



**HAL**  
open science

# Modèles d'impédance généralisée en diffraction inverse

Nicolas Chaulet

► **To cite this version:**

Nicolas Chaulet. Modèles d'impédance généralisée en diffraction inverse. Equations aux dérivées partielles [math.AP]. Ecole Polytechnique X, 2012. Français. NNT: . pastel-00761642

**HAL Id: pastel-00761642**

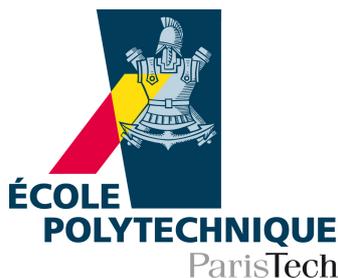
**<https://pastel.hal.science/pastel-00761642>**

Submitted on 5 Dec 2012

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ÉCOLE DOCTORALE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE



# Thèse

présentée en vue de l'obtention du grade de  
Docteur de l'École Polytechnique

« Spécialité : MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES »

par

**Nicolas Chaulet**

---

## Modèles d'impédance généralisée en diffraction inverse

---

Thèse soutenue publiquement le 27 novembre 2012 devant le jury composé de :

*Directeur de thèse :* M. HOUSSEM HADDAR  
*Co-directeur de thèse :* M. LAURENT BOURGEOIS  
*Rapporteurs :* M. RABIA DJELLOULI  
M<sup>me</sup> JULIETTE LEBLOND  
*Examineurs :* M. GRÉGOIRE ALLAIRE  
M. DAVID COLTON  
M. PATRICK JOLY  
M. RACHID TOUZANI





*à mon grand-père que je n'ai pas connu...*



# Remerciements

Mes premières pensées se tournent vers Laurent Bourgeois et Housseem Haddar qui m'ont proposé, il y a trois ans de cela, de commencer une thèse sous leur encadrement. Je les remercie pour leurs conseils, leur patience et tout ce qui a fait que ces trois années ont été une expérience personnelle et professionnelle unique et extrêmement riche. Merci pour tout ce que vous m'avez transmis et pour votre confiance. Au même titre, comment ne pas mentionner Fioralba Cakoni qui m'a accueilli à bras ouverts dans cet état des États-Unis que l'on appelle le Delaware? Fioralba, ta gentillesse, ta disponibilité et ton aide au jour le jour ont rendu ce séjour agréable, ce fut un véritable plaisir de travailler avec toi. Thank you so much!

Je remercie Juliette Leblond et Rabia Djellouli qui me font l'honneur et le plaisir d'être rapporteurs de cette thèse. Merci pour votre intérêt et la patience dont vous avez fait preuve lors de la relecture du manuscrit ainsi que pour la qualité et la pertinence de vos remarques. Je remercie également Grégoire Allaire, David Colton, Patrick Joly et Rachid Touzani pour l'intérêt que vous portez à mes travaux de thèse.

Je me rappelle encore ma deuxième d'apprenti ingénieur année à l'ENSTA, je souhaitais quitter au plus vite Paris, partir en Argentine pour un an et faire une troisième année partout sauf à l'ENSTA. Les choses n'ont pas tourné comme je voulais... Tout ceci en grande partie à cause de Christophe H. qui à la fin d'un cours m'a proposé de faire un Master à Paris VI. Ta confiance a fait ressortir des capacités que je ne me connaissais pas. Le résultat est là, une thèse et trois années d'aventure. Merci Christophe.

Il fallait un cadre pour cette aventure, cela n'a pas été les Pyrénées ou les Andes Sud-Américaines mais l'ENSTA et l'École Polytechnique où j'ai passé ces trois dernières années. J'y ai rencontré des personnalités hors du commun et une ambiance chaleureuse. J'en remercie tous les chercheurs pour leur écoute, leur compréhension et surtout leur disponibilité. Christophe M., tu as bien mérité des remerciements spéciaux après tout ce que tu as fait pour me guider dans les méandres de la bidouille informatique. Je remercie aussi tout particulièrement Marc B. sans qui ma vie future ne serait probablement pas aussi attrayante. Enfin, merci Wallis F. pour ton aide précieuse lors des démarches administratives mais aussi et surtout pour ta joie de vivre et ta bonne humeur!

Il est temps de parler de mes compagnons d'aventure, les autres thésards de l'ENSTA et de l'X. Merci à tous pour les cafés, les repas quotidiens et les conférences qui ont été l'occasion de franches rigolades. Parmi ces héros du quotidien, je pense tout particulièrement à mes camarades de bureau : Giovanni, le brésilien au nom italien et à la carrure d'un bûcheron canadien qui nous a fait bien rire avec ses idées libérales ; Nicolas, l'optimiste et ses bons plans toujours fumeux et enfin Lucas pour tous les moments que nous avons partagés. Il n'y a pas eu qu'eux, il y a aussi eu tous les autres. Parmi tous ceux-là je me dois de mentionner les Sud Américains de UD et leurs repas du dimanche, qui, avouons-le, ont grandement contribué à rendre le séjour dans le Delaware agréable.

Ces trois ans auraient été bien différents sans les Silvaggio finishers, leurs "meufs" ou assimilées mais aussi Arnaud, Axel, Ayoub, Claire, Daniel, Elie et tous ceux que j'oublie. Merci à tous pour les moments très forts que nous avons partagés que ce soit en Sardaigne, au ski ou lors des soirées parisiennes et autres zboobages antibois. Parmi eux je tiens à remercier tout particulièrement mes

collocs Alice et Mathieu qui ont vécu ces trois années de l'intérieur et ont toujours été présents dans les moments difficiles.

Nous approchons de la fin, du meilleur, c'est le moment de remercier ma famille. Mes parents, mes frères ainsi que mes grands-parents pour leurs encouragements et leur soutien toujours renouvelé. Mais aussi toute la famille Angulo/Henry/Peach/Texsier qui m'a suivi de près durant ces trois années. Clément, j'imagine que tu remarqueras ton influence sur mes travaux dans les pages qui suivent.

Au moment de conclure, mes dernières pensées vont à Julie, merci pour tout.

---



---

# TABLE DES MATIÈRES

---

<b>Introduction générale</b>		<b>1</b>
<b>Partie I Diffraction avec conditions d'impédance généralisée</b>		<b>5</b>
<b>1 Le cas scalaire</b>		<b>7</b>
1.1 Exemples de modèles de GIBC . . . . .		8
1.1.1 Notions de géométrie différentielle . . . . .		8
1.1.2 Conditions aux limites équivalentes pour des couches minces . . . . .		9
1.1.3 Les milieux fortement absorbants . . . . .		11
1.1.4 Les couches minces périodiques . . . . .		12
1.2 Le problème direct de diffraction avec GIBC . . . . .		13
1.2.1 Le cas d'un opérateur du type « $\Delta_\Gamma$ » . . . . .		13
1.2.2 Étude du cas général . . . . .		16
1.2.3 Le champ lointain . . . . .		21
<b>2 Le cas des équations de Maxwell</b>		<b>23</b>
2.1 Les modèles d'impédance généralisée pour les équations de Maxwell . . . . .		24
2.2 Etude théorique du problème de diffraction . . . . .		25
2.2.1 Espaces variationnels et espaces de trace pour les équations de Maxwell . . . . .		25
2.2.2 Formulation du problème direct . . . . .		26
2.2.3 Existence et unicité de la solution . . . . .		28
2.3 Applications à des opérateurs de dérivation surfacique du deuxième ordre . . . . .		29
2.3.1 Le cas de « $\mathbf{rot}_\Gamma \eta \mathbf{rot}_\Gamma + \nabla_\Gamma \gamma \mathbf{div}_\Gamma + \lambda$ » . . . . .		29
2.3.2 Le cas de « $\mathbf{rot}_\Gamma \eta \mathbf{rot}_\Gamma + \lambda$ » . . . . .		30
2.3.3 Le cas de « $\nabla_\Gamma \gamma \mathbf{div}_\Gamma + \lambda$ » . . . . .		35
2.4 Le champ lointain . . . . .		36
2.5 Formules de calcul vectoriel . . . . .		37
<b>Partie II Méthodes d'optimisation pour le problème inverse</b>		<b>39</b>
<b>3 Résultats d'unicité et de stabilité pour le problème scalaire</b>		<b>41</b>

3.1	Un problème inverse mal posé . . . . .	42
3.2	Unicité pour une seule onde incidente . . . . .	43
3.2.1	Unicité pour $\lambda$ . . . . .	43
3.2.2	Unicité pour $\eta$ . . . . .	44
3.2.3	Non unicité pour le problème à deux coefficients . . . . .	46
3.3	Résultat de stabilité globale à obstacle connu . . . . .	47
3.3.1	Quantification du prolongement unique . . . . .	47
3.3.2	Régularité et borne uniforme sur la solution du problème direct . . . . .	51
3.3.3	Stabilité pour $\lambda$ . . . . .	54
3.3.4	Stabilité pour $\eta$ . . . . .	57
3.3.5	Optimalité des résultats de stabilité . . . . .	59
3.4	Stabilité pour une géométrie perturbée . . . . .	61
3.4.1	Les problèmes direct et inverse pour un obstacle perturbé . . . . .	61
3.4.2	Continuité du champ lointain par rapport à l'obstacle . . . . .	62
3.4.3	Résultats de stabilité pour les impédances avec un obstacle perturbé . . . . .	67
3.5	Unicité pour une infinité d'ondes incidentes . . . . .	68
<b>4</b>	<b>Calcul des dérivées du champ lointain dans le cas scalaire</b>	<b>73</b>
4.1	Dérivée du champ lointain par rapport aux impédances . . . . .	74
4.2	Dérivée du champ lointain par rapport à l'obstacle . . . . .	76
4.2.1	Définition de la dérivée de forme . . . . .	76
4.2.2	Calcul de la dérivée de forme du champ lointain . . . . .	77
4.3	Dérivée de la fonction coût et état adjoint . . . . .	88
<b>5</b>	<b>Résolution numérique du problème inverse en dimension 2</b>	<b>91</b>
5.1	Résolution numérique du problème direct . . . . .	92
5.2	Méthode de résolution numérique du problème inverse . . . . .	96
5.3	Reconstruction d'impédances régulières . . . . .	97
5.3.1	Réflexion autour des données du problème . . . . .	98
5.3.2	Influence de la non-convexité de la géométrie . . . . .	99
5.3.3	Reconstruction simultanée des impédances . . . . .	102
5.3.4	Reconstruction des impédances sur un obstacle perturbé . . . . .	102
5.4	Reconstruction d'impédances constantes par morceaux . . . . .	106
5.4.1	Régularisation $H^1$ du gradient . . . . .	106
5.4.2	Régularisation TV . . . . .	106
5.5	Reconstruction simultanée des impédances et de l'obstacle . . . . .	107
5.5.1	Reconstruction de la géométrie à impédances connues . . . . .	109
5.5.2	Reconstruction de la géométrie et des impédances supposées constantes . . . . .	110
5.5.3	Reconstruction de la géométrie et des fonctions d'impédance . . . . .	110
5.6	Application à l'identification des couches minces . . . . .	113
5.6.1	Formulation du problème inverse . . . . .	113
5.6.2	Identification des paramètres de la couche . . . . .	114
5.6.3	Reconstruction d'un obstacle recouvert d'une couche de diélectrique . . . . .	115
<b>6</b>	<b>Extension au cas des équations de Maxwell</b>	<b>121</b>
6.1	Quelques notations . . . . .	122
6.2	Un résultat d'unicité . . . . .	123
6.2.1	Principe de réciprocité mixte et lemme de densité . . . . .	123
6.2.2	Unicité pour une infinité d'ondes incidentes . . . . .	125
6.3	Calcul des dérivées du champ lointain . . . . .	127
6.3.1	Dérivation du champ lointain par rapport à la condition d'impédance . . . . .	127
6.3.2	Continuité du champ lointain par rapport à l'obstacle . . . . .	128

6.3.3	Dérivation du champ lointain par rapport à l'obstacle . . . . .	129
6.4	Dérivée d'une fonctionnelle moindres carrés . . . . .	138
6.4.1	Calcul de la dérivée de forme et état adjoint . . . . .	138
6.4.2	Validation numérique de la dérivée de forme . . . . .	139
6.5	Application à l'identification d'obstacles . . . . .	141
6.5.1	Méthode de reconstruction . . . . .	141
6.5.2	Résultats numériques . . . . .	142
<b>Partie III Méthodes qualitatives pour le problème scalaire</b>		<b>145</b>
<b>7</b>	<b>Méthode de factorisation pour les GIBC</b>	<b>147</b>
7.1	Définition du problème inverse . . . . .	148
7.2	Factorisation de l'opérateur champ lointain . . . . .	150
7.2.1	Factorisation formelle . . . . .	150
7.2.2	Espaces fonctionnels nécessaires à la factorisation . . . . .	151
7.2.3	Caractérisation de l'obstacle . . . . .	154
7.2.4	Quelques applications du théorème de factorisation . . . . .	160
7.3	Application à la reconstruction d'obstacles . . . . .	160
7.3.1	Procédure de reconstruction et régularisation . . . . .	161
7.3.2	Applications numériques . . . . .	166
<b>8</b>	<b>Asymptotic analysis of the ITEP</b>	<b>171</b>
8.1	ITEP in presence of a thin layer . . . . .	172
8.1.1	Setting of the problem . . . . .	172
8.1.2	Existence and discreteness of the transmission eigenvalues . . . . .	173
8.2	Formal asymptotic development . . . . .	175
8.2.1	Preliminary material . . . . .	175
8.2.2	The formal asymptotic development . . . . .	175
8.3	Convergence analysis . . . . .	179
8.3.1	Preliminary regularity estimates . . . . .	179
8.3.2	Convergence of the zero-th order approximation . . . . .	188
8.3.3	Convergence of the first order approximation . . . . .	189
8.3.4	Convergence of the second order approximation . . . . .	192
8.4	Numerical results . . . . .	197
8.4.1	Computation of the interior transmission eigenvalue . . . . .	197
8.4.2	Application to inverse problems . . . . .	198
8.5	Appendix . . . . .	200
<b>Conclusions</b>		<b>203</b>
<b>Bibliographie</b>		<b>205</b>



---

# INTRODUCTION GÉNÉRALE

---

**L**ES ondes électromagnétiques et acoustiques sont très largement utilisées dans de nombreux domaines pour identifier la forme et les propriétés physiques d'objets non accessibles directement. Nous pensons par exemple à l'imagerie médicale, à l'exploration du sous-sol ou encore à l'imagerie par ondes radar. Le principe général des méthodes utilisées est le suivant : on envoie une onde dans le milieu que l'on souhaite étudier, ce milieu répond à l'excitation en produisant une onde diffractée et on déduit de la mesure de ce champ diffracté des informations sur le domaine ausculté. Nous parlons alors de « problème inverse » en opposition avec le problème direct qui consiste à modéliser et à simuler numériquement le champ diffracté produit par un milieu connu sollicité par une onde incidente connue elle aussi. Lorsque la longueur d'onde de l'onde incidente est de l'ordre de la taille de l'objet inspecté, le problème inverse est souvent mal posé dans le sens où une faible erreur de mesure (sur le champ diffracté) peut engendrer une erreur importante sur la reconstruction de l'objet étudié ou de ses propriétés physiques. Par conséquent il est important de développer des méthodes de résolution qui prennent en compte cette difficulté tout en étant efficaces. Nous pouvons classer les méthodes de résolution auxquelles nous nous sommes intéressé en deux grandes catégories : les méthodes quantitatives et les méthodes qualitatives.

Les méthodes quantitatives utilisent des techniques d'optimisation pour retrouver un ensemble de paramètres  $x$  (la forme d'un objet, les paramètres physiques d'un milieu...) à partir d'une mesure  $y$  du champ diffracté par une onde plane. Ce type de méthode nécessite la connaissance *a priori* du modèle régissant la diffraction des ondes, c'est-à-dire la connaissance d'une application  $\mathcal{T}$  telle que

$$\mathcal{T}(x) = y.$$

Alors, pour une donnée  $y_{\text{obs}}$  on minimise l'erreur quadratique

$$\mathcal{F}(x) = \frac{1}{2} \|\mathcal{T}(x) - y_{\text{obs}}\|^2 + (\text{terme de régularisation})$$

pour  $x$  dans un ensemble admissible. La notation  $\|\cdot\|$  désigne une norme sur l'espace des données (habituellement la norme  $L^2$ ). Bien souvent l'application  $\mathcal{T}$  est non linéaire, non convexe et coûteuse à évaluer. Ceci rend la minimisation de  $\mathcal{F}$  compliquée car même si l'on dispose d'une bonne initialisation de l'algorithme de minimisation, il faudra dans tous les cas évaluer  $\mathcal{T}$  plusieurs fois. En revanche, ces méthodes fonctionnent même si l'on dispose de peu de données et la reconstruction est souvent plus précise que celle que l'on obtiendrait avec une méthode qualitative. Ceci nous amène

au deuxième type de méthodes que nous utiliserons : les méthodes qualitatives. Nous pensons par exemple aux méthodes d'échantillonnage telles que la méthode de factorisation ou la Linear Sampling Method. Lorsqu'une telle approche est justifiée, un critère simple et rapide à évaluer permet de reconstruire la fonction caractéristique d'un défaut. Les avantages principaux de ces méthodes est qu'elles nécessitent très peu d'informations *a priori* sur le milieu étudié et qu'elles sont très rapides. En revanche, elles donnent généralement une reconstruction moins précise que les méthodes d'optimisation et demandent beaucoup de données.

Notre idée est d'étudier le comportement et la pertinence de ces deux types de méthode dans le cas où l'objet que l'on souhaite retrouver est caractérisé par une condition au bord dite d'impédance généralisée (que l'on notera GIBC pour Generalized Impedance Boundary Condition). Ce type de condition au bord couple, par l'intermédiaire d'un opérateur surfacique local que l'on appelle opérateur d'impédance généralisée, la pression à sa dérivée normale en acoustique, ou bien les composantes tangentielles du champ électrique aux composantes tangentielles du champ magnétique en électromagnétisme. La forme la plus simple de condition d'impédance que l'on utilise a été introduite par Leontovich [70] et dans ce cas, l'opérateur d'impédance se réduit à la multiplication par une fonction, on parle alors de condition d'impédance classique ou de condition de Leontovich. L'auteur les a introduites dans le but de modéliser un matériau fortement absorbant, cette propriété se traduisant par une simple condition au bord. De nombreux travaux ont suivi cette direction et des conditions au bord plus complexes ont vu le jour permettant d'approcher des matériaux aux comportements divers (voir [55, 85]). Les couches minces, périodiques ou non, peuvent par exemple être remplacées de manière approchée par une condition d'impédance généralisée qui intervient soit comme condition de transmission (voir [5, 34, 42]) dans le cas où la couche est comprise entre deux matériaux diélectriques, soit comme condition au bord (voir [9, 47]) lorsque la couche couvre un matériau parfaitement conducteur. L'avantage d'utiliser de tels modèles approchés est que l'on transforme un problème à deux échelles (couche mince / milieu extérieur par exemple) en un problème à une seule échelle. Si l'opérateur d'impédance est local, ce qui est le cas pour les modèles approchés évoqués ci-dessus, la résolution numérique du problème de propagation des ondes devient beaucoup moins coûteuse.

En ce qui concerne le problème inverse, une condition d'impédance (classique ou généralisée) remplace avantageusement un matériau ou une configuration produisant des phénomènes à petite échelle. En effet, on diminue le nombre d'inconnues car on passe d'un modèle volumique ou complexe (couche mince, milieu fortement absorbant, surface rugueuse...) à un modèle surfacique et donc on diminue aussi le caractère mal posé du problème. De plus, la résolution du problème direct devenant abordable, on peut envisager d'utiliser des méthodes d'optimisation qui, nous le rappelons, nécessitent la résolution d'un certain nombre de problèmes directs. Le modèle d'impédance classique a fait l'objet de nombreux développements dans le cadre des problèmes inverses dès le début des années 80 (voir [2, 24, 37, 50, 51, 67, 68, 72, 86, 87] par exemple) mais les premiers travaux, à notre connaissance, utilisant des conditions au bord plus complexes datent de 2010 (voir [14]). Pourtant, ces conditions d'impédance généralisée permettent de décrire des phénomènes beaucoup plus riches du point de vue de la physique et donc de couvrir un plus grand nombre de configurations.

Dans ce qui suit, nous proposons de combler cette lacune dans diverses directions. Tout d'abord nous proposons d'utiliser les méthodes d'optimisation décrites ci-dessus dans le cas où l'opérateur d'impédance fait intervenir un opérateur de dérivation surfacique d'ordre deux pour reconstruire la forme d'un objet mais aussi les coefficients intervenant dans la définition de l'opérateur d'impédance. Nous appellerons ces coefficients les coefficients d'impédance. Dans un premier temps nous supposons que les équations de Maxwell  $3D$  peuvent se réduire à une équation scalaire (l'équation de Helmholtz) puis nous étendons l'approche au modèle de Maxwell vectoriel. Ce travail comporte une partie théorique dans laquelle des résultats de stabilité et d'unicité sont présentés. Une partie

---

plus appliquée la complète, nous y calculons les dérivées partielles du champ diffracté (dont la différentielle de forme) que nous utilisons lors de reconstructions numériques. Pour ce qui est des méthodes qualitatives, nous montrons que la méthode de factorisation s'applique lorsque l'objet cherché est caractérisé par une condition d'impédance généralisée. Enfin, notre dernière contribution concerne l'étude des valeurs propres du problème de transmission intérieur. La justification des méthodes qualitatives fait intervenir de manière naturelle le problème de transmission intérieur, et les valeurs propres associées sont directement liées à des propriétés d'invisibilité du domaine étudié. Nous calculons et justifions un développement asymptotique de la première valeur propre en présence d'une couche mince et nous en déduisons une formule donnant l'épaisseur de la couche mince lorsque le champ lointain est connu pour plusieurs fréquences.

## Plan de la thèse

Le document comporte trois parties distinctes que nous décrivons brièvement ci-dessous. La première partie regroupe les résultats importants concernant le problème direct, nous présentons notamment quelques exemples de matériaux pouvant être remplacés par une condition d'impédance généralisée. La deuxième partie concerne l'application d'une méthode d'optimisation au problème inverse de reconstruction d'un objet et de la condition au bord satisfaite sur sa frontière. La troisième et dernière partie s'intéresse à l'utilisation de méthodes qualitatives pour le problème inverse en présence de GIBC.

### Partie I : Diffraction avec conditions d'impédance généralisée

Cette partie est une introduction au problème inverse en présence d'une condition d'impédance généralisée car nous ne traitons que le problème direct de diffraction par un obstacle. Le chapitre 1 est consacré à l'équation de Helmholtz alors que le chapitre 2 concerne les équations de Maxwell. Nous donnons quelques exemples de configurations pour lesquelles le modèle exact peut être approché par un modèle équivalent faisant intervenir une condition d'impédance généralisée. Puis nous montrons, sous certaines hypothèses sur le signe de l'opérateur d'impédance, que le problème de diffraction avec GIBC admet une unique solution. Dans ce but, nous reformulons le problème de diffraction dans le domaine extérieur à l'obstacle en un problème surfacique posé sur la frontière de l'obstacle. Pour les équations de Maxwell, nous avons aussi utilisé une décomposition de Helmholtz adaptée à la formulation surfacique pour montrer l'existence et l'unicité de la solution du problème de diffraction.

### Partie II : Méthodes d'optimisation pour le problème inverse

Dans cette partie, nous considérons un opérateur d'impédance ayant des dérivées tangentielles d'ordre deux. Les chapitres 3, 4 et 5 traitent le cas des équations de Helmholtz en détail et dans le chapitre 6 nous étendons une partie des résultats obtenus pour le problème scalaire aux équations de Maxwell vectorielles en trois dimensions. L'étude du problème inverse commence avec le chapitre 3 par des résultats d'unicité et de stabilité de la reconstruction de coefficients d'impédance lorsque l'on connaît le champ lointain (c'est-à-dire le champ diffracté loin de l'obstacle) produit par une seule onde incidente. Nous menons aussi une étude de stabilité pour la reconstruction des coefficients d'impédance sur un obstacle perturbé, ceci signifie que l'on suppose que la géométrie de l'obstacle n'est connue que de manière approchée. Cette situation se produit par exemple lorsque la géométrie a été auparavant reconstruite à l'aide d'une méthode numérique. Enfin, nous concluons ce chapitre par un résultat d'unicité pour l'obstacle et les impédances lorsque le champ lointain est connu pour une infinité d'ondes incidentes. Le chapitre 4 est un préalable à la résolution effective du problème inverse d'identification des coefficients d'impédance et de la forme de l'obstacle. Nous y calculons les dérivées partielles du champ diffracté par rapport aux coefficients d'impédance ainsi que par rapport à la géométrie de l'obstacle dans le cas où les coefficients d'impédance sont des fonctions définies sur la frontière de l'obstacle. Nous appliquons ensuite ces résultats à la résolution numérique

du problème inverse dans le chapitre 5 en utilisant la minimisation d'une fonctionnelle quadratique à l'aide d'une méthode de descente de gradient. Enfin, dans le chapitre 6 nous étendons au cas des équations de Maxwell une partie des résultats obtenus dans le cas scalaire tels que l'unicité pour une infinité d'ondes incidentes et le calcul des dérivées du champ diffracté par rapport aux coefficients d'impédance et à la forme.

### **Partie III : Méthodes qualitatives pour le problème scalaire**

Nous nous focalisons sur l'application de méthodes qualitatives dans le cas où le problème de diffraction se réduit à une équation scalaire. Dans le chapitre 7 nous montrons que l'on peut appliquer la méthode de factorisation (voir [46] pour une présentation complète de cette méthode) sous certaines conditions de régularité sur l'opérateur d'impédance. Ces travaux sont le fruit d'une collaboration avec Mathieu Chamaillard dans le cadre de son stage de Master. Nous poursuivons cette partie avec le chapitre 8, qui étudie le comportement asymptotique des valeurs propres du problème de transmission intérieur en présence d'une couche mince. Le problème aux valeurs propres sous-jacent est non auto-adjoint et les valeurs propres associées sont particulières car pour de telles fréquences il est possible de construire une onde incidente telle que le champ diffracté est très faible. Le développement asymptotique que nous avons obtenu donne une formule explicite permettant de retrouver l'épaisseur de la couche à partir de la donnée du champ lointain correspondant à la diffraction d'ondes incidentes pour toutes les directions d'incidences et pour plusieurs fréquences. J'ai réalisé cette étude durant un séjour de trois mois à l'Université du Delaware en collaboration avec Professeur Fioralba Cakoni.

---

### **Publications issues de ces travaux**

- [12] L. Bourgeois, N. Chaulet and H. Haddar. Stable reconstruction of generalized impedance boundary conditions. *Inverse Problems*, 27(9), 2011.
- [13] L. Bourgeois, N. Chaulet and H. Haddar. On simultaneous identification of the shape and generalized impedance boundary condition in obstacle scattering. *SIAM J. Sci. Comput.*, 34(3), 2012.

### **Articles en préparation**

- [21] F. Cakoni, N. Chaulet and H. Haddar. Asymptotic development of the interior transmission eigenvalues for thin layer structures. *En préparation*.
- [31] M. Chamaillard, N. Chaulet and H. Haddar. A factorization method for support characterization of an obstacle with a generalized impedance boundary condition. *En préparation*.
- [33] N. Chaulet and H. Haddar. Shape derivative for obstacles with generalized impedance boundary conditions : the Maxwell case. *En préparation*.

---

---

**PREMIÈRE PARTIE**

**DIFFRACTION AVEC CONDITIONS  
D'IMPÉDANCE GÉNÉRALISÉE**

---

---



# LE CAS SCALAIRE

---

## Sommaire

<b>1.1 Exemples de modèles de GIBC</b> . . . . .	<b>8</b>
1.1.1 Notions de géométrie différentielle . . . . .	8
1.1.2 Conditions aux limites équivalentes pour des couches minces . . . . .	9
1.1.3 Les milieux fortement absorbants . . . . .	11
1.1.4 Les couches minces périodiques . . . . .	12
<b>1.2 Le problème direct de diffraction avec GIBC</b> . . . . .	<b>13</b>
1.2.1 Le cas d'un opérateur du type « $\Delta_\Gamma$ » . . . . .	13
1.2.2 Étude du cas général . . . . .	16
1.2.3 Le champ lointain . . . . .	21

---

**L**A diffraction d'ondes électromagnétiques ou acoustiques par une inhomogénéité entièrement ou partiellement pénétrable peut s'avérer difficile et coûteuse à simuler numériquement. En effet dans le cas de la diffraction par un matériau fortement absorbant ou par un conducteur parfait couvert de diélectrique, on se retrouve avec un problème à deux échelles. Une grande échelle à l'extérieur de l'inhomogénéité et une petite échelle à l'intérieur de l'inhomogénéité. Dans le cas du matériau avec revêtement, la petite échelle correspond à l'épaisseur du revêtement et dans le cas du matériau fortement absorbant elle correspond à l'épaisseur de peau. Afin d'éviter d'avoir un problème à deux échelles, l'idée est de remplacer le modèle exact dans l'inhomogénéité par une condition d'impédance généralisée (GIBC)

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} + \mathcal{Z}u = 0$$

sur la frontière de l'inhomogénéité où  $\mathcal{Z}$  est un opérateur surfacique. On parle alors de modèle approché ou de modèle équivalent, nous renvoyons le lecteur à [5, 9, 48] pour des travaux portant sur le développement de tels modèles. L'intérêt de l'utilisation de ces modèles approchés est que l'on n'a plus besoin de se préoccuper des phénomènes à petite échelle et si  $\mathcal{Z}$  est un opérateur local (un opérateur de dérivation surfacique par exemple), l'implémentation numérique du problème de diffraction est relativement simple à mettre en œuvre.

Ce chapitre est dédié à l'étude du problème direct et considère le cas où le champ inconnu est scalaire (électromagnétisme axisymétrique, acoustique). Dans une première section nous présentons quelques exemples de configurations physiques produisant des phénomènes à petite échelle et nous

donnons des exemples de conditions aux limites équivalentes pour ces modèles. Dans la deuxième section nous énonçons des résultats d'existence et d'unicité de la solution du problème de diffraction avec une condition d'impédance généralisée. Enfin nous terminons ce chapitre par l'introduction du champ lointain qui correspondra à la donnée utilisée pour le problème inverse.

## 1.1 Exemples de modèles de conditions d'impédance généralisée

### 1.1.1 Notions de géométrie différentielle

Introduisons quelques notions simples de géométrie permettant de décrire des surfaces et leur voisinage. Cette présentation est loin d'être exhaustive et se base principalement sur [53, chapitre 5] et [78, section 2.5.6], nous renvoyons le lecteur à ces deux ouvrages pour plus de détails. Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^d$ ,  $d$  pouvant valoir 2 ou 3. Ce domaine représente une inhomogénéité, en d'autres termes,  $\Omega$  est un matériau plongé dans un domaine de référence homogène comme l'air par exemple. On note  $\Gamma$  sa frontière, dans toute cette partie nous supposons qu'elle est de classe  $C^p$  pour  $p \geq 1$ , c'est-à-dire qu'elle peut être paramétrée un nombre fini de fonctions de classe  $C^p$ . Plus précisément, il existe un recouvrement de  $\Gamma$  par  $N$  ouverts  $(\Gamma_i)_{i=1,\dots,N}$  inclus dans  $\Gamma$  et pour tout  $i = 1, \dots, N$ , il existe un voisinage  $V_i$  de 0 dans  $\mathbb{R}^{d-1}$  et un difféomorphisme de classe  $C^p$ ,  $X_\Gamma^i : V_i \rightarrow \Gamma_i$  tel que

$$\forall x \in \Gamma_i, \exists \bar{\xi} \in V_i \text{ tel que } x = X_\Gamma^i(\bar{\xi}).$$

Notons  $\nu$  la normale unitaire à  $\Gamma$  dirigée vers l'extérieur de  $\Omega$ , c'est une fonction de  $(C^{p-1}(\Gamma))^d$  où la notation  $^d$  indique que  $\nu$  est à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$ . Il existe  $t_0 \in \mathbb{R}$  et un voisinage tubulaire  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^d$  de  $\Gamma$  tels que

$$\begin{aligned} \Psi : \Gamma \times [-t_0, t_0] &\rightarrow \mathcal{U} \\ (x_\Gamma, t) &\mapsto x_\Gamma + t\nu(x_\Gamma) \end{aligned} \quad (1.1)$$

soit un difféomorphisme de classe  $C^{p-1}$ . Une manière simple de prouver ce résultat est d'utiliser le

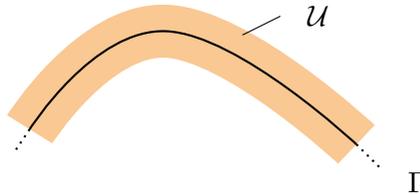


FIGURE 1.1 – Voisinage tubulaire d'une frontière.

théorème d'inversion locale et il suffit donc de fixer  $t_0$  tel que la différentielle de  $\Psi$  soit injective (voir l'inégalité (1.2) pour une telle valeur  $t_0$ ). Ainsi pour toute fonction  $g \in C^1(\Gamma)$  on peut définir son extension dans  $\mathcal{U}$  par

$$\check{g}(x) := g(x_\Gamma)$$

où  $x_\Gamma$  et  $x$  sont liés par  $x = \Psi(x_\Gamma, t)$  pour un unique  $t \in [-t_0, t_0]$ . Alors les opérateurs de dérivation surfacique sont définis de la manière suivante.

**Définition 1.1.1** Soit  $g \in C^1(\Gamma)$ , on définit son gradient surfacique par

$$\nabla_\Gamma g := \nabla \check{g}|_\Gamma - \frac{\partial \check{g}}{\partial \nu} \nu \text{ sur } \Gamma$$

et son rotationnel surfacique par

$$\mathbf{rot}_\Gamma g := \nabla_\Gamma g \times \nu \text{ sur } \Gamma.$$

Pour  $G \in (C^1(\Gamma))^d$ , l'opérateur de divergence surfacique est défini par

$$\operatorname{div}_\Gamma G = \operatorname{div} \check{G}|_\Gamma - \check{G}'|_\Gamma \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu} \text{ sur } \Gamma$$

et l'opérateur de rotationnel surfacique par

$$\operatorname{rot}_\Gamma G = \operatorname{div}_\Gamma (G \times \boldsymbol{\nu}) \text{ sur } \Gamma,$$

où  $\check{G}'$  est la matrice  $d \times d$  dont la  $i^{\text{ème}}$  ligne contient  $\nabla \check{G}_i$ .

Définissons  $H^1(\Gamma)$  comme étant la fermeture de  $C^1(\Gamma)$  pour la norme

$$\|g\|_{H^1(\Gamma)} = \int_\Gamma |g|^2 + |\nabla_\Gamma g|^2 ds.$$

Les opérateurs de dérivation surfacique  $\nabla_\Gamma$  et  $\operatorname{rot}_\Gamma$  définis ci-dessus s'étendent alors à toute fonction de  $H^1(\Gamma)$  par densité et il en va de même pour les opérateurs  $\operatorname{div}_\Gamma$  et  $\operatorname{rot}_\Gamma$ . Bien évidemment, ces définitions ne dépendent pas du prolongement choisit.

Nous aurons aussi besoin de grandeurs liées à la géométrie de  $\Gamma$ .

**Définition 1.1.2** Pour  $\Gamma$  de classe  $C^p$  avec  $p \geq 2$ , nous définissons le tenseur de courbure

$$\mathcal{R} := \nabla \boldsymbol{\nu} \text{ sur } \Gamma$$

ainsi que la courbure moyenne  $2\mathcal{H} := \operatorname{div}_\Gamma \boldsymbol{\nu}$  de la courbe  $\Gamma$ .

Pour terminer revenons au calcul du  $t_0$  tel que la différentielle de  $\Psi$  soit injective. Si  $\Gamma$  est de classe au moins  $C^p$  avec  $p \geq 2$ , pour tout  $x_\Gamma \in \Gamma$  la matrice  $\mathcal{R}(x_\Gamma)$  est symétrique. Pour le montrer on peut par exemple revenir à la définition de la normale comme étant le gradient de la fonction distance signée à la courbe  $\Gamma$ . De plus en différenciant la relation  $|\boldsymbol{\nu}|^2 = 1$  on obtient  $\mathcal{R}\boldsymbol{\nu} = 0$  sur  $\Gamma$ . Ainsi pour tout  $x_\Gamma$ ,  $\boldsymbol{\nu}(x_\Gamma)$  est un vecteur propre de la matrice  $\mathcal{R}(x_\Gamma)$  associé à la valeur propre 0. Notons  $c_1(x_\Gamma)$  et  $c_2(x_\Gamma)$  les deux autres valeurs propres (si on est en dimension 3). Alors le Jacobien de  $\Psi$  défini en (1.1) est donné par

$$J_\Psi(x_\Gamma, t) = (1 + tc_1(x_\Gamma))(1 + tc_2(x_\Gamma)).$$

Posons  $c_{\min}$  le minimum de l'application  $x_\Gamma \mapsto \min(|c_1(x_\Gamma)^{-1}|, |c_2(x_\Gamma)^{-1}|)$  (ce minimum pouvant être infini dans le cas d'un plan), si

$$t_0 \leq c_{\min} \tag{1.2}$$

alors la fonction  $\Psi$  est un difféomorphisme de classe  $C^{p-1}$ .

### 1.1.2 Conditions aux limites équivalentes pour des couches minces

Nous donnons ici les idées principales permettant d'obtenir une condition au bord équivalente pour des structures minces dans le cas de la diffraction par un conducteur parfait (condition de Neumann ou de Dirichlet) recouvert d'une couche de diélectrique. Ce sera notre inhomogénéité et on la représente par un ouvert borné de classe  $C^\infty$  noté  $\Omega$ , on note  $\Omega_{\text{ext}} := \mathbb{R}^d \setminus \overline{\Omega}$  le domaine extérieur qui représente un milieu homogène de référence. Soit  $\delta > 0$  un petit paramètre, on définit la couche mince comme étant

$$\mathcal{U}_\delta := \{\Psi(x_\Gamma, t) \text{ pour tout } (x_\Gamma, t) \in \Gamma \times ]-\delta, 0[\}$$

et  $\Gamma_\delta := \{\Psi(x_\Gamma, -\delta) \text{ pour tout } x_\Gamma \in \Gamma\}$  désigne la frontière de l'obstacle intérieur que l'on notera  $\Omega_\delta$ . Ainsi  $\Gamma_\delta = \{x \in \Omega \text{ tels que } d(x, \Gamma) = \delta\}$  et  $\mathcal{U}_\delta = \{x \in \Omega \text{ tels que } d(x, \Gamma) < \delta\}$  où  $d(x, \Gamma)$  désigne la distance du point  $x$  à la frontière  $\Gamma$  est définie par

$$d(x, \Gamma) = \inf_{x_\Gamma \in \Gamma} |x - x_\Gamma|.$$

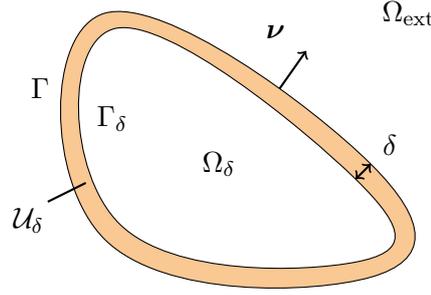


FIGURE 1.2 – Géométrie d'une couche mince.

Notons  $\epsilon$  et  $\mu$  deux constantes complexes qui représentent les propriétés physiques du milieu contenu dans  $\mathcal{U}_\delta$  relativement aux propriétés du domaine extérieur. Soit  $k > 0$  un réel représentant le nombre d'onde et  $u^i$  une onde incidente, c'est-à-dire une fonction qui satisfait

$$\Delta u^i + k^2 u^i = 0$$

dans  $\mathbb{R}^d$ . Pour tout ouvert non borné  $\mathcal{O} \in \mathbb{R}^d$ , définissons

$$H_{\text{ext}}^1(\mathcal{O}) := \{v \in \mathcal{D}'(\mathcal{O}), \text{ tels que } \varphi v \in H^1(\mathcal{O}) \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)\}.$$

Le problème de diffraction en régime harmonique par un conducteur parfait en présence de cette couche mince s'écrit alors : trouver  $u_\delta \in H_{\text{ext}}^1(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega_\delta})$  tel que  $u_\delta = u_\delta^s + u^i$  satisfait

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\epsilon^{-1} \nabla u_\delta) + k^2 \mu u_\delta = 0 \text{ dans } \mathcal{U}_\delta, \\ \Delta u_\delta + k^2 u_\delta = 0 \text{ dans } \Omega_{\text{ext}}, \\ \left[ \epsilon^{-1} \frac{\partial u_\delta}{\partial \boldsymbol{\nu}} \right] = 0, \quad [u_\delta] = 0 \text{ sur } \Gamma. \end{cases} \quad (1.3)$$

La notation  $[ \cdot ]$  désigne le saut de trace à travers une interface  $\Gamma$ ,  $[u] = u^+ - u^-$  où  $u^+$  désigne la trace extérieure de  $u$  sur  $\Gamma$  et  $u^-$  désigne la trace intérieure de  $u$  sur  $\Gamma$ . Sur  $\Gamma_\delta$  nous choisissons d'imposer une condition au bord de Neumann

$$\epsilon^{-1} \frac{\partial u_\delta}{\partial \boldsymbol{\nu}_\delta} = 0 \quad (1.4)$$

où  $\boldsymbol{\nu}_\delta$  désigne la normale extérieure à  $\Omega_\delta$ . Enfin, le champ diffracté  $u^s$  satisfait la condition de radiation de Sommerfeld

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|x|=R} \left| \frac{\partial u_\delta^s}{\partial r} - i k u_\delta^s \right|^2 ds = 0. \quad (1.5)$$

**Remarque 1.1.3** Ces équations correspondent aux équations du modèle transverse électrique (TE) en électromagnétisme dans le cas de la diffraction par un cylindre infini dans la direction  $\mathbf{e}_z$  par exemple. Dans ce cas l'inconnue  $u_\delta$  correspond à la composante suivant  $\mathbf{e}_z$  du champ magnétique  $\mathbf{H}$ ,  $\epsilon$  désigne la permittivité relative du milieu  $\mathcal{U}_\delta$  et  $\mu$  désigne la perméabilité relative de  $\mathcal{U}_\delta$  (voir Remarque 2.1.1).

En suivant un processus de développement asymptotique par rapport à  $\delta$  qui consiste à résoudre séparément les équations dans la couche mince et dans le domaine extérieur (voir [7, 9] par exemple), on est capable de construire un développement asymptotique en puissances de  $\delta$  de la solution  $u_\delta$

du problème (1.3) puis d'en déduire un modèle équivalent à un certain ordre  $l$  qui s'écrit : trouver  $u_l = u_l^s + u^i$  tel que

$$\begin{cases} \Delta u_l + k^2 u_l = 0 \text{ dans } \Omega_{\text{ext}}, \\ \frac{\partial u_l}{\partial \nu} + \mathcal{Z}_l u_l = 0 \text{ sur } \Gamma, \\ \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|x|=R} \left| \frac{\partial u_l^s}{\partial r} - i k u_l^s \right|^2 ds = 0 \end{cases}$$

où  $\mathcal{Z}_l$  est un opérateur d'impédance local sur la surface  $\Gamma$ . On dit que le modèle équivalent est d'ordre  $l$  si pour toute boule de rayon  $R$  notée  $B_R$  telle que  $\Omega \subset B_R$  il existe une constante  $C > 0$  telle que pour tout  $\delta > 0$  on ait

$$\|u_l - u_\delta\|_{H^1(\Omega_{\text{ext}} \cap B_R)} \leq C \delta^{l+1}.$$

Il est prouvé dans [9] que si  $\epsilon$  et  $\mu$  sont constants, les opérateurs d'impédance aux trois premiers ordres sont donnés par

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_0 u &= 0, \\ \mathcal{Z}_1 u &= \text{div}_\Gamma(\delta \epsilon^{-1} \nabla_\Gamma u) + k^2 \mu \delta u, \\ \mathcal{Z}_2 u &= \text{div}_\Gamma \left[ \epsilon^{-1} \delta (1 + \delta(\mathcal{H}\text{Id} - \mathcal{R})) \nabla_\Gamma u \right] + k^2 \mu (\delta + \delta^2 \mathcal{H}) u \end{aligned}$$

où  $\text{Id}$  désigne l'identité de  $\mathbb{R}^d$ . Le modèle équivalent aux ordres 3 et 4 fait intervenir opérateur de type bilaplacien surfacique. L'étude menée dans [7] étend formellement ce résultat au cas d'une couche d'épaisseur variable en dimension 2.

Comme il est attendu, l'opérateur d'ordre 0 correspond à une condition de Neumann. En revanche dès que l'on veut avoir une description un peu plus précise il faut considérer un opérateur de dérivation surfacique d'ordre 2 que nous appelons opérateur d'impédance généralisée en opposition avec une impédance classique qui correspond à la multiplication par une fonction. Dans d'autres situations comme par exemple dans le cas d'un objet fortement absorbant décrit dans le § 1.1.3 une condition d'impédance classique est suffisante aux ordres 1 et 2. Néanmoins dans le cas d'un obstacle de Neumann recouvert d'un diélectrique, cette approximation n'est pas justifiée par une approche de type développement asymptotique.

Nous consacrons le § 5.6.3 à l'usage des GIBCs pour le problème inverse qui consiste retrouver la forme d'un objet à partir du champ diffracté lorsque l'objet est constitué d'un matériaux parfaitement conducteur couvert d'une mince couche de diélectrique. Nous verrons à cette occasion que l'utilisation d'un modèle approché faisant simplement intervenir une condition d'impédance classique ne permet pas de reconstruire la forme de l'objet diffractant.

### 1.1.3 Les milieux fortement absorbants

Nous gardons les mêmes notations que dans le § 1.1.2 mais cette fois-ci le petit paramètre ne vient plus d'une propriété géométrique de l'inhomogénéité (couche mince) mais plutôt d'une propriété physique particulière de l'inhomogénéité. Nous considérons le cas d'un milieu fortement absorbant, c'est-à-dire que le carré du nombre d'onde est complexe et sa partie imaginaire est très élevée. Nous rappelons ici une partie des résultats obtenus dans [48]. On suppose que  $\epsilon = 1$  et  $\mu = 1$ , alors le nombre d'onde dans  $\Omega$  en présence d'absorption est donné par

$$k_\Omega^2 = k^2 + \frac{i}{\delta^2}.$$

Ceci signifie que la conductivité du milieu  $\Omega$  est de la forme  $\sigma_\delta = 1/(k\delta^2)$ , comme précédemment  $\delta > 0$  désigne un petit paramètre. L'équation dans le domaine extérieur  $\Omega_{\text{ext}}$  reste la même que

dans le § 1.1.2, l'onde diffractée satisfait toujours la condition de radiation de Sommerfeld (1.5) mais dans le domaine intérieur  $\Omega$  on cherche un champ total  $u_\delta = u_\delta^s + u^i$  solution de

$$\Delta u_\delta + \left(k^2 + \frac{i}{\delta^2}\right) u_\delta = 0,$$

avec continuité de la trace de  $u_\delta$  et de sa dérivée normale à travers l'interface  $\Gamma$ . Le modèle équivalent à l'ordre  $l$  consiste alors à chercher  $u_l = u_l^s + u^i$  tel que

$$\Delta u_l + k^2 u_l = 0 \text{ dans } \Omega_{\text{ext}},$$

le champ  $u_l^s$  satisfait la condition de radiation (1.5) et sur  $\Gamma$  on a

$$u_l + \mathcal{D}_l \frac{\partial u_l}{\partial \nu} = 0.$$

Toujours selon [48] les trois premiers ordres sont donnés par

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_0 u &= 0, \\ \mathcal{D}_1 u &= -\alpha \delta, \\ \mathcal{D}_2 u &= -\alpha \delta + i\mathcal{H}\delta^2 \end{aligned}$$

où  $\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$  est la racine carrée à partie réelle positive du nombre complexe  $i$ . Comme dans le cas précédent, si on monte en ordre, l'ordre de dérivation de l'opérateur d'impédance augmente et le modèle équivalent à l'ordre 3 fait intervenir un opérateur de Laplace Beltrami sur la frontière  $\Gamma$  (voir [48]).

Dans ce cadre il est naturel d'utiliser un opérateur de type Neumann à Dirichlet car la condition équivalente à l'ordre 0 est  $u_0 = 0$ . Pour les ordres strictement positifs il suffit de prendre  $\mathcal{D}_l^{-1}$  pour retrouver une condition d'impédance généralisée du type Dirichlet à Neumann comme dans le cas d'une couche mince (voir § 1.1.2). Il est important de noter que contrairement au cas des couches minces, dans cette configuration une condition d'impédance classique donne une approximation à  $\delta^3$  près de ce qui se passe dans l'inhomogénéité.

#### 1.1.4 Les couches minces périodiques

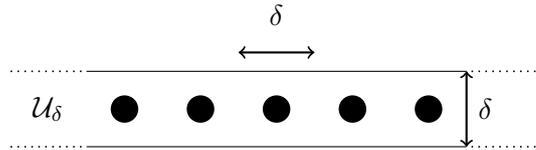


FIGURE 1.3 – Représentation d'une couche mince périodique.

Toujours dans le même esprit, il nous faut mentionner le cas des couches minces périodiques traité dans [5] en dimension 2 (voir aussi [42] pour le problème de transmission à travers une interface fine et périodique). Nous rappelons qu'en dimension 2 il est possible de paramétrer toute la surface  $\Gamma$  à l'aide d'une seule fonction périodique de période  $s_0 \in ]0, +\infty[$ , il existe  $X_\Gamma : [0, s_0] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , telle que  $\Gamma = \{X_\Gamma(s), s \in [0, s_0]\}$ . On se place de nouveau dans la configuration d'une couche mince  $\mathcal{U}_\delta$  comme celle décrite dans le § 1.1.2 mais cette fois-ci, on prend  $\epsilon = 1$  et le coefficient  $\mu$  dépend du petit paramètre  $\delta$  dans le sens où c'est une fonction oscillante qui oscille à la vitesse  $1/\delta$  dans la direction tangente à la surface  $\Gamma$ . Plus précisément, soit  $\tilde{\mu}$  une fonction de  $[0, s_0] \times [0, 1] \times [0, 1]$  périodique dans les trois variables de période  $s_0, 1$  et  $1$  respectivement. Nous définissons  $\mu$  par

$$\mu(x) = \tilde{\mu}\left(s, \frac{s}{s_0\delta}, \frac{t}{\delta}\right)$$

où  $x \in \mathcal{U}_\delta$ ,  $s \in [0, s_0[$  et  $t \in [-\delta, 0]$  sont liés par la relation  $x = X_\Gamma(s) - t\nu(X_\Gamma(s))$ . Les deux premières variables de  $\tilde{\mu}$  correspondent respectivement aux variations lentes et rapides de  $\tilde{\mu}$  dans la direction tangentielle alors que la troisième variable traduit une variation rapide de  $\tilde{\mu}$  dans la direction normale.

Pour une onde incidente  $u^i$  donnée, le problème de diffraction s'écrit alors : trouver  $u_\delta \in H_{\text{ext}}^1(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega_\delta})$  tel que  $u_\delta = u_\delta^s + u^i$  vérifie

$$\begin{cases} \Delta u_\delta + k^2 \mu(x) u_\delta = 0 \text{ dans } \mathcal{U}_\delta, \\ \Delta u_\delta + k^2 u_\delta = 0 \text{ dans } \Omega_{\text{ext}}, \\ \frac{\partial u_\delta}{\partial \nu} = 0 \text{ sur } \Gamma_\delta \\ \left[ \frac{\partial u_\delta}{\partial \nu} \right] = 0, \quad [u_\delta] = 0 \text{ sur } \Gamma \end{cases}$$

et  $u_\delta^s$  satisfait la condition de radiation de Sommerfeld (1.5). Le modèle équivalent à l'ordre  $l$  consiste à chercher  $u_l = u_l^s + u^i$  satisfaisant

$$\Delta u_l + k^2 u_l = 0 \text{ dans } \Omega_{\text{ext}},$$

ainsi qu'une condition d'impédance généralisée sur  $\Gamma$  du type

$$\frac{\partial u_l}{\partial \nu} + \mathcal{Z}_l^{\text{per}} u_l = 0.$$

De plus le champ diffracté doit satisfaire la condition de radiation (1.5). Selon [5], nous avons aux deux premiers ordres :

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_0^{\text{per}} u &= 0, \\ \mathcal{Z}_1^{\text{per}} u &= \delta \Delta_\Gamma u + k^2 \bar{\mu} \delta u, \end{aligned}$$

où le coefficient  $\bar{\mu}$  n'est autre que la valeur moyenne de  $\tilde{\mu}$  définie pour tout  $s \in [0, s_0]$  par

$$\bar{\mu}(X_\Gamma(s)) := \int_0^1 \int_0^1 \tilde{\mu} \left( s, \frac{\zeta}{\delta}, \frac{t}{\delta} \right) d\zeta dt.$$

Dans cette configuration, un opérateur de dérivation surfacique d'ordre deux apparaît de nouveau dès le modèle équivalent d'ordre 1 et comme dans le § 1.1.2 la condition d'impédance classique n'est pas adaptée.

## 1.2 Le problème direct de diffraction avec GIBC

Dans cette section nous allons montrer dans un premier temps que le problème de diffraction avec condition d'impédance généralisée et bien posé si l'opérateur est de la forme «  $\Delta_\Gamma$  » puis nous consacrerons une deuxième partie à l'étude d'un cas plus général qui permettra notamment de traiter des opérateurs d'impédance contenant des dérivations tangentielles d'ordre quelconque.

### 1.2.1 Le cas d'un opérateur du type « $\Delta_\Gamma$ »

Nous gardons les mêmes notations que dans la section précédente, la frontière  $\Gamma$  est supposée être de classe  $C^1$ . Soient  $\eta$  et  $\lambda$  deux fonctions de  $L^\infty(\Gamma)$  à valeur dans  $\mathbb{C}$ , le problème de diffraction que l'on considère consiste à trouver  $u = u^s + u^i \in \{v \in H_{\text{ext}}^1(\Omega_{\text{ext}}) \text{ tels que } v|_\Gamma \in H^1(\Gamma)\}$  satisfaisant

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 u = 0 \text{ dans } \Omega_{\text{ext}}, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} + \text{div}_\Gamma(\eta \nabla_\Gamma u) + \lambda u = 0 \text{ sur } \Gamma, \\ \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|x|=R} \left| \frac{\partial u^s}{\partial r} - i k u^s \right|^2 ds = 0. \end{cases} \quad (1.6)$$

Pour tout espace de Hilbert  $X$  on note  $X^*$  son dual, l'espace des formes anti-linéaires continues sur  $X$ . On définit le produit de dualité pour tout  $(u, v) \in X \times X^*$  par

$$\begin{cases} \langle v, u \rangle_{X^*, X} := v(u), \\ \langle u, v \rangle_{X, X^*} := \overline{v(u)}. \end{cases}$$

Dans la suite nous ne ferons plus mention des espaces dans les produits de dualité sauf si cela est nécessaire pour la compréhension. Pour  $\eta \in L^\infty(\Gamma)$  et  $u \in H^1(\Gamma)$  nous définissons  $\operatorname{div}_\Gamma(\eta \nabla_\Gamma u)$  comme un élément de  $H^{-1}(\Gamma)$  le dual de  $H^1(\Gamma)$  par

$$\langle \operatorname{div}_\Gamma(\eta \nabla_\Gamma u), v \rangle := - \int_\Gamma \eta \nabla_\Gamma u \cdot \nabla_\Gamma \bar{v} ds \quad \forall v \in H^1(\Gamma).$$

Soit  $\Omega_R := \Omega_{\text{ext}} \cap B_R$  où  $B_R$  est telle que  $\Omega \subset B_R$  et notons  $S_R : H^{1/2}(\partial B_R) \rightarrow H^{-1/2}(\partial B_R)$  l'opérateur de Dirichlet à Neumann défini pour  $g \in H^{1/2}(\partial B_R)$  par  $S_R g := \partial u^e / \partial r|_{\partial B_R}$  où  $u^e$  est la solution sortante (qui satisfait la condition de radiation de Sommerfeld (1.5)) de l'équation de Helmholtz à l'extérieur de  $B_R$  et  $u^e = g$  sur  $\partial B_R$ . Rappelons que d'après [78, théorème 2.6.4] pour la dimension 3 et [63] pour la dimension 2 on a les signes suivants pour  $S_R$

$$\operatorname{Re}\langle S_R u, u \rangle \leq 0 \text{ et } \operatorname{Im}\langle S_R u, u \rangle > 0 \quad (1.7)$$

pour tout  $u \in H^{1/2}(\partial B_R)$  avec  $u \neq 0$ . À l'aide de cet opérateur, on reformule le problème (1.6) dans un domaine borné, il est équivalent à trouver  $u$  dans  $H_{\Gamma, R} := \{v \in H^1(\Omega_R); v|_\Gamma \in H^1(\Gamma)\}$  tel que

$$\mathcal{P}(\lambda, \eta, \Gamma) \quad \begin{cases} \Delta u + k^2 u = 0 \text{ dans } \Omega_R, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} + \operatorname{div}_\Gamma(\eta \nabla_\Gamma u) + \lambda u = 0 \text{ sur } \Gamma, \\ \frac{\partial u}{\partial r} - S_R(u) = f \text{ sur } \partial B_R, \end{cases} \quad (1.8)$$

avec

$$f := \frac{\partial u^i}{\partial r} - S_R(u^i).$$

D'une manière générale,  $\mathcal{P}(\lambda, \eta, \Gamma)$  a un sens pour tout  $f \in H^{-1/2}(\partial B_R)$  et l'espace  $H_{\Gamma, R}$  muni du produit scalaire

$$(\cdot, \cdot)_{H_{\Gamma, R}} := (\cdot, \cdot)_{H^1(\Gamma)} + (\cdot, \cdot)_{H^1(\Omega_R)}$$

est un espace de Hilbert. Les problèmes (1.6) et (1.8) étant équivalents, nous ne ferons pas la distinction entre la solution de (1.6) qui vit dans  $\Omega_{\text{ext}}$  et celle de (1.8) qui ne vit que dans  $\Omega_R$ . Définissons l'opérateur  $A : H_{\Gamma, R} \rightarrow H_{\Gamma, R}$  et la forme bilinéaire  $a$  sur  $H_{\Gamma, R} \times H_{\Gamma, R}$  par

$$(Au, v)_{H_{\Gamma, R}} = a(u, v) := \int_{\Omega_R} (\nabla u \cdot \nabla \bar{v} - k^2 u \bar{v}) dx + \int_\Gamma (\eta \nabla_\Gamma u \cdot \nabla_\Gamma \bar{v} - \lambda u \bar{v}) ds - \langle S_R u, v \rangle, \quad (1.9)$$

pour  $(u, v) \in H_{\Gamma, R} \times H_{\Gamma, R}$ . De plus, définissons la forme linéaire  $l$  sur  $H_{\Gamma, R}$  et  $F \in H_{\Gamma, R}$  par

$$(F, v)_{H_{\Gamma, R}} = l(v) := \langle f, v \rangle$$

pour tout  $v \in H_{\Gamma, R}$ . Ainsi  $u$  est une solution de  $\mathcal{P}(\lambda, \eta, \Gamma)$  si et seulement si

$$a(u, v) = l(v) \quad \forall v \in H_{\Gamma, R}$$

ou encore si et seulement si

$$Au = F.$$

Afin d'assurer l'existence et l'unicité de la solution du problème  $\mathcal{P}(\lambda, \eta, \Gamma)$  nous faisons l'hypothèse suivante sur les impédances.

**Hypothèse 1.2.1**  $(\lambda, \eta) \in (L^\infty(\Gamma))^2$  sont telles que

$$\mathcal{I}m(\lambda) \geq 0, \quad \mathcal{I}m(\eta) \leq 0 \quad p.p. \text{ sur } \Gamma$$

et il existe  $c > 0$  telle que

$$\mathcal{R}e(\eta) \geq c \quad p.p. \text{ sur } \Gamma.$$

L'hypothèse sur la partie imaginaire des fonctions d'impédance  $\lambda$  et  $\eta$  est en fait directement liée à la condition de radiation. Si on repasse en domaine temporel, ce choix de signe implique que l'énergie de l'onde décroît au fil du temps. En revanche, l'hypothèse sur le signe de la partie réelle de  $\eta$  n'a rien de physique et n'est en fait qu'une hypothèse technique nous permettant d'obtenir de la coercivité pour la partie principale de  $A$ . Nous expliquerons dans le § 1.2.2 comment s'affranchir de cette hypothèse.

**Théorème 1.2.2** Si l'hypothèse 1.2.1 est satisfaite, pour tout  $f \in H^{1/2}(\partial B_R)$ ,  $\mathcal{P}(\lambda, \eta, \Gamma)$  admet une unique solution  $u$  dans  $H_{\Gamma, R}$ . De plus il existe une constante  $C > 0$  indépendante de  $u$  et de  $f$  telle que

$$\|u\|_{H_{\Gamma, R}} \leq C \|f\|_{H^{-1/2}(\partial B_R)}.$$

**Preuve.** La preuve de ce résultat est classique, on prouve dans un premier temps que l'opérateur  $A$  est de type Fredholm d'indice 0, puis nous montrons qu'il est injectif ce qui nous donnera le résultat du théorème. Définissons  $J$  et  $K$  les deux opérateurs de  $H_{\Gamma, R}$  dans lui-même tels que pour tout  $u, v \in H_{\Gamma, R}$

$$(Ju, v)_{H_{\Gamma, R}} = (u, v)_{H^1(\Omega_R)} + \int_{\Gamma} \eta \nabla_{\Gamma} u \cdot \nabla_{\Gamma} \bar{v} ds - \langle S_R u, v \rangle,$$

$$(Ku, v)_{H_{\Gamma, R}} = -(1 + k^2)(u, v)_{L^2(\Omega_R)} - \int_{\Gamma} \lambda u \bar{v} ds$$

Ainsi  $A = J + K$  et dès que  $\mathcal{R}e(\eta(x)) \geq c > 0$  pour presque tout  $x \in \Gamma$  l'opérateur  $J$  est un isomorphisme de  $H_{\Gamma, R}$  car  $\mathcal{R}e\langle S_R v, v \rangle \leq 0$  pour tout  $v \in H^{1/2}(\partial B_R)$ . De plus d'après le théorème de Rellich,  $H^1(\Omega_R)$  et  $H^1(\Gamma)$  s'injectent de manière compacte dans  $L^2(\Omega_R)$  et  $L^2(\Gamma)$  respectivement. Donc  $K$  est compact et  $A$  est un opérateur de type Fredholm d'indice 0.

Soit  $u$  tel que

$$a(u, v) = 0 \quad \forall v \in H_{\Gamma, R}.$$

Pour  $v = u$  et en prenant la partie imaginaire de cette dernière équation on obtient

$$\int_{\Gamma} (\mathcal{I}m(\eta) |\nabla_{\Gamma} u|^2 - \mathcal{I}m(\lambda) |u|^2) ds - \mathcal{I}m\langle S_R u, u \rangle = 0.$$

L'hypothèse 1.2.1 implique alors que

$$\mathcal{I}m\langle S_R u, u \rangle = 0$$

et donc  $u|_{\partial B_R} = 0$  (voir [78] p. 103 pour la dimension trois et [63] pour la dimension deux). Alors  $\frac{\partial u}{\partial r}|_{\partial B_R} = S_R u = 0$  d'après la condition au bord satisfaite par  $u$  sur  $\partial B_R$ . La fonction  $u$  est solution d'un problème de Cauchy dans  $\Omega_R$  avec des données nulles sur  $\partial B_R$  et donc  $u = 0$  dans tout le domaine  $\Omega_R$  d'après l'unicité du problème de Cauchy. Le problème  $\mathcal{P}(\lambda, \eta, \Gamma)$  est bien posé et il existe  $C > 0$  telle que pour tout  $f \in H^{-1/2}(\partial B_R)$ , l'unique solution  $u$  de  $\mathcal{P}(\lambda, \eta, \Gamma)$  satisfait

$$\|u\|_{H_{\Gamma, R}} \leq C \|F\|_{H_{\Gamma, R}} \leq C \|f\|_{H^{-1/2}(\partial B_R)}.$$

■

L'hypothèse sur le signe de  $\eta$  n'a qu'un seul objectif : rendre l'opérateur  $J$  coercif. Dans certaines situations, comme par exemple lorsque l'on a un problème de couche mince et que le diélectrique est un matériau à indice négatif, il peut arriver que le signe de  $\eta$  soit négatif. Dans ce cas aussi nous aimerions être en mesure de montrer l'existence et l'unicité de la solution de  $\mathcal{P}(\lambda, \eta, \Gamma)$ .

### 1.2.2 Étude du cas général

Commençons par décrire ce que nous appellerons un opérateur d'impédance.

#### Opérateurs d'impédance admissibles

Soit  $V(\Gamma) \subset L^2(\Gamma)$  muni d'un produit scalaire  $(\cdot, \cdot)_{V(\Gamma)}$  un espace de Hilbert défini sur  $\Gamma$  et tel que

$$C^\infty(\Gamma) \subset V(\Gamma) \subset L^2(\Gamma).$$

Supposons de plus  $C^\infty(\Gamma)$  s'injecte de manière dense dans  $V(\Gamma)$ . Introduisons l'intersection de  $V(\Gamma)$  avec  $H^{1/2}(\Gamma)$  que l'on note  $V^{1/2}(\Gamma) := V(\Gamma) \cap H^{1/2}(\Gamma)$  associé à la norme

$$\|\cdot\|_{V^{1/2}(\Gamma)} := \|\cdot\|_{V(\Gamma)} + \|\cdot\|_{H^{1/2}(\Gamma)}$$

et notons  $V^{-1/2}(\Gamma)$  son dual.

Comme  $C^\infty(\Gamma)$  est inclus dans  $V(\Gamma)$ , l'inclusion de  $V^{1/2}(\Gamma)$  dans  $H^{1/2}(\Gamma)$  est dense et on a les inclusions denses suivants

$$V(\Gamma) \subset L^2(\Gamma) \subset V(\Gamma)^*$$

et

$$V^{1/2}(\Gamma) \subset H^{1/2}(\Gamma) \subset L^2(\Gamma) \subset H^{-1/2}(\Gamma) \subset V^{-1/2}(\Gamma).$$

**Définition 1.2.3** *Un opérateur d'impédance  $\mathcal{Z}$  est un opérateur linéaire et continu de  $V(\Gamma)$  dans  $V(\Gamma)^*$ .*

Le problème de diffraction avec condition d'impédance généralisée s'écrit alors : trouver  $u^s \in \{v \in H_{\text{ext}}^1(\Omega_{\text{ext}}) \text{ tel que } v|_\Gamma \in V(\Gamma)\}$  tel que

$$\begin{cases} \Delta u^s + k^2 u^s = 0 \text{ dans } \Omega_{\text{ext}}, \\ \frac{\partial u^s}{\partial \nu} + \mathcal{Z} u^s = f \text{ sur } \Gamma, \\ \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|x|=R} \left| \frac{\partial u^s}{\partial r} - ik u^s \right|^2 = 0 \end{cases} \quad (1.10)$$

avec

$$f =: - \left( \mathcal{Z} u_i + \frac{\partial u_i}{\partial \nu} \right).$$

Ce problème a un sens dès que  $f \in V(\Gamma)^*$ . Nous allons montrer que (1.10) est bien posé sous l'hypothèse de signe suivante.

**Hypothèse 1.2.4** *L'opérateur  $\mathcal{Z}$  est tel que*

$$\text{Im}(\mathcal{Z}) \geq 0.$$

Pour tous espaces de Hilbert  $E, F$  et tout opérateur borné  $T : E \rightarrow F$ , son adjoint  $T^* : F^* \rightarrow E^*$  est défini par  $\langle T^* u, v \rangle_{E^*, E} = \langle u, T v \rangle_{F^*, F}$  pour  $(u, v) \in F^* \times E$ . Les parties réelles et imaginaires de  $T$  sont données par

$$\begin{cases} \mathcal{R}e(T) := \frac{T + T^*}{2}, \\ \mathcal{I}m(T) := \frac{T - T^*}{2i}. \end{cases}$$

### Reformulation surfacique et caractère bien posé du problème

La formulation variationnelle de l'équivalent du problème (1.10) en domaine borné s'écrit : trouver  $u^s \in H_V := \{v \in H_{\text{ext}}^1(\Omega_{\text{ext}}) \text{ tels que } v|_{\Gamma} \in V(\Gamma)\}$  tel que

$$\int_{\Omega_R} (\nabla u^s \cdot \nabla \bar{v} - k^2 u^s \bar{v}) dx - \langle \mathcal{Z} u^s, v \rangle - \langle S_R u^s, v \rangle = - \int_{\Gamma} f \bar{v} ds \quad (1.11)$$

pour tout  $v \in H_V$ . Si on procède comme dans la section précédente, on sera forcé de supposer que la partie réelle de  $\mathcal{Z}$  est négative afin d'avoir une formulation de type Fredholm. Pour contourner cette hypothèse technique, nous allons nous baser sur une écriture de (1.10) sous la forme d'un problème posé sur la surface  $\Gamma$ . Introduisons l'opérateur de Dirichlet à Neumann extérieur sur la surface  $\Gamma$ ,  $S_{\Gamma} : H^{1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma)$  défini pour tout  $g \in H^{1/2}(\Gamma)$  par  $S_{\Gamma} g = \frac{\partial u_g}{\partial \nu}$  où  $u_g \in H_{\text{ext}}^1(\Omega_{\text{ext}})$  est l'unique solution de

$$\begin{cases} \Delta u_g + k^2 u_g = 0 \text{ dans } \Omega_{\text{ext}}, \\ u_g = g \text{ sur } \Gamma, \\ \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|x|=R} \left| \frac{\partial u_g}{\partial r} - i k u_g \right|^2 = 0. \end{cases} \quad (1.12)$$

Nous montrons dans la proposition 1.2.5 que le problème (1.10) est équivalent à trouver  $u_{\Gamma} \in V^{1/2}(\Gamma)$  tel que

$$\mathcal{Z} u_{\Gamma} + S_{\Gamma} u_{\Gamma} = f. \quad (1.13)$$

Une raison intuitive de considérer une telle formulation est que l'opérateur  $S_{\Gamma}$  est un opérateur borné de  $H^{1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma)$  donc par exemple lorsque  $\mathcal{Z} = \Delta_{\Gamma} : H^1(\Gamma) \rightarrow H^{-1}(\Gamma)$ , l'opérateur  $S_{\Gamma} : H^1(\Gamma) \rightarrow H^{-1}(\Gamma)$  ne représente qu'une perturbation compacte. En d'autres termes, le signe de la partie réelle de l'intégrale volumique n'est pas important pour obtenir le caractère Fredholm du problème.

**Proposition 1.2.5** *Soit  $f \in V(\Gamma)^*$ , si  $u^s \in H_V$  est solution de (1.10) alors  $u^s|_{\Gamma}$  est solution de (1.13). Réciproquement si  $u_{\Gamma} \in V^{1/2}(\Gamma)$  est solution de (1.13) alors l'unique solution  $u^s \in H_V$  de (1.12) pour  $g = u_{\Gamma}$  est solution de (1.10).*

**Preuve.** Prenons  $f \in V(\Gamma)^*$ , si  $u^s \in H_V$  est solution de (1.10) alors  $u^s|_{\Gamma} \in V^{1/2}(\Gamma)$  car  $u^s|_{\Gamma} \in V(\Gamma)$  et  $u^s \in H_{\text{ext}}^1(\Omega_{\text{ext}})$ . De plus

$$\frac{\partial u^s}{\partial \nu} = S_{\Gamma}(u^s|_{\Gamma})$$

et donc  $u^s|_{\Gamma}$  est solution de (1.13).

Supposons maintenant que  $u_{\Gamma} \in V^{1/2}(\Gamma)$  est solution de (1.13) et posons  $u^s$  l'unique solution de (1.12) pour  $g = u_{\Gamma}$ . Alors  $u^s \in H_V$  et est solution de (1.10) car

$$\frac{\partial u^s}{\partial \nu} = S_{\Gamma}(u_{\Gamma}).$$

■

La méthode pour montrer que le problème (1.13) est bien posé reste la même que dans la section précédente, on montre que  $\mathcal{Z} + S_{\Gamma} : V^{1/2}(\Gamma) \rightarrow V^{-1/2}(\Gamma)$  est un opérateur de type Fredholm d'indice 0, ensuite son injectivité entrainera sa surjectivité et le fait que le problème (1.10) est bien posé. Commençons par l'unicité qui utilise les mêmes arguments que la preuve du théorème 1.2.2.

**Lemme 1.2.6** *L'opérateur  $\mathcal{Z} + S_{\Gamma} : V^{1/2}(\Gamma) \rightarrow V^{-1/2}(\Gamma)$  est injectif.*

**Preuve.** Prenons  $u_{\Gamma}$  un élément de  $V^{1/2}(\Gamma)$  tel que  $(\mathcal{Z} + S_{\Gamma})u_{\Gamma} = 0$ , on a alors pour  $u$  l'unique solution de (1.12) avec  $g = u_{\Gamma}$

$$\langle \mathcal{Z} u_{\Gamma}, u_{\Gamma} \rangle + \left\langle \frac{\partial u}{\partial \nu}, u \right\rangle = 0$$

et en utilisant l'hypothèse 1.2.4 on a

$$\mathcal{I}m \left\langle \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}, u \right\rangle_{H^{-1/2}(\Gamma), H^{1/2}(\Gamma)} \leq 0.$$

Soit  $B_R$  une boule de rayon  $R$  telle que  $\Omega \subset B_R$ , une simple formule d'intégration par partie entre  $\Gamma$  et  $\partial B_R$  et l'utilisation de l'équation de Helmholtz nous donne

$$\mathcal{I}m \int_{\partial B_R} \frac{\partial u}{\partial r} \bar{u} ds \leq 0$$

et d'après [38, théorème 2.12] couplé avec un principe de prolongement unique on obtient que  $u = 0$  dans  $\Omega_{\text{ext}}$  et donc  $u_\Gamma = 0$ . ■

Afin d'obtenir le caractère Fredholm de  $\mathcal{Z} + S_\Gamma$  nous avons besoin de quelques propriétés de  $S_\Gamma$ .

