

Élasticité et Interfaces : des gouttes et des plis

Miguel Pineirua

▶ **To cite this version:**

Miguel Pineirua. Élasticité et Interfaces : des gouttes et des plis. Mécanique des solides [physics.class-ph]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2011. Français. NNT : . pastel-00712635

HAL Id: pastel-00712635
https://pastel.hal.science/pastel-00712635

Submitted on 27 Jun 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE DE DOCTORAT DE
L'UNIVERSITE PIERRE ET MARIE CURIE

Spécialité Physique

Ecole doctorale La Physique de la Particule à la Matière Condensée (ED389)

Laboratoire de Physique et Mécanique des Milieux Hétérogènes

ÉLASTICITÉ ET INTERFACES : des gouttes et des plis

Présentée par

M. PIÑEIRUA MENENDEZ Miguel

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR de l'UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE

Soutenue le 30 novembre 2011

devant le jury composé de :

M. GÉMINARD Jean Christophe, Rapporteur
M. KELLAY Hamid, Rapporteur
M. ADDA-BEDIA Mokhtar, Examinateur
M. AUDOLY Basile, Examinateur
M. DAMMAN Pascal, Examinateur
M. BICO José, Directeur de thèse
M. ROMAN Benoît, Directeur de thèse

Élasticité et Interfaces : des gouttes et des plis.
(Résumé)

Cette thèse porte sur l'étude expérimentale des déformations générées par la tension de surface de certains liquides sur des membranes flexibles.

Dans une première partie, nous montrons expérimentalement qu'il est possible de contrôler l'enrobage spontané d'une membrane flexible autour d'une goutte d'eau à l'aide d'un champ électrique. Si la tension augmente au delà d'une valeur critique la membrane s'ouvre. Cette transition est réversible, mais inclus une forte hystérésis. Nous proposons des lois d'échelle pour les tensions critiques d'ouverture et fermeture basées sur l'interaction des énergies de tension de surface, élastique et du champ électrique.

Dans la deuxième partie nous étudions les rides générées par la différence de tension de surface entre l'intérieur et l'extérieur de une couronne flexible flottant à la surface de l'eau. Nous avons estimé des critères simplifiés pour le seuil de flambage de la couronne et la longueur d'onde des plis, et nous avons également déterminé l'évolution de la longueur des plis au delà du seuil.

Dans la dernière partie de la thèse, nous étudions la morphologie de cascades de plis qui apparaissent dans différents systèmes lorsqu'une longueur d'onde est imposée sur une frontière, et évolue à la suite d'événements discrets successifs de coalescence de plis. Des expériences macroscopiques nous permettent de caractériser les propriétés de ces cascades. Nous avons distingué deux régimes différents selon l'importance de la tension axiale. Nous avons vérifié que nos lois d'échelle permettent de décrire aussi bien des rideaux en tissu de plusieurs mètres de haut que des feuilles de graphène d'épaisseur atomique.

Mots clés : Élasticité, Capillarité, Membrane mince, Flambage, Electro-mouillage

Elasticity and Interfaces : droplets and wrinkles.
(Abstract)

This thesis is focused on the experimental study of the deformations generated by surface tension effects on flexible membranes.

In the first part of our work we show experimentally how an electric field can be used to control the spontaneous wrapping of an elastic membrane around a water droplet. As the voltage is increased above a critical value the membrane unfolds completely. This transition is reversible, although it presents hysteresis. We propose scaling laws for the opening and closing critical voltages based on the interaction between surface tension, elastic and electric energies.

In the second part we study the wrinkling of a flexible annulus floating on water caused by a difference in surface tension between its inside and outside edges. We have estimated simple criteria to determine the buckling threshold of the annulus and the wave length of the wrinkles, as well as the evolution of the wrinkle length beyond threshold.

Finally, in the last part of our work we study the morphology of the wrinkling cascades appearing in different systems where a certain wave length is imposed at one of its edges and which evolves as a consequence of the discrete coalescence of wrinkle. We performed macroscopic experiments to characterize the properties of this cascades. We notice the existence of two different regimes which depend on the importance of the axial tension applied on the membrane. Our scaling laws are validated from hundreds of nanometers for graphene sheets to meters for ordinary curtains, which shows the universality of our description.

Key words : Elasticity, Capillarity, Thin sheets, Buckling, Electrowetting.

Table des matières

1 Introduction **1**

2 Actuation des Origamis Capillaires **9**

2.1 L'origami capillaire 9

2.1.1 Critères de fermeture 10

2.2 Actuation des origamis capillaires 13

2.2.1 L'électro-mouillage 14

2.3 Dispositif experimental 18

2.3.1 Les membranes flexibles 18

2.3.2 Découpage des patrons bidimensionnels 20

2.3.3 Circuit électrique 20

2.3.4 Visualisation 21

2.3.5 Procédure expérimentale 22

2.4 Problèmes d'adhésion 23

2.5 Résultats Expérimentaux 24

2.6 Modèle simplifié 31

2.6.1 Simulation numérique 32

2.6.2 Lois d'échelle 35

2.7 Conclusion 39

3 La couronne élastique **41**

3.1 Dispositif Experimental 47

3.1.1 Couronnes élastiques 47

3.1.2 Génération et mesures de la différence de tension de surface 48

3.1.3 Mesure de la deformation 49

3.1.4 Relation entre le champ de déplacement et le gradient de surface. 50
3.1.5 Résolution du profil. 54
3.2 Origine de la formation des plis. 56
3.2.1 Distribution des contraintes 56
3.2.2 Instabilité de flambage : le cas unidimensionnel. 59
3.2.3 Déflexion d'une plaque circulaire 62
3.3 Confrontation expérimentale 67
3.3.1 Longueur d'onde 67
3.3.2 Seuil de flambage 70
3.4 Longueur des plis 74
3.4.1 Longueur des plis près du seuil de flambage 75
3.4.2 Longueur des plis loin du seuil de flambage 76
3.5 Confrontation expérimentale de la longueur des plis 77
3.6 Effondrement des anneaux 84
3.7 Conclusion 90

4 Plis hiérarchiques **93**
4.1 Fusion élémentaire 97
4.1.1 Dispositif expérimental 98
4.1.2 Observations expérimentales 99
4.1.3 Énergie du pli unique 101
4.2 De la fusion élémentaire à la cascade dans les rideaux 106
4.3 Rideaux sous tension 108
4.4 Conclusion 111

5 Conclusions **113**

A analyse-stab **117**

B Publications **121**

Bibliographie **133**

*

Chapitre 1

Introduction

Nous sommes entourés au quotidien de structures élastiques qui interagissent avec des fluides, avec des conséquences qui nous sont aussi très familières : un arbre peut ainsi fléchir sous l'effet du vent (figure 1.1) ou une grande quantité d'eau accumulée sur une tente est capable de la déformer. Ces phénomènes "à grande échelle" sont dus principalement à l'écoulement ou au poids du fluide. Il existe cependant d'autres interactions fluide-structure qui pourraient passer inaperçues car elles prennent place à petite échelle. Considérons par exemple le cas d'un araignée d'eau posé sur la surface d'une mare (figure 1.1-b). L'insecte devrait couler, car sa masse volumique est supérieure à celle de l'eau, cependant il est capable de rester à la surface. La tension de surface de l'interface liquide-air permet en effet à l'insecte d'exécuter cette prouesse biblique. Générée par la force de cohésion entre les molécules d'eau, la tension interfaciale est suffisante pour compenser le poids d'un insecte, s'il est assez petit.

L'importance relative de la tension de surface dans les interactions fluide-structure est dictée par l'échelle du système. En effet, les forces capillaires sont proportionnelles à la longueur caractéristique de la structure L, tandis que les forces de pression (comme celles exercées par le vent sur les arbres) varient comme L^2 et les forces de volume (le poids par exemple) comme L^3. À mesure que la taille L du système diminue, les effets des forces capillaires deviennent donc de plus en plus importants. À l'échelle de l'araignée d'eau, nous observons que ces forces capillaires sont comparables à son poids.

En comparant les énergies de surface $E_s \sim \gamma L^2$ et de pesanteur $E_g \sim \rho g L^4$,

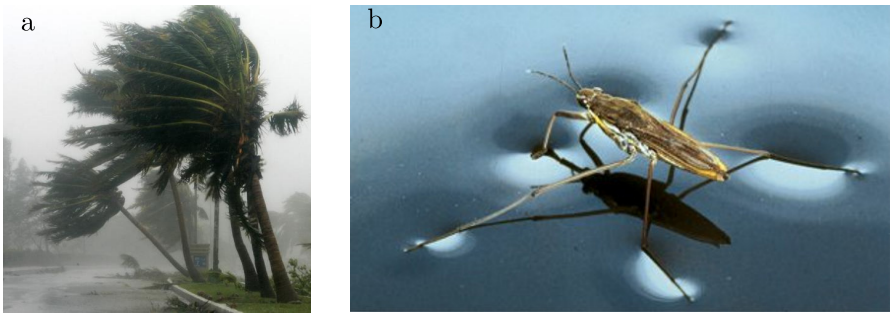


FIGURE *1.1* – A) Image du passage de l'ouragan "Dean" par la côte haïtienne en 2007. b) Insecte posé sur la surface d'une mare, retenu par la tension de surface.

nous pouvons définir une longueur caractéristique $L_c = \sqrt{\gamma/\rho g}$ [1], la "longueur capillaire". Cette longueur est de l'ordre du millimètre pour la plupart des liquides usuels (2.7 mm pour l'interface eau-air). Nous observons ainsi que si la taille d'une goutte d'eau est petite devant L_c, celle-ci adopte la forme d'une calotte sphérique, pour réduire son énergie de surface. Par contre, au-delà de la longueur capillaire, la goutte prend la forme d'une flaque, écrasée par son poids (figure 1.2).

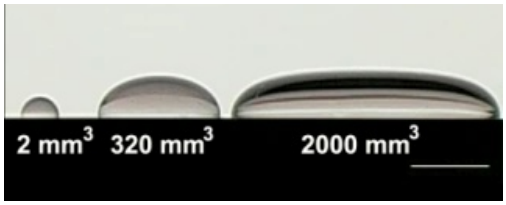


FIGURE *1.2* – Des gouttes de rayons petits devant la longueur capillaire L_c prennent la forme de calottes sphériques alors que les grosses gouttes s'écrasent sous forme de flaques (D. Quéré, M. Fermigier & C. Clanet, Interfaces Mobiles).

Cependant, l'importance de la tension de surface à petite échelle va très au-delà de la simple détermination de la forme d'une goutte ou de la capacité des insectes à se maintenir à la surface de l'eau. La tension de surface peut également provoquer la déformation de structures dans une vaste gamme de situations [2]. Elle est responsable par exemple de la formation de mèches dans les cheveux mouillés [3] ou permet l'éjection des spores de certains champignons [4].

Actuellement, l'un des domaines où la tension de surface prend une importance particulière est celui des micro-mécanismes électromécaniques (MEMS). La présence de forces capillaires dans ce type de systèmes peut avoir des consé-

quences indésirables, comme par exemple le collage ou la destruction de micro-structures élancées telles que des micro-ailettes [5, 6], ou des tapis de nanotubes de carbone [7–11]. En effet, la tension de surface favorise l'adhésion de structures mouillées car elle réduit l'interface liquide-air. Cet effet ("stiction") est un facteur limitant dans le dimensionnement mécanique de l'une des réussites industrielles des micro-technologies : les micro-accéléromètres. Ces systèmes présents désormais dans beaucoup de téléphones, ou déclencheurs d'air-bag sont basés sur la mesure de capacité de peignes entrelacés qui sont déformés par une accélération. Une simple goutte d'eau peut cependant ruiner leur fonctionnement.

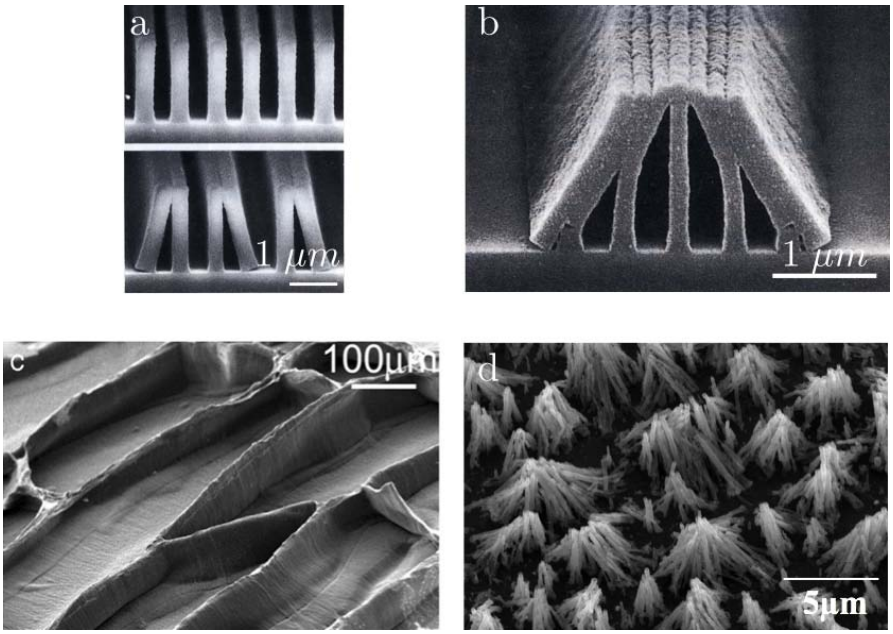


FIGURE *1.3* – (a) Des micro-ailettes en résine photosensible s'effondrent après rinçage avec de l'eau pure (bas), mais gardent leur intégrité si un liquide de faible tension de surface est utilisé (haut) [5]. (b) Assemblages en 'Tepees' lors du collage groupé de plusieurs lamelles [5]. (c) et (d) Effondrement de 'forêts' de nanotubes de carbone après évaporation d'une goutte de liquide mouillant : des structures cellulaires ou en mèches apparaissent en fonction de la longueur et de la densité des tubes [9] et [8].

La tension de surface peut aussi entraîner l'effondrement de micro-canaux dans des systèmes micro-fluidiques [12, 13]. Ce dernier phénomène est aussi pertinent en physiologie car la présence de mucus dans les bronches peut entraîner leur effondrement sous l'action de la dépression capillaire [14–17].

L'une des questions fondamentales dans la compréhension de ces phénomènes

est de déterminer l'échelle à laquelle les effets de la tension de surface peuvent entraîner des déformations sur des structures solides. Pour aborder ce problème, il est pratique de se concentrer sur les cas les plus simples. Considérons par exemple une goutte posée sur un substrat rigide. Le bilan des composantes horizontales des forces agissant à la ligne de contact nous permet classiquement de déterminer l'angle de contact θ [1]. Les composantes verticales de ces forces ne sont généralement pas prises en compte dans ce calcul. Cependant il existe bien une force $\gamma \sin(\theta)$ au niveau de la ligne de contact qui tire le substrat vers le haut [18, 19]. Cette force tend à déformer le substrat sur une amplitude typique :

$$\delta \sim \frac{\gamma}{E} \sin\theta. \tag{1.1}$$

où γ est la tension de surface de l'interface liquide-air et E est le module d'élasticité du substrat. Dans le cas particulier d'une goutte d'eau ($\gamma \sim 70\ mN/m$) déposée sur une plaque de verre ($E \sim 70\ GPa$), δ est de l'ordre de 1 pm, ce qui est complètement négligeable. Par contre, la déformation résultat de l'action des forces capillaires à la ligne de contact est observable sur des substrats extrêmement mous ($E \sim 100\ kPa$) [20–23]. Le rapport γ/E nous donne donc la longueur caractéristique de la déformation générée par les forces capillaires sur un substrat élastique.

Cependant, dans la plupart des cas de déformation de micro-structures (MEMS) que nous venons de présenter antérieurement, la tension de surface n'agit pas directement en déformant un substrat, mais plutôt en courbant des structures élancées (comme par exemple les micro-ailettes ou les nanotubes présentés dans la figure 1.3). À quel point la tension de surface est-elle capable de courber une structure élancée ? Considérons une plaque élastique de longueur L, de largeur w et d'épaisseur h, recouverte d'un liquide mouillant et que nous mettons en contact avec un cylindre de rayon R recouvert aussi du même liquide. L'enrobage de la plaque autour du cylindre conduirait un gain en énergie de surface équivalent à $U_s = 2\gamma wL$. En contrepartie, courber la plaque a un coût en énergie élastique déterminé par $U_b = BwL/2R^2$, où $B = Eh^3/12(1-\nu^2)$ est le module de flexion de la plaque, E et ν étant le module d'élasticité et le coefficient de Poisson du matériau [24, 25]. Nous attendons donc un enrobage spontané de la plaque autour du cylindre dans le cas où $R > \sqrt{B/\gamma}/2$. La longueur caractéristique du problème qui compare

la rigidité de la plaque et la tension de surface du liquide est ainsi donné par la *longueur élasto-capillaire* :

$$L_{ec} = \sqrt{\frac{B}{\gamma}}. \tag{1.2}$$

Cette longueur représente le rayon de courbure typique que peut induire la capillarité sur une structure élancée : la structure sera déformée par la tension de surface si sa longueur est supérieure à la longueur élasto-capillaire. En effet, les forces capillaires génèrent des couples d'autant plus importants que les structures sont longues.

Dans cette thèses nous aborderons trois questions, inspirées par des situations élasto-capillaires intéressantes pour des applications aux micro-technologies. Notre approche sera cependant de travailler sur des expériences macroscopiques modèles et de développer des lois d'échelle pour dégager les ingrédients physiques pertinents.

Nous pouvons ainsi trouver un joli exemple du pliage d'une structure élancée induite par la tension de surface dans la fabrication des "origamis capillaires" [26]. Cette technique consiste à déposer une goutte d'eau sur une membrane flexible. Py *et al.* ont vérifié expérimentalement que si la taille caractéristique de la feuille est plus grande que L_{ec}, la feuille et susceptible d'enrober la goutte spontanément. Au-delà de la verification de la pertinence de L_{ec}, leurs résultats montrent que la tension de surface à petite échelle n'est pas nécessairement une limite dans la conception de micro-objets mais peut au contraire constituer un outil original pour les élaborer. En effet, en fonction de la forme initiale de la feuille, il est possible d'obtenir des structures tridimensionnelles diverses (figure 1.4-a). Du point de vue pratique, ce principe du repliement capillaire a été utilisé dans la fabrication de micro-panneaux solaires tridimensionnels [27](figure 1.4-b).

Dans la première partie de cette thèse, nous nous intéresserons à l'actuation des origamis capillaires. Il serait en effet intéressant du point de vue de leur application technique de trouver une manière d'ouvrir et de fermer ces structures à volonté. Pour cela, nous explorerons l'utilisation d'un champ électrique comme actuateur.

Il existe aussi d'autres applications très intéressantes, de type métrologique, des interactions élasto-capillaires. Huang *et al.* [28] ont ainsi montré qu'il est possible de mesurer les propriétés mécaniques d'une membrane de quelques dizaines de

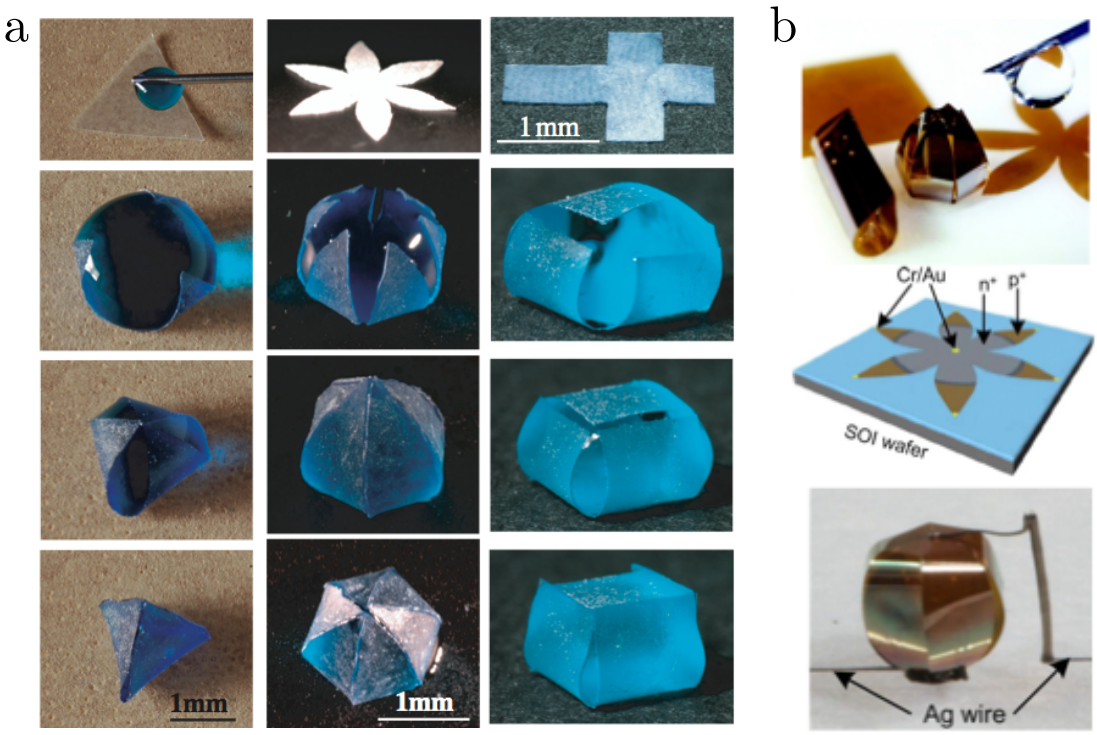


FIGURE *1.4* – (a) Origami capillaire : différentes formes tridimensionnelles peuvent être obtenues en fonction de la découpe initiale de la feuille. (b) Utilisation de la technique d'origami pour réaliser des capteurs solaires tridimmensionnels (clichés X. Guo [27]) .

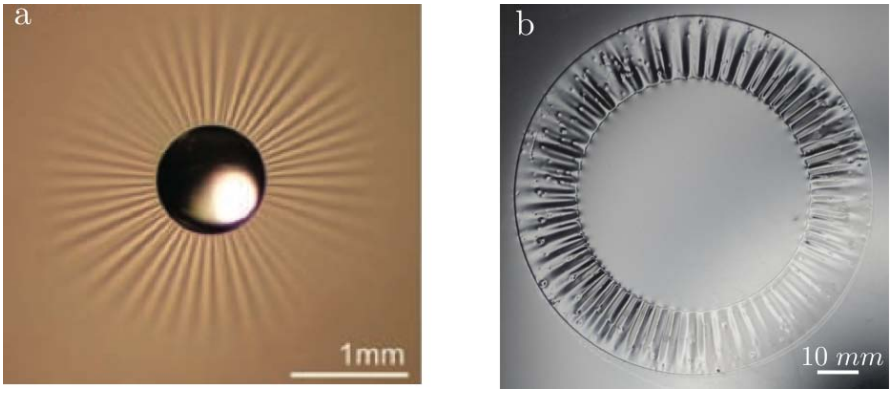


FIGURE *1.5* – (a) Rides générées par le dépôt d'une goutte sur un membrane flexible flottant dans l'eau [28]. (b) Rides formées sur un couronne flexible dues à une différence de tension de surface entre ses bords intérieur et extérieur

nanomètres d'épaisseur qui flotte à la surface de l'eau, simplement en déposant une goutte sur la membrane (figure 1.5-a). En effet, un motif de rides apparait sous l'effet de l'étirement capillaire généré par la goutte au niveau de la ligne de contact. Huang *et al.* ont montré expérimentalement que le nombre de ride et leur longueur dépendent des propriétés mécaniques de la membrane et de la tension de surface de la goutte. Un tel instrument de mesure ouvrirait un nouvelles perspectives dans l'étude des propriétés mécaniques des matériaux à l'échelle nanomètrique qui sont délicats à manipuler. Cependant, il reste encore beaucoup de questions ouvertes avant d'arriver à une métrologie quantitative. En particulier la détermination des contraintes exercées par la goutte sur la feuille au niveau de la ligne de contact [29] semble complexe.

Dans la deuxième partie de cette thèse, nous tenterons d'aborder cette problématique à partir d'une expérience macroscopique modèle. Inspirés par les expériences de Huang *et al.*, nous remplacerons la goutte par un trou au centre de la membrane, de manière à avoir des effets de tension de surface agissant sur un périmètre donné, mais avec des conditions aux limites bien définies (figure 1.5-b).

Une autre question qui reste ouverte dans les expériences de Huang *et al.* est d'expliquer l'apparition d'un changement en cascade du nombre de rides observé près de la ligne de contact (figure refmenon-intro-introa). Ce phénomène a été aussi observé sur le plissement de membranes rectangulaires ultra-minces comprimées latéralement [30]. L'évolution de la longueur d'onde est ici due à des effets

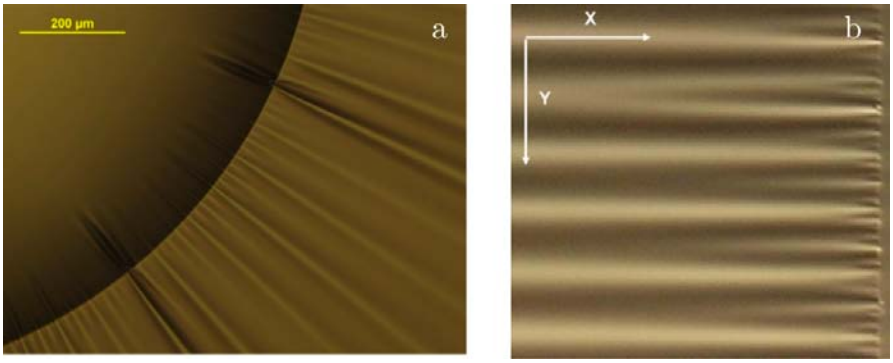


FIGURE *1.6* – Variation de la longueur d'onde près de la ligne de contact, a) rides générés par la déposition d'une goutte sur une membrane flexible flottant dans l'eau (cliché N.Menon), b) plissement d'une membrane flottante à la suite d'une compression mécanique latérale [30].

de bords : au voisinage de la ligne de contact le nombre d'onde s'intensifie. Nous observons que cette transition se fait d'une manière discrète et génère une cascade de plis qui rappelle les plis formés sur un rideau suspendu à une fenêtre. La transition du nombre des plis sur un rideau serait-elle déterminée par les mêmes paramètres physiques que l'on trouve dans le cas de membranes nanométriques flottant sur un bain ?

Dans la dernière partie de la thèse, nous essaierons de comprendre ces transitions de longueur d'onde à partir d'expériences modèles macroscopiques. Nous analyserons l'évolution des plis pour différents types de membranes qui sont confinées au bord et comparerons avec d'autres cascades observées à d'autres échelles et sur des systèmes très différents.

Chapitre 2

Actuation des Origamis Capillaires

2.1 L'origami capillaire

Dans le chapitre d'introduction, nous avons montré les effets indésirables des forces capillaires à petite échelle et comment elles étaient dans certains cas capables de déformer des structures flexibles. Les conséquences de ces forces capillaires peuvent en effet devenir catastrophiques pour des petites structures, comme dans le cas par exemple de la condensation de gouttes d'eau sur les lamelles flexibles d'un micro-accéléromètre.

Cependant, il existe beaucoup d'autres situations où ces effets ont été utilisés pour réaliser des tâches diverses, notamment dans la manipulation et fabrication de petits objets. Il est par exemple possible d'auto-assembler des éléments individuels flottant à la surface de l'eau en des structures complexes, uniquement sous l'effet des forces capillaires [31]. La tension de surface de gouttes de soudure déposées sur des feuilles métalliques pré-pliées est également utilisée pour former des micro-structures tridimensionnelles. Dans ce cas, la structure finale dépend de la forme du patron initial ainsi que du pré-pliage. Une fois la goutte refroidie, la structure demeure pérenne [32, 33]. Dans ce type de technique le pliage de la feuille autour de la goutte de soudure est en effet le résultat de la minimisation de l'énergie de surface liquide-air, et permet d'obtenir des structures tridimensionnelles variées [34–37]. Il existe aussi des variations sur cette technique qui remplacent le pré-

pliage par la gravure de charnières sur les patrons bidimensionnels. Les gouttes de soudure sont dans ce cas déposées uniquement sur les charnières [38–40].

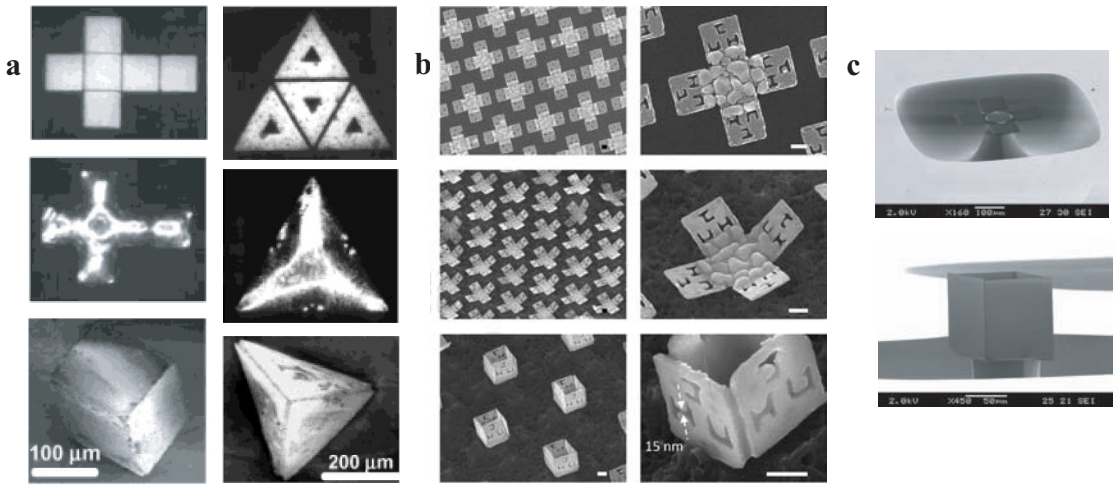


FIGURE *2.1* – (a) Repliement de panneaux pré-marqués autour d'une goutte de soudure (images extraites de [33]), (b) boîtes cubiques obtenues après fusion de la soudure déposée sur les charnières du patron initial (images extraites de [38]), (c) boîte obtenue après dépôt puis évaporation d'une goutte d'eau sur le patron en silicium (clichés J. van Honschoten).

Malgré leur versatilité pour la fabrication de micro, voire de nano-objets, ces techniques exigent l'utilisation de technologies de lithographie très avancées pour la préparation des feuilles pré-pliées et avec des charnières.

Afin de contourner ces barrières technologiques, Py *et al.* [26] ont travaillé sur le dépôt de gouttes sur des membranes flexibles lisses. Ils ont montré expérimentalement que si la membrane est suffisamment souple, elle enrobe la goutte spontanément. Bien que cette technique soit assez simple à implémenter, elle pose la question de la détermination des conditions pour lesquelles une feuille donnée est susceptible d'être déformée par la goutte d'eau. Pour répondre à cette question il faut tout d'abord établir les principes physiques impliqués dans le phénomène.

2.1.1 Critères de fermeture

Posons une petite goutte d'eau sur une surface solide quelconque. En situation de mouillage partiel, la goutte adopte la forme d'une calotte sphérique (figure 2.2) qui permet de minimiser son énergie de surface [1]. L'équilibre des forces de surface

liquide-air, solide-liquide et solide-air dicte également l'angle de contact adopté par la goutte (voir l'équation 2.4 plus loin). Si l'angle de contact est non nul (mouillage partiel), la tension de surface du liquide semble induire une force verticale qui ne semble pas compensée (figure 2.2-a). En réalité cette force tend à pincer le matériau au voisinage de la ligne de contact alors que la pression de Laplace, $P \sim \gamma/R$, tend à appuyer sur le substrat. En quelque sorte, la goutte exerce un couple sur le substrat. Dans le cas d'un matériau en volume, la déformation induite est généralement négligeable [21,41]. Cependant, si la goutte est posée sur une membrane, cette dernière peut fléchir (figure 2.2-b). Si une feuille est courbée sur sa propre longueur L, le couple généré par la tension de surface est d'ordre γL^2. La réponse élastique de la feuille correspond à un couple BL/L, où B est la rigidité en flexion de la feuille, avec $B \sim Eh^3$ (E étant le module de Young et h l'épaisseur de la feuille). La comparaison de ces deux couples conduit à la longueur critique

$$L_{crit} \sim \sqrt{B/\gamma} \sim L_{EC}, \tag{2.1}$$

au-delà de laquelle nous attendons un enrobage de la feuille autour de la goutte d'eau (nous retrouvons la longueur élasto-capillaire). En effet, plus la feuille est longue, plus elle est flexible, et plus le couple capillaire est important. La goutte réalise ainsi une forme d'*origami capillaire*. Cependant, la longueur maximale du système est limitée par les effets de la gravité. Si nous voulons que ces derniers restent négligeables, la longueur caractéristique de notre système devra rester plus petite que la longueur capillaire $L_c \sim \sqrt{\gamma/\rho g}$. La longueur de fermeture de la feuille est donc bornée par $L_{crit} < L < L_c$.

Dans la figure 2.3 nous présentons les longueurs critiques de fermeture pour des feuilles triangulaires et carrées trouvés par Py *et al.*

En plus de la simplicité de fabrication, une des caractéristiques les plus importantes des origamis capillaires est la variété des structures tridimensionnelles qui peuvent être crées en fonction du patron initial de la feuille. Par exemple, une feuille triangulaire se transforme en pyramide, tandis qu'une fleur génère une structure quasi-sphérique (figure 2.4-a) qui a été utilisée pour construire des cellules photo-voltaiques tridimensionnelles [27].

La dynamique au contact de la goutte peut également influencer la forme de la structure finale [42]. Au lieu de les déposer directement sur la feuille, Antkowiak

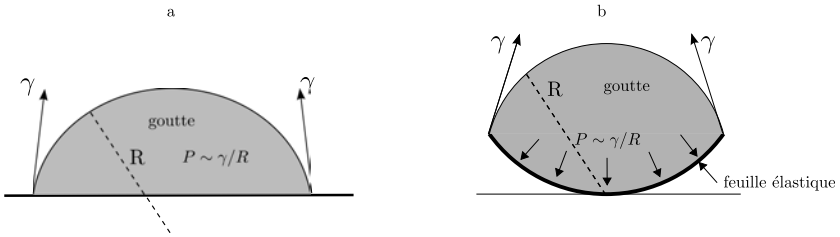


FIGURE *2.2* – Schéma d'une goutte d'eau déposée sur a) un substrat solide, b) un substrat flexible.

et al. laissent tomber les gouttes sur la feuille depuis une certaine hauteur. Ils obtiennent des différences dans la structure finale de l'origami en fonction de la vitesse d'impact de la goutte. Un même patron initial conduit ainsi aussi bien à un pli unique ou à une pyramide (figure 2.4-b).

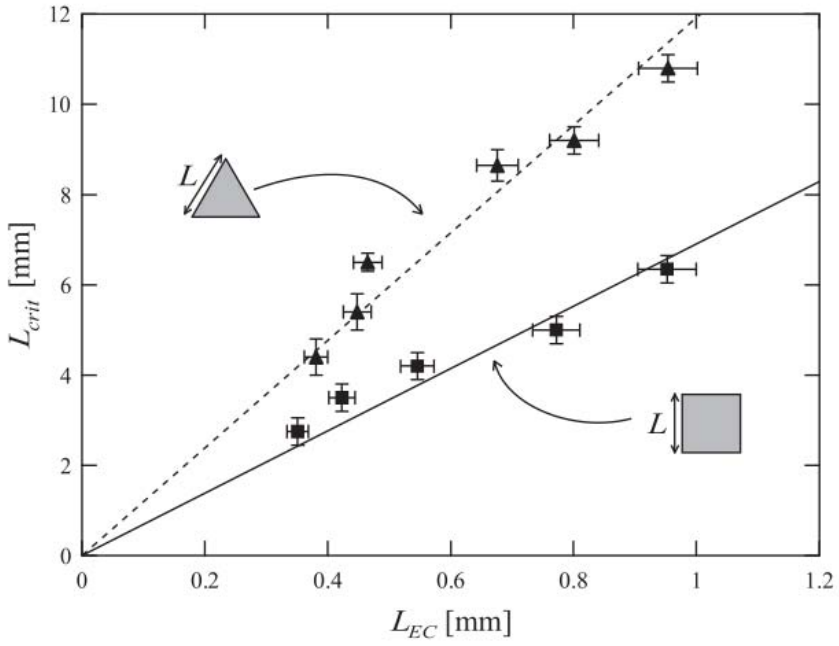


FIGURE *2.3* – Longueurs critiques de fermeture pour des feuilles carrées et triangulaires en fonction de la longueur élasto-capillaire. (Image extraite de [26]).

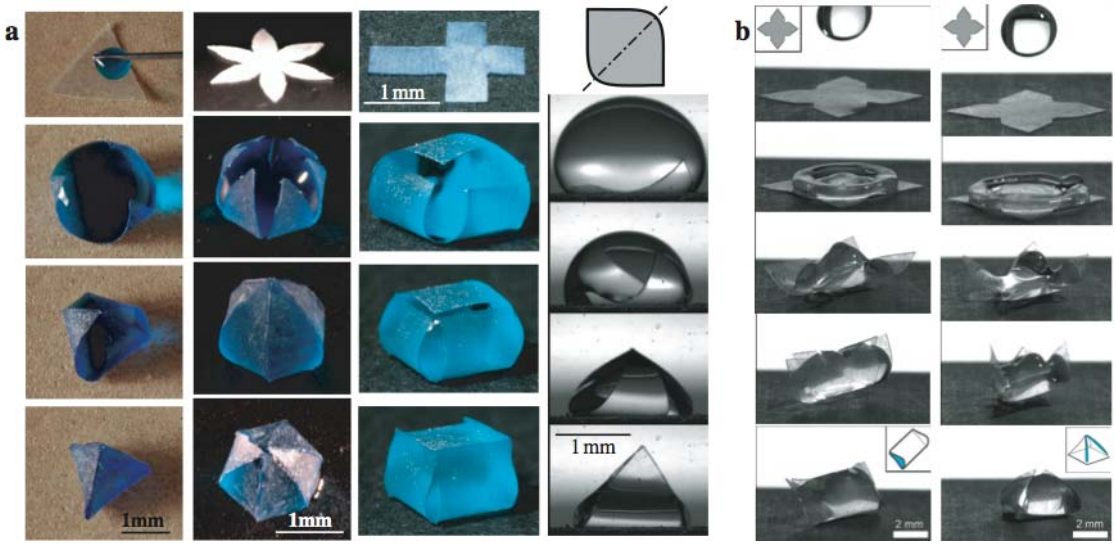


FIGURE *2.4* – (a) Origami capillaire : différentes formes tridimensionnelles peuvent être obtenues en fonction de la découpe initiale de la feuille. (b) Origami dynamique : une même feuille conduit à différents états finaux en fonction de la vitesse d'impact de la goutte (clichés Arnaud Antkowiak).

2.2 Actuation des origamis capillaires

Dans la section précédente nous avons montré la diversité des structures tridimensionnelles qui peuvent être obtenues à partir de l'enrobage de feuilles flexibles autour de gouttes d'eau. En plus de la variété des formes obtenues, il serait intéressant de pouvoir actionner ces microstructures, ce qui permettrait d'élargir leur champ d'application.

Par exemple, une fois que l'origami est fermé, serait-il possible de revenir à son état ouvert ? Pour trouver une réponse à cette question il faut s'adresser aux forces qui interviennent dans la formation des origamis. Comme nous l'avons montré plus haut, l'enrobage des feuilles autour des gouttes dépend de la compétition entre les forces de tension de surface liquide-air et la rigidité de la feuille. Lorsque la tension de surface est dominante, l'enrobage est possible. La manière la plus simple de restituer l'état plat de la feuille serait donc de diminuer la tension de surface de l'eau. Il suffirait par exemple d'ajouter du tensioactif dans l'eau. Une telle méthode serait néanmoins irréversible [1]. Nous proposons donc de nous intéresser

1. Nous projetons cependant d'effectuer des expériences avec des tensioactifs photo-sensibles

à une solution réversible : l'application d'un champ électrique.

L'action d'un champ électrique sur une interface fluide est connue depuis plus d'un siècle [43]. Cependant son utilisation pratique est devenue populaire il y a quelques années dans le domaine de la microfluidique, où l'application des champs électriques est utilisé afin de modifier l'angle de contact d'un liquide sur un substrat. Cette modification de la mouillabilité d'un liquide en fonction du champ appliqué est connue comme "électro-mouillage".

2.2.1 L'électro-mouillage

Les bases de l'électro-mouillage furent établies par Lippmann dans son travail "*Relations entre les phènomènes électriques et capillaires*" publié en 1875 [43]. Lippmann étudia la dépression de l'interface entre le mercure et un électrolyte qui restaient en contact direct. Il découvrit notamment que l'application d'une différence de quelques volts entre les deux liquides pouvait entrainer une déformation de l'interface avant d'avoir un flux de courant. Il développa de nombreuses applications basées sur le principe de l'électrocapillarité, parmi lesquelles on peut trouver un électromètre de haute précision. Cependant, cette technologie est très limitée par le processus d'électrolyse de l'électrolyte. La tension maximale supportée par le système avant la décomposition de l'eau se réduit en pratique à quelques centaines de millivolts.

Dans les années 90, Bruno Berge trouva une solution au problème de l'électrolyse en rajoutant une couche isolante entre l'électrode métallique et le liquide [44]. Cette technique, connue comme "électro-mouillage sur un diélectrique" (EWOD, par ses initiales en anglais), permet de faire varier l'angle de contact du liquide sur le substrat. Grâce à cet effet de variabilité de l'angle de contact, elle a été largement utilisée dans des applications différentes, qui vont de la fabrication de micro-lentilles liquides de focale variable [45], à la manipulation de micro-gouttes dans des dispositifs lab-on-a-chip [46,47] et au pilotage de moteurs capillaires [48].

Les principes physiques de l'électro-mouillage peuvent être expliqués sous des points de vue différents [49]. Considérons par exemple une goutte d'eau posée sur un substrat rigide comme celle schématisée dans la figure 2.5. En absence de champ

synthétisés dans l'équipe de Cécile Monteux (laboratoire PPMD, ESPCI), dont la tension de surface peut être pilotée par l'éclairage.

électrique, et en négligeant les effets de la gravité, la forme de la goutte est donnée uniquement par la tension de surface. L'énergie libre d'une telle configuration est

$$E = A_{lv}\gamma_{lv} + A_{ls}\gamma_{ls} + A_{vs}\gamma_{vs} - \Delta pV \tag{2.2}$$

où A et γ sont l'aire et la tension interfaciale de chaque interface et ΔpV est un paramètre de Lagrange qui tient compte du volume fixé V de la goutte. Les interfaces sont désignées par les indices lv (liquide-vapeur), ls (liquide-solide) et vs (vapeur-solide). La minimisation de cette énergie conduit aux deux conditions d'équilibre de la goutte [1]. Comme premier ingrédient, l'expression de Laplace établi que la dépression à travers de la surface de séparation de deux fluides est donnée par :

$$\Delta p = \gamma_{lv}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \tag{2.3}$$

où R_1 et R_2 sont les rayons principaux de courbure de la surface. Dans le cas d'une goutte, Δp est constante sur tout point de la surface. La tension de surface liquide-vapeur étant invariante, la courbure de la surface doit être aussi constante. Cela implique que la forme d'une goutte posée sur une surface plate soit celle d'une calotte sphérique.

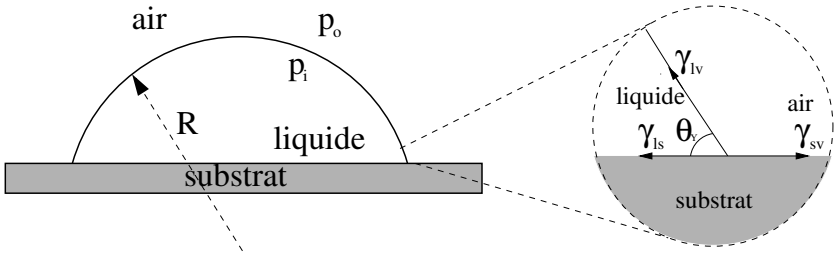


FIGURE 2.5 – Schéma d'une goutte d'eau déposée sur un substrat solid.

L'autre condition est l'équilibre des forces dans la ligne de contact formée entre les trois éléments (solide, vapeur et liquide). Cet équilibre est donné par l'équation de Young qui s'écrit comme

$$\cos\theta_Y = \frac{\gamma_{vs} - \gamma_{sl}}{\gamma_{lv}} \tag{2.4}$$

où θ_Y est l'angle de contact solide-liquide. Donc, à partir de la relation des tensions

de surface on peut définir complètement l'état d'équilibre d'une goutte qui repose sur un substrat solide.

Discutons maintenant les changements subis par cet équilibre lorsque nous rajoutons un champ électrique (figure2.6). En présence du champ, il faudrait inclure l'énergie électrostatique dans l'équation 2.2. Cette énergie peut être divisée en deux parties [49]. La première correspond à la contribution du condensateur formé par la goutte et le substrat, dont la capacité C est proportionnelle à A_{sl}. La deuxième partie est due à la capacité perdue tout le long de la ligne de contact. Cependant, ces effets ne sont importants qu'à très petite échelle (normalement près de l'échelle moléculaire) et ils peuvent être négligés pour le cas des gouttes suffisamment larges. Donc, en rajoutant l'énergie électrostatique du condensateur de plaques parallèles dans 2.2 nous obtenons :

$$E = A_{lv}\gamma_{lv} + A_{ls}\left(\gamma_{ls} - \frac{\epsilon_0\epsilon_d U^2}{2d}\right) + A_{vs}\gamma_{vs} - \Delta pV \tag{2.5}$$

où ϵ_0 et ϵ_d sont la permittivité relative du vide et de la couche isolante respectivement, U est la tension appliquée et d est l'épaisseur de la couche isolante. Il faut remarquer que la contribution électrostatique à l'énergie libre est négative.

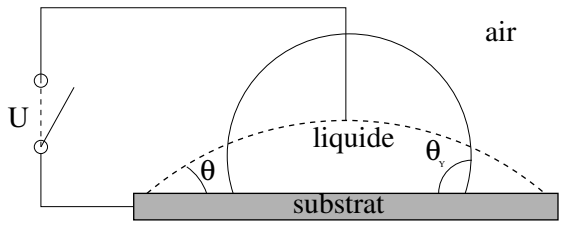


FIGURE *2.6* – Schéma de la déformation de la goutte lorsque qu'elle est soumise à une diference de tension U.

Donc, en présence d'une différence de tension entre la goutte et le substrat, le système favorisera l'augmentation de la surface de contact liquide-solide afin de minimiser l'énergie électrique. Mais en même temps, cette augmentation de la surface liquide-solide entraine aussi une augmentation de la surface liquide-air. C'est alors la compétition entre ces deux énergies qui déterminera l'état d'équilibre de la goutte pour une valeur de la tension donnée. Étant donné que le volume de la goutte est constant et que sa forme reste une calotte sphérique, les variations de la

surface de contact entre le liquide et le substrat vont provoquer des modifications de l'angle de contact (au moins à l'échelle macroscopique). Si nous équilibrons les forces au voisinage de la ligne de contact, nous trouvons que l'angle de contact à l'équilibre est donné par

$$\cos\theta = \cos\theta_Y + \frac{1}{2}\frac{\epsilon_0\epsilon_d}{d\gamma_{lv}}U^2. \tag{2.6}$$

C'est-à-dire que nous allons trouver un angle de contact qui diminue en fonction de la tension appliquée. L'équation 2.6 suggère que l'angle de contact continue à décroître jusqu'à arriver au cas du mouillage total avec $\theta = 0$. Cependant, l'angle de contact sature en pratique pour une certaine valeur U_{sat} de la tension appliquée au delà de laquelle il reste constant. Les raisons de l'existence de la saturation de l'angle de contact n'ont pas encore été bien établies même s'il existe différentes théories qui tentent d'expliquer le phénomène [49].

