



Sur l'étude théorique et numérique de la propagation des ondes électromagnétiques en milieu inhomogène non périodique

Jean-Paul Hugonin

► To cite this version:

Jean-Paul Hugonin. Sur l'étude théorique et numérique de la propagation des ondes électromagnétiques en milieu inhomogène non périodique. Optique [physics.optics]. Université Paris Sud - Paris XI, 1983. Français. NNT: . pastel-00732312

HAL Id: pastel-00732312

<https://pastel.hal.science/pastel-00732312>

Submitted on 14 Sep 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ORSAY
n° d'ordre :

2736

UNIVERSITE DE PARIS-SUD

CENTRE D'ORSAY

THESE

présentée

Pour obtenir

LeGRADE..... de DOCTEURD'ETAT.....
SCIENCES PHYSIQUES

PAR

.....Monsieur Jean-Paul HUGONIN.....

—•—

SUJET : SUR L'ETUDE THEORIQUE ET NUMERIQUE DE LA PROPAGATION DES ONDES
ELECTROMAGNETIQUES EN MILIEU INHOMOGENE NON PERIODIQUE.

soutenue le13 Juin 1983..... devant la Commission d'examen

MM.LICHNEROWICZ André..... Président

.....BOLOMEY Jean-Charles.....

.....LICHNEWSKI Alain.....

.....LOWENTHAL Serge.....

.....PETIT Roger.....

Upon theoretical and numerical study of propagation of electromagnetic waves in the presence of inhomogenous non periodic media.

SUMMARY :

The propagation of electromagnetic waves in the presence of a locally deformed plane waveguide is considered. We look for a rigorous solution of Maxwell's equations, i.e, a solution in which the error depend only on the numerical methods used for evaluation. We outline the mathematical aspect of this rather formidable problem and emphasize the numerical difficulties that we have to overcome.

Many examples are given. Several approximate methods are tested by comparison with the rigorous method.

KEY-WORDS : Electromagnetism, diffraction, numerical, deformed waveguide.

Chapitre I : Avant-propos.

Chapitre II : Etude théorique de quelques exemples dans le cas E//.

- 1°) Méthode différentielle d'étude des réseaux
- 2°) Exemple de la diffraction d'une onde plane par un dioptre plan localement déformé.
- 3°) Exemple de la diffraction d'un mode guidé se propageant dans un guide plan localement déformé.

Chapitre III : Etude théorique du cas général : Incidence oblique.

1°) Généralités

- a) Géométrie de l'obstacle
 - α) Exemples
 - β) Guide non déformé
 - γ) Guide déformé
- b) Equations de Maxwell dans le cas de la diffraction oblique
- c) Quelques notations
- d) Changement de repère
- e) Equation fondamentale
- f) Forme du champ dans le substrat
- g) Considérations sur le guide non déformé
- h) Composantes incidentes et composantes diffractées sur les modes.

2°) Remarques théoriques fondamentales

- a) Rappel sur le problème physique étudié
- b) Problème n° I
- c) Problème n° II
- d) Problème n° III : solution du problème physique.

3°) Relations de réciprocité - Egalité entre l'énergie incidente et l'énergie diffractée

- a) Notations décrivant le champ incident et le champ diffracté
- b) Formule générale : principe de démonstration
- c) Relations de réciprocité
- d) Théorème optique généralisé
 - α) Forme générale
 - β) Théorème optique généralisé
 - γ) Relation entre énergie incidente et énergie diffractée
 - δ) Vérification numérique.

Chapitre IV : Aspect numérique du problème.

1°) Algorithmes numériques

- a) Echantillonnage
- b) Résolution du problème I : algorithme I.
- c) Résolution du problème II : algorithme II.
- d) Résolution du problème III : algorithme III. •

2°) Fonctionnement général du programme

3°) Test des capacités du programme

- a) Principaux paramètres de calcul
- b) Pour tester la précision d'une étude donnée...
 - α) Bilan d'énergie
 - β) Comparaison aux résultats obtenus pour des valeurs élevées de N et P.
- c) Conclusion.

4°) Aspect informatique

- a) Ecriture du programme
 - α) L'étape n° 1
 - β) L'étape n° 2
 - γ) L'étape n° 3
 - δ) L'étape n° 4

- b) Occupation en mémoire
- c) Temps de calcul

- α) L'étape n° 1
- β) L'étape n° 2
- γ) En conclusion

Chapitre V : Exemples de résultats

1°) Présentation des résultats

- a) l'intensité des ondes planes
- b) l'intensité des modes
- c) caractérisation du spectre continu.

2°) Quelques résultats dans le cas de polarisation E//

- a) l'obstacle diffractant est obtenu par déformation d'un dioptre plan.
- b) le guide non déformé comporte deux dioptries.

3°) Résultats dans le cas de polarisation H//

- a) l'obstacle diffractant est obtenu par déformation d'un dioptre plan.
- b) le guide non déformé comporte deux dioptries.

4°) Résultats dans le cas de l'incidence oblique

- a) l'obstacle est obtenu par déformation d'un dioptre plan
- b) quelques exemples dans le cas où le guide non déformé comporte deux dioptries.
- c) Réflexion et transmission des modes.

Chapitre VI : Méthodes approchées

1°) Première méthode approchée

2°) Seconde méthode approchée : couplage des modes.

- a) Exemple du cas E// pour un guide monomode, forme simplifiée de la méthode approchée.

α) Principe de la méthode

β) Exemples de résultats

b) Généralisation au cas de l'incidence oblique

α) Principe

β) Comparaison aux résultats de la méthode exacte

3°) Troisième méthode approchée : méthode d'extrapolation

a) Principe de la méthode

α)

β)

γ)

b) Exemples d'utilisation

c) Passage à la limite, cas du réseau semi-infini.

Conclusion.

REFERENCES

Chapitre I

- 1) R. Petit "Electromagnetic theory of grating", R. Petit Ed.
(Springer-Verlag, Berlin, 1980).
- 2) J.P. Hugonin and R. Petit
"Theoretical and numerical study of a locally deformed stratified medium"
Josa Vol. 71 n° 6 June 81 p. 664.
- 3) J.P. Hugonin, R. Petit and M. Cadilhac
"Plane wave expansions used to describe the field diffracted by a grating".
Josa Vol. 71 n° 5 mai 1981 p. 593.

Chapitre II

- 1) M. Nevière, P. Vincent et R. Petit
"Sur la théorie du réseau conducteur et ses applications à l'optique"
Nouv. Rev. Optique, 1974, t. 5, n° 2 pp. 65-77.

Chapitre III

- 1) R. Petit "Electromagnetic Theory of Gratings", Petit, Ed.
(Springer-Verlag, Berlin, 1980).
- 2) P. Vincent and M. Nevière "The reciprocity theorem for corrugated surfaces used in conical diffraction mounting" Thèse P. Vincent.
- 3) P. Vincent "Singularity expansions for cylinders of limite conductivity"
Thèse P. Vincent.

Chapitre IV

- 1) G. Choquet, "Cours d'Analyse - Topologie" - Masson et Cie Editeurs 1973.

Chapitre V

- 1 N. Gremillet, G. Thomin, J. Marcou
"Mode conversion in oblique bragg gratings for integrated optics",
8th. European microwave conference, Sept. 1978.

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier :

Messieurs les Professeurs R. PETIT, M. CADILHAC, S. LOWENTHAL
pour leur précieuse collaboration scientifique,

Messieurs les Professeurs A. LICHNEROWICZ, J.C. BOLOMEY, A. LICHNEWSKI
qui ont bien voulu accepter de faire partie du jury,

Mesdames HOFFEURT, FRIZZI, GRUSON, CALVIGNAC, CAIL
qui ont contribué à la frappe de ce manuscrit et de divers articles,

la DRET pour son aide financière (contrat n° 78/1148),

ainsi que tous les membres des laboratoires d'Optique Cohérente d'Orsay
et d'Optique Electromagnétique de Saint-Jérôme.

CHAPITRE I

Avant-propos

L'objet de cette thèse est la recherche théorique et numérique de la solution rigoureuse des équations de Maxwell dans un guide diélectrique localement déformé. A notre connaissance, aucune étude semblable n'a jamais été entreprise. Son intérêt est pourtant évident, ne serait-ce que pour tester les méthodes approchées systématiquement utilisées dans la littérature scientifique (voir par exemple "light transmission optics" de D. Marcuse). On peut aussi espérer être utile aux ingénieurs de conception en leur évitant, par utilisation de notre programme, des tâtonnements expérimentaux fastidieux et coûteux.

Il nous a semblé inutile d'imposer au lecteur une narration chronologique de nos difficultés. Elles ont été les difficultés habituellement rencontrées en physique mathématique et en analyse numérique ; le volume important du programme final (6000 cartes) contribuant à accroître les sources d'erreurs de programmation.

On trouvera donc dans ce mémoire un exposé de synthèse déjà rédigé à l'usage de la D.R.E.T. qui a bien voulu nous apporter son aide financière (contrat n° 78/1148).

Le premier chapitre devrait permettre au lecteur de se faire rapidement une idée de l'ensemble du travail sans se plonger dans le détail des considérations théoriques et numériques exposées aux chapitres II, III, IV et VI. On notera que le chapitre V qui montre les possibilités du programme mis au point en exposant quelques résultats, peut être compris sans avoir assimilé les chapitres précédents.

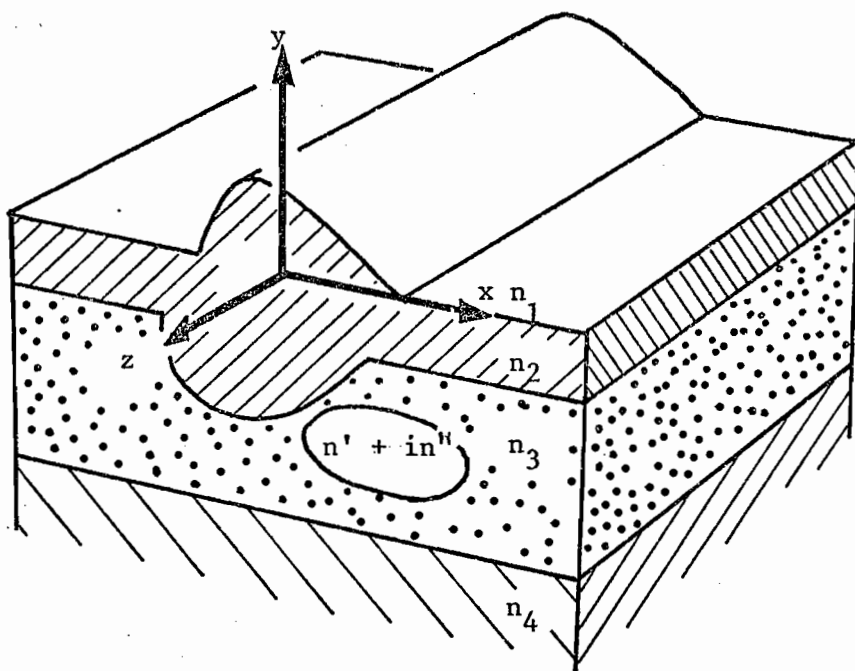


Figure 1

On peut avoir plusieurs milieux d'indice réel sur un substrat, une déformation par dioptre, et même des inclusions de matériaux absorbants ($n' + in''$).

La déformation indépendante de z doit rester à l'intérieur d'un domaine D dont les dimensions sont de l'ordre de la longueur d'onde.

Rappelons que nous nous proposons de déterminer rigoureusement, en régime harmonique et pour la structure schématisée sur la figure 1, le champ électromagnétique correspondant à divers excitations :

- a) excitation par une onde plane se propageant obliquement par rapport à Oz .
- b) excitation par un ou plusieurs "modes entrants" associés au guide d'onde constitué par l'empilement de lames minces en l'absence de toute déformation.

Dans le premier cas, on cherche notamment à déterminer le diagramme de rayonnement (diffraction due à la déformation), ainsi que la fraction de l'énergie incidente transmise aux modes guidés sortants (couplage établi par la déformation entre le "champ incident" et les modes guidés).

Dans le deuxième cas, outre les diagrammes de rayonnement, on cherchera à obtenir les matrices de réflexion et de transmission caractérisant l'action de la déformation sur les modes guidés entrants (naissance de "modes sortants" réfléchis ou transmis).

Pour faciliter la tâche du lecteur, ce problème est d'abord résolu (chapitre II) dans le cas particulier où le champ électrique est parallèle à Oz. On est alors ramené à un problème scalaire qui permet d'exposer sur un cas simple, le principe des méthodes utilisées dans le cas général. Ce dernier est traité au chapitre III. On n'échappe pas alors aux difficultés liées au caractère vectoriel de l'onde électromagnétique. Après des manipulations algébriques sans doute pénibles à suivre dans le détail, on propose néanmoins une solution correspondant aux excitations initialement fixées : onde plane d'incidence et de polarisation quelconques, modes guidés se propageant obliquement par rapport à Oz (c'est-à-dire par rapport à la direction de la déformation).

On notera bien que, selon les habitudes de notre petite équipe, le problème d'optique considéré est traité rigoureusement à partir des équations de Maxwell. Aucune hypothèse n'est faite pour simplifier la forme des équations qui en découlent, et les résultats fournis sont donc uniquement entachés des erreurs d'arrondi et de troncature inhérentes à toute méthode numérique. L'expérience numérique a montré que le programme mis au point est fiable tant que la déformation de chacun des dioptries reste contenue à l'intérieur d'un rectangle dont les dimensions sont respectivement voisines de 20λ selon Ox et λ selon Oy. De telles valeurs seraient sans doute jugées intéressantes en radio électricité. Ce n'est évidemment pas le cas en "optique planaire" où l'on apprécierait plutôt des déformations au moins 1000 fois plus larges (par exemple quelques milliers de sillons d'un réseau tracé sur un "Slab"). C'est pour pallier cet inconvénient que le chapitre VI propose des méthodes approchées dont il faudrait maintenant vérifier la validité par des mesures expérimentales.

Nous avons tenté de nous atteler à cette tâche, mais tout au plus sommes-nous arrivés à nous persuader de la difficulté de l'entreprise. Des mesures de qualité nécessiteraient un équipement important et une grande pratique de l'Optique intégrée. Une tentative a été faite au LETI à Grenoble (Groupe d'Optique intégrée), dans le cadre du stage de Monsieur MORBIEU, sous la direction de Madame ERMOLIEFF.

Il s'agissait de mesurer les coefficients de réflexion et de transmission d'un mode guidé, sur une rayure tracée sur le guide. Malheureusement, l'incertitude sur les mesures et sur les paramètres du guide et de la déformation, n'ont même pas permis de départager les résultats obtenus par la méthode exacte, de ceux obtenus par la méthode approchée la plus élémentaire. Une vérification expérimentale dans le domaine des micro-ondes, donnerait peut-être des résultats plus intéressants, mais là encore, nos premiers travaux ne poussent guère à l'optimisme.

En conclusion, nous pensons avoir effectué pour le guide diélectrique localement déformé, un travail de pionnier semblable à celui qui avait été fait il y a quelques années au Laboratoire d'Optique Electromagnétique, au sujet des réseaux [1] .

Nous espérons qu'après diffusion de notre travail dans la communauté scientifique [2] , il finira par attirer l'attention des utilisateurs, ou même des constructeurs de composants passifs en optique planaire (comme c'est actuellement le cas pour les réseaux). Les personnes intéressées pourront alors nous contacter pour bénéficier de l'expérience acquise ou même pour tenter d'utiliser systématiquement un programme qui, à vrai dire, reste encore un instrument de recherche qui peut être difficile à utiliser sans l'intervention de la personne qui l'a mis au point.

Il va de soi que cette étude, comme toute étude théorique, nous a amenés plusieurs fois à réfléchir sur des problèmes généraux liés à la propagation des ondes électromagnétiques. Des considérations sur la possibilité de représenter les champs par des combinaisons linéaires d'ondes planes ont fait l'objet d'un article au JOSA [3] . De nombreux calculs sur les modes d'un guide recouvert par un réseau d'extension infinie, ont été effectués à Marseille dans le but de sélectionner certains exemples d'applications décrits au chapitre V. Nous n'avons pas jugé utile de faire figurer ici un compte rendu de ces recherches que l'on pourrait bien entendu qualifier de recherches annexes.

Références

- 1) R. Petit "Electromagnetic theory of grating", R. Petit Ed.
(Springer-Verlag, Berlin, 1980).
- 2) J.P. Hugonin and R. Petit
"Theoretical and numerical study of a locally deformed stratified medium"
Josa Vol. 71 n° 6 June 81 p. 664.
- 3) J.P. Hugonin, R. Petit and M. Cadilhac
"Plane wave expansions used to describe the field diffracted by a grating"
Josa Vol. 71 n° 5 mai 1981, p. 593.

CHAPITRE II

**ÉTUDE THÉORIQUE
DE QUELQUES EXEMPLES
DANS LE CAS E //**

Pour mieux comprendre le cas général qui fait appel à un formalisme compliqué, il est utile de commencer par l'étude du cas de polarisation E // qui conduit à des calculs plus simples. Cette simplification est essentiellement due au fait que le problème vectoriel de la recherche du champ se ramène alors à un problème scalaire. Néanmoins, toutes les difficultés d'ordre théorique se retrouvent dans le cas E //. Du reste, c'est sur ce cas que nous avons commencé par tester la méthode avant de mettre au point le programme très général dont nous parlerons par la suite.

Nous allons montrer dans ce chapitre, par quelques exemples simples, comment la méthode différentielle d'étude des réseaux a pu être adaptée à l'étude du problème de l'obstacle non périodique.

1. METHODE DIFFERENTIELLE D'ETUDE DES RESEAUX

Nous avons cherché à généraliser les méthodes utilisées pour l'étude des réseaux, et particulièrement les méthodes différentielles mises au point au laboratoire [1]. Rappelons donc tout d'abord en quoi elles consistent, sur un exemple simple.

Comme convenu, nous nous limitons au cas E // où le champ électrique est parallèle à l'axe Oz d'un repère orthonormé Oxyz.

Son amplitude E (x, y) vérifie l'équation de Helmholtz au sens des distributions :

$$\Delta E + n^2 (x,y) E = 0, \quad (1)$$

où n (x,y) est l'indice optique.

Soit $f(x)$ une fonction périodique de période d . La surface du cylindre d'équation $y = f(x)$ sépare l'espace libre (indice 1) d'un milieu homogène d'indice n_b . Le réseau diélectrique ainsi défini est éclairé par une onde plane venant du haut soit $E^i(x,y) = e \exp(-iy)$.

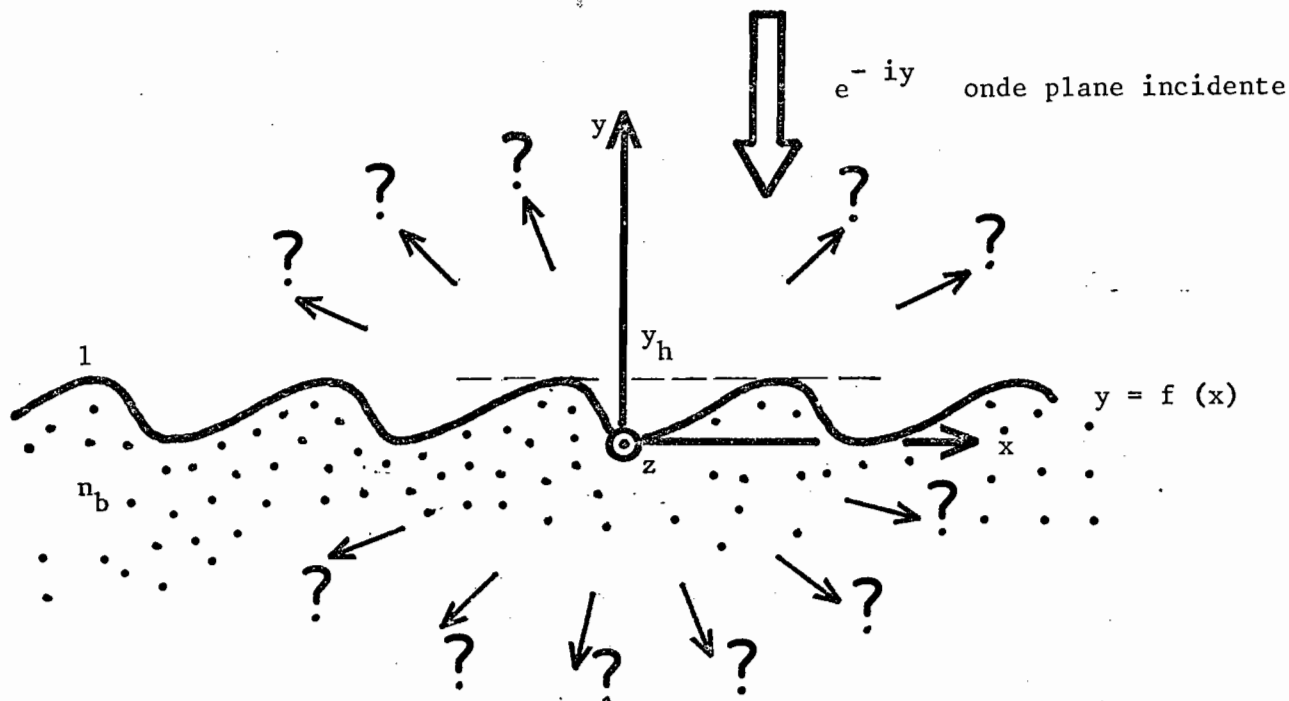


Figure 1

Posons :

$$N(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y \geq 0 \\ n_b & \text{si } y < 0, \end{cases} \quad (2)$$

$$\text{et } D(x,y) = n^2(x,y) - N^2(y). \quad (3)$$

On cherche l'amplitude des ordres diffractés au-dessus
 $(y > y_h = \max \{f(x)\})$ et au-dessous $(y < 0 = \min \{f(x)\})$.

- a) La méthode différentielle consiste à écrire pour chaque valeur de y $E(x,y)$ et $D(x,y)$ sous la forme d'une série de Fourier en x :

$$E(x,y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \hat{E}_m(y) \exp(i\zeta_m x) \quad (4)$$

$$D(x,y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \hat{D}_m(y) \exp(i\zeta_m x),$$

où $\zeta_m = m \frac{2\pi}{d}$,

et à reporter ces expressions dans l'équation de Helmholtz pour obtenir un système différentiel d'inconnues $\hat{E}_m(y)$:

$$\frac{d^2 \hat{E}_m(y)}{dy^2} = \left[\zeta_m^2 - N^2(y) \right] \hat{E}_m(y) - \sum_{p=-\infty}^{\infty} \hat{E}_p(y) \hat{D}_{m-p}(y) \quad (5)$$

- b) Si $y > y_h$ ou $y < 0$, $D(x,y) = 0$ et les solutions de l'équation (5) s'écrivent sous la forme suivante :

$$\hat{E}_m(y) = \begin{cases} E_{Ih}(m) \exp(-i\chi_h(m)y) + E_{Dh}(m) \exp(i\chi_h(m)y) & \text{si } y \geq y_h \\ E_{Db}(m) \exp(-i\chi_b(m)y) & \text{si } y \leq 0 \end{cases} \quad (6a)$$

$$(6b)$$

où $\chi_h(m) = \sqrt{1 - \zeta_m^2}$, $\chi_b(m) = \sqrt{n_b^2 - \zeta_m^2}$, la détermination

des racines carrées étant telle que χ_h ou χ_h / i , χ_b ou χ_b / i soient réels positifs.

Si on porte (6) dans (4), on voit que le champ s'exprime sous la forme d'une somme d'ordres incidents et d'ordres diffractés et que $E_{Db}(m)$, $E_{Ih}(m)$, $E_{Dh}(m)$ sont les amplitudes complexes des ordres diffractés (lettre D) ou incidents (lettre I) dans la région du haut (lettre h) ou du bas (lettre b). Remarquons que (6b) exprime une condition d'ondes sortantes vers le bas.

c) Remarque fondamentale

La donnée des coefficients $E_{Db}(m)$ permet de calculer $\hat{E}_m(y)$ pour $y < 0$ grâce à la relation (6b). On en déduit alors les conditions aux limites en $y = 0$ nécessaires à démarrer l'intégration du système différentiel (5).

L'intégration de ce système de $y = 0$ à $y = y_h$ permet de calculer $\hat{E}_m(y_h)$ et $\frac{d\hat{E}_m}{dy}(y_h)$. On obtient alors $E_{Ih}(m)$ et $E_{Dh}(m)$ par identification avec (6a) :

$$E_{Dh}(m) = \frac{1}{2} \exp \left[-i \chi_h(m) y_h \right] \left[\hat{E}_m(y_h) - \frac{i}{\chi_h(m)} \frac{d\hat{E}_m}{dy}(y_h) \right]$$

$$E_{Ih}(m) = \frac{1}{2} \exp \left[i \chi_h(m) y_h \right] \left[\hat{E}_m(y_h) + \frac{i}{\chi_h(m)} \frac{d\hat{E}_m}{dy}(y_h) \right] \quad (7)$$

Malheureusement, on ne connaît pas $E_{Db}(m)$ mais $E_{Ih}(m)$, l'amplitude de l'onde plane incidente. Par exemple ici $E_{Ih}(m) = \delta_m, 0$ (symbole de Kronecker). C'est une situation générale en optique : on est amené à résoudre une équation différentielle sur un certain segment avec des conditions aux limites aux deux extrémités du segment.

C'est par exemple ce qui se produit quand on étudie la diffraction d'une onde plane par un système de couches : on cherche une fonction d'une variable, solution d'une équation différentielle du second ordre. Pour intégrer cette équation sur la hauteur de la couche, il faudrait connaître deux conditions initiales (valeur de la fonction et de sa dérivée) à une extrémité de l'intervalle d'intégration, mais en fait, les conditions aux limites sont données aux deux extrémités : l'une exprime le fait que le champ incident est connu au-dessus du système de couches (onde plane incidente) et l'autre exprime une condition d'ondes sortantes dans le substrat.

On peut cependant tourner la difficulté en utilisant une "méthode de tir" fondée sur la linéarité du problème.

Commençons d'abord par noter E_{Db} et E_{Ih} la série des $E_{Db}(m)$ et la série des $E_{Ih}(m)$ ($m = -\infty \dots 0, \dots \infty$).

On a vu que la donnée de E_{Db} permet de calculer E_{Ih} grâce à la résolution du système différentiel (5), ce qui définit l'opérateur linéaire π tel que :

$$E_{Ih} = \pi E_{Db} \quad (8)$$

$$\text{d'où l'on déduit : } E_{Db} = \pi^{-1} E_{Ih} \quad (9)$$

E_{Dh} est alors déterminé à l'aide de la relation (7).

En pratique, on ne peut pas traiter numériquement des séries infinies de coefficients et on est amené à tronquer à $m \in \{-M, \dots, 0, \dots, M\}$

Dans ces conditions, E_{Db} et E_{Ih} sont représentés par des vecteurs de dimension $2M + 1$ et π par une matrice $(2M + 1) \times (2M + 1)$.

Pour déterminer π , on peut résoudre (5) pour les valeurs suivantes de E_{Db} :

$$E_{Db} = (1, 0 \dots 0) \quad (10)$$

$$E_{Db} = (0, 1 \dots 0)$$

$$\dots \dots \dots$$

$$E_{Db} = (0, 0 \dots, 0, 1)$$

Il faut donc intégrer $2M + 1$ fois le système (5) alors qu'une seule intégration aurait suffi si les conditions aux limites avaient été exprimées au même point. Il reste à inverser la matrice π de dimension $(2M + 1) \times (2M + 1)$ pour obtenir E_{Db} grâce à (9).

2. EXEMPLE DE LA DIFFRACTION D'UNE ONDE PLANE PAR UN DIOPTRE PLAN LOCALEMENT DÉFORMÉ

Considérons toujours le cas de polarisation $E //$. L'amplitude $E(x,y)$ de la composante du champ sur l'axe Oz vérifie donc l'équation de Helmholtz :

$$\Delta E + n^2(x,y) E = 0 \quad (11)$$

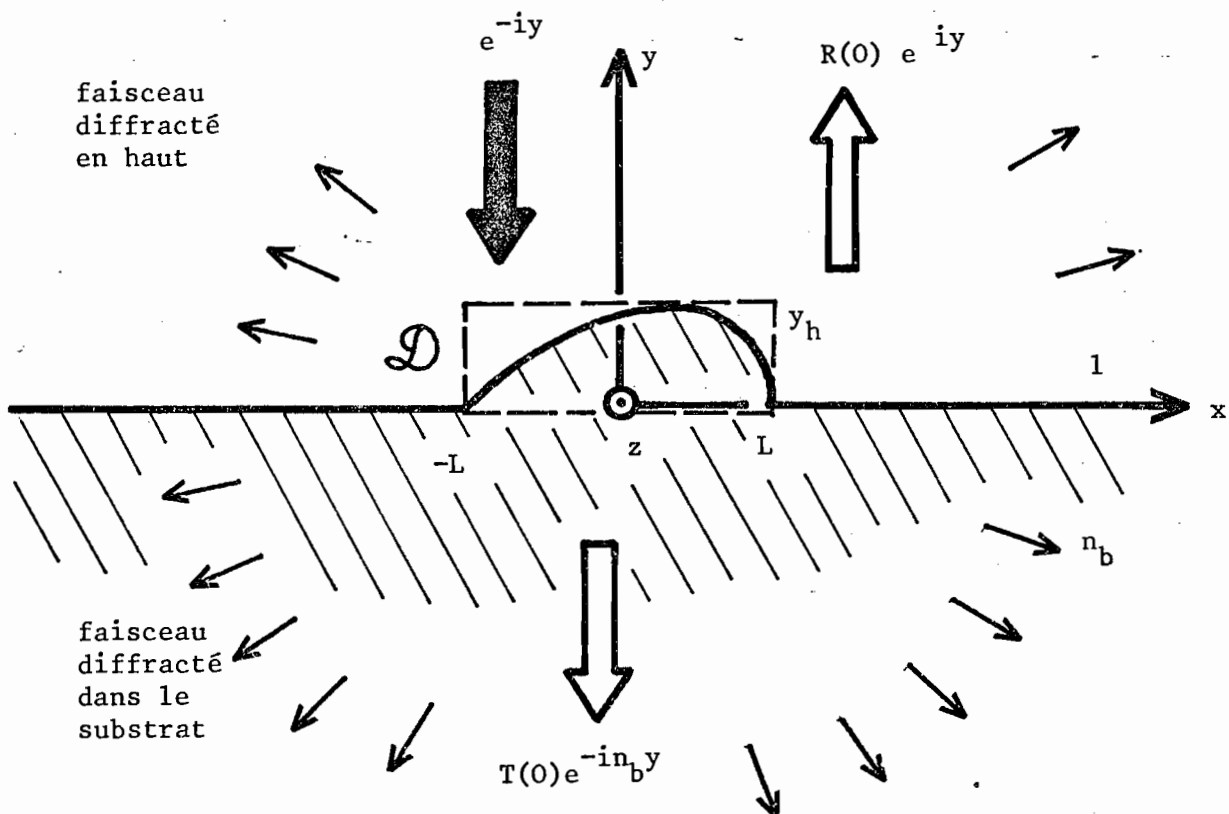


Figure 2

A l'extérieur d'un rectangle $\mathcal{D}$ défini par $0 < y < y_h$ et $|x| < L$, l'indice $n(x,y)$ s'identifie à la fonction $N(y)$ définie par :

$$N(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y \geq 0 \\ n_b & \text{si } y < 0 \end{cases} \quad (12)$$

Posons :

$$D(x,y) = n^2(x,y) - N^2(y) \quad (13)$$

et notons bien que D est nulle en dehors du rectangle $\mathcal{D}$.

a) Introduisons les transformées de Fourier :

$$E(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{E}(\zeta,y) \exp(i\zeta x) d\zeta, \quad (14)$$

$$D(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{D}(\zeta,y) \exp(i\zeta x) d\zeta.$$

On voit apparaître ici la première différence avec le cas du réseau : les séries de Fourier sont remplacées par des intégrales de Fourier.

Après avoir reporté (14) et (13) dans l'équation de Helmholtz (11), on obtient :

$$\frac{\partial^2 \hat{E}(\zeta,y)}{\partial y^2} = [\zeta^2 - N^2(y)] \hat{E}(\zeta,y) - \hat{D}(\zeta,y) * \hat{E}(\zeta,y), \quad (15)$$

où * désigne le produit de convolution par rapport à la variable ζ :

$$\hat{D}(\zeta,y) * \hat{E}(\zeta,y) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{D}(\zeta',y) \hat{E}(\zeta - \zeta',y) d\zeta'.$$

b) Si $y > y_h$ ou $y < 0$, $D(x,y) = 0$ et les solutions de l'équation (15) prennent la forme :

$$\hat{E}(\zeta,y) = \begin{cases} E_{Ih}(\zeta) \exp(-i\chi_h y) + E_{Dh}(\zeta) \exp(i\chi_h y) & \text{si } y \geq y_h, \\ E_{Db}(\zeta) \exp(-i\chi_b y) & \text{si } y \leq 0. \end{cases} \quad (16a)$$

$$(16b)$$

$$\text{où } \chi_h(\zeta) = \sqrt{1 - \zeta^2}, \quad \chi_b(\zeta) = \sqrt{n_b^2 - \zeta^2}, \quad \chi_h \text{ ou } \chi_h/i,$$

χ_b ou χ_b/i réel positif.

Dans (16), E_{Db} , E_{Ih} , E_{Dh} sont des fonctions complexes qui décrivent le champ incident et le champ diffracté au-dessus ou au-dessous de l'obstacle. Remarquons que (16b) exprime la condition d'ondes sortantes au-dessous.

Définissons grâce à la relation (16a) l'opérateur $\mathcal{Y}$ qui à $\hat{E}(\zeta, y)$ associe $\chi_h(\zeta)$ $E_{Ih}(\zeta)$:

$$\mathcal{Y} \hat{E}(\zeta, y) = \frac{1}{2} \exp(i \chi_h y_h) \left[\chi_h(\zeta) \hat{E}(\zeta, y_h) + i \frac{\partial \hat{E}}{\partial y}(\zeta, y_h) \right] \quad (17)$$

On peut dire que $\mathcal{Y}$ extrait le champ incident du champ total.

c) Remarque fondamentale

La donnée de la fonction $E_{Db}(\zeta)$ permet de calculer $\hat{E}(\zeta, y)$ pour $y \leq 0$ grâce à la relation (16b). On en déduit les conditions aux limites en $y = 0$ nécessaires au démarrage de l'intégration de l'équation différentielle (15).

L'intégration de cette équation de $y = 0$ à $y = y_h$ permet de calculer $\hat{E}(\zeta, y_h)$ et $\frac{\partial \hat{E}}{\partial y}(\zeta, y_h)$, puis $E_{Ih}(\zeta)$ et $E_{Dh}(\zeta)$

par identification avec (16a) :

$$\begin{aligned} E_{Dh}(\zeta) &= \frac{1}{2} \exp[-i \chi_h(\zeta) y_h] \left[\hat{E}(\zeta, y_h) - \frac{i}{\chi_h(\zeta)} \frac{\partial \hat{E}}{\partial y}(\zeta, y_h) \right], \\ E_{Ih}(\zeta) &= \frac{1}{2} \exp[i \chi_h(\zeta) y_h] \left[\hat{E}(\zeta, y_h) + \frac{i}{\chi_h(\zeta)} \frac{\partial \hat{E}}{\partial y}(\zeta, y_h) \right]. \end{aligned} \quad (18)$$

Jusqu'à présent, nous nous sommes contentés de reprendre la théorie des réseaux en remplaçant les séries de Fourier par des intégrales de Fourier.

La poursuite de cette généralisation conduirait à chercher $E_{Db}(\zeta)$ pour que la solution correspondante des équations de Maxwell (unique d'après ce qui précède), aboutisse à $E_{Ih}(\zeta) = \delta(\zeta)$. Malheureusement, E_{Ih} , et par conséquent E_{Db} , ne sont pas des fonctions régulières mais des distributions, et un tel procédé n'est pas exploitable numériquement.

Pour remédier à celà, il convient d'utiliser le fait que l'obstacle est en première approximation un dioptré plan dont les coefficients de réflexion et de transmission $R(\zeta)$ et $T(\zeta)$ sont donnés par les formules de Fresnel : les distributions de Dirac qui interviennent plus haut sont dues en effet à la réflexion et à la transmission de l'onde plane incidente par le plan non déformé.

Revenons maintenant au problème de la détermination du champ quand $E_{Db}(\zeta)$ est connu. Si le dioptré plan n'était pas déformé, le champ serait :

$$\hat{E}_0(\zeta, y) = \begin{cases} E_{Db}(\zeta) \frac{1}{T(\zeta)} \exp[-i \chi_h(\zeta) y] + \frac{R(\zeta)}{T(\zeta)} \exp[i \chi_h(\zeta) y] & \text{si } y > 0 \\ E_{Db}(\zeta) \exp[-i \chi_b(\zeta) y] & \text{si } y \leq 0 \end{cases} \quad (18)$$

On peut penser que $\hat{E}_0$ est déjà une bonne approximation de $\hat{E}$ et chercher $\hat{E}$ sous la forme :

$$\hat{E}(\zeta, y) = \hat{E}_0(\zeta, y) + e(\zeta, y), \quad (19)$$

où $e(\zeta, y)$ est la nouvelle fonction inconnue.

Portons (19) dans (15) et remarquons que $\hat{E}_0$ vérifie

$$\frac{\partial^2 \hat{E}_0}{\partial y^2} = [\zeta^2 - N^2(y)] \hat{E}_0; \quad \text{on voit que } e(\zeta, y) \text{ est la solution de}$$

l'équation fonctionnelle intégrale-différentielle :

$$\frac{\partial^2 e}{\partial y^2} = (\zeta^2 - N^2) e + \hat{D}(\zeta, y) * [\hat{E}_0(\zeta, y) + e(\zeta, y)], \quad (20)$$

qui est identiquement nulle pour $y \leq 0$.

(En effet, pour $y \leq 0$, $\hat{E}(\zeta, y) = \hat{E}_0(\zeta, y) = E_{Db}(\zeta) \exp[-i \chi_b(\zeta) y]$)

Comme la transformée de Fourier en ζ de $\hat{D} * (\hat{E}_0 + e)$ est nulle quand $|x| > L$ (puisque $D(x, y)$ est nul si $|x| > L$), $\hat{D} * (\hat{E}_0 + e)$ est une fonction de ζ indéfiniment différentiable.

Il est alors raisonnable d'admettre, après examen de (20), que $e(\zeta, y)$ est une fonction régulière.

La résolution de (20) - qui peut se faire grâce aux méthodes classiques d'intégration des équations différentielles - permet de calculer $e(\zeta, y)$ pour toute valeur de y et en particulier pour $y \geq y_h$. On peut alors en déduire :

$$i_h(\zeta) = \mathcal{Y} e(\zeta, y) \quad (21)$$

où $\mathcal{Y}$ est l'opérateur défini en (17)

Définissons alors l'opérateur linéaire $\mathcal{Y}$ par :

$$i_h = \mathcal{Y} E_{Db} \quad (22)$$

Il est important de remarquer que l'action de $\mathcal{Y}$ sur une distribution est une fonction régulière qui est susceptible d'être calculée par l'ordinateur.

On obtient en faisant agir l'opérateur $\mathcal{Y}$ sur les deux membres de (19):

$$\chi_h(\zeta) E_{Ih}(\zeta) = g(\zeta) E_{Db}(\zeta) + i_h(\zeta), \quad (23)$$

où on a posé :

$$g(\zeta) = \frac{\chi_h(\zeta)}{T(\zeta)} \quad (24)$$

g est une fonction continue de ζ qui ne s'annule pas.

d) Jusqu'à présent, nous avons exprimé uniquement la condition d'ondes sortantes dans le substrat. Il reste à écrire que :

$$E_{Ih}(\zeta) = \delta(\zeta), \text{ c'est-à-dire d'après (23) :}$$

$$E_{Db}(\zeta) = \frac{1}{g(\zeta)} \left[\delta(\zeta) - i_h(\zeta) \right] \quad (25)$$

On obtient en reportant (25) dans (22) :

$$i_h(\zeta) = \mathcal{G} \cdot \left\{ \frac{1}{g(\zeta)} \left[\delta(\zeta) - i_h(\zeta) \right] \right\} \quad (26)$$

C'est une équation fonctionnelle d'inconnue i_h . Nous exposerons plus loin les méthodes numériques qui permettent de résoudre cette équation.

Lorsque i_h est déterminé (par résolution de cette équation), on peut calculer E_{Db} avec (25) et le champ est connu partout.

Remarquons que le champ s'exprime comme la superposition de la réponse du dioptré non déformé à l'onde plane incidente, et d'un champ diffracté complémentaire qui loin de l'obstacle peut être interprété comme un faisceau diffracté venant de la déformation.

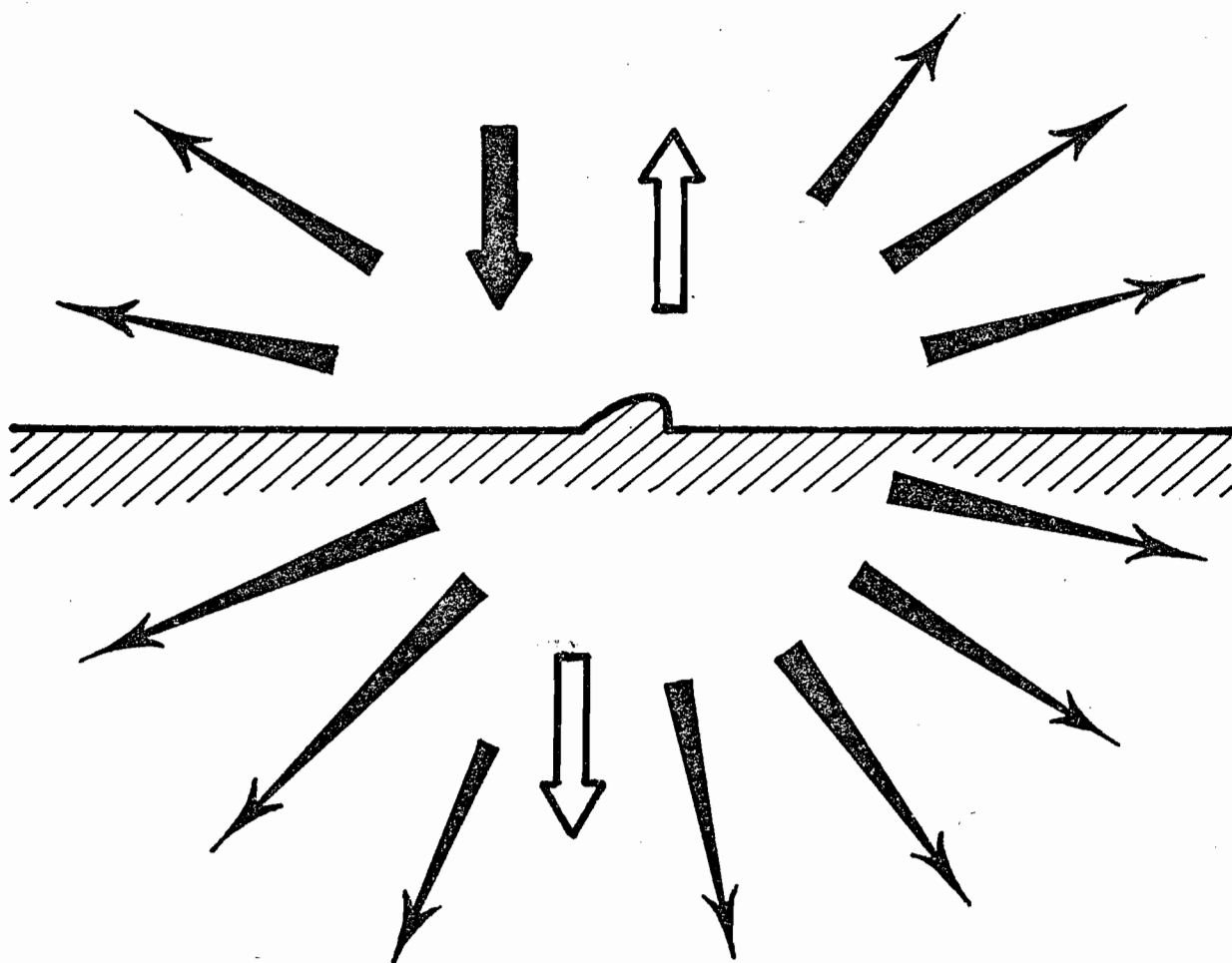


Figure 3

3. EXEMPLE DE LA DIFFRACTION D'UN MODE GUIDE SE PROPAGEANT DANS UN GUIDE PLAN LOCALEMENT DÉFORMÉ

a) Guide non déformé :

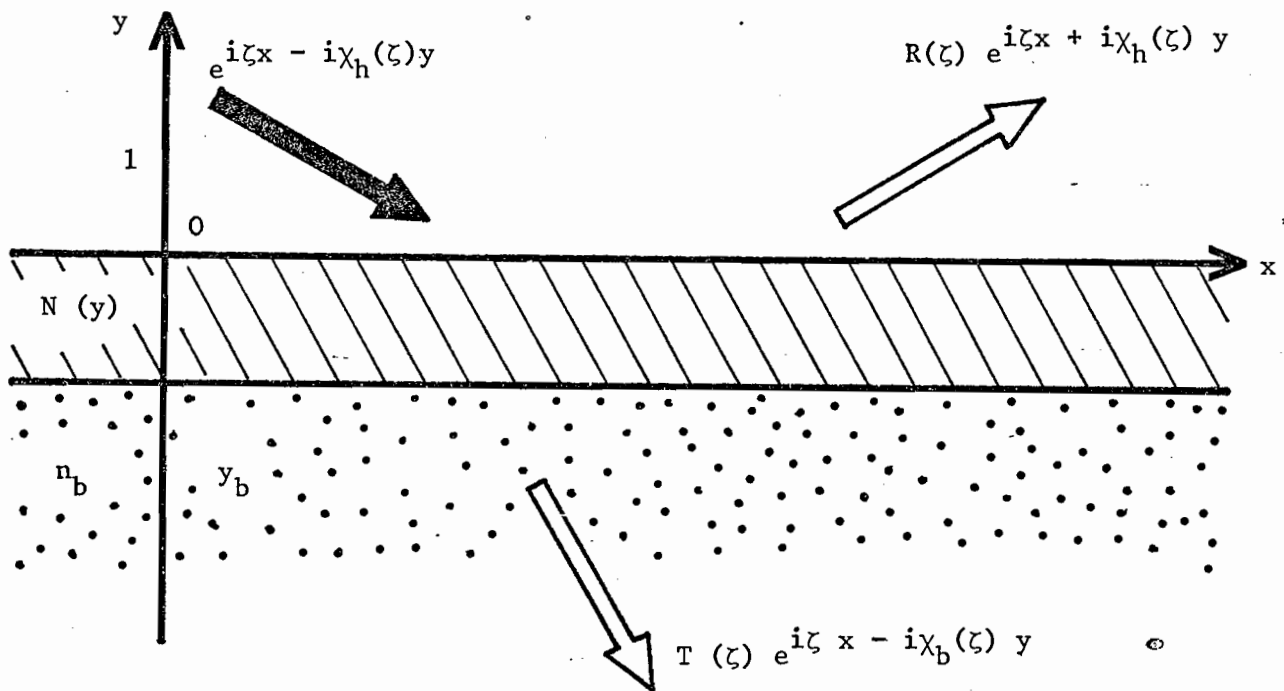


Figure 4

Considérons un guide diélectrique plan d'indice $N(y)$.

Dans le cas représenté sur la figure 4, $N(y)$ est une fonction constante par morceaux, prenant 3 valeurs. Soit $R(\zeta)$ et $T(\zeta)$ les coefficients de réflexion et de transmission d'une onde plane incidente du haut et dont la composante sur x du vecteur d'onde est ζ (nombre réel).

Comme dans le cas du dioptre plan, posons :

$$g(\zeta) = \frac{\chi_h(\zeta)}{T(\zeta)} \quad (27)$$

où $\chi_h(\zeta) = \sqrt{1 - \zeta^2}$, (χ_h ou χ_h/i positif).

On suppose que le guide admet un seul mode TE d'indice effectif ζ_G , donc que $g(\pm \zeta_G) = 0$.

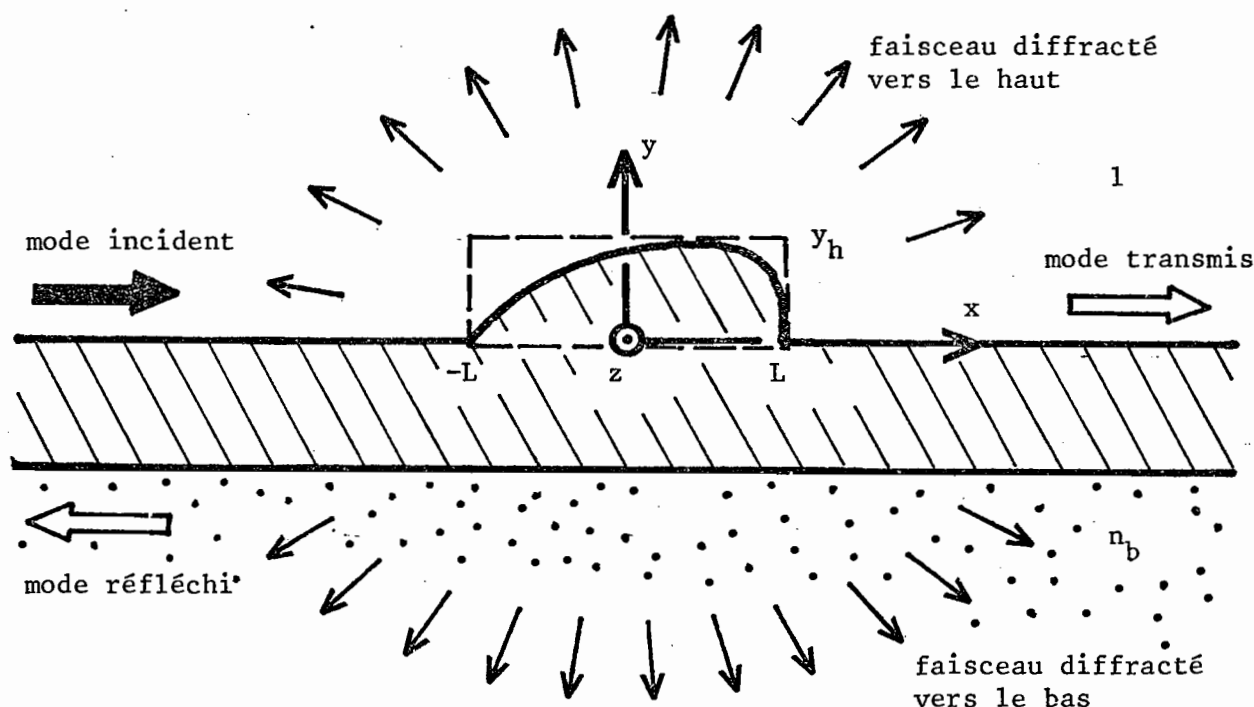
b) Guide déformé :

Figure 5

L'obstacle qui nous intéresse est obtenu en faisant subir au dioptré supérieur de ce guide, une déformation locale contenue dans le rectangle $|x| \leq L$, $0 \leq y \leq y_h$.

On a donc une "bosse" ($|x| \leq L$) comprise entre un "demi-guide" de gauche ($x < -L$) et un "demi-guide" de droite ($x > L$).

Quand un mode, porté par le demi-guide de gauche arrive sur la bosse, il se réfléchit, donne une composante transmise (portée par le demi-guide de droite) et engendre un faisceau diffracté vers le haut et un faisceau diffracté vers le bas.

c) Rien d'important n'est à modifier dans les paragraphes 2a, b, c sauf les points de détail suivants :

- dans (16a) la limite est $y < y_b$ au lieu de $y < 0$

- on a maintenant $E_{Th}(\zeta) = 0$ au lieu de $\delta(\zeta)$.
- la forme de $\hat{E}_0(\zeta, y)$, réponse du guide non déformé à $E_{Db}(\zeta)$ est plus compliquée que la formule (18). Il est inutile d'expliciter ces expressions qui relèvent de calculs simples.
- $e(\zeta, y)$ est identiquement nulle pour $y \leq y_b$ et non plus pour $y \leq 0$.

d) le seul changement important apparaît quand on veut exprimer $E_{Db}(\zeta)$ à partir de la relation

$$0 = g(\zeta) E_{Db}(\zeta) + i_h(\zeta). \quad (28)$$

Un calcul "trop rapide" donnerait en effet :

$$E_{Db} = -i_h / g,$$

ce qui, reporté dans (29) conduit à l'équation d'inconnue i_h :

$$i_h = -\mathcal{G}(i_h / g).$$

Malheureusement, cette équation homogène admet la solution triviale $i_h = 0$ et l'on trouve finalement un champ électrique nul partout, ce qui est contraire à l'intuition physique.

On a oublié en effet que $g(\pm \zeta_G) = 0$, et que le calcul de E_{Db} à partir de la relation (28) nous confronte au problème de la division en théorie des distributions.

Rappelons que la recherche des distributions $T(\zeta)$ telles que $\zeta T(\zeta) = 1$ ne conduit pas à une solution unique mais à :

$$T = v_p \left(\frac{1}{\zeta} \right) + a \delta(\zeta),$$

où $v_p \left(\frac{1}{\zeta} \right)$ est la valeur principale de Cauchy et, a , une constante arbitraire.

On ne peut donc pas déduire de (28) E_{Db} de manière unique, mais :

$$E_{Db}(\zeta) = -v_p \left(\frac{i_h(\zeta)}{g(\zeta)} \right) + a_+ \delta(\zeta - \zeta_G) + a_- \delta(\zeta + \zeta_G), \quad (29)$$

où a_+ et a_- sont deux constantes arbitraires et V_p rappelle que la division par g est prise au sens "valeur principale de Cauchy" en $\zeta = \pm \zeta_G$.

On obtient cette fois en reportant (29) dans (22) :

$$i_h(\zeta) = \mathcal{J} \left\{ -V_p \left(\frac{i_h(\zeta)}{g(\zeta)} \right) + a_+ \delta(\zeta - \zeta_G) + a_- \delta(\zeta + \zeta_G) \right\} \quad (30)$$

e) Supposons que l'on connaisse a_+ et a_- :

α) La relation (30) est alors une équation fonctionnelle d'inconnue i_h que nous pouvons résoudre numériquement.

Supposons que cette résolution numérique ait été faite : $i_h(\zeta)$ est donc une fonction connue.

On en déduit E_{Db} grâce à (29), puis pour $y \leq y_b$:

$$\hat{E}(\zeta, y) = E_{Db}(\zeta) \exp \left[-i \chi_b(\zeta) y \right].$$

On obtient en développant la valeur principale de Cauchy contenue dans l'expression (29) :

$$\hat{E}(\zeta, y) = \left[e_+ V_p \left(\frac{1}{\zeta - \zeta_G} \right) + e_- V_p \left(\frac{1}{\zeta + \zeta_G} \right) + a_+ \delta(\zeta - \zeta_G) + a_- \delta(\zeta + \zeta_G) \right] \exp \left(-i \chi_b(\zeta_G) y \right) + U(\zeta, y), \quad (31)$$

où U est une fonction régulière de ζ et e_+ , e_- deux constantes faciles à calculer lorsque l'on connaît $i_h(\pm \zeta_G)$.

β) L'intuition physique nous permet de penser que la contribution des faisceaux diffractés s'atténue quand on s'éloigne de la déformation. Loin de celle-ci, le champ s'écrit comme la superposition de deux modes : un mode entrant et un mode sortant. Naturellement, les coefficients de cette combinaison linéaire de modes ne sont pas les mêmes à gauche qu'à droite de la déformation.

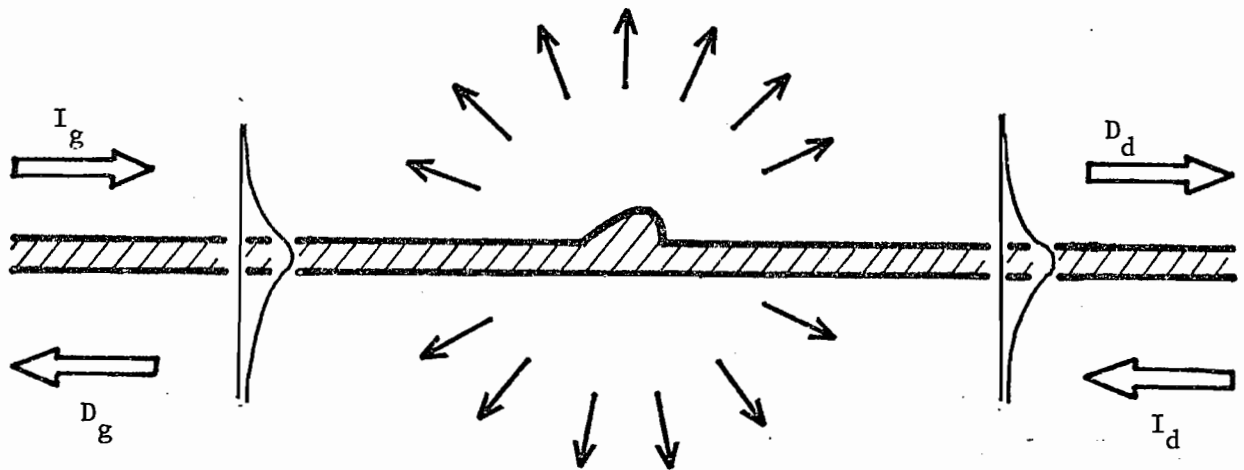


Figure 6

On peut artificiellement prolonger le champ dû à ces modes aux demi-plans $x < 0$ et $x > 0$. Ceci donne par exemple l'expression du champ pour $y \leq y_b$:

$$E(x, y) = \exp \left[-i \chi_b (\zeta_G) y \right] \left\{ \left[I_g \exp (i \zeta_G x) + D_g \exp (-i \zeta_G x) \right] H(-x) + \left[I_d \exp (-i \zeta_G x) + D_d \exp (i \zeta_G x) \right] H(x) \right\} + \tilde{E}(x, y), \quad (32)$$

où $\tilde{E}(x, y)$ est une fonction résiduelle qui décrit le faisceau diffracté vers le bas. $H(x)$ est la fonction d'Heaviside ($H(x) = 1$ si $x > 0$ et 0 si $x < 0$).

Dans la formule (32), D_g et D_d sont les amplitudes du mode diffracté à gauche et à droite et I_g , I_d les amplitudes du mode incident de gauche et de droite.

γ) Pour calculer la transformée de Fourier en x de $E(x, y)$ donné par l'expression (32), on utilise la forme connue de la transformée de Fourier de $H(x)$: $\frac{1}{2} \delta(\zeta) + \frac{1}{2\pi i} V_p \left(\frac{1}{\zeta} \right)$.

On obtient en identifiant les termes singuliers (δ, V_p) avec ceux de l'expression (31) :

$$\begin{cases} 2 \Pi i e_+ = -I_g + D_d \\ 2 \Pi i e_- = I_d - D_g \\ 2 a_+ = I_g + D_d \\ 2 a_- = I_d + D_g \end{cases} \quad (33)$$

d'où l'on déduit :

$$\begin{cases} I_g = a_+ - i \Pi e_+ \\ I_d = a_- + i \Pi e_- \\ D_g = a_- - i \Pi e_- \\ D_d = a_+ + i \Pi e_+ \end{cases} \quad (34)$$

Ceci montre que, quand on se donne a_+ et a_- , on sait calculer I_g et I_d . La linéarité du problème permet d'écrire :

$$\begin{pmatrix} I_g \\ I_d \end{pmatrix} = \mathcal{A} \begin{pmatrix} a_+ \\ a_- \end{pmatrix}, \quad (35)$$

où $\mathcal{A}$ est une matrice 2×2 que l'on peut déterminer colonne par colonne en exécutant les calculs précédents pour $a_+ = 1, a_- = 0$ puis pour $a_+ = 0, a_- = 1$.

e) Pour choisir les deux constantes a_+ et a_- , il faudrait écrire deux nouvelles conditions. Or, justement, nous n'avons pas encore exprimé les données physiques sur les modes incidents : un mode d'amplitude unité vient de la gauche, aucun mode n'est incident de droite.

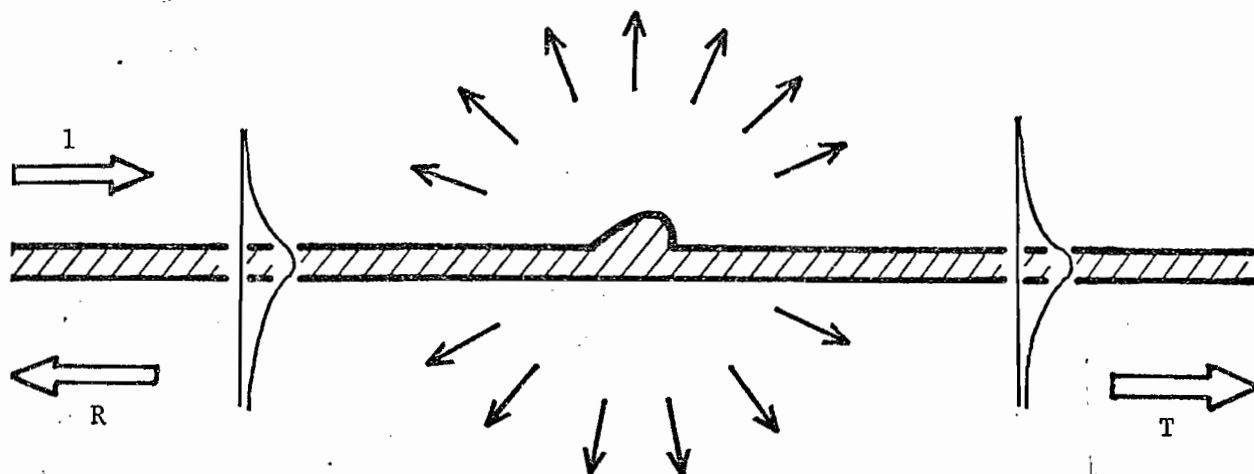


Figure 7

Ceci s'écrit : $I_g = 1$, $I_d = 0$. On obtient alors a_+ et a_- par simple inversion de la relation (35) :

$$\begin{pmatrix} a_+ \\ a_- \end{pmatrix} = \mathcal{H}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

et le problème est entièrement résolu.

La méthode que nous venons d'utiliser pour déterminer a_+ et a_- est à nouveau une méthode de tir (voir le paragraphe 1) : on effectue d'abord les calculs pour un choix arbitraire de a_+ et a_- puis on détermine à posteriori leur valeur par inversion d'un système linéaire.

Références :

1) M. Nevière, P. Vincent et R. Petit

"Sur la théorie du réseau conducteur et ses applications à l'optique"

Nouv. Rev. Optique, 1974, t.5 n° 2 pp. 65-77

CHAPITRE III

Étude théorique du cas général

Incidence oblique

Dans le chapitre II , nous avons présenté le principe de notre méthode sur quelques exemples simples et très particuliers auxquels nous nous étions initialement limités. Aujourd'hui, nous disposons d'un programme capable de traiter des cas beaucoup plus généraux, aussi bien en ce qui concerne l'obstacle que le champ incident. Ce chapitre est consacré à l'exposé des développements théoriques qui sont à la base de ce programme.

1) GENERALITES

a) Géométrie de l'obstacle

α) Exemples

La figure 1 représente quelques uns des obstacles que nous avons été amenés à considérer. Nous pouvons les décrire dans tous les cas comme un système de couches planes ayant subi une déformation cylindrique locale. Plus précisément, en dehors d'un domaine borné du plan x, y , l'obstacle s'identifie à un même système de couches planes qui est nécessairement le même à droite qu'à gauche de la déformation. Ceci exclut par exemple les jonctions entre deux guides différents ou le problème du réseau semi-infini (figure 2). Nous verrons toutefois plus loin (chapitre VI) qu'il est possible d'extrapoler nos résultats à l'étude de certains de ces derniers cas.

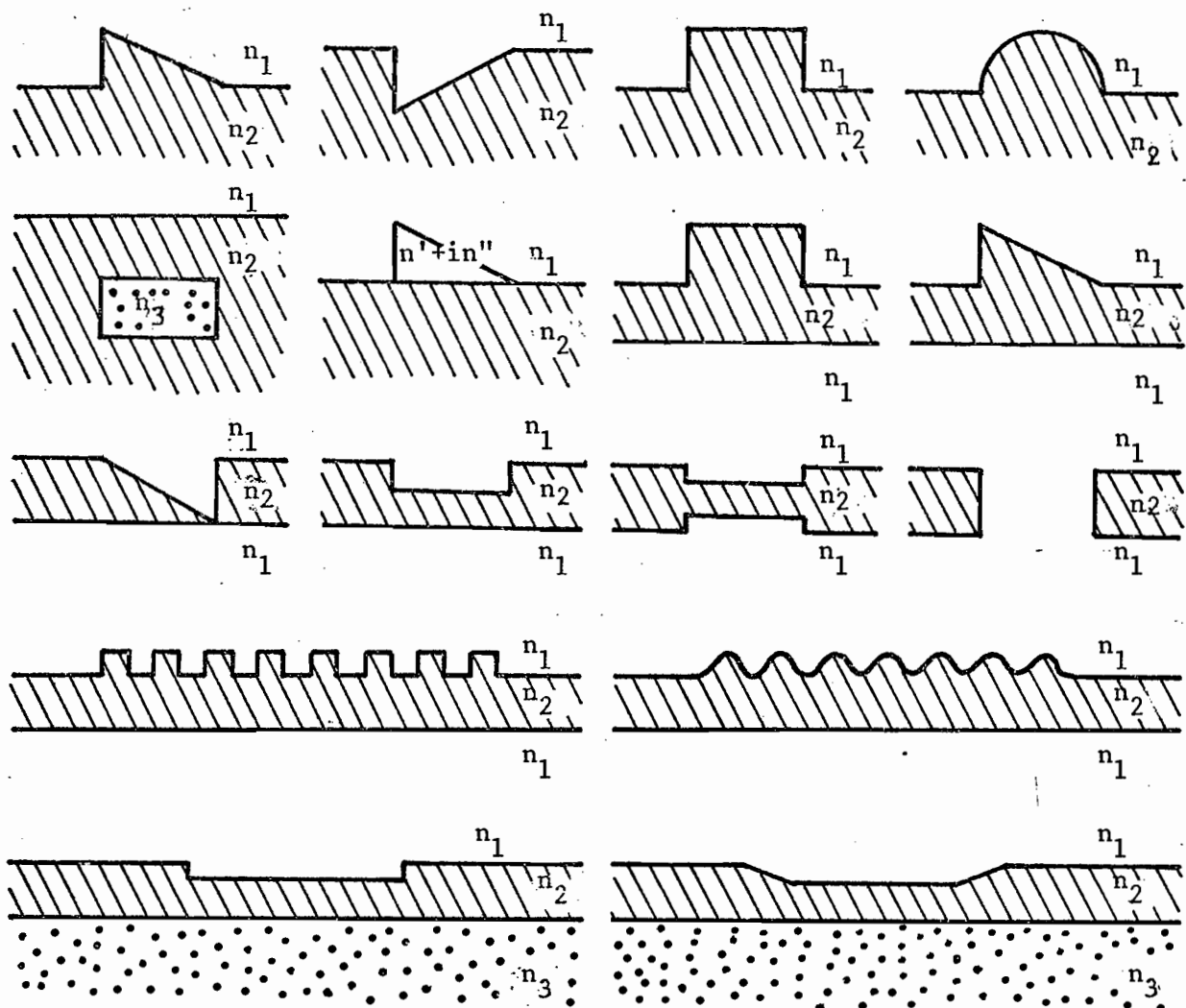


Figure 1

Exemples d'obstacles que nous avons étudiés

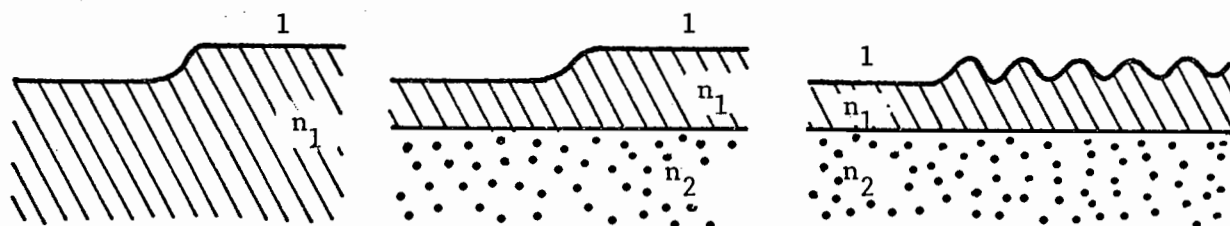


Figure 2

Exemples d'obstacles que nous ne pouvons pas traiter à l'aide
du programme décrit dans ce chapitre.

β) Guide non déformé

Le système de couches est décrit dans le repère $Oxyz$ par son indice $N(y)$ (figure 3).

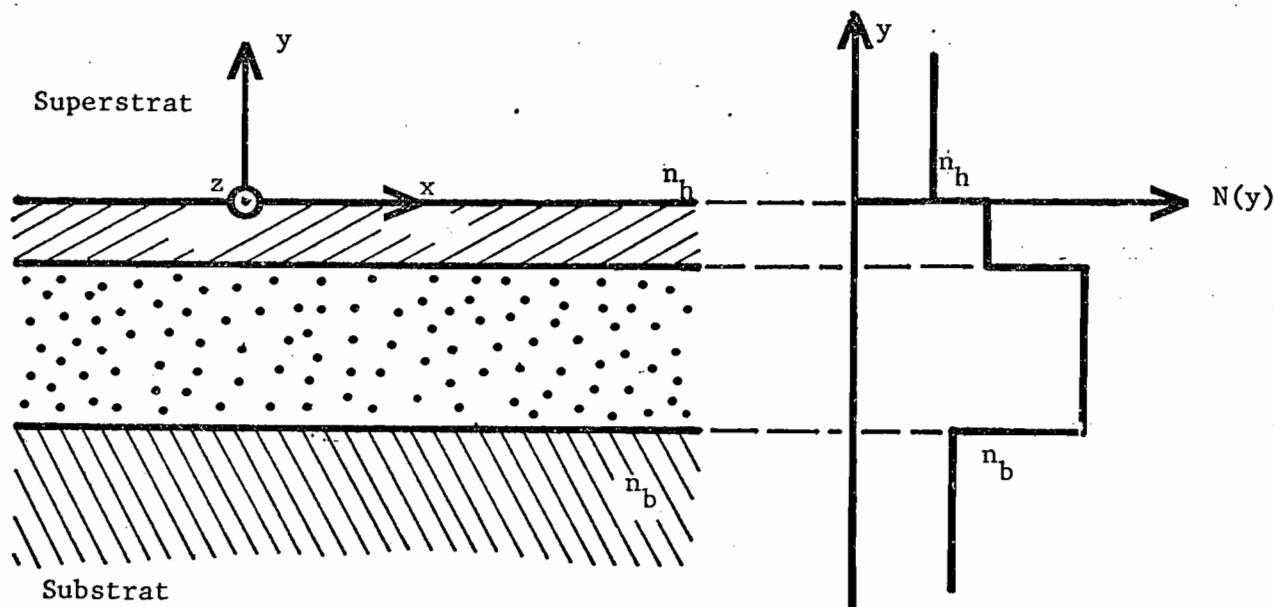


Figure 3

Guide non déformé

On a un nombre quelconque de milieux diélectriques non absorbants dont deux au moins sont différents. Pour unifier notre vocabulaire, nous convenons d'appeler "guide" un tel système de couches même si comme dans le cas du dioptré plan, il n'existe pas de mode guidé. Au-dessus du guide ($y > 0$) on a le superstrat d'indice n_h et au-dessous du guide le substrat d'indice n_b .

γ) Guide déformé

Le guide défini ci-dessus est ensuite localement déformé (figure 4) et l'indice $n(x, y)$ de l'obstacle finalement obtenu s'identifie à l'indice $N(y)$ du guide non déformé à l'extérieur du domaine $\mathcal{D}$ défini par $|x| \leq L$ et $y_0 \leq y \leq y_1$.

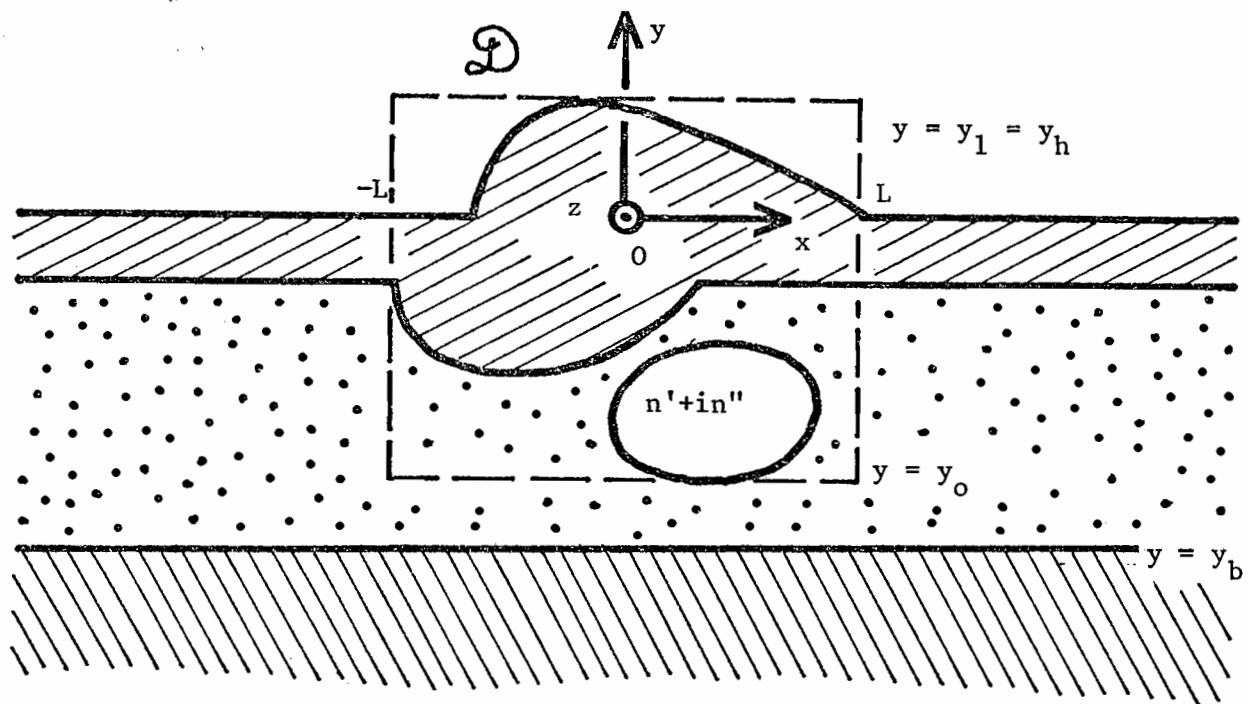


Figure 4

Guide déformé constituant l'obstacle d'indice $n(x, y)$
On notera la présence possible d'un milieu absorbant d'indice $n' + in''$.

Cette déformation peut être très générale : plusieurs dioptries peuvent être déformés, et il peut y avoir des inclusions de matériaux absorbants (bien que les couches diélectriques constituant le guide ne le soient pas).

Soit y_h la plus petite ordonnée au-dessus de laquelle $n(x, y) = n_h$ (indice du superstrat) et y_b la plus grande ordonnée au-dessous de laquelle $n(x, y) = n_b$ (indice du substrat).

D'une manière générale, $y_b \leq y_0 < y_1 \leq y_h$. L'égalité entre y_b et y_0 ou entre y_1 et y_h peut se produire dans de nombreux cas. La figure 5 représente les divers configurations possibles

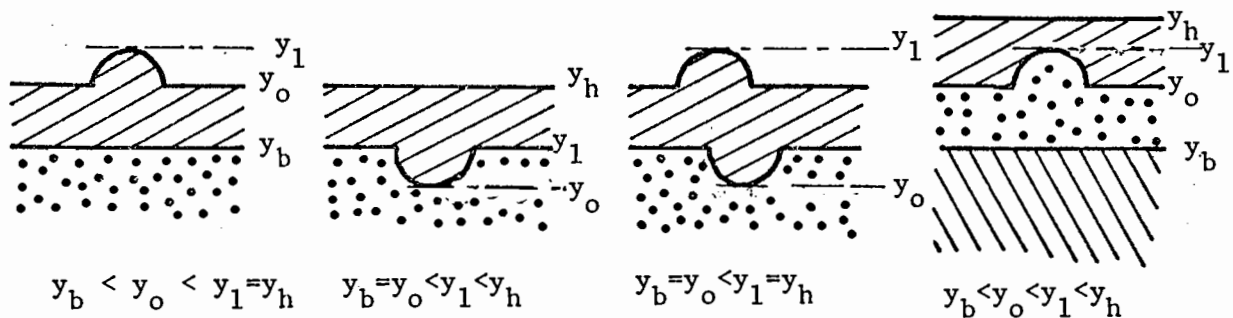


Figure 5

Positions respectives de y_b, y_0, y_1, y_h

b) Equations de Maxwell dans le cas de la diffraction oblique

Les vecteurs complexes $\vec{\mathcal{E}}$ et $\vec{\mathcal{H}}$ associés aux champs électriques et magnétiques vérifient les équations de Maxwell au sens des distributions [1] :

$$\begin{cases} \text{rot } \vec{\mathcal{E}} = i \omega \mu_0 \vec{\mathcal{H}} \\ \text{rot } \vec{\mathcal{H}} = -i \omega \epsilon_0 n^2(x, y) \vec{\mathcal{E}} \end{cases} \quad (1)$$

α) Choisissons une constante réelle γ , qui sera la constante fondamentale du problème, et cherchons des solutions de (1) sous la forme :

$$\begin{cases} \vec{\mathcal{E}}(x, y, z) = \vec{E}(x, y) \exp(i \gamma z) / \sqrt{\omega \epsilon_0} \\ \vec{\mathcal{H}}(x, y, z) = \vec{H}(x, y) \exp(i \gamma z) / \sqrt{\omega \mu_0} \end{cases} \quad (2)$$

La division par $\sqrt{\omega \epsilon_0}$ et par $\sqrt{\omega \mu_0}$ permet de simplifier les notations. Physiquement γ est la constante de propagation du champ le long de l'axe Oz. Elle est déterminée par le champ incident : tous les éléments constituant ce champ incident (ondes planes, modes guidés, faisceaux) doivent avoir obligatoirement la même constante de propagation sur Oz et cette constante est γ .

Dans ces conditions les faisceaux diffractés dans le substrat et le superstrat sont engendrés par des ondes planes dont les vecteurs d'onde sont les génératrices de demi-cônes d'axe Oz.

C'est là l'origine de l'expression "diffraction conique" qui sert parfois à désigner ce type de situation.

La figure 6 donne une représentation schématique de ces faisceaux diffractés dans le cas d'un mode guidé incident.

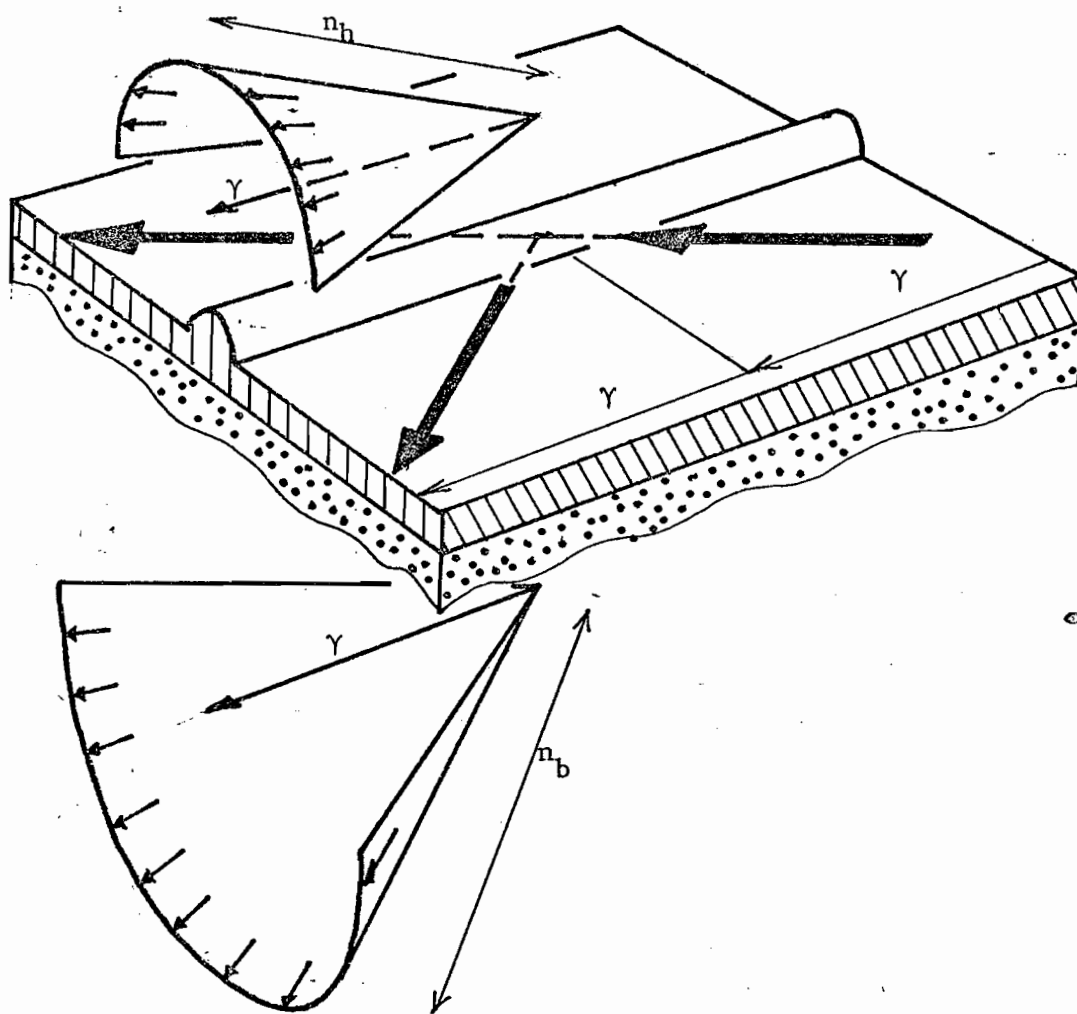


Figure 6

Diffraction conique

β) Reportons maintenant (2) dans (1) et prenons $\frac{\lambda_0}{2\pi} = \frac{1}{\omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$ comme unité de longueur. On obtient après quelques calculs élémentaires, en éliminant E_y et H_y dans les équations, puis en divisant par $\exp(i \gamma z)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial E_z}{\partial y} = i \left(1 - \frac{\gamma^2}{n^2}\right) H_x + \frac{\gamma}{n^2} \frac{\partial H_z}{\partial x} \\ \frac{\partial H_x}{\partial y} = i n^2 E_z + \frac{\partial}{\partial x} \left(i \frac{\partial E_z}{\partial x} + \gamma E_x \right) \\ \frac{\partial H_z}{\partial y} = -i (n^2 - \gamma^2) E_x - \gamma \frac{\partial E_z}{\partial x} \\ \frac{\partial E_x}{\partial y} = -i H_z - \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{1}{n^2} \left[i \frac{\partial H_z}{\partial x} + \gamma H_x \right] \right\} \end{array} \right. \quad (3a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} E_y = -\frac{i}{n^2} \frac{\partial H_z}{\partial x} - \frac{\gamma}{n^2} H_x \\ H_y = i \frac{\partial E_z}{\partial x} + \gamma E_x \end{array} \right. \quad (3b)$$

c) Quelques notations

α) Le champ électromagnétique est entièrement déterminé par le vecteur de dimension 4, $C(x, y)$ dont les composantes sont E_z, H_x, H_z, E_x :

$$C(x, y) = \begin{pmatrix} E_z \\ H_x \\ H_z \\ E_x \end{pmatrix}$$

Les deux autres composantes E_y et H_y sont alors déterminées par (3b).

On appellera "champ caractéristique" le vecteur $C(x,y)$.

β) Définissons les fonctions $D^+(x, y)$ et $D^-(x, y)$ par :

$$\begin{cases} n^2(x,y) = N^2(y) + D^+(x,y) \\ \frac{1}{n^2(x,y)} = \frac{1}{N^2(y)} + D^-(x,y). \end{cases} \quad (4)$$

D^+ et D^- sont deux fonctions connues nulles en dehors du rectangle $\mathcal{D}$ et caractérisant la déformation.

