{3\rho_{Le} p}{2 m \rho_e^2} = \frac{\rho_{Le}}{\sqrt{2}\rho_e} \Omega_b. \tag{4.42}$$

Les figures 4.3 et 4.4 montrent les dépendances des périodes d'orbite et de dérive en ξ_e, avec les développements de Taylor au deuxième ordre à $\xi_e = 0$, $f(\xi_e) \simeq 1 + (23/72)\xi_e^2$ et $g(\xi_e) \simeq 1 + (1/6)\xi_e^2$. Les valeurs en $\xi_e = 1$ sont finies ; elles sont respectivement $f(1) = \sqrt{18} L_e/(2\pi\rho_e) \simeq 1,86$ et $g(1) = 3/2$, calculés dans l'appendice D. On note que pour $\xi_e \leq 0,6$, l'approximation « fortement piégée » donne des résultats très fidèles à l'expression numérique. Ceci illustre l'importance croissante du temps passé aux points de rebroussement $\pm\sigma_b$ lorsque $|\xi_e| \to 1$.

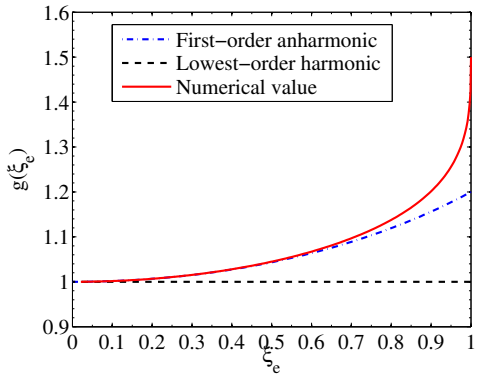


FIGURE 4.4 – Tracé de la période de dérive normalisée $g(\xi_e)$ en fonction de la coordonnée de pitch-angle ξ_e (ligne unie rouge). Dans l'approximation « fortement piégée », l'ordre le plus bas remplace f par la fonction unité dans l'équation (D.55) et l'inclusion des corrections anharmoniques discutées dans la section 4.3.2 sont représentées par la ligne pointillés-tirets bleue.

	Développement de Taylor	Régression numérique[a]
Orbite	$f(\xi_e) \simeq 1 + (23/72)\,\xi_e^2 = 1 + 0.32\xi_e^2$	$1.76 - 0.76y \simeq 1 + 0.38\xi_e^2$
Dérive moyennée	$g(\xi_e) \simeq 1 + (1/6)\,\xi_e^2 = 1 + 0.16\xi_e^2$	$(0.70 + 0.30y)^{-1} \simeq 1 + 0.15\xi_e^2$

[a] : Voir référence [21].

TABLE 4.1 – Périodes d'orbite et de dérive normalisées.

Les périodes d'orbite et de dérive moyennée peuvent ainsi être comparées à la période de gyration équatoriale $\tau_{ge} \equiv 2\pi/|\omega_{ge}|$, ce qui donne trois échelles de temps bien séparées lorsque $\epsilon_e \equiv \rho_{Le}/\rho_e \ll 1$. Dans ce cas,

$$1 \ll \frac{\tau_b}{\tau_{ge}} \equiv \epsilon_e^{-1}\frac{\sqrt{2}}{3} f(\xi_e) \ll \frac{\tau_d}{\tau_{ge}} \equiv \epsilon_e^{-2}\frac{2}{3} f(\xi_e)\, g(\xi_e)\,. \tag{4.43}$$

Cette séparation vaut pour tout ξ_e, car $1 \leq f, g < 2$.

Dans la littérature, les périodes d'orbite et de dérive moyennée ont été traditionnellement exprimées en opérant des régressions analytiques sur les résultats numériques, en utilisant la variable $y \equiv \sqrt{1-\xi_e^2} \simeq 1 - \xi_e^2/2$. Les résultats obtenus sont comparés dans le tableau 4.1.

4.3 Approximation « fortement piégée »

Les intégrales (4.33), (4.34), (4.35) et (4.37) obtenues dans le cas dipolaire général n'ont pas d'expression analytique connue. Afin de simplifier les expressions, on considère le cas particulier des orbites dites « fortement piégées », qui sont confinées près du plan équatorial. En introduisant l'angle de latitude $\sigma \equiv \pi/2 - \vartheta$, cette condition correspond à

$$|\sigma| \ll \frac{\pi}{2}. \tag{4.44}$$

Ceci permet d'effectuer des développements de Taylor des quantités exprimées précédemment afin d'obtenir des expressions *analytiques* pour les intégrales d'orbite. L'abscisse curviligne devient

$$s = \rho_e\left(\sin\sigma + \frac{1}{2}\sin^3\sigma + \ldots\right) = \rho_e\left(\sigma + \frac{1}{3}\sigma^3 + \ldots\right), \tag{4.45}$$

ce qui implique que le paramètre sans dimension $|\sigma| \simeq |s|/\rho_e$ représente la distance normalisée par rapport au plan équatorial dans le voisinage de l'équateur. L'amplitude du champ magnétique le

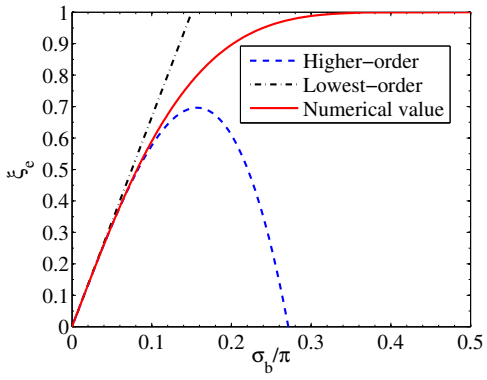


Figure 4.5 – Coordonnée de pitch-angle équatorial $|\xi_e|$ trécée en fonction de la latitude de rebond normalisée σ_b (ligne unie rouge). La ligne pointillés-tirets noire représente l'approximation linéaire $|\xi_e| \simeq 3\sigma_b/\sqrt{2}$ et la ligne tirets bleue inclut les corrections d'ordre supérieur.

long d'une ligne de champ devient

$$\frac{B}{B_e} = 1 + \frac{9}{2}\sin^2\sigma + \frac{75}{8}\sin^4\sigma + \cdots = 1 + \frac{9}{2}\sigma^2 + \frac{63}{8}\sigma^4 + \ldots, \tag{4.46}$$

et la composante covariante radiale du vecteur unitaire magnétique

$$a = 3\frac{\rho_e}{\psi_e}\sigma + \ldots. \tag{4.47}$$

De même, l'énergie totale est développée en utilisant l'équation (4.46), ce qui donne

$$\mathcal{E} = \frac{p_\parallel^2}{2m} + \mu B_e\left(1 + \frac{9}{2}\sigma^2 + \ldots\right), \tag{4.48}$$

ce qui montre que dans le voisinage de l'équateur, le centre-guide a un comportement d'oscillateur harmonique d'énergie $\mathcal{E} - \mu B_e$. De fait, la quantité μB_e sert de *potentiel* pour le mouvement de dérive moyenné de l'orbite de centre-guide. Enfin, la coordonnée de pitch-angle équatoriale devient

$$|\xi_e| = \frac{3\sigma_b}{\sqrt{2}}\left(1 - \frac{11}{8}\sigma_b^2 + \ldots\right), \tag{4.49}$$

où la latitude de rebond $\sigma_b = \pi/2 - \vartheta_b$ fournit les points de rebond $\sigma = \pm\sigma_b$. Le comportement de $|\xi_e|$ est linéaire en σ_b à l'ordre le plus bas. La figure 4.5 permet de comparer le développement à l'ordre le plus bas (limite harmonique) et à l'ordre supérieur (corrections anharmoniques) à l'inversion numérique de l'expression issue des équations (4.19) et (4.20),

$$|\xi_e|(\sigma_b) = \sqrt{1 - \frac{\cos^6\sigma_b}{\sqrt{1 + 3\sin^2\sigma_b}}}. \tag{4.50}$$

Comme pour les périodes d'orbite et de dérive, les expressions même harmoniques reproduisent fidèlement la dynamique pour $|\xi_e| \leq 0,6$.

4.3.1 Dynamique harmonique fondamentale

On calcule à présent les expressions explicites pour les coordonnées angle-action dans la limite harmonique fondamentale. À l'ordre le plus bas, le cosinus du pitch-angle est déduit de la combinaison des équations (D.39) et (4.50),

$$|\xi| = \frac{3}{\sqrt{2}}\sqrt{\sigma_b^2 - \sigma^2} + \ldots, \tag{4.51}$$

où le paramètre d'échelle suivant est utilisé :

$$\epsilon_\mathrm{t} \equiv \sigma_\mathrm{b}^2 = \left(\frac{s_\mathrm{b}}{\rho_\mathrm{e}}\right)^2 \ll 1. \tag{4.52}$$

On peut calculer de façon analytique l'action harmonique

$$J_0 = \frac{3\rho_\mathrm{e} p}{\pi\sqrt{2}} \int_{-\sigma_\mathrm{b}}^{\sigma_\mathrm{b}} \sqrt{\sigma_\mathrm{b}^2 - \sigma^2}\mathrm{d}\sigma = \frac{3\rho_\mathrm{e} p}{2\sqrt{2}}\sigma_\mathrm{b}^2 = \frac{\mathcal{E}\xi_\mathrm{e}^2}{\Omega_\mathrm{b}}. \tag{4.53}$$

La fréquence d'orbite est déduite de l'équation (4.36), en utilisant $\partial\left(p\xi_\mathrm{e}^2\right)/\partial\mathcal{E} = (2m/p)\left(1 - \epsilon_\mathrm{t}\xi_\mathrm{e}^2/2\right)$:

$$\omega_{\mathrm{b}0} = \Omega_\mathrm{b}\left(1 - \epsilon_\mathrm{t}\frac{\xi_\mathrm{e}^2}{2}\right)^{-1}. \tag{4.54}$$

On note que la combinaison de (4.53) et (4.54) pour obtenir l'énergie de l'oscillateur harmonique ne prend pas en compte la correction en ξ_e^2 de $\omega_{\mathrm{b}0} \simeq \Omega_\mathrm{b}$. Elle sera cependant nécessaire pour effectuer correctement les calculs à l'ordre supérieur. L'énergie de l'oscillateur

$$J_0\Omega_\mathrm{b} = \frac{p^2\xi_\mathrm{e}^2}{2m} = \mathcal{E} - \mu B_\mathrm{e} \tag{4.55}$$

peut être interprétée comme l'énergie *relative* par rapport au potentiel au minimum de champ μB_e. Cette expression permet de déduire l'expression de l'hamiltonien harmonique en coordonnées angle-action,

$$H_0 = \mu B_\mathrm{e} + J_0\Omega_\mathrm{b}, \tag{4.56}$$

et la période d'orbite normalisée $\tau_{\mathrm{b}0} \equiv \Omega_\mathrm{b}\left(\partial H_0/\partial J_0\right)^{-1} = 1$ est bien celle indiquée sur la figure 4.3. On note que l'invariance de l'action harmonique J_0 est bien satisfaite en utilisant les équations d'Hamilton,

$$\dot{J}_0 = -\frac{\partial H_0}{\partial\zeta_0} = 0. \tag{4.57}$$

La partie intégrale de l'équation (4.34) est simplifiée de la manière suivante

$$\int_{-\sigma_\mathrm{b}}^{\sigma} \frac{\mathrm{d}\sigma}{\sqrt{\sigma_\mathrm{b}^2 - \sigma^2}} = \left[\pi - \arccos\frac{\sigma}{\sigma_\mathrm{b}}\right], \tag{4.58}$$

ce qui donne pour l'angle d'orbite harmonique

$$\zeta_0 = \begin{cases} 2\pi - \arccos\frac{\sigma}{\sigma_\mathrm{b}} & \left(p_\parallel > 0\right), \\ \arccos\frac{\sigma}{\sigma_\mathrm{b}} & \left(p_\parallel < 0\right). \end{cases} \tag{4.59}$$

On peut ainsi déduire les expressions analytiques des coordonnées parallèles en fonction des coordonnées angle-action

$$s_0\left(J_0, \zeta_0\right) = \sqrt{\frac{2J_0}{m\Omega_\mathrm{b}}}\cos\zeta_0, \tag{4.60}$$

$$p_{\parallel 0}\left(J_0, \zeta_0\right) = -\sqrt{2mJ_0\Omega_\mathrm{b}}\sin\zeta_0, \tag{4.61}$$

ce qui correspond exactement au comportement d'un oscillateur harmonique dont la trajectoire dans l'espace des phases parallèle est représentée dans la figure 4.6.

De plus, il est facile de vérifier que la transformation de coordonnées $\left(p_{\parallel 0}, s_0\right) \to \left(J_0, \zeta_0\right)$ vérifie la condition canonique exprimée à l'aide du crochet de poisson canonique parallèle

$$\left\{p_{\parallel 0}, s_0\right\}_{\parallel 0} \equiv \frac{\partial p_{\parallel 0}}{\partial\zeta_0}\frac{\partial s_0}{\partial J_0} - \frac{\partial p_{\parallel 0}}{\partial J_0}\frac{\partial s_0}{\partial\zeta_0} = \sin^2\zeta_0 + \cos^2\zeta_0 = 1, \tag{4.62}$$

en effectuant les dérivées à ψ_e et $\mathcal{E}$ constants.

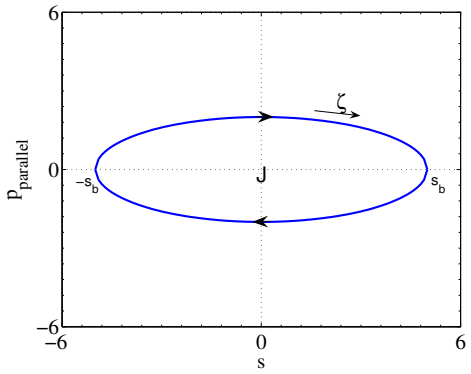


Figure 4.6 – Trajectoire d'un centre-guide fortement piégé dans la limite harmonique. L'action J_0 représente l'aire balayée par l'orbite paramétrisée par l'angle ζ_0.

4.3.2 Corrections anharmoniques de premier ordre

En vue d'obtenir les termes de premier ordre anharmoniques, le développement de l'abscisse curviligne est poussé à l'ordre supérieur. En inversant l'expression $s(\sigma)$, on obtient

$$\sigma = \frac{s}{\rho_\mathrm{e}} - \epsilon_\mathrm{t}\frac{1}{3}\left(\frac{s}{\rho_\mathrm{e}}\right)^3 + \ldots, \tag{4.63}$$

donc la correction d'ordre supérieur est d'ordre ϵ_t car $s^2 \leq s_\mathrm{b}^2$ par construction. En insérant l'expression (4.63) dans l'équation (4.46), l'expansion de l'énergie cinétique perpendiculaire

$$\mu B = \mu B_\mathrm{e}\left[1 + \epsilon_\mathrm{t}\frac{9}{2}\left(\frac{s}{\rho_\mathrm{e}}\right)^2 - \epsilon_\mathrm{t}^2\frac{39}{8}\left(\frac{s}{\rho_\mathrm{e}}\right)^4 + \ldots\right] \tag{4.64}$$

introduit un hamiltonien centre-guide modifié,

$$H = H_0(J_0) + \epsilon_\mathrm{t} H_1(J_0, \zeta_0), \tag{4.65}$$

qui comprend le terme harmonique fondamental H_0 et une correction anharmonique qui va briser l'invariance de l'action d'orbite $\dot{J}_0 = -\epsilon_\mathrm{t}\partial H_1/\partial\zeta_0 \neq 0$. Désormais, les contributions d'ordre supérieur en ϵ_t au delà de la limite harmonique sont omises. L'objectif de la méthode des transformées de Lie est ici de restaurer l'invariance ; autrement dit $\dot{J} = \mathcal{O}\left(\epsilon_\mathrm{t}^2\right)$ doit être d'ordre *supérieur* à la correction anharmonique. En insérant l'expression pour la fréquence d'orbite harmonique Ω_b et du moment magnétique $\mu = \mathcal{E}\left(1 - \epsilon_\mathrm{t}\xi_\mathrm{e}^2\right)/B_\mathrm{e}$ dans l'équation (4.64), on obtient

$$\mu B = \mu B_\mathrm{e} + \epsilon_\mathrm{t}\frac{1}{2}m\Omega_\mathrm{b}^2 s^2\left[1 - \epsilon_\mathrm{t}\xi_\mathrm{e}^2 + \epsilon_\mathrm{t}\frac{13}{12}\left(\frac{s}{\rho_\mathrm{e}}\right)^2\right], \tag{4.66}$$

ce qui donne la forme suivante pour la perturbation de l'hamiltonien :

$$H_1 = \frac{1}{2}m\Omega_\mathrm{b}^2 s^2\left[-\xi_\mathrm{e}^2 + \frac{13}{12}\left(\frac{s}{\rho_\mathrm{e}}\right)^2\right] + K_1, \tag{4.67}$$

où $K_1 \equiv 9J_0/\left(4m\rho_\mathrm{e}^2\right)$ satisfait la relation

$$\left.\frac{\partial K_1}{\partial J_0}\right|_{\psi_\mathrm{e},\mu} = \Omega_\mathrm{b}\frac{\xi_\mathrm{e}^2}{2} = \frac{9}{2}\frac{J_0}{m\rho_\mathrm{e}^2}, \tag{4.68}$$

qui correspond à la correction de premier ordre de la fréquence d'orbite harmonique dans l'équation (4.54). Les formules (4.53) et (4.60) donnent l'expression en coordonnées angle-action harmoniques,

$$\begin{aligned} H_1 =& \frac{J_0^2}{m\rho_\mathrm{e}^2}\left(\frac{9}{4} - 9\cos^2\zeta_0 + \frac{13}{6}\cos^4\zeta_0\right), \\ =& -\frac{J_0^2}{m\rho_\mathrm{e}^2}\left(\frac{23}{16} + \frac{41}{12}\cos 2\zeta_0 - \frac{13}{48}\cos 4\zeta_0\right), \end{aligned} \tag{4.69}$$

qui comporte un terme indépendant de l'angle d'orbite et d'autres ayant une dépendance explicite.

4.3.3 Transformation des coordonnées angle-action

On considère maintenant la transformation de coordonnées $Z_0^\alpha = (J_0, \zeta_0) \to Z^\alpha(J, \zeta)$ afin d'étendre la description de la dynamique des orbites piégées au delà de la limite harmonique. Ainsi,

$$Z^\alpha = Z_0^\alpha + \epsilon_\mathrm{t}\left\{\widehat{S}_1, Z_0^\alpha\right\}_{\|0} + \ldots, \tag{4.70}$$

où la fonction de jauge $\widehat{S}_1(J_0, \zeta_0)$ est destinée à restaurer l'indépendance de la dynamique en termes de l'angle d'orbite et $\{,\}_{\|0}$ est le crochet de Poisson parallèle défini dans l'équation (4.62). Cette transformation est faite uniquement sur les coordonnées *parallèles*, contrairement à la transformée de Lie centre-guide qui prend en compte tout l'espace des phases [1]. Les coordonnées de flux (ψ, ϕ) sont donc ici considérées comme *gelées*. Cette transformation donne un nouveau hamiltonien indépendant de l'angle d'action par construction,

$$\begin{aligned} \widehat{H}(J) =& \widehat{H}_0(J) + \epsilon_\mathrm{t}\widehat{H}_1(J) + \ldots, \\ =& H_0(J_0) + \epsilon_\mathrm{t}\left(H_1 - \left\{\widehat{S}_1, H_0\right\}_{\|0}\right)(J_0, \zeta_0) + \ldots. \end{aligned} \tag{4.71}$$

L'expression à l'ordre zéro provient directement de l'expression précédente et l'équation (4.56) :

$$\widehat{H}_0 = H_0 = \mu B_\mathrm{e} + J\Omega_\mathrm{b}. \tag{4.72}$$

Pour la correction d'ordre supérieure, on sépare l'équation (4.69) en une partie moyennée $\langle H_1\rangle_\mathrm{b}$ et une partie explicitement dépendante de l'angle d'orbite $\widetilde{H}_1 \equiv H_1 - \langle H_1\rangle_\mathrm{b}$. Cela donne

$$\widehat{H}_1 = \langle H_1\rangle_\mathrm{b} + \widetilde{H}_1 - \Omega_\mathrm{b}\frac{\partial \widehat{S}_1}{\partial \zeta}. \tag{4.73}$$

L'indépendance en angle d'orbite de l'hamiltonien transformé impose

$$\widehat{H}_1 = \langle H_1\rangle_\mathrm{b} = -\frac{23}{16}\frac{J_0^2}{m\rho_\mathrm{e}^2}, \tag{4.74}$$

et la condition sur la fonction de jauge

$$\begin{aligned} \widehat{S}_1(J_0, \zeta_0) =& \frac{1}{\Omega_\mathrm{b}}\int \widetilde{H}_1(J_0, \zeta_0)\,\mathrm{d}\zeta_0, \\ =& \frac{J_0^2}{24m\Omega_\mathrm{b}\rho_\mathrm{e}^2}\left(-41\sin 2\zeta_0 + \frac{13}{8}\sin 4\zeta_0\right). \end{aligned} \tag{4.75}$$

1. Ceci est dû au fait que les coordonnées de flux (ψ, ϕ) constituent déjà une paire canonique par construction, à tout ordre en ϵ_t. Toute transformation destinée à restaurer l'invariance en action parallèle doit donc garder constantes ces coordonnées.

On peut en déduire les nouvelles expressions pour les coordonnées action-angle (J, ζ) incluant les corrections anharmoniques :

$$\begin{aligned} J =& J_0 + \epsilon_\mathrm{t} \left\{ \widehat{S}_1, J_0 \right\}_{\|0} = J_0 + \epsilon_\mathrm{t} \frac{\partial \widehat{S}_1}{\partial \zeta_0} \\ =& J_0 + \epsilon_\mathrm{t} \frac{J_0^2}{12 m \Omega_\mathrm{b} \rho_\mathrm{e}^2} \left(-41 \cos 2\zeta_0 + \frac{13}{4} \cos 4\zeta_0 \right), \end{aligned} \tag{4.76}$$

et

$$\begin{aligned} \zeta =& \zeta_0 + \epsilon_\mathrm{t} \left\{ \widehat{S}_1, \zeta_0 \right\}_{\|0} = \zeta_0 - \epsilon_\mathrm{t} \frac{\partial \widehat{S}_1}{\partial J_0} \\ =& \zeta_0 + \epsilon_\mathrm{t} \frac{J_0^2}{12 m \Omega_\mathrm{b} \rho_\mathrm{e}^2} \left(41 \sin 2\zeta_0 - \frac{13}{8} \sin 4\zeta_0 \right). \end{aligned} \tag{4.77}$$

Ces deux expressions peuvent être utilisées pour vérifier que la transformation de coordonnées effectuée en (4.70) est canonique : les calculs donnent facilement $\{J, \zeta\}_{\|0} = \mathcal{O}\left(\epsilon_\mathrm{t}^2\right)$.

4.3.4 Dynamique anharmonique parallèle

L'expression de l'hamiltonien transformé est déduite des équations (4.72) et (4.74),

$$\widehat{H} = \mu B_\mathrm{e} + J \Omega_\mathrm{b} - \epsilon_\mathrm{t} \frac{23}{16} \frac{J^2}{m \rho_\mathrm{e}^2}, \tag{4.78}$$

où le dernier terme représente la correction anharmonique. La nouvelle fréquence d'orbite anharmonique est calculée à l'aide de l'hamiltonien,

$$\omega_\mathrm{b} \equiv \frac{\partial \widehat{H}}{\partial J} = \Omega_\mathrm{b} - \epsilon_\mathrm{t} \frac{23}{8} \frac{J}{m \rho_\mathrm{e}^2} = \Omega_\mathrm{b} \left(1 - \epsilon_\mathrm{t} \frac{23}{72} \xi_\mathrm{e}^2 \right), \tag{4.79}$$

ce qui correspond exactement au développement de Taylor de l'inverse de la dépendance en ξ_e de la période d'orbite $f\left(\xi_\mathrm{e}\right)$, montrée dans le tableau 4.1. Afin de vérifier que la nouvelle action d'orbite J est un invariant adiabatique de la dynamique parallèle au premier ordre en ϵ_t, l'équation d'hamilton $\dot{J} = \{J, H\}_{\|0}$ sur l'hamiltonien perturbé $H = H_0 + \epsilon_\mathrm{t} H_1$ est évaluée :

$$\dot{J} = \dot{J}_0 + \dot{\zeta}_0 \frac{J_0^2}{6 m \Omega_\mathrm{b} \rho_\mathrm{e}^2} \left(41 \sin 2\zeta_0 - \frac{13}{2} \sin 4\zeta_0 \right) + \ldots, \tag{4.80}$$

où l'équation d'hamilton d'ordre zéro sur ζ_0 donne $\dot{\zeta}_0 = \Omega_\mathrm{b}$. Les coordonnées parallèles $\left(s, p_\|\right)$ sont ensuite exprimées au premier ordre en ϵ_t en fonction des coordonnées angle-action

$$\begin{aligned} s\left(J, \zeta\right) =& s_0 + \epsilon_\mathrm{t} \left\{ \widehat{S}_1, s_0 \right\}_{\|0} = s_0 + \epsilon_\mathrm{t} \frac{\partial s_0}{\partial J_0} \left(J - J_0 \right) + \epsilon_\mathrm{t} \frac{\partial s_0}{\partial \zeta_0} \left(\zeta - \zeta_0 \right) \\ =& s_0\left(J, \zeta\right) = \sqrt{\frac{2J}{m \Omega_\mathrm{b}}} \cos \zeta, \end{aligned} \tag{4.81}$$

et

$$\begin{aligned} p_\|\left(J, \zeta\right) =& p_{\|0} + \epsilon_\mathrm{t} \left\{ \widehat{S}_1, p_{\|0} \right\}_{\|0} = p_{\|0} + \epsilon_\mathrm{t} \frac{\partial p_{\|0}}{\partial J_0} \left(J - J_0 \right) + \epsilon_\mathrm{t} \frac{\partial p_{\|0}}{\partial \zeta_0} \left(\zeta - \zeta_0 \right) \\ =& p_{\|0}\left(J, \zeta\right) = -\sqrt{2 m J \Omega_\mathrm{b}} \cos \zeta. \end{aligned} \tag{4.82}$$

Des expressions analogues à la limite harmonique sont ainsi retrouvées, mais avec un hamiltonien *anharmonique*. Ces expressions assurent aussi que la transformation $\left(s, p_\|\right) \to (J, \zeta)$ satisfait la condition canonique au premier ordre en ϵ_t, avec le nouveau crochet de Poisson parallèle

$$\left\{ p_\|, s \right\}_\| \equiv \frac{\partial p_\|}{\partial \zeta} \frac{\partial s}{\partial J} - \frac{\partial p_\|}{\partial J} \frac{\partial s}{\partial \zeta} = \sin^2 \zeta + \cos^2 \zeta = 1 + \mathcal{O}\left(\epsilon_\mathrm{t}^2\right). \tag{4.83}$$

4.3.5 Dynamique de dérive

La fréquence de dérive peut être calculée en exprimant en fonction du flux ψ l'amplitude du champ magnétique,

$$B(\psi, s) = \frac{\psi^3}{\mathcal{M}^2} + \epsilon_t \frac{9}{2} s^2 \frac{\psi^5}{\mathcal{M}^3} + \dots, \tag{4.84}$$

où $\mathcal{M} = \psi_e \rho_e = B_e \rho_e^3$ est gardé constant. En gardant la correction anharmonique, la dérivée de flux (à s constant) $\partial B/\partial\psi$ devient sur la trajectoire $\psi = \psi_e$:

$$\frac{\partial B}{\partial \psi} = \frac{3}{\rho_e^2}\left[1 + \epsilon_t \frac{15}{2}\left(\frac{s}{\rho_e}\right)^2 + \dots\right]. \tag{4.85}$$

En utilisant l'équation (4.38) et la forme (4.81) pour l'abscisse curviligne qui donne $\langle s^2 \rangle_b = J/(m\Omega_b)$, on peut déduire pour la fréquence de dérive

$$\begin{aligned}\omega_d =& \frac{3\mathcal{E}}{eB_e\rho_e^2}\left(1 - \epsilon_t \xi_e^2\right)\left(1 + \epsilon_t \frac{15}{8}\xi_e^2 + \dots\right) \\ =& \Omega_d \left(1 - \epsilon_t \frac{1}{6}\xi_e^2 + \dots\right),\end{aligned} \tag{4.86}$$

qui correspond exactement au développement de Taylor de l'inverse de la dépendance en ξ_e de la période de dérive moyennée $g(\xi_e)$, montrée dans le tableau 4.1.

4.4 Résumé du chapitre

Dans ce chapitre, des résultats analytiques ont été obtenus dans le cadre de la réduction de la dynamique parallèle pour une configuration dipolaire. Des corrections à la limite harmonique dans l'approximation des particules fortement piégées permettent d'obtenir un développement des périodes d'orbite de dérive très proches des régressions numériques et révèlent un comportement quasi-harmonique à l'ordre supérieur (l'hamiltonien est non-harmonique). Les calculs effectués, outre leur intérêt comme cas exact où le flux ψ devient un invariant du mouvement, offrent aussi un exemple intéressant d'utilisation du formalisme hamiltonien pour la réduction de la dynamique du centre-guide.

Chapitre 5

Collisions coulombiennes

Dans ce chapitre sont étudiés les phénomènes de collisions associés à l'évolution des distributions à une particules établies dans le chapitre 3. L'intégrale de collision de Boltzmann diverge à grande distance à cause de l'interaction coulombienne des particules [31]. Il faut donc prendre en compte l'écrantage des champs électriques produits par les particules au delà de la longueur de Debye λ_D. La prééminence des collisions aux petits angles conduit à l'adoption d'une intégrale de collision de type Landau [29], adaptée aux particules relativistes en utilisant les travaux de Beliaev et Budker [4]. Le formalisme intégro-différentiel proposé par Braams et Karney [10] permet d'exprimer l'opérateur collision en termes de potentiels scalaires reliés entre eux par des équations différentielles. Enfin, deux limites sont examinées : la limite non relativiste qui fait intervenir les potentiels de Rosenbluth [43] et la limite de Lorentz dans un plasma électrons-ions.

5.1 Introduction à l'opérateur Fokker-Planck

5.1.1 Equation de Boltzmann, intégrale de collision

La dynamique d'une espèce s de particules dans un plasma est décrite à l'aide d'une distribution $f_s\left(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}\right)$ qui donne la densité des particules à l'instant t ayant une position $\mathbf{x}$ et une impulsion $\mathbf{p}$. Cette distribution vérifie l'équation de Boltzmann établie dans l'équation (3.15),

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}}{m_s} \cdot \frac{\partial f_s}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{F} \cdot \frac{\partial f_s}{\partial \mathbf{p}} = \left.\frac{\mathrm{d}f_s}{\mathrm{d}t}\right|_{coll}, \tag{5.1}$$

où $\mathbf{F}$ désigne les forces présentes dans le système (pour un plasma, c'est la force électromotrice $\mathbf{F}_e = q_s\left(\mathbf{E} + \mathbf{p}/m_s \times \mathbf{B}\right)$) et le terme de droite correspond à la contribution des collisions. Celui-ci est déterminé à l'aide d'un opérateur collision de type Fokker-planck qui correspond à la somme des interactions de la distribution avec elle-même, mais aussi les autres espèces présentes dans le plasma. Ainsi, pour toutes les espèces s' de particules,

$$\left.\frac{\mathrm{d}f_s}{\mathrm{d}t}\right|_{coll} \equiv C\left[f_s\right] = \sum_{s'} C\left[f_s, f_{s'}\right]. \tag{5.2}$$

Il s'agit maintenant de quantifier cette interaction entre l'espèce s et les autres espèces du plasma (incluant elle-même). Le nombre de collisions par unité de temps entre une particule s d'impulsion $\mathbf{p}$ et les particules s' d'impulsion $\mathbf{p}'$ dans l'espace $\mathrm{d}^3\mathbf{p}'$ est

$$W\left(\mathbf{p}, \mathbf{p}', \mathbf{p}+\mathbf{q}, \mathbf{p}'-\mathbf{q}\right) f_s\left(\mathbf{p}\right) f_{s'}\left(\mathbf{p}'\right) \mathrm{d}^3\mathbf{q}\mathrm{d}^3\mathbf{p}', \tag{5.3}$$

où l'impulsion $\mathbf{q}$ désigne celle qui a été échangée entre les deux particules (après la collision, $\mathbf{p}$ et $\mathbf{p}'$ deviennent $\mathbf{p}+\mathbf{q}$ et $\mathbf{p}'-\mathbf{q}$). Comme une collision élastique est un événement microscopique réversible, il y a symétrie par échange des états initiaux et finaux :

$$W\left(\mathbf{p}, \mathbf{p}', \mathbf{p}+\mathbf{q}, \mathbf{p}'-\mathbf{q}\right) = W\left(\mathbf{p}+\mathbf{q}, \mathbf{p}'-\mathbf{q}, \mathbf{p}, \mathbf{p}'\right). \tag{5.4}$$

Les collisions subies par la particule s pourront sortir celle-ci de la zone $\mathrm{d}^3\mathbf{p}$ (on considèrera cela comme une « perte » de particule) ou au contraire la faire rentrer alors qu'elle n'y était pas initialement (« gain » de particule). Le bilan sera donc une différence sur les collisions par unité de volume $\mathrm{d}^3\mathbf{x}$ pour toute impulsion cible $\mathbf{p}'$ et impulsion échangée $\mathbf{q}$ effectuées lors de l'événement $\mathbf{p}, \mathbf{p}' \to \mathbf{p}+\mathbf{q}, \mathbf{p}'-\mathbf{q}$ et son événement inverse $\mathbf{p}+\mathbf{q}, \mathbf{p}'-\mathbf{q} \to \mathbf{p}, \mathbf{p}'$. En tenant compte de la propriété (5.4), cela donne

$$\mathrm{d}^3\mathbf{x}\mathrm{d}^3\mathbf{p} \iiint \mathrm{d}^3\mathbf{p}' \iiint \mathrm{d}^3\mathbf{q} W\left(\mathbf{p}, \mathbf{p}', \mathbf{p}+\mathbf{q}, \mathbf{p}'-\mathbf{q}\right)\left[f_s\left(\mathbf{p}+\mathbf{q}\right) f_{s'}\left(\mathbf{p}'-\mathbf{q}\right) - f_s\left(\mathbf{p}\right) f_{s'}\left(\mathbf{p}'\right)\right]. \quad (5.5)$$

Ceci conduit à l'intégrale de collision de Boltzmann,

$$C\left[f_s, f_{s'}\right] = \iiint \mathrm{d}^3\mathbf{p}' \iiint \mathrm{d}^3\mathbf{q} W\left(\mathbf{p}, \mathbf{p}', \mathbf{p}+\mathbf{q}, \mathbf{p}'-\mathbf{q}\right)\left[f_s\left(\mathbf{p}+\mathbf{q}\right) f_{s'}\left(\mathbf{p}'-\mathbf{q}\right) - f_s\left(\mathbf{p}\right) f_{s'}\left(\mathbf{p}'\right)\right]. \quad (5.6)$$

5.1.2 Ecrantage des charges

L'intégrale (5.6) diverge logarithmiquement [31] à cause de l'interaction à grande distance des particules. En réalité, il faut prendre en compte l'*écrantage* de l'interaction coulombienne par les autres particules présentes dans le plasma. La longueur de Debye λ_D est ainsi définie comme la limite à partir de laquelle l'agitation thermique domine sur les forces de Coulomb,

$$\lambda_\mathrm{D} \equiv \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\sum_s q_s^2 n_s / T_s}}, \quad (5.7)$$

en effectuant la somme sur les espèces du plasma. Comme un modèle classique (non quantique) est considéré ici, il faut également prendre en compte une longueur minimale d'interaction qui correspond à la longueur de Broglie de la particule cible $\lambda_\mathrm{B} \equiv h/p'$, où h désigne la constante de Planck. De plus, l'énergie transférée ne doit pas excéder l'énergie cinétique de la cible ; la longueur minimale correspondante est la longueur de Landau $\lambda_\mathrm{L} \equiv q_s q_{s'} \sqrt{m_{s'}/m_s} / \left(2\pi\varepsilon_0 p'^2\right)$. L'interaction étudiée est donc à l'intérieur d'une sphère de Debye mais sur des distances supérieures à une longueur de coupure correspondant à la plus grande des longueurs de Landau et de Broglie :

$$\lambda_\mathrm{C} \equiv \max\left(\lambda_\mathrm{L}, \lambda_\mathrm{B}\right). \quad (5.8)$$

Le logarithme $\ln\left(\lambda_\mathrm{D}/\lambda_\mathrm{C}\right) \equiv \ln\Lambda_{ss'}$ est communément appelé logarithme coulombien, et c'est celui qu'on retrouve dans la fréquence de collision. Une des conséquences de ce domaine d'observation est que les échelles spatiales d'évolution des distributions f_s doivent excéder la longueur de Debye. Pour la limite inférieure, le nombre de particules concernées décroît comme le cube du rayon d'interaction. Il est donc raisonnable de négliger leur contribution dans les collisions coulombiennes.

5.1.3 Collisions aux petits angles

Afin de vérifier la dominance des collisions à petit angle, il faut comparer les temps moyens entre une collision effectuant une déviation de $\pi/2$ de l'angle d'incidence χ et de multiples collisions arrivent au même résultat. Pour simplifier, une particule cible de masse infinie est considérée ici, afin qu'on puisse placer le référentiel du centre de masse sur celle-ci. Le paramètre d'impact correspondant à une déviation d'angle $\pi/2$ est déduit de la force de Coulomb,

$$b_{\pi/2} = \frac{q_s q_{s'} m_s}{4\pi\varepsilon_0 p^2}. \quad (5.9)$$

Le temps d'interaction correspondant est fonction de la section efficace $\sigma_{\pi/2} = \pi b_{\pi/2}^2$:

$$t_{\pi/2} = \frac{m_s}{n_{s'} p \pi b_{\pi/2}^2}. \quad (5.10)$$

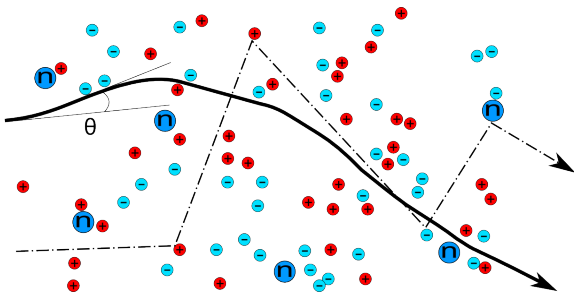


FIGURE 5.1 – Evolution schématique d'une particule soumise à des interactions coulombiennes. Les collisions à faible angle (trait uni) contribuent beaucoup plus à la déviation des particules que les collisions directes (trait en pointillés)

Pour des collisions de faible angle, $\sin\chi \simeq \chi$ et la déflection subie en une collision est $|\Delta p| \simeq p\chi$. De l'expression de la section efficace pour une collision d'angle quelconque [19],

$$\sigma = \frac{b_{\pi/2}^2}{4\sin^4\frac{\chi}{2}}, \tag{5.11}$$

vient la formulation pour de petits angles $\sigma \simeq 4b_{\pi/2}^2/\chi^4$ et le paramètre d'impact $b = b_{\pi/2}\cot(\chi/2)$ devient $b \simeq 2b_{\pi/2}/\chi$. La déflection quadratique moyenne (la déflexion moyenne simple est nulle) devient, en notant l'angle solide $\mathrm{d}\Omega = 2\pi p\mathrm{d}p\chi\mathrm{d}\chi$:

$$\frac{\mathrm{d}\overline{|\Delta p|}^2}{\mathrm{d}t} = n_{s'}p\int |\Delta p|^2\,\sigma(\chi)\,\mathrm{d}\Omega = 8\pi b_{\pi/2}^2 n_{s'}p^2\int_{\chi_{min}}^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}\chi}{\chi}, \tag{5.12}$$

où χ_{min} correspond à la coupure due à l'écrantage des charges. On en déduit $\chi_{min} = 2b_{\pi/2}/\lambda_D$ et le temps moyen pour une déviation d'angle $\pi/2$ (lorsque $\sqrt{\overline{|\Delta p|}^2} \simeq p$) prend la forme

$$t_{\mathrm{mult}} \simeq \frac{1}{8\pi b_{\pi/2}^2 n_{s'}p\ln\left(\pi\lambda_D/4b_{\pi/2}\right)}. \tag{5.13}$$

Le rapport $t_{\pi/2}/t_{\mathrm{mult}}$ devient

$$\frac{t_{\pi/2}}{t_{\mathrm{mult}}} \simeq 8\ln\left(\frac{\lambda_D}{b_{\pi/2}}\right). \tag{5.14}$$

Pour la plupart des plasmas, le logarithme a une valeur de 10 à 20 [25]. Les collisions successives à faible angle contribuent donc bien plus à la déviation générale que les simples collisions à grand angle. La trajectoire aura donc une allure représentée dans la figure 5.1 (les collisions avec les particules neutres ne sont pas considérées dans cette thèse).

5.1.4 l'intégrale de collision Landau

L'opérateur collision peut être traité comme une *diffusion* dans l'espace des vitesses,

$$C[f_s] = -\frac{\partial}{\partial\mathbf{p}}\cdot\mathbf{S}, \tag{5.15}$$

exprimée à l'aide du flux $\mathbf{S}$ de particules dans l'espace des vitesses, qui est fonction des distributions de particules. Le coefficient W de l'équation (5.3) est explicité en fonction de $\mathbf{q}$ et des moyennes entre les impulsions initiales et finales des deux particules,

$$W\left(\mathbf{p}+\frac{1}{2}\mathbf{q},\mathbf{p}'-\frac{1}{2}\mathbf{q};\mathbf{q}\right), \tag{5.16}$$

ce qui permet de formuler la symétrie quant à l'échange des états finaux et initiaux de la collision,

$$W\left(\mathbf{p}+\frac{1}{2}\mathbf{q},\mathbf{p}'-\frac{1}{2}\mathbf{q};\mathbf{q}\right)=W\left(\mathbf{p}+\frac{1}{2}\mathbf{q},\mathbf{p}'-\frac{1}{2}\mathbf{q};-\mathbf{q}\right). \tag{5.17}$$

En utilisant l'équation (5.6) selon une direction privilégiée p_α, $\mathbf{S}$ est la différence entre les nombres de particules pénétrant et sortant de la zone $[p_\alpha - q_\alpha, p_\alpha]$ ayant subi une impulsion $q_\alpha > 0$ dans cette direction. Ainsi,

$$S_\alpha=\sum_{s'}\iiint_{q_\alpha>0}\mathrm{d}^3\mathbf{q}\iiint\mathrm{d}^3\mathbf{p}'\int_{p_\alpha-q_\alpha}^{p_\alpha}W\left(\mathbf{p}+\frac{1}{2}\mathbf{q},\mathbf{p}'-\frac{1}{2}\mathbf{q};\mathbf{q}\right)\left[f_s\left(\mathbf{p}+\mathbf{q}\right)f_{s'}\left(\mathbf{p}'-\mathbf{q}\right)-f_s\left(\mathbf{p}\right)f_{s'}\left(\mathbf{p}'\right)\right]\mathrm{d}p_\alpha. \tag{5.18}$$

La faible déviation des collisions permet de faire un développement de Taylor du facteur correspondant aux distributions dans l'expression pour le flux,

$$f_s\left(\mathbf{p}+\mathbf{q}\right)f_{s'}\left(\mathbf{p}'-\mathbf{q}\right)-f_s\left(\mathbf{p}\right)f_{s'}\left(\mathbf{p}'\right)\simeq-\mathbf{q}\cdot\left[\frac{\partial f_s}{\partial\mathbf{p}}\left(\mathbf{p}\right)f_{s'}\left(\mathbf{p}'\right)-f_s\left(\mathbf{p}\right)\frac{\partial f_{s'}}{\partial\mathbf{p}'}\left(\mathbf{p}'\right)\right], \tag{5.19}$$

et pour le coefficient W,

$$W\left(\mathbf{p}+\frac{1}{2}\mathbf{q},\mathbf{p}'-\frac{1}{2}\mathbf{q};\mathbf{q}\right)\simeq W\left(\mathbf{p},\mathbf{p}';\mathbf{q}\right). \tag{5.20}$$

Comme la fonction $W\left(\mathbf{p},\mathbf{p}';\mathbf{q}\right)$ est paire en $\mathbf{q}$, l'intégrale de l'équation (5.18) peut être remplacée par la moitié de l'intégrale sur tout l'espace $\mathbf{q}$. L'intégrale sur p_α peut être remplacée par une multiplication par la longueur de l'intervale q_α, ce qui donne pour la fonction de flux

$$\mathbf{S}=\frac{1}{2}\sum_{s'}\iiint\mathrm{d}^3\mathbf{q}\iiint\mathrm{d}^3\mathbf{p}'W\left(\mathbf{p},\mathbf{p}';\mathbf{q}\right)\left(\frac{\partial f_s\left(\mathbf{p}\right)}{\partial\mathbf{p}}f_{s'}\left(\mathbf{p}'\right)-f_s\left(\mathbf{p}\right)\frac{\partial f_{s'}\left(\mathbf{p}'\right)}{\partial\mathbf{p}'}\right)\cdot\mathbf{q}\mathbf{q} \tag{5.21}$$

Une nouvelle expression pour l'intégrale de collision peut donc être écrite,

$$C\left[f_s\right]=\sum_{s'}\frac{\partial}{\partial\mathbf{p}}\cdot\iiint\mathrm{d}^3\mathbf{p}'\mathbb{Q}\left(\mathbf{p},\mathbf{p}'\right)\cdot\left(\frac{\partial f_s\left(\mathbf{p}\right)}{\partial\mathbf{p}}f_{s'}\left(\mathbf{p}'\right)-f_s\left(\mathbf{p}\right)\frac{\partial f_{s'}\left(\mathbf{p}'\right)}{\partial\mathbf{p}'}\right), \tag{5.22}$$

où le tenseur $\mathbb{Q}$ est exprimé en fonction de l'intégrale sur les impulsions échangées,

$$\mathbb{Q}\left(\mathbf{p},\mathbf{p}'\right)\equiv\frac{1}{2}\int\mathrm{d}\sigma v_{\mathrm{rel}}\mathbf{q}\mathbf{q}, \tag{5.23}$$

en supposant que les lois de conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement permettent de réduire les intégrations sur $\mathbf{q}$ à une simple intégration sur la section efficace (voir [31], §3 et §41). v_{rel} est la vitesse relative entre particules [1].

5.1.5 Compétition avec le rayonnement de freinage

À grande vitesse, les particules peuvent subir un ralentissement par émission d'un photon ([5], §93), appelé rayonnement de freinage ou *bremsstrahlung*. Cet effet provoque des pertes d'énergie dans le plasma qui entrent en compétition avec les processus de pertes d'énergie collisionnels décrits par la théorie de Landau. Les travaux de Haug [22] ont montré que les pertes dues au *bremsstrahlung* deviennent comparables qu'à des énergies de 80 MeV pour les électrons et concernent donc une très faible fraction de la population électronique totale [2]. Pour les ions, l'effet *bremsstrahlung* est encore moins prononcé à cause du rapport de masse électron-ion.

1. Dans le cas relativiste, elle correspondra à la vitesse d'une particule dans le référentiel de repos de l'autre, généralisée à une expression indépendante de référentiel.

2. Les calculs de Haug, effectués pour une densité de 1 cm^{-3} sont aussi valables pour des densités tokamak, car la dépendance est linéaire pour le bremsstrahlung comme pour les collisions.

5.2 L'équation Fokker-Planck pour les collisions

Les opérateurs collision partiels ont donc pour forme

$$C\left[f_s, f_{s'}\right](\mathbf{x},\mathbf{u}) \equiv \frac{\Gamma_{ss'}}{2n_s}\frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \cdot \iiint \mathrm{d}^3\mathbf{u}' \mathbb{U}(\mathbf{u},\mathbf{u}') \cdot \left(\frac{\partial f_s(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}}\frac{f_{s'}(\mathbf{u}')}{m_s} - \frac{f_s(\mathbf{u})}{m_{s'}}\frac{\partial f_{s'}(\mathbf{u}')}{\partial \mathbf{u}'}\right), \tag{5.24}$$

où $\mathbb{U}(\mathbf{u},\mathbf{u}')$ est un tenseur noyau dépendant uniquement des impulsions respectives. $\Gamma_{ss'}$ est relié à la fréquence de collision, exprimée en fonction du logarithme coulombien $\ln\Lambda_{ss'}$:

$$\Gamma_{ss'} \equiv \frac{n_s q_s^2 e_{s'}^2 \ln\Lambda_{ss'}}{4\pi\varepsilon_0 m_s^2}. \tag{5.25}$$

Cet opérateur a l'avantage de présenter plusieurs propriétés intéressantes (voir appendice G pour les démonstrations), telles que les conservations du nombre de particules, de la quantité de mouvement et de l'énergie :

$$\iiint \mathrm{d}^3\mathbf{u} C\left[f_s, f_{s'}\right] = 0, \tag{5.26}$$

$$\iiint \mathrm{d}^3\mathbf{u}\left(m_s\mathbf{u}C\left[f_s, f_{s'}\right] + m_{s'}\mathbf{u}C\left[f_{s'}, f_s\right]\right) = 0, \tag{5.27}$$

$$\iiint \mathrm{d}^3\mathbf{u}\left(\frac{1}{2}m_s u^2 C\left[f_s, f_{s'}\right] + \frac{1}{2}m_{s'}u^2 C\left[f_{s'}, f_s\right]\right) = 0. \tag{5.28}$$

Il vérifie aussi le « théorème H » en exprimant la variation de l'entropie $S \equiv -\sum_{s'}\iiint \mathrm{d}^3\mathbf{u} f_s \ln f_s$:

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = -\sum_{s,s'}\iiint \mathrm{d}^3\mathbf{u} \ln f_s C\left[f_s, f_{s'}\right] \geq 0. \tag{5.29}$$

L'opérateur collision peut être écrit sous forme conservative de la manière suivante :

$$C\left[f_s, f_{s'}\right] = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \cdot \left(\mathbf{K}_{ss'}\left[f_{s'}\right] f_s - \mathbb{D}_{ss'}\left[f_{s'}\right] \cdot \frac{\partial f_s}{\partial \mathbf{p}}\right). \tag{5.30}$$

Ici, $\mathbf{K}_{ss'}\left[f_{s'}\right]$ correspond à un vecteur de convection et $\mathbb{D}_{ss'}\left[f_{s'}\right]$ à un tenseur de diffusion qui tous deux dépendent de la distribution du champ de fond de l'espèce s'. Ainsi, les collisions auront pour effet une *translation* (convection) et un *étalement* (diffusion) de la fonction de distribution dans l'espace des vitesses. Les coefficients sont exprimés en fonction du tenseur noyau $\mathbb{U}(\mathbf{u},\mathbf{u}')$ en effectuant une intégration par parties :

$$\mathbf{K}_{ss'}\left[f_{s'}\right] = -\frac{\Gamma_{ss'}}{2n_s}\frac{m_s}{m_{s'}}\iiint \mathrm{d}^3\mathbf{u}'\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{u}'} \cdot \mathbb{U}(\mathbf{u},\mathbf{u}')\right) f_{s'}(\mathbf{u}'), \tag{5.31}$$

$$\mathbb{D}_{ss'}\left[f_{s'}\right] = \frac{\Gamma_{ss'}}{2n_s}\iiint \mathrm{d}^3\mathbf{u}'\mathbb{U}(\mathbf{u},\mathbf{u}') f_{s'}(\mathbf{u}'). \tag{5.32}$$

Ces intégrales étant vectorielle et tensorielle respectivement, leur résolution représente un effort numérique important. L'expression des coefficients à l'aide de *potentiels*, moments scalaires de la distribution de fond permet de contourner ce problème.

5.2.1 Potentiels non relativistes

Le tenseur noyau non relativiste a pour expression

$$\mathbb{U}(\mathbf{v},\mathbf{v}') = \frac{1}{w^3}\left(w^2\mathbb{I} - \mathbf{w}\mathbf{w}\right), \tag{5.33}$$

où $\mathbf{w} \equiv \mathbf{v} - \mathbf{v}'$ désigne la vitesse relative entre particules et $\mathbb{I}$ désigne le tenseur identité. Elle provient du fait que les événements de collisions à faible angle sont des déviations *perpendiculaires* à la vitesse relative entre particules,

$$\mathbb{U} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}') = (\mathbf{v} - \mathbf{v}') \cdot \mathbb{U} = 0. \tag{5.34}$$

Rosenbluth [43] a calculé l'expression de deux fonctions scalaires,

$$H_b(\mathbf{x},\mathbf{v}) \equiv -\frac{1}{4\pi}\iiint \mathrm{d}^3\mathbf{v}'\frac{1}{w}f_{s'}(\mathbf{v}'), \tag{5.35}$$

$$G_b(\mathbf{x},\mathbf{v}) \equiv -\frac{1}{8\pi}\iiint \mathrm{d}^3\mathbf{v}' w f_{s'}(\mathbf{v}'), \tag{5.36}$$

appelées potentiels car elles vérifient deux équations différentielles de type Poisson :

$$\frac{\partial}{\partial\mathbf{v}}\cdot\frac{\partial H_b}{\partial\mathbf{v}} = f_{s'}, \tag{5.37}$$

$$\frac{\partial}{\partial\mathbf{v}}\cdot\frac{\partial G_b}{\partial\mathbf{v}} = H_b. \tag{5.38}$$

On remarque les identités suivantes :

$$\frac{\partial}{\partial\mathbf{v}}\left(\frac{1}{w}\right) = -\frac{\mathbf{w}}{w^3} = \frac{\partial}{\partial\mathbf{v}'}\cdot\mathbb{U}, \tag{5.39}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial\mathbf{v}\partial\mathbf{v}} = \mathbb{U}. \tag{5.40}$$

On exprime donc les coefficients de collision (5.31) et (5.32) en termes de gradients des potentiels de Rosenbluth dans l'espace des vitesses,

$$\mathbf{K}_{ss'} = -\frac{4\pi\Gamma_{ss'}}{n_s}\frac{\partial H_b}{\partial\mathbf{v}}, \tag{5.41}$$

$$\mathbb{D}_{ss'} = -\frac{4\pi\Gamma_{ss'}}{n_s}\frac{\partial^2 G_b}{\partial\mathbf{v}\partial\mathbf{v}}. \tag{5.42}$$

Ces expressions sont intéressantes car elles mettent en avant la symétrie *sphérique* d'une collision. Il est donc naturel de prendre un système de coordonnées de vitesse adapté : (v,ξ,φ), où v désigne l'amplitude de la vitesse, ξ le cosinus du pitch-angle et φ la gyrophase. Cette symétrie permet aussi de séparer les variables en décomposant la distribution de fond sur une base de fonctions orthogonales. Dans le cas général, les harmoniques sphériques, solutions homogènes aux équations (5.37) et (5.38), se prêtent bien à cet exercice. Dans les conditions pratiques, cependant, on utilise une distribution avec symétrie azimuthale, indépendante de φ. On peut dans ce cas substituer aux harmoniques sphériques la base des polynômes de Legendre de degré ℓ, $P_\ell(\xi)$. Ainsi,

$$f_{s'}(\mathbf{x},v,\xi) \equiv \sum_{\ell=0}^{\infty} f_{s'}^{[\ell]}(\mathbf{x},v)\,P_\ell(\xi), \tag{5.43}$$

où les coefficients de Legendre ont pour expression

$$f_{s'}^{[\ell]}(\mathbf{x},v) \equiv \left(\ell+\frac{1}{2}\right)\int d\xi f_{s'}(\mathbf{x},v,\xi)\,P_\ell(\xi). \tag{5.44}$$

On peut utiliser l'orthogonalité des polynômes de Legendre afin de déterminer l'expression des potentiels de Rosenbluth en termes des coefficients de Legendre de la distribution de fond (voir appendice H). Ceci permet de transformer les intégrales en trois dimensions en simples intégrales sur v, ce qui réduit les temps de calcul. En utilisant les mêmes notations pour la décomposition en polynômes de Legendre des potentiels, on obtient

$$H_b^{[\ell]}(\mathbf{x},v) \equiv -\frac{4\pi}{2\ell+1}\left[\int_0^v \mathrm{d}v'\frac{v'^{\ell+2}}{v^{\ell+1}}f_{s'}^{[\ell]}(v') + \int_v^\infty \mathrm{d}v'\frac{v^\ell}{v'^{\ell-1}}f_{s'}^{[\ell]}(v')\right], \tag{5.45}$$

$$\begin{aligned} G_b^{[\ell]}(\mathbf{x},v) \equiv -\frac{2\pi}{4\ell^2-1}\Bigg[&\int_0^v \mathrm{d}v'\frac{v'^{\ell+2}}{v^{\ell+1}}\left(1-\frac{2\ell-1}{2\ell+3}\frac{v'^2}{v^2}\right)f_{s'}^{[\ell]}(v') \\ &+\int_v^\infty \mathrm{d}v'\frac{v^\ell}{v'^{\ell-1}}\left(1-\frac{2\ell-1}{2\ell+3}\frac{v^2}{v'^2}\right)f_{s'}^{[\ell]}(v')\Bigg]. \end{aligned} \tag{5.46}$$

5.2.2 Potentiels relativistes

Une expression pour le tenseur noyau relativiste a été calculée par Belaiev et Budker. Il vaut

$$\mathbb{U}(\mathbf{u},\mathbf{u}') = \frac{r^2}{\gamma\gamma' w^3}\left(w^2\mathbb{I} - \mathbf{u}\mathbf{u} - \mathbf{u}'\mathbf{u}' + r\left(\mathbf{u}\mathbf{u}' + \mathbf{u}'\mathbf{u}\right)\right), \tag{5.47}$$

avec les expressions relativistes

$$\gamma = \sqrt{1+\frac{u^2}{c^2}}, \tag{5.48}$$

$$r = \gamma\gamma' - \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}'}{c^2}, \tag{5.49}$$

$$w = c\sqrt{r^2-1}, \tag{5.50}$$

et tend [3] vers la définition non-relativiste (5.33) quand $c \to \infty$. Ici, la complexité du noyau empêche la formulation en potentiels de Rosenbluth. Cependant, Braams et Karney [10] ont calculé des expressions sous forme de potentiels relativistes permettant de conserver une expression en termes d'intégrales scalaires qui tendent vers les potentiels non relativistes dans cette limite. On a donc

$$\Psi_0(\mathbf{x},\mathbf{u}) = -\frac{1}{4\pi}\iiint \frac{\mathrm{d}^3\mathbf{u}'}{\gamma'}\frac{1}{w} f_{s'}(\mathbf{u}'), \tag{5.51}$$

$$\Psi_1(\mathbf{x},\mathbf{u}) = -\frac{1}{4\pi}\iiint \frac{\mathrm{d}^3\mathbf{u}'}{\gamma'}\frac{r}{w} f_{s'}(\mathbf{u}'), \tag{5.52}$$

$$\Psi_2(\mathbf{x},\mathbf{u}) = -\frac{1}{8\pi}\iiint \frac{\mathrm{d}^3\mathbf{u}'}{\gamma'} c\sinh^{-1}\left(\frac{w}{c}\right) f_{s'}(\mathbf{u}'), \tag{5.53}$$

$$\Psi_3(\mathbf{x},\mathbf{u}) = -\frac{1}{8\pi}\iiint \frac{\mathrm{d}^3\mathbf{u}'}{\gamma'} w f_{s'}(\mathbf{u}'), \tag{5.54}$$

$$\Psi_4(\mathbf{x},\mathbf{u}) = -\frac{1}{32\pi}\iiint \frac{\mathrm{d}^3\mathbf{u}'}{\gamma'} c^3\left(r\sinh^{-1}\left(\frac{w}{c}\right) - \frac{w}{c}\right) f_{s'}(\mathbf{u}'), \tag{5.55}$$

qui sont liés entre eux par les équations différentielles

$$L_0\Psi_0 = f_{s'}, \tag{5.56}$$
$$L_1\Psi_1 = f_{s'}, \tag{5.57}$$
$$L_1\Psi_2 = \Psi_1, \tag{5.58}$$
$$L_2\Psi_3 = \Psi_0, \tag{5.59}$$
$$L_2\Psi_4 = \Psi_3. \tag{5.60}$$

L'opérateur différentiel utilisé a pour forme

$$L_a\Psi \equiv \left(\mathbb{I} + \frac{\mathbf{u}\mathbf{u}}{c^2}\right) : \frac{\partial^2\Psi}{\partial\mathbf{u}\partial\mathbf{u}} + \frac{3\mathbf{u}}{c^2}\cdot\frac{\partial\Psi}{\partial\mathbf{u}} + \frac{1-a^2}{c^2}\Psi, \tag{5.61}$$

ce qui correspond au Laplacien dans la limite non relativiste, comme attendu. Les coefficients de l'opérateur collision auront pour expression utilisant ces potentiels

$$\mathbf{K}_{ss'} = \frac{\Gamma_{ss'}}{2n_s}\frac{1}{\gamma}\left(\mathsf{K}\Psi_1 - \frac{2}{c^2}\mathsf{K}\Psi_2\right) \tag{5.62}$$

$$\mathbb{D}_{ss'} = \frac{\Gamma_{ss'}}{2n_s}\frac{1}{\gamma}\left(\left[\mathsf{L} + \frac{1}{c^2}\left(\mathbb{I} + \frac{\mathbf{u}\mathbf{u}}{c^2}\right)\right]\Psi_3 - \frac{4}{c^2}\left[\mathsf{L} - \frac{1}{c^2}\left(\mathbb{I} + \frac{\mathbf{u}\mathbf{u}}{c^2}\right)\right]\Psi_4\right) \tag{5.63}$$

3. Respectivement, $\mathbf{u} \to \mathbf{v}$, $\gamma \to 1$, $r \to 1$ et $w \to |\mathbf{v} - \mathbf{v}'|$ dans la limite non-relativiste ($c \to \infty$).

où les operateurs K and L sont définis comme suit :

$$\mathsf{K}\Psi \equiv \left(\mathbb{I} + \frac{\mathbf{uu}}{c^2}\right) \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{u}} \tag{5.64}$$

$$= \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{v}}, \tag{5.65}$$

$$\mathsf{L}\Psi \equiv \left(\mathbb{I} + \frac{\mathbf{uu}}{c^2}\right) \cdot \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \mathbf{u} \partial \mathbf{u}} \cdot \left(\mathbb{I} + \frac{\mathbf{uu}}{c^2}\right) + \frac{1}{c^2}\left(\mathbb{I} + \frac{\mathbf{uu}}{c^2}\right)\left(\mathbf{u} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{u}}\right) \tag{5.66}$$

$$= \frac{1}{\gamma^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \mathbf{v} \partial \mathbf{v}} - \frac{1}{c^2}\left(\mathbf{v} \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{v}} + \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{v}} \mathbf{v}\right). \tag{5.67}$$

Les équations (5.65) et (5.67) montrent en particulier les similitudes avec les expressions (5.41) et (5.42) en termes de potentiels de Rosenbluth. Comme dans le cas non relativiste, un système de coordonnées sphériques (u, ξ, φ) est adapté à la description de la dynamique ; une décomposition en polynômes de Legendre de la distribution de fond est donc effectuée. Après un travail de résolution analytique des équations différentielles sur les potentiels [10], ceux-ci peuvent être exprimés en série d'harmoniques sphériques et de polynômes de Legendre dans le cas de la symétrie azimuthale citée dans la limite non relativiste. Les coefficients de Legendre des potentiels relativistes peuvent donc aussi être exprimés selon des intégrales simples en u,

$$\Psi_k^{[\ell]} = \int_0^u \mathrm{d}u' N_k^{[\ell]}(u, u') f_{s'}^{[\ell]}(u') + \int_u^\infty \mathrm{d}u' N_k^{[\ell]}(u', u) f_{s'}^{[\ell]}(u'), \tag{5.68}$$

avec des fonctions noyaux $N_k^{[\ell]}$ dépendant des solutions homogènes isotropes des équations différentielles 5.56-5.60 (voir appendice H).

5.3 Opérateur collision linéarisé

5.3.1 Collisions entre particules de même espèce

Dans le cadre des collisions entre même espèce de particules, une approximation couramment utilisée en physique des plasmas est de considérer que les collisions dominent les particules thermiques. La distribution peut ainsi être développée autour d'une maxwellienne,

$$f_s(\mathbf{x}, p, \xi) \equiv f_{sM}(\mathbf{x}, p) + \delta f_s(\mathbf{x}, p, \xi), \tag{5.69}$$

où

$$f_{sM} \equiv n_s \left(\frac{m_s}{2\pi T_s}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{p^2}{2 m_s T_s}\right) \qquad \text{dans le cas non relativiste,} \tag{5.70}$$

$$f_{sM} \equiv \frac{n_s m_s}{4\pi c T_s K_2(m_s c^2/T_s)} \exp\left(-\frac{\gamma m_s c^2}{T_s}\right) \qquad \text{dans le cas relativiste.} \tag{5.71}$$

Ici, $K_2(x) \equiv \int_0^\infty \exp(-x \cosh t) \cosh(2t)\, \mathrm{d}t$ est la fonction de Bessel modifiée de seconde espèce et f_{sM} est normalisée telle que $\iiint \mathrm{d}^3\mathbf{u} f_{sM} = n_s$. L'opérateur collision est linéarisé en négligeant les termes en $(\delta f_s)^2$ et en utilisant la propriété $C[f_{sM}, f_{sM}] = 0$. On a donc une expression de l'opérateur collision sur les particules de mêmes espèce présentant un terme de collision *à fond maxwellien* (isotrope) et un terme *intégral* (anisotrope) qui peut être exprimé en utilisant la décomposition en polynômes de Legendre de f_s. L'opérateur présente donc la forme suivante :

$$C[f_s, f_s] \simeq C[f_s(\mathbf{x}, p, \xi), f_{sM}(\mathbf{x}, p')] + \sum_{\ell=0}^{\infty} C\left[f_{sM}(\mathbf{x}, p), f_s^{[\ell]}(\mathbf{x}, p') P_\ell(\xi')\right]. \tag{5.72}$$

Comme $f_s^{[0]} \simeq f_{sM}$ et $P_0 = 1$, le terme intégral pour $\ell = 0$ est nul. En conservant la première harmonique avec $P_1 = \xi$, on obtient un opérateur collision *linéarisé*,

$$C[f_s, f_s] \simeq C[f_s, f_{sM}] + C\left[f_{sM}, \xi f_s^{[1]}\right], \tag{5.73}$$

qui conserve le nombre de particules et la quantité de mouvement mais l'énergie n'est pas conservée. Ceci permet la recherche de solutions d'équilibre pour la fonction de distribution sans introduire un terme de perte d'énergie dans l'équation Fokker-Planck. Comme $f_s^{[1]}$ est une intégrale de f_s, cela introduit un terme non linéaire dans l'opérateur collision. Il est à noter que le terme intégral dans l'opérateur linéarisé est indispensable pour le traitement cohérent du courant dans l'équation Fokker-Planck.

5.3.2 Opérateur collision Fokker-Planck pour les électrons

5.3.2.1 Contribution des ions

Pour un plasma de fusion, la faible masse relative d'un électron par rapport au proton ($m_p \simeq 1832 m_e$) permet de considérer les distributions de tous les ions i $(f_i)_i$ comme maxwelliennes dans l'évolution par collisions de la distribution des électrons f_e selon l'équation Fokker-Planck. L'opérateur collision linéarisé devient

$$C\left[f_e\right] \simeq \sum_i C\left[f_e, f_{iM}\right] + C\left[f_e, f_{eM}\right] + C\left[f_{eM}, \xi f_e^{[1]}\right]. \tag{5.74}$$

Les contributions dues à un fond de particules anisotrope sont donc essentiellement contenues dans le terme intégral électron-électron.

5.3.2.2 Limite de Lorentz

Dans la limite de Lorentz $|q_i| \gg e$, l'interaction électron-ion domine par rapport aux électrons entre eux. Cela élimine les deux derniers termes de l'équation (5.74), aussi cette approximation n'est-elle pas idéale dans l'étude de la génération de courant pour les électrons. Cependant, elle offre un cadre de validation de la méthode dans cette limite, où l'opérateur prend l'expression simplifiée

$$C\left[f_e\right] \simeq \Gamma_{ee} \frac{Z_{eff}}{2u^3} \frac{\partial}{\partial \xi}\left[\left(1-\xi^2\right) \frac{\partial f_e}{\partial \xi}\right], \tag{5.75}$$

avec $Z_{eff} \equiv \sum_i n_i q_i^2 \ln \Lambda_{ei} / n_e q_e^2 \ln \Lambda_{ee}$ la charge effective pour un plasma multi-espèces. La contribution des collisions est donc exclusivement une *diffusion* qui agit sur le pitch-angle des particules (« pitch-angle scattering »).

5.4 Résumé du chapitre

Dans ce chapitre, des rappels sont effectués dans le cadre de l'élaboration d'un opérateur collision local aux faibles angles, exprimé dans un formalisme différentiel à l'aide de potentiels adaptés, valable pour des particules relativistes. Afin d'obtenir une séparation des variables dégageant explicitement l'anisotropie des distributions dans la direction parallèle aux lignes de champ, une décomposition en polynômes de Legendre est effectuée, permettant la linéarisation de l'opérateur collision dans le cadre de l'implémentation numérique. L'opérateur résultant est celui utilisé pour l'élaboration d'un opérateur centre-guide (chapitre 6). Enfin, la limite de Lorentz offre un cas simplifié d'opérateur collision qui est utilisé pour le calcul analytique du courant « bootstrap » (chapitre 7).

Chapitre 6

Opérateur collision centre-guide

Dans ce chapitre est exposée plus en détail l'utilisation des transformées de Lie en vue d'obtenir un opérateur collision centre-guide indépendant de la dynamique de gyration des particules. L'opérateur local de départ est celui qui a été exprimé en termes de potentiels dans le chapitre 5 selon la méthode de Braams et Karney [10]. L'opérateur centre-guide ainsi obtenu est ensuite décomposé sur la base de coordonnées globales $\left(\overline{\psi}, \theta, p, \xi_0\right)$ déterminée dans le chapitre 2. Des expressions simplifiées sont obtenues dans l'approximation « orbites fines », où l'excursion radiale de l'orbite est faible devant la position de référence $\overline{\psi}$. Enfin, une comparaison est effectuée vis-à-vis des travaux de Brizard [12] correspondant à un opérateur local isotrope.

6.1 Coefficients de collision locaux anisotropes

En utilisant les formules du gradient de vitesse en coordonnées sphériques (voir appendice H), l'opérateur collision local (avec un fond indépendant de l'angle de gyration φ) calculé dans le chapitre 5 a une expression de la forme [1] :

$$C\left[f\right] \equiv -\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \cdot \left(\mathbf{K} f - \mathbb{D} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} \right), \tag{6.1}$$

où $\mathbf{K}$ désigne le vecteur de *convection* et $\mathbb{D}$ le tenseur de *diffusion* agissant sur la distribution f. Les coefficients de diffusion décomposés sur la base covariante $\left(\mathbf{e}_i\right)_i \equiv \left(\partial \mathbf{p}/\partial p^i\right)_i$ pour les coordonnées $p^j \equiv (p, \xi, \varphi)$,

$$\mathbf{K} = -\nu_l\left(\mathbf{x}, p, \xi\right) p \mathbf{e}_p - \nu_t\left(\mathbf{x}, p, \xi\right) \mathbf{e}_\xi, \tag{6.2}$$

$$\mathbb{D} = D_l\left(\mathbf{x}, p, \xi\right) \mathbf{e}_p \mathbf{e}_p + D_t\left(\mathbf{x}, p, \xi\right) \left(\mathbb{I} - \mathbf{e}_p \mathbf{e}_p\right) + D_\times\left(\mathbf{x}, p, \xi\right) \left(\mathbf{e}_p \mathbf{e}_\xi + \mathbf{e}_\xi \mathbf{e}_p\right). \tag{6.3}$$

Les expressions des coefficients de collision peuvent être déduites en fonction de la décomposition en polynômes de Legendre des potentiels. En tronquant la décomposition à la première harmonique (la raison est expliquée dans la section 5.3), on obtient des coefficients de la forme :

$$\mathbf{K} = -\left[\nu_l^{[0]}\left(\mathbf{x}, p\right) + \xi \nu_l^{[1]}\left(\mathbf{x}, p\right)\right] p \mathbf{e}_p - \left(1 - \xi^2\right) \nu_t^{[1]}\left(\mathbf{x}, p\right) \mathbf{e}_\xi, \tag{6.4}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{D} = &\left[D_l^{[0]}\left(\mathbf{x}, p\right) + \xi D_l^{[1]}\left(\mathbf{x}, p\right)\right] \mathbf{e}_p \mathbf{e}_p + \left[D_t^{[0]}\left(\mathbf{x}, p\right) + \xi D_t^{[1]}\left(\mathbf{x}, p\right)\right] \left(\mathbb{I} - \mathbf{e}_p \mathbf{e}_p\right) \\ &+ \frac{1 - \xi^2}{p} D_\times^{[1]}\left(\mathbf{x}, p\right) \left(\mathbf{e}_p \mathbf{e}_\xi + \mathbf{e}_\xi \mathbf{e}_p\right). \end{aligned} \tag{6.5}$$

Les contributions isotropes et anisotropes sont exprimées en fonction des coefficients de Legendre respectifs des potentiels en utilisant les définitions respectives résumées dans l'équation (5.68). Dans

1. Les indices s et s' sont omis par soucis de clarté.

le cas relativiste, cela donne avec quelques remaniements

$$\nu_l^{[0]} = -\frac{\Gamma_{ab}^K}{p}\gamma\left(\frac{\partial\Psi_1^{[0]}}{\partial u} - \frac{2}{c^2}\frac{\partial\Psi_2^{[0]}}{\partial u}\right) \tag{6.6}$$

$$D_l^{[0]} = \Gamma_{ab}^D\frac{\gamma}{u}\left(u\Psi_0^{[0]} - 2\gamma^2\frac{\partial\Psi_3^{[0]}}{\partial u} + \frac{8\gamma^2}{c^2}\frac{\partial\Psi_4^{[0]}}{\partial u} - \frac{8u}{c^4}\Psi_4^{[0]}\right) \tag{6.7}$$

$$D_t^{[0]} = \Gamma_{ab}^D\frac{\gamma}{u}\left(\frac{\partial\Psi_3^{[0]}}{\partial u} + \frac{u}{c^2}\Psi_3^{[0]} - \frac{4\gamma^2}{c^2}\frac{\partial\Psi_4^{[0]}}{\partial u} + \frac{4u}{c^4}\Psi_4^{[0]}\right) \tag{6.8}$$

pour la partie isotrope et

$$\nu_l^{[1]} = -\frac{\Gamma_{ab}^K}{p}\gamma\left(\frac{\partial\Psi_1^{[1]}}{\partial u} - \frac{2}{c^2}\frac{\partial\Psi_2^{[1]}}{\partial u}\right) \tag{6.9}$$

$$\nu_t^{[1]} = -\frac{\Gamma_{ab}^K}{p}\frac{1}{\gamma u}\left(\Psi_1^{[1]} - \frac{2}{c^2}\Psi_2^{[1]}\right) \tag{6.10}$$

$$D_l^{[1]} = \Gamma_{ab}^D\frac{\gamma}{u}\left(u\Psi_0^{[1]} - 2\gamma^2\frac{\partial\Psi_3^{[1]}}{\partial u} + \frac{2}{u}\Psi_3^{[1]} + \frac{8\gamma^2}{c^2}\frac{\partial\Psi_4^{[1]}}{\partial u} - \frac{8\gamma^2}{uc^2}\Psi_4^{[1]}\right) \tag{6.11}$$

$$D_t^{[1]} = \Gamma_{ab}^D\frac{\gamma}{u}\left(\frac{\partial\Psi_3^{[1]}}{\partial u} + \frac{1}{u}\left(\frac{u^2}{c^2} - \frac{1}{\gamma^2}\right)\Psi_3^{[1]} - \frac{4}{c^2}\frac{\partial\Psi_4^{[1]}}{\partial u} + \frac{4}{uc^2}\left(\frac{u^2}{c^2} + \frac{1}{\gamma^2}\right)\Psi_4^{[1]}\right) \tag{6.12}$$

$$D_\times^{[1]} = \Gamma_{ab}^D\frac{\gamma}{u}\left(\frac{\partial\Psi_3^{[1]}}{\partial u} - \frac{1}{u}\Psi_3^{[1]} - \frac{4}{c^2}\frac{\partial\Psi_4^{[1]}}{\partial u} + \frac{4}{uc^2}\Psi_4^{[1]}\right) \tag{6.13}$$

pour les premiers termes harmoniques. Dans la limite non relativiste, les équations (5.41) et (5.42) donnent des expressions en termes des coefficients de Legendre des potentiels de Rosenbluth :

$$\nu_l^{[0]} = -\frac{\Gamma_{ab}^K}{p}\frac{\partial H_b^{[0]}}{\partial v}, \tag{6.14}$$

$$D_l^{[0]} = \Gamma_{ab}^D\frac{\partial^2 G_b^{[0]}}{\partial v^2} \equiv \Gamma_{ab}^D\frac{1}{v}\left(vH_b^{[0]} - 2\frac{\partial G_b^{[0]}}{\partial v}\right), \tag{6.15}$$

$$D_t^{[0]} = \Gamma_{ab}^D\frac{1}{v}\frac{\partial G_b^{[0]}}{\partial v}, \tag{6.16}$$

et

$$\nu_l^{[1]} = -\frac{\Gamma_{ab}^K}{p}\frac{\partial H_b^{[1]}}{\partial v}, \tag{6.17}$$

$$\nu_t^{[1]} = -\frac{\Gamma_{ab}^K}{p}\frac{1}{v}H_b^{[1]}, \tag{6.18}$$

$$D_l^{[1]} = \Gamma_{ab}^D\left(\frac{\partial^2 G_b^{[1]}}{\partial v^2} + \frac{2}{v}G_b^{[1]}\right) \equiv \Gamma_{ab}^D\frac{1}{v}\left(vH_b^{[1]} - 2\frac{\partial G_b^{[1]}}{\partial v} + \frac{2}{v}G_b^{[1]}\right), \tag{6.19}$$

$$D_t^{[1]} = \Gamma_{ab}^D\frac{1}{v}\left(\frac{\partial G_b^{[1]}}{\partial v} - \frac{1}{v}G_b^{[1]}\right), \tag{6.20}$$

$$D_\times^{[1]} = \Gamma_{ab}^D\frac{1}{v}\left(\frac{\partial G_b^{[1]}}{\partial v} - \frac{1}{v}G_b^{[1]}\right). \tag{6.21}$$

Les dérivées secondes des équations (6.15) et (6.19) sont réduites en utilisant la relation (5.38). De cette manière, il est facile de voir la similitude avec les expressions relativistes en opérant la limite

$c \to \infty$, où $\Psi_0, \Psi_1 \to H_b$ et $\Psi_3 \to G_b$. Pour les applications numériques, il est utile d'exprimer les coefficients de façon intégrale à l'aide des équations (5.45)-(5.46) ou (5.68), selon les cas. Une telle adaptation a été effectuée dans le cas local par Shkarofsky et Shoucri [47], en utilisant les expressions de Braams et Karney [10].

6.2 Transformation centre-guide d'un opérateur local anisotrope

6.2.1 Dynamique centre-guide et transformation de l'opérateur collision

En utilisant le formalisme des transformées de Lie exposé dans le chapitre 3, l'opérateur collision centre-guide est déterminé à l'aide des transformations « push-forward » $\mathsf{T}_{\rm gc}^{-1}$ et « pull-back » $\mathsf{T}_{\rm gc}$:

$$C_{{\rm gc}ss'}\left[F_s, F_{s'}\right] = \mathsf{T}_{\rm gc}^{-1} C\left[\mathsf{T}_{\rm gc}F_s, \mathsf{T}'_{\rm gc}F_{s'}\right], \tag{6.22}$$

où les distributions centre-guide $F_s \equiv \mathsf{T}_{\rm gc}^{-1} f_s$ et $F_{s'} \equiv \mathsf{T}'^{-1}_{\rm gc} f_{s'}$ sont associées aux petits paramètres $\epsilon_{\rm B} \equiv \rho_{{\rm L}s}/L_{\rm B}$ et $\epsilon'_{\rm B} \equiv \rho_{{\rm L}s'}/L_{\rm B}$. Comme l'opérateur collision est bilinéaire, le traitement des distributions de particules test et de particules de fond peuvent être traitées séparément. Par conséquent, la distribution de fond est omise par la suite et l'opérateur transformé est exprimé sans indices s, s' sur la distribution $F_s \equiv F$:

$$C_{\rm gc}\left[F\right] = \mathsf{T}_{\rm gc}^{-1} C\left[\mathsf{T}_{\rm gc}F\right]. \tag{6.23}$$

Comme pour l'opérateur collision, l'opérateur de Liouville (3.47) subit la même transformation, donnant l'équation d'évolution

$$\frac{{\rm d}_{\rm gc}F}{{\rm d}t} = \mathsf{T}_{\rm gc}^{-1}\left(\frac{\rm d}{{\rm d}t}\mathsf{T}_{\rm gc}F\right) = \frac{\partial F}{\partial t} + \dot{\overline{z}}^{\alpha}\frac{\partial F}{\partial \overline{z}^{\alpha}} = \mathsf{T}_{\rm gc}^{-1} C\left[\mathsf{T}_{\rm gc}F\right] = C_{\rm gc}\left[F\right]. \tag{6.24}$$

Les équations d'évolution (3.48) de type $\dot{\overline{z}}^{\alpha} = \{\overline{z}^{\alpha}, H\}_{\rm gc}$ ont été construites afin d'être indépendants de l'angle rapide de gyration $\overline{\varphi}$; l'opérateur ${\rm d}_{\rm gc}/{\rm d}t$ est donc lui aussi indépendant de $\overline{\varphi}$. La distribution F est ainsi séparée [12] en une contribution moyennée $\langle F\rangle_{\rm gc}$, où $\langle\dots\rangle_{\rm gc} \equiv (2\pi)^{-1}\int {\rm d}\overline{\varphi}\,(\dots)$ désigne la gyro-moyenne, et une contribution fluctuante $\widetilde{F} \equiv F - \langle F\rangle_{\rm gc}$ explicitement dépendante de $\overline{\varphi}$. En notant $\overline{z}_{\rm R}$ le système de coordonnées réduit (sans l'angle de gyration $\overline{\varphi}$) et ${\rm d}_{\rm R}/{\rm d}t$ l'opérateur de Liouville centre-guide associé, l'équation (6.24) donne deux équations couplées

$$\frac{{\rm d}_{\rm R}}{{\rm d}t}\langle F\rangle_{\rm gc} = \langle C_{\rm gc}\left[F\right]\rangle_{\rm gc} = \left\langle C_{\rm gc}\left[\langle F\rangle_{\rm gc}\right]\right\rangle_{\rm gc} + \left\langle C_{\rm gc}\left[\widetilde{F}\right]\right\rangle_{\rm gc}, \tag{6.25}$$

$$\left(\dot{\overline{\varphi}}\frac{\partial}{\partial\varphi} + \frac{{\rm d}_{\rm R}}{{\rm d}t}\right)\widetilde{F} = C_{\rm gc}\left[F\right] - \langle C_{\rm gc}\left[F\right]\rangle_{\rm gc}, \tag{6.26}$$

où la première équation procède de la moyenne de l'équation (6.24) et la seconde est obtenue en effectuant une soustraction de (6.24) avec l'équation moyennée. Afin d'obtenir une dynamique réduite dépendant uniquement de la distribution centre-guide moyennée $\langle F\rangle_{\rm gc}$, il faut résoudre l'équation (6.26) en termes de $\langle F\rangle_{\rm gc}$ et remplacer $\widetilde{F}$ dans (6.25). Une manière d'accomplir ceci est de décomposer F en série de Fourier en $\overline{\varphi}$, comme indiqué dans la référence [12]. Ainsi,

$$F = \langle F\rangle_{\rm gc} + \sum_{m=-\infty, m\neq 0}^{m=\infty} \widetilde{F}_m e^{im\overline{\varphi}}, \tag{6.27}$$

et les équations (6.25) et (6.26) deviennent :

$$\frac{{\rm d}_{\rm R}}{{\rm d}t}\langle F\rangle_{\rm gc} = C_0^0\left[\langle F\rangle_{\rm gc}\right] + \sum_{m\neq 0} C_0^m\left[\widetilde{F}_m\right], \tag{6.28}$$

$$\left(im\dot{\overline{\varphi}} + \frac{{\rm d}_{\rm R}}{{\rm d}t}\right)\widetilde{F}_m = C_m^0\left[\langle F\rangle_{\rm gc}\right] + \sum_{k\neq 0} C_m^k\left[\widetilde{F}_k\right], \tag{6.29}$$

où on a défini les opérateurs

$$C_m^k\left[G\right] = \left\langle e^{-im\overline{\varphi}} C_{\rm gc}\left[G e^{ik\overline{\varphi}}\right]\right\rangle. \tag{6.30}$$

En introduisant le petit paramètre $\epsilon_\nu = \nu/\Omega$ correspondant au rapport entre échelles de temps collisionnelles ν et échelle de temps de gyration Ω, la solution au premier ordre en admettant que $C_m^0\left[\langle F\rangle_{\rm gc}\right] \neq 0$ de l'équation (6.29) est $\widetilde{F}_m = \left(im\dot{\overline{\varphi}}\right)^{-1} C_m^0\left[\langle F\rangle_{\rm gc}\right]$. En introduisant celle-ci dans l'équation (6.28), l'évolution réduite de la distribution devient

$$\frac{\mathrm{d_R}}{\mathrm{d}t}\langle F\rangle_{\rm gc} = C_0^0\left[\langle F\rangle_{\rm gc}\right] - i\epsilon_\nu \sum_{m\neq 0} C_0^m\left[\frac{1}{m\Omega} C_m^0\left[\langle F\rangle_{\rm gc}\right]\right] + \mathcal{O}\left(\epsilon_{\rm B}\epsilon_\nu, \epsilon_\nu^2\right), \tag{6.31}$$

en notant que $\dot{\overline{\varphi}} = \Omega + \mathcal{O}\left(\epsilon_{\rm B}\right)$. Celle-ci implique donc les deux paramètres $\epsilon_{\rm B} = \rho_{\rm L}/L_{\rm B}$ et $\epsilon_\nu = \nu/\Omega = \rho_{\rm L}/\lambda_\nu$ en introduisant le libre parcours moyen λ_ν. Dans le régime néoclassique [23], $\lambda_\nu \geq L_{\rm B}$. Le rapport $\epsilon_{\rm B}/\epsilon_\nu$ est donc plus grand que 1 et le centre-guide subit pleinement la non-uniformité du champ magnétique entre deux collisions. L'ordre zéro en ϵ_ν de l'équation (6.31) est donc suffisant dans la pratique pour observer l'évolution de la distribution moyennée. L'équation réduite devient donc, en remplaçant $C_0^0\left[\langle F\rangle_{\rm gc}\right] = \left\langle C_{\rm gc}\left[\langle F\rangle_{\rm gc}\right]\right\rangle_{\rm gc}$ défini dans l'équation (6.30) :

$$\frac{\mathrm{d_R}}{\mathrm{d}t}\langle F\rangle_{\rm gc} = \left\langle C_{\rm gc}\left[\langle F\rangle_{\rm gc}\right]\right\rangle_{\rm gc}. \tag{6.32}$$

6.2.2 Opérateur centre-guide moyenné

En notant $F_{\rm gc} = \langle F\rangle_{\rm gc}$, l'opérateur collision centre-guide utilisé est donc sous forme de moyenne sur φ,

$$C_{\rm gc}\left[F_{\rm gc}\right] = \left\langle \mathsf{T}_{\rm gc}^{-1} C\left[\mathsf{T}_{\rm gc} F_{\rm gc}\right]\right\rangle_{\rm gc}. \tag{6.33}$$

L'opérateur local est ensuite formulé en termes de crochets de Poisson

$$C\left[f\right] = -\left\{x^i, K^i f - D^{ij}\left\{x^j, f\right\}\right\}, \tag{6.34}$$

en utilisant les relations dans les coordonnées $z^\alpha \equiv (\mathbf{x}, \mathbf{p})$, de Jacobien $\mathcal{J}$:

$$\left\{F, G\right\} = \frac{\partial F}{\partial z^\alpha}\left\{z^\alpha, G\right\} = -\frac{1}{\mathcal{J}}\frac{\partial}{\partial z^\alpha}\left(\mathcal{J} F\left\{z^\alpha, G\right\}\right), \tag{6.35}$$

La dernière expression provient de la conservation du volume de l'espace des phases [12],

$$\frac{\partial}{\partial z^\alpha}\left(\mathcal{J}\left\{z^\alpha, z^\beta\right\}\right) = 0, \tag{6.36}$$

et l'antisymétrie du crochet de Poisson donne

$$\frac{\partial}{\partial z^\alpha}\left\{z^\alpha, G\right\} = \frac{\partial^2 G}{\partial z^\alpha \partial z^\beta}\left\{z^\alpha, z^\beta\right\} = 0. \tag{6.37}$$

Le crochet de Poisson local est exprimé dans l'équation (3.46). L'opérateur centre-guide est exprimé de son côté en utilisant la position de la particule en coordonnées centre-guide $\mathbf{X}_{\rm gc} \equiv \mathsf{T}_{\rm gc}^{-1}\mathbf{x} \equiv \overline{\mathbf{x}} + \boldsymbol{\rho}_{\rm gc}$, la fonction de distribution centre-guide $F \equiv \mathsf{T}_{\rm gc}^{-1} f$ et le crochet de Poisson centre-guide $\{\,,\,\}_{\rm gc} \equiv \mathsf{T}_{\rm gc}^{-1}\{\,,\,\}$:

$$\begin{aligned}\mathsf{T}_{\rm gc}^{-1} C\left[\mathsf{T}_{\rm gc} F\right] &= -\left\{X_{\rm gc}^i, K_{\rm gc}^i F - D_{\rm gc}^{ij}\left\{X_{\rm gc}^j, F\right\}_{\rm gc}\right\}_{\rm gc} \\ &= -\frac{1}{\mathcal{J}_{\rm gc}}\frac{\partial}{\partial \overline{z}^\alpha}\left[\mathcal{J}_{\rm gc}\left(\left\{X_{\rm gc}^i, \overline{z}^\alpha\right\}_{\rm gc} K_{\rm gc}^i F - \left\{X_{\rm gc}^i, \overline{z}^\alpha\right\}_{\rm gc} D_{\rm gc}^{ij}\left\{X_{\rm gc}^j, \overline{z}^\beta\right\}_{\rm gc}\frac{\partial F}{\partial \overline{z}^\beta}\right)\right],\end{aligned} \tag{6.38}$$

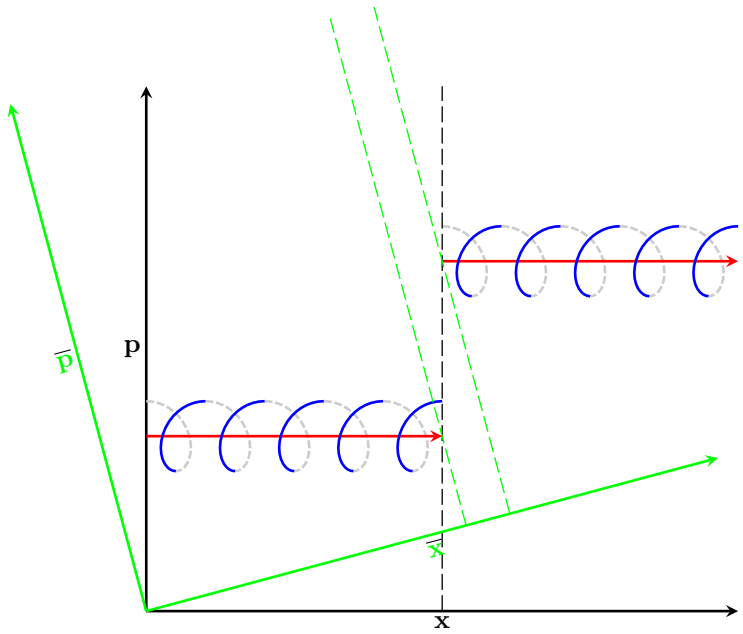


FIGURE 6.1 – Schéma d'une collision affectant une particule en gyration. Dans l'espace réel (repère noir), l'événement de collision affectant la trajectoire (bleu) est localisé en une position spatiale. Dans l'espace centre-guide (repère vert), la trajectoire de gyration est remplacée par celle d'un centre-guide (rouge). Dans ce repère, la collision devient un événement non local, dépendant de tout l'espace des phases.

où les coefficients de l'opérateur de collision ont été transformés de la même manière,

$$K^i_{\rm gc} = \mathsf{T}^{-1}_{\rm gc} K^i, \tag{6.39}$$

$$D^{ij}_{\rm gc} = \mathsf{T}^{-1}_{\rm gc} D^{ij}. \tag{6.40}$$

et $\mathcal{J}_{\rm gc}$ désigne le jacobien du système de coordonnées centre-guide exprimé dans le chapitre 3. On note que l'évolution due aux collisions n'est plus localisée sur une position spatiale comme c'était le cas pour l'opérateur local : l'équation (6.38) possède une divergence sur tout l'espace des phases et plus seulement sur l'espace des vitesses (voir figure 6.1 et à comparer avec l'équation (6.1)).