Nous nous proposons d'étudier un dispositif expérimental qui nous permette d'imposer une différence de tension entre la goutte enveloppée d'une membrane élastique et le substrat, où la membrane joue le rôle de diélectrique (figure 2.7). Dans notre cas, à la différence de l'électro-mouillage classique, nous n'allons pas nous intéresser aux variations de l'angle de contact. Le contour de la goutte est en effet ancré sur les bords de la feuille qui constitue une arrête singulière (fig. 2.2-b). La notion d'angle de contact est dans ce cas mal défini (effet de "cantotaxie") [1]. Cependant nous nous attendons à favoriser l'ouverture de l'origami (qui se referme à cause de la tension de surface) pour minimiser l'énergie électrique du système, et nous pouvons estimer cet effet en reprenant une approche énergétique. En fait, si nous comparons l'énergie de surface de l'interface liquide-air de l'état ouvert $U_s \sim \gamma L^2$ avec l'énergie électrique $U_e \sim \epsilon L^2 U^2/2$ du condensateur, nous pouvons estimer une tension caractéristique au-delà de laquelle on pourrait attendre l'ouverture. Cette tension est donc donnée par :

$$U_0 = \sqrt{\frac{\gamma d}{\epsilon}}, \tag{2.7}$$

où d et ϵ sont l'épaisseur et la permittivité du diélectrique. Nous avons donc deux paramètres caractéristiques dans notre problème : la longueur élasto-capillaire L_{ec}

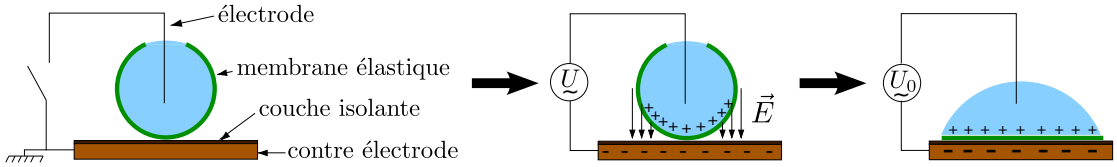


FIGURE *2.7* – Schéma de l'actuation d'un origami capillaire par un champ électrique.

qui lie les effets de tension de surface et élasticité de la membrane, et la tension U_0, qui permet faire un bilan entre la tension de surface de l'interface liquide-air et le champ électrique appliqué.

2.3 Dispositif experimental

Dans cette section nous présentons les matériaux et les méthodes utilisés dans nos expériences. Dans un premier temps, nous ferons une description de la fabrication des membranes flexibles employées pour former les origamis. Nous discuterons ensuite la mise en œuvre du champ électrique et les procédures d'application de la charge.

2.3.1 Les membranes flexibles

Toutes les membranes utilisées dans nos expériences ont été fabriquées en polydiméthylsiloxane, polymère organominéral largement connu sous le nom de PDMS. Ce polymère est constitué par une base de silicone à la quelle nous rajoutons un agent réticulant pour déclencher la formation de liaisons entres les molécules de polymère. Dans le processus de polymérisation nous utilisons des proportions de 1 : 10 et 1 : 20 entre l'agent réticulant et la base de silicone. L'utilisation de différentes proportions de réticulant permettent de faire varier la rigidité finale du polymère, le polymère étant naturellement d'autant plus rigide que la concentration du réticulant est élevée [2]. Pour générer des couches de polymère avec des épaisseurs homogènes et contrôlées nous avons utilisé la technique de l'enduction centrifuge ou "spin-coating" (figure 2.8). Avec cette technique il est possible de fa-

2. Une proportion 1 :10 assure une liaison complète de toutes les chaines polymériques, et donc, l'utilisation de proportions d'agent réticulant plus élevées n'ont plus aucun effet sur la rigidité du polymère obtenu.

briquer des couches de polymère homogènes dont l'épaisseur dépend de la vitesse et le temps de rotation du substrat. Après avoir élaboré le mélange de PDMS et avoir ôté les bulles d'air à l'aide d'une centrifugeuse [3], nous déposons un certain volume de polymère dans le centre d'une boîte de Petri qui servira de substrat. Ce volume initial n'a pas besoin d'être précis : il faut seulement que la quantité de matériel soit suffisante pour couvrir la totalité de la surface du substrat. Ensuite, nous faisons tourner le substrat à une certaine vitesse ω selon l'épaisseur de couche h désirée. Cependant, pour avoir des couches plus homogènes il est recommandé de faire tourner le substrat à une vitesse initiale basse pour assurer la distribution complète du polymère sur toute la surface. Ensuite, la vitesse de rotation est augmentée à la vitesse maximale du processus. Comme procédure d'élaboration de nos couches, nous utilisons une vitesse initiale de 500 rpm pendant 30s avant de passer à la vitesse requise. Finalement, cette vitesse est maintenue constante pour une période de 50s. La table 2.1 donne les épaisseurs approximatives en fonction de la vitesse de rotation attendues pour cette procédure. Néanmoins, l'épaisseur réelle de chacune des membranes est vérifiée à l'aide d'un profilomètre de contact (*DektakXT Stylus*).

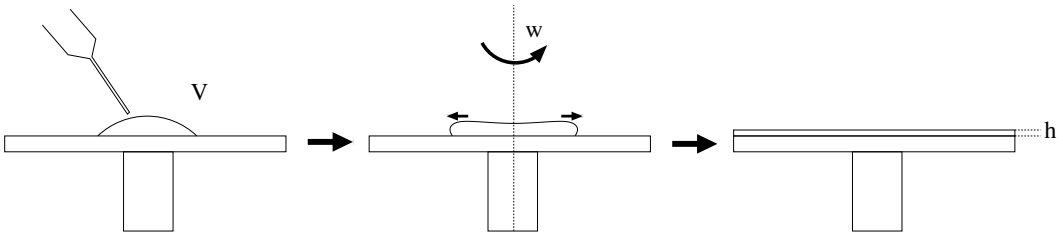


FIGURE *2.8* – Schéma de la technique de "spin-coating".

Après l'enduction centrifuge, les couches de PDMS sont mises à reposer pendant 8 heures dans un four à 70^oC.

3. Le processus de centrifugation utilisé consiste à faire tourner le mélange de PDMS durant 90s à une vitesse de rotation de 3000rpm.

ω (rpm)	h (μm)
1000	75
1250	60
1500	50
2000	38.5

TABLE *2.1* – Épaisseurs approximatives en fonction de la vitesse de rotation pour du PDMS 1 : 10.

2.3.2 Découpage des patrons bidimensionnels

Des patrons triangulaires de différentes tailles sont découpés dans les films, directement de la boîte de Petri à l'aide d'un scalpel. Pour simplifier la tâche, une impression du patron est collée en dessous de la boîte et sert comme guide au découpage. Comme commenté précédemment, les feuilles triangulaires conduisent à des origamis pyramidales. Nous avons choisi cette structure car elle est très facile à fabriquer et à manipuler.

2.3.3 Circuit électrique

Le circuit électrique a comme objectif l'approvisionnement de la charge qui sera le moteur de l'actuation de l'origami. Un schéma du dispositif est montré dans la figure 2.9. Une électrode en cuivre de 10 μm de diamètre est plongée directement dans la goutte pour la charger. Le substrat sur lequel l'origami est posé est une plaque en laiton qui sert de contre-électrode dans le circuit. La membrane flexible qui forme l'origami joue le rôle de couche diélectrique dans le système en isolant les deux électrodes. Néanmoins, pour éviter des courts circuits non désirés en cas du débordement de la goutte sur le substrat, nous utilisons une couche isolante supplémentaire. Ainsi, l'ensemble électrodes+origami+couche isolante forment un condensateur dont la capacité varie en fonction de l'épaisseur de la couche isolante et de la feuille flexible, mais aussi et surtout en fonction de la géométrie de l'origami. L'influence de chacun de ces paramètres sur la valeur de la capacité sera discutée dans la suite du chapitre. On peut déjà noter que la tension typique U_o au delà de laquelle les effets électriques dominent la tension de surface (définie

plus haut) devient :

$$U_0 = \sqrt{\frac{\gamma(d+h)}{\epsilon}}, \tag{2.8}$$

où h est l'épaisseur de la membrane et d celle de la couche isolante qui ont sensiblement la même permittivité ϵ.

Comme montré dans le circuit de la figure 2.9, une résistance R est connectée en série avec le condensateur. La tension U_R mesurée entre les deux bornes de la résistance nous permet d'estimer la valeur de l'impédance du condensateur à partir de la relation

$$Z_2 = R\left(\frac{U}{U_R} - 1\right) \tag{2.9}$$

où Z_2 est l'impédance du condensateur. Si nous considérons le condensateur comme parfait (sans dissipation) sa capacité est liée à l'impédance mesurée à partir de l'expression $C = 1/(2\pi f Z_2)$, f étant la fréquence d'excitation du circuit.

La tension d'entrée du circuit est fournie par un générateur de signaux *Tektronik 1254* qui est amplifié par un amplificateur *Trek 8354*. La tension maximale atteinte dans cette configuration est de $4000V$ et peut être du courant continu ou alternatif avec une fréquence maximale de 10 kHz. Les lectures de la tension d'alimentation du circuit U et de la tension U_R sont acquises avec un carte d'acquisition *NI USB*, puis envoyées à un ordinateur où les données sont enregistrées avec un programme *Labview*.

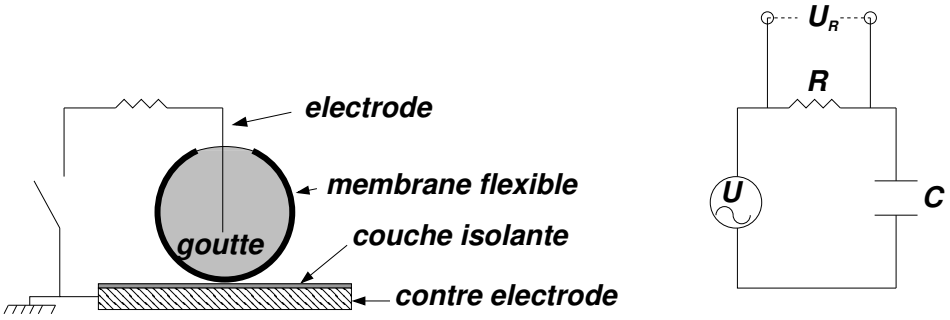


FIGURE *2.9* – Schéma du dispositif experimental.

2.3.4 Visualisation

Pour pouvoir étudier en détail l'évolution de son ouverture, des images de l'origami ont été prises durant chacune des expériences. À l'aide d'une camera

Sony placée en dessus du dispositif expérimental et d'un miroir, nous enregistrons simultanément les vues supérieure et latérale de l'origami capillaire. Les images sont acquises avec une cadence de 10 images par seconde par le même programme de pilotage Labview utilisé pour enregistrer les données des tensions. La figure 2.10 montre le schéma de la disposition de la camera et du miroir ainsi qu'un exemple d'image obtenue.

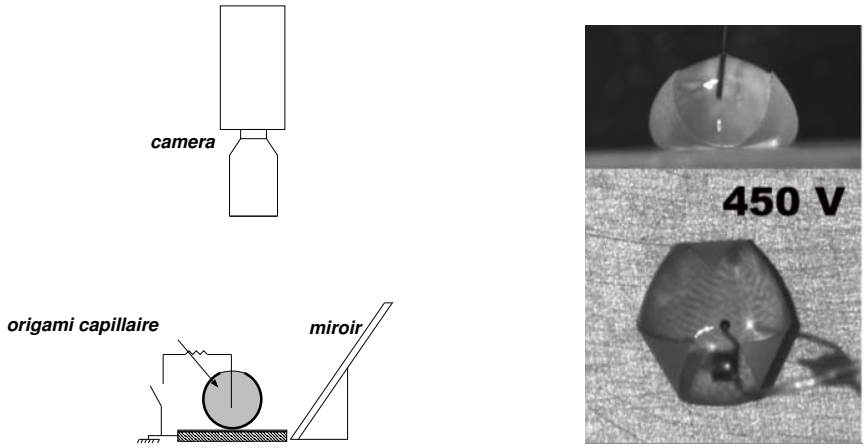


FIGURE *2.10* – À gauche : schéma de la disposition des éléments pour la prise des images. À droite : exemple d'image enregistrée avec la valeur de la tension appliquée correspondante.

2.3.5 Procédure expérimentale

La première étape dans nos expériences est la confection de l'origami que nous tenterons de manipuler avec le champ électrique. Comme décrit par Py *et al.*, une goutte d'eau est déposée sur une des membranes élastiques triangulaires, et est immédiatement enrobée par la feuille.

Une fois que l'origami a été formé, l'électrode en cuivre est plongée dans la goutte. La tension d'alimentation du circuit est ensuite augmentée progressivement avec une variation de 10 V/s jusqu'à la réouverture complète de l'origami. À ce moment, la tension est réduite à la même cadence pour ramener le système à sa condition de départ (refermée). Comme décrit antérieurement, le camera enregistre le processus à raison de 10 images par seconde. À chacune des images est associée une valeur de la tension appliquée au système ainsi que la valeur de la capacitance mesurée.

2.4 Problèmes d'adhésion

Nous avons réalisé des expériences préliminaires pour valider le principe de l'ouverture. Cependant, lors de la déposition de la goutte d'eau sur la feuille flexible, nous nous sommes aperçus de l'existence d'adhésion entre la couche isolante et la feuille de PDMS (figure 2.12). En effet, certaines parties de la feuille restaient collées sur le substrat et l'origami n'arrivait pas à se former.

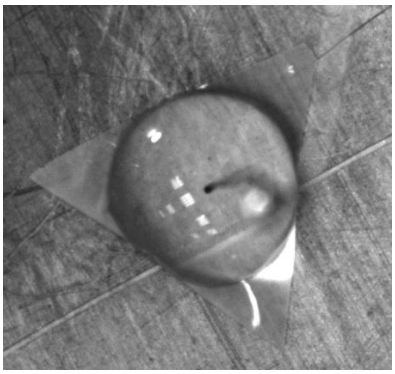


FIGURE *2.11* – Exemple d'une feuille qui reste collée sur le substrat empêchant l'enrobage de la goutte.

Une façon rustique de résoudre le problème est de décoller la feuille à l'aide d'un scalpel pour aider l'enrobage. Cependant le même problème se poserait à nouveau lors de la ré-ouverture de l'origami. Ce problème d'adhésion avait déjà été remarqué par Py *et al*, qui l'ont en partie résolu en rajoutant du talc sur la surface du substrat. Cependant une telle solution n'est pas parfaitement satisfaisante.

Nous avons choisi de résoudre le problème de manière beaucoup plus robuste et reproductible. Il s'agit de fabriquer des feuilles flexibles dont la face en contact avec le substrat est rugueuse. La rugosité diminue de manière importante l'aire de contact effective entre la feuille et le substrat et par conséquent conduit à une diminution de l'adhésion.

Pour élaborer les feuilles de surface rugueuse il suffit de faire un petit changement dans le processus de formation des feuilles. Nous recouvrons le fond de la boîte de Petri (qui est normalement lisse) avec une feuille de papier de verre *Emery 00* utilisée pour le polissage. Nous avons caractérisé la rugosité de cet type de papier à l'aide d'un profilomètre optique *DektakXT Stylus*, obtenant une

rugosité moyenne de 4.24 μm. Les feuilles de surface rugueuse ont montré une adhérence nulle sur les couches isolantes utilisées.

Cependant, il faut signaler que dans le processus d'enduction centrifuge (spin coating), la présence d'un fond rugueux modifie de manière importante la relation entre la vitesse de rotation et l'épaisseur de la membrane obtenue. Avec le fond rugueux nous obtenons des membranes environ 60% plus épaisses que celles obtenues par la procédure normale. Nous avons donc mesuré l'épaisseur de chaque membrane à l'aide du profilomètre de contact.

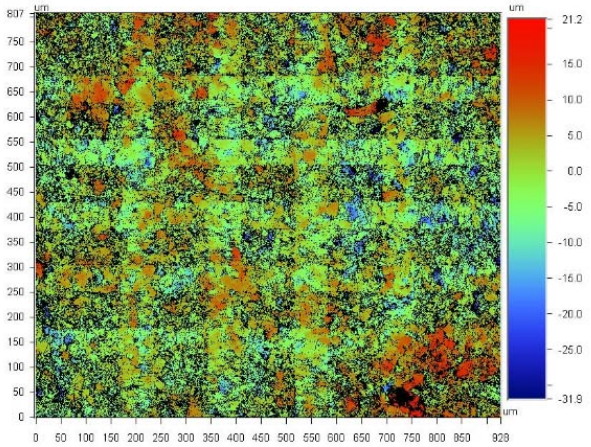


FIGURE *2.12* – Topographie d'un échantillon du papier de verre utilisé.

2.5 Résultats Expérimentaux

Après la mise au point du système expérimental, nos expériences ont montré qu'effectivement, en appliquant un champ électrique suffisamment fort, il est possible de réouvrir la structure de l'origami capillaire, la feuille revenant à l'état plat sur le substrat (ce résultat avait été observé pour la toute première fois lors d'un stage de Fabien Closa et Charlotte Py). Nous avons aussi vérifié qu'une fois que le champ électrique est coupé, la feuille enrobe la goutte à nouveau.

La figure 2.13 montre une série d'images prises durant une expérience typique. La figure 2.13-a montre l'évolution d'ouverture de l'origami lorsque la tension entre les deux électrodes est augmentée. Au départ, la feuille commence à s'ouvrir progressivement jusqu'à ce qu'une tension critique soit atteinte : un des coins du

triangle s'ouvre soudainement et se plaque sur le substrat. À mesure que la tension continue à augmenter les autres coins du triangle s'ouvrent successivement. Nous pouvons ainsi définir une tension critique U_{open} qui correspond à l'ouverture des trois coins (dernière image de la figure 2.13-a). Une augmentation de la tension au delà de cette valeur ne conduit pas à une évolution de la forme du système. Cependant, à partir d'une certaine tension (dans nos expériences environ 1000 V) des petites gouttes d'eau commencent à être éjectées hors de la structure. Ce phénomène a été aussi observé par Berge textitet al. [45] dans ses études sur la saturation de l'angle de contact dans l'électro-mouillage. Une tension excessive peut également provoquer un débordement de la goutte sur la contre-électrode, ce qui n'est pas du tout désirable (la feuille élastique resterait alors collée sur le substrat par capillarité).

Une fois ayant atteint l'ouverture totale de l'origami, nous commençons à réduire progressivement la tension. Contrairement à ce que nous pourrions attendre pour une transition continue, la feuille passe d'un état plat à un enrobage par un des coins du triangle sur la goutte (troisième image dans la figure 2.13-b) pour une tension différente de U_{open}. Nous appellerons U_{close} la tension correspondant à cette transition. Il faut remarquer que cette tension est significativement plus petite que U_{open}, ce qui indique une hystérésis élevée dans le système. En continuant à décroître la tension, les autres coins se referment successivement. Finalement, l'origami revient à son état initial. Le processus peut être répété plusieurs fois de manière reproductible. Cependant, l'évaporation de l'eau au cours du temps limite la reproductibilité de l'expérience car, comme nous montrerons par la suite, il existe une dépendance de la tension d'ouverture avec le volume de la goutte.

Dans la figure 2.14 nous montrons la valeur de la capacité du système mesurée tout le long de 5 cycles complets. Comme vu plus haut dans la discussion sur l'electromouillage, nous nous attendons à ce que la capacité soit proportionnelle à l'aire de contact plan entre l'origami et la contre-électrode. Les mesures de la capacité nous servent à deux choses principalement. D'un côté, elles mettent en évidence l'existence d'hystérésis dans le système, et comme nous discuterons plus tard, elles permettront aussi d'expliquer son origine. D'un autre côté, ces mesures nous permettent d'étudier de façon plus détaillée les processus d'ouverture et fermeture de l'origami. Lorsque la tension commence à augmenter, la feuille se

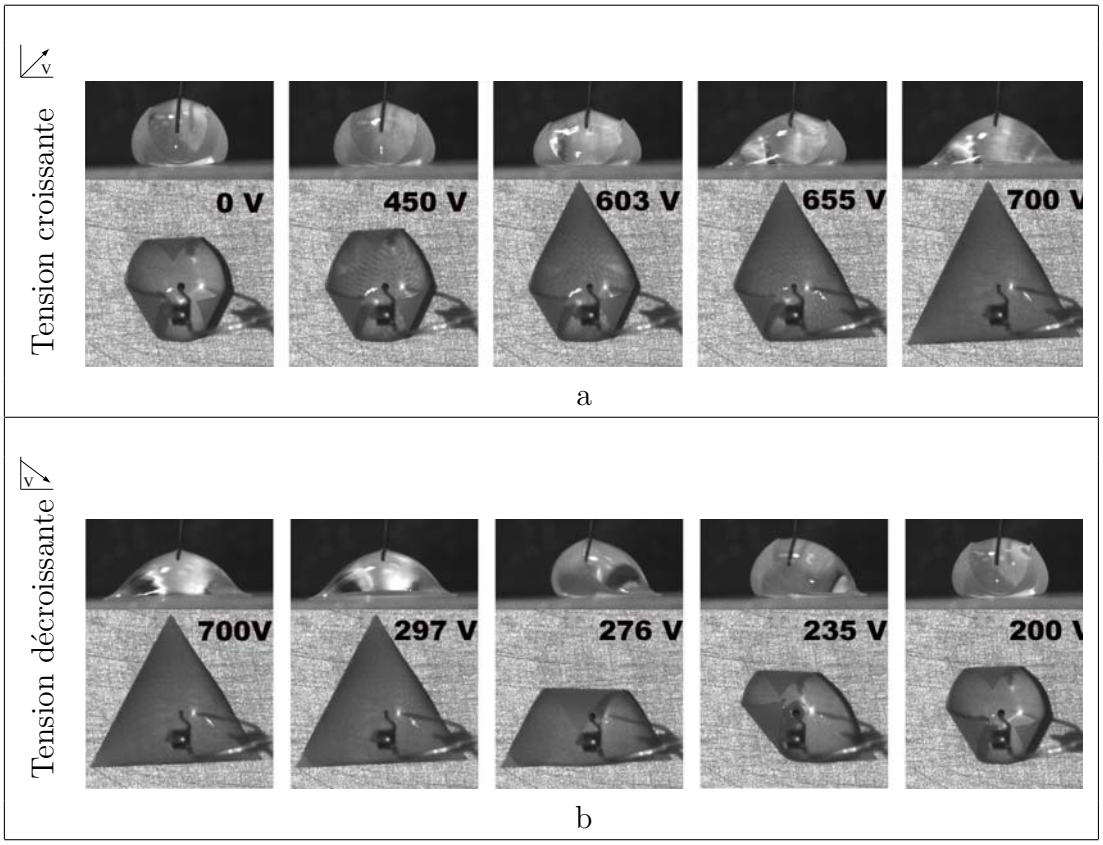


FIGURE *2.13* – Vues latérale et vue de haut de l'expériences, a) lorsque l'on augmente la tension, b) lorsque l'on décroit la tension pour revenir à une tension nulle. $L = 7\ mm$, $h = 80\ \mu m$, $d = 60\ \mu m$ et $L_{EC} = 0.47\ mm$.

déploie progressivement. Ce processus correspond à l'augmentation continue de la capacité du système entre les points 1 et 2 (figure2.14). Puis, l'ouverture spontanée du premier coin conduit à un saut brutal vers le point 2. La feuille va s'ouvrir petit à petit, jusqu'à ce que les deuxième et troisième coins s'ouvrent, événements que nous pouvons reconnaitre comme les sauts en la capacité aux points 3 et 4. Après l'ouverture totale (point 4), nous nous attendrions à ce que la capacité reste constante, jusqu'au moment de la fermeture du premier coin. Cependant, nous observons que la capacité diminue progressivement lorsque la tension décroît entre les points 4 et 6. Cette chute de la capacité semble due au processus de démouillage près des coins de la feuille (voir photo correspondant au point 5). Ce démouillage conduit en effet à une réduction de l'aire de contact effective et ainsi

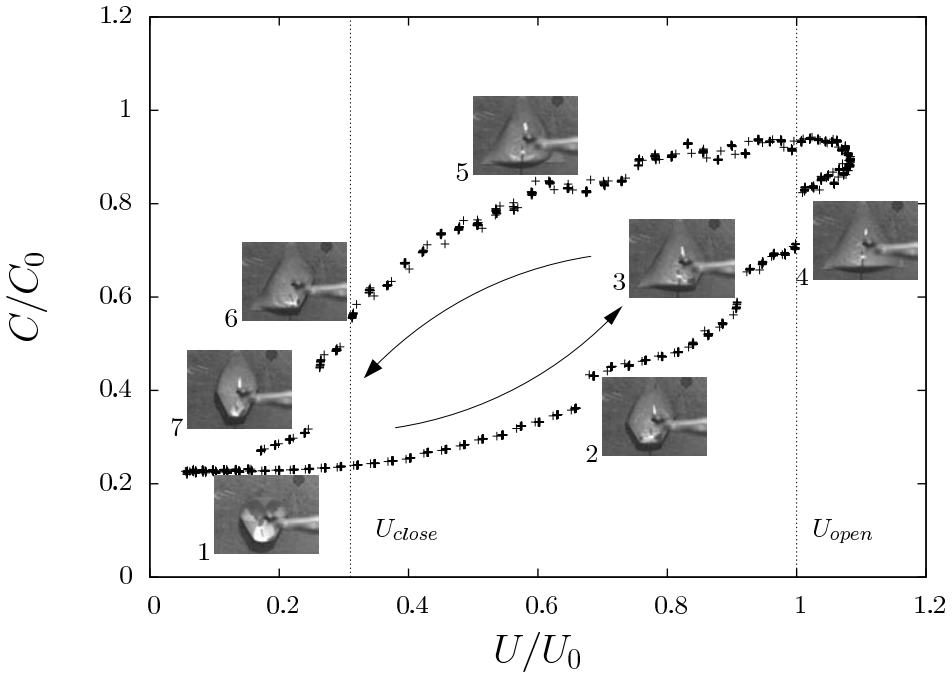


FIGURE *2.14* – Capacité du système le long de 5 cycles d'ouverture et de fermeture successifs. C_0 correspond à la capacité d'un condensateur de plaques parallèles de surface triangulaire de côté $L = 7mm$.

à une diminution de la capacité. Quand le champ électrique devient trop faible pour maintenir l'état ouvert, le premier coin se referme et la capacité chute avec un saut brutal (point 6). Le même phénomène se produit pour les autre deux coins (seul l'un des saut est marqué, point 7 sur la figure) où l'origami revient à son état de départ. Remarquons que la capacité du système pour l'état fermé est environ cinq fois plus petite que celle de l'état ouvert.

Le scénario d'ouverture et fermeture que nous venons de décrire est indépendant des paramètres expérimentaux utilisés. Dans toutes les expériences que nous avons réalisées, l'ouverture et la fermeture des coins n'est jamais simultanée. Nous nous attacherons dans la suite à décrire les valeurs critiques des champs électriques U_{open} et U_{close} en fonction des paramètres expérimentaux. Dans les expériences nous avons varié cinq paramètres : l'épaisseur de la feuille h, le module élastique de la feuille E, le côté des triangles L, l'épaisseur de la couche isolante d et le volume de la goutte d'eau V. Les variations des deux premiers paramètres se traduisent directement par une variation de la longueur élasto-capillaire.

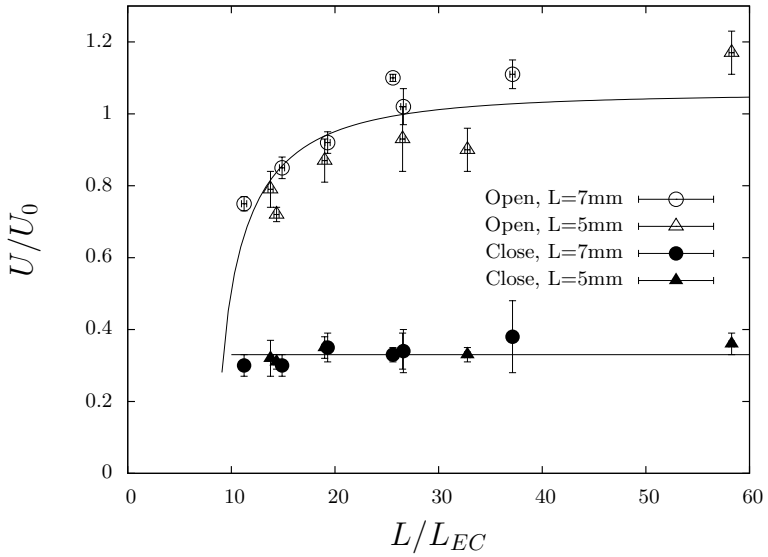


FIGURE *2.15* – Tensions d'ouverture et fermeture renormalisés par U_0 en fonction du rapport entre la longueur de la feuille et la longueur élastocapillaire. Les variations de la longueur élasto-capillaire ont été atteints en variant l'épaisseur de la feuille entre 50 et 100 μm ainsi qu'en variant le module d'élasticité du PDMS. L'épaisseur de la couche isolante demeure constant $d = 50\ \mu m$. Pour les paramètres utilisés nous avons une tension caractéristique $U_0 \sim 800\ V$ Les symboles ouverts représentent les tensions d'ouverture et les symboles solides les tensions de fermeture.

La figure 2.15 montre les valeurs des tensions d'ouverture et de fermeture obtenues en fonction du rapport entre la taille du triangle et la longueur élastocapillaire. Dans ces expériences, le rapport $V/L^3 = 0.058$ et l'épaisseur $d = 50\ \mu m$ restent constantes. Ce graphe met en évidence l'hystérésis élevée entre les tensions d'ouverture et de fermeture de l'origami. D'autre part nous observons le regroupement de nos données expérimentales sur deux courbes maîtresses lorsque les tensions sont renormalisées par U_0 et par L_{EC}. Il est aussi évident que U_0 est une bonne estimation des tensions trouvées dans les expériences. Nous observons que la tension d'ouverture de l'origami tend à augmenter en fonction de L/L_{EC} puis atteint une valeur de saturation. D'après les résultats obtenus par Py *et al.* nous nous attendons à ce que les effets de flexion soient plus importants pour des petites valeurs de L/L_{EC}, ce qui sans doute "aide" dans les processus d'ouverture de l'origami car la feuille présente ainsi une opposition plus grande à rester déformée. Au contraire, pour les grandes valeurs de L/L_{EC} la rigidité de la feuille devient né-

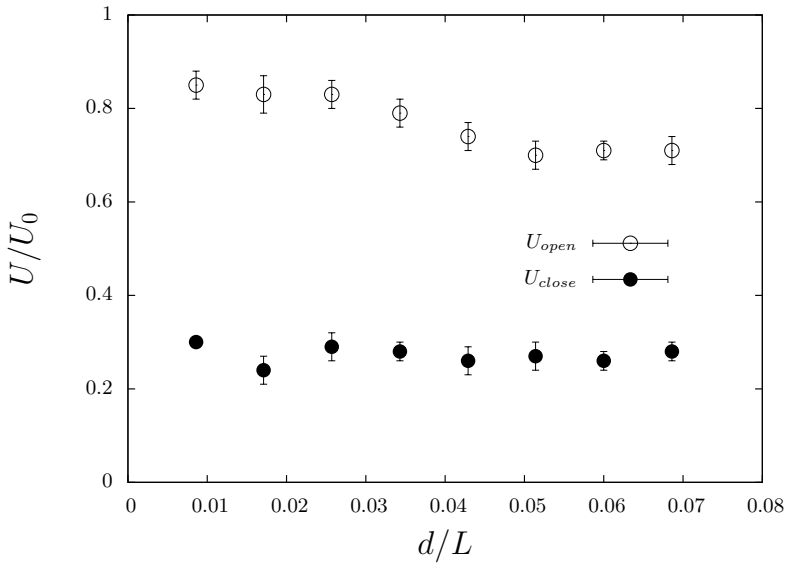


FIGURE *2.16* – Tensions d'ouverture et fermeture en fonction de l'épaisseur de la couche isolante. $L/L_{EC} = 12 = cte$, avec $L = 7\ mm$ et $h = 100\ \mu m$, $U_0 \sim 800\ V$

gligeable, ce qui explique le régime asymptotique observé. Donc, pour les grandes valeurs de L/L_{EC} les tensions d'ouverture et fermeture de l'origami dépendront uniquement du bilan entre les forces de tension de surface et du champ électrique indépendamment du rapport L/L_{EC}.

Au contraire du cas de l'ouverture, la tension de fermeture de l'origami reste invariante devant les variations de L/L_{EC}. Lorsque la feuille est à plat sur le substrat il n'y a plus d'énergie élastique dans le système et la fermeture de l'origami (et donc l'hystérésis) ne devrait donc pas dépendre de ce paramètre.

La figure 2.16 montre les mesures expérimentales de la tension en fonction de l'épaisseur de la couche isolante. Pour ces expériences les rapports L/L_{EC} et V/L^3 restent constants. La relation U_{open}/U_0 semble décroître très lentement en fonction de d, alors que U_{close}/U_0 reste constante. Cependant, les différences entre les tension d'ouverture et de fermeture restent importantes.

Finalement, dans la figure 2.18 nous présentons les résultats expérimentaux de tension d'ouverture en fonction du volume de la goutte d'eau (comme dans les cas précédents, les deux paramètres restants sont maintenus constants). Ici le volume de la goutte est varié entre 10 et 30 μl. Comme il avait était montré par Py *et al.*, la distance entre les coins de la feuille dans l'état replié augmente

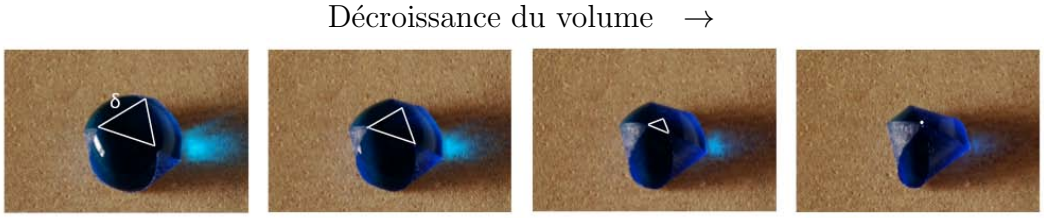


FIGURE *2.17* – Variation de la distance entre les coins de la feuille en fonction du volume de la goutte. Photos Charlotte Py.

en fonction du volume de la goutte (voir figure 2.17). Nous attendons alors une tension d'ouverture décroissante en fonction du volume de la goutte, car il est plus facile d'ouvrir une goutte qui n'est que partiellement fermée. Les données expérimentales confirment de manière qualitative cette tendance.

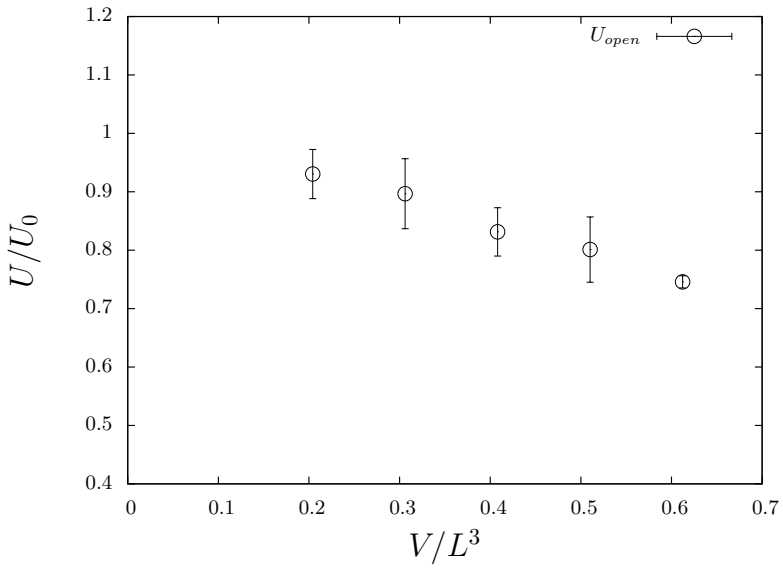


FIGURE *2.18* – Variation de la tension d'ouverture en fonction du volume de la goutte. $L/L_{ec} = 12 = cte$, avec $L = 7\ mm$ et $h = 100\ \mu m$. L'épaisseur de la couche isolante reste aussi constante $d = 50\ \mu m$ et donc $U_0 \sim 800\ V$

Jusqu'ici les tendances montrées par nos résultats expérimentaux sont en accord qualitatif avec l'analyse des paramètres physiques du problème. Cependant, pour avoir une compréhension plus profonde du problème nous allons comparer plus quantitativement nos résultats avec des simulations numériques et des lois d'échelle basées sur un modèle bidimensionnel simplifié du système.

2.6 Modèle simplifié

Notre modèle bidimensionnel est inspiré du travail de de Langre *et al.* [50]. Il consiste à faire une simplification du système réel en considérant une tige élastique qui interagit avec une interface liquide/air. Un schéma du modèle est présenté sur la figure 2.19.

Nous considérons que la tige élastique a une longueur constante L et, pour simplifier, un rayon de courbure uniforme R_1. De la même façon, le rayon de courbure de l'interface liquide-air R_2 est aussi considéré constant (c'est une goutte bidimensionnelle). La goutte est considérée comme un corps conducteur de surface S qui est séparé de la contre-électrode par une couche diélectrique d'épaisseur uniforme d.

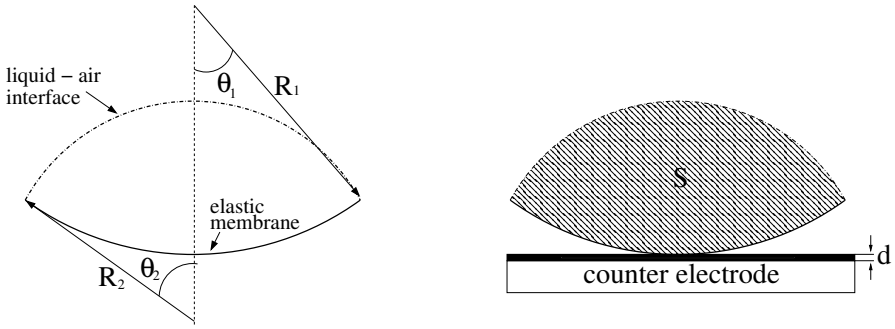


FIGURE *2.19* – Schéma du modèle 2-D.

Dans ces conditions, l'énergie totale du système, considérant l'élasticité de la membrane, la tension de surface et le champ électrique est donnée par l'expression :

$$E_t = \frac{BwL}{2R_1^2} + \gamma w\ell - \sqrt{2}\epsilon w \left(\frac{R_1}{d+h}\right)^{1/2} Arctan\left(\frac{L}{\sqrt{8R_1(d+h)}}\right) U^2, \qquad (2.10)$$

où w indique la largeur du système dans la direction perpendiculaire au plan. Les premier et deuxième termes représentent l'énergie de courbure (B est le module de flexion) et l'énergie de surface, où ℓ est la longueur de l'interface liquide-air, qui est calculée géométriquement à partir de R_1, L et de la surface S (voir la figure 2.19). Le troisième terme de cette expression est une approximation de l'énergie d'un condensateur bidimensionnel formé par une électrode plate (dans notre cas d'étude le substrat) et par un cylindre avec une courbure R_1 (correspondant à l'origami).

En effet, dans la limite des grands rayons de courbure ($R_1 \gg L^2/(d+h)$), la portion de cylindre peut être considérée comme plate et nous retrouvons la formule classique pour un condensateur plan de l'énergie $E_e = \epsilon w L U^2/2(d+h)$. Dans la situation inverse $R_1 \ll L^2/(d+h)$, l'énergie électrique tend vers celle d'un système formé par un cylindre et un plan séparés d'une distance $d+h$, $E_e = \epsilon \pi w U^2 \left(R_1/2(d+h)\right)^{1/2}$.

2.6.1 Simulation numérique

Durant la simulation nous imposons comme constantes les paramètres adimensionnels U/U_0, $(d+h)/L$, S/L^2 et L/L_{EC}. Le premier terme correspond à la tension appliquée entre les deux électrodes et le second à la somme des épaisseurs de la membrane et de la couche isolante. Les troisième et quatrième termes correspondent au volume de la goutte (à 2-D) et à la rigidité de la tige. Pour ce groupe de paramètres la simulation calcule la valeur de l'énergie totale du système en fonction de la courbure de la membrane κ ($\kappa = 1/R_1$). La première simulation est résolue en prenant $U/U_0 = 0$. Si les paramètres de départ introduits sont favorables à la fermeture, l'énergie minimale du système correspond à une valeur finie de κ ($\kappa \neq 0$) (le point d'état fermé dans la figure 2.20). Puis, la simulation est relancée en variant le paramètre de la tension. Une fois que la courbure qui minimise l'énergie est $\kappa = 0$ sans qu'il existe un autre minimum local, la valeur de la tension correspondante est prise comme U_{open}. Réciproquement, la tension de fermeture U_{close} est celle pour laquelle l'énergie en $\kappa = 0$ n'est plus un minimum local.

Nous pouvons alors varier les valeurs des autres paramètres afin de trouver la dépendance des tensions d'ouverture et fermeture en fonction de ces derniers.

Dans un premier temps, nous avons étudié le comportement de ces tensions critiques en fonction de la rigidité de la membrane. En faisant varier le paramètre L/L_{EC}, nous avons obtenu les courbes montrées dans le graphe de la figure 2.21. En accord qualitatif avec nos expériences, la simulation numérique met en évidence l'existence d'une l'hystérésis dans le problème. Elle confirme aussi la non dépendance de la tension de fermeture avec la rigidité de la membrane. En outre, nous trouvons dans la simulation que U_{open} sature lorsque la rigidité de la membrane devient négligeable devant les deux autres ingrédients (tension de surface et

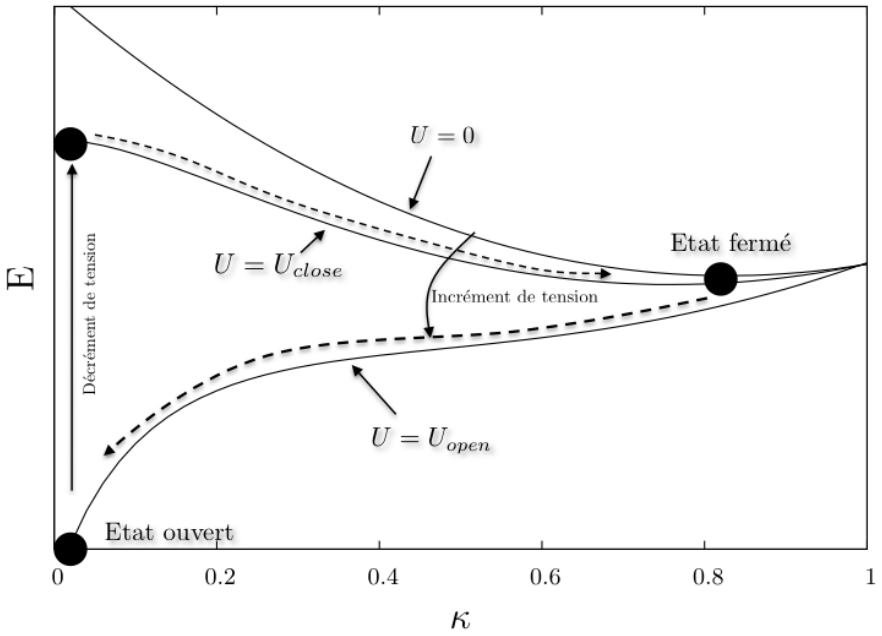


FIGURE *2.20* – Variation de l'énergie total du système en fonction de la courbure de la tige. Les lignes pointillées montrent les transitions entre l'état ouvert et fermé.

champ électrique).

En accord qualitatif avec nos expériences, nous obtenons une tension d'ouverture qui décroît lorsque l'épaisseur de la couche isolante augmente (figure 2.22). Cependant, nous observons des différences significatives pour la dépendance de la tension de fermeture. En effet, cette tension demeure indépendante de l'épaisseur de la couche isolante dans nos expériences. Le calcul numérique conduit au contraire à une variation en $d^{1/2}$. Ce comportement suggère une décroissance de l'hystérésis avec l'épaisseur de la couche que nous n'avons pas observée expérimentalement. Nous discuterons les causes possibles de ce désaccord dans la section suivante.

Enfin, le calcul prédit une décroissance de la tension d'ouverture pour des gouttes de plus gros volume (figure 2.23). Ce comportement est en accord qualitatif avec nos expériences.

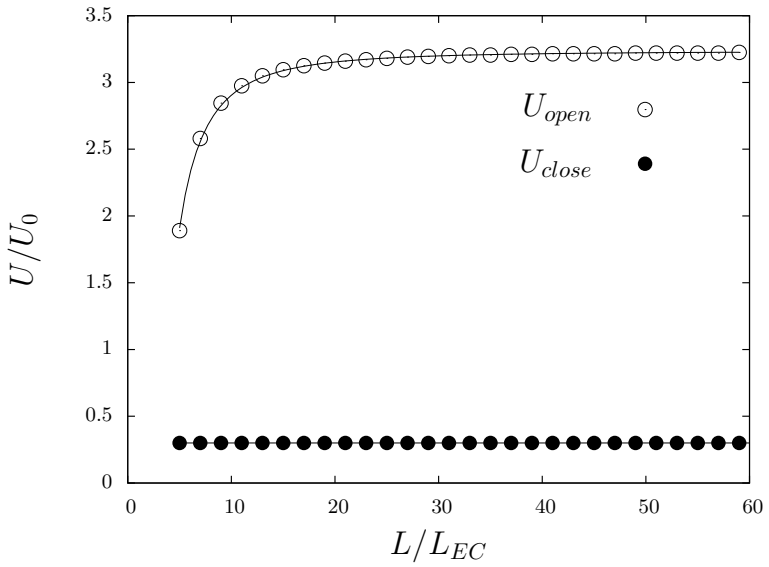


FIGURE *2.21* – Résultats de la simulation numérique pour les variations des tensions d'ouverture et de fermeture en fonction de L/L_{EC}.

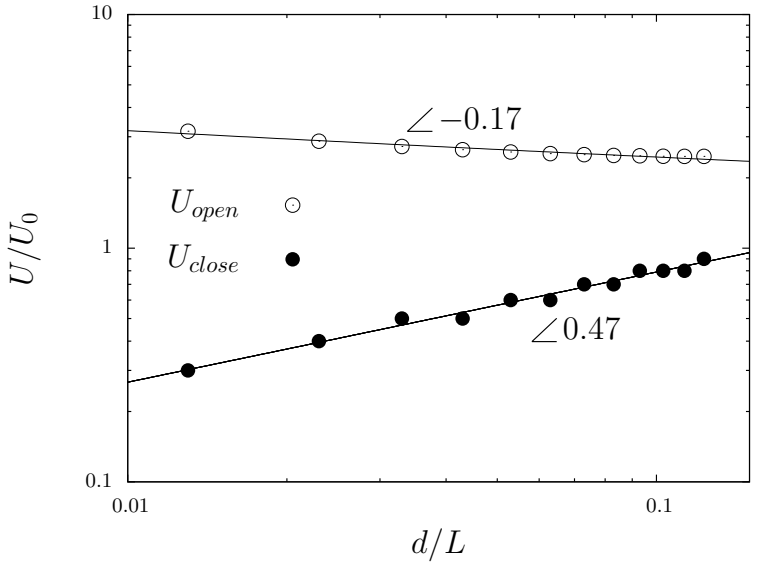


FIGURE *2.22* – Résultats de la simulation numérique pour les variations des tensions d'ouverture et de fermeture en fonction de l'épaisseur de la couche isolante.

