

Les réseaux de neurones formels et de leurs réalisations optoélectroniques : génération optique de tableau de nombres aléatoires

Philippe Lalanne

▶ **To cite this version:**

Philippe Lalanne. Les réseaux de neurones formels et de leurs réalisations optoélectroniques : génération optique de tableau de nombres aléatoires. Optique [physics.optics]. Université Paris Sud - Paris XI, 1989. Français. NNT : 1989PA112240 . pastel-00730634

HAL Id: pastel-00730634
https://pastel.hal.science/pastel-00730634

Submitted on 10 Sep 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ORSAY
N° d'ordre :

UNIVERSITE DE PARIS-SUD
CENTRE D'ORSAY

THESE

présentée

pour obtenir

Le Titre de Docteur en Sciences Physiques

PAR

Monsieur Philippe LALANNE

SUJET : Les réseaux de neurones formels et leurs réalisations optoélectroniques. Génération optique de tableaux de nombres aléatoires.

soutenue le 5 octobre 1989 devant la Commission d'examen

MM.	S.LOWENTHAL	Président
	R.AZENCOTT	
	P.CHAVEL	
	F.DEVOS	
	J.P.HUIGNARD	
Mme	S.LAVAL	
	J.TABOURY	

Je dois beaucoup à l'équipe dans laquelle j'ai effectué ce travail. Chacun a su m'apporter ce dont j'avais besoin, chacun m'a donné de son temps pour me permettre de bénéficier de son savoir, de ses compétences et de ses facilités. De plus, de nombreuses personnes sont devenues plus que de simples collègues de travail.

J'aimerais tout d'abord remercier Pierre Chavel qui a proposé et encadré cette thèse. Il a guidé avec attention mon travail en se rendant toujours disponible. Il a partagé mes soucis en y apportant souvent des réponses. J'ai eu bien des occasions d'apprécier sa gentillesse et sa pondération.
Jean Taboury a lui aussi encadré mon travail. J'ai souvent profité de ses idées, de ses conseils, de ses discussions et de ses passions. Merci à tous les deux.

Je suis reconnaissant à Monsieur le Professeur Serge Lowenthal d'avoir accepté la présidence de mon jury. Sa bienveillante attention m'a toujours rassuré et m'a permis de travailler dans de très bonnes conditions matérielles et humaines.

Je remercie Monsieur le Professeur Christian Imbert de m'avoir accueilli dans son laboratoire.

J'aimerais exprimer ma gratitude aux membres du jury ; je suis à la fois honoré et content qu'ils aient accepté d'en faire partie. Je remercie Madame Suzanne Laval et Monsieur Jean-Pierre Huignard d'avoir accepté la "lourde charge" de juger mon travail. Francis Devos m'a accueilli dans son équipe à l'I.E.F. durant mon service national, me faisant ainsi bénéficier d'une année privilégiée. Monsieur Robert Azencott m'a donné des conseils précieux pour les mesures des statistiques du speckle.

Patrick Garda s'est occupé de mon encadrement scientifique l'année du service national. J'espère que nous continuerons à collaborer dans l'ambiance chaleureuse qu'il a su instaurer. J'en profite également pour remercier l'ensemble des personnes de l'IEF: Kurosh, Eric, Roger Reynaud et Thierry Morin.

Quotidiennement, Madeleine a soulagé mon travail et, aller la voir le matin est toujours un moment fort appréciable. Line et Nicole, après m'avoir accueilli chaleureusement dans leur bureau à mon arrivée, ont finalement préféré leur ordinateur. François Polack a alors accepté gentiment de prendre la relève. Les remarques de Denis Joyeux, par leur pertinence, m'ont toujours été d'une aide "énergiquement" efficace. Jean-Claude Rodier a large-

ment contribué à la partie speckle tandis que Daniel Phalippou et Jean-Claude Saget ont guidé mes premières expérimentations. De façon moins quotidienne mais toujours aussi gentiment, Gérald Roosen, Raymond Mercier, Jean Paul Hugonin , Sham Mallick, François Chataux, André Marion et André Galais ont toujours su donner de leur temps pour m'apporter une aide précieuse. A mon arrivée en thèse Jimmy était déjà un vieux "roublard" de l'optique et il m'a initié aux joies du sous-sol. Quand Nicolas est arrivé en thèse, il a pu parfaitement bénéficier de mon acquis... au squash. Merci aussi à Iyad, Dominique et Véro.

Lors de ces années de thèse, beaucoup de personnes m'ont dépanné. Elles se reconnaîtront quand je parlerai d'ordinateur, de manipulation, de rédaction, ... Je les en remercie. Notamment, Madame Delmotte n'a pas ménagé son travail pour photocopier et relier les manuscrits et Nelly Bonavent pour en dactylographier la première partie.

Ma famille et mes amis m'ont beaucoup gâté durant ces années de thèse. Mes parents, bien sûr! mais aussi quotidiennement Dominique qui n'a pas manqué d'apprécier (trop souvent) ma disponibilité et ma bonne humeur. Bertrand est allé jusqu'à ne pas se raser pour me faire oublier les classes.
Que toutes ces personnes que je vois peu ou pas assez considèrent aussi ce travail un peu comme le leur.

ABSTRACT

Two purposes concerning the field of neural networks research are investigated in this thesis. First, we study optical implementation of neural networks. We show that higher order models, i.e. multineuron synapsis models, allow us to increase strongly the network capacity with respect to the number of stable stored states. Optical implementations of such models necessary suppose both optical interconnects and boolean logic gates built into matrices. We propose a general approach for these implementations. In our hybrid architecture, the strength of optics, linear transformation for massive interconnects and the strength of electronics, point nonlinearities are both used to advantage.

In the second part, we use speckle as a fast binary random number arrays generator. A theoretical approach and experimental evidences show that this kind of random generator may be of interest for opto-electronic implementation of parallel stochastic algorithms.

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION 1

PARTIE I 4

CHAPITRE I - LES RESEAUX DE NEURONES 5

I. Préambule : bref aperçu du système nerveux 6
1. Description générale 6
2. Le neurone biologique 6

II. Présentation du réseau de neurones formels 10
1. Le neurone formel 10
2. Le réseau 12
3. Evolutions temporelles du reseau 12

III. Application aux mémoires associatives 14
1. Mémoire associative 14
2. Comportement du réseau de neurones formels 15

IV. L'apprentissage 15
1. Les différents types d'apprentissage 15
2. Capacités de mémorisation des réseaux de neurones 16

V. Applications aux problèmes d'optimisation 16

VI. Une approche différente des ordinateurs classiques 19

VII. Conséquences pratiques de la mémoire distribuée 20
1. Un comportement collectif 20
2. Un parallèlisme complet 21

VIII. Bref historique des réseaux de neurones 22

CHAPITRE II - LE MODELE D'HOPFIELD ET LES MEMOIRES ASSOCIATIVES 24

I. Le modèle d'Hopfield 25
1. Aspect énergétique 25
2. Application aux problèmes d'optimisation 27
3. Mémoires associatives 30

II. Interprétation en termes de corrélations mémoires associatives d'ordre supérieur 34

III. Analyse théorique 36

IV. Simulations 45

CHAPITRE III - L'APPORT DE L'OPTIQUE 54

I. Les réseaux de neurones : une situation propice au développement de processeurs optiques 55

II. Les deux grands schémas optiques des réseaux de neurones . 58
1. Produit vecteur-matrice en éclairage cohérent 58
2. Produit vecteur-matrice par un double filtrage des fréquences spatiales 59
3. Remarques 63
4. Produit vecteur-matrice "direct" 65

III. Matériaux et composants non linéaires pour le traitement optique de l'information 66
1. Les différents composants non linéaires 66
2. "Neurone optique" sur cristal de Titanate de Baryum .. 69

IV. Les différentes réalisations de réseaux de neurones optiques 72

V. Discussion 77

VI. Conclusion 80

CHAPITRE IV - UNE MEMOIRE ASSOCIATIVE POUR RETROACTION OPTO-ELECTRONIQUE 81

I. Article "Optical inner-product implementation of neural network models" 82

II. Partie expérimentale 92
1. Description générale 92
2. Description pratique 97

III. Discussion 100
1. Les réseaux de neurones "type Hopfield" 102
2. Notre contribution 103
3. Les limitations de notre modèle 104
4. Critique générale des réseaux de neurones type Hopfield 105
5. Conclusion 106

CHAPITRE V - LES RESEAUX DE NEURONES STOCHASTIQUES A COUCHES 108

I. Quelques traits des modèles élaborés 110
1. Les limites des classifieurs linéaires 110
2. Les réseaux de neurones à couches 112
3. Le recuit simulé 116

II. La machine de Boltzmann 117
1. Brève présentation 117
2. Les réalisations 120

III. Notre prospective de recherche 131

PARTIE II 124

CHAPITRE VI - LE SPECKLE 125

I. Rappel sur la formation du speckle 126
II. Formation du speckle 126

III. Modélisation du comportement de la surface diffusante .. 128

IV. Quelques propriétés générales des statistiques du speckle 129
1. Statistique de l'éclairement en un point 129
2. Statistique de l'éclairement intégré sur une cellule 129
3. Facteur d'autocorrélation spatiale 131
4. Facteur d'autocorrélation temporelle 132

CHAPITRE VII - CONCEPTION ET DESCRIPTION D'UN MONTAGE DE VALIDATION 133

I. Les impératifs du générateur optique 134
1. Les objectifs 134
2. Les contraintes imposées par la rétine électronique . 135

II. Description du montage de validation 136
1. Choix du système diffuseur 136
2. Choix du diaphragme 139
3. Photodétection 140

CHAPITRE VIII - TESTS D'INDEPENDANCE 144

I. Facteurs de corrélation temporelle 145
1. Influence de la photodétection 146
2. Non-reproductibilité des mesures 147
c) Résultats 149
d) Conclusion 152

II. Facteurs de corrélation spatiale 153
1. Calcul théorique du facteur de corrélation d'ordre 1 153
2. Mesure du facteur de corrélation d'ordre 1 155
3. Facteurs de corrélation d'ordre élevé 160

III. Tests d'indépendance spatiale et conclusion 162
1. Rappel sur le test du chi-deux 162
2. Résultats 165
3. Conclusion 166

CHAPITRE IX - DEFINITION D'UN SCHEMA DE PRINCIPE POUR LA REALISATION D'UN PROTOTYPE 167

I. Définition d'un schéma global d'un prototype de générateur de tableau de nombres aléatoires 169

II. Influence du paramètre M sur la précision accessible sur une loi pile ou face 172
1. Approche théorique du problème 172
2. Etude de l'influence des fluctuations du seuil sur la précision de la loi pile ou face 174
3. Etude de l'influence des surfaces diffusantes et de la source sur la précision de la loi pile ou face 176

III. Aspect énergétique 180

IV. Discussion 183

V. Automate cellulaire de Wolfram 185
1. Présentation générale 185
2. Test de convergence 186
3. Tests d'indépendance 188
4. Discussion 189

CONCLUSION 191

REFERENCES 193

ANNEXE I 200

ANNEXE II 203

INTRODUCTION

L'ambition de créer des machines présentant un comportement semblable à celui du système nerveux central a certainement excité l'être humain depuis fort longtemps. Ce n'est que plus récemment que, grâce en particulier à l'apparition conjointe de supercalculateurs, de méthodes de calcul et d'algorithmes nouveaux qu'une grande partie de la communauté scientifique s'est enthousiasmée à une telle perspective. De nouveaux modèles dits connexionnistes calqués sur ceux proposés par les neurobiologistes semblent "mimer" l'intelligence du cerveau biologique. Mathématiciens et informaticiens s'attachent à leur élaboration de manière à les rendre susceptibles de résoudre des problèmes complexes qui se prêtent mal à une mise en algorithme. Tel est le cas par exemple de l'observation d'une image: il semble impossible d'énoncer dans ce cas une méthode générale d'inspection sans auparavant avoir compris le travail implicite d'extraction de primitives, de contours...

L'étude de ces réseaux connexionnistes soulève le problème général posé par leur réalisation sous forme de machines parallèles présentant une grande densité d'interconnexions. L'optique, en autorisant des architectures parallèles semble s'adapter particulièrement bien à la réalisation des réseaux de neurones formels. Nous avons trouvé en ces modèles matière à réflexion sur l'introduction de l'optique dans les machines pour le calcul parallèle.

Cette étude a été menée en essayant de garder un esprit

critique d'une part, bien sûr sur le modèle neuronal envisagé et d'autre part sur l'apport d'une architecture optique vis à vis des autres réalisations possibles. En conséquence, la première partie comprend l'étude d'un modèle simple et une revue d'ensemble des différentes réalisations opto-électroniques autorisant sa mise en oeuvre.

Une critique des limitations théoriques que nous avons rencontrées dans ce modèle nous conduira dans la seconde partie vers une approche plus générale où l'optique intervient ponctuellement comme processeur dédié afin de soulager l'intégration électronique de machines-tableaux pour le traitement parallèle de l'information. L'étude préliminaire effectuée s'inscrit dans le cadre de la réalisation d'un générateur optique de tableaux de nombres aléatoires. Ce travail est la première étape d'un projet plus ambitieux, qui en collaboration avec P. Garda, a pour but la réalisation d'une machine de Boltzmann opto-électronique. Cette dernière dont les limitations théoriques ne sont pas encore complètement appréhendées présente l'avantage de réaliser un apprentissage autonome.

Ce manuscrit se compose donc:

- D'une première partie dans laquelle nous décrivons rapidement (chap. I) les réseaux de neurones puis des résultats théoriques sur le modèle que nous avons développé (chap. II). Au chapitre III, nous montrons l'apport de l'optique vis à vis des réalisations possibles de ces réseaux. Le chapitre IV est consacré à la description d'une expérience de laboratoire que nous avons effectuée pour illustrer la résolution d'un problème de reconnaissance.

- D'un chapitreV de transition qui met l'accent sur certaines limitations des modèles précédents tout en proposant une alternative: la machine de Boltzmann.

- D'une seconde partie qui donne les principaux résultats

d'une étude préliminaire d'un générateur de tableaux de nombres aléatoires qui s'inscrit dans le cadre de la machine de Boltzmann. Nous étudions tout particulièrement les indépendances statistiques que l'on peut espérer obtenir avec cette méthode.

PARTIE I

CHAPITRE I

LES RESEAUX DE NEURONES

I. PREAMBULE: BREF APERCU DU SYSTEME NERVEUX

Le but de ce paragraphe n'est pas de donner une description complète [1] de l'état actuel des recherches des neurobiologistes. Ce serait plutôt d'introduire les "ingrédients" indispensables à la conception d'une machine "capable" de reproduire certains des comportements du système nerveux. Et tant mieux si ces ingrédients sont compatibles avec les contraintes biologiques!

1. DESCRIPTION GENERALE

Le système nerveux peut être décrit sur une échelle allant du mètre à l'Angström, montrant la richesse de son organisation :

- mètre : système nerveux, terminaison nerveuses.
- décimètre : aires par exemple visuelles, auditives, temporales... composant le cortex. Ce dernier est constitué de dix milliards de neurones.
- centimètre : cartes. Ce sont les parties constituantes des aires. Elles correspondent à des représentations topologiques des récepteurs sensoriels et moteurs.
- millimètre : réseaux de neurones. Celui-ci comprend des parties très fortement connectées incluant de 10^3 à 10^5 neurones.
- 100 micromètres : le neurone. C'est l'entité de base.
- micromètre : la synapse qui établit les connexions entre les neurones.
- angström : molécules.

2. LE NEURONE BIOLOGIQUE

La figure 1 montre les différents éléments constitutifs de l'entité cérébrale : le neurone. Lorsqu'une microélectrode pénètre dans le corps cellulaire d'un neurone, on constate l'existence, vis à vis de l'extérieur, d'une différence de potentiel de

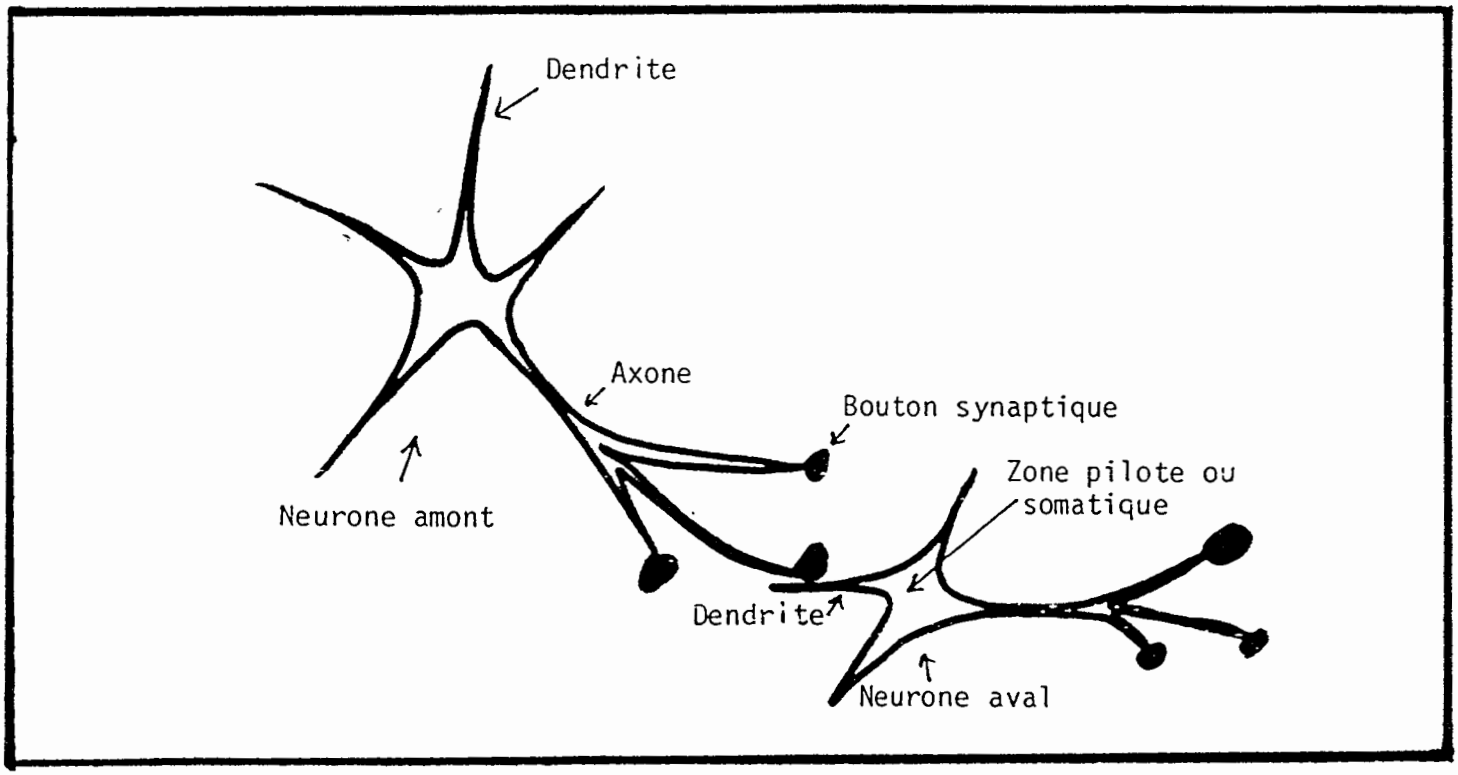
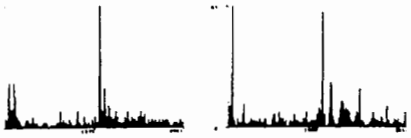

Dendrite
Axone
Bouton synaptique
Zone pilote ou somatique
Neurone amont
Dendrite
Neurone aval

Figure 1

40 à 80 mV. C'est le potentiel de repos somatique. Le neurone émet des potentiels d'actions (appelés *spikes*) de grande amplitude, entre 80 et 110 mV. Ces spikes se propagent de façon nonlinéaire le long des membranes axonales. La durée d'un spike est de l'ordre de 1 ms. Sa forme est représentée ci-dessous.



La forme du potentiel d'action est standard. Ils ne transportent donc pas d'autre information que leur présence ou leur absence en première approximation.

Au niveau de la zone synaptique, des mécanismes physico-chimiques qu'il est inutile de détailler provoquent la création de potentiels postsynaptiques dépolarisants (excitateurs) ou hyperpolarisants (inhibiteurs) qui se propagent dans le dendrite d'un neurone aval. En première approximation, les potentiels postsynaptiques s'additionnent dans la zone pilote d'un neurone aval. Le potentiel somme appelé potentiel somatique déclenche alors un nouveau potentiel d'action par un processus non linéaire de comparaison à un seuil. Ce déclenchement s'effectue par la *loi du tout ou rien*, i.e. le nouveau spike est émis si et seulement si le potentiel somatique excède une certaine valeur.

Voilà ainsi posées les bases du fonctionnement de la dynamique neuronale. Ajoutons cependant, que les synapses qui prennent une part prépondérante dans la constitution du potentiel somatique sont douées de plasticité. Autrement dit, elles peuvent évoluer dans le temps. Ajoutons également qu'il existe des synapses que nous appelerons par la suite d'ordre supérieur (leur transmittivité est fonction de deux potentiels d'action différents). Celles-ci sont particulièrement efficaces dans le cervelet et l'hypocampe qui sont essentiellement deux structures de comparaison entre des informations arrivantes et connues.

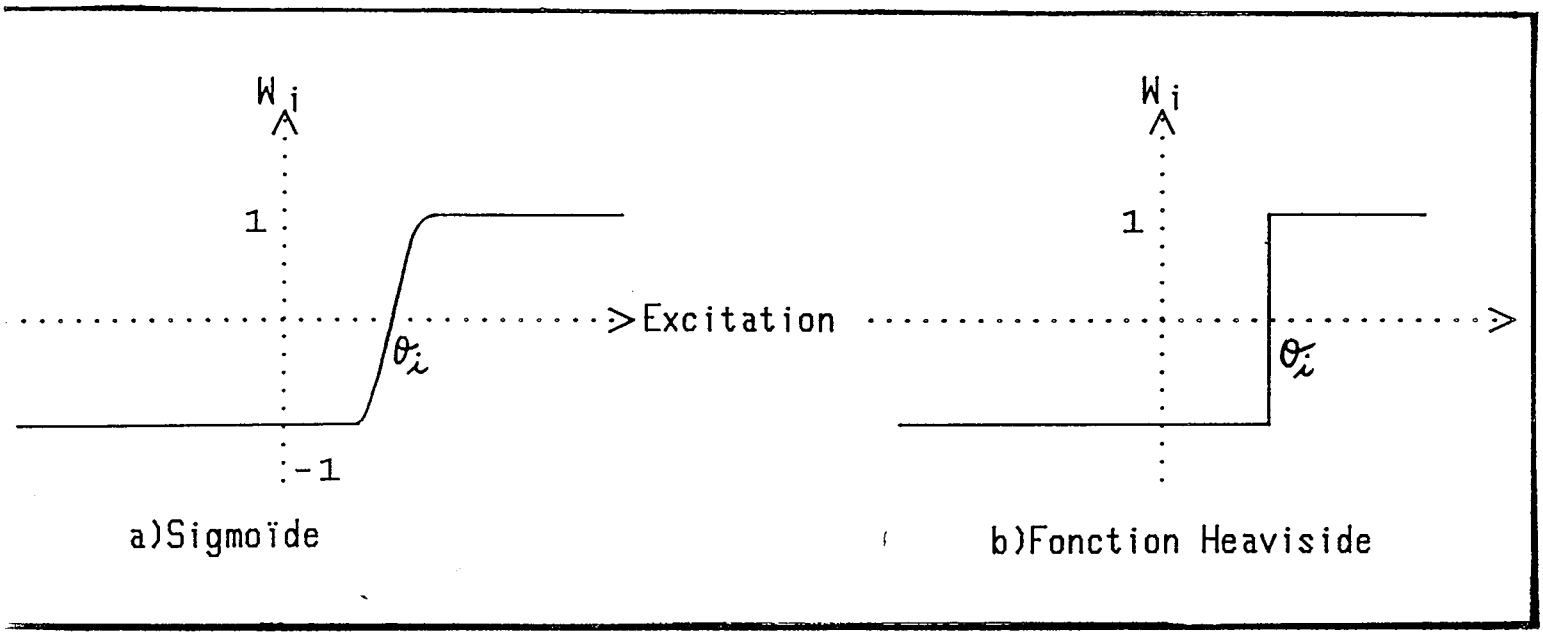


Figure 2 : Modélisation de la réponse neuronale par une sigmoïde a) et par une fonction à seuil b)

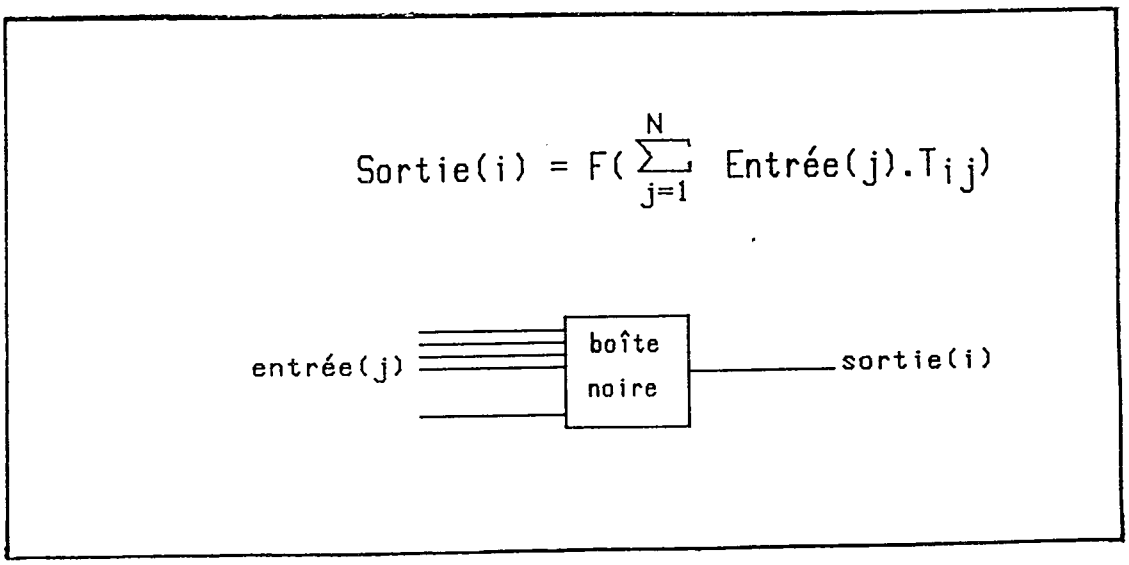


Figure 3 : Schéma global de la relation entrée-sortie d'un neurone formel.

II. PRESENTATION DU RESEAU DE NEURONES FORMELS

L'introduction nous a permis de mettre en place quelques mots "clés" du vocabulaire des neurobiologistes. Elle a permis également de montrer combien l'étude des propriétés macroscopiques du cerveau à partir des entités de sa structure semble délicate. Et même si cette étude s'avérait possible, il serait complètement utopiste de penser pouvoir réaliser une machine calquée sur le cerveau. Faut-il pour autant abandonner tout essai de réaliser une machine capable comme le cerveau de reconnaître en en une milliseconde des informations bruitées, partielles ou déformées ou capable d'apprendre ?

Le réseau de neurones formels reprend les grandes idées du développement précédent en modélisant à l'extrême le système nerveux central. Par abus de langage, il garde également le vocabulaire précédemment introduit.

1. LE NEURONE FORMEL

Le neurone formel est l'entité élémentaire du modèle envisagé. L'état de ce neurone est, de façon générale, binaire (-1 ou 1). Cette valeur binaire symbolisera l'état activé 1 ou l'état désactivé - 1 de la description précédente. La donnée de l'état de chacun des N neurones définit l'état du réseau. On représentera schématiquement l'état du réseau à l'instant t par la donnée d'un vecteur à N composantes
$\mathbf{W}(t) = (W_1(t), W_2(t) \ldots W_i(t), \ldots W_N(t))$. Cette approximation de binarisation dans le modèle provient du fait que les potentiels d'action sont standards. En outre, le neurone formel est capable d'effectuer une sommation sur ses entrées et une opération non-linéaire. Cette opération non-linéaire peut être vue comme la fonction seuil de la Figure 2.b, approximation de la réponse sigmoïdale plus réaliste de la Figure 2.a. Le neurone formel peut donc être considéré comme une boîte noire à plusieurs entrées et une sortie, voir Figure 3.

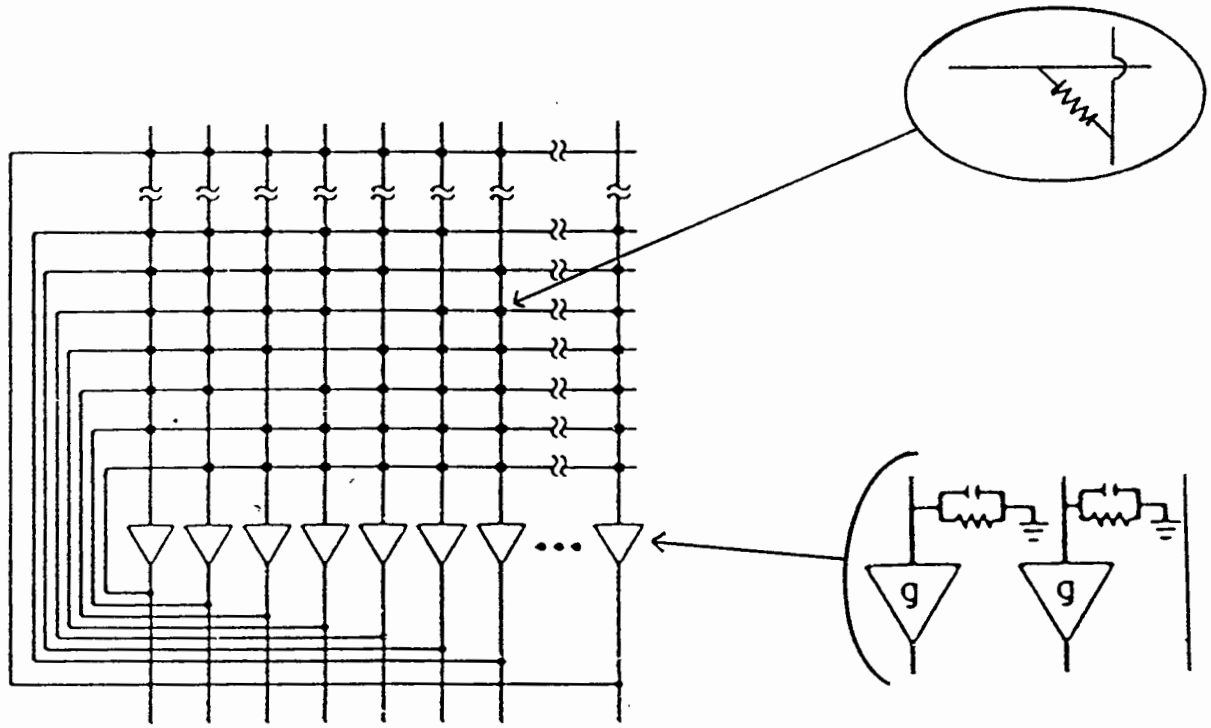


Figure 4 : D'après J.J. Hopfield [3] : réalisation électrique d'un réseau neuronal.

2. LE RESEAU

Le réseau est formé de N neurones très fortement interconnectés. A priori, un neurone quelconque i est connecté à n'importe quel autre neurone j par l'intermédiaire d'un coefficient synaptique notée T_{ij}. L'ensemble des synapses forme donc une matrice de taille N x N. Cette matrice synaptique contient toute l'information connue du réseau à un instant t. Elle est susceptible d'évoluer temporellement : $\mathbf{T}(t + \Delta t) = \mathbf{T}(t) + \Delta\mathbf{T}$ afin de rendre compte de la plasticité des synapses.

Remarquons que la connectivité globale introduite est une condition forte et relativement délicate à réaliser lorsque N devient grand. Cependant, tout sous-réseau à connectique moindre, peut être obtenu par l'annulation d'un certain nombre de coefficients synaptiques.

Une des premières réalisations électriques est dûe à J.J. Hopfield [2] et permet de bien se représenter un tel réseau (Figure 4). Les connections sont réalisées à l'aide de résistances dont la conductance est égale au coefficient synaptique ($1/R_{ij} = T_{ij}$) . Le neurone est constitué de deux amplificateurs dont l'un est inverseur. Sans rentrer dans les détails, l'amplificateur inverseur permet de rendre compte astucieusement de coefficients synaptiques négatifs qu'il est impossible de réaliser à l'aide de simple résistance.

3. EVOLUTIONS TEMPORELLES DU RESEAU

Trois modes de fonctionnement peuvent être distingués :

- un mode synchrone où à un instant t tous les neurones décident simultanément de leur nouvel état.

- un mode asynchrone (qui est surtout utilisé lors des simulations) où les neurones évoluent les uns après les autres. Aucun neurone n'évolue en même temps qu'un autre, l'ordre dans lequel les différents neurones évoluent étant sans grande importance.
- un mode "continu" qui se veut être "plus proche" de la dynamique du cortex et correspond en outre à celui qui s'opère dans le circuit de la Figure 4. L' évolution du réseau est régie par un système d'équations différentielles couplées. Nous en parlerons peu dans la suite.

Nous aurons l'occasion de revenir plus en détail sur des modes de fonctionnement dans le chapître suivant à propos du modèle d'Hopfield et dans l'appendice à propos de la machine de Boltzmann.

En tout état de cause, l'évolution d'un neurone peut-être représentée comme suit :

- à l'instant t, un neurone i reçoit l'information de tous les autres neurones et évalue sa force excitatrice $F_i(t)$ (l'analogue du potentiel somatique) :

$$F_i(t) = \sum_{j=1}^{N} T_{ij} W_j(t) \qquad (1)$$

- Il compare cette force à un seuil θ_i et décide de son nouvel état selon la règle suivante :

$$\begin{cases} W_i(t + \Delta t) = 1 & \text{si} \quad F_i(t) \geqslant \theta_i \\ W_i(t + \Delta t) = -1 & \text{si} \quad F_i(t) < \theta_i \end{cases} \qquad (2)$$

III. APPLICATION AUX MEMOIRES ASSOCIATIVES

1. MEMOIRE ASSOCIATIVE

L'idée de mémoire asociative provient de la psychologie. Le fonctionnement de la mémoire humaine en est très caractéristique. Lorsque nous pensons à un ami, par exemple, il nous vient à l'esprit une quantité considérable d'informations : son nom, son âge, ses passe-temps, sa famille, nos souvenirs communs... Toutes ces informations sont associées dans notre mémoire et il n'est nulle part question, dans ce cas d'une adresse ou d'un emplacement en mémoire. Ce sont les éléments d'informations eux-mêmes qui en tiennent lieu. Même les animaux simples comme la mouche ou la limace possèdent des mémoires associatives. Le fait que des systèmes nerveux très simples fonctionnent ainsi indique qu'il doit s'agir d'une propriété naturelle, pratiquement spontanée, des ensembles de neurones. Les réseaux de neurones formels possèderaient-ils de telles propriétés ?

Examinons l'espace des états du réseau de neurones formels précédemment décrit. Celui-ci comporte 2^N états. Parmi ces 2^N états, seul un certain nombre correspond à une information connue. Considérons que chacun de nos amis corresponde à un de ces états. Lorsque nous recevons une information incomplète sur une personne particulière (par exemple ses cheveux, sa démarche), nous pouvons limiter notre recherche à une région particulière de l'espace des états. Le principe de la mémoire associative consiste à rechercher dans cette région, la personne réelle correspondant le mieux aux données partielles. **Nous pourrons donc appeler mémoire associative, toute machine capable à partir de données tronquées ou bruitées, de retrouver la donnée complète connue a priori, cette recherche s'effectuant par "le contenu" même de l'information présentée.**

2. COMPORTEMENT DU RESEAU DE NEURONES FORMELS

Ce comportement se retrouve dans le réseau de neurones formels. On aurait pu penser a priori que, chaque neurone étant connecté à tous les autres, l'état général du réseau se modifie sans cesse par le jeu des complexes intéractions entre neurones. Il n'en est rien. On verra dans le chapitre suivant que le réseau évolue vers des états stables appelés "attracteurs". Si l'on choisit convenablement les poids synaptiques, il sera démontré que ces attracteurs peuvent correspondre aux états devant être mémorisés par la machine.

IV. L'APPRENTISSAGE

1. LES DIFFERENTS TYPES D'APPRENTISSAGE

On peut définir l'apprentissage comme la propriété pour un système de modifier son comportement en fonction de son histoire. L'apprentissage dans les réseaux de neurones est lié à la dynamique des efficacités synaptiques et doit permettre de déterminer la matrice synaptique. On distingue trois types d'apprentissage :

- L'apprentissage forcé : à proprement parlé, la matrice est préconditionnée. Une fois pour toutes, les coefficients synaptiques sont figés et le réseau garde une mémoire fixe. C'est l'analogue du système réflexe de certains animaux inférieurs.

- L'apprentisage avec professeur : Une règle d'évolution synaptique a été fixée par avance. L'apprentissage consiste alors à modifier les synapses de façon à introduire de nouveaux attracteurs dans le réseau.

- L'apprentissage sans professeur : le système extrait de son environnement les informations et se "débrouille" pour réaliser alors des "buts internes" ("enrichir les relations

d'association). Nous verrons dans l'appendice un exemple d'application.

2. CAPACITES DE MEMORISATION DES RESEAUX DE NEURONES

Dans les réseaux de neurones formels, l'information (ou les mémoires) est contenue dans l'ensemble des coefficients synaptiques. Ces derniers sont au nombre de N^2. Pour un réseau déterminé, c'est à dire à N fixé, seulement un petit nombre des 2^N états peuvent être choisis comme attracteurs sans dégradation. Autrement dit, l'information étant partagée sur un nombre fini de synapses, le nombre d'attracteurs stockés par une règle d'apprentissage sera fonction bien évidemment des attracteurs et du nombre de synapses. Il est certain que le nombre maximum d'attracteurs qui peuvent être appris sans dégradation est une fonction de N^2 . Nous aurons l'occasion de revenir sur l'évaluation de cette fonction et sur quelques règles d'apprentissage.

V. APPLICATION AUX PROBLEMES D'OPTIMISATION

Il existe une classe de problèmes mathématiques appelée classe NP constituée de problèmes dit "difficiles". Cette classe "s'oppose" à celle dite P (problèmes faciles) qui est constituée par l'ensemble des problèmes dont on sait trouver un algorithme qui en donne la solution en un temps polynomial de la taille des données.

Vis à vis des problèmes difficiles, la grosse difficulté à laquelle est confrontée l'approche classique est celle de l'explosion combinatoire. Regardons à cet effet un problème d'école, celui du voyageur commerce : étant données N villes (situées par exemple sur la carte de France), comment un voyageur de commerce devant visiter successivement les N villes et revenir à sa ville de départ doit-il s'y prendre dans le choix de son tour de façon à parcourir la distance minimale. Il y a $\frac{N!}{2N}$ tours possibles ! Ce

nombre de tours augmentant exponentiellement avec le nombre de villes, toute recherche exhaustive est vouée à l'échec.

Il est très important de voir que dans ce genre de problème, la solution optimale n'est pas la seule intéressante. L'essentiel est surtout d'obtenir une "bonne" solution, c'est à dire une solution relativement proche de la solution optimale.

En 1985, Hopfield et Tank [3] ont montré que les réseaux de neurones pouvaient, par l'intermédiaire d'une fonction "énergie" (type hamiltonien d'Heisenberg ou fonction de Lyapounov en automatique) trouver de bonnes solutions. En exploitant les possibilités de calcul parallèle et collectif des réseaux de neurones, ce genre de machine pouvait se montrer compétitive.

Le réseau trouve une solution, c'est à dire prend une décision, en suivant une trajectoire dans l'espace des états, minimisant son énergie jusqu'à atteindre un minimum local. Toutefois, le réseau doit avoir un comportement différent selon qu'il résout un problème de mémoire associative ou d'optimisation. Dans le cas d'une mémoire associative, le réseau est d'abord mis dans un état initial (représentation bruitée de la forme à reconnaître), et évolue ensuite jusqu'à se stabiliser dans un état stable : réponse du réseau. Il est évidemment souhaitable que cette réponse soit relativement "proche" de l'état initial afin d'associer à l'information bruitée celle qui lui "ressemble" le plus. Dans le cas d'un problème d'optimisation, la solution est donnée par le minimum absolu de l'énergie (ou un minimum suffisamment profond). Pour éviter que le choix de l'état initial ne soit d'une grande importance, le réseau doit pouvoir s'extraire des minima locaux pour pouvoir atteindre des minima suffisamment "profonds".

Cependant, il n'existe pas de méthode générale pour concevoir un réseau optimiseur, et chaque type d'exemple traité demande une solution adaptée. Il semblerait donc que cette approche soit une gageure. Cependant, elle se justifie par l'importance croissante, en ingénierie, des problèmes d'optimisation et de reconnaissance de formes.

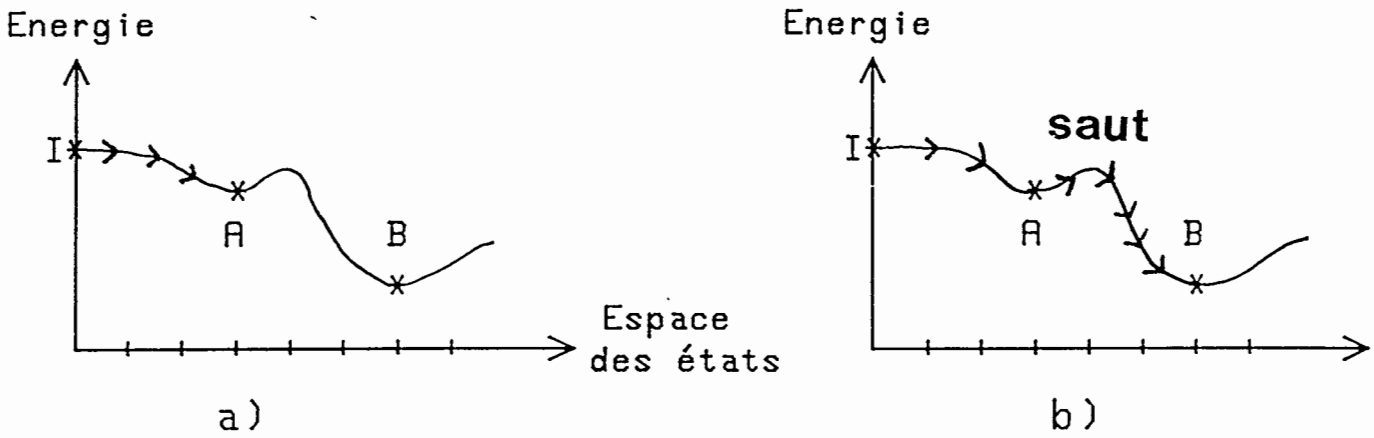


Figure 5 : Evolution de l'énergie dans un réseau neuronal :
a) Energie décroissante
b) Saut positif d'énergie autorisé.

VI. UNE APPROCHE DIFFERENTE DES ORDINATEURS CLASSIQUES

Les mémoires associatives sont très différentes des mémoires traditionnelles d'ordinateurs. En effet, pour stocker des données, un ordinateur classique attribue à chacune d'entre elles une adresse, c'est à dire un code numérique indiquant son emplacement physique dans la mémoire. Sur une disquette par exemple, cette adresse est le numéro du secteur ou de la piste.

Dans un ordinateur classique, la recherche en mémoire d'une donnée connue consiste donc à trouver son adresse. Etant donné que cette adresse ne contient aucune information sur son contenu, l'unité centrale se voit obliger d'explorer séquentiellement toutes les mémoires jusqu'à en retrouver la bonne. Cette recherche demandant un temps proportionnel au nombre de mémoires de l'ordinateur, les ordinateurs classiques sont par essence mal adaptés à ce genre de traitement de données.

Au contraire, quelque soit le nombre de mémoires stockées, une machine "neuronale" mettra quasiment le même temps pour retrouver une information donnée. En outre, cette information pourra être reconnue à partir d'une version bruitée. Cela s'explique par le fait que non seulement l'état même du réseau représente l'information, mais qu'en outre la version bruitée contient elle-même en quelque sorte sa propre adresse. C'est "l'adressage par le contenu". Pour reprendre la comparaison avec l'ordinateur classique, le réseau de neurones n'explore pas son espace des états (ni même la partie qui correspond à des états mémorisés). Il n'en explore qu'une partie qui correspond en première approximation à un petit voisinage de l'état attracteur recherché. Ce mode de fonctionnement beaucoup plus proche de celui du système nerveux central semble donc beaucoup plus adapté aux problèmes de reconnaissance.

Pour souligner cette nouvelle approche, de nouveaux termes sont apparus : Architectures neuromimétriques, connexionnisme...

Ces termes restituent essentiellement les quelques grandes idées que l'on s'est faites du système nerveux central. Si toutefois, il semble impossible d'en faire la copie exacte, il y a fort à parier que même des modèles très simplifiés seront profitables à condition que ceux-ci prennent en compte au moins quelques unes des grandes lignes de fonctionnement du cerveau.

VII. CONSEQUENCES PRATIQUES DE LA MEMOIRE DISTRIBUEE

1. UN COMPORTEMENT COLLECTIF

Les propriétés de mémoire-associative proviennent essentiellement d'un comportement collectif de nombreuses entités élémentaires relativement simples. En outre, toute l'information (c'est à dire les états appris par le réseau) se retrouve distribuée dans l'ensemble des synapses. Cette répartition de l'information a pour conséquence une grande fiabilité vis à vis des défauts dans une situation expérimentale:

- le réseau peut être réalisé indifféremment dans un mode synchrone ou asynchrone.
- le réseau tolère une certaine souplesse sur ses coefficients synaptiques sans détérioration de ses capacités de mémoires. Bien évident cette souplesse est fonction de la règle d'apprentissage choisie pour le calcul des coefficients synaptiques. Par exemple, moyennant certaines hypothèses sur les états à mémoriser, on peut montrer que certains réseaux (Hopfield, [2]) tolèrent une réduction des coefficients synaptiques à leurs simples signes en ne perdant qu'un facteur $(1-2/\pi)$ dans la capacité de stockage!
- De même, la valeur du seuil neuronal θ_i n'a pas besoin d'être parfaitement définie. Certains algorithmes (par exemple, la machine de Bolzmann [10]) font même appel à des seuils bruités.
- Nous avons déjà vu que les non-linéarités des réponses neuronales n'ont pas réellement une importance primordiale.

Cette tolérance aux fautes a d'importantes conséquences pour les réalisations en électronique intégrée. Il est certainement plus facile de construire un circuit d'un billion de transistors dans lequel seulement cinq pourcent des transistors ont subi une malfaçon que de construire une puce d'un million de transistors parfaitement opérationnels.

2. UN PARALLELISME COMPLET

Pour réaliser ce genre de réseau de neurones, trois sortes de machinès sont envisageables :

- les machines séquentielles : toutes les opérations permettant la mise à jour des valeurs neuronales sont effectuées de façon séquentielle dans le temps. Le temps de calcul total D croît avec le carré du nombre de Neurones :

$$D \alpha N^2 .$$

C'est l'architecture des simulations classiques.

- les machines semi-parallèles : Par exemple, une architecture dans laquelle les champs locaux sont calculés de façon parallèle et la mise à jour est effectuée de façon séquentielle. L'architecture "inverse" existe également. Dans ce cas :

$$D \alpha N$$

- Les machines complètement parallèles : tous les calculs sont effectués de façon parallèle. Le temps de calcul est indépendant du nombre de neurones. C'est le cas de l'architecture de la figure 4.

Nous reviendrons en détail dans le chapitre II sur les différentes architectures possibles pour les machines neuronales

optoélectroniques et parallèles. Nous dégagerons les limitations des circuits électroniques en essayant de montrer l'apport que pourrait présenter certaines architectures hybrides.

Cependant, il nous faut remarquer que seul le mode synchrone permet des temps de calcul indépendant du nombre de neurones. Dans le mode asynchrone, chaque neurone évolue de façon séquentielle dans le temps. En outre, ce mode asynchrone présente certains avantages : c'est celui qui est utilisé pour les problèmes d'optimisation combinatoire. C'est également le mode utilisé dans certaines machines évoluées [10] où l'apprentissage s'effectue sans professeur. Cependant, des recherches sur la parallélisation de ces genres d'algorithmes sont actuellement en cours tant les écarts à la théorie sont tolérables dans les réseaux de neurones formels.

VIII. BREF HISTORIQUE DES RESEAUX DE NEURONES

Les premières idées sur les propriétés des réseaux de neurones formels ont été émises il y a quarante ans par Mc Cullogh et Pitts [4].Il s'agissait alors d'une graine qui a mis longtemps à germer car la situation ne s'y prêtait guère : les neurosciences étaient très loin de ces problèmes et les premiers ordinateurs - si utiles actuellement pour simuler le comportement de ces réseaux - n'avaient même pas la puissance des calculettes de poche actuelles.

Il a fallu attendre encore deux décennies pour que de nouvelles les idées apparaissent. Dans les années 65, en s'inspirant des travaux de Hebb sur la plasticité synaptique (1949) [5], F. Rosenblatt [6] propose une machine théorique le "Perceptron" qui "sera capable d'écouter n'importe qu'elle conversation et prendre des notes". Mais en 1969, M. Minsky et S. Papert [7] , inquiets du manque de chercheurs en Intelligence Artificielle et agacés par certaines conclusions abusives de F. Rosenblatt, publièrent une analyse théorique du Perceptron qui en

démontra les sévères limitations. L'habileté de la critique eut pour effet de retirer la plupart des chercheurs de ce domaine.

Dans les années 70, quelques chercheurs irréductibles comme Kohonen [8] commencèrent a prendre conscience qu'une alternative aux techniques de calcul basées sur les architectures actuelles d'ordinateurs pourrait s'inspirer du système nerveux.

Les recherches reprennent un essor considérable dans les années 80 avec l'article de Hopfield [9] qui propose un réseau neuronal capable d'apprendre, de reconnaître des formes, de résoudre des problèmes d'optimisation. Des chercheurs venant d'origines aussi diverses que les mathématiques, l'électronique, l'optique, l'informatique, l'intelligence artificielle apportent leur contri-bution.

Des réseaux de neurones plus performants et plus autonomes faisant appel à des processus stochastiques voient le jour [10]. Une première proposition de réalisation optique de telles machines est faite par Psaltis [11] montrant par là même les possibilités d'un apport bénéfique de l'optique pour la mise en oeuvre des réseaux de neurones.

CHAPITRE II

LE MODELE DE HOPFIELD ET LES MEMOIRES ASSOCIATIVES

Après la présentation générale des réseaux de neurones formels du Chapitre I, nous allons dans cette partie approfondir les concepts déjà rencontrés. Pour celà, nous allons partir du modèle neuronal proposé par J.J. Hopfield [2] et en dégager ses deux principales applications. L'application aux mémoires associatives sera analysée en détail en rappelant les résultats obtenus par les physiciens de la physique des verres de spin. Ceci nous permettra de mettre en évidence les principales limitations du réseau d'Hopfield.

Dans une seconde étape, nous allons généraliser ce modèle à des mémoires associatives d'ordre supérieur. L'analyse théorique du comportement du réseau nous permettra de montrer l'apport bénéfique de la généralisation notamment vis à vis de la capacité de mémorisation du réseau et de la qualité de rappel d'une configuration mémorisée. Finalement, nous confronterons les résultats théorique avec des résultats de simulations.

I. LE MODELE D'HOPFIELD

Parce que l'analyse théorique du comportement des réseaux neuronaux s'en trouve simplifiée, dans la suite, nous prenons des états neuronaux binaires (voir Figure 2b par opposition à la Figure 2a). L'état du réseau a donc deux représentations équivalentes binaires :

* l'une notée **V** où $V_i = 0$ ou 1 pour i = 1,...N
(cas favorable à l'optique : 0 absence de lumière, 1 présence de lumière).
* l'autre notée **W** = 2.(**V-1**)+**1**.

1. ASPECT ENERGETIQUE

a) Dynamique asynchrone

J.J. Hopfield a démontré [9] qu'un réseau de neurones formels décrits par la dynamique des équations (1) et (2) évolue

vers des points attracteurs de l'espace des états. Pour celà, il a introduit une fonction énergie qui dérive formellement de celle des verres de spins :

$$E(t) = -\frac{1}{2} \sum_{i,j} T_{ij} V_i(t) \; V_j(t) \qquad (3)$$

Cette forme quadratique voit sa valeur diminuer au cours de l'évolution temporelle du réseau, à la condition que les poids synaptiques soient symétriques i.e. $T_{ij} = T_{ji}$ $\forall$ i et j et $T_{ii} = 0$ $\forall$ i . En effet, regardons la variation ΔE de l'énergie lorsque le neurone k subit une variation ΔV_k ($\Delta V_k = 1$ passage de l'état inactivé à l'état activé, $\Delta V_k = -1$ passage contraire, $\Delta V_k = 0$ pas de variation de son état).

$$\begin{aligned} \Delta E &= -\Delta V_k \sum_j T_{jk} V_j \\ &= -\Delta V_k F_k \end{aligned} \qquad (4)$$

Or, l'équation régissant la dynamique neuronale (2) montre bien que $\Delta E \leqslant 0$. Etant donné que E est bornée, l'énergie décroît jusqu'à ce que l'état du réseau se stabilise dans un minimum local de l'énergie.

Remarques :

- Il n'est pas rigoureusement nécessaire que les synapses soient symétriques pour que l'énergie soit décroissante. La condition $T_{ij} = \lambda T_{ji}$ est suffisante si $\lambda > 0$.

Dans un verre de spins, E peut être assimilée à l'hamiltonien d'Heisenberg. Les coefficients T_{ij} peuvent être vus comme les interactions entre spins : intégrales d'échange. Les θ_i se comportent comme un champ extérieur.

b) Dynamique synchrone

E. Goles [12] a démontré que les comportements limites de la dynamique synchrone sont soit des points fixes (cas précédent)

soit des cycles d'ordre 2. Pour celà, il introduit la fonction de Lyapunov :

$$E(t) = - \sum_{i,j} T_{ij} V_j(t) \; V_i(t + \Delta t) \qquad (5)$$

On considère alors la variation d'"énergie" entre les instants t et t + Δt :

$$\Delta E = - \sum_i \left(V_i(t + 2\Delta t) - V_i(t)\right) \left(\sum_j T_{ij} V_j(t + \Delta t) \right)$$

toujours avec $T_{ij} = T_{ji}$. $V_i(t + 2\Delta t) - V_i(t)$ peut prendre trois valeurs :

* 0

* + 1 avec $\sum_j T_{ij} V_j(t + \Delta t) > 0$

* - 1 avec $\sum_j T_{ij} V_j(t + \Delta t) < 0$

Dans ces conditions, il est clair que ΔE est une somme de termes nuls ou négatifs. De sorte que $\Delta E \leqslant 0$. Le comportement limite est obtenu pour E constante. Soit le réseau est stabilisé sur un état, soit le réseau oscille sur deux états.

2. APPLICATION AUX PROBLEMES D'OPTIMISATION

Pour les deux types d'application proposés par J.J. Hopfield [3] et [4] , la notion d'énergie de calcul joue un rôle central. Le problème consiste à trouver une énergie E dont les états fondamentaux ou quasi-fondamentaux correspondent aux solutions acceptables du problème envisagé. En outre, cette énergie doit être quadratique. Cette énergie étant définie, les coefficients synaptiques se déduisent instantanément de l'équation (3) par :

$$T_{ij} = - \frac{\partial^2 E}{\partial V_i \, \partial V_j} \qquad (6)$$

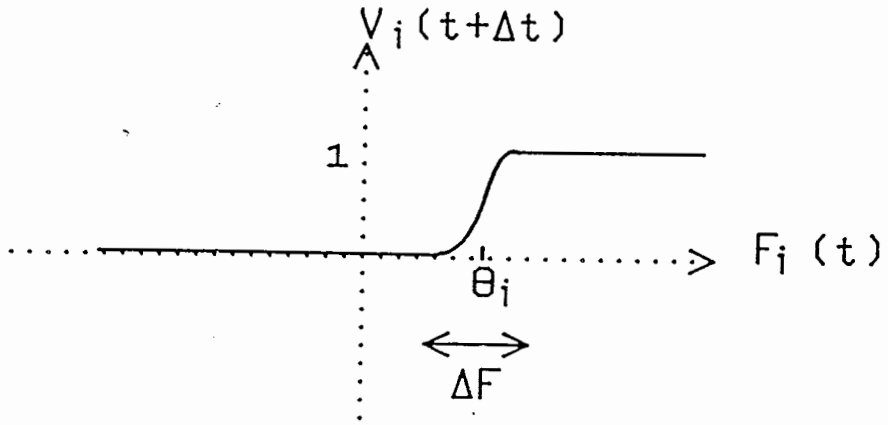


Figure 6 : Réponse neuronale continue. ΔF chiffre l'indécision dans la dynamique.

La décroissance de l'énergie assure la convergence vers un état d'énergie minimum. Il reste donc seulement à s'assurer que le réseau dans son évolution ne se laisse pas piéger dans un minimum relatif proche de l'état initial. Il faut donc que le réseau explore en quelque sorte son espace des états. Une première idée qui vient naturellement à l'esprit est d'autoriser le réseau à accepter de petites variations positives de l'énergie. Dans le schéma de la figure 5.a, l'évolution temporelle d'un réseau à énergie décroissante est représentée : partant de l'état initial I, le réseau se fige alors dans l'état A qui n'est pas un minimum profond. Par contre dans la figure 5.b, on autorise des variations petites et positives de l'énergie : Le résèau s'extrait de l'état A pour accéder à l'état plus profond B.

Cette idée amène à envisager des réseaux stochastiques, utilisant la méthode dite de recuit simulé [14]. Cette méthode consiste à accepter les changements d'états neuronaux quand ceux-ci entraînent une diminution de l'énergie, et à accepter ceux qui augmentent l'énergie de ΔE avec une probabilité proportionnelle à:

$$I \propto \exp - \frac{\Delta E}{T} \qquad (7)$$

où le paramètre T introduit joue le rôle d'une température.

Une autre approche consiste à introduire un "bruit" au niveau du seuil neuronal. Ce bruit peut être interprété comme un sorte de température. C'est ce qu'a proposé Hopfield [14] en donnant des états continus aux neurones (voir Figure 6). La largeur ΔF chiffre l'indécision dans la dynamique : les neurones ne prendront de valeurs binaires que pour les fortes valeurs des forces F_i. Quand ΔF tend vers zéro, les neurones prennent des valeurs binaires quel que soit l'intensité de la force $F_i(t)$. Cela peut être interprété en représentant ΔF comme une température effective. A la différence du recuit simulé, cette approche est complètement déterministe : à aucun moment, l'évolution du réseau n'est conditionnée par une probabilité ! Cependant, ces deux approches consistent à introduire du **"bruit"** au niveau du seuil

neuronal **"découplant"** l'état final de l'état initial. Le réseau perd donc toute possibilité de **classification** quand ce bruit est très intense.

3. MEMOIRES ASSOCIATIVES

a) La régle de Hebb

Considérons M états indicés par m = 1,...M à mémoriser dans un réseau de neurones formels. La régle d'apprentissage de Hebb [5] stipule que les coefficients synaptiques sont donnés par l'équation :

$$T_{ij} = \sum_{m=1}^{M} W_i^m \; W_j^m (1 - \delta_{ij}) \qquad (8)$$

où W_i^m est la valeur du $i^{ième}$ bit du $m^{ième}$ état à mémoriser. Cette valeur étant binaire : + 1 ou - 1, le produit $W_i^m . W_j^m$ prend deux valeurs :

* + 1 si le $i^{ième}$ bit et le $j^{ième}$ bit de l'état m sont identiques.