**Proposition 1.2.7** *Il existe un opérateur borné  $C_\Gamma : H^{1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma)$  qui admet les propriétés suivantes : il existe  $c_\Gamma > 0$  telle que pour tout  $u \in H^{1/2}(\Gamma)$*

$$\begin{cases} \mathcal{R}e \langle C_\Gamma u, u \rangle \geq c_\Gamma \|u\|_{H^{1/2}(\Gamma)}^2, \\ \mathcal{I}m \langle C_\Gamma u, u \rangle \leq 0, \end{cases}$$

ainsi qu'un opérateur compact  $K_\Gamma : H^{1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma)$  tels que

$$S_\Gamma = -C_\Gamma + K_\Gamma.$$

**Preuve.** Soit  $B_R$  une boule de rayon  $R$  contenant  $\Omega$ , notons  $\Omega_R := B_R \cap \Omega_{\text{ext}}$  et définissons l'opérateur linéaire et continu  $A_R : H^{1/2}(\Gamma) \rightarrow H^1(\Omega_R)$  qui à  $g \in H^{1/2}(\Gamma)$  associe  $u_g \in H^1(\Omega_R)$  l'unique solution de

$$\begin{cases} \Delta u_g + k^2 u_g = 0 \text{ dans } \Omega_R, \\ u_g = g \text{ sur } \Gamma, \\ \frac{\partial u_g}{\partial r} = S_R u_g \text{ sur } \partial B_R. \end{cases} \quad (1.14)$$

Introduisons les opérateurs  $C_\Gamma : H^{1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma)$  et  $K_\Gamma : H^{1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma)$  définis par

$$\langle C_\Gamma f, g \rangle = (A_R f, A_R g)_{H^1(\Omega_R)} - \langle S_R f, g \rangle,$$

et

$$\langle K_\Gamma f, g \rangle = (k^2 + 1) \int_{\Omega_R} A_R f \overline{A_R g} dx,$$

pour tout  $(f, g) \in H^{1/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma)$ . En utilisant la formule de Green dans  $\Omega_R$  et l'équation de Helmholtz satisfaite par  $u_f := A_R f$  et  $u_g := A_R g$ , on a :

$$\begin{aligned} \langle S_\Gamma f, g \rangle &= \left\langle \frac{\partial u_f}{\partial \boldsymbol{\nu}}, u_g \right\rangle \\ &= - \int_{\Omega_R} \nabla u_f \cdot \nabla \bar{u}_g + \Delta u_f \bar{u}_g dx + \int_{\partial B_R} \frac{\partial u_f}{\partial r} \bar{u}_g ds \\ &= -(u_f, u_g)_{H^1(\Omega_R)} + \langle S_R u_f, u_g \rangle + (k^2 + 1) \int_{\Omega_R} u_f \bar{u}_g ds. \end{aligned}$$

Ainsi  $S_\Gamma = -C_\Gamma + K_\Gamma$ . D'après le signe de  $S_R$  donné en (1.7), la partie imaginaire de  $C_\Gamma$  satisfait

$$\mathcal{I}m \langle C_\Gamma f, f \rangle \leq 0$$

et sa partie réelle

$$\operatorname{Re}\langle C_\Gamma f, f \rangle \geq \|A_R f\|_{H^1(\Omega_R)}^2 \quad (1.15)$$

pour tout  $f \in H^{1/2}(\Gamma)$ . Mais  $A_R$  est injectif et d'image

$$\mathcal{R}(A_R) = \left\{ u \in H^1(\Omega_R), \Delta u + k^2 u = 0 \text{ dans } \Omega_R \text{ et } S_R u = \frac{\partial u}{\partial r} \text{ sur } \partial B_R \right\}$$

fermée dans  $H^1(\Omega_R)$  donc par le théorème de l'application ouverte [15, théorème II.5] il existe  $C > 0$  telle que

$$\|A_R f\|_{H^1(\Omega_R)} \geq C \|f\|_{H^{1/2}(\Gamma)}, \quad \forall f \in H^{1/2}(\Gamma).$$

Si on revient à (1.15), on obtient que  $C_\Gamma$  est à partie réelle coercive.

Pour conclure, il suffit d'utiliser l'injection compacte de  $H^1(\Omega_R)$  dans  $L^2(\Omega_R)$  et en déduire que  $K_\Gamma : H^{1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma)$  est compact. ■

Énonçons un résultat d'existence et d'unicité de la solution du problème direct de diffraction avec condition d'impédance généralisée moins restrictif que le théorème 1.2.2.

**Théorème 1.2.8** *Si l'opérateur  $\mathcal{Z}$  satisfait l'hypothèse 1.2.4 et si l'une des hypothèses suivantes est satisfaite*

1.  $\mathcal{Z}$  se décompose sous la forme  $-C_Z + K_Z$  où  $C_Z : V^{1/2}(\Gamma) \rightarrow V^{-1/2}(\Gamma)$  satisfait

$$\operatorname{Re}\langle C_Z u, u \rangle - \operatorname{Im}\langle C_Z u, u \rangle \geq c_z \|u\|_{V(\Gamma)}^2 \quad \forall u \in V(\Gamma), \quad (1.16)$$

où  $c_z > 0$  est indépendante de  $u$  et  $K_Z : V^{1/2}(\Gamma) \rightarrow V^{-1/2}(\Gamma)$  est un opérateur compact,

2. l'espace  $V(\Gamma)$  s'injecte de manière compacte dans  $H^{1/2}(\Gamma)$  et  $\mathcal{Z} : V(\Gamma) \rightarrow V(\Gamma)^*$  se décompose sous la forme  $T_Z + K_Z$  où  $T_Z : V(\Gamma) \rightarrow V(\Gamma)^*$  est un isomorphisme et  $K_Z : V(\Gamma) \rightarrow V(\Gamma)^*$  est un opérateur compact,

alors  $\mathcal{Z} + S_\Gamma$  est un isomorphisme de  $V^{1/2}(\Gamma)$  dans  $V^{-1/2}(\Gamma)$ .

**Preuve.** Supposons que la première hypothèse est satisfaite. Grâce à la proposition 1.2.7, il existe un opérateur compact  $K_\Gamma : H^{1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma)$  et un opérateur  $C_\Gamma : H^{1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma)$  de partie réelle coercive tels que  $S_\Gamma = -C_\Gamma + K_\Gamma$ . Soit  $z := a + ib \in \mathbb{C}$  où  $a$  et  $b$  sont deux réels, on a

$$|z| \geq \frac{|a| + |b|}{\sqrt{2}} \quad (1.17)$$

donc pour tout  $u \in V^{1/2}(\Gamma)$

$$|\langle (C_\Gamma + C_Z)u, u \rangle| \geq \frac{\operatorname{Re}\langle C_\Gamma u, u \rangle + \operatorname{Re}\langle C_Z u, u \rangle - \operatorname{Im}\langle C_Z u, u \rangle - \operatorname{Im}\langle C_\Gamma u, u \rangle}{\sqrt{2}}$$

et d'après (1.16)

$$|\langle (C_\Gamma + C_Z)u, u \rangle| \geq \frac{\operatorname{Re}\langle C_\Gamma u, u \rangle + c_z \|u\|_{V(\Gamma)}^2 - \operatorname{Im}\langle C_\Gamma u, u \rangle}{\sqrt{2}}.$$

Les propriétés de  $S_\Gamma$  établies dans la proposition 1.2.7 donnent alors

$$|\langle (C_\Gamma + C_Z)u, u \rangle| \geq \frac{c_\Gamma \|u\|_{H^{1/2}(\Gamma)}^2 + c_z \|u\|_{V(\Gamma)}^2}{\sqrt{2}},$$

et donc  $C_\Gamma + C_Z : V^{1/2}(\Gamma) \rightarrow V^{-1/2}(\Gamma)$  est coercif. De plus,  $K_\Gamma + K_Z$  est compact de  $V^{1/2}(\Gamma)$  vers  $V^{-1/2}(\Gamma)$  et

$$\mathcal{Z} + S_\Gamma = -(C_\Gamma + C_Z) + K_\Gamma + K_Z$$

ce qui signifie que  $\mathcal{Z} + S_\Gamma$  est de type Fredholm d'indice 0. Le lemme d'unicité 1.2.6 permet de conclure.

Si on suppose que la deuxième hypothèse du théorème est satisfaite,  $V(\Gamma) = V^{1/2}(\Gamma)$  et leurs normes sont équivalentes. De plus,  $S_\Gamma : V^{1/2}(\Gamma) \rightarrow V^{-1/2}(\Gamma)$  est compact et donc  $\mathcal{Z} + S_\Gamma$  est de type Fredholm et d'indice 0. Encore une fois son injectivité permet de conclure. ■

### Exemples d'application

Revenons à l'hypothèse 1.2.1 faite dans la section précédente, nous allons voir qu'elle n'est en fait pas nécessaire pour obtenir l'existence et l'unicité de la solution du problème (1.6). Soient  $(\lambda, \eta) \in (L^\infty(\Gamma))^2$  tels que

$$\mathcal{I}m(\lambda) \geq 0, \quad \mathcal{I}m(\eta) \leq 0.$$

Considérons  $\mathcal{Z} = \operatorname{div}_\Gamma(\eta \nabla_\Gamma \cdot) + \lambda \cdot$ , alors  $\mathcal{Z}$  satisfait l'hypothèse 1.2.4.

**$\mathcal{R}e(\eta)$  est positive mais peut s'annuler.** Définissons l'espace à poids

$$V(\Gamma) = \left\{ u \in L^2(\Gamma), \int_\Gamma |\eta| |\nabla_\Gamma u|^2 ds < \infty \right\},$$

muni du produit scalaire

$$(f, g)_{V(\Gamma)} = \int_\Gamma (f\bar{g} + |\eta| \nabla_\Gamma f \cdot \nabla_\Gamma \bar{g}) ds.$$

Cet espace rentre bien dans le cadre abstrait que nous avons mis en place au début de cette section, de plus, la première alternative du théorème 1.2.8 est satisfaite car

$$\mathcal{Z} = -C_Z + K_Z,$$

où  $C_Z : V^{1/2}(\Gamma) \rightarrow V^{-1/2}(\Gamma)$  et  $K_Z : V^{1/2}(\Gamma) \rightarrow V^{-1/2}(\Gamma)$  sont définis pour  $(u, v)$  dans  $V^{1/2}(\Gamma) \times V^{-1/2}(\Gamma)$  par

$$\langle C_Z u, v \rangle := \int_\Gamma (\eta \nabla_\Gamma u \cdot \nabla_\Gamma \bar{v} + u\bar{v}) ds \text{ et } \langle K_Z u, v \rangle := \int_\Gamma (1 + \lambda) u \bar{v} ds.$$

$K_Z$  est clairement compact et pour tout  $u$  dans  $V(\Gamma)$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}e \langle C_Z u, u \rangle - \mathcal{I}m \langle C_Z u, u \rangle &= \int_\Gamma [(\mathcal{R}e(\eta) - \mathcal{I}m(\eta)) \nabla_\Gamma u \cdot \nabla_\Gamma \bar{u} + u\bar{u}] ds, \\ &\geq \int_\Gamma |\eta| |\nabla_\Gamma u|^2 + |u|^2 ds, \\ &\geq \|u\|_{V(\Gamma)}^2. \end{aligned}$$

Ainsi le problème (1.6) admet une solution unique même lorsque  $\eta$  s'annule.

**Remarque 1.2.9** *Ce cas peut aussi se traiter en utilisant directement la formulation variationnelle volumique (1.11).*

**$\mathcal{R}e(\eta)$  est strictement négative.** Supposons qu'il existe  $c > 0$  telle que

$$\mathcal{R}e(\eta) \leq -c.$$

On satisfait la deuxième alternative du théorème 1.2.8 en prenant  $V(\Gamma) = H^1(\Gamma)$  avec pour tout  $f \in V(\Gamma)$

$$\begin{aligned} T_Z f &:= \operatorname{div}_\Gamma(\eta \nabla_\Gamma f) + f, \\ K_Z f &:= S_\Gamma f + (\lambda - 1)f. \end{aligned}$$

### 1.2.3 Le champ lointain

La plupart des problèmes inverses en diffraction utilisent comme données le champ diffracté loin de l'objet que l'on étudie. Si  $u^s$  satisfait l'équation de Helmholtz homogène dans  $\Omega_{\text{ext}}$  et la condition de radiation (1.5) alors d'après [38], en dimension  $d$

$$u^s(x) = \frac{e^{ikr}}{r^{(d-1)/2}} \left( u^\infty(\hat{x}) + O\left(\frac{1}{r}\right) \right) \quad r \rightarrow +\infty \quad (1.18)$$

uniformément pour toutes les directions d'observation  $\hat{x} = x/r \in S^{d-1}$  où  $S^{d-1}$  désigne la sphère unité de  $\mathbb{R}^d$  et  $r = |x|$ . De plus, ce que l'on appellera le champ lointain  $u^\infty \in L^2(S^{d-1})$  est défini de manière unique par ce développement et pour tout domaine borné  $\mathcal{O}$  de classe Lipschitzienne et de normale extérieure  $\nu$  qui contient l'obstacle  $\Omega$ , on a la représentation intégrale suivante

$$u^\infty(\hat{x}) = \int_{\partial\mathcal{O}} \left( u^s(y) \frac{\partial\Phi^\infty(y, \hat{x})}{\partial\nu(y)} - \frac{\partial u^s(y)}{\partial\nu(y)} \Phi^\infty(y, \hat{x}) \right) ds(y) \quad \forall \hat{x} \in S^{d-1}, \quad (1.19)$$

où  $\Phi^\infty$ , le champ lointain de la fonction de Green sortante de l'équation de Helmholtz, est donné par

$$\begin{aligned} \text{dans } \mathbb{R}^2 \quad \Phi^\infty : \quad (y, \hat{x}) \in \mathbb{R}^2 \times S^1 &\mapsto \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{8\pi k}} e^{-iky \cdot \hat{x}} \\ \text{dans } \mathbb{R}^3 \quad \Phi^\infty : \quad (y, \hat{x}) \in \mathbb{R}^3 \times S^2 &\mapsto \frac{1}{4\pi} e^{-iky \cdot \hat{x}}. \end{aligned}$$

Nous rappelons aussi l'expression de la fonction de Green sortante de l'équation de Helmholtz :

$$\begin{aligned} \text{dans } \mathbb{R}^2 \quad \Phi : \quad (x, z) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\mapsto \frac{i}{4} H_0^1(k|x-z|), \\ \text{dans } \mathbb{R}^3 \quad \Phi : \quad (x, z) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 &\mapsto \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik|x-z|}}{|x-z|}. \end{aligned}$$



# LE CAS DES ÉQUATIONS DE MAXWELL

---

## Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Les modèles d'impédance généralisée pour les équations de Maxwell</b>	<b>24</b>
<b>2.2</b>	<b>Etude théorique du problème de diffraction</b>	<b>25</b>
2.2.1	Espaces variationnels et espaces de trace pour les équations de Maxwell	25
2.2.2	Formulation du problème direct	26
2.2.3	Existence et unicité de la solution	28
<b>2.3</b>	<b>Applications à des opérateurs de dérivation surfacique du deuxième ordre</b>	<b>29</b>
2.3.1	Le cas de « $\mathbf{rot}_\Gamma \eta \mathbf{rot}_\Gamma + \nabla_\Gamma \gamma \mathbf{div}_\Gamma + \lambda$ »	29
2.3.2	Le cas de « $\mathbf{rot}_\Gamma \eta \mathbf{rot}_\Gamma + \lambda$ »	30
2.3.3	Le cas de « $\nabla_\Gamma \gamma \mathbf{div}_\Gamma + \lambda$ »	35
<b>2.4</b>	<b>Le champ lointain</b>	<b>36</b>
<b>2.5</b>	<b>Formules de calcul vectoriel</b>	<b>37</b>

---

**D**E la même manière que dans le cas scalaire, la diffraction par un obstacle  $\Omega$  faisant intervenir des phénomènes à petite échelle peut se modéliser par une condition d'impédance généralisée. Cette fois-ci, comme on considère les équations de Maxwell cette condition d'impédance généralisée lie le champ électrique  $\mathbf{E}$  au champ magnétique  $\mathbf{H}$  par une relation de la forme

$$\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{E} + \mathcal{Z} \mathbf{H}_T = 0 \quad \text{sur } \Gamma$$

où  $\mathcal{Z}$  est un opérateur surfacique,  $\mathbf{H}_T := (\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{H}) \times \boldsymbol{\nu}$  désigne la composante tangentielle du champ magnétique  $\mathbf{H}$  sur  $\Gamma$  la frontière de  $\Omega$ . On note  $\boldsymbol{\nu}$  la normale à  $\Gamma$  dirigée vers l'extérieur de  $\Omega$ .

Dans la première section de ce chapitre nous rappelons les conditions approchées obtenues dans [10, 47] pour les couches minces et celles obtenues dans [49] pour le cas de matériaux fortement absorbants. Nous consacrons la deuxième section de ce chapitre à l'étude du problème direct et nous donnons un résultat d'existence et d'unicité pour un opérateur  $\mathcal{Z}$  général. Nous appliquons ensuite ce résultat à deux cas particuliers, l'un des deux cas demandant une attention toute particulière car il nécessite l'utilisation d'une décomposition de Hodge adéquate. Pour terminer, nous introduisons le champ lointain associé au champ électromagnétique sortant.

## 2.1 Les modèles d'impédance généralisée pour les équations de Maxwell

Rappelons dans cette section les résultats présentés dans [44], qui regroupe les résultats obtenus dans [10, 49]. Nous considérons le problème de diffraction en régime harmonique pour un nombre d'onde  $k > 0$  et nous cherchons les champs électriques et magnétiques ayant une dépendance temporelle de la forme

$$\mathcal{E}(x, t) = \mathcal{R}e\{e^{-ikt} \mathbf{E}(x)\} \text{ et } \mathcal{H}(x, t) = \mathcal{R}e\{e^{-ikt} \mathbf{H}(x)\}.$$

L'inhomogénéité est notée  $\Omega$ , nous supposons que c'est un ouvert borné simplement connexe de  $\mathbb{R}^3$  de classe  $C^\infty$  et que le milieu extérieur  $\Omega_{\text{ext}} := \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$  est homogène. Alors, comme dans le cas scalaire, le champ électromagnétique  $(\mathbf{E}, \mathbf{H})$  résultant de l'excitation de l'inhomogénéité  $\Omega$  par une onde incidente se décompose comme la somme d'un champ incident  $(\mathbf{E}^i, \mathbf{H}^i)$  qui satisfait les équations de Maxwell harmoniques

$$\begin{cases} \mathbf{rot} \mathbf{H}^i + ik \mathbf{E}^i = 0, \\ \mathbf{rot} \mathbf{E}^i - ik \mathbf{H}^i = 0, \end{cases} \quad (2.1)$$

dans  $\mathbb{R}^3$  et d'un champ diffracté  $(\mathbf{E}^s, \mathbf{H}^s)$  qui satisfait lui aussi (2.1) mais seulement à l'extérieur de l'inhomogénéité, c'est-à-dire dans  $\Omega_{\text{ext}}$ . Le champ diffracté doit aussi satisfaire une condition d'onde sortante qui dans le cas de l'électromagnétisme est appelée condition de Silver-Müller,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\partial B_R} |\mathbf{H}^s \times \hat{x} - (\hat{x} \times \mathbf{E}^s) \times \hat{x}|^2 ds = 0 \quad (2.2)$$

où  $\hat{x} := x/|x|$ . On dira que le couple  $(\mathbf{E}, \mathbf{H})$  est une solution sortante de (2.1) si il satisfait (2.2).

### Conducteur parfait couvert de diélectrique

Soit  $\Omega_\delta$  un conducteur parfait couvert d'une couche mince de diélectrique  $\mathcal{U}_\delta$  d'épaisseur  $\delta$  de permittivité et perméabilité relatives  $\epsilon$  et  $\mu$  respectivement,  $\epsilon$  et  $\mu$  étant deux réels indépendants de  $\delta$ . Les ouverts  $\mathcal{U}_\delta$  et  $\Omega_\delta$  sont tels que  $\Omega_\delta \cup \overline{\mathcal{U}_\delta} = \overline{\Omega}$  et  $\Omega_\delta \cap \overline{\mathcal{U}_\delta} = \emptyset$ , nous renvoyons le lecteur au § 1.1.2 pour une description précise de la géométrie. On note  $\boldsymbol{\nu}_\delta$  la normale à  $\Gamma_\delta$ , la frontière de  $\Omega_\delta$ , dirigée vers l'extérieur de  $\Omega_\delta$ . Dans l'inhomogénéité, le champ total  $(\mathbf{E}_\delta, \mathbf{H}_\delta) = (\mathbf{E}_\delta^s, \mathbf{H}_\delta^s) + (\mathbf{E}^i, \mathbf{H}^i)$  est solution

$$\begin{cases} \mathbf{rot} \mathbf{H}_\delta + ik\epsilon \mathbf{E}_\delta = 0 \text{ dans } \mathcal{U}_\delta, \\ \mathbf{rot} \mathbf{E}_\delta - ik\mu \mathbf{H}_\delta = 0 \text{ dans } \mathcal{U}_\delta, \\ \boldsymbol{\nu}_\delta \times \mathbf{E}_\delta = 0 \text{ sur } \Gamma_\delta \end{cases}$$

et on a continuité de la composante tangentielle des champs électriques et magnétiques à l'interface  $\Gamma$  entre le milieu extérieur et l'inhomogénéité :

$$[\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{E}_\delta] = 0 \text{ et } [\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{H}_\delta] = 0$$

où pour une fonction  $[f]$  désigne le saut de  $f$  à travers  $\Gamma$ . Pour  $l$  un entier, notons  $(\mathbf{E}_l, \mathbf{H}_l)$  une solution de (2.1) dans le domaine extérieur  $\Omega_{\text{ext}}$  telle que  $(\mathbf{E}_l, \mathbf{H}_l) = (\mathbf{E}_l^s, \mathbf{H}_l^s) + (\mathbf{E}^i, \mathbf{H}^i)$  où  $(\mathbf{E}_l^s, \mathbf{H}_l^s)$  satisfait la condition de radiation (2.2) et le champ total satisfait une condition d'impédance généralisée du type

$$\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{E}_l + \frac{i}{k} \mathcal{Z}_l ((\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{H}_l) \times \boldsymbol{\nu}) = 0 \text{ sur } \Gamma \quad (2.3)$$

où

$$\mathcal{Z}_0 u = 0, \quad (2.4)$$

$$\mathcal{Z}_1 u = \frac{\delta}{\epsilon} \mathbf{rot}_\Gamma \mathbf{rot}_\Gamma - k^2 \mu \delta, \quad (2.4)$$

$$\mathcal{Z}_2 u = \frac{\delta}{\epsilon} \mathbf{rot}_\Gamma \delta (1 - \delta \mathcal{H}) \mathbf{rot}_\Gamma - k^2 \mu \delta (1 - \delta (\mathcal{R} - \mathcal{H} Id)). \quad (2.5)$$

Alors,  $(\mathbf{E}_l, \mathbf{H}_l)$  est une approximation à l'ordre  $l$  du champ exact  $(\mathbf{E}_\delta, \mathbf{H}_\delta)$  c'est-à-dire que pour toute boule de rayon  $R$  telle que  $\Omega \subset B_R$ , il existe  $C > 0$  telle que pour tout  $\delta > 0$  suffisamment petit

$$\|\mathbf{E}_\delta - \mathbf{E}_l\|_{\mathbf{H}_{\text{rot}}(\Omega_{\text{ext}} \cap B_R)} \leq C\delta^{l+1}, \quad \|\mathbf{H}_\delta - \mathbf{H}_l\|_{\mathbf{H}_{\text{rot}}(\Omega_{\text{ext}} \cap B_R)} \leq C\delta^{l+1}$$

où la norme  $\|\cdot\|_{\mathbf{H}_{\text{rot}}}$  est définie dans la section suivante.

### Matériau fortement absorbant

Considérons le cas d'un matériau fortement absorbant dont la conductivité est de la forme

$$\sigma_\delta = \frac{1}{\mu k \delta^2}$$

pour  $\delta > 0$  un petit paramètre. Les équations de Maxwell en régime harmonique dans l'inhomogénéité pour le champ total  $(\mathbf{E}_\delta, \mathbf{H}_\delta) = (\mathbf{E}_\delta^s, \mathbf{H}_\delta^s) + (\mathbf{E}^i, \mathbf{H}^i)$  s'écrivent

$$\begin{cases} \mathbf{rot} \mathbf{H}_\delta + \left( ik\epsilon - \frac{1}{\mu k \delta^2} \right) \mathbf{E}_\delta = 0 \text{ dans } \Omega, \\ \mathbf{rot} \mathbf{E}_\delta - ik\mu \mathbf{H}_\delta = 0 \text{ dans } \Omega, \end{cases}$$

on a toujours continuité de la composante tangentielle des champs électrique et magnétique à l'interface  $\Gamma$

$$[\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{E}_\delta] = 0 \text{ et } [\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{H}_\delta] = 0 \text{ sur } \Gamma$$

et  $(\mathbf{E}_\delta^s, \mathbf{H}_\delta^s)$  satisfait (2.1) à l'extérieur de  $\Omega$  et la condition de radiation (2.2). De la même façon on peut construire une solution approchée à l'ordre  $l$ ,  $(\mathbf{E}_l, \mathbf{H}_l) = (\mathbf{E}_l^s, \mathbf{H}_l^s) + (\mathbf{E}^i, \mathbf{H}^i)$  où  $(\mathbf{E}_l^s, \mathbf{H}_l^s)$  satisfait (2.1) à l'extérieur de  $\Omega$  la condition de radiation (2.2) et le champ total satisfait une condition d'impédance généralisée du type (2.3). Cette fois-ci même en allant à l'ordre  $l = 2$  aucun opérateur de dérivation surfacique n'intervient :

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_0 u &= 0, \\ \mathcal{Z}_1 u &= -k^2 \mu \alpha \delta, \\ \mathcal{Z}_2 u &= -k^2 \mu \alpha \delta + i\delta^2 (\mathcal{R} - \mathcal{H}Id) \end{aligned}$$

où  $\alpha$  désigne toujours la racine carré de  $i$  à partie réelle positive. Le modèle approché à l'ordre 3 contient un opérateur de dérivation surfacique d'ordre 2 de la forme  $\nabla_\Gamma \text{div}_\Gamma + \mathbf{rot}_\Gamma \text{rot}_\Gamma$ .

**Remarque 2.1.1** *Si  $\Omega$  est un cylindre infini d'axe  $e_z$  alors la composante  $E_z$  du champ électrique  $\mathbf{E}_l$  suivant la direction  $e_z$  vérifie l'équation de Helmholtz à l'extérieur de  $\Omega$  ainsi que la condition d'impédance généralisée d'ordre  $l$  dans le cas scalaire donnée au § 1.1.3. La même remarque est valable dans le cas des couches minces.*

## 2.2 Etude théorique du problème de diffraction

### 2.2.1 Espaces variationnels et espaces de trace pour les équations de Maxwell

Avant d'aborder l'étude du problème direct, introduisons quelques notions nécessaires à l'étude des problèmes d'électromagnétisme, on les trouve par exemple dans [75, chapitre 3]. Soit  $\mathcal{O}$  un ouvert de  $\mathbb{R}^3$ , notons  $\Gamma$  sa frontière supposée de classe  $C^2$  de normale extérieure  $\boldsymbol{\nu}$ . Les espaces d'énergie pour les équations de Maxwell sont notés

$$\mathbf{H}_{\text{div}}(\mathcal{O}) := \{\mathbf{v} \in (L^2(\mathcal{O}))^3, \text{div}(\mathbf{v}) \in L^2(\mathcal{O})\}$$

muni de la norme

$$\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}_{\text{div}}(\mathcal{O})} := \|\mathbf{v}\|_{(L^2(\mathcal{O}))^3} + \|\text{div}(\mathbf{v})\|_{(L^2(\mathcal{O}))^3}$$

et

$$\mathbf{H}_{\text{rot}}(\mathcal{O}) := \{\mathbf{v} \in (L^2(\mathcal{O}))^3, \text{rot}(\mathbf{v}) \in (L^2(\mathcal{O}))^3\}$$

muni de la norme

$$\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}_{\text{rot}}(\mathcal{O})} := \|\mathbf{v}\|_{(L^2(\mathcal{O}))^3} + \|\text{rot}(\mathbf{v})\|_{(L^2(\mathcal{O}))^3}.$$

Introduisons aussi les espaces de trace

$$\mathbf{H}_t^s(\Gamma) := \{\mathbf{v} \in (H^s(\Gamma))^3 \mid \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nu} = 0\},$$

$$\mathbf{H}_{\text{div}\Gamma}^s(\Gamma) := \{\mathbf{v} \in \mathbf{H}_t^s(\Gamma), \text{div}_\Gamma(\mathbf{v}) \in H^s(\Gamma)\},$$

muni de la norme

$$\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}_{\text{div}\Gamma}^s(\Gamma)} := \|\mathbf{v}\|_{(H^s(\Gamma))^3} + \|\text{div}_\Gamma(\mathbf{v})\|_{H^s(\Gamma)}$$

et

$$\mathbf{H}_{\text{rot}\Gamma}^s(\Gamma) := \{\mathbf{v} \in \mathbf{H}_t^s(\Gamma), \text{rot}_\Gamma(\mathbf{v}) \in H^s(\Gamma)\},$$

muni de la norme

$$\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}_{\text{rot}\Gamma}^s(\Gamma)} := \|\mathbf{v}\|_{(H^s(\Gamma))^3} + \|\text{rot}_\Gamma(\mathbf{v})\|_{H^s(\Gamma)}$$

pour  $s \in \mathbb{R}$  tel que  $|s| \leq 1$ . Enfin, nous noterons  $\mathbf{H}_{\text{rot}\Gamma}(\Gamma) := \mathbf{H}_{\text{rot}\Gamma}^0(\Gamma)$  et  $\mathbf{H}_{\text{div}\Gamma}(\Gamma) := \mathbf{H}_{\text{div}\Gamma}^0(\Gamma)$ . Nous renvoyons le lecteur à [74, chapitre 3] pour la définition des espaces  $H^s(\Gamma)$ . La définition des espaces de trace pour  $|s| = 1/2$  et des opérateurs différentiels surfaciques peut être étendue à des bords Lipschitziens (voir [16, 17, 18]), nous préférons rester dans le cadre d'une frontière régulière. Les traces tangentielles sont définies par

$$\gamma_t(\mathbf{v}) := \boldsymbol{\nu} \times \mathbf{v}|_\Gamma, \quad \gamma_T(\mathbf{v}) := (\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{v}|_\Gamma) \times \boldsymbol{\nu}$$

pour  $\mathbf{v} \in (C^\infty(\overline{\mathcal{O}}))^3$  un champ de vecteur et nous avons le théorème suivant.

**Théorème 2.2.1** *L'application trace  $\gamma_t : \mathbf{H}_{\text{rot}}(\mathcal{O}) \rightarrow \mathbf{H}_{\text{div}\Gamma}^{-1/2}(\Gamma)$  est continue et surjective et  $\gamma_T : \mathbf{H}_{\text{rot}}(\mathcal{O}) \rightarrow \mathbf{H}_{\text{rot}\Gamma}^{-1/2}(\Gamma)$  est elle aussi continue et surjective. De plus nous avons la formule de Green suivante*

$$\int_{\Omega} (\text{rot}(\mathbf{u}) \cdot \bar{\mathbf{v}} - \mathbf{u} \cdot \text{rot}(\bar{\mathbf{v}})) dx = \langle \gamma_t(\mathbf{u}), \gamma_T(\mathbf{v}) \rangle_{\mathbf{H}_{\text{div}\Gamma}^{-1/2}(\Gamma), \mathbf{H}_{\text{rot}\Gamma}^{1/2}(\Gamma)} \quad (2.6)$$

pour tout  $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_{\text{rot}}(\mathcal{O})$  et  $\mathbf{v} \in \mathbf{H}_{\text{rot}}(\mathcal{O})$ .

Les espaces  $\mathbf{H}_{\text{div}\Gamma}^{-1/2}(\Gamma)$  et  $\mathbf{H}_{\text{rot}\Gamma}^{-1/2}(\Gamma)$  sont donc en dualité et le produit de dualité est défini à l'aide de (2.6).

## 2.2.2 Formulation du problème direct

Soit  $\Omega$  un ouvert borné et simplement connexe de  $\mathbb{R}^3$  de normale extérieure  $\boldsymbol{\nu}$  et de frontière  $\Gamma$  de classe  $C^2$ . Notons  $\Omega_{\text{ext}} := \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$  le domaine extérieur à l'inhomogénéité. Soit  $\mathbf{V}(\Gamma) \subset \mathbf{L}_t^2(\Gamma)$  muni du produit scalaire  $(\cdot, \cdot)_{\mathbf{V}(\Gamma)}$  un espace de Hilbert tel que

$$\{\mathbf{u} \in (C^\infty(\Gamma))^3 \text{ tels que } \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\nu} = 0\} \subset \mathbf{V}(\Gamma) \subset \mathbf{L}_t^2(\Gamma).$$

Supposons de plus que  $\{\mathbf{u} \in (C^\infty(\Gamma))^3 \text{ tels que } \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\nu} = 0\}$  s'injecte de manière dense dans  $\mathbf{V}(\Gamma)$ . Pour plus de simplicité, nous supposons aussi que  $\mathbf{V}(\Gamma) \subset \mathbf{H}_{\text{rot}\Gamma}^{-1/2}(\Gamma)$ .

**Définition 2.2.2** *Un opérateur d'impédance électromagnétique  $\mathcal{Z}$  est un opérateur linéaire et continu de  $\mathbf{V}(\Gamma)$  dans  $\mathbf{V}(\Gamma)^*$ .*

Le problème de diffraction que l'on considère consiste à trouver  $\mathbf{E}^s$  dans  $\mathbf{H}_{\text{rot}}^{\text{ext}}(\Omega_{\text{ext}}) := \{\mathbf{v} \in (\mathcal{D}'(\Omega_{\text{ext}}))^3 \mid \mathbf{v}\varphi \in \mathbf{H}_{\text{rot}}(\Omega_{\text{ext}}) \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)\}$  et  $\mathbf{H}^s$  dans  $V_{\mathbf{H}} := \{\mathbf{v} \in \mathbf{H}_{\text{rot}}^{\text{ext}}(\Omega_{\text{ext}}) \text{ tels que } \mathbf{v}_T \in \mathbf{V}(\Gamma)\}$  tels que

$$\begin{cases} \mathbf{rot}\mathbf{H}^s + ik\mathbf{E}^s = 0 \text{ dans } \Omega_{\text{ext}}, \\ \mathbf{rot}\mathbf{E}^s - ik\mathbf{H}^s = 0 \text{ dans } \Omega_{\text{ext}}, \\ \boldsymbol{\nu} \times \mathbf{E}^s + \mathcal{Z}\mathbf{H}^s = \mathbf{f} \text{ sur } \Gamma, \\ \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\partial B_R} |\mathbf{H}^s \times \hat{x} - (\hat{x} \times \mathbf{E}^s) \times \hat{x}|^2 ds = 0 \end{cases} \quad (2.7)$$

pour

$$\mathbf{f} = -(\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{E}^i + \mathcal{Z}\mathbf{H}^i).$$

Comme précédemment  $\mathbf{H}^i$  et  $\mathbf{E}^i$  désignent les champs incidents et ils satisfont les équations de Maxwell (2.1) dans tout l'espace. Le problème (2.7) a un sens dès que  $\mathbf{f} \in \mathbf{V}(\Gamma)^*$  et nous allons montrer qu'il admet une unique solution sous certaines hypothèses supplémentaires sur l'opérateur  $\mathcal{Z}$ .

### Une première formulation volumique

Soit  $B_R$  une boule de rayon  $R$  telle que  $\Omega \subset B_R$ , introduisons l'opérateur de Calderón Magnétique-à-Électrique  $\mathbf{S}_R : \mathbf{H}_{\text{div}\partial B_R}^{-1/2}(\partial B_R) \rightarrow \mathbf{H}_{\text{div}\partial B_R}^{-1/2}(\partial B_R)$  qui à  $\mathbf{v}$  associe  $\hat{x} \times \mathbf{E}$  où  $(\mathbf{E}, \mathbf{H}) \in \mathbf{H}_{\text{rot}}^{\text{ext}}(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{B_R}) \times \mathbf{H}_{\text{rot}}^{\text{ext}}(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{B_R})$  est l'unique solution de

$$\begin{cases} \mathbf{rot}\mathbf{H} + ik\mathbf{E} = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^3 \setminus \overline{B_R}, \\ \mathbf{rot}\mathbf{E} - ik\mathbf{H} = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^3 \setminus \overline{B_R}, \\ \hat{x} \times \mathbf{H} = \mathbf{v} \text{ sur } \partial B_R, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\partial B_r} |\mathbf{H}^s \times \hat{x} - (\hat{x} \times \mathbf{E}^s) \times \hat{x}|^2 ds = 0. \end{cases}$$

Notons  $\Omega_R := B_R \setminus \overline{\Omega}$  et  $V_{\mathbf{H},R} := \{\mathbf{v} \in \mathbf{H}_{\text{rot}}(\Omega_R) \text{ tels que } \mathbf{v}_T \in \mathbf{V}(\Gamma)\}$  muni de la norme

$$\|\cdot\|_{V_{\mathbf{H},R}} := \|\cdot\|_{\mathbf{H}_{\text{rot}}(\Omega_R)} + \|\cdot\|_{\mathbf{V}(\Gamma)}.$$

Alors pour  $\mathbf{f} \in \mathbf{V}(\Gamma)^*$ , le problème (2.7) s'écrit de manière équivalente : trouver  $(\mathbf{E}^s, \mathbf{H}^s) \in \mathbf{H}_{\text{rot}}(\Omega_R) \times V_{\mathbf{H},R}$  tels que

$$\begin{cases} \mathbf{rot}\mathbf{H}^s + ik\mathbf{E}^s = 0 \text{ dans } \Omega_R, \\ \mathbf{rot}\mathbf{E}^s - ik\mathbf{H}^s = 0 \text{ dans } \Omega_R, \\ \boldsymbol{\nu} \times \mathbf{E}^s + \mathcal{Z}\mathbf{H}_T^s = \mathbf{f} \text{ sur } \Gamma, \\ \boldsymbol{\nu} \times \mathbf{E}^s - \mathbf{S}_R(\hat{x} \times \mathbf{H}^s) = 0 \text{ sur } \partial B_R. \end{cases} \quad (2.8)$$

Chercher  $\mathbf{H}^s \in V_{\mathbf{H},R}$  solution de (2.8) est équivalent à chercher  $\mathbf{H}^s \in V_{\mathbf{H},R}$  solution de

$$\int_{\Omega_R} \mathbf{rot}\mathbf{H}^s \cdot \mathbf{rot} \bar{\mathbf{v}} - k^2 \mathbf{H}^s \cdot \bar{\mathbf{v}} dx + ik \langle \mathcal{Z}\mathbf{H}^s, \mathbf{v} \rangle - ik \int_{\partial B_R} \mathbf{S}_R(\hat{x} \times \mathbf{H}^s) \cdot \bar{\mathbf{v}} ds = -ik \int_{\Gamma} \mathbf{f} \cdot \bar{\mathbf{v}} ds$$

pour tout  $\mathbf{v} \in V_{\mathbf{H},R}$ . Comme dans le cas scalaire, la formulation volumique présente l'inconvénient que l'on doit supposer que la partie imaginaire de  $\mathcal{Z}$  est négative pour montrer le caractère Fredholm du problème. Nous préférons donc nous tourner vers une formulation surfacique du problème de diffraction.

### Formulation surfacique

Une manière de montrer que ce problème est bien posé consiste à introduire l'opérateur de Calderón Magnétique-à-Électrique extérieur au domaine  $\Omega$  comme nous l'avons déjà fait pour le problème scalaire. Définissons  $\mathbf{S}_\Gamma : \mathbf{H}_{\text{rot}\Gamma}^{-1/2}(\Gamma) \rightarrow \mathbf{H}_{\text{div}\Gamma}^{-1/2}(\Gamma)$  qui à  $\mathbf{v}$  associe  $\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{E}$  où  $(\mathbf{E}, \mathbf{H}) \in \mathbf{H}_{\text{rot}}^{\text{ext}}(\Omega_{\text{ext}}) \times \mathbf{H}_{\text{rot}}^{\text{ext}}(\Omega_{\text{ext}})$  est l'unique solution de

$$\begin{cases} \text{rot}\mathbf{H} + ik\mathbf{E} = 0 \text{ dans } \Omega_{\text{ext}}, \\ \text{rot}\mathbf{E} - ik\mathbf{H} = 0 \text{ dans } \Omega_{\text{ext}}, \\ \mathbf{H}_T = \mathbf{v} \text{ sur } \Gamma, \\ \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\partial B_R} |\mathbf{H}^s \times \hat{x} - (\hat{x} \times \mathbf{E}^s) \times \hat{x}|^2 ds = 0. \end{cases} \quad (2.9)$$

Cet opérateur est linéaire et continu et il existe une constante  $C > 0$  telle que pour tout  $\mathbf{v} \in \mathbf{H}_{\text{rot}\Gamma}^{-1/2}(\Gamma)$  on a

$$\|\mathbf{S}_\Gamma(\mathbf{v})\|_{\mathbf{H}_{\text{div}\Gamma}^{-1/2}(\Gamma)} \leq C \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}_{\text{rot}\Gamma}^{-1/2}(\Gamma)}.$$

Définissons le problème surfacique suivant : trouver  $\mathbf{u} \in \mathbf{V}(\Gamma)$  tel que

$$\mathbf{S}_\Gamma(\mathbf{u}) + \mathcal{Z}\mathbf{u} = f \quad (2.10)$$

pour  $f \in \mathbf{V}(\Gamma)^*$ . Cette équation a bien un sens dans  $\mathbf{V}(\Gamma)^*$  car  $\mathbf{S}_\Gamma(\mathbf{u})$  est dans  $\mathbf{H}_{\text{div}\Gamma}^{-1/2}(\Gamma)$  qui est le dual de  $\mathbf{H}_{\text{rot}\Gamma}^{-1/2}(\Gamma)$ . Ainsi  $\mathbf{S}_\Gamma(\mathbf{u})$  définit une application linéaire et continue sur  $\mathbf{H}_{\text{rot}\Gamma}^{-1/2}(\Gamma)$  et donc sur  $\mathbf{V}(\Gamma)$  car  $\mathbf{V}(\Gamma) \subset \mathbf{H}_{\text{rot}\Gamma}^{-1/2}(\Gamma)$ , par conséquent  $\mathbf{S}_\Gamma(\mathbf{u}) \in \mathbf{V}(\Gamma)^*$ . De plus nous avons équivalence entre les formulations (2.10) et (2.7) au sens suivant.

**Lemme 2.2.3** *Soit  $f$  un élément de  $\mathbf{V}(\Gamma)^*$ , si  $\mathbf{u} \in \mathbf{V}(\Gamma)$  est solution de (2.10) alors  $(\mathbf{E}^s, \mathbf{H}^s) \in \mathbf{H}_{\text{rot}}^{\text{ext}}(\Omega_{\text{ext}}) \times V_{\mathbf{H}}$  l'unique solution de (2.9) pour  $\mathbf{v} = \mathbf{u}$  est solution de (2.7). Réciproquement, si  $(\mathbf{E}^s, \mathbf{H}^s) \in \mathbf{H}_{\text{rot}}^{\text{ext}}(\Omega_{\text{ext}}) \times V_{\mathbf{H}}$  est solution de (2.7) alors  $\mathbf{H}_T^s \in \mathbf{V}(\Gamma)$  est solution de (2.10).*

**Preuve.** Soit  $f \in \mathbf{V}(\Gamma)^*$  et soit  $\mathbf{u} \in \mathbf{V}(\Gamma)$  une solution de (2.10). Définissons  $(\mathbf{E}^s, \mathbf{H}^s) \in \mathbf{H}_{\text{rot}}^{\text{ext}}(\Omega_{\text{ext}}) \times V_{\mathbf{H}}$  l'unique solution de (2.9) pour  $\mathbf{v} = \mathbf{u}$  sur  $\Gamma$ . Par définition,  $\mathbf{E}^s \in \mathbf{H}_{\text{rot}}^{\text{ext}}(\Omega_{\text{ext}})$  et  $\mathbf{H}^s \in \mathbf{H}_{\text{rot}}^{\text{ext}}(\Omega_{\text{ext}})$ . De plus  $\mathbf{H}_T^s = \mathbf{u}$  sur  $\Gamma$  et donc  $\mathbf{H}^s \in V_{\mathbf{H}}$ . Finalement, comme  $\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{E}^s = \mathbf{S}_\Gamma(\mathbf{u})$  et  $\mathbf{u}$  est solution de (2.10) on en déduit que

$$\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{E}^s + \mathcal{Z}\mathbf{H}_T^s = f \text{ sur } \Gamma$$

et ainsi  $(\mathbf{E}^s, \mathbf{H}^s)$  est solution de (2.7). La réciproque est immédiate car  $\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{E}^s = \mathbf{S}_\Gamma(\mathbf{H}_T^s)$  dès que  $(\mathbf{E}^s, \mathbf{H}^s)$  est une solution de (2.7). ■

Dans la suite de cette section nous commençons par montrer un résultat général d'existence et d'unicité de la solution de (2.7) très proche de celui démontré dans le cas scalaire.

### 2.2.3 Existence et unicité de la solution

Comme dans le cas scalaire, pour avoir l'unicité l'opérateur d'impédance doit satisfaire une certaine condition d'absorption.

**Hypothèse 2.2.4** *L'opérateur  $\mathcal{Z}$  est à partie réelle positive, c'est-à-dire que*

$$\text{Re}\langle \mathcal{Z}\mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \geq 0$$

pour tout  $\mathbf{v} \in \mathbf{V}(\Gamma)$ .

On montre alors que

**Lemme 2.2.5** *Si l'hypothèse 2.2.4 est satisfaite alors l'équation (2.10) admet au plus une solution dans  $\mathbf{V}(\Gamma)$ .*

**Preuve.** Supposons que  $\mathbf{u}$  satisfait (2.10) pour  $f = 0$ . Appelons  $(\mathbf{E}, \mathbf{H})$  l'unique solution de (2.9) pour  $\mathbf{v} = \mathbf{u}$  sur  $\Gamma$ . Soit  $B_R$  une boule de rayon  $R$  telle que  $\Omega \subset B_R$ , en utilisant la formule de Green pour l'opérateur rotationnel dans  $\Omega_{\text{ext}} \cap B_R$  on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \boldsymbol{\nu} \times \mathbf{E} \cdot \overline{\mathbf{H}} \, ds - \int_{\partial B_R} \hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{E} \cdot \overline{\mathbf{H}} \, ds &= \int_{\Omega_{\text{ext}} \cap B_R} \mathbf{rot} \mathbf{E} \cdot \overline{\mathbf{H}} - \mathbf{E} \cdot \mathbf{rot} \overline{\mathbf{H}} \, dx \\ &= \int_{\Omega_{\text{ext}} \cap B_R} ik|\mathbf{H}|^2 + ik|\mathbf{E}|^2 \, dx. \end{aligned}$$

Ainsi on a

$$\mathcal{R}e \left( \int_{\Gamma} \boldsymbol{\nu} \times \mathbf{E} \cdot \overline{\mathbf{H}} \, ds \right) = \mathcal{R}e \left( \int_{\partial B_R} \hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{E} \cdot \overline{\mathbf{H}} \, ds \right)$$

mais sur  $\Gamma$ ,  $\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{E} = -\mathcal{Z}\mathbf{H}_T$  et donc

$$-\mathcal{R}e \langle \mathcal{Z}\mathbf{H}_T, \mathbf{H}_T \rangle = \mathcal{R}e \left( \int_{\partial B_R} \hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{E} \cdot \overline{\mathbf{H}} \, ds \right).$$

Dès que  $\mathcal{Z}$  est à partie réelle positive on a

$$\mathcal{R}e \left( \int_{\partial B_R} \hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{E} \cdot \overline{\mathbf{H}} \, ds \right) \leq 0$$

ce qui implique d'après le lemme de Rellich ([75, lemme 9.28]) que  $\mathbf{E} = \mathbf{H} = 0$  dans  $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{B_R}$ . Le principe de prolongement unique s'applique car  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$  sont à divergence nulle dans  $\Omega_{\text{ext}}$  et donc  $\mathbf{E} = \mathbf{H} = 0$  dans  $\Omega_{\text{ext}}$  ce qui implique que  $\mathbf{u} = 0$  sur  $\Gamma$ . ■

Une conséquence directe de ce résultat d'unicité est le théorème suivant.

**Théorème 2.2.6** *Supposons que  $\mathcal{Z}$  satisfait l'hypothèse 2.2.4. Si  $\mathbf{V}(\Gamma)$  s'injecte de manière compacte dans  $\mathbf{H}_{\text{rot}\Gamma}^{-1/2}(\Gamma)$  et  $\mathcal{Z} = T + K$  où  $T : \mathbf{V}(\Gamma) \rightarrow \mathbf{V}(\Gamma)^*$  est un isomorphisme et  $K : \mathbf{V}(\Gamma) \rightarrow \mathbf{V}(\Gamma)^*$  est un opérateur borné et compact, alors pour tout  $f \in \mathbf{V}(\Gamma)^*$ , (2.10) admet une unique solution  $\mathbf{u} \in \mathbf{V}(\Gamma)$  et il existe  $C > 0$  indépendante de  $f$  et  $\mathbf{u}$  telle que*

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{V}(\Gamma)} \leq C \|f\|_{\mathbf{V}(\Gamma)^*}.$$

**Preuve.** Il suffit de montrer que  $\mathcal{Z} + \mathbf{S}_{\Gamma} : \mathbf{V}(\Gamma) \rightarrow \mathbf{V}(\Gamma)^*$  est un opérateur de type Fredholm et d'indice 0 car l'unicité est déjà assurée par le lemme 2.2.5. L'espace  $\mathbf{V}(\Gamma)$  s'injecte de manière compacte dans  $\mathbf{H}_{\text{rot}\Gamma}^{-1/2}(\Gamma)$  donc  $\mathbf{S}_{\Gamma} : \mathbf{V}(\Gamma) \rightarrow \mathbf{V}(\Gamma)^*$  est un opérateur compact et  $\mathcal{Z}$  se décompose sous la forme « isomorphisme + compact ». L'opérateur  $\mathcal{Z} + \mathbf{S}_{\Gamma}$  est de type Fredholm et d'indice 0 et le résultat est une conséquence du lemme 2.2.5. ■

## 2.3 Applications à des opérateurs de dérivation surfacique du deuxième ordre

### 2.3.1 Le cas de « $\mathbf{rot}_{\Gamma} \eta \mathbf{rot}_{\Gamma} + \nabla_{\Gamma} \gamma \mathbf{div}_{\Gamma} + \lambda$ »

Commençons par un cas simple, pour  $(\lambda, \eta, \gamma) \in (L^{\infty}(\Gamma))^3$  on considère l'opérateur

$$\mathcal{Z} = \mathbf{rot}_{\Gamma} \eta \mathbf{rot}_{\Gamma} + \nabla_{\Gamma} \gamma \mathbf{div}_{\Gamma} + \lambda$$

avec  $\mathbf{V}(\Gamma) = \mathbf{H}_{\text{div}\Gamma}(\Gamma) \cap \mathbf{H}_{\text{rot}\Gamma}(\Gamma)$  muni de la norme

$$\|\cdot\|_{\mathbf{V}(\Gamma)} := \|\cdot\|_{\mathbf{H}_{\text{div}\Gamma}(\Gamma)} + \|\cdot\|_{\mathbf{H}_{\text{rot}\Gamma}(\Gamma)}.$$

Cet espace est en fait égal à  $(H_t^1(\Gamma))^3$  car

$$-\vec{\Delta}_\Gamma = \mathbf{rot}_\Gamma \mathbf{rot}_\Gamma - \nabla_\Gamma \mathbf{div}_\Gamma$$

où  $\vec{\Delta}_\Gamma$  désigne le Laplacien surfacique vectoriel. Ainsi  $\mathbf{V}(\Gamma)$  s'injecte de manière compacte dans  $\mathbf{H}_{\mathbf{rot}_\Gamma}^{-1/2}(\Gamma)$  mais aussi dans  $\mathbf{L}_t^2(\Gamma)$ . Nous faisons l'hypothèse de signe suivante.

**Hypothèse 2.3.1**  $(\lambda, \eta, \gamma) \in (L^\infty(\Gamma))^3$  sont tels que

$$\mathcal{R}e(\lambda) \geq 0, \quad \mathcal{R}e(\eta) \geq 0, \quad \mathcal{R}e(\gamma) \leq 0 \quad p.p. \text{ sur } \Gamma,$$

il existe  $c > 0$  telle que

$$|\gamma| \geq c, \quad |\eta| \geq c \quad p.p. \text{ sur } \Gamma$$

et les parties imaginaires de  $\gamma$  et  $\eta$  ne changent pas de signe sur  $\Gamma$  et sont de signe opposé.

Le corollaire suivant est alors une simple application du théorème 2.2.6.

**Corollaire 2.3.2** Si  $(\lambda, \eta, \gamma)$  satisfont les hypothèses 2.3.1 alors pour tout  $f \in \mathbf{V}(\Gamma)^*$  le problème (2.10) avec  $\mathcal{Z} = \mathbf{rot}_\Gamma \eta \mathbf{rot}_\Gamma + \nabla_\Gamma \gamma \mathbf{div}_\Gamma + \lambda$  admet une unique solution  $\mathbf{u} \in \mathbf{V}(\Gamma) = \mathbf{H}_{\mathbf{div}_\Gamma}(\Gamma) \cap \mathbf{H}_{\mathbf{rot}_\Gamma}(\Gamma)$  et il existe  $C > 0$  tel que

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{V}(\Gamma)} \leq C \|f\|_{\mathbf{V}(\Gamma)^*}.$$

**Preuve.** Pour tout  $\mathbf{v}, \mathbf{w}$  dans  $\mathbf{V}(\Gamma)$  définissons les opérateurs  $T$  et  $K$  de  $\mathbf{V}(\Gamma)$  dans  $\mathbf{V}(\Gamma)^*$  par

$$\langle T\mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle := \int_\Gamma \eta \mathbf{rot}_\Gamma \mathbf{v} \mathbf{rot}_\Gamma \bar{\mathbf{w}} ds - \int_\Gamma \gamma \mathbf{div}_\Gamma \mathbf{v} \mathbf{div}_\Gamma \bar{\mathbf{w}} ds + \int_\Gamma \eta \mathbf{v} \cdot \bar{\mathbf{w}} ds,$$

$$\langle K\mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle := \int_\Gamma (\lambda - \eta) \mathbf{v} \cdot \bar{\mathbf{w}} ds.$$

On a alors  $\mathcal{Z} = T + K$ . Si  $(\lambda, \eta, \gamma)$  satisfont les hypothèses 2.3.1 alors  $T$  est clairement coercif sur  $\mathbf{V}(\Gamma)$ . De plus, comme  $\mathbf{V}(\Gamma)$  s'injecte de manière compacte dans  $\mathbf{L}_t^2(\Gamma)$ ,  $K$  est un opérateur compact. Finalement,  $\mathcal{Z}$  et  $\mathbf{V}(\Gamma)$  satisfont les hypothèses du théorème 2.2.6 et donc (2.10) est bien posé pour  $\mathcal{Z} = \mathbf{rot}_\Gamma \eta \mathbf{rot}_\Gamma + \nabla_\Gamma \gamma \mathbf{div}_\Gamma + \lambda$ . ■

**Remarque 2.3.3** L'intérêt d'utiliser la formulation surfacique est que l'on a été en mesure de montrer que le problème direct est bien posé dans le cas où la partie imaginaire de  $\eta$  est positive. Ceci aurait été impossible en gardant la formulation volumique (2.8).

### 2.3.2 Le cas de « $\mathbf{rot}_\Gamma \eta \mathbf{rot}_\Gamma + \lambda$ »

Dans cette section nous traitons le cas d'un opérateur d'impédance de la forme

$$\mathcal{Z} = \mathbf{rot}_\Gamma \eta \mathbf{rot}_\Gamma + \lambda$$

où  $\eta$  et  $\lambda$  sont des éléments de  $L^\infty(\Gamma)$ . Dans ce cas on peut prendre  $\mathbf{V}(\Gamma) = \mathbf{H}_{\mathbf{rot}_\Gamma}(\Gamma)$  comme espace variationnel pour la définition de  $\mathcal{Z}$ . Nous faisons l'hypothèse suivante sur les fonctions d'impédances.

**Hypothèse 2.3.4**  $(\lambda, \eta) \in (L^\infty(\Gamma))^2$  sont tels que

$$\mathcal{R}e(\lambda) \geq 0, \quad \mathcal{R}e(\eta) \geq 0 \quad p.p. \text{ sur } \Gamma,$$

il existe  $c > 0$  telle que

$$|\lambda| \geq c, \quad |\eta| \geq c \quad p.p. \text{ sur } \Gamma$$

et les parties imaginaires de  $\lambda$  et  $\eta$  ne changent pas de signe sur  $\Gamma$ .

Remarquons que dans l'hypothèse 2.3.4 le seul cas de figure à traiter avec attention est le cas où les parties imaginaires de  $\lambda$  et  $\eta$  sont de signe opposé. En effet, si  $\lambda$  et  $\eta$  ont une partie imaginaire de même signe, l'application du théorème 2.2.6 donne directement le caractère bien posé du problème de diffraction. Dans le cas contraire, il faut montrer que la partie en  $\lambda$  de l'opérateur d'impédance est une perturbation compacte de la partie en  $\eta$ . Ceci n'est en fait pas possible car comme dans le cas des espaces volumiques,  $\mathbf{H}_{\text{rot}\Gamma}(\Gamma)$  ne s'injecte pas de manière compacte dans  $\mathbf{L}_t^2(\Gamma)$ , car par exemple, pour tout  $p \in H^1(\Gamma)$

$$\text{rot}_\Gamma \nabla_\Gamma p = 0.$$

Pour montrer que le problème de diffraction est bien posé nous allons directement montrer que  $\mathcal{Z} + \mathbf{S}_\Gamma : \mathbf{H}_{\text{rot}\Gamma}(\Gamma) \rightarrow \mathbf{H}_{\text{rot}\Gamma}(\Gamma)^*$  est un isomorphisme à l'aide d'une décomposition de Helmholtz. Soit  $f \in \mathbf{H}_{\text{rot}\Gamma}(\Gamma)^*$ , introduisons la forme sesquilinéaire  $a_\Gamma$  de  $\mathbf{H}_{\text{rot}\Gamma}(\Gamma) \times \mathbf{H}_{\text{rot}\Gamma}(\Gamma)$  et la forme antilinéaire  $l_\Gamma$  de  $\mathbf{H}_{\text{rot}\Gamma}(\Gamma)$  définies par

$$a_\Gamma(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \int_\Gamma (\eta \text{rot}_\Gamma \mathbf{u} \cdot \text{rot}_\Gamma \bar{\mathbf{v}} + \lambda \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{v}}) ds + \langle \mathbf{S}_\Gamma(\mathbf{u}), \mathbf{v} \rangle \quad \forall (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in (\mathbf{H}_{\text{rot}\Gamma}(\Gamma))^2,$$

$$l_\Gamma(\mathbf{v}) := \langle f, \mathbf{v} \rangle \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_{\text{rot}\Gamma}(\Gamma).$$

Alors, un élément  $\mathbf{u}_\Gamma \in \mathbf{V}(\Gamma)$  est solution de (2.10) si et seulement si

$$a_\Gamma(\mathbf{u}_\Gamma, \mathbf{v}) = l_\Gamma(\mathbf{v})$$

pour tout  $\mathbf{v} \in \mathbf{V}(\Gamma)$ .

Posons

$$\mathring{H}^1(\Gamma) := \left\{ p \in H^1(\Gamma) \mid \int_\Gamma p ds = 0 \right\}$$

l'espace des fonctions de  $H^1(\Gamma)$  à moyenne nulle sur  $\Gamma$  muni de la norme de  $H^1(\Gamma)$  et

$$X = \left\{ \mathbf{v} \in \mathbf{H}_{\text{rot}\Gamma}(\Gamma) \mid \int_\Gamma \lambda \mathbf{v} \cdot \nabla_\Gamma \bar{\xi} ds + \langle \mathbf{S}_\Gamma(\mathbf{v}), \nabla_\Gamma \xi \rangle_\Gamma = 0 \quad \forall \xi \in \mathring{H}^1(\Gamma) \right\}$$

muni de la norme de  $\mathbf{H}_{\text{rot}\Gamma}(\Gamma)$ . Ces deux espaces sont des espaces de Hilbert, montrons que  $\mathbf{H}_{\text{rot}\Gamma}(\Gamma)$  se décompose comme la somme directe de  $\nabla_\Gamma \mathring{H}^1(\Gamma)$  et  $X$  et que l'injection de  $X$  dans  $\mathbf{L}_t^2(\Gamma)$  est compacte. Pour ceci, définissons l'opérateur  $A_S : \mathring{H}^1(\Gamma) \rightarrow \mathring{H}^1(\Gamma)$  par

$$(A_S p, \xi)_{\mathring{H}^1(\Gamma)} := a_\Gamma(\nabla_\Gamma p, \nabla_\Gamma \xi) = \int_\Gamma \lambda \nabla_\Gamma p \cdot \nabla_\Gamma \bar{\xi} ds + \langle \mathbf{S}_\Gamma(\nabla_\Gamma p), \nabla_\Gamma \xi \rangle \quad \forall (p, \xi) \in (\mathring{H}^1(\Gamma))^2$$

**Lemme 2.3.5** *Si  $\lambda$  satisfait l'hypothèse 2.3.4 alors  $A_S : \mathring{H}^1(\Gamma) \rightarrow \mathring{H}^1(\Gamma)$  est un isomorphisme.*

**Preuve.** Définissons  $C_S$  et  $K_S$  deux opérateurs de  $\mathring{H}^1(\Gamma)$  dans  $\mathring{H}^1(\Gamma)$  par

$$(C_S p, \xi)_{\mathring{H}^1(\Gamma)} = \int_\Gamma \lambda (\nabla_\Gamma p \cdot \nabla_\Gamma \bar{\xi} + p \bar{\xi}) ds \quad \forall (p, \xi) \in (\mathring{H}^1(\Gamma))^2,$$

$$(K_S p, \xi)_{\mathring{H}^1(\Gamma)} = - \int_\Gamma \lambda p \bar{\xi} ds + \langle \mathbf{S}_\Gamma(\nabla_\Gamma p), \nabla_\Gamma \xi \rangle \quad \forall (p, \xi) \in (\mathring{H}^1(\Gamma))^2,$$

nous avons  $A_S = C_S + K_S$ .

Montrons que  $C_S$  est coercif. D'après (1.17) et comme la partie imaginaire de  $\lambda$  ne change pas de signe d'après l'hypothèse 2.3.4, on a pour tout  $p \in \mathring{H}^1(\Gamma)$

$$|(C_S p, p)_{\mathring{H}^1(\Gamma)}| \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \int_\Gamma [\text{Re}(\lambda) + |\text{Im}(\lambda)|] (|\nabla_\Gamma p|^2 + |p|^2) ds \geq \frac{c}{\sqrt{2}} \|p\|_{\mathring{H}^1(\Gamma)}$$

où  $c$  est la borne inférieure du module de  $\lambda$  et  $c > 0$  d'après l'hypothèse 2.3.4.

Montrons que  $K_S$  est un opérateur compact. Soit  $(p_n)_n$  une suite bornée de  $\dot{H}^1(\Gamma)$ , montrons que l'on peut extraire de  $(K_S p_n)_n$  une sous-suite convergente dans  $\dot{H}^1(\Gamma)$ . Par définition de  $K_S$  et en utilisant la continuité de  $\mathbf{S}_\Gamma$ , il existe une constante  $C > 0$  telle que pour tout  $n \in \mathbb{N}$

$$\|K_S p_n\|_{\dot{H}^1(\Gamma)}^2 \leq \|\lambda\|_{L^\infty(\Gamma)} \|p_n\|_{L^2(\Gamma)} \|K_S p_n\|_{L^2(\Gamma)} + C \|\nabla_\Gamma p_n\|_{\mathbf{H}_{\text{rot}_\Gamma}^{-1/2}(\Gamma)} \|\nabla_\Gamma(K_S p_n)\|_{\mathbf{H}_{\text{rot}_\Gamma}^{-1/2}(\Gamma)}.$$

Or  $\text{rot}_\Gamma(\nabla_\Gamma p_n) = 0$  donc  $\|\nabla_\Gamma p_n\|_{\mathbf{H}_{\text{rot}_\Gamma}^{-1/2}(\Gamma)} = \|\nabla_\Gamma p_n\|_{\mathbf{H}_t^{-1/2}(\Gamma)}$ . De même, il existe  $C > 0$  telle que

$$\|\nabla_\Gamma(K_S p_n)\|_{\mathbf{H}_{\text{rot}_\Gamma}^{-1/2}(\Gamma)} = \|\nabla_\Gamma(K_S p_n)\|_{\mathbf{H}_t^{-1/2}(\Gamma)} \leq C \|K_S p_n\|_{H^1(\Gamma)}.$$

Finalement on obtient l'inégalité suivante :

$$\|K_S p_n\|_{H^1(\Gamma)} \leq C \left( \|p_n\|_{L^2(\Gamma)} + \|\nabla_\Gamma p_n\|_{\mathbf{H}_t^{-1/2}(\Gamma)} \right) \leq C \|p_n\|_{H^{1/2}(\Gamma)}. \quad (2.11)$$

La suite  $(p_n)_n$  est bornée dans  $H^1(\Gamma)$  et comme  $H^{1/2}(\Gamma)$  s'injecte de manière compacte dans  $H^1(\Gamma)$  on en déduit que l'on peut extraire de  $(p_n)_n$  une sous-suite qui est de Cauchy dans  $H^{1/2}(\Gamma)$ . L'inégalité (2.11) implique que l'on peut aussi extraire une sous suite de  $(K_S p_n)_n$  qui est de Cauchy dans  $H^1(\Gamma)$ . L'espace  $\dot{H}^1(\Gamma)$  est un sous-espace fermé de  $H^1(\Gamma)$  donc cette sous-suite converge dans  $\dot{H}^1(\Gamma)$ . Ainsi l'opérateur  $K_S$  est compact et  $A_S$  est un opérateur de type Fredholm et d'indice 0, montrons qu'il est aussi injectif.

Soit  $p \in \dot{H}^1(\Gamma)$  tel que  $A_S p = 0$ . On a alors

$$\int_\Gamma \lambda |\nabla_\Gamma p|^2 ds + \langle \mathbf{S}_\Gamma(\nabla_\Gamma p), \nabla_\Gamma p \rangle = 0. \quad (2.12)$$

Soit  $(\mathbf{E}, \mathbf{H})$  l'unique solution de (2.9) pour  $\mathbf{v} = \nabla_\Gamma p$  sur  $\Gamma$ . Comme dans la preuve du lemme 2.2.5 on obtient

$$\mathcal{R}e \left( \int_\Gamma \boldsymbol{\nu} \times \mathbf{E} \cdot \overline{\mathbf{H}} ds \right) = \mathcal{R}e \left( \int_{\partial B_R} \hat{x} \times \mathbf{E} \cdot \overline{\mathbf{H}} ds \right)$$

pour toute boule  $B_R$  telle que  $\overline{\Omega} \subset B_R$ . Comme  $\mathcal{R}e(\lambda)$  satisfait l'hypothèse 2.3.4 on en déduit d'après le lemme de Rellich et le principe de prolongement unique que  $\mathbf{E} = \mathbf{H} = 0$  dans  $\Omega_{\text{ext}}$  et donc que  $\nabla_\Gamma p = 0$ . La fonction  $p$  étant de moyenne nulle, ceci signifie que  $p = 0$ . Ainsi  $A_S$  est un isomorphisme de  $\dot{H}^1(\Gamma)$ . ■

On en déduit le lemme suivant sur la décomposition de  $\mathbf{H}_{\text{rot}_\Gamma}(\Gamma)$  en la somme directe de  $\nabla_\Gamma \dot{H}^1(\Gamma)$  avec  $X$ .

**Lemme 2.3.6** *Si  $\lambda$  satisfait l'hypothèse 2.3.4 alors  $\mathbf{H}_{\text{rot}_\Gamma}(\Gamma)$  se décompose comme la somme directe de  $\nabla_\Gamma \dot{H}^1(\Gamma)$  et de  $X$*

$$\mathbf{H}_{\text{rot}_\Gamma}(\Gamma) = \nabla_\Gamma \dot{H}^1(\Gamma) \oplus X,$$

et il existe une constante  $C > 0$  telle que

$$\|\mathbf{w}\|_{\mathbf{H}_{\text{rot}_\Gamma}(\Gamma)} + \|\nabla_\Gamma p\|_{\mathbf{H}_{\text{rot}_\Gamma}(\Gamma)} \leq C \|\nabla_\Gamma p + \mathbf{w}\|_{\mathbf{H}_{\text{rot}_\Gamma}(\Gamma)}$$

pour tout  $\mathbf{w} \in X$  et  $p \in \dot{H}^1(\Gamma)$ .

**Preuve.** La preuve suit les grandes lignes de celle du lemme 10.3 de [75], nous allons utiliser l'isomorphisme  $A_S$  pour construire la décomposition. Soit  $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_{\text{rot}_\Gamma}(\Gamma)$ , définissons  $F$  l'unique élément de  $\dot{H}^1(\Gamma)$  satisfaisant

$$(F, \xi)_{H^1(\Gamma)} = \int_\Gamma \lambda \mathbf{u} \cdot \nabla_\Gamma \bar{\xi} ds + \langle \mathbf{S}_\Gamma(\mathbf{u}), \nabla_\Gamma \xi \rangle \quad \forall \xi \in \dot{H}^1(\Gamma).$$

Alors comme  $A_S$  est un isomorphisme de  $\mathring{H}^1(\Gamma)$  (lemme 2.3.5), il existe un unique  $p \in \mathring{H}^1(\Gamma)$  tel que  $A_S p = F$  et une constante  $C > 0$  telle que

$$\|p\|_{H^1(\Gamma)} \leq C \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}_{\text{rot}\Gamma}(\Gamma)}.$$

Posons maintenant  $\mathbf{w} = \mathbf{u} - \nabla_\Gamma p$ , d'après les définitions de  $A_S$  et de  $p$ , on obtient

$$\int_\Gamma \lambda \mathbf{w} \cdot \nabla_\Gamma \bar{\xi} ds + \langle \mathbf{S}_\Gamma(\mathbf{w}), \nabla_\Gamma \xi \rangle = (F - A_S p, \xi)_{H^1(\Gamma)} = 0 \quad \forall \xi \in \mathring{H}^1(\Gamma)$$

et donc  $\mathbf{w} \in X$  et nous avons l'inégalité de continuité

$$\|\mathbf{w}\|_{\mathbf{H}_{\text{rot}\Gamma}(\Gamma)} + \|\nabla_\Gamma p\|_{\mathbf{H}_{\text{rot}\Gamma}(\Gamma)} \leq C \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}_{\text{rot}\Gamma}(\Gamma)}$$

pour  $C > 0$ . Ainsi pour tout  $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_{\text{rot}\Gamma}(\Gamma)$  il existe  $p \in \mathring{H}^1(\Gamma)$  et  $\mathbf{w} \in X$  tels que  $\mathbf{u} = \nabla_\Gamma p + \mathbf{w}$ . Il ne reste plus qu'à montrer que la somme d'espaces vectoriels est directe. Soit  $\mathbf{u} = \nabla_\Gamma p \in X \cap \nabla_\Gamma \mathring{H}^1(\Gamma)$ ,  $A_S p = 0$  car  $\mathbf{u} \in X$  et donc  $p = \mathbf{u} = 0$  car  $A_S$  est injectif.  $\blacksquare$

Pour montrer l'injection compacte de  $X$  dans  $\mathbf{L}_t^2(\Gamma)$ , nous avons besoin d'une propriété de régularité bien connue pour les équations de Maxwell dans un domaine Lipschitz (voir [39]) ainsi que du résultat d'injection compacte énoncé au lemme 2.3.8.

**Proposition 2.3.7** *Soit  $\mathcal{O}$  un ouvert Lipschitzien borné de  $\mathbb{R}^3$ . Supposons que  $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_{\text{rot}}(\mathcal{O})$  satisfait aussi  $\text{div}(\mathbf{u}) \in L^2(\mathcal{O})$  et  $\mathbf{u}_T \in \mathbf{L}_t^2(\partial\mathcal{O})$  alors il existe  $C_1 > 0$  telle que*

$$\|\mathbf{u}\|_{(H^{1/2}(\mathcal{O}))^3} \leq C_1 [\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}_{\text{rot}}(\mathcal{O})} + \|\text{div}(\mathbf{u})\|_{(L^2(\mathcal{O}))^3} + \|\mathbf{u}_T\|_{\mathbf{L}_t^2(\partial\mathcal{O})}]$$

et de plus,

$$\|\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\nu}\|_{L^2(\partial\mathcal{O})} \leq C_1 [\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}_{\text{rot}}(\mathcal{O})} + \|\text{div}(\mathbf{u})\|_{(L^2(\mathcal{O}))^3} + \|\mathbf{u}_T\|_{\mathbf{L}_t^2(\partial\mathcal{O})}].$$

De manière similaire aux espaces volumiques, nous avons l'injection compacte suivante.