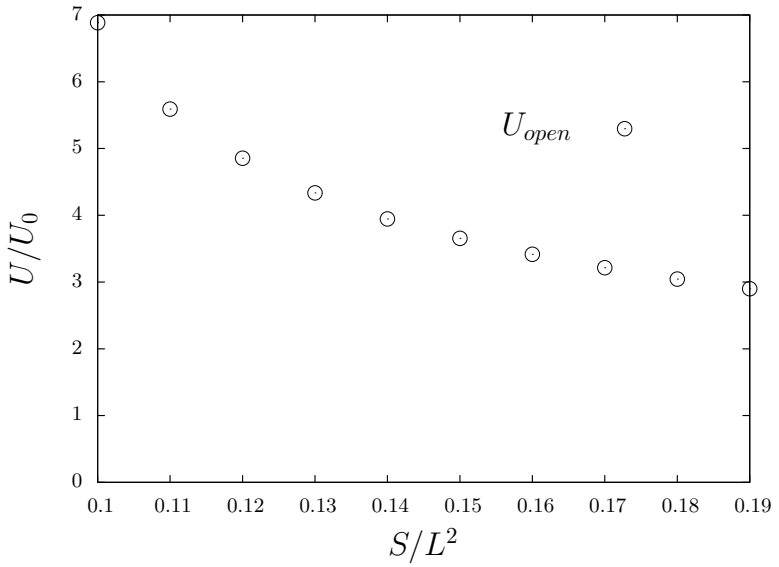


FIGURE *2.23* – Résultats de la simulation numérique pour les variations des tensions d'ouverture et de fermeture en fonction du volume de la goutte.

2.6.2 Lois d'échelle

A partir du modèle bidimensionnel du système, nous pouvons développer des lois d'échelle simples décrivant les tensions d'ouverture et de fermeture de l'origami capillaire. Identifions pour cela deux états limites : un état complètement fermé quand la feuille enrobe la goutte dans sa totalité et un état ouvert quand la feuille reste plate sur le substrat.

Considérons tout d'abord l'état fermé qui vérifie $L \sim \pi R_1$. Nous nous attendons à ce que l'état fermé reste stable lorsque

$$\Gamma_\gamma > \Gamma_B + \Gamma_E \tag{2.11}$$

où Γ_γ, Γ_B et Γ_E désignent respectivement les couples générés par la tension de surface, le rappel élastique de la plaque et le champ électrique. Ces couples sont estimés par rapport au point de contact de la tige avec le substrat. Le couple relatif à la réponse élastique de la tige est donné par :

$$\Gamma_B \sim \frac{Bw}{R_1} \sim \frac{Bw}{L} \sim \frac{\gamma L_{EC}^2 w}{L} \tag{2.12}$$

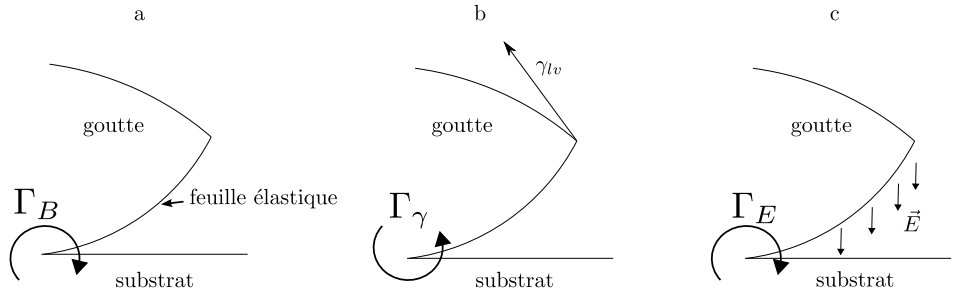


FIGURE *2.24* – Couples générées sur un origami ouvert.

alors que le couple lié à la tension de surface est proportionnel à :

$$\Gamma \sim \gamma L w \tag{2.13}$$

Afin d'estimer le couple produit par le champ électrique, nous allons considérer que l'énergie électrique de l'état fermé est celle d'une configuration cylindre-plan [51], $E_e = -\pi\epsilon w\sqrt{R_1/2(h+d)U^2}$ (valide pour $R \ll h+d$). Le couple dû à la force électrique est déduit à partir de la dérivée $\partial E_e/\partial\theta_1$ (θ_1 est l'angle d'ouverture défini dans le schéma de la figure 2.20). En prenant en compte la relation géométrique $L = R_1\theta_1$, le couple électrique est donc donné par :

$$\Gamma_E \sim \epsilon w\frac{R_1}{L}\sqrt{\frac{R_1}{h+d}}U^2 \sim \epsilon w\sqrt{\frac{R_1}{h+d}}U^2. \tag{2.14}$$

Finalement en insérant les équations 2.12, 2.13 et 2.14 dans 2.11 nous obtenons une expression pour la tension d'ouverture de la forme :

$$U_{open} = \alpha U_0\left(1-\left(\frac{\beta L_{EC}}{L}\right)^2\right)^{1/2}\left(\frac{L}{h+d}\right)^{1/4} \tag{2.15}$$

où α et β sont des prefacteurs supposés d'ordre 1. Rappellons que l'on a défini $U_0 = [\gamma(d+h)/\epsilon]^{1/2}$.

D'une manière similaire nous pouvons comparer les couples nécessaires à maintenir le système dans l'état ouvert afin de déterminer U_{close}. Dans ce cas, comme la feuille reste plate il n'y a pas de contribution de l'élasticité dans le bilan des couples

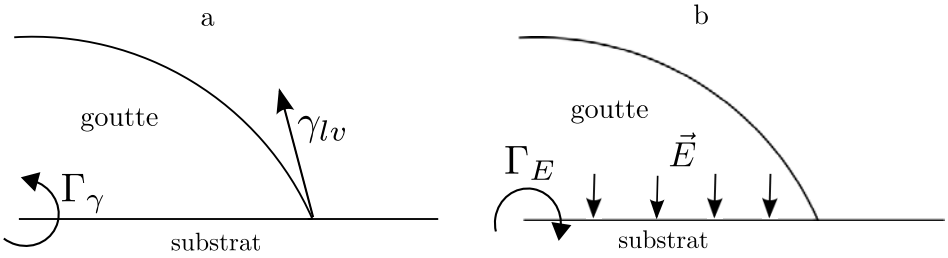


FIGURE *2.25* – Couples générées sur un origami fermé.

(figure 2.24). Ainsi, pour maintenir l'état ouvert il suffirait de vérifier l'inégalité :

$$\Gamma_E > \Gamma_\gamma. \tag{2.16}$$

En substituant les valeurs de chacun des couples nous trouvons que

$$\frac{\epsilon}{(d+h)^2} wL^2U^2 > \gamma wL \tag{2.17}$$

où le couple généré par le champ électrique est obtenu à partir de l'énergie électrique d'un condensateur composé de plaques parallèles. À partir de l'équation 2.17 nous trouvons enfin que la tension de fermeture de l'origami est donnée par :

$$U_{close} = U_0\sqrt{\frac{d+h}{L}}. \tag{2.18}$$

Les équations 2.15 et 2.18 montrent bien l'existence d'une hystérésis dans le système dans le cas $d \ll L$ (cette condition-ci est aussi nécessaire pour que l'équation 2.15 soit valide). En effet, l'origine de l'hystérésis dans notre problème résulte de la non-linéairité de la force générée par le champ électrique. Il suffit de comparer la capacité électrique du système dans les états ouvert et fermé. Aussi bien dans les expériences (figure2.14) que dans le modèle numérique (équations 2.15 et 2.18), la capacité de l'état fermé est plusieurs fois plus faible que celle de l'état ouvert. Par conséquent, quand l'origami est fermé, il faut appliquer une grande différence de tension pour arriver à générer une force capable de déformer la structure. Une fois l'état ouvert atteint, la capacité du système est beaucoup plus grande que celle du départ. Dans ce cas, une différence de tension bien plus faible suffit pour assurer la même force.

Nous avons finalement comparé ces lois d'échelle avec nos résultats expérimentaux. Dans nos expériences, le facteur $(L/(d+h))^{1/4}$ (équation 2.15) reste entre 2.4 et 2.7 en raison du faible exposant. Nous avons ajusté les résultats expérimentaux présentés dans la figure 2.15 par une courbe de la forme $f = a\sqrt{1-(\beta L_{EC}/L)^2}$, ce qui correspond à la loi d'échelle de l'équation 2.15. L'ajustement conduit à une valeur du paramètre $a = 1.11$, ce qui correspond bien à une valeur de α proche de l'unité. En outre, nous obtenons une valeur de $\beta \sim 9.22$ proche de la valeur de fermeture critique de 11.9 trouvée par Py*et al.* pour des feuilles triangulaires. Cette valeur de β est aussi en accord avec l'intervalle $\sqrt{2}\pi < L/L_{EC} < \sqrt{8}\pi L_c/L_{EC}$ proposé par de Langre *et al.* comme critère de fermeture. Enfin, l'équation 2.18 confirme nos résultats expérimentaux (figure 2.15) sur la non-dépendance de la tension de fermeture avec le rapport L/L_{EC}. Expérimentalement nous avons obtenu une valeur $U_{close}/U_0 \sim 0.35$ alors que la loi d'échelle proposée conduit à une valeur entre 0.136 et 0.178.

Nous pouvons aussi estimer la dépendance de U_{open} et U_{close} en fonction de l'épaisseur d de l'isolant, prédite par les lois d'échelle proposées. D'un coté, nous avons trouvé expérimentalement une tension d'ouverture U_{open} décroissant faiblement en fonction de d (comme montré dans la figure 2.16). Pour la gamme d'épaisseurs utilisées, la variation de la tension expérimentale reste dans le même ordre de magnitude que les variations $((h+d)/L)^{-1/4}$ prédites à partir du modèle bidimensionnel (équation 2.15). Par contre, dans les résultats de la simulation numérique (figure 2.22), qui en principe est basée sur le même modèle que les lois d'échelle, nous trouvons que la tension d'ouverture de l'origami décroit plutôt comme $d^{-0.17}$ et non pas selon la loi $d^{-1/4}$ attendu. La raison de cette différence est simple : dans l'estimation du couple électrique, nous avons considéré que la capacité du système était celle d'une configuration cylindre-plan pour laquelle la condition $R_1 \gg h+d$ est nécessaire. La simulation numérique a été faite en utilisant les mêmes valeurs de d utilisés expérimentalement, pour lesquels $d/R_1 \sim 0.1$. Nous avons alors refait une simulation pour des valeurs de $d \ll R$. Les résultats de cette simulation, présentés dans la figure 2.26, montrent qu'en effet, si $d \ll R_1$ on obtient une tension d'ouverture $U_{open} \sim d^{-1/4}$, comme prévu. En ce qui concerne les tensions de re-fermeture, la loi d'échelle 2.18, $U_{close} \sim d^{1/2}$ valable lorsque $d \gg h$ est bien compatible avec la simulation numérique (pour laquelle l'exposant est mesuré 0.47,

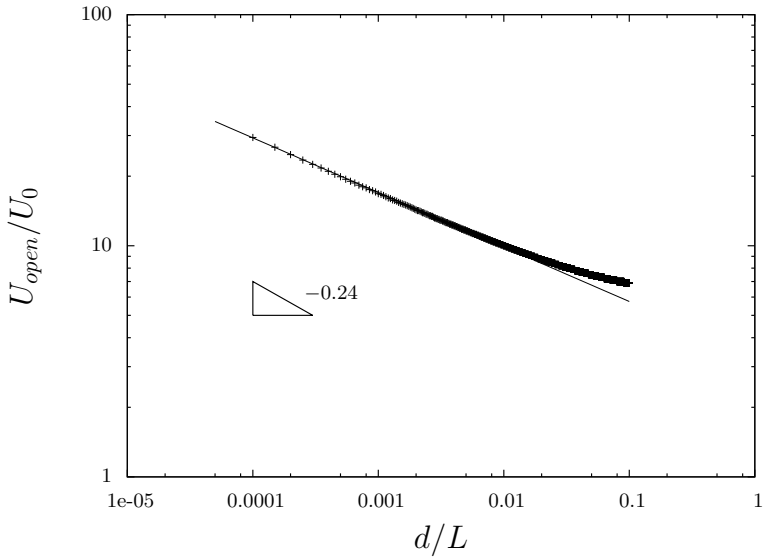


FIGURE *2.26* – Dépendance de la tension d'ouverture pour des petites valeurs de d.

avec des valeurs de d/h entre 1 et 7). Cette évolution n'est cependant pas observée dans les expériences (U_{close} semble quasi-constante pour les mêmes conditions physiques). Cet écart entre théorie et expérience pourrait être dû au démouillage, qui est observé expérimentalement juste avant la refermeture, et qui n'est pas pris en compte dans notre modèle bidimensionnel [4].

2.7 Conclusion

Nous avons montré qu'il est possible d'actionner un système elasto-capillaire avec un champ électrique. Un goutte enrobée dans une feuille élastique (origami capillaire) peut être réouverte si on applique une différence de potentiel assez importante entre la goutte et le substrat sur lequel le système repose : goutte et substrat acquièrent ainsi une charge opposée et s'attirent.

Pour obtenir une bonne reproductibilité, l'adhésion de la membrane sur le substrat doit être réduite au minimum. Cependant nous avons montré qu'il existe une source intrinsèque d'hystéresis, qui est due au fait qu'une goutte enrobée est "assez éloignée" géométriquement du substrat (contact ponctuel), ce qui nécessite

4. Par exemple, l'hystérésis d'angle de contact est modifiée de façon subtile par electromouillage [52]

de grandes différences de potentiel pour attirer les charges opposées. Au contraire, dans l'état ouvert, les surfaces chargées sont très proches, et une tension faible permet de les maintenir dans cet état. Ces effets ont été mis en évidence grâce à un modèle bidimensionnel et à des lois d'échelle qui donnent de bonnes prédictions sur les expériences.

Nos résultats permettent de prédire comment les tensions d'ouverture et de fermeture, d'ordre $U_o = \sqrt{\gamma(d+h)/\epsilon}$, dépendent quantitativement de la géométrie et la rigidité du système. Du point de vue des applications potentielles, si la couche isolante et la membrane ont des épaisseurs de l'ordre du micron, plutôt que de la centaine de microns, les tensions de manipulation, de l'ordre 500V passent à des valeurs plus raisonnables de quelques dizaines de Volts. Ce système actif tridimensionnel très simple à réaliser pourrait donc être à la base d'un micro-actionneur. En pratique, réduire les échelles peut s'avérer difficile du point de vie technologique. En particulier nous avons accidentellement observé des débordements de la goutte. Ce phénomène risque d'être plus prononcé si des membranes plus fines sont considérées. Nos collègues néerlandais de l'Université de Twente (groupe M. Elwenspoek) semblent prendre notre relais avec une optique micro-technologique. Nous espérons que notre approche macroscopique définira les premiers jalons de leur projet.

Chapitre 3

La couronne élastique

Dans le chapitre 2 nous avons abordé la problématique du dépôt de gouttes sur des membranes flexibles libres, et nous avons pu contrôler par un champ électrique le repliement de la membrane autour la goutte.

Imaginons à présent que nous déposons une goutte d'eau, non pas sur une membrane libre, mais sur une membrane flottant sur un bain. Huang *et al.* [28] et Bodiguel [53] ont montré que dans ce cas, des rides radiales se formaient autour de la goutte (figure 3.1-a). En effet, la présence d'un substrat (ici un bain) limite la déflexion de la membrane hors de son plan initial. La feuille ne peut donc plus enrober la goutte.

Ces rides ne sont pas générées par le poids de la goutte, mais par la force capillaire exercée sur la membrane par le liquide (au niveau de la goutte, et sur les bords extérieurs de la membrane). À l'échelle des expériences réalisées par Huang *et al.* [28] (figure3.1-a), la contrainte exercée par la tension de surface au bord de la goutte est en effet 100 fois plus forte que celle générée par le poids du liquide. Les caractéristiques des rides formées autour d'une goutte semblent similaires de celles générées par un poids (figure 3.1-b) déposé sur la surface ou en imposant un déplacement ponctuel par un objet pointu [54] (voir figure 3.1-c). Mais dans ce dernier cas, les rides envahissent toute la membrane, tandis qu'elles sont localisées autour de la ligne de contact dans le cas de la goutte. Les motifs de plissement dépendent ainsi fortement des conditions imposées aux limites [29].

Huang *et al.* supposent implicitement que la tension de surface de la goutte exerce une tension centripète sur la feuille le long de la ligne de contact, qui

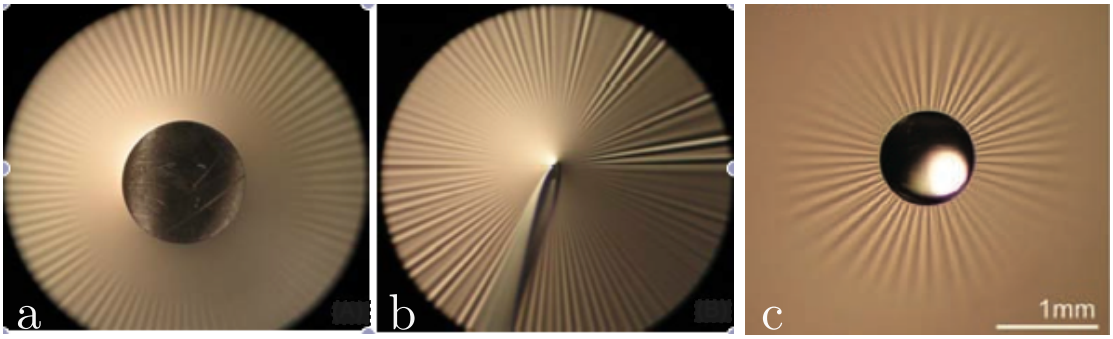


FIGURE *3.1* – Rides radiales générées sur une membrane flexible de 80 *nm* d'épaisseur, flottant sur un bain l'eau. Dans chacun des clichés les rides sont générées à partir de l'imposition des contraintes différentes : a) une goutte est posée sur la membrane, b) un poids est posé sur la membrane et c) la membrane est piquée avec un objet pointu.

conduit à une compression orthoradiale responsable de la formation des rides. Ils ont montré que le nombre N de rides formées autour de la goutte était dicté par un équilibre entre la tension radiale de la membrane (qui la ramène vers l'équilibre plan) et la flexibilité de la feuille (qui favorise plutôt les grandes longueur d'ondes). D'un point de vue quantitatif, le nombre de rides suit la loi [28] :

$$N \sim (a\, L_{ec})^{1/2}, \tag{3.1}$$

où a est le rayon de la goutte, et où l'on retrouve la longueur élasto-capillaire $L_{ec} = (B/\gamma)^{1/2}$. Une telle expérience permet ainsi de mesurer directement L_{ec}. La tension de surface γ étant connue, il est ainsi possible de mesurer le module de flexion ($\sim Eh^3$) de la feuille.

Ces auteurs ont aussi observé que les rides s'estompaient à une certaine distance L du bord de la goutte. En variant l'épaisseur de la membrane et la taille de la goutte, ils ont pu déterminer expérimentalement que la longueur des rides varie comme :

$$L \sim a\, (Eh/\gamma)^{1/2}. \tag{3.2}$$

Ce comportement indique que la longueur des rides est définie par l'étirement (proportionnel à Eh) généré par les contraintes dans le plan. Il est ainsi possible d'estimer l'épaisseur du film si on a mesuré son module E en comptant le nombre de plis). Bien que est très convaincante d'un point de vue expérimental, cette loi

n'a pu encore être parfaitement expliquée théoriquement.

D'une part la nature des conditions aux limites au niveau de la ligne de contact n'est pas simple, et ce n'est que récemment que les contraintes générées par la goutte dans la membrane (supposée non flambée) a été correctement estimée [29]. Pour cela il faut tenir compte du fait que la membrane est déformée sous la goutte (force capillaires localisées sur la ligne de contact, surpression de Laplace sous la goutte), ce qui génère un étirement et des contraintes radiales. Au final, les tensions dans le plan sont de l'ordre de γ, ce qui est compatible avec les lois d'échelle expériementales [28].

D'autre part, la connaissance de la répartition des contraintes avant flambage ne permet pas nécessairement d'en déduire la longueur d'extension L du pli. En effet, le plissement permet de relâcher les contraintes compressives et peut donc modifier fortement leur distribution, comme l'ont montré Davidovitch *et al.* [55] dans un cas où les conditions aux limites sont plus simples : une tension centripète est imposée sur un périmètre donné dans le centre de la membrane, et sur sa périphérie extérieure (à l'infini).

Deux études expérimentales ont été déjà menées sur ces systèmes plus simples, motivées par des questions différentes.
Géminard *et al.* [56] souhaitaient estimer les forces exercées par une cellule vivante sur une membrane très mince en observant les motifs de plissement qui en résultent [57]. Ils ont donc conçu un dispositif expérimental permettant d'imposer des déplacements radiaux le long d'un petit et d'un grand cercle. Dans leurs expériences, un disque de latex est encastré le long de son bord extérieur sur une monture circulaire. Un autre anneau circulaire avec un profil en forme de "L" permet d'imposer une certaine tension initiale T_o (figure 3.2-a). La membrane est ensuite aspirée vers le centre par un tube vertical, ce qui génère une tension radiale T_i. À partir d'un certain rapport T_i/T_o des rides radiales apparaissent sur la surface de la membrane (figure 3.2-b). Le nombre est proportionnel au rayon du tube d'aspiration. En outre, la longueur dépend énormément de la tension T_o appliquée sur la membrane. Quand celle-ci est suffisamment élevée, la longueur des rides augmente linéairement en fonction du déplacement imposé dans le centre, tandis que lorsque T_o est faible, la longueur des rides augmente comme la racine carrée du déplacement.

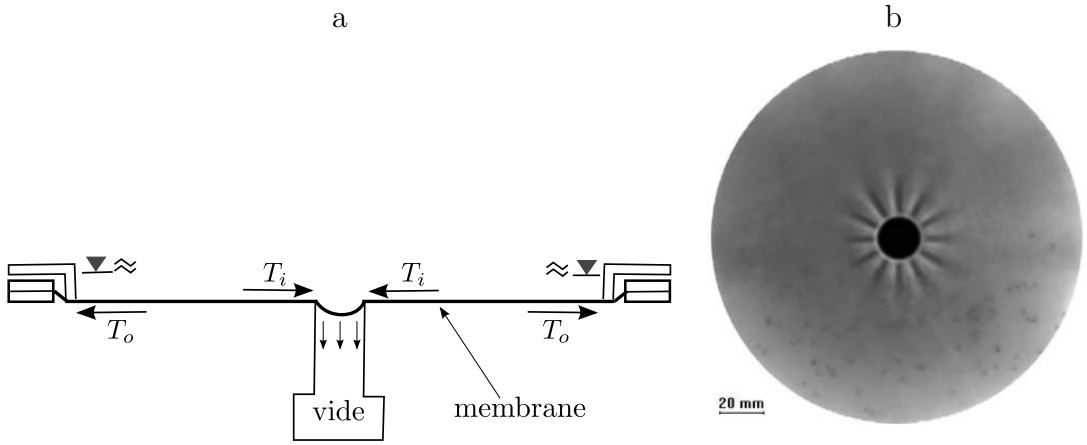


FIGURE *3.2* – a) Schéma du dispositif expérimental utilisé par Géminard *et al.* [56]. b) Vue de dessus des rides formées sur la membrane flexible (cliché pris de [56]).

Une seconde expérience [58] est inspirée des motifs plissés apparaissant sur la peau près d'une cicatrice. La peau étant sous tension, une rétractation locale a en effet lieu lors du processus de cicatrisation. La géométrie axisymétrique des expériences est similaire, mais cette fois ce sont des forces qui sont imposées sur la membrane (en utilisant des poids répartis sur les bords de la membrane). Finalement ce type d'expériences a permis de décrire d'une façon détaillée la formation des plis sur une membrane flexible soumise à une tension radiale.

Cependant, pour approcher les expériences de Géminard *et al.* au cas de la goutte sur la membrane flottante, il faudrait tenir compte des effets de la gravité liés au déplacement du poids de l'eau située sous la membrane.

Dans le cadre de notre travail de recherche, nous proposons un dispositif qui permet de prendre en compte ces effets de gravité, et qui utilise en plus la tension de surface comme moteur. Considérons un disque mince flottant à la surface de l'eau, comme celui des expériences de Huang et remplaçons la goutte par un trou dans le centre de la membrane de manière à former une couronne (figure 3.3). A priori, cette couronne sera donc soumise à une tension isotrope, due à l'action de la tension de surface de l'interface liquide-air aux bords (situation équivalente au cas $T_i = T_o$ dans les expériences de Géminard). Cependant, si nous ajoutons un peu de tensioactif à l'extérieur de la couronne, une différence de tension apparaît entre ses bords intérieur et extérieur, analogue à la différence de tension générée par l'aspiration du centre de la membrane dans les expériences de Géminard *et*

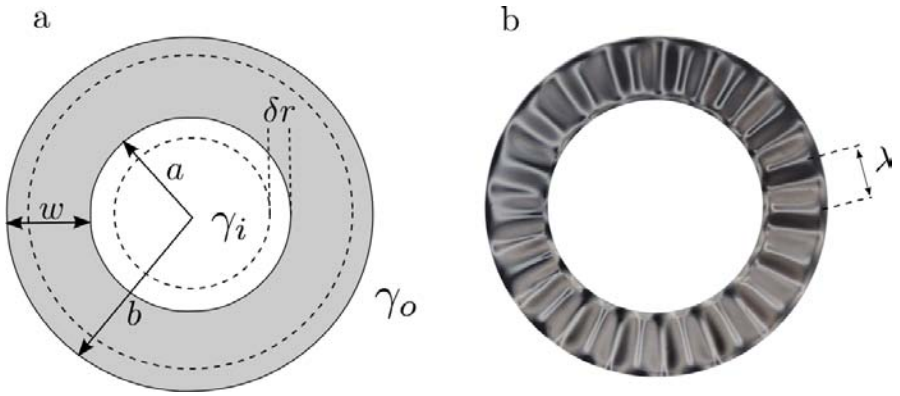


FIGURE *3.3* – a) Schéma d'une couronne qui se contracte d'une distance δr à cause d'une différence de tension. b) Définition de la longueur d'onde sur une couronne flambée.

al..

De quel ordre doit être cette différence de tension de surface pour provoquer l'apparition de rides sur la membrane ?

Imaginons une couronne élastique d'épaisseur h et de rayons intérieur et extérieur a et b qui flotte sur la surface de l'eau (figure 3.3-a). La présence de tensioactif à l'extérieur nous impose $\gamma_o < \gamma_i$. Cette différence de tensions engendre une traction de la couronne vers l'intérieur et déplace les bords $r = a$ et $r = b$ d'une distance δr (par simplicité nous considérerons que toutes les déformations sur la couronne sont isométriques). Au premier ordre, le gain en énergie de surface est donc :

$$U_s = 2\pi\delta r(a\gamma_i - b\gamma_o). \tag{3.3}$$

Cependant, lorsque la couronne se déplace de δr vers l'intérieur, son périmètre se réduit de $2\pi\delta r$, générant une compression proportionnelle à $\delta r/a$. Cette compression induit le flambage de la membrane hors du plan selon un mode de longueur d'onde λ et d'amplitude A. L'énergie élastique correspondante est ainsi donnée par :

$$U_b \sim Eh^3 \left(\frac{A}{\lambda^2}\right)^2 aw, \tag{3.4}$$

Remarquons que ce modèle simplifié ne peut décrire que les cas où toute la surface est plissée, ce qui corresponde à des couronnes étroites (a proche de b). Si nous supposons que le profil de déformation est sinusoïdal, l'inextensibilité de la membrane nous impose le lien suivant entre l'amplitude et la longueur d'onde :

$A \sim \lambda\sqrt{\delta r/a}$. Nous en déduisons :

$$U_b \sim Eh^3 \frac{\delta r}{\lambda^2} w. \tag{3.5}$$

Cette déformation hors plan entraîne également un déplacement vertical de l'eau du bain , ce qui correspond à l'énergie potentielle :

$$U_g \sim \rho g A^2 a w \sim \rho g \lambda^2 \delta r w, \tag{3.6}$$

où ρ et g sont la masse volumique de l'eau et la constante de gravité. Enfin, le ménisque est surélevé autour de la membrane d'une hauteur typique A. Ce ménisque s'étale latéralement sur une distance de l'ordre de $L_c = (\gamma/\rho g)^{1/2}$ [1], ce qui correspond à une augmentation de la longueur de l'interface liquide-air de l'ordre de A^2/L_c. L'énergie de surface intégrée sur les contours intérieur et extérieur s'écrit donc :

$$U_m \sim (a\gamma_i^{1/2} + b\gamma_o^{1/2})(\rho g)^{1/2} A^2. \tag{3.7}$$

Le gain en énergie de surface est donc compensé par la somme $U_b + U_g + U_m$ résultant de la déformation de la membrane. Si nous nous concentrons sur le cas où $w \gg L_c$, nous pouvons négliger l'apport de l'énergie du ménisque à l'énergie totale. En minimisant $U_b + U_g$ nous trouvons une longueur d'onde optimale :

$$\lambda \sim \left(\frac{Eh^3}{\rho g}\right)^{1/4}. \tag{3.8}$$

Nous pouvons finalement estimer un critère de formation des plis sur la couronne en imposant la condition $U_s > U_b + U_g$:

$$\frac{\gamma_o}{\gamma_i} < \frac{a}{b} - \frac{L_{ec}}{L_c}\left(1 - \frac{a}{b}\right). \tag{3.9}$$

Nous trouvons que le seuil de flambage est déterminé non seulement par les caractéristiques géométriques de la couronne, mais aussi par les propriétés mécaniques de la membrane. La différence de tension nécessaire au flambage sera d'autant plus grande que la rigidité de la membrane est élevée. Cependant, même pour des membranes extrêmement souples ($L_{ec} \to 0$), le rapport de tensions doit être

inférieur au rapport entre les rayons de la couronne pour que cette dernière flambe.

Nous venons ainsi de montrer à partir d'une simple analyse en loi d'échelle, qu'il est possible d'engendrer la formation de rides sur une couronne flexible soumise à une différence de tension. Dans la suite de ce chapitre, nous allons présenter une analyse expérimentale plus détaillée du problème.

3.1 Dispositif Experimental

Le but du dispositif expérimental est de générer et de mesurer la déformation d'une couronne élastique due à une différence de tension de surface entre ses bords intérieur et extérieur, de rayons respectifs a et b, et d'épaisseur h tels que $(b-a) \gg h$. La géometrie de ces couronnes est répresentée dans la figure 3.5.

3.1.1 Couronnes élastiques

Des couronnes de différents rapports d'aspect a/b ont été découpées dans des couches minces de Vinylpolysiloxane *Elite* (module d'élasticité E=250 kPa et coefficient de Poisson $\nu = 0.5$) déposées sur des plaques de plexiglass. Comme au chapitre 2, nous avons utilisé la technique d'enduction centrifuge (spin-coating), avec laquelle on peut obtenir simplement des membranes d'épaisseurs contrôlées, qui dépendent de la vitesse de rotation (d'autant plus minces que la vitesse est élevée). Dans la table 3.1 nous présentons les différentes épaisseurs h et rapports d'aspect a/b utilisés dans nos expériences. Pour toutes les couronnes de $30\mu m$ d'épaisseur, la valeur du rayon intérieur est constante $a = 20mm$, tandis que pour chacune des autres épaisseurs (16, 50, 80 et 110 μm), nous avons fabriqué deux couronnes avec $a = 16mm$ et $a = 25mm$.

h (μm)	a/b								
	0.80	0.75	0.70	0.65	0.60	0.55	0.50	0.40	0.36
16				X					
30	X	X	X		X	X	X	X	X
50				X					
80				X					
110		X							

TABLE *3.1* – Paramètres expérimentaux

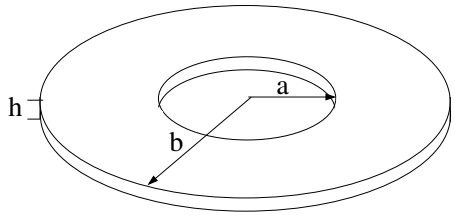


FIGURE *3.4* – Géometrie des couronnes.

3.1.2 Génération et mesures de la différence de tension de surface

Une fois découpée, la couronne est déposée à la surface d'un bain d'eau distillée contenu dans une cuve en plexiglass. Pour générer une différence de tension de surface entre l'intérieur (γ_i) et l'extérieur (γ_o) de la couronne, nous ajoutons une dose initiale de 10 μl de tensioactif (liquide vaisselle) à l'extérieur de la couronne. Puis, à l'aide d'une barre de teflon nous réduisons progressivement la surface d'eau accesible au tensioactif pour augmenter la concentration de ce dernier et provoquer une chute progressive de la tension de surface à l'extérieur (fig. 3.5). Deux capteurs de force *Fluke* (10 g charge max.) et deux plaques de platine (2 cm côté) nous permettent mesurer simultanément la tension surface de l'eau à l'intérieur et à l'extérieur de la couronne. Ayant une condition de mouillage total de l'eau sur le platine (angle de contact $\theta_c = 0$), la force mesurée par les capteurs de force est directement transformée au valeur de la tension de surface à partir de la relation :

$$\gamma = f_t/2l_p \tag{3.10}$$

où $l_p = 20mm$ est la largeur des plaques.

Le signal de chacun des capteurs de force est acquis par une carte *NI U* et puis envoyé vers un ordinateur où il est traité avec un programme Labview.

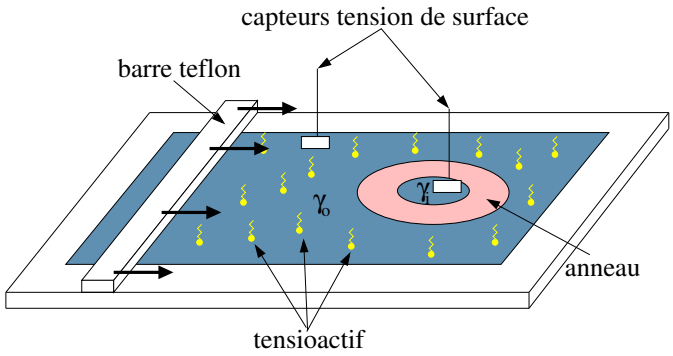


FIGURE *3.5* – Dispositif expérimental.

3.1.3 Mesure de la deformation

La déformation hors de plan des couronnes est mesurée à l'aide de la technique optique Free Surface Synthetic Schlieren (FS-SS) développée par F. Moisy [59]. Cette technique optique est utilisée pour mesurer la topographie instantanée d'une interface entre deux fluides transparents. La méthode est basée sur l'analyse de l'image réfractée d'un motif de points visualisé à travers l'interface. Un champ de déplacement apparent entre l'image réfractée et une image de référence (prise lorsque la surface est plate) est obtenu à l'aide d'un algorithme de corrélation d'images. Une intégration numérique de ce champ de déplacement est ensuite utilisé pour faire une reconstruction instantanée de la hauteur de la surface.

Nous profitons de la transparence du polymère utilisé [1] pour implémenter cette technique à la mesure de la déformation hors du plan de la couronne. Un motif aléatoire de points avec une densité de 50 points/cm^2, créé à l'aide du programme *makebospattern.m* [2], est collé au fond de la cuve transparent et éclairé par le dessous grâce à une plaque lumineuse (LEDS) afin d'améliorer la définition des points lors de la prise des images. Un miroir est situé sur la cuve à une distance L_m avec un angle d'inclination de 45^o par rapport au plan de la surface de l'eau. Ce miroir permet d'avoir une vue panoramique de la cuve en s'affranchissant des images des supports des capteurs sur les clichés (fig. 3.7). Avant le début de l'expérience, il est indispensable d'obtenir une image de couronne quand la surface est encore com-

1. Le polymère peut être considéré transparent seulement pour les épaisseurs de membrane inférieures à 200 μm (au-delà, les membranes sont opaques).

2. développé par F. Moisy et aussi disponible gratuitement sur le site http ://www.fast.u-psud.fr/m̃oisy/ml/misc/makebospattern.m

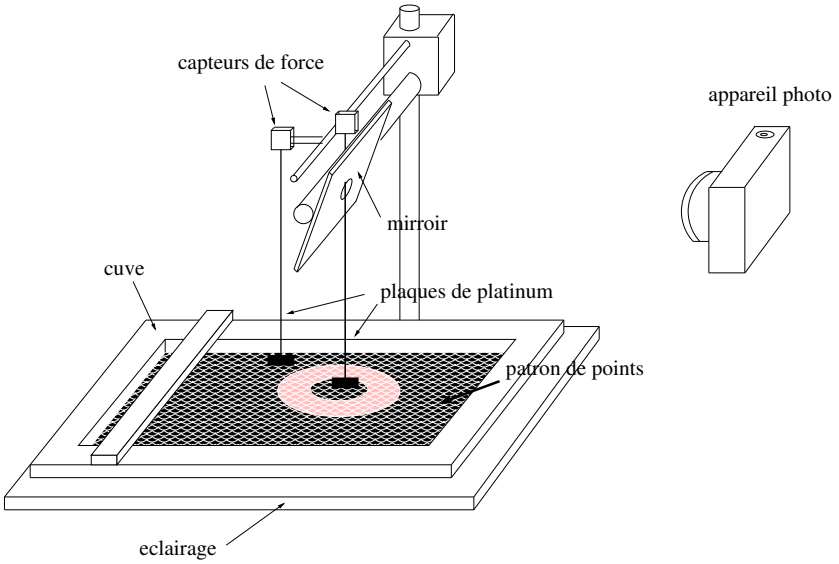


FIGURE *3.6* – Configuration du dispositif experimental.

plètement plate. Cette image servira comme image de référence dans l'obtention du champ de déplacement. Les images suivantes sont prises dans les différentes étapes de la déformation de l'anneau qui varient selon le rapport de tension de surface γ_o/γ_i.

À la fin de l'expérience, l'ensemble des images obtenues sont traitées avec le logiciel Davis 7.0 (LaVision) afin d'obtenir les champs de déplacement des points lors de la déformation. Dans cette démarche, nous corrélons chacune des images à l'image de référence. pour calculer les champs de déplacement. La taille des fenêtres d'interrogation est choisie de manière à avoir au moins 6 points dans chacune. Les champs de déplacement sont finalement intégrés pour obtenir le profil de la surface à chaque point.

3.1.4 Relation entre le champ de déplacement et le gradient de surface.

D'après F. Moisy [59], le champ de déplacement δr issu de la corrélation des images peut être lié au gradient de hauteur Δh à partir de l'expression suivante :

$$\nabla h = -\frac{\delta r}{h^*} \tag{3.11}$$



FIGURE *3.7* – Images de l'anneau avant et après déformation.

où $1/h^* = 1/\alpha h_p - 1/H$. Ici, h_p est la distance entre le motif de points et la surface de l'eau, H est la distance totale entre le motif de points et l'objectif de l'appareil photo et $\alpha = 1 - n/n'$ où n et n' sont les indices de réfraction de la lumière dans l'air et l'eau respectivement. Cependant, cette expression est valide seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :

- La distance entre le motif de points et l'appareil photo H est grande par rapport à la taille du champ mesuré (dans notre cas le rayon extérieur b est une bonne approximation de la taille du champ). Cette condition donne comme résultat un angle de parallaxe maximal $\beta_{max} \simeq L/(\sqrt{2}H) \ll 1$.
- Les pentes de la surface restent faibles. C'est à dire que l'angle θ formé par le vecteur normal à la surface $\hat{n}$ et la verticale $\hat{z}$ est petit.
- L'amplitude de déformation est petite par rapport à la distance entre le motif de points et la surface, $h(x, y) \ll h_p$.

Il faut remarquer que dans la démonstration de l'eq. 3.11 en [59], la distance h_p est considérée égale à la profondeur de l'eau. Dans notre cas, h_p est égale à la somme des épaisseurs du fond de la cuve $h_{plexi} = 1.5\ mm$, la couche d'eau $h_{eau} \sim 6\ mm$ et l'anneau élastique $16 < h < 110\ \mu m$, où tout les trois matériaux ont des indices de réfraction de la lumière différents (fig. 3.8). Pour résoudre ce problème il faut remplacer h_p par une distance effective qui prenne en compte l'existence des différents matériaux.

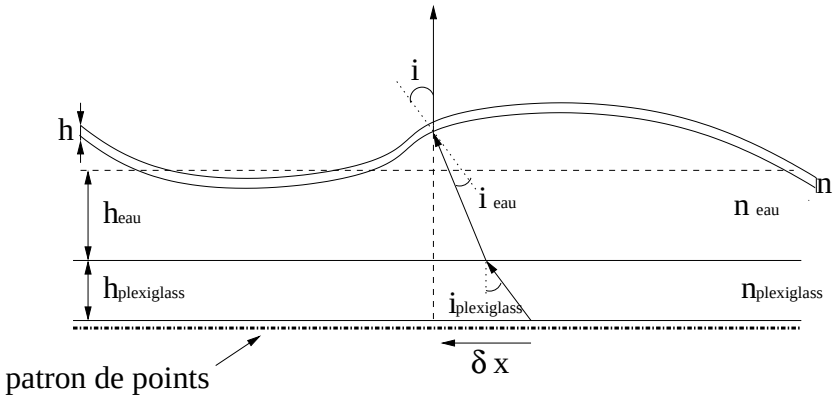


FIGURE *3.8* – Indices de réfraction pour une configuration multicouches.

En partant de l'hypothèse $H \gg h_p$, nous pouvons considérer seulement les composantes verticales des rayons de lumière. Cela permet d'écrire le déplacement δ_x comme la somme des déplacements élémentaires :

$$\delta_x = \left(h_{eau} + \frac{n}{n_{eau}} h_{eau} + \frac{n}{n_{plexi}} h_{plexiglass} + \frac{n}{n_a} h \right) \frac{\partial h}{\partial x} \tag{3.12}$$

Si nous additionnons les composantes en chaque direction, $\hat{x}$ et $\hat{y}$, le résultat peut être écrit sous la même forme que l'équation 3.11, où la distance effective h_p est la somme des épaisseurs de chaque couche pondérées par les indices de réfraction :

$$h_p = h_{eau} + \frac{n_{eau}}{n_{plexiglass}} h_{plexi} + \frac{n_{eau}}{n_a} h. \tag{3.13}$$

Dans le cadre de nos expériences, $h \ll h_{plexi}$. En considérant aussi que $n_{eau} \sim n_{plexi}$, nous utilisons ainsi une distance effective

$$h_p = h_{eau} + h_{plexi} \tag{3.14}$$

Les intégrations de tous les champs de déplacements (équation 3.11) ont été réalisées avec le programme PIVMat, développé par F. Moisy et disponible gratuitement sur le site web de Matlab [3]. Pour obtenir la hauteur de la surface en chaque point il suffit de rentrer le champ de déplacement sous forme matricielle, ainsi que la valeur de H, h_p et n_{eau}. PIVMat donne comme résultat une matrice qui contient

3. http ://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/authors/20315

le champ des hauteurs calculées. Un exemple des profils de hauteur obtenus à partir de PIVMat est ilustré dans la fig. 3.9.

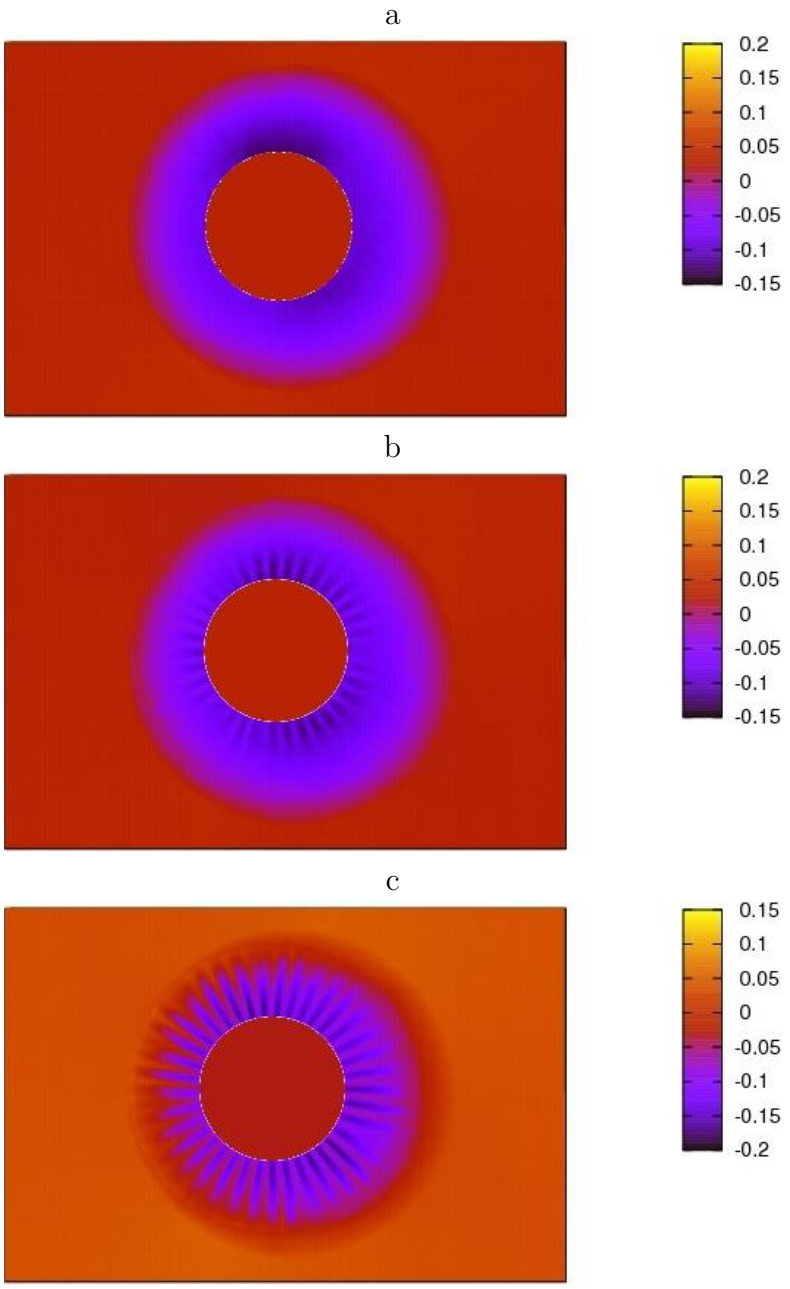


FIGURE *3.9* – Images des champs de hauteur obtenues à partir de PIVMat pour un anneau $h = 30\mu m$ et $a/b = 0.5$. Chaque image correspond à une valeur de γ_o/γ_i différent, a) $\gamma_o/\gamma_i = 0.9$ en déssous du seuil, b) 0.42 et c) 0.37. L'échelle est en mm.