* - 1, s'ils sont différents.

A partir de cette constatation, la règle d'apprentissage peut être interprétée simplement : étant donné que T_{ij} chiffre l'interaction entre les neurones i et j, cette interaction sera d'autant plus positive et grande que statistiquement, sur l'ensemble des M états, les bits i et j de chacun des états sont égaux. Au contraire ; T_{ij} sera petit et négatif si ces bits sont différents. Dans la dynamique neuronale de l'équation (1), le neurone i reçoit de l'information de tous les autres neurones par l'intermédiaire de la force F_i. Si le coefficient T_{ij} est positif et grand, la contribution du neurone j à l'information reçue par le neurone i sera :

- si W_j = 1, positif et grand

- si $W_j = -1$, négatif et petit.

Dans les deux cas, après application de la fonction seuil, le neurone i aura tendance à adopter la valeur du neurone j. Le raisonnement avec T_{ij} négatif et petit s'en déduit aussitôt. Le comportement associatif vient du fait que le neurone i reçoit une information de tous les neurones et effectue en quelque sorte la moyenne de toutes ces informations : $F_i = \sum_j T_{ij} W_j$, cette moyenne lui donnant une tendance à l'activation ou la désactivation. Remarquons que cette règle d'apprentissage est <u>locale</u>. Cela veut dire que la valeur de T_{ij} ne dépend que des valeurs des W_i et W_j des états à mémoriser. Une conséquence importante est que l'apprentissage d'un nouvel état m' à partir des coefficients synaptiques est très simple :

$$T_{ij}(t + \Delta t) = W_i^{m'} W_j^{m'} + T_{ij}(t)$$

b) Le réseau d'Hopfield

J.J. Hopfield a proposé en 1982 dans un article devenu célèbre [9] un réseau de neurones obéissant à la régle d'apprentissage précédente. Certains travaux ont montré que ce genre de réseau pouvait avoir des comportements voisins de ceux observés par les neurolobiogistes [15] et [16] . Cependant, d'autres questions peuvent venir à l'esprit :

- Est ce que ces réseaux permettent la mémorisation de n'importe quelle sorte d'information ?

- Combien d'états peuvent être stockés ?

- Est ce que le réseau converge vers l'état le plus proche de son état initial ? Le réseau converge t-il toujours vers un des états stockés ?

Nous allons répondre successivement à ces questions dans le paragraphe suivant.

c) Les limitations du modèle d'Hopfield

* La règle de Hebb ne permet en fait que de stocker des états bien particuliers ; ces états doivent obéir à la statistique suivante :

$\forall i, \forall m, \forall j, \forall\ V_i^m$ est indépendant de V_j^m si $i \neq j$ ou $m \neq m'$ (9.a)

$\forall i, \forall m$ prob $\left(V_i^m = 1\right) = 1/2$ (9.b)

Dès que les états mémoires deviennent corrélés ou dès que la condition (9.b) n'est pas respectée, les capacités de mémoire associatives du réseau s'écroulent. Des règles d'apprentissage plus élaborées (appelées règles de projections [8] et [9]) permettent de prendre en compte cette difficulté. Cependant, dans une situation expérimentale, elles présentent l'inconvénient de demander une importante précision sur la valeur des coefficients synaptiques. En effet, l'algorithme de projection est bâti en cherchant une matrice synaptique assurant la stabilité des états. Cet algorithme fait appel au formalisme de la matrice pseudo-inverse qui donne a priori des coefficients réels et non entiers relatifs comme dans le cas de la règle d'Hebb.

Les simulations ont également montré que le nombre maximal M_{max} d'états stockables est de l'ordre de 0,14 N, N étant le nombre de neurones. Ce résultat a été complétement interprété par des physiciens théoriques à partir de la physique des verres de spin. Notamment, H. Sopolinsky a montré [17] que les réseaux neuronaux se prêtaient bien à une interprétation statistique du type de celle rencontrée dans les phases verre de spin des matériaux magnétiques. Des notions aussi importantes que la frustration, bien connues des physiciens de la matière condensée, ont pu être retrouvées dans les réseaux de neurones. Cette brutale chute des propriétés de mémoires pour $M \simeq 0{,}14\ N$ a été représentée sur la figure (7) tirée de la thèse d'état de J.P. Nadal [15]. Dans la limite thermodynamique i.e. pour $N \to \infty$, elle est due à une transition de phase à température nulle entre une phase verre de spin trop riche en minima locaux pour être

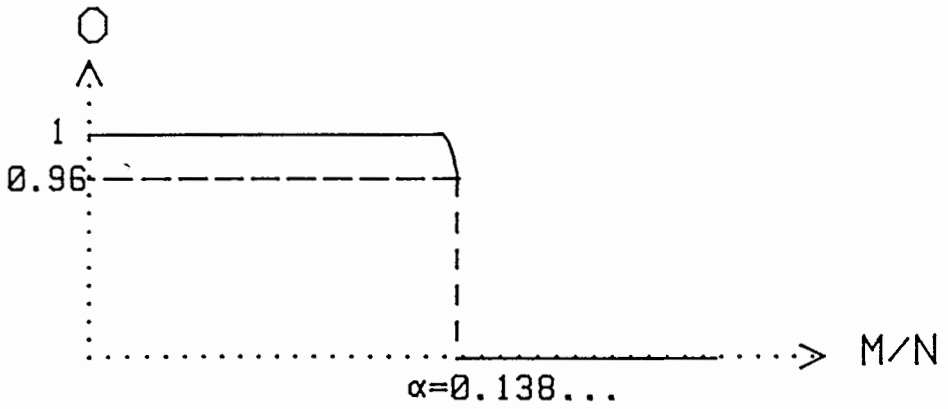


Figure 7 : Courbe théorique obtenue par D.J. Amit [17] montrant la discontinuité de la qualité de rappel pour $\alpha = 0,138...$ $(N = \infty)$

contrôlée et une phase à comportement associatif. Parmi les paramètres d'ordre de cette transition de phase, M paramètres d'ordre subissent une discontinuité pour $M \simeq 0{,}138\ N$. Ces paramètres dont l'interprétation montre qu'ils chiffrent la qualité de rappel de chacun des états mémorisés s'écrivent :

$$O^m = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} W_j^m \ <W_j>$$

la moyenne < > étant prise sur l'espace des configurations. En effet, O^m vaut 1 quand l'état m a été retrouvé $\left(<W_j> = W_j^m\right)$ et 0 dans l'autre cas. A température nulle, la figure (7) représente l'évolution de la valeur typique des paramètres d'odre en fonction du nombre d'états mémorisés pour $N \to \infty$ (courbe théorique).

Il existe des états parasites : états qui correspondent à des minima locaux de l'énergie non souhaités. Par exemple, il est très facile de voir que si $\mathbf{W}^m$ est un état mémorisé, $-\mathbf{W}^m$ est également un point fixe de l'espace des états. De façon générale, ces états parasites envahissent en croissant exponentiellement [18] l'espace des états dès que M dépasse une valeur proportionnelle à Ln N.

II. INTERPRETATION EN TERMES DE CORRELATIONS MEMOIRES ASSOCIATIVES D'ORDRE SUPERIEUR

L'équation (2) permet d'exprimer la force F_i qui agit sur le neurone i. En outre, en adoptant la règle d'apprentissage de Hebb, cette force s'écrit :

$$F_i = \sum_{j=1}^{N} T_{ij} W_j = \sum_{j=1}^{N} \left(\sum_{m=1}^{M} W_j^m W_i^m (1 - \delta_{ij}) \right) W_j$$

Cette force peut également s'écrire en intervertissant les

sommations :

$$F_i = \sum_{m=1}^{M} W_i^m \left(\sum_{j \neq i}^{N} W_j^m W_j \right) \qquad (10)$$

Cette dernière expression met en évidence des produits de corrélation entre tous les états mémorisés et l'état du réseau. Lorsque l'état initial du réseau est un des états mémorisés (disons $\mathbf{W}^1$) légèrement bruité, la force F_i de l'équation (10) sera décomposée en deux termes :

$$\text{le signal : } \left(\sum_{j \neq i}^{N} W_j^1 W_j \right) W_i^1 \qquad (11.a)$$

$$\text{le bruit : } \sum_{m \neq 1} \sum_{j \neq i} \left(W_j^m \; W_j \right) W_i^m \qquad (11.b)$$

La convergence désirée vers l'état $\mathbf{W}^1$ dépend évidemment des importances relatives de ces deux termes. Afin d'exacerber l'importance du signal, R.A. Athale [22] a eu l'idée de discriminer les différentes corrélations. Cependant, cette méthode présentait l'inconvénient d'introduire des non-linéarités différentes pour les diverses corrélations. Plusieurs auteurs [19-21, 23-26] ont alors repris cette idée en introduisant une non-linéarité supplémentaire commune à toutes les corrélations.

L'introduction de cette non-linéarité supplémentaire repose sur la possibilité dans un montage optique, d'une part d'obtenir ces produits de corrélation et d'autre part, de leur faire subir une opération non linéaire par l'intermédiaire d'un modulateur spatial de lumière. Cependant, l'omission du terme i = j dans le terme de corrélation semble être préjudiciable pour une réalisation expérimentale. Des simulations [21] puis une analyse théorique plus complète [48] ont montré que ce terme n'a pas une importance fondamentale. Son omission apporte une perturbation de l'ordre de 1/N. Dans toute la suite, nous inclurons donc des termes diagonaux dans la matrice synaptique. Cette non-linéarité peut être modélisée par une élévation à une puissance entière (développement en série de Taylor). Dans ces conditions, l'algo-

rithme peut s'écrire de la façon suivante :

$$F_i = \sum_{m=1}^{M} W_i^m \left(\sum_{j=1}^{N} W_j^m \; W_j \right)^n \qquad (12)$$

Dans la littérature, ce genre d'algorithme porte le nom de "higher order model". En effet, par exemple pour n = 2, le développement de la puissance fait apparaître des termes de la forme $W_i^m W_j^m W_k^m W_j W_k$. Ces termes peuvent être interprétés comme des coefficients synaptiques d'ordre plus élevé $T_{i\,j\,k} = W_i^m W_j^m W_k^m$ qui influent sur la force F_i par l'intermédiaire de la comparaison des états des neurones k et j du réseau (terme $W_j W_k$). Le modèle d'Hopfield correspond bien sûr à n = 1.

Pour toute valeur de n, il est possible d'introduire une énergie constamment décroissante, [20-21]. Cette énergie n'est plus quadratique mais peut toujours être obtenue par l'équation suivante :

$$\forall \; i \quad - \frac{\partial E}{\partial W_i} = F_i$$

Cette énergie est :

$$E = - \frac{1}{n+1} \sum_{m=1}^{M} \left(\sum_{j=1}^{N} W_j^m \; W_j \right)^{n+1}$$

III. ANALYSE THEORIQUE

Nous allons montrer dans ce paragraphe, l'effet bénéfique de la non-linéarité supplémentaire sur les possibilités de mémoire associative. Pour celà, nous allons nous intéresser tout d'abord au calcul du rapport signal sur bruit du réseau. Celui-ci nous permettra ensuite de montrer l'augmentation de la capacité de stockage du réseau induite par la non-linéarité supplémentaire. Enfin, la stabilité des états attracteurs du réseau nous permettra de mettre en évidence que la non-linéarité supplémentaire

élargit les bassins d'attraction autour des états stockés. En d'autres termes, la puissance introduite lisse les minima locaux du paysage énergétique favorisant ainsi les capacités d'attraction des états stockés qui, eux, correspondent à des minima plus profonds en énergie. Les calculs vont être menés dans la limite thermodynamique i.e. pour $N \to \infty$. Mais regardons tout de suite pourquoi il est intéressant de se placer dans cette limite thermodynamique.

Il est évident que, en ce qui concerne les machines neuronales, le nombre de neurones pour une connectique totale ne pourra guère dépasser le millier. Cependant, il est intéressant de connaître les limites thermodynamiques ($N \to \infty$) des propriétés du réseau étudié, pour deux raisons principales :

- dans la pratique, il est possible de retrouver avec des simulations portant sur de petit nombre de neurones (~ 100) les propriétés asymptotiques obtenues à N infini. Par exemple, la transition de phase (Figure 7 et 8) qui donne une discontinuité autour de $M_{max} \simeq 0{,}138\ N$ de la qualité de rappel des états mémorisés dans le modèle d'Hopfield peut être mise en évidence par des simulations avec $N \simeq 100$. Bien sûr, la pente croît avec N, une pente infinie n'étant théoriquement obtenue que dans la limite thermodynamique.

- Les études dans la limite thermodynamique permettent en outre d'obtenir des "lois d'échelle". C'est à dire qu'à partir de simulations portant sur un petit nombre de neurones, il est possible de déduire les propriétés essentielles du réseau pour des valeurs de N plus élevées.

a) Effet de la non-linéarité sur le rapport signal sur bruit

Considérons que l'état initial du réseau de neurones est un état $\mathbf{W}$ relativement "proche" au sens de la distance de Hamming d'un état particulier disons $\mathbf{W}^1$. Nous noterons cette distance

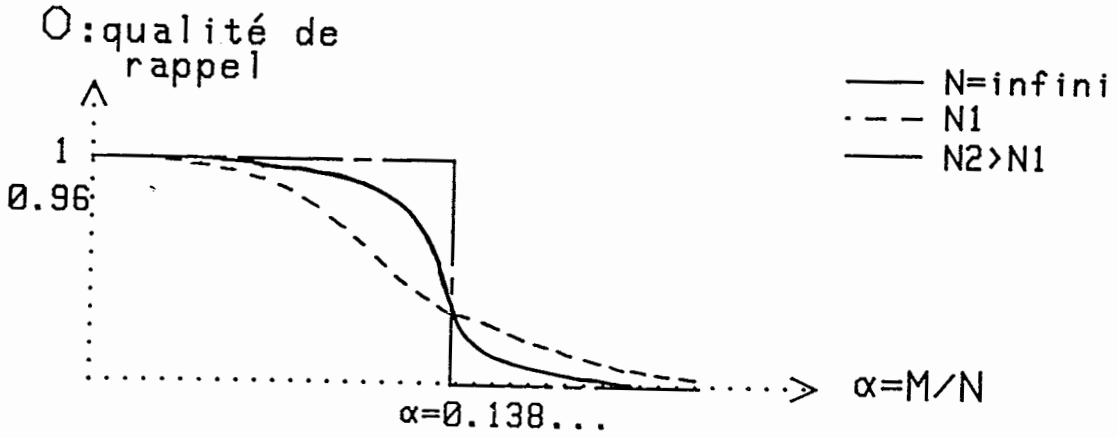


Figure 8 : Qualité de rappel d'un réseau neuronal en fonction du rapport M/N pour des valeurs différentes de N. (D'après le cours de B. Derrida, école d'été de la physique de la matière condensée, Beg Rohu, juin 87).

$d(\mathbf{W}, \mathbf{W}^1) = \rho N$. Les produits de corrélation peuvent être écrits :

$$\sum_{j=1}^{N} W_j^m . W_j = N - 2d(\mathbf{W}^m, \mathbf{W}) \qquad (13)$$

De sorte que le terme de signal de la force qui agit sur le neurone i correspondant à $W_i^1 \left(\sum_{j=1}^{N} W_j^1 W_j \right)^n$ vaut très exactement :

$$s = N^n (1 - 2\rho)^n W_i^1 \qquad (14)$$

Afin de poursuivre le calcul du rapport signal sur bruit, nous faisons l'hypothèse suivante : les bits de $\mathbf{W}$ en erreurs ont une probabilité 1/2 de valoir 1 et sont indépendants des bits des états mémoires.

Globalement, $\forall i$ on a : $\text{Prob}(W_i^m = W_i) = 1/2$. De sorte qu'en valeur moyenne la distance de Hamming entre $\mathbf{W}$ et $\mathbf{W}^m$ vaut N/2. La variance de la distance de Hamming considérée peut être écrite, d'après (13) :

$$v^2 = \left\langle \left(N - \sum_{j=1}^{N} W_j^m . W_j \right)^2 /4 \right\rangle - N^2/4$$

En développant le carré et en constatant que $\langle W_j^m W_j \rangle = \langle W_j^m \rangle \langle W_j \rangle$ et donc égal à zéro, cette variance se met sous la forme :

$$v^2 = \left\langle \left(\sum_j W_j^m W_j \right)^2 /4 \right\rangle$$

Lorsqu'on développe à nouveau, il apparaît N termes égaux à 1 et N(N-1) termes du style : $\langle W_j^m W_j W_k^m W_k \rangle$ avec $j \neq k$. Cette valeur moyenne est égale à zéro car chacune des variables aléatoires est indépendante des autres et est égale à zéro en moyenne. De sorte que la variance de la distance de Hamming entre $\mathbf{W}$ et $\mathbf{W}^m$ vaut :

$$v^2 = N/4 \qquad (15)$$

Intéressons nous maintenant au bruit défini par l'équation (11.b). Sa valeur moyenne vaut :

$$<b> = \sum_{m=2}^{M} \left\langle W_i^m \left(\sum_j W_j^m \; W_j \right)^n \right\rangle$$

A condition de négliger dans la somme sur j le terme j = i (ce qui est une perturbation en 1/N), cette valeur moyenne peut s'écrire :

$$<b> = \sum_{m=2}^{M} <W_i^m> \left\langle \left(\sum_j W_j^m \; W_j \right)^n \right\rangle$$

et puisque W_i^m a une moyenne nulle, le bruit est nul en moyenne. Sa variance est donnée par :

$$\sigma^2 = \left\langle \left(\sum_{m=2}^{M} W_i^m \left(\sum_j W_j^m W_j \right)^n \right)^2 \right\rangle$$

$$= \sum_{m=2}^{M} \left\langle \left(\sum_j W_j^m W_j \right)^{2n} \right\rangle + \sum_{m=2} \sum_{m' \neq m,1}^{M} \left\langle W_i^m W_i^{m'} \left(\sum_j W_j^m W_j \right)^n \left(\sum_k W_j^{m'} W_j \right)^n \right\rangle$$

Si l'on néglige dans le second terme les facteurs j = i et k = i, pour les mêmes raisons que précédemment, ce terme est nul. En outre en tant que somme de N variables aléatoires indépendantes, le produit de corrélation obéit dans la limite thermodynamique à une loi de distribution gaussienne. En conséquence, le premier terme s'exprime de façon simple en fonction de la variance v^2 de la distance de Hamming :

$$\sum_{m=2}^{M} \left\langle \left(\sum_j W_j^m W_j \right)^{2n} \right\rangle \longrightarrow \frac{2n!}{n! \; 2^n} \cdot (M - 1) \; (2v)^{2n}$$

De façon plus précise, si l'on définit le R.S.B. comme le rapport du signal à l'écart quadratique moyen du bruit, on

obtient :

$$\text{R.S.B.} \xrightarrow{N \to \infty} \sqrt{\frac{n!\ 2^n}{(2n)!}\ \frac{N^n}{(M-1)}}\ (1 - 2\rho)^n \qquad (16)$$

Pour $n = 1$, ce résultat est en accord avec celui obtenu par D. Psaltis [11]. La non-linéarité supplémentaire a donc un effet important sur le R.S.B. puisque à M fixé, le R.S.B. croît, pour n grand comme $N^{n/2}$. En outre, l'équation (16) indique que la taille des bassins d'attraction augmente avec la puissance de n : le R.S.B. est proportionnel à $(1 - 2\rho)^n$.

b) Augmentation de la capacité de mémorisation du modèle

Une question naturelle qui vient à l'esprit est de se demander combien d'états peuvent être stockés dans un tel réseau [21-24-25]. Pour celà, nous allons nous intéresser à la stabilité des états mémorisés. Nous allons considérer un état quelconque $\mathbf{W}^m$ et regarder à quelle condition portant sur le R.S.B. la probabilité qu'aucun de ses bits ne change après une itération du réseau tende vers 1; cette limite se prend quand le nombre de neurones tend vers l'infini. Plus précisément, si l'on note P_c la probabilité que le bit i de $\mathbf{W}^m$ change d'état, la condition de stabilité s'écrira :

$$(1 - P_c)^N \xrightarrow{N \to \infty} 1 \qquad (17)$$

Remarquons que :

* Cette condition de stabilité est à la fois valable pour le mode synchrone et le mode asynchrone.

* Cette condition est plus forte que celle donnée par la transition de phase décrite par la figure (7). En effet, le résultat $M_{max} \simeq 0{,}138\ N$ porte sur une condition du style : Prob (qualité de rappel $\neq 0$) $\xrightarrow{N \to \infty} 1$.

Le calcul du R.S.B. nous a permis de mettre en évidence que dans la limite thermodynamique la force F_i a une distribution

gaussienne avec :

$$<F_i> = N^n W_i^m$$

$$\sigma_F^2 = \frac{2n\ !}{n\ !\ 2n}\ (M - 1)\ N^n$$

En outre la condition de stabilité de l'état W^m s'écrit :

$$\forall\ i,\ F_i\ .\ W_i^m \geqslant 0 \qquad (18)$$

De sorte que la probabilité P_c peut s'écrire :

$$P_c = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\sqrt{2\pi\ \sigma_F}} \exp - \frac{(F_i - N^n)^2}{2\ \sigma_F^2}\ d\ F_i$$

En posant : $u = \dfrac{F_i - N^n}{\sigma_F}$, on obtient :

$$P_c = \int_{\frac{N^n}{\sigma_F}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp - \frac{u^2}{2}\ du$$

Finalement, en introduisant la fonction $Q(x) = \displaystyle\int_x^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp - \frac{u^2}{2}$ [27] , cette probabilité s'exprime simplement par : $P_c = Q\left(\dfrac{N^n}{\sigma_F}\right)$. Un développement limité de P_c [27] permet d'exprimer la condition de stabilité (17) :

$$1 - \frac{N}{\sqrt{2\pi}\ \dfrac{N^n}{\sigma_F}} \exp - \frac{\left(N^n/\sigma_F\right)^2}{2} \xrightarrow{N \to \infty} 1$$

Une manière de satisfaire cette condition est de poser : $\dfrac{N^n}{\sigma_F} \simeq \sqrt{2\ Ln\ N}$. L'exponentielle devient alors égale à 1/N et la limite pour N grand est $1 - \dfrac{1}{2\sqrt{\pi\ Ln\ N}}$. Dans ces conditions, la capacité M_{max} est :

$$M_{max} \simeq \frac{n\ !\ 2^{n-1}}{(2n)\ !}\ \frac{N^n}{Ln\ N} \qquad (19)$$

Le cas n = 1 qui correspond pratiquement au modèle d'Hopfield est en accord avec le résultat publié par D. Psaltis [10] citant une communication privé. L'amélioration de la capacité de stockage est nette puisque M_{max} est proportionnel à N^n . Comme nous l'avions remarqué, notre condition de stabilité étant plus forte que celle donnée par la transition de phase, notre résultat est moins bon : 0,138 est remplacé dans notre cas par 1/2 Ln(N) i.e. le coefficient α de proportionnalité est égal à zéro dans notre cas.

c) Rayon des bassins d'attraction :

Une idée de la taille des bassins d'attraction peut être obtenue en regardant la convergence du réseau en une étape vers un état attracteur. Les simulations effectuées sur les réseaux neuronaux ayant montré que le réseau converge vers l'état désiré, cette convergence s'obtient en une étape, cette valeur approchée par défaut n'est certainement pas très différente de la valeur réelle. Nous pouvons donc écrire la condition qui permettra de trouver le rayon des bassins comme suit :

$$\forall\ i\ \text{Prob}(\mathbf{W}\ \text{devienne}\ \mathbf{W}^m) \xrightarrow{N \to \infty} 1 \qquad (20)$$

Cette condition peut s'écrire dans le cas du mode synchrone:

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{N}{RSB} \exp - \frac{(RSB)^2}{2} \xrightarrow{N \to \infty} 1$$

(la condition est plus délicate à écrire dans le cas du mode asynchrone car elle fait intervenir le formalisme des probabilités conditionnelles).

Comme précédemment, il vient R.S.B. $\simeq \sqrt{2\ \text{Ln}\ N}$. Cela donne la taille des bassins d'attraction :

$$\rho N = \frac{N}{2} \left(1 - \left(\frac{M}{M_{max}} \right)^{1/2n} \right) \qquad (21)$$

Remarques :

** A M fixé, le rayon du bassin d'attraction se comporte pour N grand comme :*

$$\rho N \sim N/2 - A(Ln\ N)^{1/2n}N^{1/2}$$

où A est égal à $\frac{1}{2}\left(\frac{2n!M}{n!2^{n-1}}\right)^{1/2n}$ *. Ceci montre que quand N augmente, comparativement les bassins d'attraction grandissent d'avantage pour les n élevés que pour les petits n. Le tableau ci-dessous illustre cette croissance en donnant l'évolution de* ρ *fonction de N et n à M = 50.*

	N=200	N=500	N=1000	N=5000
n=1	-	-	0,08	0,3
n=2	0,28	0,35	0,39	0,45
n=3	0,34	0,40	0,43	0,47
n=4	0,36	0,41	0,44	0,47

** A M fixé, l'augmentation de la taille des bassins d'attraction avec n peut s'interpréter par l'aspect énergétique. L'introduction de la non-linéarité supplémentaire a pour effet un lissage du paysage énergétique : avec n croissant, les minima locaux de l'énergie qui piègent le réseau dans des états parasites disparaissent petit à petit laissant le paysage énergétique plus favorable aux minimums plus profonds correspondant plutôt aux états mémorisés.*

** Quand le réseau est loin d'être exploité à sa capacité maximale, la taille des bassins d'attractions est voisine de N/2. Cette limite ne doit pas nous surprendre, puisque nous avons déjà remarqué que ce genre d'algorithme stocke en même temps que les états requis, leur opposé. En conséquence, tout état dont la distance de Hamming à un état quelconque* $\mathbf{W}^m$ *est supérieure à N/2 est à une distance de Hamming inférieure à N/2 de l'état opposé* $\mathbf{W}^m$ *.*

** Par contre, la taille des bassins d'attraction s'annule pour des réseaux saturés ($M \simeq M_{max}$), les états parasites envahissant certainement l'espace des phases.*

IV. SIMULATIONS

Nous avons réalisé des simulations numériques pour confirmer les différents résultats théoriques précédemment démontrés. Plus exactement, ces différentes simulations que nous allons présenter ont souvent précédé la théorie. Nous avons toujours travaillé avec un petit nombre de neurones, N ~ 100. En effet, sur les ordinateurs classiques, les temps de simulation de réseaux de neurones et de leurs comportements sont très longs.

Cependant, les simulations n'ont pas exactement porté sur l'algorithme de l'équation (10) qui est relativement peu compatible avec une réalisation optique :

Nous avons choisi de prendre des états binaires (activé + 1, désactivé 0) pour l'état des neurones. Optiquement, cela se traduit simplement par la présence ou l'absence de lumière.

Remarquons tout de suite que les deux codages de l'état du neurone inhibé (0 ou - 1) n'ont pas la même contribution dans l'évaluation de $F_i(t)$. En effet, le codage binaire (0 ou 1) introduit une dissymétrie entre les états excités (1) et inhibés (0) : seul l'état excité contribue dans la sommation de l'équation (1). Au contraire, le codage (1 ; - 1) permet des contributions symétriques dans l'évaluation de la force $F_i(t)$ déterminante dans la dynamique neuronale. Nous aurons l'occasion de revenir plus en détail sur cette différence dont il faudra tenir compte lors des réalisations optiques de réseaux neuronaux.

D. Psaltis avait démontré [10] que le choix des états {0 ; 1} (cas favorable à l'optique) au lieu de {-1 ; 1} n'avait que peu d'influence sur le R.S.B. du réseau de neurones. En effet

celui-ci ne perdait qu'un facteur $\frac{1}{\sqrt{2}}$ par rapport au R.S.B. (-1,1). En généralisant ce type de calcul, nous avons montré [21] que (avec des notations évidentes) :

$$R.S.B.(0,\ 1) = R.S.B.\ (-1,\ 1)/\sqrt{2^n} \qquad (22.a)$$

Nous avons démontré plus tard que cette restriction n'avait pas plus d'incidence sur la capacité de stockage [24,28] puisque:

$$M_{max}(0,1) = M_{max}(-1,\ 1)/2^n \qquad (22.b)$$

En outre, comme cela a déjà été signalé dans le paragraphe "interprétation en terme de corrélation" équation (12), nous avons inclus les termes diagonaux de la matrice synaptique, afin d'avoir des corrélations réalisables simplement en optique. Dans le cas n = 1, cette analyse est relativement simple ; comme :

$$F_i = \sum_{m=1}^{M} \left(\sum_{j=1}^{N} W_j^m\ V_j^{m\circ} \right) W_i^m$$

quand l'état du réseau est $\mathbf{V}^{m\circ}$. On a alors:

$$F_i = \left(\sum_{j\neq i} W_j^m V_j^{m\circ} \right) W_i^{m\circ} + M\ V_i^{m\circ} + \sum_{m\neq m_o} \left(\sum_{j\neq i} W_j^m V_j^{m\circ} \right) W_i^m$$

Cette équation s'interprète très aisément :

$$F_i\ (\text{avec T.D.}) = M\ V_i^{m\circ} + F_i\ (\text{sans T.D.}) \qquad (23)$$

où T.D. est l'abréviation de "termes diagonaux".

Le terme $M\ V_i^{m\circ}$ pouvant être vu comme un terme qui augmente le signal dans la reconnaissance d'un bit égal à 1, la précédente équation (23) montre que :

$$R.S.B.\ (\text{avec T.D.}) \geqslant R.S.B.\ (\text{sans T.D.})$$

L'égalité intervenant dans le cas $V_i^{m\circ} = 0$ et l'inégalité

dans le cas $V_i^{m\,o} = 1$. Cependant, ce genre de calcul montre également que par un choix judicieux du seuil neuronal, il est possible d'avoir pour les deux cas une augmentation du R.S.B. ; en effet si on pose :

$$\theta_i = M/2 \quad \forall i$$

pour les deux cas envisagés $\left(V_i^{m\,o} = 0 \text{ ou } 1\right)$, il est facile de montrer que :

$$\text{R.S.B. (avec T.D.)} \simeq \sqrt{\frac{N}{2M}} + \sqrt{\frac{M}{8N}} \qquad (24.a)$$

alors que la valeur du R.S.B. sans terme diagonaux est :

$$\text{R.S.B. (sans T.D.)} \simeq \sqrt{\frac{N}{2M}} \qquad (24.b)$$

Une première série de simulations [21] menées avec N = 50, a permis de montrer l'augmentation de la taille des bassins d'attraction et des capacités de stockage avec la non-linéarité n. Pour celà, nous nous sommes intéressés à l'étude comparée des cas n = 1, 2 et 3. Les simulations ont été menées sur des états mémoires possédant le même nombre de 1 et - 1. Chaque état possède donc 25 "1" et 25 "- 1". L'état des neurones a été choisi binaire 0 ou 1. Le rayon de convergence a été choisi à 90 %. En effet, pour N = 50, la condition de stabilité (17) s'écrit:

$$(1 - P_c)^N = \left(1 - \frac{1}{2N\sqrt{\pi \text{ Ln } N}}\right)^N \sim 0{,}87$$

lorsque le réseau est utilisé près de sa capacité maximale. La figure 9 montre l'évolution de $R_{90\%}$ en fonction du nombre d'états mémorisés. En abscisse, l'échelle a été prise logarithmique. La courbe en pointillés correspond à n = 1 (Hopfield), celle en tiretés (b) correspond à n = 2, et la courbe en trait plein (c) à n = 3. Ce résultat montre l'augmentation de la capacité de mémoire quand n croît. Il montre également que les bassins d'attraction ont un comportement similaire. Cependant, $R_{90\%}$ est sensiblement plus important dans le cas n = 2 pour de petits nombres d'états

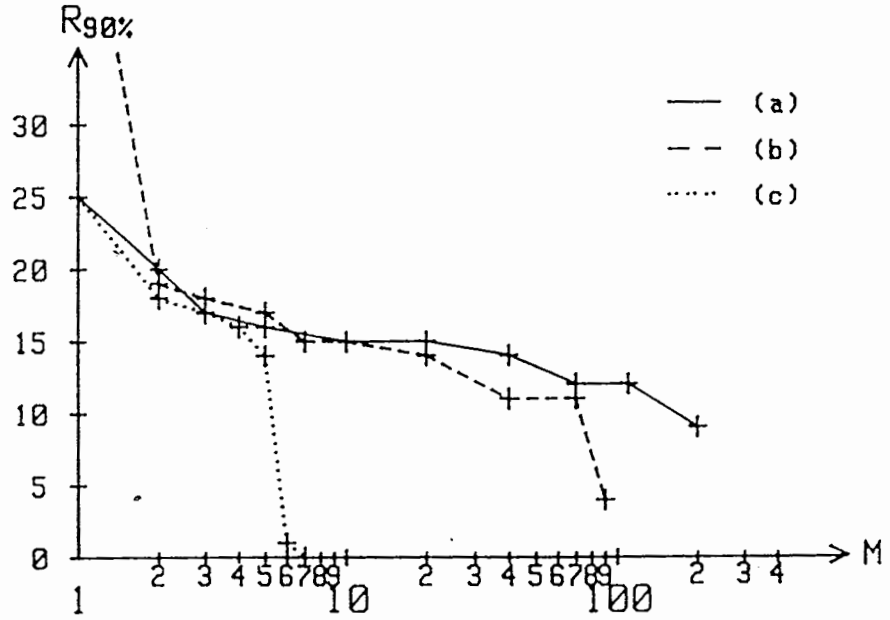


Figure 9 : Rayon des bassins d'attraction en fonction du nombre d'états mémoires. La probabilité de rappel est prise à 0,9 pour N = 50.

(a) : n=3

(b) : n=2

(c) : n=1 (modèle d'Hopfield).

mémorisés. En effet, la règle de Hebb permet non seulement la mémorisation des états désirés mais aussi celle de leur complémentaire. Cette propriété explique la raison pour laquelle les courbes (a) et (c) débutent à $R_{90\%} = 25 = N/2$. Lorsque pour M = 1, l'état initial du réseau a une distance de Hamming supérieure à N/2 de l'état mémorisé, le réseau converge vers l'état complémentaire plus proche. Pour les n impairs, cette propriété reste valable. Cependant, pour les n pairs, les états complémentaires perdent leur stabilité.

Une seconde série de simulations a permis de montrer l'impact sur les capacités du réseau de la condition restrictive (équation 9) concernant l'indépendance des états mémoires. Cette restriction s'explique clairement à partir de l'équation (13). Lorsque l'état des neurones prend des valeurs binaires 0 ou 1, l'équation (13) s'écrit :

$$\sum_{j=1}^{N} W_{j}^{m} V_j = N_1^m - d(\mathbf{W}^m, \mathbf{W}) \qquad (25)$$

Nous avons précédemment montré que le bruit défini par (11.b) est en valeur moyenne nul avec la condition (9). Cette propriété reste vraie dans le cas de l'équation (25) puisque :

$$\left\langle N_1^m \right\rangle = N/2 \qquad (26.a)$$

$$\left\langle d\left(\mathbf{W}^m, \mathbf{W}^{m\circ}\right)\right\rangle = N/2 \qquad (26.b)$$

En conséquence, des états mémoires corrélés (équation 26.b non satisfaite) ou alors n'ayant pas le même nombre de "1" et de "-1", doivent avoir un effet néfaste sur les capacités de stockage puisqu'ils ne conduisent pas à un bruit en valeur moyenne nul. Les simulations de la figure 10 montrent l'impact des écarts à l'équation 26.a. Celles-ci ont été réalisées avec des états neuronaux binaires (0,1) sans faire intervenir les termes diagonaux de l'algorithme généralisé (équation 12). La courbe a) correspond à des états m où $N_1^m = N/2$, (N_1^m est le nombre de 1 de l'état $\mathbf{W}^m$), la courbe b) à des états où $N_1^m \in [21 ; 29]$ i.e. N_1^m est égal à N/2 à 10% près et la courbe c) correspond à des états toujours obtenus

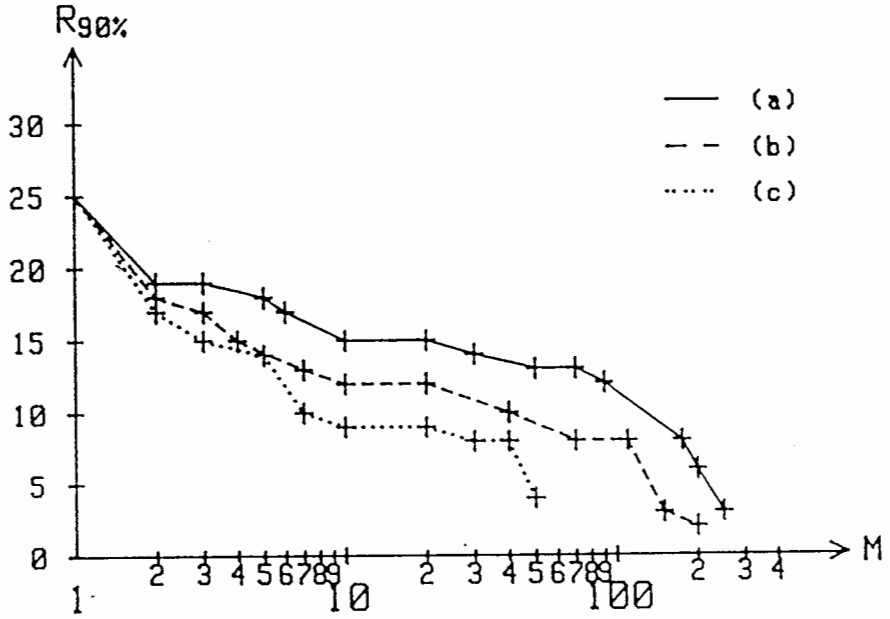


Figure 10 : Effet sur les capacités de mémoire d'un réseau de 50 neurones du nombre de "1" des états mémorisés.
a) le nombre de "1" est N/2 = 25
b) ce nombre varie entre 21 et 29 non compris
c) aucune restriction.

de façon aléatoire et sans aucune restriction sur leur nombre de "1". L'effet de la condition (9) est spectaculaire : par exemple pour $R_{90\%} = 5$ soit 10% du nombre de neurones, M vaut :

M ≃ 210 cas **a)**

M ≃ 120 cas **b)**

M ≃ 50 cas **c)**

En outre, l'effet de l'introduction des termes diagonaux est appréciable lors de la comparaison des courbes a) figures 10 et 9. Cette comparaison nous suggère qu'en accord avec notre prédiction fondée sur la comparaison des R.S.B., l'introduction des termes diagonaux i = j a plutôt un effet bénéfique pour les capacités de mémoires associatives. Notons que les algorithmes plus élaborés tels que ceux qui font appel au formalisme de la "pseudoinverse" permettent de s'affranchir de la condition (9). Cependant, à notre connaissance, ceux-ci ne peuvent simplement se généraliser aux mémoires associatives d'ordre supérieur [49] et nécessitent une grande dynamique de codage des coefficients synaptiques, donc peu compatibles avec une réalisation optique. Il est donc plus aisé de penser à un prétraitement des états à mémoriser.

En outre, une troisième série de simulations (figures 11, 12 et 13) nous a permis de tester le comportement asymptotique de la capacité du réseau. Ces simulations ont été effectuées avec un nombre de neurones égal à 200 (N = 200). La figure 11 (resp. 12 et 13) montre l'évolution de la proportion P d'états mémorisés en fonction du nombre M des états que l'on cherche à mémoriser pour n = 1 (resp. 2 et 3). Les barres d'erreur représentent les fluctuations statistiques observées. Les simulations ont été menées avec des états neuronaux binaires (0,1). En conséquence, la capacité théorique maximale du réseau est donnée par les équations (19) et (22.b) :

$$M_{max} \sim \frac{1}{2} \frac{n!}{2n!} \frac{N^n}{Ln\ N} \qquad (27)$$

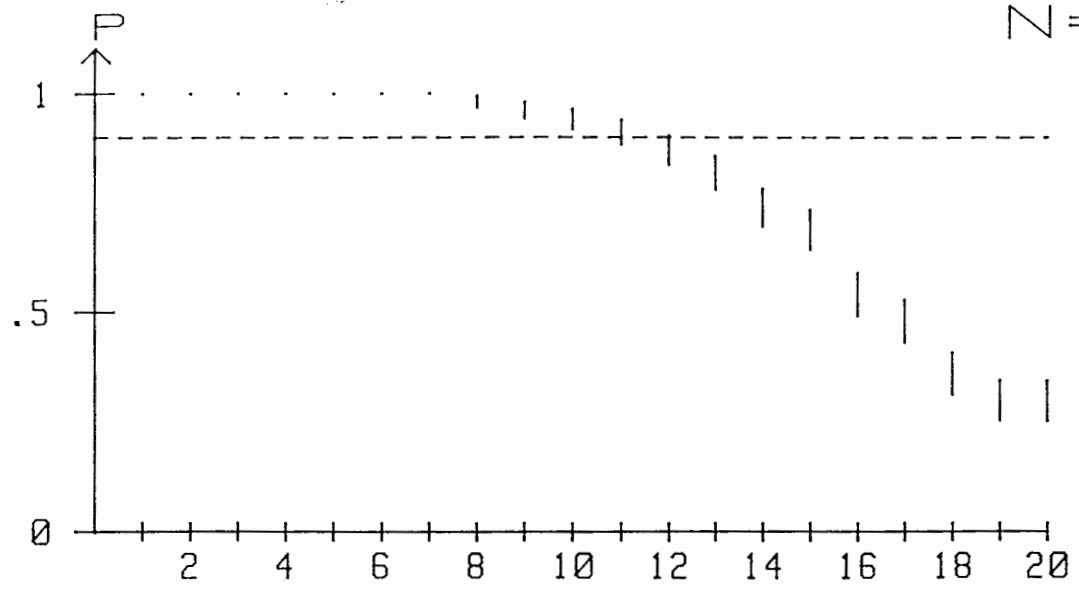


Figure 11

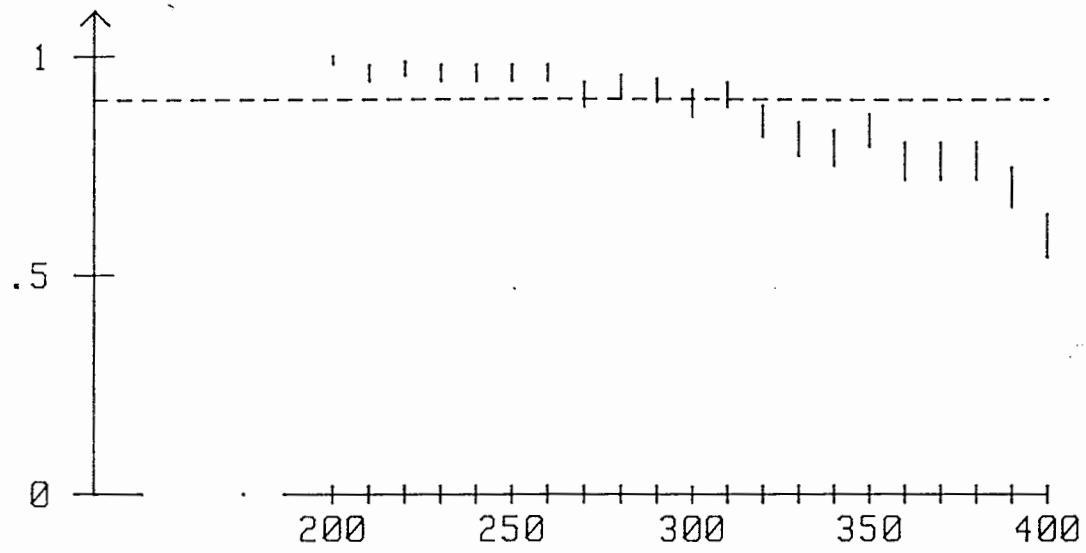


Figure 12

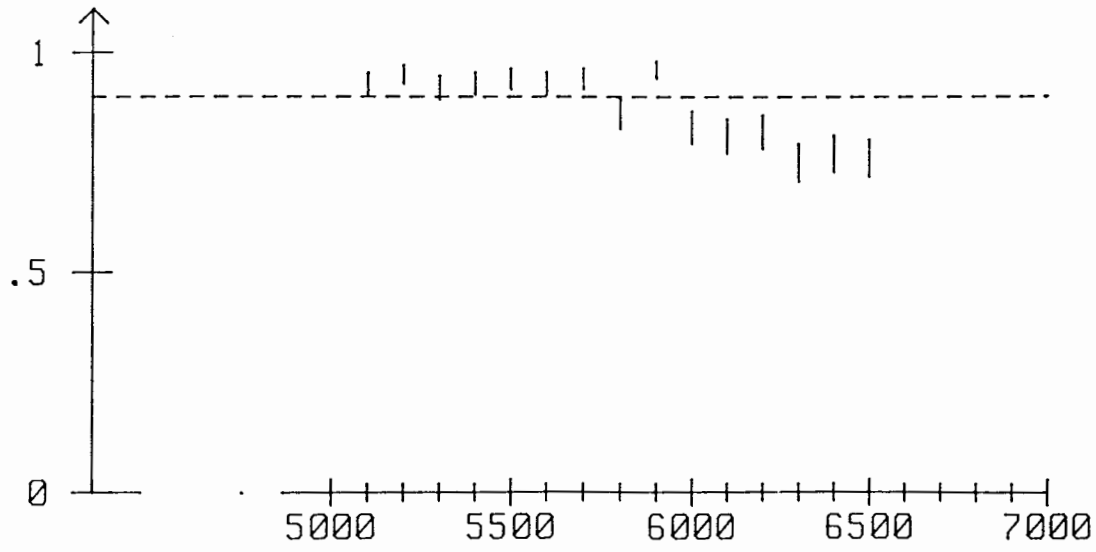


Figure 13

Pour N = 200, les valeurs théoriques de la capacité sont donc :

$$n = 1 \qquad M_{max} \sim \mathbf{10}$$

$$n = 2 \qquad M_{max} \sim \mathbf{310}$$

$$n = 3 \qquad M_{max} \sim \mathbf{6291}$$

En outre, la condition de stabilité (17) s'écrit avec N=200 :

$$(1 - P_c)^N = \left(1 - \frac{1}{400\sqrt{\pi \, Ln \, N}}\right)^{200} \sim 0,88$$

Afin de comparer les résultats des simulations avec ceux des prévisions théoriques, nous avons donc choisi P = 0,9. Les figures 11, 12 et 13 permettent d'obtenir la capacité simulée du réseau :

$$n = 1 \qquad M_{max} \sim \mathbf{11}$$

$$n = 2 \qquad M_{max} \sim \mathbf{310}$$

$$n = 3 \qquad M_{max} \sim \mathbf{6000}$$

Cette série de résultats confirme la prévision théorique de l'équation (27). En outre, elle permet d'affirmer que toutes les prévisions asymptotiques que l'on peut démontrer sont rapidement atteintes dans la pratique.

CHAPITRE III

L'APPORT DE L'OPTIQUE

Ce chapitre va montrer les principales raisons pour lesquelles l'optique est candidate pour la réalisation de réseaux neuronaux. Tout d'abord, nous allons montrer que les réseaux neuronaux par leur parallélisme et leur besoin en connexions sont propices au développement de processeurs optiques.

Dans le paragraphe suivant, nous allons regarder en détail les deux grandes approches adoptées par les opticiens pour réaliser des réseaux neuronaux. En les décrivant, nous allons par là même les unifier.

Nous allons ensuite étudier l'intérêt des matériaux et composants non-linéaires pour le traitement optique de l'information. Nous ferons alors le tour des différentes réalisations publiées sur les réseaux de neurones. La discussion de leurs avantages et de leurs inconvénients nous amènera à proposer dans le chapitre suivant un modèle de mémoire associative, tenant compte des contraintes technologiques actuelles.

I. LES RESEAUX DE NEURONES: UNE SITUATION PROPICE AU PROCESSEURS OPTIQUES

La puissance des ordinateurs électroniques actuels est essentiellement limitée à la fois par le type d'architecture envisagé et par le type de technologie employé. D'un point de vue technologique, les limitations procèdent notamment des temps de commutation des portes logiques et des temps d'échange de l'information.

Les architectures parallèles ou massivement parallèles ont permis la construction de supercalculateurs capables d'effectuer simultanément un grand nombre d'opérations. L'entité de base de ces machines est appelée processeur élémentaire (P.E.). Ces derniers n'exécutent que des tâches simples ; la puissance de calcul provient essentiellement du nombre de P.E. et de leurs interconnexions. C'est au niveau des connexions que l'optique

semble pouvoir jouer un rôle. En effet, à l'heure actuelle, les portes optiques (P.E. réduits à leur plus simple fonction) ayant des temps de commutation de l'ordre de la picoseconde restent cent fois plus gourmandes en énergie que les transistors. Les diverses réalisations de réseaux de portes n'en sont encore qu'à leur début et le pas qui reste à franchir pour rivaliser avec les P.E. électroniques demeure énorme. Cependant, dans la recherche de machines toujours plus performantes, la limitation sévère de l'électronique vient au niveau des temps de propagation de l'information. En effet, la bidimensionnalité des circuits intégrés et les interactions parasites entre courants électriques limitent fortement la portée des connexions entre P.E.. L'approche classique actuelle dans les calculateurs parallèles présente d'ailleurs des connexions restreintes aux premiers P.E. voisins (Figure 14). La "Connection Machine" de Thinking Machines Corporation qui est souvent citée comme machine massivement parallèle [29.a] contient 2^{16} P.E. Chacun étant connecté à douze autres, un routage autorise les connexions à longues distances accroissant ainsi les temps d'échange de l'information, mais assurant une structure en hypercube de dimension 12.

Au contraire, l'optique holographique offre pour les machines parallèles une alternative attrayante. L'utilisation de la troisième dimension en espace libre profitant des possibilités de croisement des faisceaux lumineux semble donner à l'optique une supériorité dans le cas de machines où chaque P.E. est connecté à des centaines de voisins. L'utilisation d'hologrammes de volume [30] permet d'accroître les capacités d'interconnexions. Psaltis [30] a démontré qu'il est possible d'obtenir une connectique complète et quelconque entre deux plans à condition de partitionner astucieusement chacun de ces deux plans : une conséquence importante de ce partitionnement est que la connexion de N pixels de surface d^2, vers N autres pixels requiert la connexion plan à plan de deux surfaces égales à $N^{4/3}d^2$.

En outre, de telles connexions peuvent être rendues dynamiques par l'utilisation de matériaux photoréfractifs [30]. Cependant, ces matériaux ne sont pas encore à l'heure actuelle suffi-

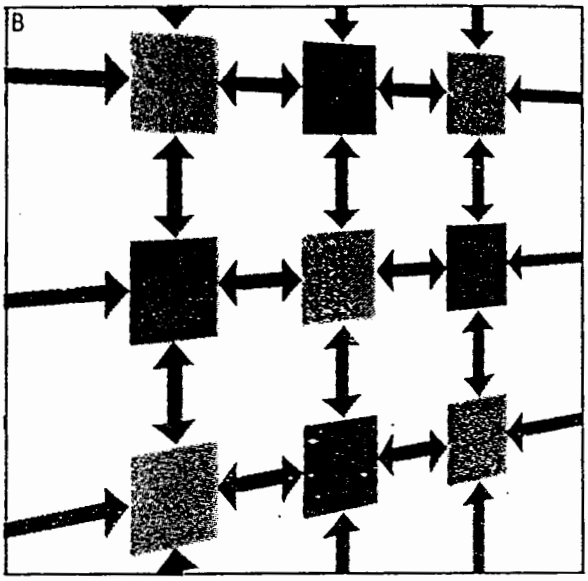


Figure 14 : Connexions nord-sud-est-ouest entre les processeurs élémentaires d'une puce électronique. (Machine tableau)

samment maîtrisés au point de conférer au calcul optique analogique de bonnes précisions. Au contraire, les disques magnéto-optiques qui ont trouvé des applications commerciales sont sans doute plus fiables mais ne permettent pas le potentiel de l'enregistrement en volume.

En conclusion, afin qu'une réalisation exploitant les possibilités de l'optique soit envisageable au point de rivaliser avec une approche électronique, les machines spécialisées devront :

- présenter un parallélisme massif ;
- nécessiter un grand nombre de connexions par P.E. ;
- comporter des P.E. très simples (à la limite des portes logiques) dans le cadre d'une réalisation tout optique.

Les réseaux de neurones répondent parfaitement aux trois critères précédents. En effet, en mettant tout particulièrement l'accent sur les connexions (les synapses contiennent toute l'information), ils ne requièrent que des processeurs élémentaires simples (fonctions non linéaires). En outre, leur tolérance aux erreurs permet d' envisager des connexions reprogrammables sur photoréfractifs.

II. LES DEUX GRANDS SCHEMAS OPTIQUES DES RESEAUX DE NEURONES

Dans la littérature, les différentes réalisations optiques de réseaux de neurones formels peuvent être divisées en deux grands schémas ; en effet, les connexions du réseau se présentant sous forme matricielle, il existe plusieurs démarches optiques pour réaliser un produit vecteur-matrice.

1. PRODUIT VECTEUR-MATRICE EN ECLAIRAGE INCOHERENT

L'information est stockée dans un seul hologramme qui représente la matrice elle-même. Le produit vecteur matrice peut être

réalisé à l'aide du montage proposé par Cutrona [31], figure (15). Cette idée a ensuite été reprise en ajoutant une rétroaction pour utiliser des algorithmes itératifs d'inversion de matrice [32-33] ou pour le calcul de TF discrète [34]. Finalement, Psaltis [11] a repris cette idée pour les réseaux de neurones formels, figure 16.

La figure 16 se compose d'une barrette de diodes électroluminescentes qui présente sous forme binaire l'état des neurones à l'instant t, diode éteinte à l'état 0, allumée à l'état 1. La première lentille cylindrique permet à chacune des diodes V_j d'illuminer la colonne correspondante j dans le masque noté T_{ij} sur la figurè. De sorte que la lumière aussitôt derrière le pixel (i,j) du masque, contient l'information $T_{ij}V_j$. La deuxième lentille cylindrique permet d'effectuer la sommation neuronale en conjuguant chaque ligne i du masque avec le photodétecteur i de la colonne du plan de sortie. En conséquence, le photodétecteur i reçoit l'information :

$$\sum_{i=1}^{N} T_{ij} V_j$$

Au moyen d'une rétroaction électronique (parallèle ou non) effectuant une opération non-linéaire, l'état de la barrette de diodes électroluminescentes est réactualisée à l'instant $t + \Delta t$.

2. PRODUIT VECTEUR-MATRICE PAR UN DOUBLE FILTRAGE DES FREQUENCES SPATIALES

Une autre façon d'effectuer ce produit vecteur-matrice fait intervenir des produits scalaires, particulièrement simples à réaliser optiquement sous forme de produits de corrélation. La démarche est la suivante : Toute matrice A de N lignes et N colonnes peut s'écrire de façon évidente sous la forme d'une somme de N produits diadiques :

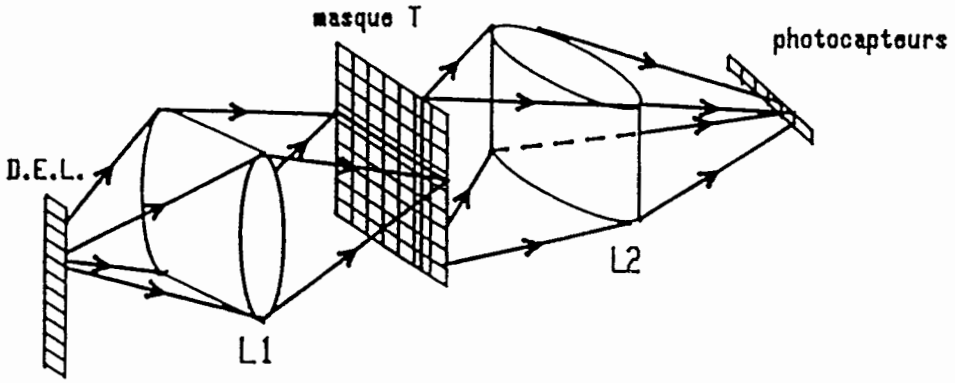


Figure 15 : Produit vecteur-matrice en éclairage incohérent. Les deux lentilles cylindriques L_1 et L_2 conjuguent d'une part la barrette de diodes électroluminescentes (à gauche) avec le masque holographique central et d'autre part ce même masque et la barrette de photocapteurs (à droite).

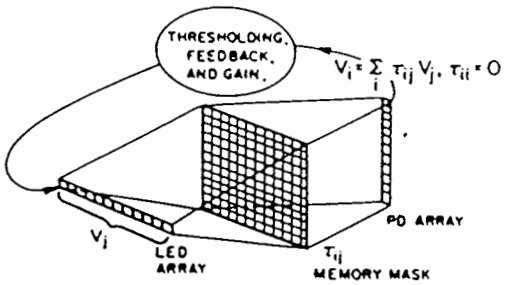


Figure 16 : D'après D. Psaltis [11], réalisation expérimentale d'un réseau neuronal par un produit vecteur-matrice. (Les deux voies nécessaires à la prise en considération des synapses positives et négatives ne sont pas dessinées par souci de clarté)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2N} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{N1} & a_{N2} & a_{N3} & \cdots & a_{NN} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{N} \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{Ni} \end{pmatrix} (\delta_{1i}\delta_{2i}\ldots\delta_{Ni}) \quad (28)$$

où δ_{ij} est le symbole de Kronecker.

En réalité, le nombre minimum de diadiques nécessaires à cette décomposition est égal au rang de A noté r(A). En effet, on peut trouver une matrice de changement de base Ω, dans laquelle A s'écrit :

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1r(A)} & 0 & \cdots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2r(A)} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{N1} & b_{N2} & \cdots & b_{Nr(A)} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Dans cette nouvelle base, la matrice A pourra s'écrire comme la somme de r(A) diadiques :

$$A = \sum_{i=1}^{r(A)} \Omega \begin{pmatrix} b_{1i} \\ b_{2i} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_{Ni} \end{pmatrix} . \ (\delta_{1i} : \ldots \ \delta_{Ni}) \ \Omega^{-1}$$

Cette décomposition optimale peut d'ailleurs être obtenue directement à partir de l'équation (28). En effet, supposons qu'un des vecteurs colonnes, disons le vecteur l, s'écrive comme combinaison linéaire d'autres vecteurs colonnes de A, disons deux vecteurs m et p (la généralisation à plus de deux vecteurs s'en déduisant simplement). La contribution des trois vecteurs colonnes l, m, p de l'équation (28) s'écrit :

$$\begin{pmatrix} a_{1\,l} \\ a_{2\,l} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{N\,l} \end{pmatrix} (\delta_{1\,l}\delta_{2\,l}\ldots\delta_{N\,l}) + \begin{pmatrix} a_{1\,m} \\ a_{2\,m} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{N\,m} \end{pmatrix} (\delta_{1\,m}\delta_{2\,m}\ldots\delta_{N\,m}) + \begin{pmatrix} a_{1\,p} \\ a_{2\,p} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{N\,p} \end{pmatrix} (\delta_{1\,p}\delta_{2\,p}\ldots\delta_{N\,p})$$

Or :

$$\begin{pmatrix} a_{1\,l} \\ a_{2\,l} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{N\,l} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a_{1\,m} \\ a_{2\,m} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{N\,m} \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} a_{1\,p} \\ a_{2\,p} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{N\,p} \end{pmatrix}$$

Dans ces conditions, la somme des trois diadiques précédentes se met sous forme de somme de deux :

$$\begin{pmatrix} a_{1\,m} \\ a_{2\,m} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{N\,m} \end{pmatrix} (\delta_{1\,m} + \lambda\ \delta_{1\,l}, \ldots \delta_{N\,m} + \lambda\ \delta_{N\,l}) + \begin{pmatrix} a_{1\,p} \\ a_{2\,p} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{N\,p} \end{pmatrix} (\delta_{1\,p} + \mu\ \delta_{1\,l}, \ldots \delta_{N\,p} + \mu\ \delta_{N\,l})$$

Le produit vecteur-matrice **AV** s'écrit alors comme la somme vectorielle de r(A) vecteurs (Y^i), chacun de ces vecteurs étant affecté d'une pondération égale au produit scalaire du vecteur V par un vecteur (X^i) :

$$\mathbf{AV} = \sum_{i=1}^{r(A)} (Y^i)\ \{(X^i).\ V\}$$

avec $(Y^i) = \Omega \begin{pmatrix} b_{1i} \\ b_{2i} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_{Ni} \end{pmatrix}$ et $(X^i) = (\delta_{1i} \ldots \delta_{Ni})\ \Omega^{-1}$

D'un point de vue optique, ce produit **AV** apparaît alors comme la somme de r(A) états (Y^i) pondérée par les pics de corrélation X^i. V qui peuvent être obtenus dans le plan de Fourier d'un corrélateur de Vander Lugt [35].