Il est aussi à noter que le système de coordonnées centre-guide $\left(\overline{z}^\alpha\right)_\alpha$ est déterminé arbitrairement à l'aide des vecteurs de projection $\mathbf{\Delta}^\alpha_{\rm gc} = \{\mathbf{X}_{\rm gc}, \overline{z}^\alpha\}_{\rm gc}$; il peut donc être choisi librement en fonction de la configuration magnétique. L'opérateur collision centre-guide moyenné (6.33) devient :

$$C_{\rm gc}\left[F_{\rm gc}\right] = -\frac{1}{\mathcal{J}_{\rm gc}}\frac{\partial}{\partial \overline{z}^\alpha}\left[\mathcal{J}_{\rm gc}\left(\mathcal{K}^\alpha_{\rm gc} F_{\rm gc} - \mathcal{D}^{\alpha\beta}_{\rm gc}\frac{\partial F_{\rm gc}}{\partial \overline{z}^\beta}\right)\right],$$

Les coefficients sont exprimés en fonction des projections de la position sur ces coordonnées, $\mathbf{\Delta}^\alpha_{\rm gc} = \{\mathbf{X}_{\rm gc}, \overline{z}^\alpha\}_{\rm gc}$:

$$\mathcal{K}^\alpha_{\rm gc} \equiv \left\langle \mathsf{T}^{-1}_{\rm gc}\mathbf{K}\cdot\mathbf{\Delta}^\alpha_{\rm gc}\right\rangle_{\rm gc}, \tag{6.41}$$

$$\mathcal{D}^{\alpha\beta}_{\rm gc} \equiv \left\langle \mathbf{\Delta}^\alpha_{\rm gc}\cdot\mathsf{T}^{-1}_{\rm gc}\mathbb{D}\cdot\mathbf{\Delta}^\beta_{\rm gc}\right\rangle_{\rm gc}. \tag{6.42}$$

Afin d'évaluer ces moyennes, les coefficients transformés $\mathsf{T}^{-1}_{\rm gc}\mathbf{K}$ et $\mathsf{T}^{-1}_{\rm gc}\mathbb{D}$ sont calculés à partir des équations 6.2 et 6.3 sur la base covariante exprimée en coordonnées centre-guide,

$$\left(\mathsf{T}^{-1}_{\rm gc}\mathbf{e}_p, \mathsf{T}^{-1}_{\rm gc}\mathbf{e}_\xi, \mathsf{T}^{-1}_{\rm gc}\mathbf{e}_\varphi\right) \equiv \left(\mathbf{e}_{p{\rm gc}}, \mathbf{e}_{\xi{\rm gc}}, \mathbf{e}_{\varphi{\rm gc}}\right), \tag{6.43}$$

telle que $\mathbf{e}_\alpha(z^\alpha) = \mathbf{e}_{\alpha\mathrm{gc}}(\overline{z}^\alpha)$. En omettant les barres coorrespondant aux quantités centre-guide pour alléger les notations, les vecteurs transformés sont [2], à l'ordre 1 en ϵ_B :

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_{p\mathrm{gc}} =&\mathbf{e}_p + \frac{p\left(1-\xi^2\right)}{2m\Omega}\widehat{\mathbf{b}}\times\left(\nabla\ln B + \frac{2\xi^2}{1-\xi^2}\widehat{\mathbf{b}}\cdot\nabla\widehat{\mathbf{b}}\right)\\ &+\frac{m\Omega}{p}\left[\frac{p\xi}{m\Omega}\widehat{\mathbf{b}}\cdot\nabla\widehat{\mathbf{b}}\cdot\boldsymbol{\rho}_0 + \frac{p^2\left(1-\xi^2\right)}{2m^2\Omega^2}\mathbb{A}_1 : \nabla\widehat{\mathbf{b}}\right]\widehat{\mathbf{b}}\\ &+\frac{m\Omega}{p}\left[\frac{1}{2}\boldsymbol{\rho}_0\cdot\nabla\ln B - \frac{p\xi}{2m\Omega}\mathbb{A}_1 : \nabla\widehat{\mathbf{b}}\right]\frac{\partial\boldsymbol{\rho}_0}{\partial\varphi}\\ &+\frac{m\Omega}{p}\left[\frac{1}{2}\frac{\partial\boldsymbol{\rho}_0}{\partial\varphi}\cdot\nabla\ln B - \frac{p\xi}{m\Omega}\mathbb{A}_2 : \nabla\widehat{\mathbf{b}} - \frac{p\xi}{2m\Omega}\widehat{\mathbf{b}}\cdot\nabla\ln B\right]\boldsymbol{\rho}_0,\end{aligned} \tag{6.44}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_{\xi\mathrm{gc}} =&\mathbf{e}_\xi - \frac{p^2\xi}{2m\Omega}\left[\widehat{\mathbf{b}}\times\left(\nabla\ln B - \widehat{\mathbf{b}}\cdot\nabla\widehat{\mathbf{b}}\right) + \left(\widehat{\mathbf{b}}\cdot\nabla\times\widehat{\mathbf{b}}\right)\widehat{\mathbf{b}}\right]\\ &-\frac{p^2\xi}{m\Omega}\left[\mathbb{A}_1 : \nabla\widehat{\mathbf{b}}\right]\widehat{\mathbf{b}}\\ &-\frac{m\Omega\xi}{1-\xi^2}\left[\frac{1}{2}\boldsymbol{\rho}_0\cdot\nabla\ln B + \frac{1}{2}\frac{1+\xi^2}{1-\xi^2}\widehat{\mathbf{b}}\cdot\nabla\widehat{\mathbf{b}}\cdot\boldsymbol{\rho}_0 - \frac{p\left(2\xi^2-1\right)}{2m\Omega\xi}\mathbb{A}_1 : \nabla\widehat{\mathbf{b}} - \frac{p\xi}{2m\Omega}\widehat{\mathbf{b}}\cdot\nabla\times\widehat{\mathbf{b}}\right]\frac{\partial\boldsymbol{\rho}_0}{\partial\varphi}\\ &-\frac{m\Omega\xi}{1-\xi^2}\left[\frac{1}{2}\frac{\partial\boldsymbol{\rho}_0}{\partial\varphi}\cdot\nabla\ln B + \frac{1}{2}\frac{1+\xi^2}{1-\xi^2}\widehat{\mathbf{b}}\cdot\nabla\widehat{\mathbf{b}}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\rho}_0}{\partial\varphi}\right.\\ &\left.-\frac{p\left(\xi^2-2\right)}{m\Omega\xi}\mathbb{A}_2 : \nabla\widehat{\mathbf{b}} + \frac{p\left(1-\xi^2\right)}{2m\Omega}\widehat{\mathbf{b}}\cdot\nabla\ln B\right]\boldsymbol{\rho}_0.\end{aligned} \tag{6.45}$$

On remarque que l'expression de $\mathsf{T}_\mathrm{gc}^{-1}\mathbf{p} = p\mathbf{e}_{p\mathrm{gc}}$ correspond bien à celle du vecteur $\mathbf{p}_\epsilon$ de la référence [12]. De plus, en effectuant la moyenne $\left\langle\mathsf{T}_\mathrm{gc}^{-1}\mathbf{p}\right\rangle_\mathrm{gc}$,

$$\left\langle\mathsf{T}_\mathrm{gc}^{-1}\mathbf{p}\right\rangle_\mathrm{gc} = p\xi\widehat{\mathbf{b}} + \frac{p}{m\Omega}\widehat{\mathbf{b}}\times\left(\frac{1-\xi^2}{2}\nabla\ln B + \xi^2\widehat{\mathbf{b}}\cdot\nabla\widehat{\mathbf{b}}\right) \equiv \mathbf{p}_\mathrm{gc}, \tag{6.46}$$

qui est l'impulsion centre-guide moyennée présente dans les équations de mouvement (3.88)-(3.91) et en utilisant les notations de [12], $\mathbf{p}_\mathrm{gc} = m\mathbf{v}_\mathrm{gc}$. Il est aussi facile de calculer

$$\left(\mathsf{T}_\mathrm{gc}^{-1}\mathbf{p}\right)^2 = p^2 + \mathcal{O}\left(\epsilon_\mathrm{B}^2\right). \tag{6.47}$$

Enfin, comme la base $(\mathbf{e}_{p\mathrm{gc}}, \mathbf{e}_{\xi\mathrm{gc}}, \mathbf{e}_{\varphi\mathrm{gc}})$ doit rester orthogonale [3], on vérifie à partir des expressions :

$$\mathbf{e}_{p\mathrm{gc}}\cdot\mathbf{e}_{\xi\mathrm{gc}} = \mathcal{O}\left(\epsilon_\mathrm{B}^2\right). \tag{6.48}$$

Les composantes K_gc^i et D_gc^{ij} deviennent

$$\nu_{l\mathrm{gc}}(\overline{\mathbf{z}}) \equiv \mathsf{T}_\mathrm{gc}^{-1}\nu_l = \nu_l(\overline{\mathbf{z}}) - \epsilon_\mathrm{B}G_1^\alpha\frac{\partial\nu_l}{\partial z^\alpha} + \ldots, \tag{6.49}$$

$$\nu_{t\mathrm{gc}}(\overline{\mathbf{z}}) \equiv \mathsf{T}_\mathrm{gc}^{-1}\nu_t = \nu_t(\overline{\mathbf{z}}) - \epsilon_\mathrm{B}G_1^\alpha\frac{\partial\nu_t}{\partial z^\alpha} + \ldots, \tag{6.50}$$

$$D_{l\mathrm{gc}}(\overline{\mathbf{z}}) \equiv \mathsf{T}_\mathrm{gc}^{-1}D_l = D_l(\overline{\mathbf{z}}) - \epsilon_\mathrm{B}G_1^\alpha\frac{\partial D_l}{\partial z^\alpha} + \ldots, \tag{6.51}$$

$$D_{t\mathrm{gc}}(\overline{\mathbf{z}}) \equiv \mathsf{T}_\mathrm{gc}^{-1}D_t = D_t(\overline{\mathbf{z}}) - \epsilon_\mathrm{B}G_1^\alpha\frac{\partial D_t}{\partial z^\alpha} + \ldots, \tag{6.52}$$

$$D_{\times\mathrm{gc}}(\overline{\mathbf{z}}) \equiv \mathsf{T}_\mathrm{gc}^{-1}D_\times = D_\times(\overline{\mathbf{z}}) - \epsilon_\mathrm{B}G_1^\alpha\frac{\partial D_\times}{\partial z^\alpha} + \ldots. \tag{6.53}$$

2. $\mathbf{e}_{\varphi\mathrm{gc}}$ n'est pas requis pour la suite, son expression est donnée dans l'appendice E.
3. Les vecteurs sont simplement exprimés en coordonnées centre-guide, leur orientation ne change pas.

Le vecteur friction $\mathsf{T}_{\rm gc}^{-1}\mathbf{K}$ et le tenseur diffusion $\mathsf{T}_{\rm gc}^{-1}\mathbb{D}$ ont donc l'expression suivante en coordonnées centre-guide,

$$\mathbf{K}_{\rm gc} = -\nu_{l{\rm gc}} p \mathbf{e}_{p{\rm gc}} - \nu_{t{\rm gc}} \mathbf{e}_{\xi{\rm gc}}, \tag{6.54}$$

$$\mathbb{D}_{\rm gc} = D_{l{\rm gc}} \mathbf{e}_{p{\rm gc}} \mathbf{e}_{p{\rm gc}} + D_{t{\rm gc}} \left(\mathbb{I} - \mathbf{e}_{p{\rm gc}} \mathbf{e}_{p{\rm gc}}\right) + D_{\times{\rm gc}} \left(\mathbf{e}_{p{\rm gc}} \mathbf{e}_{\xi{\rm gc}} + \mathbf{e}_{\xi{\rm gc}} \mathbf{e}_{p{\rm gc}}\right). \tag{6.55}$$

6.3 Coordonnées globales $\left(\overline{\psi}, \theta, p, \xi_0\right)$ et vecteurs de projection

En utilisant le crochet de Poisson centre-guide (3.87), les vecteurs de projection $\mathbf{\Delta}_{\rm gc}^{\alpha}$ deviennent, en coordonnées centre-guide [4] $(\mathbf{x}, p, \xi)$:

$$\mathbf{\Delta}_{\rm gc}^{\mathbf{x}} = \frac{\widehat{\mathbf{b}}}{m\Omega} \times \mathbb{I} + \mathcal{O}\left(\epsilon_{\rm B}^2\right), \tag{6.56}$$

$$\mathbf{\Delta}_{\rm gc}^{p} = \mathbf{e}_{p{\rm gc}} + \mathcal{O}\left(\epsilon_{\rm B}^2\right), \tag{6.57}$$

$$\mathbf{\Delta}_{\rm gc}^{\xi} = \frac{1-\xi^2}{p\xi}\left(\mathbf{e}_{p{\rm gc}} - \frac{m\Omega}{p\left(1-\xi^2\right)} \frac{\partial \boldsymbol{\rho}_{\rm gc}}{\partial \varphi}\right) + \mathcal{O}\left(\epsilon_{\rm B}^2\right). \tag{6.58}$$

Les vecteurs de projection $\mathbf{\Delta}^a \equiv \left\{\mathbf{X}_{\rm gc}, I^a\right\}_{\rm gc}$ pour les coordonnées globales $I^a \equiv \left(\overline{\psi}, \theta, p, \xi_0\right)$ sont déduites en utilisant des dérivées chaînées,

$$\mathbf{\Delta}^{I^a} = \mathbf{\Delta}_{\rm gc}^{\mathbf{x}} \cdot \nabla I^a + \mathbf{\Delta}_{\rm gc}^{p} \frac{\partial I^a}{\partial p} + \mathbf{\Delta}_{\rm gc}^{\xi} \frac{\partial I^a}{\partial \xi}. \tag{6.59}$$

Ainsi,

$$\mathbf{\Delta}^{\overline{\psi}} = \frac{\delta\psi}{p\xi^2}\left(\frac{m\Omega}{p} \frac{\partial \boldsymbol{\rho}_{\rm gc}}{\partial \varphi} - \mathbf{e}_{p{\rm gc}}\right) + \frac{\widehat{\mathbf{b}}}{m\Omega} \times \nabla\overline{\psi} + \mathcal{O}\left(\epsilon_{\rm B}^2\right), \tag{6.60}$$

$$\mathbf{\Delta}^{\theta} = \frac{\widehat{\mathbf{b}}}{m\Omega} \times \nabla\theta + \mathcal{O}\left(\epsilon_{\rm B}^2\right), \tag{6.61}$$

$$\mathbf{\Delta}^{p} = \mathbf{e}_{p{\rm gc}} + \mathcal{O}\left(\epsilon_{\rm B}^2\right), \tag{6.62}$$

$$\mathbf{\Delta}^{\xi_0} = \frac{1-\xi_0^2}{2\xi_0}\left[\frac{2}{p}\left(\mathbf{e}_{p{\rm gc}} - \frac{m\Omega}{p\left(1-\xi^2\right)} \frac{\partial \boldsymbol{\rho}_{\rm gc}}{\partial \varphi}\right) - \mathbf{\Delta}^{\overline{\psi}} \frac{{\rm d}\ln B_0}{{\rm d}\overline{\psi}}\right] + \mathcal{O}\left(\epsilon_{\rm B}^2\right). \tag{6.63}$$

Ceci fournit une autre approche de calcul des vecteurs de projection de la référence [15] qui sont calculés en utilisant les expressions en coordonnées d'énergie [12] $(\mathbf{x}, \mathcal{E}, \mu)$. On note qu'à l'ordre zéro en $\epsilon_{\rm B}$,

$$\mathbf{\Delta}_0^{\overline{\psi}} = -\frac{\delta\psi}{p\xi}\widehat{\mathbf{b}}, \tag{6.64}$$

$$\mathbf{\Delta}_0^{\theta} = 0, \tag{6.65}$$

$$\mathbf{\Delta}_0^{p} = \mathbf{e}_p, \tag{6.66}$$

$$\mathbf{\Delta}_0^{\xi_0} = \frac{1-\xi_0^2}{2\xi_0}\left[\frac{2\xi}{p^2}\mathbf{e}_{\xi} + \frac{\overline{\delta\psi}}{p\xi}\widehat{\mathbf{b}}\right]. \tag{6.67}$$

où $\overline{\delta\psi} = \delta\psi\left({\rm d}\ln B_0/{\rm d}\overline{\psi}\right)$. Les produits scalaires $\mathbf{\Delta}_0^{I^a} \cdot \mathbf{e}_{\alpha}$ où $\mathbf{e}_{\alpha} \in (\mathbf{e}_p, \mathbf{e}_{\xi}, \mathbf{e}_{\varphi})$ sont donc indépendants de l'angle de gyration φ. De même, les produits $\left(\mathbf{\Delta}_0^{I^a}\right)^2$ sont aussi indépendants de φ. Enfin, comme $\mathbf{e}_{p{\rm gc}} = \xi\widehat{\mathbf{b}} + \mathcal{O}\left(\epsilon_{\rm B}\right)$ et $\mathbf{e}_{\xi{\rm gc}} = p\widehat{\mathbf{b}} + \mathcal{O}\left(\epsilon_{\rm B}\right)$, on en déduit

$$\mathbf{\Delta}^{\theta} \cdot \mathbf{e}_{p{\rm gc}} = \mathcal{O}\left(\epsilon_{\rm B}^2\right), \tag{6.68}$$

$$\mathbf{\Delta}^{\theta} \cdot \mathbf{e}_{\xi{\rm gc}} = \mathcal{O}\left(\epsilon_{\rm B}^2\right). \tag{6.69}$$

Ceci implique que les composantes en θ des coefficients centre-guide ($\mathcal{K}_{\rm gc}^{\theta}$, $\mathcal{D}_{\rm gc}^{\theta\theta}$, $\mathcal{D}_{\rm gc}^{\theta\overline{\psi}}$, $\mathcal{D}_{\rm gc}^{\theta p}$, $\mathcal{D}_{\rm gc}^{\theta\xi_0}$ et leurs coefficients symétriques) sont d'ordre $\epsilon_{\rm B}^2$. Celles-ci sont donc ignorées par la suite.

4. La projection sur l'angle de gyration φ n'est pas nécessaire pour évaluer l'opérateur centre-guide moyenné. Voir section 6.2.2.

6.4 Calcul des coefficients centre-guide

En insérant les expressions (6.54) et (6.55), les coefficients centre-guide décomposés sur les coordonnées globales $I^{a,b} \equiv \left(\overline{\psi}, p, \xi_0\right)$ ont pour forme :

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}^a_{gc} =& -\nu_l p \left\langle \mathbf{e}_{p\mathrm{gc}} \cdot \mathbf{\Delta}^a \right\rangle_{\mathrm{gc}} - \nu_t \left\langle \mathbf{e}_{\xi\mathrm{gc}} \cdot \mathbf{\Delta}^a \right\rangle_{\mathrm{gc}} \\
&+ p \left(\mathbf{e}_p \cdot \mathbf{\Delta}^a_0\right) \left\langle G^\alpha_1 \right\rangle_{\mathrm{gc}} \frac{\partial \nu_l}{\partial z^\alpha} + \left(\mathbf{e}_\xi \cdot \mathbf{\Delta}^a_0\right) \left\langle G^\alpha_1 \right\rangle_{\mathrm{gc}} \frac{\partial \nu_t}{\partial z^\alpha} + \mathcal{O}\left(\epsilon_{\mathrm{B}}^2\right), \qquad (6.70) \\
\mathcal{D}^{ab}_{gc} =& \left(D_l - D_t\right) \left\langle \left(\mathbf{e}_{p\mathrm{gc}} \cdot \mathbf{\Delta}^a\right) \left(\mathbf{e}_{p\mathrm{gc}} \cdot \mathbf{\Delta}^b\right) \right\rangle_{\mathrm{gc}} + D_t \left\langle \mathbf{\Delta}^a \cdot \mathbf{\Delta}^b \right\rangle_{\mathrm{gc}} \\
&+ \frac{D_\times}{p} \left(\left\langle \left(\mathbf{e}_{p\mathrm{gc}} \cdot \mathbf{\Delta}^a\right) \left(\mathbf{e}_{\xi\mathrm{gc}} \cdot \mathbf{\Delta}^b\right) \right\rangle_{\mathrm{gc}} + \left\langle \left(\mathbf{e}_{p\mathrm{gc}} \cdot \mathbf{\Delta}^b\right) \left(\mathbf{e}_{\xi\mathrm{gc}} \cdot \mathbf{\Delta}^a\right) \right\rangle_{\mathrm{gc}} \right) \\
&- \left(\mathbf{e}_p \cdot \mathbf{\Delta}^a_0\right) \left(\mathbf{e}_p \cdot \mathbf{\Delta}^b_0\right) \left\langle G^\alpha_1 \right\rangle_{\mathrm{gc}} \frac{\partial}{\partial z^\alpha} \left(D_l - D_t\right) \\
&- \left(\mathbf{\Delta}^a_0 \cdot \mathbf{\Delta}^b_0\right) \left\langle G^\alpha_1 \right\rangle_{\mathrm{gc}} \frac{\partial D_t}{\partial z^\alpha} \\
&- \frac{1}{p} \left[\left(\mathbf{e}_\xi \cdot \mathbf{\Delta}^a_0\right) \left(\mathbf{e}_p \cdot \mathbf{\Delta}^b_0\right) + \left(\mathbf{e}_\xi \cdot \mathbf{\Delta}^b_0\right) \left(\mathbf{e}_p \cdot \mathbf{\Delta}^a_0\right) \right] \left\langle G^\alpha_1 \right\rangle_{\mathrm{gc}} \frac{\partial D_\times}{\partial z^\alpha} + \mathcal{O}\left(\epsilon_{\mathrm{B}}^2\right), \qquad (6.71)
\end{aligned}$$

où $z^\alpha \equiv (\mathbf{x}, p, \xi)$. Puisque selon les équations (3.74)-(3.77), $\left\langle G^\alpha_1 \right\rangle_{\mathrm{gc}} = 0$ sauf pour G^ξ_1, on déduit les expressions suivantes,

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}^a_{gc} =& -\nu_l p \left\langle \mathbf{e}_{p\mathrm{gc}} \cdot \mathbf{\Delta}^a \right\rangle_{\mathrm{gc}} - \nu_t \left\langle \mathbf{e}_{\xi\mathrm{gc}} \cdot \mathbf{\Delta}^a \right\rangle_{\mathrm{gc}} \\
&+ p \left(\mathbf{e}_p \cdot \mathbf{\Delta}^a_0\right) \left\langle G^\alpha_1 \right\rangle_{\mathrm{gc}} \frac{\partial \nu_l}{\partial \xi} + \left(\mathbf{e}_\xi \cdot \mathbf{\Delta}^a_0\right) \left\langle G^\xi_1 \right\rangle_{\mathrm{gc}} \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi} + \mathcal{O}\left(\epsilon_{\mathrm{B}}^2\right), \qquad (6.72) \\
\mathcal{D}^{ab}_{gc} =& \left(D_l - D_t\right) \left\langle \left(\mathbf{e}_{p\mathrm{gc}} \cdot \mathbf{\Delta}^a\right) \left(\mathbf{e}_{p\mathrm{gc}} \cdot \mathbf{\Delta}^b\right) \right\rangle_{\mathrm{gc}} + D_t \left\langle \mathbf{\Delta}^a \cdot \mathbf{\Delta}^b \right\rangle_{\mathrm{gc}} \\
&+ \frac{D_\times}{p} \left(\left\langle \left(\mathbf{e}_{p\mathrm{gc}} \cdot \mathbf{\Delta}^a\right) \left(\mathbf{e}_{\xi\mathrm{gc}} \cdot \mathbf{\Delta}^b\right) \right\rangle_{\mathrm{gc}} + \left\langle \left(\mathbf{e}_{p\mathrm{gc}} \cdot \mathbf{\Delta}^b\right) \left(\mathbf{e}_{\xi\mathrm{gc}} \cdot \mathbf{\Delta}^a\right) \right\rangle_{\mathrm{gc}} \right) \\
&- \left(\mathbf{e}_p \cdot \mathbf{\Delta}^a_0\right) \left(\mathbf{e}_p \cdot \mathbf{\Delta}^b_0\right) \left\langle G^\xi_1 \right\rangle_{\mathrm{gc}} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(D_l - D_t\right) \\
&- \left(\mathbf{\Delta}^a_0 \cdot \mathbf{\Delta}^b_0\right) \left\langle G^\xi_1 \right\rangle_{\mathrm{gc}} \frac{\partial D_t}{\partial \xi} \\
&- \frac{1}{p} \left[\left(\mathbf{e}_\xi \cdot \mathbf{\Delta}^a_0\right) \left(\mathbf{e}_p \cdot \mathbf{\Delta}^b_0\right) + \left(\mathbf{e}_\xi \cdot \mathbf{\Delta}^b_0\right) \left(\mathbf{e}_p \cdot \mathbf{\Delta}^a_0\right) \right] \left\langle G^\alpha_1 \right\rangle_{\mathrm{gc}} \frac{\partial D_\times}{\partial z^\alpha} + \mathcal{O}\left(\epsilon_{\mathrm{B}}^2\right), \qquad (6.73)
\end{aligned}$$

avec

$$\left\langle G^\xi_1 \right\rangle_{\mathrm{gc}} = \frac{p\left(1-\xi^2\right)}{2m\Omega} \widehat{\mathbf{b}} \cdot \nabla \times \widehat{\mathbf{b}} \equiv \frac{1-\xi^2}{2\xi} \lambda_{\mathrm{gc}}, \qquad (6.74)$$

en utilisant la notation [12] $\lambda_{\mathrm{gc}} \equiv (p\xi/m\Omega)\, \widehat{\mathbf{b}} \cdot \nabla \times \widehat{\mathbf{b}}$. Les coefficients centre-guide décomposés sur les coordonnées globales $\left(\overline{\psi}, p, \xi_0\right)$ ont donc la forme :

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \mathcal{K}^{\overline{\psi}}_{gc} \\ \mathcal{D}^{p\overline{\psi}}_{gc} \end{pmatrix} =& -\frac{\delta\psi}{p} \left[\left(1 + \frac{1-\xi^2}{2\xi^2} \lambda_{gc} - \frac{1-\xi^2}{2\xi} \lambda_{gc} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \begin{pmatrix} -\nu_l p \\ D_l \end{pmatrix} \right. \\
&\left. + \frac{1}{\xi} \left(1 - \lambda_{gc} - \frac{1-\xi^2}{2\xi} \lambda_{gc} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \begin{pmatrix} -\nu_t p \\ D_\times \end{pmatrix} \right] + \mathcal{O}\left(\epsilon_{\mathrm{B}}^2\right), \qquad (6.75)
\end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} \mathcal{K}^{p}_{gc} \\ \mathcal{D}^{pp}_{gc} \end{pmatrix} = \left(1 + \frac{1-\xi^2}{2\xi} \lambda_{gc} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \begin{pmatrix} -\nu_l p \\ D_l \end{pmatrix} + \mathcal{O}\left(\epsilon_{\mathrm{B}}^2\right), \qquad (6.76)$$

$$\begin{pmatrix} \mathcal{K}_{gc}^{\xi_0} \\ \mathcal{D}_{gc}^{p\xi_0} \end{pmatrix} = \frac{1-\xi_0^2}{2p\xi_0} \left[\left(\overline{\delta\psi} + \left(1 + \frac{1-\xi^2}{2\xi^2} \overline{\delta\psi} \right) \lambda_{gc} - \frac{1-\xi^2}{2\xi} \overline{\delta\psi} \lambda_{gc} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \begin{pmatrix} -\nu_l p \\ D_l \end{pmatrix} \right.$$
$$\left. + \frac{2\xi}{1-\xi^2} \left(1 + \frac{1-\xi^2}{2\xi^2} \overline{\delta\psi} \right) \left(1 - \lambda_{gc} - \frac{1-\xi^2}{2\xi} \lambda_{gc} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \begin{pmatrix} -\nu_t p \\ D_\times \end{pmatrix} \right] + \mathcal{O}\left(\epsilon_{\mathrm{B}}^2\right), \tag{6.77}$$

$$\mathcal{D}_{gc}^{\overline{\psi}\overline{\psi}} = \frac{\left(\delta\psi\right)^2}{p^2\xi^2} \left[\xi^2 \left(1 + \frac{1-\xi^2}{\xi^2} \lambda_{gc} \right) \left(D_l - D_t \right) + D_t - \frac{1-\xi^2}{2\xi} \lambda_{gc} \left(\xi^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \left(D_l - D_t \right) + \frac{\partial D_t}{\partial \xi} \right) \right.$$
$$\left. - 2\xi \left(1 - \frac{1+\xi^2}{2\xi^2} \lambda_{gc} \right) D_\times - \left(1 - \xi^2 \right) \lambda_{gc} \frac{\partial D_\times}{\partial \xi} \right] + \mathcal{O}\left(\epsilon_{\mathrm{B}}^2\right), \tag{6.78}$$

$$\mathcal{D}_{gc}^{\xi_0\xi_0} = \left(\frac{1-\xi_0^2}{p\xi_0} \right)^2 \left[\frac{\xi^2}{1-\xi^2} \left(1 - \lambda_{gc} \right) D_t + \overline{\delta\psi} \left(D_t + \lambda_{gc} \left[\frac{D_l}{2} - D_t \right] \right) \right.$$
$$- \frac{1-\xi^2}{2\xi} \lambda_{gc} \left(\frac{\xi^2}{1-\xi^2} + \overline{\delta\psi} \right) \frac{\partial D_t}{\partial \xi}$$
$$+ \frac{\left(\overline{\delta\psi}\right)^2}{4\xi^2} \left(D_t + \xi^2 \left[D_l - D_t \right] + \left(1 - \xi^2 \right) \lambda_{gc} \left[D_l - D_t \right] \right)$$
$$- \frac{1-\xi^2}{2\xi} \lambda_{gc} \frac{\left(\overline{\delta\psi}\right)^2}{4} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(D_l - D_t \right) - \frac{1-\xi^2}{2\xi} \lambda_{gc} \frac{\left(\overline{\delta\psi}\right)^2}{4\xi^2} \frac{\partial D_t}{\partial \xi}$$
$$+ \frac{\xi}{1-\xi^2} \left(\lambda_{gc} + \overline{\delta\psi} \left[1 + \frac{1-2\xi^2}{\xi^2} \lambda_{gc} \right] + \left(\overline{\delta\psi}\right)^2 \frac{1-\xi^2}{2\xi^2} \left[1 + \frac{1-3\xi^2}{2\xi^2} \lambda_{gc} \right] \right) D_\times$$
$$\left. - \frac{1-\xi^2}{2\xi} \lambda_{gc} \left(\frac{\xi}{1-\xi^2} + \frac{\left(\overline{\delta\psi}\right)^2}{2} \right) \frac{\partial D_\times}{\partial \xi} \right] + \mathcal{O}\left(\epsilon_{\mathrm{B}}^2\right), \tag{6.79}$$

$$\mathcal{D}_{gc}^{\overline{\psi}\xi_0} = -\delta\psi \frac{1-\xi_0^2}{p^2\xi_0} \left[D_t + \lambda_{gc} \left(\frac{D_l}{2} - D_t \right) + \frac{\overline{\delta\psi}}{2\xi^2} \left(D_t + \xi^2 \left[D_l - D_t \right] + \left(1 - \xi^2 \right) \lambda_{gc} \left[D_l - D_t \right] \right) \right.$$
$$- \frac{1-\xi^2}{2\xi} \lambda_{gc} \frac{\overline{\delta\psi}}{2} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(D_l - D_t \right) - \frac{1-\xi^2}{2\xi} \lambda_{gc} \left(1 + \frac{\overline{\delta\psi}}{2\xi^2} \right) \frac{\partial D_t}{\partial \xi}$$
$$+ \frac{\xi}{1-\xi^2} \left(1 + \frac{1-2\xi^2}{\xi^2} \lambda_{gc} + \overline{\delta\psi} \frac{1-\xi^2}{\xi} \left[1 + \frac{1-3\xi^2}{2\xi^2} \lambda_{gc} \right] \right) D_\times$$
$$\left. - \frac{1-\xi^2}{2\xi} \lambda_{gc} \left(\frac{\xi}{1-\xi^2} + \frac{\overline{\delta\psi}}{\xi} \right) \frac{\partial D_\times}{\partial \xi} \right] + \mathcal{O}\left(\epsilon_{\mathrm{B}}^2\right), \tag{6.80}$$

où les coefficients ν_l, ν_t, D_l, D_t, $D_\times$ sont exprimés en coordonnées centre-guide.

6.5 Approximation « orbite fines »

Une approximation possible est que l'excursion radiale $|\delta\psi|$ est petite devant $\overline{\psi}$. Au delà de la simplification des coefficients, cette approximation donne des propriétés intéressantes à l'opérateur collision moyenné sur les orbites qui sera discuté plus en détail dans le chapitre 7. Le petit paramètre associé est

$$\epsilon_\psi \equiv \frac{|\delta\psi|}{\psi} \sim \epsilon_{\mathrm{B}} \frac{q_\psi}{\varepsilon},$$

où R désigne le grand rayon et $\varepsilon \equiv r/R$ est l'inverse du rapport d'aspect local. Cette condition sera remplie si $\epsilon_{\mathrm{B}} q_\psi R/r = q_\psi \rho_{\mathrm{L}}/r \ll 1$ pour un plasma de tokamak, car la longueur caractéristique de

gradient vaut alors $L_\mathrm{B} \simeq R$. En divisant par le petit rayon du plasma a et pour $q_\psi \sim 1$ dans la zone centrale du plasma, on obtient la relation

$$\frac{r}{a} \gg \rho^*,$$

où $\rho^* \equiv \rho_\mathrm{L}/a$ désigne le rayon de Larmor normalisé de la particule. Cette approximation n'est donc pas valide dans la région radiale correspondant à $r \sim \rho_\mathrm{L}$. Comme le nombre de particules dans cette région est faible par rapport à la population totale, l'évolution peut alors être décrite en utilisant par exemple un code de type Monte-Carlo, en effectuant un raccord avec les résultats obtenus dans l'approximation « orbites fines ».

Si $\epsilon_\psi \ll 1$, les coefficients de collision sont réécrits en négligeant les termes d'ordre $\epsilon_\mathrm{B}\epsilon_\psi$ et ϵ_ψ^2 :

$$\begin{pmatrix} \mathcal{K}_{gc}^{\overline{\psi}} \\ \mathcal{D}_{gc}^{p\overline{\psi}} \end{pmatrix} = -\epsilon_\psi \frac{\delta\psi}{p}\left[\begin{pmatrix} -\nu_l p \\ D_l \end{pmatrix} + \frac{1}{\xi}\begin{pmatrix} -\nu_t p \\ D_\times \end{pmatrix}\right], \tag{6.81}$$

$$\begin{pmatrix} \mathcal{K}_{gc}^{p} \\ \mathcal{D}_{gc}^{p\overline{\psi}} \end{pmatrix} = \left[1 - \epsilon_\mathrm{B}\lambda_{gc}\frac{1-\xi^2}{2\xi}\frac{\partial}{\partial\xi}\right]\begin{pmatrix} -\nu_l p \\ D_l \end{pmatrix}, \tag{6.82}$$

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \mathcal{K}_{gc}^{\xi_0} \\ \mathcal{D}_{gc}^{p\xi_0} \end{pmatrix} =& \frac{1-\xi_0^2}{2p\xi_0}\left[\left(\epsilon_\psi\overline{\delta\psi} + \epsilon_\mathrm{B}\lambda_{gc}\right)\begin{pmatrix} -\nu_l p \\ D_l \end{pmatrix}\right. \\ &\left. + \frac{2\xi}{1-\xi^2}\left(1 - \epsilon_\mathrm{B}\lambda_{gc} - \epsilon_\mathrm{B}\lambda_{gc}\frac{1-\xi^2}{2\xi}\frac{\partial}{\partial\xi} + \epsilon_\psi\overline{\delta\psi}\frac{1-\xi^2}{2\xi^2}\right)\begin{pmatrix} -\nu_t p \\ D_\times \end{pmatrix}\right],\end{aligned} \tag{6.83}$$

$$\mathcal{D}_{gc}^{\overline{\psi}\psi} = \mathcal{O}\left(\epsilon_\mathrm{B}^2, \epsilon_\mathrm{B}\epsilon_\psi, \epsilon_\psi^2\right),$$

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{gc}^{\xi_0\xi_0} =& \frac{1-\xi_0^2}{p^2}\frac{\xi^2}{\Psi\xi_0^2}\left[\left(1 - \epsilon_\mathrm{B}\lambda_{gc} - \epsilon_\mathrm{B}\lambda_{gc}\frac{1-\xi^2}{2\xi}\frac{\partial}{\partial\xi} + \epsilon_\psi\overline{\delta\psi}\frac{1-\xi^2}{\xi^2}\right)D_t\right. \\ &\left. + \frac{1}{\xi}\left(\epsilon_\mathrm{B}\lambda_{gc} + \epsilon_\psi\overline{\delta\psi}\right)D_\times\right],\end{aligned} \tag{6.84}$$

$$\mathcal{D}_{gc}^{\overline{\psi}\xi_0} = -\epsilon_\psi\delta\psi\frac{1-\xi_0^2}{p^2\xi_0}\left[D_t + \frac{\xi}{1-\xi^2}D_\times\right], \tag{6.85}$$

où ν_l, ν_t, D_l, D_t et $D_\times$ sont fonction des coordonnées centre-guide. Ces coefficients ont des contributions dépendant explicitement de la non-uniformité magnétique (termes en ϵ_B) et des contributions « néoclassiques » (termes en ϵ_ψ) bien séparées dans l'approximation « orbites fines ». En particulier, le couplage entre coordonnée radiale $\overline{\psi}$ et espace des vitesses (p, ξ_0) est dû uniquement à l'existence d'une déviation radiale $\delta\psi$ du centre-guide le long de son orbite. La limite « largeur nulle » ($\epsilon_\psi = 0$, $\overline{\psi} = \psi$ et $\xi_0 = \xi_\mathrm{min}$ défini dans le chapitre 2), les coefficients prennent la forme, au premier ordre en ϵ_B :

$$\begin{pmatrix} \mathcal{K}_{gc}^{p} \\ \mathcal{D}_{gc}^{pp} \end{pmatrix} = \left[1 - \epsilon_\mathrm{B}\lambda_{gc}\frac{1-\xi^2}{2\xi}\frac{\partial}{\partial\xi}\right]\begin{pmatrix} -\nu_l p \\ D_l \end{pmatrix}, \tag{6.86}$$

$$\begin{pmatrix} \mathcal{K}_{gc}^{\xi_\mathrm{min}} \\ \mathcal{D}_{gc}^{p\xi_\mathrm{min}} \end{pmatrix} = \frac{1-\xi_\mathrm{min}^2}{2p\xi_\mathrm{min}}\left[\epsilon_\mathrm{B}\lambda_{gc}\begin{pmatrix} -\nu_l p \\ D_l \end{pmatrix} + \frac{2\xi}{1-\xi^2}\left(1 - \epsilon_\mathrm{B}\lambda_{gc} - \epsilon_\mathrm{B}\lambda_{gc}\frac{1-\xi^2}{2\xi}\frac{\partial}{\partial\xi}\right)\begin{pmatrix} -\nu_t p \\ D_\times \end{pmatrix}\right], \tag{6.87}$$

$$\mathcal{D}_{gc}^{\xi_\mathrm{min}\xi_\mathrm{min}} = \frac{1-\xi_\mathrm{min}^2}{p^2}\frac{\xi^2}{\Psi\xi_\mathrm{min}^2}\left[\left(1 - \epsilon_\mathrm{B}\lambda_{gc} - \epsilon_\mathrm{B}\lambda_{gc}\frac{1-\xi^2}{2\xi}\frac{\partial}{\partial\xi}\right)D_t + \epsilon_\mathrm{B}\lambda_{gc}\frac{1}{\xi}D_\times\right], \tag{6.88}$$

avec $\mathcal{K}_{gc}^{\psi}$, $\mathcal{D}_{gc}^{\psi\psi}$, $\mathcal{D}_{gc}^{p\psi}$, $\mathcal{D}_{gc}^{\psi\xi_\mathrm{min}}$ et leurs coefficients symétriques qui sont d'ordre ϵ_B^2. Enfin, dans la limite d'un champ magnétique à torsion nulle [5] $\lambda_\mathrm{gc} = p\xi/\left(m\Omega\right)\widehat{\mathbf{b}}\cdot\nabla\times\widehat{\mathbf{b}} = 0$ (comme une géométrie

5. On note qu'une condition suffisante pour avoir $\delta\psi = 0$ et $\lambda_\mathrm{gc} = 0$ quelle que soit l'orbite dans une géométrie axisymétrique constituée de surfaces de flux emboîtées est d'avoir un champ toroïdal nul ($B_\phi = 0$). C'est aussi une condition nécessaire, si l'on excepte les orbites stagnantes ($\xi = 0$).

dipolaire), les coefficients deviennent, en insérant les expressions (6.4) et (6.5) :

$$\begin{pmatrix} \mathcal{K}_{gc}^{p} \\ \mathcal{D}_{gc}^{pp} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\left(\nu_l^{[0]} + \xi \nu_l^{[1]}\right) p \\ D_l^{[0]} + \xi D_l^{[1]} \end{pmatrix}, \tag{6.89}$$

$$\begin{pmatrix} \mathcal{K}_{gc}^{\xi_{\min}} \\ \mathcal{D}_{gc}^{p\xi_{\min}} \end{pmatrix} = \frac{1-\xi_{\min}^2}{p} \frac{\xi}{\xi_{\min}} \begin{pmatrix} -\nu_t^{[1]} p \\ D_{\times}^{[1]} \end{pmatrix}, \tag{6.90}$$

$$\mathcal{D}_{gc}^{\xi_{\min}\xi_{\min}} = \frac{1-\xi_{\min}^2}{p^2} \frac{\xi^2}{\Psi \xi_{\min}^2} \left(D_t^{[0]} + \xi D_t^{[1]}\right), \tag{6.91}$$

où $\Psi = B\left(\psi, \theta\right) / B_{\min}\left(\psi\right)$ et les coefficients $\nu_l^{[0]}$, $\nu_l^{[1]}$, $\nu_t^{[1]}$, $D_l^{[0]}$, $D_l^{[1]}$, $D_t^{[0]}$, $D_t^{[1]}$ et $D_{\times}^{[1]}$ sont fonction des coordonnées centre-guide.

6.6 Coefficients centre-guide avec un fond isotrope

Dans le cas où la distribution de fond est isotrope dans l'espace des vitesses ($f_{s'} = f_{s'}^{[0]}\left(\mathbf{x}, p\right)$), les expressions des coefficients locaux (6.4) et (6.5) sont réduits aux termes d'ordre zéro dans la décomposition de Legendre :

$$\mathbf{K} = -\nu_l^{[0]}\left(\mathbf{x}, p\right) p \mathbf{e}_p, \tag{6.92}$$

$$\mathbb{D} = D_l^{[0]}\left(\mathbf{x}, p\right) \mathbf{e}_p \mathbf{e}_p + D_t^{[0]}\left(\mathbf{x}, p\right) \left(\mathbb{I} - \mathbf{e}_p \mathbf{e}_p\right). \tag{6.93}$$

Les indices correspondant à la décomposition sont donc omis par la suite, et on reprend les expressions anisotropes (6.75)-(6.80) :

$$\begin{pmatrix} \mathcal{K}_{gc}^{\overline{\psi}} \\ \mathcal{D}_{gc}^{p\psi} \end{pmatrix} = -\frac{\delta\psi}{p} \left(1 + \frac{1-\xi^2}{2\xi^2} \lambda_{gc}\right) \begin{pmatrix} -\nu_l p \\ D_l \end{pmatrix} + \mathcal{O}\left(\epsilon_{\mathrm{B}}^2\right), \tag{6.94}$$

$$\begin{pmatrix} \mathcal{K}_{gc}^{p} \\ \mathcal{D}_{gc}^{pp} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\nu_l p \\ D_l \end{pmatrix} + \mathcal{O}\left(\epsilon_{\mathrm{B}}^2\right), \tag{6.95}$$

$$\begin{pmatrix} \mathcal{K}_{gc}^{\xi_0} \\ \mathcal{D}_{gc}^{p\xi_0} \end{pmatrix} = \frac{1-\xi_0^2}{2p\xi_0} \left(\overline{\delta\psi} + \left(1 + \frac{1-\xi^2}{2\xi^2} \overline{\delta\psi}\right) \lambda_{gc}\right) \begin{pmatrix} -\nu_l p \\ D_l \end{pmatrix} + \mathcal{O}\left(\epsilon_{\mathrm{B}}^2\right), \tag{6.96}$$

$$\mathcal{D}_{gc}^{\overline{\psi}\overline{\psi}} = \frac{\left(\delta\psi\right)^2}{p^2\xi^2} \left[\xi^2 \left(1 + \frac{1-\xi^2}{\xi^2} \lambda_{gc}\right) \left(D_l - D_t\right) + D_t\right] + \mathcal{O}\left(\epsilon_{\mathrm{B}}^2\right), \tag{6.97}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{gc}^{\xi_0\xi_0} = & \left(\frac{1-\xi_0^2}{p\xi_0}\right)^2 \left[\frac{\xi^2}{1-\xi^2}\left(1-\lambda_{gc}\right) D_t + \overline{\delta\psi}\left(D_t + \lambda_{gc}\left[\frac{D_l}{2} - D_t\right]\right)\right. \\ & \left. + \frac{\left(\overline{\delta\psi}\right)^2}{4\xi^2}\left(D_t + \xi^2\left[D_l - D_t\right] + \left(1-\xi^2\right)\lambda_{gc}\left[D_l - D_t\right]\right)\right] + \mathcal{O}\left(\epsilon_{\mathrm{B}}^2\right), \end{aligned} \tag{6.98}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{gc}^{\overline{\psi}\xi_0} = & -\delta\psi \frac{1-\xi_0^2}{p^2\xi_0}\left[D_t + \lambda_{gc}\left(\frac{D_l}{2} - D_t\right)\right. \\ & \left. + \frac{\overline{\delta\psi}}{2\xi^2}\left(D_t + \xi^2\left[D_l - D_t\right] + \left(1-\xi^2\right)\lambda_{gc}\left[D_l - D_t\right]\right)\right] + \mathcal{O}\left(\epsilon_{\mathrm{B}}^2\right), \end{aligned} \tag{6.99}$$

où les coefficients $\nu_l(\mathbf{x},p)$, $D_l(\mathbf{x},p)$, $D_t(\mathbf{x},p)$ sont exprimés en coordonnées centre-guide. On retrouve donc les coefficients de la référence [15]. De même, en appliquant l'approximation « orbites fines », ces expressions donnent, à l'ordre un en $\epsilon_{\mathrm{B}}, \epsilon_\psi$:

$$\begin{pmatrix} \mathcal{K}_{gc}^{\overline{\psi}} \\ \mathcal{D}_{gc}^{p\overline{\psi}} \end{pmatrix} = -\epsilon_\psi \frac{\delta\psi}{p} \begin{pmatrix} -\nu_l p \\ D_l \end{pmatrix}, \tag{6.100}$$

$$\begin{pmatrix} \mathcal{K}_{gc}^{p} \\ \mathcal{D}_{gc}^{pp} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\nu_l p \\ D_l \end{pmatrix}, \tag{6.101}$$

$$\begin{pmatrix} \mathcal{K}_{gc}^{\xi_0} \\ \mathcal{D}_{gc}^{p\xi_0} \end{pmatrix} = \frac{1-\xi_0^2}{2p\xi_0} \left(\epsilon_\psi \overline{\delta\psi} + \epsilon_{\mathrm{B}} \lambda_{gc}\right) \begin{pmatrix} -\nu_l p \\ D_l \end{pmatrix}, \tag{6.102}$$

$$\mathcal{D}_{gc}^{\overline{\psi}\overline{\psi}} = \mathcal{O}\left(\epsilon_{\mathrm{B}}^2, \epsilon_{\mathrm{B}}\epsilon_\psi, \epsilon_\psi^2\right), \tag{6.103}$$

$$\mathcal{D}_{gc}^{\xi_0\xi_0} = \left(\frac{1-\xi_0^2}{p\xi_0}\right)^2 \left[\frac{\xi^2}{1-\xi^2}\left(1-\epsilon_{\mathrm{B}}\lambda_{gc}\right) + \epsilon_\psi \overline{\delta\psi}\right] D_t,$$

$$\mathcal{D}_{gc}^{\overline{\psi}\xi_0} = -\epsilon_\psi \delta\psi \frac{1-\xi_0^2}{p^2\xi_0} D_t, \tag{6.104}$$

où les coefficients $\nu_l(\mathbf{x},p)$, $D_l(\mathbf{x},p)$, $D_t(\mathbf{x},p)$ sont exprimés en coordonnées centre-guide. Ici aussi, les coefficients coïncident avec [15]. En plus des contributions séparées de la non-uniformité magnétique et de la largeur d'orbite finie indiquées dans la section 6.4, chaque coefficient présente une seule contribution locale : soit longitudinale (fonction des coefficients locaux ν_l, D_l) soit transverse (fonction de D_t). La transformation centre-guide n'introduit donc pas de couplage entre directions parallèles à $\mathbf{p}$ et transverses dans l'approximation « orbites fines ».

6.7 Résumé du chapitre

Dans ce chapitre, l'expression de l'opérateur collision local (chapitre 5) est utilisée pour le calcul d'un opérateur centre-guide comprenant des termes explicites anisotropes dans la direction parallèle aux lignes de champ. Cet opérateur est exprimé sur le système de coordonnées global $\left(\overline{\psi}, \theta, p, \xi_0\right)$ défini dans le chapitre 2. Deux cas de simplification sont examinés : l'approximation « orbites fines », où l'excursion radiale de l'orbite du centre-guide est faible par rapport à la surface $\overline{\psi}$ et l'opérateur correspondant à un fond d'interaction isotrope. Ces cas limites sont aussi utilisés dans le cadre de la moyenne sur les orbites de centre-guide de l'opérateur collision (chapitre 7).

Chapitre 7

Dynamique moyennée sur les orbites

Dans ce chapitre, l'équation Fokker-Planck centre-guide est moyennée sur les orbites de centre-guide afin d'obtenir une évolution indépendante de l'angle poloïdal θ. Cette réduction de l'espace des phases est effectuée dans l'approximation de faible collisionnalité (le centre-guide a le temps de parcourir une orbite complète avant de subir une déviation due à une collision). Des expressions simplifiées dans l'approximation « orbite fines » exposée dans le chapitre 6 sont obtenues et fournissent une forme conservative pour l'opérateur collision moyenné. La dynamique pour le cas particulier d'un fond isotrope dans l'espace des vitesses permet d'exprimer l'opérateur en termes de coefficients d'orbite, moyennes indépendantes de la distribution de fond. Enfin, un calcul du courant « bootstrap » est présenté dans la limite de Lorentz.

7.1 Approximation de faible collisionnalité

Dans les coordonnées centre-guide [1] $\left(\overline{\psi}, \theta, p, \xi_0\right)$, la fonction de distribution centre-guide $F\left(t, \overline{\psi}, \theta, p, \xi_0, \sigma\right)$ a une évolution temporelle selon une échelle de temps longue τ telle que décrite dans le chapitre 6 ($\dot{\overline{\psi}} = \dot{p} = \dot{\xi}_0 = 0$ par définition des invariants et $\partial/\partial\phi = 0$ selon l'hypothèse d'axissymétrie) :

$$\epsilon_\tau \frac{\partial F}{\partial \tau} + \dot{\theta}\frac{\partial F}{\partial \theta} = \epsilon_c C_{gc}\left[F\right]. \tag{7.1}$$

où ϵ_τ et $\epsilon_c \equiv L_B/\lambda_\nu$ désignent respectivement les échelles de temps d'évolution de la fonction de distribution et l'échelle de temps collisionnelle. Dans un régime faiblement collisionnel, le libre parcours moyen λ_ν est grand devant la longueur caractéristique de gradient du champ magnétique L_B ($\epsilon_c \ll 1$). C'est le régime néoclassique, qui implique que le centre-guide a le temps d'effectuer une orbite complète, explorant la totalité de la topologie magnétique, avant de subir l'effet des collisions à faible angle discutées dans le chapitre 5. Sur un temps long comparé à la période d'orbite ($\tau_\mathcal{O}/\tau \ll 1$), l'équation à l'ordre le plus bas devient :

$$\dot{\theta}\frac{\partial F}{\partial \theta} = 0, \tag{7.2}$$

qui permet de déduire que la distribution $F \equiv F^{(0)}\left(\overline{\psi}, p, \xi_0, \sigma\right)$ est indépendante de θ. L'équation moyennée sur une orbite de centre-guide devient, en définissant $C_{gc}^{(0)} \equiv \langle C_{gc}\rangle_\mathcal{O}$:

$$\epsilon_\tau \frac{\partial F^{(0)}}{\partial \tau} = \epsilon_c \left\langle C_{gc}\left[F^{(0)}\right]\right\rangle_\mathcal{O} \equiv \epsilon_c C_{gc}^{(0)}\left[F^{(0)}\right], \tag{7.3}$$

montrant que la distribution évolue sur l'échelle de temps des collisions : $\epsilon_\tau = \epsilon_c$.

1. Dans tout ce chapitre, les coordonnées sont considérées comme centre-guide sauf mention du contraire.

7.2 Opérateur collision moyenné

7.2.1 Jacobien d'orbite et moyenne d'orbite

A partir des équations du mouvement établies dans le chapitre 3 pour les centres-guide, l'évolution temporelle de l'angle poloïdal est calculée, au premier ordre en ϵ_{B} :

$$\begin{aligned}\dot{\theta} = \dot{\mathbf{x}} \cdot \nabla\theta =& \nabla\theta \cdot \left[\frac{p\xi}{m}\widehat{\mathbf{b}} + \frac{p^2\widehat{\mathbf{b}}}{m^2\Omega} \times \left(\frac{1-\xi^2}{2}\frac{\nabla B}{B} + \xi^2\widehat{\mathbf{b}}\cdot\nabla\widehat{\mathbf{b}}\right)\right] \\ =& \frac{p\xi}{m}\left[\frac{B^\theta}{B} + \frac{p\xi}{m\Omega}\nabla\theta\cdot\widehat{\mathbf{b}} \times \left(\frac{1-\xi^2}{2\xi^2}\frac{\nabla B}{B} + \widehat{\mathbf{b}}\cdot\nabla\widehat{\mathbf{b}}\right)\right] \\ =& \frac{p\xi}{m}\frac{B^\theta}{B}\left[1 + \epsilon_\psi\frac{p\xi}{eB^\theta}\nabla\theta\cdot\widehat{\mathbf{b}} \times \left(\frac{1-\xi^2}{2\xi^2}\frac{\nabla B}{B} + \widehat{\mathbf{b}}\cdot\nabla\widehat{\mathbf{b}}\right)\right]. \end{aligned} \tag{7.4}$$

Cette expression est similaire au jacobien de la transformation en coordonnées $\left(\overline{\psi}, \xi_0\right)$ de l'équation (2.54). Le jacobien total qui provient du jacobien centre-guide (3.84) est donc exprimé en fonction de $\dot{\theta}$:

$$\mathcal{J} \equiv \mathcal{V} J_{\overline{\psi},\xi_0}\mathcal{J}_{\mathrm{gc}} = \frac{p^3\left|\xi_0\right|}{mB_0\left(\overline{\psi}\right)}\frac{1}{\left|\dot{\theta}\right|}\left[1 + \mathcal{O}\left(\epsilon_\psi\epsilon_{\mathrm{B}}\right)\right], \tag{7.5}$$

de telle façon que

$$\frac{\sigma\mathcal{J}\dot{\theta}}{2\pi} \equiv \frac{\mathcal{J}_{\mathcal{O}}}{\tau_{\mathcal{O}}}\mathcal{G}, \tag{7.6}$$

avec $\mathcal{G} = 1 + \mathcal{O}\left(\epsilon_\psi\epsilon_{\mathrm{B}}\right)$ et le jacobien d'orbite qui ne dépend que des invariants $\left(\overline{\psi}, p, \xi_0\right)$,

$$\mathcal{J}_{\mathcal{O}} \equiv \frac{\tau_{\mathcal{O}}p^3\left|\xi_0\right|}{mB_0\left(\overline{\psi}\right)}. \tag{7.7}$$

L'opération de moyenne sur l'orbite décrite dans le chapitre 2 devient

$$\left\langle\cdots\right\rangle_{\mathcal{O}} = \frac{1}{\mathcal{J}_{\mathcal{O}}}\oint_{\mathcal{O}}\sigma\mathcal{J}\mathcal{G}^{-1}\frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi}\cdots. \tag{7.8}$$

Dans la limite « orbite de largeur nulle » ($\epsilon_\psi = 0$), $\mathcal{G} = 1$ et $\dot{\theta} = p\xi B^\theta/\left(mB\right)$ et le jacobien $\mathcal{J}$ devient simplement :

$$\mathcal{J}_0 = \frac{p^2}{B_0}\frac{B}{B^\theta}\left|\frac{\xi_0}{\xi}\right|. \tag{7.9}$$

Pour l'opération de moyenne correspondante,

$$\left\langle\cdots\right\rangle_{\mathcal{O}} = \frac{1}{\tau_{\mathcal{O}}}\oint_{\mathcal{O}}\frac{B}{B^\theta}\frac{m\mathrm{d}\theta}{p\xi}\cdots, \tag{7.10}$$

et l'on retrouve l'élément d'intégration correspondant à un mouvement du centre-guide parallèle à la ligne de champ, de distance élémentaire $\mathrm{d}l \equiv \left(B/B^\theta\right)\mathrm{d}\theta$.

7.2.2 Opérateur collision moyenné

L'opérateur collision calculé dans le chapitre 6 devient

$$C_{\mathrm{gc}}\left[F\right] = -\frac{1}{\mathcal{J}}\frac{\partial}{\partial I^a}\left[\mathcal{J}\left(K^a_{\mathrm{gc}}F - D^{ab}_{\mathrm{gc}}\frac{\partial F}{\partial I^b}\right)\right], \tag{7.11}$$

où $I^a \equiv \left(\overline{\psi}, p, \xi_0\right)$ désigne les invariants du mouvement. Comme il a été établi dans le chapitre 6, il n'y a pas de composante en θ car les coefficients correspondants sont d'ordre ϵ_{B}^2 dans la transformation centre-guide. En utilisant l'équation (7.8), l'opérateur centre-guide moyenné devient

$$\begin{aligned}\left\langle C_{\mathrm{gc}}\left[F^{(0)}\right]\right\rangle_{\mathcal{O}} = &-\frac{1}{\mathcal{J}_{\mathcal{O}}}\frac{\partial}{\partial I^a}\left[\mathcal{J}_{\mathcal{O}}\left(\left\langle K_{\mathrm{gc}}^a\right\rangle_{\mathcal{O}} F^{(0)} - \left\langle D_{\mathrm{gc}}^{ab}\right\rangle_{\mathcal{O}}\frac{\partial F^{(0)}}{\partial I^b}\right)\right] \\ &+\left\langle \mathcal{G}\frac{\partial \mathcal{G}^{-1}}{\partial I^a}K_{\mathrm{gc}}^a\right\rangle_{\mathcal{O}} F^{(0)} - \left\langle \mathcal{G}\frac{\partial \mathcal{G}^{-1}}{\partial I^a}D_{\mathrm{gc}}^{ab}\right\rangle_{\mathcal{O}}\frac{\partial F^{(0)}}{\partial I^b}.\end{aligned} \tag{7.12}$$

En renommant les coefficients, l'opérateur moyenné prend la forme

$$\left\langle C_{\mathrm{gc}}\left[F^{(0)}\right]\right\rangle_{\mathcal{O}} = -\frac{1}{\mathcal{J}_{\mathcal{O}}}\frac{\partial}{\partial I^a}\left[\mathcal{J}_{\mathcal{O}}\left(K_{\mathrm{gc}}^{a(0)}F^{(0)} - D_{\mathrm{gc}}^{ab(0)}\frac{\partial F^{(0)}}{\partial I^b}\right)\right] + M_{\mathrm{gc}}^{(0)}F^{(0)}, \tag{7.13}$$

où les coefficients respectifs ont pour définition :

$$K_{\mathrm{gc}}^{a(0)} = \left\langle K_{\mathrm{gc}}^a\right\rangle_{\mathcal{O}} + \left\langle \mathcal{G}\frac{\partial \mathcal{G}^{-1}}{\partial I^a}D_{\mathrm{gc}}^{ab}\right\rangle_{\mathcal{O}}, \tag{7.14}$$

$$D_{\mathrm{gc}}^{ab(0)} = \left\langle D_{\mathrm{gc}}^{ab}\right\rangle_{\mathcal{O}}, \tag{7.15}$$

$$M_{\mathrm{gc}}^{(0)} = \left\langle \mathcal{G}\frac{\partial \mathcal{G}^{-1}}{\partial I^a}K_{\mathrm{gc}}^a\right\rangle_{\mathcal{O}}. \tag{7.16}$$

L'opérateur collision moyenné a donc un terme en *divergence* et un terme *linéaire*. De plus, comme $\mathcal{G} = 1 + \mathcal{O}\left(\epsilon_\psi \epsilon_{\mathrm{B}}\right)$, l'expression des moyennes peut être réduite à :

$$K_{\mathrm{gc}}^{a(0)} = \left\langle K_{\mathrm{gc}}^a\right\rangle_{\mathcal{O}}, \tag{7.17}$$

$$D_{\mathrm{gc}}^{ab(0)} = \left\langle D_{\mathrm{gc}}^{ab}\right\rangle_{\mathcal{O}}, \tag{7.18}$$

$$M_{\mathrm{gc}}^{(0)} = \mathcal{O}\left(\epsilon_{\mathrm{B}}^2, \epsilon_\psi^2, \epsilon_{\mathrm{B}}\epsilon_\psi\right), \tag{7.19}$$

en négligeant les termes d'ordre $\epsilon_\psi \epsilon_{\mathrm{B}}$ (approximation orbites fines $\epsilon_\psi \ll 1$). Une structure de type Fokker-Planck est donc retrouvée dans l'approximation orbite fine, et les coefficients de l'opérateur collision moyenné correspondant sont tout simplement les moyennes des coefficients centre-guide respectifs.

7.2.3 Forme conservative pour l'opérateur différentiel

Pour des applications numériques, la partie différentielle de l'opérateur collision moyenné (7.13) est réécrite sous forme d'une conservation de flux :

$$\left\langle C_{\mathrm{gc}}\left[F^{(0)}\right]\right\rangle_{\mathcal{O}} = -\frac{1}{\mathcal{J}_{\mathcal{O}}}\frac{\partial}{\partial \overline{\psi}}\left(\mathcal{J}_{\mathcal{O}}\left\|\nabla\overline{\psi}\right\|_0 S_{\mathrm{L}}^{\overline{\psi}}\right) - \frac{1}{\mathcal{J}_{\mathcal{O}}}\frac{\partial}{\partial p}\left(\mathcal{J}_{\mathcal{O}}S_{\mathrm{L}}^{p}\right) + \frac{1}{\mathcal{J}_{\mathcal{O}}p}\frac{\partial}{\partial \xi_0}\left(\mathcal{J}_{\mathcal{O}}\sqrt{1-\xi_0^2}S_{\mathrm{L}}^{\xi_0}\right), \tag{7.20}$$

où $S^{\overline{\psi}}$ décrit le flux des centre-guides à travers les surfaces de flux magnétique et (S^p, S^{ξ_0}) représentent les dynamiques respectives d'impulsion et de pitch-angle. Ils sont donnés par les expressions

$$\begin{pmatrix} S_{\mathrm{L}}^{\overline{\psi}} \\ S_{\mathrm{L}}^{p} \\ S_{\mathrm{L}}^{\xi_0} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} K_{\mathrm{L}}^{\overline{\psi}} \\ K_{\mathrm{L}}^{p} \\ K_{\mathrm{L}}^{\xi_0} \end{pmatrix} F^{(0)} - \begin{pmatrix} D_{\mathrm{L}}^{\overline{\psi}\overline{\psi}} & D_{\mathrm{L}}^{\overline{\psi}p} & D_{\mathrm{L}}^{\overline{\psi}\xi_0} \\ D_{\mathrm{L}}^{p\overline{\psi}} & D_{\mathrm{L}}^{pp} & D_{\mathrm{L}}^{p\xi_0} \\ D_{\mathrm{L}}^{\xi_0\overline{\psi}} & D_{\mathrm{L}}^{\xi_0 p} & D_{\mathrm{L}}^{\xi_0\xi_0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left\|\nabla\overline{\psi}\right\|_0 \partial/\partial\overline{\psi} \\ \partial/\partial p \\ -p^{-1}\sqrt{1-\xi_0^2}\partial/\partial\xi_0 \end{pmatrix} F^{(0)}, \tag{7.21}$$

où les coefficients de friction K_{L}^a et les coefficients de diffusions symétriques $D_{\mathrm{L}}^{ab} = D_{\mathrm{L}}^{ba}$ peuvent être exprimés en fonction des coefficients moyennés correspondants (7.14) et (7.15) selon les normalisations suivantes :

$$\begin{aligned} K_{\mathrm{L}}^{\overline{\psi}} &= \frac{1}{\left\|\nabla\overline{\psi}\right\|_0}K_{\mathrm{gc}}^{\overline{\psi}(0)}, \\ K_{\mathrm{L}}^{p} &= K_{\mathrm{gc}}^{p(0)}, \\ K_{\mathrm{L}}^{\xi_0} &= -\frac{p}{\sqrt{1-\xi_0^2}}K_{\mathrm{gc}}^{\xi_0(0)}, \end{aligned} \tag{7.22}$$

et

$$\begin{aligned}
D_{\mathrm{L}}^{\overline{\psi}\overline{\psi}} &= \frac{1}{\left\|\nabla\overline{\psi}\right\|_0^2} D_{\mathrm{gc}}^{\overline{\psi}\overline{\psi}(0)}, \\
D_{\mathrm{L}}^{\overline{\psi}p} &= \frac{1}{\left\|\nabla\overline{\psi}\right\|_0} D_{\mathrm{gc}}^{\overline{\psi}p(0)}, \\
D_{\mathrm{L}}^{\overline{\psi}\xi_0} &= -\frac{p}{\sqrt{1-\xi_0^2}} \frac{1}{\left\|\nabla\overline{\psi}\right\|_0} D_{\mathrm{gc}}^{\overline{\psi}\xi_0(0)}, \\
D_{\mathrm{L}}^{pp} &= D_{\mathrm{gc}}^{pp(0)}, \\
D_{\mathrm{L}}^{p\xi_0} &= -\frac{p}{\sqrt{1-\xi_0^2}} D_{\mathrm{gc}}^{p\xi_0(0)}, \\
D_{\mathrm{L}}^{\xi_0\xi_0} &= \frac{p^2}{1-\xi_0^2} D_{\mathrm{gc}}^{\xi_0\xi_0(0)}.
\end{aligned} \tag{7.23}$$

Dans l'expression (7.20), $\left\|\nabla\overline{\psi}\right\|_0 \equiv \|\nabla\psi\|_0\left(\overline{\psi}\right)$ où $\|\nabla\psi\|_0(\psi) \equiv \|\nabla\psi\|(\psi,\theta_0(\psi))$ est définie comme la valeur du gradient de flux $\|\nabla\psi\| = RB_P$ à l'angle poloïdal $\theta_0(\psi)$ où l'amplitude du champ magnétique

$$B(\psi,\theta_0(\psi)) \equiv B_0(\psi) \tag{7.24}$$

est minimale sur la surface de flux ψ. B_P correspond ici à la composante poloïdale du champ magnétique. Le facteur $\left\|\nabla\overline{\psi}\right\|_0$ assure ainsi que $S_{\mathrm{L}}^{\overline{\psi}}$ a la dimension d'un flux dans l'espace des configurations. Lorsque la forme en conservation de flux décrite dans l'équation (7.20) est implémentée numériquement en utilisant une discrétisation à deux grilles (avec la distribution sur une demi-grille) [26], cela donne un schéma numérique dans lequel les conditions aux bords internes sont intrinsèquement vérifiées [14].

7.3 Cas d'un fond isotrope dans l'approximation « orbites fines »

Pour un fond isotrope, les distributions de fond respectives ne dépendent que de (ψ,p') dans l'espace local (l'indépendance en θ est toujours assurée par l'hypothèse de faible collisionnalité). Comme $f_{s'}$ ne dépend pas de ξ, la décomposition en polynômes de Legendre de l'équation (5.43) a des harmoniques nulles : $f_{s'}^{[0]} = f_{s'}$ et $f_{s'}^{[\ell]} = 0$ pour $\ell \geq 1$. Les coefficients de collision ne dépendent donc eux aussi que de (ψ,p).

7.3.1 Décalage de grille

Dans l'approximation « orbites fines » ($\epsilon_\psi \ll 1$), un développement de Taylor sur la coordonnée $\psi \equiv \overline{\psi} + \epsilon_\psi\delta\psi$ est effectuée :

$$\nu_l^{[0]} \equiv \nu(\psi,p) = \nu\left(\overline{\psi},p\right) + \epsilon_\psi\delta\psi\frac{\partial\nu}{\partial\psi}\left(\overline{\psi},p\right) + \ldots, \tag{7.25}$$

$$D_l^{[0]} \equiv D_l(\psi,p) = D_l\left(\overline{\psi},p\right) + \epsilon_\psi\delta\psi\frac{\partial D_l}{\partial\psi}\left(\overline{\psi},p\right) + \ldots, \tag{7.26}$$

$$D_t^{[0]} \equiv D_t(\psi,p) = D_t\left(\overline{\psi},p\right) + \epsilon_\psi\delta\psi\frac{\partial D_t}{\partial\psi}\left(\overline{\psi},p\right) + \ldots, \tag{7.27}$$

Cette opération permet d'exprimer les coefficients sur la grille d'invariants 2D $\left(\overline{\psi},p\right)$. Ce développement pourrait aussi être effectuée autour de la valeur moyenne $\langle\psi\rangle_{\mathcal{O}}$. Pour les particules piégées, $\langle\psi\rangle_{\mathcal{O}} = \overline{\psi}$, donc les deux valeurs sont identiques, mais l'expansion sur la moyenne est plus précise pour les particules circulantes où $|\psi - \langle\psi\rangle_{\mathcal{O}}| < \delta\psi$. Cependant, elle nécessite de calculer $\langle\psi\rangle_{\mathcal{O}}\left(\overline{\psi},p,\xi_0\right)$ sur une grille à trois dimensions ; aussi le développement autour de $\overline{\psi}$ est préférable pour des applications numériques.

7.3.2 Coefficients d'orbite

En négligeant les termes d'ordre ϵ_ψ^2 et $\epsilon_\psi\epsilon_{\rm B}$, les coefficients moyennés de collision sont calculés en utilisant les équations (6.100)-(6.104) et (7.25)-(7.27). Cela donne, en définissant $\Psi \equiv B\left(\psi,\theta\right)/B_0\left(\overline{\psi}\right)$:

$$\begin{pmatrix} K_{\rm gc}^{p(0)} \\ D_{\rm gc}^{pp(0)} \end{pmatrix} = \left(1+\epsilon_\psi\delta\psi^{(0)}\frac{\partial}{\partial\psi}\right)\begin{pmatrix} -\nu p \\ D_l \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\epsilon_{\rm B}^2,\epsilon_\psi^2,\epsilon_{\rm B}\epsilon_\psi), \tag{7.28}$$

$$\begin{pmatrix} K_{\rm gc}^{\xi_0(0)} \\ D_{\rm gc}^{p\xi_0(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\nu p \\ D_l \end{pmatrix}\frac{1-\xi_0^2}{2p\xi_0}\left(\epsilon_\psi\overline{\delta\psi}^{(0)}+\epsilon_{\rm B}\lambda_{\rm gc}^{(0)}\right) + \mathcal{O}(\epsilon_{\rm B}^2,\epsilon_\psi^2,\epsilon_{\rm B}\epsilon_\psi), \tag{7.29}$$

$$\begin{pmatrix} K_{\rm gc}^{\overline{\psi}(0)} \\ D_{\rm gc}^{p\overline{\psi}(0)} \\ D_{\rm gc}^{\xi_0\overline{\psi}(0)} \end{pmatrix} = -\epsilon_\psi\frac{\delta\psi^{(0)}}{p}\begin{pmatrix} -\nu p \\ D_l \\ \left(1-\xi_0^2\right)D_t/\left(p\xi_0\right) \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\epsilon_{\rm B}^2,\epsilon_\psi^2,\epsilon_{\rm B}\epsilon_\psi), \tag{7.30}$$

$$D_{\rm gc}^{\overline{\psi}\overline{\psi}(0)} = \mathcal{O}(\epsilon_{\rm B}^2,\epsilon_\psi^2,\epsilon_{\rm B}\epsilon_\psi), \tag{7.31}$$

$$D_{\rm gc}^{\xi_0\xi_0(0)} = \frac{\left(1-\xi_0^2\right)}{p^2}\left[\Delta^\dagger-\epsilon_{\rm B}\lambda_{\rm gc}^{(0)\dagger}+\epsilon_\psi\left(\overline{\delta\psi}^{(0)}\frac{1-\xi_0^2}{\xi_0^2}+\delta\psi^{(0)\dagger}\frac{\partial}{\partial\psi}\right)\right]D_t + \mathcal{O}(\epsilon_{\rm B}^2,\epsilon_\psi^2,\epsilon_{\rm B}\epsilon_\psi), \tag{7.32}$$

où ν, D_l, D_t sont fonction de $\left(\overline{\psi},p\right)$. Les coefficients suivants doivent être calculés :

$$\begin{aligned}
\delta\psi^{(0)} &\equiv \langle\delta\psi\rangle_{\mathcal{O}}\,,\\
\delta\psi^{(0)\dagger} &\equiv \left\langle\frac{\xi^2}{\xi_0^2\Psi}\delta\psi\right\rangle_{\mathcal{O}} = \frac{\left\langle\delta\psi\Psi^{-1}\right\rangle_{\mathcal{O}}-\left(1-\xi_0^2\right)\delta\psi^{(0)}}{\xi_0^2},\\
\overline{\delta\psi}^{(0)} &\equiv \frac{1}{B_0}\frac{{\rm d}B_0}{{\rm d}\overline{\psi}}\delta\psi^{(0)},\\
\lambda_{\rm gc}^{(0)} &\equiv \langle\lambda_{\rm gc}\rangle_{\mathcal{O}}\,,\\
\lambda_{\rm gc}^{(0)\dagger} &\equiv \left\langle\frac{\xi^2}{\xi_0^2\Psi}\lambda_{\rm gc}\right\rangle_{\mathcal{O}} = \frac{\left\langle\lambda_{\rm gc}\Psi^{-1}\right\rangle_{\mathcal{O}}-\left(1-\xi_0^2\right)\lambda_{\rm gc}^{(0)}}{\xi_0^2},\\
\Delta^\dagger &\equiv \left\langle\frac{\xi^2}{\xi_0^2\Psi}\right\rangle_{\mathcal{O}} = \frac{\left\langle\Psi^{-1}\right\rangle_{\mathcal{O}}-\left(1-\xi_0^2\right)}{\xi_0^2},
\end{aligned} \tag{7.33}$$

avec $\xi^2 = 1-\Psi^{-1}\left(1-\xi_0^2\right)$ d'après l'équation (2.43).

Dans le cas isotrope, les moyennes sont donc effectuées indépendamment du calcul des coefficients ν, D_l, D_t. Ceux-ci sont donc calculés sur le point $\left(\overline{\psi},p\right)$ et non sur la trajectoire entière du centre-guide, ce qui réduit le calcul de l'opérateur collision moyenné aux équations (7.25)-(7.27) et (7.33). Il est à noter aussi que $\delta\psi^{(0)}=0$ pour les orbites piégées.

Les effets d'orbite finie peuvent être négligées dans le calcul des coefficients moyennés $\delta\psi^{(0)}$, $\delta\psi^{(0)\dagger}$, $\overline{\delta\psi}^{(0)}$, $\lambda_{\rm gc}^{(0)}$, and $\lambda_{\rm gc}^{(0)\dagger}$ (7.33) car ils apparaissent à l'ordre ϵ_ψ^2 ou $\epsilon_{\rm B}\epsilon_\psi$ dans les équations (7.28)-(7.32). En effectuant la limite $\tilde{\psi}\to\overline{\psi}$, l'opération de moyenne sur l'orbite (2.56) devient [11] :

$$\langle\cdots\rangle_{\mathcal{O}} = \frac{1}{\Lambda\lambda}\left[\frac{1}{2}\sum_\sigma\right]_T\int_{\theta_1}^{\theta_2}d\theta\frac{B}{B^\theta}\left|\frac{\xi_0}{\xi}\right|\cdots, \tag{7.34}$$

où $\Lambda(\psi) = \int_{-\pi}^{\pi}d\theta B/B^\theta$ désigne la longueur d'une ligne de champ sur un cycle poloïdal. La somme sur σ est effectuée sur les orbites piégées entre les points de rebroussement θ_1 and θ_2, et

$$\lambda(\psi,\xi_0) = \frac{1}{\Lambda}\int_{\theta_1}^{\theta_2}d\theta\frac{B}{B^\theta}\left|\frac{\xi_0}{\xi}\right| \tag{7.35}$$

est le temps d'orbite normalisé dans la limite « largeur nulle » [2]. Par extension, les quantités suivantes sont définies :

$$\lambda_{k,l,m}(\psi,\xi_0) = \frac{1}{\Lambda_{l,m}(\psi)} \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \frac{B}{B^\theta} \left|\frac{\xi}{\xi_0}\right|^{k-1} \left(\frac{R_0}{R}\right)^l \Psi^m \tag{7.36}$$

avec

$$\Lambda_{l,m}(\psi) = \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \frac{B}{B^\theta} \left(\frac{R_0}{R}\right)^l \Psi^m \tag{7.37}$$

de telle façon que $\lambda_{0,0,0} = \lambda$, $\Lambda_{0,0} = \Lambda$ et $\lambda_{k,l,m}(\psi,\pm 1) = 1$. Ici, $R_0(\psi) = R(\psi,\theta_0)$ où $\theta_0(\psi)$ a été défini dans l'équation (7.24). En utilisant (7.34) et $\delta\psi = p\xi B_\phi/(eB)$ de la définition (2.42), puisque B_ϕ est fonction seulement de ψ, les coefficients liés à la largeur d'orbite ont la forme suivante :

$$\begin{aligned}
\delta\psi^{(0)} &= H\left[|\xi_0| - \xi_{0T}\left(\overline{\psi}\right)\right] \frac{B_\phi}{B_0} \frac{\Lambda_{0,-1}}{\Lambda\lambda} \frac{p\xi_0}{e}, \\
\delta\psi^{(0)\dagger} &= H\left[|\xi_0| - \xi_{0T}\left(\overline{\psi}\right)\right] \frac{B_\phi}{B_0} \frac{\left[\Lambda_{0,-2} - \left(1-\xi_0^2\right)\Lambda_{0,-1}\right]}{\Lambda\lambda\xi_0^2} \frac{p\xi_0}{e}.
\end{aligned} \tag{7.38}$$

7.3.3 Coefficients pour la forme conservative de l'opérateur collision

Dans l'approximation « orbites fines », les coefficients de friction et de diffusion (7.22)-(7.23) peuvent être évalués explicitement à partir de l'opérateur centre-guide, en négligeant les termes d'ordre $\epsilon_B^2, \epsilon_\psi^2, \epsilon_B\epsilon_\psi$:

$$\begin{pmatrix} K_L^p \\ D_L^{pp} \end{pmatrix} = \left(1 + \epsilon_\psi \delta\psi^{(0)} \frac{\partial}{\partial\psi}\right) \begin{pmatrix} -\nu p \\ D_l \end{pmatrix}, \tag{7.39}$$

$$\begin{pmatrix} K_L^{\xi_0} \\ D_L^{p\xi_0} \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{1-\xi_0^2}}{2\xi_0} \left(\epsilon_\psi \overline{\delta\psi}^{(0)} + \epsilon_B \lambda_{gc}^{(0)}\right) \begin{pmatrix} -\nu p \\ D_l \end{pmatrix}, \tag{7.40}$$

$$\begin{pmatrix} K_L^{\overline{\psi}} \\ D_L^{p\overline{\psi}} \\ D_L^{\xi_0\overline{\psi}} \end{pmatrix} = -\epsilon_\psi \frac{\delta\psi^{(0)}}{p\left\|\boldsymbol{\nabla}\overline{\psi}\right\|_0} \begin{pmatrix} -\nu p \\ D_l \\ -\sqrt{1-\xi_0^2} D_t/\xi_0 \end{pmatrix}, \tag{7.41}$$

$$D_L^{\overline{\psi}\overline{\psi}} = \mathcal{O}(\epsilon_B^2, \epsilon_\psi^2, \epsilon_B\epsilon_\psi), \tag{7.42}$$

$$D_L^{\xi_0\xi_0} = \left[\Delta^\dagger - \epsilon_B \lambda_{gc}^{(0)\dagger} + \epsilon_\psi \left(\overline{\delta\psi}^{(0)} \frac{1-\xi_0^2}{\xi_0^2} + \delta\psi^{(0)\dagger} \frac{\partial}{\partial\psi}\right)\right] D_t, \tag{7.43}$$

où l'on voit les contributions dues à la non-uniformité magnétique et celles correspondant aux effets néoclassiques. De plus, à l'ordre le plus bas l'opérateur collision dans la limite « orbites de largeur nulle » est retrouvée :

$$\begin{aligned}
K_L^p &= -\nu p, \\
D_L^{pp} &= D_l, \\
D_L^{\xi_0\xi_0} &= \Delta^\dagger D_t.
\end{aligned} \tag{7.44}$$

7.4 Courant « bootstrap » dans la limite de Lorentz

Le formalisme presenté dans ce chapitre peut être validé en calculant le courant « bootstrap » dans la limite de Lorentz (voir chapitre 5), un résultat analytique qui est présent dans la littérature scientifique [42, 24].

2. Dans cette limite, $\tau_{\mathcal{O}} \to \Lambda\lambda/(v\,|\xi_0|)$.

7.4.1 Distribution centre-guide dans la limite de Lorentz

Dans la limite de Lorentz $e_i/e_e \equiv Z \gg 1$, les coefficients de l'opérateur collision local (6.2)-(6.3) sont réduits à $D_t = \nu_{ei}p^2/2$ pour la direction transverse (ν_{ei} désignant la fréquence de collision électron-ion) alors que les coefficients longitudinaux ν et D_l sont négligés. L'opérateur collision centre-guide moyenné (7.39)-(7.43) prend aussi une expression simplifiée, avec pour coefficients non nuls :

$$\begin{aligned} D_{\mathrm{L}}^{\xi_0\overline{\psi}} = D_{\mathrm{L}}^{\overline{\psi}\xi_0} &= \epsilon_\psi \delta\psi^{(0)} \frac{\sqrt{1-\xi_0^2}D_t}{p\xi_0 \left\|\boldsymbol{\nabla}\overline{\psi}\right\|_0}, \\ D_{\mathrm{L}}^{\xi_0\xi_0} &= \left[\Delta^\dagger - \epsilon_{\mathrm{B}}\lambda_{\mathrm{gc}}^{(0)\dagger} + \epsilon_\psi\left(\overline{\delta\psi}^{(0)}\frac{\left(1-\xi_0^2\right)}{\xi_0^2} + \delta\psi^{(0)\dagger}\frac{\partial}{\partial\psi}\right)\right] D_t + \mathcal{O}(\epsilon_{\mathrm{B}}^2, \epsilon_\psi^2, \epsilon_{\mathrm{B}}\epsilon_\psi). \end{aligned} \tag{7.45}$$

À l'équilibre, l'équation Fokker-Planck (7.13) prend la forme :

$$\left\langle C_{\mathrm{gc}}\left[F^{(0)}\right]\right\rangle_{\mathcal{O}} = 0. \tag{7.46}$$

En utilisant la représentation en flux (7.20), l'équation devient

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial\overline{\psi}}\left(\mathcal{J}_{\mathcal{O}}\left\|\nabla\overline{\psi}\right\|_0 D_{\mathrm{L}}^{\overline{\psi}\xi_0}\sqrt{1-\xi_0^2}\frac{\partial F^{(0)}}{\partial\xi_0}\right) \\ &+\frac{\partial}{\partial\xi_0}\left(\mathcal{J}_{\mathcal{O}}\sqrt{1-\xi_0^2}\left[D_{\mathrm{L}}^{\xi_0\overline{\psi}}\left\|\nabla\overline{\psi}\right\|_0\frac{\partial F^{(0)}}{\partial\overline{\psi}} - \frac{D_{\mathrm{L}}^{\xi_0\xi_0}}{p}\sqrt{1-\xi_0^2}\frac{\partial F^{(0)}}{\partial\xi_0}\right]\right) = 0. \end{aligned} \tag{7.47}$$

Si l'on effectue un développement $F^{(0)} = F_0 + \epsilon_\psi F_1$ avec $\epsilon_\psi \sim \epsilon_{\mathrm{B}} \ll 1$, on obtient à l'ordre le plus bas $\partial F_0/\partial\xi_0 = 0$. À l'ordre 1 en ϵ_ψ,

$$\frac{\partial F_1}{\partial\xi_0} = \frac{\delta\psi^{(0)}}{\xi_0\Delta^\dagger}\frac{\partial F_0}{\partial\overline{\psi}}. \tag{7.48}$$

Il vient immédiatement $F_1 = 0$ pour les orbites piégées où $\delta\psi^{(0)} = 0$.

En utilisant la définition de ξ_0 (2.43), le coefficient d'orbite $\Delta^\dagger$ est transformé ainsi :

$$\Delta^\dagger \equiv \left\langle\frac{\xi^2}{\xi_0^2\Psi}\right\rangle_{\mathcal{O}} = 1 - \frac{\Delta}{\xi_0^2}, \tag{7.49}$$

où $\Delta = \left\langle 1 - \Psi^{-1}\right\rangle_{\mathcal{O}}$ de telle façon que l'équation (7.48) peut être intégrée formellement en utilisant (7.38), ce qui donne l'expression

$$F_1(\overline{\psi}, p, \xi_0) = \sigma\frac{B_\phi}{B_0}\frac{p}{Ze}\frac{\partial F_0}{\partial\overline{\psi}}H\left[|\xi_0| - \xi_{0T}(\overline{\psi})\right] I\left(\overline{\psi}, |\xi_0|\right). \tag{7.50}$$

H est ici la fonction de Heaviside ($H(x) = 1$ si $x \geq 0$, 0 sinon) et l'intégrale I a pour définition

$$I\left(\overline{\psi}, \xi_0\right) \equiv \frac{\Lambda_{0,-1}}{\Lambda}\int_{\xi_{0T}}^{|\xi_0|}\frac{d\xi_0'}{\lambda(\overline{\psi}, \xi_0')\left(1 - \Delta/\xi_0'^2\right)}. \tag{7.51}$$

L'équation au premier ordre en Z^{-1} montre que F_0 est une maxwellienne de température T et de densité n, d'expression

$$F_0 = \frac{n(\overline{\psi})}{\left[2\pi mT(\overline{\psi})\right]^{3/2}}e^{-p^2/(2mT(\overline{\psi}))}, \tag{7.52}$$

et l'on peut en déduire

$$\frac{\partial\ln F_0}{\partial\overline{\psi}} = \frac{d\ln n}{d\overline{\psi}} + \left(\frac{p^2}{2mT} - \frac{3}{2}\right)\frac{d\ln T}{d\overline{\psi}}. \tag{7.53}$$

7.4.2 Courant « bootstrap »

Le courant « bootstrap » est défini comme la densité de courant moyennée sur une surface de flux obtenue en présence de collisions. Il est calculé ici dans l'approximation de grand rapport d'aspect et l'approximation « orbites fines ». Ceci impose des bornes au domaine radial d'observation. En effet, r doit être suffisamment petit pour que $\varepsilon \equiv r/R \ll 1$ mais assez grand pour que $\epsilon_\psi \equiv \delta\psi/\psi \sim \epsilon_B q_\psi/\varepsilon \ll 1$, soit $\rho_L q_\psi/r \ll 1$ (puisque $L_B \sim R$ dans cette approximation). Le domaine de validité est donc, en divisant par le petit rayon du plasma a : $\rho^* \ll r/a \ll \varepsilon_p^{-1}$, où $\rho^* \equiv \rho_L/a$ est le rayon de Larmor normalisé, $\varepsilon_p^{-1} \equiv R_p/a$ désigne le rapport d'aspect global de la machine et $q_\psi \sim 1$ au centre du plasma. Pour Tore Supra [44], $\rho^* \sim 10^{-2}$ et $\varepsilon_p^{-1} \sim 3$. Pour ITER [20], $\rho^* \sim 10^{-3}$ pour un rapport d'aspect similaire. Dans la pratique, le modèle utilisé sera donc valable pour $r/a \leq \varepsilon_p^{-1}/10 \simeq 0,3$.

Ici, l'échelle $\varepsilon \sim \epsilon_B^{1/2}$ est donc prise de telle façon que $\epsilon_B \ll \varepsilon, \epsilon_\psi \ll 1$. Ainsi, la moyenne sur une surface de flux dans la direction toroïdale [3] de la densité de courant parallèle $J_b = \left\langle \overline{Zev_\parallel \widehat{\mathbf{b}}} \right\rangle_\phi$ prend l'expression

$$J_b(t,\psi) = \frac{2\pi}{dS_\phi/d\psi}\frac{Ze}{m}\int_0^\infty dp\,\frac{p^3}{\gamma}\int_{-1}^1 d\xi_0\xi_0\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{d\theta}{B^\theta}\frac{B^\phi}{B_0(\overline{\psi})}F^{(0)}(t,\overline{\psi},p,\xi_0) \tag{7.54}$$

où $\overline{\psi}$ est fonction de (ψ,θ,p,ξ_0). $F^{(0)} = F_0 + \epsilon_\psi F_1$ est ainsi développée selon l'expansion $\overline{\psi} = \psi - \epsilon_\psi\delta\psi$ de telle façon que

$$F^{(0)}(t,\overline{\psi},p,\xi_0) = F_0(t,\psi,p) + \epsilon_\psi\left[F_1(t,\psi,p,\xi_0) - \delta\psi\frac{\partial F_0}{\partial\psi}(t,\psi,p,\xi_0)\right] \tag{7.55}$$

Puisque $\partial F_0/\partial\xi_0 = 0$, le terme dominant de l'équation (7.55) disparaît dans l'approximation à grand rapport d'aspect pour laquelle $B_0\left(\overline{\psi}\right) \simeq B_0(\psi)$ et $B^\phi \simeq B/R$. Ainsi, le courant (7.54) devient

$$J_b(t,\psi) = 2\pi\epsilon_\psi\frac{\Lambda_{1,0}}{\Lambda_{1,-1}}\frac{Ze}{m}\int_0^\infty dp\,\frac{p^3}{\gamma}\int_{-1}^1 d\xi_0\xi_0\left(\tilde{f}(t,\psi,p,\xi_0) + g(t,\psi,p,\xi_0)\right) \tag{7.56}$$

où l'élément de surface poloïdal a été substitué ; $dS_\phi/d\psi = \Lambda_{1,-1}(\psi)/(R_0B_0)$. Les quantités suivantes sont aussi définies,

$$\begin{aligned}\tilde{f}(t,\psi,p,\xi_0) &\equiv -\langle\delta\psi\rangle_{\bar{\mathcal{O}}}\frac{\partial F_0}{\partial\psi}(t,\psi,p,\xi_0),\\ g(t,\psi,p,\xi_0) &\equiv F_1(t,\psi,p,\xi_0),\end{aligned} \tag{7.57}$$

avec la moyenne sur la direction poloïdale,

$$\langle\cdots\rangle_{\bar{\mathcal{O}}} = \frac{1}{\Lambda_{1,0}}\int_{\theta_1}^{\theta_2}d\theta\frac{R_0}{R}\frac{B}{B^\theta}\cdots. \tag{7.58}$$

La moyenne $\langle\delta\psi\rangle_{\bar{\mathcal{O}}}$ est évaluée en utilisant les définitions (7.36)-(7.37) et en substituant l'équation (7.50), l'on obtient

$$\begin{aligned}\tilde{f}(t,\psi,p,\xi_0) &= -\frac{\Lambda_{1,-1}\lambda_{2,1,-1}}{\Lambda_{1,0}}\frac{p\xi_0 B_\phi}{ZeB_0}\frac{\partial F_0}{\partial\psi},\\ g(t,\psi,p,\xi_0) &= \sigma\frac{B_\phi}{B_0}\frac{p}{Ze}\frac{\partial F_0}{\partial\psi}H\left[|\xi_0| - \xi_{0T}(\psi)\right]I\left(\psi,|\xi_0|\right).\end{aligned} \tag{7.59}$$

Dans la limite non relativiste $\gamma \to 1$,

$$\frac{2\pi}{m}\int_0^\infty dp\,p^4\frac{\partial F_0}{\partial\psi} = \frac{3}{2}n(\psi)T(\psi)\left[\frac{d\ln n}{d\psi} + \frac{d\ln T}{d\psi}\right] \tag{7.60}$$

3. Voir l'équation (I.3) pour la définition (Appendice I)

Ainsi, le courant « bootstrap » dans la limite de Lorentz prend la forme suivante :

$$J_b\left(t,\psi\right) = -\epsilon_\psi F_t^{\text{eff}}(\psi) R_p n(\psi) T(\psi) \left[\frac{d\ln n}{d\psi} + \frac{d\ln T}{d\psi}\right], \tag{7.61}$$

où est introduite la fraction effective de particules piégées,

$$F_t^{\text{eff}}(\psi) \equiv \frac{3}{2}\frac{B_\phi}{R_p B_0}\int_{-1}^{1} d\xi_0 \xi_0 \left(\lambda_{2,1,-1}\xi_0 - \sigma\frac{\Lambda_{1,0}}{\Lambda_{1,-1}} H\left[|\xi_0| - \xi_{0T}(\psi)\right] I\left(\psi, |\xi_0|\right)\right). \tag{7.62}$$

7.4.3 Cas particulier de surfaces de flux circulaires concentriques

Pour des surfaces de flux circulaires concentriques $\psi\left(r\right)$, $d\psi/dr = R_p B_P$ où $B_P(r)$ désigne le champ poloïdal évalué pour $R = R_p$, et l'on peut exprimer l'équation (7.61) de la façon suivante [42] :

$$J_b\left(t,r\right) = -\epsilon_\psi F_t^{\text{eff}}(r)\frac{n(r)T(r)}{B_P(r)}\left[\frac{d\ln n}{dr} + \frac{d\ln T}{dr}\right]. \tag{7.63}$$

Les facteurs géométriques (7.37) $\Lambda_{l,m} = \Lambda_{l+m,0}$ peuvent être déterminés analytiquement avec les expressions

$$\begin{aligned} \Lambda(r) &= 2\pi B/B^\theta, \\ \Lambda_{-1,0}(r) &= \frac{\Lambda}{1+\varepsilon}, \\ \Lambda_{1,0}(r) &= \Lambda\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}} \simeq \Lambda\left(1+\varepsilon\right), \end{aligned} \tag{7.64}$$

et les coefficients d'orbite (7.36) $\lambda_{k,l,m}(r,\xi_0) = \lambda_{k,l+m,0}(r,\xi_0)$ avec

$$\int_{-1}^{1} d\xi_0 \xi_0^2 \lambda_{2,0,0}(r,\xi_0) = \frac{2}{3}\frac{1}{1+\varepsilon}. \tag{7.65}$$

Ainsi, pour des surfaces de flux circulaires concentriques, la fraction effective de particules piégées devient

$$F_t^{\text{eff}}(r) \equiv 1 - \frac{3}{2}\int_{-1}^{1} d\xi_0 \xi_0 \sigma H\left[|\xi_0| - \xi_{0T}(r)\right] I\left(r, |\xi_0|\right), \tag{7.66}$$

et l'intégrale I (7.51) a une expression familière [42, 24],

$$I\left(r,\xi_0\right) \equiv \frac{1}{1+\varepsilon}\int_{\xi_{0T}}^{|\xi_0|} \frac{d\xi_0'}{\lambda(r,\xi_0')\left(1-\Delta/\xi_0'^2\right)}. \tag{7.67}$$

Une intégration numérique [46, 14] montre que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} F_t^{\text{eff}}(r) = 1.46\sqrt{\varepsilon} + \mathcal{O}\left(\varepsilon\right), \tag{7.68}$$

et le résultat de Rosenbluth [42] est retrouvé.

7.5 Résumé du chapitre

Dans ce chapitre, l'opérateur centre-guide obtenu dans le chapitre 6 est moyenné sur les orbites de centre-guide dans l'approximation de faible collisionnalité, permettant une description de l'évolution de la distribution moyennée indépendante de l'angle poloïdal θ. L'approximation « orbites fines » (chapitre 6) permet d'exprimer l'opérateur sous forme conservative. Dans le cas d'un opérateur à fond isotrope, on obtient des coefficients de collision comportant des coefficients d'orbite indépendants de la distribution de fond qui contiennent entièrement la dynamique moyennée. Enfin, le calcul explicite du courant « bootstrap » dans la limite de Lorentz présenté correspond aux résultats trouvés dans la littérature.

Chapitre 8

Conclusion

Dans le cadre de l'évolution du code cinétique LUKE dédié à la génération de courant dans les tokamaks, un travail rigoureux sur le plan mathématique a été entrepris afin de prendre en compte les effets néoclassiques dont le rôle doit être important dans les plasmas de fusion, lorsque la pression cinétique devient élevée. Le formalisme des transformées de Lie (chapitre 3) a fourni le cadre nécessaire pour atteindre cet objectif, à savoir obtenir une expression explicite de l'équation de Fokker-Planck centre-guide, qui possède les propriétés requises pour une implémentation numérique aisée. Notamment, le système de coordonnées utilisées coïncide avec celui de la version actuelle de LUKE dans la limite classique (orbite de largeur nulle), ce qui évite une réécriture complète du code pour prendre en compte ces nouveaux effets dans le cas général. En d'autres termes, le système de coordonnées classiques a été généralisé à un système d'invariants globaux (chapitre 2) permettant une caractérisation univoque des orbites de centre-guide. A noter qu'une description angle-action plus traditionnelle, telle que celle employée par Bernstein et Molvig [6] n'a pas été adoptée, car les coordonnées correspondantes ne sont pas adaptées au calcul numérique, n'ayant pas d'expression analytique simple. Par ailleurs, le système de coordonnées choisi permet d'étendre les capacités du code LUKE à l'étude de la dynamique de particules dans une configuration magnétique dipolaire , tant pour la validation du code lui-même que pour une usage consacré à la physique des plasmas de l'espace. En effet, l'absence de champ magnétique toroïdal fait que les diverses contributions dues à la non-uniformité magnétique s'annulent et le flux magnétique poloïdal est alors un invariant naturel du problème.

De plus, concernant la dynamique dans un champ magnétique dipolaire et dans le cadre du formalisme considéré, les périodes d'orbites et de précession des centres-guides ont été calculées explicitement (chapitre 4), ce qui constitue un travail original, celles-ci étant déterminées jusqu'à présent à partir de régressions numériques [21].

Après avoir revisité les calculs de l'opérateur de collision dans diverses limites (chapitre 5), l'application de la transformée de Lie a permis d'obtenir un opérateur de collision centre-guide relativiste pour une distribution de particules de fond pouvant être anisotrope (chapitre 6). Ce résultat est particulièrement important pour le calcul précis du courant circulant dans le plasma. Dans la limite de faible collisionalité, il est possible d'effectuer une moyenne supplémentaire sur les orbites (chapitre 7), ce qui conduit à la formulation explicite à trois dimensions de l'équation de Fokker-Planck relativiste. Dans le cas général - orbites larges -, l'équation n'a pas une forme conservative. Cependant, le terme linéaire ne constitue probablement pas une difficulté numérique significative, tant qu'il reste faible par rapport aux autres termes, ce qui est probablement le cas, puisque dans la limite des orbites fines, celui-ci est nul à l'ordre le plus bas. Il est donc peu probable qu'il soit à l'origine d'une instabilité numérique même en étant traité de manière explicite.

Dans la limite « orbite fine », l'équation de Fokker-Planck retrouve une forme conservative analogue à celle de l'approche classique (orbite de largeur nulle), ce qui garantit un traitement numérique aisé, grâce à une discrétisation sur une double grille (flux et fonction de distribution) [14]. A noter que dans cette limite, la frontière entre les particules circulantes et celles piégées est indépendante de l'énergie, et ne dépend que de la coordonnée de position caractérisant l'orbite, malgré la nature non-locale de celle-ci.