3.1.5 Résolution du profil.

Les incertitudes sur la mesure du champ de hauteur dépendent principalement des incertitudes sur la génération des champs de déplacement. Nous pouvons estimer une incertitude dans les mesures de l'amplitude de la forme suivante [59, 60] :

$$\frac{\Delta A}{A} = 5\frac{L\epsilon}{\lambda N} \tag{3.15}$$

où λ est la longueur d'onde de la déformation, L est la taille de l'image, N est le nombre de points (L est la taille de la fenêtre d'interrogation en pixels) et ϵ est le bruit moyen de la mesure du champ de déplacement. Dans nos expériences ces valeurs sont $L \sim 13\ cm$, $N = 178$, $\lambda \sim 3\ mm$ et $\epsilon \sim 0.02$. Cela donne une erreur dans les mesures de l'amplitude de l'ordre de 2%.

Néanmoins, il faut vérifier la précision des mesures faites avec la technique FF-FS pour la gamme des pentes que nous trouvons dans nos expériences. Pour cela, nous avons réalisé une expérience modèle qui nous permet d'utiliser en parallèle une autre méthode de mesure directe. Nous avons ainsi mesuré la déformation uni-axiale d'une lame en verre bombée comme illustré dans la figure 3.10. Afin de rester le plus proche possible des expériences avec les anneaux, la lame est placée dans la cuve et maintenue en contact avec la surface de l'eau lors de la déformation. De cette manière nous gardons le même nombre de couches et la même distance effective h_p que dans nos expériences avec les couronnes (équation 3.14).

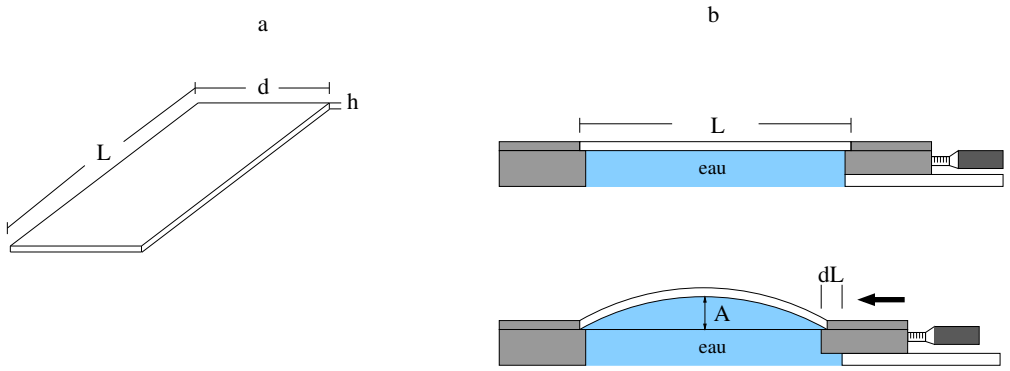


FIGURE *3.10* – Expérience de calibration, a) dimensions de la lame : $L = 60\ mm$, $d = 25\ mm$ et $h = 40\ \mu m$. b) Schéma de la déformation de la lame due à la compression laterale.

L'amplitude maximale de déformation A que nous pouvons atteindre sans perdre le contact de l'eau avec la lame est $A_{max} \sim l_c$, où $l_c = \sqrt{\gamma/\rho g}$ est la longueur capillaire. Cette amplitude est susceptible d'être mesurée avec ImageJ à partir des images latérales de la lame, avec une incertitude de $\pm 0.1\ mm$. Dans le déroulement de l'expérience nous comprimons la lame progressivement (avec des pas $\Delta L = 20\mu m$) jusqu'à ce que l'amplitude A_{max} soit atteinte. Durant la déformation nous prenons des photos par le dessus (en suivant la procédure pour l'application de la FS-SS présentée dans la section précédente) et par le côté. Les premiers clichés sont utilisés pour le calcul du profil des hauteurs avec la FS-SS et les autres pour la mesure directe de l'amplitude maximale de déformation avec le logiciel ImageJ. Cette procédure est répétée cinq fois. Des exemples de chacun des types des images sont montrées dans la figure 3.11.

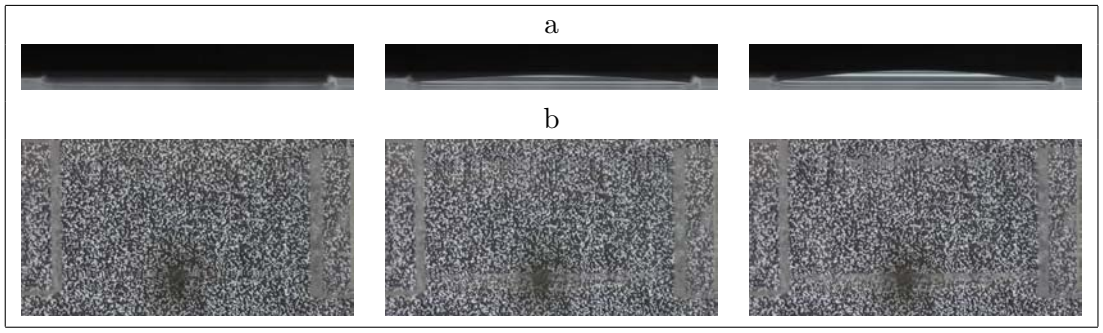


FIGURE *3.11* – Images de l'expérience de calibration, a) vue latérale et b) vue de dessus.

Comme montré dans l'équation 3.11, le gradient de la hauteur de la surface est directement proportionnel au champ de déplacement apparent des points dans le fond de la cuve. L'erreur de la mesure du champ de déplacement étant proportionnelle à l'erreur de la pente calculée, il est indispensable que la pente de déformation de la surface dans notre expérience de calibration soit du même ordre de grandeur que celle qu'on trouve dans la déformation des anneaux. Dans l'expérience de calibration nous utilisons une lame de longueur $L = 60\ mm$ avec une amplitude maximale de déformation $A_{max} \sim 2.7mm$, à partir de laquelle nous pouvons estimer $dw/dx \sim 0.045$. Cette pente est du même ordre que celle que l'on trouve dans la déformation des couronnes, où nous observons des plis d'amplitude $A_a \sim 150\mu m$ avec des longueurs d'onde $\lambda \sim 3\ mm$. La figure 3.12 montre la relation des amplitudes mesurées avec chacune des techniques.

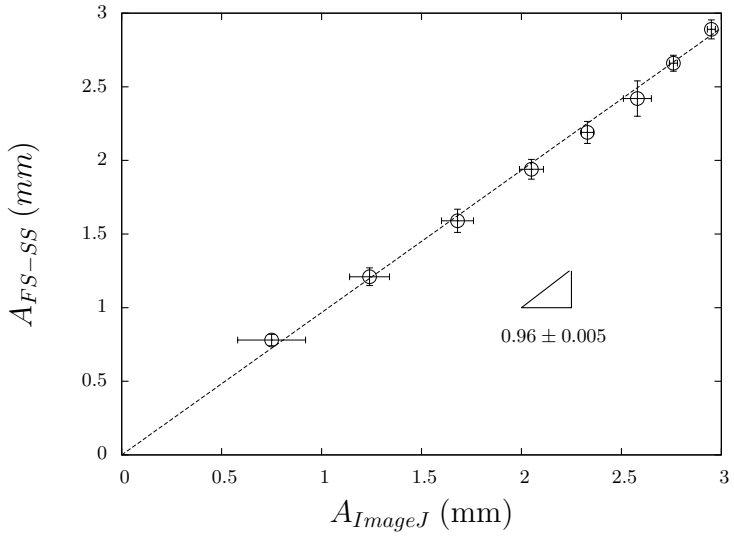


FIGURE *3.12* – Comparaison de l'amplitude de déformation mesurée en utilisant la technique FS-SS et ImageJ.

Notre expérience de calibration permet donc de valider la fiabilité des mesures réalisés avec la technique FS-SS pour la gamme des déformations obtenues dans nos expériences.

3.2 Origine de la formation des plis.

3.2.1 Distribution des contraintes

Pour comprendre la formation des plis, il faut estimer la distribution des contraintes dans la couronne lorsqu'elle est soumise à une différence de tension entre ses bords intérieur et extérieur. Avant la déformation, le problème est réduit au cas bidimensionnel axi-symétrique. L'équilibre des forces dans les directions radiale et tangentielle d'un élément infinitésimal de la couronne (figure 3.13) est alors décrit par les équations [25] :

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0, \tag{3.16}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} = 0, \tag{3.17}$$

où σ_r et σ_θ sont les composantes normales des contraintes dans les directions radiale et orthoradiale respectivement, et $\tau_{r\theta}$ est la contrainte de cisaillement.

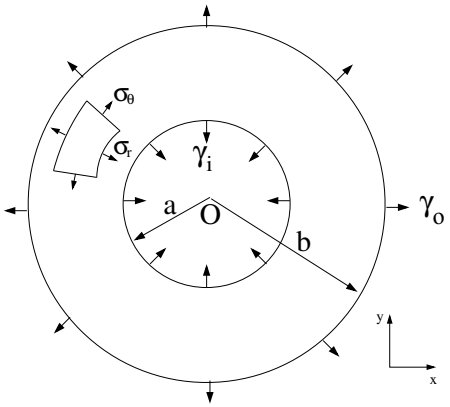


FIGURE *3.13* – Elément infinitésimal pour le calcul des contraintes.

Si la distribution des contraintes est axi-symétrique, les composantes des contraintes ne dependent plus de θ et par simmetrie $\tau_{r\theta} = 0$. L'équation 3.17 est ainsi réduite à :

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0. \tag{3.18}$$

Cette équation est satisfaite en prenant

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial r}, \\ \sigma_\theta &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2}, \end{aligned} \tag{3.19}$$

où ϕ est la fonction de contrainte qui dépend exclusivement de r et qui doit satisfaire l'équation de compatibilité :

$$\frac{d^4\phi}{dr^4} + \frac{2}{r}\frac{d^3\phi}{dr^3} - \frac{1}{r^2}\frac{d^2\phi}{dr^2} + \frac{1}{r^3}\frac{d\phi}{dr} = 0. \tag{3.20}$$

Cette dernière équation peut être résolue en introduisant une nouvelle variable t, telle que $r = e^t$, et a pour solution générale :

$$\phi = A \ln r + Br^2 \ln r + Cr^2 + D \tag{3.21}$$

où A,B,C et D sont des constantes d'intégration qu'il faut trouver à partir des

conditions aux limites du problème. Avec cette solution générale, les composantes des contraintes de l'éq. 3.19 deviennent alors

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{A}{r^2} + B(1 + 2\ln r) + 2C \\ \sigma_\theta &= -\frac{A}{r^2} + B(3 + 2\ln r) + 2C.\end{aligned} \tag{3.22}$$

La couronne étant un cercle fermé avec des déplacements orthoradiaux constants, la constante B est nulle [25]. Dans le cas de l'anneau qui flotte sur la surface de l'eau, nous avons également $\sigma_r(r = a) = \gamma_i/h$ et $\sigma_r(r = b) = \gamma_o/h$, ce qui permet de déterminer :

$$\begin{aligned}A &= \frac{a^2b^2(\gamma_o - \gamma_i)}{a^2 - b^2}, \\ C &= \frac{\gamma_i a^2 - \gamma_o b^2}{a^2 - b^2}.\end{aligned} \tag{3.23}$$

La distribution des contraintes radiales et orthoradiales générées sur la couronne tant qu'elle reste plate est ainsi donnée par :

$$\begin{aligned}N_r = h\sigma_r &= \frac{\gamma_i a^2 - \gamma_o b^2 - \frac{a^2b^2}{r^2}(\gamma_i - \gamma_o)}{a^2 - b^2}, \\ N_\theta = h\sigma_\theta &= \frac{\gamma_i a^2 - \gamma_o b^2 + \frac{a^2b^2}{r^2}(\gamma_i - \gamma_o)}{a^2 - b^2}.\end{aligned} \tag{3.24}$$

À partir de ces expressions, qualifiés de solution de Lamé, nous pouvons remarquer que la contrainte radiale σ_r est toujours positive à condition que $\gamma_i \geq \gamma_o > 0$ et $a < r < b$. Cependant, la contrainte orthoradiale peut devenir négative si :

$$\frac{\gamma_o}{\gamma_i} \leq \frac{a^2/b^2 + 1}{2}. \tag{3.25}$$

Lorsque $\sigma_\theta < 0$ l'anneau est soumis à une compression dans une région $a <$

$r < R^*$, où R^* est défini par

$$R^* = a\sqrt{\frac{1-\gamma_o/\gamma_i}{\gamma_o/\gamma_i - a^2/b^2}}. \tag{3.26}$$

Cette contrainte orthoradiale négative entraîne la déformation de la couronne hors de plan.

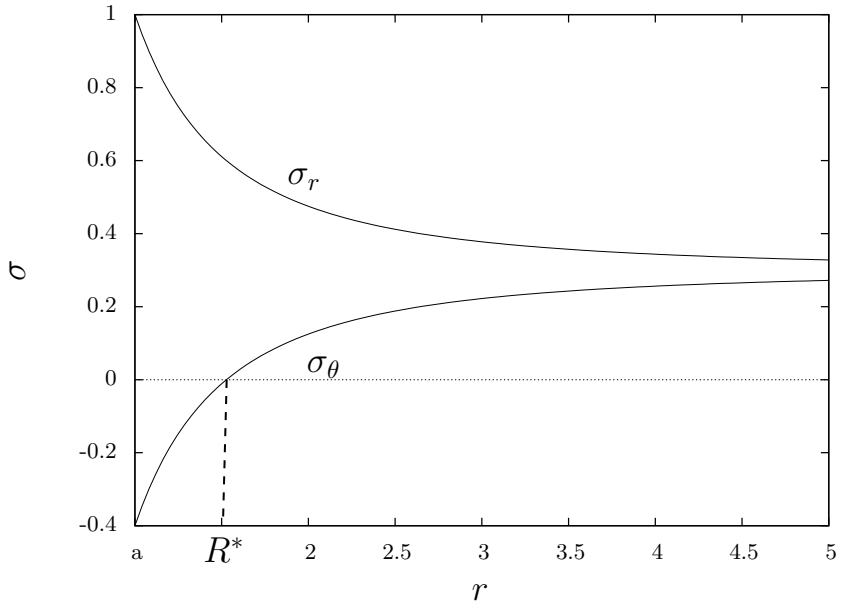


FIGURE *3.14* – Contraintes radiale et orthoradiale en fonction de la distance au rayon intérieur a de la couronne. Si la condition 3.25 est vérifiée, la contrainte orthoradiale est négatie en dessous d'un certain seuil R^*.

C'est en effet cette contrainte orthoradiale négative qui entraîne la déformation de la couronne hors de plan.

3.2.2 Instabilité de flambage : le cas unidimensionnel.

Par simplicité, nous estimerons un seuil de flambage de la couronne en considérant le cas unidimensionnel d'une tige qui est soumise, comme dans le cas de la couronne, à une charge axiale (fig. 3.15 a). Dans le cas d'une seule dimension, la déformation hors du plan de la tige est donnée (dans le cas des faibles déformations)

par l'équation suivante [24] :

$$B\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + T\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \tag{3.27}$$

où w désigne le profil de la tige, B est le module de flexion et T la force axiale appliquée aux extrémités de la tige.

La solution non nulle satisfaisant des conditions aux limites : $w(0) = w(L) = w''(0) = w''(L) = 0$, est

$$w = A\sin(kx) \tag{3.28}$$

où $k = \sqrt{T/B}$. Pour satisfaire les conditions aux limites il nous faut $\sin(kl) = 0$, alors, $kL = n\pi$. Cette condition permet d'estimer une valeur critique de T au delà de laquelle on attend l'instabilité de flambage (d'Euler) :

$$T_{crit} = \frac{n^2\pi^2 B}{L^2}, \tag{3.29}$$

où n est un entier positif. Vu que nous nous intéressons à la charge minimale T qui puisse entraîner le flambage, nous pouvons déduire facilement que la valeur non nulle de n qui minimise 3.29 est $n = 1$. Dans la limite des faibles déformations, la tige prend donc une forme d'arche illustrée dans la figure 3.15 b. Cependant, dans

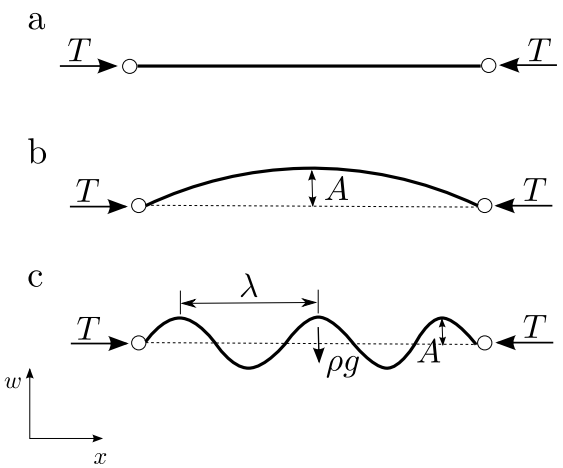


FIGURE *3.15* – Flambage d'une tige : a) état plat $T < T_{crit}$, b) état flambé $T > T_{crit}$ (flambage d'Euler) et c) état flambé $T > T_{crit}$ sur un substrat déformable.

notre cas la tige n'est pas libre mais solidaire du bain. Il nous faut donc prendre

en compte l'énergie potentielle de l'eau déplacée lors du flambage de la tige. Si nous ajoutons l'effet de l'hydrostatique dans l'équation (1.27) , nous obtenons :

$$B\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + T\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \rho g w = 0 \tag{3.30}$$

où ρ est la densité de l'eau et g est la constante de la gravité. Avec les mêmes conditions aux limites qu'avant, cette équation a aussi comme solution :

$$A\sin(mx), \tag{3.31}$$

mais avec

$$m = \sqrt{\frac{-T + \sqrt{T^2 - 4\rho g B}}{2B}}. \tag{3.32}$$

Encore pour satisfaire les conditions aux bords il faut que $mL = n\pi$. À partir de cette condition nous pouvons estimer la force nécessaire pour entraîner le flambage :

$$T = \frac{\pi^2 B}{l^2}\left(n^2 + \frac{\rho g l^4}{n^2 \pi^4 B}\right). \tag{3.33}$$

En minimisant T en fonction de n nous trouvons que la force critique de flambage est donnée par :

$$T_{crit} = 2\sqrt{B\rho g} \tag{3.34}$$

pour

$$n = \frac{L}{\pi}\left(\frac{\rho g}{B}\right)^{1/4}. \tag{3.35}$$

Ce résultat est compatible avec la loi d'échelle du modèle simplifié présenté dans l'introduction (équation 3.8). Une fois le seuil de flambage atteint, la tige se déformera en formant un motif de longueur d'onde $\lambda = 2L/n = 2\pi(B/\rho g)^{1/4}$. Du point de vue de l'énergie de courbure, il est plus favorable de former des bosses les plus larges possible, tandis que des petites amplitudes minimisent l'énergie potentielle de gravité. Cependant, amplitude et longueur d'onde ne sont pas indépendantes l'une de l'autre, mais sont liés par la condition de inextensibilité de la tige. En

effet, la conservation de la longueur de la tige impose :

$$L_0 = \int_0^L \sqrt{1 + w'^2} dx. \tag{3.36}$$

En utilisant la solution $w = A\sin(mx)$, nous déduisons :

$$\epsilon = \frac{L_0 - L}{L_0} \sim \left(\frac{A}{\lambda}\right)^2 \tag{3.37}$$

où λ est la longueur d'onde. Ainsi, des augmentations de la longueur d'onde qui diminuent l'énergie de courbure de la tige, se traduisent par une augmentation de l'amplitude qui ne sont pas énergétiquement favorables pour la colonne d'eau soulevée (et vice versa). C'est donc la compétition entre ces deux ingrédients physiques qui détermine la longueur d'onde après le flambage.

Bien que l'étude du cas unidimensionnel nous donne une idée de l'origine du flambage dans notre problème, et nous permette d'illustrer les principaux ingrédients physiques, ce cas demeure une approximation assez limitée, valide uniquement dans le cas $a \simeq b$. Une description plus précise du phénomène doit en effet inclure les effets dans les autres directions.

3.2.3 Déflexion d'une plaque circulaire

Considérons à présent la couronne comme une plaque de symétrie circulaire. Dans le cas de petites déformations, l'équation de déflexion d'une plaque circulaire soumise à des forces dans le plan N_r et N_θ et à une charge normale uniforme q (fig. 3.16), est donnée par l'expression [61] :

$$B\nabla^4 w - N_r \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - N_\theta \left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}\right) + q = 0. \tag{3.38}$$

Si nous nous concentrons dans l'état au voisinage du flambage, nous pouvons considérer que les contraintes dans le plan sont celles décrites par Lamé et présentées dans l'équation (3.24). La charge normale est donnée par le poids du liquide déplacé lors de la déformation de la membrane. En prenant les différents éléments

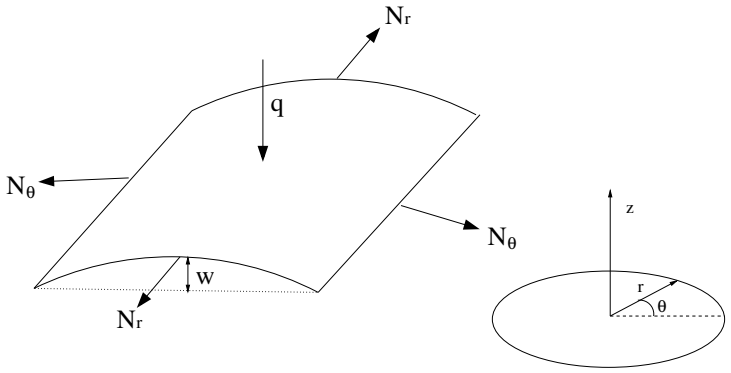


FIGURE *3.16* – Schéma de la déformation hors de plan d'une plaque.

en compte, l'équation 3.38 devient :

$$B\nabla^4 w - \sigma_r h\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - \sigma_\theta h\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}\right) + \rho g w = 0. \tag{3.39}$$

Cette équation a une solution non nulle au-delà d'une certaine valeur négative de la contrainte orthoradiale σ_θ [4]. Cette solution peut être écrite de la forme :

$$w = f(r)\sin m\theta. \tag{3.40}$$

Par simple substitution de (3.40) en (3.39) on trouve :

$$B\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d}{dr}\right) - \frac{m^2}{r^2}\right]^2 f - \sigma_r h\frac{d^2 f}{dr^2} + \rho g f = \sigma_\theta h\left(\frac{1}{r}\frac{df}{dr} - \frac{m^2 f}{r^2}\right). \tag{3.41}$$

Même si l'équation 3.41 ne peut pas être résolue de manière analytique, un bilan des forces entre les différents termes peut donner une idée de certaines caractéristiques de la solution. Dans la figure 3.17 nous présentons une simplification schématique de chacune des forces dominantes intervenant dans la déformation de la plaque hors du plan. Le premier terme de l'équation 3.41, représenté dans la figure 3.17-a, correspond à la force exercée par la plaque lorsqu'elle est courbée. Le second terme correspond à l'existence d'une tension radiale générée, dans notre cas d'étude, par la tension de surface de l'eau (figure 3.17 -b). Le troisième terme prend en compte les effets de la gravité sur la colonne d'eau soulevée (figure 3.17-

4. L'équation 3.39 pourrait aussi avoir des solutions non nulles pour valeurs de $\sigma_r < 0$ dans le cas d'une compression aux bords, situation extérieure à notre cas d'étude.

d). Ces trois forces réagissent contre la force orthoradiale qui entraine le flambage et ont tendance à maintenir la plaque dans son état plat. Comme dans le cas du flambage uni-dimensionnel, la rigidité de la plaque favorise les petits nombres d'onde alors que les forces générées par la gravité et la tension radiale favorisent au contraire les petites amplitudes de déformation. En considérant que la plaque est

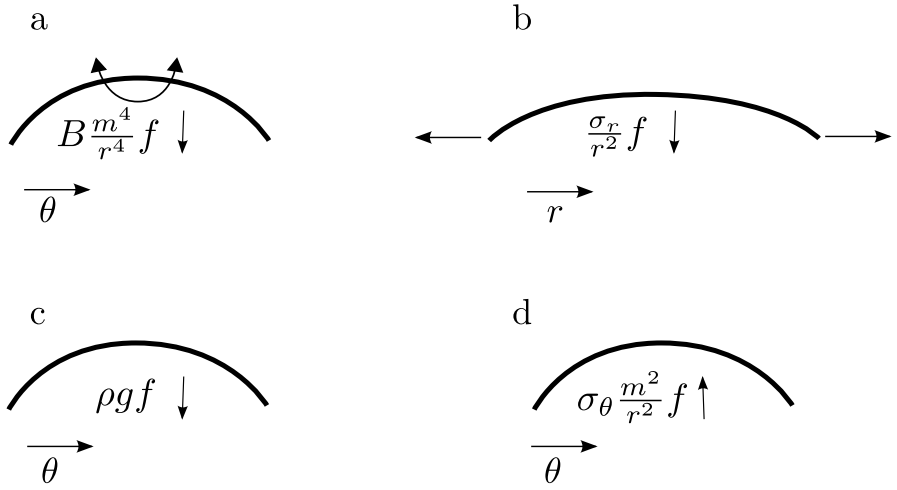


FIGURE *3.17* – Schéma des forces dominantes lors de la déformation : a) force due à la courbure de la plaque, b) à l'étirement dans la direction de r et c) au poids de l'eau. La force due à la contrainte orthoradiale est illustrée en d).

inextensible dans la direction orthoradiale (3.37), on peut estimer une valeur du nombre de plis attendu en trouvant l'équilibre entre ces trois forces. Considérons que lorsque la plaque se déforme, des plis de hauteur A, largeur λ et longueur L sont générés. Si $L < \sqrt{\sigma_r h/\rho g}$ (dans notre cas nous avons $\sigma_r h \sim \gamma_i$, donc $L < L_c$), l'équilibre des forces dans la plaque est donné par l'expression :

$$\frac{B}{\lambda^4} \sim \frac{\sigma_r}{L^2}, \tag{3.42}$$

À partir de cet équilibre nous déduisons :

$$\lambda = \sqrt{L}\left(\frac{B}{\sigma_r}\right)^{1/4} \tag{3.43}$$

Cette loi d'échelle a été trouvé par Cerda [58] pour le flambage d'une membrane circulaire en absence des effets de gravité ($g = 0$). Elle a également été corroborée

par Huang *et al.* [28] pour une membrane flottant sur la surface de l'eau avec des plis dont la longueur L était plus petite que la longueur capillaire.

Si au contraire les effets de la gravité dominent ($\rho g > \sigma_r/L^2$, ou dans notre cas $L > L_c$), nous retrouvons la longueur élasto-gravitaire :

$$\lambda \sim \left(\frac{B}{\rho g}\right)^{1/4}, \tag{3.44}$$

comme dans le cas du flambage d'une membrane rigide sur un substrat déformable [62], [63] , où les contraintes de tension dans la direction normale à la contrainte responsable du flambage sont negligeables.

Une façon d'estimer le seuil de flambage pour la plaque circulaire, est de trouver le minimum du rapport de tension entre les bords intérieur et extérieur suffisant pour générer une instabilité de flambage en $r = a$. Par simplicité, nous reprendrons l'expression de la force critique dans le cas unidimensionnel (3.34) pour constituer une condition de flambage de la forme :

$$\sigma_\theta(r = a) = -2\sqrt{B\rho g}. \tag{3.45}$$

Puis, à partir de (3.24), le rapport entre les deux tensions au seuil est donné par :

$$\frac{\gamma_o}{\gamma_{i\ seuil}} = \frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{b^2} + 1\right) + \frac{\sqrt{B\rho g}}{\gamma_i}\left(\frac{a^2}{b^2} - 1\right) \tag{3.46}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{b^2} + 1\right) + \frac{L_{ec}}{L_c}\left(\frac{a^2}{b^2} - 1\right). \tag{3.47}$$

Dans le cas de couronnes fines $b = a(1 + \epsilon)$ (avec $\epsilon \ll 1$), le seuil se réduit à $\gamma_o/\gamma_i = (1-\epsilon) - 2\epsilon L_{ec}/L_c$, et nous retrouvons un résultat proche de la loi d'échelle présentée dans l'introduction $\gamma_o/\gamma_i = (1 - \epsilon) - \epsilon L_{ec}/L_c$ (équation 3.9). Ces deux lois coïncident quand $L_{ec} \ll 1$ et prédisent un comportement similaire [5] pour des membranes de rigidité finie.

Dans la plupart des travaux qui ont été développés sur ce sujet [28, 29, 55, 56,

5. Les préfacteurs de L_{ec}/L_c sont différents dans les deux lois, car les énergies de flexion et de gravité ont été évaluées différemment.

58, 64], les auteurs se centrent néanmoins sur le cas d'une plaque infinie $a/b \to 0$. Dans une telle situation, le seuil du flambage est donné par :

$$\frac{\gamma_o}{\gamma_{i\ seuil}} = \frac{1}{2} - \frac{L_{ec}}{L_c}. \tag{3.48}$$

Quand la rigidité de la plaque est faible ($B \to 0$) nous trouvons $\gamma_o/\gamma_i = 1/2$ comme valeur minimale pour entrainer le flambage. À mesure que la rigidité de la plaque augmente, le rapport de tensions γ_o/γ_i requis devient de plus en plus petit. En effet pour le cas des plaques infinies, il arrive que $\gamma_o/\gamma_i \to 0$ quand $2L_{ec} \to L_c$. Cela nous conduit à une limite pour la rigidité de la plaque, au delà de laquelle le flambage est impossible à atteindre [6](figure 3.18).

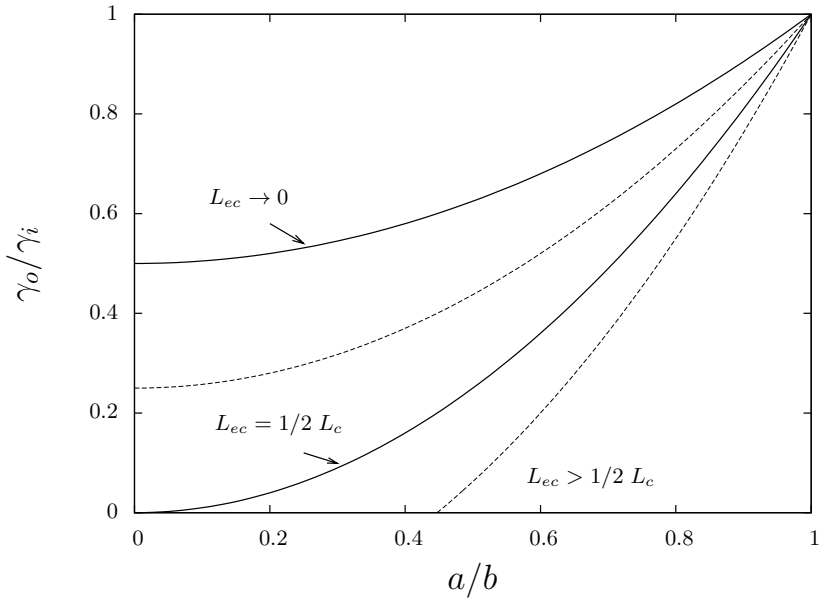


FIGURE *3.18* – Seuil de flambage $\gamma_o/\gamma_{i\ seuil}$ en fonction du rapport d'aspect a/b pour différentes valeurs de L_{ec}.

Cependant, pour des rapports d'aspect $a/b > 0$ il existe encore la possibilité de flamber même si $L_{EC} > 1/2L_c$, comme on peut le voir su l'équation 3.47.

6. Sous l'hypothèse que la contrainte exercée à l'exterieur de l'anneau est toujours une tension dont la valeur minimale est 0 (une tension superficielle ne peut être compressive).

3.3 Confrontation expérimentale du nombre des plis et seuil de flambage

Comparons à présent nos observations expérimentales aux arguments théoriques présentés dans la section précédente. En premier lieu, nous nous focaliserons sous la longueur d'onde, puis nous décrirons le seuil de flambage.

Afin d'avoir une perspective plus complète du problème, nous comparerons également nos résultats expérimentaux avec les résultats de l'analyse de stabilité marginale de l'équation 3.41, à partir de laquelle on calculons les valeurs de γ_o/γ_i et λ au seuil. Cette analyse est résolue numériquement avec la procedure *bvp4c* de MATLAB. Une description plus précise de l'évaluation numérique, ainsi que des conditions aux limites utilisées sont présentées en annexe A.

3.3.1 Longueur d'onde

La figure 3.20 montre des images de couronnes de différentes caractéristiques durant leur déformation hors du plan. Chaque ligne correspond à une épaisseur de la couronne différente, $h = 16$, 50, 81 et 90 μm. Chacune des colonnes correspond à une étape de déformation, où la première colonne montre l'état plat et la dernière le plus déformé. Cependant, les valeurs de γ_o/γ_i requises pour générer ces états de déformation sont différentes pour les quatre images d'une même colonne.

Par simple inspection de l'image il apparaît que le nombre des plis est d'autant plus élevé que la membrane est fine. Il faut remarquer aussi que les plis ont une longueur comparable à la largeur des couronnes, $L \sim 13mm > L_c$, et donc, on attendrait que les effets gravitationnels dominent devant les effets de la tension radiale. Il est alors possible d'écrire à partir de l'équation 3.44 une relation entre la longueur d'onde et l'épaisseur de la membrane de la forme :

$$\lambda \sim \beta_t h^{3/4} \tag{3.49}$$

où $\beta_t = 2\pi(E/(12(1-\nu^2)\rho g))^{1/4}$. La figure 3.19 présente les données expérimentales de λ obtenues pour différentes valeurs de h. À cause de la forme circulaire des couronnes, la longueur d'onde des plis varie en proportion à la distance au bord intérieur. Donc, tant pour les résultats expérimentaux que pour les résultats

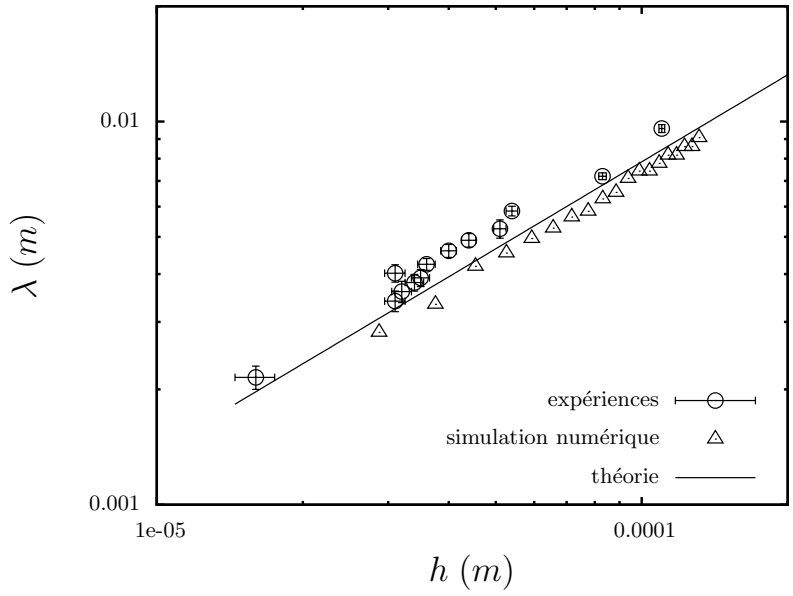


FIGURE *3.19* – Valeurs expérimentales (cercles) et numériques (triangles) pour la longueur d'onde en fonction de l'épaisseur de l'anneau. La ligne continue correspond à l'expression théorique $\lambda \sim 2\pi(E/(12(1-\nu^2)\rho g))^{1/4}h^{3/4}$.

numériques, nous prenons la longueur d'onde à une distance d_λ, qui correspond au centre de la région pliée.

En accord avec la théorie, la longueur d'onde augmente comme $h^{3/4}$. L'ajustement des données à une courbe de la forme $f(h) = \beta_e h^\alpha$ donne comme résultat $\beta_e = 9.17 \pm 0.95$ et $\alpha = 0.75 \pm 0.02$. En même temps, nous trouvons une valeur théorique de $\beta_t = 8.15 \pm 0.8$. Du point de vue numérique, la simulation donne une valeur de $\alpha = 0.76 \pm 0.05$ avec un coefficient $\beta_n = 8.1 \pm 0.79$. Ainsi il existe un très bon accord entre la prédiction théorique et les expériences, non seulement pour l'exposant α, mais aussi pour le préfacteur β. Ce dernier confirme que dans notre problème les effets de la gravité sont dominants devant la tension radiale dans la définition du nombre des plis, contrairement à ce qui se passe dans les expériences réalisées par Huang *et al.* [28].

Nous avons également observé que la longueur d'onde n'est pas modifiée même très au delà du seuil de flambage, comme on s'y attend pour le flambage sur une fondation (elle ne dépend que d'un équilibre entre rigidité de flexion et gravité).

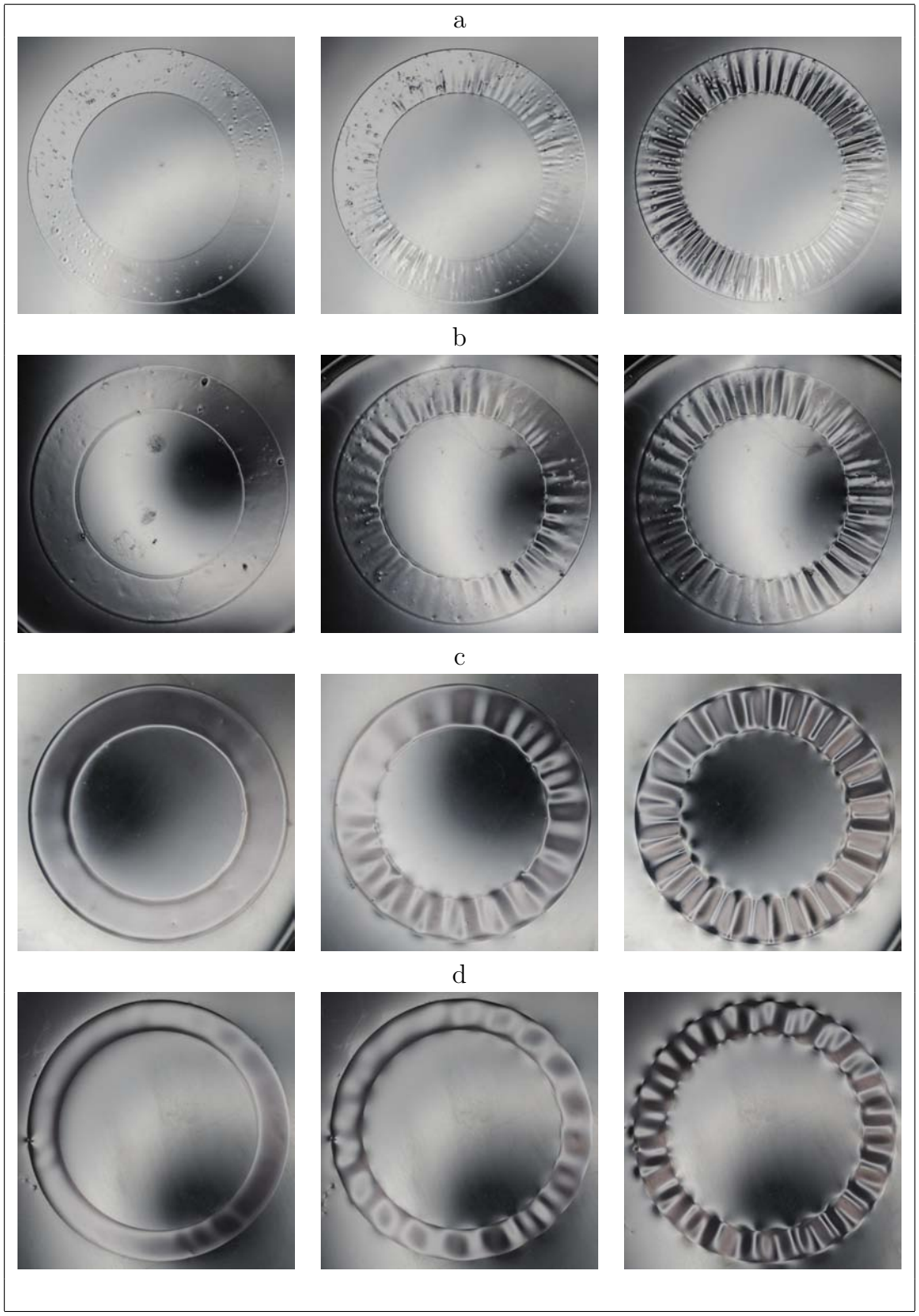


FIGURE *3.20* – Images des couronnes d'épaisseurs différentes durant leur déformation hors du plan. a) $h = 16\mu m$ et $a/b = 0.65$,b) $h = 50\mu m$ et $a/b = 0.65$,c) $h = 81\mu m$ et $a/b = 0.65$,a) $h = 110\mu m$ et $a/b = 0.70$. La valeur du rayon interne est $a = 50mm$ dans tout les cas.

3.3.2 Seuil de flambage

Nous déterminons le seuil de flambage à partir des mesures de l'amplitude en fonction de la différence de tension appliquée γ_o/γ_i. Plus précisément, nous mesurons l'évolution de l'amplitude de la déformation dans le voisinage de $r = a$. Comme dans le cas de systèmes supercritiques nous retrouvons $A^2 \propto \gamma_o/\gamma_i - \gamma_0/\gamma_{i\ seuil}$ (figure 3.21). À partir d'un ajustement des données expérimentales, nous obtenons la valeur de γ_o/γ_i au seuil.

Malgré la bonne précision avec laquelle nous réalisons les mesures de l'amplitude de déformation de la membrane, nos barres d'erreur restent considérables pour les valeurs présentées dans la figure 3.21. Cela est en partie dû au fait que les amplitudes montrées représentent la moyenne des amplitudes des n plis qui se forment autour de la couronne (les barres d'erreur correspondent à l'écart type de nos mesures). Ce manque d'homogénéité peut être attribuée à plusieurs raisons, mais nous considérons que la plus importante dans notre cas est liée à des défauts dans l'élaboration des couronnes (irrégularités dans la surface ou l'épaisseur), ce qui favorise la formation des plis près des régions inhomogènes.

Le seuil de flambage a été évalué pour des conditions expérimentales différentes. Dans une première série d'expériences nous avons déterminé le seuil de flambage en fonction de la variation du rapport d'aspect a/b pour des valeurs de L_{ec} fixes. Puis, en maintenant fixe a/b, nous avons fait varier la valeur de L_{ec} en changeant l'épaisseur des couronnes. Tous les autres paramètres expérimentaux sont restés fixes tout le long des expériences.

Cependant, il faut faire attention aux valeurs de a/b et L_{ec} utilisées. En effet, la possibilité de générer ou pas une instabilité de flambage est établie par l'interaction entre ces deux paramètres (eq. 3.47). D'abord il faut considérer que nous sommes limités expérimentalement à un rapport minimal γ_o/γ_i. La tension de surface de l'eau peut être réduite au maximum à une valeur d'environ 25 mN/m avec le tensioactif utilisé, ce qui donne un rapport limite $\gamma_o/\gamma_i \sim 1/3$. En tenant compte de cette limite expérimentale et à l'aide de l'expression 3.47, nous pouvons prévoir si une couronne est susceptible de flamber en fonction de son rapport d'aspect et de sa rigidité. Un diagramme illustrant cette condition est présenté dans la figure 3.22. Effectivement, à mesure que la rigidité des anneaux augmente, nous sommes obligés d'augmenter le rapport d'aspect pour atteindre le flambage.

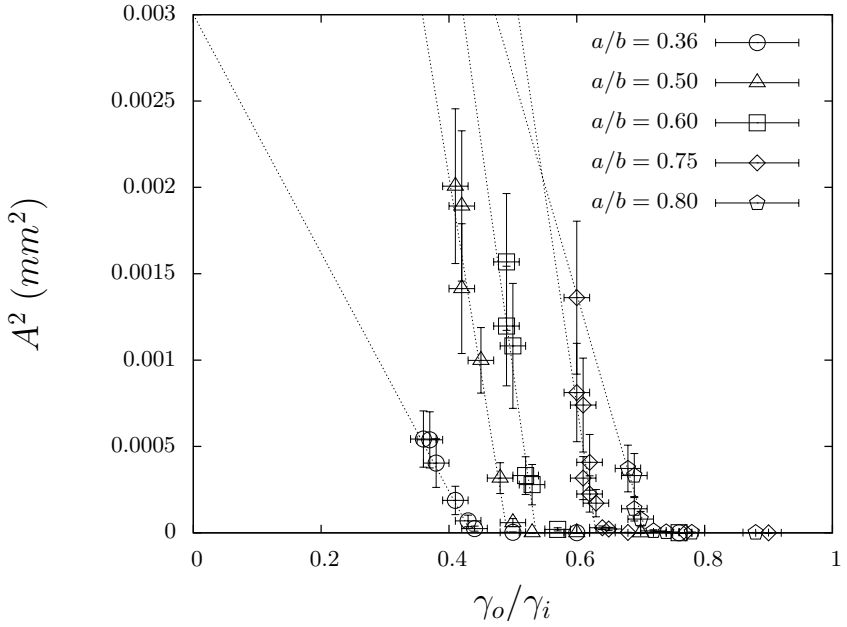


FIGURE *3.21* – Valeurs expérimentales de l'amplitude de déformation en fonction du rapport des tensions appliquées. Les résultats correspondent à des couronnes de différents rapports d'aspect a/b. Les lignes en pointillés correspondent à l'ajustement de chaque une des séries de données à une expression de la forme $A^2 = \alpha\gamma_o/\gamma_i + \beta$.

Comme nous le verrons par la suite, ces restrictions limitent d'une manière considérable le domaine d'action de nos expériences, surtout lorsque nous étudierons la longueur des plis.