3. REMARQUES

Cette démarche généralise la présentation du chapitre précédent. En effet, la régle de Hebb que nous y avions étudiée nous a directement amenés à envisager une approche par produit de corrélation (agrémentée d'une non-linéarité supplémentaire afin d'augmenter la capacité du réseau). Cependant, de nombreuses autres règles d'apprentissage plus complexes (telles celles basées sur les pseudo-inverses par exemple) n'autorisent pas une spécification naturelle des produits de corrélation car les coefficients synaptiques ne s'interprètent pas simplement en fonction des données mémorisées. Elles rentrent néanmoins dans le cadre précédemment développé. Pour les problèmes d'optimisation, les coefficients synaptiques sont également donnés directement à partir de l'énergie (équation (6)). Cette approche peut dans des réalisations optiques s'avérer plus intéressante que le produit matriciel (Figure 16) notamment lorsque le rang de la matrice synaptique est inférieur à sa dimension.

Le montage permettant la réalisation en termes de corrélation est représenté figure (17). La première partie du montage (jusqu'au plan de corrélation) est un simple corrélateur de Vander Lugt [35] : les états $(\mathbf{X}^i)$ sont stockés dans l'hologramme H_1 et le plan de corrélation ne laisse passer que les pics des produits de corrélation recherchés. La seconde partie du montage

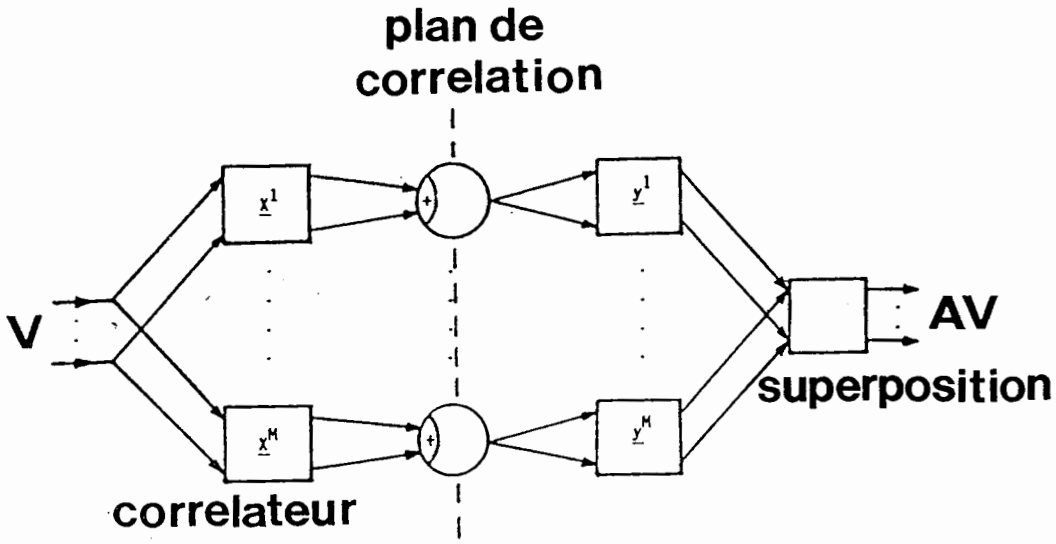


Figure 17 : Schéma de réalisation d'un produit vecteur-matrice par un double filtrage des fréquences spatiales. Le nombre de pics de corrélation M est égal au rang de la matrice.

permet la superposition dans le plan final de tous les états ($\mathbf{Y}^i$), cette superposition s'effectuant avec un poids proportionnel au pic de corrélation égal à ($\mathbf{X}^i$).($\mathbf{V}$).

4. PRODUIT VECTEUR-MATRICE "DIRECT"

La réalisation optique d'un produit vecteur-matrice peut être également interprétée directement en termes de corrélation. Par exemple, si **A** est une matrice à N_1 lignes et N_2 colonnes et **V** un vecteur à N_2 composantes, le produit **A.V** peut être interprété comme N_1 corrélations entre le vecteur **V** et les N_1 vecteurs lignes de la matrice **A**.

Dans cette approche, le vecteur **V** et les N_1 vecteurs lignes de la matrice **A** peuvent être codés sous forme bidimensionnelle, utilisant ainsi au maximum les possibilités de connexions plan à plan offertes par l'optique holographique.

Le montage optique peut être vu comme un simple corrélateur de Vander Lugt. En outre, l'utilisation d'hologrammes de volume peut permettre la réalisation de matrices de grandes dimensions grace à l'effet Bragg.

De plus, cette interprétation permet la réalisation de produits matrice-tenseur qui ont fait récemment l'objet de plusieurs publications [41-42]. Ce produit, intéressant pour la réalisation de réseaux de neurones d'ordre supérieur, s'écrit :

$$\tilde{V}_{ij} = \sum_{k,l} T_{ijkl} V_{kl}$$

Il s'interprète directement en termes de corrélations et peut donc être aussi réalisé avec un corrélateur de Vander Lugt.

En conclusion, dans ce genre de montage, les limitations sont essentiellement dues aux nombres d'informations pouvant être stockées dans l'hologramme de volume. En suivant le raisonnement

développé par Psaltis [30], le nombre de degrés de liberté d'un hologramme étant de l'ordre de V_H/λ^3 où V_H est le volume de l'hologramme et λ la longueur d'onde, la condition limitante est $N_1 N_2 << V_H/\lambda^3$.

III. COMPOSANTS NONLINEAIRES POUR LE TRAITEMENT OPTIQUE DE L'INFORMATION

Dans ce paragraphe, nous allons tout d'abord passer en revue les différents candidats technologiques pouvant intervenir pour le traitement optique non linéaire. Les différents aspects y seront abordés succintement.

Puis, nous allons brièvement donner quelques résultats d'un "neurone" tout optique sur cristal de Titanate de Baryum. Ce travail a fait l'objet d'une publication présentée dans l'annexe 1.

1. LES DIFFERENTS COMPOSANTS NONLINEAIRES

Pour le calcul, il est nécessaire que l'optique, tout comme l'électronique depuis 1948, se dote de son "transistor". Les équations de Maxwell étant linéaires dans le vide, la réalisation d'une porte logique nécessite l'introduction d'un matériau non linéaire. Bien que d'importants efforts soient faits en ce sens, à l'heure actuelle, les portes optiques ne peuvent concurrencer technologiquement les transistors électroniques. C'est une des raisons pour lesquelles il est plus envisageable de parler de coprocesseurs optiques spécialisés séparés et associés aux ordinateurs que d'ordinateur optique.

La recherche de matériaux non linéaires s'est développée les années 60. En 1976, Gibbs a pu observer une bistabilité dans une cavité optique contenant un matériau non linéaire (vapeur de sodium) [36]. La bistabilité résulte de la conjonction entre un matériau non linéaire et une rétroaction positive. Par la suite, de nombreux travaux de recherche se sont développés sur le thème

de la bistabilité optique. Leur motivation est essentiellement due :

- d'une part, aux désirs de voir apparaître des composants optiques bistables utilisables pour le traitement binaire de l'information (traitement d'image, réseaux de neurones...).
- d'autre part, au souhait de contribuer à une meilleure compréhension des phénomènes fondamentaux des processus non linéaires optiques.

Parallèlement à cet axe de recherche, se développe également l'identification de matériaux à forte non-linéarité optique [37 a et b] . Tout particulièrement, l'étude des semi-conducteurs des familles III-V et II-VI, massifs ou sous forme de réseaux de puits quantiques connait un essor important.

En outre, les matériaux photoréfractifs tels que les cristaux de $LiNbO_3$ présentent également de fortes non-linéarités [37 c] tout en permettant une amplification du signal.

Une autre approche semblant plus intéressante à court terme consiste à réaliser les non-linéarités par le biais de "modulateurs spatiaux de lumière" ou de valves optiques qui sont déjà commercialisés. Ces développements technologiques très intéressants posent en outre le problème de la conversion optique-électronique. En effet, contrairement aux matériaux précédemment présentés, les "modulateurs spatiaux de lumière" ne permettent pas un traitement direct du signal puisque les deux faisceaux (écriture et lecture) n'interagissent pas dans le système.

Mais, ces dispositifs pour se révèler utiles en pratique doivent prendre en compte au moins les éléments suivants :

- une intégration assez élevée ;
- une cadence de répétition élevée ;
- une réponse en des temps brefs (inférieurs à la microseconde) ;
- une consommation en énergie faible pouvant être compatible avec la nécessité de l'évacuation thermique aux taux de répéti-

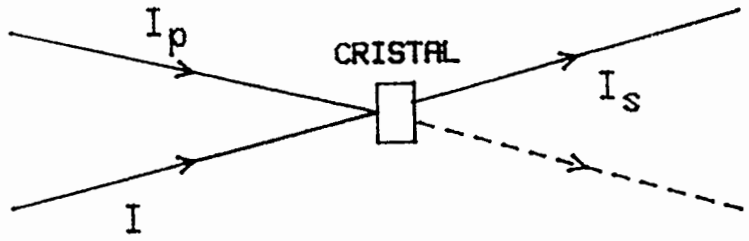


Figure 18 : Couplage à deux ondes dans un cristal photoréfractif de $BaTiO_3$.
I :intensité du signal avant amplification
I_p :intensité du faiceau pompe
I_s :intensité du signal après amplification

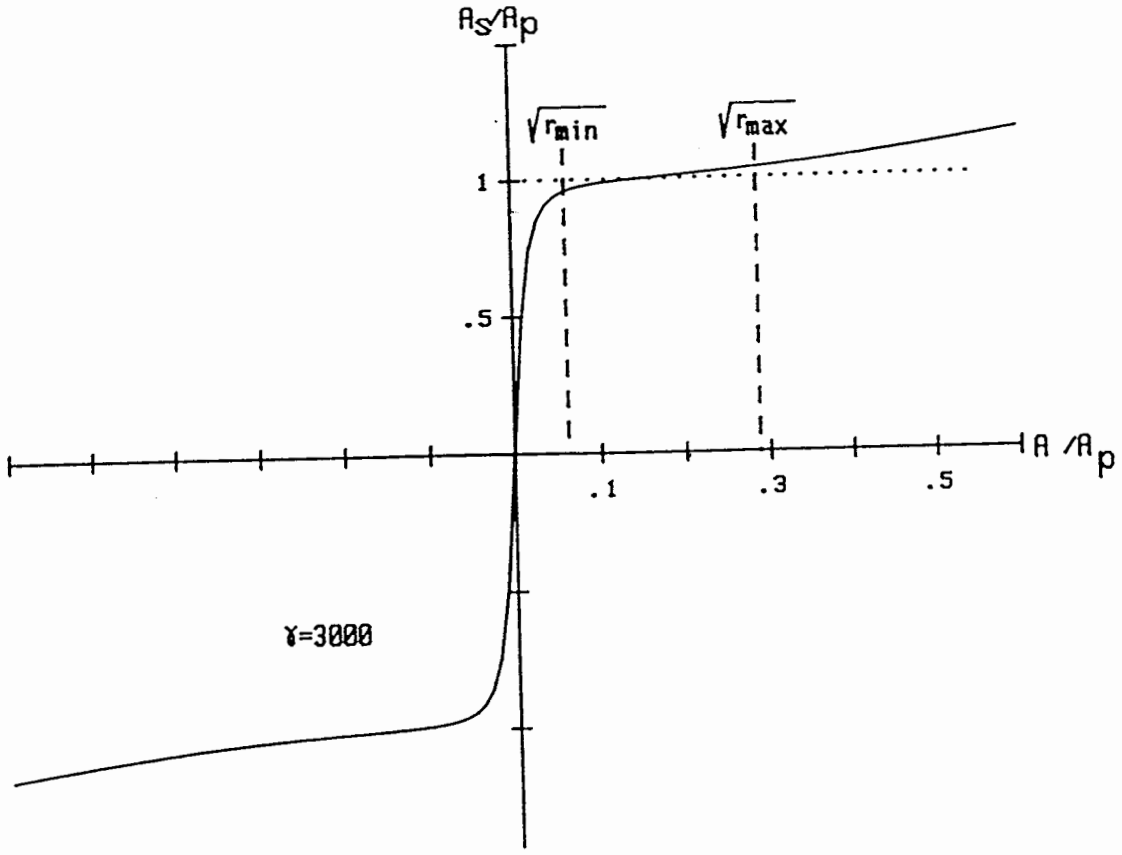


Figure 19 : Réponse théorique d'un "neurone sur cristal de $BaTiO_3$".
A : amplitude du signal avant amplification
A_p : amplitude du faisceau pompe
A_s : amplitude du signal après amplification.

tions élevés ...

Les limitations rencontrées sont essentiellement dues à des problèmes technologiques.Ces dernières années, d'importants efforts ont été faits dans le domaine de l'optique non-linéaire. Des expériences ont été réalisées sur des matrices de portes logiques optiques, mais restent au stade de démonstration en laboratoire. Actuellement, l'utilisation de grandes matrices reste prohibée car la commutation de chaque élément est trop gourmande en puissance.

2."NEURONE OPTIQUE" SUR CRISTAL DE TITANATE DE BARYUM

Nous avons développé une collaboration avec l'équipe du Professeur A. Brun. Plus particulièrement, nous avons travaillé avec G. Roosen, J.M.C. Jonathan, G. Pauliat et V. Hornung-Lequeux (Institut d'Optique). Cette collaboration nous a permis d'envisager la réalisation d'un réseau neuronal tout optique : plus particulièrement, nous avons étudié la faisabilité d'une porte logique de comportement semblable à la réponse neuronale (Figure 2 b) d'un réseau formel (annexe n° 1). Cette non linéarité a été obtenue par un composant qui préserve la phase de l'onde et qui produit une saturation en intensité. Le mélange à deux ondes dans les cristaux photoréfractifs remplit ces deux conditions tant que le processus de mouvement des charges photoinduites demeure une simple diffusion. En outre, une des deux ondes interférant dans le cristal peut être amplifiée au détriment de l'autre. A la sortie du cristal, l'intensité du faisceau amplifié s'écrit [37 c] :

$$I_s = I \frac{(r + 1)\ \gamma}{1 + r\ \gamma}$$

où : I est l'intensité du signal avant le cristal ;

γ est le gain exponentiel [37 c] et r est le rapport entre I et l'intensité du second faisceau I_p, le faisceau pompe (voir figure 18). Le gain exponentiel γ dépend de l'épaisseur du cristal et atteint typiquement des valeurs de quelques milliers [37.c].

Pour ces valeurs de γ, la réponse du cristal (amplitude du signal amplifié fonction de l'amplitude du signal avant amplification) est comparable à celle d'un neurone formel. La figure 19 montre dans des unités arbitraires pour $\gamma = 3000$ la réponse théorique obtenue par simulation.

En abscisse est portée l'amplitude A du signal avant l'effet photoréfractif. Celle-ci est normalisée par l'amplitude du faisceau pompe A_p. En ordonnée, l'amplitude A_s du faisceau amplifié est également normalisée. Cette réponse entrée-sortie présente une saturation sur une large dynamique comprise entre les valeurs extrêmes $\sqrt{r_{min}}$ et $\sqrt{r_{max}}$. Nous avons montré (voir annexe I) que le fonctionnement d'un réseau de 500 neurones pouvait être envisagé avec ce dispositif non linéaire tant que les pertes dans les connexions holographiques n'excèdent pas 978.

Une démonstration expérimentale a été faite par V. Hornung-Lequeux qui a réalisé une amplification avec saturation sur un objet constitué de cinq pixels de 200 x 200 μm^2. La figure 20 montre les cinq courbes non-linéaires. Lors des mesures,la détection quadratique n'a pas permis d'avoir accès à l'amplitude de l'onde amplifiée et notamment à son signe. Cependant, des prévisions théoriques [39] laissent présager que l'amplification saturante conserve la phase de l'onde. Le gain observé est très sensiblement inférieur à celui annoncé dans les prévisions théoriques. Des diffusions parasites qui peuvent être considérablement réduites par polissage optique du cristal et par minimisation des réflexions sur les faces de la cuve contenant le liquide d'indice en sont responsables.

En outre, l'amplification saturante n'a pu être mise en évidence que sur cinq pixels. Cette restriction violente est due au fait qu'avec le cristal utilisé les forts gains exponentiels nécessaires à l'amplification saturante ne peuvent être obtenus que pour des faisceaux ayant une incidence voisine de 45°. Dans ces conditions, une faible partie du cristal est éclairée uniformément. Il est possible de pallier cet inconvénient avec un cristal dont les faces sont taillées à 45° de l'axe optique [37 d]. Dans

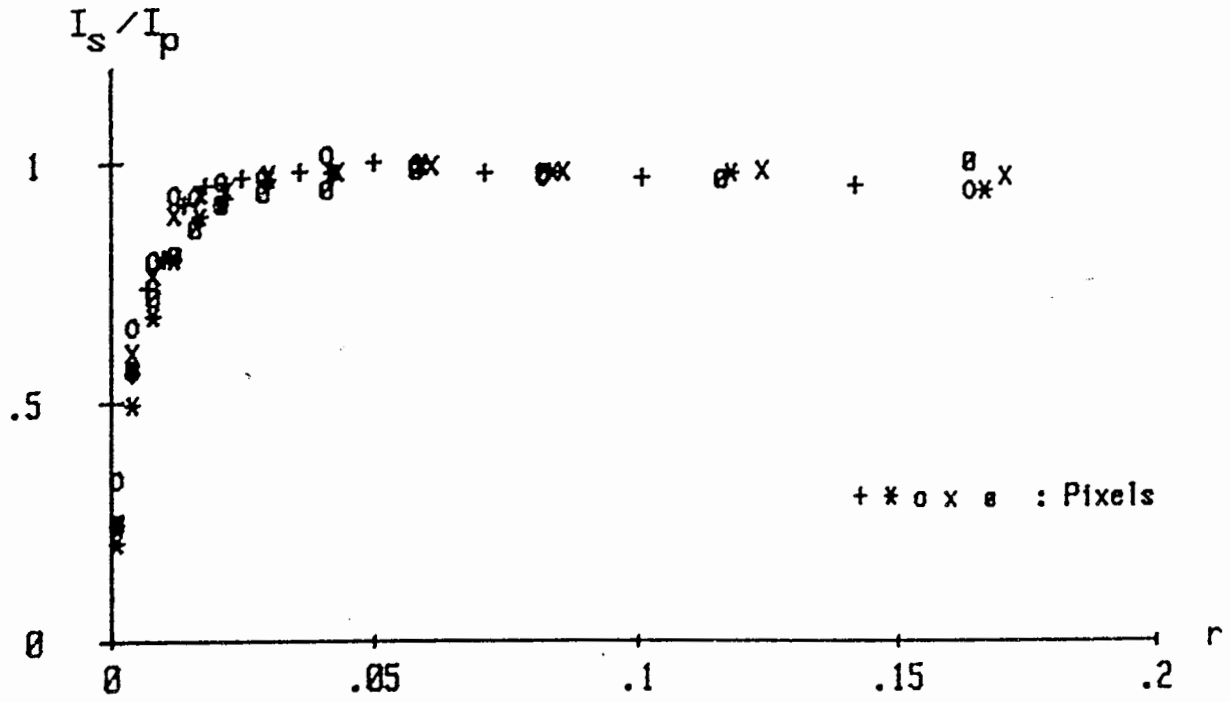


Figure 20 : Amplification saturante obtenue expérimentalement sur un tableau de cinq pixels de 200 x 200 μm^2. ($r = I/I_p$).

ce cas, de forts gains exponentiels peuvent être obtenus avec des incidences quasi-normales autorisant ainsi un éclairage uniforme de tout le cristal. Les résultats présentés pourraient donc être fortement améliorés. Notamment, le même effet photoréfractif dans un cristal de BSO pourrait être obtenu, permettant ainsi de réduire grandement les énergies nécessaires aux phénomènes non linéaires;cela rendrait par là même notre approche plus intéressante dans des situations pratiques.

IV. LES DIFFERENTES REALISATIONS DE RESEAUX NEURONAUX OPTIQUES

Dans la littérature, les réalisations expérimentales de réseaux de neurones optiques ou opto-électroniques sont essentiellement inspirées des deux grands schémas dégagés antérieurement (figure 16 et 17).

La première réalisation d'un réseau neuronal sous la forme d'un produit vecteur-matrice en éclairage incohérent a été réalisée par N.H. Farhat [39]. Le montage était celui de la figure 16. Il comportait N = 32 diodes lasers (neurones). Afin de traiter le signe des coefficients de la matrice, une plaque photographique de (32x32)x2 pixels carrés tenait lieu de matrice synaptique et deux rangées de 32 photodétecteurs permettaient d'effectuer la rétroaction électroniquement. Le nombre d'états mémorisés s'élevait à trois et le comportement du réseau s'est avéré comparable à celui donné par les simulations.

Des expérimentations semblables comportant un nombre plus important de neurones ont été réalisées (N = 128 et 256) mais n'ont pas été publiées à notre connaissance.

Les réalisations de réseaux neuronaux s'appuyant sur le schéma faisant intervenir des corrélateurs de Vander Lugt sont au nombre de deux [23, 26]. D. Psaltis [23] a réalisé une mémoire associative dont le schéma est représenté figure 21. Les états

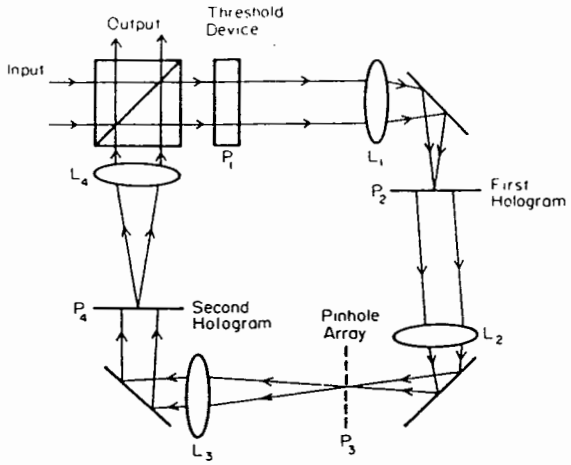


Figure 21 : D'après [26] schéma expérimental du réseau neuronal.



a



b



c

Figure 22 : Résultats expérimentaux :

a) états mémorisés,

b) état initial,

c) état final.

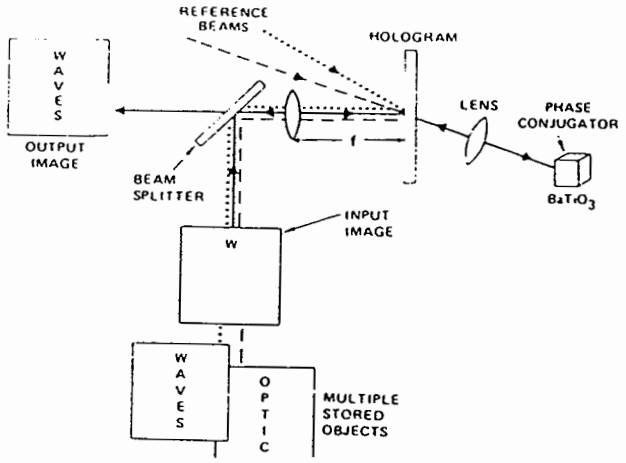


Figure 23 : Schéma expérimental d'après [23].

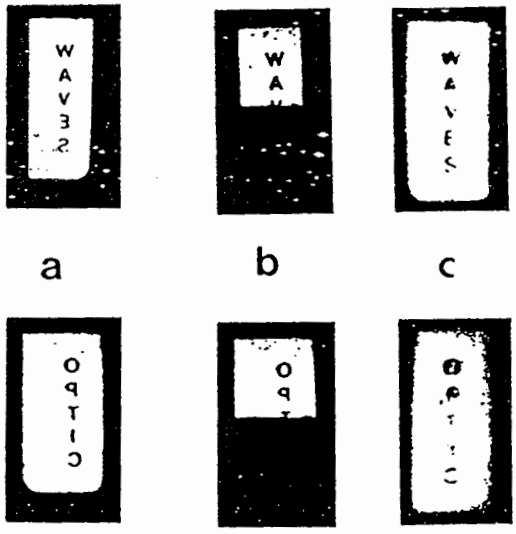


Figure 24 : D'après Y. Owechko [23] :
a) états mémoires,
b) états des neurones initialement,
c) résultats.

mémorisés sont au nombre de quatre (voir figure 22.a). Les deux hologrammes ont été enregistrés sur des films thermoplastiques. Le premier hologramme du corrélateur a été enregistré de façon à privilégier les fréquences spatiales des quatre visages. Cette astuce a permis de réduire considérablement les corrélations croisées en privilégiant l'autocorrélation (i.e. le signal dans le processus de reconnaissance). Dépourvu de non-linéarité, le plan de corrélation P_3 a été percé de quatre petits trous de 350 μm de diamètre. La non-linéarité neuronale a été obtenue à l'aide d'une caméra CCD pilotant un modulateur spatial de lumière adressable électriquement tel que la valve à cristaux liquide de chez Hugues. La figure 22 montre les qualités de rappel de la mémoire associative : quand l'entrée b est présentée, la sortie c est obtenue.

Y. Owechko a proposé une variante de la mémoire associative précédemment exposée [23, 24]. Le schéma expérimental est représenté sur la figure 23. Celui-ci ne prend pas en considération le caractère neuronal car aucune rétroaction à seuil n'est envisagée. Cependant, tout comme précédemment, le plan de corrélation est mis en évidence dans l'expérience. Dans cette réalisation, l'originalité vient essentiellement de la présence d'un miroir à conjugaison de phase. Ce dernier présente deux gros avantages :

- entre l'entrée et la sortie du montage, l'onde lumineuse traverse à deux reprises la même série de lentilles et le même hologramme. La conjugaison de phase permet donc de s'affranchir en toute rigueur des différentes aberrations.

- il permet en outre d'introduire dans le plan de corrélation une non-linéarité, telle celle que nous avons discutée dans le chapitre précédent, augmentant par là même singulièrement les capacités de stockage. Dans la réalisation discutée, la conjugaison de phase était produite par un mélange à quatre ondes dans un cristal de $BaTiO_3$. Le mode opératoire a cependant imposé un régime linéaire en réflectivité du miroir à conjugaison de phase. L'absence de trous dans le plan de corrélation a permis lors d'une première expérience, où un état était mémorisé, de mettre en évidence une invariance par translation de 10 à 20 μm dans le processus de reconnaissance. Dans cet exemple, la moitié de la

mémoire était présentée au système et la dimension de l'état mémoire était d'un centimètre.

Une seconde expérience a été réalisée avec deux états mémorisés (figure 24 a). Les qualités de rappel de la mémoire associative ont été mises en évidence pour les deux mots : quand les entrées (figure 24 b) sont présentées, les images de sortie associées sont données sur la figure 24 c (la symétrie entre l'entrée et la sortie n'est dûe qu'au miroir à conjugaison de phase).

L'introduction du miroir à conjugaison de phase, bien que très attrayante, présente néanmoins l'inconvénient d'imposer l'égalité des hologrammes H_1 et H_2 de la figure 17, donnant ainsi moins de souplesse au montage. En outre, l'amplification nécessaire à l'oscillation de la cavité n'a pu être obtenue avec le cristal de Titanate de Baryum. Ce manque de gain a d'ailleurs contraint Y. Owechko à proposer ultérieurement des réseaux neuronaux ayant une architecture hybride [40], la part de l'optique se bornant aux transformations linéaires parallèles.

Sans compter les nombreuses propositions de réalisation optique de réseaux neuronaux, quelques équipes ont développé en laboratoire des expérimentations de mémoires associatives. Citons par exemple, les travaux de I. Lindsay [41] qui a repris ceux de Y. Owechko en utilisant un hologramme multiplexé contenant la transformée de Fourier de quatre états mémoires. H.J. White [42] a développé une architecture de deux états mémoires de six bits contenant deux voies une pour les synapses positives et l'autre pour les synapses négatives ; la réponse neuronale est obtenue avec une valve optique Hughes. Citons également la réalisation de S.H. Song qui en reprenant les travaux de H.J. Caulfield [43.a] a réalisé une mémoire associative neuronale de 25 neurones et deux états mémoires [43.b] . La rétroaction neuronale a été obtenue électriquement à l'aide d'une caméra CCD pilotant un modulateur spatial de lumière. R. Chevalier [44] de l'E.N.S.T. a réalisé une machine neuronale permettant des connexions synaptiques entre tableaux de neurones. Cette connexion à 20 est assurée par un multiplexage des fréquences spatiales qui s'apparente aux travaux

de D. Psaltis [30].

Le tableau suivant résume les différentes réalisations que nous venons de développer en insistant sur les traits pertinents des réseaux neuronaux : la non linéarité neuronale, le gain nécessaire à la boucle de rétroaction, la reprogrammabilité des coefficients synaptiques, la réalisation de mémoire associative d'ordre élevé...

	neurones à		gain		réseau		nonlinéarité du plan de corrélation	Nbre voies		invariance par translation	N
	signe	seuil	opt.	elect.	1D	2D		1	2		
Psaltis [11]	X	X		X	X				X		~150
Psaltis [26]				X		X		X			
Owechko [23]			X			X		X		X	
Lindsay [41]			X			X		X			
White [42]	X	X		X		X			X		
Song [43.b]	X	X		X		X			X		6
Lequeux [Ann.II]	X	X	X					X			25
Chevalier [44]		X		X		X		X	X		256

V. DISCUSSION

Ces dernières années, les réseaux de neurones ont suscité un intérêt croissant en recherche. J.J. Hopfield a montré qu'un réseau constitué d'entités élémentaires très simple présente des possibilités de calcul étonnantes. En outre, la simple non-linéarité neuronale confère au système des propriétés remarquables de résistance aux fautes (ou erreurs) de fabrication inhérentes aux réalisations comportant un grand nombre de neurones. Dans les situations expérimentales optiques, la réponse neuronale peut être facilement simulée : dans le montage de la figure 16, c'est le photorécepteur de la barrette ; dans un montage tout optique,

la pixellisation des plans d'onde représentant l'entité neuronale pourrait être obtenue par l'intermédiaire d'une grille placée derrière un cristal non-linéaire.

Deux approches sont généralement envisagées pour la rétroaction : d'une part, des rétroactions opto-électroniques et d'autre part, tout optiques. La rétroaction doit de toute façon tenir compte des contraintes suivantes [28] :

- Puisque le niveau de lumière dans le plan de sortie est notablement plus faible que celui de l'entrée, une rétroaction avec gain est nécessaire ;
- Le motif dans le plan de sortie doit être échantillonné afin de restituer la résolution du plan d'entrée et l'entité neuronale ;
- Le caractère signé des forces F_i agissant sur les neurones formels doit être pris en compte, celui-ci assurant des capacités de stockage importants. Les rétroactions optoélectroniques permettent aisément la réalisation de grands gains et d'échantillonages mais a priori demandent deux voies, ceci à cause de l'aspect quadratique des récepteurs et de la difficulté de réaliser des détections interférométriques. Au contraire, les rétroactions tout optiques utilisant des cristaux nonlinéaires peuvent permettre des réalisations à une voie mais s'adaptent difficilement aux problèmes soulevés par le gain et l'échantillonnage.
- En dernier lieu, cette rétroaction doit être envisageable pour un grand nombre de neurones.

Ces quelques contraintes rendent très certainement les rétro actions électroniques plus pertinentes. Bien qu'un montage tout optique soit plus satisfaisant pour l'esprit, la rétroaction électronique présente en outre l'avantage de pouvoir incorporer dans la boucle de retour un traitement des données par l'intermédiaire d'un ordinateur hôte. Son seul inconvénient est de ne pas prendre en compte le caractère signé des forces F_i .

En outre, dans les réalisations précédemment décrites pour les réseaux de neurones, deux approches optiques sont envisagées:

une réalisation en lumière incohérente nécessite deux voies, une pour les coefficients synaptiques négatifs et l'autre pour les positifs. Le plan d'entrée étant le plan neuronal V_i i = 1,...N ; N pixels typiquement réalisés à l'aide de diodes électroluminescentes (figure 16) sont nécessaires à chaque voie i.e. le plan d'entrée contient 2N L.E.D. ou N L.E.D. et une semi-transparente. Le plan de sortie où s'effectue le calcul optique des forces F_i requiert quant à lui 2N détecteurs. Par ailleurs, le montage en lumière cohérente permet d'éviter le dédoublage des voies mais est cependant plus délicat à réaliser ; en effet, bien qu'offrant des coefficients synaptiques signés, le montage cohérent nécessite une grande stabilité pour le contrôle de la phase ainsi qu'un alignement précis. Cependant, cette stabilité est relativement simple à obtenir dans une réalisation expérimentale qui ne demande pas de reprogrammabilité des interconnections. De plus, en ce qui concerne les mémoires associatives, le produit vecteur matrice de la figure 16 présente l'inconvénient de ne pas permettre un accès direct au plan de corrélation, interdisant ainsi la réalisation de mémoires associatives d'ordre supérieur qui conduisent à des capacités de stockage élevées avec une reconnaissance invariante par translation. En outre, l'utilisation de lentilles cylindriques pour la conjugaison ne permet le traitement que d'objet unidimensionnel. Les aberrations qui limitent en pratique le nombre N de neurones sont particulièrement contraignantes dans ce cadre de traitement à une dimension.

Ces quelques remarques donnent un avantage certain aux montages tels que celui de la figure 17 pour les applications des réseaux neuronaux aux mémoires associatives. Le paragraphe deux ayant montré que tout produit vecteur-matrice peut être réalisé avec un montage tel que celui de la figure 17 en utilisant les deux dimensions dans l'implementation, je pense que le montage faisant intervenir un corrélateur de Vander Lugt présente un attrait supplémentaire pour la réalisation des réseaux neuronaux.

VI. CONCLUSION

En conclusion, la réalisation d'une mémoire associative optique basée sur une architecture neuronale passe par [28] :

- une partie non-linéaire opto-électronique ;

- une partie connexion et reprogrammabilité favorable au développement de processeurs neuronaux optiques. Pour un réseau arbitrairement interconnecté de dix mille neurones, cent millions de connexions sont nécessaires. D. Psaltis montre que la densité maximale d'interconnexions [36] qui peuvent être enregistrées dans un cristal photoréfractif est de l'ordre d'un milliard par centimètre cube. Même si ce résultat idéalement élevé se trouve exagéré d'un facteur cent ou mille, la possibilité d'interconnexions optiques reste totalement prometteuse ;

- un algorithme adapté aux contraintes technologiques autorisant de grandes capacités de stockage afin d'exploiter pleinement le potentiel des interconnexions optiques et leur parallélisme.

CHAPITRE IV

MEMOIRE ASSOCIATIVE POUR NEURONES OPTOELECTRONIQUES

Dans ce chapitre, nous présentons une réalisation de mémoire associative neuronale. Cette réalisation prend en compte les différentes conclusions concernant les architectures hybrides opto-électroniques que nous avons précédemment dégagées. Notamment, l'article qui constituera la première partie de ce chapitre met l'accent sur les problèmes du traitement optique de quantités signées dans les mémoires associatives, en proposant un algorithme qui permet d'effectuer une rétroaction électronique (idéale pour obtenir le gain nécessaire au fonctionnement de la cavité). Cette rétroaction électronique prend en compte le potentiel de connexion en phase et en amplitude offert par l'optique holographique cohérente tout en autorisant un schéma expérimental en une seule voie.

La seconde partie du chapitre concerne plus particulièrement la réalisation expérimentale que nous avons condensée pour publication.

En résumé, le plan du chapitre est le suivant :

I - ARTICLE : "Optical inner-product implementation of neural networks models".

II - DEVELOPPEMENT DE LA PARTIE EXPERIMENTALE

III - DISCUSSION

Reprinted from Applied Optics, Vol. 28, page 377, January 15, 1989
Copyright © 1988 by the Optical Society of America and reprinted by permission of the copyright owner.

Optical inner-product implementation of neural networks models

P. Lalanne, P. Chavel, and J. Taboury

The Hopfield neural network model is described in terms of inner product, i.e., as a matched filtering step followed by a pattern synthesis step. Optical implementation by two cascaded coherent filtering setups with holographic matched filters is described. Suitable encoding of information in the form of bipolar (positive or negative) amplitudes in one hologram and of non-negative amplitudes in the other allows one to deal only with non-negative quantities in the input and output planes, thereby avoiding use of multiple channels and coherent detection. The performance of this scheme is analytically evaluated. The above coding can moreover be adapted to the cases of nonzero average memorized states and to the higher-order models associated to Hopfield's algorithm. Numerical simulations and experimental results are presented to illustrate the analysis.

I. Introduction

Recent literature about neural associative optical memories describes matrix–vector product implementation[1] of models such as those of Kohonen or Hopfield.[2,3] On the other hand, other workers have shown that some of these models are also suitable for inner-product schemes based on VanderLugt correlators involving scalar products.[4–11] We concentrate here on the latter, where offers the possibility of extension to higher order, i.e., multineuron synapses models, thereby allowing us to incorporate some translation invariance[5,6] and to increase strongly the network capacity with respect to both the number of stable stored states[7–10] and the convergence radius.[11]

Two general approaches for feedback can be considered: optoelectronic feedbacks and all-optical feedbacks. The feedback in associative memories has to comply with the following three constraints: (1) the bipolar character of information has to be taken into account; (2) gain is needed; and (3) the output pattern sampling must be compatible with input pattern sampling to avoid an unwanted spatial structure. Optoelectronic feedback easily provides high gain and sampling but *a priori* requires two channels because of the quadratic nature of receptors and of the complexity of interferometric detection. On the contrary, all-optical feedback using nonlinear crystals could allow one channel implementation but are not well suited for gain and sampling. In Sec. II, we first describe the setup considered. In Sec. III, we propose a solution to the bipolarity problem for a one-channel setup taking advantage of optoelectronic feedback with electronic detection. Then we analyze the capacity of the network so implemented and show that our proposition allows a large storage capacity.

Moreover, the Hopfield model shows poor performance in the case of memorized patterns having either a nonzero average or some correlation with each other. This is shown, for example, in Ref. 12. In Sec. IV, we propose a solution for the efficient storage of independent patterns with nonzero average, using a simple preprocessing which does not modify the shape of the pattern. In Sec. V, we extend our algorithm to higher-order models, and we present illustrative experimental results in Sec. VI.

II. Inner-Product Optical Implementation

A. Philosophy of the Inner-Product Approach

While neural networks in general share little with Fourier analysis, it turns out that the optical inner-product implementation of the Hopfield model can straightforwardly be understood in terms of Fourier optics. Before we proceed with the analysis, we develop this explanation to make further discussions more intuitively clear.

As shown in Fig. 1, five planes are involved. The optical setup can be thought of as implementing the synaptic interaction between neurons. The input plane I describes the state of activity of neurons result-

The authors are with Universite de Paris-Sud, Institute d'Optique, L.A. au CNRS, B.P. 43, 91406 Orsay CEDEX, France.
Received 1 April 1988.
0003-6935/89/020377-09$02.00/0.
© 1989 Optical Society of America.

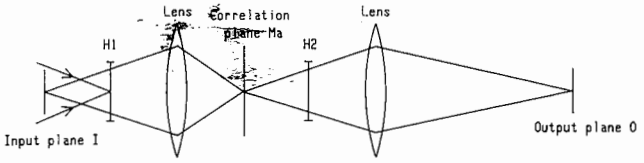


Fig. 1. Optical inner-product implementation of the Hopfield model.

ing from either external input or previous interactions between neurons. Each pixel corresponds to one neuron, and for the best accommodation with optics, the N neurons (i = 1–N) are arranged in a bidimensional array, thus forming an image $\mathbf{X}$. The vector notation for $\mathbf{X}$ indicates that the image is considered as a vector with N components.

Thanks to a lens not shown in Fig. 1, the laser beam converges in plane H_1, thus producing the coherent 2-D Fourier transform of plane I onto the Fourier filter of plane H_1. We use the converging optical Fourier transform setup.[13] The first lens conjugates plane I and plane M_a, while the filter is responsible for forming in plane M_a the amplitude correlation between the input and some impulse response. In practice, the filter is likely to be an hologram, so that the useful part of plane M_a may be shifted off-axis in the direction of order 1 of the hologram; this shift, however, has not been represented in the figure for simplicity and because it is only imposed by practical constraints related to filter implementation.

The filter H_1 is an angularly multiplexed matched filter of the M memorized states ${}^m\mathbf{Y}$ (m = 1–M) of the neural network. Its impulse response is shown in Fig. 2. Each memorized state is a pattern of N pixels, and the filter is the sum of VanderLugt[14] filters of all M memorized states, each with a different carrier frequency so as to avoid overlap. The impulse response consists of the M memorized states next to each other. In plane M_a, the amplitude distribution consists of the correlations of the input plane amplitude with each of the memorized states. It should be noted here that these correlations involve the input and memorized states as functions of two variables rather than as vectors with N components as indicated by the notations $\mathbf{X}$ and ${}^m\mathbf{Y}$. The vector notation, however, is chosen for its adequacy to the analysis in the next sections, and the correlation peak values are the same in 1-D and 2-D notation. Our vector notation is essentially the so-called lexicographic notation commonly used in the field of digital image processing.

In plane M_a, a mask selects the centers of the M correlations as in Ref. 15. One consequence is that the recognition of our setup is not invariant by translation. However, as the work of Ref. 6 shows, an SLM with an appropriate input–output relationship placed in plane M_a would allow shift invariance. The light leaving M_a, therefore, consists of M spherical waves originating from the M correlation peaks, each weighted according to the correlation peak value, which measures the similarity between $\mathbf{X}$ and ${}^m\mathbf{Y}$. The first lens, which images input plane I onto the correlation plane, is also used to

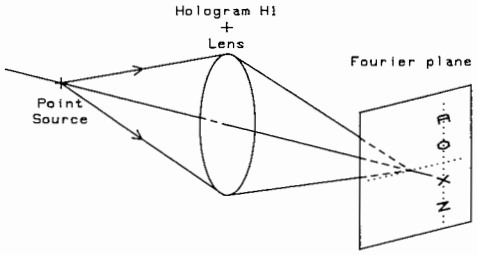


Fig. 2. Impulses response of filter H_1 is the set of all memorized states next to each other. H_1 is in practice a hologram, so that the useful part of the impulse response appears off-axis, but this peculiarity is not included in the diagram for simplicity.

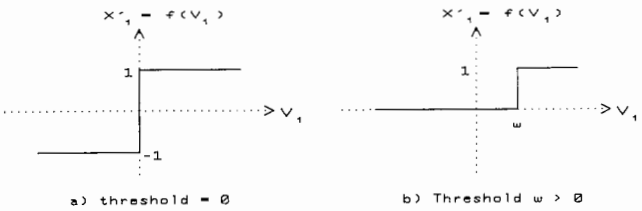


Fig. 3. Transfer function of the thresholding amplifier in the feedback loop of neuron i: (a) zero threshold; (b) positive threshold ω.

image hologram H_1 onto hologram H_2. Due to the spherical converging illumination of I, H_1 acts as a Fourier filter on I; because H_1 and H_2 are conjugated through the first lens, plane M_a is illuminated by a spherical wave converging onto H_2. Therefore, H_2 acts as a Fourier filter on M_a. This would not be true without the above described double conjugation through the first lens. A second lens placed some distance after H_2 allows one to observe the final output. It can be shown[16] that the whole setup is equivalent to the one of Fig. 3 of Ref. 15, which uses the well-known f–f–f–f configuration. However, Fig. 1 is much more compact. We turn now to the more detailed qualitative explanation of the setup operation. For a first presentation, it is useful to consider H_2 as identical to H_1, although differences are discussed later. Both H_1 and H_2 are thin elements, showing a good degree of shift invariance.

Each of the M correlation peaks, therefore, reconstructs in the output plane O the impulse response of the filter in H_2, i.e., images of all the memorized states ${}^m\mathbf{Y}$, m = 1–M. In those M^2 terms, one recognizes M autoassociative terms, with the correlation peak m reconstructing the memorized state ${}^m\mathbf{Y}$, m = 1–M and $M(M-1)$ crossed terms. Proper setting of the distances involved allows superimposition exactly of the M autoassociative terms and avoidance of any overlap with the other $M(M-1)$. This is suggested in Fig. 2 with A,O,X,Z representing four memorized states. The output is, therefore, a weighted superposition of all memories. The memorized pattern most similar to $\mathbf{X}$ say, ${}^1\mathbf{Y}$, is dominant and can be called the signal, while all others create a noise.

A detector in plane O is followed by a nonlinear amplifier at each neuron, which in turn triggers the state of the input $\mathbf{X}$ at the corresponding neuron in plane I. This feedback loop describes the behavior of

the neuron itself, so that the neuron input is the optical system output and vice versa. Because of the thresholding nonlinearity, shown in Fig. 3, it is not easy to implement the feedback optically. This possibility is not discussed here. The optical systems, therefore, is restricted to implementing the interconnections between neurons, i.e., the synapses: It is well known in any case that optics is particularly suited to interconnections and that neural networks are demanding in terms of interconnections.

It can be mentioned here that the above description is valid for so-called autoassociative memories, because the patterns recognized by the first filter (in plane H_1) are the same as those reconstructed by the second filter (in plane H_2). The same optical setup, but not the feedback loop, can be adapted to heteroassociative memories just by using in plane H_2 a filter with impulse responses ${}^m\mathbf{Z}$ instead of ${}^m\mathbf{Y}$ ($m = 1$–M).

B. Analysis of the Hopfield Model Implementation

Let the input $\mathbf{X}$ consist of N neurons with two possible states, active and inactive, active corresponding to amplitude +1, and inactive to amplitude −1. Similarly, the memorized patterns ${}^m\mathbf{W}$ consist of N neurons with amplitudes +1 and −1. We note that ${}^m\mathbf{Y} = \frac{1}{2}({}^m\mathbf{W} + 1)$ so as to introduce vectors ${}^m\mathbf{Y}$ with binary values 0 and 1. Thus, ${}^m\mathbf{Y}$ and ${}^m\mathbf{W}$ are two image descriptions of the same memorized state. In the following, we shall keep this notation.

In the Hopfield model implementation, the mask M_a is made of pinholes selecting the centers of all correlations between the 2-D functions representing $\mathbf{X}$ and ${}^m\mathbf{W}$. These correlation peaks can simply be regarded as the scalar products $\mathbf{X} \cdot {}^m\mathbf{W}$ in vector notation.

Apart from constant factors, the useful part of output plane O receives an image of each ${}^m\mathbf{W}$ weighted by the corresponding scalar product. As already mentioned, the other terms can be masked out. The useful part is, therefore,

$$\mathbf{V} = \sum_{m=1}^{M} {}^m\mathbf{W}(\mathbf{X} \cdot {}^m\mathbf{W}), \tag{1}$$

where $\mathbf{V}$ is an output vector which, as can be seen from Eq. (1), is not restricted to binary values. The components V_i are called potentials.

According to the Hopfield model, the thresholding amplifier operates on each component V_i of $\mathbf{V}$. Figure 3(a) represents the typical transfer relationship $f(V_i)$ of the amplifier. It has been shown[17] that a sigmoid curve with a reasonably sharp slope leads to basically the same behavior as a discontinuous sign function, so that only the latter is considered here, leading to the required +1 or −1 binary behavior for the updated input $\mathbf{X}$:

$$X_i' = \text{updated } X_i = f(V_i). \tag{2}$$

Equations (1) and (2) together can be rewritten

$$X_i' = f\left(\sum_{j=1}^{N} T_{ij} X_j\right), \tag{3a}$$

with

$$T_{ij} = \sum_{m=1}^{M} {}^mW_i {}^mW_j, \tag{3b}$$

which is the standard formulation of the Hopfield model with the Hebbian learning rule expressed by Eq. (3b).

The principal difficulty in the optical implementation of Eqs. (1) and (2) by the setup of Fig. 1 arises from the bipolar quantities involved. The solution proposed is developed in the following section.

III. Problem of Negative Quantities

A. How to Tackle the Negative Neurons and Synapses

Let us first show that negative quantities must be involved indeed and then propose a solution compatible with the square-law behavior of optical detectors.

For the sake of specificity, we consider here the case where the input $\mathbf{X}$ is one of the memorized states, namely, ${}^1\mathbf{Y}$. The purpose is obviously to recognize ${}^1\mathbf{Y}$ as one of the stable states of the system.

We first examine the case where none of the quantities involved can be negative. Then Eqs. (1) and (2) combine into

$$\mathbf{X}' = f(\mathbf{S} + \mathbf{N}), \tag{4a}$$

where the signal and noise vectors $\mathbf{S}$ and $\mathbf{N}$ are defined as

$$\mathbf{S} = {}^1\mathbf{Y}({}^1\mathbf{Y} \cdot {}^1\mathbf{Y}), \tag{4b}$$

$$\mathbf{N} = \sum_{m=2}^{M} {}^m\mathbf{Y}({}^1\mathbf{Y} \cdot {}^m\mathbf{Y}). \tag{4c}$$

Obviously, cross-correlations are positive; for random ${}^m\mathbf{Y}$ states, the noise is a positive bias building up linearly with increasing M. The signal is simply ${}^1\mathbf{Y}$ itself weighted by its number of ones. The threshold in function f cannot be set to zero but must take into account the estimated mean and fluctuations of signal and noise.

On the other hand, let us now examine the bipolar case where the ${}^m\mathbf{Y}$ are replaced by ${}^m\mathbf{W}$ for all m. Then the average scalar product ${}^1\mathbf{W} \cdot {}^m\mathbf{W}$ is zero (this assumption is considered in more detail later), and there is no noise bias buildup. Only noise fluctuations depend on M, and they increase proportionally to $\sqrt{M}$. The signal components are all exactly $+N$ or $-N$.

It is, therefore, clear, and it can be justified analytically, that the performance of neural networks involving bipolar quantities is superior to that of non-negative networks. The optical implementation of the latter, however, is not straightforward. Admittedly, interferometric control of the complex amplitude both in the input and output plane could be used, but not without considerable burden. To avoid this, the standard solution is to process positive and negative quantities in separate channels and then combine the results electronically after detection. The scalar product ${}^1\mathbf{W} \cdot {}^m\mathbf{W}$ would involve four channels. This approach is obviously unappealing.

A much nicer solution can be derived from carefully

distinguishing between bipolar neural states and bipolar interactions between neurons, i.e., excitatory and inhibitory synapses, as in fact was done by Hopfield himself.[3] There is little to be gained from bipolar neurons, provided interactions between neurons can be bipolar. Specifically, in Eq. (4c), the term ${}^1\mathbf{Y}$ in the scalar products denotes the input vector of the optical setup of Fig. 1. The term ${}^m\mathbf{Y}$ outside the scalar products represents the state created in the optical output plane O by filter H_2. These two can be kept non-negative without a substantial loss of performance, provided the term ${}^m\mathbf{Y}$ in the scalar product, coming from the matched filter H_1, is replaced by a bipolar term ${}^m\mathbf{W}$. We then replace Eqs. (4b) and (4c) by

$$\mathbf{S} = {}^1\mathbf{Y}({}^1\mathbf{W} \cdot {}^1\mathbf{Y}), \tag{5a}$$

$$\mathbf{N} = \sum_{m=2}^{M} {}^m\mathbf{Y}({}^m\mathbf{W} \cdot {}^1\mathbf{Y}), \tag{5b}$$

or more generally, for a random non-negative input vector $\mathbf{X}$,

$$\mathbf{X}' = f(\mathbf{V}), \tag{6a}$$

$$\mathbf{V} = \mathbf{S} + \mathbf{N} = \sum_{m=1}^{M} {}^m\mathbf{Y}({}^m\mathbf{W} \cdot \mathbf{X}). \tag{6b}$$

This approach is, therefore, equivalent to forming a synaptic matrix (often noted T_{ij} in the literature) as an outer product of unipolar (0,1) and bipolar (−1,1) vectors and then reading it out with a unipolar vector.

From Eq. (5b), the noise term can be positive or negative and no bias buildup occurs. Only noise fluctuations increase with increasing M. From Eq. (5a), the signal term is ${}^1\mathbf{Y}$ weighted by its own number of ones. A nonzero threshold ω for function f [Fig. 3(b)] can be found to separate the case ${}^1Y_i = 1$ from the case ${}^1Y_i = 0$, as will be shown analytically in the following. More precisely, the resulting output plane amplitude $V_i = S_i + N_i$ in Eqs. (5), is bipolar. It will be shown that, because the average $\mathbf{S} + \mathbf{N}$ is zero if ${}^1Y_i = 0$ and nonzero if ${}^1Y_i = 1$, a threshold can be found to separate the two cases even if a square-law noninterferometric detector is used to measure the output intensity, which at each neuron i is $(S_i + N_i)^2$. We can, therefore, implement the optical setup of Fig. 1 with only one channel and with non-negative input and output, restricting the bipolar quantities to the coherent impulse response of the filter H_1, which is straightforward at least with computer generated holograms.

B. Performance of the Algorithm and Optimal Value of the Threshold

In this section, we develop analytically the above ideas in the case of random zero mean uncorrelated memorized states ${}^m\mathbf{W}$, i.e.,

$$\langle {}^mW_i \rangle = 0 \text{ for all } i \text{ and } m, \tag{7a}$$

$$\langle {}^mW_i \cdot {}^{m'}W_i \rangle = \delta(i - i', m - m'), \tag{7b}$$

where the latter Kronecker notation is equal to zero except if $(i,m) = (i',m')$, in which case it is obviously equal to unity. More precisely, as assumed by Hopfield,[3] we assume that all ${}^mW_i$ are independent random variables with

$$\text{prob}({}^mW_i = 1) = \text{prob}({}^mW_i = -1) = \tfrac{1}{2}.$$

Such a calculation was presented earlier[18] but not in our case of non-negative neurons and bipolar interactions. Also, the determination of the optimal threshold for the thresholding nonlinearity f with a square-law detector is specific to our proposed optical implementation.

As in Eqs. (5), we consider the case where the input vector $\mathbf{X}$ is one of the memorized states, namely, ${}^1\mathbf{Y}$. To evaluate the behavior of the algorithm, we are going to examine the statistics of the signal S_i and the noise N_i.

S_i in Eq. (5a) is equal to 0 with probability $\frac{1}{2}$ (case ${}^1Y_i = 0$). In the ${}^1Y_i = 1$ case, and for a large number of neurons N, the scalar product ${}^1\mathbf{W} \cdot {}^1\mathbf{Y}$, according to the central limit theorem, is Gaussian distributed as the sum of N independent random variables with identical probability laws. Its average is $N/2$, and its variance is $N/4$.

Let us now examine the noise [Eq. (5b)]. As the sum of N independent random variables, the scalar product ${}^m\mathbf{W} \cdot {}^1\mathbf{Y}$ with $m \neq 1$ is also Gaussian distributed for large N. In the Appendix, we show that the two scalar products ${}^m\mathbf{W} \cdot {}^1\mathbf{Y}$ and ${}^{m'}\mathbf{W} \cdot {}^1\mathbf{Y}$ are decorrelated for $m \neq m'$, and since they are Gaussian distributed, they are two independent random variables. Moreover, because ${}^m\mathbf{Y}_i$ and ${}^{m'}Y_i$ are also independent, the noise N_i is the sum of $(M - 1)$ independent random variables. Thus the noise is also Gaussian distributed for large N. According to Eqs. (7a) and (7b), the mean value of the product ${}^mW_i \cdot {}^1Y_i$ is equal to zero. In consequence, the average value of the noise is zero. Its variance σ^2 is

$$\sigma^2 = \sum_{m=2}^{M} \langle {}^mY_i^2({}^m\mathbf{W} \cdot {}^1\mathbf{Y})^2 \rangle + \sum_{m \neq m' \neq 1}^{M} \langle {}^mY_i {}^{m'}Y_i ({}^m\mathbf{W} \cdot {}^1\mathbf{Y})({}^{m'}\mathbf{W} \cdot {}^1\mathbf{Y}) \rangle. \tag{8}$$

The second term is equal to zero according to the above properties of independence and zero mean. We neglect the term ${}^mW_i \cdot {}^1Y_i$ in the scalar product ${}^m\mathbf{W} \cdot {}^1\mathbf{Y}$. Simulations results and theoretical predictions[19] show nearly identical performance for the versions with nonzero-diagonal and zero-diagonal elements of the synaptic matrix. Its importance is of the order $1/N$. Consequently,

$$\langle {}^mY_i({}^m\mathbf{W} \cdot {}^1\mathbf{Y})^2 \rangle \simeq \langle {}^mY_i \rangle \langle ({}^m\mathbf{W} \cdot {}^1\mathbf{Y})^2 \rangle,$$

and the variance can be written as

$$\sigma^2 = (M - 1)/2 \, \langle ({}^m\mathbf{W} \cdot {}^1\mathbf{Y})^2 \rangle.$$

Moreover,

$$\langle ({}^m\mathbf{W} \cdot {}^1\mathbf{Y})^2 \rangle = \sum_{j=1}^{N} \langle {}^mW_j^2 \rangle \langle {}^1Y_j^2 \rangle.$$

$$+\sum_{j\neq k}\langle {}^{m}W_j\,{}^{m}W_k\,{}^{1}Y_j\,{}^{1}Y_k\rangle.$$

The second term is equal to zero and the first one to $N/2$. Thus we have

$$\sigma^2=\frac{(M-1)\cdot N}{4}. \tag{9}$$

1. Evaluation of the Threshold ω

The new pixel state after plane O is determined by ther respective values of the incoming intensity and the threshold ω^2. Since the amplitude incoming on pixel i is bipolar in phase $(0,\pi)$, we can consider ω or $-\omega$ as the threshold values in the associated amplitude domain.

In Fig. 4, the probability density function of the potential V_i is shown for the cases ${}^{m}Y_i=0$ and ${}^{m}Y_i=1$. (The dispersion of the signal has been omitted for simplicity in the case ${}^{m}Y_1=1$.)