**Lemme 2.3.8** *Soit  $\sigma$  une fonction  $L^\infty(\Gamma)$  telle que  $|\sigma(x)| > c > 0$  et telle que ses parties réelle et imaginaire ne changent pas de signe sur  $\Gamma$ . Alors l'espace  $\mathbf{H}_{t,\sigma}^1(\Gamma) := \{\mathbf{u} \in \mathbf{H}_{\text{rot}\Gamma}(\Gamma) \mid \text{div}_\Gamma(\sigma\mathbf{u}) \in L^2(\Gamma)\}$  s'injecte de façon compacte dans  $\mathbf{L}_t^2(\Gamma)$ .*

**Preuve.** Soit  $(\mathbf{u}_n)_n$  une suite bornée de  $\mathbf{H}_{t,\sigma}^1(\Gamma)$ , il existe une constante  $C > 0$  telle que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on a

$$\|\mathbf{u}_n\|_{\mathbf{L}_t^2(\Gamma)} \leq C, \quad \|\text{div}_\Gamma(\sigma\mathbf{u}_n)\|_{L^2(\Gamma)} \leq C \quad \text{et} \quad \|\text{rot}_\Gamma(\mathbf{u}_n)\|_{L^2(\Gamma)} \leq C.$$

Définissons  $\varphi_n$  l'unique fonction de  $\mathring{H}^1(\Gamma)$  telle que

$$\text{div}_\Gamma(\sigma \nabla_\Gamma \varphi_n) = \text{div}_\Gamma(\sigma\mathbf{u}_n), \tag{2.13}$$

alors  $\sigma(\mathbf{u}_n - \nabla_\Gamma \varphi_n)$  est à divergence surfacique nulle et est un élément de  $\mathbf{L}_t^2(\Gamma)$ . Ainsi, d'après [18, corollaire 5.3] il existe  $v_n \in \mathring{H}^1(\Gamma)$  telle que  $\text{rot}_\Gamma v_n = \sigma(\mathbf{u}_n - \nabla_\Gamma \varphi_n)$  et alors  $\mathbf{u}_n = \nabla_\Gamma \varphi_n + \frac{1}{\sigma} \text{rot}_\Gamma v_n$ . Nous allons montrer que  $(\text{rot}_\Gamma v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(\nabla_\Gamma \varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  admettent une sous suite convergente dans  $\mathbf{L}_t^2(\Gamma)$ .

Tout d'abord, comme le problème (2.13) est bien posé dans  $\mathring{H}^1(\Gamma)$  d'après les hypothèses faites sur  $\sigma$ , il existe  $C > 0$  telle que  $\|\varphi_n\|_{H^1(\Gamma)} \leq C \|\text{div}_\Gamma(\sigma\mathbf{u}_n)\|_{L^2(\Gamma)}$ . La suite  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est en particulier bornée dans  $H^1(\Gamma)$  donc on peut en extraire une sous-suite toujours notée  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  qui converge dans  $L^2(\Gamma)$ . Nous allons montrer qu'elle est en fait de Cauchy dans  $H^1(\Gamma)$ . Posons  $\varphi_{nm} := \varphi_n - \varphi_m$  et  $f_{nm} := \text{div}_\Gamma(\sigma\mathbf{u}_n) - \text{div}_\Gamma(\sigma\mathbf{u}_m)$ ,

$$\|\nabla_\Gamma \varphi_{nm}\|_{\mathbf{L}_t^2(\Gamma)}^2 \leq C \left| \int_\Gamma \sigma \nabla_\Gamma \varphi_{nm} \cdot \nabla_\Gamma \overline{\varphi_{nm}} ds \right| = \left| \int_\Gamma f_{nm} \overline{\varphi_{nm}} ds \right|$$

donc comme  $f_{nm}$  est bornée dans  $L^2(\Gamma)$  et  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est de Cauchy dans  $L^2(\Gamma)$ , on en déduit que  $(\nabla_\Gamma \varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est de Cauchy dans  $L^2(\Gamma)$  et donc  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge dans  $H^1(\Gamma)$ .

Pour  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  l'argument est similaire. Comme la frontière  $\Gamma$  est de classe  $C^1$ , il existe  $C > 0$  telle que  $\|\mathbf{rot}_\Gamma v_n\|_{\mathbf{L}_t^2(\Gamma)} = \|\nabla_\Gamma v_n\|_{\mathbf{L}_t^2(\Gamma)} \geq C \|v_n\|_{H^1(\Gamma)}$ . Mais  $\mathbf{rot}_\Gamma v_n = \sigma(\mathbf{u}_n - \nabla_\Gamma \varphi_n)$  et c'est donc une suite bornée de  $\mathbf{L}_t^2(\Gamma)$ . Par injection compacte de  $H^1(\Gamma)$  dans  $L^2(\Gamma)$ , on peut extraire de  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une sous-suite toujours notée  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  qui converge fortement dans  $L^2(\Gamma)$  et comme précédemment, montrons que  $(\mathbf{rot}_\Gamma v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est de Cauchy dans  $\mathbf{L}_t^2(\Gamma)$ . Posons  $f_{nm} := \mathbf{rot}_\Gamma(\mathbf{u}_n) - \mathbf{rot}_\Gamma(\mathbf{u}_m)$ , ainsi

$$\|\mathbf{rot}_\Gamma v_{nm}\|_{(\mathbf{L}_t^2(\Gamma))^3}^2 \leq C \left| \int_\Gamma \sigma^{-1} \mathbf{rot}_\Gamma v_{nm} \cdot \mathbf{rot}_\Gamma \overline{v_{nm}} ds \right| = \left| \int_\Gamma f_{nm} \overline{v_{nm}} ds \right|$$

et donc  $\mathbf{rot}_\Gamma v_n$  est de Cauchy dans  $\mathbf{L}_t^2(\Gamma)$ , elle converge fortement dans  $\mathbf{L}_t^2(\Gamma)$ . Ce qui fini de montrer que l'on peut extraire de  $(\mathbf{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une sous-suite qui converge fortement dans  $\mathbf{L}_t^2(\Gamma)$ . ■

Le lemme suivant termine de motiver la décomposition de Helmholtz introduite en début de section.

**Lemme 2.3.9** *Si  $\lambda$  satisfait l'hypothèse (2.3.4) alors l'injection de  $X$  dans  $\mathbf{L}_t^2(\Gamma)$  est compacte.*

**Preuve.** Soit  $(\mathbf{u}_n)_n$  une suite bornée de  $X$ , il existe  $C > 0$  telle que pour tout  $n \in \mathbb{N}$

$$\|\mathbf{u}_n\|_{\mathbf{H}_{\mathbf{rot}_\Gamma}(\Gamma)} \leq C$$

et comme  $\mathbf{u}_n \in X$ , on a au sens des distributions

$$\operatorname{div}_\Gamma(\lambda \mathbf{u}_n) = -\operatorname{div}_\Gamma(\mathbf{S}_\Gamma \mathbf{u}_n).$$

Soit  $(\mathbf{E}_n, \mathbf{H}_n)$  la solution de (2.9) pour  $\mathbf{v} = \mathbf{u}_n$  sur  $\Gamma$ , on montre en utilisant les relations vectorielles rappelées en fin de chapitre que

$$\operatorname{div}_\Gamma(\lambda \mathbf{u}_n) = -\operatorname{div}_\Gamma(\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{E}_n) = \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{E}_n = ik \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{H}_n.$$

Comme  $\mathbf{H}_{n,T} = \mathbf{u}_n$ , il existe  $C > 0$  telle que

$$\|\mathbf{H}_n\|_{\mathbf{H}_{\mathbf{rot}}(\Omega)} \leq C \quad \text{et} \quad \|\mathbf{H}_{n,T}\|_{\mathbf{L}_t^2(\Gamma)} \leq C.$$

D'après la proposition 2.3.7 on en déduit qu'il existe  $C > 0$  telle que pour tout  $n \in \mathbb{N}$

$$\|\operatorname{div}_\Gamma(\lambda \mathbf{u}_n)\|_{L^2(\Gamma)} = k \|\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{H}_n\|_{L^2(\Gamma)} \leq C.$$

Le lemme 2.3.8 nous permet d'en déduire que l'on peut extraire de  $(\mathbf{u}_n)_n$  une sous-suite qui converge fortement dans  $\mathbf{L}_t^2(\Gamma)$ . ■

Nous sommes en mesure de montrer le principal résultat de cette section.

**Théorème 2.3.10** *Soient  $f \in \mathbf{H}_{\mathbf{rot}_\Gamma}(\Gamma)^*$  et  $(\lambda, \eta) \in (L^\infty(\Gamma))^2$  tels que l'hypothèse 2.3.4 est satisfaite. Alors le problème (2.10) avec  $\mathcal{Z} = \mathbf{rot}_\Gamma \eta \mathbf{rot}_\Gamma + \lambda$  admet une unique solution  $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_{\mathbf{rot}_\Gamma}(\Gamma)$  et il existe une constante  $C > 0$  indépendante de  $\mathbf{u}$  et  $f$  telle que*

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}_{\mathbf{rot}_\Gamma}(\Gamma)} \leq C \|f\|_{\mathbf{H}_{\mathbf{rot}_\Gamma}(\Gamma)^*}.$$

**Preuve.** Soient  $f \in \mathbf{H}_{\mathbf{rot}_\Gamma}(\Gamma)^*$  et  $(\lambda, \eta) \in (L^\infty(\Gamma))^2$  tels que l'hypothèse 2.3.4 est satisfaite. Tout d'abord, d'après le lemme 2.2.5, la solution de (2.10) est nécessairement unique. Cherchons-la sous la forme  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \nabla_\Gamma p$  avec  $\mathbf{u}_0 \in X$  et  $p \in \dot{H}^1(\Gamma)$ . Le champ  $\mathbf{u}$  vérifie l'égalité variationnelle

$$a_\Gamma(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = l_\Gamma(\mathbf{v}) \quad \text{pour tout } \mathbf{v} \in \mathbf{H}_{\mathbf{rot}_\Gamma}(\Gamma)$$

et en testant contre le gradient de fonctions de  $\dot{H}^1(\Gamma)$  on en déduit que  $p$  doit vérifier

$$(A_S p, \xi) = l_\Gamma(\nabla_\Gamma \xi) \quad \text{pour tout } \xi \in \dot{H}^1(\Gamma). \quad (2.14)$$

Rappelons que  $A_S$  est un isomorphisme, donc l'équation (2.14) ci-dessus admet une unique solution  $p \in \dot{H}^1(\Gamma)$ . Maintenant si on teste contre des fonctions de  $X$ , on obtient que  $\mathbf{u}_0$  doit vérifier

$$a_\Gamma(\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0) = l_\Gamma(\mathbf{v}_0) - a_\Gamma(\nabla_\Gamma p, \mathbf{v}_0) \quad \text{pour tout } \mathbf{v}_0 \in X. \quad (2.15)$$

Montrons que (2.15) admet aussi une unique solution dans  $X$ . Définissons  $C_X$  et  $K_X$  les deux opérateurs de  $X$  dans  $X$  tels que

$$(C_X \mathbf{v}, \mathbf{w})_{\mathbf{H}_{\text{rot}\Gamma}(\Gamma)} = \int_\Gamma \eta(\text{rot}_\Gamma \mathbf{v} \text{rot}_\Gamma \bar{\mathbf{w}} + \mathbf{v} \cdot \bar{\mathbf{w}}) ds$$

$$(K_X \mathbf{v}, \mathbf{w})_{\mathbf{H}_{\text{rot}\Gamma}(\Gamma)} = \int_\Gamma (-\eta + \lambda) \mathbf{v} \bar{\mathbf{w}} ds + \langle \mathbf{S}_\Gamma(\mathbf{u}_0), \mathbf{v}_0 \rangle$$

pour tout  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in X$ . Ainsi,  $((C_X + K_X)\mathbf{v}, \mathbf{w})_{\mathbf{H}_{\text{rot}\Gamma}(\Gamma)} = a_\Gamma(\mathbf{v}, \mathbf{w})$  pour tout  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in X$  et donc d'après le lemme d'unicité 2.2.5, (2.15) admet au plus une solution. L'opérateur  $C_X$  est coercif d'après les hypothèses faites sur  $\eta$ . De plus  $\mathbf{S}_\Gamma$  est un opérateur compact de  $\mathbf{H}_{\text{rot}\Gamma}(\Gamma)$  dans  $\mathbf{H}_{\text{rot}\Gamma}(\Gamma)^*$  car c'est un opérateur continu de  $\mathbf{H}_{\text{rot}\Gamma}^{-1/2}(\Gamma)$  dans  $\mathbf{H}_{\text{div}\Gamma}^{-1/2}(\Gamma)$  et  $\mathbf{H}_{\text{rot}\Gamma}(\Gamma)$  s'injecte de façon compacte dans  $\mathbf{H}_{\text{rot}\Gamma}^{-1/2}(\Gamma)$ . Enfin  $X$  s'injecte de façon compacte dans  $\mathbf{L}_t^2(\Gamma)$  d'après le lemme 2.3.9 et donc l'opérateur  $K_X$  est un opérateur compact. On en déduit que (2.15) admet une unique solution  $\mathbf{u}_0 \in X$  et  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \nabla_\Gamma p$  est solution de (2.10). De plus en utilisant la dépendance continue de la solution des divers problèmes par rapport aux données on obtient l'inégalité de continuité du théorème. ■

### 2.3.3 Le cas de « $\nabla_\Gamma \gamma \text{div}_\Gamma + \lambda$ »

Nous supposons ici que

$$\mathcal{Z} = \nabla_\Gamma \gamma \text{div}_\Gamma + \lambda$$

pour  $(\lambda, \gamma)$  deux fonctions de  $L^\infty(\Gamma)$ . Alors, l'espace  $\mathbf{V}(\Gamma)$  associé est  $\mathbf{H}_{\text{div}\Gamma}(\Gamma)$  qui n'est pas inclus dans  $\mathbf{H}_{\text{rot}\Gamma}^{-1/2}(\Gamma)$ . On ne peut donc plus appliquer le théorème 2.2.6. Néanmoins, sous des hypothèses plus restrictives sur le signe de  $\gamma$  que celles que nous avons faites pour l'opérateur  $\text{rot}_\Gamma \eta \text{rot}_\Gamma + \lambda$  nous sommes en mesure de montrer qu'il existe une unique solution à (2.7) en utilisant la formulation volumique (2.8). L'hypothèse de signe sur  $\lambda$  et  $\eta$  est la suivante :

**Hypothèse 2.3.11**  $(\lambda, \gamma) \in (L^\infty(\Gamma))^2$  sont tels que

$$\text{Re}(\lambda) \geq 0, \quad \text{Re}(\gamma) \leq 0 \quad \text{p.p. sur } \Gamma,$$

il existe  $c > 0$  telle que

$$\text{Im}(\lambda) \geq c, \quad \text{Im}(\gamma) \leq -c \quad \text{p.p. sur } \Gamma.$$

Nous sommes alors en mesure de montrer le théorème suivant.

**Théorème 2.3.12** Soient  $\mathbf{f} \in \mathbf{H}_{\text{div}\Gamma}(\Gamma)^*$  et  $(\lambda, \gamma) \in (L^\infty(\Gamma))^2$  tels que l'hypothèse 2.3.11 est satisfaite. Alors le problème (2.8) admet une unique solution  $(\mathbf{E}^s, \mathbf{H}^s) \in \mathbf{H}_{\text{rot}}(\Omega_R) \times V_{\mathbf{H},R}$  et il existe une constante  $C > 0$  indépendante de  $\mathbf{f}$  telle que

$$\|\mathbf{E}^s\|_{\mathbf{H}_{\text{rot}}(\Omega_R)} + \|\mathbf{H}^s\|_{V_{\mathbf{H},R}} \leq C \|\mathbf{f}\|_{\mathbf{H}_{\text{div}\Gamma}(\Gamma)^*}.$$

**Preuve.** Tout d'abord, l'unicité s'obtient à l'aide du lemme 2.2.5. Pour l'existence, introduisons la formulation variationnelle associée à (2.8) qui s'écrit : trouver  $\mathbf{u} \in V_{\mathbf{H},R}$  tel que pour tout  $\mathbf{v} \in V_{\mathbf{H},R}$  on ait

$$\int_{\Omega_R} \mathbf{rot}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{rot}(\mathbf{v}) - k^2 \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, dx + ik \int_{\Gamma} (\gamma \operatorname{div}_{\Gamma}(\mathbf{u}_T) \operatorname{div}_{\Gamma}(\mathbf{v}_T) - \lambda \mathbf{u}_T \cdot \mathbf{v}_T) \, ds - ik \int_{\partial B_R} \mathbf{S}_R(\hat{x} \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} \, ds = -ik \int_{\Gamma} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, ds.$$

Introduisons les espaces

$$\mathring{H}^1(\Omega_R) := \left\{ p \in H^1(\Omega_R) \text{ et } \int_{\partial B_R} p \, ds = 0 \right\}$$

et

$$X_R := \left\{ \mathbf{u} \in V_{\mathbf{H},R} \text{ tels que } \int_{\Omega_R} k^2 \mathbf{u} \cdot \nabla \bar{\xi} \, dx + ik \int_{\partial B_R} \mathbf{S}_R(\hat{x} \times \mathbf{u}) \cdot \nabla_{\partial B_R} \xi \, ds = 0 \text{ pour tout } \xi \in \mathring{H}^1(\Omega_R) \right\}.$$

Pour montrer le résultat il suffit alors d'utiliser les techniques présentées dans le chapitre 10 de [75], nous donnons rapidement les raisons qui font que ces techniques s'appliquent. Tout d'abord, si  $\mathbf{G}_R : \mathbf{H}_{\operatorname{div}_{\partial B_R}}^{-1/2}(\partial B_R) \rightarrow \mathbf{H}_{\operatorname{div}_{\partial B_R}}^{-1/2}(\partial B_R)$  est l'opérateur de Calderón Électrique-à-Magnétique sur la sphère de rayon  $R$  (il est noté  $G_e$  dans [75]), on a d'après les formules (9.71) et (9.80) de [75] que

$$\mathbf{G}_R = -\mathbf{S}_R.$$

Ainsi on montre que  $V_{\mathbf{H},R}$  se décompose comme la somme directe de  $X_R$  et  $\nabla \mathring{H}^1(\Omega_R)$  et l'espace  $X_R$  s'injecte de manière compacte dans  $(L^2(\Omega))^3$ . La suite de la preuve suit les lignes de celle du théorème 10.8 de [75] car selon les hypothèses de signe 2.3.11 il existe  $C > 0$  telle que

$$\left| \int_{\Omega_R} |\mathbf{rot}(\mathbf{u})|^2 + |\mathbf{u}|^2 \, dx + ik \int_{\Gamma} (\gamma |\operatorname{div}_{\Gamma}(\mathbf{u}_T)|^2 - \lambda |\mathbf{u}_T|^2) \, ds \right| \geq C \|\mathbf{u}\|_{V_{\mathbf{H},R}}$$

pour tout  $\mathbf{u} \in V_{\mathbf{H},R}$ . ■

**Remarque 2.3.13** Si  $\lambda = 0$  sur  $\Gamma$ , on travaille avec

$$V_{\mathbf{H},R} := \{ \mathbf{v} \in \mathbf{H}_{\operatorname{rot}}(\Omega_R) \text{ tels que } \operatorname{div}_{\Gamma}(\mathbf{v}_T) \in L^2(\Gamma) \}$$

et en suivant la même procédure que ci-dessus on montre que (2.7) admet une unique solution pour  $\mathbf{f} \in \mathbf{V}(\Gamma)^*$  pour  $\mathbf{V}(\Gamma) := \{ \mathbf{v} \in \mathbf{H}_{\operatorname{rot}_{\Gamma}}^{-1/2}(\Gamma) \text{ tels que } \operatorname{div}_{\Gamma}(\mathbf{v}) \in L^2(\Gamma) \}$  dès que  $\gamma$  satisfait l'hypothèse 2.3.11. En revanche, le cas  $\lambda < 0$  reste ouvert.

## 2.4 Le champ lointain

Comme dans le cas scalaire, si  $(\mathbf{E}^s, \mathbf{H}^s)$  satisfait les équations de Maxwell (2.1) à l'extérieur d'un domaine borné et Lipschitzien  $\Omega$  et si  $(\mathbf{E}^s, \mathbf{H}^s)$  satisfait la condition de radiation de Silver-Müller (2.2), alors

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^s(x) &= \frac{e^{ikr}}{r} \left( \mathbf{E}^{\infty}(\hat{x}) + O\left(\frac{1}{r}\right) \right) & r \longrightarrow +\infty \\ \mathbf{H}^s(x) &= \frac{e^{ikr}}{r} \left( \mathbf{H}^{\infty}(\hat{x}) + O\left(\frac{1}{r}\right) \right) & r \longrightarrow +\infty \end{aligned}$$

uniformément pour toutes les directions d'observation  $\hat{x} = x/|x| \in S^2$  (voir [38] par exemple). Pour tout domaine borné  $\mathcal{O}$  de classe Lipschitzienne et de normale extérieure  $\boldsymbol{\nu}$  qui contient l'obstacle  $\Omega$ , d'après [75, chapitre 9], on a les représentations intégrales suivantes

$$\begin{aligned}\mathbf{E}^\infty(\hat{x}) &= \frac{ik}{4\pi} \hat{x} \times \int_{\partial\mathcal{O}} \{ \boldsymbol{\nu}(y) \times \mathbf{E}^s(y) + [\boldsymbol{\nu}(y) \times \mathbf{H}^s(y)] \times \hat{x} \} e^{-ik\hat{x}\cdot y} ds(y), \\ \mathbf{H}^\infty(\hat{x}) &= \frac{ik}{4\pi} \hat{x} \times \int_{\partial\mathcal{O}} \{ \boldsymbol{\nu}(y) \times \mathbf{H}^s(y) - [\boldsymbol{\nu}(y) \times \mathbf{E}^s(y)] \times \hat{x} \} e^{-ik\hat{x}\cdot y} ds(y).\end{aligned}$$

## 2.5 Formules de calcul vectoriel

Soit  $\Omega$  un domaine borné de frontière  $\Gamma$  de normale extérieure  $\boldsymbol{\nu}$  et  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  et  $\mathbf{w}$  trois fonctions à valeur vectorielle. Nous rappelons ici quelques identité vectorielles utiles :

$$\begin{aligned}\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) &= (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w}, \\ (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} &= (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})\mathbf{u}, \\ \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) &= (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = (\mathbf{w} \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v}.\end{aligned}$$

et nous avons les relations suivantes pour les opérateurs de dérivation surfacique :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{v} &= -\operatorname{div}_\Gamma(\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{v}) = \operatorname{rot}_\Gamma \mathbf{v}_T, \\ \operatorname{rot}_\Gamma \mathbf{v} &= -\operatorname{div}_\Gamma(\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{v}), \\ \operatorname{div}_\Gamma \mathbf{v} &= \operatorname{rot}_\Gamma(\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{v}), \\ \mathbf{rot}_\Gamma p &= -\boldsymbol{\nu} \times \nabla_\Gamma p,\end{aligned}$$

pour  $p$  une fonction définie sur le bord  $\Gamma$ .



---

---

**DEUXIÈME PARTIE**

**MÉTHODES D'OPTIMISATION POUR LE  
PROBLÈME INVERSE**

---

---



# RÉSULTATS D'UNICITÉ ET DE STABILITÉ POUR LE PROBLÈME SCALAIRE

---

## Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Un problème inverse mal posé . . . . .</b>	<b>42</b>
<b>3.2</b>	<b>Unicité pour une seule onde incidente . . . . .</b>	<b>43</b>
3.2.1	Unicité pour $\lambda$ . . . . .	43
3.2.2	Unicité pour $\eta$ . . . . .	44
3.2.3	Non unicité pour le problème à deux coefficients . . . . .	46
<b>3.3</b>	<b>Résultat de stabilité globale à obstacle connu . . . . .</b>	<b>47</b>
3.3.1	Quantification du prolongement unique . . . . .	47
3.3.2	Régularité et borne uniforme sur la solution du problème direct . . . . .	51
3.3.3	Stabilité pour $\lambda$ . . . . .	54
3.3.4	Stabilité pour $\eta$ . . . . .	57
3.3.5	Optimalité des résultats de stabilité . . . . .	59
<b>3.4</b>	<b>Stabilité pour une géométrie perturbée . . . . .</b>	<b>61</b>
3.4.1	Les problèmes direct et inverse pour un obstacle perturbé . . . . .	61
3.4.2	Continuité du champ lointain par rapport à l'obstacle . . . . .	62
3.4.3	Résultats de stabilité pour les impédances avec un obstacle perturbé . . . . .	67
<b>3.5</b>	<b>Unicité pour une infinité d'ondes incidentes . . . . .</b>	<b>68</b>

---



Le modèle que nous étudions en premier est celui décrit en section 1.2.1. Pour  $(\lambda, \eta) \in (L^\infty(\Gamma))^2$  on considère l'opérateur

$$\mathcal{Z} := \operatorname{div}_\Gamma(\eta \nabla_\Gamma \cdot) + \lambda \cdot .$$

Le problème inverse associé auquel nous nous intéressons consiste à retrouver les coefficients  $(\lambda, \eta)$  ainsi que la géométrie de l'objet diffractant à partir du champ lointain produit par une ou plusieurs ondes incidentes. Nous rappelons que ce type d'opérateur intervient dans la modélisation d'une couche mince (voir § 1.1.2), dans ce cas, on a  $\lambda = k^2 \mu \delta$  et  $\eta = \varepsilon^{-1} \delta$  où  $\delta$  désigne l'épaisseur de la couche et  $\varepsilon$  et  $\mu$  désignent les constantes du milieu.

Avant de vouloir résoudre numériquement ce problème, il est nécessaire d'avoir une bonne compréhension théorique du problème inverse. Une des questions essentielles est la question de l'unicité. Les données dont on dispose permettent-elles de déterminer de manière unique les inconnues que l'on souhaite retrouver ? Dans le cas d'une condition d'impédance classique, qui correspond à  $\eta = 0$ , le problème a déjà longuement été étudié et le lecteur trouvera des résultats d'unicité à partir de la donnée du champ lointain pour une onde incidente dans [37] puis pour une infinité d'ondes incidentes dans [67] par exemple. Un premier travail a déjà été réalisé dans [14] pour  $\eta \neq 0$ , nous allons le compléter dans plusieurs directions. Tout d'abord nous étendons leurs résultats d'unicité pour la reconstruction des impédances au cas où  $\eta$  est une fonction constante par morceaux et que l'on dispose du champ lointain pour une seule direction d'incidence. De plus, nous montrons que l'on peut déterminer la forme de l'objet diffractant et les fonctions d'impédance lorsque l'on connaît le champ lointain généré par toutes les directions d'incidence. En complément de cette étude d'unicité nous effectuons une analyse de stabilité pour la reconstruction des fonctions d'impédance dans le cas où l'on connaît la géométrie de l'obstacle. Cette question a elle aussi été largement traitée dans la littérature lorsque  $\eta = 0$  pour l'équation de Helmholtz dans [68, 87] et pour l'équation de Laplace dans [2, 3, 30, 56, 88]. Encore une fois, l'extension à la stabilité pour le coefficient  $\eta$  a été abordée dans [14] mais les résultats de stabilité obtenus sont locaux. Nous montrons que l'on peut obtenir un résultat de stabilité Lipschitzienne globale lorsque la fonction  $\eta$  est constante par morceaux.

Enfin, nous menons une étude de stabilité de la reconstruction des fonctions d'impédance sur une géométrie approchée. Ce dernier point n'a semble-t-il jamais été abordé dans la littérature, néanmoins il est important de répondre à cette question car dans de nombreuses situations on n'a qu'une connaissance approximative de la géométrie de l'objet diffractant comme par exemple lorsqu'on l'a reconstruite à l'aide d'une méthode numérique.

Ce chapitre se divise en cinq sections. Dans une première section nous donnons plus de détails théoriques à propos des différentes questions qui nous intéresseront tout au long du chapitre, dans une deuxième section nous traitons les questions d'unicité avec la donnée du champ lointain pour une seule onde incidente, les troisièmes et quatrième sections portent sur les questions de stabilité dans le cas d'un obstacle exact puis perturbé. Dans la cinquième section nous donnons un résultat d'unicité dans le cas où on dispose de la donnée du champ lointain pour toutes les ondes incidentes.

### 3.1 Un problème inverse mal posé

Nous utilisons ici les mêmes notations que dans le § 1.2.1. Rappelons néanmoins que  $\Omega$  désigne un ouvert borné et simplement connexe de  $\mathbb{R}^d$  pour  $d = 2$  ou  $3$  de normale extérieure  $\nu$  et de frontière  $\Gamma$  de classe  $C^1$ . Nous prendrons  $(\lambda, \eta) \in (L^\infty(\Gamma))^2$  tels que l'hypothèse

**Hypothèse 3.1.1**  $(\lambda, \eta) \in (L^\infty(\Gamma))^2$  sont tels que

$$\mathcal{I}m(\lambda) \geq 0, \quad \mathcal{I}m(\eta) \leq 0 \quad p.p. \text{ sur } \Gamma$$

et il existe  $c > 0$  tel que

$$\mathcal{R}e(\eta) \geq c \quad p.p. \text{ sur } \Gamma$$

soit satisfaite afin d'assurer l'existence et l'unicité de la solution du problème : trouver  $u$  tel que

$$\mathcal{P}(\lambda, \eta, \Gamma) \quad \begin{cases} \Delta u + k^2 u = 0 \text{ dans } \Omega_{\text{ext}} := \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} + \text{div}_\Gamma(\eta \nabla_\Gamma u) + \lambda u = 0 \text{ sur } \Gamma, \\ u = u^s + u^i, \\ \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|x|=R} |\partial_r u^s - iku^s|^2 ds = 0. \end{cases}$$

Nous rappelons que d'après le § 1.2.1, ce problème admet une unique solution dans  $H_{\Gamma, R} := \{v \in H^1(\Omega_R); v|_\Gamma \in H^1(\Gamma)\}$  dès que  $\lambda$  et  $\eta$  satisfont l'hypothèse 3.1.1. Nous notons  $\Omega_R := B_R \setminus \overline{\Omega}$  où

$B_R$  est une boule de rayon  $R$  telle que  $\Omega \subset B_R$ . Pour une onde incidente plane  $u^i(x, \hat{\theta}) := e^{ik\hat{\theta} \cdot x}$  de direction d'incidence  $\hat{\theta}$  dans la sphère unité de  $\mathbb{R}^d$ , notée  $S^{d-1}$ , on définit l'application continue et non linéaire

$$T : (\lambda, \eta, \Gamma) \rightarrow u^\infty(\cdot, \hat{\theta})$$

où  $u^\infty(\cdot, \hat{\theta}) \in L^2(S^{d-1})$  est le champ lointain (voir § 1.2.3) associé au champ diffracté  $u^s$  solution du problème  $\mathcal{P}(\lambda, \eta, \Gamma)$  pour  $u^i = e^{ik\hat{\theta} \cdot x}$ .

Le problème inverse consiste alors à retrouver des paramètres  $\lambda$ ,  $\eta$  et si possible la géométrie  $\Gamma$  à partir de la donnée de un ou plusieurs champs lointains correspondant à une ou plusieurs ondes incidentes. Ce problème est un problème mal posé dans le sens où en général on a

- non unicité,
- non surjectivité,
- non continuité de l'inverse.

Premièrement nous verrons au § 3.2.3 que de manière générale il est impossible de déterminer  $\lambda$  et  $\eta$  à partir de la donnée d'un seul champ lointain. Néanmoins, avec des hypothèses a priori supplémentaires sur  $\lambda$  et  $\eta$  et en supposant que la géométrie est connue on peut restaurer l'unicité. Deuxièmement,  $T$  ne peut pas être surjectif car le champ lointain est une fonction analytique (voir [38]), ceci signifie qu'il existe des données qui ne correspondent à aucun paramètre, c'est en particulier le cas lorsque les données sont bruitées. Troisièmement, comme le montre l'introduction de [65] on a un défaut de continuité de l'application qui au champ lointain associe le champ diffracté. Plus précisément, si  $u_1^\infty$  et  $u_2^\infty$  sont deux champs lointains, d'après le lemme de Rellich ils déterminent de manière unique deux champs proches  $u_1^s$  et  $u_2^s$  mais il n'existe pas de constante  $C$  indépendante de  $u_1^s$  et  $u_2^s$  telle que

$$\|u_1^s - u_2^s\|_{L^2} \leq C \|u_1^\infty - u_2^\infty\|_{L^2(S^{d-1})}.$$

Retrouver le champ proche à partir du champ lointain est déjà un problème très instable et en général il en sera de même pour l'inversion de  $T$ .

## 3.2 Unicité pour une seule onde incidente

Nous regroupons ici un résultat d'unicité bien connu pour l'impédance classique  $\lambda$  (que l'on trouvera dans [37] par exemple) ainsi qu'un résultat d'unicité pour une fonction  $\eta$  lorsqu'elle est constante par morceaux. Enfin nous verrons que l'on perd l'unicité lors de la recherche simultanée de  $\lambda$  et  $\eta$ .

### 3.2.1 Unicité pour $\lambda$

Lorsque le coefficient  $\lambda$  est supposé être une fonction continue par morceaux, on peut le déterminer de manière unique à partir de la donnée du champ lointain produit par la diffraction d'une seule onde plane. Soient  $(\Gamma_i)_{i=1, \dots, I}$   $I$  ouverts de  $\Gamma$  dont les bords  $\partial\Gamma_i$  sont de mesure nulle et tels que  $\cup_{i=1}^I \overline{\Gamma}_i = \overline{\Gamma}$  et pour tout  $i \neq j$  on a  $\Gamma_i \cap \Gamma_j = \emptyset$ . Définissons  $C_I(\Gamma)$  l'espace des fonctions  $u \in L^\infty(\Gamma)$  telles que  $u|_{\Gamma_i}$  est continue sur  $\overline{\Gamma}_i$  pour tout  $i = 1, \dots, I$ . Nous avons alors le résultat d'unicité suivant.

**Proposition 3.2.1** *Soient  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  deux fonctions de  $C_I(\Gamma)$  et  $\eta \in L^\infty(\Gamma)$  tels que l'hypothèse 3.1.1 est satisfaite pour les couples  $(\lambda_1, \eta)$  et  $(\lambda_2, \eta)$ . Soient  $u_1^\infty := T(\lambda_1, \eta, \Gamma)$  et  $u_2^\infty := T(\lambda_2, \eta, \Gamma)$ , si  $u_1^\infty(\hat{x}) = u_2^\infty(\hat{x})$  pour tout  $\hat{x} \in S^{d-1}$  alors  $\lambda_1 = \lambda_2$ .*

**Preuve.** Soient  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  tels que les hypothèses de la proposition soient satisfaites, on a

$$u_1^\infty(\hat{x}) = u_2^\infty(\hat{x}). \quad (3.1)$$

Soient  $u_1 \in H_{\Gamma, R}$  l'unique solution de  $\mathcal{P}(\lambda_1, \eta, \Gamma)$  et  $u_2 \in H_{\Gamma, R}$  l'unique solution de  $\mathcal{P}(\lambda_2, \eta, \Gamma)$  pour une onde incidente plane  $u^i(x) = e^{ik\hat{\theta} \cdot x}$  de direction d'incidence  $\hat{\theta}$ . D'après (3.1) et en utilisant le

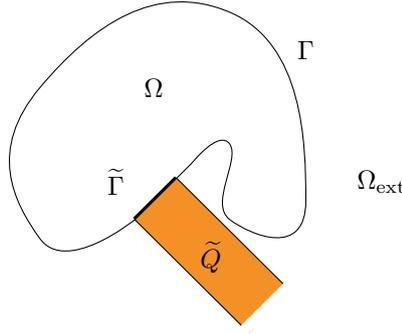


FIGURE 3.1 – Illustration de l'hypothèse géométrique de la proposition 3.2.2.

lemme de Rellich et le principe de prolongement unique (voir [38]), on a que  $u_1 = u_2$  dans  $\Omega_{\text{ext}}$ . Notons  $u$  cette fonction, elle satisfait la même condition au bord que  $u_1$  et  $u_2$ , donc pour  $i = 1, 2$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} + \operatorname{div}_{\Gamma}(\eta \nabla_{\Gamma} u) + \lambda_i u = 0 \text{ sur } \Gamma.$$

On en déduit que

$$(\lambda_1 - \lambda_2)u = 0 \text{ sur } \Gamma. \quad (3.2)$$

Supposons qu'il existe  $x_0 \in \Gamma$  tel que  $x_0 \in \Gamma_i$  pour un  $i$  donné, et tel que  $\lambda_1(x_0) \neq \lambda_2(x_0)$ . Les fonctions  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont continues sur  $\Gamma_i$  donc d'après l'égalité (3.2), il existe un ouvert  $\tilde{\Gamma} \subset \Gamma$  tel que  $u = 0$  sur  $\tilde{\Gamma}$ . D'après la condition au bord satisfaite par  $u$  et comme  $\nabla_{\Gamma} u = 0$  sur  $\tilde{\Gamma}$ , on obtient

$$u = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sur } \tilde{\Gamma}.$$

Le principe de prolongement unique s'applique maintenant à  $u$  dans  $\Omega_{\text{ext}}$  et donc  $u = 0$  dans  $\Omega_{\text{ext}}$ . Le champ diffracté  $u^s := u - u^i$  est alors nécessairement égal au champ incident  $-e^{ik\hat{\theta} \cdot x}$  mais il doit aussi satisfaire la condition de radiation ce qui est impossible. Donc on a  $\lambda_1(x) = \lambda_2(x)$  presque partout sur  $\Gamma$ . ■

Passons maintenant à la question suivante qui est la question d'unicité pour  $\eta$  avec  $\lambda$  connu.

### 3.2.2 Unicité pour $\eta$

Nous désignons toujours par  $(\Gamma_i)_{i=1, \dots, I}$  un recouvrement de  $\Gamma$  par  $I$  ouverts. Notons  $P_I$  l'ensemble des fonctions constantes par morceaux sur la partition  $(\Gamma_i)_{i=1, \dots, I}$ , pour tout  $f \in P_I$  il existe  $I$  constantes complexes  $(f_i)_{i=1, \dots, I}$  telles que

$$f(x) = \sum_{i=1}^I f_i \chi_{\Gamma_i}(x) \quad \text{pour tout } x \in \Gamma.$$

Pour  $i = 1, \dots, I$ , la fonction  $\chi_{\Gamma_i}$  désigne la fonction indicatrice de  $\Gamma_i$ .

**Proposition 3.2.2** *Soient  $\lambda$ ,  $\eta_1$  et  $\eta_2$  des éléments de  $P_I$  tels que l'hypothèse 3.1.1 est satisfaite pour les couples  $(\lambda, \eta_1)$  et  $(\lambda, \eta_2)$ . Supposons de plus que les champs lointains  $u_1^{\infty} = T(\lambda, \eta_1, \Gamma)$  et  $u_2^{\infty} = T(\lambda, \eta_2, \Gamma)$  sont tels que*

$$u_1^{\infty}(\hat{x}) = u_2^{\infty}(\hat{x}) \quad \forall \hat{x} \in S^{d-1}.$$

*Si pour tout  $i = 1, \dots, I$ , il existe  $\tilde{x}_i \in \Gamma_i$  et  $\mu_i > 0$  tels que  $\tilde{\Gamma}_i = \Gamma_i \cap B(\tilde{x}_i, \mu_i)$  est :*

– pour  $d = 2$  un segment ou une portion de cercle,  
 – pour  $d = 3$  une portion de plan, une portion de cylindre ou une portion de sphère,  
 et les ensembles  $\{x + \gamma\nu(x), x \in \tilde{\Gamma}_i, \gamma > 0\}$  sont inclus dans  $\Omega_{\text{ext}}$ , alors

$$\eta_1 = \eta_2.$$

**Preuve.** De la même manière que dans la preuve de l'unicité pour  $\lambda$ , comme  $u_1^\infty = u_2^\infty$ , le lemme de Rellich et le principe de prolongement unique impliquent que les champs totaux associés  $u_1$  et  $u_2$  associés à  $u_1^\infty$  et  $u_2^\infty$  coïncident jusque sur la frontière  $\Gamma$  de l'obstacle. La fonction  $u := u_1 = u_2$  satisfait

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} + \text{div}_\Gamma(\eta_j \nabla_\Gamma u) + \lambda u = 0 \text{ sur } \Gamma$$

pour  $j = 1, 2$ . De plus  $\eta_1$  et  $\eta_2$  sont constantes par morceaux et donc sur  $\tilde{\Gamma}_i$  pour  $i = 1, \dots, I$  on a

$$(\eta_{1,i} - \eta_{2,i})\Delta_\Gamma u = 0$$

où  $\eta_{1,i}$  et  $\eta_{2,i}$  pour  $i = 1, \dots, I$  désignent les constantes définissant  $\eta_1$  et  $\eta_2$  respectivement. Fixons un  $i$  et montrons que l'on a nécessairement  $\eta_{1,i} = \eta_{2,i}$ . Dans la suite nous ne mentionnons plus l'indice  $i$  dans les notations pour plus de clarté.

Raisonnons par l'absurde et supposons que  $\eta_1 \neq \eta_2$ . Alors

$$\Delta_\Gamma u = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = -\lambda u \quad \text{sur } \tilde{\Gamma}.$$

Supposons que nous sommes en dimension 3 et que  $\tilde{\Gamma}$  est une portion de plan telle que  $\tilde{Q} = \{x + \gamma\nu, x \in \tilde{\Gamma}, \gamma > 0\}$  est inclus dans  $\Omega_{\text{ext}}$ . Les autres cas se traitent de la même manière et donc nous ne les abordons pas ici, nous renvoyons le lecteur intéressé à [14]. Comme  $\tilde{\Gamma} = \Gamma \cap B(\tilde{x}, \mu)$  est une portion de plan il existe un système de coordonnées cartésiennes  $X(x_1, x_2, x_3)$  tel que  $X(0, 0, 0) = \tilde{x}$  et

$$\tilde{Q} = \{X(x_1, x_2, x_3), \sqrt{x_1^2 + x_2^2} < \mu, x_3 > 0\},$$

$$\tilde{\Gamma} = \{X(x_1, x_2, x_3), \sqrt{x_1^2 + x_2^2} < \mu, x_3 = 0\}.$$

Notons  $\tilde{u}$  la fonction définie sur  $\tilde{Q}$  par

$$\tilde{u}(x_1, x_2, x_3) = u(X(x_1, x_2, 0))c(x_3),$$

où  $c$  est définie de manière unique comme étant la solution de

$$\frac{d^2 c}{dx_3^2} + k^2 c = 0, \quad c(0) = 1, \quad \frac{dc}{dx_3}(0) = -\lambda.$$

Or,

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{u}(x_1, x_2, x_3) &= c(x_3) \left( \frac{\partial^2}{\partial^2 x_1} + \frac{\partial^2}{\partial^2 x_2} \right) u(X(x_1, x_2, 0)) + u(X(x_1, x_2, 0)) \frac{d^2 c}{d^2 x_3}(x_3) \\ &= c(x_3) \Delta_\Gamma u(X(x_1, x_2, 0)) - k^2 c(x_3) u(X(x_1, x_2, 0)) \\ &= -k^2 \tilde{u}(x_1, x_2, x_3) \end{aligned}$$

car  $\Delta_\Gamma u = 0$  sur  $\tilde{\Gamma}$ . Ainsi,  $u$  et  $\tilde{u}$  sont solutions de l'équation de Helmholtz dans  $\tilde{Q}$  et satisfont  $\tilde{u} = u$  et  $\frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \nu}$  sur  $\tilde{\Gamma}$ . Alors par le principe de prolongement unique on en déduit que

$$\tilde{u} = u \text{ dans } \tilde{Q}.$$

D'un autre côté, on peut calculer  $c$  de manière explicite et

$$c(x_3) = \frac{1}{2} \left(1 + i\frac{\lambda}{k}\right) e^{ikx_3} + \frac{1}{2} \left(1 - i\frac{\lambda}{k}\right) e^{-ikx_3}. \quad (3.3)$$

En fait on a une troisième condition sur  $c$ . Comme  $u = u^s + u^i$  est solution du problème de diffraction,  $u^s$  satisfait la condition de radiation de Sommerfeld et donc  $u^s(x) \rightarrow 0$  lorsque  $|x| \rightarrow +\infty$ . Ainsi

$$u(X(x_1, x_2, x_3)) \sim u^i = e^{ik(\theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 + \theta_3 x_3)}, \quad x_3 \rightarrow +\infty,$$

où  $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$  désignent les coordonnées de  $\hat{\theta}$  dans la base  $(x_1, x_2, x_3)$ . En prenant  $x_1 = x_2 = 0$  on obtient

$$u(X(0, 0, x_3)) \sim e^{ik\theta_3 x_3}, \quad x_3 \rightarrow +\infty,$$

et comme  $u = \tilde{u}$  dans  $\tilde{Q}$ ,

$$c(x_3) \sim C e^{ik\theta_3 x_3}, \quad x_3 \rightarrow +\infty$$

ce qui donne une troisième « condition au bord » pour la fonction  $c$ . D'après l'expression de  $c$  donnée en (3.3) on en déduit que nécessairement

$$\theta_3 = 1 \quad \text{et} \quad 1 - i\frac{\lambda}{k} = 0$$

et donc  $\mathcal{I}m(\lambda) = -ik < 0$  ce qui n'est pas possible car  $\lambda$  doit satisfaire l'hypothèse 3.1.1. ■

### 3.2.3 Non unicité pour le problème à deux coefficients

Nous venons de démontrer deux résultats d'unicité, l'un lorsque  $\eta$  est supposé connu, l'autre lorsque  $\lambda$  est supposé connu. Mais que se passe-t-il si on cherche à déterminer les deux coefficients simultanément? C'est impossible, une onde incidente ne suffit pas à déterminer une constante complexe  $\eta$  et une fonction à valeur complexe  $\lambda$ . En effet, il est possible de construire un contre exemple, nous reproduisons ici celui présenté dans [14].

Plaçons-nous en dimension 2,  $\Omega$  désigne le disque unité, prenons  $\lambda = i$ ,  $\eta = 0$  et pour direction d'incidence prenons  $\hat{\theta} = (1, 0)$ . Il est alors possible de calculer de manière analytique la solution  $u_0$  du problème  $\mathcal{P}(i, 0, \Gamma)$ , cette solution s'écrit sur le cercle unité en coordonnées polaires

$$u_0(1, \theta) = \frac{2}{\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{i^n e^{in\theta}}{(H_n^1)'(1) + iH_n^1(1)}$$

où  $H_n^1$  désigne la fonction de Hankel cylindrique de première espèce et d'ordre  $n$ . Nous affichons sur la figure 3.2 le module de  $u_0$  en fonction de  $\theta$ ,  $u_0$  ne s'annule donc pas sur  $\Gamma$ . Posons  $\alpha = \Delta_\Gamma u_0 / u_0$ , c'est une fonction de  $C^\infty(\Gamma)$  et donc elle est aussi dans  $L^\infty(\Gamma)$ . Soient  $\eta_1 \neq \eta_2$  deux constantes complexes telles que

$$|\eta_i| \max_{\Gamma} |\alpha| \leq 1, \quad \mathcal{R}e(\eta_i) > 0, \quad \mathcal{I}m(\eta_i) \leq 0 \quad \text{pour } i = 1, 2.$$

Définissons alors deux fonctions de  $C^\infty(\Gamma)$

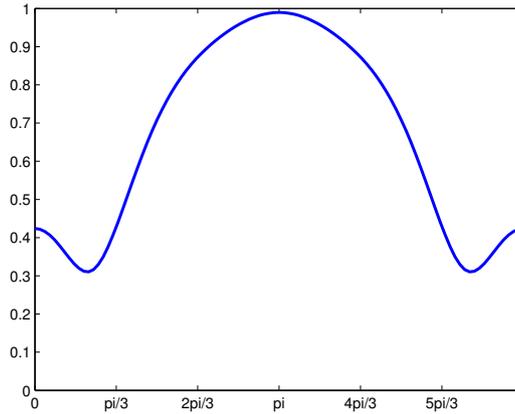
$$\lambda_i := i - \alpha\eta_i \quad \text{pour } i = 1, 2.$$

Ainsi

$$\mathcal{I}m(\lambda_i) = 1 - \mathcal{I}m(\alpha\eta_i) \geq 1 - |\eta_i| \max_{\Gamma} |\alpha| \geq 0 \quad \text{pour } i = 1, 2$$

et donc les deux couples  $(\lambda_1, \eta_1)$  et  $(\lambda_2, \eta_2)$  satisfont l'hypothèse 3.1.1. D'un autre côté

$$\frac{\partial u_0}{\partial \nu} + \eta_i \Delta_\Gamma u_0 + \lambda_i u_0 = (-i + \alpha\eta_i + \lambda_i) u_0 = 0 \quad \text{pour } i = 1, 2$$

FIGURE 3.2 – Module de la solution de  $\mathcal{P}(i, 0, \Gamma)$ .

donc  $u_0$  est solution de  $\mathcal{P}(\lambda_1, \eta_1, \Gamma)$  et  $\mathcal{P}(\lambda_2, \eta_2, \Gamma)$ . Notons  $u_0^\infty$  le champ lointain associé à  $u_0$ , alors  $u_0^\infty = T(\lambda_1, \eta_1, \Gamma) = T(\lambda_2, \eta_2, \Gamma)$  et donc un même champ lointain correspond à deux couples d'impédance différents.

Néanmoins, dans [14] on trouve des exemples de configurations pour lesquelles on a unicité. Par exemple, si  $\lambda$  est une fonction réelle,  $k^2$  n'est pas une valeur propre de Dirichlet pour  $-\Delta$  dans  $\Omega$  et si  $\eta$  est une constante à partie réelle nulle, alors une seule onde incidente détermine de manière unique  $\lambda$  et  $\eta$ .

### 3.3 Résultat de stabilité globale à obstacle connu

Afin d'aller un peu plus loin dans la compréhension du problème inverse, nous nous intéressons ici à des questions de stabilité de la reconstruction des impédances lorsque l'on connaît la géométrie de l'objet diffractant. En d'autres termes, a-t-on une sorte de continuité de l'inversion? Comme nous l'avons déjà évoqué dans la première section, le problème est mal posé au sens de Hadamard. Néanmoins, nous montrons dans cette section que l'on peut trouver des sous-ensembles compacts  $K$  de  $(L^\infty(\Gamma))^2$  tels qu'il existe une constante  $C_K$  telle que pour tous les couples  $(\lambda_1, \eta_1)$  et  $(\lambda_2, \eta_2)$  de  $K$  on a

$$\|\lambda_1 - \lambda_2\|_{L^\infty(\Gamma)} + \|\eta_1 - \eta_2\|_{L^\infty(\Gamma)} \leq C_K \|T(\lambda_1, \eta_1, \Gamma) - T(\lambda_2, \eta_2, \Gamma)\|_{L^2(S^{d-1})}.$$

En fait nous n'obtiendrons ce résultat que dans le cas où l'un des deux coefficients est connu, c'est-à-dire lorsque  $\lambda_1 = \lambda_2$  ou bien  $\eta_1 = \eta_2$ . Nous obtenons cette relation en nous appuyant principalement sur des inégalités de quantification du prolongement unique obtenues à l'aide d'inégalités de Carleman que nous rappelons dans la section suivante. Nous nous appuyons aussi sur une reformulation du problème de stabilité proposée par Sincich dans [88]. Nous apportons tout de même quelques nouveautés à [88], nous montrons un résultat de stabilité pour une classe plus large de coefficients d'impédance classique mais surtout, nous utilisons une méthode un peu différente pour obtenir la stabilité et ceci nous permettra d'étendre le résultat de stabilité au coefficient d'impédance généralisée  $\eta$  lorsqu'il est constant par morceaux.

#### 3.3.1 Quantification du prolongement unique

Nous rappelons dans cette section quelques résultats démontrés dans [11] (voir aussi [80]) ainsi qu'un résultat permettant d'estimer le champ proche à l'aide du champ lointain. Ces résultats permettent de quantifier la manière dont la petitesse d'une fonction se propage à travers le domaine,

c'est pour cela que nous parlons de quantifications du prolongement unique. Rappelons que le principe de prolongement unique implique que si une fonction  $u$  est nulle sur un ouvert  $\omega$  et si  $u$  satisfait l'équation de Helmholtz dans un domaine  $\mathcal{O}$  incluant  $\omega$  alors  $u$  est nulle partout dans  $\mathcal{O}$ . Dans cette section  $\mathcal{O}$  désigne un ouvert borné connexe de  $\mathbb{R}^d$  de frontière  $\partial\mathcal{O}$  de classe  $C^2$ .

**Proposition 3.3.1** *Soient  $\omega_0$  et  $\omega_1$  deux ouverts tels que  $\omega_0, \omega_1 \Subset \mathcal{O}$ . Il existe  $s, c, \varepsilon_0 > 0$  tels que pour tout  $\varepsilon \in ]0, \varepsilon_0[$  et pour tout  $u \in H^1(\mathcal{O})$  solution de  $\Delta u + k^2 u = 0$  dans  $\mathcal{O}$  on a*

$$\|u\|_{H^1(\omega_1)} \leq \frac{c}{\varepsilon} \|u\|_{H^1(\omega_0)} + \varepsilon^s \|u\|_{H^1(\mathcal{O})}.$$

Pour comprendre un peu mieux pourquoi on parle de quantification du prolongement unique, nous faisons référence au lemme 2.3 de [11] et si  $u$  satisfait l'inégalité ci-dessus alors il existe  $C > 0$  telle que

$$\|u\|_{H^1(\omega_1)} \leq C \|u\|_{H^1(\omega_0)}^{\frac{s}{s+1}} \|u\|_{H^1(\mathcal{O})}^{\frac{1}{s+1}}$$

et  $C$  ne dépend que de  $\varepsilon_0$ ,  $s$  et  $c$ . Ainsi, si  $u$  est bornée dans  $H^1(\mathcal{O})$ , et si  $u$  est petite dans  $H^1(\omega_0)$  alors  $u$  est aussi petite dans  $H^1(\omega_1)$ . On notera que dans l'intérieur du domaine  $\mathcal{O}$  on a une inégalité de type Hölder, mais on ne peut rien dire lorsque  $\omega_1$  « touche » le bord de  $\mathcal{O}$ . C'est le but de la proposition suivante.

**Proposition 3.3.2** *Soit  $x_0 \in \partial\mathcal{O}$ , il existe  $r_0 > 0$  et  $\omega_1 \Subset \mathcal{O}$  tels que pour tout  $\kappa \in ]0, 1[$ , il existe  $c, \varepsilon_0 > 0$  tels que pour tout  $\varepsilon \in ]0, \varepsilon_0[$  et pour tout  $u \in H^2(\mathcal{O})$  solution de  $\Delta u + k^2 u = 0$  dans  $\mathcal{O}$  on a*

$$\|u\|_{H^1(\mathcal{O} \cap B(x_0, r_0))} \leq e^{c/\varepsilon} \|u\|_{H^1(\omega_1)} + \varepsilon^\kappa \|u\|_{H^2(\mathcal{O})}.$$

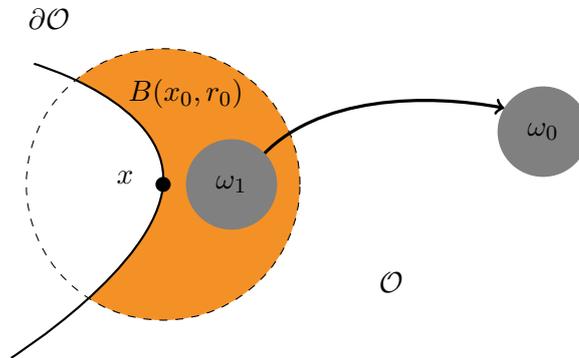


FIGURE 3.3 – Notations pour les propositions 3.3.1 et 3.3.2.

Encore une fois ce résultat permet de propager la petitesse de  $u$  de  $\omega_1$  vers  $\mathcal{O} \cap B(x_0, r_0)$  mais cette fois la propagation est de type logarithmique comme en témoigne le lemme suivant.

**Lemme 3.3.3** *Soient  $\kappa \in ]0, 1[$  et  $A, \delta$  et  $B$  trois réels strictement positifs. S'il existe  $c, \varepsilon_0 > 0$  tels que pour tout  $\varepsilon \in ]0, \varepsilon_0[$*

$$A \leq e^{c/\varepsilon} \delta + \varepsilon^\kappa B \quad (3.4)$$

*alors il existe  $B_0, C > 0$  tels que si  $B/\delta > B_0$  alors*

$$A \leq C \frac{B}{(\ln(B/\delta))^\kappa}$$

*où  $C$  ne dépend que de  $c, \kappa$  et  $\varepsilon_0$ .*

**Preuve.** Posons  $f(\varepsilon) := e^{c/\varepsilon}\delta + \varepsilon^\kappa B$  pour  $\varepsilon > 0$ . La fonction  $f$  est convexe, tend vers  $+\infty$  en 0 et en  $+\infty$ . Notons  $\varepsilon_{\min} > 0$  son unique minimiseur sur l'intervalle  $]0, +\infty[$ . Il est solution de

$$g(\varepsilon_{\min}) = \frac{B}{\delta} \quad (3.5)$$

où  $g(\varepsilon) := \frac{ce^{c/\varepsilon}}{\kappa\varepsilon^{\kappa+1}}$ .

Si  $\varepsilon_0 > \varepsilon_{\min}$ , alors (3.4) prise en  $\varepsilon = \varepsilon_{\min}$  devient

$$A \leq e^{c/\varepsilon_{\min}}\delta + \varepsilon_{\min}^\kappa B = \left(1 + \frac{\kappa\varepsilon_{\min}}{c}\right) \varepsilon_{\min}^\kappa B \leq C\varepsilon_{\min}^\kappa B \quad (3.6)$$

pour  $C = (1 + \frac{\kappa\varepsilon_0}{c})$ . Revenons à la définition de  $\varepsilon_{\min}$  donnée par (3.5), si  $B/\delta$  est suffisamment grand, alors  $\varepsilon_{\min}$  est suffisamment petit pour avoir l'existence de  $c' > c$  telle que

$$\frac{B}{\delta} = g(\varepsilon_{\min}) \leq e^{c'/\varepsilon_{\min}}.$$

Ainsi, en inversant cette relation on a  $\varepsilon_{\min} \leq c'/\ln(B/\delta)$  et (3.6) donne le résultat du lemme.

Si au contraire  $\varepsilon_0 \leq \varepsilon_{\min}$  alors comme  $f$  est décroissante sur  $]0, \varepsilon_{\min}[$ ,  $f'(\varepsilon_0) \leq 0$  et donc

$$B \leq \frac{c}{\kappa\varepsilon_0^{\kappa+1}} e^{c/\varepsilon_0} \delta$$

et comme

$$A \leq f(\varepsilon_0) \leq e^{c/\varepsilon_0} \delta + \varepsilon_0^\kappa B$$

on en déduit que pour  $C = e^{c/\varepsilon_0} \left(1 + \frac{c}{\kappa\varepsilon_0}\right)$  on a

$$A \leq C\delta \leq C \frac{B}{B/\delta} \leq C \frac{B}{(\ln(B/\delta))^\kappa}$$

pour  $B/\delta$  suffisamment grand. ■

Ainsi si  $u$  satisfait la proposition 3.3.2, alors il existe  $B_0 > 0$  tel que si  $\|u\|_{H^2(\mathcal{O})}/\|u\|_{H^1(\omega_1)} \geq B_0$  alors

$$\|u\|_{H^1(\mathcal{O} \cap B(x_0, r_0))} \leq C \frac{\|u\|_{H^2(\mathcal{O})}}{(\ln(\|u\|_{H^2(\mathcal{O})}/\|u\|_{H^1(\omega_1)}))^\kappa}.$$

pour une constante  $C > 0$  indépendante de  $u$ . La petitesse de  $u$  à l'intérieur de  $\mathcal{O}$  se propage de manière logarithmique et non plus Hölder au bord  $\partial\mathcal{O}$ .

Nous terminons cette section par des résultats de quantification du passage du champ lointain au champ proche. Notons  $\mathcal{O}_{\text{ext}} := \mathbb{R}^d \setminus \overline{\mathcal{O}}$  et  $\mathcal{O}_R := \mathcal{O}_{\text{ext}} \cap B_R$  où  $R$  est tel que  $\mathcal{O} \subset B_R$ . Le premier lemme est dû à Isakov (voir lemme 6.1.2 de [58] et aussi [19] pour un résultat plus précis) et il permet de borner loin de  $\mathcal{O}$  toute solution sortante de l'équation de Helmholtz dans  $\mathcal{O}_{\text{ext}}$  par son champ lointain.

**Lemme 3.3.4** *Soit  $v \in L^2(\mathcal{O}_{\text{ext}})$  telle que*

$$\begin{cases} \Delta v + k^2 v = 0 \text{ dans } \mathcal{O}_{\text{ext}}, \\ \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|x|=R} |\partial_r v - ikv|^2 = 0, \end{cases} \quad (3.7)$$

*notons  $v^\infty$  son champ lointain. Supposons que*

$$\beta := \|v^\infty\|_{L^2(S^{d-1})} < 1$$

et que pour tout  $R$  suffisamment grand il existe  $C_1 > 0$  telle que

$$\|v\|_{L^\infty(\mathcal{O}_R)} \leq C_1$$

alors il existe  $\tilde{R} > 0$  et  $C > 0$  indépendants de  $v$  (mais dépendant de  $C_1$ ) tels que

$$\|v\|_{L^2\left(B_{3\tilde{R}+1} \setminus \overline{B_{3\tilde{R}}}\right)} \leq C\beta^{g(\beta)}$$

avec

$$g(\beta) := \frac{1}{1 + \ln(-\ln(\beta) + e)}.$$

**Remarque 3.3.5** Nous avons dit dans l'introduction de ce chapitre que le passage du champ lointain au champ proche n'est pas une application avec une continuité Lipschitzienne, en revanche l'inégalité (3.11) implique que l'on a une continuité quasiment Hölderienne, en effet

$$g(\beta) \underset{\beta \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{\ln(\ln(1/\beta))}.$$

En fait, on peut borner près du bord  $\partial\mathcal{O}$  toute solution sortante de l'équation de Helmholtz dans  $\mathcal{O}_{\text{ext}}$  par son champ lointain.

**Lemme 3.3.6** Soit  $v \in L^2(\mathcal{O}_{\text{ext}})$  une solution de (3.7), supposons pour tout  $R > 0$  il existe  $C_1 > 0$  tel que

$$\|v\|_{H^2(\mathcal{O}_R)} \leq C_1. \quad (3.8)$$

Alors, il existe  $0 < \beta_1 < 1$  telle que si

$$\beta := \|v^\infty\|_{L^2(S^{d-1})} \leq \beta_1$$

alors pour tout  $x \in \partial\mathcal{O}$  il existe  $r > 0$ ,  $C_2 > 0$  et  $0 < \kappa < 1$  indépendants de  $v$  (mais dépendants de  $C_1$ ) tels que

$$\|v\|_{H^1(\mathcal{O}_R \cap B(x,r))} \leq \frac{C_2}{(\ln(C_2/(\beta g(\beta))))^\kappa}$$

où la fonction  $g$  est donnée dans le lemme 3.3.4.

**Preuve.** La preuve fonctionne en deux temps, dans un premier temps nous faisons le lien entre  $\|v\|_{H^1(\mathcal{O}_R \cap B(x,r))}$  et  $v$  loin de l'obstacle  $\mathcal{O}$ , puis nous passons au champ lointain à l'aide du lemme 3.3.4. D'après la proposition 3.3.2 il existe un ouvert  $\omega_1 \Subset \mathcal{O}_R$ ,  $\kappa \in ]0, 1[$  et  $c > 0$  tels que pour  $\varepsilon > 0$  petit

$$\|v\|_{H^1(\mathcal{O}_R \cap B(x,r))} \leq e^{c/\varepsilon} \|v\|_{H^1(\omega_1)} + \varepsilon^\kappa \|v\|_{H^2(\mathcal{O}_R)}.$$

Prenons  $R$  suffisamment grand tel que  $3\tilde{R} + 1 < R$  où  $\tilde{R}$  vient du lemme 3.3.4. Alors en appliquant la proposition 3.3.1 à  $v$  avec  $\omega_0 = B(x_0, 1/4)$  pour  $x_0 \in \partial B_{3\tilde{R}+1/2}$ , il existe  $c, s > 0$  tels que pour tout  $\varepsilon > 0$  petit,

$$\|v\|_{H^1(\omega_1)} \leq \frac{c}{\varepsilon} \|v\|_{H^1(\omega_0)} + \varepsilon^s \|v\|_{H^1(\mathcal{O}_R)}.$$

Ainsi il existe  $\kappa \in ]0, 1[$  et  $c > 0$  tels que pour  $\varepsilon$  petit,

$$\|v\|_{H^1(\mathcal{O}_R \cap B(x,r))} \leq e^{c/\varepsilon} \|v\|_{H^1(\omega_0)} + \varepsilon^\kappa \|v\|_{H^2(\mathcal{O}_R)}.$$

Alors d'après (3.8) il existe deux constantes  $C$ ,  $c > 0$  telles que pour  $\varepsilon > 0$  petit,

$$\|v\|_{H^1(\mathcal{O}_R \cap B(x,r))} \leq e^{c/\varepsilon} \|v\|_{H^1(\omega_0)} + C\varepsilon^\kappa. \quad (3.9)$$

Comme  $x_0 \in \partial B_{3\tilde{R}+1/2}$ , on a  $B(x_0, 3/8) \subset B_{3\tilde{R}+1} \setminus \overline{B_{3\tilde{R}}}$  et on obtient la suite d'inégalités suivante

$$\|v\|_{H^1(B(x_0, 1/4))} \leq C \|v\|_{L^2(B(x_0, 3/8))} \leq C \|v\|_{L^2(B_{3\tilde{R}+1} \setminus \overline{B_{3\tilde{R}}})}. \quad (3.10)$$

où la première inégalité s'obtient en prenant  $v = \chi^2 \bar{v}$  dans la formulation variationnelle associée à (3.7) dans le domaine  $\mathcal{O}_R$  où  $\chi \in C_0^\infty(B(x_0, 3/8))$  et  $\chi = 1$  dans  $B(x_0, 1/4)$ . Comme on a (3.8) et  $H^2(\Omega_R)$  s'injecte continûment dans  $L^\infty(\Omega_R)$ , on peut appliquer le lemme 3.3.4 à  $v$  et il existe  $C > 0$  indépendant de  $v$  mais dépendant de  $C_1$  tel que si

$$\beta = \|v^\infty\|_{L^2(S^{d-1})} < 1$$

alors

$$\|v\|_{L^2(B_{3\tilde{R}+1} \setminus \overline{B_{3\tilde{R}}})} \leq C \beta^{g(\beta)} \quad (3.11)$$

et  $g(\beta)$  est donnée dans l'énoncé du lemme 3.3.4. En combinant cette dernière inégalité avec (3.10) puis (3.9) on obtient pour  $\varepsilon$  petit,

$$\|v\|_{H^1(\mathcal{O}_R \cap B(x, r))} \leq C(e^{c/\varepsilon} \beta^{g(\beta)} + \varepsilon^\kappa)$$

et les constantes  $c, C > 0$  ne dépendent pas de  $v$ . Alors le lemme 3.3.3 s'applique et il existe  $C_2, B_0 > 0$  tels que pour  $\beta^{g(\beta)} \leq B_0$ ,

$$\|v\|_{H^1(\mathcal{O}_R \cap B(x, r))} \leq \frac{C_2}{(\ln(C_2/(\beta^{g(\beta)})))^\kappa}. \quad (3.12)$$

Mais  $\beta \mapsto \beta^{g(\beta)}$  est une fonction croissante sur  $]0, 1[$  qui tend vers 0 lorsque  $\beta \rightarrow 0$  et donc il existe  $0 < \beta_1 < 1$  telle que (3.12) est satisfaite dès que  $\beta \leq \beta_1$ . ■

### 3.3.2 Régularité et borne uniforme sur la solution du problème direct

Afin d'obtenir un résultat de stabilité uniforme sur les impédances, il nous faut en premier lieu borner la solution de  $\mathcal{P}(\lambda, \eta, \Gamma)$  uniformément par rapport à  $\lambda$  et  $\eta$ , c'est le but de cette section. Nous souhaitons appliquer le lemme 3.3.6 et donc nous avons aussi besoin de plus de régularité que la simple régularité  $H^1$  obtenue en utilisant une formulation variationnelle. Désignons par  $K$  un sous-ensemble compact de  $(L^\infty(\Gamma))^2$  tel qu'il existe une constante  $c_K > 0$  telle que pour tout  $(\lambda, \eta) \in K$  l'hypothèse 3.1.1 soit satisfaite avec une constante  $c = c_K$ .

Soit  $S_R : H^{1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma)$  l'opérateur de Dirichlet-à-Neuman extérieur à la sphère de rayon  $R$ ,  $R$  peut changer dans la suite mais sera toujours tel que  $\Omega \subset B_R$ . Alors le problème  $\mathcal{P}(\lambda, \eta, \Gamma)$  se formule de manière équivalente en domaine borné : trouver  $u = u^s + u^i \in H_{\Gamma, R}$  telle que

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 u = 0 \text{ dans } \Omega_R, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} + \operatorname{div}_\Gamma(\eta \nabla_\Gamma u) + \lambda u = 0 \text{ sur } \Gamma, \\ \frac{\partial u}{\partial r} - S_R(u) = f \text{ sur } \partial B_R. \end{cases}$$

pour

$$f := - \left( \frac{\partial u^i}{\partial r} - S_R(u^i) \right).$$

Nous rappelons aussi les opérateurs variationnels associés à ce problème. On définit  $A_{\lambda, \eta} : H_{\Gamma, R} \rightarrow H_{\Gamma, R}$  et la forme bilinéaire  $a$  par

$$(A_{\lambda, \eta} u, v)_{H_{\Gamma, R}} = a(u, v) := \int_{\Omega_R} (\nabla u \cdot \nabla \bar{v} - k^2 u \bar{v}) dx + \int_\Gamma (\eta \nabla_\Gamma u \cdot \nabla_\Gamma \bar{v} - \lambda u \bar{v}) ds - \langle S_R u, v \rangle, \quad (3.13)$$

D'après le théorème 1.2.2, l'opérateur  $A_{\lambda, \eta}$  est inversible et on est en mesure d'avoir une borne sur son inverse qui est uniforme en  $\lambda$  et  $\eta$ .

**Proposition 3.3.7** *Il existe une constante  $C_K > 0$  telle que pour tout  $(\lambda, \eta) \in K$*

$$\| \| A_{\lambda, \eta}^{-1} \| \| \leq C_K$$

où  $\| \| \cdot \| \|$  désigne une norme d'opérateur.

**Preuve.** Considérons l'application

$$\mathcal{A} : (\lambda, \eta) \in K \longmapsto A_{\lambda, \eta}^{-1} \in \mathcal{L}(H_{\Gamma, R}, H_{\Gamma, R})$$

où  $\mathcal{L}(H_{\Gamma, R}, H_{\Gamma, R})$  désigne l'ensemble des applications linéaires et continues de  $H_{\Gamma, R}$  dans  $H_{\Gamma, R}$ . Prouvons que  $\mathcal{A}$  est continue. Si tel est le cas, comme  $K$  est compact l'application

$$(\lambda, \eta) \in K \longmapsto \| \| A_{\lambda, \eta}^{-1} \| \|$$

atteint ses bornes et on obtient le résultat annoncé.

Soient  $(\lambda, \eta) \in K$  et  $(h, l) \in (L^\infty(\Gamma))^2$  tels que  $(\lambda + h, \eta + l) \in K$ . Pour tout  $F \in H_{\Gamma, R}$  définissons  $u$  et  $u_{h, l}$  dans  $H_{\Gamma, R}$  par

$$A_{\lambda, \eta} u = F, \quad A_{\lambda + h, \eta + l} u_{h, l} = F.$$

On a

$$\| \| A_{\lambda + h, \eta + l}^{-1} F - A_{\lambda, \eta}^{-1} F \| \|_{H_{\Gamma, R}} = \| \| u_{h, l} - u \| \|_{H_{\Gamma, R}} = \| \| A_{\lambda + h, \eta + l}^{-1} (A_{\lambda, \eta} - A_{\lambda + h, \eta + l}) u \| \|_{H_{\Gamma, R}} \quad (3.14)$$

mais  $A_{\lambda, \eta}$  dépend continûment de  $(\lambda, \eta)$

$$\lim_{(h, l) \rightarrow 0} \| \| A_{\lambda, \eta} - A_{\lambda + h, \eta + l} \| \| = 0 \quad (3.15)$$

et d'après un résultat bien connu sur les séries de Neumann (voir [64, chapitre 10] par exemple), il existe une constante  $C(\lambda, \eta)$  qui dépend de  $\lambda$  et  $\eta$  telle que pour tout  $(h, l)$  suffisamment petit

$$\| \| A_{\lambda + h, \eta + l}^{-1} \| \| \leq C(\lambda, \eta). \quad (3.16)$$

Les inégalités (3.15) et (3.16) avec (3.14) impliquent que

$$\lim_{(h, l) \rightarrow 0} \| \| A_{\lambda + h, \eta + l}^{-1} - A_{\lambda, \eta}^{-1} \| \| = 0$$

et donc  $\mathcal{A}$  est continue sur le compact  $K$  ce qui permet de conclure. ■

On en déduit directement le corollaire suivant.