Le calcul effectué permet de décrire la très grande majorité des orbites dans un plasma de tokamak (circulantes et piégées), mais il ne prend pas en compte les orbites exotiques près du centre du plasma pour lesquelles la frontière entre les différents types est considérablement plus complexe [17]. Ces orbites entrent en jeu lorsque l'excursion radiale est de l'ordre du petit rayon du plasma. En utilisant l'expression de la largeur d'une orbite « banane » [23] $\Delta r \simeq \rho_{\mathrm{L}} q_\psi / \sqrt{\varepsilon}$, la relation $r \gtrsim \Delta r$ donne une contrainte inférieure sur l'inverse du rapport d'aspect local : $\varepsilon \equiv r/R \gtrsim \left(\epsilon_{\mathrm{B}} q_\psi\right)^{2/3}$. La borne inférieure du petit rayon normalisé est donc $r/a \gtrsim \left(\epsilon_{\mathrm{B}} q_\psi\right)^{2/3} / \varepsilon_{\mathrm{p}}$ en utilisant l'inverse du rapport d'aspect $\varepsilon_{\mathrm{p}} \equiv a/R_0$. Cette formule dépendant du rayon de Larmor, la frontière sera plus importante pour les ions. À titre d'exemple, pour un plasma de deutérium à une température ionique et électronique de 10 keV et dans un champ magnétique de 5.3 Teslas, les rayons de Larmor respectifs donnent $\rho_{\mathrm{L}e} \simeq 4.5 \times 10^{-5}$m et $\rho_{\mathrm{L}i} \simeq 2.7 \times 10^{-3}$m. En utilisant les dimensions d'ITER ($R_0 \simeq 6.2$m et $a \simeq 2$m), on obtient $r/a \gtrsim 2 \times 10^{-2}$ pour $q_\psi \sim 1$. Les résultats sont donc valides dans ce cas pour une région éloignée de l'ordre d'une dizaine de centimètres de l'axe magnétique pour les ions thermiques. Pour les ions énergétiques résultant d'un chauffage résonant ou des réactions nucléaires, la contrainte est plus sévère, le rayon de Larmor croissant comme la racine carrée de l'énergie. Dans ce cas, une approche statistique de type Monte-Carlo pour cette population est probablement la plus adaptée compte tenu de la complexité topologique des frontières entre les différents types d'orbites. Pour les électrons, la borne inférieure ($r/a \gtrsim 10^{-3}$) est nettement plus faible, donc le calcul effectué est valable dans une très large région du plasma.

Enfin, le domaine d'application des calculs est restreint à la zone des gradients dans un plasma de tokamak, domaine où l'hypothèse de faible collisionalité est en général valable. Au bord du plasma, une telle approche n'est probablement plus envisageable car la collisionalité est souvent trop élevée pour effectuer une moyenne éliminant la dépendance poloïdale. Dans ce cas, l'équation de Fokker-Planck centre-guide comporte quatre dimensions, et le terme dominant correspond à la dynamique parallèle le long de la ligne de champ, ce qui est un problème complètement différent.

La validation générale de la méthode employée est assurée par le calcul ultime du courant « bootstrap » qui peut être effectué de manière complète analytiquement avec l'opérateur de collision de Lorentz dans la limite « orbite fine » (chapitre 7). On retrouve ainsi les résultats bien connus obtenus par Rosenbluth avec une approche distincte [42].

L'ensemble des travaux menés constitue une étape intermédiaire mais indispensable pour le calcul de la génération de courant sous l'effet d'un champ électrique statique induit par le circuit primaire d'un tokamak (régime Ohmique), ou oscillant (onde radio-fréquence, régime non-inductif). Un calcul analogue employant le même système de coordonnées et le même formalisme des transformées de Lie pour les opérateurs décrivant les interactions entre les particules et les champs permettra d'achever le travail et d'obtenir un outil complet adapté aux enjeux des réacteurs de fusion.

Bibliographie

[1] J. F. Artaud, V. Basiuk, F. Imbeaux, M. Schneider, J. Garcia, G. Giruzzi, P. Huynh, T. Aniel, F. Albajar, J. M. Ane, A. Bécoulet, C. Bourdelle, A. Casati, L. Colas, J. Decker, R. Dumont, L.G. Eriksson, X. Garbet, R. Guirlet, P. Hertout, G. T. Hoang, W. Houlberg, G. Huysmans, E. Joffrin, S.H. Kim, F. Köchl, J. Lister, X. Litaudon, P. Maget, R. Masset, B. Pégourié, Y. Peysson, P. Thomas, E. Tsitrone, and F. Turco. The CRONOS suite of codes for integrated tokamak modelling. *Nucl. Fusion*, 50(4), APR 2010.

[2] G. Audi, O. Bersillon, J. Blachot, and A.H. Wapstra. The nubase evaluation of nuclear and decay properties. *Nuclear Physics A*, 729 :3–128, 2003.

[3] A. Bécoulet, P. Strand, H. Wilsonc, M. Romanelli, L.-G. Eriksson, and The contributors to the European Task Force on Integrated Modelling Activity. The way towards thermonuclear fusion simulators. *Comp. Phys. Comm.*, 177 :55–59, 2007. Reference ITM.

[4] S.T. Beliaev and G.I. Budker. *Sov. Phys. Dokl.*, 1 :218, 1956.

[5] V.B. Berestetskii, E.M. Lifshitz, and L.P. Pitaevskii. *Relativistic Quantum Theory*, volume 4 of *Course of theoretical physics*. Pergamon, 1971.

[6] I. B. Bernstein and K. Molvig. Lagrangian formulation of neoclassical transport theory. *Phys. Fluids*, 26(6) :1488–1507, 1983.

[7] N. N. Bogoliubov. Kinetic equations. *Journal of Physics USSR*, 10(3) :265–274, 1946.

[8] M. Born and H. S. Green. A general kinetic theory of liquids. i. the molecular distribution functions. *Royal Society of London Proceedings Series A*, 188 :10–18, 1946.

[9] T. J. M. Boyd and J. J. Sanderson. *The Physics of Plasmas*. Cambridge University Press, 2003.

[10] B.J. Braams and C.F.F Karney. Conductivity of a relativistic plasma. *Phys. Fluids B*, 1(7) :1355–1368, 1989.

[11] A. J. Brizard, J. Decker, Y. Peysson, and F. X. Duthoit. Orbit-averaged guiding-center fokker-planck operator. *Phys. Plasmas*, 16(10) :102304, OCT 2009.

[12] A.J. Brizard. A guiding-center fokker-planck collision operator for nonuniform magnetic fields. *Phys. Plasmas*, 11(9) :4429–4438, 2004.

[13] A.J. Brizard and A. Mishchenko. Guiding-center recursive Vlasov and Lie-transform methods in plasma physics. *J. Plasma Physics*, 75(5) :675–696, 2009.

[14] J. Decker and Y. Peysson. DKE : A fast numerical solver for the 3D drift kinetic equation. report EUR-CEA-FC-1736, Euratom-CEA, 2004.

[15] J. Decker, Y. Peysson, A. J. Brizard, and F.-X. Duthoit. Orbit-averaged guiding-center Fokker-Planck operator for numerical applications. *Phys. Plasmas*, 17(11) :112513, 2010.

[16] J. Decker, Y. Peysson, A. J. Brizard, and F.-X. Duthoit. Orbit-averaged guiding-center Fokker-Planck operator for numerical applications in axisymmetric toroidal plasmas. In The editor field must be built in the standard Latex way : editors must be separated by a and , editors, *37^{th} EPS Conference on Plasma Phys. and Cont. Fusion*, pages P5–148, 2010.

[17] L.-G. Eriksson and F. Porcelli. Dynamics of energetic ion orbits in magnetically confined plasmas. *Plasma Phys. Control. Fusion*, 43 :R145–R182, 2001.

[18] N.J. Fisch. Theory of current drive in plasmas. *Rev. Mod. Phys.*, 59(1) :175–234, 1987.

[19] H. Goldstein, C. Poole, and J. Safko. *Classical Mechanics*. Addison Wesley, 2000.

[20] C. Gormezano, A. C. C. Sips, T. C. Luce, S. Ide, A. Bécoulet, X. Litaudon, A. Isayama, J. Hobirk, M. R. Wade, T. Oikawa, R. Prater, A. Zvonkov, B. Lloyd, T. Suzuki, E. Barbato, P. Bonoli, and C. K. Phillips an. Iter review. chapter 6 : Steady state operation. *Nuc. Fusion*, 47 :S285–S336, 2007.

[21] D. A. Hamlin, R. Karplus, R. C. Vik, and K. M. Watson. Mirror and azimuthal drift frequencies for geomagnetically trapped particles. *J. Geophys. Res.*, 66(1) :1–4, 1961.

[22] E. Haug. Bremsstrahlung energy loss of electrons passing through a plasma. *Astronomy & Astrophysics*, 2004.

[23] F.L. Hinton and R.D. Hazeltine. Theory of plasma transport in toroidal confinement systems. *Rev. Mod. Phys.*, 48(2) :239–308, 1976.

[24] S.P. Hirshman and D.J. Sigmar. Neoclassical transport of impurities in tokamak plasmas. *Nucl. Fusion*, 21(9) :1079–1119, 1981.

[25] J.D. Huba. *NRL Plasma Formulary*. Naval Research Laboratory, 2006.

[26] C.F.F. Karney. Fokker-Planck and quasilinear codes. *Comp. Phys. Rep.*, 4 :183–244, 1986.

[27] J. G. Kirkwood. The statistical mechanical theory of transport processes i. general theory. *J. Chem. Phys.*, 14(3) :180–201, 1946.

[28] J. G. Kirkwood. The statistical mechanical theory of transport processes ii. transport in gases. *J. Chem. Phys.*, 15(1) :72–76, 1947.

[29] L. D. Landau. Die kinetische Gleichung für den Fall Coulombscher Wechselwirkung. *Phys. Z. Sowjet.*, 10 :154–164, 1936.

[30] L. D. Landau and E. M. Lifshitz. *Mechanics*, volume 1 of *Course of Theoretical Physics*. Pergamon, 3ed edition, 1976.

[31] E. M. Lifshitz and L. P. Pitaevskii. *Physical Kinetics*, volume 10 of *Course of Theoretical Physics*. Oxford, 1981.

[32] X. Litaudon and Equipe Tore Supra. Stationary regimes of improved confinement in tore supra. *Plasma Phys. Control. Fusion*, 38 :A251–A268, 1996.

[33] R.G. Littlejohn. Hamiltonian formulation of guiding center motion. *Phys. Fluids*, 24 :1730–1749, 1981.

[34] R.G. Littlejohn. Hamiltonian perturbation theory in noncanonical coordinates. *J. Math. Phys.*, 23(5) :742–747, 1982.

[35] P. M. Morse and H. Feshbach. *Methods of Theoretical Physics, Part I.* McGraw-Hill, 1953.

[36] Y. Peysson, V. Basiuk, C. Fourment, G. Huysmans, X. Litaudon, D. Mazon, and F. Rimini. *Towards Steady-State Sustainment of Electron Transport Barrier in Tore Supra*, volume 4 of *Advances in Plasma Physics Research*. Nova Science Publisher, Inc., New York, 2003.

[37] Y. Peysson and J. Decker. Rf current drive calculations for integrated tokamak modeling. In *Poster at the 13th European Fusion Theory Conference in Riga ; available online*, 2009.

[38] Y Peysson, J Decker, V Basiuk, A Bers, G Huysmans, and AK Ram. RF current drive in internal transport barrier. In Wukitch, SJ and Bonoli, PT, editor, *Radio Frequency Power in Plasmas*, volume 787 of *AIP CONFERENCE PROCEEDINGS*, pages 269–272, 2005. 16th Topical Conference on Radio Frequency Power in Plasmas, Park City, UT, APR 11-13, 2005.

[39] P. A. Polyakov. Bogolyubov (bbgky) hierarchy in classical relativistic electrodynamics. *Teoret. Mat. Fiz.*, 76(3) :393–400, 1988.

[40] P. H. Rebut, D. Boucher, C. Gormezano, B. E. Keen, and M. L. Watkins. A fusion reactor : continuous or semi-continuous ? *Plasma Phys. Control. Fusion*, 35 :A3–A14, 1993.

[41] D. C. Robinson. The present role of small tokamaks. *Plasma Phys. Control. Fusion*, 35 :B91–B104, 1993.

[42] M. N. Rosenbluth, R. D. Hazeltine, and F. L. Hinton. Plasma transport in toroidal confinement systems. *Phys. Fluids*, 15(1) :116–140, 1972.

[43] M. N. Rosenbluth, W. M. MacDonald, and D. L. Judd. Fokker-Planck equation for an inverse-square force. *Phys. Rev.*, 107(1) :1–6, 1957.

[44] B. Saoutic, M. Chatelier, and C. de Michelis. Tore supra : toward steady state in a superconducting tokamak. *Fusion Sci. Technol.*, 56(3) :1079–1091, 2009.

[45] S. D. Schultz, A. Bers, and A. K. Ram. Combined rf current drive and bootstrap current in tokamaks. In *13th topical conference on radio frequency power in plasmas*, volume 485 of *AIP Conference Proceedings*, pages 317–320, 1999.

[46] S.D. Schultz. *Lower Hybrid and Electron Cyclotron Current Drive With Bootstrap Current in Tokamaks*. PhD thesis, MIT, 1999.

[47] I.P. Shkarofsky and M.M. Shoucri. Modelling of lower hybrid current drive in the presence of spacial radial diffusion. *Nucl. Fusion*, 37(4) :539–547, 1997.

[48] J. G. Simmonds. *A brief on tensor analysis*. Springer, 1994.

[49] T. S. Taylor. Physics of advanced tokamak. *Plasma Phys. Control. Fusion*, 39(12B) :B47–B73, 1997.

[50] F. Wagner et al. Regime of improved confinement and high beta in neutral-beam-heated divertor discharges of the asdex tokamak. *Phys. Rev. Lett.*, 49(19) :1408–1412, 1982.

[51] J. Wesson. *Tokamaks*. The International Series of Monographs on Physics. Clarendon Press, third edition, 2004.

[52] J. Yvon. *Theorie Statistique des Fluides et l'Equation d'Etat*, volume 203 of *Actes scientifiques et industrie*. Hermann, 1935.

Liste de publications

Articles

- A. J. Brizard, J. Decker, Y. Peysson et F. -X. Duthoit, "Orbit-averaged guiding-center Fokker-Planck operator", *Phys. Plasmas*, 102304 (2009)
- F.-X. Duthoit, A. J. Brizard, Y. Peysson et J. Decker, "Perturbation analysis of trapped-particle dynamics in axisymmetric dipole geometry", *Phys. Plasmas*, 102903 (2010)
- J. Decker, Y. Peysson, A. J. Brizard et F.-X. Duthoit, "Orbit-averaged guiding-center Fokker-Planck operator for numerical applications", *Phys. Plasmas*, 112513 (2010)
- F.-X. Duthoit, Y. Peysson, J. Decker et A. J. Brizard, "Orbit-averaged guiding-center Fokker-Planck operator with an anisotropic background particle field", en projet de publication

Conférences

- F.-X. Duthoit, A. J. Brizard, Y. Peysson et J. Decker, "Lie-transform Perturbation Analysis of Trapped-particle Dynamics in Axisymmetric Dipole Geometry", *International Sherwood Fusion Theory Conference* (2010).
- J. Decker, Y. Peysson, A. J. Brizard et F.-X. Duthoit, "Orbit-averaged guiding-center Fokker-Planck operator for numerical applications in axisymmetric toroidal plasmas", *37th EPS Conference on Plasma Physics* (2010)
- F.-X. Duthoit, A. J. Brizard, J. Decker et Y. Peysson, "Orbit-averaged guiding-center Fokker-Planck operator with an anisotropic background particle field", *38th EPS Conference on Plasma Physics* (2011)

Annexe A

Introduction à la fusion

A.1 Les plasmas de fusion et les tokamaks

A.1.1 La réaction de fusion

C'est une propriété bien connue que la masse des noyaux atomiques est inférieure à la somme des masses des protons et neutrons (appelés « nucléons ») les constituant [2]. Ceci est dû à l'intéraction forte qui, à petite échelle (moins de 10^{-15}m), contrebalance l'effet de répulsion coulombienne et assure la cohésion du noyau. Ce défaut de masse est équivalent à une énergie de liaison obtenue en multipliant par le carré de la vitesse de la lumière selon la formule d'Einstein $E = mc^2$. Cette énergie de liaison varie de 1 à 9 MeV (voir figure A.1) et atteint un maximum par nucléon lié à la difficulté croissante avec l'augmentation du nombre de protons à contrecarrer la force de Coulomb. De plus en plus de neutrons sont nécessaires pour garder la cohérence du noyau à grand nombre de nucléons, ce qui rend celui-ci propice à la *fission* en plusieurs noyaux plus stables. L'énergie de liaison excédentaire est ainsi relâchée et c'est le principe utilisé dans les centrales nucléaires classiques actuelles. De façon alternative, le rapprochement de noyaux atomiques de faible masse de façon à vaincre la répulsion coulombienne permet une réaction de *fusion* produisant un noyau de numéro atomique supérieur.

Comme il est montré dans la figure A.1, les énergies mises en oeuvre pour la fusion des isotopes de l'hydrogène dépassent d'un facteur dix celles de la fission de l'uranium en éléments plus légers. C'est le processus dominant au sein des étoiles, où la gravité permet de maintenir les conditions de température et de pression nécessaires pour vaincre la répulsion colombienne entre les noyaux d'hydrogène positifs. Ces conditions n'étant pas reproductibles sur Terre, les programmes civils de recherche sur la fusion ont pour ambition de développer des moyens alternatifs pour réaliser des réactions de fusion.

La réaction présentant la plus grande section efficace (représentée dans la figure A.2) dans les conditions de laboratoire est la fusion deutérium-tritium (D-T),

$$ {}^{2}_{1}\mathsf{D} + {}^{3}_{1}\mathsf{T} \;\rightarrow\; {}^{4}_{2}\mathsf{He} + {}^{1}_{0}\mathsf{n}, \tag{A.1} $$

qui donne un noyau d'hélium d'énergie 3,56 MeV et un neutron d'énergie 14,03 MeV. Les réactifs possèdent l'avantage d'être abondants dans la nature dans le cas du deutérium (« eau lourde », présente dans l'eau de mer) ou facilement synthétisables dans le cas du tritium à partir du lithium 6 ou du lithium 7, selon les réactions :

$$ {}^{6}_{3}\mathsf{Li} + {}^{1}_{0}\mathsf{n} \;\rightarrow {}^{3}_{1}\mathsf{T} + {}^{4}_{2}\mathsf{He}, \tag{A.2} $$

$$ {}^{7}_{3}\mathsf{Li} + {}^{1}_{0}\mathsf{n} \;\rightarrow {}^{3}_{1}\mathsf{T} + {}^{4}_{2}\mathsf{He} + {}^{1}_{0}\mathsf{n}. \tag{A.3} $$

Celles-ci permettent de réutiliser les neutrons produits dans la réaction de fusion et de produire une partie des combustibles sur place.

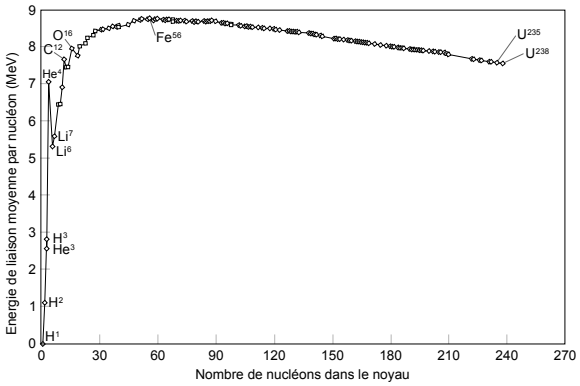


Figure A.1 – Énergie de liaison d'un noyau atomique en fonction du nombre de nucléons, obtenue à partir des masses atomiques [2]. Les éléments plus légers que le fer seront plus propices à la fusion, les éléments plus lourds à la fission.

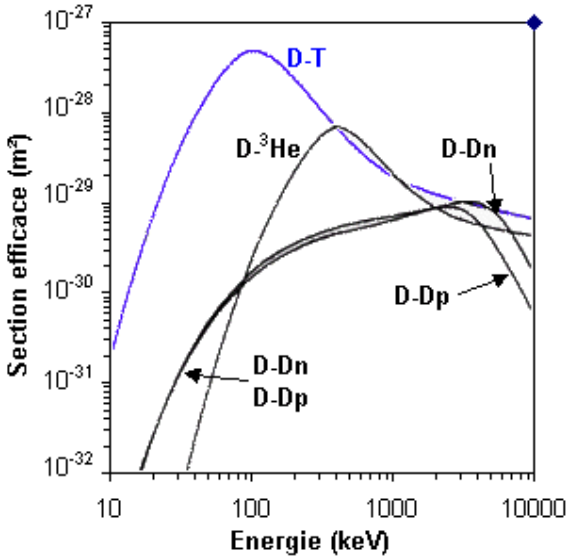


Figure A.2 – Section efficace de plusieurs réactions de fusion en fonction de la température. Les températures recherchées des particules dans un plasma de fusion de laboratoire sont de l'ordre de 10 keV.

A.1.2 Confinement d'un plasma de fusion

A.1.2.1 Critère de Lawson

Afin de maximiser la probabilité de réaction de fusion entre deux noyaux et d'isoler thermiquement les réactifs, le plasma doit être confiné. Pour une réaction à deux espèces, la puissance volumique perdue P_{pertes} par agitation thermique est calculée en utilisant la densité électronique n_{e} et les densités des noyaux réactifs n_1 et n_2, portées à la température de réaction T_{r} en électron-volts. La densité d'énergie stockée sous forme d'agitation thermique donnée par les lois de la thermodynamique $W = \frac{3}{2}\left(n_e + n_1 + n_2\right) T_{\text{r}}$ et le temps de confinement τ_{E} donnent

$$P_{\text{pertes}} = \frac{W}{\tau_{\text{E}}}. \tag{A.4}$$

La puissance volumique produite par une réaction de fusion P_{r} est obtenue à partir de l'énergie libérée E_r pour une réaction et $\langle \sigma v \rangle$ la moyenne du produit entre la section efficace et la vitesse

relative entre les noyaux,

$$P_{\mathrm{r}} = E_{\mathrm{r}} n_1 n_2 \langle \sigma v \rangle \,. \tag{A.5}$$

Le critère de Lawson exprime que la puissance produite par les réactions de fusion doivent excéder les pertes par agitation thermique : $P_{\mathrm{r}} > P_{\mathrm{pertes}}$. Dans le cadre d'une réaction deutérium-tritium d'abondance identique $n_1 = n_2 = n_{\mathrm{e}}/2$ Ainsi, la densité électronique n_{e} et le temps de confinement τ_{E} doivent satisfaire une condition dépendant de la température T_{r},

$$n_{\mathrm{e}} \tau_{\mathrm{E}} \;>\; 12 \frac{T_{\mathrm{r}}}{E_{\mathrm{r}} \langle \sigma v \rangle}, \tag{A.6}$$

qui vaut environ$10^{14}\,\mathrm{s\,cm^{-3}}$ pour $T_{\mathrm{r}} \sim 10\,\mathrm{keV}$ (voir figure A.2).

A.1.2.2 Méthodes de confinement

Deux méthodes principales ont été explorées afin d'obtenir ce confinement :

- La **fusion par confinement inertiel** vise une haute densité ($n_e \sim 10^{26}\,\mathrm{cm^{-3}}$) pour un confinement très court ($\tau_E \sim 10^{-11}\,\mathrm{s}$). Le plasma est créé à partir d'un glaçon de D-T comprimé par des lasers à haute énergie ou par striction magnétique. Elle est spécialement adaptée pour les simulations d'explosions de bombes thermonucléaires, aussi les applications militaires sont très développées dans ce domaine. Un exemple de machine est le Laser Méjajoule (Bordeaux, France).
- La **fusion par confinement magnétique** cherche un temps de confinement élevé ($\tau_E \sim 10 - 10^3\,\mathrm{s}$), utilisant la dynamique de gyration d'une particule chargée autour d'une ligne de champ magnétique. La faible densité du plasma ($n_e \sim 10^{14}\,\mathrm{cm^{-3}}$) permet de réduire l'effet du transport induit par les collisions. Les machines utilisant cette méthode consistent en une chambre de plasma entourée de bobines magnétiques. Des exemples incluent les configuration tokamak, qui sont exposées plus loin.

Pour assurer le confinement en trois dimensions des particules chargées, on peut montrer que la configuration magnétique la plus simple doit être topologiquement équivalente à un tore. Ceci est dû au libre parcours moyen entre deux collisions λ_ν, qui peut être calculé en effectuant le rapport de la fréquence caractéristique de collision ν et la vitesse thermique $v_{\mathrm{th}} = \sqrt{T\,(\mathrm{eV})\,/m}$ d'une particule de plasma. En utilisant les expressions de la référence [25] dans le cas d'une population ionique et électronique à l'équilibre thermique, les fréquences ionique et électroniques ont pour forme

$$\nu_e = 2.9 \times 10^6 n \,\ln\Lambda\, T_{\mathrm{e}}^{-3/2}\ \mathrm{sec}^{-1}, \tag{A.7}$$

$$\nu_i = 4.8 \times 10^8 n \,\ln\Lambda\, T_{\mathrm{e}}^{-3/2}\ \mathrm{sec}^{-1}, \tag{A.8}$$

où $\ln\Lambda \sim 10 - 20$ est le logarithme coulombien abordé plus en détail dans le chapitre 5. Aux densités et températures ($n \sim 10^{20}\mathrm{m}^{-3}$, $T \sim 10\mathrm{keV}$) citées pour le confinement magnétique, le libre parcours moyen devient

$$\lambda_{\nu e} = 2.4 \times 10^4\ \mathrm{m}, \tag{A.9}$$

$$\lambda_{\nu i} = 3.4 \times 10^4\ \mathrm{m}. \tag{A.10}$$

Cette distance est bien supérieure à l'échelle des machines expérimentales (de l'ordre du mètre), les lignes de champ magnétiques doivent donc être repliées sur elles-mêmes pour permettre aux particules Dans la pratique, le champ magnétique est créé avec deux composantes : un champ toroidal, générée par des bobines entourant la chambre torique et un champ poloidal qui peut provenir de différentes sources. Le résultat est une configuration hélicoïdale, les lignes de champ s'enroulant le long d'une surface de flux magnétique.

En 1950, Lyman Spitzer invente le concept de stellarator qui consiste à créer le champ poloidal en tordant les bobines toroidales de façon à avoir un plasma en forme de bande toroidale enroulée. Outre la complexité de la configuration magnétique, les intrusions d'impuretés dans ce type de machines sont importantes. La levée du secret défense sur les recherches en fusion puis l'annonce lors de la troisième conférence de l'IAEA en 1968 de résultats encourageants sur la machine soviétique

T-4 ouvre l'ère des tokamaks (**то**роидальная **ка**мера с **ма**гнитными **к**атушками, ou chambre toroidale avec bobines magnétiques). Ici, le champ magnétique poloidal est créé par le plasma lui-même, en générant un courant dans la direction toroidale. Les tokamaks existent sous de formes très variées, allant des tokamaks sphériques (MAST) aux plasmas à section circulaire (Tore Supra) ou à très forte triangularité (D-IIID).

A.1.2.3 Rendement énergétique

En vue de pouvoir réaliser un réacteur de fusion efficace, il faut que le rapport

$$Q = \frac{P_{\mathrm{r}}}{P_{\mathrm{ext}}}, \tag{A.11}$$

appelé facteur de qualité, entre la puissance produite P_{r} par les fusions entre noyaux et la puissance injectée dans le plasma P_{ext} soit supérieur à 1. Si la puissance de fusion suffit à entretenir les réactions consécutives, Q devient infini : c'est l'ignition, le plasma ne nécessitant plus d'apport externe d'énergie. Un réacteur industriel cherche à maximiser ce rendement, afin de pouvoir rivaliser en efficacité énergétique avec les méthodes actuelles de production d'énergie. L'atteinte d'un facteur $Q = 10$ est un des buts de la machine expérimentale ITER.

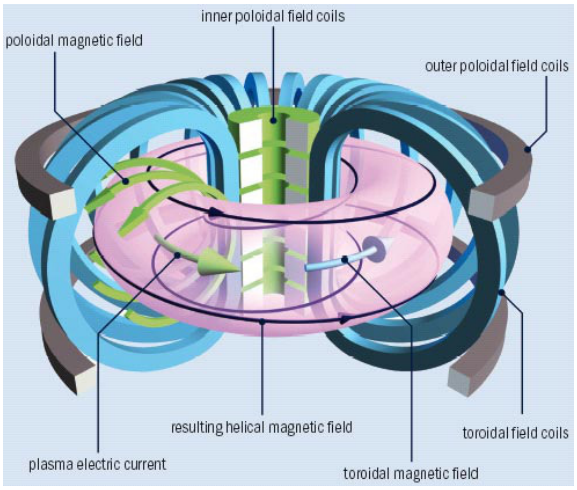


Figure A.3 – Représentation schématique d'un tokamak. Le champ magnétique toroidal est assuré par les bobines situées dans le plan poloïdal et une partie du courant est générée par le solénoïde central. Les bobines toroïdales servent à contrôler la forme du plasma.

A.1.2.4 Création du champ poloïdal

Pour le bon fonctionnement d'une configuration tokamak, la génération du champ poloïdal est très importante. Plusieurs sources permettent de fournir le courant nécessaire au sein du plasma :

- Un **solénoïde central** permet d'introduire un courant par induction, le plasma servant de secondaire. Comme le courant ohmique ainsi généré n'est généralement pas suffisant,
- L'utilisation d'**ondes radiofréquence** couplées au plasma à l'aide d'antennes en utilisant les résonances cyclotroniques (ionique ou électronique) ou par résonance cinétique Landau (fréquence hybride) injecte de la puissance et induit un courant supplémentaire. Enfin,
- Le **transport de particules** au sein du plasma peut introduire un courant intrinsèque. C'est le cas du courant « bootstrap », présent lors de forts gradients de pression.

La génération de courant due au transport collisionnel est d'une importance particulière pour le réacteur ITER, car il est prévu que le « boostrap » constitue l'essentiel (plus de 60%) du courant produit.

Appendix B

A vector derivation of the combined gradient and curvature drift

We start here with a particle moving in a static magnetic field $\mathbf{B} = B\widehat{\mathbf{b}}$ with velocity $\mathbf{v} = v_\parallel \widehat{\mathbf{b}} + \mathbf{v}_\perp$. The equation of motion of the particle reads

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\mu\nabla B + q\mathbf{v}_\perp \times \widehat{\mathbf{b}}, \tag{B.1}$$

where the two force terms correspond to the "magnetic mirror" effect and the magnetic Lorentz force. The perpendicular velocity $\mathbf{v}_\perp$ is expressed as a gyrokinetic component and a drift velocity:

$$\mathbf{v}_\perp = \mathbf{v}_{\perp 0} + \mathbf{v}_d. \tag{B.2}$$

The variation of $\mathbf{v}_d$ is assumed small compared to $v_\parallel$, i.e. $|d\mathbf{v}_d/dt| \ll \left|dv_\parallel/dt\right|$. The gyrokinetic component is solution to the equation

$$m\frac{d\mathbf{v}_{\perp 0}}{dt} = q\mathbf{v}_{\perp 0} \times \widehat{\mathbf{b}}, \tag{B.3}$$

and Eq. (B.1) therefore becomes

$$m\frac{d\mathbf{v}_\parallel}{dt} = -\mu\nabla B + q\mathbf{v}_d \times \widehat{\mathbf{b}}. \tag{B.4}$$

The cross product of $\widehat{\mathbf{b}}$ with the equation gives

$$m\widehat{\mathbf{b}} \times \frac{d\mathbf{v}_\parallel}{dt} = -\mu\widehat{\mathbf{b}} \times \nabla B + q\widehat{\mathbf{b}} \times \left(\mathbf{v}_d \times \widehat{\mathbf{b}}\right). \tag{B.5}$$

Using the formula for a double cross product $\widehat{\mathbf{b}} \times \left(\mathbf{v}_d \times \widehat{\mathbf{b}}\right) = \left(\mathbf{v}_d \cdot \widehat{\mathbf{b}}\right)\widehat{\mathbf{b}} - (\mathbf{b}\cdot\mathbf{B})\,\mathbf{v}_d = B\mathbf{v}_d$, the following expression is deduced:

$$\mathbf{v}_d = \frac{m}{qB}\widehat{\mathbf{b}} \times \frac{d\mathbf{v}_\parallel}{dt} + \frac{\mu}{qB}\widehat{\mathbf{b}} \times \nabla B, \tag{B.6}$$

using $d\mathbf{v}_\parallel/dt = \left(dv_\parallel/dt\right)\widehat{\mathbf{b}} + \left(v_\parallel^2/R\right)\widehat{\mathbf{n}}$ where $\mathbf{R} = R\widehat{\mathbf{n}}$ is the curve radius of the magnetic field. The equation becomes

$$\mathbf{v}_d = \frac{mv_\parallel^2}{qB}\frac{\widehat{\mathbf{b}} \times \widehat{\mathbf{n}}}{R} + \frac{\mu}{qB}\widehat{\mathbf{b}} \times \nabla B. \tag{B.7}$$

The Ampere theorem for a magnetic field structure without current is $\nabla \times \mathbf{B} = 0$, therefore

$$\nabla \times \mathbf{B} = B\nabla \times \widehat{\mathbf{b}} - \widehat{\mathbf{b}} \times \nabla B = 0. \tag{B.8}$$

Here, $\nabla \times \widehat{\mathbf{b}} = \widehat{\mathbf{b}} \times \widehat{\mathbf{n}}/R$ is the "vorticity" of the magnetic field. Inserting the expression into Eq. (B.8) gives

$$\frac{1}{R}\widehat{\mathbf{b}} \times \widehat{\mathbf{n}} = \frac{\widehat{\mathbf{b}} \times \nabla B}{B}. \tag{B.9}$$

Eq. (B.7) can therefore be written as

$$\mathbf{v}_d = \frac{\frac{1}{2}mv_\perp^2 + mv_\parallel^2}{qB} \frac{\mathbf{B} \times \nabla B}{B^2}, \tag{B.10}$$

Finally, using $\xi = \frac{p_\parallel}{p} = \frac{v_\parallel}{v}$, the expression becomes

$$\mathbf{v}_d = \frac{mv^2}{2qB}\left(1 + \xi^2\right) \frac{\mathbf{B} \times \nabla B}{B^2}. \tag{B.11}$$

Note that in the general case, both gradient and curvature drifts contribute to the particle motion. Since $|d\mathbf{v}_d/dt|$ is of a higher order in ξ than $\left|dv_\parallel/dt\right| = v\,|d\xi/dt|$. The assumption $|d\mathbf{v}_d/dt| \ll \left|dv_\parallel/dt\right|$ we made earlier is therefore consistent.

Appendix C

Operations on differential forms

In this section, we will consider a vector space V with associated scalar space $\mathbb{K}$ and dual vector space V^*.

C.1 Wedge or exterior product

For $(a, b) \in V^* \times V^*$ two linear forms in the dual vector space V^* associated with vector space V, the wedge product is a bilinear alternate form defined using the tensor product :

$$a \wedge b = a \otimes b - b \otimes a \tag{C.1}$$

This operation is associative and anticommutative. Its bilinear alternate property implies :

1. $a \wedge a = 0$ for all $a \in V$.
2. $a \wedge b = -b \wedge a$ for all $(a, b) \in V \times V$.
3. $a_1 \wedge \ldots \wedge a_k = 0$ if $(a_1, \ldots, a_k) \in V \times \ldots \times V$ are linearly dependent.

We will call $\wedge^k V$ the vector space spanned by vectors of the form $a_1 \wedge \ldots \wedge a_k$ with $(a_1, \ldots, a_k) \in V \times \ldots \times V$. We therefore have $\wedge^0 V = \mathbb{K}$ and $\wedge^1 V = V$. An element of $\wedge^k V$ is called a k-form. It is also interesting to note that in three dimensions :

$$a \wedge b = (a \times b)^* \tag{C.2}$$

$$a \wedge b \wedge c = [a \cdot (b \times c)]^* \tag{C.3}$$

C.2 Interior product

The inner product with $\mathbf{G}$ or contraction with respect to $\mathbf{G}$ is the application described as follows (by convention, $\wedge^{-1} V = 0$) :

$$\begin{gathered} \wedge^k V \to \wedge^{k-1} V \\ \omega\left(\mathbf{G}, a_1, \ldots, a_{k-1}\right) \mapsto \left(i_{\mathbf{G}} \omega\right)\left(a_1, \ldots, a_{k-1}\right) \end{gathered} \tag{C.4}$$

It satisfies the following properties :

1. $i_{\mathbf{G}} f = 0$ if $f \in \wedge^0 V$, i.e. if f is a 0-form.
2. $i_{\mathbf{G}}\left(a + b\right) = i_{\mathbf{G}} a + i_{\mathbf{G}} b$ for $(a, b) \in \wedge^k V \times \wedge^l V$.
3. $i_{\mathbf{G}} i_{\mathbf{H}} = -i_{\mathbf{H}} i_{\mathbf{G}}$ for all $(\mathbf{G}, \mathbf{H}) \in V \times V$, therefore $i_{\mathbf{G}}^2 = 0$ for all $\mathbf{G} \in V$.
4. $i_{\mathbf{G}}\left(a \wedge b\right) = \left(i_{\mathbf{G}} a\right) \wedge b + (-1)^k a \wedge \left(i_{\mathbf{G}} b\right)$ for $\mathbf{G} \in V$ and $(a, b) \in \wedge^k V \times \wedge^l V$.

C.3 Exterior derivative

In a n-dimensional vector space, the dual vector space is also of dimension n. The exterior derivative is the application described as follows, with $k < n$:

$$\wedge^k V \to \wedge^{k+1} V$$
$$\omega = f_{a_1 \ldots a_k} da_1 \wedge \ldots \wedge da_k \mapsto \mathsf{d}\omega = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_{a_1 \ldots a_k}}{\partial a_i} da_i \wedge da_1 \wedge \ldots \wedge da_k \tag{C.5}$$

It satisfies the following properties :

1. $\mathsf{d}f = \nabla f$ if $f \in \wedge^0 V$, i.e. if f is a 0-form.
2. $\mathsf{d}\,(a+b) = \mathsf{d}a + \mathsf{d}b$ for $(a,b) \in \wedge^k V \times \wedge^l V$.
3. $\mathsf{d}^2 = 0$.
4. $\mathsf{d}\,(a \wedge b) = (\mathsf{d}a) \wedge b + (-1)^k\, a \wedge (\mathsf{d}b)$ for $(a,b) \in \wedge^k V \times \wedge^l V$.

C.4 Examples for $V = \mathbb{R}^3$

C.4.1 0-forms f

$$f^* = f \mathsf{d}z^1 \wedge \mathsf{d}z^2 \wedge \mathsf{d}z^3 \tag{C.6}$$
$$i_{\mathbf{G}} f = 0 \tag{C.7}$$
$$\mathsf{d}f = \frac{\partial f}{\partial z^\alpha} \mathsf{d}z^\alpha = \nabla f \tag{C.8}$$

C.4.2 1-forms $\Gamma = \Gamma_\alpha \mathsf{d}z^\alpha$

$$\Gamma^* = \frac{1}{2!} \epsilon_{\gamma\alpha\beta} \Gamma_\gamma \mathsf{d}z^\alpha \wedge \mathsf{d}z^\beta \tag{C.9}$$
$$i_{\mathbf{G}} \Gamma = \Gamma_\alpha G^\alpha \tag{C.10}$$
$$\mathsf{d}\Gamma = \frac{1}{2!} \frac{\partial \Gamma_\alpha}{\partial z^\beta} \mathsf{d}z^\beta \wedge \mathsf{d}z^\alpha = \sum_{\alpha<\beta} \left(\frac{\partial \Gamma_\beta}{\partial z^\alpha} - \frac{\partial \Gamma_\alpha}{\partial z^\beta} \right) \mathsf{d}z^\alpha \wedge \mathsf{d}z^\beta = \nabla \wedge \Gamma \tag{C.11}$$

C.4.3 2-forms $\omega = \frac{1}{2!}\omega_{\alpha\beta} \mathsf{d}z^\alpha \wedge \mathsf{d}z^\beta$ with $\omega_{\beta\alpha} = -\omega_{\alpha\beta}$

$$\omega^* = \epsilon_{\beta\gamma\alpha} \omega_{\beta\gamma} \mathsf{d}z^\alpha \tag{C.12}$$
$$i_{\mathbf{G}} \omega = \frac{1}{2!} \left[G^\alpha \omega_{\alpha\beta} \mathsf{d}z^\beta - G^\beta \omega_{\beta\alpha} \mathsf{d}z^\alpha \right] = G^\alpha \omega_{\alpha\beta} \tag{C.13}$$
$$\mathsf{d}\omega = \frac{1}{2!} \frac{\partial \omega_{\alpha\beta}}{\partial z^\gamma} \mathsf{d}z^\gamma \wedge \mathsf{d}z^\alpha \wedge \mathsf{d}z^\beta = \left(\frac{\partial \omega_{23}}{\partial z^1} + \frac{\partial \omega_{31}}{\partial z^2} + \frac{\partial \omega_{12}}{\partial z^3} \right) \mathsf{d}z^1 \wedge \mathsf{d}z^2 \wedge \mathsf{d}z^3 = \nabla \cdot \omega \tag{C.14}$$

C.4.4 Other interesting remarks

For a scalar f, the relation $\mathsf{d}^2 = 0$ is the analog to the well-known property :

$$\nabla \times (\nabla f) = 0 \tag{C.15}$$

For a covector $\mathbf{\Gamma}$, the relation $\mathsf{d}^2 = 0$ corresponds to :

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{\Gamma}) = 0 \tag{C.16}$$

It is furthermore interesting to note that for the corresponding coordinate vector fields:

$$i_{\frac{\partial}{\partial z^\alpha}} \mathsf{d}z^\beta = \delta_\alpha^\beta \tag{C.17}$$

where δ_α^β is the kronecker symbol.

Appendix D

Magnetic dipole dynamics

Foreword : Coordinate systems

The coordinate systems used in this document are the spherical $(\rho, \vartheta, \varphi)$, cylindrical (R, φ, Z) and toroidal (r, θ, φ) coordinates. Definition of these coordinates are shown in figure D.1.

D.1 Magnetic field produced by a magnetic dipole

D.1.1 Expression of the magnetic field

The expression of the vector potential for a magnetic dipole $\mathbf{M}$ reads :

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathbf{M}\times\mathbf{r}}{r^3} = -\frac{\mu_0}{4\pi}\mathbf{M}\times\nabla\frac{1}{r}$$

This expression is derived from the approximation of the vector potential produced by a coil of radius a, with $r \gg a$. Since $\nabla\times\frac{\mathbf{M}}{r} = \nabla\frac{1}{r}\times\mathbf{M}$, we have :

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\nabla\times\frac{\mathbf{M}}{r}$$

To calculate the magnetic field, we take the curl of the above expression.

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla\times\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\nabla\times\left(\nabla\times\frac{\mathbf{M}}{r}\right)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\nabla\left(\nabla\cdot\frac{\mathbf{M}}{r}\right) - \mathbf{M}\Delta\frac{1}{r}\right)$$

The Laplacian in spherical coordinates reads :

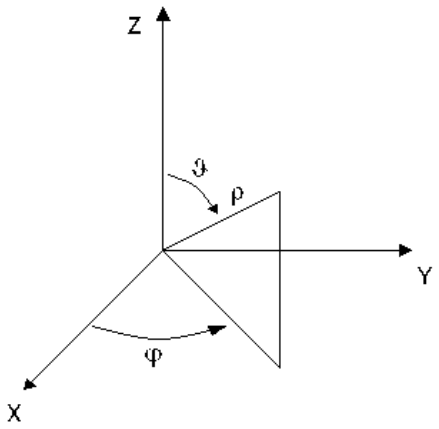
$$\Delta f = \nabla^2 f = \nabla\cdot(\nabla f) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial f}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}$$

We therefore deduce that $\Delta\frac{1}{r} = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d}{dr}\frac{1}{r}\right) = 0$. Therefore the magnetic field derives from a scalar potential :

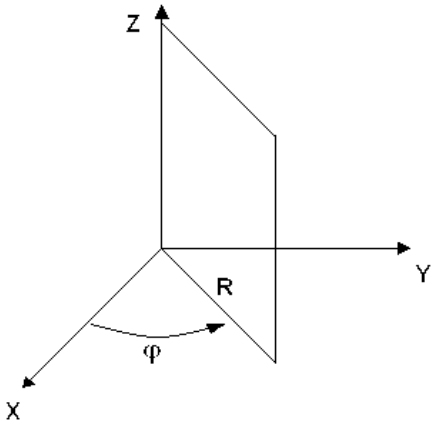
$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\nabla\Phi_m$$

$$\Phi_m = -\frac{\mu_0}{4\pi}\nabla\cdot\frac{\mathbf{M}}{r} = -\frac{\mu_0}{4\pi}\left(\mathbf{M}\cdot\nabla\frac{1}{r}\right)$$

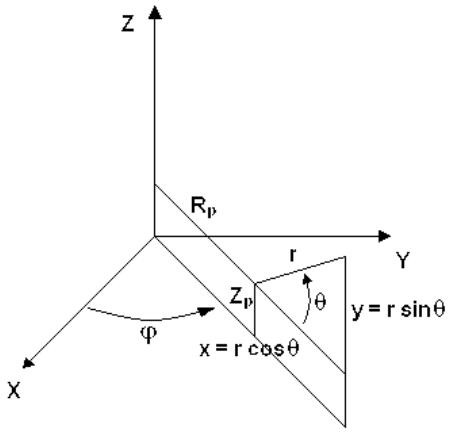
$$\Phi_m = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathbf{M}\cdot\mathbf{r}}{r^3} \tag{D.1}$$



(a) Spherical coordinates



(b) Cylindrical coordinates



(c) Toroidal coordinates

Figure D.1: Coordinate systems used in this document.

This ensures we can do a formal analogy with the electric field produced by an electric dipole. The Magnetic field reads :

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{3(\mathbf{M}\cdot\mathbf{r})\,\mathbf{r} - r^2\mathbf{M}}{r^5} \tag{D.2}$$

In the spherical $(\rho, \vartheta, \varphi)$ coordinates, the magnetic field has the following expression :

$$B_\rho = \frac{\mu_0 M}{4\pi}\frac{2\cos\vartheta}{\rho^3} \tag{D.3}$$

$$B_\vartheta = \frac{\mu_0 M}{4\pi}\frac{\sin\vartheta}{\rho^3} \tag{D.4}$$

$$B_\varphi = 0 \tag{D.5}$$

The field amplitude can be deduced from this expression :

$$B(\rho,\vartheta) = \frac{\mu_0 M}{4\pi\rho^3}\sqrt{1+3\cos^2\vartheta} \tag{D.6}$$

D.1.2 Magnetic field gradient

The magnetic field gradient in spherical coordinates reads :

$$\nabla B = \frac{\partial B}{\partial\rho}\hat{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial B}{\partial\vartheta}\hat{\vartheta} + \frac{1}{\rho\sin\vartheta}\frac{\partial B}{\partial\varphi}\hat{\varphi}$$

The magnetic dipole gradient therefore has the following expression :

$$(\nabla B)_\rho = -3\frac{\mu_0 M}{4\pi\rho^4}\sqrt{1+3\cos^2\vartheta} \tag{D.7}$$

$$(\nabla B)_\vartheta = -3\frac{\mu_0 M}{4\pi\rho^4}\frac{\sin\vartheta\cos\vartheta}{\sqrt{1+3\cos^2\vartheta}} \tag{D.8}$$

$$(\nabla B)_\varphi = 0 \tag{D.9}$$

D.1.3 Magnetic field line equations

The magnetic field lines are locally tangent to the magnetic field. They are therefore given by the relation :

$$\mathbf{B}\times d\mathbf{s} = \left(B_\rho\hat{\rho} + B_\vartheta\hat{\vartheta}\right)\times\left(d\rho\hat{\rho} + \rho d\vartheta\hat{\vartheta}\right) = 0$$

$$\left(B_\rho\rho d\vartheta - B_\vartheta d\rho\right)\hat{\varphi} = 0$$

$$\frac{\mu_0 M}{4\pi}\frac{\sin\vartheta}{\rho^3}d\rho = \frac{\mu_0 M}{4\pi}\frac{2\cos\vartheta}{\rho^3}\rho d\vartheta$$

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{2\cos\vartheta d\vartheta}{\sin\vartheta}$$

The integration reference is taken at $\rho = \rho_0$ and $\vartheta = \frac{\pi}{2}$. Furthermore, $\vartheta \in]0,\pi[$ so $\sin\vartheta$ is always positive. Integration of the equation gives :

$$\ln\frac{\rho}{\rho_0} = 2\ln\sin\vartheta$$

The field line equation can therefore be written as :

$$\rho = \rho_0\sin^2\vartheta \tag{D.10}$$

The field lines are represented on figure D.2.

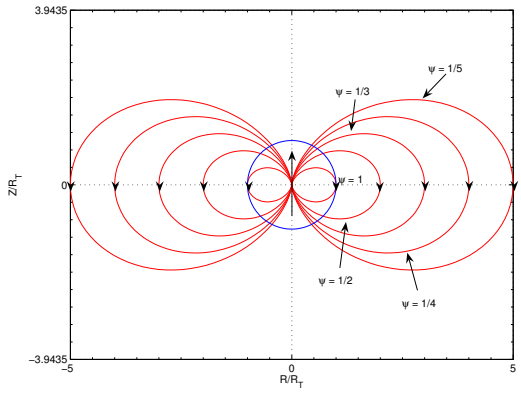


Figure D.2: Magnetic dipole field lines in a cylindrical (R, Z) plane. The blue circle corresponds to the radius of the Earth in the case of Earth's magnetic field. Flux ccordinate values are normalized to the absolute value at $Z = 0$ and $R = R_T$, i.e. $\psi^* = \frac{\mu_0 M}{4\pi R_T}$.

D.1.4 Flux coordinate

Here we want to express the magnetic field as :

$$\mathbf{B} = \nabla\psi \times \nabla\varphi$$

Where ψ is the poloidal flux coordinate and φ the normal azimuth angle for spherical $(\rho, \vartheta, \varphi)$ or toroidal (r, θ, φ) coordinates. We know the expression for $\mathbf{B}$, so the equation reads :

$$\frac{\mu_0 M}{4\pi}\frac{2\cos\vartheta}{\rho^3}\hat{\rho} + \frac{\mu_0 M}{4\pi}\frac{\sin\vartheta}{\rho^3}\hat{\vartheta} = \nabla\psi \times \frac{1}{\rho\sin\vartheta}\hat{\varphi}$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}\hat{\rho} - \frac{\partial\psi}{\partial\rho}\hat{\vartheta} = \frac{\mu_0 M}{4\pi}\left(\frac{2\cos\vartheta\sin\vartheta}{\rho^2}\hat{\rho} + \frac{\sin^2\vartheta}{\rho^2}\hat{\vartheta}\right)$$

We can therefore deduce the expression of the flux coordinate with the integration constant arbitrarily chosen at $\left(R_p, \frac{\pi}{2}, 0\right)$:

$$\psi\left(\rho, \vartheta\right) = \frac{\mu_0 M}{4\pi}\frac{\sin^2\vartheta}{\rho} \tag{D.11}$$

We see that ψ is constant along the magnetic field lines $\rho = \rho_0 \sin^2\vartheta$, which is consistent with the magnetic equilibrium. There, the expression of ψ reads :

$$\psi\left(\rho_0\right) = \frac{\mu_0 M}{4\pi\rho_0} \tag{D.12}$$

Representation of a magnetic flux surface is shown on figure D.3. The expression of the magnetic flux can also be calculated using the flux of the magnetic dipole field through the cone $([0, \rho], \vartheta, [0, 2\pi])$. We can then write :

$$2\pi\psi = \int_0^{\rho}\int_0^{2\pi}\left(-B_\vartheta\right)\rho\sin\vartheta d\varphi d\rho = 2\pi\frac{\mu_0 M}{4\pi}\frac{\sin^2\vartheta}{\rho}$$

We obtain the same expression as D.11.

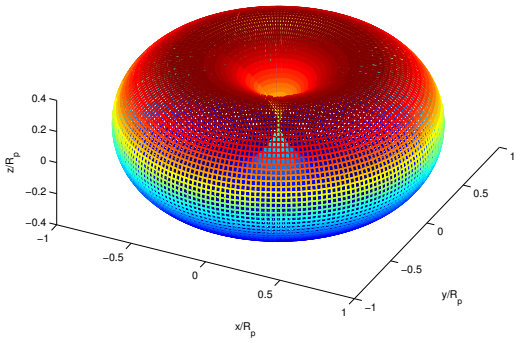


Figure D.3: Magnetic dipole flux surface for $\psi = 1$.

D.2 Magnetic dipole and single coil magnetic fields in LUKE coordinates

D.2.1 Single coil field

The aim here is to calculate the field produced by a single magnetic coil, subject to a current I, with the following equation Γ_0 in cylindrical (R, φ, Z) coordinates ($\phi \in [-\pi, \pi]$ and $R_p \geq 0$) :

$$\mathbf{L} = R_p \cos(\varphi - \phi)\,\hat{R} - R_p \sin(\varphi - \phi)\,\hat{\varphi} + Z_p \hat{Z} \tag{D.13}$$

We therefore have :

$$d\mathbf{L} = R_p \sin(\varphi - \phi)\,d\phi\hat{R} + R_p \cos(\varphi - \phi)\,d\phi\hat{\varphi} \tag{D.14}$$

Using the cylindrical position vector $\mathbf{r} = R\hat{R} + Z\hat{Z}$, we get :

$$D^2 = |\mathbf{r} - \mathbf{L}|^2 = |\mathbf{r}|^2 + |\mathbf{L}|^2 - 2\mathbf{r}\cdot\mathbf{L} = R^2 + (Z - Z_p)^2 + R_p^2 - 2RR_p\cos(\varphi - \phi)$$

We will also need the derivatives of $\frac{1}{D}$:

$$\frac{\partial}{\partial R}\frac{1}{D} = \frac{R_p\cos(\varphi - \phi) - R}{D^3}$$

$$\frac{\partial}{\partial Z}\frac{1}{D} = -\frac{Z - Z_p}{D^3}$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi}\frac{1}{D} = -\frac{RR_p\sin(\varphi - \phi)}{D^3}$$

The vector potential becomes :

$$\mathbf{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\Gamma_0}\frac{Id\mathbf{L}}{|\mathbf{r} - \mathbf{L}|} = \frac{\mu_0 I R_p}{4\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin(\varphi - \phi)}{D}d\phi\hat{R} + \int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos(\varphi - \phi)}{D}d\phi\hat{\varphi}\right) \tag{D.15}$$

It is important to note that although φ appears in the integrand, the vector potential and magnetic field do not depend on this coordinate. This is due to the fact that the integrand is summated over a period. We can therefore deduce the magnetic field, using the curl in cylindrical coordinates :

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

$$B_R = -\frac{\partial A_\varphi}{\partial Z} = \frac{\mu_0 I R_p}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{(Z-Z_p)\cos(\varphi-\phi)}{D^3}d\phi$$

$$B_\varphi = \frac{\partial A_R}{\partial Z} = -\frac{\mu_0 I R_p}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{(Z-Z_p)\sin(\varphi-\phi)}{D^3}d\phi$$

$$\begin{aligned}B_Z &= \frac{1}{R}\left(\frac{\partial}{\partial R}(RA_\varphi) - \frac{\partial A_R}{\partial \varphi}\right)\\ &= \frac{\mu_0 I R_p}{4\pi R}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\cos(\varphi-\phi)}{D} + \frac{R(R_p\cos(\varphi-\phi)-R)\cos(\varphi-\phi)}{D^3} - \frac{\cos(\varphi-\phi)}{D} + \frac{RR_p\sin^2(\varphi-\phi)}{D^3}\right)d\phi\\ &= \frac{\mu_0 I R_p}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{R_p - R\cos(\varphi-\phi)}{D^3}d\phi\end{aligned}$$

The parity in $\varphi-\phi$ of the integrals gives $B_\varphi = 0$. The expression of the magnetic field then reads :

$$B_R = \frac{\mu_0 I R_p}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{(Z-Z_p)\cos(\varphi-\phi)}{D^3}d\phi \tag{D.16}$$

$$B_\varphi = 0 \tag{D.17}$$

$$B_Z = \frac{\mu_0 I R_p}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{R_p - R\cos(\varphi-\phi)}{D^3}d\phi \tag{D.18}$$

In order to express the single coil magnetic field with respect to the complete elliptic integrals, we introduce $\tilde{R}^2 = (R+R_p)^2 + (Z-Z_p)^2$, $\varphi-\phi = 2\tilde{\phi}-\pi$ and $k^2 = \frac{4RR_p}{\tilde{R}^2}$. The expression of D becomes :

$$D = \sqrt{\tilde{R}^2 - 2RR_p\left(1+\cos\left(2\tilde{\phi}-\pi\right)\right)} = \tilde{R}\sqrt{1-k^2\cos^2\left(\tilde{\phi}-\frac{\pi}{2}\right)} = \tilde{R}\sqrt{1-k^2\sin^2\tilde{\phi}}$$

We apply the transformation to D.16, and the use of periodicity and parity gives :

$$B_R = \frac{\mu_0 I R_p (Z-Z_p)}{2\pi\tilde{R}^3}\int_{\frac{\varphi}{2}}^{\frac{\varphi}{2}+\pi}\frac{\cos\left(2\tilde{\phi}-\pi\right)}{\left(1-k^2\sin^2\tilde{\phi}\right)^{\frac{3}{2}}}d\tilde{\phi} = -\frac{\mu_0 I R_T (Z-Z_p)}{\pi\tilde{R}^3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 2\tilde{\phi}}{\left(1-k^2\sin^2\tilde{\phi}\right)^{\frac{3}{2}}}d\tilde{\phi}$$

$$B_\varphi = 0$$

$$B_Z = \frac{\mu_0 I R_p}{2\pi\tilde{R}^3}\int_{\frac{\varphi}{2}}^{\frac{\varphi}{2}+\pi}\frac{R_p - R\cos\left(2\tilde{\phi}-\pi\right)}{\left(1-k^2\sin^2\tilde{\phi}\right)^{\frac{3}{2}}}d\tilde{\phi} = \frac{\mu_0 I R_p}{\pi\tilde{R}^3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{R_p + R\cos 2\tilde{\phi}}{\left(1-k^2\sin^2\tilde{\phi}\right)^{\frac{3}{2}}}d\tilde{\phi}$$

We must now calculate the integrals $F\left(k^2\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\left(1-k^2\sin^2\tilde{\phi}\right)^{\frac{3}{2}}}d\tilde{\phi}$ and $G\left(k^2\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 2\tilde{\phi}}{\left(1-k^2\sin^2\tilde{\phi}\right)^{\frac{3}{2}}}d\tilde{\phi}$. First, we start from the derivation of the following expression :

$$\frac{d}{d\tilde{\phi}}\left(\frac{k^2\sin\tilde{\phi}\cos\tilde{\phi}}{\sqrt{1-k^2\sin^2\tilde{\phi}}}\right) = \frac{k^2\cos^2\tilde{\phi}-k^2\sin^2\tilde{\phi}}{\sqrt{1-k^2\sin^2\tilde{\phi}}} + \frac{k^4\sin^2\tilde{\phi}\cos^2\tilde{\phi}}{\left(1-k^2\sin^2\tilde{\phi}\right)^{\frac{3}{2}}}$$
$$= \frac{k^2\cos^2\tilde{\phi}-k^2\sin^2\tilde{\phi}+k^4\sin^4\tilde{\phi}}{\left(1-k^2\sin^2\tilde{\phi}\right)^{\frac{3}{2}}}$$
$$= \sqrt{1-k^2\sin^2\tilde{\phi}} + \frac{k^2-1}{\left(1-k^2\sin^2\tilde{\phi}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Since $\left[\frac{k^2\sin\tilde{\phi}\cos\tilde{\phi}}{\sqrt{1-k^2\sin^2\tilde{\phi}}}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0$, we therefore have :

$$F\left(k^2\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\left(1-k^2\sin^2\tilde{\phi}\right)^{\frac{3}{2}}} d\tilde{\phi} = \frac{1}{1-k^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2\sin^2\tilde{\phi}}\, d\tilde{\phi}$$

$$F\left(k^2\right) = \frac{E\left(k^2\right)}{1-k^2} \tag{D.19}$$

Introducing K and E, the complete elliptic integrals of the first and second kind respectively. Their expression is as follows :

$$K\left(k^2\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2 t}} dt$$
$$E\left(k^2\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2\sin^2 t}\, dt$$

The expression of G becomes :

$$G\left(k^2\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-2\sin^2\tilde{\phi}}{\left(1-k^2\sin^2\tilde{\phi}\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{k^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{k^2-2}{\left(1-k^2\sin^2\tilde{\phi}\right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{2}{\sqrt{1-k^2\sin^2\tilde{\phi}}}\right) d\tilde{\phi}$$

$$G\left(k^2\right) = \frac{\left(k^2-2\right)F\left(k^2\right)+2K\left(k^2\right)}{k^2} = \frac{1}{k^2}\left(\frac{k^2-2}{1-k^2}E\left(k^2\right)+2K\left(k^2\right)\right) \tag{D.20}$$

The expressions of the magnetic field become :

$$B_R = -\frac{\mu_0 I R_p\left(Z-Z_p\right)}{\pi\tilde{R}^3}G\left(k^2\right) = -\frac{2\mu_0 I R_p\left(Z-Z_p\right)}{\pi\tilde{R}^3k^2}\left(\frac{1}{2}\frac{k^2-2}{1-k^2}E\left(k^2\right)+K\left(k^2\right)\right) \tag{D.21}$$

$$B_Z = \frac{\mu_0 I R_p}{\pi\tilde{R}^3}\left(R_pF\left(k^2\right)+RG\left(k^2\right)\right) = \frac{2\mu_0 I R R_p}{\pi\tilde{R}^3k^2}\left(\left(\frac{R_p}{2R}\frac{k^2}{1-k^2}+\frac{1}{2}\frac{k^2-2}{1-k^2}\right)E\left(k^2\right)+K\left(k^2\right)\right) \tag{D.22}$$

Using the expression of k^2, we can deduce the following relations :

$$\tilde{R}^3k^2 = 4RR_p\tilde{R}$$

$$\frac{1}{2}\frac{k^2-2}{1-k^2} = \frac{2RR_p-\tilde{R}^2}{\tilde{R}^2-4RR_p} = -\frac{R_p^2+R^2+\left(Z-Z_p\right)^2}{\left(R_p-R\right)^2+\left(Z-Z_p\right)^2}$$

$$\frac{R_p}{2R}\frac{k^2}{1-k^2}+\frac{1}{2}\frac{k^2-2}{1-k^2}=\frac{2R_p^2}{\left(R_p-R\right)^2+Z^2}-\frac{R_p^2+R^2+\left(Z-Z_p\right)^2}{\left(R_p-R\right)^2+\left(Z-Z_p\right)^2}=\frac{R_p^2-R^2-\left(Z-Z_p\right)^2}{\left(R_p-R\right)^2+\left(Z-Z_p\right)^2}$$

We can therefore write :

$$B_R=\frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{\left(R_p+R\right)^2+\left(Z-Z_p\right)^2}}\frac{Z-Z_p}{R}\left(\frac{R_p^2+R^2+\left(Z-Z_p\right)^2}{\left(R_p-R\right)^2+Z^2}E\left(k^2\right)-K\left(k^2\right)\right) \tag{D.23}$$

$$B_\varphi=0 \tag{D.24}$$

$$B_Z=\frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{\left(R_p+R\right)^2+\left(Z-Z_p\right)^2}}\left(\frac{R_p^2-R^2-\left(Z-Z_p\right)^2}{\left(R_p-R\right)^2+\left(Z-Z_p\right)^2}E\left(k^2\right)+K\left(k^2\right)\right) \tag{D.25}$$

Where

$$k^2=\frac{4RR_p}{\left(R_p+R\right)^2+\left(Z-Z_p\right)^2}$$

D.2.2 Single coil flux coordinate

Similarly to the dipole field flux coordinate, we want to find ψ so that :

$$\mathbf{B}=\nabla\times\mathbf{A}=\nabla\psi\times\nabla\varphi$$

Here, we work in cylindrical (R,φ,Z) coordinates, therefore $\nabla\varphi=\frac{1}{R}\hat{\varphi}$. Using the cylindrical expressions of the gradient and curl and taking into account that $\frac{\partial A_R}{\partial\varphi}=\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}=A_Z=0$, we get :

$$\begin{aligned}B_R&=-\frac{\partial A_\varphi}{\partial Z}=-\frac{1}{R}\frac{\partial\psi}{\partial Z}\\ B_\varphi&=\frac{\partial A_R}{\partial Z}=0\\ B_Z&=\frac{1}{R}\frac{\partial RA_\varphi}{\partial R}=\frac{1}{R}\frac{\partial\psi}{\partial R}\end{aligned}$$

From the expression of B_R, we can deduce :

$$\psi=RA_\varphi+F\left(R\right)$$

Where F is an unknown function of R. Replacing ψ in the expression of B_Z, we have :

$$\frac{\partial RA_\varphi}{\partial R}=\frac{\partial RA_\varphi}{\partial R}+\frac{dF}{dR}$$

$$\frac{dF}{dR}=0$$

We can deduce :

$$\psi\left(R,Z\right)=RA_\varphi \tag{D.26}$$

$$\psi\left(R,Z\right)=R\frac{\mu_0 IR_p}{4\pi\tilde{R}}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos\left(\varphi-\phi\right)}{D}d\phi \tag{D.27}$$

The expression of ψ therefore becomes, using the same transformation $\tilde{R}^2=\left(R_p+R\right)^2+\left(Z-Z_p\right)^2$, $k^2=\frac{4RR_p}{\tilde{R}^2}$ and $\varphi-\phi=2\tilde{\phi}-\pi$:

$$\psi\left(R,Z\right)=-R\frac{\mu_0 I R_p}{\pi\tilde{R}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 2\tilde{\phi}}{\sqrt{1-k^2\sin^2\tilde{\phi}}}d\tilde{\phi}=-R\frac{\mu_0 I R_p}{\pi\tilde{R}}\left(\frac{k^2-2}{\sqrt{1-k^2\sin^2\tilde{\phi}}}+2\sqrt{1-k^2\sin^2\tilde{\phi}}\right)d\tilde{\phi}$$

We therefore have :

$$\psi\left(R,Z\right)=-\frac{\mu_0 I R R_p}{2\pi\tilde{R}}\frac{\left(k^2-2\right)K\left(k^2\right)+2E\left(k^2\right)}{k^2}$$

$$\psi\left(R,Z\right)=-\frac{\mu_0 I}{4\pi}\sqrt{\left(R_p+R\right)^2+\left(Z-Z_p\right)^2}\left(\left(k^2-2\right)K\left(k^2\right)+2E\left(k^2\right)\right) \tag{D.28}$$

Where

$$k^2=\frac{4RR_p}{\left(R_p+R\right)^2+\left(Z-Z_p\right)^2}$$

D.2.3 Magnetic dipole field

The magnetic dipole field is the approximation of a single coil field with $R_p \ll 1$ and $Z_p = 0$. The final expression of the dipole magnetic field then reads, with $M = IR_p^2$:

$$B_R=\frac{\mu_0 M}{4\pi}\frac{3RZ}{\left(R^2+Z^2\right)^{\frac{5}{2}}} \tag{D.29}$$

$$B_\varphi=0 \tag{D.30}$$

$$B_Z=\frac{\mu_0 M}{4\pi}\frac{2Z^2-R^2}{\left(R^2+Z^2\right)^{\frac{5}{2}}} \tag{D.31}$$

This expression can be derived either from D.16 or from D.23. The calculations are given in the appendix. The expression for the flux coordinate reads, using D.11 :

$$\psi\left(R,Z\right)=\frac{\mu_0 M}{4\pi}\frac{R^2}{\left(R^2+\left(Z-Z_p\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \tag{D.32}$$

D.2.4 LUKE coordinates for the magnetic equilibrium

The LUKE coordinates are the standard toroidal (r,θ,φ) coordinates with cartesian $(x = r\cos\theta, y = r\sin\theta)$ coordinates in the poloidal plane. We name the torus axis radius coordinates (R_p, Z_p). We can therefore see that :

$$\begin{aligned}R&=x+R_p\\Z&=y+Z_p\end{aligned}$$

For a dipole magnetic field, R_p is arbitrarily chosen.

D.2.4.1 Single coil magnetic field

Using LUKE coordinates, the expressions become :

$$B_x=\frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{\left(x+2R_p\right)^2+y^2}}\frac{y}{x+R_p}\left(\frac{R_p^2+\left(x+R_p\right)^2+y^2}{x^2+y^2}E\left(k^2\right)-K\left(k^2\right)\right) \tag{D.33}$$

$$B_y=\frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{\left(x+2R_p\right)^2+y^2}}\left(\frac{R_p^2-\left(x+R_p\right)^2-y^2}{x^2+y^2}E\left(k^2\right)+K\left(k^2\right)\right) \tag{D.34}$$

The expression of the flux coordinate becomes :

$$\psi(x,y) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi}\sqrt{(x+2R_p)^2+y^2}\left(\left(k^2-2\right)K\left(k^2\right)+2E\left(k^2\right)\right) \tag{D.35}$$

Where

$$k^2 = \frac{4R_p(x+R_p)}{(x+2R_p)^2+y^2}$$

D.2.4.2 Magnetic dipole field

Here the expression is a direct transformation of D.29, with $Z_p = 0$:

$$B_x = \frac{\mu_0 M}{4\pi}\frac{3(x+R_p)\,y}{\left((x+R_p)^2+y^2\right)^{\frac{5}{2}}} \tag{D.36}$$

$$B_y = \frac{\mu_0 M}{4\pi}\frac{2y^2-(x+R_p)^2}{\left((x+R_p)^2+y^2\right)^{\frac{5}{2}}} \tag{D.37}$$

The flux coordinate is determined similarly with D.32 :

$$\psi = \frac{\mu_0 M}{4\pi}\frac{(x+R_p)^2}{\left((x+R_p)^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}} \tag{D.38}$$

D.3 Collisionless motion in a dipole magnetic field

D.3.1 ξ_0 dependance of the magnetic bounce angle

We define $\xi = \frac{p_\parallel}{p}$ as the pitch-angle cosine of the particle in motion along the field line. In a collisionless motion, the energy $\varepsilon = \frac{p^2}{2m}$ of the particle remains constant, therefore so does the kinetic momentum amplitude p. Conservation of the magnetic moment gives :

$$\mu = \frac{p_\perp^2}{2mB} = \frac{p^2\left(1-\xi^2\right)}{2mB} = \mu_0 = \frac{p^2\left(1-\xi_0^2\right)}{2mB_0}$$

where ξ_0 and B_0 are respectively the minimum field in the field line and the pitch-angle at that point. We can deduce the following relation :

$$\xi(\vartheta,\xi_0) = \sqrt{1-\frac{B(\vartheta)}{B_0}\left(1-\xi_0^2\right)} \tag{D.39}$$

We have a reversal of the particle motion (bounce) at $\xi = 0$; the magnetic field at that point reads :

$$B(\vartheta_b) = B_0\frac{1}{1-\xi_0^2} \tag{D.40}$$

Along a field line distant of ρ_0 at the field equator, we have $\rho = \rho_0\sin^2\vartheta$. The amplitude of the magnetic field reads :

$$B(\vartheta) = \frac{\mu_0 M}{4\pi}\frac{\sqrt{1+3\cos^2\vartheta}}{\left(\rho_0\sin^2\vartheta\right)^3} = \frac{\mu_0 M}{4\pi\rho_0^3}\frac{\sqrt{1+3\cos^2\vartheta}}{\sin^6\vartheta}$$

This expression is defined for $\vartheta \in]0,\pi[$. $\cos^2\vartheta$ is minimum and $\sin^6\vartheta$ is maximum at $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, therefore the minimum magnetic field reads :

$$B_0 = \frac{\mu_0 M}{4\pi\rho_0^3} \tag{D.41}$$

We can deduce the magnetic field amplitude along the field line :

$$B = B_0 \frac{\sqrt{1+3\cos^2\vartheta}}{\sin^6\vartheta} \tag{D.42}$$

The bounce angle boundaries ϑ_b and $\pi - \vartheta_b$ are therefore solely dependent on ξ_0. They are solutions of the equation :

$$\xi_0^2 = 1 - \frac{\sin^6\vartheta_b}{\sqrt{1+3\cos^2\vartheta_b}} \tag{D.43}$$

$\sin\vartheta_b$ and $\cos\vartheta_b$ are monotonous and positive on the interval $\vartheta_b \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, therefore the expression of ξ_0 is also monotonous with $\xi_0(0) = 1$ and $\xi_0\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$. The expression is therefore bijective between the intervals $\vartheta_b \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ and $\xi_0 \in [0,1]$.

$$\left(1-\xi_0^2\right)^2 = \frac{\left(1-\cos^2\vartheta_b\right)^6}{1+3\cos^2\vartheta_b} = \frac{\left(1-\cos^2\vartheta_b\right)^6}{4-3\left(1-\cos^2\vartheta_b\right)}$$

In order to reverse the expression, we must find the unique root on the interval $[0,1]$ (guaranteed by the bijectivity) of the polynomial :

$$P(x) = x^6 + 3yx - 4y \tag{D.44}$$

With $y \in [0,1]$.
The taylor expansion of D.43 for strongly trapped particles $\left(\varepsilon = \vartheta_b - \frac{\pi}{2} \ll 1\right)$ is :

$$1-\xi_0^2 = \left(1-\frac{\varepsilon^2}{2}\right)\left(1+3\varepsilon^2\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{9\varepsilon^2}{2} + \mathcal{O}\left(\varepsilon^4\right)$$

We therefore have at this limit :

$$\vartheta_b = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{2}}{3}\xi_0 + \mathcal{O}\left(\xi_0^2\right), \vartheta_b < \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2} + \frac{\sqrt{2}}{3}\xi_0 + \mathcal{O}\left(\xi_0^2\right), \vartheta_b > \frac{\pi}{2} \end{cases} \tag{D.45}$$

The evolution of ϑ_b with respect to ξ_0 is fairly consistent : at $\xi_0 = 0$, the particle never leaves the equator ($\vartheta_b = \pi - \vartheta_b = \frac{\pi}{2}$) and at $\xi_0 \to 1$, the particle has such a small magnetic moment that it reaches the origin of the magnetic field ($\vartheta_b \to 0$ and $\pi - \vartheta_b \to \pi$). Since there is a symmetry at $\vartheta_b = \frac{\pi}{2}$, we will henceforth work on the interval $\vartheta_b \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$. The evolution is shown on figure D.4.

D.3.2 Influence of Earth's radius on particle motion

We have considered until now a magnetic dipole without any interference whatsoever. However, particles that enter contact with Earth's lower atmosphere dissipate their energy into it and can be considered lost, since no longer trapped in the magnetic field. Let us call R_T this minimum distance and $a = \frac{r_0}{R_T}$ the ratio of the particle's equatorial distance to the center of the Earth compared to this minimum distance. For the particle to remain trapped, it will need to observe the following equation :

$$r_0 \sin^2\vartheta_b - R_T > 0 \Leftrightarrow a\sin^2\vartheta_b - 1 > 0$$

Since ϑ_b depends only on ξ_0, we can therefore determine the values (ξ_0, a) for which the particles remain trapped. We can already see that if $a < 1$, the particles are always lost, which is physically consistent. The limit equation can be expressed as :

$$\sin^2\vartheta_b = \frac{1}{a} \Leftrightarrow \cos^2\vartheta_b = 1 - \frac{1}{a}$$

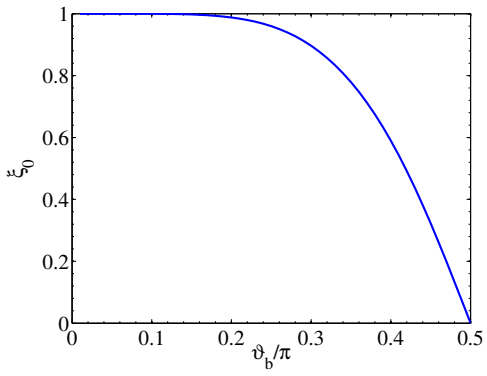


Figure D.4: Evolution of ξ with respect to $\frac{\vartheta_b}{\pi}$.

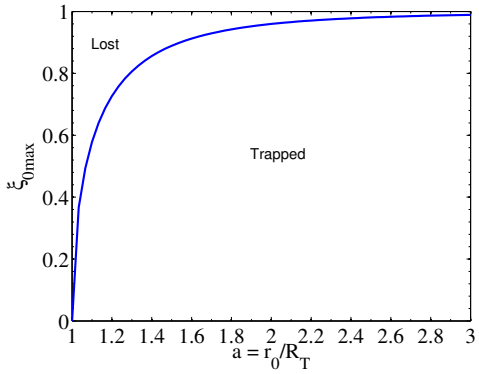


Figure D.5: Earth radius limit ξ_{0max} with respect to a. Any particles with $\xi_0 > \xi_{0max}$ are lost.

We can therefore deduce the evolution of ξ_{0max} with respect to a:

$$\xi_{0max} = \sqrt{1 - \frac{1}{a^3\sqrt{4 - \frac{3}{a}}}} \tag{D.46}$$

The trends are shown on figure D.5.

D.3.3 Bounce time scale in a dipole magnetic field

In spherical $(\rho, \vartheta, \varphi)$ coordinates the equation of a dipole magnetic field line is :

$$\rho\left(\theta\right) = \rho_0 \sin^2\vartheta$$

where ρ_0 is the distance from the magnetic dipole at the equator, i.e. at $\vartheta = \frac{\pi}{2}$. To calculate the length of a field line, we start from the expression of the infinitesimal field line coordinate step :

$$ds^2 = d\rho^2 + \left(\rho d\vartheta\right)^2 = \left(\rho'^2 + \rho^2\right) d\vartheta^2$$

$$ds^2 = \rho_0^2 \sin^2\vartheta \left(4\cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta\right) d\vartheta^2$$

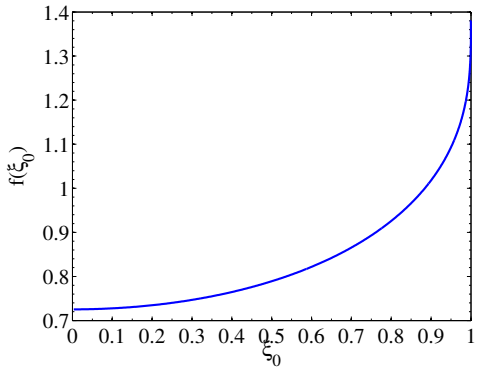


Figure D.6: Bounce time scale function f with respect to ξ_0.

$$ds = \rho_0 \sin\vartheta \sqrt{1+3\cos^2\vartheta}\, d\vartheta$$

We can therefore deduce the bounce period expression, the velocity along the field line being $v_\parallel = v\xi$:

$$\tau_b = \frac{2}{v}\int_L \frac{ds}{\xi} = 2\frac{\rho_0}{v}\int_{\vartheta_b}^{\pi-\vartheta_b} \frac{\sin\vartheta\sqrt{1+3\cos^2\vartheta}}{\xi(\vartheta)}d\vartheta = 4\frac{\rho_0}{v}\int_{\vartheta_b}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\vartheta\sqrt{1+3\cos^2\vartheta}}{\xi(\vartheta)}d\vartheta$$

The last expression comes from the symmetry of the problem with respect to the equatorial plane ($\vartheta = \frac{\pi}{2}$). Using D.39 and D.42, the formal expression for the bounce time scale becomes :

$$\tau_b = 4\frac{\rho_0}{v}\int_{\vartheta_b}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\vartheta\sqrt{1+3\cos^2\vartheta}}{\sqrt{1-\frac{\sqrt{1+3\cos^2\vartheta}}{\sin^6\vartheta}\left(1-\xi_0^2\right)}}d\vartheta \tag{D.47}$$

$$\tau_b = 4\frac{\rho_0}{v} f(\xi_0) \tag{D.48}$$

since we have seen that ϑ_b depends only from ξ_0. The f trend is shown in figure D.6.
We can therefore normalize the bounce time scale as follows :

$$\tau_{bn} = \frac{\tau_b}{\tau_b^*} = \frac{\tau_b}{4\frac{\rho_0}{v}f(0)} = \frac{f(\xi_0)}{f(0)} \tag{D.49}$$

The Earth's ionosphere spans from $150km$ to $\rho_i = 800km$ in altitude. The planet's average radius is $\rho_T = 6370km$. A particle entering the ionosphere with $\xi_0 = 1$ and moving at a tenth of the speed of light will have a maximum bounce period between North and South poles of :

$$\tau_b \simeq \frac{4\times 1.38\left(6370\times 10^3 + 800\times 10^3\right)}{0.3\times 10^8} = 1.32s \tag{D.50}$$

This is not taking into account the ϑ_b limit due to the Earth radius, so the bounce time scale will in practise be a little smaller, but still remain in the same ordering. We can also note here that this calculation is done regardless of the particle mass or charge, and also regardless of the magnetic dipole strength.

D.3.4 Drift time scale in a dipole magnetic field

In a magnetic field, the drift velocity due to the field gradient and the field line curvature has the following expression :

$$\mathbf{v}_d = \frac{mv^2}{2qB}\left(1+\xi^2\right)\frac{\mathbf{B}\times\nabla B}{B^2}$$

To calculate this velocity, we fist need to evaluate $\frac{\mathbf{B}\times\nabla B}{B^3}$ in spherical (ρ,ϑ,φ) coordinates, with the expressions of the magnetic field and field gradient previously calculated.

$$\mathbf{B}\times\nabla B = 3\left(\frac{\mu_0 M}{4\pi}\right)^2\frac{1}{\rho^7}\left(-\frac{2\cos^2\vartheta\sin\vartheta}{\sqrt{3\cos^2\vartheta+1}}+\sin\vartheta\sqrt{3\cos^2\vartheta+1}\right)\hat{\varphi}$$

$$\mathbf{B}\times\nabla B = 3\left(\frac{\mu_0 M}{4\pi}\right)^2\frac{1}{\rho^7}\frac{\left(1-\cos^2\vartheta\right)\sin\vartheta}{\sqrt{3\cos^2\vartheta+1}}\hat{\varphi}$$

$$\frac{\mathbf{B}\times\nabla B}{B^3} = \frac{4\pi\rho^2}{\mu_0 M}\frac{3\sin^3\vartheta}{\left(3\cos^2\vartheta+1\right)^2}\hat{\varphi} \tag{D.51}$$

Here we take into account that the particle in collisionless motion will remain on its magnetic surface, therefore $\rho=\rho_0\sin^2\vartheta$, with ρ_0 being the equatorial radius of the particle position at $\vartheta=\frac{\pi}{2}$. The expression becomes :

$$\frac{\mathbf{B}\times\nabla B}{B^3} = \frac{4\pi\rho_0^2}{\mu_0 M}\frac{3\sin^7\vartheta}{\left(3\cos^2\vartheta+1\right)^2}\hat{\varphi}$$

$$\mathbf{v}_d = \frac{mv^2}{q}\frac{6\pi\rho_0^2}{\mu_0 M}\left(1+\xi^2\right)\frac{\sin^7\vartheta}{\left(3\cos^2\vartheta+1\right)^2}\hat{\varphi} \tag{D.52}$$

Using the expression of ξ given by D.39, we can write :

$$v_d = \frac{mv^2}{q}\frac{6\pi\rho_0^2}{\mu_0 M}\left(2-\frac{\sqrt{1+3\cos^2\vartheta}}{\sin^6\vartheta}\left(1-\xi_0^2\right)\right)\frac{\sin^7\vartheta}{\left(3\cos^2\vartheta+1\right)^2} \tag{D.53}$$

The equatorial distance travelled over a bounce period has the following expression :

$$\rho_0\delta\varphi = \tau_b\left\langle v_d\right\rangle_\vartheta = \frac{\tau_b}{\pi-2\vartheta_b}\int_{\vartheta_b}^{\pi-\vartheta_b} v_d\left(\vartheta,\xi_0\right)d\vartheta$$

We can deduce the expression of the drift time scale, using the expression of v_d :

$$\tau_d = \frac{2\pi}{\delta\varphi}\tau_b = \frac{\mu_0 M}{3\rho_0}\frac{q}{mv^2}\left(\frac{1}{\pi-2\vartheta_b}\int_{\vartheta_b}^{\pi-\vartheta_b}\left(2-\frac{\sqrt{1+3\cos^2\vartheta}}{\sin^6\vartheta}\left(1-\xi_0^2\right)\right)\frac{\sin^7\vartheta}{\left(3\cos^2\vartheta+1\right)^2}d\vartheta\right)^{-1}$$

$$\tau_d = \frac{2\pi}{\delta\varphi}\tau_b = \frac{\mu_0 M}{3\rho_0}\frac{q}{mv^2}\left(\frac{2}{\pi-2\vartheta_b}\int_{\vartheta_b}^{\frac{\pi}{2}}\left(2-\frac{\sqrt{1+3\cos^2\vartheta}}{\sin^6\vartheta}\left(1-\xi_0^2\right)\right)\frac{\sin^7\vartheta}{\left(3\cos^2\vartheta+1\right)^2}d\vartheta\right)^{-1} \tag{D.54}$$

$$\tau_d = \frac{\mu_0 M}{3\rho_0}\frac{q}{mv^2}g\left(\xi_0\right) \tag{D.55}$$

The g trend is shown in figure D.7.

Like with the bounce time scale, we normalize the drift time scale with respect to its value at $\xi_0=0$. This gives :

$$\tau_{dn} = \frac{\tau_d}{\tau_d^*} = \frac{\tau_d}{\frac{\mu_0 M}{3\rho_0}\frac{q}{mv^2}g\left(0\right)} = \frac{g\left(\xi_0\right)}{g\left(0\right)} \tag{D.56}$$

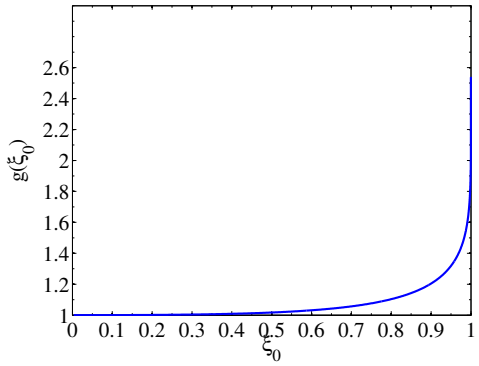


Figure D.7: Drift time scale function g with respect to ξ_0.

D.3.5 Bounce time scale and drift time scale comparison

In order to say that the bounce and drift time scales are on a different ordering level, the ratio $\frac{\tau_b^*}{\tau_d^*}$ has to remain arbitrarily small. The expression of the ratio reads, using $f(0) = \frac{\pi\sqrt{2}}{6}$ and $g(0) = 1$:

$$\boxed{\frac{\tau_b^*}{\tau_d^*} = 2\pi\sqrt{2}\frac{m}{q\mu_0 M}\rho_0^2 v = \frac{4\pi}{\mu_0 M}\frac{m}{q\sqrt{2}}\rho_0^2 v} \tag{D.57}$$

Using the values $\frac{\mu_0 M}{4\pi} = 8.3\times10^{15} Tm^3$ for Earth's magnetic field, $m_p = 1832 m_e = 1.67\times10^{-27} kg$ the mass of a proton and $q = 1.6 \times 10^{-19} C$ the elementary charge, the leading coefficient has the following value :

$$\frac{4\pi}{\mu_0 M}\frac{m}{q\sqrt{2}} = \frac{1.67 \times 10^{-27}}{8.3 \times 10^{15} \times 1.6 \times 10^{-19}\sqrt{2}} = 8.89 \times 10^{-25} sm^{-3}$$

Evolution of the ratio with respect to the particle distance and speed is shown on figure D.8. We can see that for $\rho_0 \lesssim 2R_T$, $\frac{\tau_b^*}{\tau_d^*} < 10$ for all velocities (the particle obviously can't travel faster than the speed of light). This ensures that the separation of the time scales is consistent for all velocities within a radius of $\rho_{0p} \simeq 2R_T \simeq 10^4 km$ from the center of the Earth. Beyond this threshold, particles with enough velocity will have comparable bounce and drift time scale and the assumption will not hold. It is to note that the calculation is done for a proton. Since the ratio depends linearly on the particle mass, the electron ordering threshold is 1832 times higher, i.e. $\rho_{0e} \simeq 4 \times 10^3 R_T \simeq 2 \times 10^7 km$.

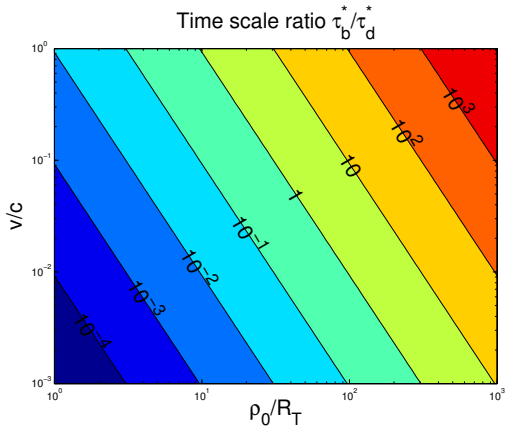


Figure D.8: $\frac{\tau_b^*}{\tau_d^*}$ for a proton in Earth's magnetic field with respect to ρ_0 and v.

Calculation of the dipole magnetic field from the approximation of the single coil magnetic field

In order to calculate the dipole field approximation, we can start either from D.16 or D.23, using the approximation $R_p \ll 1$ and $Z_p = 0$. If we start from D.16, we use the Taylor development of D^{-3} :

$$\frac{1}{\left(R^2+Z^2+R_p^2-2RR_p\cos\left(\varphi-\phi\right)\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\left(R^2+Z^2\right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{3R\cos\left(\varphi-\phi\right)}{\left(R^2+Z^2\right)^{\frac{5}{2}}}R_p + \mathcal{O}\left(R_p^2\right)$$

Since $\int_{-\pi}^{\pi}\cos\left(\varphi-\phi\right)d\phi = 0$ and $\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2\left(\varphi-\phi\right)d\phi = \pi$, the approximated magnetic field given in D.16 becomes :

$$B_R \simeq \frac{\mu_0 I R_p^2}{4\pi}\frac{3\pi RZ}{\left(R^2+Z^2\right)^{\frac{5}{2}}} = \frac{\mu_0 I R_p^2}{4}\frac{3RZ}{\left(R^2+Z^2\right)^{\frac{5}{2}}}$$

$$B_Z \simeq \frac{\mu_0 I R_p^2}{4\pi}\left(\frac{2\pi}{\left(R^2+Z^2\right)^{\frac{3}{2}}} - \frac{3\pi R^2}{\left(R^2+Z^2\right)^{\frac{5}{2}}}\right) = \frac{\mu_0 I R_p^2}{4}\frac{2Z^2-R^2}{\left(R^2+Z^2\right)^{\frac{5}{2}}}$$

If we start from D.23 and take into account the taylor expansions of K and E at zero :

$$K\left(k^2\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1+k^2\frac{\sin^2 t}{2}+k^4\frac{3\sin^4 t}{4}+\mathcal{O}\left(k^6\right)\right)dt = \frac{\pi}{2}\left(1+\frac{k^2}{4}+\frac{9k^4}{64}\right)+\mathcal{O}\left(k^6\right) \tag{D.58}$$

$$E\left(k^2\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-k^2\frac{\sin^2 t}{2}-k^4\frac{\sin^4 t}{4}+\mathcal{O}\left(k^6\right)\right)dt = \frac{\pi}{2}\left(1-\frac{k^2}{4}-\frac{3k^4}{64}\right)+\mathcal{O}\left(k^6\right) \tag{D.59}$$

We then use the taylor expansion of k^2 :

$$k^2 = \frac{4RR_p}{R^2+Z^2}\left(1-\frac{2RR_p}{R^2+Z^2}\right)+\mathcal{O}\left(R_p^3\right) \tag{D.60}$$

Inserting D.60 into D.58 and D.59, we obtain :

$$\frac{2}{\pi}K\left(k^2\right) = 1+\frac{RR_p}{R^2+Z^2}\left(1-\frac{2RR_p}{R^2+Z^2}\right)+\frac{9}{4}\frac{R^2R_p^2}{\left(R^2+Z^2\right)^2} = 1+\frac{RR_p}{R^2+Z^2}+\frac{1}{4}\frac{R^2R_p^2}{\left(R^2+Z^2\right)^2}+\mathcal{O}\left(R_p^3\right) \tag{D.61}$$

$$\frac{2}{\pi}E\left(k^2\right) = 1 - \frac{RR_p}{R^2+Z^2}\left(1 - \frac{2RR_p}{R^2+Z^2}\right) - \frac{3}{4}\frac{R^2R_p^2}{\left(R^2+Z^2\right)^2} = 1 - \frac{RR_p}{R^2+Z^2} + \frac{5}{4}\frac{R^2R_p^2}{\left(R^2+Z^2\right)^2} + \mathcal{O}\left(R_p^3\right) \tag{D.62}$$

We then calculate the taylor expansions of the following expressions :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{(R_p+R)^2+Z^2}} &= \frac{1}{\sqrt{R^2+Z^2}}\left(1 - \frac{RR_p}{R^2+Z^2} + \left(\frac{3}{2}\frac{R^2}{R^2+Z^2} - \frac{1}{2}\right)\frac{R_p^2}{R^2+Z^2}\right) + \mathcal{O}\left(R_p^3\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{R^2+Z^2}}\left(1 - \frac{R}{R^2+Z^2}R_p + \frac{1}{2}\frac{2R^2-Z^2}{\left(R^2+Z^2\right)^2}R_p^2\right) + \mathcal{O}\left(R_p^3\right)\end{aligned} \tag{D.63}$$

$$\begin{aligned}\frac{R_p^2+R^2+Z^2}{(R_p-R)^2+Z^2} &= 1 + \frac{2RR_p}{R^2+Z^2} + \left(1 - 1 + \frac{4R^2}{R^2+Z^2}\right)\frac{R_p^2}{R^2+Z^2} + \mathcal{O}\left(R_p^3\right) \\ &= 1 + \frac{2RR_p}{R^2+Z^2} + \frac{4R^2R_p^2}{\left(R^2+Z^2\right)^2} + \mathcal{O}\left(R_p^3\right)\end{aligned} \tag{D.64}$$

$$\begin{aligned}\frac{R_p^2-R^2-Z^2}{(R_p-R)^2+Z^2} &= -1 - \frac{2RR_p}{R^2+Z^2} + \left(1 + 1 - \frac{4R^2}{R^2+Z^2}\right)\frac{R_p^2}{R^2+Z^2} + \mathcal{O}\left(R_p^3\right) \\ &= -1 - \frac{2RR_p}{R^2+Z^2} + 2\frac{\left(Z^2-R^2\right)R_p^2}{\left(R^2+Z^2\right)^2} + \mathcal{O}\left(R_p^3\right)\end{aligned} \tag{D.65}$$

We finally insert D.61, D.62, D.63, D.64 and D.65 into the expression of the magnetic field found in D.23 :

$$B_R \simeq \frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{Z}{R}\frac{1}{\sqrt{R^2+Z^2}}\frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{RR_p}{R^2+Z^2} + \frac{1}{2}\frac{\left(2R^2-Z^2\right)R_p^2}{\left(R^2+Z^2\right)^2}\right)\left(\left(1 + \frac{2RR_p}{R^2+Z^2} + \frac{4R^2R_p^2}{\left(R^2+Z^2\right)^2}\right)\left(1 - \frac{RR_p}{R^2+Z^2} + \frac{5}{4}\frac{R^2R_p^2}{\left(R^2+Z^2\right)^2}\right) - 1 - \frac{RR_p}{R^2+Z^2} - \frac{1}{4}\frac{R^2R_p^2}{\left(R^2+Z^2\right)^2}\right)$$

$$B_R \simeq \frac{\mu_0 I}{4}\frac{1}{\sqrt{R^2+Z^2}}\frac{Z}{R}\left(\frac{3R^2R_p^2}{\left(R^2+Z^2\right)^2}\right) = \frac{\mu_0 I R_p^2}{4}\frac{3RZ}{\left(R^2+Z^2\right)^{\frac{5}{2}}} \tag{D.66}$$

$$B_Z \simeq \frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{R^2+Z^2}}\frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{RR_p}{R^2+Z^2} + \frac{1}{2}\frac{\left(2R^2-Z^2\right)R_p^2}{\left(R^2+Z^2\right)^2}\right)\left(\left(-1 - \frac{2RR_p}{R^2+Z^2} + 2\frac{\left(Z^2-R^2\right)R_p^2}{\left(R^2+Z^2\right)^2}\right)\left(1 - \frac{RR_p}{R^2+Z^2} + \frac{5}{4}\frac{R^2R_p^2}{\left(R^2+Z^2\right)^2}\right) + 1 + \frac{RR_p}{R^2+Z^2} + \frac{1}{4}\frac{R^2R_p^2}{\left(R^2+Z^2\right)^2}\right)$$

$$B_Z \simeq \frac{\mu_0 I}{4}\frac{1}{\sqrt{R^2+Z^2}}\left(-\frac{R^2R_p^2}{\left(R^2+Z^2\right)^2} + \frac{2Z^2R_p^2}{\left(R^2+Z^2\right)^2}\right) = \frac{\mu_0 I R_p^2}{4}\frac{2Z^2-R^2}{\left(R^2+Z^2\right)^{\frac{5}{2}}} \tag{D.67}$$

We therefore in both cases obtain the same expressions than D.29, using $M = I\pi R_p^2$.