γ) Introduisons les transformées de Fourier :

$$\hat{E}(\zeta, y), \quad \hat{H}(\zeta, y), \quad \hat{D}^+(\zeta, y), \quad \hat{D}^-(\zeta, y) :$$

$$\begin{aligned} \vec{E}(x, y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{E}(\zeta, y) \exp(i\zeta x) d\zeta, \\ \vec{H}(x, y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{H}(\zeta, y) \exp(i\zeta x) d\zeta, \\ D^{\pm}(x, y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{D}^{\pm}(\zeta, y) \exp(i\zeta x) d\zeta. \end{aligned} \quad (5)$$

δ) Définissons enfin les fonctions suivantes de la variable de Fourier ζ :

$$\beta = \sqrt{\zeta^2 + \gamma^2}, \quad (\text{si } \gamma = 0, \text{ on prend } \beta = |\zeta|) \quad (6)$$

$$\chi_h(\zeta) = \sqrt{n_h^2 - \beta^2} \quad (\chi_h \text{ ou } \chi_h/i \text{ réel positif}) \quad (7a)$$

$$\chi_b(\zeta) = \sqrt{n_b^2 - \beta^2} \quad (\chi_b \text{ ou } \chi_b/i \text{ réel positif}) \quad (7b)$$

d) Changement de repère

α) La décomposition en intégrale de Fourier est en fait une décomposition du champ électromagnétique en une somme de contributions élémentaires dont la constante de propagation suivant Ox est ζ .

Dans le substrat et le superstrat, cette contribution est représentée par une onde plane dont le vecteur d'onde a pour composantes :

$$(\zeta, \pm \chi_h(\zeta), \gamma) \text{ si } y > y_h, \text{ et } (\zeta, \pm \chi_b(\zeta), \gamma) \text{ si } y < y_b.$$

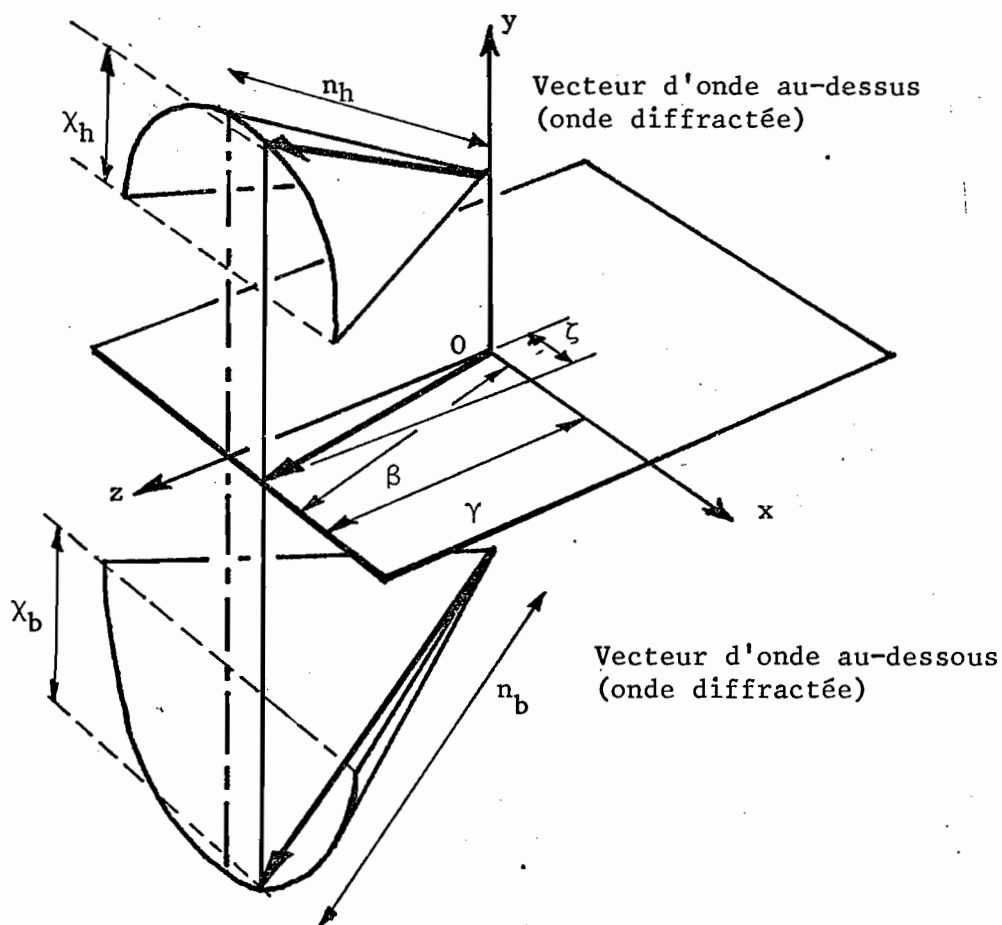


Figure 7

Notons que, compte tenu de la détermination choisie pour χ_h et χ_b , les ondes planes sortantes ou les ondes évanescentes qui s'atténuent quand on s'éloigne du guide suivant l'axe Oy, correspondent à une dépendance en y en $\exp(i \chi_h(\zeta) y)$ pour $y > y_h$ et $\exp(-i \chi_b(\zeta) y)$ pour $y < y_b$.

β) Ce qui précède montre l'intérêt d'introduire pour chaque valeur de ζ le repère orthonormé OXYZ que nous appellerons $\mathcal{R}(\zeta)$, obtenu en faisant tourner Oxyz autour de l'axe Oy jusqu'à ce que Ox corresponde au vecteur $(\zeta, 0, \gamma)$ projection sur Oxy du vecteur d'onde. Les ondes planes définies plus haut se propagent en effet dans le plan $Z = 0$ de ce repère.

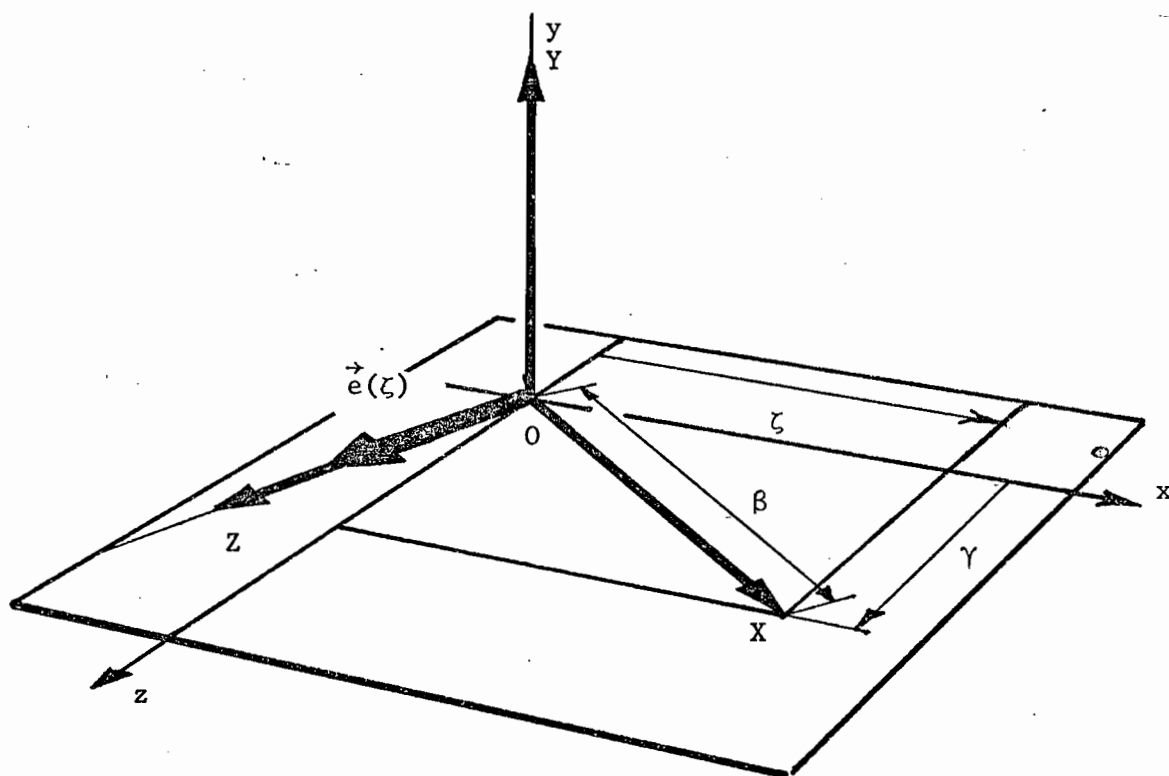


Figure 8

Soit $\vec{e}(\zeta)$ le vecteur unitaire de l'axe OZ.

(Dans le cas particulier où $\gamma = 0$, nous prenons $\mathcal{R}(\zeta)$ confondu avec le repère Oxyz ce qui, pour $\zeta < 0$ n'est pas la limite de $\mathcal{R}(\zeta)$ quand γ tend vers 0).

γ) Le développement des équations portera essentiellement sur le vecteur $F(\zeta, y)$ constitué des 4 composantes suivantes de $\hat{\vec{E}}$ et $\hat{\vec{H}}$ dans le repère $\mathcal{R}(\zeta)$:

$\hat{E}_Z, \hat{H}_X, \hat{H}_Z, \hat{E}_X$.

$$F(\zeta, y) = \begin{pmatrix} \hat{E}_Z \\ \hat{H}_X \\ \hat{H}_Z \\ \hat{E}_X \end{pmatrix} \quad (8)$$

Notons bien que le changement de repère décrit plus haut dépend de ζ et que, par conséquent $\hat{E}_Z, \hat{H}_X, \hat{H}_Z, \hat{E}_X$ ne sont pas en général les transformées de Fourier de fonctions ayant une signification physique simple.

Le diagramme suivant résume le passage du champ physique au vecteur $F(\zeta, y)$:

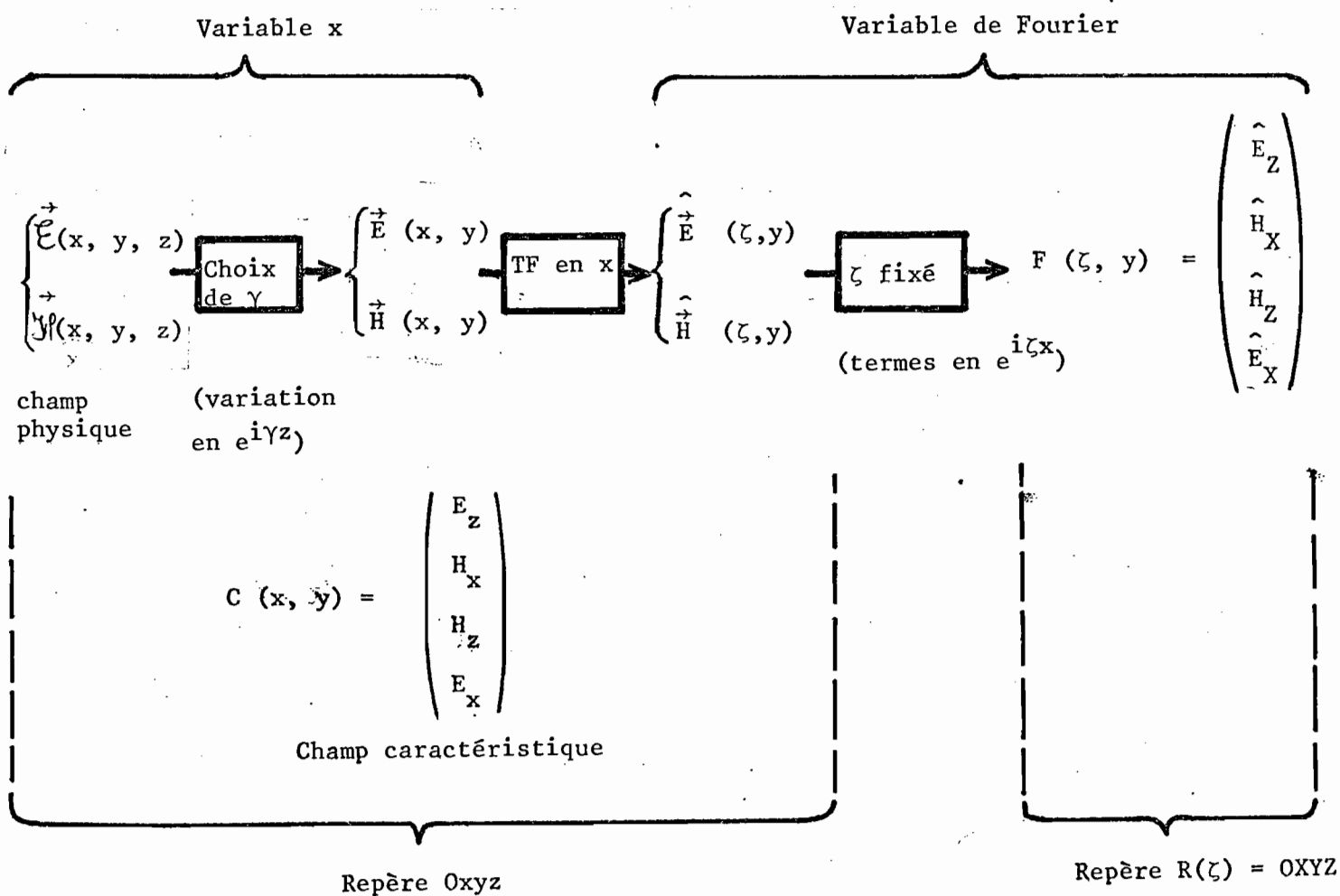


Figure 9

e) Equation fondamentale

On obtient en portant (5) dans (3a) et en explicitant le changement de repère décrit plus haut, l'équation fondamentale vérifiée par F :

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial y} = \mathcal{G}_\beta F + \mathcal{S}_y F} \quad (9)$$

où $\mathcal{G}_\beta$ et $\mathcal{S}_y$ sont les opérateurs définis ci-dessous :

$$\mathcal{G}_\beta F = \mathcal{G}_\beta \begin{pmatrix} \hat{E}_Z \\ \hat{H}_X \\ \hat{H}_Z \\ \hat{E}_X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i \hat{H}_X \\ i(N^2 - \beta^2) \hat{E}_Z \\ -i N^2 \hat{E}_X \\ -i \left(1 - \frac{\beta^2}{N^2}\right) \hat{H}_Z \end{pmatrix}, \quad (10a)$$

$$\mathcal{S}_y F = \mathcal{S}_y \begin{pmatrix} \hat{E}_Z \\ \hat{H}_X \\ \hat{H}_Z \\ \hat{E}_X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ i \frac{\zeta}{\beta} (\hat{D}^+ * \hat{E}_Z) - i \frac{\gamma}{\beta} (\hat{D}^+ * \hat{E}_X) \\ -i \frac{\gamma}{\beta} (\hat{D}^+ * \hat{E}_Z) - i \frac{\zeta}{\beta} (\hat{D}^+ * \hat{E}_X) \\ i \beta (\hat{D}^- * (\beta \hat{H}_Z)) \end{pmatrix}, \quad (10b)$$

avec

$$\hat{E}_X = \frac{\zeta}{\beta} \hat{E}_X - \frac{\gamma}{\beta} \hat{E}_Z,$$

$$\hat{E}_Z = \frac{\gamma}{\beta} \hat{E}_X + \frac{\zeta}{\beta} \hat{E}_Z,$$

et où $*$ désigne le produit de convolution par rapport à la variable ζ .

Pour β fixé, $\mathcal{G}_\beta$ est un opérateur linéaire dépendant de y par l'intermédiaire de $N(y)$, qui caractérise le guide non déformé. En effet, si l'obstacle était réduit à ce système de couches diélectriques planes, l'équation (9) deviendrait :

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \mathcal{G}_\beta F.$$

Pour y fixé, $\mathcal{S}_y$ est un opérateur de convolution en ζ lié à la perturbation du guide par l'intermédiaire des fonctions $\hat{D}^+$ et $\hat{D}^-$. Il est important de remarquer que même si F contient des termes distributifs comme des distributions de Dirac ou des valeurs principales de Cauchy, $\mathcal{S}_y F$ est une fonction de ζ indéfiniment différentiable. Ceci est dû au caractère régulateur de la convolution. En effet, les transformées de Fourier de $\hat{D}^+ * \hat{E}_Z$, $\hat{D}^+ * \hat{E}_X$, et $\hat{D}^- * (\beta \hat{H}_Z)$ sont des distributions à support borné puisque $\hat{D}^+(x,y)$ et $\hat{D}^-(x,y)$ sont nulles pour $|x| > L$.

Cette remarque joue un rôle fondamental dans l'élaboration du procédé numérique (ceci explique pourquoi notre programme ne s'applique qu'aux obstacles localement déformés et pas aux obstacles de la figure II.2).

Quant $\gamma = 0$, le système intégral-différentiel (9) se sépare en deux systèmes indépendants d'inconnues $\hat{E}_Z$, $\hat{H}_X$ et $\hat{H}_Z$, $\hat{E}_X$ associés respectivement aux deux cas de polarisation rectiligne $E //$ et $H //$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \hat{E}_X}{\partial y} = i \hat{H}_X \\ \frac{\partial \hat{H}_X}{\partial y} = i (N^2 - \zeta^2) \hat{E}_Z + i \hat{D}^+ * \hat{E}_Z \\ \frac{\partial \hat{H}_Z}{\partial y} = -i N^2 \hat{E}_X - i \hat{D}^+ * \hat{E}_X \\ \frac{\partial \hat{E}_X}{\partial y} = -i \left(1 - \frac{\zeta^2}{N^2}\right) \hat{H}_Z + i \zeta (\hat{D}^- * (\zeta \hat{H}_Z)) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{cas } E// : \text{ inconnues} \\ \hat{E}_X \text{ et } \hat{H}_X \\ \\ \text{cas } H// : \text{ inconnues} \\ \hat{H}_Z \text{ et } \hat{E}_X \end{array} \quad \begin{array}{l} (11a) \\ (11b) \end{array}$$

f) Forme du champ dans le substrat et le superstrat

α) Quand $y > y_h$ ou $y < y_b$, $D(x,y) = 0$ et l'équation (9) se ramène à l'équation du guide non déformé ($\frac{\partial F}{\partial y} = \mathcal{G}_\beta F$) dont les solutions s'écrivent :

si $y > y_h$:

$$F(\zeta, y) = \begin{pmatrix} E_{Ih}(\zeta) \\ -\chi_h E_{Ih}(\zeta) \\ H_{Ih}(\zeta) \\ \chi_h/n_h^2 H_{Ih}(\zeta) \end{pmatrix} \exp(-i\chi_h y) + \begin{pmatrix} E_{Dh}(\zeta) \\ \chi_h E_{Dh}(\zeta) \\ H_{Dh}(\zeta) \\ -\chi_h/n_h^2 H_{Dh}(\zeta) \end{pmatrix} \exp(i\chi_h y), \quad (12a)$$

si $y < y_b$:

$$F(\zeta, y) = \begin{pmatrix} E_{Db}(\zeta) \\ -\chi_b E_{Db}(\zeta) \\ H_{Db}(\zeta) \\ \chi_b/n_b^2 H_{Db}(\zeta) \end{pmatrix} \exp(-i\chi_b y) + \begin{pmatrix} E_{Ib}(\zeta) \\ \chi_b E_{Ib}(\zeta) \\ H_{Ib}(\zeta) \\ -\chi_b/n_b^2 H_{Ib}(\zeta) \end{pmatrix} \exp(i\chi_b y). \quad (12b)$$

$E_{Db}, H_{Db}, E_{Ib}, H_{Ib}, E_{Ih}, H_{Ih}, E_{Dh}, H_{Dh}$ sont des fonctions complexes de ζ représentant les amplitudes incidentes (I) ou diffractées (D), en haut (h) ou en bas (b), pour la polarisation TE (E) ou TH (H).

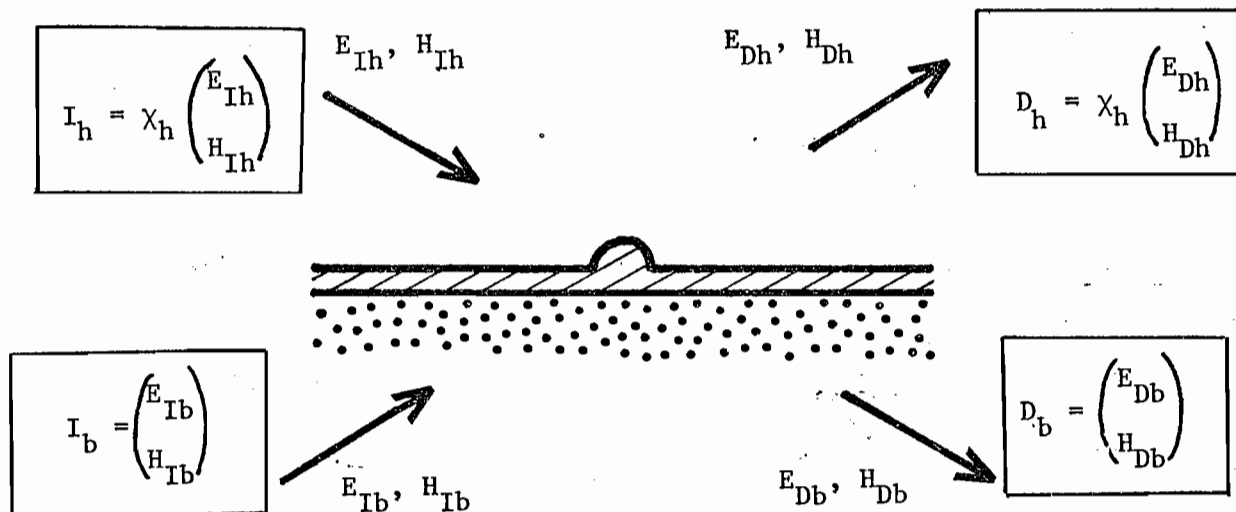


Figure 10

β) Le problème de la séparation des composantes TE et TH est plus compliquée que dans le cas où $\gamma = 0$. Cette distinction ne peut d'ailleurs être faite que dans les demi-espaces remplis d'un milieu homogène (substrat ou superstrat) où le champ est une combinaison d'ondes planes.

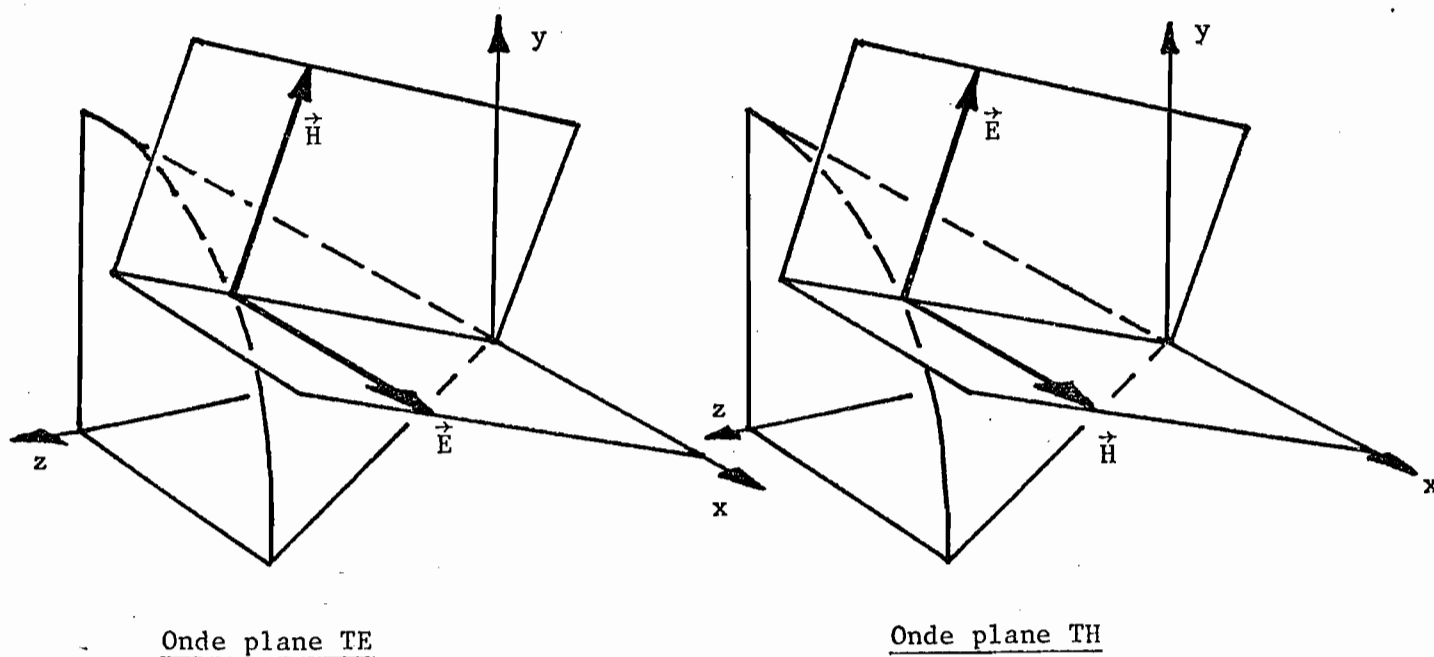


Figure 11

On dira qu'une onde plane a la polarisation TE si $E_y = 0$ et la polarisation TH si $H_y = 0$.

γ) Comme indiqué sur la figure 10, nous regroupons les fonctions décrivant le champ incident et le champ diffracté au-dessus et au-dessous de l'obstacle, en vecteurs de dimension 2 :

	Incident	Diffracté
haut	$I_h(\zeta) = \chi_h(\zeta) \begin{pmatrix} E_{Ih}(\zeta) \\ H_{Ih}(\zeta) \end{pmatrix}$	$D_h(\zeta) = \chi_h(\zeta) \begin{pmatrix} E_{Dh}(\zeta) \\ H_{Dh}(\zeta) \end{pmatrix}$
bas	$I_b(\zeta) = \begin{pmatrix} E_{Ib}(\zeta) \\ H_{Ib}(\zeta) \end{pmatrix}$	$D_b(\zeta) = \begin{pmatrix} E_{Db}(\zeta) \\ H_{Db}(\zeta) \end{pmatrix}$

(13)

Notons bien que ces définitions ne sont pas exactement similaires au-dessus et au-dessous : le facteur χ_h qui intervient dans le superstrat n'a pas son équivalent dans le substrat.

δ) Nous aurons encore besoin dans la suite des 3 opérateurs $\mathcal{F}, \mathcal{I}, \mathcal{D}$ définis par :

$$F(\zeta, y_b) = \mathcal{F} [I_b(\zeta), D_b(\zeta)] \quad , \quad (14)$$

$$I_h(\zeta) = \mathcal{I} [F(\zeta, y_h)] \quad ,$$

$$D_h(\zeta) = \mathcal{D} [F(\zeta, y_h)] \quad .$$

L'opérateur $\mathcal{F}$ calcule le champ en $y = y_b$ à partir des composantes incidentes et diffractées au-dessous I_b , D_b alors que $\mathcal{J}$ et $\mathcal{D}$ calculent les composantes incidentes et diffractées au-dessus de l'obstacle, à partir de la donnée du champ $F(\zeta, y_h)$. Ces opérateurs établissent la liaison entre $F(\zeta, y)$ et les composantes incidentes et diffractées.

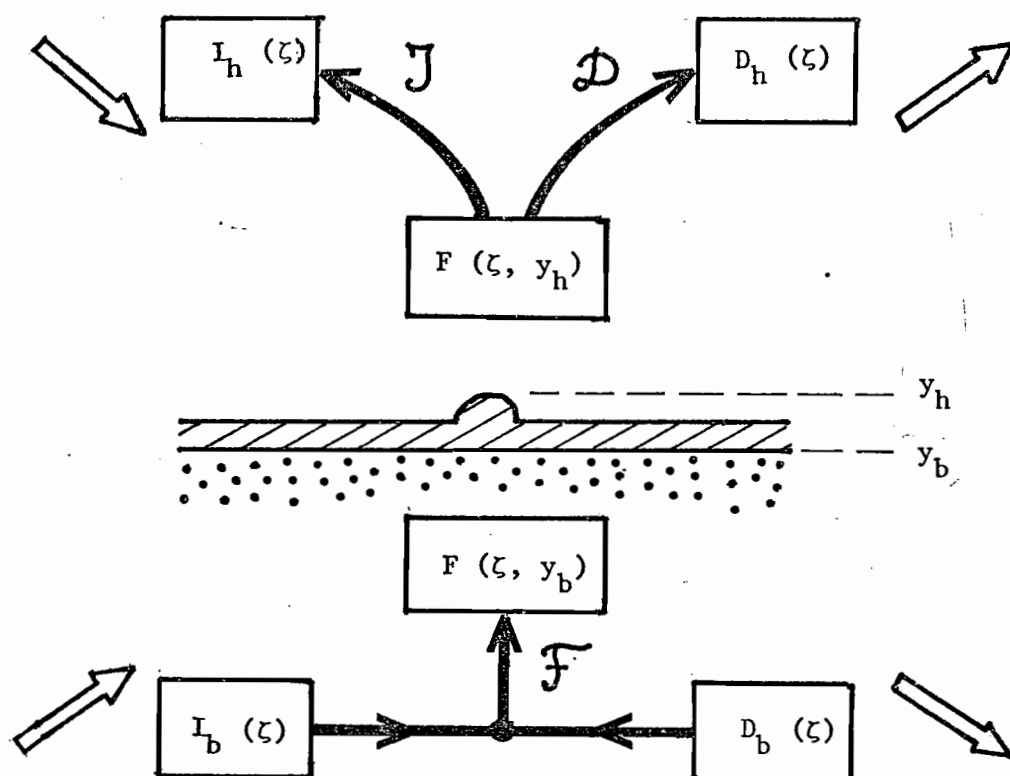


Figure 12

$F(\zeta, y_b)$ résultat de l'action de l'opérateur $\mathcal{F}$ sur I_b et D_b s'obtient grâce à la formule (12b).

I_h et D_h , résultat de l'action de $\mathcal{J}$ et $\mathcal{D}$ sur $F(\zeta, y_h)$, se calculent en inversant (12a) considérée comme un système linéaire d'inconnues E_{Ih} , H_{Ih} , E_{Dh}

H_{Dh} :

$$\begin{aligned}
\chi_h E_{Ih} &= \frac{1}{2} \left[\chi_h \hat{E}_Z(\zeta, y_h) - \hat{H}_X(\zeta, y_h) \right] \exp(i \chi_h y_h) , \\
\chi_h H_{Ih} &= \frac{1}{2} \left[\chi_h \hat{H}_Z(\zeta, y_h) + n_h^2 \hat{E}_X(\zeta, y_h) \right] \exp(i \chi_h y_h) , \\
\chi_h E_{Dh} &= \frac{1}{2} \left[\chi_h \hat{E}_Z(\zeta, y_h) + \hat{H}_X(\zeta, y_h) \right] \exp(-i \chi_h y_h) , \\
\chi_h H_{Dh} &= \frac{1}{2} \left[\chi_h \hat{H}_Z(\zeta, y_h) - n_h^2 \hat{E}_X(\zeta, y_h) \right] \exp(-i \chi_h y_h) .
\end{aligned}
\tag{15}$$

Ces formules (15) montrent comment l'introduction du facteur multiplicatif χ_h dans la définition de I_h et D_h (13), permet d'assurer la continuité de I_h et D_h en $\zeta = \pm \sqrt{n_h^2 - \gamma^2}$, points où χ_h s'annule.

g) Considérations sur le guide non déformé

Dans ce paragraphe, y_b et y_h restent les valeurs correspondant au guide déformé (§ 1 a γ) mais on suppose que l'obstacle est remplacé par le guide non déformé ($D^+ = D^- = 0$).

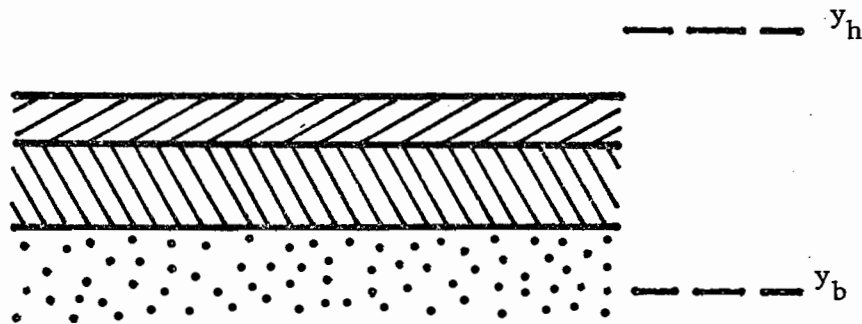


Figure 13

α) La donnée de $D_b(\zeta)$ permet de calculer $F_o(\zeta, y_b) = \mathcal{F}(0, D_b(\zeta))$, puis $F_o(\zeta, y)$ par intégration de $\frac{\partial F_o}{\partial y} = \mathcal{U}_\beta F_o$ (calculs trigonométriques classiques en théorie des couches minces), et finalement $I_h(\zeta) = \mathcal{J}[F_o(\zeta, y_h)]$

Ceci permet de définir l'opérateur linéaire $\mathcal{U}$ qui transforme D_b en I_h (figure 14).

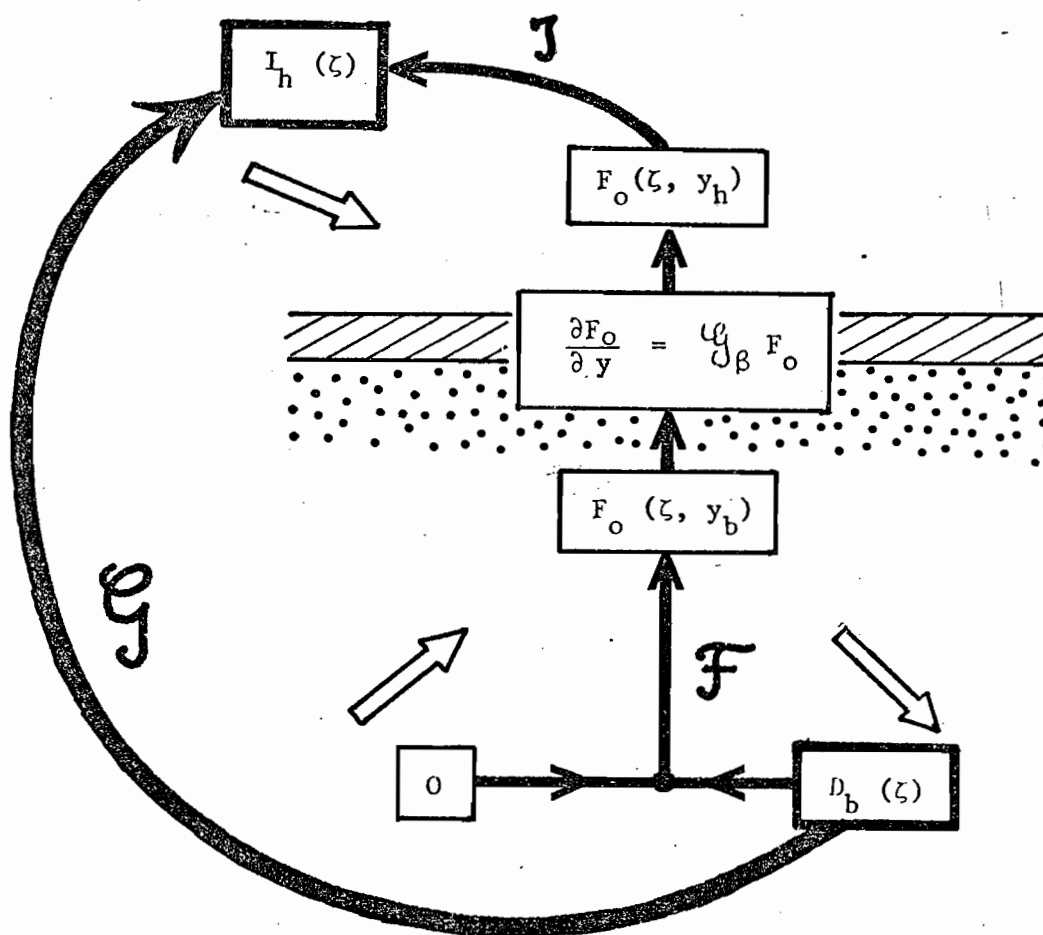


Figure 14

β) La théorie des couches minces montre qu'une onde plane de polarisation TE ou TH incidente sur le guide donne une onde transmise de même polarisation. La direction du vecteur d'onde d'une telle onde plane étant déterminée dans notre formalisme par la donnée de ζ , on définit $T_E(\zeta)$ et $T_H(\zeta)$ les coefficients de transmission de Fresnel dans les deux cas de polarisation.

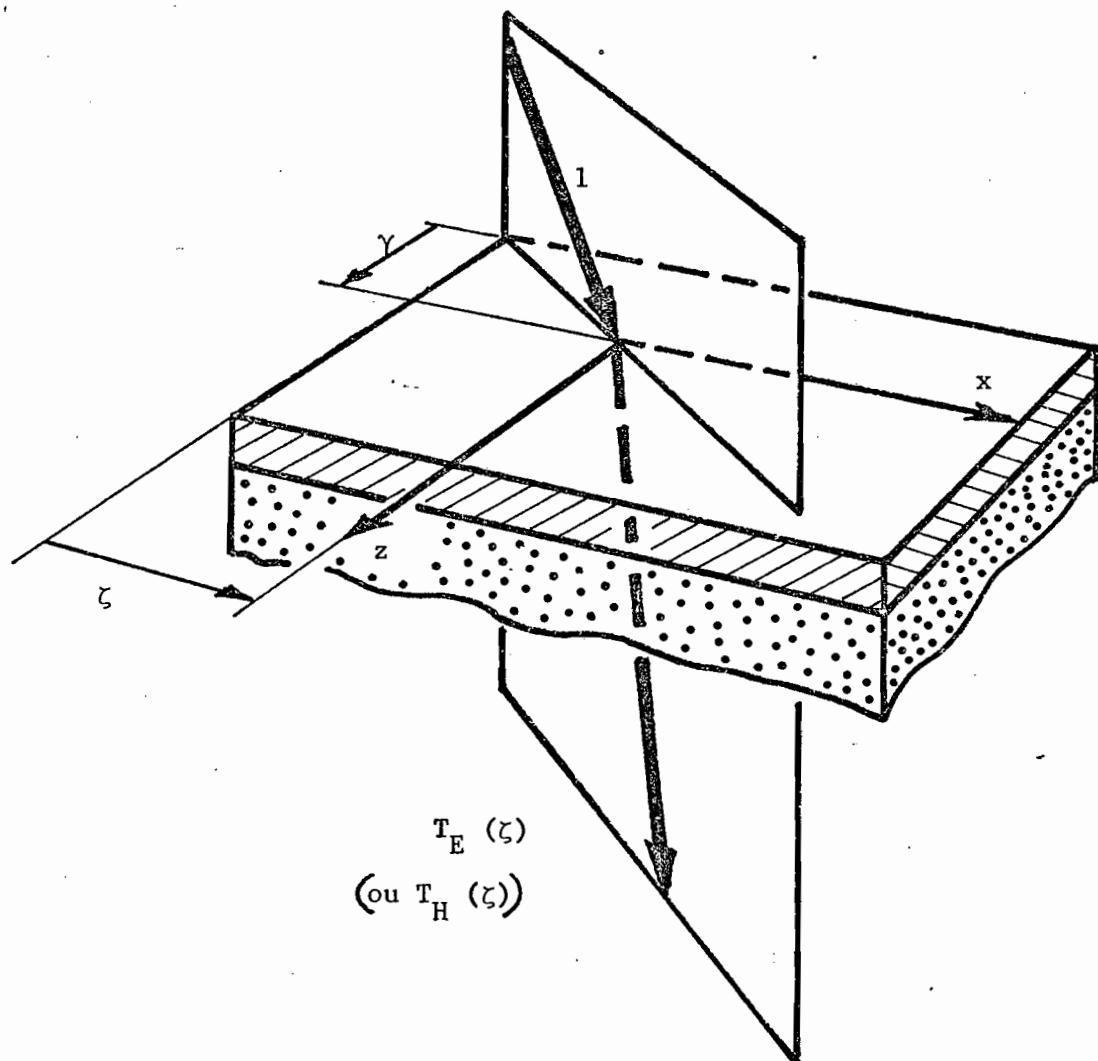


Figure 15

L'opérateur $\mathcal{G}$ défini ci-dessus s'exprime alors sous forme d'une matrice 2×2 :

$$\mathcal{G}[D_b(\zeta)] = I_h(\zeta) = \begin{pmatrix} \chi_h / T_E(\zeta) & 0 \\ 0 & \chi_h / T_H(\zeta) \end{pmatrix} D_b(\zeta)$$

(16)

γ) Supposons que le guide admette m_E modes TE correspondant aux valeurs positives de ζ : $\zeta_E, \dots, \zeta_E^{m_E}$ qui annulent χ_h/T_E , et m_H modes TH correspondant aux valeurs positives de ζ : $\zeta_H^1, \dots, \zeta_H^{m_H}$ qui annulent χ_h/T_H .

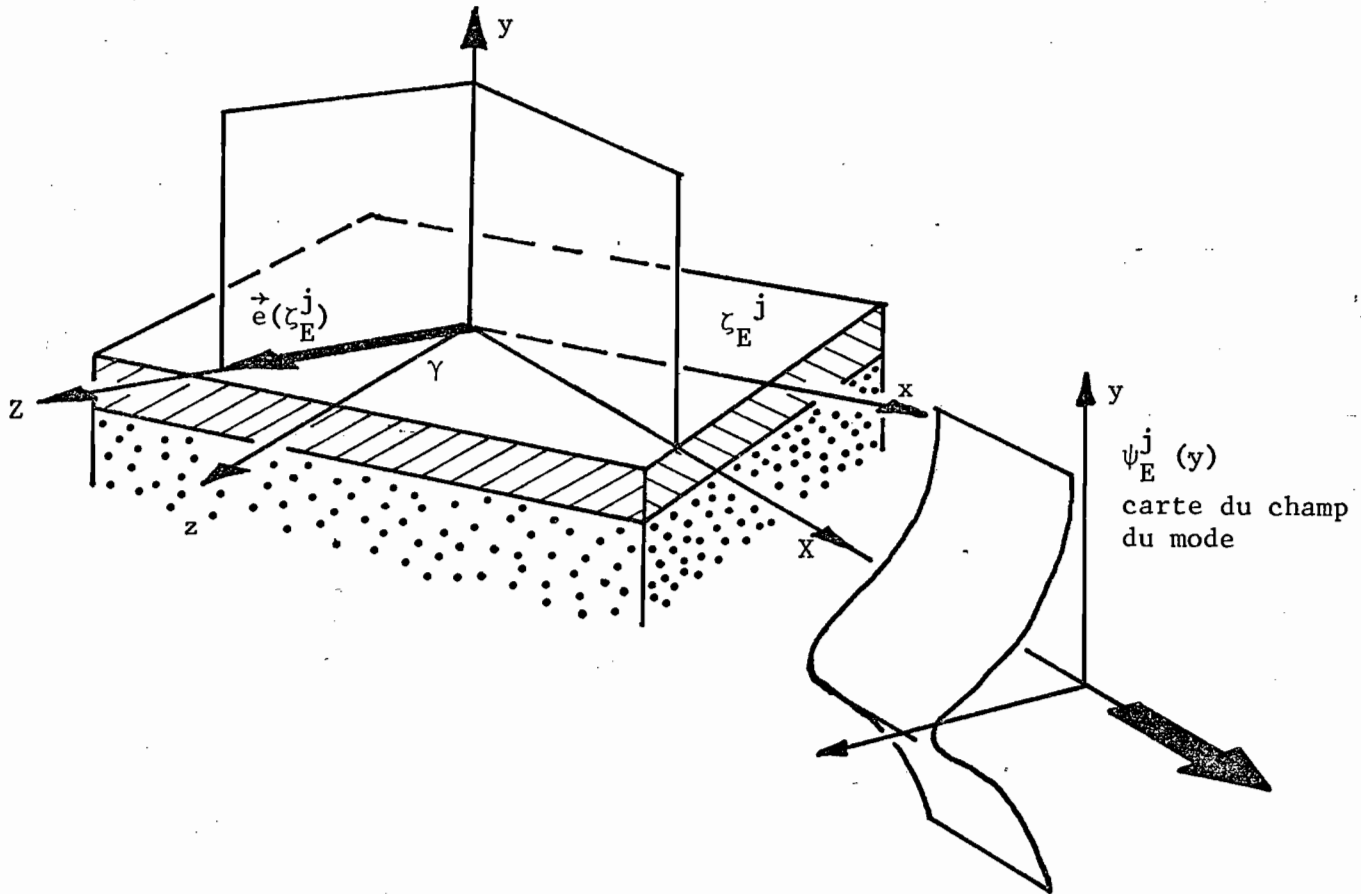


Figure 16

Ces modes sont des solutions telles que :

$$\begin{aligned} \vec{E}(x,y) &= \psi_E^j(y) \exp(\pm i \zeta_E^j x) \vec{e}(\pm \zeta_E^j), \quad j = 1, \dots, m_E \text{ ou} \\ \vec{H}(x,y) &= \psi_H^j(y) \exp(\pm i \zeta_H^j x) \vec{e}(\pm \zeta_H^j), \quad j = 1, \dots, m_H, \end{aligned} \quad (17)$$

qui existent en absence de partie incidente. Les fonctions ψ_E^j et ψ_H^j qui décrivent la carte du champ des modes sont normalisées par :

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi_E^j(y)|^2 dy = 1, \quad \int_{-\infty}^{\infty} |\psi_H^j(y)|^2 / N^2(y) dy = 1. \quad (18)$$

On peut poser pour condenser les notations ;

$m = m_E + m_H$: nombre total de modes

$$\zeta_G^j = \begin{cases} \zeta_E^j & \text{si } j \leq m_E \\ \zeta_H^{j-m_E} & \text{si } m_E < j \leq m. \end{cases}$$

Soit $\bar{\Psi}_+^j(y) \exp(i \zeta_G^j x)$ le champ caractéristique (c'est-à-dire le vecteur constitué par les composantes E_z, H_x, H_z, E_x du champ comme au § 1 c γ) associé au mode n° j se propageant vers la droite et $\bar{\Psi}_-^j(y) \exp(-i \zeta_G^j x)$ le champ caractéristique de ce même mode se propageant vers la gauche.

h) Composantes incidentes et composantes diffractées sur les modes

α) Revenons maintenant au guide déformé. L'intuition physique permet de penser que, loin de la déformation, l'obstacle se comporte comme le guide non déformé se comporterait sous l'action des ondes planes contenues dans le champ incident, mais qu'en plus il transporte des modes guidés dus à la diffraction par la déformation.

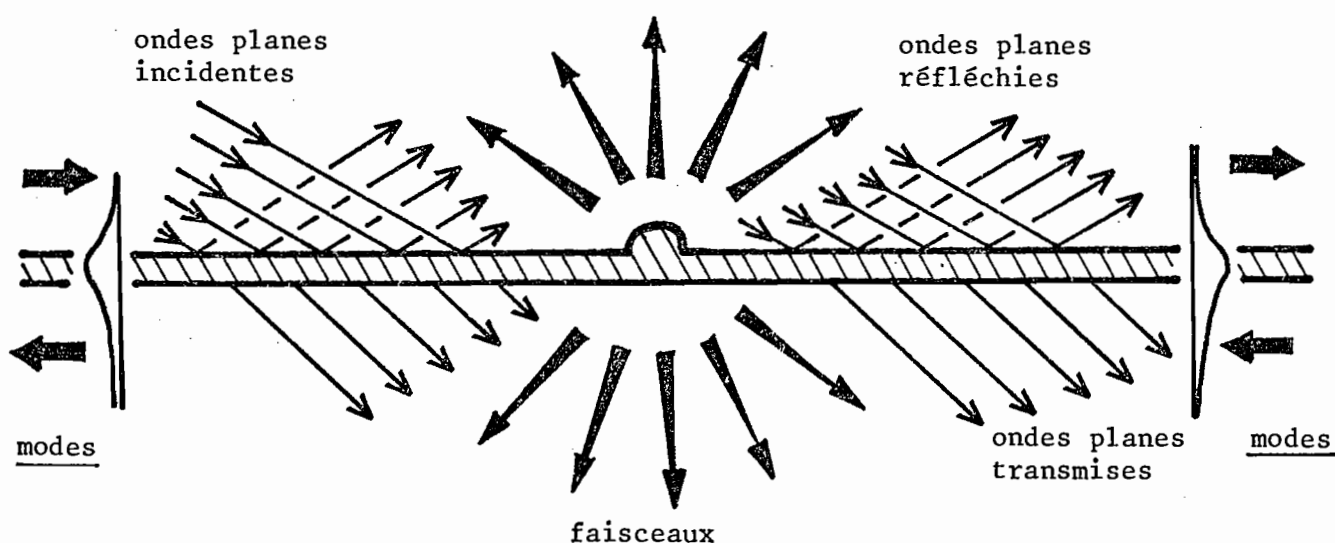


Figure 17

β) Au niveau du formalisme, ceci peut s'exprimer en décomposant le champ caractéristique $C(x,y)$ sous la forme d'une somme de deux termes :

- une combinaison linéaire C_G de modes guidés, obtenue en prolongeant jusqu'à l'origine les modes qui se propagent au loin. à droite et à gauche de la déformation :

$$C_G(x,y) = \sum_{j=1}^m \left[I_g^j \Psi_+^j(y) \exp(i \zeta_G^j x) + D_g^j \Psi_-^j(y) \exp(-i \zeta_G^j x) \right] H(-x) \\ + \sum_{j=1}^m \left[I_d^j \Psi_-^j(y) \exp(-i \zeta_G^j x) + D_d^j \Psi_+^j(y) \exp(i \zeta_G^j x) \right] H(x) , \quad (19)$$

($H(x) = 0$ si $x < 0$, 1 si $x \geq 0$ est la fonction d'Heaviside).

- une fonction résiduelle $\tilde{C}(x,y)$, dont la transformée de Fourier en x est régulière au voisinage des modes ($\zeta = \pm \zeta_G^j$).

En fait, $\tilde{C}$ contient des termes dus aux ondes planes incidentes réfléchies et transmises par le guide non déformé, qui contribuent à la transformée de Fourier sous forme de distributions de Dirac. Cependant, ces distributions de Dirac ne peuvent en aucun cas correspondre aux mêmes valeurs de ζ que les modes.

$$C(x,y) = C_G(x,y) + \tilde{C}(x,y) \quad (20)$$

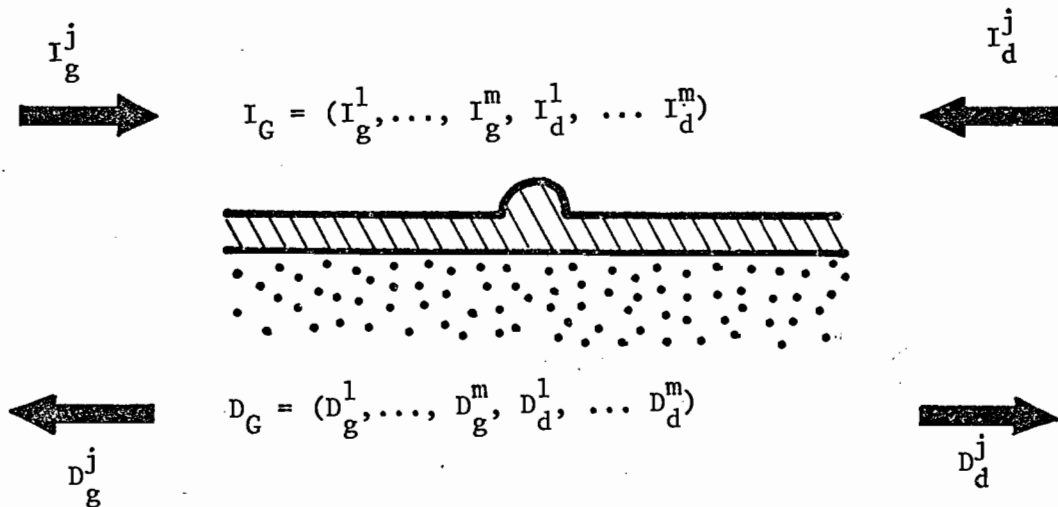


Figure 18

Les constantes complexes I_g^j , D_g^j , I_d^j , D_d^j qui interviennent dans l'expression de $C_G(x,y)$ représentent les amplitudes incidentes (I) et diffractées (D) des modes, à gauche (g) et à droite (d) de la déformation.

Nous regrouperons en un vecteur I_G de dimension $2m$ les composantes incidentes sur les modes (I_g^j , I_d^j) et en un vecteur D_G , les composantes diffractées (D_g^j , D_d^j) (figure 18).

γ) Les expressions (20) et (19) permettent de calculer $F(\zeta, y)$ selon le formalisme développé au paragraphe 1d.

En utilisant la forme connue de la transformée de Fourier de $H(x)$:

$\frac{1}{2} \delta(\zeta) + \frac{1}{2\pi i} v_p\left(\frac{1}{\zeta}\right)$, on obtient :

$$F(\zeta, y) = \sum_{j=1}^m \left\{ \left[\frac{D_d^j + I_g^j}{2} \delta(\zeta - \zeta_G^j) + \frac{D_d^j - I_g^j}{2\pi i} v_p\left(\frac{1}{\zeta - \zeta_G^j}\right) \right] \bar{\psi}_{I+}^j(y) + \left[\frac{I_d^j + D_g^j}{2} \delta(\zeta + \zeta_G^j) + \frac{I_d^j - D_g^j}{2\pi i} v_p\left(\frac{1}{\zeta + \zeta_G^j}\right) \right] \bar{\psi}_{I-}^j(y) \right\} + U(\zeta, y),$$

où $U(\zeta, y)$ est une fonction régulière au voisinage de $\zeta = \pm \zeta_G^j$.

L'examen de cette expression nous amène à la remarque suivante :

Proposition 1 :

La connaissance de $F(\zeta, y)$ comme fonction de ζ pour une valeur quelconque de y , permet après identification des termes singuliers en $\delta(\zeta \pm \zeta_G^j)$, $v_p\left(\frac{1}{\zeta \pm \zeta_G^j}\right)$ de calculer les composantes incidentes et diffractées sur les modes, c'est-à-dire les vecteurs de dimension $2m$: I_G et D_G .

2) REMARQUES THEORIQUES FONDAMENTALES

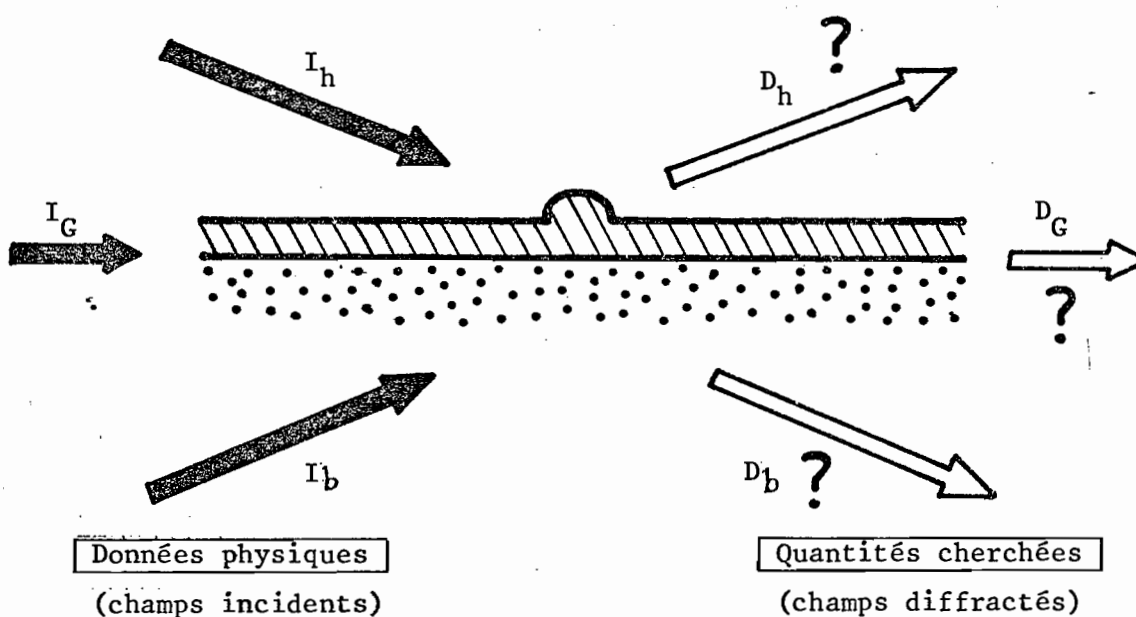
a) Rappel sur le problème physique étudié

Figure 19

Dans le cas pratique d'un problème physique particulier, on se donne les champs incidents (faisceaux ou ondes planes venant du haut ou du bas, modes guidés) : I_h , I_b , I_G et on cherche les champs diffractés : D_h , D_b , D_G . Disons qu'il s'agit de trouver des champs diffractés correspondant à des "conditions d'incidence" données.

Pour atteindre ce résultat, nous serons amenés dans les intermédiaires de calcul, à manipuler des champs ne vérifiant qu'une certaine partie des "conditions incidentes" déterminant la solution unique du problème de physique étudié.

Par souci de clarté, mais au prix d'un alourdissement des notations, nous distinguerons donc le champ électromagnétique solution d'un problème particulier, du champ électromagnétique le plus général, en surmontant de trémas les différents symboles utilisés pour le décrire.

C'est un peu comme si l'on désignait par x l'unique valeur de x solution de l'équation $f(x) = 0$. Autrement dit, parmi l'ensemble des solutions des équations de Maxwell compatibles avec la structure étudiée et décrites par $I_h, I_b, I_G, D_h, D_b, D_G$, nous devons rechercher celles qui satisfont à des "conditions incidentes" imposées et décrites par $\bar{I}_h, \bar{I}_b, \bar{I}_G$. Il faut ainsi résoudre :

$$I_h = \bar{I}_h, \quad (22a)$$

$$I_b = \bar{I}_b, \quad (22b)$$

$$I_G = \bar{I}_G, \quad (22c)$$

et nous admettrons, comme le suggère l'intuition physique, que ce problème est bien posé, c'est-à-dire qu'il possède une et une seule solution. L'obtention de cette solution passe par la résolution de trois problèmes (I, II, III) que nous allons décrire en détail dans la suite de ce chapitre.

b) Problème n° I.

Proposition 2 :

La donnée du couple de distributions (I_b, D_b) détermine complètement le champ.

On appelle "problème n° I" le problème de la détermination du champ $F(\zeta, y)$ à partir de $I_b(\zeta)$ et $D_b(\zeta)$. Naturellement, la connaissance de F permet de calculer I_h, D_h grâce aux opérateurs $\mathcal{J}$ et $\mathcal{D}$ (14) et I_G, D_G grâce à la proposition 1.

$I_b(\zeta)$ et $D_b(\zeta)$ étant deux distributions données, nous allons dans ce paragraphe, exposer une méthode permettant de résoudre le problème n° I.

α) l'exemple du cas E // (II.2 et II.3) montre qu'il convient de commencer par l'étude du guide non déformé. Dans le cas du guide non déformé, le problème I est très facile à résoudre théoriquement et numériquement : il suffit d'intégrer l'équation différentielle $\frac{\partial F}{\partial y} = \mathcal{G}_\beta F$ de y_b à y_h à partir de conditions initiales en $y = y_b$ (calculs trigonométriques élémentaires).

On calcule ainsi F_0 , la réponse du guide non déformé à $(0, D_b)$ et F_1 la réponse à $(I_b, 0)$ (figure 20).

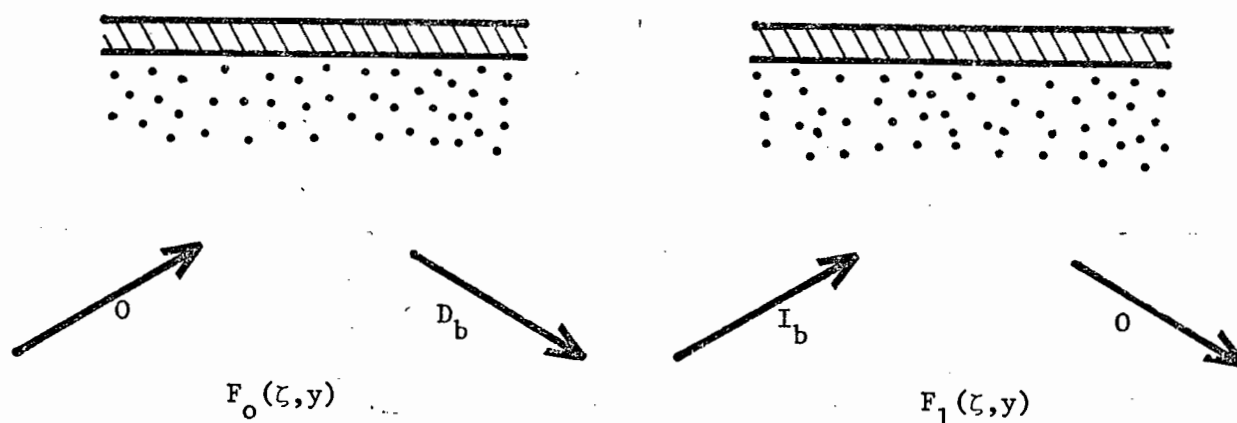


Figure 20

β) Cherchons $F(\zeta, y)$ sous la forme :

$$F(\zeta, y) = F_0(\zeta, y) + F_1(\zeta, y) + f(\zeta, y) \quad (23)$$

Notre fonction inconnue est maintenant $f(\zeta, y)$. Dans le domaine $y \leq y_0$, l'équation (9) est identique à l'équation du guide non déformé et, compte tenu de la définition de F_0 et F_1 (§ α), $f(\zeta, y)$ est nulle en ce domaine.

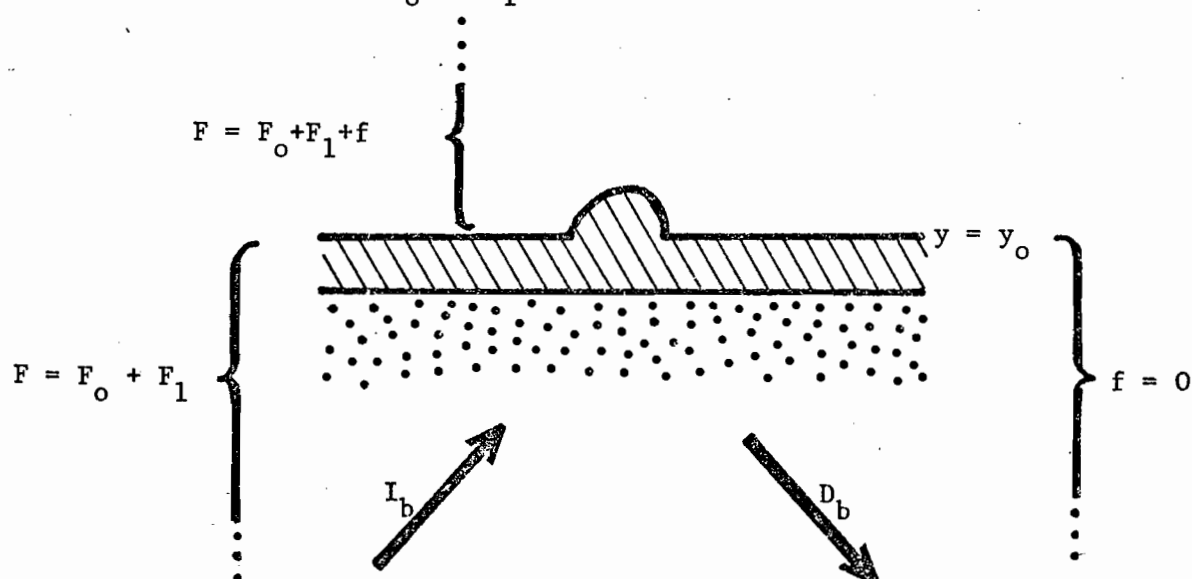


Figure 21

γ) On obtient en substituant (23) dans l'équation fondamentale (9), et en utilisant le fait que F_0 et F_1 vérifient l'équation du guide non déformé :

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \mathcal{G}_\beta f + \mathcal{S}_y (F_0 + F_1 + f) \quad (24)$$

C'est une équation différentielle en y d'inconnue f , que l'on peut intégrer de $y = y_0$ à $y = y_h$ à partir de la condition initiale $f(\zeta, y_0) = 0$. Ceci achève la démonstration de la proposition 2.

On a remarqué au § 1e que $\mathcal{S}_y (F_0 + F_1 + f)$ était une fonction régulière même si F_0 et F_1 contenaient des termes distributifs comme des distributions de Dirac ou des valeurs principales de Cauchy. Il est donc raisonnable d'admettre que la solution f de l'équation (24) est aussi une fonction régulière.

δ) Définitions de i_h et de l'opérateur $\mathcal{G}$

On vient de voir que la donnée du couple (I_b, D_b) permet de calculer $f(\zeta, y)$. On peut en déduire la partie incidente associée à f :

$$i_h(\zeta) = \mathcal{H} [f(\zeta, y_h)] \quad (25)$$

Ceci définit l'opérateur $\mathcal{G}$ qui, au couple (I_b, D_b) associe la fonction i_h :

$$i_h = \mathcal{G}(I_b, D_b) \quad (26)$$

La figure 22 schématise les calculs nécessaires à l'évaluation de l'action de l'opérateur $\mathcal{G}$ sur le couple (I_b, D_b) .

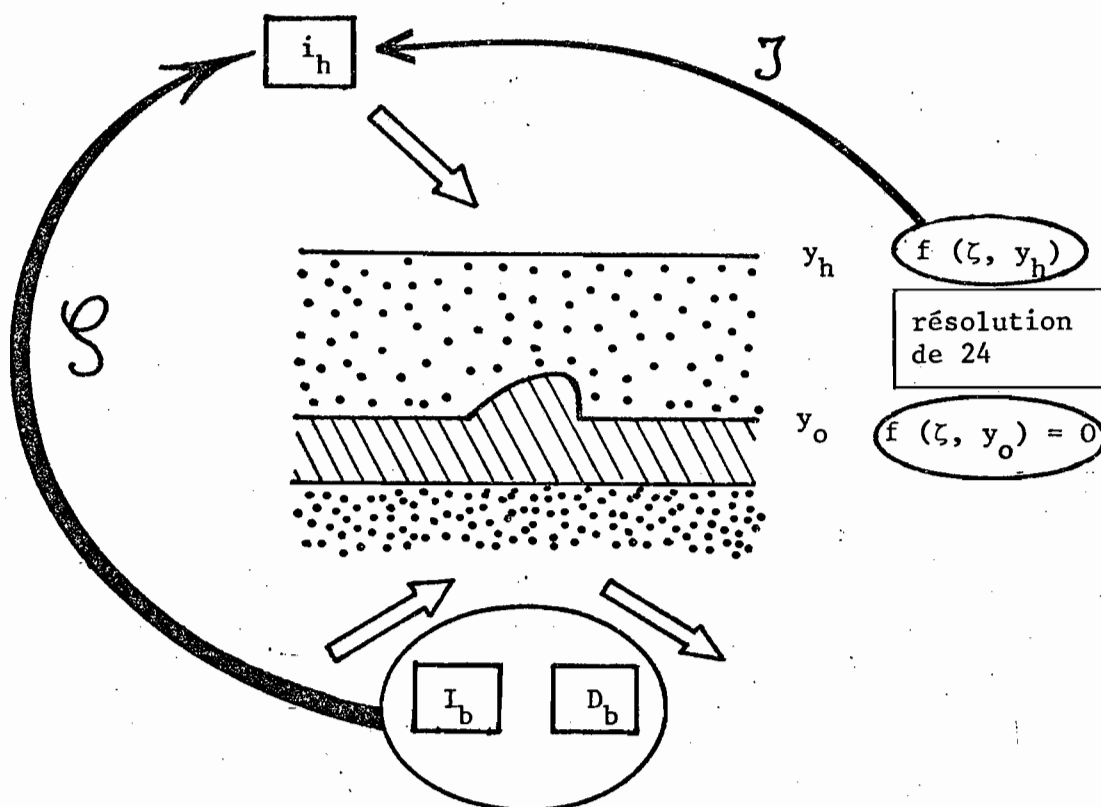


Figure 22

Définition de l'opérateur $\mathcal{S}$

Il vient en appliquant l'opérateur $\mathcal{S}$ aux deux membres de la relation $F = F_0 + F_1 + f$, en posant $I_h = \mathcal{S}F$, $I_{h_1} = \mathcal{S}F_1$, et en se souvenant que d'après les définitions de $\mathcal{G}$ (§ 1gβ) et de F_0^{-1} (§α), on a $\mathcal{S}F_0 = \mathcal{G}[D_b(\zeta)]$:

$$I_h(\zeta) = \mathcal{G}[D_b(\zeta)] + I_{h_1}(\zeta) + i_h(\zeta). \quad (27)$$

Tout ceci est résumé schématiquement sur la figure 23.

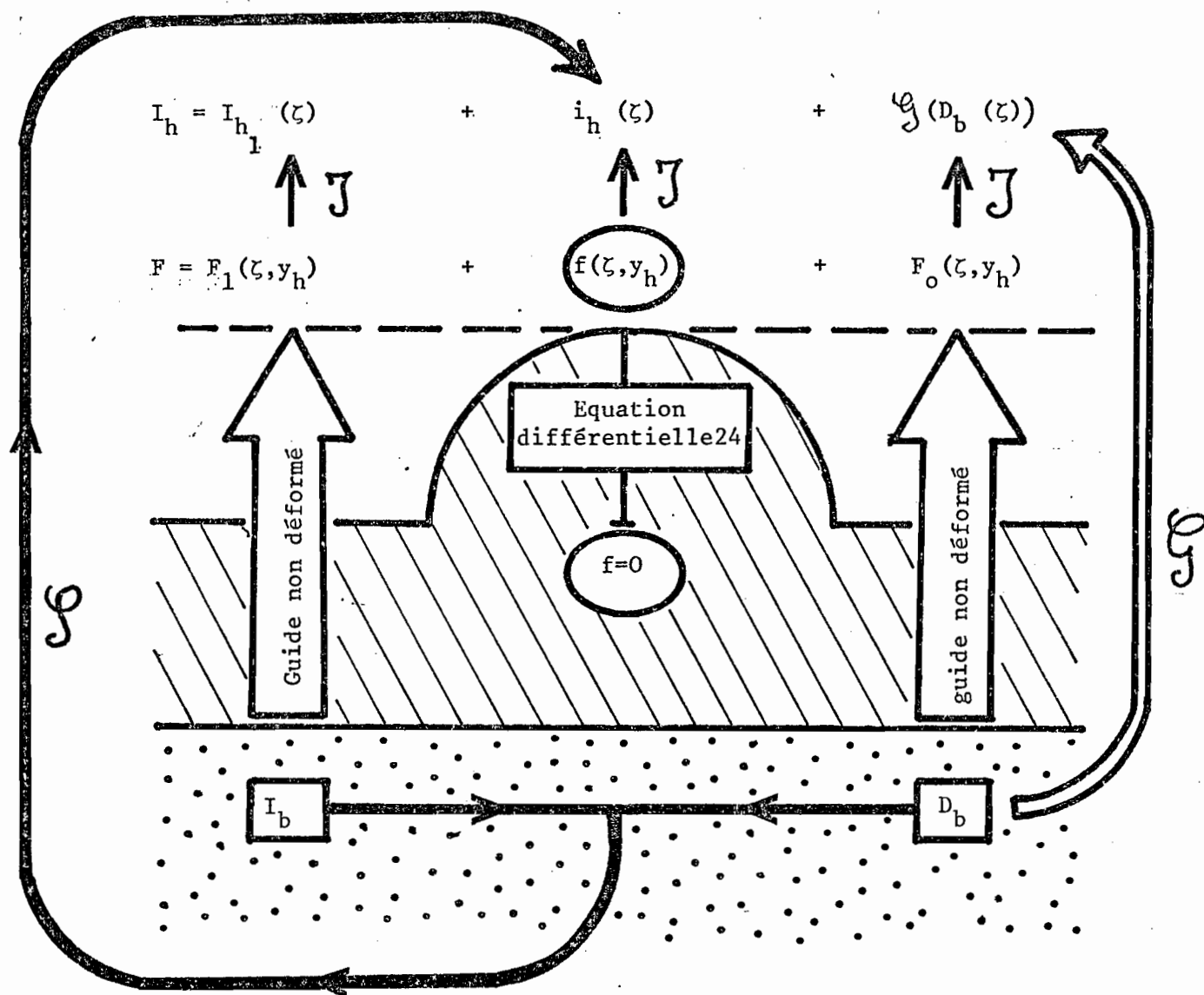


Figure 23

Calcul de I_h à partir de I_b et D_b

c) Problème n° II

Proposition 3 :

La connaissance de I_b et I_h ne suffit pas à déterminer le champ. Il faut se donner en plus $2m$ constantes arbitraires.

C'est d'ailleurs ce que nous dicte l'intuition physique : si le guide admet des modes, pour définir l'excitation, il ne suffit pas de se donner les champs incidents au-dessus et au-dessous, mais il faut en plus connaître les amplitudes des modes incidents de gauche et de droite.

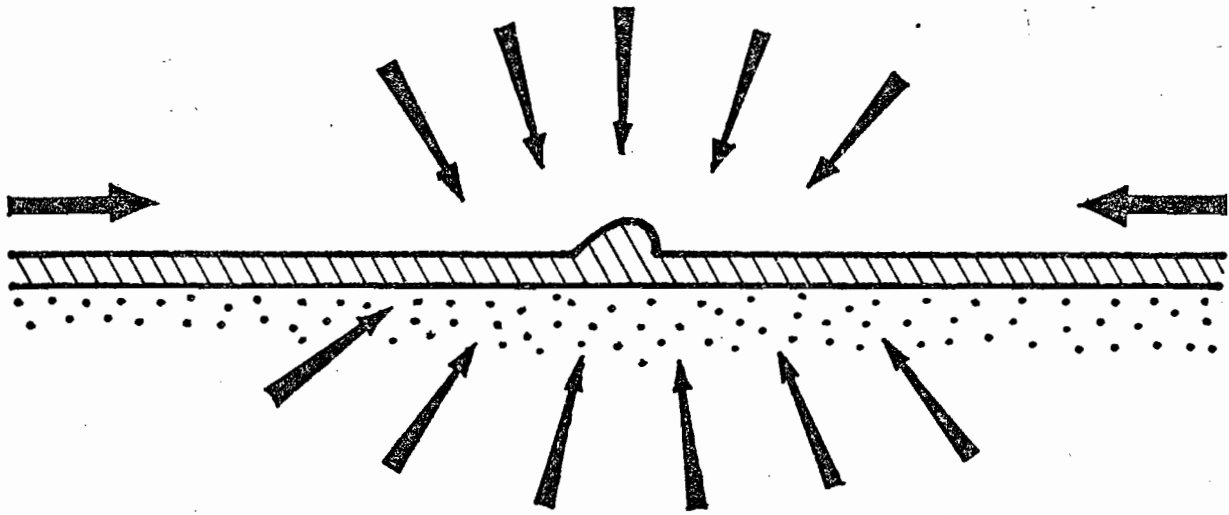


Figure 24

Nous appellerons "problème n° II" le problème de la détermination de tous les champs $F(\zeta, y)$ vérifiant les équations de Maxwell et correspondant à un choix donné de I_h et I_b .

On suppose donc dans ce paragraphe que I_h et I_b sont deux distributions données.

α) La proposition 2 montre que pour déterminer le champ, il suffirait de connaître en plus D_b . On peut penser alors utiliser l'équation (27) pour calculer D_b en fonction de I_h et I_b .

$$\begin{array}{ccccccc}
 I_h & = & \mathcal{G} & \cdot & D_b & + & I_{h1} & + & \mathcal{G} & (I_b, D_b) \\
 \uparrow & & & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \uparrow \\
 \text{connu} & & & & ? & & \text{connu puisque} & & \text{connu} & ? \\
 & & & & & & I_b \text{ est connu} & & &
 \end{array}$$

Ceci permettrait d'aboutir à une équation fonctionnelle d'inconnue D_b . Mais, D_b peut contenir des termes distributifs et il semble préférable de prendre pour inconnue la fonction régulière i_h . Pour cela, nous allons éliminer D_b entre (26) et (27) : la relation (27) donne une expression de D_b fonction de i_h que l'on reporte dans (26) pour obtenir l'équation d'inconnue i_h ; c'est ce que nous allons expliciter maintenant.

β) Expression de D_b en fonction de i_h

L'opérateur $\mathcal{G}$, étant singulier pour les modes $(\zeta = \pm \zeta_G^j)$, l'inversion de la relation (27) nous confronte au problème de la division en théorie des distributions : on ne peut calculer D_b qu'aux résultats de l'équation homogène $\mathcal{G} D_b = 0$ près.

Ces résultats forment un espace vectoriel de dimension $2m$.

Il vient plus précisément :

$$D_b(\zeta) = V_p \mathcal{G}^{-1} \left(I_h(\zeta) - I_{h_1}(\zeta) - i_h(\zeta) \right) + \sum_{j=1}^m \left[a_+^j \delta_+^j(\zeta) + a_-^j \delta_-^j(\zeta) \right], \quad (28)$$

où V_p rappelle que $\mathcal{G}^{-1}$ est l'opérateur inverse de $\mathcal{G}$ pris au sens "valeur principale de Cauchy" au voisinage des modes.

On a posé pour écrire la relation (28) de façon condensée :

$$\delta_{\pm}^j(\zeta) = \begin{cases} \begin{pmatrix} \delta(\zeta \mp \zeta_G^j) \\ 0 \end{pmatrix} & \text{si } j \leq m_E \text{ (modes TE)} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ \delta(\zeta \mp \zeta_G^j) \end{pmatrix} & \text{si } m_E < j \leq m \text{ (modes TH)} \end{cases}$$

Les coefficients a_+^j, a_-^j qui interviennent dans l'expression (28) sont les $2m$ constantes arbitraires dont parle la proposition 3. Regroupons les en un vecteur A de dimension $2m$:

$$A = (a_+^1, \dots, a_+^m, a_-^1, \dots, a_-^m) \quad (29)$$

γ) On obtient alors en reportant (28) dans (26), une équation fonctionnelle d'inconnue i_h :

$$\mathcal{L} i_h = i_{h_c}, \quad (30)$$

Les grandeurs physiquement intéressantes (comme $\ddot{D}_h$, $\ddot{D}_b$, $\ddot{D}_G$) sont obtenues à l'aide de la même combinaison linéaire comme l'indique la figure 25.

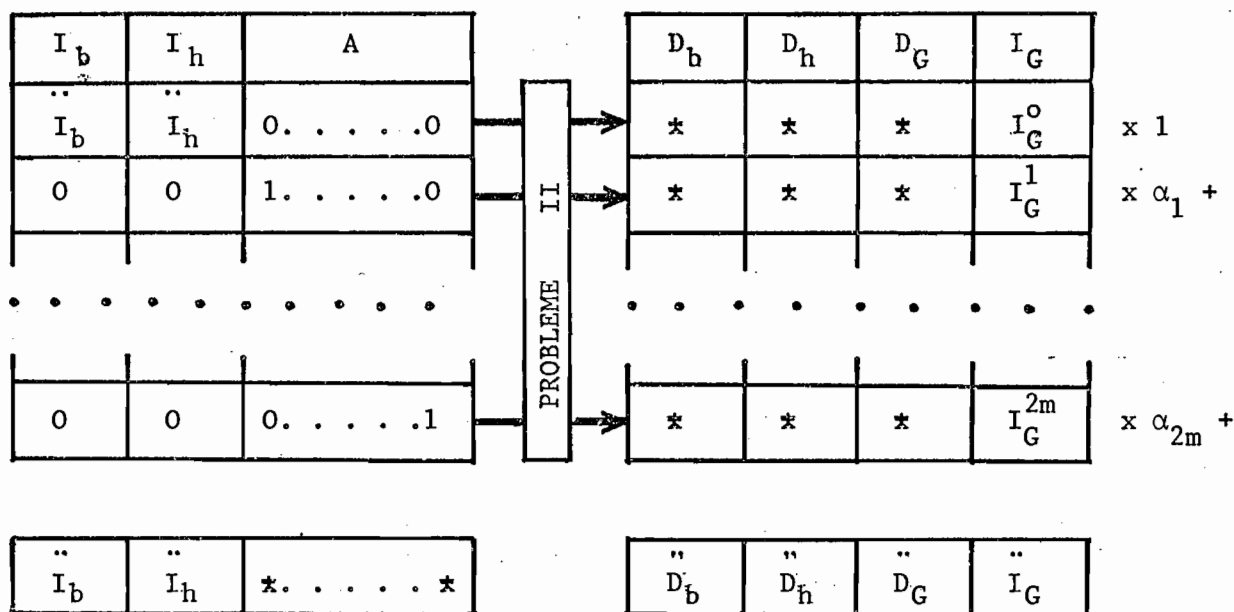


Figure 25

Schéma du calcul de la solution finale

Les constantes $\alpha_1, \dots, \alpha_{2m}$ sont déterminées par la résolution du système linéaire de dimension $2m$:

$$I_G^0 + \alpha_1 I_G^1 + \dots + \alpha_{2m} I_G^{2m} = \ddot{I}_G.$$

3) RELATIONS DE RECIPROCITE, EGALITE ENTRE L'ENERGIE INCIDENTE ET L'ENERGIE DIFFRACTEE

Nous nous proposons dans ce paragraphe de généraliser les relations de réciprocité déjà connues dans le cas d'un réseau [2] et d'un cylindre [3].

On notera que les relations de réciprocité (valables même quand l'obstacle comporte des inclusions de matériaux absorbants) ainsi que la propriété d'égalité entre l'énergie incidente et l'énergie diffractée (valable uniquement quand tous les indices sont réels), sont deux corollaires d'une même relation plus générale.

Dans le cas où le champ incident contient des ondes planes, il n'est pas possible d'écrire la relation d'égalité entre l'énergie incidente et l'énergie diffractée puisque l'énergie incidente est infinie. Il faut dans ce cas faire appel à un énoncé semblable au "théorème optique" utilisé par exemple dans la diffraction d'une onde plane par un obstacle cylindrique [3].

Relation de réciprocité et "théorème optique généralisé", nous permettent en particulier de tester la fiabilité des calculs numériques.

Pour éviter les répétitions nous allons exposer directement le formalisme dans le cas général mais fastidieux de l'incidence oblique.

a) Notations décrivant le champ incident et le champ diffracté

α) Le champ incident en haut $I_h(\zeta)$ est constitué dans le cas le plus général par une somme de p ondes planes et d'un faisceau :

$$I_h(\zeta) = \sum_{j=1}^p I_{hp}^j \delta(\zeta - \zeta^j) + I_{hf}(\zeta) \quad (31a)$$

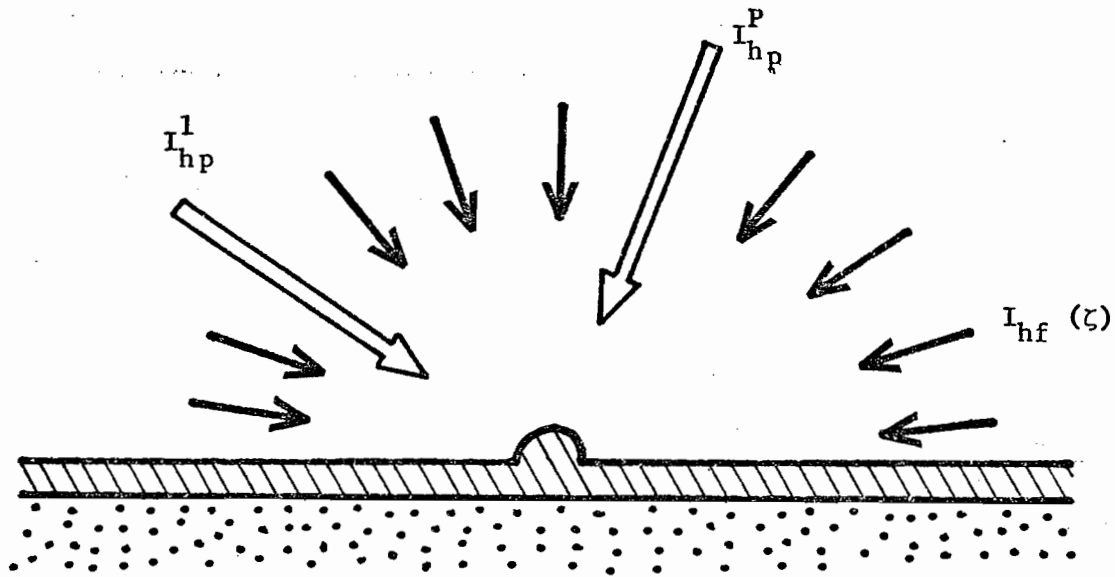


Figure 26

Il en est de même pour le champ incident en bas, le champ diffracté en haut et le champ diffracté en bas :

$$I_b(\zeta) = \sum_{j=1}^P I_{bp}^j \delta(\zeta - \zeta^j) + I_{bf}(\zeta), \quad (31b)$$

$$D_h(\zeta) = \sum_{j=1}^P D_{hp}^j \delta(\zeta - \zeta^j) + D_{hf}(\zeta), \quad (31c)$$

$$D_b(\zeta) = \sum_{j=1}^P D_{bp}^j \delta(\zeta - \zeta^j) + D_{bf}(\zeta), \quad (31d)$$

On définit aussi les composantes incidentes et diffractées à gauche et à droite sur les modes TE et sur les modes TH : E_{Igm}^j , E_{Idm}^j , E_{Dgm}^j , E_{Ddm}^j , H_{Igm}^j , H_{Idm}^j , H_{Dgm}^j , H_{Ddm}^j .