**Corollaire 3.3.8** *Il existe une constante  $C_K > 0$  telle que pour tout  $(\lambda, \eta) \in K$  la solution  $u$  du problème  $\mathcal{P}(\lambda, \eta, \Gamma)$  pour une onde incidente plane  $u^i(x) = e^{ik\theta \cdot x}$  satisfait*

$$\| \| u \| \|_{H_{\Gamma, R}} \leq C_K.$$

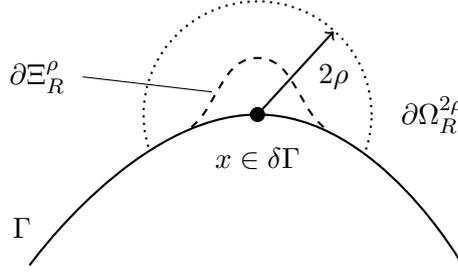
Passons maintenant au résultat de régularité, pour l'obtenir nous aurons besoin se plus de régularité sur la frontière  $\Gamma$ , supposons-la de classe  $C^3$ . Soit  $(\Gamma_i)_{i=1, \dots, I}$  un recouvrement de  $\Gamma$  (voir la description donnée au § 3.2.1). Nous notons toujours  $C_I(\Gamma)$  l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur cette partition et pour  $p > 0$  introduisons  $C_I^p(\Gamma)$  l'ensemble des fonctions  $u$  de  $L^\infty(\Gamma)$  dont la restriction à  $\Gamma_i$  est dans  $C^p(\overline{\Gamma}_i)$  pour  $i = 1, \dots, I$ . Notons  $\delta\Gamma$  l'ensemble des points de  $\Gamma$  contenus dans deux ensembles  $\overline{\Gamma}_i$  et  $\overline{\Gamma}_j$  simultanément pour  $i, j = 1, \dots, I$  et  $i \neq j$ . Pour tout réel  $\rho > 0$  suffisamment petit, nous notons  $\Xi_R^\rho$  un sous ensemble de  $\Omega_R$  de frontière  $\partial\Xi_R^\rho$  de classe  $C^3$  tel que

$$x \in \Xi_R^\rho \implies d(x, \delta\Gamma) > \rho,$$

où  $d$  désigne la fonction distance, et tel que  $\Omega_R^{2\rho} \subset \Xi_R^\rho$  où

$$\Omega_R^{2\rho} := \{x \in \Omega_R \text{ tels que } d(x, \Gamma) > 2\rho\}.$$

En fait on enlève du domaine les points où les fonctions d'impédance sont irrégulières.


 FIGURE 3.4 – Domaine sans les points de transition contenus dans  $\delta\Gamma$ .

**Lemme 3.3.9** Soit  $K_I$  un sous ensemble compact de  $C_I^1(\Gamma) \times C_I^2(\Gamma)$  et  $c_{K_I} > 0$  une constante ne dépendant que de  $K_I$  tels que si  $(\lambda, \eta) \in K_I$ , l'hypothèse 3.1.1 est satisfaite pour  $c = c_{K_I}$ . Alors il existe une constante  $C_{K_I}$  (dépendant de  $\rho$  et  $R$ ) telle que pour tout  $(\lambda, \eta) \in K_I$  la solution  $v$  de

$$\begin{cases} \Delta v + k^2 v = 0 \text{ dans } \Omega_{\text{ext}}, \\ \frac{\partial v}{\partial \nu} + \text{div}_\Gamma(\eta \nabla_\Gamma v) + \lambda v = f \text{ sur } \Gamma, \\ \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|x|=R} |\partial_r v - ikv|^2 ds = 0 \end{cases} \quad (3.17)$$

pour  $f \in H^{-1}(\Gamma) \cap H^{1/2}(\partial \Xi_R^\rho \cap \Gamma)$  satisfait

$$\|v\|_{H^3(\Xi_R^\rho)} \leq C_{K_I} \left( \|f\|_{H^{-1}(\Gamma)} + \|f\|_{H^{1/2}(\partial \Xi_R^\rho \cap \Gamma)} \right).$$

**Preuve.** Comme  $\Delta v = -k^2 v$  dans  $\Omega_R$  on a d'après un théorème de trace pour les fonctions de  $\{v \in H^1(\Omega_R), \Delta v \in L^2(\Omega_R)\}$

$$\left\| \frac{\partial v}{\partial \nu} \right\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \leq C \|v\|_{H_{\Gamma, R}}. \quad (3.18)$$

Considérons maintenant la régularité de  $v \in H^1(\Gamma)$  solution de

$$\text{div}_\Gamma(\eta \nabla_\Gamma v) + \lambda v = \tilde{f} \quad \text{sur} \quad \partial \Xi_R^\rho \cap \Gamma \quad (3.19)$$

pour  $\tilde{f} \in H^{-1/2}(\partial \Xi_R^\rho \cap \Gamma)$ . D'après le § 1.1.1, il existe une paramétrisation locale de  $\partial \Xi_R^\rho \cap \Gamma$  par une fonction  $X_\Gamma(\xi_1, \dots, \xi_{d-1})$  de classe  $C^2$ . Alors d'après le § 2.5.6 de [78] l'opérateur de dérivation surfacique présent dans (3.19) s'écrit localement sous la forme

$$\text{div}_\Gamma(\eta \nabla_\Gamma v) = \frac{1}{\sqrt{\det g}} \left( \sum_{i,j=1}^{d-1} \frac{\partial}{\partial \xi_i} \eta \sqrt{\det g} g^{ij} \frac{\partial v}{\partial \xi_j} \right),$$

où  $g_{ij} = (e_i, e_j)$  désigne le tenseur métrique,  $g^{ij}$  désigne les coefficients de son inverse et les vecteurs  $e_i$  sont donnés par  $e_i := \partial X_\Gamma / \partial \xi_i$ . On se ramène ainsi à un problème de régularité pour un opérateur elliptique sous forme divergence dans  $\mathbb{R}^{d-1}$ .

On applique les résultats de régularité du chapitre 8 de [45] avec  $a^{ij} = \eta \sqrt{\det g} g^{ij}$  et  $c = \lambda$ . Comme le second membre de l'équation (3.19) est localement dans  $H^{-1/2}$ ,  $\Gamma$  est de classe  $C^2$  (ce qui signifie que les  $a^{ij}$  sont dans  $C^1$  car  $\eta$  est de classe  $C^2$  sur  $\partial \Xi_R^\rho \cap \Gamma$ ) et  $\lambda$  est localement  $C^1$  alors  $v$  est localement dans  $H^{3/2}$ .

Revenons à notre problème de régularité, la solution  $v$  de 3.17 satisfait (3.19) avec  $\tilde{f} = f - \partial v / \partial \nu$  et en utilisant (3.18) on obtient

$$\|v\|_{H^{3/2}(\partial \Xi_R^\rho \cap \Gamma)} \leq C_{K_I} \left( \|v\|_{H_{\Gamma, R}} + \|f\|_{H^{-1/2}(\partial \Xi_R^\rho \cap \Gamma)} \right)$$

où dans cette inégalité et dans ce qui suit  $C_{K_I} > 0$  désigne une constante indépendante de  $\lambda$  et  $\eta$ . Un résultat de régularité pour le Laplacien avec conditions de Dirichlet donne

$$\|v\|_{H^2(\Xi_R^\rho)} \leq C_{K_I} \left( \|v\|_{H_{\Gamma,R}} + \|f\|_{H^{-1/2}(\partial\Xi_R^\rho \cap \Gamma)} \right)$$

pour une autre constante  $C_{K_I}$  et une inégalité de trace implique que

$$\left\| \frac{\partial v}{\partial \nu} \right\|_{H^{1/2}(\partial\Xi_R^\rho \cap \Gamma)} \leq C_{K_I} \left( \|v\|_{H_{\Gamma,R}} + \|f\|_{H^{-1/2}(\partial\Xi_R^\rho \cap \Gamma)} \right).$$

En utilisant une nouvelle fois de la régularité pour le problème surfacique (3.19) on obtient

$$\|v\|_{H^{5/2}(\partial\Xi_R^\rho \cap \Gamma)} \leq C_{K_I} \left( \|v\|_{H_{\Gamma,R}} + \|f\|_{H^{1/2}(\partial\Xi_R^\rho \cap \Gamma)} \right)$$

car la frontière  $\Gamma$  est de classe  $C^3$ ,  $\eta \in C_I^2(\Gamma)$  et  $\lambda \in C_I^1(\Gamma)$ . En utilisant à nouveau de la régularité pour le Laplacien avec condition de Dirichlet on obtient

$$\|v\|_{H^3(\Xi_R^\rho)} \leq C_{K_I} \left( \|v\|_{H_{\Gamma,R}} + \|f\|_{H^{1/2}(\partial\Xi_R^\rho \cap \Gamma)} \right)$$

mais comme la norme de l'opérateur  $A_{\lambda,\eta}^{-1}$  est borné uniformément par rapport à  $\lambda$  et  $\eta$  (voir proposition 3.3.7) on aboutit au résultat annoncé. ■

### 3.3.3 Stabilité pour $\lambda$

Cette section peut être vue comme une extension du résultat de stabilité Lipschitzien obtenu dans [88] car on montre un résultat de stabilité Lipschitzienne globale pour  $\lambda$  dans le cas où la fonction  $\lambda$  vit dans un espace de dimension finie qui n'est pas nécessairement l'espace des fonctions constantes par morceaux. De plus la technique que nous employons est différente et nous permettra d'établir un résultat de stabilité globale pour le coefficient  $\eta$ . Soit  $(\varphi_n)_{n=1,\dots,N}$  une famille de

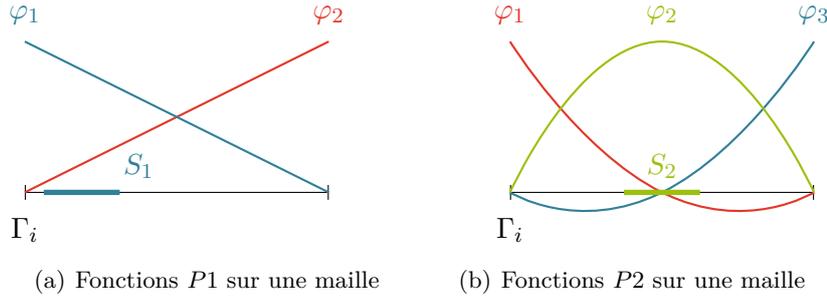


FIGURE 3.5 – Illustration de l'hypothèse 3.3.10.

fonctions de  $C_I^1(\Gamma)$  définies sur une partition  $(\Gamma_i)_{i=1}^I$  de  $\Gamma$ , linéairement indépendantes et à valeur réelle. Supposons que cette famille de fonctions satisfait l'hypothèse suivante.

**Hypothèse 3.3.10** *Il existe  $C_\varphi > 1$  et  $c_\varphi > 0$  telles que pour tout  $n_0 = 1, \dots, N$ , il existe un ensemble non vide  $S_{n_0} \subset \Gamma$  tel que*

- $S_{n_0} \cap \partial\Gamma_i = \emptyset$  pour  $i = 1, \dots, I$ ,
- $|\varphi_{n_0}(x)| \geq NC_\varphi |\varphi_n(x)|$  pour tout  $n \neq n_0$  et  $x \in S_{n_0}$ ,
- $|\varphi_{n_0}(x)| \geq c_\varphi$  pour tout  $x \in S_{n_0}$ .

Par exemple, les fonctions de base  $P1$  et  $P2$  associées à une partition donnée de  $\Gamma$  satisfont cette hypothèse. On représente sur la figure 3.5 les fonctions de bases  $P1$  et  $P2$  non nulles sur une maille  $\Gamma_i$  particulière, dans les deux cas on montre ce que peuvent être les ensembles  $S_n$ .

Dans le théorème qui suit on considère des fonctions d'impédance classique qui s'écrivent comme

$$\lambda(x) = \sum_{n=1}^N \lambda_n \varphi_n(x) \quad \text{sur } \Gamma$$

où les  $\lambda_n$  sont des constantes complexes. Soit  $K_N$  un sous ensemble compact de  $\text{vect}\{\varphi_1, \dots, \varphi_N\} \times C_I^2(\Gamma)$  et  $c_{K_N} > 0$  une constante ne dépendant que de  $K_N$  telle que si  $(\lambda, \eta) \in K_N$ , l'hypothèse 3.1.1 est satisfaite pour  $c = c_{K_N}$ . D'après le premier point de l'hypothèse 3.3.10, il existe  $\rho > 0$  tel que  $S_n \subset \partial \Xi_R^\rho$  pour tout  $n = 1, \dots, N$ . Si  $(\lambda, \eta) \in K_N$ , on sait entre autre que la norme  $C^2$  de  $\eta$  sur chaque  $\Gamma_i$  est bornée par une constante ne dépendant que du compact  $K_N$  et les composantes  $(\lambda_n)_{n=1, \dots, N}$  sont elles aussi bornées.

**Théorème 3.3.11** *Si  $\Gamma$  est de classe  $C^3$ , il existe une constante  $C_{K_N}$  telle que pour tous couples  $(\lambda^1, \eta)$  et  $(\lambda^2, \eta)$  de  $K_N$*

$$\|\lambda^1 - \lambda^2\|_{L^\infty(\Gamma)} \leq C_{K_N} \|T(\lambda^1, \eta, \Gamma) - T(\lambda^2, \eta, \Gamma)\|_{L^2(S^{d-1})}.$$

**Preuve.** Soient  $(\lambda^1, \eta) \neq (\lambda^2, \eta)$  deux couples de  $K_N$  et notons  $u^1$  et  $u^2$  les solutions de  $\mathcal{P}(\lambda^1, \eta, \Gamma)$  et  $\mathcal{P}(\lambda^2, \eta, \Gamma)$  respectivement avec  $u^i = e^{ik\hat{\theta} \cdot x}$  pour onde incidente. En suivant la méthode développée dans [88], introduisons la fonction auxiliaire

$$v := \frac{u^2 - u^1}{\max_n |\lambda_n^2 - \lambda_n^1|}$$

qui est solution de

$$\begin{cases} \Delta v + k^2 v = 0 & \text{dans } \Omega_{\text{ext}} \\ \frac{\partial v}{\partial \nu} + \text{div}_\Gamma(\eta \nabla_\Gamma v) + \lambda^1 v = \frac{(\lambda^1 - \lambda^2) u^2}{\max_n |\lambda_n^2 - \lambda_n^1|} & \text{sur } \Gamma \\ \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|x|=R} |\partial_r v - ikv|^2 ds = 0. \end{cases}$$

Commençons par montrer un résultat de régularité sur  $v$ . Tout d'abord, il existe une constante  $C_{K_N}$  indépendante de  $\lambda^1, \lambda^2$  et  $\eta$  telle que

$$\frac{1}{\max_n |\lambda_n^2 - \lambda_n^1|} \|(\lambda^1 - \lambda^2) u^2\|_{H^{-1}(\Gamma)} \leq C_{K_N} \|u^2\|_{H^1(\Omega_R)}$$

et en utilisant le corollaire 3.3.8 il existe une autre constante  $C_{K_N} > 0$  indépendante de  $\lambda^1, \lambda^2$  et  $\eta$  telle que

$$\frac{1}{\max_n |\lambda_n^2 - \lambda_n^1|} \|(\lambda^1 - \lambda^2) u^2\|_{H^{-1}(\Gamma)} \leq C_{K_N}.$$

Dans ce qui suit,  $C_{K_N}$  peut changer d'une ligne à l'autre mais dans tous les cas elle sera indépendante de  $\lambda^1, \lambda^2$  et  $\eta$ . D'après le lemme 3.3.9, la fonction  $u^2$  est uniformément bornée dans  $H^3(\Xi_R^\rho)$ , de plus  $\lambda^1$  et  $\lambda^2$  sont dans  $C_I^1(\Gamma)$  donc il existe  $C_{K_N} > 0$  telle que

$$\frac{1}{\max_n |\lambda_n^2 - \lambda_n^1|} \|(\lambda^1 - \lambda^2) u^2\|_{H^{1/2}(\partial \Xi_R^\rho \cap \Gamma)} \leq C_{K_N}.$$

Ainsi, d'après le lemme 3.3.9 il existe  $C_{K_N} > 0$  telle que

$$\|v\|_{H^3(\Xi_R^\rho)} \leq C_{K_N}. \quad (3.20)$$

Pour  $n$  donné, prenons  $x_n \in S_n$  et notons  $r_n > 0$  le réel correspondant au  $r_0$  de la proposition 3.3.2. Enfin nous notons  $\omega_n = B(x_n, r_n)$  et soit  $\gamma_n$  un ouvert de  $\Gamma$  tel que  $\gamma_n \subset S_n \cap \omega_n$ . En multipliant l'équation satisfaite par  $v$  sur  $\Gamma$  par  $\frac{1}{u^2}$  et en intégrant sur  $\gamma_n$  on a après utilisation de l'inégalité de Cauchy Schwartz :

$$\|u^2\|_{L^2(\gamma_n)} \left\| \frac{\partial v}{\partial \nu} + \operatorname{div}_\Gamma(\eta \nabla_\Gamma v) + \lambda^1 v \right\|_{L^2(\gamma_n)} \geq \frac{1}{\max_m |\lambda_m^2 - \lambda_m^1|} \int_{\gamma_n} |\lambda^2 - \lambda^1| |u^2|^2 ds. \quad (3.21)$$

La suite de la preuve consiste à majorer le membre de gauche de cette inégalité par une fonction croissante de la norme du champ lointain de  $v$  et de minorer le membre de droite par une constante  $C_{K_N}$ .

(i) *Majoration du membre de gauche de (3.21)*

Définissons une fonction de troncature  $\phi_n \in C_0^\infty(\omega_n)$  telle que  $\phi_n = 1$  sur  $\gamma_n$ , on a

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial v}{\partial \nu} + \operatorname{div}_\Gamma(\eta \nabla_\Gamma v) + \lambda^1 v \right\|_{L^2(\gamma_n)} &\leq C_{K_N} \left[ \left\| \frac{\partial v}{\partial \nu} \right\|_{L^2(\gamma_n)} + \|v\|_{H^2(\gamma_n)} \right] \\ &\leq C_{K_N} \left[ \left\| \frac{\partial(\phi_n v)}{\partial \nu} \right\|_{L^2(\Gamma)} + \|\phi_n v\|_{H^2(\Gamma)} \right]. \end{aligned}$$

En utilisant une inégalité d'interpolation (voir [71]) puis le résultat de régularité (3.20) on obtient pour une constante  $C > 0$  indépendante de  $\lambda$  et  $\eta$ ,

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial(\phi_n v)}{\partial \nu} \right\|_{L^2(\Gamma)} + \|\phi_n v\|_{H^2(\Gamma)} &\leq C \left( \left\| \frac{\partial(\phi_n v)}{\partial \nu} \right\|_{H^{1/2}(\Gamma)}^{1/2} \left\| \frac{\partial(\phi_n v)}{\partial \nu} \right\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}^{1/2} + \|\phi_n v\|_{H^{5/2}(\Gamma)}^{7/8} \|\phi_n v\|_{H^{1/2}(\Gamma)}^{1/8} \right) \\ &\leq C_{K_N} \|\phi_n v\|_{H^1(\Omega_R)}^{1/8} \end{aligned}$$

et finalement

$$\left\| \frac{\partial v}{\partial \nu} + \operatorname{div}_\Gamma(\eta \nabla_\Gamma v) + \lambda^1 v \right\|_{L^2(\gamma_n)} \leq C_{K_N} \|v\|_{H^1(\Xi_R^p \cap \omega_n)}^{1/8}. \quad (3.22)$$

Comme on a (3.20) on peut appliquer le lemme 3.3.6 et il existe  $\beta_1 > 0$  indépendant de  $\lambda^1, \lambda^2$  et  $\eta$  telle que si  $\beta := \|v^\infty\|_{L^2(S^{d-1})} \leq \beta_1$  alors

$$\|v\|_{H^1(\Xi_R^p \cap \omega_n)} \leq \frac{C_{K_N}}{(\ln(C_{K_N}/(\beta g(\beta))))^\kappa}$$

où  $g$  est définie dans l'énoncé du lemme. Ainsi, d'après (3.22) il existe  $\kappa, C_{K_N} > 0$  tels que si  $\beta \leq \beta_1$

$$\left\| \frac{\partial v}{\partial \nu} + \operatorname{div}_\Gamma(\eta \nabla_\Gamma v) + \lambda^1 v \right\|_{L^2(\gamma_n)} \leq \frac{C_{K_N}}{(\ln(C_{K_N}/(\beta g(\beta))))^{\kappa/8}} := f(\beta). \quad (3.23)$$

Le cas  $\beta \geq \beta_1$  ne pose pas de problème car il permet de conclure directement. En effet si  $\beta \geq \beta_1$  alors comme

$$v^\infty = \frac{u^{1,\infty} - u^{2,\infty}}{\max_n |\lambda_n^2 - \lambda_n^1|}$$

on obtient l'estimation de stabilité du théorème avec  $C_{K_N} = \beta_1$ .

(ii) *Majoration du membre de droite de (3.21)*

Le membre de droite de (3.21) est

$$\frac{1}{\max_m |\lambda_m^2 - \lambda_m^1|} \int_{\gamma_n} |\lambda^2 - \lambda^1| |u^2|^2 ds.$$

Soit  $n_0 \in \{1, \dots, N\}$ , pour tout  $x$  de  $\gamma_{n_0}$  on a

$$\begin{aligned} |\lambda^2(x) - \lambda^1(x)| &= \left| \sum_{n=1}^N (\lambda_n^2 - \lambda_n^1) \varphi_n(x) \right| \\ &\geq \left| |(\lambda_{n_0}^2 - \lambda_{n_0}^1)| |\varphi_{n_0}(x)| - \sum_{n \neq n_0} |(\lambda_n^2 - \lambda_n^1)| |\varphi_n(x)| \right| \\ &= |(\lambda_{n_0}^2 - \lambda_{n_0}^1)| |\varphi_{n_0}(x)| \left| 1 - \sum_{n \neq n_0} \frac{|(\lambda_n^2 - \lambda_n^1)| |\varphi_n(x)|}{|(\lambda_{n_0}^2 - \lambda_{n_0}^1)| |\varphi_{n_0}(x)|} \right| \end{aligned}$$

Si le maximum des  $|\lambda_n^1 - \lambda_n^2|$  est obtenu pour  $n = n_0$ , en utilisant les deuxième et troisième points de l'hypothèse 3.3.10 sur  $(\varphi_n)$  on obtient

$$|\lambda^2(x) - \lambda^1(x)| \geq c_\varphi \left( 1 - \frac{1}{C_\varphi} \right) \max_m |\lambda_m^2 - \lambda_m^1| \quad \forall x \in \gamma_{n_0}.$$

Notons  $C_{K_N} = c_\varphi(1 - 1/C_\varphi) > 0$  alors pour tout  $(\lambda^1, \eta), (\lambda^2, \eta) \in K_N$  il existe  $n_0$  tel que

$$\frac{1}{\max_m |\lambda_m^2 - \lambda_m^1|} \int_{\gamma_{n_0}} |\lambda^2 - \lambda^1| |u^2|^2 ds \geq C_{K_N} \|u^2\|_{L^2(\gamma_{n_0})}^2. \quad (3.24)$$

Pour conclure, montrons que la norme de  $u^2$  est uniformément bornée inférieurement. Posons  $c_{K_N}^n = \inf_{(\lambda, \eta) \in K_N} \|u\|_{L^2(\gamma_n)}$  où  $u$  est solution de  $\mathcal{P}(\lambda, \eta, \Gamma)$ . supposons que  $c_{K_N}^n = 0$ . L'application  $(\lambda, \eta) \in K_N \mapsto \|u\|_{L^2(\gamma_n)}$  est continue et  $K_N$  est un sous ensemble compact de  $(L^\infty(\Gamma))^2$ . Alors  $c_{K_N}$  est atteinte pour  $(\lambda^0, \eta^0) \in K$ . La solution correspondante  $u^0$  est telle que  $u^0 = 0$  et  $\frac{\partial u^0}{\partial \nu} = 0$  sur  $\gamma_n$  ainsi d'après le principe de continuation unique  $u^0 = 0$  dans  $\Omega_R$  ce qui est en contradiction avec le comportement asymptotique du champ diffracté associé  $u^{0,s}$  loin de  $\Omega$ . On a donc nécessairement  $c_{K_N}^n > 0$  et d'après (3.21), (3.23) et (3.24) on a finalement que si  $\beta < \beta_1$ , alors

$$0 < \min_n c_{K_N}^n \leq f(\beta)$$

où les  $c_{K_N}^n$  et la fonction  $f$  sont indépendants de  $\lambda^1, \lambda^2$  et  $\eta$ . Comme  $f$  est une fonction croissante, il existe  $\beta_2$  toujours indépendante de  $\lambda^1, \lambda^2$  et  $\eta$  telle que si  $\beta < \beta_1$ , l'inégalité  $c_{K_N} \leq f(\beta)$  implique que  $\beta \geq \beta_2$  et on obtient

$$\beta_2 \leq \|v^\infty\|_{L^2(S^{d-1})} = \frac{\|u^{1,\infty} - u^{2,\infty}\|_{L^2(S^{d-1})}}{\max_n |\lambda_n^1 - \lambda_n^2|},$$

ce qui est le résultat annoncé. Comme évoqué quelques lignes auparavant, le cas  $\beta \geq \beta_1$  donne la même conclusion. ■

**Remarque 3.3.12** *Ce résultat de stabilité Lipschitzienne n'est plus valable dans le cas où l'on suppose que les fonctions  $\lambda$  sont seulement continues sur  $\Gamma$ . On remarquera que dans la démonstration il est crucial de n'avoir qu'un nombre fini de fonctions de base  $\varphi_n$ . Ainsi toute méthode numérique où  $\lambda$  est discrétisée dans une base  $(\varphi_n)$  satisfaisant l'hypothèse 3.3.10 devrait être assez robuste pour peu que le nombre de fonctions de base  $N$  ne soit pas trop grand.*

### 3.3.4 Stabilité pour $\eta$

Comme annoncé auparavant, nous montrons dans cette section un résultat de stabilité Lipschitzienne global pour l'identification du paramètre  $\eta$  constant par morceaux lorsque la fonction  $\lambda$  est connue. Nous nous plaçons dans la même configuration que celle de la proposition 3.2.2 pour

établir le théorème suivant. Soit  $c_{K_I}$  une constante strictement positive et  $K_I$  un sous ensemble compact de  $(P_I)^2$  où  $P_I$  désigne l'ensemble des fonctions constantes par morceaux, tels que pour tout  $(\lambda, \eta) \in K_I$ , l'hypothèse 3.1.1 est satisfaite pour la constante  $c = c_{K_I}$ . Dans tout ce qui on notera  $C_{K_I}$  une constante générique strictement positive indépendante des fonctions d'impédances  $\lambda$  et  $\eta$ .

**Théorème 3.3.13** *Sous les même hypothèses que celles de la proposition 3.2.2 et si  $\Gamma$  est de classe  $C^3$ , il existe une constante  $C_{K_I}$  telle que pour tout  $(\lambda, \eta^1)$  et  $(\lambda, \eta^2)$  dans  $K_I$*

$$\|\eta^1 - \eta^2\|_{L^\infty(\Gamma)} \leq C_{K_I} \|T(\lambda, \eta^1, \Gamma) - T(\lambda, \eta^2, \Gamma)\|_{L^2(S^{d-1})}.$$

**Preuve.** La preuve est très similaire à celle du théorème 3.3.11, nous en donnons néanmoins ses grandes lignes. Soient  $u^1$  et  $u^2$  les solutions de  $\mathcal{P}(\lambda, \eta^1, \Gamma)$  et  $\mathcal{P}(\lambda, \eta^2, \Gamma)$  respectivement avec  $u^i(x) = e^{ik\hat{\theta} \cdot x}$  comme onde incidente où  $\hat{\theta} \in S^{d-1}$  est la direction d'incidence. Introduisons la fonction auxiliaire

$$v := \frac{u^2 - u^1}{\|\eta^2 - \eta^1\|_{L^\infty(\Gamma)}}$$

qui est solution du problème de diffraction

$$\begin{cases} \Delta v + k^2 v = 0 & \text{dans } \Omega_{\text{ext}}, \\ \operatorname{div}_\Gamma(\eta^1 \nabla_\Gamma v) + \frac{\partial v}{\partial \nu} + \lambda v = \frac{1}{\|\eta^2 - \eta^1\|_{L^\infty(\Gamma)}} \operatorname{div}_\Gamma[(\eta^1 - \eta^2) \nabla_\Gamma u^2] & \text{sur } \Gamma, \\ \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|x|=R} |\partial_r v - ikv|^2 ds = 0. \end{cases}$$

De la même manière que dans la preuve du théorème 3.3.11, comme  $\eta^1$  et  $\eta^2$  sont constantes sur chaque partition  $S_i$  de  $\Gamma$ , on peut appliquer le lemme 3.3.9 et il existe une constante  $C_{K_I} > 0$  telle que

$$\|v\|_{H^3(\Xi_R^0)} \leq C_{K_I}. \quad (3.25)$$

Concentrons-nous à nouveau sur la condition au bord satisfaite par  $v$ . Sur  $\Gamma_i$  pour  $i = 1, \dots, I$  on a,

$$\frac{\partial v}{\partial \nu} + \eta_i^1 \Delta_\Gamma v + \lambda v = \frac{\eta_i^1 - \eta_i^2}{\|\eta^2 - \eta^1\|_{L^\infty(\Gamma)}} \Delta_\Gamma u^2 \quad \text{sur } \Gamma_i.$$

Nous utilisons les mêmes notations que dans la proposition 3.2.2 et prenons  $x_i \in \tilde{\Gamma}_i$ , on note aussi  $r_i > 0$  le réel correspondant au  $r_0$  de la proposition 3.3.2. Pour  $\gamma_i$  un ouvert de  $\tilde{\Gamma}_i$  strictement inclus dans  $\partial \Xi_R^0 \cap B(x_i, r_i)$  on a

$$\left\| \frac{\partial v}{\partial \nu} + \eta_i^1 \Delta_\Gamma v + \lambda v \right\|_{L^2(\gamma_i)} = \frac{|\eta_i^2 - \eta_i^1|}{\|\eta^2 - \eta^1\|_{L^\infty(\Gamma)}} \|\Delta_\Gamma u^2\|_{L^2(\gamma_i)}. \quad (3.26)$$

Nous procédons exactement comme dans la preuve de 3.3.11 à savoir que l'on va majorer le membre de gauche de cette égalité par une fonction croissante de la norme du champ lointain de  $v$  que l'on note  $v^\infty$ , puis nous minorerons le membre de droite par une constante indépendante de  $\lambda$ ,  $\eta^1$  et  $\eta^2$ .

La partie majoration ne change en rien avec ce que l'on a fait dans la preuve du théorème 3.3.11 et on montre qu'il existe  $\kappa$ ,  $C_{K_I}$ ,  $\beta_1 > 0$  tels que si  $\beta := \|v^\infty\|_{L^2(S^{d-1})} \leq \beta_1$  alors

$$\left\| \frac{\partial v}{\partial \nu} + \eta_i^1 \Delta_\Gamma v + \lambda v \right\|_{L^2(\gamma_i)} \leq \frac{C_{K_I}}{(\ln(C_{K_I}/(\beta g(\beta))))^{\kappa/8}} := f(\beta) \quad (3.27)$$

et les constantes  $\kappa$  et  $\beta_1$  sont indépendantes de  $\lambda$ ,  $\eta^1$  et  $\eta^2$ .

En revanche la minoration est un peu plus compliquée car il faut montrer que  $\Delta_\Gamma u^2$  est minorée uniformément sur les  $\gamma_i$  et non plus seulement  $u^2$ . Posons  $c_{K_I}^i = \inf_{(\lambda, \eta) \in K_I} \|\Delta_\Gamma u\|_{L^2(\gamma_i)}$  où  $u$  et

solution de  $\mathcal{P}(\lambda, \eta, \Gamma)$  avec  $u^i = e^{ik\hat{\theta} \cdot x}$  et supposons que  $c_{K_I}^i = 0$ . L'application  $(\lambda, \eta) \in K_I \mapsto \|\Delta_\Gamma u\|_{L^2(\gamma_i)}$  est continue et  $K_I$  est un sous-ensemble compact de  $(L^\infty(\Gamma))^2$ . Alors la constante  $c_{K_I}^i$  est atteinte pour un couple  $(\lambda^0, \eta^0) \in K_I$ . La solution  $u^0$  correspondante satisfait  $\Delta_\Gamma u^0 = 0$  sur  $\gamma_i$  ce qui est impossible d'après la preuve de la proposition 3.2.2. Ainsi  $c_{K_I}^i > 0$  et d'après (3.26) et (3.27) on obtient pour  $c_{K_I} := \min_{i=1, \dots, I} c_{K_I}^i > 0$

$$\frac{|\eta_i^1 - \eta_i^2|}{\|\eta^1 - \eta^2\|_{L^\infty(\Gamma)}} c_{K_I} \leq f(\beta)$$

si  $\beta \leq \beta_1$ . Ceci devient

$$c_{K_I} \leq f(\beta).$$

La fin de la preuve est la même que dans celle du théorème 3.3.13. ■

### 3.3.5 Optimalité des résultats de stabilité

Dans les deux sections précédentes, nous avons été en mesure de montrer une inégalité de stabilité de type Lipschitzienne pour l'identification de  $\lambda$  puis de  $\eta$ . Afin de terminer cette étude de stabilité nous allons voir que pour l'identification de  $\eta$ , la constante  $C_{K_I}$  explose de manière exponentielle lorsque  $I \rightarrow +\infty$ . Ce phénomène est bien connu et implique notamment que les estimations de stabilité logarithmiques pour  $\lambda$  établies dans [68] et [87] sont optimales comme le montre Sincich dans [88]. Nous allons montrer qu'il en va de même pour l'identification du paramètre  $\eta$  en se basant sur les résultats de [40] qui sont une généralisation d'un premier article de Mandache [73] sur le problème de Calderón. Considérons le problème  $\mathcal{P}(\lambda, \eta, \Gamma)$  dans  $\mathbb{R}^2$  avec  $\Omega = B(0, 1)$  et  $\lambda = 0$ , on note toujours  $P_I$  l'ensemble des fonctions constantes par morceaux sur une partition de  $\Gamma$  par  $I$  ouverts (voir § 3.2.1 pour une définition précise de la partition). On obtient le résultat suivant pour la constante  $C_{K_I}$  du théorème 3.3.13.

**Théorème 3.3.14** *Il existe  $I_0 > 0$  tel que pour tout  $I > I_0$  il existe  $\eta^1$  et  $\eta^2$  dans  $P_I$  tels que*

$$\|\eta^1 - \eta^2\|_{L^\infty(\Gamma)} \geq \frac{1}{I} \tag{3.28}$$

et

$$\|T(0, \eta^1, \Gamma) - T(0, \eta^2, \Gamma)\|_{L^2(S^{d-1})} \leq e^{-I} \tag{3.29}$$

et donc

$$C_{K_I} \geq \frac{e^I}{I}.$$

L'outil principal pour montrer ce théorème est le théorème 2.2 de [40] que nous énonçons ci-dessous, mais avant tout nous rappelons rapidement les différentes notions nécessaires à son énoncé. Soit  $(X, d)$  un espace métrique et  $H$  un espace de Hilbert. Notons aussi  $\gamma : H \setminus \{0\} \rightarrow [0, +\infty]$  une application telle que

$$\gamma(\lambda v) = \gamma(v) \text{ pour tout } v \in H \setminus \{0\} \text{ et } \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Soit  $F$  une fonction de  $X$  dans  $\mathcal{L}(H, H^*)$  l'ensemble des applications linéaires de  $H$  dans  $H^*$ . On fixe aussi un point de référence  $x_0 \in X$  et pour tout  $\varepsilon > 0$  on note  $X_\varepsilon := \{x \in X \text{ tels que } d(x, x_0) \leq \varepsilon\}$ . Enfin, on dira que  $Y_\varepsilon \subset X$  est  $\varepsilon$ -discret si pour tous  $x_1 \neq x_2$  dans  $Y_\varepsilon$  on a  $d(x_1, x_2) \geq \varepsilon$ .

**Théorème 3.3.15** *Supposons que les hypothèses suivantes sont satisfaites.*

- (a) *Il existe trois constantes positives  $\varepsilon_0$ ,  $C_1$  et  $\alpha_1$  telle que pour tout  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$  on peut trouver un ensemble  $\varepsilon$ -discret  $Z_\varepsilon$  contenu dans  $X_\varepsilon$  ayant au moins  $\exp(C_1 \varepsilon^{-\alpha_1})$  éléments.*

(b) Il existe trois constantes positives  $p$ ,  $C_2$  et  $\alpha_2$  et une base orthonormale de  $H$ ,  $\{v_k\}_{k=1, \dots, +\infty}$ , tels que les conditions suivantes sont satisfaites. Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\gamma(v_k) \leq \infty$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\#\{k \in \mathbb{N} \mid \gamma(v_k) \leq n\} \leq C_2(1+n)^p$$

où  $\#$  désigne le nombre d'éléments. Pour tout  $x \in X$  et pour tout  $(k, l) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  on a

$$|\langle F(x)v_k, v_l \rangle| \leq C_2 \exp(-\alpha_2 \max\{\gamma(v_k), \gamma(v_l)\}).$$

Alors il existe  $\varepsilon_1 > 0$  dépendant de  $\varepsilon_0$ ,  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  et  $p$  seulement tel que pour tout  $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$ , on peut trouver  $x_1$  et  $x_2$  dans  $X_\varepsilon$  tels que  $d(x_1, x_2) \geq \varepsilon$  et

$$\|F(x_1) - F(x_2)\|_{\mathcal{L}(H, H^*)} \leq 2 \exp\left(-\varepsilon^{-\alpha_1/2(p+1)}\right).$$

**Remarque 3.3.16** Dans notre cas l'application  $F$  sera à valeur dans  $L^2(S^1)$  et non pas dans l'ensemble des applications linéaires de  $L^2(S^1)$  dans  $L^2(S^1)$  comme ce devrait être le cas pour pouvoir appliquer le théorème 3.3.15. Néanmoins, ce théorème reste toujours valable lorsque  $F$  est une application de  $X$  à valeur dans un espace de Hilbert  $H$ .

**Preuve du théorème 3.3.14.** Pour montrer l'existence de  $\eta^1$  et  $\eta^2$  tels que les inégalités (3.28) et (3.29) soient satisfaites nous allons appliquer le théorème 3.3.15 à notre problème. Pour  $X$  on considère un compact de  $L^\infty(\Gamma)$  tel que l'hypothèse 3.1.1 soit satisfaite, on prend  $H := L^2(S^1)$  et  $F(\eta) := T(0, \eta, \Gamma)$  pour tout  $\eta \in X$ .

Soit un nombre  $I$  d'arcs de cercles qui forment une partition du cercle unité. Posons  $\eta_0 = -1/2$  sur  $\Gamma$  et définissons le sous-ensemble  $\tilde{P}_I$  de  $P_I$  pour  $I > 2$  par

$$\tilde{P}_I := \{\eta \in P_I \text{ tels que } \eta_i \in \{-1/2, -1/2 + 1/I\} \text{ pour } i = 1, \dots, I\}.$$

Ainsi  $\tilde{P}_I$  contient  $2^I$  éléments et donc  $\tilde{P}_I$  satisfait l'hypothèse (a) du théorème 3.3.15 pour  $\varepsilon = 1/I$ ,  $\alpha_1 = 1$  et  $C_1 = \ln(2)$ . En fait  $\tilde{P}_I$  joue le rôle de  $X_\varepsilon$  et  $Z_\varepsilon$  en même temps.

Pour les fonctions de base de  $L^2(S^1)$  on prend

$$v_n^1(\hat{\theta}) = \frac{1}{2\pi} \cos(n\theta) \text{ et } v_n^2(\hat{\theta}) = \frac{1}{2\pi} \sin(n\theta)$$

pour  $\hat{\theta} \in S^1$  et  $n \in \mathbb{N}$  où  $\theta$  est l'angle entre  $\hat{\theta}$  et l'axe des abscisses. Pour tout  $\psi \in L^2(S^1)$  posons

$$\gamma(\psi) := \frac{\|\nabla \psi\|_{L^2(S^1)}}{\|\psi\|_{L^2(S^1)}},$$

ainsi  $\gamma(v_n^i) = n$  pour  $i = 1, 2$  et  $n \in \mathbb{N}$ . La première partie de l'hypothèse (b) est satisfaite pour  $C_2 = 2$  et  $p = 1$ . Pour tout  $\eta \in X$  il existe une famille de coefficients  $(\alpha_n^i)$  pour  $i = 1, 2$  et  $n \in \mathbb{N}$  (on prend  $\alpha_0^2 = 0$ ) tels que

$$T(0, \eta, \Gamma) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n^1 v_n^1 + \alpha_n^2 v_n^2,$$

et il ne reste plus qu'à montrer que les  $\alpha_n^i$  décroissent de manière exponentielle avec  $n$  pour  $i = 1, 2$ . Comme on regarde la diffraction par une sphère, il existe une autre famille de coefficients  $(\beta_n^i)$  pour  $i = 1, 2$  et  $n \in \mathbb{N}$  (on prend  $\beta_0^2 = 0$ ) tels que  $u^s$  le champ proche de  $T(0, \eta, \Gamma)$  se décompose sous la forme

$$u^s(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} (\beta_n^1 v_n^1(\hat{x}) + \beta_n^2 v_n^2(\hat{x})) H_n^1(kr)$$

où on rappelle que  $\hat{x} = x/|x|$ ,  $r = |x|$  et  $H_n^1$  désigne la fonction de Hankel de première espèce et d'ordre  $n$ . Rappelons le comportement asymptotique des fonctions de Hankel lorsque  $r \rightarrow +\infty$  pour  $n$  et  $k$  fixés (voir [1]) :

$$H_n^1(kr) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi k}} e^{-i(2n+1)\pi/4} \frac{e^{ikr}}{\sqrt{r}}, \quad r \rightarrow +\infty$$

et donc en utilisant la définition du champ lointain en dimension 2 (voir (1.18)) on obtient pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et  $i = 1, 2$

$$\alpha_n^i = \beta_n^i \sqrt{\frac{2}{\pi k}} e^{-i(2n+1)\pi/4}$$

et donc

$$|\alpha_n^i| = \sqrt{\frac{2}{\pi k}} |\beta_n^i|. \quad (3.30)$$

Or d'après la proposition 3.3.7 il existe une constante  $C_X$  telle que pour tout  $\eta \in X$  le champ diffracté  $u^s$  correspondant à la solution du problème  $\mathcal{P}(0, \eta, \Gamma)$  est tel que

$$\|u^s\|_{H^1(\Omega_R)} \leq C_X$$

pour  $R > 1$  fixé. On en déduit donc que la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} (\beta_n^1 v_n^1(\hat{x}) + \beta_n^2 v_n^2(\hat{x})) H_n^1(kr)$  est convergente et uniformément bornée par rapport à  $\eta \in X$ . Ainsi en utilisant le comportement asymptotique des fonctions de Hankel lorsque  $n$  devient grand

$$H_n^1(kr) = \mathcal{O}\left(\frac{2n}{ekr}\right)^n, \quad n \rightarrow +\infty,$$

on en déduit qu'il existe une constante  $C_X > 0$  telle que pour tout  $\eta \in X$  et pour tout  $n \geq 1$

$$|\beta_n^i| \leq (C_X n)^{-n}.$$

En utilisant la relation (3.30) on en déduit qu'il existe  $C_1$  et  $C_2$  telles que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , pour  $i = 1, 2$  et pour tout  $\eta \in X$  on a

$$|\alpha_n^i| \leq C_1 \exp(-C_2 n).$$

Toutes les hypothèses du théorème 3.3.15 que l'on applique avec  $\varepsilon = 1/I$  sont satisfaites, il existe  $\eta_1$  et  $\eta_2$  dans  $\tilde{P}_I$  vérifiant (3.28) et (3.29) et donc on a une explosion exponentielle de la constante de stabilité avec le nombre d'intervalles. ■

## 3.4 Étude de stabilité lorsque la géométrie de l'obstacle n'est pas parfaitement connue

### 3.4.1 Les problèmes direct et inverse pour un obstacle perturbé

Dans cette section nous nous intéressons à la question de la stabilité de l'identification de  $\lambda$  et  $\eta$  lorsque l'on a une connaissance approximative de la géométrie de l'obstacle  $\Omega$ . Supposons que  $\Omega$  est de classe  $C^1$  et considérons le problème (1.8) avec une « géométrie perturbée »  $\Gamma_\varepsilon$  de  $\Gamma$  telle qu'il existe une fonction  $\varepsilon \in (C^1(\mathbb{R}^d))^d$  telle que

$$\Gamma_\varepsilon = \{x + \varepsilon(x) ; x \in \Gamma\}.$$

Dès que  $\|\varepsilon\| < 1$ , où  $\|\cdot\|$  désigne la norme  $(W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d))^d$

$$\|\cdot\| = \|\cdot\|_{(L^\infty(\mathbb{R}^d))^d} + \|\nabla \cdot\|_{(L^\infty(\mathbb{R}^d))^{d \times d}},$$

l'application  $f_\varepsilon := \text{Id} + \varepsilon$  où  $\text{Id}$  désigne l'identité de  $\mathbb{R}^d$ , est un difféomorphisme de classe  $C^1$  de  $\mathbb{R}^d$  (voir chapitre 5 de [53]). Soit  $B_\infty^1$  la boule unité ouverte de  $(W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d))^d$ , dans ce qui suit on suppose que  $\varepsilon \in B_\infty^1$ .

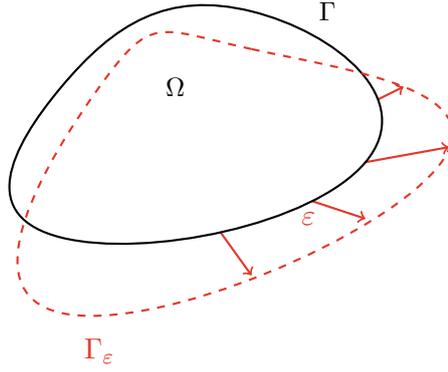


FIGURE 3.6 – Obstacles exact et perturbé.

**Le problème inverse pour une géométrie perturbée.** Supposons que  $\Gamma_\varepsilon$  est connue et que l'on a une approximation  $\lambda_\varepsilon$  et  $\eta_\varepsilon$  sur  $\Gamma_\varepsilon$  des coefficients d'impédance exacts  $\lambda$  et  $\eta$  dans le sens où il existe  $\delta > 0$  tel que

$$\|T(\lambda_\varepsilon, \eta_\varepsilon, \Gamma_\varepsilon) - T(\lambda, \eta, \Gamma)\|_{L^2(S^{d-1})} \leq \delta.$$

A partir de cette information et de la distance entre  $\Gamma$  et  $\Gamma_\varepsilon$ , peut-on établir une estimation d'erreur entre les coefficients approchés  $\lambda_\varepsilon$  et  $\eta_\varepsilon$  et les coefficients exacts  $\lambda$  et  $\eta$ ? Plus précisément, nous aimerions montrer que

$$\|\lambda_\varepsilon \circ f_\varepsilon - \lambda\|_{L^\infty(\Gamma)} + \|\eta_\varepsilon \circ f_\varepsilon - \eta\|_{L^\infty(\Gamma)} \leq g(\delta, \varepsilon) \quad (3.31)$$

pour une fonction  $g$  telle que  $g(\delta, \varepsilon) \rightarrow 0$  lorsque  $\delta \rightarrow 0$  et  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Afin d'obtenir une telle estimation, il faut dans un premier temps montrer que  $T$  est continue par rapport à la géométrie  $\Gamma$  puis un résultat de stabilité pour les impédances à obstacle connu nous permet de conclure.

### 3.4.2 Continuité du champ lointain par rapport à l'obstacle

La première étape pour montrer que le champ lointain dépend de manière continue de la géométrie est de montrer que c'est le cas pour le champ diffracté. Posons  $\tilde{\lambda}_\varepsilon := \lambda \circ f_\varepsilon^{-1}$  et  $\tilde{\eta}_\varepsilon := \eta \circ f_\varepsilon^{-1}$  deux fonctions de  $L^\infty(\Gamma_\varepsilon)$  qui correspondent au transport de  $\lambda$  et  $\eta$  sur le bord  $\Gamma_\varepsilon$ . Soit  $B_R$  une boule de rayon contenant strictement  $\Omega$  et supposons que  $\varepsilon$  est à support compact dans  $B_R$ .

Afin d'évaluer la distance entre la solution  $u$  de  $\mathcal{P}(\lambda, \eta, \Gamma)$  et la solution  $u_\varepsilon$  de  $\mathcal{P}(\tilde{\lambda}_\varepsilon, \tilde{\eta}_\varepsilon, \Gamma_\varepsilon)$  on commence par transporter  $u_\varepsilon$  sur le domaine fixe  $\Omega_R$  en utilisant le difféomorphisme  $f_\varepsilon$  entre  $\Omega_R^\varepsilon := B_R \setminus \overline{\Omega_\varepsilon}$  et  $\Omega_R$ . Dans ce but définissons  $\tilde{u}_\varepsilon := u_\varepsilon \circ f_\varepsilon$ . Enfin, comme précédemment, on considère des impédances  $(\lambda, \eta) \in K$  où  $K$  est un sous-ensemble compact de  $L^\infty(\Gamma) \times L^\infty(\Gamma)$  tel que l'hypothèse 3.1.1 est satisfaite pour une constante  $c = c_K$  ne dépendant que du compact  $K$ . Cette notation sera aussi valable pour la sous-section suivante.

**Théorème 3.4.1** *Il existe deux constantes  $\varepsilon_0 > 0$  et  $C_K > 0$  telles que pour  $(\lambda, \eta) \in K$  et pour tout  $\varepsilon \in B_\infty^1$  tel que  $\|\varepsilon\| \leq \varepsilon_0$  on a*

$$\|\tilde{u}_\varepsilon - u\|_{H_{\Gamma,R}} \leq C_K \|\varepsilon\|.$$

Afin de montrer ce théorème nous aurons besoin du lemme technique suivant dont la preuve est donnée après celle du théorème.

**Lemme 3.4.2** *Il existe une constante  $C > 0$  telle que pour toute perturbation  $\varepsilon \in B_\infty^1$ , toutes fonctions  $u, v \in H^1(\Gamma)$  et  $\eta \in L^\infty(\Gamma)$  on a*

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\Gamma_\varepsilon} (\eta \circ f_\varepsilon^{-1}) \nabla_{\Gamma_\varepsilon} (u \circ f_\varepsilon^{-1}) \cdot \nabla_{\Gamma_\varepsilon} (v \circ f_\varepsilon^{-1}) ds_\varepsilon - \int_\Gamma \eta \nabla_\Gamma u \cdot \nabla_\Gamma v ds \right| \\ & \leq C \|u\|_{H^1(\Gamma)} \|v\|_{H^1(\Gamma)} \|\eta\|_{L^\infty(\Gamma)} \|\varepsilon\|. \end{aligned}$$

**Preuve du théorème 3.4.1** Rappelons la formulation variationnelle en domaine borné associée à  $\mathcal{P}(\lambda, \eta, \Gamma)$  : trouver  $u \in H_{\Gamma,R}$  telle que

$$a(u, v) = l(v) \quad \forall v \in H_{\Gamma,R}$$

et  $a$  est donnée par (3.13) et

$$l(v) := \int_{\partial B_R} f \bar{v} ds \quad \forall v \in H_{\Gamma,R}.$$

Écrivons aussi celle associée à  $\mathcal{P}(\tilde{\lambda}_\varepsilon, \tilde{\eta}_\varepsilon, \Gamma_\varepsilon)$  : trouver  $u_\varepsilon \in H_{\Gamma,R}^\varepsilon := \{v \in H^1(\Omega_R^\varepsilon); v|_{\Gamma_\varepsilon} \in H^1(\Gamma_\varepsilon)\}$  telle que

$$a_\varepsilon(u_\varepsilon, v_\varepsilon) = l(v_\varepsilon) \quad \forall v_\varepsilon \in H_{\Gamma,R}^\varepsilon$$

où

$$a_\varepsilon(u_\varepsilon, v_\varepsilon) := \int_{\Omega_R^\varepsilon} (\nabla u_\varepsilon \cdot \nabla \bar{v}_\varepsilon - k^2 u_\varepsilon \bar{v}_\varepsilon) dx_\varepsilon + \int_{\Gamma_\varepsilon} (\tilde{\eta}_\varepsilon \nabla_{\Gamma_\varepsilon} u_\varepsilon \cdot \nabla_{\Gamma_\varepsilon} \bar{v}_\varepsilon - \tilde{\lambda}_\varepsilon u_\varepsilon \bar{v}_\varepsilon) ds_\varepsilon - \langle S_R u_\varepsilon, v_\varepsilon \rangle.$$

Le second membre pour la formulation dans  $\Omega_R^\varepsilon$  est donné par la forme linéaire  $l$  car la frontière extérieure de  $\Omega_R^\varepsilon$  est la même que celle de  $\Omega_R$ . Définissons aussi une nouvelle forme bilinéaire sur  $H_{\Gamma,R}$

$$\tilde{a}_\varepsilon(u, v) := a_\varepsilon(u \circ f_\varepsilon^{-1}, v \circ f_\varepsilon^{-1}) \quad \forall u, v \in H_{\Gamma,R}$$

qui n'est autre que la forme  $a_\varepsilon$  transportée sur le domaine fixe  $\Omega_R$ . Étant donné que  $f_\varepsilon(\partial B_R) = \partial B_R$ , on en déduit que  $l(v) = l(v \circ f_\varepsilon^{-1})$  et  $\tilde{u}_\varepsilon$  est solution de

$$\tilde{a}_\varepsilon(\tilde{u}_\varepsilon, v) = l(v) \quad \forall v \in H_{\Gamma,R}.$$

De plus pour tout  $v \in H_{\Gamma,R}$ ,  $S_R v = S_R(v \circ f_\varepsilon^{-1})$  et donc pour tout  $u, v \in H_{\Gamma,R}$  on a  $\langle S_R u, v \rangle = \langle S_R(u \circ f_\varepsilon^{-1}), v \circ f_\varepsilon^{-1} \rangle$ . En utilisant les formules de changement de variable dans les intégrales volumiques et surfaciques (voir le chapitre 5 de [53]), on peut donner l'expression de  $\tilde{a}_\varepsilon$  :

$$\begin{aligned} \tilde{a}_\varepsilon(u, v) &= \int_{\Omega_R} (\nabla u \cdot P_\varepsilon \cdot \nabla \bar{v} - k^2 u \bar{v}) J_\varepsilon dx + \int_{\Gamma_\varepsilon} \tilde{\eta}_\varepsilon [\nabla_{\Gamma_\varepsilon} (u \circ f_\varepsilon^{-1})] \cdot [\nabla_{\Gamma_\varepsilon} (\overline{v \circ f_\varepsilon^{-1}})] ds_\varepsilon \\ &\quad - \int_\Gamma \lambda u \bar{v} J_\varepsilon^\nu ds - \langle S_R u, v \rangle \end{aligned}$$

où  $J_\varepsilon := |\det(\nabla f_\varepsilon)|$ ,  $P_\varepsilon := (\nabla f_\varepsilon)^{-1} (\nabla f_\varepsilon)^{-T}$  et  $J_\varepsilon^\nu := J_\varepsilon \left| (\nabla f_\varepsilon)^{-T} \boldsymbol{\nu} \right|$  (pour toute matrice inversible  $B$ ,  $B^{-T}$  est la transposée de l'inverse de  $B$ ). En utilisant les résultats classiques sur les séries de Neumann, on peut écrire le développement suivant pour  $(\nabla f_\varepsilon(x))^{-1} = (\text{Id} + \nabla \varepsilon(x))^{-1}$  uniformément pour  $x \in \Gamma$

$$(\nabla f_\varepsilon)^{-1}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\nabla \varepsilon(x))^n = (1 + \mathcal{O}(\|\varepsilon\|)) \text{Id}.$$

On en déduit le développement de  $P_\varepsilon(x)$  lui aussi uniforme pour  $x \in \Gamma$  :

$$P_\varepsilon(x) = \text{Id}(1 + \mathcal{O}(\|\varepsilon\|))$$

et pour terminer

$$J_\varepsilon(x) = 1 + \mathcal{O}(\|\varepsilon\|) \quad \text{et} \quad J_\varepsilon^\nu(x) = 1 + \mathcal{O}(\|\varepsilon\|)$$

car  $\det(\text{Id} + \nabla \varepsilon(x)) = 1 + \text{div}_\Gamma(\varepsilon) + \mathcal{O}(\|\varepsilon\|^2)$ . On note  $\mathcal{O}$  une fonction  $C^\infty(\mathbb{R})$  telle qu'il existe  $C > 0$  telle que pour tout  $y \in \mathbb{R}$ ,

$$|\mathcal{O}(y)| \leq C|y|.$$

A l'aide de tous ces développements et du lemme 3.4.2 on a pour  $u$  et  $v$  deux éléments de  $H_{\Gamma,R}$

$$\left| \int_{\Omega_R} (\nabla u \cdot P_\varepsilon \cdot \nabla \bar{v} J_\varepsilon - k^2 u \bar{v} J_\varepsilon - \nabla u \cdot \nabla \bar{v} + k^2 u \bar{v}) dx \right| \leq C \|u\|_{H_{\Gamma,R}} \|v\|_{H_{\Gamma,R}} \|\varepsilon\|,$$

$$\left| \int_\Gamma (\lambda u \bar{v} J'_\varepsilon - \lambda u \bar{v}) ds \right| \leq C \|\lambda\|_{L^\infty(\Gamma)} \|u\|_{H_{\Gamma,R}} \|v\|_{H_{\Gamma,R}} \|\varepsilon\|,$$

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Gamma_\varepsilon} (\eta \circ f_\varepsilon^{-1}) \nabla_{\Gamma_\varepsilon}(u \circ f_\varepsilon^{-1}) \cdot \nabla_{\Gamma_\varepsilon}(v \circ f_\varepsilon^{-1}) ds_\varepsilon - \int_\Gamma \eta \nabla_\Gamma u \cdot \nabla_\Gamma v ds \right| \\ \leq C \|u\|_{H_{\Gamma,R}} \|v\|_{H_{\Gamma,R}} \|\eta\|_{L^\infty(\Gamma)} \|\varepsilon\|, \end{aligned}$$

où les constantes  $C$  successives ne dépendent pas de  $\varepsilon$ . On obtient finalement l'inégalité suivante pour la distance entre les formes bilinéaires  $\tilde{a}_\varepsilon$  et  $a$  :

$$|\tilde{a}_\varepsilon(u, v) - a(u, v)| \leq C_K \|u\|_{H_{\Gamma,R}} \|v\|_{H_{\Gamma,R}} \|\varepsilon\| \quad (3.32)$$

où  $C_K$  ne dépend pas de  $\lambda$ ,  $\eta$  et  $\varepsilon$ . D'après le théorème de représentation de Riesz, il existe un unique opérateur  $A_\varepsilon$  de  $H_{\Gamma,R}$  dans lui-même tel que

$$(A_\varepsilon v, w)_{H_{\Gamma,R}} = \tilde{a}_\varepsilon(v, w) \quad \forall v, w \in H_{\Gamma,R}.$$

Rappelons que l'opérateur  $A$  de  $H_{\Gamma,R}$  dans lui-même est défini par

$$(Av, w)_{H_{\Gamma,R}} = a(v, w) \quad \forall v, w \in H_{\Gamma,R}$$

et que l'élément  $F$  de  $H_{\Gamma,R}$  est défini par

$$(F, w)_{H_{\Gamma,R}} = l(w) \quad \forall w \in H_{\Gamma,R}.$$

L'inégalité (3.32) implique directement que

$$\|A_\varepsilon - A\| \leq C_K \|\varepsilon\|.$$

Afin de pouvoir conclure sur la distance entre  $\tilde{a}_\varepsilon$  et  $a$  il faudrait établir une estimation sur la norme de l'inverse de  $A_\varepsilon$ . Dès que  $\|A^{-1}(A_\varepsilon - A)\| \leq 1/2$ , ce qui est vrai par exemple si  $\varepsilon_0 \leq 1/(2C_K^2)$  où  $C_K$  vient de la proposition 3.3.7, la norme de  $A_\varepsilon^{-1}$  satisfait

$$\|A_\varepsilon^{-1}\| \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}(A_\varepsilon - A)\|} \leq 2C_K.$$

Mais comme  $\tilde{a}_\varepsilon - a = A_\varepsilon^{-1}(A - A_\varepsilon)a$  on en déduit que

$$\begin{aligned} \|\tilde{a}_\varepsilon - a\|_{H_{\Gamma,R}} &= \|A_\varepsilon^{-1}((A - A_\varepsilon)a)\|_{H_{\Gamma,R}} \\ &\leq \|A_\varepsilon^{-1}\| \|A - A_\varepsilon\| \|a\|_{H_{\Gamma,R}} \\ &\leq 2C_K^2 \|\varepsilon\| \|a\|_{H_{\Gamma,R}} \leq 2C_K^3 \|\varepsilon\| \|F\|_{H_{\Gamma,R}} \end{aligned}$$

où on utilise à nouveau la proposition 3.3.7 pour obtenir la dernière inégalité. Cette dernière relation n'est autre que le résultat attendu car la norme de  $F$  est bornée par une autre constante  $C_K$  indépendante de  $\varepsilon$ ,  $\lambda$  et  $\eta$ . ■

**Preuve du lemme 3.4.2**

Soient  $u \in H^1(\Gamma)$ ,  $v \in H^1(\Gamma)$  et  $\eta \in L^\infty(\Gamma)$  trois fonctions et  $x_0$  un point de  $\Gamma$ . Comme  $\Gamma$  est de classe  $C^1$  il existe une fonction  $\varphi$  de classe  $C^1$  et un ouvert  $U \subset \mathbb{R}^{d-1}$  tels que

$$\Gamma \cap V = \{\varphi(\xi) ; \xi \in U\}$$

où  $V$  est un voisinage de  $x_0$ . On choisit  $\varphi$  de telle sorte que  $\varphi(0) = x_0$  et que

$$e_i := \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_i}(0), \text{ pour } i = 1, \dots, d-1$$

soit une base orthonormale du plan tangent à  $\Gamma$  en  $x_0$ . En la combinant avec  $f_\varepsilon$ , cette fonction peut servir aussi à paramétrer un voisinage surfacique de  $x_{0,\varepsilon} := f_\varepsilon(x_0)$ . Plus précisément, il existe un voisinage  $V_\varepsilon$  de  $x_{0,\varepsilon}$  tel que

$$\Gamma_\varepsilon \cap V_\varepsilon = \{\varphi_\varepsilon(\xi) ; \xi \in U\}$$

où  $\varphi_\varepsilon := f_\varepsilon \circ \varphi$ . Définissons les vecteurs tangents à  $\Gamma_\varepsilon$  en  $x_{0,\varepsilon} = \varphi_\varepsilon(0)$  par

$$e_{\varepsilon,i} := \frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial \xi_i}(0) \text{ pour } i = 1, \dots, d-1$$

et si on utilise la règle de composition des dérivées, ceci devient

$$e_{\varepsilon,i} = \nabla f_\varepsilon(x_0) e_i. \quad (3.33)$$

La matrice  $\nabla f_\varepsilon(x_0)$  est inversible car  $\|\varepsilon\| < 1$ , et donc la famille  $e_{\varepsilon,i}$  est une base du plan tangent à  $\Gamma_\varepsilon$  en  $x_{\varepsilon,0}$ . Enfin on définit la base covariante du plan cotangent à  $\Gamma$  au point  $x_0$  et à  $\Gamma_\varepsilon$  au point  $x_{0,\varepsilon}$  par

$$e^i \cdot e_j = \delta_j^i \text{ et } e_\varepsilon^i \cdot e_{\varepsilon,j} = \delta_j^i \text{ pour } i, j = 1, \dots, d-1.$$

D'après cette définition et en utilisant la relation (3.33) on obtient

$$e_\varepsilon^i = (\nabla f_\varepsilon)^{-T} e^i \quad i = 1, \dots, d-1.$$

Dans la base covariante à  $\Gamma$ , le gradient tangentiel  $\nabla_\Gamma$  pour tout  $w \in H^1(\Gamma)$  en  $x_0$  est donné par

$$\nabla_\Gamma w(x_0) = \sum_{i=1}^{d-1} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \xi_i}(0) e^i$$

où  $\tilde{w} := w \circ \varphi$ . De même, en  $x_{0,\varepsilon}$  on a pour tout  $w_\varepsilon \in H^1(\Gamma_\varepsilon)$

$$\nabla_{\Gamma_\varepsilon} w_\varepsilon(x_{0,\varepsilon}) = \sum_{i=1}^{d-1} \frac{\partial \tilde{w}_\varepsilon}{\partial \xi_i}(0) e_\varepsilon^i$$

où  $\tilde{w}_\varepsilon := w_\varepsilon \circ \varphi_\varepsilon$ . Par conséquent, pour  $w \in H^1(\Gamma)$

$$\begin{aligned} \nabla_{\Gamma_\varepsilon} (w \circ f_\varepsilon^{-1})(x_{0,\varepsilon}) &= \sum_{i=1}^{d-1} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \xi_i}(0) e_\varepsilon^i \\ &= \sum_{i=1}^{d-1} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \xi_i}(0) (\nabla f_\varepsilon(x_0))^{-T} e^i \\ &= (\nabla f_\varepsilon(x_0))^{-T} \nabla_\Gamma w(x_0) \end{aligned}$$

car  $w \circ f_\varepsilon^{-1} \circ \varphi_\varepsilon = \tilde{w}$ . En fait on vient de montrer que pour tout  $x_\varepsilon = f_\varepsilon(x)$ ,  $x \in \Gamma$  on a

$$\nabla_{\Gamma_\varepsilon} (w \circ f_\varepsilon^{-1})(x_\varepsilon) = (\nabla f_\varepsilon(x))^{-T} \nabla_\Gamma w(x) \quad (3.34)$$

pour tout  $w \in H^1(\Gamma)$ . Revenons à notre problème initial, la formule de changement de variable dans les intégrales de bord donne

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_\varepsilon} (\eta \circ f_\varepsilon^{-1}) \nabla_{\Gamma_\varepsilon}(u \circ f_\varepsilon^{-1}) \cdot \nabla_{\Gamma_\varepsilon}(v \circ f_\varepsilon^{-1}) ds_\varepsilon \\ &= \int_\Gamma \eta(x) [\nabla_{\Gamma_\varepsilon}(u \circ f_\varepsilon^{-1})(f_\varepsilon(x))] \cdot [\nabla_{\Gamma_\varepsilon}(v \circ f_\varepsilon^{-1})(f_\varepsilon(x))] J_\varepsilon^\nu ds \end{aligned}$$

et avec la relation (3.34) on obtient

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_\varepsilon} (\eta \circ f_\varepsilon^{-1}) \nabla_{\Gamma_\varepsilon}(u \circ f_\varepsilon^{-1}) \cdot \nabla_{\Gamma_\varepsilon}(v \circ f_\varepsilon^{-1})^{-1} ds_\varepsilon \\ &= \int_\Gamma \eta(x) [\nabla_\Gamma u(x)] (\nabla f_\varepsilon(x))^{-1} (\nabla f_\varepsilon(x))^{-T} [\nabla_\Gamma v(x)] J_\varepsilon^\nu ds. \end{aligned}$$

Finalement comme

$$(\nabla f_\varepsilon(x))^{-1} (\nabla f_\varepsilon(x))^{-T} = P_\varepsilon(x) = (1 + \mathcal{O}(\|\varepsilon\|)) \text{Id} \quad \text{et} \quad J_\varepsilon^\nu = 1 + \mathcal{O}(\|\varepsilon\|)$$

on obtient

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} (\eta \circ f_\varepsilon^{-1}) \nabla_{\Gamma_\varepsilon}(u \circ f_\varepsilon^{-1}) \cdot \nabla_{\Gamma_\varepsilon}(v \circ f_\varepsilon^{-1}) ds_\varepsilon = (1 + \mathcal{O}(\|\varepsilon\|)) \int_\Gamma \eta \nabla_\Gamma u \cdot \nabla_\Gamma v ds$$

ce qui est le résultat annoncé. ■

Il est maintenant aisé de montrer que le champ lointain dépend continûment du domaine.

**Corollaire 3.4.3** *Il existe deux constantes  $\varepsilon_0 > 0$  et  $C_K$  telles que*

$$\|T(\lambda \circ f_\varepsilon^{-1}, \eta \circ f_\varepsilon^{-1}, \Gamma_\varepsilon) - T(\lambda, \eta, \Gamma)\|_{L^2(S^{d-1})} \leq C_K \|\varepsilon\|,$$

pour tout  $(\lambda, \eta) \in K$  et  $\|\varepsilon\| \leq \varepsilon_0$ .

**Preuve.** Notons  $u^\infty$  le champ lointain correspondant à l'obstacle  $\Omega$  et  $u_\varepsilon^\infty$  celui correspondant à  $\Omega_\varepsilon$ . D'après la formule de représentation intégrale pour le champ lointain sur  $\partial B_R$  et puisque  $\tilde{u}_\varepsilon|_{\partial B_R} = u_\varepsilon|_{\partial B_R}$  on a

$$u_\varepsilon^\infty(\hat{x}) = \int_{\partial B_R} \left( \tilde{u}_\varepsilon(y) \frac{\partial \Phi^\infty(y, \hat{x})}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial \tilde{u}_\varepsilon(y)}{\partial \nu} \Phi^\infty(y, \hat{x}) \right) ds(y).$$

L'opérateur de Dirichlet-à-Neumann extérieur  $S_R$  est continu de  $H^{1/2}(\partial B_R)$  dans  $H^{-1/2}(\partial B_R)$  et donc

$$\left\| \frac{\partial \tilde{u}_\varepsilon}{\partial \nu} \right\|_{H^{-1/2}(\partial B_R)} \leq C \|\tilde{u}_\varepsilon\|_{H^{1/2}(\partial B_R)},$$

ce qui nous mène à

$$\|u_\varepsilon^\infty(\hat{x}) - u^\infty(\hat{x})\|_{L^2(S^{d-1})} \leq C \|\tilde{u}_\varepsilon - u\|_{H^{1/2}(\partial B_R)}.$$

Le théorème de trace de  $H^1(\Omega_R)$  dans  $H^{1/2}(\partial B_R)$  et le théorème 3.4.1 impliquent que l'on a en fait

$$\|u_\varepsilon^\infty(\hat{x}) - u^\infty(\hat{x})\|_{L^2(S^{d-1})} \leq C_K \|\varepsilon\|.$$

■

### 3.4.3 Résultats de stabilité pour les impédances avec un obstacle perturbé

Le point clef pour obtenir de la stabilité par rapport à une perturbation sur l'obstacle est d'avoir de la stabilité pour les impédances à obstacle connu. D'après les résultats que l'on a obtenu dans les § 3.3.3 et 3.3.4, on suppose qu'il existe un compact  $K \subset (L^\infty(\Gamma))^2$  tel que pour tout  $(\lambda, \eta) \in K$  il existe une constante  $C(\lambda, \eta, K)$  qui peut éventuellement dépendre de  $\lambda$ ,  $\eta$  et  $K$  telle que pour tout  $(\tilde{\lambda}, \tilde{\eta}) \in K$  on a

$$\|\lambda - \tilde{\lambda}\|_{L^\infty(\Gamma)} + \|\eta - \tilde{\eta}\|_{L^\infty(\Gamma)} \leq C(\lambda, \eta, K) \|T(\lambda, \eta, \Gamma) - T(\tilde{\lambda}, \tilde{\eta}, \Gamma)\|_{L^2(S^{d-1})}. \quad (3.35)$$

Nous renvoyons le lecteur à [14, Section 4] pour d'autres exemples de compacts  $K$ .