Calculation of the dipole flux coordinate from the approximation of the single coil flux coordinate

In order to calculate the dipole flux coordinate approximation, we can start either from D.27 or D.28, using the approximation $R_p \ll 1$ and $Z_p = 0$. If we start from D.27, we use the Taylor development of D^{-1} :

$$\frac{1}{\sqrt{R^2+Z^2+R_p^2-2RR_p\cos\left(\varphi-\phi\right)}} = \frac{1}{\sqrt{R^2+Z^2}} + \frac{R\cos\left(\varphi-\phi\right)}{\left(R^2+Z^2\right)^{\frac{3}{2}}}R_p + \mathcal{O}\left(R_p^2\right)$$

Since $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(\varphi - \phi)\, d\phi = 0$ and $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(\varphi - \phi)\, d\phi = \pi$, the approximated flux coordinate given in D.27 becomes :

$$\psi \simeq \frac{\mu_0 I R_p^2}{4\pi} \frac{\pi R^2}{\left(R^2+Z^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mu_0 I R_p^2}{4} \frac{R^2}{\left(R^2+Z^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

If we start from D.28, we calculate the taylor expansions of the following expressions :

$$\begin{aligned} \sqrt{\left(R_p+R\right)^2+Z^2} &= \sqrt{R^2+Z^2}\left(1+\tfrac{RR_p}{R^2+Z^2}+\left(-\tfrac{1}{2}\tfrac{R^2}{R^2+Z^2}-\tfrac{1}{2}\right)\tfrac{R_p^2}{R^2+Z^2}\right)+\mathcal{O}\left(R_p^3\right) \\ &= \sqrt{R^2+Z^2}\left(1+\tfrac{R}{R^2+Z^2}R_p-\tfrac{1}{2}\tfrac{2R^2+Z^2}{\left(R^2+Z^2\right)^2}R_p^2\right)+\mathcal{O}\left(R_p^3\right) \end{aligned} \tag{D.68}$$

We then insert D.61, D.62 and D.68 into the expression of the flux coordinate found in D.28 :

$$\psi \simeq -\frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{RR_p}{R^2+Z^2}-\frac{1}{2}\frac{\left(2R^2+Z^2\right)R_p^2}{\left(R^2+Z^2\right)^2}\right)\Bigg(\left(\frac{4RR_p}{R^2+Z^2}-\frac{8R^2R_p^2}{\left(R^2+Z^2\right)^2}-2\right)\left(1+\frac{RR_p}{R^2+Z^2}+\frac{1}{4}\frac{R^2R_p^2}{\left(R^2+Z^2\right)^2}\right)+2\left(1-\frac{RR_p}{R^2+Z^2}+\frac{5}{4}\frac{R^2R_p^2}{\left(R^2+Z^2\right)^2}\right)\Bigg)$$

$$\psi \simeq \frac{\mu_0 I}{8}\sqrt{R^2+Z^2}\left(\frac{2R^2R_p^2}{\left(R^2+Z^2\right)^2}\right) = \frac{\mu_0 I R_p^2}{4}\frac{R^2}{\left(R^2+Z^2\right)^{\frac{3}{2}}} \tag{D.69}$$

We therefore in both cases obtain the same expressions than D.29, using $M = I\pi R_p^2$.

Link between cylindrical and spherical expressions of the dipole magnetic field

Here, we want to prove that the conversion of D.29 to spherical $(\rho, \vartheta, \varphi)$ coordinates gives the expression previously calculated at D.3. Discarding the φ coordinate since $B_\varphi = 0$ and none of the expressions depend on φ, we start from the relations :

$$\begin{matrix} \rho = \sqrt{R^2+Z^2} \\ \vartheta = \arctan\frac{Z}{R} \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} R = \rho\sin\vartheta \\ Z = \rho\cos\vartheta \end{matrix}$$

$$\hat{\rho} = \sin\vartheta\hat{R} + \cos\vartheta\hat{Z}$$

$$\hat{\vartheta} = \cos\vartheta\hat{R} - \sin\vartheta\hat{Z}$$

We therefore have :

$$B_R = \frac{\mu_0 M}{4\pi}\frac{3RZ}{\left(R^2+Z^2\right)^{\frac{5}{2}}} = \frac{\mu_0 M}{4\pi\rho^3}3\sin\vartheta\cos\vartheta$$

$$B_Z = \frac{\mu_0 M}{4\pi}\frac{2Z^2-R^2}{\left(R^2+Z^2\right)^{\frac{5}{2}}} = \frac{\mu_0 M}{4\pi\rho^3}\left(2\cos^2\vartheta-\sin^2\vartheta\right)$$

We can therefore deduce :

$$B_\rho = B_R\sin\vartheta + B_Z\cos\vartheta = \frac{\mu_0 M}{4\pi\rho^3}\left(3\sin^2\vartheta\cos\vartheta+2\cos^3\vartheta-\sin^2\vartheta\cos\vartheta\right) = \frac{\mu_0 M}{4\pi\rho^3}2\cos\vartheta \tag{D.70}$$

$$B_\vartheta = B_R\cos\vartheta - B_Z\sin\vartheta = \frac{\mu_0 M}{4\pi\rho^3}\left(3\sin\vartheta\cos^2\vartheta-2\cos^2\vartheta\sin\vartheta+\sin^3\vartheta\right) = \frac{\mu_0 M}{4\pi\rho^3}\sin\vartheta \tag{D.71}$$

We therefore obtain the same expression as D.3.

D.4 Values for f at $\xi_0 = 0$ and $\xi_0 = 1$

D.4.1 Calculation of $f(0)$

The goal here is to perform the Taylor expansion of the bounce time scale function at $\xi_0 = 0 \Leftrightarrow \vartheta_b = \frac{\pi}{2}$. Let us introduce the small parameter $\varepsilon = \frac{\pi}{2} - \vartheta_b$. The expression of f becomes :

$$f(\varepsilon) = \int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\vartheta\sqrt{1+3\cos^2\vartheta}}{\sqrt{1-\frac{\sqrt{1+3\cos^2\vartheta}}{\sin^6\vartheta}\frac{\cos^6\varepsilon}{\sqrt{1+3\sin^2\varepsilon}}}}d\vartheta$$

In order to have a finite boundary integral, we do the following variable change :

$$\vartheta = \varepsilon(t-1) + \frac{\pi}{2}$$

$$d\vartheta = \varepsilon dt$$

The expression then reads :

$$f(\varepsilon) = \varepsilon\int_0^1 \frac{\cos(\varepsilon(t-1))\sqrt{1+3\sin^2(\varepsilon(t-1))}}{\sqrt{1-\frac{\sqrt{1+3\sin^2(\varepsilon(t-1))}}{\cos^6(\varepsilon(t-1))}\frac{\cos^6\varepsilon}{\sqrt{1+3\sin^2\varepsilon}}}}dt$$

We then use the following Taylor expansions at second order :

$$\cos(\varepsilon(t-1))\sqrt{1+3\sin^2(\varepsilon(t-1))} = \left(1-\frac{\varepsilon^2(t-1)^2}{2}\right)\left(1+\frac{3\varepsilon^2(t-1)^2}{2}\right) = 1+\varepsilon^2(t-1)^2$$

$$\frac{\sqrt{1+3\sin^2(\varepsilon(t-1))}}{\cos^6(\varepsilon(t-1))} = \left(1+\frac{3\varepsilon^2(t-1)^2}{2}\right)\left(1+3\varepsilon^2(t-1)^2\right) = 1+\frac{9\varepsilon^2(t-1)^2}{2}$$

$$\frac{\cos^6\varepsilon}{\sqrt{1+3\sin^2\varepsilon}} = \left(1-3\varepsilon^2\right)\left(1-\frac{3\varepsilon^2}{2}\right) = 1-\frac{9\varepsilon^2}{2}$$

We can therefore deduce :

$$f(\varepsilon) = \varepsilon\int_0^1 \frac{1+\varepsilon^2(t-1)^2}{\sqrt{1-\left(1-\frac{9\varepsilon^2}{2}\left(1-(t-1)^2\right)\right)}}dt$$

$$f(\varepsilon) = \frac{\sqrt{2}}{3}\left(\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-(t-1)^2}} + \varepsilon^2\int_0^1 \frac{(t-1)^2}{\sqrt{1-(t-1)^2}}dt\right)$$

$$f(\varepsilon) = \frac{\sqrt{2}}{3}\left[\arcsin(t-1)\right]_0^1 + \frac{\sqrt{2}\varepsilon^2}{6}\left[\arcsin(t-1) - (t-1)\sqrt{1-(t-1)^2}\right]_0^1$$

$$f(\varepsilon) = \frac{\pi\sqrt{2}}{6} + \frac{\pi\sqrt{2}}{12}\varepsilon^2 + \mathcal{O}\left(\varepsilon^2\right) \tag{D.72}$$

We can therefore see that $f(0) = \frac{\pi\sqrt{2}}{6} \simeq 0.74$ and that there is a local minimum in $\xi_0 = 0$.

D.4.2 Calculation of $f(1)$

The evaluation of f at $\xi_0 = 1$ has the following expression :

$$f(1) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\vartheta \sqrt{1 + 3\cos^2\vartheta} d\vartheta$$

Here, we use the following variable change :

$$x = \cos\vartheta$$

$$dx = -\sin\vartheta d\vartheta$$

$$f(1) = \int_0^1 \sqrt{1 + 3x^2} dx$$

We then use the following antiderivative :

$$\int \sqrt{a^2 + x^2} dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 + x^2} + \frac{a^2}{2} \ln\left|x + \sqrt{a^2 + x^2}\right|$$

The expression becomes :

$$f(1) = \sqrt{3}\left[\frac{x}{2}\sqrt{\frac{1}{3} + x^2} + \frac{1}{6}\ln\left|x + \sqrt{\frac{1}{3} + x^2}\right|\right]_0^1 = 1 + \frac{\sqrt{3}}{6}\ln\left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right) - \frac{\sqrt{3}}{6}\ln\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$f(1) = 1 + \frac{\sqrt{3}}{6}\ln\left(2 + \sqrt{3}\right) \simeq 1.38 \tag{D.73}$$

Appendix E

Phase-space Lagrangian and Lie transform in $(\mathbf{x}, p, \xi, \theta)$ coordinates

E.1 Local phase-space coordinates and Lagrangian

Here, we consider a charged particle of mass m and charge e moving in a magnetic field $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = B\widehat{\mathsf{b}}$. We use the following noncanonical local particle coordinates $z^\alpha = (\mathbf{x}, p, \xi, \theta)$ where $p = |\mathbf{p}|$ is the momentum amplitude, $\xi = \mathbf{p} \cdot \widehat{\mathsf{b}}/p$ is the pitch-angle cosine and θ the gyro-angle. We define $\mathbf{p}_\perp = p_\perp (\mathbf{x}, p, \xi)\, \widehat{\perp}\, (\mathbf{x}, \theta)$ the local perpendicular momentum, where $p_\perp \equiv p\sqrt{1-\xi^2}$. The phase-space Lagrangian reads :

$$\Gamma = \left[\frac{e}{c}\mathbf{A} + p\xi\widehat{\mathsf{b}} + \mathbf{p}_\perp\right] \cdot \mathsf{d}\mathbf{x} - \frac{p^2}{2m}\mathsf{d}t \equiv \epsilon^{-1}\Gamma_0 + \Gamma_1 \tag{E.1}$$

The inverse charge $e^{-1} \sim \epsilon$ can be associated with the small parameter $\epsilon \equiv \rho/L \ll 1$ where ρ is the particle gyroradius and L the magnetic field nonuniformity scale length. In what follows, we will use the right-handed orthogonal unit vectors $\left(\widehat{\rho}, \widehat{\perp}, \widehat{\mathsf{b}}\right)$, where $\widehat{\perp} \equiv \widehat{\rho} \times \widehat{\mathsf{b}} = \frac{\partial \widehat{\rho}}{\partial \theta}$. We also define the gyrogauge vector

$$\mathbf{R} = \nabla\widehat{\perp} \cdot \widehat{\rho} \tag{E.2}$$

We note that the hamiltonian part $H = p^2/2m$ of the Lagrangian is gyroangle-independant, contrary to the symplectic part which contains the term $\mathbf{p}_\perp \cdot \mathsf{d}\mathbf{x}$. In order to obtain a guiding-center Lagrangian $\overline{\Gamma} = \overline{\Gamma}_\alpha \mathsf{d}\overline{z}^\alpha - \overline{H}\mathsf{d}t$ where both symplectic and hamiltonian parts are independant of the guiding-center gyro-angle $\overline{\theta}$, we seek a phase-space transformation $z^\alpha = (\mathbf{x}, p, \xi, \theta) \to \overline{z}^\alpha = \left(\overline{\mathbf{x}}, \overline{p}, \overline{\xi}, \overline{\theta}\right)$, where :

$$\overline{z}^\alpha = z^\alpha + \epsilon G_1^\alpha + \epsilon^2\left(G_2^\alpha + \frac{1}{2}G_1^\beta \frac{\partial G_1^\alpha}{\partial z^\beta}\right) + \dots \tag{E.3}$$

where the vector fields $\mathsf{G}_n \equiv G_n^\alpha \partial/\partial z^\alpha$ carry out the transformation at order n. We note that if $\overline{\Gamma}_\theta \neq 0$, in order to maintain gyroangle independance the guiding-center Lagrangian must contain the gyrogauge-invariant term :

$$\overline{\Gamma}_\theta \left(\mathsf{d}\overline{\theta} - \mathbf{R} \cdot \mathsf{d}\overline{\mathbf{x}}\right) \tag{E.4}$$

E.2 Guiding-center phase-space Lagrangian

Thenceforward, we will use greek indices for phase-space z^α coordinates and latin indices for spatial x^i coordinates. The guiding-center Lagrangian has the following expression :

$$\overline{\Gamma} = \mathsf{T}_\epsilon^{-1}\Gamma + \mathsf{d}S \equiv \epsilon^{-1}\overline{\Gamma}_0 + \overline{\Gamma}_1 + \epsilon\overline{\Gamma}_2 + \epsilon^2\overline{\Gamma}_3 + \dots \tag{E.5}$$

where $\overline{\Gamma}_n \equiv \overline{\Gamma}_{n\alpha}\mathsf{d}z^\alpha - \overline{H}_n\mathsf{d}t$ is expressed in terms of symplectic and hamiltonian componets. The "push-forward" operator T_ϵ^{-1} is defined in terms of the product of Lie-transforms $\exp\left(-\epsilon^n\mathcal{L}_n\right)$ where

the n^{th}-order Lie derivative $\mathcal{L}_n$ is generated by the n^{th}-order vector field G_n. Using the expression for the guiding-center two-form $\omega \equiv \mathsf{d}\Gamma$, we have :

$$\mathcal{L}_G\Gamma \equiv \iota_G \cdot \mathsf{d}\Gamma + \mathsf{d}\left(\iota_G \cdot \Gamma\right) = G^\alpha \omega_{\alpha\beta} \mathsf{d}z^\beta + \mathsf{d}\left(G^\alpha \Gamma_\alpha\right) \tag{E.6}$$

We note that the Lie and exterior derivative commute. Since $\mathsf{d}^2 = 0$, the guiding-center two-form is unaffected by the addition of an exact exterior derivative $\mathsf{d}S$ to the push-forward. This will serve as a phase-space gauge function $S \equiv S_1 + \epsilon S_2 + \epsilon^2 S_3 + \ldots$. The first four terms of the guiding-center Lagrangian are :

$$\overline{\Gamma}_0 = \Gamma_0 \tag{E.7}$$

$$\begin{aligned} \overline{\Gamma}_1 &= \Gamma_1 - \mathcal{L}_1\Gamma_0 + \mathsf{d}S_1 \\ &\equiv \Gamma_1 - \iota_1 \cdot \omega_0 + \mathsf{d}\sigma_1 \end{aligned} \tag{E.8}$$

$$\begin{aligned} \overline{\Gamma}_2 &= \Gamma_2 - \mathcal{L}_2\Gamma_0 - \mathcal{L}_1\Gamma_1 + \frac{1}{2}\mathcal{L}_1^2\Gamma_0 + \mathsf{d}S_2 \\ &\equiv -\iota_2 \cdot \omega_0 - \frac{1}{2}\iota_1 \cdot (\omega_1 + \overline{\omega}_1) + \mathsf{d}\sigma_2 \end{aligned} \tag{E.9}$$

$$\begin{aligned} \overline{\Gamma}_3 &= \Gamma_3 - \mathcal{L}_3\Gamma_0 - \mathcal{L}_2\Gamma_1 - \mathcal{L}_1\Gamma_2 + \frac{1}{2}\mathcal{L}_1^2\Gamma_1 - \mathcal{L}_2\mathcal{L}_1\Gamma_0 - \frac{1}{6}\mathcal{L}_1^3\Gamma_0 + \mathsf{d}S_3 \\ &\equiv -\iota_3 \cdot \omega_0 - \iota_2 \cdot \overline{\omega}_1 + \frac{1}{3}\iota_1 \cdot \mathsf{d}\left(\iota_1 \cdot \omega_1 + \frac{1}{2}\iota_1 \cdot \overline{\omega}_1\right) + \mathsf{d}\sigma_3 \end{aligned} \tag{E.10}$$

where $\iota_n \cdot \omega_k = G_n^\alpha \omega_{k\alpha\beta} \mathsf{d}z^\beta - \left(\mathsf{G}_n \cdot \mathsf{d}H_k\right)\mathsf{d}t$ and the phase-space gauge functions are redefined $S_n \to \sigma_n$ so as to absorb all exact exterior derivatives. The results obtained at lower order are used to simplify the higher-order expressions. Since $\Gamma_0 = \frac{e}{c}\mathbf{A}$, we have :

$$\omega_0 = \mathsf{d}\Gamma_0 = \frac{e}{c}\frac{\partial A_j}{\partial x^i}\mathsf{d}x^i \wedge \mathsf{d}x^j \equiv \frac{1}{2!}\omega_{0ij}\mathsf{d}x^i \wedge \mathsf{d}x^j \tag{E.11}$$

where the components $\omega_{0ij} \equiv \frac{e}{c}\varepsilon_{ijk}B^k$ are expressed in terms of the Levi-Civita symbol and the magnetic field. We therefore have :

$$\iota_n\omega_0 \equiv G_n^\alpha \omega_{0\alpha\beta}\mathsf{d}z^\beta = \frac{e}{c}G_n^i\varepsilon_{ijk}B^k\mathsf{d}x^j = \frac{e}{c}\mathbf{B} \times G_n^{\mathbf{x}} \cdot \mathsf{d}\mathbf{x} \tag{E.12}$$

Where $G_n^{\mathbf{x}}$ denotes the spatial component of the n^{th}-order generating vector field. The expression for ω_1 reads :

$$\omega_1 = \mathsf{d}\Gamma_1 = \left[\left(p\xi\frac{\partial\widehat{\mathsf{b}}}{\partial x^i} + \frac{\partial \mathbf{p}_\perp}{\partial x^i}\right)\mathsf{d}x^i + \left(\xi\widehat{\mathsf{b}} + \frac{\partial \mathbf{p}_\perp}{\partial p}\right)\mathsf{d}p + \left(p\widehat{\mathsf{b}} + \frac{\partial \mathbf{p}_\perp}{\partial \xi}\right)\mathsf{d}\xi + \frac{\partial \mathbf{p}_\perp}{\partial \theta}\mathsf{d}\theta\right] \wedge \mathsf{d}x^j - \frac{p}{m}\mathsf{d}p \wedge \mathsf{d}t \tag{E.13}$$

We can therefore deduce :

$$\iota_n\omega_1 \equiv K_{n\alpha}\mathsf{d}z^\alpha - \left(\mathsf{G}_n \cdot \mathsf{d}H_1\right)\mathsf{d}t \tag{E.14}$$

$K_{n\mathbf{x}}$ reads, using the analogy with respect to zero-order term $\frac{e}{c}\mathbf{A}$ for the first term :

$$K_{n\mathbf{x}} = p\xi\left(\nabla \times \widehat{\mathsf{b}}\right) \times G_n^{\mathbf{x}} + (\nabla \times \mathbf{p}_\perp) \times G_n^{\mathbf{x}} + \left(\xi\widehat{\mathsf{b}} + \frac{\partial \mathbf{p}_\perp}{\partial p}\right)G_n^p + \left(p\widehat{\mathsf{b}} + \frac{\partial \mathbf{p}_\perp}{\partial \xi}\right)G_n^\xi + \frac{\partial \mathbf{p}_\perp}{\partial \theta}G_n^\theta \tag{E.15}$$

The velocity components read :

$$\begin{pmatrix} K_n^p \\ K_n^\xi \\ K_n^\theta \end{pmatrix} = -G_n^{\mathbf{x}} \cdot \begin{pmatrix} \xi\widehat{\mathsf{b}} + \frac{\partial \mathbf{p}_\perp}{\partial p} \\ p\widehat{\mathsf{b}} + \frac{\partial \mathbf{p}_\perp}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \mathbf{p}_\perp}{\partial \theta} \end{pmatrix} \tag{E.16}$$

The Hamiltonian component is :

$$\mathsf{G}_n \cdot \mathsf{d}H_1 = \frac{p}{m}G_n^p \tag{E.17}$$

E.3 First-order perturbation analysis

Using the formulas above, we can express the first-order guiding-center Lagrangian :

$$\begin{aligned}\overline{\Gamma}_1 &= \left(p\xi\widehat{\mathsf{b}} + \mathbf{p}_\perp\right)\cdot \mathsf{d}\mathbf{x} - \frac{p^2}{2m}\mathsf{d}t - \frac{e}{c}\mathbf{B}\times G_1^{\mathbf{x}}\cdot \mathsf{d}\mathbf{x} + \mathsf{d}\sigma_1 \\ &= \left(p\xi\widehat{\mathsf{b}}\cdot \mathsf{d}\mathbf{x} - \frac{p^2}{2m}\mathsf{d}t\right) + \left(\mathbf{p}_\perp - m\Omega\widehat{\mathsf{b}}\times G_1^{\mathbf{x}}\right)\cdot \mathsf{d}\mathbf{x} + \mathsf{d}\sigma_1 \end{aligned} \tag{E.18}$$

The terms on the left are gyroangle-independant and those on the right depend on θ. σ_1 is not needed to remove the gyroangle dependance of the right-hand term, so we set $\sigma_1 \equiv 0$. The gyroangle-independance of the guiding-center Lagrangian gives the following condition :

$$\mathbf{p}_\perp - m\Omega\widehat{\mathsf{b}}\times G_1^{\mathbf{x}} \equiv 0 \tag{E.19}$$

This gives the expression for $G_1^{\mathbf{x}}$:

$$G_1^{\mathbf{x}} = \left(G_1^{\mathbf{x}}\cdot\widehat{\mathsf{b}}\right)\widehat{\mathsf{b}} - \frac{\widehat{\mathsf{b}}\times\mathbf{p}_\perp}{m\Omega} \equiv G_{1\parallel}\widehat{\mathsf{b}} - \boldsymbol{\rho}_0 \tag{E.20}$$

where $\boldsymbol{\rho}_0 = \left(p\sqrt{1-\xi^2}/m\Omega\right)\widehat{\rho}$ is the zero-order gyroradius vector. The gradient of $\boldsymbol{\rho}_0$ reads :

$$\begin{aligned}\nabla\boldsymbol{\rho}_0 &= -\nabla\ln B\boldsymbol{\rho}_0 + \frac{p\sqrt{1-\xi^2}}{m\Omega}\nabla\widehat{\rho} \\ &= -\nabla\ln B\boldsymbol{\rho}_0 + \frac{p\sqrt{1-\xi^2}}{m\Omega}\left[\left(\nabla\widehat{\rho}\cdot\widehat{\mathsf{b}}\right)\widehat{\mathsf{b}} + \left(\nabla\widehat{\rho}\cdot\widehat{\perp}\right)\widehat{\perp}\right] \\ &= -\nabla\ln B\boldsymbol{\rho}_0 - \left(\nabla\widehat{\mathsf{b}}\cdot\boldsymbol{\rho}_0\right)\widehat{\mathsf{b}} - \mathbf{R}\frac{\partial\boldsymbol{\rho}_0}{\partial\theta}\end{aligned} \tag{E.21}$$

Using the expression for $\overline{\Gamma}_1 = p\xi\widehat{\mathsf{b}}\cdot\mathsf{d}\mathbf{x} - \frac{p^2}{2m}\mathsf{d}t$, we can therefore calculate $\overline{\omega}_1$:

$$\overline{\omega}_1 = \mathsf{d}\overline{\Gamma}_1 = \left[p\xi\frac{\partial\widehat{\mathsf{b}}}{\partial x^i}\mathsf{d}x^i + (\xi\mathsf{d}p + p\mathsf{d}\xi)\,\widehat{\mathsf{b}}\right]\wedge\mathsf{d}x^j - \frac{p}{m}\mathsf{d}p\wedge\mathsf{d}t \tag{E.22}$$

We can therefore deduce :

$$\iota_n\overline{\omega}_1 \equiv \overline{K}_{n\mathbf{x}}\cdot\mathsf{d}\mathbf{x} - G_{n\parallel}\left(\xi\mathsf{d}p + p\mathsf{d}\xi\right) - \left(\mathsf{G}_n\cdot\mathsf{d}\overline{H}_1\right)\mathsf{d}t \tag{E.23}$$

$\overline{K}_{n\mathbf{x}}$ reads, using the analogy with respect to zero-order term $\frac{e}{c}\mathbf{A}$ for the first term :

$$\overline{K}_{n\mathbf{x}} = p\xi\left(\nabla\times\widehat{\mathsf{b}}\right)\times G_n^{\mathbf{x}} + \left(\xi G_n^p + pG_n^\xi\right)\widehat{\mathsf{b}} \tag{E.24}$$

The Hamiltonian component is :

$$\mathsf{G}_n\cdot\mathsf{d}\overline{H}_1 \equiv \mathsf{G}_n\cdot\mathsf{d}H_1 = \frac{p}{m}G_n^p \tag{E.25}$$

E.4 Second-order perturbation analysis

In order to calculate the parallel component of $G_1^{\mathbf{x}}$ and the velocity components of G_1, we need to proceed with the analysis at higher order. The second-order guiding-center Lagrangian therefore reads, using previous results :

$$\begin{aligned}\overline{\Gamma}_2 = &-\left[\frac{e}{c}\mathbf{B}\times G_2^{\mathbf{x}} + \frac{1}{2}\left(K_{1\mathbf{x}} + \overline{K}_{1\mathbf{x}}\right)\right]\cdot\mathsf{d}\mathbf{x} + G_{1\parallel}\left(\xi\mathsf{d}p + p\mathsf{d}\xi\right) + \frac{1}{2}G_1^{\mathbf{x}}\cdot\left(\frac{\partial\mathbf{p}_\perp}{\partial p}\mathsf{d}p + \frac{\partial\mathbf{p}_\perp}{\partial\xi}\mathsf{d}\xi + \frac{\partial\mathbf{p}_\perp}{\partial\theta}\mathsf{d}\theta\right) \\ &- \left(\mathsf{G}_n\cdot\mathsf{d}H_1\right)\mathsf{d}t + \mathsf{d}\sigma_2\end{aligned} \tag{E.26}$$

Using $G_1^{\mathbf{x}} \cdot \frac{\partial \mathbf{p}_\perp}{\partial p} = G_1^{\mathbf{x}} \cdot \frac{\partial \mathbf{p}_\perp}{\partial \xi} = 0$ and $G_1^{\mathbf{x}} \cdot \frac{\partial \mathbf{p}_\perp}{\partial \theta} = \frac{p^2(1-\xi^2)}{m\Omega}$, we see that the velocity components of the second-order Lagrangian are :

$$\begin{pmatrix} \overline{\Gamma}_{2p} \\ \overline{\Gamma}_{2\xi} \\ \overline{\Gamma}_{2\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi G_{1\parallel} + \frac{\partial \sigma_2}{\partial p} \\ p G_{1\parallel} + \frac{\partial \sigma_2}{\partial \xi} \\ \frac{p^2(1-\xi^2)}{2m\Omega} + \frac{\partial \sigma_2}{\partial \theta} \end{pmatrix} \tag{E.27}$$

The gyroangle-independance of $\overline{\Gamma}_{2\theta}$ is satisfied by the gyro-gauge choice $\sigma_2 \equiv 0$. The simplest form for $\overline{\Gamma}_{2p}$ is $\overline{\Gamma}_{2p} \equiv 0$, which therefore implies $G_{1\parallel} = 0$ and $\overline{\Gamma}_{2\xi} = 0$. The spatial component of G_1 therefore reads :

$$G_{1\mathbf{x}} = -\boldsymbol{\rho}_0 \tag{E.28}$$

Since we require the guiding-center Hamiltonian to be, at all orders in ϵ :

$$\overline{H} = \frac{\overline{p}^2}{2m} \tag{E.29}$$

we can deduce $\boxed{\mathsf{G}_n \cdot \mathsf{d}H_1 = \frac{m}{p} G_n^p \equiv 0}$, and in particular :

$$G_1^p = 0 \tag{E.30}$$

Using the previous choices, the second-order guiding-center Lagrangian becomes :

$$\overline{\Gamma}_2 = -\left[\frac{e}{c}\mathbf{B} \times G_2^{\mathbf{x}} + \frac{1}{2}\left(K_{1\mathbf{x}} + \overline{K}_{1\mathbf{x}}\right)\right] \cdot \mathsf{d}\mathbf{x} + \frac{p^2\left(1-\xi^2\right)}{2m\Omega}\mathsf{d}\theta \tag{E.31}$$

In order to be gyroangle-independant, the Lagrangian needs to be able to take the form :

$$\overline{\Gamma}_2 \equiv \frac{\overline{p}^2\left(1-\overline{\xi}^2\right)}{2m\Omega}\left(\mathsf{d}\overline{\theta} - \mathbf{R}^* \cdot \mathsf{d}\overline{\mathbf{x}}\right) \tag{E.32}$$

where $\mathbf{R}^*$ is defined as :

$$\mathbf{R}^* = \mathbf{R} + \frac{1}{2}\left(\widehat{\mathsf{b}} \cdot \nabla \times \widehat{\mathsf{b}}\right)\widehat{\mathsf{b}} \tag{E.33}$$

where the second term ensures the solvability of σ_3 at next order. Inserting (E.31) into (E.32) and using the expressions for $G_1^{\mathbf{x}}$ and G_1^p, we get :

$$\frac{p^2\left(1-\xi^2\right)}{2m\Omega}\mathbf{R}^* \equiv \frac{e}{c}\mathbf{B} \times G_2^{\mathbf{x}} + pG_1^\xi \widehat{\mathsf{b}} - p\xi\left(\nabla \times \widehat{\mathsf{b}}\right) \times \boldsymbol{\rho}_0 + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial \mathbf{p}_\perp}{\partial \xi}G_1^\xi + \frac{\partial \mathbf{p}_\perp}{\partial \theta}G_1^\theta - (\nabla \times \mathbf{p}_\perp) \times \boldsymbol{\rho}_0\right] \tag{E.34}$$

We now use the following formulas :

$$\begin{aligned} -p\xi\left(\nabla \times \widehat{\mathsf{b}}\right) \times \boldsymbol{\rho}_0 &= -p\xi\left[\left(\widehat{\rho} \cdot \nabla \times \widehat{\mathsf{b}}\right)\widehat{\rho} \times \boldsymbol{\rho}_0 + \left(\widehat{\perp} \cdot \nabla \times \widehat{\mathsf{b}}\right)\widehat{\perp} \times \boldsymbol{\rho}_0 + \left(\widehat{\mathsf{b}} \cdot \nabla \times \widehat{\mathsf{b}}\right)\widehat{\mathsf{b}} \times \boldsymbol{\rho}_0\right] \\ &= -p\xi\left[\left(\rho_0\left(\widehat{\rho} \times \widehat{\mathsf{b}}\right) \cdot \nabla \times \widehat{\mathsf{b}}\right)\widehat{\mathsf{b}} + \left(\widehat{\mathsf{b}} \cdot \nabla \times \widehat{\mathsf{b}}\right)\widehat{\mathsf{b}} \times \boldsymbol{\rho}_0\right] \\ &= p\xi\left[\left(\widehat{\mathsf{b}} \cdot \nabla\widehat{\mathsf{b}} \cdot \boldsymbol{\rho}_0\right)\widehat{\mathsf{b}} - \left(\widehat{\mathsf{b}} \cdot \nabla \times \widehat{\mathsf{b}}\right)\widehat{\mathsf{b}} \times \boldsymbol{\rho}_0\right] \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{2}\left(\nabla\times\mathbf{p}_\perp\right)\times\boldsymbol{\rho}_0 &= -\frac{p\sqrt{1-\xi^2}}{2}\left(\nabla\times\widehat{\perp}\right)\times\boldsymbol{\rho}_0\\
&= \frac{p^2\left(1-\xi^2\right)}{2m\Omega}\left(\nabla\widehat{\perp}\cdot\widehat{\rho}-\widehat{\rho}\cdot\nabla\widehat{\perp}\right)\\
&= \frac{p^2\left(1-\xi^2\right)}{2m\Omega}\left[\mathbf{R}-\left(\widehat{\rho}\cdot\mathbf{R}\right)\widehat{\rho}-\left(\widehat{\rho}\cdot\nabla\widehat{\perp}\cdot\widehat{\mathsf{b}}\right)\widehat{\mathsf{b}}\right]\\
&= \frac{p^2\left(1-\xi^2\right)}{2m\Omega}\left[\mathbf{R}-\left(\widehat{\rho}\cdot\mathbf{R}\right)\widehat{\rho}+\frac{1}{2}\left(\left(\widehat{\perp}\widehat{\rho}-\widehat{\rho}\widehat{\perp}\right):\nabla\widehat{\mathsf{b}}+\left(\widehat{\perp}\widehat{\rho}+\widehat{\rho}\widehat{\perp}\right):\nabla\widehat{\mathsf{b}}\right)\widehat{\mathsf{b}}\right]\\
&= \frac{p^2\left(1-\xi^2\right)}{2m\Omega}\left[\mathbf{R}-\left(\widehat{\rho}\cdot\mathbf{R}\right)\widehat{\rho}+\left(\frac{1}{2}\left(\widehat{\rho}\times\widehat{\perp}\right)\cdot\nabla\times\widehat{\mathsf{b}}-\mathsf{a}_1:\nabla\widehat{\mathsf{b}}\right)\widehat{\mathsf{b}}\right]\\
&= \frac{p^2\left(1-\xi^2\right)}{2m\Omega}\left[\mathbf{R}^*-\left(\widehat{\rho}\cdot\mathbf{R}\right)\widehat{\rho}-\left(\widehat{\mathsf{b}}\cdot\nabla\times\widehat{\mathsf{b}}+\mathsf{a}_1:\nabla\widehat{\mathsf{b}}\right)\widehat{\mathsf{b}}\right]
\end{aligned}
$$

where $\mathsf{a}_1=-\frac{1}{2}\left(\widehat{\rho}\widehat{\perp}+\widehat{\perp}\widehat{\rho}\right)$ is a dyadic tensor which depends explicitly on twice the gyrophase. The parallel component of (E.34) gives :

$$
G_1^\xi=-\xi\left(\widehat{\mathsf{b}}\cdot\nabla\widehat{\mathsf{b}}\cdot\boldsymbol{\rho}_0\right)+\frac{p\left(1-\xi^2\right)}{2m\Omega}\left(\widehat{\mathsf{b}}\cdot\nabla\times\widehat{\mathsf{b}}+\mathsf{a}_1:\nabla\widehat{\mathsf{b}}\right) \tag{E.35}
$$

The perpendicular component gives, using $\widehat{\rho}=-\widehat{\perp}\times\widehat{\mathsf{b}}=-\frac{\partial\widehat{\rho}}{\partial\theta}\times\widehat{\mathsf{b}}$ and $\mathbf{p}_\perp=m\Omega\boldsymbol{\rho}_0\times\widehat{\mathsf{b}}$:

$$
0=\widehat{\mathsf{b}}\times\left[G_2^{\mathbf{x}}-\frac{p\xi}{m\Omega}\left(\widehat{\mathsf{b}}\cdot\nabla\times\widehat{\mathsf{b}}\right)\boldsymbol{\rho}_0\right]+\frac{1}{2}\left[G_1^\xi\frac{\partial\boldsymbol{\rho}_0}{\partial\xi}+\left(G_1^\theta+\boldsymbol{\rho}_0\cdot\mathbf{R}\right)\frac{\partial\boldsymbol{\rho}_0}{\partial\theta}\right]\times\widehat{\mathsf{b}} \tag{E.36}
$$

We can therefore express $G_2^{\mathbf{x}}$ as :

$$
G_2^{\mathbf{x}}=G_{2\parallel}\widehat{\mathsf{b}}+\frac{p\xi}{m\Omega}\left(\widehat{\mathsf{b}}\cdot\nabla\times\widehat{\mathsf{b}}\right)\boldsymbol{\rho}_0+\frac{1}{2}G_1^\xi\frac{\partial\boldsymbol{\rho}_0}{\partial\xi}+\frac{1}{2}\left(G_1^\theta+\boldsymbol{\rho}_0\cdot\mathbf{R}\right)\frac{\partial\boldsymbol{\rho}_0}{\partial\theta} \tag{E.37}
$$

Since $\boldsymbol{\rho}_0$ is of order zero in the magnetic nonuniformity, we need to keep the spatial component of G_2. The expressions for $G_{2\parallel}$ and G_1^θ are obtained at higher order in ϵ.

E.5 Third-order perturbation analysis

The third-order guiding-center Lagrangian reads, using the previous formulas and $\mathsf{G}_2\cdot\mathsf{d}H_1\equiv 0$:

$$
\begin{aligned}
\overline{\Gamma}_3 &= -\frac{e}{c}\mathbf{B}\times G_3^{\mathbf{x}}\cdot\mathsf{d}\mathbf{x}-\overline{K}_{2\mathbf{x}}\cdot\mathsf{d}\mathbf{x}+G_{2\parallel}\left(\xi\mathsf{d}p+p\mathsf{d}\xi\right)+\frac{1}{3}\iota_1\cdot\mathsf{d}\left(K_{1\alpha}\mathsf{d}z^\alpha+\frac{1}{2}\overline{K}_{1\mathbf{x}}\cdot\mathsf{d}\mathbf{x}\right)+\mathsf{d}\sigma_3\\
&= -\frac{e}{c}\mathbf{B}\times G_3^{\mathbf{x}}\cdot\mathsf{d}\mathbf{x}-\overline{K}_{2\mathbf{x}}\cdot\mathsf{d}\mathbf{x}+G_{2\parallel}\left(\xi\mathsf{d}p+p\mathsf{d}\xi\right)\\
&+\frac{1}{3}\iota_1\cdot\left(\mathsf{d}K_{1\mathbf{x}}\wedge\mathsf{d}\mathbf{x}+\frac{1}{2}\mathsf{d}\overline{K}_{1\mathbf{x}}\wedge\mathsf{d}\mathbf{x}+\frac{2p}{m\Omega}\left[-\frac{p\left(1-\xi^2\right)}{2}\nabla\ln B\cdot\mathsf{d}\mathbf{x}+\left(1-\xi^2\right)\mathsf{d}p-p\xi\mathsf{d}\xi\right]\wedge\mathsf{d}\theta\right)+\mathsf{d}\sigma_3\\
&= \left[\frac{1}{3}\mathsf{G}_1\cdot\left(\mathsf{d}K_{1\mathbf{x}}+\frac{1}{2}\mathsf{d}\overline{K}_{1\mathbf{x}}\right)-\frac{e}{c}\mathbf{B}\times G_3^{\mathbf{x}}-\overline{K}_{2\mathbf{x}}-G_1^\theta\frac{p^2\left(1-\xi^2\right)}{3m\Omega}\nabla\ln B\right]\cdot\mathsf{d}\mathbf{x}+G_{2\parallel}\left(\xi\mathsf{d}p+p\mathsf{d}\xi\right)\\
&+\frac{1}{3}\boldsymbol{\rho}_0\cdot\left(\mathsf{d}K_{1\mathbf{x}}+\frac{1}{2}\mathsf{d}\overline{K}_{1\mathbf{x}}\right)+\frac{2p}{3m\Omega}\left(\left[\left(1-\xi^2\right)\mathsf{d}p-p\xi\mathsf{d}\xi\right]G_1^\theta+\left[-\frac{p\left(1-\xi^2\right)}{2}\nabla\ln B\cdot\boldsymbol{\rho}_0+p\xi G_1^\xi\right]\mathsf{d}\theta\right)+\mathsf{d}\sigma_3
\end{aligned}
$$

The term $\frac{1}{3}\boldsymbol{\rho}_0 \cdot \mathsf{d}K_{1\mathbf{x}}$ gives :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3}\boldsymbol{\rho}_0 \cdot \mathsf{d}K_{1\mathbf{x}} &= \frac{1}{3}\boldsymbol{\rho}_0 \cdot \mathsf{d}\left[-(\nabla\times\mathbf{p})\times\boldsymbol{\rho}_0 + \left(p\widehat{\mathsf{b}} + \frac{\partial \mathbf{p}_\perp}{\partial\xi}\right)G_1^\xi + \frac{\partial \mathbf{p}_\perp}{\partial\theta}G_1^\theta\right] \\
&= \frac{1}{3}\left[-\mathsf{d}\mathbf{x}\cdot\nabla\left[(\nabla\times\mathbf{p})\times\boldsymbol{\rho}_0\right]\cdot\boldsymbol{\rho}_0 - \mathsf{d}p\boldsymbol{\rho}_0\cdot(\nabla\times\mathbf{p})\times\frac{\partial\boldsymbol{\rho}_0}{\partial p} - \mathsf{d}\xi\boldsymbol{\rho}_0\cdot(\nabla\times\mathbf{p})\times\frac{\partial\boldsymbol{\rho}_0}{\partial\xi}\right. \\
&- \mathsf{d}\theta\boldsymbol{\rho}_0\cdot(\nabla\times\mathbf{p})\times\frac{\partial\boldsymbol{\rho}_0}{\partial\theta} - \mathsf{d}p\boldsymbol{\rho}_0\cdot\left(\nabla\times\frac{\partial\mathbf{p}}{\partial p}\right)\times\boldsymbol{\rho}_0 - \mathsf{d}\xi\boldsymbol{\rho}_0\cdot\left(\nabla\times\frac{\partial\mathbf{p}}{\partial\xi}\right)\times\boldsymbol{\rho}_0 \\
&- \mathsf{d}\theta\boldsymbol{\rho}_0\cdot\left(\nabla\times\frac{\partial\mathbf{p}}{\partial\theta}\right)\times\boldsymbol{\rho}_0 + \left(G_1^\xi\mathsf{d}p + \mathsf{d}G_1^\xi\right)\boldsymbol{\rho}_0\cdot\widehat{\mathsf{b}} + pG_1^\xi\mathsf{d}\mathbf{x}\cdot\nabla\widehat{\mathsf{b}}\cdot\boldsymbol{\rho}_0 \\
&+ \boldsymbol{\rho}_0\cdot\left[\frac{\partial\mathbf{p}_\perp}{\partial\xi}\mathsf{d}G_1^\xi + \left(\mathsf{d}\mathbf{x}\cdot\nabla\frac{\partial\mathbf{p}_\perp}{\partial\xi} + \mathsf{d}p\frac{\partial^2\mathbf{p}_\perp}{\partial\xi\partial p} + \mathsf{d}\xi\frac{\partial^2\mathbf{p}_\perp}{\partial\xi^2} + \mathsf{d}\theta\frac{\partial^2\mathbf{p}_\perp}{\partial\xi\partial\theta}\right)G_1^\xi\right] \\
&\left.+\boldsymbol{\rho}_0\cdot\left[\frac{\partial\mathbf{p}_\perp}{\partial\theta}\mathsf{d}G_1^\theta + \left(\mathsf{d}\mathbf{x}\cdot\nabla\frac{\partial\mathbf{p}_\perp}{\partial\theta} + \mathsf{d}p\frac{\partial^2\mathbf{p}_\perp}{\partial\theta\partial p} + \mathsf{d}\xi\frac{\partial^2\mathbf{p}_\perp}{\partial\theta\partial\xi} + \mathsf{d}\theta\frac{\partial^2\mathbf{p}_\perp}{\partial\theta^2}\right)G_1^\theta\right]\right] \\
&= \frac{1}{3}pG_1^\xi\mathsf{d}\mathbf{x}\cdot\nabla\widehat{\mathsf{b}}\cdot\boldsymbol{\rho}_0 + \frac{m\Omega}{3}G_1^\xi\mathsf{d}\mathbf{x}\cdot\nabla\boldsymbol{\rho}_0\cdot\boldsymbol{\rho}_0 - \frac{p^2\left(1-\xi^2\right)}{3m\Omega}\mathsf{d}G_1^\theta - \frac{pG_1^\theta}{3m\Omega}\left[\left(1-\xi^2\right)\mathsf{d}p - p\xi\mathsf{d}\xi\right] \\
&+ \frac{p}{3m\Omega}\left[p\xi G_1^\xi - \frac{p\left(1-\xi^2\right)}{m\Omega}\widehat{\mathsf{b}}\cdot\nabla\times\mathbf{p}\right]\mathsf{d}\theta
\end{aligned} \tag{E.38}$$

The term $\frac{1}{6}\boldsymbol{\rho}_0 \cdot \mathsf{d}\overline{K}_{1\mathbf{x}}$ gives :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{6}\boldsymbol{\rho}_0 \cdot \mathsf{d}\overline{K}_{1\mathbf{x}} &= \frac{1}{6}\boldsymbol{\rho}_0 \cdot \mathsf{d}\left[-p\xi\left(\nabla\times\widehat{\mathsf{b}}\right)\times\boldsymbol{\rho}_0 + p\widehat{\mathsf{b}}G_1^\xi\right] \\
&= \frac{1}{6}\left[-\left(\xi\mathsf{d}p + p\mathsf{d}\xi\right)\boldsymbol{\rho}_0\cdot\left(\nabla\times\widehat{\mathsf{b}}\right)\times\boldsymbol{\rho}_0 - p\xi\mathsf{d}\mathbf{x}\cdot\nabla\left[\left(\nabla\times\widehat{\mathsf{b}}\right)\times\boldsymbol{\rho}_0\right]\cdot\boldsymbol{\rho}_0 - p\xi\mathsf{d}p\boldsymbol{\rho}_0\cdot\left(\nabla\times\widehat{\mathsf{b}}\right)\times\frac{\partial\boldsymbol{\rho}_0}{\partial p}\right. \\
&\left.-p\xi\mathsf{d}\xi\boldsymbol{\rho}_0\cdot\left(\nabla\times\widehat{\mathsf{b}}\right)\times\frac{\partial\boldsymbol{\rho}_0}{\partial\xi} - p\xi\mathsf{d}\theta\boldsymbol{\rho}_0\cdot\left(\nabla\times\widehat{\mathsf{b}}\right)\times\frac{\partial\boldsymbol{\rho}_0}{\partial\theta} + \left(G_1^\xi\mathsf{d}p + \mathsf{d}G_1^\xi\right)\boldsymbol{\rho}_0\cdot\widehat{\mathsf{b}} + pG_1^\xi\mathsf{d}\mathbf{x}\cdot\nabla\widehat{\mathsf{b}}\cdot\boldsymbol{\rho}_0\right] \\
&= \frac{1}{6}\left[-p\xi\left(\nabla\times\widehat{\mathsf{b}}\right)\cdot\left(\boldsymbol{\rho}_0\times\widehat{\mathsf{b}}\right)\times\boldsymbol{\rho}_0 + pG_1^\xi\mathsf{d}\mathbf{x}\cdot\nabla\widehat{\mathsf{b}}\cdot\boldsymbol{\rho}_0\right] \\
&= \frac{1}{6}pG_1^\xi\mathsf{d}\mathbf{x}\cdot\nabla\widehat{\mathsf{b}}\cdot\boldsymbol{\rho}_0 - \frac{p^2\left(1-\xi^2\right)}{6m\Omega}\left(\frac{p\xi}{m\Omega}\widehat{\mathsf{b}}\cdot\nabla\times\widehat{\mathsf{b}}\right)\mathsf{d}\theta
\end{aligned} \tag{E.39}$$

We then use the following property :

$$-\frac{p^2\left(1-\xi^2\right)}{3m\Omega}\mathsf{d}G_1^\theta = -\mathsf{d}\left[\frac{p^2\left(1-\xi^2\right)}{3m\Omega}G_1^\theta\right] + \frac{2pG_1^\theta}{3m\Omega}\left(-\frac{p^2\left(1-\xi^2\right)}{2}\nabla\ln B\cdot\mathsf{d}\mathbf{x} + \left(1-\xi^2\right)\mathsf{d}p - p\xi\mathsf{d}\xi\right) \tag{E.40}$$

Rolling the exact derivative into $\mathsf{d}\sigma_3$, the third-order guiding-center Lagrangian becomes :

$$\begin{aligned}
\overline{\Gamma}_3 &= \overline{\Gamma}_{3\mathbf{x}}\cdot\mathsf{d}\mathbf{x} + G_{2\parallel}\left(\xi\mathsf{d}p + p\mathsf{d}\xi\right) + \frac{pG_1^\theta}{m\Omega}\left(\left(1-\xi^2\right)\mathsf{d}p - p\xi\mathsf{d}\xi\right) \\
&+ \left[\frac{p^2\xi}{m\Omega}G_1^\xi - \frac{p^2\left(1-\xi^2\right)}{3m^2\Omega^2}\widehat{\mathsf{b}}\cdot\nabla\times\mathbf{p} - \frac{p^2\left(1-\xi^2\right)}{3m\Omega}\nabla\ln B - \frac{p^2\left(1-\xi^2\right)}{6m\Omega}\left(\frac{p\xi}{m\Omega}\widehat{\mathsf{b}}\cdot\nabla\times\widehat{\mathsf{b}}\right)\right]\mathsf{d}\theta + \mathsf{d}\overline{\sigma}_3
\end{aligned} \tag{E.41}$$

with $\overline{\sigma}_3 = \sigma_3 - \frac{p^2\left(1-\xi^2\right)}{3m\Omega}G_1^\theta$. The symplectic part $\overline{\Gamma}_{3\mathbf{x}} \equiv 0$ of the Lagrangian is used to determine the higher-order components of G_2 and $G_3^{\mathbf{x}}$, which aren't needed since they are of second order in

the magnetic nonuniformity. The Lagrangian therefore reads :

$$\begin{aligned}\overline{\Gamma}_3 = &\left[\xi G_{2\|} + \frac{p\left(1-\xi^2\right)}{m\Omega} G_1^\theta + \frac{\partial \overline{\sigma}_3}{\partial p}\right] \mathsf{d}p + \left[pG_{2\|} - \frac{p^2\xi}{m\Omega} G_1^\theta + \frac{\partial \overline{\sigma}_3}{\partial \xi}\right] \mathsf{d}\xi \\ &+ \left[\frac{p^2\xi}{m\Omega} G_1^\xi - \frac{p^2\left(1-\xi^2\right)}{3m\Omega} \nabla \ln B \cdot \boldsymbol{\rho}_0 - \frac{p^2\left(1-\xi^2\right)}{2m\Omega}\left(\frac{p\xi}{m\Omega} \widehat{\mathsf{b}} \cdot \nabla \times \widehat{\mathsf{b}}\right) - \frac{p^2\left(1-\xi^2\right)}{3m^2\Omega^2} \widehat{\mathsf{b}} \cdot \nabla \times \mathbf{p}_\perp + \frac{\partial \overline{\sigma}_3}{\partial \theta}\right] \mathsf{d}\theta\end{aligned} \tag{E.42}$$

Since the guiding-center Lagrangian contains the canonical symplectic term $\left[\overline{p}^2\left(1-\overline{\xi}^2\right)/m\Omega\right] \mathsf{d}\overline{\theta} \equiv (\overline{\mu} B/\Omega)\, \mathsf{d}\overline{\theta}$ where $\overline{\mu}$ is an exact invariant of the guiding-center Hamiltonian dynamics, the Noether theorem implies that the components $\overline{\Gamma}_{n\theta}$ must vanish for $n \geq 3$. We therefore deduce the expression for $\overline{\sigma}_3$:

$$\frac{\partial \overline{\sigma}_3}{\partial \theta} \equiv -\frac{p^2\xi}{m\Omega} G_1^\xi + \frac{p^2\left(1-\xi^2\right)}{3m\Omega} \nabla \ln B \cdot \boldsymbol{\rho}_0 + \frac{p^2\left(1-\xi^2\right)}{2m\Omega}\left(\frac{p\xi}{m\Omega} \widehat{\mathsf{b}} \cdot \nabla \times \widehat{\mathsf{b}}\right) + \frac{p^2\left(1-\xi^2\right)}{3m^2\Omega^2} \widehat{\mathsf{b}} \cdot \nabla \times \mathbf{p}_\perp \tag{E.43}$$

This solution is consistent because of the choice for $\mathbf{R}^*$, which determines G_1^ξ and ensures it possesses an integrability condition for $\overline{\sigma}_3$. We then use the following formula, with the expression for $\nabla \boldsymbol{\rho}_0$ taken from (E.21) :

$$\begin{aligned}\frac{p^2\left(1-\xi^2\right)}{3m^2\Omega^2} \widehat{\mathsf{b}} \cdot \nabla \times \mathbf{p}_\perp &= \frac{p^3\left(1-\xi^2\right)^{\frac{3}{2}}}{3m^2\Omega^2} \widehat{\mathsf{b}} \cdot \nabla \times \widehat{\perp} \\ &= \frac{p^3\left(1-\xi^2\right)^{\frac{3}{2}}}{3m^2\Omega^2} \widehat{\mathsf{b}} \cdot \nabla \times \left(\widehat{\mathsf{b}} \times \widehat{\rho}\right) \\ &= \frac{p^3\left(1-\xi^2\right)^{\frac{3}{2}}}{3m^2\Omega^2} \widehat{\mathsf{b}} \cdot \left[\widehat{\mathsf{b}}\left(\nabla \cdot \widehat{\rho}\right) - \widehat{\rho}\left(\nabla \cdot \widehat{\mathsf{b}}\right) + \widehat{\rho} \cdot \nabla \widehat{\mathsf{b}} - \widehat{\mathsf{b}} \cdot \nabla \widehat{\rho}\right] \\ &= \frac{p^3\left(1-\xi^2\right)^{\frac{3}{2}}}{3m^2\Omega^2}\left[\widehat{\mathsf{b}} \cdot \nabla \widehat{\rho} \cdot \widehat{\mathsf{b}} + \widehat{\perp} \cdot \nabla \widehat{\rho} \cdot \widehat{\perp} - \widehat{\mathsf{b}} \cdot \nabla \widehat{\rho} \cdot \widehat{\mathsf{b}}\right] \\ &= -\frac{p^2\left(1-\xi^2\right)}{3m\Omega} \frac{\partial \boldsymbol{\rho}_0}{\partial \theta} \cdot \mathbf{R}\end{aligned}$$

Inserting the expressions for G_1^ξ and noticing that $\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \boldsymbol{\rho}_0 = -\boldsymbol{\rho}_0$, we have :

$$\begin{aligned}\overline{\sigma}_3 &\equiv -\frac{p^2\xi}{m\Omega}\left[\xi\left(\widehat{\mathsf{b}} \cdot \nabla \widehat{\mathsf{b}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\rho}_0}{\partial \theta}\right) + \frac{p\left(1-\xi^2\right)}{2m\Omega} \mathsf{a}_2 : \nabla \widehat{\mathsf{b}}\right] - \frac{p^2\left(1-\xi^2\right)}{3m\Omega} \nabla \ln B \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\rho}_0}{\partial \theta} - \frac{p^2\left(1-\xi^2\right)}{3m\Omega} \boldsymbol{\rho}_0 \cdot \mathbf{R} \\ &= -\frac{p^2}{m\Omega}\left[\frac{1}{3}\left(1-\xi^2\right) \nabla \ln B + \xi^2 \widehat{\mathsf{b}} \cdot \nabla \widehat{\mathsf{b}}\right] \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\rho}_0}{\partial \theta} - \frac{p^2\left(1-\xi^2\right)}{2m\Omega}\left(\frac{p\xi}{m\Omega} \mathsf{a}_2 : \nabla \widehat{\mathsf{b}}\right) - \frac{p^2\left(1-\xi^2\right)}{3m\Omega} \boldsymbol{\rho}_0 \cdot \mathbf{R}\end{aligned}$$

Where $\mathsf{a}_2 \equiv \frac{1}{4}\left(\widehat{\rho}\widehat{\rho} - \widehat{\perp}\widehat{\perp}\right)$ satisfies the property $\mathsf{a}_1 = \frac{\partial \mathsf{a}_2}{\partial \theta}$. Using the expression for $\overline{\sigma}_3$, we then use

$\overline{\Gamma}_{3p} \equiv 0$ and $\overline{\Gamma}_{3\xi} \equiv 0$ to determine G_1^θ and $G_{2\parallel}$. Using $\frac{\partial \boldsymbol{\rho}_0}{\partial p} = \frac{\boldsymbol{\rho}_0}{p}$ and $\frac{\partial \boldsymbol{\rho}_0}{\partial \xi} = -\frac{\xi}{1-\xi^2}\boldsymbol{\rho}_0$, this gives :

$$\begin{aligned}
-\xi G_{2\parallel} - \frac{p\left(1-\xi^2\right)}{m\Omega} G_1^\theta &= -\frac{2p}{m\Omega}\left[\frac{1}{3}\left(1-\xi^2\right)\nabla \ln B + \xi^2 \widehat{\mathsf{b}}\cdot\nabla\widehat{\mathsf{b}}\right]\cdot\frac{\partial \boldsymbol{\rho}_0}{\partial\theta} - \frac{p}{m\Omega}\left[\frac{1}{3}\left(1-\xi^2\right)\nabla \ln B + \xi^2\widehat{\mathsf{b}}\cdot\nabla\widehat{\mathsf{b}}\right]\cdot\frac{\partial \boldsymbol{\rho}_0}{\partial\theta} \\
&\quad - \frac{3p\left(1-\xi^2\right)}{2m\Omega}\left(\frac{p\xi}{m\Omega}\mathsf{a}_2 : \nabla\widehat{\mathsf{b}}\right) + \frac{2p\left(1-\xi^2\right)}{3m\Omega}\boldsymbol{\rho}_0\cdot\mathbf{R} + \frac{p\left(1-\xi^2\right)}{3m\Omega}\boldsymbol{\rho}_0\cdot\mathbf{R} \\
&= -\frac{p}{m\Omega}\left[\left(1-\xi^2\right)\nabla \ln B + 3\xi^2\widehat{\mathsf{b}}\cdot\nabla\widehat{\mathsf{b}}\right]\cdot\frac{\partial \boldsymbol{\rho}_0}{\partial\theta} \\
&\quad - \frac{3p\left(1-\xi^2\right)}{2m\Omega}\left(\frac{p\xi}{m\Omega}\mathsf{a}_2 : \nabla\widehat{\mathsf{b}}\right) + \frac{p\left(1-\xi^2\right)}{m\Omega}\boldsymbol{\rho}_0\cdot\mathbf{R} \qquad \text{(E.44)} \\
-pG_{2\parallel} + \frac{p^2\xi}{m\Omega}G_1^\theta &= -\frac{2p^2\xi}{m\Omega}\left[-\frac{1}{3}\nabla \ln B + \widehat{\mathsf{b}}\cdot\nabla\widehat{\mathsf{b}}\right]\cdot\frac{\partial \boldsymbol{\rho}_0}{\partial\theta} + \frac{p^2\xi}{m\Omega}\left[\frac{1}{3}\nabla \ln B + \frac{\xi^2}{1-\xi^2}\widehat{\mathsf{b}}\cdot\nabla\widehat{\mathsf{b}}\right]\cdot\frac{\partial \boldsymbol{\rho}_0}{\partial\theta} \\
&\quad - \frac{p^2\left(1-3\xi^2\right)}{2m\Omega}\left(\frac{p}{m\Omega}\mathsf{a}_2 : \nabla\widehat{\mathsf{b}}\right) - \frac{2p^2\xi}{3m\Omega}\boldsymbol{\rho}_0\cdot\mathbf{R} - \frac{p^2\xi}{3m\Omega}\boldsymbol{\rho}_0\cdot\mathbf{R} \\
&= \frac{p^2\xi}{m\Omega}\left[\nabla \ln B + \frac{3\xi^2-2}{1-\xi^2}\widehat{\mathsf{b}}\cdot\nabla\widehat{\mathsf{b}}\right]\cdot\frac{\partial \boldsymbol{\rho}_0}{\partial\theta} - \frac{p^2\left(1-3\xi^2\right)}{2m\Omega}\left(\frac{p}{m\Omega}\mathsf{a}_2 : \nabla\widehat{\mathsf{b}}\right) - \frac{p^2\xi}{m\Omega}\boldsymbol{\rho}_0\cdot\mathbf{R}
\end{aligned}$$

Performing the operations $\frac{m\Omega}{p^2}\left[p\,(E.44) - \xi\,(??)\right]$ and $\xi\,(E.44) + \frac{1}{p}\left(1-\xi^2\right)(??)$, we get :

$$G_1^\theta = -\boldsymbol{\rho}_0\cdot\mathbf{R} - \frac{p\xi}{m\Omega}\mathsf{a}_2 : \nabla\widehat{\mathsf{b}} + \left(\nabla \ln B + \frac{\xi^2}{1-\xi^2}\widehat{\mathsf{b}}\cdot\nabla\widehat{\mathsf{b}}\right)\cdot\frac{\partial \boldsymbol{\rho}_0}{\partial\theta} \qquad \text{(E.45)}$$

$$G_{2\parallel} = \frac{2p\xi}{m\Omega}\widehat{\mathsf{b}}\cdot\nabla\widehat{\mathsf{b}}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{\rho}_0}{\partial\theta} + \frac{p^2\left(1-\xi^2\right)}{2m^2\Omega^2}\mathsf{a}_2 : \nabla\widehat{\mathsf{b}} \qquad \text{(E.46)}$$

E.6 Coordinate transformation

Since we now know the components of G_1 and the spatial components of G_2, we can then deduce the following expressions for the guiding-center coordinates, at first order in ϵ_B :

$$\overline{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \boldsymbol{\rho}_0 + \left(G_2^{\mathbf{x}} - \frac{1}{2}\mathsf{G}_1\cdot\mathsf{d}\boldsymbol{\rho}_0\right) + \ldots \qquad \text{(E.47)}$$

$$\overline{p} = p \qquad \text{(E.48)}$$

$$\overline{\xi} = \xi\left[1 - \widehat{\mathsf{b}}\cdot\nabla\widehat{\mathsf{b}}\cdot\boldsymbol{\rho}_0\right] + \frac{p\left(1-\xi^2\right)}{2m\Omega}\left(\widehat{\mathsf{b}}\cdot\nabla\times\widehat{\mathsf{b}} + \mathsf{a}_1 : \nabla\widehat{\mathsf{b}}\right) + \ldots \qquad \text{(E.49)}$$

$$\overline{\theta} = \theta - \boldsymbol{\rho}_0\cdot\mathbf{R} - \frac{p\xi}{m\Omega}\mathsf{a}_2 : \nabla\widehat{\mathsf{b}} + \left(\nabla \ln B + \frac{\xi^2}{1-\xi^2}\widehat{\mathsf{b}}\cdot\nabla\widehat{\mathsf{b}}\right)\cdot\frac{\partial \boldsymbol{\rho}_0}{\partial\theta} + \ldots \qquad \text{(E.50)}$$

E.7 Lie Transform

The transformation $\mathcal{T}_\epsilon$ to guiding-center coordinates reads, using particle $z^\alpha \equiv (\mathbf{x}, \mathbf{p})$ and guiding-center Z^α phase-spaces

$$Z^\alpha \equiv \mathcal{T}_\epsilon z^\alpha = z^\alpha + \epsilon G_1^\alpha + \ldots \qquad \text{(E.51)}$$

with its inverse

$$z^\alpha \equiv \mathcal{T}_\epsilon^{-1} Z^\alpha = Z^\alpha - \epsilon G_1^\alpha + \ldots$$

where the generating vectors G_n are used in the nth-order transformation. The Lie transform pull-back and push-forward operators respectively read

$$\mathsf{T}_\epsilon \equiv \exp\left(\epsilon\mathcal{L}_1\right)\exp\left(\epsilon^2\mathcal{L}_2\right)\ldots = 1 + \epsilon\mathcal{L}_1 + \epsilon^2\left(\mathcal{L}_2 + \frac{1}{2}\mathcal{L}_1^2\right) + \ldots \qquad \text{(E.52)}$$

$$\mathsf{T}_\epsilon^{-1} \equiv \ldots \exp\left(-\epsilon^2 \mathcal{L}_2\right) \exp\left(-\epsilon \mathcal{L}_1\right) = 1 - \epsilon \mathcal{L}_1 - \epsilon^2 \left(\mathcal{L}_2 - \frac{1}{2}\mathcal{L}_1^2\right) + \ldots \tag{E.53}$$

where $\mathcal{L}_n$ denotes the Lie derivative associated with G_n.

E.8 First-order Lie Transform and Generating Vector

The first-order generating vector components in $(\mathbf{x}, p, \xi, \varphi)$ coordinates read

$$\mathbf{G}_1^{\mathbf{x}} = -\boldsymbol{\rho}_0 \tag{E.54}$$

$$G_1^p = 0 \tag{E.55}$$

$$G_1^\xi = -\xi \widehat{\mathsf{b}} \cdot \nabla \widehat{\mathsf{b}} \cdot \boldsymbol{\rho}_0 + \frac{p\left(1-\xi^2\right)}{2m\Omega}\left(\widehat{\mathsf{b}} \cdot \nabla \times \widehat{\mathsf{b}} + \mathbb{A}_1 : \nabla \widehat{\mathsf{b}}\right) \tag{E.56}$$

$$G_1^\varphi = -\boldsymbol{\rho}_0 \cdot \mathbf{R} + \frac{p\xi}{m\Omega}\mathbb{A}_2 : \nabla \widehat{\mathsf{b}} + \frac{\partial \boldsymbol{\rho}_0}{\partial \varphi} \cdot \nabla \ln B + \frac{\xi^2}{1-\xi^2}\widehat{\mathsf{b}} \cdot \nabla \widehat{\mathsf{b}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\rho}_0}{\partial \varphi} \tag{E.57}$$

where $\mathbb{A}_1 \equiv -\frac{1}{2}\left(\widehat{\rho}\widehat{\perp} + \widehat{\perp}\widehat{\rho}\right) \equiv \partial \mathbb{A}_2/\partial\varphi$ and $\mathbb{A}_2 \equiv \frac{1}{4}\left(\widehat{\perp}\widehat{\perp} - \widehat{\rho}\widehat{\rho}\right) = -\frac{1}{4}\partial \mathbb{A}_1/\partial\varphi$ are dyadic tensors. It is interesting to note that the gyro-averages $\langle G_1^\alpha \rangle = 0$ except $\left\langle G_1^\xi \right\rangle = \left[p\left(1-\xi^2\right)/2m\Omega\right] \widehat{\mathsf{b}} \cdot \nabla \times \widehat{\mathsf{b}}$. Using the formula for the Lie derivative of a scalar

$$\mathcal{L}_1 = G_1^\beta \frac{\partial}{\partial z^\beta} \tag{E.58}$$

The push-forward operator reads

$$\mathsf{T}_\epsilon^{-1} = 1 - G_1^\beta \frac{\partial}{\partial z^\beta} + \ldots \tag{E.59}$$

and we therefore have for (p, ξ, φ) coordinates

$$\mathsf{T}_\epsilon^{-1} A = A - \mathbf{G}_1^{\mathbf{x}} \cdot \nabla A - G_1^p \frac{\partial A}{\partial p} - G_1^\xi \frac{\partial A}{\partial \xi} - G_1^\varphi \frac{\partial A}{\partial \varphi} + \ldots \tag{E.60}$$

E.9 Lie transform of the $(\mathbf{p}, \mathbf{e}_\xi, \mathbf{e}_\varphi)$ vector basis

E.9.1 Calculation of $\mathsf{T}_\epsilon^{-1}\mathbf{p}$

Using (E.60), we have at first order in ϵ:

$$\mathsf{T}_\epsilon^{-1}\mathbf{p} = \mathbf{p} - \mathbf{G}_1^{\mathbf{x}} \cdot \nabla \mathbf{p} - G_1^\xi \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \xi} - G_1^\varphi \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \varphi} \tag{E.61}$$

Inserting expressions for the generating vector and basis vectors gives

$$\begin{aligned}
\mathsf{T}_\epsilon^{-1}\mathbf{p} =& \mathbf{p} - p\xi\boldsymbol{\rho}_0 \cdot \nabla \widehat{\mathsf{b}} - m\Omega\left[\left(\boldsymbol{\rho}_0 \cdot \mathbf{R}\right)\boldsymbol{\rho}_0 - \left(\boldsymbol{\rho}_0 \cdot \nabla \widehat{\mathsf{b}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\rho}_0}{\partial \varphi}\right)\widehat{\mathsf{b}}\right] \\
&- \left[-\xi \widehat{\mathsf{b}} \cdot \nabla \widehat{\mathsf{b}} \cdot \boldsymbol{\rho}_0 + \frac{p\left(1-\xi^2\right)}{2m\Omega}\left(\widehat{\mathsf{b}} \cdot \nabla \times \widehat{\mathsf{b}} + \mathbb{A}_1 : \nabla \widehat{\mathsf{b}}\right)\right]\left(p\widehat{\mathsf{b}} - m\Omega \frac{\xi}{1-\xi^2}\frac{\partial \boldsymbol{\rho}_0}{\partial \varphi}\right) \\
&+ m\Omega\left[-\boldsymbol{\rho}_0 \cdot \mathbf{R} + \frac{p\xi}{m\Omega}\mathbb{A}_2 : \nabla \widehat{\mathsf{b}} + \frac{\partial \boldsymbol{\rho}_0}{\partial \varphi} \cdot \nabla \ln B + \frac{\xi^2}{1-\xi^2}\widehat{\mathsf{b}} \cdot \nabla \widehat{\mathsf{b}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\rho}_0}{\partial \varphi}\right]\boldsymbol{\rho}_0 \\
=& \mathbf{p} - m\Omega\left[\boldsymbol{\rho}_0 \cdot \nabla \widehat{\mathsf{b}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\rho}_0}{\partial \varphi} - \frac{p\xi}{m\Omega}\widehat{\mathsf{b}} \cdot \nabla \widehat{\mathsf{b}} \cdot \boldsymbol{\rho}_0 + \frac{p^2\left(1-\xi^2\right)}{2m^2\Omega^2}\left(\widehat{\mathsf{b}} \cdot \nabla \times \widehat{\mathsf{b}} + \mathbb{A}_1 : \nabla \widehat{\mathsf{b}}\right)\right]\widehat{\mathsf{b}} \\
&- m\Omega\left[\frac{\xi^2}{1-\xi^2}\widehat{\mathsf{b}} \cdot \nabla \widehat{\mathsf{b}} \cdot \boldsymbol{\rho}_0 - \frac{p\xi}{2m\Omega}\left(\widehat{\mathsf{b}} \cdot \nabla \times \widehat{\mathsf{b}} + \mathbb{A}_1 : \nabla \widehat{\mathsf{b}}\right) - \frac{m\Omega}{p}\frac{\xi}{1-\xi^2}\boldsymbol{\rho}_0 \cdot \nabla \widehat{\mathsf{b}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\rho}_0}{\partial \varphi}\right]\frac{\partial \boldsymbol{\rho}_0}{\partial \varphi} \\
&+ m\Omega\left[\frac{p\xi}{m\Omega}\mathbb{A}_2 : \nabla \widehat{\mathsf{b}} + \frac{\partial \boldsymbol{\rho}_0}{\partial \varphi} \cdot \nabla \ln B + \frac{\xi^2}{1-\xi^2}\widehat{\mathsf{b}} \cdot \nabla \widehat{\mathsf{b}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\rho}_0}{\partial \varphi} + \frac{m\Omega}{p}\frac{\xi}{1-\xi^2}\boldsymbol{\rho}_0 \cdot \nabla \widehat{\mathsf{b}} \cdot \boldsymbol{\rho}_0\right]\boldsymbol{\rho}_0
\end{aligned} \tag{E.62}$$

We then use the following identities

$$\left(\widehat{\perp} \cdot \nabla \ln B\right) \widehat{\rho} - (\widehat{\rho} \cdot \nabla \ln B)\, \widehat{\perp} = \widehat{\mathsf{b}} \times \nabla \ln B \tag{E.63}$$

$$\left(\widehat{\mathsf{b}} \cdot \nabla \widehat{\mathsf{b}} \cdot \widehat{\perp}\right) \widehat{\rho} - \left(\widehat{\mathsf{b}} \cdot \nabla \widehat{\mathsf{b}} \cdot \widehat{\rho}\right) \widehat{\perp} = \widehat{\mathsf{b}} \times \left(\widehat{\mathsf{b}} \cdot \nabla \widehat{\mathsf{b}}\right) \tag{E.64}$$

and the following decompositions

$$\mathbb{A}_1 : \nabla \widehat{\mathsf{b}} = -\frac{1}{2} \widehat{\mathsf{b}} \cdot \nabla \times \widehat{\mathsf{b}} - \widehat{\rho} \cdot \nabla \widehat{\mathsf{b}} \cdot \widehat{\perp} \tag{E.65}$$

$$\mathbb{A}_2 : \nabla \widehat{\mathsf{b}} = -\frac{1}{2} \widehat{\rho} \cdot \nabla \widehat{\mathsf{b}} \cdot \widehat{\rho} - \frac{1}{4} \widehat{\mathsf{b}} \cdot \nabla \ln B \tag{E.66}$$

So that

$$\begin{aligned}
\mathsf{T}_\epsilon^{-1}\mathbf{p} =& \mathbf{p} + \frac{p^2\left(1-\xi^2\right)}{2m\Omega} \widehat{\mathsf{b}} \times \left(\nabla \ln B + \frac{2\xi^2}{1-\xi^2} \widehat{\mathsf{b}} \cdot \nabla \widehat{\mathsf{b}}\right) \\
&+ m\Omega \left[\frac{p\xi}{m\Omega} \widehat{\mathsf{b}} \cdot \nabla \widehat{\mathsf{b}} \cdot \boldsymbol{\rho}_0 + \frac{p^2\left(1-\xi^2\right)}{2m^2\Omega^2} \mathbb{A}_1 : \nabla \widehat{\mathsf{b}}\right] \widehat{\mathsf{b}} \\
&+ m\Omega \left[\frac{1}{2} \boldsymbol{\rho}_0 \cdot \nabla \ln B - \frac{p\xi}{2m\Omega} \mathbb{A}_1 : \nabla \widehat{\mathsf{b}}\right] \frac{\partial \boldsymbol{\rho}_0}{\partial \varphi} \\
&+ m\Omega \left[\frac{1}{2} \frac{\partial \boldsymbol{\rho}_0}{\partial \varphi} \cdot \nabla \ln B - \frac{p\xi}{m\Omega} \mathbb{A}_2 : \nabla \widehat{\mathsf{b}} - \frac{p\xi}{2m\Omega} \widehat{\mathsf{b}} \cdot \nabla \ln B\right] \boldsymbol{\rho}_0
\end{aligned} \tag{E.67}$$

E.9.2 Calculation of $\mathsf{T}_\epsilon^{-1}\mathbf{e}_\xi$

Using (E.60), we have at first order in ϵ:

$$\mathsf{T}_\epsilon^{-1}\mathbf{e}_\xi = \mathbf{e}_\xi - \mathbf{G}_1^{\mathbf{x}} \cdot \nabla \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \xi} - G_1^\xi \frac{\partial^2 \mathbf{p}}{\partial \xi^2} - G_1^\varphi \frac{\partial^2 \mathbf{p}}{\partial \xi \partial \varphi} \tag{E.68}$$

Inserting expressions for the generating vector and basis vector derivatives gives

$$\begin{aligned}
\mathsf{T}_\epsilon^{-1}\mathbf{e}_\xi =& \mathbf{e}_\xi + p\boldsymbol{\rho}_0 \cdot \nabla \widehat{\mathsf{b}} - \frac{m\Omega\xi}{1-\xi^2} \left[\left(\boldsymbol{\rho}_0 \cdot \mathbf{R}\right) \boldsymbol{\rho}_0 - \left(\boldsymbol{\rho}_0 \cdot \nabla \widehat{\mathsf{b}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\rho}_0}{\partial \varphi}\right) \widehat{\mathsf{b}}\right] \\
&+ \frac{m\Omega}{\left(1-\xi^2\right)^2} \left[-\xi \widehat{\mathsf{b}} \cdot \nabla \widehat{\mathsf{b}} \cdot \boldsymbol{\rho}_0 + \frac{p\left(1-\xi^2\right)}{2m\Omega} \left(\widehat{\mathsf{b}} \cdot \nabla \times \widehat{\mathsf{b}} + \mathbb{A}_1 : \nabla \widehat{\mathsf{b}}\right)\right] \frac{\partial \boldsymbol{\rho}_0}{\partial \varphi} \\
&- \frac{m\Omega\xi}{1-\xi^2} \left[-\boldsymbol{\rho}_0 \cdot \mathbf{R} + \frac{p\xi}{m\Omega} \mathbb{A}_2 : \nabla \widehat{\mathsf{b}} + \frac{\partial \boldsymbol{\rho}_0}{\partial \varphi} \cdot \nabla \ln B + \frac{\xi^2}{1-\xi^2} \widehat{\mathsf{b}} \cdot \nabla \widehat{\mathsf{b}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\rho}_0}{\partial \varphi}\right] \boldsymbol{\rho}_0 \\
=& \mathbf{e}_\xi + \frac{m\Omega\xi}{1-\xi^2} \left[\boldsymbol{\rho}_0 \cdot \nabla \widehat{\mathsf{b}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\rho}_0}{\partial \varphi}\right] \widehat{\mathsf{b}} \\
&+ \frac{m\Omega}{1-\xi^2} \left[-\frac{\xi}{1-\xi^2} \widehat{\mathsf{b}} \cdot \nabla \widehat{\mathsf{b}} \cdot \boldsymbol{\rho}_0 + \frac{p}{2m\Omega} \left(\widehat{\mathsf{b}} \cdot \nabla \times \widehat{\mathsf{b}} + \mathbb{A}_1 : \nabla \widehat{\mathsf{b}}\right) + \frac{m\Omega}{p} \boldsymbol{\rho}_0 \cdot \nabla \widehat{\mathsf{b}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\rho}_0}{\partial \varphi}\right] \frac{\partial \boldsymbol{\rho}_0}{\partial \varphi} \\
&- \frac{m\Omega\xi}{1-\xi^2} \left[\frac{p\xi}{m\Omega} \mathbb{A}_2 : \nabla \widehat{\mathsf{b}} + \frac{\partial \boldsymbol{\rho}_0}{\partial \varphi} \cdot \nabla \ln B + \frac{\xi^2}{1-\xi^2} \widehat{\mathsf{b}} \cdot \nabla \widehat{\mathsf{b}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\rho}_0}{\partial \varphi} + \frac{m\Omega}{p\xi} \boldsymbol{\rho}_0 \cdot \nabla \widehat{\mathsf{b}} \cdot \boldsymbol{\rho}_0\right] \boldsymbol{\rho}_0
\end{aligned} \tag{E.69}$$

So that, using (E.65) and (E.66):

$$\begin{aligned}\mathsf{T}_\epsilon^{-1}\mathbf{e}_\xi =&\mathbf{e}_\xi - \frac{p^2\xi}{2m\Omega}\left[\widehat{\mathsf{b}}\times\left(\nabla\ln B - \widehat{\mathsf{b}}\cdot\nabla\widehat{\mathsf{b}}\right) + \left(\widehat{\mathsf{b}}\cdot\nabla\times\widehat{\mathsf{b}}\right)\widehat{\mathsf{b}}\right]\\ &- \frac{p^2\xi}{m\Omega}\left[\mathbb{A}_1 : \nabla\widehat{\mathsf{b}}\right]\widehat{\mathsf{b}}\\ &- \frac{m\Omega\xi}{1-\xi^2}\left[\frac{1}{2}\boldsymbol{\rho}_0\cdot\nabla\ln B + \frac{1}{2}\frac{1+\xi^2}{1-\xi^2}\widehat{\mathsf{b}}\cdot\nabla\widehat{\mathsf{b}}\cdot\boldsymbol{\rho}_0 - \frac{p\left(2\xi^2-1\right)}{2m\Omega\xi}\mathbb{A}_1 : \nabla\widehat{\mathsf{b}} - \frac{p\xi}{2m\Omega}\widehat{\mathsf{b}}\cdot\nabla\times\widehat{\mathsf{b}}\right]\frac{\partial\boldsymbol{\rho}_0}{\partial\varphi}\\ &- \frac{m\Omega\xi}{1-\xi^2}\left[\frac{1}{2}\frac{\partial\boldsymbol{\rho}_0}{\partial\varphi}\cdot\nabla\ln B + \frac{1}{2}\frac{1+\xi^2}{1-\xi^2}\widehat{\mathsf{b}}\cdot\nabla\widehat{\mathsf{b}}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\rho}_0}{\partial\varphi} - \frac{p\left(\xi^2-2\right)}{m\Omega\xi}\mathbb{A}_2 : \nabla\widehat{\mathsf{b}} + \frac{p\left(1-\xi^2\right)}{2m\Omega}\widehat{\mathsf{b}}\cdot\nabla\ln B\right]\boldsymbol{\rho}_0\end{aligned} \tag{E.70}$$

E.9.3 Calculation of $\mathsf{T}_\epsilon^{-1}\mathbf{e}_\varphi$

Using (E.60), we have at first order in ϵ:

$$\mathsf{T}_\epsilon^{-1}\mathbf{e}_\varphi = \mathbf{e}_\varphi - \mathbf{G}_1^{\mathbf{x}}\cdot\nabla\frac{\partial\mathbf{p}}{\partial\varphi} - G_1^{\xi}\frac{\partial^2\mathbf{p}}{\partial\xi\partial\varphi} - G_1^{\varphi}\frac{\partial^2\mathbf{p}}{\partial\varphi^2} \tag{E.71}$$

Inserting expressions for the generating vector and basis vector derivatives gives

$$\begin{aligned}\mathsf{T}_\epsilon^{-1}\mathbf{e}_\varphi =&\mathbf{e}_\varphi - m\Omega\left[\left(\boldsymbol{\rho}_0\cdot\mathbf{R}\right)\frac{\partial\boldsymbol{\rho}_0}{\partial\varphi} - \left(\boldsymbol{\rho}_0\cdot\nabla\widehat{\mathsf{b}}\cdot\boldsymbol{\rho}_0\right)\widehat{\mathsf{b}}\right]\\ &- \frac{m\Omega\xi}{1-\xi^2}\left[-\xi\widehat{\mathsf{b}}\cdot\nabla\widehat{\mathsf{b}}\cdot\boldsymbol{\rho}_0 + \frac{p\left(1-\xi^2\right)}{2m\Omega}\left(\widehat{\mathsf{b}}\cdot\nabla\times\widehat{\mathsf{b}} + \mathbb{A}_1 : \nabla\widehat{\mathsf{b}}\right)\right]\boldsymbol{\rho}_0\\ &+ m\Omega\left[-\boldsymbol{\rho}_0\cdot\mathbf{R} + \frac{p\xi}{m\Omega}\mathbb{A}_2 : \nabla\widehat{\mathsf{b}} + \frac{\partial\boldsymbol{\rho}_0}{\partial\varphi}\cdot\nabla\ln B + \frac{\xi^2}{1-\xi^2}\widehat{\mathsf{b}}\cdot\nabla\widehat{\mathsf{b}}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\rho}_0}{\partial\varphi}\right]\frac{\partial\boldsymbol{\rho}_0}{\partial\varphi}\\ =&\mathbf{e}_\varphi + m\Omega\left[\boldsymbol{\rho}_0\cdot\nabla\widehat{\mathsf{b}}\cdot\boldsymbol{\rho}_0\right]\widehat{\mathsf{b}}\\ &+ m\Omega\left[\frac{p\xi}{m\Omega}\mathbb{A}_2 : \nabla\widehat{\mathsf{b}} + \frac{\partial\boldsymbol{\rho}_0}{\partial\varphi}\cdot\nabla\ln B + \frac{\xi^2}{1-\xi^2}\widehat{\mathsf{b}}\cdot\nabla\widehat{\mathsf{b}}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\rho}_0}{\partial\varphi}\right]\frac{\partial\boldsymbol{\rho}_0}{\partial\varphi}\\ &+ m\Omega\left[\frac{\xi^2}{1-\xi^2}\widehat{\mathsf{b}}\cdot\nabla\widehat{\mathsf{b}}\cdot\boldsymbol{\rho}_0 - \frac{p\xi}{2m\Omega}\left(\widehat{\mathsf{b}}\cdot\nabla\times\widehat{\mathsf{b}} + \mathbb{A}_1 : \nabla\widehat{\mathsf{b}}\right)\right]\boldsymbol{\rho}_0\end{aligned} \tag{E.72}$$

So that, using (E.65) and (E.66):

$$\begin{aligned}\mathsf{T}_\epsilon^{-1}\mathbf{e}_\varphi =&\mathbf{e}_\varphi + \frac{p^2\left(1-\xi^2\right)}{2m\Omega}\left[\left(\mathbb{I} - 2\widehat{\mathsf{b}}\widehat{\mathsf{b}}\right)\cdot\nabla\ln B + \frac{\xi^2}{1-\xi^2}\widehat{\mathsf{b}}\cdot\nabla\widehat{\mathsf{b}}\right]\\ &- \frac{2p^2\left(1-\xi^2\right)}{m^2\Omega^2}\left[\mathbb{A}_2 : \nabla\widehat{\mathsf{b}}\right]\widehat{\mathsf{b}}\\ &+ m\Omega\left[\frac{1}{2}\frac{\partial\boldsymbol{\rho}_0}{\partial\varphi}\cdot\nabla\ln B + \frac{1}{2}\frac{\xi^2}{1-\xi^2}\widehat{\mathsf{b}}\cdot\nabla\widehat{\mathsf{b}}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\rho}_0}{\partial\varphi} + \frac{p\xi}{m\Omega}\mathbb{A}_2 : \nabla\widehat{\mathsf{b}}\right]\frac{\partial\boldsymbol{\rho}_0}{\partial\varphi}\\ &- m\Omega\left[\frac{1}{2}\boldsymbol{\rho}_0\cdot\nabla\ln B + \frac{1}{2}\frac{\xi^2}{1-\xi^2}\widehat{\mathsf{b}}\cdot\nabla\widehat{\mathsf{b}}\cdot\boldsymbol{\rho}_0\right]\boldsymbol{\rho}_0\end{aligned} \tag{E.73}$$

E.10 Orthogonality

We can readily check that

$$\mathsf{T}_\epsilon^{-1}\mathbf{p}\cdot\mathsf{T}_\epsilon^{-1}\mathbf{e}_\xi = \mathcal{O}\left(\epsilon^2\right) \tag{E.74}$$

$$\mathsf{T}_\epsilon^{-1}\mathbf{p}\cdot\mathsf{T}_\epsilon^{-1}\mathbf{e}_\varphi = \mathcal{O}\left(\epsilon^2\right) \tag{E.75}$$

$$\mathsf{T}_\epsilon^{-1}\mathbf{e}_\xi\cdot\mathsf{T}_\epsilon^{-1}\mathbf{e}_\varphi = \mathcal{O}\left(\epsilon^2\right) \tag{E.76}$$

This is a necessary property, since $\left(\mathsf{T}_\epsilon^{-1}\mathbf{a}\right)\left(Z^\alpha\right) \equiv \mathbf{a}\left(z^\alpha\right)$ and $\left(\mathbf{p}, \mathbf{e}_\xi, \mathbf{e}_\varphi\right)$ is an orthogonal basis.

E.11 Lie transform of Gyro-independent Collision Coefficients

In this section, we will consider an anisotropic gyro-independent collision operator with drag and diffusion coefficients

$$\mathbf{K} = -\nu_l(\mathbf{x}, p, \xi)\,\mathbf{p} - \nu_t(\mathbf{x}, p, \xi)\,\mathbf{e}_\xi \tag{E.77}$$

$$\mathbb{D} = D_l(\mathbf{x}, p, \xi)\,\frac{\mathbf{pp}}{p^2} + D_t(\mathbf{x}, p, \xi)\left(\mathbb{I} - \frac{\mathbf{pp}}{p^2}\right) + D_\times(\mathbf{x}, p, \xi)\,\frac{1}{p^2}\left(\mathbf{p}\mathbf{e}_\xi + \mathbf{e}_\xi\mathbf{p}\right) \tag{E.78}$$

defining $\mathbf{e}_\xi \equiv \partial\mathbf{p}/\partial\xi$. The transformed coefficients read

$$\mathbf{K}_\epsilon \equiv \mathsf{T}_\epsilon^{-1}\mathbf{K} = -\nu_{l\epsilon}\mathbf{p}_\epsilon - \nu_{t\epsilon}\mathbf{e}_{\xi\epsilon} \tag{E.79}$$

$$\mathbb{D}_\epsilon \equiv \mathsf{T}_\epsilon^{-1}\mathbb{D} = D_{l\epsilon}\frac{\mathbf{p}_\epsilon\mathbf{p}_\epsilon}{p^2} + D_{t\epsilon}\left(\mathbb{I} - \frac{\mathbf{p}_\epsilon\mathbf{p}_\epsilon}{p^2}\right) + D_{\times\epsilon}\frac{1}{p^2}\left(\mathbf{p}_\epsilon\mathbf{e}_{\xi\epsilon} + \mathbf{e}_{\xi\epsilon}\mathbf{p}_\epsilon\right) \tag{E.80}$$

where $\mathbf{p}_\epsilon \equiv \mathsf{T}_\epsilon^{-1}\mathbf{p}$, $\mathbf{e}_{\xi\epsilon} \equiv \mathsf{T}_\epsilon^{-1}\mathbf{e}_\xi$ and

$$\nu_{l\epsilon}(\mathbf{Z}) \equiv \mathsf{T}_\epsilon^{-1}\nu_l = \nu_l(\mathbf{Z}) - \epsilon G_1^\alpha\frac{\partial\nu_l}{\partial z^\alpha} + \dots \tag{E.81}$$

$$\nu_{t\epsilon}(\mathbf{Z}) \equiv \mathsf{T}_\epsilon^{-1}\nu_t = \nu_t(\mathbf{Z}) - \epsilon G_1^\alpha\frac{\partial\nu_t}{\partial\xi z^\alpha} + \dots \tag{E.82}$$

$$D_{l\epsilon}(\mathbf{Z}) \equiv \mathsf{T}_\epsilon^{-1}D_l = D_l(\mathbf{Z}) - \epsilon G_1^\alpha\frac{\partial D_l}{\partial z^\alpha} + \dots \tag{E.83}$$

$$D_{t\epsilon}(\mathbf{Z}) \equiv \mathsf{T}_\epsilon^{-1}D_t = D_t(\mathbf{Z}) - \epsilon G_1^\alpha\frac{\partial D_t}{\partial z^\alpha} + \dots \tag{E.84}$$

$$D_{\times\epsilon}(\mathbf{Z}) \equiv \mathsf{T}_\epsilon^{-1}D_\times = D_\times(\mathbf{Z}) - \epsilon G_1^\alpha\frac{\partial D_\times}{\partial z^\alpha} + \dots \tag{E.85}$$

E.12 $\left(\overline{\psi}, p, \xi_0\right)$ Coordinates and Projection Vectors

The coordinates $\overline{\psi}, \xi_0$ are defined as follows

$$\overline{\psi} \equiv \psi - \frac{p\xi}{m\Omega}B_\phi \equiv \psi - \delta\psi(\mathbf{x}, p, \xi) \tag{E.86}$$

$$\xi_0 \equiv \sigma\sqrt{1 - \Psi^{-1}\left(1 - \xi^2\right)} \tag{E.87}$$

where σ is a sign corresponding to the particle orbit direction and $\Psi \equiv B(\psi, \theta)/B_0\left(\overline{\psi}\right)$. B_0 is the minimum value of the magnetic field amplitude B on the flux-surface $\overline{\psi}$. According to Decker[16], the projection vectors $\mathbf{\Delta}^a \equiv \{\mathbf{X}_\epsilon, I^a\}_{gc}$ for the global coordinates $I^a \equiv \left(\overline{\psi}, p, \xi_0\right)$ read

$$\mathbf{\Delta}^{\overline{\psi}} = \frac{\delta\psi}{p^2\xi^2}\left(m\Omega\frac{\partial\boldsymbol{\rho}_\epsilon}{\partial\varphi} - \mathbf{p}_\epsilon\right) + \frac{\widehat{\mathsf{b}}}{m\Omega}\times\nabla\overline{\psi} + \mathcal{O}\left(\epsilon^2\right) \tag{E.88}$$

$$\mathbf{\Delta}^p = \frac{\mathbf{p}_\epsilon}{p} + \mathcal{O}\left(\epsilon^2\right) \tag{E.89}$$

$$\mathbf{\Delta}^{\xi_0} = \frac{1 - \xi_0^2}{2\xi_0}\left[\frac{2}{p^2}\left(\mathbf{p}_\epsilon - \frac{m\Omega}{1 - \xi^2}\frac{\partial\boldsymbol{\rho}_\epsilon}{\partial\varphi}\right) - \mathbf{\Delta}^{\overline{\psi}}\frac{B_0'}{B_0}\right] + \mathcal{O}\left(\epsilon^2\right) \tag{E.90}$$

Interesting to note are the zero-order expressions

$$\mathbf{\Delta}_0^{\overline{\psi}} = -\frac{\delta\psi}{p\xi}\widehat{\mathsf{b}} \tag{E.91}$$

$$\mathbf{\Delta}_0^p = \frac{\mathbf{p}}{p} \tag{E.92}$$

$$\mathbf{\Delta}_0^{\xi_0} = \frac{1 - \xi_0^2}{2\xi_0}\left[\frac{2\xi}{p^2}\mathbf{e}_\xi + \frac{\overline{\delta\psi}}{p\xi}\widehat{\mathsf{b}}\right] \tag{E.93}$$

where $\overline{\delta\psi} = \delta\psi\left(B_0'/B_0\right)$. We can deduce that the scalar products $\mathbf{\Delta}_0^a \cdot \mathbf{a}$ where $\mathbf{a} \in (\mathbf{p}, \mathbf{e}_\xi, \mathbf{e}_\varphi)$ are gyro-independant. Likewise, $\left(\mathbf{\Delta}_0^a\right)^2$ are also gyro-independant.