Dans la figure 3.23 nous présentons les résultats expérimentaux et numériques obtenus pour la variation du seuil de flambage en fonction du rapport d'aspect de l'anneau. Comme prévu dans la théorie simplifiée (équation 3.47), nous observons qu'à mesure que a/b diminue, le contraste de tension doit être de plus en plus fort pour entraîner le flambage. Nous observons que la prédiction théorique sous-estime la valeur du seuil de flambage par rapport à résolution numérique ou à l'expérience, ce qui est normal car elle a été dérivée d'une simplification au cas unidimensionnel, où le flambage n'est pas contrarié par les effets de la géométrie circulaire. Par exemple, la valeur de γ_o/γ_i au seuil pour $a/b = 0$ prédite par la théorie est $1/2 - L_{ec}/L_c \sim 0.45$. Un ajustement des données numériques à une

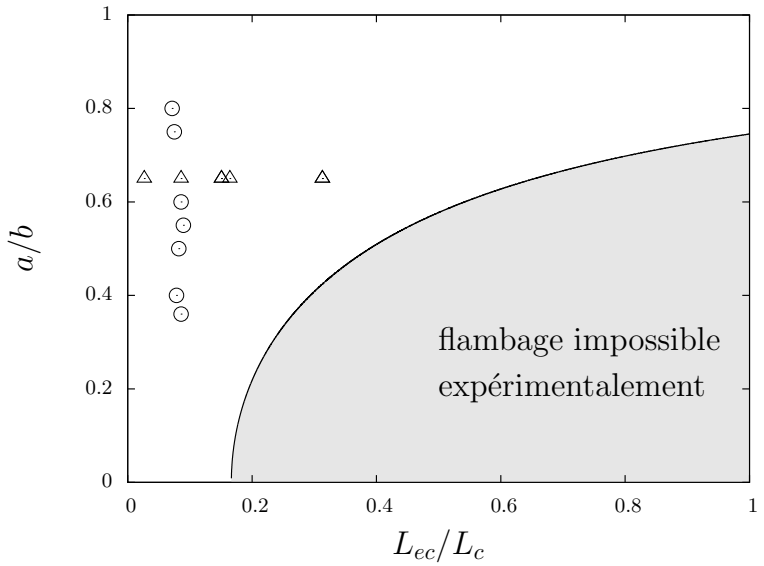


FIGURE *3.22* – Régions de susceptibilité de flambage dans une espace L_{ec}/L_c *vs* a/b. La ligne solide a été calculé à partir de l'équation 3.47 avec $\sigma_o/\sigma_i = 1/3$. Les cercles et les triangles indiquent les caractéristiques des anneaux utilisés dans nos expériences.

courbe de la forme :

$$f = \frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{b^2}+1\right) + \beta\left(\frac{a^2}{b^2}-1\right), \tag{3.50}$$

correspondant au seuil de flambage théorique (équation 3.47), donne une valeur du seuil en $a/b = 0$ de ~ 0.41, tandis que la même procédure avec les données expérimentales indique une valeur de ~ 0.384. Cela correspond à une erreur de 8% et 18% respectivement. Vu le niveau de simplification des arguments théoriques, le rapprochement avec les résultats numériques et expérimentaux peuvent être considérés comme acceptables.

En outre, nos résultats expérimentaux et numériques de la dépendance de $\gamma_o/\gamma_{i\ seuil}$ par rapport à la longueur élasto-capillaire L_{ec}, sont présentés dans la figure 3.24. L'augmentation de la rigidité de la membrane se traduit par une augmentation de L_{ec}, et comme prédit par la théorie simplifiée (équation 3.47), cela conduit à une élévation de la différence de tension nécessaire au flambage ($\gamma_o/\gamma_{i\ seuil}$ diminue). Nous pouvons constater que cette dépendance est linéaire, et encore une fois, nous trouvons que la théorie simplifiée est proche de nos résultats expérimen-

taux et numériques.

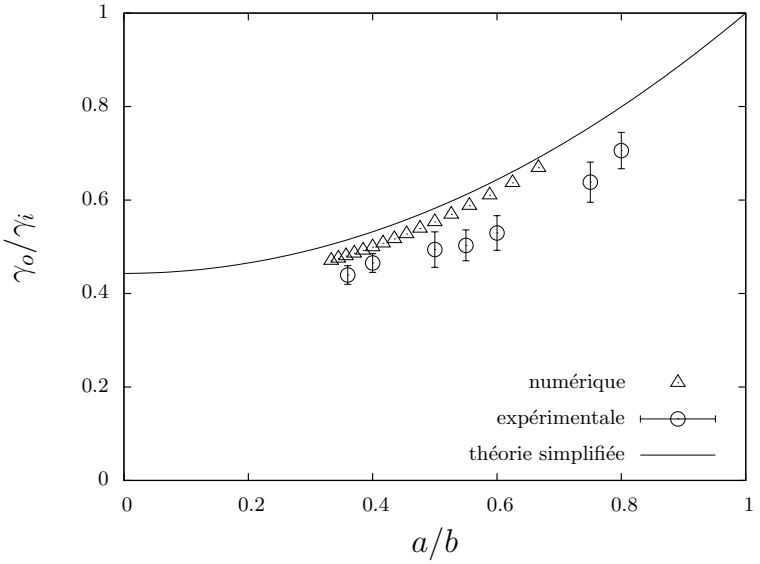


FIGURE *3.23* – Valeurs expérimentales (cercles) et numériques (triangles) pour le seuil de flambage en fonction du rapport d'aspect a/b. La ligne continue correspond à l'estimation du seuil de flambage théorique donnée par l'équation 3.47.

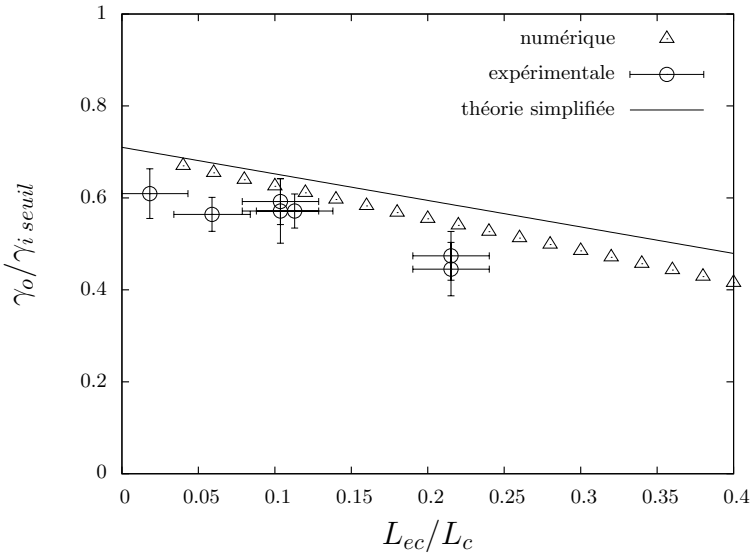


FIGURE *3.24* – Valeurs expérimentales (cercles) et numériques (triangles) pour le seuil de flambage en fonction de la longueur élasto-capillaire. Les lignes continues correspondent à l'estimation du seuil de flambage théorique donnée par l'équation 3.47 .

Il est sans doute naturel de trouver certaines différences entre une théorie simple, basée le flambage d'une tige uni-dimensionnelle, et des expériences et simulations qui incluent des effets en trois dimensions. Cependant, nous attendions une meilleure concordance entre nos résultats expérimentaux et numériques. Dans les figures 3.23 et 3.24, nous pouvons voir que le seuil de flambage expérimental est systématiquement en dessous du seuil numérique. Cet effet pourrait être dû à une sous estimation de la rigidité réelle des membranes. Un tel décalage correspondrait à une erreur sur la rigidité de l'ordre de 50 %, ce qui est au delà des erreurs de mesure sur l'épaisseur et de module de Young. Un autre effet qui pourrait d'expliquer cette différence entre théorie et expérience, est celui du poids du ménisque le long des bords qui n'est pas pris en compte dans la simulation numérique.

3.4 Longueur des plis

Dans les sections précédentes nous avons discuté le seuil de flambage des couronnes et la longueur d'onde des motifs de plis qui se forment lorsque que nous générons l'instabilité de flambage. Cependant nous avons pu constater à partir de nos expériences que la longueur des plis formés varie si la différence de tension entre les bords de la couronne continue à être augmentée. Cette variation de la longueur des plis a été largement discutée par différents groupes de recherche [28, 55, 56, 58], discussions qui demeurent encore ouvertes.

Jusqu'ici, la théorie de distribution des contraintes dans une plaque circulaire plate nous a permis de décrire certaines caractéristiques de la formation des plis. Nous avons basé nos arguments à partir de l'état des contraintes jusqu'au moment où nous arrivons au seuil de flambage. Le principal problème lié à la détermination de la longueur des plis après le flambage, est lié au fait que l'on ne connait plus l'état de distribution des contraintes une fois que la plaque est déformée hors du plan. En effet, la formation des plis permet de relâcher les contraintes compressives.

On trouve actuellement deux types d'approches à ce problème. D'une part, nous pouvons considérer que pour de petites déformations la distribution des contraintes reste proche de la distribution calculée pour une plaque plane. Nous pouvons ainsi tenter de calculer la longueur des plis à partir des arguments utilisés dans la section précédente. D'un autre côté, nous pouvons estimer une nouvelle

distribution de contraintes sur la couronne déformée en supposant que la présence des plis modifie considérablement les contraintes : la couronne se plisse dès que nous tentons de la comprimer, et dans une limite d'épaisseur nulle, nous pouvons faire l'approximation de contraintes compressives nulles comme dans la "Tension Field Theory" [55, 61].

Par la suite, nous ferons une description plus détaillée de ces deux approches et nous les confronterons avec nos observations expérimentales.

3.4.1 Longueur des plis près du seuil de flambage

Dans la section précédente nous avions montré qu'à partir d'une certaine valeur de γ_o/γ_i il existe une région comprise entre $a < r < R^*$ dans laquelle la contrainte orthoradiale devient négative (3.26). Supposons que dans le cas des plaques très flexibles où $L_{ec}/L_c \to 0$, l'existence d'une contrainte orthoradiale radiale négative soit suffisante pour faire flamber la plaque. Dans ce cas, nous trouverions des plis jusqu'à $r = R^*$, donc avec une longueur :

$$L_p = R^* - a = a\left(\sqrt{\frac{1-\gamma_o/\gamma_i}{\gamma_o/\gamma_i - a^2/b^2}} - 1\right). \tag{3.51}$$

Cette équation n'est valable qu'au-delà du seuil de flambage (3.47). Nous avons constaté dans les sections précédentes que dans nos expériences la rigidité de la membrane n'est pas négligeable. Donc, en faisant une approximation assez grossière, nous supposerons encore que les plis iront jusqu'au rayon où la contrainte orthoradiale s'annule, mais toujours à condition que le seuil de flambage soit dépassé en $r = a$. Dans ces conditions, à l'aide de (3.47), nous trouvons que la longueur des plis au seuil est :

$$L_{ps} = a\left(\sqrt{\frac{1/2 + Lec/L_c}{1/2 - L_{ec}/L_c}} - 1\right). \tag{3.52}$$

Nous observons que dans le cas $L_{ec}/L_c \to 0$, la longueur de plis au seuil est nulle. Mais lorsque la rigidité de la membrane devient importante, nous trouvons des plis au seuil de plus en plus longs. Remarquons aussi que la longueur des plis ne dépend pas du rapport d'aspect a/b de la couronne.

3.4.2 Longueur des plis loin du seuil de flambage

La théorie de formation des plis loin du seuil de flambage [55] se base sur l'hypothèse qu'il existe un effondrement total de la contrainte orthoradiale dans la region où les plis se sont formés : la plaque ne peut supporter de contraintes compressives car elle plisse très facilement (Tension Field Theory [61]). Ceci modifie la répartition des contraintes à l'équilibre, car $\sigma_\theta = 0$ dans la region $a < r < R^*$ que l'on doit maintenant déterminer. Cette approximation tient sur l'hypothèse que la rigidité de la plaque est suffisamment faible de sorte que les contraintes compressives soient bien supérieures aux contraintes typiques de flambage ($B/\lambda^2 \ll \sigma_\theta h$). À partir de l'équilibre des contraintes dans une plaque circulaire (eq. 3.18) et de la loi de Hooke, nous déduisons :

$$h\sigma_r = \gamma_i \frac{a}{r} \; ; \; \epsilon_r = \frac{\sigma_r}{E} \; ; \; \epsilon_\theta = -\nu\epsilon_r; \tag{3.53}$$

dans la région plissée. En dehors de cette région ($r > R^*$) la théorie suppose que la distribution des contraintes est décrite par la théorie de Lamé (eq. 3.24). Afin de satisfaire la continuité de la contrainte radiale entre les deux régions, dans (3.24) il faut remplacer le rayon intérieur a par R^* et la tension radiale γ_i par $\gamma_i a/R^*$. Nous obtenons donc

$$\begin{aligned} h\sigma_r &= \frac{\gamma_i a R^* - \gamma_o b^2 - R^{*2} b^2/r^2 \left(\gamma_i a/R^* - \gamma_o\right)}{R^{*2} - b^2}, \\ h\sigma_r &= \frac{\gamma_i a R^* - \gamma_o b^2 + R^{*2} b^2/r^2 \left(\gamma_i a/R^* - \gamma_o\right)}{R^{*2} - b^2}, \end{aligned} \tag{3.54}$$

pour $r > R^*$. La continuité dans la contrainte orthoradiale doit aussi être vérifiée [55] : cela implique $\sigma_\theta = 0$ en $r = R^*$. Nous pouvons alors estimer une longueur de plis à partir de l'équation 3.54 comme :

$$L_{FFT} = R^* = b\frac{\gamma_i}{\gamma_o}\left(\frac{b}{a} - \sqrt{\frac{b^2}{a^2} - \left(\frac{\gamma_i}{\gamma_o}\right)^2}\right). \tag{3.55}$$

3.5 Confrontation expérimentale de la longueur des plis

Dans cette section nous présentons nos résultats expérimentaux sur la longueur des plis et les confrontons aux deux théories proposées.

Il convient tout d'abord de définir la "longueur" d'un pli. Cette notion est en effet ambigüe dans la littérature. D'une part, dans les travaux de Huang *et al.* [28] ou Cerda [58], la longueur des plis est mesuré par la simple inspection des images prises par dessus. Avec un éclairage approprié, la réflexion de la lumière sur la surface courbée permet de distinguer une longueur des plis grâce au contraste (figure 3.25-a). La longueur mesurée avec cette technique correspond donc à la distance par rapport au centre à partir de laquelle l'amplitude des plis s'annule. D'autre part, Géminard *et al.* [56] ont mesuré les profils des plis lors de la déformation à l'aide d'un motif de lignes projetées sur la membrane. Leurs expériences montrent des profils de plis comme celui présenté sur la figure 3.25-b. Ces profils présentent un point d'inflexion qui est utilisé pour définir la longueur des plis. Cette longueur est sensiblement plus faible que la longueur définie à partir de l'annulation de l'amplitude.

Nos expériences nous donnent accès à l'amplitude des déformations sur la globalité de la couronne, et donc nous pouvons estimer la longueur des plis par les deux méthodes. Tout le long de ce chapitre, la théorie sera confrontée à chacune de ces deux longueurs tant pour les résultats expérimentaux que pour la simulation numérique. Afin de simplifier la compréhension du texte, nous ferons référence à la longueur du point d'inflexion par L_1 et à la longueur d'amplitude nulle [7] par L_2 (figure 3.25-b).

Nos couronnes ont un rayon extérieur fini. Si la différence entre les rayons extérieur et intérieur n'est pas suffisante, les plis s'étendent sur toute la largeur de la couronne. Dans ce cas, la discussion théorique sur la longueur des plis n'est plus pertinente. Nous trouvons une telle situation pour les couronnes les plus rigides, car comme montré dans la figure 3.22, la seule façon de les faire flamber est en augmentant leur rapport d'aspect. L'équation 3.52 nous permet d'estimer

7. Dans les expériences nous considérons que l'amplitude est nulle quand elle est comparable au bruit.

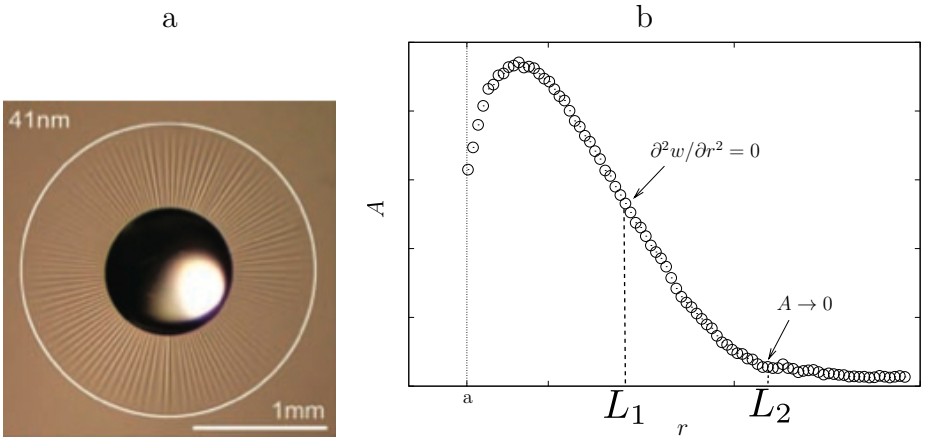


FIGURE *3.25* – a) Image de la formation des plis sur une membrane mince. Le cercle pointillé indique la longueur des plis formés [28]. b) Profil typique obtenu dans nos expériences à partir des champs de hauteur mesurés. Des profils semblables ont été aussi trouvés par [56].

le rapport d'aspect au-dessus duquel la couronne est pliée sur toute sa largeur. Il suffit pour cela d'imposer $L_{ps} = b - a$, ce qui conduit à :

$$\frac{a}{b} = \sqrt{\frac{1/2 - Lec/L_c}{1/2 + L_{ec}/L_c}}. \tag{3.56}$$

Dans la figure 3.26 nous reprenons le graphe de la figure 3.22 en rajoutant la condition de flambage total de l'équation 3.56. Effectivement, l'estimation de la région de flambage total est confirmée par nos observations expérimentales. Dans la suite de notre étude sur la longueur des plis, nous nous focalisons sur des couronnes dont les caractéristiques permettent l'existence des plis avec une longueur au seuil inférieure à $b - a$.

Notre approche expérimentale sera également complétée par des calculs numériques qui permettent d'explorer des régimes dont les paramètres physiques n'ont pas pu être atteints expérimentalement.

Dans une première série d'expériences, nous avons regardé l'évolution de la longueur des plis en laissant fixe la valeur de L_{ec} mais pour des couronnes avec de rapports d'aspect variables. Nous comparons dans la figure 3.27-a les longueurs expérimentales avec la théorie près du seuil (3.51). Nous présentons à la fois les valeurs de L_1 celles de L_2. Nous observons un accord raisonnable entre nos données

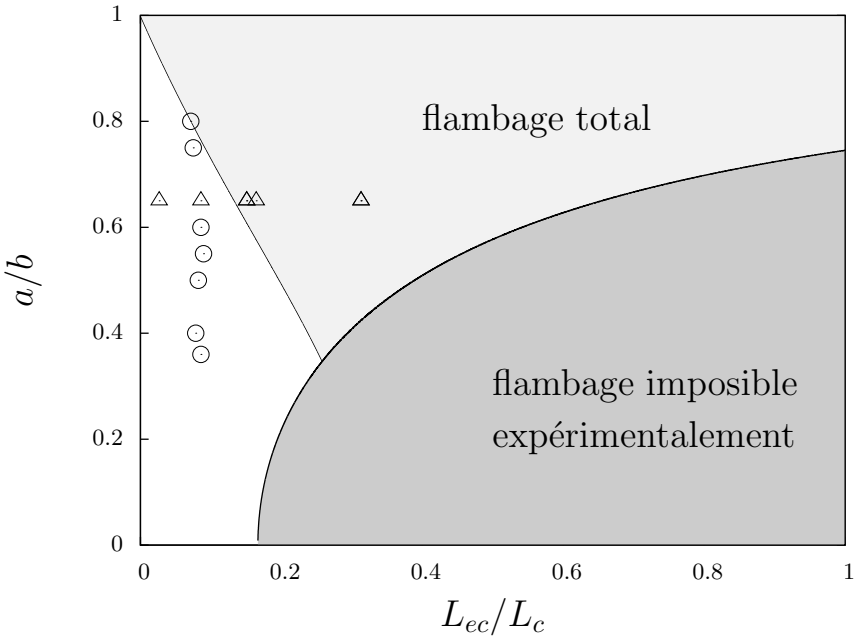


FIGURE *3.26* – Regions de susceptibilité de flambage dans une espace L_{ec}/L_c vs a/b. La ligne solide a été calculée à partir de l'équation 3.47 avec $\sigma_o/\sigma_i = 1/3$. Les cercles et triangles indiquent les caractéristiques des anneaux utilisés dans nos expériences.

expérimentales et la prédiction théorique. Remarquons que la théorie sous-estime la longueur L_2 mais que par contre elle surestime L_1. En revanche, la confrontation avec la théorie loin du seuil présentée dans la graphe de la figure 3.27-b est bien moins convaincante. Cette théorie (3.55) surestime grandement la longueur des plis observée expérimentalement. Ces résultats indiquent que la rigidité de nos membranes n'est pas suffisamment faible pour considérer un effondrement total de la contrainte orthoradiale dans la zone plissée. Cela avait aussi été confirmé auparavant lorsque nous avons trouvé que la rigidité de nos anneaux jouait un rôle important dans la détermination du seuil de flambage.

En fonction de ces premiers résultats nous avons des preuves suffisantes pour dire que nos expériences sont dans le régime près du seuil de flambage.

L'évolution de la longueur des plis en fonction de la tension appliquée est présentée dans la figure 3.28. Pour mieux visualiser le graphe, nous ne montrons que les longueurs obtenues pour les points d'inflexion (L_1). En particulier nous observons que les deux mesures de longueur L_1 et L_2 sont proportionnelles. Les

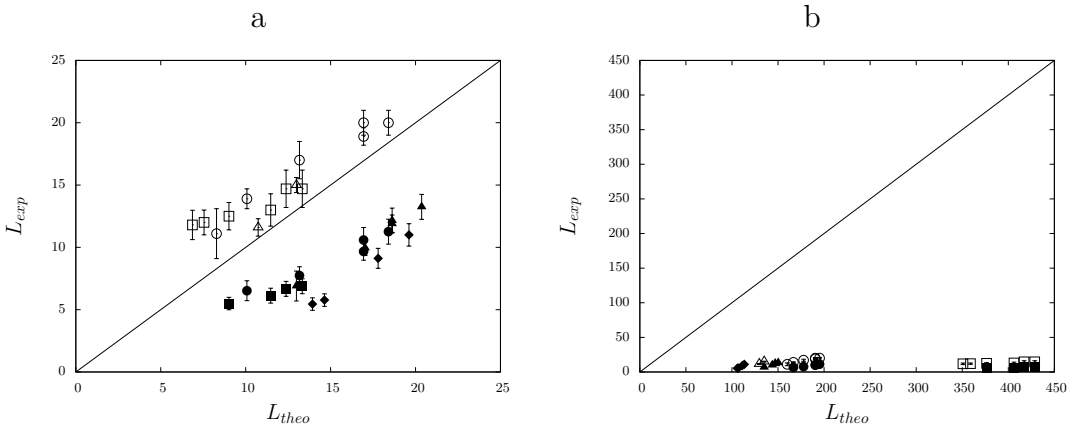


FIGURE *3.27* – Confrontation des données expérimentaux contre les théories a) près du seuil, b) loin du seuil. Les données correspondent à la mesure de la longueur L_1 à partir du point d'inflexion des profils (symboles pleins) et L_2 à partir de l'amplitude de déformation nulle (symboles ouverts). Pour toutes les séries L_{ec}/L_c est contante et d'ordre 0.065

résultats montrent une croissance apparemment linéaire de la longueur en fonction de la tension. La pente de croissance des plis change de manière importante selon le rapport d'aspect de la couronne : elle est d'autant plus faible que le rapport d'aspect de la couronne est petit. Ainsi, l'évolution de la longueur des plis pour des couronnes avec un rapport d'aspect $a/b = 0.36$ est à peine perceptible.

Les données expérimentales suggèrent aussi que la longueur des plis au seuil (quand $\gamma_o/\gamma_i \to \gamma_o/\gamma_{i\,seuil}$) est non nulle et semble indépendante du rapport d'aspect de la couronne. Ces résultats confirment la non dépendance de L_{ps} en a/b prédite par l'équation 3.52, ce qui est aussi compatible avec les simulations numérique. De plus, la valeur de L_{ps} trouvée à partir des nos expériences apparaît assez proche de sa valeur théorique.

Une façon de mieux comprendre l'effet de la géométrie de la membrane est de remarquer que des expériences pour différents rayons extérieurs b finis peuvent être ramenées dans un certain sens au cas d'une membrane infinie ($b = \infty$). En effet, en partant d'une membrane infinie soumise à une tension (à l'infini) γ_∞ et γ_o en $r = a$, on peut calculer une répartition des contraintes radiales (équation 3.24) $\sigma_r = \gamma_\infty + (\gamma_i - \gamma_\infty)a^2/r^2$ et $\sigma_\theta = \gamma_\infty - (\gamma_i - \gamma_\infty)a^2/r^2$. Cependant, si l'on

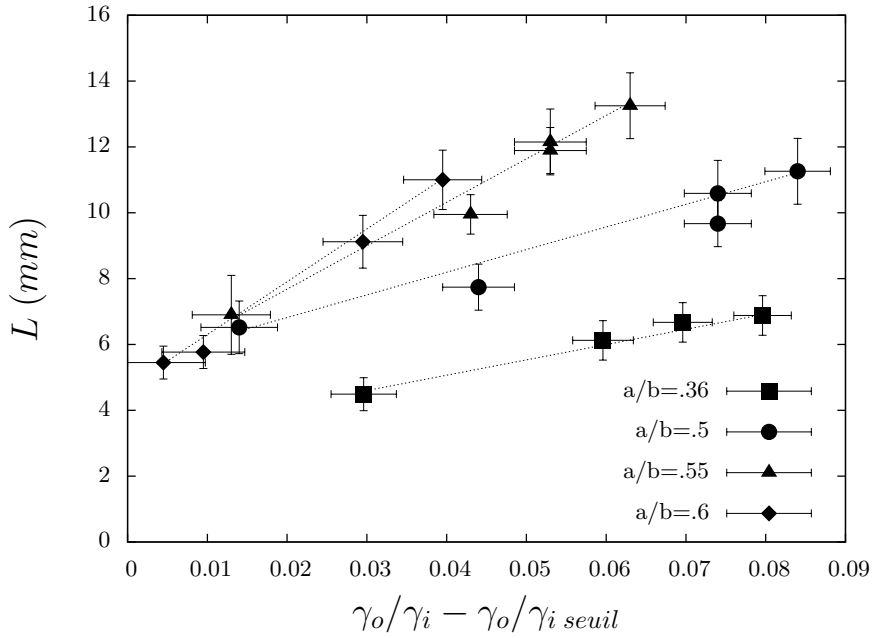


FIGURE *3.28* – Résultats expérimentaux de la longueur des plis en fonction de la tension appliquée. Les données correspondent à la mesure de la longueur à partir du point d'inflexion des profils. Pour toutes les séries L_{ec}/L_c est constante et d'ordre 0.065.

choisit

$$\gamma_\infty = \frac{\gamma_o b^2 - \gamma_i a^2}{b^2 - a^2}, \tag{3.57}$$

on retrouve en $r = b$ une contrainte $h\sigma_r = \gamma_o$. Par ce choix de contrainte à l'infini, nous retrouvons exactement les contraintes de Lamé attendues dans la membrane pour $a < r < b$. Or nous avons vu que nos expériences se situent près du seuil, donc avec une distribution de contraintes très proche de celle de Lamé. En conséquence, les motifs de plis observés sur notre membrane infinie (longueur d'onde, longueur de plis) seront identiques à ceux de la membrane de taille finie b. Ceci montre en particulier qu'au seuil, la longueur des plis est indépendante de la géométrie (comme on l'a vu sur la figure 3.28).

Cependant, puisque $\gamma_o < \gamma_i$, des conditions identiques seront obtenues avec des tensions γ_o qui doivent être d'autant plus petites (et proches de γ_∞) que le rayon b sur lesquelles elles sont appliquées est grand. C'est pourquoi le flambage de couronnes à grand b (faible rapport a/b) est rendu difficile dans nos expériences. D'autre part, sur la figure 3.29 nous présentons pour les même mesures que celles de

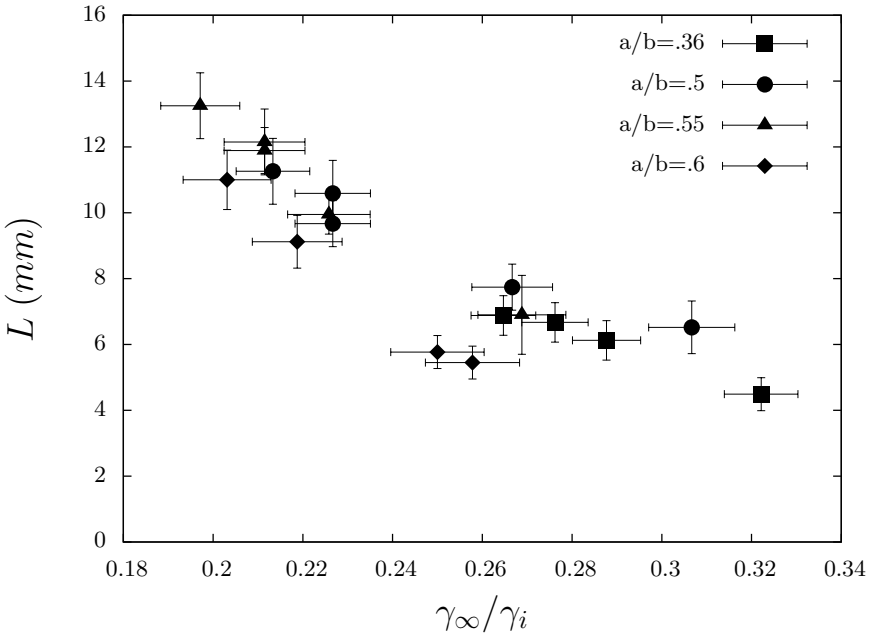


FIGURE *3.29* – Résultats expérimentaux de la longueur des plis en fonction de γ_∞. Les données correspondent à la mesure de la longueur à partir du point d'inflexion des profils. Pour toutes les séries L_{ec}/L_c est constante et ~ 0.065.

la figure 3.28, la longueur des plis L_1 en fonction de la tension équivalente à l'infini γ_∞. Les données se rassemblent sur une courbe maîtresse qui correspondrait ainsi à une expérience dans une membrane infinie. En quelque sorte, nos expériences avec des membranes finies nous permettent de balayer des paramètres difficiles à atteindre expérimentalement, avec un inconvénient cependant : si un petit rayon extérieur b permet d'explorer le flambage plus loin du seuil, il ne permet d'observer que des motifs de taille réduite $L < (b - a)$.

D'un point de vue théorique, nous pouvons donc, dans une limite proche du seuil, oublier les effets de géométries (le rapport d'aspect a/b) et n'utiliser que les paramètres sans dimensions suivants $a/L_{ec}, L_{ec}/L_c, \gamma_\infty/\gamma_i = (a^2 - b^2\gamma_o/\gamma_i)/(a^2 - b^2)$. La théorie simplifiée (équation 3.47) s'exprime simplement en disant que le flambage a lieu pour :

$$\frac{\gamma_\infty}{\gamma_i} = \frac{1}{2} - \frac{L_{ec}}{L_c}.$$

D'autre part, la longueur des plis (équation 3.51) se réécrit simplement en

$$L_p/a = (\gamma_i/\gamma_\infty - 1)^{1/2} - 1.$$

Au contraire, l'équation (3.55) qui donne la longueur des plis dans la limite loin du seuil ne peut pas se mettre sous une forme simplifiée où b et γ_o seraient remplacés par la simple donnée de γ_∞ : la géométrie de la plaque et son rapport d'aspect intervient de façon explicite dans ce régime.

Pour compléter la discussion autour de la longueur des plis il faudra regarder aussi leur variation en fonction de la rigidité de la plaque. Malheureusement, comme il a été expliqué avant, nous ne pouvons pas réaliser des expériences en balayant une gamme de rigidité suffisante pour avoir des résultats concluants. D'une part le contraste de tension de surface accessible expérimentalement est trop faible pour faire flamber des membranes plus rigide. D'autre part, l'élaboration (et surtout la manipulation) de films d'élastomères plus minces s'avère très délicate car l'élastomère tend à adhérer sur lui-même lors de sa préparation (décollement, dépôt sur le bain). Il est néanmoins possible d'utiliser les films de polystyrène ultra-fins (typiquement 50 nanomètres d'épaisseur) mis en œuvre dans les expérience de la goutte [28], qu'il faut alors découper en couronne. Ce régime est actuellement exploré par l'équipe de N. Menon à l'Univesité de Amherst avec qui nous collaborons.

La résolution numérique peut cependant pallier en partie aux limitations expérimentales. Les résultats des calculs numériques sont présentés dans la figure 3.30. Les calculs nous permettent d'estimer la longueur des plis définie L_1 et L_2, et la distance pour laquelle $\sigma_\theta = 0$ (comme défini dans l'équation 3.52). Nous trouvons que les deux premières estimations de la longueur croissent selon $(L_{ec}/L_c)^\alpha$, avec $\alpha \sim 0.38$ dans les deux cas. En même temps, nous observons que l'estimation de la longueur des plis à partir de $\sigma_\theta = 0$ reste valide jusqu'à une certaine valeur de L_{ec}/L_c, au delà de laquelle la longueur des plis commence à être très surestimée : pour des plaques plus rigides (grandes valeurs de L_{ec}/L_c), les plis restent localisés dans une zone (L_1, L_2) nettement plus petite que la zone où l'on observe des contraintes compressives (repérée par L_p), et le critère que nous avons choisit n'est donc plus pertinent. Il est important remarquer que pour la région de $L_{ec} \sim 0.1$ correspondant à nos expériences, on trouve numériquement le même rapport entre les trois définitions de la longueur que celui obtenu expérimentalement.

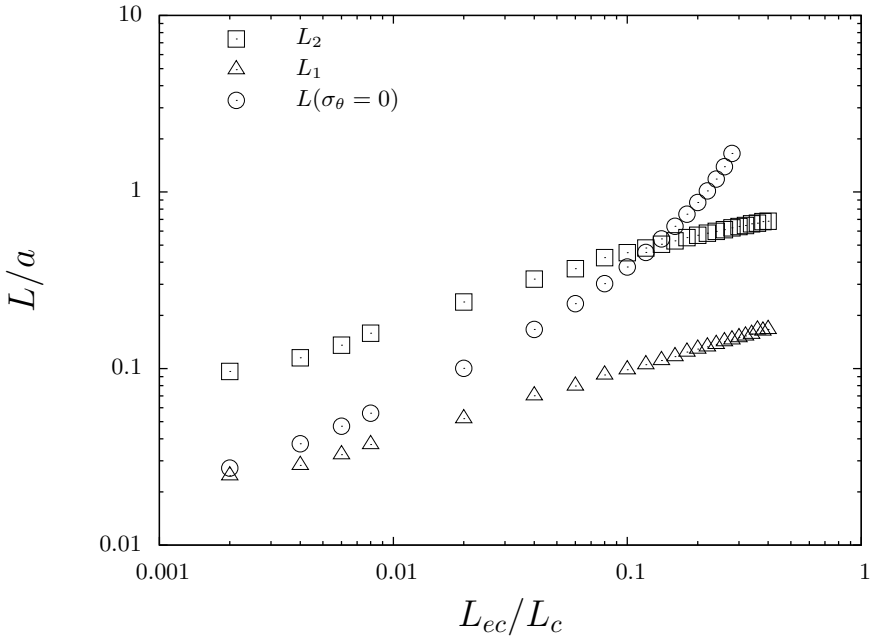


FIGURE *3.30* – Résultats obtenus à partir de la simulation numérique pour la longueur des plis en fonction de la rigidité de l'anneau. Les symboles correspondent à à la mesure de la longueur à partir du point d'inflexion des profils (triangles), à l'amplitude de déformation nulle (carrés) et à la distance pour laquelle $\sigma_\theta = 0$ (cercles). Les calculs ont été réalisés avec $a/b = 0.36$ et $L_c = 2.7$mm.

Plusieurs questions restent ainsi posées du point de vue théorique : pouvons-nous prédire simplement le comportement $L_{1,2} \sim a(L_{ec}/L_c)^\alpha$ que nous observons numériquement au seuil ? Pourquoi le critère simple qui consiste à dire que les plis vont se propager jusqu'à la limite de la zone compressive (définition de L_p) ne fonctionne-t-il plus pour des membranes plus rigides ($L_{ec}/L_c \gg 0.1$) ? Pouvons-nous trouver un meilleur critère, valable au delà de cette limite ?

3.6 Effondrement des anneaux

Jusqu'à présent, nous nous sommes attachés à décrire la déformation des couronnes au delà du seuil de flambage. Ces états sont décrits par une certaine longueur d'onde déterminée par la rigidité de la membrane et la densité de l'eau, et une amplitude et longueur des plis qui augmentent en fonction de la tension appliquée après le flambage. Mais que se passe-t-il si nous continuons à augmenter

la tension appliquée ? L'amplitude des plis croit-elle indéfiniment ?

Nous observons qu'au delà d'un certain seuil, les plis réguliers ne sont plus stables : la couronne s'effondre complètement. À partir des images présentées dans la figure 3.31 nous pouvons voir que la déformation de la membrane se focalise dans certaines régions en formant des froncements, alors que le reste de la couronne se relâche et revient à son état plat. La transition entre un état de déformation avec

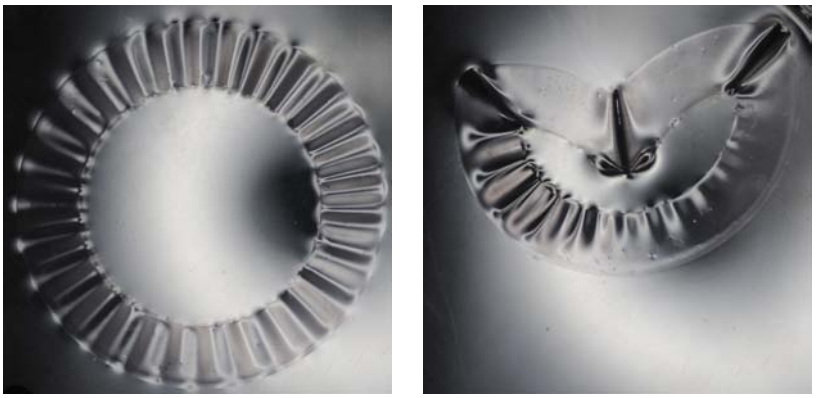


FIGURE *3.31* – Images d'un anneaux avant et après effondrement.

des plis réguliers homogènes et la focalisation des froncements dans des membranes flottantes a été observée par Pocivavsek *et al.* [62]. Ces auteurs on étudié expérimentalement la formation de plis sur une membrane de polyester flottant sur la surface de l'eau et soumise à une certaine compression apparente $\epsilon = \Delta L/L$. Pour les petites compressions, ils trouvent une formation régulière de plis distribuée sur toute la surface de la membrane. Cet état de déformation est décrite par la même théorie de flambage uni-dimensionnelle que nous avons présentée au début du chapitre. Le nombre des plis est ainsi déterminé à partir du bilan entre les énergies de flexion et de gravité (équation 3.35), leur amplitude dérivant de la condition d'inextensibilité de la membrane (eq. 3.37) qui se traduit au premier ordre par $A \sim \lambda\sqrt{\epsilon}$. Cependant, au delà d'une compression critique $\epsilon L/\lambda \sim 0.3$, un pli se distingue par une amplitude qui croît comme $A \propto \epsilon L$ alors que les plis voisins s'atténuent (figure 3.32-a). Ce pli conduit à un froncement dans lequel toute la déformation de la membrane se focalise. Ce nouvel état ne peut plus être décrit par la théorie linéaire utilisé dans le cas des plis réguliers.

D'un point de vue énergétique, l'état régulier est caractérisé par une énergie

totale :

$$U_r \sim \sqrt{B\rho g}\epsilon, \tag{3.58}$$

où B est le module de rigidité de la membrane, ρ est la masse volumique de l'eau et g est la constante de gravité. Notons qu'un calcul mené à un ordre supérieur conduit à $U_R \sim (\rho g B)^{1/2}(\Delta L - \Delta L^2/L)$. Une compression à force imposée n'est donc pas stable puisque la force $\partial U_r/\Delta L$ diminue au delà de la compression critique. Dans l'état focalisé, l'énergie de flexion de la membrane est concentrée dans la pointe du pli où la courbure de la membrane $1/\ell$ est maximale : $U_b \sim B/\ell$. L'énergie potentielle du liquide soulevé sous le pli s'écrit, à l'ordre 3 en ϵ [62] : $U_p \sim \rho g \ell L^2 \epsilon^2 - \rho g L^3 \epsilon^3$. Le rayon de courbure du pli est finalement déterminé par la minimisation de la somme $U_b + U_p$:

$$l \sim (B/\rho g)^{1/2}(1/\Delta L),$$

l'énergie totale correspondante étant donnée par :

$$U_f \sim \sqrt{B\rho g}\Delta L - \rho g \Delta L^3. \tag{3.59}$$

Dans la limite $\rho g \Delta L^3 \gg (\rho g B)^{1/2}\Delta L^2/L$, c'est à dire,

$$L\Delta L \gg (B/\rho g)^{1/2},$$

la déstabilisation par focalisation est donc plus favorable que l'état régulier.

Le graphe de la figure 3.32-b présente les résultats expérimentaux de Pocivavsek *et al.* sur l'évolution de l'amplitude des plis en fonction de la compression imposée. Nous pouvons remarquer qu'à partir de $\Delta L/\lambda \sim 0.3$, l'amplitude A_0 d'un des plis se singularise et commence à diverger, alors que l'amplitude A_1 des plis voisins s'atténue. Finalement, quand le déplacement imposé vaut λ, toute la déformation se concentre dans un seul pli dont les extrémités entrent en contact. Ces résultats expérimentaux sont qualitativement consistants avec le critère énergétique dérivé, puisqu'ils montrent que pour les grandes valeurs de la compression l'état focalisé devient effectivement plus stable.

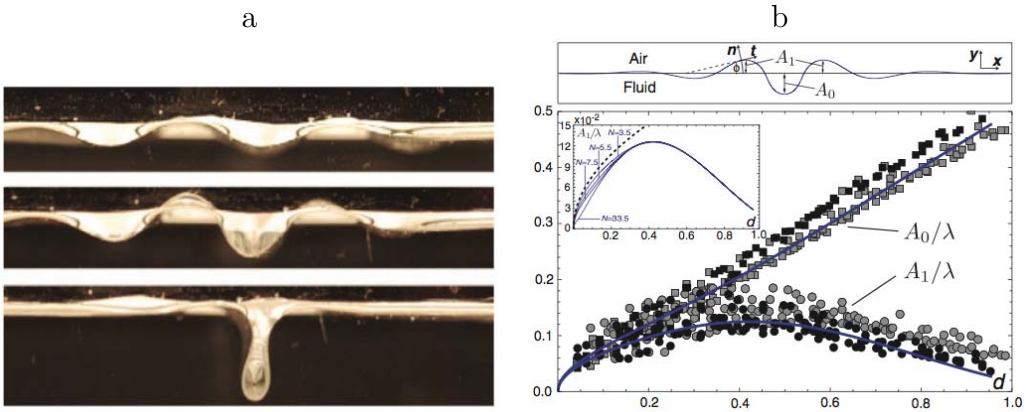


FIGURE *3.32* – a) Profil d'une membrane flottant dans l'eau soumise à une compression latérale. La compression augmente entre chacune des images, du haut vers le bas. Clichés pris de [62]. b) Données expérimentales de l'amplitude en fonction de la compression imposée obtenues par Pocivavsek [62].

Des études théoriques plus détaillées ont récemment confirmé un scénario de localisation similaire à celui du flambage sur une fondation non-linéaire dont la raideur devient négative pour de grandes amplitudes et ont clarifié le mode de transition entre les états homogènes et localisés [65, 66]. Notons que cette situation est très générale et qu'on la retrouve quand un système étendu présente une réponse avec un domaine de rigidité négative : mousses solides, mètre-ruban, striction plastique, gonflement d'un ballon en caoutchouc),

Dans le cadre de nos expériences, nous avons exploré la déformation des couronnes très au-delà du seuil de flambage. À différence des expériences réalisées par Pocivavsek *et al.*, nous n'imposons pas un déplacement pour comprimer la couronne, mais une différence de tension entre ses bords. Cela complique la mesure de l'amplitude des plis lorsque nous nous rapprochons de l'effondrement, car en effet, dès que nous arrivons dans un état de déformation instable, les couronnes s'effondrent de manière instantanée. Nous avons cependant tenté d'estimer l'amplitude de déformation près du seuil de focalisation en prenant des images en rafale. Cette procédure est néanmoins hasardeuse et en général il faut refaire une même expérience plusieurs fois afin de capturer l'effondrement.

Dans la figure 3.33 nous présentons l'évolution de l'amplitude individuelle des plis formés dans une couronne lorsque nous l'emmenons vers l'effondrement. Au début de la déformation nous observons que l'amplitude, grands ou petits, évolue

comme $A \sim \sqrt{\delta_p}$, où δ_p est la réduction du périmètre de la couronne que nous mesurons directement sur les images. Cependant, au delà d'une certaine valeur de la compression, l'amplitude des plis les plus petits diminue rapidement alors que celle des plis les plus grands continue à augmenter. Ce comportement paraît très proche de la focalisation des plis décrite par Pocivavsek *et al.*. Cependant nous trouvons dans notre cas une divergence de l'amplitude des plis pour des valeurs de compression considérablement plus faibles.

La figure 3.33 présente enfin deux régions dans l'espace des déformations que nous avons identifié par les couleurs jaune et rouge. La zone jaune, représente la région des faibles déformations où l'état flambé de la couronne est encore réversible, c'est à dire que si nous relâchons la différence de tension entre les bords de la couronne, celle-ci revient dans l'état plat. En revanche, la zone rouge représente la zone de déformation où la couronne s'effondre dynamiquement. Dans certains cas, la couronne peut revenir à son état plat après l'effondrement si nous relâchons la tension, mais généralement la couronne reste collée sur elle-même après l'effondrement.

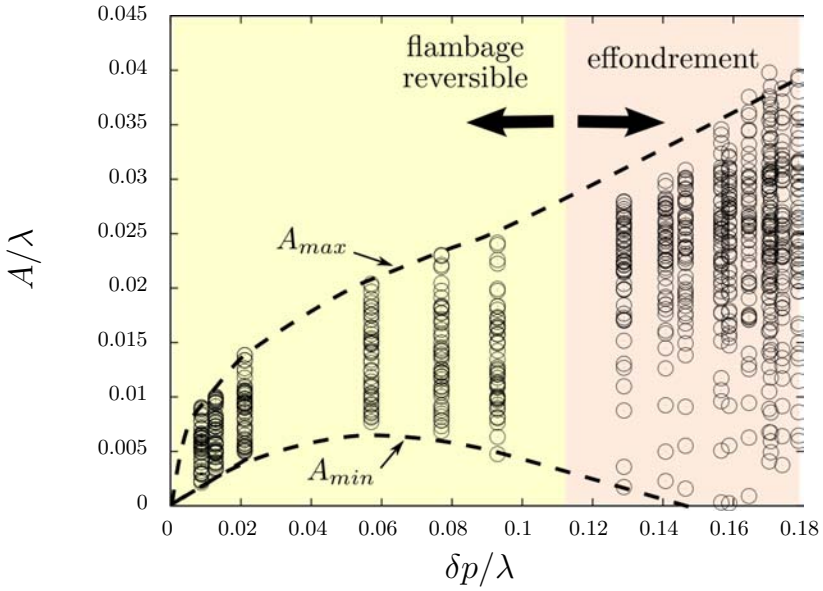


FIGURE *3.33* – Résultats expérimentaux sur l'amplitude des plis en fonction de la compression appliquée pour une couronne de $90\mu m$ d'épaisseur et de rapport d'aspect $a/b = 0.65$.

La stabilité relative de l'état régulier peut sembler surprenante dans nos expé-

riences. En effet cet état est instable lors d'une compression uniaxiale où la force est imposée (termes négatifs de l'énergie totale lorsque l'on tient compte des premiers termes non-linéaires). Au premier ordre, une couronne étroite de rayon R et de largeur w peut être assimilée à une tige linéaire de longueur $2\pi R$. Si nous imposons une différence de tension de surface $\Delta\gamma$ entre l'intérieur et l'extérieur de la couronne, celle-ci tend à se comprimer. Une variation de rayon dR correspond alors à un gain en énergie de $2\pi R\Delta\gamma dR$ pour une variation de périmètre $2\pi dR$. Imposer une différence de tension de surface entre l'intérieur et l'extérieur d'une couronne revient ainsi à comprimer une tige linéaire avec une force $R\Delta\gamma$. Si cette force était constante, la compression serait effectivement instable au-delà du seuil de flambage. Cependant la compression de la couronne tend à diminuer R et par conséquent la force équivalente. Cette atténuation de la force tend ainsi à stabiliser l'état régulier.