**Théorème 3.4.4** *Il existe une constante  $\varepsilon_0$  telle que pour tout  $(\lambda, \eta) \in K$  il existe une constante  $C(\lambda, \eta, K)$  telle que pour tout  $\|\varepsilon\| \leq \varepsilon_0$  et pour tout  $(\lambda_\varepsilon \circ f_\varepsilon, \eta_\varepsilon \circ f_\varepsilon) \in K$  tels que*

$$\|T(\lambda_\varepsilon, \eta_\varepsilon, \Gamma_\varepsilon) - T(\lambda, \eta, \Gamma)\|_{L^2(S^{d-1})} \leq \delta \quad \text{pour } \delta > 0$$

on a

$$\|\lambda_\varepsilon \circ f_\varepsilon - \lambda\|_{L^\infty(\Gamma)} + \|\eta_\varepsilon \circ f_\varepsilon - \eta\|_{L^\infty(\Gamma)} \leq C(\lambda, \eta, K)(\delta + \|\varepsilon\|).$$

**Preuve.** Dans un premier temps nous utilisons la continuité uniforme du champ lointain par rapport à la géométrie de l'obstacle pour borner la distance entre  $T(\lambda_\varepsilon \circ f_\varepsilon, \eta_\varepsilon \circ f_\varepsilon, \Gamma)$  et  $T(\lambda, \eta, \Gamma)$  à l'aide des données  $\|\varepsilon\|$  et  $\delta$ . Une simple inégalité triangulaire donne

$$\begin{aligned} \|T(\lambda_\varepsilon \circ f_\varepsilon, \eta_\varepsilon \circ f_\varepsilon, \Gamma) - T(\lambda, \eta, \Gamma)\|_{L^2(S^{d-1})} &\leq \|T(\lambda_\varepsilon, \eta_\varepsilon, \Gamma_\varepsilon) - T(\lambda_\varepsilon \circ f_\varepsilon, \eta_\varepsilon \circ f_\varepsilon, \Gamma)\|_{L^2(S^{d-1})} \\ &\quad + \|T(\lambda, \eta, \Gamma) - T(\lambda_\varepsilon, \eta_\varepsilon, \Gamma_\varepsilon)\|_{L^2(S^{d-1})} \end{aligned}$$

mais par hypothèse

$$\|T(\lambda_\varepsilon, \eta_\varepsilon, \Gamma_\varepsilon) - T(\lambda, \eta, \Gamma)\|_{L^2(S^{d-1})} \leq \delta$$

et la continuité du champ lointain par rapport au domaine donne (voir corollaire 3.4.3)

$$\|T(\lambda_\varepsilon, \eta_\varepsilon, \Gamma_\varepsilon) - T(\lambda_\varepsilon \circ f_\varepsilon, \eta_\varepsilon \circ f_\varepsilon, \Gamma)\|_{L^2(S^{d-1})} \leq C_K \|\varepsilon\|$$

car  $\lambda_\varepsilon \circ f_\varepsilon$  et  $\eta_\varepsilon \circ f_\varepsilon$  sont dans  $K$ . Enfin

$$\|T(\lambda_\varepsilon \circ f_\varepsilon, \eta_\varepsilon \circ f_\varepsilon, \Gamma) - T(\lambda, \eta, \Gamma)\|_{L^2(S^{d-1})} \leq C_K(\delta + \|\varepsilon\|)$$

et l'hypothèse de stabilité (3.35) permet de faire le lien entre le champ lointain et les coefficients d'impédance

$$\|\lambda_\varepsilon \circ f_\varepsilon - \lambda\|_{L^\infty(\Gamma)} + \|\eta_\varepsilon \circ f_\varepsilon - \eta\|_{L^\infty(\Gamma)} \leq C(\lambda, \eta, K) \|T(\lambda_\varepsilon \circ f_\varepsilon, \eta_\varepsilon \circ f_\varepsilon, \Gamma) - T(\lambda, \eta, \Gamma)\|_{L^2(S^{d-1})}.$$

■

Le théorème 3.4.4 donne un résultat de stabilité qui est local par rapport aux coefficients d'impédance. Le caractère local est seulement dû à la stabilité locale que l'on a supposé être vérifiée pour le problème de l'identification des impédances à obstacle connu. Dans [14] on trouvera divers exemples de compacts  $K$  tels que l'on ait ce résultat de stabilité locale (3.35). Néanmoins, dans le cas d'une condition d'impédance classique ( $\eta = 0$ ) des résultats de stabilité globaux peuvent être obtenus et utilisés à la place de (3.35) pour obtenir un résultat de stabilité globale pour la reconstruction de  $\lambda$  sur un obstacle perturbé, c'est-à-dire que la constante  $C_K$  serait indépendante de  $\lambda$  (voir le théorème 3.3.11 ou bien les articles [68, 87, 88]). Dans le cas d'une condition d'impédance généralisée, le théorème 3.3.13 donne aussi un résultat de stabilité globale lorsque  $\eta \neq 0$  et  $\lambda$  sont constants par morceaux.

### 3.5 Unicité pour une infinité d'ondes incidentes

Nous concluons ce chapitre avec un résultat d'unicité pour l'identification de la géométrie et des fonctions d'impédance  $\lambda$  et  $\eta$  à partir de la donnée des champs lointains produits par une infinité d'ondes planes pour toutes les directions d'incidence  $\hat{\theta} \in S^{d-1}$ . Afin de bien faire la distinction avec ce qui a été fait dans les sections précédentes, nous noterons  $u^\infty(\hat{x}, \hat{\theta})$  pour  $(\hat{x}, \hat{\theta}) \in (S^{d-1})^2$  le champ lointain correspondant à la diffraction de l'onde incidente  $u^i(x) = e^{ik\hat{\theta} \cdot x}$  et c'est une fonction de  $L^2(S^{d-1} \times S^{d-1})$ . Nous montrons l'unicité sous l'hypothèse de régularité suivante pour  $\lambda$ ,  $\eta$  et la géométrie  $\Gamma$ .

**Hypothèse 3.5.1** *Les fonctions d'impédance  $\lambda$  et  $\eta$  sont respectivement des fonctions de  $C^0(\Gamma)$  et  $C^1(\Gamma)$  et la frontière  $\Gamma$  est de classe  $C^2$ .*

Le théorème suivant donne le résultat d'unicité, c'est en fait une extension du cas  $\eta = 0$  démontré dans [67].

**Théorème 3.5.2** *Supposons que  $(\lambda_1, \eta_1, \Gamma_1)$  et  $(\lambda_2, \eta_2, \Gamma_2)$  satisfont les hypothèses 3.1.1 et 3.5.1, et que leur champ lointain  $u_1^\infty = T(\lambda_1, \eta_1, \Gamma_1)$  et  $u_2^\infty = T(\lambda_2, \eta_2, \Gamma_2)$  sont tels que  $u_1^\infty(\hat{x}, \hat{\theta}) = u_2^\infty(\hat{x}, \hat{\theta})$  pour tout  $\hat{x} \in S^{d-1}$  et  $\hat{\theta} \in S^{d-1}$ . Alors  $\Omega_1 = \Omega_2$  et  $(\lambda_1, \eta_1) = (\lambda_2, \eta_2)$ .*

La preuve de ce théorème fait appel à plusieurs résultats, le premier est un lemme de réciprocité mixte qui reste valable pour des fonctions d'impédances dans  $L^\infty(\Gamma)$  et une géométrie  $\Gamma$  de classe  $C^1$ . On peut en fait le montrer pour un opérateur d'impédance du type de ceux décrits dans le § 1.2.2. Pour tout  $z \in \Omega$ , nous notons  $w^s(\cdot, z)$  la solution de

$$\begin{cases} \Delta v + k^2 v = 0 \text{ dans } \Omega_{\text{ext}}, \\ \frac{\partial v}{\partial \nu} + \text{div}_\Gamma(\eta \nabla_\Gamma v) + \lambda v = f \text{ sur } \Gamma, \\ \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|x|=R} |\partial_r v - ikv|^2 ds = 0 \end{cases} \quad (3.36)$$

avec

$$f = - \left( \frac{\partial \Phi(\cdot, z)}{\partial \nu} + \text{div}_\Gamma(\eta \nabla_\Gamma v \Phi(\cdot, z) + \lambda \Phi(\cdot, z)) \right). \quad (3.37)$$

où  $\Phi(x, z)$  est la fonction de Green sortante de l'équation de Helmholtz au point  $z$ . Le champ lointain associé à  $w^s(\cdot, z)$  est noté  $w^\infty(\cdot, z)$ . De la même manière, nous notons  $u^\infty(\cdot, \hat{\theta})$  le champ lointain associé à la diffraction d'une onde plane  $u^i(x) = e^{ik\hat{\theta} \cdot x}$  de direction d'incidence  $\hat{\theta}$  et  $u^s(\cdot, \hat{\theta})$  le champ diffracté.

**Lemme 3.5.3** *Soient  $\lambda$  et  $\eta$  deux fonctions de  $L^\infty(\Gamma)$  telles que l'hypothèse 3.1.1 est satisfaite. Pour tout  $z \in \Omega_{\text{ext}}$ , et  $\hat{x} \in S^{d-1}$  on a*

$$w^\infty(-\hat{x}, z) = \gamma(d) u^s(z, \hat{x}),$$

où  $\gamma(2) = e^{i\pi/4}/\sqrt{8\pi k}$  et  $\gamma(3) = 1/4\pi$ .

**Preuve.** Pour toutes fonctions  $u_1$  et  $u_2$  de  $H^1(\Gamma)$  satisfaisant

$$\frac{\partial v}{\partial \nu} + \text{div}_\Gamma(\eta \nabla_\Gamma v) + \lambda v = 0 \text{ sur } \Gamma$$

on a

$$\int_\Gamma \left( u_1 \frac{\partial u_2}{\partial \nu} - u_2 \frac{\partial u_1}{\partial \nu} \right) ds = \int_\Gamma (\eta \nabla_\Gamma u_1 \cdot \nabla_\Gamma u_2 - \lambda u_1 u_2 - \eta \nabla_\Gamma u_1 \cdot \nabla_\Gamma u_2 + \lambda u_1 u_2) ds = 0. \quad (3.38)$$

De plus si  $u_1^i$  et  $u_2^i$  sont deux solutions de l'équation de Helmholtz dans  $\Omega$  deux formules de Green successives donnent

$$\int_{\Gamma} \left( u_1^i \frac{\partial u_2^i}{\partial \nu} - u_2^i \frac{\partial u_1^i}{\partial \nu} \right) ds = 0. \quad (3.39)$$

Maintenant, si  $u_1^s$  et  $u_2^s$  sont deux solutions sortantes de l'équation de Helmholtz dans  $\Omega_{\text{ext}}$  elles satisfont

$$\int_{\Gamma} \left( u_1^s \frac{\partial u_2^s}{\partial \nu} - u_2^s \frac{\partial u_1^s}{\partial \nu} \right) ds = 0. \quad (3.40)$$

En combinant ces deux relations et en utilisant (3.38) on obtient pour tout  $\hat{x} \in S^{d-1}$ ,  $z \in \Omega_{\text{ext}}$  et pour  $u_1^i(y) = e^{ik\hat{x}\cdot y}$ ,  $u_1^s(y) = u^s(y, \hat{x})$  et  $u_2^i(y) = \Phi(y, z)$ ,  $u_2^s(y) = w^s(y, z)$

$$\int_{\Gamma} \left( u_1^s \frac{\partial u_2^i}{\partial \nu} - u_2^i \frac{\partial u_1^s}{\partial \nu} \right) ds = \int_{\Gamma} \left( u_2^s \frac{\partial u_1^i}{\partial \nu} - u_1^i \frac{\partial u_2^s}{\partial \nu} \right) ds. \quad (3.41)$$

La formule de représentation de Green sur  $\Gamma$  pour  $u^s(z, \hat{x})$  avec  $z \in \Omega_{\text{ext}}$  et  $\hat{x} \in S^{d-1}$  s'écrit,

$$u^s(z, \hat{x}) = \int_{\Gamma} \left( u^s(y, \hat{x}) \frac{\partial \Phi(y, z)}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial u^s(y, \hat{x})}{\partial \nu(y)} \Phi(y, z) \right) ds(y). \quad (3.42)$$

En utilisant l'équation (3.41) cette formule de représentation devient

$$u^s(z, \hat{x}) = \int_{\Gamma} \left( w^s(y, z) \frac{\partial e^{ik\hat{x}\cdot y}}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial w^s(y, z)}{\partial \nu(y)} e^{ik\hat{x}\cdot y} \right) ds(y). \quad (3.43)$$

Enfin la formule de représentation intégrale pour le champ lointain (1.19) et l'équation ci-dessus donnent

$$\gamma(d) u^s(z, \hat{x}) = w^\infty(-\hat{x}, z).$$

■

Le second lemme dont on a besoin pour la preuve du théorème 3.5.2 est un lemme de densité. Ce lemme est valable pour toutes fonctions d'impédance  $\lambda$ ,  $\eta$  dans  $L^\infty(\Gamma)$  qui satisfont l'hypothèse 3.1.1.

**Lemme 3.5.4** Soit  $u(\cdot, \hat{\theta})$  la solution de  $\mathcal{P}(\lambda, \eta, \Gamma)$  associée à l'onde incidente plane  $u^i(x) = e^{ik\hat{\theta}\cdot x}$  et supposons que pour  $f \in H^{-1}(\Gamma)$ ,

$$\langle u(\cdot, \hat{\theta}), f \rangle = 0, \quad \forall \hat{\theta} \in S^{d-1}.$$

Alors  $f = 0$ .

**Preuve.** Cette preuve est très similaire à celle du lemme 4 de [14] mais nous la reproduisons tout de même ici afin d'avoir un ensemble complet. Soit  $f \in H^{-1}(\Gamma)$  tel que  $\langle u(\cdot, \hat{\theta}), f \rangle = 0$  pour tout  $\hat{\theta} \in S^{d-1}$ . Notons  $v$  l'unique solution de (3.36) avec  $f$  au second membre. Comme  $\langle u(\cdot, \hat{\theta}), f \rangle = 0$  pour tout  $\hat{\theta} \in S^{d-1}$  on a

$$\int_{\Gamma} u(\cdot, \hat{\theta}) \frac{\partial v}{\partial \nu} + \lambda u(\cdot, \hat{\theta}) v + u(\cdot, \hat{\theta}) \operatorname{div}_{\Gamma}(\eta \nabla_{\Gamma} v) ds = 0 \quad \forall \hat{\theta} \in S^{d-1}$$

et en utilisant la condition au bord satisfaite par le champ total  $u = u^s + e^{ik\hat{\theta}\cdot x}$  on obtient

$$\int_{\Gamma} u(\cdot, \hat{\theta}) \frac{\partial v}{\partial \nu} - \frac{\partial u(\cdot, \hat{\theta})}{\partial \nu} v ds = 0 \quad \forall \hat{\theta} \in S^{d-1}.$$

Ainsi d'après (3.40) cette équation devient

$$\int_{\Gamma} e^{ik\hat{\theta}\cdot x} \frac{\partial v}{\partial \nu} - \frac{\partial e^{ik\hat{\theta}\cdot x}}{\partial \nu} v ds = 0 \quad \forall \hat{\theta} \in S^{d-1}$$

et d'après la formule de représentation du champ lointain (1.19) on obtient que  $v^\infty = 0$ . Le lemme de Rellich et le principe de prolongement unique impliquent que  $v = 0$  dans  $\Omega_{\text{ext}}$  et donc on a nécessairement  $f = 0$ . ■

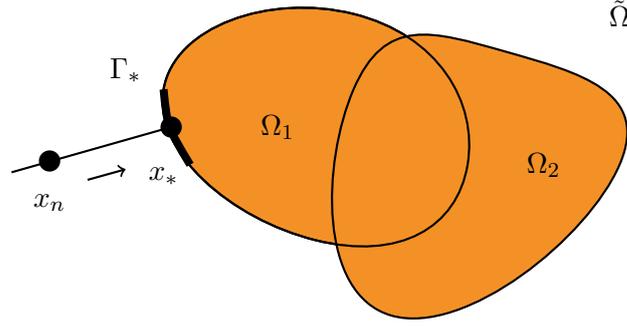


FIGURE 3.7 – Illustration de la preuve du théorème 3.5.2.

### Preuve du théorème 3.5.2

La preuve se déroule en deux temps, dans une première étape nous montrons que  $\Omega_1 = \Omega_2$  en utilisant la méthode présentée dans [57, 62] puis nous en déduisons l'égalité des fonctions d'impédance  $(\lambda_1, \eta_1)$  et  $(\lambda_2, \eta_2)$ . Notons  $\tilde{\Omega}$  la composante non bornée de  $\mathbb{R}^d \setminus \overline{\Omega_1 \cup \Omega_2}$ . D'après le lemme de Rellich et le principe de prolongement unique on a,

$$u_1^s(z, \hat{\theta}) = u_2^s(z, \hat{\theta}), \quad \forall z \in \tilde{\Omega}, \forall \hat{\theta} \in S^{d-1}. \quad (3.44)$$

D'après le principe de réciprocity mixte établi dans le lemme 3.5.3, on obtient

$$w_1^\infty(-\hat{\theta}, z) = w_2^\infty(-\hat{\theta}, z), \quad \forall \hat{\theta} \in S^{d-1}, \forall z \in \tilde{\Omega},$$

où  $w_1^\infty(\cdot, z)$  et  $w_2^\infty(\cdot, z)$  sont les champs lointains des solutions de (3.36) pour  $(\lambda_1, \eta_1, \Gamma_1)$  et  $(\lambda_2, \eta_2, \Gamma_2)$  respectivement avec  $f$  donnée en (3.37). De nouveau d'après le lemme de Rellich et le principe de prolongement unique on a finalement

$$w_1^s(x, z) = w_2^s(x, z), \quad \forall (x, z) \in \tilde{\Omega} \times \tilde{\Omega}. \quad (3.45)$$

Supposons que  $\Omega_1 \not\subset \Omega_2$ . Puisque  $\mathbb{R}^d \setminus \overline{\Omega_2}$  est connexe, il existe un ensemble non vide  $\Gamma_* \subset (\Gamma_1 \cap \partial\tilde{\Omega}) \setminus \overline{\Omega_2}$ . Prenons un point  $x_* \in \Gamma_*$  et considérons la suite

$$x_n = x_* + \frac{\nu_1(x_*)}{n}.$$

Pour  $n$  suffisamment grand,  $x_n \in \tilde{\Omega}$ . D'après (3.45), en notant  $P_1 v := \partial v / \partial \nu + \operatorname{div}_\Gamma(\eta_1 \nabla_\Gamma v) + \lambda_1 v$ , on a

$$P_1 w_2^s(\cdot, x_n) = P_1 w_1^s(\cdot, x_n) \quad \text{sur } \Gamma_*.$$

En utilisant la condition au bord sur  $\Gamma_1$  satisfaite par  $w_1^s$ , ceci devient

$$P_1 w_2^s(\cdot, x_n) = -P_1 \Phi(\cdot, x_n) \quad \text{sur } \Gamma_*.$$

En utilisant l'hypothèse 3.5.1 et le fait que  $w_2^s$  est régulière dans un voisinage de  $\Gamma_*$ , on obtient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P_1 w_2^s(\cdot, x_n) = \frac{\partial w_2^s}{\partial \nu}(\cdot, x_*) + \eta_1 \Delta_\Gamma w_2^s(\cdot, x_*) + \nabla_\Gamma \eta_1 \cdot \nabla_\Gamma w_2^s(\cdot, x_*) + \lambda_1 w_2^s(\cdot, x_*)$$

en tant que fonction de  $L^2(\Gamma_*)$ . D'un autre côté, pour  $x_1 \in \Gamma_* \setminus \{x_*\}$ , on a convergence ponctuelle de la suite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P_1 \Phi(x_1, x_n) = \frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(x_1, x_*) + \eta_1 \Delta_\Gamma \Phi(x_1, x_*) + \nabla_\Gamma \eta_1 \cdot \nabla_\Gamma \Phi(x_1, x_*) + \lambda_1 \Phi(x_1, x_*).$$

On en déduit donc que

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(\cdot, x_*) + \operatorname{div}_\Gamma(\eta_1 \nabla_\Gamma \Phi)(\cdot, x_*) + \lambda_1 \Phi(\cdot, x_*) \in L^2(\Gamma_*). \quad (3.46)$$

Soient  $R_* > r_* > 0$  tels que  $\Gamma \cap B(x_*, R_*) \subset \Gamma_*$ , et soit  $\phi \in C_0^\infty(B(x_*, R_*))$  avec  $\phi = 1$  sur  $\overline{B(x_*, r_*)}$ . Enfin posons  $w_*^s := \phi \Phi(\cdot, x_*)$ ,  $w_*^s$  est solution de

$$\begin{cases} \Delta w_*^s + k^2 w_*^s = f & \text{dans } \Omega_{\text{ext}}^1 \\ \frac{\partial w_*^s}{\partial \nu} + \operatorname{div}_\Gamma(\eta_1 \nabla_\Gamma w_*^s) + \lambda_1 w_*^s = g & \text{sur } \Gamma_1 \\ \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|x|=R} |\partial_r w_*^s - ik w_*^s|^2 ds = 0, \end{cases} \quad (3.47)$$

avec  $\Omega_{\text{ext}}^1 := \mathbb{R}^d \setminus \overline{\Omega_1}$  et

$$\begin{aligned} f &= (\Delta \phi) \Phi(\cdot, x_*) + 2 \nabla \phi \cdot \nabla \Phi(\cdot, x_*), \\ g &= \phi \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(\cdot, x_*) + \operatorname{div}_\Gamma(\eta_1 \nabla_\Gamma \Phi)(\cdot, x_*) + \lambda_1 \Phi(\cdot, x_*) \right) \\ &\quad + \Phi(\cdot, x_*) \left( \frac{\partial \phi}{\partial \nu} + \nabla_\Gamma \eta_1 \cdot \nabla_\Gamma \phi + \eta_1 \Delta_\Gamma \phi \right) + 2 \eta_1 \nabla_\Gamma \Phi(\cdot, x_*) \cdot \nabla_\Gamma \phi. \end{aligned}$$

Comme  $\phi = 1$  dans un voisinage de  $x_*$ , en utilisant (3.46) on a  $f \in L^2(\Omega_{\text{ext}}^1)$  et  $g \in L^2(\Gamma_1)$ . À l'aide de la formulation variationnelle associée au problème auxiliaire (3.47) on peut conclure que  $w_*^s \in H^1(B_{R_*} \setminus \overline{\Omega_1})$ , donc  $\Phi(\cdot, x_*) \in H^1(\Omega_{\text{ext}}^1 \cap B(x_*, r_*))$ . Comme  $\Gamma_1$  est de classe  $C^2$ , on peut trouver un cône  $C_*$  issu de  $x_*$ , d'angle  $\theta_*$ , de rayon  $r_*$  et d'axe porté par  $\xi_* = \nu_1(x_*)$ , tel que  $C_* \subset \Omega_{\text{ext}}^1 \cap B(x_*, r_*)$ . Donc  $\Phi(\cdot, x_*) \in H^1(C_*)$ . En dimension  $d = 3$  (le cas de la dimension 2 est similaire), on a

$$\nabla \Phi(\cdot, x_*) = -\frac{e^{ik|x-x_*|}}{4\pi|x-x_*|^2} \left( \frac{1}{|x-x_*|} - ik \right) (x - x_*),$$

et en utilisant des coordonnées sphériques  $(r, \theta, \phi)$  centrées en  $x_*$ ,

$$\int_{C_*} \frac{dx}{|x-x_*|^4} = \int_0^{r_*} \int_0^{\theta_*} \int_0^{2\pi} \frac{r^2 \sin \theta \, dr d\theta d\phi}{r^4} = +\infty,$$

ce qui contredit le fait que  $\Phi(\cdot, x_*) \in H^1(C_*)$ . Ainsi on a nécessairement  $\Omega_1 \subset \Omega_2$ . De la même manière on prouve que  $\Omega_2 \subset \Omega_1$ , et donc  $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega$ .

Passons à la seconde étape de la preuve qui consiste à montrer que  $(\lambda_1, \eta_1) = (\lambda_2, \eta_2)$ . Posons  $\lambda := \lambda_1 - \lambda_2$  et  $\eta := \eta_1 - \eta_2$ . D'après (3.44), le champ total associé aux ondes incidentes de direction d'incidence  $\hat{\theta}$  satisfait

$$u(x, \hat{\theta}) := u_1(x, \hat{\theta}) = u_2(x, \hat{\theta}) \quad \forall x \in \Omega_{\text{ext}}, \forall \hat{\theta} \in S^{d-1}.$$

D'après la condition au bord sur  $\Gamma$  pour  $u_1$  et  $u_2$  on en déduit que

$$\operatorname{div}_\Gamma(\eta \nabla_\Gamma u(\cdot, \hat{\theta})) + \lambda u(\cdot, \hat{\theta}) = 0 \quad \text{sur } \Gamma, \forall \hat{\theta} \in S^{d-1}.$$

Pour  $\phi \in H^1(\Gamma)$  on obtient alors

$$\langle u(\cdot, \hat{\theta}), \operatorname{div}_\Gamma(\eta \nabla_\Gamma \phi) + \lambda \phi \rangle = 0, \quad \forall \hat{\theta} \in S^{d-1}$$

et d'après le lemme 3.5.4, ceci devient

$$\operatorname{div}_\Gamma(\eta \nabla_\Gamma \phi) + \lambda \phi = 0 \quad \text{sur } \Gamma, \forall \phi \in H^1(\Gamma).$$

En prenant  $\phi = 1$  dans l'équation ci-dessus on obtient  $\lambda = 0$ . On a alors en intégrant par partie sur  $\Gamma$

$$\int_{\Gamma} \eta |\nabla_{\Gamma} \phi|^2 ds = 0, \quad \forall \phi \in H^1(\Gamma).$$

Supposons que  $\eta(x_0) \neq 0$  pour  $x_0 \in \Gamma$ , alors on a par exemple  $\mathcal{R}e(\eta)(x_0) > 0$  sans perte de généralité. Puisque  $\eta$  est continue, il existe  $\varepsilon > 0$  tel que  $\mathcal{R}e(\eta)(x) > 0$  pour tout  $x \in \Gamma \cap B(x_0, \varepsilon)$ . Choisissons  $\phi$  comme étant une fonction régulière non nulle et à support compact dans  $\Gamma \cap B(x_0, \varepsilon)$ . On obtient ainsi que

$$\int_{\Gamma \cap B(x_0, \varepsilon)} \mathcal{R}e(\eta) |\nabla_{\Gamma} \phi|^2 ds = 0,$$

et donc  $\nabla_{\Gamma} \phi = 0$  sur  $\Gamma$ , ce qui implique  $\phi$  est constante sur  $\Gamma$  et donc  $\phi = 0$  sur  $\Gamma$ . Ceci est impossible car on a supposé que  $\phi$  est non nulle. On conclut donc que  $\eta = 0$  sur  $\Gamma$  ce qui termine la preuve. ■

**Remarque 3.5.5** *En fait l'hypothèse de régularité sur le domaine et les coefficients n'est pas nécessaire comme nous le verrons dans le § 7.2.4 à l'aide d'une preuve différente pour l'unicité par rapport à l'obstacle.*

# CALCUL DES DÉRIVÉES DU CHAMP LOINTAIN DANS LE CAS SCALAIRE

## Sommaire

4.1	Dérivée du champ lointain par rapport aux impédances . . . . .	74
4.2	Dérivée du champ lointain par rapport à l'obstacle . . . . .	76
4.2.1	Définition de la dérivée de forme . . . . .	76
4.2.2	Calcul de la dérivée de forme du champ lointain . . . . .	77
4.3	Dérivée de la fonction coût et état adjoint . . . . .	88

**N**OUS continuons à nous intéresser au problème inverse de l'identification de paramètres  $\lambda$  et  $\eta$  et de la forme de l'obstacle  $\Gamma$  à partir de la donnée du champ lointain produit par une ou plusieurs ondes incidentes pour un opérateur d'impédance généralisée de la forme

$$\mathcal{Z} = \operatorname{div}_\Gamma(\eta \nabla_\Gamma \cdot) + \lambda \cdot .$$

De nombreuses méthodes ont été proposées pour reconstruire la forme d'un obstacle à partir d'un nombre infini d'ondes incidentes (voir [24, 29, 72, 76] par exemple) mais aussi dans le cadre d'un nombre fini d'ondes incidentes (voir [51, 86]). Nous proposons ici d'utiliser une méthode classique de résolution qui consiste à minimiser la fonctionnelle quadratique non-linéaire

$$F(\lambda, \eta, \Gamma) := \frac{1}{2} \|T(\lambda, \eta, \Gamma) - u_{\text{obs}}^\infty\|_{L^2(S^{d-1})}^2$$

par rapport aux trois variables  $\lambda$ ,  $\eta$  et  $\Gamma$ . Nous rappelons que  $T$  est l'opérateur qui à une direction d'incidence  $\hat{\theta}$  associe le champ lointain de  $u^s = u - e^{ik\hat{\theta} \cdot x}$  et  $u$  est solution de

$$\mathcal{P}(\lambda, \eta, \Gamma) \begin{cases} \Delta u + k^2 u = 0 \text{ dans } \Omega_{\text{ext}} := \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} + \operatorname{div}_\Gamma(\eta \nabla_\Gamma u) + \lambda u = 0 \text{ sur } \Gamma, \\ u = u^s + e^{ik\hat{\theta} \cdot x}, \\ \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|x|=R} |\partial_r u^s - ik u^s|^2 ds = 0. \end{cases}$$

Le champ  $u_{\text{obs}}^\infty$  représente les données du problème. Les techniques de minimisation ont déjà été utilisées pour la reconstruction d'obstacles avec une condition d'impédance classique (voir [51] par exemple) mais à notre connaissance pas dans le cas d'une condition d'impédance généralisée.

Beaucoup d'algorithmes de minimisation requièrent la connaissance des dérivées de la fonction à minimiser, dans notre cas il s'agit de calculer la dérivée de la fonction  $F$  (et donc du champ lointain) par rapport aux fonctions impédances (cela a déjà été fait dans [14] pour l'impédance généralisée) et par rapport à la forme de l'obstacle. Encore une fois, il existe de nombreux travaux dans la littérature autour du calcul de la dérivée du champ lointain par rapport à l'obstacle pour diverses conditions au bord (voir [81, 54, 82, 66, 50]). Néanmoins, l'étude que nous menons ici est la première dans le cas d'une condition d'impédance généralisée. Nous avons aussi considéré des coefficients d'impédances variables et nous verrons que cette généralisation nécessite une définition particulière de la dérivée de forme.

Ce chapitre est organisé de la manière suivante : dans une première section nous déterminons la dérivée de Fréchet de  $T$  par rapport aux fonctions d'impédance  $\lambda$  et  $\eta$ . Nous détaillons tout particulièrement le calcul de la dérivée de  $T$  par rapport à la géométrie dans la deuxième section. Enfin, nous concluons ce chapitre par le calcul de la dérivée de la fonction coût  $F$  à  $\lambda$ ,  $\eta$  et  $\Gamma$  en introduisant un problème adjoint qui rend le calcul des dérivées simple à implémenter et peu coûteux.

## 4.1 Dérivée de Fréchet du champ lointain par rapport à l'opérateur d'impédance

Nous utilisons toujours les notations introduites dans le § 1.2.1,  $\Omega$  désigne un ouvert borné, simplement connexe de  $\mathbb{R}^d$  pour  $d = 2, 3$ . Sa frontière notée  $\Gamma$  est supposée être de classe  $C^1$  et on note  $\nu$  la normale à  $\Gamma$  dirigée vers l'extérieur de  $\Omega$ . Notons aussi  $B_R$  une boule ouvert de rayon  $R$  telle que  $\Omega \setminus B_R$  et  $S_R$  désigne l'opérateur de Dirichlet-à-Neumann extérieur sur  $\partial B_R$ . Enfin  $\Lambda$  désigne un sous-ensemble de  $L^\infty(\Gamma) \times L^\infty(\Gamma)$  tel que l'hypothèse

**Hypothèse 4.1.1**  $(\lambda, \eta) \in (L^\infty(\Gamma))^2$  sont tels que

$$\text{Im}(\lambda) \geq 0, \text{Im}(\eta) \leq 0 \quad \text{p.p. sur } \Gamma$$

et il existe  $c > 0$  tel

$$\text{Re}(\eta) \geq c \quad \text{p.p. sur } \Gamma$$

soit satisfaite. Dans ce qui suit  $\lambda$  et  $\eta$  sont deux fonctions de  $L^\infty(\Gamma)$  telles que  $(\lambda, \eta) \in \Lambda$  et donc d'après le § 1.2.1, le problème  $\mathcal{P}(\lambda, \eta, \Gamma)$  admet une unique solution dans  $H_{\Gamma, R} := \{v \in H^1(B_R \setminus \bar{\Omega}); v|_\Gamma \in H^1(\Gamma)\}$  pour toute boule  $B_R$  de rayon  $R$  englobant l'obstacle  $\Omega$ . On introduit aussi, pour  $\Gamma$  fixée et une direction d'incidence donnée, l'application

$$\begin{aligned} T_\Gamma : \Lambda &\longrightarrow L^2(S^{d-1}) \\ (\lambda, \eta) &\longmapsto T(\lambda, \eta, \Gamma) \end{aligned}$$

et nous allons montrer que cette application est Fréchet différentiable. Nous rappelons la définition de différentielle au sens de Fréchet pour des espaces de Banach.

**Définition 4.1.2** Soit  $X$  et  $Y$  deux espaces de Banach munis des normes  $\|\cdot\|_X$  et  $\|\cdot\|_Y$  respectivement. Soient  $U \subset X$  et  $V \subset Y$  deux ouverts et  $F$  une application de  $U$  dans  $V$ . L'application  $F$  est Fréchet différentiable si pour tout  $x \in U$  il existe une application linéaire et continue  $F'(x) : X \rightarrow Y$  et une fonction régulière  $o(\cdot) : [0, +\infty[ \rightarrow Y$  telles que

$$F(x+h) = F(x) + F'(x)h + o(\|h\|_X)$$

pour tout  $h \in X$  tel que  $x+h \in U$  et  $o(x)/x \rightarrow 0$  lorsque  $x \rightarrow 0$ . L'application linéaire  $F'(x)$  est la différentielle de Fréchet de  $F$  au point  $x$ .

Comme cela a déjà été démontré dans [14], l'application  $T_\Gamma$  est Fréchet différentiable sur  $\Lambda$  et on donne son expression.

**Théorème 4.1.3** *L'application  $T_\Gamma$  est différentiable sur  $\Lambda$  et pour tout  $(\lambda, \eta) \in \Lambda$  sa différentielle de Fréchet est l'application  $T'_\Gamma(\lambda, \eta) : L^\infty(\Gamma) \times L^\infty(\Gamma) \rightarrow L^2(S^{d-1})$  définie par*

$$T'_\Gamma(\lambda, \eta) \cdot (h, l) = v_{h,l}^\infty$$

où  $v_{h,l}^\infty$  est le champ lointain de l'unique solution sortante  $v_{h,l}^s$  de l'équation de Helmholtz dans  $\Omega_{\text{ext}}$  telle que

$$\frac{\partial v_{h,l}^s}{\partial \nu} + \operatorname{div}_\Gamma \left( \eta \nabla_\Gamma v_{h,l}^s \right) + \lambda v_{h,l}^s = - \left( \operatorname{div}_\Gamma (h \nabla_\Gamma u) + l u \right) \text{ sur } \Gamma$$

où  $u$  est la solution de  $\mathcal{P}(\lambda, \eta, \Gamma)$ .

**Preuve.** Introduisons l'opérateur

$$\begin{aligned} R_\Gamma : \Lambda &\longrightarrow H^{1/2}(\partial B_R) \times H^{-1/2}(\partial B_R) \\ (\lambda, \eta) &\longmapsto \left( u^s|_{\partial B_R}, \frac{\partial u^s}{\partial \nu}|_{\partial B_R} \right) \end{aligned}$$

où  $u^s = u - u^i$  est l'unique solution de  $\mathcal{P}(\lambda, \eta, \Gamma)$  pour une onde incidente  $u^i$  donnée et l'opérateur intégral

$$\begin{aligned} \mathcal{I} : H^{1/2}(\partial B_R) \times H^{-1/2}(\partial B_R) &\longrightarrow L^2(S^{d-1}) \\ (g_1, g_2) &\longmapsto \int_{\partial B_R} \left( g_1(y) \frac{\partial \Phi^\infty(y, \hat{x})}{\partial \nu(y)} - g_2(y) \Phi^\infty(y, \hat{x}) \right) ds(y), \end{aligned}$$

où  $\Phi^\infty$  désigne le champ lointain de la fonction de Green dont on trouvera la définition dans le § 1.2.3. Ainsi d'après la formule de représentation intégrale du champ lointain (1.19) on a

$$T_\Gamma = \mathcal{I} \circ R_\Gamma.$$

L'opérateur  $\mathcal{I}$  étant linéaire, sa différentielle est l'opérateur  $\mathcal{I}$  lui-même. Passons au calcul de la différentielle de  $R_\Gamma$ . Soient  $(\lambda, \eta) \in \Lambda$  et  $(h, l) \in L^\infty(\Gamma) \times L^\infty(\Gamma)$  tel que  $(\lambda + h, \eta + l) \in \Lambda$ . On note aussi  $u$  la solution du problème  $\mathcal{P}(\lambda, \eta, \Gamma)$  et  $u_{h,l}$  la solution de  $\mathcal{P}(\lambda + h, \eta + l, \Gamma)$ . Posons  $e_{h,l}^2 := u_{h,l} - u - v_{h,l}^s$  où  $v_{h,l}^s$  est la fonction introduite dans l'énoncé du théorème. Nous allons montrer que

$$\frac{\|e_{h,l}^2\|_{H_{\Gamma,R}}}{\|h\|_{L^\infty(\Gamma)} + \|l\|_{L^\infty(\Gamma)}} \xrightarrow{h,l \rightarrow 0} 0.$$

On observe que  $e_{h,l}^2$  est une solution sortante de l'équation de Helmholtz à l'extérieur de  $\Omega$ . De plus elle satisfait la condition au bord

$$\frac{\partial e_{h,l}^2}{\partial \nu} + \operatorname{div}_\Gamma \left( \eta \nabla_\Gamma e_{h,l}^2 \right) + \lambda e_{h,l}^2 = - \left( \operatorname{div}_\Gamma (h \nabla_\Gamma e_{h,l}^1) + l e_{h,l}^1 \right) \text{ sur } \Gamma$$

où  $e_{h,l}^1 := u_{h,l} - u$ . Par continuité du problème direct, il existe  $C > 0$  telle que

$$\begin{aligned} \|e_{h,l}^2\|_{H_{\Gamma,R}} &\leq C \|\operatorname{div}_\Gamma (h \nabla_\Gamma e_{h,l}^1) + l e_{h,l}^1\|_{H^{-1}(\Gamma)}, \\ &\leq C \left( \|h\|_{L^\infty(\Gamma)} + \|l\|_{L^\infty(\Gamma)} \right) \|e_{h,l}^1\|_{H^1(\Gamma)}, \end{aligned} \quad (4.1)$$

pour tout  $(h, l) \in K$  tels que  $(\lambda + h, \eta + l) \in \Lambda$ . Comme on l'a déjà montré dans la preuve de la proposition 3.3.7,  $u_{h,l}$  dépend de manière continue de  $(h, l)$  et

$$\lim_{(h,l) \rightarrow 0} \|e_{h,l}^1\|_{H_{\Gamma,R}} = 0. \quad (4.2)$$

De plus  $\frac{\partial e_{h,l}^2}{\partial \nu} = S_R e_{h,l}^2$  sur  $\partial B_R$  donc comme  $S_R$  est continu,

$$\left\| \frac{\partial e_{h,l}^2}{\partial \nu} \right\|_{H^{-1/2}(\partial B_R)} \leq C \|e_{h,l}^2\|_{H^1(\Omega_R)}.$$

D'après cette dernière relation et en utilisant (4.1) et (4.2) on obtient

$$R'_\Gamma(\lambda, \eta) \cdot (h, l) = \left( v_{h,l}^s|_{\partial B_R}, \frac{\partial v_{h,l}^s}{\partial \nu}|_{\partial B_R} \right)$$

et

$$T'_\Gamma(\lambda, \eta) \cdot (h, l) = v_{h,l}^\infty.$$

où  $v_{h,l}^\infty$  est le champ lointain de  $v_{h,l}^s$ . ■

**Remarque 4.1.4** *Lorsqu'elle est injective, la dérivée de Fréchet du champ lointain par rapport aux fonctions  $\lambda$  et  $\eta$  peut servir à montrer des résultats de stabilité locale (i.e. on a l'inégalité (3.35) pour une constante qui dépend de  $\lambda$  et  $\eta$ ) pour l'identification des fonctions d'impédance comme dans [14].*

## 4.2 Dérivée du champ lointain par rapport à l'obstacle

### 4.2.1 Définition de la dérivée de forme

Le calcul de dérivées de formes est maintenant un domaine bien connu (voir [4, 41, 53] par exemple). Néanmoins les techniques habituelles de dérivées de forme semblent difficiles à adapter à notre situation. En effet, les fonctions d'impédance  $\lambda$  et  $\eta$  sont intrinsèquement liées à la géométrie de l'obstacle  $\Omega$  contrairement au cas d'impédances constantes. Pour définir la dérivée de forme de  $T$  autour d'une géométrie  $\Gamma$  il faut donc étendre  $\lambda$  et  $\eta$  à un voisinage de  $\Gamma$ . Ceci nous oblige à introduire une nouvelle définition de la dérivée de forme du champ lointain adaptée au cas de fonctions d'impédance définies sur le bord de l'obstacle, c'est l'objet de la Définition 4.2.1. De plus, nous utiliserons une méthode constructive pour le calcul de la dérivée de forme introduite dans [66] pour des conditions au bord de Dirichlet et de Neumann puis à nouveau utilisée dans [50] pour une condition d'impédance classique dans le cas d'un coefficient d'impédance constant.

Dans toute cette section nous supposons que l'obstacle et les impédances sont réguliers, nous supposons que  $\Gamma$  est de classe  $C^4$ ,  $\lambda \in C^2(\Gamma)$  et  $\eta \in C^3(\Gamma)$ , ce qui implique que la solution de  $\mathcal{P}(\lambda, \eta, \Gamma)$  est dans  $H^4(\Omega_R)$ . Rappelons aussi les définitions introduites dans le § 3.4.1, soit  $\varepsilon \in C^{1,\infty}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$  où  $C^{1,\infty} := C^1 \cap W^{1,\infty}$  est associé à la norme  $\|\varepsilon\| := \|\varepsilon\|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)}$ , dès que  $\|\varepsilon\| < 1$ , l'application  $f_\varepsilon := \text{Id} + \varepsilon$  est un difféomorphisme de classe  $C^1$  de  $\mathbb{R}^d$  dans  $\mathbb{R}^d$ . Pour un obstacle  $\Omega$  donné, on définit une famille d'obstacles perturbés

$$\Omega_\varepsilon = \{x + \varepsilon(x), x \in \Omega\},$$

pour tout  $\varepsilon \in B_1^\infty$  où  $B_1^\infty$  désigne la boule unité ouverte de  $C^{1,\infty}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ . On note  $\Gamma_\varepsilon = \{x + \varepsilon(x) \text{ pour } x \in \Gamma\}$  la frontière de  $\Omega_\varepsilon$  et on supposera que  $R$  est suffisamment grand pour que  $\Omega_\varepsilon \subset B_R$  pour tout  $\varepsilon \in B_1^\infty$ . Enfin les impédances sont étendues sur toutes les surfaces  $\Gamma_\varepsilon$  à l'aide de la formule

$$\lambda_\varepsilon = \lambda \circ f_\varepsilon^{-1}, \quad \eta_\varepsilon = \eta \circ f_\varepsilon^{-1}. \quad (4.3)$$

Pour  $\lambda$ ,  $\eta$  et  $\Gamma$  fixés, nous savons déjà d'après le corollaire 3.4.3 que l'application

$$\begin{aligned} T_{\lambda,\eta}(\Gamma) : B_1^\infty &\longrightarrow L^2(S^{d-1}) \\ \varepsilon &\longmapsto T(\lambda_\varepsilon, \eta_\varepsilon, \Gamma_\varepsilon) \end{aligned}$$

est continue en 0, nous allons montrer dans cette section qu'elle est en fait Fréchet différentiable en 0. Enfin, nous définissons la notion de dérivée de forme comme suit.

**Définition 4.2.1** On dira que l'opérateur champ lointain  $T$  est dérivable par rapport à  $\Gamma$  si  $T_{\lambda,\eta}(\Gamma)$  est Fréchet différentiable en 0. On appelle dérivée de forme de  $T$  la différentielle de Fréchet de  $T_{\lambda,\eta}(\Gamma) : B_1^\infty \rightarrow L^2(S^{d-1})$  en 0 :  $T'_{\lambda,\eta}(\Gamma)(0)$  (voir Définition 4.1.2). On la notera  $T'_{\lambda,\eta}(\Gamma)$ .

**Remarque 4.2.2** Lorsque  $\lambda$  et  $\eta$  sont deux constantes, la définition ci-dessus correspond à la notion de différentielle de Fréchet par rapport à la géométrie telle qu'elle est introduite par exemple dans le chapitre 5 de [53].

Comme dans le cas de la dérivée partielle de  $T$  par rapport aux impédances, nous factorisons  $T_{\lambda,\eta}(\Gamma)$  sous la forme d'un opérateur de résolution du problème direct auquel on applique l'opérateur intégral  $\mathcal{I}$  introduit dans la preuve du théorème 4.1.3. Pour  $\lambda, \eta$  et  $\Gamma$  donnés, introduisons l'opérateur

$$R_{\lambda,\eta}(\Gamma) : B_1^\infty \longrightarrow H^{1/2}(\partial B_R) \times H^{-1/2}(\partial B_R)$$

$$\varepsilon \longmapsto \left( u_\varepsilon^s|_{\partial B_R}, \frac{\partial u_\varepsilon^s}{\partial \boldsymbol{\nu}}|_{\partial B_R} \right)$$

où  $u_\varepsilon$  est l'unique solution de  $\mathcal{P}(\lambda_\varepsilon, \eta_\varepsilon, \Gamma_\varepsilon)$  et on a la décomposition,

$$T_{\lambda,\eta}(\Gamma) = \mathcal{I} \circ R_{\lambda,\eta}(\Gamma).$$

#### 4.2.2 Calcul de la dérivée de forme du champ lointain

Pour calculer la différentielle de Fréchet de  $R_{\lambda,\eta}(\Gamma)$  nous suivons la procédure utilisée dans [66] puis dans [50] qui consiste à écrire la différentielle de forme du champ diffracté à l'aide d'une formule de représentation intégrale. Notons  $u = u^s + e^{ik\hat{\theta} \cdot x}$  la solution de  $\mathcal{P}(\lambda, \eta, \Gamma)$  et  $u_\varepsilon = u_\varepsilon^s + e^{ik\hat{\theta} \cdot x}$  la solution de  $\mathcal{P}(\lambda_\varepsilon, \eta_\varepsilon, \Gamma_\varepsilon)$ . Nous supposons pour le moment que  $\bar{\Omega} \subset \Omega_\varepsilon$  et on a alors la formule de représentation intégrale suivante pour la différence entre les champs diffractés  $u_\varepsilon^s$  et  $u^s$ .

**Lemme 4.2.3** Pour  $x \in \mathbb{R}^d \setminus \bar{\Omega}_\varepsilon$ ,

$$u_\varepsilon^s(x) - u^s(x) = \int_{\Gamma_\varepsilon} u_\varepsilon \left\{ \frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{\nu}_\varepsilon}(\cdot, x) + \operatorname{div}_{\Gamma_\varepsilon}(\eta_\varepsilon \nabla_{\Gamma_\varepsilon} w)(\cdot, x) + \lambda_\varepsilon w(\cdot, x) \right\} ds_\varepsilon,$$

où  $w(\cdot, x) = w^s(\cdot, x) + \Phi(\cdot, x)$  et  $w^s(\cdot, x)$  est la solution de (3.36) où  $f$  est donnée par (3.37) pour  $z = x$ .

**Preuve.** Soit  $x \in \mathbb{R}^d \setminus \bar{\Omega}_\varepsilon$ . On rappelle la formule de représentation intégrale pour le champ diffracté (3.43) établie dans le chapitre précédent :

$$u^s(x) = \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial u^i}{\partial \boldsymbol{\nu}} w^s(\cdot, x) - u^i \frac{\partial w^s}{\partial \boldsymbol{\nu}}(\cdot, x) \right) ds.$$

Une formule de Green dans  $\Omega_\varepsilon \setminus \bar{\Omega}$  et l'utilisation de l'équation de Helmholtz satisfaite par  $u^i$  et  $w^s(\cdot, x)$  permet de transporter cette relation sur  $\Gamma_\varepsilon$

$$u^s(x) = \int_{\Gamma_\varepsilon} \left( \frac{\partial u^i}{\partial \boldsymbol{\nu}_\varepsilon} w^s(\cdot, x) - u^i \frac{\partial w^s}{\partial \boldsymbol{\nu}_\varepsilon}(\cdot, x) \right) ds_\varepsilon.$$

Comme  $u_\varepsilon^s$  et  $w^s(\cdot, x)$  sont des solutions sortantes de l'équation de Helmholtz à l'extérieur de  $\Omega_\varepsilon$ , en utilisant (3.40) cette intégrale devient

$$u^s(x) = \int_{\Gamma_\varepsilon} \left( \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \boldsymbol{\nu}_\varepsilon} w^s(\cdot, x) - u_\varepsilon \frac{\partial w^s}{\partial \boldsymbol{\nu}_\varepsilon}(\cdot, x) \right) ds_\varepsilon.$$

La condition au bord satisfaite par  $u_\varepsilon$  sur  $\Gamma_\varepsilon$  implique

$$-u^s(x) = \int_{\Gamma_\varepsilon} u_\varepsilon \left( \frac{\partial w^s}{\partial \boldsymbol{\nu}_\varepsilon}(\cdot, x) + \operatorname{div}_{\Gamma_\varepsilon}(\eta_\varepsilon \nabla_{\Gamma_\varepsilon} w^s)(\cdot, x) + \lambda_\varepsilon w^s(\cdot, x) \right) ds_\varepsilon.$$

En utilisant la formule de représentation intégrale pour le champ diffracté (3.42) pour  $u_\varepsilon^s$  et  $\Gamma_\varepsilon$  ainsi que la relation (3.39), on a

$$u_\varepsilon^s(x) = \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\nu}_\varepsilon}(\cdot, x) u_\varepsilon - \Phi(\cdot, x) \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \boldsymbol{\nu}_\varepsilon} \right) ds.$$

D'après la condition au bord satisfaite par  $u_\varepsilon$  sur  $\Gamma_\varepsilon$  on obtient que pour  $x \in \mathbb{R}^d \setminus \overline{\Omega_\varepsilon}$ ,

$$u_\varepsilon^s(x) = \int_{\Gamma_\varepsilon} u_\varepsilon \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\nu}_\varepsilon}(\cdot, x) + \operatorname{div}_{\Gamma_\varepsilon}(\eta_\varepsilon \nabla_{\Gamma_\varepsilon} \Phi)(\cdot, x) + \lambda_\varepsilon \Phi(\cdot, x) \right) ds.$$

Pour  $x \in \mathbb{R}^d \setminus \overline{\Omega_\varepsilon}$  définissons la fonction  $w(\cdot, x) = w^s(\cdot, x) + \Phi(\cdot, x)$  sur  $\Gamma_\varepsilon$ , si on additionne les deux dernières équations on trouve la formule du lemme. ■

En utilisant la continuité du champ diffracté par rapport à la géométrie établie dans le théorème 3.4.1 on peut remplacer  $u_\varepsilon$  par  $u$  dans la formule de représentation intégrale du lemme 4.2.3 à l'ordre  $\mathcal{O}(\|\varepsilon\|^2)$ . Comme dans le chapitre précédent,  $\mathcal{O}(\cdot)$  désigne une fonction régulière de  $[0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  telle qu'il existe  $C > 0$  telle que pour tout  $x \in [0, +\infty[$  on ait  $|\mathcal{O}(x)| \leq C|x|$ .

**Lemme 4.2.4** *Soit  $w$  la fonction définie dans le lemme 4.2.3,*

$$u_\varepsilon^s(x) - u^s(x) = \int_{\Gamma_\varepsilon} u \left\{ \frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{\nu}_\varepsilon}(\cdot, x) + \operatorname{div}_{\Gamma_\varepsilon}(\eta_\varepsilon \nabla_{\Gamma_\varepsilon} w)(\cdot, x) + \lambda_\varepsilon w(\cdot, x) \right\} ds_\varepsilon + \mathcal{O}(\|\varepsilon\|^2),$$

uniformément pour  $x$  dans chaque sous-ensemble compact  $K \subset \mathbb{R}^d \setminus \overline{\Omega_\varepsilon}$ .

**Preuve.** D'après le lemme 4.2.3, pour tout  $x \in \mathbb{R}^d \setminus \overline{\Omega_\varepsilon}$ ,

$$\begin{aligned} u_\varepsilon^s(x) - u^s(x) &= \int_{\Gamma_\varepsilon} u \left\{ \frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{\nu}_\varepsilon}(\cdot, x) + \operatorname{div}_{\Gamma_\varepsilon}(\eta_\varepsilon \nabla_{\Gamma_\varepsilon} w)(\cdot, x) + \lambda_\varepsilon w(\cdot, x) \right\} ds_\varepsilon \\ &\quad + \int_{\Gamma_\varepsilon} (u_\varepsilon - u) \left\{ \frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{\nu}_\varepsilon}(\cdot, x) + \operatorname{div}_{\Gamma_\varepsilon}(\eta_\varepsilon \nabla_{\Gamma_\varepsilon} w)(\cdot, x) + \lambda_\varepsilon w(\cdot, x) \right\} ds_\varepsilon. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Nous allons montrer que la deuxième intégrale de cette égalité est un terme en  $\mathcal{O}(\|\varepsilon\|^2)$ .

Tout d'abord remarquons que

$$\begin{aligned} &\int_{\Gamma_\varepsilon} (u_\varepsilon - u) \left\{ \frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{\nu}_\varepsilon}(\cdot, x) + \operatorname{div}_{\Gamma_\varepsilon}(\eta_\varepsilon \nabla_{\Gamma_\varepsilon} w)(\cdot, x) + \lambda_\varepsilon w(\cdot, x) \right\} ds_\varepsilon \\ &= \int_{\Gamma_\varepsilon} (u_\varepsilon - u) \frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{\nu}_\varepsilon} ds_\varepsilon - \int_{\Gamma_\varepsilon} \eta_\varepsilon \nabla_{\Gamma_\varepsilon} (u_\varepsilon - u) \cdot \nabla_{\Gamma_\varepsilon} w ds_\varepsilon + \int_{\Gamma_\varepsilon} \lambda_\varepsilon (u_\varepsilon - u) w ds_\varepsilon, \end{aligned} \quad (4.5)$$

Nous traitons le membre de droite de (4.5) terme par terme, notons  $\tilde{u}_\varepsilon = u_\varepsilon \circ f_\varepsilon$ ,  $\hat{u}_\varepsilon = u \circ f_\varepsilon$  et  $\hat{w}_\varepsilon = w \circ f_\varepsilon$ , le changement de variable  $x_\varepsilon = f_\varepsilon(x)$  dans la troisième intégrale donne (voir [53, proposition 5.4.3])

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} \lambda_\varepsilon (u_\varepsilon - u) w ds_\varepsilon = \int_{\Gamma} \lambda(\tilde{u}_\varepsilon - \hat{u}_\varepsilon) \hat{w}_\varepsilon J_\varepsilon^\nu ds,$$

on rappelle que  $J_\varepsilon^\nu = \left| \det(\nabla f_\varepsilon)(\nabla f_\varepsilon)^{-T} \boldsymbol{\nu} \right|$  désigne le Jacobien surfacique du changement de variable. On en déduit que

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} \lambda_\varepsilon (u_\varepsilon - u) w ds_\varepsilon - \int_{\Gamma} \lambda(\tilde{u}_\varepsilon - \hat{u}_\varepsilon) w ds = \int_{\Gamma} \lambda(\tilde{u}_\varepsilon - \hat{u}_\varepsilon) (\hat{w}_\varepsilon J_\varepsilon^\nu - w) ds$$

et

$$\left| \int_{\Gamma_\varepsilon} \lambda_\varepsilon (u_\varepsilon - u) w ds_\varepsilon - \int_{\Gamma} \lambda(\tilde{u}_\varepsilon - \hat{u}_\varepsilon) w ds \right| \leq \|\lambda\|_{L^\infty(\Gamma)} \|\tilde{u}_\varepsilon - \hat{u}_\varepsilon\|_{L^2(\Gamma)} U_\varepsilon(x)$$

avec

$$U_\varepsilon(x) = \|((w \circ f_\varepsilon) J_\varepsilon^\nu - w)(\cdot, x)\|_{L^2(\Gamma)}.$$

Pour ce qui est de la seconde intégrale

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} \eta_\varepsilon \nabla_{\Gamma_\varepsilon} (u_\varepsilon - u) \cdot \nabla_{\Gamma_\varepsilon} w \, ds_\varepsilon = \int_{\Gamma_\varepsilon} (\eta \circ f_\varepsilon^{-1}) \nabla_{\Gamma_\varepsilon} ((\tilde{u}_\varepsilon - \hat{u}_\varepsilon) \circ f_\varepsilon^{-1}) \cdot \nabla_{\Gamma_\varepsilon} (\hat{w}_\varepsilon \circ f_\varepsilon^{-1}) \, ds_\varepsilon$$

Mais comme on l'a montré dans la preuve du lemme 3.4.2, pour  $z \in H^1(\Gamma)$ ,  $x \in \Gamma$  et  $x_\varepsilon = f_\varepsilon(x)$ , on a

$$\nabla_{\Gamma_\varepsilon} (z \circ f_\varepsilon^{-1})(x_\varepsilon) = (\nabla f_\varepsilon(x))^{-T} \nabla_\Gamma z(x).$$

Donc

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} \eta_\varepsilon \nabla_{\Gamma_\varepsilon} (u_\varepsilon - u) \cdot \nabla_{\Gamma_\varepsilon} w \, ds_\varepsilon = \int_\Gamma \eta \nabla_\Gamma (\tilde{u}_\varepsilon - \hat{u}_\varepsilon) \cdot P_\varepsilon \cdot \nabla_\Gamma \hat{w}_\varepsilon J_\varepsilon^\nu \, ds,$$

avec  $P_\varepsilon := (\nabla f_\varepsilon)^{-1} (\nabla f_\varepsilon)^{-T}$  et donc

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_\varepsilon} \eta_\varepsilon \nabla_{\Gamma_\varepsilon} (u_\varepsilon - u) \cdot \nabla_{\Gamma_\varepsilon} w \, ds_\varepsilon - \int_\Gamma \eta \nabla_\Gamma (\tilde{u}_\varepsilon - \hat{u}_\varepsilon) \cdot \nabla_\Gamma w \, ds \\ &= \int_\Gamma \eta \nabla_\Gamma (\tilde{u}_\varepsilon - \hat{u}_\varepsilon) \cdot (J_\varepsilon^\nu P_\varepsilon \cdot \nabla_\Gamma \hat{w}_\varepsilon - \nabla_\Gamma w) \, ds. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\Gamma_\varepsilon} \eta_\varepsilon \nabla_{\Gamma_\varepsilon} (u_\varepsilon - u) \cdot \nabla_{\Gamma_\varepsilon} w \, ds_\varepsilon - \int_\Gamma \eta \nabla_\Gamma (\tilde{u}_\varepsilon - \hat{u}_\varepsilon) \cdot \nabla_\Gamma w \, ds \right| \\ & \leq \|\eta\|_{L^\infty(\Gamma)} \|\tilde{u}_\varepsilon - \hat{u}_\varepsilon\|_{H^1(\Gamma)} V_\varepsilon(x) \end{aligned}$$

avec

$$V_\varepsilon(x) = \| (J_\varepsilon^\nu P_\varepsilon \cdot \nabla_\Gamma (w \circ f_\varepsilon) - \nabla_\Gamma w)(\cdot, x) \|_{L^2(\Gamma)}.$$

Il ne reste plus qu'à traiter la première intégrale

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_\varepsilon} (u_\varepsilon - u) \frac{\partial w}{\partial \nu_\varepsilon} \, ds_\varepsilon &= \int_{\Gamma_\varepsilon} ((\tilde{u}_\varepsilon - \hat{u}_\varepsilon) \circ f_\varepsilon^{-1}) \nabla (\hat{w}_\varepsilon \circ f_\varepsilon^{-1}) \cdot \nu_\varepsilon \, ds_\varepsilon \\ &= \int_{\Gamma_\varepsilon} ((\tilde{u}_\varepsilon - \hat{u}_\varepsilon) \circ f_\varepsilon^{-1}) (\nabla f_\varepsilon)^{-T} \cdot (\nabla \hat{w}_\varepsilon \circ f_\varepsilon^{-1}) \cdot \nu_\varepsilon \, ds_\varepsilon \\ &= \int_\Gamma (\tilde{u}_\varepsilon - \hat{u}_\varepsilon) \nabla \hat{w}_\varepsilon \cdot (\nabla f_\varepsilon)^{-1} \cdot (\nu_\varepsilon \circ f_\varepsilon) J_\varepsilon^\nu \, ds. \end{aligned}$$

Alors

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} (u_\varepsilon - u) \frac{\partial w}{\partial \nu_\varepsilon} \, ds_\varepsilon - \int_\Gamma (\tilde{u}_\varepsilon - \hat{u}_\varepsilon) \frac{\partial w}{\partial \nu} \, ds = \int_\Gamma (\tilde{u}_\varepsilon - \hat{u}_\varepsilon) (J_\varepsilon^\nu \nabla \hat{w}_\varepsilon \cdot (\nabla f_\varepsilon)^{-1} \cdot (\nu_\varepsilon \circ f_\varepsilon) - \nabla w \cdot \nu) \, ds,$$

et donc

$$\left| \int_{\Gamma_\varepsilon} (u_\varepsilon - u) \frac{\partial w}{\partial \nu_\varepsilon} \, ds_\varepsilon - \int_\Gamma (\tilde{u}_\varepsilon - \hat{u}_\varepsilon) \frac{\partial w}{\partial \nu} \, ds \right| \leq \|\tilde{u}_\varepsilon - \hat{u}_\varepsilon\|_{H^{1/2}(\Gamma)} W_\varepsilon(x)$$

avec

$$W_\varepsilon(x) = \| J_\varepsilon^\nu \nabla (w \circ f_\varepsilon) \cdot (\nabla f_\varepsilon)^{-1} \cdot (\nu_\varepsilon \circ f_\varepsilon) - \nabla w \cdot \nu \|_{H^{-1/2}(\Gamma)}.$$

On a montré dans la preuve du théorème 3.4.1 que

$$J_\varepsilon^\nu(x) = 1 + \mathcal{O}(\|\varepsilon\|), \quad P_\varepsilon(x) = \text{Id}(1 + \mathcal{O}(\|\varepsilon\|)),$$

et on peut en déduire que

$$U_\varepsilon(x), V_\varepsilon(x), W_\varepsilon(x) = \mathcal{O}(\|\varepsilon\|),$$

uniformément pour  $x$  dans un ensemble compact  $K \subset \mathbb{R}^d \setminus \overline{\Omega_\varepsilon}$  donné.

D'un autre côté,

$$\|\tilde{u}_\varepsilon - \hat{u}_\varepsilon\|_{H^1(\Gamma)} \leq \|\tilde{u}_\varepsilon - u\|_{H^1(\Gamma)} + \|\hat{u}_\varepsilon - u\|_{H^1(\Gamma)}.$$

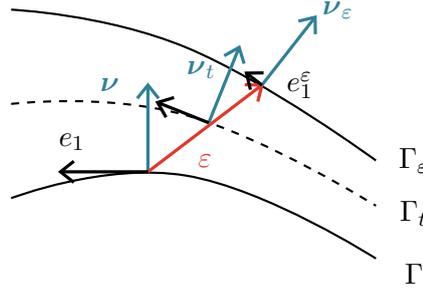


FIGURE 4.1 – Extension des objets surfaciques.

Or, d'après le résultat de continuité par rapport à l'obstacle obtenu dans le théorème 3.4.1,

$$\|\tilde{u}_\varepsilon - u\|_{H^1(\Gamma)} = \mathcal{O}(\|\varepsilon\|),$$

et comme  $\hat{u}_\varepsilon = u \circ f_\varepsilon$  et  $u \in H^4(\Omega_R) \subset C^2(\overline{\Omega_R})$ ,

$$\|\hat{u}_\varepsilon - u\|_{H^1(\Gamma)} = \mathcal{O}(\|\varepsilon\|).$$

On vient finalement de montrer que

$$\left| \int_{\Gamma_\varepsilon} (u_\varepsilon - u) \frac{\partial w}{\partial \nu_\varepsilon} ds_\varepsilon - \int_\Gamma (\tilde{u}_\varepsilon - \hat{u}_\varepsilon) \frac{\partial w}{\partial \nu} ds \right| = \mathcal{O}(\|\varepsilon\|^2),$$

$$\left| \int_{\Gamma_\varepsilon} \eta_\varepsilon \nabla_{\Gamma_\varepsilon} (u_\varepsilon - u) \cdot \nabla_{\Gamma_\varepsilon} w ds_\varepsilon - \int_\Gamma \eta \nabla_\Gamma (\tilde{u}_\varepsilon - \hat{u}_\varepsilon) \cdot \nabla_\Gamma w ds \right| = \mathcal{O}(\|\varepsilon\|^2)$$

et

$$\left| \int_{\Gamma_\varepsilon} \lambda_\varepsilon (u_\varepsilon - u) w ds_\varepsilon - \int_\Gamma \lambda (\tilde{u}_\varepsilon - \hat{u}_\varepsilon) w ds \right| = \mathcal{O}(\|\varepsilon\|^2).$$

Revenons à (4.5), grâce à la condition au bord satisfaite par  $w(\cdot, x)$  sur  $\Gamma$ , on obtient finalement que

$$\begin{aligned} 0 &= \int_\Gamma (\tilde{u}_\varepsilon - \hat{u}_\varepsilon) \frac{\partial w}{\partial \nu} ds - \int_\Gamma \eta \nabla_\Gamma (\tilde{u}_\varepsilon - \hat{u}_\varepsilon) \cdot \nabla_\Gamma w ds + \int_\Gamma \lambda (\tilde{u}_\varepsilon - \hat{u}_\varepsilon) w ds \\ &= \int_{\Gamma_\varepsilon} (u_\varepsilon - u) \frac{\partial w}{\partial \nu_\varepsilon} ds_\varepsilon - \int_{\Gamma_\varepsilon} \eta_\varepsilon \nabla_{\Gamma_\varepsilon} (u_\varepsilon - u) \cdot \nabla_{\Gamma_\varepsilon} w ds_\varepsilon + \int_{\Gamma_\varepsilon} \lambda_\varepsilon (u_\varepsilon - u) w ds_\varepsilon + \mathcal{O}(\|\varepsilon\|^2), \end{aligned}$$

et donc

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} (u_\varepsilon - u) \left\{ \frac{\partial w}{\partial \nu_\varepsilon}(\cdot, x) + \operatorname{div}_{\Gamma_\varepsilon} (\eta_\varepsilon \nabla_{\Gamma_\varepsilon} w)(\cdot, x) + \lambda_\varepsilon w(\cdot, x) \right\} ds_\varepsilon = \mathcal{O}(\|\varepsilon\|^2),$$

ce qui conclut la preuve d'après la relation (4.4). ■

L'étape suivante consiste à transporter la représentation surfacique sur  $\Gamma_\varepsilon$  du lemme 4.2.4 en une représentation surfacique écrite sur  $\Gamma$  en utilisant le théorème de divergence. On a donc besoin d'étendre les quantité surfaciques  $\lambda_\varepsilon$ ,  $\eta_\varepsilon$ ,  $\nu_\varepsilon$  et  $\nabla_{\Gamma_\varepsilon}$  dans tout le domaine  $\Omega_\varepsilon \setminus \overline{\Omega}$ . Comme  $\Gamma$  est de classe  $C^1$ , pour tout  $x_0 \in \Gamma$ , il existe une fonction  $\varphi$  de classe  $C^1$  et deux ouverts  $U \subset \mathbb{R}^{d-1}$  et  $V \subset \mathbb{R}^d$  qui sont des voisinages de 0 et  $x_0$  respectivement tels que  $\varphi(0) = x_0$  et

$$\Gamma \cap V = \{\varphi(\xi); \xi \in U\}.$$

Pour  $t \in [0, 1]$  définissons

$$f_t := \operatorname{Id} + t\varepsilon, \quad \varphi_t := f_t \circ \varphi,$$

la fonction  $\varphi_t$  permet de paramétrer  $\Gamma_t = (\text{Id} + t\varepsilon)(\Gamma)$  au voisinage de  $x_0^t := f_t(x_0)$ , et les vecteurs tangents à  $\Gamma_t$  au point  $x_0^t$  s'écrivent

$$e_j^t = \frac{\partial \varphi_t}{\partial \xi_j} = (\text{Id} + t\nabla \varepsilon) \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_j} = (\text{Id} + t\nabla \varepsilon) e_j, \quad \text{pour } j = 1, d-1 \quad (4.6)$$

où  $(\nabla \varepsilon)_{i,j} = \partial \varepsilon_i / \partial x_j$  est la matrice Jacobienne de  $\varepsilon$ . Comme dans la preuve du lemme 3.4.2 on définit la base covariante  $(e_t^i)$  sur  $\Gamma_t$  au point  $x_0^t$  par

$$e_t^i \cdot e_j^t = \delta_j^i, \quad \text{pour } i, j = 1, d-1, \quad (4.7)$$

de plus, la normale unitaire sortante à  $\Gamma_t$  au point  $x_0^t$  est donnée par

$$\nu_t = \frac{e_1^t \times e_2^t}{|e_1^t \times e_2^t|}$$

et le gradient surfacique de  $w \in H^1(\Gamma_t)$  s'écrit

$$\nabla_{\Gamma_t} w(x_0^t) = \sum_{i=1}^{d-1} \frac{\partial \tilde{w}_t}{\partial \xi_i}(0) e_t^i \quad (4.8)$$

où  $\tilde{w}_t = w \circ \varphi_t$ . Ce procédé nous permet de définir une extension de la normale  $\nu$  et du gradient surfacique à tout le domaine  $\Omega_\varepsilon \setminus \overline{\Omega}$ . De la même manière, les impédances  $\lambda$  et  $\eta$  sont étendues dans  $\Omega_\varepsilon \setminus \overline{\Omega}$  par

$$\lambda_t := \lambda \circ f_t^{-1} \text{ et } \eta_t := \eta \circ f_t^{-1}.$$

Revenons à la formule de représentation intégrale du lemme 4.2.3 pour  $u_\varepsilon^s - u^s$ .

**Lemme 4.2.5** *Soit  $w$  la fonction définie dans le lemme 4.2.3. Alors,*

$$\begin{aligned} & u_\varepsilon^s(x) - u^s(x) \\ &= \int_{\Gamma} (\varepsilon \cdot \nu) \operatorname{div} \left( -\eta_t \nabla_{\Gamma_t} u \cdot \nabla_{\Gamma_t} w(\cdot, x) \nu_t + u \nabla w(\cdot, x) + \lambda_t u w(\cdot, x) \nu_t \right) |_{t=0} ds + \mathcal{O}(\|\varepsilon\|^2), \end{aligned}$$

uniformément pour  $x$  dans un compact  $K \subset \mathbb{R}^d \setminus \overline{\Omega_\varepsilon}$ .

**Preuve.** La preuve repose sur le théorème de divergence et l'utilisation d'un changement de variable. En utilisant les extensions introduites ci-dessus et en remarquant que  $\nu_0 = \nu$  et  $\nu_1 = \nu_\varepsilon$ ,

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_\varepsilon} \left\{ u \frac{\partial w}{\partial \nu_\varepsilon} - \eta_\varepsilon \nabla_{\Gamma_\varepsilon} u \cdot \nabla_{\Gamma_\varepsilon} w + \lambda_\varepsilon u w \right\} ds_\varepsilon - \int_{\Gamma} \left\{ u \frac{\partial w}{\partial \nu} - \eta \nabla_{\Gamma} u \cdot \nabla_{\Gamma} w + \lambda u w \right\} ds \\ &= \int_{\Omega_\varepsilon \setminus \overline{\Omega}} \operatorname{div} \{ u \nabla w - \eta_t (\nabla_{\Gamma_t} u \cdot \nabla_{\Gamma_t} w) \nu_t + \lambda_t u w \nu_t \} dx \\ &= \int_{\Gamma} \int_0^1 \operatorname{div} \{ u \nabla w - \eta_t (\nabla_{\Gamma_t} u \cdot \nabla_{\Gamma_t} w) \nu_t + \lambda_t u w \nu_t \} (\varepsilon \cdot \nu) dt ds + \mathcal{O}(\|\varepsilon\|^2). \end{aligned}$$

On a utilisé le changement de variable  $(x_\Gamma, t) \rightarrow x_\Gamma + t\varepsilon(x_\Gamma)$  pour  $x_\Gamma \in \Gamma$  pour  $t \in [0, 1]$ , on montre en utilisant les coordonnées locales que le Jacobien associé à cette transformation est  $(\varepsilon \cdot \nu) + t \mathcal{O}(\|\varepsilon\|^2)$ . Finalement comme  $u \in C^2(\overline{\Omega_R})$  et  $w(\cdot, x) \in C^2(\overline{\Omega_R})$  dès que  $x$  est dans un compact  $K \subset \mathbb{R}^d \setminus \overline{\Omega_\varepsilon}$ , en utilisant un développement limité de l'intégrand comme dans [66], on obtient

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_\varepsilon} \left\{ u \frac{\partial w}{\partial \nu_\varepsilon} - \eta_\varepsilon \nabla_{\Gamma_\varepsilon} u \cdot \nabla_{\Gamma_\varepsilon} w + \lambda_\varepsilon u w \right\} ds_\varepsilon - \int_{\Gamma} \left\{ u \frac{\partial w}{\partial \nu} - \eta \nabla_{\Gamma} u \cdot \nabla_{\Gamma} w + \lambda u w \right\} ds \\ &= \int_{\Gamma} (\varepsilon \cdot \nu) \operatorname{div} \{ u \nabla w - \eta_t (\nabla_{\Gamma_t} u \cdot \nabla_{\Gamma_t} w) \nu_t + \lambda_t u w \nu_t \} |_{t=0} ds + \mathcal{O}(\|\varepsilon\|^2). \end{aligned}$$

On conclut la preuve en utilisant la condition au bord satisfaite par  $u$  sur  $\Gamma$  et le résultat du lemme 4.2.4. ■

La fin de cette section est consacrée au développement de la trace du terme de divergence. Pour développer ce terme, nous avons besoin du lemme technique suivant.