If the signal is equal to zero ${}^{1}Y_i=0$, the probability that the incident intensity on pixel i is smaller than ω^2 is equal to the probability that the potential acting on neuron i belongs to the interval $[-\omega;\omega]$. So we have

$$\begin{aligned}\text{prob}(X'_i=0/{}^{1}Y_i=0)&=\int_{-\omega}^{\omega}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp-\frac{s^2}{2\sigma^2}ds\\&=1-2Q(\omega/\sigma),\end{aligned} \tag{10}$$

where $Q(x)$ is the function

$$Q(x)=\int_{x}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp-\frac{t^2}{2}dt.$$

For the opposite case where ${}^{1}Y_i=1$, the probability that the incident intensity on pixel i is larger than ω^2 is equal to the probability that the potential belongs to the interval $]-\infty;-\mathrm{w}-\sigma]+[\mathrm{w}-\sigma;+\infty[$. Thus we have

$$\begin{aligned}\text{prob}(X'_i=1/{}^{1}Y_i=1)&=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{ds}{\sqrt{2\pi N/4}}\exp\frac{-(s-N/2)^2}{N/2}\\&\quad\times\int\frac{dt}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\frac{-t^2}{2\sigma^2}\\&\qquad]-\infty;-\omega-s]+[\omega-s;\infty[\\&=1-\int_{-\infty}^{\infty}\frac{ds}{\sqrt{2\pi N/4}}\exp\frac{-(s-N/2)^2}{N/2}\\&\quad\times\int_{-\omega}^{\omega}\frac{dt}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\frac{-(t-s)^2}{2\sigma^2}.\end{aligned} \tag{11a}$$

After one integration in the variable s, we obtain

$$\begin{aligned}\text{prob}(X'_i=1/{}^{1}Y_i=1)&=1-\int_{-\omega}^{\omega}\frac{1}{\sqrt{2\pi NM/4}}\\&\quad\times\exp-\frac{(t-N/2)^2}{NM/2}dt\\&=1-Q\left(\frac{N/2-\omega}{\sqrt{NM/4}}\right)\\&\quad+Q\left(\frac{\omega+N/2}{\sqrt{NM/4}}\right).\end{aligned} \tag{11b}$$

The evaluation of ω can be obtained by writing that

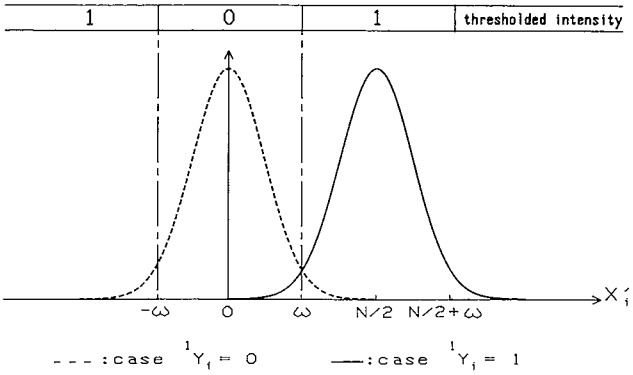


Fig. 4. Probability density function vs the potential acting on neuron i: (a) ---, ${}^{m}Y_i=0$; (b) ——, ${}^{m}Y_i=1$. A nonsignificant value of σ was chosen for clarity.

the two probabilities [Eqs. (10) and (11b)] are the same; so we have

$$2Q\left(\frac{\omega}{\sqrt{N(M-1)/4}}\right)=Q\left(\frac{N/2-\omega}{\sqrt{NM/4}}\right)-Q\left(\frac{\omega+N/2}{\sqrt{NM/4}}\right). \tag{12}$$

With the following expansion of $Q(x)$ for large x,

$$Q(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{x}\exp-\frac{x^2}{2},$$

it is possible to show that for large N, Eq. (12) leads to $\omega\simeq N/4$. The largest term neglected is proportional to M, and, as shown in the next paragraph, it can be neglected for large N. This intermediate value of $\omega\simeq N/4$ between the two mean values of the signal can be found directly. Indeed, if we neglect the dispersion of the signal in Eq. (11a), this equation becomes

$$\begin{aligned}\text{prob}(X'_i=1/({}^{1}Y_i=1))&=\int\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\frac{-(t-N/2)^2}{2\sigma^2}dt\\&\qquad]-\infty;-\omega]+[\omega;+\infty[.\end{aligned}$$

If, for this Gaussian integral, the contribution of interval $]-\infty;\omega]+[N/2+\omega;+\infty[$ (see Fig. 4) can be neglected, the latter probability can be written:

$$\int_{+\omega-N/2}^{\omega}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\frac{-t^2}{2\sigma^2}dt.$$

The comparison of the latter expression and Eq. (10) immediately leads to $\omega-N/2=-\omega$, i.e., $\omega=N/4$.

This approach will be used in Sec. V, and the approximation is discussed.

It is noticed that this expression of ω corresponds to the equality of the SNR for $X'_i=0$ and $X'_i=1$. The SNR is in this case

$$\text{SNR}=\frac{\langle\text{signal}\rangle-\omega}{\text{noise variance}}=\sqrt{\frac{N}{4M}}. \tag{13}$$

Comparison with previously published work[20] shows that using non-negative quantities does not alter the result dramatically. Only a factor of $\sqrt{2}$ in the SNR is lost.

2. Evaluation of the Maximum Number of Stored States

The probability P that, ${}^1\mathbf{Y}$ being presented at the input, no error appears after one iteration is

$$P = \left(1 - 2Q\left(\frac{N}{\sqrt{4NM}}\right)\right)^N \simeq 1 - 2NQ\left(\frac{N}{4NM}\right). \quad (14)$$

In the thermodynamic limit (large N) and using the conservative condition of stability given by

$$P \xrightarrow{N \to \infty} 1,$$

we easily find that SNR

$$\xrightarrow{N \to \infty} \infty.$$

More precisely, according to the latter expansion of $Q(x)$, we can show that

$$\text{SNR} = \frac{N}{\sqrt{4NM}} \simeq \sqrt{2 \ln N}. \quad (15)$$

From Eq. (15) it appears that the capacity of the model, i.e., the maximum number of memorized states, is

$$M_{\max} \simeq \frac{1}{8} \frac{N}{\ln N}. \quad (16)$$

If we compare this result with previous results,[20] we can see that the use of positive neuronal threshold decreases the capacity by a factor of 2.

With $N = 50$, Fig. 5 shows the evolution of the convergence radius at a probability of 0.9 $\{P \simeq [1 - Q(\sqrt{2 \ln 50})]^{50}\}$, defined in Ref. (8), as a function of the number M of stored patterns.

Curve *a*) corresponds to the original Hopfield model with (−1;+1) states. The SNR is $\sqrt{N/M}$.[20] Curve *b*) corresponds to the Hopfield model with (0;1) neuron states: SNR = $\sqrt{N/(2M)}$.[20] Curve *c*) corresponds to the model discussed. For small values of M, our algorithm is by far inferior to previous ones. The difference between curves *b*) and *c*) which both correspond to unipolar neuron states is due to our modification. Because the scalar product ${}^m\mathbf{W} \cdot {}^1\mathbf{Y}$ is equal to the difference between the number of ones of ${}^m\mathbf{Y}$ and the Hamming distance between the states m and 1 [see Eq. (18)], the convergence radius is at most equal to $N/2$ for the model of curve *b*) and uncorrelated patterns. For our model, because we introduce a positive value of the threshold $\omega = N/4$, the convergence radius is at most equal to $N/4$. This difference is particularly noticeable in curves *b*) and *c*) for small values of M, because the convergence radius for small M reaches its upper bounds ($N/2$ and $N/4$). However, when the network is used near its maximum capacity, i.e., for large M, it is noticeable that the three models almost have the same behavior, which is the expected result in the thermodynamics limit, according to SNR calculations.

IV. Extension of the Algorithm to Independent Patterns with Nonzero Average

In this section, we study how the previous algorithm can be modified when the memorized states W^m are not zero mean.

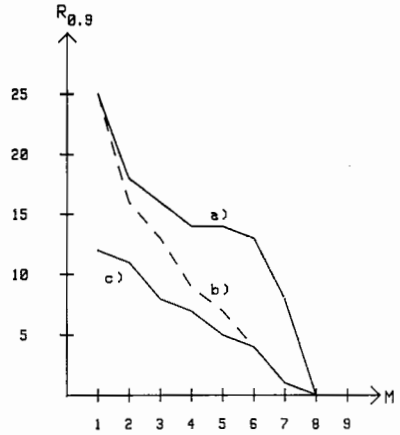


Fig. 5. Convergence radius at 0.9 vs the number of stored patterns for $N = 50$. Hopfield model (a) with neuron states (+1,−1), (b) with neuron states (0,1); (c) proposed algorithm.

A. Preliminaries

The only part of the algorithm which can be easily modified in an implementation is the term ${}^m\mathbf{W}$ of Eq. (6b). To take into account the nonzero average, we propose memorizing the M patterns in filter H_1 of Fig. 1, not in filter H_2, as follows. ${}^mW_i$ is to be replaced by

$${}^mW_i = \begin{cases} \beta^m \text{ if } {}^mW_i = 1, \\ -\gamma^m \text{ if } {}^mW_i = -1. \end{cases} \quad (17)$$

If we denote by N_m^1 the number of ones of ${}^m\mathbf{W}$ and $d_H(m,m')$ the Hamming distance between ${}^m\mathbf{Y}$ and ${}^{m'}\mathbf{Y}$, the scalar product ${}^mW \cdot {}^1\mathbf{Y}$ can be written as follows:

$${}^mW \cdot {}^1Y = \tfrac{1}{2}\{(\beta^m + \gamma^m)[N_1^m - d_H(m,1)] + (\beta^m - \gamma^m)N_1^1\}. \quad (18)$$

The case $\beta^m = \gamma^m = 1$ for all m was studied in Sec. III. Because N_m^1 and $d_H(m,1)$ were Gaussian distributed with mean value $N/2$, Eq. (18) can be used to show that cross-correlations were equal to zero on the average, whereas mean values of autocorrelations were equal to $N/2$.

Now let us consider stored patterns with

$$\langle N_1^m \rangle = \lambda N \text{ for all } m,$$

$$\langle d_H(m,m') \rangle = \alpha N \text{ for all } m \text{ and } m'. \quad (19)$$

We require that the scalar product in Eq. (5) show normalized autocorrelation terms and zero mean cross-correlation terms, i.e.,

$$\langle {}^mW \cdot {}^1\mathbf{Y} \rangle = N\delta(1,m). \quad (20)$$

Equations (18), (19), and (20) then imply that

$$\begin{cases} \beta^m = 1/\lambda \\ \gamma^m = \dfrac{2\lambda - \alpha}{\lambda\alpha}. \end{cases} \quad (21a)$$

B. Evaluation of the Capacity of the Algorithm

In this part, we assume that

$$- \text{prob}({}^mY_i = 1) = \lambda \text{ for all } i \text{ and all } m, \quad (22a)$$

$-\{{}^mY_i\}\ i = 1,\ldots,N$ and $m = 1,\ldots,M$ are independent random variables. (22b)

With these hypotheses, we show in the Appendix that the number of ones of any pattern is Gaussian distributed with variance equal to $N\lambda(1-\lambda)$, and we show that the Hamming distance is also Gaussian distributed with mean value $2\lambda N(1-\lambda)$.

The value of β^m and γ^m given by Eq. (21) is then

$$\beta^m = \beta = 1/\lambda \text{ and } \gamma^m = \gamma = 1/(1-\lambda) \quad \forall m. \tag{21b}$$

The evaluation of the capacity is analogous to the previous one (Sec. III). Thus we only give the main results without further development. The variance of the noise is for large N:

$$\sigma^2 = \frac{(M-1)\lambda N}{1-\lambda} \tag{23}$$

The evaluation of ω leads to

$$Q\left(\frac{N-\omega}{M\lambda N/(1-\lambda)}\right) - Q\left(\frac{\omega+N}{M\lambda N/(1-\lambda)}\right) = 2Q\left(\frac{\omega}{(M-1)\lambda N/(1-\lambda)}\right) \tag{24}$$

In the thermodynamic limit, we can choose $\omega = N/2$ for the decision threshold between the 1 and 0 state X'_i, and we have

$$\text{SNR} = \sqrt{\frac{N(1-\lambda)}{4M\lambda}}, \tag{25}$$

$$M_{\max} = \frac{1}{8}\frac{1-\lambda}{\lambda}\frac{N}{\ln N}. \tag{26}$$

We can notice that Eqs. (25) and (26) with $\lambda = \frac{1}{2}$ are consistent with Eqs. (13) and (16). The threshold value $N/2$ instead of $N/4$ is due to Eq. (21) bis which for $\lambda = \frac{1}{2}$ implies $\beta = \gamma = 2$ instead of one.

V. Higher-Order Models

A. Qualitative Discussion

Equation (6) involve linear weighting of the reconstructed memorized patterns ${}^m\mathbf{Y}$ by the correlation peaks. In Sec. IV. A, we have paid attention to correlation peaks [see Eqs. (18) and (20)], because the correlation peak strength is taken as a measure of evidence of the recognition. Consequently, any increasing function of the correlation $\mathbf{X} \cdot {}^mW$ may be adequate as well. A positive concavity function, in particular, enhances the highest degree of correlation against all others, thereby decreasing the noise level. One analytically simple way to proceed along these lines is to raise the correlation $\mathbf{X} \cdot {}^mW$ to the nth power. It can then be shown that, if n is an integer, the synaptic interconnection matrix of Eq. (3) is replaced by an entity implying connections between more than two neurons. These multineuron synapses models are often called higher-order models.[9,10]

In terms of optical implementation, the positive concavity is achieved straightforwardly in the setup of Fig. 1 by adding to the pinhole mask in plane M_a a spatial light modulator (SLM) responding nonlinearly to the incoming intensity.[6-8] The SLM amplitude transmittance receiving intensity I is $t(I)$, an increasing function of I. Therefore, if the incoming amplitude at some point is $\mathbf{X} \cdot {}^mW$, the amplitude after the SLM from that point is

$$A_m = \mathbf{X} \cdot {}^mW t(|\mathbf{X} \cdot {}^mW|^2) \cdot \tag{27a}$$

It is important for future discussion to note here that the sign of the correlation is preserved as long as function $t(I)$ does not show phase variations. In what follows, a power law model will be used for function t because it is analytically convenient:

$$t(I) = I^{n_0}, \tag{27b}$$

so that

$$A_m = (\mathbf{X} \cdot {}^mW)^{2n_0+1}. \tag{27c}$$

Since n_0 may not be an integer, but we want to indicate that the sign is preserved, we shall note

$$A_m = \text{sgn}(\mathbf{X} \cdot {}^mW)|\mathbf{X} \cdot {}^mW|^n, \tag{27d}$$

where n is a real number larger than unity and Eq. (6b) is replaced by

$$\mathbf{V} = \sum_{m=1}^{M} {}^m\mathbf{Y}\ \text{sgn}(\mathbf{X} \cdot {}^mW)\,|\mathbf{X} \cdot {}^mW|^n. \tag{28}$$

Clearly, the previous model simply corresponds to $n = 1$. The effect of having $n > 1$ is a considerable increase of the capacity of the model.[5,11] Reference 6 examines the case where the SLM is inserted in plane M_a but the pinhole mask is removed, with the effect of adding some translation invariance which is not shown by the Hopfield model, at the cost of some capacity decrease due to the light coming from the correlation functions outside the peaks in plane M_a. The latter case is not considered further.

B. Quantitative Discussion

We investigate the case where the input vector is ${}^1\mathbf{Y}$ as previously. According to statistics of Eqs. (22) on the average the signal term from Eq. (28)

$$\langle S \rangle = {}^1Y_i N^n. \tag{29}$$

With the previous results of Secs. III and IV. B it is easy to show that the noise in Eq. (28) is Gaussian distributed with mean value zero and variance:

$$\sigma^2 = \frac{(2n)!}{n!2^n}(M-1)\lambda\left(\frac{N}{1-\lambda}\right)^n \cdot \tag{30}$$

In the case ${}^1Y_i = 0$, the probability that X'_i is zero is $1 - 2Q(\omega/\sigma)$. In the case ${}^1Y_i = 1$, the probability that X'_i is equal to unity is given by

$$P = 1 - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{\sqrt{2\pi N(1-\lambda)/\lambda}} \exp - \frac{(u-N)^2}{2N(1-\lambda)/\lambda} \int_{-\omega}^{\omega} \frac{dt}{\sigma\sqrt{2\pi}} \times \exp - \frac{(t-u^n)^2}{2\sigma^2} \cdot \tag{31}$$

For large N, the width of the variable u in the first integral is proportional to $N^{1/2}$. In the second integral, it is proportional to $(M-1)^{1/2n} \cdot N^{1/2}$. Consequently,



Fig. 6. Stored patterns of the experimental setup.

for M very large with respect unity, the first Gaussian function is narrower than the second one. This leads us to consider the first integral as a Dirac distribution to obtain at least an order of magnitude of the result.

With $s = (t - u^n)/\sigma$ and

$$\sqrt{N}r = \frac{u - N}{\sqrt{N(1-\lambda)/\lambda}},$$

Eq. (31) becomes

$$P = 1 - \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{N}{2\pi}} dr \exp - \frac{r^2}{2/N} \int_{-\frac{\omega+u^n}{\sigma}}^{\frac{\omega-u^n}{\sigma}} \frac{ds}{\sqrt{2\pi}} \exp - \frac{s^2}{2}. \quad (32)$$

If we remember that

$$\sqrt{\frac{N}{2\pi}} \exp - \frac{r^2}{2/N}$$

behaves as the Dirac distribution for large N, P behaves as

$$P \simeq 1 - \int_{-\frac{\omega+N^n}{\sigma}}^{\frac{\omega-N^n}{\sigma}} \frac{ds}{\sqrt{2\pi}} \exp - \frac{s^2}{2}. \quad (33)$$

As previously, ω can be found by the equality of the two probabilities. For large N, it is easy to find that

$$\omega \simeq N^n/2, \quad (34a)$$

$$\mathrm{SNR} \simeq \sqrt{\frac{n!2^n(1-\lambda)^n N^n}{4(2n)!(M-1)\lambda}}, \quad (34b)$$

$$M_{\max} \simeq \frac{1}{8} \frac{2^n n!'(1-\lambda)^n}{(2n)! \quad \lambda} \frac{N^n}{\ln N}. \quad (34c)$$

Equations (34) are generalizations of Eqs. (25) and (26). In Eq. (34c), the dependence of the maximum storage capacity with power law n is remarkable. As shown by Owechko *et al.*[6] shift invariance can be so implemented with a loss of only one unit in the exponent N of Eqs. (34b) and (34c).

VI. Experimental Setup

The experimental setup corresponds to Fig. 1 with coherent illumination of the object by a spherical wave converging in plane H_1. The holograms H_1 and H_2 are Lohmann-type computer generated holograms[21] recorded on thin plates. We choose $N = 64$ and $M = 4$; data are presented in the form of 8-× 8-pixel binary images. Because of their multiplexing, holograms H_1 and H_2 are coded with 16 * 32 pixels. They are, therefore, quite easily and speedily obtained using any kind of computer. The stored states are four letters of the alphabet (see Fig. 6). These patterns are well correlated. Their Hamming distances vary between twenty-two and forty-eight. Thus we choose *ad hoc* values for the parameters β^m and γ^m for hologram H_1 to ensure the stability of the four states.

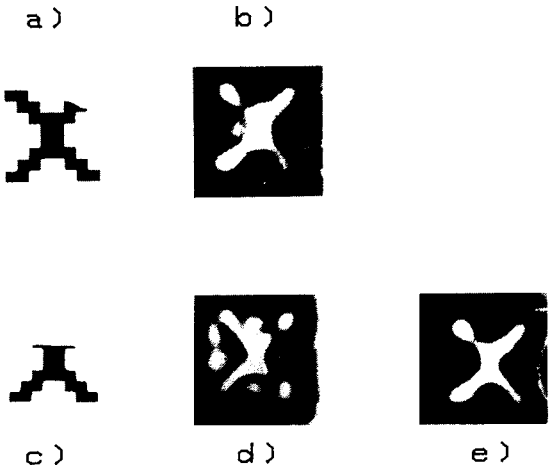


Fig. 7. Experimental results: First test: (a) input; (b) output (case $n = 1$). Second test: (c) input; (d) output (case $n = 1$); (e) output (case $n = 2$).

The results shown in Fig. 7 are realized without any feedback. The neuron thresholding nonlinearity is obtained with a hard clipping emulsion plate. Moreover, in the correlation plane, the suitable spatial light modulator has been simulated with a set of photographic nec densities chosen so as to obtain the case $n = 2$ and placed just behind the holes of the correlation plane. In this setup, no shift invariance was involved.

In Fig. 7, (b) corresponds to the output when (a) is presented in the object plane in the case $n = 1$. Whereas with the input (c), the leter X is not retrieved in case $n = 1$ [Fig. 7(d)], the desired convergence is obtained with the SLM ($n = 2$) as can be seen in Fig. 7(e). These experimental results demonstrate the faisibility of the proposed algorithm. This was our main intention in this experiment.

VII Conclusion

A new algorithm absolutely suitable for optical implementation was proposed. It was justified in an experimental situation. The theoretical performances of this algorithm were shown to be basically equivalent to previous results despite the simplicity of the optical implementation permitting only one channel. Moreover, theoretical calculations have proved that this algorithm is compatible with nonzero average information. Finally, thanks to its ability to access correlation domains, the inner-product optical neural setup allows implementation of additional nonlinearity, improving the storage capacity and SNR. This beneficial effect has been justified with calculations and experimental demonstration.

Appendix

The hypotheses are those of Eq. (24). The number of ones of pattern m is given by

$$N_1^m = \sum_{i=1}^{N} {}^m Y_i.$$

According to Eq. (22a), the mean value of ${}^mY_i$ is λ. Thus we have

$$\langle (N_1^{-m})^2 - \lambda^2 N^2 \rangle = \sum_i \langle {}^mY_i \rangle + \sum_{i,j(i\simeq j)} \langle {}^mY_i \cdot {}^mY_j \rangle - \lambda^2 N^2.$$

Equation (22b) implies that $\langle {}^mY_i {}^mY_j \rangle = \langle {}^mY_i \rangle \langle {}^mY_j \rangle = \lambda^2$. So $\langle (N_m^1)^2 - \lambda^2 N^2 \rangle = \lambda N + (N-1)N\lambda^2 - \lambda^2 N^2 = N\lambda(1-\lambda)$.

The Hamming distance between patterns m and m' can be written $\frac{1}{2}(N - {}^m\mathbf{W} \cdot {}^{m'}\mathbf{W})$. So, on the average,

$$\langle d_H(m,m') \rangle = \frac{1}{2}\left(N - \sum_j \langle {}^mW_j \rangle \langle {}^{m'}W_j \rangle \right).$$

However, assumption (22a) implies that $\langle {}^mW_j \rangle = 2\lambda - 1$. Thus we have $\langle d_H(m,m') \rangle = 2\lambda N(1-\lambda)$.

In conclusion, as the sum of independent random variables, N_m^1 and $d_H(m,m')$ are Gaussian distributed with mean value λN and $2\lambda N(1-\lambda)$.

References

1. D. Psaltis and N. Farlhat, "Optical Information Processing Based on an Associative-Memory Model of Neural Nets with Thresholding and Feedback," Opt. Lett. **10,** 98 (1985).
2. T. Kohonen, *Self-organization and Associative Memory* (Springer-Verlag, New York, 1984).
3. J. J. Hopfield, "Neural Networks and Physical Systems with Emergent Collective Computational Abilities," Proc. Natl. Acad. Sci. USA **79,** 2554 (1982).
4. R. A. Athale, H. H. Szu, and C. B. Friedlander, "Optical Implementation of Associative Memory with Controlled Nonlinearity in the Correlation Domain," Opt. Lett. **11,** 482 (1986).
5. D. Psaltis and J. Hong, "Shift-invariant Optical Associative Memories," Opt. Eng. **26,** 10 (1987).
6. Y. Owechko, G. J. Dunning, E. Maroni, and B. H. Soffer, "Holographic Associative Memory with Nonlinearity in the Correlation Domain," Appl. Opt. **26,** 1900 (1987).
7. D. Psaltis and C. H. Park, "Nonlinear Discriminant Functions and Associative Memories," AIP Conf. Proc **151,** 370 (1986).
8. P. Lalanne, J. Taboury, and P. Chavel, "A Proposed Generalization of Hopfield's Algorithm," Opt. Commun. **63,** 21 (1987).
9. C. Lee Giles *et al.*, "High Order Correlation Model for Associative Memory," in *Neural Networks for Computing*, J. Denker, Ed. (America Institute of Physics, New York, 1987), pp. 86–90.
10. E. Gardner, "Multiconnected Neural Network Modes," Edinburgh, Preprint 375 (1986).
11. P. Lalanne, J. Taboury, P. Chavel, and J. C. Saget, "An Extension of the Hopfield's Model Suitable for Optical Implementation," in *Proceedings, Meeting of the International Commission for Optics*, Quebec *Twenty-fourth* (1987), pp. 27–28.
12. B. Macukow and H. Arsenault, "Optical Associative Memory Model Based on Neural Networks Having Variable Interconnection Weights," Appl. Opt. **26,** 34 (1981).
13. D. Joyeux and S. Lowenthal, "Optical Fourier Transform: What is the Optimal Setup?," Appl. Opt. **21,** 4368 (1982).
14. A. B. Vander Lugt, "Signal Detection by Complex Spatial Filtering," IEEE Trans. Inf. Theory, **IT-10,** 139 (1964).
15. E. G. Paek and D. Psaltis, "Optical Associative Memory Using Fourier Transform Holograms," Opt. Eng. **26,** 428 (1987).
16. P. Chavel, Notes on Fourier Optics at the Institut of Optics, France (1987), pp. 22–24.
17. J. J. Hopfield, "Neurons with Graded Response Have Collective Computational Properties like Those of Two-State Neurons," Proc. Natl. Acad. Sci. USA **81,** 3088 (1984).
18. Sastri, Conference à l'ETCA, France (1987).
19. G. R. Gindi, A. F. Gmitro, and K. Parthasarathy, "Hopfield Model Associative Memory with Nonzero-Diagonal Terms in Memory Matrix," Appl. Opt. **27,** 129 (1988).
20. N. H. Farhat, D. Psaltis, A. Prata, and E. Pack, "Optical Implementation of the Hopfield Model," Appl. Opt. **24,** 1469 (1985).
21. A. W. Lohmann and D. P. Paris, "Complex Spatial Filtering with Binary Masks," Appl. Opt. **5,** 967 (1966).

II. DEVELOPPEMENT DE LA PARTIE EXPERIMENTALE

1. DESCRIPTION GENERALE

Le schéma du montage est celui de la figure 25. Les neurones du plan d'entrée au nombre de 64 (N = 64) sont répartis dans un tableau bidimensionnel de 8 par 8. Les quatre états mémoires sont les quatre lettres de l'alphabet représentées sur la figure ci-dessous :



L'algorithme proposé est assuré optiquement par un double filtrage des fréquences spatiales. Pour cela, la lentille L_1 de focale f_1 assure une double conjugaison, d'une part, entre le plan d'entrée et le plan de corrélation (grandissement - 1/2) et, d'autre part, entre les plans des hologrammes H_1 et H_2 (grandissement - 2). En outre, la lentille L_2 de focale f_2 conjugue le plan de corrélation et le plan de sortie.

Notons p^2 la surface d'un pixel (neurone) du plan d'entrée. Le théorème d'échantillonnage permet le calcul d'une borne inférieure p' du pas d'échantillonnage de l'hologramme H_1.

$$p' = \frac{\lambda \ 3/2 \ f_1}{p\sqrt{N}}$$

où $3/2 \ f_1$ est la distance entre le plan d'entrée et celui contenant l'hologramme H_1. La réponse percussionnelle de l'hologramme H_1 est représentée sur la figure 26 dans son ordre 1. Le multiplexage est assuré par un suréchantillonnage d'un facteur deux horizontalement et d'un facteur 2M (M=4) verticalement assurant l'absence de chevauchement entre les différentes lettres.

$$V_i(t+\Delta t) = H\left(F_i^2 - \omega^2 \right)$$

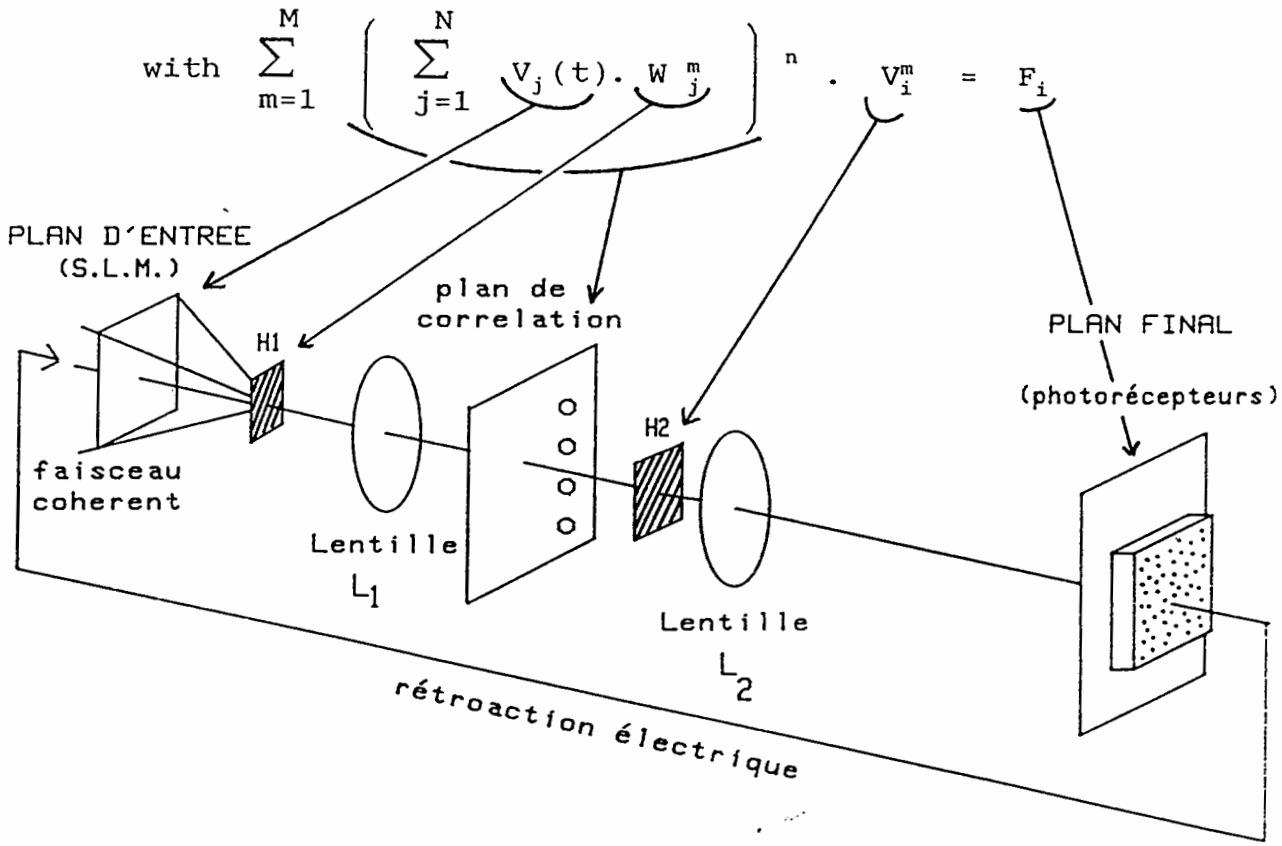


Figure 25 : Schéma expérimental. L'expression des forces synaptiques a été rappelée de façon à la mettre en correspondance avec le montage.

La première partie du montage jusqu'au plan de corrélation assure un premier filtrage des fréquences spatiales sous l'action d'un éclairage cohérent et convergent issu d'un objectif non représenté sur la figure 25. Le rôle de l'hologramme H_1 se ramène à la convolution de l'état des neurones par la transformée de Fourier de ce même hologramme. La lentille L_1 assure alors l'imagerie de cette convolution. La taille des lettres qui seraient issues de la transformée de Fourier de H_1 étant $\sqrt{N}$ p, la distance qui séparerait deux pics de corrélation du plan objet serait $2\sqrt{N}$ p (voir figure 26). En conséquence, le grandissement -1/2 entre le plan objet et le plan de corrélation assure que la distance entre pics de corrélation voisins est $\sqrt{N}$ p.

La conjugaison des deux hologrammes H_1 et H_2 permet de voir que le facteur de phase sphérique dû à l'optique géométrique est dans le plan de corrélation :

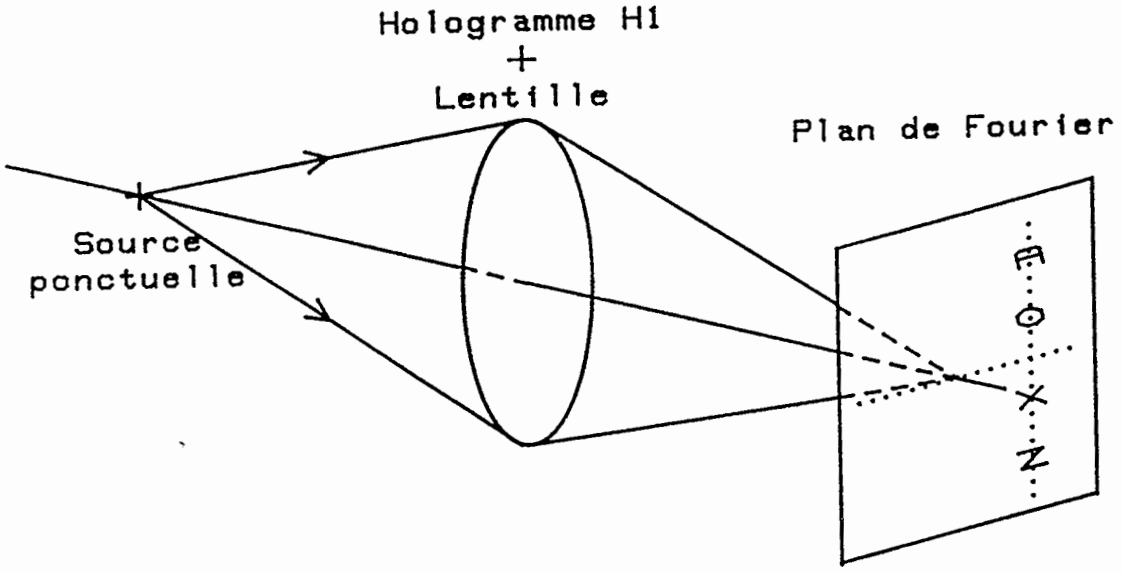
$$\exp\left(-ik\ r^2/3f_1\right)$$

Si nous supposons que les trous disposés dans le plan de corrélation peuvent être décrits mathématiquement par une fonction Dirac, l'amplitude transmise après le plan de corrélation s'écrit :

$$\sum_{m=1}^{4} \exp\left(+\ ik\ r^2/3f_1\right) \left\langle \vec{V} \cdot \underline{\vec{W}}^{\,m} \right\rangle \delta\left(\vec{r} - \frac{\sqrt{N}\ p}{2}\ (2m - 5)\ \vec{j} - \sqrt{N}\ p\ \vec{i}\right)$$

avec $\vec{i}$ (resp. $\vec{j}$) le vecteur unitaire horizontal (resp. vertical) dans le plan de corrélation.

La seconde partie du montage a pour but, toujours en éclairage cohérent, de superposer dans le plan image I les quatre états mémorisés, chacun étant affecté d'une pondération égale à sa corrélation avec l'état du réseau du plan 0. Ceci est réalisé à l'aide de l'hologramme multiplexé et synthétique H_2 dont la réponse percussionnelle est identique à celle de l'hologramme H_1, au fait près que les lettres n'y sont pas codées exactement de la même façon. Nous reviendrons plus loin sur le codage.



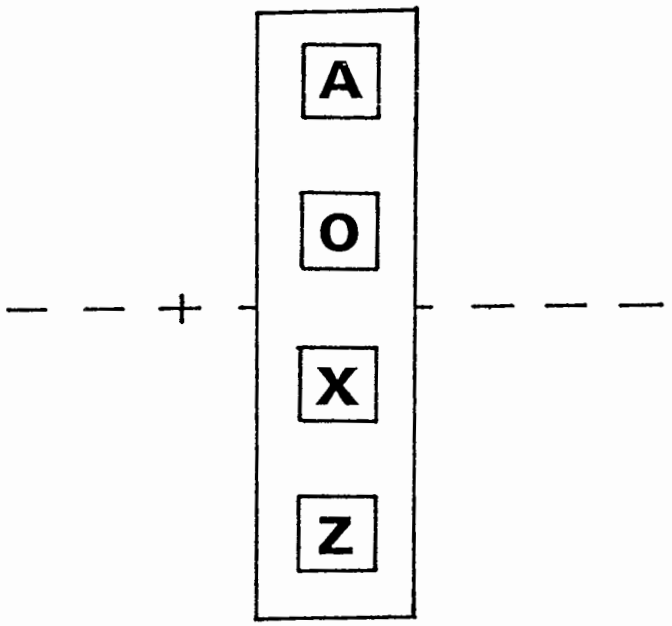


Figure 26 : Réponse percussionnelle de l'hologramme H_1 .

L'interprétation de la seconde partie du montage est complètement similaire à la précédente puisque l'onde de l'optique géométrique converge dans le plan de l'hologramme H_2. Si l'on suppose que l'hologramme H_2 est deux fois plus grand que H_1, la taille des lettres qui seraient issues de sa transformée de Fourier dans le plan de corrélation est deux fois plus petite que précédemment et vaut donc $\sqrt{N}\ p/2$. Si l'on considère l'ordre -1 de l'hologramme H_2, la lettre m y est obtenue à l'envers et son centre est situé en :

$$\sqrt{N}\ p\ \vec{i} + (2m-5)\ \sqrt{N}\ p/2\ \vec{j}$$

De sorte que si l'on note ${}^t\vec{V}^m$ la lettre m, la transformée de Fourier de H_2 s'écrit :

$$\sum_{m=1}^{M} {}^t\vec{V}^m * \delta(\vec{r} - \sqrt{N}\ p\ \vec{i} - (2m-5)\ \sqrt{N}\ p/2\ \vec{j})$$

Le produit de convolution entre la réponse percussionnelle de H_2 et le plan de corrélation s'écrit en conséquence :

$$\sum_{m=1}^{M}\sum_{m'=1}^{M} \left({}^t\vec{V}^m * \delta\ (\vec{r}\ \sqrt{N}\ p\ \vec{i}\ (2m-5)\ \sqrt{N}\ p/2\ \vec{j})\right) * \Big(\delta(\vec{r} - \sqrt{N}\ p\ \vec{i} - (2m'-5)\ \sqrt{N}\ p/2\ \vec{j}\ ) \left\langle \vec{V} \cdot \underline{\vec{W}}^{m'} \right\rangle\Big)$$

Cette somme se scinde en deux termes :

* la partie intéressante (signal) m=m' qui vaut

$$\sum_{m=1}^{M} {}^t\vec{V}^m \left\langle \vec{V} \cdot \underline{\vec{W}}^m \right\rangle * \delta(\vec{r})$$

* les termes m≠m' qui s'écrivent $\sum_{m=1}^{M}\sum_{m\neq m'}^{M} {}^t\vec{V}^m \left\langle \vec{V} \cdot \underline{\vec{W}}^{m'} \right\rangle$

$$* \delta(\vec{r} - (m'-m)\ \sqrt{N}\ p\ \vec{j})$$

La dimension d'une lettre étant $\sqrt{N}\ p/2$, ces derniers termes ne chevauchent pas le signal.

L'imagerie assurée par la lentille L_2 permet de reconstituer dans le plan final le terme de signal avec un grandissement -2. L'amplitude de l'onde y est donnée par :

$$A \sum_{m=1}^{M} \left\langle \vec{V} \cdot \vec{\underline{W}}^m \right\rangle \vec{V}^m \exp - ik\frac{r^2}{2x}$$

où A est une constante rendant compte de la propagation qui est indépendante de m et où x est la distance entre le plan final et le plan conjugué de H_2 par la lentille L_2. Finalement, la détection quadratique effectuée dans le plan final donne bien que le carré de la force F_i qui agit sur le neuronne i est proportionnel à :

$$\left| \sum_{m=1}^{M} \left\langle \vec{V} \cdot \vec{\underline{W}}^m \right\rangle V_i \right|^2$$

en accord avec l'algorithme proposé.

2. DESCRIPTION PRATIQUE

a) Valeur des paramètres

L'étude théorique précédente nous a montré qu'il suffit de nous donner le pas p, la longueur d'onde λ et la focale f_1 de la lentille L_1 pour que tous les paramètres du montage (sauf f_2) soient fixés ; nous avons choisi :

λ = 0.633 μm (laser He-Ne de 20 mW).
p = 0.125 mm
f_1 = 250 mm
f_2 = 400 mm.

La valeur arbitraire de p a été choisie de sorte que p' et p" soient du même ordre de grandeur. Avec ces valeurs imposées, la taille de l'hologramme H_1 est de 1.9 mm, celle de l'hologramme H_2 est de 3.8 mm et la distance entre deux corrélations ou entre deux trous est de 1 mm.

b) Les hologrammes H_1 **et** H_2

Les hologrammes synthétiques ont été calculés à l'aide d'un ordinateur HP85A avec traceur 7470A. Le codage de l'amplitude complexe est celui proposé par A.W. Lohmann qui découle de la "méthode dite du détour de phase" [45-46] (Figure 27).

En outre, les lettres mémorisées n'ont pas été codées réellement sous leur forme donnée par l'algorithme. En effet, afin d'augmenter la précision donnée par le traceur, nous avons donné à chaque lettre une phase également répartie entre 0 et 2π tout en conservant leur amplitude : pour quatre objets échantillonnés sous forme réelle, le maximum d'information des hologrammes multiplexés aurait été codé en son centre dans les basses fréquences. Une plus grande dynamique de codage a été obtenue avec le choix suivant :

$$A(+\ 1\ ;\ -\ 1)$$

$$0((1+i)/\sqrt{2}\ ;\ -\ (1+i)/\sqrt{2})$$

$$X(+\ i\ ;\ -\ i)$$

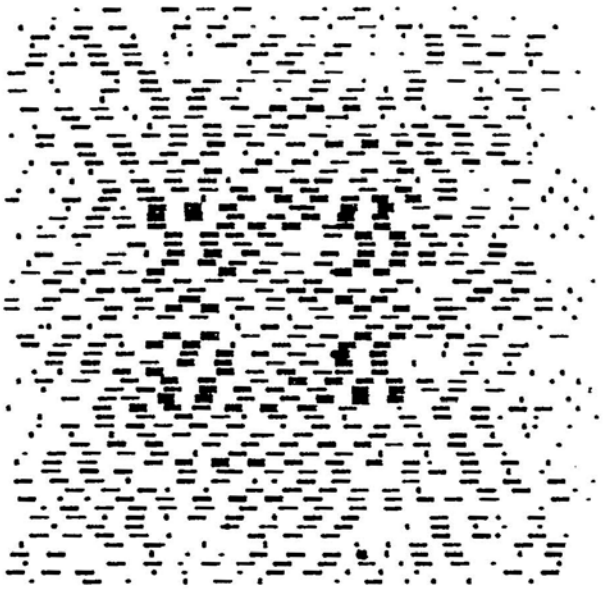
$$Z((-1+i)\sqrt{2}\ ;\ (1-i)/\sqrt{2})$$

Bien sûr, ces déphasages introduits au niveau de l'hologramme H_1 sont compensés par un codage similaire au niveau de l'hologramme H_2, ceci afin de respecter l'algorithme proposé.

Après le tracé sur papier calque, les hologrammes sont ensuite réduits environ cinquante fois pour H_1 et vingt cinq fois pour H_2 . L'hologramme, dans sa version définitive, est réduit sur une plaque à haute résolution type 1A vendue par Kodak.

Hologrammes synthétiques H_1 et H_2 codés par la méthode de Lohmann.

Hologramme H_1



Hologramme H_2

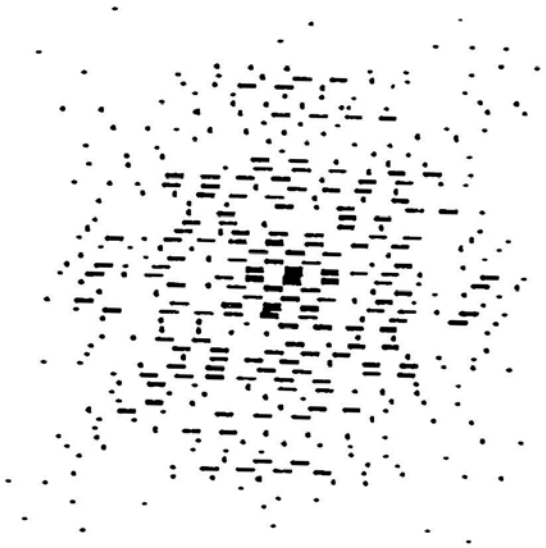


Figure 27 : Hologrammes synthétiques H_1 et H_2 .

c) Trous du plan de corrélation

Il a fallu faire un compromis entre la petitesse de la taille des trous du plan de corrélation et la quantité d'énergie lumineuse disponible derrière ce plan. La résolution dans le plan de corrélation étant de p/2, nous avons choisi arbitrairement de prendre des trous carrés de côté p afin d'avoir un éclairage quasi-uniforme du trou sans pour autant sacrifier trop d'énergie lumineuse.

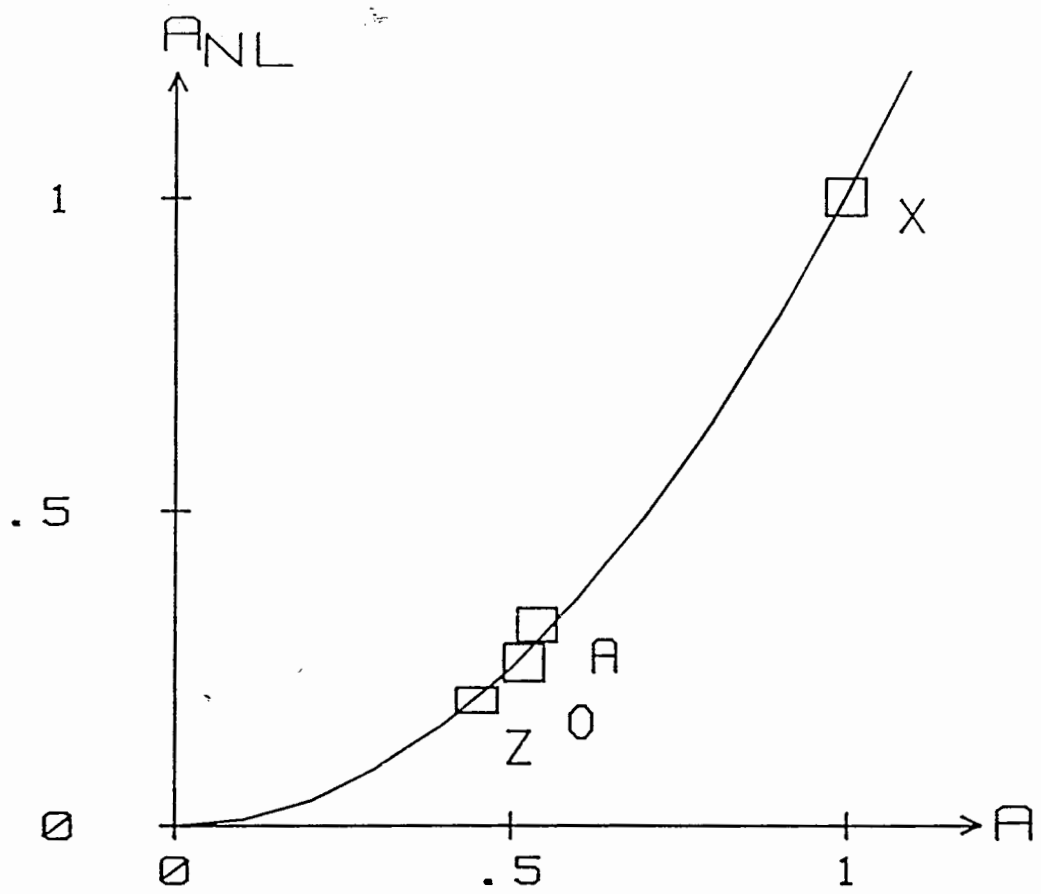
La non-linéarité supplémentaire introduite dans ce plan aurait pu être réalisée avec une photographie. En choisissant le temps de pose de l'exposition du film de façon à se trouver pour les quatre pics dans la partie linéaire de la densité du négatif, le cas n=2 se trouvait réalisé. Nous avons préféré utiliser un jeux de densités. Pour celà, au moyen d'une photodiode, nous avons mesuré l'intensité de chaque pic. Nous avons alors superposé différentes densités devant chaque trou jusqu'à ce que l'intensité transmise soit égale à la racine carré de l'intensité incidente précédemment mesurée (voir figure 28). Cette méthode relativement fiable a permis d'éviter l'étude souvent fastidieuse de la dynamique des films qui dépend bien évidemment du film, du révélateur...

d) Plan image

La photographie du plan image a été effectuée avec un film dur afin de rendre compte au mieux de la non-linéarité neuronale. Le temps de pose a été trouvé par essais successifs. Le film choisi est le Copex Pan d'Agfa et il a été révélé avec le D19b de Kodak.

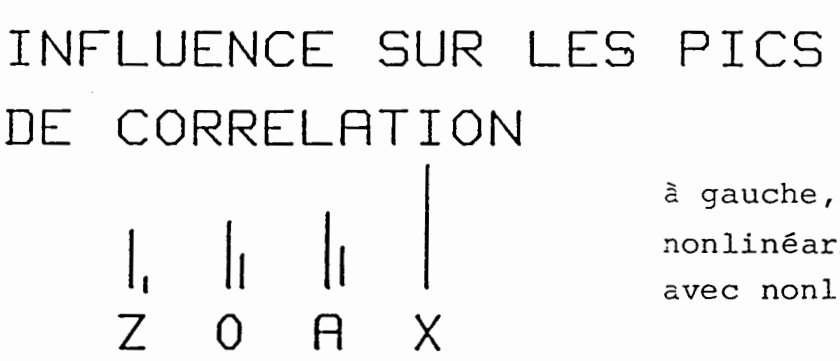
III. DISCUSSION

Dans ce paragraphe, nous allons faire le bilan des résultats que nous avons obtenus. Tout d'abord, nous allons définir ce que



A :Amplitude transmise sans NL

A_{NL}:Amplitude transmise avec NL



à gauche, amplitude sans nonlinéarité et à droite avec nonlinéarité.

Figure 28 : Effet de la nonlinéarité n=2 sur les pics de corrélation.

l'on peut appeler les réseaux neuronaux de "type Hopfield". Ceci nous amenera tout naturellement à montrer l'originalité de notre approche en dégageant ses avantages.

En comparant notre démarche et celle qui est généralement adoptée en reconnaissance d'images, nous serons amenés à montrer les limitations de notre modèle neuronal de mémoire associative. Nous argumenterons ensuite le fait que ces limitations ne sont pas inhérentes à notre modèle, mais qu'elles sont plutôt le propre des réseaux neuronaux de "type Hopfield".

1. LES RESEAUX DE NEURONES "TYPE HOPFIELD"

Dans le chapitre premier, nous avons décrit en détail le réseau neuronal proposé par J.J. Hopfield qui a été la base de départ de notre travail. De façon plus générale, nous appelerons réseaux de "type Hopfield", les réseaux de neurones dont l'évolution temporelle est régie par une loi décisionnelle prise à partir d'une combinaison linéaire des états neuronaux immédiatement antérieurs. Plus précisément, si $\vec{V}(t)$ représente l'état du réseau à l'instant t,

$$\vec{V}(t + \Delta t) = f(T \cdot \vec{V}(t))$$

où T est une matrice et f la fonction qui régit la dynamique neuronale. Ces réseaux portent aussi le nom de classifieurs linéaires. Les différences avec le réseau d'Hopfield au sens strict peuvent porter sur la règle d'apprentissage définissant des poids synaptiques et sur la fonction f. Citons par exemple, les travaux de l'équipe française de L. Personnaz [47.a] qui ont repris ceux de T. Kohonen [8] sur la règle de définition des coefficients synaptiques dite "pseudo inverse" qui assure un stockage parfait des états mémoires. Citons également, les travaux de l'équipe française de l'Ecole Polytechnique qui ont introduits des neurones à trois états [47.b].

2. NOTRE CONTRIBUTION

Nous nous sommes en partie affranchis du problème soulevé par le manque de capacité des classifieurs linéaires en proposant une mémoire associative d'ordre supérieur. En effet, l'introduction de la nonlinéarité du plan de corrélation a comme conséquence de développer des intéractions à plusieurs neurones. Par exemple, dans le cas n = 2, l'étape décisionnelle s'effectue sur la somme:

$$\sum_{m}^{M} W_i^m \left(\sum_{j}^{N} W_j^m . V_j \right)^2$$

qui en développant le carré s'écrit :

$$\sum_{m}^{M} \sum_{j}^{N} W_i^m V_j + \sum_{j}^{M} \sum_{j}^{N} \sum_{k}^{N} T_{i\,j\,k} V_j V_k$$

où $T_{i\,j\,k} = W_i^m W_j^m W_k^m$.

Nous avons vu que sur le plan théorique les conséquences sont :

* une capacité de mémorisation accrue de l'ordre de $O(N^n)$ alors que celle des classifieurs linéaire est de l'ordre de $O(N)$.

* une augmentation de la taille des bassins d'attraction des états mémorisés.

* sous certaines conditions, la possibilité de mémoriser des états corrélés alors que le modèle d'Hopfield n'autorise que la mémorisation d'états indépendants.

Sur un plan plus expérimental, le modèle que nous avons proposé s'est inspiré d'une réflexion plus générale que nous avons menée sur le rôle à jouer de l'optique dans l'architecture des processeurs parallèles. Plus précisément, notre modèle prend en compte les contraintes respectives de l'optique et de l'électronique et à ce titre permet d'envisager avec la technologie actuelle la réalisation de réseaux de grandes tailles. Bien évidemment, la démonstration en laboratoire que nous avons effectuée devrait être développée. Notamment :

* la rétroaction électronique permet dans le plan final

d'obtenir le gain nécessaire au fonctionnement de la cavité. Une matrice de photodiodes alimentant une matrice de commutateurs spatiaux de lumière adressable électroniquement, permettrait d'effectuer la rétroaction de façon parallèle.

* il est évident que notre choix de connecteurs holographiques (multiplexage sur film mince) n'autorise pas l'apprentissage et limite les capacités de stockage. Cependant, ce même montage peut être envisagé avec des hologrammes de volume. Notons à nouveau que l'effet Bragg ne permettrait plus une reconnaissance invariante par translation. L'holographie sur élément actif, notamment de volume, permettait d'accroître les capacités de stockage et autoriserait un apprentissage. En effet, supposons que chaque état mémoire soit enregistré à l'aide d'une porteuse différente, l'apprentissage d'un nouvel état s'effectue alors par l'enregistrement d'un hologramme sur une nouvelle porteuse. A condition que les différentes porteuses soient angulairement suffisament séparées, l'inter modulation entre chaque inscription de l'hologramme de volume peut être négligée. En outre, bien que cet apprentissage sur photoréfractifs par exemple, ne soit pas technologiquement maîtrisé, les propriétés de résistance aux bruits des réseaux neuronaux permettent l'investigation de telles connexions.

* la non-linéarité du plan de corrélation à notre connaissance n'est actuellement réalisable qu'au prix de faisceaux trop gourmands en énergie (...). Cependant, étant donné que ce plan ne contient que des informations restreintes à leur strict minimum (les pics de corrélation et surtout le module de leur amplitude), aucun problème de conservation de la phase des ondes ne doit être envisagé rendant par la même une non-linéarité tout optique envisageable.

3. LES LIMITATIONS DE NOTRE MODELE

L'algorithme que nous avons proposé a permis un accroissement des capacités de mémorisation. Ceci a été obtenu en accentuant les corrélations dans le processus de reconnaissance par l'intervention d'une nonlinéarité supplémentaire.

Classiquement, les algorithmes déjà développés à partir de l'optique de Fourier font eux aussi appel aux corrélations dans les problèmes de reconnaissance d'images (Vander Lugt 1964). Par exemple, étant donné un jeu d'états, la théorie du filtre adapté permet d'optimiser un filtrage des fréquences spatiales afin d'augmenter le rapport signal sur bruit du processus de reconnaissance.

Notre interprétation du modèle d'Hopfield, parce que basée fondamentalement sur le même principe, est donc tout naturellement confrontée aux mêmes problèmes que ceux rencontrés depuis plusieurs années en reconnaissance classique : invariance par translatiòn, rotation, compression... Et notre approche neuronale n'apportera pas davantage de solutions ! Il faut rappeler que l'invariance par translation qui peut être obtenue avec des non-linéarités dans le plan de corrélation, est dûe plus aux propriétés de la transformée de Fourier qu'à l'algorithme envisagé.

Cela ne veut pas dire pour autant qu'une mémoire associative ne doit pas utiliser les corrélations dans son processus de reconnaissance : le cerveau les utilise bien dans l'hyppocampe. Mais, plutôt que la corrélation n'est certainement qu'une étape dans la reconnaissance.

4. CRITIQUE GENERALE DES RESEAUX DE NEURONES TYPE HOPFIELD:

Le problème que nous venons d'aborder dans le cadre de notre modèle n'est pas intrinsèque, nous pensons, à notre approche. En réalité, J.Y. Jan [49] a souligné un ensemble de ressemblances entre les réseaux de neurones type Hopfield et les systèmes déjà proposés en reconnaissance classique d'images. Plus précisément, il est possible de développer une analogie formelle entre les deux approches.

Nous voudrions développer deux arguments montrant que la limitation que nous avons rencontrée dans notre modèle ne lui est

pas spécifique.

* D'autres règles d'apprentissage que celle de Hebb ont été étudiées dans les réseaux de neurones. Citons notamment, la règle dite de "la pseudo-inverse" qui assure une mémorisation parfaite d'états quelconques [6]. Cette approche a été reprise par l'équipe de L. Personnaz [47-50] qui en voulant s'affranchir des limitations des classifieurs linéaires, l'a généralisée au cas des réseaux neuronaux faisant intervenir des synapses d'ordre 2. Cette règle qui est de façon générale relativement compliquée peut toutefois se ramener à une règle locale plus simple (quant à sa réalisation dans une étape expérimentale) dans le cas d'états mémorisés indépendants. Elle coïncide alors très exactement avec notre modèle basé sur les corrélations.

* De façon plus fondamentale, nous pensons que la donnée a priori des coefficients de la matrice synaptique (par une règle d'évolution quelconque) présuppose en vérité d'avoir déjà résolu le problème de reconnaissance en question [48]. L'utilisation d'un réseau neuronal ne sert dans ces conditions que comme un support d'architecture. Il ne faut donc pas s'attendre dans ce genre d'approche à découvrir des comportements nouveaux répondant aux vraies difficultés rencontrées en reconnaissance de formes. C'est donc le problème de l'apprentissage qui doit être remis en question dans ce type de réseaux.

5. CONCLUSION

Des réseaux de neurones de "type Hopfield" ou leur extension à des réseaux d'ordre supérieur n'offrent pas réellement une alternative aux algorithmes déjà développés en reconnaissance d'images.

Cependant, cette position négative doit être nuancée :

* Les réseaux de neurones formels ont mis en évidence qu'un ensemble de processeurs simples (neurones) fortement interconnectés présente de remarquables possibilités tout en développant des similitudes très attrayantes avec le cerveau humain.

* L'intérêt croissant que la communauté scientifique a porté ces dernières années aux réseaux de neurones a permis de regrouper des chercheurs venus d'horizons très diverses (intelligence artificielle, physique, théorique, électronique, neurobiologie, optique...). Il a permis de soulever le problème de la faisabilité de tels réseaux. Même si à l'heure actuelle, toutes les réalisations qui ont été entreprises se sont bornées à des démonstrations en laboratoires sur des réseaux de petites tailles (le nombre de neurones n'excède que rarement la centaine), les réseaux de neurones de type Hopfield auront certainement contribué au développement d'architectures nouvelles en optique, en électronique ou en opto-électronique.