Le champ incident est finalement représenté par le vecteur I suivant, élément d'un produit hétéroclite d'espaces vectoriels :

$$\begin{aligned}
 I = \left\{ \begin{array}{l} I_f = \left\{ \begin{array}{l} I_{hf} = \begin{cases} E_{Ihf}(\zeta) \\ H_{Ihf}(\zeta) \end{cases} \\ I_{bf} = \begin{cases} E_{Ibf}(\zeta) \\ H_{Ibf}(\zeta) \end{cases} \end{array} \right. \\ \\ I_p = \left\{ \begin{array}{l} I_{hp} = \begin{cases} E_{Ihp}^j \\ H_{Ihp}^j \end{cases} \quad j = 1, \dots, p \\ I_{bp} = \begin{cases} E_{Ibp}^j \\ H_{Ibp}^j \end{cases} \quad j = 1, \dots, p \end{array} \right. \\ \\ I_m = \left\{ \begin{array}{l} I_{gm} = \begin{cases} E_{Igm}^j \\ H_{Igm}^j \end{cases} \quad j = 1, \dots, m_E \\ \quad \quad \quad j = 1, \dots, m_H \\ I_{dm} = \begin{cases} E_{Idm}^j \\ H_{Idm}^j \end{cases} \quad j = 1, \dots, m_E \\ \quad \quad \quad j = 1, \dots, m_H \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (32a)
 \end{aligned}$$

Chaque accolade représente une factorisation dans le produit d'espaces vectoriels. On a séparé systématiquement dans les éléments qui servent à décrire le champ, les composantes TE des composantes TH.

β) Le champ diffracté est de même représenté par le vecteur D obtenu en remplaçant formellement la lettre I par la lettre D dans l'expression (32a).

$$\begin{aligned}
 D = & \left\{ \begin{aligned} D_f = & \left\{ \begin{aligned} D_{hf} = & \begin{cases} E_{Dhf}(\zeta) \\ H_{Dhf}(\zeta) \end{cases} \\ D_{bf} = & \begin{cases} E_{Dbf}(\zeta) \\ H_{Dbf}(\zeta) \end{cases} \end{aligned} \\ \\ D_p = & \left\{ \begin{aligned} D_{hp} = & \begin{cases} E_{Dhp}^j \\ H_{Dhp}^j \end{cases} \\ D_{bp} = & \begin{cases} E_{Dbp}^j \\ H_{Dbp}^j \end{cases} \end{aligned} \\ \\ I_m = & \left\{ \begin{aligned} D_{gm} = & \begin{cases} E_{Dgm}^j \\ H_{Dgm}^j \end{cases} \\ D_{dm} = & \begin{cases} E_{Ddm}^j \\ H_{Ddm}^j \end{cases} \end{aligned} \right. \end{aligned} \right. \quad (32b)
 \end{aligned}$$

γ) Rappelons la signification des notations utilisées dans les définitions de I et D.

E : composante TE

H : composante TH

I : incident

D : diffracté

h : haut

b : bas

g : gauche

d : droite

f : faisceau

p : onde plane

m : mode

δ) La relation entre I et D s'écrit sous la forme :

$$D = \mathcal{Y}(n, \gamma) I \quad (33)$$

où $\mathcal{Y}(n, \gamma)$ est un opérateur linéaire dépendant de γ et de l'indice $n(x, y)$ de l'obstacle. Le programme général que nous avons mis au point permet de calculer l'action de $\mathcal{Y}$ sur un vecteur I quelconque.

b) Formule générale : principe de démonstration

α) On considère deux solutions des équations de Maxwell pour deux champs incidents, pour deux valeurs opposées de γ et pour deux obstacles obtenus toutefois par déformation du même guide, la déformation étant dans les deux cas contenue dans un même domaine borné $\mathcal{D}$.

Toutes les quantités relatives à ces deux solutions sont notées respectivement par les indices 1 et 2. Les indices des obstacles sont notés par exemple : $n_1(x, y)$ et $n_2(x, y)$.

Si $\vec{E}^1, \vec{H}^1$ et $\vec{E}^2, \vec{H}^2$ sont les champs correspondant à ces solutions, une manipulation élémentaire des équations de Maxwell conduit à la relation :

$$\text{div} (\vec{E}^1 \wedge \vec{H}^2 - \vec{E}^2 \wedge \vec{H}^1) = i\omega\epsilon_0 (n_2^2 - n_1^2) \vec{E}^1 \cdot \vec{E}^2 \quad (34)$$

Comme $\vec{E}^1, \vec{H}^1$ et $\vec{E}^2, \vec{H}^2$ sont de la forme :

$$\begin{cases} \vec{E}^1 = \vec{E}^1(x,y) \exp(i\gamma z) / \sqrt{\omega \epsilon_0} \\ \vec{H}^1 = \vec{H}^1(x,y) \exp(i\gamma z) / \sqrt{\omega \mu_0} \end{cases} \quad (35a)$$

$$\begin{cases} \vec{E}^2 = \vec{E}^2(x,y) \exp(-i\gamma z) / \sqrt{\omega \epsilon_0} \\ \vec{H}^2 = \vec{H}^2(x,y) \exp(-i\gamma z) / \sqrt{\omega \mu_0} \end{cases}, \quad (35b)$$

(34) devient :

$$\operatorname{div} (\vec{E}^1 \wedge \vec{H}^2 - \vec{E}^2 \wedge \vec{H}^1) = i (n_2^2 - n_1^2) \vec{E}^1 \cdot \vec{E}^2 \quad (36)$$

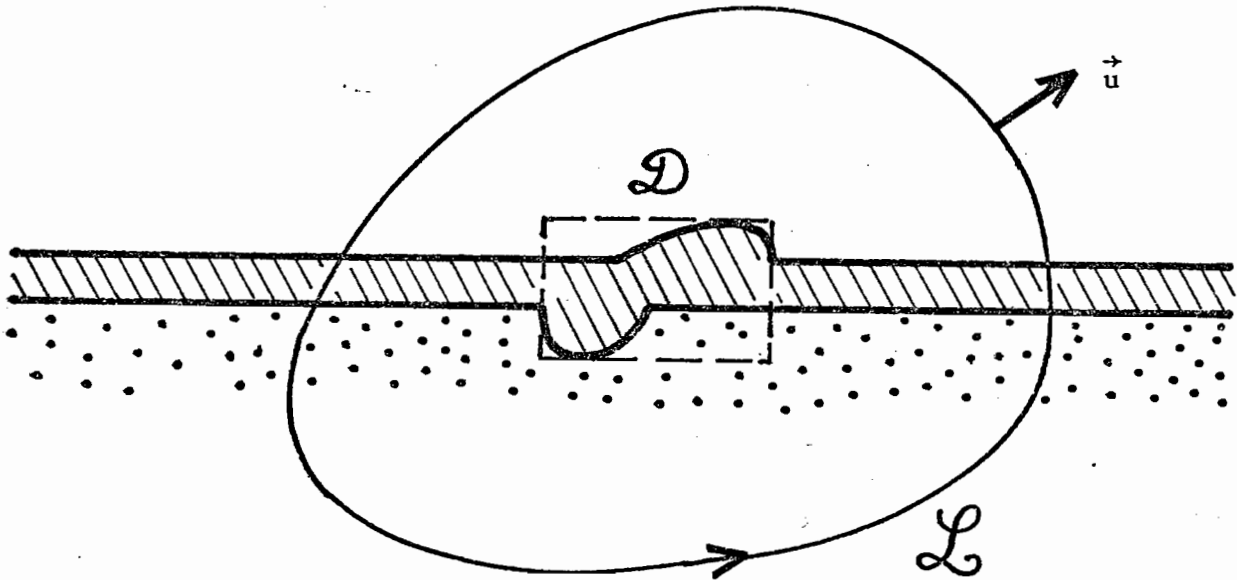


Figure 27

Appliquons la formule de Stokes à la relation 36 et pour un contour $\mathcal{L}$ entourant le domaine $\mathcal{D}$ (figure 27).

On obtient en remarquant que $n_2^2 - n_1^2$ est nul en dehors du domaine $\mathcal{D}$

$$\int_{\mathcal{L}} (\vec{E}^1 \wedge \vec{H}^2 - \vec{E}^2 \wedge \vec{H}^1) \cdot \vec{u} \, d\ell = i \int_{\mathcal{D}} (n_2^2 - n_1^2) \vec{E}^1 \cdot \vec{E}^2 \, ds \quad (37)$$

β) Pour établir une formule générale d'où dériveront toutes les autres relations, nous allons prendre pour contour $\mathcal{L}$ un rectangle entourant le domaine $\mathcal{D}$ et faire tendre l'aire de ce rectangle vers l'infini dans certaines conditions (figure 28).

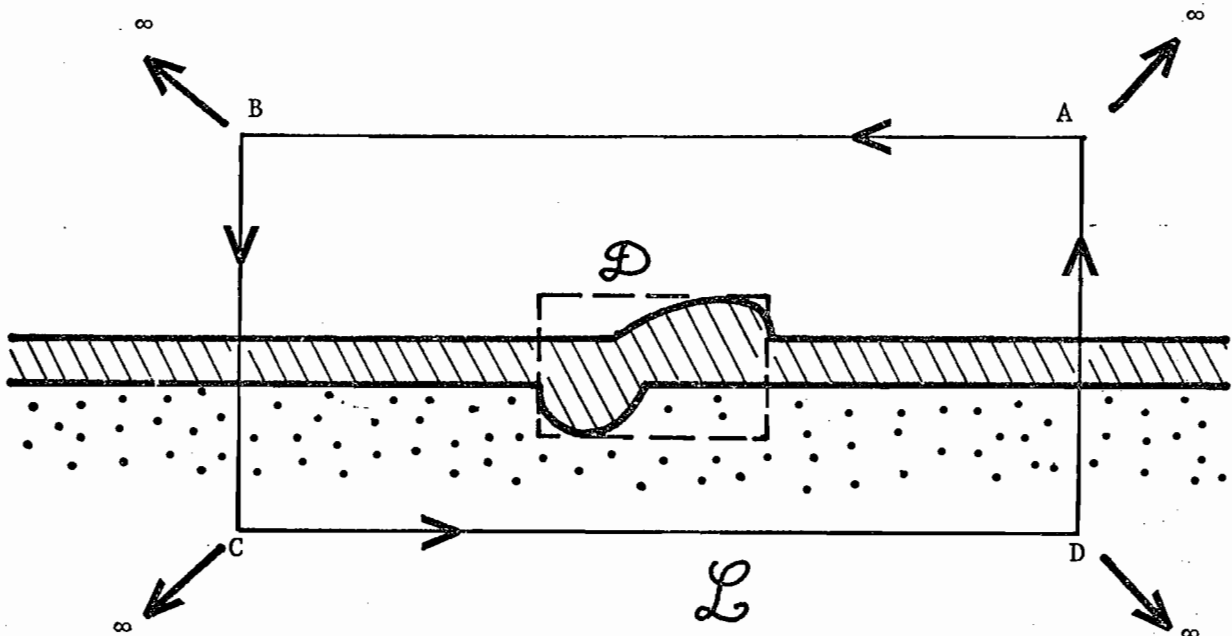


Figure 28

Dans le cas où le champ incident comporte des ondes planes, le champ total ne tend pas vers zéro quand on s'éloigne du guide.

Ceci pose quelques problèmes pour le passage à la limite, et il convient pour surmonter cette difficulté d'isoler dans le champ total, la contribution due à la réponse du guide non déformé aux ondes planes incidentes (notée par la lettre p) :

$$\begin{cases} \vec{E}^1 = \vec{E}^{1P} + \vec{E}^{1'} \\ \vec{H}^1 = \vec{H}^{1P} + \vec{H}^{1'} \end{cases} \quad (38a)$$

$$\begin{cases} \vec{E}^2 = \vec{E}^{2P} + \vec{E}^{2'} \\ \vec{H}^2 = \vec{H}^{2P} + \vec{H}^{2'} \end{cases} \quad (38b)$$

La relation 37 est valable en particulier quand $n_1 = n_2 = N(y)$ indice du guide non déformé :

$$\int_{\mathcal{L}} (\vec{E}^1 P \wedge \vec{H}^2 P - \vec{E}^2 P \wedge \vec{H}^1 P) \cdot \vec{u} \, d\ell = 0 \quad (39)$$

On obtient alors en reportant 38 dans 37 :

$$\int_{\mathcal{L}} \left[(\vec{E}^1 \wedge \vec{H}^2 - \vec{E}^2 \wedge \vec{H}^1) + (\vec{E}^1 P \wedge \vec{H}^2 - \vec{E}^2 \wedge \vec{H}^1 P) + (\vec{E}^1 \wedge \vec{H}^2 P - \vec{E}^2 P \wedge \vec{H}^1) \right] \cdot \vec{u} \, d\ell = i \int_{\mathcal{D}} (n_2^2 - n_1^2) \vec{E}^1 \cdot \vec{E}^2 \, ds \quad (40)$$

Sous cette forme, le passage à la limite est maintenant envisageable puisque $\vec{E}^1$, $\vec{H}^1$, $\vec{E}^2$, $\vec{H}^2$ décroissent quand on s'éloigne à l'infini dans une direction non parallèle à Ox.

γ) Une étude approfondie du passage à la limite conduit après des calculs fastidieux à exprimer le premier membre de la relation 40 uniquement à l'aide des composantes des vecteurs I et D définis par les formules 32.

Ces calculs, que nous ne reproduirons pas ici, aboutissent à l'expression suivante que nous explicitons malgré son encombrement :

$$\begin{aligned} & 2\pi \left\{ \int_{-\zeta_h}^{\zeta_h} \chi_h(\zeta) \left[\begin{pmatrix} E^1(\zeta) & E^2(-\zeta) \\ I_{hf} & D_{hf} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} E^1(\zeta) & E^2(-\zeta) \\ D_{hf} & I_{hf} \end{pmatrix} - \frac{1}{n_h^2} \begin{pmatrix} H^1(\zeta) & H^2(-\zeta) \\ I_{hf} & D_{hf} \end{pmatrix} - \frac{1}{n_h^2} \begin{pmatrix} H^1(\zeta) & H^2(-\zeta) \\ D_{hf} & I_{hf} \end{pmatrix} \right] d\zeta \right. \\ & + \int_{-\zeta_b}^{\zeta_b} \chi_b(\zeta) \left[\begin{pmatrix} E^1(\zeta) & E^2(-\zeta) \\ I_{bf} & D_{bf} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} E^1(\zeta) & E^2(-\zeta) \\ D_{bf} & I_{bf} \end{pmatrix} - \frac{1}{n_b^2} \begin{pmatrix} H^1(\zeta) & H^2(-\zeta) \\ I_{bf} & D_{bf} \end{pmatrix} - \frac{1}{n_b^2} \begin{pmatrix} H^1(\zeta) & H^2(-\zeta) \\ D_{bf} & I_{bf} \end{pmatrix} \right] d\zeta \\ & + \sum_{j=1}^{P_1} \left(\chi_h(\zeta_1^j) \left[\begin{pmatrix} E^{1j} & E^{2j}(-\zeta_1^j) \\ I_{hp} & D_{hf} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} E^{1j} & E^{2j}(-\zeta_1^j) \\ D_{hp} & I_{hf} \end{pmatrix} - \frac{1}{n_h^2} \begin{pmatrix} H^{1j} & H^2(-\zeta_1^j) \\ I_{hp} & D_{hf} \end{pmatrix} - \frac{1}{n_h^2} \begin{pmatrix} H^{1j} & H^2(-\zeta_1^j) \\ D_{hp} & I_{hf} \end{pmatrix} \right] \right. \\ & + \chi_b(\zeta_1^j) \left[\begin{pmatrix} E^{1j} & E^{2j}(-\zeta_1^j) \\ I_{bp} & D_{bf} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} E^{1j} & E^{2j}(-\zeta_1^j) \\ D_{bp} & I_{bf} \end{pmatrix} - \frac{1}{n_b^2} \begin{pmatrix} H^{1j} & H^2(-\zeta_1^j) \\ I_{bp} & D_{bf} \end{pmatrix} - \frac{1}{n_b^2} \begin{pmatrix} H^{1j} & H^2(-\zeta_1^j) \\ D_{bp} & I_{bf} \end{pmatrix} \right] \\ & + \sum_{j=1}^{P_2} \left(\chi_h(\zeta_2^j) \left[\begin{pmatrix} E^1(-\zeta_2^j) & E^{2j} \\ I_{hf} & D_{hp} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} E^1(-\zeta_2^j) & E^{2j} \\ D_{hf} & I_{hp} \end{pmatrix} - \frac{1}{n_h^2} \begin{pmatrix} H^1(-\zeta_2^j) & H^{2j} \\ I_{hf} & D_{hp} \end{pmatrix} - \frac{1}{n_h^2} \begin{pmatrix} H^1(-\zeta_2^j) & H^{2j} \\ D_{hf} & I_{hp} \end{pmatrix} \right] \right. \\ & \left. \left. + \chi_b(\zeta_2^j) \left[\begin{pmatrix} E^1(-\zeta_2^j) & E^{2j} \\ I_{bf} & D_{bp} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} E^1(-\zeta_2^j) & E^{2j} \\ D_{bf} & I_{bp} \end{pmatrix} - \frac{1}{n_b^2} \begin{pmatrix} H^1(-\zeta_2^j) & H^{2j} \\ I_{bf} & D_{bp} \end{pmatrix} - \frac{1}{n_b^2} \begin{pmatrix} H^1(-\zeta_2^j) & H^{2j} \\ D_{bf} & I_{bp} \end{pmatrix} \right] \right) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{j=1}^{m_E} \zeta_E^j \left[(E_{Idm}^{1j} E_{Ddm}^{2j} - E_{Ddm}^{1j} E_{Idm}^{2j}) + (E_{Igm}^{1j} E_{Dgm}^{2j} - E_{Dgm}^{1j} E_{Igm}^{2j}) \right] \\
& + \sum_{j=1}^{m_H} \zeta_H^j (H_{Idm}^{1j} H_{Ddm}^{2j} - H_{Ddm}^{1j} H_{Idm}^{2j}) + (H_{Igm}^{1j} H_{Dgm}^{2j} - H_{Dgm}^{1j} H_{Igm}^{2j}) \\
& = \frac{i}{2} \oint (n_1^2 - n_2^2) \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 \, ds. \tag{41}
\end{aligned}$$

où $\zeta_h = \sqrt{n_h^2 - \gamma^2}$ est la plus grande valeur de ζ pour laquelle $\chi_h(\zeta)$ est réel.
De même pour $\zeta_b = \sqrt{n_b^2 - \gamma^2}$.

Les deux premières intégrales sont donc limitées aux ondes non évanescentes.

Nous allons voir maintenant comment on peut tirer de cette relation compliquée des résultats plus simples et plus intéressants en pratique.

c) Relations de réciprocité

a) Forme générale

Un rapide examen du formalisme montre que, si $(E_x, E_y, E_z, H_x, H_y, H_z)$ est une solution des équations de Maxwell pour une valeur γ , alors $(-E_x, -E_y, E_z, H_x, H_y, -H_z)$ est une solution pour la valeur $-\gamma$. On voit alors que la transformation précédente permet d'associer à $D = \mathcal{G}(n, \gamma) I$, une autre solution : $\tilde{D} = \mathcal{G}(n, -\gamma) \tilde{I}$ où $\tilde{I}$ (resp $\tilde{D}$) est obtenu à partir de I (resp D) en multipliant par -1 les composantes T_E .

Etant donné un couple de solutions : $D^1 = \mathcal{G}(n, \gamma) I^1$ et $D^2 = \mathcal{G}(n, \gamma) I^2$, on obtient en appliquant la relation (41) au couple de solutions :

$$D^1 = \mathcal{G}(n, \gamma) I^1, \quad \tilde{D}^2 = \mathcal{G}(n, -\gamma) I^2$$

une relation entre les composantes de I^1, I^2, D^1, D^2 .

Cette relation s'écrit sous la forme :

$$I^1 \circ D^2 = I^2 \circ D^1 \tag{42}$$

où le produit noté par $\circ$ est défini par :

$$\begin{aligned}
I^1 \circ D^2 = 2 \Pi \Bigg\{ & \int_{-\zeta_h}^{\zeta_h} \chi_h(\zeta) \left[E_{Ihf}^1(\zeta) E_{Dhf}^2(-\zeta) + \frac{1}{n_h^2} H_{Ihf}^1(\zeta) H_{Dhf}^2(-\zeta) \right] d\zeta \\
& + \int_{-\zeta_b}^{\zeta_b} \chi_b(\zeta) \left[E_{Ibf}^1(\zeta) E_{Dbf}^2(-\zeta) + \frac{1}{n_b^2} H_{Ibf}^1(\zeta) H_{Dbf}^2(-\zeta) \right] d\zeta \\
& + \sum_{j=1}^{P_1} \left(\chi_h(\zeta_1^j) \left[E_{Ihp}^{1j} E_{Dhf}^2(-\zeta_1^j) + \frac{1}{n_h^2} H_{Ihp}^{1j} H_{Dhf}^2(-\zeta_1^j) \right] \right. \\
& \left. + \chi_b(\zeta_1^j) \left[E_{Ibp}^{1j} E_{Dbf}^2(-\zeta_1^j) + \frac{1}{n_b^2} H_{Ibp}^{1j} H_{Dbf}^2(-\zeta_1^j) \right] \right) \\
& + \sum_{j=1}^{P_2} \left(\chi_h(\zeta_2^j) \left[E_{Ihf}^1(-\zeta_2^j) E_{Dhp}^{2j} + \frac{1}{n_h^2} H_{Ihf}^1(-\zeta_2^j) H_{Dhp}^{2j} \right] \right. \\
& \left. + \chi_b(\zeta_2^j) \left[E_{Ibf}^1(-\zeta_2^j) E_{Dbp}^{2j} + \frac{1}{n_b^2} H_{Ibf}^1(-\zeta_2^j) H_{Dbp}^{2j} \right] \right) \Bigg\} \\
& + \sum_{j=1}^{m_E} \zeta_E^j \left(E_{Idm}^{1j} E_{Ddm}^{2j} + E_{Igm}^{1j} E_{Dgm}^{2j} \right) \\
& + \sum_{j=1}^{m_H} \zeta_H^j \left(H_{Idm}^{1j} H_{Ddm}^{2j} + H_{Igm}^{1j} H_{Dgm}^{2j} \right). \tag{43}
\end{aligned}$$

β) La relation (42) est une forme très générale des relations de réciprocité. On peut obtenir des propriétés d'interprétation plus facile en écrivant cette relation dans le cas simple mais fréquent où le champ incident (I^1 et I^2) est réduit soit à une onde plane, soit à un mode d'amplitude unité.

Les valeurs correspondantes de $I_1 \circ D_2$ et de $I_2 \circ D_1$ sont données dans le tableau suivant :

Seul terme non nul dans I^1	$I^1 \circ D^2$
$E_{Ihp}^{1j} = 1$	$2\Pi\chi_h(\zeta_1^j) E_{Dhf}^2(-\zeta_1^j)$
$E_{Ibp}^{1j} = 1$	$2\Pi\chi_b(\zeta_1^j) E_{Dbf}^2(-\zeta_1^j)$
$H_{Ihp}^{1j} = 1$	$2\Pi(\chi_h(\zeta_1^j)/n_h^2) H_{Dhf}^2(-\zeta_1^j)$
$H_{Ibp}^{1j} = 1$	$2\Pi(\chi_b(\zeta_1^j)/n_b^2) H_{Dbf}^2(-\zeta_1^j)$
$E_{Idm}^{1j} = 1$	$\zeta_E^j E_{Ddm}^{2j}$
$E_{Igm}^{1j} = 1$	$\zeta_E^j E_{Dgm}^{2j}$
$H_{Idm}^{1j} = 1$	$\zeta_H^j E_{Ddm}^{2j}$
$H_{Igm}^{1j} = 1$	$\zeta_H^j H_{Dgm}^{2j}$

Seul terme non nul dans I^2	$I^2 \circ D^1$
$E_{Ihp}^{2j} = 1$	$2\Pi\chi_h(\zeta_2^j) E_{Dhf}^1(-\zeta_2^j)$
$E_{Ibp}^{2j} = 1$	$2\Pi\chi_b(\zeta_2^j) E_{Dbf}^1(-\zeta_2^j)$
$H_{Ihp}^{2j} = 1$	$2\Pi(\chi_h(\zeta_2^j)/n_h^2) H_{Dhf}^1(-\zeta_2^j)$
$H_{Ibp}^{2j} = 1$	$2\Pi(\chi_b(\zeta_2^j)/n_b^2) H_{Dbf}^1(-\zeta_2^j)$
$E_{Idm}^{2j} = 1$	$\zeta_E^j E_{Ddm}^{1j}$
$E_{Igm}^{2j} = 1$	$\zeta_E^j E_{Dgm}^{1j}$
$H_{Idm}^{2j} = 1$	$\zeta_H^j H_{Ddm}^{1j}$
$H_{Igm}^{2j} = 1$	$\zeta_H^j H_{Dgm}^{1j}$

Tableau 1

L'égalité $I^1 \circ D^2 = I^2 \circ D^1$ peut alors prendre 64 formes particulières très simples obtenues en combinant 2 à 2 les cas de figure représentés sur le tableau 1.

Quelques unes de ces relations sont représentées schématiquement sur la figure 29.

Solution n° 1	Solution n° 2	relation de réciprocité
		$(\chi_h(\zeta_2^1)/n_h^2) H_{Dhf}^1(-\zeta_2^1)$ $= \chi_h(\zeta_1^1) E_{Dhf}^2(-\zeta_1^1)$
		$(\chi_b(\zeta_2^1)/n_b^2) H_{Dhf}^1(-\zeta_2^1)$ $= (\chi_h(\zeta_1^1)/n_h^2) H_{Dhf}^2(-\zeta_1^1)$
		$(\chi_h(\zeta_2^1)/n_h^2) H_{Dhf}^1(-\zeta_2^1)$ $= \chi_b(\zeta_1^1) E_{Dbf}^2(-\zeta_1^1)$
		$\zeta_E^k E_{Ddm}^{1k}$ $= \zeta_E^j E_{Dgm}^{2j}$
		$\zeta_H^k H_{Dgm}^{1k}$ $= \zeta_E^j E_{Dgm}^{2j}$
		$2\pi (\chi_h(\zeta_2^1) / n_h^2) H_{Dhf}^1(-\zeta_2^1)$ $= \zeta_E^j E_{Dgm}^{2j}$

Figure 29

Les flèches pleines représentent le champ incident d'amplitude unité. Les flèches en pointillés représentent les amplitudes diffractées reliées par la relation de réciprocité.

Les flèches inclinées représentent les ondes planes, les flèches horizontales, les modes guidés.

γ) Nous avons vérifié numériquement ces relations dans de nombreux cas.

A titre d'exemple, nous donnons ici les résultats obtenus pour les obstacles représentés sur les figures 30a et b (tableaux 2a et b) dans un cas d'incidence oblique ($\gamma = 1/\sqrt{2}$).

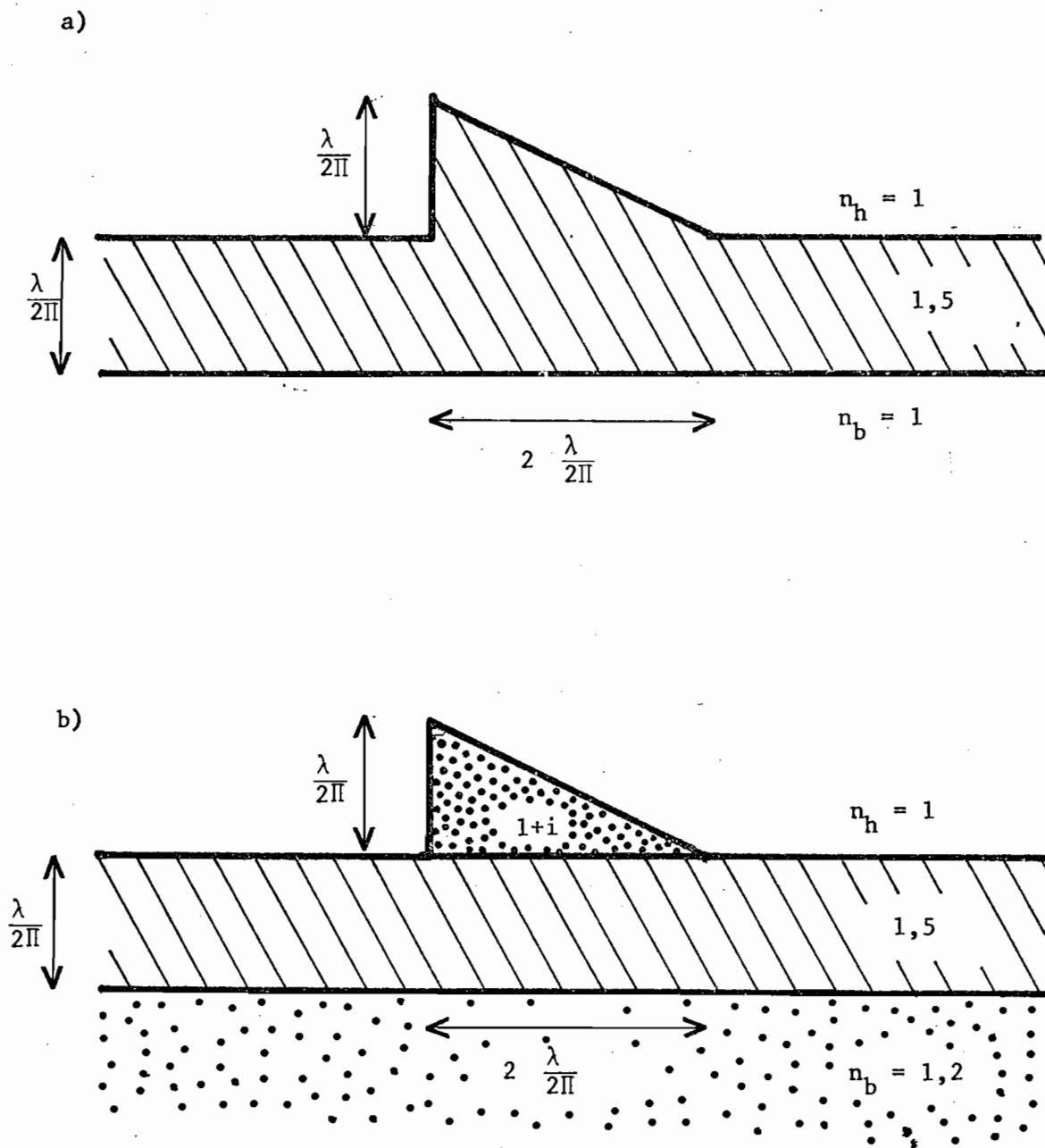


Figure 30

Obstacles utilisés pour tester les relations de réciprocité.

- a) Tous les indices sont réels. Le guide non déformé admet un mode TE et un mode TH.
- b) L'obstacle comporte une partie absorbante (indice $1+i$). Le guide non déformé admet un mode TE et pas de mode TH.

Pour obtenir une vérification numérique des relations de réciprocité, on calcule le champ diffracté lorsque l'obstacle est attaqué successivement par diverses formes de champ incident : onde venant de droite ou de gauche, onde plane venant du haut ou du bas sous divers incidences.

Le tableau 2 donne pour chaque type de champ incident, les valeurs diffractées dans les directions opposées aux divers directions d'incidence. Les deux nombres contenus dans chaque case sont le carré du module et la phase (en degrés) des expressions données dans le tableau 1. La réciprocité se traduit par le fait que les tableaux 2a et 2b doivent être symétriques par rapport à la diagonale principale. La dernière ligne de ces tableaux intitulée bilan d'énergie ne concerne pas ce paragraphe.

CHAMP INCIDENT											
M O D E				Onde plane $\zeta = 0$				Onde plane $\zeta = 0.5534$			
T H		T E		T H		T E		T H		T E	
Droite	Gauche	Droite	Gauche	Bas	Haut	Bas	Haut	Bas	Haut	Bas	Haut
7.848E-3	1.134E0	1.893E-3	1.204E-4	2.867E-2	4.001E-2	3.494E-3	1.757E-3	4.993E-2	3.473E-2	3.134E-5	2.184E-5
131.36	6.96	51.44	171.80	143.53	118.95	87.31	6.31	142.30	116.19	135.82	62.90
1.134E0	7.678E-3	1.625E-4	2.006E-3	3.204E-2	3.603E-2	5.085E-3	1.274E-3	3.549E-2	1.716E-2	5.175E-3	4.594E-4
6.96	75.09	64.68	158.70	115.56	91.20	147.36	126.76	126.29	73.96	-139.97	135.76
1.891E-3	1.611E-4	1.768E-3	1.519E0	4.278E-2	4.796E-2	3.346E-2	1.496E-2	1.526E-3	6.992E-3	7.724E-2	1.355E-2
51.47	64.87	-37.70	10.05	-14.06	101.88	163.36	88.60	-18.11	100.54	163.59	93.52
1.191E-4	2.003E-3	1.519E0	1.824E-3	5.910E-2	3.219E-2	3.813E-2	9.516E-3	2.512E-2	2.908E-2	2.615E-4	2.541E-5
171.75	158.69	10.05	-108.79	133.97	-111.91	133.60	55.26	128.73	-116.62	-40.26	-122.37
2.861E-2	3.201E-2	4.279E-2	5.908E-2	3.329E-2	4.875E-1	7.741E-4	4.661E-4	1.338E-2	2.696E-1	8.017E-2	1.406E-2
143.52	115.53	-14.07	133.98	24.22	135.00	-149.54	122.61	-176.13	129.52	-159.94	122.83
3.999E-2	3.599E-2	4.794E-2	3.221E-2	4.877E-1	6.003E-3	1.118E-3	3.400E-4	3.400E-1	4.785E-3	4.533E-2	3.092E-3
118.96	91.21	101.85	-111.91	135.02	146.23	156.61	49.78	129.43	104.98	-50.33	-124.89
3.496E-3	5.089E-3	3.345E-2	3.808E-2	7.828E-4	1.126E-3	2.819E-1	1.225E-1	3.955E-2	3.323E-2	1.198E-1	2.007E-2
87.26	-147.33	163.32	133.63	-149.62	156.79	-160.66	120.39	-165.32	-56.20	-161.93	123.05
1.736E-3	1.275E-3	1.496E-2	9.524E-3	4.696E-4	3.469E-4	1.225E-1	2.160E-2	1.486E-2	7.702E-3	3.952E-2	1.562E-3
6.35	126.65	88.53	55.27	122.06	49.64	120.36	26.92	111.46	-135.11	116.40	27.29
4.986E-2	3.547E-2	1.527E-3	2.511E-2	1.338E-2	3.004E-1	3.951E-2	1.483E-2	1.162E-1	1.171E-1	5.533E-2	7.753E-3
142.28	126.26	-17.92	128.75	-176.13	129.39	-165.36	111.50	-177.47	123.62	-166.53	114.48
3.474E-2	1.714E-2	6.995E-3	2.907E-2	2.695E-1	4.788E-3	3.325E-2	7.722E-3	1.171E-1	1.526E-2	5.533E-2	7.753E-3
116.24	73.98	100.54	-116.62	129.55	105.09	-56.19	-135.13	123.67	67.31	-54.68	-130.40
3.137E-3	5.167E-3	7.725E-2	2.622E-4	8.022E-2	4.530E-2	1.199E-1	3.949E-2	5.536E-2	6.385E-2	2.916E-3	3.496E-4
135.38	-139.98	163.57	-40.39	-159.95	-50.33	-161.96	116.39	-166.54	-54.67	-168.62	116.87
2.214E-5	4.595E-4	1.355E-2	2.513E-5	1.406E-2	3.082E-3	2.009E-2	1.561E-3	7.765E-3	4.703E-2	3.517E-4	1.060E-7
62.43	135.68	93.51	-122.33	122.79	-124.80	123.00	27.25	114.44	-130.37	116.76	-110.67
Bilan d'énergie											
	-1.7E-4	-2.1E-4	-1.0E-4	-2.0E-3	-4.6E-3	-2.2E-3	4.5E-4	-2.6E-3	-5.5E-3	-6.9E-4	2.2E-3

Tableau 2a. Vérification numérique des relations de réciprocité et de la conservation de l'énergie pour l'obstacle de la figure 29 a.

CHAMP INCIDENT													
				Onde plane $\zeta = 0$				Onde plane $\zeta = 0.5534$					
MODE TE				T H				T E					
	Droite	Gauche	Bas	Haut	Bas	Haut	Bas	Haut	Bas	Haut	Bas	Haut	
MODE TE	Droite	4.639E-4 68.95	1.648 E0 -2.51	2.674E-2 72.19	3.396E-2 -143.47	4.123E-2 -113.20	1.578E-2 -167.38	1.228E-3 49.83	5.430E-3 -123.57	1.470E-1 -115.43	2.351E-2 -162.89		
	Gauche	1.649E-0 -2.51	6.512E-4 2.78	3.883E-2 -133.42	2.160E-2 -5.73	4.504E-2 -147.68	1.015E-2 152.39	2.094E-2 -149.53	1.463E-2 -14.99	1.436E-3 92.12	1.861E-4 29.28		
$\zeta = 0$	bas	2.674E-2 72.13	3.877E-2 -133.41	1.549E-1 142.55	7.655E-1 -159.56	7.017E-3 -29.96	3.058E-3 -97.07	2.093E-1 179.78	4.734E-1 -175.98	2.916E-1 -88.16	5.085E-2 -140.08		
	haut	3.398E-2 -143.59	2.155E-2 -5.67	7.660E-1 -159.56	1.579E-1 71.97	9.972E-3 -82.47	4.962E-3 -169.82	7.461E-1 173.75	2.057E-1 80.03	1.788E-1 29.46	1.403E-2 -32.37		
	bas	4.120E-2 -113.19	4.502E-2 -147.75	6.999E-3 -30.60	1.006E-3 -80.73	1.790E0 -97.97	6.888E-1 -157.13	1.913E-1 -95.17	1.417E-1 14.20	1.163E0 -107.39	1.744E-1 -160.81		
	haut	1.581E-2 -167.38	1.017E-2 152.41	3.086E-3 -98.56	4.969E-3 -169.06	6.907E-1 -157.08	1.460E-1 129.98	7.230E-2 -156.55	2.509E-2 -57.57	3.649E-1 -170.20	2.856E-2 123.15		
$\zeta = -0.5534$	bas	1.221E-3 49.72	2.090E-2 -149.59	2.098E-1 179.81	7.434E-1 173.73	1.913E-1 -95.84	7.142E-2 -156.57	5.892E-1 -167.56	4.115E-1 151.89	3.248E-1 -107.44	4.728E-2 -159.73		
	haut	5.423E-3 -123.87	1.460E-2 -14.90	4.734E-1 -176.00	2.060E-1 80.04	1.397E-1 14.43	2.481E-2 -57.38	4.131E-1 151.90	2.452E-1 87.44	2.610E-1 19.07	2.075E-2 -45.51		
	bas	1.470E-1 -115.42	1.440E-3 92.12	2.924E-1 -88.22	1.800E-1 29.31	1.164E0 -107.35	3.644E-1 -170.25	3.256E-1 -107.39	2.625E-1 18.93	1.316E-1 -138.64	1.511E-2 161.55		
	haut	2.349E-2 -162.85	1.851E-4 29.31	5.109E-2 -140.16	1.404E-2 -32.55	1.749E-1 -160.75	2.858E-2 123.11	4.764E-2 -159.67	2.082E-2 -45.68	1.516E-2 161.72	1.064E-3 82.19		
Bilan d'énergie													
		1.372E-1	1.372E-1	1.058	1.163	1.248	9.626E-1	1.015	1.202	1.229	7.961E-1		

Tableau 2b. Vérification numérique des relations de réciprocité pour l'obstacle de la figure 29 b.

d) Théorème optique généraliséα) Forme générale

On constate en prenant le complexe conjugué, que si les champs $\vec{E}$ et $\vec{H}$ constituent une solution des équations de Maxwell pour la valeur γ et l'indice n , alors $\vec{E}$ et $-\vec{H}$ sont une autre solution pour la valeur $-\gamma$ et l'indice $\bar{n}$.

Un examen minutieux des équations, montre alors que cette transformation permet d'associer à $D = \mathcal{G}(n, \gamma) I$ une autre solution : $I' = \mathcal{G}(\bar{n}, -\gamma) D'$, où I' et D' sont obtenus à partir de I et D en remplaçant les composantes T_E par l'opposé de leur conjugué, les composantes T_H par leur conjugué, et en changeant ζ en $-\zeta$, ζ^j en $-\zeta^j$.

On obtient alors en appliquant la formule (41) au couple de solutions : $D = \mathcal{G}(n, \gamma) I$, $I' = \mathcal{G}(\bar{n}, -\gamma) D'$, c'est à dire en prenant $I_1 = I$, $D_1 = D$, $I_2 = D'$, $D_2 = I'$:

$$\mathcal{S}(I) - \mathcal{S}(D) = \int_{\mathcal{D}} \mathcal{Y}_m(n^2) |\vec{E}|^2 ds, \quad (44)$$

où :

$$\mathcal{S}(I) = \mathcal{S}^f(I) + \mathcal{S}^p(I) + \mathcal{S}^m(I),$$

avec :

$$\mathcal{S}^f(I) = 2\pi \left\{ \int_{-\zeta_b}^{\zeta_h} \chi_h(\zeta) \left(|E_{Ihf}(\zeta)|^2 + \frac{1}{n_h^2} |H_{Ihf}(\zeta)|^2 \right) d\zeta + \int_{-\zeta_b}^{\zeta_b} \chi_b(\zeta) \left(|E_{Ibf}(\zeta)|^2 + \frac{1}{n_b^2} |H_{Ibf}(\zeta)|^2 \right) d\zeta \right\},$$

$$\mathcal{S}^p(I) = 2\pi \left\{ \sum_{j=1}^P \chi_h(\zeta^j) 2\Re_e \left(E_{Ihp}^j \bar{E}_{Ihf}(\zeta^j) + \frac{1}{n_h^2} H_{Ihp}^j \bar{H}_{Ihf}(\zeta^j) \right) + \sum_{j=1}^P \chi_b(\zeta^j) 2\Re_e \left(E_{Ibp}^j \bar{E}_{Ibf}(\zeta^j) + \frac{1}{n_b^2} H_{Ibp}^j \bar{H}_{Ibf}(\zeta^j) \right) \right\},$$

$$\mathcal{S}^m(I) = \sum_{j=1}^{m_E} \zeta_E^j \left(|E_{Idm}^j|^2 + |E_{Igm}^j|^2 \right) + \sum_{j=1}^{m_H} \zeta_H^j \left(|H_{Idm}^j|^2 + |H_{Igm}^j|^2 \right).$$

On a des formules analogues pour $\mathcal{S}(D)$ en remplaçant I par D.

Dans l'expression (44), $\mathcal{S}^f$ représente l'énergie incidente ou diffractée sous forme de faisceau et $\mathcal{S}^m$ l'énergie transportée par les modes. Par contre, $\mathcal{S}^p$ est un terme complémentaire dû à la présence des ondes planes incidentes dont l'énergie infinie ne peut intervenir directement dans un bilan d'énergie.

Pour un milieu absorbant, $\Im_m(n^2) > 0$; pour un milieu non absorbant, $\Im_m(n^2) = 0$;

la relation (44) implique donc :

$$\mathcal{S}(D) \leq \mathcal{S}(I) \quad (45)$$

l'égalité n'ayant lieu que si tous les milieux sont non absorbants.

β) Théorème optique généralisé

Dans le cas de milieux non absorbants, on a donc une relation entre les éléments incidents et les éléments diffractés :

$$\mathcal{S}(D) = \mathcal{S}(I) \quad (46)$$

On remarque que cette relation fait intervenir le terme complémentaire $\mathcal{S}^p$.

γ) Relation entre énergie incidente et énergie diffractée

Dans le cas particulier où le champ incident ne contient pas d'onde plane, le terme complémentaire $\mathcal{S}^p$ est nul, et la relation (45) devient :

$$\mathcal{S}^f(D) + \mathcal{S}^m(D) \leq \mathcal{S}^f(I) + \mathcal{S}^m(I) \quad (47)$$

La relation 47 montre donc que l'énergie diffractée (sous forme de faisceau ou de mode) est au plus égale à l'énergie incidente, l'égalité n'ayant lieu que si tous les milieux qui constituent l'obstacle sont sans pertes.

δ) Vérification numérique

Le théorème optique a servi de test dans tous nos calculs (cf. IV 3bα).

Il est en général vérifié avec une précision meilleure que $2 \cdot 10^{-3}$. On constate dans le cas où l'obstacle contient des milieux absorbants, que l'inégalité 45 est bien vérifiée.

A titre d'exemple, donnons encore les résultats pour les obstacles représentés sur la figure 29. La dernière ligne des tableaux 2, intitulée "bilan d'énergie" donne la valeur de l'expression suivante :

$$2 \frac{\mathcal{S}^{(I)} - \mathcal{S}^{(D)}}{\mathcal{S}^f(I) + |\mathcal{S}^p(I)| + \mathcal{S}^m(I) + \mathcal{S}^f(D) + |\mathcal{S}^p(D)| + \mathcal{S}^m(D)}$$

On constate bien que cette quantité est voisine de 0 dans le cas d'un obstacle non absorbant et reste positive dans le cas où l'obstacle contient des milieux à pertes.

Références :

- 1) R. Petit "Electromagnetic Theory of Gratings", Petit, Ed. (Springer-Verlag, Berlin, 1980).
- 2) P. Vincent and M. Nevière 'The reciprocity theorem for corrugated surfaces used in conical diffraction mounting' Thèse P. Vincent.
- 3) P. Vincent "Singularity expansions for cylinders of limite conductivity" Thèse P. Vincent.

CHAPITRE IV

Aspect numérique du problème

Le chapitre III était consacré à l'exposé du formalisme mathématique de notre méthode. Ce formalisme a bien sûr été construit dans l'idée d'une étude numérique ultérieure : notre but était d'écrire un programme capable de traiter effectivement des exemples concrets.

Dans ce chapitre, nous allons entrer un peu dans le détail de l'élaboration de ce programme en donnant le principe des algorithmes numériques et le schéma général du calcul.

Nous nous intéresserons ensuite à quelques questions d'aspect purement informatique (temps de calcul, occupation en mémoire) avant d'aborder le problème de l'évaluation des capacités du programme.

1. ALGORITHMES NUMERIQUES

a) Echantillonnage

Nous avons à manipuler des fonctions de la variable ζ où ζ varie de $-\infty$ à $+\infty$ (comme par exemple : $i_h(\zeta)$).

Ces fonctions seront représentées dans l'ordinateur par leurs valeurs en N points d'échantillonnage régulièrement espacés sur la droite réelle. Ceci impose dès le départ le choix de deux paramètres numériques dont dépendra la précision des calculs : le nombre N de points et le pas d'échantillonnage.

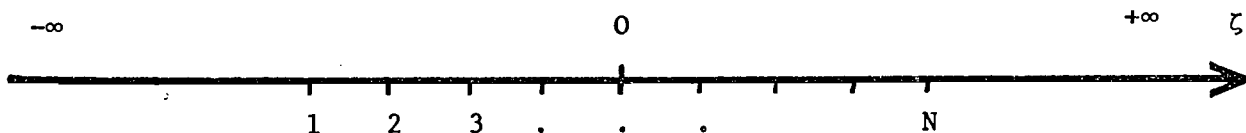


Figure 1

Echantillonnage en ζ

Pour des raisons pratiques (utilisation de l'algorithme FFT), N sera une puissance de 2.

Nous allons voir maintenant que l'on peut associer un algorithme numérique à chacun des problèmes I, II, III du paragraphe IV.2.

b) Résolution du problème I : algorithme I

Rappelons que le problème I consiste à déterminer le champ lorsque I_b et D_b sont connus. On se donne donc I_b et D_b (par exemple en entrée d'un sous-programme).

Ces quantités sont en fait des distributions, somme d'une fonction régulière (définie numériquement par le tableau de ses valeurs en N points), de distributions de Dirac (déterminées par leur poids et leur support) et de valeurs principales de Cauchy.

La partie essentielle de l'algorithme I consiste à résoudre l'équation III 24, et plus précisément à calculer $f(\zeta, y_h)$ lorsque la fonction f est déterminée par :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial y} = \mathcal{G}_\beta f + \mathcal{S}_y (F_0 + F_1 + f) \\ f(\zeta, y_0) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

α) Pour intégrer l'équation différentielle (1), on utilise un algorithme de Runge-Kutta du 4ème ordre. La mise en oeuvre de cet algorithme impose le choix d'un nouveau paramètre numérique : la hauteur h des pas d'intégration.

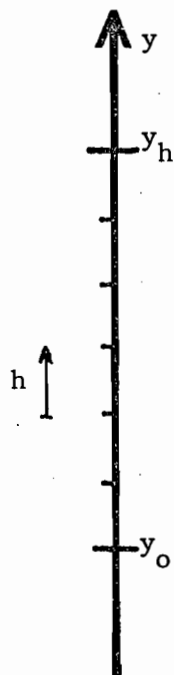


Figure 2

Echantillonnage en y .

L'algorithme de Runge-Kutta exige l'utilisation d'un sous-programme capable de calculer les valeurs de $\mathcal{G}_\beta f + \mathcal{S}_y (F_0 + F_1 + f)$ aux N points de l'échantillonnage en ζ lorsqu'on lui donne en entrée les valeurs de $f(\zeta)$ en ces N points. Ce calcul doit pouvoir être fait pour chaque valeur de l'échantillonnage en y .

Il nous faut pour cela :

β) Calculer les valeurs de $F_0(\zeta, y)$ et $F_1(\zeta, y)$ aux points de l'échantillonnage en ζ . Ce calcul, qui se ramène à la manipulation de fonctions trigonométriques simples ne pose pas de problème numérique particulier.

γ) Calculer $\mathcal{G}_\beta f$. Il s'agit comme au paragraphe β d'une étude de couches minces.

δ) Calculer l'action de $\mathcal{S}_y$ sur une distribution.

La définition de $\mathcal{S}_y$ (III 10 b) montre que ce calcul se ramène à celui de produits de convolution en ζ comme $\hat{D}^+ \star \hat{E}_z$. Pour calculer ces produits de convolution, on passe par l'intermédiaire de la transformation de Fourier de façon à se ramener à une simple multiplication comme l'illustre la figure 3.

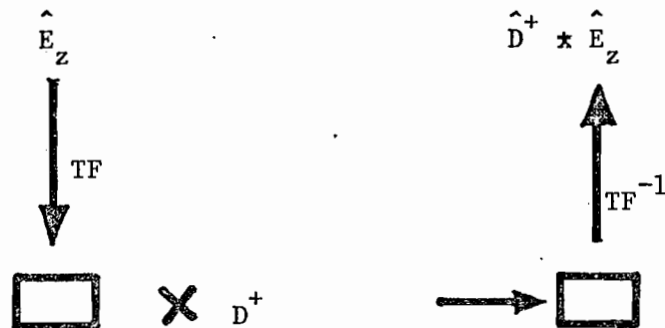


Figure 3

Pour calculer la transformée de Fourier de distributions comme $\hat{E}_z$, on sépare la partie purement distributive (distributions de Dirac, valeurs principales de Cauchy) dont la transformée de Fourier est connue, de la partie régulière. Le calcul numérique de la transformée de Fourier de cette partie régulière est réalisée à l'aide de l'algorithme de la transformée de Fourier rapide.

Une fois $f(\zeta, y_h)$ calculé, la détermination de $i_h = \mathcal{J}[f(\zeta, y_h)]$ ne demande plus que quelques calculs algébriques simples. On est donc en mesure, grâce à la méthode exposée ci-dessus (algorithme I) de calculer l'action de $\mathcal{J}$ sur tout couple de distributions I_b, D_b :

$$i_h = \mathcal{J}(I_b, D_b)$$

La figure 4 schématise le fonctionnement de l'algorithme I.

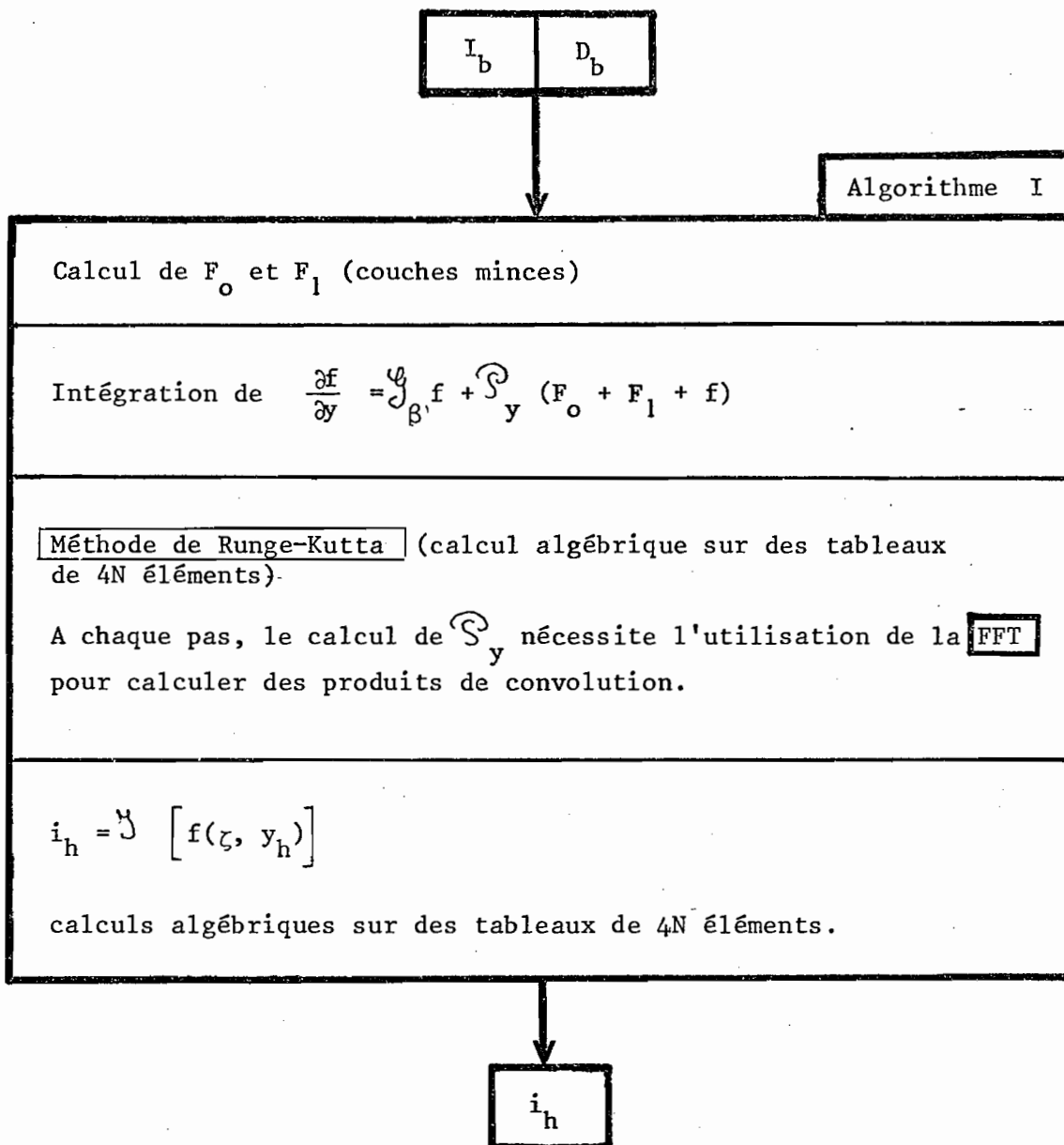


Figure 4

Schéma de l'algorithme I.

c) Résolution du problème II : algorithme II.

Donnons nous maintenant i_b , i_h (fonction régulière échantillonnée, distributions de Dirac, valeurs principales de Cauchy) ainsi que la tableau A de $2m$ constantes complexes, et proposons nous de déterminer le champ en résolvant le problème II (III 2 c).

On a vu au chapitre III que ce problème pouvait se ramener à la résolution de l'équation fonctionnelle (III 30).

$$\mathcal{L} i_h = i_{h_c}$$

Le second membre i_{h_c} s'obtient en faisant agir l'opérateur $\mathcal{G}$ sur des grandeurs connues, opération que l'on sait réaliser numériquement grâce à l'algorithme I.

De même, le calcul de l'action de $\mathcal{L}$ sur une fonction quelconque i_h se ramène à l'utilisation de l'algorithme I.

α) Après échantillonnage en ζ , l'équation III 30 devient donc :

$$LX = B, \quad (2)$$

où B et X sont des vecteurs colonne de dimension $2N$ constitués par les valeurs de i_h et i_{h_c} aux points de l'échantillonnage, et L est une matrice $2N \times 2N$ approchant l'opérateur $\mathcal{L}$.

Dans l'équation 2, B est un vecteur connu et X est inconnu. La matrice L n'est pas connue par ses éléments, mais on sait calculer l'action de L sur un vecteur quelconque.

β) La première idée qui vient à l'esprit pour résoudre 2 est de calculer les éléments de la matrice L en faisant agir cette matrice sur les $2N$ vecteurs de la base canonique :

$$(1, 0 \dots 0) \dots, (0, \dots 0, 1),$$

puis d'inverser le système linéaire $2N \times 2N$ obtenu. Malheureusement, N est souvent de l'ordre d'une centaine, et cette méthode qui exige de mettre en oeuvre $2N$ fois l'algorithme II conduit à des temps de calcul prohibitifs.

Pour cette raison, nous nous sommes tournés vers des méthodes itératives qui exploitent le fait que l'obstacle étant voisin du guide non déformé, l'opérateur $\mathcal{L}$ est voisin de l'identité.

γ) Première possibilité de méthode itérative

En posant $L = I + \varepsilon$ où ε est supposé "petit", l'équation 2 s'écrit :

$$X = B - \varepsilon X \quad (3)$$

On résoud 3 en construisant les approximations successives de X :

$$X_0 = B,$$

$$X_1 = B - \varepsilon X_0,$$

$$X_2 = B - \varepsilon X_1,$$

.....

$$X_p = B - \varepsilon X_{p-1},$$

.....

Si l'espace $\mathbb{C}^{2N}$ où on cherche la solution X est muni d'une norme notée $|| \cdot ||$, on voit que :

$$||X_p - X_{p-1}|| \leq ||\varepsilon|| \quad ||X_{p-1} - X_{p-2}|| \leq ||\varepsilon||^p \quad ||B||$$

où $||\varepsilon||$ est la norme de l'opérateur ε .

Pour être sûr que le processus itératif défini plus haut converge, il faudrait, d'après le théorème du point fixe [1], que $||\varepsilon|| < 1$. Malheureusement, l'expérience numérique a montré que la convergence n'a lieu que si les dimensions de l'obstacle sont très faibles, ce qui restreint considérablement les applications de notre programme.

Pour celà, nous avons été amenés à remplacer cette méthode par une méthode itérative plus compliquée mais plus performante. Cette nouvelle méthode d'une part converge dans tous les cas (tout au moins en théorie), d'autre part permet d'approcher plus rapidement la solution exacte.

Pour simplifier le calcul de la projection de B sur le sous espace engendré par $\hat{Y}_1, \dots, \hat{Y}_p$, on peut s'arranger au cours de la construction étape par étape du système $\hat{Y}_1, \dots, \hat{Y}_p$, pour que ce système soit un système de vecteurs orthonormés.

Supposons donc que l'on connaisse un système de p vecteurs orthonormés--

$$y_p = \{\hat{Y}_1, \dots, \hat{Y}_p\}, \text{ image par L du système}$$

$$x_p = \{\hat{X}_1, \dots, \hat{X}_p\} \quad (L \hat{X}_n = \hat{Y}_n) .$$

La projection orthogonale de B sur le sous espace engendré par y_p ,

$$Y_p = \sum_{n=1}^p (B, \hat{Y}_n) \hat{Y}_n, \text{ est l'image par L de :}$$

$$X_p = \sum_{n=1}^p (B, \hat{Y}_n) \hat{X}_n$$

X_p est la meilleure approximation à l'ordre p.

On pose $R_p = B - Y_p$. Si on connaissait un vecteur dont l'image par L soit R_p , on en déduirait la solution exacte en ajoutant ce vecteur à X_p . On voit donc, en tenant compte du fait que L est voisin de l'identité, que l'on peut espérer obtenir des résultats intéressants en calculant l'action de L sur R_p .

Initialisation

On démarre la méthode itérative en prenant $p = 0$, $\mathcal{X}_0 = \mathcal{Y}_0 = \emptyset$ (ensemble vide), $X_0 = 0$, $R_0 = B$.

Le $p^{\text{ième}}$ pas consiste à construire $\mathcal{X}_p, \mathcal{Y}_p, X_p, R_p$ quand on connaît $\mathcal{X}_{p-1}, \mathcal{Y}_{p-1}, X_{p-1}, R_{p-1}$.

Pour celà, on commence par calculer $Y'_p = L R_{p-1}$, ($p^{\text{ième}}$ utilisation de l'opérateur L), puis, à l'aide du procédé d'orthogonalisation de Schmidt, on cherche $\hat{Y}_p$ sous la forme :

$$\hat{Y}_p = C_{p,p} Y'_p + \sum_{i=1}^{p-1} C_{p,i} \hat{Y}_i, \text{ de façon à ce que :}$$

$$\mathcal{Y}_p = \{\hat{Y}_1, \dots, \hat{Y}_{p-1}, \hat{Y}_p\} \text{ soit un système orthonormé.}$$

Il reste alors à calculer :

$$\hat{X}_p = C_{p,p} R_{p-1} + \sum_{i=1}^{p-1} C_{p,i} \hat{X}_i,$$

$$\text{puis } R_p = B - Y_p \text{ et } X_p = \sum_{n=1}^p (B, \hat{Y}_n) \hat{X}_n.$$

On arrête le processus quand $\|R_p\|$ est inférieur à une tolérance donnée à l'avance. Cette tolérance est un nouveau paramètre numérique qui règle le fonctionnement du programme.

Tout ceci est illustré par la figure 6.

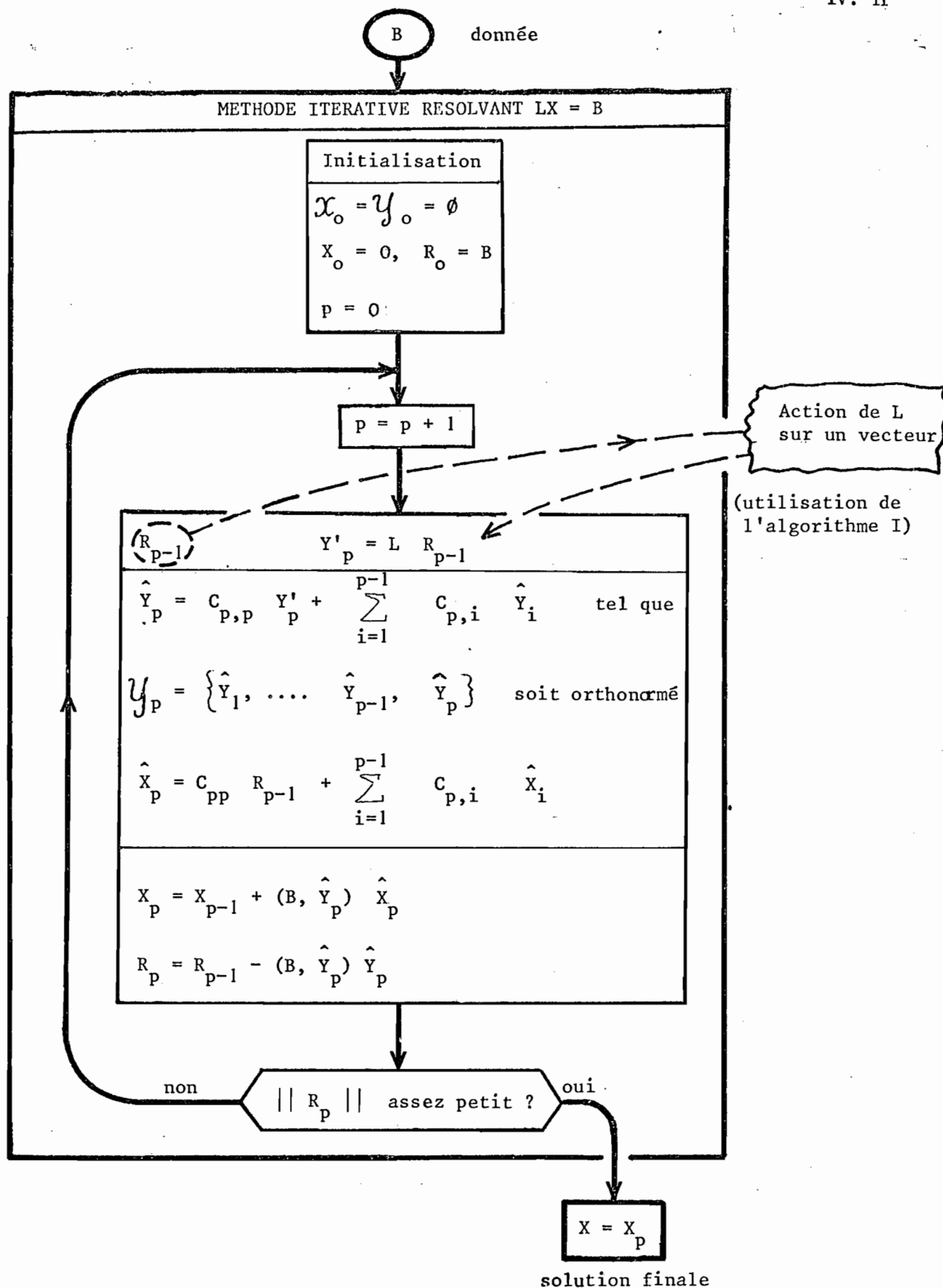
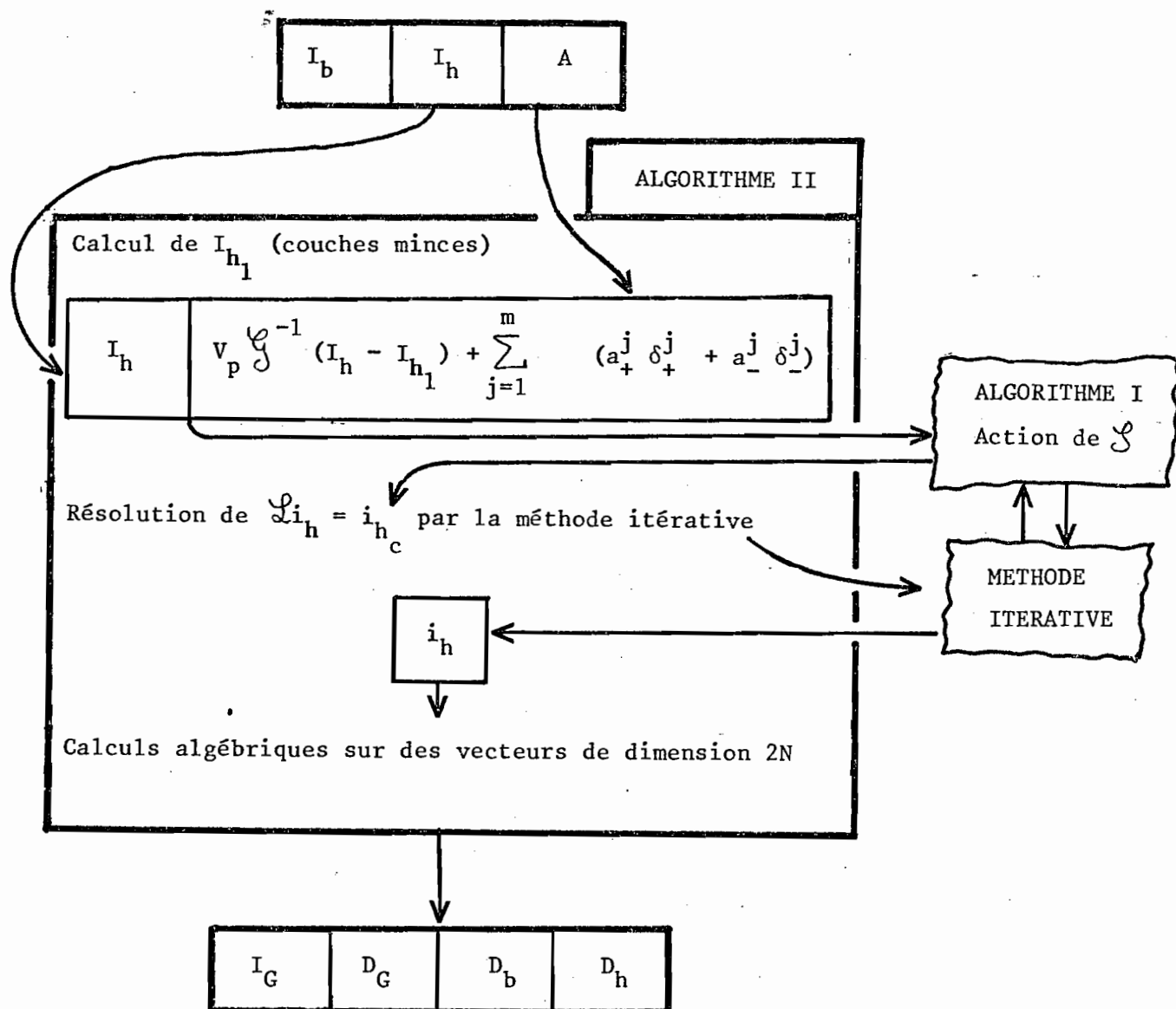


Figure 6

Organigramme schématisant le fonctionnement de la méthode itérative.

e) Schéma général de l'algorithme IIFigure 7

d) Résolution du problème III. Algorithme III.

La mise en oeuvre de l'algorithme associé au problème III est évidente et nous nous contenterons d'en donner une représentation schématique (figure 8).

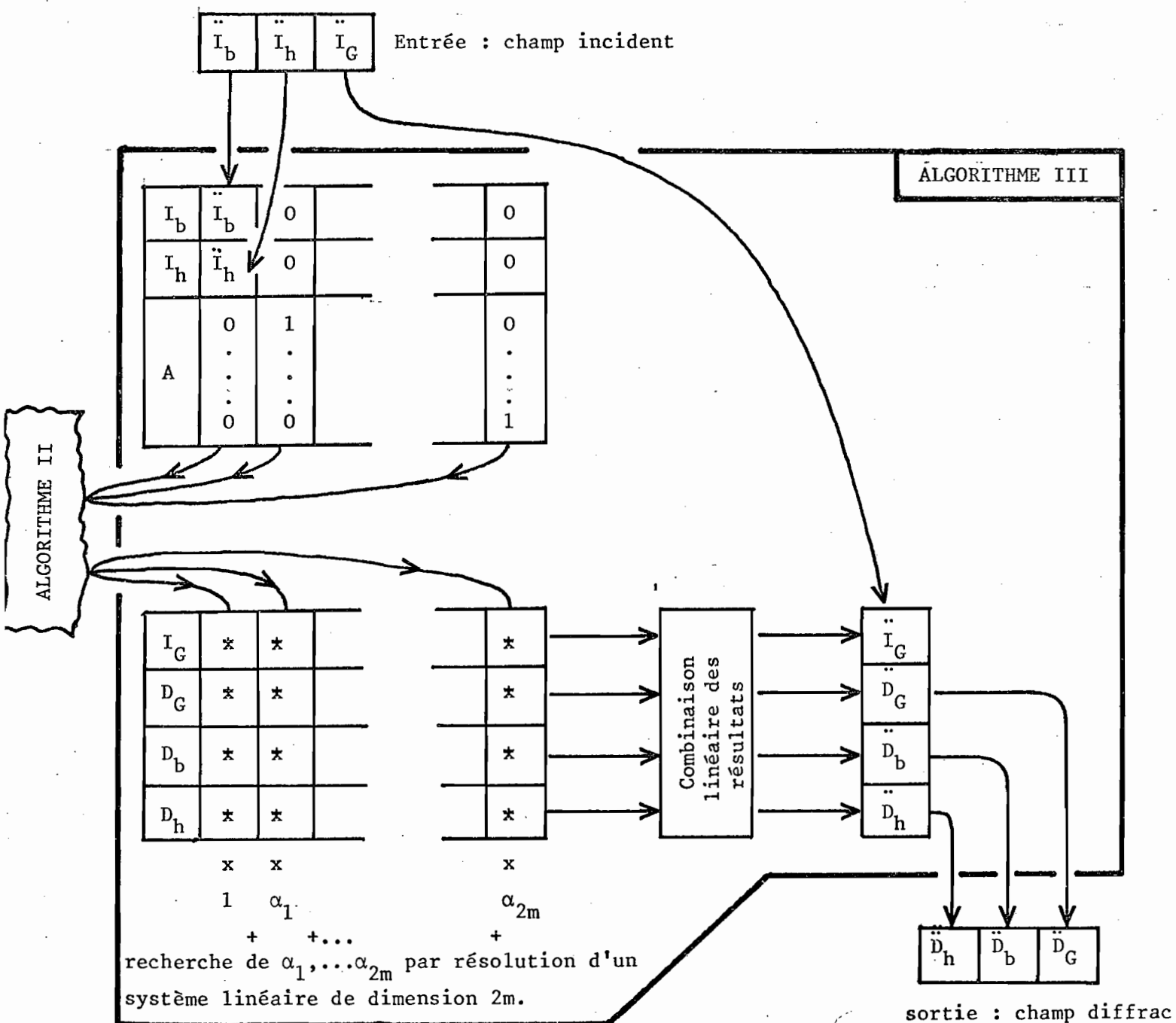


Figure 8

Schéma de l'algorithme III.

Du point de vue de l'organisation générale du programme, l'algorithme III joue le rôle d'un "pilote" qui appelle les autres algorithmes mais n'utilise pour sa part qu'un temps de calcul négligeable.

2. FONCTIONNEMENT GENERAL DU PROGRAMME

La figure 9 donne une description sommaire des opérations nécessaires à la résolution d'un problème physique donné.

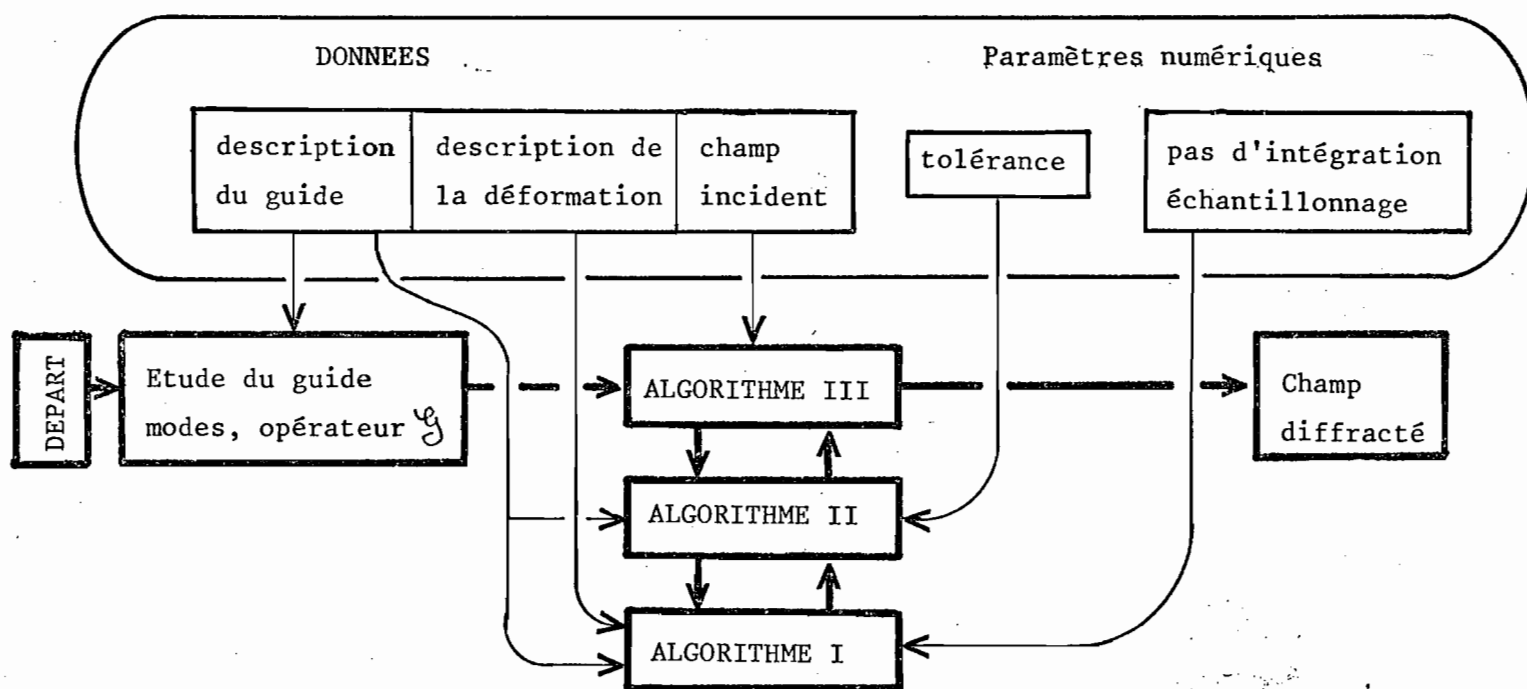


Figure 9

On se donne d'abord les renseignements nécessaires à la connaissance précise du problème physique :

- description du guide non déformé,
- description de la déformation,
- champ incident,

ainsi que les paramètres numériques qui contrôlent le déroulement des algorithmes :

- pas d'échantillonnage, nombre N de points,
- pas d'intégration pour l'algorithme de Runge-Kutta
- tolérance pour la méthode itérative.

Le programme commence par l'étude du guide non déformé. Il s'agit d'une utilisation simple de la théorie des couches minces où on calcule le nombre de modes, les indices effectifs de ces modes, et où on procède à la tabulation de l'opérateur $\mathcal{G}$.

On commence ensuite à exécuter l'algorithme III. Celui-ci appelle l'algorithme II, qui lui-même appelle l'algorithme I. L'algorithme III permet finalement de calculer le champ diffracté, résultat de l'étude.

C'est en fait l'algorithme I qui utilise la quasi totalité du temps de calcul : il est appelé très souvent, conduit à la manipulation de tableaux de grande dimension et surtout à l'évaluation de produits de convolution à l'aide de deux transformations de Fourier. Malgré l'utilisation de l'algorithme de la FFT, le calcul de ces transformées de Fourier représente la majeure partie du temps de calcul consacré à une étude donnée.

3. TEST DES CAPACITES DU PROGRAMME

Nous avons pris pour tester le fonctionnement de notre programme, l'obstacle suivant :

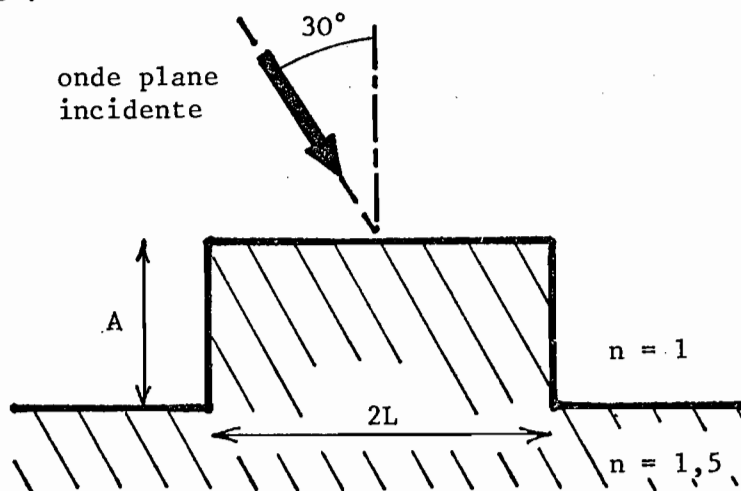


Figure 10

Obstacle servant de test.

Un dioptré plan séparant un milieu d'indice 1,5 du vide comporte une déformation rectangulaire de largeur $2L$ et de hauteur A . Cet obstacle est éclairé par une onde plane.

On se propose de préciser, pour divers valeurs de L et A et dans les différents cas de polarisation, les valeurs des paramètres qui conduisent à une précision acceptable.

a) Principaux paramètres de calcul

Le déroulement du programme est subordonné au choix de paramètres dont certains ont déjà été cités. Rappelons ici la signification de ces paramètres.

α) Paramètres liés à l'échantillonnage des fonctions de variable ζ .

On représente numériquement les fonctions de la variable ζ (où ζ varie de $-\infty$ à ∞) par leurs valeurs en N points d'échantillonnage régulièrement espacés entre les valeurs limites $-\zeta_{\max}$ et $\zeta_{\max}$

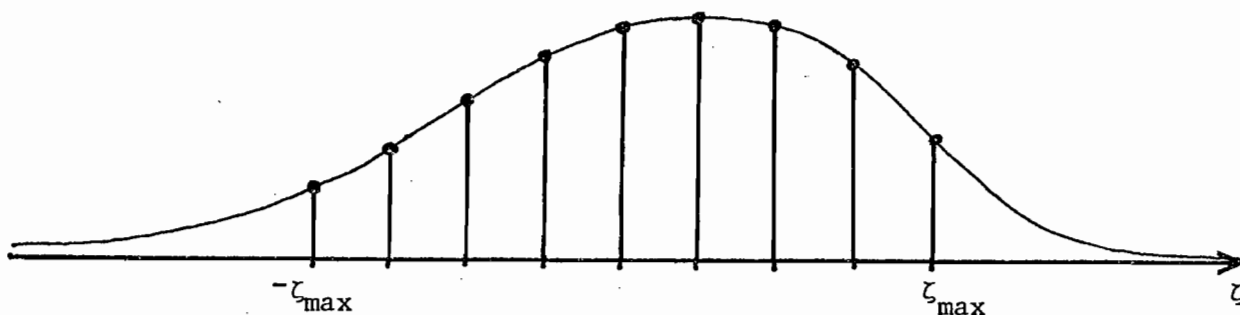


Figure 11

β) L'intégration du système différentiel en y (1) est réalisée numériquement à l'aide d'un algorithme de Runge-Kutta d'ordre 4 après subdivision de l'intervalle $y_0 < y < y_1$ en P pas.

γ) Paramètres définissant la "fonction apodisante"

A chaque pas de l'algorithme d'intégration, on est amené à calculer des transformées de Fourier en utilisant la FFT. Pour éviter les phénomènes d'oscillations bien connus dus à une troncature brutale, on multiplie les fonctions dont on désire prendre la TF, par une fonction apodisante :

$$A(\zeta) = \begin{cases} 1 & \text{si } |\zeta| < \zeta_0 \\ \left[1 - \left(\frac{|\zeta| - \zeta_0}{\zeta_{\max} - \zeta_0} \right)^{p_1} \right]^{p_2} & \text{si } \zeta_0 < |\zeta| < \zeta_{\max} \\ 0 & \text{si } |\zeta| > \zeta_{\max} \end{cases} \quad (4)$$

Dans l'expression (4), p_1 , p_2 et ζ_0 sont des paramètres qui déterminent la forme de la fonction apodisante (figure 12).