**Lemme 4.2.6** *Soit  $\lambda$  une fonction de  $C^1(\Gamma)$  et posons  $\lambda_t := \lambda \circ f_t^{-1}$ . Soient  $u$  et  $w$  deux fonctions de  $H^4(B_R \setminus \bar{\Omega})$ , alors les identités suivantes sont valables sur  $\Gamma$ ,*

$$(\varepsilon \cdot \nu)(\nabla \lambda_t \cdot \nu_t)|_{t=0} = -(\nabla_\Gamma \lambda \cdot \varepsilon),$$

$$(\operatorname{div} \nu_t)|_{t=0} = \operatorname{div}_\Gamma \nu,$$

$$\begin{aligned} (\varepsilon \cdot \nu) \nabla(\nabla_{\Gamma_t} u \cdot \nabla_{\Gamma_t} w) \cdot \nu_t|_{t=0} &= -\varepsilon_\Gamma \cdot \nabla_\Gamma(\nabla_\Gamma u \cdot \nabla_\Gamma w) + \nabla_\Gamma(\varepsilon_\Gamma \cdot \nabla_\Gamma u + (\nabla u \cdot \nu)(\varepsilon \cdot \nu)) \cdot \nabla_\Gamma w \\ &\quad + \nabla_\Gamma u \cdot \nabla_\Gamma(\nabla_\Gamma w \cdot \varepsilon_\Gamma + (\nabla w \cdot \nu)(\varepsilon \cdot \nu)) - \nabla_\Gamma u \cdot (\nabla \varepsilon + (\nabla \varepsilon)^T) \cdot \nabla_\Gamma w, \end{aligned}$$

où on note  $\varepsilon_\Gamma := \varepsilon - (\varepsilon \cdot \nu)\nu$ .

**Preuve.** Considérons la base locale du plan tangent autour de  $x_0$  définie par (4.6), et posons  $e_d^t = \varepsilon$ . Nous lui associons une base covariante notée  $(f_t^i)$ , pour  $i = 1, \dots, d$  qui est différente de la base  $(e_t^1, e_t^2, \nu)$ , où les vecteurs  $e_t^i$  sont définis par (4.7), en effet,  $\varepsilon$  n'est pas unitaire et n'est pas nécessairement colinéaire à  $\nu$ . Commençons par montrer la première relation du lemme, on a en notant  $\tilde{\lambda} = \lambda \circ \varphi$

$$\nabla \lambda_t = \sum_{i=1}^{d-1} \frac{\partial \tilde{\lambda}}{\partial \xi_i} f_t^i + \frac{\partial \tilde{\lambda}}{\partial t} f_t^d.$$

D'après la définition de  $\tilde{\lambda}$ , on a  $\partial \tilde{\lambda} / \partial t = 0$ , et en posant  $f^i := f_0^i$ ,

$$(\nabla \lambda_t)|_{t=0} = \sum_{i=1}^{d-1} \frac{\partial \tilde{\lambda}}{\partial \xi_i} f^i. \quad (4.9)$$

Il suffit alors de calculer les vecteurs covariants  $f^i$  pour  $i = 1, d-1$  pour obtenir l'expression de  $(\nabla \lambda_t)|_{t=0}$ . On cherche  $f^1$  sous la forme

$$f^1 = \sum_{i=1}^{d-1} \beta_i e^i + \alpha \nu,$$

où les coefficients  $\alpha, \beta_i$  sont déterminés de manière unique par

$$f^1 \cdot e_1 = 1, \quad f^1 \cdot e_j = 0, \quad j = 2, d-1, \quad f^1 \cdot \varepsilon = 0.$$

Ces trois relations impliquent que

$$\beta_1 = 1, \quad \beta_j = 0, \quad j = 2, d-1, \quad \alpha(\nu \cdot \varepsilon) = -e^1 \cdot \varepsilon$$

et donc

$$f^1 = e^1 - \frac{1}{\nu \cdot \varepsilon} (e^1 \cdot \varepsilon) \nu.$$

On obtient une expression symétrique pour  $f^i$ ,  $i = 2, d-1$  et en revenant à (4.9), on obtient

$$(\nabla \lambda_t \cdot \nu_t)|_{t=0} = (\nabla \lambda_t)|_{t=0} \cdot \nu = - \sum_{i=1}^{d-1} \frac{1}{\nu \cdot \varepsilon} (e^i \cdot \varepsilon) \frac{\partial \tilde{\lambda}}{\partial \xi_i},$$

ce qui s'écrit

$$(\nu \cdot \varepsilon)(\nabla \lambda_t \cdot \nu_t)|_{t=0} = -(\nabla_\Gamma \lambda \cdot \varepsilon).$$

On vient donc de montrer le premier résultat du lemme 4.2.6.

Pour obtenir la deuxième relation nous procédons de la même manière mais nous aurons aussi besoin de l'expression de  $f^d$ . Comme précédemment, on cherche  $f^d$  sous la forme

$$f^d = \sum_{i=1}^{d-1} \beta_i e^i + \alpha \nu$$

où les coefficients  $\alpha, \beta_i$  sont déterminés de manière unique par

$$f^d \cdot e_i = 0, \quad i = 1, d-1, \quad f^d \cdot \varepsilon = 1$$

et donc

$$f^d = \frac{1}{\nu \cdot \varepsilon} \nu.$$

Or

$$\operatorname{div} \nu_t = \sum_{i=1}^{d-1} \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi_i} \cdot f_t^i + \frac{\partial \nu_t}{\partial t} \cdot f_t^d$$

et en dérivant  $|\nu_t|^2 = 1$  par rapport à  $\xi_i$  et  $t$ , on a

$$\frac{\partial \nu_t}{\partial \xi_i} \Big|_{t=0} \cdot \nu = 0, \quad i = 1, d-1, \quad \frac{\partial \nu_t}{\partial t} \Big|_{t=0} \cdot \nu = 0,$$

donc

$$(\operatorname{div} \nu_t) \Big|_{t=0} = \left( \sum_{i=1}^{d-1} \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi_i} \cdot f_t^i \right) \Big|_{t=0} = \sum_{i=1}^{d-1} \frac{\partial \nu}{\partial \xi_i} \cdot e^i = \operatorname{div}_{\Gamma} \nu$$

et on a la deuxième relation du lemme.

Nous terminons avec la preuve de la troisième relation. Notons

$$G = \nabla_{\Gamma_t} u \cdot \nabla_{\Gamma_t} w$$

et  $\tilde{G}_t = G \circ \varphi_t$ , le gradient de  $G$  dans la base covariante s'écrit

$$\nabla G = \sum_{i=1}^{d-1} \frac{\partial \tilde{G}_t}{\partial \xi_i} f_t^i + \frac{\partial \tilde{G}_t}{\partial t} f_t^d.$$

En utilisant les expressions des vecteurs  $f_t^i$ ,  $i = 1, \dots, d$ , on obtient

$$(\nu \cdot \varepsilon)(\nabla G \cdot \nu_t) \Big|_{t=0} = - \sum_{i=1}^{d-1} (e^i \cdot \varepsilon) \frac{\partial \tilde{G}_t}{\partial \xi_i} \Big|_{t=0} + \frac{\partial \tilde{G}_t}{\partial t} \Big|_{t=0},$$

et donc

$$(\nu \cdot \varepsilon)(\nabla G \cdot \nu_t) \Big|_{t=0} = -\varepsilon_{\Gamma} \cdot \nabla_{\Gamma}(\nabla_{\Gamma} u \cdot \nabla_{\Gamma} w) + \frac{\partial \tilde{G}_t}{\partial t} \Big|_{t=0}. \quad (4.10)$$

Il ne reste plus qu'à calculer  $\partial \tilde{G}_t / \partial t$  en  $t = 0$ . On a

$$\frac{\partial \tilde{G}_t}{\partial t} = \sum_{i,j=1}^{d-1} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \tilde{u}_t}{\partial \xi_i} e_t^i \cdot \frac{\partial \tilde{w}_t}{\partial \xi_j} e_t^j \right),$$

avec

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \tilde{u}_t}{\partial \xi_i} e_t^i \cdot \frac{\partial \tilde{w}_t}{\partial \xi_j} e_t^j \right) = \frac{\partial \tilde{u}_t}{\partial \xi_i} t \frac{\partial \tilde{w}_t}{\partial \xi_j} e_t^i \cdot e_t^j + \frac{\partial \tilde{u}_t}{\partial \xi_i} \frac{\partial \tilde{w}_t}{\partial \xi_j} t e_t^i \cdot e_t^j + \frac{\partial \tilde{u}_t}{\partial \xi_i} \frac{\partial \tilde{w}_t}{\partial \xi_j} \left( \frac{\partial e_t^i}{\partial t} \cdot e_t^j + e_t^i \cdot \frac{\partial e_t^j}{\partial t} \right).$$

D'après (4.6) et (4.7) on a

$$(\text{Id} + t(\nabla\varepsilon)^T)e_t^i = e^i,$$

et en dérivant cette relation par rapport à  $t$  on obtient

$$(\nabla\varepsilon)^T e_t^i + (\text{Id} + t(\nabla\varepsilon)^T) \frac{\partial e_t^i}{\partial t} = 0,$$

donc

$$\frac{\partial e_t^i}{\partial t} = -(\text{Id} + t(\nabla\varepsilon)^T)^{-1} (\nabla\varepsilon)^T e_t^i$$

et finalement

$$\frac{\partial e_t^i}{\partial t} \Big|_{t=0} = -(\nabla\varepsilon)^T \cdot e^i.$$

Ceci nous permet d'écrire

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{G}_t}{\partial t} \Big|_{t=0} &= \nabla_\Gamma \left( \frac{\partial \tilde{u}_t}{\partial t} \Big|_{t=0} \right) \cdot \nabla_\Gamma w + \nabla_\Gamma u \cdot \nabla_\Gamma \left( \frac{\partial \tilde{w}_t}{\partial t} \Big|_{t=0} \right) \\ &\quad - \nabla_\Gamma u \cdot \nabla \varepsilon \cdot \nabla_\Gamma w - \nabla_\Gamma u \cdot (\nabla \varepsilon)^T \cdot \nabla_\Gamma w, \end{aligned}$$

en utilisant

$$\frac{\partial \tilde{u}_t}{\partial t} \Big|_{t=0} = \nabla u \cdot \varepsilon, \quad \frac{\partial \tilde{w}_t}{\partial t} \Big|_{t=0} = \nabla w \cdot \varepsilon$$

ainsi que la décomposition  $\varepsilon = \varepsilon_\Gamma + (\varepsilon \cdot \nu)\nu$ , on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{G}_t}{\partial t} \Big|_{t=0} &= \nabla_\Gamma (\nabla_\Gamma u \cdot \varepsilon_\Gamma + (\nabla u \cdot \nu)(\varepsilon \cdot \nu)) \cdot \nabla_\Gamma w + \nabla_\Gamma u \cdot \nabla_\Gamma (\nabla_\Gamma w \cdot \varepsilon_\Gamma + (\nabla w \cdot \nu)(\varepsilon \cdot \nu)) \\ &\quad - \nabla_\Gamma u \cdot (\nabla \varepsilon + (\nabla \varepsilon)^T) \cdot \nabla_\Gamma w. \end{aligned}$$

On termine la preuve du lemme en utilisant la relation (4.10). ■

Afin de simplifier la présentation nous séparons le développement du terme de divergence du lemme 4.2.5 en deux. Une première partie est traitée dans la proposition 4.2.7 et la deuxième est traitée dans la proposition 4.2.8.

**Proposition 4.2.7** *Soit  $\eta$  une fonction de  $C^1(\Gamma)$  et définissons  $\eta_t := \eta \circ f_t^{-1}$ . Soient  $u$  et  $w$  deux fonctions de  $H^4(\Omega_R)$ . La relation suivante est alors valable sur  $\Gamma$ ,*

$$\begin{aligned} (\varepsilon \cdot \nu) \operatorname{div} (\eta_t \nabla_{\Gamma_t} u \cdot \nabla_{\Gamma_t} w \nu_t) \Big|_{t=0} &= -(\nabla_\Gamma \eta \cdot \varepsilon) (\nabla_\Gamma u \cdot \nabla_\Gamma w) + \eta (\varepsilon \cdot \nu) (\nabla_\Gamma u \cdot \nabla_\Gamma w) (\operatorname{div}_\Gamma \nu) \\ &\quad + \eta (\varepsilon \cdot \nu) \nabla_\Gamma (\nabla u \cdot \nu) \cdot \nabla_\Gamma w + \eta (\varepsilon \cdot \nu) \nabla_\Gamma u \cdot \nabla_\Gamma (\nabla w \cdot \nu) \\ &\quad + \eta (\nabla u \cdot \nu) \nabla_\Gamma (\varepsilon \cdot \nu) \cdot \nabla_\Gamma w + \eta (\nabla w \cdot \nu) \nabla_\Gamma (\varepsilon \cdot \nu) \cdot \nabla_\Gamma u \\ &\quad - 2\eta (\varepsilon \cdot \nu) (\nabla_\Gamma u \cdot \nabla_\Gamma \nu \cdot \nabla_\Gamma w). \end{aligned}$$

**Preuve.** Le développement de la divergence donne

$$\begin{aligned} \operatorname{div} (\eta_t \nabla_{\Gamma_t} u \cdot \nabla_{\Gamma_t} w \nu_t) \Big|_{t=0} &= (\nabla \eta_t \cdot \nu_t) \Big|_{t=0} (\nabla_\Gamma u \cdot \nabla_\Gamma w) + \eta (\nabla_\Gamma u \cdot \nabla_\Gamma w) (\operatorname{div} \nu_t) \Big|_{t=0} + \eta \nabla (\nabla_{\Gamma_t} u \cdot \nabla_{\Gamma_t} w) \cdot \nu_t \Big|_{t=0} \end{aligned}$$

et d'après le lemme 4.2.6 on a

$$\begin{aligned} (\varepsilon \cdot \nu) \operatorname{div} (\eta_t \nabla_{\Gamma_t} u \cdot \nabla_{\Gamma_t} w \nu_t) \Big|_{t=0} &= -(\nabla_\Gamma \eta \cdot \varepsilon) (\nabla_\Gamma u \cdot \nabla_\Gamma w) + \eta (\varepsilon \cdot \nu) (\nabla_\Gamma u \cdot \nabla_\Gamma w) (\operatorname{div}_\Gamma \nu) \\ &\quad - \eta \varepsilon_\Gamma \cdot \nabla_\Gamma (\nabla_\Gamma u \cdot \nabla_\Gamma w) - \eta \nabla_\Gamma u \cdot (\nabla \varepsilon + (\nabla \varepsilon)^T) \cdot \nabla_\Gamma w \\ &\quad + \eta \nabla_\Gamma (\varepsilon_\Gamma \cdot \nabla_\Gamma u + (\nabla u \cdot \nu)(\varepsilon \cdot \nu)) \cdot \nabla_\Gamma w + \eta \nabla_\Gamma u \cdot \nabla_\Gamma (\nabla_\Gamma w \cdot \varepsilon_\Gamma + (\nabla w \cdot \nu)(\varepsilon \cdot \nu)). \quad (4.11) \end{aligned}$$

Pour un vecteur surfacique  $a_\Gamma$ , on note  $\nabla_\Gamma a_\Gamma$  le tenseur de dimension  $(d-1) \times (d-1)$  défini par

$$\nabla_\Gamma a_\Gamma \cdot e_j = \frac{\partial a_\Gamma}{\partial \xi_j}, \quad j = 1, d-1,$$

en utilisant la relation algébrique  $\nabla_\Gamma(a_\Gamma \cdot b_\Gamma) = (\nabla_\Gamma a_\Gamma)^T \cdot b_\Gamma + a_\Gamma \cdot \nabla_\Gamma b_\Gamma$ , la troisième ligne de (4.11) se réécrit

$$\begin{aligned} & \eta \nabla_\Gamma(\varepsilon_\Gamma \cdot \nabla_\Gamma u + (\nabla u \cdot \boldsymbol{\nu})(\varepsilon \cdot \boldsymbol{\nu})) \cdot \nabla_\Gamma w + \eta \nabla_\Gamma u \cdot \nabla_\Gamma(\nabla_\Gamma w \cdot \varepsilon_\Gamma + (\nabla w \cdot \boldsymbol{\nu})(\varepsilon \cdot \boldsymbol{\nu})) \\ &= \eta \varepsilon_\Gamma \cdot \nabla_\Gamma(\nabla_\Gamma u) \cdot \nabla_\Gamma w + \eta \nabla_\Gamma u \cdot \nabla_\Gamma \varepsilon_\Gamma \cdot \nabla_\Gamma w + \eta(\varepsilon \cdot \boldsymbol{\nu}) \nabla_\Gamma(\nabla u \cdot \boldsymbol{\nu}) \cdot \nabla_\Gamma w \\ &+ \eta(\nabla u \cdot \boldsymbol{\nu}) \nabla_\Gamma(\varepsilon \cdot \boldsymbol{\nu}) \cdot \nabla_\Gamma w + \eta \nabla_\Gamma u \cdot \nabla_\Gamma(\nabla_\Gamma w) \cdot \varepsilon_\Gamma + \eta \nabla_\Gamma u \cdot (\nabla_\Gamma \varepsilon_\Gamma)^T \cdot \nabla_\Gamma w \\ &- \eta(\varepsilon \cdot \boldsymbol{\nu}) \nabla_\Gamma u \cdot \nabla_\Gamma(\nabla w \cdot \boldsymbol{\nu}) + \eta(\nabla w \cdot \boldsymbol{\nu}) \nabla_\Gamma u \cdot \nabla_\Gamma(\varepsilon \cdot \boldsymbol{\nu}). \end{aligned} \quad (4.12)$$

La prise en compte de (4.12) dans (4.11) et la relation

$$\varepsilon_\Gamma \cdot \nabla_\Gamma(\nabla_\Gamma u \cdot \nabla_\Gamma w) = \varepsilon_\Gamma \cdot \nabla_\Gamma(\nabla_\Gamma u) \cdot \nabla_\Gamma w + \nabla_\Gamma u \cdot \nabla_\Gamma(\nabla_\Gamma w) \cdot \varepsilon_\Gamma,$$

donne finalement

$$\begin{aligned} & (\varepsilon \cdot \boldsymbol{\nu}) \operatorname{div}(\eta_t \nabla_{\Gamma_t} u \cdot \nabla_{\Gamma_t} w \boldsymbol{\nu}_t) |_{t=0} = -(\nabla_\Gamma \eta \cdot \varepsilon)(\nabla_\Gamma u \cdot \nabla_\Gamma w) + \eta(\varepsilon \cdot \boldsymbol{\nu})(\nabla_\Gamma u \cdot \nabla_\Gamma w)(\operatorname{div}_\Gamma \boldsymbol{\nu}) \\ &+ \eta(\varepsilon \cdot \boldsymbol{\nu}) \nabla_\Gamma(\nabla u \cdot \boldsymbol{\nu}) \cdot \nabla_\Gamma w + \eta(\nabla u \cdot \boldsymbol{\nu}) \nabla_\Gamma(\varepsilon \cdot \boldsymbol{\nu}) \cdot \nabla_\Gamma w \\ &+ \eta(\varepsilon \cdot \boldsymbol{\nu}) \nabla_\Gamma u \cdot \nabla_\Gamma(\nabla w \cdot \boldsymbol{\nu}) + \eta(\nabla w \cdot \boldsymbol{\nu}) \nabla_\Gamma u \cdot \nabla_\Gamma(\varepsilon \cdot \boldsymbol{\nu}) \\ &- \eta \nabla_\Gamma u \cdot (\nabla_\Gamma \varepsilon + (\nabla_\Gamma \varepsilon)^T) \cdot \nabla_\Gamma w + \eta \nabla_\Gamma u \cdot (\nabla_\Gamma \varepsilon_\Gamma + (\nabla_\Gamma \varepsilon_\Gamma)^T) \cdot \nabla_\Gamma w. \end{aligned}$$

Pour simplifier la dernière ligne de cette dernière expression il faut encore calculer  $\nabla_\Gamma \varepsilon - \nabla_\Gamma \varepsilon_\Gamma$ . Comme  $\varepsilon - \varepsilon_\Gamma = (\varepsilon \cdot \boldsymbol{\nu}) \boldsymbol{\nu}$ , on a

$$\nabla_\Gamma \varepsilon - \nabla_\Gamma \varepsilon_\Gamma = \nabla_\Gamma((\varepsilon \cdot \boldsymbol{\nu}) \boldsymbol{\nu}) = (\varepsilon \cdot \boldsymbol{\nu}) \nabla_\Gamma \boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\nu} \otimes \nabla_\Gamma(\varepsilon \cdot \boldsymbol{\nu}),$$

où pour un vecteur surfacique  $a$ , on note  $\boldsymbol{\nu} \otimes \nabla_\Gamma a$  le tenseur  $M$  de dimension  $d \times d$  défini par

$$M \cdot e_j = \frac{\partial a}{\partial \xi_j} \boldsymbol{\nu} \quad j = 1, d-1, \quad M \cdot \boldsymbol{\nu} = 0.$$

Ceci implique en particulier que

$$\nabla_\Gamma u \cdot \nabla_\Gamma \varepsilon_\Gamma \cdot \nabla_\Gamma w - \nabla_\Gamma u \cdot \nabla_\Gamma \varepsilon \cdot \nabla_\Gamma w = -(\varepsilon \cdot \boldsymbol{\nu}) \nabla_\Gamma u \cdot \nabla_\Gamma \boldsymbol{\nu} \cdot \nabla_\Gamma w.$$

Puisque le tenseur  $\nabla_\Gamma \boldsymbol{\nu}$  est symétrique (voir par exemple [78, Theorem 2.5.18]), on obtient aussi

$$\nabla_\Gamma u \cdot (\nabla_\Gamma \varepsilon_\Gamma)^T \cdot \nabla_\Gamma w - \nabla_\Gamma u \cdot (\nabla_\Gamma \varepsilon)^T \cdot \nabla_\Gamma w = -(\varepsilon \cdot \boldsymbol{\nu}) \nabla_\Gamma u \cdot \nabla_\Gamma \boldsymbol{\nu} \cdot \nabla_\Gamma w.$$

Finalement on arrive à

$$\begin{aligned} & (\varepsilon \cdot \boldsymbol{\nu}) \operatorname{div}(\eta_t \nabla_{\Gamma_t} u \cdot \nabla_{\Gamma_t} w \boldsymbol{\nu}_t) |_{t=0} \\ &= -(\nabla_\Gamma \eta \cdot \varepsilon)(\nabla_\Gamma u \cdot \nabla_\Gamma w) + \eta(\varepsilon \cdot \boldsymbol{\nu})(\nabla_\Gamma u \cdot \nabla_\Gamma w)(\operatorname{div}_\Gamma \boldsymbol{\nu}) \\ &+ \eta(\varepsilon \cdot \boldsymbol{\nu}) \nabla_\Gamma(\nabla u \cdot \boldsymbol{\nu}) \cdot \nabla_\Gamma w + \eta(\nabla u \cdot \boldsymbol{\nu}) \nabla_\Gamma(\varepsilon \cdot \boldsymbol{\nu}) \cdot \nabla_\Gamma w \\ &+ \eta(\varepsilon \cdot \boldsymbol{\nu}) \nabla_\Gamma u \cdot \nabla_\Gamma(\nabla w \cdot \boldsymbol{\nu}) + \eta(\nabla w \cdot \boldsymbol{\nu}) \nabla_\Gamma u \cdot \nabla_\Gamma(\varepsilon \cdot \boldsymbol{\nu}) - 2\eta(\varepsilon \cdot \boldsymbol{\nu}) \nabla_\Gamma u \cdot \nabla_\Gamma \boldsymbol{\nu} \cdot \nabla_\Gamma w, \end{aligned}$$

ce qui termine la preuve. ■

**Proposition 4.2.8** Soient  $u$  et  $w(\cdot, x)$  les fonctions du lemme 4.2.3. On a alors sur  $\Gamma$ ,

$$\begin{aligned} (\varepsilon \cdot \nu) \operatorname{div} (u \nabla w(\cdot, x) + \lambda_t u w(\cdot, x) \nu_t) |_{t=0} &= -(\nabla_\Gamma \lambda \cdot \varepsilon) u w(\cdot, x) \\ &+ (\varepsilon \cdot \nu) \left( \nabla_\Gamma u \cdot \nabla_\Gamma w(\cdot, x) + M_\eta u M_\eta w(\cdot, x) - (k^2 + \lambda^2 - \lambda(\operatorname{div}_\Gamma \nu) u w(\cdot, x)) \right), \end{aligned}$$

où on note  $M_\eta := \operatorname{div}_\Gamma(\eta \nabla_\Gamma \cdot)$ .

**Preuve.** Remarquons tout d'abord que

$$\operatorname{div}(u \nabla w + \lambda_t u w \nu_t) = \nabla u \cdot \nabla w + u \Delta w + u w (\nabla \lambda_t \cdot \nu_t) + \lambda_t w \nabla u \cdot \nu_t + \lambda_t u \nabla w \cdot \nu_t + \lambda_t u w (\operatorname{div} \nu_t).$$

En utilisant l'équation  $\Delta w + k^2 w = 0$  à l'extérieur de  $\Omega$  ainsi que la décomposition du gradient en sa composante tangentielle et sa composante normale on obtient

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(u \nabla w + \lambda_t u w \nu_t) |_{t=0} &= \nabla_\Gamma u \cdot \nabla_\Gamma w + (\nabla u \cdot \nu) (\nabla w \cdot \nu) - (k^2 - \lambda(\operatorname{div} \nu_t) |_{t=0}) u w \\ &+ u w (\nabla \lambda_t \cdot \nu_t) |_{t=0} + \lambda (\nabla u \cdot \nu) w + \lambda u (\nabla w \cdot \nu). \end{aligned}$$

On peut remplacer  $\nabla u \cdot \nu$  et  $\nabla w \cdot \nu$  par  $(-M_\eta u - \lambda u)$  et  $(-M_\eta w - \lambda w)$  respectivement, ce qui donne

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(u \nabla w + \lambda_t u w \nu_t) |_{t=0} &= \nabla_\Gamma u \cdot \nabla_\Gamma w + M_\eta u M_\eta w - (k^2 + \lambda^2 - \lambda(\operatorname{div} \nu_t) |_{t=0}) u w \\ &+ u w (\nabla \lambda_t \cdot \nu_t) |_{t=0}. \end{aligned}$$

La fin de la preuve est une conséquence du lemme 4.2.6. ■

En rassemblant les propositions 4.2.7 et 4.2.8, on établit le principal résultat de cette section :

**Théorème 4.2.9** La différence entre les champs diffractés créés par les obstacles  $\Omega_\varepsilon$  et  $\Omega$  s'écrit

$$u_\varepsilon^s(x) - u^s(x) = - \int_\Gamma B_\varepsilon u(y) w(y, x) ds(y) + \mathcal{O}(\|\varepsilon\|^2),$$

uniformément pour  $x$  dans un ensemble compact  $K \subset \mathbb{R}^d \setminus \overline{\Omega_\varepsilon}$ , où  $w(\cdot, x)$  est définie dans le lemme 4.2.3 et l'opérateur surfacique  $B_\varepsilon$  est défini par

$$\begin{aligned} B_\varepsilon u &= (\varepsilon \cdot \nu) (k^2 - 2H\lambda) u + \operatorname{div}_\Gamma ((\operatorname{Id} + 2\eta(R - H \operatorname{Id})) (\varepsilon \cdot \nu) \nabla_\Gamma u) + L_{\lambda, \eta} ((\varepsilon \cdot \nu) L_{\lambda, \eta} u) \\ &+ (\nabla_\Gamma \lambda \cdot \varepsilon_\Gamma) u + \operatorname{div}_\Gamma ((\nabla_\Gamma \eta \cdot \varepsilon_\Gamma) \nabla_\Gamma u), \end{aligned}$$

où  $L_{\lambda, \eta} \cdot := \operatorname{div}_\Gamma(\eta \nabla_\Gamma \cdot) + \lambda \cdot$  et on rappelle que  $2H = \operatorname{div}_\Gamma \nu$  et  $R = \nabla_\Gamma \nu$ .

**Preuve.** D'après les propositions 4.2.7 et 4.2.8 on a

$$\begin{aligned} &(\varepsilon \cdot \nu) \operatorname{div} (-\eta_t \nabla_{\Gamma_t} u \cdot \nabla_{\Gamma_t} w \nu_t + u \nabla w + \lambda_t u w \nu_t) |_{t=0} \\ &= (\varepsilon \cdot \nu) \nabla_\Gamma u \cdot \nabla_\Gamma w + (\varepsilon \cdot \nu) M_\eta u M_\eta w - (\varepsilon \cdot \nu) \left( k^2 + \lambda^2 - \lambda(\operatorname{div}_\Gamma \nu) \right) u w \\ &- (\nabla_\Gamma \lambda \cdot \varepsilon) u w + (\nabla_\Gamma \eta \cdot \varepsilon) \nabla_\Gamma u \cdot \nabla_\Gamma w - \eta(\operatorname{div}_\Gamma \nu) (\varepsilon \cdot \nu) \nabla_\Gamma u \cdot \nabla_\Gamma w \\ &- \eta (\varepsilon \cdot \nu) \nabla_\Gamma (\nabla u \cdot \nu) \cdot \nabla_\Gamma w - \eta (\varepsilon \cdot \nu) \nabla_\Gamma u \cdot \nabla_\Gamma (\nabla w \cdot \nu) \\ &- \eta (\nabla u \cdot \nu) \nabla_\Gamma (\varepsilon \cdot \nu) \cdot \nabla_\Gamma w - \eta (\nabla w \cdot \nu) \nabla_\Gamma (\varepsilon \cdot \nu) \cdot \nabla_\Gamma u \\ &+ 2\eta (\varepsilon \cdot \nu) (\nabla_\Gamma u \cdot \nabla_\Gamma \nu \cdot \nabla_\Gamma w). \end{aligned}$$

En utilisant la condition au bord satisfaite par  $u$  et  $w(\cdot, x)$  sur  $\Gamma$ , on obtient

$$\begin{aligned} &(\varepsilon \cdot \nu) \operatorname{div} (-\eta_t \nabla_{\Gamma_t} u \cdot \nabla_{\Gamma_t} w \nu_t + u \nabla w + \lambda_t u w \nu_t) |_{t=0} \\ &= -(\varepsilon \cdot \nu) (k^2 - 2H\lambda) u w + (\varepsilon \cdot \nu) \nabla_\Gamma u \cdot (\operatorname{Id} + 2\eta(R - H \operatorname{Id})) \cdot \nabla_\Gamma w \\ &- (\nabla_\Gamma \lambda \cdot \varepsilon) u w + (\nabla_\Gamma \eta \cdot \varepsilon) \nabla_\Gamma u \cdot \nabla_\Gamma w \\ &+ (\varepsilon \cdot \nu) M_\eta u M_\eta w - (\varepsilon \cdot \nu) \lambda^2 u w \\ &+ \eta (\varepsilon \cdot \nu) \nabla_\Gamma (M_\eta u + \lambda u) \cdot \nabla_\Gamma w + \eta (\varepsilon \cdot \nu) \nabla_\Gamma u \cdot \nabla_\Gamma (M_\eta w + \lambda w) \\ &+ \eta (M_\eta u + \lambda u) \nabla_\Gamma (\varepsilon \cdot \nu) \cdot \nabla_\Gamma w + \eta (M_\eta w + \lambda w) \nabla_\Gamma (\varepsilon \cdot \nu) \cdot \nabla_\Gamma u. \end{aligned}$$

Les trois dernières lignes de cette égalité peuvent se réécrire sous la forme

$$\begin{aligned} & (\varepsilon \cdot \boldsymbol{\nu})(L_{\lambda,\eta}u)(L_{\lambda,\eta}w) - \lambda(\varepsilon \cdot \boldsymbol{\nu})w(L_{\lambda,\eta}u) - \lambda(\varepsilon \cdot \boldsymbol{\nu})u(L_{\lambda,\eta}w) \\ & + \eta \nabla_{\Gamma}((\varepsilon \cdot \boldsymbol{\nu})L_{\lambda,\eta}u) \cdot \nabla_{\Gamma}w + \eta \nabla_{\Gamma}((\varepsilon \cdot \boldsymbol{\nu})L_{\lambda,\eta}w) \cdot \nabla_{\Gamma}u. \end{aligned}$$

En intégrant sur  $\Gamma$ , l'expression ci-dessus devient après intégration par partie et simplification,

$$- \int_{\Gamma} (\varepsilon \cdot \boldsymbol{\nu})(L_{\lambda,\eta}u)(L_{\lambda,\eta}w) ds,$$

on termine la preuve en utilisant le lemme 4.2.5 et en intégrant par partie.  $\blacksquare$

On en déduit la dérivée de forme de l'opérateur  $R_{\lambda,\eta}(\Gamma)$ .

**Corollaire 4.2.10** *Supposons que  $\Gamma$ ,  $\lambda$  et  $\eta$  sont analytiques et que  $(\lambda, \eta)$  satisfait l'hypothèse 4.1.1. Alors l'opérateur  $R_{\lambda,\eta}(\Gamma)$  est différentiable en 0 et sa différentielle de Fréchet est donnée par*

$$R'_{\lambda,\eta}(\Gamma)(0) \cdot \varepsilon = \left( v_{\varepsilon}^s|_{\partial B_R}, \frac{\partial v_{\varepsilon}^s}{\partial r}|_{\partial B_R} \right)$$

où  $v_{\varepsilon}^s$  est l'unique solution sortante de l'équation de Helmholtz dans  $\Omega_{\text{ext}} = \mathbb{R}^d \setminus \overline{\Omega}$  et

$$\frac{\partial v_{\varepsilon}^s}{\partial \boldsymbol{\nu}} + \text{div}(\eta \nabla_{\Gamma} v_{\varepsilon}^s) + \lambda v_{\varepsilon}^s = B_{\varepsilon}u \text{ sur } \Gamma.$$

Afin d'obtenir ce corollaire nous aurons besoin du lemme de représentation intégrale suivant dont la preuve est donnée à la fin de la section.

**Lemme 4.2.11** *Soit  $x \in \Omega_{\text{ext}}$ ,  $w(\cdot, x)$  la fonction introduite dans le lemme 4.2.3 et  $v$  la solution du problème (3.36) pour un certain  $f \in H^{-1}(\Gamma)$ . On a alors*

$$v(x) = - \int_{\Gamma} w(y, x) f(y) ds(y).$$

#### Preuve du corollaire 4.2.10

Tout d'abord, comme  $\lambda$ ,  $\eta$  et  $\Gamma$  sont analytiques, en procédant comme dans [66] on montre que le théorème 4.2.9 reste valide même dans le cas où  $\Omega$  n'est pas inclus dans  $\Omega_{\varepsilon}$ . Le résultat est alors une simple conséquence du théorème 4.2.9 et du lemme 4.2.11.  $\blacksquare$

Comme  $T_{\lambda,\eta}(\Gamma) = \mathcal{I} \circ R_{\lambda,\eta}(\Gamma)$  on a enfin

**Corollaire 4.2.12** *Sous les mêmes hypothèses que celles du corollaire 4.2.10 l'opérateur  $T_{\lambda,\eta}(\Gamma)$  est différentiable en 0 et sa différentielle de Fréchet est donnée par*

$$T'_{\lambda,\eta}(\Gamma)(0) \cdot \varepsilon = v_{\varepsilon}^{\infty}$$

où  $v_{\varepsilon}^{\infty}$  est le champ lointain de la fonction  $v_{\varepsilon}^s$  définie dans le corollaire 4.2.10.

#### Preuve du lemme 4.2.11.

Nous ne ferons pas la distinction entre crochets de dualité et intégrale pour plus de simplicité. Soit  $x \in \Omega_{\text{ext}}$ . D'après la formule de représentation intégrale pour le champ diffracté  $v$  sur  $\Gamma$  on a

$$v(x) = \int_{\Gamma} \left( v(y) \frac{\partial \Phi(y, x)}{\partial \boldsymbol{\nu}(y)} - \frac{\partial v(y)}{\partial \boldsymbol{\nu}(y)} \Phi(y, x) \right) ds(y).$$

Donc d'après (3.40) on a

$$v(x) = \int_{\Gamma} \left( v(y) \frac{\partial w(y, x)}{\partial \boldsymbol{\nu}(y)} - \frac{\partial v(y)}{\partial \boldsymbol{\nu}(y)} w(y, x) \right) ds(y).$$

et en utilisant la condition au bord satisfaite par  $w$  ceci devient

$$v(x) = - \int_{\Gamma} \left( v(y) [\operatorname{div}_{\Gamma}(\eta \nabla_{\Gamma} w(y, x)) + \lambda w(y, x)] + \frac{\partial v(y)}{\partial \boldsymbol{\nu}(y)} w(y, x) \right) ds(y).$$

En intégrant par partie deux fois sur la surface  $\mathbf{G}$  ceci devient

$$v(x) = - \int_{\Gamma} w(y, x) \left( \operatorname{div}_{\Gamma}(\eta \nabla_{\Gamma} v(y)) + \lambda v(y) + \frac{\partial v(y)}{\partial \boldsymbol{\nu}(y)} \right) ds(y).$$

On obtient le résultat à l'aide de la condition sur  $\Gamma$  satisfaite par  $v$ . ■

**Remarque 4.2.13** *Une dérivée de forme classique ne fait intervenir que la composante normale de la perturbation  $\varepsilon$  (voir par exemple [53, proposition 5.9.1]). Dans le théorème 4.2.9 nous obtenons une expression qui fait aussi intervenir la composante tangentielle de  $\varepsilon$ . Ceci est dû à la Définition 4.2.1 de la dérivée de forme. En fait nous ne calculons pas exactement une dérivée partielle par rapport à la forme car un changement de forme implique aussi un changement des fonctions d'impédance et ça explique le fait que  $\varepsilon_{\Gamma}$  intervienne dans l'expression de la dérivée de forme.*

### 4.3 Dérivée de la fonction coût et état adjoint

Nous rappelons que le but de ce chapitre est de calculer les dérivées de la fonction

$$F(\lambda, \eta, \Gamma) := \frac{1}{2} \|T(\lambda, \eta, \Gamma) - u_{\text{obs}}^{\infty}\|_{L^2(S^{d-1})}^2$$

par rapport aux fonctions d'impédance  $\lambda$  et  $\eta$  et par rapport à la géométrie de l'obstacle  $\Gamma$ . Au cours des deux sections précédentes nous avons calculé les dérivées partielles de l'opérateur  $T$ . Remarquons que  $F = Q \circ T$  où

$$\begin{aligned} Q : L^2(S^{d-1}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longmapsto \frac{1}{2} \|v - u_{\text{obs}}^{\infty}\|_{L^2(S^{d-1})}^2, \end{aligned}$$

comme  $v$  et  $u_{\text{obs}}^{\infty}$  sont des fonctions à valeur complexe, la différentielle de  $Q$  est donnée pour  $v$  et  $h$  dans  $L^2(S^{d-1})$  par

$$dQ(v) \cdot h = \operatorname{Re} \left( \int_{S^{d-1}} h \overline{(v - u_{\text{obs}}^{\infty})} ds \right).$$

Rappelons la dérivée partielle par rapport à  $(\lambda, \eta)$ , pour tout  $(h, l) \in L^{\infty}(\Gamma)$  tels que  $(\lambda, \eta) + (h, l)$  satisfait l'hypothèse 4.1.1,

$$T'_{\Gamma}(\lambda, \eta) \cdot (h, l) = v_{h,l}^{\infty}$$

où  $v_{h,l}^{\infty}$  est le champ lointain de l'unique solution sortante  $v_{h,l}^s$  de l'équation de Helmholtz dans  $\Omega_{\text{ext}}$  telle que

$$\frac{\partial v_{h,l}^s}{\partial \boldsymbol{\nu}} + \operatorname{div}_{\Gamma} \left( \eta \nabla_{\Gamma} v_{h,l}^s \right) + \lambda v_{h,l}^s = - (\operatorname{div}_{\Gamma}(h \nabla_{\Gamma} u) + lu) \text{ sur } \Gamma$$

et  $u$  est la solution de  $\mathcal{P}(\lambda, \eta, \Gamma)$ . De la même manière que dans le lemme 4.2.11, on montre que le champ lointain  $v^{\infty}$  de la solution du problème (3.36) avec  $f \in H^{-1}(\Gamma)$  au second membre s'écrit comme

$$v^{\infty}(\hat{x}) = - \int_{\Gamma} p(y, \hat{x}) f(y) ds(y).$$

où  $p(y, \hat{x}) = p^s(y, \hat{x}) + \Phi^{\infty}(y, \hat{x})$  est solution de  $\mathcal{P}(\lambda, \eta, \Gamma)$  avec  $u^i(y) = \Phi^{\infty}(y, \hat{x})$ . Ainsi, la différentielle du champ lointain par rapport aux impédances devient

$$T'_{\Gamma}(\lambda, \eta) \cdot (h, l) = \int_{\Gamma} p(y, \hat{x}) (\operatorname{div}_{\Gamma}(h \nabla_{\Gamma} u) + lu)(y) ds(y)$$

et on obtient pour la dérivée partielle de la fonction coût par rapport aux impédances

$$F'_\Gamma(\lambda, \eta) \cdot (h, l) = \mathcal{R}e \int_{S^{d-1}} \left\{ \int_\Gamma p(y, \hat{x}) (\operatorname{div}_\Gamma(h\nabla_\Gamma u) + lu)(y) ds(y) \right\} (\overline{u^\infty - u_{\text{obs}}^\infty})(\hat{x}) ds(\hat{x}) \quad (4.13)$$

$$= \mathcal{R}e \int_\Gamma \left\{ \int_{S^{d-1}} p(y, \hat{x}) (\overline{u^\infty - u_{\text{obs}}^\infty})(\hat{x}) ds(\hat{x}) \right\} (\operatorname{div}_\Gamma(h\nabla_\Gamma u) + lu)(y) ds(y) \quad (4.14)$$

où nous notons  $u^\infty = T(\lambda, \eta, \Gamma)$  le champ lointain associé à  $u$ . Si on utilise (4.13) pour calculer  $F'_\Gamma(\lambda, \eta) \cdot (h, l)$  numériquement, il faudrait évaluer  $\int_\Gamma p(y, \hat{x}) (\operatorname{div}_\Gamma(h\nabla_\Gamma u) + lu)(y) ds(y)$  pour tout  $\hat{x} \in S^{d-1}$  puis intégrer contre  $(\overline{u^\infty - u_{\text{obs}}^\infty})(\hat{x})$ . Ceci implique que l'on devrait résoudre un problème direct pour chaque direction d'incidence  $\hat{x}$  ce qui est très coûteux. En fait, il existe une manière beaucoup plus efficace de calculer  $F'_\Gamma(\lambda, \eta) \cdot (h, l)$ , en effet, pour tout  $y \in \Omega_{\text{ext}}$

$$G(y) := \int_{S^{d-1}} p(y, \hat{x}) (\overline{u^\infty - u_{\text{obs}}^\infty})(\hat{x}) ds(\hat{x})$$

est solution du problème  $\mathcal{P}(\lambda, \eta, \Gamma)$  avec  $u^i(y) = G^i(y) := \int_{S^{d-1}} \Phi(y, \hat{x}) (\overline{u^\infty - u_{\text{obs}}^\infty})(\hat{x}) ds$ . Donc pour calculer  $F'_\Gamma(\lambda, \eta) \cdot (h, l)$  au vu de (4.14) il suffit de résoudre un problème direct pour  $u$  et un autre pour évaluer  $G(y)$ . On obtient alors la différentielle à l'aide de la formule suivante

$$F'_\Gamma(\lambda, \mu) \cdot (h, l) = \mathcal{R}e \left( \int_\Gamma G(\operatorname{div}_\Gamma(l\nabla_\Gamma u) + hu) dy \right).$$

On procède de même pour la différentielle par rapport à la géométrie et on aboutit au théorème suivant.

**Théorème 4.3.1** *Soient  $\lambda$  et  $\eta$  deux fonctions analytiques satisfaisant l'hypothèse 4.1.1 et  $\Gamma$  une frontière analytique, la dérivée de la fonction coût par rapport aux impédances pour tout  $(h, l) \in (L^\infty(\Gamma))^2$  tels que  $(\lambda, \eta) + (h, l)$  satisfait l'hypothèse 4.1.1 est donnée par*

$$F'_\Gamma(\lambda, \eta) \cdot (h, l) = \mathcal{R}e \left( \int_\Gamma G(\operatorname{div}_\Gamma(l\nabla_\Gamma u) + hu) dy \right).$$

Sa dérivée par rapport à la géométrie dans la direction  $\varepsilon$  est quant à elle donnée par

$$F'_{\lambda, \eta}(\Gamma) \cdot \varepsilon = -\mathcal{R}e \left( \int_\Gamma G(B_\varepsilon u) dy \right)$$

où

- $B_\varepsilon$  est donné dans l'énoncé du théorème 4.2.9,
- $u$  est la solution de  $\mathcal{P}(\lambda, \eta, \Gamma)$  avec  $u^i(x) = e^{ik\hat{\theta} \cdot x}$  pour onde incidente,
- $G$  est la solution de  $\mathcal{P}(\lambda, \eta, \Gamma)$  avec  $u^i(x) = G^i(x)$  pour onde incidente.



# RÉSOLUTION NUMÉRIQUE DU PROBLÈME INVERSE EN DIMENSION 2

## Sommaire

<b>5.1</b>	<b>Résolution numérique du problème direct . . . . .</b>	<b>92</b>
<b>5.2</b>	<b>Méthode de résolution numérique du problème inverse . . . . .</b>	<b>96</b>
<b>5.3</b>	<b>Reconstruction d'impédances régulières . . . . .</b>	<b>97</b>
5.3.1	Réflexion autour des données du problème . . . . .	98
5.3.2	Influence de la non-convexité de la géométrie . . . . .	99
5.3.3	Reconstruction simultanée des impédances . . . . .	102
5.3.4	Reconstruction des impédances sur un obstacle perturbé . . . . .	102
<b>5.4</b>	<b>Reconstruction d'impédances constantes par morceaux . . . . .</b>	<b>106</b>
5.4.1	Régularisation $H^1$ du gradient . . . . .	106
5.4.2	Régularisation TV . . . . .	106
<b>5.5</b>	<b>Reconstruction simultanée des impédances et de l'obstacle . . . . .</b>	<b>107</b>
5.5.1	Reconstruction de la géométrie à impédances connues . . . . .	109
5.5.2	Reconstruction de la géométrie et des impédances supposées constantes . .	110
5.5.3	Reconstruction de la géométrie et des fonctions d'impédance . . . . .	110
<b>5.6</b>	<b>Application à l'identification des couches minces . . . . .</b>	<b>113</b>
5.6.1	Formulation du problème inverse . . . . .	113
5.6.2	Identification des paramètres de la couche . . . . .	114
5.6.3	Reconstruction d'un obstacle recouvert d'une couche de diélectrique . . . .	115

UNE méthode classique de résolution du problème inverse de la reconstruction d'un obstacle  $\Omega$  caractérisé par une condition d'impédance généralisée du type

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} + \operatorname{div}_{\Gamma}(\eta \nabla_{\Gamma} u) + \lambda u = 0 \text{ sur } \Gamma, \quad (5.1)$$

ainsi que les fonctions  $\lambda$  et  $\eta$ , à partir du champ lointain produit par une ou plusieurs ondes incidentes consiste à minimiser la fonction coût

$$F(\lambda, \eta, \Gamma) := \frac{1}{2} \|T(\lambda, \eta, \Gamma) - u_{\text{obs}}^{\infty}\|_{L^2(S^{d-1})}^2.$$

L'opérateur  $T$  est l'opérateur champ lointain qui à  $(\lambda, \eta, \Gamma)$  associe le champ lointain correspondant à la diffraction d'une onde plane par la surface  $\Gamma$  avec (5.1) sur  $\Gamma$  (voir § 3.1 pour une définition précise). La fonction  $u_{\text{obs}}^\infty$  désigne le champ lointain que l'on observe (les données du problème). Nous proposons ici d'utiliser une méthode de descente de gradient (ou méthode itérative de Landweber) pour minimiser la fonction  $F$ . Le point fort d'une telle méthode est qu'elle est robuste et simple à implémenter, en revanche, comme toutes les méthodes d'optimisation que l'on applique à une fonctionnelle non convexe (ici  $F$ ), il est nécessaire d'initialiser la procédure de minimisation dans un voisinage du minimum. De plus, c'est une méthode itérative et à chaque itération il est nécessaire de résoudre numériquement le problème direct  $\mathcal{P}(\lambda, \eta, \Gamma)$  (voir 3.1) plusieurs fois, ce dernier point rend les méthodes d'optimisation coûteuses par rapport aux méthodes dites qualitative comme la méthode de Factorisation (voir chapitre 7 pour une condition d'impédance généralisée ou le livre [46]) ou la Linear Sampling Method (voir [22] par exemple).

Nous rappelons que ce problème inverse étant mal posé (voir chapitre 3), sa résolution numérique peut donner lieu à la création d'oscillations parasites dans les paramètres reconstruits (les fonctions d'impédance et la forme). Il est donc nécessaire de régulariser l'inversion, nous avons choisi d'utiliser une procédure de régularisation de type  $H^1(\Gamma)$  du gradient : au lieu d'utiliser un représentant  $L^2(\Gamma)$  du gradient de la fonction coût, nous utilisons un représentant  $H^1(\Gamma)$  (voir figure 5.2). Si cette stratégie est efficace pour des impédances régulières, nous verrons qu'elle n'est pas adaptée à la reconstruction d'impédances constantes par morceaux. Dans ce cas nous préférons ajouter un terme de pénalisation faisant intervenir la norme  $L^1$  du gradient surfacique des coefficients d'impédance (voir [59] pour une approche similaire dans le cas d'une condition d'impédance classique).

Une des motivations que nous avons données à l'étude du problème inverse de la reconstruction d'un obstacle  $\Omega$  caractérisé par une condition d'impédance généralisée est que le modèle d'impédance généralisée est un modèle approché à l'ordre 1 pour le problème de diffraction par un conducteur parfait couvert de diélectrique (voir § 1.1.2). Nous concluons donc cette étude numérique par divers exemples de reconstruction des paramètres de la couche mince et de la forme de l'objet diffractant. A notre connaissance, c'est la première fois qu'une telle étude est menée et en particulier nous montrons que dans certaines situations le modèle d'impédance classique n'est pas suffisamment riche pour retrouver la forme d'un conducteur parfait couvert de diélectrique. Ce constat justifie tout l'intérêt du modèle d'impédance généralisée dans le cadre de la résolution de problèmes inverses.

Dans une première section nous décrivons rapidement la méthode numérique utilisée pour résoudre le problème direct. Dans la deuxième section nous présentons l'algorithme de minimisation dans le cas où la géométrie est connue. La troisième section présente divers exemples de reconstruction de fonctions d'impédance lorsque celles-ci sont régulières. En particulier, nous présentons des exemples de reconstruction sur une géométrie perturbée (c'est-à-dire que la géométrie dont on dispose est différente de la géométrie exacte) afin d'illustrer les résultats de stabilité du § 3.4.3. Dans la quatrième section nous introduisons une stratégie de régularisation adaptée au cas de fonctions d'impédance constantes par morceaux. Dans la cinquième section nous présentons quelques résultats de reconstruction simultanée des fonctions d'impédance  $\lambda$  et  $\eta$  et de la forme  $\Gamma$ . Enfin, nous concluons ce chapitre par des exemples d'utilisation des conditions d'impédance généralisée pour l'identification de revêtements minces.

## 5.1 Résolution numérique du problème direct

Commençons ce chapitre sur la résolution numérique du problème inverse par une description de la méthode employée pour résoudre numériquement le problème direct. Nous discrétisons le problème  $\mathcal{P}(\lambda, \eta, \Gamma)$  à l'aide d'éléments finis de Lagrange de type  $P2$ , notons  $X_h$  l'espace vectoriel engendré par les fonctions de base  $P2$  associées à une discrétisation donnée de l'ouvert  $\Omega_R$ . La trace des fonctions de base sur  $\Gamma$  est dans  $H^1(\Gamma)$ , on a donc une discrétisation conforme du problème  $\mathcal{P}(\lambda, \eta, \Gamma)$ . Pour discrétiser les fonctions d'impédance  $\lambda$  et  $\eta$  sur  $\Gamma$  nous utilisons le sous espace

$X_{h,\Gamma}$  de  $X_h$  engendré par les fonctions de  $X_h$  non identiquement nulles sur  $\Gamma$ . Soit  $B_R$  un disque englobant l'obstacle  $\Omega$ , notons  $(\phi_i)_{i=1,\dots,J}$  l'ensemble des fonctions de base  $P2$  pour une triangulation donnée de  $\Omega_R$ . On cherche la solution  $u$  de  $\mathcal{P}(\lambda, \eta, \Gamma)$  sous la forme  $u_h = \sum_{i=1}^J U_i \phi_i$ . Le vecteur  $U_h := (U_i)_{i=1,\dots,J}$  est alors solution de

$$(A_h - S_h)U_h = F_h \quad (5.2)$$

où les matrices  $A_h$  et  $S_h$  sont définies par

$$(A_h)_{i,j} = \int_{\Omega_R} (\nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j - k^2 \phi_i \phi_j) dx + \int_{\Gamma} (\eta \nabla_{\Gamma} \phi_i \cdot \nabla_{\Gamma} \phi_j - \lambda \phi_i \phi_j) ds$$

$$(S_h)_{i,j} = \langle S_R \phi_j, \phi_i \rangle.$$

pour  $i, j = 1, \dots, J$ . La  $j$ -ème composante du second membre  $F_h$  est donnée par

$$(F_h)_j = \int_{\partial B_R} \left( \frac{\partial u^i}{\partial r} - S_R u^i \right) \overline{\phi_j} ds$$

où  $u^i$  désigne le champ incident.

Il est aussi nécessaire de discrétiser l'opérateur de Dirichlet-à-Neumann, nous décrivons brièvement ici comment nous avons procédé. Toute fonction  $g \in H^{1/2}(\partial B_R)$  se décompose en coordonnées polaires sous la forme

$$g(R, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g_n(R) \frac{e^{in\theta}}{\sqrt{2\pi R}}.$$

où  $\theta$  désigne l'angle entre  $x$  et l'axe des abscisses et  $g_n(R) = \int_{\partial B_R} g(x) \frac{e^{-in\theta}}{\sqrt{2\pi R}} ds$ . En effet, l'ensemble des  $\Psi_n := \frac{e^{in\theta}}{\sqrt{2\pi R}}$  pour  $n \in \mathbb{Z}$  forme une base de  $L^2(\partial B_R)$ . La solution radiative  $u_{\text{ext}}$  des équations de Helmholtz à l'extérieur de  $B_R$  telle que  $u_{\text{ext}} = g$  sur  $\partial B_R$  est alors donnée en coordonnées polaires par

$$u_{\text{ext}}(r, \theta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{(g, \Psi_n)_{L^2(\partial B_R)}}{H_n^1(kR)} H_n^1(kr) \Psi_n(\theta)$$

où  $H_n^1$  désigne la fonction de Hankel de première espèce et d'ordre  $n$ . Donc pour tout  $u \in H^{1/2}(\partial B_R)$ ,

$$(S_R u)(R, \theta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (u, \Psi_n)_{L^2(\partial B_R)} \frac{k(H_n^1)'(kR)}{H_n^1(kR)} \Psi_n(\theta),$$

pour la résolution du problème discret nous tronquons cette série à l'ordre  $N$  et considérons l'opérateur

$$(S_h^N u)(R, \theta) = \sum_{n=-N}^N (u, \Psi_n)_{L^2(\partial B_R)} \frac{k(H_n^1)'(kR)}{H_n^1(kR)} \Psi_n(\theta).$$

Ainsi, le problème discret (5.2) devient : trouver  $U_h^N \in \mathbb{R}^J$  tel que

$$(A_h - S_h^N)U_h^N = F_h^N \quad (5.3)$$

où

$$(S_h^N)_{i,j} := \sum_{n=-N}^N (\phi_j, \Psi_n)_{L^2(\partial B_R)} \frac{kH_n^{1'}(kR)}{H_n^1(kR)} (\Psi_n, \phi_i)_{L^2(\partial B_R)}$$

pour  $i, j = 1, \dots, J$ . La  $j$ -ème composante du second membre  $F_h^N$  est quant à elle donnée par

$$(F_h^N)_j = \int_{\partial B_R} \frac{\partial u^i}{\partial r} \overline{\phi_j} ds - (S_h^N U^i)_j$$

où pour  $j = 1, \dots, J$ ,  $(U^i)_j := (u^i, \phi_j)_{L^2(\partial B_R)}$ .

Lorsque les impédances  $\lambda$  et  $\eta$  sont deux constantes et l'obstacle  $\Omega$  est un cercle de rayon  $R_0$ , il est possible de calculer le champ diffracté solution de  $\mathcal{P}(\lambda, \eta, \Gamma)$  de manière analytique. Notons  $u_{\text{exact}}^s = u_{\text{exact}} - u^i$  le champ diffracté associé à la solution  $u_{\text{exact}}$  de  $\mathcal{P}(\lambda, \eta, \Gamma)$ , on le cherche en coordonnées polaires sous la forme

$$u_{\text{exact}}^s(r, \theta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n H_n^1(kr) e^{in\theta}.$$

Supposons que la direction d'incidence soit  $\hat{\theta} = (1, 0)$ , en utilisant la formule d'expansion de Jacobi–Anger (voir [38]) on peut écrire que

$$u^i(r, \theta) = e^{ik \cos(\theta)} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} i^n J_n(kr) e^{in\theta}$$

où  $J_n$  désigne la  $n$ -ème fonction de Bessel de première espèce. On est alors en mesure de calculer les coefficients  $\alpha_n$  en utilisant la condition sur  $\partial B(0, R_0)$

$$\frac{\partial u_{\text{exact}}^s}{\partial r} + \eta \Delta_{\Gamma} u_{\text{exact}}^s + \lambda u_{\text{exact}}^s = - \left( \frac{\partial u^i}{\partial r} + \eta \Delta_{\Gamma} u^i + \lambda u^i \right)$$

et comme  $\Delta_{\Gamma} = \frac{1}{R_0^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$  on obtient

$$\alpha_n = -i^n \frac{(R_0^2 \lambda - \eta n^2) J_n(kR_0) + k R_0^2 J_n'(kR_0)}{(R_0^2 \lambda - \eta n^2) H_n^1(kR_0) + k R_0^2 (H_n^1)'(kR_0)}.$$

Le champ lointain s'obtient alors simplement en utilisant le comportement asymptotique des fonctions de Bessel et de Hankel pour  $r$  grand (voir [1]).

Nous avons utilisé le logiciel libre FreeFem++ [91] pour implémenter et résoudre le problème (5.3), nous représentons en figure 5.1 le champ lointain associé à la solution analytique  $u_{\text{exact}}^s$  et le champ lointain approché correspondant à la solution du problème discret (5.3) pour plusieurs valeurs de  $\lambda$  et  $\eta$  avec  $\Omega = B(0, 1)$ . Ces graphiques représentent le module du champ lointain en fonction de la direction d'observation. On a fixé la discrétisation du maillage (18 degrés de liberté par longueur d'onde) et le nombre de modes pour calculer  $S_h^N$  pour avoir une erreur relative inférieure à 1% sur le champ lointain. Visuellement on ne voit pas de différence entre le champ lointain exact et le champ lointain approché.

On notera que les champs lointains correspondant à  $\lambda = 0$  et  $\eta \neq 0$  (1-ère ligne) sont très différents de ceux produit par  $\lambda \neq 0$  et  $\eta = 0$  (2-ème ligne). De plus, lorsque  $\lambda = 0.1i$  et  $\eta = 0$  le champ lointain est très proche du champ lointain obtenu avec une condition de Neumann alors que lorsque  $\eta = 0.1$  et  $\lambda = 0$ , le champ lointain est proche du champ lointain obtenu avec une condition de Dirichlet. Cette observation est difficile à interpréter, néanmoins on peut d'ores et déjà conclure que  $\lambda$  et  $\eta$  n'ont pas la même influence sur la fonction coût. Une petite perturbation sur  $\eta$  implique une perturbation importante sur le champ lointain alors que ce n'est pas le cas pour  $\lambda$ . Enfin, nous terminons par une remarque liée à la direction d'incidence. Les champs lointains représentés en figure 5.1 ont été produits pour une direction d'incidence  $\hat{\theta} = (1, 0)$ , ceci signifie que l'onde plane se propage de la gauche vers la droite. Ainsi la partie éclairée de l'obstacle est la partie gauche, nous indiquons par une flèche verte la zone du champ lointain dans la direction d'observation  $-\hat{\theta}$ . Comme on pourrait s'y attendre, le champ lointain a une intensité forte dans la plage  $] -\pi/2, \pi/2[$ , ceci est dû à un phénomène d'ombre derrière l'obstacle. Dans la suite nous identifions le vecteur  $\theta$  avec l'angle qu'il fait avec l'axe des abscisses.

Dans ce qui suit nous notons toujours  $T(\lambda, \eta, \Gamma)$  l'opérateur de champ lointain discret qui à  $(\lambda, \eta) \in (X_{h,\Gamma})^2$  tels que l'hypothèse 1.2.1 soit satisfaite et une géométrie  $\Gamma$  associe le champ lointain associé à  $U_h^N$  la solution de (5.3).

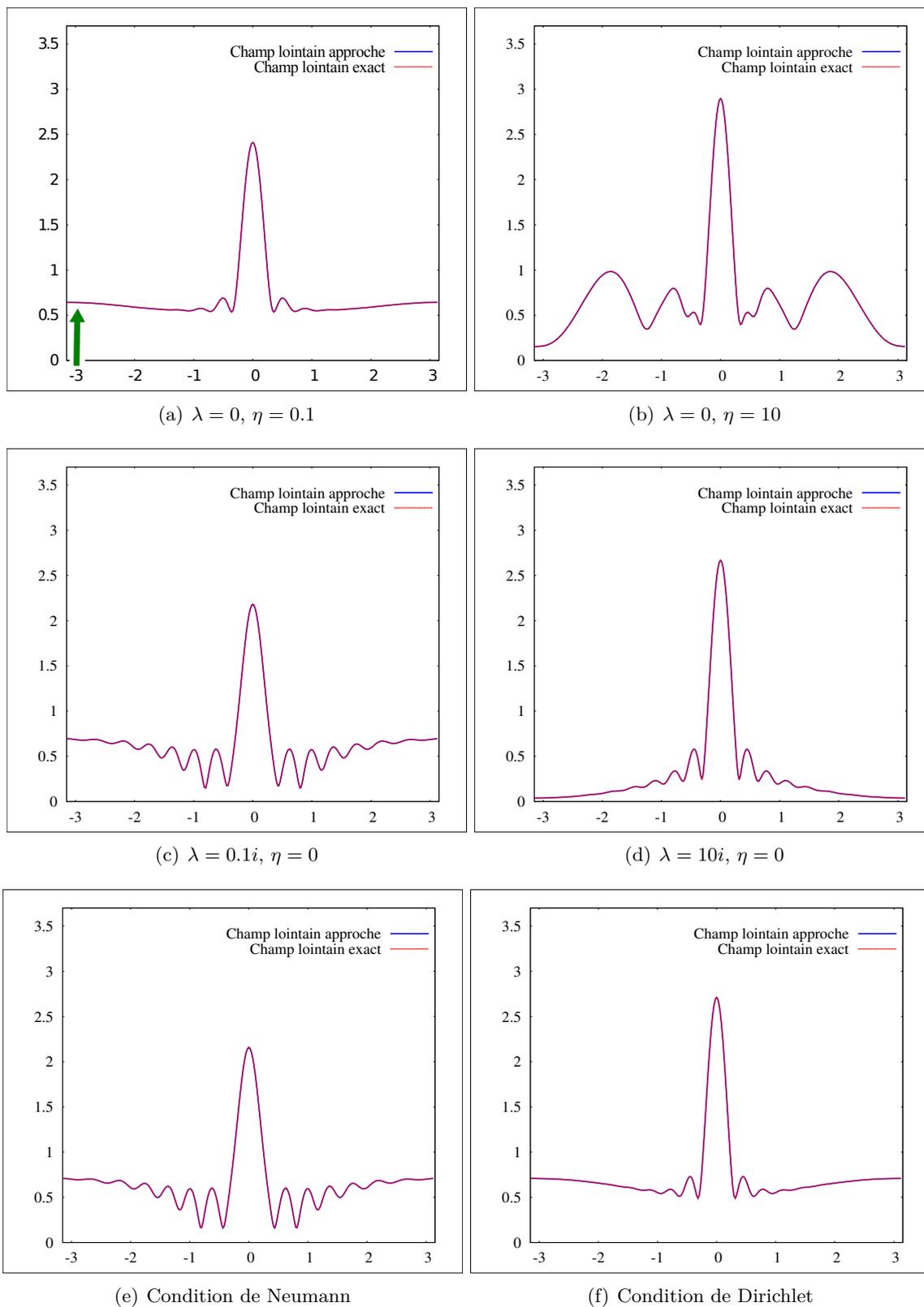


FIGURE 5.1 – Module du champ lointain produit par la diffraction d’une onde plane de direction d’incidence  $\hat{\theta} = (1, 0)$  en fonction de l’angle d’observation. La géométrie  $\Omega$  est un cercle de rayon 1, la fréquence est  $k = 9$  et le rayon du cercle extérieur est  $R = 1.5$ .

## 5.2 Méthode de résolution numérique du problème inverse

Dans ce qui suit nous présentons des résultats de reconstruction des impédances à partir de la donnée d'un ou plusieurs champs lointains correspondant à une ou plusieurs ondes incidentes. Nous nous penchons sur la reconstruction de la géométrie un peu plus loin dans ce document. Supposons que la géométrie  $\Gamma$  de l'obstacle est connue, une méthode classique de reconstruction de paramètres consiste à minimiser la fonctionnelle moindre carré

$$F(\lambda, \eta) := \frac{1}{2} \sum_{i=1}^I \|T(\lambda, \eta, \Gamma, \hat{\theta}_i) - u_{\text{obs},i}^{\infty,\delta}\|_{L^2(S_i)}^2$$

par rapport à  $(\lambda, \eta) \in (X_{h,\Gamma})^2$ . Pour  $i = 1, \dots, I$ ,  $S_i$  est un ouvert de  $S^{d-1}$  qui correspond aux directions d'observations pour lesquelles on a des données. Nous parlerons d'ouverture totale lorsque  $S_i = S^{d-1}$  et d'ouverture partielle dans le cas contraire. Dans cette expression nous avons ajouté une variable  $\hat{\theta}_i$  à l'opérateur de champ lointain, cette variable correspond à la direction d'incidence. Nous notons  $(u_{\text{obs},i}^{\infty,\delta})_{i=1,\dots,I}$  les données du problème, l'indice  $i$  fait référence à l'onde incidente alors que le paramètre  $\delta > 0$  est l'amplitude relative du bruit sur les données. Plus précisément, on suppose que pour tout  $i = 1, \dots, I$  il existe un couple  $(\lambda_0, \eta_0) \in (X_{h,\Gamma})^2$  et une géométrie  $\Gamma$ , tels que

$$u_{\text{obs},i}^{\infty,\delta}(\hat{x}) = T(\lambda_0, \eta_0, \Gamma, \hat{\theta}_i)(\hat{x}) + b_i(\hat{x})$$

où  $b_i$  est une fonction modélisant le bruit satisfaisant pour  $i = 1, \dots, I$ ,

$$\frac{\|T(\lambda_0, \eta_0, \Gamma, \hat{\theta}_i) - u_{\text{obs},i}^{\infty,\delta}\|_{L^2(S_i)}}{\|T(\lambda_0, \eta_0, \Gamma, \hat{\theta}_i)\|_{L^2(S_i)}} \leq \delta.$$

En pratique,  $b_i$  est obtenue à l'aide d'un bruit gaussien de moyenne nulle et de variance 1, un coefficient multiplicatif permet ensuite de réaliser  $\|b_i\|_{L^2(S_i)} = \delta \|T(\lambda_0, \eta_0, \Gamma, \hat{\theta}_i)\|_{L^2(S_i)}$  exactement.

Nous allons minimiser la fonction  $F$  en appliquant une méthode de descente de gradient (ou encore méthode de Landweber) en fixant le pas de descente de manière heuristique. Cet algorithme est itératif et à chaque itération on met à jour les paramètres par rapport auxquels on minimise  $F$  en utilisant les dérivées partielles de la fonction coût données dans le théorème 4.3.1. Ainsi on initialise l'algorithme avec un couple  $(\lambda_{\text{init}}, \eta_{\text{init}})$  et à chaque itération  $n$  on met à jour ces valeurs en effectuant

$$(\lambda_{n+1}, \eta_{n+1}) = (\lambda_n, \eta_n) - (\delta\lambda_n, \delta\eta_n)$$

où la direction de descente  $(\delta\lambda_n, \delta\eta_n)$  est proportionnelle à  $dF(\lambda_n, \eta_n)$ . Une manière naturelle de déterminer  $(\delta\lambda_n, \delta\eta_n)$  et de les prendre proportionnels au représentant  $L^2(\Gamma)$  de  $dF(\lambda_n, \eta_n)$ . Nous avons choisi de les prendre proportionnels au représentant  $H^1(\Gamma)$  de  $dF(\lambda_n, \eta_n)$ . Cette technique de régularisation, appelée régularisation  $H^1$  du gradient ou encore « Sobolev gradient », a déjà été utilisée dans [4] par exemple dans un cadre analogue. Plus précisément, les directions de descente  $\delta\lambda_n$  et  $\delta\eta_n$  sont solutions dans  $X_{h,\Gamma}$  de

$$\gamma_\lambda (\nabla_\Gamma(\delta\lambda_n), \nabla_\Gamma \varphi)_{L^2(\Gamma)} + (\delta\lambda_n, \varphi)_{L^2(\Gamma)} = \alpha_\lambda dF(\lambda_n, \eta_n) \cdot (\varphi, 0)$$

et

$$\gamma_\eta (\nabla_\Gamma(\delta\eta_n), \nabla_\Gamma \varphi)_{L^2(\Gamma)} + (\delta\eta_n, \varphi)_{L^2(\Gamma)} = \alpha_\eta dF(\lambda_n, \eta_n) \cdot (0, \varphi). \quad (5.4)$$

pour tout  $\varphi \in X_{h,\Gamma}$ . Les réels  $\gamma_\lambda, \gamma_\eta > 0$  sont les paramètres de régularisation et les réels  $\alpha_\lambda, \alpha_\eta > 0$  sont les pas de descente pour  $\lambda$  et  $\eta$  respectivement. Afin de comprendre pourquoi on parle de technique de régularisation, nous avons représenté sur la figure 5.2 une direction de descente  $\delta\eta_n$  pour plusieurs valeurs de  $\gamma_\eta$  lorsque les données sont détériorées par un bruit relatif de  $\delta = 5\%$ . On trace la valeur de  $\delta\eta_n(x, y)$  en fonction de  $\theta = \arctan(y/x)$  l'obstacle considéré étant défini par  $\Gamma = \{(0.4 \cos(\theta), 0.3 \sin(\theta)) \text{ pour } \theta \in [-\pi, \pi]\}$ . Nous ne connaissons pas de méthode systématique pour fixer le coefficient de régularisation. Mais, si on le prend trop grand, la direction

de descente est proche de la fonction constante et, si on le prend trop petit, la direction de descente contient des oscillations parasites liées à l'instabilité du problème inverse. Nous avons choisi de le fixer de manière heuristique : on commence avec un coefficient élevé et on le diminue lorsque la fonction coût diminue. Pour choisir le coefficient de descente, on procède suivant une logique similaire, on commence avec un coefficient plutôt faible et on l'augmente lorsque la fonction coût diminue entre deux itérations. Si la fonction coût augmente, on revient en arrière et on diminue le coefficient de descente. On résume l'algorithme d'optimisation ci-dessous.

---

**Algorithme 1** : Algorithme de descente de gradient pour minimiser  $F$

---

- Première étape (si  $n > 0$ ) : on met  $\lambda$  et  $\eta$  à jour

- si  $n$  est pair :

$$\begin{aligned}\eta_{n+1} &= \eta_n - \alpha_\eta^n \delta \eta_n \\ \lambda_{n+1} &= \lambda_n\end{aligned}$$

- si  $n$  est impair :

$$\begin{aligned}\lambda_{n+1} &= \lambda_n - \alpha_\lambda^n \delta \lambda_n \\ \eta_{n+1} &= \eta_n\end{aligned}$$

- Deuxième étape : évaluation de la fonction coût  $F_{n+1} = F(\lambda_{n+1}, \eta_{n+1})$

- Troisième étape : validation

- Si  $F_{n+1} > F_n$

- $F_{n+1} = F_n$

- si  $n$  est pair :

$$\begin{aligned}\alpha_\eta^{n+1} &= \alpha_\eta^n / 2 \\ \eta_{n+1} &= \eta_n\end{aligned}$$

- si  $n$  est impair :

$$\begin{aligned}\alpha_\lambda^{n+1} &= \alpha_\lambda^n / 2 \\ \lambda_{n+1} &= \lambda_n\end{aligned}$$

- Si  $F_{n+1} \leq F_n$  :

- on calcule  $\delta \eta_{n+1}$  et  $\delta \lambda_{n+1}$  (résolution de problèmes adjoints)

- si  $n$  est pair :  $\alpha_\eta^{n+1} = 2\alpha_\eta^n$

- si  $n$  est impair :  $\alpha_\lambda^{n+1} = 2\alpha_\lambda^n$

Critère d'arrêt : on arrête la minimisation si les coefficients de descente  $\alpha_\mu$  et  $\alpha_\lambda$  sont trop petits ou bien si le nombre d'itération dépasse 100 (on observe que dans la plupart des simulations 60 itérations sont suffisantes pour avoir convergence de la minimisation).