En conséquence, les réseaux de neurones de type Hopfield ont permis de développer un travail de compréhension permettant d'avancer dans le domaine de l'intelligence artificielle. Premièrement, ces réseaux en montrant de remarquables capacités de calcul suggèrent qu'il est certainement possible d'envisager des modèles simulant le comportement du cerveau humain. Deuxièmement, leur simplicité a permis le développement d'architectures nouvelles pour réaliser des réseaux d'éléments logiques fortement interconnectés. Finalement, des études parallèles de software et de hardware ont permis de faire un pas de plus vers l'attrayante gageure qui est celle du cerveau humain.

CHAPITRE V

LES RESEAUX DE NEURONES STOCHASTIQUES A COUCHES

Dans cette dernière partie, nous allons aborder de nouveaux réseaux de neurones plus élaborés. J'ai eu l'occasion de me familiariser avec ces types de réseaux durant mon année de service national à l'Institut d'Electronique Fondamentale sous la direction de F. Devos et de P. Garda.

A l'heure actuelle, ces réseaux de neurones ne sont pas complètement appréhendés. Notamment, la complexité de l'apprentissage engendre des temps de simulation colossaux (même pour des réseaux de petites tailles), empêchant de confronter ces réseaux à des problèmes compliqués en pratique. C'est une des raisons pour laquelle il faut envisager dès maintenant la réalisation de prototypes rapides. L'optique a peut être un rôle à tenir vis-à-vis des différentes réalisations envisageables. Les publications émanant de la communauté des opticiens soulignent la synergie nécessaire entre l'électronique et l'optique pour la réalisation de tels réseaux. Dans ce cadre, nous avons développé une collaboration avec l'équipe de microélectronique du Professeur F. Devos (IEF) et l'équipe de mathématiques du Professeur R. Azencott (ENS) dans le but d'étudier la faisabilité de tels réseaux.

De façon plus précise, nous allons tout d'abord voir comment il est possible de s'affranchir des deux limitations précédemment dégagées pour les réseaux de type Hopfield, à savoir :

- le problème des classifieurs linéaires → modèles à couches;
- le problème de l'apprentissage supervisé → apprentissage sans professeur : à partir d'un ensemble restreint d'exemples présentés au réseau, ce dernier extrait des buts internes qui lui permettent le processus de "généralisation".

Nous serons amenés ensuite à développer plus particulièrement un réseau neuronal particulier dit "machine de Boltzmann", et à envisager l'architecture que nous nous proposons de tester dans le cadre de notre collaboration avec l'IEF et l'ENS.

I. QUELQUES TRAITS DES MODELES ELABORES

1. LES LIMITES DES CLASSIFIEURS LINEAIRES

Intéressons nous à la réalisation d'un ou-exclusif à l'aide d'un réseau de neurones. Le problème consiste donc à trouver un jeux de poids synaptiques T_{ij} et de valeurs de seuil θ_i tels que:

$$H(T_{11}W_1 + T_{12}W_2 - \theta_1) = XOR(W_1, W_2)$$

Par souci de simplification le ou-exclusif porte sur deux neurones èt le résultat porte sur le neurone 1. L'équation :

$$T_{11}W_1 + T_{12}W_2 - \theta_1 = 0$$

est alors une droite dans l'espace des vecteurs d'entrée. Le problème est donc similaire à celui de trouver dans la figure 29 une droite qui sépare les états activés des états inactivés. Il est immédiat de constater que le problème n'a pas de solution ! Cette difficulté, soulignée par T.M. Cover [51], a été exploitée par M. Minsky et S. Paper [52] pour montrer les limites théoriques du PERCEPTRON proposé en 1957 par Rosenblatt.

Pour remédier à cette difficulté, deux approches relativement similaires sont possibles. La prèmière consiste à introduire des synapses d'ordre supérieur. Elle va être développée dans ce paragraphe. La seconde, qui sera traitée dans le paragraphe suivant, fera appel à l'introduction de neurones supplémentaires dits "cachés". En réalité, nous montrerons que ces deux approches sont en fait identiques au fait près que la seconde permet un apprentissage sans professeur.

En effet, pour résoudre ce problème, introduisons une synapse d'ordre deux, i.e. introduisons un coefficient synaptique supplémentaire pondérant un terme d'ordre deux, dans ce cas le produit $W_1.W_2$. L'état de sortie s'écrit alors :

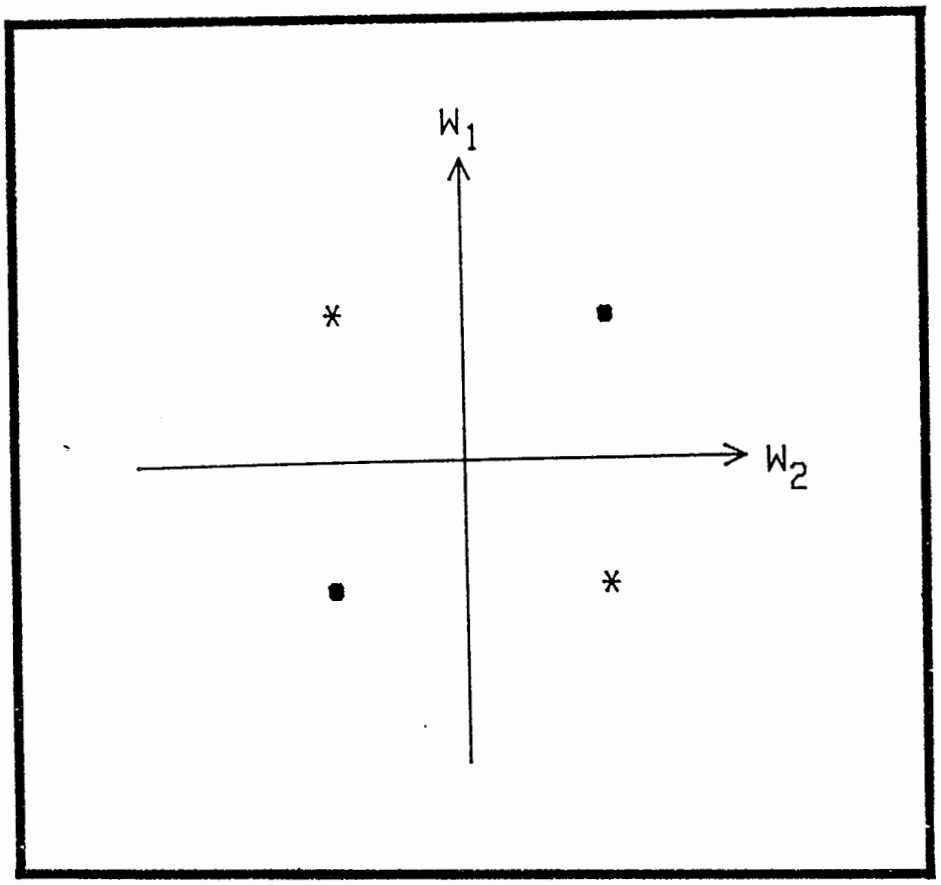


Figure 29 : Schéma montrant l'incapacité pour un classifieur linéaire de réaliser le NOR logique :
- ● : états activés
- * : états inactivés.

$$H(T_{11}W_1 + T_{12}W_2 - \theta_1 + T_3 W_1 . W_2)$$

Il est alors immédiat de constater que par exemple pour $\theta_1 = 0$, $T_{11} = T_{12} = 0$ et $T_3 = 1$, l'état de sortie réalise bien la fonction ou-exclusif car le produit $W_1 . W_2$ est lui-même le "ou-exclusif" de W_1 et W_2.

Cet exemple très simple montre comment l'introduction de réseaux de neurones d'ordre supérieur permet de s'affranchir des limites des classifieurs linéaires.

Remarquons que, d'un point de vue formel, l'introduction de synapses d'ordre deux est comparable à l'introduction d'un neurone supplémentaire dont la valeur est toujours donnée par le produit $W_1 . W_2$. La figure 30 montre un tel réseau.

Grâce à l'introduction de synapses d'ordre 2, il est alors immédiat de constater que les seize fonctions booléennes de deux variables binaires sont réalisables.

D'autres exemples dans la littérature, toujours sur des problèmes simples, ont permis de mettre en évidence la nécessité d'introduire des synapses d'ordre 3. Par exemple, M. Minsky et S. Papert [52] ont montré que le problème de reconnaissance des lettres T et C est un problème d'ordre 3 dans le cas où ces lettres sont codées sur neuf neurones comme ci-dessous :

```
XXX   XXX
.X.   X..
.X.   XXX
```

2. LES RESEAUX DE NEURONES A COUCHES

Une approche similaire consiste à voir que les seize fonctions booléennes peuvent être obtenues à partir d'un réseau neuronal comportant une couche intermédiaire dite "cachée". Cette

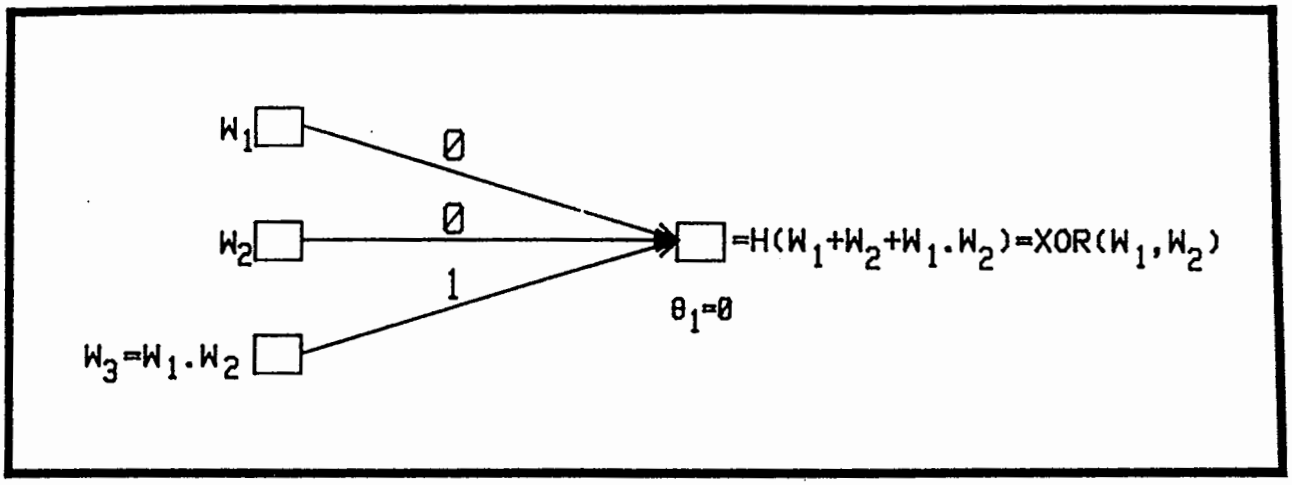


Figure 30 : Réalisation de la fonction logique XOR avec un réseau faisant intervenir des synapses d'ordre deux.

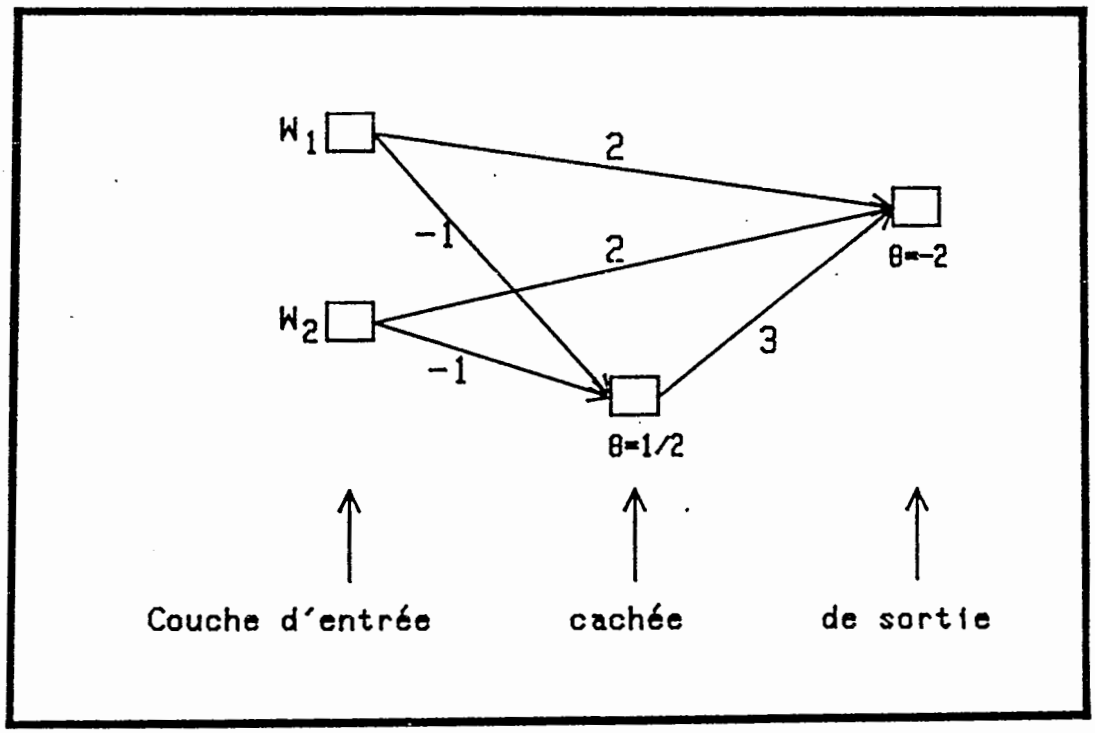


Figure 31 : Réalisation de la fonction logique XOR avec un réseau faisant intervenir une couche cachée.

dernière est dite cachée en ce sens que l'état ses neurones n'intéresse pas l'utilisateur du réseau et donc, à la limite, celui-ci pourrait même ne pas y avoir accès. Par exemple, le "ou-exclusif" peut être réalisé à l'aide du réseau de la figure 31. Le neurone caché ainsi introduit est en fait le NOR de W_1 et W_2. L'évolution d'un tels réseau est séquentielle. L'information se propage de la gauche vers la droite par couche. Pour un problème plus délicat que celui présenté ici, les nombres de couches et de neurones cachés seront plus élevés. Intuitivement, leur nombre augmentera certainement avec la difficulté du problème envisagé.

En outre, cette approche présente l'avantage de réaliser pour de tels réseaux un apprentissage sans professeur. Imaginons le problème général suivant : étant donné un ensemble de couples

$(\vec{W}_1, \vec{W}_2)^m$ pour m = 1,2 ... M, étant donné un certain nombre de neurones cachés et de couches cachées, quelles doivent être les valeurs des coefficients synaptiques pour que, si l'on présente sur la couche d'entrée le premier élément du couple $(\vec{W}_1, \vec{W}_2)^i$, la couche de sortie soit dans l'état du second élément du couple, et cela pour tout i ? Le problème est ici relativement compliqué. La solution n'est pas forcément unique [53]. L'apprentissage est lui-même délicat et était un problème non résolu jusqu'à très récemment. Certains auteurs [7] ont même suggéré qu'une telle généralisation aux modèles connectionnistes à couches pouvait être impossible. Deux algorithmes viennent d'être proposés : la machine de Boltzmann dont nous parlerons dans le prochain paragraphe et l'algorithme de rétropropagation du gradient [54-55]. Ces algorithmes permettent tous les deux, par ajustements successifs en minimisant l'erreur sur les réponses voulues, le calcul sans professeur des différents poids synaptiques.

L'apprentissage des poids synaptiques affectant ces neurones cachés ne peut être effectué directement car aucune information extérieure ne spécifie leur état idéal. Il n'existe donc pas de moyen direct permettant de savoir si l'état d'un neurone caché est correct ou non pour un état donné des neurones visibles.

En fait, ces neurones cachés des couches intermédiaires servent en quelque sorte d'"étapes de décodages" pour extraire les "traits pertinents" de l'ensemble des états du réseau devant être appris. Cet apprentissage étant effectué, il est alors intéressant d'étudier la réponse du réseau à un état $\vec{W}_1$ qu'il n'a pas appris. Si sa réponse est en accord avec la logique qui peut exister dans tous les couples $(\vec{W}_1, \vec{W}_2)$, on dit que le réseau "généralise" correctement.

Un très joli exemple de généralisation a été obtenu par S. Patarnello [56] qui a montré qu'un processus de généralisation parfait pouvait être obtenu pour la réalisation d'un réseau de neurones capable d'effectuer l'addition binaire de deux nombres constitués de huit bits. Le réseau est constitué de N_G portes logiques. Nous avons vu que comme toute porte logique est réalisable à l'aide d'un réseau de neurones, cette simplification n'a comme conséquence qu'une diminution du temps de simulation. L'apprentissage consiste donc à trouver les bonnes connexions entre les différentes portes logiques de façon que le plan de sortie corresponde à la somme des deux vecteurs binaires du plan d'entrée. L'apprentissage est effectué avec N_E exemples choisi au hasard parmi les $65536 = 2^8 \times 2^8$ additions possibles. Les simulations montrent que, selon le nombre de portes logiques, le réseau passe d'un stade ($N_G \sim 40$), où l'addition n'est effectivement réalisable que sur l'ensemble des N_E exemples qui constituent l'apprentissage, à un stade ($N_G > 160$) où le réseau généralise (c'est-à-dire les 65536 additions sont réalisées alors qu'il suffit de $N_E = 480$ exemples à l'apprentissage).

De nombreux travaux très intéressants sur ces processus de généralisation ont été menés. Citons par exemple les travaux de T.J. Sejnowski (Netalk) [57], de T. Maxwell [58-59] et de l'équipe française de F. Fogelman et Y. Le Cun [53-60]. Cependant, tous ces travaux ont été menés sur des réseaux de petites tailles et la demande de réalisations mettant en oeuvre de gros réseaux pour les confronter à des problèmes plus difficiles est pressante.

3. LE RECUIT SIMULE

Lorsque nous avons abordé les problèmes d'optimisation, nous avons soulevé la difficulté posée par les minimums locaux du paysage énergétique du réseau. Une façon intuitive de rompre le déterminisme imposé par la décroissance stricte de l'énergie est d'adopter un algorithme stochastique. En 1983, Kirkpatrick [61] a proposé un algorithme dit de recuit simulé inspiré fortement des méthodes de la mécanique statistique. L'algorithme modélise la mise en équilibre thermodynamique d'un système à la température T. L'espace des configurations est exploré de façon aléatoire et séquentielle.

Lors de la mise en équilibre, une nouvelle configuration est acceptée :

- si celle-ci abaisse l'énergie du système ;
- avec une probabilité $p(\Delta E) = \exp - \frac{\Delta E}{T}$ si $\Delta E > 0$.

On démontre alors que, lorsque le régime d'équilibre du système est atteint i.e. en théorie au bout d'un nombre infini d'itérations, la probabilité d'une configuration C d'énergie E est celle donnée par la loi de Boltzmann :

$$P(C) = \frac{1}{Z} \exp - \frac{E(C)}{T} \qquad (29)$$

Les quelques simulations des figures 32 et 33 montrent pour différents paramètres les résultats d'un test du χ^2 (voir à la fin du chapitre VIII plus de précision sur ce test) portant sur la loi de probabilité de l'équation 29. Pour celà, nous avons choisi un réseau de faible dimension, dix neurones (N=10), complètement connecté avec des poids synaptiques entiers relatifs tirés aléatoirement entre -5 et 5. Aux 2^{10} états de l'espace des configurations, correspondent dans notre cas 26 valeurs différentes de l'énergie. Les tests du χ^2 se sont alors effectués de la manière suivante: A partir d'un état aléatoire du réseau, celui-ci évolue librement selon l'algorithme précédent. Après L itérations , son énergie est mise en mémoire. Cette procédure étant effectuée 10 000 fois, elle permet de bâtir empiriquement la loi

de probabilité de l'énergie. Cette dernière est ensuite comparée par un test du χ^2 à 26-1=25 degrés de liberté avec la loi de boltzmann.

La figure 32 montre les différentes valeurs du χ^2 obtenues pour T=20 en fonction du nombre d'itérations. Celles-ci ne sont correctes que lorsque le paramètre L dépasse quelques centaines, disons L>100 (dans notre cas simple , L doit être dix fois plus grand que le nombre de neurones). La figure 33 montre l'évolution des valeurs du χ^2 en fonction de la température, L étant égal à 500. Elle met en évidence l'existance d'une plage de température (T>15 dans notre cas) pour la thermalisation du réseau.

Ces quelques résultats tirés d'un exemple très simple (N=10) permettent néanmoins de souligner la complexité et la lourdeur des simulations engendrées par la méthode du recuit, soulignant ainsi la nécessité d'une machine dédiée pour son étude.

II. LA MACHINE DE BOLTZMANN

1. BREVE PRESENTATION

La machine de Boltzmann [10-62] tire profit des trois différentes remarques du paragraphe précédent. L'apprentissage sans professeur s'effectue par la comparaison de deux régimes : le régime forcé où les couches neuronales d'entrée et de sortie sont figées dans une configuration imposée de l'extérieur, les neurones cachés évoluant selon la méthode dite de recuit et le régime libre où seule la couche d'entrée est figée, tous les autres neurones se mettant à l'équilibre. De la comparaison de ces deux régimes, E. Hinton [10] a tiré une loi d'évolution des coefficients synaptiques assurant la convergence du régime libre vers le régime forcé.

Il est à noter que cette loi d'évolution est absolument générale, en ce sens qu'elle ne dépend pas du jeu de configurations imposé de l'extérieur. Il en résulte que les

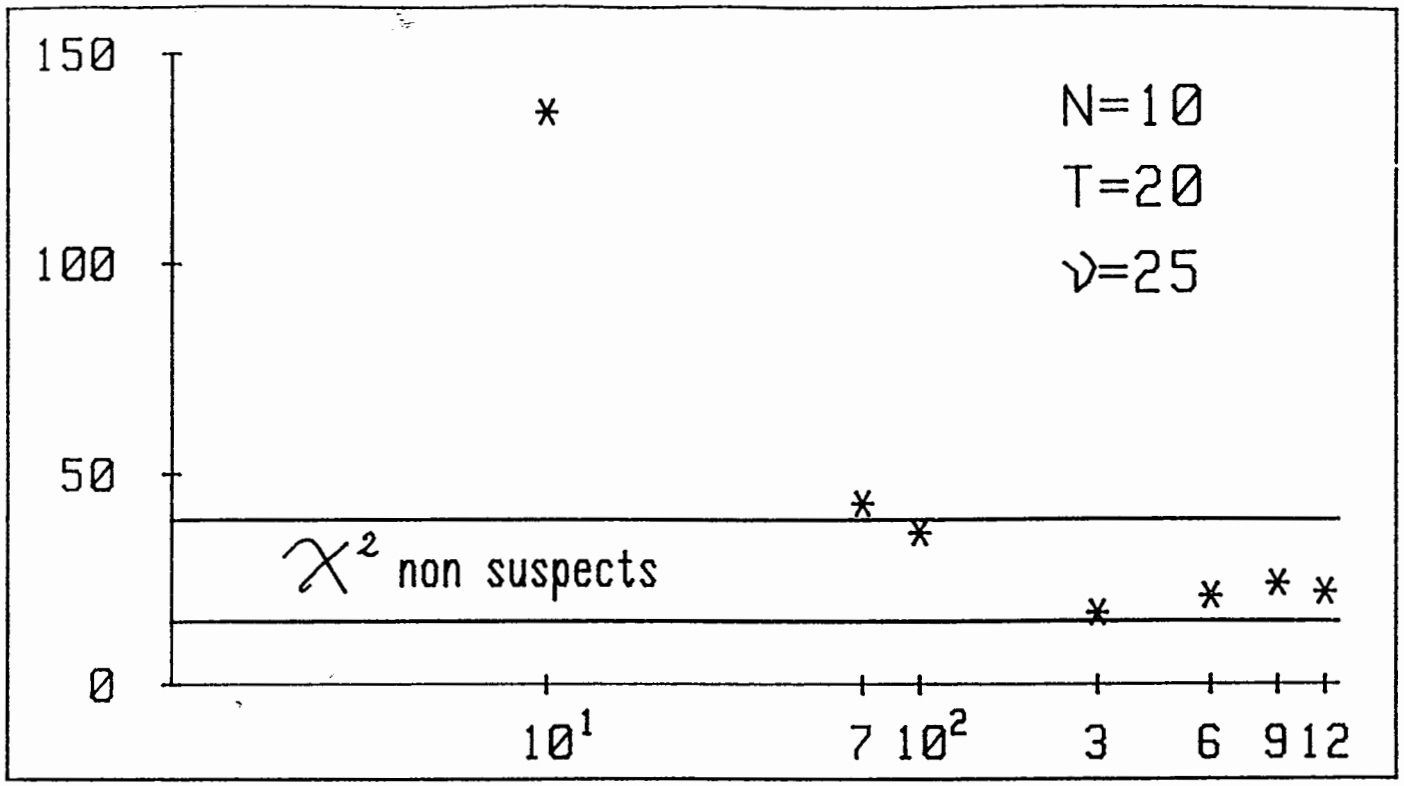


Figure 32 : χ^2 fonction du nombre d'itérations L pour T=20.

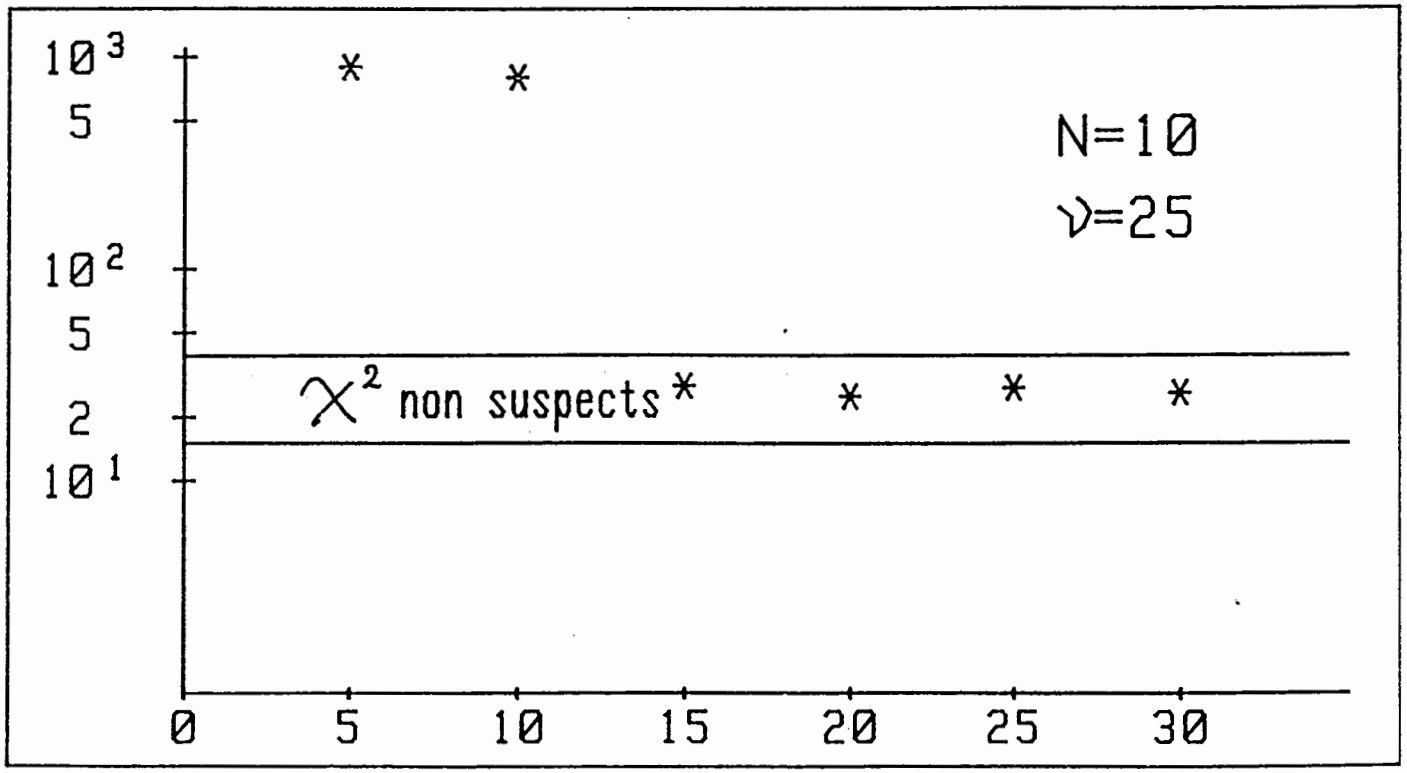


Figure 33 : χ^2 fonction de la température T pour L=500.

connexions ne sont pas fixées a priori par une règle précise mais que c'est le réseau qui "se débrouille" pour établir le choix judicieux assurant la bonne relation entrée-sortie. En outre, cette loi d'évolution est très simple (elle est locale) parce que la méthode de recuit confère au réseau la propriété de suivre la statistique de Boltzmann.

Cet algorithme a été beaucoup étudié depuis l'article de E. Hinton. Les différents auteurs [63-64] ont essayé de dégager les difficultés rencontrées au cours de l'apprentissage. Leur étude est difficilement réalisable parce que les simulations sont très lourdes et qu'elles ne peuvent donc porter que sur un très faible nombre de neurones, rarement supérieur à une centaine. En effet, comme nous venons de le voir, l'apprentissage utilise des statistiques sur les configurations d'équilibre du réseau : la mise en équilibre du réseau nécessitant un grand nombre d'itérations, la statistique des états d'équilibre est encore très gourmande en temps de calcul.

En outre, la machine de Boltzmann ne se restreint pas qu'à des énergies quadratiques. T.J. Sejnowski a montré que l'introduction de synapses d'ordre supérieur permet un apprentissage plus rapide dans ces machines [65]. L'intérêt de ce genre de généralisation sera également sans doute important du point de vue des réalisations. En effet, dans une situation expérimentale, les connexions "à courte distance", tels que les produits $W_1 W_2$ donnant accès aux synapses d'ordre supérieur, peuvent être réalisées électroniquement, alors que les connexions à plus longues distances sont plutôt réalisables optiquement.

Cependant, cet algorithme n'est pas parallélisable directement: ceci veut dire que les neurones doivent évoluer temporellement de façon successive et non simultanée. La parallélisation est rendue délicate par la forte connectique de ces modèles connexionnistes. En effet, chaque neurone est directement en interaction avec un grand nombre d'autres définissant son voisinage. La force agissant sur un neurone dépendant de l'état de tous les neurones voisins, deux neurones

voisins ne peuvent évoluer en théorie simultanément sans qu'une faible transgression de l'algorithme de recuit ne s'opère. Des recherches sont actuellement en cours dans de nombreux laboratoires de mathématique et d'informatique pour étudier ces possibilités de transgression.

2. LES REALISATIONS

Dans la partie consacrée aux réseaux de neurones "type Hopfield", nous avons montré que les architectures optiques ou optoélectroniques, peuvent présenter une alternative intéressante aux architectures électroniques. Ces réseaux de neurones plus évolués sont plus délicats à réaliser.

A notre connaissance, la seule machine de Boltzmann qui ait été réalisée à ce jour sur silicium ne comporte que six neurones et quinze synapses [66]. Cela nous incite à penser qu'une réalisation entièrement électronique se heurtera à de gros problèmes pour des réseaux de taille importante notamment si les connexions ne se limitent pas aux quelques premiers voisins.

L'introduction de l'optique dans des architectures dédiées aux machines de Boltzmann n'a pas encore été largement étudiée. J. Ticknor [67] a dégagé de façon générale la part qui peut être réservée à l'optique dans les machines de Boltzmann. Notamment deux points ont retenu son attention :

* La partie connexion peut être envisagée optiquement. Cependant, il faut noter que dans une machine de Boltzmann, l'apprentissage des poids synaptiques qui est la phase la plus gourmande en temps de calculs requiert des interconnexions reprogrammables. Dans l'état actuel de notre technologie, les interconnexions optiques ne peuvent pas, à notre avis, assurer cette reprogrammabilité.
* La partie génération de nombres aléatoires, qui permet la mise en équilibre du réseau, peut être réalisée optiquement. En effet, dans une figure de speckle, la densité de probabilité d'avoir ponctuellement un éclairement I est donnée par :

$$P(I) = 1/\langle I\rangle \exp- I/\langle I\rangle \qquad (30)$$

Cette loi de probabilité est tout à fait semblable à celle qui régit la dynamique neuronale d'un recuit simulé. Dans ces conditions, la valeur moyenne du speckle <I> équation 30, peut être vue comme la température T du processus de thermalisation, (équation 29).

III. NOTRE PERSPECTIVE DE RECHERCHE

Dans le cadre de notre collaboration avec les équipes de l'I.E.F. et du Laboratoire de Mathématiques Statistiques, deux projets ont retenu notre attention :

* La réalisation d'un générateur de tableaux de nombres aléatoires. Plus précisément, nous envisageons la génération de nombres binaires (0 ou 1) équiprobables grâce aux propriétés statistiques du speckle optique. Nous n'avons pas retenu la loi de densité de probabilité exponentielle (équation 30), afin de donner à notre projet un caractère plus général, ce générateur pouvant avoir d'autres finalités que le recuit simulé [68-69].
* La réalisation d'un recuit optique. C'est-à-dire que nous envisageons de fournir à une rétine électronique à la fois les nombres aléatoires et la force agissant sur les neurones nécessaires à l'algorithme de recuit. Autrement dit, nous envisageons une machine capable de simuler le régime libre de la machine de Boltzmann (régime où la phase d'apprentissage n'est pas nécessaire).

Parallèlement à cet axe de recherche, l'I.E.F. se penche sur la réalisation d'une machine de Boltzmann (utilisant les tableaux de nombres aléatoires du speckle) capable d'apprentissage. Dans les approches précédentes, il est nécessaire de comprendre que l'optique sert de processeur spécialisé soulageant ponctuellement les puces intégrées qui restent le coeur des calculs non linéaires nécessaires au fonctionnement de l'algorithme envisagé.

Ces deux projets nous ont conduits à développer en collabo-

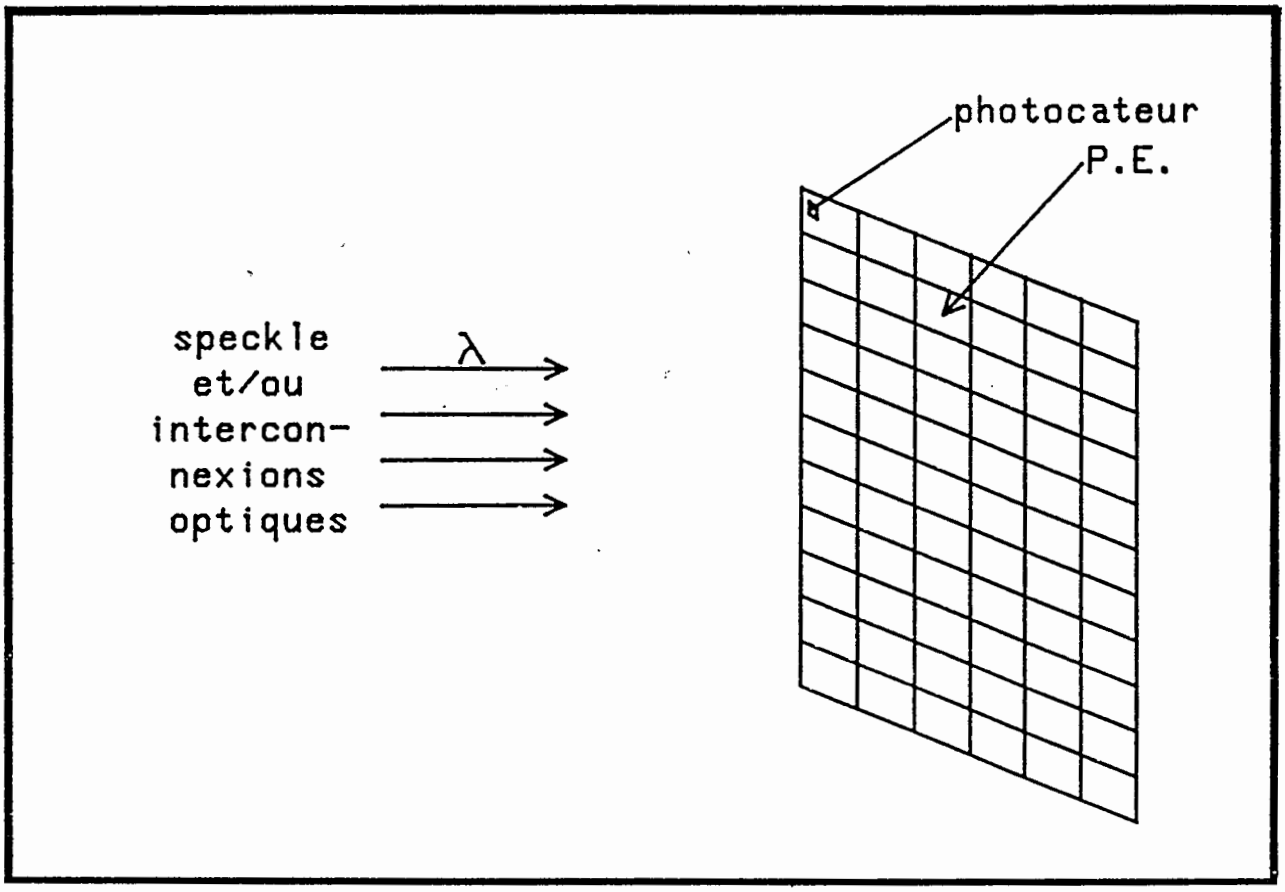


Figure 34 : Schéma de principe d'une architecture optoélectronique simulant l'algorithme de recuit simulé.

ration avec l'I.E.F. des circuits électroniques munis d'entrées optiques parallèles. Le dispositif de la figure 34 consiste en une puce électronique constituée de processeurs élémentaires doués chacun d'une faible capacité de calcul. Chaque P.E. est doté d'une entrée optique (photodiode). La puissance d'une telle machine vient du grand nombre de P.E. organisés en tableau travaillant en parallèle à une cadence élevée.

La seconde partie de ce travail étudiera plus en détail la faisabilité d'un prototype de générateur de nombres aléatoires optiques.

PARTIE II

CHAPITRE VI

LE SPECKLE

I. RAPPEL SUR LA FORMATION DU SPECKLE

Dans ce chapitre d'introduction à la génération de nombres aléatoires par le speckle optique, nous allons rappeler brièvement d'où vient le phénomène du speckle, et pourquoi il est raisonnable de penser qu'il peut permettre la génération de tableaux de nombres aléatoires.

Ce chapitre est très loin d'être exhaustif. Notamment nous n'abordons que le speckle optique créé par des diffuseurs tels que les opalins ou les diffuseurs de surface. Nous essayerons de ne donner que le minimum de formules ou de raisonnements nécessaires à la compréhension des chapitres ultérieurs. Pour plus de détails, les travaux de synthèse de W. Goodman [70], J. Dainty [71] ou de M. Françon [72] sont tout indiqués.

II. FORMATION DU SPECKLE

Lorsqu'une onde cohérente illumine une surface présentant certains défauts ou rugosités, l'onde acquiert une granularité apparente. Comme cela est illustré sur la figure (35.a) la structure de ces granularités apparaît désordonnée et chaotique et est bien décrite par les méthodes statistiques.

L'origine physique de ce phénomène a été donnée pour la première fois dans les années 1962-63 [73] : La surface de la plupart des matériaux présente, à l'échelle de la longueur d'onde, une rugosité extrêmement marquée. Quand une onde cohérente est transmise (ou réfléchie) à travers cette surface, l'onde optique qui en résulte consiste en la somme d'une multitude d'ondelettes sphériques, chacune d'entre elles arrivant d'un endroit différent de la surface (figure 35.b). Si la surface est très rugueuse, ces ondelettes cohérentes subissent, à la traversée de la surface, des déphasages qui peuvent être supérieurs à 2π. L'interférence de toutes ces ondelettes déphasées mais cohérentes donne en espa-

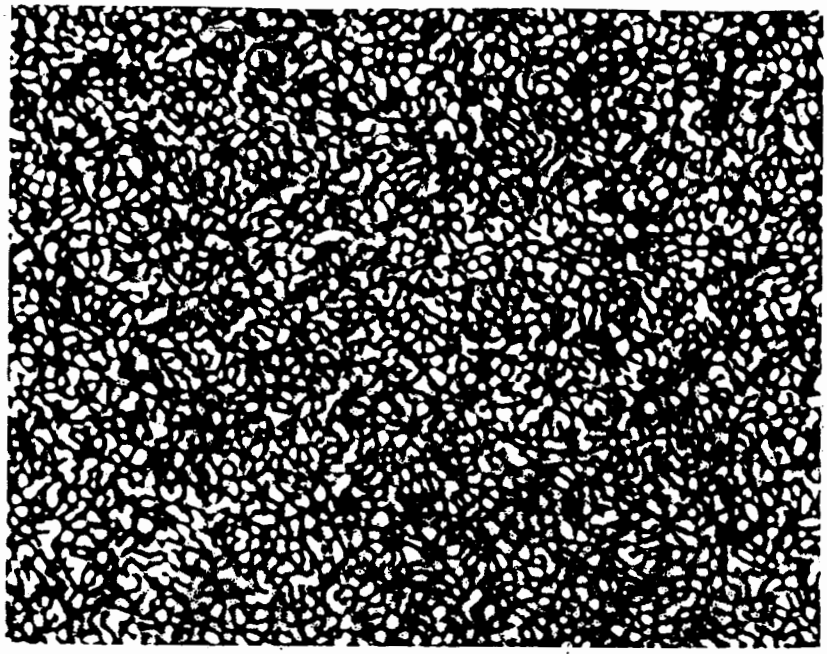


Figure 35.a : Granularité du speckle.

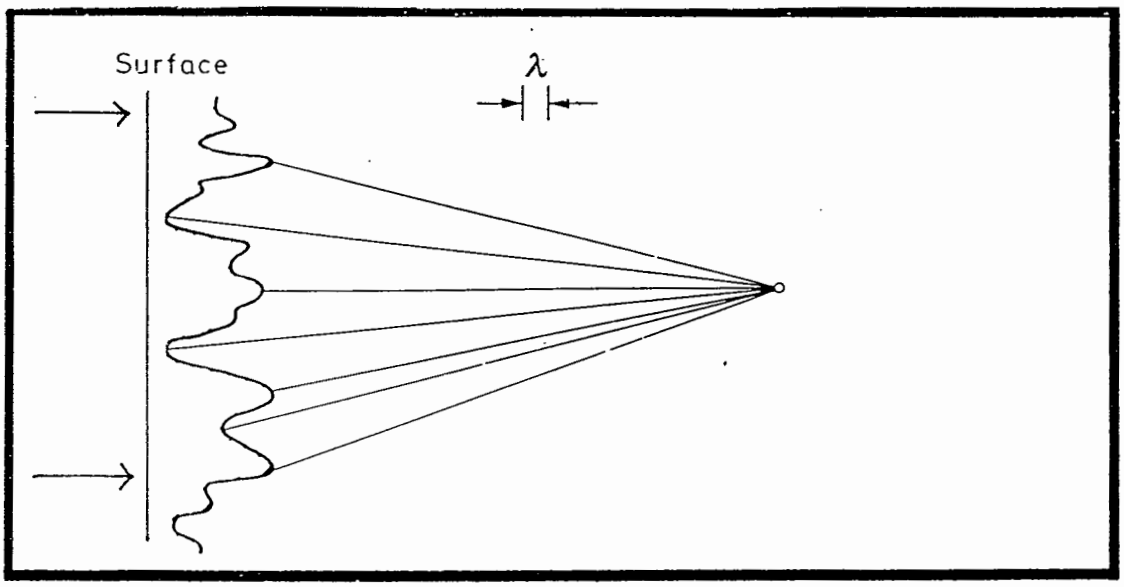


Figure 35.b : Formation du speckle en espace libre à partir d'une surface diffusante.

ce libre dans un plan d'observation quelconque une granularité comparable à celle de la figure (35.a).

III. MODELISATION DU COMPORTEMENT DE LA SURFACE DIFFUSANTE

Sous certaines conditions portant sur la nature des diffuseurs, il est possible de modéliser leur comportement avec les hypothèses suivantes (P note un point courant du diffuseur) :

* Le coefficient de transmission en énergie T est uniforme sur l'ensemble du diffuseur (objet de phase) :

$$\forall\ P\ ,\ T(P) = T$$

* Le déphasage qui résulte de la traversée du diffuseur est uniformément réparti entre $-\pi$ et π, i.e. la surface diffusante présente de fortes rugosités à l'échelle de la longueur d'onde.

* Les déphasages résultants en deux points P et P' différents sont indépendants l'un de l'autre. Plus précisément :

$$\langle t(P)\ t^{*}(P')\rangle = f(P-P') \qquad (31.a)$$

où f est une fonction étroite qui chiffre la dimension caractéristique des rugosités du diffuseur. Par exemple, un modèle courant pour f(P-P') est :

$$f(P-P') = C \exp - \frac{\pi(P-P')^2}{g^2} \qquad (31.b)$$

où C est une constante et g peut être interprété comme une grandeur caractéristique des granularités de la surface diffusante. Dans la suite, nous appellerons g le grain du dépoli.

IV. QUELQUES PROPRIETES STATISTIQUES DU SPECKLE

1. STATISTIQUE DE L'ECLAIREMENT EN UN POINT

En un point du plan d'observation, l'amplitude de l'onde est la somme de variables aléatoires indépendantes. Dans le cas asymptotique où la surface diffusante éclairée est très grande devant l'aire des grains du diffuseur, il en résulte que l'amplitude A a obéi à une loi de distribution gaussienne circulaire. Sa densité de probabilité est donc de la forme :

$$P(A) = \frac{1}{2\pi\tau^2} \exp - \frac{|A|^2}{2\tau^2} \qquad (32)$$

Il en découle que la densité de probabilité de l'éclairement est exponentielle et est donnée par l'équation 30 précédemment citée :

$$P(I) = \frac{1}{<I>} \exp - \frac{I}{<I>}$$

2. STATISTIQUE DE L'ECLAIREMENT INTEGRE SUR UNE CELLULE

Quand l'intensité du speckle est reçue par un récepteur de dimension finie, la densité de probabilité P(I) s'en trouve alors modifiée (par convolution). Il s'introduit alors un paramètre $\mathcal{M}$ très important pour les statistiques d'ordre un du speckle. Celui-ci est par définition :

$$\mathcal{M} = \sqrt{\frac{<I>}{\sigma(I)}} \qquad (33)$$

Dans le cas où le photocapteur est carré de côté b, où la surface diffusante est limitée par un diaphragme carré de côté a et où le plan d'observation est situé à la distance d du diffuseur, il se trouve que le paramètre $\mathcal{M}$ est sensiblement égal $\left(\frac{ba}{\lambda d}\right)^2$ du moins pour les grandes valeurs de $\mathcal{M}$.

La figure 36 montre l'évolution de la densité de probabilité pour différentes valeurs de $\mathcal{M}$. La loi exponentielle est obtenue

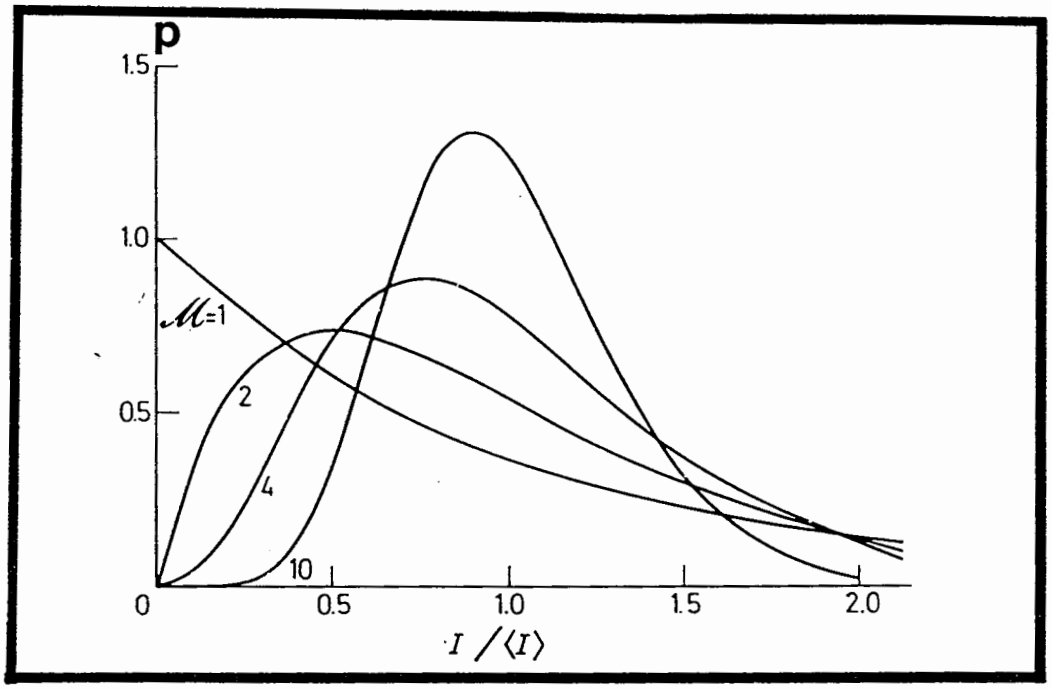


Figure 36 : Densité de probabilité P(I) pour différentes valeurs du paramètre $\mathcal{M}$ (d'après [71]).

pour $\mathcal{M} = 1$. A la limite $\mathcal{M} \to \infty$ (i.e. la taille du photocapteur est très grande), chaque photocapteur intègre un grand nombre de grains de speckle de sorte que la densité de probabilité est un dirac centré sur la valeur moyenne de l'intensité du speckle <I>.

3. FACTEUR D'AUTO-CORRELATION SPATIALE DE L'ECLAIREMENT EN UN POINT

Avant de donner sans démonstration la formule du facteur de corrélation spatiale, je vais présenter une description qualitative de la granularité du speckle. A l'échelle du diffuseur, deux grandeurs caractéristiques sont à prendre en considération :

* la taille typique des rugosités diffusantes : g
* la surface diffusante éclairée. Notons-la a^2.

Dans le cas où le plan d'observation est suffisamment éloigné de la surface diffusante, ces deux grandeurs vont donner deux fréquences spatiales caractéristiques du plan d'observation : $\frac{a}{\lambda d}$ et $\frac{g}{\lambda d}$. Les termes $(\lambda d/g)^2$ et $(\lambda d/a)^2$ peuvent être interprétés d'une part comme la surface éclairée et d'autre part comme la surface de grains de speckle. Ces derniers représentent l'entité élémentaire de la figure d'observation et leur taille caractéristique chiffre la distance de corrélation spatiale du speckle.

Plus précisément, l'interprétation statistique donnée au speckle dans le paragraphe précédent permet de montrer que dans le cas où $d >> a^2/\lambda$, le facteur de corrélation spatial est donné par le carré du module de la tranformée de Fourier de l'amplitude complexe juste derrière le diffuseur. Si l'on y place un diaphragme carré de côté a, cela permet de définir parfaitement cette amplitude. On a pour le facteur de corrélation défini comme suit:

$$\gamma_{11}(\Delta x,\Delta y) = \frac{\langle (I(x,y) - \langle I\rangle)\ (I(x+\Delta x,\ y+\Delta y) - \langle I\rangle)\rangle}{\sigma_{I(x,y)}\ \sigma_{I(x+\Delta x,\ y+\Delta y)}} \tag{34}$$

$$\gamma_{11}(\Delta r,\Delta y) = \mathrm{sinc}^2 \frac{\pi a \Delta x}{\lambda d}\ \mathrm{sinc}^2 \frac{\pi a \Delta y}{\lambda d}$$

expression pour laquelle on a supposé que le diaphragme est éclairé uniformément.

Cette équation sera largement utilisée dans les chapitres suivants.

4. FACTEUR D'AUTOCORRELATION TEMPORELLE DE L'ECLAIREMENT EN UN POINT

Pour une surface diffusante en mouvement à une vitesse v, le facteur d'autocorrélation qui est défini par :

$$\gamma_{11}(T) = \frac{\langle (I(t) - \langle I\rangle)\ (I(t+T) - \langle I\rangle)\rangle}{\sigma_{I(t)}\ \sigma_{I(t+T)}}$$

est égal à : $\left|\tilde{f} * \tilde{f} \exp 2i\pi \frac{xvT}{\lambda d}\right|^2 / |\tilde{f} * \tilde{f}|^2$

Voir référence 74, où :

- $\tilde{f}$ désigne la transformée de Fourier
- * désigne la convolution
- f est la fonction définie dans l'équation 31.a.

Avec la fonction f définie par l'équation 31.b, il peut être montré [74] que :

$$\gamma_{11}(T) = \exp - \pi(vT/g)^2 \tag{35}$$

Cette équation permet en pratique d'estimer la taille caractéristique des rugosités de la surface diffusante. Mais surtout, ce modèle très simple nous donne une loi d'échelle qui nous permettra, à partir de mesures effectuées à une vitesse v donnée, de prévoir les qualités statistiques du générateur à une vitesse différente.

CHAPITRE VII

CONCEPTION ET DESCRIPTION D'UN MONTAGE DE VALIDATION

En nous aidant des considérations précédentes sur la formation et les propriétés statistiques du speckle, nous allons définir dans ce chapitre un montage permettant la validation de la possibilité de génération de tableaux de nombres aléatoires. Bien évidemment, ce montage de validation devra prendre en compte la faisabilité d'un prototype qui s'en inspirerait.

En premier lieu, nous allons rappeler les objectifs de débit et d'indépendances temporelle et spatiale des nombres aléatoires. Ces objectifs prennent nécessairement en compte les contraintes de la rétine électronique de l'équipe de l'Institut d'Electronique Fondamentale.

En second lieu, nous allons définir un montage de validation permettant d'étudier avec précision les propriétés statistiques du speckle afin de les comparer avec les résultats théoriques précédemment énoncés.

I. LES IMPERATIFS DU GENERATEUR OPTIQUE

1. LES OBJECTIFS

Nous nous intéressons à la mise en oeuvre d'algorithmes type recuit simulé sur des réseaux de processeurs massivement parallèles. Pour être efficaces, ils requièrent typiquement de l'ordre de 256 x 256 tirages aléatoires à haut débit. Il s'agit donc de pourvoir selon le mode opératoire défini sur la figure 34, en nombres aléatoires, une rétine munie d'entrées optiques parallèles.

Afin d'assurer un mode de fonctionnement correct de l'algorithme de recuit simulé, ces nombres aléatoires doivent être indépendants spatialement et temporellement. Plus précisément, chacun des processeurs élémentaires de la rétine doit recevoir une information indépendante de celle des autres, et cela à tout instant. En outre, ces informations doivent être indépendantes

d'un tableau au suivant.

Une des dernières conditions sine qua non au bon fonctionnement de l'algorithme stochastique mis en oeuvre est la précision avec laquelle le système opto-électronique (speckle plus photodétection) est capable de générer les statistiques désirées. Nous aurons l'occasion de revenir plus en détail sur cet aspect du problème dans les chapitres ultérieurs.

L'ensemble de ces divers paramètres clés pour la réussite d'un prototype devra être impérativement testé dans la démonstration de faisabilité.

2. LES CONTRAINTES IMPOSEES PAR LA RETINE ELECTRONIQUE

La première contrainte concerne la fréquence maximale qu'il est raisonnable d'envisager pour la génération des tableaux de nombres aléatoires. Elle est fonction bien évidemment du phénomène de diffusion considéré, mais aussi de la sensibilité des photocapteurs ou plus précisément du taux de conversion énergie lumineuse - énergie électrique. Elle peut être choisie à partir de la puissance de la source.

En ce qui concerne l'indépendance spatiale des photocapteurs, les paramètres importants sont d'une part la taille des grains de speckle et d'autre part la distance L séparant deux photocapteurs. Ces contraintes d'indépendance spatiale sont donc fonction des dimensions caractéristiques de la rétine. La taille des photocapteurs b varie entre 10 et 100 μm. La taille de chaque processeur varie selon les applications entre 200 (ou 300 μm) et 700 μm. De sorte que le paramètre R défini par le rapport entre la distance séparant deux photocapteurs et la taille des photocapteur est toujours supérieur à 2 ou 3.

Le troisième paramètre d'importance est dû au fait que la rétine et ses quelques 60 000 processeurs élémentaires n'aura certainement pas un comportement uniforme. Il est à craindre que des

dérives au sein de la puce n'entraînent des biais sur les statistiques désirées (dispersion de la sensibilité des photocapteurs, dispersion dans le traitement électronique du signal ...).

Dans la mesure du possible, il faudra étudier et proposer un montage optique optimal de façon à prendre en considération ces diverses contraintes.

II. DESCRIPTION DU MONTAGE DE VALIDATION

La figure 37 montre l'ensemble du montage de validation que nous avons réalisé afin d'étudier la faisabilité d'un prototype. Celui-ci se compose d'une source laser monochromatique, d'un ensemble de deux diffuseurs tournants, d'un diaphragme carré de côté a et d'un plan de photodétection. Les données recueillies par les photodétecteurs sont transmises à un ordinateur hôte via une carte d'acquisition afin d'y être traitées.

1. CHOIX DU SYSTEME DIFFUSEUR

Vis-à-vis de la génération de nombres aléatoires indépendant temporellement, le système à double diffuseur mobile présente deux avantages majeurs :

* Intuitivement, dès qu'un grain de diffuseur se déplace de plus d'un grain de l'autre diffuseur, l'état des deux surfaces diffusantes en regard est relativement indépendante de la précédente. En conséquence, comme nous le verrons par la suite, l'obtention de tableaux indépendants de nombres aléatoires est facilement réalisable même pour des faibles vitesses de rotation et cela à fréquence élevée.

* De plus, si les vitesses angulaires des deux diffuseurs sont légèrement différentes, l'état des deux surfaces diffusantes ne se retrouve pas identique à lui-même à chaque tour. Si l'écart de vitesse angulaire est petit devant chacune des vitesses angu-

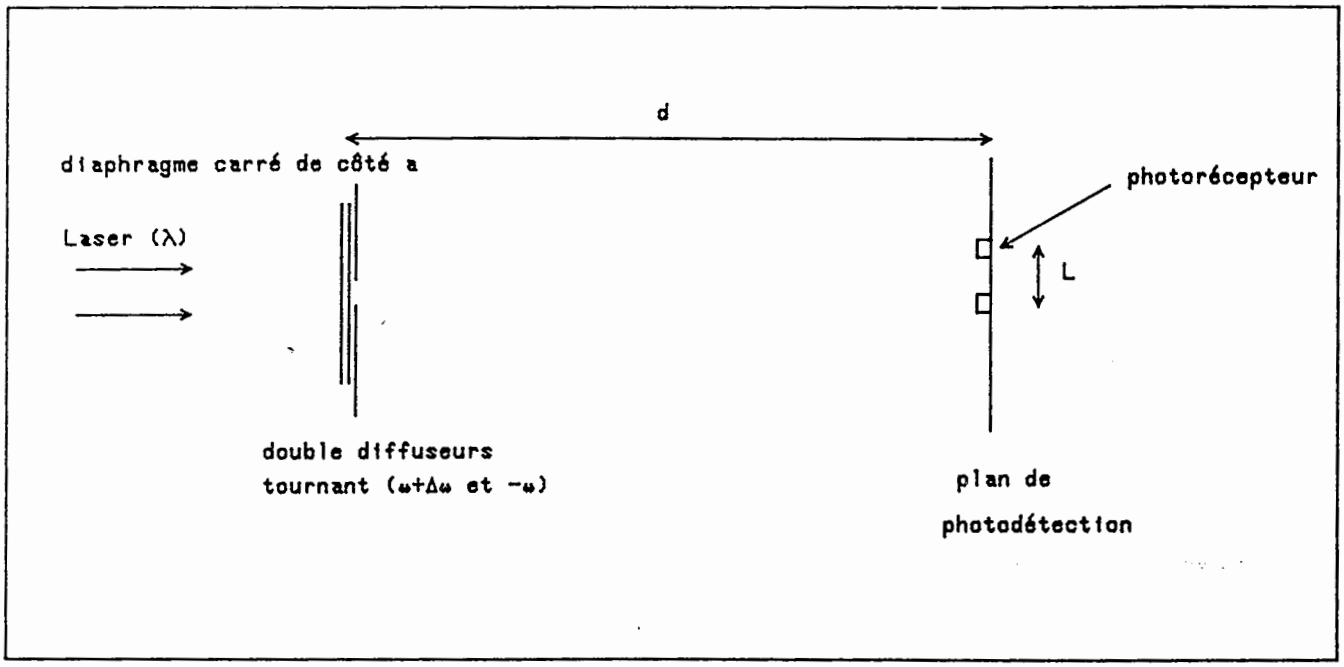


Figure 37 : Schéma général du montage pour l'étude de la faisabilité d'un prototype de générateur optique de nombres aléatoires.