E.13 Calculation of guiding-center coefficients

The expressions for the guiding-center coefficients read, for $I^{a,b} \equiv \left(\overline{\psi}, p, \xi_0\right)$ and $z^\alpha \equiv (\mathbf{x}, p, \xi)$:

$$\mathcal{K}^a_{gc} = -\nu_l \left\langle \mathbf{p}_\epsilon \cdot \mathbf{\Delta}^a \right\rangle - \nu_t \left\langle \mathbf{e}_{\xi\epsilon} \cdot \mathbf{\Delta}^a \right\rangle + \left(\mathbf{p} \cdot \mathbf{\Delta}^a_0\right) \left\langle G^\alpha_1 \right\rangle \frac{\partial \nu_l}{\partial z^\alpha} + \left(\mathbf{e}_\xi \cdot \mathbf{\Delta}^a_0\right) \left\langle G^\alpha_1 \right\rangle \frac{\partial \nu_t}{\partial z^\alpha} + \mathcal{O}\left(\epsilon^2\right) \tag{E.94}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}^{ab}_{gc} =& \frac{D_l - D_t}{p^2} \left\langle \left(\mathbf{p}_\epsilon \cdot \mathbf{\Delta}^a\right) \left(\mathbf{p}_\epsilon \cdot \mathbf{\Delta}^b\right) \right\rangle + D_t \left\langle \mathbf{\Delta}^a \cdot \mathbf{\Delta}^b \right\rangle \\
&+ \frac{D_\times}{p^2} \left(\left\langle \left(\mathbf{p}_\epsilon \cdot \mathbf{\Delta}^a\right) \left(\mathbf{e}_{\xi\epsilon} \cdot \mathbf{\Delta}^b\right) \right\rangle + \left\langle \left(\mathbf{p}_\epsilon \cdot \mathbf{\Delta}^b\right) \left(\mathbf{e}_{\xi\epsilon} \cdot \mathbf{\Delta}^a\right) \right\rangle \right) \\
&- \frac{1}{p^2} \left(\mathbf{p} \cdot \mathbf{\Delta}^a_0\right) \left(\mathbf{p} \cdot \mathbf{\Delta}^b_0\right) \left\langle G^\alpha_1 \right\rangle \frac{\partial}{\partial z^\alpha} \left(D_l - D_t\right) \\
&- \left(\mathbf{\Delta}^a_0 \cdot \mathbf{\Delta}^b_0\right) \left\langle G^\alpha_1 \right\rangle \frac{\partial D_t}{\partial z^\alpha} \\
&- \frac{1}{p^2} \left[\left(\mathbf{e}_\xi \cdot \mathbf{\Delta}^a_0\right) \left(\mathbf{p} \cdot \mathbf{\Delta}^b_0\right) + \left(\mathbf{e}_\xi \cdot \mathbf{\Delta}^b_0\right) \left(\mathbf{p} \cdot \mathbf{\Delta}^a_0\right) \right] \left\langle G^\alpha_1 \right\rangle \frac{\partial D_\times}{\partial z^\alpha} + \mathcal{O}\left(\epsilon^2\right)
\end{aligned} \tag{E.95}$$

Since $\left\langle G^\alpha_1 \right\rangle = 0$ except for G^ξ_1, we therefore have

$$\mathcal{K}^a_{gc} = -\nu_l \left\langle \mathbf{p}_\epsilon \cdot \mathbf{\Delta}^a \right\rangle - \nu_t \left\langle \mathbf{e}_{\xi\epsilon} \cdot \mathbf{\Delta}^a \right\rangle + \left(\mathbf{p} \cdot \mathbf{\Delta}^a_0\right) \left\langle G^\xi_1 \right\rangle \frac{\partial \nu_l}{\partial \xi} + \left(\mathbf{e}_\xi \cdot \mathbf{\Delta}^a_0\right) \left\langle G^\xi_1 \right\rangle \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi} + \mathcal{O}\left(\epsilon^2\right) \tag{E.96}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}^{ab}_{gc} =& \frac{D_l - D_t}{p^2} \left\langle \left(\mathbf{p}_\epsilon \cdot \mathbf{\Delta}^a\right) \left(\mathbf{p}_\epsilon \cdot \mathbf{\Delta}^b\right) \right\rangle + D_t \left\langle \mathbf{\Delta}^a \cdot \mathbf{\Delta}^b \right\rangle \\
&+ \frac{D_\times}{p^2} \left(\left\langle \left(\mathbf{p}_\epsilon \cdot \mathbf{\Delta}^a\right) \left(\mathbf{e}_{\xi\epsilon} \cdot \mathbf{\Delta}^b\right) \right\rangle + \left\langle \left(\mathbf{p}_\epsilon \cdot \mathbf{\Delta}^b\right) \left(\mathbf{e}_{\xi\epsilon} \cdot \mathbf{\Delta}^a\right) \right\rangle \right) + \mathcal{O}\left(\epsilon^2\right) \\
&- \frac{1}{p^2} \left(\mathbf{p} \cdot \mathbf{\Delta}^a_0\right) \left(\mathbf{p} \cdot \mathbf{\Delta}^b_0\right) \left\langle G^\xi_1 \right\rangle \frac{\partial}{\partial \xi} \left(D_l - D_t\right) \\
&- \left(\mathbf{\Delta}^a_0 \cdot \mathbf{\Delta}^b_0\right) \left\langle G^\xi_1 \right\rangle \frac{\partial D_t}{\partial \xi} \\
&- \frac{1}{p^2} \left[\left(\mathbf{e}_\xi \cdot \mathbf{\Delta}^a_0\right) \left(\mathbf{p} \cdot \mathbf{\Delta}^b_0\right) + \left(\mathbf{e}_\xi \cdot \mathbf{\Delta}^b_0\right) \left(\mathbf{p} \cdot \mathbf{\Delta}^a_0\right) \right] \left\langle G^\xi_1 \right\rangle \frac{\partial D_\times}{\partial \xi} + \mathcal{O}\left(\epsilon^2\right)
\end{aligned} \tag{E.97}$$

E.13.1 Calculation of $\mathcal{K}^{\overline{\psi}}_{gc} \equiv \left\langle \mathbf{K}_\epsilon \cdot \mathbf{\Delta}^{\overline{\psi}} \right\rangle$

$$\mathcal{K}^{\overline{\psi}}_{gc} = -\nu_l \left\langle \mathbf{p}_\epsilon \cdot \mathbf{\Delta}^{\overline{\psi}} \right\rangle - \nu_t \left\langle \mathbf{e}_{\xi\epsilon} \cdot \mathbf{\Delta}^{\overline{\psi}} \right\rangle + \left(\mathbf{p} \cdot \mathbf{\Delta}^{\overline{\psi}}_0\right) \left\langle G^\xi_1 \right\rangle \frac{\partial \nu_l}{\partial \xi} + \left(\mathbf{e}_\xi \cdot \mathbf{\Delta}^{\overline{\psi}}_0\right) \left\langle G^\xi_1 \right\rangle \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi} + \mathcal{O}\left(\epsilon^2\right) \tag{E.98}$$

We can deduce

$$\mathcal{K}^{\overline{\psi}}_{gc} = \delta\psi \left[\left(1 + \frac{1-\xi^2}{2\xi^2} \lambda_{gc} \right) \nu_l - \frac{1-\xi^2}{2\xi} \lambda_{gc} \frac{\partial \nu_l}{\partial \xi} + \frac{1}{\xi} \left(1 - \lambda_{gc}\right) \nu_t - \frac{1-\xi^2}{2\xi^2} \lambda_{gc} \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi} \right] + \mathcal{O}\left(\epsilon^2\right) \tag{E.99}$$

E.13.2 Calculation of $\mathcal{K}^p_{gc} \equiv \left\langle \mathbf{K}_\epsilon \cdot \mathbf{\Delta}^p \right\rangle$

$$\mathcal{K}^p_{gc} = -\nu_l \left\langle \mathbf{p}_\epsilon \cdot \mathbf{\Delta}^p \right\rangle - \nu_t \left\langle \mathbf{e}_{\xi\epsilon} \cdot \mathbf{\Delta}^p \right\rangle + \left(\mathbf{p} \cdot \mathbf{\Delta}^p_0\right) \left\langle G^\xi_1 \right\rangle \frac{\partial \nu_l}{\partial \xi} + \left(\mathbf{e}_\xi \cdot \mathbf{\Delta}^p_0\right) \left\langle G^\xi_1 \right\rangle \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi} + \mathcal{O}\left(\epsilon^2\right) \tag{E.100}$$

We can deduce

$$\mathcal{K}^p_{gc} = \left(-\nu_l + \frac{1-\xi^2}{2\xi} \lambda_{gc} \frac{\partial \nu_l}{\partial \xi} \right) p + \mathcal{O}\left(\epsilon^2\right) \tag{E.101}$$

E.13.3 Calculation of $\mathcal{K}_{gc}^{\xi_0} \equiv \left\langle \mathbf{K}_\epsilon \cdot \mathbf{\Delta}^{\xi_0} \right\rangle$

$$\mathcal{K}_{gc}^{\xi_0} = -\nu_l \left\langle \mathbf{p}_\epsilon \cdot \mathbf{\Delta}^{\xi_0} \right\rangle - \nu_t \left\langle \mathbf{e}_{\xi\epsilon} \cdot \mathbf{\Delta}^{\xi_0} \right\rangle + \left(\mathbf{p} \cdot \mathbf{\Delta}_0^{\xi_0} \right) \left\langle G_1^\xi \right\rangle \frac{\partial \nu_l}{\partial \xi} + \left(\mathbf{e}_\xi \cdot \mathbf{\Delta}_0^{\xi_0} \right) \left\langle G_1^\xi \right\rangle \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi} + \mathcal{O}\left(\epsilon^2\right) \tag{E.102}$$

We can deduce

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{gc}^{\xi_0} =& \frac{1-\xi_0^2}{2\xi_0} \left[-\left(\overline{\delta\psi} + \left(1 + \frac{1-\xi^2}{2\xi^2} \overline{\delta\psi} \right) \lambda_{gc} \right) \nu_l + \frac{1-\xi^2}{2\xi} \overline{\delta\psi} \lambda_{gc} \frac{\partial \nu_l}{\partial \xi} \right. \\ & \left. - \frac{2\xi}{1-\xi^2} \left(1 + \frac{1-\xi^2}{2\xi^2} \overline{\delta\psi} \right) \left(1 - \lambda_{gc} \right) \nu_t + \left(1 + \frac{1-\xi^2}{2\xi^2} \overline{\delta\psi} \right) \lambda_{gc} \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi} \right] + \mathcal{O}\left(\epsilon^2\right) \end{aligned} \tag{E.103}$$

E.13.4 Calculation of $\mathcal{D}_{gc}^{\overline{\psi}\overline{\psi}} \equiv \left\langle \mathbf{\Delta}^{\overline{\psi}} \cdot \mathbb{D}_\epsilon \cdot \mathbf{\Delta}^{\overline{\psi}} \right\rangle$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{gc}^{\overline{\psi}\overline{\psi}} =& \frac{D_l - D_t}{p^2} \left\langle \left(\mathbf{p}_\epsilon \cdot \mathbf{\Delta}^{\overline{\psi}} \right)^2 \right\rangle + D_t \left\langle \left(\mathbf{\Delta}^{\overline{\psi}} \right)^2 \right\rangle + 2 \frac{D_\times}{p^2} \left\langle \left(\mathbf{p}_\epsilon \cdot \mathbf{\Delta}^{\overline{\psi}} \right) \left(\mathbf{e}_{\xi\epsilon} \cdot \mathbf{\Delta}^{\overline{\psi}} \right) \right\rangle \\ & - \frac{1}{p^2} \left(\mathbf{p} \cdot \mathbf{\Delta}_0^{\overline{\psi}} \right)^2 \left\langle G_1^\xi \right\rangle \frac{\partial}{\partial \xi} \left(D_l - D_t \right) - \left(\mathbf{\Delta}_0^{\overline{\psi}} \right)^2 \left\langle G_1^\xi \right\rangle \frac{\partial D_t}{\partial \xi} \\ & - \frac{2}{p^2} \left(\mathbf{e}_\xi \cdot \mathbf{\Delta}_0^{\overline{\psi}} \right) \left(\mathbf{p} \cdot \mathbf{\Delta}_0^{\overline{\psi}} \right) \left\langle G_1^\xi \right\rangle \frac{\partial D_\times}{\partial \xi} + \mathcal{O}\left(\epsilon^2\right) \end{aligned} \tag{E.104}$$

We can deduce

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{gc}^{\overline{\psi}\overline{\psi}} =& \frac{\left(\delta\psi\right)^2}{p^2 \xi^2} \left[\xi^2 \left(1 + \frac{1-\xi^2}{\xi^2} \lambda_{gc} \right) \left(D_l - D_t \right) + D_t - \frac{1-\xi^2}{2\xi} \lambda_{gc} \left(\xi^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \left(D_l - D_t \right) + \frac{\partial D_t}{\partial \xi} \right) \right. \\ & \left. - 2\xi \left(1 - \frac{1+\xi^2}{2\xi^2} \lambda_{gc} \right) D_\times - \left(1 - \xi^2 \right) \lambda_{gc} \frac{\partial D_\times}{\partial \xi} \right] + \mathcal{O}\left(\epsilon^2\right) \end{aligned} \tag{E.105}$$

E.13.5 Calculation of $\mathcal{D}_{gc}^{pp} \equiv \left\langle \mathbf{\Delta}^p \cdot \mathbb{D}_\epsilon \cdot \mathbf{\Delta}^p \right\rangle$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{gc}^{pp} =& \frac{D_l - D_t}{p^2} \left\langle \left(\mathbf{p}_\epsilon \cdot \mathbf{\Delta}^p \right)^2 \right\rangle + D_t \left\langle \left(\mathbf{\Delta}^{\overline{\psi}} \right)^2 \right\rangle + 2 \frac{D_\times}{p^2} \left\langle \left(\mathbf{p}_\epsilon \cdot \mathbf{\Delta}^p \right) \left(\mathbf{e}_{\xi\epsilon} \cdot \mathbf{\Delta}^p \right) \right\rangle \\ & - \frac{1}{p^2} \left(\mathbf{p} \cdot \mathbf{\Delta}_0^p \right)^2 \left\langle G_1^\xi \right\rangle \frac{\partial}{\partial \xi} \left(D_l - D_t \right) - \left(\mathbf{\Delta}_0^p \right)^2 \left\langle G_1^\xi \right\rangle \frac{\partial D_t}{\partial \xi} \\ & - \frac{2}{p^2} \left(\mathbf{e}_\xi \cdot \mathbf{\Delta}_0^p \right) \left(\mathbf{p} \cdot \mathbf{\Delta}_0^p \right) \left\langle G_1^\xi \right\rangle \frac{\partial D_\times}{\partial \xi} + \mathcal{O}\left(\epsilon^2\right) \end{aligned} \tag{E.106}$$

We can deduce

$$\mathcal{D}_{gc}^{pp} = D_l - \frac{1-\xi^2}{2\xi} \lambda_{gc} \frac{\partial D_l}{\partial \xi} + \mathcal{O}\left(\epsilon^2\right) \tag{E.107}$$

E.13.6 Calculation of $\mathcal{D}_{gc}^{\xi_0\xi_0} \equiv \left\langle \mathbf{\Delta}^{\xi_0} \cdot \mathbb{D}_\epsilon \cdot \mathbf{\Delta}^{\xi_0} \right\rangle$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{gc}^{\xi_0\xi_0} =& \frac{D_l - D_t}{p^2} \left\langle \left(\mathbf{p}_\epsilon \cdot \mathbf{\Delta}^{\xi_0} \right)^2 \right\rangle + D_t \left\langle \left(\mathbf{\Delta}^{\xi_0} \right)^2 \right\rangle + 2 \frac{D_\times}{p^2} \left\langle \left(\mathbf{p}_\epsilon \cdot \mathbf{\Delta}^{\xi_0} \right) \left(\mathbf{e}_{\xi\epsilon} \cdot \mathbf{\Delta}^{\xi_0} \right) \right\rangle \\ & - \frac{1}{p^2} \left(\mathbf{p} \cdot \mathbf{\Delta}_0^{\xi_0} \right)^2 \left\langle G_1^\xi \right\rangle \frac{\partial}{\partial \xi} \left(D_l - D_t \right) - \left(\mathbf{\Delta}_0^{\xi_0} \right)^2 \left\langle G_1^\xi \right\rangle \frac{\partial D_t}{\partial \xi} \\ & - \frac{2}{p^2} \left(\mathbf{e}_\xi \cdot \mathbf{\Delta}_0^{\xi_0} \right) \left(\mathbf{p} \cdot \mathbf{\Delta}_0^{\xi_0} \right) \left\langle G_1^\xi \right\rangle \frac{\partial D_\times}{\partial \xi} + \mathcal{O}\left(\epsilon^2\right) \end{aligned} \tag{E.108}$$

We can deduce

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{gc}^{\xi_0\xi_0} =& \left(\frac{1-\xi_0^2}{p\xi_0}\right)^2 \left[\frac{\xi^2}{1-\xi^2}\left(1-\lambda_{gc}\right)D_t + \overline{\delta\psi}\left(D_t + \lambda_{gc}\left[\frac{D_l}{2} - D_t\right]\right) - \frac{1-\xi^2}{2\xi}\lambda_{gc}\left(\frac{\xi^2}{1-\xi^2} + \overline{\delta\psi}\right)\frac{\partial D_t}{\partial\xi}\right.\\ &+ \frac{\left(\overline{\delta\psi}\right)^2}{4\xi^2}\left(D_t + \xi^2\left[D_l - D_t\right] + \left(1-\xi^2\right)\lambda_{gc}\left[D_l - D_t\right]\right)\\ &- \frac{1-\xi^2}{2\xi}\lambda_{gc}\frac{\left(\overline{\delta\psi}\right)^2}{4}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(D_l - D_t\right) - \frac{1-\xi^2}{2\xi}\lambda_{gc}\frac{\left(\overline{\delta\psi}\right)^2}{4\xi^2}\frac{\partial D_t}{\partial\xi}\\ &+ \frac{\xi}{1-\xi^2}\left(\lambda_{gc} + \overline{\delta\psi}\left[1 + \frac{1-2\xi^2}{\xi^2}\lambda_{gc}\right] + \left(\overline{\delta\psi}\right)^2\frac{1-\xi^2}{2\xi^2}\left[1 + \frac{1-3\xi^2}{2\xi^2}\lambda_{gc}\right]\right)D_\times\\ &\left.- \frac{1-\xi^2}{2\xi}\lambda_{gc}\left(\frac{\xi}{1-\xi^2} + \frac{\left(\overline{\delta\psi}\right)^2}{2}\right)\frac{\partial D_\times}{\partial\xi}\right] + \mathcal{O}\left(\epsilon^2\right)\end{aligned} \tag{E.109}$$

E.13.7 Calculation of $\mathcal{D}_{gc}^{p\overline{\psi}} = \mathcal{D}_{gc}^{\overline{\psi}p} \equiv \left\langle \boldsymbol{\Delta}^p \cdot \mathbb{D}_\epsilon \cdot \boldsymbol{\Delta}^{\overline{\psi}} \right\rangle$

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{gc}^{p\overline{\psi}} =& \frac{D_l - D_t}{p^2}\left\langle \left(\mathbf{p}_\epsilon \cdot \boldsymbol{\Delta}^p\right)\left(\mathbf{p}_\epsilon \cdot \boldsymbol{\Delta}^{\overline{\psi}}\right)\right\rangle + D_t\left\langle \boldsymbol{\Delta}^p \cdot \boldsymbol{\Delta}^{\overline{\psi}}\right\rangle\\ &+ \frac{D_\times}{p^2}\left(\left\langle \left(\mathbf{p}_\epsilon \cdot \boldsymbol{\Delta}^p\right)\left(\mathbf{e}_{\xi\epsilon} \cdot \boldsymbol{\Delta}^{\overline{\psi}}\right)\right\rangle + \left\langle \left(\mathbf{p}_\epsilon \cdot \boldsymbol{\Delta}^{\overline{\psi}}\right)\left(\mathbf{e}_{\xi\epsilon} \cdot \boldsymbol{\Delta}^p\right)\right\rangle\right) + \mathcal{O}\left(\epsilon^2\right)\\ &- \frac{1}{p^2}\left(\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\Delta}_0^p\right)\left(\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\Delta}_0^{\overline{\psi}}\right)\left\langle G_1^\xi\right\rangle\frac{\partial}{\partial\xi}\left(D_l - D_t\right) - \left(\boldsymbol{\Delta}_0^p \cdot \boldsymbol{\Delta}_0^{\overline{\psi}}\right)\left\langle G_1^\xi\right\rangle\frac{\partial D_t}{\partial\xi}\\ &- \frac{1}{p^2}\left[\left(\mathbf{e}_\xi \cdot \boldsymbol{\Delta}_0^p\right)\left(\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\Delta}_0^{\overline{\psi}}\right) + \left(\mathbf{e}_\xi \cdot \boldsymbol{\Delta}_0^{\overline{\psi}}\right)\left(\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\Delta}_0^p\right)\right]\left\langle G_1^\xi\right\rangle\frac{\partial D_\times}{\partial\xi} + \mathcal{O}\left(\epsilon^2\right)\end{aligned} \tag{E.110}$$

We can deduce

$$\mathcal{D}_{gc}^{p\overline{\psi}} = -\frac{\delta\psi}{p}\left[\left(1 + \frac{1-\xi^2}{2\xi^2}\lambda_{gc}\right)D_l - \frac{1-\xi^2}{2\xi}\lambda_{gc}\frac{\partial D_l}{\partial\xi} + \frac{1}{\xi}\left(1-\lambda_{gc}\right)D_\times - \frac{1-\xi^2}{2\xi^2}\lambda_{gc}\frac{\partial D_\times}{\partial\xi}\right] + \mathcal{O}\left(\epsilon^2\right) \tag{E.111}$$

E.13.8 Calculation of $\mathcal{D}_{gc}^{p\xi_0} = \mathcal{D}_{gc}^{\xi_0 p} \equiv \left\langle \boldsymbol{\Delta}^p \cdot \mathbb{D}_\epsilon \cdot \boldsymbol{\Delta}^{\xi_0} \right\rangle$

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{gc}^{p\xi_0} =& \frac{D_l - D_t}{p^2}\left\langle \left(\mathbf{p}_\epsilon \cdot \boldsymbol{\Delta}^p\right)\left(\mathbf{p}_\epsilon \cdot \boldsymbol{\Delta}^{\xi_0}\right)\right\rangle + D_t\left\langle \boldsymbol{\Delta}^p \cdot \boldsymbol{\Delta}^{\xi_0}\right\rangle\\ &+ \frac{D_\times}{p^2}\left(\left\langle \left(\mathbf{p}_\epsilon \cdot \boldsymbol{\Delta}^p\right)\left(\mathbf{e}_{\xi\epsilon} \cdot \boldsymbol{\Delta}^{\xi_0}\right)\right\rangle + \left\langle \left(\mathbf{p}_\epsilon \cdot \boldsymbol{\Delta}^{\xi_0}\right)\left(\mathbf{e}_{\xi\epsilon} \cdot \boldsymbol{\Delta}^p\right)\right\rangle\right) + \mathcal{O}\left(\epsilon^2\right)\\ &- \frac{1}{p^2}\left(\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\Delta}_0^p\right)\left(\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\Delta}_0^{\xi_0}\right)\left\langle G_1^\xi\right\rangle\frac{\partial}{\partial\xi}\left(D_l - D_t\right) - \left(\boldsymbol{\Delta}_0^p \cdot \boldsymbol{\Delta}_0^{\xi_0}\right)\left\langle G_1^\xi\right\rangle\frac{\partial D_t}{\partial\xi}\\ &- \frac{1}{p^2}\left[\left(\mathbf{e}_\xi \cdot \boldsymbol{\Delta}_0^p\right)\left(\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\Delta}_0^{\xi_0}\right) + \left(\mathbf{e}_\xi \cdot \boldsymbol{\Delta}_0^{\xi_0}\right)\left(\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\Delta}_0^p\right)\right]\left\langle G_1^\xi\right\rangle\frac{\partial D_\times}{\partial\xi} + \mathcal{O}\left(\epsilon^2\right)\end{aligned} \tag{E.112}$$

We can deduce

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{gc}^{p\xi_0} =& \frac{1-\xi_0^2}{2p\xi_0}\left[\left(\overline{\delta\psi} + \left(1 + \frac{1-\xi^2}{2\xi^2}\overline{\delta\psi}\right)\lambda_{gc}\right)D_l - \frac{1-\xi^2}{2\xi}\overline{\delta\psi}\lambda_{gc}\frac{\partial D_l}{\partial\xi}\right.\\ &\left.+ \frac{2\xi}{1-\xi^2}\left(1 + \frac{1-\xi^2}{2\xi^2}\overline{\delta\psi}\right)\left(1-\lambda_{gc}\right)D_\times - \left(1 + \frac{1-\xi^2}{2\xi^2}\overline{\delta\psi}\right)\lambda_{gc}\frac{\partial D_\times}{\partial\xi}\right] + \mathcal{O}\left(\epsilon^2\right)\end{aligned} \tag{E.113}$$

E.13.9 Calculation of $\mathcal{D}_{gc}^{\overline{\psi}\xi_0} = \mathcal{D}_{gc}^{\xi_0\overline{\psi}} \equiv \left\langle \mathbf{\Delta}^{\overline{\psi}} \cdot \mathbb{D}_\epsilon \cdot \mathbf{\Delta}^{\xi_0} \right\rangle$

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_{gc}^{\overline{\psi}\xi_0} =& \frac{D_l - D_t}{p^2} \left\langle \left(\mathbf{p}_\epsilon \cdot \mathbf{\Delta}^{\overline{\psi}}\right) \left(\mathbf{p}_\epsilon \cdot \mathbf{\Delta}^{\xi_0}\right) \right\rangle + D_t \left\langle \mathbf{\Delta}^{\overline{\psi}} \cdot \mathbf{\Delta}^{\xi_0} \right\rangle \\
&+ \frac{D_\times}{p^2} \left(\left\langle \left(\mathbf{p}_\epsilon \cdot \mathbf{\Delta}^{\overline{\psi}}\right) \left(\mathbf{e}_{\xi\epsilon} \cdot \mathbf{\Delta}^{\xi_0}\right) \right\rangle + \left\langle \left(\mathbf{p}_\epsilon \cdot \mathbf{\Delta}^{\xi_0}\right) \left(\mathbf{e}_{\xi\epsilon} \cdot \mathbf{\Delta}^{\overline{\psi}}\right) \right\rangle \right) + \mathcal{O}\left(\epsilon^2\right) \\
&- \frac{1}{p^2} \left(\mathbf{p} \cdot \mathbf{\Delta}_0^{\overline{\psi}}\right) \left(\mathbf{p} \cdot \mathbf{\Delta}_0^{\xi_0}\right) \left\langle G_1^\xi \right\rangle \frac{\partial}{\partial \xi} \left(D_l - D_t\right) - \left(\mathbf{\Delta}_0^{\overline{\psi}} \cdot \mathbf{\Delta}_0^{\xi_0}\right) \left\langle G_1^\xi \right\rangle \frac{\partial D_t}{\partial \xi} \\
&- \frac{1}{p^2} \left[\left(\mathbf{e}_\xi \cdot \mathbf{\Delta}_0^{\overline{\psi}}\right) \left(\mathbf{p} \cdot \mathbf{\Delta}_0^{\xi_0}\right) + \left(\mathbf{e}_\xi \cdot \mathbf{\Delta}_0^{\xi_0}\right) \left(\mathbf{p} \cdot \mathbf{\Delta}_0^{\overline{\psi}}\right) \right] \left\langle G_1^\xi \right\rangle \frac{\partial D_\times}{\partial \xi} + \mathcal{O}\left(\epsilon^2\right)
\end{aligned} \tag{E.114}$$

We can deduce

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_{gc}^{\overline{\psi}\xi_0} =& -\delta\psi \frac{1-\xi_0^2}{p^2\xi_0} \left[D_t + \lambda_{gc} \left(\frac{D_l}{2} - D_t \right) + \frac{\overline{\delta\psi}}{2\xi^2} \left(D_t + \xi^2 \left[D_l - D_t \right] + \left(1-\xi^2\right) \lambda_{gc} \left[D_l - D_t \right] \right) \right. \\
&- \frac{1-\xi^2}{2\xi} \lambda_{gc} \frac{\overline{\delta\psi}}{2} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(D_l - D_t \right) - \frac{1-\xi^2}{2\xi} \lambda_{gc} \left(1 + \frac{\overline{\delta\psi}}{2\xi^2} \right) \frac{\partial D_t}{\partial \xi} \\
&\left. + \frac{\xi}{1-\xi^2} \left(1 + \frac{1-2\xi^2}{\xi^2} \lambda_{gc} + \overline{\delta\psi} \frac{1-\xi^2}{\xi} \left[1 + \frac{1-3\xi^2}{2\xi^2} \lambda_{gc} \right] \right) D_\times - \frac{1-\xi^2}{2\xi} \lambda_{gc} \left(\frac{\xi}{1-\xi^2} + \frac{\overline{\delta\psi}}{\xi} \right) \frac{\partial D_\times}{\partial \xi} \right] + \mathcal{O}\left(\epsilon^2\right)
\end{aligned} \tag{E.115}$$

E.14 Thin-orbit approximation

In the thin-orbit approximation, $\epsilon_\psi \equiv \left(\psi - \overline{\psi}\right) / \overline{\psi} \ll 1$. The guiding-center coefficients can therefore be expressed, neglecting terms in $\epsilon\epsilon_\psi$ and ϵ_ψ^2:

$$\mathcal{K}_{gc}^{\overline{\psi}} = \epsilon_\psi \delta\psi \left[\nu_l + \frac{1}{\xi} \nu_t \right] + \mathcal{O}\left(\epsilon^2, \epsilon\epsilon_\psi, \epsilon_\psi^2\right) \tag{E.116}$$

$$\mathcal{K}_{gc}^{p} = -\left[1 - \epsilon\lambda_{gc} \frac{1-\xi^2}{2\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \right] \nu_l p + \mathcal{O}\left(\epsilon^2, \epsilon\epsilon_\psi, \epsilon_\psi^2\right) \tag{E.117}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}_{gc}^{\xi_0} =& -\frac{1-\xi_0^2}{2\xi_0} \left[\left(\epsilon_\psi \overline{\delta\psi} + \epsilon\lambda_{gc} \right) \nu_l \right. \\
&\left. + \frac{2\xi}{1-\xi^2} \left(1 - \epsilon\lambda_{gc} - \epsilon\lambda_{gc} \frac{1-\xi^2}{2\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} + \epsilon_\psi \overline{\delta\psi} \frac{1-\xi^2}{2\xi^2} \right) \nu_t \right] + \mathcal{O}\left(\epsilon^2, \epsilon\epsilon_\psi, \epsilon_\psi^2\right)
\end{aligned} \tag{E.118}$$

$$\mathcal{D}_{gc}^{\overline{\psi\psi}} = \mathcal{O}\left(\epsilon^2, \epsilon\epsilon_\psi, \epsilon_\psi^2\right) \tag{E.119}$$

$$\mathcal{D}_{gc}^{pp} = \left[1 - \epsilon\lambda_{gc}\frac{1-\xi^2}{2\xi}\frac{\partial}{\partial\xi}\right] D_l + \mathcal{O}\left(\epsilon^2, \epsilon\epsilon_\psi, \epsilon_\psi^2\right) \tag{E.120}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{gc}^{\xi_0\xi_0} =& \frac{1-\xi_0^2}{p^2}\frac{\xi^2}{\Psi\xi_0^2}\left[\left(1 - \epsilon\lambda_{gc} - \epsilon\lambda_{gc}\frac{1-\xi^2}{2\xi}\frac{\partial}{\partial\xi} + \epsilon_\psi\overline{\delta\psi}\frac{1-\xi^2}{\xi^2}\right) D_t\right.\\ &\left. + \frac{1}{\xi}\left(\epsilon\lambda_{gc} + \epsilon_\psi\overline{\delta\psi}\right) D_\times\right] + \mathcal{O}\left(\epsilon^2, \epsilon\epsilon_\psi, \epsilon_\psi^2\right)\end{aligned} \tag{E.121}$$

$$\mathcal{D}_{gc}^{p\overline{\psi}} = -\epsilon_\psi\frac{\delta\psi}{p}\left[D_l + \frac{1}{\xi}D_\times\right] + \mathcal{O}\left(\epsilon^2, \epsilon\epsilon_\psi, \epsilon_\psi^2\right) \tag{E.122}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{gc}^{p\xi_0} =& \frac{1-\xi_0^2}{2p\xi_0}\left[\left(\epsilon_\psi\overline{\delta\psi} + \epsilon\lambda_{gc}\right) D_l\right.\\ &\left. + \frac{2\xi}{1-\xi^2}\left(1 - \epsilon\lambda_{gc} - \epsilon\lambda_{gc}\frac{1-\xi^2}{2\xi}\frac{\partial}{\partial\xi} + \epsilon_\psi\overline{\delta\psi}\frac{1-\xi^2}{2\xi^2}\right) D_\times\right] + \mathcal{O}\left(\epsilon^2, \epsilon\epsilon_\psi, \epsilon_\psi^2\right)\end{aligned} \tag{E.123}$$

$$\mathcal{D}_{gc}^{\overline{\psi}\xi_0} = -\epsilon_\psi\delta\psi\frac{1-\xi_0^2}{p^2\xi_0}\left[D_t + \frac{\xi}{1-\xi^2}D_\times\right] + \mathcal{O}\left(\epsilon^2, \epsilon\epsilon_\psi, \epsilon_\psi^2\right) \tag{E.124}$$

where ν_l, ν_t, D_l, D_t and $D_\times$are function of (ψ, θ, p, ξ).

E.15 Guiding-center gyro-radius vector $\boldsymbol{\rho}_\epsilon$

The particle position reads

$$\mathbf{x} = \mathbf{X} + \boldsymbol{\rho}_\epsilon = \mathsf{T}_\epsilon^{-1}\mathbf{X} = \mathbf{X} - \epsilon\mathbf{G}_1^{\mathbf{x}} - \epsilon^2\left(\mathbf{G}_2^{\mathbf{x}} - \frac{1}{2}G_1^\alpha\frac{\partial\mathbf{G}_1^{\mathbf{x}}}{\partial z^\alpha}\right) + \dots \tag{E.125}$$

We can deduce using $\boldsymbol{\rho}_\epsilon \equiv \boldsymbol{\rho}_0 + \boldsymbol{\rho}_1 + \dots$:

$$\boldsymbol{\rho}_1 = -\mathbf{G}_2^{\mathbf{x}} + \frac{1}{2}\mathbf{G}_1^{\mathbf{x}}\cdot\nabla\mathbf{G}_1^{\mathbf{x}} + \frac{1}{2}G_1^\xi\frac{\partial\mathbf{G}_1^{\mathbf{x}}}{\partial\xi} + \frac{1}{2}G_1^\varphi\frac{\partial\mathbf{G}_1^{\mathbf{x}}}{\partial\varphi} \tag{E.126}$$

with

$$\mathbf{G}_1^{\mathbf{x}} = -\boldsymbol{\rho}_0 \tag{E.127}$$

$$\mathbf{G}_2^{\mathbf{x}} = \left[\frac{2p\xi}{m\Omega}\widehat{\mathsf{b}}\cdot\nabla\widehat{\mathsf{b}}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\rho}_0}{\partial\varphi} + \frac{p^2\left(1-\xi^2\right)}{2m^2\Omega^2}\mathbb{A}_2 : \nabla\widehat{\mathsf{b}}\right]\widehat{\mathsf{b}} + \frac{p\xi}{m\Omega}\left(\widehat{\mathsf{b}}\cdot\nabla\times\widehat{\mathsf{b}}\right)\boldsymbol{\rho}_0 + \frac{1}{2}G_1^\xi\frac{\partial\boldsymbol{\rho}_0}{\partial\xi} + \frac{1}{2}\left(G_1^\varphi + \boldsymbol{\rho}_0\cdot\mathbf{R}\right)\frac{\partial\boldsymbol{\rho}_0}{\partial\varphi} \tag{E.128}$$

$$\boldsymbol{\rho}_0\cdot\nabla\boldsymbol{\rho}_0 = -\left(\boldsymbol{\rho}_0\cdot\nabla\ln B\right)\boldsymbol{\rho}_0 - \left(\boldsymbol{\rho}_0\cdot\nabla\widehat{\mathsf{b}}\cdot\boldsymbol{\rho}_0\right)\widehat{\mathsf{b}} - \left(\boldsymbol{\rho}_0\cdot\mathbf{R}\right)\frac{\partial\boldsymbol{\rho}_0}{\partial\varphi} \tag{E.129}$$

We therefore have

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\rho}_1 =& -\left[\boldsymbol{\rho}_0\cdot\mathbf{R} + G_1^\varphi\right]\frac{\partial\boldsymbol{\rho}_0}{\partial\varphi}\\ &- \left[\frac{p\xi}{m\Omega}\widehat{\mathsf{b}}\cdot\nabla\times\widehat{\mathsf{b}} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\rho}_0\cdot\nabla\ln B - \frac{\xi}{1-\xi^2}G_1^\xi\right]\boldsymbol{\rho}_0\\ &- \left[\frac{2p\xi}{m\Omega}\widehat{\mathsf{b}}\cdot\nabla\widehat{\mathsf{b}}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\rho}_0}{\partial\varphi} + \frac{p^2\left(1-\xi^2\right)}{2m^2\Omega^2}\mathbb{A}_2 : \nabla\widehat{\mathsf{b}} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\rho}_0\cdot\nabla\widehat{\mathsf{b}}\cdot\boldsymbol{\rho}_0\right]\widehat{\mathsf{b}}\end{aligned} \tag{E.130}$$

Using (E.66) and the expressions for G_1^{ξ} and G_1^{φ} gives

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\rho}_1 =& -\left[\frac{p\xi}{m\Omega}\mathbb{A}_2 : \nabla\widehat{\mathsf{b}} + \frac{\partial\boldsymbol{\rho}_0}{\partial\varphi}\cdot\nabla\ln B + \frac{\xi^2}{1-\xi^2}\widehat{\mathsf{b}}\cdot\nabla\widehat{\mathsf{b}}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\rho}_0}{\partial\varphi}\right]\frac{\partial\boldsymbol{\rho}_0}{\partial\varphi}\\ &-\left[\frac{1}{2}\boldsymbol{\rho}_0\cdot\nabla\ln B + \frac{\xi^2}{1-\xi^2}\widehat{\mathsf{b}}\cdot\nabla\widehat{\mathsf{b}}\cdot\boldsymbol{\rho}_0 + \frac{p\xi}{2m\Omega}\left(\widehat{\mathsf{b}}\cdot\nabla\times\widehat{\mathsf{b}} - \mathbb{A}_1 : \nabla\widehat{\mathsf{b}}\right)\right]\boldsymbol{\rho}_0\\ &-\left[\frac{2p\xi}{m\Omega}\widehat{\mathsf{b}}\cdot\nabla\widehat{\mathsf{b}}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\rho}_0}{\partial\varphi} - \frac{p^2\left(1-\xi^2\right)}{2m^2\Omega^2}\left(\mathbb{A}_2 : \nabla\widehat{\mathsf{b}} + \frac{1}{2}\widehat{\mathsf{b}}\cdot\nabla\ln B\right)\right]\widehat{\mathsf{b}} \qquad \text{(E.131)}\\ \equiv& -\alpha\frac{\partial\boldsymbol{\rho}_0}{\partial\varphi} - \beta\boldsymbol{\rho}_0 - \gamma\widehat{\mathsf{b}} \qquad \text{(E.132)}\end{aligned}$$

In particular, we can deduce

$$\begin{aligned}\frac{\partial\boldsymbol{\rho}_1}{\partial\varphi} =& -\left(\beta + \frac{\partial\alpha}{\partial\varphi}\right)\frac{\partial\boldsymbol{\rho}_0}{\partial\varphi} + \left(\alpha - \frac{\partial\beta}{\partial\varphi}\right)\boldsymbol{\rho}_0 - \frac{\partial\gamma}{\partial\varphi}\widehat{\mathsf{b}}\\ =& +\left[\frac{1}{2}\boldsymbol{\rho}_0\cdot\nabla\ln B - \frac{p\xi}{2m\Omega}\left(\widehat{\mathsf{b}}\cdot\nabla\times\widehat{\mathsf{b}} + \mathbb{A}_1 : \nabla\widehat{\mathsf{b}}\right)\right]\frac{\partial\boldsymbol{\rho}_0}{\partial\varphi}\\ &+\left[\frac{1}{2}\frac{\partial\boldsymbol{\rho}_0}{\partial\varphi}\cdot\nabla\ln B - \frac{p\xi}{m\Omega}\mathbb{A}_2 : \nabla\widehat{\mathsf{b}}\right]\boldsymbol{\rho}_0\\ &+\left[\frac{2p\xi}{m\Omega}\widehat{\mathsf{b}}\cdot\nabla\widehat{\mathsf{b}}\cdot\boldsymbol{\rho}_0 + \frac{p^2\left(1-\xi^2\right)}{2m^2\Omega^2}\mathbb{A}_1 : \nabla\widehat{\mathsf{b}}\right]\widehat{\mathsf{b}} \qquad \text{(E.133)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\boldsymbol{\rho}_1}{\partial\varphi}\cdot\mathbf{p} =& \frac{p^2\left(1-\xi^2\right)}{m\Omega}\left[\frac{1}{2}\boldsymbol{\rho}_0\cdot\nabla\ln B - \frac{p\xi}{2m\Omega}\left(\widehat{\mathsf{b}}\cdot\nabla\times\widehat{\mathsf{b}} + \mathbb{A}_1 : \nabla\widehat{\mathsf{b}}\right)\right]\\ &+ p\xi\left[\frac{2p\xi}{m\Omega}\widehat{\mathsf{b}}\cdot\nabla\widehat{\mathsf{b}}\cdot\boldsymbol{\rho}_0 + \frac{p^2\left(1-\xi^2\right)}{2m^2\Omega^2}\mathbb{A}_1 : \nabla\widehat{\mathsf{b}}\right]\\ =& \frac{p^2\left(1-\xi^2\right)}{m\Omega}\left[\frac{2\xi^2}{1-\xi^2}\widehat{\mathsf{b}}\cdot\nabla\widehat{\mathsf{b}}\cdot\boldsymbol{\rho}_0 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\rho}_0\cdot\nabla\ln B - \frac{p\xi}{2m\Omega}\widehat{\mathsf{b}}\cdot\nabla\times\widehat{\mathsf{b}}\right] \qquad \text{(E.134)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\boldsymbol{\rho}_1}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial\mathbf{p}}{\partial\xi} =& -\frac{p^2\xi}{m\Omega}\left[\frac{1}{2}\boldsymbol{\rho}_0\cdot\nabla\ln B - \frac{p\xi}{2m\Omega}\left(\widehat{\mathsf{b}}\cdot\nabla\times\widehat{\mathsf{b}} + \mathbb{A}_1 : \nabla\widehat{\mathsf{b}}\right)\right]\\ &+ p\left[\frac{2p\xi}{m\Omega}\widehat{\mathsf{b}}\cdot\nabla\widehat{\mathsf{b}}\cdot\boldsymbol{\rho}_0 + \frac{p^2\left(1-\xi^2\right)}{2m^2\Omega^2}\mathbb{A}_1 : \nabla\widehat{\mathsf{b}}\right]\\ =& \frac{p^2\xi}{m\Omega}\left[2\widehat{\mathsf{b}}\cdot\nabla\widehat{\mathsf{b}}\cdot\boldsymbol{\rho}_0 - \frac{1}{2}\boldsymbol{\rho}_0\cdot\nabla\ln B + \frac{p}{2m\Omega\xi}\mathbb{A}_1 : \nabla\widehat{\mathsf{b}} + \frac{p\xi}{2m\Omega}\widehat{\mathsf{b}}\cdot\nabla\times\widehat{\mathsf{b}}\right] \qquad \text{(E.135)}\end{aligned}$$

$$\frac{\partial\boldsymbol{\rho}_1}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial\mathbf{p}}{\partial\varphi} = -\frac{p^2\left(1-\xi^2\right)}{m\Omega}\left[\frac{1}{2}\frac{\partial\boldsymbol{\rho}_0}{\partial\varphi}\cdot\nabla\ln B - \frac{p\xi}{m\Omega}\mathbb{A}_2 : \nabla\widehat{\mathsf{b}}\right] \qquad \text{(E.136)}$$

E.16 Various scalar products

$$\begin{aligned}\mathsf{T}_{\epsilon}^{-1}\mathbf{p}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\rho}_0}{\partial\varphi} =& \frac{p^2\left(1-\xi^2\right)}{m\Omega} - \frac{p^2\left(1-\xi^2\right)}{2m\Omega}\left(\boldsymbol{\rho}_0\cdot\nabla\ln B + \frac{2\xi^2}{1-\xi^2}\widehat{\mathsf{b}}\cdot\nabla\widehat{\mathsf{b}}\cdot\boldsymbol{\rho}_0\right)\\ &+ \frac{p^2\left(1-\xi^2\right)}{m\Omega}\left[\frac{1}{2}\boldsymbol{\rho}_0\cdot\nabla\ln B - \frac{p\xi}{m\Omega}\mathbb{A}_1 : \nabla\widehat{\mathsf{b}}\right]\\ =& \frac{p^2\left(1-\xi^2\right)}{m\Omega}\left(1 - \frac{\xi^2}{1-\xi^2}\widehat{\mathsf{b}}\cdot\nabla\widehat{\mathsf{b}}\cdot\boldsymbol{\rho}_0 - \frac{p\xi}{m\Omega}\mathbb{A}_1 : \nabla\widehat{\mathsf{b}}\right) \qquad \text{(E.137)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathsf{T}_\epsilon^{-1}\mathbf{e}_\xi\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\rho}_0}{\partial\varphi}=&-\frac{p^2\xi}{m\Omega}+\frac{p^2\xi}{2m\Omega}\left(\boldsymbol{\rho}_0\cdot\nabla\ln B-\widehat{\mathsf{b}}\cdot\nabla\widehat{\mathsf{b}}\cdot\boldsymbol{\rho}_0\right)\\&-\frac{p^2\xi}{m\Omega}\left[\frac{1}{2}\boldsymbol{\rho}_0\cdot\nabla\ln B+\frac{1}{2}\frac{1+\xi^2}{1-\xi^2}\widehat{\mathsf{b}}\cdot\nabla\widehat{\mathsf{b}}\cdot\boldsymbol{\rho}_0-\frac{p\left(2\xi^2-1\right)}{2m\Omega\xi}\mathbb{A}_1:\nabla\widehat{\mathsf{b}}-\frac{p\xi}{2m\Omega}\widehat{\mathsf{b}}\cdot\nabla\times\widehat{\mathsf{b}}\right]\\=&-\frac{p^2\xi}{m\Omega}\left(1+\frac{1}{1-\xi^2}\widehat{\mathsf{b}}\cdot\nabla\widehat{\mathsf{b}}\cdot\boldsymbol{\rho}_0-\frac{p\left(2\xi^2-1\right)}{2m\Omega\xi}\mathbb{A}_1:\nabla\widehat{\mathsf{b}}-\frac{p\xi}{2m\Omega}\widehat{\mathsf{b}}\cdot\nabla\times\widehat{\mathsf{b}}\right)\end{aligned}\tag{E.138}$$

$$\begin{aligned}\mathsf{T}_\epsilon^{-1}\mathbf{e}_\varphi\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\rho}_0}{\partial\varphi}=&\frac{p^2\left(1-\xi^2\right)}{2m\Omega}\left[\frac{\partial\boldsymbol{\rho}_0}{\partial\varphi}\cdot\nabla\ln B+\frac{\xi^2}{1-\xi^2}\widehat{\mathsf{b}}\cdot\nabla\widehat{\mathsf{b}}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\rho}_0}{\partial\varphi}\right]\\&+\frac{p^2\left(1-\xi^2\right)}{m\Omega}\left[\frac{1}{2}\frac{\partial\boldsymbol{\rho}_0}{\partial\varphi}\cdot\nabla\ln B+\frac{1}{2}\frac{\xi^2}{1-\xi^2}\widehat{\mathsf{b}}\cdot\nabla\widehat{\mathsf{b}}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\rho}_0}{\partial\varphi}+\frac{p\xi}{m\Omega}\mathbb{A}_2:\nabla\widehat{\mathsf{b}}\right]\\=&\frac{p^2\left(1-\xi^2\right)}{m\Omega}\left(\frac{\partial\boldsymbol{\rho}_0}{\partial\varphi}\cdot\nabla\ln B+\frac{\xi^2}{1-\xi^2}\widehat{\mathsf{b}}\cdot\nabla\widehat{\mathsf{b}}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\rho}_0}{\partial\varphi}+\frac{p\xi}{m\Omega}\mathbb{A}_2:\nabla\widehat{\mathsf{b}}\right)\end{aligned}\tag{E.139}$$

$$\begin{aligned}\mathsf{T}_\epsilon^{-1}\mathbf{p}\cdot\mathbf{p}=&p^2-\frac{p^2\left(1-\xi^2\right)}{2}\left(\boldsymbol{\rho}_0\cdot\nabla\ln B+\frac{2\xi^2}{1-\xi^2}\widehat{\mathsf{b}}\cdot\nabla\widehat{\mathsf{b}}\cdot\boldsymbol{\rho}_0\right)\\&+m\Omega p\xi\left[\frac{p\xi}{m\Omega}\widehat{\mathsf{b}}\cdot\nabla\widehat{\mathsf{b}}\cdot\boldsymbol{\rho}_0+\frac{p^2\left(1-\xi^2\right)}{2m^2\Omega^2}\mathbb{A}_1:\nabla\widehat{\mathsf{b}}\right]\\&+p^2\left(1-\xi^2\right)\left[\frac{1}{2}\boldsymbol{\rho}_0\cdot\nabla\ln B-\frac{p\xi}{2m\Omega}\mathbb{A}_1:\nabla\widehat{\mathsf{b}}\right]\\=&p^2+\mathcal{O}\left(\epsilon^2\right)\end{aligned}\tag{E.140}$$

We can deduce, at first order in ϵ:

$$\mathsf{T}_\epsilon^{-1}\mathbf{p}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\rho}_\epsilon}{\partial\varphi}=\frac{p^2\left(1-\xi^2\right)}{m\Omega}\left(1-\frac{p\xi}{2m\Omega}\widehat{\mathsf{b}}\cdot\nabla\times\widehat{\mathsf{b}}+\frac{1}{2}\boldsymbol{\rho}_0\cdot\nabla\ln B+\frac{\xi^2}{1-\xi^2}\widehat{\mathsf{b}}\cdot\nabla\widehat{\mathsf{b}}\cdot\boldsymbol{\rho}_0-\frac{p\xi}{m\Omega}\mathbb{A}_1:\nabla\widehat{\mathsf{b}}\right)\tag{E.141}$$

$$\mathsf{T}_\epsilon^{-1}\mathbf{e}_\xi\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\rho}_\epsilon}{\partial\varphi}=-\frac{p^2\xi}{m\Omega}\left(1-\frac{p\xi}{m\Omega}\widehat{\mathsf{b}}\cdot\nabla\times\widehat{\mathsf{b}}+\frac{1}{2}\boldsymbol{\rho}_0\cdot\nabla\ln B+\frac{2\xi^2-1}{1-\xi^2}\widehat{\mathsf{b}}\cdot\nabla\widehat{\mathsf{b}}\cdot\boldsymbol{\rho}_0+\frac{p\xi}{m\Omega}\mathbb{A}_1:\nabla\widehat{\mathsf{b}}\right)\tag{E.142}$$

$$\mathsf{T}_\epsilon^{-1}\mathbf{e}_\varphi\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\rho}_\epsilon}{\partial\varphi}=\frac{p^2\left(1-\xi^2\right)}{m\Omega}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial\boldsymbol{\rho}_0}{\partial\varphi}\cdot\nabla\ln B+\frac{\xi^2}{1-\xi^2}\widehat{\mathsf{b}}\cdot\nabla\widehat{\mathsf{b}}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\rho}_0}{\partial\varphi}+2\frac{p\xi}{m\Omega}\mathbb{A}_2:\nabla\widehat{\mathsf{b}}\right)\tag{E.143}$$

$$\mathsf{T}_\epsilon^{-1}\mathbf{p}\cdot\mathsf{T}_\epsilon^{-1}\mathbf{p}=p^2\tag{E.144}$$

E.17 Coordinate projections

We can deduce, using (E.74)-(E.76) and (E.141)-(E.144):

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\Delta}^{\overline{\psi}} \cdot \mathsf{T}_\epsilon^{-1}\mathbf{p} =& -\delta\psi\left(1+\frac{1-\xi^2}{2\xi^2}\lambda_{gc}-\frac{1-\xi^2}{2\xi^2}\boldsymbol{\rho}_0\cdot\nabla\ln B-\widehat{\mathsf{b}}\cdot\nabla\widehat{\mathsf{b}}\cdot\boldsymbol{\rho}_0+\frac{p}{m\Omega\xi}\mathbb{A}_1:\nabla\widehat{\mathsf{b}}\right)\\
&-\boldsymbol{\rho}_0\cdot\nabla\overline{\psi}+\mathcal{O}\left(\epsilon^2\right) && \text{(E.145)}\\
\boldsymbol{\Delta}^{\overline{\psi}} \cdot \mathsf{T}_\epsilon^{-1}\mathbf{e}_\xi =& -\frac{\delta\psi}{\xi}\left(1-\lambda_{gc}+\frac{1}{2}\boldsymbol{\rho}_0\cdot\nabla\ln B+\frac{2\xi^2-1}{1-\xi^2}\widehat{\mathsf{b}}\cdot\nabla\widehat{\mathsf{b}}\cdot\boldsymbol{\rho}_0+\frac{p\xi}{m\Omega}\mathbb{A}_1:\nabla\widehat{\mathsf{b}}\right)\\
&+\frac{\xi}{1-\xi^2}\boldsymbol{\rho}_0\cdot\nabla\overline{\psi}+\mathcal{O}\left(\epsilon^2\right) && \text{(E.146)}\\
\boldsymbol{\Delta}^{\overline{\psi}} \cdot \mathsf{T}_\epsilon^{-1}\mathbf{e}_\varphi =& \delta\psi\frac{1-\xi^2}{\xi^2}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial\boldsymbol{\rho}_0}{\partial\varphi}\cdot\nabla\ln B+\frac{\xi^2}{1-\xi^2}\widehat{\mathsf{b}}\cdot\nabla\widehat{\mathsf{b}}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\rho}_0}{\partial\varphi}+2\frac{p\xi}{m\Omega}\mathbb{A}_2:\nabla\widehat{\mathsf{b}}\right)\\
&-\frac{\partial\boldsymbol{\rho}_0}{\partial\varphi}\cdot\nabla\overline{\psi}+\mathcal{O}\left(\epsilon^2\right) && \text{(E.147)}\\
\left(\boldsymbol{\Delta}^{\overline{\psi}}\right)^2 =& \frac{(\delta\psi)^2}{p^2\xi^2}-2\frac{\delta\psi}{p\xi}\widehat{\mathsf{b}}\cdot\nabla\widehat{\mathsf{b}}\cdot\boldsymbol{\rho}_0+\mathcal{O}\left(\epsilon^2\right) && \text{(E.148)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\Delta}^{p} \cdot \mathsf{T}_\epsilon^{-1}\mathbf{p} =& p+\mathcal{O}\left(\epsilon^2\right) && \text{(E.149)}\\
\boldsymbol{\Delta}^{p} \cdot \mathsf{T}_\epsilon^{-1}\mathbf{e}_\xi =& \mathcal{O}\left(\epsilon^2\right) && \text{(E.150)}\\
\boldsymbol{\Delta}^{p} \cdot \mathsf{T}_\epsilon^{-1}\mathbf{e}_\varphi =& \mathcal{O}\left(\epsilon^2\right) && \text{(E.151)}\\
\left(\boldsymbol{\Delta}^{p}\right)^2 =& 1+\mathcal{O}\left(\epsilon^2\right) && \text{(E.152)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\Delta}^{\xi_0} \cdot \mathsf{T}_\epsilon^{-1}\mathbf{p} =& \frac{1-\xi_0^2}{2\xi_0}\left[\overline{\delta\psi}+\left(1+\frac{1-\xi^2}{2\xi^2}\overline{\delta\psi}\right)\lambda_{gc}-\boldsymbol{\rho}_0\cdot\nabla\ln B-\frac{2\xi^2}{1-\xi^2}\widehat{\mathsf{b}}\cdot\nabla\widehat{\mathsf{b}}\cdot\boldsymbol{\rho}_0+2\frac{p\xi}{m\Omega}\mathbb{A}_1:\nabla\widehat{\mathsf{b}}\right.\\
&\left.-\frac{1-\xi^2}{\xi^2}\overline{\delta\psi}\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{\rho}_0\cdot\nabla\ln B+\frac{\xi^2}{1-\xi^2}\widehat{\mathsf{b}}\cdot\nabla\widehat{\mathsf{b}}\cdot\boldsymbol{\rho}_0-\frac{p\xi}{m\Omega}\mathbb{A}_1:\nabla\widehat{\mathsf{b}}\right)+\left(\boldsymbol{\rho}_0\cdot\nabla\overline{\psi}\right)\frac{d\ln B_0}{d\overline{\psi}}\right]+\mathcal{O}\left(\epsilon^2\right) && \text{(E.153)}\\
\boldsymbol{\Delta}^{\xi_0} \cdot \mathsf{T}_\epsilon^{-1}\mathbf{e}_\xi =& \frac{1-\xi_0^2}{2\xi_0}\left[\frac{2\xi}{1-\xi^2}\left(1+\frac{1-\xi^2}{2\xi^2}\overline{\delta\psi}\right)\left(1-\lambda_{gc}+\frac{1}{2}\boldsymbol{\rho}_0\cdot\nabla\ln B+\frac{2\xi^2-1}{1-\xi^2}\widehat{\mathsf{b}}\cdot\nabla\widehat{\mathsf{b}}\cdot\boldsymbol{\rho}_0+\frac{p\xi}{m\Omega}\mathbb{A}_1:\nabla\widehat{\mathsf{b}}\right)\right.\\
&\left.-\frac{\xi}{1-\xi^2}\left(\boldsymbol{\rho}_0\cdot\nabla\overline{\psi}\right)\frac{d\ln B_0}{d\overline{\psi}}\right]+\mathcal{O}\left(\epsilon^2\right) && \text{(E.154)}\\
\boldsymbol{\Delta}^{\xi_0} \cdot \mathsf{T}_\epsilon^{-1}\mathbf{e}_\varphi =& -\frac{1-\xi_0^2}{2\xi_0}\left[\left(1+\frac{1-\xi^2}{2\xi^2}\overline{\delta\psi}\right)\left(\frac{\partial\boldsymbol{\rho}_0}{\partial\varphi}\cdot\nabla\ln B+\frac{2\xi^2}{1-\xi^2}\widehat{\mathsf{b}}\cdot\nabla\widehat{\mathsf{b}}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\rho}_0}{\partial\varphi}+4\frac{p\xi}{m\Omega}\mathbb{A}_2:\nabla\widehat{\mathsf{b}}\right)\right.\\
&\left.+\left(\frac{\partial\boldsymbol{\rho}_0}{\partial\varphi}\cdot\nabla\overline{\psi}\right)\frac{d\ln B_0}{d\overline{\psi}}\right]+\mathcal{O}\left(\epsilon^2\right) && \text{(E.155)}\\
\left(\boldsymbol{\Delta}^{\xi_0}\right)^2 =& \left(\frac{1-\xi_0^2}{2p\xi_0}\right)^2\left[4\frac{\xi^2}{1-\xi^2}\left(1-\lambda_{gc}+2\widehat{\mathsf{b}}\cdot\nabla\widehat{\mathsf{b}}\cdot\boldsymbol{\rho}_0-\boldsymbol{\rho}_0\cdot\nabla\ln B+\frac{p\xi}{m\Omega}\mathbb{A}_1:\nabla\widehat{\mathsf{b}}\right)\right.\\
&+4\overline{\delta\psi}\left(1-\frac{1}{2}\lambda_{gc}+\frac{1}{2}\boldsymbol{\rho}_0\cdot\nabla\ln B-\frac{p\xi}{2m\Omega}\mathbb{A}_1:\nabla\widehat{\mathsf{b}}\right)\\
&\left.+\frac{\left(\overline{\delta\psi}\right)^2}{\xi^2}\left(1-2\widehat{\mathsf{b}}\cdot\nabla\widehat{\mathsf{b}}\cdot\boldsymbol{\rho}_0\right)-2\frac{\xi^2}{1-\xi^2}\boldsymbol{\rho}_0\cdot\nabla\overline{\psi}\right]+\mathcal{O}\left(\epsilon^2\right) && \text{(E.156)}
\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{\Delta}^{\overline{\psi}} \cdot \boldsymbol{\Delta}^{p} = -\frac{\delta\psi}{p}\left(1+\frac{1-\xi^2}{2\xi^2}\lambda_{gc}-\frac{1-\xi^2}{2\xi^2}\boldsymbol{\rho}_0\cdot\nabla\ln B-\widehat{\mathsf{b}}\cdot\nabla\widehat{\mathsf{b}}\cdot\boldsymbol{\rho}_0+\frac{p}{m\Omega\xi}\mathbb{A}_1:\nabla\widehat{\mathsf{b}}\right) - \frac{1}{p}\boldsymbol{\rho}_0\cdot\nabla\overline{\psi}+\mathcal{O}\left(\epsilon^2\right) \tag{E.157}$$

$$\boldsymbol{\Delta}^{p} \cdot \boldsymbol{\Delta}^{\xi_0} = \frac{1-\xi_0^2}{2p\xi_0}\left[\overline{\delta\psi}+\left(1+\frac{1-\xi^2}{2\xi^2}\overline{\delta\psi}\right)\lambda_{gc}-\boldsymbol{\rho}_0\cdot\nabla\ln B-\frac{2\xi^2}{1-\xi^2}\widehat{\mathsf{b}}\cdot\nabla\widehat{\mathsf{b}}\cdot\boldsymbol{\rho}_0+2\frac{p\xi}{m\Omega}\mathbb{A}_1:\nabla\widehat{\mathsf{b}}\right. - \left.\frac{1-\xi^2}{\xi^2}\overline{\delta\psi}\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{\rho}_0\cdot\nabla\ln B+\frac{\xi^2}{1-\xi^2}\widehat{\mathsf{b}}\cdot\nabla\widehat{\mathsf{b}}\cdot\boldsymbol{\rho}_0-\frac{p\xi}{m\Omega}\mathbb{A}_1:\nabla\widehat{\mathsf{b}}\right)+\left(\boldsymbol{\rho}_0\cdot\nabla\overline{\psi}\right)\frac{d\ln B_0}{d\overline{\psi}}\right]+\mathcal{O}\left(\epsilon^2\right) \tag{E.158}$$

$$\boldsymbol{\Delta}^{\overline{\psi}} \cdot \boldsymbol{\Delta}^{\xi_0} = \frac{1-\xi_0^2}{p^2\xi_0}\left[-\delta\psi\left(1-\frac{\lambda_{gc}}{2}+\frac{1}{2}\boldsymbol{\rho}_0\cdot\nabla\ln B+\frac{\xi^2-2}{1-\xi^2}\widehat{\mathsf{b}}\cdot\nabla\widehat{\mathsf{b}}\cdot\boldsymbol{\rho}_0+\frac{p\left(1-\xi^2\right)}{m\Omega\xi}\mathbb{A}_1:\nabla\widehat{\mathsf{b}}\right)\right. - \left.\frac{\delta\psi\overline{\delta\psi}}{2p^2\xi^2}+\frac{\overline{\delta\psi}}{p\xi}\widehat{\mathsf{b}}\cdot\nabla\widehat{\mathsf{b}}\cdot\boldsymbol{\rho}_0+\frac{\xi}{1-\xi^2}\boldsymbol{\rho}_0\cdot\nabla\overline{\psi}\right]+\mathcal{O}\left(\epsilon^2\right) \tag{E.159}$$

Appendix F

Calculation of the guiding-center Poisson bracket

F.1 Guiding-center Lagrangian matrix in $\left(\mathbf{X}, p_\parallel, \mu, \varphi\right)$ coordinates

The guiding-center Lagrangian reads

$$\Gamma = \left(\frac{e}{c}\mathbf{A} + p_\parallel \widehat{\mathsf{b}}\right) \cdot \mathsf{d}\mathbf{X} + \frac{\mu B}{\Omega}\left(\mathsf{d}\varphi - \mathbf{R}^* \cdot \mathsf{d}\mathbf{X}\right) - H\mathsf{d}t \equiv \Gamma_\alpha \mathsf{d}z^\alpha - H\mathsf{d}t \tag{F.1}$$

where $z^\alpha \equiv \left(\mathbf{X}, \mu, p_\parallel, \mu, \varphi\right)$ are the guiding-center coordinates, $\mathbf{A}$ is the magnetic vector potential, $\mathbf{R}^* = \mathbf{R} + \frac{1}{2}\left(\widehat{\mathsf{b}} \cdot \boldsymbol{\nabla} \times \widehat{\mathsf{b}}\right)\widehat{\mathsf{b}}$ the modified gyro-gauge vector and $\Omega \equiv eB/mc$ is the particle gyro-frequency. We immediately deduce the expressions for the symplectic part of the guiding-center Lagrangian (Γ_α):

$$\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{X}} = \frac{e}{c}\mathbf{A} + p_\parallel \widehat{\mathsf{b}} - \frac{\mu B}{\Omega}\mathbf{R}^* \tag{F.2}$$

$$\Gamma_{p_\parallel} = 0 \tag{F.3}$$

$$\Gamma_\mu = 0 \tag{F.4}$$

$$\Gamma_\varphi = \frac{\mu B}{\Omega} \tag{F.5}$$

We then perform the exterior derivative of (Γ_α) in order to obtain the following guiding-center 2-form:

$$W \equiv \mathsf{d}\Gamma \equiv \frac{1}{2}W_{\alpha\beta}\mathsf{d}z^\alpha \wedge \mathsf{d}z^\beta \equiv \frac{\partial \Gamma_\beta}{\partial z^\alpha}\mathsf{d}z^\alpha \wedge \mathsf{d}z^\beta \equiv \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Gamma_\beta}{\partial z^\alpha} - \frac{\partial \Gamma_\alpha}{\partial z^\beta}\right)\mathsf{d}z^\alpha \wedge \mathsf{d}z^\beta \tag{F.6}$$

We note here that the coefficients $W_{\alpha\beta}$ are antisymmetric, i.e. $W_{\alpha\beta} = -W_{\beta\alpha}$. These read

$$\mathbb{W}_{\mathbf{XX}} = -\left(\frac{m\Omega}{B}\mathbf{B}^* - \frac{\mu B}{\Omega}\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{R}^*\right) \times \mathbb{I} \tag{F.7}$$

$$\mathbf{W}_{\mathbf{X}p_\parallel} = -\widehat{\mathsf{b}} \tag{F.8}$$

$$\mathbf{W}_{\mathbf{X}\mu} = \frac{B}{\Omega}\mathbf{R}^* \tag{F.9}$$

$$\mathbf{W}_{\mathbf{X}\varphi} = 0 \tag{F.10}$$

$$W_{p_\parallel \mu} = 0 \tag{F.11}$$

$$W_{p_\parallel \varphi} = 0 \tag{F.12}$$

$$W_{\mu\varphi} = \frac{B}{\Omega} \tag{F.13}$$

with $W_{v_\parallel v_\parallel} = W_{\mu\mu} = W_{\varphi\varphi} = 0$, and defining $\mathbf{B}^* \equiv \boldsymbol{\nabla} \times \left[\mathbf{A} + \left(p_\parallel/m\Omega\right)\mathbf{B}\right] \equiv \mathbf{B} + B\left(p_\parallel/m\Omega\right)\boldsymbol{\nabla} \times \widehat{\mathsf{b}}$. The calculation for $\mathbb{W}_{\mathbf{XX}}$ is detailled in section F.5.1.

F.2 Calculation of the Poisson matrix

The Poisson matrix is the inverse of the Lagrangian matrix. According to Littlejohn [33], if a $(2N \times 2N)$ antisymmetric matrix has the following expression

$$\mathbb{W} \equiv \begin{pmatrix} \mathbb{X} & \mathbf{Y} & 0 \\ -\mathbf{Y}^T & 0 & z \\ 0 & -z & 0 \end{pmatrix} \tag{F.14}$$

where $\mathbb{X}$ is a $(2N-2) \times (2N-2)$ antisymmetric matrix, $\mathbf{Y}$ is a $(2N-2)$ column vector and z a scalar will have the following inverse expression

$$\mathbb{W}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbb{X}^{-1} & 0 & \frac{1}{z}\left(\mathbb{X}^{-1} \cdot \mathbf{Y}\right) \\ 0 & 0 & -\frac{1}{z} \\ -\frac{1}{z}\left(\mathbb{X}^{-1} \cdot \mathbf{Y}\right)^T & \frac{1}{z} & 0 \end{pmatrix} \tag{F.15}$$

we can verify that the product of these two matrices gives identity. In the case of the Lagrangian matrix, we have

$$\mathbb{X} = \begin{pmatrix} \mathbb{W}_{\mathbf{XX}} & -\widehat{\mathsf{b}} \\ \widehat{\mathsf{b}}^T & 0 \end{pmatrix} \tag{F.16}$$

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} \frac{B}{\Omega}\mathbf{R}^* \\ 0 \end{pmatrix} \tag{F.17}$$

$$z = \frac{B}{\Omega} \tag{F.18}$$

In order to calculate the Poisson matrix, we therefore need to calculate $\mathbb{X}^{-1}$. Using the expression found in section F.5.2, we can calculate the matrix determinant

$$\begin{aligned} \det \mathbb{X} =& - b_3 W_{12} + b_2 W_{13} - b_1 W_{23} \\ =& - \widehat{\mathsf{b}} \cdot \left(\frac{m\Omega}{B}\mathbf{B}^* - \frac{\mu B}{\Omega} \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{R}^* \right) \\ =& - \frac{m\Omega}{B} B_\parallel^* + \frac{\mu B}{\Omega} \widehat{\mathsf{b}} \cdot \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{R}^* \\ =& - m\Omega_\parallel^* + \frac{\mu B}{\Omega} \widehat{\mathsf{b}} \cdot \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{R}^* \end{aligned} \tag{F.19}$$

the inverse matrix $\mathbb{X}^{-1}$ will therefore read

$$\begin{aligned} \mathbb{X}^{-1} =& \frac{1}{\det \mathbb{X}} \begin{pmatrix} 0 & b_1 & -b_2 & -W_{23} \\ -b_1 & 0 & b_3 & W_{13} \\ b_2 & -b_3 & 0 & -W_{12} \\ W_{23} & -W_{13} & W_{12} & 0 \end{pmatrix} \\ =& \frac{1}{\det \mathbb{X}} \begin{pmatrix} -\widehat{\mathsf{b}} \times \mathbb{I} & -\left[m\Omega\mathbf{B}^*/B - (\mu B/\Omega)\,\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{R}^*\right] \\ \left[m\Omega\mathbf{B}^*/B - (\mu B/\Omega)\,\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{R}^*\right]^T & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{F.20}$$

we can therefore calculate

$$\mathbb{X}^{-1} \cdot \mathbf{Y} = \frac{1}{\det \mathbb{X}} \begin{pmatrix} -\left(B/\Omega\right) \widehat{\mathsf{b}} \times \mathbf{R}^* \\ m\mathbf{B}^* \cdot \mathbf{R}^* - \left(\mu B^2/\Omega^2\right) \mathbf{R}^* \cdot \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{R}^* \end{pmatrix} \tag{F.21}$$

Since terms containing $\Omega^{-1}\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{R}^*$ are of second order in ϵ_B, they can be neglected and therefore the Poisson matrix reads

$$\mathbb{J} = \mathbb{W}^{-1} = \begin{pmatrix} \left(\widehat{\mathsf{b}} \times \mathbb{I}\right) / \left(m\Omega_\parallel^*\right) & \mathbf{B}^*/B_\parallel^* & 0 & -\left(\widehat{\mathsf{b}} \times \mathbf{R}^*\right) / \left(m\Omega_\parallel^*\right) \\ -\left(\mathbf{B}^*\right)^T / B_\parallel^* & 0 & 0 & -\left(\mathbf{B}^* \cdot \mathbf{R}^*\right) / B_\parallel^* \\ 0 & 0 & 0 & -\Omega/B \\ \left(\widehat{\mathsf{b}} \times \mathbf{R}^*\right)^T / \left(m\Omega_\parallel^*\right) & \left(\mathbf{B}^* \cdot \mathbf{R}^*\right) / B_\parallel^* & \Omega/B & 0 \end{pmatrix} \tag{F.22}$$

The Poisson bracket therefore reads

$$\begin{aligned}
\{F,G\}_{gc} \equiv & \frac{\partial F}{\partial z^\alpha} J_{\alpha\beta} \frac{\partial G}{\partial z^\beta} \\
= & \boldsymbol{\nabla} F \cdot \frac{\widehat{\mathsf{b}}}{m\Omega_\parallel^*} \times \boldsymbol{\nabla} G + \frac{\mathbf{B}^*}{B_\parallel^*} \cdot \left(\boldsymbol{\nabla} F \frac{\partial G}{\partial p_\parallel} - \frac{\partial F}{\partial p_\parallel} \boldsymbol{\nabla} G \right) \\
& - \frac{\widehat{\mathsf{b}}}{m\Omega_\parallel^*} \times \mathbf{R}^* \cdot \left(\boldsymbol{\nabla} F \frac{\partial G}{\partial \varphi} - \frac{\partial F}{\partial \varphi} \boldsymbol{\nabla} G \right) - \frac{\mathbf{B}^*}{B_\parallel^*} \cdot \mathbf{R}^* \left(\frac{\partial F}{\partial p_\parallel} \frac{\partial G}{\partial \varphi} - \frac{\partial F}{\partial \varphi} \frac{\partial G}{\partial p_\parallel} \right) \\
& - \frac{\Omega}{B} \left(\frac{\partial F}{\partial \mu} \frac{\partial G}{\partial \varphi} - \frac{\partial F}{\partial \varphi} \frac{\partial G}{\partial \mu} \right) \\
= & \left(\boldsymbol{\nabla} F + \mathbf{R}^* \frac{\partial F}{\partial \varphi} \right) \cdot \frac{\widehat{\mathsf{b}}}{m\Omega_\parallel^*} \times \left(\boldsymbol{\nabla} G + \mathbf{R}^* \frac{\partial G}{\partial \varphi} \right) \\
& + \frac{\mathbf{B}^*}{B_\parallel^*} \cdot \left[\left(\boldsymbol{\nabla} F + \mathbf{R}^* \frac{\partial F}{\partial \varphi} \right) \frac{\partial G}{\partial p_\parallel} - \frac{\partial F}{\partial p_\parallel} \left(\boldsymbol{\nabla} G + \mathbf{R}^* \frac{\partial G}{\partial \varphi} \right) \right] \\
& + \frac{\Omega}{B} \left(\frac{\partial F}{\partial \varphi} \frac{\partial G}{\partial \mu} - \frac{\partial F}{\partial \mu} \frac{\partial G}{\partial \varphi} \right) \\
= & \frac{\Omega}{B} \left(\frac{\partial F}{\partial \varphi} \frac{\partial G}{\partial \mu} - \frac{\partial F}{\partial \mu} \frac{\partial G}{\partial \varphi} \right) + \frac{\mathbf{B}^*}{B_\parallel^*} \cdot \left(\boldsymbol{\nabla}^* F \frac{\partial G}{\partial p_\parallel} - \frac{\partial F}{\partial p_\parallel} \boldsymbol{\nabla}^* G \right) - \frac{\widehat{\mathsf{b}}}{m\Omega_\parallel^*} \cdot \boldsymbol{\nabla}^* F \times \boldsymbol{\nabla}^* G
\end{aligned} \tag{F.23}$$

where we defined $\boldsymbol{\nabla}^* \equiv \boldsymbol{\nabla} + \mathbf{R}^* \partial/\partial\varphi$ and $\boldsymbol{\nabla}^* F \cdot \widehat{\mathsf{b}} \times \boldsymbol{\nabla}^* G = \epsilon^{ijk} \left(\partial_i^* F\right) b_j \left(\partial_k^* G\right) = -\widehat{\mathsf{b}} \cdot \boldsymbol{\nabla}^* F \times \boldsymbol{\nabla}^* G$.

F.3 Poisson bracket in $(\mathbf{X}, p, \xi, \varphi)$ coordinates

The particle momentum p reads

$$p \equiv \sqrt{p_\parallel^2 + 2m\mu B} \tag{F.24}$$

and the pitch-angle cosine

$$\xi = p_\parallel / p \tag{F.25}$$

We therefore have

$$\begin{aligned}
\mathsf{d}p = & \frac{m\mu}{\sqrt{p_\parallel^2 + 2m\mu B}} \boldsymbol{\nabla} B \cdot \mathsf{d}\mathbf{X} + \frac{p_\parallel}{\sqrt{p_\parallel^2 + 2m\mu B}} \mathsf{d}p_\parallel + \frac{mB}{\sqrt{p_\parallel^2 + 2m\mu B}} \mathsf{d}\mu \\
= & \frac{1}{2} p \left(1 - \xi^2\right) \boldsymbol{\nabla} \ln B \cdot \mathsf{d}\mathbf{X} + \xi \mathsf{d}p_\parallel + \frac{mB}{p} \mathsf{d}\mu
\end{aligned} \tag{F.26}$$

$$\begin{aligned}
\mathsf{d}\xi = & - \frac{m\mu p_\parallel}{\left(p_\parallel^2 + 2m\mu B\right)^{3/2}} \boldsymbol{\nabla} B \cdot \mathsf{d}\mathbf{X} + \frac{2m\mu B}{\left(p_\parallel^2 + 2m\mu B\right)^{3/2}} \mathsf{d}p_\parallel - \frac{mBp_\parallel}{\left(p_\parallel^2 + 2m\mu B\right)^{3/2}} \mathsf{d}\mu \\
= & - \frac{1}{2} \xi \left(1 - \xi^2\right) \boldsymbol{\nabla} \ln B \cdot \mathsf{d}\mathbf{X} + \frac{1 - \xi^2}{p} \mathsf{d}p_\parallel - \frac{mB\xi}{p^2} \mathsf{d}\mu
\end{aligned} \tag{F.27}$$

We readily deduce the following poisson brackets, using $\left\{z^\alpha, z^\beta\right\} \equiv J_{\alpha\beta}$

$$\begin{aligned}
\{\mathbf{X}, p\}_{gc} = & \frac{1}{2} p \left(1 - \xi^2\right) \{\mathbf{X}, \mathbf{X}\}_{gc} \cdot \boldsymbol{\nabla} \ln B + \xi \left\{\mathbf{X}, p_\parallel\right\}_{gc} + \frac{mB}{p} \{\mathbf{X}, \mu\}_{gc} \\
= & \frac{p \left(1 - \xi^2\right)}{2m\Omega_\parallel^*} \widehat{\mathsf{b}} \times \boldsymbol{\nabla} \ln B + \xi \frac{\mathbf{B}^*}{B_\parallel^*}
\end{aligned} \tag{F.28}$$

$$\begin{aligned}\{\varphi,p\}_{gc}=&\frac{1}{2}p\left(1-\xi^2\right)\{\varphi,\mathbf{X}\}_{gc}\cdot\boldsymbol{\nabla}\ln B+\xi\left\{\varphi,p_\parallel\right\}_{gc}+\frac{mB}{p}\{\varphi,\mu\}_{gc}\\=&\frac{m\Omega}{p}+\left(\frac{p\left(1-\xi^2\right)}{2m\Omega_\parallel^*}\widehat{\mathsf{b}}\times\boldsymbol{\nabla}\ln B+\xi\frac{\mathbf{B}^*}{B_\parallel^*}\right)\cdot\mathbf{R}^*\end{aligned}\tag{F.29}$$

$$\begin{aligned}\{\mathbf{X},\xi\}_{gc}=&-\frac{1}{2}\xi\left(1-\xi^2\right)\{\mathbf{X},\mathbf{X}\}_{gc}\cdot\boldsymbol{\nabla}\ln B+\frac{1-\xi^2}{p}\left\{\mathbf{X},p_\parallel\right\}_{gc}-\frac{mB\xi}{p^2}\{\mathbf{X},\mu\}_{gc}\\=&\left(1-\xi^2\right)\left(-\frac{\xi}{2m\Omega_\parallel^*}\widehat{\mathsf{b}}\times\boldsymbol{\nabla}\ln B+\frac{1}{p}\frac{\mathbf{B}^*}{B_\parallel^*}\right)\end{aligned}\tag{F.30}$$

$$\begin{aligned}\{\varphi,\xi\}_{gc}=&-\frac{1}{2}\xi\left(1-\xi^2\right)\{\varphi,\mathbf{X}\}_{gc}\cdot\boldsymbol{\nabla}\ln B+\frac{1-\xi^2}{p}\left\{\varphi,p_\parallel\right\}_{gc}-\frac{mB\xi}{p^2}\{\varphi,\mu\}_{gc}\\=&-\frac{m\Omega\xi}{p^2}+\left(1-\xi^2\right)\left(-\frac{\xi}{2m\Omega_\parallel^*}\widehat{\mathsf{b}}\times\boldsymbol{\nabla}\ln B+\frac{1}{p}\frac{\mathbf{B}^*}{B_\parallel^*}\right)\cdot\mathbf{R}^*\end{aligned}\tag{F.31}$$

$$\begin{aligned}\{p,\xi\}_{gc}=&-\frac{1}{4}p\xi\left(1-\xi^2\right)^2\boldsymbol{\nabla}\ln B\cdot\{\mathbf{X},\mathbf{X}\}_{gc}\cdot\boldsymbol{\nabla}\ln B-\frac{mB\xi^2}{p^2}\left\{p_\parallel,\mu\right\}_{gc}+\frac{mB\left(1-\xi^2\right)}{p^2}\left\{\mu,p_\parallel\right\}_{gc}\\&+\frac{1}{2}p\left(1-\xi^2\right)\boldsymbol{\nabla}\ln B\cdot\left[\frac{1-\xi^2}{p}\left\{\mathbf{X},p_\parallel\right\}_{gc}-\frac{mB\xi}{p^2}\{\mathbf{X},\mu\}_{gc}\right]\\&-\frac{1}{2}\xi\left(1-\xi^2\right)\left[\xi\left\{p_\parallel,\mathbf{X}\right\}_{gc}+\frac{mB}{p}\{\mu,\mathbf{X}\}_{gc}\right]\cdot\boldsymbol{\nabla}\ln B\\=&\frac{1-\xi^2}{2}\frac{\mathbf{B}^*}{B_\parallel^*}\cdot\boldsymbol{\nabla}\ln B\end{aligned}\tag{F.32}$$

The remaining coordinate Poisson brackets remain unchanged, i.e.

$$\{\mathbf{X},\mathbf{X}\}_{gc}=\frac{\widehat{\mathsf{b}}}{m\Omega_\parallel^*}\times\mathbb{I}\tag{F.33}$$

$$\{\mathbf{X},\varphi\}_{gc}=-\frac{\widehat{\mathsf{b}}}{m\Omega_\parallel^*}\times\mathbf{R}^*\tag{F.34}$$

Since $\boldsymbol{\nabla}\times\widehat{\mathsf{b}}=\left(\widehat{\mathsf{b}}\cdot\boldsymbol{\nabla}\times\widehat{\mathsf{b}}\right)\widehat{\mathsf{b}}+\widehat{\mathsf{b}}\times\left(\widehat{\mathsf{b}}\cdot\boldsymbol{\nabla}\widehat{\mathsf{b}}\right)$, we can rewrite $\mathbf{B}^*$ as

$$\mathbf{B}^*=B_\parallel^*\widehat{\mathsf{b}}+\frac{p\xi}{m\Omega}\widehat{\mathsf{b}}\times\left(\widehat{\mathsf{b}}\cdot\boldsymbol{\nabla}\widehat{\mathsf{b}}\right)\tag{F.35}$$

We thus define the averaged guiding-center momentum $\mathbf{p}_{gc}\equiv(p/m)\{\mathbf{X},p\}_{gc}$ as

$$\mathbf{p}_{gc}\equiv p\xi\frac{\mathbf{B}^*}{B_\parallel^*}+\frac{p^2\left(1-\xi^2\right)}{2m\Omega_\parallel^*}\widehat{\mathsf{b}}\times\boldsymbol{\nabla}\ln B=p_\parallel\widehat{\mathsf{b}}+\frac{p^2}{m\Omega_\parallel^*}\widehat{\mathsf{b}}\times\left(\frac{1-\xi^2}{2}\boldsymbol{\nabla}\ln B+\xi^2\widehat{\mathsf{b}}\cdot\boldsymbol{\nabla}\widehat{\mathsf{b}}\right)\tag{F.36}$$

and the corresponding pitch-angle vector $\boldsymbol{\xi}_{gc}$ as

$$\boldsymbol{\xi}_{gc}\equiv\frac{1-\xi^2}{p}\left(\frac{\mathbf{B}^*}{B_\parallel^*}-\frac{p\xi}{2m\Omega_\parallel^*}\widehat{\mathsf{b}}\times\boldsymbol{\nabla}\ln B\right)=\frac{1-\xi^2}{p^2\xi}\left(\mathbf{p}_{\mathrm{gc}}-\frac{p^2}{2m\Omega_\parallel^*}\widehat{\mathsf{b}}\times\boldsymbol{\nabla}\ln B\right)\tag{F.37}$$

The new guiding-center Poisson bracket therefore reads

$$\begin{aligned}
\{F,G\}_{gc} =& \boldsymbol{\nabla} F \cdot \frac{\widehat{\mathsf{b}}}{m\Omega_{\parallel}^{*}} \times \boldsymbol{\nabla} G + \mathbf{p}_{gc} \cdot \left(\boldsymbol{\nabla} F \frac{\partial G}{\partial p} - \frac{\partial F}{\partial p} \boldsymbol{\nabla} G \right) + \boldsymbol{\xi}_{gc} \cdot \left(\boldsymbol{\nabla} F \frac{\partial G}{\partial \xi} - \frac{\partial F}{\partial \xi} \boldsymbol{\nabla} G \right) \\
& - \frac{\widehat{\mathsf{b}}}{m\Omega_{\parallel}^{*}} \times \mathbf{R}^{*} \cdot \left(\boldsymbol{\nabla} F \frac{\partial G}{\partial \varphi} - \frac{\partial F}{\partial \varphi} \boldsymbol{\nabla} G \right) + \frac{1-\xi^2}{2p\xi} \left(\mathbf{p}_{gc} \cdot \boldsymbol{\nabla} \ln B \right) \left(\frac{\partial F}{\partial p} \frac{\partial G}{\partial \xi} - \frac{\partial F}{\partial \xi} \frac{\partial G}{\partial p} \right) \\
& + \frac{\mathbf{p}_{gc}}{p} \cdot \mathbf{R}^{*} \left(\frac{\partial F}{\partial \varphi} \frac{\partial G}{\partial p} - \frac{\partial F}{\partial p} \frac{\partial G}{\partial \varphi} \right) + \boldsymbol{\xi}_{gc} \cdot \mathbf{R}^{*} \left(\frac{\partial F}{\partial \varphi} \frac{\partial G}{\partial \xi} - \frac{\partial F}{\partial \xi} \frac{\partial G}{\partial \varphi} \right) \\
& + \frac{m\Omega}{p} \left(\frac{\partial F}{\partial \varphi} \frac{\partial G}{\partial p} - \frac{\partial F}{\partial p} \frac{\partial G}{\partial \varphi} \right) - \frac{m\Omega\xi}{p^2} \left(\frac{\partial F}{\partial \varphi} \frac{\partial G}{\partial \xi} - \frac{\partial F}{\partial \xi} \frac{\partial G}{\partial \varphi} \right) \\
=& \frac{m\Omega}{p^2} \left[\frac{\partial F}{\partial \varphi} \left(p \frac{\partial G}{\partial p} - \xi \frac{\partial G}{\partial \xi} \right) - \left(p \frac{\partial F}{\partial p} - \xi \frac{\partial F}{\partial \xi} \right) \frac{\partial G}{\partial \varphi} \right] \\
& + \frac{1-\xi^2}{2p\xi} \left(\mathbf{p}_{gc} \cdot \boldsymbol{\nabla} \ln B \right) \left(\frac{\partial F}{\partial p} \frac{\partial G}{\partial \xi} - \frac{\partial F}{\partial \xi} \frac{\partial G}{\partial p} \right) \\
& + \frac{\mathbf{p}_{gc}}{p} \cdot \left(\boldsymbol{\nabla}^{*} F \frac{\partial G}{\partial p} - \frac{\partial F}{\partial p} \boldsymbol{\nabla}^{*} G \right) \\
& + \frac{1-\xi^2}{p^2\xi} \left(\mathbf{p}_{\mathrm{gc}} - \frac{p^2}{2m\Omega_{\parallel}^{*}} \widehat{\mathsf{b}} \times \boldsymbol{\nabla} \ln B \right) \cdot \left(\boldsymbol{\nabla}^{*} F \frac{\partial G}{\partial \xi} - \frac{\partial F}{\partial \xi} \boldsymbol{\nabla}^{*} G \right) \\
& - \frac{\widehat{\mathsf{b}}}{m\Omega_{\parallel}^{*}} \cdot \boldsymbol{\nabla}^{*} F \times \boldsymbol{\nabla}^{*} G
\end{aligned} \tag{F.38}$$

F.4 Poisson bracket in $(\mathbf{X}, \mathcal{E}, \mu, \varphi)$ coordinates (non-relativistic case)

The free particle kinetic energy $\mathcal{E}$ reads

$$\mathcal{E} \equiv \frac{p_{\parallel}^2}{2m} + \mu B \tag{F.39}$$

We therefore have

$$\mathsf{d}\mathcal{E} = \mu \boldsymbol{\nabla} B \cdot \mathsf{d}\mathbf{X} + \frac{p_{\parallel}}{m} \mathsf{d}p_{\parallel} + B \mathsf{d}\mu \tag{F.40}$$

We readily deduce the following poisson brackets, using $\left\{ z^{\alpha}, z^{\beta} \right\} \equiv J_{\alpha\beta}$

$$\begin{aligned}
\{\mathbf{X}, \mathcal{E}\}_{gc} =& \{\mathbf{X}, \mathbf{X}\}_{gc} \cdot \mu \boldsymbol{\nabla} B + \frac{p_{\parallel}}{m} \left\{ \mathbf{X}, p_{\parallel} \right\}_{gc} + B \left\{ \mathbf{X}, \mu \right\}_{gc} \\
=& \frac{\widehat{\mathsf{b}}}{m\Omega_{\parallel}^{*}} \times \mu \boldsymbol{\nabla} B + \frac{p_{\parallel}}{mB_{\parallel}^{*}} \mathbf{B}^{*}
\end{aligned} \tag{F.41}$$

$$\begin{aligned}
\left\{ p_{\parallel}, \mathcal{E} \right\}_{gc} =& \left\{ p_{\parallel}, \mathbf{X} \right\}_{gc} \cdot \mu \boldsymbol{\nabla} B + B \left\{ p_{\parallel}, \mu \right\}_{gc} \\
=& \frac{\widehat{\mathsf{b}}}{m\Omega_{\parallel}^{*}} \times \mu \boldsymbol{\nabla} B + \frac{p_{\parallel}}{mB_{\parallel}^{*}} \mathbf{B}^{*}
\end{aligned} \tag{F.42}$$

$$\begin{aligned}
\{\mu, \mathcal{E}\}_{gc} =& \{\mu, \mathbf{X}\}_{gc} \cdot \mu \boldsymbol{\nabla} B + \frac{p_{\parallel}}{m} \left\{ \mu, p_{\parallel} \right\}_{gc} \\
=& 0
\end{aligned} \tag{F.43}$$

$$\begin{aligned}
\{\varphi, \mathcal{E}\}_{gc} =& \{\varphi, \mathbf{X}\}_{gc} \cdot \mu \boldsymbol{\nabla} B + \frac{p_{\parallel}}{m} \left\{ \varphi, p_{\parallel} \right\}_{gc} + B \left\{ \varphi, \mu \right\}_{gc} \\
=& \Omega + \left(\frac{\widehat{\mathsf{b}}}{m\Omega_{\parallel}^{*}} \times \mu \boldsymbol{\nabla} B + \frac{p_{\parallel}}{mB_{\parallel}^{*}} \mathbf{B}^{*} \right) \cdot \mathbf{R}^{*}
\end{aligned} \tag{F.44}$$

The remaining coordinate Poisson brackets remain unchanged, i.e.

$$\{\mathbf{X}, \mathbf{X}\}_{gc} = \frac{\widehat{\mathsf{b}}}{m\Omega_{\parallel}^{*}} \times \mathbb{I} \tag{F.45}$$

$$\{\mathbf{X}, \mu\}_{gc} = 0 \tag{F.46}$$

$$\{\mathbf{X}, \varphi\}_{gc} = -\frac{\widehat{\mathsf{b}}}{m\Omega_{\parallel}^{*}} \times \mathbf{R}^{*} \tag{F.47}$$

$$\{\mu, \varphi\}_{gc} = -\frac{\Omega}{B} \tag{F.48}$$

Since $\boldsymbol{\nabla} \times \widehat{\mathsf{b}} = \left(\widehat{\mathsf{b}} \cdot \boldsymbol{\nabla} \times \widehat{\mathsf{b}}\right) \widehat{\mathsf{b}} + \widehat{\mathsf{b}} \times \left(\widehat{\mathsf{b}} \cdot \boldsymbol{\nabla} \widehat{\mathsf{b}}\right)$, we can rewrite $\mathbf{B}^{*}$ as

$$\mathbf{B}^{*} = B_{\parallel}^{*} \widehat{\mathsf{b}} + \frac{p_{\parallel}}{m\Omega} \widehat{\mathsf{b}} \times \left(\widehat{\mathsf{b}} \cdot \boldsymbol{\nabla} \widehat{\mathsf{b}}\right) \tag{F.49}$$

We thus define $\mathbf{v}_{gc}$ as

$$\mathbf{v}_{gc} \equiv \{\mathbf{X}, \mathcal{E}\}_{gc} = \frac{p_{\parallel}}{m B_{\parallel}^{*}} \mathbf{B}^{*} + \frac{\widehat{\mathsf{b}}}{m\Omega_{\parallel}^{*}} \times \mu \boldsymbol{\nabla} B = v_{\parallel} \widehat{\mathsf{b}} + \frac{\widehat{\mathsf{b}}}{m\Omega_{\parallel}^{*}} \times \left(\mu \boldsymbol{\nabla} B + m v_{\parallel}^{2} \widehat{\mathsf{b}} \cdot \boldsymbol{\nabla} \widehat{\mathsf{b}}\right) \tag{F.50}$$

The new guiding-center Poisson bracket therefore reads

$$\begin{aligned}
\{F, G\}_{gc} =& \boldsymbol{\nabla} F \cdot \frac{\widehat{\mathsf{b}}}{m\Omega_{\parallel}^{*}} \times \boldsymbol{\nabla} G + \mathbf{v}_{gc} \cdot \left(\boldsymbol{\nabla} F \frac{\partial G}{\partial \mathcal{E}} - \frac{\partial F}{\partial \mathcal{E}} \boldsymbol{\nabla} G\right) \\
& - \frac{\widehat{\mathsf{b}}}{m\Omega_{\parallel}^{*}} \times \mathbf{R}^{*} \cdot \left(\boldsymbol{\nabla} F \frac{\partial G}{\partial \varphi} - \frac{\partial F}{\partial \varphi} \boldsymbol{\nabla} G\right) - \mathbf{v}_{gc} \cdot \mathbf{R}^{*} \left(\frac{\partial F}{\partial \mathcal{E}} \frac{\partial G}{\partial \varphi} - \frac{\partial F}{\partial \varphi} \frac{\partial G}{\partial \mathcal{E}}\right) \\
& - \frac{\Omega}{B} \left(\frac{\partial F}{\partial \mu} \frac{\partial G}{\partial \varphi} - \frac{\partial F}{\partial \varphi} \frac{\partial G}{\partial \mu}\right) - \Omega \left(\frac{\partial F}{\partial \mathcal{E}} \frac{\partial G}{\partial \varphi} - \frac{\partial F}{\partial \varphi} \frac{\partial G}{\partial \mathcal{E}}\right) \\
=& \frac{\Omega}{B} \left[\frac{\partial F}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial G}{\partial \mu} + B \frac{\partial G}{\partial \mathcal{E}}\right) - \left(\frac{\partial F}{\partial \mu} + B \frac{\partial F}{\partial \mathcal{E}}\right) \frac{\partial G}{\partial \varphi}\right] \\
& + \mathbf{v}_{gc} \cdot \left(\boldsymbol{\nabla}^{*} F \frac{\partial G}{\partial \mathcal{E}} - \frac{\partial F}{\partial \mathcal{E}} \boldsymbol{\nabla}^{*} G\right) \\
& - \frac{\widehat{\mathsf{b}}}{m\Omega_{\parallel}^{*}} \cdot \boldsymbol{\nabla}^{*} F \times \boldsymbol{\nabla}^{*} G
\end{aligned} \tag{F.51}$$

We therefore obtain the expression found in Brizard [12].

F.5 Various calculations

F.5.1 Calculation of $\mathbb{W}_{\mathbf{XX}}$

Using the expression for W,denoting $x^i \equiv (\mathbf{X})$ the spatial coordinates and shortening the spatial coefficients W_{x^i} as W_i, the spatial gradient reads $\boldsymbol{\nabla} \equiv \boldsymbol{\nabla} x^i \left(\partial/\partial x^i\right)$ and we have

$$\begin{aligned}
W_{12} =& \frac{\partial}{\partial x^1}\left(\frac{e}{c}A_2 + m v_\parallel b_2 - \frac{\mu B}{\Omega}R_2^*\right) - \frac{\partial}{\partial x^2}\left(\frac{e}{c}A_1 + m v_\parallel b_1 - \frac{\mu B}{\Omega}R_1^*\right) \\
=& \left[\boldsymbol{\nabla}\times\left(\frac{e}{c}\mathbf{A} + m v_\parallel \widehat{\mathsf{b}} - \frac{\mu B}{\Omega}\mathbf{R}^*\right)\right]_3 \\
=& \left[\frac{m\Omega}{B}\mathbf{B}^* - \frac{\mu B}{\Omega}\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{R}^*\right]_3 \qquad \text{(F.52)} \\
W_{13} =& \frac{\partial}{\partial x^1}\left(\frac{e}{c}A_3 + m v_\parallel b_3 - \frac{\mu B}{\Omega}R_3^*\right) - \frac{\partial}{\partial x^3}\left(\frac{e}{c}A_1 + m v_\parallel b_1 - \frac{\mu B}{\Omega}R_1^*\right) \\
=& -\left[\boldsymbol{\nabla}\times\left(\frac{e}{c}\mathbf{A} + m v_\parallel \widehat{\mathsf{b}} - \frac{\mu B}{\Omega}\mathbf{R}^*\right)\right]_2 \\
=& -\left[\frac{m\Omega}{B}\mathbf{B}^* - \frac{\mu B}{\Omega}\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{R}^*\right]_2 \qquad \text{(F.53)} \\
W_{23} =& \frac{\partial}{\partial x^2}\left(\frac{e}{c}A_3 + m v_\parallel b_3 - \frac{\mu B}{\Omega}R_3^*\right) - \frac{\partial}{\partial x^3}\left(\frac{e}{c}A_2 + m v_\parallel b_2 - \frac{\mu B}{\Omega}R_2^*\right) \\
=& \left[\boldsymbol{\nabla}\times\left(\frac{e}{c}\mathbf{A} + m v_\parallel \widehat{\mathsf{b}} - \frac{\mu B}{\Omega}\mathbf{R}^*\right)\right]_1 \\
=& \left[\frac{m\Omega}{B}\mathbf{B}^* - \frac{\mu B}{\Omega}\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{R}^*\right]_1 \qquad \text{(F.54)}
\end{aligned}$$

with $W_{11} = W_{22} = W_{33} = 0$ and defining $\mathbf{B}^* \equiv \boldsymbol{\nabla}\times\left[\mathbf{A} + \left(v_\parallel/\Omega\right)\mathbf{B}\right] \equiv \mathbf{B} + B\left(v_\parallel/\Omega\right)\boldsymbol{\nabla}\times\widehat{\mathsf{b}}$. We can therefore deduce

$$\begin{aligned}
W_{ij} =& \epsilon^{ijk}\left[\frac{m\Omega}{B}\mathbf{B}^* - \frac{\mu B}{\Omega}\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{R}^*\right]_k \\
=& -\epsilon^{ikl}\left[\frac{m\Omega}{B}\mathbf{B}^* - \frac{\mu B}{\Omega}\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{R}^*\right]_k \delta_{lj} \\
=& \left(-\left[\frac{m\Omega}{B}\mathbf{B}^* - \frac{\mu B}{\Omega}\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{R}^*\right]\times\mathbb{I}\right)_{ij} \qquad \text{(F.55)}
\end{aligned}$$

Using $\mathbf{B}^* \equiv \boldsymbol{\nabla}\times\left[\mathbf{A} + \left(v_\parallel/\Omega\right)\mathbf{B}\right]$, we finally have the expression

$$\mathbb{W}_{\mathbf{XX}} = -\left(\frac{m\Omega}{B}\mathbf{B}^* - \frac{\mu B}{\Omega}\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{R}^*\right)\times\mathbb{I} \qquad \text{(F.56)}$$

F.5.2 Inverse of a 4 by 4 antisymmetric matrix

Let us consider the following antisymmetric matrix

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(F.57)}$$

The cofactors of $\mathbb{A}$ read

$$C_{ij} = (-1)^{i+j}\det\mathbb{M}_{ij} \qquad \text{(F.58)}$$

where $\mathbb{M}_{ij}$ is the submatrix of $\mathbb{A}$ where the row i and column j have been omitted. The determinant of an odd-order antisymmetric matrix is always zero, therefore

$$C_{ii} = 0 \tag{F.59}$$

Due to antisymmetry, we also have

$$C_{ji} = -C_{ij} \tag{F.60}$$

F.5.2.1 Calculation of C_{12}

$$C_{12} = -\begin{vmatrix} -a & d & e \\ -b & 0 & f \\ -c & -f & 0 \end{vmatrix} = -bef + cdf + af^2 = f\left(af - be + cd\right) \tag{F.61}$$

F.5.2.2 Calculation of C_{13}

$$C_{13} = \begin{vmatrix} -a & 0 & e \\ -b & -d & f \\ -c & -e & 0 \end{vmatrix} = be^2 - cde - aef = -e\left(af - be + cd\right) \tag{F.62}$$

F.5.2.3 Calculation of C_{14}

$$C_{14} = -\begin{vmatrix} -a & 0 & d \\ -b & -d & 0 \\ -c & -e & -f \end{vmatrix} = adf - bde + cd^2 = d\left(af - be + cd\right) \tag{F.63}$$

F.5.2.4 Calculation of C_{23}

$$C_{23} = -\begin{vmatrix} 0 & a & c \\ -b & -d & f \\ -c & -e & 0 \end{vmatrix} = acf - bce + c^2 d = c\left(af - be + cd\right) \tag{F.64}$$

F.5.2.5 Calculation of C_{24}

$$C_{24} = \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -b & -d & 0 \\ -c & -e & -f \end{vmatrix} = b^2 e - bcd - abf = -b\left(af - be + cd\right) \tag{F.65}$$

F.5.2.6 Calculation of C_{34}

$$C_{34} = -\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & d \\ -c & -e & -f \end{vmatrix} = acd - abe + a^2 f = a\left(af - be + cd\right) \tag{F.66}$$

F.5.2.7 Calculation of $\det \mathbb{A}$

Developing the first row of the determinant gives

$$\det \mathbb{A} = aC_{12} + bC_{13} + cC_{14} = \left(af - be + cd\right)^2 \tag{F.67}$$

the determinant is nonnegative, which is consistent with properties of antisymmetric matrices.