---

## 5.3 Reconstruction d'impédances régulières

Cette section est dédiée à la reconstruction d'impédances lorsque l'obstacle est connu. Afin de considérer des inconnus sans dimension, nous remplaçons la condition au bord par

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} + \operatorname{div}_\Gamma \left( \frac{\eta}{k} \nabla_\Gamma u \right) + \lambda k u = 0,$$

cette normalisation vaut pour tout le reste du chapitre. De plus, afin d'être en accord avec les résultats d'unicité établis dans [14] nous supposons que  $\mathcal{R}e(\lambda) = 0$  et  $\mathcal{I}m(\eta) = 0$ . Enfin, sauf mention contraire, la géométrie de l'objet diffractant est donnée par

$$\Gamma = \{(0.4 \cos(\theta), 0.3 \sin(\theta)) \text{ pour } \theta \in [-\pi, \pi]\} \quad (5.5)$$

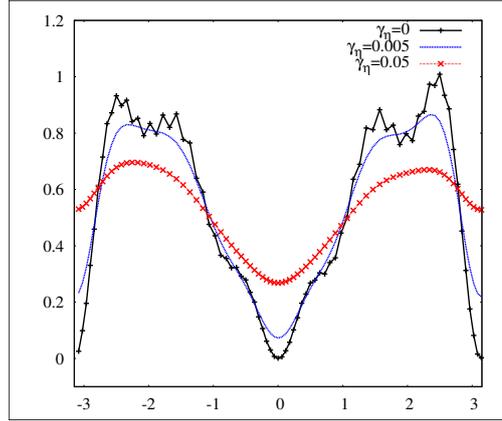
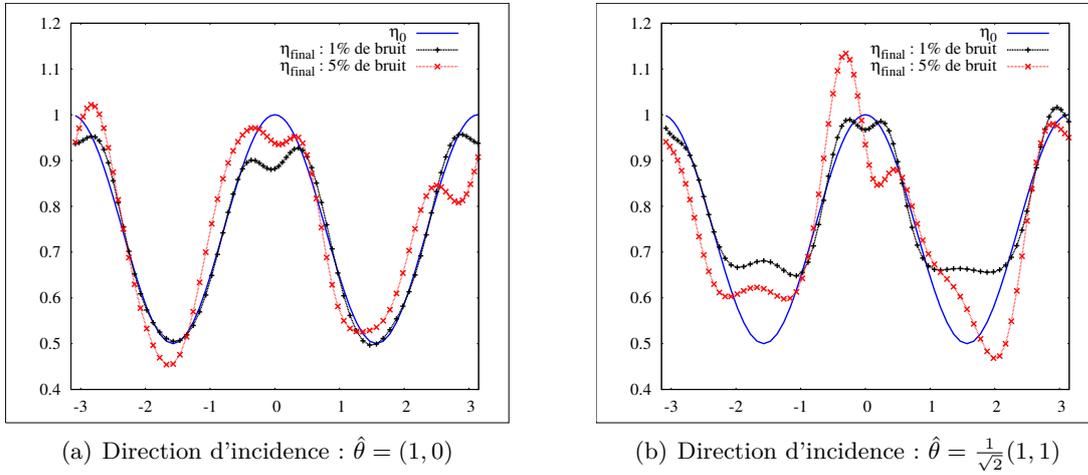


FIGURE 5.2 – Exemple d’une direction de descente  $\delta\eta$  pour plusieurs paramètres de régularisation  $\gamma_\eta$  lorsque le bruit relatif sur les données est  $\delta = 5\%$ .



(a) Direction d’incidence :  $\hat{\theta} = (1, 0)$

(b) Direction d’incidence :  $\hat{\theta} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$

FIGURE 5.3 – Reconstruction de  $\mathcal{R}e(\eta_0) = 0.5(\cos(\theta)^2 + 1)$  avec pour valeur initiale  $\eta_{\text{init}} = 0.75$ . Les autres paramètres sont  $\lambda_0 = 0$ ,  $k = 9$  et on envoie 1 onde incidente de direction  $\hat{\theta}$  avec une ouverture de  $2\pi$  (ouverture totale).

et donc on représente les impédances en fonction de  $\theta$ . La longueur d’onde de l’onde incidente  $u^i$  est à peu près égale à 0.7, cette valeur est du même ordre que le grand axe de l’ellipse décrite par (5.5).

### 5.3.1 Réflexion autour des données du problème

La figure 5.3 représente la reconstruction de  $\eta$  lorsque  $\lambda = 0$  est connu et lorsque  $I = 1$  et  $S_1 = S^{d-1}$  pour deux directions d’incidence  $\hat{\theta}$  différentes. Dans ces deux cas, la reconstruction de la fonction d’impédance  $\eta$  est peu précise, en revanche, comme on le voit sur la figure 5.4 le champ lointain produit par la fonction d’impédance  $\eta_{\text{final}}$  avec un bruit relatif  $\delta = 5\%$  est très proche du champ lointain produit par la fonction d’impédance  $\eta_0$  que l’on souhaite retrouver. La flèche verte indique à nouveau la zone du champ lointain correspondant à la direction d’observation  $-\hat{\theta}$ . Ceci illustre parfaitement l’instabilité de la reconstruction dont nous avons parlé dans le § 3.3. Une faible erreur sur le champ lointain peut entraîner une erreur importante sur la reconstruction.

En fait dans cette configuration d’ouverture totale, une partie importante des données (les observations situées dans la zone d’ombre) est inutile. Nous avons donc considéré le cas où le champ lointain est connu seulement dans la zone éclairée. Avec une seule onde incidente nous

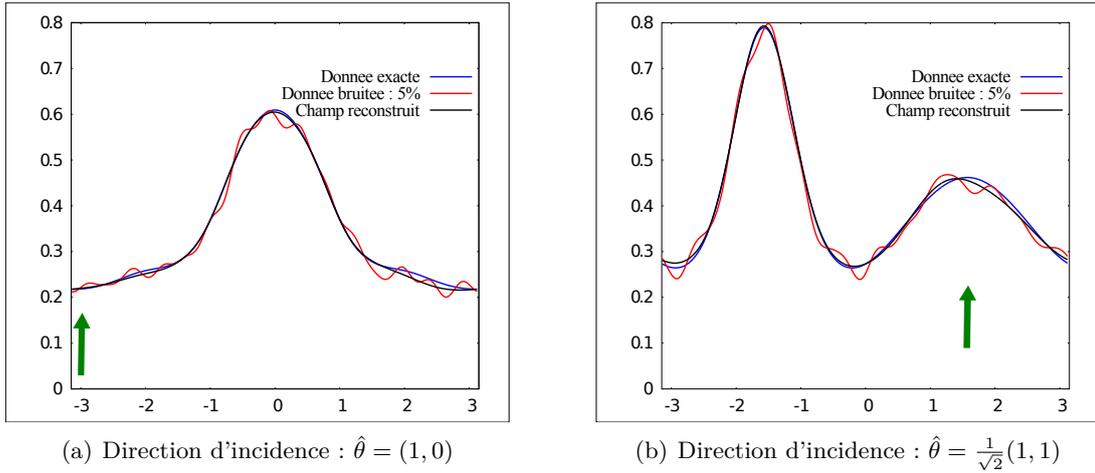


FIGURE 5.4 – Module du champ lointain, comparaison entre les données exactes, celles avec 5% de bruit et le champ lointain obtenu après la minimisation de  $F$ .

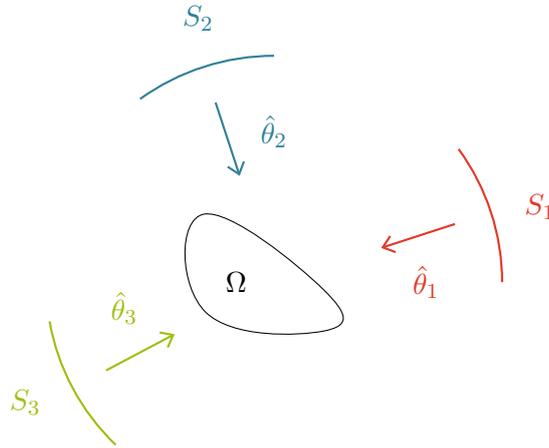


FIGURE 5.5 – Dispositif avec plusieurs ondes incidentes et observation partielle.

aurions un problème numériquement sous-déterminé, nous envoyons donc plusieurs ondes incidentes. Plus précisément, nous imaginons un dispositif comme celui représenté sur la figure 5.5 : nous considérons  $I$  directions d'incidences uniformément réparties sur le cercle unité et pour chaque direction d'incidence  $\hat{\theta}_i$  on prend pour  $S_i$  un arc de cercle centré autour de  $-\hat{\theta}_i$  tel que  $S_i \cap S_j = \emptyset$  si  $i \neq j$  et  $\cup_{i=1}^I S_i = \partial B(0, 1)$ . Les figures 5.6 et 5.7 représentent la reconstruction de la fonction  $\eta$  lorsque  $\lambda = 0$  est connu en envoyant  $I = 10$  ondes incidentes, pour deux ordres de grandeurs différents de  $\eta_0$ . Dans les deux cas, la reconstruction est très proche de la valeur exacte  $\eta_0$  que l'on cherche, le cas où la valeur de  $\eta_0$  est plus élevée (figure 5.6) semble très stable, on ne distingue aucune différence entre le  $\eta_{\text{final}}$  avec 1% de bruit et celui avec 5% de bruit.

### 5.3.2 Influence de la non-convexité de la géométrie

La figure 5.9 illustre la reconstruction de  $\eta$ , toujours en supposant que  $\lambda = 0$ , sur différentes géométries. Nous considérons trois géométries non-convexes définies par

$$\Gamma_r = \{(0.3 \cos(\theta - \pi) + r \cos(2(\theta - \pi)), 0.2 \sin(\theta)) \text{ pour } \theta \in [-\pi, \pi]\}$$

pour plusieurs valeurs de  $r$ , la figure 5.8 représente les trois géométries que nous utilisons dans les exemples numériques. Au vu des résultats obtenus figure 5.9 (à comparer avec la figure 5.6), il

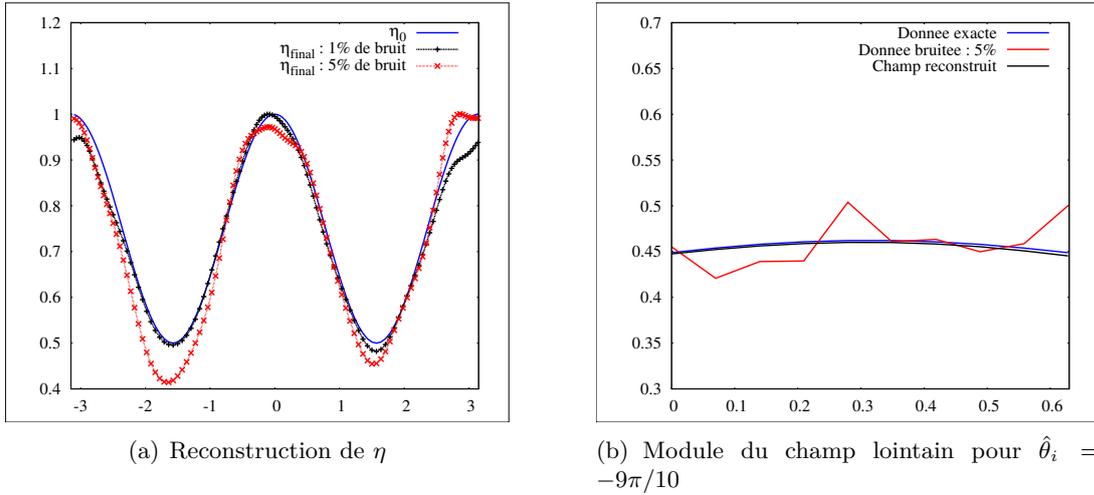


FIGURE 5.6 – Reconstruction de  $\mathcal{R}e(\eta_0) = 0.5(\cos(\theta)^2 + 1)$  avec pour valeur initiale  $\eta_{\text{init}} = 0.75$ . Les autres paramètres sont  $\lambda_0 = 0$ ,  $k = 9$  et on envoie 10 ondes incidentes pour une ouverture de  $\pi/5$ .

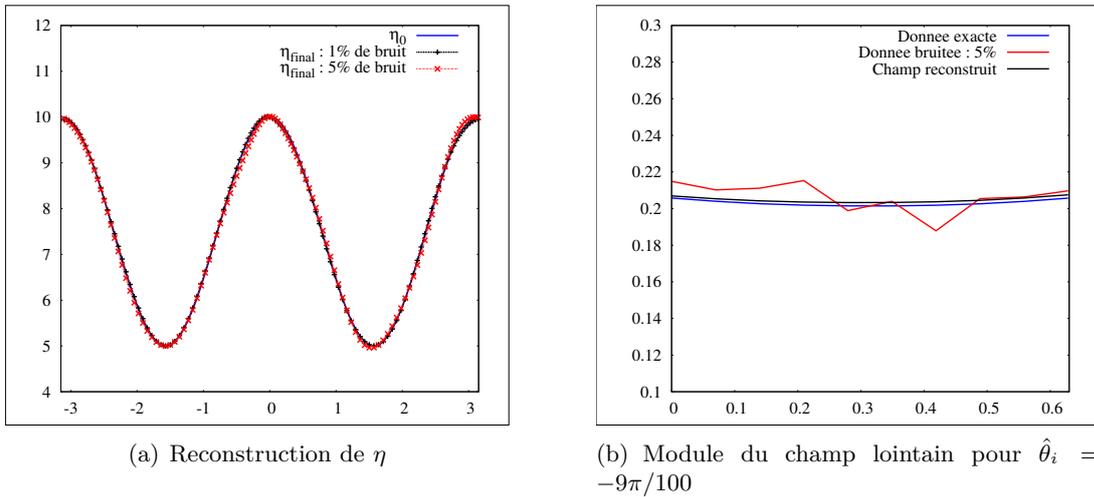


FIGURE 5.7 – Reconstruction de  $\mathcal{R}e(\eta_0) = 5(\cos(\theta)^2 + 1)$  avec pour valeur initiale  $\eta_{\text{init}} = 7.5$ . Les autres paramètres sont  $\lambda_0 = 0$ ,  $k = 9$  et on envoie 10 ondes incidentes pour une ouverture de  $\pi/5$ .

semble que la non convexité détériore la reconstruction numérique de  $\eta$  et la rend instable car même lorsque la reconstruction avec 1% de bruit est bonne, celle avec 5% est de mauvaise qualité.

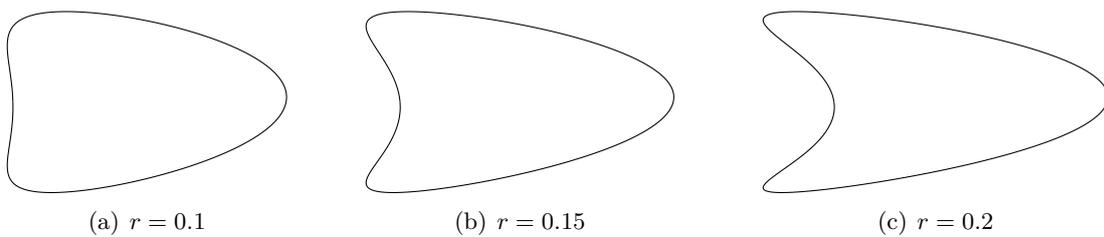


FIGURE 5.8 – Géométries non convexes.

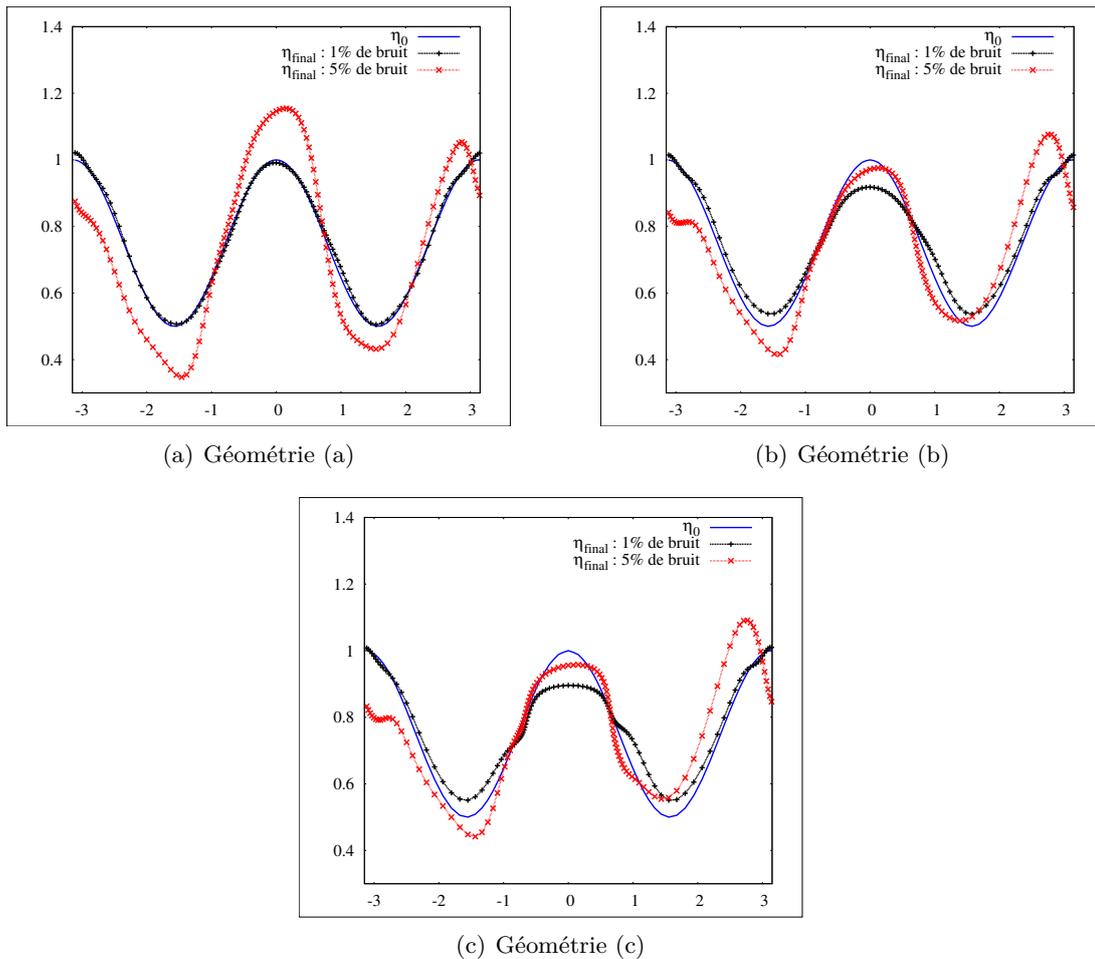


FIGURE 5.9 – Reconstruction de  $\mathcal{R}e(\eta_0) = 0.5(\cos(\theta)^2 + 1)$  avec pour valeur initiale  $\eta_{\text{init}} = 0.75$  sur les trois géométries de la figure 5.8. Les autres paramètres sont  $k = 9$  et on envoie 10 ondes incidentes pour une ouverture de  $\pi/5$ .

### 5.3.3 Reconstruction simultanée des impédances

Revenons au cas de la géométrie convexe décrite par (5.5), nous présentons ici plusieurs exemples de reconstruction simultanée de  $\lambda$  et  $\eta$  dans le cas où  $\mathcal{R}e(\lambda) = 0$  et  $\mathcal{I}m(\eta) = 0$ . Nous faisons ces hypothèses afin de simplifier la résolution et éviter les minimas locaux. Les données sont les mêmes que dans la section précédente, on envoie 10 ondes incidentes ayant des directions d'incidence uniformément réparties sur le cercle unité et l'ouverture d'observation est  $\pi/5$ . Nous donnons dans le Tableau 5.1 le résultat de reconstructions pour des coefficients constants.

$\lambda_0$	$\eta_0$	$\lambda_{init}$	$\eta_{init}$	$\lambda$ reconstruit	$\eta$ reconstruit
$i$	1	$0.5i$	0.5	$i$	0.97
$i$	0.2	$0.5i$	0.1	$0.99i$	0.21
$i$	5	$0.5i$	2.5	$0.97i$	5.12

TABLE 5.1 – Reconstruction simultanée de  $\lambda$  et  $\eta$  constants avec 1% de bruit sur les données.

On considère maintenant le cas d'impédances variables. La figure 5.10 montre la reconstruction de  $\eta$  et  $\lambda$  lorsque  $\eta \sim 1$ , nous remarquons que  $\lambda$  est parfaitement reconstruit alors que  $\eta$  l'est beaucoup moins. En revanche, si on multiplie par 10 la valeur de  $\eta$  (voir figure 5.11) les reconstructions de  $\eta$  et  $\lambda$  sont toutes les deux précises même en présence de bruit.

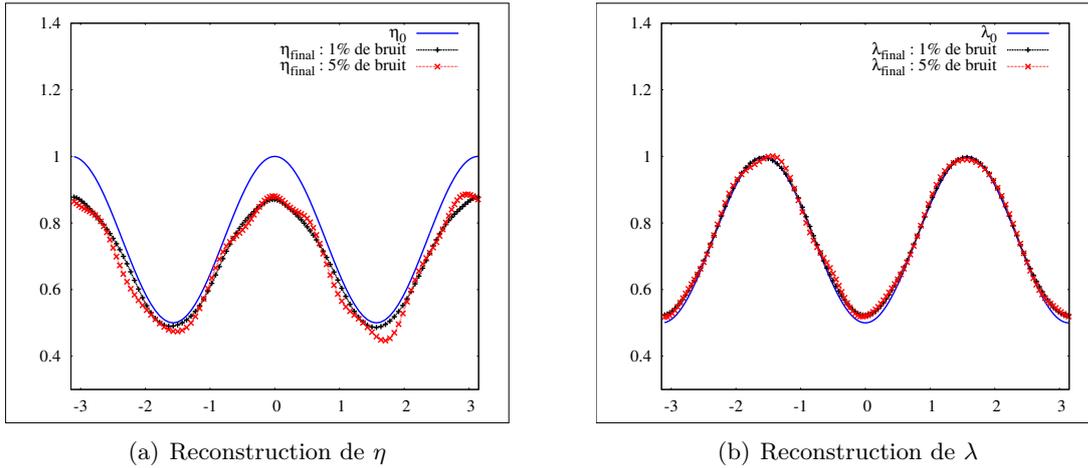


FIGURE 5.10 – Reconstruction simultanée de  $\mathcal{R}e(\eta_0) = 0.5(\cos(\theta)^2 + 1)$  avec pour valeur initiale  $\eta_{init} = 0.75$  et de  $\mathcal{I}m(\lambda_0) = 0.5(\sin(\theta)^2 + 1)$  avec pour valeur initiale  $\lambda_{init} = 0.75i$ . Les autres paramètres sont  $k = 9$  et on envoie 10 ondes incidentes pour une ouverture de  $\pi/5$ .

### 5.3.4 Reconstruction des impédances sur un obstacle perturbé

Afin d'illustrer le résultat de stabilité par rapport à l'obstacle que nous avons énoncé dans le théorème 3.4.4, on se donne des données bruitées  $u_{obs,i}^{\infty,\delta} = T(\lambda_0, \eta_0, \Gamma, \hat{\theta}_i) + b(\hat{x})$  pour un obstacle donné  $\Omega$  (l'obstacle exact) et on minimise la fonction coût suivante

$$F_\varepsilon(\lambda, \eta) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^I \|T(\lambda, \eta, \Gamma_\varepsilon, \hat{\theta}_i) - u_{obs,i}^{\infty,\delta}\|_{L^2(S_j)}^2$$

pour une géométrie perturbée  $\Gamma_\varepsilon := (\text{Id} + \varepsilon)(\Gamma)$ . On modélise ainsi un expérience dans laquelle, ayant obtenu par une première méthode une approximation  $\Gamma_\varepsilon$  de la géométrie exacte  $\Gamma$ , on cherche dans un deuxième temps à reconstruire les impédances  $(\lambda, \eta)$  sur  $\Gamma_\varepsilon$  et non sur  $\Gamma$ .

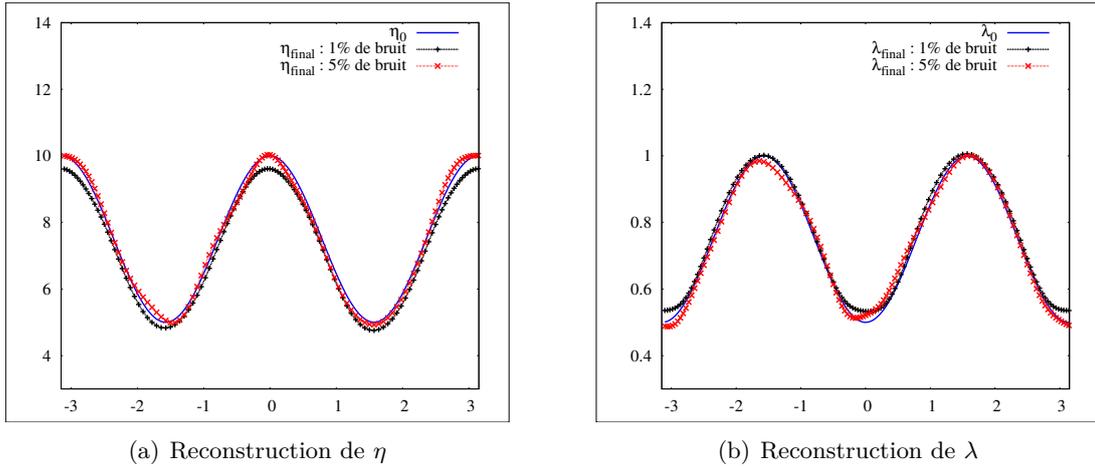


FIGURE 5.11 – Reconstruction simultanée de  $\mathcal{R}e(\eta_0) = 5(\cos(\theta)^2 + 1)$  avec pour valeur initiale  $\eta_{\text{init}} = 7.5$  et de  $\mathcal{I}m(\lambda_0) = 0.5(\sin(\theta)^2 + 1)$  avec pour valeur initiale  $\lambda_{\text{init}} = 0.75i$ . Les autres paramètres sont  $k = 9$  et on envoie 10 ondes incidentes pour une ouverture de  $\pi/5$ .

On considère deux sortes de perturbation. Dans un premier temps  $\Omega_\varepsilon$  est l'ellipse de demi-axes 0.3 et 0.4 que l'on a définie dans les sections précédentes, l'obstacle exact  $\Omega$  est la même ellipse perturbée par une fonction oscillante dont l'amplitude est  $\beta$ . Plus précisément, la frontière de  $\Omega$  est paramétrée par

$$\Gamma = \{(0.4(\cos \theta + \beta \cos(10\theta)), 0.3(\sin \theta + \beta \sin(10\theta)))\}, \text{ pour } \theta \in [0, 2\pi].$$

Les résultats de reconstruction sont présentés sur la figure 5.12 pour  $\lambda_0 = 0$  et une fonction régulière  $\eta_0$ , pour deux valeurs de  $\beta$ . On remarque que lorsque  $\beta = 0.01$  la reconstruction est plutôt bonne et la perturbation sur la géométrie est quasiment sans effet sur la reconstruction de la fonction  $\eta$ . En revanche, dès que la perturbation sur la géométrie devient trop importante, cela semble être le cas pour  $\beta = 0.03$ , la reconstruction est fortement dégradée. Nous rappelons que le théorème 3.4.4 permet de borner la distance entre les impédances reconstruites  $\lambda_\varepsilon$  et  $\eta_\varepsilon$  par la distance entre les deux obstacles (faible dans notre cas) et par

$$\|T(\lambda_\varepsilon, \eta_\varepsilon, \Gamma_\varepsilon, \hat{\theta}_i) - u_{\text{obs},i}^{\infty,\delta}\|_{L^2(S_j)}^2.$$

Pour l'ellipse perturbée lorsque  $\beta = 0.03$ , la valeur ci-dessus est par conséquent la distance entre les impédances reconstruites et les impédances cherchées est grande.

Considérons un deuxième type de perturbation sur l'obstacle, les géométries exactes et perturbées sont données sur la figure 5.13. L'amplitude de la perturbation est de nouveau notée  $\beta$  et est définie par

$$\beta := \frac{\varepsilon_0}{\text{diam}(\Omega)}$$

où  $\varepsilon_0 = d_H(\Omega, \Omega_\varepsilon)$  et  $d_H$  désigne la distance de Hausdorff (voir Définition 2.2.7 de [53] par exemple). Notons que l'obstacle perturbé n'est rien d'autre que l'enveloppe convexe de la géométrie exacte  $\Omega$ . Notons  $f_\varepsilon := \text{Id} + \varepsilon$ , la figure 5.14 représente les champs lointains  $T(\lambda_0, \eta_0, \Gamma, \hat{\theta}_i)$  et  $T(\lambda_0 \circ f_\varepsilon^{-1}, \eta_0 \circ f_\varepsilon^{-1}, \Gamma_\varepsilon, \hat{\theta}_i)$  pour diverses directions d'incidences, la flèche verte indique la zone d'observation correspondant à la partie éclairée de l'obstacle. On remarque que dès que la zone non convexe de  $\Omega$  est dans la zone éclairée par l'onde incidente, l'écart entre  $T(\lambda_0, \eta_0, \Gamma, \hat{\theta}_i)$  et  $T(\lambda_\varepsilon, \eta_\varepsilon, \Gamma_\varepsilon, \hat{\theta}_i)$  est important. Nous faisons donc le choix d'envoyer 10 ondes incidentes pour des directions d'incidences comprises dans l'intervalle  $[\pi/2, 3\pi/2]$ . La figure 5.15 montre le résultat de la reconstruction pour deux niveaux de bruit et une fonction d'impédance régulière. Dans les deux cas, la reconstruction de  $\eta$  est précise dans la zone connue de la géométrie (partie droite de l'obstacle) et moins précise dans la zone perturbée (partie gauche de l'obstacle).

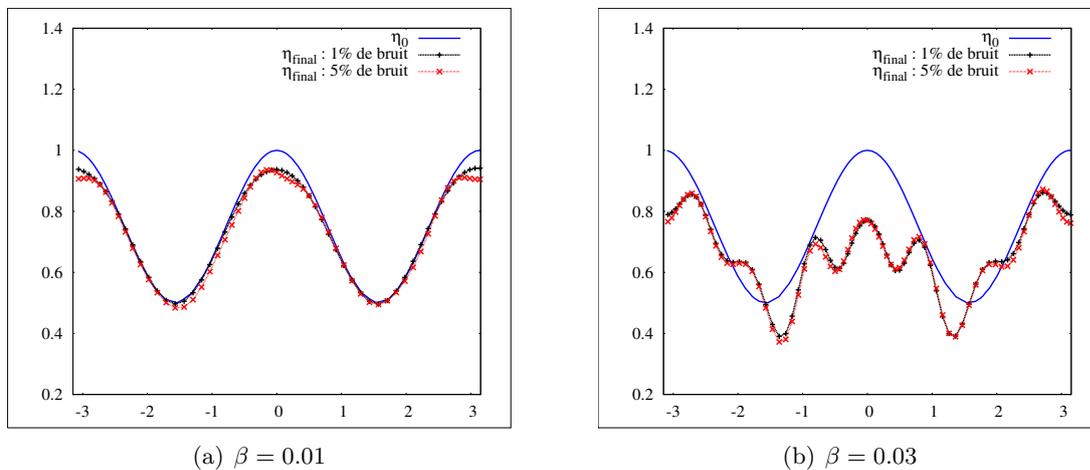


FIGURE 5.12 – Reconstruction sur une géométrie perturbée (ellipse oscillante) de  $\mathcal{R}e(\eta_0) = 0.5(\cos(\theta)^2 + 1)$  avec pour valeur initiale  $\eta_{\text{init}} = 0.75$ . Les autres paramètres sont  $\lambda_0 = 0$ ,  $k = 9$  et on envoie 10 ondes incidentes pour une ouverture de  $\pi/5$ .

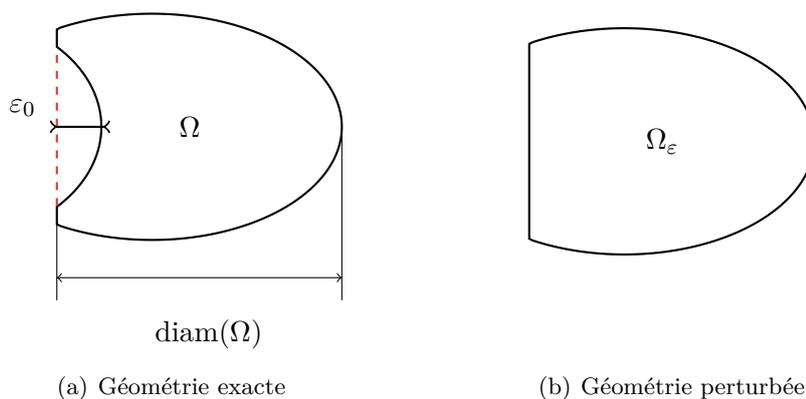


FIGURE 5.13 – Géométries exactes et perturbées.

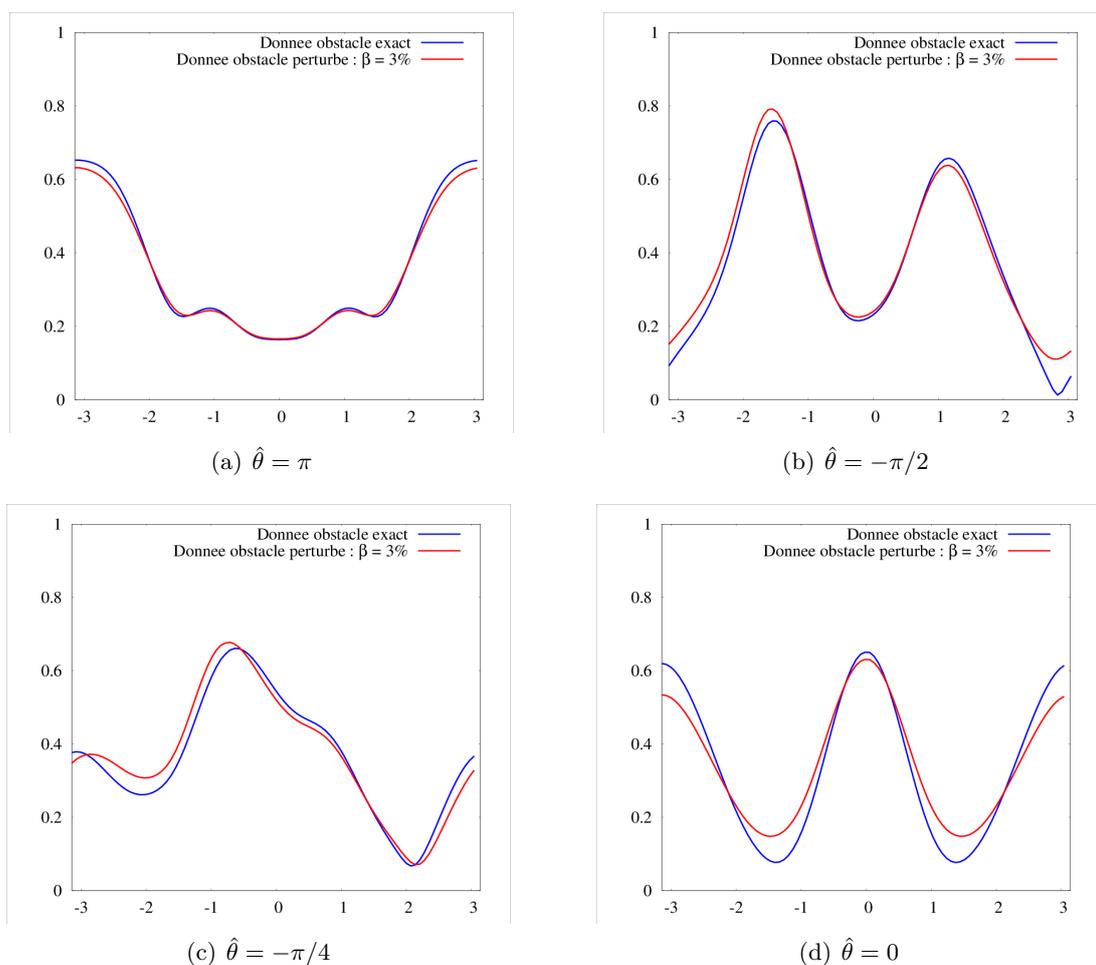


FIGURE 5.14 – Comparaison du module du champ lointain produit par la géométrie exacte et la géométrie perturbée. On prend  $\mathcal{R}e(\eta_0) = 0.5(\cos(\theta)^2 + 1)$ ,  $\lambda_0 = 0$  et  $k = 9$ .

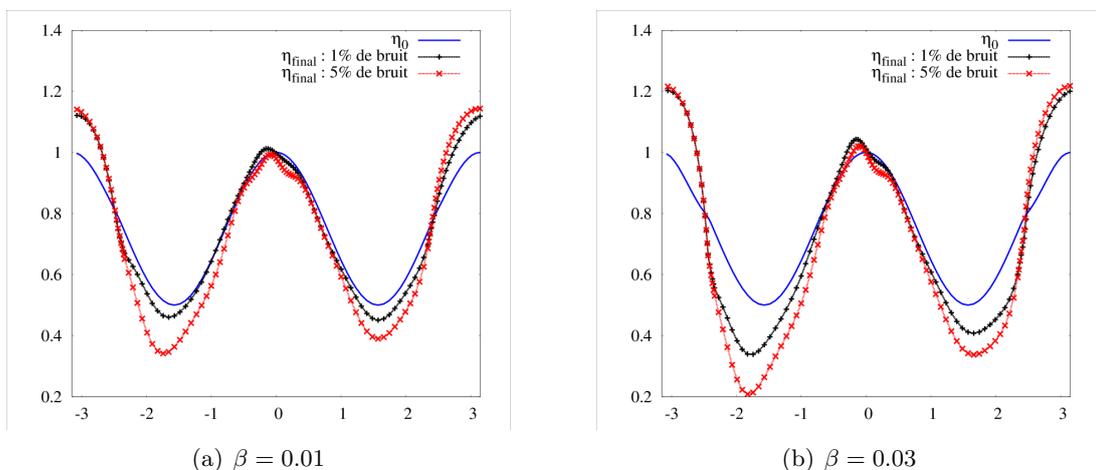


FIGURE 5.15 – Reconstruction sur une géométrie perturbée (voir figure 5.13) de  $\mathcal{R}e(\eta_0) = 0.5(\cos(\theta)^2 + 1)$  avec pour valeur initiale  $\eta_{\text{init}} = 0.75$ . Les autres paramètres sont  $\lambda_0 = 0$ ,  $k = 9$  et on envoie 10 ondes incidentes pour une ouverture de  $\pi/5$ .

## 5.4 Reconstruction d'impédances constantes par morceaux

Dans cette section nous supposons de nouveau que  $\lambda_0 = 0$  et nous focalisons sur la reconstruction de la fonction réelle  $\eta$  lorsqu'elle n'est plus régulière mais constante par morceaux sur l'obstacle convexe décrit par (5.5).

### 5.4.1 Régularisation $H^1$ du gradient

Dans un premier temps nous avons utilisé la même technique de régularisation que lorsque  $\eta$  était régulière (c'est-à-dire une régularisation  $H^1$  du gradient) mais comme on le voit en figure 5.16, la fonction reconstruite est oscillante. Afin de corriger ce défaut, il est nécessaire de se tourner vers une autre méthode de régularisation et la méthode qui semble la mieux adaptée au cas de coefficients constants par morceaux est une régularisation à l'aide de la variation totale (régularisation TV).

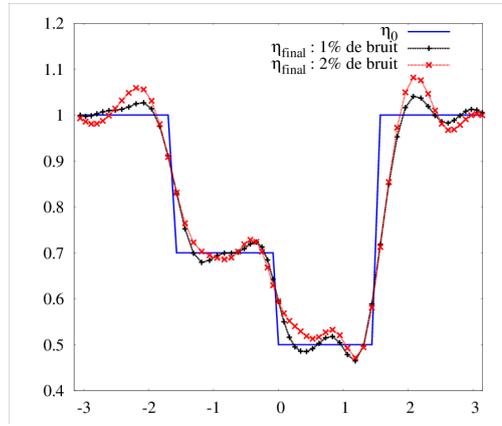


FIGURE 5.16 – Reconstruction de  $\mathcal{Re}(\eta_0)$  constante par morceaux avec pour valeur initiale  $\eta_{\text{init}} = 0.75$  et une régularisation  $H^1$ . Les autres paramètres sont  $\lambda_0 = 0$ ,  $k = 9$  et on envoie 10 ondes incidentes pour une ouverture de  $\pi/5$ .

### 5.4.2 Régularisation TV

La technique de régularisation à l'aide d'un terme de pénalisation de type variation totale (régularisation TV) consiste à minimiser la fonctionnelle

$$F_{\text{TV}}(\eta) := F(0, \eta, \Gamma) + \gamma_{\text{TV}} |\eta|_{\text{TV}}$$

sur l'ensemble des fonctions à variations bornées, c'est-à-dire des fonctions de

$$BV(\Gamma) := \{\eta \in L^1(\Gamma) \text{ tels que } |\eta|_{\text{TV}} < +\infty\}$$

où

$$|\eta|_{\text{TV}} := \int_{\Gamma} |D_{\Gamma} \eta| ds := \sup_{\substack{\mathbf{v} \in (C^1(\Gamma))^2 \\ \|\mathbf{v}\|_{(L^\infty(\Gamma))^2} \leq 1}} - \int_{\Gamma} \eta \operatorname{div}_{\Gamma} \mathbf{v} ds.$$

Remarquons qu'ici on régularise directement la fonction coût et non plus le gradient. Ce type de régularisation est bien connu dans le domaine du débruitage d'images, voir [84] par exemple. Pour tout  $\eta_0 \in BV(\Gamma)$  introduisons la fonctionnelle de débruitage

$$D_{\gamma}(\eta_0) := \operatorname{argmin}_{\eta \in BV(\Gamma)} \left( \|\eta - \eta_0\|_{L^2(\Gamma)} + \gamma |\eta|_{\text{TV}} \right), \quad (5.6)$$

où l'indice  $\gamma$  est le coefficient de régularisation.

Remarquons que la fonction  $F_{TV}(\eta)$  se décompose comme la somme d'une norme  $L^2$  (dérivable) et d'une norme  $L^1$  (non dérivable), il va donc falloir traiter le terme singulier avec attention. Nous utilisons à nouveau un algorithme de descente de gradient pour minimiser  $F_{TV}(\eta)$  et à chaque itération  $n$  on met à jour la fonction  $\eta_n$  en utilisant une méthode de splitting qui consiste à séparer la minimisation sur la partie régulière et celle sur la partie singulière de la fonction coût :

$$\begin{aligned}\eta_{n+1/2} &= \eta_n - \delta\eta_n \\ \eta_{n+1} &= D_{\gamma_{TV}}(\eta_{n+1/2})\end{aligned}$$

où  $\delta\eta_n$  est l'unique solution dans  $X_{h,\Gamma}$  de

$$(\delta\eta_n, \varphi)_{L^2(\Gamma)} = \alpha_\eta F'_\Gamma(0, \eta_n) \cdot (0, \varphi) \quad \text{pour tout } \varphi \in X_{h,\Gamma}$$

pour un coefficient de descente  $\alpha_\eta > 0$ . Le réel  $\gamma_{TV} > 0$  est le paramètre de régularisation pour  $\eta$ . Ce type de méthode a déjà été utilisé dans [8] par exemple lorsque le terme de pénalisation est la norme  $L^1$  (à la place de la norme TV dans cette section).

La deuxième étape de la mise à jour de  $\eta_n$  nécessite la résolution du problème de minimisation (5.6). La norme  $L^1$  n'étant pas différentiable, il est préférable d'utiliser la définition de la norme TV à l'aide de la dualité pour réécrire (5.6) sous la forme d'un problème de point selle :

$$D_\gamma(\eta_0) = \underset{\eta \in BV(\Gamma)}{\operatorname{argmin}} \max_{\substack{\xi \in (C^1(\Gamma))^2 \\ \|\xi\|_{(L^\infty(\Gamma))^2} \leq 1}} \left( \|\eta - \eta_0\|_{L^2(\Gamma)} - \gamma \int_\Gamma \eta \operatorname{div}_\Gamma \xi ds \right).$$

Pour résoudre ce problème, nous avons utilisé l'algorithme 1 proposé dans [32], c'est principalement un algorithme de gradient. On initialise l'algorithme avec  $\xi = 0$  et  $\eta = \eta_0$  et à chaque étape on effectue

$$\begin{aligned}\xi_{n+1} &= P_\infty^1(\xi_n + \gamma\alpha \nabla_\Gamma \eta_n), \\ \eta_{n+1} &= \frac{1}{1+\alpha} (\eta_n + \gamma\alpha \operatorname{div}_\Gamma(\xi_{n+1}) + \alpha\eta_0)\end{aligned}$$

avec

$$P_\infty^1(\xi) := \frac{\xi}{\max(|\xi|, 1)}$$

et  $\alpha$  est le coefficient de descente que l'on choisit suffisamment petit. Nous avons aussi testé les autres algorithmes (plus rapides) proposés dans [32], pour plus de détails sur les techniques primale-duales pour la minimisation TV nous renvoyons le lecteur à cet article.

Une telle stratégie de régularisation donne de bien meilleurs résultats que la régularisation  $H^1$  (voir figure 5.17) pour la reconstruction de fonctions constantes par morceaux. En effet, on retrouve très bien le caractère continu par morceaux de la fonction d'impédance que l'on cherche.

## 5.5 Reconstruction simultanée des impédances et de l'obstacle

Passons maintenant à la reconstruction simultanée de la géométrie et des impédances. Nous utilisons à nouveau une méthode de descente de gradient et nous minimisons la fonction

$$F(\lambda, \eta, \Gamma) := \frac{1}{2} \sum_{i=1}^I \|T(\lambda, \eta, \Gamma, \hat{\theta}_i) - u_{\text{obs},i}^{\infty,\delta}\|_{L^2(S_i)}^2$$

par rapport aux impédances  $(\lambda, \eta)$  et à la géométrie  $\Gamma$ . Comme précédemment on suppose que les données  $u_{\text{obs},i}^{\infty,\delta}$  correspondent à un champ lointain bruité produit par des fonctions d'impédance  $\lambda_0$  et  $\eta_0$  et une géométrie  $\Gamma_0$ . L'algorithme utilisé est très similaire à l'Algorithme 5.2, on ajoute simplement une étape de calcul du gradient par rapport à la géométrie et de mise à jour de la géométrie

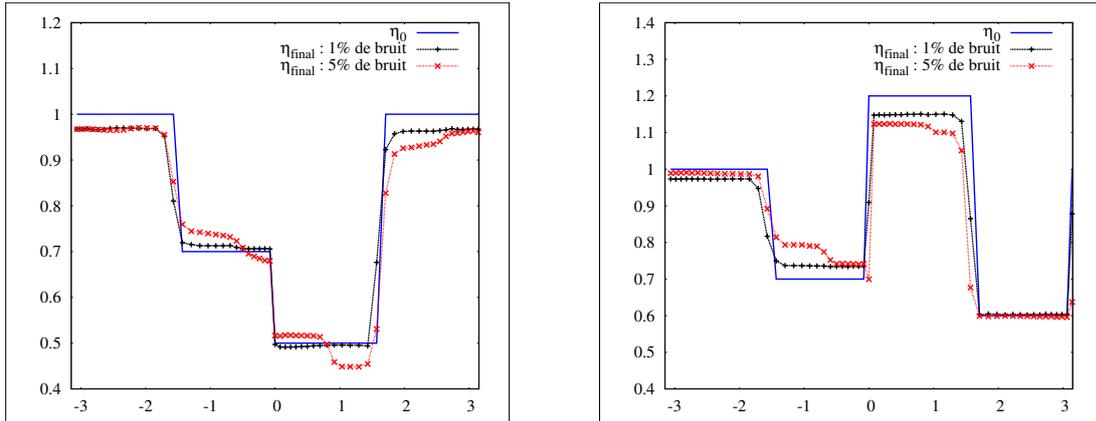


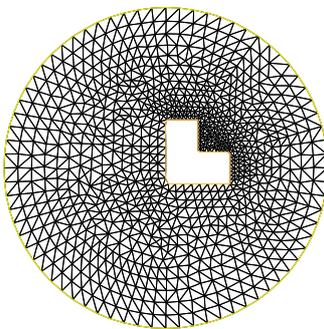
FIGURE 5.17 – Reconstruction de  $\mathcal{R}e(\eta_0)$  constante par morceaux avec pour valeur initiale  $\eta_{\text{init}} = 0.75$  et une régularisation  $TV$ . Les autres paramètres sont  $\lambda_0 = 0$ ,  $k = 9$  et on envoie 10 ondes incidentes pour une ouverture de  $\pi/5$ .

(c'est-à-dire du maillage). Pour calculer la direction de descente  $\varepsilon$  par rapport à la géométrie, on commence par la décomposer sous la forme  $\varepsilon = \varepsilon_\tau \tau + \varepsilon_\nu \nu$ , où  $\tau$  est le vecteur tangent unitaire, et on applique à nouveau une régularisation  $H^1(\Gamma)$  en résolvant pour tout  $\phi \in H^1(\Gamma)$ ,

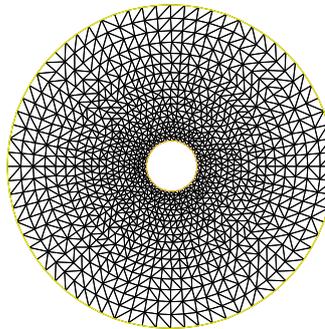
$$\gamma_\tau \int_\Gamma \nabla_\Gamma \varepsilon_\tau \cdot \nabla_\Gamma \phi \, ds + \int_\Gamma \varepsilon_\tau \phi \, ds = -\alpha_\Gamma F'_{\lambda, \eta}(\Gamma) \cdot (\phi \tau), \quad (5.7)$$

$$\gamma_\nu \int_\Gamma \nabla_\Gamma \varepsilon_\nu \cdot \nabla_\Gamma \phi \, ds + \int_\Gamma \varepsilon_\nu \phi \, ds = -\alpha_\Gamma F'_{\lambda, \eta}(\Gamma) \cdot (\phi \nu), \quad (5.8)$$

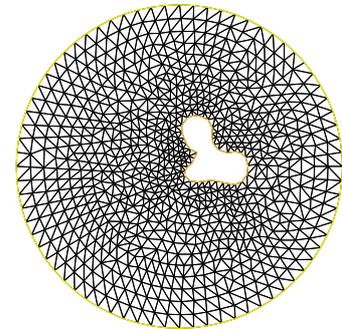
où  $\gamma_\tau, \gamma_\nu > 0$  sont les coefficients de régularisation, et  $F'_{\lambda, \eta}(\Gamma)$  est donnée dans le théorème 4.3.1. A chaque étape  $n$  de la minimisation, pour mettre à jour le maillage, on commence par mettre à jour la frontière de l'obstacle en bougeant chaque point  $x$  de  $\Gamma_n$  vers le point  $x_\varepsilon$  défini par  $x_\varepsilon = x + (\varepsilon_\tau \tau + \varepsilon_\nu \nu)(x)$ , puis on remaille le domaine de calcul compris entre la nouvelle géométrie  $\Gamma_{n+1}$  et le cercle extérieur  $\partial B_R$ . Rappelons aussi que l'on doit étendre les impédances à la nouvelle géométrie en suivant (4.3), on les définit donc par  $\lambda_{n+1}(x_\varepsilon) = \lambda_n(x)$  et  $\eta_{n+1}(x_\varepsilon) = \eta_n(x)$ . La figure 5.18 représente, sur un exemple particulier, le maillage utilisé pour obtenir les données  $u_{\text{obs}, i}^{\infty, \delta}$ , le maillage initial de la procédure de minimisation et une étape intermédiaire du processus de minimisation.



(a) Maillage pour générer les données



(b) Maillage initial



(c) Maillage lors d'une étape intermédiaire

FIGURE 5.18 – Exemples de maillages

### 5.5.1 Reconstruction de la géométrie à impédances connues

Nous commençons par reconstruire une forme lorsque  $\eta_0$  et  $\lambda_0$  sont connus. Dans tout ce qui suit, on suppose que l'on observe le champ lointain sur tout le cercle unité (ouverture totale). Le résultat présenté en figure 5.19 correspond à une reconstruction lorsque les données sont détériorées avec 1% de bruit relatif et on envoie deux ondes incidentes ( $I = 2$ ). Les résultats de la figure 5.20 correspondent à un bruit de 5% et  $I = 2$ , puis  $I = 8$ . On remarque que lorsque le bruit sur le champ lointain devient trop important, l'algorithme se retrouve piégé dans un minimum local et envoyer plus d'ondes incidentes résout cet écueil. Comme tous les algorithmes de descente de gradient, notre algorithme est très sensible à l'état initial que l'on choisit. De même, on montre en figure 5.21 qu'avec une mauvaise initialisation, il faut avoir plus de données pour espérer retrouver la forme. Dans ce qui suit toutes les expériences ont été menées pour  $I = 8$  ondes incidentes. Néanmoins, nous sommes en mesure de retrouver un obstacle en forme de  $L$  non étoilé et ce sans utiliser de paramétrisation. Ce type de reconstruction est en effet possible avec la méthode que nous avons utilisée.

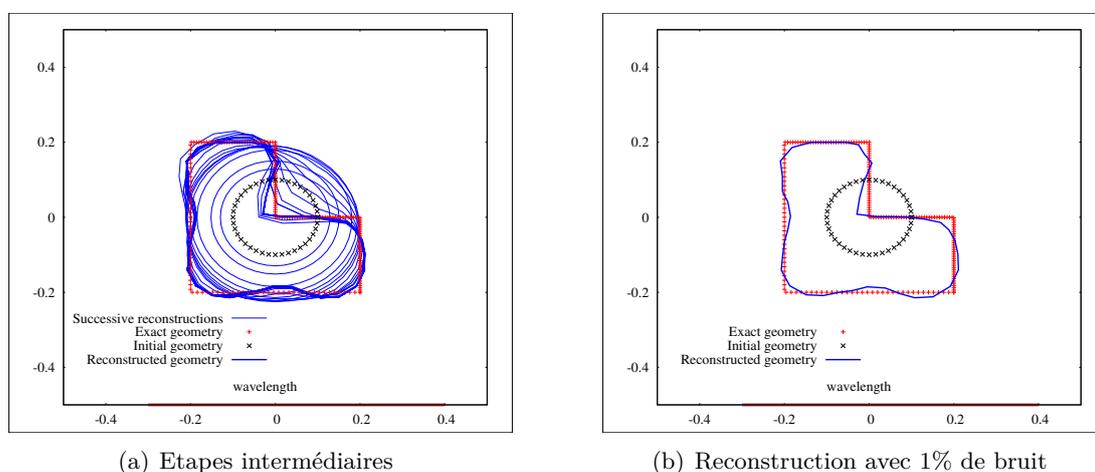


FIGURE 5.19 – Impédances connues et bonne initialisation.

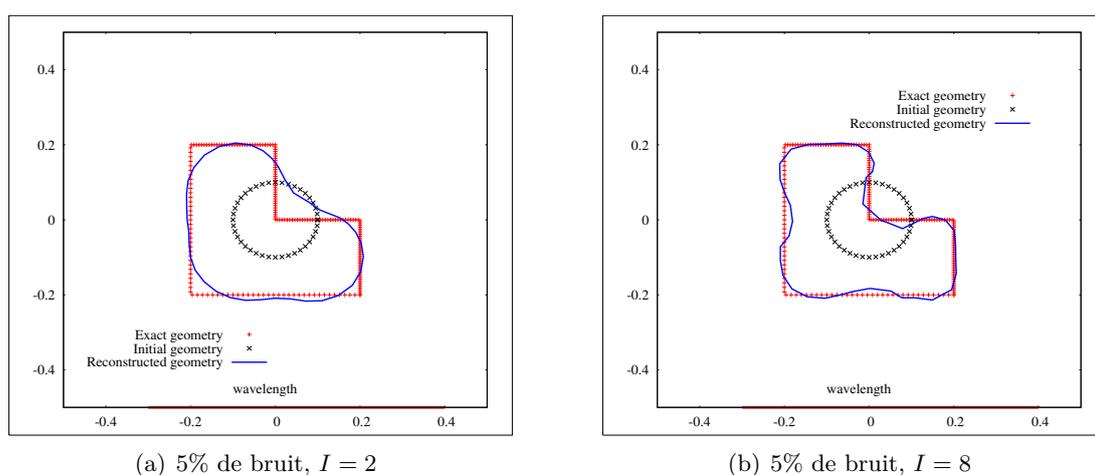
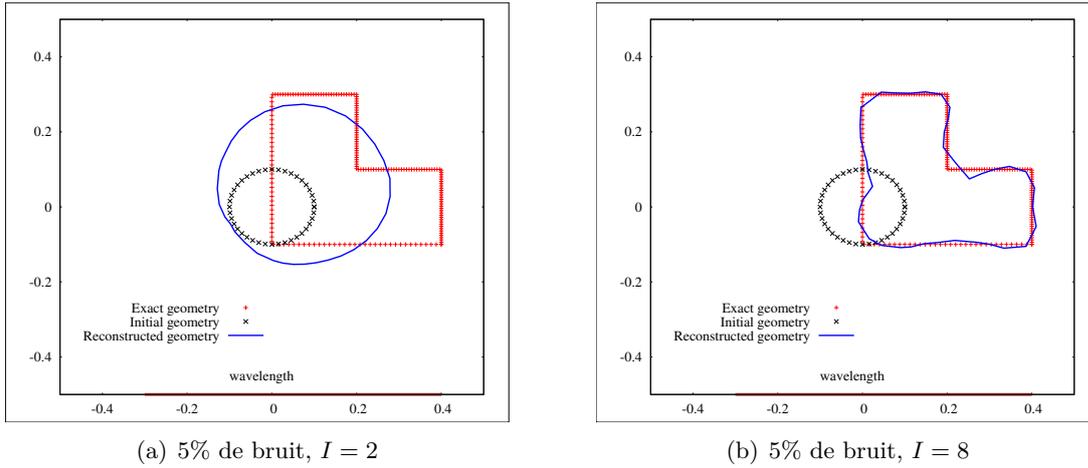


FIGURE 5.20 – Impédances connues, bonne initialisation, influence du bruit et de  $I$ .

FIGURE 5.21 – Impédances connues, mauvaise initialisation, influence de  $I$ .

### 5.5.2 Reconstruction de la géométrie et des impédances supposées constantes

Ici, on suppose que la géométrie  $\Gamma_0$  et les impédances  $(\lambda_0, \eta_0) = (0.5i, 2)$  sont inconnues et on inclut dans les informations a priori le fait que les impédances sont constantes. On part de  $(i, 1.5)$  comme initialisation pour  $(\lambda, \eta)$ , les impédances reconstruites sont  $(\lambda, \eta) = (0.49i, 1.99)$  pour 1% de bruit et  $(\lambda, \eta) = (0.51i, 1.93)$  pour 5% de bruit, les obstacles reconstruits correspondant sont présentés sur la figure 5.22.

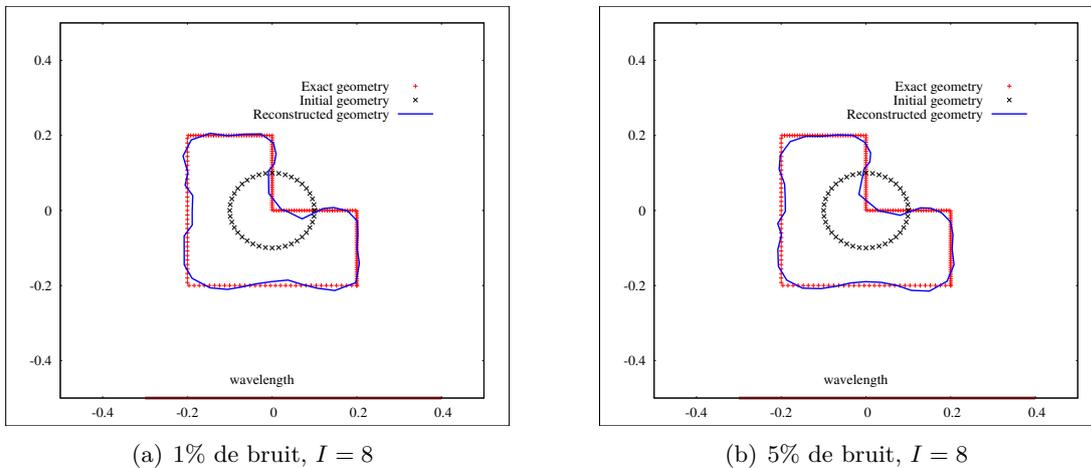


FIGURE 5.22 – Le cas d'impédances constantes et inconnues.

### 5.5.3 Reconstruction de la géométrie et des fonctions d'impédance

Afin d'illustrer la contribution dans le processus de minimisation de la fonction coût  $F$  de la partie tangentielle de la direction de descente  $\varepsilon$  pour la géométrie lorsque  $\eta$  et  $\lambda$  sont deux fonctions (voir remarque 4.2.13), on considère dans un premier temps un exemple académique. On veut reconstruire un cercle  $\Gamma_0$  de rayon  $R_0 = 0.3$  et une fonction d'impédance  $\lambda_0(\theta) = 0.5(1 + \sin^2(\theta + \frac{\pi}{6}))$ , où  $\theta$  est l'angle polaire, à partir d'un cercle centré au même point mais de rayon 0.2 et d'une fonction d'impédance  $\lambda_{\text{init}}(\theta) = 0.5(1 + \sin^2(\theta))$ . On suppose que  $\eta_0 = 0$  est connu, l'amplitude du bruit est de 5% et on envoie  $I = 8$  ondes incidentes. Par rapport à la géométrie cherchée, la géométrie initiale est simplement un cercle plus petit et auquel on a fait subir une rotation. On peut donc retrouver la forme de l'objet diffractant et la fonction d'impédance en itérant seulement sur la géométrie au

cours de la minimisation. Comme le montre la figure 5.23, la géométrie  $\Gamma_0$  et l'impédance  $\lambda_0$  sont plutôt bien reconstruits, ce qui ne pourrait être obtenu avec une dérivée de forme « classique » ne comprenant qu'une composante normale pour la direction de descente (voir [50]).

On termine cette section par un exemple de reconstruction simultanée de  $\lambda_0 = 0.5(1 + \sin^2 \theta)i$ ,  $\eta_0 = 0.5(1 + \cos^2 \theta)$  et de la forme

$$\Gamma_0 = \{((0.3 + 0.08 \cos(3\theta)) \cos(\theta), (0.3 + 0.08 \cos(3\theta)) \sin(\theta)) \text{ pour } \theta \in [0, 2\pi]\}.$$

Nous supposons que la partie réelle de  $\lambda_0$  est nulle et que la partie imaginaire de  $\eta_0$  l'est aussi. De plus, le niveau de bruit est de 5% et on envoie 8 ondes incidentes, les résultats sont présentés figure 5.24. L'algorithme se comporte de manière bien différente pour la reconstruction de la forme et celle des paramètres. Il converge avant tout sur la forme, puis affine le résultat sur les fonctions d'impédance seulement dans les dernières itérations. De plus, on a une meilleure précision pour la reconstruction de la forme que pour celle des paramètres. Le problème de reconstruction simultanée est donc complexe à résoudre, des améliorations de l'algorithme incluant du préconditionnement pour les fonctions d'impédance sont certainement à prévoir.

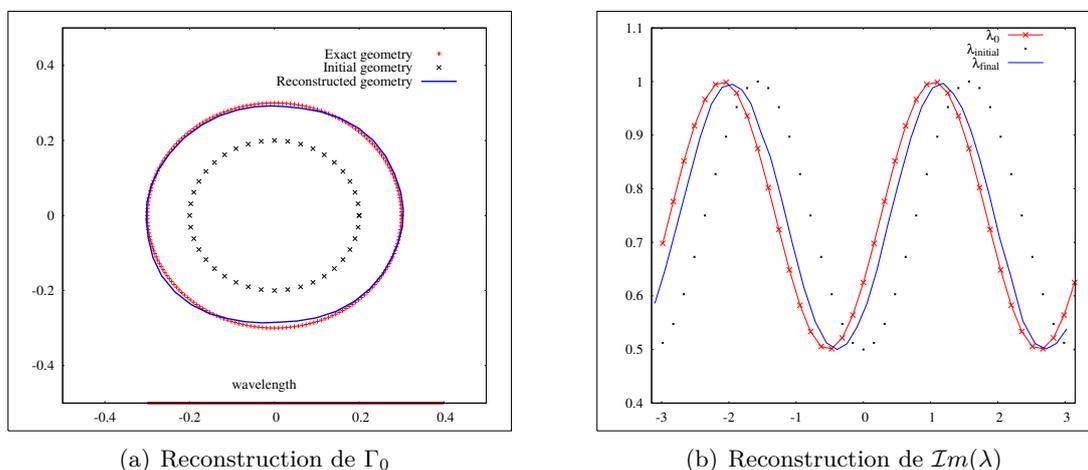


FIGURE 5.23 – Reconstruction d'un cercle et d'une fonction d'impédance en itérant seulement sur la géométrie,  $I = 8$  et on a 5% de bruit.

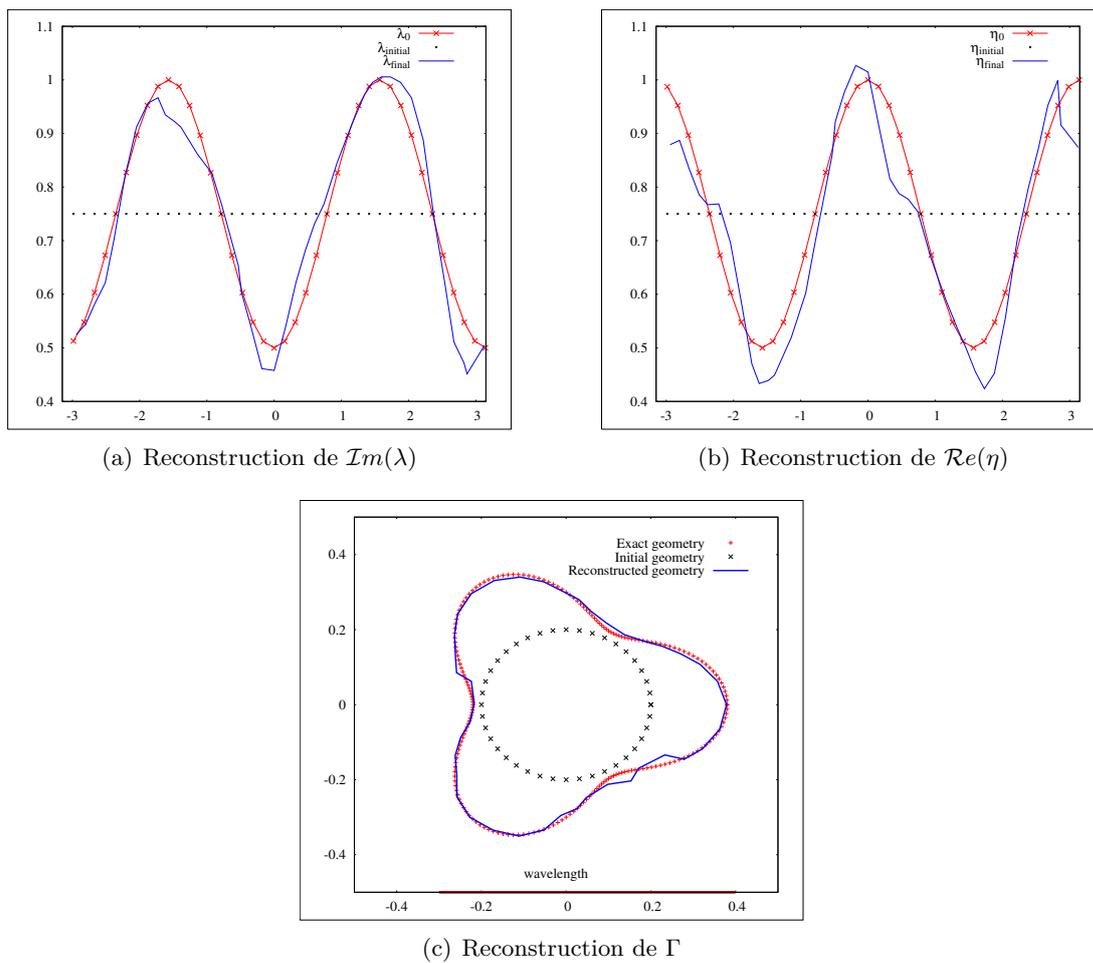


FIGURE 5.24 – Reconstruction simultanée d’une géométrie et de deux fonctions d’impédances,  $I = 8$ .

## 5.6 Application à l'identification des couches minces

### 5.6.1 Formulation du problème inverse

Dans le premier chapitre nous avons motivé l'utilisation d'une condition d'impédance généralisée par le fait que ce type de condition au bord intervient dans le modèle approché au premier ordre pour le problème de diffraction par un conducteur parfait recouvert d'une couche mince de diélectrique, modèle présenté dans le § 1.1.2. Nous allons utiliser les techniques développées ci-dessus pour retrouver les paramètres de la couche (son épaisseur  $\delta$  et  $\epsilon$  et  $\mu$ ) à partir de la donnée du champ lointain produit par la diffraction d'ondes planes par un obstacle revêtu d'une couche mince. Dans tout ce qui suit on note  $\delta$  l'épaisseur de la couche, c'est une fonction strictement positive de  $C^\infty(\Gamma)$ ,  $\epsilon$  et  $\mu$  sont deux constantes réelles strictement positives. Introduisons l'opérateur champ lointain pour le problème de couche mince

$$T_{\text{mince}} : (\delta, \mu, \epsilon, \Gamma, \hat{\theta}) \rightarrow u^\infty(\cdot, \hat{\theta}),$$

où  $u^\infty(\cdot, \hat{\theta})$  est le champ lointain associé à  $u^s = u(x) - e^{ik\hat{\theta}\cdot x}$  où  $u$  satisfait (1.3) et (1.4) et  $u^s$  satisfait la condition de radiation de Sommerfeld (1.5). Nous noterons aussi

$$T_1 : (\delta, \mu, \epsilon, \Gamma, \hat{\theta}) \rightarrow u_1^\infty(\cdot, \hat{\theta}),$$

où  $u_1^\infty(\cdot, \hat{\theta})$  est le champ lointain associé à  $u_1^s$  l'unique solution de

$$\begin{cases} \Delta u_1^s + k^2 u_1^s = 0 \text{ dans } \Omega_{\text{ext}}, \\ \frac{\partial u_1^s}{\partial \nu} + \text{div}_\Gamma(\delta \epsilon^{-1} \nabla_\Gamma u_1^s) + k^2 \mu \delta u_1^s = - \left( \frac{\partial u^i}{\partial \nu} + \text{div}_\Gamma(\delta \epsilon^{-1} \nabla_\Gamma u^i) + k^2 \mu \delta u^i \right) \text{ sur } \Gamma, \\ \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|x|=R} |\partial_r u_1^s - i k u_1^s|^2 ds = 0 \end{cases}$$

pour  $u^i(x) = e^{ik\hat{\theta}\cdot x}$ . L'opérateur  $T_{\text{mince}}$  correspond à l'opérateur de champ lointain pour le modèle complet de couche mince alors que  $T_1$  correspond à l'opérateur de champ lointain pour le modèle de GIBC (condition d'impédance généralisée) à l'ordre 1. Le problème inverse que l'on résout est le suivant : retrouver la forme  $\Gamma_0$  de l'objet recouvert de diélectrique et retrouver les paramètres  $\delta_0$ ,  $\epsilon_0$  et  $\mu_0$  de la couche à partir de la donnée de

$$u_{\text{obs},i}^\infty := T_{\text{mince}}(\delta_0, \mu_0, \epsilon_0, \Gamma_0, \hat{\theta}_i)$$

pour plusieurs ondes incidentes de directions d'incidences  $\hat{\theta}_i$  en utilisant le modèle de GIBC à l'ordre 1. On cherche donc à partir des données obtenues à l'aide du modèle complet à retrouver les paramètres de la couche (épaisseur et propriétés physiques) et la géométrie de l'obstacle en utilisant le modèle approché. Nous rappelons qu'il est beaucoup moins coûteux de calculer numériquement la solution du modèle de GIBC que de calculer la solution du modèle complet, d'où l'intérêt pratique d'adopter une telle méthode de résolution pour l'identification de couches minces.

Nous expérimentons les deux stratégies suivantes. La première consiste à minimiser la fonction coût :

$$F_1(\Gamma, \delta, \mu, \epsilon) := \frac{1}{2I} \sum_{i=1}^I \|T_1(\delta, \mu, \epsilon, \Gamma, \hat{\theta}_i) - u_{\text{obs},i}^\infty\|_{L^2(S^1)},$$

c'est-à-dire que l'on cherche les paramètres physiques de la couche. Dans la seconde stratégie nous proposons de minimiser la fonction coût

$$F_{\lambda,\eta}(\Gamma, \lambda, \eta) := \frac{1}{2I} \sum_{i=1}^I \|T(\lambda, \eta, \Gamma, \hat{\theta}_i) - u_{\text{obs},i}^\infty\|_{L^2(S^1)},$$

où l'opérateur  $T$  est l'opérateur champ lointain pour le problème de diffraction avec la condition d'impédance généralisée  $\operatorname{div}_\Gamma(\eta \nabla_\Gamma \cdot) + \lambda \cdot$  défini précédemment dans ce chapitre. Dans ce deuxième cas on cherche les impédances surfaciques  $(\lambda, \eta)$  donnant la meilleure approximation des données et on extrait les paramètres de la couche à l'aide des expressions  $\lambda = \delta \mu k^2$  et  $\eta = \delta \epsilon^{-1}$ . L'intérêt de considérer  $F_1$  est que l'on minimise par rapport à une géométrie, une fonction  $\delta$ , et deux constantes  $\mu$  et  $\epsilon$  au lieu de minimiser par rapport à une géométrie et deux fonctions dans le cas de  $F_{\lambda, \eta}$ . Le point limitant est qu'il faut avoir une information a priori sur le type d'objet auquel on a affaire alors que la minimisation de  $F_{\lambda, \eta}$  s'adapte à une classe plus importante d'objets.