3.7 Conclusion

Les travaux présentés dans ce chapitre étaient motivés par les plissement d'une membrane observés lorsqu'une goutte d'eau y est déposée [28]. Dans ces expériences la longueur d'onde du plissement était bien comprise, néanmoins la longueur de ces plis restait une question encore débattue. En effet ce problème est complexe car les effets de la goutte dépendent de la réponse de la membrane et ne peuvent être explicités simplement.

Nous avons étudié expérimentalement une situation modèle de flambage capillaire macroscopique : une couronne mince élastique flottant à la surface de l'eau est soumise à une différence de tension de surface entre l'intérieur et l'extérieur. La tension de surface a l'avantage considérable de générer une force de traction homogène, exactement perpendiculaire au bord de la membrane, ce qui est l'une des seules façons de réaliser expérimentalement ce type de conditions aux limites. En outre, nous pouvons caractériser très précisément le motif de plissement par un dispositif optique.

Dans nos expériences macroscopiques, la longueur d'onde du plissement est sélectionnée par un équilibre entre la rigidité de la membrane et la gravité (poids du liquide) qui est dominante aux échelles auxquelles nous travaillons (contrairement au problème initial). Nous avons caractérisé les seuils de flambage expérimentalement et proposé des lois d'échelle pour les estimer simplement. Nous avons montré que la longueur des plis dans nos expériences pouvait être estimée à partir de la répartition des contraintes dans la membrane avant flambage. Dans ce cas, la taille du nos motifs de plissement ne dépend pas de la rigidité en traction Eh de la membrane mais seulement de la flexion, contrairement au cas des gouttes de [28]. Ceci est probablement dû au fait que les membranes utilisées dans les expériences de Huang *et al.* sont extrêmement fines (typiquement 50 nm), et les états observés se trouvent certainement très au delà du seuil de flambage. Nous avons donc exploré et décrit un régime finalement assez différent de l'expérience qui a motivé ces travaux.

Nous avons aussi observé un effondrement brutal des couronnes pour de grandes amplitudes de plis, ce qui ne semble pas se produire dans le cas des gouttes. Peut-on prédire le seuil de cette instabilité ? Peut-on l'empêcher ? Cela serait particulièrement intéressant puisque l'effondrement constitue un des facteurs qui limite

l'exploration expérimentale loin du seuil.

Finalement nous notons que si le nombre d'onde est constant sur toute la zone plissée de la membrane, la longueur d'onde augmente à mesure que l'on s'éloigne vers le bord extérieur, à cause de la géométrie circulaire de la couronne. Cette variation de longueur d'onde tend à frustrer le système (la longueur d'onde idéale, résultat d'une sélection locale devrait être uniforme). Dans la plupart des couronnes étudiées dans notre travail, la longueur des plis n'est pas suffisante pour que la longueur d'onde présente des variations significatives (a/b proches de 1) le long du motif de plissement, et nous pouvons négliger cet effet géométrique. Cependant nous observons parfois un redoublement de certains des plis à l'extérieur de la couronne (figure 3.34). Nous pouvons imaginer que pour maintenir une longueur d'onde proche de la valeur idéale, le système doit générer une cascade de défauts de dédoublement de plis, du cœur vers la périphérie de la couronne.

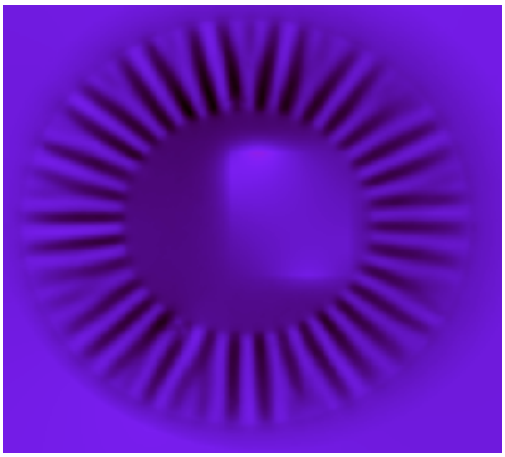


FIGURE *3.34* – Profil de hauteur d'une couronne déformée présentant une réorganisation du nombre des plis loin du bord intérieur. L'image correspond à une couronne de 30 μm d'épaisseur et de rapport d'aspect $a/b = 0.5$.

Sous quelles conditions de géométrie et de paramètres mécaniques pouvons-nous observer ces dédoublements motifs ? S'agit-il d'une instabilité secondaire (le motif de flambage initial restant à nombre d'onde constant) ? Nous n'avons pas eu le temps d'approfondir ce point particulier. Cependant, dans le chapitre suivant, nous étudions des motifs de plissement en cascade, qui semblent à première vue présenter une certaine similitude avec cette dernière observation.

Chapitre 4

Plis hiérarchiques

Au cours du chapitre précédent, nous avons étudié comment la compression d'une feuille pouvait engendrer la formation de plis. La longueur d'onde de ces derniers est donnée par l'équilibre mécanique entre la flexion de la feuille et la déformation du substrat sur laquelle elle est posée. À cause de la géométrie axisymétrique, si le nombre d'onde est constant, la longueur d'onde doit varier avec le rayon. Ce système, qui est caractérisé par une longueur d'onde intrinsèque, conduit donc à une augmentation par saut du nombre d'onde au delà d'un certain rayon. On peut imaginer que ce processus devrait se répéter et donner lieu à une cascade de dédoublement de plis pour maintenir une longueur d'onde constante tout en restant compatible avec une géométrie axisymétrique.

Au-delà de l'exemple précédent, des cascades de plis sont également observées si une feuille est plissée à une extrémité et libre (ou plissée différemment) à l'autre.

On observe ainsi des cascades sur des films polymériques très minces déposés à la surface de l'eau puis comprimés mécaniquement [30] (figure 4.1-a). La longueur d'onde (quelques centaines de microns) est fixée par le même équilibre entre gravité et flexion que dans le chapitre précédent, mais le long de la frontière les effet localisés du ménisque liquide vont sélectionner une longueur d'onde différente plus petite, et une cascade se forme pour raccorder les deux plissements. Un disque du même polymère (polystyrène) se plisse spontanément s'il est déposé sur une goutte d'eau (figure 4.1-b), comme conséquence de la différence de métrique entre une sphère et un plan. Ces plis sont aussi sujets à une cascade près des bords

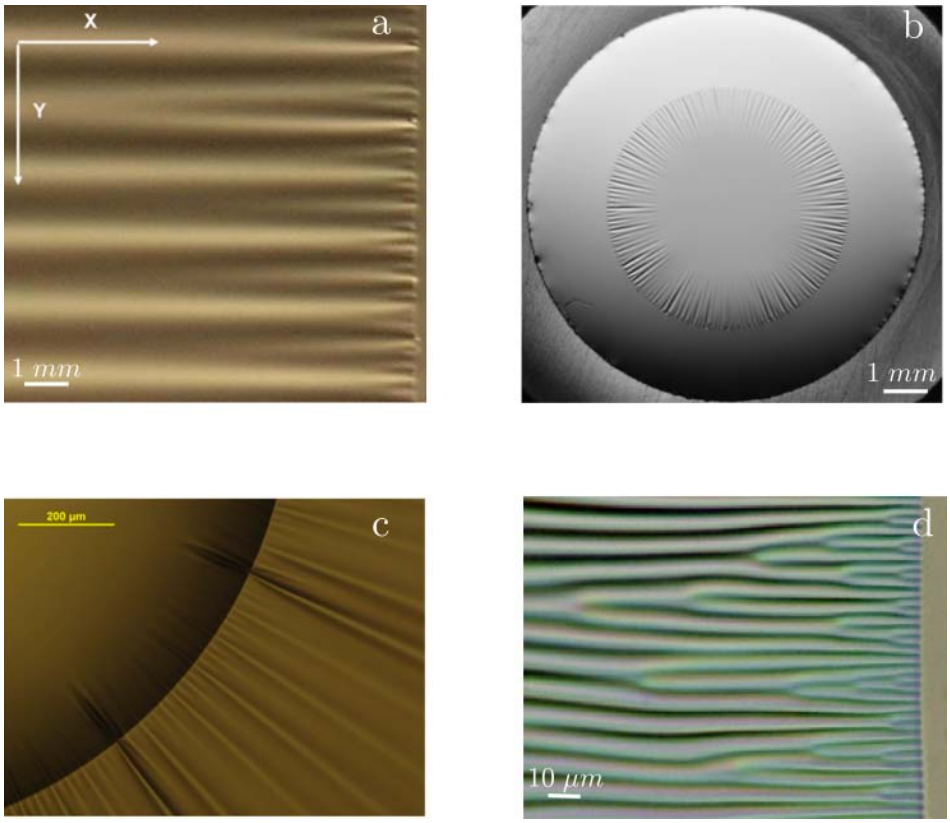


FIGURE *4.1* – Exemples de cascade de plis (a) membrane de polystyrène ultra mince (50 nm) comprimée à la surface de l'eau (tiré de [30]) (b) Un disque d'une telle membrane, posé sur une goutte d'eau (photo Hunter / N.Menon) (c) Une goutte d'eau déposée sur un tel film flottant le plisse, mais près de la ligne de contact, une cascade peut être observée. (d) Couche de titane déposée sur une couche de polystyrène dans laquelle diffuse un solvant (cliché H.Vandeparre)

.

(longueur d'onde de l'ordre de quelques centaines de microns). Enfin, si l'on observe les plis générés par une goutte déposées sur ces même membranes flottantes (qui ont motivé nos travaux présentés au chapitre précédent) une cascade apparaît près de la ligne de contact avec la goutte d'eau (figure 4.1-c), probablement parce que l'amplitude des plis y est pénalisée (longueur d'onde de quelques dizaines de microns).

Un exemple de cascade sur un système très différent est représenté sur la figure 4.1-d qui illustre un film de titane déposé sur un substrat polymérique soumis à de fortes contraintes résiduelles. En présence d'un solvant [67] qui diffuse selon un front, le polymère perd sa rigidité (voire devient visqueux), et des plis sont alors formés. Près du front ces plis doivent garder une petite longueur d'onde et une cascade leur permet de développer des longueurs d'onde plus grandes lorsqu'on s'éloigne du front de diffusion (longueur d'onde de l'ordre de quelques dizaines de microns).

Enfin à une échelle encore plus petite (longueur d'onde de l'ordre du micron), des films de graphène (couche atomique de graphite) suspendus entre deux rebords (figure 4.2-b) donnent lieu à de telles cascade. Les contraintes sont dues à des différences de dilatation entre substrat et graphène, qui provoquent un flambage. Le film est restreint par l'encastrement le long de ses bords et une cascade apparaît de nouveau.

Terminons par un exemple macroscopique, qui nous a le plus occupé du point de vue expérimental dans ce travail : observons un rideau suspendu verticalement (figure 4.2-a). La position des attaches impose en général des plis de courte longueur d'onde et de faible amplitude sur la partie supérieure du rideau. Cependant cette configuration ne se propage pas le long du rideau. Nous observons des plis moins nombreux, mais plus amples vers le bas du rideau (longueur d'onde de l'ordre de quelques dizaines de centimètres). L'évolution de ces plis semble suivre un ordre hiérarchique : une paire de plis fusionne à une position bien localisée pour donner naissance à un pli unique.

Quelle que soit l'échelle spatiale et la géométrie, l'évolution de la longueur d'onde s'effectue par des coalescences successives de paires de plis. Peut-on considérer que ces systèmes sont équivalents ? Nous proposons ici de décrire la transition entre ces plissements de longueurs d'ondes différentes dans une situation modèle.

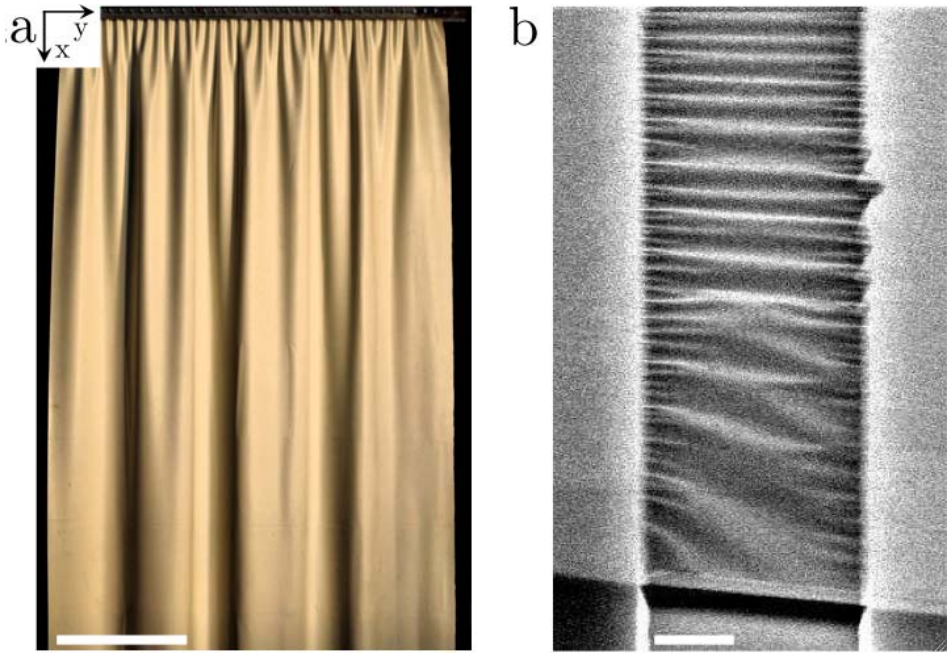


FIGURE *4.2* – Cascade de plis le long d'un rideau : les plis imposés nombreux aux bords se raréfient progressivement. (a) Rideau macroscopique en latex (barre d'échelle : 25 cm) ; (b) Bicouche de graphène tendue au dessus d'une rainure (barre d'échelle : 1 μm).

D'un point de vue quantitatif, l'énergie élastique par unité de surface d'une membrane courbée est $E_b \sim B\kappa^2$, B étant sa rigidité et κ sa courbure. Considérons une membrane courbée avec un profil sinusoïdal illustrée sur la figure 4.3. Dans le régime des petites déformations,c'est à dire $A \ll \lambda$, la courbure [1] de chacun des n plis s'écrit $\kappa \sim A/\lambda^2$. L'énergie élastique de toute la plaque est ainsi donnée par :

$$E_b \sim B\left(\frac{A}{\lambda^2}\right)^2 wL \sim B\frac{A^2}{\lambda^4}wL. \tag{4.1}$$

Si en plus nous rajoutons la condition d'inextensibilité :

$$L_0 = \int_0^L \sqrt{1+z'^2}dy, \tag{4.2}$$

nous trouvons que la longueur d'onde et l'amplitude de la déformation ne sont pas

1. La courbure est définie comme $\kappa = z''/(1+z')^{3/2}$. Dans le cas des petites déformations avec $A \ll \lambda$, nous considérons $z' \ll 1$, et donc $\kappa \sim z''$.

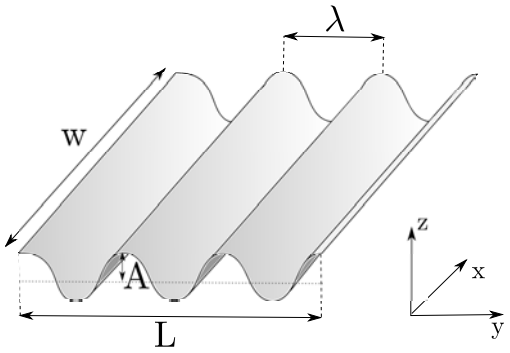


FIGURE *4.3* – Membrane de profil sinusoïdal d'amplitude A et de longueur d'onde λ.

indépendants l'une de l'autre, mais qu'elles sont liés par :

$$A = \lambda\sqrt{\epsilon}, \tag{4.3}$$

où $\epsilon = (L_0 - L)/L$ est la compression latérale de la plaque.

La conséquence de l'équation 4.1 est très claire : pour réduire l'énergie élastique il faut augmenter la longueur d'onde, ou autrement dit, diminuer le nombre de plis. Cette diminution du nombre de plis conduit en revanche à des plus grandes amplitudes. Nous trouvons bien des plis moins nombreux mais plus amples au bas du rideau. Cependant, la transition entre longueurs d'onde n'est pas complètement evidente. Comment la membrane passe-t-elle d'un mode de plissage de longueur d'onde λ_1 à un autre de longueur d'onde λ_2 ?

Dans la suite, nous allons présenter une série d'expériences qui nous permettront d'identifier les paramètres qui dictent la transition de longueur d'onde.

4.1 Fusion élémentaire

Avant d'essayer de comprendre ce qui se passe dans la totalité d'un rideau, commençons par étudier la fusion de deux plis en un pli unique. La figure 4.4 montre une vue rapprochée d'une petite région près du bord confiné du rideau illustré dans la figure 4.2 de la section précédente. Dans cette image nous observons la coalescence de deux plis voisins, séparés par une distance λ_1, en un troisième pli plus grand. Ce nouveau pli est en même temps séparé des autres "nouveaux" plis voisins, par une distance λ_2. En effet, la conséquence de la coalescence est de

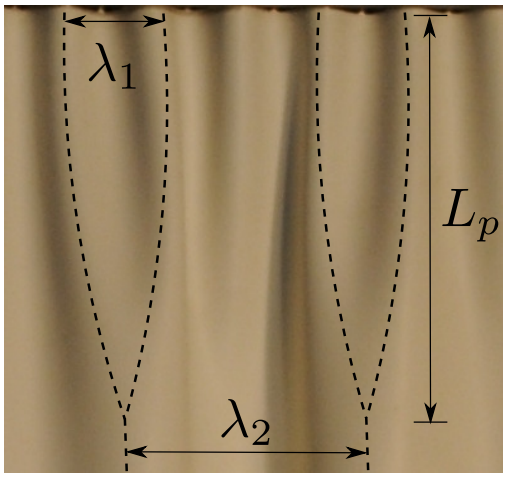


FIGURE *4.4* – Cascade élémentaire sur un rideau suspendu.

diminuer le nombre de plis. Une caractéristique très importante et qui représente la partie fondamentale de notre étude, est la distance du bord L_p à laquelle deux plis voisins coalescent. Pour étudier cette longueur de transition, nous avons réalisé des expériences modèles où nous forçons une membrane flexible à passer d'une longueur de plissage λ_1 à une autre $\lambda_2 = 2\lambda_1$.

4.1.1 Dispositif expérimental

Pour ces expériences nous utilisons des feuilles de polypropylène *BOPP Inova* (Bi-axially oriented polypropylene par ses initiales en anglais) d'épaisseurs 30, 50, 90, 100 et 250 μm et de module de Young $E \sim 2.6GPa$. Nous imposons un profil sinusoïdal au bord de la feuille grâce à des mords en plexiglass de 5 mm d'épaisseur usinés par découpe laser. Les mords ont été fabriquées avec des profils d'amplitude et longueur d'onde variables : un premier groupe avec une amplitude fixe $A = 3mm$ et des longueurs d'onde λ = 13, 18, 26 et 58 mm, et un deuxième groupe avec une longueur d'onde fixe $\lambda = 24\ mm$ et amplitudes A = 3, 4, 5, 6 et 7 mm. Pour chaque mord nous avons usiné un mord complémentaire de longueur d'onde 2λ et amplitude $2A$ que nous plaçons à une distance L_2 pour imposer la transition à la longueur d'onde suivant (figure 4.5-a). Une fois que la feuille est pressée par les mords, nous prenons des images par le dessus avec un appareil photo *Nikon D90*. Les images sont ensuite traitées avec *ImageJ* pour mesurer la longueur de

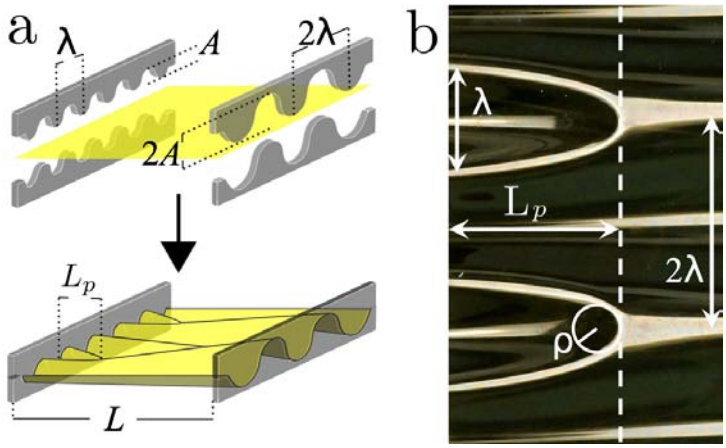


FIGURE *4.5* – (a) Expérience modèle permettant d'isoler le doublement de longueur d'onde des plis. En amont une longueur d'onde et une amplitude A sont imposées, alors qu'en aval les mords ont une longueur d'onde 2 et une amplitude $2A$ (qui permet de préserver la largeur de la feuille). (b) Plis vus du dessus, le doublement de longueur d'onde s'effectue à une distance L_p du premier mord (de longueur d'onde λ).

persistance L_p ainsi que le rayon de courbure ρ de la pointe du défaut formé lors de la transition de longueur d'onde (figure 4.5-b).

4.1.2 Observations expérimentales

Les résultats obtenus pour l'ensemble des mords et des feuilles sont représentés sur la figure 4.6. Adimensionner A par h et L_p par λ permet de superposer toutes nos données expérimentales sur une même courbe maîtresse. Nous observons que la longueur de pénétration L_p augmente en fonction de l'amplitude et de la longueur d'onde imposées au bord. Nous observons également que L_p augmente lorsque l'épaisseur de la feuille est réduite. La courbe expérimentale obtenue suggère une dépendance de la longueur de pénétration selon la loi de puissance $L_p/\lambda \sim (A/h)^{1/2}$. Considérons à présent les défauts formés lors de la transition. En première approximation, leur forme est parabolique, se qui suggère des profils auto-similaires. En effet si nous "rescalons" les images par rapport à la longueur d'onde des plis λ et longueur de pénétration L_p nous obtenons une forme maîtresse (figure 4.7). Cette forme parabolique n'est cependant observée que pour des amplitudes de plis relativement faibles. Pour des amplitudes plus élevées nous observons en effet une focalisation de la déformation près de la pointe du défaut : la

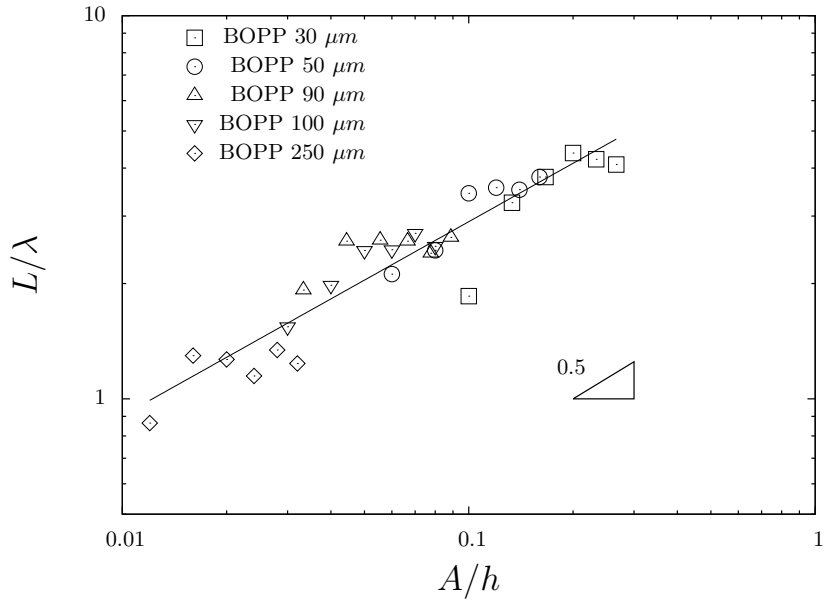


FIGURE *4.6* – Longueur de la transition de la longueur d'onde en fonction de l'amplitude du confinement et de l'épaisseur de la feuille.

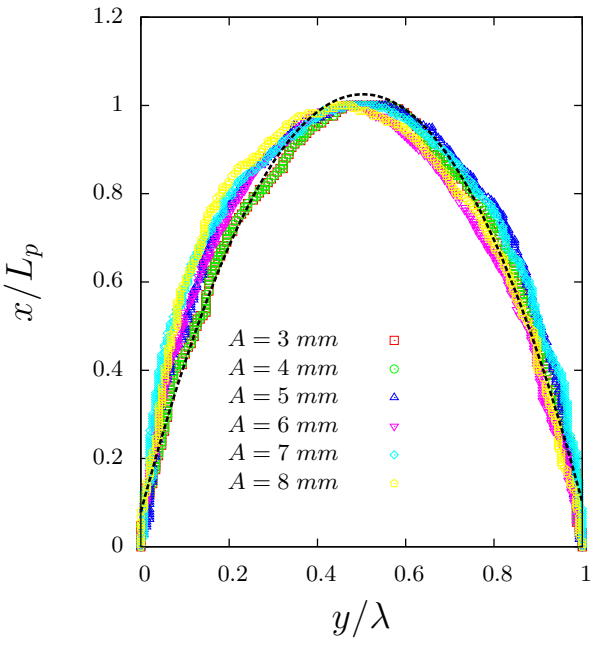


FIGURE *4.7* – Profil du défaut de pliage lors de la réunion de deux plis. L'adimensionnement par L_p et par λ permet d'obtenir un forme maîtresse (approximativement parabolique). La ligne pointillée corresponde au fit parabolique de la forme $a(0.5-x)^2+1$, avec $a = -3.7$.

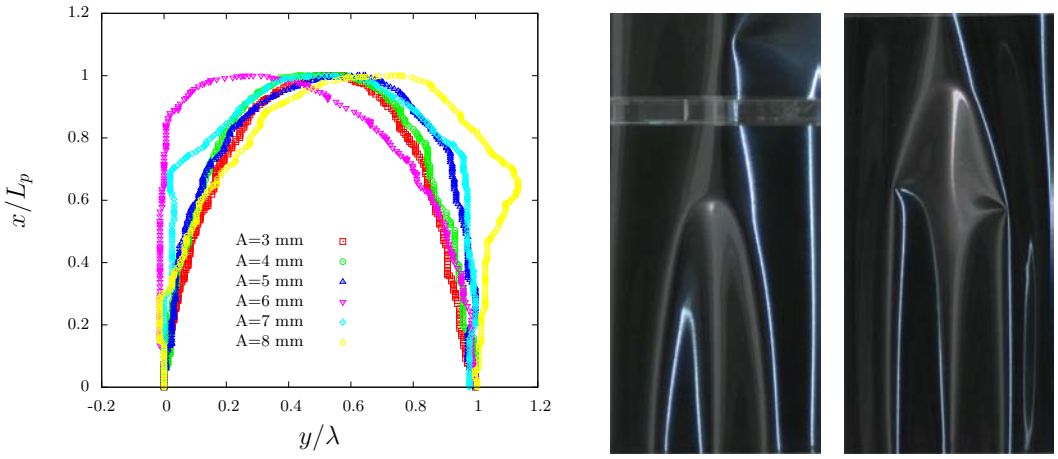


FIGURE *4.8* – (a) Profil du défaut de pliage pour des amplitudes des confinement croissantes. La symétrie parabolique est brisée pour les plus grandes amplitudes. (b) Focalisation de la déformation à grande amplitude : la feuille est froissée.

feuille est froissée. La figure 4.8a illustre par exemple l'évolution de la forme de ces défauts sur une feuille de 50 μm en fonction de l'amplitude des oscillations. Pour les confinements de petite amplitude, 3 et 4 mm, les défauts gardent une forme parabolique, mais à partir des plus grandes amplitudes de confinement les focalisations commencent à apparaitre près de la pointe et brisent la symétrie parabolique (4.8). Par la suite, nous discuterons la transition de longueur d'onde à partir des défauts paraboliques (transition douce). Nous chercherons enfin à interpréter le froissement de la feuille.

4.1.3 Énergie du pli unique

Dans notre étude de l'origami capillaire, nous avons décrit la déformation des membranes élastiques en terme de flexion. Nous avons ainsi considéré que les déformations en jeu étaient *isométriques* (c'est à dire qu'elles préservent les distances). Dans son *theorema egregium* Gauss a montré qu'une transformation isométrique préservait le produit des courbures principales (courbure de Gauss). Ainsi, les types de déformations isométriques possibles d'un plan sont très limités : essentiellement des formes cylindriques ou coniques. Tout autre transformation d'un surface plane met donc en jeu de l'étirement (ou de la compression).

En termes d'élasticité, l'énergie de flexion d'une feuille d'épaisseur h est pro-

portionnelle à Eh^3 alors que que l'énergie d'étirement varie comme Eh. Étirer une membrane très fine est ainsi plus coûteux que de la courber. Cependant les conditions aux limites n'autorisent pas nécessairement la transformation d'une feuille plane en cône ou en cylindre. Si nous froissons une feuille de papier dans notre main (figure 4.9-a), nous observons une multitude de points singuliers dans lesquels les zones d'extension sont focalisées au point de déformer plastiquement le matériau. En dehors de ces singularités, la feuille reste relativement développable. La focalisation des régions étirées n'est cependant pas générale. Aoyanagi *et al.* [68] ont par exemple mis en évidence des cloques de délamination obliques qui ne sont pas coniques tant que leur amplitude demeure modérée. La situation que nous étudions ici en est un autre exemple, pour une raison différente. En effet, dans le cas d'une plaque comprimée d'une quantité ϵ, mais dont l'un des bords est encastré (ce qui est différent de notre cas où la longueur d'onde certes petite mais finie) a été étudié [69], et il a été montré que la solution en cascade régulière (sans focalisation d'énergie au sens du froissement) est optimale du point de vue énergétique [70]. Nous pouvons penser que ce résultat est pertinent pour nos cascades incomplètes. Ces configurations présentent alors une énergie d'étirement diffuse [70], comme l'indiquent des simulations numériques récentes [71]. Nous l'interprétons en disant qu'il n'existe pas de surface isométrique permettant de passer d'une longueur d'onde à une autre, même singulière. On peut s'en convaincre en observant que même si l'on plie une feuille comme sur la figure 4.10a pour passer d'une longueur d'onde λ à 2λ, en autorisant une courbure localement infinie, ce pliage est incompatible. La connexion entre les deux régions nécessite une ouverture sur la feuille de papier. Sans cette ouverture, la feuille serait en effet étirée. D'un point de vue quantitatif, cet étirement en direction de x est de l'ordre de α^2, où $\alpha \sim A/L_p$ est la pente moyenne de la membrane dans la connexion entre les deux longueurs d'onde (figure 4.10b).
L'énergie de la formation élémentaire est donc donnée par :

$$U_s \sim Eh\alpha^4 L_p \lambda. \tag{4.4}$$

Il existe cependant d'autres déformations non-isométriques dans la zone de raccord entre les plis. En particulier des mesures du profil de la membrane déformée nous ont permis de déterminer que la crête du défaut parabolique possède une

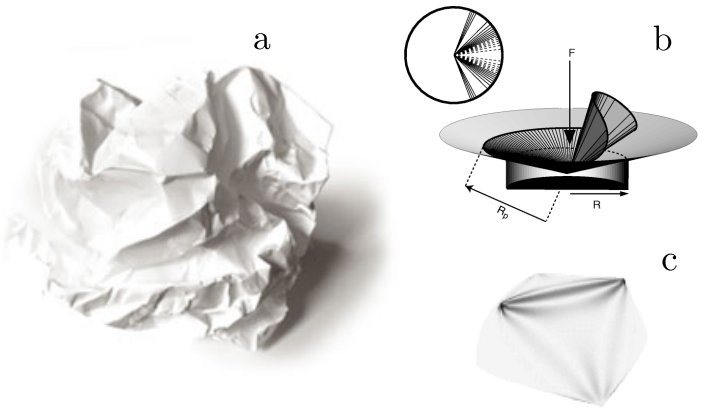


FIGURE *4.9* – Feuille comprimée à la main : les zones étirées sont focalisées en des points singuliers, ce qui permet de préserver une surface développable malgré le grand changement topographique imposé (a). Dans sa structure on peut trouver différents types de singularités, des cônes (b, clichés extraits de [72]) et ridges (c, clichés extraits de [73]).

courbure de Gauss non-nulle (figure 4.13). L'énergie de ce type de déformations a été considérée par Pogorelov [74] (voir aussi [70, 75]) lors de son étude des défauts générés lorsqu'une coque sphérique (une balle de ping-pong par exemple) est enfoncée (figure 4.12). Pogorelov a dérivé une expression pour estimer l'énergie de cette structure qui est donnée par l'expression :

$$U_{sp} \sim Eh^{5/2}\beta^{5/2}r^{1/2}, \tag{4.5}$$

où $\beta \sim \epsilon/r$, d étant la profondeur du défaut, r le rayon du défaut et h l'épaisseur de la coque. En analogie avec notre problème d'étude, nous trouvons que $d/r \sim A/L_p$ et $r \sim \rho$. Nous pouvons donc estimer l'énergie dans la point de nos défauts à :

$$U_{sp} \sim Eh^{5/2}\alpha^{5/2}\rho^{1/2}. \tag{4.6}$$

Cependant, si nous comparons cette énergie avec l'énergie d'étirement de l'équation 4.4, nous trouvons $E_{sp}/E_s \sim (h/A)^{3/2}$, qui est de l'ordre de $0,04$ pour nos expériences. Désormais nous négligerons les contributions énergétiques dues à la courbure gaussienne non nulle dans la crête des défauts.

À l'énergie d'extension s'ajoute l'énergie de flexion de la feuille. Nous déduisons à partir de l'équation 4.1 présentée dans la section précédente que l'énergie de

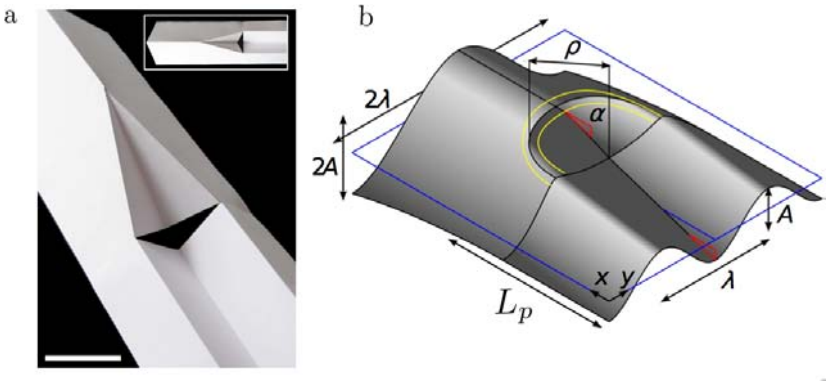


FIGURE *4.10* – (a) Illustration du doublement de la longueur d'onde par le pliage d'une feuille de papier. La feuille étant très peu extensible, la transition nécessite une incision de la feuille. (b) Schéma de la zone de transition dans notre situation.

flexion intégrée sur la longueur L_p s'écrit :

$$U_b = Eh^3 \left(\frac{A}{\lambda^2}\right)^2 L_p \lambda. \tag{4.7}$$

Comme commenté précédemment, l'énergie de courbure va favoriser les petites valeurs de L_p, car cela correspond à passer plus rapidement vers une longueur d'onde plus grande. En revanche, l'énergie d'étirement sera d'autant plus faible que la transition est douce, c'est à dire que L_p est grand. C'est donc la compétition entre ces deux énergies qui va déterminer l'extension de la transition de doublement de longueur d'onde. Finalement, si nous minimisons l'énergie totale $U_{tot} = U_b + U_s$ par rapport à L_p, nous obtenons :

$$L_p = \lambda \sqrt{\frac{A}{h}}, \tag{4.8}$$

ce qui est en très bon accord avec nos résultats expérimentaux présentés dans la figure 4.6.

Cette loi d'échelle avait été trouvée précédemment dans des études sur la décroissance d'une courbure imposée dans une feuille [77], ainsi que lors de l'estimation de la persistance du défaut apparaissant sur un paille flexible lorsqu'elle est pincée à une de ses extrémités [78].

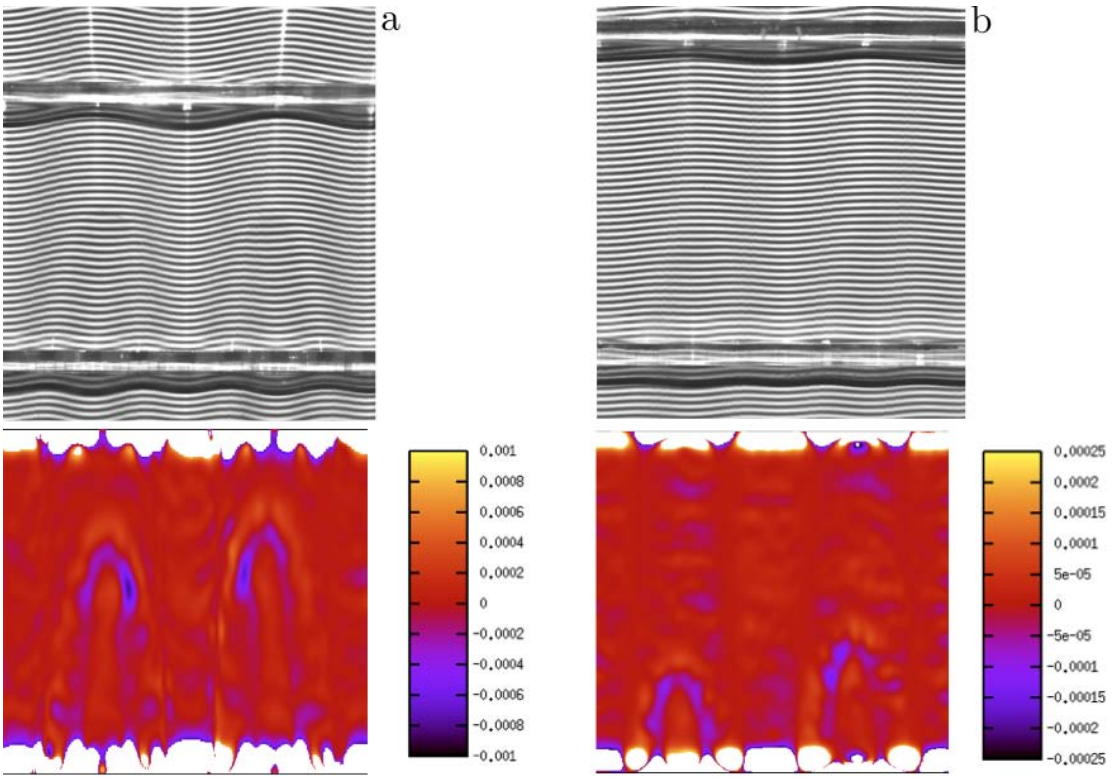


FIGURE *4.11* – Mesures de la courbure de gauss à partir du profil de hauteur d'une feuille déformée. L'épaisseur de la feuille est $h = 50\ \mu m$. a) profil imposé au bord $A = 5\ mm$, $\lambda = 24\ mm$, b) $A = 3\ mm$, $\lambda = 24\ mm$. Nous avons utilisé une technique de profilométrie dévéloppé par Maurel *et al.* [76] pour réaliser les mesures du profil.

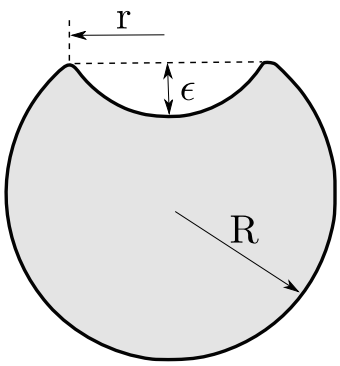


FIGURE *4.12* – Coque sphérique enfoncée décrite par Pogorelov [74] et Pauchard [75].

4.2 De la fusion élémentaire à la cascade dans les rideaux

Nous avons décrit la longueur caractéristique L_p qui permet de transiter d'une longueur d'onde λ à une autre 2λ. Nous proposons à présent de généraliser ce résultat élémentaire à l'ensemble des plis présents dans une membrane.

Supposons que le doublement de longueur d'onde d'un pli unique se répète pour chaque pli sur toute la largeur de la membrane, et que chaque nouvelle longueur d'onde générée se double à mesure que l'on descend dans le rideau. L'évolution moyenne de la longueur d'onde en fonction du bord de la membrane $d\lambda/dx$ serait du même ordre que λ/L_p :

$$\frac{d\lambda}{dx} \simeq \frac{\lambda}{L_p}. \tag{4.9}$$

En intégrant cette expression avec la valeur de L_p calculée dans 4.8, nous obtenons l'évolution de la longueur d'onde en fonction de la distance au bord comprimé :

$$\lambda \sim x\sqrt{h/A}. \tag{4.10}$$

Comme nous ne connaissons l'amplitude des plis qu'au niveau du bord, il est plus utile de récrire 4.10 en fonction de la compression initiale ϵ (équation 4.3), ce qui permet d'obtenir

$$\frac{\lambda\epsilon^{1/6}}{h} \sim \left(\frac{x}{h}\right)^{2/3}. \tag{4.11}$$

Afin d'évaluer cette loi d'échelle nous avons observé l'évolution de la longueur d'onde pour des rideaux suspendus de différents matériaux. Les conditions au bord supérieur ont été imposées à l'aide d'un support métallique et un arrangement de vis schématisé sur la figure 4.13. Avec les vis nous imposons une condition périodique de $\lambda = 20\ mm$ et une amplitude A déterminée par la distance entre les deux barres d'aluminium du support (figure 4.13-b), qui peut varier entre 2 et 8 mm. Pour les rideaux nous avons utilisé des membranes de latex de 2x1m et d'épaisseurs 220 et 440 μm avec un module élastique $E \simeq 1.2\ MPa$, ainsi que des feuilles de papier de 1,2x0,8 m, d'épaisseur de 125 μm et de module élastique $E \sim 3GPa$. Pour éviter l'endommagement des membranes par les vis, des bandes

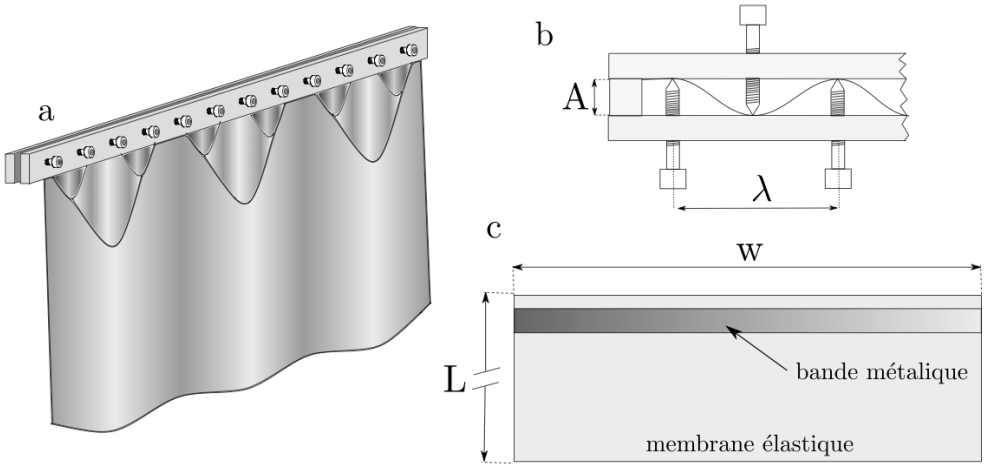


FIGURE *4.13* – Dispositif expérimental pour la mise en place des rideaux suspendus, a) vue isométrique, b) détail de l'imposition du profil sinusoïdal avec l'arrangement de vis, c) position de la bande métallique utilisée pour protéger le bord de la membrane.

en acier de 20 mm de large et 50 μm d'épaisseur ont été collées tout le long du bord de chacune des membranes (figure 4.13 -c). En plus d'éviter l'endommagement, ces bandes permettent aussi d'avoir des conditions au bord bien définies grâce à la rigidité de l'acier. Une fois les conditions au bord imposées et les rideaux suspendus, nous prenons des images frontales à l'aide d'un appareil photo. L'évolution de la longueur d'onde avec la distance est finalement estimée à partir des clichés.

Les résultats expérimentaux sont présentés sur la figure 4.13 en échelle logarithmique. Le rideau en papier suit le comportement attendu pour une membrane libre ($\lambda \propto x^{2/3}$). En revanche les rideaux en latex semblent suivre lune loi différente ($\lambda \propto x^{1/2}$). Ces deux types de comportement avaient déjà été observés par Vandeparre [79] entre deux rideaux du même matériau mais de longueurs très différentes, l'un de 4 m de longueur et l'autre de 80 cm. Dans le rideau court, l'évolution des plis suit bien la loi où $\lambda \propto x^{2/3}$, alors que pour le rideau long on retrouve la loi en $\lambda \propto x^{1/2}$, que nous observons pour les rideaux en latex.

Ces différences peuvent être expliquées à partir de l'argument suivant : dans l'estimation de l'énergie d'un pli unique que nous avons ensuite extrapolé à tout l'ensemble du rideau, nous n'avons pris en compte que deux effets sur l'énergie totale du pli. Le premier était l'énergie de courbure due à l'imposition d'un confinement dans le bord et l'autre était l'énergie d'étirement générée lorsque la feuille

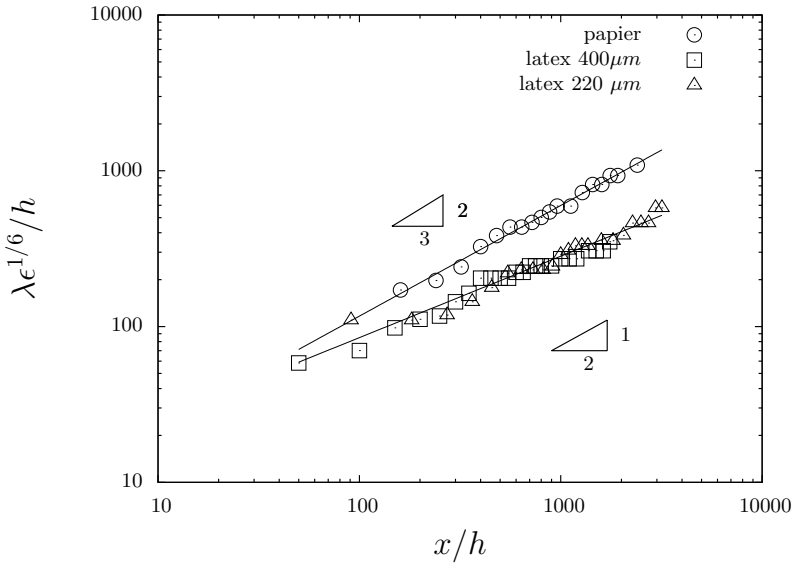


FIGURE *4.14* – Résultats expérimentaux de l'évolution de la longueur d'onde en fonction de la distance au bord. Les conditions au bord dans tous les cas sont $A = 5mm$ et $\lambda = 20mm$.

transite d'une longueur d'onde λ à une autre 2λ. Cependant, un paramètre très important dans le cas des rideaux suspendus est la tension selon la direction x générée par le poids du rideau (figure 4.10-b). Ce poids agit cependant de la même façon que la tension due à la transition géométrique précédente et favorise des grandes valeurs de L_p.