F.5.2.8 Expression for $\mathbb{A}^{-1}$

The inverse matrix is proportional to the transpose cofactor matrix, i.e.

$$\left(\mathbb{A}^{-1}\right)_{ij} = \frac{1}{\det \mathbb{A}} C_{ji} \tag{F.68}$$

$\mathbb{A}^{-1}$ therefore reads

$$\mathbb{A}^{-1} = \frac{1}{af - be + cd} \begin{pmatrix} 0 & -f & e & -d \\ f & 0 & -c & b \\ -e & c & 0 & -a \\ d & -b & a & 0 \end{pmatrix} \tag{F.69}$$

the term $af - be + cd$ will be called the inverse matrix denominator in this document.

Appendix G

Conservation laws for the FP collision operator

G.1 Expression of the collision operator

The Fokker-Planck collision operator for a test particle a moving in field particles b with distribution functions respectively f_a and f_b in velocity phase spaces V and V' has the following expression :

$$C_a = \sum_b C_{ab} \tag{G.1}$$

Where :

$$C_{ab} = -2\pi e_a^2 e_b^2 m_a \ln\Lambda \frac{\partial}{\partial v_\alpha} \int_{V'} d^3\mathbf{v}' \left[\frac{f_a(v)}{m_b} \frac{\partial f_b(v')}{\partial v'_\beta} - \frac{f_b(v')}{m_a} \frac{\partial f_a(v)}{\partial v_\beta} \right] Q_{\alpha\beta}(\mathbf{v} - \mathbf{v}') \tag{G.2}$$

A sum of repeated cartesian indices (α, β) is implied. The expression of $Q_{\alpha\beta}$ is, noting $x = |\mathbf{x}|$:

$$Q_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) \equiv x^{-3} \left(x^2 \delta_{\alpha\beta} - x_\alpha x_\beta \right) \tag{G.3}$$

We can note that the collision operator is in divergence form :

$$C_{ab} = -\frac{\Gamma_{ab}}{2m_a} \boldsymbol{\partial} \cdot \boldsymbol{\Lambda}_{ab} \tag{G.4}$$

where $\Gamma_{ab} = \Gamma_{ba} \equiv 4\pi e_a^2 e_b^2 \ln\Lambda$ and $\boldsymbol{\Lambda}_{ab} \equiv \int \mathbb{Q}(\mathbf{v} - \mathbf{v}') \cdot \left(\frac{f_a}{m_b} \boldsymbol{\partial}' f_b - \frac{f_b}{m_a} \boldsymbol{\partial} f_a \right)$. Here, $\boldsymbol{\partial} = \hat{\mathbf{v}}_\alpha \frac{\partial}{\partial v_\alpha}$ and $\boldsymbol{\partial}' = \hat{\mathbf{v}'}_\alpha \frac{\partial}{\partial v'_\alpha}$ are the del operators for test particle and field particle velocity phase space and $\mathbb{Q}$ is the tensor associated with $Q_{\alpha\beta}$. We also note $\int = \int_V d^3\mathbf{v}$ and $\int' = \int_{V'} d^3\mathbf{v}'$. It is important to note that another expression for $\mathbb{Q}$ is $\mathbb{Q}(\mathbf{x}) = x^{-3} \left(x^2 \mathbb{I} - \mathbf{x} \otimes \mathbf{x} \right)$ where $\mathbb{I}$ is the identity matrix. Therefore, we have the two properties $\mathbb{Q}(-\mathbf{x}) = \mathbb{Q}(\mathbf{x})$ and $\mathbf{x} \cdot \mathbb{Q}(\mathbf{x}) = \mathbb{Q}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x} = 0$.

G.2 Conservation laws

G.2.1 Particle conservation law

The particle conservation law is expressed as :

$$\int C_{ab} = 0 \tag{G.5}$$

The integral can be expressed as :

$$\int C_{ab} = -\frac{\Gamma_{ab}}{2m_a}\int \boldsymbol{\partial}\cdot\boldsymbol{\Lambda}_{ab} = -\frac{\Gamma_{ab}}{2m_a}\oiint_{\partial V} d^2v\boldsymbol{\Lambda}_{ab}\cdot\mathbf{n} \tag{G.6}$$

This last integral has a value of zero since $\boldsymbol{\Lambda}_{ab}$ is physically required to have a zero limit at the phase space boundaries.

G.2.2 Momentum conservation law

The momentum conservation law is expressed as :

$$\int (m_a\mathbf{v}C_{ab} + m_b\mathbf{v}C_{ba}) = 0 \tag{G.7}$$

We define the following term :

$$\mathbf{P}_{ab} \equiv \int m_a\mathbf{v}C_{ab} = -\frac{\Gamma_{ab}}{2}\int \mathbf{v}\left(\boldsymbol{\partial}\cdot\boldsymbol{\Lambda}_{ab}\right) \tag{G.8}$$

We notice that $\mathbf{v}\left(\boldsymbol{\partial}\cdot\boldsymbol{\Lambda}_{ab}\right) = \boldsymbol{\partial}\cdot(\mathbf{v}\otimes\boldsymbol{\Lambda}_{ab}) - (\boldsymbol{\partial}\otimes\mathbf{v})\cdot\boldsymbol{\Lambda}_{ab} = \boldsymbol{\partial}\cdot(\mathbf{v}\otimes\boldsymbol{\Lambda}_{ab}) - \boldsymbol{\Lambda}_{ab}$ since $(\boldsymbol{\partial}\otimes\mathbf{v}) = \mathbb{I}$ is the identity matrix. Using the zero-limit argument for $\boldsymbol{\partial}\cdot(\mathbf{v}\otimes\boldsymbol{\Lambda}_{ab})$, we deduce that $\int\boldsymbol{\partial}\cdot(\mathbf{v}\otimes\boldsymbol{\Lambda}_{ab}) = 0$. We therefore have :

$$\mathbf{P}_{ab} = \frac{\Gamma_{ab}}{2}\int \boldsymbol{\Lambda}_{ab} \tag{G.9}$$

Since $\Gamma_{ba} = \Gamma_{ab}$, proving that $\mathbf{P}_{ba} = -\mathbf{P}_{ab}$ is equivalent to proving that $\int\boldsymbol{\Lambda}_{ba} = -\int\boldsymbol{\Lambda}_{ab}$. We start from the expression :

$$\int \boldsymbol{\Lambda}_{ba} = \int\int' \mathbb{Q}\left(\mathbf{v}-\mathbf{v}'\right)\cdot\left(\frac{f_a}{m_b}\boldsymbol{\partial}'f_b - \frac{f_b}{m_a}\boldsymbol{\partial}f_a\right) \tag{G.10}$$

Using the fact that $\mathbb{Q}\left(\mathbf{v}'-\mathbf{v}\right) = \mathbb{Q}\left(\mathbf{v}-\mathbf{v}'\right)$, we permute field and test particles $a\leftrightarrow b$ and $\mathbf{v}\leftrightarrow\mathbf{v}'$:

$$\int \boldsymbol{\Lambda}_{ba} = \int\int' \mathbb{Q}\left(\mathbf{v}-\mathbf{v}'\right)\cdot\left(\frac{f_b}{m_a}\boldsymbol{\partial}f_a - \frac{f_a}{m_b}\boldsymbol{\partial}'f_b\right) \tag{G.11}$$

We immediately have the relation :

$$\int \boldsymbol{\Lambda}_{ba} = -\int \boldsymbol{\Lambda}_{ab} \tag{G.12}$$

The collision operator therefore obeys the momentum conservation law.

G.2.3 Energy conservation law

The energy conservation law is expressed as :

$$\int \left(m_av^2C_{ab} + m_bv^2C_{ba}\right) = 0 \tag{G.13}$$

We define the following term :

$$E_{ab} \equiv \int m_av^2C_{ab} = -\frac{\Gamma_{ab}}{2}\int \left(v^2\boldsymbol{\partial}\cdot\boldsymbol{\Lambda}_{ab}\right) \tag{G.14}$$

We notice that $v^2\left(\boldsymbol{\partial}\cdot\boldsymbol{\Lambda}_{ab}\right) = \boldsymbol{\partial}\cdot\left(v^2\boldsymbol{\Lambda}_{ab}\right) - \boldsymbol{\partial}v^2\cdot\boldsymbol{\Lambda}_{ab} = \boldsymbol{\partial}\cdot\left(v^2\boldsymbol{\Lambda}_{ab}\right) - 2\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\Lambda}_{ab}$. Using the zero-limit argument for $\boldsymbol{\partial}\cdot\left(v^2\boldsymbol{\Lambda}_{ab}\right)$, we deduce that $\int\boldsymbol{\partial}\cdot\left(v^2\boldsymbol{\Lambda}_{ab}\right) = 0$. We therefore have :

$$E_{ab} = \Gamma_{ab}\int \mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\Lambda}_{ab} \tag{G.15}$$

Since $\Gamma_{ba} = \Gamma_{ab}$, proving that $E_{ba} = E_{ab}$ is equivalent to proving that $\int \mathbf{v} \cdot \mathbf{\Lambda}_{ba} = -\int \mathbf{v} \cdot \mathbf{\Lambda}_{ab}$. First, we note that :

$$\mathbf{v}' \cdot \mathbb{Q}(\mathbf{v}' - \mathbf{v}) = (\mathbf{v}' - \mathbf{v}) \cdot \mathbb{Q}(\mathbf{v}' - \mathbf{v}) + \mathbf{v} \cdot \mathbb{Q}(\mathbf{v}' - \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot \mathbb{Q}(\mathbf{v} - \mathbf{v}')$$

Since $\mathbb{Q}(\mathbf{v}' - \mathbf{v}) = \mathbb{Q}(\mathbf{v} - \mathbf{v}')$ and $(\mathbf{v}' - \mathbf{v}) \cdot \mathbb{Q}(\mathbf{v}' - \mathbf{v}) = 0$. Starting from the expression :

$$\int \mathbf{v} \cdot \mathbf{\Lambda}_{ba} = \int \int' \mathbf{v} \cdot \mathbb{Q}(\mathbf{v} - \mathbf{v}') \cdot \left(\frac{f_a}{m_b} \boldsymbol{\partial}' f_b - \frac{f_b}{m_a} \boldsymbol{\partial} f_a \right) \tag{G.16}$$

Permuting field and test particles $a \leftrightarrow b$ and $\mathbf{v} \leftrightarrow \mathbf{v}'$, we therefore get :

$$\int \mathbf{v} \cdot \mathbf{\Lambda}_{ba} = \int \int' \mathbf{v} \cdot \mathbb{Q}(\mathbf{v} - \mathbf{v}') \cdot \left(\frac{f_b}{m_a} \boldsymbol{\partial} f_a - \frac{f_a}{m_b} \boldsymbol{\partial}' f_b \right) \tag{G.17}$$

We immediately have the relation :

$$\int \mathbf{v} \cdot \mathbf{\Lambda}_{ba} = -\int \mathbf{v} \cdot \mathbf{\Lambda}_{ab} \tag{G.18}$$

The collision operator therefore obeys the energy conservation law.

G.3 Collision operator with maxwellian test particle and field distributions

In this section, we assume the test and eld particles have a maxwellian distribution with respective expressions :

$$f_a(\mathbf{v}) = n_a \left(\frac{m_a}{2\pi k_B T_a} \right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{m_a}{2k_B T_a} v^2 \right) \tag{G.19}$$

$$f_b(\mathbf{v}') = n_b \left(\frac{m_b}{2\pi k_B T_b} \right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{m_b}{2k_B T_b} v^2 \right) \tag{G.20}$$

Where T_a and T_b are the respective temperatures and k_B is the Boltzmann constant. We can therefore deduce :

$$\boldsymbol{\partial} f_a = -\frac{m_a}{2k_B T_a} f_a \mathbf{v} \tag{G.21}$$

$$\boldsymbol{\partial}' f_b = -\frac{m_b}{2k_B T_b} f_b \mathbf{v}' \tag{G.22}$$

Inserting these expressions into C_{ab}, we get :

$$C_{ab} = -\frac{\Gamma_{ab}}{2k_B m_a} \boldsymbol{\partial} \cdot \int' \mathbb{Q}(\mathbf{v} - \mathbf{v}') \cdot \left(\frac{\mathbf{v}}{T_b} - \frac{\mathbf{v}'}{T_a} \right) f_a(\mathbf{v}) f_b(\mathbf{v}') \tag{G.23}$$

We can therefore see that if $T_a = T_b$, the collision operator is zero, since $\mathbb{Q}(\mathbf{v}' - \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{v}' - \mathbf{v}) = 0$. This is consistent with the thermal equilibrium between test particles and field particles in this case, in which no transport is present.

G.4 H-theorem for the collision operator

In this section, we want to prove the H-theorem for the Fokker-Planck collision operator, i.e. that the entropy derivative is always positive with respect to collisions. We consider the time derivative of the expression of the entropy integral :

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= -\sum_a \frac{d}{dt}\int f_a \ln f_a \\ &= -\sum_{a,b}\int (\ln f_a + 1)\, C_{ab} \\ &= -\sum_{a,b}\int \ln f_a C_{ab}\end{aligned} \tag{G.24}$$

where C_{ab} corresponds to the time derivative of the distribution function due to collisions, as described by the Vlasov equation. The last expression comes with the fact that $\int C_{ab} = 0$, due to the particle conservation property. Using the expression of the collision operator, we have :

$$\frac{dS_{ab}}{dt} \equiv -\int \ln f_a C_{ab} = \frac{\Gamma_{ab}}{2m_a}\int\int' \ln f_a \boldsymbol{\partial}\cdot\left[\mathbb{Q}\,(\mathbf{v}-\mathbf{v}')\cdot\left(\frac{f_b}{m_a}\boldsymbol{\partial} f_a - \frac{f_a}{m_b}\boldsymbol{\partial}' f_b\right)\right] \tag{G.25}$$

Integrating the expression by parts, it becomes :

$$\frac{dS_{ab}}{dt} \equiv -\int \ln f_a C_{ab} = \frac{\Gamma_{ab}}{2m_a}\int\int' (\boldsymbol{\partial}\ln f_a)\cdot\mathbb{Q}\,(\mathbf{v}-\mathbf{v}')\cdot\left(\frac{f_b}{m_a}\boldsymbol{\partial} f_a - \frac{f_a}{m_b}\boldsymbol{\partial}' f_b\right) \tag{G.26}$$

Doing the permutation $a \leftrightarrow b$ and $\mathbf{v} \leftrightarrow \mathbf{v}'$, we get :

$$\begin{aligned}\frac{dS_{ba}}{dt} \equiv -\int \ln f_b C_{ba} &= \frac{\Gamma_{ba}}{2m_b}\int\int' (\boldsymbol{\partial}\ln f_b)\cdot\mathbb{Q}\,(\mathbf{v}'-\mathbf{v})\cdot\left(\frac{f_a}{m_b}\boldsymbol{\partial}' f_b - \frac{f_b}{m_a}\boldsymbol{\partial} f_a\right) \\ &= -\frac{\Gamma_{ab}}{2m_b}\int\int' (\boldsymbol{\partial}\ln f_b)\cdot\mathbb{Q}\,(\mathbf{v}-\mathbf{v}')\cdot\left(\frac{f_b}{m_a}\boldsymbol{\partial} f_a - \frac{f_a}{m_b}\boldsymbol{\partial}' f_b\right)\end{aligned} \tag{G.27}$$

The total entropy derivative is the sum of those two contributions :

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}\sum_{a,b}\left(\frac{dS_{ab}}{dt} + \frac{dS_{ba}}{dt}\right) \tag{G.28}$$

We therefore have, using the relations $\boldsymbol{\partial} f_a = f_a \boldsymbol{\partial}\ln f_a$ and $\boldsymbol{\partial}' f_b = f_b \boldsymbol{\partial}'\ln f_b$:

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= \frac{\Gamma_{ab}}{4}\int\int'\left(\frac{\boldsymbol{\partial}'\ln f_b}{m_b} - \frac{\boldsymbol{\partial}\ln f_a}{m_a}\right)\cdot\mathbb{Q}\,(\mathbf{v}-\mathbf{v}')\cdot\left(\frac{\boldsymbol{\partial}'\ln f_b}{m_b} - \frac{\boldsymbol{\partial}\ln f_a}{m_a}\right) f_a f_b \\ &= \frac{\Gamma_{ab}}{4}\int\int' \left[\mathbf{X}\cdot\mathbb{Q}\,(\mathbf{v}-\mathbf{v}')\cdot\mathbf{X}\right] f_a f_b\end{aligned} \tag{G.29}$$

Where $\mathbf{X} = \boldsymbol{\partial}'\ln f_b/m_b - \boldsymbol{\partial}\ln f_a/m_a$. From the analogy with the inner product, we have $\mathbf{X}\cdot\mathbb{Q}\cdot\mathbf{X} \geq 0$. We therefore immediately deduce $dS/dt \geq 0$; therefore the H-theorem is proven for the Fokker-Planck collision operator.

Appendix H

First-order Anisotropic Collision Operator

NOTE: Unless specified, all integrals are definite integrals over the coordinate's (or coordinates') value range.

H.1 Velocity-Space Coordinate System

In this document, we will use the coordinate system (p, ξ, φ) for velocity space, where $p \equiv |\mathbf{p}|$ is the kinetic moment amplitude, $\xi \equiv \mathbf{p} \cdot \widehat{\mathsf{b}}/p$ the pitch-angle cosine with respect to magnetic field unitary vector $\widehat{\mathsf{b}}$ and φ is the gyrophase angle. Their value range is

$$\begin{aligned} p &\in [0, \infty[\\ \xi &\in [-1, 1[\\ \varphi &\in [0, 2\pi[\end{aligned}$$

Using $\mathbf{p} \equiv p\xi\widehat{\mathsf{b}} + \mathbf{p}_\perp$, we define the lowest-order gyro-radius as

$$\boldsymbol{\rho}_0 \equiv \frac{\widehat{\mathsf{b}} \times \mathbf{p}}{m\Omega} = \frac{p\sqrt{1-\xi^2}}{m\Omega}\widehat{\rho} \tag{H.1}$$

so that

$$\mathbf{p} \equiv p\xi\widehat{\mathsf{b}} + m\Omega\frac{\partial \boldsymbol{\rho}_0}{\partial \varphi} = p\xi\widehat{\mathsf{b}} + p\sqrt{1-\xi^2}\widehat{\perp} \tag{H.2}$$

where we use the rotating othonormal vector base $\widehat{\perp}(\mathbf{x}, \varphi) \equiv \widehat{\rho}(\mathbf{x}, \varphi) \times \widehat{\mathsf{b}}(\mathbf{x})$ with $\widehat{\perp} \equiv \partial\widehat{\rho}/\partial\varphi$ and $\widehat{\rho} \equiv -\partial\widehat{\perp}/\partial\varphi$. We can deduce from the momentum expression the basis vectors

$$\mathbf{e}_p \equiv \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial p} = \xi\widehat{\mathsf{b}} + \frac{m\Omega}{p}\frac{\partial \boldsymbol{\rho}_0}{\partial \varphi} \tag{H.3}$$

$$\mathbf{e}_\xi \equiv \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \xi} = p\widehat{\mathsf{b}} - m\Omega\frac{\xi}{1-\xi^2}\frac{\partial \boldsymbol{\rho}_0}{\partial \varphi} \tag{H.4}$$

$$\mathbf{e}_\varphi \equiv \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \varphi} = -m\Omega\boldsymbol{\rho}_0 \tag{H.5}$$

We also define the gyro-gauge vector

$$\mathbf{R} \equiv \nabla\widehat{\perp} \cdot \widehat{\rho} = -\nabla\widehat{\rho} \cdot \widehat{\perp} \tag{H.6}$$

We have the following expressions for the gradient and tensor double gradient operators

$$\frac{\partial A}{\partial \mathbf{p}} = \frac{\partial A}{\partial p}\mathbf{e}_p + \frac{\left(1-\xi^2\right)}{p^2}\frac{\partial A}{\partial \xi}\mathbf{e}_\xi + \frac{1}{p^2\left(1-\xi^2\right)}\frac{\partial A}{\partial \varphi}\mathbf{e}_\varphi \tag{H.7}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 A}{\partial \mathbf{p}\partial \mathbf{p}} =& \frac{\partial^2 A}{\partial p^2}\mathbf{e}_p\mathbf{e}_p \\
&+ \frac{\left(1-\xi^2\right)^2}{p^4}\left(\frac{\partial^2 A}{\partial \xi^2} + \frac{p}{1-\xi^2}\frac{\partial A}{\partial p} - \frac{\xi}{1-\xi^2}\frac{\partial A}{\partial \xi}\right)\mathbf{e}_\xi\mathbf{e}_\xi \\
&+ \frac{1}{p^4\left(1-\xi^2\right)^2}\left(\frac{\partial^2 A}{\partial \varphi^2} + p\left(1-\xi^2\right)\frac{\partial A}{\partial p} - \xi\left(1-\xi^2\right)\frac{\partial A}{\partial \xi}\right)\mathbf{e}_\varphi\mathbf{e}_\varphi \\
&+ \frac{\left(1-\xi^2\right)}{p^2}\left(\frac{\partial^2 A}{\partial p\partial \xi} - \frac{1}{p}\frac{\partial A}{\partial \xi}\right)\left(\mathbf{e}_p\mathbf{e}_\xi + \mathbf{e}_\xi\mathbf{e}_p\right) \\
&+ \frac{1}{p^2\left(1-\xi^2\right)}\left(\frac{\partial^2 A}{\partial p\partial \varphi} - \frac{1}{p}\frac{\partial A}{\partial \varphi}\right)\left(\mathbf{e}_p\mathbf{e}_\varphi + \mathbf{e}_\varphi\mathbf{e}_p\right) \\
&+ \frac{1}{p^4}\left(\frac{\partial^2 A}{\partial \xi\partial \varphi} + \frac{\xi}{1-\xi^2}\frac{\partial A}{\partial \varphi}\right)\left(\mathbf{e}_\xi\mathbf{e}_\varphi + \mathbf{e}_\varphi\mathbf{e}_\xi\right) \\
=& \frac{\partial^2 A}{\partial p^2}\mathbf{e}_p\mathbf{e}_p + \frac{\left(1-\xi^2\right)^2}{p^4}\frac{\partial^2 A}{\partial \xi^2}\mathbf{e}_\xi\mathbf{e}_\xi + \frac{1}{p^4\left(1-\xi^2\right)^2}\frac{\partial^2 A}{\partial \varphi^2}\mathbf{e}_\varphi\mathbf{e}_\varphi \\
&+ \frac{1}{p}\left(\frac{\partial A}{\partial p} - \frac{\xi}{p}\frac{\partial A}{\partial \xi}\right)\left(\mathbb{I} - \mathbf{e}_p\mathbf{e}_p\right) \\
&+ \frac{1-\xi^2}{p^2}\left(\frac{\partial^2 A}{\partial p\partial \xi} - \frac{1}{p}\frac{\partial A}{\partial \xi}\right)\left(\mathbf{e}_p\mathbf{e}_\xi + \mathbf{e}_\xi\mathbf{e}_p\right) \\
&+ \frac{1}{p^2\left(1-\xi^2\right)}\left(\frac{\partial^2 A}{\partial p\partial \varphi} - \frac{1}{p}\frac{\partial A}{\partial \varphi}\right)\left(\mathbf{e}_p\mathbf{e}_\varphi + \mathbf{e}_\varphi\mathbf{e}_p\right) \\
&+ \frac{1}{p^4}\left(\frac{\partial^2 A}{\partial \xi\partial \varphi} + \frac{\xi}{1-\xi^2}\frac{\partial A}{\partial \varphi}\right)\left(\mathbf{e}_\xi\mathbf{e}_\varphi + \mathbf{e}_\varphi\mathbf{e}_\xi\right)
\end{aligned}
\tag{H.8}
$$

H.2 Local collision operator

The Fokker-Planck equation for collisions reads for a particle distribution f_a in phase space $\mathbf{z} \equiv (\mathbf{x}, \mathbf{p})$:

$$
\frac{df_a}{dt} = \frac{\partial f_a}{\partial t} + \frac{d\mathbf{z}}{dt}\cdot\frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{z}} = C\left[f_a\right] \tag{H.9}
$$

Where $C\left[f_a\right] \equiv \Sigma_b C\left[f_a, f_b\right]$ is the collision operator which includes interactions with both like and unlike particles, given in divergence form [4] as

$$
C\left[f_a, f_b\right] \equiv -\frac{\Gamma_{ab}}{2}\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}}\cdot\iiint d^3\mathbf{p}'\mathbb{U}\left(\mathbf{u}, \mathbf{u}'\right)\cdot\left(f_a\left(\mathbf{x}, \mathbf{p}\right)\frac{\partial f_b\left(\mathbf{x}', \mathbf{p}'\right)}{\partial \mathbf{p}'} - f_b\left(\mathbf{x}', \mathbf{p}'\right)\frac{\partial f_a\left(\mathbf{x}, \mathbf{p}\right)}{\partial \mathbf{p}}\right) \tag{H.10}
$$

where $\mathbf{u} \equiv \mathbf{p}/m_a$, $\mathbf{u}' \equiv \mathbf{p}'/m_b$ and $\Gamma_{ab} \equiv e_a^2 e_b^2 \ln\Lambda_{ab}/4\pi\varepsilon_0^2$. In the nonrelativistic case, $\mathbb{U}\left(\mathbf{v}, \mathbf{v}'\right) \equiv w^{-1}\mathbb{I} - w^{-3}\mathbf{w}\mathbf{w}$ with $\mathbf{w} = \mathbf{v} - \mathbf{v}'$. $C\left[f_a, f_b\right]$ can be represented as

$$
C\left[f_a, f_b\right] \equiv -\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}}\cdot\left(\mathbf{K}_{ab}\left[f_b\right]f_a - \mathbb{D}_{ab}\left[f_b\right]\cdot\frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{p}}\right) \tag{H.11}
$$

where

$$
\mathbf{K}_{ab}\left[f_b\right] = -\frac{\Gamma_{ab}}{2}\frac{m_a}{m_b}\iiint d^3\mathbf{p}' f_b\left(\mathbf{p}'\right)\frac{\partial}{\partial \mathbf{u}'}\cdot\mathbb{U}\left(\mathbf{u}, \mathbf{u}'\right) \tag{H.12}
$$

$$
\mathbb{D}_{ab}\left[f_b\right] = \frac{\Gamma_{ab}}{2}\iiint d^3\mathbf{p}' f_b\left(\mathbf{p}'\right)\mathbb{U}\left(\mathbf{u}, \mathbf{u}'\right) \tag{H.13}
$$

In the relativistic case, the kernel for the Belaiev-Budker operator reads

$$
\mathbb{U}\left(\mathbf{u}, \mathbf{u}'\right) \equiv \frac{r^2}{\gamma\gamma' w^3}\left(w^2\mathbb{I} - \mathbf{u}\mathbf{u} - \mathbf{u}'\mathbf{u}' + r\left(\mathbf{u}\mathbf{u}' + \mathbf{u}'\mathbf{u}\right)\right) \tag{H.14}
$$

where

$$\gamma = \sqrt{1 + \frac{u^2}{c^2}} \tag{H.15}$$

$$\gamma' = \sqrt{1 + \frac{u'^2}{c^2}} \tag{H.16}$$

$$r = \gamma\gamma' - \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}'}{c^2} \tag{H.17}$$

$$w = c\sqrt{r^2 - 1} \tag{H.18}$$

Here, the drag vector and diffusion tensor are determined using the following potentials derived by Karney [10]:

$$\Psi_0(\mathbf{x},\mathbf{u}) = -\frac{1}{4\pi}\iiint \frac{d^3\mathbf{u}'}{\gamma'}\frac{1}{w} f_b(\mathbf{x},\mathbf{u}') \tag{H.19}$$

$$\Psi_1(\mathbf{x},\mathbf{u}) = -\frac{1}{4\pi}\iiint \frac{d^3\mathbf{u}'}{\gamma'}\frac{r}{w} f_b(\mathbf{x},\mathbf{u}') \tag{H.20}$$

$$\Psi_2(\mathbf{x},\mathbf{u}) = -\frac{1}{8\pi}\iiint \frac{d^3\mathbf{u}'}{\gamma'} c\sinh^{-1}\left(\frac{w}{c}\right) f_b(\mathbf{x},\mathbf{u}') \tag{H.21}$$

$$\Psi_3(\mathbf{x},\mathbf{u}) = -\frac{1}{8\pi}\iiint \frac{d^3\mathbf{u}'}{\gamma'} w f_b(\mathbf{x},\mathbf{u}') \tag{H.22}$$

$$\Psi_4(\mathbf{x},\mathbf{u}) = -\frac{1}{32\pi}\iiint \frac{d^3\mathbf{u}'}{\gamma'} c^3\left(r\sinh^{-1}\left(\frac{w}{c}\right) - \frac{w}{c}\right) f_b(\mathbf{x},\mathbf{u}') \tag{H.23}$$

The following relations exist between Karney potentials

$$L_0\Psi_0 = f_b \tag{H.24}$$

$$L_1\Psi_2 = \Psi_1 \tag{H.25}$$

$$L_1\Psi_1 = f_b \tag{H.26}$$

$$L_2\Psi_4 = \Psi_3 \tag{H.27}$$

$$L_2\Psi_3 = \Psi_0 \tag{H.28}$$

where

$$L_a\Psi \equiv \left(\mathbb{I} + \frac{\mathbf{uu}}{c^2}\right) : \frac{\partial^2\Psi}{\partial\mathbf{u}\partial\mathbf{u}} + \frac{3\mathbf{u}}{c^2}\cdot\frac{\partial\Psi}{\partial\mathbf{u}} + \frac{1-a^2}{c^2}\Psi \tag{H.29}$$

$$= \gamma^2\frac{\partial\Psi}{\partial u^2} + \left(\frac{2}{u} + \frac{3u}{c^2}\right)\frac{\partial\Psi}{\partial u} + \frac{1-\xi^2}{u^2}\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial\xi^2} - \frac{2\xi}{1-\xi^2}\frac{\partial\Psi}{\partial\xi}\right) + \frac{1}{u^2(1-\xi^2)}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\varphi^2} + \frac{1-a^2}{c^2}\Psi \tag{H.30}$$

In the nonrelativistic limit, $\Psi_0 = \Psi_1 \equiv H_b$, $\Psi_2 = \Psi_3 \equiv G_b$ become the Rosenbluth potentials [43] and L becomes the velocity-space laplacian. The relativistic collision coefficients read

$$\mathbf{K}_{ab} = \Gamma^K_{ab}\frac{1}{\gamma}\left(\mathsf{K}\Psi_1 - \frac{2}{c^2}\mathsf{K}\Psi_2\right) \tag{H.31}$$

$$\mathbb{D}_{ab} = \Gamma^D_{ab}\frac{1}{\gamma}\left(\left[\mathsf{L} + \frac{1}{c^2}\left(\mathbb{I} + \frac{\mathbf{uu}}{c^2}\right)\right]\Psi_3 - \frac{4}{c^2}\left[\mathsf{L} - \frac{1}{c^2}\left(\mathbb{I} + \frac{\mathbf{uu}}{c^2}\right)\right]\Psi_4\right) \tag{H.32}$$

where $\Gamma_{ab}^K \equiv (m_a/m_b)\,\Gamma_{ab}^D \equiv -4\pi\,(m_a/m_b)\,\Gamma_{ab}$ and the operators K and L read

$$\begin{aligned}
\mathsf{K}\Psi(\mathbf{u}) =& \left(\mathbb{I} + \frac{\mathbf{uu}}{c^2}\right)\cdot\frac{\partial\Psi}{\partial\mathbf{u}} \\
=&\gamma^2\frac{\partial\Psi}{\partial u}\mathbf{e}_p + \frac{1-\xi^2}{p}\frac{1}{u}\frac{\partial\Psi}{\partial\xi}\mathbf{e}_\xi + \frac{1}{p\,(1-\xi^2)}\frac{1}{u}\frac{\partial\Psi}{\partial\varphi}\mathbf{e}_\varphi \qquad \text{(H.33)}\\
\mathsf{L}\Psi(\mathbf{u}) =& \left(\mathbb{I} + \frac{\mathbf{uu}}{c^2}\right)\cdot\frac{\partial^2\Psi}{\partial\mathbf{u}\partial\mathbf{u}}\cdot\left(\mathbb{I} + \frac{\mathbf{uu}}{c^2}\right) + \frac{1}{c^2}\left(\mathbb{I} + \frac{\mathbf{uu}}{c^2}\right)\left(\mathbf{u}\cdot\frac{\partial\Psi}{\partial\mathbf{u}}\right) \\
=&\gamma^2\left(\gamma^2\frac{\partial^2\Psi}{\partial u^2} + \frac{u}{c^2}\frac{\partial\Psi}{\partial u}\right)\mathbf{e}_p\mathbf{e}_p \\
&+ \frac{(1-\xi^2)}{p^2}\frac{1}{u^2}\left(\left(1-\xi^2\right)\frac{\partial^2\Psi}{\partial\xi^2} + \gamma^2 u\frac{\partial\Psi}{\partial u} - \xi\frac{\partial\Psi}{\partial\xi}\right)\mathbf{e}_\xi\mathbf{e}_\xi \\
&+ \frac{1}{p^2\,(1-\xi^2)}\frac{1}{u^2}\left(\frac{1}{1-\xi^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\varphi^2} + \gamma^2 u\frac{\partial\Psi}{\partial u} - \xi\frac{\partial\Psi}{\partial\xi}\right)\mathbf{e}_\varphi\mathbf{e}_\varphi \\
&+ \frac{1-\xi^2}{p}\frac{\gamma^2}{u}\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial u\partial\xi} - \frac{1}{u}\frac{\partial\Psi}{\partial\xi}\right)(\mathbf{e}_p\mathbf{e}_\xi + \mathbf{e}_\xi\mathbf{e}_p) \\
&+ \frac{\gamma^2}{p\,(1-\xi^2)}\frac{1}{u}\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial u\partial\varphi} - \frac{1}{u}\frac{\partial\Psi}{\partial\varphi}\right)(\mathbf{e}_p\mathbf{e}_\varphi + \mathbf{e}_\varphi\mathbf{e}_p) \\
&+ \frac{1}{p^2}\frac{1}{u^2}\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial\xi\partial\varphi} + \frac{\xi}{1-\xi^2}\frac{\partial\Psi}{\partial\varphi}\right)(\mathbf{e}_\xi\mathbf{e}_\varphi + \mathbf{e}_\varphi\mathbf{e}_\xi) \qquad \text{(H.34)}
\end{aligned}$$

It is interesting to note that since $\partial/\partial\mathbf{v} = \gamma\left(\mathbb{I} + \mathbf{uu}/c^2\right)\cdot\partial/\partial\mathbf{u}$, we can rewrite K and L as

$$\mathsf{K}\Psi = \frac{1}{\gamma}\frac{\partial\Psi}{\partial\mathbf{v}} \qquad \text{(H.35)}$$

$$\mathsf{L}\Psi = \frac{1}{\gamma^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\mathbf{v}\partial\mathbf{v}} - \frac{1}{c^2}\left(\mathbf{v}\frac{\partial\Psi}{\partial\mathbf{v}} + \frac{\partial\Psi}{\partial\mathbf{v}}\mathbf{v}\right) \qquad \text{(H.36)}$$

Karney [**?**] showed that the potentials Ψ_k can be expressed in terms of spherical harmonics as follows

$$\Psi_k^{[\ell m]}(u) = \int_0^u du'\frac{u'^2}{\gamma'}N_k^{[\ell]}(u,u')\,f_b^{[\ell m]}(u') + \int_u^\infty du'\frac{u'^2}{\gamma'}N_k^{[\ell]}(u',u)\,f_b^{[\ell m]}(u') \qquad \text{(H.37)}$$

where $N_k^{[\ell]}$ is explicited in the appendix and $f_b^{[\ell m]}$ are the spherical harmonic coefficients of f. One can deduce that if f_b is gyro-independant, this reduces to a Legendre polynomial expansion $\Psi_k(\mathbf{x},u,\xi) = \sum_{\ell=0}^\infty \Psi_k^{[\ell]}(\mathbf{x},u)\,P_\ell(\xi)$, where

$$\Psi_k^{[\ell]}(u) = \int_0^u du'\frac{u'^2}{\gamma'}N_k^{[\ell]}(u,u')\,f_b^{[\ell]}(u') + \int_u^\infty du'\frac{u'^2}{\gamma'}N_k^{[\ell]}(u',u)\,f_b^{[\ell]}(u') \qquad \text{(H.38)}$$

and $f_b^{[\ell]}$ are the Legendre expansion coefficients for $f_b(\mathbf{x},u,\xi) \equiv \sum_{l=0}^\infty f_b^{[\ell]}(\mathbf{x},u)\,P_\ell(\xi)$. We can deduce the following relations between coefficients

$$L_{\ell,0}\Psi_0^{[\ell]} = f_b^{[\ell]} \qquad \text{(H.39)}$$

$$L_{\ell,1}\Psi_2^{[\ell]} = \Psi_1^{[\ell]} \qquad \text{(H.40)}$$

$$L_{\ell,1}\Psi_1^{[\ell]} = f_b^{[\ell]} \qquad \text{(H.41)}$$

$$L_{\ell,2}\Psi_4^{[\ell]} = \Psi_3^{[\ell]} \qquad \text{(H.42)}$$

$$L_{\ell,2}\Psi_3^{[\ell]} = \Psi_0^{[\ell]} \qquad \text{(H.43)}$$

where

$$L_{\ell,a}\Psi_k^{[\ell]} = \gamma^2\frac{\partial\Psi_k^{[\ell]}}{\partial u^2} + \left(\frac{2}{u} + \frac{3u}{c^2}\right)\frac{\partial\Psi_k^{[\ell]}}{\partial u} - \left(\frac{\ell\,(\ell+1)}{u^2} + \frac{a^2-1}{c^2}\right)\Psi_k^{[\ell]} \qquad \text{(H.44)}$$

H.2.0.1 Isotropic field-particle distribution

Here, $f_b \equiv f_b^{[0]}(\mathbf{x}, u)$ depends solely on energy in velocity space. We therefore have $\Psi_k \equiv \Psi_k^{[0]}(\mathbf{x}, u)$ and

$$\mathbf{K}_{ab} = \Gamma_{ab}^K \gamma \left(\frac{\partial \Psi_1^{[0]}}{\partial u} - \frac{2}{c^2} \frac{\partial \Psi_2^{[0]}}{\partial u} \right) \mathbf{e}_p \tag{H.45}$$

$$\equiv -\nu_l^{[0]}(\mathbf{x}, p)\, \mathbf{p} \tag{H.46}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{D}_{ab} =& \Gamma_{ab}^D \gamma \left[\left(\gamma^2 \left[\frac{\partial^2 \Psi_3^{[0]}}{\partial u^2} - \frac{4}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi_3^{[0]}}{\partial u^2} \right] + \frac{u}{c^2} \left[\frac{\partial \Psi_3^{[0]}}{\partial u} - \frac{4}{c^2} \frac{\partial \Psi_4^{[0]}}{\partial u} \right] + \frac{1}{c^2} \left[\Psi_3^{[0]} + \frac{4}{c^2} \Psi_4^{[0]} \right] \right) \mathbf{e}_p \mathbf{e}_p \\ &+ \left(\frac{1}{u} \left[\frac{\partial \Psi_3^{[0]}}{\partial u} - \frac{4}{c^2} \frac{\partial \Psi_4^{[0]}}{\partial u} \right] + \frac{1}{c^2} \left[\Psi_3^{[0]} + \frac{4}{c^2} \Psi_4^{[0]} \right] \right) (\mathbb{I} - \mathbf{e}_p \mathbf{e}_p) \Bigg] \end{aligned} \tag{H.47}$$

$$\equiv D_l^{[0]}(\mathbf{x}, p) \frac{\mathbf{pp}}{p^2} + D_t^{[0]}(\mathbf{x}, p) \left(\mathbb{I} - \frac{\mathbf{pp}}{p^2} \right) \tag{H.48}$$

with

$$\Psi_k^{[0]}(u) = \int_0^u du' \frac{u'^2}{\gamma'} N_k^{[0]}(u, u')\, f_b^{[0]}(u') + \int_u^\infty du' \frac{u'^2}{\gamma'} N_k^{[0]}(u', u)\, f_b^{[0]}(u') \tag{H.49}$$

We can rewrite the local diffusion matrix using $L_{0,a}$ to eliminate second derivatives

$$\begin{aligned} \mathbb{D}_{ab} =& \Gamma_{ab}^D \gamma \left[\left(\Psi_0^{[0]} - \frac{2\gamma^2}{u} \frac{\partial \Psi_3^{[0]}}{\partial u} + \frac{8\gamma^2}{uc^2} \frac{\partial \Psi_4^{[0]}}{\partial u} - \frac{8}{c^4} \Psi_4^{[0]} \right) \mathbf{e}_p \mathbf{e}_p \right. \\ &\left. + \left(\frac{1}{u} \frac{\partial \Psi_3^{[0]}}{\partial u} + \frac{1}{c^2} \Psi_3^{[0]} - \frac{4}{uc^2} \frac{\partial \Psi_4^{[0]}}{\partial u} + \frac{4}{c^4} \Psi_4^{[0]} \right) (\mathbb{I} - \mathbf{e}_p \mathbf{e}_p) \right] \end{aligned} \tag{H.50}$$

H.2.0.2 Gyro-independant first-order anisotropic field-particle distribution

Here, $f_b \equiv f_b^{[0]}(\mathbf{x}, u) + \xi f_b^{[1]}(\mathbf{x}, u)$ is a first-order Legendre expansion. We therefore have $\Psi_k \equiv \Psi_k^{[0]}(\mathbf{x}, u) + \xi \Psi_k^{[1]}(\mathbf{x}, u)$ and

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{ab} =& \Gamma_{ab}^K \frac{1}{\gamma} \left[\gamma^2 \left(\left[\frac{\partial \Psi_1^{[0]}}{\partial u} - \frac{2}{c^2} \frac{\partial \Psi_2^{[0]}}{\partial u} \right] + \xi \left[\frac{\partial \Psi_1^{[1]}}{\partial u} - \frac{2}{c^2} \frac{\partial \Psi_2^{[1]}}{\partial u} \right] \right) \mathbf{e}_p \right. \\ &\left. + \frac{1 - \xi^2}{p} \frac{1}{u} \left(\Psi_1^{[1]} - \frac{2}{c^2} \Psi_2^{[1]} \right) \mathbf{e}_\xi \right] \end{aligned} \tag{H.51}$$

$$\equiv -\left(\nu_l^{[0]}(\mathbf{x}, p) + \xi \nu_l^{[1]}(\mathbf{x}, p) \right) \mathbf{p} - \left(1 - \xi^2 \right) \nu_t^{[1]}(\mathbf{x}, p)\, \mathbf{e}_\xi \tag{H.52}$$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{D}_{ab} =&\Gamma_{ab}^{D}\gamma\left[\left(\gamma^2\left[\frac{\partial^2\Psi_3^{[0]}}{\partial u^2}-\frac{4}{c^2}\frac{\partial^2\Psi_4^{[0]}}{\partial u^2}\right]+\frac{u}{c^2}\left[\frac{\partial\Psi_3^{[0]}}{\partial u}-\frac{4}{c^2}\frac{\partial\Psi_4^{[0]}}{\partial u}\right]+\frac{1}{c^2}\left[\Psi_3^{[0]}+\frac{4}{c^2}\Psi_4^{[0]}\right]\right.\\
&\left.+\xi\gamma^2\left[\frac{\partial^2\Psi_3^{[1]}}{\partial u^2}-\frac{4}{c^2}\frac{\partial^2\Psi_4^{[1]}}{\partial u^2}\right]+\xi\frac{u}{c^2}\left[\frac{\partial\Psi_3^{[1]}}{\partial u}-\frac{4}{c^2}\frac{\partial\Psi_4^{[1]}}{\partial u}\right]+\xi\frac{1}{c^2}\left[\Psi_3^{[1]}+\frac{4}{c^2}\Psi_4^{[1]}\right]\right)\mathbf{e}_p\mathbf{e}_p\\
&+\left(\frac{1}{u}\left[\frac{\partial\Psi_3^{[0]}}{\partial u}-\frac{4}{c^2}\frac{\partial\Psi_4^{[0]}}{\partial u}\right]+\frac{1}{c^2}\left[\Psi_3^{[0]}+\frac{4}{c^2}\Psi_4^{[0]}\right]\right.\\
&\left.+\frac{\xi}{u}\left[\frac{\partial\Psi_3^{[1]}}{\partial u}-\frac{4}{c^2}\frac{\partial\Psi_4^{[1]}}{\partial u}\right]+\frac{\xi}{c^2}\left[\Psi_3^{[1]}+\frac{4}{c^2}\Psi_4^{[1]}\right]-\frac{\xi}{\gamma^2u^2}\left[\Psi_3^{[1]}-\frac{4}{c^2}\Psi_4^{[1]}\right]\right)(\mathbb{I}-\mathbf{e}_p\mathbf{e}_p)\\
&+\frac{1-\xi^2}{p}\frac{1}{u}\left(\left[\frac{\partial\Psi_3^{[1]}}{\partial u}-\frac{4}{c^2}\frac{\partial\Psi_4^{[1]}}{\partial u}\right]-\frac{1}{u}\left[\Psi_3^{[1]}-\frac{4}{c^2}\Psi_4^{[1]}\right]\right)(\mathbf{e}_p\mathbf{e}_\xi+\mathbf{e}_\xi\mathbf{e}_p)\Bigg] \qquad \text{(H.53)}\\
\equiv&\left(D_l^{[0]}(\mathbf{x},p)+\xi D_l^{[1]}(\mathbf{x},p)\right)\frac{\mathbf{pp}}{p^2}+\left(D_t^{[0]}(\mathbf{x},p)+\xi D_t^{[1]}(\mathbf{x},p)\right)\left(\mathbb{I}-\frac{\mathbf{pp}}{p^2}\right)+\frac{1-\xi^2}{p^2}D_\times^{[1]}(\mathbf{x},p)(\mathbf{pe}_\xi+\mathbf{e}_\xi\mathbf{p}) \qquad \text{(H.54)}
\end{aligned}
$$

with

$$
\Psi_k^{[1]}(u)=\int_0^u du'\frac{u'^2}{\gamma'}N_k^{[1]}(u,u')\,f_b^{[1]}(u')+\int_u^\infty du'\frac{u'^2}{\gamma'}N_k^{[1]}(u',u)\,f_b^{[1]}(u') \qquad \text{(H.55)}
$$

We can rewrite the local diffusion matrix using $L_{0,a}$ and $L_{1,a}$ to eliminate second derivatives

$$
\begin{aligned}
\mathbb{D}_{ab} =&\Gamma_{ab}^{D}\gamma\left[\left(\Psi_0^{[0]}-\frac{2\gamma^2}{u}\frac{\partial\Psi_3^{[0]}}{\partial u}+\frac{8\gamma^2}{uc^2}\frac{\partial\Psi_4^{[0]}}{\partial u}-\frac{8}{c^4}\Psi_4^{[0]}\right.\right.\\
&\left.+\xi\left[\Psi_0^{[1]}-\frac{2\gamma^2}{u}\frac{\partial\Psi_3^{[1]}}{\partial u}+\frac{2}{u^2}\Psi_3^{[1]}+\frac{8\gamma^2}{uc^2}\frac{\partial\Psi_4^{[1]}}{\partial u}-\frac{8\gamma^2}{u^2c^2}\Psi_4^{[1]}\right]\right)\mathbf{e}_p\mathbf{e}_p\\
&+\left(\frac{1}{u}\frac{\partial\Psi_3^{[0]}}{\partial u}+\frac{1}{c^2}\Psi_3^{[0]}-\frac{4}{uc^2}\frac{\partial\Psi_4^{[0]}}{\partial u}+\frac{4}{c^4}\Psi_4^{[0]}\right.\\
&\left.+\xi\left[\frac{1}{u}\frac{\partial\Psi_3^{[1]}}{\partial u}+\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{\gamma^2u^2}\right)\Psi_3^{[1]}-\frac{4}{uc^2}\frac{\partial\Psi_4^{[1]}}{\partial u}+\frac{4}{c^2}\left(\frac{1}{c^2}+\frac{1}{\gamma^2u^2}\right)\Psi_4^{[1]}\right]\right)(\mathbb{I}-\mathbf{e}_p\mathbf{e}_p)\\
&+\frac{1-\xi^2}{p}\frac{1}{u}\left(\frac{\partial\Psi_3^{[1]}}{\partial u}-\frac{1}{u}\Psi_3^{[1]}-\frac{4}{c^2}\frac{\partial\Psi_4^{[1]}}{\partial u}+\frac{4}{uc^2}\Psi_4^{[1]}\right)(\mathbf{e}_p\mathbf{e}_\xi+\mathbf{e}_\xi\mathbf{e}_p)\Bigg] \qquad \text{(H.56)}
\end{aligned}
$$

We can therefore deduce

$$\nu_l^{[0]} = -\frac{\Gamma_{ab}^K}{p}\gamma\left(\frac{\partial\Psi_1^{[0]}}{\partial u} - \frac{2}{c^2}\frac{\partial\Psi_2^{[0]}}{\partial u}\right) \tag{H.57}$$

$$\nu_l^{[1]} = -\frac{\Gamma_{ab}^K}{p}\gamma\left(\frac{\partial\Psi_1^{[1]}}{\partial u} - \frac{2}{c^2}\frac{\partial\Psi_2^{[1]}}{\partial u}\right) \tag{H.58}$$

$$\nu_t^{[1]} = -\frac{\Gamma_{ab}^K}{p}\frac{1}{\gamma u}\left(\Psi_1^{[1]} - \frac{2}{c^2}\Psi_2^{[1]}\right) \tag{H.59}$$

$$D_l^{[0]} = \Gamma_{ab}^D\frac{\gamma}{u}\left(u\Psi_0^{[0]} - 2\gamma^2\frac{\partial\Psi_3^{[0]}}{\partial u} + \frac{8\gamma^2}{c^2}\frac{\partial\Psi_4^{[0]}}{\partial u} - \frac{8u}{c^4}\Psi_4^{[0]}\right) \tag{H.60}$$

$$D_l^{[1]} = \Gamma_{ab}^D\frac{\gamma}{u}\left(u\Psi_0^{[1]} - 2\gamma^2\frac{\partial\Psi_3^{[1]}}{\partial u} + \frac{2}{u}\Psi_3^{[1]} + \frac{8\gamma^2}{c^2}\frac{\partial\Psi_4^{[1]}}{\partial u} - \frac{8\gamma^2}{uc^2}\Psi_4^{[1]}\right) \tag{H.61}$$

$$D_t^{[0]} = \Gamma_{ab}^D\frac{\gamma}{u}\left(\frac{\partial\Psi_3^{[0]}}{\partial u} + \frac{u}{c^2}\Psi_3^{[0]} - \frac{4\gamma^2}{c^2}\frac{\partial\Psi_4^{[0]}}{\partial u} + \frac{4u}{c^4}\Psi_4^{[0]}\right) \tag{H.62}$$

$$D_t^{[1]} = \Gamma_{ab}^D\frac{\gamma}{u}\left(\frac{\partial\Psi_3^{[1]}}{\partial u} + \frac{1}{u}\left(\frac{u^2}{c^2} - \frac{1}{\gamma^2}\right)\Psi_3^{[1]} - \frac{4}{c^2}\frac{\partial\Psi_4^{[1]}}{\partial u} + \frac{4}{uc^2}\left(\frac{u^2}{c^2} + \frac{1}{\gamma^2}\right)\Psi_4^{[1]}\right) \tag{H.63}$$

$$D_\times^{[1]} = \Gamma_{ab}^D\frac{\gamma}{u}\left(\frac{\partial\Psi_3^{[1]}}{\partial u} - \frac{1}{u}\Psi_3^{[1]} - \frac{4}{c^2}\frac{\partial\Psi_4^{[1]}}{\partial u} + \frac{4}{uc^2}\Psi_4^{[1]}\right) \tag{H.64}$$

H.3 Relativistic-potential kernel expressions

We can rewrite the relativistic potentials as

$$\Psi_0 = \frac{1}{4\pi}\iiint\frac{d\mathbf{u}'}{\gamma'}c^{-1}y_0^{[0]}\left(\frac{w}{c}\right)f(\mathbf{u}') \tag{H.65}$$

$$\Psi_1 = \frac{1}{4\pi}\iiint\frac{d\mathbf{u}'}{\gamma'}c^{-1}y_1^{[0]}\left(\frac{w}{c}\right)f(\mathbf{u}') \tag{H.66}$$

$$\Psi_2 = \frac{1}{4\pi}\iiint\frac{d\mathbf{u}'}{\gamma'}cy_2^{[0]}\left(\frac{w}{c}\right)f(\mathbf{u}') \tag{H.67}$$

$$\Psi_3 = \frac{1}{4\pi}\iiint\frac{d\mathbf{u}'}{\gamma'}cy_3^{[0]}\left(\frac{w}{c}\right)f(\mathbf{u}') \tag{H.68}$$

$$\Psi_4 = \frac{1}{4\pi}\iiint\frac{d\mathbf{u}'}{\gamma'}c^3y_4^{[0]}\left(\frac{w}{c}\right)f(\mathbf{u}') \tag{H.69}$$

where

$$y_0^{[0]}(z) = -\frac{1}{z} \tag{H.70}$$

$$y_1^{[0]}(z) = -\frac{\tau}{z} \tag{H.71}$$

$$y_2^{[0]}(z) = -\frac{\sigma}{2} \tag{H.72}$$

$$y_3^{[0]}(z) = -\frac{z}{2} \tag{H.73}$$

$$y_4^{[0]}(z) = \frac{-\tau\sigma + z}{8} \tag{H.74}$$

with $\sigma \equiv \sinh^{-1} z$ and $\tau = \sqrt{1+z^2}$. For $z = u/c$ (resp. u'/c), $\tau = \gamma$ (resp. γ'). The kernel functions $N_k^{[\ell]}$ read

$$N_0^{[\ell]}(u,u') = \frac{1}{c} y_0^{[\ell]}\left(\frac{u}{c}\right) j_0^{[\ell]}\left(\frac{u'}{c}\right) \tag{H.75}$$

$$N_1^{[\ell]}(u,u') = \frac{1}{c} y_1^{[\ell]}\left(\frac{u}{c}\right) j_1^{[\ell]}\left(\frac{u'}{c}\right) \tag{H.76}$$

$$N_2^{[\ell]}(u,u') = c\left(y_1^{[\ell]}\left(\frac{u}{c}\right) j_2^{[\ell]}\left(\frac{u'}{c}\right) + y_2^{[\ell]}\left(\frac{u}{c}\right) j_1^{[\ell]}\left(\frac{u'}{c}\right)\right) \tag{H.77}$$

$$N_3^{[\ell]}(u,u') = c\left(y_0^{[\ell]}\left(\frac{u}{c}\right) j_3^{[\ell]}\left(\frac{u'}{c}\right) + y_3^{[\ell]}\left(\frac{u}{c}\right) j_0^{[\ell]}\left(\frac{u'}{c}\right)\right) \tag{H.78}$$

$$N_4^{[\ell]}(u,u') = c^3\left(y_0^{[\ell]}\left(\frac{u}{c}\right) j_4^{[\ell]}\left(\frac{u'}{c}\right) + y_3^{[\ell]}\left(\frac{u}{c}\right) j_5^{[\ell]}\left(\frac{u'}{c}\right) + y_4^{[\ell]}\left(\frac{u}{c}\right) j_0^{[\ell]}\left(\frac{u'}{c}\right)\right) \tag{H.79}$$

with, for $\ell = 0$:

$$y_0^{[0]}(z) = -\frac{1}{z} \tag{H.80}$$

$$y_1^{[0]}(z) = -\frac{\tau}{z} \tag{H.81}$$

$$y_2^{[0]}(z) = -\frac{\sigma}{2} \tag{H.82}$$

$$y_3^{[0]}(z) = -\frac{z}{2} \tag{H.83}$$

$$y_4^{[0]}(z) = \frac{-\tau\sigma + z}{8} \tag{H.84}$$

$$j_0^{[0]}(z) = \tau \tag{H.85}$$

$$j_1^{[0]}(z) = 1 \tag{H.86}$$

$$j_2^{[0]}(z) = \frac{\tau\sigma - z}{2z} \tag{H.87}$$

$$j_3^{[0]}(z) = \frac{\tau z - \sigma}{4z} \tag{H.88}$$

$$j_4^{[0]}(z) = \frac{-3\tau z + \left(3 + 2z^2\right)\sigma}{32z} \tag{H.89}$$

$$j_5^{[0]}(z) = \frac{-\tau z + \left(1 + 2z^2\right)\sigma}{32z} \tag{H.90}$$

and $\ell = 1$:

$$y_0^{[1]}(z) = -\frac{\tau}{z^2} \tag{H.91}$$
$$y_1^{[1]}(z) = -\frac{1}{z^2} \tag{H.92}$$
$$y_2^{[1]}(z) = \frac{1}{2} \tag{H.93}$$
$$y_3^{[1]}(z) = \frac{\tau}{2} \tag{H.94}$$
$$y_4^{[1]}(z) = \frac{\tau\sigma}{8} \tag{H.95}$$
$$j_0^{[1]}(z) = \frac{z}{3} \tag{H.96}$$
$$j_1^{[1]}(z) = \frac{\tau z - \sigma}{2z^2} \tag{H.97}$$
$$j_2^{[1]}(z) = \frac{-3\tau z + \left(3 + 2z^2\right)\sigma}{8z^2} \tag{H.98}$$
$$j_3^{[1]}(z) = \frac{-3\tau\sigma + \left(3z + z^3\right)}{12z^2} \tag{H.99}$$
$$j_4^{[1]}(z) = \frac{\left(15 + 6z^2\right)\tau\sigma - \left(15z + 11z^3\right)}{288z^2} \tag{H.100}$$
$$j_5^{[1]}(z) = \frac{-\left(3 - 6z^2\right)\tau\sigma - \left(3z - 5z^3\right)}{72z^2} \tag{H.101}$$

These explicit expressions feature singularity problems when $u \to 0$, therefore it is preferable to evaluate them using the recurrence algorithm provided by Braams and Karney [10].

H.4 Local first-order Legendre integral term

If the test-particle distribution is a maxwellian $f_{Ma} \equiv n_a m_a / \left[4\pi c K_2\left(m_a c^2/T_a\right)\right] \exp\left[-\gamma m_a c^2/T_a\right]$, we have

$$\frac{\partial f_{Ma}}{\partial p} = -\frac{p}{\gamma m_a T_a} f_{Ma} = -\frac{u}{\gamma T_a} f_{Ma} \tag{H.102}$$
$$\frac{\partial f_{Ma}}{\partial \xi} = 0 \tag{H.103}$$

The first-order term for the collision operator reads

$$\begin{aligned} C\left[f_{Ma}, \xi f_b^{[1]}\right] =& \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \cdot \left[\left(\xi\left[\nu_l^{[1]} - \frac{1}{\gamma m_a T_a} D_l^{[1]}\right]\mathbf{p} + \left(1 - \xi^2\right)\left[\nu_t^{[1]} - \frac{1}{\gamma m_a T_a} D_\times^{[1]}\right]\mathbf{e}_\xi\right) f_a\right] \\ =& \xi f_{Ma}\left(u\frac{\partial \nu_l^{[1]}}{\partial u} + 3\nu_l^{[1]} - 2\nu_t^{[1]} - \frac{u^2}{\gamma T_a}\nu_l^{[1]}\right. \\ & \left. - \frac{1}{\gamma m_a T_a}\left[u\frac{\partial D_l^{[1]}}{\partial u} + \left(3 - \frac{u^2}{\gamma^2 c^2}\right) D_l^{[1]} - 2D_\times^{[1]}\right] + \frac{u^2}{\gamma^2 m_a T_a^2} D_l^{[1]}\right) \end{aligned} \tag{H.104}$$

with

$$\begin{aligned}\frac{\partial \nu_l^{[1]}}{\partial u} =&\frac{\Gamma_{ab}^K}{m_a}\left(\frac{\gamma}{u^2}-\frac{1}{\gamma c^2}\right)\left(\frac{\partial \Psi_1^{[1]}}{\partial u}-\frac{2}{c^2}\frac{\partial \Psi_2^{[1]}}{\partial u}\right)-\frac{\Gamma_{ab}^K}{m_a}\frac{\gamma}{u}\left(\frac{\partial^2 \Psi_1^{[1]}}{\partial u^2}-\frac{2}{c^2}\frac{\partial^2 \Psi_2^{[1]}}{\partial u^2}\right)\\ =&\frac{\Gamma_{ab}^K}{m_a}\frac{\gamma}{u}\left[\frac{3}{u}\left(\frac{\partial \Psi_1^{[1]}}{\partial u}-\frac{2}{c^2}\frac{\partial \Psi_2^{[1]}}{\partial u}\right)-\frac{1}{\gamma^2}\left(\left[f_b^{[1]}-\frac{2}{c^2}\Psi_1^{[1]}\right]+\frac{2}{u^2}\left[\Psi_1^{[1]}-\frac{2}{c^2}\Psi_2^{[1]}\right]\right)\right] \qquad \text{(H.105)}\\ \frac{\partial D_l^{[1]}}{\partial u} =&\Gamma_{ab}^D\frac{\gamma}{u}\left[u\frac{\partial \Psi_0^{[1]}}{\partial u}+\frac{2}{u}\frac{\partial \Psi_3^{[1]}}{\partial u}-\frac{8\gamma^2}{uc^2}\frac{\partial \Psi_4^{[1]}}{\partial u}\right.\\ &-2\left(\Psi_0^{[1]}-\left(\frac{2}{u}+\frac{3u}{c^2}\right)\frac{\partial \Psi_3^{[1]}}{\partial u}+\left(\frac{2}{u^2}+\frac{3}{c^2}\right)\Psi_3^{[1]}\right)\\ &+\frac{8}{c^2}\left(\Psi_3^{[1]}-\left(\frac{2}{u}+\frac{3u}{c^2}\right)\frac{\partial \Psi_4^{[1]}}{\partial u}+\left(\frac{2}{u^2}+\frac{3}{c^2}\right)\Psi_4^{[1]}\right)\\ &-\frac{1}{u\gamma^2}\left(u\Psi_0^{[1]}-2\gamma^2\frac{\partial \Psi_3^{[1]}}{\partial u}+\frac{2}{u}\Psi_3^{[1]}+\frac{8\gamma^2}{c^2}\frac{\partial \Psi_4^{[1]}}{\partial u}-\frac{8\gamma^2}{uc^2}\Psi_4^{[1]}\right)\\ &\left.+\left(\Psi_0^{[1]}-\frac{4u}{c^2}\frac{\partial \Psi_3^{[1]}}{\partial u}-\frac{2}{u^2}\Psi_3^{[1]}+\frac{16u}{c^4}\frac{\partial \Psi_4^{[1]}}{\partial u}-\frac{8}{c^2}\left(\frac{2}{c^2}-\frac{\gamma^2}{u^2}\right)\Psi_4^{[1]}\right)\right]\\ =&\Gamma_{ab}^D\frac{\gamma}{u}\left[u\frac{\partial \Psi_0^{[1]}}{\partial u}-\left(1+\frac{1}{\gamma^2}\right)\Psi_0^{[1]}+\frac{2}{u}\left(3+\gamma^2\right)\frac{\partial \Psi_3^{[1]}}{\partial u}-\frac{16}{uc^2}\left(1+\gamma^2\right)\frac{\partial \Psi_4^{[1]}}{\partial u}\right.\\ &\left.-\frac{2}{u^2}\left(4-\gamma^2+\frac{1}{\gamma^2}\right)\Psi_3^{[1]}+\frac{16}{u^2c^2}\left(1+\gamma^2\right)\Psi_4^{[1]}\right] \qquad \text{(H.106)}\end{aligned}$$

so that

$$u\frac{\partial \nu_l^{[1]}}{\partial u}+3\nu_l^{[1]}-2\nu_t^{[1]}=-\frac{\Gamma_{ab}^K}{m_a}\frac{1}{\gamma}\left(f_b^{[1]}-\frac{2}{c^2}\Psi_1^{[1]}\right) \qquad \text{(H.107)}$$

$$u\frac{\partial D_l^{[1]}}{\partial u}+\left(3-\frac{u^2}{\gamma^2c^2}\right)D_l^{[1]}-2D_\times^{[1]}=\Gamma_{ab}^D\frac{\gamma}{u}\left(u^2\frac{\partial \Psi_0^{[1]}}{\partial u}-u\Psi_0^{[1]}-\frac{2u^2}{c^2}\frac{\partial \Psi_3^{[1]}}{\partial u}+\frac{2u}{c^2}\Psi_3^{[1]}\right) \qquad \text{(H.108)}$$

We can deduce

$$\begin{aligned}C\left[f_{Ma},\xi f_b^{[1]}\right]=&4\pi\xi f_{Ma}\frac{\Gamma_{ab}}{m_a}\left(\frac{m_a}{m_b}\left[\frac{1}{\gamma}f_b^{[1]}-\frac{u}{T_a}\frac{\partial \Psi_1^{[1]}}{\partial u}-\frac{2}{\gamma c^2}\Psi_1^{[1]}+\frac{2u}{T_ac^2}\frac{\partial \Psi_2^{[1]}}{\partial u}\right]\right.\\ &-\frac{u}{T_a}\frac{\partial \Psi_0^{[1]}}{\partial u}+\left[\frac{1}{T_a}-\frac{u^2}{\gamma T_a^2}\right]\Psi_0^{[1]}+\left[\frac{2u}{T_ac^2}+\frac{2\gamma u}{T_a^2}\right]\frac{\partial \Psi_3^{[1]}}{\partial u}-\left[\frac{2}{T_ac^2}+\frac{2}{\gamma T_a^2}\right]\Psi_3^{[1]}\\ &\left.-\frac{8\gamma u}{T_a^2c^2}\frac{\partial \Psi_4^{[1]}}{\partial u}+\frac{8\gamma}{T_a^2c^2}\Psi_4^{[1]}\right) \qquad \text{(H.109)}\end{aligned}$$

We therefore obtain the same resulting integral term as Braams and Karney [10].

Appendix I

Moments of the distribution function

Many useful characteristics of a population of particles, such as the density, toroidal current density, density of power dissipated on collisions, cyclotron or bremsstrahlung emission, etc, can be obtained from the kinetic description by calculating moments of the distribution function. This moments are often calculated locally in space, and take the following form

$$\Phi\left(t,\mathbf{x}\right)=\iiint d^{3}p\,\mathcal{M}\left(t,\mathbf{x},\mathbf{p}\right)f\left(t,\mathbf{x},\mathbf{p}\right) \tag{I.1}$$

where $f(t,\mathbf{x},\mathbf{p})$ is the particle distribution function and $\mathcal{M}\left(t,\mathbf{x},\mathbf{p}\right)$ is an operator acting on f. If the operator $\mathcal{M}$ is gyro-independent - which we assume in this section -, the transformation to GC phase space in an axisymmetric plasma is straightforward and we can write $\mathcal{M}_{\mathrm{gc}}(t,\psi,\theta,p,\xi)=\mathcal{M}(t,\mathbf{x},\mathbf{p})$ [13].

I.1 Flux-surface averaging

In axisymmetric (ψ,θ,ϕ) geometry, the flux-surface average of a scalar quantity $\Phi(t,\psi,\theta)$ is

$$\left\langle \Phi\right\rangle \left(t,\psi\right)=\frac{2\pi}{dV/d\psi}\int_{0}^{2\pi}\frac{d\theta}{B^{\theta}}\Phi\left(t,\psi,\theta\right) \tag{I.2}$$

where $dV/d\psi=2\pi\int d\theta/B^{\theta}$ is the incremental volume of a flux-surface. Similarly, using $\boldsymbol{\nabla}\phi=\hat{\boldsymbol{\phi}}/R$, the flux-surface averaged flux in the toroidal direction of a vector field $\boldsymbol{\Phi}(t,\psi,\theta)$ is

$$\left\langle \boldsymbol{\Phi}\right\rangle _{\phi}\left(t,\psi\right)=\frac{1}{dS_{\phi}/d\psi}\int_{0}^{2\pi}\frac{d\theta}{RB^{\theta}}\hat{\boldsymbol{\phi}}\cdot\boldsymbol{\Phi}\left(t,\psi,\theta\right) \tag{I.3}$$

where $dS_{\phi}/d\psi=\int d\theta/(RB^{\theta})$ is the incremental poloidal surface element.

I.2 Local expression

Using the Jacobian $J_{\mathbf{X},p,\xi}=p^{2}B_{\parallel}^{\star}/B$ for the (p,ξ,φ) system (3.84), the local moment in GC coordinates can be expressed as

$$\Phi\left(t,\psi,\theta\right)\equiv\overline{\mathcal{M}_{\mathrm{gc}}}=2\pi\int_{0}^{\infty}dp\,p^{2}\int_{-1}^{1}d\xi\frac{B_{\parallel}^{\star}}{B}\mathcal{M}_{\mathrm{gc}}F\left(t,\psi,\theta,p,\xi\right) \tag{I.4}$$

In the low collisionality regime we have $F(t,\psi,\theta,p,\xi)=F^{(0)}(t,\overline{\psi},p,\xi_{0})$ where $(\overline{\psi},\xi_{0})$ are functions of (ψ,θ,p,ξ) through (2.42)-(2.43). The moment (I.4) can also use the ξ_{0} coordinate in terms of ξ,

$$\overline{\mathcal{M}_{\mathrm{gc}}}\left(t,\psi,\theta\right)=2\pi\int_{0}^{\infty}dp\,p^{2}\int_{-1}^{1}d\xi_{0}\frac{\xi_{0}}{\xi}\frac{B_{\parallel}^{\star}}{B_{0}\left(\overline{\psi}\right)}\mathcal{M}_{\mathrm{gc}}F^{(0)}(t,\overline{\psi},p,\xi_{0}) \tag{I.5}$$

The flux-surface average of $\overline{\mathcal{M}_{\rm gc}}$ is then given by (I.2)

$$\left\langle \overline{\mathcal{M}_{\rm gc}} \right\rangle (t,\psi) = \frac{(2\pi)^2}{dV/d\psi} \int_0^\infty dp\, p^2 \int_{-1}^1 d\xi_0 \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{d\theta}{B^\theta} \frac{\xi_0}{\xi} \frac{B_\parallel^\star}{B_0\left(\overline{\psi}\right)} \mathcal{M}_{\rm gc} F^{(0)}(t,\overline{\psi},p,\xi_0) \tag{I.6}$$

where $\overline{\psi}$ is a function of (ψ,θ,p,ξ_0). In I.6 the limits of integration for trapped orbits, θ_1 and θ_2, are the same as in the orbit-averaging operation (2.56) since $\psi = \overline{\psi}$ at the turning points.

If $\boldsymbol{M}_{\rm gc}$ is a vector field operator, the flux-surface averaged flux in the toroidal direction is (I.3)

$$\left\langle \overline{\boldsymbol{M}_{\rm gc}} \right\rangle_\phi (t,\psi) = \frac{2\pi}{dS_\phi/d\psi} \int_0^\infty dp\, p^2 \int_{-1}^1 d\xi_0 \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{d\theta}{RB^\theta} \frac{\xi_0}{\xi} \frac{B_\parallel^\star}{B_0\left(\overline{\psi}\right)} \hat{\boldsymbol{\phi}} \cdot \boldsymbol{M}_{\rm gc} F^{(0)}(t,\overline{\psi},p,\xi_0) \tag{I.7}$$

I.3 Expression in the space of invariants

Alternatively, it is also possible to express (I.4) directly in the $Z^\alpha = (\overline{\psi},\theta,p,\xi_0)$ system [13]

$$\overline{\mathcal{M}_{\rm gc}}\,(t,\psi,\theta) = (2\pi)^2 \iiint d\overline{\psi} dp d\xi_0\, \mathcal{J} B^\theta \delta\left(\tilde{\psi}-\psi\right) \mathcal{M}_{\rm gc}^{(0)} F^{(0)}(t,\overline{\psi},p,\xi_0) \tag{I.8}$$

where $\mathcal{M}_{\rm gc}^{(0)}\left(t,\overline{\psi},\theta,p,\xi_0\right) = \mathcal{M}_{\rm gc}(t,\tilde{\psi},\theta,p,\xi)$. From (I.8), the flux-surface average of Φ is (I.2)

$$\left\langle \overline{\mathcal{M}_{\rm gc}} \right\rangle (t,\psi) = \frac{(2\pi)^3}{dV/d\psi} \iiint d\overline{\psi} dp d\xi_0\, \mathcal{J}_{\mathcal{O}} \left\langle \sigma \mathcal{G} \delta\left(\tilde{\psi}-\psi\right) \mathcal{M}_{\rm gc}^{(0)} \right\rangle_{\mathcal{O}} F^{(0)}(t,\overline{\psi},p,\xi_0) \tag{I.9}$$

Similarly, the flux-surface averaged flux of $\boldsymbol{\Phi}$ is the toroidal direction is (I.3)

$$\left\langle \overline{\boldsymbol{M}_{\rm gc}} \right\rangle_\phi (t,\psi) = \frac{(2\pi)^2}{dS_\phi/d\psi} \iiint d\overline{\psi} dp d\xi_0\, \mathcal{J}_{\mathcal{O}} \left\langle \frac{\sigma\mathcal{G}}{R} \delta\left(\tilde{\psi}-\psi\right) \hat{\boldsymbol{\phi}} \cdot \boldsymbol{M}_{\rm gc}^{(0)} \right\rangle_{\mathcal{O}} F^{(0)}(t,\overline{\psi},p,\xi_0) \tag{I.10}$$

Within the thin orbit width approximation, $\mathcal{G}=1$ in (I.9) and (I.10).

Practically, both the expressions (I.6) and (I.9) can be used to evaluate flux-surface averaged moments. Numerically, (I.6) involves interpolations to evaluate $F(t,\psi,\theta,p,\xi) = F^{(0)}(t,\overline{\psi},p,\xi_0)$, while (I.9) requires a modeling of the delta function $\delta(\tilde{\psi}-\psi)$ term by a rectangular function, a Gaussian, etc. Note that in (I.9) the calculation of the bounce-averaged term involves only GC orbits - which is also needed to evaluate (7.14)-(7.16) - and can be done in parallel with the calculation of the distribution function.

Among useful flux-surface averaged moments of the distribution function we can mention: the density $n(t,\psi) = \left\langle \overline{1} \right\rangle$, the parallel toroidal current density $J_{\parallel\phi} = \left\langle \overline{Zev_\parallel \hat{\mathbf{b}}} \right\rangle_\phi$, and the density of power deposited on particles through the evolution operator C : $P_C = \left\langle \overline{\mathcal{E} C_{\rm gc}} \right\rangle$.

Annexe J

Publications

Orbit-averaged guiding-center Fokker–Planck operator

A. J. Brizard,[1] J. Decker,[2] Y. Peysson,[2] and F.-X. Duthoit[2]
[1]*Department of Chemistry and Physics, Saint Michael's College, Colchester, Vermont 05439, USA*
[2]*CEA, IRFM, Saint-Paul-lez-Durance F-13108, France*

(Received 23 June 2009; accepted 25 September 2009; published online 12 October 2009)

A general orbit-averaged guiding-center Fokker–Planck operator suitable for the numerical analysis of transport processes in axisymmetric magnetized plasmas is presented. The orbit-averaged guiding-center operator describes transport processes in a three-dimensional guiding-center invariant space: the orbit-averaged magnetic-flux invariant $\bar{\psi}$, the minimum-B pitch-angle coordinate ξ_0, and the momentum magnitude p. © *2009 American Institute of Physics*.
[doi:10.1063/1.3249627]

I. INTRODUCTION

Transport processes play a dominant role in the long-time behavior of strongly magnetized plasmas. In the absence of wave-induced (or turbulent) transport, the long-time magnetic confinement of plasmas is based on the small dimensionless parameter $\epsilon_B \equiv \rho/L_B \ll 1$ (the ratio of the characteristic gyroradius ρ and the magnetic nonuniformity length scale L_B). For such plasmas, the dimensionless parameter $\epsilon_\nu \equiv L_B/\lambda_\nu$ (λ_ν being the mean free path) can be used to describe different classes of collisional transport processes, such as classical collisional transport[1] ($\lambda_\nu \ll L_B$) and neoclassical "collisionless" transport[2] ($\lambda_\nu \gg L_B$). The quasilinear (wave-induced) transport processes associated with rf-induced heating and current drive, on the other hand, cause a slow time evolution of the background plasma distribution (as a result of one or more wave-particle resonances) with a time-scale ordering that is quadratic in a small parameter $\epsilon_w = |\mathbf{B}_w|/|\mathbf{B}_0| \ll 1$ associated with the rf-wave amplitude.[3,4]

Because the long-time behavior of the plasma distribution function for each particle species depends on competing collisional and quasilinear transport processes, an accurate treatment of both transport processes in realistic magnetic geometry is a crucial element in determining the equilibrium and behavior of fusion plasmas. For this purpose, the use of dynamical-reduction methods (e.g., guiding-center transformation[5,6]) can yield reduced transport operators (in phase space) that possess attractive numerical properties in addition to accurately representing collisional[7] and/or quasilinear[4] transport processes of interest.

The purpose of the present paper is to present a brief derivation of a general orbit-averaged guiding-center Fokker–Planck operator suitable for numerical studies of transport processes in general axisymmetric magnetic geometry. This reduced Fokker–Planck operator represents drag and diffusion processes in a three-dimensional space composed of guiding-center invariants. In this reduced formulation, the conjugate orbital angles have either been eliminated from the guiding-center Fokker–Planck operator by averaging or are absent by axisymmetry.

The remainder of the paper is organized as follows. In Sec. II, we discuss the guiding-center Hamiltonian dynamics of charged particles in unperturbed axisymmetric magnetic geometry. In Sec. III, we introduce the guiding-center Fokker–Planck operator previously derived for general magnetic geometry and arbitrary guiding-center orbit topology.[7] In Sec. IV, we first introduce the orbit-averaging operation for standard and nonstandard guiding-center orbits in axisymmetric tokamak geometry. Next, we present the orbit-averaged guiding-center Fokker–Planck operator and discuss its properties. In Sec. V, we briefly discuss the derivation of the bounce-center Fokker–Planck operator obtained by performing the bounce-center phase-space transformation[8,9] on the guiding-center Fokker–Planck operator and discuss its connection to the orbit-averaged guiding-center Fokker–Planck operator derived in the previous section. Lastly, we summarize our work in Sec. VI and discuss its applications.

II. GUIDING-CENTER DYNAMICS IN AXISYMMETRIC MAGNETIC GEOMETRY

The existence of the small parameter $\epsilon_B \ll 1$ in magnetically confined plasmas forms the basis of the unperturbed guiding-center dynamical reduction,[6] in which the fast gyromotion time scale associated with the gyroangle ζ_g (with $\dot{\zeta}_g \equiv \epsilon_B^{-1}\Omega$), with the gyroaction $J_g \equiv \mu B/\Omega$ acting as its canonically conjugate (adiabatic) invariant, is asymptotically decoupled from the parallel and cross-field motions of a guiding-center particle. The unperturbed guiding-center dynamics is expressed in terms of the guiding-center position $\mathbf{X}$ and the parallel velocity $v_\parallel$, where the guiding-center velocity

$$\dot{\mathbf{X}} = v_\parallel \hat{\mathbf{b}} + \epsilon_B \frac{\hat{\mathbf{b}}}{m\Omega} \times (\mu \nabla B + m v_\parallel^2 \hat{\mathbf{b}} \cdot \nabla \hat{\mathbf{b}}) \equiv v_\parallel \hat{\mathbf{b}} + \epsilon_B \mathbf{v}_B \tag{1}$$

is decomposed in terms of a parallel velocity $v_\parallel \equiv \hat{\mathbf{b}} \cdot \dot{\mathbf{X}}$ along a field line and a slower cross-field drift velocity $\mathbf{v}_B$ due to weak magnetic-field nonuniformity. The guiding-center parallel acceleration,

$$\dot{v}_\parallel = -\frac{\mu}{m}\left(\hat{\mathbf{b}} + \epsilon_B \frac{\mathbf{v}_B}{v_\parallel}\right) \cdot \nabla B, \tag{2}$$

guarantees that the guiding-center kinetic energy,

 © 2009 American Institute of Physics

Downloaded 13 Oct 2009 to 132.166.200.86. Redistribution subject to AIP license or copyright; see http://pop.aip.org/pop/copyright.jsp

$$\mathcal{E} = \frac{m}{2}v_\parallel^2 + \mu B \equiv \frac{p^2}{2m}, \tag{3}$$

is a constant of motion ($\dot{\mathcal{E}} \equiv 0$ for a time-independent magnetic field and in the absence of an electric field). In Eqs. (1) and (2), the guiding-center magnetic-moment invariant μ and the coordinates $(\mathbf{X}, v_\parallel)$ in the reduced four-dimensional guiding-center phase space are expressed as asymptotic expansions in powers of the small parameter ϵ_B, where first-order corrections explicitly take into account magnetic-field nonuniformity.[5]

We note that, while a nonrelativistic guiding-center formulation is considered here, its generalization to a relativistic formulation (appropriate for fast electrons) can easily be accommodated.[10] The kinetic energy (3) is thus replaced with $\mathcal{E}=(\gamma-1)mc^2$, the parallel velocity $v_\parallel$ is replaced with the relativistic parallel momentum $p_\parallel = \gamma m v_\parallel$, and the magnetic moment μ is replaced with the relativistic magnetic moment $\mu = |\mathbf{p}_\perp|^2/2mB$, where the relativistic factor is $\gamma = (1+2\mu B/mc^2 + p_\parallel^2/m^2c^2)^{1/2}$. Additional details on relativistic guiding-center dynamics in axisymmetric magnetic geometry can be found in Ref. 11.

A. Axisymmetric magnetic geometry

The general axisymmetric magnetic field considered in the present paper is expressed in terms of three equivalent representations:[12]

$$\mathbf{B} = \begin{cases} \nabla\phi \times \nabla\psi + q(\psi)\,\nabla\,\psi \times \nabla\theta, \\ B_\phi \nabla\,\phi + B_\theta \nabla\,\theta + B_\psi \nabla\,\psi, \\ B^\phi\,\partial\mathbf{X}/\partial\phi + B^\theta\,\partial\mathbf{X}/\partial\theta, \end{cases} \tag{4}$$

where the two-covariant, covariant, and contravariant representations (from top to bottom, respectively) are expressed in terms of the (poloidal) magnetic flux ψ, which satisfies the condition $\mathbf{B}\cdot\nabla\psi = 0$ (i.e., magnetic field lines lie entirely on a constant-ψ surface), and the poloidal and toroidal angles θ and ϕ. The toroidal and poloidal components of the magnetic field (4) are $B_{\rm tor} = B_\phi/R = B^\phi R$, where $R \equiv |\partial\mathbf{X}/\partial\phi| = |\nabla\phi|^{-1}$, and $B_{\rm pol} = |\nabla\psi|/R = B^\theta |\partial\mathbf{X}/\partial\theta|$. The safety factor $q(\psi)$ appearing in the two-covariant representation is defined as[13]

$$q(\psi) \equiv \frac{\mathbf{B}\cdot\nabla\phi}{\mathbf{B}\cdot\nabla\theta} = \frac{B^\phi}{B^\theta}. \tag{5}$$

We note that, because of the magnetic-flux condition $\mathbf{B}\cdot\nabla\psi = 0$, the covariant component $B_\psi \equiv -B_\theta(\nabla\theta\cdot\nabla\psi)/|\nabla\psi|^2$ in Eq. (4) vanishes only if the coordinates ψ and θ are orthogonal. The spatial Jacobian $\mathcal{V}$ associated with the coordinates (ψ,θ,ϕ) is

$$\mathcal{V} \equiv (\nabla\psi\times\nabla\theta\cdot\nabla\phi)^{-1} = (\mathbf{B}\cdot\nabla\theta)^{-1} = (B^\theta)^{-1}, \tag{6}$$

where B^θ is assumed to be positive. Lastly, the infinitesimal length element along a magnetic field line is

$$ds \equiv \frac{B}{B^\theta} d\theta. \tag{7}$$

Note that, according to the standard axisymmetric tokamak ordering (with $B \simeq B_{\rm tor}$), the ratio B/B^θ can also be expressed as $B/B^\theta = B/[B_{\rm tor}/(qR)] \simeq qR$, so that we recover the standard approximation $ds \simeq qR d\theta$.

B. Guiding-center motion in axisymmetric magnetic geometry

The guiding-center motion in arbitrary magnetic geometry described by Eqs. (1) and (2) possesses two constants of the motion: the total guiding-center energy (3) and the guiding-center magnetic moment μ. Guiding-center motion in general axisymmetric magnetic geometry (4) is also characterized, according to Noether's theorem, by a third constant of the motion: the toroidal canonical guiding-center momentum

$$P_\phi \equiv \frac{\partial\mathbf{X}}{\partial\phi}\cdot\left(\frac{e}{c}\mathbf{A} + mv_\parallel\hat{\mathbf{b}}\right) = -\frac{e}{c}(\psi - \rho_\parallel B_\phi). \tag{8}$$

Here, the vector potential $\mathbf{A} = -\psi\nabla\phi + \psi_{\rm tor}(\psi)\nabla\theta$ (with $q \equiv d\psi_{\rm tor}/d\psi$ defined in terms of the toroidal magnetic flux $\psi_{\rm tor}$) was obtained from the two-covariant representation in Eq. (4), where the coordinates (ψ,θ,ϕ) now describe the guiding-center position $\mathbf{X}$, $\rho_\parallel \equiv v_\parallel/\Omega$ denotes the parallel gyroradius, and $B_\phi \equiv \mathbf{B}\cdot\partial\mathbf{X}/\partial\phi$ denotes the covariant component of the axisymmetric magnetic field.

The projection of the two-dimensional drift surface,[2]

$$\psi - \rho_\parallel B_\phi \equiv \bar{\psi}, \tag{9}$$

onto the poloidal plane (X,Z) generates a closed curve $\psi = \tilde{\psi}(\theta)$ parametrized by the poloidal angle θ and labeled by the guiding-center invariants $(\bar{\psi},\mathcal{E},\mu)$:

$$\tilde{\psi}(\theta,\sigma;\bar{\psi},\mathcal{E},\mu) \equiv \bar{\psi} + \delta\psi(\theta,\sigma;\bar{\psi},\mathcal{E},\mu), \tag{10}$$

where the "bounce-radius" $\delta\psi = \tilde{\psi} - \bar{\psi}$ represents the departure of the drift surface (10), labeled by $\bar{\psi}$, from a magnetic surface ψ and $\sigma = \pm 1$ denotes the sign of $v_\parallel$. A guiding-center orbit $\mathcal{O}$ is obtained either by integrating the guiding-center equations of motion,

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &\equiv \dot{\mathbf{X}}\cdot\nabla\psi = v_\parallel\hat{\mathbf{b}}\cdot\nabla\psi + \epsilon_B\mathbf{v}_B\cdot\nabla\psi \equiv \epsilon_B\dot{\psi}_B \\ \dot{\theta} &\equiv \dot{\mathbf{X}}\cdot\nabla\theta = v_\parallel\hat{\mathbf{b}}\cdot\nabla\theta + \epsilon_B\mathbf{v}_B\cdot\nabla\theta \equiv v_\parallel B^\theta/B + \epsilon_B\dot{\theta}_B, \end{aligned} \tag{11}$$

for a given set of guiding-center invariants $(\bar{\psi},\mathcal{E},\mu)$ or generating the orbit directly by the constant-of-motion method.[14] For each *generic* set of guiding-center invariants $(\bar{\psi},\mathcal{E},\mu)$, there corresponds a unique guiding-center orbit $\mathcal{O}$, which is either a *trapped-particle* orbit (if the bounce-radius $\delta\psi$ vanishes along the orbit), or a *passing-particle* orbit (if the bounce-radius $\delta\psi$ does not vanish). Nongeneric orbits[15] include the *stagnation* orbits (where $\dot{\theta}=0$ or $v_\parallel B^\theta/B = -\epsilon_B\dot{\theta}_B \neq 0$) and the *pinch* orbits (barely trapped orbits in the zero-banana-width limit).

On each flux-surface ψ, the magnetic field amplitude is assumed to vary monotonically between a minimum value $B_0(\psi)$ and a maximum value $B_1(\psi)$, located at the poloidal locations $\theta_0(\psi)$ and $\theta_1(\psi)$, respectively. The turning points

Downloaded 13 Oct 2009 to 132.166.200.86. Redistribution subject to AIP license or copyright; see http://pop.aip.org/pop/copyright.jsp

$(\psi_b, \theta_b^{\pm})$ of trapped-particle orbits $(\bar{\psi}, \mathcal{E}, \mu)$ are located on the drift-surface label $\psi_b = \bar{\psi}$, where the magnetic field reaches its maximum value along the orbit and $\delta\psi(\theta_b^{\pm}, \pm 1; \psi_b, \mathcal{E}, \mu) \equiv 0$. Consequently, the **X** point separating trapped-particle and passing-particle orbits parametrized by the drift-surface label $\bar{\psi}$ is located at the position $[\bar{\psi}, \theta_1(\bar{\psi})]$.

While the magnetic moment μ is an important invariant for guiding-center dynamics, the pitch-angle coordinate

$$\xi(\tilde{\psi}, \sigma;\ \mathcal{E}, \mu) = v_{\parallel}/v = \sigma\sqrt{1 - \mu B(\tilde{\psi})/\mathcal{E}} \tag{12}$$

is better suited in describing the transition between trapped-particle and passing-particle orbits. In order to convert the pitch-angle coordinate into a suitable guiding-center invariant, we replace the guiding-center magnetic-moment invariant μ with[16]

$$\xi_0(\tilde{\psi}, \sigma;\ \mathcal{E}, \mu) \equiv \begin{cases} \sqrt{1 - \mu B_0(\bar{\psi})/\mathcal{E}} & \text{(for trapped-particle orbits)}, \\ \sigma\sqrt{1 - \mu B_0(\bar{\psi})/\mathcal{E}} & \text{(for passing-particle orbits)}. \end{cases} \tag{13}$$

The physical interpretation of the pitch-angle invariant ξ_0 can be given in terms of its connection with the bounce-action invariant J_b. With this definition, the trapped-passing separatrix given by the relation

$$1 - (1 - \xi_0^2) B_1(\bar{\psi})/B_0(\bar{\psi}) = 0,$$

which is an even function of ξ_0 and does not depend upon the energy $\mathcal{E}$ (important for numerical applications).

The guiding-center Jacobian in coordinates $(\mathbf{X}, p, \xi, \zeta_g)$ is $\mathcal{J}_{gc} \equiv p^2$, while in terms of the coordinates $(\mathbf{X}, p, \xi_0, \zeta_g)$, it is $\mathcal{J}_{gc0} \equiv p^2 |\partial\xi/\partial\xi_0| = p^2 \Psi |\xi_0/\xi|$, where we used the definition $\Psi(\tilde{\psi}, \theta) \equiv B(\tilde{\psi}, \theta)/B_0(\tilde{\psi})$ with the relation

$$|\xi| = \sqrt{1 - \Psi(1 - \xi_0^2)}. \tag{14}$$

Next, the spatial Jacobian in coordinates $\mathbf{X} \equiv (\bar{\psi}, \theta, \phi)$ is $\mathcal{V} = [B^{\theta}(\tilde{\psi})]^{-1}$, so that the total guiding-center Jacobian in coordinates $(\bar{\psi}, \theta, \phi; p, \xi_0, \zeta_g)$ is

$$\mathcal{J} \equiv \mathcal{V}\mathcal{J}_{gc0} = p^2 \frac{\Psi}{B^{\theta}} \left| \frac{\xi_0}{\xi} \right| = \frac{p^2}{B_0} \left(\frac{B}{B^{\theta}} \left| \frac{\xi_0}{\xi} \right| \right). \tag{15}$$

In the next section, we express a general guiding-center Fokker–Planck operator in terms of the guiding-center invariants $(\bar{\psi}, p, \xi_0)$ in a form that will be suitable for orbit averaging in Sec. IV.

III. GENERAL GUIDING-CENTER FOKKER–PLANCK EQUATION

The Fokker–Planck equation[2,3,17] forms a paradigm for the investigation of classical, neoclassical, and quasilinear transport processes in plasmas. When written in terms of the test-particle phase-space coordinates $(\mathbf{x}, \mathbf{p})$, the general Fokker–Planck operator is expressed as a local partial-differential operator in momentum space:[2]

$$\mathcal{C}[f](\mathbf{x}, \mathbf{p}) = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \cdot \left(\mathbf{K} f(\mathbf{x}, \mathbf{p}) - \mathbf{D} \cdot \frac{\partial f(\mathbf{x}, \mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}} \right), \tag{16}$$

where the Fokker–Planck momentum-friction vector **K** and the momentum-diffusion tensor **D** are functions of $(\mathbf{x}, \mathbf{p})$. When representing collisional transport processes, for example, these Fokker–Planck coefficients $\mathbf{K} \equiv \Sigma' \mathbf{K}[f']$ and $\mathbf{D} \equiv \Sigma' \mathbf{D}[f']$ are expressed as integral operators acting on the field-particle distribution f' (where the field-particle species may coincide with the test-particle species). Hence, the Fokker–Planck operator (16) may either be a linear, bilinear, or nonlinear operator acting f, depending on the type of transport problem one wishes to investigate.