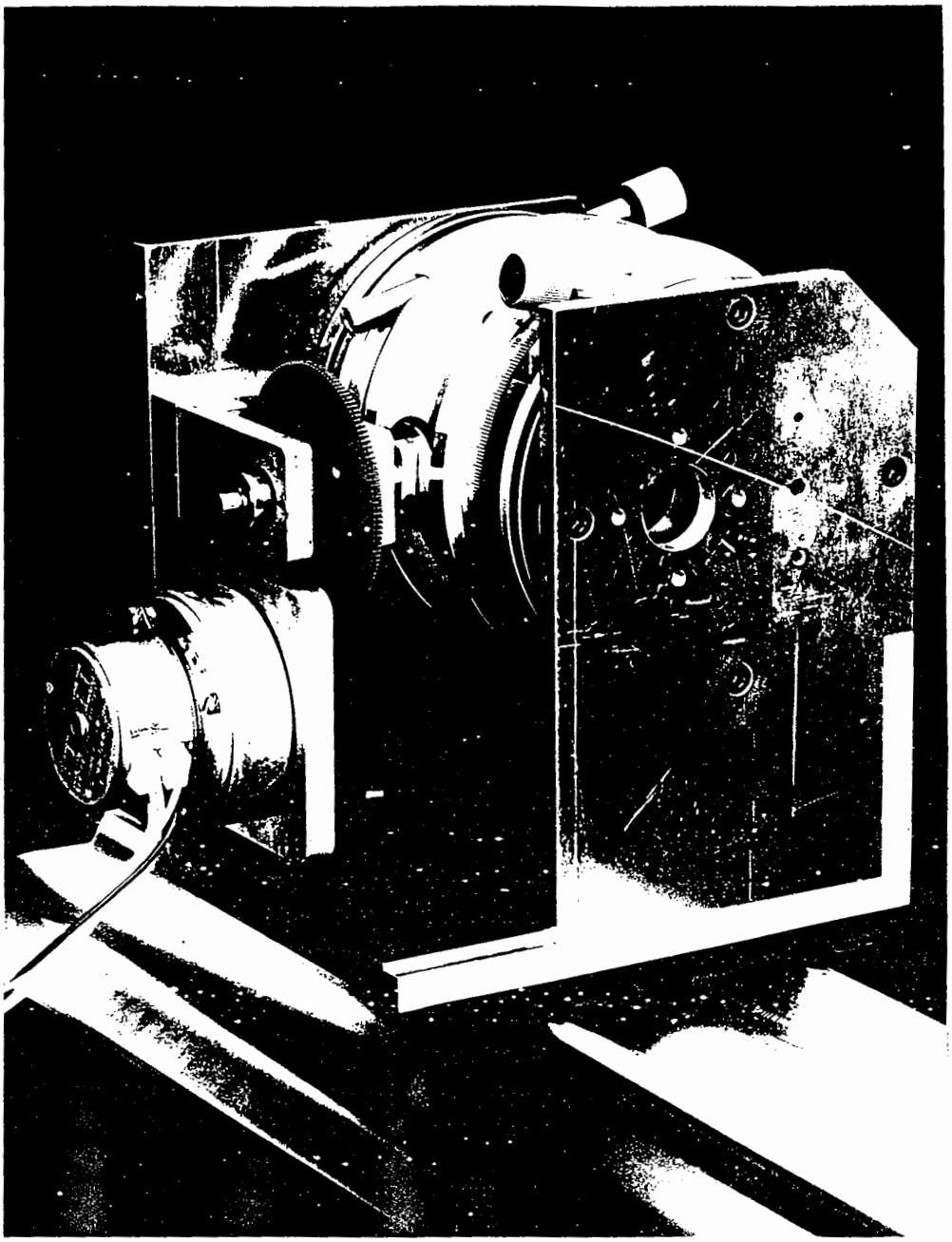


Figure 38 : Photographie du système d'entraînement des deux diffuseurs mobiles. Le galet central et l'écart ΔR entre les axes de rotation confèrent aux deux surfaces diffusantes des vitesses angulaires différentes.

laires, la périodicité du système diffusant se trouve bien supérieure à celle d'un système à un seul diffuseur mobile, assurant ainsi la génération de tableaux de nombres aléatoires indépendants pendant une longue durée.

La figure 38 montre le système d'entraînement des deux diffuseurs mobiles. Chacun des dépolis est fixé sur une platine Microcontrôle. Le système d'entraînement assure une rotation des dépolis avec des vitesses angulaires respectives $\omega+\Delta\omega$ et $-\omega$. L'écart des vitesses angulaires $\Delta\omega$ qui sera discuté ultérieurement est dû au non-recouvrement des axes des deux platines Microcontrôle. Le galet qui assure une liaison sans glissement avec les deux platines leur transmet donc des vitesses linéaires opposées. Si l'on note ΔR la distance séparant les deux axes des platines, l'écart en vitesse angulaire est donc $\Delta\omega = \Delta R\omega^2/v$ au premier ordre.

En outre, un degré de liberté supplémentaire qui n'apparaît pas sur la figure 38 permet d'ajuster la distance entre chacune des surfaces diffusantes. Cette distance doit être rendue aussi faible que possible afin d'éviter que le second diffuseur ne reçoive un speckle déjà formé à partir du premier, ce qui entraînerait une perte de qualité sur l'indépendance temporelle que procure un système à double diffuseurs accolés.

2. CHOIX DU DIAPHRAGME

Comme cela a été souligné dans le chapitre précédent, le diaphragme placé derrière les diffuseurs conditionne directement le facteur d'autocorrélation spatial. Afin de pouvoir confronter nos résultats expérimentaux avec une approche théorique, nous avons choisi de placer un diaphragme carré de côté a. Ce diaphragme doit cependant remplir un certain nombre de conditions :

* Il doit être suffisamment petit de manière à ce qu'il soit éclairé de façon uniforme. Cela permet dans le calcul de la fonction d'autocorrélation de s'affranchir du problème soulevé par le

biais qu'introduirait une répartition non uniforme de l'éclairement (par exemple de type gaussienne pour le laser).

* Pour le même type de raison, son coefficient de transmission en amplitude doit être constant sur l'ensemble de sa surface transparente. Notre diaphragme carré a été obtenu par photoréduction. Une étude menée sur un densitomètre a permis de montrer que le coefficient de transmission en énergie est stable à moins d'un pour cent, assurant ainsi moins de cinq pour mille sur son coefficient de transmission en amplitude.

* Afin d'autoriser un traitement statistique du speckle, la surface du petit carré doit intégrer un grand nombre de grains des diffuseurs.

* De plus, pour la même raison, le diaphragme carré doit être placé très près du diffuseur qui le précède. Ceci lui évite de limiter un speckle déjà formé en espace libre par la surface diffusante.

En outre, nous avons choisi une configuration particulière pour l'orientation du carré. Ce dernier a été tourné de 45° par rapport aux axes privilégiés de la rétine placée dans le plan d'observation. Cette astuce permet de placer les axes priviliégiés de la rétine (et donc ses photocapteurs) sur ceux diagonaux de la figure de diffraction du diaphragme. Ainsi, d'après l'équation 34, le facteur de corrélation spatial entre deux photocapteurs de la rétine est typiquement de l'ordre de : $\mathrm{sinc}^4 \frac{\pi a L}{\lambda d\sqrt{2}}$ où L est la distance entre deux photocapteurs.

A n'en pas douter pour $L \sim \lambda d\sqrt{2}/a$ des facteurs de corrélation très faibles doivent être obtenus assurant ainsi d'une bonne indépendance spatiale.

3. PHOTODETECTION

La figure 39 montre le système réalisé afin d'étudier les indépendances spatiales entre les photocapteurs de la rétine. Un double miroir dont les faces sont à 45° l'une de l'autre crée deux images géométriques de deux photocapteurs dans un plan paral-

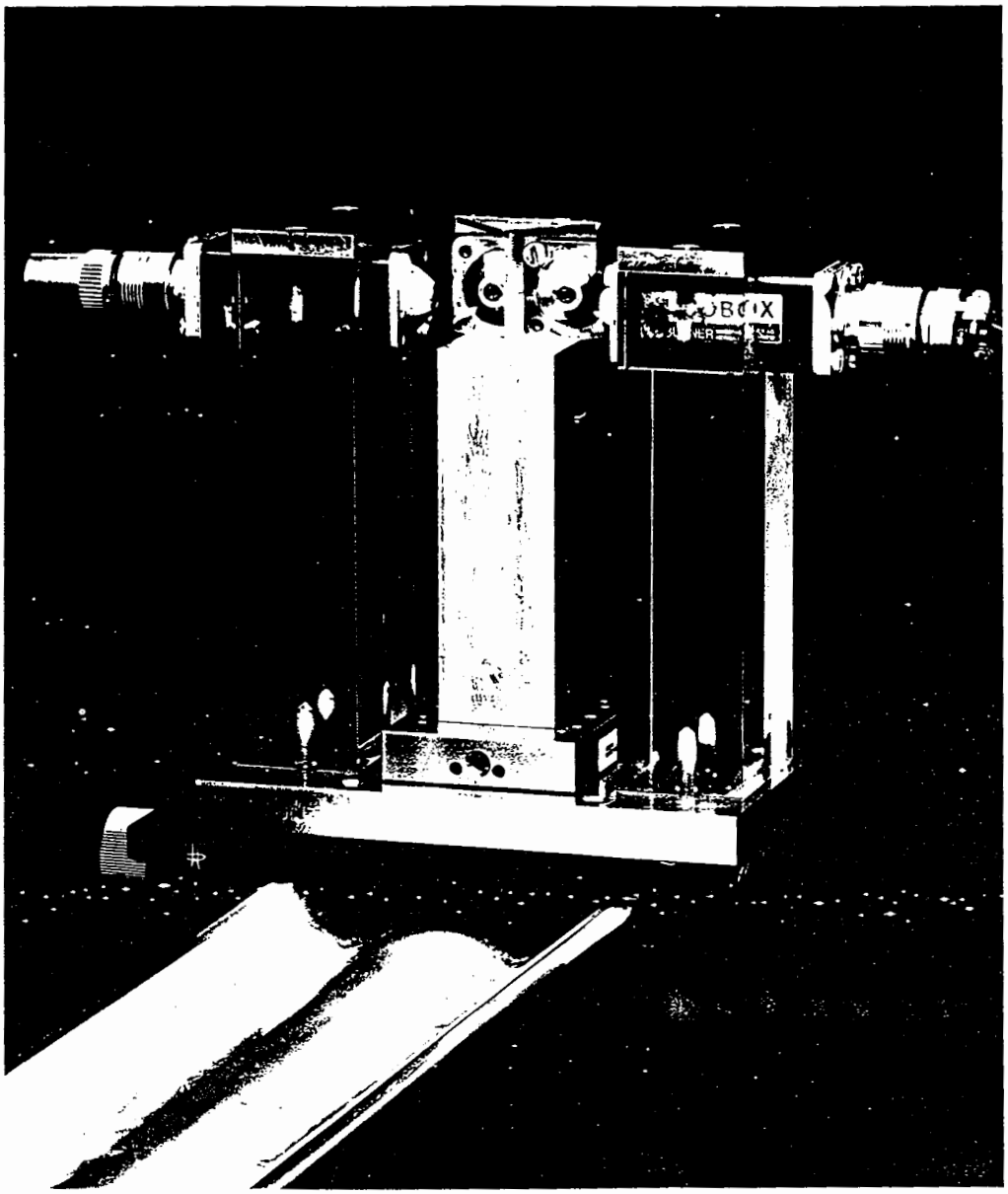


Figure 39 : Plan de photodétection.

lèle aux deux diffuseurs mobiles (voir figure 37). Les deux photodiodes étant fixes, un déplacement de x_0 selon l'axe des x du miroir introduit un déplacement relatif de 2 x_0 entre les deux images des photodiodes. Ce dispositif assure donc une variation continue et précise de la distance séparant les images des deux photocapteurs. La distance minimale d'approche correspond à la position du miroir pour laquelle les deux images sont collées l'une contre l'autre. Cet artifice a permis de s'affranchir du problème soulevé par le blindage des photocapteurs qui, sans le miroir, n'aurait pas permis d'atteindre des distances entre capteurs aussi faibles.

La figure 40 montre la partie électronique du système de photodétection. Celui-ci se compose, d'une part, d'une amplification permettant d'effectuer des mesures sur une dynamique importante et, d'autre part, d'un filtre conférant au système d'excellentes propriétés de stabilité. Notamment, le rapport signal sur bruit s'est avéré supérieur à 500. Nous avons montré analytiquement que, sous certaines hypothèses (bruit électronique indépendant du speckle à analyser), le biais introduit sur la mesure des facteurs de corrélations est bien inférieur aux fluctuations statistiques.

Cependant, le filtrage n'est pas sans conséquence sur la mesure des facteurs de corrélation. Afin d'étudier son influence, nous avons mesuré son comportement fréquentiel qui est représenté sur la figure 41. En première approximation, le comportement du filtre notamment à faible fréquence peut être vu comme un filtre du premier ordre ayant une fréquence de coupure de l'ordre de 2000 Hz.

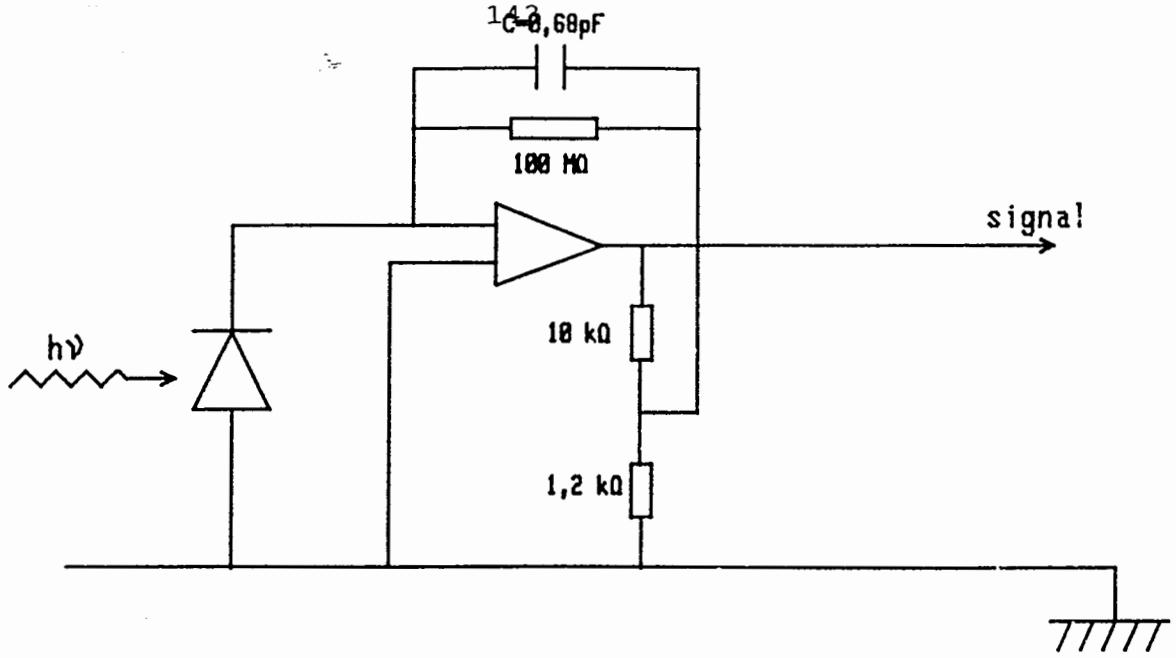


Figure 40 : Photodétection (amplification et filtrage).

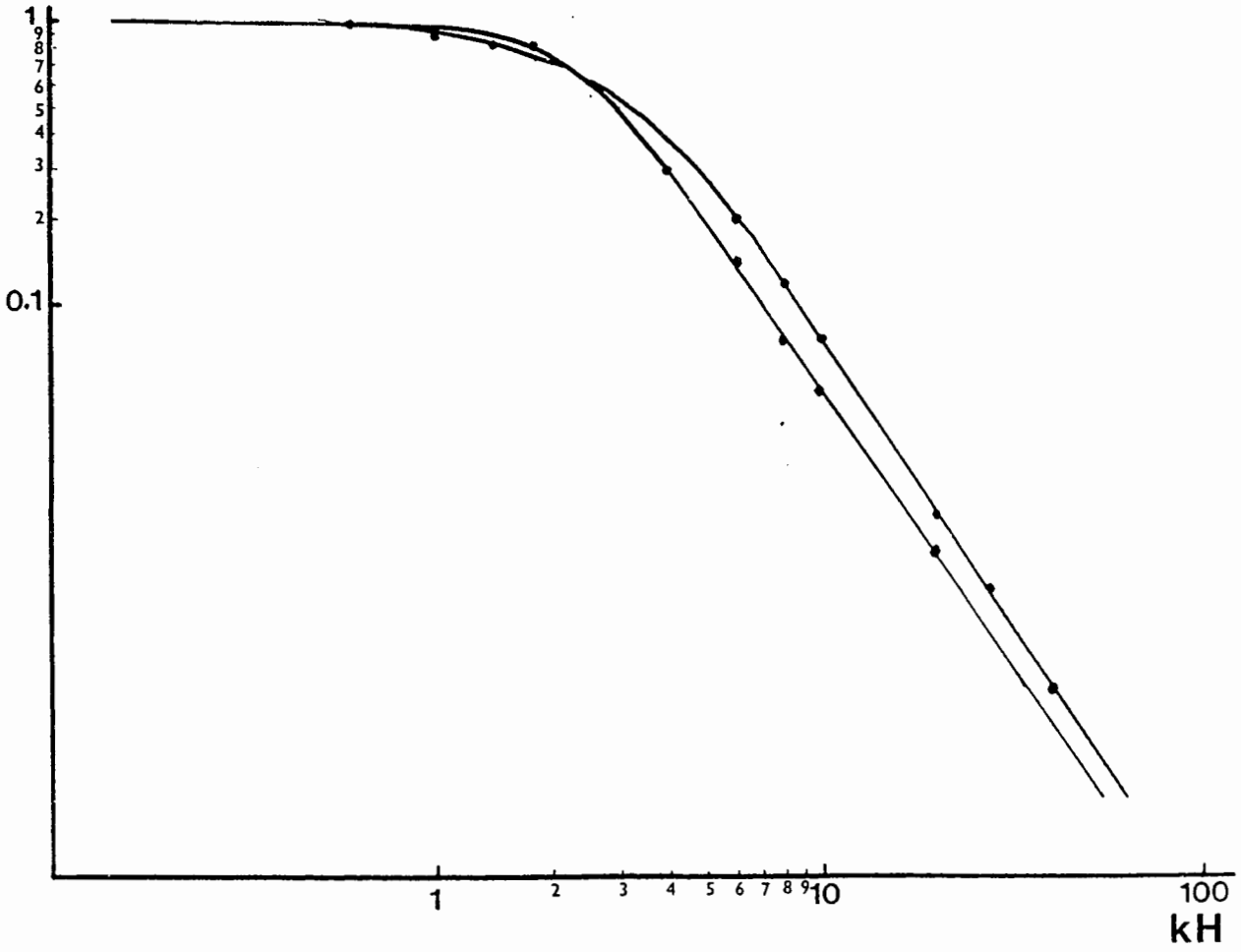


Figure 41 : Diagramme de Bode du filtre utilisé pour la photodétection.

CHAPITRE VIII

TESTS D'INDEPENDANCE

Dans ce chapitre, nous allons commenter les différents résultats expérimentaux que nous avons obtenus en vue de tester les indépendances spatiales et temporelles du speckle optique. Les tests statistiques portent donc sur l'indépendance de deux photorécepteurs voisins (ou sur trois) et sur l'indépendance temporelle de chacun des photocapteurs.

Les statistiques du speckle étant fort connues expérimentalement et théoriquement, l'originalité de notre travail provient essentiellement de la qualité des tests d'indépendance que nous avons effectués. Ceux-ci comportent, d'une part la mesure des coefficients de corrélations temporelle et spatiale jusqu'à des ordres élevés et, d'autre part des tests du χ^2 sur l'indépendance statistique.

L'ensemble de ces tests indispensables à l'étude de faisabilité d'un générateur optique de nombres aléatoires permettent de chiffrer les qualités statistiques qu'il est raisonnable d'attendre d'un montage similaire à celui développé dans le chapitre précédent.

I. FACTEURS DE CORRELATION TEMPORELLE

Nous avons étudié l'indépendance temporelle entre deux figures de speckle. Plus précisément, nous avons calculé les facteurs de corrélation temporelle d'ordre n,m définis comme suit :

$$\gamma_{n,m}(T) = \frac{\langle I^n(t)\ I^m(t+T)\rangle - \langle I^n(t)\rangle \langle I^m(T)\rangle}{\sigma(I^n(t))\ .\ \sigma(I^m(t))}$$

où : I(t) correspond à l'éclairement intégré sur un photocapteur à l'instant t et $\sigma(I^n(t))$ à l'écart type de la puissance $n^{ième}$ de cet éclairement.

1. INFLUENCE DE LA PHOTODETECTION

Nous avons vu que la photodétection introduit un filtre dont la fréquence de coupure vaut $F_0 \sim 2000$ Hz. Si l'on note $\tau = 1/2\Pi F_0$, le signal traité à l'ordinateur s(t) à l'instant t s'exprime simplement en fonction de I(t) :

$$s(t) = \frac{1}{\tau} \int_0^\infty I(t-t') \exp(-t'/\tau) dt' \qquad (37)$$

Il est facile de voir que ce filtrage n'introduit aucun biais sur la valeur moyenne du signal, i.e. : $\langle s(t) \rangle = \langle I(t) \rangle$. Dans ces conditions, le facteur de corrélation $\gamma_{1,1}(T)$ qui prend en compte le filtrage s'exprime très simplement en fonction des données non perturbées :

$$\gamma_{11}(T) = \frac{1/\tau^2 \int_0^\infty \int_0^\infty dt'dt \exp-(t+t')/\tau \langle I(t)I(t'+T) \rangle^2}{1/\tau^2 \int_0^\infty \int_0^\infty dtdt' \exp-(t+t')/\tau \langle I(t)I(t') \rangle} \qquad (38)$$

Le modèle généralement admis (équation 35) nous permet de continuer le calcul en posant que :

$$\langle I(t)I(t') \rangle = \langle I(t) \rangle^2 \exp- \pi v^2 (t-t')^2/g^2$$

dans laquelle la quantité v(t-t')/g peut être vue comme la longueur dont s'est déplacé le dépoli entre les instants t et t', cette longueur étant exprimée en nombre de grains du dépoli.

Posons : $\begin{cases} n_T = vT/g \\ n_\tau = v\tau/g = r\, n_T \end{cases}$

En effectuant le changement de variables suivant :

$$u = t+t' \text{ et } v = t-t'$$

le numérateur de l'équation (38) prend la forme suivante :

$$2/n_\tau \exp\left(1/4\Pi n_\tau^2\right) \quad [F(r) + F(-r)]$$

où $F(r) = \exp 1/r \quad Q\left(1/\sqrt{2\pi}\, rn_T + \sqrt{2\pi}\, n_T\right)$, Q étant la fonction

introduite en page 23 au chapitre II [27]. Le dénominateur de l'équation (38) étant la limite du numérateur quand $r \to \infty$ à rn_T constant, finalement on obtient :

$$\gamma_{11}(T) = \frac{1}{2} \qquad \frac{F(r) + F(-r)}{Q\left(1/\sqrt{2\pi}\ n_T\right)} \tag{39}$$

Quand $r \to \infty$, i.e. quand la fréquence de coupure du filtre tend vers zéro, le facteur de corrélation tend vers 1 et à la limite où le filtre n'existe pas ($r \to 0$), $\gamma_{11}(T)$ tend vers $\exp -\pi n_T^2$,

ce qui est en accord avec l'équation (35).

La figure 42 montre l'erreur systématique commise sur la mesure du facteur de corrélation par l'introduction du filtre en fonction de $r = \tau/T$ pour différentes valeurs de n_T, n_T variant de 1 à 5. Tant que r est inférieur à 0,1, l'erreur commise est inférieure ou égale à 10^{-3}, à condition que n_T soit supérieur ou égal à deux.

Plus précisément, le filtrage induit une mesure du facteur de corrélation temporelle par excès. L'erreur commise n'excède pas 10^{-3} si la fréquence d'échantillonnage des mesures ($1/T = F$) reste inférieure à $2\Pi.0,1.F_0$ i.e. 1000 Hz.

2. NON-REPRODUCTIBILITE DES MESURES

Afin d'assurer l'indépendance temporelle de nos séries de mesures, il faut qu'à chaque tour d'un des dépolis l'autre dépoli ait effectué plus d'un tour, de sorte qu'il n'y ait pas superposition exacte des deux dépolis. Plus précisément, l'écart des vitesses angulaires peut être chiffré : le déplacement relatif d'un dépoli par rapport à l'autre au bout d'un tour doit être supérieur au déplacement relatif des dépolis entre deux mesures consécutives. De sorte que la condition de non-reproductibilité s'écrit :

$$\Delta\omega \ . \ \frac{2\Pi}{\omega} > \omega \ . \ T$$

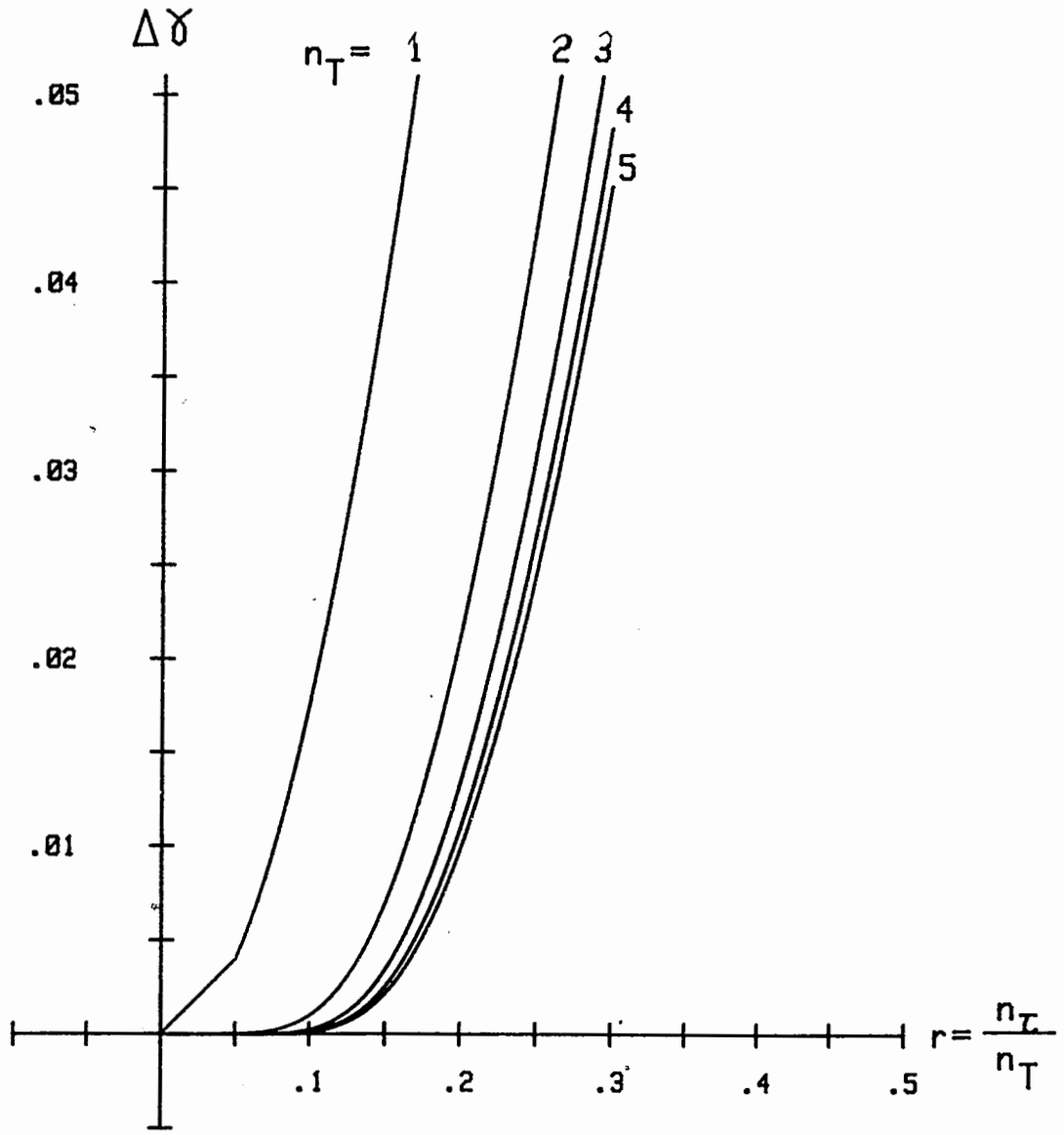


Figure 42 : Influence du filtre de la photodétection sur la mesure du facteur de corrélation temporelle pour différentes valeurs du paramètre n_τ (nombre de grains dont s'est déplacé le dépoli entre deux échantillons successifs).

où T est le temps séparant deux mesures.

La génération de tableaux de nombres aléatoires indépendants temporellement passe donc par la condition suivante avec le dispositif envisagé : $\frac{\Delta\omega}{\omega} > 1/N_t$ où N_t est le nombre de tableaux qui peuvent être générés indépendamment en un tour d'un des dépolis.

Par ailleurs, la périodicité du phénomène de diffusion due à la rotation des dépolis étant $2\Pi/\Delta\omega$, le genre de dispositif envisagé assure $\frac{N_t \cdot \omega}{\Delta\omega}$ générations de tableaux de nombres aléatoires à condition que $\Delta\omega/\omega > 1/N_t$. Cette dernière condition permet d'assurer aux tableaux de nombres aléatoires les mêmes statistiques temporelles à l'échelle d'un tour des diffuseurs qu'à l'échelle de deux générations successives.

Dans notre expérience, ω est de l'ordre de 1 tr/min, $\Delta\omega$ est de l'ordre de 10^{-3} tr/mn et N_t s'est avéré être de l'ordre 30 000 (facteur de corrélation temporel $\leqslant 10^{-3}$), assurant ainsi $30\ 10^6$ générations indépendantes de tableaux de nombres aléatoires.

3. RESULTATS

Nous avons effectué des mesures des facteurs de corrélation temporelle d'ordre n,m pour les valeurs de n et m égales à 1,2 et 4. Les résultats sont résumés sur les figures 43 et 44. Plus précisément, la figure 43 montre l'évolution du facteur de corrélation $\gamma_{11}(T)$ en fonction du temps T séparant deux acquisitions successives. La partie de gauche hachurée correspond au domaine de limite de validité de nos mesures c'est-à-dire aux fréquences 1/T pour lesquelles l'influence du filtrage introduit des perturbations supérieures à 10^{-3}.

La figure 44 montre, toujours en fonction du paramètre T l'évolution des facteurs de corrélation γ_{22} et γ_{42}. Le comportement général de leur évolution en fonction du temps d'échantillonnage est sensiblement identique à celui de γ_{11}.

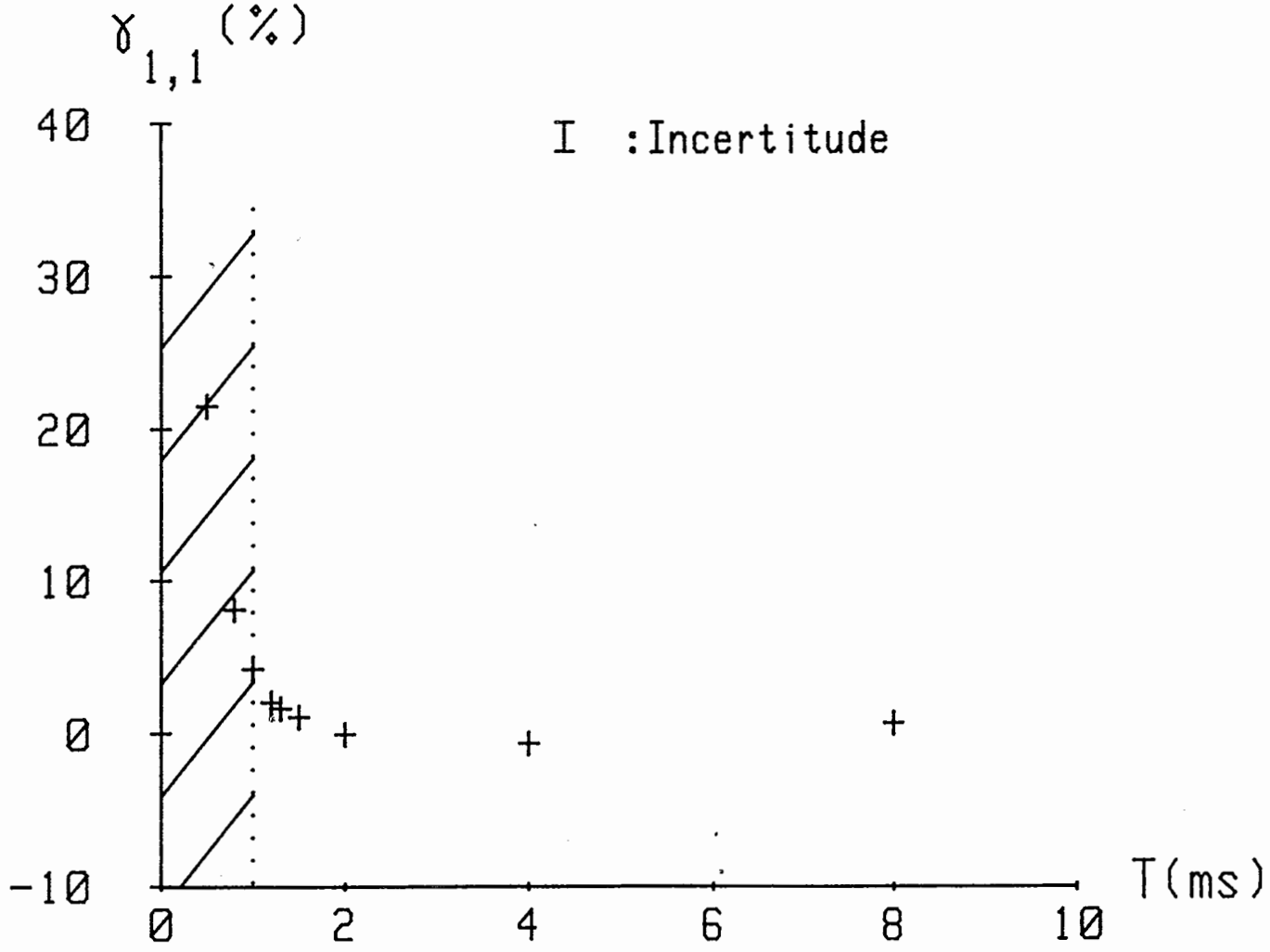


Figure 43 : Evolution du facteur de corrélation $\gamma_{1\,1}$ en fonction du temps T séparant deux mesures. La partie hachurée correspond à des incertitudes supérieures à celle présentée.

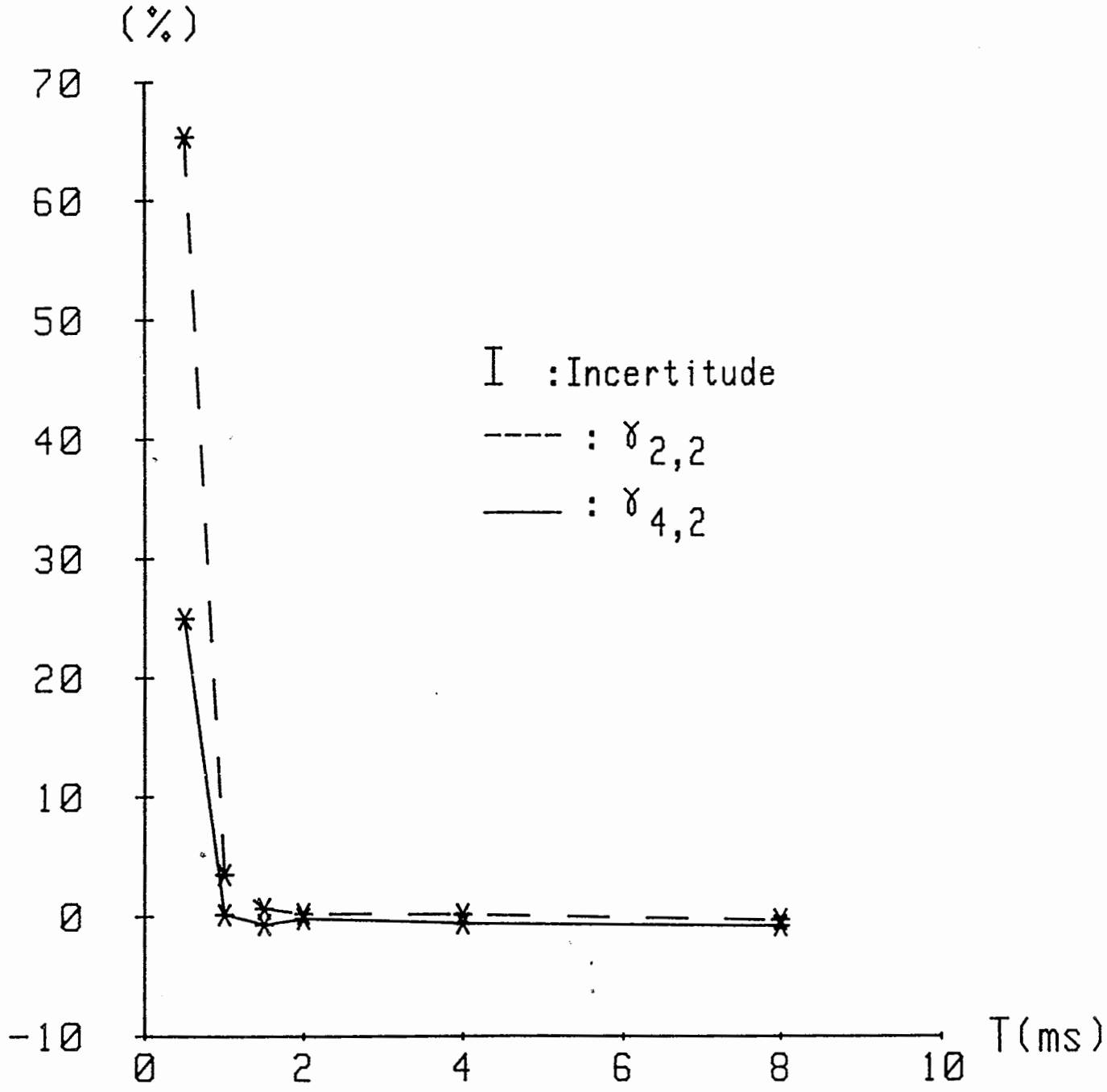


Figure 44 : Evolution des facteurs de corrélation d'ordre élevé $\gamma_{2,2}$ et $\gamma_{4,2}$ en fonction de T, intervalle de temps séparant deux acquisitions.

REMARQUES :

** La figure 43 permet d'obtenir une estimation de la taille des grains de dépoli élaborés dans le cadre du modèle gaussien (équation 35). En effet, pour T = 1 ms, le facteur de corrélation* γ_{11} *est de l'ordre de* $5\ 10^{-3}$. *La vitesse linéaire de chaque dépoli étant égale à* $2{,}1\ 10^{-3}\ ms^{-1}$, *la taille des grains du modèle gaussien peut être obtenue par l'équation 35. Tout calcul fait, g est de l'ordre de 2* μm.

** L'evaluation* des intervalles de confiances des figures 43 et44 *n'est pas simple dans le cas général. Cependant, pour les très faibles corrélations (cas considéré vis-à-vis de notre objectif d'indépendance), il peut être estimé simplement en suivant le raisonnement du paragraphe suivant en 2.b.2. Il pourrait être estimé de l'ordre de quelques* $1/\sqrt{N}$ *où N est le nombre de mesures effectuées pour estimer* $\gamma_{n,m}(T)$. *Nous avons effectué les mesures avec N variant entre* $6\ 10^6$ *et* 10^6 *assurant ainsi un intervalle de confiance de l'ordre de quelques* 10^{-3}. *Cette argumentation est d'ailleurs confortée par la bonne reproductibilité des mesures de la figure 43.*

4. CONCLUSION

Nous avons mis en évidence que le speckle optique permet la génération de nombres aléatoires temporellement indépendants. Ceci a été conforté par la mesure de facteurs de corrélation temporelle d'ordre élevé qui se sont tous avérés tendre rapidement vers zéro pour des intervalles de temps croissants séparant deux mesures.

Le mode opératoire envisagé permet la génération de quelque trente millions de tableaux aléatoires à une cadence de 1000 Hz et pour des vitesses de rotation des dépolis de l'ordre de un tour par minute.

L'indépendance temporelle constatée n'est en rien surprenante puisque la cause du phénomène aléatoire est différente entre deux instants suffisamment éloignés.

II . FACTEURS DE CORRELATION

Dans le paragraphe précédent, nous nous sommes intéressés à l'indépendance temporelle entre deux tableaux de nombres aléatoires. Dans ce paragraphe, nous allons nous pencher sur l'indépendance des nombres aléatoires entre deux ou trois photodétecteurs du plan de la rétine. Comme précédemment, nous avons testé les facteurs de corrélation entre deux photorécepteurs voisins. Comme cela a été défini dans la description du schéma expérimental, nous rappelons que la pupille carrée de côté a est inclinée de 45° par rapport aux photorécepteurs du plan d'observation.

1) CALCUL THEORIQUE DU FACTEUR DE CORRELATION D'ORDRE 1

Le facteur de corrélation d'ordre 1 entre deux photodiodes (indice 1 et 2) est donné par :

$$\gamma_{11} = \frac{\langle (I_1 - \langle I_1 \rangle)\ (I_2 - \langle I_2 \rangle) \rangle}{\sigma_1 \quad . \quad \sigma_2}$$

où σ_1 et σ_2 sont respectivement l'écart quadratique de l'énergie reçue par le photorécepteur 1 et 2. Si l'on suppose que $\langle I_1 \rangle = \langle I_2 \rangle \langle I \rangle$ (i.e. que le champ est uniforme pour les deux photocapteurs), le numérateur Nu de $\gamma_{1,1}$ se met sous la forme :

$$Nu = \frac{\langle I \rangle^2}{b^4} \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-b/2}^{b/2} \int_{L-b/2}^{L+b/2} \int_{-b/2}^{b/2} \mathrm{sinc}^2 \frac{(y_1 - x_1 - (y_2 - x_2))}{\sqrt{2}} \frac{a}{\lambda d}$$

$$\mathrm{sinc}^2 \frac{(y_1 + x_1 - (y_2 + x_2))}{\sqrt{2}} \frac{a}{\lambda d}$$

où L est la distance entre les deux photocapteurs (entre leur

centre) et le facteur sous l'intégrale est la corrélation entre deux points $A(x_1, y_1)$ et $B(x_2, y_2)$ donnée par un speckle dont la pupille est à 45° des axes x et y.

Le calcul de cette intégrale quadruple est fastidieux et est détaillé en annexe 2. Si l'on pose :

$m = \pi ab/\lambda d\sqrt{2}$ (rapport entre les tailles linéaires des photocapteurs et des grains de speckle)

$r = \pi aL/\lambda d\sqrt{2}$ (rapport entre la distance séparant deux photocapteurs et la taille d'un grain de speckle)

$$J_2(x) = \int_0^x \mathrm{sinc}^2\ \theta\ d\theta$$

le numérateur de γ_{11} se ramène à l'intégrale suivante :

$$Nu = \frac{\langle I\rangle^2}{4m^4} \int_0^m dx \left\{ \left[J^2(m-x+r) + J_2(m-x-r)\right]\ f(x,m,r) - \left[J_2(2m-x+r) + J_2(2m-x-r) - J_2(x+r) - J_2(x-r\right]\ g(x,r) \right\}$$

avec :

$$* \quad f(x,m,r) = (x-m)^2\ \left((\mathrm{sinc}^2(x+m+r) + \mathrm{sinc}^2(x+m-r)\right) + (x+m)^2\ (\mathrm{sinc}^2\ (m-x+r) + \mathrm{sinc}^2\ (m-x-r))$$

$$* \quad g(x\ ,\ r) = x^2\ \ (\mathrm{sinc}^2(x+r) + \mathrm{sinc}^2\ (x-r))$$

Le dénominateur De de γ s'en déduit alors très simplement en remarquant que pour r = 0, Nu est identique à De. En conséquence,

$$De = \frac{\langle I\rangle^2}{m^4} \int_0^m dx\ \left[J_2(m-x)\left((x-m)^2\ \mathrm{sinc}^2(x+m) + (x+m)^2\ \mathrm{sinc}^2(x-m)\right) - J_2(2m-x)\ \sin^2 x\right]$$

2) MESURES DU FACTEUR DE CORRELATION D'ORDRE 1

a) Valeurs des différents paramètres du montage:

Des mesures du facteur de corrélation γ_{11} ont été effectuées pour différentes valeurs de la distance L séparant deux photodiodes. L'expérience a été réalisée avec les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} a &= 0{,}53 \text{ mm} \\ \lambda &= 0{,}628 \ \mu\text{m} \\ d &= 1{,}62 \text{ m} \\ b &\sim 1{,}4 \text{ mm} \end{aligned} \qquad (42)$$

de sorte que le paramètre m est de l'ordre de 1,62.

Sur la valeur exacte de la taille des photocapteurs existe une incertitude. Comme celle-ci ne correspondait pas exactement à celle annoncée par le constructeur, nous l'avons une mesurée. Pour cela, nous avons étudié la réponse en tension donnée par la photodiode en fonction de l'emplacement d'un spot lumineux de 5 μm de diamètre. La figure (45) en illustre le résultat : Sur une surface d'environ 1,3 x 1,3 mm^2, la réponse de la photodiode est uniforme. La tension observée décroît ensuite progressivement pour donner sur la courbe en pointillés une réponse moitié et s'annuler enfin sur un contour (trait plein) donnant à la photodiode une surface sensible d'environ 1,53. Les effets de bords ainsi constatés nous ont contraints à définir pour l'étude des facteurs de corrélation une taille "moyenne" que nous avons prise égale à 1,4 x 1,4 mm^2.

b) Intervalle de confiance du facteur de corrélation

Pour chiffrer la confiance dont nous pouvons créditer nos mesures de facteurs de corrélation, nous avons calculé leur variance . Si l'on note $\mu_{m,n}$ le moment croisé d'ordre m.n défini sur la population :

$$\mu_{mn} = \left\langle (I_1 - \langle I_1 \rangle)^m \ . \ (I_2 - \langle I_2 \rangle)^n \right\rangle \qquad (43)$$

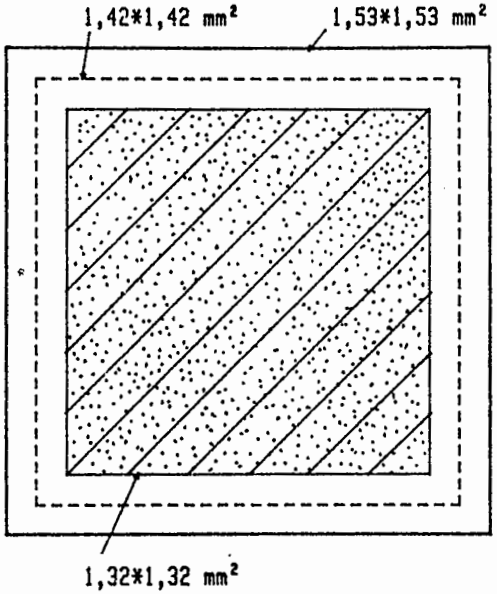


Figure 45 : Réponse en tension V des photocapteurs.
- Surface hachurée : réponse uniforme $V = V_{max}$
- Traits pointillés : $V = V_{max}/2$
- Traits pleins : délimitation de la surface sensible

dans la limite où le nombre d'observation tend vers l'infini, la variance du coefficient de corrélation s'exprime simplement [75]:

$$\mathrm{var}(\gamma) = \frac{\rho^2}{N}\left\{\frac{\mu_{22}}{\mu_{11}^2} + \frac{1}{4}\left(\frac{\mu_{40}}{\mu_{20}^2} + \frac{\mu_{04}}{\mu_{02}^2} + \frac{2\mu_{22}}{\mu_{20}\mu_{02}}\right) - \left(\frac{\mu_{31}}{\mu_{11}\mu_{20}} + \frac{\mu_{13}}{\mu_{11}\mu_{02}}\right)\right\} \quad (44)$$

où N est le nombre d'observation et $\rho = \mu_{11}/\sqrt{\mu_{20}\mu_{02}}$ est la valeur moyenne sur la population de la valeur estimée γ.

Le calcul des différents moments croisés serait certainement très fastidieux (voir annexe 2). Cependant, une estimation rapide de ces coefficients peut être obtenue en prenant comme loi de probabilité du speckle celle qui correspond au cas limite de récepteurs ponctuels (taille des grains de speckle très supérieure à celle des photorécepteurs) très éloignés (indépendance spatiale). Sous cette hypothèse, la probabilité que le photorécepteur 1 (resp. 2) reçoive l'intensité I_1 (resp. I_2) s'écrit :

$$\rho(I_1, I_2) = \frac{1}{\langle I\rangle^2} \exp - \frac{I_1 + I_2}{\langle I\rangle} \quad (45)$$

Cette densité de probabilité entraîne une simplification considérable pour les calculs des μ_{mn}, puisque dans ces conditions :

$$\mu_{mn} = \mu_{nm} = \mu_{m0} \cdot \mu_{0n}$$

Cependant, l'approximation dans le choix de la densité de probabilité (équation (45)), entraîne l'indépendance des variables I_1 et I_2 et donc la nullité de la variance de $\gamma(\rho=0)$. De façon à pallier cette difficulté, une estimation peut être obtenue en confondant ρ et sa valeur estimée γ. Dans ces conditions, on obtient :

$$\mathrm{var}(\gamma) = \frac{1}{N} + \frac{\gamma^2}{2N}\left(\frac{\mu_{40}}{\mu_{20}^2} + 1\right) - \frac{2}{N}\frac{\mu_{30}}{\mu_{20}^3} \cdot \mu_{10}^2 \quad (46)$$

Le calcul des moments se fait alors très simplement puisque:

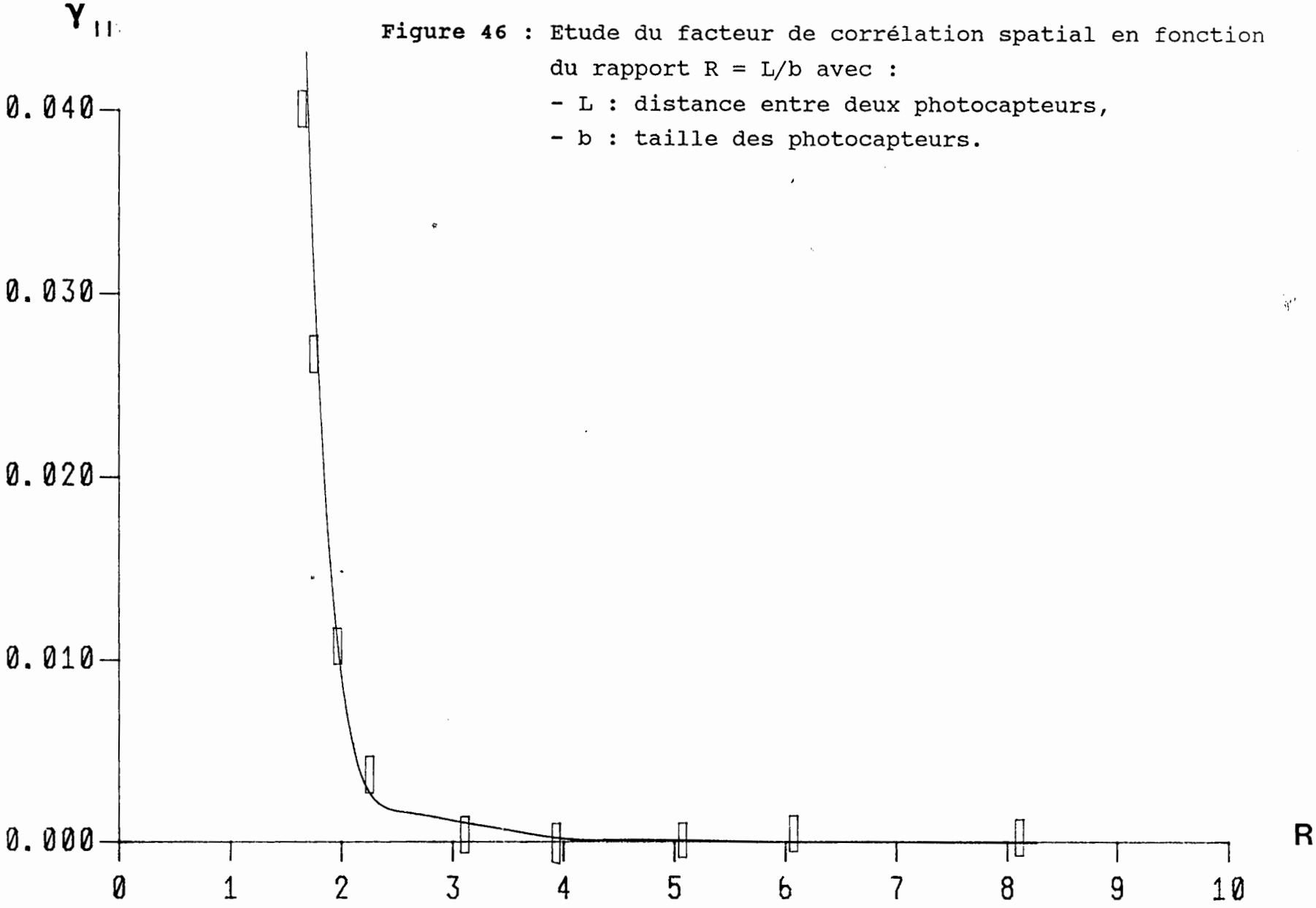


Figure 46 : Etude du facteur de corrélation spatial en fonction du rapport R = L/b avec :
- L : distance entre deux photocapteurs,
- b : taille des photocapteurs.

$$\mu_{n0} = \int_0^\infty (I-\langle I\rangle)^n \exp - \frac{I}{\langle I\rangle} \frac{dI}{\langle I\rangle}$$

$$= n\,!\,\langle I\rangle^n \sum_{\rho=0}^{n} \frac{(-1)^\rho}{\rho\,!}$$

Dans ces conditions, l'écart type de la variable estimée γ se calcule aisément et est donné par :

$$\sigma(\gamma) = \sqrt{\frac{1 + 5\gamma^2}{N}} \qquad (47)$$

L'expression 37 montre que pour de faibles corrélations, l'écart type du facteur de corrélation γ est au second ordre près donné par $1/\sqrt{N}$.

c) Résultat expérimental

La figure 46 montre l'évolution du facteur de corrélation γ en fonction du rapport R = L/b. Les points expérimentaux sont entourés de leur rectangle d'incertitude. Selon l'axe horizontal, l'incertitude vient essentiellement de celle due aux effets de bord des photocapteurs qui ne permettent pas une définition exacte de leur taille. Celle-ci est très sensible notamment pour les R faibles. L'estimation du facteur γ ayant été pour chaque mesure effectuée sur $N = 3\ 10^6$ échantilllons indépendants (le facteur de corrélation temporel étant de l'ordre de 2 à $3\ 10^{-3}$), la barre d'erreur verticale (qui est l'écart type de la valeur estimée γ) est de l'ordre de 10^{-3} (voir équation 47).

La courbe théorique en trait continu a été obtenue par un calcul à l'ordinateur des intégrales des équations (40) et (41) pour le jeu de paramètres des équations (42).

Ces résultats font apparaître une bonne concordance entre les points expérimentaux et la courbe théorique. En outre, des facteurs de corrélation inférieurs à un pour cent sont facilement accessibles dès que le rapport R dépasse deux. Pour R > 3, le facteur de corrélation spatial devient inférieur à un pour mille.

3. FACTEURS DE CORRELATION D'ORDRE ELEVE

Afin de caractériser davantage l'indépendance des deux photorécepteurs, nous avons, comme pour les corrélations temporelles, mesuré les facteurs de corrélation d'ordre élevé. Ceux-ci sont définis comme suit :

$$\gamma_{n,m} = \frac{\left\langle \left(I_1^n - \langle I_1^n \rangle\right) \left(I_2^m - \langle I_2^m \rangle\right) \right\rangle}{\sigma_{I_1^n} \quad \sigma_{I_2^m}} \qquad (48)$$

Tout comme précédemment, la variance de ces valeurs estimées peut être obtenue à condition de remplacer dans le calcul précédent I_1 par I_1^n et I_2 par I_2^m. On introduit alors des moments croisés généralisés d'ordre m.n définis sur la population par :

$$\mu_{p\,q}^{m\,n} = \left\langle \left(I_1^m - \langle I_1^m \rangle\right)^p \left(I_2^n - \langle I_2^n \rangle\right)^q \right\rangle$$

Moyennant l'hypothèse simplificatrice sur la densité de probabilité de la loi jointe (équation 45), ces coefficients peuvent être déduits du calcul d'intégrales du type :

$$\mu_{p\,q}^{m\,n} = \frac{1}{\langle I \rangle^2} \int_0^\infty \left(I^m - \langle I^m \rangle\right)^p \exp - \frac{I}{\langle I \rangle}\, dI \int_0^\infty \left(I^n - \langle I^n \rangle\right)^p \exp - \frac{I}{\langle I \rangle}\, dI$$

On peut alors montrer que les écarts types augmentent avec l'ordre du facteur de corrélation et qu'ils sont donnés par le tableau suivant :

n	m	θ
2	2	45
4	2	3326
4	4	6585

où θ est défini par : $\sigma(\gamma_{n,m}) = \sqrt{\dfrac{1 + \theta\gamma_{n\,m}^2}{N}}$.

Ce tableau montre que tant que les facteurs de corrélation restent inférieurs à un pour cent, l'écart type est de l'ordre de $1/\sqrt{N}$.