($\zeta_{\max}$, valeur maximale des points d'échantillonnage a été définie au paragraphe α)

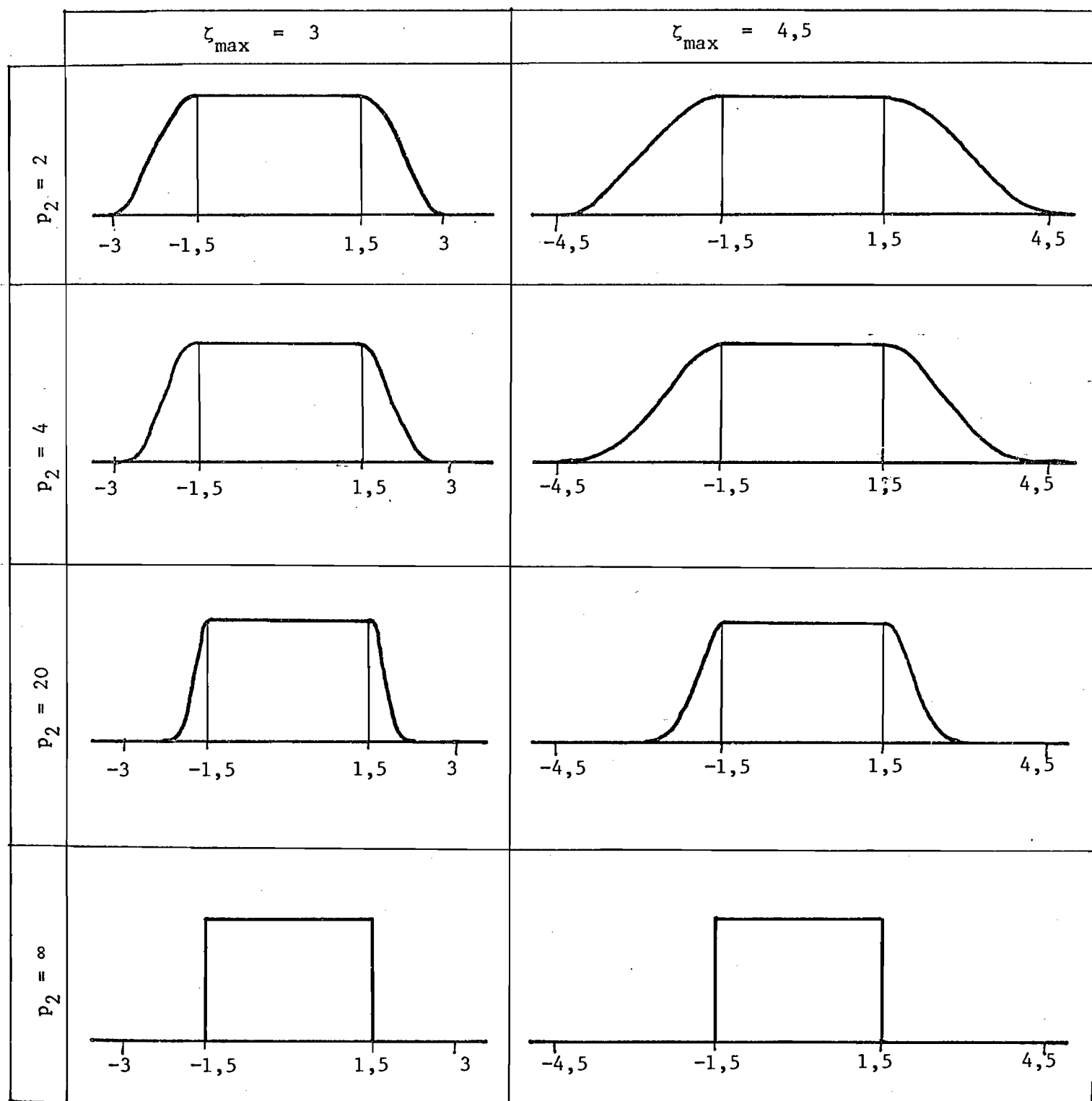


Figure 12

FONCTION APODISANTE POUR DIVERS VALEURS DE P_2 et $\zeta_{\max}$.
 On a pris $\zeta_0 = 1,5$ et $P_1 = 2$.

On a donc finalement la liste des paramètres :

$$N, P, P_1, P_2, \zeta_0, \zeta_{\max}$$

b) Pour tester la précision des résultats d'une étude donnée, nous nous sommes basés sur les critères suivants :

α) Bilan d'énergie. Ce critère, valable uniquement dans le cas où l'obstacle ne contient pas de milieux absorbants, ne permet pas en principe de tester l'influence du choix de N et P .

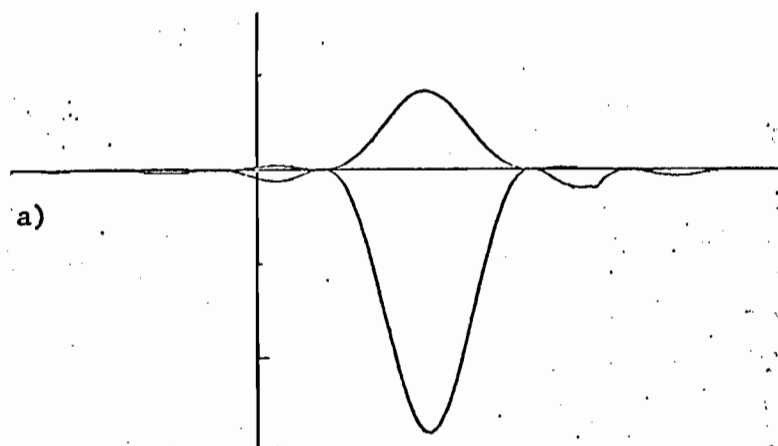
En effet, le calcul traite la diffraction par un obstacle légèrement différent de l'obstacle désiré. La précision avec laquelle l'obstacle réel est approché croît avec N et P , mais dans tous les cas l'obstacle traité donne des résultats compatibles avec la conservation de l'énergie.

β) Comparaison aux résultats obtenus pour des valeurs élevées de N et P , résultats sensés être plus précis.

On peut comparer des valeurs numériques caractéristiques (énergie diffractée vers le haut, vers le bas, intensité diffractée dans une direction donnée) mais aussi des diagrammes de diffraction.

L'examen comparatif des diagrammes de diffraction consitue le test le plus fiable puisqu'il permet une appréciation simultanée des valeurs en tous les points des courbes.

Les figures 13 et 14 illustrent ce procédé. Les figures 13a et 14a représentent les courbes de référence auxquelles on compare les courbes 13b et 14b. On remarque par exemple que la courbe 13b manque de points et que l'étude correspondant à la courbe 14b fournit des résultats aberrants.



$$N = 256$$

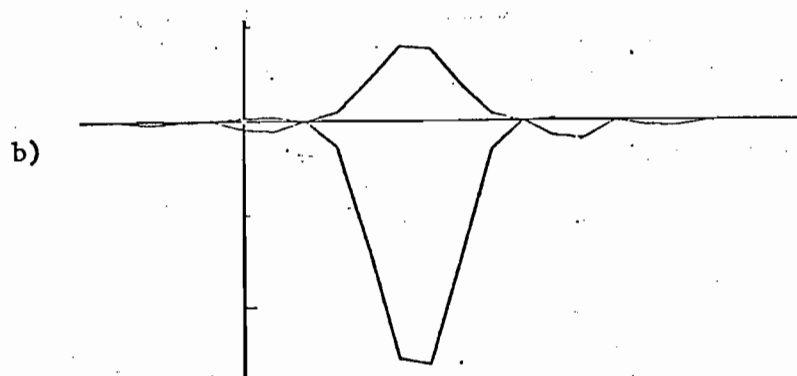
$$P = 3$$

$$\zeta_0 = 1,5$$

$$\zeta_{\max} = 4,5$$

$$P_1 = 2$$

$$P_2 = 2$$



$$N = 128$$

$$P = 3$$

$$\zeta_0 = 1,5$$

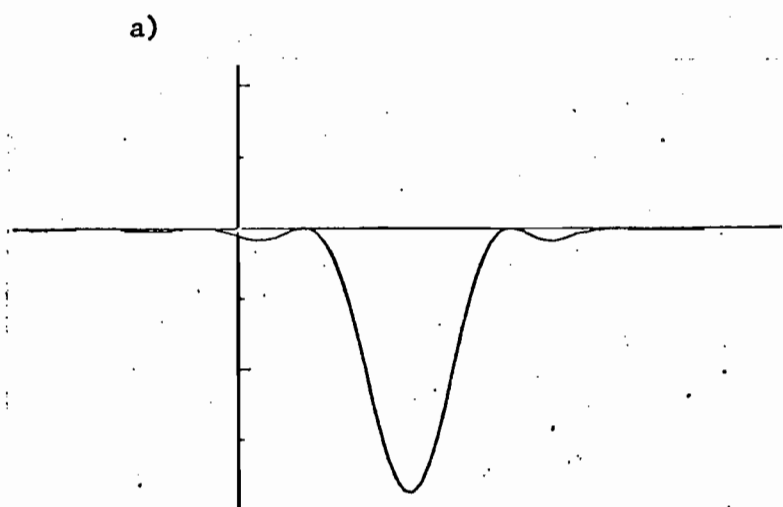
$$\zeta_{\max} = 6$$

$$P_1 = 2$$

$$P_2 = 2$$

Figure 13

COMPARAISON DES DIAGRAMMES DE RAYONNEMENT



$$N = 256$$

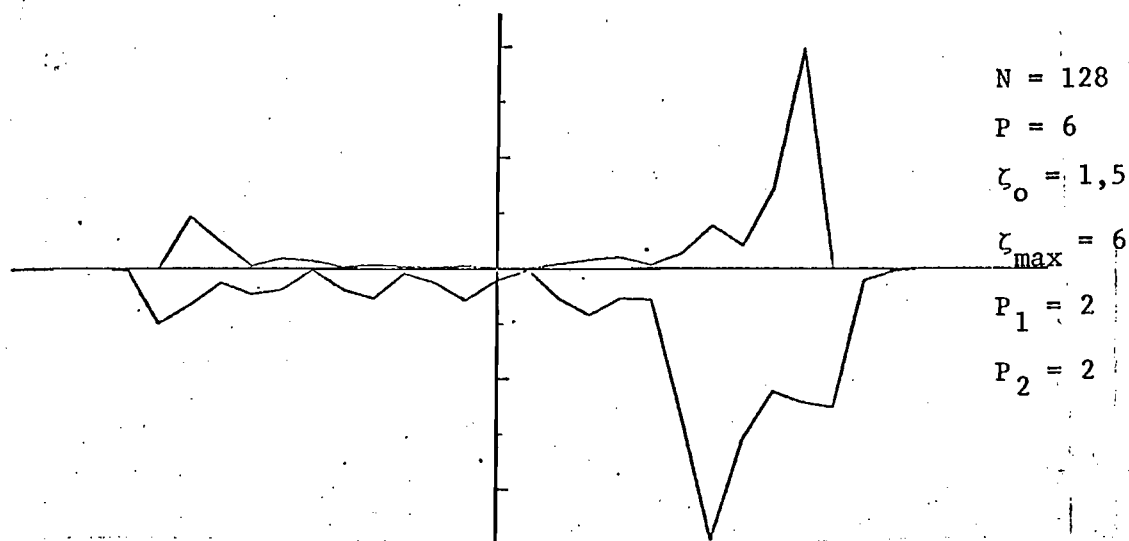
$$P = 3$$

$$\zeta_0 = 1,5$$

$$\zeta_{\max} = 4,5$$

$$P_2 = \infty$$

b)

Figure 14

COMPARAISON DES DIAGRAMMES DE RAYONNEMENT

 $L = 10, A = 4, \text{ cas } E //$ c) Conclusion

La comparaison d'un grand nombre d'études nous a amené aux conclusions suivantes :

α) Les dimensions de l'obstacle étant fixées, les valeurs des paramètres à choisir sont pratiquement indépendantes du cas de polarisation étudié ($E //$, $H //$, oblique).

β) Ces valeurs sont données pour diverses valeurs de L et A , par le tableau suivant :

L	A	N	P	ζ max	P_1	P_2	I
1	1	64	3	3	2	2	3
10	1	128	3	4,5	2	2	6
25	1	256	3	4,5	2	2	7
50	1	512	6	3	2	2	7
10	2	128	3	4,5	2	2	10
10	4	128	6	4,5		∞	10
10	6	256	6	4,5		∞	10

Tableau 1

LA DERNIERE COLONNE DONNE L'ORDRE DE GRANDEUR DU NOMBRE I DE PAS D'ITERATION

Bien entendu, il ne s'agit là que d'ordres de grandeurs représentant un choix "raisonnable" des paramètres. On constate que le nombre N de points d'échantillonnage nécessaires augmente avec la largeur de l'obstacle, et que pour des obstacles hauts il convient de prendre des fonctions d'apodisation qui éliminent les valeurs de ζ élevées.

γ) les dimensions maximales de l'obstacle que l'on puisse espérer traiter sont une hauteur de l'ordre de λ et une largeur de l'ordre de 20λ . Ces deux valeurs limites ne peuvent d'ailleurs être obtenues simultanément : on sait traiter des obstacles larges de faible hauteur et des obstacles hauts de faible largeur. Au-delà de ces valeurs, la convergence de la méthode itérative utilisée par le programme devient très lente. De plus, on est amené pour ces obstacles, à choisir des valeurs élevées de N et P, ce qui augmente dans des proportions considérables l'occupation mémoire et le temps de calcul nécessaire à chaque pas de la méthode itérative.

4. ASPECT INFORMATIQUE

a) Ecriture du programme

Le programme a été mis au point en langage PL1 sur les ordinateurs IBM 370 -168 du CIRCE à Orsay.

Afin de réduire l'occupation en mémoire, nous avons partagé le programme en 4 étapes successives dialoguant entre elles par l'intermédiaire de fichiers sur disque (figure 15).

α) l'étape n° 1 réalise divers initialisations : remplissage de tableaux, échantillonnage, calcul des coefficients de réflexion et de transmission du guide, étude du guide, recherche des modes.

β) l'étape n° 2 procède à la résolution du problème proprement dit. Divers tableaux de grande dimension sont stockés dans un fichier à accès direct où on les retrouve au moment voulu. C'est le cas par exemple du système orthonormé utilisé dans la méthode itérative. Ce procédé permet de limiter l'occupation en mémoire centrale. De plus, un examen attentif de l'algorithme III montre que parmi les $2m + 1$ appels à l'algorithme II, $2m$ appels ne dépendent pas de I_b et I_h (ceux pour lesquels on prend $I_b = 0$, $I_h = 0$).

Dans le cas où on veut étudier le comportement d'un même obstacle soumis à l'action de plusieurs champs incidents, il est inutile de recommencer à chaque fois ces $2m$ appels à l'algorithme II ; le programme comporte la possibilité de stocker les résultats de ces appels pour pouvoir les réutiliser.

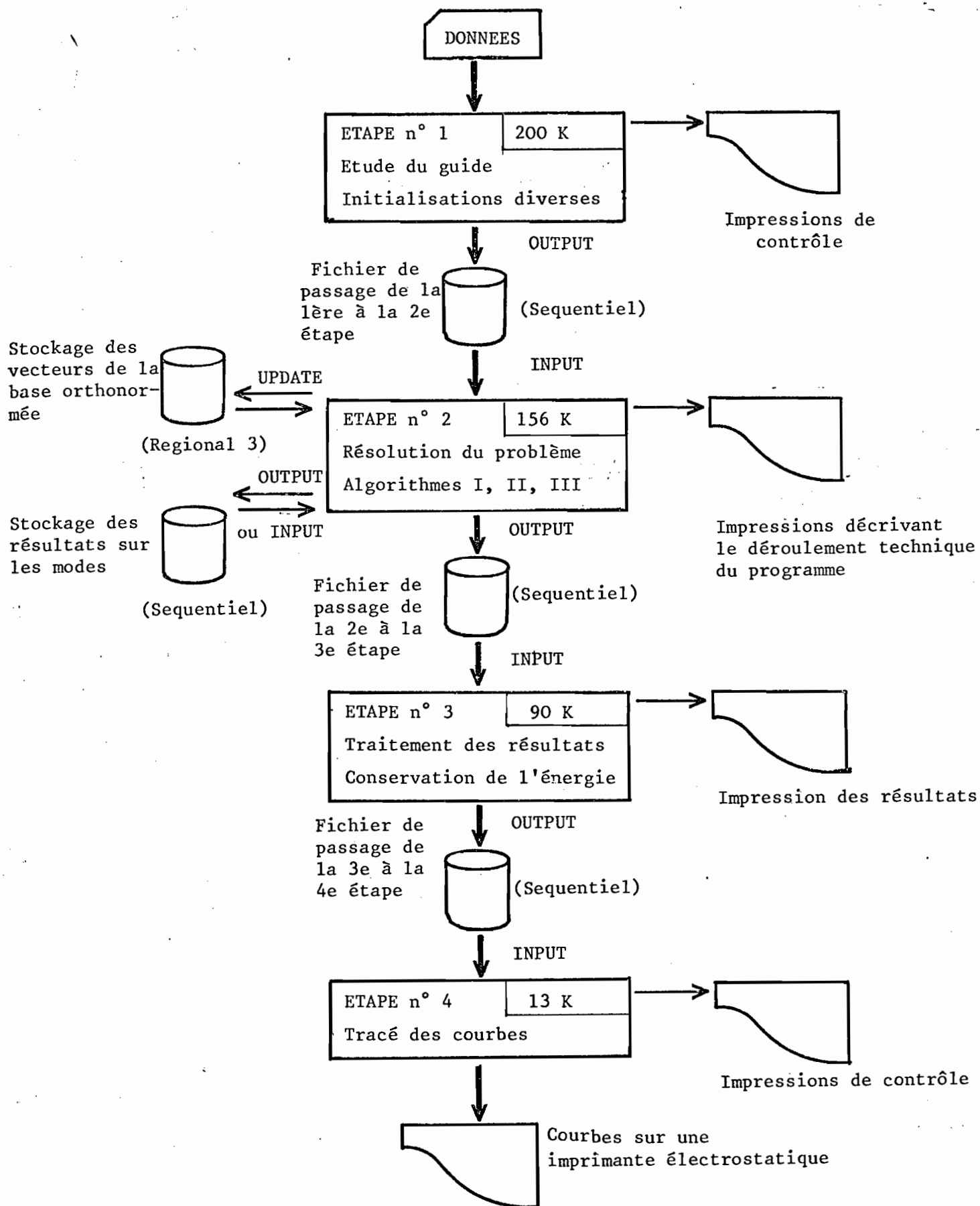


Figure 15

γ) l'étape n° 3 réalise divers traitements des résultats obtenus dans l'étape n° 2. Le tableau des valeurs du champ diffracté est imprimé ainsi que les résultats physiquement intéressants. C'est dans cette étape que l'on teste la conservation de l'énergie.

δ) l'étape n° 4 est consacrée au tracé des diagrammes de rayonnement.

Au cours de chacune de ces étapes, l'ordinateur imprime divers indications sur le déroulement du programme. En cas de déroulement anormal, il est possible de reprendre le calcul à l'étape où s'est produite l'erreur.

Nous donnons ci-dessous à titre d'exemple, les données nécessaires à l'exécution du programme dans un cas particulier (figure 16), ainsi que les divers listings fournis par les 4 étapes (figures 17, 18, 19, 20).

```
790324 124429383 ETAPE 1:INITIALISATION
IMP.$C='0'B,
TEXTE(3)='DEUX TRAITS L=0',NLIB_MIN=256,
TEXTE(2)='CAS E//',POL.$E='1'B,POL.$H='0'B,
IAPOD=4,BETAMAX=2.5E0,
$SYNO='1'B,MB=2,NBOSES=2,NINCL=2,$CHANGE_GUIDE='1'B,$CHANGE_PROFIL='1'B;
ANI(0)=1.E0,ANI(1)=1.6E0,ANI(2)=1.5E0,C(1)=0.E0,C(2)=-4.4E0,C(3)=0.E0,C(4)=0.E0,
IDIQP(1)=1,IDIQP(2)=1,IPOF(1)=-1,IPOF(2)=-1,HAUTEUR(1)=2.E0,HAUTEUR(2)=2.E0,
QAINCL(1)=1.0E0,QAINCL(2)=1.0E0,
ALG(1)=-2.E0,ALD(1)=0.E0,ALG(2)=0.E0,ALD(2)=2.E0;
$FIN='1'B;
```

Figure 16

Etape n° 1 : description du guide, de l'obstacle, divers paramètres

DEUX TRAITS L=1

ETUDE NUMERO: 1
IDENTIFICATEUR: 790324 124442653

POLARISATION

CAS E//

SYSTEME DE COUCHES

INDICE: 1.00
----- 0.000E+00

INDICE: 1.60
----- -4.400E+00

INDICE: 1.50

NOMBRE DE MODES (CAS E PARALLELE): 1

MODE NUMERO 1 BETA=2*PI*GAMMA=1.541

DESCRIPTION DU PROFIL (UNITE: LAMBDA/2PI)

INCLUSION NUMERO: 1 PROFIL NUMERO: -1 INDICE COMPLEXE: 1.00E+00 +I* 0.00E+00
ETENDU EN X SUR: -2.50E+00-5.00E-01 CENTRE EN Y: 0.00E+00 HAUTEUR: 2.00E+00
INCLUSION NUMERO: 2 PROFIL NUMERO: -1 INDICE COMPLEXE: 1.00E+00 +I* 0.00E+00
ETENDU EN X SUR: 5.00E-01 2.50E+00 CENTRE EN Y: 0.00E+00 HAUTEUR: 2.00E+00

PARAMETRES DE CALCUL

PAS EN ORDONNEE: MPASY= 3
POINTS D'ECHANTILLONNAGE: NN=2*NO= 256 (NO= 128)
PLUS GRANDE VALEUR DE ZETA*2PI: 4.74E+00
PLUS GRANDE VALEUR DE X: 8.48E+01
APPROXIMATION FONCTION NUMERO: 4 BETAMAX: 2.50E+00

DESSIN DU PROFIL

***** Y= 0.000E+00
* * *
* * *
* * *
* * *
* * *
* * *

***** Y=-4.400E+00
-2.500E+00 2.500E+00

NOMBRE D'ENREGISTREMENTS PRECEDENTS: 74

Figure 17

ETUDE NUMERO: 1
 IDENTIFICATEUR: 790324 124442653
 CHAMP INCIDENT NUMERO: 1

CONSERVATION DE L'ENERGIE

ENERGIE DIFFRACTEE AU DESSUS E//: 3.682E-02
 ENERGIE DIFFRACTEE AU DESSOUS E//: 4.450E-01
 ENERGIE INCIDENTE SUR LES MODES E//: 1.541E+00
 ENERGIE DIFFRACTEE SUR LES MODES E//: 1.060E+00

CONSERVATION DE L'ENERGIE: -5.471E-04
 IDENTIFICATEUR DE LA COURBE: 790324 124722889

COMPOSANTES SUR LES MODES

INCIDENT					DIFFRACTE				
GAUCHE			DROITE		GAUCHE			DROITE	
BETA	FLUX	PHASE	FLUX	PHASE	FLUX	PHASE	FLUX	PHASE	PHASE
1.1E	1.541E+00	1.000E+00	0.00	0.000E+00	0.00	3.482E-03	-65.60	6.843E-01	-17.83

Figure 19

Etape n° 3 : Impression des résultats, conservation de l'énergie

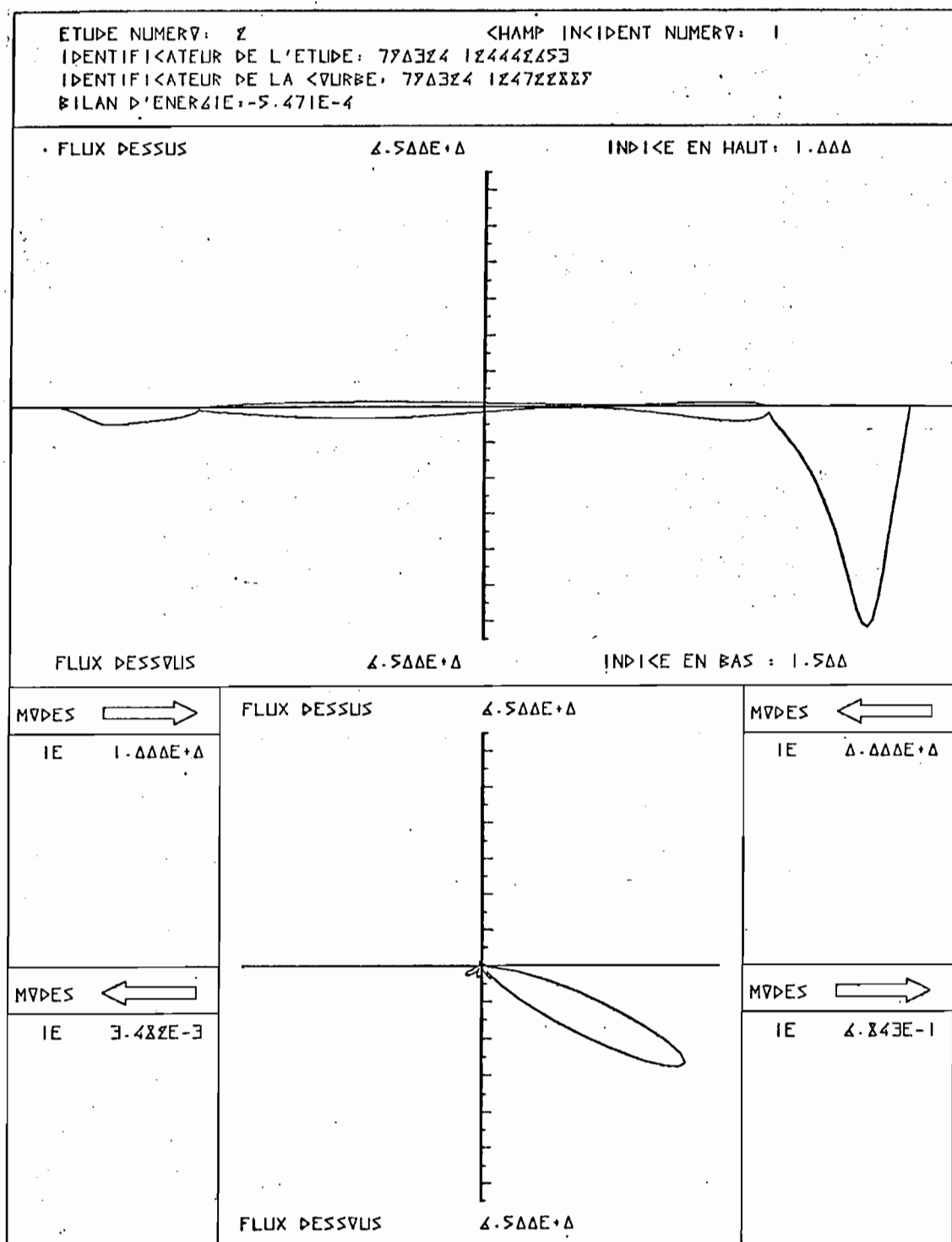


Figure 20

Etape n° 4 : Tracé des diagrammes de diffraction

b) Occupation en mémoire

La quantité de mémoire centrale nécessaire à l'exécution du programme dépend de la polarisation et du nombre N de points d'échantillonnage utilisés pour décrire la partie continue du spectre. Cette place en mémoire utilisée est occupée d'une part par le programme (load-modules) et d'autre part par les tableaux. C'est cette dernière partie qui dépend des paramètres de calcul. A titre indicatif, nous donnons dans le tableau 2 l'encombrement total en mémoire exprimée en K (=1024) octets.

		E //				H //				OBLIQUE			
		N	64	128	256	512	64	128	256	512	64	128	256
ETAPE	1	280	290	320	370	280	300	330	390	290	310	380	
	2	250	280	320	460	260	290	360	510	310	350	520	
	3	150	160	170	200	150	160	170	200	150	170	200	

Tableau n° 2

L'étape n° 4 utilise 120 K.

c) Temps de calcul

α) l'étape n° 1 demande 1s de calcul, l'étape n° 3 0.2s et l'étape n° 4 1s. Ces temps de calcul sont tout à fait négligeables devant le temps demandé par l'étape n° 2.

β) l'étape n° 2 consiste essentiellement à exécuter des pas de l'algorithme de Runge-Kutta. Pour connaître la durée de l'exécution de cette étape, il suffit donc de multiplier la durée du calcul d'un pas par le nombre total de pas à exécuter.

. Le temps t mis pour effectuer un pas de l'algorithme de Runge-Kutta, dépend du cas de polarisation et du nombre N de points d'échantillonnage. Ce temps, exprimé en secondes est donné par le tableau 3.

		E //	H //	OBLIQUE
N _{Et}	64	0,06	0,10	0,17
	128	0,13	0,22	0,36
	256	0,29	0,45	0,94

Tableau 3

*Temps en secondes, pris par l'exécution
d'un pas de l'algorithme de Runge-Kutta*

. L'algorithme de Runge-Kutta utilise un nombre p de pas. Il est lui-même appelé à chaque pas de la méthode itérative.

Si cette méthode itérative fournit un résultat jugé correct au bout de I pas, sa durée aura été de $t P I$. C'est pratiquement la durée de l'algorithme II.

L'étude réalisée au paragraphe 3 nous permet d'avoir un ordre d'idée de la valeur de P et I , tout au moins pour l'obstacle choisi comme test (figure 10).

On en déduit le temps de calcul demandé pour l'exécution de l'algorithme II (tableau 4).

		Cas de polarisation		
L	A	E//	H//	OBLIQUE
1	1	0,6	0,9	1,5
10	1	2,3	4	6,5
25	1	6	9,5	20
10	2	4	6,5	11
10	4	7,8	13	21,5
10	6	17	27	56

Tableau 4

*Temps de calcul en secondes demandé pour exécuter l'algorithme II
dans le cas d'un obstacle symétrique comme celui de la figure 10*

Dans le cas où l'obstacle est symétrique par rapport à l'axe Oy, on peut faire correspondre à toute solution des équations de Maxwell la solution obtenue par symétrie. Cette remarque permet de réduire d'un facteur de l'ordre de 2 le nombre de pas nécessaires à la résolution de la méthode itérative.

Dans le cas de l'exemple test, cette propriété de symétrie a été utilisée: il convient donc, pour un obstacle non symétrique, de multiplier par 2 les temps indiqués dans le tableau 4.

. Pour avoir le temps de calcul relatif à une étude donnée, il nous faut maintenant connaître le nombre d'appels à l'algorithme II.

Prenons le cas général où le guide admet m modes (E// et H//). Si on ne s'intéresse d'abord qu'au cas où l'obstacle est attaqué par des modes incidents de droite ou de gauche, c'est à dire s'il n'y a pas de champ venant du substrat ou du superstrat, l'algorithme III (figure 8) appelle 2 m fois l'algorithme II pour les valeurs suivantes du vecteur A : (1,...0), ..., (0,...1).

Dans le cas où l'obstacle est symétrique par rapport à Oy , il n'est pas nécessaire de faire le calcul pour ces $2m$ valeurs de A : il suffit de le faire pour m valeurs et d'obtenir par symétrie les résultats correspondant aux autres valeurs.

Si on veut maintenant, dans une étude plus générale étudier la réponse de l'obstacle à n champs incidents, on voit que l'algorithme III doit d'abord commencer par appeler l'algorithme II pour $A = (0, \dots, 0)$ en donnant successivement à I_b et I_h les n valeurs qui correspondent à ces champs incidents. Ceci ajoute n nouveaux appels à l'algorithme II.

$\gamma)$ En conclusion, dans le cas le plus général où le guide non déformé admet m modes et où on calcule en une seule étude la réponse à n excitations, la durée totale de l'exécution du programme s'obtient en multipliant les temps donnés par le tableau 4 par :

$$\begin{cases} 2(2m + n) & \text{dans le cas d'un obstacle non symétrique} \\ m + n & \text{dans le cas d'un obstacle symétrique par rapport à } Oy. \end{cases}$$

L'expression de ces facteurs multiplicatifs reste valable si $m = 0$ ou $n = 0$.

Références :

- 1) G. CHOQUET, cours d'Analyse Topologie
Masson et Cie Editeurs, 1973.

CHAPITRE V

Exemples de résultats

Nous nous proposons dans ce chapitre de présenter un certain nombre des résultats de nos calculs. Le calcul permet de connaître les composantes du champ en tout point de l'espace mais il est souvent préférable de fournir des résultats plus directement exploitables par l'expérience comme par exemple l'intensité et la phase de l'onde diffractée dans une direction donnée. Pour préciser cela, nous allons commencer par définir ces quantités physiquement intéressantes avant de donner les résultats de nos calculs.

1. PRESENTATION DES RESULTATS

La figure 1 schématise une expérience d'optique où on mesurerait :

- le champ diffracté à l'infini en dehors de la direction de réflexion spéculaire.
- l'amplitude des modes diffractés (mesurée par exemple après extraction par des prismes).
- l'amplitude des ondes planes réfléchies et transmises par le guide non déformé.

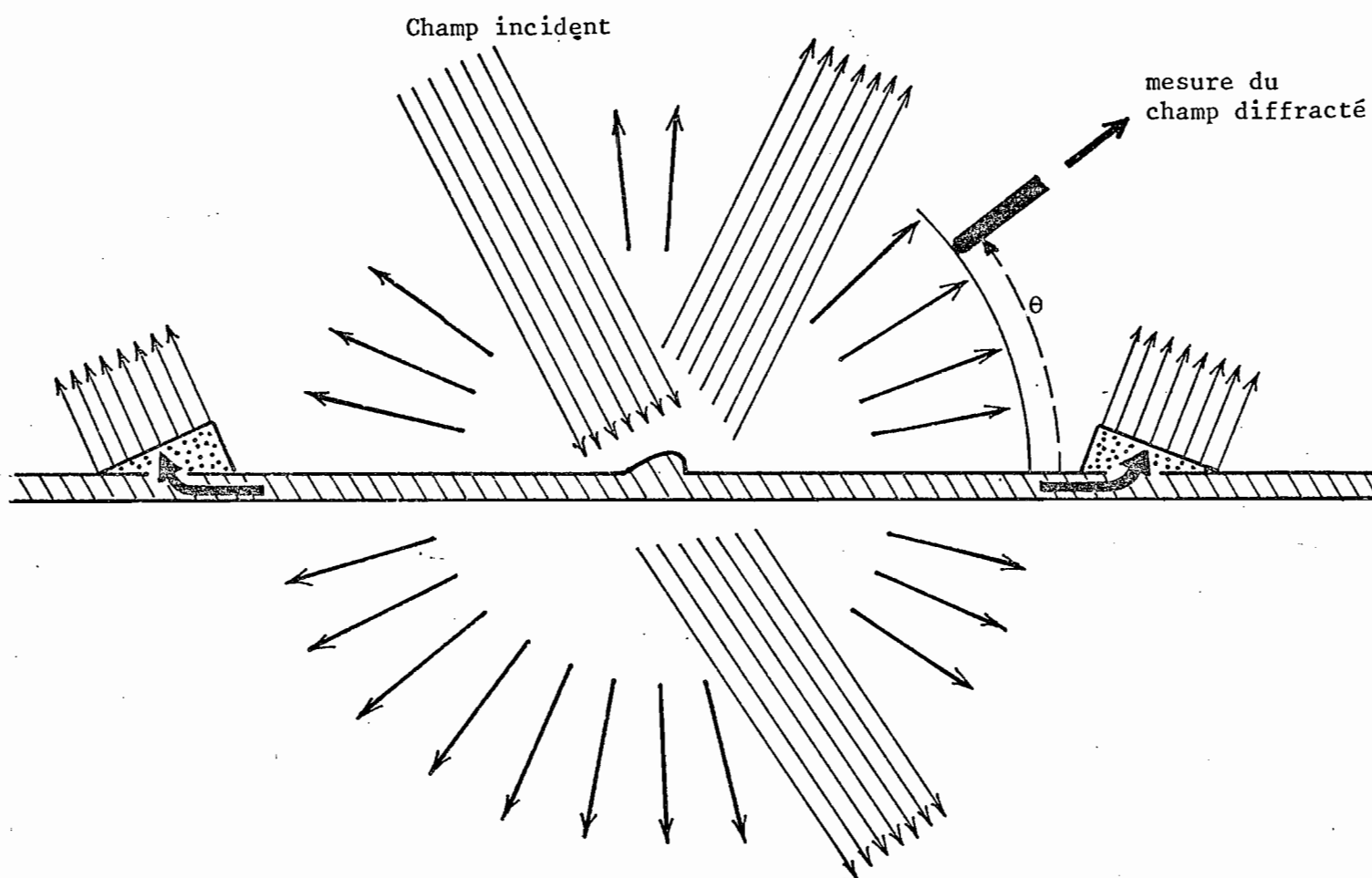


Figure 1

On voit sur cet exemple, que l'on est amené à caractériser 3 sortes d'ondes :

- les ondes planes.
- les modes
- les ondes diffractées sous forme de faisceau.

En pratique, on s'intéressera presque exclusivement à l'énergie véhiculée par ces ondes sans nous préoccuper de la phase. On s'attachera à donner des définitions indépendantes de la longueur d'onde de manière à conserver la généralité du problème où l'unité de longueur est $\lambda/2\pi$.

a) L'intensité des ondes planes est représentée par le flux du vecteur de Poynting à travers un carré de côté unité normal au vecteur de propagation de l'onde (figure 2).

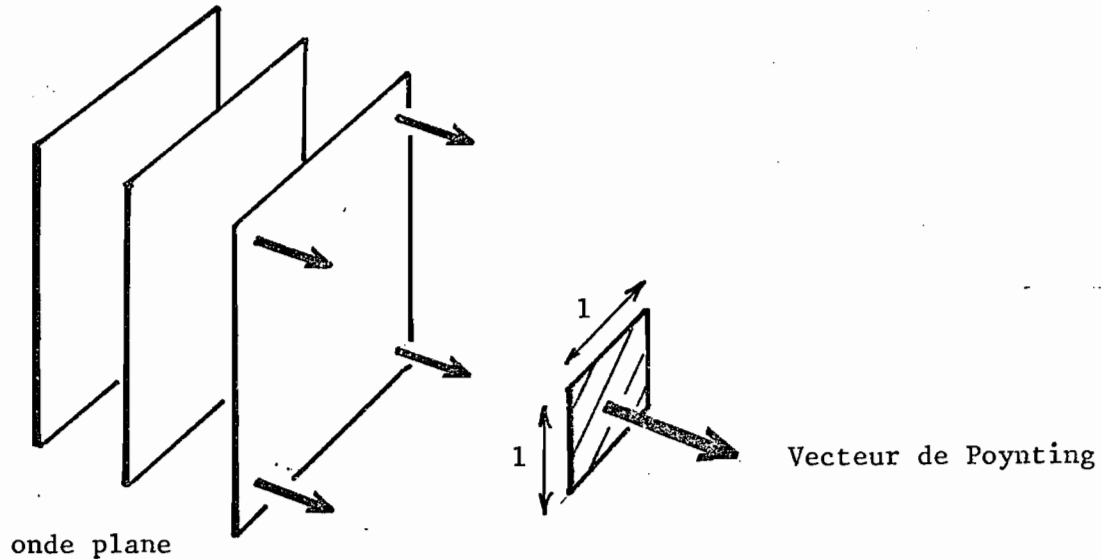


Figure 2

b) L'intensité des modes sera représentée par le flux d'énergie qui traverse une bande de largeur unité, de hauteur infinie, perpendiculaire à la direction de propagation du mode (figure 3).

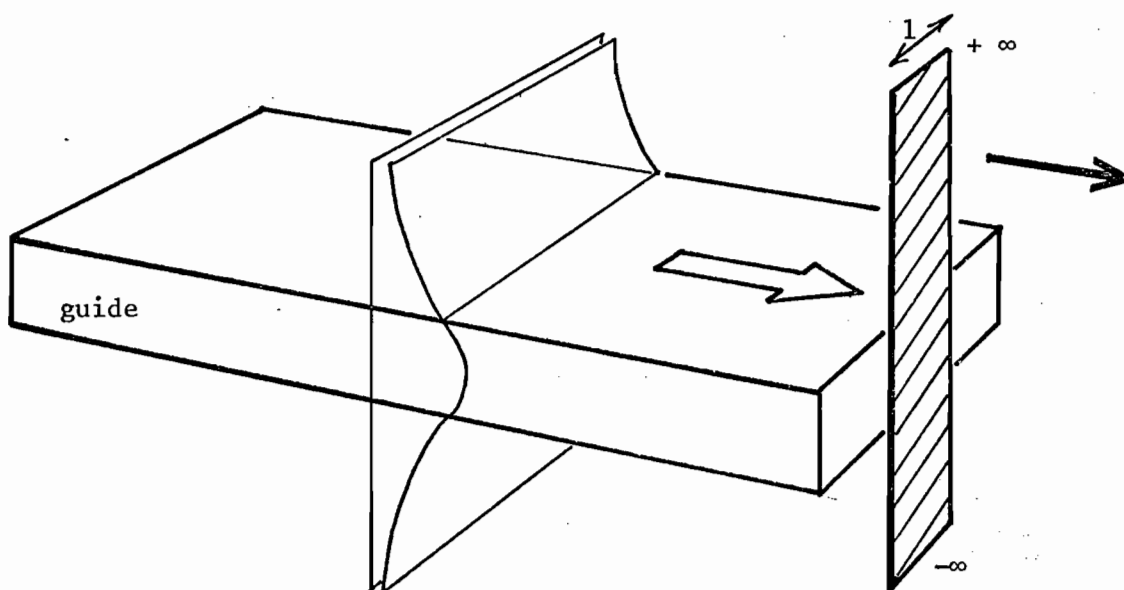


Figure 3

c) Caractérisation du spectre continu

La partie du champ correspondant au faisceau continu diffracté par l'obstacle est mesurée en général par des récepteurs placés loin de l'obstacle.

Pour fixer les idées, supposons que l'on veuille mesurer le champ diffracté au-dessus de l'obstacle (figure 4).

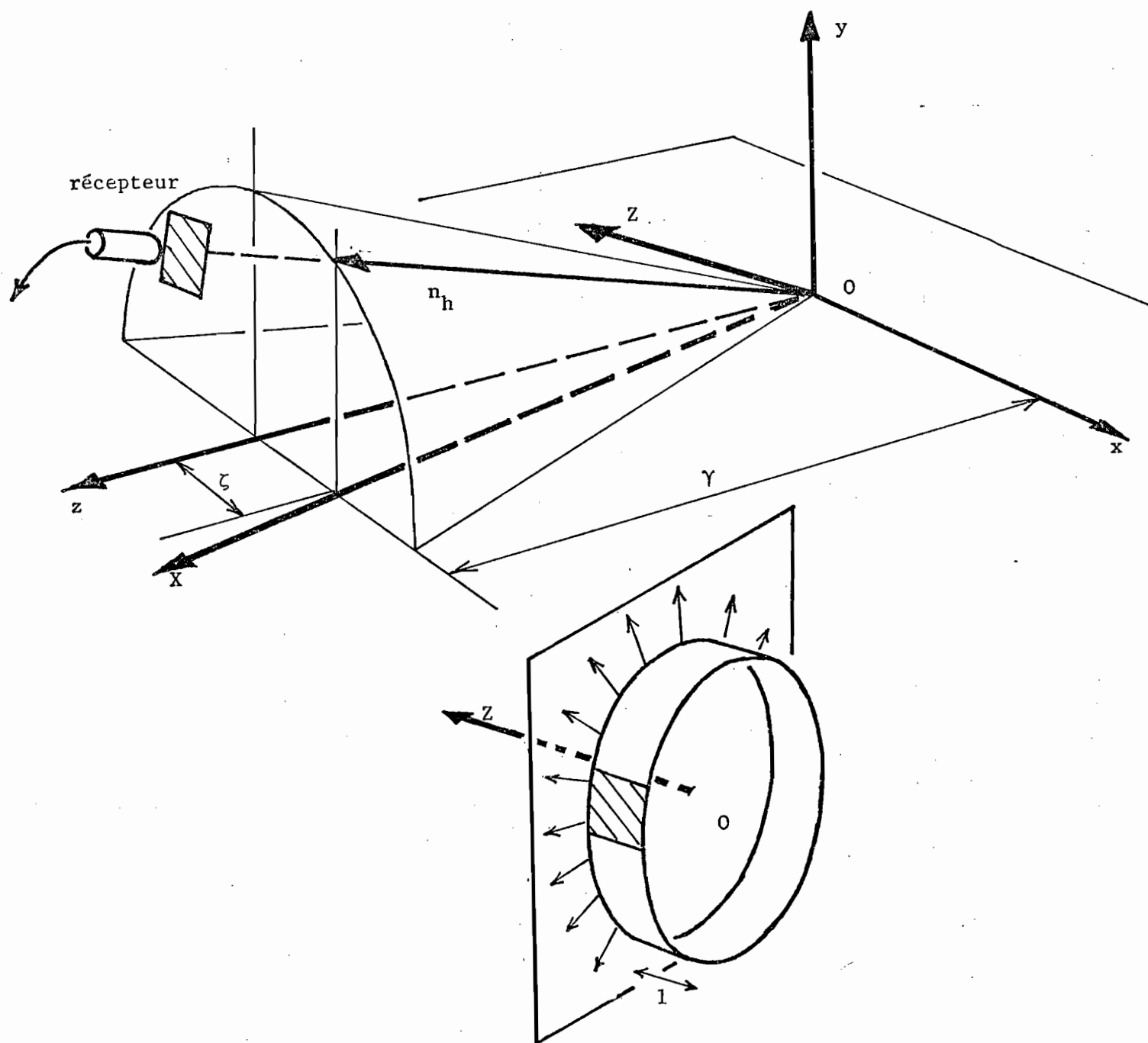


Figure 4

Loin de l'obstacle, dans la direction de composantes $(\zeta, \chi_h(\zeta), \gamma)$, le champ se comporte localement comme une onde cylindrique d'axe OZ. Prolongeons par la pensée cette onde à tout l'espace et convenons d'en représenter l'intensité par le flux du vecteur de Poynting à travers une portion de hauteur unité d'un cylindre circulaire d'axe OZ. Ce flux est indépendant du rayon du cylindre puisque l'on a à faire à une onde cylindrique.

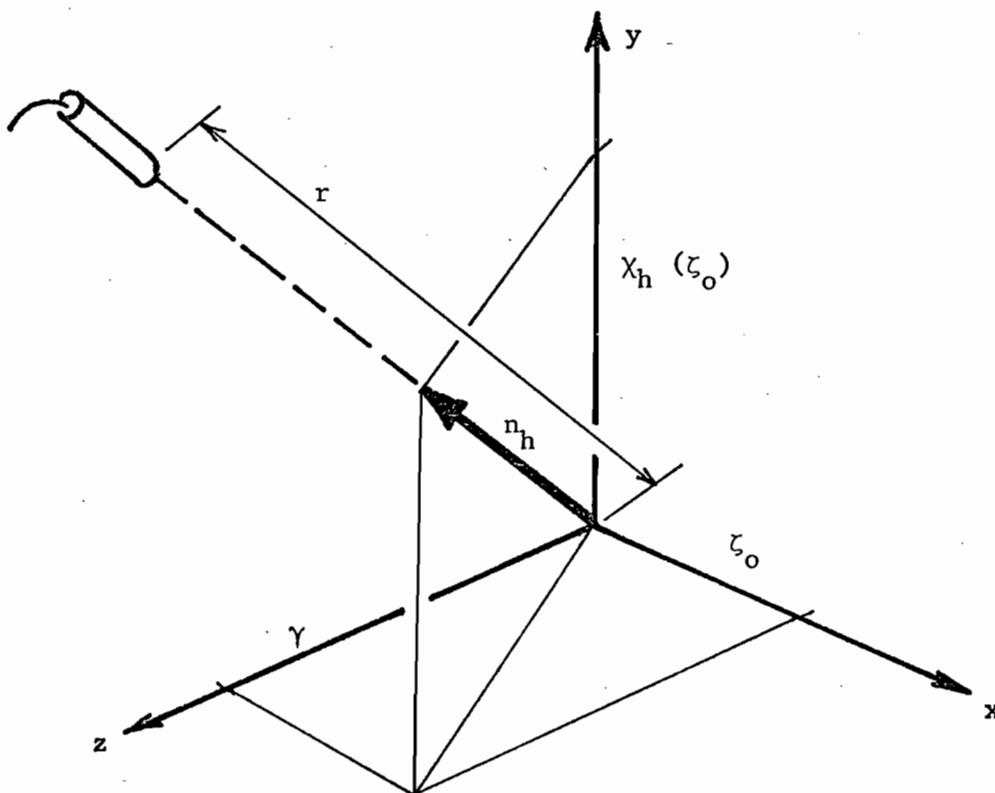
Plus précisément, prenons une composante du champ $C(x,y)$ et écrivons là, au-dessus de l'obstacle sous forme d'un développement en ondes planes :

$$C(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{C}(\zeta) \exp \left[i(\zeta x + \chi_h(\zeta) y + \gamma z) \right] d\zeta \quad (1)$$

Dans cette formule nous n'avons conservé que la contribution des ondes planes sortantes.

Le récepteur est placé à une distance r de l'origine dans la direction de composantes : $(\zeta_o, \chi_h(\zeta_o), \gamma)$ donc au point de coordonnées :

$$\zeta_o \frac{r}{n_h}, \chi_h(\zeta_o) \frac{r}{n_h}, \gamma \frac{r}{n_h}$$



On mesure donc l'amplitude complexe :

$$C_o(r) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{C}(\zeta) \exp \left[i \frac{r}{n_h} (\zeta \zeta_o + \chi_h(\zeta) \chi_h(\zeta_o) + \gamma^2) \right] d\zeta.$$

La quantité $\zeta \zeta_o + \chi_h(\zeta) \chi_h(\zeta_o) + \gamma^2$ n'est autre que le produit scalaire des vecteurs ζ , $\chi_h(\zeta)$, γ et ζ_o , $\chi_h(\zeta_o)$, γ . Ce produit scalaire, considéré comme fonction de ζ est stationnaire au voisinage de $\zeta = \zeta_o$. Un calcul simple donne en effet le développement :

$$\zeta \zeta_o + \chi_h(\zeta) \chi_h(\zeta_o) + \gamma^2 = n_h^2 - \frac{n_h^2 - \gamma^2}{2\chi_h^2(\zeta_o)} (\zeta - \zeta_o)^2 + \dots$$

La méthode de la phase stationnaire donne le comportement de $C_o(r)$ quand r tend vers l'infini :

$$C_o(r) \approx \hat{C}(\zeta_o) \frac{\exp(ir n_h)}{\sqrt{r}} \exp\left(-i \frac{\pi}{4}\right) \chi_h(\zeta_o) \sqrt{\frac{2\pi n_h}{n_h^2 - \gamma^2}} \quad (4)$$

C'est bien l'amplitude complexe d'une onde cylindrique décroissant en $\frac{1}{\sqrt{r}}$ pour assurer la conservation de l'énergie.

Le calcul du flux du vecteur de Poynting à travers la portion de cylindre indiquée sur la figure 4 se ramène alors à de simples manipulations vectorielles que nous ne développerons pas ici.

Naturellement, toutes les quantités caractéristiques du champ que l'on vient de définir, dépendent de la polarisation : on définit l'amplitude des ondes planes, des modes, des faisceaux TE et l'amplitude des ondes planes, des modes, des faisceaux TH.

Nous allons commencer par donner des exemples dans le cas de polarisation E //. Dans ce cas, seules les composantes TE sont à prendre en compte.

2. QUELQUES RESULTATS DANS LE CAS DE POLARISATION E//

a) L'obstacle diffractant est obtenu par déformation d'un dioptré plan

L'obstacle est attaqué par une onde plane (représentée par une flèche noire sur les figures). On donne la représentation en coordonnées polaires du rayonnement diffracté au-dessus et au-dessous de l'obstacle. Les figures 5,6, 7,8 illustrent quelques exemples de cas simples. Les nombres encadrés représentent les indices des différents milieux.

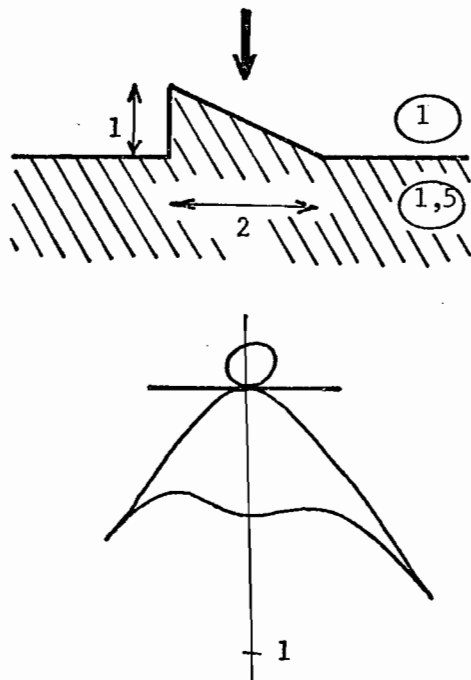


Figure 5

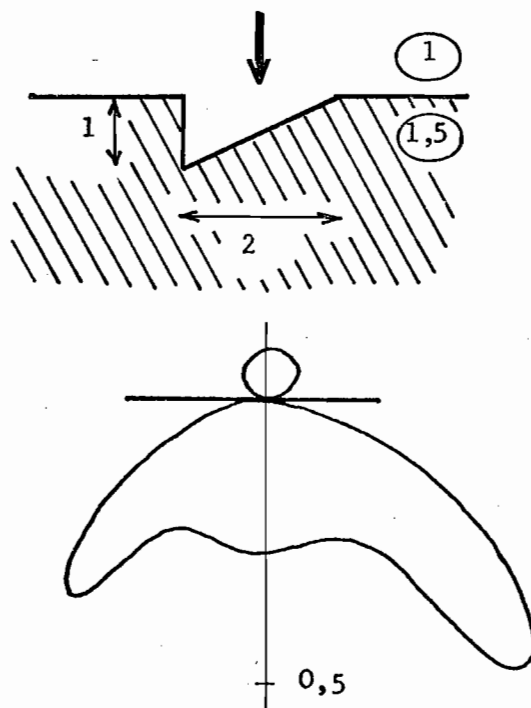


Figure 6

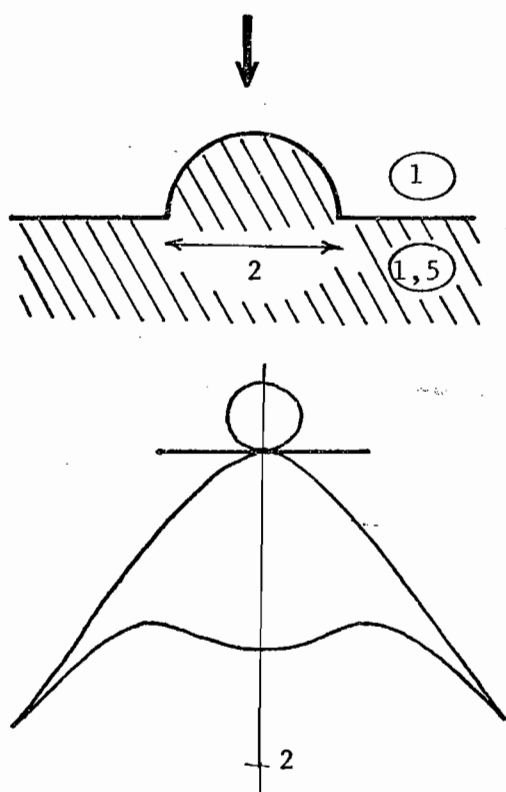


Figure 7

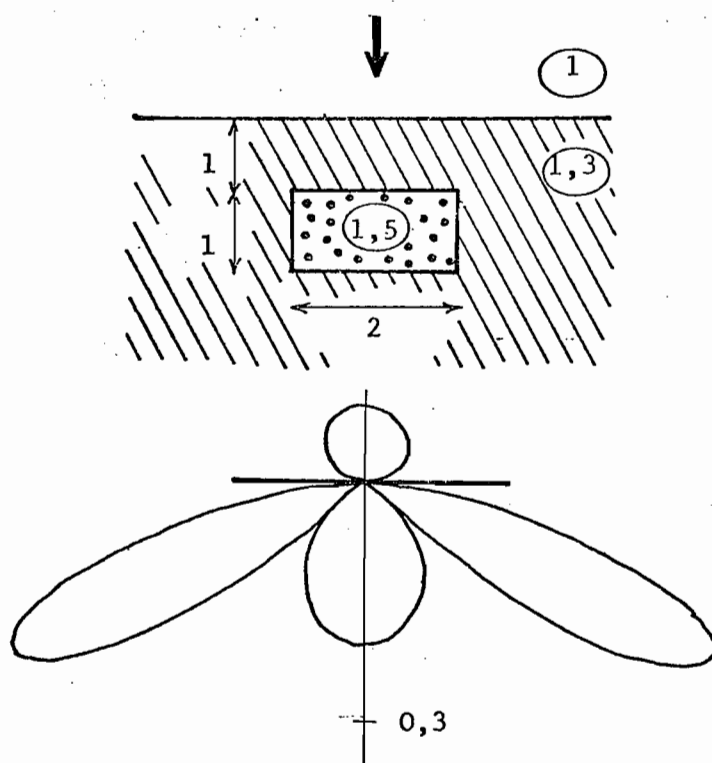


Figure 8

Les figures 9 et 10 représentent la réponse d'un obstacle à une onde plane incidente pour divers valeurs de l'angle d'incidence.

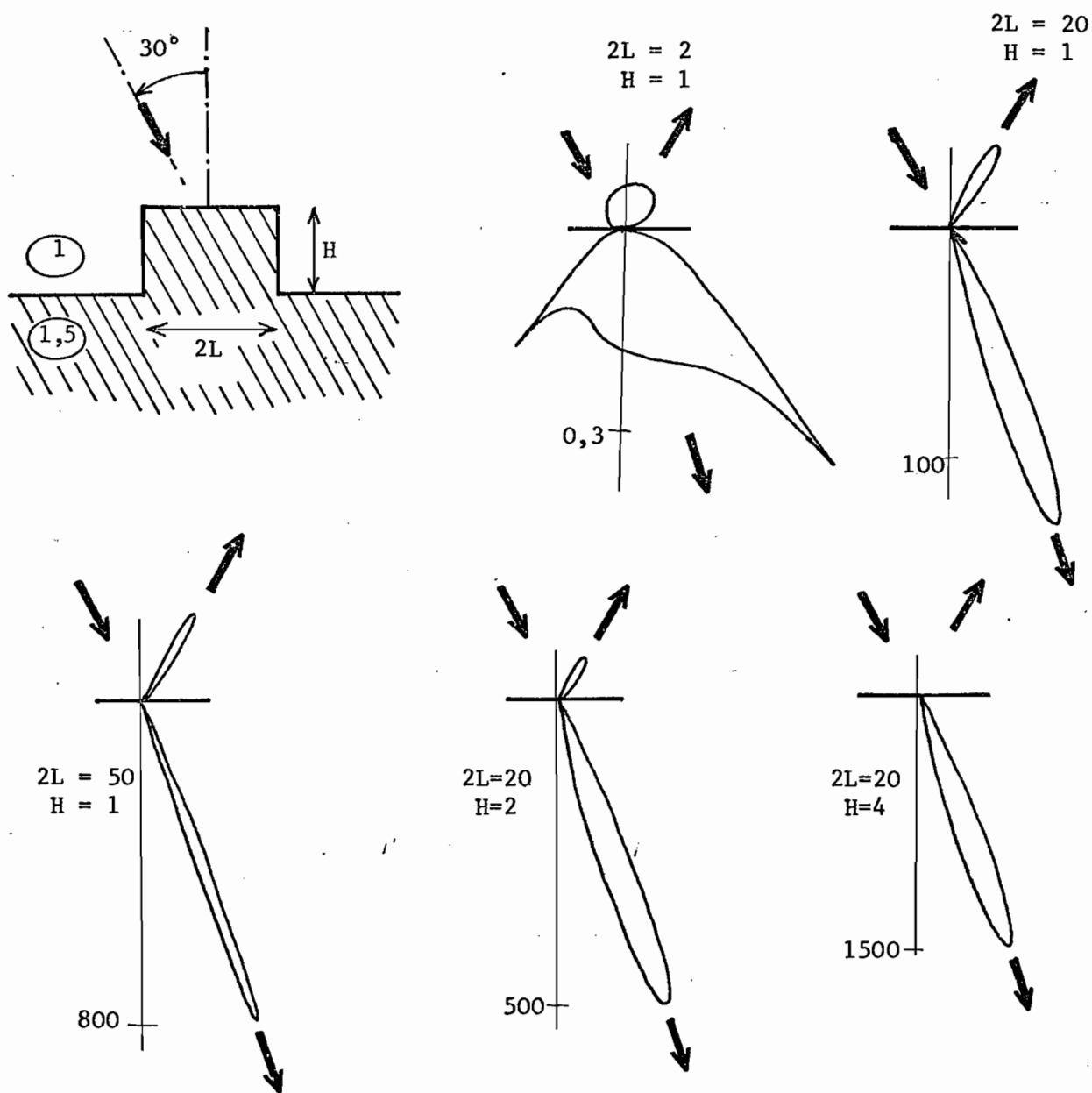


Figure 9

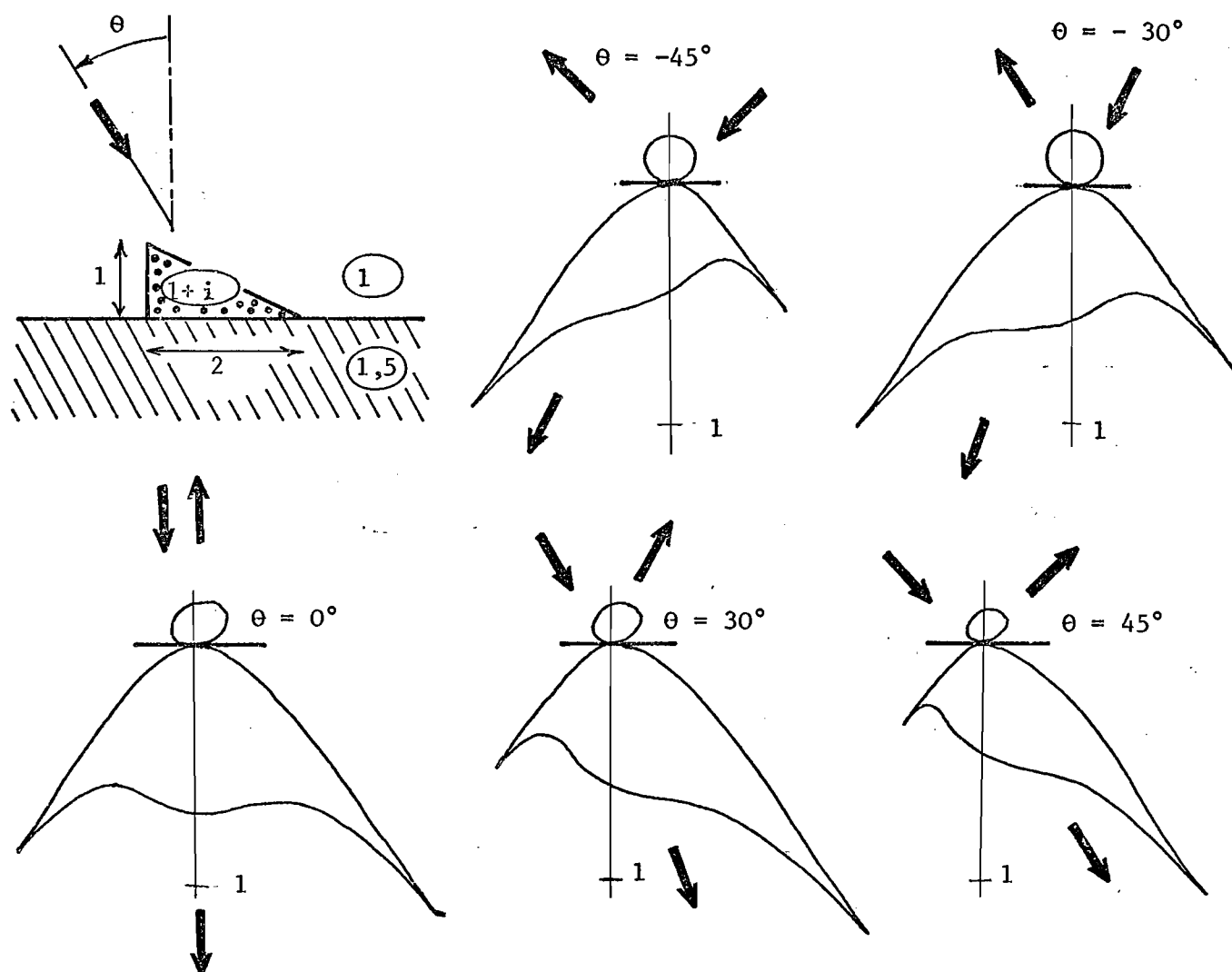


Figure 10

L'obstacle étudié sur la figure 11 est un morceau de réseau tracé sur un dioptre plan. Cette étude montre que l'on retrouve bien dans le diagramme de rayonnement des fortes intensités dans les directions correspondant aux ordres du réseau infini.

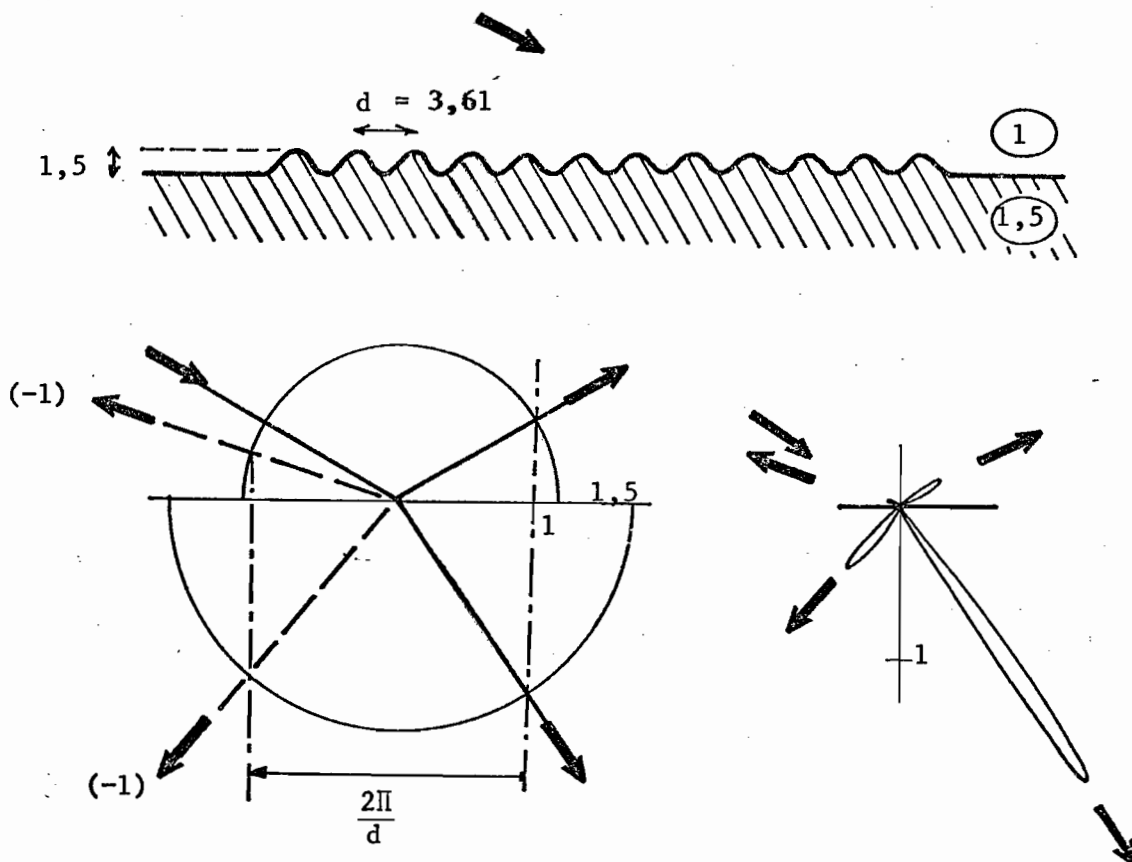


Figure 11

b) Le guide non déformé comporte deux dioptres

Dans le cas où le guide admet un mode TE unique, l'obstacle peut-être attaqué par le mode venant de la droite, le mode venant de la gauche, une onde plane...

Dans les figures qui suivent, les flèches noires symbolisent les ondes planes, les flèches blanches les modes. Les nombres qui figurent au voisinage de ces flèches blanches représentent l'intensité des modes (définie au paragraphe 1b).

Commençons par donner des résultats obtenus dans quelques cas simples (figures 12,13,14,15,16,17,18).

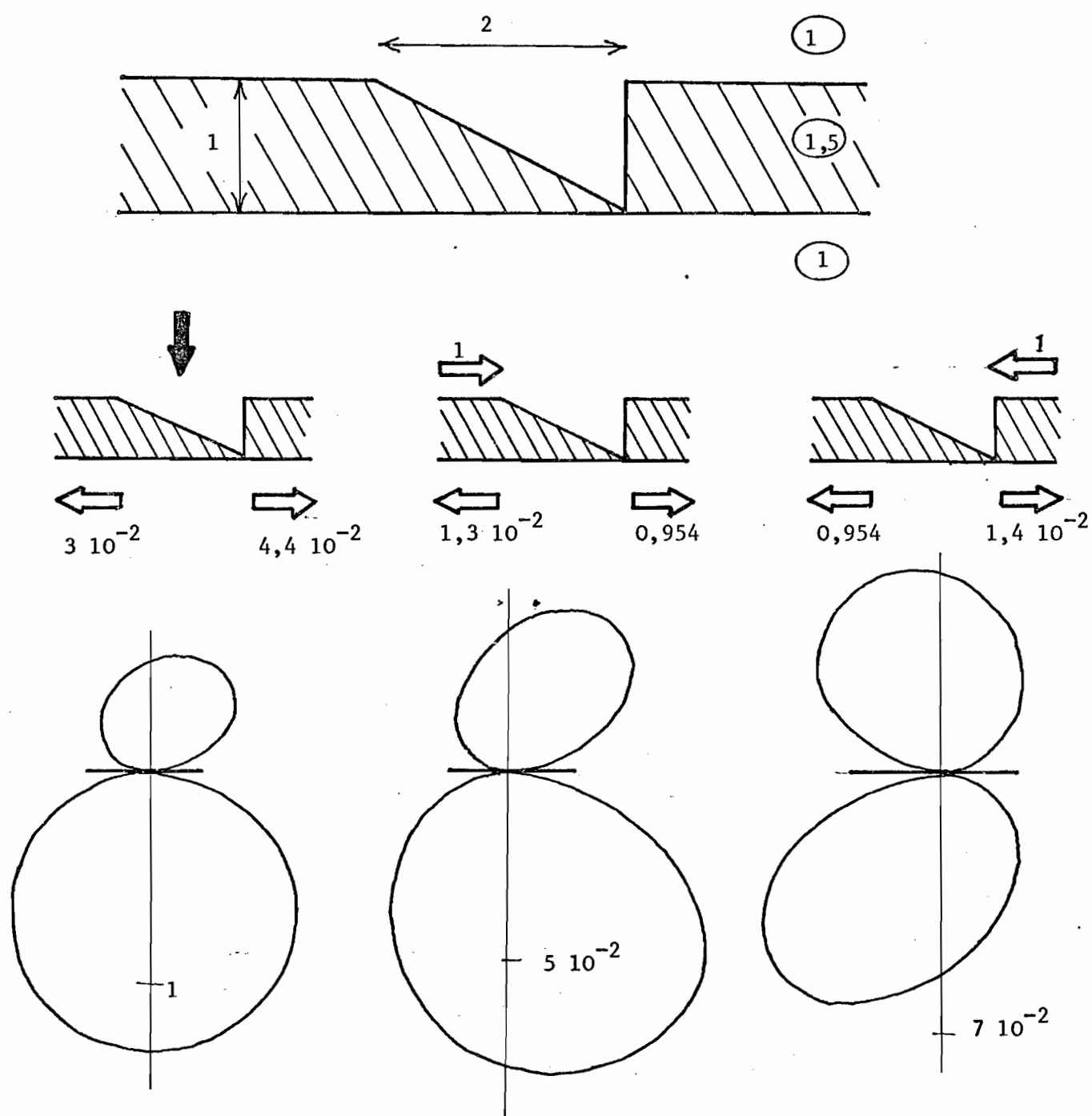


Figure 12

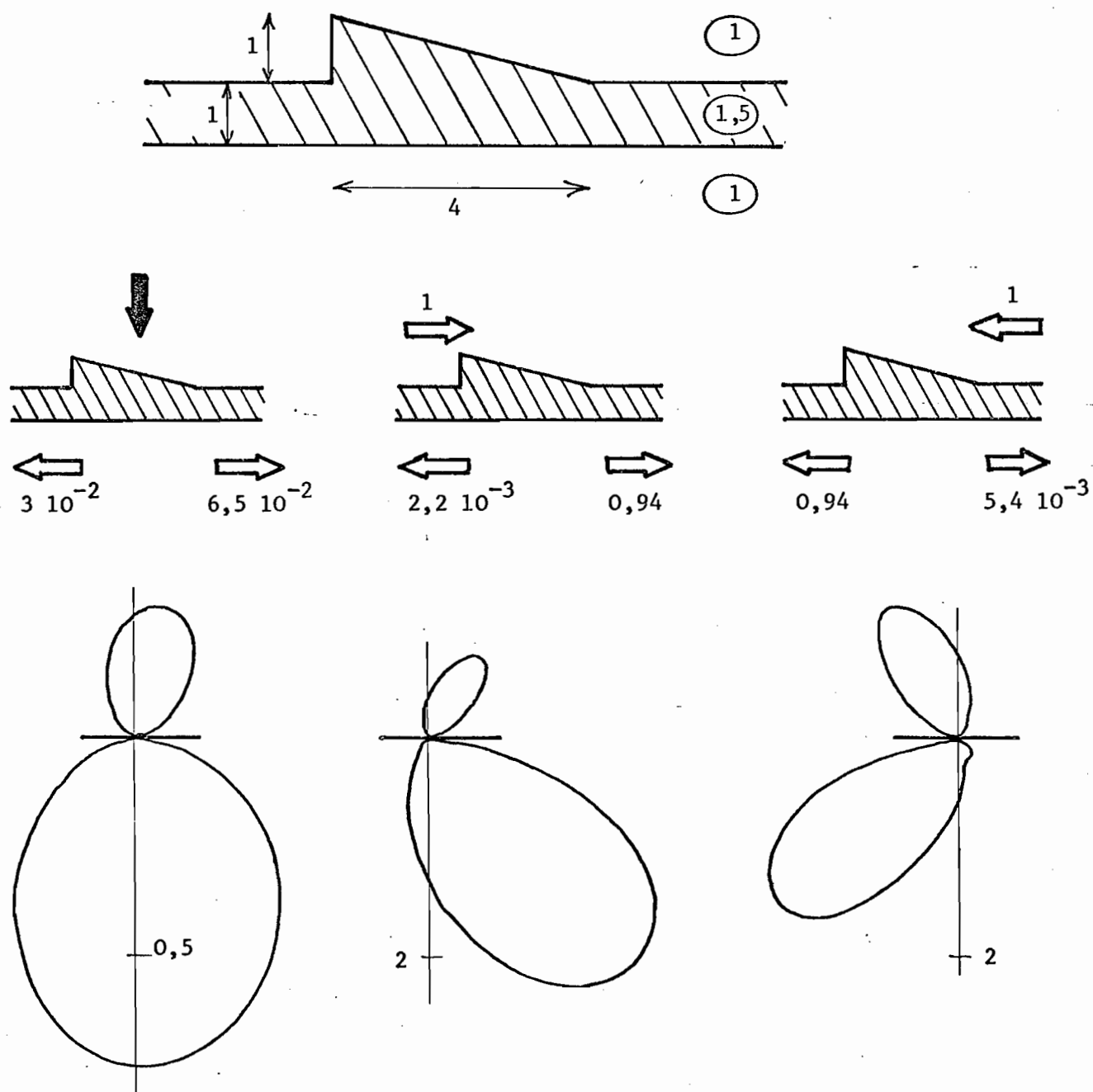


Figure 13

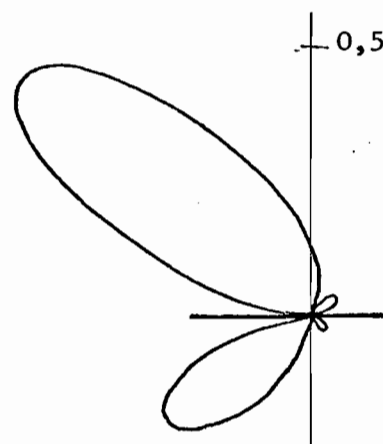
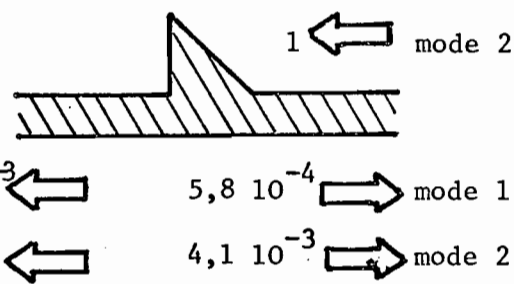
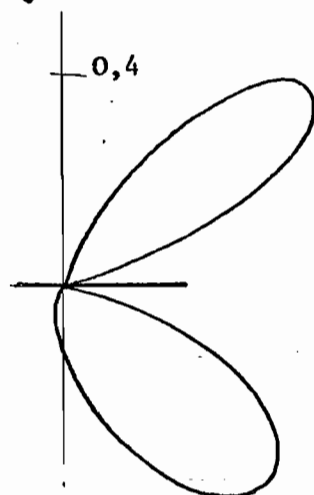
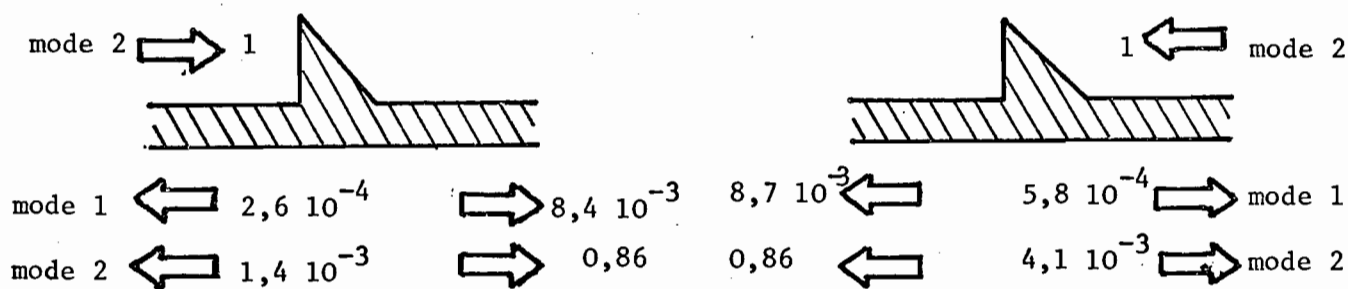
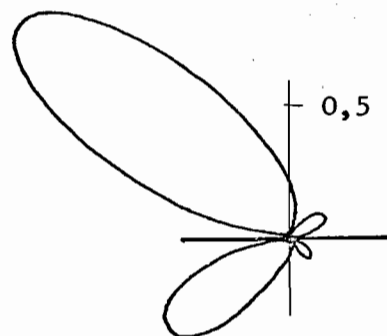
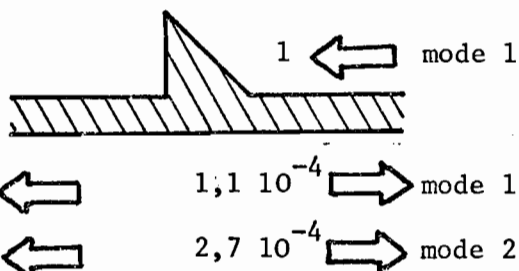
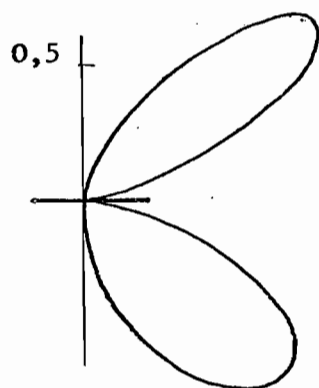
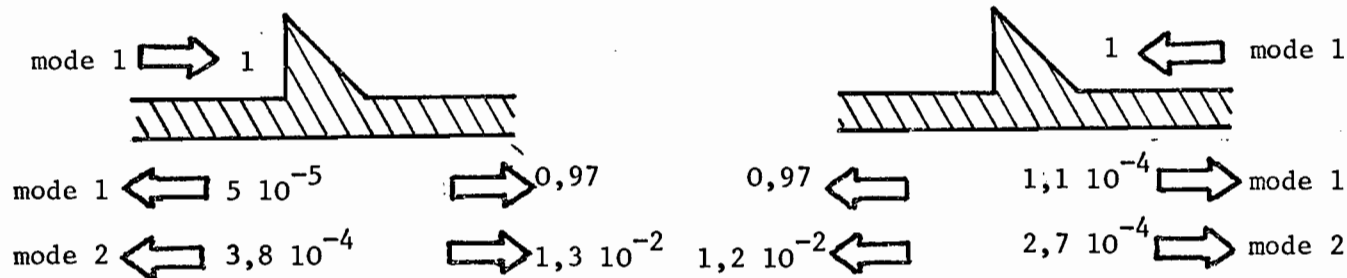
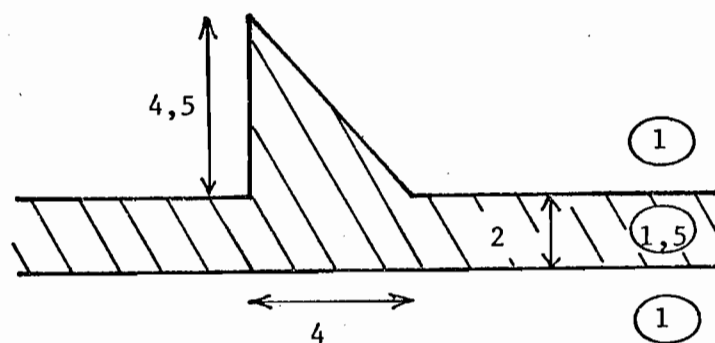


Figure 14

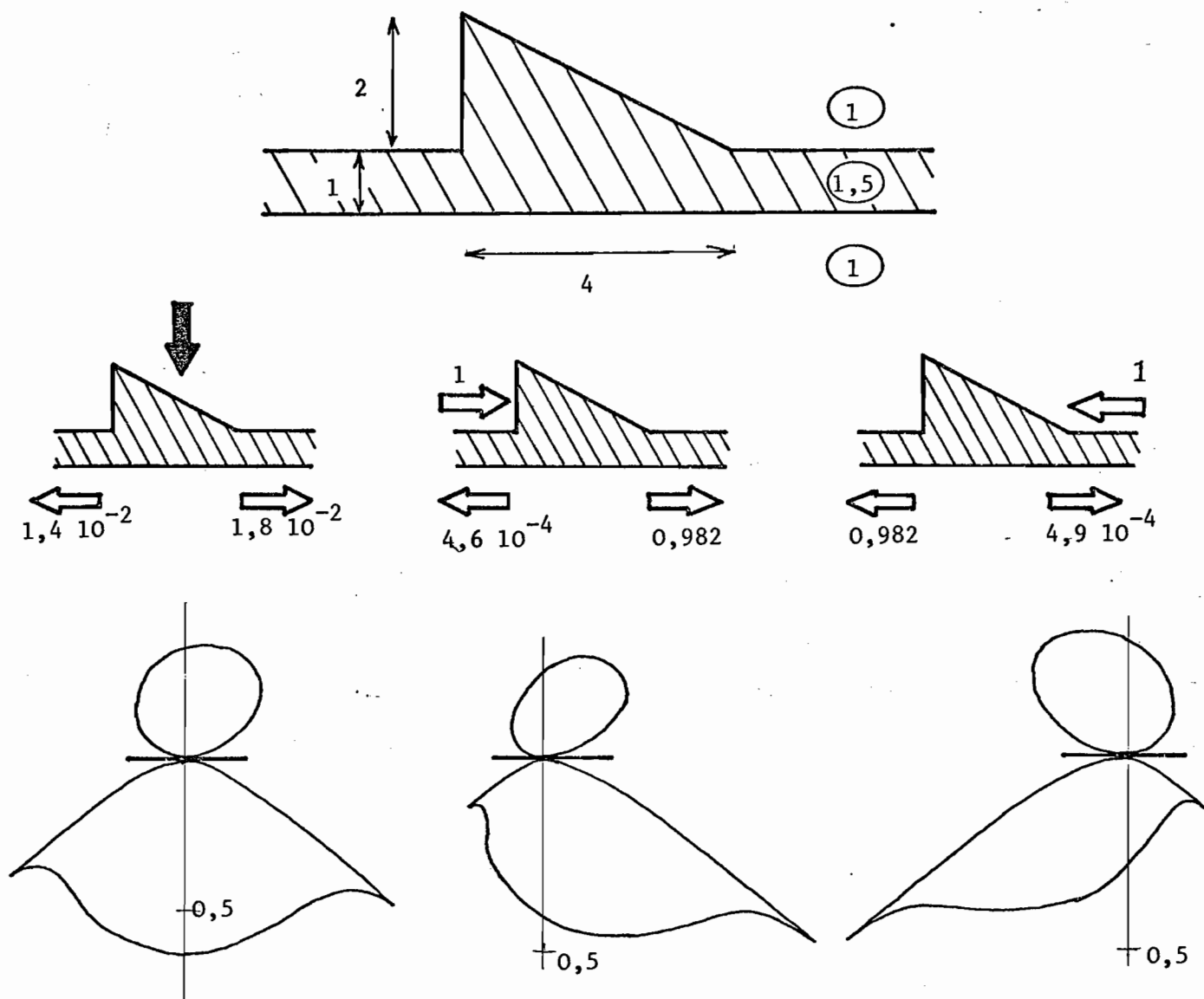


Figure 15

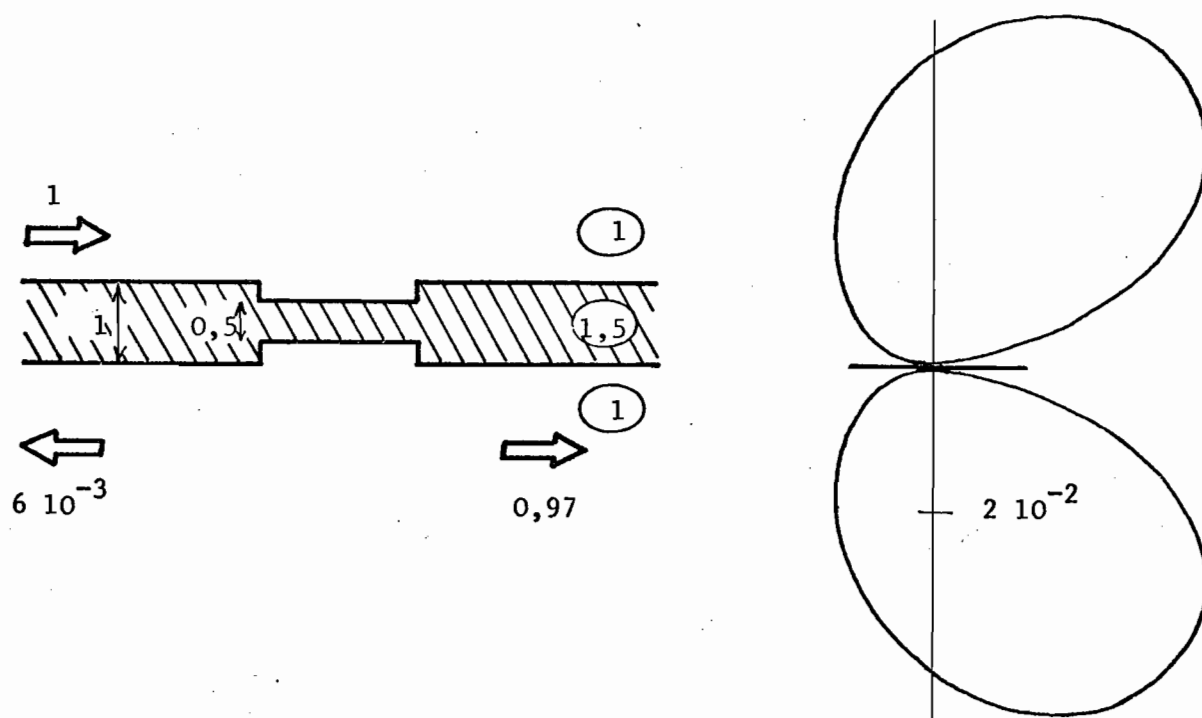


Figure 16

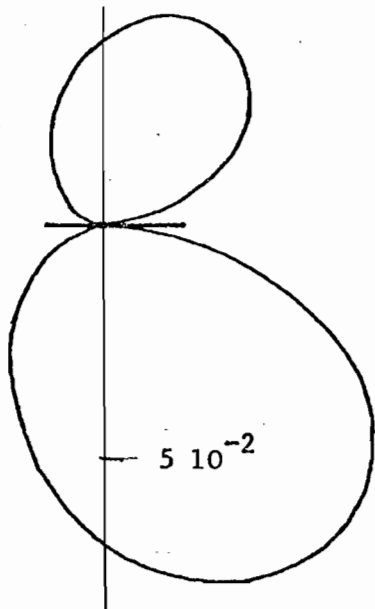
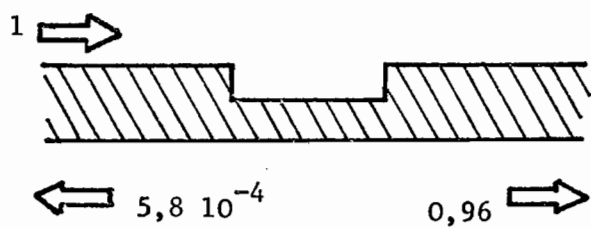
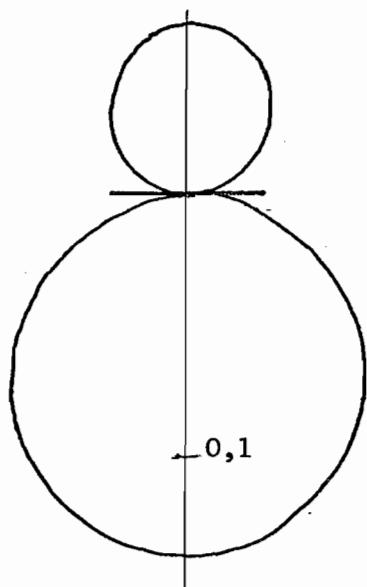
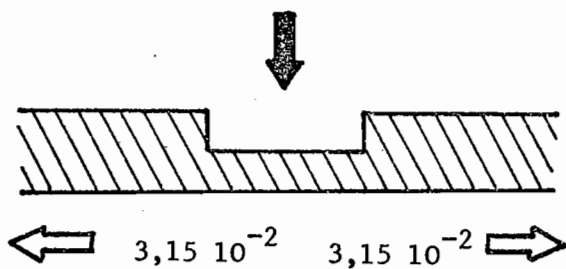
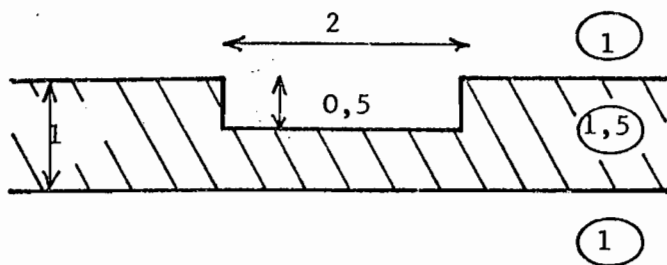


Figure 17

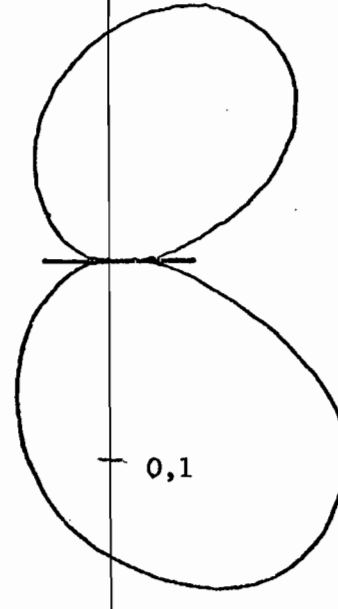
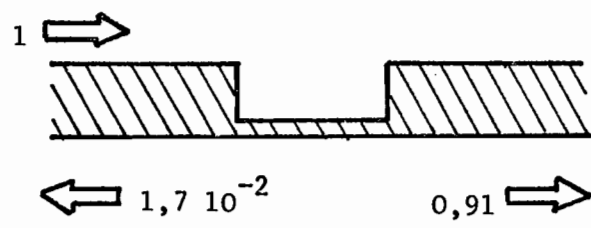
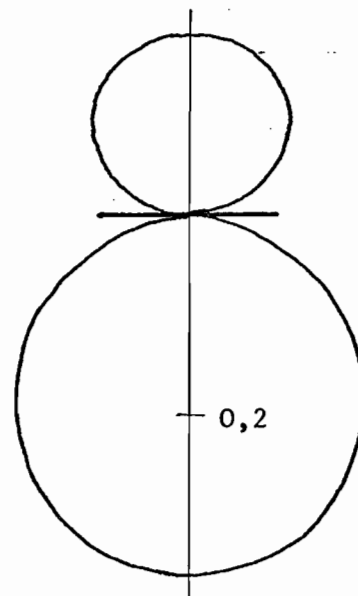
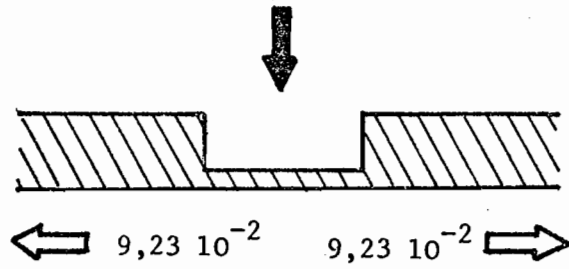
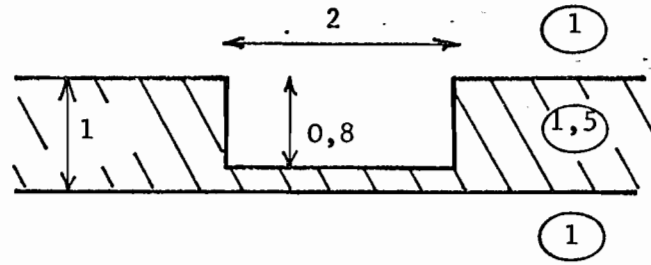


Figure 18

L'obstacle étudié sur la figure 19 est l'équivalent bidimensionnel d'une fibre optique brisée. On s'intéresse aux variations des coefficients de réflexion et de transmission du mode en fonction de la largeur $2L$ de la cassure. On donne aussi les diagrammes de rayonnement pour diverses valeurs de L .