Nous présentons à présent la dérivation d'une loi d'échelle qui tienne compte de cette tension.

4.3 Rideaux sous tension

L'énergie de tension U_t induite par le poids du rideau, ou par n'importe quelle autre tension agissant dans la direction x serait (figure 4.10-b) :

$$U_t = T\alpha^2 L_p \lambda. \tag{4.12}$$

Pour estimer l'importance de l'apport de cette tension à l'énergie totale d'un pli, il suffit de la comparer avec l'énergie d'extension U_s (équation 4.4). Donc, U_t

deviendra importante devant U_s quand :

$$T > Eh^2\epsilon/A. \tag{4.13}$$

Dans une telle situation, nous pourrions exprimer l'énergie totale du pli unique comme :

$$U_{tot} = U_b + U_t = Eh^3 \left(\frac{A}{\lambda^2}\right)^2 L_p\lambda + T\left(\frac{A}{L_p}\right)^2 L_p\lambda. \tag{4.14}$$

En minimisant l'énergie totale du pli en fonction de la longueur L_p nous trouvons alors :

$$L_p \sim \frac{\lambda^2}{h}\sqrt{\frac{T}{Eh}}. \tag{4.15}$$

Comme dans le régime sans tension nous pouvons généraliser l'expression de la longueur du pli unique pour tout le rideau (à partir de 4.9), ce qui nous conduit à :

$$\frac{\lambda}{h} \sim \left(\frac{Eh}{T}\right)^{1/4} \left(\frac{x}{h}\right)^{1/2}. \tag{4.16}$$

Nous avons à présent deux lois d'échelle différentes qui nous permettent de décrire l'évolution de la longueur d'onde, une qui correspond une cascade de longueur d'onde sans tension appliquée sur la feuille et une autre où ces effets de tension dominent sur le terme d'énergie d'étirement.

Expérimentalement nous avions étudié l'évolution de la longueur d'onde pour des rideaux en papier et en latex. Dans le cas du rideau en papier, dont le module d'élasticité est d'environ $E \sim 3GPa$ et la masse volumique $\rho \sim 0,8kg/m^3$, nous trouvons qu'en effet, l'influence du poids de la membrane est beaucoup plus petite que l'étirement généré dans les plis du à la transition de longueur d'onde. La hiérarchie des plis est alors bien donnée par la loi d'échelle présentée dans l'équation 4.11. Dans le graphe de la figure 4.15 nous présentons nos résultats expérimentaux obtenus avec la feuille en papier, ainsi que les résultats de Vandeparre [79] pour son rideau court. En plus, nous avons aussi inclus dans le graphe les données obtenues dans les expériences du pli unique avec les mords sinusoïdaux. L'accord que nous trouvons dans ce cas entre les plusieurs expériences et la loi proposée est remarquable.

En revanche, dans les cas des rideaux en latex nous trouvons le deuxième

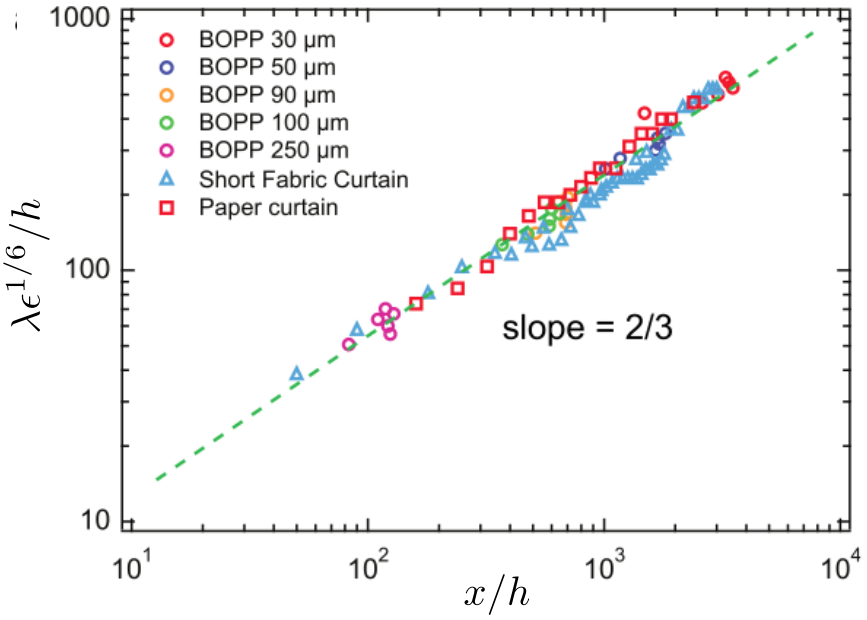


FIGURE *4.15* – Longueur d'onde en fonction de la distance au bord pour le régime sans tension. Les données incluent les résultats obtenus pour le pli unique, ainsi que pour le rideau en papier et le rideau court de Vandeparre [79].

régime, dominé par la tension. La masse volumique du latex est un peu plus élevée que celle du papier mais son module d'élasticité est surtout beaucoup plus faible, d'à peine $1MPa$. C'est donc dans les rideaux en latex que la tension générée par le poids prends importance et modifie l'évolution de la longueur d'onde, qui dans ce cas, est donnée par l'équation 4.16. Le même mécanisme est présent dans les expériences de Vandeparre avec le grand rideau de 4 m de long. Nous trouvons que la hiérarchie des plis dans les membranes de Huang *et al.* suit cette loi dominée par la tension. Dans leurs expériences, la tension de surface à l'interface liquide-air ajoute de la tension sur la membrane. La tension domine alors le terme $Eh^2\Delta/A$ qui borne le premier régime. Dans la figure 4.16 nous présentons les résultats de l'évolution de la longueur d'onde en fonction de la distance au bord pour un ensemble des expériences tombent dans le régime de tension. Ces données incluent nos résultats pour les rideaux en latex, les résultats de Vandeparre [79] pour le rideau en tissu de 4m de long, les résultats de Huang *et al* pour une membrane comprimée flottant sur la surface de l'eau et aussi des résultats obtenus à partir des images de couches de graphène soumises à l'étirement sur les bords [80].

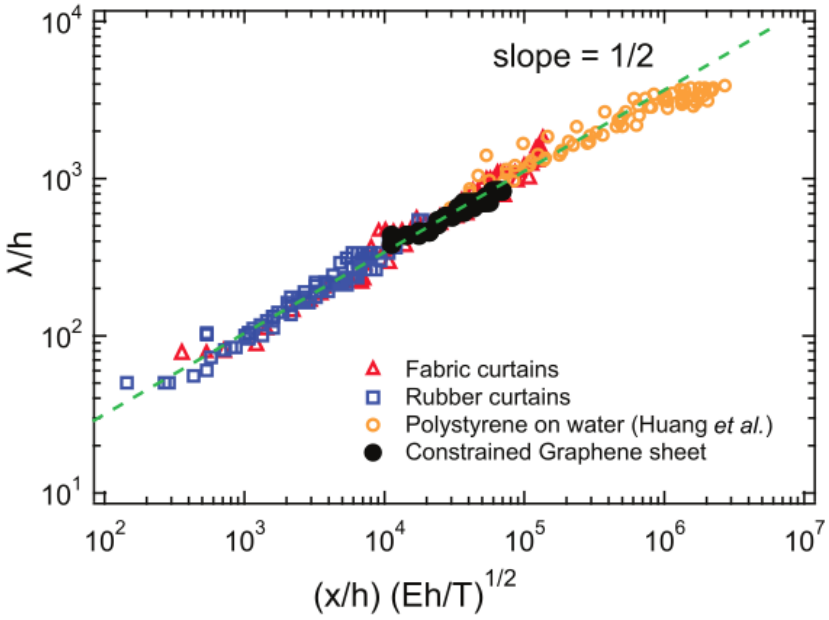


FIGURE *4.16* – Longueur d'onde en fonction de la distance au bord pour le régime sous tension. Les données incluent les résultats obtenus pour les rideaux en latex, pour le rideau long de Vandeparre [79], pour les membranes flottantes ultra-minces [30] et pour les membranes de graphène [80].

De manière surprenante, nous pouvons constater le bon accord entre la loi d'échelle proposée pour les membranes sous tension et les résultats expérimentaux. Notons que les expériences considérées dans ce graphe balayent une large gamme d'échelles, depuis le nanomètre (pour le cas des couches de graphène), jusqu'à l'échelle humaine.

Bien que ces deux régimes avec ou sans tension aient été proposé auparavant dans d'autres études [30, 69, 78], c'est la première fois qu'un ensemble de résultats expérimentaux couvrant une aussi vaste gamme d'échelles montrent leur validité.

4.4 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons étudié la morphologie de cascade de plis qui apparaissent dans différents systèmes lorsqu'une longueur d'onde est imposée sur une frontière, et évolue à la suite d'événement discrets successifs de coalescence de plis. Des expériences macroscopiques ont permis de caractériser les propriétés de ces

cascades, à partir de l'étude de zones de transition. Nous avons distingué deux régimes différents selon l'importance de la tension axiale (dominante ou pas), qui avaient déjà été prédits théoriquement, et que nous avons reformulé en terme de lois d'échelle. Enfin nous avons pu comparer nos cascades macroscopiques à celles observées par d'autres groupes sur des systèmes très différents, à des échelles très différentes : les régimes observés permettent de décrire aussi bien des rideaux en tissu de plusieurs mètres de haut que des feuilles de graphène d'épaisseur atomique.

Chapitre 5

Conclusions

Dans cette thèse nous avons traité trois problématiques différentes liées à la mécanique des plaques minces. L'étude dans chacune de ces trois parties s'est basée principalement sur des expériences macroscopiques modèles et le développement de lois d'échelle.

Dans la première partie, nous avons montré qu'il est possible d'élaborer des micro-actionneurs avec une membrane élastique, une goutte d'eau et un générateur de tension. À partir de trois ingrédients physiques : tension de surface, élasticité et champ électrique, nous avons pu déterminer deux grandeurs qui dictent le comportement du système. D'une part, l'interaction entre la tension de surface et l'élasticité de la membrane conduit à une longueur élasto-capillaire, $L_{ec} = \sqrt{B/\gamma}$, qui nous donne un critère d'enrobage de la membrane autour de la goutte. D'autre part, nous avons établi à partir du bilan entre les énergies de surface et électrique que la tension caractéristique $U_0 = \sqrt{\gamma d/\epsilon}$ dicte la réouverture de l'origami. Nos données expérimentales nous ont permis de vérifier la pertinence aussi bien de la longueur capillaire que de la tension U_0 dans la description de notre problème. Nous obtenons en effet des courbes maîtresses lorsque la longueur de la feuille et la tension appliquée sont adimensionnées par ces deux paramètres. Ce problème présente une forte hystéresis que nous avons pu expliquer grâce à l'analyse théorique et numérique d'un modèle bidimensionnel simple. Une question importante du point de vue pratique reste ouverte : est-il possible de réduire la gamme de tension appliquée ? Dans nos expériences, les tensions sont en effet de l'ordre de 500V, ce qui limite l'utilisation du système. Diminuer l'épaisseur de la membrane

et du diélectrique conduirait à des tensions plus faibles. Cependant cette réduction d'épaisseur ne risque-t-elle pas de favoriser le débordement du liquide ? Nous comptons sur nos collègues de l'Université de Twente pour prendre le relais du point de vue technologique.

Dans la deuxième partie de la thèse, nous avons abordé la problématique de la formation de rides sur des couronnes élastiques soumises à des différences de tension entres leurs bords. À partir d'une théorie simplifiée basée sur le flambage unidimensionnel d'Euler, nous avons estimé des critères pour le seuil de flambage de la couronne et la longueur d'onde des plis. Malgré sa forme très simplifiée, cette théorie nous a permis de rendre compte de nos résultats expérimentaux et numériques. La longueur d'onde des rides résulte de l'interaction entre la rigidité de la membrane et l'énergie potentielle de pesanteur de l'eau soulevée sous les rides, $\lambda = (\rho g B)^{1/4}$. La différence de tension au seuil de flambage est dictée par le rapport L_{ec}/L_c et le rapport d'aspect de la couronne. Considérant que la distribution de contraintes dans la couronne restait semblable avant et après le flambage, nous avons également déterminé l'évolution de la longueur des plis au delà du seuil. L'accord de nos résultats expérimentaux et numériques avec cette hypothèse a mis en évidence que nos expériences se situent près du seuil de flambage, ce qui marque une différence importante avec les expériences de Huang *et al.* qui nous ont inspirés. Si nous continuons à augmenter le contraste de tension de surface au-delà du seuil de flambage, nous observons que certains plis se singularisent alors que les plis voisins s'atténuent. Ce phénomène de focalisation semble encore plus marqué dans le cas de membranes très minces. La comparaison de nos expériences macroscopiques avec les expériences complémentaires actuellement menées par nos collègues de Amherst sur des membranes nanométriques devrait nous permettre de décrire plus globalement la formation de rides aussi bien près que loin du seuil.

Enfin nous avons caractérisé dans la troisième partie les cascades des plis apparaissant dans une membrane dont l'un des bords est plissé. D'une manière générale, la membrane tend à se déplisser, ce qui permet de diminuer son énergie de courbure. Cependant les contraintes topologiques imposent un étirement dans la transition entre les régions courbées et plates. Dans le cas où la membrane est soumise à une tension, la transition engendre également une augmentation de l'énergie potentielle (analogue à celle d'une corde de guitare pincée). À partir

des expériences modèles sur une cascade élémentaire et des lois d'échelle simples, nous avons pu vérifier l'existence de deux régimes selon que l'extrémité de la membrane est libre ou étirée axialement. Une série d'expériences dans les deux régimes, conjuguée avec les efforts complémentaires d'autres groupes de recherche, nous ont permis de vérifier expérimentalement l'universalité des lois d'échelle proposées, aussi bien à l'échelle moléculaire de couches de graphène qu'aux rideaux macroscopique suspendus sur nos fenêtres. Les cascades de plis se retrouvent dans d'autres situations explorées actuellement au laboratoire (thèse Jérémy Hure) où des membranes élastiques sont confinées géométriquement. Nos résultats devraient constituer un premier pas dans la compréhension de ces nouvelles configurations.

Annexe A

Analyse de stabilité linéaire de la couronne

Nous voulons déterminer le seuil, et le mode de flambage d'une couronne d'une géometrie donnée (rayons interne a, externe b), soumise à une tension γ_o à l'extérieur, et γ_i à l'intérieur. Cette approche de stabilité linéaire n'est valable qu'au seuil de l'instabilité, et ne renseigne pas sur l'évolution du motif flambé.

Au départ (avant flambage) les contraintes $\sigma_\theta(r) = N_\theta/h, \sigma_r(r) = N_r/h$ sont celles de Lamé (équations 3.24).

$$\begin{aligned} N_r &= \left[\gamma_i a^2 - \gamma_o b^2 - \frac{a^2 b^2}{r^2}(\gamma_i - \gamma_o)\right] \frac{1}{(a^2 - b^2)}, \\ N_\theta &= \left[\gamma_i a^2 - \gamma_o b^2 + \frac{a^2 b^2}{r^2}(\gamma_i - \gamma_o)\right] \frac{1}{(a^2 - b^2)}. \end{aligned} \tag{A.1}$$

Dans l'expérience γ_i reste fixé, tandis que $\gamma_o < \gamma_i$ est notre paramètre de contrôle. Quand $\gamma_0 < \gamma_c$ il y a une instabilité

La démarche classique consiste à linéariser les équations de Föppl-VonKarman 3.39

$$B\nabla^4 w - N_r \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - N_\theta \left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}\right) + \rho g w = 0 \tag{A.2}$$

autour de la solution de Lamé qui correspond $w = 0$. Lors de la linéarisation, on néglige l'évolution des contraintes avec w (terme du second ordre), qui sont donc exactement celles de l'équation A.1. Pour une certaine valeur de la tension $\gamma_o = \gamma_c$,

il existe une solution non nulle à ces équations : c'est le mode de flambage.

Les conditions aux limites sont les suivantes : en $r = a$ et (respectivement b) pas de moment appliqué ($M_r = 0$), mais seulement une force, supposée horizontale [1] γ_i (respectivement γ_o).

Les conditions aux limites en force et couple sont un peu délicates à écrire [25], et pour $r = a$ et $r = b$,

$$M_r = B\left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}\right)\right] = 0 \tag{A.3}$$

$$Q_r - \frac{1}{r}\frac{\partial M_{r\theta}}{\partial \theta} + N_r\frac{\partial w}{\partial r} = 0 \tag{A.4}$$

avec le moment, et l'effort tranchant donnés par $M_{r\theta} = B(1-\nu)\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta}\right)$ et $Q_r = -B\frac{\partial}{\partial r}\nabla^2 w$

Pour adimensionner, nous prenons comme unité de longueur a, ce qui donne pour $1 < r < b/a$

$$L_{EC}^2\nabla^4 w - N_r\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - N_\theta\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}\right) + \frac{1}{L_c^2}w = 0 \tag{A.5}$$

Les conditions aux limites en $r = 1$ et $r = b/a$

$$L_{EC}^2\left[\frac{\partial}{\partial r}\nabla^2 w + \frac{1-\nu}{r}\frac{\partial^2}{\partial\theta\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta}\right)\right] - N_r\frac{\partial w}{\partial r} = 0 \tag{A.6}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}\right) = 0 \tag{A.7}$$

où $L_{EC} = \sqrt{B/\gamma_i}/a$ et $L_c = \sqrt{\gamma_i/\rho g}/a$ sont les deux paramètres sans dimensions importants pour caractériser le système. Dans l'expérience on a typiquement $b/a = 2$, $L_c = 0.1$ et $L_{EC} = 0.004$. Les contraintes sont adimensionnées par γ_i la tension de surface. Donc les équations (A.1) restent valables mais en remplaçant $\gamma_i \to 1, a \to 1, b \to b/a$.

Nous recherchons la solution sous la forme la forme $w = f(r)\sin(m\theta)$, ce qui conduit à une équation différentielle ordinaire linéaire du quatrième ordre pour

1. En réalité c'est une approximation, puisque les forces qui s'appliquent sur le film sur sa frontière sont orientées selon la tangente à la surface du fluide, sachant que la forme du ménisque dépend de façon non locale de la forme de la plaque

$f(r)$ avec deux conditions à satisfaire en $r = 1$ et deux autres en $r = b/a$. Pour la résoudre nous utilisons le fonction bvp4c de Matlab (boundary value problem), qui permet justement de trouver à la fois la solution non nulle et la valeur du seuil, à partir de valeurs probable fournies comme point de départ. Nous remercions Enrique Cerda qui nous a fourni une version de son code écrit pour le cas $b = \infty$.

Annexe B

Publications

View Online

Capillary origami controlled by an electric field†

Miguel Piñeirua,* José Bico and Benoît Roman

Received 18th February 2010, Accepted 12th April 2010
DOI: 10.1039/c0sm00004c

We show experimentally how an electric field can control the folding and unfolding of a thin elastic membrane around a liquid droplet. As the voltage is increased above a critical value the membrane unfolds completely. The transition is reversible, although the structure closes back for a lower critical tension. We propose scaling laws for these critical voltages based on the interaction between surface tension, elastic and electric energies. These scaling laws are in qualitative agreement with experiments and a simplified 2D simulation of the problem, providing a useful tool for designing practical micro-devices actuated by an electric field.

Published on 01 July 2010 on http://pubs.rsc.org | doi:10.1039/C0SM00004C
Downloaded by Ecole Sup De Physique et de Chimie Indust on 09 September 2010

1 Introduction

Recent studies have shown how capillary forces can be used to fold thin sheets in a controlled way and thus to produce 3D microscale objects.[1–5] As an example of a practical application, Gua *et al.* have developed 3D photovoltaic cells with enhanced efficiency by wrapping thin Si foils around water droplets.[6] This technique takes advantage of dominating surface tension forces at small scales making it possible to wrap thin elastic sheets around droplets. A wide range of 3D shapes can be obtained if the initial planar patterns of the elastic sheets are properly tuned.[1] However, for different applications such as micro-actuators or digital displays, it would be interesting to have the possibility of switching between the closed and opened states at will, for instance using an electric signal.

Indeed, the use of electric fields provides an efficient way of manipulating liquid droplets without the use of mechanical moving parts. For example, a simple way of modifying the wetting properties of liquids is electrowetting, whose physical basis was first described at the end of the 19th century by Lippmann.[7] In recent years, EWOD (electrowetting over dielectrics[9,8]) has been used in a wide variety of applications, ranging from microlenses using drops of tunable shape and focal length,[10] to the manipulation of micro droplets in lab-on-a-chip devices[13,11] and capillary driven motors.[12] In these 'static electrowetting' cases,[14] the effect of an electric field can be viewed as changing the effective macroscopic contact angle.[15]

In the present work we ask if an electric field can be used to actuate the closure and reopening of a capillary origami. Since capillary forces induce wrapping, we need an additional force (electrostatics) acting against surface tension to promote the reopening of the structure. We emphasize that this situation, with a contact line pinned at the edges of a flexible dielectric, is however different from classical static electrowetting where the liquid contact line moves on a rigid dielectric layer.

We first describe the relevant physical parameters in the interaction between elastic, surface tension and electric forces. In the second part experimental results are presented, discussed and compared with a 2D numerical model of the system. We finally give scaling arguments for the opening and closing conditions.

2 Characteristic scales

In the problem of spontaneous wrapping of elastic sheets around droplets, the deformations of the sheet reduce the contact area between the droplet and air, thus decreasing the surface tension energy by a quantity of the order of γL^2 (γ being the surface tension between the liquid and air and L the typical length of the sheet). This reduction in surface tension energy is balanced by an increment of bending energy in the elastic membrane. For a thin plate, the isometric bending energy per unit surface is defined locally by $B\kappa^2/2$, where κ is the curvature and $B = Eh^3/12(1-\nu^2)$ is the bending stiffness of the plate (E being the Young's modulus, ν is the Poisson's ratio and h is the thickness). As a consequence, spontaneous wrapping is expected when surface energy overcomes the bending energy corresponding to $\kappa \sim 1/L$:

$$\frac{B}{L^2} L^2 < \gamma L^2 \tag{1}$$

A characteristic length of this problem can be defined as

$$L_{EC} = \sqrt{\frac{B}{\gamma}} \tag{2}$$

known as the *elastocapillary length*.[16] This scaling argument indicates that the critical length L_{crit} beyond which the elastic membrane totally wraps the droplet should be proportional to L_{EC}. For instance, in the work done by Py *et al.*,[1] triangular sheets of side length L were experimentally found to form pyramids for $L > 11.9L_{EC}$.

The addition of an electric field, as shown in Fig. 1, leads to electric forces that are expected to counteract surface tension.

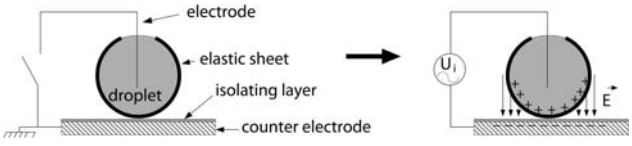


Fig. 1 Sketch of the experimental setup.

Physique et Mécanique de Millieux Hétérogènes, UMR 7636 CNRS ESPCI-UPMC-Paris 7, 10 rue Vauquelin, 75231, Paris CEDEX 5, France. E-mail: pineirua@pmmh.espci.fr

† Electronic supplementary information (ESI) available: Supplementary movie. See DOI: 10.1039/c0sm00004c

Published on 01 July 2010 on http://pubs.rsc.org | doi:10.1039/C0SM00004C
Downloaded by Ecole Sup De Physique et de Chimie Indust on 09 September 2010

Indeed, for an opened structure the capacitance of the system can be approximated to that of a parallel plate system,[15] which leads to an electric energy $E_e = \epsilon L^2 U^2/2(d + h)$, where ϵ and d are the dielectric constant and the thickness of the insulating layer, respectively (we assume that both layers have the same dielectric constant). The comparison between surface tension and electric energies yields the characteristic voltage:

$$U_0 = \sqrt{\frac{\gamma(d+h)}{\varepsilon}} \quad (3)$$

beyond which electric forces are expected to overcome surface tension. In our experiments the physical parameters are of the order of $\gamma \simeq 72$ mN m^{-1}, $h \sim 50$ μm, $d \sim 60$ μm, $\epsilon \sim 4.4 \times 10^{-11}$ F/m, which leads to $U_0 \sim 800$ V. This high value can however be considerably reduced in practical applications if the thicknesses of the dielectric layers are scaled down to a few microns.

3 Experimental setup

The experimental setup used to generate the electric field between the droplet and the substrate is sketched in Fig. 1. The AC voltage is generated with a Tektronik 1254 signal generator, amplified with a Trek 8654 high voltage amplifier. The electrodes consist of a 10 μm diameter copper wire (immersed in the droplet) and a 5 mm thick brass plate (counter electrode). To avoid electrical short circuit between the electrodes in case of accidental water spilling, the counter electrode is covered with a strip of adhesive tape (insulating layer) of thickness $d = 60$ μm. In order to improve the droplet conductivity, experiments were carried out using water with a 0.3% of salt concentration. Membranes were made of polydimethylsiloxane (PDMS, Dow corning Sylgard 1 : 10 and 1 : 20 polymer/curing agent mix) spin coated at rotating speeds of 1000–3500 rpm, over Emery polishing paper 2/0 with a measured average roughness $R_a = 4.24$ μm. Spin coating over rough surfaces leads to rough sided membranes, which significantly reduces the adhesion of the membranes on the insulating layer. To proceed with the experiment, triangular shapes of side length L were cut out from the PDMS sheets of different thicknesses varying from 60 μm < h < 100 μm. A droplet of salty water 5–30 μl is then deposited over the initially flat PDMS shape. As shown by Py *et al.*,[1] the elastic sheet spontaneously wraps the droplet if $L > L_{crit} \sim L_{EC}$. Once the origami is formed, the copper wire electrode is immersed inside the droplet. A 1 kHz AC voltage is imposed between the electrodes and increased gradually from 0 V until the origami has completely reopened. The voltage is then decreased at the same rate until the origami closes again. Images of the evolution of the origami are taken during the experiments at 10 frames per second, as well as simultaneous recordings of the voltage between the electrodes and the capacitance of the droplet–membrane system.

4 Results and discussion

4.1 Experimental results

A series of images obtained during a typical experiment is shown in Fig. 2 (see also ESI†). These first results reveal that it is possible to open the closed origami structure if a sufficiently strong electric field is imposed between the droplet and the counter electrode. The images in Fig. 2-a show the evolution of the unwrapping as the voltage between the electrodes is increased. The membrane starts to open gradually until a critical voltage is reached: one corner of the triangle suddenly jumps over

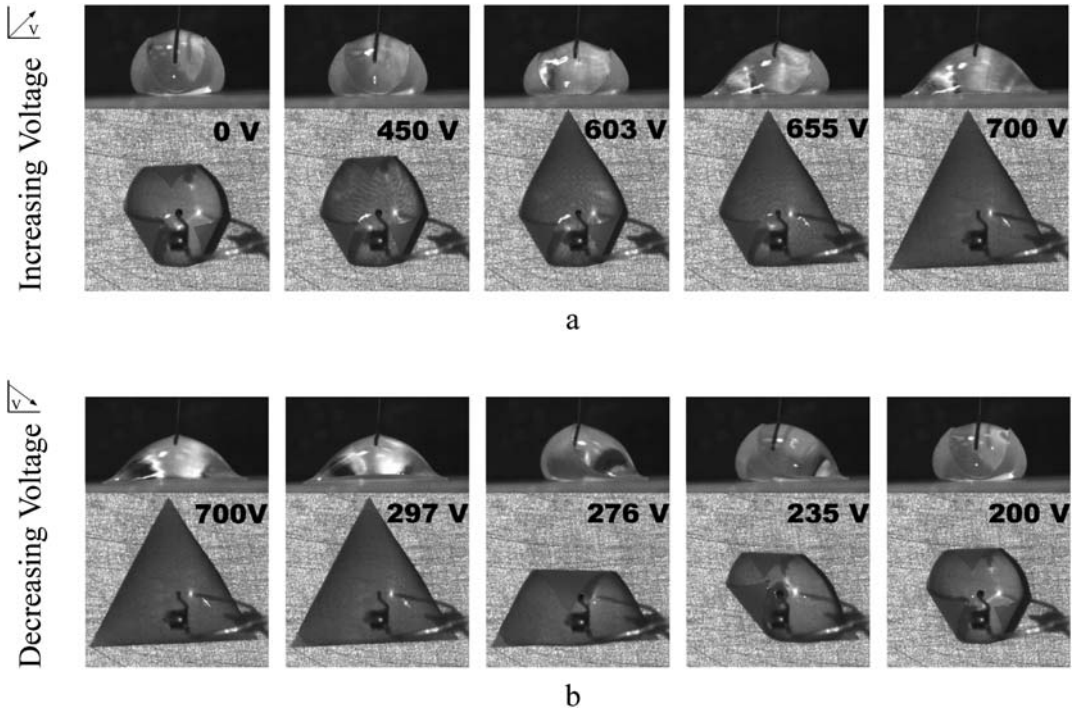


Fig. 2 Images of the lateral and upper views obtained during the experiments, (a) increasing voltage, (b) decreasing voltage. $L = 7$ mm, $h = 80$ μm, $d = 60$ μm and $L_{EC} = 0.47$ mm.

 This journal is © The Royal Society of Chemistry 2010

Published on 01 July 2010 on http://pubs.rsc.org | doi:10.1039/C0SM00004C
Downloaded by Ecole Sup De Physique et de Chimie Indust on 09 September 2010

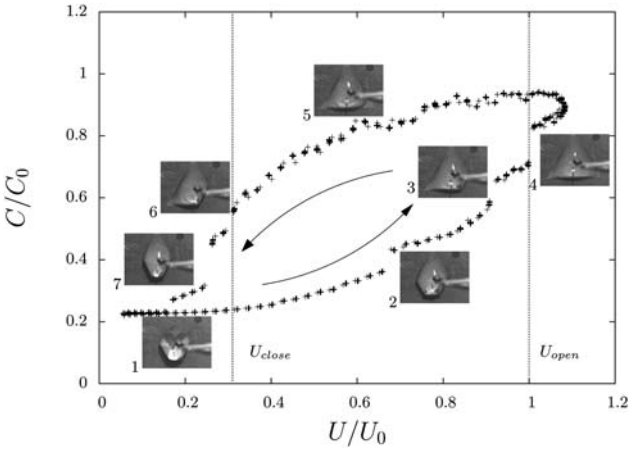


Fig. 3 Measurements of the system's capacitance as a function of the applied voltage for 5 continuous cycles with $L/L_{EC} = 13.5$, $h = 80$ μm and $d = 60$ μm. $C_0 = 6.66$ pF is the capacitance for a parallel plate system of triangular surface with $L = 7$ mm. $U_0 = 857.2$ V.

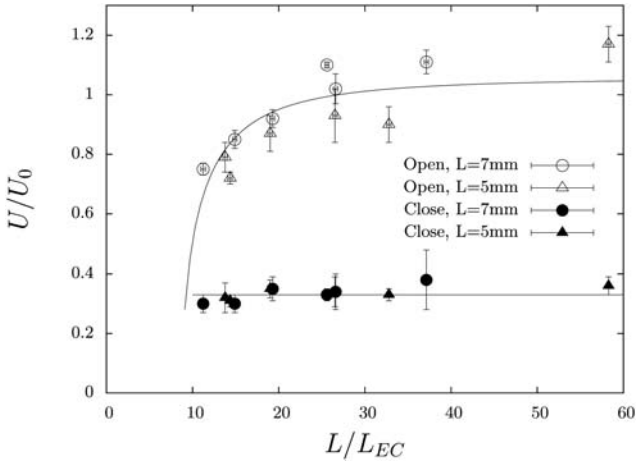


Fig. 4 Experimental results for U_{open} and U_{close} as a function of L/L_{EC}. Solid lines show the fit of the experimental data to expressions obtained for U_{open} and U_{close} from the scaling analysis developed in section 4.2.2, see eqn (9).

the counter electrode. Similar jumps are successively observed as the voltage is progressively increased. We define as U_{open} the RMS value of the voltage beyond which the membrane lies flat over the counter-electrode (last image in Fig. 2-a). A further increase in the voltage does not induce any modification of the shape. However, tiny droplets are ejected when high voltages are reached (typically 1 kV in our experiments) as commonly observed in classical electrowetting experiments.[15] This extreme situation would not be desired for practical applications as it may lead to electrical shortcuts and to the adhesion of the membrane on the counter-electrode. Once U_{open} is reached, the voltage is progressively decreased. Contrary from what would be expected from a continuous transition, the sheet remains flat until one corner suddenly folds at a voltage defined as U_{close} (third image in Fig. 2-b), significantly lower than U_{open}. As the voltage is decreased, the two remaining corners successively fold in the same sudden way and the origami structure recovers its initial shape. To illustrate the hysteresis we measured the capacitance of the system for a complete cycle. These measurements are presented in Fig. 3.The capacitance of the system is expected to be proportional to the surface at contact between the origami and the counter electrode. Besides illustrating the hysteresis in the cycle, the measurement of the capacitance also gives some information of the opening and closing processes. As commented before, when the voltage starts to increase the membrane begins to unwrap in a very slow and continuous way. This unwrapping process corresponds to the continuous increment in the system capacitance between points 1 and 2 in the cycle shown in Fig. 3. Then the sudden unwrapping of one of the corners occurs, and appears as a discontinuous jump of the capacitance in point 2. The membrane keeps opening gradually until the second corner and finally the third corner opens generating discontinuous jumps of the capacitance in points 3 and 4, respectively. After completely opening (point 4), we would expect the capacitance to remain constant until the first corner closes again. However, during the decrease in voltage, dewetting can be observed near the corners of the triangle, which leads to a reduction in the system's capacitance (point 5). Once the electric field is too weak to hold the opened state, a first corner wraps around the droplet

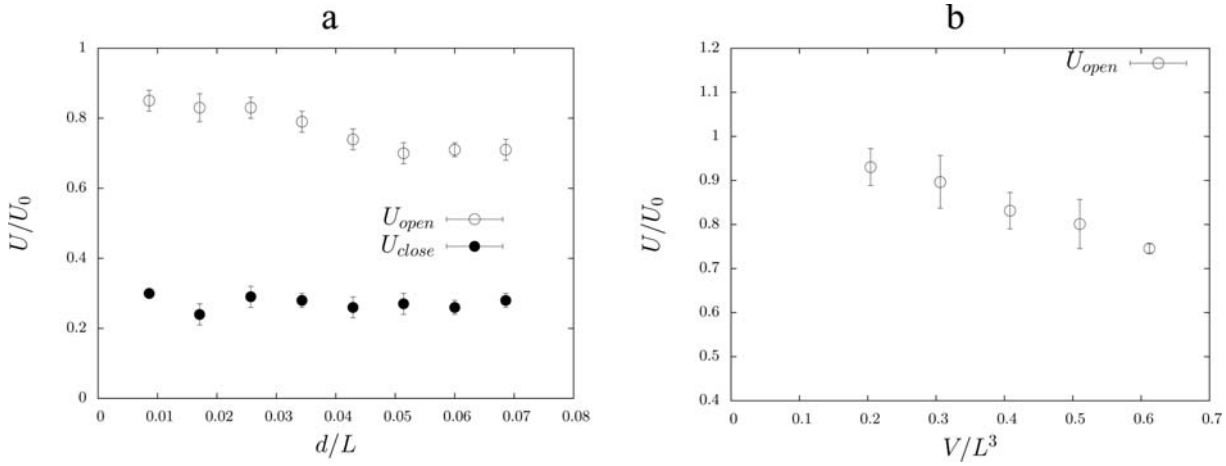


Fig. 5 (a) Experimental results for U_{open} and U_{close} as a function of the thickness of the insulating layer d, for $L/L_{EC} = 13.5$. (b) Experimental results for U_{open} as a function of the droplet volume V for $L/L_{EC} = 13.5$.

Published on 01 July 2010 on http://pubs.rsc.org | doi:10.1039/C0SM00004C
Downloaded by Ecole Sup De Physique et de Chimie Indust on 09 September 2010

again and the value of the capacitance falls in a discontinuous jump at point 6 (this defines the closing voltage U_{close}). The same scenario occurs for the other two corners until the origami is completely closed, moment in which the capacitance returns to its initial value, about five times smaller than the value for the completely opened state.

Different experiments were done varying the experimental parameters, which include the variation of the size of the triangle L, the thickness of the membrane h, the Young modulus of PDMS E, the thickness of the insulating layer d and the ratio V/L^3 (V is the volume of the droplet). Experimental results obtained for U_{open} and U_{close} as a function of L/L_{EC} for fixed values of $d = 50$ μm and $V/L^3 = 0.058$ are shown in Fig. 4. The plotted measurements present clearly the hysteresis between the opening and closing voltages. The collapse of the data in this graph confirms that U_0 and L_{EC} are the relevant parameters in the problem. U_0 also gives a good estimate of the voltages found in the experiments. But as shown in Fig. 4, U_{open}/U_0 increases with function of L/L_{EC} and eventually tends to reach a saturation value. Indeed the results obtained by Py *et al.*[1] show that the bending energy is higher for lower values of L/L_{EC}, which promotes the opening of the structure. Conversely the bending energy becomes negligible for high values of L/L_{EC}, which explains the asymptotic regime observed: the opening and closing voltages should only rely on a balance between surface tension and electric energy and not depend on L/L_{EC} anymore. On the other hand, we observe that the closing voltage U_{close}/U_0 remains practically constant and does not seem to depend on L/L_{EC}. Indeed, as the membrane is completely open there is no elastic energy in the system, so the closing process should depend only on the electric field-surface tension interactions, in which the ratio L/L_{EC} does not play any role.

Fig. 5 a shows different experimental results where the thickness of the insulating layer was increased over one order of magnitude while L/L_{EC} and the ratio V/L^3 were kept constant. The ratio U_{open}/U_0 appears to decrease slowly as a function of the dielectric thickness d, while U_{close}/U_0 remains constant as it did as a function of L/L_{EC}. Nevertheless, the hysteresis between U_{open} and U_{close} remains large. Additionally, U_{open}/U_0 decreases as a function of the ratio between the droplet volume V and L^3, as shown in Fig. 5 b (in this case the length of the membrane L is kept constant while the volume of the droplet was varied from 10 to 30 μl). As shown by Py *et al.*, the distance between the tips of the wrapped membrane increases with the volume of the droplet. We could then expect to need a lower voltage to open a partially folded membrane compared to the completely closed state. Experimental trends are therefore in agreement with the analysis of the physical parameters. However a more detailed analysis of the problem is required to understand and predict the dependency of the opening and closing voltages as a function of the different experimental parameters. A 2D numerical approach and simplified scaling laws for the opening and closing voltages are presented in the following section.

4.2 2D model and numerical simulations

We consider a simplified 2D model of the system inspired by a recent work from de Langre *et al.*[17] The model consists of a two dimensional system, of width w, formed by the elastic membrane and a liquid–air interface (Fig. 6). The membrane is considered to have a constant length L and a uniform radius of curvature R_1. The radius of curvature of the liquid–air interface R_2 is also considered uniform. The droplet is taken as a conductive body of area S separated from the counter electrode by a dielectric layer of thickness d.

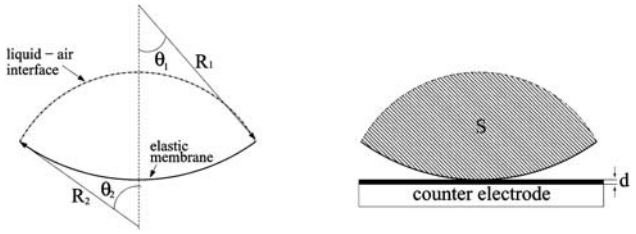


Fig. 6 Sketch of the system used in the 2D simulation: the radii of curvature of the liquid interface, R_1 and of the elastic membrane, R_2, are assumed to be uniform.

The total energy of the system considering the elasticity of the membrane, surface tension and the electric field is given by the following expression:

$$E_t = \frac{BwL}{2R_1^2} + \gamma wL - \sqrt{2}\epsilon w\left(\frac{R_1}{d+h}\right)^{1/2} \arctan\left(\frac{L}{\sqrt{8R_1(d+h)}}\right) U^2 \quad (4)$$

The third term in the last equation approximates the electric energy E_e of a 2D capacitor where one of the electrode is planar, and the other one is a portion (with length L) of cylinder with-curvature R_1. Indeed, if the variations of the gap are small $L^2/R \ll t$ compared to the minimal gap $t = d + h$, the portion of cylinder can be considered as planar and we find the usual formula for parallel plates $E_e = -\epsilon wLU^2/2t$. Conversely in the opposite case $L \gg \sqrt{R_1 t}$ the energy is almost that of a complete cylinder separated of a plane by a gap t, and we find that E_e reduces to the classical value[18] $E_e = -\pi\epsilon wU^2\sqrt{R_1/2t}$ (valid for $t \ll R_1$).

To carry out the numerical simulations with the 2D model we impose as fixed parameters the non-dimensional values $(d + h)/L$, S/L^2 and L/L_{EC}, for the voltage, dielectric and membrane thicknesses, droplet cross section and membrane length, respectively. For each set of parameters the shape of the system which minimizes the total energy is computed as a function of κ (κ is the curvature $1/R_1$). Fig. 7 shows the results of the simulation for U_{open} and U_{close} as a function of the different parameters. The results for U_{open} as a function of L/L_{EC} agree qualitatively with experiments. As in the experiments, the simulation results for U_{close} are independent of L/L_{EC}. Similarly the simulation shows a decreasing value of U_{open} as a function of the insulating layer thickness d. However, the dependence of U_{close} on d shows a large discrepancy between the simulation and the experiments. This discrepancy is discussed in more detail in the following section. Finally, the opening critical voltage decreases as the volume (or its 2D analog S/L^2) increases in the experiments (Fig. 5-b) as well as in the simulation (Fig. 7-c). The results of the simulation are encouraging since they provide a qualitative agreement with the experiments. Analytical expressions, even approximative, are however more useful for practical applications. In the following

 This journal is © The Royal Society of Chemistry 2010

View Online

Published on 01 July 2010 on http://pubs.rsc.org | doi:10.1039/C0SM00004C
Downloaded by Ecole Sup De Physique et de Chimie Indust on 09 September 2010

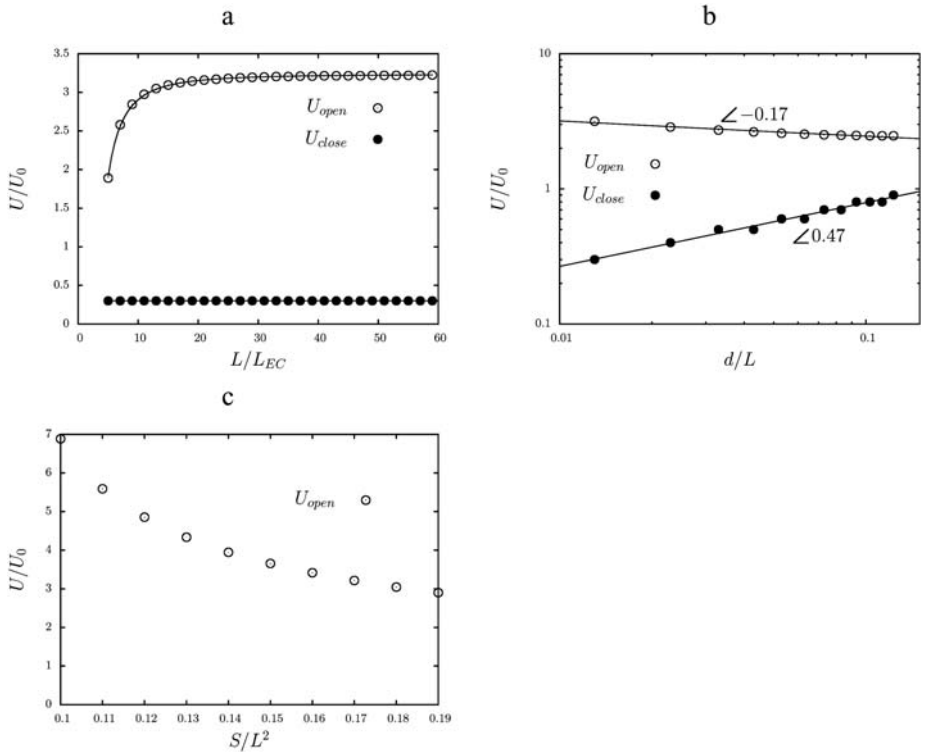


Fig. 7 (a) 2D simulation results for U_{open} and U_{close} as a function of L/L_{EC}, solid lines show the fit of the experimental data to expressions obtained for U_{open} and U_{close} from the scaling analysis in section 5, (b) simulation results as a function of the insulating layer thickness, (c) as a function of S/L^2.

section we derive scaling laws for U_{open} and U_{close} as a function of the physical parameters.

5 Scaling analysis

Based on the same simplified 2D configuration, we first consider the state when the membrane completely wraps the droplet, such that $L \sim \pi R_1$. This state is expected to remain closed while the following torque inequality is verified:

$$\Gamma_\gamma > \Gamma_B + \Gamma_E \tag{5}$$

where Γ_γ, Γ_B and Γ_E are the torques generated by surface tension, bending and electrical forces respectively. The torques due to elastic bending and surface tension are, considering $L \sim R_1$:

$$\Gamma_B \sim \frac{Bw}{R_1} \sim \frac{Bw}{L} \sim \frac{\gamma L_{EC}^2 w}{L} \tag{6}$$

$$\Gamma_\gamma \sim \gamma L w \tag{7}$$

In order to estimate the torque produced by the electric field we consider the electric energy of the system as the energy of a classical cylinder-plane configuration,[18] $E_e = -\pi\epsilon w\sqrt{R_1/2(h+d)}\ U^2$ (valid under condition $R_1 \gg h+d$). The torque due to the electric force is deduced from the derivative $\partial E_e/\partial\theta_1$ where θ_1 is defined on Fig. 6. Considering the geometrical relation $L = R_1\theta_1$, we find:

$$\Gamma_E \sim \frac{\partial E_e}{\partial \theta_1} \sim \varepsilon w \frac{R_1}{L}\sqrt{\frac{R_1}{h+d}}\ U^2 \sim \varepsilon w\sqrt{\frac{R_1}{h+d}}\ U^2 \tag{8}$$

The following expression for U_{open} can finally be inferred from balancing the three torques from eqn (5):

$$U_{open} = \alpha U_0\left(1 - \left(\frac{\beta L_{EC}}{L}\right)^2\right)^{1/2}\left(\frac{L}{h+d}\right)^{1/4} \tag{9}$$

where α and β are numbers expected to be of order 1. Proceeding in a similar way, we compare the torques needed to keep the fully open state to estimate U_{close}. Since the membrane is completely flat, there is no torque generated by the elastic sheet ($\Gamma_b = 0$), which leads to the following condition:

$$\Gamma_E > \Gamma_\gamma. \tag{10}$$

This condition can be rewritten as

$$\frac{\varepsilon}{(d+h)^2} w L^2 U^2 > \gamma w L \tag{11}$$

where the torque is directly computed on the parallel plate configuration. From eqn (11) the following expression for U_{close} can easily be found:

$$U_{close} = U_0\sqrt{\frac{d+h}{L}} \tag{12}$$

which is independent from bending stiffness. It is important to notice that U_{open} will always be larger than U_{close} as soon as $(d + h) << L$ (condition which is also needed to keep valid the

Downloaded by Ecole Sup De Physique et de Chimie Indust on 09 September 2010
Published on 01 July 2010 on http://pubs.rsc.org | doi:10.1039/C0SM00004C

expression obtained for U_{open}). Therefore hysteresis will be present in the system.