While collisions and wave-particle interactions take place locally in particle phase space $\mathbf{z} = (\mathbf{x}, \mathbf{p})$, the transformation to reduced phase-space coordinates $\bar{\mathbf{z}}$ (e.g., guiding-center coordinates) will generically introduce transport coefficients in the full reduced phase space. This implies that the Fokker–Planck coefficients (K^i, D^{ij}) in three-dimensional particle-momentum space are replaced with six-dimensional reduced phase-space Fokker-Planck coefficients $(\bar{K}^{\alpha}, \bar{D}^{\alpha\beta})$, defined as

$$\bar{K}^{\alpha}(\bar{\mathbf{z}}) \equiv \left[K^i(\mathbf{z}) \frac{\partial \bar{z}^{\alpha}(\mathbf{z})}{\partial p^i} \right]_{\mathbf{z} = \mathbf{z}(\bar{\mathbf{z}})} \quad \text{and}$$
$$\bar{D}^{\alpha\beta}(\bar{\mathbf{z}}) \equiv \left[\frac{\partial \bar{z}^{\alpha}(\mathbf{z})}{\partial p^i} D^{ij}(\mathbf{z}) \frac{\partial \bar{z}^{\beta}(\mathbf{z})}{\partial p^j} \right]_{\mathbf{z} = \mathbf{z}(\bar{\mathbf{z}})}, \tag{17}$$

and the Fokker–Planck operator (16) transforms to

$$\bar{\mathcal{C}}[\bar{f}](\bar{\mathbf{z}}) = -\frac{1}{\bar{\mathcal{J}}} \frac{\partial}{\partial \bar{z}^{\alpha}} \left[\bar{\mathcal{J}} \left(\bar{K}^{\alpha} \bar{f} - \bar{D}^{\alpha\beta} \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}^{\beta}} \right) \right], \tag{18}$$

where $\bar{f}(\bar{\mathbf{z}}) \equiv f(\mathbf{z})$ is the particle distribution expressed in terms of the reduced phase-space coordinates and $\bar{\mathcal{J}}$ is the Jacobian for the transformation $\mathbf{z} \to \bar{\mathbf{z}}$. The most important aspect of the transformation to Eq. (18) involves the choice of the new phase-space coordinates $\bar{\mathbf{z}}$. Note that the definitions (17) for the reduced phase-space Fokker–Planck coefficients require that the transformation $\mathbf{z} \to \bar{\mathbf{z}}(\mathbf{z})$ and its inverse $\bar{\mathbf{z}} \to \mathbf{z}(\bar{\mathbf{z}})$ must be known up to the desired order in magnetic-field nonuniformity.

One possible choice is to adopt a canonical action-angle formulation,[18] where $\bar{\mathbf{z}} = (\bar{\mathbf{J}}, \bar{\boldsymbol{\theta}})$ includes the three-dimensional action invariants $\bar{\mathbf{J}}$ for magnetically confined particles and their canonically conjugate angles $\bar{\boldsymbol{\theta}}$ (which are ignorable coordinates by construction $\partial \bar{f}/\partial \bar{\boldsymbol{\theta}} \equiv 0$). While the three-dimensional action-space Fokker–Planck operator derived by Bernstein and Molvig[18] formally describes classical and neoclassical transport processes in axisymmetric magnetic geometry, it is not suitable for numerical implementation since some of the action coordinates (e.g., the bounce action J_b) are not *local* coordinates. Hence, the action-space Fokker–Planck operator does not describe local transport processes, which makes the transport analysis of its results difficult to interpret.

Another choice is to adopt *local* noncanonical guiding-center coordinates[7,16] leading to the construction of a re-

Downloaded 13 Oct 2009 to 132.166.200.86. Redistribution subject to AIP license or copyright; see http://pop.aip.org/pop/copyright.jsp

duced guiding-center Fokker–Planck operator. In a weakly nonuniform plasma with a strong axisymmetric magnetic field, for example, the reduced guiding-center Fokker–Planck equation describes transport processes in a four-dimensional space: the poloidal-flux and poloidal-angle coordinates (ψ,θ) in physical space and the energy and magnetic moment coordinates $(\mathcal{E},\mu)$ in velocity space, which are invariants for the guiding-center motion. Here, the reduction from six to four dimensions is associated with the fact that the guiding-center plasma distribution is independent of the gyroangle ζ_g (by definition) and the toroidal angle ϕ (by axisymmetry), so that transport along these ignorable angles is irrelevant. While Zaitsev *et al.*[16] considered the lowest-order definitions (in magnetic-field nonuniformity) for their choice of guiding-center coordinates, Brizard[7] considered first-order corrections $(\epsilon_B=\rho/L_B\ll 1)$ as well. In both works, classical collisional transport appears in Eq. (17) as a result of the lowest-order relation $\partial\mathbf{X}/\partial\mathbf{p}=-\hat{\mathbf{b}}\times\mathbf{I}/m\Omega$ for the guiding-center position $\mathbf{X}(\mathbf{x},\mathbf{p})\equiv\mathbf{x}-\boldsymbol{\rho}_0(\mathbf{x},\mathbf{p})$, where $\boldsymbol{\rho}_0\equiv\hat{\mathbf{b}}\times\mathbf{p}/m\Omega$ represents the lowest-order gyroradius. The higher-order guiding-center corrections kept by Brizard[7] are consistent with the low-collisionality regime, where the mean-free-path $\lambda_\nu>L_B$ is longer than the magnetic-nonuniformity length scale L_B.

A. Guiding-center Fokker–Planck operator

The derivation of a reduced Fokker–Planck operator that is suitable for numerical implementation must begin with finding local invariant coordinates that also allow relative computational simplicity for realistic magnetic geometries. In the present work, the exact invariants associated with the time-independent axisymmetric magnetic geometry are the kinetic momentum $p=\sqrt{2m\mathcal{E}}$ and the drift-surface label $\bar{\psi}=\psi_b$ (for trapped particles) or ψ_t (for passing particles). As our third invariant coordinate, we use the pitch-angle invariant ξ_0, defined in Eq. (13), which allows an explicit representation of the trapping and detrapping transport processes.

Once a set of invariant guiding-center coordinates $I^a=(\bar{\psi},p,\xi_0)$ is chosen (not necessarily action coordinates), the transformation of the Fokker–Planck operator (16) can be greatly simplified by writing it in Poisson-bracket form as

$$\mathcal{C}[f]=\equiv-\{x^i,(K^i f-D^{ij}\{x^j,f\})\}, \tag{19}$$

where the noncanonical Poisson bracket $\{\cdots\}$ is used to replace momentum partial derivatives $\partial g/\partial p_i\equiv\{x^i,g\}$. The significant computational advantage of this Poisson-bracket formulation (19) is based on the fact that Poisson brackets transform naturally under the type of phase-space transformations considered in the present work (i.e., those generated by Lie-transform methods).

The general guiding-center Fokker–Planck operator was derived by Brizard[7] as a result of the guiding-center dynamical reduction of the Fokker–Planck operator (16):

$$\mathcal{C}_{gc}[F]\equiv\langle\mathbf{T}_{gc}^{-1}\mathcal{C}[\mathbf{T}_{gc}F]\rangle_g$$
$$=-\langle\{X^i+\rho_\epsilon^i,(\mathbf{T}_{gc}^{-1}K^iF-\mathbf{T}_{gc}^{-1}D^{ij}\{X^j+\rho_\epsilon^j,F\}_{gc})\}_{gc}\rangle_g, \tag{20}$$

where $\mathbf{T}_{gc}$ and $\mathbf{T}_{gc}^{-1}$ denote the pull-back and push-forward (Lie-transform) operators associated with the guiding-center transformation for a nonuniform magnetic field, $\langle\cdots\rangle_g$ denotes an average with respect to the guiding-center gyroangle ζ_g, and $\{\cdots\}_{gc}$ denotes the guiding-center Poisson bracket. In Eq. (20), the generalized gyroradius vector $\boldsymbol{\rho}_\epsilon$ contains first-order corrections associated with magnetic-field nonuniformity.

When we use the phase-space-divergence property of Poisson bracket

$$\{F,G\}_{gc}\equiv\frac{1}{\mathcal{J}}\frac{\partial}{\partial Z^\alpha}(\mathcal{J}\{F,Z^\alpha\}_{gc}G),$$

where F and G are two arbitrary guiding-center phase-space functions, we can write the divergence form of the guiding-center Fokker–Planck operator (20):

$$\mathcal{C}_{gc}[F]\equiv-\frac{1}{\mathcal{J}}\frac{\partial}{\partial Z^\alpha}\left[\mathcal{J}\left(\mathcal{K}_{gc}^\alpha F-\mathcal{D}_{gc}^{\alpha\beta}\frac{\partial F}{\partial Z^\beta}\right)\right], \tag{21}$$

where $\mathcal{J}$ is the total Jacobian (15). The guiding-center Fokker–Planck friction components,

$$\mathcal{K}_{gc}^\alpha\equiv\langle\mathbf{T}_{gc}^{-1}\mathbf{K}\cdot\boldsymbol{\Delta}^\alpha\rangle_g, \tag{22}$$

and the guiding-center Fokker–Planck diffusion components,

$$\mathcal{D}_{gc}^{\alpha\beta}\equiv\langle(\boldsymbol{\Delta}^\alpha)^{\mathsf{T}}\cdot\mathbf{T}_{gc}^{-1}\mathbf{D}\cdot\boldsymbol{\Delta}^\beta\rangle_g, \tag{23}$$

are expressed in terms of the guiding-center push-forward expressions $\mathbf{T}_{gc}^{-1}\mathbf{K}$ and $\mathbf{T}_{gc}^{-1}\mathbf{D}$ of the particle momentum-space Fokker–Planck friction vector $\mathbf{K}$ and diffusion tensor $\mathbf{D}$, and the vector-valued *projection* coefficients

$$\boldsymbol{\Delta}^\alpha\equiv\{\mathbf{X}+\boldsymbol{\rho}_\epsilon,Z^\alpha\}_{gc}=\boldsymbol{\Delta}^{\mathbf{X}}\cdot\nabla Z^\alpha+\boldsymbol{\Delta}^{\mathcal{E}}\frac{\partial Z^\alpha}{\partial\mathcal{E}}+\boldsymbol{\Delta}^\mu\frac{\partial Z^\alpha}{\partial\mu}. \tag{24}$$

Here, the guiding-center vector-valued projection coefficients in $(\mathbf{X},\mathcal{E},\mu)$ space,[7]

$$\boldsymbol{\Delta}^{\mathbf{X}}=\hat{\mathbf{b}}\times\mathbf{I}/(m\Omega)=-(\boldsymbol{\Delta}^{\mathbf{X}})^{\mathsf{T}}$$
$$\boldsymbol{\Delta}^{\mathcal{E}}=\mathbf{p}_\epsilon/m \tag{25}$$
$$\boldsymbol{\Delta}^\mu=(\Omega/B)\,\partial\boldsymbol{\rho}_\epsilon/\partial\zeta_g,$$

are constructed from the guiding-center Poisson-bracket expressions involving the guiding-center push-forward of the particle position $\mathbf{T}_{gc}^{-1}\mathbf{x}\equiv\mathbf{X}+\boldsymbol{\rho}_\epsilon$, where the generalized gyroradius $\boldsymbol{\rho}_\epsilon\equiv\mathbf{T}_{gc}^{-1}\boldsymbol{\rho}$ and the generalized guiding-center momentum

$$\mathbf{p}_\epsilon\equiv\mathbf{T}_{gc}^{-1}\mathbf{p}=m\left(\frac{d_{gc}\mathbf{X}}{dt}+\frac{d_{gc}\boldsymbol{\rho}_\epsilon}{dt}\right) \tag{26}$$

contain first-order corrections associated with the guiding-center transformation. Note that, while the projection coefficients $\boldsymbol{\Delta}^{\mathcal{E}}$ and $\boldsymbol{\Delta}^\mu$ in Eq. (25) retain first-order corrections in magnetic-field nonuniformity, we omitted first-order correc-

Downloaded 13 Oct 2009 to 132.166.200.86. Redistribution subject to AIP license or copyright; see http://pop.aip.org/pop/copyright.jsp

tions in $\mathbf{\Delta}^{\mathbf{X}}$ since they yield second-order contributions in the final expressions for Eq. (21).

B. Guiding-center projection vectors

Using the definitions for the invariant-space coordinates $I^a=(\bar{\psi},p,\xi_0)$, the guiding-center vector-valued projection coefficients $\mathbf{\Delta}^a=(\mathbf{\Delta}^{\psi},\mathbf{\Delta}^p,\mathbf{\Delta}^{\xi_0})$ are expressed as[7]

$$\mathbf{\Delta}^{\bar{\psi}} \equiv \mathbf{\Delta}^{\mathbf{X}}\cdot\nabla\bar{\psi}=\frac{\hat{\mathbf{b}}}{m\Omega}\times\nabla\bar{\psi}, \tag{27}$$

$$\mathbf{\Delta}^{p} \equiv \mathbf{\Delta}^{\mathcal{E}}\frac{\partial p}{\partial\mathcal{E}}=\frac{\mathbf{p}_{\epsilon}}{|\mathbf{p}_{\epsilon}|}, \tag{28}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{\Delta}^{\xi_0} &\equiv \mathbf{\Delta}^{\mathbf{X}}\cdot\nabla\xi_0+\mathbf{\Delta}^{\mathcal{E}}\frac{\partial\xi_0}{\partial\mathcal{E}}+\mathbf{\Delta}^{\mu}\frac{\partial\xi_0}{\partial\mu}\\ &=\left(\frac{1-\xi_0^2}{2\xi_0}\right)\left[\left(\frac{\mathbf{p}_{\epsilon}}{m\mathcal{E}}-\frac{\Omega}{\mu B}\frac{\partial\boldsymbol{\rho}_{\epsilon}}{\partial\zeta_g}\right)-\mathbf{\Delta}^{\bar{\psi}}\frac{d\ln B_0}{d\bar{\psi}}\right].\end{aligned} \tag{29}$$

We now discuss the physical nature of the projection vectors (27)–(29).

1. Guiding-center radial projection

Using the magnetic representation (4), the guiding-center radial projection vector (27) becomes

$$\begin{aligned}\mathbf{\Delta}^{\bar{\psi}} &= \frac{\hat{\mathbf{b}}}{m\Omega}\times\nabla\bar{\psi}\\ &=-\frac{c}{eB^2}[|\nabla\bar{\psi}|^2\nabla\phi-q(\nabla\bar{\psi}\times\nabla\theta)\times\nabla\bar{\psi}]\\ &\equiv-\frac{c}{e}\frac{|\nabla\bar{\psi}|^2}{B^2}\nabla_{\psi}\chi,\end{aligned} \tag{30}$$

where we introduced the anglelike coordinate $\chi\equiv\phi-q(\bar{\psi})\theta$, such that the two-covariant representation of the axisymmetric magnetic field (4) becomes $\mathbf{B}\equiv\nabla\chi\times\nabla\bar{\psi}$. Here, $\nabla_{\psi}\theta\equiv(\nabla\bar{\psi}\times\nabla\theta)\times\nabla\bar{\psi}/|\nabla\bar{\psi}|^2$ denotes the projection of the gradient of θ that is perpendicular to $\nabla\bar{\psi}$, while $\nabla_{\psi}\phi\equiv\nabla\phi$ (since $\nabla\phi\cdot\nabla\bar{\psi}\equiv0$). Hence, the guiding-center radial projection vector (30) projects momentum-space transport processes onto a magnetic-flux surface in a direction that is locally perpendicular to $\hat{\mathbf{b}}$.

The guiding-center radial projection vector $\mathbf{\Delta}^{\bar{\psi}}$, whose magnitude is

$$|\mathbf{\Delta}^{\bar{\psi}}|\equiv\frac{|\nabla\bar{\psi}|}{m\Omega}=\frac{cB_{\mathrm{pol}}}{eB}R,$$

therefore generates the local projection of the guiding-center push-forward of the momentum-space Fokker–Planck friction,

$$\mathcal{K}_{gc}^{\bar{\psi}}=\langle\mathbf{T}_{gc}^{-1}\mathbf{K}\rangle_g\cdot\frac{\hat{\mathbf{b}}}{m\Omega}\times\nabla\bar{\psi}, \tag{31}$$

and the momentum-space Fokker–Planck diffusion

$$\mathcal{D}_{gc}^{a\bar{\psi}}=\langle\mathbf{\Delta}^a\cdot\mathbf{T}_{gc}^{-1}\mathbf{D}\rangle_g\cdot\frac{\hat{\mathbf{b}}}{m\Omega}\times\nabla\bar{\psi}, \tag{32}$$

$$\mathcal{D}_{gc}^{\bar{\psi}\bar{\psi}}=\frac{\hat{\mathbf{b}}}{m\Omega}\times\nabla\bar{\psi}\cdot\langle\mathbf{T}_{gc}^{-1}\mathbf{D}\rangle_g\cdot\frac{\hat{\mathbf{b}}}{m\Omega}\times\nabla\bar{\psi}, \tag{33}$$

where $a\neq\bar{\psi}$ in Eq. (32). These projections only take into account transport processes occurring within a magnetic-flux surface. The connection between radial transport and toroidal and/or poloidal rotation is therefore naturally contained within this projection.

2. Guiding-center energy projection

The guiding-center energy projection vector (28) is expressed as

$$\mathbf{\Delta}^{p}\equiv\frac{\mathbf{p}_{\epsilon}}{|\mathbf{p}_{\epsilon}|}=\hat{\mathbf{p}}+\epsilon\mathbf{\Delta}_1^p+\cdots, \tag{34}$$

where $\mathbf{\Delta}_1^p$ denotes the first-order correction of $\mathbf{\Delta}^p$. It can be explicitly expressed in terms of the gyroangle-independent first-order gyroradius $\bar{\boldsymbol{\rho}}_{gc}\equiv(\hat{\mathbf{b}}/\Omega)\times\mathbf{v}_B$ and $\boldsymbol{\rho}_{\epsilon}\equiv\boldsymbol{\rho}_0+\epsilon\boldsymbol{\rho}_1$ as[7]

$$\mathbf{\Delta}_1^p=\frac{1}{\rho}\left(\bar{\boldsymbol{\rho}}_{gc}\times\hat{\mathbf{b}}+\frac{\partial\boldsymbol{\rho}_1}{\partial\zeta_g}\right)+\xi\hat{\mathbf{b}}\cdot\nabla^*\boldsymbol{\rho}_0\equiv\Delta_{1\xi}^p\frac{\partial\hat{\mathbf{p}}}{\partial\xi}+\Delta_{1\zeta}^p\frac{\partial\hat{\mathbf{p}}}{\partial\zeta_g}, \tag{35}$$

where $\rho\equiv p/(m\Omega)$ is the gyroradius magnitude for a deeply trapped particle (i.e., for $\xi_0=0$) and

$$\frac{1}{\rho}\bar{\boldsymbol{\rho}}_{gc}\times\hat{\mathbf{b}}=\rho\hat{\mathbf{b}}\times\left[\frac{1}{2}(1-\xi^2)\nabla\ln B+\xi^2\hat{\mathbf{b}}\cdot\nabla\hat{\mathbf{b}}\right].$$

It can be shown explicitly, however, that $\mathbf{\Delta}_1^p$ does not have any component directed along the zeroth-order unit vector $\hat{\mathbf{p}}$ (because the guiding-center kinetic energy is identical to the particle kinetic energy). Hence, the magnitude of the guiding-center energy projection vector (28) is $|\mathbf{\Delta}^p|\equiv1$ up to second order in magnetic-field nonuniformity.

3. Guiding-center pitch-angle projection

The guiding-center pitch-angle projection vector (29) is expressed as

$$\begin{aligned}\mathbf{\Delta}^{\xi_0} &= \frac{\sqrt{1-\xi_0^2}}{p\xi_0}\left[\frac{\xi}{\sqrt{\Psi}}\hat{\boldsymbol{\xi}}+\epsilon\sqrt{1-\xi_0^2}\left(\mathbf{\Delta}_1^p-\frac{(\partial\boldsymbol{\rho}_1/\partial\zeta_g)}{\rho_0(1-\xi_0^2)}\right.\right.\\ &\left.\left.-\frac{\rho}{2}\hat{\mathbf{b}}\times\nabla\ln B_0\right)\right]\equiv\frac{\sqrt{1-\xi_0^2}}{p\xi_0}\frac{\xi\hat{\boldsymbol{\xi}}}{\sqrt{\Psi}}+\epsilon\mathbf{\Delta}_1^{\xi_0},\end{aligned} \tag{36}$$

where $\mathbf{\Delta}_1^{\xi_0}$ denotes the first-order correction of $\mathbf{\Delta}^{\xi_0}$. To lowest order in magnetic-field nonuniformity, we find $|\mathbf{\Delta}^{\xi_0}|=\sqrt{1-\xi_0^2}\xi/(p\sqrt{\Psi}\xi_0)$.

Downloaded 13 Oct 2009 to 132.166.200.86. Redistribution subject to AIP license or copyright; see http://pop.aip.org/pop/copyright.jsp

C. Guiding-center Fokker–Planck equation

Now that the guiding-center Fokker–Planck components are expressed in terms of the invariant-space coordinates $I^a=(\bar{\psi},p,\xi_0)$, we turn our attention to the guiding-center Fokker–Planck kinetic equation. When the original guiding-center coordinates $(\psi,\theta,\phi;\mathcal{E},\mu,\zeta_g)$ are used in describing guiding-center dynamics in axisymmetric magnetic geometry (where we replace the guiding-center parallel velocity $v_\parallel$ with the guiding-center energy $\mathcal{E}$ and the gyroangle ζ_g is an ignorable coordinate),[19] the guiding-center Vlasov evolution operator is ordered as[5]

$$\frac{d_{gc}}{dt}\equiv\epsilon_\tau\frac{\partial}{\partial\tau}+\left(v_\parallel\frac{B^\theta}{B}+\epsilon_B\dot{\theta}_B\right)\frac{\partial}{\partial\theta}+\epsilon_B\dot{\psi}_B\frac{\partial}{\partial\psi}, \tag{37}$$

where we used $\partial/\partial\phi\equiv 0$ (by definition of axisymmetry), explicit time dependence is over long time scales (i.e., $\partial/\partial t\equiv\epsilon_\tau\partial/\partial\tau$ is ordered small), and the guiding-center dynamics on the poloidal plane is represented by Eq. (11).

For each generic set of guiding-center invariants $(\bar{\psi},\mathcal{E},\mu)$, the guiding-center Fokker–Planck kinetic equation is expressed as

$$\epsilon_\tau\frac{\partial F}{\partial\tau}+\dot{\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}+\epsilon_B\frac{\partial\delta\psi}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial\psi}\right)F=\epsilon_\nu\mathcal{C}_{gc}[F], \tag{38}$$

where the magnetic-flux drift motion

$$\dot{\psi}\equiv\frac{\partial\delta\psi}{\partial\theta}\dot{\theta} \tag{39}$$

is expressed in terms of the bounce radius (10) when it is projected onto the guiding-center orbit $\mathcal{O}$ associated with the guiding-center invariants $(\bar{\psi},\mathcal{E},\mu)$. While the topology of these orbits can be rather complicated,[14,15,20–22] our discussion will remain as general as possible concerning the nature of the axisymmetric magnetic geometry. Whether a guiding-center orbit $\mathcal{O}$ corresponds to a trapped-particle orbit or a passing-particle orbit, however, the motion is periodic in the poloidal plane (ψ,θ) and a generic orbital period in the poloidal plane,

$$\tau_{\mathcal{O}}\equiv\oint_{\mathcal{O}}\frac{d\theta}{\dot{\theta}}, \tag{40}$$

is defined as a closed-loop integral along the drift-orbit curve $\mathcal{O}$ parametrized by the poloidal angle θ (at constant invariants $\bar{\psi}$, $\mathcal{E}$, and μ). Note that the definition (40) of the orbital period can also be given in terms of $d\psi/\dot{\psi}$,[14] which, when evaluated along the guiding-center orbit $\mathcal{O}$, yields $(d\psi/\dot{\psi})_{\mathcal{O}}\equiv d\theta(\partial\delta\psi/\partial\theta)/\dot{\psi}=d\theta/\dot{\theta}$ upon using Eq. (39).

IV. ORBIT-AVERAGED GUIDING-CENTER FOKKER–PLANCK EQUATION IN LOW-COLLISIONALITY REGIME

A. Orbit-averaging operator in axisymmetric magnetic geometry and low collisionality regime

In the neoclassical transport regime $\epsilon_\nu=\nu\tau_{\mathcal{O}}\ll 1$, the guiding-center Fokker–Planck kinetic Eq. (38) reduces to leading order to $\dot{\theta}\partial F/\partial\theta=0$, which states that $F\equiv\bar{F}(\bar{\psi},\sigma,\mathcal{E},\mu;\tau)$ is independent of the poloidal angle θ. The physical picture is that guiding centers orbits undergo many poloidal cycles before being perturbed by collisions.

We now introduce the *orbit*-averaging operation

$$\langle\cdots\rangle_{\mathcal{O}}\equiv\frac{1}{\tau_{\mathcal{O}}}\oint_{\mathcal{O}}(\cdots)\frac{d\theta}{\dot{\theta}}, \tag{41}$$

where the orbital period $\tau_{\mathcal{O}}$ is defined in Eq. (40). By orbit-averaging the guiding-center Fokker–Planck kinetic Eq. (38) in the low-collisionality approximation, we finally obtain the orbit-averaged guiding-center Fokker–Planck kinetic equation

$$\epsilon_\tau\frac{\partial\bar{F}}{\partial\tau}=\epsilon_\nu\langle\mathcal{C}_{gc}[\bar{F}]\rangle_{\mathcal{O}}, \tag{42}$$

which describes the collisional time evolution of the orbit-averaged guiding-center distribution

$$\langle F\rangle_{\mathcal{O}}=\bar{F}(\bar{\psi},\sigma,\mathcal{E},\mu;\tau), \tag{43}$$

and the guiding-center Fokker–Planck operator is given by Eq. (21).

Lastly, we note that the relation between the magnetic flux ψ and its orbit-averaged value $\langle\psi\rangle_{\mathcal{O}}$ (the "drift-center" position) is expressed as[18]

$$\psi\equiv\langle\psi\rangle_{\mathcal{O}}+(\delta\psi-\langle\delta\psi\rangle_{\mathcal{O}}), \tag{44}$$

where the drift-surface label is $\bar{\psi}\equiv\langle\psi\rangle_{\mathcal{O}}-\langle\delta\psi\rangle_{\mathcal{O}}$. For trapped and passing particles, we therefore obtain the following relations for the deviations from a magnetic-flux surface:

$$\begin{pmatrix}\psi-\langle\psi\rangle_b\\ \psi-\langle\psi\rangle_t\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}\delta\psi\\ \delta\psi-\langle\delta\psi\rangle_t\end{pmatrix}, \tag{45}$$

where we used the fact that $\langle\delta\psi\rangle_b\equiv 0$ for trapped particles, while $\langle\delta\psi\rangle_t\neq 0$ for passing particles (since $\delta\psi$ does not change sign along a passing-particle orbit). These relations show that, while the deviation $\delta\psi$ for a trapped particle may be large, the deviation $(\delta\psi-\langle\delta\psi\rangle_t)$ for a passing particle is in general small.

B. Approximate orbit-averaging operator

In this section, an explicit expression for the orbit-averaged guiding-center Fokker–Planck operator that appears on the right side of Eq. (42) is derived. In general, the orbit-averaging operation (41) must be computed along numerically calculated orbits. However, useful analytical expressions of the orbit-averaged guiding-center Fokker–Planck operator can be obtained when the orbit deviation $\delta\psi/|\nabla\psi|$ is small as compared to the local minor radius r. The difference between the exact incremental time element $d\theta/\dot{\theta}$ and the approximate time element $ds/v_\parallel$ is of order ϵ_B^2 and can be neglected when compared to the corrections of order ϵ_B in the Fokker–Planck operator. The orbital period (40) thus becomes

Downloaded 13 Oct 2009 to 132.166.200.86. Redistribution subject to AIP license or copyright; see http://pop.aip.org/pop/copyright.jsp

$$\tau_{\mathcal{O}}(\bar{\psi},\sigma,\mathcal{E},\mu) \simeq \oint_{\mathcal{O}} \frac{ds}{v_{\parallel}} = \frac{1}{v}\oint_{\mathcal{O}} \frac{d\theta}{\xi(\tilde{\psi},\sigma;\mathcal{E},\mu)} \frac{B(\tilde{\psi},\theta)}{B^{\theta}(\tilde{\psi},\theta)}. \tag{46}$$

The orbit topology is explicitly taken into account in Eq. (46) through the dependence of the integrand $B/(\xi B^{\theta})$ on the bounce-radius $\delta\psi(\theta,\sigma;\bar{\psi},\mathcal{E},\mu) \equiv \tilde{\psi}-\bar{\psi}$ defined in Eq. (10), where $\bar{\psi}=\psi_b$ (for trapped particles) or ψ_t (for passing particles). Note that the orbital period (46) is exact for stagnation orbits (where $\dot{\theta}=0$ yields $\dot{\theta}_B=-v_{\parallel}B^{\theta}/B$).

In the definition of the orbital period (46), it is convenient to extract the magnetic-geometric factor

$$\Lambda(\bar{\psi},p,\xi_0) \equiv \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \frac{B(\tilde{\psi},\theta)}{B^{\theta}(\tilde{\psi},\theta)}, \tag{47}$$

which defines the length of an orbit on the drift-surface labeled by $\bar{\psi}$. In the standard axisymmetric tokamak ordering, we find $\Lambda \simeq 2\pi q(\bar{\psi})R_0$, where R_0 denotes the major radius of the magnetic axis. Next, we define the normalized orbital period

$$\lambda(\bar{\psi},p,\xi_0) \equiv \frac{1}{\Lambda}\oint_{\mathcal{O}} d\theta \frac{\xi_0 B}{\xi B^{\theta}} = \left(\frac{v|\xi_0|}{\Lambda}\right)\tau_{\mathcal{O}}, \tag{48}$$

which satisfies the condition $\lambda(\psi_t,p,|\xi_0|=1)\equiv 1$ for completely passing particles (i.e., $|\xi|=1$ and $\mu=0$ so that $v_{\parallel}=v$ is a constant of motion). Note that the orbital period (46) [or normalized orbital period (48)] becomes infinite on the boundary that separates trapped-particle orbits and passing-particle orbits (i.e., pinch orbits). Hence, the low-collisionality approximation ($\partial F/\partial\theta=0$) does not technically hold very close to the trapped-passing boundary, where the bounce and transit periods become much larger than the characteristic collisional time scale ν^{-1}. However, the fraction of particles with $\lambda \gg 1$ is very small since the corresponding singularity is integrable. Indeed, by introducing ξ_{0b} such that $1-\Psi(1-\xi_{0b}^2)=0$, it can be shown that

$$\int_0^1 \lambda(\bar{\psi},p,\xi_0)d\xi_0 = \frac{1}{\Lambda}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{B}{B^{\theta}}d\theta\int_{\xi_{0b}}^{1}\frac{\xi_0 d\xi_0}{\sqrt{1-\Psi(1-\xi_0^2)}} = \frac{1}{\Lambda}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{B_0}{B^{\theta}}d\theta,$$

which is a geometrical factor of order unity.

Using the Jacobian (15), the normalized bounce period (48) is now expressed as

$$\lambda(\bar{\psi},p,\xi_0) = \frac{B_0}{\Lambda p^2}\oint_{\mathcal{O}} \mathcal{J}d\theta \equiv 2\pi\mathcal{J}_{\mathcal{O}}\frac{B_0}{\Lambda p^2}, \tag{49}$$

so that the orbital period (46) becomes

$$\tau_{\mathcal{O}} = \frac{2\pi\mathcal{J}_{\mathcal{O}}B_0}{vp^2|\xi_0|}. \tag{50}$$

The orbit-averaging operation (41) becomes

$$\langle\cdots\rangle_{\mathcal{O}}(\bar{\psi},p,\xi_0) = \frac{1}{\tau_{\mathcal{O}}}\oint_{\mathcal{O}}(\cdots)\frac{ds}{v_{\parallel}} = \frac{1}{\tau_{\mathcal{O}}}\oint_{\mathcal{O}}(\cdots)\frac{Bd\theta}{v\xi B^{\theta}} = \frac{1}{\mathcal{J}_{\mathcal{O}}}\oint_{\mathcal{O}}(\cdots)\mathcal{J}\frac{d\theta}{2\pi}. \tag{51}$$

For trapped-particle orbits, the orbit-average (51) yields the explicit formula for bounce-averaging operation

$$\langle\cdots\rangle_b(\psi_b,p,\xi_0) \equiv \frac{1}{\tau_b}\sum_{\sigma}\int_{\theta_b^-}^{\theta_b^+}(\cdots)\frac{d\theta}{v|\xi|}\frac{B}{B^{\theta}} = \frac{1}{\mathcal{J}_{\mathcal{O}}}\left[\frac{1}{2}\sum_{\sigma}\right]\int_{\theta_b^-}^{\theta_b^+}(\cdots)\mathcal{J}\frac{d\theta}{2\pi}. \tag{52}$$

Here, the summation is over the sign σ of ξ and, therefore, the symbol $(1/2)\Sigma_{\sigma}$ takes the average (for trapped particles) between values of the integrand for $\xi>0$ and values of the integrand for $\xi<0$. For passing-particle orbits, on the other hand, the orbit-average (51) yields the explicit formula for transit-averaging operation

$$\langle\cdots\rangle_t(\psi_t,p,\xi_0) \equiv \frac{1}{\mathcal{J}_{\mathcal{O}}}\int_0^{2\pi}(\cdots)\mathcal{J}\frac{d\theta}{2\pi}. \tag{53}$$

C. Orbit-averaged guiding-center Fokker–Planck operator

In the expression for the guiding-center Fokker–Planck operator (21), the guiding-center function $\bar{F}$ is independent of the angle coordinates (θ,ϕ,ζ_g), in the limit of weak collisionality and under the assumptions of axisymmetry and gyroangle invariance. Hence, only derivatives of the guiding-center distribution $\bar{F}$ with respect to the guiding-center invariants I^a will remain in Eq. (21). The coefficients $(\mathcal{K}_{gc}^a,\mathcal{D}_{gc}^{ab})$ and the Jacobian $\mathcal{J}$ in the guiding-center Fokker–Planck operator (21), on the other hand, still depend on the poloidal angle θ. We therefore need to orbit average the guiding-center Fokker–Planck operator (21) according to the orbit-averaging procedure (51).

The orbit-averaged guiding-center Fokker–Planck operator is expressed as

$$\langle\mathcal{C}_{gc}[\bar{F}]\rangle_{\mathcal{O}} \equiv -\frac{1}{\mathcal{J}_{\mathcal{O}}}\frac{\partial}{\partial I^a}\left[\mathcal{J}_{\mathcal{O}}\left(\langle\mathcal{K}_{gc}^a\rangle_{\mathcal{O}}\bar{F}-\langle\mathcal{D}_{gc}^{ab}\rangle_{\mathcal{O}}\frac{\partial\bar{F}}{\partial I^b}\right)\right], \tag{54}$$

where the averaged Jacobian $\mathcal{J}_{\mathcal{O}}$ now becomes the Jacobian for the orbit-averaged guiding-center Fokker–Planck operator (54). Orbit-averaged guiding-center Fokker–Planck operator that treat friction and diffusion in three-dimensional space have been derived previously.[16] While these previous operators retained only the lowest-order terms in magnetic-field nonuniformity, the orbit-averaged guiding-center Fokker–Planck operator (54) retains first-order corrections

Downloaded 13 Oct 2009 to 132.166.200.86. Redistribution subject to AIP license or copyright; see http://pop.aip.org/pop/copyright.jsp

as well, which allows a realistic magnetic geometry to be considered.

The orbit-averaged guiding-center Fokker–Planck operator is widely used in the physics of magnetized plasmas (earth magnetosphere,[4] thermonuclear fusion,[17,23] etc.) For practical applications (such as studying fast particle dynamics generated by rf waves or a constant electric field[24]), analytical expressions often correspond to an oversimplified description of the problem of interest, and therefore a more realistic approach requires full numerical calculations.

For computational purposes, the orbit-averaged guiding-center Fokker–Planck operator (54) is recast in a flux-conservative form

$$\langle \mathcal{C}_{gc}[\bar{F}]\rangle_{\mathcal{O}} \equiv -\frac{1}{\mathcal{J}_{\mathcal{O}}}\frac{\partial}{\partial \bar{\psi}}(\mathcal{J}_{\mathcal{O}}|\nabla\bar{\psi}|_0 S_{\mathbf{L}}^{\bar{\psi}}) - \frac{1}{\mathcal{J}_{\mathcal{O}}}\frac{\partial}{\partial p}(\mathcal{J}_{\mathcal{O}} S_{\mathbf{L}}^{p}) + \frac{1}{\mathcal{J}_{\mathcal{O}} p}\frac{\partial}{\partial \xi_0}(\mathcal{J}_{\mathcal{O}}\sqrt{1-\xi_0^2}\, S_{\mathbf{L}}^{\xi_0}), \tag{55}$$

such that the usual two-grid discretization technique may be applied for the finite-difference method.[25] Particle conservation is therefore naturally satisfied numerically up to second order in the truncation error. In Eq. (55), $S_{\mathbf{L}}^{\bar{\psi}}$ describes particle flux across magnetic flux surfaces, while $S_{\mathbf{L}}^{p}$ and $S_{\mathbf{L}}^{\xi_0}$ account for momentum and pitch-angle dynamics, respectively. From Eq. (54), we have

$$\begin{pmatrix} S_{\mathbf{L}}^{\bar{\psi}} \\ S_{\mathbf{L}}^{p} \\ S_{\mathbf{L}}^{\xi_0} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} K_{\mathbf{L}}^{\bar{\psi}} \\ K_{\mathbf{L}}^{p} \\ K_{\mathbf{L}}^{\xi_0} \end{pmatrix} \bar{F} - \begin{pmatrix} D_{\mathbf{L}}^{\bar{\psi}\bar{\psi}} & D_{\mathbf{L}}^{\bar{\psi}p} & D_{\mathbf{L}}^{\bar{\psi}\xi_0} \\ D_{\mathbf{L}}^{p\bar{\psi}} & D_{\mathbf{L}}^{pp} & D_{\mathbf{L}}^{p\xi_0} \\ D_{\mathbf{L}}^{\xi_0\bar{\psi}} & D_{\mathbf{L}}^{\xi_0 p} & D_{\mathbf{L}}^{\xi_0\xi_0} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} |\nabla\bar{\psi}|_0\, \partial/\partial\bar{\psi} \\ \partial/\partial p \\ -p^{-1}\sqrt{1-\xi_0^2}\, \partial/\partial\xi_0 \end{pmatrix} \bar{F}, \tag{56}$$

where the friction coefficients $K_{\mathbf{L}}^{a}$ and symmetric diffusion coefficients $D_{\mathbf{L}}^{ab}=D_{\mathbf{L}}^{ba}$ may be expressed in terms of guiding-center friction and diffusion components (22) and (23) according to the general relations

$$K_{\mathbf{L}}^{\bar{\psi}} = \frac{1}{|\nabla\bar{\psi}|_0}\langle \mathcal{K}_{gc}^{\bar{\psi}}\rangle_{\mathcal{O}}, \tag{57}$$

$$K_{\mathbf{L}}^{p} = \langle \mathcal{K}_{gc}^{p}\rangle_{\mathcal{O}}, \tag{58}$$

$$K_{\mathbf{L}}^{\xi_0} = -\frac{p}{\sqrt{1-\xi_0^2}}\langle \mathcal{K}_{gc}^{\xi_0}\rangle_{\mathcal{O}}, \tag{59}$$

and

$$D_{\mathbf{L}}^{\bar{\psi}\bar{\psi}} = \frac{1}{|\nabla\bar{\psi}|_0^2}\langle \mathcal{D}_{gc}^{\bar{\psi}\bar{\psi}}\rangle_{\mathcal{O}}, \tag{60}$$

$$D_{\mathbf{L}}^{\bar{\psi}p} = \frac{1}{|\nabla\bar{\psi}|_0}\langle \mathcal{D}_{gc}^{\bar{\psi}p}\rangle_{\mathcal{O}}, \tag{61}$$

$$D_{\mathbf{L}}^{\bar{\psi}\xi_0} = -\frac{p}{\sqrt{1-\xi_0^2}}\frac{1}{|\nabla\bar{\psi}|_0}\langle \mathcal{D}_{gc}^{\bar{\psi}\xi_0}\rangle_{\mathcal{O}}, \tag{62}$$

$$D_{\mathbf{L}}^{pp} = \langle \mathcal{D}_{gc}^{pp}\rangle_{\mathcal{O}}, \tag{63}$$

$$D_{\mathbf{L}}^{p\xi_0} = -\frac{p}{\sqrt{1-\xi_0^2}}\langle \mathcal{D}_{gc}^{p\xi_0}\rangle_{\mathcal{O}}, \tag{64}$$

$$D_{\mathbf{L}}^{\xi_0\xi_0} = \frac{p^2}{1-\xi_0^2}\langle \mathcal{D}_{gc}^{\xi_0\xi_0}\rangle_{\mathcal{O}}. \tag{65}$$

The numerical implementation of the orbit-averaged guiding-center Fokker–Planck operator (55) is described in a forthcoming paper[25] using a novel three-dimensional scheme with fully implicit time evolution. It is incorporated in the code LUKE,[26] which was initially developed for fast electron physics, and will therefore extend its range of applicability to multispecies physics and transport processes.

V. BOUNCE-CENTER FOKKER–PLANCK OPERATOR

The next step in the derivation of a reduced Fokker–Planck operator is to proceed with the construction of a *bounce-center* Fokker–Planck operator

$$\mathcal{C}_{bc}[\hat{F}] \equiv \langle \mathbf{T}_{bc}^{-1}\mathcal{C}_{gc}[\mathbf{T}_{bc}\hat{F}]\rangle_b, \tag{66}$$

where $\mathbf{T}_{bc}^{-1}$ and $\mathbf{T}_{bc}$ are the push-forward and pull-back operators associated with the bounce-center phase-space transformation[6] (and references therein), $\hat{F}\equiv\mathbf{T}_{bc}^{-1}F$ denotes the bounce-center distribution (which is independent of the bounce angle ζ_b), and $\langle\cdots\rangle_b$ denotes averaging with respect to ζ_b. In the bounce-center Fokker–Planck operator (66), finite-orbit effects will explicitly be taken into account.

To see how these finite-orbit effects might arise in the bounce-center Fokker–Planck operator (66), we first express the bounce-center push-forward and pull-back operators as $\mathbf{T}_{bc}^{\pm}\equiv\exp(\pm\epsilon\mathbf{G}_1\cdot\mathbf{d})$, where $\mathbf{G}_1\cdot\mathbf{d}\equiv G_1^a\partial_a$ is defined in terms of the components G_1^a of the first-order generating vector field for the bounce-center transformation and $\epsilon\equiv\epsilon_d=\tau_b/\tau_d \ll 1$ denotes its ordering parameter. Next, we expand the transformed operator,

$$\hat{\mathcal{J}}\mathbf{T}_{bc}^{-1}\mathcal{C}_{gc}[\mathbf{T}_{bc}\hat{F}] = \hat{\mathcal{J}}(e^{-\epsilon\mathbf{G}_1\cdot\mathbf{d}}\mathcal{C}_{gc}[e^{\epsilon\mathbf{G}_1\cdot\mathbf{d}}\hat{F}]), \tag{67}$$

in powers of ϵ, where the bounce-center Jacobian $\hat{\mathcal{J}}$ is defined in terms of the guiding-center Jacobian $\mathcal{J}$ as $\hat{\mathcal{J}}\equiv\mathcal{J}-\epsilon\partial_a(G_1^a\mathcal{J})+\cdots$. By keeping terms up to second order in ϵ, and rearranging terms, we obtain

$$(\hat{\mathcal{J}}+\epsilon\partial_a(G_1^a\hat{\mathcal{J}})+\cdots)\mathcal{C}_{gc}[\hat{F}+\epsilon G_1^b\hat{F}+\cdots] - \epsilon\partial_a(\hat{\mathcal{J}}G_1^a\mathcal{C}_{gc}[\hat{F}+\epsilon G_1^b\partial_b\hat{F}+\cdots])+\cdots, \tag{68}$$

where the first term is simply the original guiding-center Fokker–Planck operator multiplied by the guiding-center Jacobian $\mathcal{J}\equiv\hat{\mathcal{J}}+\epsilon\partial_a(G_1^a\hat{\mathcal{J}})+\cdots$ (i.e., the first term is an exact divergence), while the second term is also an exact divergence in bounce-center phase space. The total bounce-center

Downloaded 13 Oct 2009 to 132.166.200.86. Redistribution subject to AIP license or copyright; see http://pop.aip.org/pop/copyright.jsp

Fokker–Planck operator is therefore guaranteed to retain its phase-space divergence form.

In future work, it will be our purpose to show that finite-orbit effects will appear in the bounce-center Fokker–Planck operator (66) in the form of the second-order term

$$\frac{\epsilon^2}{\hat{\mathcal{J}}}\frac{\partial}{\partial\hat{\psi}}\left\langle \hat{\mathcal{J}}G_1^{\psi}\mathcal{C}_{gc}\left[G_1^{\psi}\frac{\partial\hat{F}}{\partial\hat{\psi}}\right]\right\rangle_b,$$

where $\hat{\psi}$ denotes the bounce-center position and G_1^{ψ} denotes the corresponding component of the bounce-angle-dependent bounce-radius. In the present work, $\langle\psi\rangle_{\mathcal{O}}\equiv\bar{\psi}$ plays the role of the bounce-center position $\hat{\psi}$ for a trapped-particle orbit ($\delta\psi$ plays the role of G_1^{ψ}), while the nonlocal bounce-action J_b (canonically conjugate to the bounce angle ζ_b) is represented by the minimum-B pitch-angle coordinate ξ_0.

VI. SUMMARY

The present work presents the derivation of a general guiding-center Fokker–Planck equation in axisymmetric magnetic geometry (38) that allows first-order corrections in magnetic-field nonuniformity to be retained. The Fokker–Planck operator (21) is obtained from a guiding-center transformation using the set of invariants $(\bar{\psi},p,\xi_0)$. Next, the orbit-averaging procedure is introduced and an explicit Fokker–Planck operator (54) is derived in the low-collisionality limit. This operator is also expressed in a conservative form (55) that is best suited for numerical application. In the continuation of this paper (based on work briefly outlined in Sec. V), future theoretical work will consider finite-orbit effects in a different way by deriving a general bounce-center Fokker–Planck operator using Lie-transform methods.

ACKNOWLEDGMENTS

One of us (A.J.B.) would like to thank the Institut de la Recherche sur la Fusion par confinement Magnétique at CEA Cadarache for their kind hospitality.

This work, supported by the European Communities under the contract of Association between EURATOM and CEA, was carried out within the framework of the European Fusion Development Agreement. The views and opinions expressed herein do not necessarily reflect those of the European Commission.

[1] S. I. Braginskii, in *Reviews of Plasma Physics* (Consultants Bureau, New York, 1965), Vol. 1, p. 205.
[2] F. L. Hinton and R. D. Hazeltine, Rev. Mod. Phys. **48**, 239 (1976).
[3] A. N. Kaufman, Phys. Fluids **15**, 1063 (1972).
[4] A. J. Brizard and A. A. Chan, Phys. Plasmas **11**, 4220 (2004).
[5] R. G. Littlejohn, J. Plasma Phys. **29**, 111 (1983).
[6] For a recent review of Hamiltonian guiding-center theory, see J. R. Cary and A. J. Brizard, Rev. Mod. Phys. **81**, 693 (2009).
[7] A. J. Brizard, Phys. Plasmas **11**, 4429 (2004).
[8] A. J. Brizard, Phys. Plasmas **7**, 3238 (2000).
[9] X. Tao, A. A. Chan, and A. J. Brizard, Phys. Plasmas **14**, 092107 (2007).
[10] A. J. Brizard and A. A. Chan, Phys. Plasmas **6**, 4548 (1999).
[11] W. A. Cooper, Plasma Phys. Controlled Fusion **39**, 931 (1997).
[12] R. B. White, AIP Conf. Proc. **1013**, 59 (2008); **1013**, 127 (2008).
[13] We note that the safety factor q is equal to zero for an axisymmetric dipole magnetic field (since $B_{\phi}=B^{\phi}/|\nabla\phi|^2\equiv 0$).
[14] J. A. Rome and Y.-K. M. Peng, Nucl. Fusion **19**, 1193 (1979).
[15] L.-G. Eriksson and F. Porcelli, Plasma Phys. Controlled Fusion **43**, R145 (2001).
[16] F. S. Zaitsev, M. R. O'Brien, and M. Cox, Phys. Fluids B **5**, 509 (1993).
[17] A brief review of the Fokker–Planck equation is presented by A. G. Peeters and D. Strintzi, Ann. Phys. **17**, 142 (2008).
[18] I. B. Bernstein and K. Molvig, Phys. Fluids **26**, 1488 (1983).
[19] It is important to note here that the guiding-center distribution is independent of the gyroangle ζ_g in the absence of collisions only if the full guiding-center phase-space transformation [with higher-order corrections associated with magnetic-field nonuniformity (Ref. 5)] is considered.
[20] C. T. Hsu and D. J. Sigmar, Phys. Fluids B **4**, 1492 (1992).
[21] J. Egedal, Nucl. Fusion **40**, 1597 (2000).
[22] S. C. Chiu, V. S. Chan, and Y. A. Omelchenko, Phys. Plasmas **9**, 877 (2002).
[23] C. Karney, Comput. Phys. Rep. **4**, 183 (1986).
[24] Y. Peysson and J. Decker, AIP Conf. Proc. **1069**, 176 (2008).
[25] Y. Peysson and J. Decker, "Fully implicit formulation of the 3-D linearized relativistic bounce-averaged Fokker–Planck equation in a magnetized plasma," Comput. Phys. Commun. (submitted).
[26] J. Decker and Y. Peysson. "LUKE: a fast numerical solver for the 3-D relativistic linearized bounce-averaged electron Fokker–Planck equation," Comput. Phys. Commun. (submitted).

Downloaded 13 Oct 2009 to 132.166.200.86. Redistribution subject to AIP license or copyright; see http://pop.aip.org/pop/copyright.jsp

Perturbation analysis of trapped-particle dynamics in axisymmetric dipole geometry

F.-X. Duthoit, A. J. Brizard,[a] Y. Peysson, and J. Decker
CEA, IRFM, F-13108, Saint-Paul-lez-Durance, France

(Received 14 July 2010; accepted 10 August 2010; published online 12 October 2010)

The bounce-action-angle coordinates (J,ζ) for charged particles trapped in an axisymmetric dipole magnetic field are constructed by perturbation analysis. First, the lowest-order bounce-action-angle coordinates (J_0,ζ_0) are derived for deeply trapped particles in the harmonic-oscillator approximation. Next, the Lie-transform perturbation method is used to derive higher-order anharmonic action-angle corrections $(J=J_0+\epsilon_t J_1,\ \zeta=\zeta_0+\epsilon_t\zeta_1)$, where the dimensionless parameter $\epsilon_t\equiv(s_b/r_e)^2\ll 1$ is defined as the ratio of the turning-point distance $|s_b|$ (measured from the equator) along a magnetic field line labeled by the equatorial distance r_e. Explicit expressions (with anharmonic corrections) for the canonical parallel coordinates $s(J,\zeta)$ and $p_\parallel(J,\zeta)$ are presented, which satisfy the canonical identity $\{s,p_\parallel\}\equiv 1$. Lastly, analytical expressions for the bounce and drift frequencies (which include anharmonic corrections) yield excellent agreement with exact numerical results. © *2010 American Institute of Physics*. [doi:10.1063/1.3486554]

I. INTRODUCTION

The dynamics of magnetically confined charged particles exhibits three orbital time scales[1–3] associated with the fast gyromotion (with short period τ_g), the intermediate bounce motion (with intermediate period τ_b), and the slow drift motion (with long period τ_d) around, along, and across magnetic field lines, respectively. To the lowest order, the fast gyromotion involves the circular motion of a charged particle (with mass m and charge q) in the plane transverse to a magnetic field line. The radius of gyration (or gyroradius) $\rho_g=v_\perp/|\omega_g|$ is defined as the ratio of the magnitude of the particle's perpendicular velocity $v_\perp=|\mathbf{v}_\perp|$ and the gyrofrequency $\omega_g=qB/mc$. When the gyroradius ρ_g is smaller than the magnetic nonuniformity length scale L_B (i.e., $\epsilon\equiv\rho_g/L_B\ll 1$), the quasiperiodic gyromotion is nearly circular and the action variable $\mu B/\omega_g$ associated with gyromotion is an adiabatic invariant (here $\mu\equiv mv_\perp^2/2B$ denotes the magnetic moment). In this weakly nonuniform limit, we also have the orbital time-scale separation $\tau_g\ll\tau_b\ll\tau_d$ [as shown in Eq. (35), for example, in axisymmetric dipole geometry], which forms the foundations of guiding-center theory.[1–3]

A. Guiding-center dynamics

The slower bounce and drift motions of a magnetically confined guiding-center are described by the guiding-center Hamiltonian,

$$H_g=\frac{p_\parallel^2}{2m}+\mu B, \tag{1}$$

and the guiding-center phase-space Lagrangian,[4]

$$\Gamma_g=\left(\frac{q}{\epsilon c}\mathbf{A}+p_\parallel\hat{\mathbf{b}}\right)\cdot d\mathbf{X}-H_g dt, \tag{2}$$

where $\mathbf{A}$ denotes the vector potential generating the magnetic field $\mathbf{B}\equiv\nabla\times\mathbf{A}$, $p_\parallel=mv_\parallel$ denotes the guiding-center's parallel momentum, and the term μB plays the role of a spatial potential in which the guiding-center moves. We note that the second-order gyromotion action-angle term $\epsilon(mc/q)\mu d\zeta_g$ has been omitted in the guiding-center phase-space Lagrangian (2) since it plays no dynamical role in the bounce-center dynamics.

Guiding-center dynamics takes place in a four-dimensional phase space,[4] with the magnetic moment μ treated as an invariant and the gyroangle ζ_g treated as an ignorable angle. The magnetic moment μ and the total energy $\mathcal{E}=p_\parallel^2/2m+\mu B$ are thus constant parameters for a given guiding-center orbit. By using the parallel spatial coordinate s along a magnetic field line labeled by the potentials $(\alpha,\beta)\equiv(y^1,y^2)$, for which $\mathbf{B}\equiv\nabla\alpha\times\nabla\beta$ (at least locally) and $\hat{\mathbf{b}}\equiv\partial\mathbf{X}/\partial s$, the guiding-center Lagrangian (2) becomes

$$\Gamma_g=\frac{q}{\epsilon c}\alpha d\beta+p_\parallel(ds+b_i dy^i)-H_g dt, \tag{3}$$

where $\mathbf{A}\equiv\alpha\nabla\beta$ and $\hat{\mathbf{b}}\equiv\nabla s+b_i\nabla y^i$ have been substituted into Eq. (2), and the summation over repeated indices is henceforth implied (unless stated otherwise). The nonvanishing covariant components $b_i\equiv\hat{\mathbf{b}}\cdot\partial\mathbf{X}/\partial y^i$ guarantee that using $\hat{\mathbf{b}}\cdot\nabla y^i\equiv 0$, the magnetic curvature $\hat{\mathbf{b}}\cdot\nabla\hat{\mathbf{b}}=(\hat{\mathbf{b}}\cdot\nabla b_i)\nabla y^i$ is nonvanishing. In addition, we note that the covariant components may also be expressed as $b_i=-\nabla s\cdot\nabla y^i/|\nabla y^i|^2$ (no summation), and thus the magnetic coordinates (α,β,s) are in general nonorthogonal (if at least one component b_i is nonvanishing and we assumed $\nabla\alpha\cdot\nabla\beta\equiv 0$).

[a]Present address: Department of Physics, Saint Michael's College, Colchester, VT 05439, USA.

 © 2010 American Institute of Physics

Downloaded 19 Oct 2010 to 132.169.97.19. Redistribution subject to AIP license or copyright; see http://pop.aip.org/about/rights_and_permissions

B. Bounce-center dynamics

The lowest-order guiding-center motion[3] is periodic on the $(s,p_\parallel)$-plane [defined by holding the magnetic labels (α,β) constant]. The area enclosed by the lowest-order periodic orbit can be used to define the bounce action

$$J(\alpha,\beta;\mathcal{E},\mu) \equiv \frac{1}{2\pi}\oint p_\parallel ds = \frac{1}{\pi}\int_{s_b^-}^{s_b^+} |p_\parallel|(\alpha,\beta,s;\mathcal{E},\mu)ds, \tag{4}$$

where the parallel momentum $p_\parallel$ is a function of the magnetic coordinates (α,β,s) as well as the guiding-center invariants $(\mathcal{E},\mu)$,

$$|p_\parallel|(\alpha,\beta,s;\mathcal{E},\mu) = \sqrt{2m[\mathcal{E}-\mu B(\alpha,\beta,s)]}. \tag{5}$$

By the conservation of energy $\mathcal{E}$ and the magnetic moment μ, a particle following a guiding-center orbit may encounter a turning point along a field line where $p_\parallel$ vanishes (at a bounce point $s=s_b$, where $\dot{s}_0 \equiv 0$) and a guiding-center becomes *trapped* between two such turning points $s_b^\pm$. The canonically conjugate bounce angle

$$\zeta \equiv \pi + \mathrm{sgn}(p_\parallel)\omega_b \int_{s_b^-}^{s} \frac{ds'}{|v_\parallel|(s')} \tag{6}$$

is defined so that $\zeta=\pi$ at the turning point s_b^- and the bounce frequency $\omega_b \equiv 2\pi/\tau_b$ is defined in terms of the bounce-period integral,

$$\tau_b(\alpha,\beta;\mathcal{E},\mu) \equiv \oint \frac{ds}{v_\parallel} = 2\int_{s_b^-}^{s_b^+} \frac{ds}{|v_\parallel|}. \tag{7}$$

The bounce period (7) can be used to define the bounce-motion average $\langle\cdots\rangle_b \equiv \tau_b^{-1}\oint(\cdots)ds/v_\parallel$. We note that the bounce-action-angle coordinates defined by Eqs. (4) and (6) are generally not expressed in terms of compact analytical formulas and can only be solved numerically for general magnetic geometry.

The bounce-center transformation[5,6]

$$z^a = (\alpha,\beta,J,\zeta) \to \bar{z}^a = (\bar{\alpha},\bar{\beta},\bar{J},\bar{\zeta}) \tag{8}$$

is a near-identity transformation on the four-dimensional guiding-center phase space,

$$\bar{z}^a = z^a + \epsilon G_1^a + \cdots, \tag{9}$$

which is generated by vector fields $(\mathsf{G}_1,\mathsf{G}_2,\cdots)$ where, at the nth-order, the component G_n^a removes the fast-angle dependence in the dynamical equation for $d\bar{z}^a/dt$. Here, by construction, the first-order components are

$$G_1^a \equiv \langle G_1^a\rangle_b + \frac{1}{\epsilon\omega_b}\int\left(\left\langle\frac{dz^a}{dt}\right\rangle_b - \frac{dz^a}{dt}\right)d\zeta, \tag{10}$$

where the guiding-center equations of motion dz^a/dt have both bounce-angle dependent and independent parts, while the bounce-angle independent part $\langle G_1^a\rangle_b$ is computed at a higher order.[6,7]

As a result of the transformation (8), the guiding-center phase-space Lagrangian (3) is transformed into the bounce-center phase-space Lagrangian,[6,7]

$$\bar{\Gamma}_b \equiv \frac{q}{\epsilon c}\bar{\alpha}\mathrm{d}\bar{\beta} + \bar{J}\mathrm{d}\bar{\zeta} - \bar{H}_b\mathrm{d}t. \tag{11}$$

Since the bounce-center transformation (9) is a canonical transformation, its Jacobian $\bar{\mathcal{J}}$ is equal to the guiding-center Jacobian $\mathcal{J}$. By using the general relation $\bar{\mathcal{J}} \equiv \mathcal{J} - \epsilon\partial_a(\mathcal{J}G_1^a) + \cdots \equiv \mathcal{J}$, we obtain a general constraint on the first-order component (10).

We now make a few remarks concerning the bounce-center transformation (8). First, in order to solve for the components G_1^a, the lowest-order transformation $(s,p_\parallel)\to(J,\zeta)$ must satisfy the canonical identity

$$\{s,p_\parallel\}_\parallel \equiv \frac{\partial s}{\partial\zeta}\frac{\partial p_\parallel}{\partial J} - \frac{\partial s}{\partial J}\frac{\partial p_\parallel}{\partial\zeta} \equiv 1, \tag{12}$$

which requires explicit expressions for the parallel-dynamic coordinates $(s,p_\parallel)$ as the functions of bounce-action-angle coordinates (J,ζ). Since these expressions are generally not known beyond the deeply trapped approximation (in which the bounce motion is represented as a simple-harmonic oscillation between turning points), the bounce-center analysis can only proceed forward on a formal basis (beyond the deeply trapped approximation) by taking the canonical identity (12) as an axiom of bounce-center transformation theory.[5]

The motivation for the present work is to explore the canonical relation $(s,p_\parallel)\to(J,\zeta)$ and the associated canonical identity (12) in a magnetic geometry simple enough to allow the analysis of bounce motion beyond the deeply trapped approximation.

C. Organization

The remainder of this paper is organized as follows. In Sec. II, we investigate the guiding-center dynamics in axisymmetric dipole geometry in order to explore, in Sec. III, the canonical parallel-dynamics relation (12) for trapped particles. For this purpose, we use the Hamiltonian Lie-transform perturbation method,[5] where the deeply trapped approximation is represented in terms of a harmonic-oscillator Hamiltonian, while the anharmonic corrections are treated as perturbations. Lastly, in Sec. IV, we summarize our work and discuss its application to more complex magnetic geometries (e.g., axisymmetric tokamak magnetic geometry).

II. GUIDING-CENTER MOTION IN AXISYMMETRIC DIPOLE GEOMETRY

The guiding-center motion of charged particles in an axisymmetric dipole magnetic field[8,9] represents an important paradigm in plasma physics.[1] The purpose of the present section is to introduce the axisymmetric dipole geometry in a fashion that will allow explicit analytical formulas to be derived in Sec. III.

A. Axisymmetric dipole geometry

For this purpose, we consider a pure-dipole magnetic field,[8,9]

Downloaded 19 Oct 2010 to 132.169.97.19. Redistribution subject to AIP license or copyright; see http://pop.aip.org/about/rights_and_permissions

$$\mathbf{B} = \frac{\mathcal{M}}{r^3}(2\cos\theta\hat{r} + \sin\theta\hat{\theta}), \tag{13}$$

where spherical coordinates (r,θ,ϕ) are used and the constant $\mathcal{M} \equiv B_e r_e^3$ combines the strength of the magnetic field B_e at the equatorial radial distance r_e (at $\theta=\pi/2$). The strength of the dipole magnetic field at a point (r,θ) in the "poloidal" plane (at fixed toroidal angle ϕ) is $B(r,\theta) = B_e(r_e^3/r^3)\sqrt{1+3\cos^2\theta}$, while the parallel unit vector is $\hat{\mathsf{b}} \equiv \mathbf{B}/B$. We note that in the axisymmetric dipole magnetic geometry (13), the toroidal angle ϕ is an ignorable coordinate.

We can also write the magnetic field (13) in a two-covariant flux-coordinate representation $\mathbf{B} = \nabla\psi \times \nabla\phi$, where $\psi(r,\theta) = \psi_e(r_e/r)\sin^2\theta$ defines the poloidal flux. Since a magnetic field line lies on a constant-ψ surface $\psi=\psi_e$, we find that $r(r_e,\theta) = r_e\sin^2\theta$ draws a single magnetic field line on the magnetic surface $\psi=\psi_e$. This relation yields the distance along a single magnetic field line

$$\begin{aligned} s(r_e,\theta) &\equiv r_e\int_{\pi/2}^{\theta}\sqrt{1+3\cos^2\theta'}\sin\theta' d\theta' \\ &= \frac{r_e}{2\sqrt{3}}[\ln(\sqrt{1+3\cos^2\theta} - \sqrt{3}\cos\theta) \\ &\quad - \sqrt{3}\cos\theta\sqrt{1+3\cos^2\theta}], \end{aligned} \tag{14}$$

which is positive for $\theta > \pi/2$ (below the equator), negative for $\theta < \pi/2$ (above the equator), and zero at the equator $(\theta=\pi/2)$. The length $L_e \equiv s(r_e,\pi) - s(r_e,0)$ of a magnetic field line on the constant-ψ surface labeled by r_e is

$$L_e = r_e\left[2 + \frac{1}{\sqrt{3}}\ln(2+\sqrt{3})\right] \simeq (11/4)r_e. \tag{15}$$

The magnetic field strength on a single line (on a constant-ψ surface labeled by r_e), on the other hand, is given as

$$B(\theta) = B_e\frac{\sqrt{1+3\cos^2\theta}}{\sin^6\theta}, \tag{16}$$

which implies that all particles are trapped in this pure-dipole field (since B becomes infinite as $\theta\to 0$ or π).

The parallel unit vector $\hat{\mathsf{b}}$ is expressed in terms of the coordinates (ψ,ϕ,s) as $\hat{\mathsf{b}} = \nabla s + a(\psi,s)\nabla\psi$, where the covariant components (b_ψ, b_ϕ, b_s) are $b_\psi \equiv \hat{\mathsf{b}}\cdot\partial\mathbf{X}/\partial\psi = a(\psi,s)$, $b_\phi \equiv \hat{\mathsf{b}}\cdot\partial\mathbf{X}/\partial\phi = 0$, and $b_s = 1$. We note that since $a \equiv -\nabla s\cdot\nabla\psi/|\nabla\psi|^2$, the magnetic coordinates (ψ,ϕ,s) are nonorthogonal, i.e.,

$$a(r,\theta) = \frac{r}{\psi}\left(\frac{s}{r} - \frac{2\cos\theta}{\sqrt{1+3\cos^2\theta}}\right) \neq 0, \tag{17}$$

off the equatorial plane $(\theta \neq \pi/2)$. Moreover, the magnetic curvature $\hat{\mathsf{b}}\cdot\nabla\hat{\mathsf{b}} = (\partial a/\partial s)\nabla\psi$ is purely perpendicular to the magnetic surface.

B. Guiding-center motion in axisymmetric dipole geometry

In axisymmetric dipole geometry, the guiding-center drift equations of motion are

$$\dot{\psi} = 0, \tag{18}$$

$$\dot{\phi} = \frac{c\epsilon}{q}\left[\mu\frac{\partial B}{\partial\psi} + v_\parallel\frac{\partial}{\partial s}(p_\parallel a)\right], \tag{19}$$

where Eq. (18) follows from the axisymmetry of the magnetic-dipole field. A trapped-particle orbit labeled by the guiding-center invariants $(\psi,\mathcal{E},\mu)$ is characterized by a pitch-angle coordinate $\xi \equiv p_\parallel/p$ that vanishes at the turning points θ_b. The conservation of magnetic moment and energy yields the relations

$$\frac{\mu}{\mathcal{E}} = \frac{1-\xi^2(\theta)}{B(\theta)} = \frac{1-\xi_e^2}{B_e} = \frac{1}{B(\theta_b)}, \tag{20}$$

and hence, for a fixed value of the equatorial pitch-angle coordinate ξ_e, we obtain the turning-point angle $\theta_b(\xi_e)$. The toroidal drift precession angular frequency (19) for a guiding-center with invariants $(\psi,\mathcal{E},\mu)$ can be expressed as

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_e(\theta) &= \frac{3c\mathcal{E}}{qB_e r_e^2}\frac{\sin^2\theta(1+\cos^2\theta)}{(1+3\cos^2\theta)^2} \\ &\quad\times\left[2 - (1-\xi_e^2)\frac{\sqrt{1+3\cos^2\theta}}{\sin^6\theta}\right]. \end{aligned} \tag{21}$$

The guiding-center parallel equations of motion

$$\begin{pmatrix}\dot{s}\\ \dot{p}_\parallel\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_\parallel \\ -\mu\,\partial B/\partial s\end{pmatrix} \tag{22}$$

immediately imply that the bounce action (4) is exactly conserved in axisymmetric dipole geometry since

$$J(\psi;\mathcal{E},\mu) = \frac{1}{2\pi}\oint p_\parallel ds \tag{23}$$

is now explicitly a function of the guiding-center invariants $(J_d \equiv q\psi/c, \mathcal{E}, \mu)$, where J_d denotes the drift action in axisymmetric dipole geometry.

C. Bounce-action-angle coordinates

A trapped-particle orbit can be represented in terms of the canonical action-angle coordinates (4)–(6), where the bounce action is

$$J(r_e,p,\xi_e) = \frac{r_e p}{2\pi}\oint|\xi|(\theta,\xi_e)\sqrt{1+3\cos^2\theta}\sin\theta d\theta \tag{24}$$

and the conjugate bounce angle is

$$\zeta = \pi \pm \frac{r_e\omega_b}{p/m}\int_{\theta_b^-}^{\theta}\frac{\sqrt{1+3\cos^2\theta'}\sin\theta'}{|\xi|(\theta',\xi_e)}d\theta', \tag{25}$$

where $\pm = \mathrm{sgn}(p_\parallel)$ and the bounce frequency ω_b is defined as

Downloaded 19 Oct 2010 to 132.169.97.19. Redistribution subject to AIP license or copyright; see http://pop.aip.org/about/rights_and_permissions

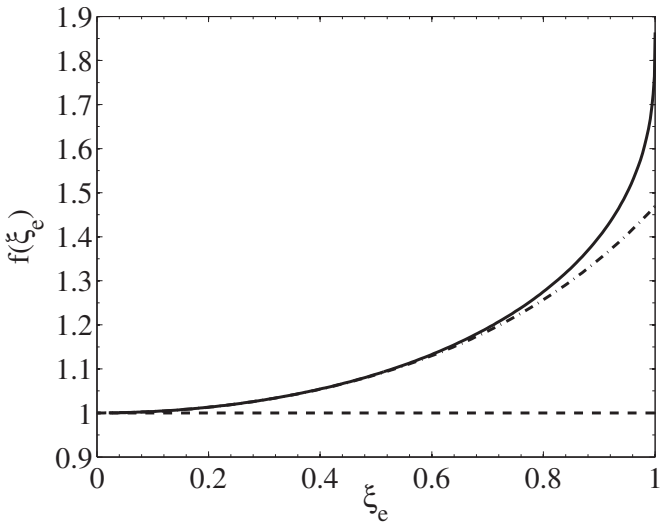


FIG. 1. Plot of the normalized bounce-period function $f(\xi_e)$ as a function of the equatorial pitch-angle coordinate ξ_e (solid line). In the deeply trapped harmonic approximation (dashed line), $f(\xi_e)$ is replaced by unity in Eq. (28). The dashed-dotted line includes the first-order (anharmonic) correction to be discussed in Sec. III B.

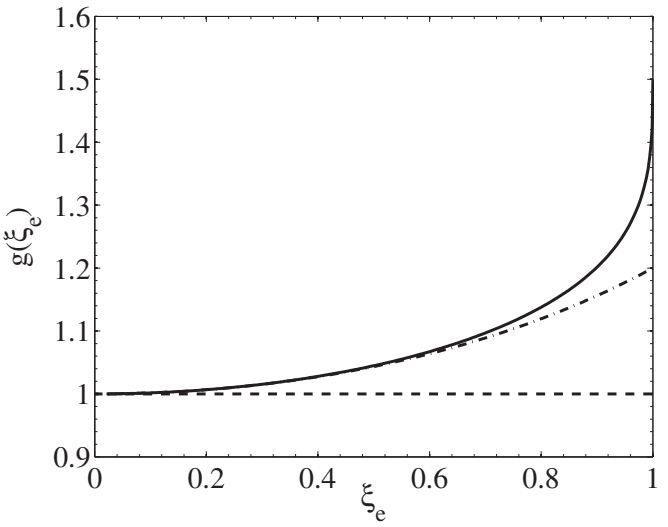


FIG. 2. Plot of the normalized drift-period function $g(\xi_e)$ as a function of the equatorial pitch-angle coordinate ξ_e (solid line). In the deeply trapped harmonic approximation (dashed line), $g(\xi_e)$ is replaced by unity in Eq. (31). The dashed-dotted line includes the harmonic and anharmonic corrections discussed in Sec. III B.

$$\omega_b^{-1} \equiv \frac{\partial J}{\partial \mathcal{E}} = \frac{m r_e}{2\pi p} \oint \frac{\sqrt{1+3\cos^2\theta}\sin\theta}{|\xi|(\theta,\xi_e)} d\theta. \tag{26}$$

In Eqs. (24)–(26), the magnitude of the pitch-angle coordinate

$$|\xi|(\theta,\xi_e) = \sqrt{1-(1-\xi_e^2)\frac{\sqrt{1+3\cos^2\theta}}{\sin^6\theta}} \tag{27}$$

is a function of the equatorial pitch-angle coordinate ξ_e and vanishes at the bounce points $\theta_b^{\pm}$.

When the integral in Eq. (26) is computed numerically as a function of ξ_e, we obtain the following expression for the bounce period:

$$\tau_b = \frac{2\pi}{\omega_b} \equiv \frac{2\pi}{\Omega_b} f(\xi_e) = \frac{2\pi}{\Omega_b}\left(1+\frac{23}{72}\xi_e^2+\cdots\right), \tag{28}$$

where the Taylor expansion in Eq. (28) assumes $\xi_e \ll 1$ and the bounce frequency of deeply trapped particles (with $\xi_e=0$ and $\rho_e \equiv v/|\omega_{ge}|$) is

$$\Omega_b = \frac{3v}{\sqrt{2}r_e} = \left(\frac{3\rho_e}{\sqrt{2}r_e}\right)|\omega_{ge}|. \tag{29}$$

Figure 1 shows the normalized function $f(\xi_e)$, where the bounce period (28) is finite at $\xi_e=1$ (for marginally trapped particles), with $f(1)=\sqrt{18}L_e/(2\pi r_e)\simeq 1.86$. The approximate expression for $f(\xi_e)\simeq 1+23\xi_e^2/72$ (dashed-dotted line) in Eq. (28) is also shown in Fig. 1.

Next, using Eq. (21), the bounce-averaged drift frequency is obtained from Eq. (21) and is expressed as

$$\omega_d = \langle \dot{\phi}_e \rangle_b \equiv \frac{3\rho_e}{2\tau_b r_e} \oint \frac{(1+\cos^2\theta)d\theta}{(1+3\cos^2\theta)^{3/2}} \times \left[\frac{2\sin^6\theta-(1-\xi_e^2)\sqrt{1+3\cos^2\theta}}{\sqrt{\sin^6\theta-(1-\xi_e^2)\sqrt{1+3\cos^2\theta}}}\right], \tag{30}$$

where the bounce period τ_b is defined in Eq. (28). The drift period is computed numerically from Eq. (30) as a function of ξ_e as

$$\tau_d = \frac{2\pi}{\omega_d} \equiv \frac{2\pi}{\Omega_d} g(\xi_e) = \frac{2\pi}{\Omega_d}\left(1+\frac{1}{6}\xi_e^2+\cdots\right), \tag{31}$$

where the drift frequency of deeply trapped particles (with $\xi_e=0$) is

$$\Omega_d = \frac{3\rho_e v}{2r_e^2} = \left(\frac{\rho_e}{\sqrt{2}r_e}\right)\Omega_b \tag{32}$$

and the normalized function $g(\xi_e)$ is shown in Fig. 2, with $g(1)=3/2$. Figure 2 also shows the approximate expression $g(\xi_e)\simeq 1+\xi_e^2/6$ (dashed-dotted line) computed directly from the Taylor expansion of Eq. (30). We note that by using Eq. (19), the bounce-averaged drift frequency (30) is also defined as

$$\omega_d = \frac{c\mu}{q}\left\langle \frac{\partial B}{\partial \psi}\right\rangle_b, \tag{33}$$

where the second term in Eq. (19) vanishes when bounce-averaged. For deeply trapped particles ($\xi_e \ll 1$), Eq. (33) is approximately given as

$$\Omega_d = \lim_{\xi_e\to 0} \omega_d = \frac{c\mathcal{E}}{qB_e}\frac{\partial B_e}{\partial \psi_e} = \frac{3c\mathcal{E}}{q\psi_e}, \tag{34}$$

from which we recover Eq. (32) in the deeply trapped limit (where $g\to 1$).

Downloaded 19 Oct 2010 to 132.169.97.19. Redistribution subject to AIP license or copyright; see http://pop.aip.org/about/rights_and_permissions

TABLE I. Normalized bounce and drift periods.

	Taylor expansion	Numerical fit[a]
Bounce (Fig. 1)	$f(\xi_e)\simeq 1+(23/72)\xi_e^2=1+0.32\xi_e^2$	$1.76-0.76y\simeq 1+0.38\xi_e^2$
Drift (Fig. 2)	$g(\xi_e)\simeq 1+(1/6)\xi_e^2=1+0.16\xi_e^2$	$(0.70+0.30y)^{-1}\simeq 1+0.15\xi_e^2$

[a]Reference 10.

When the equatorial gyroperiod $\tau_{ge}\equiv 2\pi/|\omega_{ge}|$ and the bounce period (28) are compared to the bounce-averaged drift period (31), we obtain three well-separated orbital time scales (with $\epsilon_e\equiv\rho_e/r_e\ll 1$),

$$1\ll\frac{\tau_b}{\tau_{ge}}\equiv\left(\frac{\sqrt{2}}{3}f(\xi_e)\right)\epsilon_e^{-1}\ll\frac{\tau_d}{\tau_{ge}}\equiv\left(\frac{2}{3}f(\xi_e)g(\xi_e)\right)\epsilon_e^{-2} \tag{35}$$

for all values of ξ_e (since $1\le f,\ g<2$).

Lastly, the bounce period (Fig. 1) and the bounce-averaged drift period (Fig. 2) have traditionally been described by simple analytical fits to the numerical results[8–11] (in terms of $y=\sqrt{1-\xi_e^2}\simeq 1-\xi_e^2/2$), as shown in Table I. In Sec. III, we will use the Lie-transform perturbation method to derive explicit expressions for these periods in terms of harmonic (deeply trapped) Hamiltonian dynamics (denoted by the factor unity in Table I) and anharmonic Hamiltonian corrections (associated with ξ_e^2).

III. BOUNCE ACTION-ANGLE COORDINATES FOR DEEPLY TRAPPED PARTICLES

In this section, we investigate the canonical relation $(s,p_\parallel)\to(J,\zeta)$ in axisymmetric dipole geometry. For this purpose, we first consider the lowest-order harmonic trapped-particle motion in the vicinity of the equator ($\theta\simeq\pi/2$) and then consider the first-order anharmonic corrections.

We begin by introducing the latitude angle $\sigma\equiv\theta-\pi/2$ (with $|\sigma|\ll\pi/2$) so that the distance along a field line (14) becomes

$$s=r_e\left(\sin\sigma+\tfrac{1}{2}\sin^3\sigma+\cdots\right)=r_e\left(\sigma+\tfrac{1}{3}\sigma^3+\cdots\right), \tag{36}$$

i.e., in the vicinity of the equator, the dimensionless parameter $|\sigma|=|s|/r_e\ll 1$ represents a normalized parallel distance from the equatorial plane. In this approximation, the magnetic field strength (16) along a single field line yields the expression

$$\frac{B}{B_e}=1+\frac{9}{2}\sin^2\sigma+\frac{75}{8}\sin^4\sigma+\cdots$$
$$=1+\frac{9}{2}\sigma^2+\frac{63}{8}\sigma^4+\cdots, \tag{37}$$

while the unit covariant component (17) is expressed as

$$a=3\frac{r_e}{\psi_e}\sigma+\cdots. \tag{38}$$

Next, the particle energy reads as

$$\mathcal{E}=\frac{p_\parallel^2}{2m}+\mu B_e\left(1+\frac{9}{2}\sigma^2+\cdots\right), \tag{39}$$

and hence, close to the equator, the guiding-center moves in the potential $(9/2)\mu B_e\sigma^2$ of a harmonic oscillator with energy $\mathcal{E}-\mu B_e$. (We show below that the term μB_e acts as the potential for the bounce-averaged toroidal drift motion.)

Deeply trapped particles have turning points located close to the equator (i.e., $|\xi_e|\ll 1$) so that we find $\theta_b^\pm=\pi/2\pm\sigma_b$, and the equatorial pitch-angle is

$$|\xi_e|=\frac{3\sigma_b}{\sqrt{2}}\left(1-\frac{11}{8}\sigma_b^2+\cdots\right). \tag{40}$$

Figure 3 shows the equatorial pitch-angle $|\xi_e|$ as a function of the bounce latitude σ_b obtained from Eq. (20), where we clearly see that, for deeply trapped particles ($\sigma_b\ll\pi/2$), the equatorial pitch-angle $|\xi_e|$ depends linearly on σ_b (for up to $\xi_e\simeq 0.6$).

A. Lowest-order harmonic calculations

We now calculate explicit expressions for the bounce-angle-action coordinates (24) and (25) in the deeply trapped approximation. First, in the vicinity of the equator ($|\sigma|\ll\pi/2$), Eq. (27) yields

$$|\xi|(\theta,\xi_e)=\frac{3}{\sqrt{2}}\sqrt{\sigma_b^2-\sigma^2}+\cdots, \tag{41}$$

where terms of first order in the ordering parameter

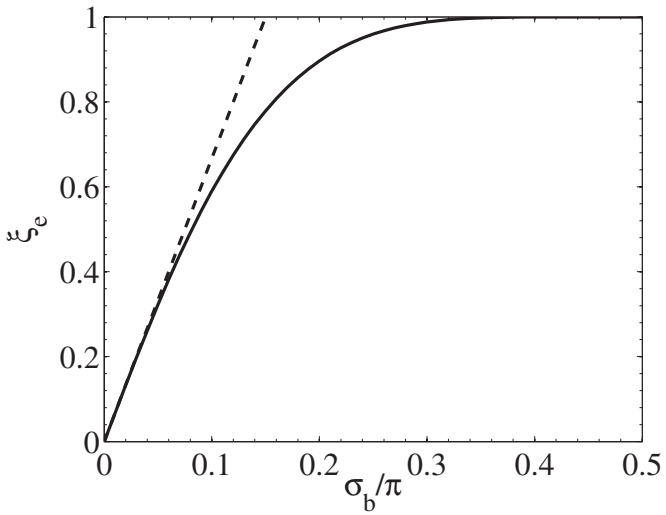


FIG. 3. Equatorial-pitch coordinate $|\xi_e|$ vs the normalized bounce-latitude σ_b/π. The dashed line represents the linear approximation $|\xi_e|\simeq 3\sigma_b/\sqrt{2}$.

Downloaded 19 Oct 2010 to 132.169.97.19. Redistribution subject to AIP license or copyright; see http://pop.aip.org/about/rights_and_permissions

$$\epsilon_t \equiv \sigma_b^2 = \left(\frac{s_b}{r_e}\right)^2 \ll 1 \tag{42}$$

have been omitted beyond the "harmonic-oscillator" approximation in Eq. (41). The bounce action (24) yields the lowest-order expression

$$J_0 = \frac{3r_e p}{\pi\sqrt{2}}\int_{-\sigma_b}^{\sigma_b}\sqrt{\sigma_b^2-\sigma^2}\,d\sigma = \frac{3r_e p}{2\sqrt{2}}\sigma_b^2 = \frac{\mathcal{E}\xi_e^2}{\Omega_b}. \tag{43}$$

From this expression, we use Eq. (26) to compute the lowest-order bounce frequency

$$\omega_{b0} \equiv \left(\frac{\partial J_0}{\partial \mathcal{E}}\right)^{-1} = \Omega_b\left(1-\epsilon_t\frac{\xi_e^2}{2}\right)^{-1}, \tag{44}$$

where we used

$$\frac{\partial(p\xi_e^2)}{\partial\mathcal{E}} = \frac{2m}{p}\left(1-\epsilon_t\frac{\xi_e^2}{2}\right). \tag{45}$$

When we combine these two expressions, where we henceforth use $\omega_{b0}\simeq\Omega_b$ to the lowest order in ϵ_t (the first-order correction will be used in Sec. III B), we find that bounce harmonic-oscillator energy

$$J_0\Omega_b \equiv \frac{p^2\xi_e^2}{2m} = \frac{p_{\|e}^2}{2m} = \mathcal{E}-\mu B_e \tag{46}$$

is simply the relative energy as measured from the minimum-B potential μB_e. The lowest-order Hamiltonian therefore reads as

$$H_0 = \mu B_e + J_0\Omega_b, \tag{47}$$

and the lowest-order normalized bounce period $\Omega_b(\partial H_0/\partial J_0)^{-1}=1$ is shown in Fig. 1 as a dashed line.

Next, we compute the lowest-order expression for the bounce angle ζ_0 from Eq. (25). First, using Eq. (41), we compute

$$\int_{\theta_b^-}^{\theta}\frac{\sqrt{1+3\cos^2\theta'}\sin\theta'}{|\xi|(\theta',\xi_e)}d\theta' \simeq \frac{\sqrt{2}}{3}\int_{-\sigma_b}^{\sigma}\frac{d\sigma'}{\sqrt{\sigma_b^2-\sigma'^2}} = \frac{\sqrt{2}}{3}\left[\pi-\arccos\left(\frac{\sigma}{\sigma_b}\right)\right], \tag{48}$$

and thus we find the lowest-order bounce angle

$$\zeta_0 = \begin{cases} 2\pi-\arccos(\sigma/\sigma_b) & (p_\| > 0) \\ \arccos(\sigma/\sigma_b) & (p_\| < 0). \end{cases} \tag{49}$$

Lastly, the parallel momentum $p_\|$ and the parallel field-line coordinate s are expressed (to the lowest order in ϵ_t) in terms of the action-angle coordinates (J_0,ζ_0) as

$$p_\| = -(2mJ_0\Omega_b)^{1/2}\sin\zeta_0 \equiv p_{\|0}(J_0,\zeta_0) \tag{50}$$

and

$$s = \left(\frac{2J_0}{m\Omega_b}\right)^{1/2}\cos\zeta_0 \equiv s_0(J_0,\zeta_0), \tag{51}$$

where we have used the bounce frequency (44) for deeply trapped particles. Equations (50) and (51) represent the standard canonical action-angle transformation for a harmonic oscillator and, thus, the lowest-order transformation $(p_{\|0},s_0)\to(J_0,\zeta_0)$ satisfies the canonical condition (12),

$$\{s_0,p_{\|0}\}_{\|0} \equiv \frac{\partial s_0}{\partial\zeta_0}\frac{\partial p_{\|0}}{\partial J_0} - \frac{\partial s_0}{\partial J_0}\frac{\partial p_{\|0}}{\partial\zeta_0} = \cos^2\zeta_0+\sin^2\zeta_0 = 1, \tag{52}$$

where partial derivatives are evaluated at constant $\mathcal{E}$ and ψ_e. We note that deeply trapped particles in axisymmetric tokamak geometry[12] are also described by the harmonic-oscillator representations (50) and (51)].

B. First-order anharmonic corrections

We now proceed to obtain the first-order (anharmonic) corrections (J_1,ζ_1) for the bounce action-angle coordinates $(J=J_0+\epsilon_t J_1,\ \zeta=\zeta_0+\epsilon_t\zeta_1)$ through an application of the Hamiltonian Lie-transform perturbation method.[13] By inverting relation (36) for $s(\sigma)$, we obtain

$$\sigma(s) = \frac{s}{r_e} - \frac{\epsilon_t}{3}\left(\frac{s}{r_e}\right)^3 + \cdots, \tag{53}$$

which can be inserted in Eq. (37) to obtain

$$\mu B = \mu B_e\left[1+\frac{9}{2}\left(\frac{s}{r_e}\right)^2+\frac{39}{8}\left(\frac{s}{r_e}\right)^4+\cdots\right]. \tag{54}$$

The guiding-center Hamiltonian (1), written as

$$H = H_0(J_0)+\epsilon_t H_1(J_0,\zeta_0), \tag{55}$$

will therefore have a lowest-order expression $H_0(J_0)$ and a higher-order anharmonic correction $H_1(J_0,\zeta_0)$ that will break the lowest-order bounce-action invariance $\dot{J}_0=-\epsilon_t\partial H_1/\partial\zeta_0\neq 0$. We will henceforth omit the contributions of an order higher than ϵ_t beyond the harmonic-oscillator dynamics described in Sec. III A.

Using the Lie-transform perturbation method, we perform a transformation to the new bounce action-angle coordinates (J,ζ) in order to restore the invariance of the bounce action, i.e., $\dot{J}=\mathcal{O}(\epsilon_t^2)$. Using the lowest-order bounce frequency (44), the expression (54) becomes

$$\mu B = \mu B_e + \frac{m}{2}\Omega_b^2 s^2\left[1-\epsilon_t\xi_e^2+\epsilon_t\frac{13}{12}\left(\frac{s}{r_e}\right)^2\right],$$

where the contribution $\epsilon_t\xi_e^2$ comes from the definition of the magnetic moment $\mu=\mathcal{E}(1-\epsilon_t\xi_e^2)/B_e$, while the last term [with $13/12=(39/8)(2/9)$] represents the anharmonic correction in the magnetic field (54).

We therefore have the following expression for the first-order perturbed Hamiltonian:

$$H_1 = \frac{m}{2}\Omega_b^2 s^2\left[-\xi_e^2+\frac{13}{12}\left(\frac{s}{r_e}\right)^2\right]+K_1, \tag{56}$$

where $K_1\equiv 9J_0^2/(4mr_e^2)$ is defined to satisfy

$$\left.\frac{\partial K_1}{\partial J_0}\right|_{\mu,\psi_e} = \Omega_b\frac{\xi_e^2}{2} = \frac{9}{2}\frac{J_0}{mr_e^2},$$

which arises from the first-order correction to the simple-harmonic bounce frequency (44). Inserting Eqs. (43) and

Downloaded 19 Oct 2010 to 132.169.97.19. Redistribution subject to AIP license or copyright; see http://pop.aip.org/about/rights_and_permissions

(51), respectively, for $\xi_e(J_0)$ and $s(J_0,\zeta_0)$ yields the first-order Hamiltonian,

$$H_1 = \frac{J_0^2}{mr_e^2}\left(\frac{9}{4} - 9\cos^2\zeta_0 + \frac{13}{6}\cos^4\zeta_0\right) = -\frac{J_0^2}{mr_e^2}\left(\frac{23}{16} + \frac{41}{12}\cos 2\zeta_0 - \frac{13}{48}\cos 4\zeta_0\right), \quad (57)$$

which has bounce-angle independent and dependent parts.

1. Anharmonic bounce action-angle transformation

We extend our description of trapped-particle dynamics in an axisymmetric dipole magnetic field beyond the harmonic-oscillator approximation by considering the coordinate transformation $Z_0^\alpha=(J_0,\zeta_0)\to Z^\alpha=(J,\zeta)$,

$$Z^\alpha = Z_0^\alpha + \epsilon_t\{\hat{S}_1, Z_0^\alpha\}_{\|0} + \cdots, \quad (58)$$

where the gauge function $\hat{S}_1(J_0,\zeta_0)$ is designed to restore the bounce-angle independence to the bounce-center dynamics in the anharmonic approximation and $\{,\}_{\|0}$ is defined in Eq. (52). Note that unlike the bounce-center transformation (9), the magnetic-label flux coordinates (ψ,ϕ) are frozen, i.e., only the parallel motion in phase space is transformed by Eq. (58).

Using the bounce action-angle transformation (58), we build a new bounce-angle independent Hamiltonian,

$$\hat{H}(J) = \hat{H}_0(J) + \epsilon_t\hat{H}_1(J) + \cdots = H_0(J_0) + \epsilon_t[H_1 - \{\hat{S}_1, H_0\}_{\|0}](J_0,\zeta_0) + \cdots. \quad (59)$$

From Eq. (59), we obtain the following relations at zeroth order,

$$\hat{H}_0 = \mu B_e + J\Omega_b, \quad (60)$$

and at first order,

$$\hat{H}_1 = (\langle H_1\rangle_b + \tilde{H}_1) - \Omega_b\frac{\partial\hat{S}_1}{\partial\zeta}, \quad (61)$$

where we have divided the first-order Hamiltonian (57) into a bounce-angle-independent part $\langle H_1\rangle_b$ and a bounce-angle-dependent part $\tilde{H}_1=H_1-\langle H_1\rangle_b$. Since $\hat{H}_1$ must be bounce-angle-independent, we have

$$\hat{H}_1 = \langle H_1\rangle_b = -\frac{23}{16}\frac{J^2}{mr_e^2}, \quad (62)$$

while the first-order generating function $\hat{S}_1(J_0,\zeta_0)$ is defined as

$$\hat{S}_1(J_0,\zeta_0) = \frac{1}{\Omega_b}\int\tilde{H}_1(J_0,\zeta_0)d\zeta_0 = \frac{J_0^2}{24m\Omega_b r_e^2}\left(-41\sin 2\zeta_0 + \frac{13}{8}\sin 4\zeta_0\right). \quad (63)$$

From Eq. (58), the new expressions for the bounce action-angle coordinates (J,ζ), which include anharmonic corrections, are therefore

$$J = J_0 + \epsilon_t\{\hat{S}_1, J_0\}_{\|0} = J_0 + \epsilon_t\frac{\partial\hat{S}_1}{\partial\zeta_0} = J_0 + \frac{\epsilon_t J_0^2}{12m\Omega_b r_e^2}\times\left(-41\cos 2\zeta_0 + \frac{13}{4}\cos 4\zeta_0\right) \quad (64)$$

and

$$\zeta = \zeta_0 + \epsilon_t\{\hat{S}_1,\zeta_0\}_{\|0} = \zeta_0 - \epsilon_t\frac{\partial\hat{S}_1}{\partial J_0} = \zeta_0 + \frac{\epsilon_t J_0}{12m\Omega_b r_e^2}\left(41\sin 2\zeta_0 - \frac{13}{8}\sin 4\zeta_0\right). \quad (65)$$

Equations (64) and (65) can now be easily used to show that the bounce action-angle transformation (58) is canonical, i.e., $\{\zeta,J\}_{\|0}=1+\mathcal{O}(\epsilon_t^2)$.

2. Anharmonic bounce action-angle dynamics

The new (bounce-angle-independent) bounce-center Hamiltonian now reads as

$$\hat{H} = \mu B_e + J\Omega_b - \epsilon_t\frac{23}{16}\frac{J^2}{mr_e^2}, \quad (66)$$

where the last term denotes the anharmonic correction. The new bounce frequency (with anharmonic correction) is therefore evaluated as

$$\omega_b = \frac{\partial\hat{H}}{\partial J} = \Omega_b - \epsilon_t\frac{23}{8}\frac{J}{mr_e^2} + \cdots = \Omega_b\left(1 - \epsilon_t\frac{23}{72}\xi_e^2 + \cdots\right), \quad (67)$$

which is exactly equivalent to the Taylor expansion leading to Eq. (28) (which yields excellent agreement with the numerical result up to about $\xi_e\simeq 0.6$, as shown in Fig. 1).

In order to prove that the new bounce action (64) (with anharmonic correction) is an adiabatic invariant at first order in ϵ_t, we calculate $\dot{J}=\{J,H\}_0$ under the perturbed Hamiltonian $H=H_0+\epsilon_t H_1$,

$$\dot{J} = \dot{J}_0 + \dot{\zeta}_0\left[\frac{\epsilon_t J_0^2}{6m\Omega_b r_e^2}\left(41\sin 2\zeta_0 - \frac{13}{2}\sin 4\zeta_0\right)\right] + \cdots = \mathcal{O}(\epsilon_t^2), \quad (68)$$

where we used the lowest-order Hamilton's equations $\dot{\zeta}_0=\Omega_b$.

3. Anharmonic canonical condition

Equations (50) and (51) now give the parallel canonical coordinates $(s,p_\|)$ (with first-order corrections) as

$$p_\| = p_{\|0} + \epsilon_t\{\hat{S}_1, p_{\|0}\}_{\|0} + \cdots = p_{\|0} + \frac{\partial p_{\|0}}{\partial J_0}(J-J_0) + \frac{\partial p_{\|0}}{\partial\zeta_0}(\zeta-\zeta_0) + \cdots = p_{\|0}(J,\zeta) \equiv -(2mJ\Omega_b)^{1/2}\sin\zeta, \quad (69)$$

Downloaded 19 Oct 2010 to 132.169.97.19. Redistribution subject to AIP license or copyright; see http://pop.aip.org/about/rights_and_permissions

$$s = s_0 + \epsilon_t\{\hat{S}_1, s_0\}_{\|0} + \cdots$$
$$= s_0 + \frac{\partial s_0}{\partial J_0}(J - J_0) + \frac{\partial s_0}{\partial \zeta_0}(\zeta - \zeta_0) + \cdots$$
$$= s_0(J,\zeta) \equiv \left(\frac{2J}{m\Omega_b}\right)^{1/2} \cos\,\zeta. \tag{70}$$

We therefore retain the harmonic-oscillator expressions for the parallel coordinates but with an anharmonic Hamiltonian (66). Furthermore, one can immediately verify that

$$\{s, p_\|\}_\| = \frac{\partial s}{\partial \zeta}\frac{\partial p_\|}{\partial J} - \frac{\partial s}{\partial J}\frac{\partial p_\|}{\partial \zeta}$$
$$= \sin^2\,\zeta + \cos^2\,\zeta + \cdots = 1 + \mathcal{O}(\epsilon_t^2), \tag{71}$$

i.e., Eqs. (69) and (70) are canonical up to $\mathcal{O}(\epsilon_t^2)$.