La figure 20 donne un exemple d'étude applicable au problème du coupleur à réseau. L'obstacle est un guide plan recouvert de n traits d'un réseau. Dans la figure 20a, l'obstacle est attaqué par une onde plane dont l'incidence est telle qu'un des ordres du réseau corresponde au mode guidé. On voit que l'énergie partant sur ce mode croît avec le nombre de traits du réseau. Dans la figure 20b, l'obstacle est au contraire attaqué par un mode guidé venant de la gauche ; on vérifie que le champ diffracté sous forme de spectre continu comporte un maximum dans la direction correspondant à l'onde plane de la figure 20a. Ce maximum est d'autant plus marqué que le nombre de traits du réseau est grand.

Un autre exemple de réseau tracé sur un guide est donné par la figure 21. Dans cette étude, la longueur d'onde ou plus précisément $k = 2\pi/\lambda$ varie au voisinage de la valeur $k = 1$ pour laquelle un mode guidé incident sur le réseau revient sur lui-même comme dans un montage de Littrow. On voit que le coefficient de réflexion du mode passe bien par un maximum au voisinage de $k = 1$. Cette étude sera complétée au § VI. 2 aß grâce à l'utilisation d'une méthode approchée.

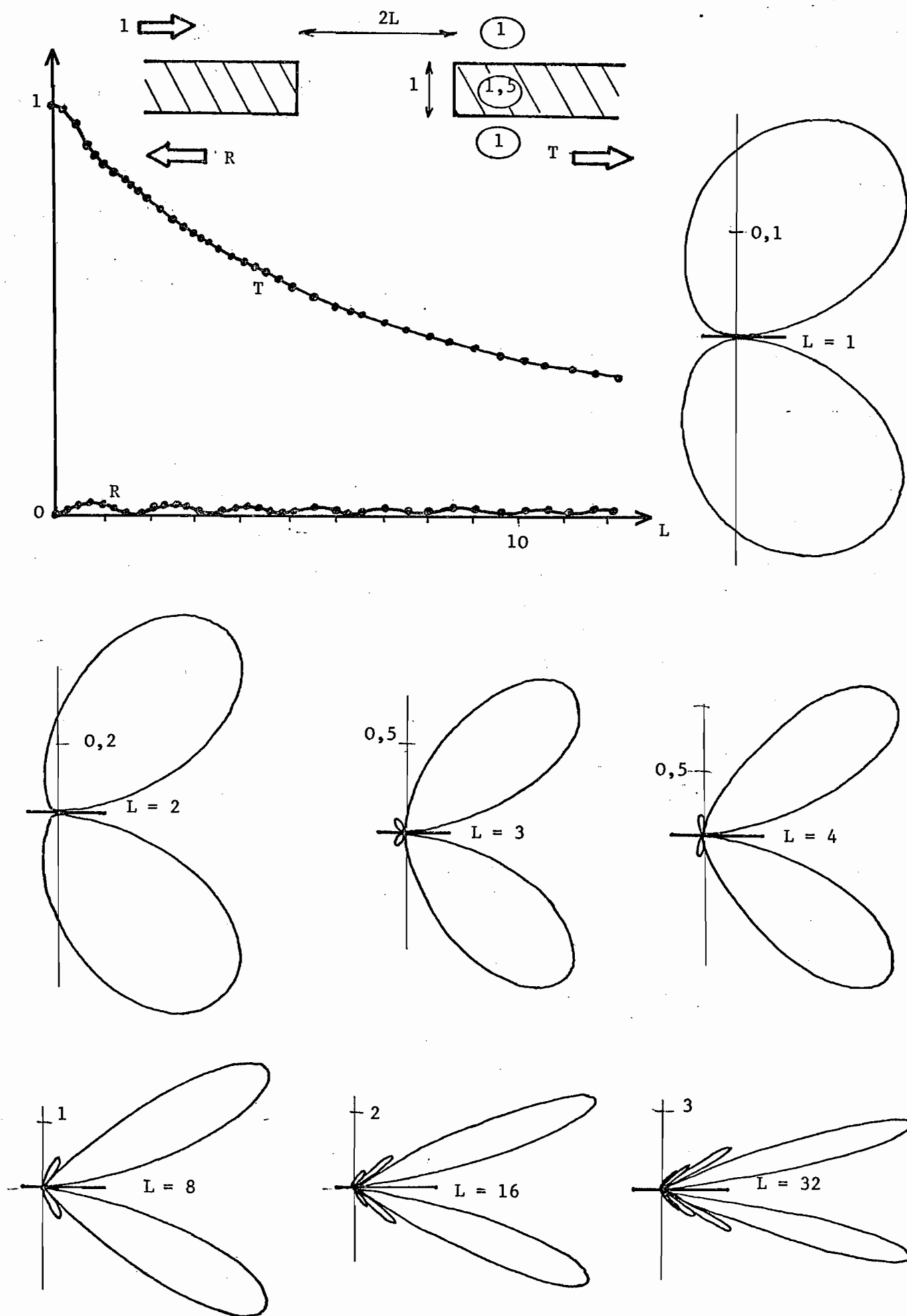


Figure 19
FIBRE CASSEE

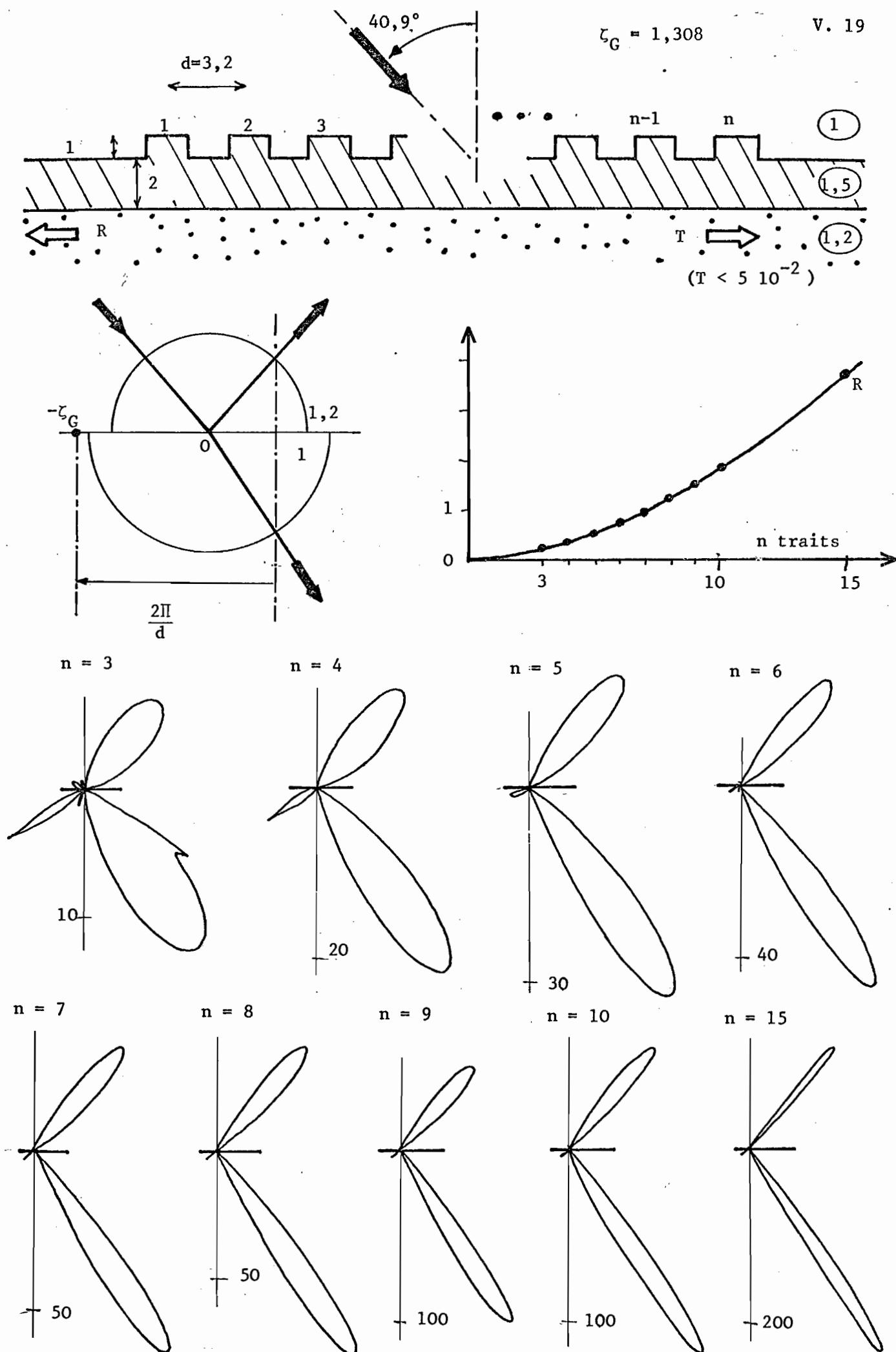


Figure 20 a

COUPLEUR A RESEAU

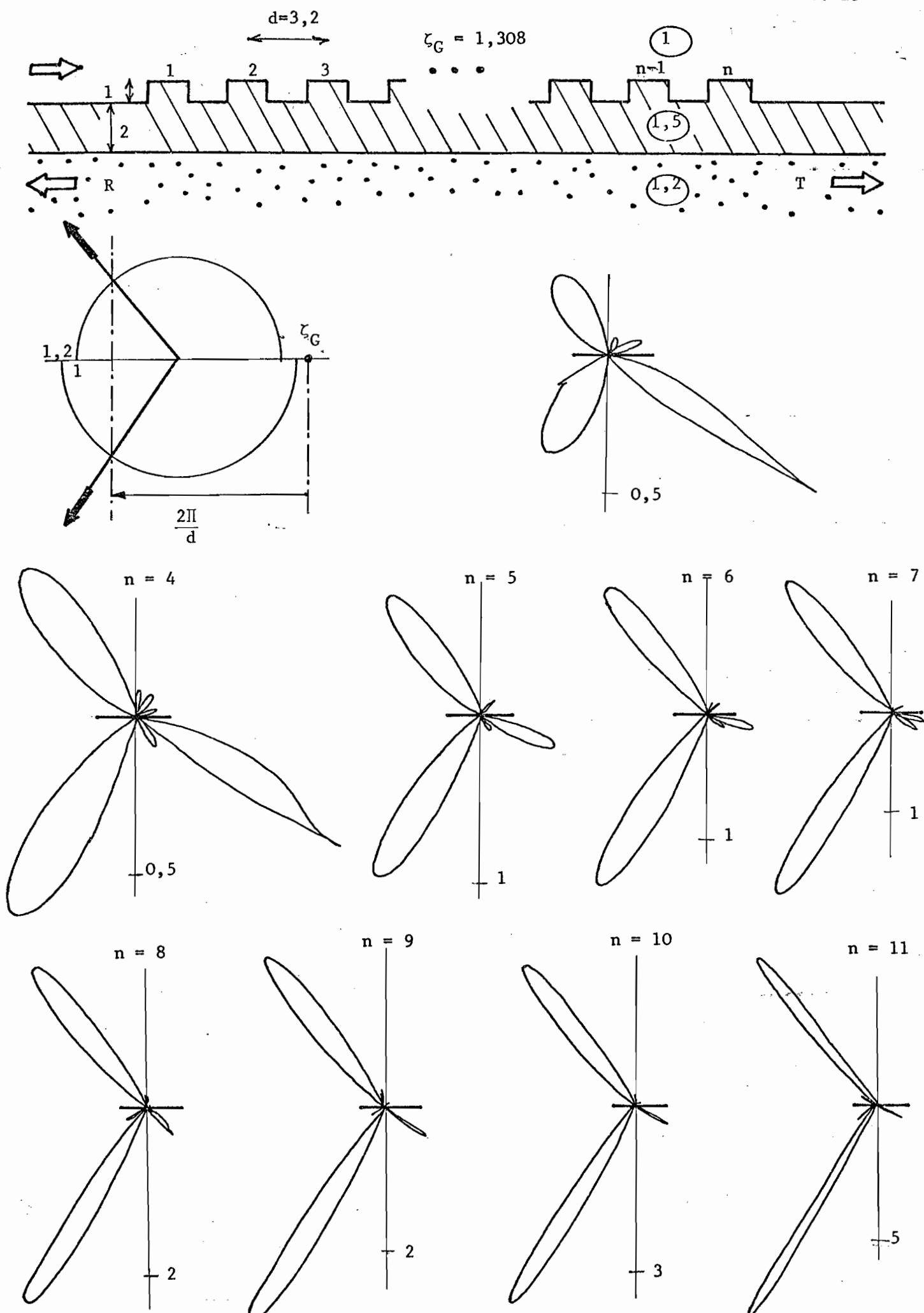


Figure 20 b

COUPLEUR A RESEAU

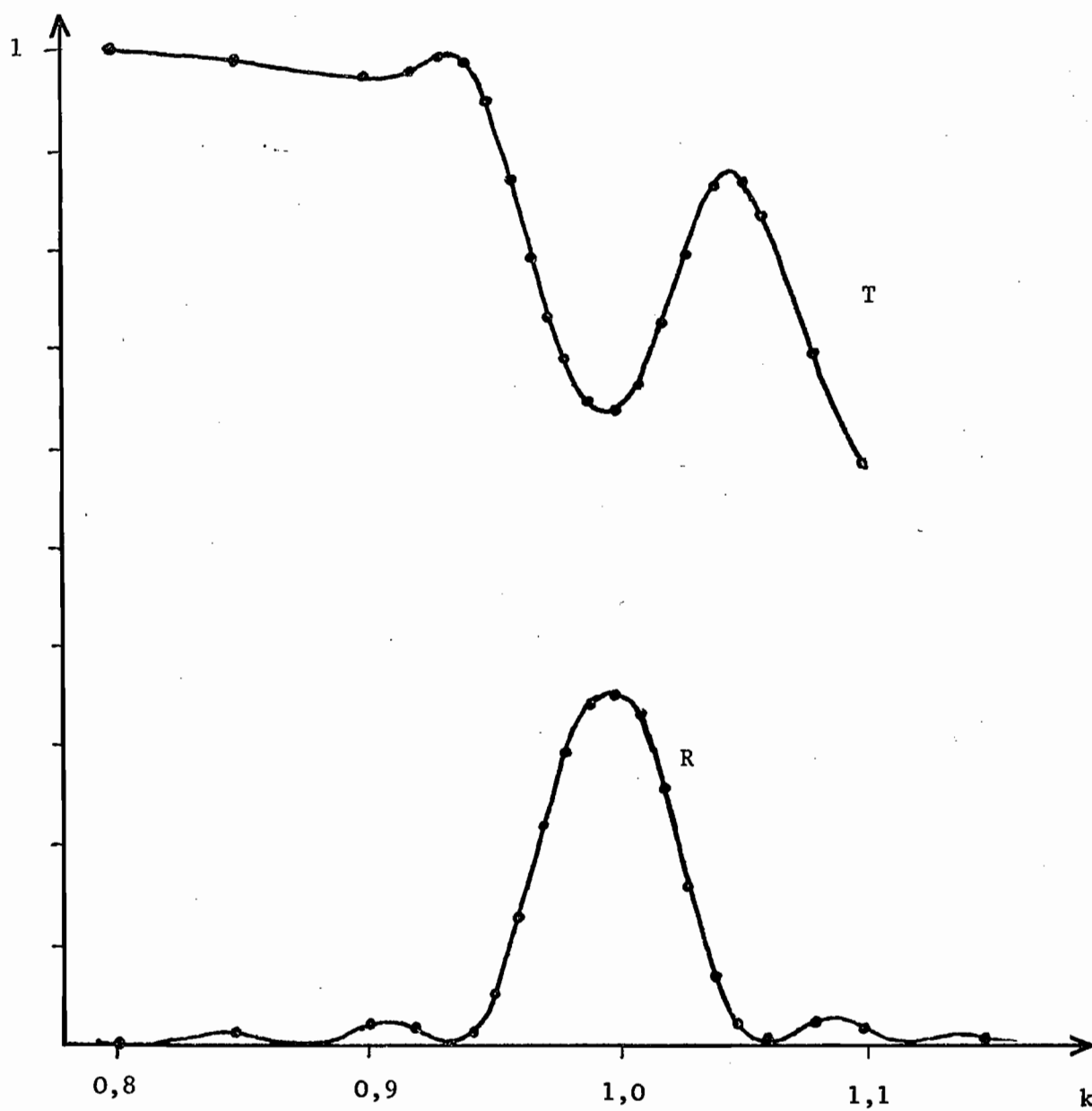
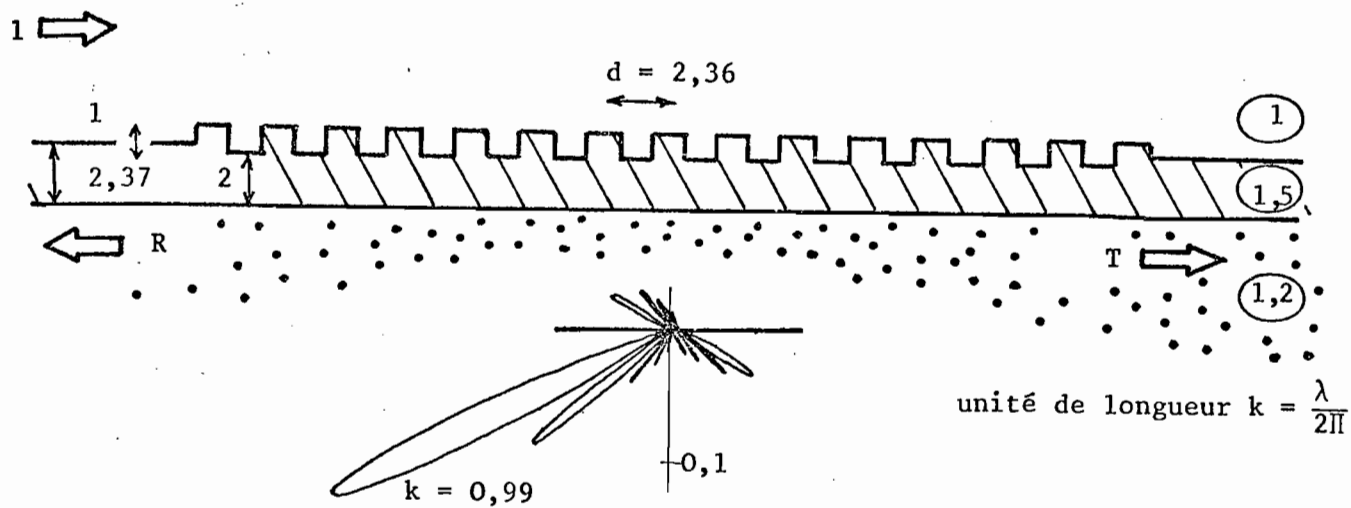


Figure 21

3. RESULTATS DANS LE CAS DE POLARISATION H //

a) L'obstacle diffractant est obtenu par déformation d'un dioptré plan

Les figures 22, 23, 24 illustrent quelques exemples simples.

On pourra comparer aux résultats analogues dans le cas E // (figures 7,8,9).

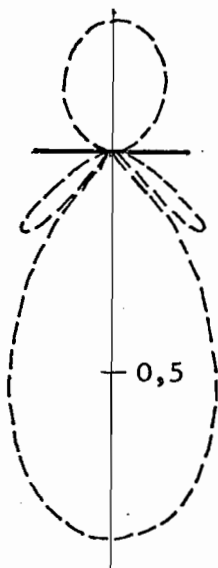
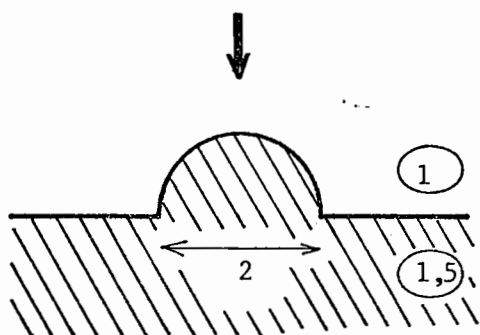


Figure 22

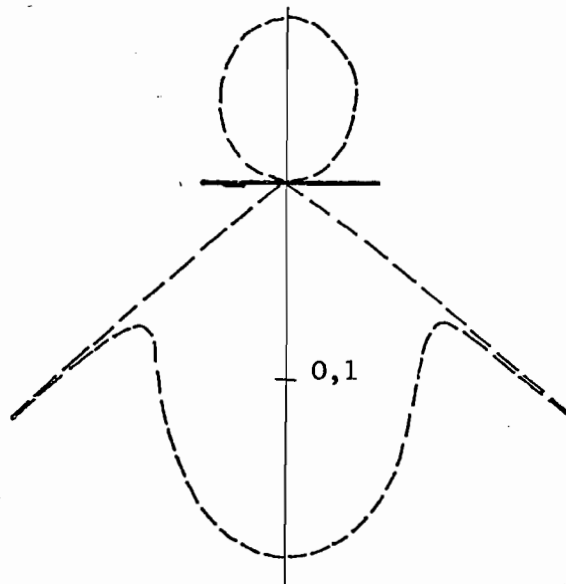
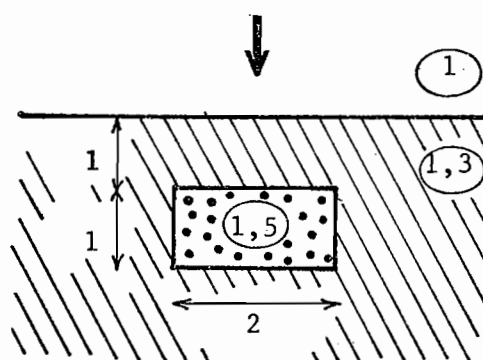


Figure 23

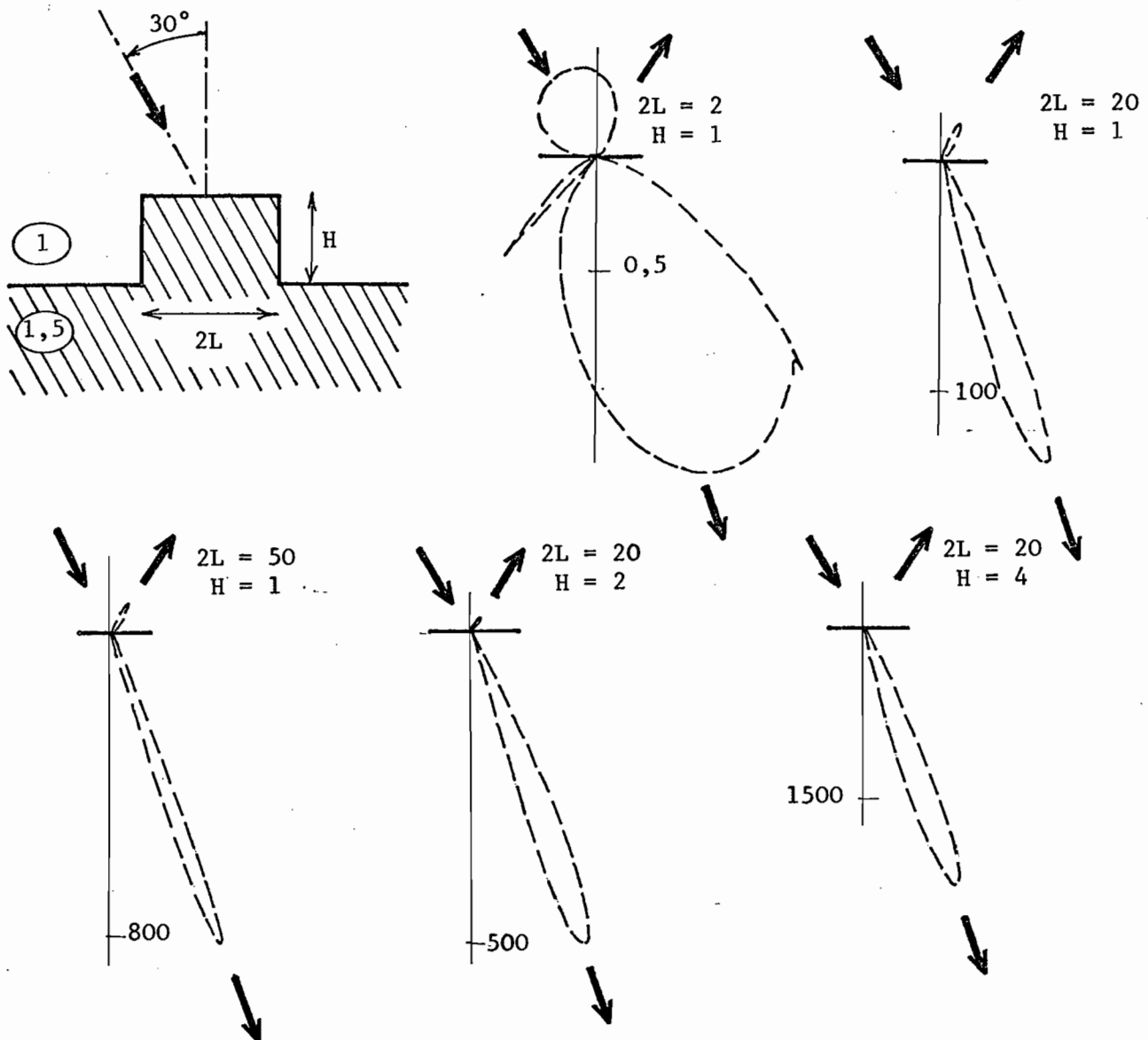


Figure 24

b) Le guide non déformé comporte deux dioptries

On donne des résultats pour l'exemple de la fibre cassée déjà traité dans le cas E // (figures 25 et 26).

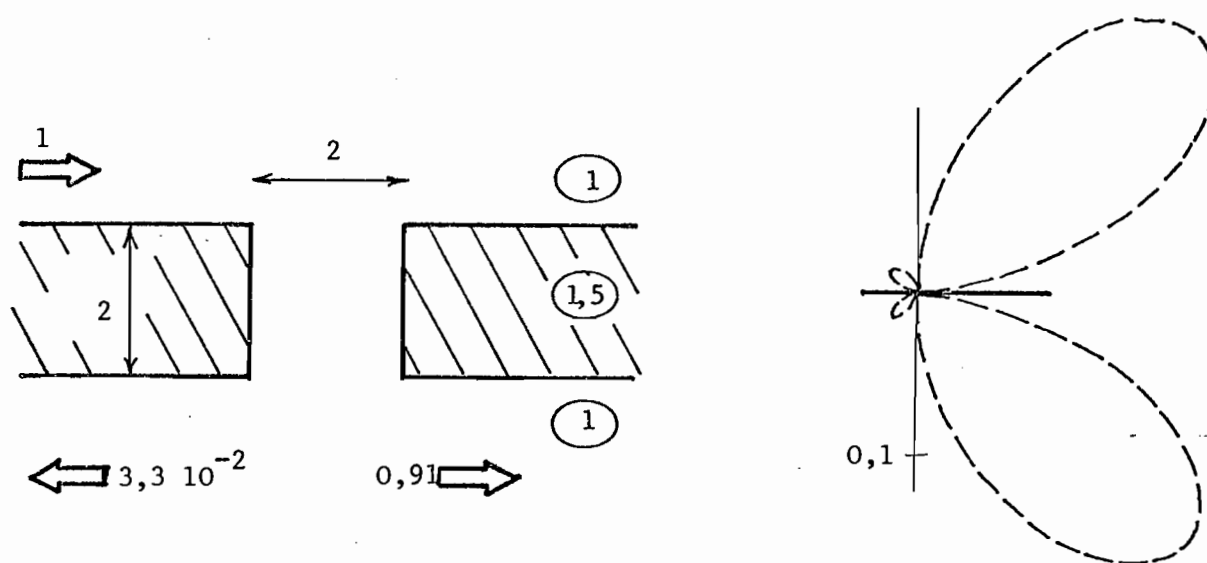


Figure 25

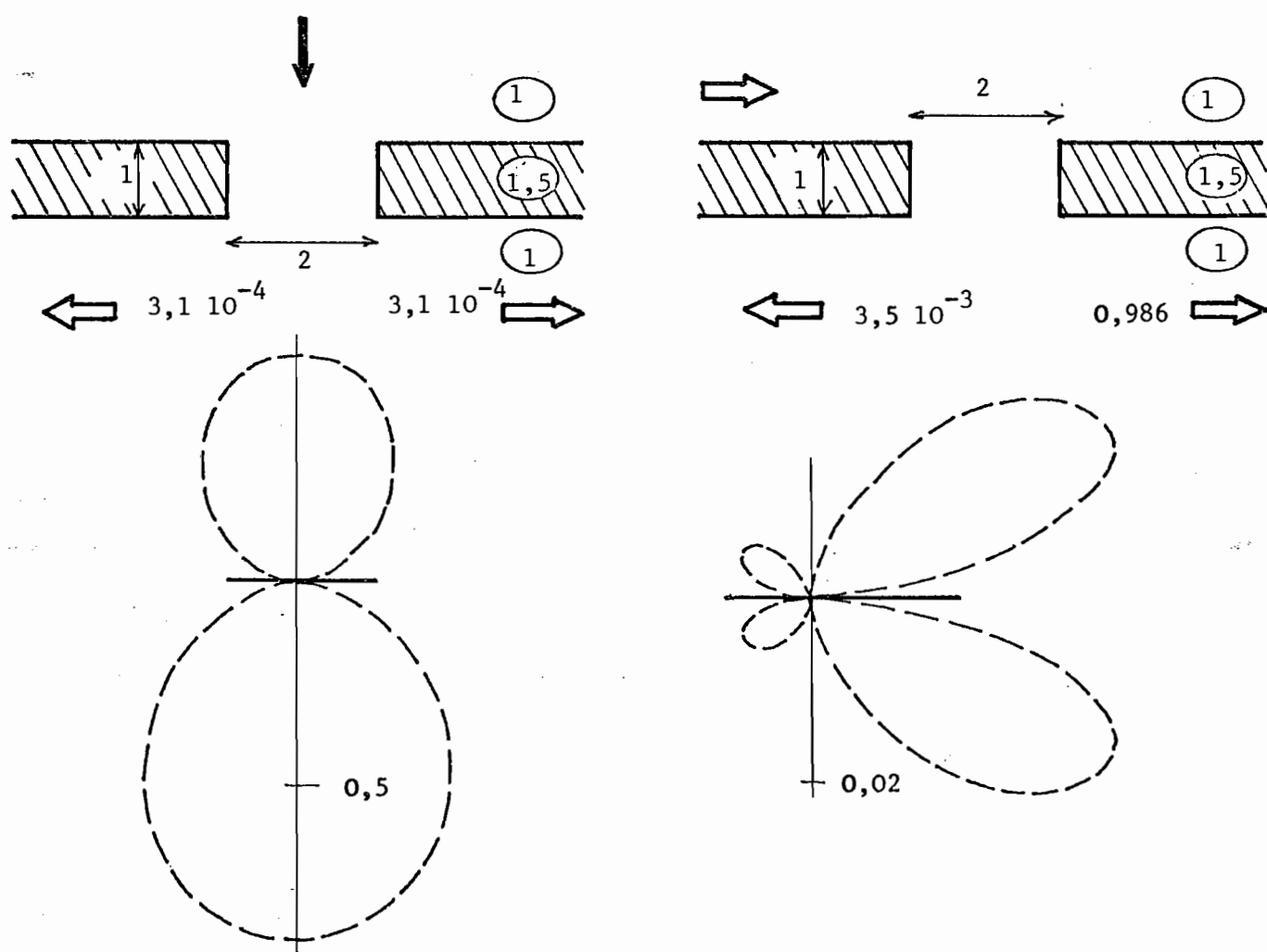


Figure 26

a) L'obstacle est obtenu par déformation d'un dioptré plan

Les figures 28 et 29 donnent deux exemples des résultats que l'on obtient pour des obstacles déjà étudiés dans les cas de polarisation E // et H //.

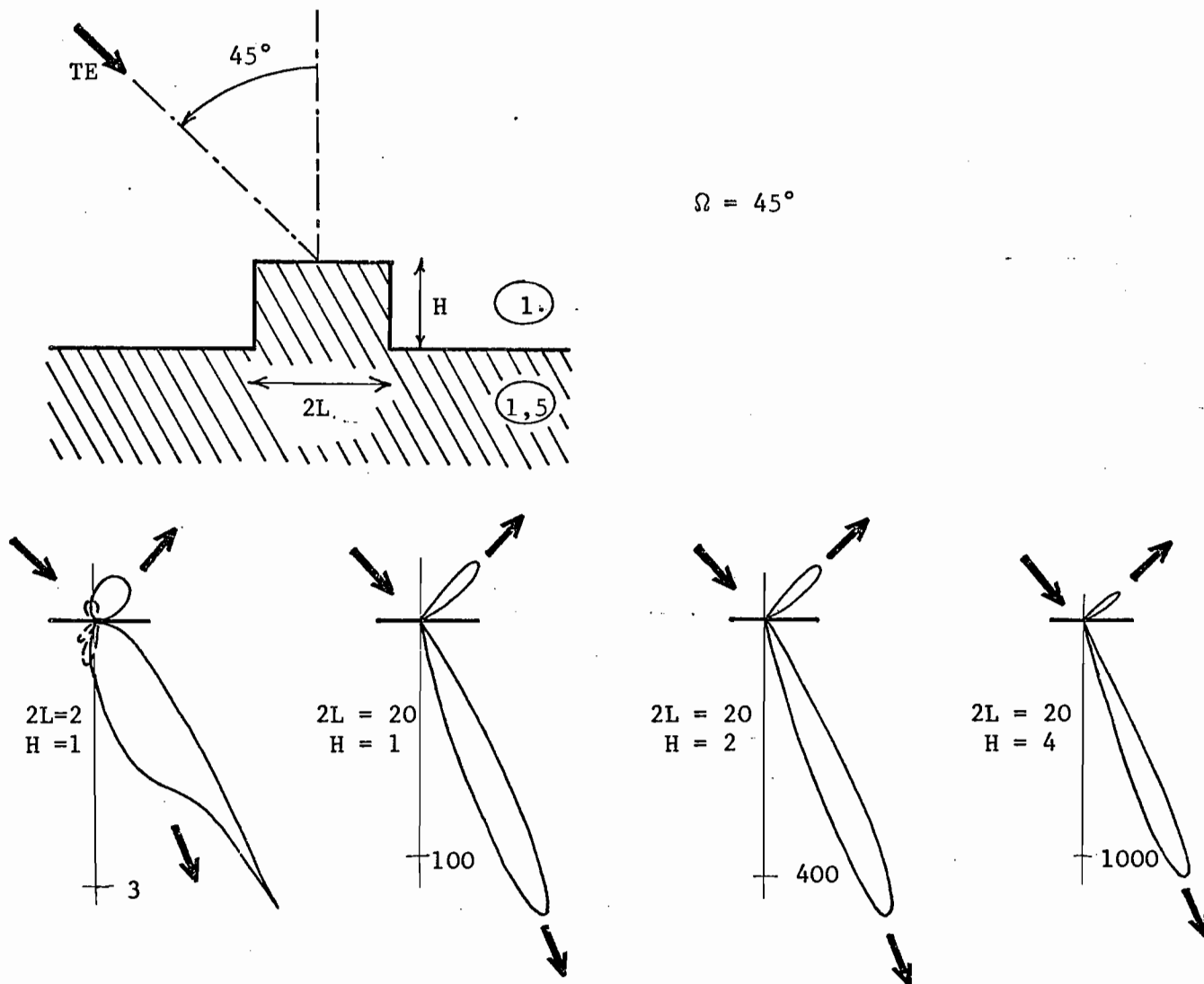


Figure 28

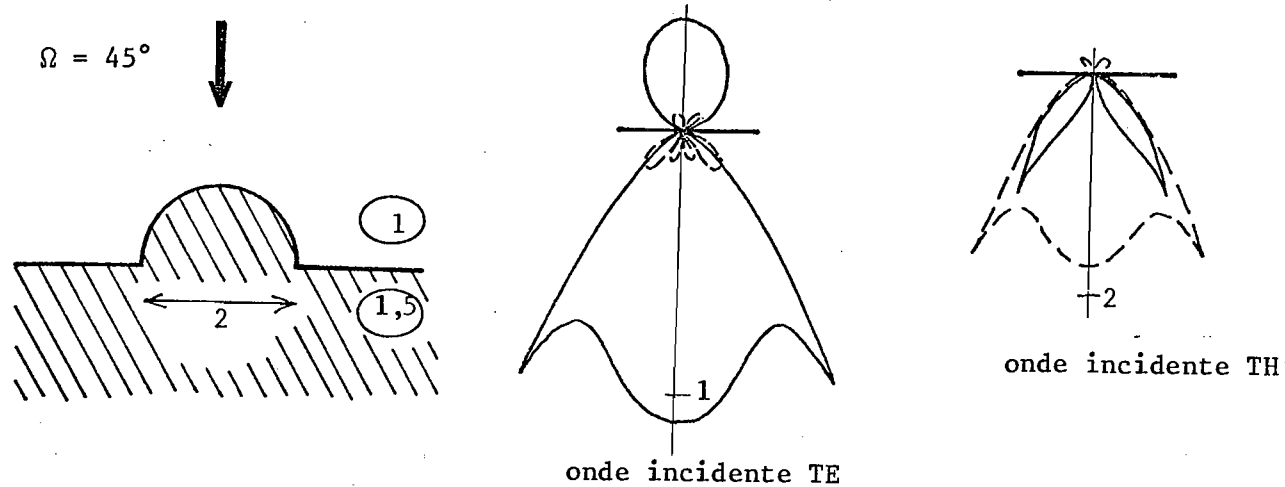


Figure 29

L'ONDE PLANE INCIDENTE EST SUCCESSIVEMENT
DE POLARISATION TE ET DE POLARISATION TH.

b) Quelques exemples dans le cas où le guide non déformé comporte deux dioptries

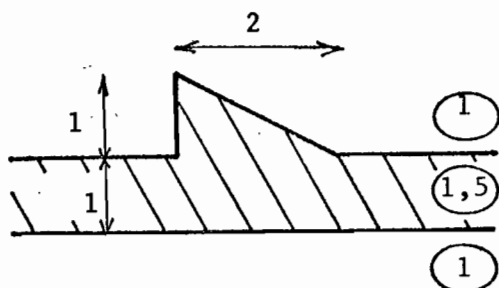
α) Les figures 30 a,b,c sont consacrées à l'étude d'un même obstacle. Le guide non déformé peut supporter un mode TE et un mode TH. Sur la figure 30a, on étudie la réponse à un mode incident (4 cas possibles). Dans la figure 30b, l'obstacle est attaqué par une onde plane de polarisation TE venant de dessus ou de dessous sous divers angles d'incidence.

La figure 30c traite le même cas de champ incident que la figure 30b mais pour une polarisation TH.

β) Une étude analogue est réalisée sur les figures 31 a,b,c mais cette fois le guide admet un seul mode et ce mode est de polarisation TE. De plus, l'obstacle comporte un milieu absorbant.

Ces deux études (figures 30 et 31) ont été utilisées pour vérifier les relations de réciprocité (chap. III tableaux 2a et 2b).

γ) Les figures 32 et 33 traitent d'autres exemples d'obstacles. Le guide admet un mode TE et un mode TH et on se limite au cas où l'obstacle est attaqué par un mode. Compte tenu de la symétrie du problème, il suffit de se limiter au cas où le mode incident arrive de gauche.



$$\Omega = 45^\circ$$

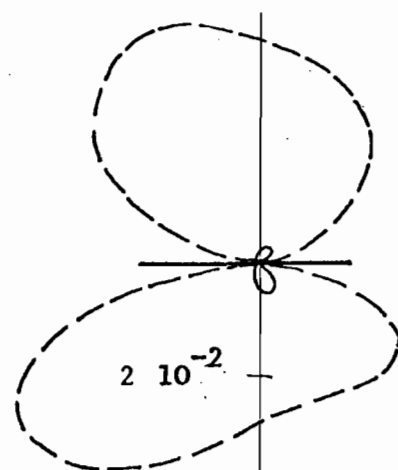
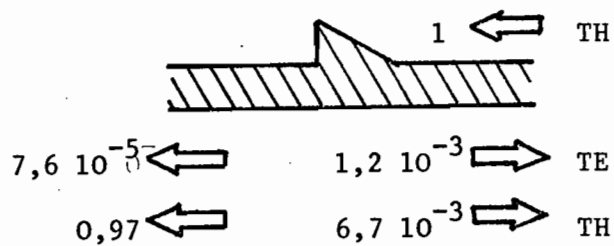
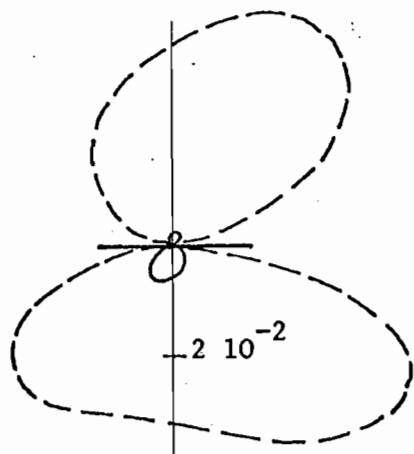
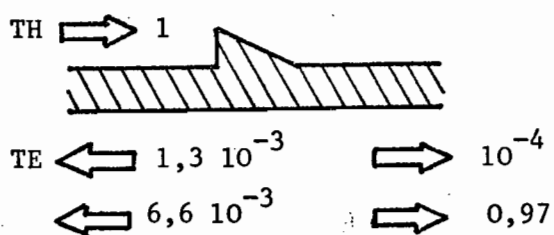
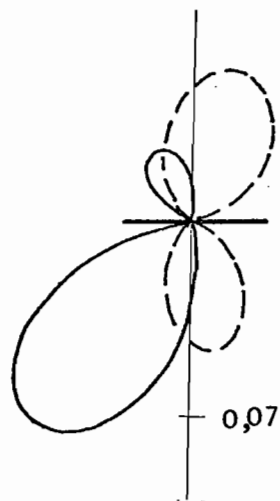
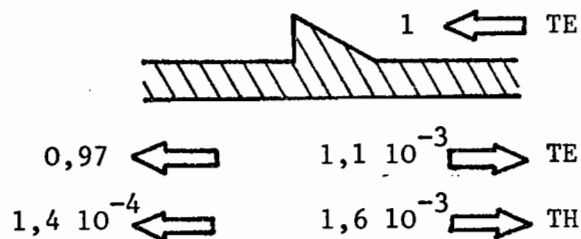
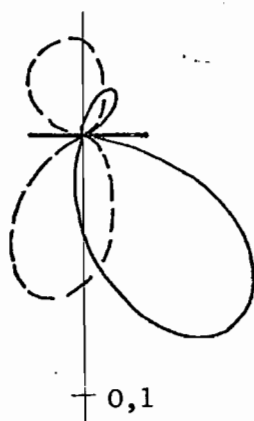
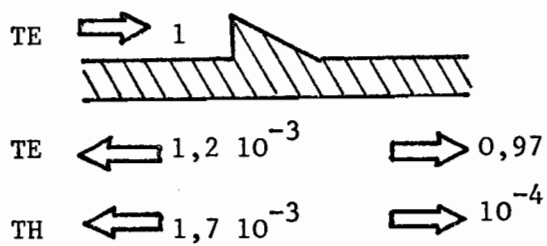


Figure 30 a

$$\Omega = 45^\circ$$

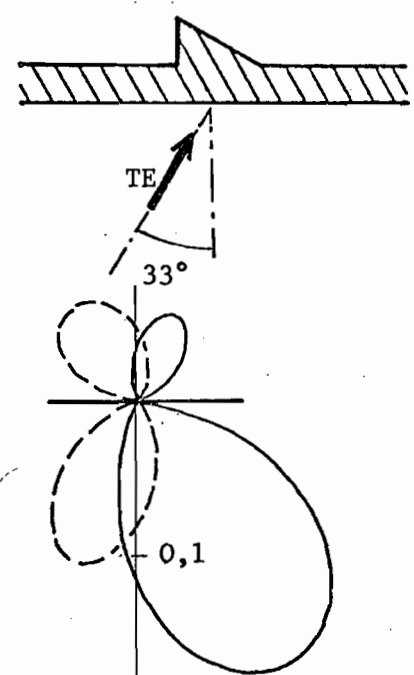
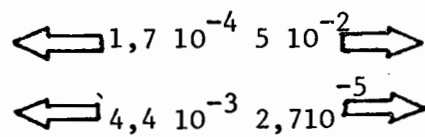
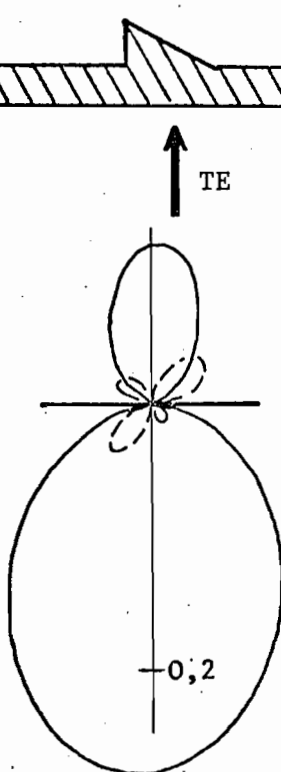
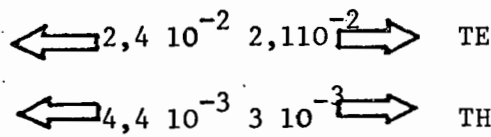
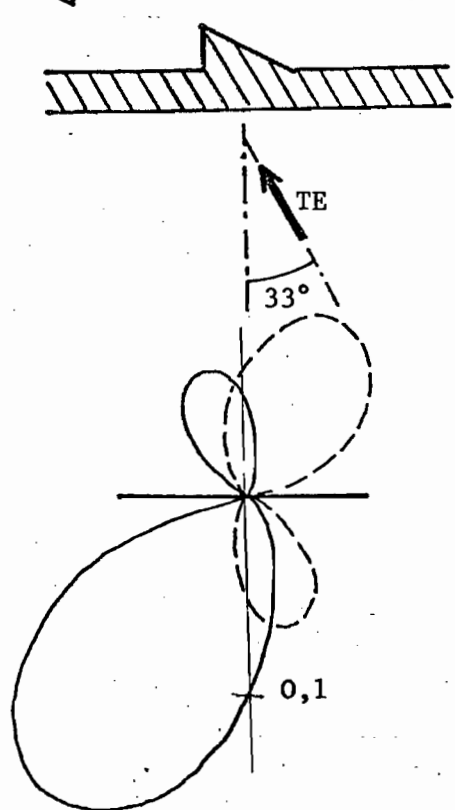
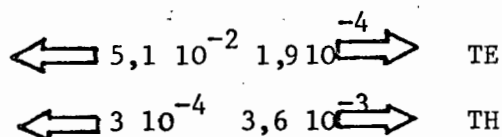
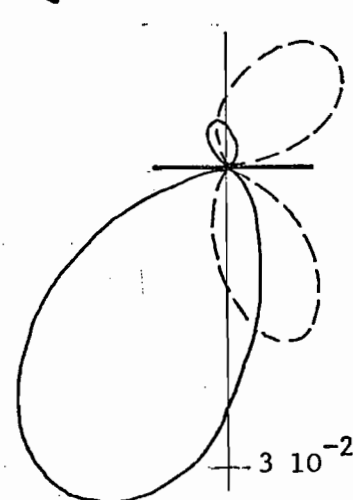
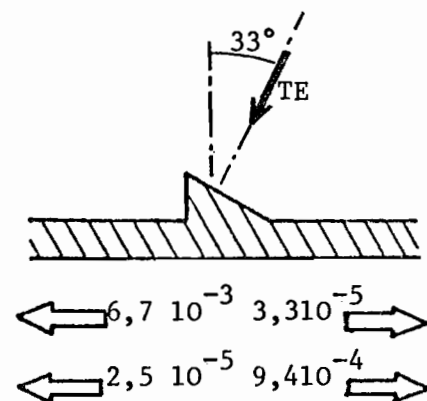
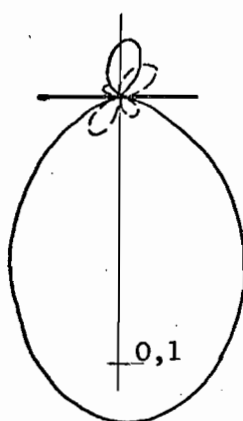
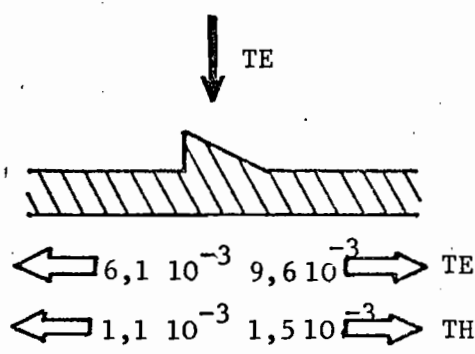
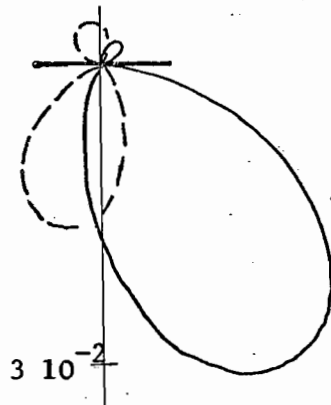
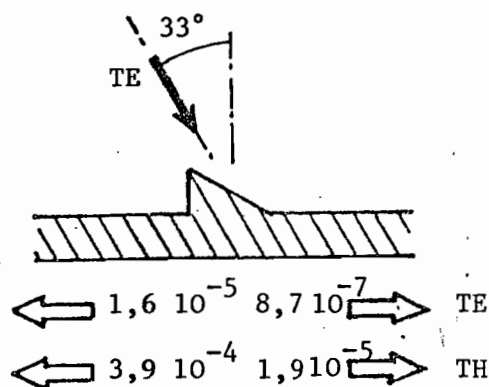
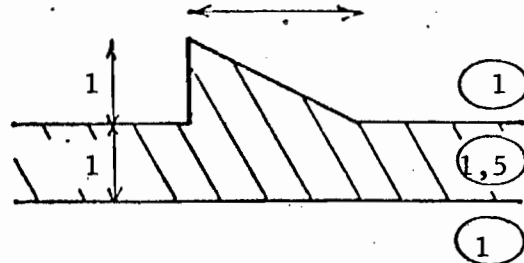


Figure 30 b

$$\Omega = 45^\circ$$

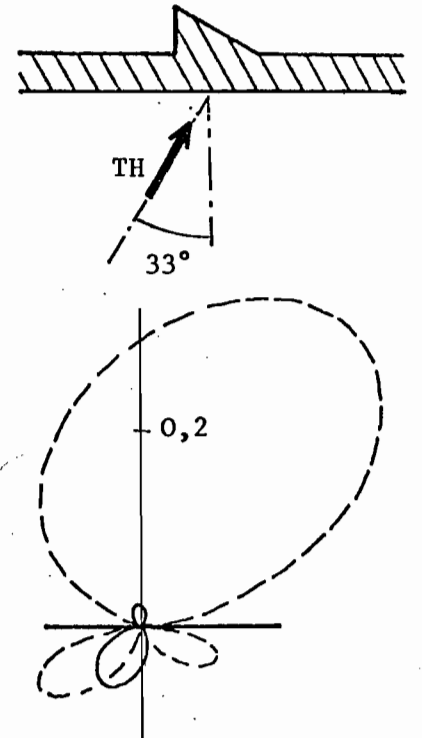
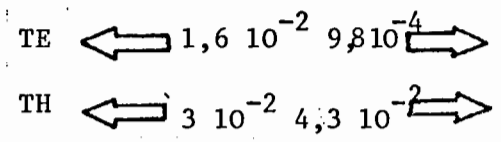
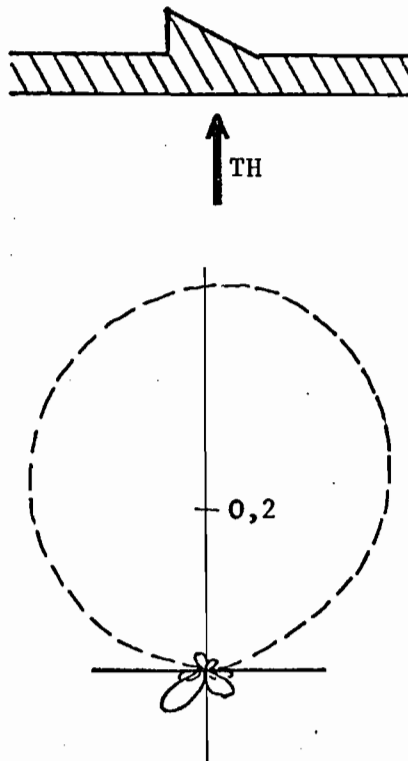
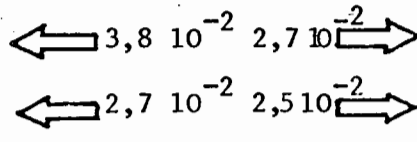
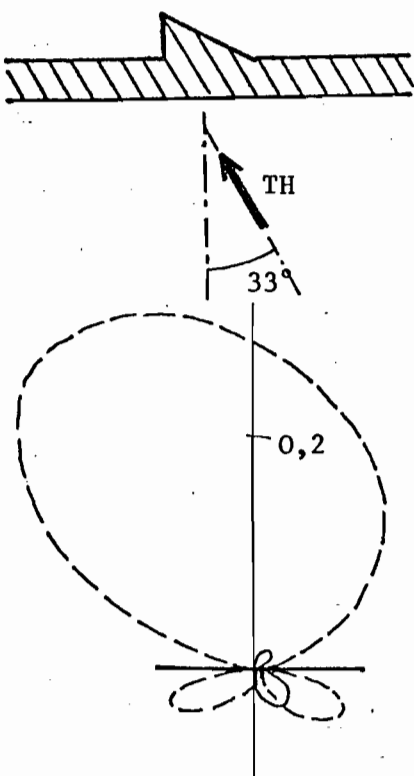
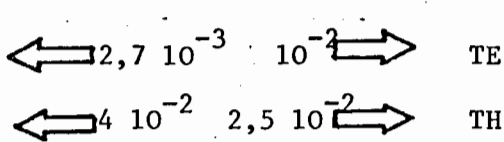
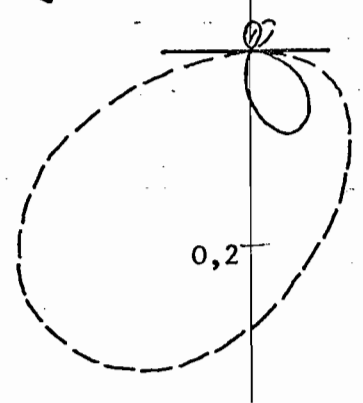
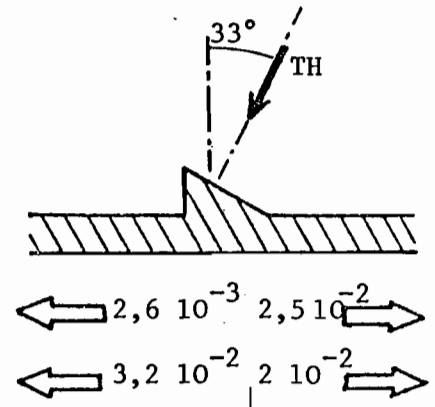
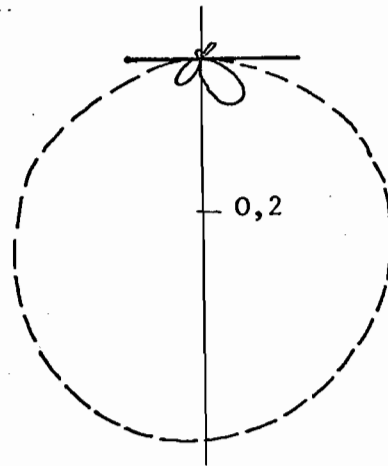
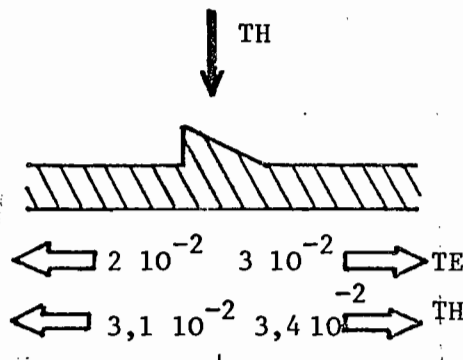
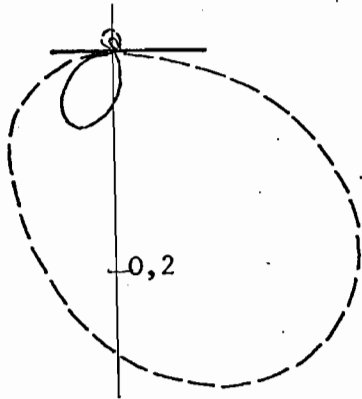
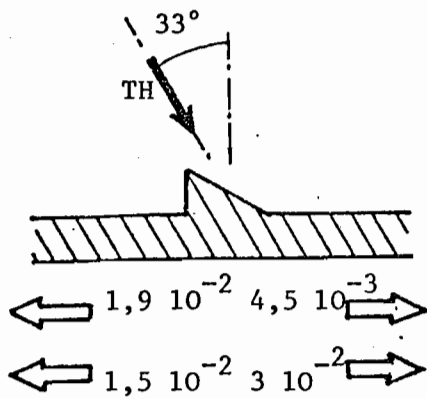
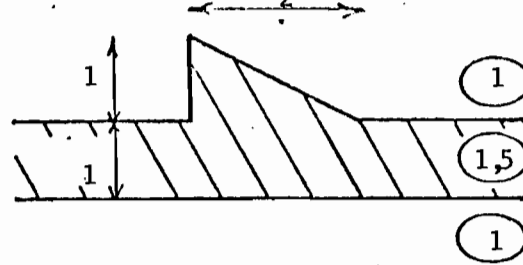


Figure 30 c

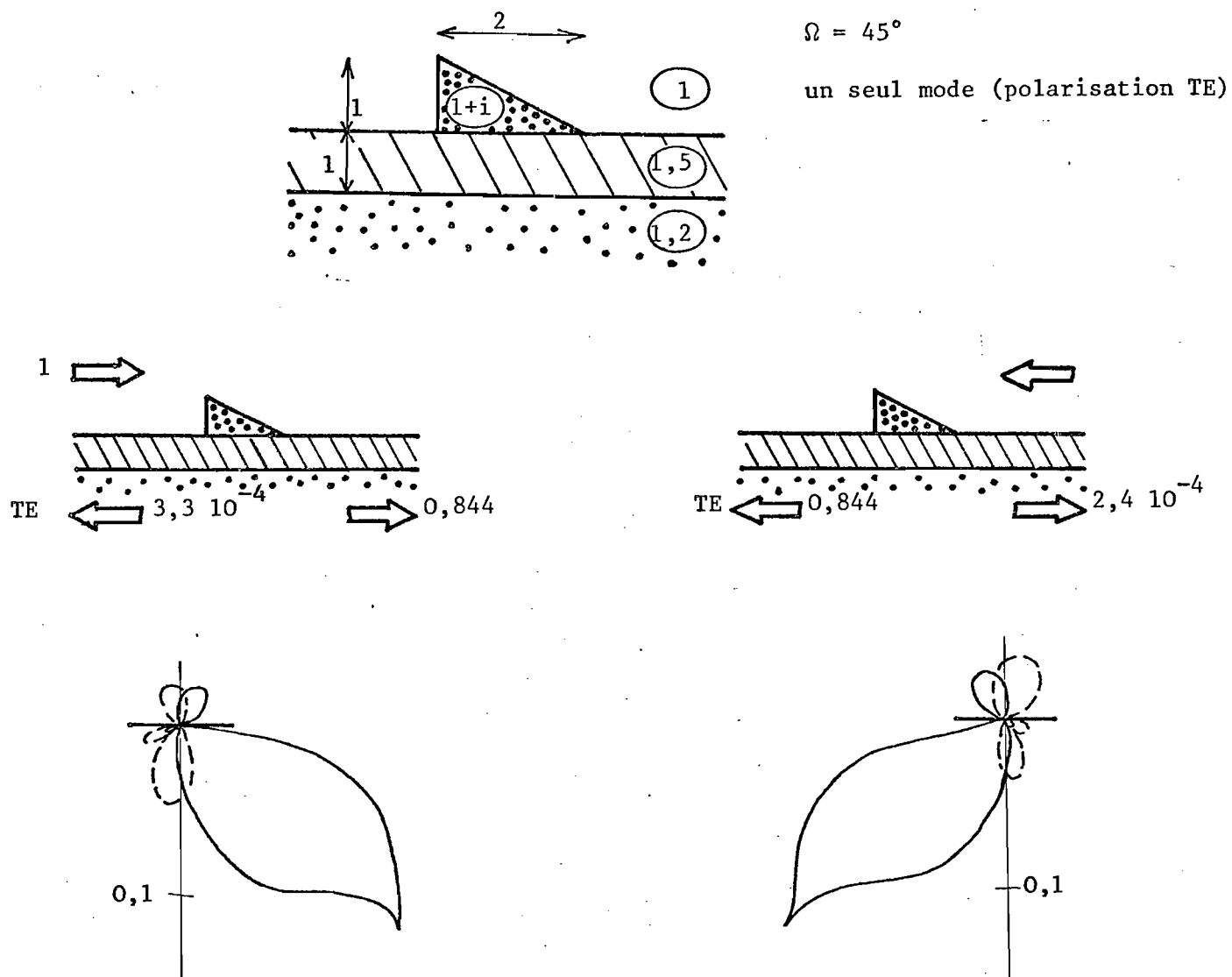


Figure 31 a

$$\Omega = 45^\circ$$

V. 33

un seul mode (polarisation TE)

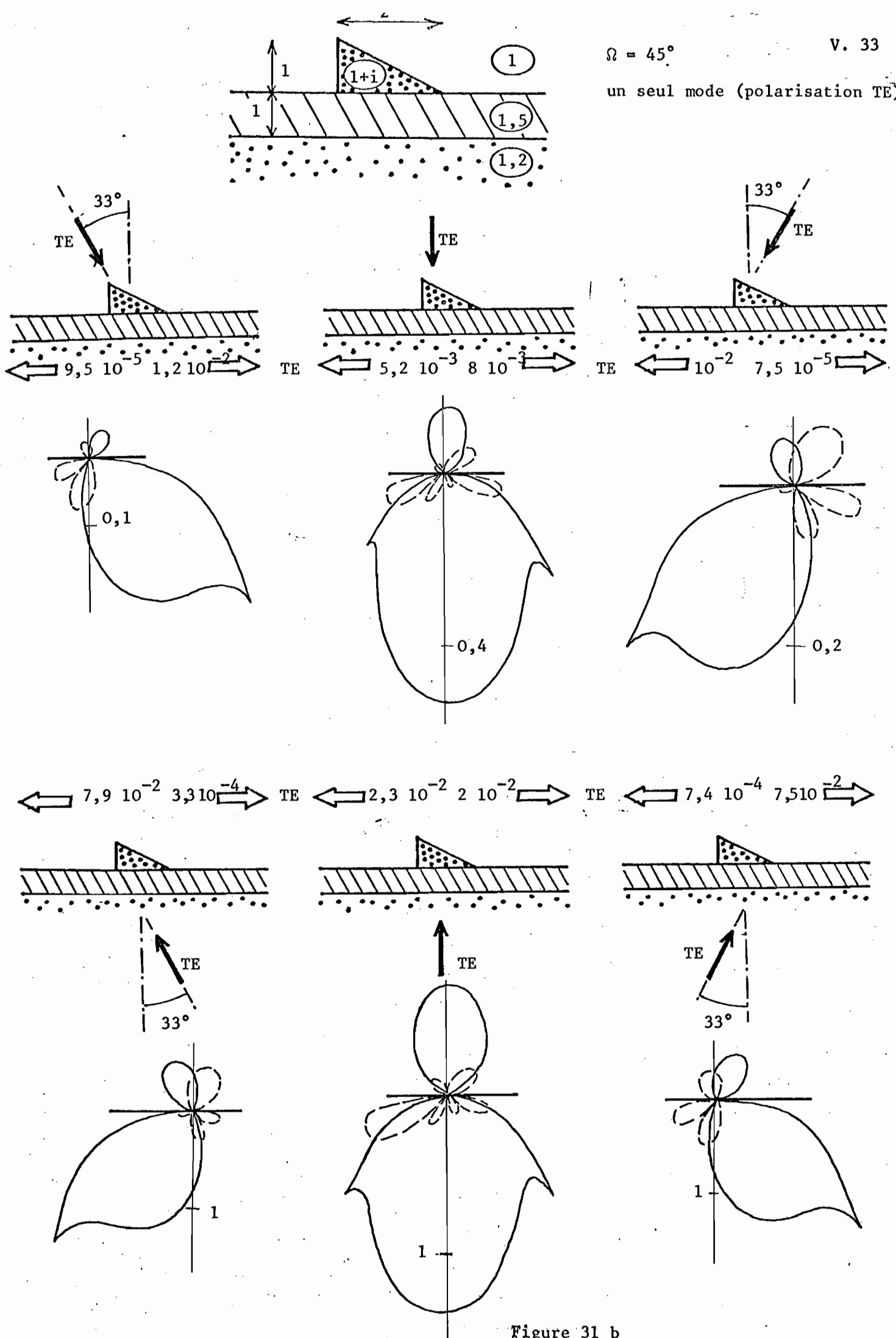
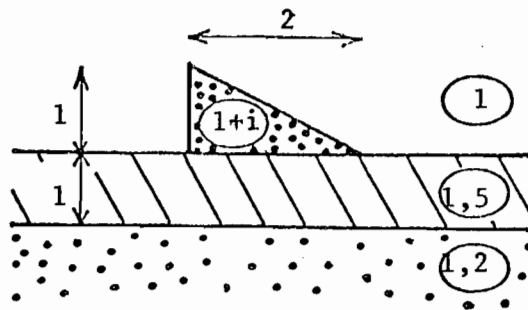
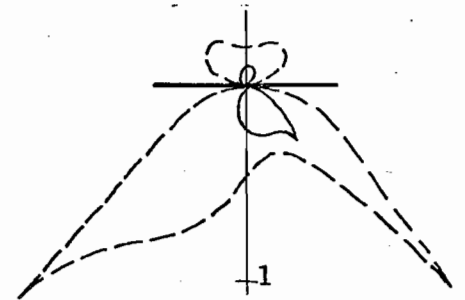
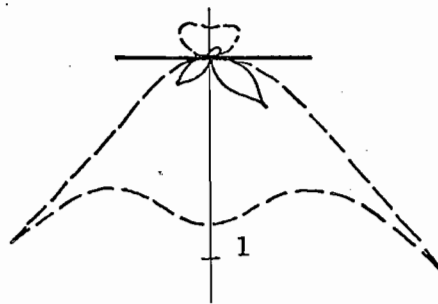
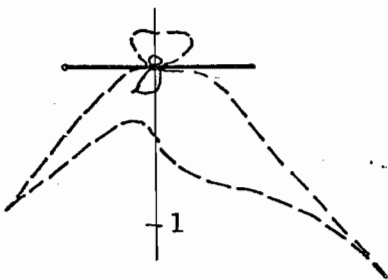
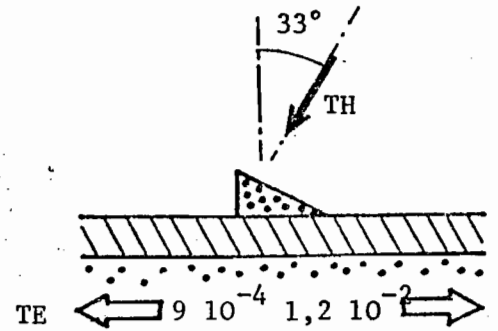
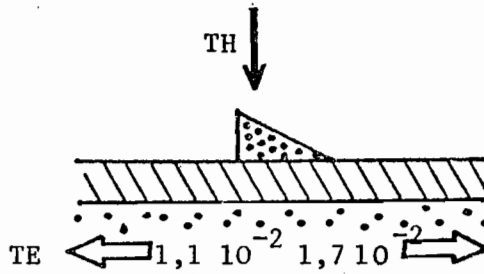
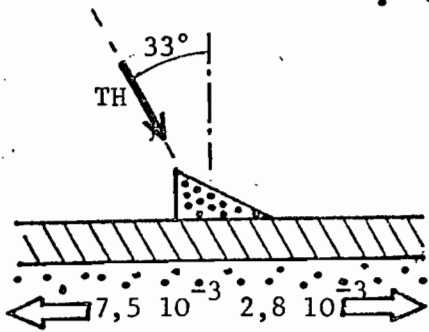


Figure 31 b



$$\Omega = 45^\circ$$

un seul mode (polarisation TE)



$$\leftarrow 2,4 \cdot 10^{-3} \quad 6,8 \cdot 10^{-3} \rightarrow \text{TE}$$

$$\leftarrow 2 \cdot 10^{-2} \quad 1,4 \cdot 10^{-2} \rightarrow \text{TE}$$

$$\leftarrow 1,1 \cdot 10^{-2} \quad 6,3 \cdot 10^{-4} \rightarrow$$

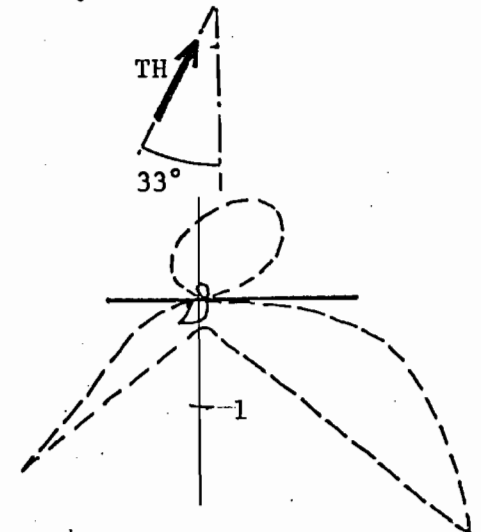
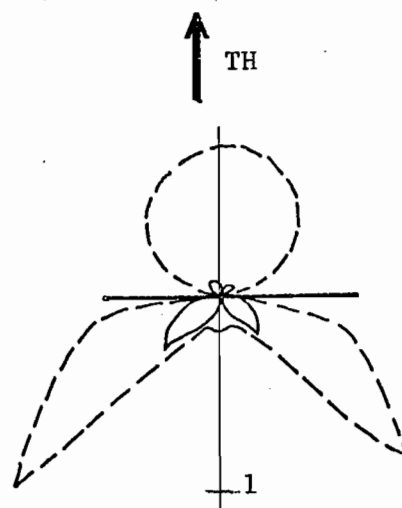
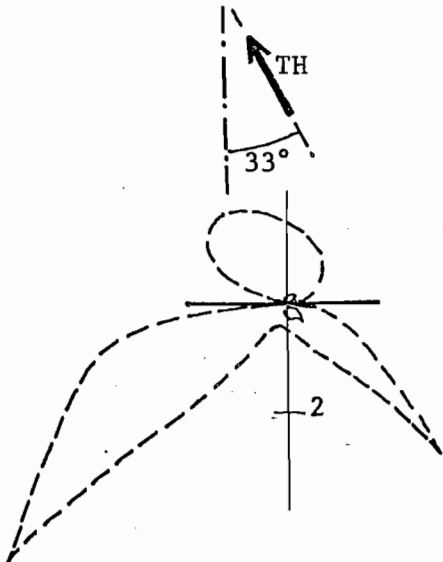
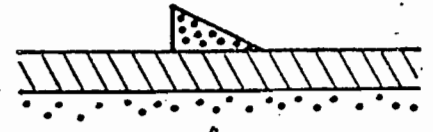
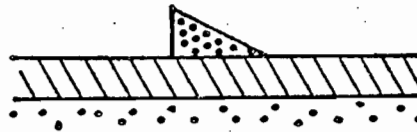
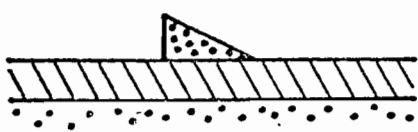
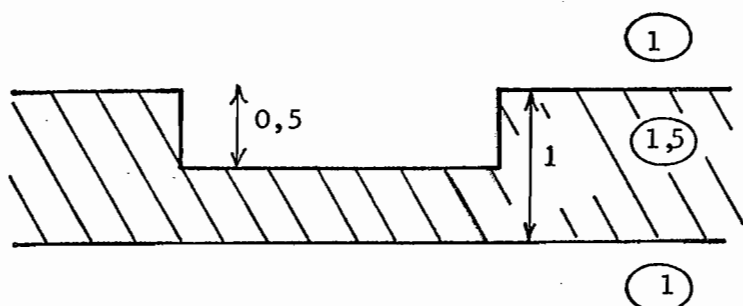


Figure 31 c



$$\Omega = 20^\circ$$

1 mode TE et 1 mode TH

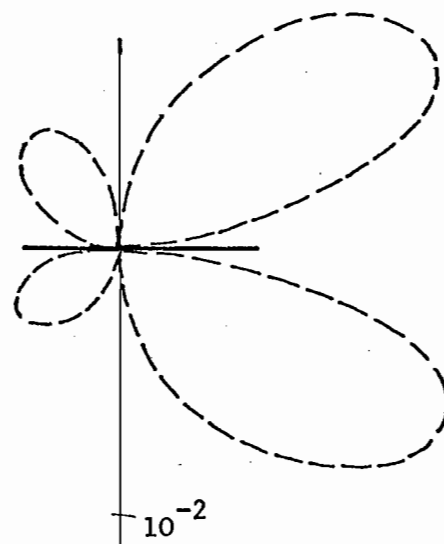
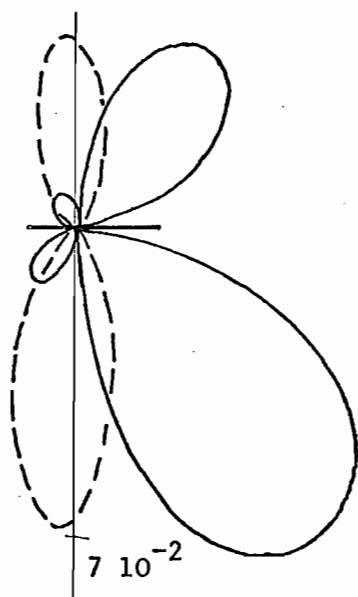
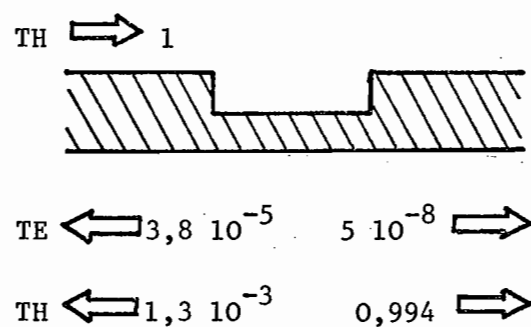
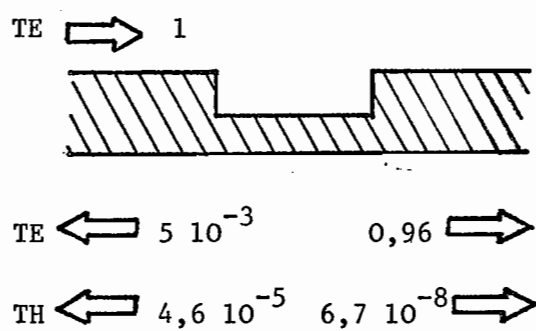


Figure 32

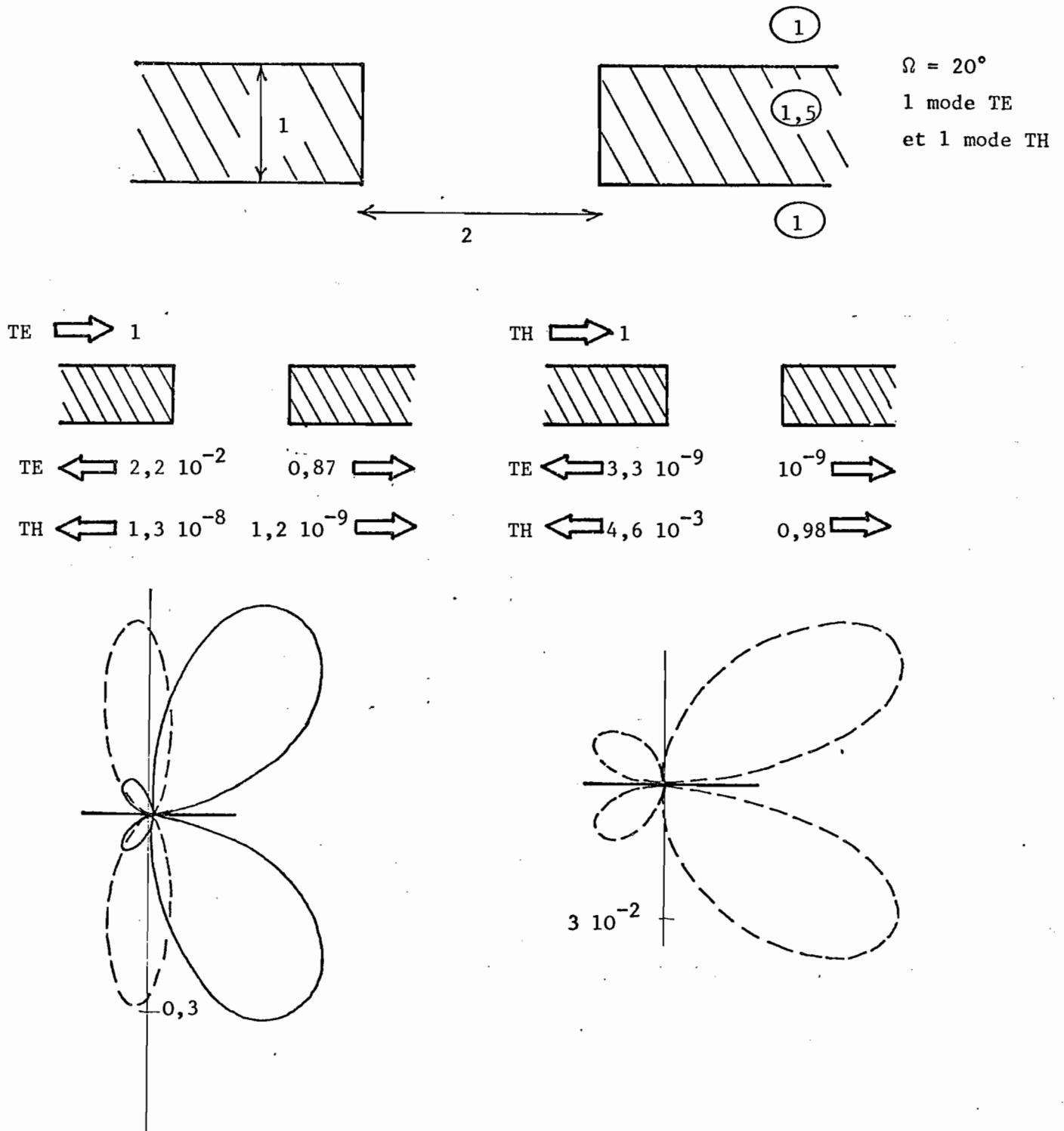


Figure 33

c) Réflexion et transmission des modes

Nous nous sommes particulièrement intéressés à l'étude des coefficients de réflexion, de transmission et de couplage entre les modes dans le cas de l'incidence oblique.