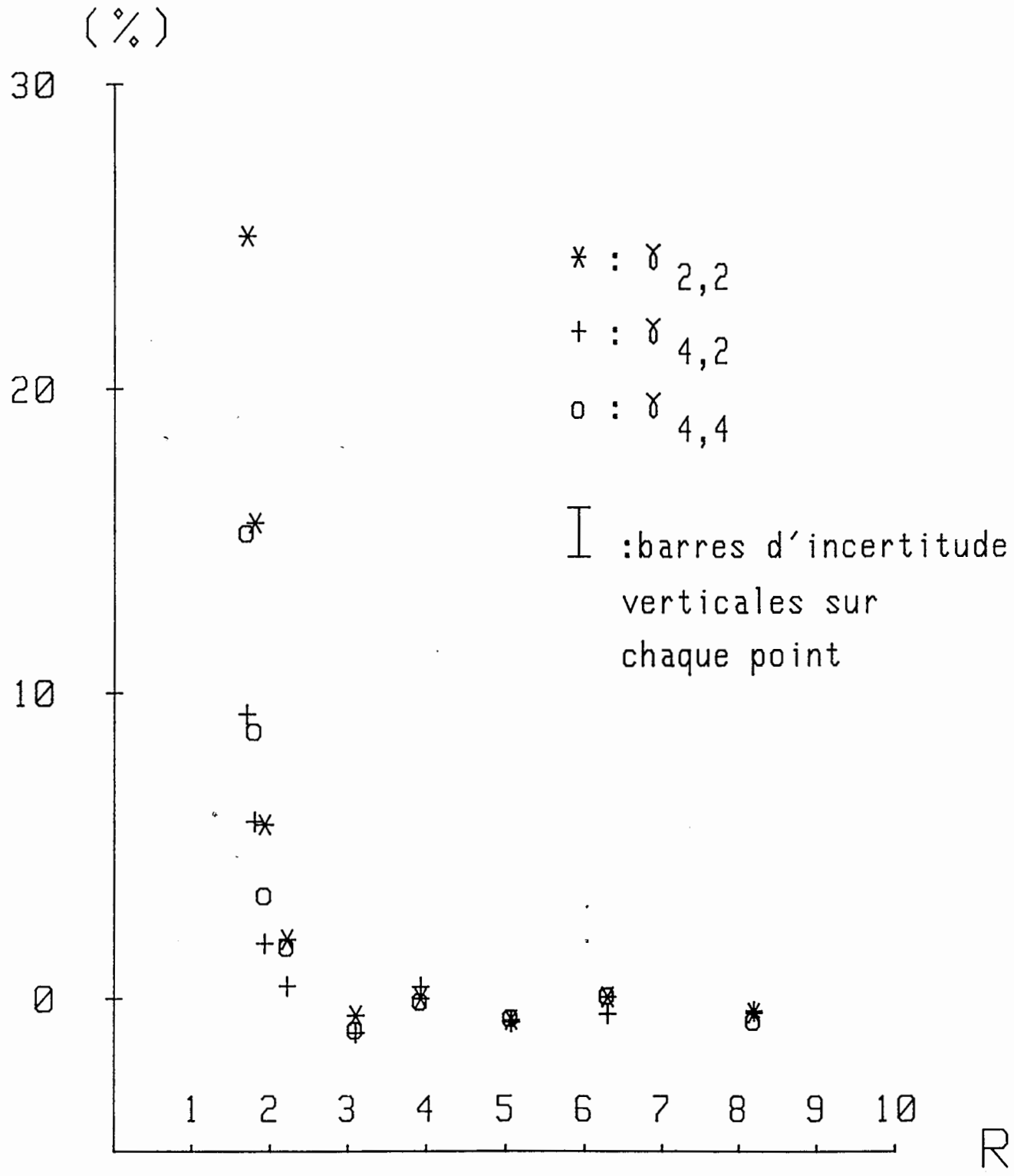


Figure 47 : Evolution des facteurs de corrélation spatiale d'ordre élevé $\gamma_{n,m}$ en fonction du paramètre R = L/b.

La figure 47 montre pour les mêmes échantillons que précédemment la dépendance des facteurs de corrélation γ_{22}, γ_{42} et γ_{44} en fonction du paramètre R = L/b.

Il est à noter que, au fur et à mesure que l'ordre des facteurs de corrélation augmente, leur valeur respective diminue. Notamment, dès que R est supérieur à 3, des coefficients de corrélation de l'ordre de 10^{-3} ont été obtenus tendant à confirmer l'hypothèse d'une réelle indépendance des photorécepteurs distants d'au moins trois fois leur taille.

Nous n'avons pas effectué de comparaison avec les courbes théoriques car celles-ci sont fastidieuses à calculer (voir annexe II.)

III. TESTS D'INDEPENDANCE SPATIALE ET CONCLUSION

Les résultats obtenus pour les facteurs de corrélation temporelle et spatiale étant prometteurs vis-à-vis des indépendances des tableaux de nombres aléatoires, nous avons voulu chiffrer plus en détail ces indépendances.

L'interprétation de la formation du speckle optique donnée en début de seconde partie nous ayant permis d'appréhender intuitivement l'indépendance temporelle, nous nous sommes davantage penchés sur l'indépendance spatiale. Plus précisément, nous avons étudié la loi de probabilité jointe $p(I_1, I_2)$ où I_1 (resp. I_2) est l'énergie arrivant sur le photocapteur 1 (resp. 2) et notamment nous l'avons comparée à la loi de probabilité produit $p(I_1) \cdot p(I_2)$.

1. RAPPEL SUR LE TEST DU χ^2

Le test du χ^2 [76] est sans aucun doute le test statistique le plus répandu. Il permet la comparaison d'une loi de pro-

babilité observée avec une autre attendue. Nous l'avons utilisé comme test d'indépendance. Pour cela, nous avons tout d'abord binarisé par seuillage le signal arrivant sur les photodiodes, celui-ci prenant les valeurs zéro ou un avec une probabilité un demi. Sur chaque photocapteur, nous avons enregistré successivement N valeurs binaires. Ces valeurs nous ont alors permis de construire les lois de probabilité jointe et produit. Plus précisément, nous avons calculé le nombre de fois que le photocapteur 1 (resp. 2) a eu la valeur α ($\alpha = 0$ ou 1) noté I_1^α (resp. I_2^α). Nous avons également calculé le nombre de fois que les photocapteurs 1 et 2 ont pris simultanément les valeurs α et β ($\beta = 0$ ou 1) noté $I^{\alpha\beta}$. Dans le cas où il y a indépendance spatiale, on s'attend à ce que :

$$\forall \alpha,\beta \ \langle I^{\alpha\beta} \rangle = I_1^\alpha \ I_2^\beta / N$$

De sorte que la variable V définie par :

$$V = \sum_{\alpha,\beta} \frac{\left(I^{\alpha\beta} - I_1^\alpha \ I_2^\beta/N\right)^2}{I_1^\alpha \ I_2^\beta/N}$$

chiffre très certainement l'indépendance des deux photocapteurs. En outre, la loi de probabilité de V obéit à une loi dite du χ^2. Son nombre de degrés de liberté peut être vu comme le nombre de variables indépendantes du χ^2. Ces variables sont au nombre de quatre, les $I^{\alpha\beta}$. Cependant, elles sont liées par trois relations:

$$\begin{cases} \sum_{\alpha,\beta} I^{\alpha\beta} = N \\ \sum_{\alpha} I^{\alpha\beta} = I_2^\beta \\ \sum_{\beta} I^{\alpha\beta} = I_1^\alpha \end{cases}$$

Le nombre de degrés de liberté est donc dans de cas 4 - 3 = 1.

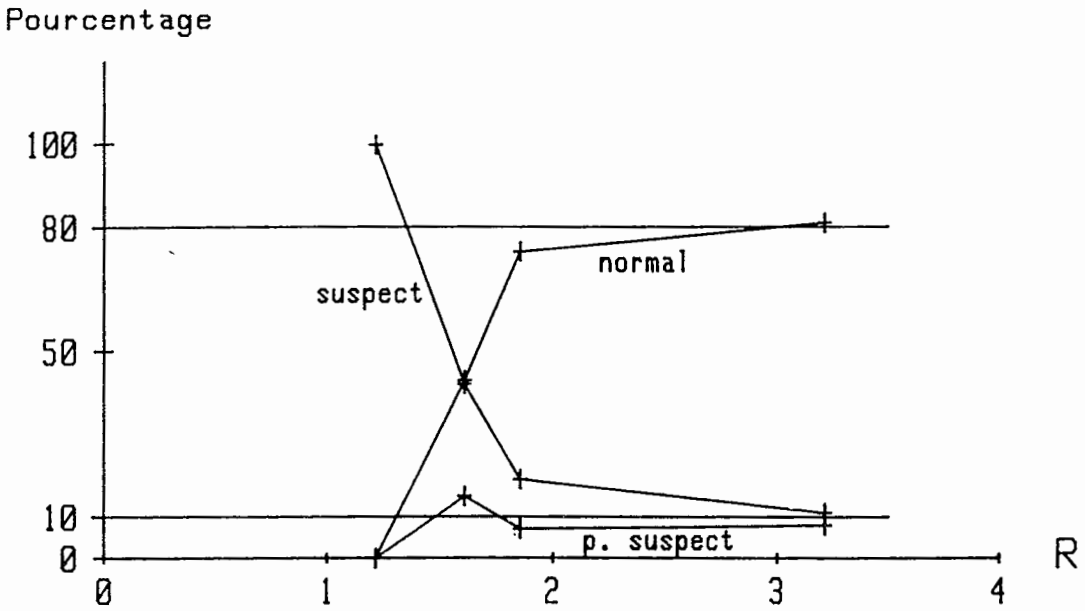


Figure 48 : Test d'indépendance du χ^2 entre deux photocapteurs. Evolution des χ^2 suspects, presque suspects et normaux en fonction de R = L/b (N = 1000).

2. RESULTATS

Si l'on note $V_{x\%}$ la valeur du χ^2 telle que :

$$\int_{V_{x\%}}^{\infty} p(V)\ dV = x\%$$

on a l'habitude de définir :

- les χ^2 <u>suspects</u> dont la valeur est soit supérieure à $V_{95\%}$ soit inférieure à $V_{5\%}$. Ils doivent se produire en moyenne une fois sur dix si les statistiques sont bien celles escomptées;

- les χ^2 <u>presque suspects</u> dont la valeur appartient à l'intervalle $[V_{5\%}, V_{10\%}] \cup [V_{90\%}, V_{95\%}]$. Ils se produisent en moyenne une fois sur dix. Les autres valeurs du χ^2 sont appelées <u>normales</u>. Elles correspondent à 80 % des cas.

La figure 48 montre l'évolution des valeurs du χ^2 observées en fonction du paramètre R. Pour chaque valeur de R, cent tests ont été réalisés et les résultats suspects, presque suspects ou normaux, ont été représentés sur la figure 48. Les facteurs de corrélation temporelle étaient dans les conditions des tests tous inférieurs à quelques pour mille assurant ainsi l'indépendance temporelle des séries de mesures.

Pour R légèrement supérieur à un, cent résultats suspects sont obtenus. Avec R croissant, les valeurs du χ^2 observées tendent vers leurs valeurs attendues en moyenne. Notamment, pour R supérieur à deux, le résultat du test d'indépendance peut être considéré comme positif.

En outre, ce test a été effectué pour différentes valeurs du nombre d'échantillons N. Aucune anomalie n'a été constatée pour N = 100, 1000 et 10 000.

Nous avons également fait un test d'indépendance avec trois photocapteurs. Ces-derniers étaient disposés sur trois coins d'un carré. Dans ce cas, le nombre de degrés de liberté est égal à

$2^3 - 4 = 4$. Des valeurs typiques des χ^2 observées sont résumées dans le tableau suivant pour différentes valeurs de N :

	% de suspects	% de p. suspects	% de normaux
N = 100	8	9	83
N = 1000	9	10	81
N = 10000	7	14	79

Ces valeurs sont tout à fait en accord avec celles attendues. Elles ont été obtenues avec R = 10 (le dispositif expérimental ne permettant pas de descendre en-dessous à cause du blindage des photocapteurs).

3. CONCLUSION

En ce qui concerne l'indépendance spatiale entre deux photocapteurs, le test du χ^2 s'est avéré beaucoup plus sensible que la mesure des facteurs de corrélation. Alors que pour R = 1,2 cent pour cent des résultats sont suspects, pour R = 1,8 le test du est réussi. Ces deux valeurs encadrent la première valeur annulant la fonction d'autocorrélation spatiale qui est pour $R = \frac{\lambda d}{ab} \sim 1,4$, montrant bien qu'elle est un paramètre pertinent.

Les mesures des facteurs de corrélation temporelle se sont avérées révéler des résultats très faibles tendant bien à montrer l'indépendance temporelle. Celle-ci est d'autant plus intuitive que le phénomène engendrant le speckle change dans le temps.

En conclusion, nous pouvons penser que d'un point de vue purement statistique, le speckle semble bien être approprié à la génération de tableaux de nombres aléatoires indépendants spatialement et temporellement.

CHAPITRE IX

DEFINITION D'UN SCHEMA DE PRINCIPE POUR LA REALISATION D'UN PROTOTYPE

Le chapitre précédent a permis de dégager les critères d'indépendance des tableaux de nombres aléatoires. Tout en prenant en considération l'ensemble de ces résultats, nous allons dans ce chapitre tout d'abord proposer un mode expérimental légèrement différent mais plus adapté à la réalisation d'un prototype fiable.

Dans une seconde étape, nous allons étudier la réalisation d'une loi pile ou face. Notamment, nous allons chiffrer le biais introduit sur cette loi de probabilité par l'ensemble des fluctuations (ou dérives) des différents constituants tant optiques qu'électroniques du générateur de tableaux de nombres aléatoires. De façon globale, les différentes fluctuations vont être classées en deux types : celles qui modifient la densité de probabilité de l'intensité du speckle et celles qui modifient le seuil de binarisation permettant l'obtention d'une loi pile ou face. Une approche théorique va permettre d'unifier ces deux types de biais et surtout va permettre de définir l'influence du paramètre M sur la précision que l'on peut espérer sur la loi pile ou face. Par la suite, une étude systématique fondée sur des observations expérimentales permettra de chiffrer l'importance des différents biais constatés.

Dans une troisième étape, une étude énergétique prenant en compte l'ensemble des conclusions précédentes permettra d'estimer la puissance de la source nécessaire à la génération microseconde de tableaux de nombres aléatoires.

Une brève discussion nous permettra ensuite de faire la synthèse des différents résultats obtenus et de dégager les grandes lignes d'un générateur de nombres aléatoires utilisant le speckle optique. Cette synthèse sera illustrée par la génération d'une loi uniforme à partir d'une loi pile ou face.

En dernier lieu, nous aborderons une autre méthode de génération de nombres aléatoires binaires. Quelques résultats de tests statistiques d'indépendance seront discutés dans le cadre du modèle proposé.

I. DEFINITION DU SCHEMA GLOBAL D'UN PROTOTYPE DE GENERATEUR DE TABLEAUX DE NOMBRES ALEATOIRES

Dans ce paragraphe, nous allons rappeler les paramètres essentiels qui permettent aux tableaux de nombres aléatoires d'assurer les critères forts d'indépendance temporelle et spatiale. Nous pourrons ensuite proposer un nouveau montage dont on dégagera l'adéquation à la réalisation d'un prototype fiable et compact.

Les résultats obtenus ont montré que :

* l'indépendance spatiale s'interprète directement à partir de la taille des grains du speckle $\lambda d/a$ et à partir de la distance L séparant deux photocapteurs. Plus précisément, celle-ci est acquise dès que :

$$L > \text{quelques } \lambda d/a \qquad (49)$$

* l'indépendance temporelle, dans le modèle gaussien que nous avons développé, est directement fonction du paramètre $\frac{vT}{g}$. Elle peut être obtenue dès que :

$$vT > \text{quelques } g. \qquad (50)$$

Ces deux équations (49) et (50) sont très importantes. En effet, elles permettent à partir du montage de validation précédemment développé, de prédire avec certitude les caractéristiques d'un prototype de générateur de nombres aléatoires. Par exemple, un ordre de grandeur des facteurs de corrélation temporelle peut être obtenu à n'importe quelle fréquence à condition que la rotation des dépolis maintienne le produit vT constant. Etant donné les résultats des figures 43 et 44, l'indépendance temporelle à 1 MHz peut être obtenue avec des vitesses angulaires de rotation de l'ordre de 1000 tours par minute pour un rayon de 2 cm. De même, si l'on réduit la taille des photorécepteurs d'un certain facteur d'échelle, l'équation (49) à a et λ fixés est toujours vérifiée à condition de réduire d du même facteur. Pour la rétine de

l'I.E.F., la taille des photocapteurs est de l'ordre de 50 μm alors que celle utilisée dans le montage de validation est de 1,4 mm. En conséquence, des résultats similaires à ceux des figures 46 et 47 pourraient être obtenus en réduisant d d'un facteur 30, l'amenant ainsi à quelques centimètres.

Cependant, les critères d'indépendance ne sont pas les seuls importants pour la réalisation d'un générateur de nombres aléatoires. Afin d'assurer au prototype une bonne fiabilité, nous avons pensé supprimer le diaphragme carré. En effet, à des vitesses de l'ordre de mille tours par minute, la proximité nécessaire entre les dépolis et le diaphragme devient problématique. La figure 49 montre le schéma global que nous proposons. La lentille permet d'ajuster continuement (variation de h) la taille de l'impact du faiceau lumineux sur les surfaces diffusantes permettant ainsi de faire varier la taille des grains de speckle.

Ce nouveau montage présente les mêmes comportements que celui comprenant le diaphragme carré. Les conditions d'indépendance (équations 49 et 50) restent identiques en interprétant le paramètre a comme une dimension caractéristique de la surface éclairée des dépolis. La figure 50 montre les résultats d'un test du χ^2 entre deux photocapteurs (d = 145 cm). Ces résultats sont tout à fait comparables à ceux obtenus préalablement, assurant une indépendance pour R > 2.

En outre, ce nouveau schéma expérimental présente un avantage supplémentaire. L'absence de diaphragme est favorable au bilan d'énergie en augmentant le rapport $\langle I \rangle / \mathcal{P}$ entre la valeur moyenne de l'intensité du speckle observé et la puissance de la source. Nous aurons l'occasion de revenir plus en détail sur cet aspect du problème dans les paragraphes suivants. Par contre, les calculs des corrélations deviennent difficiles car il est délicat de modéliser l'éclairement à la sortie du second dépoli.

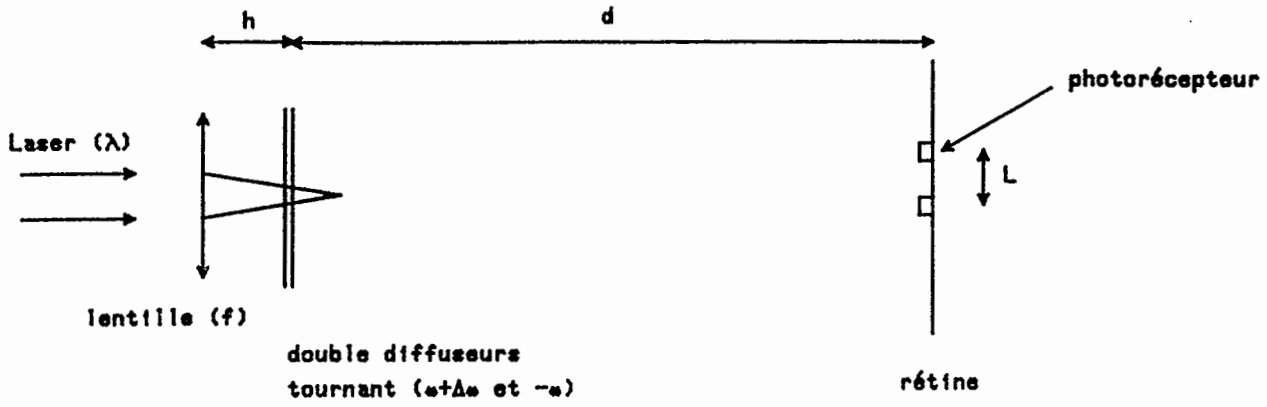


Figure 49 : Schéma expérimental proposé pour le générateur de nombres aléatoires. La lentille permet un réglage continu de la taille de l'impact lumineux sur les surfaces diffusantes.

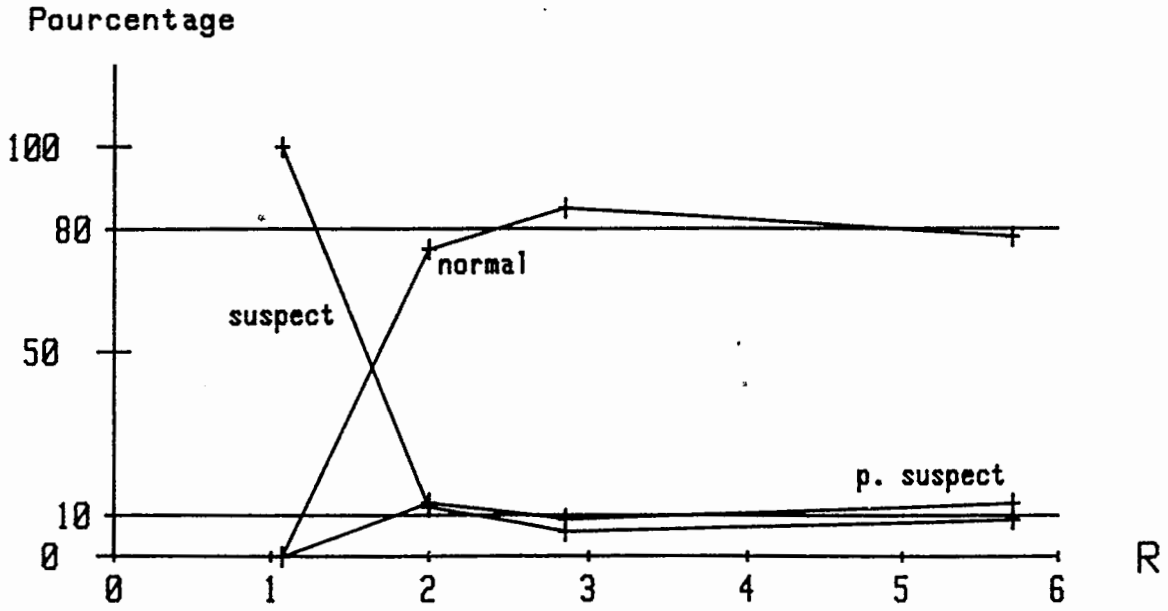


Figure 50 : Résultats du test du χ^2 entre deux photocapteurs voisins en fonction de R = L/b.
Le paramètre $\mathcal{M}$ vaut 2.

II. INFLUENCE DU PARAMETRE SUR LA PRECISION ACCESSIBLE SUR UNE LOI PILE OU FACE

Dans ce paragraphe, nous allons étudier le biais introduit par les fluctuations ou les dérives des différents composants optiques et électroniques sur la loi de probabilité pile ou face créée par le générateur de nombres aléatoires.

1. APPROCHE THEORIQUE DU PROBLEME

Supposons que dans des conditions expérimentales données, la chute de tension observée aux bornes d'un quelconque des photorécepteurs ait une densité de probabilité p(V). Cette dernière est fonction d'un ensemble de paramètres soumis à des dérives (ou fluctuations) spatiales et temporelles. Par exemple, p(V) est dépendant de la sensibilité du photocapteur considéré, de sa partie électronique introduisant un seuil pour la loi pile ou face, de la puissance du laser à l'instant t ... Tous ces paramètres ne sont constants ni dans le temps, ni dans l'espace sur l'ensemble de la rétine : du fait des dérives thermiques, des défauts de fabrication, la densité de probabilité p(V) présente des fluctuations.

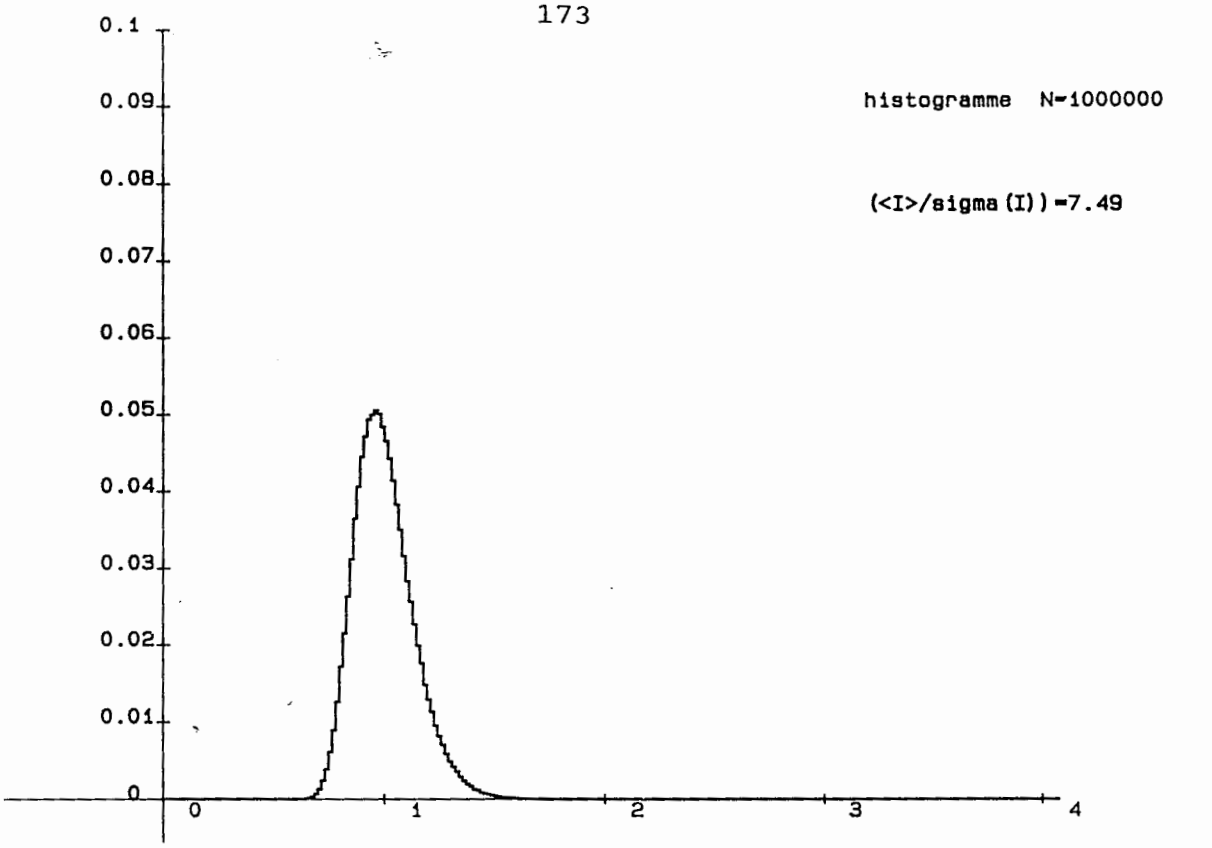
Le but est pourtant de créer une loi de pile ou face, c'est-à-dire de définir un V_0 tel que :

$$\int_{-\infty}^{V_0} p(V)\ dV = 1/2$$

Pour un processeur élémentaire quelconque, le biais B introduit sur la loi de pile ou face peut s'écrire :

$$\left| \int_{-\infty}^{V_0 + \Delta V_0} (p(V) + \Delta p)dV - \int_{-\infty}^{V_0} p(V)dV \right|$$

où ΔV_0 est une valeur caractéristique des fluctuations du seuil et Δp est l'écart de densité de probabilité par rapport à la densité de probabilité attendue.



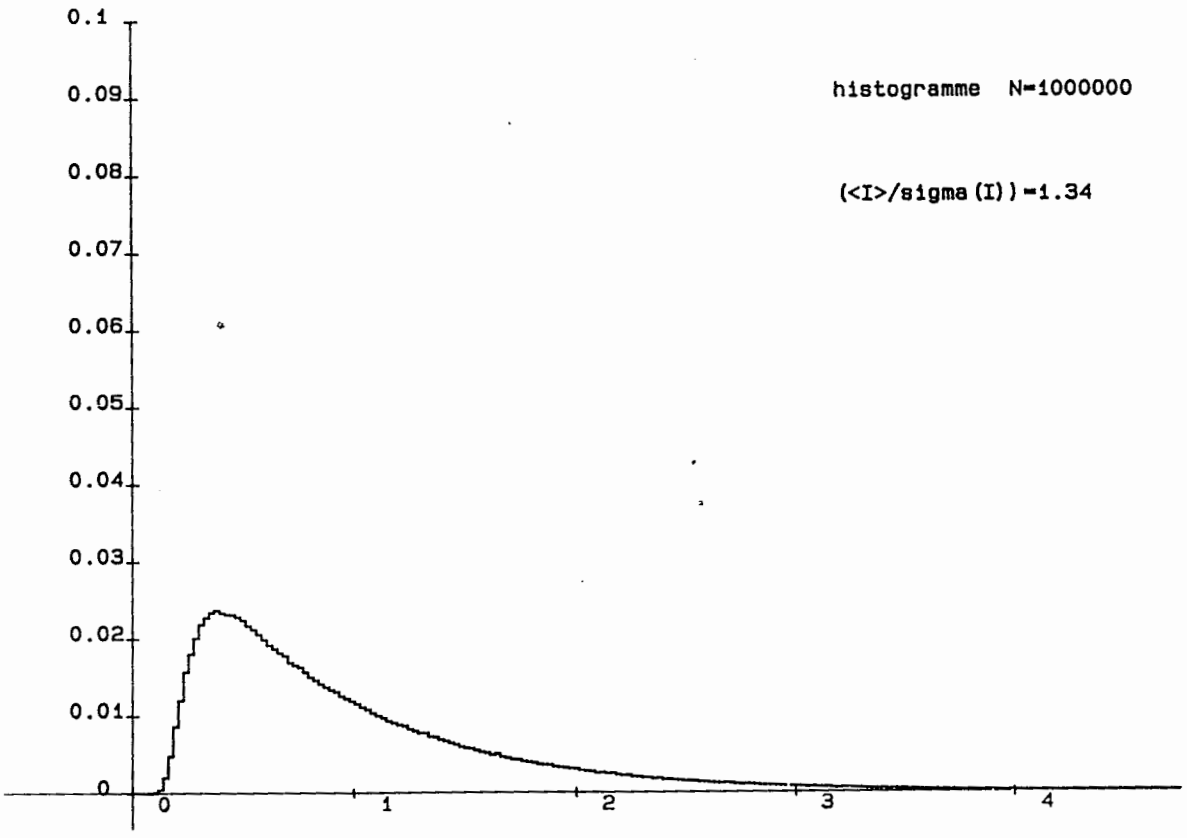


Figure 51 : Deux exemples caractéristiques de densités de probabilités obtenues avec le montage de la figure 49. (d = 145 cm).

Le terme $p(V) + \Delta p$ peut être vu comme le premier terme d'un développement de Taylor de $p(V + \Delta V_1)$ dans la limite des faibles fluctuations. De sorte qu'en posant $V' = V + \Delta V_1$, le biais prend la forme générique suivante :

$$\left| \int_{-\infty}^{V_0 + \Delta V_0 + \Delta V_1} p(V')\,dV' - \int_{-\infty}^{V_0} p(V)\,dV \right| \qquad (51)$$

La question est maintenant de savoir si la façon de générer le speckle optique ne peut pas avoir une influence sur le biais de la loi pile ou face.

D'un point de vue optique, la loi pile ou face est générée à partir d'un seuillage sur la densité de probabilité P(I). Le biais est alors introduit par les fluctuations du seuil s. On note celle-ci Δs, l'équivalent de $\Delta V_0 + \Delta V_1$. Dans ces conditions, minimiser le biais revient à minimiser l'expression :

$$\left| \int_{-\infty}^{s + \Delta s} P(I)\,dI - \int_{-\infty}^{s} P(I)\,dI \right| \qquad (52)$$

Si $\Delta s << s$, au premier ordre, le biais est de l'ordre de $\Delta s.\ p(s)$ et est donc d'autant plus faible que p(s) l'est. La densité de probabilité étant normalisée, intuitivement, les faibles biais sont obtenus pour des densités de probabilités P(I) larges, autrement dit pour des densités de probabilités présentant des valeurs de $\mathcal{M}^{1/2} = \langle I \rangle / \sigma(I)$ faibles. La figure 51 montre deux histogrammes différents obtenus à partir du montage de la figure 49. Les différentes valeurs du paramètre $\langle I \rangle / \sigma(I)$ ont été obtenues en déplaçant la lentille par rapport au plan des dépolis. Il apparaît clairement que le biais introduit par les dérives du seuil est moins important dans le cas de la figure du bas que dans le cas de celle du haut.

2. ETUDE DE L'INFLUENCE DES FLUCTUATIONS DU SEUIL SUR LA PRECISION DE LA LOI DU PILE OU FACE

Afin de chiffrer les perturbations induites par les fluctuations du seuil, nous avons pour différentes valeurs du paramètre

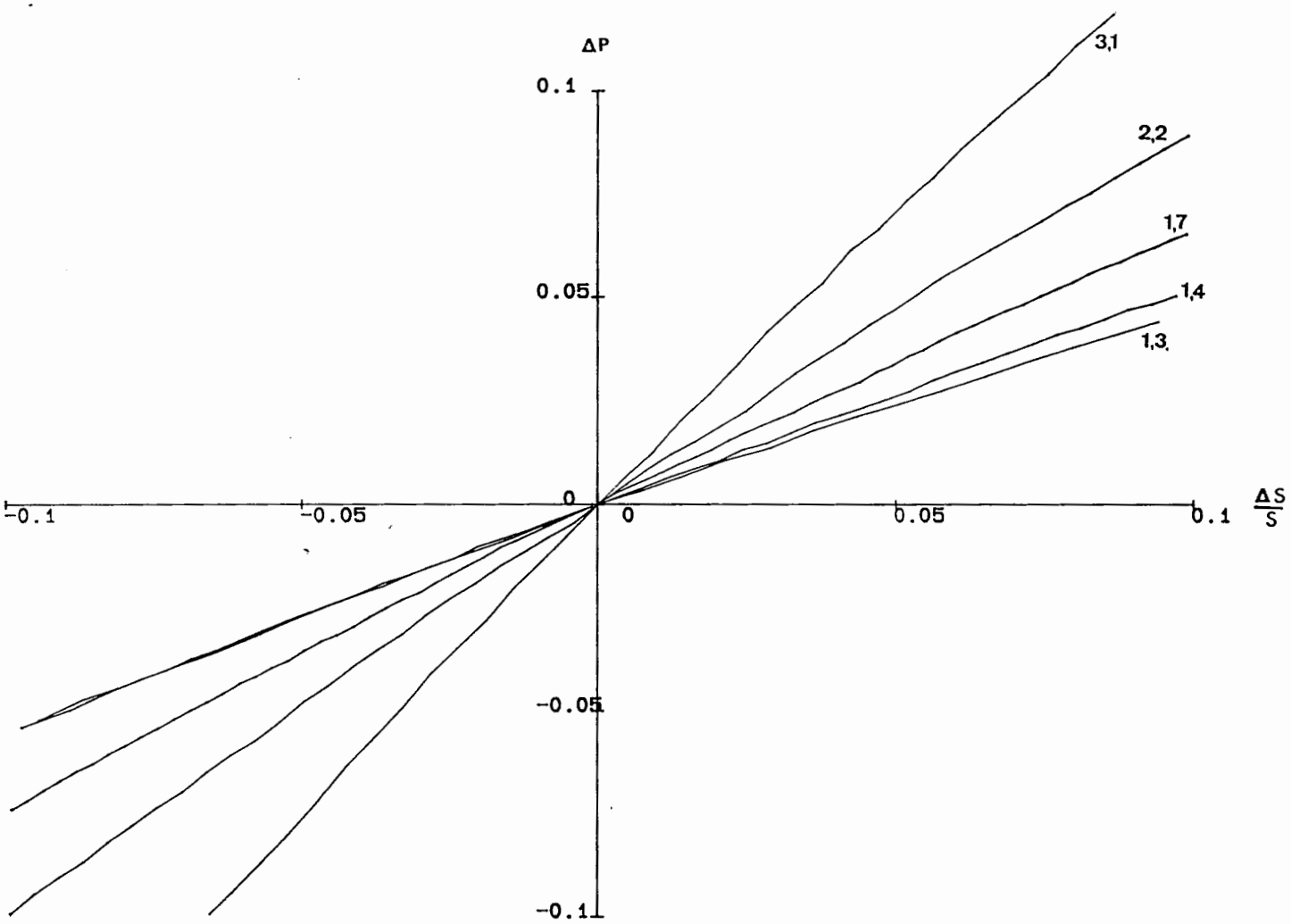


Figure 52 : Evolution du biais ΔP introduit sur la loi pile ou face par les fluctuations du seuil Δs pour différentes valeurs de $\langle I \rangle / \sigma(I)$ (valeurs expérimentales).

$\mathcal{M}^{1/2}$, étudié les écarts à la loi pile ou face. A partir d'un histogramme obtenu dans certaines conditions expérimentales (d = 145 cm, h fixé), nous avons calculé l'écart ΔP induit par un écart Δs du seuil. La figure 52 montre l'écart ΔP en fonction de l'erreur relative $\Delta s/s$. Notamment, il est clair que ΔP croît avec le rapport $\langle I \rangle / \sigma(I)$ à $\Delta s/s$ fixé. Par exemple, il est possible d'obtenir ($\mathcal{M} \sim 1,7$) un biais ΔP inférieur à 0,025 sur P (P=.5) tant que l'erreur relative sur le seuil est plus petite que 5 %, qui correspond à un biais relatif égal à l'erreur relative sur le seuil :

$$\text{pour } \langle I \rangle / \sigma(I) = 1,3 \qquad \Delta s/s \sim \Delta P/P \tag{53}$$

Il est intéressant d'envisager le cas limite où la dimension des photorécepteurs est très petite devant celle des grains de speckle. Dans ce cas, il est possible d'analyser théoriquement le biais ΔP en fonction de $\Delta s/s$ puisque la densité de probabilité est exponentielle (équation 32). Dans cette hypothèse, la valeur du seuil est $s = \langle I \rangle \mathrm{Ln}2$. Au premier ordre en $\Delta s/s$, le biais relatif est donné par :

$$\Delta P/P \sim 0,7\ \Delta s/s \tag{54}$$

avec P = 1/2. De même, le calcul numérique pour le cas d'un diaphragme carré est possible et conduit à des résultats voisins de l'équation (53).

3. ETUDE DE L'INFLUENCE DES SURFACES DIFFUSANTES ET DE LA SOURCE SUR LA PRECISION DE LA LOI DU PILE OU FACE

Dans ce paragraphe, nous allons étudier l'influence des fluctuations temporelles de la source et du coefficient de transmittance en énergie des dépolis. Dans les conditions expérimentales du chapitre précédent, la source est un laser dont la stabilité a pu être vérifiée: elle est meilleure que 1%. L'influence de ces fluctuations n'a pu être mise en évidence lors des mesures effec-

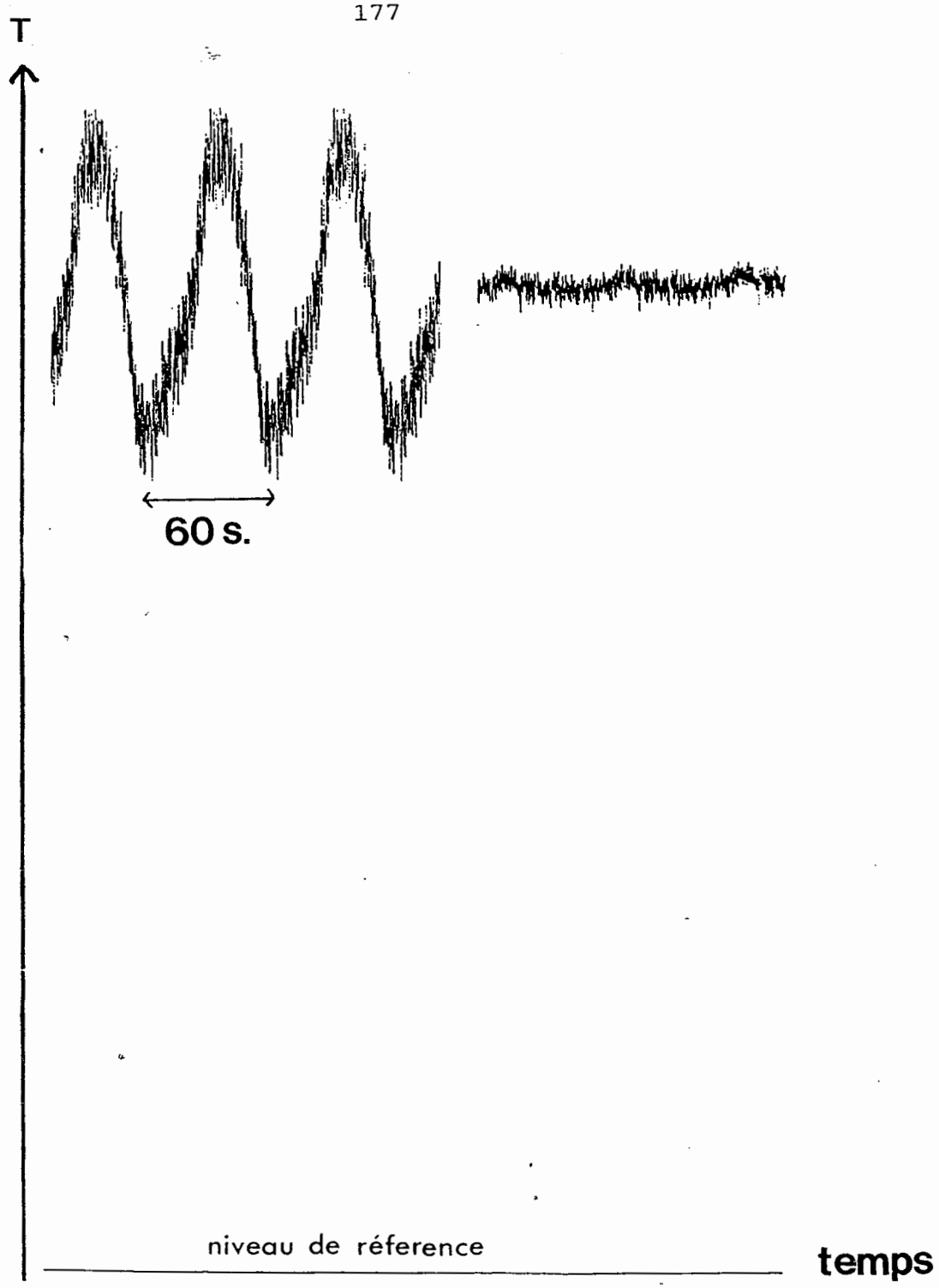


Figure 53 : Coefficient de transmission en énergie de deux diffuseurs tournants :
- à gauche, diffuseur en surface (Kodatrace)
- à droite, diffuseur en volume (épaisseur de 2 mm, Altuflex).

tuées. Par contre, la figure 53 montre l'évolution temporelle du coefficient T de transmission en énergie de deux dépolis différents en rotation. La courbe de gauche présente des fluctuations de l'ordre de 17% dont la périodicité est égale à celle du mouvement rotatif du diffuseur . Celle-ci a été obtenue avec un diffuseur mince (ou de surface), le Kodatrace. Par contre, la courbe de droite a été obtenue avec un diffuseur de volume d'épaisseur 2 mm. Son coefficient T est donné égal à 82 % et est garanti constant à 4 % près sur l'ensemble de l'échantillon.

Les résultats du chapitre précédent ont été obtenus avec deux diffuseurs Kodatrace. Lors d'une première série de mesures, les fluctuations importantes du coefficient T n'ont pas permis de mettre en évidence des facteurs de corrélation spatiale et temporelle inférieurs respectivement à 5 % et 3 %. En conséquence, les résultats donnés sur les figures 43, 44, 46 et 47 donnant les facteurs de corrélation ont été obtenus à partir d'une statistique de facteurs de corrélations évalués sur mille acquisitions. A 1000 Hz, mille acquisitions représentent une seconde, ce qui est très court vis-à-vis de la période du phénomène de la figure 53 qui est de une minute (un tour des dépolis).

Une autre façon de compenser ces fluctuations est d'introduire au moyen d'une lame semi-réfléchissante une voie de normalisation prenant en compte les fluctuations de la source et de la transmittance des dépolis. Cependant, dans le cadre de la réalisation d'un prototype, cette solution en complique fortement la mise en oeuvre.

Dans l'approche théorique du premier paragraphe, nous avons argumenté en faveur des densités de probabilité présentant une faible valeur du rapport $\langle I \rangle / \sigma(I)$. Le biais introduit par les fluctuations de la source ou du coefficient T des dépolis peut être estimé dans le cas limite de la densité de probabilité exponentielle qui correspond au cas très favorable où $\langle I \rangle / \sigma(I) = 1$. En effet, ces fluctuations peuvent être interprétées comme des fluctuations de la valeur moyenne de l'intensité du speckle. Si l'on note ΔP l'écart induit sur la loi pile ou face par une fluctuation Δ de la valeur moyenne de l'intensité, on a :

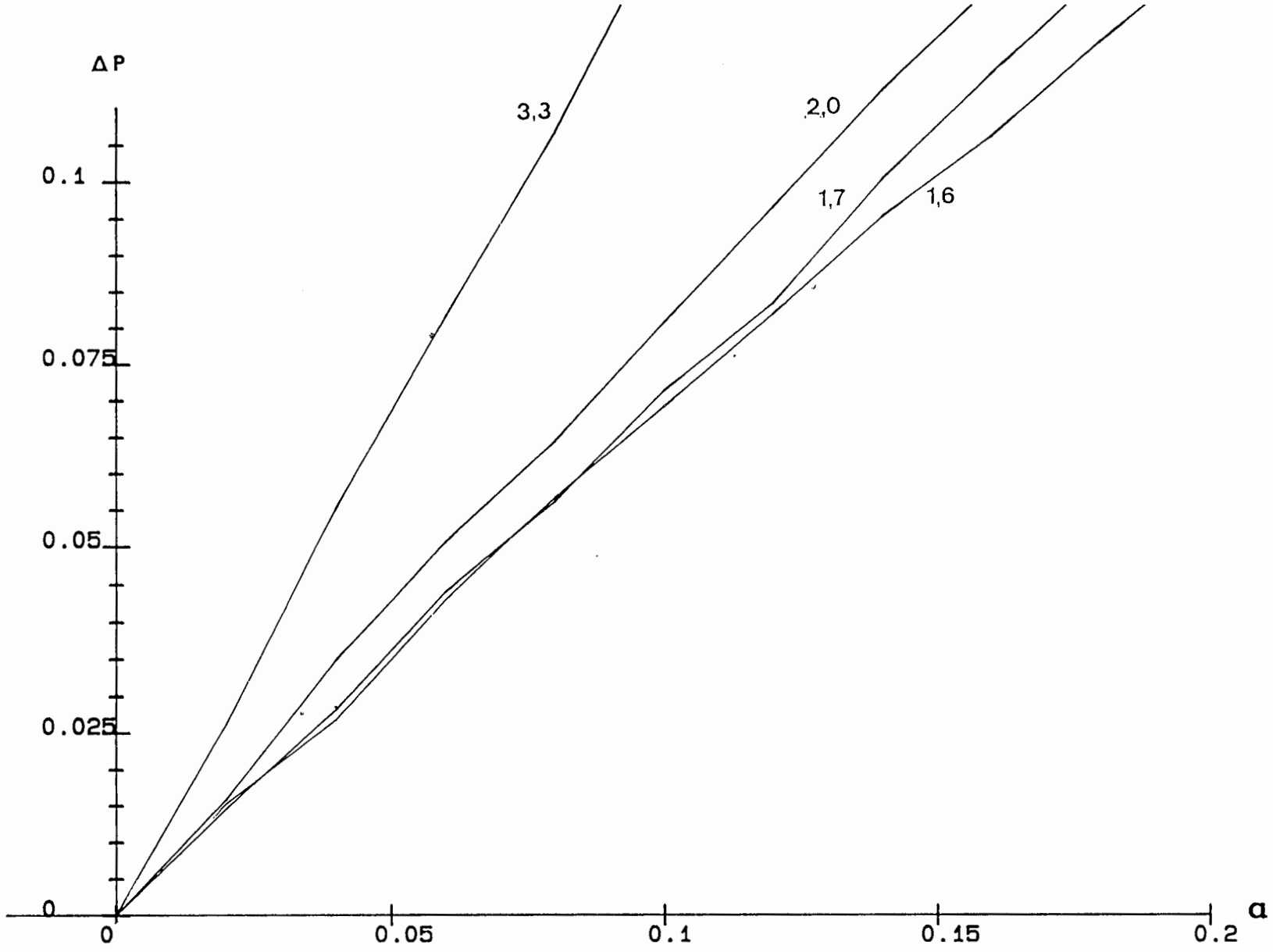


Figure 54 : Etude expérimentale du biais ΔP introduit sur la loi pile ou face par les dérivés en énergie pour différentes valeurs du paramètre $\langle I \rangle / \sigma(I)$.

$$\int_0^{<I>Ln2} \frac{1}{<I>+\Delta} \exp - \frac{I}{<I>+\Delta} dI = \Delta P + 1/2 \qquad (55)$$

Cette intégrale, bien que se calculant directement, peut être interprétée comme un biais introduit sur le seuil en posant : $\frac{I}{<I>+\Delta} = \frac{u}{<I>}$. Dans ces conditions, le biais du seuil est égal à :

$$\Delta s = \frac{<I>^2 \ Ln2}{<I>+\Delta} - <I>Ln2$$

soit si $\Delta << <I>$, $\Delta s \sim \Delta$ Ln2. En conséquence, l'équation 57 permet d'estimer le biais relatif $\frac{\Delta P}{P}$:

$$\frac{\Delta P}{P} \sim 0,7 \frac{\Delta}{<I>} \qquad (56)$$

Les équations 54 et 56 prouvent que les fluctuations en énergie (i.e. de la source et de T) ont une importance relative vis-à-vis du biais ΔP du même ordre de grandeur que celle due aux dérives du seuil sur l'ensemble de la rétine.

La figure 54 montre pour différentes valeurs du paramètre $<I>/\sigma(I)$ l'évolution du biais ΔP en fonction des fluctuations relatives en énergie. Pour cela, après acquisition d'un ensemble de données fixant la valeur de $\mathcal{M}$, le biais ΔP est évalué par calcul à partir des nouvelles données obtenues par multiplication par (1 + a) des anciennes. Le coefficient a ainsi obtenu joue le rôle de $\Delta/<I>$ dans l'étude précédente. Les résultats sont tout à fait analogues à ceux de la figure 52 montrant l'effet bénéfique sur le biais des densités de probabilité présentant de faibles valeurs du rapport $<I>/\sigma(I)$.

III. ASPECT ENERGETIQUE

La fréquence maximale avec laquelle il est possible de générer des tableaux de nombres aléatoires est fortement dépendante de l'intensité moyenne du speckle et de la sensibilité des photo-

capteurs de la rétine élaborée par l'I.E.F.

Une première expérience a permis de déterminer la sensibilité de leurs photocapteurs. Pour cela, nous avons étudié la chute de tension à leurs bornes en fonction du temps d'intégration et de l'intensité de l'onde l'éclairant uniformément . La source utilisée est un laser He-Ne de même longueur d'onde que celle utilisée pour les mesures statistiques du speckle. Le tableau ci-dessous donne quelques valeurs typiques des résultats obtenus.

$t_{integration}$ (μs)	2,5	5	10	20	32	52	72	102
Signal (V)	0,1	0,2	0,4	0,8	1,25	1,7	2,25	2,5
Exposition (J/m^2)	$2,5\ 10^{-5}$	510^{-5}	10^{-4}	210^{-4}	$3,2\ 10^{-4}$	510^{-4}	$7,2\ 10^{-4}$	10^{-3}

Des mesures ont été effectuées pour différentes valeurs de la puissance du faisceau incident. La sensibilité obtenue s'est avérée comparable à celle d'autres photocapteurs CCD issus de la même technologie. Elle a pu être estimée à $s = 40$ V cm^2 μJ^{-1}. Le courant de fuite responsable d'une décharge ΔV du photocapteur en l'absence d'illumination s'est avéré avoir un comportement linéaire avec le temps t : $\Delta V = 0,2\ t$ avec ΔV en volt et t en seconde. Pour $t \simeq 10^{-6}$ s , la chute de tension est inférieure à 1 μV. Les signaux détectables étant de l'ordre de la centaine de millivolts, l'influence du courant de fuite est totalement négligeable.

Dans le cadre du montage proposé pour le générateur de nombres aléatoires, nous avons mesuré l'intensité moyenne du speckle à une distance d = 10 cm des diffuseurs mobiles. A partir d'un laser de 60 mW, une surface de 1 cm^2 reçoit une puissance de 1,5 mW. En conséquence, si l'on note P la puissance de la source émettrice, t la durée du temps d'intégration, la chute de tension à attendre ΔV est égale à :

$$\Delta V = \frac{1,5}{60} s\ Pt \sim Pt \text{ pour } d = 10 \text{ cm} \qquad (57)$$

où ΔV est en volt, P en Watt et t en μs.

Dans l'hypothèse où cette énergie est amenée par une source pulsée, il est intéressant d'étudier l'influence de la durée des impulsions sur les statistiques du speckle et notamment sur le facteur de corrélation temporelle et sur le rapport $\langle I\rangle/\sigma(I)$. Si l'on note T l'intervalle de temps séparant deux pulses, τ la durée des impulsions rectangulaires, en adoptant le modèle gaussien, le facteur de corrélation temporelle s'écrit : $\gamma_{11}(T) = Nu(\tau,T)/Nu(\tau,0)$ où :

$$Nu(\tau,T) = \frac{\langle I\rangle^2}{\tau^2} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \int_{T-\tau/2}^{T+\tau/2} dtdt' \exp- \frac{\pi v^2}{g^2} (t-t')^2$$

En suivant le calcul déjà développé lors du paragraphe concernant les facteurs de corrélation temporelle, il est possible de montrer que :

$$I(\tau,T) = \frac{n_\tau - n_T}{2n_\tau^2} \left[Q\left(\sqrt{2\pi}\ (n_T - n_\tau)\right) - Q\left(\sqrt{2\pi}\ n_T\right)\right] + \frac{1}{4\pi\ n_\tau^2} \left[\exp- \pi\ (n_T - n_\tau)^2 - \exp- \pi\ n_T^2\right]$$

où $n_T = vT/g$ et $n_\tau = v\tau/g$ et $Nu(\tau,T)$ est donné par :

$$Nu(\tau,T) = 2\langle I\rangle^2\ (I(\tau,T) + I(\tau,-T))$$

Nous avons déjà noté que de bonnes indépendances temporelles peuvent être obtenues pour $n_T \sim 1,5$, ce qui correspond à un déplacement relatif des dépolis de l'ordre de 1,5 grains et à un facteur de corrélation de l'ordre de 10^{-3}. Si l'on suppose que τ est petit devant T, un développement limité de $\gamma_{11}(T)$ peut être effectué pour n_τ petit devant l'unité. On obtient :

$$\gamma_{11}(T) = \exp-\pi n_T^2 \left[1 + \frac{n_\tau^2}{6} \left(2\ \pi^2 n_T^2 - \pi\right) + O\left(n_\tau^4\right)\right] \qquad (58)$$

Pour τ dix fois plus petit que T et $n_T \sim 1,5$, le premier terme du développement limité est égal à 0,15. Cette correction relativement faible est tolérable.

Du calcul précédent, il est facile de déduire l'influence de la durée des impulsions sur le rapport $\langle I \rangle / \sigma(I)$ puisque $\sigma(I) = Nu(\tau,0)$. Un développement limité effectué dans les mêmes conditions que précédemment montre que :

$$\langle I \rangle / \sigma(I) = 1 + \frac{\pi}{12} n_\tau^2 + 0(n_\tau^4) \qquad (59)$$

L'équation 59, tout comme la 58, nous montre la nullité du terme d'ordre un, rendant faible l'influence de la durée finie de l'impulsion. Pour $n_\tau = n_T/10$ et $n_T \sim 1,5$, la correction à apporter est égale à 0,6 %.

En conclusion, nous avons montré que pour une source pulsée à 1 MHz, l'énergie contenue dans chaque impulsion de durée τ (avec $\tau < 100$ ns) assure une chute de tension d'au moins 0,1 volt aux bornes des photocapteurs si toutefois elle est supérieure à 100 nJ (éq.57). Cette considération énergétique a été obtenu pour deux diffuseurs de volume de 1 mm d'épaisseur en faisant converger le pinceau laser sur les dépolis à l'aide d'une lentille de focale 20 cm, le plan d'observation du speckle étant situé à 10 cm de surfaces diffusantes.

IV. DISCUSSION

Nous avons proposé un nouveau schéma expérimental où le diaphragme carré est remplacé par une lentille qui permet de faire varier continuement la taille de l'impact du faisceau laser sur les surfaces diffusantes. Tout en gardant les propriétés d'indépendance du chapitre VIII, cette approche présente deux avantages :

* Le générateur de nombres aléatoires y gagne en simplicité et donc en fiabilité. En effet, la distance enter la surface

diffusante et le diaphragme devant être aussi faible que possible, cette promiscuité se serait avérée problématique à des vitesses angulaires de l'ordre de mille tours minute.
* Le bilan énergétique est plus favorable.

Dans le cadre de ce schéma expérimental, nous avons étudié le biais introduit par les différentes imperfections sur une loi de probabilité pile ou face. Cette étude a montré que ce biais est d'autant plus faible que la taille des photorécepteurs est petite devant celle des grains de speckle. Une étude théorique a conclu que l'ensemble de ces imperfections introduit un biais relatif 1,5 fois plus faible que l'imperfection relative elle-même, dans le cas limite le plus favorable (équations 54 - 56).

De l'ensemble des résultats expérimentaux obtenus dans ce chapitre, nous pouvons dégager les différentes caractéristiques d'un générateur de nombres aléatoires. En effet, les résultats obtenus à une distance d des diffuseurs avec un photocapteur de côté b peuvent être obtenus à une distance αd avec des photorécepteurs de côté αb. Ainsi, à partir des données concernant les indépendances et les biais relatifs obtenus pour d=145 cm et b=1,4 mm, il est possible de prévoir le comportement du prototype. Avec une rétine dont on peut estimer que les photocapteurs ont une surface de l'ordre de 100 x 100 μm^2, α est de l'ordre de 1/15. Pour d = 145 cm, αd est de l'ordre de 10 cm. Dans ces conditions, il est d'ores et déjà envisageable d'obtenir :
* des tableaux de nombres aléatoires indépendants temporellement pour des vitesses de rotation des surfaces diffusantes de l'ordre de 1000 tr min^{-1},
* une bonne indépendance spatiale pour R > 2, (R étant le rapport entre la distance séparant deux photocapteurs et leur taille)
* des biais relatifs sur une loi pile ou face égaux ou inférieurs aux défauts relatifs de la réalisation,
* une génération microseconde avec une source de puissance supérieure à un watt.

Que se passe-t-il si l'on prend la même rétine avec des pho-

tocapteurs de taille inférieure ? Tous les résultats précédents restent valables si ce n'est que le biais relatif diminue parce que la densité de probabilité tend vers le cas limite de l'exponentielle décroissante. En outre, d'un point de vue électronique, la surface de la puce réservée à la génération de tableaux de nombre aléatoires décroît rendant plus favorable l'approche opto-électronique que nous avons développée.

V - AUTOMATES CELLULAIRES DE WOLFRAM

Avant de proposer la réalisation optique de nombres aléatoires, il faut en justifier son utilisation. Dans les paragraphes précédents, nous avons constaté que la meilleure précision qu'il nous est possible d'obtenir sur la loi pile ou face s'obtient dans le cas où les récepteurs ont une dimension très petite devant la taille des grains de speckle. Ce cas limite correspond à la densité de probabilité exponentielle de l'équation 30 qui est très favorable pour l'algorithme dit du "recuit simulé".

Dans le cadre de la génération de tableaux aléatoires binaire (loi pile ou face), cette approche semble a priori moins intéressante. C'est pour cette raison que nous avons envisagé un autre cas de figure pour la génération parallèle de tableaux de nombres aléatoires. Après une brève présentation générale dans laquelle nous dégagerons la simplicité du réseau d'automates envisagé, nous allons présenter les résultats de l'étude que nous en avons faite. Celle-ci comporte :

* une étude des propriétés de convergence du réseau vers une loi limite où chaque automate a une probabilité 1/2 d'être dans l'état 1 ou 0 ;
* des tests d'indépendance temporels et spatiaux sur le réseau.