4. Anharmonic-corrected bounce-averaged drift frequency

Lastly, we can also obtain the anharmonic corrections to the bounce-average drift frequency (33) as follows. First, we express the magnetic field strength (37), at constant $\mathcal{M} = \psi_e r_e = B_e r_e^3$, as

$$B(\psi, s) = \frac{\psi^3}{\mathcal{M}^2} + \epsilon_t \frac{9}{2} s^2 \frac{\psi^5}{\mathcal{M}^4} + \cdots.$$

Next, the flux derivative $\partial B/\partial\psi$ (at constant s) is evaluated as

$$\frac{\partial B}{\partial \psi} = \frac{3}{r_e^2}\left[1 + \epsilon_t \frac{15}{2}\left(\frac{s}{r_e}\right)^2 + \cdots\right], \tag{72}$$

where we have retained the anharmonic first-order correction. Next, by using the expression (70) for the parallel spatial coordinate $s(\zeta)$, the bounce-average drift frequency (33) becomes

$$\omega_d = \frac{3c\mathcal{E}}{qB_e r_e^2}(1 - \epsilon_t \xi_e^2)\left(1 + \epsilon_t \frac{15}{18}\xi_e^2 + \cdots\right)$$
$$= \Omega_d\left[1 - \epsilon_t\left(1 - \frac{15}{18}\right)\xi_e^2 + \cdots\right] = \Omega_d\left(1 - \epsilon_t \frac{\xi_e^2}{6} + \cdots\right), \tag{73}$$

where we have combined the definition $\mu B_e = \mathcal{E}(1 - \epsilon_t \xi_e^2)$ with the bounce-averaged expression for Eq. (72). Note that Eq. (73) is exactly equivalent to the Taylor expansion leading to Eq. (31) (which yields excellent agreement with the numerical result up to about $\xi_e \simeq 0.6$, as shown in Fig. 2).

C. Bounce-center coordinates

The first-order generating vector field for the bounce-center transformation (8) is calculated using the expressions for the deeply trapped action-angle coordinates. Equations (10) and (19) are used, with the lowest-order expressions $\omega_b^{-1} d\zeta = m ds/p_\|$, to obtain the expression for G_1^ϕ,

$$G_1^\phi = -\frac{c}{q} a p_\| + \frac{c\mu}{q\omega_b}\int\left(\left\langle\frac{\partial B}{\partial \psi}\right\rangle_b - \frac{\partial B}{\partial \psi}\right) d\zeta, \tag{74}$$

where, using Eq. (72), we find

$$\left\langle\frac{\partial B}{\partial \psi}\right\rangle_b - \frac{\partial B}{\partial \psi} = -\epsilon_t \frac{45J\cos 2\zeta}{2m\Omega_b r_e^2} + \cdots.$$

In the lowest-order deeply trapped approximation, where only the first term in Eq. (74) remains, we find

$$G_1^\phi = 3\frac{cJ}{q\psi_e}\sin 2\zeta + \cdots = \frac{J\Omega_d}{\mathcal{E}}\sin 2\zeta + \cdots, \tag{75}$$

where we used Eq. (38) for a and Eq. (32) for Ω_d. Here, we easily verify that $\langle G_1^\phi\rangle_b = 0$.

Since the flux coordinate ψ is a guiding-center invariant in axisymmetric magnetic-dipole geometry [see Eq. (18)], we immediately find $G_1^\psi = 0$. Hence, the bounce-center position $\bar{\mathbf{X}}$ is a purely toroidal shift of the bounce-averaged particle position $\langle\mathbf{X}\rangle_b$, expressed as

$$\bar{\mathbf{X}} = \langle\mathbf{X}\rangle_b + \epsilon G_1^\phi(\psi, J, \zeta)\,\partial\mathbf{X}/\partial\phi. \tag{76}$$

We see that the general bounce-center transformation is greatly simplified in the axisymmetric dipole geometry and is consistent with the purely toroidal nature of the magnetic gradient and curvature drifts in this geometry.

IV. SUMMARY

We now summarize the main results of the present work. The bounce-center transformation that transforms the guiding-center phase-space Lagrangian (3) into the bounce-center phase-space Lagrangian (11) relies on the existence of expressions for the parallel canonical coordinates $s(J,\zeta)$ and $p_\|(J,\zeta)$ that are required to satisfy the canonical identity (12). In general magnetic geometry, this canonical identity is taken as an axiom for the bounce-center transformation[5] since the identity is difficult to prove directly beyond the harmonic-oscillator approximation. For practical applications in axisymmetric tokamak geometry,[12] for example, it is a common practice to use expressions for $s(J,\zeta)$ and $p_\|(J,\zeta)$ in the deeply trapped approximation.

The primary purpose of the present work was, therefore, to investigate the canonical identity (12) beyond the harmonic-oscillator approximation in an axisymmetric magnetic geometry simple enough to allow explicit analytical results. The axisymmetric dipole geometry was chosen for its great simplicity (e.g., all confined particles are trapped) as well as its universality in space plasmas[8,9] and its applications in some recent laboratory experiments.[14]

By using elegant Lie-transform Hamiltonian perturbation methods, we have been able to obtain explicit expressions (with harmonic and anharmonic contributions) for the parallel canonical coordinates $s(J,\zeta)$ and $p_\|(J,\zeta)$ in axisymmetric dipole geometry, which satisfy the canonical identity (12). By including anharmonic corrections to the deeply trapped-particle dynamics, we were also able to obtain explicit expressions for the bounce frequency (67) and the bounce-averaged drift frequency (73) that yielded excellent agreement (up to $\xi_e \simeq 0.6$) with the exact numerical results shown in Figs. 1 and 2, respectively, as well as standard numerical fits[10] (as shown in Table I).

Downloaded 19 Oct 2010 to 132.169.97.19. Redistribution subject to AIP license or copyright; see http://pop.aip.org/about/rights_and_permissions

Future work will focus on the bounce-center transformation in axisymmetric tokamak geometry[15] beyond the deeply trapped approximation, for which the poloidal flux ψ is no longer an invariant, but is replaced with the drift invariant $\psi^* \equiv \psi - \rho_\parallel B_\phi$, where $\rho_\parallel = p_\parallel/(m\omega_g)$ and B_ϕ denotes the toroidal covariant component of the tokamak magnetic field.

ACKNOWLEDGMENTS

One of us (A.J.B.) would like to acknowledge the kind hospitality of the Institut de la Recherche sur la Fusion par confinement Magnétique at CEA Cadarache. This work, supported by the European Communities under the contract of association between EURATOM and CEA, was carried out within the framework of the European Fusion Development Agreement. The views and opinions expressed herein do not necessarily reflect those of the European Commission.

[1] T. G. Northrop, *Adiabatic Motion of Charged Particles* (Wiley, New York, 1963).
[2] X. Tao, A. A. Chan, and A. J. Brizard, Phys. Plasmas **14**, 092107 (2007).
[3] J. R. Cary and A. J. Brizard, Rev. Mod. Phys. **81**, 693 (2009).
[4] R. G. Littlejohn, J. Plasma Phys. **29**, 111 (1983).
[5] R. G. Littlejohn, Phys. Scr. **T 2**, 119 (1982).
[6] A. J. Brizard, Phys. Plasmas **7**, 3238 (2000).
[7] R. G. Littlejohn, J. Math. Phys. **23**, 742 (1982).
[8] G. K. Parks, *Physics of Space Plasmas* (Addison Wesley, Redwood City, CA, 1991), Chap. 4.
[9] W. Baumjohann and R. A. Treumann, *Basic Space Plasma Physics* (World Scientific, Singapore, 1996).
[10] D. A. Hamlin, R. Karplus, R. C. Vik, and K. M. Watson, J. Geophys. Res. **66**, 1, doi:10.1029/JZ066i001p00001 (1961).
[11] A. A. Chan, Ph.D. dissertation, Princeton University, 1991.
[12] L. Wang and T. S. Hahm, Phys. Plasmas **16**, 062309 (2009).
[13] J. R. Cary, Phys. Rep. **79**, 129 (1981).
[14] D. T. Garnier, A. Hansen, M. E. Mauel, E. Ortiz, A. C. Boxer, J. Ellsworth, I. Karim, J. Kesner, S. Mahar, and A. Roach, Phys. Plasmas **13**, 056111 (2006).
[15] A. J. Brizard, J. Decker, Y. Peysson, and F.-X. Duthoit, Phys. Plasmas **16**, 102304 (2009).

Downloaded 19 Oct 2010 to 132.169.97.19. Redistribution subject to AIP license or copyright; see http://pop.aip.org/about/rights_and_permissions

Orbit-averaged guiding-center Fokker–Planck operator for numerical applications

J. Decker,[1,a)] Y. Peysson,[1] A. J. Brizard,[2] and F.-X. Duthoit[1]
[1]*IRFM, CEA, F-13108 Saint-Paul-lez-Durance, France*
[2]*Department of Chemistry and Physics, Saint Michael's College, Colchester, Vermont 05439, USA*

(Received 22 September 2010; accepted 3 November 2010; published online 24 November 2010)

A guiding-center Fokker–Planck operator is derived in a coordinate system that is well suited for the implementation in a numerical code. This differential operator is transformed such that it can commute with the orbit-averaging operation. Thus, in the low-collisionality approximation, a three-dimensional Fokker–Planck evolution equation for the orbit-averaged distribution function in a space of invariants is obtained. This transformation is applied to a collision operator with nonuniform isotropic field particles. Explicit neoclassical collisional transport diffusion and convection coefficients are derived, and analytical expressions are obtained in the thin orbit approximation. To illustrate this formalism and validate our results, the bootstrap current is analytically calculated in the Lorentz limit. © *2010 American Institute of Physics*.
[doi:10.1063/1.3519514]

I. INTRODUCTION

The Fokker–Planck equation is widely used to describe various transport processes in magnetized plasmas, such as collisions,[1–4] wave-particle interaction,[5–8] and the scattering of waves.[9] A review on the use of the Fokker–Planck equation in plasma physics has been recently published.[10] Using Lie-transform methods to eliminate the fast gyromotion time scale, an explicit guiding-center (GC) Fokker–Planck (FP) operator was derived in local GC coordinates $(\mathbf{X},\mathcal{E},\mu,\varphi)$,[11] where $\mathbf{X}$ is the GC position, $\mathcal{E}$ is the GC energy, μ is the magnetic moment, and φ is the gyroangle. This operator includes leading order effects in magnetic field nonuniformity, which scales such as $\epsilon_B \equiv \rho/L_B \ll 1$ in typical toroidal fusion plasmas. Here ρ is the characteristic Larmor radius of particles under consideration (with mass m and charge Ze) and L_B is of the order of the local minor radius r.

Using the conservation of a toroidal canonical momentum, a new GC-FP operator was derived in a recent paper[12] in a nonlocal coordinate system, involving three invariants and a poloidal angle, which is well suited for implementation in a numerical code. In the present paper, the GC-FP operator, which is characterized by the collisional time scale $\epsilon_\nu = L_B/\lambda_\nu$ where λ_ν is the mean-free path, is transformed such that it can commute with the orbit-averaging operation. Thus, in the low-collisionality approximation $\epsilon_\nu \ll 1$, a three-dimensional (3D) Fokker–Planck evolution equation for the orbit-averaged distribution function is obtained in a space of invariants where the spatial transport due to the drifts of GC orbits across flux surfaces appears explicitly.

This transformation is applied to the FP collision operator with a nonuniform isotropic field-particle distribution, such that neoclassical collisional transport diffusion and convection coefficients are explicitly derived. The thin orbit width approximation is defined by $\epsilon_\psi \equiv \epsilon_B q/\varepsilon \ll 1$ where ϵ_ψ is the typical ratio of the orbit width to the minor radius, $\varepsilon = r/R$ is the local inverse aspect ratio, R is the local major radius, and q is the safety factor. In this approximation, the orbit-averaging operation is simplified and analytical expressions are obtained for the FP diffusion and convection coefficients.

This formalism is applied to the calculation of the bootstrap current in the Lorentz limit $Z \gg 1$, where analytical expressions for the distribution function and toroidal current are derived. The successful comparison between our results and the literature[1] validates our calculations.

The paper is organized as follows. The GC-FP equation expressed in our coordinate system is presented in Sec. II. Using expressions for the corresponding Jacobian and GC velocity (the details can be found in Appendix A), the orbit-averaging operation is applied in Sec. III and a 3D FP equation is derived in the low-collisionality approximation. In Sec. IV, the transformation is explicitly applied to a collision operator with a nonuniform isotropic field-particle distribution. In Sec. V, the resulting FP equation is analytically solved in the Lorentz limit $Z \gg 1$. The bootstrap current is then calculated using the expressions for flux-surface averaged moments of the distribution function derived in Appendix B for our representation.

II. GUIDING-CENTER FOKKER–PLANCK EQUATION

A. Guiding-center motion

This work assumes a axisymmetric magnetic configuration in the small drift approximation $\epsilon_B \ll 1$. The unperturbed motion of particles is uniquely characterized by two constants of the guiding-center motion, the energy $\mathcal{E}$ and the toroidal canonical momentum P_ϕ, and an adiabatic invariant, the magnetic moment μ, to which we must associate, for passing orbits, the sign of the velocity component along the magnetic field: $\sigma = \mathrm{sign}(v_\parallel)$.

From this parametrization of unperturbed GC orbits, an-

a)Electronic mail: joan.decker@cea.fr.

 © 2010 American Institute of Physics

Downloaded 06 Dec 2010 to 132.169.10.193. Redistribution subject to AIP license or copyright; see http://pop.aip.org/about/rights_and_permissions

other set of invariants $I^a=(\bar{\psi},p,\xi_0)$ can be derived[12] with the momentum $p\equiv\sqrt{2m\mathcal{E}}$, the flux-surface label $\bar{\psi}\equiv -cP_\phi/e=\psi-\rho_\parallel B_\phi$ and the pitch-angle coordinate

$$\xi_0(\bar{\psi},\mathcal{E},\mu) \equiv \left| \begin{cases} \sqrt{1-\mu B_0(\bar{\psi})/\mathcal{E}}. & \text{for trapped particle orbits} \\ \sigma\sqrt{1-\mu B_0(\bar{\psi})/\mathcal{E}}. & \text{for passing particle orbits} \end{cases} \right|, \tag{1}$$

where $B_0(\psi)$ is the minimum value of the magnetic field amplitude B on the flux-surface ψ. Here $\psi=\psi_P/(2\pi)$ where ψ_P is the poloidal flux, $\rho_\parallel=p_\parallel/(ZeB)$, and B_ϕ is the toroidal component of the magnetic field in the covariant representation.

The projection of GC orbits $\tilde{\psi}$ in the poloidal plane is parametrized by the poloidal angle θ according to

$$\psi\equiv\tilde{\psi}(\theta,\sigma,\bar{\psi},p,\xi_0)=\bar{\psi}+\epsilon_\psi\delta\psi(\theta,\sigma,\bar{\psi},p,\xi_0), \tag{2}$$

where $\delta\psi(\theta,\sigma,\bar{\psi},p,\xi_0)\equiv\rho_\parallel B_\phi$. The orbit width is of order $\epsilon_\psi=\delta\psi/\psi\sim\epsilon_B q/\epsilon$. Orbits with $\epsilon_\psi\ll 1$ are called "thin," while orbits with $\epsilon_\psi\sim 1$ are called "wide" with an orbit width of the order of the local minor radius. From the momentum projection along the magnetic field, $p_\parallel\equiv p\xi$, is defined the local pitch-angle coordinate

$$\xi(\theta,\sigma,\bar{\psi},p,\xi_0)=\sigma\sqrt{1-\frac{\mu B(\tilde{\psi},\theta)}{\mathcal{E}}} =\sigma\sqrt{1-\Psi(\tilde{\psi},\theta)(1-\xi_0^2)}, \tag{3}$$

where $\Psi(\theta,\sigma,\bar{\psi},p,\xi_0)\equiv B(\tilde{\psi},\theta)/B_0(\bar{\psi})$.

One of the significant advantage of this representation over others[13] in the perspective of a numerical implementation is that the trapped/passing boundary is independent of p. It is defined by $\xi_0^2=\xi_{0T}^2(\bar{\psi})$ with

$$\xi_{0T}^2(\bar{\psi})\equiv 1-\frac{B_0(\bar{\psi})}{B_1(\bar{\psi})}, \tag{4}$$

where $B_1(\psi)$ is the maximum value of the magnetic field amplitude on the flux-surface ψ. Another numerical advantage of ξ_0 over other pitch-angle coordinates is that the corresponding space has fixed boundaries $(-1\le\xi_0\le 1)$ independent of $(\bar{\psi},p)$.

A spherical momentum-space representation using the momentum magnitude p and a ξ-like pitch-angle coordinate reflects the natural symmetry of collisions, which is an isotropic microscopic process. Consequently, the numerical inversion problem resulting from the discretization of the differential FP operator is properly conditioned.

In addition to the numerical advantages, the present set of coordinates benefits from an easy physical interpretation in the zero-orbit width limit, where $\bar{\psi}\to\psi$ is the poloidal flux (divided by 2π), which defines the flux-surface containing the orbit, and $\xi_0\to\sqrt{1-\mu B_0(\psi)/\mathcal{E}}$ becomes the value of $\xi=p_\parallel/p$ at the location where B is minimum on this flux surface.

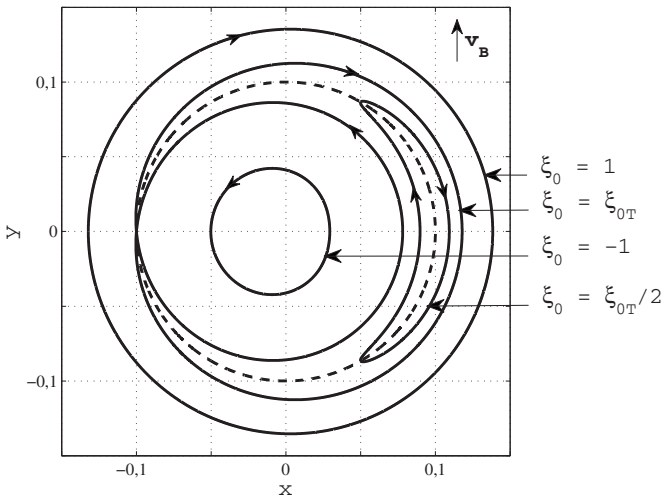


FIG. 1. Schematic representation of GC orbits $\psi=\tilde{\psi}(\theta,\sigma,\bar{\psi},p,\xi_0)$ for a given value of $(\bar{\psi},p)$ and different values of ξ_0. The flux-surface $\psi=\bar{\psi}$ is drawn as a dashed line.

The coordinate system $(\theta,\bar{\psi},p,\xi_0)$ is illustrated in Fig. 1 where various GC orbits are schematically displayed.

B. Guiding-center Fokker–Planck equation

The GC Fokker–Planck equation is expressed in this representation by[12]

$$\epsilon_\tau\frac{\partial F}{\partial\tau}+\dot{\theta}\frac{\partial F}{\partial\theta}=\epsilon_\nu C_{\rm gc}(F), \tag{5}$$

where $F=F(\tau,\theta,\bar{\psi},p,\xi_0)$ is the GC distribution function, and the time evolution of F on a slow time scale τ is considered. The poloidal motion is characterized by the superposition of the free streaming along the field line and the magnetic drift

$$\dot{\theta}=\mathbf{v}_{\rm gc}\cdot\nabla\theta=v_\parallel\frac{B^\theta}{B}+\epsilon_\psi\dot{\theta}_B, \tag{6}$$

where B^θ is the poloidal component of the magnetic field in the contravariant representation.

The GC Fokker–Planck operator[12]

$$C_{\rm gc}(F)=-\frac{1}{\mathcal{J}}\frac{\partial}{\partial Z^\alpha}\left[\mathcal{J}\left(K_{\rm gc}^\alpha F-D_{\rm gc}^{\alpha\beta}\frac{\partial F}{\partial Z^\beta}\right)\right], \tag{7}$$

is expressed as a function of the coordinates $Z^\alpha=(\theta,\bar{\psi},p,\xi_0)$ and the Jacobian $\mathcal{J}$ for the $(\bar{\psi},\theta,\phi,p,\xi_0,\varphi)$ system.

The GC-FP coefficients are related to the particle momentum-space Fokker–Planck convection vector $\mathbf{K}$ and diffusion tensor $\mathbb{D}$ through the transformation[12]

Downloaded 06 Dec 2010 to 132.169.10.193. Redistribution subject to AIP license or copyright; see http://pop.aip.org/about/rights_and_permissions

$$K_{\rm gc}^{\alpha} = \langle \mathbf{T}^{-1}\mathbf{K}\cdot\boldsymbol{\Delta}^{\alpha}\rangle_g,$$
$$D_{\rm gc}^{\alpha\beta} = \langle (\boldsymbol{\Delta}^{\alpha})^t\cdot\mathbf{T}^{-1}\mathbb{D}\cdot\boldsymbol{\Delta}^{\beta}\rangle_g, \tag{8}$$

where $\mathbf{T}^{-1}$ is the GC transformation, $(\cdots)^t$ denotes the transpose operation, $\boldsymbol{\Delta}^{\alpha}$ is the projection vector for the coordinate α, and $\langle\cdots\rangle_g$ denotes gyroaveraging. The GC projection vectors in $(\bar{\psi},p,\xi_0)$ invariants space were defined as[11]

$$\boldsymbol{\Delta}^{\alpha} = \{\mathbf{X}+\boldsymbol{\rho}_{\epsilon},Z^{\alpha}\}_{\rm gc}, \tag{9}$$

where $\boldsymbol{\rho}_{\epsilon}$ is the gyrovector and $\{\cdots\}_{\rm gc}$ denotes the GC Poisson bracket. From the GC Poisson bracket expressed in $(\mathbf{X},\mathcal{E},\mu)$ coordinates,[11] the GC projection vectors $\boldsymbol{\Delta}^{\alpha}$ can be derived using the chain rule[12]

$$\boldsymbol{\Delta}^{\alpha} = \boldsymbol{\Delta}^{\mathbf{X}}\cdot\nabla Z^{\alpha} + \boldsymbol{\Delta}^{\mathcal{E}}\frac{\partial Z^{\alpha}}{\partial\mathcal{E}} + \boldsymbol{\Delta}^{\mu}\frac{\partial Z^{\alpha}}{\partial\mu}. \tag{10}$$

Accounting for finite-orbit width, these vectors become[14]

$$\boldsymbol{\Delta}^{\bar{\psi}} = \epsilon_B\frac{\hat{\mathbf{b}}}{m\Omega}\times\nabla\bar{\psi} - \epsilon_{\psi}\frac{\delta\psi}{p^2\xi^2}\mathbf{p}_{\epsilon} + \epsilon_{\psi}\frac{\Omega\delta\psi}{2\mu B}\frac{1-\xi^2}{\xi^2}\frac{\partial\boldsymbol{\rho}_{\epsilon}}{\partial\varphi} + \mathcal{O}(\epsilon_B^2),$$

$$\boldsymbol{\Delta}^{p} = \frac{\mathbf{p}_{\epsilon}}{p} + \mathcal{O}(\epsilon_B^2), \tag{11}$$

$$\boldsymbol{\Delta}^{\xi_0} = \frac{1-\xi_0^2}{2\xi_0}\left(\frac{\mathbf{p}_{\epsilon}}{m\mathcal{E}} - \frac{\Omega}{\mu B}\frac{\partial\boldsymbol{\rho}_{\epsilon}}{\partial\varphi} - \boldsymbol{\Delta}^{\bar{\psi}}\frac{d\ln B_0}{d\bar{\psi}}\right) + \mathcal{O}(\epsilon_B^2),$$

where Ω is the gyrofrequency, $\mathbf{p}_{\epsilon}$ is the particle kinetic momentum, and $\hat{\mathbf{b}}\equiv\mathbf{B}/B$.

The GC convection and diffusion coefficients (8), which include the effects of magnetic drift, can be formally written as

$$K_{\rm gc}^{\alpha} = K_{\rm gc,0}^{\alpha} + \epsilon_B K_{\rm gc,1}^{\alpha} + \cdots,$$
$$D_{\rm gc}^{\alpha\beta} = D_{\rm gc,0}^{\alpha\beta} + \epsilon_B D_{\rm gc,1}^{\alpha\beta} + \cdots. \tag{12}$$

III. ORBIT-AVERAGED GUIDING-CENTER FOKKER–PLANCK EQUATION

A. Orbit averaging

The θ-dependence can be removed from the guiding-center Fokker–Planck equation by averaging over the GC orbits. The orbit-averaging operation is defined in the poloidal plane as

$$\langle\cdots\rangle_{\mathcal{O}} = \frac{1}{\tau_{\mathcal{O}}}\oint_{\mathcal{O}}\frac{dl}{v_{\rm gc}}\cdots, \tag{13}$$

where the incremental length along the orbit $\mathcal{O}$ is $dl(\theta,\sigma,\bar{\psi},p,\xi_0)$ and the orbit time is

$$\tau_{\mathcal{O}}(\bar{\psi},p,\xi_0) = \oint_{\mathcal{O}}\frac{dl}{v_{\rm gc}}. \tag{14}$$

Note that we can rewrite $dl/v_{\rm gc}=d\theta/\dot{\theta}$,[12] such that

$$\langle\cdots\rangle_{\mathcal{O}} = \frac{1}{\tau_{\mathcal{O}}}\oint_{\mathcal{O}}\frac{d\theta}{\dot{\theta}}\cdots. \tag{15}$$

Defining the orbit-averaging Jacobian

$$\mathcal{J}_{\mathcal{O}} \equiv \frac{\tau_{\mathcal{O}}}{2\pi}\frac{vp^2|\xi_0|}{B_0(\bar{\psi})}, \tag{16}$$

which only depends upon the invariants $(\bar{\psi},p,\xi_0)$, we formally express the product $\mathcal{J}\dot{\theta}$ as

$$\frac{\sigma\mathcal{J}\dot{\theta}}{2\pi} \equiv \frac{\mathcal{J}_{\mathcal{O}}}{\tau_{\mathcal{O}}}\mathcal{G}(\theta,\bar{\psi},p,\xi_0). \tag{17}$$

The Jacobian $\mathcal{J}$ and the angular velocity $\dot{\theta}$ are evaluated in Appendix A, which yields Eq. (A16)

$$\mathcal{G}(\theta,\bar{\psi},p,\xi_0) = 1 + \mathcal{O}(\epsilon_{\psi}\epsilon_B). \tag{18}$$

B. Low-collisionality regimes

From now on, we focus on low-collisionality regimes $\epsilon_{\nu}\ll 1$ for which the GC-FP equation can be reduced to a 3D equation involving the motion invariants $I^a=(\bar{\psi},p,\xi_0)$. Considering a slow time scale τ with $\epsilon_{\tau}=\tau_{\mathcal{O}}/\tau\ll 1$, the Fokker–Planck equation (5) reduces to leading order to

$$\dot{\theta}\frac{\partial F}{\partial\theta} = 0, \tag{19}$$

such that $F=F^{(0)}(\tau,\bar{\psi},p,\xi_0)$ is independent of θ.

Applying the orbit-averaging operation (15) to Eq. (5) yields the orbit-averaged Fokker–Planck equation

$$\epsilon_{\tau}\frac{\partial F^{(0)}}{\partial\tau} = -\epsilon_{\nu}\frac{1}{\mathcal{J}_{\mathcal{O}}}\frac{\partial}{\partial I^a}\left(\mathcal{J}_{\mathcal{O}}\left[\langle K_{\rm gc}^{a}\rangle_{\mathcal{O}}F^{(0)} - \langle D_{\rm gc}^{ab}\rangle_{\mathcal{O}}\frac{\partial F^{(0)}}{\partial I^b}\right]\right) + \epsilon_{\nu}\left[\left\langle\mathcal{G}\frac{\partial\mathcal{G}^{-1}}{\partial Z^{\alpha}}K_{\rm gc}^{\alpha}\right\rangle_{\mathcal{O}}F^{(0)} - \left\langle\mathcal{G}\frac{\partial\mathcal{G}^{-1}}{\partial Z^{\alpha}}D_{\rm gc}^{ab}\right\rangle_{\mathcal{O}}\frac{\partial F^{(0)}}{\partial I^b}\right]. \tag{20}$$

This equation can be further transformed to give

$$\epsilon_{\tau}\frac{\partial F^{(0)}}{\partial\tau} = \langle C_{\rm gc}(F^{(0)})\rangle_{\mathcal{O}} \equiv -\epsilon_{\nu}\frac{1}{\mathcal{J}_{\mathcal{O}}}\frac{\partial}{\partial I^a}\left(\mathcal{J}_{\mathcal{O}}\left[K_{\rm gc}^{a(0)}F^{(0)} - D_{\rm gc}^{ab(0)}\frac{\partial F^{(0)}}{\partial I^b}\right]\right) + \epsilon_{\nu}M_{\rm gc}^{(0)}F^{(0)}, \tag{21}$$

with

Downloaded 06 Dec 2010 to 132.169.10.193. Redistribution subject to AIP license or copyright; see http://pop.aip.org/about/rights_and_permissions

$$K_{\rm gc}^{a(0)} = \langle K_{\rm gc}^{a} \rangle_{\mathcal{O}} + \left\langle D_{\rm gc}^{a\beta} \mathcal{G} \frac{\partial \mathcal{G}^{-1}}{\partial Z^{\beta}} \right\rangle_{\mathcal{O}},$$

$$D_{\rm gc}^{ab(0)} = \langle D_{\rm gc}^{ab} \rangle_{\mathcal{O}}, \tag{22}$$

$$M_{\rm gc}^{(0)} = \frac{1}{\mathcal{J}_{\mathcal{O}}} \frac{\partial}{\partial I^{a}} \left[\mathcal{J}_{\mathcal{O}} \left\langle D_{\rm gc}^{a\beta} \mathcal{G} \frac{\partial \mathcal{G}^{-1}}{\partial Z^{\beta}} \right\rangle_{\mathcal{O}} \right] + \left\langle K_{\rm gc}^{\alpha} \mathcal{G} \frac{\partial \mathcal{G}^{-1}}{\partial Z^{\alpha}} \right\rangle_{\mathcal{O}}.$$

According to Eq. (21), the distribution evolves on the collision time scale: $\epsilon_{\tau} = \epsilon_{\nu}$.

C. Thin orbit approximation

The thin orbit approximation is characterized by $\epsilon_{\psi} \ll 1$. In this case, the corrections of order $\epsilon_{\psi}\epsilon_{B}$ in Eq. (18) can be neglected as compared to the corrections of order ϵ_{B} in Eq. (12) and thus we can take $\mathcal{G}=1$. The orbit-averaging operation (15) can be expressed as

$$\langle \cdots \rangle_{\mathcal{O}} = \frac{1}{\mathcal{J}_{\mathcal{O}}} \oint_{\mathcal{O}} \frac{d\theta}{2\pi} \sigma \mathcal{J} \cdots, \tag{23}$$

and the orbit-averaged Fokker–Planck equation reduces to

$$\frac{\partial F^{(0)}}{\partial \tau} = \langle C_{\rm gc}(F^{(0)}) \rangle_{\mathcal{O}} \equiv -\frac{1}{\mathcal{J}_{\mathcal{O}}} \frac{\partial}{\partial I^{a}} \left(\mathcal{J}_{\mathcal{O}} \left[K_{\rm gc}^{a(0)} F^{(0)} - D_{\rm gc}^{ab(0)} \frac{\partial F^{(0)}}{\partial I^{b}} \right] \right), \tag{24}$$

with

$$K_{\rm gc}^{a(0)} = \langle K_{\rm gc}^{a} \rangle_{\mathcal{O}}, \qquad D_{\rm gc}^{ab(0)} = \langle D_{\rm gc}^{ab} \rangle_{\mathcal{O}}. \tag{25}$$

D. Conservative form of the differential operator

For computational purposes, the differential part of the orbit-averaged guiding-center Fokker–Planck operator in Eq. (24) is recast in a flux-conservative form

$$\langle C_{\rm gc}[F^{(0)}] \rangle_{\mathcal{O}} = -\frac{1}{\mathcal{J}_{\mathcal{O}}} \frac{\partial}{\partial \bar{\psi}} (\mathcal{J}_{\mathcal{O}} \|\nabla \bar{\psi}\|_{0} S_{\rm L}^{\bar{\psi}}) - \frac{1}{\mathcal{J}_{\mathcal{O}}} \frac{\partial}{\partial p} (\mathcal{J}_{\mathcal{O}} S_{\rm L}^{p}) + \frac{1}{\mathcal{J}_{\mathcal{O}} p} \frac{\partial}{\partial \xi_{0}} (\mathcal{J}_{\mathcal{O}} \sqrt{1-\xi_{0}^{2}} S_{\rm L}^{\xi_{0}}), \tag{26}$$

where $S_{L}^{\bar{\psi}}$ describes the GC particle flux across magnetic flux surfaces and $(S_{L}^{p}, S_{L}^{\xi_{0}})$ represent momentum and pitch-angle dynamics, respectively. They are given by

$$\begin{pmatrix} S_{\rm L}^{\bar{\psi}} \\ S_{\rm L}^{p} \\ S_{\rm L}^{\xi_{0}} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} K_{\rm L}^{\bar{\psi}} \\ K_{\rm L}^{p} \\ K_{\rm L}^{\xi_{0}} \end{pmatrix} F^{(0)} - \begin{pmatrix} D_{\rm L}^{\bar{\psi}\bar{\psi}} & D_{\rm L}^{\bar{\psi}p} & D_{\rm L}^{\bar{\psi}\xi_{0}} \\ D_{\rm L}^{p\bar{\psi}} & D_{\rm L}^{pp} & D_{\rm L}^{p\xi_{0}} \\ D_{\rm L}^{\xi_{0}\bar{\psi}} & D_{\rm L}^{\xi_{0}p} & D_{\rm L}^{\xi_{0}\xi_{0}} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \|\nabla \bar{\psi}\|_{0} \, \partial/\partial \bar{\psi} \\ \partial/\partial p \\ -p^{-1}\sqrt{1-\xi_{0}^{2}} \, \partial/\partial \xi_{0} \end{pmatrix} F^{(0)}, \tag{27}$$

where the friction coefficients $K_{\rm L}^{a}$ and symmetric diffusion coefficients $D_{\rm L}^{ab} = D_{\rm L}^{ba}$ may be expressed in terms of guiding-center friction and diffusion components (22) according to the general relations[12]

$$K_{\rm L}^{\bar{\psi}} = \frac{1}{\|\nabla \bar{\psi}\|_{0}} K_{\rm gc}^{\bar{\psi}(0)}, \qquad K_{\rm L}^{p} = K_{\rm gc}^{p(0)}, \qquad K_{\rm L}^{\xi_{0}} = -\frac{p}{\sqrt{1-\xi_{0}^{2}}} K_{\rm gc}^{\xi_{0}(0)}, \tag{28}$$

and

$$D_{\rm L}^{\bar{\psi}\bar{\psi}} = \frac{1}{\|\nabla \bar{\psi}\|_{0}^{2}} D_{\rm gc}^{\bar{\psi}\bar{\psi}(0)}, \qquad D_{\rm L}^{\bar{\psi}p} = \frac{1}{\|\nabla \bar{\psi}\|_{0}} D_{\rm gc}^{\bar{\psi}p(0)}, \qquad D_{\rm L}^{\bar{\psi}\xi_{0}} = -\frac{p}{\sqrt{1-\xi_{0}^{2}}} \frac{1}{\|\nabla \bar{\psi}\|_{0}} D_{\rm gc}^{\bar{\psi}\xi_{0}(0)},$$

$$D_{\rm L}^{pp} = D_{\rm gc}^{pp(0)}, \qquad D_{\rm L}^{p\xi_{0}} = -\frac{p}{\sqrt{1-\xi_{0}^{2}}} D_{\rm gc}^{p\xi_{0}(0)}, \qquad D_{\rm L}^{\xi_{0}\xi_{0}} = \frac{p^{2}}{1-\xi_{0}^{2}} D_{\rm gc}^{\xi_{0}\xi_{0}(0)}. \tag{29}$$

In Eq. (26), $\|\nabla \bar{\psi}\|_{0} \equiv \|\nabla \psi\|_{0}(\bar{\psi})$ where $\|\nabla \psi\|_{0}(\psi) \equiv \|\nabla \psi\|(\psi, \theta_{0}(\psi))$ is defined as the value of $\|\nabla \psi\| = RB_{P}$ at the poloidal location $\theta_{0}(\psi)$ where the magnetic field

$$B[\psi, \theta_{0}(\psi)] \equiv B_{0}(\psi), \tag{30}$$

is minimum on the flux-surface ψ. Here B_{P} is the poloidal component of the magnetic field. The term $\|\nabla \bar{\psi}\|_{0}$ is introduced such that $S_{\rm L}^{\bar{\psi}}$ has the dimension of a flux in configuration space. When the flux-conservative form of the differential operator (26) is numerically implemented using a two-grid discretization technique (with the distribution on the half-grid),[15] it yields a numerical scheme in which the internal boundary conditions are inherently satisfied.[16]

Downloaded 06 Dec 2010 to 132.169.10.193. Redistribution subject to AIP license or copyright; see http://pop.aip.org/about/rights_and_permissions

IV. TRANSFORMATION OF AN ISOTROPIC COLLISION OPERATOR

A. Transformation of FP collision coefficients to GC coordinates

For an FP operator describing collisions with isotropic field particles, we have[11]

$$\mathbf{K} = -\nu\mathbf{p},$$
$$\mathbb{D} = D_t\left(\mathbb{I} - \frac{\mathbf{pp}}{p^2}\right) + D_l\frac{\mathbf{pp}}{p^2}, \tag{31}$$

where the convection coefficient ν and diffusion coefficients D_l and D_t are function of $(p,\mathbf{x})$ only [We can assume they are function of (p,ψ) only.]. Thus[11]

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{K} = -\nu_\epsilon\mathbf{p}_\epsilon,$$
$$\mathbf{T}^{-1}\mathbb{D} = D_{t\epsilon}\mathbb{I} + (D_{l\epsilon} - D_{t\epsilon})\frac{\mathbf{p}_\epsilon\mathbf{p}_\epsilon}{p}, \tag{32}$$

where

$$\nu_\epsilon(\mathbf{Z}) = \nu(p,\mathbf{X}+\boldsymbol{\rho}_\epsilon) = \nu(p,\mathbf{X}) + \epsilon_{n,T}\boldsymbol{\rho}_\epsilon\cdot\boldsymbol{\nabla}\nu,$$
$$D_{t\epsilon}(\mathbf{Z}) = D_t(p,\mathbf{X}+\boldsymbol{\rho}_\epsilon) = D_t(p,\mathbf{X}) + \epsilon_{n,T}\boldsymbol{\rho}_\epsilon\cdot\boldsymbol{\nabla}D_t, \tag{33}$$
$$D_{l\epsilon}(\mathbf{Z}) = D_l(p,\mathbf{X}+\boldsymbol{\rho}_\epsilon) = D_l(p,\mathbf{X}) + \epsilon_{n,T}\boldsymbol{\rho}_\epsilon\cdot\boldsymbol{\nabla}D_l,$$

since the particle energy and GC energy are identical up to order ϵ_B. We can assume that $\epsilon_B\sim\epsilon_{n,T}\sim\epsilon$.

The coefficients $K^\alpha_{\rm gc}$ and $D^{\alpha\beta}_{\rm gc}$ have been explicitly calculated in the local GC coordinate system $(\mathbf{X},\mathcal{E},\mu,\varphi)$ for the particular case of a uniform field-particle distribution.[11] The results are extended to the case of a nonuniform distribution in Appendix C. As expected, the transformation to local GC coordinates yields GC spacial transport coefficients at order ϵ^2 and corrections of order ϵ to $(\mathcal{E},\mu)$ transport.

B. FP collision coefficients in nonlocal coordinates $(\theta,\bar{\psi},p,\xi_0)$

The transformation to the nonlocal coordinates $(\theta,\bar{\psi},p,\xi_0)$ where $(\bar{\psi},p,\xi_0)$ are invariants of the GC motion will naturally yield neoclassical transport coefficients of order ϵ_ψ. Using the projection vectors (11) for the coordinate $(\bar{\psi},p,\xi_0)$ in Eq. (8) and evaluating the gyroaveraged expressions, we obtain the following coefficients:

$$\begin{pmatrix} K^p_{\rm gc} \\ D^{pp}_{\rm gc}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\nu p \\ D_l\end{pmatrix} + \mathcal{O}(\epsilon^2), \tag{34}$$

$$\begin{pmatrix} K^{\xi_0}_{\rm gc} \\ D^{p\xi_0}_{\rm gc}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\nu p \\ D_l\end{pmatrix}\frac{(1-\xi_0^2)}{2p\xi_0} \times\left[\epsilon_\psi\overline{\delta\psi} + \epsilon\lambda_{\rm gc}\left(1+\epsilon_\psi\overline{\delta\psi}\frac{(1-\xi^2)}{2\xi^2}\right)\right] + \mathcal{O}(\epsilon^2), \tag{35}$$

$$\begin{pmatrix} K^{\bar{\psi}}_{\rm gc} \\ D^{p\bar{\psi}}_{\rm gc}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\nu p \\ D_l\end{pmatrix}\left[-\epsilon_\psi\frac{\delta\psi}{p}\left(1+\epsilon\frac{(1-\xi^2)}{2\xi^2}\lambda_{\rm gc}\right)\right] + \mathcal{O}(\epsilon^2), \tag{36}$$

where $\lambda_{\rm gc} = (v_\parallel/\Omega)\hat{\mathbf{b}}\cdot\boldsymbol{\nabla}\times\hat{\mathbf{b}}$ and we define the normalized quantity

$$\overline{\delta\psi} = \delta\psi\frac{B_0'}{B_0}. \tag{37}$$

In addition, defining the following diffusion coefficients:

$$D_1 = \xi^2 D_l + (1-\xi^2)D_t,$$
$$D_2 = D_l - D_t, \tag{38}$$
$$D_3 = \frac{D_l}{2} - D_t,$$

and the following expressions where the effect of magnetic nonuniformity explicitly appears:

$$D_A = D_1 + \epsilon\lambda_{\rm gc}(1-\xi^2)D_2,$$
$$D_B = D_t + \epsilon\lambda_{\rm gc}D_3, \tag{39}$$
$$D_C = D_t(1-\epsilon\lambda_{\rm gc}),$$

we find the coefficients

$$D^{\bar{\psi}\bar{\psi}}_{\rm gc} = \epsilon_\psi^2\frac{(\delta\psi)^2}{p^2\xi^2}D_A + \mathcal{O}(\epsilon^2),$$
$$D^{\xi_0\bar{\psi}}_{\rm gc} = -\epsilon_\psi\delta\psi\frac{(1-\xi_0^2)}{p^2\xi_0}\left\{D_B + \epsilon_\psi\frac{\overline{\delta\psi}}{2\xi^2}D_A\right\} + \mathcal{O}(\epsilon^2), \tag{40}$$
$$D^{\xi_0\xi_0}_{\rm gc} = \frac{(1-\xi_0^2)}{p^2\xi_0^2\Psi}\left\{\xi^2 D_C + \epsilon_\psi\overline{\delta\psi}(1-\xi^2)D_B + \epsilon_\psi^2(\overline{\delta\psi})^2\frac{(1-\xi^2)}{4\xi^2}D_A\right\} + \mathcal{O}(\epsilon^2).$$

The coefficients $K^\theta_{\rm gc}$ and $D^{\alpha\theta}_{\rm gc}$ are all of order ε^2.

C. Thin orbit width approximation

The coefficients ν, D_l, and D_t are functions of (p,ψ). In the thin orbit approximation characterized by $\epsilon_\psi\ll 1$, they can be developed using $\psi=\bar{\psi}+\delta\psi$ as

$$\nu(p,\psi) = \nu(p,\bar{\psi}) + \epsilon_\psi\delta\psi\frac{\partial\nu}{\partial\psi}(p,\bar{\psi}),$$
$$D_t(p,\psi) = D_t(p,\bar{\psi}) + \epsilon_\psi\delta\psi\frac{\partial D_t}{\partial\psi}(p,\bar{\psi}), \tag{41}$$
$$D_l(p,\psi) = D_l(p,\bar{\psi}) + \epsilon_\psi\delta\psi\frac{\partial D_l}{\partial\psi}(p,\bar{\psi}).$$

Note that we could expand the coefficients around $\langle\psi\rangle_\mathcal{O}$ rather than $\bar{\psi}$. It is identical for trapped orbits, but not for

Downloaded 06 Dec 2010 to 132.169.10.193. Redistribution subject to AIP license or copyright; see http://pop.aip.org/about/rights_and_permissions

passing orbits where $|\psi-\langle\psi\rangle_{\mathcal{O}}|<\delta\psi$ such that the expansion is more valid. Yet, the choice of expansion around $\bar{\psi}$ has the numerical advantage of calculating the coefficients and their derivatives on a fixed two-dimensional grid $(p,\bar{\psi})$ rather than the 3D grid since $\langle\psi\rangle_{\mathcal{O}}=\langle\psi\rangle_{\mathcal{O}}(p,\xi_0,\bar{\psi})$.

Neglecting terms of order ϵ_ψ^2 and $\epsilon\epsilon_\psi$, we obtain the following coefficients, where ν, $D_\parallel$, and $D_\perp$ and their derivatives are now function of $(p,\bar{\psi})$

$$\begin{pmatrix} K_{\rm gc}^{p} \\ D_{\rm gc}^{pp} \end{pmatrix} = \left(1+\epsilon_\psi\delta\psi\frac{\partial}{\partial\psi}\right)\begin{pmatrix} -\nu p \\ D_l \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\epsilon^2,\epsilon_\psi^2,\epsilon\epsilon_\psi), \tag{42}$$

$$\begin{pmatrix} K_{\rm gc}^{\xi_0} \\ D_{\rm gc}^{p\xi_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\nu p \\ D_l \end{pmatrix}\frac{(1-\xi_0^2)}{2p\xi_0}(\epsilon_\psi\overline{\delta\psi}+\epsilon\lambda_{\rm gc}) + \mathcal{O}(\epsilon^2,\epsilon_\psi^2,\epsilon\epsilon_\psi), \tag{43}$$

$$\begin{pmatrix} K_{\rm gc}^{\bar{\psi}} \\ D_{\rm gc}^{p\bar{\psi}} \\ D_{\rm gc}^{\xi_0\bar{\psi}} \end{pmatrix} = -\epsilon_\psi\frac{\delta\psi}{p}\begin{pmatrix} -\nu p \\ D_l \\ (1-\xi_0^2)D_t/(p\xi_0) \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\epsilon^2,\epsilon_\psi^2,\epsilon\epsilon_\psi), \tag{44}$$

$$D_{\rm gc}^{\bar{\psi}\bar{\psi}} = \mathcal{O}(\epsilon^2,\epsilon_\psi^2,\epsilon\epsilon_\psi), \tag{45}$$

$$D_{\rm gc}^{\xi_0\xi_0} = \frac{(1-\xi_0^2)}{p^2}\frac{\xi^2}{\xi_0^2\Psi}\left[1-\epsilon\lambda_{\rm gc}+\epsilon_\psi\left(\overline{\delta\psi}\frac{(1-\xi^2)}{\xi^2}+\delta\psi\frac{\partial}{\partial\psi}\right)\right]D_t + \mathcal{O}(\epsilon^2,\epsilon_\psi^2,\epsilon\epsilon_\psi). \tag{46}$$

The coefficients $K_{\rm gc}^{\theta}$ and $D_{\rm gc}^{\alpha\theta}$ are all of order ϵ^2.

D. Orbit averaging in the thin orbit approximation

In the thin orbit approximation, the orbit-averaged coefficients are given by Eq. (25), which yields

$$\begin{pmatrix} K_{\rm gc}^{p(0)} \\ D_{\rm gc}^{pp(0)} \end{pmatrix} = \left(1+\epsilon_\psi\delta\psi^{(0)}\frac{\partial}{\partial\psi}\right)\begin{pmatrix} -\nu p \\ D_l \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\epsilon^2,\epsilon_\psi^2,\epsilon\epsilon_\psi), \tag{47}$$

$$\begin{pmatrix} K_{\rm gc}^{\xi_0(0)} \\ D_{\rm gc}^{p\xi_0(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\nu p \\ D_l \end{pmatrix}\frac{(1-\xi_0^2)}{2p\xi_0}(\epsilon_\psi\overline{\delta\psi}^{(0)}+\epsilon\lambda_{\rm gc}^{(0)}) + \mathcal{O}(\epsilon^2,\epsilon_\psi^2,\epsilon\epsilon_\psi), \tag{48}$$

$$\begin{pmatrix} K_{\rm gc}^{\bar{\psi}(0)} \\ D_{\rm gc}^{p\bar{\psi}(0)} \\ D_{\rm gc}^{\xi_0\bar{\psi}(0)} \end{pmatrix} = -\epsilon_\psi\frac{\delta\psi^{(0)}}{p}\begin{pmatrix} -\nu p \\ D_l \\ (1-\xi_0^2)D_t/(p\xi_0) \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\epsilon^2,\epsilon_\psi^2,\epsilon\epsilon_\psi), \tag{49}$$

$$D_{\rm gc}^{\bar{\psi}\bar{\psi}(0)} = \mathcal{O}(\epsilon^2,\epsilon_\psi^2,\epsilon\epsilon_\psi), \tag{50}$$

$$D_{\rm gc}^{\xi_0\xi_0(0)} = \frac{(1-\xi_0^2)}{p^2}\left[\Delta^\dagger-\epsilon\lambda_{\rm gc}^{(0)\dagger}+\epsilon_\psi\left(\overline{\delta\psi}^{(0)}\frac{(1-\xi_0^2)}{\xi_0^2}+\delta\psi^{(0)\dagger}\frac{\partial}{\partial\psi}\right)\right]D_t + \mathcal{O}(\epsilon^2,\epsilon_\psi^2,\epsilon\epsilon_\psi), \tag{51}$$

where we need to evaluate the following coefficients:

$$\begin{aligned}
&\delta\psi^{(0)} \equiv \langle\delta\psi\rangle_{\mathcal{O}},\\
&\delta\psi^{(0)\dagger} \equiv \left\langle\frac{\xi^2}{\xi_0^2\Psi}\delta\psi\right\rangle_{\mathcal{O}} = \frac{\langle\delta\psi\Psi^{-1}\rangle_{\mathcal{O}}-(1-\xi_0^2)\delta\psi^{(0)}}{\xi_0^2},\\
&\overline{\delta\psi}^{(0)} \equiv \frac{B_0'}{B_0}\delta\psi^{(0)},\\
&\lambda_{\rm gc}^{(0)} \equiv \langle\lambda_{\rm gc}\rangle_{\mathcal{O}},\\
&\lambda_{\rm gc}^{(0)\dagger} \equiv \left\langle\frac{\xi^2}{\xi_0^2\Psi}\lambda_{\rm gc}\right\rangle_{\mathcal{O}} = \frac{\langle\lambda_{\rm gc}\Psi^{-1}\rangle_{\mathcal{O}}-(1-\xi_0^2)\lambda_{\rm gc}^{(0)}}{\xi_0^2},\\
&\Delta^\dagger \equiv \left\langle\frac{\xi^2}{\xi_0^2\Psi}\right\rangle_{\mathcal{O}} = \frac{\langle\Psi^{-1}\rangle_{\mathcal{O}}-(1-\xi_0^2)}{\xi_0^2}.
\end{aligned} \tag{52}$$

In the thin orbit width approximation, it is therefore not necessary to evaluate the particle collision operator coefficients along each particle orbit for the calculation of orbit-averaged FP diffusion and convection coefficients (47)–(51). Indeed, the GC orbit effects reduce to the calculation of the orbit-averaging coefficients (52) and radial gradients of particle collision operator coefficients (41). Note that $\delta\psi^{(0)}=0$ for trapped particle orbits.

This separation between orbit dynamics and FP coefficients calculations has important numerical implications as the bounce coefficients (52) need to be only determined once for a given equilibrium, while it is not necessary to calculate the FP coefficients ν, D_l, and D_t, which involve time-consuming integrals in the relativistic case, along every GC orbit.

Finite-orbit width effects can be neglected in the determination of the orbit-averaged coefficients $\delta\psi^{(0)}$, $\delta\psi^{(0)\dagger}$, $\overline{\delta\psi}^{(0)}$, $\lambda_{\rm gc}^{(0)}$, and $\lambda_{\rm gc}^{(0)\dagger}$ [Eq. (52)] as they would enter Eqs. (47)–(51) to order ϵ_ψ^2 or $\epsilon\epsilon_\psi$. By taking the limit $\tilde{\psi}\to\bar{\psi}$, the orbit-averaging operation (23) reduces to[12] Eq. (A17)

$$\langle\cdots\rangle_{\mathcal{O}} = \frac{1}{\Lambda\lambda}\left[\frac{1}{2}\sum_\sigma\right]_T\int_{\theta_1}^{\theta_2}d\theta\frac{B}{B^\theta}\left|\frac{\xi_0}{\xi}\right|\cdots, \tag{53}$$

where $\Lambda(\psi)=\int_{-\pi}^{\pi}d\theta B/B^\theta$ is the length of a field line over one poloidal cycle, the sum over σ applies to trapped orbits between the turning points θ_1 and θ_2, and

$$\lambda(\psi,\xi_0) = \frac{1}{\Lambda}\int_{\theta_1}^{\theta_2}d\theta\frac{B}{B^\theta}\left|\frac{\xi_0}{\xi}\right|, \tag{54}$$

is the normalized orbit time in the zero-orbit width limit.[17] By extension, we define the following quantities:

Downloaded 06 Dec 2010 to 132.169.10.193. Redistribution subject to AIP license or copyright; see http://pop.aip.org/about/rights_and_permissions

$$\lambda_{k,l,m}(\psi,\xi_0)=\frac{1}{\Lambda_{l,m}(\psi)}\int_{\theta_1}^{\theta_2}d\theta\frac{B}{B^\theta}\left|\frac{\xi}{\xi_0}\right|^{k-1}\left(\frac{R_0}{R}\right)^l\Psi^m, \quad (55)$$

with

$$\Lambda_{l,m}(\psi)=\int_{-\pi}^{\pi}d\theta\frac{B}{B^\theta}\left(\frac{R_0}{R}\right)^l\Psi^m, \quad (56)$$

such that $\lambda_{0,0,0}=\lambda$, $\Lambda_{0,0}=\Lambda$, and $\lambda_{k,l,m}(\psi,\pm 1)=1$. Here $R_0(\psi)=R(\psi,\theta_0)$ where $\theta_0(\psi)$ is defined in Eq. (30). Using Eq. (53) and $\delta\psi=p\xi B_\phi/(ZeB)$ [Eq. (2)], since B_ϕ is a function of ψ only, we can evaluate the coefficients associated with the orbit width

$$\delta\psi^{(0)}=H[|\xi_0|-\xi_{0T}(\bar{\psi})]\frac{B_\phi}{B_0}\frac{\Lambda_{0,-1}}{\Lambda\lambda}\frac{p\xi_0}{Ze},$$

$$\delta\psi^{(0)\dagger}=H[|\xi_0|-\xi_{0T}(\bar{\psi})]\frac{B_\phi}{B_0}\frac{[\Lambda_{0,-2}-(1-\xi_0^2)\Lambda_{0,-1}]}{\Lambda\lambda\xi_0^2}\frac{p\xi_0}{Ze}. \quad (57)$$

E. Coefficients for the conservative form of the collision operator

In the thin orbit approximation, the convection and diffusion coefficients (28) and (29) can be explicitly evaluated for the FP collision operator

$$\begin{pmatrix}K_{\rm L}^p\\ D_{\rm L}^{pp}\end{pmatrix}=\left(1+\epsilon_\psi\delta\psi^{(0)}\frac{\partial}{\partial\psi}\right)\begin{pmatrix}-\nu p\\ D_l\end{pmatrix}+\mathcal{O}(\epsilon^2,\epsilon_\psi^2,\epsilon\epsilon_\psi), \quad (58)$$

$$\begin{pmatrix}K_{\rm L}^{\xi_0}\\ D_{\rm L}^{p\xi_0}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\nu p\\ D_l\end{pmatrix}\frac{\sqrt{1-\xi_0^2}}{2\xi_0}(\epsilon_\psi\overline{\delta\psi}^{(0)}+\epsilon\lambda_{\rm gc}^{(0)})+\mathcal{O}(\epsilon^2,\epsilon_\psi^2,\epsilon\epsilon_\psi), \quad (59)$$

$$\begin{pmatrix}K_{\rm L}^{\bar{\psi}}\\ D_{\rm L}^{p\bar{\psi}}\\ D_{\rm L}^{\xi_0\bar{\psi}}\end{pmatrix}=-\epsilon_\psi\frac{\delta\psi^{(0)}}{p\|\nabla\bar{\psi}\|_0}\begin{pmatrix}-\nu p\\ D_l\\ -\sqrt{1-\xi_0^2}D_t/\xi_0\end{pmatrix}+\mathcal{O}(\epsilon^2,\epsilon_\psi^2,\epsilon\epsilon_\psi), \quad (60)$$

$$D_{\rm L}^{\bar{\psi}\bar{\psi}}=\mathcal{O}(\epsilon^2,\epsilon_\psi^2,\epsilon\epsilon_\psi), \quad (61)$$

$$D_{\rm L}^{\xi_0\xi_0}=\left[\Delta^\dagger-\epsilon\lambda_{\rm gc}^{(0)\dagger}+\epsilon_\psi\left(\overline{\delta\psi}^{(0)}\frac{(1-\xi_0^2)}{\xi_0^2}+\delta\psi^{(0)\dagger}\frac{\partial}{\partial\psi}\right)\right]D_t+\mathcal{O}(\epsilon^2,\epsilon_\psi^2,\epsilon\epsilon_\psi). \quad (62)$$

Note that to leading order we retrieve the usual collision operator in the zero-orbit width limit

$$K_{\rm L}^p=-\nu p,$$

$$D_{\rm L}^{pp}=D_l, \quad (63)$$

$$D_{\rm L}^{\xi_0\xi_0}=\Delta^\dagger D_t.$$

V. BOOTSTRAP CURRENT IN THE LORENTZ LIMIT

The formalism presented in this paper can be validated by calculating the bootstrap current in the Lorentz limit $Z\gg 1$, an analytical result found in the literature.[1,18]

A. GC distribution function in the Lorentz limit

In the Lorentz limit $Z\gg 1$, the coefficients of the particle collision operator (31) reduce to $D_t=\nu_{ei}p^2/2$, while ν and D_l can be neglected. Thus, the orbit-averaged GC-FP operator (58)–(62) is also simplified with the following remaining coefficients:

$$D_{\rm L}^{\xi_0\bar{\psi}}=D_{\rm L}^{\bar{\psi}\xi_0}=\epsilon_\psi\delta\psi^{(0)}\frac{\sqrt{1-\xi_0^2}D_t}{p\xi_0\|\nabla\bar{\psi}\|_0},$$

$$D_{\rm L}^{\xi_0\xi_0}=\left[\Delta^\dagger-\epsilon\lambda_{\rm gc}^{(0)\dagger}+\epsilon_\psi\left(\delta\psi^{(0)}\frac{(1-\xi_0^2)}{\xi_0^2}+\delta\psi^{(0)\dagger}\frac{\partial}{\partial\psi}\right)\right]D_t+\mathcal{O}(\epsilon^2,\epsilon_\psi^2,\epsilon\epsilon_\psi). \quad (64)$$

In steady state, the FP equation (24) and (26)

$$\langle C_{\rm gc}[F^{(0)}]\rangle_{\mathcal{O}}=0, \quad (65)$$

reduces to

$$\frac{\partial}{\partial\bar{\psi}}\left(\mathcal{J}_{\mathcal{O}}\|\nabla\bar{\psi}\|_0D_{\rm L}^{\bar{\psi}\xi_0}\sqrt{1-\xi_0^2}\frac{\partial F^{(0)}}{\partial\xi_0}\right)+\frac{\partial}{\partial\xi_0}\left(\mathcal{J}_{\mathcal{O}}\sqrt{1-\xi_0^2}\left[D_{\rm L}^{\xi_0\bar{\psi}}\|\nabla\bar{\psi}\|_0\frac{\partial F^{(0)}}{\partial\bar{\psi}}-\frac{D_{\rm L}^{\xi_0\xi_0}}{p}\sqrt{1-\xi_0^2}\frac{\partial F^{(0)}}{\partial\xi_0}\right]\right)=0. \quad (66)$$

If we expand $F^{(0)}=F_0+\epsilon_\psi F_1$ with $\epsilon_\psi\sim\epsilon\ll 1$, we obtain to the leading order that $\partial F_0/\partial\xi_0=0$. To order 1 in ϵ_ψ,

$$\frac{\partial F_1}{\partial\xi_0}=\frac{\delta\psi^{(0)}}{\xi_0\Delta^\dagger}\frac{\partial F_0}{\partial\bar{\psi}}, \quad (67)$$

such that $F_1=0$ in the trapped region where $\delta\psi^{(0)}=0$.

Using Eq. (3), we transform

$$\Delta^\dagger\equiv\left\langle\frac{\xi^2}{\xi_0^2\Psi}\right\rangle_{\mathcal{O}}=1-\frac{\Delta}{\xi_0^2}, \quad (68)$$

with $\Delta=\langle 1-\Psi^{-1}\rangle_{\mathcal{O}}$ such that Eq. (67) can be formally integrated using Eq. (57) to give

$$F_1(\bar{\psi},p,\xi_0)=\sigma\frac{B_\phi}{B_0}\frac{p}{Ze}\frac{\partial F_0}{\partial\bar{\psi}}H[|\xi_0|-\xi_{0T}(\bar{\psi})]I(\bar{\psi},|\xi_0|), \quad (69)$$

where H is the Heaviside step function, and the integral I is defined as

$$I(\bar{\psi},\xi_0)\equiv\frac{\Lambda_{0,-1}}{\Lambda}\int_{\xi_{0T}}^{|\xi_0|}\frac{d\xi_0'}{\lambda(\bar{\psi},\xi_0')(1-\Delta/\xi_0'^2)}. \quad (70)$$

The first-order equation in Z^{-1} yields F_0 as a Maxwellian with temperature T and density n expressed in the nonrelativistic limit by

Downloaded 06 Dec 2010 to 132.169.10.193. Redistribution subject to AIP license or copyright; see http://pop.aip.org/about/rights_and_permissions

$$F_0 = \frac{n(\bar{\psi})}{[2\pi m T(\bar{\psi})]^{3/2}} e^{-p^2/[2mT(\bar{\psi})]}, \tag{71}$$

and we obtain

$$\frac{\partial \ln F_0}{\partial \bar{\psi}} = \frac{d \ln n}{d\bar{\psi}} + \left(\frac{p^2}{2mT} - \frac{3}{2}\right)\frac{d \ln T}{d\bar{\psi}}. \tag{72}$$

B. Bootstrap current

The bootstrap current is the flux-surface averaged current density obtained in the presence of collisions. It is evaluated here in the large aspect ratio and thin orbit approximations, with the ordering $\varepsilon \sim \epsilon^{1/2}$ such that $\epsilon \ll \varepsilon, \epsilon_\psi \ll 1$. Using Eq. (B7), $J_b = \langle Z e v_\parallel \hat{\mathbf{b}} \rangle_\phi$ reduces to

$$J_b(t,\psi) = \frac{2\pi}{dS_\phi/d\psi}\frac{Ze}{m}\int_0^\infty dp \frac{p^3}{\gamma}\int_{-1}^1 d\xi_0 \xi_0 \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{d\theta}{B^\theta}\frac{B^\phi}{B_0(\bar{\psi})} F^{(0)} \times (t,\bar{\psi},p,\xi_0), \tag{73}$$

where $\bar{\psi}$ is a function of (ψ,θ,p,ξ_0). We can expand $F^{(0)}$ using $\bar{\psi} = \psi - \epsilon_\psi \delta\psi$ and $F^{(0)} = F_0 + \epsilon_\psi F_1$ so that

$$F^{(0)}(t,\bar{\psi},p,\xi_0) = F_0(t,\psi,p) + \epsilon_\psi \times \left[F_1(t,\psi,p,\xi_0) - \delta\psi \frac{\partial F_0}{\partial \psi}(t,\psi,p,\xi_0)\right]. \tag{74}$$

Since $\partial F_0/\partial \xi_0 = 0$, the contribution of the leading term in Eq. (74) vanishes in the large aspect ratio approximation for which $B_0(\bar{\psi}) \simeq B_0(\psi)$ and $B^\phi \simeq B/R$ such that Eq. (73) becomes

$$J_b(t,\psi) = 2\pi\epsilon_\psi \frac{\Lambda_{1,0}}{\Lambda_{1,-1}}\frac{Ze}{m}\int_0^\infty dp \frac{p^3}{\gamma}\int_{-1}^1 d\xi_0 \xi_0 [\tilde{f}(t,\psi,p,\xi_0) + g(t,\psi,p,\xi_0)], \tag{75}$$

where we used $dS_\phi/d\psi = \Lambda_{1,-1}(\psi)/(R_0 B_0)$ and the definitions

$$\tilde{f}(t,\psi,p,\xi_0) \equiv -\langle \delta\psi \rangle_{\bar{\mathcal{O}}} \frac{\partial F_0}{\partial \psi}(t,\psi,p,\xi_0),$$
$$g(t,\psi,p,\xi_0) \equiv F_1(t,\psi,p,\xi_0), \tag{76}$$

with the following poloidal averaging:

$$\langle \cdots \rangle_{\bar{\mathcal{O}}} = \frac{1}{\Lambda_{1,0}}\int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \frac{R_0}{R}\frac{B}{B^\theta}\cdots. \tag{77}$$

We can evaluate $\langle \delta\psi \rangle_{\bar{\mathcal{O}}}$ with definitions (55) and (56) such as substituting Eq. (69), we obtain

$$\tilde{f}(t,\psi,p,\xi_0) = -\frac{\Lambda_{1,-1}\lambda_{2,1,-1}}{\Lambda_{1,0}}\frac{p\xi_0 B_\phi}{ZeB_0}\frac{\partial F_0}{\partial \psi},$$
$$g(t,\psi,p,\xi_0) = \sigma \frac{B_\phi}{B_0}\frac{p}{Ze}\frac{\partial F_0}{\partial \psi} H[|\xi_0| - \xi_{0T}(\psi)] I(\psi,|\xi_0|). \tag{78}$$

In the nonrelativistic limit $\gamma \to 1$, we find Eq. (72)

$$\frac{2\pi}{m}\int_0^\infty dp p^4 \frac{\partial F_0}{\partial \psi} = \frac{3}{2} n(\psi) T(\psi)\left[\frac{d \ln n}{d\psi} + \frac{d \ln T}{d\psi}\right]. \tag{79}$$

Therefore, the bootstrap current in the Lorentz limit can be expressed as

$$J_b(t,\psi) = -\epsilon_\psi F_t^{\text{eff}}(\psi) R_p n(\psi) T(\psi)\left[\frac{d \ln n}{d\psi} + \frac{d \ln T}{d\psi}\right], \tag{80}$$

where we introduce the effective trapped particle fraction

$$F_t^{\text{eff}}(\psi) \equiv \frac{3}{2}\frac{B_\phi}{R_p B_0}\int_{-1}^1 d\xi_0 \xi_0 \left(\lambda_{2,1,-1}\xi_0 - \sigma \frac{\Lambda_{1,0}}{\Lambda_{1,-1}} H[|\xi_0| - \xi_{0T}(\psi)] I(\psi,|\xi_0|)\right). \tag{81}$$

C. Particular case of circular concentric flux surfaces

For circular concentric flux surfaces $d\psi/dr = R_p B_P$ where $B_P(r)$ is the poloidal field evaluated at $R = R_p$, and we can express Eq. (80) as[1]

$$J_b(t,r) = -\epsilon_\psi F_t^{\text{eff}}(r)\frac{n(r)T(r)}{B_P(r)}\left[\frac{d \ln n}{dr} + \frac{d \ln T}{dr}\right]. \tag{82}$$

We can analytically determine the geometrical factors (56) $\Lambda_{l,m} = \Lambda_{l+m,0}$ with

$$\Lambda(r) = 2\pi B/B^\theta,$$
$$\Lambda_{-1,0}(r) = \frac{\Lambda}{1+\varepsilon},$$
$$\Lambda_{1,0}(r) = \Lambda\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}} \simeq \Lambda(1+\varepsilon), \tag{83}$$

and the bounce coefficient (55) $\lambda_{k,l,m}(r,\xi_0) = \lambda_{k,l+m,0}(r,\xi_0)$ with

$$\int_{-1}^1 d\xi_0 \xi_0^2 \lambda_{2,0,0}(r,\xi_0) = \frac{2}{3}\frac{1}{1+\varepsilon}. \tag{84}$$

Thus, for circular concentric flux surfaces, the effective trapped fraction becomes

$$F_t^{\text{eff}}(r) \equiv 1 - \frac{3}{2}\int_{-1}^1 d\xi_0 \xi_0 \sigma H[|\xi_0| - \xi_{0T}(r)] I(r,|\xi_0|), \tag{85}$$

and the integral I defined in Eq. (70) has a familiar expression[1,18]

$$I(r,\xi_0) \equiv \frac{1}{1+\varepsilon}\int_{\xi_{0T}}^{|\xi_0|} \frac{d\xi_0'}{\lambda(r,\xi_0')(1-\Delta/\xi_0'^2)}. \tag{86}$$

It can be shown[16,19] that

$$\lim_{\varepsilon\to 0} F_t^{\text{eff}}(r) = 1.46\sqrt{\varepsilon} + \mathcal{O}(\varepsilon), \tag{87}$$

such that the result from Ref. 1 is retrieved.

Downloaded 06 Dec 2010 to 132.169.10.193. Redistribution subject to AIP license or copyright; see http://pop.aip.org/about/rights_and_permissions

VI. CONCLUSION

In this paper, the general orbit-averaged guiding-center Fokker–Planck equation (21) is derived in an invariant space $(\bar{\psi},p,\xi_0)$ that is well suited for implementation in a numerical solver. The FP operator, which contains first-order effects of magnetic field nonuniformity, is also expressed in a conservative form (26) that satisfies internal boundary conditions exactly when using a two-grid numerical discretization method.[15,16] The calculation of orbit-averaged FP diffusion and convection coefficients is greatly simplified in the thin orbit approximation (25) where the orbit width is small as compared to the local minor radius.

The GC-FP diffusion and convection coefficients in $(\bar{\psi},p,\xi_0)$ space are calculated using the projection vectors (11) in the GC transformation (8). This procedure is applicable to any kinetic process that can be expressed as a FP operator (7), such as collisions, electric field acceleration, rf heating, or resonant interaction with magnetohydrodynamics (MHD) modes.

As a first application, the transformation is explicitly carried out in the present paper for a collision operator with a nonuniform isotropic field-particle distribution. While the transformation to local GC coordinates yields local transport coefficients at order ϵ^2, the transformation to the invariant space $(\bar{\psi},p,\xi_0)$ yields neoclassical collisional transport at order ϵ_ψ [Eqs. (34)–(40)]. In the thin orbit approximation approximation, the orbit-averaging operation is simplified and analytical expressions (58)–(62) are obtained for the orbit-averaged FP diffusion and convection coefficients.

Using the expressions for moments of the distribution function averaged over a given flux surface, the bootstrap current is analytically calculated in the Lorentz limit, and corresponding results found in the literature are retrieved. This comparison self-consistently validates the orbit-averaged GC formalism developed in Secs. II and III and the GC collision operator derived in Sec. IV. In our calculation, the particle orbits width effect naturally appears in the $(\bar{\psi},p,\xi_0)$ system, which provides an intuitive formalism for the GC physics.

The orbit-averaged GC-FP operator developed in this paper will be implemented in the numerical code LUKE, which currently calculates the GC distribution function in the zero-orbit width limit[16] and is used for heating and current drive calculations. Ultimately, the present formalism could provide a self-consistent description of neoclassical transport, neoclassical conductivity, transport induced by rf waves or MHD modes, etc. in the presence of non-Maxwellian distributions.

ACKNOWLEDGMENTS

This work, supported by the European Communities under the contract of Association between EURATOM and CEA, was carried out within the framework of the European Fusion Development Agreement. The views and opinions expressed herein do not necessarily reflect those of the European Commission.

APPENDIX A: DETERMINATION OF THE FUNCTION $\mathcal{G}$ IN THE THIN ORBIT APPROXIMATION

1. Calculation of $\dot{\theta}$

The drift velocity is given by[11]

$$\mathbf{v}_B = \frac{\hat{\mathbf{b}}}{m\Omega} \times (\mu \nabla B + m v_\parallel^2 \hat{\mathbf{b}} \cdot \nabla \hat{\mathbf{b}}) + \mathcal{O}(\epsilon_B). \tag{A1}$$

Using the following identities:

$$\hat{\mathbf{b}} \cdot \nabla \hat{\mathbf{b}} = -\hat{\mathbf{b}} \times \nabla \times \hat{\mathbf{b}},$$
$$\hat{\mathbf{b}} \times (\hat{\mathbf{b}} \times \nabla \times \hat{\mathbf{b}}) = (\hat{\mathbf{b}} \cdot \nabla \times \hat{\mathbf{b}})\hat{\mathbf{b}} - \nabla \times \hat{\mathbf{b}}, \tag{A2}$$

it follows that the projection of $\mathbf{v}_B$ in the poloidal direction can be expressed as

$$\dot{\theta}_B = \mathbf{v}_B \cdot \nabla\theta = \frac{1}{mr\Omega}\{\mu \hat{\boldsymbol{\theta}} \cdot \hat{\mathbf{b}} \times \nabla B - m v_\parallel^2 \times [(\hat{\boldsymbol{\theta}} \cdot \hat{\mathbf{b}})(\hat{\mathbf{b}} \cdot \nabla \times \hat{\mathbf{b}}) - \hat{\boldsymbol{\theta}} \cdot \nabla \times \hat{\mathbf{b}}]\} + \mathcal{O}(\epsilon_B). \tag{A3}$$

In the $(\bar{\psi},\theta,p,\xi)$ system where $v_\parallel = p\xi/m$ and $\mu = p^2(1-\xi^2)/(2mB)$, Eq. (6) is explicitly written as

$$\dot{\theta} = v_\parallel \frac{B^\theta}{B}\left(1 + \epsilon_\psi \frac{p}{ZerB^\theta \xi}\left\{\frac{(1-\xi^2)}{2}\hat{\boldsymbol{\theta}} \cdot \hat{\mathbf{b}} \times \frac{\nabla B}{B} - \xi^2 \times [(\hat{\boldsymbol{\theta}} \cdot \hat{\mathbf{b}})(\hat{\mathbf{b}} \cdot \nabla \times \hat{\mathbf{b}}) - \hat{\boldsymbol{\theta}} \cdot \nabla \times \hat{\mathbf{b}}] + \mathcal{O}(\epsilon_B)\right\}\right). \tag{A4}$$

2. Jacobian for the $(\bar{\psi},\theta,\phi,p,\xi_0,\varphi)$ system

The (phase space) Jacobian of the GC transformation in the system $(\mathbf{X},\mathcal{E},\mu,\varphi)$ is given by $J_{\mathbf{X},\mathcal{E},\mu} = mB_\parallel^\star/|v_\parallel|$ where

$$B_\parallel^\star = B\left[1 + \epsilon_B \frac{m v_\parallel}{ZeB}\hat{\mathbf{b}} \cdot \nabla \times \hat{\mathbf{b}} + \mathcal{O}(\epsilon_B^2)\right]. \tag{A5}$$

The Jacobian of the (ψ,θ,ϕ) coordinate system is $\mathcal{V}(\psi,\theta)$ given by $\mathcal{V}(\psi,\theta) = (B^\theta)^{-1}$ such that the total Jacobian for the $(\psi,\theta,\phi,\mathcal{E},\mu,\varphi)$ system is $J_{\psi,\theta,\mathcal{E},\mu} = mB_\parallel^\star/(|v_\parallel|B^\theta)$. The Jacobian for the $(\psi,\theta,\phi,p,\xi,\varphi)$ system is determined using the definitions of p and ξ [Eq. (3)]

$$J_{\psi,\theta,p,\xi} = J_{\psi,\theta,\mathcal{E},\mu}\left|\det\begin{pmatrix} \partial p/\partial\mathcal{E} & \partial p/\partial\mu \\ \partial\xi/\partial\mathcal{E} & \partial\xi/\partial\mu \end{pmatrix}\right|, \tag{A6}$$

with $\partial p/\partial\mathcal{E} = m/p$, $\partial p/\partial\mu = 0$, $\partial\xi/\partial\mathcal{E} = \mu B/(2\xi\mathcal{E}^2)$, and $\partial\xi/\partial\mu = B/(2\xi\mathcal{E})$ such that

$$J_{\psi,\theta,p,\xi} = J_{\psi,\theta,\mathcal{E},\mu}\frac{|v_\parallel|p^2}{mB} = \frac{p^2}{B^\theta}\frac{B_\parallel^\star}{B} = \frac{p^2}{B^\theta}\left[1 + \epsilon_B \frac{p\xi}{ZeB}\hat{\mathbf{b}} \cdot \nabla \times \hat{\mathbf{b}} + \mathcal{O}(\epsilon_B^2)\right]. \tag{A7}$$

The transformation from (ψ,ξ) to $(\bar{\psi},\xi_0)$ involves the following Jacobian:

Downloaded 06 Dec 2010 to 132.169.10.193. Redistribution subject to AIP license or copyright; see http://pop.aip.org/about/rights_and_permissions

$$J_{\bar{\psi},\theta,p,\xi_0} = J_{\psi,\theta,p,\xi} \left| \det \begin{pmatrix} \partial\bar{\psi}/\partial\psi & \partial\bar{\psi}/\partial\xi \\ \partial\xi_0/\partial\psi & \partial\xi_0/\partial\xi \end{pmatrix} \right|. \tag{A8}$$

Using $\bar{\psi} \equiv \psi - \rho_\parallel B_\phi = \psi - p\xi B_\phi/(ZeB)$ we have

$$\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial\psi} = 1 - \frac{p\xi}{Ze}\frac{\partial}{\partial\psi}\left(\frac{B_\phi}{B}\right) \quad \text{and} \quad \frac{\partial\bar{\psi}}{\partial\xi} = -\frac{pB_\phi}{ZeB}.$$

From Eq. (1), we obtain

$$\frac{\partial\xi_0}{\partial\xi} = \frac{\xi}{\xi_0}\frac{B_0(\bar{\psi})}{B(\psi,\theta)} - \frac{1-\xi^2}{2\xi_0 B}B_0'(\bar{\psi})\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial\xi}, \tag{A9}$$

and

$$\frac{\partial\xi_0}{\partial\psi} = -\frac{1-\xi^2}{2\xi_0 B}B_0'(\bar{\psi})\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial\psi} + \frac{1-\xi^2}{2\xi_0}\frac{B_0(\bar{\psi})}{B^2}\frac{\partial B}{\partial\psi}. \tag{A10}$$

Therefore,

$$\det \begin{pmatrix} \partial\bar{\psi}/\partial\psi & \partial\bar{\psi}/\partial\xi \\ \partial\xi_0/\partial\psi & \partial\xi_0/\partial\xi \end{pmatrix} = \frac{\partial\bar{\psi}}{\partial\psi}\frac{\xi}{\xi_0}\frac{B_0(\bar{\psi})}{B(\psi,\theta)} - \frac{\partial\bar{\psi}}{\partial\xi}\frac{1-\xi^2}{2\xi_0}\frac{B_0(\bar{\psi})}{B^2}\frac{\partial B}{\partial\psi}. \tag{A11}$$

Note that we can rewrite, using axisymmetry

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\theta}}\cdot\nabla\times\hat{\mathbf{b}} &= \hat{\boldsymbol{\theta}}\cdot\left[\nabla\left(\frac{B_\phi}{B}\right)\times\nabla\phi + \nabla\left(\frac{B_\theta}{B}\right)\times\nabla\theta + \nabla\left(\frac{B_\psi}{B}\right)\times\nabla\psi\right] \\ &= \nabla\phi\times\hat{\boldsymbol{\theta}}\cdot\nabla\left(\frac{B_\phi}{B}\right) = -rB^\theta\frac{\partial}{\partial\psi}\left(\frac{B_\phi}{B}\right), \end{aligned}$$

such that

$$\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial\psi} = 1 + \epsilon_\psi\frac{p\xi}{ZerB^\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}}\cdot\nabla\times\hat{\mathbf{b}}, \tag{A12}$$

and also

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}\cdot\hat{\mathbf{b}}\times\frac{\nabla B}{B} = \frac{rB^\theta}{B}\frac{B_\phi}{B}\frac{\partial B}{\partial\psi}, \tag{A13}$$

such that

$$\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial\xi}\frac{1-\xi^2}{2\xi_0}\frac{B_0(\bar{\psi})}{B^2}\frac{\partial B}{\partial\psi} = -\epsilon_B\frac{p}{ZerB^\theta}\frac{1-\xi^2}{2\xi_0}\frac{B_0(\bar{\psi})}{B}\hat{\boldsymbol{\theta}}\cdot\hat{\mathbf{b}}\times\frac{\nabla B}{B}. \tag{A14}$$

Therefore, Eq. (A11) becomes

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} \partial\bar{\psi}/\partial\psi & \partial\bar{\psi}/\partial\xi \\ \partial\xi_0/\partial\psi & \partial\xi_0/\partial\xi \end{pmatrix} &= \frac{\xi}{\xi_0}\frac{B_0(\bar{\psi})}{B(\psi,\theta)}\times\left[1 + \epsilon_\psi\frac{p}{ZerB^\theta\xi}\right. \\ &\left.\times\left(\xi^2\hat{\boldsymbol{\theta}}\cdot\nabla\times\hat{\mathbf{b}} + \frac{(1-\xi^2)}{2}\hat{\boldsymbol{\theta}}\cdot\hat{\mathbf{b}}\times\frac{\nabla B}{B} + \mathcal{O}(\epsilon_B)\right)\right]. \end{aligned} \tag{A15}$$

Substituting Eqs. (A7) and (A15) in Eq. (A8) and comparing to Eq. (A4), the Jacobian for the $(\bar{\psi},\theta,\phi,p,\xi_0,\varphi)$ system becomes

$$\mathcal{J} \equiv J_{\bar{\psi},\theta,p,\xi_0} = \frac{2\pi}{\tau_\mathcal{O}}\frac{\mathcal{J}_\mathcal{O}}{|\dot{\theta}|}[1 + \mathcal{O}(\epsilon_\psi\epsilon_B)], \tag{A16}$$

where we used $(\hat{\boldsymbol{\theta}}\cdot\hat{\mathbf{b}}) = rB^\theta/B$. In the zero-orbit width limit, Eq. (A16) reduces to[12]

$$\mathcal{J}_0 = \frac{p^2}{B_0(\bar{\psi})}\frac{B}{B^\theta}\left|\frac{\xi_0}{\xi}\right|. \tag{A17}$$

APPENDIX B: MOMENTS OF THE DISTRIBUTION FUNCTION

Many useful characteristics of a population of particles, such as the density, toroidal current density, density of power dissipated on collisions, cyclotron, or bremsstrahlung emission, etc. can be obtained from the kinetic description by calculating moments of the distribution function. This moments are often locally calculated in space, and take the following form:

$$\Phi(t,\mathbf{x}) = \int\int\int d^3p\,\mathcal{M}(t,\mathbf{x},\mathbf{p})f(t,\mathbf{x},\mathbf{p}), \tag{B1}$$

where $f(t,\mathbf{x},\mathbf{p})$ is the particle distribution function and $\mathcal{M}(t,\mathbf{x},\mathbf{p})$ is an operator acting on f. If the operator $\mathcal{M}$ is gyroindependent, which we assume in this section, the transformation to GC phase space in an axisymmetric plasma is straightforward and we can write $\mathcal{M}_{\rm gc}(t,\psi,\theta,p,\xi) = \mathcal{M}(t,\mathbf{x},\mathbf{p})$ (Ref. 20).

1. Flux-surface averaging

In axisymmetric (ψ,θ,ϕ) geometry, the flux-surface average of a scalar quantity $\Phi(t,\psi,\theta)$ is

$$\langle\Phi\rangle(t,\psi) = \frac{2\pi}{dV/d\psi}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{B^\theta}\Phi(t,\psi,\theta), \tag{B2}$$

where $dV/d\psi = 2\pi\int d\theta/B^\theta$ is the incremental volume of a flux surface. Similarly, using $\nabla\phi = \hat{\boldsymbol{\phi}}/R$, the flux-surface averaged flux in the toroidal direction of a vector field $\boldsymbol{\Phi}(t,\psi,\theta)$ is

Downloaded 06 Dec 2010 to 132.169.10.193. Redistribution subject to AIP license or copyright; see http://pop.aip.org/about/rights_and_permissions

$$\langle \mathbf{\Phi} \rangle_\phi(t,\psi) = \frac{1}{dS_\phi/d\psi}\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{RB^\theta}\hat{\boldsymbol{\phi}}\cdot\mathbf{\Phi}(t,\psi,\theta), \tag{B3}$$

where $dS_\phi/d\psi = \int d\theta/(RB^\theta)$ is the incremental poloidal surface element.

2. Local expression

Using the Jacobian $J_{\mathbf{X},p,\xi} = p^2 B_\parallel^\star/B$ for the (p,ξ,φ) system (A7), the local moment in GC coordinates can be expressed as

$$\Phi(t,\psi,\theta) \equiv \overline{\mathcal{M}_{\rm gc}} = 2\pi\int_0^\infty dpp^2\int_{-1}^1 d\xi\frac{B_\parallel^\star}{B}\mathcal{M}_{\rm gc}F(t,\psi,\theta,p,\xi). \tag{B4}$$

In the low-collisionality regime, we have $F(t,\psi,\theta,p,\xi) = F^{(0)}(t,\bar{\psi},p,\xi_0)$ where $(\bar{\psi},\xi_0)$ are functions of (ψ,θ,p,ξ) through Eqs. (1) and (2). The moment (B4) can also use the ξ_0 coordinate (3)

$$\overline{\mathcal{M}_{\rm gc}}(t,\psi,\theta) = 2\pi\int_0^\infty dpp^2\int_{-1}^1 d\xi_0\frac{\xi_0}{\xi}\frac{B_\parallel^\star}{B_0(\bar{\psi})}\mathcal{M}_{\rm gc} \times F^{(0)}(t,\bar{\psi},p,\xi_0). \tag{B5}$$

The flux-surface average of $\overline{\mathcal{M}_{\rm gc}}$ is then given by Eq. (B2)

$$\langle\overline{\mathcal{M}_{\rm gc}}\rangle(t,\psi) = \frac{(2\pi)^2}{dV/d\psi}\int_0^\infty dpp^2\int_{-1}^1 d\xi_0\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{d\theta}{B^\theta}\frac{\xi_0}{\xi}\frac{B_\parallel^\star}{B_0(\bar{\psi})} \times \mathcal{M}_{\rm gc}F^{(0)}(t,\bar{\psi},p,\xi_0), \tag{B6}$$

where $\bar{\psi}$ is a function of (ψ,θ,p,ξ_0). In Eq. (B6), the limits of integration for trapped orbits θ_1 and θ_2 are the same as in the orbit-averaging operation (15) since $\psi=\bar{\psi}$ at the turning points.

If $\boldsymbol{M}_{\rm gc}$ is a vector field operator, the flux-surface averaged flux in the toroidal direction is Eq. (B3)

$$\langle\overline{\boldsymbol{M}_{\rm gc}}\rangle_\phi(t,\psi) = \frac{2\pi}{dS_\phi/d\psi}\int_0^\infty dpp^2\int_{-1}^1 d\xi_0\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{d\theta}{RB^\theta}\frac{\xi_0}{\xi}\frac{B_\parallel^\star}{B_0(\bar{\psi})} \times \hat{\boldsymbol{\phi}}\cdot\boldsymbol{M}_{\rm gc}F^{(0)}(t,\bar{\psi},p,\xi_0). \tag{B7}$$

3. Expression in the space of invariants

Alternatively, it is also possible to directly express Eq. (B4) in the $Z^\alpha=(\bar{\psi},\theta,p,\xi_0)$ system[20]

$$\overline{\mathcal{M}_{\rm gc}}(t,\psi,\theta) = (2\pi)^2\iiint d\bar{\psi}dpd\xi_0\mathcal{J}B^\theta\delta(\tilde{\psi}-\psi) \times \mathcal{M}_{\rm gc}^{(0)}F^{(0)}(t,\bar{\psi},p,\xi_0), \tag{B8}$$

where $\mathcal{M}_{\rm gc}^{(0)}(t,\bar{\psi},\theta,p,\xi_0) = \mathcal{M}_{\rm gc}(t,\tilde{\psi},\theta,p,\xi)$. From Eq. (B8), the flux-surface average of Φ is Eq. (B2)

$$\langle\overline{\mathcal{M}_{\rm gc}}\rangle(t,\psi) = \frac{(2\pi)^3}{dV/d\psi}\iiint d\bar{\psi}dpd\xi_0\mathcal{J}_{\mathcal{O}} \times\langle\sigma\mathcal{G}\delta(\tilde{\psi}-\psi)\mathcal{M}_{\rm gc}^{(0)}\rangle_{\mathcal{O}}F^{(0)}(t,\bar{\psi},p,\xi_0). \tag{B9}$$

Similarly, the flux-surface averaged flux of $\mathbf{\Phi}$ is the toroidal direction is Eq. (B3)

$$\langle\overline{\boldsymbol{M}_{\rm gc}}\rangle_\phi(t,\psi) = \frac{(2\pi)^2}{dS_\phi/d\psi}\iiint d\bar{\psi}dpd\xi_0\mathcal{J}_{\mathcal{O}} \times\left\langle\frac{\sigma\mathcal{G}}{R}\delta(\tilde{\psi}-\psi)\hat{\boldsymbol{\phi}}\cdot\boldsymbol{M}_{\rm gc}^{(0)}\right\rangle_{\mathcal{O}}F^{(0)}(t,\bar{\psi},p,\xi_0). \tag{B10}$$

Within the thin orbit width approximation, $\mathcal{G}=1$ in Eqs. (B9) and (B10).

Practically, both the expressions (B6) and (B9) can be used to evaluate flux-surface averaged moments. Numerically, Eq. (B6) involves interpolations to evaluate $F(t,\psi,\theta,p,\xi)=F^{(0)}(t,\bar{\psi},p,\xi_0)$, while Eq. (B9) requires a modeling of the delta function $\delta(\tilde{\psi}-\psi)$ term by a rectangular function, a Gaussian, etc. Note that in Eq. (B9), the calculation of the bounce-averaged term only involves GC orbits, which is also needed to evaluate Eq. (22), and can be done in parallel with the calculation of the distribution function.

Among useful flux-surface averaged moments of the distribution function we can mention: the density $n(t,\psi)=\langle\overline{1}\rangle$, the parallel toroidal current density $J_{\parallel\phi}=\langle\overline{Zev_\parallel\hat{\mathbf{b}}}\rangle_\phi$, and the density of power deposited on particles through the evolution operator C: $P_C=\langle\overline{\mathcal{E}C_{\rm gc}}\rangle$.

APPENDIX C: COLLISION OPERATOR IN LOCAL GC COORDINATES

The FP collision operator can be also calculated in local GC coordinates for a nonuniform isotropic field-particle distribution, by introducing the projection vector for the coordinate $(\mathbf{X},\mathcal{E},\mu,\varphi)$ (Ref. 12) in Eq. (8) and evaluating the gyroaveraged expressions. To order ϵ, the momentum-space GC collision operator coefficients are

$$K_{\rm gc}^{\mathcal{E}} = -2\nu\mathcal{E}+\mathcal{O}(\epsilon^2),$$
$$K_{\rm gc}^{\mu} = -\mu\nu(2-\epsilon\lambda_{\rm gc})+\mathcal{O}(\epsilon^2), \tag{C1}$$

and

Downloaded 06 Dec 2010 to 132.169.10.193. Redistribution subject to AIP license or copyright; see http://pop.aip.org/about/rights_and_permissions

$$D_{\rm gc}^{\mathcal{E}\mathcal{E}} = 2\mathcal{E}D_{\mathcal{E}} + \mathcal{O}(\epsilon^2),$$

$$D_{\rm gc}^{\mathcal{E}\mu} = \mu D_{\mathcal{E}}(2 - \epsilon\lambda_{\rm gc}) + \mathcal{O}(\epsilon^2), \tag{C2}$$

$$D_{\rm gc}^{\mu\mu} = 2\mu(1 - \epsilon\lambda_{\rm gc})\left(2D_\mu + \frac{D_t}{mB}\right) + \mathcal{O}(\epsilon^2),$$

where $D_{\mathcal{E}} \equiv D_l/m$ and $D_\mu = \mu(D_l - D_t)/(2m\mathcal{E})$. The coefficients involving transport in configuration space are calculated to order ϵ^2

$$K_{\rm gc}^{\mathbf{X}} = \epsilon^2\left(\frac{\nu}{\Omega}\hat{\mathbf{b}} \times \mathbf{v}_B + \frac{\rho_0^2}{2}\boldsymbol{\nabla}\,\nu \cdot \mathbb{I}_\perp\right) + \mathcal{O}(\epsilon^3), \tag{C3}$$

and

$$D_{\rm gc}^{\mathcal{E}\mathbf{X}} = -\epsilon^2\left(\frac{D_{\mathcal{E}}}{\Omega}\hat{\mathbf{b}} \times \mathbf{v}_B + \frac{\rho_0^2}{2}\boldsymbol{\nabla}\,D_{\mathcal{E}} \cdot \mathbb{I}_\perp\right) + \mathcal{O}(\epsilon^3),$$

$$D_{\rm gc}^{\mu\mathbf{X}} = -\epsilon^2\left[D_\mu\frac{\hat{\mathbf{b}}}{\Omega} \times \mathbf{v}_B + \frac{\rho_0^2}{2}\left(2\boldsymbol{\nabla}\,D_\mu + \frac{1}{mB}\boldsymbol{\nabla}\,D_t\right) \cdot \mathbb{I}_\perp\right] + \mathcal{O}(\epsilon^3), \tag{C4}$$

$$D_{\rm gc}^{\mathbf{X}\mathbf{X}} = \epsilon^2\frac{B}{m\Omega^2}\left[D_\mu + \frac{D_t}{mB}\right]\mathbb{I}_\perp + \mathcal{O}(\epsilon^3).$$

Note that we can rewrite Eqs. (C3) and (C4) as

$$K_{\rm gc}^{\mathbf{X}} = \epsilon^2\frac{\rho_0^2}{2}(-\nu\mathbf{k}_B + \boldsymbol{\nabla}\nu) \cdot \mathbb{I}_\perp + \mathcal{O}(\epsilon^3),$$

$$D_{\rm gc}^{\mathcal{E}\mathbf{X}} = \epsilon^2\frac{\rho_0^2}{2}(D_{\mathcal{E}}\mathbf{k}_B - \boldsymbol{\nabla}D_{\mathcal{E}}) \cdot \mathbb{I}_\perp + \mathcal{O}(\epsilon^3), \tag{C5}$$

$$D_{\rm gc}^{\mu\mathbf{X}} = \epsilon^2\frac{\rho_0^2}{2}\left[D_\mu\mathbf{k}_B - 2\,\boldsymbol{\nabla}\,D_\mu - \frac{1}{mB}\boldsymbol{\nabla}\,D_t\right] \cdot \mathbb{I}_\perp + \mathcal{O}(\epsilon^3),$$

with $\mathbf{k}_B = \boldsymbol{\nabla}\,\ln B + (mv_\parallel^2/\mu B)\hat{\mathbf{b}} \cdot \boldsymbol{\nabla}\hat{\mathbf{b}}$ such that the drift velocity is $\mathbf{v}_B = (\mu B/m\Omega)\hat{\mathbf{b}} \times \mathbf{k}_B + \mathcal{O}(\epsilon_B)$.

[1] M. N. Rosenbluth, R. D. Hazeltine, and F. L. Hinton, Phys. Fluids **15**, 116 (1972).
[2] F. L. Hinton and R. D. Hazeltine, Rev. Mod. Phys. **48**, 239 (1976).
[3] F. S. Zaitsev, M. R. O'Brien, and M. Cox, Phys. Fluids B **5**, 509 (1993).
[4] L.-G. Eriksson and P. Helander, Phys. Plasmas **1**, 308 (1994).
[5] A. N. Kaufman, Phys. Fluids **14**, 387 (1971).
[6] A. J. Brizard and A. A. Chan, Phys. Plasmas **11**, 4220 (2004).
[7] L.-G. Eriksson and M. Schneider, Phys. Plasmas **12**, 072524 (2005).
[8] Y. Kominis, A. K. Ram, and K. Hizanidis, Phys. Plasmas **15**, 122501 (2008).
[9] K. Hizanidis, A. K. Ram, Y. Kominis, and C. Tsironis, Phys. Plasmas **17**, 022505 (2010).
[10] A. G. Peeters and D. Strintzi, Ann. Phys. **17**, 142 (2008).
[11] A. J. Brizard, Phys. Plasmas **11**, 4429 (2004).
[12] A. J. Brizard, J. Decker, Y. Peysson, and F. X. Duthoit, Phys. Plasmas **16**, 102304 (2009).
[13] T. P. Kiviniemi and J. A. Heikkinen, Comput. Phys. Commun. **107**, 149 (1997).
[14] The projection vector in the θ coordinate is not evaluated since it is annihilated by the bounce-averaging operation.
[15] C. F. F. Karney, Comput. Phys. Rep. **4**, 183 (1986).
[16] J. Decker and Y. Peysson, "DKE: A fast numerical solver for the 3D drift kinetic equation," Euratom-CEA Report No. EUR-CEA-FC-1736, 2004.
[17] In this limit, we find $\tau_{\mathcal{O}} \to \Lambda\lambda/(v|\xi_0|)$.
[18] S. P. Hirshman and D. J. Sigmar, Nucl. Fusion **21**, 1079 (1981).
[19] S. D. Schultz, "Lower hybrid and electron cyclotron current drive with bootstrap current in tokamaks," Ph.D. thesis, MIT, 1999.
[20] A. J. Brizard and A. Mishchenko, J. Plasma Phys. **75**, 675 (2009).

Downloaded 06 Dec 2010 to 132.169.10.193. Redistribution subject to AIP license or copyright; see http://pop.aip.org/about/rights_and_permissions