Supposons, pour simplifier les notations, que le guide admette un mode TE et un mode TH d'indices effectifs β_E et β_H .

Quand le mode TE d'intensité unité, attaque l'obstacle sous l'angle θ , le phénomène de diffraction permet d'observer (figure 34a) :

- un mode TE transmis (resp. réfléchi) d'intensité T_{EE} (resp. R_{EE}), et faisant avec Oz l'angle θ ;
- un mode TH transmis (resp. réfléchi) d'intensité T_{EH} (resp. R_{EH}) et faisant avec Oz un angle θ' déterminé par : $\beta_H \cos \theta' = \beta_E \cos \theta = \gamma$;
- un spectre continu diffracté au-dessus (resp. au-dessous) sous forme d'ondes planes dont la composante du vecteur d'onde selon Oz est γ .

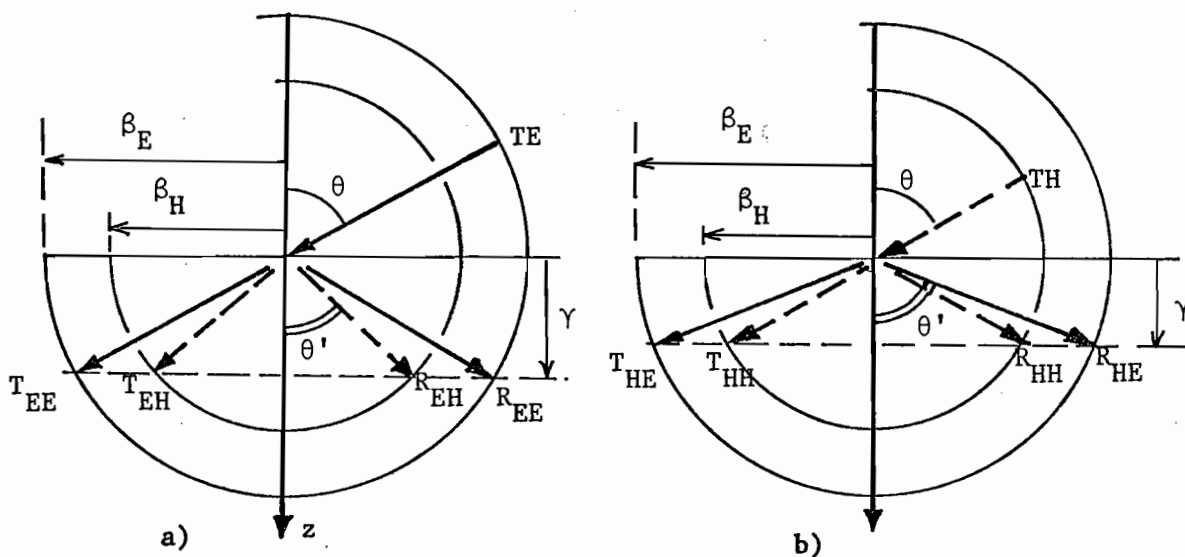


Figure 34

Si $\gamma > \max(n_h, n_d)$, le spectre continu est constitué d'ondes évanescentes et ne transporte aucune énergie. Toute l'énergie incidente se retrouve sur les modes : $T_{EE} + T_{EH} + R_{EE} + R_{EH} = 1$.

On a des notations analogues dans le cas d'un mode TH incident (figure 34 b).

Nous allons donner les résultats obtenus pour les diverses formes de rayures tracées sur un guide, représentées sur la figure 35 (rectangles ou trapèzes plus ou moins aplatis et plus ou moins larges).

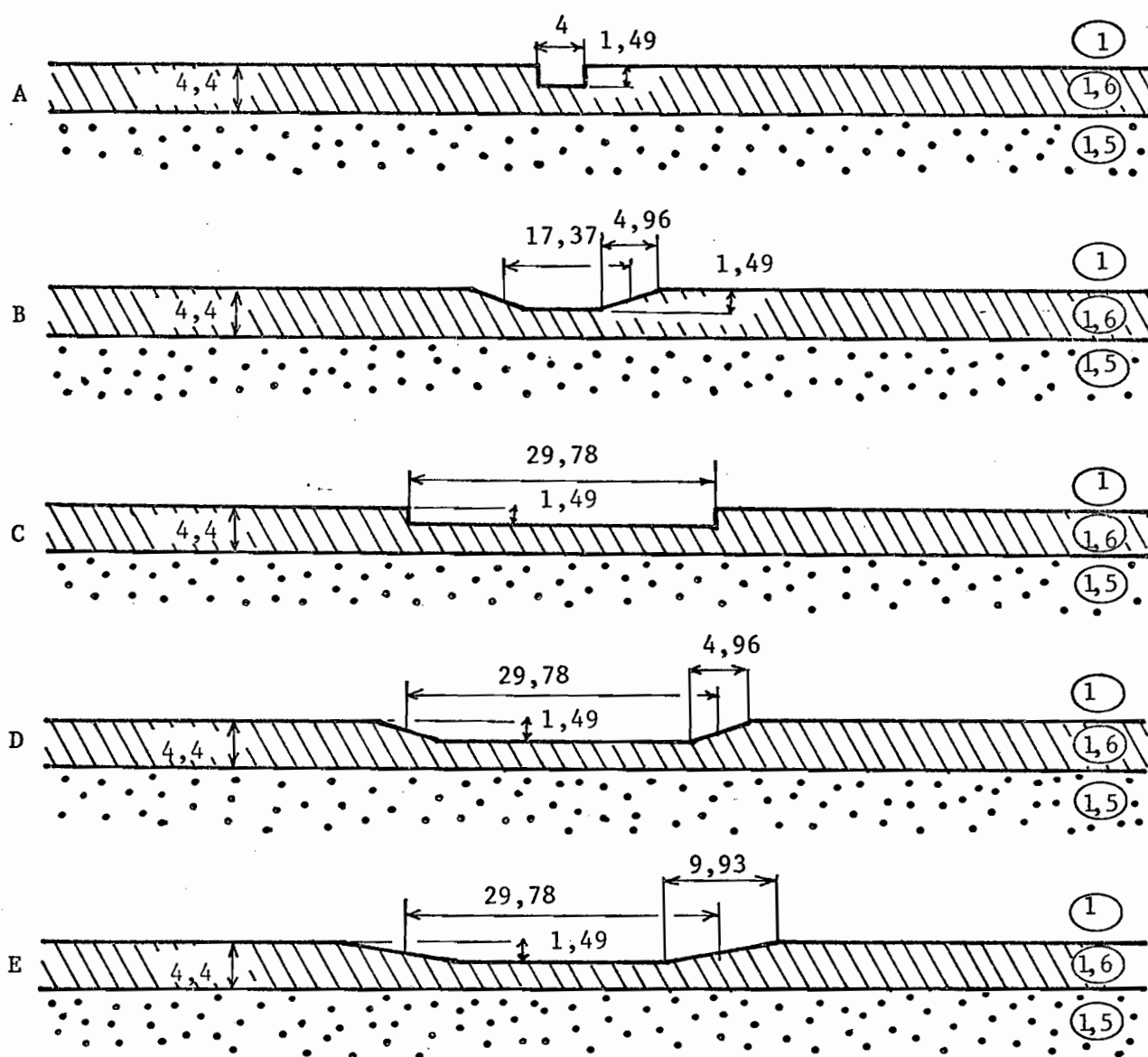


Figure 35

Un tel obstacle peut être utilisé comme un "diviseur de modes" dont il s'agit de connaître les performances. Les termes croisés T_{EH} , R_{EH} , T_{HE} , R_{HE} sont négligeables, et nous ne nous intéresserons qu'aux variations de R_{EE} , R_{HH} , T_{EE} , T_{HH} .

Il convient de remarquer que dans le cas d'un mode TE incident, $\gamma = \beta_E \cos \theta$, alors que dans le cas d'un mode TH, $\gamma = \beta_H \cos \theta$. Il ne sera donc pas indifférent de prendre pour variable γ ou θ si on veut comparer l'effet de l'obstacle dans les deux cas de polarisation.

α) L'énergie diffractée sous forme de modes, de même polarisation que le mode incident, est $R_{EE} + T_{EE}$ dans le cas d'un mode TE, et $R_{HH} + T_{HH}$ dans le cas d'un mode TH. La figure 36 représente les variations de ces quantités en fonction de γ . On voit que pour $\gamma > 1,5$ (indice du substrat), cette énergie est bien voisine de l'énergie incidente, alors que, dès que γ devient inférieur à l'indice du substrat, une partie appréciable est diffractée sous forme de faisceaux. On remarque que ces pertes augmentent avec la taille de l'obstacle et sont plus grandes pour un mode TH incident que pour un mode TE.

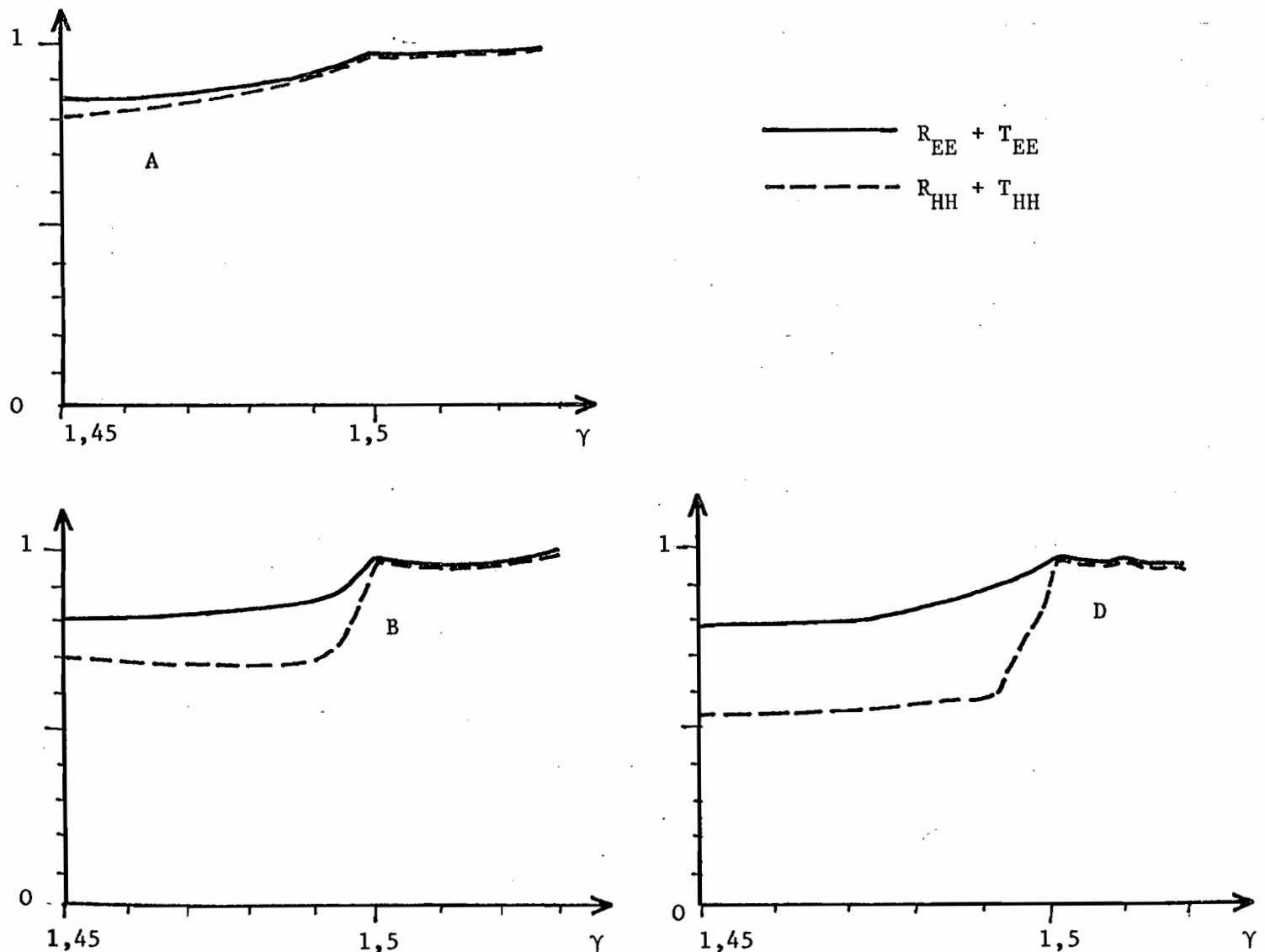


Figure 36

VARIATIONS DE $R_{EE} + T_{EE}$ et $R_{HH} + T_{HH}$

Les lettres A,B,D correspondent aux obstacles représentés sur la figure 35.

β) Donnons d'abord une idée générale des variations des coefficients de réflexion et de transmission en coordonnées polaires (figure 37).

L'obstacle est parallèle à Oz. Les courbes représentent le lieu de l'extrémité d'un vecteur parallèle à la direction du mode et de longueur R ou T. En-dessous, on a représenté le cas TE et en-dessus, le cas TH (puisque, compte-tenu de la symétrie du problème, il suffit de tracer les courbes pour θ variant de 0 à 90°).

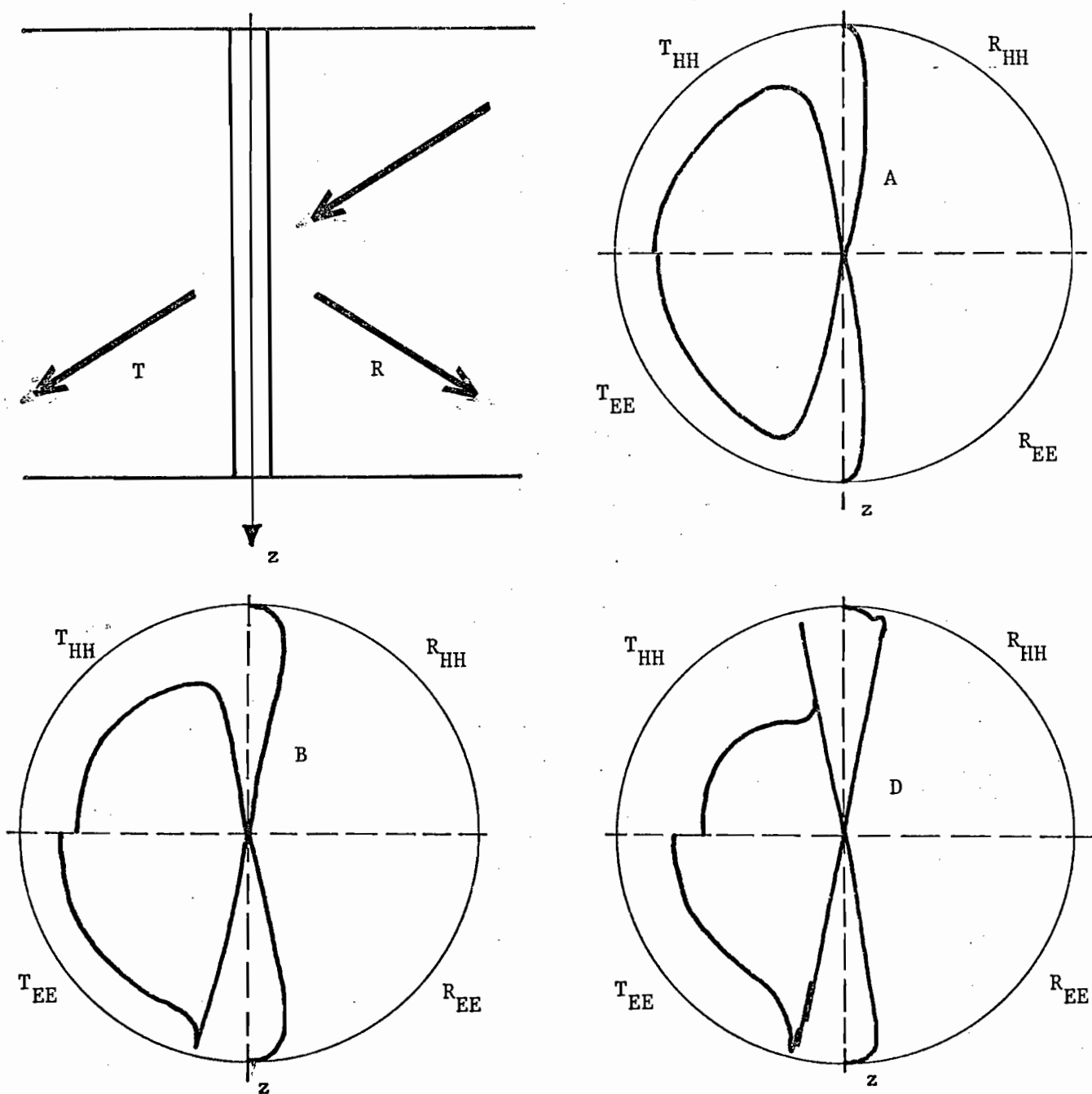


Figure 37

VARIATION DES COEFFICIENTS DE REFLEXION
ET DE TRANSMISSION EN COORDONNEES POLAIRES

γ) Dans le cas des obstacles de grande largeur (C,D,E), il se produit une variation brusque au voisinage d'un angle de l'ordre de 12° . Ces variations ne peuvent être suivies que sur des courbes en coordonnées cartésiennes à une plus grande échelle. Nous donnons ces courbes en prenant comme variable γ (figure 38) ou θ (figure 39).

On constate que si l'on prend comme variable θ , les courbes correspondant aux deux polarisations se confondent, ce qui limite les applications pratiques du dispositif comme polariseur.

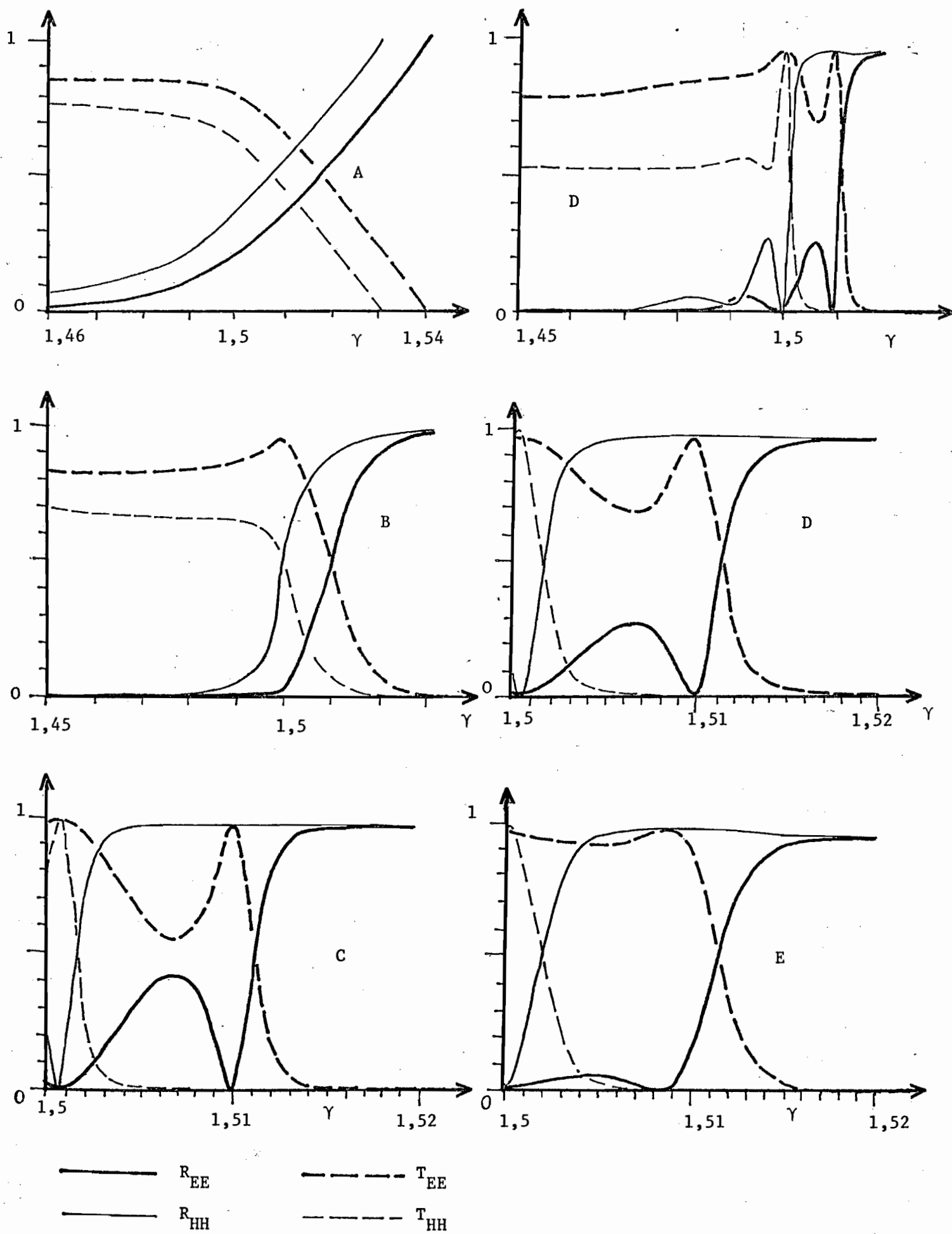


Figure 38

VARIABLE γ

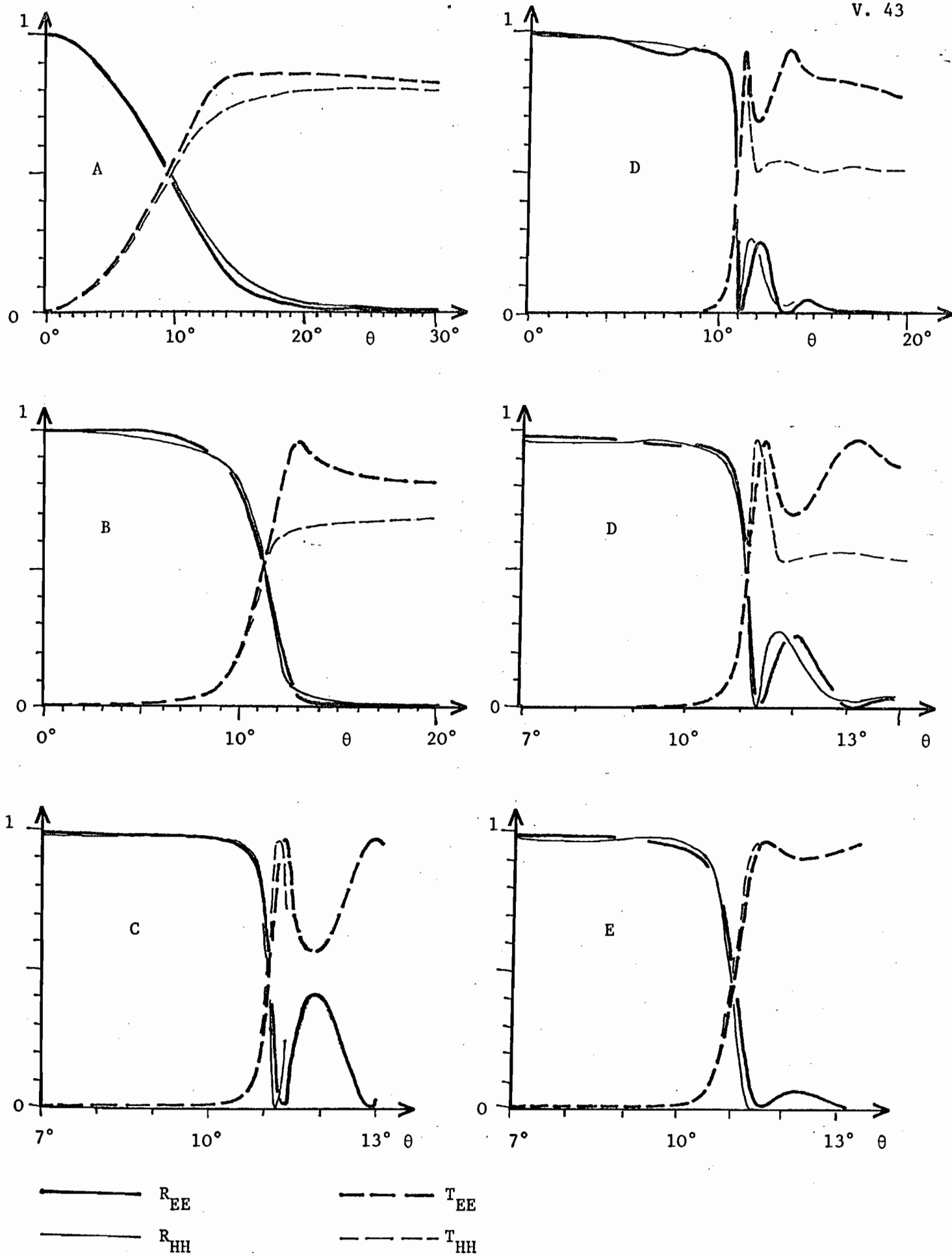
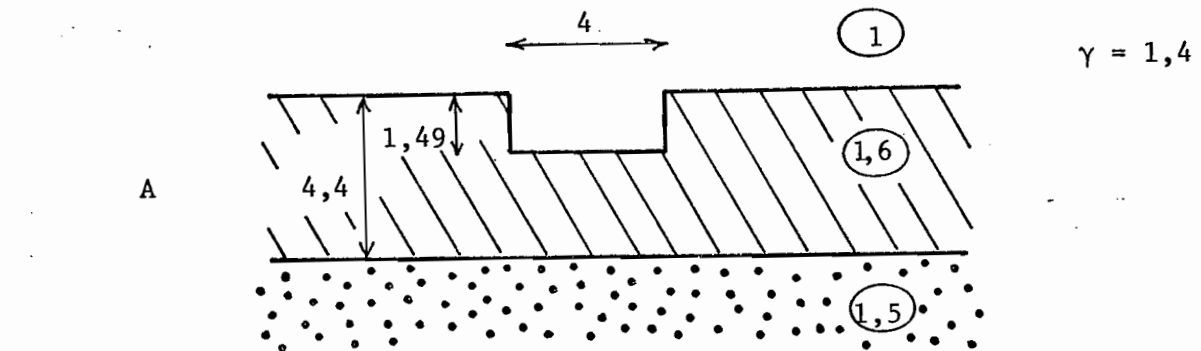


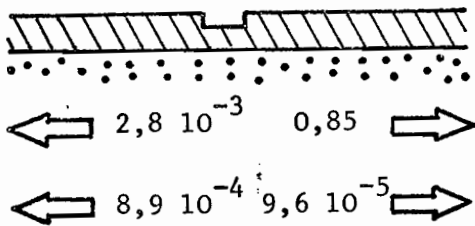
Figure 39

VARIABLE θ

δ) Donnons finalement quelques exemples de diagrammes de diffraction (figures 40, 41, 42, 43).



TE $\Rightarrow$ 1



TH $\Rightarrow$ 1

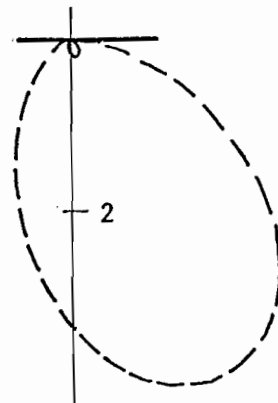
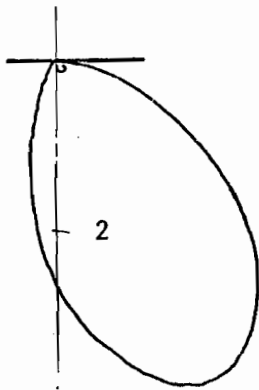
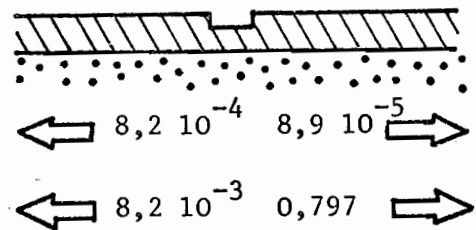


Figure 40

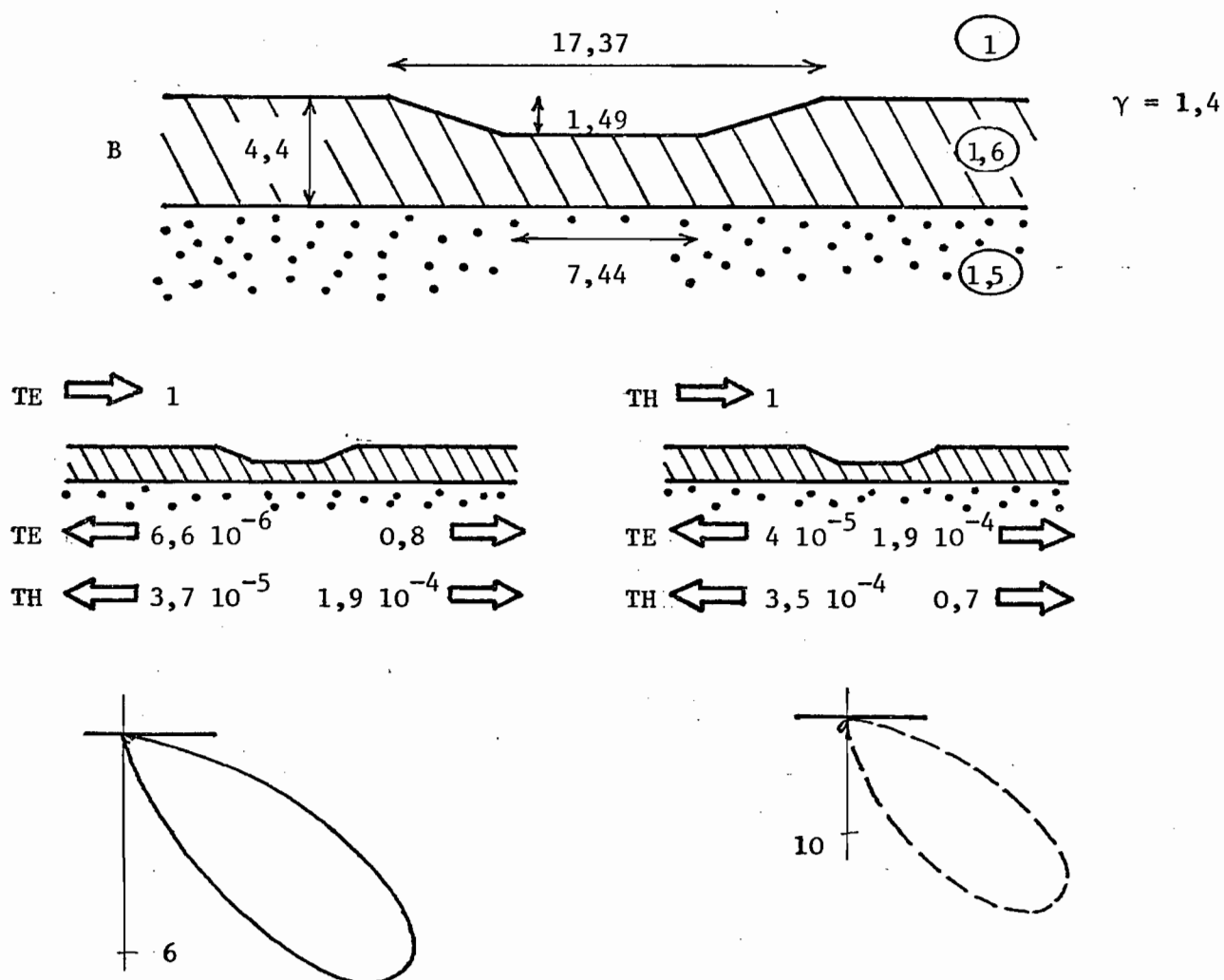


Figure 41

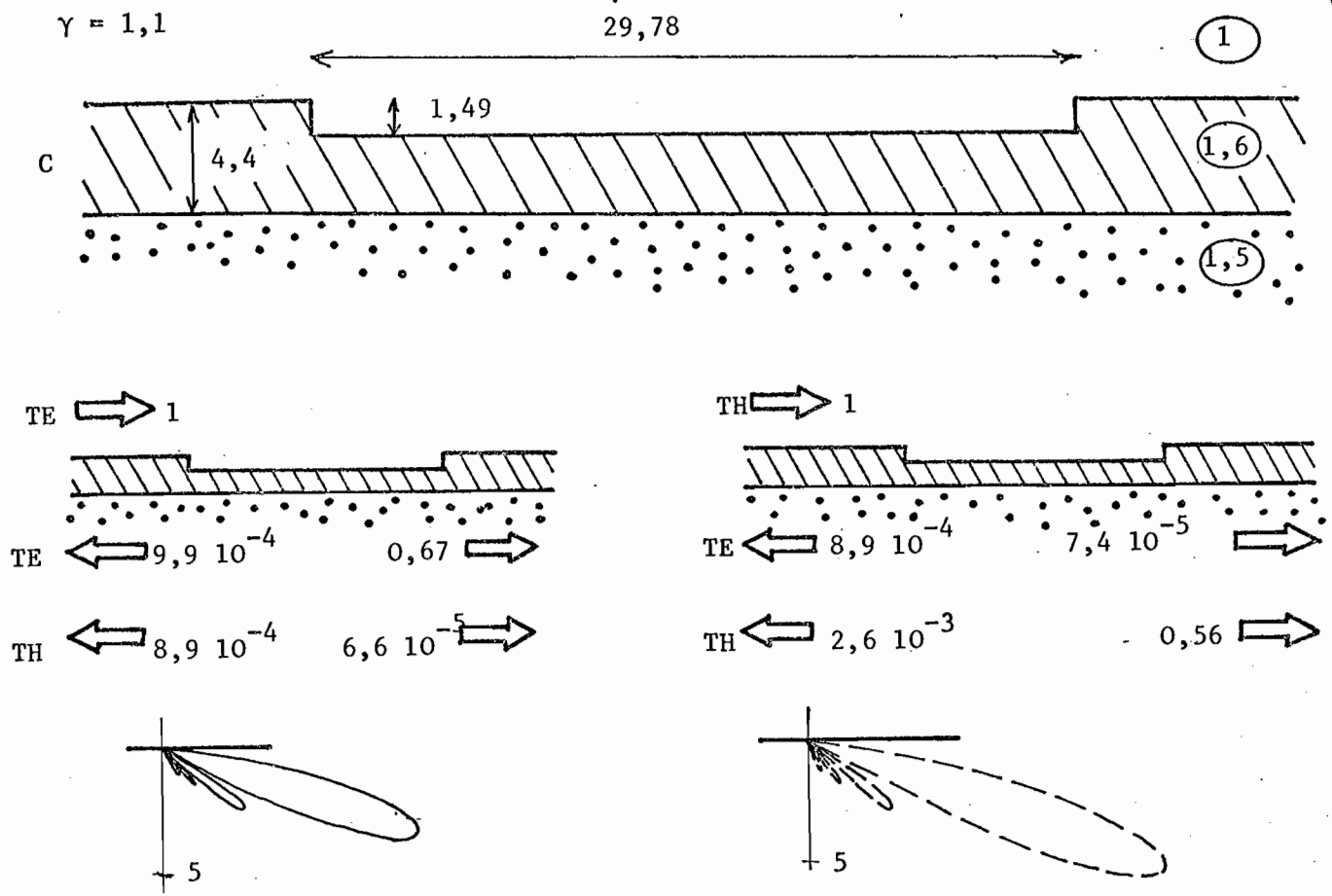


Figure 42

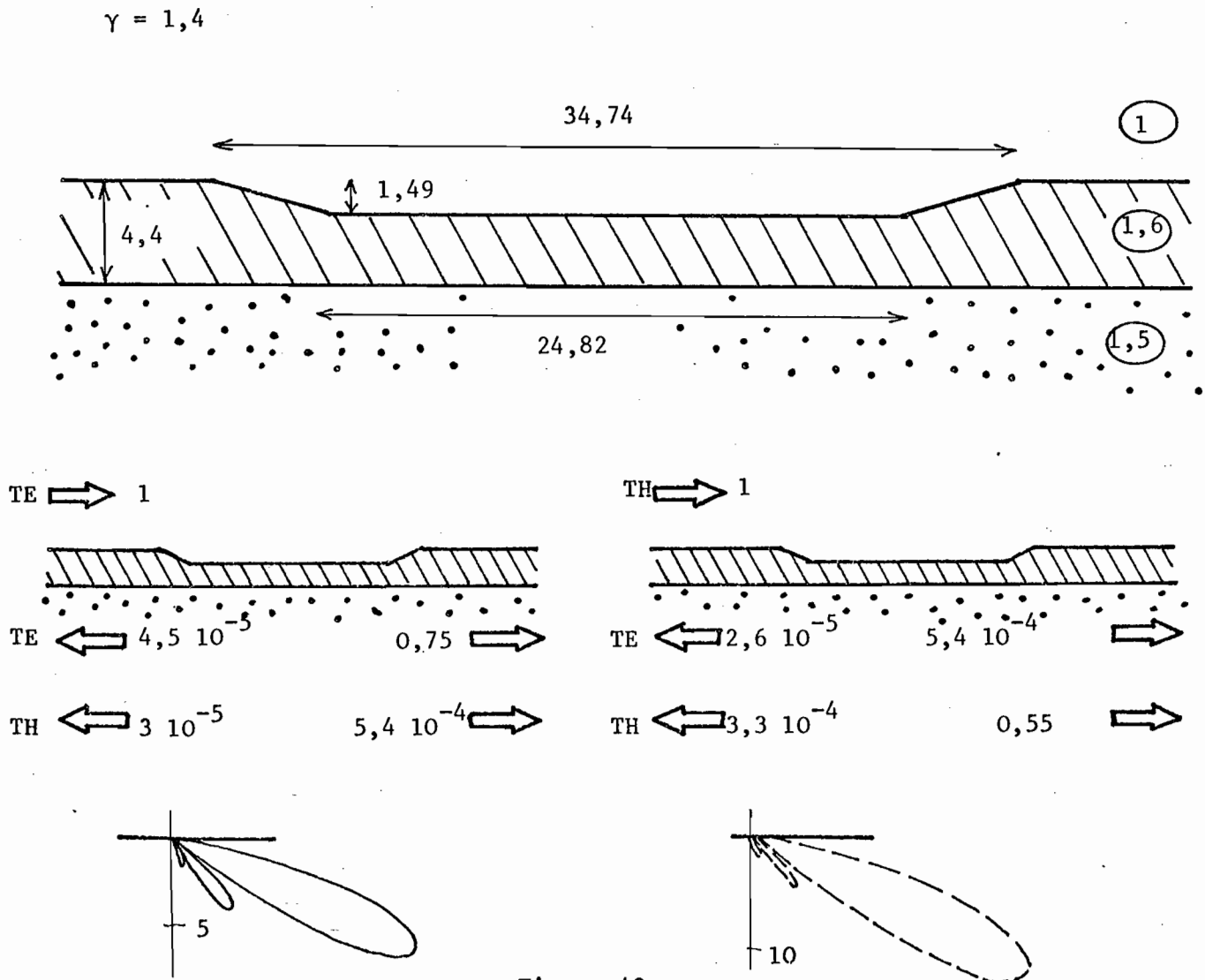


Figure 43

CHAPITRE VI

Méthodes approchées

Nous avons vu (§ IV.3 c γ) que le programme présenté au chapitre IV ne permet de traiter que des obstacles de dimension réduite (hauteur λ_0 , largeur $20 \lambda_0$). De tels obstacles sont en général difficilement utilisables dans les applications pratiques et en particulier en optique intégrée. Cela nous a incités à mettre au point des méthodes approchées valables pour des obstacles de plus grande dimension.

Ces méthodes approchées sont testées par comparaison au programme exact dans le domaine commun d'application. En cas de succès, on espère qu'elles continuent de fournir des résultats valables pour des obstacles de plus grande dimension et peuvent tout au moins donner un ordre de grandeur dans le cas des obstacles utilisés en optique intégrée.

Nous pensons que de telles méthodes approchées peuvent être des outils précieux pour "dégrossir" les problèmes expérimentaux et permettre d'orienter grâce à des calculs préliminaires des recherches plus précises utilisant la méthode exacte.

Toutes les méthodes approchées que nous avons expérimentées s'appliquent au cas où le guide non déformé admet des modes et se limitent au calcul des facteurs de réflexion, transmission, couplage entre ces modes. Le champ diffracté sous forme de faisceau au-dessus ou au-dessous de l'obstacle n'est jamais calculé bien que le calcul puisse en tenir compte dans certains cas. Le champ incident est toujours un mode venant de droite ou de gauche.

Le problème est alors formellement beaucoup plus simple, puisque les inconnues ne sont plus des fonctions mais un nombre restreint de scalaires représentant les amplitudes sur les modes.

En conséquence, les temps de calcul sont considérablement plus courts et on peut même dire que ces temps de calcul sont négligeables devant ceux nécessités par la méthode exacte.

Nous avons testé trois méthodes approchées.

1. PREMIERE METHODE APPROCHEE

Cette méthode approchée, très rudimentaire, consiste à associer à chaque valeur x_0 de x le guide plan d'indice $n(x_0, y)$.

On suppose que ce guide admet un seul mode TE d'indice effectif $\beta_G(x_0)$.

Comme le montre la figure 1a, le mode guidé attaque l'obstacle sous l'angle θ .

La méthode approchée consiste à remplacer l'obstacle par un modèle (figure 1b et 2) : un système de couches diélectriques d'indice $\beta_G(x)$ éclairé par une onde plane inclinée d'un angle θ par rapport au plan des couches. On suppose que les coefficients de réflexion et de transmission R' et T' donnés par des calculs élémentaires, constituent une bonne approximation de R et T .

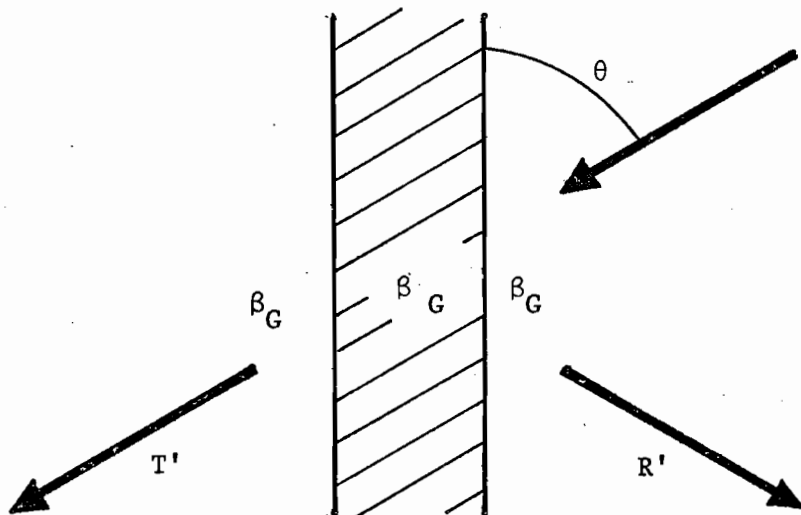
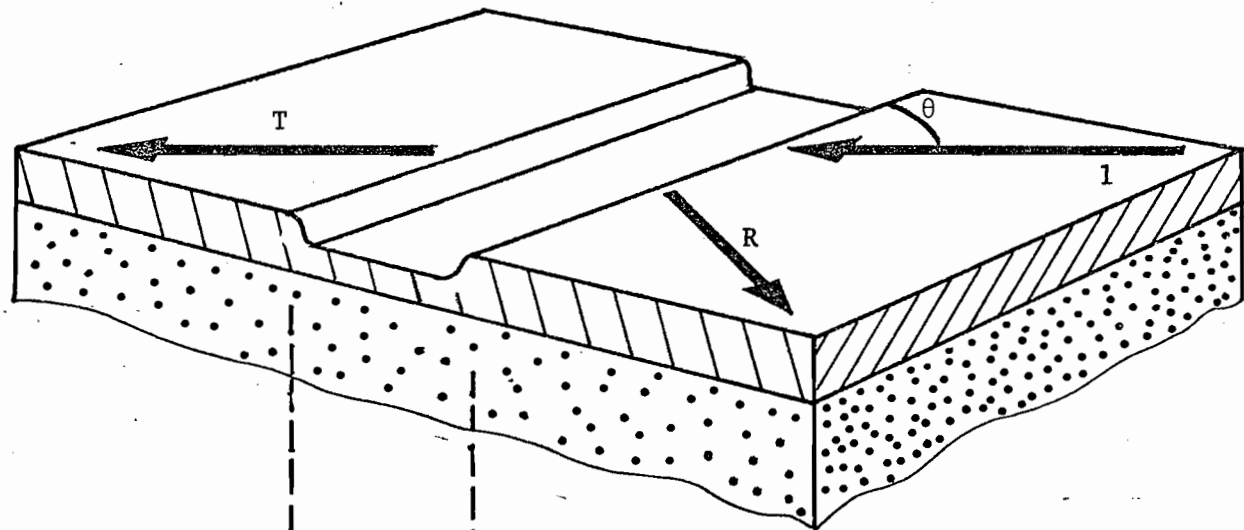
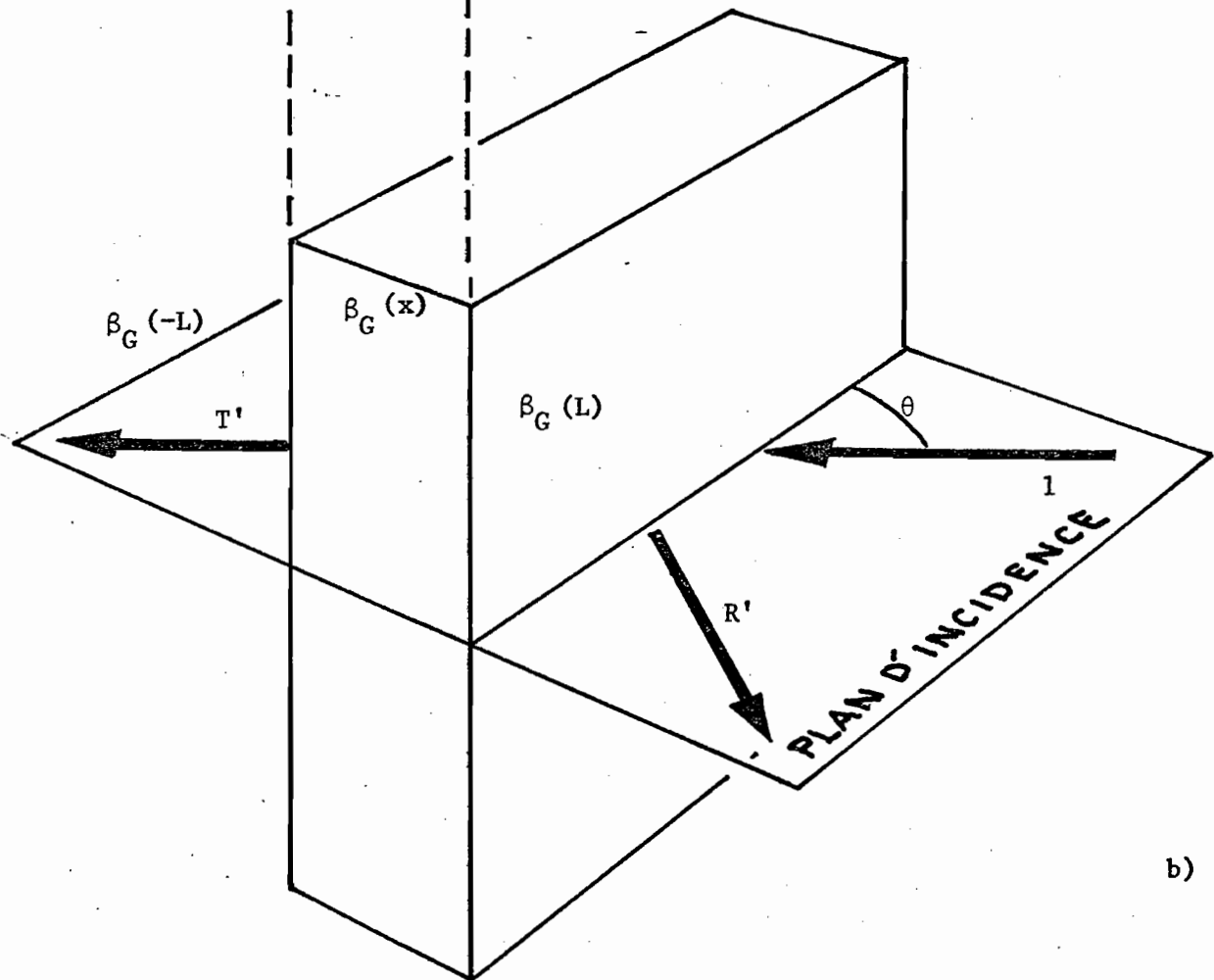


Figure 2



a)



b)

Figure 1

PRINCIPE DE LA PREMIERE METHODE APPROCHEE

Le calcul de R' et T' est très classique, mais on sait que le résultat dépend de la polarisation. Ceci nous pose le problème suivant : quelle polarisation doit avoir l'onde incidente dans le modèle de la figure 2 ?

Pour trancher cette difficulté, nous avons fait le calcul dans les deux cas usuels de polarisation rectiligne et dans le cas très simple où l'obstacle est un guide comportant un rétrécissement d'épaisseur constante sur une largeur h . Dans ces conditions, $\beta_G(x)$ prend deux valeurs : β_G en dehors de la déformation, β'_G dans la déformation, et l'obstacle modèle est une couche diélectrique d'épaisseur h , d'indice β'_G plongée dans un milieu homogène d'indice β_G (figure 3).

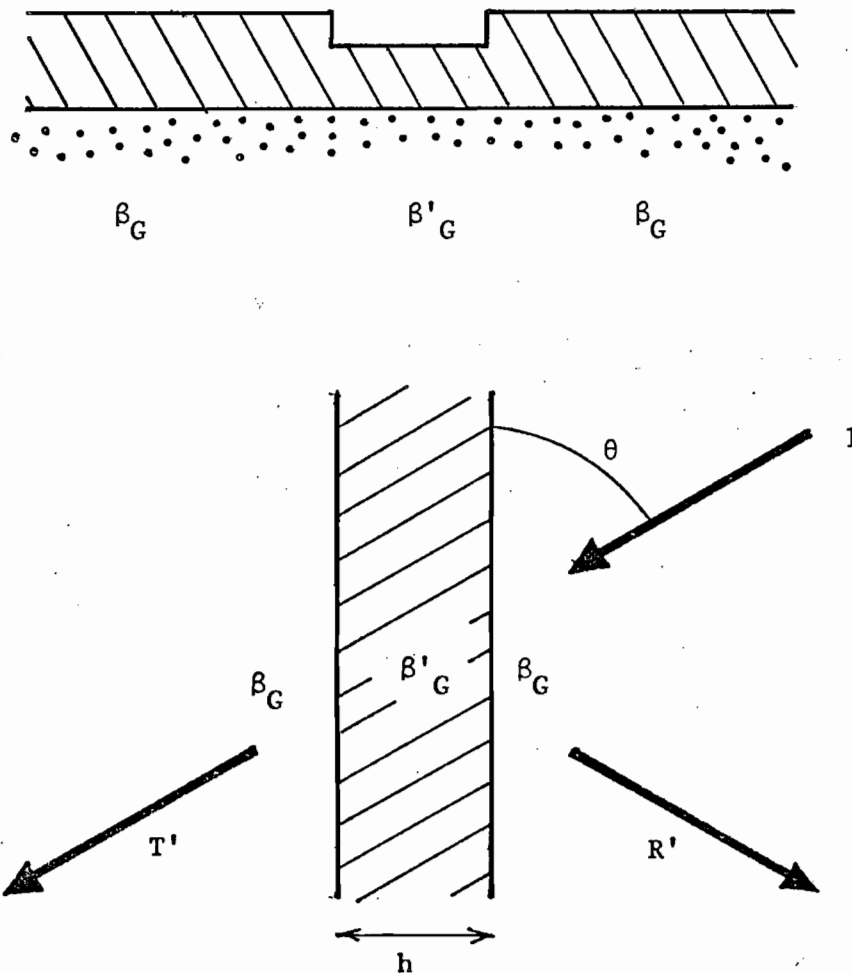


Figure 3

On obtient :

$$R' = \frac{[(u^2 - 1) \sin \chi' h]^2}{[(1+u^2) \sin \chi' h^2] + [2u \cos \chi' h]^2} \quad (1)$$

$$T' = 1 - R'$$

$$\text{où } \chi' = \sqrt{\beta_G'^2 - \beta_G^2 \cos^2 \theta}$$

$$\chi = \beta_G \sin \theta$$

$$u = \begin{cases} \frac{\chi}{\chi'} & \text{dans le cas TE} \\ \frac{\chi}{\chi'} \left(\frac{\beta_G'}{\beta_G} \right)^2 & \text{dans le cas TH} \end{cases}$$

La figure 4 permet de comparer les résultats donnés par la méthode exacte à ceux fournis par la méthode approchée dans les deux cas de polarisation. Dans les deux cas, on obtient une bonne approximation et il est difficile de dire quelle est la polarisation qui conduit au meilleur résultat. Il est donc indifférent d'utiliser un cas ou l'autre.

La formule 1 montre que R' s'annule pour $\sin \chi' h = 0$ c'est-à-dire pour les angles θ tels que $\beta_G'^2 - \beta_G^2 \cos^2 \theta = p \frac{\pi^2}{h^2}$ (p entier).

Nous avons également fait le calcul général dans le cas d'autres obstacles étudiés au chapitre V (figure V35). Les résultats obtenus sont représentés sur les figures 5 et 6.

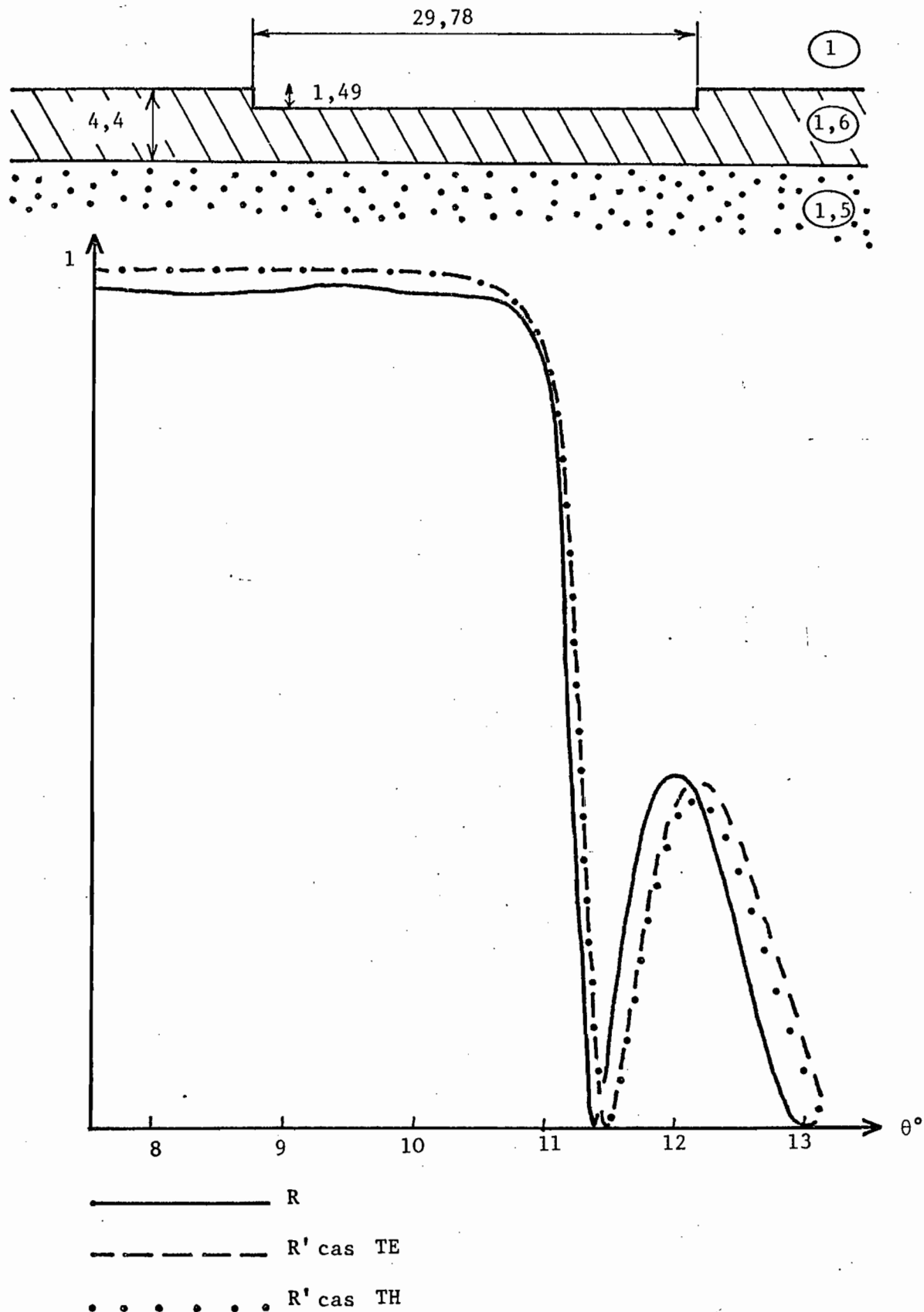


Figure 4

COMPARAISON DES RESULTATS DE LA METHODE EXACTE (CAS TE) A CEUX DE LA METHODE APPROCHEE (CAS TE ET CAS TH). ON A POUR L'OBSTACLE REPRESENTÉ CI-DESSUS :

$$\beta_G = 1,54059, \beta'_G = 1,53048$$

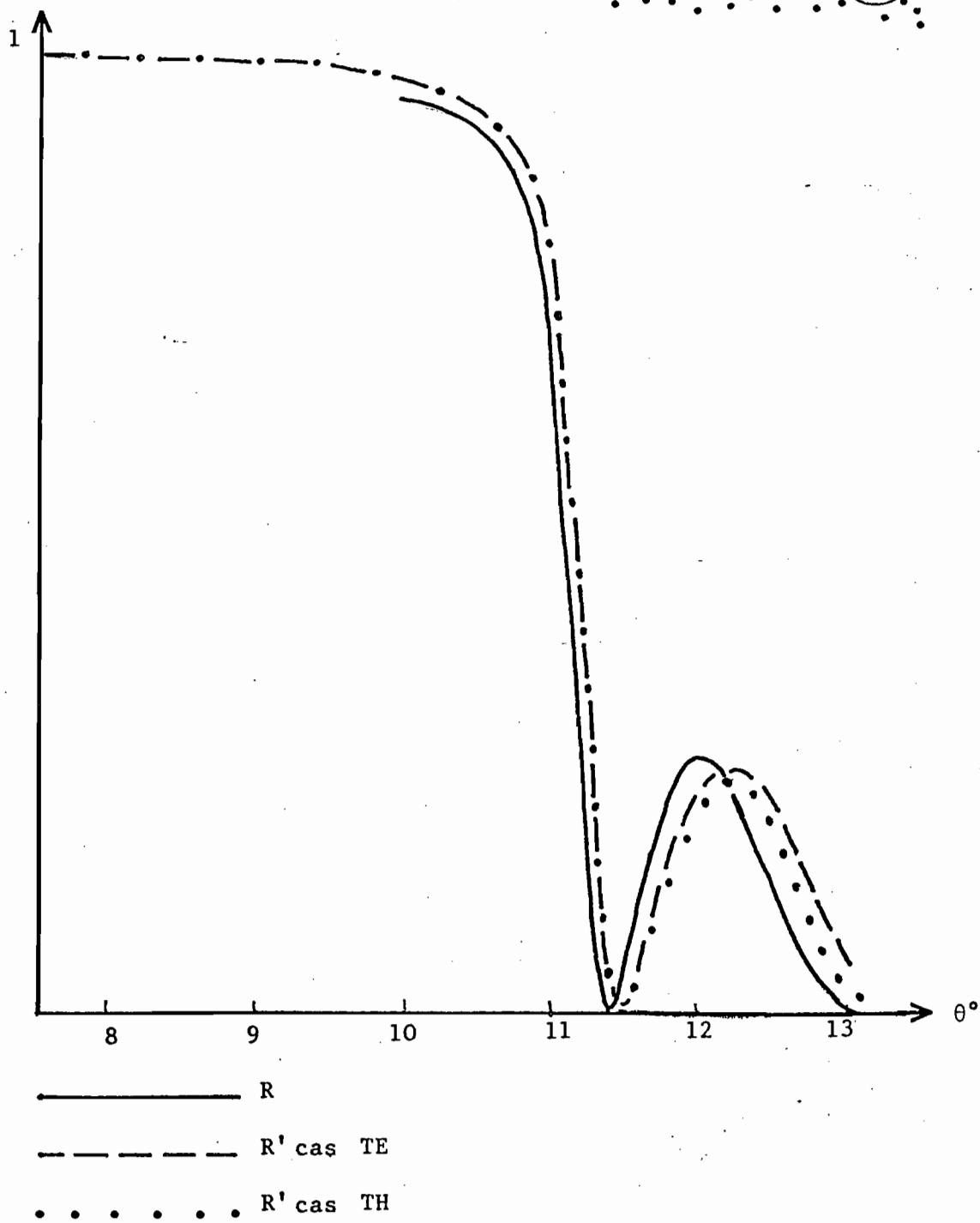
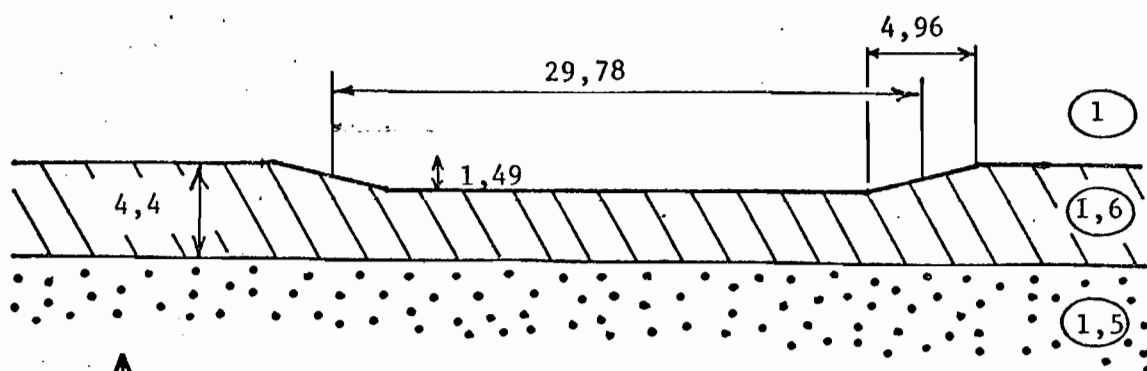


Figure 5

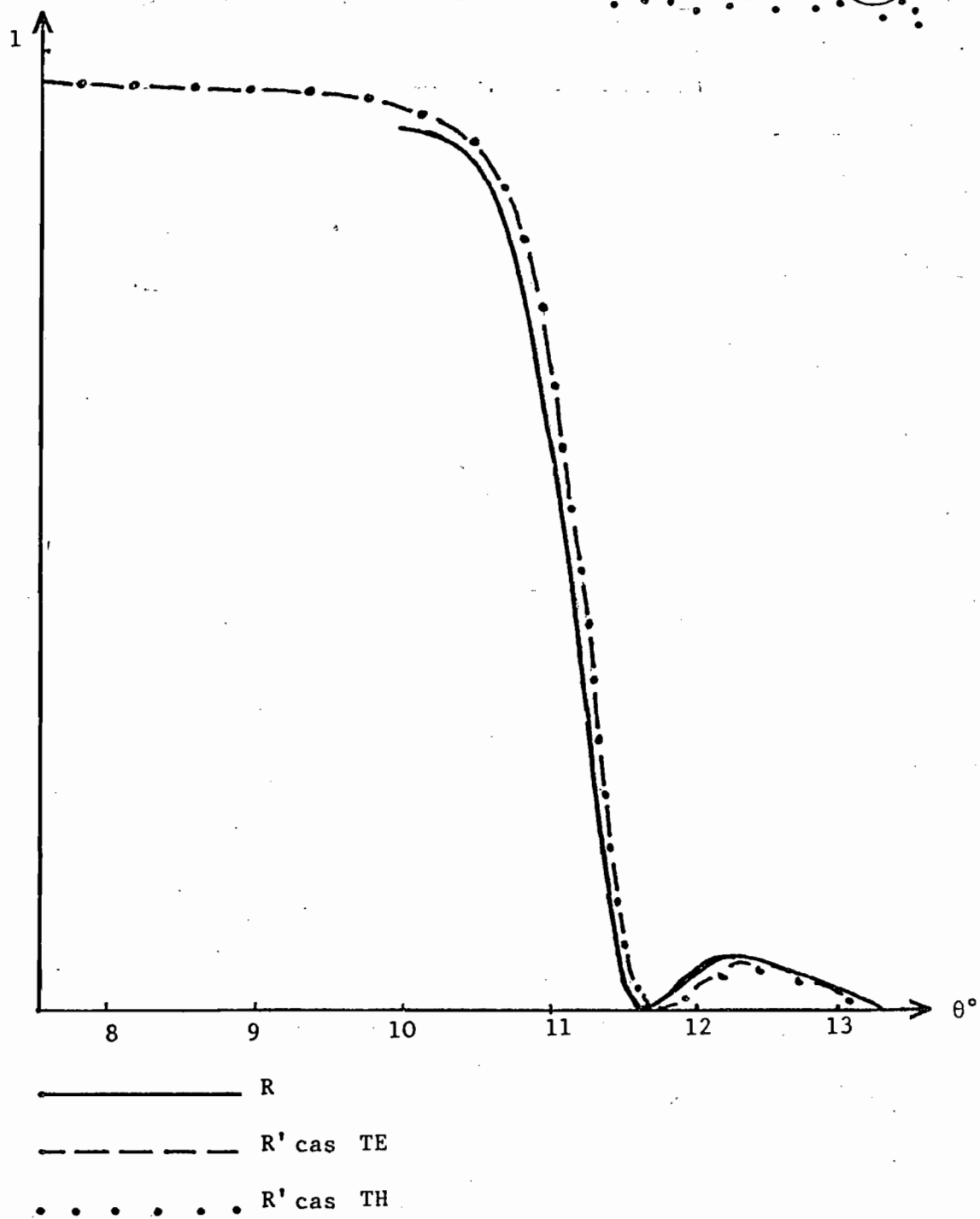
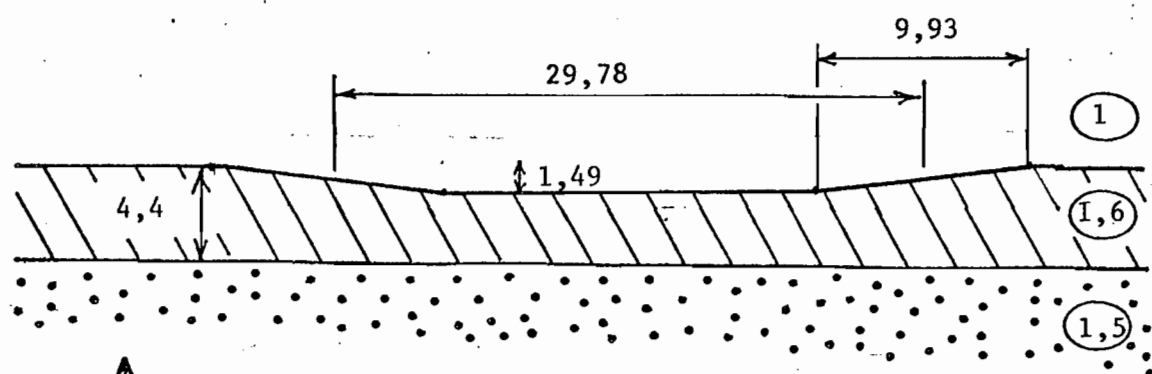


Figure 6

Nous nous sommes limités, pour présenter cette méthode approchée, au cas où l'obstacle était attaqué par un mode TE. Pour traiter le cas d'un mode TH incident, il suffit de remplacer l'indice effectif du mode local TE par celui du mode TH.

Les exemples traités montrent qu'une telle méthode approchée donne une bonne idée des phénomènes. Cependant, elle ne tient absolument pas compte des ondes rayonnées sous forme de spectre continu et ne donne plus de résultats valables quand ces ondes correspondent à une part importante de l'énergie incidente. De plus, elle ne permet pas de traiter un couplage TE-TH puisque chaque mode du guide est traité indépendamment des autres.

2. SECONDE METHODE APPROCHEE : COUPLAGE DES MODES

La méthode que nous allons décrire dans ce paragraphe permet de traiter le couplage entre modes. Nous allons d'abord la présenter dans le cas d'un exemple simple.

a) Exemple du cas E // pour un guide monomode, forme simplifiée de la méthode approchée

α) Principe de la méthode

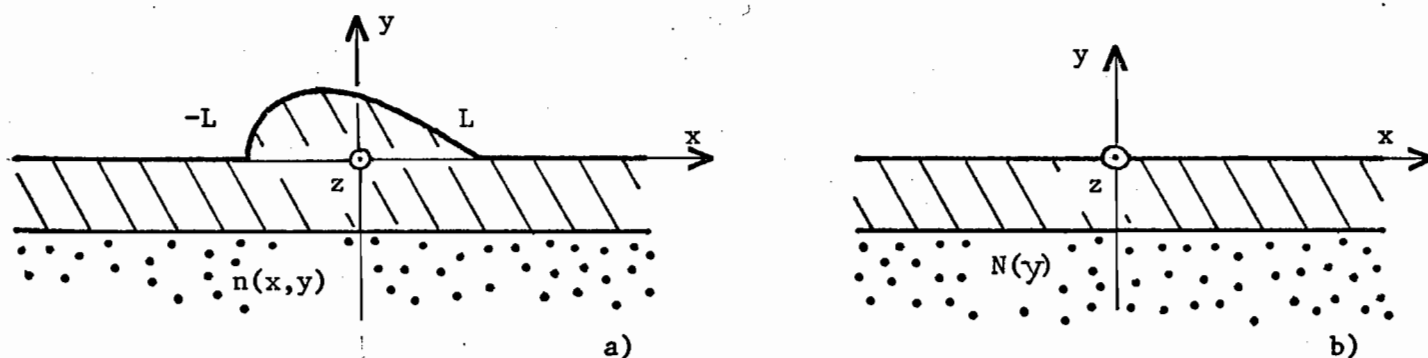


Figure 7

a) Obstacle, b) guide non déformé

Rappelons que l'obstacle est décrit par son indice $n(x,y)$ (figure 7). En dehors de la zone déformée, $n(x,y) = N(y)$ indice du guide non déformé. L'unité de longueur est $\lambda_0 / 2\pi$. Le champ électrique étant parallèle à l'axe des z sera décrit par son unique composante $E(x,y)$.

Le guide non déformé admet un seul mode TE d'indice effectif β_G , dont "la carte du champ ψ " est déterminée par l'équation :

$$\frac{d^2 \psi}{dy^2} + (N^2 - \beta_G^2) \psi = 0, \quad (2)$$

et la condition de normalisation :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi^2 dy = 1. \quad (3)$$

L'obstacle est attaqué par ce mode guidé venant de la gauche.

Posons :

$$c(x) = \int_{-\infty}^{\infty} E(x,y) \psi(y) dy. \quad (4)$$

Un calcul élémentaire montre que c vérifie l'équation :

$$\frac{d^2 c}{dx^2} + \beta_G^2 c = \int_{-\infty}^{\infty} (N^2 - n^2) E(x,y) \psi(y) dy. \quad (5)$$

Comme à l'extérieur de la partie déformée, $n = N$, l'intégrale qui figure au second membre de l'équation (5) est nulle en dehors de l'intervalle $|x| \leq L$. L'équation (5) prend alors la forme :

$$\frac{d^2 c}{dx^2} + \beta_G^2 c = 0. \quad (6)$$

On a donc l'expression de C en dehors de la partie déformée :

$$\begin{cases} \text{si } x < -L : c(x) = \exp(i \beta_G x) + r \exp(-i \beta_G x) \\ \text{si } x > L : c(x) = t \exp(i \beta_G x), \end{cases} \quad (7)$$

où r et t sont les coefficients de réflexion et de transmission du mode.

Pour que l'équation (5) permette de déterminer c , il faudrait connaître $E(x,y)$. La méthode approchée consiste à supposer que, pour x fixé, $E(x,y)$ est proportionnel à $\psi(y)$ c'est-à-dire que :

$$E(x,y) = c(x) \psi(y) \quad (8)$$

Dans ces conditions, l'équation (5) s'écrit :

$$\frac{d^2 c}{dx^2} + \phi^2(x) c(x) = 0 \quad (9)$$

avec

$$\phi^2 = \beta_G^2 - \int_{-\infty}^{\infty} (N^2 - n^2) \psi^2(y) dy.$$

L'équation (9) est l'équation qui décrit le comportement du champ dans une lame d'indice $\phi(x)$ lorsque cette lame est attaquée par une onde plane sous incidence normale.

On voit plus précisément, compte tenu de l'expression de c en dehors de la partie déformée (7), que r et t sont les coefficients de réflexion et de transmission de cette onde plane. Ce problème n'offre pas de difficultés numériques.

β) Exemples de résultats

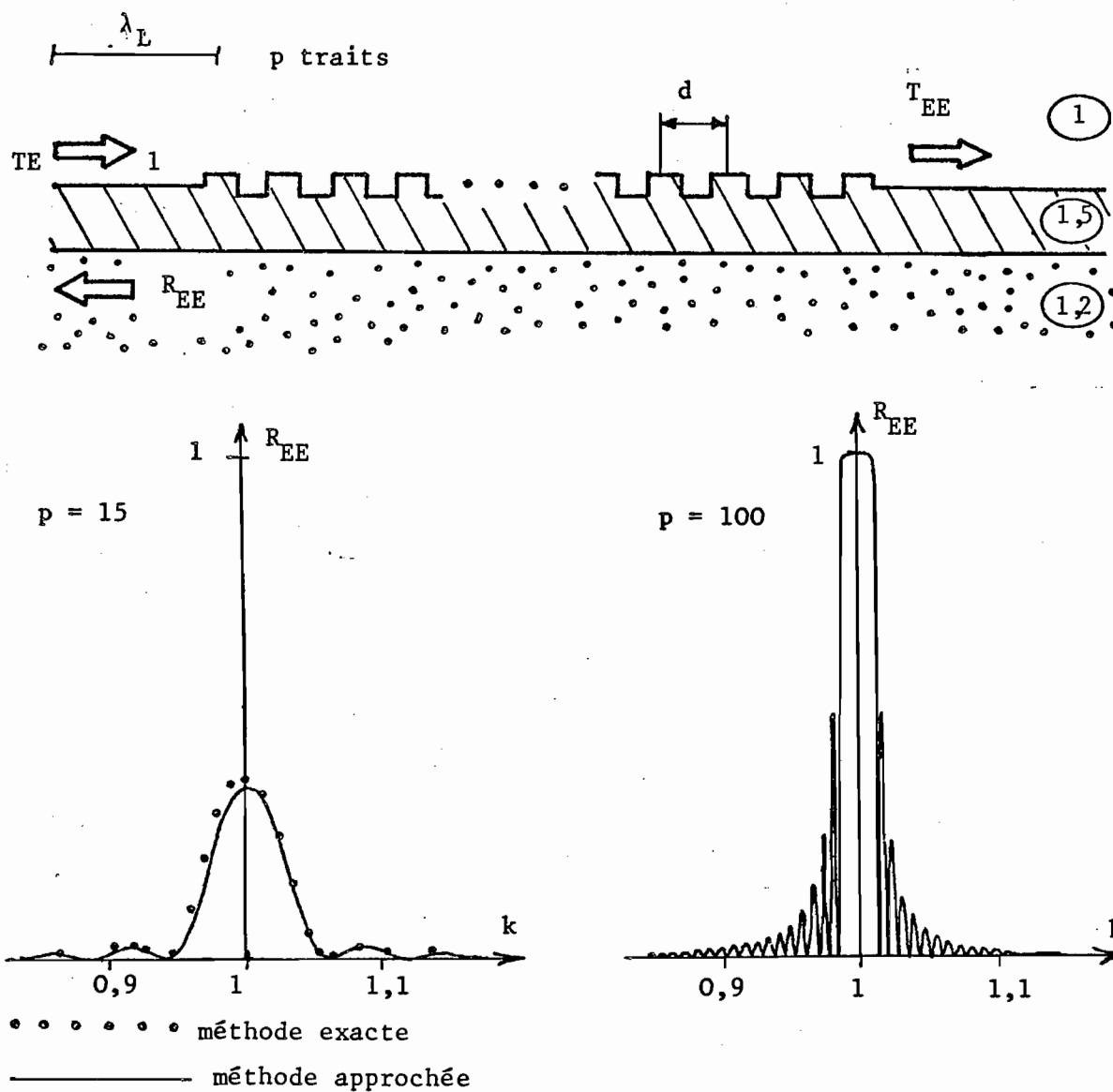


Figure 8

L'obstacle, constitué par p traits d'un réseau tracés sur un guide est attaqué par un mode venant de la gauche (figure 8). Le pas d du réseau est tel que, pour la longueur d'onde λ_L , le mode réfléchi coïncide avec l'ordre -1 du réseau comme dans un montage de Littrow. Pour une longueur d'onde $\lambda_0 \neq \lambda_L$, ceci n'est plus vrai : il y a à la fois variation de l'indice effectif du mode et de λ_0/d . Nous avons étudié les variations de $R = |r|^2$ en fonction de $k = \lambda_L/\lambda_0$ pour $p = 15$ traits, à la fois par la méthode exacte et par la méthode approchée. La bonne concordance entre les deux séries de résultats permet de penser que la méthode approchée continue de donner des résultats valables pour des valeurs de p plus élevées.

L'étude du réseau infini (réalisée par P. Vincent) avait permis de mettre en évidence une bande interdite au voisinage de la longueur d'onde λ_L .

L'étude réalisée grâce à la méthode approchée montre que, pour qu'un tel phénomène soit observé, il faut un minimum d'une centaine de traits, ce qui correspond à un obstacle de largeur $40 \lambda_0$.

b) Généralisation au cas de l'incidence oblique

$\alpha)$ Principe

Nous nous proposons ici de généraliser la méthode approchée exposée ci-dessus dans le cas E //, au cas de l'incidence oblique, et d'en tester la validité par quelques exemples numériques.

De plus, au paragraphe a, l'obstacle $n(x,y)$ était comparé au guide non déformé $N(y)$. Plus précisément, le champ était décomposé pour chaque valeur de x sur les modes du guide non déformé. Dans le cas d'un obstacle comme celui de la figure 4, une telle méthode n'est certainement pas idéale, car dans la partie centrale, le guide se transforme en un autre guide, et il semble préférable de décomposer le champ sur les modes de ce nouveau guide. Dans ce but, nous avons cherché à comparer l'obstacle, non plus simplement au guide non déformé, mais à un "obstacle test" $n_o(x,y)$ (figure 9).

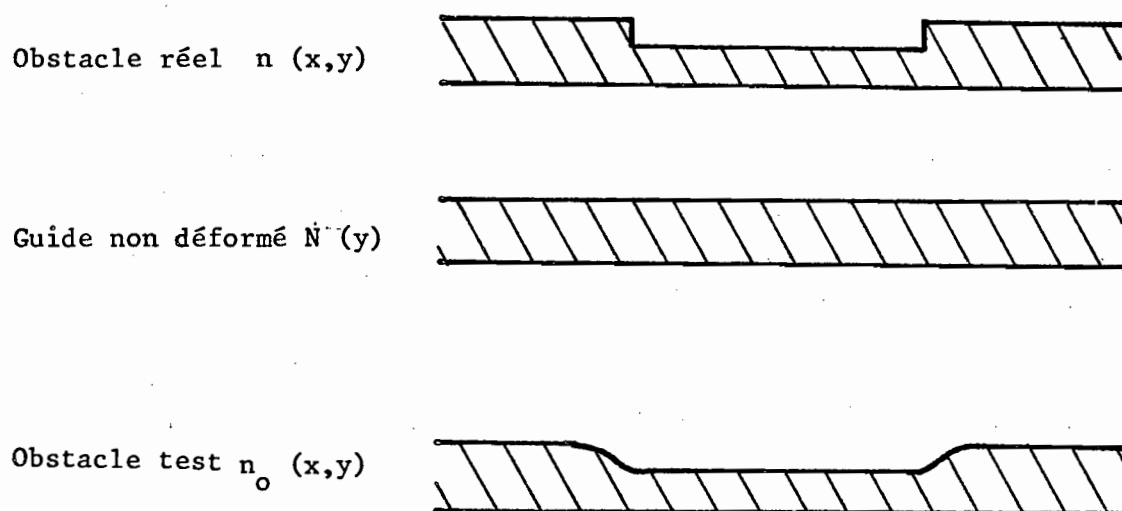


Figure 9

A chaque valeur x_o de x , on associe le guide d'indice $N_o(y) = n_o(x_o, y)$, et on suppose que ce guide admet le même nombre m de modes que le guide non déformé (figure 10).

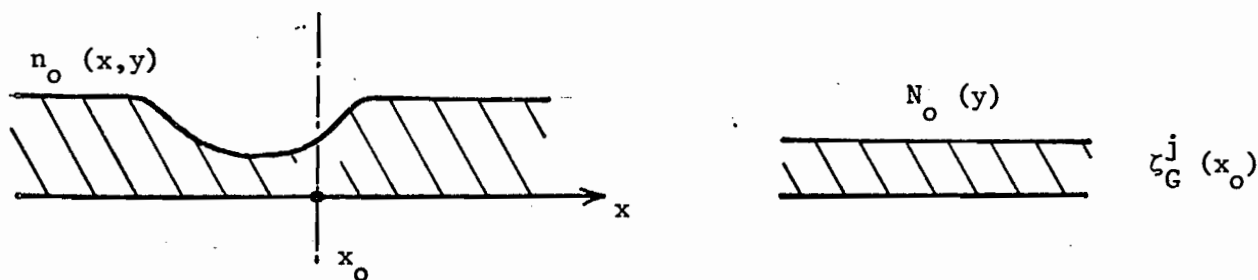


Figure 10

Soient $\zeta_G^j(x_0)$ les constantes de propagation de ces modes suivant Ox ($j = 1, \dots, 2m$). On définit une famille de $2m$ fonctions :

$$\begin{aligned}\vec{E}_G^j(x, y) &= \vec{E}_G^j(x, y) e^{-2\pi i \int_0^x \zeta_G^j(x) dx} e^{-i\gamma z} \\ \vec{H}_G^j(x, y) &= \vec{H}_G^j(x, y) e^{-2\pi i \int_0^x \zeta_G^j(x) dx} e^{-i\gamma z},\end{aligned}\quad (10)$$

solutions, non des équations de Maxwell, mais du système :

$$\begin{cases} \text{rot } \vec{E}_G^j = i \vec{H}_G^j + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\partial E_G^j}{\partial x} \\ \frac{\partial E_G^j}{\partial y} \end{pmatrix} e^{-2\pi i \int_0^x \zeta_G^j(x) dx} e^{-i\gamma z} \\ \text{rot } \vec{H}_G^j = -i n_0^2(x, y) \vec{E}_G^j + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\partial H_G^j}{\partial x} \\ \frac{\partial H_G^j}{\partial y} \end{pmatrix} e^{-2\pi i \int_0^x \zeta_G^j(x) dx} e^{-i\gamma z} \end{cases} \quad (11)$$

Dans le système différentiel (11), les termes complémentaires du second membre servent à annuler la contribution aux rotationnels des dérivées en x de E^j et H^j .