1. PRESENTATION GENERALE

S. Wolfram [77] a étudié un réseau d'automates cellulaires

prenant des valeurs binaires 0 ou 1. Ce réseau particulièremet simple est régi par une loi d'évolution synchrone pour l'ensemble des automates. Si l'on note $V_i(t)$ l'état de l'automate i à l'instant t, la loi d'évolution temporelle s'écrit :

$$\forall\ i,\ \forall\ t \quad V_i(t+\Delta t) = V_{i-1}(t)\ \text{XOR}\ (V_i(t)\ \text{OR}\ V_{i+1}(t)) \qquad (60)$$

Elle ne fait appel qu'à des liaisons entre plus proches voisins, ce qui rend le réseau particulièrement adapté à une réalisation électronique. En outre, pour être complet dans notre description, le réseau est disposé sur un anneau à N automates, ce qui signifie que la dynamique de l'automate 1 (resp. N) est régie par les automates N,1,2 (resp. N,1,N-1).

S. Wolfram a constaté que lorsque l'état initial du réseau est aléatoire, l'évolution temporelle ne semble pas introduire de structure au sein du réseau et l'état des automates reste chaotique, pouvant par là-même servir de générateur de tableaux de nombres aléatoires binaires.

2. TEST DE CONVERGENCE

Dans une première étape, nous avons étudié si à partir d'une distribution aléatoire initiale des états initiaux, le réseau tend à se stabiliser dans une certaine distribution de probabilité. Pour cela, N étant égal à 200, nous avons sélectionné 5 automates particuliers et consécutifs. Toutes les N_T itérations du réseau, nous avons noté le nombre de fois que l'ensemble des cinq automates s'est trouvé dans l'un quelconque i de ses 32 états. Notons $N_i(t)$, $i=1,2,\ldots 2^5$ le nombre d'apparitions de l'état i au cours des itérations du réseau incluses dans l'intervalle $[(t-1)N_T\ ;\ t\ N_T[$. La quantité E(t) égale à :

$$E(t) = \sum_{i=1}^{32} (N_i(t) - N_i(t-1))^2$$

chiffre l'écart entre les distributions de probabilité des cinq

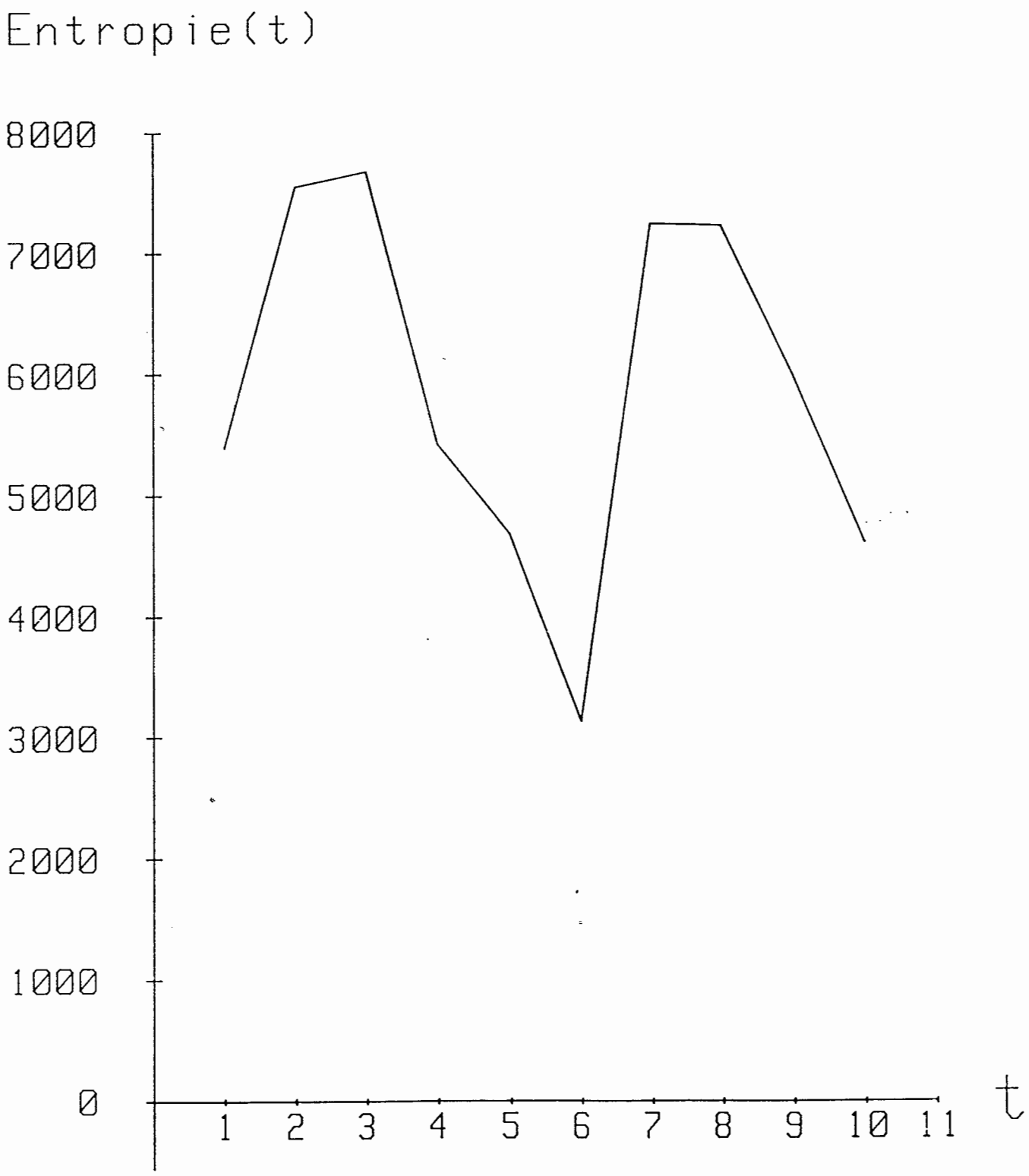


Figure 55 : Evolution de E(t) fonction de t pour cinq automates quelconques d'un réseau qui en comprend 200 (N_T=3200).

automates aux instants t et t-1 séparés de N_T itérations.

Plusieurs simulations ont été menées pour différentes valeurs du paramètre N_T, N_T = 32, 3200 et 32000. Les résultats n'ont pas permis de mettre en évidence une quelconque diminution de E(t) en fonction de t, ce qui tend à prouver que le réseau atteind rapidement son régime limite. La figure 55 montre l'évolution typique de E(t) pour n_T=3200.

En outre, un test du χ^2 nous a permis de valider l'hypothèse selon laquelle chaque automate cellulaire obéït à une loi pile ou face.

3. TESTS D'INDEPENDANCE:

Tout comme pour le générateur optique de nombres aléatoires, nous avons fait subir une série de tests d'indépendance aux automates de S. Wolfram. Notamment, nous avons réalisé selon le procédé exposé au chapitre huit une comparaison des lois produit et jointe entre deux puis trois automates voisins. Ces tests identiques à ceux réalisés avec les photocapteurs ont validé l'hypothèse d'indépendance spatiale. Le tableau ci-dessous montre quelques résultats typiques pour 100 tests du χ^2 avec trois automates:

N	ν	% de suspects	% de p.suspects	% de normaux
100	4	10	5	85
1000	4	14	10	76
10 000	4	12	16	72

ν est le nombre de degrés de liberté.

Ces premiers tests ayant donné satisfaction, nous avons effectué un autre test portant sur l'hypothèse de l'indépendance spatio-temporelle. Nous avons alors sélectionné un automate i et l'un de ses voisins, i+1, et avons comparé la loi

$$P(V_i(t+\Delta T)=\alpha,\ V_i(t)=\beta,\ V_{i-1}(t)=\gamma)$$

et la loi produit. Cette étude menée à l'aide d'un test du χ^2 a donné 100% de résultats suspects avec ν=4. A titre comparatif, le

même test a été effectué avec le speckle. Le tableau suivant donne une idée des résultats obtenus:

N	% de suspects	% de p.suspects	% de normaux
100	7	9	84
1000	13	11	76
5000	14	9	77

Ce résultat négatif s'interprête trés simplement à la vue de la table de vérité suivante donnant $V_i(t+\Delta t)$ en fonction de $V_i(t)$, $V_{i+1}(t)$ et $V_{i-1}(t)$:

$V_i(t+\Delta t)$	$V(t)$	$V_{i+1}(t)$	$V_{i-1}(t)$
0	1	1	1
1	1	1	0
0	1	0	1
1	1	0	0
0	0	1	1
1	0	1	0
1	0	0	1
0	0	0	0

En effet, ce tableau montre que des états tels que 111 et 010 pour $V_i(t+\Delta t)$, $V_i(t)$ et $V_{i-1}(t)$ sont prohibés par la loi d'évolution temporelle des automates, rendant les probabilités d'avoir 111 et 010 différentes de 1/8. Ceci explique le résultat négatif du test précédant.

4. DISCUSSION

En conclusion, nous avons que le réseau d'automates cellulaires de S. Wolfram, bien que satisfaisant un certain nombre de tests portant sur l'indépendance spatiale des automates, ne permet pas d'assurer une réelle indépendance spatio-temporelle. Dans le cadre du générateur optique, ces tests se sont avérés positifs.

Ces quelques résultats semblent montrer que contrairement aux affirmations de S. Wolfram "a long and seemingly random

sequence can apparently be obtained", une étude théorique approfondie devrait être faite afin de caractériser précisemment la qualité statistique du générateur étudié.

CONCLUSION

L'introduction de la thèse a été volontairement axée sur l'attrait que présentent les réseaux neuronaux. Notre travail s'est appuyé sur un modèle simple: celui d'Hopfield. Dans le chapître deux, nous l'avons développé de façon à accroître significativement ses possibilités de mémorisation. Dans les chapitres suivants, nous avons proposé une architecture optique permettant la mise en oeuvre de ce modèle. Nous l'avons validée dans une situation expérimentale. Cette étude n'a pas cependant donné entière satisfaction. Il est important d'en analyser les causes.

- Sur le plan théorique, un gouffre sépare encore les réseaux de neurones artificiels de leur modèles biologiques, même si ceux-ci sont capables, tout comme le cerveau de traiter des problèmes pour lesquels une description symbolique des solutions n'existe pas.

- Sur le plan de leur mise en oeuvre, les expériences menées en laboratoire que ce soit sur les interconnexions optiques reprogrammables ou sur la nonlinéarité neuronale sont trop prospectives pour donner lieu au développement de machines. Ces limitations que rencontrent aussi bien les opticiens que les électroniciens ont certainement orienté les travaux de laboratoire vers la mise en oeuvre de modèles simples, trop simples pour donner lieu à de potentielles applications.

En tant qu'opticiens, les réseaux de neurones nous ont permis d'appréhender les cas favorables à l'utilisation des faisceaux lumineux à l'intérieur des processeurs d'information. Sans doute, une volonté de départ de réaliser une machine tout optique (ou quasiment) nous a orienté vers des modèles simples. La technologie actuelle, en effet, ne permet pas de tels développements dans le cadre de processeurs élaborés et donc susceptibles d'avoir des applications industrielles : une étape

encore importante reste à franchir pour pouvoir disposer de connexions fiables et reprogrammables et, d'autre part, d'éléments optiques non linéaires consommant une énergie comparable à celle du transistor électronique.

La seconde partie de notre travail qui prend en compte cette constatation est plus axée sur l'insertion de l'optique dans les puces électroniques, c'est-à-dire sur l'utilisation de la troisième dimension laissée libre par les puces électroniques planes.

Bien sûr, le générateur optique de tableaux de nombres aléatoires n'est qu'un exemple de cette approche. Cependant, nous pensons que cette démarche :

* par rapport à la précédente offre davantage matière à réflexion sur le plan des architectures ;

* à court terme semble plus prometteuse ;

* va dans le sens des recherches menées à l'échelle internationale sur l'ensemble des composants nécessaires à l'élaboration du calcul par voie optique, et plus encore sur l'intervention de l'optique dans les calculateurs.

PARTIE 1

[1] Yves Burnod, Institut Pasteur.
Neural Networks from Models to Applications, l.Personnaz, G. Dreyfus editors, 1989

[2] J.J. Hopfield, Proc. Natl. Acad. Sci, 81, (1984) pp. 3088-3092.

[3] J.J. Hopfield et D.W. Tank, Biol. Cybern., 52 (1985) pp. 141-152.

[4] Mc Cullogh, W.S. Pitts, Bull. Math. Biophys., 5 (1943) pp. 115-133.

[5] D.O. Hebb, The organisation of Behaviour (1949) Wiley, New-York.

[6] F. Rosenblatt, Principles of Perceptrons (1962) (Spartan, Washington, D.C.).

[7] M. Minky et S. Papert, Perceptrons, an introduction to Computational Geometry (1969) MIT Press, Cambridge MA.

[8] T. Kohonen, Self organization and associative memories (1984) Springer Verlag.

[9] J.J. Hopfield, Proc. Natl. Acad. Sc., 79 (1982) pp. 2554-2558.

[10] G.E. Hinton, T.J. Sejnowski et D.H. Ackley, Technical report CMU-CS-84-119 Camegie-Mellon University (1984).

[11] D. Psaltis et N. Farhat, Optics Lett. 10 (1985) pp. 98-100.

[12] E. Goles, Thèse d'Etat (1985), Université de Grenoble.

[13] D.W. Tank et J.J. Hopfield, transactions on circuits and systems, 33, n° 5, (1986) pp. 533-541.

[14] S. Kirkpatrick, C.D. Gelatt et M.P. Vecchi, Science (1983) pp. 671-680.

[15] J.P. Nadal, Thèse d'Etat, (1987), Université Paris VI.

[16] L. Personnaz, I. Guyon, G. Dreyfus, G. Toulouse, J. Stat. Phys. 43 (1986), pp. 411-417.

[17] D.J. Amit, H. Gutfreud et H. Sopolinsky, Phys. Rev. Lett., 55, (1985) pp. 1530-1533.

[18] Abu-Mustapha, S. Yaser et J.M. St Jacques, IEEE Trans. Inf. Th., 31 (1985), pp. 461-464.

[19] D. Psaltis, Chiol Hoon-Park on Neural Network for computing, edition J. Denker, (1986) pp. 370-372.

[20] H.H. Chen et al. in Neural Network for computing, edition J. Denker, (1986) pp. 86-89.

[21] Ph. Lalanne, J. Taboury, P. Chavel, Opt. Commun. 63 (1987) pp. 21-25.

[22] R.A. Athale, H.H. Szu and C.B. Friedlander, Opt. Lett., 11, (1986).

[23] Y. Owechko, G.J. Dunning, E. Marom and B.H. Soffer, Appl. Opt. Vol. 26, n°10 (1987) pp. 1900-1910.

[24] Ph. Lalanne, J. Taboury, J.C. Saget et P. Chavel, Proceedings of the XIVth meeting of ICO, Quebec (1987) pp. 27-28.

[25] E. Gardner, "Multiconnected Neural Networks modes", Edinburgh, Preprint n° 375 (1986).

[26] E.G. Paek and D. Psaltis, Opt. Engin., 26, (1987) pp. 428-433

[27] M. Abramowitz, Handbook of Mathematical functions.

[28] Ph. Lalanne, P. Chavel, T. Taboury, Actes du Congrès, Neuro'88 (Paris) Juin 1988, pp. 782-788.

[29] a) "Connection Machine".
b) L.G. Dreyfus et M.M. Weinfeld "Intéraction d'un réseau numérique de neurones de type Hopfield utilisant l'algorithme de la projection, compte rendu des journées thématiques, D.R.E.T. du 9 décembre 1987, pp. 39-42.

[30] D. Psaltis, J. Yu, X.G. Guand H. Lee, in proceedings of Optical Computing, Lake Tahoe (1987) : Optical neural nets implèmented with volume holograms.

[31] L. Cutrona dans Optical et Electro-Optical Information Processing, J. Topet et al. (MIT PRESS, 1965), pp. 97-98.

[32] D. Psaltis, D. Casasent et M. Carlotto, Optics Letters, Vol. 4, n° 11 (1979), pp. 348-350.

[33] J.W. Goodman et M.S. Song, Appl. Opt., Vol. 21, n° 3 (1982), pp. 502-506.

[34] J.W. Goodman, A.R. Dias et L.M. Woody, Opt. Letters, Vol. 16, n°1, (1978) pp. 1-3.

[35] A.B. Vander Lugt, Inst. Electric Electronics Eng. Trans. Inf. Theory 10, pp. 139, (1964).

[36] Gibbs and al. Phys. Rev. Lett. 36 (1976), p. 113.

[37] a) P. Chavel, S. Laval et J. Taboury, Revue de Physique Appl. SS (1987), pp. 1215-1219.
b) "Research on non linear optical materials : an assessment" (48 auteurs), Appl. Opt. 26, (1987), pp. 211-234.
c) N.V. Kukhtarev, V.B. Markov, S.G. Odulov, M.S. Soskin, V.L. Vinetskii, Ferroelect., 22, (1979), pp. 949.
d) J.E. Ford, Y. Fainmann et S.H. Lee, Topical Meeting on

Spatial Light Modulators, Tech. Digest, 8, (1988), p. 40.

[38] J.J. Hopfield, D.W. Tank, Biol. Cybern, 52, (1985), pp.141-152

[39] N.H. Farhat, D. Psaltis, A. Prata et E. Paek, Appl. Opt., 24, (1985) pp. 1469-1475.

[40] Y. Owechko, "Optoelectronic resonator neural networks", Appl. Opt., 26, (1987), pp. 5104-5111.

[41] I. Lindsay et N.B. Aldridge, "Optical associative memory using a multiplexed hologram and phase conjugate feedback preprint.

[42] H.J. White, "Experimental results from an optical implementation of a simple neural network", actes du congrès Optical Computing, Toulon (1988).

[43] a) J.M. Kinser, H.J. Caulfield et J. Shamir, "Design for a massive all-optical bidirectional associative memory : the big BAM Appl. Opt., 27, (1988), pp. 3442-3444.
b) S.H. Song et S.S. Lee, "Experimental and numerical analysis of diffused light holographic associative memory", Appl. Opt 27, (1988), pp. 3590-3591.

[44] R.C. Chevallier, G.Y. Sirat and K. Heggarty, "Frequency multiplexed raster and neural networks", actes du congrès Optical Computing, Toulon (1988), pp. 522-526.

[45] B.R. Brown, A.W. Lohmann, Appl. Opt., 5, (1966), pp. 967-969.

[46] A.W. Lohmann, D.P. Paris, Appl. Opt., 6, (1967), pp. 1739-1742.

[47] a) I. Guyon, thèse d'Etat de l'Université de Paris VI, "Réseau de neurones pour la reconnaissance des formes : architectures et apprentissage", (1988).

b) C. Meunier, D. Hansel et A. Varga, "Information Processing in Three-state Neural Networks", soumis au Journal of Statistical Physics.

[48] M. Takeda et J.W. Goodman, Appl. Opt., 25, (1986), pp. 3033-3046.

[49] J.Y. Jan, Y. Fainman et S.H. Lee, "Comparison of artificial neural networks with pattern recognition and image processing", Appl. Opt., 28, (1989), pp. 302-305.

[50] L. Personnaz, I. Guyon et G. Dreyfus, "High-Order Neural Networks : information Storage with Errors", Europhysics Letters, 4, (1987), pp. 863-867.

[51] T.M. Cover, "Geometrical and statistical properties of systems of linear inequalities with application to pattern recognition", I.E.E.E. Trans. Electronic Computer, EC-14(3), (1965), pp. 326-334

[52] M. Minsky et S. Paper, "Perceptions and introductions to computational geometry", Cambridge, MIT PRESS (1969)

[53] Y. Le Cun, F. Fogelman-Soulié, "Modèles connexionnistes de l'apprentissage"

[54] Y. Le Cun, "A learning scheme for asymmetric threshold network" in <<cognitiva 85>>, CESTA-AFCET Ed. (1985), pp. 599-604.

[55] D.E. Rumelhort, G.E. Hinton, R.J. Williams, "Learning internal representations by error propagation in Parallel Distributed Processing : explorations in the microstructure of cognition, MIT Press Edition (1986)

[56] S. Patarnello and P. Carnevali, Europhys. Lett., 4 (1987), pp. 503-508.

[57] T.J. Sejnowski, C.H. Rosenberg, "Netalk : a parallel network

that learns to read aloud", John Hopkins Technical report JHU/EECS-86/01.

[58] T. Maxwell, C.L. Giles and Y.C. Lee, "Generalization in Neural Networks : the Contiguity problem", IEEE International Conference on Neural Networks, San Diego (1987).

[59] C.L. Giles and T. Maxwell, "Learning, Invariance and generalization in high-order neural networks", Appl. Opt., 26, n° 13, (1987), pp. 4972-4978.

[60] F. Fogelman-Soulié, P. Gallinari, Y. Le Cun and S. Thina, "Automata networks and artificial intelligence" in Computation on automata networks, Manchester Univ. Press (1987).

[61] S. Kirkpatrick, C.D. Gelatt, H.P. Vecchi, Science, 220, (1983), pp. 4598.

[62] G.E. Hinton et T.J. Sejnowski, Cognitiva 85, Paris (1985) pp. 283-290.

[63] D.H. Ackley, G.E. Hinton et T.J. Sejnowski, Log. Sciences 9 (1985), p. 147.

[64] D.G. Bounds, J. Phys. A, 20, (1987), pp. 2133-2145

[65] T.J. Sejnowski, "Higher Order Boltzmann machine", Actes du Congrès AIP Conf. USA, 151, 1986), pp. 398-403

[66] J. Alspector, R. Allen et V. Hu, "Stochastic learning networks and their electronic implementation", dans Neural Information Processing System Denver CO, (1987), pp. 9-21

[67] A.J. Ticknor et H.H. Barrett, "Optical implementation in Boltzmann machines", Appl. Opt., 26 (1987), pp. 16-21

[68] P. Garda, K. Madani, F. Devos, P. Chavel, Ph. Lalanne et J. Taboury, "A massively parallel image processor for stochastic relaxation using optical random number generation", Actes du congrès Optical Computing, Toulon (1988), pp. 663-667.

[69] J. Taboury, C. Chauve, P. Chavel, "An optical approach to lattice gas automata", Actes du congrès Optical Computing, Toulon (1988), pp. 680-686.

PARTIE 2

[70] J.W. Goodman, "Statistical Optics", Wiley Publication (1985).

[71] J.C. Dainty, "Laser Speckle and Related Phenomena", Topics in Applied Physics, vol. 9, Springer Verlag, 2ème édition (1984).

[72] M. Françon, "Diffraction structure des images", Masson et Cie, éditeurs.

[73] J.D. Rigden et E.I. Gordon, Proc. I.R.E., 50 (1962), p. 2367.

[74] P. Chavel, J. Taboury, F. Devos, P. Garda et K. Madani, "Utilisation du speckle comme générateur rapide de tableaux aléatoires binaires : optimisation des paramètres", Annales des Télécommunications, 43 (1988), pp. 148-156.

[75] Kendall, "The advanced theory of statistics", 1, chapitre 10.

[76] Knuth, "Seminumerical Algorithms", 2, Addison-Wesley, éditeurs.

[77] S. Wolfram, "Theory and Applications of Cellular Automata", World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. 1 (1986).

ANNEXE 1

CALCUL DU FACTEUR DE CORRELATION SPATIALE γ_{11}

Afin d'étudier l'indépendance spatiale entre deux photocapteurs, nous avons mesuré le facteur de corrélation γ_{11} défini par :

$$\gamma_{1,1} = \frac{\langle (I_1 - \langle I_1 \rangle)\ (I_2 - \langle I_2 \rangle) \rangle}{\left(\langle I_1^2 \rangle - \langle I_1 \rangle\right)^{1/2}\ \left(\langle I_2^2 \rangle - \langle I_2 \rangle\right)^{1/2}}$$

Si l'on suppose que les deux photocapteurs ont des rôles identiques, c'est-à-dire que les statistiques du speckle observées sont indépendantes du photocapteur envisagé, le facteur de corrélation se réduit à :

$$\gamma_{1,1} = \frac{\langle I_1\ I_2 \rangle - \langle I \rangle^2}{\langle I^2 \rangle - \langle I \rangle^2} = \frac{Nu}{De}$$

où I est l'intensité perçue indifféremment par l'un des photocapteurs.

Les axes du diaphragme carré étant tournés de 45° par rapport à ceux des photocapteurs carrés également, le facteur de corrélation (équation 34) entre deux points (x_1, y_1) et (x_2, y_2) du plan de photodétection s'écrit :

$$\langle i_1 i_2 \rangle - \langle i_1 \rangle \langle i_2 \rangle = \langle I \rangle^2\ \mathrm{sinc}^2 \frac{\pi(x_1 - y_1 - x_2 + y'2)a}{\sqrt{2}\ \lambda d}\ \mathrm{sinc}^2 \frac{\pi(x_1 + y_1 - x_2 - y_2)a}{\sqrt{2}\ \lambda d}$$

i_1 (resp. i_2) étant l'éclairement reçue par un détecteur ponctuel placé en (x_1, y_1) (resp. (x_2, y_2)). Si l'on note L la distance sur l'axe des x entre les deux photocapteurs et b leur taille, le nu-

mérateur Nu de $\gamma_{1,1}$ est égal à :

$$Nu = \frac{\langle I\rangle^2}{b^4}\int_{-b/2}^{b/2}\int_{L-b/2}^{b/2}\int_{L-b/2}^{L+b/2}\int_{-b/2}^{b/2} \operatorname{sinc}^2 \frac{\pi a(y_1 - x_1 - y_2 + x}{\sqrt{2}\,\lambda d} \operatorname{sinc}^2 \frac{\pi a(x_1 + y_1 - x_2 - y_2)}{\sqrt{2}\,\lambda d}\, dx_1\, dy_1\, dx_2\, dy_2$$

Effectuons le changement de variable suivant :

$$x = (x_1 - x_2 + L)\ \pi a/\sqrt{2}\ \lambda d$$

$$X = (x_1 + x_2 - L)\ \pi a/\sqrt{2}\ \lambda d$$

$$y = (y_1 - y_2)\ \pi a/\sqrt{2}\ \lambda d$$

$$Y = (Y_1 + Y_2)\ \pi a/\sqrt{2}\ \lambda d$$

et posons $m = \pi ab/\sqrt{2}\ \lambda d$ et $r = \pi aL/\lambda d\sqrt{2}$. Dans ces conditions, Nu est égal à

$$Nu = \frac{\langle I\rangle^2}{4m^4}\int_{-m}^{m}\int_{-m+|x|}^{m-|x|}\iint_{idem} \operatorname{sinc}^2(x-y-r)\ \operatorname{sinc}^2(x+y-r)\ dxdXdydY$$

L'intégrale quadruple II-1 se réduit alors à une intégrale double par intégration sur les variables X et Y :

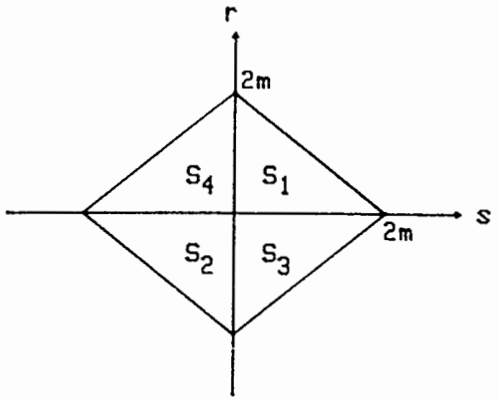
$$Nu = \frac{\langle I\rangle^2}{4m^4}\int_{-m}^{m}\int_{-m}^{m}\operatorname{sinc}^2(x-y-r)\ \operatorname{sinc}^2(x+y-r)(2m-2|x|)(2m-2|y|)dxdy$$

Effectuons le dernier changement de variable :

$$s = (x+y)$$
$$t = (x-y)$$

$$Nu = \frac{\langle I\rangle^2}{8m^4}\iint_S \operatorname{sinc}^2(s-r)\operatorname{sinc}^2(t-r)(2m-|s+t|)(2m-|s-t|)dsdt \quad (II-2)$$

où l'aire S est la suivante :



L'intégrale double sur S se scinde en quatre intégrales doubles que l'on peut noter $Nu(S_i)$. Des considérations de symétrie permettent de montrer que :

$$Nu(S_1, r) = Nu(S_2, -r)$$

$$Nu(S_3, r) = Nu(S_4, +r)$$

de sorte que : $Nu = Nu(S_1, r) + Nu(S_1, -r) + 2Nu(S_3)$.

Le calcul peut alors se poursuivre si on pose $J_2(x) = \int_0^x dt\ \mathrm{sinc}^2 t$ dont on connaît les développements asymptotiques. L'intégrale II-2 se réduit alors à celle de l'équation 40 qui se calcule facilement à l'ordinateur en tant qu'intégrale simple.

ANNEXE 2: ARTICLE

Volume 73, number 1 OPTICS COMMUNICATIONS 1 September 1989

PHOTOREFRACTIVE WAVE MIXING IN $BaTiO_3$ FOR GRADED NEURONS WITH GAIN AND SIGNAL BINARIZATION

V. HORNUNG-LEQUEUX, Ph. LALANNE and G. ROOSEN
Institut d'Optique Théorique et Appliquée, U.A. CNRS, Bâtiment 503, B.P. 147, 91403 Orsay Cédex, France

Received 18 November 1988; revised manuscript received 3 April 1989

We show how photorefractive two-wave mixing allows a nonlinear input–output response providing computational abilities of decision. Particularly, we investigate the realization of a photorefractive "optical neuron". Signal binarization is obtained together with an amplification that can compensate for the losses due to holographic connections. Moreover, the treatment of bipolar signals is allowed by preserving the phase of the wave in a coherent situation. Experimental evidence, using a crystal of $BaTiO_3$ is presented.

1. Introduction

Sequential architecture being a limiting factor for computer performances, many researches now turn toward definitions of parallel computing architectures using many sites of elementary processors. Some of the potentially most practical setups proposed in the realm of optical computing elaborate on concepts like cellular processing, symbolic substitution, neural networks and boolean logic on 2-D arrays. These systems embody on one side a promising high connectivity and a set of simple nonlinear elements. For instance, Hopfield [1,2] has shown that highly interconnected neural networks have computational abilities for optimisation problems and pattern recognition, i.e. associative memories. In this case, the activity of each nonlinear element (neuron) can be easily modeled as shown in fig. 1. The response to an excitatory or inhibitory force F can be considered as a capacity of decision: activity (resp. inactivity) corresponds to state 1 (resp. -1) and the graded part of the response ΔF corresponds to indecisive states.

Although, from an optical point of view, the input–output response of fig. 1b that allows unipolar binary neuron states is generally preferred, we address here the possibility of realizing a nonlinearity such as that of fig. 1a using photorefractive crystals. Photorefractive materials have already been considered for the implementation of nonlinear functions. For example, modifiable synapses [3], phase conjugation in the correlation domain [4], input dependent phase conjugate reflectivity [5,6] and phase conjugate signal thresholding [7] have been demonstrated.

Though electronic non-linearities are very easy to implement and opto-electronic signal processing will be required for elaborated neural networks, it is however quite interesting to investigate the possibility of the realization of an "all-optical neuron". We demonstrate how two-wave mixing in a photorefractive $BaTiO_3$ crystal permits to implement an all optical input–output neural response by preserving the phase of the signal and simultaneously amplifying and normalizing its amplitude [8].

2. Photorefractive "optical neurons"

The computational abilities of neural networks are mainly due to their high connectivity and to nonlinear elements organized in a feedback loop. The optical scheme of a neural network can be thought as the one of fig. 2. Here we address the implementation of the feedback device. Generally speaking, the nonlinear feedback should comply with the two following constraints:

– first, since the light level is notably weaker at the synapse output than at their input, even with Bragg

0 030-4018/89/$03.50 © Elsevier Science Publishers B.V.
(North-Holland Physics Publishing Division)

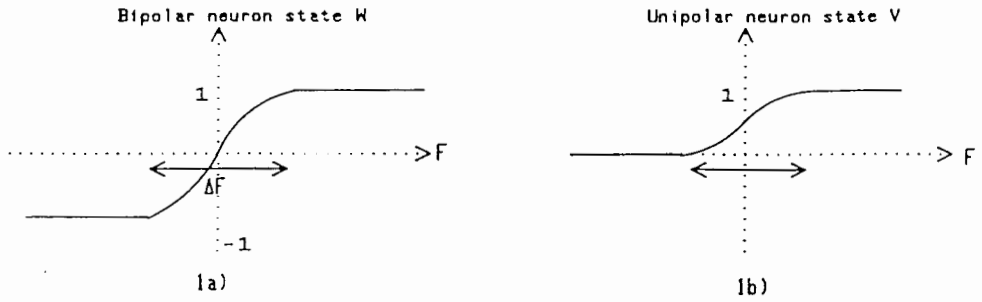


Fig. 1. General input–output graded response of neurons. (a) Bipolar case. (b) Unipolar case.

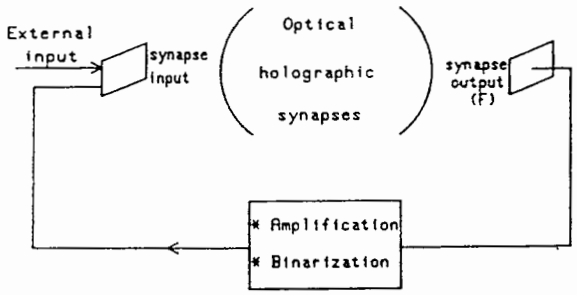


Fig. 2. General scheme for an optical implementation of neural networks.

diffraction in volume crystals for holographic synapses, gain is needed to compensate for losses;

– second, in order to take full profit of the potential offered by holographic interconnections, the feedback has to take into account amplitude and phase information as holography does;

– third, the energy per neural operation should remain weak in order to implement large networks.

Up to date, the proposed optical implementations of neural networks involve two candidate device technologies for feedback loops: integrated optoelectronics and spatial light modulators. The optoelectronic approach involves arrays of detectors and light emitters (LEDs) [9,10] relying on vector matrix product in a noncoherent scheme. The bipolar character of synapses imposes two channels.

Before considering spatial light modulators in more recent works, let us make some remarks about nonlinearities of fig. 1. The input–output response of neurons are obviously dependent on the input signal sign. In case of fig. 1a, the response preserves the sign and in case of fig. 1b, negative signals are reduced to zero whereas positive ones are normalized to unity.

Electrically addressed SLM's a priori require two channels because of the quadratic nature of receptors and of the difficulty of interferometric detection. Similarly, optically addressed SLM's such as liquid crystal light valves act on the intensity of the "write" beam. They therefore cannot transfer phase or sign information from the "write" beam onto the "reading" beam as is required in the input–output response of fig. 1a. They cannot either modulate the "read" beam according to the "write" beam phase or sign as is required in fig. 1b. A possible exception would be to use the same light beam as the "read" and as the "write" signal of the light valve, but this clearly prohibits amplification.

In the next section, we show how the nonlinear response of fig. 1a is achievable through photorefractive two-wave mixing, thus requiring only one channel and allowing for amplification.

3. Two-wave mixing by the photorefractive effect

The photorefractive effect, identified in many insulating and semiconductor crystals, has permitted several operating demonstrations in phase conjugation and optical signal processing [11,12]. It results from photoexcited charge redistribution in crystalline materials, generating an electrostatic space charge field that modulates the material refractive index through the electrooptic effect [13]. When two optical plane waves interfere in a photorefractive crystal, a hologram is generated. This grating is generally spatially shifted relatively to the illumination pat-

tern and diffracts each of the interfering waves. At the crystal output, each light beam is made of the coherent addition of a transmitted and a diffracted phase shifted wave. This results in an amplification of one of the beams at the expense of the other that is depleted.

Assuming that the two incident beams are plane waves, their two electric field amplitudes can be written, in complex notation, as follows,

$$\xi_1 = \tfrac{1}{2}\sqrt{I_1}\,\{\exp(i\varphi_1)\exp[-i(k_1\cdot r-\omega t)]+\text{c.c.}\},$$

$$\xi_2 = \tfrac{1}{2}\sqrt{I_2}\,\{\exp(i\varphi_2)\exp[-i(k_2\cdot r-\omega t)]+\text{c.c.}\},$$

in which c.c. represents the complex conjugate, $k_{1,2}$ the optical wave vectors and ω the optical pulsation.

The evolution of the phases $\varphi_{1,2}$ and intensities $I_{1,2}$ of the two beams during their propagation through the crystal are derived from the wave equations under the usual slowly varying envelope approximation [13]. Neglecting the absorption loss we get

$$\varphi_1(y)-\varphi_1(0) = -\operatorname{cotan}\psi \times\left[\ln\left(\frac{I_2(0)}{I_1(0)}\exp(-Gy)+1\right)+\ln\frac{I_0}{I_1(0)}\right],$$

$$\varphi_2(y)-\varphi_2(0) = -\operatorname{cotan}\psi \times\left[\ln\left(\frac{I_1(0)}{I_2(0)}\exp(Gy)+1\right)+\ln\frac{I_2(0)}{I_0}\right], \qquad (1)$$

and

$$I_1(y) = \frac{I_0}{1+[I_2(0)/I_1(0)]\exp(-Gy)},$$

$$I_2(y) = \frac{I_0}{1+[I_1(0)/I_2(0)]\exp(Gy)}, \qquad (2)$$

where $I_0 = I_1(0)+I_2(0)$ is the total incident intensity, y is the coordinate along the bisector of k_1 and k_2, and $\hat{y} = (k_1+k_2)/|k_1+k_2|$.

ψ is the phase shift between illumination and index gratings and G is the photorefractive gain per unit interaction length as defined in refs. [13,14].

Through this wave mixing process, one beam will be amplified at the expense of the other, according to the sign of G that depends on experimental and material parameters. Phase redistribution may also occur depending on G and ψ.

4. Principle of amplification with signal binarization

4.1. Proposed photorefractive simulation of the neuron response

The function depicted in fig. 1a is realized by a component that preserves the wave phase and produces a saturation of the output intensity (neuron state W, fig. 1a) for a wide range of input intensities (force F). In photorefractive materials where charge migration results from simple carrier diffusion (no photo-voltaïc effect nor drift by an applied electric field), the phase shift $\psi = \pm\pi/2$ depending wether electrons or holes are involved in the process [13]. Thus the wave phase is preserved in the interaction (see eq. (1) with $\psi = \pm\pi/2$). We consequently will discuss the principle of amplification and binarization on beam intensities. Of course, a similar discussion can be conducted for the amplitudes. From eq. (2), one can rewrite the intensity of the transmitted beam amplified by the two wave mixing process as

$$I_1(L) = I_1(0)\frac{(r+1)\exp(GL)}{1+r\exp(GL)},$$

where L is the interaction length of the two beams inside the crystal, $r = I_1(0)/I_2(0)$ the ratio of signal to pump intensities, at the crystal entrance. We note $\gamma = \exp(GL)$. The dependence of $I_1(L)$ as a function of r presents three extreme behaviours [15]. Firstly, for $r \ll 1$ and $\gamma r \ll 1$, the amplified intensity $I_1(L)$ is proportional to $I_1(0)$. The straight line slope, given by γ, is thus large for large values of the gain interaction length product. Image amplification experiments have been generally realized under these conditions of gain saturation [16–18]. Secondly, when r is increased (but $r \ll 1$), γr becomes much larger than unity, $I_1(L)$ remains quasi-constant and equal to the pump beam intensity: $I_1(L) = I_2(0)$, whatever $I_1(0)$. In this regime γ varies as $1/r$. This condition that gives the level of the normalized output signal is satisfied when, for example, $\gamma \geqslant 3000$ and r equal to some percents. Finally, if r is about unity, the amplified output intensity is $I_1(L) = I_1(0)+I_2(0)$. In conclusion, this short discussion shows that a normalized level is obtained for large variations of the input intensity. Moreover this level can be modified by varying the pump beam intensity. These behav-

iours are summarized in fig. 3 with the amplitudes rather than the intensities of the considered waves.

4.2. Application to neural network associative memories

Let us now consider a neural network with the photorefractive neuron response of fig. 3. For the sake of specificity, we consider one particular learning rule, for instance the hebbian rule [19]. So

$$F_i = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\sum_{m=1}^{N} W_i^m W_j^m W_j ,$$

where N is the number of neurons and W^m, $m=1, 2 \ldots, M$ is the mth stored pattern; all $W_i^m = \pm 1$. When a noisy pattern with pN bits in error is presented, during the retrieving process, F_i has a gaussian distribution with variance $\sqrt{M/N}$ and a mean value increasing from $(1-2p)W_i^m$ to W_i^m [9] (this is true under the assumption that the W_i^m are independent, identically distributed random variables with zero mean and variance 1 for all i and m, and that N is sufficiently large).

Let us comment here on the identifying of figs. 1a and 3. In the case of the proposed optical implementation, the synapse input W_j is the output beam $A_1(L)$ ($|A_1(L)|^2 = I_1(L)$) of the photo-refractive neuron. With reference to fig. 3, for binary W_j, the force F_i would ideally be $A_1(0)$ in the case of lossless

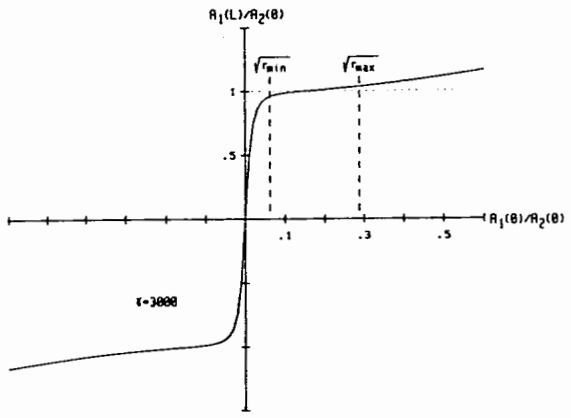


Fig. 3. Theoretical dependence of the amplitude ratio $A_1(L)/A_1(0)$ for an exponential gain γ of 3000. $\sqrt{r_{min}}$ and $\sqrt{r_{max}}$ define the input signal range corresponding to constant output.

optical interconnections. For an interconnection intensity loss factor $(1-t)^2$, the synapse output is then tF_i. Taking into account variance and error bits, the recall is successful if during the retrieving process tF_i remains in the interval providing a quasi-constant output (see fig. 3). In our case the conditions are

$$(1-2p-\sqrt{M/N})t > \sqrt{r_{min}} ,$$

$$(1+\sqrt{M/N})t < \sqrt{r_{max}} ,$$

where r_{min} and r_{max} are the lower and upper values of the beam ratio r defining the range of constant output.

The second condition is evidently realized because of the losses in the synapses. To illustrate the first condition, it is possible to show that the typical size of the attraction basins is $pN = N(1-\sqrt{M/M_{max}})/2$ [20] and that M_{max} is about $N/2 \ln N$. So, with N large, the first condition sets an upper limit on the losses

$$t^2 > \frac{N}{2M \ln N} r_{min} . \qquad (3)$$

This result will be used in our final discussion.

5. Experimental demonstration

The light beam generated by an argon laser ($\lambda = 514$ nm) is divided in two waves made incident on a photorefractive crystal: a pump beam $I_2(0)$ slightly focussed and a signal beam of weaker intensity $I_1(0)$ to be amplified. The photorefractive material used is a barium titanate crystal ($BaTiO_3$) grown in the "Laboratoire de Physique du Solide" (Dijon, France). Its dimensions along the $\hat{a}\times\hat{b}\times\hat{c}$ crystallographic axes were $5\times3\times3$ mm^3. It was placed in an index matching liquid. A half-wave plate makes the beam polarizations extraordinary in the crystal. In this configuration the effective electrooptic coefficient is the largest [21]. The research of a large value of γ, despite of the beam fanning phenomenon [21] (fig. 4a) and the crystal small dimensions, leads us to choose an experimental configuration where the pump and signal beams are incident on adjacent faces of the crystal. Fig. 4b shows the energy transfer from pump beam to signal beam (the incident part of which is not visible because of its weak intensity).

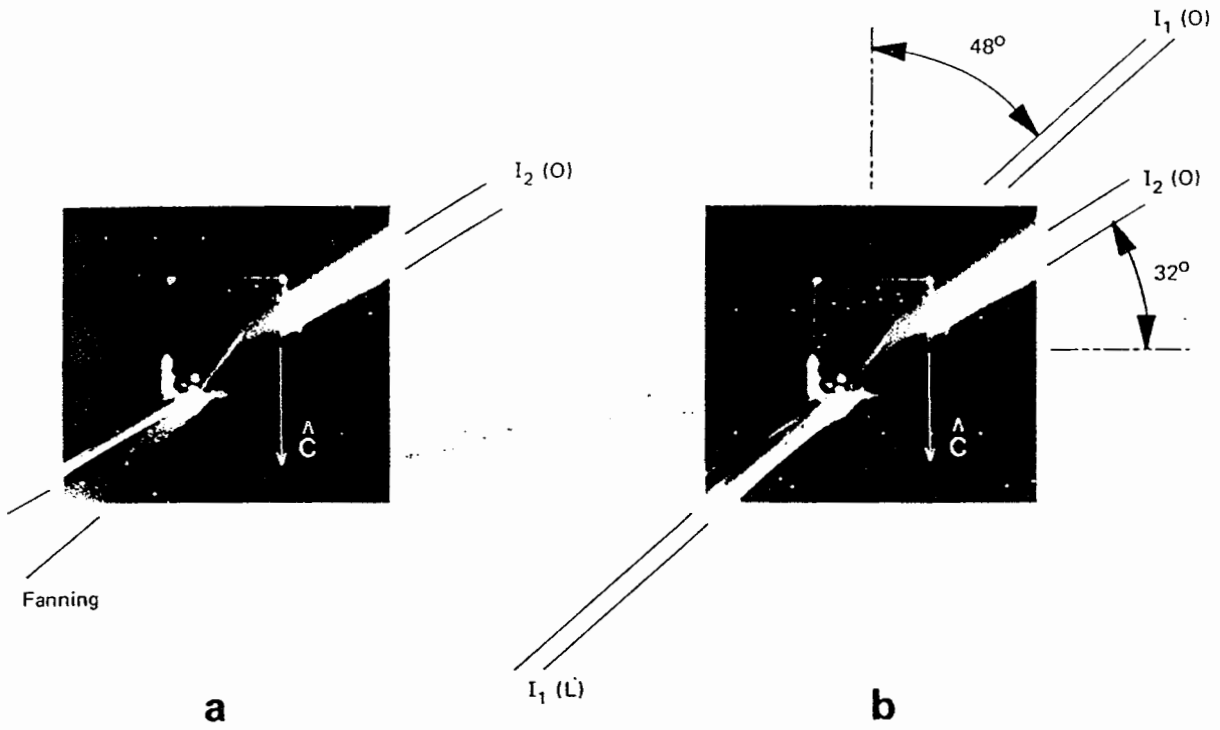


Fig. 4. (a) Fanning of pump beam I_2 in absence of signal beam (the axis $\hat{c}$ is in the entrance face). (b) Energy transfer from pump beam I_2 to signal beam I_1.

One example of the experimental values obtained for the intensity $I_1(L)$ of the amplified signal as a function of $r=I_1(0)/I_2(0)$, the ratio of the input signal over pump intensities, is given in fig. 5.

The dotted line corresponds to the maximum amplified signal through the two-wave mixing process.

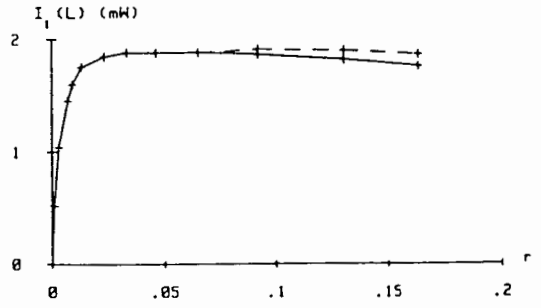


Fig. 5. Experimental dependence of the amplified intensity $I_1(L)$ as a function of r. The accuracy of the experimental points is 1.5%.

The full line corresponds to the steady state regime. The slight reduction observed is caused by a weak fanning of the amplified signal beam. In this experiment, the pump and signal beam incident angles were 32° and 48° respectively (fig. 4). The experimental curve (fig. 5) shows that the amplified signal $I_1(L)$ is constant for a dynamic range of 10 of the incident signal intensity $I_1(0)$. The amplification gain, given by $I_1(L)/I_1^w(L)$, ($I_1^w(L)=$ transmitted signal intensity without pump) varies from 10 to 100 for the r dynamic range giving a constant output signal $I_1(L)$. In our experiment however, important losses caused by reflections and diffusions in the crystal-index matching liquid system make the effective amplification gain, defined by $I_1(L)/I_1(0)$ weaker: 1.2 to 10.

Amplification with signal normalization has also been demonstrated on a uniform object. It was composed of five pixels, 200×200 μm^2 each, vertically aligned. The results are shown in fig. 7. The ampli-

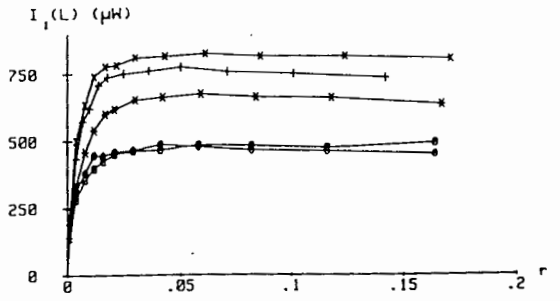


Fig. 6. Experimental dependence of the amplified pixel signals as a function of $r = I_1(0)/I_2(0)$.

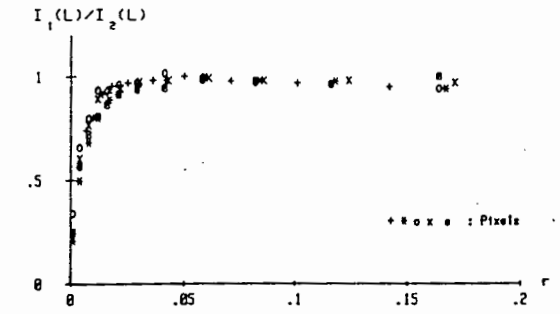


Fig. 7. Experimental dependence of $I_1(L)/I_2(L)$ versus $I_1(0)/I_2(0) = r$ for different pixels of the object.

fied intensity of each pixel saturates at different levels because of the gaussian spatial distribution of the pump beam. Normalizing the amplified signal intensity for each pixel to the corresponding pump intensity, leads to the same output level and the same evolution versus input signal to pump ratio r for all the pixels (fig. 7).

6. Discussion and conclusion

We have presented a realization of an "all optical neuron" with binary bipolar states allowing for one channel implementation. This approach preserves the optical wave phase and gives signal amplification. Our experimental results show that a constant output level is obtained for a beam ratio r between signal and pump beams greater than 0.03 (fig. 5 or 7). According to eq. (3), for an associative memory of 500 neurons and 70 stored patterns, t^2 must be larger than 0.017. In this particular case of pattern recognition, interconnection losses up to 98% can be tolerated.

Barium titanate crystals are attractive materials as they provide the required photorefractive gain. However, in our experiment such a gain was obtained at the expense of important incident angles and the use of an index matching liquid. This introduces optical losses and, more significantly, considerably restricts the size of the input object that can be processed.

A specifically cut crystal with its optic axis $\hat{c}$ at 45° from the faces, would considerably reduce these drawbacks [22]. Indeed, it would permit to obtain gains G as high as previously but for a quasi normal incidence of the light beams. Consequently much greater angular apertures and reduction of scattering and absorption losses (no index matching liquid required) will be achievable. In these conditions, the amplification with binarization of a pixel matrix would be possible.

The main limitation will come from low photorefractive sensitivity of barium titanate. In our experiments an energy per pixel or per neural operation of about 200 μJ was needed (pixel size 0.2×0.2 mm^2). It is clear that this amount will be significantly lowered (×4%) by using a 45°-cut crystal [22]. Considering again the implementation of 500 neurons on a crystal of typical size (aperture 0.2 cm^2, thickness 3 mm) this leads to a pump beam energy of 100 mJ. This result calls for much work in order to improve the material sensitivity.

One could also consider other photorefractive candidates such as sillenites [23] or semi-conductors [24]. They would permit a lowering of the required energy by about three orders of magnitude; 1 pJ/μm^2 is a convenient number to remind. But because the low electro-optic coefficient of these materials, enhancement techniques [25–30] would have to be used in order to achieve high two-wave mixing gains.

Acknowledgements

We wish to warmly thank Professor G. Godefroy and Dr. A. Maillard for their interest in our work and for providing the $BaTiO_3$ sample.

We are very grateful to Drs. P. Chavel, J.M.C. Jon-

athan, G. Pauliat and J. Taboury for very valuable and stimulating discussions.

This work was partly supported by a CEE stimulation contract (ST2*0448).

References

[1] J.J. Hopfield, Proc. Natl. Acad. Sci. 79 (1982) 2254.
[2] J.J. Hopfield and D.W. Tank, Biol. Cybern. 72 (1985) 141.
[3] D. Psaltis, B. Brady and K. Wagner, Appl. Optics 27 (1988) 1752.
[4] Y. Owechko, G.J. Dunning, E. Marom and B.H. Soffer, Appl. Optics 26 (1987) 1900.
[5] K. Sayano, G.A. Rakuljic and A. Yariv, Optics Lett. 13 (1988) 143.
[6] M. Cronin-Golomb and A. Yariv, Optics Lett. 12 (1987) 714.
[7] M.B. Klein, G.J. Dunning, G.C. Valley, R.C. Lind and T.R. O'Meara, Optics Lett. 11 (1986) 575.
[8] V. Hornung-Lequeux, Ph. Lalanne and G. Roosen, Optical Computing, Tech. Digest 9 (1989) 71.
[9] D. Psaltis and N.H Farhat, Optics Lett. 10 (1985) 98.
[10] N.H. Farhat, Appl. Optics 26 (1987) 5093.
[11] S.I. Stepanov and M.P. Petrov, Optica Acta 31 (1984) 1335.
[12] J.P. Huignard and G. Roosen, Proceedings in Physics, 7, Non linear optics: materials and devices, eds. Flytzanis, J.L. Oudar (Springer-Verlag, 1986) p. 128.
[13] N.V. Kukhtarev, V.B. Markov, S.G. Odulov, M.S. Soskin and V.L. Vinetskii, Ferroelectrics 22 (1979) 949.
[14] G. Roosen, G. Le Saux, G. Pauliat, M. Allain, J.M.C. Jonathan and A. Brun, Rev. Phys. Appl. 22 (1987) 1253.
[15] Y. Fainman, C.C. Guest and S.H. Lee, Appl. Optics 25 (1986) 1598.
[16] A. Marrakchi and J.P. Huignard, Appl. Phys. 24 (1981) 131.
[17] F. Laeri, T. Tshudi and J. Albers, Optics Comm. 47 (1983) 387.
[18] Y. Fainman, E. Klancnik and S.H. Lee, Opt. Engin. 25 (1986) 228.
[19] D.O. Hebb, The organization of behaviour (Wiley, New York, 1949).
[20] Ph. Lalanne, J. Taboury and P. Chavel, Optics Comm. 151 (1986) 370.
[21] J. Feinberg, J. Opt. Soc. Am. 72 (1982) 46.
[22] J.E. Ford, Y. Fainman and S.H. lee, Topical Meeting on Spatial Light Modulators, Tech. Digest 8 (1988) 40.
[23] J.P. Huignard and F. Micheron, Appl. Phys. 29 (1976) 591.
[24] A.M. Glass, A.M. Johnson, D.H. Olson and W. Simpson, Appl. Phys. Lett. 44 (1984) 948.
[25] S.I. Stepanov, V.V. Kulikov and M.P. Petrov, Optics Comm. 44 (1982) 19.
[26] Ph. Refregier, L. Solymar, H. Rajbenbach and J.P. Huignard, J. Appl. Phys. 58 (1985) 45.
[27] S.I. Stepanov and M.P. Petrov, Optics Comm. 53 (1985) 292.
[28] J. Kumar, G. Albanese and W.H. Steier, J. Opt. Soc. Am. B 4 (1987) 1079.
[29] C. Besson, J.M.C. Jonathan, A. Villing and G. Roosen, The International Congress on Optical Science and Engineering, 1988, Proceedings SPIE. 1017 in press, Optics Letters, to be published.

Sujet : Etude des réseaux de neurones formels et de leurs réalisations opto-électroniques. Génération optique de tableaux de nombres aléatoires.

Résumé :

Depuis quelques années, l'étude des réseaux de neurones a connu dans l'ensemble de la communauté scientifique un essor considérable. Les neurobiologistes partant de leurs observations proposent des modèles que mathématiciens et informaticiens s'attachent à élaborer de manière à les rendre susceptibles de résoudre des problèmes complexes qui se prêtent mal à une mise sous forme algorithmique. Depuis le premier travail (1985), montrant un montage opto-électronique permettant la réalisation d'un réseau de neurones, plus de 80 publications émanant des opticiens peuvent être recensées. Ces modèles, en effet, soulèvent le problème de leur réalisation avec des architectures, soit électroniques ou optoélectroniques. C'est dans ce cadre que s'inscrit cette thèse. Plus généralement, nous avons trouvé en ces modèles matière à réflexion sur l'introduction de l'optique dans les machines parallèles.

La première partie de ce travail comprend l'étude d'un réseau de neurones simple : le modèle d'Hopfield. D'un point de vue théorique, nous montrons qu'il est possible d'accroître très fortement les capacités de mémorisation de ce modèle sans pour autant sacrifier son adéquation aux réalisations optiques. Cet apport est le fruit de l'introduction d'une non-linéarité supplémentaire dans le domaine de corrélation qui prend dans le processus de reconnaissance une part prédominante. Ceci donne lieu aux modèles qui, dans la littérature, sont appelés : mémoire associative d'ordre supérieur.

Cette approche théorique est ensuite validée par une expérience démontrant la faisabilité opto-électronique d'un tel modèle. Cette démonstration nous conduit à discuter l'apport de l'optique dans les architectures parallèles et connexionnistes. Notamment, nous insistons sur le fait que, technologiquement, l'optique semble à l'heure actuelle plus particulièrement prête à intervenir aux niveaux des traitements linéaires (connexions) qu'aux niveaux des portes non linéaires.

Après avoir passé en revue l'ensemble des différentes réalisations opto-électroniques autorisant la mise en oeuvre des réseaux neuronaux, une critique des limitations théoriques que nous avons rencontrées nous conduira dans la seconde partie de ce manuscrit vers une approche plus générale où l'optique intervient ponctuellement dans un processeur étudié pour soulager l'intégration électronique de machines tableaux pour le traitement parallèle de l'information. Certains algorithmes stochastiques nécessitant un grand nombre de nombres aléatoires par unité de temps (recuité simulé, machine de Boltzmann), nous donnons les résultats d'une étude préliminaire de la réalisation d'un générateur optique de tableaux de nombres aléatoires utilisant les propriétés du speckle. Plus particulièrement, nous caractérisons la qualité des nombres aléatoires en ce qui concerne leurs indépendances spatiale et temporelle. Nous effectuons des mesures de facteurs de corrélation d'ordre un et d'ordre plus élevé mettant en évidence des résultats de 1 %, ainsi que des tests statistiques basés sur le test du chi-deux. L'ensemble de ces résultats ayant donné satisfaction, nous envisageons finalement la réalisation d'un générateur optique rapide, compact et fiable.

Mots-clés : Réseaux neuronaux - Mémoires associatives - Calcul optique - Speckle - Nombres aléatoires.