To verify the proposed scaling laws we compared them with the experimental data and with the results obtained by numerical simulations carried out with the 2D model. In our experiments we note that the factor $(L/(d+h))^{1/4}$ remains between 2.4 and 2.7 due to the weak exponents. The experimental results for U_{open}/U_0 shown in Fig. 4 were therefore fitted to an expression of the form $f = a\sqrt{1-(\beta L_{EC}/L)^2}$ corresponding to the scaling presented in eqn (9), where $a = \alpha(L/(d+h))^{1/4}$. A fair agreement was found between the experiments and the scaling law in this case. The fitted value obtained $a = 1.11$ shows that α is of order one in eqn (9). On the other hand, we found $\beta \sim 9.22$, which is close to the value of $L/L_{EC} = 11.9$ obtained for triangular shapes by Py *et al.*[1] when $U = 0$ and within the interval $\sqrt{2}\pi < L/L_{EC} < \sqrt{8}\pi L_c/L_{EC}$ proposed by de Langre *et al.*[17] as a wrapping criteria. Also in agreement with eqn (12), in the results shown in Fig. 4, U_{close}/U_0 remains independent of L/L_{EC} with a constant value ~ 0.35. For the same parameters eqn (12) suggests a value of $0.136 < \sqrt{(d+h)/L} < 0.178$. This agreement between the experimental results and the proposed scaling law derived from the 2D model, confirms the hypothesis that elasticity does not play an important role in determining the value of U_{close}.

As shown in Fig. 5-a, U_{open}/U_0 slightly decreases as a function of d. This variation may be approximated in order of magnitude to the expected $((h+d)/L)^{-1/4}$ obtained from the 2D model. However, in the numerical simulation shown in Fig. 7-b, U_{open}/U_0 decreases as $(d/L)^{-0.17}$ and not as $(d/L)^{-0.25}$ as proposed by the scaling law. This difference is due to the relation used to estimate the electric energy which is only valid for $R_1 >> h + d$. However this condition is not verified for the range of d/L range presented in Fig. 7-b (the same range was used in the experiments), which leads to a lower dependence of U_{open}/U_0 on the dielectric thickness.‡ On the other hand, in the experimental results shown in Fig. 5-a, U_{close}/U_0 is independent from the thickness of the insulating layer, which does not agree with the $((d+h)/L)^{1/2}$ scaling law (eqn (12)). This scaling is however verified by the numerical simulations with the 2D model (Fig. 7-b). We believe that the mismatch between the experimental results and the proposed scaling law may be due to the existence of some remaining adhesion between the elastic membrane and the insulating layer of the electrode, in addition to gravity effects. However a better control of the adhesive properties of the membrane and the miniaturization of the system would reduce these effects.

6 Conclusions

We have proven experimentally the feasibility of actuating a capillary origami structure by means of electric forces, being able to switch between its completely opened and closed states in a controlled and reproducible way. A simplified 2D simulation of the problem and scaling laws describing the interaction between surface tension, bending stiffness and electric forces provide qualitative agreement with the experimental results. However a more quantitative description of the actuation would require an improved simulation including three dimensional and gravity effects. From a practical point of view, the use of thinner insulating layers and membranes will result in reduced values for the operating voltages. This system is therefore relatively easy to set up (no moving mechanical parts) at micro-scale, and could provide the basis for a micro-actuator.

‡ An extra simulation was carried out with a range where d/L was small enough to hold the relation $R_1 >> d + h$, which successfully verified the scaling law.

Acknowledgements

We wish to thank Fabien Closa, Charlotte Py, Leatitia Girault and Lionel Agostini for carrying out successfully the preliminary experiments. We also thank Joost van Honschoten for motivating discussions. This work was partially supported by the French ANR Jeunes Chercheurs MecaWet grant and by the Secretaría de Educación Pública (SEP, México).

References

1 C. Py, P. Reverdy, L. Doppler, J. Bico, B. Roman and C. N. Baroud, Capillary origami: spontaneous wrapping of a droplet with an elastic sheet, *Phys. Rev. Lett.*, 2007, **98**, 156103.
2 T. Leong, P. Lester, T. Koh, E. Call and D. Gracias, Surface tension-driven self-folding polyhedra, *Langmuir*, 2007, **23**, 8747–8751.
3 D. Gracias, V. Kavthekar, C. Love, K. Paul and G. Whitesides, Fabrication of micrometer-scale, patterned polyhedra by self-assembly, *Adv. Mater.*, 2002, **14**, 235–238.
4 R. Syms, E. Yeatman, V. Bright and G. Whitesides, Surface tension-powered self-assembly of microstructures- The sate of the art, *J. Microelectromech. Syst.*, 2003, **12**, 387–417.
5 P. Green, R. Syms and E. Yeatman, Demonstration of three-dimensional microstructure self-assembly, *J. Microelectromech. Syst.*, 1995, **4**, 170–176.
6 X. Guo, H. Li, B. Ahn, E. Duoss, J. Hsia, J. Lewis and R. Nuzzo, Two- and three-dimensional folding of thin film single-chrystalline silicon for photovoltaic power applications, *Proc. Natl. Acad. Sci. U. S. A.*, 2009, **106**, 20149–20154.
7 G. Lippmann, Relations entre les phénomènes électriques et capillaires, *Ann. Chim. Phys.*, 1875, **5**, 494–549.
8 J. H. Song, R. Evans, Y. Lin, B. N. Hsu and R. B. Fair, A scaling model for electrowetting-on-dielectric microfluidic actuataors, *Microfluid. Nanofluid.*, 2009, **7**, 75–89.
9 B. Berge, Electrocapillarité et mouillage de films isolants par l'eau, *C.R. Acad. Sci. II*, 1993, **317**, 157–163.
10 B. Berge and J. Peseux, Variable focal lens controlled by an external voltage: an application of electrowetting, *Eur. Phys. J. E*, 2000, **3**, 159–163.
11 M. G. Pollack, A. D. Shenderov and R. B. Fair, Electrowetting-based actuation of droplets for integrated microfluidics, *Lab Chip*, 2002, **2**, 96–101.
12 A. Takei, K. Matsusmoto and I. Shomoyama, Capillary motor driven by electrowetting, *Lab Chip*, 2010, DOI: 10.1039/c001211d.
13 P. Paik, V. K. Pamula and R. B. Fair, 2003, Rapid droplet mixers for digital microfluidic systems, *Lab Chip*, 2003, **3**, 253–259.
14 L. Yeo and H. Chang, Static and spontaneous electrowetting, *Mod. Phys. Lett. B*, 2005, **19**, 549–569.
15 F. Mugele and J. C. Baret, Electrowetting: from basics to applications, *J. Phys.: Condens. Matter*, 2005, **17**, R705–R774.
16 J. Bico, B. Roman, L. Moulin and A. Boudaoud, Elastocapillary coalescence in wet hair, *Nature*, 2004, **432**, 690(2004).
17 E. de Langre, C. N. Baroud and P. Reverdy, Energy criteria for elasto-capillary wrapping, *Journal of Fluids and Structures*, 2010, **26**, 205–217.
18 N. Ida, *Engineering Electromagnetics*, 2nd edn, 2004, Springer, New York.

 This journal is © The Royal Society of Chemistry 2010

Wrinkling Hierarchy in Constrained Thin Sheets from Suspended Graphene to Curtains

Hugues Vandeparre,[1] Miguel Piñeirua,[2] Fabian Brau,[1] Benoit Roman,[2] José Bico,[2] Cyprien Gay,[3] Wenzhong Bao,[4] Chun Ning Lau,[4] Pedro M. Reis,[5] and Pascal Damman[1,*]

[1]*Laboratoire Interfaces et Fluides Complexes, CIRMAP, Université de Mons, 20 Place du Parc, B-7000 Mons, Belgium*
[2]*PMMH, CNRS UMR 7636, ESPCI, Paris-Tech, Univ. Paris 6 and Paris 7, 10 Rue Vauquelin, 75231 Paris Cedex 05, France*
[3]*Matière et Systèmes Complexes, Université Paris Diderot—Paris 7, CNRS, UMR 7057, Bâtiment Condorcet, F-75205 Paris cedex 13, France*
[4]*Department of Physics and Astronomy, University of California, Riverside, California 92521, USA*
[5]*Departments of Mechanical Engineering and Civil and Environmental Engineering, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Massachusetts 02139, USA*

(Received 23 February 2011; published 2 June 2011)

We show that thin sheets under boundary confinement spontaneously generate a universal self-similar hierarchy of wrinkles. From simple geometry arguments and energy scalings, we develop a formalism based on *wrinklons*, the localized transition zone in the merging of two wrinkles, as building blocks of the global pattern. Contrary to the case of crumpled paper where elastic energy is focused, this transition is described as smooth in agreement with a recent numerical work [R. D. Schroll, E. Katifori, and B. Davidovitch, Phys. Rev. Lett. **106**, 074301 (2011)]. This formalism is validated from hundreds of nanometers for graphene sheets to meters for ordinary curtains, which shows the universality of our description. We finally describe the effect of an external tension to the distribution of the wrinkles.

DOI: 10.1103/PhysRevLett.106.224301 PACS numbers: 46.32.+x

The drive towards miniaturization in technology is demanding for increasingly thinner components, raising new mechanical challenges [1]. Thin films are, however, unstable to boundary or substrate-induced compressive loads: moderate compression results in regular wrinkling [2–6] while further confinement can lead to crumpling [7,8]. Regions of stress focusing can be a hindrance, acting as nucleation points for mechanical failure. Conversely, these deformations can be exploited constructively for tunable thin structures. For example, singular points of deformation dramatically affect the electronic properties of graphene [9].

Here, we show that thin sheets under boundary confinement spontaneously generate a universal self-similar hierarchy of wrinkles, from strained suspended graphene to ordinary hanging curtains. We develop a formalism based on *wrinklons*, a localized transition zone in the merging of two wrinkles, as building blocks to describe these wrinkled patterns.

To illustrate this hierarchical pattern, in Fig. 1(a), we show a wrinkled graphene sheet along with an ordinary hanged curtain. These patterns are also similar to the self-similar circular patterns first reported by Argon *et al.* for the blistering of thin films adhering on a thick substrate [10]. The diversity and complexity of those systems, characterized by various chemical and physical conditions, could suggest, *a priori*, that the underlying mechanisms governing the formation of these patterns are unrelated. However, these systems can be depicted, independently from the details of the experiments, as a thin sheet constrained at one edge while the others are free to adapt their morphology. These constraints can take the form of an imposed wavelength at one edge or just the requirement that it should remain flat.

At first sight, as quoted by numerous authors [8,10–16], these patterns consist of a hierarchy of successive generations of folds whose typical size gradually increases along x [Fig. 1(b)]. We propose to rationalize these various hierarchical patterns by considering the evolution of the average wavelength λ with the distance to the constrained edge x. This evolution is adequately described by a simple power law, $\lambda \sim x^m$, see Fig. 1(c), which confirms the self-similarity of these patterns as hypothesized in previous theoretical studies [8,11–13]. Interestingly, curtains made of various materials with contrasted properties exhibit similar exponents. We observe values close to $2/3$ for ''light'' sheets and to $1/2$ for ''heavy'' sheets (both cases defined and discussed in more detail below). Therefore the exponent m is a robust feature of these folding patterns.

In this work, we describe in terms of simple scaling laws the theoretical arguments developed in the mathematical studies of the von Kármán equation [8,12,13,15] and infer the properties of the hierarchical patterns. We also compare these results with extensive experimental data. To the best of our knowledge, the experimental characterization of these patterns had not been carried out to date.

Assuming inextensibility of the sheet along the y direction, the imposed undulation along this direction exactly compensates for an effective lateral compression of the membrane by a factor $(1-\Delta)$ defined as $(1-\Delta) \equiv W/W_0 = W/\int_0^W \sqrt{1+(\partial z/\partial y)^2}dy$, where W_0 and W are the curvilinear and projected widths of the curtain, respectively, and $z(x, y)$ is the out-of-plane deformation

 © 2011 American Physical Society

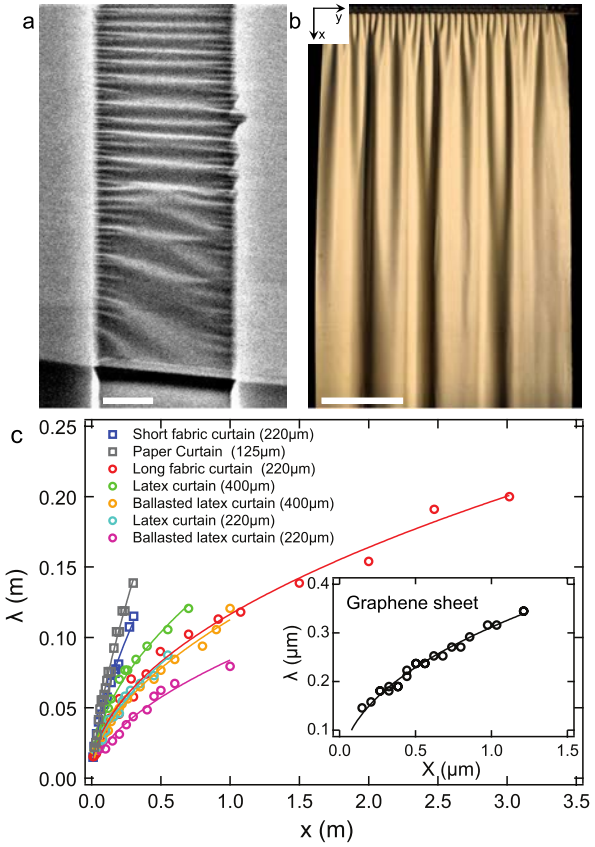


FIG. 1 (color online). (a) Scanning electron microscopy image of suspended graphene bilayer (scale bar is 1 μm). (b) Pattern of folds obtained for a rubber curtain (scale bar is 25 cm). (c) Evolution of the wavelength λ with the distance from the constrained edge x for various curtains. Power-law fits are added (the power exponents m are close to 2/3 for the short fabric and the paper curtains and 1/2 for the long fabric, the rubber curtains, and the graphene sheet). Inset: Evolution of λ with x for the graphene bilayer. The experimental parameters are detailed in the supplemental information [22].

of the sheet. At any position along the x axis, the function $z(x, y)$ is typically sinusoidal along y, with an amplitude $A(x)$ and a wavelength $\lambda(x)$. The inextensibility hypothesis along the y axis imposes $\Delta \sim (A/\lambda)^2$ at the lowest order, where the lateral compression is assumed to be constant throughout the length of the curtain. The undulations of the sheet along y are characterized by a curvature $\kappa \simeq \partial^2 z/\partial y^2$ whose typical value, varying along x, is of order $\kappa(x) \sim A/\lambda^2$. The corresponding energy per unit area, u_b, for bending the membrane is thus of order $u_b \sim Eh^3\kappa^2 \sim Eh^3\Delta/\lambda^2$, where E is the Young modulus and h the thickness of the sheet. Since u_b is proportional to $1/\lambda^2$, the membrane adopts the largest possible wavelengths, in order to minimize energy. This tendency to increase the wavelength, combined with the constraint imposed at the boundaries, is the source of the observed hierarchical wrinkling pattern.

Inspired by previous models based on successive period-doubling transitions [8,13,17], we consider that the

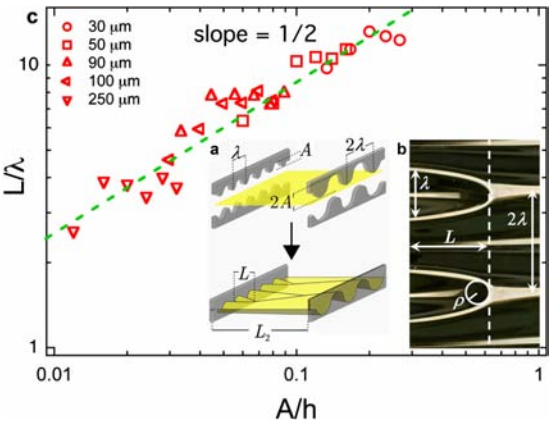


FIG. 2 (color online). (a) Schematic representation of the wrinklon experiments. (b) Morphology of the transition λ to 2λ for a constrained plastic sheet for $A = 6$ mm and $\lambda = 8$ mm. (c) Evolution of the normalized length of a wrinklon, L/λ, with the normalized amplitude, A/h (fixed wavelength, $\lambda = 8$ mm), for different thicknesses as indicated.

allometric laws mentioned above can be derived by considering that the global pattern results from the self-assembly of building blocks which we denote as wrinklons. A single wrinklon corresponds to the localized transition zone needed for merging two wrinkles of wavelength λ into a larger one of width 2λ. This transition requires a distortion of the membrane which relaxes over a distance L. In other words, each wrinklon is characterized by a size, L, which depends on the material properties and on the wavelength λ. To investigate the properties and behavior of wrinklons, we have performed model experiments using thin plastic sheets. The sheets were constrained with sinusoidal clamps: two opposite edges are constrained by a wavelength λ (amplitude A) and 2λ (amplitude $2A$), respectively; see Figs. 2(a) and 2(b). The normalized size of the wrinklons, L/λ, is plotted in Fig. 2(c) as a function of the normalized amplitude, A/h, the data collapse on a single curve defined by $L/\lambda \sim \sqrt{A/h}$. This relation implies that $L \propto \lambda^{3/2}$ since $A \sim \lambda\sqrt{\Delta}$.

In a further step, the wrinklons can be assembled to mimic the behavior of a complete hierarchy. Indeed, if L is the distance over which the wavelength increases from λ to 2λ, its variation, $d\lambda/dx$, is thus of order λ/L. Hence, the evolution of λ as a function of the distance from the constrained edge x is given by

$$\frac{d\lambda}{dx} \simeq \frac{\lambda}{L}. \tag{1}$$

Considering the scaling $L \propto \lambda^{3/2}$ deduced from the single wrinklon experiments, Eq. (1) indicates that the wavelength along the sheet should evolve like $\lambda \propto x^{2/3}$. The excellent agreement between this power law and the experimental data measured for light sheets [Fig. 1(c)] provides strong support to the concept of wrinklons as building blocks. Equation (1) can now be regarded as a

tool that connects the properties of single wrinklons to the features of the full wrinkling-cascade pattern.

We now focus on the description of an elementary building block. For confined thin sheets, stretching deformations are costly as compared to pure bending. The sheet tends to adopt an isometric (developable) shape [7]. However, the only developable solutions compatible with boundary conditions generally include flat domains surrounded by edge or pointlike singularities. These singularities, which focus the elastic energy into narrow regions, have been classified as developable cones [18,19], ridges [7,20], or curved ridges [21]. In our case, the scenario is, however, significantly different: in contrast to crumpling, stretching is smoothly distributed in the transition zone as pointed out recently in numerical simulations of deformed membranes [17]. The necessary stretching required for connecting the periodic patterns can be illustrated by a simple origami model made with a sheet of paper (see supplemental material [22]). The stretching energy can be estimated through the elongation strain of the sheet along x within a transition domain. The typical value of the strain along x is of order α^2, where $\alpha \sim A/L \sim \lambda\Delta^{1/2}/L$ is the average slope of the membrane. The stretching energy thus reads $U_s \sim Eh(\alpha^2)^2 L\lambda \sim Eh\lambda^5\Delta^2 L^{-3}$.

As observed in Figs. 1 and 2, wrinklons should also include a tip singularity (a small region where Gaussian curvature is large). This singularity can be described as a semicircular fold of radius ρ [Fig. 2(b)]. The energy of these singularities has been derived by Pogorelov [21] in a study of deformed shells. In our context, the energy of such curved folds reads $U_{\mathrm{cf}} \sim Eh^{5/2}\alpha^{5/2}\rho^{1/2} \sim Eh^{5/2}\Delta^{5/4}\lambda^{7/2}L^{-3}$, where the radius at the tip of the wrinklon is taken as $\rho \sim \lambda^2/L$ as suggested by the roughly parabolic shape of the crest of the defect [Fig. 2(b)]. Nevertheless, the ratio of the curved fold energy to the stretching energy of the wrinklon, $U_{\mathrm{cf}}/U_s \sim (h/A)^{3/2}$, is very small in our experiments: the effect of this concentrated region can therefore be neglected in the following.

The total energy of a wrinklon, of characteristic area $L\lambda$, is thus given by $U_{\mathrm{tot}} = U_s + U_b \simeq Eh\lambda^5\Delta^2 L^{-3} + Eh^3\Delta L\lambda^{-1}$. The size of a single wrinklon is finally obtained by minimizing U_{tot} with respect to L, yielding

$$L(\lambda) \sim \Delta^{1/4}\lambda^{3/2}h^{-1/2}. \tag{2}$$

This scaling emerges from a balance between bending and stretching energies and was previously reported for other situations, such as the decay length of an imposed curvature in a sheet [20] or the extension of a pinch in a pipe [23]. The scaling for the wavelength describing the whole hierarchical pattern is obtained by integration of Eq. (1) with $L(\lambda)$ given by Eq. (2) and is found to be

$$\frac{\lambda(x)\Delta^{1/6}}{h} \sim \left(\frac{x}{h}\right)^{2/3}. \tag{3}$$

The scaling law, $\lambda \propto x^{2/3}$, is in very good agreement with the observed power laws for light curtains, e.g., made of fabric or paper sheets [Fig. 1(c)]. In addition to yielding the proper exponent, this relation enables the comparison of the data obtained from seemingly disparate systems, over a wide range of length scales and independently of material properties. Figure 3(a) provides a remarkable collapse of the evolution of the wavelengths measured with light curtains and various thin plastic sheets.

Heavy curtains, made from fabric or rubber, and constrained graphene bilayers do not follow this behavior (instead, they obey $\lambda \propto x^{1/2}$). In these experiments, an additional tensile force is acting on the sheet. This tension T is given by the longitudinal tensile strain induced by thermal manipulation in the case of graphene sheets [5] and by gravity for heavy curtains [$T = \rho_c g h(H - x) \sim \rho_c g h H$, where ρ_c, g, h, and H are the density of the curtain, the gravity constant, the thickness, and the height of the curtain]. These systems can also be compared to the cascade of wrinkles observed for compressed thin polystyrene films on an air-water interface [14] since the surface tension of water at the free edges pulls the thin sheet.

The tension exerted along x per unit width imposes an additional stretching energy given by $U_t \sim T\alpha^2 L\lambda \sim T\Delta\lambda^3 L^{-1}$, and becomes dominant when $U_t > U_s$, that is when $T > Eh^2\Delta/A$. The total energy of the distorted membrane thus becomes $U_{\mathrm{tot}} = U_t + U_b$. The length of a wrinklon found from the minimization of U_{tot} is

$$L(\lambda) \sim \frac{\lambda^2}{h}\sqrt{\frac{T}{Eh}}. \tag{4}$$

Similar relations, reflecting a balance between tension and bending energies, were previously proposed for single wavelength patterns in stretched sheets and heavy curtains [3,16]. As expected, the tensile force increases the length of wrinklons for a given wavelength [15]. By integration of Eq. (1) with $L(\lambda)$ given by Eq. (4), we obtain the corresponding spatial evolution of the wavelength along a heavy sheet:

$$\frac{\lambda(x)}{h} \sim \left(\frac{Eh}{T}\right)^{1/4}\left(\frac{x}{h}\right)^{1/2}. \tag{5}$$

This scaling is in excellent agreement with the power laws observed for heavy curtains and graphene bilayers [Fig. 1(c)]. The data of various macroscopic curtains, graphene bilayers, and nanometric polystyrene indeed collapse onto a single master curve without any fitting parameters [see Fig. 3(b)]. Our formalism is thus validated from hundreds of nanometers for graphene sheets to meters for rubber and fabric curtains, which shows the universality of our description. The transition between the stretching and tension regimes can be obtained by comparing the relations (3) and (5). The critical distance from the edge at which this transition occurs is given by $x^\star/h \sim (Eh/T)^{3/2}\Delta$. In gravity dominated systems, the tension $T \simeq \rho g h H$ gives the typical curtain length $H_c \sim h(E/\rho g h)^{3/5}\Delta^{2/5}$ above which tension dominates. Curtains shorter than H_c (about 1 m for our fabric) were

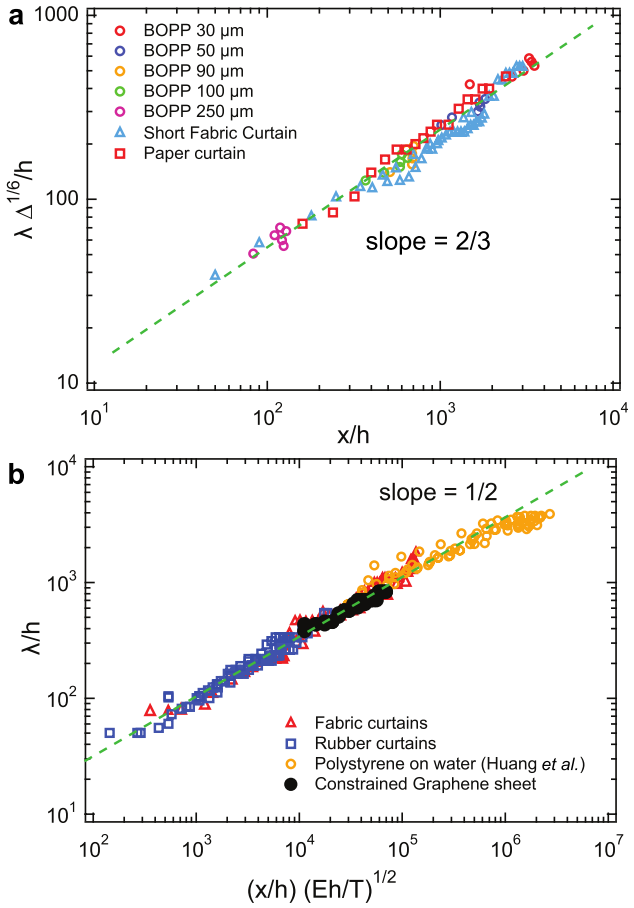


FIG. 3 (color online). Master curves gathering all data. (a) Normalized wavelength, $\tilde{\lambda} = \lambda\Delta^{1/6}/h$, as a function of the normalized distance, $\tilde{x} = x/h$, from the constrained edge for short light sheets (fabric curtain, paper curtain, and constrained plastic sheets). Dashed line: $\tilde{\lambda} = 2.89\tilde{x}^{0.65}$. (BOPP, biaxially oriented polypropylene). (b) Normalized wavelength $\tilde{\lambda} = \lambda/h$ as a function of the normalized distance from the constrained edge $\tilde{x} = (x/h)(Eh/T)^{1/2}$ for sheets under tension: fabric curtains, rubber curtains, suspended bilayer graphene sheet, and polystyrene thin films deposited on water from Ref. [14]. Dashed line: $\tilde{\lambda} = 2.85\tilde{x}^{0.52}$.

used to observe the regimes dominated by stretching (''light sheets''), whereas the top part of longer curtains was used for experiments concerning ''heavy sheets.''

In summary, we showed that the self-similar patterns observed in sheets constrained at one edge cannot be described with *d*-cone or ridge singularities. In contrast, they can be built by stitching together building blocks, which we call wrinklons, characterized by a diffuse stretching energy. The self-similar structure is then related to the size of these wrinklons that depends on material properties and the local wavelength. Interestingly, we also show that these building blocks can be readily manipulated through the size and energy cost of a single wrinklon by applying a tension. For large values of tension, we even expect a transition towards a purely cylindrical pattern along the sheet with a single wavelength. Finally, we can draw a parallel with the fractal buckling of torn plastic sheets where, in contrast, the different modes are superimposed [24].

The authors thank T. Witten, B. Davidovitch, and N. Menon for fruitful discussions. This work was partially supported by the Belgian National Funds for Scientific Research (FNRS), the Government of the Region of Wallonia (REMANOS Research Programs), the European Science Foundation (Eurocores FANAS, EBIOADI), the French ANR MecaWet, and the MIT-France MISTI program. C. N. L. and W. B. acknowledge support by ONR N00014-09-1-0724 and the FENA Focus Center. The theoretical part of this work was mostly completed at the Aspen Center for Physics.

*pascal.damman@umons.ac.be

[1] J. A. Rogers and Y. Huang, Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A. **106**, 10 875 (2009).
[2] N. Bowden *et al.*, Nature (London) **393**, 146 (1998).
[3] E. Cerda and L. Mahadevan, Phys. Rev. Lett. **90**, 074302 (2003).
[4] L. Pocivavsek *et al.*, Science **320**, 912 (2008).
[5] W. Bao *et al.*, Nature Nanotech. **4**, 562 (2009).
[6] F. Brau *et al.*, Nature Phys. **7**, 56 (2010).
[7] T. A. Witten, Rev. Mod. Phys. **79**, 643 (2007).
[8] B. Audoly and Y. Pomeau, *Elasticity and Geometry: From Hair Curls to the Nonlinear Response of Shells* (Oxford University Press, Oxford, 2010).
[9] V. M. Pereira *et al.*, Phys. Rev. Lett. **105**, 156603 (2010).
[10] A. S. Argon *et al.*, J. Mater. Sci. **24**, 1207 (1989).
[11] M. Ortiz and G. Gioia, J. Mech. Phys. Solids **42**, 531 (1994).
[12] S. Conti, A. DeSimone, and S. Müller, Comput. Methods Appl. Mech. Eng. **194**, 2534 (2005).
[13] W. Jin and P. Sternberg, J. Math. Phys. (N.Y.) **42**, 192 (2001).
[14] J. Huang *et al.*, Phys. Rev. Lett. **105**, 038302 (2010).
[15] B. Davidovitch, Phys. Rev. E **80**, 025202(R) (2009).
[16] E. Cerda, L. Mahadevan, and J. M. Pasini, Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A. **101**, 1806 (2004).
[17] R. D. Schroll, E. Katifori, and B. Davidovitch, Phys. Rev. Lett. **106**, 074301 (2011).
[18] M. Ben Amar and Y. Pomeau, Proc. R. Soc. A **453**, 729 (1997).
[19] E. Cerda *et al.*, Nature (London) **401**, 46 (1999).
[20] A. E. Lobkovsky and T. A. Witten, Phys. Rev. E **55**, 1577 (1997).
[21] A. V. Pogorelov, *Bendings of Surfaces and Stability of Shells*, Translations of Mathematical Monographs Vol. 72 (American Mathematical Society, Providence, 1988).
[22] See supplemental material at http://link.aps.org/supplemental/10.1103/PhysRevLett.106.224301 for experimental section and details about the wrinklon morphology.
[23] L. Mahadevan, A. Vaziri, and M. Das, Europhys. Lett. **77**, 40 003 (2007).
[24] E. Sharon *et al.*, Nature (London) **419**, 579 (2002).

Bibliographie

[1] P.G. de Gennes, F. Brochard-Wyard, and D. Quéré. *Capillarity and Wetting Phenomena : Drops, Bubbles, Pearls, Waves*. Springer-Verlag, New York, first edition, 2003. 2, 4, 10, 15, 17, 46

[2] B. Roman and J. Bico. Elasto-capillarity : deforming an elastic structure with a liquid droplet. *J. Phys. Condens. Matter*, 22 :493101, 2010. 2

[3] J. Bico, B. Roman, L. Moulin, and A. Boudaoud. Elastocapillary coalescence in wet hair. *Nature*, 432(7018) :690–690, 2004. 2

[4] X. Noblin, S. Yang, and J. Dumais. Surface tension propulsion of fungal spores. *J. Exp. Biol.*, 212 :2835–2843, 2009. 2

[5] T. Tanaka, M. Morigami, and N. Atoda. Mechanism of resist pattern collapse during development process. *Japanese J. Appl. Phys. Part 1*, 32(12B) :6059–6064, 1993. 3

[6] H. Namatsu, K. Kurihara, M. Nagase, K. Iwadate, and K. Murase. Dimensional limitations od silicon nanolines resulting from pattern distortion due to surface-tension of rinse water. *Appl. Phys. Lett.*, 66(20) :2655–2657, 1995. 3

[7] C.V. Nguyen, L. Delzeit, A.M. Cassell, J. Li, J. Han, and M. Meyyappan. Preparation of nucleic acid functionalized carbon nanotube Arrays. *Nano Lett.*, 2(10) :1079–1081, 2002. 3

[8] K.K.S. Lau, J. Bico, K.B.K. Teo, M. Chhowalla, G.A.J. Amaratunga, W.I. Milne, G.H. McKinley, and K.K. Gleason. Superhydrophobic carbon nanotube forests. *Nano Lett.*, 3(12) :1701–1705, 2003. 3

[9] N. Chakrapani, B. Wei, A. Carrillo, P.M. Ajayan, and R.S. Kane. Capillarity-driven assembly of two-dimensional cellular carbon nanotube foams. *Proc. Natl. Acad. Scie. U.S.A.*, 101(12) :4009–4012, 2004. 3

[10] H. Liu, S.H. Li, J. Zhai, H.J. Li, Q.S. Zheng, L. Jiang, and D.B. Zhu. Self-assembly of large-scale micropatterns on aligned carbon nanotube films. *Angewandte Chem. - Int. Ed.*, 43(9) :1146–1149, 2004. 3

[11] C Journet, S. Moulinet, C. Ybert, S.T. Purcell, and L. Bocquet. Contact angle measurements on superhydrophobic carbon nanotube forests : Effect of fluid pressure. *Europhys. Lett.*, 71(1) :104–109, 2005. 3

[12] J.W. van Honschoten, M. Escalante, N.R. Tas, and M. Elwenspoek. Formation of liquid menisci in flexible nanochannels. *J. Colloid Interface Sci.*, 329(1) :133–139, 2009. 3

[13] J.W. van Honschoten, , M. Escalante, N.R. Tas, H.V. Jansen, and M. Elwenspoek. Elastocapillary filling of deformable nanochannels. *J. Applied Phys.*, 101(9) :094310, 2007. 3

[14] D. Halpern and J.B. Grotberg. Fluid-elastic instabilities of liquid-lined flexible tubes. *J. Fluid Mech.*, 244 :615–632, 1992. 3

[15] J.A. Clements. Lung surfactant : a personal perspective. *Annu. Rev. Physiol.*, 59 :1–21, 1997. 3

[16] M. Heil and J.P. White. Airway closure : surface-tension-driven non-axisymmetric instabilities of liquid-lined elastic rings. *J. Fluid Mech.*, 462 :79–109, 2002. 3

[17] A.L. Hazel and M. Heil. Surface-tension-induced buckling of liquid-lined elastic tubes : a model for pulmonary airway closure. *Proc. Royal Soc. London A*, 461(2058) :1847–1868, 2005. 3

[18] G.R. Lester. Contact angles of liquids at deformable solid surfaces. *J. Colloid Sci.*, 16 :315–326, 1961. 4

[19] A.I. Rusanov. On the thermodynamic of deformable solid surfaces. *J. Colloid Interface Sci.*, 63 :330–345, 1978. 4

[20] A. Carré and M.E.R. Shanahan. Effect of cross-linking on the dewetting of an elastomeric surface. *J. Colloid Interface Sci.*, 191(1) :141–145, 1997. 4

[21] R. Pericet-Camara, A. Best, H.-J. Butt, and E. Bonaccurso. Effect of capillary pressure and surface tension on the deformation of elastic surfaces by sessile liquid microdrops : An experimental investigation. *Langmuir*, 24(19) :10565–10568, 2008. 4, 11

[22] R. Pericet-Camara, G. K. Auernhammer, K. Koynov, S. Lorenzoni, R. Raiteri, and E. Bonaccurso. Solid-supported thin elastomer films deformed by microdrops. *Soft Matter*, 5(19) :3611–3617, 2009. 4

[23] Y.-S. Yu and Y.-P. Zhao. Elastic deformation of soft membrane with finite thickness induced by a sessile liquid droplet. *J. Colloid Interface Sci.*, 339 :489–494, 2009. 4

[24] L.D. Landau and E.M. Lifshitz. *Theory of Elasticity.* Butterworth-Heinemann, Oxford, third edition, 1986. 4, 60

[25] S.P. Timoshenko and S. Woinowsky-Krieger. *Theory of Plates and Shells.* McGraw-Hill, Singapore, second edition, 1959. 4, 56, 58, 118

[26] C. Py, P. Reverdy, L. Doppler, J. Bico, B. Roman, and C.N. Baroud. Capillary Origami : Spontaneous wrapping of a droplet with an elastic sheet. *Phys. Rev. Lett.*, 98(15) :156103, 2007. 5, 10, 12

[27] X. Guo, H. Li, B.Y. Ahn, E.B. Duoss, K.J. Hsia, J.A. Lewis, and R.G. Nuzzo. Two- and three-dimensional folding of thin film single-crystalline silicon for photovoltaic power applications. *Proc. Natl. Acad. Scie. U.S.A.*, 106(48) :20149–20154, 2009. 5, 6, 11

[28] J. Huang, M. Juszkiewicz, W.H. de Jeu, E. Cerda, T. Emrick, N. Menon, and T.P. Russell. Capillary wrinkling of floating thin polymer films. *Science*, 317(5838) :650–653, 2007. 5, 7, 41, 42, 43, 65, 68, 74, 77, 78, 83, 90

[29] D. Vella, M. Adda-Bedia, and E. Cerda. Capillary wrinkling of elastic membranes. *Soft Matter*, 6 :5778–5782, 2010. 7, 41, 43, 65

[30] J. Huang, B. Davidovitch, C. Santangelo, T.P. Russel, and N. Menon. Smooth cascade of wrinkles at the edge of a floating elastic film. *Phys. Rev. Lett.*, 105 :038302, 2010. 7, 8, 93, 94, 111

[31] Ned Bowden, Insung S. Choi, Bartosz A. Grzybowski, and George M. Whitesides. Mesoscale self-assembly of hexagonal plates using lateral capillary

forces :,Äâ synthesis using the ,Äúcapillary bond,Äù. *Journal of the American Chemical Society*, 121(23) :5373–5391, 1999. 9

[32] P.W. Green, R. R. A. Syms, and E. M. Yeatman. Demonstration of three-dimensional microstructure self-assembly. *J. Microelectromech. Syst.*, 4(4) :170–176, 1995. 9

[33] D.H. Gracias, V. Kavthekar, J.C. Love, K.E. Paul, and G.M. Whitesides. Fabrication of micrometer-scale, patterned polyhedra by self-assembly. *Adv. Mater.*, 14(3) :235+, 2002. 9, 10

[34] R. R. A. Syms, E.M. Yeatman, V.M. Bright, and G.M. Whitesides. Surface tension-powered self-assembly of micro structures - The state-of-the-art. *J. Microelectromech. Syst.*, 12(4) :387–417, 2003. 9

[35] M. Boncheva, D.A. Bruzewicz, and G.M. Whitesides. Millimeter-scale self-assembly and its applications. *Pure Appl. Chem.*, 75(5) :621–630, 2003. 9

[36] M. Mastrangeli, S. Abbasi, C. Varel, C. Van Hoof, J-P Celis, and K. F. Boehringer. Self-assembly from milli-to nanoscales : methods and applications. *J. Micromech. and Microeng.*, 19(8) :083001, 2009. 9

[37] T.G. Leong, A.M. Zarafshar, and D.H. Gracias. Three-Dimensional Fabrication at Small Size Scales. *Small*, 6(7) :792–806, 2010.

[38] J.-H. Cho and D.H. Gracias. Self-assembly of lithographically patterned nanoparticles. *Nano Letters*, 9(1) :4049–4052, 2009. 10

[39] J.-H. Cho, A. Azam, and D.H. Gracias. F. *Langmuir*, 2010. 10

[40] J.-H. Cho, T. James, and D.H. Gracias. Curving nanostructures using extrinsic stress. *Adv. Mater.*, 22 :2320–2324, 2010. 10

[41] K. L. Johnson, K. Kendall, and A. D. Roberts. Surface energy and the contact of elastic solids. *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*, 324(1558) :301–313, 1971. 11

[42] Arnaud Antkowiak, Basile Audoly, Christophe Josserand, Sébastien Neukirch, and Marco Rivetti. Instant fabrication and selection of folded structures using drop impact. *Proc. Natl Acad. Sci. USA*, 108(26) :10400–10404, June 2011. 11

[43] G. Lippmann. Relations entre les phénomènes électriques et capillaires . *Ann. Chim. Phys.*, 5() :494–549, 1875. 14

[44] B. Berge. Electrocapillarité et mouillage de films isolants pas l'eau . *C.R. Acad. Sci II*, 317() :157–163, 1993. 14

[45] B. Berge and J. Peseux. Variable focal lens controlled by an external voltage : an application of electrowetting. *Eur. Phys. J. E*, 3() :159–163, 2000. 14, 25

[46] Phil Paik, Vamsee K. Pamula, and Richard B. Fair. Rapid droplet mixers for digital microfluidic systems. *Lab Chip*, 3 :253–259, 2003. 14

[47] M. G. Pollack, A. D. Shenderov, and R. B. Fair. Electrowetting-based actuation of droplets for integrated microfluidics. *Lab Chip*, 2 :96–101, 2002. 14

[48] Atsushi Takei, Kiyoshi Matsumoto, and Isao Shomoyama. Capillary motor driven by electrowetting. *Lab Chip*, 10 :1781–1786, 2010. 14

[49] Frieder Mugele and Jean-Christophe Baret. Electrowetting : from basics to applications. *Journal of Physics : Condensed Matter*, 17(28) :R705, 2005. 14, 16, 17

[50] E. de Langre, C.N. Baroud, and P. Reverdy. Energy criteria for elasto-capillary wrapping. *J. Fluid Structures*, 26() :205–217, 2010. 31

[51] N. Ida. *Engineering Electromagnetics*. Springer, second edition, 2004. 36

[52] F. Li and F. Mugele. How to make sticky surfaces slippery : Contact angle hysteresis in electrowetting with alternating voltage. 92(24) :244108, 2008. 39

[53] H. Bodiguel. *Propriétés mécaniques de films polymères ultraminces*. PhD thesis, Université Pierre & Marie Curie, Paris 6, 2006. 41

[54] Douglas P. Holmes and Alfred J. Crosby. Draping films : A wrinkle to fold transition. *Phys. Rev. Lett.*, 105 :038303, Jul 2010. 41

[55] B. Davidovitch, R.D. Schroll, M. Adda-Bedia, and E. Cerda. A prototypical model for tensional wrinkling in thin sheets. *PNAS*, In press. 43, 65, 74, 75, 76

[56] J.C. Géminard, R. Bernal, and F. Melo. Wrinkle formations in axi-symmetrically stretched membranes. *Eur. Phys. J. E*, 15 :117–126, 2004. 43, 44, 65, 74, 78

[57] K Burton and D. LAnsing Taylor. Traction forces of cytokinesis measured with optically modified elastic substrata. *Nature*, 385 :450, 1997. 43

[58] E. Cerda. Mechanics of scars. *J. Biomech.*, 38 :1598–1603, 2005. 44, 64, 65, 74, 77

[59] Frédéric Moisy, Marc Rabaud, and Kévin Salsac. A synthetic schlieren method for the measurement of the topography of a liquid interface. *Experiments in Fluids*, 46 :1021–1036, 2009. 10.1007/s00348-008-0608-z. 49, 50, 51, 54

[60] M. Raffel, C.E. Willert, S.T. Wereley, and J. Kompehans. *Particle Image Velocimetry*. Springer, second edition, 2007. 54

[61] E. H. Mansfield. *The Bending and Stretching of Plates*. Cambridge University Press, 1989. 62, 75, 76

[62] L. Pocivavsek, R. Dellsy, A. Kern, S. Johnson, B. Lin, Lee K.Y.C., and E. Cerda. Stress and fold localization in thin elastic membranes. *Science*, 320 :912–916, 2008. 65, 85, 86, 87

[63] F. Brau, H. Vandeparre, A. Sabbah, C. Poulard, A. Boudaoud, and P. Damman. Multiple-length-scale elastic instability mimics parametric resonance of nonlinear oscillators. *Nature Phys.*, 7 :56–60, 2011. 65

[64] E.H. Mansfield. On the buckling of an annular plate. *Quart. Journ. Mech. and Applied Math*, 13 :16–23, 1960. 65

[65] Haim Diamant and Thomas A. Witten. Compression induced folding of a sheet : An integrable system. *Phys. Rev. Lett.*, 107 :164302, Oct 2011. 87

[66] B. Audoly. Localized buckling of a floating elastica. *Phys. Rev. Lett.*, in press. 87

[67] Hugues Vandeparre, Sylvain Gabriele, Fabian Brau, Cyprien Gay, Kevin Kit Parker, and Pascal Damman. Hierarchical wrinkling patterns. *Soft Matter*, 6 :5751–5756, 2010. 95

[68] Y. Aoyanagi, J. Hure, J. Bico, and B. Roman. Random blisters on stickers : metrology through defects. *Soft Matter*, 6 :5720–5728, 2010. 102

[69] Weimin Jin and Peter Sternberg. Energy estimates for the von kármán model of thin-film blistering. 42(1) :192–199, 2001. 102, 111

[70] B. Audoly and Y. Pomeau. *Elasticity and Geometry : From Hair Curls to the Nonlinear Response of Shells*. Oxford University Press, first edition, 2010. 102, 103

[71] Robert D. Schroll, Eleni Katifori, and Benny Davidovitch. Elastic building blocks for confined sheets. *Phys. Rev. Lett.*, 106 :074301, Feb 2011. 102

[72] Enrique Cerda, Sahraoui Chaieb, Francisco Melo, and L. Mahadevan. Conical dislocations in crumpling. *Nature*, 401 :46–49, 1999. 103

[73] Alex Lobkovsky, Sharon Gentges, Hao Li, David Morse, and T. A. Witten. Scaling properties of stretching ridges in a crumpled elastic sheet. *Science*, 270(5241) :1482–1485, 1995. 103

[74] A.V. Pogorelov. *Bendings of surfaces and stability of shells, Translations of Mathematical Monographs*. Am. Phys. Soc., Providence, first edition, 1988. 103, 105

[75] Ludovic Pauchard, Yves Pomeau, and Sergio Rica. Déformation des coques élastiques. *C.R. Acad. Sci. Paris II b*, 324 :411–418, 1997. 103, 105

[76] Agnès Maurel, Pablo Cobelli, Vincent Pagneux, and Philippe Petitjeans. Experimental and theoretical inspection of the phase-to-height relation in fourier transform profilometry. *Appl. Opt.*, 48(2) :380–392, Jan 2009. 105

[77] A. Lobkovsky and T.A. Witten. Properties of ridges in elastic membranes. *Phys. Rev. E*, 55(2) :1577–1589, 1997. 104

[78] L. Mahadevan, A. Vaziri, and M. Das. Persistence of a pinch in a pipe. *Europhys. Lett.*, 77 :40003, 2007. 104, 111

[79] H. Vandeparre. *Elastic Instabilities : A new route to design complex patterns*. PhD thesis, Université de Mons, 2010. 107, 109, 110, 111

[80] Wenzhong Bao, Feng Miao, Zhen Chen, Hang Zhang, Wanyoung Jang, Chris Dames, and Chun Ning Lau. Controlled ripple texturing of suspended graphene and ultrathin graphite membranes. *Nature Nanotechnology*, 4 :562–566, 2009. 110, 111