Dans ces conditions, pour $x = x_0$ fixé, le champ :

$$\begin{cases} \left[\vec{E}_G^j(x_0, y) e^{-2\pi i \int_0^{x_0} \zeta_G^j(x) dx} \right] e^{-2\pi i (x-x_0) \zeta_G^j(x_0)} e^{-i\gamma z} \\ \left[\vec{H}_G^j(x_0, y) e^{-2\pi i \int_0^{x_0} \zeta_G^j(x) dx} \right] e^{-2\pi i (x-x_0) \zeta_G^j(x_0)} e^{-i\gamma z} \end{cases} \quad (12)$$

représente le champ d'un mode du guide d'indice $n_0(x_0, y)$.

Si $\vec{E}$ et $\vec{H}$ sont les solutions des équations de Maxwell en présence du guide déformé.

$$\begin{cases} \text{rot } \vec{E} = i \vec{H} \\ \text{rot } \vec{H} = -i n^2 \vec{E} \end{cases} \quad (13)$$

Un calcul élémentaire d'analyse vectorielle, montre que

$$\operatorname{div} (\vec{E} \wedge \vec{H}_G^j - \vec{E}_G^j \wedge \vec{H}) = i (n_o^2 - n^2) \vec{E} \cdot \vec{E}_G^j$$

$$- \left[\vec{E} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\partial H_{Gz}^j}{\partial x} \\ \frac{\partial H_{Gy}^j}{\partial x} \end{pmatrix} + \vec{H} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\partial E_{Gz}^j}{\partial x} \\ \frac{\partial E_{Gy}^j}{\partial x} \end{pmatrix} \right] e^{-2\pi i \int_0^x \zeta_G^j(x) dx} e^{-i\gamma z} \quad (14)$$

Limitons-nous maintenant à des solutions correspondant au cas de l'incidence oblique :

$$\begin{cases} \vec{E} = \vec{E}(x,y) e^{i\gamma z} \\ \vec{H} = \vec{H}(x,y) e^{i\gamma z} \end{cases} \quad (15)$$

On obtient en reportant (15) dans (14) et en intégrant en y de $-\infty$ à $+\infty$ pour x fixé :

$$\frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{\infty} (\vec{E} \wedge \vec{H}_G^j - \vec{E}_G^j \wedge \vec{H})_x dy = i \int_{-\infty}^{\infty} (n_o^2 - n^2) \vec{E} \cdot \vec{E}_G^j dy$$

$$- \int_{-\infty}^{\infty} \left(E_y \frac{\partial H_{Gz}^j}{\partial x} - E_z \frac{\partial H_{Gy}^j}{\partial x} + H_y \frac{\partial E_{Gz}^j}{\partial x} - H_z \frac{\partial E_{Gy}^j}{\partial x} \right) dy \quad (16)$$

Le second membre est composé de deux intégrales ; la première est nulle pour toute valeur de x où $n_o(x,y) = n(x,y)$ (obstacle test confondu avec l'obstacle réel), la seconde est nulle dans tout domaine où l'obstacle test reste constant (les dérivées par rapport à x sont nulles).

L'approximation consiste à chercher le champ sous la forme d'une combinaison linéaire de modes :

$$\begin{cases} \vec{E}(x,y) = \sum_{j=1}^{2m} C_j(x) \vec{E}_G^j(x,y) \\ \vec{H}(x,y) = \sum_{j=1}^{2m} C_j(x) \vec{H}_G^j(x,y) \end{cases} \quad (17)$$

On obtient en écrivant $2m$ fois la relation (16) pour $j = 1, \dots, 2m$, un système différentiel pour les $2m$ inconnues $C_j(x)$:

$$\frac{d}{dx} \begin{pmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_{2m} \end{pmatrix} = M(x) \begin{pmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_{2m} \end{pmatrix} \quad (18)$$

où $M(x)$ est une matrice $2m \times 2m$ nulle en dehors de la partie déformée (donc à droite et à gauche de l'obstacle).

On se ramène donc au problème numériquement très simple de la résolution de l'équation (18) où les C_j sont constantes de chaque côté de l'obstacle.

Remarques :

Dans le cas où $M(x)$ est constante sur un certain domaine, le système différentiel (18) s'intègre "à la main" sur ce domaine. De même, si $M(x)$ est périodique sur un intervalle, il suffit d'intégrer numériquement (18) sur une période et de compléter l'intégration à tout l'intervalle par de simples multiplications de matrices.

La méthode ne s'applique que si, pour toute valeur x_0 de x , le guide d'indice $N_0(y) = n_0(x_0, y)$ admet $2m$ modes d'indice effectif supérieur à γ .

Cette méthode permet de traiter le problème d'une jonction entre deux guides pourvu que le nombre de modes reste le même des deux côtés.

On pourrait croire que cette méthode généralise la première méthode approchée (paragraphe 1) puisque, dans cette méthode, l'obstacle était remplacé pour toute valeur de x par le guide local, mais un examen attentif du formalisme montre que, même dans le cas où l'obstacle test se confond avec l'obstacle réel ($n_0 = n$), les deux méthodes ne sont pas rigoureusement semblables.

B) Comparaison aux résultats de la méthode exacte : test de la méthode approchée.

Le formalisme de la méthode approchée peut s'appliquer à des obstacles de très grande dimension, mais, pour pouvoir comparer les résultats à ceux de la méthode exacte, nous devons nous limiter aux obstacles susceptibles d'être traités par les deux méthodes.

Dans les exemples qui suivent, nous nous sommes limités à donner les coefficients de réflexion R_{EE} (et R_{HH}) d'un mode incident TE ou TH.

Reprenons l'obstacle qui avait servi de test pour la première méthode approchée (figure 11).

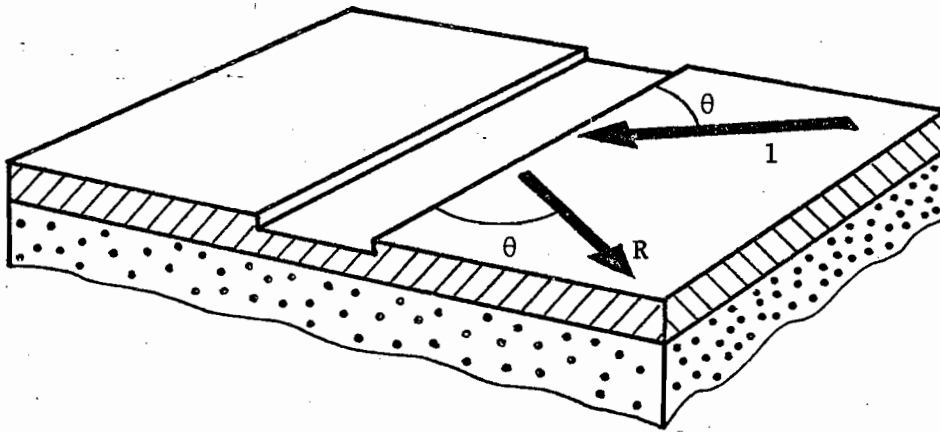


Figure 11

La figure 12 permet de comparer les résultats des calculs obtenus par la méthode exacte à ceux obtenus par la méthode approchée. On voit que si $n_0 = N(y)$ indice du guide non déformé, l'accord est assez médiocre, alors que avec un obstacle test plus proche de l'obstacle réel ($n_0 = n_1$), on obtient des résultats plus précis.

Ces résultats sont cependant moins précis que ceux obtenus par la première méthode approchée (figure 4).

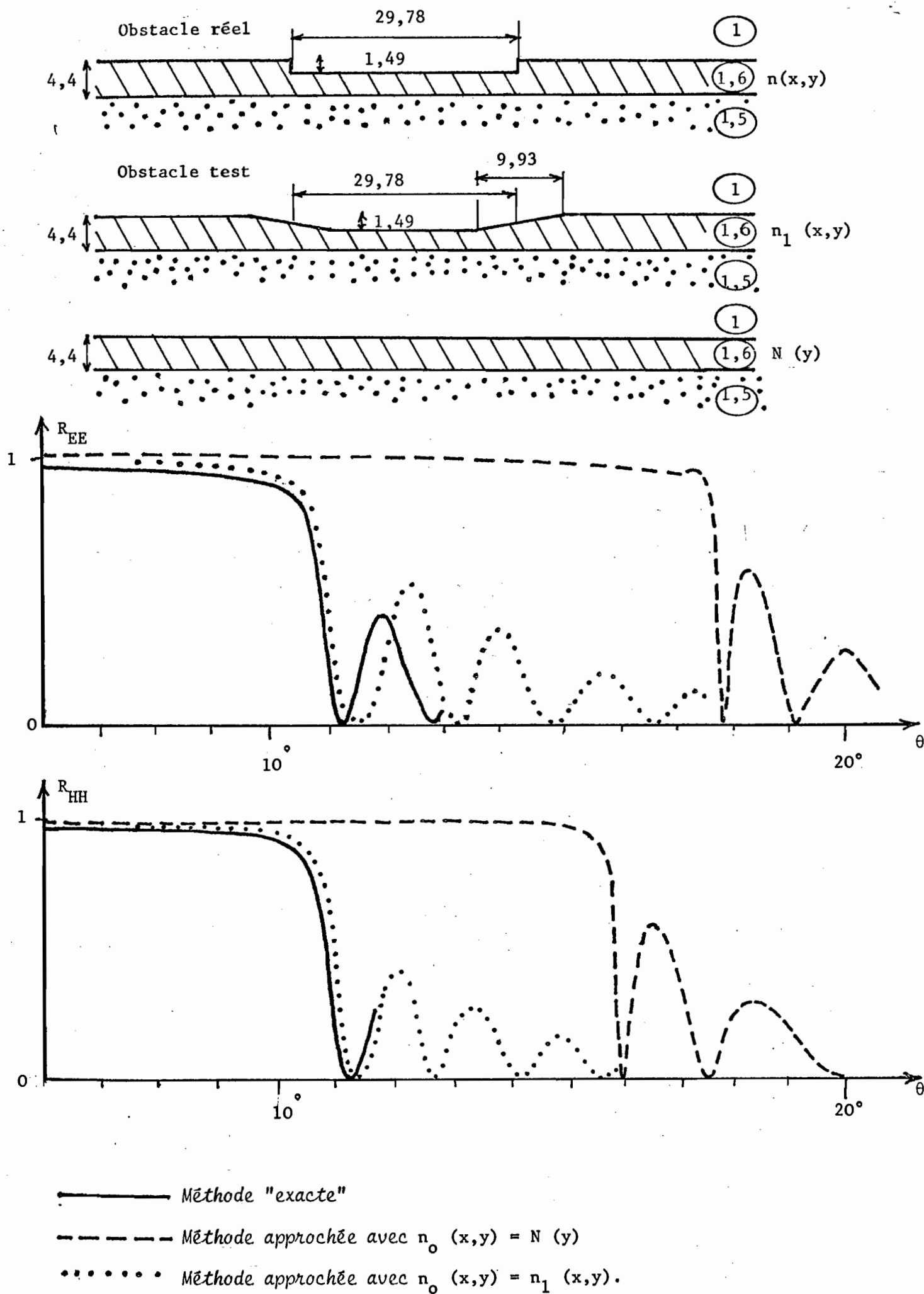


Figure 12

.../...

. Obstacle obtenu par répétition d'un même motif

On s'intéresse maintenant à l'obstacle représenté sur la figure 13.

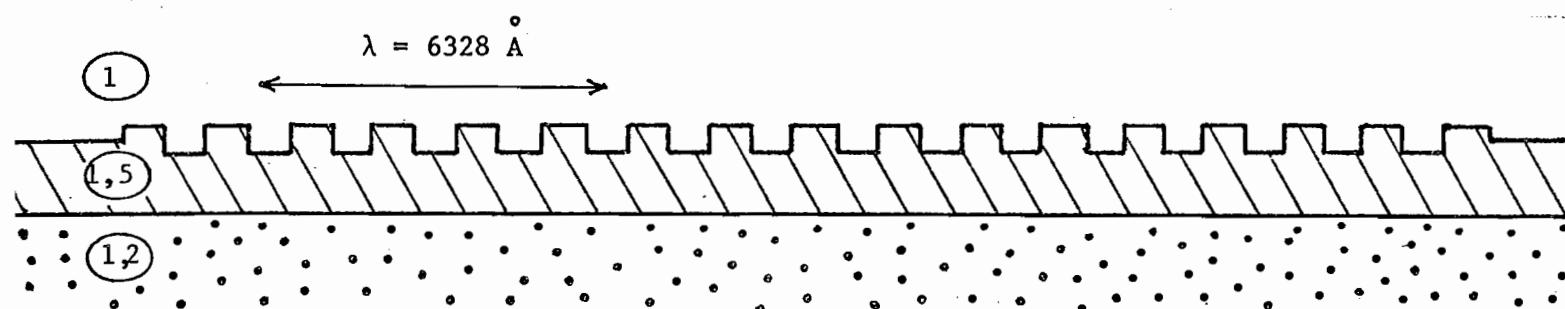


Figure 13

Le guide non déformé admet un mode TE et un mode TH. On se place dans les conditions requises pour avoir couplage TE-TH ainsi que l'a décrit J. MARCOU [1]. Rappelons ces conditions : un mode TE arrivant sur l'obstacle sous incidence oblique se réfléchit en un mode TH, les deux modes doivent se correspondre dans la loi du réseau et leurs directions doivent être orthogonales.

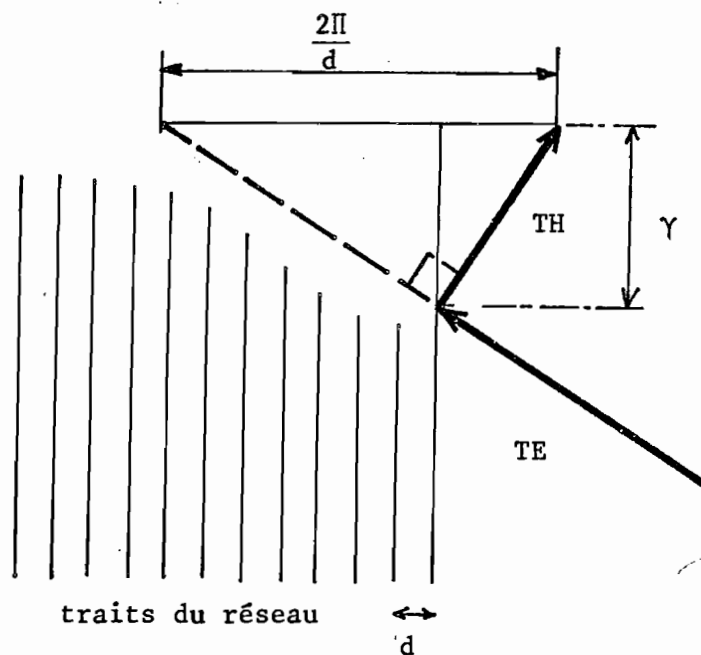


Figure 14

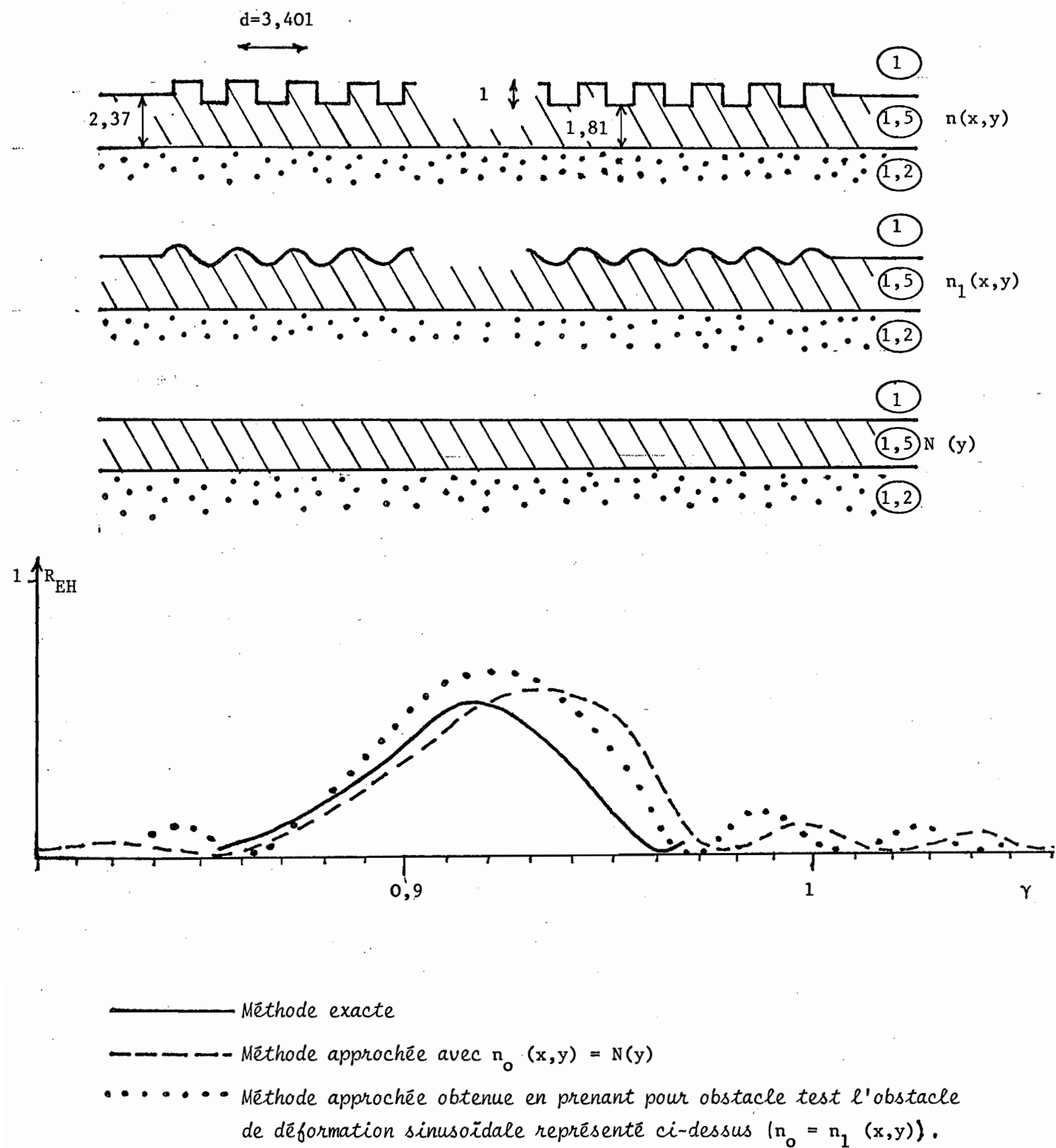


Figure 15 : Variation du coefficient de couplage R_{EH} au voisinage de la valeur de γ qui correspond au couplage théorique ($\gamma = 0.923$).

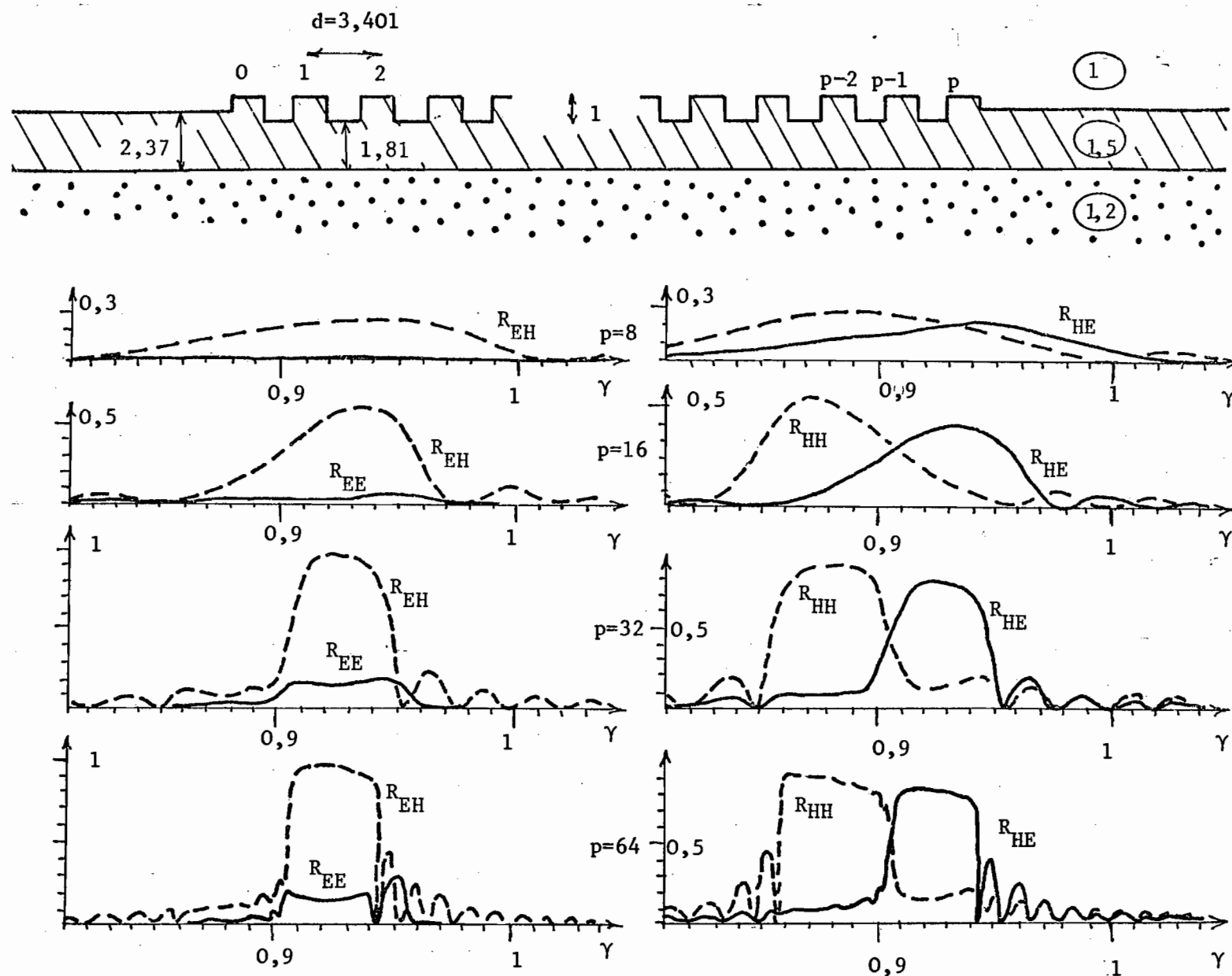
Nous avons fait le calcul par la méthode exacte puis par la méthode approchée en prenant successivement comme obstacle test, le guide non déformé puis un obstacle où la déformation en créneaux était remplacée par une déformation sinusoïdale (figure 14).

Dans les deux cas, la méthode approchée peut donner un ordre de grandeur des résultats. Elle permet tout au moins de déterminer dans quel domaine l'obstacle est susceptible d'avoir un comportement intéressant.

On peut donc penser que la méthode approchée continue de donner des résultats valables pour un plus grand nombre de traits, comme le représente la figure 16 (où on a pris $n_0(x,y) = N(y)$).

On voit bien apparaître le phénomène décrit par J. MARCOU : dans un certain domaine angulaire, un mode TE incident se transforme par réflexion presque exclusivement en un mode TH alors que l'amplitude réfléchie sur le mode TE reste toujours faible. Par contre, un mode TH incident se réfléchit en un mode TH dans un domaine angulaire et en un mode TE dans un autre domaine.

.../...



mode TE incident de gauche

mode TH incident de gauche

Figure 16

Utilisation de la méthode approchée pour des réseaux de 8, 16, 32, 64 traits. R_{EE} et R_{EH} sont les amplitudes réfléchies sur les modes TE et TH quand un mode TE est incident sur l'obstacle et R_{HE} , R_{HH} les amplitudes réfléchies sur les modes TE et TH quand un mode TH est incident sur l'obstacle. L'obstacle test est le guide non déformé.

.../...

3. TROISIEME METHODE APPROCHEE : METHODE D'EXTRAPOLATION

Les deux méthodes approchées décrites plus haut permettaient d'obtenir des résultats plus ou moins précis au moyen de calculs peu volumineux. La méthode dont nous allons maintenant parler consiste à extrapoler à des obstacles de grande dimension, les résultats obtenus par la méthode exacte pour des obstacles de dimension réduite. Elle s'applique plus précisément à des déformations obtenues par répétition d'un même motif et présente en outre l'avantage de pouvoir être généralisée au cas d'un réseau semi infini tracé sur un guide diélectrique plan (figure 17).

Comme cette méthode nécessite l'utilisation du programme général, elle reste lourde à manipuler.

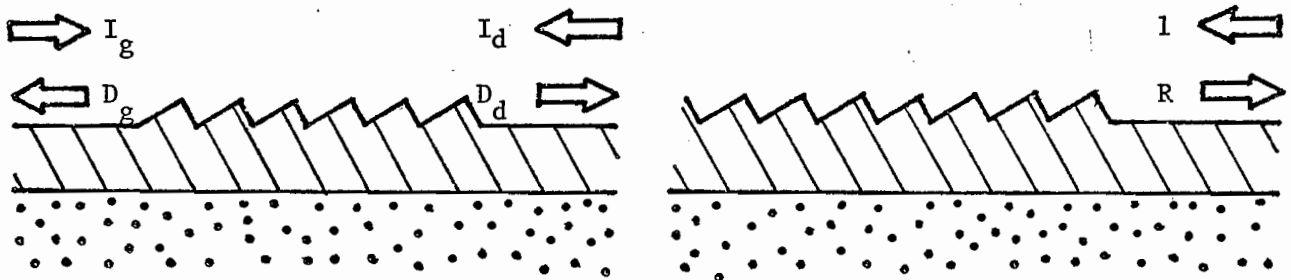


Figure 17

a) Principe de la méthode

α) Le guide non déformé admettant n modes qui peuvent se propager vers la droite ou vers la gauche, le champ électromagnétique est la superposition d'un champ qui tend vers zéro quand on s'éloigne de la déformation, et d'une combinaison linéaire de modes :

$$\sum_{j=1}^{2m} a_j(x) \psi_j(y) \exp(i\gamma_j z) \quad (19)$$

où les ψ_j sont des vecteurs de dimension 6 décrivant la carte du champ des modes.

Dans l'expression (19), les fonctions $a_j(x)$ sont le produit de l'amplitude complexe du mode et du terme exponentiel décrivant la propagation suivant Ox , et ne dépendent donc pas du choix de l'origine sur l'axe des x (Notons que la définition des a_j est différente de celle des $C_j(x)$ dans la formule 17).

Pour condenser les notations, nous regrouperons les fonctions $a_j(x)$ en un vecteur $A(x)$ de dimension $2m$.

β) Si la déformation est localisée entre les points d'abscisses x_G et x_D , il existe une relation linéaire entre $A(x_D)$ et $A(x_G)$:

$$A(x_D) = \mathcal{M} A(x_G), \quad (20)$$

où $\mathcal{M}$ est une matrice $2m \times 2m$ indépendante du choix de l'origine sur l'axe des x (figure 18).

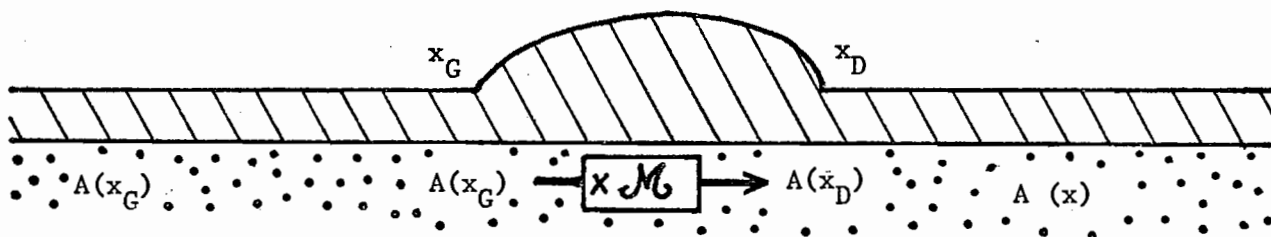


Figure 18

γ) Intéressons-nous maintenant aux déformations dont une partie est obtenue par répétition d'un même motif. Soit $\mathcal{M}_n$ la matrice $\mathcal{M}$ associée à une structure où ce motif est répété n fois (figure 19).

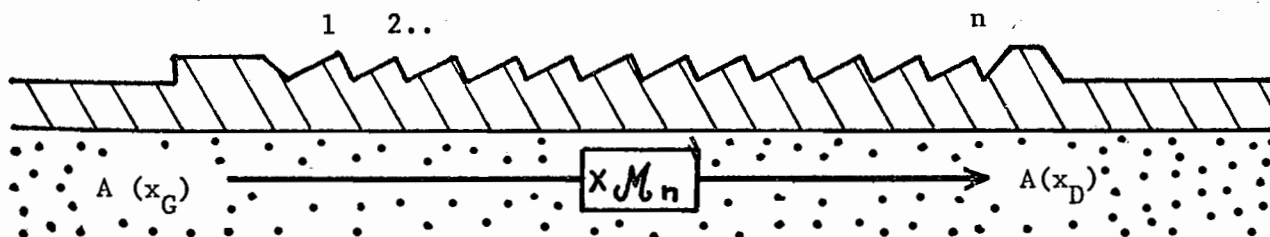


Figure 19

Les fonctions $a_j(x)$ n'ont de signification physique qu'à l'extérieur de la zone déformée, là où les modes du guide peuvent se propager. Si nous admettons cependant que cette propagation continue d'avoir lieu dans la zone déformée, nous pouvons décomposer la matrice $\mathcal{M}_n$ en un produit de 2 matrices :

$\mathcal{M}_n = \mathcal{N}_D \mathcal{N}_G$ comme le montre la figure 20a.

La matrice $\mathcal{M}_{n+1}$ devient alors : $\mathcal{M}_{n+1} = \mathcal{N}_D \mathcal{N} \mathcal{N}_G$ (figure 20b) où la matrice $\mathcal{N}$ permet de tenir compte du nouveau motif introduit dans l'obstacle.

Nous supposons qu'à partir d'une certaine valeur de n , l'influence des motifs que l'on introduit dans l'obstacle est décrite par la même matrice $\mathcal{N}$, c'est-à-dire (figure 20c) :

$$\mathcal{M}_{n+p} = \mathcal{N}_D \mathcal{N}^P \mathcal{N}_G \quad (21)$$

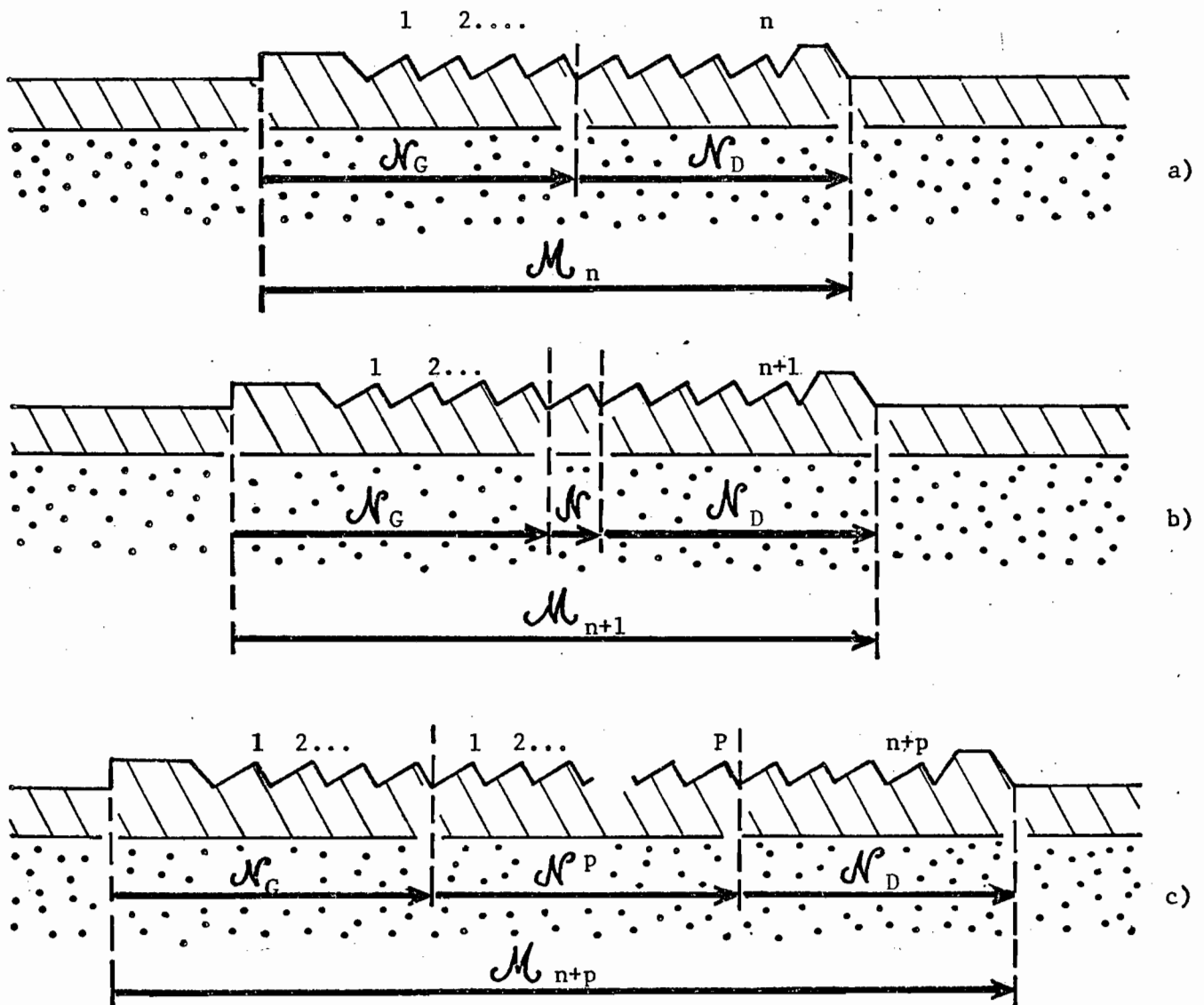


Figure 20

Dans l'expression 21, les deux matrices $\mathcal{N}_D$ et $\mathcal{N}_G$ essaient de prendre en compte d'éventuels "effets de bord", tandis que le terme $\mathcal{N}^p$ rend compte de l'équivalence des motifs situés suffisamment loin des extrémités de la déformation.

Le modèle (21) étant admis, quelques lignes de calcul matriciel suffisent pour montrer que la connaissance de $\mathcal{H}_n$ et $\mathcal{H}_{n+1}$ (supposées déterminées par la méthode exacte) permet de ramener la détermination de $\mathcal{H}_{n+p}$ à de simples produits matriciels :

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_n &= \mathcal{N}_D^p \mathcal{N}_G, \quad \mathcal{H}_{n+1} = \mathcal{N}_D \mathcal{N}_G \\ \mathcal{H}_{n+1} \mathcal{H}_n^{-1} &= \mathcal{N}_D \mathcal{N}^p \mathcal{N}_D^{-1} \\ (\mathcal{H}_{n+1} \mathcal{H}_n^{-1})^p &= \mathcal{N}_D^p \mathcal{N}^{p^2} \mathcal{N}_D^{-p} \\ \mathcal{H}_{n+p} &= (\mathcal{H}_{n+1} \mathcal{H}_n^{-1})^p \mathcal{H}_n.\end{aligned}$$

(22)

Il peut être intéressant de regrouper les motifs r par r , ce qui revient à changer la définition du motif élémentaire. Ceci conduit à la formule générale :

$$\mathcal{H}_{n+rp} = (\mathcal{H}_{n+r} \mathcal{H}_n^{-1})^p \mathcal{H}_n, \quad (23)$$

qui permet d'extrapoler à $q = n + rp$ traits les résultats obtenus (par la méthode exacte) pour n traits et $n + r$ traits. En pratique, pour calculer $\mathcal{H}_q$, on cherche à déterminer r et n de façon optimale.

Théoriquement, on peut approcher le résultat exact d'aussi près que l'on veut en prenant n assez grand. D'ailleurs, si $p = 0$, la formule (23) donne la valeur de $\mathcal{H}_n$ obtenue par la méthode exacte. En pratique, il y a dégradation de la précision quand n augmente. La méthode exacte ne donne en effet les matrices $\mathcal{H}_{n+r}$ et $\mathcal{H}_n$ qu'avec une certaine précision. Ces matrices sont en général voisines et le calcul de $\mathcal{H}_{n+r} \mathcal{H}_n^{-1}$ donne un résultat voisin de l'identité avec une précision du même ordre que celle que l'on peut avoir sur $\mathcal{H}_{n+r}$ et $\mathcal{H}_n$.

Par contre, le fait d'élever cette matrice à une puissance entière importante amplifie considérablement cette erreur. La recherche de formules d'extrapolation plus performantes est actuellement en cours.

b) Exemples d'utilisation

Afin de tester la précision des résultats que l'on peut obtenir par cette méthode, nous avons fait les calculs pour l'obstacle représenté sur la figure 21 dans le cas de polarisation E //.

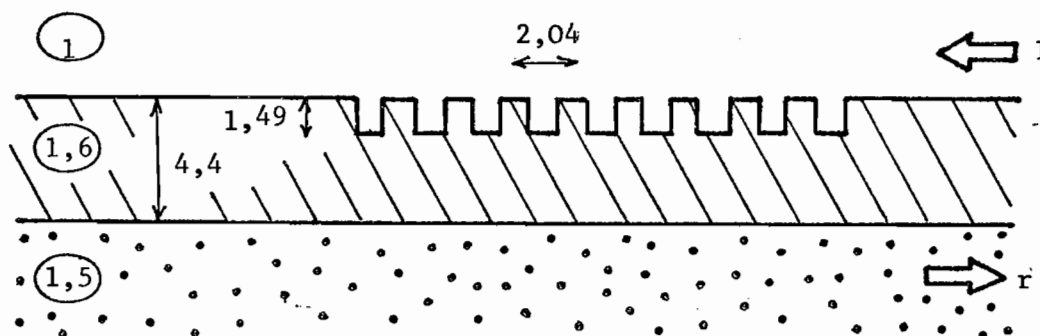


Figure 21

Le guide admet un seul mode et le pas du réseau est choisi pour que le réseau réfléchisse le mode sur lui-même comme dans un montage de Littrow.

Pour simplifier, nous ne nous intéresserons qu'au coefficient de réflexion en énergie du mode : $R = |r|^2$. Nous avons calculé la matrice $\mathcal{N}_n$ pour $n = 1, 2, \dots, 29$ traits en utilisant 29 fois le programme de la méthode exacte. Ces calculs nous permettent d'une part d'avoir la valeur exacte de R pour un réseau de 29 traits d'autre part, d'obtenir la valeur extrapolée de R , pour ce même réseau, à partir des résultats pour n et $n + 1$ traits. Les valeurs de R ainsi obtenues sont représentées sur la figure 15, les chiffres à côté des points désignent les valeurs de n choisies pour appliquer la formule 22. En particulier, le dernier point à droite donne la valeur exacte de R .

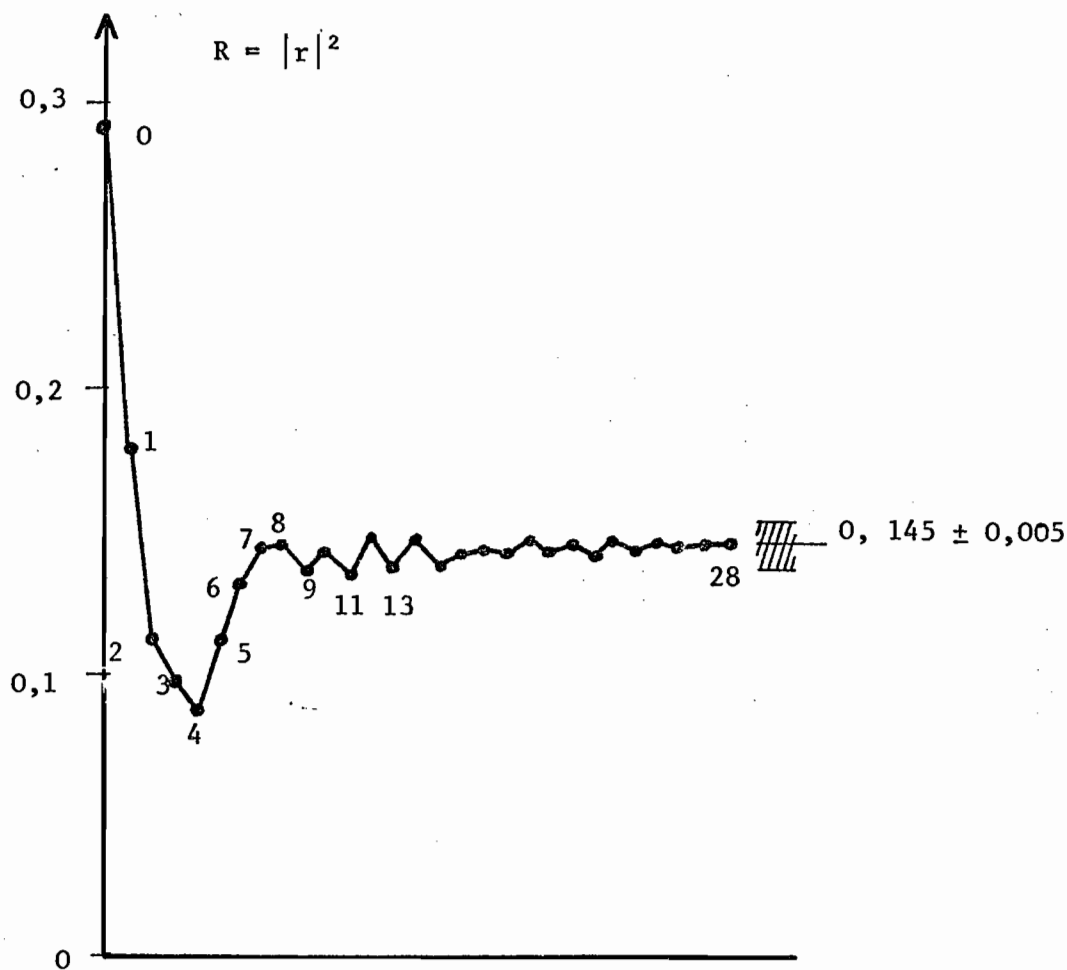


Figure 22

On voit sur la figure 22 que le résultat exact est obtenu avec une précision de 3,5 % au bout d'une dizaine de traits.

Par contre, si on cherche à obtenir par extrapolation le coefficient de réflexion d'un réseau de 120 traits, les résultats sont plus décevants comme le montre la figure 23.

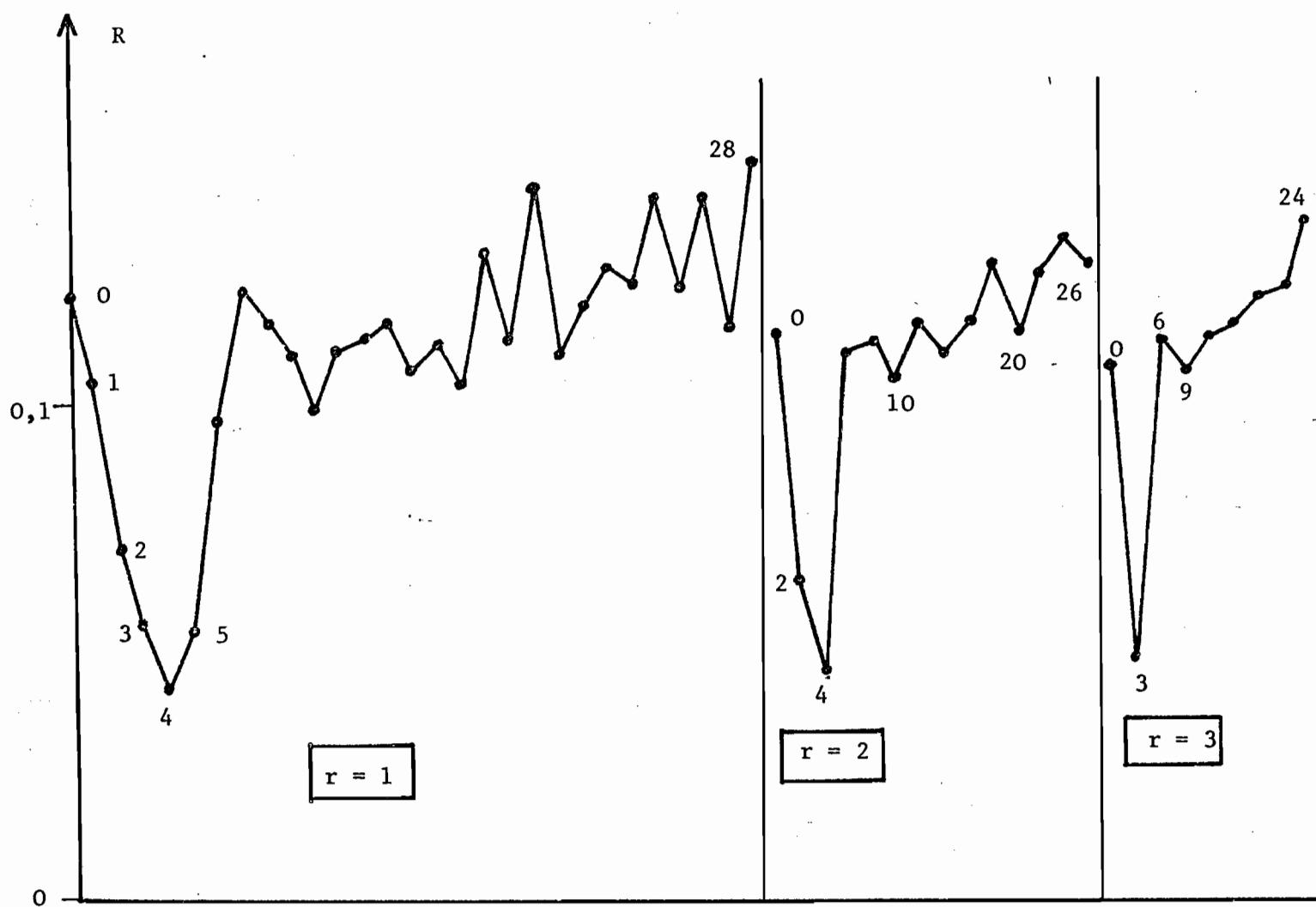


Figure23

EXTRAPOLATION A UN RESEAU DE 120 TRAITS

On a appliqué la formule 23 pour $r = 1, 2, 3$ et pour les valeurs de n indiquées à côté des points.

c) Passage à la limite, cas du réseau semi-infini

Limitons nous maintenant au cas où l'obstacle est uniquement attaqué par des modes venant de la droite (figure 24).

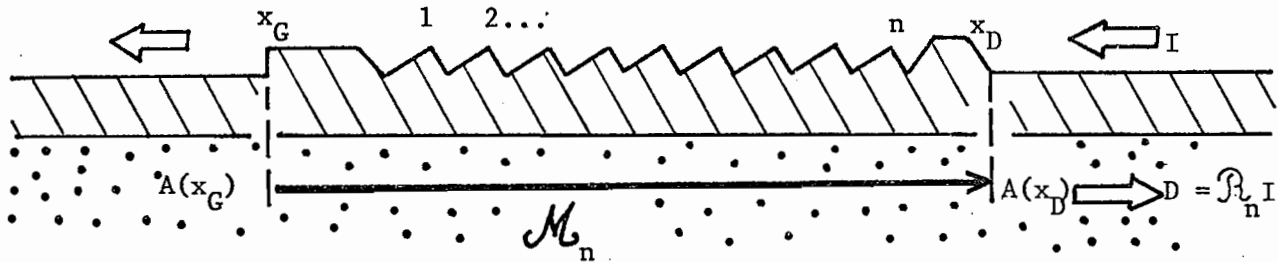


Figure 24

Ceci signifie, dans notre formalisme, que parmi les $2m$ composantes du vecteur $A(x_G)$, les $2m$ composantes qui correspondent aux modes incidents sont nulles. Autrement dit, en termes d'espaces vectoriels, $A(x_G)$ appartient à un sous espace de $\mathbb{C}^{2m}$ de dimension m que nous noterons $\mathcal{E}_G$. Par conséquent, $A(x_D)$ appartient au sous espace de dimension m , image de $\mathcal{E}_G$ par la matrice $\mathcal{M}_n$:

$$\mathcal{E}_{D,n} = \mathcal{M}_n \mathcal{E}_G$$

En pratique, il convient de distinguer dans $A(x_D)$ les composantes incidentes (modes dirigés vers la déformation) formant un vecteur I de dimension m et les composantes diffractées formant un vecteur D de dimension m . Le fait que $A(x_D)$ appartienne à $\mathcal{E}_{D,n}$ s'écrit :

$$D = \mathcal{R}_n I$$

où $\mathcal{R}_n$ est une matrice $m \times m$ liée à $\mathcal{E}_{D,n}$, qui décrit les phénomènes de réflexion et de couplage entre modes.

Quant $n \rightarrow \infty$, $\mathcal{R}_n$ tend vers $\mathcal{R}_\infty$. Cette matrice décrit la réflexion et le couplage des modes dûs à un "réseau semi infini" (figure 25).

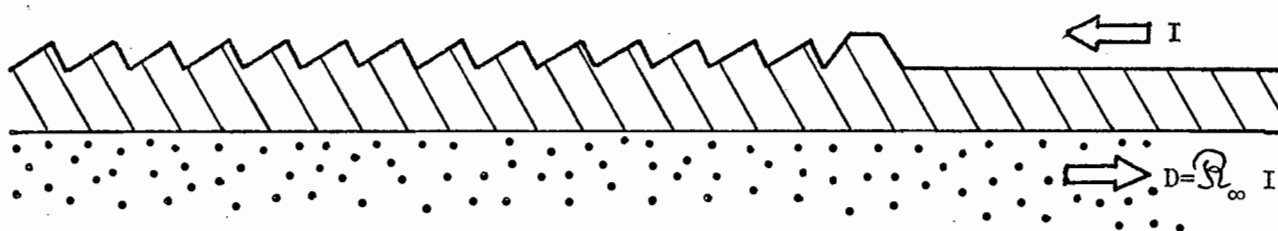


Figure 25

RESEAU SEMI-INFINI

S_∞ est déterminé par la limite de l'espace $E_{D,n}$. On voit, compte tenu de l'équation (23), que cette limite est en général le sous espace engendré par les m vecteurs propres de la matrice $\mathcal{H}_{n+r} \mathcal{H}_n^{-1}$ associés aux valeurs propres de plus grand module. En particulier, si $m = 1$ (par exemple dans le cas $E//$ et pour un guide admettant un seul mode), le coefficient de réflexion du réseau semi infini est le rapport des deux composantes du vecteur propre associé à la valeur propre de plus grand module.

En pratique, il n'est pas nécessaire de diagonaliser la matrice $\mathcal{H}_{n+r} \mathcal{H}_n^{-1}$; il suffit de chercher par un procédé numérique, la limite de S_{n+rp} quand $p \rightarrow \infty$ en prenant pour p une puissance de 2.

Donnons comme exemple, les résultats obtenus dans le cas de polarisation $E//$ pour l'obstacle représenté sur la figure 26.

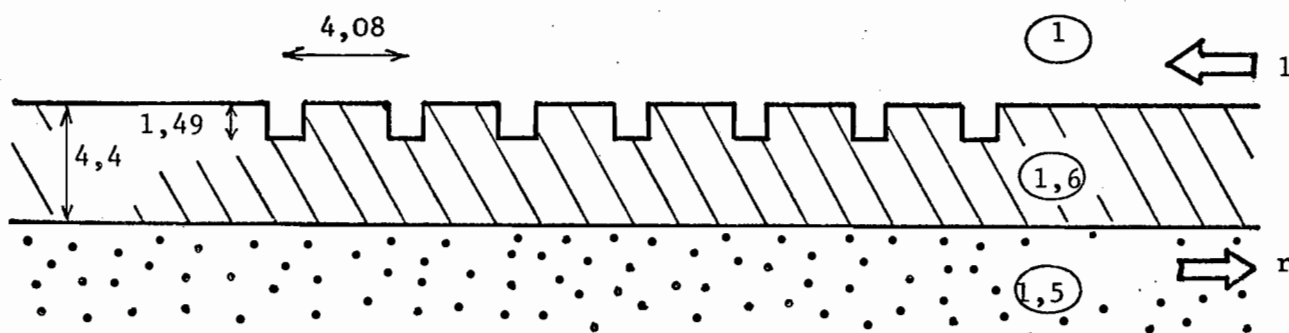


Figure 26

L'unique mode du guide se réfléchit sur le réseau en Littrow-2. Les résultats de la méthode exacte pour 1,2,... 27 traits sont extrapolés au réseau semi infini (figure 27).

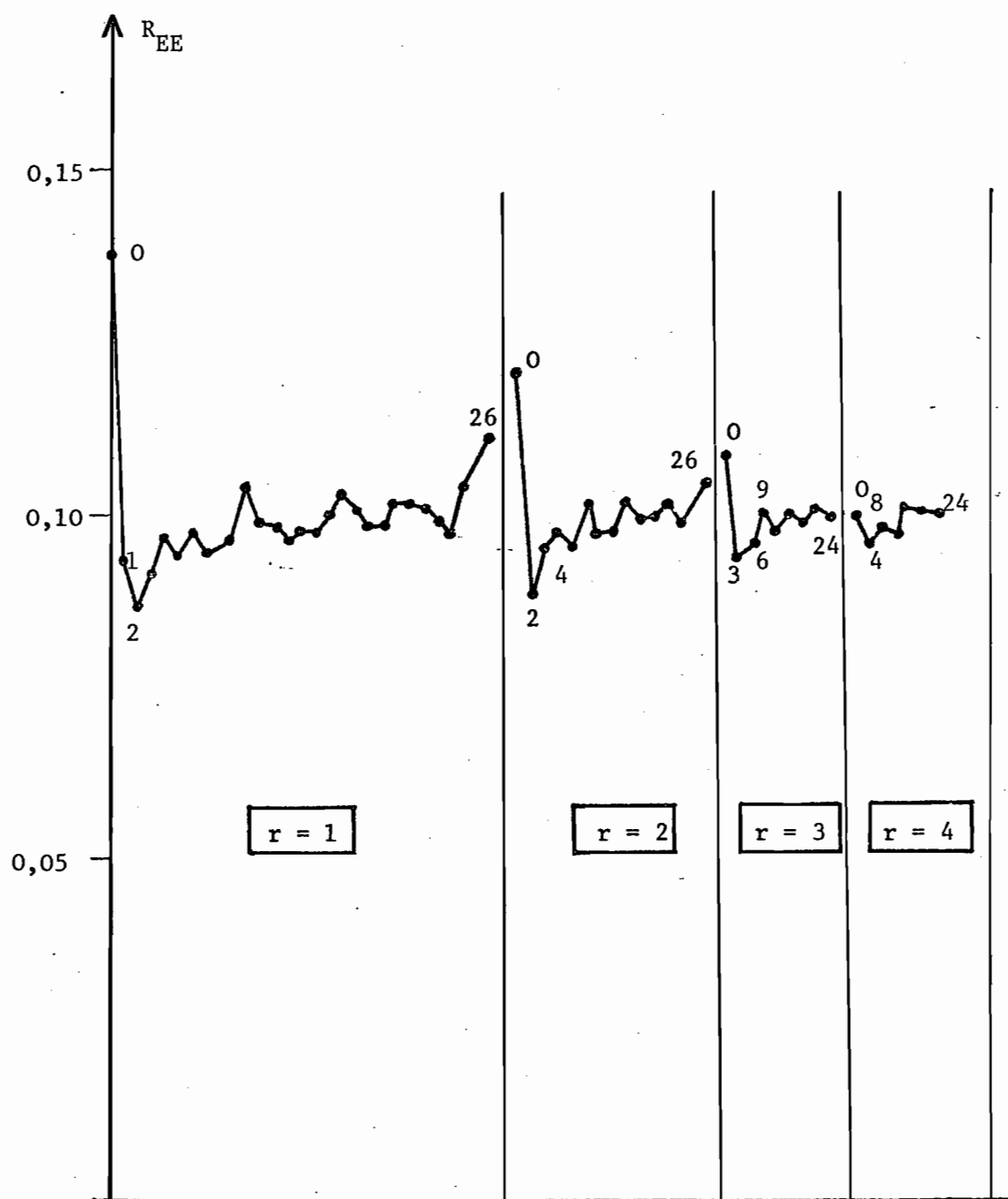


Figure 27

EXTRAPOLATION AU RESEAU SEMI-INFINI

La Formule 22 a été appliquée (en faisant tendre p vers l'infini) pour $r = 1, 2, 3, 4$ et pour les valeurs de n qui figurent sur la courbe à côté des points.

Considérons maintenant l'obstacle diffractant déjà traité au § 2bβ (figure 16). Rappelons que ce dispositif permet d'avoir un important couplage TE-TH. Les courbes de la figure 28 illustrent les résultats que nous avons obtenus pour différentes valeurs du nombre N de traits. Chaque courbe donne en fonction de γ (donc de l'incidence) les variations du taux de conversion TE-TH. Les 3 premières courbes ($N = 12, 17, 22$) ont été obtenues par la méthode exacte, les autres, par la méthode approchée. On constate qu'au delà d'une centaine de traits, les résultats se stabilisent.

Remarque

La méthode que nous venons d'exposer consiste à supposer une relation de récurrence du type :

$$\mathcal{M}_{n+p} = A_p \mathcal{M}_n$$

(on vérifie aisément que cette relation est équivalente à la formule 23).

Nous avons essayé d'utiliser des formules de récurrence plus élaborées comme par exemple :

$$\mathcal{M}_{n+p} = A_p \mathcal{M}_n + B_p,$$

mais les résultats obtenus ne sont pas plus précis. Au contraire, ces méthodes ont tendance à devenir encore plus instables quand on augmente le nombre de traits où commence la récurrence.

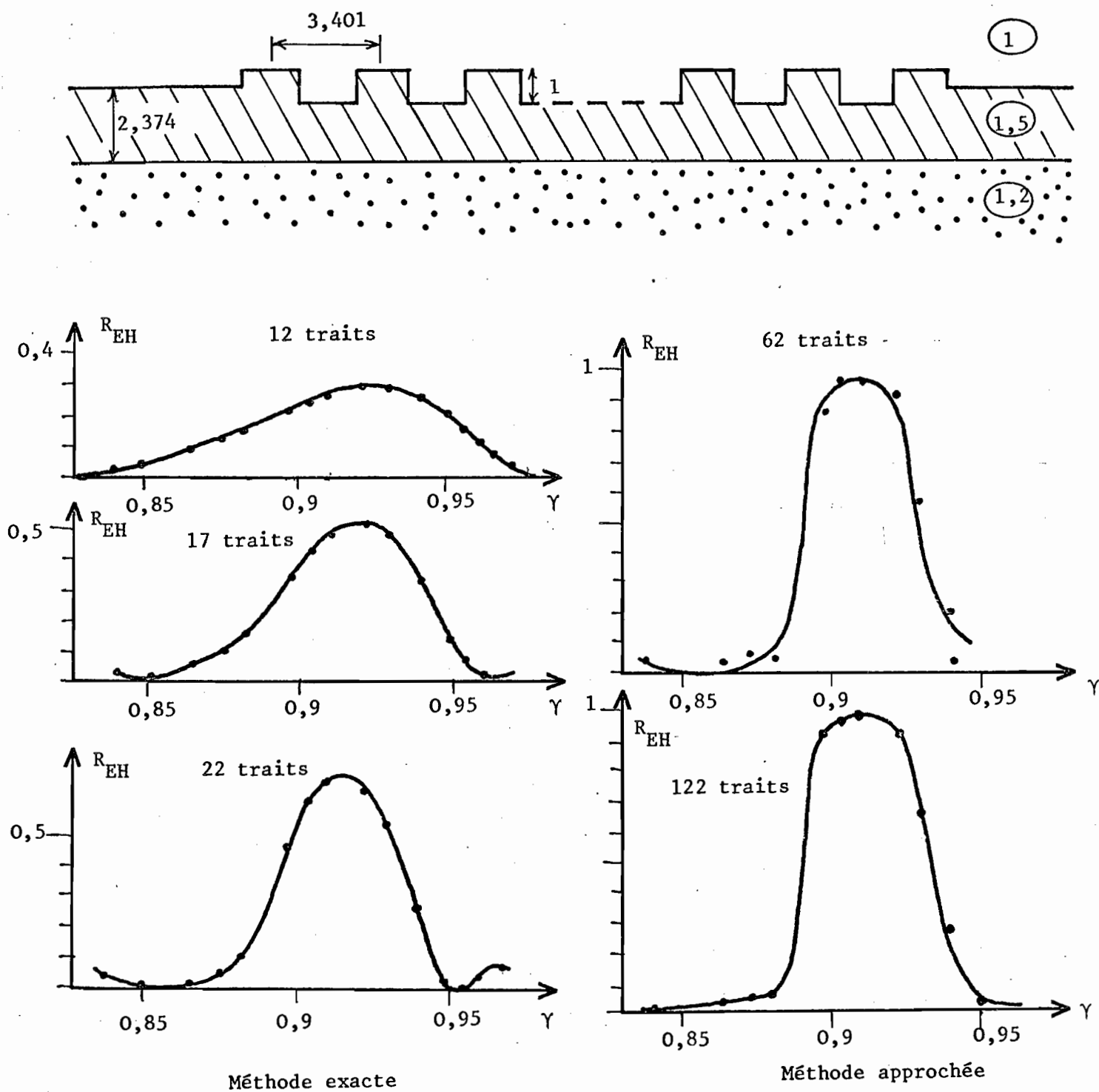


Figure 28

Références :

[1] . N. GREMILLET, G. THOMIN, J. MARCOU

"Mode conversion in oblique bragg gratings for integrated optics",
8th. European microwave conference, Sept. 1978.

Conclusion

CONCLUSION

Nous avons pu résoudre le problème de la diffraction d'un champ électromagnétique par un empilement de couches diélectriques planes localement déformé (déformation cylindrique d'axe parallèle au plan des couches). Pour traiter un tel problème nous disposons actuellement des outils numériques suivants :

- a) un programme général qui fournit une solution rigoureuse (c'est à dire sans aucune approximation d'ordre théorique). Ce programme très volumineux est malheureusement assez lourd d'utilisation et ne permet de traiter que des cas où la partie déformée de l'obstacle est de petite dimension (20λ en largeur, λ en hauteur ce qui est insuffisant pour les applications courantes en optique intégrée).
- b) divers méthodes approchées d'utilisation plus souple mais donnant des résultats moins précis. Ces méthodes ont été testées par comparaison au programme général (dans le domaine commun d'application) et on suppose qu'elles peuvent continuer de fournir des résultats corrects dans le cas d'obstacles de plus grande dimension.

Dans ce mémoire, nous avons exposé le détail de ces méthodes de calcul, et nous avons donné un certain nombre de résultats obtenus dans des cas pratiques.

Bien que ces résultats aient systématiquement été soumis aux critères usuels (convergence des approximations successives, conservation de l'énergie, théorèmes de réciprocité), il est clair que quelques vérifications expérimentales précises seraient souhaitables. Elles apparaissent difficiles à mettre en oeuvre et ne peuvent pas être envisagées dans notre laboratoire.

A NUMERICAL STUDY OF THE PROBLEM OF DIFFRACTION AT A NON-PERIODIC OBSTACLE

J.P. HUGONIN and R. PETIT*

*Laboratoire d'Optique Electromagnétique, Equipe de Recherche Associée au C.N.R.S.,
Faculté des Sciences et Techniques, Centre de St-Jérôme, 13397 Marseille Cedex 4, France*

Received 1 December 1976

We present a rigorous numerical solution for the diffraction of a plane wave at a locally deformed flat boundary surface. The method is expected to be generalized to study mode coupling and mode conversion problems in dielectric waveguides containing small deformations.

1. Introduction

The development of electronic calculation by computers has radically modified the approach to the solution of diffraction problems in electromagnetic theory. With modern computers, rigorous solutions (i.e. solutions in which the errors depend only on the type of the numerical method used for evaluation) have been made possible for obstacles of any shape, when their size is not larger than a few wavelengths. Thus a solution to the important problem of diffraction by a grating, whatever the profile, has been afforded [1]. On the other hand, this approach does not appear to have been very often applied to such apparently simple problems as diffraction by a streak on a medium boundary. To our knowledge, although many publications dealing with the analytical aspect have appeared [2-10] (especially "Full wave analysis" by E. Bahar), numerically calculated results have rarely been presented. This is rather regrettable since the solution of such problems appears to have direct practical implications in the field of integrated optics. Therefore, after having made a theoretical and numerical study of the problem of grating and grating couplers [11-14], we are now studying electromagnetic wave propagation in non-periodic media. We are especially concerned with the electromagnetic propagation properties of a junction between two wave guides, but as a preliminary

study we have tried to solve the relatively simple problem of diffraction at a local deformation on a plane boundary surface. This article presents the first results obtained for a simple case of polarization.

2. Principle of the method

We consider a sinusoidal disturbance (angular frequency ω , wavelength in vacuum λ) with a time dependence of $\exp(-i\omega t)$. Let e_x, e_y, e_z be the unit vectors of the rectangular-coordinate system $Oxyz$. Let the electric vector be in the direction Oz : $E = E(x, y)e_z$. Then $E(x, y)$ satisfies the wave equation as regards to the distribution theory of Schwartz:

$$\Delta E + k^2(x, y) E = 0, \quad (1)$$

where

$$k(x, y) = (2\pi/\lambda)n_0 \quad \text{if } y > f(x), \\ = (2\pi/\lambda)n_1 \quad \text{if } y < f(x).$$

The function f that describes the obstacle profile (fig. 1) is such that:

$$0 \leq f(x) \leq A, \\ f(x) = 0 \quad \text{if } |x| > L. \quad (2)$$

Of course $E(x, y)$ satisfies the outgoing wave condi-

* For reprints, please write to Pr. Petit, Marseilles.

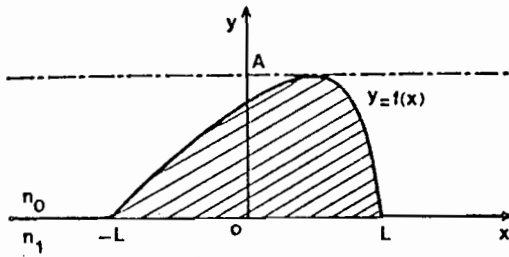


Fig. 1. Obstacle profile.

tion for $y < 0$. In the simple case of a plane boundary surface, $k(x, y)$ is replaced by the function:

$$K(y) = 2\pi n_0 / \lambda \quad \text{for } y > 0, \\ = 2\pi n_1 / \lambda \quad \text{for } y < 0.$$

It is convenient to put:

$$k^2(x, y) = K^2(y) + \frac{4\pi^2}{\lambda^2} (n_1^2 - n_0^2) P(x, y), \quad (3)$$

where

$$P(x, y) = 1 \quad \text{if } 0 \leq y \leq f(x), \\ = 0 \quad \text{if } y > f(x) \text{ or } y < 0,$$

is the characteristic function of the shaded area in fig. 1.

For constant y , let $\hat{E}(y, \beta)$ and $\hat{P}(y, \beta)$ be the Fourier transform in x of $E(x, y)$ and $P(x, y)$:

$$E(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp[i\beta x] \hat{E}(y, \beta) d\beta, \quad (5)$$

$$P(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp[i\beta x] \hat{P}(y, \beta) d\beta.$$

Eq. (1) implies that:

$$\frac{\partial^2 \hat{E}(y, \beta)}{\partial y^2} + [K^2(y) - \beta^2] \hat{E}(y, \beta) \\ + \frac{4\pi^2}{\lambda^2} (n_1^2 - n_0^2) \int_{-\infty}^{\infty} \hat{P}(y, \beta - \beta'') \hat{E}(y, \beta'') d\beta'' = 0, \quad (6)$$

* In fact, the notation used here is not very adequate because $\hat{E}$ and $\hat{P}$ contain purely distributive terms.

which upon quantization of β leads us to a differential coupled system. If $y > A$ or $y < 0$, the integral in eq. (6) is zero, and taking into account the radiation condition:

if $y > A$:

$$\hat{E}(y, \beta) = E^i(\beta) \exp[-i\chi_0(\beta)y] + E^r(\beta) \exp[i\chi_0(\beta)y], \quad (7a)$$

if $y < 0$:

$$\hat{E}(y, \beta) = E^t(\beta) \exp[-i\chi_1(\beta)y], \quad (7b)$$

with

$$\chi_0(\beta) = [4\pi^2 n_0^2 / \lambda^2 - \beta^2]^{1/2} \quad (\chi_0 \text{ or } \chi_0/i \text{ positive}), \quad (8a)$$

$$\chi_1(\beta) = [4\pi^2 n_1^2 / \lambda^2 - \beta^2]^{1/2} \quad (\chi_1 \text{ or } \chi_1/i \text{ positive}). \quad (8b)$$

Our method consists of realizing that the knowledge of $E^t(\beta)$ allows us, by integrating eq. (6) and taking into account the continuity of E and of $\partial E / \partial y$ at points $y = 0$ and $y = A$, to calculate $\hat{E}(y, \beta)$ and consequently $E^i(\beta)$ and $E^r(\beta)$ from eq. (7a).

We write the linear operator which makes the transformation from $E^t(\beta)$ to $E^i(\beta)$ in the form:

$$E^i(\beta) = \int_{-\infty}^{\infty} E^t(\beta') G^i(\beta, \beta') d\beta', \quad (9)$$

where the kernel $G^i(\beta, \beta')$ contains in fact distributive terms. Similary:

$$E^r(\beta) = \int_{-\infty}^{\infty} E^t(\beta') G^r(\beta, \beta') d\beta'. \quad (10)$$

Now, if the deformed boundary is considered as a system that for an excitation $E^t(\beta)$ gives responses $E^i(\beta)$ and $E^r(\beta)$, the kernels $G^i(\beta, \beta')$ and $G^r(\beta, \beta')$ are responses to the excitation $E^t(\beta) = \delta(\beta - \beta')$. As these kernels are supposed to be known and the incident field is given, E^t is the solution of the integral eq. (9).

3. The determination of the kernels

Let $\Psi(y, \beta)$ be the solution of eq. (6) when the plane

boundary is not deformed and for $E^t(\beta) = 1$. For $y > 0$,

$$\Psi(y, \beta) = \frac{1}{T(\beta)} \exp[-i\chi_0(\beta)y] + \frac{R(\beta)}{T(\beta)} \exp[i\chi_0(\beta)y], \quad (11)$$

where $R(\beta)$ and $T(\beta)$ are the reflection and transmission coefficients of the boundary surface. If one looks for the field corresponding to the excitation $\delta(\beta - \beta')$ in the form:

$$\hat{E}(y, \beta) = \Psi(y, \beta') \delta(\beta - \beta') + e(y, \beta), \quad (12)$$

where $e(y, \beta) = 0$ for $y < 0$, we get upon substituting (12) into (6):

$$\frac{\partial^2 e}{\partial y^2} + [K^2(y) - \beta^2]e + \frac{4\pi^2}{\lambda^2}(n_1^2 - n_0^2) \times \left(\int_{-\infty}^{\infty} \hat{P}(y, \beta - \beta'') e(y, \beta'') d\beta'' + \Psi(y, \beta') \hat{P}(y, \beta - \beta') \right) = 0. \quad (13)$$

As in eq. (6), the absence of purely distributive terms on the right-hand side of the equation, assures the continuity of e and $\partial e/\partial y$: in particular, $e(0, \beta) = (\partial e/\partial y)_{(0, \beta)} = 0$. Integration of (13) taking into consideration these conditions, gives the value of $\hat{E}(A, \beta)$ and $(\partial \hat{E}/\partial y)_{(A, \beta)}$, and consequently that of $G^i(\beta, \beta')$ and $G^r(\beta, \beta')$:

$$G^i(\beta, \beta') = \frac{1}{2} \left(\hat{E}(A, \beta) + \frac{i}{\chi_0(\beta)} \frac{\partial \hat{E}(A, \beta)}{\partial y} \right) \exp[i\chi_0(\beta)A] \\ = \frac{1}{T(\beta')} \delta(\beta - \beta') + g^i(\beta, \beta'), \quad (14a)$$

$$G^r(\beta, \beta') = \frac{1}{2} \left(\hat{E}(A, \beta) - \frac{i}{\chi_0(\beta)} \frac{\partial \hat{E}(A, \beta)}{\partial y} \right) \\ \times \exp[-i\chi_0(\beta)A] \\ = \frac{R(\beta')}{T(\beta')} \delta(\beta - \beta') + g^r(\beta, \beta'), \quad (14b)$$

with

$$g^i(\beta, \beta') = \frac{1}{2} \left(e(A, \beta) + \frac{i}{\chi_0(\beta)} \frac{\partial e(A, \beta)}{\partial y} \right) \exp[i\chi_0(\beta)A], \quad (15a)$$

$$g^r(\beta, \beta') = \frac{1}{2} \left(e(A, \beta) - \frac{i}{\chi_0(\beta)} \frac{\partial e(A, \beta)}{\partial y} \right) \exp[-i\chi_0(\beta)A]. \quad (15b)$$

It should be pointed out that in view of these transformations, the integral eq. (9) relating in the general case the transmitted and the incident fields is written as

$$E^i(\beta) = \frac{1}{T(\beta)} E^t(\beta) + \int_{-\infty}^{\infty} g^i(\beta, \beta') E^t(\beta') d\beta'. \quad (16)$$

Similarly:

$$E^r(\beta) = \frac{R(\beta)}{T(\beta)} E^t(\beta) + \int_{-\infty}^{\infty} g^r(\beta, \beta') E^t(\beta') d\beta'. \quad (17)$$

4. Example of application

We suppose that the incident field is a plane wave incident at an angle $\theta = \arcsin(\beta_i \lambda / 2\pi n_0)$, and we want the solution of eq. (16) in the form:

$$E^t(\beta) = T(\beta_i) \delta(\beta - \beta_i) + e^t(\beta), \quad (18)$$

where $e^t(\beta)$ is a function given by the solution of Fredholm's integral equation of the second kind:

$$\frac{1}{T(\beta)} e^t(\beta) + \int_{-\infty}^{\infty} g^i(\beta, \beta') e^t(\beta') d\beta' = -T(\beta_i) g^i(\beta, \beta_i). \quad (19)$$

The reflected field is then determined by:

$$E^r(\beta) = R(\beta_i) \delta(\beta - \beta_i) + e^r(\beta), \quad (20)$$

with

$$e^r(\beta) = \int_{-\infty}^{\infty} g^r(\beta, \beta') e^t(\beta') d\beta' \\ + \frac{R(\beta)}{T(\beta)} e^t(\beta) + T(\beta_i) g^r(\beta, \beta_i). \quad (21)$$

5. Numerical treatment

5.1. Method

We could solve eq. (19) by transforming it, after quantization of β , to an $N \times N$ algebraic system. This procedure, however, requires eq. (13) to be solved N

times for calculating $g^i(\beta, \beta')$. To restrict the amount of calculations, we preferred to use a iteration method. The iterated solution at the p th iteration step, $e_p(\beta)$, is determined by using the recurrence relations:

$$e_1(\beta) = -T(\beta)T(\beta_i)g^i(\beta, \beta_i), \quad (22a)$$

$$e_p(\beta) = T(\beta) \left\{ -T(\beta_i)g^i(\beta, \beta_i) - \int_{-\infty}^{\infty} g^i(\beta, \beta') e_{p-1}(\beta') d\beta' \right\}. \quad (22b)$$

This iterative method leads to calculating the integral $\int_{-\infty}^{\infty} g^i(\beta, \beta') e_{p-1}(\beta') d\beta'$. It will be observed that this calculation can be reduced to the solution of a differential system since an obvious generalization of the formalism developed in section 3 shows that

$$\int_{-\infty}^{\infty} g^i(\beta, \beta') e_{p-1}(\beta') d\beta' = \frac{1}{2} \left(e(A, \beta) + \frac{i}{\chi_0(\beta)} \frac{\partial e(A, \beta)}{\partial y} \right) \exp(i\chi_0(\beta)A), \quad (23a)$$

where $e(y, \beta)$ is the solution of the equation

$$\frac{\partial^2 e}{\partial y^2} + [K^2(y) - \beta^2]e + \frac{4\pi^2}{\lambda^2} (n_1^2 - n_0^2) \times \left(\int_{-\infty}^{\infty} \hat{P}(y, \beta - \beta'') e(y, \beta'') d\beta'' \right) = 0,$$

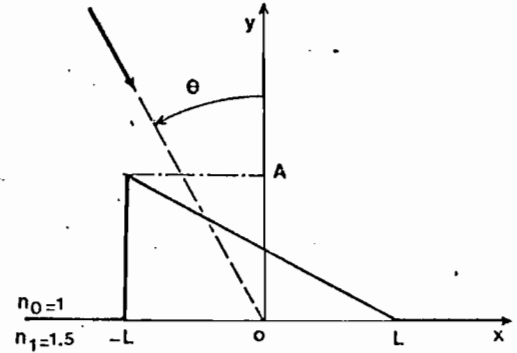


Fig. 2. Obstacle considered in the numerical example, $A = L = \lambda/2\pi$, $n_0 = 1$, $n_1 = 1.5$.

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} \hat{P}(y, \beta - \beta'') \Psi(y, \beta'') e_{p-1}(\beta'') d\beta'' = 0, \quad (23b)$$

zero for $y < 0$.

5.2. Results

We have made the diffraction problem calculations for the obstacle shown in fig. 2 on an IBM 370-168 computer. The integration of the differential systems was realized by the Runge-Kutta method of the 4th order. The convolution integrals appearing in (23b) were calculated using the Fast Fourier Transform algorithm. As an example we give here the variations of the "reflected efficiency",

$$|e^r(\beta)|^2 \chi_0(\beta)/\chi_0(\beta_i),$$

as a function of β for various angles of incidence (fig. 3).

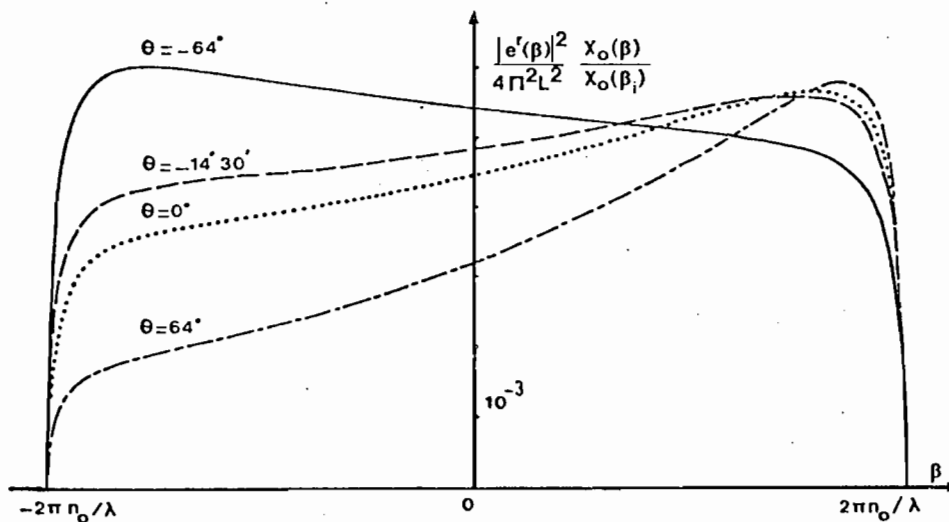


Fig. 3. "Reflected efficiency" for various values of the angle of incidence θ .

5.3. Validity of the results

The numerical experiment shows that the iterative method does not converge for A and L larger than 0.6λ . We have verified the convergence of the successive approximations (number of samples in β , number of points in the FFT and number of steps in the integration of the differential systems) as well as the classical relations imposed by the conservation of energy and the reciprocity theorem, i.e.

$$\int_{-n_0 2\pi/\lambda}^{n_0 2\pi/\lambda} |e^r(\beta)|^2 \chi_0(\beta) d\beta + \int_{-n_1 2\pi/\lambda}^{n_1 2\pi/\lambda} |e^t(\beta)|^2 \chi_1(\beta) d\beta + 2 \operatorname{Re} \{ R(\beta_i) e^{\bar{r}}(\beta_i) \chi_0(\beta_i) + T(\beta_i) e^{\bar{t}}(\beta_i) \chi_1(\beta_i) \} = 0, \quad (24a)$$

$$\chi_0(\beta_1) e_2^{\bar{r}}(-\beta_1) = \chi_0(\beta_2) e_1^{\bar{r}}(-\beta_2), \quad (24b)$$

where $e_1^{\bar{r}}(\beta)$ and $e_2^{\bar{r}}(\beta)$ are the functions $e^{\bar{r}}(\beta)$ associated with the incident plane wave $\delta(\beta - \beta_1)$ and $\delta(\beta - \beta_2)$.

6. Conclusion

Using a simple case of polarization for brevity, we have shown that it is possible to solve numerically the problem of diffraction of a plane wave by a locally deformed boundary surface (at least in the case of a two-dimensional problem). It is known that, theoretically speaking, this allows a solution for the general case of any incident beam (or rather any incident sheet). This is a problem for which we have already obtained numerical results that we cannot present in

a short paper, our computer program seems to be good since it verifies the law of conservation of energy up to 10^{-4} .

Work is being conducted at present to solve the problem upon substituting the boundary surface by a dielectric waveguide. The final aim is to study the coupling of an incident wave to the guided wave modes and (or) mode conversion due to deformations.

Acknowledgement

The authors wish to thank Professor M. Cadilhac for helpful discussions and interest in this work.

References

- [1] R. Petit, *Nuov. Rev. Optique* 6 (1975) 129–135.
- [2] E. Bahar, *Radio Science* 5 (1970) 1069–1076.
- [3] E. Bahar, *Radio-Wave Method for Geophysical Prospecting*, *Geophysical Research* 76 (1971) 1921–1928.
- [4] E. Bahar, *Radio Science* 6 (1971) 1109–1116.
- [5] E. Bahar, *Canad. J. Physics* 50 (1972) 3123.
- [6] E. Bahar, *Canad. J. Physics* 50 (1972) 3132.
- [7] E. Bahar, *J. Math. Phys.* 14 (1973) 1024–1029.
- [8] E. Bahar, *J. Math. Phys.* 14 (1973) 1030–1036.
- [9] E. Bahar, *J. Math. Phys.* 14 (1973) 1502–1509.
- [10] E. Bahar, *J. Math. Phys.* 14 (1973) 1510–1515.
- [11] M. Nevière, R. Petit and M. Cadilhac, *Optics Commun.* 8 (1973) 113–117.
- [12] M. Nevière, P. Vincent, R. Petit and M. Cadilhac, *Optics Commun.* 9 (1973) 48–53.
- [13] M. Nevière, P. Vincent, R. Petit and M. Cadilhac, *Optics Commun.* 9 (1973) 240–245.
- [14] R. Petit, M. Nevière, P. Vincent and M. Cadilhac, *Topical Meeting on Integrated Optics* (New-Orleans, 1974).

A NUMERICAL STUDY OF THE PROBLEM OF DIFFRACTION AT A LOCALLY DEFORMED PLANE WAVE-GUIDE

J.P. HUGONIN and R. PETIT[†]

*Laboratoire d'Optique Electromagnétique, Equipe de Recherche Associée au C.N.R.S.,
Faculté des Sciences et Techniques, Centre de St-Jérôme, 133 97 Marseille cedex 4, France*

Received 26 April 1977

We present a rigorous solution for the problem of diffraction at a locally deformed plane wave-guide. This method can be applied to the study of mode coupling and mode conversion.

1. Introduction

We presented in a previous paper [1] the computation of the diffraction of a plane wave at a locally deformed flat boundary surface. Here we generalize this study to the case of a deformed plane wave-guide; we also compute the reflection transmission and coupling coefficients of the wave-guide modes. As for the plane boundary surface, we shall deal with a simple case of polarization and, for sake of simplicity, we shall present the theory only in the case of a single mode wave-guide. The generalization to multimodes structures is obvious.

2. Principle of the method

We consider a sinusoidal disturbance (time dependence in $\exp(-i\omega t)$, wavelength in vacuum λ , $k_0 = 2\pi/\lambda$). Let e_x, e_y, e_z be the unit vectors of the rectangular coordinate system $Oxyz$. The obstacle shown in fig. 1 is a plane dielectric waveguide one of the boundary surfaces of which has been deformed over the width defined by $|x| < L$ (deformation independent of z). Let $n(x, y)$ be the index of a point of the obstacle and $N(y)$ the index of the non-deformed waveguide. We suppose that $E = E(x, y) e_z$. Then $E(x, y)$ satisfies the wave equation as regards to the distribution theory of Schwartz [2]:

[†] For reprints, write to Pr. PETIT, Marseille.

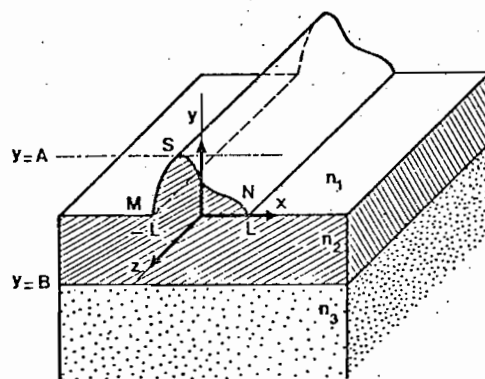


Fig. 1. Diffracting obstacle.

$$\Delta E + k_0^2 n^2(x, y) E = 0. \quad (1)$$

It is convenient to put:

$$n^2(x, y) = N^2(y) + (n_2^2 - n_1^2) P(x, y), \quad (2)$$

where $P(x, y)$ is the characteristic function of the deformed region MSN of fig. 1.

Introducing the Fourier transforms:

$$E(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{E}(\beta, y) \exp(i\beta x) d\beta, \quad (3)$$

$$P(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{P}(\beta, y) \exp(i\beta x) d\beta,$$

we are led to:

$$\frac{\partial^2 \hat{E}}{\partial y^2} + (k_0^2 N^2(y) - \beta^2) \hat{E} + k_0^2 (n_2^2 - n_1^2) \hat{P}(\beta, y) * \hat{E}(\beta, y) = 0, \quad (4)$$

where * denote a convolution in β .

Above the perturbation ($y > A$) and under the waveguide ($y < B$), the convolution product in eq. (4) is zero, and taking into account the radiation condition:

$$\begin{aligned} \text{if } y > A: \quad \hat{E}(\beta, y) &= E^i(\beta) \exp[-i\chi_1(\beta)y] \\ &+ E^r(\beta) \exp[i\chi_1(\beta)y], \end{aligned} \quad (5a)$$

$$\begin{aligned} \text{if } y < B: \quad \hat{E}(\beta, y) &= E^t(\beta) \exp[-i\chi_3(\beta)y], \end{aligned} \quad (5b)$$

with:

$$\chi_j(\beta) = (k_0^2 n_j^2 - \beta^2)^{1/2} \quad (\chi_j \text{ or } \chi_j/i \text{ positive}). \quad (6)$$

Our method is based upon the fact that the knowledge of $E^t(\beta)$ allows us to calculate $\hat{E}(\beta, y)$ and consequently $E^i(\beta)$ and $E^r(\beta)$ from eq. (5a) by integration of (4) and by taking into account the continuity of $\hat{E}$ and of $\partial \hat{E} / \partial y$ at points $y = B$ and $y = A$. In other terms, as it has been already noted in our first paper [1], there exists two linear operators which transform $E^t(\beta)$ to $E^i(\beta)$ and $E^r(\beta)$:

$$E^i(\beta) = \int_{-\infty}^{\infty} G^i(\beta, \beta') E^t(\beta') d\beta', \quad (7a)$$

$$E^r(\beta) = \int_{-\infty}^{\infty} G^r(\beta, \beta') E^t(\beta') d\beta'. \quad (7b)$$

The kernels $G^i(\beta, \beta')$ and $G^r(\beta, \beta')$ which are the responses to an excitation $E^t(\beta) = \delta(\beta - \beta')$ contain in fact distributive terms. Assuming these kernels known and the incident field given, E^t is a solution of the integral equation (7a).

Let $\psi(\beta', y) \delta(\beta - \beta')$ be the solution of eq. (4) when the guide is not deformed and for $E^t(\beta) = \delta(\beta - \beta')$.

For $y > 0$,

$$\begin{aligned} \psi(\beta', y) &= \frac{1}{T(\beta')} \exp[-i\chi_1(\beta')y] \\ &+ \frac{R(\beta')}{T(\beta')} \exp[i\chi_1(\beta')y], \end{aligned} \quad (8)$$

where $R(\beta')$ and $T(\beta')$ are the Fresnel coefficients.

For sake of simplicity, let us suppose that the guide can support a single mode associated with $\beta = \beta_g$ (i.e. $1/T(\beta) = 0$ for $\beta = \pm \beta_g$).

As we have shown [1], the eqs. (7a) and (7b) can be written as:

$$E^i(\beta) = \frac{1}{T(\beta)} E^t(\beta) + \int_{-\infty}^{\infty} g^i(\beta, \beta') E^t(\beta') d\beta', \quad (9a)$$

$$E^r(\beta) = \frac{R(\beta)}{T(\beta)} E^t(\beta) + \int_{-\infty}^{\infty} g^r(\beta, \beta') E^t(\beta') d\beta', \quad (9b)$$

where $g^i(\beta, \beta')$ and $g^r(\beta, \beta')$ are now "regular functions". They can be obtained after quantization in β (N values) by integration from $y = 0$ to $y = A$ of a differential system of N equations. We shall try to avoid the tabulation of g^i and g^r which would require solving N times this differential system.

3. On the determination of $E^t(\beta)$

$E^t(\beta)$ is a solution of the integral equation (9a).

If we look for $E^t(\beta)$ under the form:

$$E^t(\beta) = T(\beta) E^i(\beta) + \mathcal{E}^t(\beta), \quad (10)$$

we get by substitution in (9a):

$$\begin{aligned} \frac{1}{T(\beta)} \mathcal{E}^t(\beta) + \int_{-\infty}^{\infty} g^i(\beta, \beta') \mathcal{E}^t(\beta') d\beta' \\ = - \int_{-\infty}^{\infty} g^i(\beta, \beta') T(\beta') E^i(\beta') d\beta'. \end{aligned} \quad (11)$$

In order to transform (11) into a Fredholm's integral equation of second kind, let us put:

$$f(\beta) = \frac{1}{T(\beta)} \mathcal{E}^t(\beta), \quad (12)$$

where $f(\beta)$ is a "good" function which, we hope, no longer contains distributive terms.

Taking into account the singularities of T in $\beta = \pm \beta_g$, and supposing $f(\beta)$ given, eq. (12) implies:

$$\mathcal{E}^t(\beta) = a^+ \delta(\beta - \beta_g) + a^- \delta(\beta + \beta_g) + e^t(\beta), \quad (13)$$

with:

$$e^t(\beta) = V_p \left(\frac{A^+}{\beta - \beta_g} + \frac{A^-}{\beta + \beta_g} \right) + \epsilon^t(\beta), \quad (14)$$

where V_p denotes the Cauchy principal value distribution, and where ϵ^t is a regular function. We note that specifying $f(\beta)$ determines the constants A^+ and A^- , while a^+ and a^- are two undetermined coefficients.

Reporting (12) into (11) and taking (13) into account, we get:

$$f(\beta) + \int_{-\infty}^{\infty} g^i(\beta, \beta') [T(\beta') f(\beta')] d\beta' = \mathcal{L}(\beta), \quad (15)$$

with

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\beta) = & - \int_{-\infty}^{\infty} g^i(\beta, \beta') T(\beta') E^i(\beta') d\beta' \\ & - a^+ g^i(\beta, \beta_g) - a^- g^i(\beta, -\beta_g). \end{aligned} \quad (16)$$

The integral in (15) is taken in the sense of a Cauchy principal value at the singularities $\beta = \pm \beta_g$.

So, specifying $E^i(\beta)$ and the two constants a^+ and a^- determines $\mathcal{L}(\beta)$; f is then obtained by solving eq. (15) which is a Fredholm's integral equation of second kind with singular kernel. It appears now that it was reasonable to suppose f a function, which is the unique solution of this equation. When f is known, relations (12) and (10) allow us to compute A^+ , A^- , ϵ^t and then $E^t(\beta)$.

It must be pointed out that the knowledge of E^i is not sufficient to determine E^t : eq. (7a) has several solutions depending linearly upon the two parameters a^+ and a^- . This expresses the fact that the diffracted field not only depends on E^i but also on a possible excitation of the waveguide by modes diffracted by the perturbation. Fortunately in a practical problem we know not only $E^i(\beta)$ but also the incident components upon the modes, and the two parameters a_+ and a_- can be determined by a "shooting method" that we shall now describe.

4. Expressing limit conditions upon modes, "shooting method"

Let $E(x, y)$ be a solution corresponding to a given $E^i(\beta)$ and to an arbitrary choice of the parameters a^+ and a^- . We have supposed that the guide supports a single mode associated with $\beta = \pm \beta_g$. Let us put:

$$u(y) = \psi(\beta_g, y) / \left[\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(\beta_g, y)|^2 dy \right]^{1/2}, \quad (17)$$

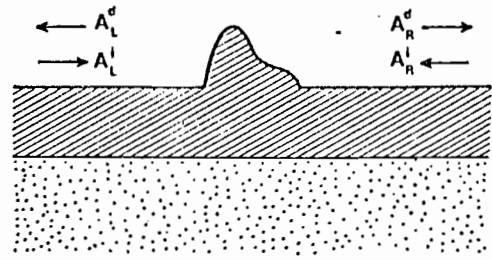


Fig. 2. Mode components.

and let, for x fixed:

$$C(x) = \int_{-\infty}^{\infty} E(x, y) \bar{u}(y) dy, \quad (18)$$

the field component upon the mode.

One can show that for $|x| > L$, $C(x)$ verifies:

$$\frac{d^2 C}{dx^2} + \beta_g^2 C = 0. \quad (19)$$

Therefore:

$$\text{if } x > L: \quad C(x) = A_R^d \exp(i\beta_g x) + A_R^i \exp(-i\beta_g x), \quad (20a)$$

$$\text{if } x < -L: \quad C(x) = A_L^i \exp(i\beta_g x) + A_L^d \exp(-i\beta_g x), \quad (20b)$$

see fig. 2.

Relations (18) and (20) show that the knowledge of $E(x, y)$ allows us to determine A_R^i and A_L^i (the incident components upon the mode coming from the right and from the left). Thus for a given incident field $E^i(\beta)$, to each choice of the parameters a^+ and a^- (which determines $E(x, y)$), we can associate values for A_R^i and A_L^i . The transform $\mathcal{T}: (a^+, a^-) \rightarrow (A_R^i, A_L^i)$ is an affine transform.

When solving a given physical problem, we know $E^i(\beta)$, A_R^i and A_L^i , and we look for E^i , E^t , A_R^d and A_L^d (the diffracted components upon the mode going to the right and to the left). We have therefore to determine a^+ and a^- which is done by inverting the transform $\mathcal{T}$. This requires the tedious computation of the images of the points (0,0), (0,1), (1,0).

5. Some remarks on numerical treatment

To solve integral eq. (15) one can use the iterative process given in the previous paper [1]:

$$f_1(\beta) = \mathcal{L}(\beta), \quad (21a)$$

$$f_p(\beta) = - \int_{-\infty}^{\infty} g^i(\beta, \beta') [T(\beta') f_{p-1}(\beta')] d\beta' + \mathcal{L}(\beta). \quad (21b)$$

This iterative method leads to calculating the integral: $\int_{-\infty}^{\infty} g^i(\beta, \beta') [T(\beta') f_{p-1}(\beta')] d\beta'$. From relation (9a), it is sufficient for this to determine the function $E^i(\beta)$ associated with $E^t(\beta) = T(\beta) f_{p-1}(\beta)$. The field corresponding to this excitation may be written in the form:

$$\hat{E}(\beta, y) = T(\beta) f_{p-1}(\beta) \psi(\beta, y) + e(\beta, y), \quad (22)$$

where $e(\beta, y)$ is zero for $y < 0$; we get by substitution of (22) in (4):

$$\frac{\partial^2 e}{\partial y^2} + (k_0^2 N^2(y) - \beta^2) e + k_0^2 (n_2^2 - n_1^2) \quad (23)$$

$$\times \hat{P}(\beta, y) * [e(\beta, y) + T(\beta) f_{p-1}(\beta) \psi(\beta, y)] = 0.$$

Integration of (23) taking into account the continuity conditions: $e(\beta, B) = \partial e(\beta, B)/\partial y = 0$, gives the value of $e(\beta, A)$ and of $\partial e(\beta, A)/\partial y$ and consequently:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} g^i(\beta, \beta') [T(\beta') f_{p-1}(\beta')] d\beta' \\ &= \frac{1}{2} \left[e(\beta, A) + \frac{i}{\chi_1(\beta)} \frac{\partial e(\beta, A)}{\partial y} \right]. \end{aligned} \quad (24)$$

Thus if convergence is observed after Q iteration steps, we have only to solve Q differential systems. In practice, if the characteristic dimensions of the deformation are of the order of the wavelength, Q is less than ten and goes down to five with the more sophisticated iterative process which is in fact used in our programs.

The method presented above allowed us to compute $E^t(\beta)$ for $E^i(\beta)$, a^+ and a^- given. This process must be performed for three sets of values of a^+ and a^- . In fact when $E^i(\beta) = 0$ (obstacle excited by the mode alone), the solution associated to $a^+ = 0$ and $a^- = 0$ is $E^t = 0$ which reduces the length of calculation.

The integration of the differential system has been obtained by a Runge Kutta method of the fourth order. The convolution appearing in (23) was calculated using the "fast Fourier transform" algorithm. To take into account the singularities of $T(\beta)$, we have used

the known expression of the Fourier transform of

$$V_p \left(\frac{1}{\beta \pm \beta_g} \right),$$

$$\text{i.e.: } i\pi \operatorname{sgn}(x) \exp(\mp i\beta_g x).$$

6. Results

The calculations have been performed on the IBM 370-168 computer for the obstacles shown in fig. 3. The validity of the results has been tested with respect to the energy balance.

As an example, we give a few results concerning the obstacle of fig. 3d. This study can be considered as a first approach to the problem of the broken optical fiber. The guide is supposed to be single mode ($\beta_g = 1.131 \times 2\pi/\lambda$), the incident field $E^i(\beta)$ is zero and the obstacle is excited by an incident mode coming from the left ($A_L^i = 1, A_R^i = 0$). Fig. 4 shows the reflection and transmission coefficients of this mode for

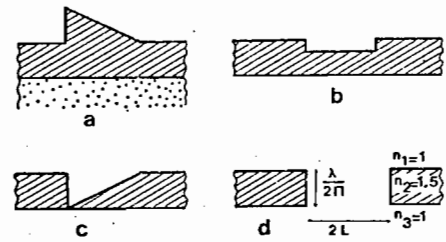


Fig. 3. Obstacle shape.

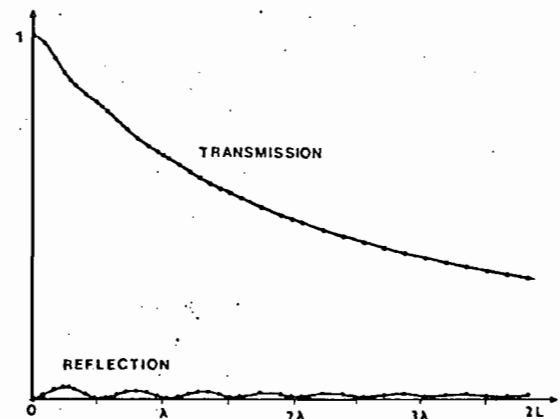


Fig. 4. Intensity transmission and reflection coefficients of the mode of guide fig. 3d as a function of the length $2L$ of the gap.

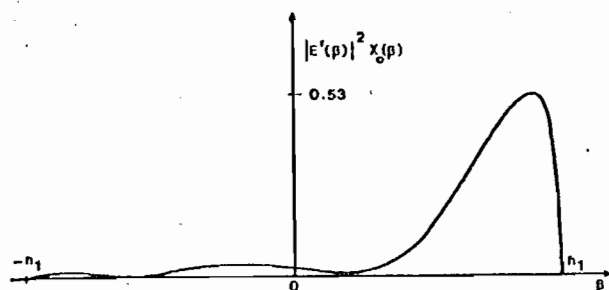


Fig. 5. Plane wave diffraction patterns of obstacle fig. 3d if $2L = 8$ and when an incident mode is coming from the left. The unit of length is $\lambda/2\pi$. The associated energy diffracted above the guide is 17% of the incident energy.

various values of the length $2L$ of the gap (the remainder of the energy is diffracted out of the gap). Fig. 5 represents, as a function of β , the variations of: $|E^r(\beta)|^2 \chi_0(\beta)$ for $2L = 8 \times \lambda/2\pi$ (the energy diffract-

ed above the guide is proportional to: $\int_{-2\pi n_1/\lambda}^{2\pi n_1/\lambda} |E^r(\beta)|^2 \chi_0(\beta) d\beta$).

7. Conclusion

Using a simple case of polarization for brevity, we have shown that it is possible to solve numerically the problem of diffraction of a plane wave or a beam, or a surface mode by a locally deformed plane dielectric waveguide, at least if the dimensions of the obstacle do not exceed a few wavelengths.

References

- [1] J.P. Hugonin and R. Petit, *Optics Commun.* 20 (1977) 360.
- [2] F. Roddier, *Distributions et transformation de Fourier* (Ediscience, Paris, 1971).

Theoretical and numerical study of a locally deformed stratified medium

J. P. Hugonin and R. Petit

Laboratoire d'Optique Electromagnétique, Equipe de Recherche Associée au Centre National de la Recherche Scientifique No. 597, Faculté des Sciences et Techniques, Centre de St-Jérôme, 13397 Marseille Cedex 13, France

Received June 28, 1980; revised manuscript received November 25, 1980

The propagation of electromagnetic waves in the presence of a locally two-dimensional deformed plane waveguide is considered. We are concerned with the conversion of an incident beam into a guided beam as well as with the interaction of a guided beam with a local deformation. We look for a rigorous solution of Maxwell's equations, i.e., a solution in which the errors depend only on the numerical methods used for evaluation. We outline the mathematical aspect of this rather formidable problem and emphasize the numerical difficulties that we have to overcome. An example is presented to give an idea of the capabilities of our computer program.

1. INTRODUCTION

In two previous papers,^{1,2} we proposed a method for solving the problem of diffraction by a locally deformed dielectric slab waveguide. A rectangular Cartesian coordinate system $Oxyz$ was used; the slab interfaces were perpendicular to the y axis, the deformation was a change in shape invariant with the z axis, and the electric field $E(x,y)$ was parallel to the z axis. In this paper we present a generalization of this method. The optical index is still z independent, but we can take into account a much more intricate geometry. Moreover, we can study a wider class of fields: those that are the product of $\exp(i\gamma z)$ with a vector function of the two variables x and y (Fig. 1). The real constant γ was equal to zero in our early work.^{1,2}

The method we use is essentially the so-called differential method, which is intensively used for gratings in our laboratory.³ However, here complications arise for two reasons: first, Fourier series must be replaced by Fourier integrals; second, we have to take the guided modes into account. Consequently, both the theoretical aspects and the computer programs are much more involved. Nevertheless, it is possible to solve Maxwell's equations rigorously, the only approximations being due to the use of numerical techniques.

Throughout the paper we consider a sinusoidal disturbance [time dependence $\exp(-i\omega t)$, wavelength in vacuum λ_0], and we denote by ϵ_0 the permittivity of vacuum. We assume μ_0 everywhere and take $\lambda_0/2\pi = 1/\omega\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$ as the unit of length.

2. SOME PRELIMINARY EXAMPLES AND COMMENTS

In order to facilitate the understanding of the general case (Section 3), we start with the study of some simple but typical examples in which the electric field E is parallel to the z axis. Its amplitude $E(x,y)$ satisfies Helmholtz's equation in the sense of distribution theory,⁴

$$\Delta E + n^2(x,y)E = 0, \quad (1)$$

where $n(x,y)$ is the optical index.

2.1. Differential Formalism in Grating Theory

Let $f(x)$ be a periodic function with period d . The grating surface $y = f(x)$ is the boundary between free space (index 1) and a medium of index n_l (Fig. 2). It is convenient to introduce two functions, $N(y)$ and $D(x,y)$,

$$N(y) = \begin{cases} 1 & \text{if } y \geq 0 \\ n_l & \text{if } y < 0 \end{cases}, \quad (2)$$

$$D(x,y) = n^2(x,y) - N^2(y). \quad (3)$$

Let us suppose that the grating is illuminated from the top in such a way that the total field is periodic with the same period d .

2.1.1. Principle of the Method

In the differential method, one first writes for each value of y , $E(x,y)$ and $D(x,y)$ in the form of a Fourier series in x :

$$E(x,y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \hat{E}_m(y) \exp(i\zeta_m x), \quad (4a)$$

$$D(x,y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \hat{D}_m(y) \exp(i\zeta_m x), \quad (4b)$$

where $\zeta_m = m2\pi/d$. If these expansions are used to write the Helmholtz Eq. (1), one obtains a differential system for the unknowns $\hat{E}_m(y)$:

$$\frac{d^2 \hat{E}_m(y)}{dy^2} = [\zeta_m^2 - N^2(y)] \hat{E}_m(y) - \sum_{p=-\infty}^{\infty} \hat{E}_p(y) \hat{D}_{m-p}(y). \quad (5)$$

2.1.2. Plane Wave Expansions

If $y > y_u$ or $y < 0$, then $D(x,y) = 0$, and, because all the $\hat{D}_m$ vanish, the solutions of Eq. (5) can be written as

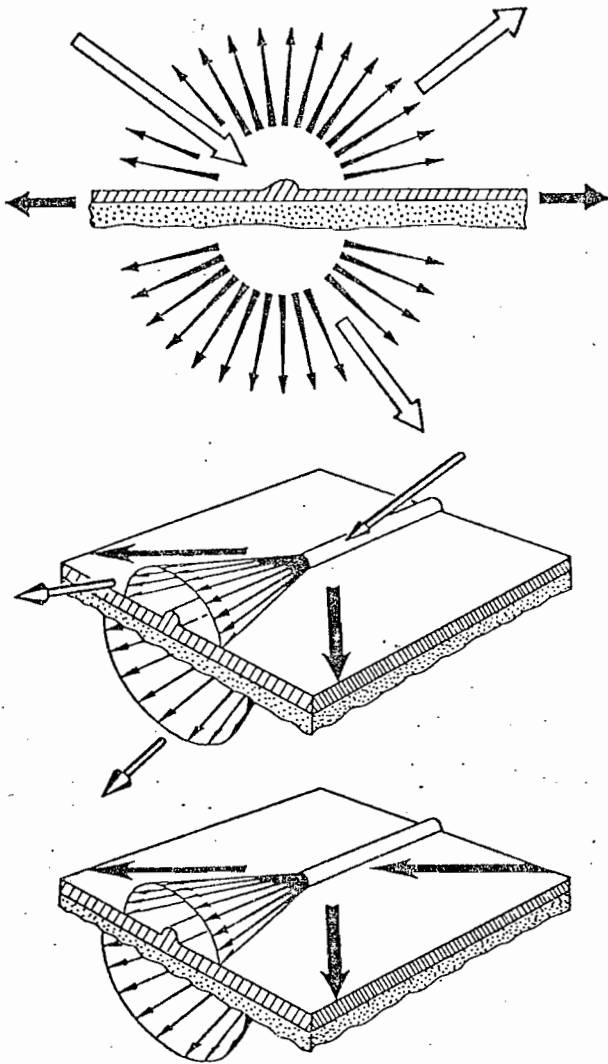


Fig. 1. Some practical problems that have suggested this theoretical study.

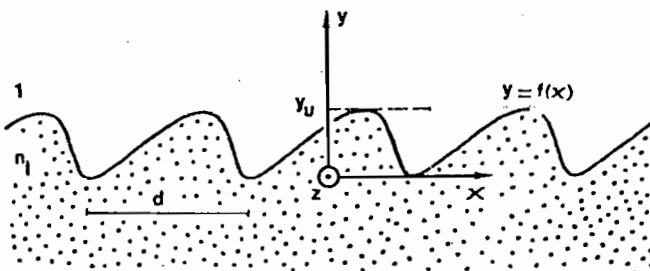


Fig. 2. The grating description. We denote by y_u the ordinate associated with the top of the groove [$y_u = \max f(x)$].

$$\hat{E}_m(y) = \begin{cases} E_{lu}(m) \exp[-i\chi_u(m)y] \\ + E_{du}(m) \exp[i\chi_u(m)y] & \text{if } y \geq y_u, \quad (6a) \\ E_{dl}(m) \exp[-i\chi_l(m)y] & \text{if } y < 0 \quad (6b) \end{cases}$$

with $\chi_u(m) = \sqrt{1 - \zeta_m^2}$, $\chi_l(m) = \sqrt{n_l^2 - \zeta_m^2}$. Substituting Eqs. (6) into Eq. (4a) allows us to express the field as a series of incident and diffracted plane waves (propagating or evanescent). It must be noted that $E_{dl}(m)$, $E_{lu}(m)$, and $E_{du}(m)$ are the complex amplitudes of the diffracted (subscript D) or

incident (subscript I) waves in the upper (subscript u) or lower (subscript l) region. Obviously Eq. (6b) takes into account a downward outgoing wave condition.

2.1.3. Fundamental Remark

From the mathematical point of view, it is worth noting that knowledge of the amplitudes $E_{dl}(m)$ allows us to determine the field everywhere: from Eq. (6b) we find $\hat{E}_m(y)$ and $d\hat{E}_m/dy$ for $y \leq 0$; when $\hat{E}_m(0)$ and $(d\hat{E}_m/dy)(0)$ are known, the numerical integration of Eq. (5) leads to $\hat{E}_m(y_u)$ and $(d\hat{E}_m/dy)(y_u)$, and we get finally from Eq. (6a)

$$E_{du}(m) = \frac{1}{2} \exp[-i\chi_u(m)y_u] \times \left[\hat{E}_m(y_u) - \frac{i}{\chi_u(m)} \frac{d\hat{E}_m}{dy}(y_u) \right], \quad (7a)$$

$$E_{lu}(m) = \frac{1}{2} \exp[i\chi_u(m)y_u] \times \left[\hat{E}_m(y_u) + \frac{i}{\chi_u(m)} \frac{d\hat{E}_m}{dy}(y_u) \right]. \quad (7b)$$

2.1.4. Application to the Solution of Practical Problems

Unfortunately, in applied physics the goal is not to deduce $E_{du}(m)$ and $E_{lu}(m)$ from $E_{dl}(m)$ but rather to compute the amplitudes $E_{du}(m)$ and $E_{dl}(m)$ when the incident amplitudes $E_{lu}(m)$ are known. [For example, $E_{lu}(m) = \delta_{m,0}$ if the incident field $E^i(x,y) = \exp(-iy)$ is a plane wave with normal incidence.] Such a problem can be solved numerically as follows. We first replace the series (4a) and (4b) with a truncated series (in which m is varied only from $-M$ to $+M$) and define E_{dl} , E_{du} , and E_{lu} as the vectors of dimensions $2M + 1$, whose components are, respectively, $E_{dl}(-M), \dots, E_{dl}(M)$; $E_{du}(-M), \dots, E_{du}(M)$; and $E_{lu}(-M), \dots, E_{lu}(M)$. The finite differential system (5'), obtained from Eq. (5) after truncation, allows us to define the linear relations

$$E_{lu} = \mathcal{M} E_{dl}, \quad E_{du} = \mathcal{N} E_{dl}, \quad (8)$$

where $\mathcal{M}$ and $\mathcal{N}$ are $(2M + 1) \times (2M + 1)$ matrices; we can determine them column by column by computing (as explained in the fundamental remark) E_{lu} successively for the following values of E_{dl} :

$$\begin{aligned} E_{dl} &= (1, 0, \dots, 0) \\ E_{dl} &= (0, 1, \dots, 0) \\ &\dots \dots \dots \\ E_{dl} &= (0, \dots, 0, 1). \end{aligned} \quad (9)$$

Coming back to a practical problem (in which E_{lu} is known), we obtain E_{dl} by a matrix inversion ($E_{dl} = \mathcal{M}^{-1} E_{lu}$) and E_{du} from $E_{du} = \mathcal{N} \mathcal{M}^{-1} E_{lu}$.

2.2. Differential Formalism Used for Aperiodic Diffracting Structures

Figure 3 shows a locally deformed plane boundary surface between vacuum and a medium with index n_l . Outside a rectangle $\mathcal{D}$, defined by $0 < y < y_u$ and $|x| < L$, the optical index $n(x,y)$ is described by the function $N(y)$:

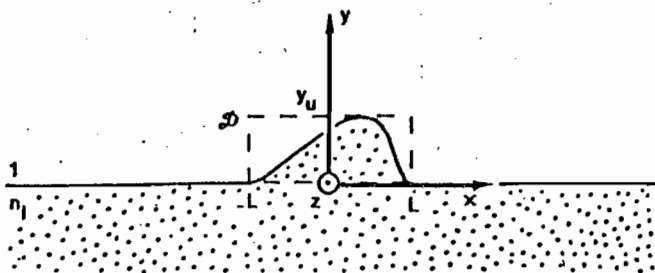


Fig. 3. The locally deformed plane surface.

$$N(y) = \begin{cases} 1 & \text{if } y \geq 0 \\ n_l & \text{if } y < 0 \end{cases}, \quad (10)$$

and we can characterize the deformation by a function $D(x, y)$ that vanishes outside $\mathcal{D}$:

$$D(x, y) = n^2(x, y) - N^2(y). \quad (11)$$

2.2.1. Principle of the Method

We introduce Fourier transforms that are defined as in distribution theory⁶ as

$$E(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{E}(\xi, y) \exp(i\xi x) d\xi, \quad (12)$$

$$D(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{D}(\xi, y) \exp(i\xi x) d\xi.$$

By substituting Eqs. (12) and (11) into Helmholtz's Eq. (1), we get

$$\frac{\partial^2 \hat{E}(\xi, y)}{\partial y^2} = [\xi^2 - N^2(y)] \hat{E}(\xi, y) - \hat{D}(\xi, y) * \hat{E}(\xi, y), \quad (13)$$

where $*$ denotes a convolution in ξ .

2.2.2. Plane-Wave Expansions

If $y > y_u$ or $y < 0$, then $D(x, y) = 0$, and the solutions of Eq. (13) can be written in the well-known form

$$\hat{E}(\xi, y) = \begin{cases} E_{lu}(\xi) \exp(-i\chi_u y) \\ + E_{du}(\xi) \exp(i\chi_u y) & \text{if } y \geq y_u \\ E_{dl}(\xi) \exp(-i\chi_l y) & \text{if } y \leq 0 \end{cases}, \quad (14a)$$

$$(14b)$$

where $\chi_u(\xi) = \sqrt{1 - \xi^2}$ and $\chi_l(\xi) = \sqrt{n_l^2 - \xi^2}$. Here E_{dl} , E_{lu} , and E_{du} are complex functions (in general distributions) that describe the incident and diffracted fields in the upper and lower regions. Note that Eq. (14b) takes into account a downward outgoing wave condition. Thanks to Eq. (14a), we can determine $E_{lu}(\xi)$ if $\hat{E}(\xi, y)$ is known. This equation can be regarded as a mapping that assigns to a function $\hat{E}(\xi, y)$ the well-defined function $\chi_u(\xi) E_{lu}(\xi)$. We call this mapping operator $\mathcal{J}$; elementary manipulations show that

$$\mathcal{J}\hat{E}(\xi, y) = \frac{1}{2} \exp(i\chi_u y_u) \left[\chi_u(\xi) \hat{E}(\xi, y_u) + i \frac{\partial \hat{E}}{\partial y}(\xi, y_u) \right]. \quad (15)$$

2.2.3. Fundamental Remark

The knowledge of $E_{dl}(\xi)$ allows us to determine successively $\hat{E}(\xi, 0)$ and $(\partial \hat{E} / \partial y)(\xi, 0)$ [by using Eq. (14b)], $\hat{E}(\xi, y_u)$ and $(\partial \hat{E} / \partial y)(\xi, y_u)$ [by numerical integration of the functional Eq.

(13)], and finally $E_{lu}(\xi)$ and $E_{du}(\xi)$ [by using Eq. (14a)]. The analogy with Section 2.1.3 is striking; we have only replaced Fourier series by Fourier integrals. Indeed, an important difficulty arises because $E_{dl}(\xi)$ is not always a function⁷ but is more generally a distribution.

To cope with this difficulty, we use the fact that the diffracting obstacle is close to a plane boundary surface. If this plane boundary surface were not deformed, the field would be

$$\hat{E}_0(\xi, y) = \begin{cases} E_{dl}(\xi) \left\{ \frac{1}{T(\xi)} \exp[-i\chi_u(\xi)y] + \frac{R(\xi)}{T(\xi)} \exp[i\chi_u(\xi)y] \right\} & \text{if } y > 0 \\ E_{dl}(\xi) \exp[-i\chi_l(\xi)y] & \text{if } y \leq 0 \end{cases}, \quad (16a)$$

$$(16b)$$

R and T being given by the well-known Fresnel formulas. It seems reasonable to seek $\hat{E}(\xi, y)$ in the form

$$\hat{E}(\xi, y) = \hat{E}_0(\xi, y) + e(\xi, y), \quad (17)$$

where $e(\xi, y)$ is the new unknown function. By substituting Eq. (17) into Eq. (13) and noticing that $\hat{E}_0$ satisfies

$$\frac{\partial^2 \hat{E}_0}{\partial y^2} = [\xi^2 - N^2(y)] \hat{E}_0, \quad (18)$$

it appears that $e(\xi, y)$ is zero for $y < 0$ whatever ξ and satisfies the following equation:

$$\frac{\partial^2 e}{\partial y^2} = (\xi^2 - N^2)e + \hat{D}(\xi, y) * [\hat{E}_0(\xi, y) + e(\xi, y)]. \quad (19)$$

We assume that these two conditions are sufficient to determine $e(\xi, y)$. Moreover, taking into account the regularity of $\hat{D} * (\hat{E}_0 + e)$ [whose Fourier transform in x has a limited support because $D(x, y)$ is zero when $|x| > L$], it is reasonable to assume also that $e(\xi, y)$ is a good function that does not include singular distributions.

Solving Eq. (19) allows us to determine $e(\xi, y)$ and $(\partial e / \partial y)(\xi, y)$ everywhere. If $\mathcal{J}$ is the operator defined in Eq. (15), we can also tabulate a new function $i_u(\xi)$, defined by

$$i_u(\xi) = \mathcal{J}e(\xi, y). \quad (20)$$

We call $\mathcal{T}$ the linear operator that determines i_u from E_{dl}

$$i_u = \mathcal{T}E_{dl}. \quad (21)$$

It is worth noting that when $\mathcal{T}$ acts on any distribution, it gives a regular function that can be determined by using the computer.

The fundamental relation that gives $E_{lu}(\xi)$ from $E_{dl}(\xi)$ is obtained by applying the operator $\mathcal{J}$ to the two members of Eq. (17). We get

$$\chi_u(\xi) E_{lu}(\xi) = g(\xi) E_{dl}(\xi) + i_u(\xi), \quad (22)$$

where we have put

$$g(\xi) = \frac{\chi_u(\xi)}{T(\xi)} = \frac{1}{2} [\chi_u(\xi) + \chi_l(\xi)]. \quad (23)$$

This function g is continuous and never vanishes.

2.2.4. Application to the Solution of Practical Problems

Let us now come back to the resolution of a practical diffraction problem, i.e., to find the diffracted field when the incident

field is known. For example, let us suppose that $E^i(x, y) = \exp(-iy)$. By writing that $E_{lu}(\zeta) = \delta(\zeta)$ in Eq. (22), we get

$$E_{Dl}(\zeta) = \frac{1}{g(\zeta)} [\delta(\zeta) - i_u(\zeta)] \quad (24)$$

and from Eq. (21)

$$i_u(\zeta) = T \left\{ \frac{1}{g(\zeta)} [\delta(\zeta) - i_u(\zeta)] \right\}. \quad (25)$$

This is a functional equation for the function i_u , which is the fundamental unknown.

When i_u is known, E_{Dl} is given by Eq. (24), and therefore the field is known everywhere. Let us note that it can be considered as the superposition of the response of the non-deformed boundary and a diffracted field that, far from the obstacle, looks like a diffracted beam coming from the deformed region.

2.3. Diffraction by a Waveguide Deformation

Let us consider the locally deformed slab waveguide shown in Fig. 4, supposing that the associated slab (a layer of index n_g on a substrate of index n_l) can support a single mode of effective index ζ_G . We can repeat for this structure most of the remarks we made in Section 2.2. Only minor changes have to be made in paragraphs 2.2.1, 2.2.2, and 2.2.3: $N(y)$ represents now the optical index of the stratified medium (the layer on the substrate); Eq. (14b) is valid for $y \leq y_l$ instead of for $y \leq 0$; the form of $\hat{E}_0(\zeta, y)$ is a little more complicated and necessitates the use of three regions; and $e(\zeta, y)$ is zero for $y \leq y_l$ instead of for $y \leq 0$. However, and because the existence of a guided mode implies the vanishing of $g(\zeta)$ for $\zeta = \pm \zeta_G$, a new difficulty appears when we try to deduce Eq. (24) from Eq. (22). For example, if we suppose, as is often the case in integrated optics, that $E_{lu}(\zeta) = 0$, we are led to

$$g(\zeta)E_{Dl}(\zeta) = -i_u(\zeta), \quad (26)$$

and, because of the existence of zeros of $g(\zeta)$, we are confronted with the problem of division in distribution theory.⁸ It is well known that Eq. (26) infers

$$E_{Dl}(\zeta) = -P \left[\frac{i_u(\zeta)}{g(\zeta)} \right] + a_+ \delta(\zeta - \zeta_G) + a_- \delta(\zeta + \zeta_G), \quad (27)$$

where a_+ and a_- are two arbitrary constants and P denotes a Cauchy principal-value distribution.⁹

Carrying Eq. (27) into Eq. (21), we obtain

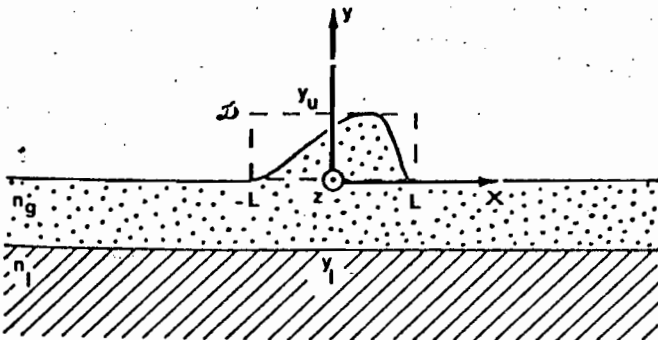


Fig. 4. The locally deformed slab waveguide.

$$i_u(\zeta) = T \left\{ -P \left[\frac{i_u(\zeta)}{g(\zeta)} \right] + a_+ \delta(\zeta - \zeta_G) + a_- \delta(\zeta + \zeta_G) \right\}. \quad (28)$$

This functional equation, which plays the role of Eq. (25) in the preceding section, can be numerically solved only if a_+ and a_- are known.

When i_u is known, $E_{Dl}(\zeta)$ and $\hat{E}(\zeta, y)$ for $y \leq y_l$ are given successively by Eq. (27) and Eq. (14b). Clearly, after some algebraic manipulations, it turns out that for $y \leq y_l$, $\hat{E}(\zeta, y)$ can be written as

$$\hat{E}(\zeta, y) = \left[e_+ P \left(\frac{1}{\zeta - \zeta_G} \right) + e_- P \left(\frac{1}{\zeta + \zeta_G} \right) + a_+ \delta(\zeta - \zeta_G) + a_- \delta(\zeta + \zeta_G) \right] \exp[-i\chi_l(\zeta_G)y] + U(\zeta, y), \quad (29)$$

where U is a regular function of ζ and e_+, e_- are two constants that are easy to compute.

On the other hand, and from a physical point of view, we guess that far from the deformation, the field reduces to the superposition of two modes propagating in opposite directions. It seems therefore convenient to write that, for $y \leq y_l$,

$$E(x, y) = \exp[-i\chi_l(\zeta_G)y] \{ [I_l \exp(i\zeta_G x) + D_l \exp(-i\zeta_G x)] H(-x) + [I_r \exp(-i\zeta_G x) + D_r \exp(i\zeta_G x)] H(x) \} + \bar{E}(x, y), \quad (30)$$

where $\bar{E}(x, y)$, which tends to zero when $|x| \rightarrow \infty$, describes the diffracted field that is due to the deformation, and $H(x)$ is the Heaviside's step function. D_l and D_r are the amplitudes of the outgoing (or diffracted) modes. I_l and I_r are the amplitudes of the incoming (or incident) modes. The letters l (left) and r (right) refer to directions of propagation.

Keeping in mind all these generalities, we are now ready to solve a practical problem: for example, what happens when a guided mode coming from the left reaches the deformation? Termed in mathematical words, is it possible to determine D_l , D_r , $E_{Dl}(\zeta)$, and $E_{Du}(\zeta)$ when I_l is fixed and knowing that I_r , $E_{lu}(\zeta)$, and $E_{ll}(\zeta)$ are zero? Here the key remark consists of noticing that I_l , I_r , D_l , and D_r are linearly dependent on a_+ , a_- , e_+ , and e_- . This can be proved by comparing the Fourier transform¹⁰ of $E(x, y)$, as given by Eq. (30), with the expression given in Eq. (29); comparison of singular term yields

$$\begin{aligned} \pi i e_+ &= -I_l + D_r, \\ \pi i e_- &= I_r - D_l, \\ 2a_+ &= I_l + D_r, \\ 2a_- &= I_r + D_l. \end{aligned} \quad (31)$$

Consequently, since when a_+ and a_- are fixed we can compute e_+ and e_- , there exist two 2×2 matrixes $\mathcal{A}$ and $\mathcal{B}$, such as

$$\begin{pmatrix} I_l \\ I_r \end{pmatrix} = \mathcal{A} \begin{pmatrix} a_+ \\ a_- \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} D_l \\ D_r \end{pmatrix} = \mathcal{B} \begin{pmatrix} a_+ \\ a_- \end{pmatrix}. \quad (32)$$

The elements of these matrixes can be determined by performing twice the previous computation for particular values of a_+ and a_- . We can choose, for example, $(a_+ = 1, a_- = 0)$ and $(a_+ = 0, a_- = 1)$. As soon as $\mathcal{A}$ and $\mathcal{B}$ are known, the solving of a given practical problem is a simple matter. If, for example, $I_l = 1$, and $I_r = 0$, the values of the associated coefficient a_+ and a_- , as well as D_l and D_r , are immediately obtained:

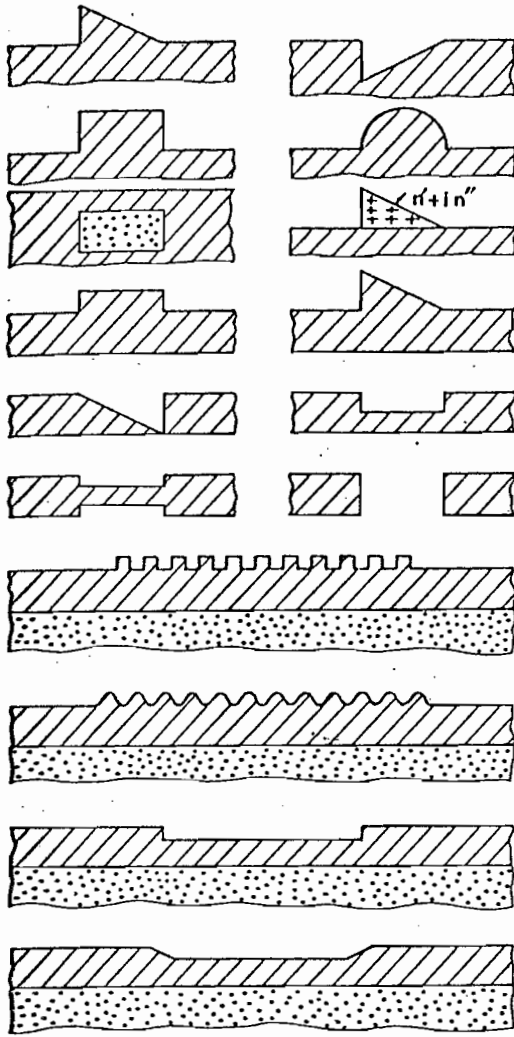


Fig. 5. Examples of configurations studied.

$$\begin{pmatrix} a_+ \\ a_- \end{pmatrix} = \mathcal{A}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} D_I \\ D_r \end{pmatrix} = \mathcal{B} \mathcal{A}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (33)$$

2.4. Numerical Implementation

The numerical aspect, which has been somewhat neglected in the previous sections, is briefly discussed below in dealing with the general case. To give an idea of the possibilities of the methods described in this section, we have schematized in Fig. 5 some structures for which we already have numerical results. It is perhaps worth saying that, because of numerical limitations, the width of the deformation must be less than, say, $20 \lambda_0$ and its height less than λ_0 .

3. GENERALITIES ON THE LOCALLY DEFORMED PLANE WAVEGUIDE

We are now sufficiently accustomed to differential formalism techniques to face some theoretical problems frequently encountered in integrated optics when dealing with planar guides (stacks of thin films lying on a substrate). Starting from a stratified medium whose index is a piecewise constant function $N(y)$, we obtain a locally deformed plane waveguide by modifying $N(y)$ in some bounded region. Figure 6 shows such a structure whose optical index is called $n(x,y)$. The

deformation is invariant with z , and the structure extends to infinity in both horizontal directions. Inside the rectangle $\mathcal{D}$ (i.e., for $y_0 < y < y_1$ and $|x| < L$) both interface deformations and inclusions of materials (such as a rod with complex index $n' + in''$) are accepted. It is only outside $\mathcal{D}$ that n is equal to the index $N(y)$. In the lower homogeneous region ($y \leq y_l$), n is constant and equal to the index n_l of the substrate (l -like lower). In the same way, in the upper homogeneous region ($y \geq y_u$), n is constant and equal to the index n_u of the superstrate.

3.1. Maxwell's Equations

The complex vectors $E(x,y,z)$ and $H(x,y,z)$ associated with the electric and magnetic fields satisfy Maxwell's equations in the sense of distribution theory,⁴

$$\begin{aligned} \text{curl } E &= i\omega\mu_0 H, \\ \text{curl } H &= -i\omega\epsilon_0 n^2 E, \end{aligned} \quad (34)$$

and we seek solutions of the form¹¹

$$\begin{aligned} E(x,y,z) &= E(x,y) \exp(i\gamma z) / \sqrt{\omega\epsilon_0}, \\ H(x,y,z) &= H(x,y) \exp(i\gamma z) / \sqrt{\omega\mu_0}, \end{aligned} \quad (35)$$

where γ is a given real constant, which is a fundamental parameter of our problem.

By substituting Eq. (35) into Eq. (34) and taking $\lambda_0/2\pi$ as the unit of length, we get, by eliminating E_y and H_y and dividing by $\exp(i\gamma z)$,

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} = i \left(1 - \frac{\gamma^2}{n^2} \right) H_x + \frac{\gamma}{n^2} \frac{\partial H_z}{\partial x},$$

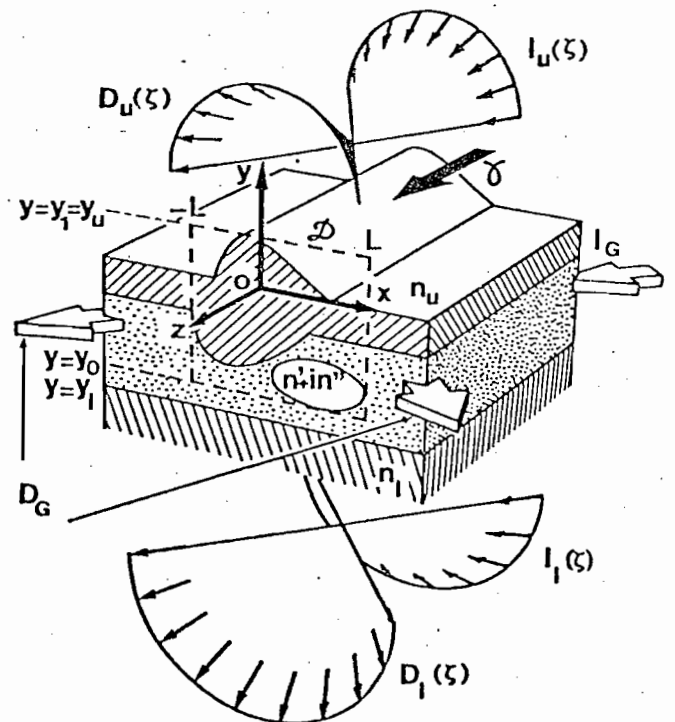


Fig. 6. The locally deformed plane waveguide and the schematic description of the associated fields. All the examples of Fig. 5 are particular cases of this configuration. Here $y_1 = y_u$, but $y_0 \neq y_l$. The incident fields (I_u, I_l) and the diffracted fields (D_u, D_l) are represented by black arrows lying on a cone. Large and white arrows schematize incident and diffracted modes (I_G, D_G).

$$\begin{aligned}\frac{\partial H_x}{\partial y} &= in^2 E_z + \frac{\partial}{\partial x} \left(i \frac{\partial E_z}{\partial x} + \gamma E_x \right), \\ \frac{\partial H_z}{\partial y} &= -i(n^2 - \gamma^2) E_x - \gamma \frac{\partial E_z}{\partial x}, \\ \frac{\partial E_x}{\partial y} &= -iH_z - \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{n^2} \left(i \frac{\partial H_z}{\partial x} + \gamma H_x \right) \right],\end{aligned}\quad (36a)$$

$$\begin{cases} E_y = -\frac{i}{n^2} \frac{\partial H_z}{\partial x} - \frac{\gamma}{n^2} H_x \\ H_y = i \frac{\partial E_z}{\partial x} + \gamma E_x \end{cases} \quad (36b)$$

3.2. Some Notations

In this formulation, the electromagnetic field is completely characterized by the vector $C(x,y)$ of dimension four¹² whose components are $E_z, H_x, H_z,$ and E_x . We call it the characteristic field vector. The refractive-index variations are then written as

$$\begin{aligned}n^2(x,y) &= N^2(y) + D^+(x,y), \\ \frac{1}{n^2(x,y)} &= \frac{1}{N^2(y)} + D^-(x,y),\end{aligned}\quad (37)$$

where the two known functions D^+ and D^- , which are zero outside the rectangle $\mathcal{D}$, characterize the deformation. Finally, we introduce⁶ the Fourier transforms $\hat{E}(\xi,y), \hat{H}(\xi,y), \hat{D}^+(\xi,y), \hat{D}^-(\xi,y)$:

$$\begin{aligned}E(x,y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{E}(\xi,y) \exp(i\xi x) d\xi, \\ H(x,y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{H}(\xi,y) \exp(i\xi x) d\xi, \\ D^\pm(x,y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{D}^\pm(\xi,y) \exp(i\xi x) d\xi,\end{aligned}\quad (38)$$

and put

$$\beta = \sqrt{\xi^2 + \gamma^2}, \quad \chi_u(\xi) = \sqrt{n_u^2 - \beta^2}, \quad \chi_l(\xi) = \sqrt{n_l^2 - \beta^2}.\quad (39)$$

3.3. Fundamental Equation

In order to facilitate the expression of the boundary conditions, as well as the study of the nondeformed waveguide, it is convenient to associate each value of ξ with the rectangular system $OXYZ$ denoted $\mathcal{R}(\xi)$, obtained from $Oxyz$ by a rotation of axis Oy that brings Ox upon the vector $(\xi, 0, \gamma)$ (Fig. 7). We call $e(\xi)$ the unit vector of the axis OZ . A glance at Fig. 8 shows the reasons why we use $\mathcal{R}$ rather than $Oxyz$: for example, in the upper region, plane waves $\exp[i(\gamma y + \xi x \pm \chi_u(\xi)y)]$ propagate in the plane $Z = 0$.

We frequently use a vector $F(\xi,y)$ (F is the first letter of field) made up from components of $\hat{E}$ and $\hat{H}$ in the rectangular system $\mathcal{R}(\xi)$, namely, $\hat{E}_Z, \hat{H}_X, \hat{H}_Z, \hat{E}_X$. We have to stress the point that these components are not generally the Fourier transforms of functions having a physical meaning.

After substituting Eq. (38) into Eq. (36a) and using the coordinate transformation, we obtain

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \mathcal{W}_\beta F + \mathcal{P}_y E, \quad (40)$$

where $\mathcal{W}_\beta$ and $\mathcal{P}_y$ are operators defined as

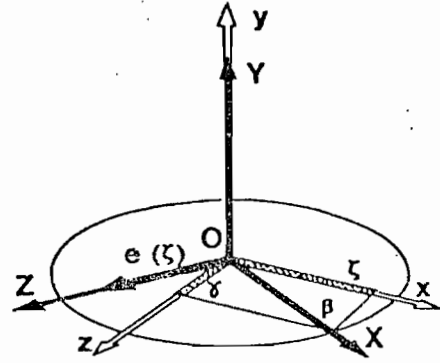


Fig. 7. The coordinate transformation. Do not confuse block capitals XYZ and lower-case letters xyz.

$$\mathcal{W}_\beta F = \mathcal{W}_\beta \begin{bmatrix} \hat{E}_Z \\ \hat{H}_X \\ \hat{H}_Z \\ \hat{E}_X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i\hat{H}_X \\ i(N^2 - \beta^2)\hat{E}_Z \\ -iN^2\hat{E}_X \\ -i\left(1 - \frac{\beta^2}{N^2}\right)\hat{H}_Z \end{bmatrix}, \quad (41a)$$

$$\mathcal{P}_y F = \mathcal{P}_y \begin{bmatrix} \hat{E}_Z \\ \hat{H}_X \\ \hat{H}_Z \\ \hat{E}_X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ i\frac{\xi}{\beta}(\hat{D}^+ * \hat{E}_Z) \\ -i\frac{\gamma}{\beta}(\hat{D}^+ * \hat{E}_X) \\ -i\frac{\gamma}{\beta}(\hat{D}^+ * \hat{E}_Z) \\ -i\frac{\xi}{\beta}(\hat{D}^+ * \hat{E}_X) \\ i\beta[\hat{D}^- * (\beta\hat{H}_Z)] \end{bmatrix}, \quad (41b)$$

with

$$\begin{aligned}\hat{E}_x &= \xi/\beta \hat{E}_X - \gamma/\beta \hat{E}_Z, \\ \hat{E}_z &= \gamma/\beta \hat{E}_X + \xi/\beta \hat{E}_Z,\end{aligned}$$

and where $*$ denotes a convolution in ξ .

For a given value of β , $\mathcal{W}_\beta$ is a linear operator depending on y , which is associated with the nondeformed waveguide. As for $\mathcal{P}_y$, it is, for a given y , a convolution operator (in ξ) that is linked with the perturbation (the deformed region).

When $\gamma = 0$, the integrodifferential system (40) splits into two independent systems of unknowns $\hat{E}_Z, \hat{H}_X$ and $\hat{H}_Z, \hat{E}_X$, which are associated, respectively, with the two cases of rectilinear polarization (E or H parallel to Oz).

It is worth noting that $\mathcal{P}_y F$ is an infinitely differentiable vector function of ξ . This is because $\hat{D}^+ * \hat{E}_Z, \hat{D}^+ * \hat{E}_X$, and $\hat{D}^- * (\beta\hat{H}_Z)$, are band limited, i.e., their Fourier transforms have a limited support. For instance, the Fourier transform of $\hat{D}^+ * \hat{E}_Z$ is the product of $\hat{E}_Z$ with the function D^+ , which is zero outside the interval $(-L, L)$.

3.4. Form of the Fields in the Upper and Lower Regions
When $y \geq y_u$ or $y \leq y_l$, then $\mathcal{P}_y = 0$, and the solutions of Eq. (40) can be written in the following form:
if $y \geq y_u$:

$$F(\xi, y) = \begin{pmatrix} E_{lu}(\xi) \\ -\chi_u E_{lu}(\xi) \\ H_{lu}(\xi) \\ \chi_u/n_u^2 H_{lu}(\xi) \end{pmatrix} \exp(-i\chi_u y) + \begin{pmatrix} E_{du}(\xi) \\ \chi_u E_{du}(\xi) \\ H_{du}(\xi) \\ -\chi_u/n_u^2 H_{du}(\xi) \end{pmatrix} \exp(i\chi_u y), \quad (42a)$$

if $y \leq y_l$:

$$F(\xi, y) = \begin{pmatrix} E_{dl}(\xi) \\ -\chi_l E_{dl}(\xi) \\ H_{dl}(\xi) \\ \chi_l/n_l^2 H_{dl}(\xi) \end{pmatrix} \exp(-i\chi_l y) + \begin{pmatrix} E_{ll}(\xi) \\ \chi_l E_{ll}(\xi) \\ H_{ll}(\xi) \\ -\chi_l/n_l^2 H_{ll}(\xi) \end{pmatrix} \exp(i\chi_l y). \quad (42b)$$

E_{dl} , H_{dl} , E_{ll} , H_{ll} , E_{lu} , H_{lu} , E_{du} , and H_{du} are unknown complex functions. The indices D, I, l, u refer to the words diffracted, incident, lower, and upper, whereas E and H denote the two cases of rectilinear polarizations TE (or TH) in which, by definition, E (or H) is perpendicular to Oy . For example, if $\gamma = 0$, and if the electric field is parallel to Oz , then $H_{dl} = H_{ll} = H_{lu} = H_{du} = 0$.

In both the upper and lower regions, we regroup the functions describing the incident or the diffracted fields. For this purpose, we define the following two-dimensional vectors:

$$I_u(\xi) = \chi_u(\xi) \begin{pmatrix} E_{lu}(\xi) \\ H_{lu}(\xi) \end{pmatrix}, \quad D_u(\xi) = \chi_u(\xi) \begin{pmatrix} E_{du}(\xi) \\ H_{du}(\xi) \end{pmatrix}, \\ I_l(\xi) = \begin{pmatrix} E_{ll}(\xi) \\ H_{ll}(\xi) \end{pmatrix}, \quad D_l(\xi) = \begin{pmatrix} E_{dl}(\xi) \\ H_{dl}(\xi) \end{pmatrix}. \quad (43)$$

It is also convenient for a concise formulation of the method to introduce three new operators $\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{D}$ defined¹³ as follows:

$$F(\xi, y_l) = \mathcal{I}[I_l(\xi), D_l(\xi)], \\ I_u(\xi) = \mathcal{J}[F(\xi, y_u)], \\ D_u(\xi) = \mathcal{D}[F(\xi, y_u)]. \quad (44)$$

$F(\xi, y_l)$ is obtained from $I_l(\xi)$ and $D_l(\xi)$ through Eq. (42b), whereas $I_u(\xi)$ and $D_u(\xi)$ are deduced from $F(\xi, y_u)$ by solving the linear system (42a) taking E_{lu} , H_{lu} , E_{du} , and H_{du} as unknowns. The operator $\mathcal{I}$ gives the field for $y = y_l$ when the incident and diffracted components are known, whereas $\mathcal{J}$ and $\mathcal{D}$ calculate the incident and diffracted component amplitudes above the obstacle when the field is known at $y = y_u$.

3.5. Comments on the Nondeformed Waveguide
In this case $D^+ = D^- = 0$, and therefore Eq. (40) reduces to

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \mathcal{W}_\beta F. \quad (45)$$

Giving $D_l(\xi)$ allows us to compute $F(\xi, y_l) = \mathcal{I}[0, D_l(\xi)]$, then $F(\xi, y)$ by solution of Eq. (45) (elementary calculation relevant to thin-film theory), and at last $I_u(\xi) = \mathcal{J}[F(\xi, y_u)]$. We call $\mathcal{G}$ the linear operator that transforms D_l into I_u .

Let $T_E(\xi)$ [or $T_H(\xi)$] be the Fresnel transmission coefficient in amplitude of a plane wave incident upon the nondeformed waveguide when the vector E (or H) is perpendicular to the plane of incidence (ξ and γ being the components of the wave vector upon Ox and Oz). One can express $\mathcal{G}$ by using these coefficients, which are easily obtained,

$$\mathcal{G}[D_l(\xi)] = I_u(\xi) = \begin{pmatrix} \chi_u/T_E(\xi) & 0 \\ 0 & \chi_u/T_H(\xi) \end{pmatrix} D_l(\xi). \quad (46)$$

Let us suppose that we have m_E TE modes corresponding to the positive values of ξ : $\xi_E^1, \dots, \xi_E^{m_E}$, for which $\chi_u/T_E = 0$; and m_H TH modes corresponding to the positive values of ξ : $\xi_H^1, \dots, \xi_H^{m_H}$, for which $\chi_u/T_H = 0$. Those modes are solutions such that

$$E = \phi_E^j(y) \exp(\pm i\xi_E^j x) e(\pm \xi_E^j), \quad j = 1, \dots, m_E, \\ H = \phi_H^j(y) \exp(\pm i\xi_H^j x) e(\pm \xi_H^j), \quad j = 1, \dots, m_H, \quad (47)$$

which exist even when the incident part is missing. The functions ϕ_E^j and ϕ_H^j are assumed to be normalized such that

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\phi_E^j(y)|^2 dy = 1, \quad \int_{-\infty}^{\infty} |\phi_H^j(y)|^2 / N^2(y) dy = 1. \quad (48)$$

To compress the notation, we put

$$m = m_E + m_H, \quad (49)$$

$$\xi_G^j = \begin{cases} \xi_E^j & \text{if } j \leq m_E \\ \xi_H^{j-m_E} & \text{if } m_E < j \leq m \end{cases}.$$

Let $\psi_+^j(y) \exp(i\xi_G^j x)$ [or $\psi_-^j(y) \exp(-i\xi_G^j x)$] be the characteristic field vector (as defined in paragraph 2.2.1) associated with the mode number j that propagates to the right (or to the left).

3.6. Comments on the Characteristic Field Vector

Let us return to the case of the deformed waveguide. The characteristic field vector $C(x, y)$ can be expressed as the sum of a function $\tilde{C}(x, y)$ (whose Fourier transform in x is regular in the vicinity of $\xi = \pm \xi_G^j$) and a piecewise linear combination C_G of guided modes,

$$C_G(x, y) = \sum_{j=1}^m [I_l^j \psi_+^j(y) \exp(i\xi_G^j x) + D_l^j \psi_-^j(y) \exp(-i\xi_G^j x)] H(-x) \\ + \sum_{j=1}^m [I_r^j \psi_-^j(y) \exp(-i\xi_G^j x) + D_r^j \psi_+^j(y) \exp(i\xi_G^j x)] H(x), \quad (50)$$

where $H(x)$ is the step function [$H(x) = 1$ if $x > 0$, $H(x) = 0$ if $x < 0$]. The capital letters I and D , used in the coefficients

I_l^j, D_l^j and I_r^j, D_r^j , are the initials of the adjectives incident and diffracted that we use here to designate the incoming and outgoing guided modes. The subscripts l and r recall the words left and right (referring to Fig. 6). Far from the deformation (i.e., for sufficiently large values of x), $C_G(x, y)$ is a good description of the guided field.

Hereafter, we call I_G the vector made of the $2m$ incident components (I_l^j, I_r^j) and D_G the vector made of the $2m$ diffracted ones (D_l^j, D_r^j).

Keeping in mind that the Fourier transform of $H(x)$ is $1/2\delta(\zeta) + (1/2\pi i)P(1/\zeta)$ [where $P(1/\zeta)$ is the principal value distribution], classical but perhaps tedious considerations about Fourier transforms show that $F(\zeta, y)$, as defined in Section 2.2.3, is necessarily of the form

$$F(\zeta, y) = \sum_{j=1}^m \left\{ \left[\frac{D_r^j + I_l^j}{2} \delta(\zeta - \zeta_G^j) + \frac{D_r^j - I_l^j}{2\pi i} P\left(\frac{1}{\zeta - \zeta_G^j}\right) \right] \psi_+^j(y) + \left[\frac{I_r^j + D_l^j}{2} \delta(\zeta + \zeta_G^j) + \frac{I_r^j - D_l^j}{2\pi i} P\left(\frac{1}{\zeta + \zeta_G^j}\right) \right] \psi_-^j(y) \right\} + U(\zeta, y), \quad (51)$$

where $U(\zeta, y)$ is a regular function in the vicinity of $\zeta = \zeta_G^j$. Even if the reader wishes to avoid cumbersome mathematical details, it is essential to understand the importance of this expansion, which focuses on some important singularities of F .

4. THEORETICAL FUNDAMENTAL REMARKS

In order to describe the electromagnetic field, we introduced in Section 3 several functions whose definition must be perfectly understood.

Solving a practical problem consists of finding D_u, D_l , and D_G when I_u, I_l , and I_G are known. We are confronted with this task in Section 5, and the method we then use is based on the following fundamental theoretical remarks, which, at first glance, seem rather abstract.

4.1. Key Remark 1

From a mathematical point of view, the knowledge of the pair $[I_l(\zeta), D_l(\zeta)]$ defined in Eq. (43) allows us to determine $F(\zeta, y)$.

4.1.1.

In the case of the nondeformed waveguide, this can be done by solution of Eq. (45), taking into account the initial value given by Eq. (42b) for $y = y_l$. Thus one can compute $F_0(\zeta, y)$, corresponding to $[0, D_l(\zeta)]$, and $F_1(\zeta, y)$, corresponding to $[I_l(\zeta), 0]$, by means of elementary computations relevant to thin-film theory.

4.1.2.

In the case of the deformed waveguide, we put

$$F(\zeta, y) = F_0(\zeta, y) + F_1(\zeta, y) + f(\zeta, y), \quad (52)$$

which defines the new unknown vector function $f(\zeta, y)$. It follows from the definition of F_0 and F_1 , that $f(\zeta, y)$ is zero for $y \leq y_0$. On substituting Eq. (52) into Eq. (40) and noticing that F_0 and F_1 satisfy Eq. (45), it appears that $f(\zeta, y)$ is the solution of the integrodifferential functional equation

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \mathcal{W}_y f + \mathcal{P}_y(F_0 + F_1 + f), \quad (53)$$

which satisfies the boundary condition

$$f(\zeta, y_0) = 0. \quad (54)$$

The solution of this equation gives $f(\zeta, y_u)$, and then

$$i_u(\zeta) = \mathcal{J}[f(\zeta, y_u)], \quad (55)$$

where $\mathcal{J}$ is an operator already defined [Eq. (44)]. We call $\mathcal{T}$ the operator that determines i_u from the pair $[I_l(\zeta), D_l(\zeta)]$ and algorithm I the set of associate operations. By applying the operator $\mathcal{J}$ to $F(\zeta, y_u)$, relation (52) yields

$$I_u(\zeta) = \mathcal{G}[D_l(\zeta)] + I_{u1}(\zeta) + i_u(\zeta), \quad (56)$$

where

$$I_{u1}(\zeta) = \mathcal{J}[F(\zeta, y_u)], \quad I_{u1}(\zeta) = \mathcal{J}[F_1(\zeta, y_u)],$$

since, taking into account the definition of F_0 and Eq. (46), we have

$$\mathcal{J}[F_0(\zeta, y_u)] = \mathcal{G}[D_l(\zeta)].$$

4.1.3.

We also note that the knowledge of $I_l(\zeta)$ and of $D_l(\zeta)$ allows us [Eq. (42b)] to calculate $F(\zeta, y_l) = \mathcal{T}[I_l(\zeta), D_l(\zeta)]$ and, after identification with Eq. (51), the vector I_G and D_G defined in Section 3.6.

4.1.4.

In short, we must remember for the following that, after solution of Eq. (53) and some easy algebraic computations, we are able to determine

- (1) $i_u(\zeta) = \mathcal{T}[I_l(\zeta), D_l(\zeta)]$,
 - (2) $D_u(\zeta) = \mathcal{D}[F(\zeta, y_u)]$,
 - (3) the vectors I_G and D_G
- (57)

from the knowledge of I_l and D_l as soon as $I_l(\zeta)$ and $D_l(\zeta)$ are known. Taking into account the regularity of $\mathcal{P}_y(F_0 + F_1 + f)$ in Eq. (53) (see the remark at the end of Section 3.3), it is reasonable to assume that $f(\zeta, y)$, and consequently $i_u(\zeta)$, is a function [whereas $D_l(\zeta)$ and $I_l(\zeta)$ may be distributions].

4.2. Key Remark 2

When the guide can support modes ($m \neq 0$), it is not possible to deduce $D_l(\zeta)$ from $I_u(\zeta)$ and $I_l(\zeta)$. Physically, it is obvious that knowledge of the field for $y < y_l$ requires not only knowledge of the incident field but also information about possible excitation by the modes. Mathematically speaking, this means that, as in Section 2.3, we have to face the problem of division in distribution theory. Relation (56) yields

$$D_l(\zeta) = P\{\mathcal{G}^{-1}[I_u(\zeta) - I_{u1}(\zeta) - i_u(\zeta)] + \sum_{j=1}^m [a_+^j \delta_+^j(\zeta) + a_-^j \delta_-^j(\zeta)], \quad (58)$$

where P denotes a Cauchy principal-value distribution,

$$\delta_{\pm}^j(\zeta) = \begin{cases} \delta(\zeta \mp \zeta_G^j) & \text{if } j \leq m_E \text{ (TE modes),} \\ 0 & \text{if } m_E < j \leq m \text{ (TH modes),} \end{cases}$$

and a_+^j and a_-^j are a set of $2m$ arbitrary coefficients that we can regroup in a vector A .

Substituting Eq. (58) for D_l in Eq. (57), we obtain the functional equation for the unknown i_u :

$$\mathcal{L}i_u = i_{uc}, \quad (59)$$

with

$$i_{uc} = T \left\{ I_l(\zeta), P[\mathcal{G}^{-1}(I_u - I_{u1})] + \sum_{j=1}^m [a_+^j \delta_+^j(\zeta) + a_-^j \delta_-^j(\zeta)] \right\}$$

and

$$\mathcal{L}i_u = i_u + T(0, P[\mathcal{G}^{-1}[i_u(\zeta)]]).$$

This shows clearly that the determination of i_u [and therefore of D_l from Eq. (58)] not only requires the knowledge of I_u and I_l but also the knowledge of a vector A with $2m$ arbitrary components (because of the existence of m modes).

4.3.

Therefore the two previous paragraphs (4.1 and 4.2) allow us to define a new linear transformation (algorithm II), which at $I_u(\zeta)$, $I_l(\zeta)$, and A associates $D_u(\zeta)$, $D_l(\zeta)$, I_G , and D_G .

5. PRINCIPLE OF THE RESOLUTION OF A GIVEN PHYSICAL PROBLEM

Solving a physical problem consists of finding the values ($\tilde{D}_u, \tilde{D}_l, \tilde{D}_G$) of the diffracted field¹⁴ when the values of the incident field (I_u, I_l, I_G) are known. All we can do, using algorithm II, is to compute D_u, D_l, D_G , and I_G when I_u, I_l , and A are given. In other words, the mathematical problem for which a numerical algorithm is available does not correspond with the problem the physicist has to face. Once more we have to use a method that takes into account the linearity of the problem. For instance, we can first perform $2m + 1$ times algorithm II with the following values of I_u, I_l , and A :

$$I_u = I_u, I_l = I_l, A = (0, \dots, 0),$$

$$I_u = 0, I_l = 0, A = (1, \dots, 0),$$

$$\dots\dots\dots$$

$$I_u = 0, I_l = 0, A = (0, \dots, 1).$$

Then we search for the linear combination of these test results that matches the input of the physical problem, i.e.,

$$I_u = I_u, I_l = I_l, I_G = I_G.$$

This requires simply the solution of a $2m \times 2m$ linear system. We have to point out that algorithm I (as defined in Section 4.1.2) is used by algorithm II. In the computer a subroutine is called while performing algorithm II.

6. NUMERICAL ASPECTS

6.1. Performing Algorithm I (Operator T)

In order to solve Eq. (53) numerically, we represent $f(\zeta, y)$ by its values at N sampling points in ζ . Typically, to obtain reliable results requires a few hundreds of such points. Equation (53) can then be approximated by a first-order differential

system in y of dimension $4N$. We perform the integration of this system, taking into account the initial value $f(\zeta, y_0) = 0$, from $y = y_0$ to $y = y_u$ by means of a fourth-order Runge-Kutta algorithm that, at each step, computes $\mathcal{P}_y(F_0 + F_1 + f)$ at the N sampling points in ζ . Convolution products that appear in the evaluation of $\mathcal{P}_y$ are computed numerically by means of two successive fast Fourier transforms, after having separated, if necessary, the contribution of purely distributive terms contained in F_0 and F_1 . (This method is known to be more suitable than a direct computation of the convolution integral for the N values of ζ by the usual methods of numerical integration.) Once Eq. (53) is solved, the evaluation of $i_u = T(I_l, D_l)$ requires only some easy algebraic calculations (paragraph 4.1).

6.2. Solving Functional Eq. (59) When I_u, I_l , and A Are Given (Algorithm II)

Computation of the second member i_{uc} , as well as the action of $\mathcal{L}$ upon any function i_u , can be reduced to the computation of the action of T upon a distribution that has been described in paragraph 6.1.

After sampling in ζ , Eq. (59) takes on the form

$$LX = B, \quad (60)$$

where B and X are $2N$ component vectors made up of the values of i_u and i_{uc} at the sampling points and L is the numerical approximation of $\mathcal{L}$. In other words, by means of rather long calculations using algorithm I, we are able to determine numerically LX from X . Performing these calculations $2N$ times would allow us to determine the matrix associated with L . One could then determine X by a matrix inversion, but, because of the large matrix size, an iteration scheme is performed instead (see the appendix).

7. EXAMPLE OF RESULTS

Although only one example is reported here, the computations have been performed for a large number and variety of obstacles (those are shown in Fig. 5) using an IBM 370-168 computer. The computation time is usually less than one minute. The reliability and accuracy of the results have been tested with energy balance and reciprocity considerations. Because of lack of space, we cannot give and justify the rather cumbersome relations that can be derived from the famous reciprocity theorem¹⁵; an entire paper would be necessary, as was recently done for gratings in oblique incidence.¹⁶

To demonstrate the capabilities of the method, let us suppose that the diffracted energy is collected by a detector situated far from the obstacle in the directions defined, with respect to $Oxyz$, by (ζ, χ_u, γ) in the upper region and $(\zeta, -\chi_l, \gamma)$ in the lower region (Fig. 8). It can be shown that the collected energy is proportional to

$$\frac{n_u^2}{n_u^2 - \gamma^2} |\chi_u E_{Du}(\zeta)|^2$$

for the upward-diffracted TE component,

$$\frac{1}{n_u^2 - \gamma^2} |\chi_u H_{Du}(\zeta)|^2$$

for the upward-diffracted TH component,

$$\frac{n_l^2}{n_l^2 - \gamma^2} |\chi_l E_{Dl}(\zeta)|^2$$

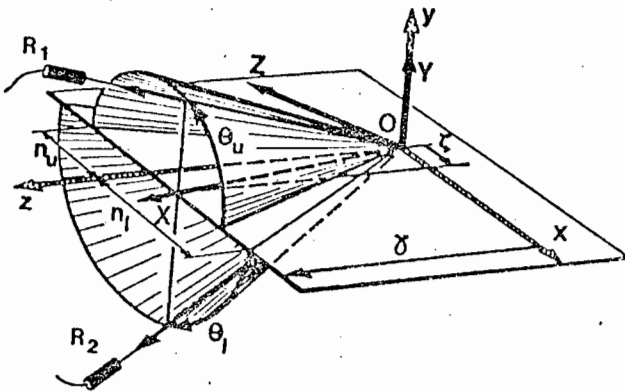


Fig. 8. Physical meaning of the diffraction patterns. R_1 and R_2 are detectors for the diffracted field.

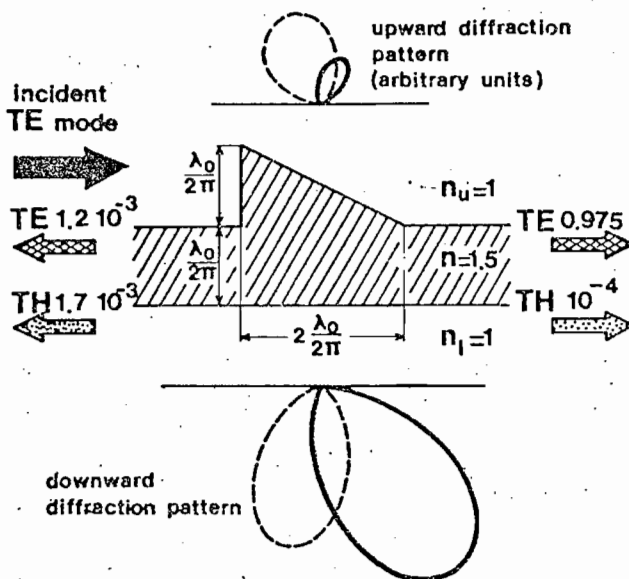


Fig. 9. Schematic representation of results obtained for $\gamma = n_u \sin(45^\circ)$. The waveguide can support only one TE mode and one TH mode. Actually these modes are propagating obliquely with respect to Oz . The obstacle is illuminated by the TE mode coming from the left. The incident energy is taken as unity. The diffraction patterns are drawn using a continuous line for TE polarization and a dashed line for TH.

for the downward-diffracted TE component, and

$$\frac{1}{n_l^2 - \gamma^2} |X_l H_{Dl}(\zeta)|^2$$

for the downward-diffracted TH component.

If we plot these quantities as a function of the rotation angle about the z axis, we obtain the diffraction pattern. In Fig. 9, these patterns are plotted in polar coordinates: the variable angle is $\theta_u = \arccos(\zeta/\sqrt{n_u^2 - \gamma^2})$ for the upper region and $\theta_l = -\arccos(\zeta/\sqrt{n_l^2 - \gamma^2})$ for the lower one (Fig. 8).

8. CONCLUSION

We have shown that it is possible to solve numerically the problem of diffraction by a locally deformed dielectric plane waveguide, at least when the dimensions of the deformation are less than a few wavelengths (height less than λ_0 , width less than $20 \lambda_0$). We are fully aware that some tens of wavelengths is very small in visible optics. It is clear that, for integrate optics purposes, it would be desirable to be able to deal

with much wider deformations. Up to now, and to our knowledge, this can be done only with approximate methods, the validity of which need to be checked by comparison with a rigorous method. We hope our work is useful from this point of view.¹⁷

It would of course be desirable that a comparison be made between our numerical results and measurements for a structure whose geometry and indices have been carefully checked. Unfortunately, our laboratory equipment does not permit such a comparison. We hope that some experimenters will try to help us. Thanks are due to the Groupe d'Optique Intégrée, Laboratoire d'Electronique et de Technologie de l'Informatique, Grenoble (France), which is already working with us.

APPENDIX. ITERATIVE METHOD

Space $\mathcal{C}^{2N}$ being provided with a Hilbert space structure [scalar product $(\cdot, \cdot)$, norm $\|\cdot\|$], if one knows a set of $p \leq 2N$ orthonormal vectors $\mathcal{Y}_p = (\hat{Y}_1, \dots, \hat{Y}_p)$, images under L of $\mathcal{X}_p = (\hat{X}_1, \dots, \hat{X}_p)$, one can write

$$B = \sum_{n=1}^p (B, \hat{Y}_n) \hat{Y}_n + R_p. \quad (61)$$

The combination $\sum_{n=1}^p (B, \hat{Y}_n) \hat{Y}_n$ is the element of the subspace spanned by $\mathcal{Y}_p$ that is the nearest to B (orthogonal projection of B), and its image by L^{-1} ,

$$X_p = \sum_{n=1}^p (B, \hat{Y}_n) \hat{X}_n, \quad (62)$$

is called the approximation to the solution of order p .

In practice, $L = I + \epsilon$, where $\epsilon = 0$ in the absence of the deformation. One can therefore assume that B is already a good approximation to the solution, at least when the obstacle is a weakly deformed slab waveguide. In the same way, one will choose, at each new step of the algorithm, to compute the action of L upon the remainder at the last step.¹⁸

In the classical iterative method, which is easy to set up, one puts $L = I + \epsilon$; therefore $X = B - \epsilon X$, and one builds successive approximations by means of recurrence formulas $X_0 = B$, $X_p = B - \epsilon X_{p-1}$. But the convergence of such a process is obtained only if the operator ϵ is sufficiently small (numerical experiments show that this imposes restrictive conditions on the dimensions of the obstacle), and, even when convergence occurs, this convergence appears to be slow.

The iterative method we use starts with $\mathcal{X}_0 = \mathcal{Y}_0 = \phi$ (empty set), and therefore $X_0 = 0$, $R_0 = B$.

The p th step consists of constructing $\mathcal{X}_p$, $\mathcal{Y}_p$, X_p , and R_p when $\mathcal{X}_{p-1}$, $\mathcal{Y}_{p-1}$, X_{p-1} , and R_{p-1} are known. For this we need to compute $Y_p = LR_{p-1}$. Using Schmidt's orthogonalization process, we can define $\hat{Y}_p = c_{p,p} Y_p + \sum_{i=1}^{p-1} c_{p,i} \hat{Y}_i$ in order to make $\mathcal{Y}_p = (\hat{Y}_1, \dots, \hat{Y}_{p-1}, \hat{Y}_p)$ an orthonormal set. We then directly get $\hat{X}_p = L^{-1} \hat{Y}_p = c_{p,p} R_{p-1} + \sum_{i=1}^{p-1} c_{p,i} \hat{X}_i$, and R_p and X_p are given by formulas (61) and (62).

One can easily see that $\|R_p\|$ decreases from $\|B\|$ to 0 when the set $\mathcal{Y}_p$ increases from $p = 0$ to $p = 2N$, but in practice, for the obstacles already studied, we get a precision of 10^{-3} in fewer than 10 steps.

The authors are greatly indebted to M. Cadilhac for his helpful advice in many mathematical aspects of this difficult problem.

This work was supported by the Direction des Recherches Etudes et Techniques, contract no. 78/1148.

REFERENCES

1. J. P. Hugonin and R. Petit, "A numerical study of the problem of diffraction at a non-periodic obstacle," *Opt. Commun.* **20**, 360 (1977).
2. J. P. Hugonin and R. Petit, "A numerical study of the problem of diffraction at a locally deformed plane waveguide," *Opt. Commun.* **22**, 221 (1977).
3. M. C. Hutley *et al.*, "Presentation and verification of a differential formulation for the diffraction by conducting gratings," *Nouv. Rev. Opt.* **6**, 87-95 (1975).
4. R. Petit, *Electromagnetic Theory of Gratings*, Petit, ed. (Springer-Verlag, Berlin, 1980).
5. Throughout the paper, when a is real and negative, $\sqrt{a}$ means $i\sqrt{-a}$.
6. Since Fourier transforms are defined as in distribution theory, the integral notation is purely formal.
7. If, for example, the incident field is a plane wave in normal incidence [$E^i = \exp(-iy)$], $E_{Dl}(\xi)$ contains a term $\ln \delta(\xi)$.
8. Let us recall that $\xi T = 1$ implies that $T = P(1/\xi) + a\delta(\xi)$, where a is an arbitrary constant.
9. $P\{i_u(\xi)/g(\xi)\}$ is the distribution that, to any test function $\phi(\xi)$ assigns

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{I_\epsilon} \frac{i_u(\xi)}{g(\xi)} \phi(\xi) d\xi,$$
 where I_ϵ is the set defined by $|\xi - \xi_G| > \epsilon$ and $|\xi + \xi_G| > \epsilon$.
10. The Fourier transform of $H(x)$ is $1/2\delta(\xi) + (1/2\pi i)P(1/\xi)$, where $P(1/\xi)$ is the principal value distribution.
11. P. Vincent, "Singularity expansions for cylinders of finite conductivity," *Appl. Phys.* **17**, 239-248 (1978).
12. We do not set in boldface letters that, like C , represent elements of an abstract vector space.
13. There is no possible confusion between the operator $\mathcal{D}$ and the rectangular domain that appears in Fig. 1.
14. The letters topped by the inverted-wedge sign are used for data (functions or constants) related to a given practical problem.
15. J. Van Bladel, *Electromagnetic Fields* (McGraw-Hill, New York, 1964), p. 252.
16. P. Vincent and M. Nevière, "The reciprocity theorem for corrugated surfaces used in conical diffraction mountings," *Opt. Acta* **26**, 889-898 (1979).
17. J. P. Hugonin, "On the numerical study of the deformed dielectric waveguide," presented at the international Union Radio Scientifique Internationale Symposium, Munich, 1980.
18. More generally, the use of an approximation of L^{-1} is likely to increase the speed of convergence of the process.