Dans les exemples numériques, l'épaisseur de la couche cherchée est de la forme  $\delta(s) = \delta_0(1 - 0.4 \sin(s))$  où  $s$  est l'abscisse curviligne le long de  $\Gamma$  et  $\delta_0$  est un réel strictement positif. Les tests ont été effectués pour 10 ondes incidentes de directions d'incidence uniformément réparties sur le cercle unité. Afin d'évaluer la performance de la minimisation, nous donnerons pour chaque test l'erreur relative commise sur le champ lointain après optimisation sur les coefficients et la forme. Pour ceci introduisons les variables suivantes :

$$\operatorname{Err}_1 := \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I \frac{\|T_1(\delta, \mu, \epsilon, \Gamma, \hat{\theta}_i) - u_{\text{obs}, i}^\infty\|}{\|u_{\text{obs}, i}^\infty\|},$$

$$\operatorname{Err}_{\lambda, \eta} := \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I \frac{\|T(\lambda, \eta, \Gamma, \hat{\theta}_i) - u_{\text{obs}, i}^\infty\|}{\|u_{\text{obs}, i}^\infty\|}.$$

Pour chaque test, nous choisissons  $\delta_0$  de telle sorte que  $\operatorname{Err}_1$  soit de l'ordre de 10% pour les coefficients de la couche mince  $\delta$ ,  $\mu_0$  et  $\epsilon_0$  qui ont produit les champs  $u_{\text{obs}, i}^\infty$ . Ceci signifie que l'erreur d'approximation sur le champ lointain entre le modèle de GIBC et le modèle complet est de l'ordre de 10% pour les paramètres  $\delta_0$ ,  $\epsilon_0$  et  $\mu_0$  que l'on choisit. L'obstacle exact que l'on considère avec la couche mince est représenté figure 5.25 pour  $\epsilon_0 = 0.1$  et  $\mu_0 = 2.5$ . Encore une fois, la taille de l'obstacle est de l'ordre d'une longueur d'onde. Nous consacrons une première partie au problème de l'identification des paramètres de la couche lorsque la géométrie  $\Gamma$  est connue puis nous présentons des exemples de reconstruction simultanée de la géométrie et des paramètres de la couche.

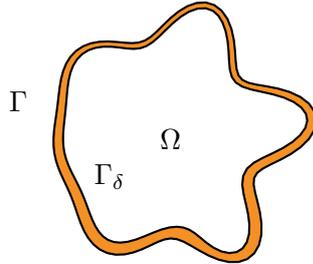


FIGURE 5.25 – Géométrie de l'obstacle recouvert de couche mince.

### 5.6.2 Identification des paramètres de la couche

Nous allons ici présenter des résultats de reconstruction des paramètres  $\mu$  et  $\delta$  en supposant que  $\epsilon$  est connu. Dans tous les cas il est impossible de déterminer de manière unique les trois paramètres  $\delta$ ,  $\mu$  et  $\epsilon$  en utilisant le modèle approché d'impédance généralisée car pour  $\delta$ ,  $\mu$  et  $\epsilon$  donnés,  $2\delta$ ,  $\mu/2$  et  $2\epsilon$  donnent la même condition d'impédance généralisée. Nous utilisons dans un premier temps la minimisation de  $F_{\lambda, \eta}$  (figures 5.26 et 5.27) puis la minimisation de  $F_1$  (figure 5.28). Lors de la minimisation de  $F_{\lambda, \eta}$  on compare les fonctions  $\lambda$  et  $\eta$  retrouvées avec  $\lambda_0 = \delta \mu_0 k^2$  et  $\eta_0 = \delta \epsilon^{-1}$  qui sont les valeurs prévues par le modèle approché à l'ordre 1 pour les couches minces (voir § 1.1.2). On remarque que la valeur de l'erreur ( $\operatorname{Err}_{\lambda, \eta}$  ou  $\operatorname{Err}_1$ ) est en-dessous des 10% correspondant à l'erreur d'approximation du modèle GIBC. En revanche on ne retrouve pas exactement les coefficients  $(\lambda, \eta)$

prévus par le modèle d'impédance généralisé, on en trouve de meilleurs dans le sens où on approche mieux les données  $u_{\text{obs},i}^\infty$ . Néanmoins, en comparant les figures 5.26 et 5.27 d'une part et les figures 5.28(a) et 5.28(b) d'autre part, on peut dire que plus  $\epsilon$  est petit plus la reconstruction est précise. Enfin, les résultats produits par les minimisations de  $F_1$  et  $F_{\lambda,\eta}$  sont très proches, les deux stratégies sont très similaires.

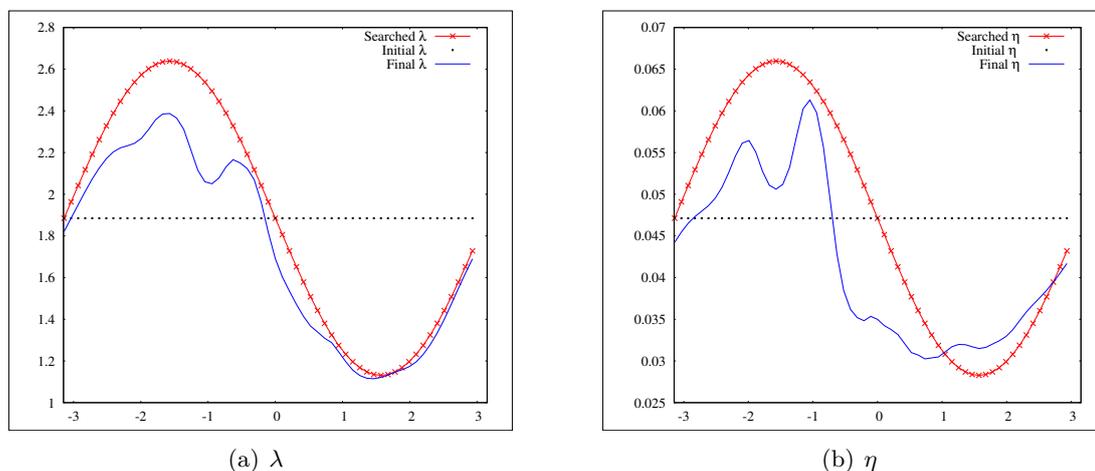


FIGURE 5.26 – Minimisation de  $F_{\lambda,\eta}$ . Parties réelles de  $\lambda$  et  $\eta$  cherchées et reconstruites pour  $\mu_0 = 2.5$  et  $\epsilon_0 = 1$  inconnus. Après minimisation,  $\text{Err}_{\lambda,\eta} = 5.7\%$ .

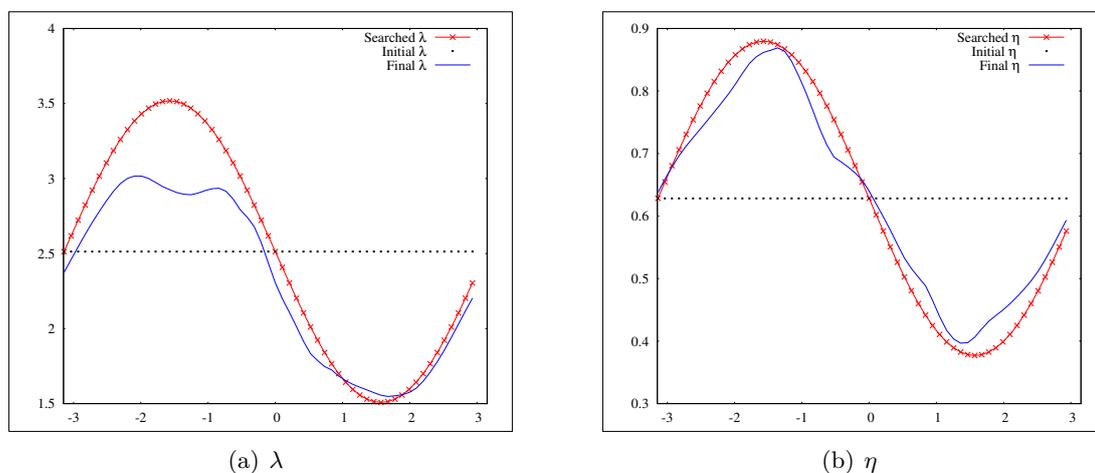


FIGURE 5.27 – Minimisation de  $F_{\lambda,\eta}$ . Parties réelles de  $\lambda$  et  $\eta$  cherchées et reconstruites pour  $\mu_0 = 2.5$  et  $\epsilon_0 = 0.1$  inconnus. Après minimisation,  $\text{Err}_{\lambda,\eta} = 6.5\%$ .

### 5.6.3 Reconstruction d'un obstacle recouvert d'une couche de diélectrique

Nous nous intéressons dans cette partie au problème inverse complet qui consiste à retrouver la géométrie de l'objet diffractant ainsi que les paramètres de la couche mince le recouvrant. Comme dans la section précédente nous adopterons deux stratégies différents, la première stratégie consiste à minimiser  $F_{\lambda,\eta}$ , (figures 5.29, 5.30 et 5.32) la seconde consiste à minimiser  $F_1$  (figures 5.31 et 5.33).

La figure 5.29 illustre une nouvelle fois le fait que l'algorithme de minimisation converge ( $\text{Err}_{\lambda,\eta} = 1.2\%$ ) mais les paramètres reconstruits ne correspondent pas aux paramètres que l'on cherche. En revanche la géométrie est parfaitement reconstruite. Pour les mêmes valeurs de  $\epsilon_0$  et  $\mu_0$  que celles

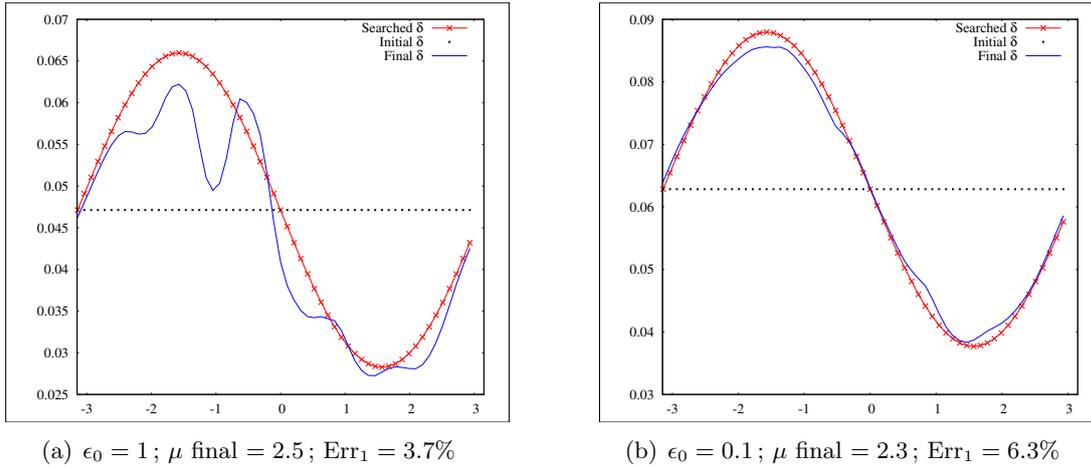


FIGURE 5.28 – Minimisation de  $F_1$ . Identification de l'épaisseur et de  $\mu_0 = 2.5$  pour deux valeurs de  $\epsilon_0$  connues.

de la figure 5.29, nous avons minimisé  $F_{\lambda,\eta}$  en supposant que  $\eta = 0$  et le résultat est satisfaisant aussi bien du point de vue de la minimisation de  $\text{Err}_{\lambda,\eta}$  que du point de vue de la reconstruction de la forme  $\Gamma$ , voir figure 5.30. Enfin, même en ajoutant des informations a priori dans le modèle (on minimise  $F_1$ ), la reconstruction de l'épaisseur et de  $\mu_0$  est plutôt mauvaise alors que  $\text{Err}_1 = 1.0\%$ , voir figure 5.31.

Les deux dernières figures correspondent à une seconde valeur de  $\epsilon_0$  plus petite. La reconstruction de la forme reste bonne lorsqu'on minimise  $F_{\lambda,\eta}$ , voir figure 5.32, mais encore une fois, la reconstruction des paramètres est peut satisfaisante. Nous avons aussi essayé de minimiser  $F_{\lambda,\eta}$  avec  $\eta = 0$  mais la minimisation ne donne rien, la taille de l'obstacle diminue au fil des itérations. Ce phénomène vient probablement du fait que le modèle d'impédance classique (c'est-à-dire  $\eta = 0$ ) ne décrit pas suffisamment bien la couche mince lorsque  $\epsilon = 0.1$ . En revanche, dès que l'on ajoute des informations a priori au modèle (on minimise  $F_1$ ), la forme et les paramètres sont reconstruits de manière beaucoup plus satisfaisante, voir figure 5.33.

Pour conclure, on peut dire que dans le cas de la reconstruction simultanée de l'obstacle et des paramètres de la couche la minimisation de la fonctionnelle  $F_1$  donne une meilleure reconstruction (pour l'obstacle et les paramètres) que la minimisation de la fonctionnelle  $F_{\lambda,\eta}$ . Enfin, si  $\epsilon$  n'est pas petit, le modèle d'impédance classique est suffisant pour obtenir la géométrie de l'objet diffractant.

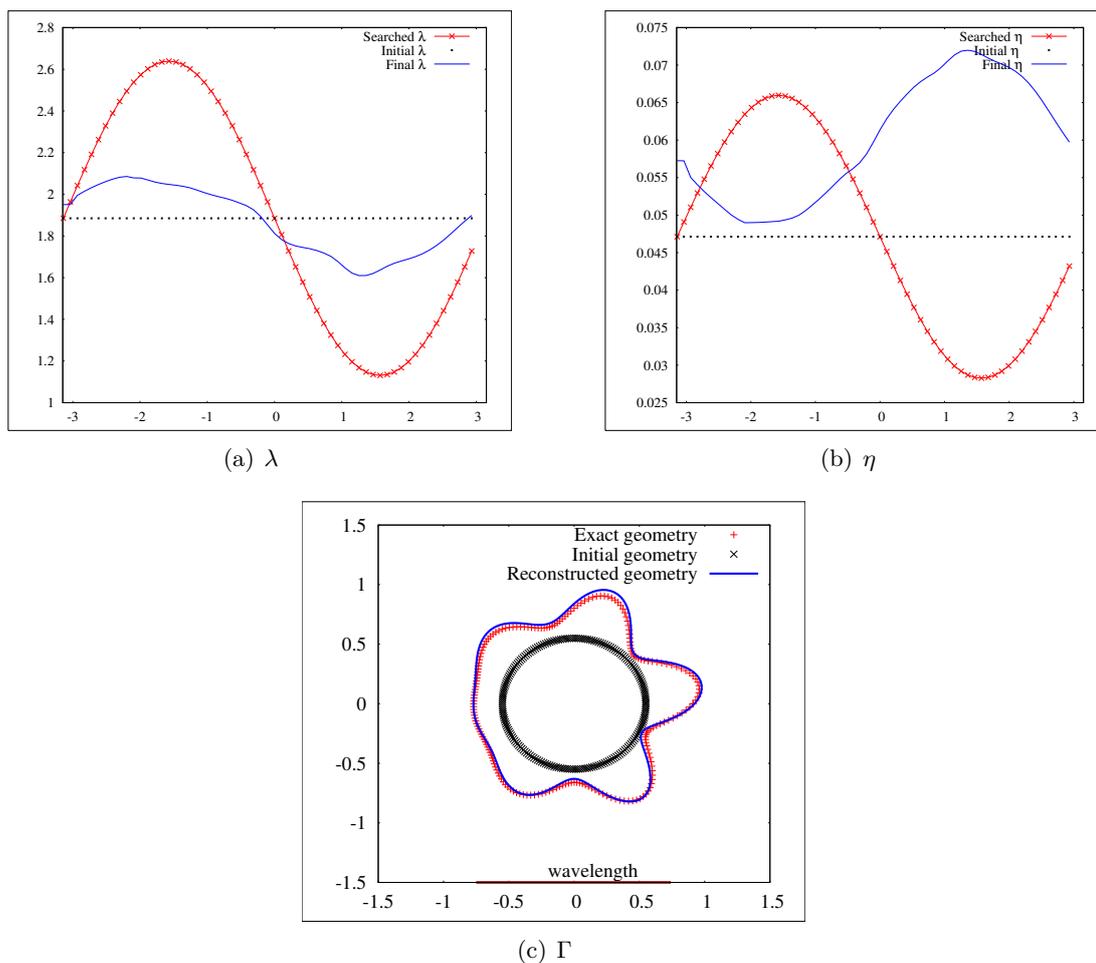


FIGURE 5.29 – Minimisation de  $F_{\lambda, \eta}$ . Reconstruction de  $\Gamma$ ,  $\lambda$  et  $\eta$  pour  $\mu_0 = 2.5$  et  $\epsilon_0 = 1$  inconnus. Après minimisation,  $\text{Err}_{\lambda, \eta} = 1.2\%$ .

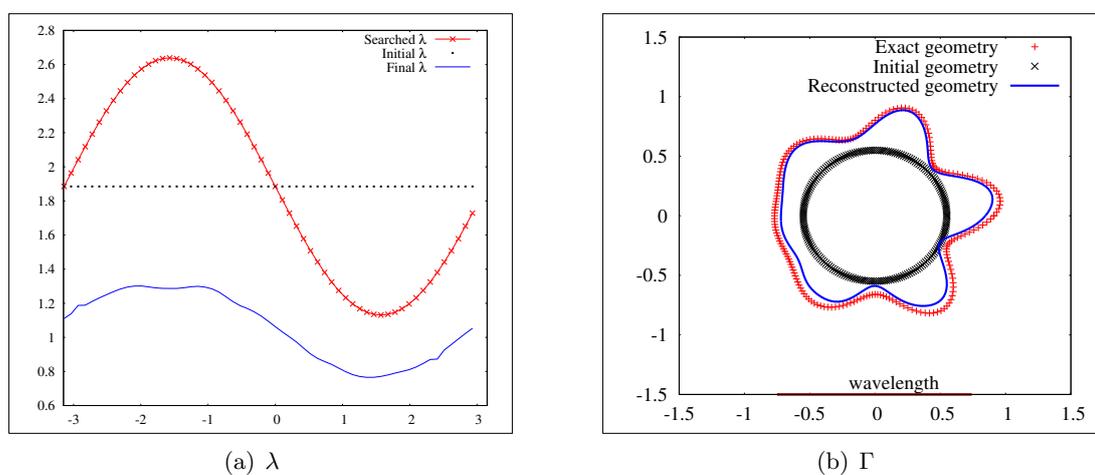


FIGURE 5.30 – Minimisation de  $F_{\lambda, \eta}$  en supposant que  $\eta = 0$ . Reconstruction de  $\Gamma$  et  $\lambda$  pour  $\mu_0 = 2.5$  et  $\epsilon_0 = 1$  inconnus. Après minimisation,  $\text{Err}_{\lambda, 0} = 2.2\%$ .

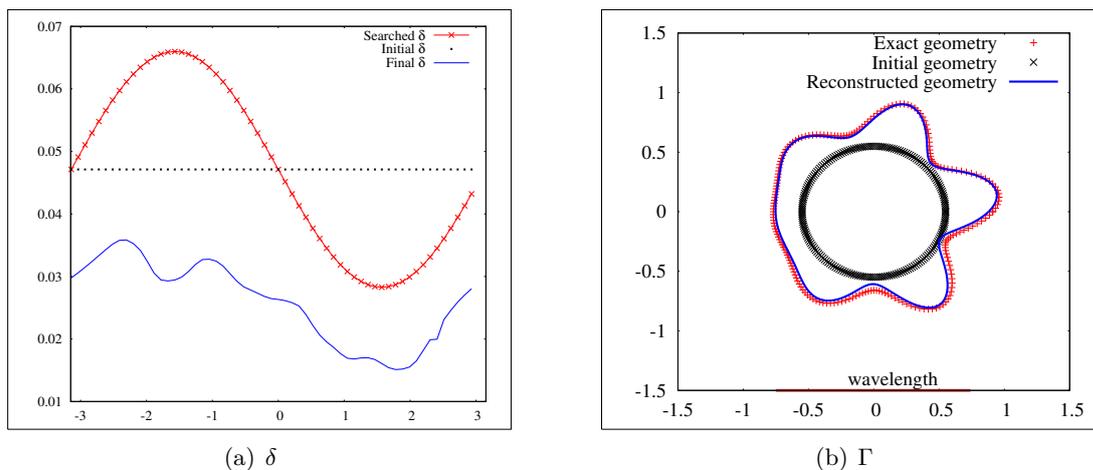


FIGURE 5.31 – Minimisation de  $F_1$ . Reconstruction de  $\Gamma$ ,  $\delta$  et  $\mu_0$  avec  $\epsilon_0 = 1$  connu.  $\mu_{\text{final}} = 3.4$  au lieu de  $\mu_0 = 2.5$ . Après minimisation,  $\text{Err}_1 = 1.0\%$ .

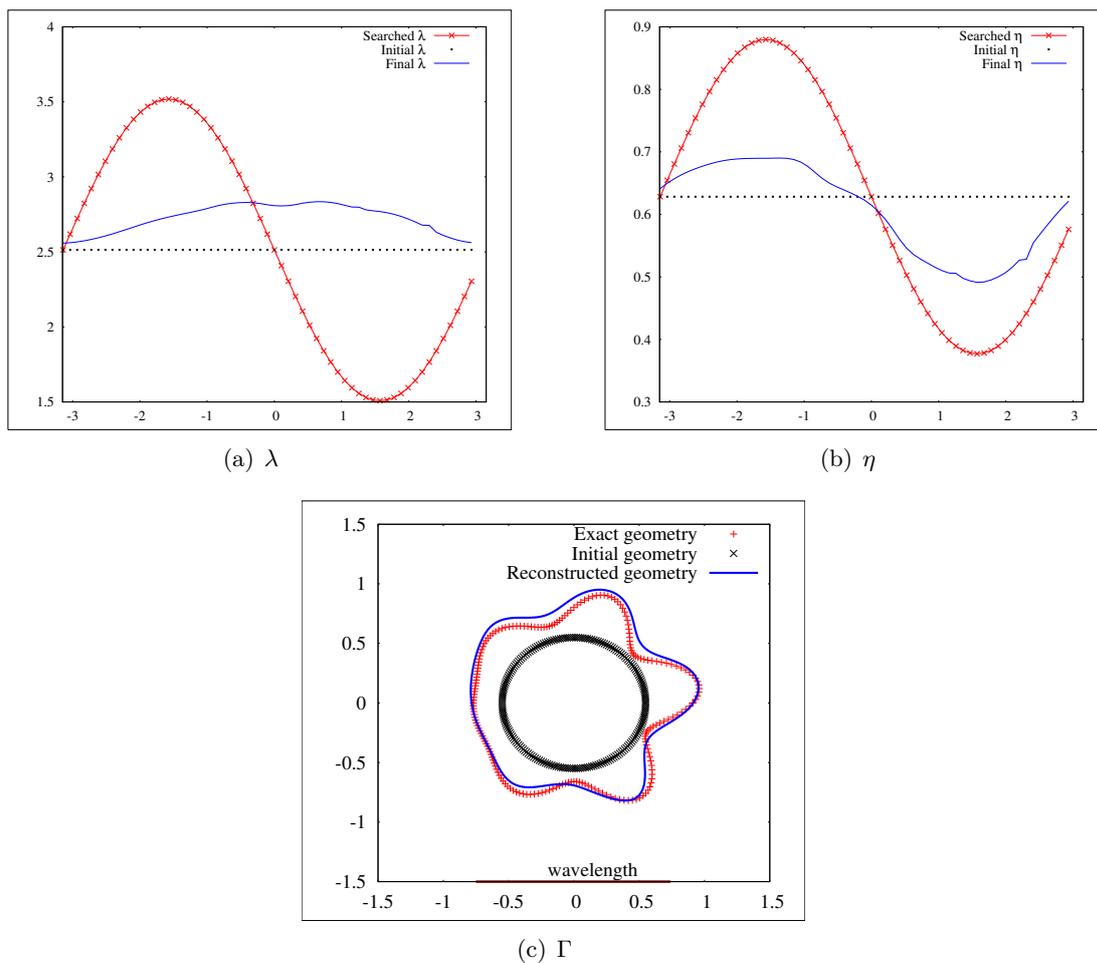


FIGURE 5.32 – Minimisation de  $F_{\lambda, \eta}$ . Reconstruction de  $\Gamma, \lambda$  pour  $\mu_0 = 2.5$  et  $\epsilon_0 = 0.1$  inconnus. Après minimisation,  $\text{Err}_{\lambda, \eta} = 6.9\%$ .

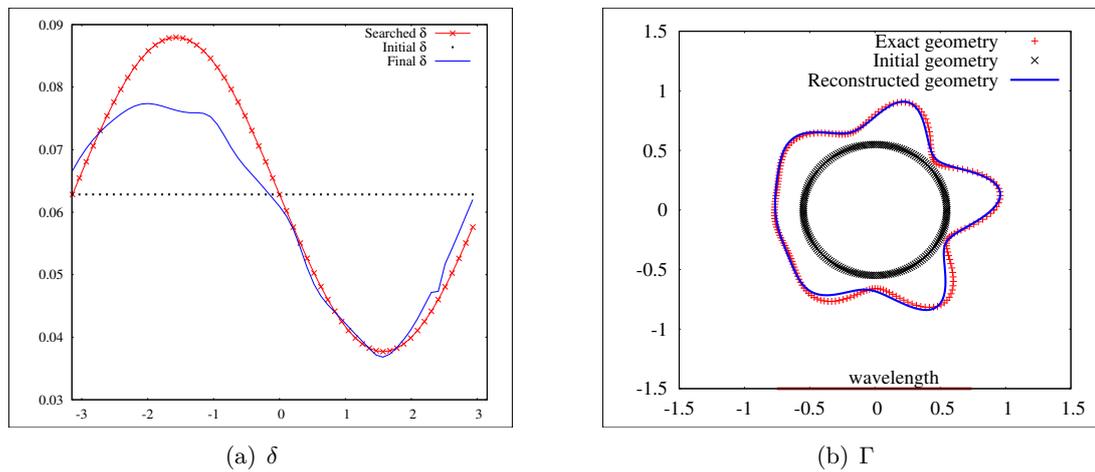


FIGURE 5.33 – Minimisation de  $F_1$ . Reconstruction de  $\Gamma$ ,  $\delta$  et  $\mu$  avec  $\epsilon_0 = 0.1$  connu.  $\mu_{\text{final}} = 2.3$  au lieu de  $\mu_0 = 2.5$ . Après minimisation,  $\text{Err}_1 = 4.0\%$ .



# EXTENSION AU CAS DES ÉQUATIONS DE MAXWELL

---

## Sommaire

---

<b>6.1</b>	<b>Quelques notations</b> . . . . .	<b>122</b>
<b>6.2</b>	<b>Un résultat d'unicité</b> . . . . .	<b>123</b>
6.2.1	Principe de réciprocité mixte et lemme de densité . . . . .	123
6.2.2	Unicité pour une infinité d'ondes incidentes . . . . .	125
<b>6.3</b>	<b>Calcul des dérivées du champ lointain</b> . . . . .	<b>127</b>
6.3.1	Dérivation du champ lointain par rapport à la condition d'impédance . . . . .	127
6.3.2	Continuité du champ lointain par rapport à l'obstacle . . . . .	128
6.3.3	Dérivation du champ lointain par rapport à l'obstacle . . . . .	129
<b>6.4</b>	<b>Dérivée d'une fonctionnelle moindres carrés</b> . . . . .	<b>138</b>
6.4.1	Calcul de la dérivée de forme et état adjoint . . . . .	138
6.4.2	Validation numérique de la dérivée de forme . . . . .	139
<b>6.5</b>	<b>Application à l'identification d'obstacles</b> . . . . .	<b>141</b>
6.5.1	Méthode de reconstruction . . . . .	141
6.5.2	Résultats numériques . . . . .	142

---

**A** PRÈS avoir utilisé avec succès des méthodes d'optimisation pour la résolution du problème inverse dans le cas scalaire en présence d'une condition d'impédance généralisée (voir chapitre 5), il semble raisonnable d'appliquer les mêmes techniques au problème vectoriel. Le modèle physique que nous utilisons est celui décrit dans le chapitre 2, c'est-à-dire que contrairement à ce qui précède, le champ électromagnétique est solution des équations de Maxwell en dimension trois. En revanche, nous restons dans le cas de la diffraction par un obstacle caractérisé par une condition d'impédance généralisée du type

$$\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{E} + \mathcal{Z}\boldsymbol{H}_T = 0 \text{ sur } \Gamma$$

pour un opérateur  $\mathcal{Z}$  que nous spécifions dans la suite. Nous nous intéressons à la fois aux questions théoriques autour de l'unicité et aux questions plus pratiques de différentiabilité du champ électromagnétique par rapport à la forme et à la condition aux limites.

Pour ce qui est de l'unicité, des travaux existent dans le cas d'une condition d'impédance classique ( $\mathcal{Z} = \lambda$ ). Dans [25], les auteurs montrent qu'une infinité d'ondes incidentes permettent de déterminer de manière unique l'impédance et l'obstacle en appliquant le principe de réciprocité mixte dû à Potthast [83]. Nous étendons ce résultat au cas d'un opérateur d'impédance faisant intervenir des dérivées surfaciques d'ordre 2 du type  $\mathbf{rot}_\Gamma \eta \mathbf{rot}_\Gamma + \nabla_\Gamma \gamma \mathbf{div}_\Gamma + \lambda$ .

Une fois l'unicité établie, nous nous tournons vers la question de la différentiabilité. Sur ce point, le calcul de la différentielle du champ lointain par rapport aux coefficients d'impédance est une simple généralisation du calcul mené dans le cas scalaire (voir chapitre 4). En revanche, le calcul de la dérivée de forme est complexe dès que l'on considère un opérateur d'impédance faisant intervenir des opérateurs de dérivation surfacique. Néanmoins, en nous basant sur [50] qui présente le calcul de la dérivée de forme pour les équations de Maxwell avec une condition d'impédance classique et en suivant la procédure développée dans le cas scalaire, nous avons été en mesure de calculer la dérivée de forme du champ lointain lorsque  $\mathcal{Z} = \mathbf{rot}_\Gamma \eta \mathbf{rot}_\Gamma + \lambda$  pour deux fonctions  $\lambda$  et  $\eta$ .

Ce chapitre est organisé de la manière suivante. Dans une première section, nous rappelons le cadre général du problème de diffraction en électromagnétisme avec condition d'impédance généralisée et nous introduisons de nouvelles notations. Ensuite, nous consacrons la deuxième section à la question de l'unicité. Puis, dans la troisième section nous menons à bien le calcul de la dérivée du champ lointain par rapport à la condition au bord et par rapport à la forme de l'objet diffractant. Enfin, nous concluons ce chapitre par une section dédiée au le calcul des dérivées d'une fonction coût de type moindre carré en utilisant une technique d'état adjoint, nous utilisons ensuite ce résultat dans un algorithme de minimisation dont nous donnons quelques réalisations.

## 6.1 Quelques notations

Soit  $\Omega$  un ouvert borné simplement connexe de  $\mathbb{R}^3$  de frontière  $\Gamma$  de classe  $C^2$ . On note toujours  $\boldsymbol{\nu}$  la normale à  $\Gamma$  dirigée vers l'extérieur de  $\Omega$  et  $\Omega_{\text{ext}} := \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}$  l'espace libre. Soit  $\mathcal{Z}$  un opérateur linéaire et continu de  $\mathbf{V}(\Gamma)$  dans  $\mathbf{V}(\Gamma)^*$  où  $\mathbf{V}(\Gamma)$  est un espace de Hilbert tel que  $\mathbf{V}(\Gamma) \subset \mathbf{L}_t^2(\Gamma) \cap \mathbf{H}_{\text{rot}_\Gamma}^{-1/2}(\Gamma)$ . On suppose que  $\mathcal{Z}$  est tel que pour tout  $\mathbf{f} \in \mathbf{H}_{\text{rot}_\Gamma}(\Gamma)^*$  le problème

$$\begin{cases} \mathbf{rot} \mathbf{H}^s + ik \mathbf{E}^s = 0 & \text{dans } \Omega_{\text{ext}}, \\ \mathbf{rot} \mathbf{E}^s - ik \mathbf{H}^s = 0 & \text{dans } \Omega_{\text{ext}}, \\ \boldsymbol{\nu} \times \mathbf{E}^s + \mathcal{Z} \mathbf{H}_T^s = \mathbf{f} & \text{sur } \Gamma, \\ \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\partial B_R} |\mathbf{H}^s \times \hat{x} - (\hat{x} \times \mathbf{E}^s) \times \hat{x}|^2 ds = 0 \end{cases} \quad (6.1)$$

admet une unique solution  $(\mathbf{E}^s, \mathbf{H}^s) \in \mathbf{H}_{\text{rot}}^{\text{ext}}(\Omega_{\text{ext}}) \times V_H$  où  $\mathbf{H}_{\text{rot}}^{\text{ext}}(\Omega_{\text{ext}}) := \{\mathbf{v} \in (\mathcal{D}'(\Omega_{\text{ext}}))^3 \mid \mathbf{v} \varphi \in \mathbf{H}_{\text{rot}}(\Omega_{\text{ext}}) \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)\}$  et  $V_H := \{\mathbf{v} \in \mathbf{H}_{\text{rot}}^{\text{ext}}(\Omega_{\text{ext}}) \text{ tels que } \mathbf{v}_T \in \mathbf{V}(\Gamma)\}$ . Nous renvoyons le lecteur au chapitre 2 pour plus de détails à propos du problème direct.

Dans tout ce chapitre nous notons  $(\mathbf{E}^s(\cdot, \hat{\theta}, \mathbf{p}), \mathbf{H}^s(\cdot, \hat{\theta}, \mathbf{p})) \in \mathbf{H}_{\text{rot}}^{\text{ext}}(\Omega_{\text{ext}}) \times V_H$  la solution de (6.1) pour

$$\mathbf{f}(x) := - \left( \boldsymbol{\nu} \times \mathbf{E}^i(x, \hat{\theta}, \mathbf{p}) + \mathcal{Z} \mathbf{H}_T^i(x, \hat{\theta}, \mathbf{p}) \right) \quad (6.2)$$

où les champs

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^i(x, \hat{\theta}, \mathbf{p}) &:= -\frac{1}{ik} \mathbf{rot}_x \mathbf{rot}_x (\mathbf{p} e^{ikx \cdot \hat{\theta}}) = ik((\hat{\theta} \times \mathbf{p}) \times \hat{\theta}) e^{ikx \cdot \hat{\theta}}, \\ \mathbf{H}^i(x, \hat{\theta}, \mathbf{p}) &:= \mathbf{rot}_x (\mathbf{p} e^{ikx \cdot \hat{\theta}}) = ik(\hat{\theta} \times \mathbf{p}) e^{ikx \cdot \hat{\theta}}, \end{aligned}$$

désignent une onde incidente plane de direction d'incidence  $\hat{\theta} \in S^2$  et de polarisation  $\mathbf{p} \in S^2$ . On note  $(\mathbf{E}(\cdot, \hat{\theta}, \mathbf{p}), \mathbf{H}(\cdot, \hat{\theta}, \mathbf{p})) = (\mathbf{E}^s(\cdot, \hat{\theta}, \mathbf{p}), \mathbf{H}^s(\cdot, \hat{\theta}, \mathbf{p})) + (\mathbf{E}^i(\cdot, \hat{\theta}, \mathbf{p}), \mathbf{H}^i(\cdot, \hat{\theta}, \mathbf{p}))$  le champ total et  $(\mathbf{E}^\infty(\cdot, \hat{\theta}, \mathbf{p}), \mathbf{H}^\infty(\cdot, \hat{\theta}, \mathbf{p}))$  le champ lointain associé à  $(\mathbf{E}^s(\cdot, \hat{\theta}, \mathbf{p}), \mathbf{H}^s(\cdot, \hat{\theta}, \mathbf{p}))$ .

De même, pour  $z \in \Omega_{\text{ext}}$ , on note  $(\mathbb{E}^s(\cdot, z, \mathbf{p}), \mathbb{H}^s(\cdot, z, \mathbf{p})) \in \mathbf{H}_{\text{rot}}^{\text{ext}}(\Omega_{\text{ext}}) \times V_{\mathbf{H}}$  la solution de (6.1) pour  $\mathbf{f}$  donnée par (6.2) lorsque  $\mathbf{E}^i(x, \hat{\theta}, \mathbf{p})$  et  $\mathbf{H}^i(x, \hat{\theta}, \mathbf{p})$  sont remplacés par

$$\mathbb{E}^i(x, z, \mathbf{p}) := -\frac{1}{ik} \mathbf{rot}_x \mathbf{rot}_x (\mathbf{p} \Phi(x, z))$$

et

$$\mathbb{H}^i(x, z, \mathbf{p}) := \mathbf{rot}_x (\mathbf{p} \Phi(x, z)) = \nabla_x (\Phi(x, z)) \times \mathbf{p}$$

respectivement. Le champ total est noté  $(\mathbb{E}(\cdot, z, \mathbf{p}), \mathbb{H}(\cdot, z, \mathbf{p})) = (\mathbb{E}^s(\cdot, z, \mathbf{p}), \mathbb{H}^s(\cdot, z, \mathbf{p})) + (\mathbb{E}^i(\cdot, z, \mathbf{p}), \mathbb{H}^i(\cdot, z, \mathbf{p}))$  et le champ lointain associé à  $(\mathbb{E}^s(\cdot, z, \mathbf{p}), \mathbb{H}^s(\cdot, z, \mathbf{p}))$  est noté  $(\mathbb{E}^\infty(\cdot, z, \mathbf{p}), \mathbb{H}^\infty(\cdot, z, \mathbf{p}))$ . Nous rappelons que

$$\Phi(x, z) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik|x-z|}}{|x-z|}$$

désigne la fonction de Green sortante de l'équation de Helmholtz dans  $\mathbb{R}^3$ . On appelle champ incident, tout couple  $(\mathbf{E}^i, \mathbf{H}^i) \in \mathbf{H}_{\text{rot}}(\Omega) \times \mathbf{H}_{\text{rot}}(\Omega)$  tel que

$$\begin{cases} \mathbf{rot} \mathbf{H}^i + ik \mathbf{E}^i = 0 & \text{dans } \Omega \\ \mathbf{rot} \mathbf{E}^i - ik \mathbf{H}^i = 0 & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

## 6.2 Un résultat d'unicité

### 6.2.1 Principe de réciprocité mixte et lemme de densité

Dans cette section nous établissons un principe de réciprocité pour un obstacle avec condition d'impédance généralisée (correspondant au lemme 3.5.3 dans le cas scalaire) et nous montrons aussi une version vectorielle du lemme de densité 3.5.4. Nous supposons que  $\mathcal{Z}$  est symétrique, c'est-à-dire que  $\mathcal{Z}^* = \overline{\mathcal{Z}}$ . Démontrons dans un premier temps le lemme suivant.

**Lemme 6.2.1** *Soient  $(\mathbf{E}_j^i, \mathbf{H}_j^i)$  pour  $j = 1, 2$  deux couples de champs incidents et  $(\mathbf{E}_j^s, \mathbf{H}_j^s)$  pour  $j = 1, 2$  les deux champs diffractés associés solutions de (6.1). Nous avons alors l'égalité suivante :*

$$\int_{\Gamma} (\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{E}_1^s) \cdot \mathbf{H}_2^i + (\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{H}_1^s) \cdot \mathbf{E}_2^i ds = \int_{\Gamma} (\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{E}_2^s) \cdot \mathbf{H}_1^i + (\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{H}_2^s) \cdot \mathbf{E}_1^i ds.$$

**Preuve.** Les champs totaux  $(\mathbf{E}_j, \mathbf{H}_j) := (\mathbf{E}_j^i, \mathbf{H}_j^i) + (\mathbf{E}_j^s, \mathbf{H}_j^s)$  pour  $j = 1, 2$  satisfont

$$\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{E}_j + \mathcal{Z} \mathbf{H}_{j,T} = 0 \quad \text{sur } \Gamma.$$

Mais  $(\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{E}_1) \cdot \mathbf{H}_2 = -\mathbf{E}_1 \cdot (\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{H}_2)$  et ainsi

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} (\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{E}_1) \cdot \mathbf{H}_2 + (\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{H}_1) \cdot \mathbf{E}_2 ds &= \int_{\Gamma} (\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{E}_1) \cdot \mathbf{H}_2 - (\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{E}_2) \cdot \mathbf{H}_1 ds \\ &= -\langle \mathcal{Z} \mathbf{H}_{1,T}, \overline{\mathbf{H}_2} \rangle + \langle \mathcal{Z} \mathbf{H}_{2,T}, \overline{\mathbf{H}_1} \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

car  $\mathcal{Z}$  est symétrique. Or, les champs  $(\mathbf{E}_j^s, \mathbf{H}_j^s)_{j=1,2}$  sont solutions des équations de Maxwell à l'extérieur de  $\Omega$  et satisfont la condition de radiation de Silver–Müller donc (voir [38, page 186])

$$\int_{\Gamma} (\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{E}_1^s) \cdot \mathbf{H}_2^s + (\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{H}_1^s) \cdot \mathbf{E}_2^s = 0. \quad (6.3)$$

De même  $(\mathbf{E}_j^i, \mathbf{H}_j^i)_{j=1,2}$  sont solutions des équations de Maxwell dans l'ouvert borné  $\Omega$  donc en intégrant par partie dans  $\Omega$  on obtient

$$\int_{\Gamma} (\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{E}_1^i) \cdot \mathbf{H}_2^i + (\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{H}_1^i) \cdot \mathbf{E}_2^i = 0 \quad (6.4)$$

ce qui termine de montrer le lemme. ■

Le principe de réciprocité mixte s'écrit :

**Lemme 6.2.2** *Pour tout  $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in S^2$ ,  $\hat{\theta} \in S^2$  et pour tout  $z \in \Omega_{\text{ext}}$  on a*

$$\mathbf{p} \cdot \mathbb{E}^\infty(\hat{\theta}, z, \mathbf{q}) = \frac{1}{4\pi} \mathbf{q} \cdot \mathbf{E}^s(z, -\hat{\theta}, \mathbf{p}).$$

**Preuve.** La preuve de ce résultat est très proche de celle de [75, théorème 14.7]. Rappelons la formule de représentation intégrale du champ lointain  $\mathbf{E}^\infty(\hat{\theta})$  associé à un champ diffracté  $(\mathbf{E}^s(x), \mathbf{H}^s(x))$  (voir [75, corollaire 9.5]),

$$4\pi \mathbf{E}^\infty(\hat{\theta}) = ik\hat{\theta} \times \int_{\Gamma} \{ \boldsymbol{\nu}(y) \times \mathbf{E}^s(y) + [\boldsymbol{\nu}(y) \times \mathbf{H}^s(y)] \times \hat{\theta} \} e^{-ik\hat{\theta} \cdot y} ds(y).$$

Mais pour tout  $y \in \Gamma$ ,  $(\hat{\theta}, \mathbf{p}) \in (S^2)^2$ ,

$$\begin{aligned} ik\mathbf{p} \cdot \hat{\theta} \times (\boldsymbol{\nu}(y) \times \mathbf{E}^s(y)) e^{-ik\hat{\theta} \cdot y} &= ik(\mathbf{p} \times \hat{\theta}) \cdot (\boldsymbol{\nu}(y) \times \mathbf{E}^s(y)) e^{-ik\hat{\theta} \cdot y} \\ &= \mathbf{H}^i(y, -\hat{\theta}, \mathbf{p}) \cdot (\boldsymbol{\nu}(y) \times \mathbf{E}^s(y)) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} ik\mathbf{p} \cdot \hat{\theta} \times [(\boldsymbol{\nu}(y) \times \mathbf{H}^s(y)) \times \hat{\theta}] e^{-ik\hat{\theta} \cdot y} &= ik(\hat{\theta} \times (\mathbf{p} \times \hat{\theta})) \cdot (\boldsymbol{\nu}(y) \times \mathbf{H}^s(y)) e^{-ik\hat{\theta} \cdot y} \\ &= \mathbf{E}^i(y, -\hat{\theta}, \mathbf{p}) \cdot (\boldsymbol{\nu}(y) \times \mathbf{H}^s(y)). \end{aligned}$$

donc

$$4\pi \mathbf{p} \cdot \mathbf{E}^\infty(\hat{\theta}) = \int_{\Gamma} \left[ \mathbf{H}^i(y, -\hat{\theta}, \mathbf{p}) \cdot (\boldsymbol{\nu}(y) \times \mathbf{E}^s(y)) + \mathbf{E}^i(y, -\hat{\theta}, \mathbf{p}) \cdot (\boldsymbol{\nu}(y) \times \mathbf{H}^s(y)) \right] ds(y). \quad (6.5)$$

Soient  $z \in \Omega_{\text{ext}}$ ,  $y \in \Gamma$  et  $\hat{\theta}, \mathbf{q} \in S^2$ . On applique le lemme 6.2.1 avec  $\mathbf{E}_1^i = \mathbb{E}^i(y, z, \mathbf{q})$  et  $\mathbf{E}_2^i = \mathbf{E}^i(y, -\hat{\theta}, \mathbf{p})$  et (6.5) devient

$$\begin{aligned} 4\pi \mathbf{p} \cdot \mathbb{E}^\infty(\hat{\theta}, z, \mathbf{q}) &= \int_{\Gamma} \left[ \mathbb{H}^i(y, z, \mathbf{q}) \cdot (\boldsymbol{\nu}(y) \times \mathbf{E}^s(y, -\hat{\theta}, \mathbf{p})) \right. \\ &\quad \left. + \mathbb{E}^i(y, z, \mathbf{q}) \cdot (\boldsymbol{\nu}(y) \times \mathbf{H}^s(y, -\hat{\theta}, \mathbf{p})) \right] ds(y). \end{aligned} \quad (6.6)$$

Pour ce qui est du champ diffracté  $\mathbf{E}^s(z, -\hat{\theta}, \mathbf{p})$ , la formule de Stratton–Chu [75, théorème 9.4] donne

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^s(z, -\hat{\theta}, \mathbf{p}) &= \mathbf{rot}_z \int_{\Gamma} (\boldsymbol{\nu}(y) \times \mathbf{E}^s(y, -\hat{\theta}, \mathbf{p})) \Phi(y, z) ds(y) \\ &\quad - \frac{1}{ik} \mathbf{rot}_z \mathbf{rot}_z \int_{\Gamma} (\boldsymbol{\nu}(y) \times \mathbf{H}^s(y, -\hat{\theta}, \mathbf{p})) \Phi(y, z) ds(y) \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} \mathbf{q} \cdot \mathbf{E}^s(z, -\hat{\theta}, \mathbf{p}) &= \int_{\Gamma} \left[ \mathbb{H}^i(y, z, \mathbf{q}) \cdot (\boldsymbol{\nu}(y) \times \mathbf{E}^s(y, -\hat{\theta}, \mathbf{p})) \right. \\ &\quad \left. + \mathbb{E}^i(y, z, \mathbf{q}) \cdot (\boldsymbol{\nu}(y) \times \mathbf{H}^s(y, -\hat{\theta}, \mathbf{p})) \right] ds(y) \end{aligned} \quad (6.7)$$

ce qui montre le résultat énoncé dans le lemme au vu de (6.6). ■

Nous concluons cette section par le lemme de densité suivant.

**Lemme 6.2.3** *Soit  $\mathbf{f} \in \mathbf{V}(\Gamma)^*$  telle que*

$$\langle \mathbf{H}_T(\cdot, \hat{\boldsymbol{\theta}}, \mathbf{p}), \mathbf{f} \rangle = 0, \quad \forall (\hat{\boldsymbol{\theta}}, \mathbf{p}) \in (S^2)^2$$

*alors  $\mathbf{f} = 0$  (i.e.  $\{\mathbf{H}_T(\cdot, \hat{\boldsymbol{\theta}}, \mathbf{p}), \forall (\hat{\boldsymbol{\theta}}, \mathbf{p}) \in (S^2)^2\}$  est dense dans  $X$ ).*

**Preuve.** La preuve est très similaire à celle du lemme 3.5.4 dans le cas scalaire. Soit  $\mathbf{f} \in \mathbf{V}(\Gamma)^*$  tel que  $\langle \mathbf{H}_T(\cdot, \hat{\boldsymbol{\theta}}, \mathbf{p}), \mathbf{f} \rangle = 0$  pour toute direction d'incidence  $\hat{\boldsymbol{\theta}} \in S^2$  et toute polarisation  $\mathbf{p} \in S^2$ . Posons  $(\mathbf{E}_f, \mathbf{H}_f) \in \mathbf{H}_{\text{rot}\Gamma}^{\text{ext}}(\Omega_{\text{ext}}) \times V_{\mathbf{H}}$  la solution sortante du problème

$$\begin{cases} \mathbf{rot} \mathbf{E}_f + ik \mathbf{E}_f = 0 & \text{dans } \Omega_{\text{ext}}, \\ \mathbf{rot} \mathbf{H}_f - ik \mathbf{H}_f = 0 & \text{dans } \Omega_{\text{ext}}, \\ \boldsymbol{\nu} \times \mathbf{E}_f + \mathcal{Z} \mathbf{H}_{f,T} = \mathbf{f} & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

Ainsi pour  $\hat{\boldsymbol{\theta}}, \mathbf{p} \in S^2$ ,

$$\langle \mathbf{H}_T(\cdot, \hat{\boldsymbol{\theta}}, \mathbf{p}), \boldsymbol{\nu} \times \mathbf{E}_f + \mathcal{Z} \mathbf{H}_{f,T} \rangle = 0$$

et donc comme  $\mathcal{Z}$  est symétrique on a

$$\int_{\Gamma} (\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{H}(\cdot, \hat{\boldsymbol{\theta}}, \mathbf{p})) \overline{\mathbf{E}_f} + (\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{E}(\cdot, \hat{\boldsymbol{\theta}}, \mathbf{p})) \overline{\mathbf{H}_f} ds = 0.$$

En utilisant (6.3) ceci devient

$$\int_{\Gamma} (\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{H}^i(\cdot, \hat{\boldsymbol{\theta}}, \mathbf{p})) \overline{\mathbf{E}_f} + (\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{E}^i(\cdot, \hat{\boldsymbol{\theta}}, \mathbf{p})) \overline{\mathbf{H}_f} ds = 0$$

pour tout  $(\hat{\boldsymbol{\theta}}, \mathbf{p}) \in (S^2)^2$ . Ce qui d'après la formule (6.5) implique que le champ lointain  $\mathbf{E}_f^{\infty}$  associé à  $\mathbf{E}_f$  est nul. Par conséquent, d'après le lemme de Rellich et le principe de prolongement unique on peut conclure que l'on a nécessairement  $\mathbf{f} = 0$ . ■

### 6.2.2 Unicité pour une infinité d'ondes incidentes

Pour montrer l'identifiabilité de l'obstacle lorsqu'on dispose d'une infinité d'ondes incidentes pour toutes les directions d'incidence et toutes les directions de polarisation nous allons utiliser une technique très proche de celle utilisée dans le cas scalaire pour la preuve du théorème 3.5.2. Dans ce but, soyons plus spécifique sur l'opérateur d'impédance. Nous choisissons dans un premier temps de traiter le cas d'un opérateur d'impédance de la forme

$$\mathcal{Z} = \mathbf{rot}_{\Gamma} \eta \mathbf{rot}_{\Gamma} + \lambda$$

pour deux fonctions  $\lambda$  et  $\eta$  de  $C^0(\Gamma)$  et  $C^1(\Gamma)$  respectivement satisfaisant l'hypothèse

#### Hypothèse 6.2.4

$$\text{Re}(\lambda) \geq 0, \quad \text{Re}(\eta) \geq 0,$$

il existe  $c > 0$  telle que

$$|\lambda| \geq c, \quad |\eta| \geq c$$

et les parties imaginaires de  $\lambda$  et  $\eta$  ne changent pas de signe sur  $\Gamma$ .

Pour un tel opérateur, nous savons que le problème (6.1) admet une unique solution  $(\mathbf{E}^s, \mathbf{H}^s) \in \mathbf{H}_{\text{rot}}^{\text{ext}}(\Omega_{\text{ext}}) \times V_{\mathbf{H}}$  pour  $\mathbf{V}(\Gamma) = \mathbf{H}_{\text{rot}\Gamma}(\Gamma)$  et on montre le résultat d'unicité suivant.

**Theorem 6.2.1** Soient  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  deux frontières de classe  $C^2$  et  $(\lambda_1, \eta_1)$  et  $(\lambda_2, \eta_2)$  deux couples de fonctions de  $L^\infty(\Gamma)$  satisfaisant les hypothèses 6.2.4. Si  $\mathbf{E}_1^\infty(\hat{x}, \hat{\theta}, \mathbf{p}) = \mathbf{E}_2^\infty(\hat{x}, \hat{\theta}, \mathbf{p})$  pour tout  $\hat{x}, \hat{\theta} \in S^2$  et pour toute polarisation  $\mathbf{p} \in S^2$  alors  $\Gamma_1 = \Gamma_2$  et  $(\lambda_1, \eta_1) = (\lambda_2, \eta_2)$ .

**Preuve.** Nous commençons par montrer l'unicité de l'obstacle. Supposons que  $\Omega_1 \neq \Omega_2$  et posons  $\tilde{\Omega} = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega_1 \cup \Omega_2}$ . D'après le lemme de Rellich et le principe de continuation unique, pour toute polarisation  $\mathbf{p} \in S^2$ , pour tout  $y \in \tilde{\Omega}$  et pour toute direction d'incidence  $\hat{\theta} \in S^2$ , on a

$$\mathbf{E}_1^s(y, \hat{\theta}, \mathbf{p}) = \mathbf{E}_2^s(y, \hat{\theta}, \mathbf{p}).$$

Ainsi d'après le principe de réciprocité mixte (lemme 6.2.2) on en déduit que

$$\mathbb{E}_1^\infty(-\hat{\theta}, y, \mathbf{p}) = \mathbb{E}_2^\infty(-\hat{\theta}, y, \mathbf{p})$$

et donc pour  $\mathbf{p} \in S^2$ ,  $y \in \tilde{\Omega}$  et  $x \in \tilde{\Omega}$

$$\mathbb{H}_1^s(x, y, \mathbf{p}) = \mathbb{H}_2^s(x, y, \mathbf{p}).$$

Supposons que  $\Omega_1 \not\subset \Omega_2$ . Alors il existe un point  $x_* \in (\Gamma_1 \cap \partial\tilde{\Omega}) \setminus \overline{\Omega_2}$  et un  $r_* > 0$  tel que  $B(x_*, r_*) \subset \mathbb{R}^d \setminus \overline{\Omega_2}$ . En procédant de la même manière que dans la preuve du théorème 3.5.2 on montre que l'onde incidente  $\mathbf{H}^i(\cdot, x_*, \mathbf{p})$  est dans  $\mathbf{H}_{\text{rot}}(B(x_*, r_*) \cap \Omega_{\text{ext}}^1)$  pour toutes les polarisations  $\mathbf{p} \in S^2$  et ceci est impossible car

$$\mathbb{H}^i(y, x_*, \mathbf{p}) = \nabla_x(\Phi(y, x_*)) \times \mathbf{p}$$

n'est pas dans  $L^2(B(x_*, r_*) \cap \Omega_{\text{ext}}^1)$ .

On a donc  $\Gamma_1 = \Gamma_2 =: \Gamma$  et on va en déduire l'unicité pour les fonctions d'impédance. Si les champs électriques coïncident, alors les champs magnétiques associés coïncident aussi, notons  $\mathbf{H}_T(y, \hat{\theta}, \mathbf{p}) := \mathbf{H}_{1,T}(y, \hat{\theta}, \mathbf{p}) = \mathbf{H}_{2,T}(y, \hat{\theta}, \mathbf{p})$  pour toute direction d'incidence  $\hat{\theta} \in S^2$  et toute polarisation  $\mathbf{p} \in S^2$ . On a d'après la condition au bord satisfaite par  $\mathbf{H}_1$  et  $\mathbf{H}_2$  :

$$\mathbf{rot}_\Gamma[(\eta_1 - \eta_2)\mathbf{rot}_\Gamma \mathbf{H}_T] + (\lambda_1 - \lambda_2)\mathbf{H}_T = 0 \text{ sur } \Gamma$$

pour tout  $(\hat{\theta}, \mathbf{p}) \in (S^2)^2$ . Ainsi d'après le lemme 6.2.3 de densité on en déduit que

$$\mathbf{rot}_\Gamma[(\eta_1 - \eta_2)\mathbf{rot}_\Gamma \mathbf{v}] + (\lambda_1 - \lambda_2)\mathbf{v} = 0 \text{ sur } \Gamma \quad (6.8)$$

pour tout  $\mathbf{v} \in \mathbf{H}_{\text{rot}_\Gamma}(\Gamma)$  (c'est l'espace  $\mathbf{V}(\Gamma)$  pour cet opérateur d'impédance). On en déduit simplement que  $\lambda_1 = \lambda_2$  en prenant pour  $\mathbf{v}$  une fonction constante sur  $\Gamma$ . Montrons que c'est aussi le cas pour  $\eta_1$  et  $\eta_2$ . Supposons que  $\mathcal{R}e(\eta_1 - \eta_2) > 0$  sur un ouvert de mesure non nulle  $S \subset \Gamma$ , alors pour  $\varphi \in C_0^\infty(S)$  une fonction non nulle, l'égalité (6.8) prise en  $\mathbf{v} = \mathbf{rot}_\Gamma(\varphi)$  donne

$$\int_S (\eta_1 - \eta_2) |\mathbf{rot}_\Gamma(\mathbf{rot}_\Gamma \varphi)|^2 ds = 0$$

et comme  $\mathcal{R}e(\eta_1 - \eta_2) > 0$  on en déduit que  $\mathbf{rot}_\Gamma(\mathbf{rot}_\Gamma \varphi) = 0$  sur  $S$  et donc sur  $\Gamma$ . Ainsi, d'après [18] il existe  $\theta \in H^1(\Gamma)$  telle que  $\mathbf{rot}_\Gamma \varphi = \nabla_\Gamma \theta$ . Mais on a aussi  $0 = \text{div}_\Gamma(\mathbf{rot}_\Gamma \varphi) = \Delta_\Gamma \theta$  sur  $\Gamma$  ce qui implique que  $\theta$  est constante sur  $\Gamma$ . Ainsi  $\mathbf{rot}_\Gamma \varphi = 0$  sur  $\Gamma$  et donc  $\varphi$  est constante sur  $\Gamma$ . Mais  $\varphi$  est aussi continue et à support compact dans  $S$  donc  $\varphi = 0$  sur  $\Gamma$  ce qui contredit le fait que  $\varphi$  est non nulle sur  $S$ . On raisonne de la même manière si  $\mathcal{R}e(\eta_1 - \eta_2) < 0$  et on montre que  $\mathcal{R}e(\eta_1 - \eta_2) = 0$ . Le même procédé permet aussi d'avoir  $\mathcal{I}m(\eta_1 - \eta_2) = 0$  et donc  $\eta_1 = \eta_2$ . ■

Soit  $(\lambda, \eta, \gamma) \in C^0(\Gamma) \times C^1(\Gamma) \times C^1(\Gamma)$ , posons

$$\mathcal{Z} = \mathbf{rot}_\Gamma \eta \mathbf{rot}_\Gamma + \nabla_\Gamma \gamma \operatorname{div}_\Gamma + \lambda.$$

On rappelle que dès que  $(\lambda, \eta, \gamma)$  satisfait l'hypothèse 2.3.1, alors le problème (6.1) admet une unique solution  $(\mathbf{E}^s, \mathbf{H}^s) \in \mathbf{H}_{\mathbf{rot}}^{\text{ext}}(\Omega_{\text{ext}}) \times V_{\mathbf{H}}$  pour  $\mathbf{V}(\Gamma) = \mathbf{H}_t^1(\Gamma)$ . De la même manière que dans le théorème précédent, on montre le résultat suivant.

**Théorème 6.2.5** *Soient  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  deux frontières de classe  $C^2$  et  $(\lambda_1, \eta_1, \gamma_1)$  et  $(\lambda_2, \eta_2, \gamma_2)$  deux triplets de  $C^0(\Gamma) \times C^1(\Gamma) \times C^1(\Gamma)$  qui satisfont l'hypothèse 2.3.1. Si  $\mathbf{E}_1^\infty(\hat{y}, \hat{\theta}, \mathbf{p}) = \mathbf{E}_2^\infty(\hat{y}, \hat{\theta}, \mathbf{p})$  pour tout  $\hat{y}, \hat{\theta} \in S^2$  et pour toute polarisation  $\mathbf{p} \in S^2$  alors  $\Gamma_1 = \Gamma_2$  et  $(\lambda_1, \eta_1, \gamma_1) = (\lambda_2, \eta_2, \gamma_2)$ .*

**Remarque 6.2.6** *Contrairement au cas des équations de Helmholtz, si on ne dispose que d'un nombre fini d'ondes incidentes, nous ne sommes pas en mesure de montrer un résultat d'unicité pour les fonctions (ou constantes) d'impédances intervenant dans un opérateur de dérivation surfacique. Par exemple, à notre connaissance, le problème de l'unicité du  $\eta$  (même s'il est constant) si on dispose d'un nombre fini d'ondes incidentes est ouvert.*

## 6.3 Calcul des dérivées du champ lointain

Dans toute la suite de ce chapitre nous supposons que l'opérateur d'impédance est de la forme

$$\mathcal{Z} = \mathbf{rot}_\Gamma \eta \mathbf{rot}_\Gamma + \lambda.$$

Pour une direction d'incidence  $\hat{\theta} \in S^2$  et une direction de polarisation  $\mathbf{p} \in S^2$  données définissons l'opérateur champ lointain

$$T : (\lambda, \eta, \Gamma) \longrightarrow \mathbf{E}^\infty(\cdot, \hat{\theta}, \mathbf{p})$$

où  $\mathbf{E}^\infty(\cdot, \hat{\theta}, \mathbf{p}) \in \mathbf{L}_t^2(S^2)$  est le champ lointain associé à  $\mathbf{E}^s(\cdot, \hat{\theta}, \mathbf{p})$ .

### 6.3.1 Dérivation du champ lointain par rapport à la condition d'impédance

Dans cette section, nous supposons que la géométrie  $\Gamma$  est fixée et nous calculons la dérivée de  $T$  par rapport aux impédances. Soit  $\Lambda$  un sous espace de  $L^\infty(\Gamma) \times L^\infty(\Gamma)$  tel que tout  $(\lambda, \eta) \in \Lambda$  satisfait l'hypothèse 6.2.4. Introduisons l'application partielle

$$\begin{aligned} T_\Gamma &: \Lambda \longrightarrow \mathbf{L}_t^2(S^2) \\ (\lambda, \eta) &\longmapsto T(\lambda, \eta, \Gamma). \end{aligned}$$

On montre alors le théorème suivant.

**Theorem 6.3.1** *L'application  $T_\Gamma$  est Fréchet différentiable (au sens de la Définition 4.1.2) sur  $\Lambda$  et pour tout  $(\lambda, \eta) \in \Lambda$  sa différentielle de Fréchet est l'application  $T_\Gamma'(\lambda, \eta) : L^\infty(\Gamma) \times L^\infty(\Gamma) \rightarrow \mathbf{L}_t^2(S^2)$  définie par*

$$T_\Gamma'(\lambda, \eta) \cdot (h, l) = \mathbf{E}_{h,l}^\infty \quad \forall (h, l) \in (L^\infty(\Gamma))^2$$

où  $\mathbf{E}_{h,l}^\infty$  est le champ lointain associé au champ électrique  $\mathbf{E}^s$  solution de (6.1) avec

$$\mathbf{f} = -(\mathbf{rot}_\Gamma(l \mathbf{rot}_\Gamma \mathbf{H}_T) + h \mathbf{H}_T)$$

où  $\mathbf{H} := \mathbf{H}^s(\cdot, \hat{\theta}, \mathbf{p}) + \mathbf{H}^i(\cdot, \hat{\theta}, \mathbf{p})$ .

**Preuve.** Soit  $B_R$  une boule de rayons  $R$  telle que  $\Omega \setminus B_R$ . Comme dans le cas scalaire introduisons l'opérateur continu

$$R_\Gamma : \Lambda \longrightarrow \mathbf{H}_{\text{div}\partial B_R}^{-1/2}(\partial B_R) \times \mathbf{H}_{\text{div}\partial B_R}^{-1/2}(\partial B_R)$$

$$(\lambda, \eta) \longmapsto (\hat{x} \times \mathbf{E}^s(\cdot, \hat{\theta}, \mathbf{p}), \hat{x} \times \mathbf{H}^s(\cdot, \hat{\theta}, \mathbf{p}))|_{\partial B_R}$$

où  $\hat{x} := x/|x|$  désigne la normale extérieure à  $\partial B_R$  et  $(\mathbf{E}^s(\cdot, \hat{\theta}, \mathbf{p}), \mathbf{H}^s(\cdot, \hat{\theta}, \mathbf{p}))$  désigne la solution de (6.1) où  $\mathbf{f}$  est donné par (6.2). Notons aussi

$$\mathcal{I} : \mathbf{H}_{\text{div}\partial B_R}^{-1/2}(\partial B_R) \times \mathbf{H}_{\text{div}\partial B_R}^{-1/2}(\partial B_R) \longrightarrow \mathbf{L}_t^2(S^2)$$

$$(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2) \longmapsto \frac{ik}{4\pi} \hat{x} \times \int_{\partial B_R} (\mathbf{g}_1(y) + \mathbf{g}_2(y) \times \hat{x}) e^{-ik\hat{x}\cdot y} ds(y),$$

alors

$$T_\Gamma = \mathcal{I} \circ R_\Gamma.$$

Comme le problème (6.1) est bien posé et que l'opérateur d'impédance dépend de manière continue des fonctions d'impédance, on montre comme dans le cas scalaire que pour  $(\lambda, \eta) \in \Lambda$  et  $(h, l) \in L^\infty(\Gamma)^2$ , la différentielle de Fréchet de  $R_\Gamma$  est donnée par

$$R'_\Gamma(\lambda, \eta) \cdot (h, l) = (\hat{x} \times \mathbf{E}_{h,l}^s, \hat{x} \times \mathbf{H}_{h,l}^s)$$

où  $(\mathbf{E}_{h,l}^s, \mathbf{H}_{h,l}^s)$  est solution de (6.1) avec

$$\mathbf{f} = -(\mathbf{rot}_\Gamma(\mathbf{lrot}_\Gamma \mathbf{H}_T) + h\mathbf{H}_T)$$

où  $\mathbf{H} := \mathbf{H}^s(\cdot, \hat{\theta}, \mathbf{p}) + \mathbf{H}^i(\cdot, \hat{\theta}, \mathbf{p})$ . Le résultat est alors direct car l'application  $\mathcal{I}$  est linéaire. ■

### 6.3.2 Continuité du champ lointain par rapport à l'obstacle

Avant de montrer la différentiabilité du champ lointain par rapport à l'obstacle, nous devons montrer une propriété de continuité similaire au théorème 3.4.1 dans le cas scalaire. Nous reprenons les notations de le § 4.2,  $B_1^\infty$  désigne à nouveau la boule unité ouverte de  $C^{1,\infty}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$  et on note  $\|\cdot\|$  la norme sur  $C^{1,\infty}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3) = C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3) \cap W^{1,\infty}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ . Pour  $\varepsilon \in B_1^\infty$  et  $(\lambda, \eta) \in (L^\infty(\Gamma))^2$  on note  $f_\varepsilon := \text{Id} + \varepsilon$  et  $\lambda_\varepsilon := \lambda \circ f_\varepsilon^{-1}$ ,  $\eta_\varepsilon := \eta \circ f_\varepsilon^{-1}$ . On rappelle que  $f_\varepsilon$  est un  $C^1$  difféomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}^3$ . La frontière de l'obstacle perturbé  $\Omega_\varepsilon := f_\varepsilon(\Omega)$  est elle notée  $\Gamma_\varepsilon := f_\varepsilon(\Gamma)$ .

Soit  $\Lambda$  un sous espace de  $L^\infty(\Gamma) \times L^\infty(\Gamma)$  tel que tout  $(\lambda, \eta) \in \Lambda$  satisfait l'hypothèse 6.2.4. Soit  $(\lambda, \eta) \in \Lambda$ , notons  $(\mathbf{E}_\varepsilon^s(\cdot, \hat{\theta}, \mathbf{p}), \mathbf{H}_\varepsilon^s(\cdot, \hat{\theta}, \mathbf{p})) \in \mathbf{H}_{\text{rot}}^{\text{ext}}(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega_\varepsilon}) \times \{\mathbf{v} \in \mathbf{H}_{\text{rot}}^{\text{ext}}(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega_\varepsilon}) \text{ tels que } \mathbf{v}_T \in \mathbf{H}_{\text{rot}_\Gamma}(\Gamma_\varepsilon)\}$  l'unique solution de

$$\begin{cases} \mathbf{rot} \mathbf{H}_\varepsilon^s + ik \mathbf{E}_\varepsilon^s = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega_\varepsilon}, \\ \mathbf{rot} \mathbf{E}_\varepsilon^s - ik \mathbf{H}_\varepsilon^s = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega_\varepsilon}, \\ \boldsymbol{\nu}_\varepsilon \times \mathbf{E}_\varepsilon^s + \mathbf{rot}_{\Gamma_\varepsilon}(\eta_\varepsilon \mathbf{rot}_{\Gamma_\varepsilon} \mathbf{H}_{\varepsilon, T_\varepsilon}^s) + \lambda_\varepsilon \mathbf{H}_{\varepsilon, T_\varepsilon}^s = \mathbf{f} \text{ sur } \Gamma_\varepsilon, \\ \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\partial B_R} |\mathbf{H}_\varepsilon^s \times \hat{x} - (\hat{x} \times \mathbf{E}_\varepsilon^s)|^2 ds = 0, \end{cases}$$

avec

$$\mathbf{f} = -\left( \boldsymbol{\nu}_\varepsilon \times \mathbf{E}^i(x, \hat{\theta}, \mathbf{p}) + \mathbf{rot}_{\Gamma_\varepsilon}(\eta_\varepsilon \mathbf{rot}_{\Gamma_\varepsilon} \mathbf{H}_{T_\varepsilon}^i(x, \hat{\theta}, \mathbf{p})) + \lambda_\varepsilon \mathbf{H}_{T_\varepsilon}^i(x, \hat{\theta}, \mathbf{p}) \right).$$

Le vecteur  $\boldsymbol{\nu}_\varepsilon$  désigne la normale à  $\Gamma_\varepsilon$  dirigée vers l'extérieur de  $\Omega_\varepsilon$  et pour tout vecteur  $\mathbf{v}$ , on utilise la notation  $\mathbf{v}_{T_\varepsilon} := (\boldsymbol{\nu}_\varepsilon \times \mathbf{v}) \times \boldsymbol{\nu}_\varepsilon$ . On note aussi  $(\mathbf{E}_\varepsilon, \mathbf{H}_\varepsilon) := (\mathbf{E}_\varepsilon^s + \mathbf{H}_\varepsilon^s) + (\mathbf{E}^i(x, \hat{\theta}, \mathbf{p}), \mathbf{H}^i(x, \hat{\theta}, \mathbf{p}))$  et  $(\mathbf{E}, \mathbf{H}) := (\mathbf{E}^s(x, \hat{\theta}, \mathbf{p}), \mathbf{H}^s(x, \hat{\theta}, \mathbf{p})) + (\mathbf{E}^i(x, \hat{\theta}, \mathbf{p}), \mathbf{H}^i(x, \hat{\theta}, \mathbf{p}))$  les solutions du problème direct sur  $\Omega_\varepsilon$  et  $\Omega$  respectivement pour une direction d'incidence  $\hat{\theta}$  et une direction de polarisation  $\mathbf{p} \in S^2$  données. Soit  $B_R$  une boule de rayon  $R$  telle que  $\Omega \subset B_{R/2}$ , en suivant les idées de la preuve du théorème 3.4.1 on obtient le résultat suivant.

**Theorem 6.3.2** *Il existe  $C > 0$  telle que pour tout  $\varepsilon \in B_1^\infty$  suffisamment petit on a*

$$\|\mathbf{E}_\varepsilon \circ f_\varepsilon - \mathbf{E}\|_{\mathbf{H}_{\text{rot}\Gamma}(\Gamma)} + \|\mathbf{E}_\varepsilon \circ f_\varepsilon - \mathbf{E}\|_{\mathbf{H}_{\text{rot}}(B_R \setminus \bar{\Omega})} \leq C\|\varepsilon\|$$

et

$$\|\mathbf{H}_\varepsilon \circ f_\varepsilon - \mathbf{H}\|_{\mathbf{H}_{\text{rot}\Gamma}(\Gamma)} + \|\mathbf{H}_\varepsilon \circ f_\varepsilon - \mathbf{H}\|_{\mathbf{H}_{\text{rot}}(B_R \setminus \bar{\Omega})} \leq C\|\varepsilon\|.$$

### 6.3.3 Dérivation du champ lointain par rapport à l'obstacle

Dans cette section nous évaluons la dérivée de forme du champ lointain. Comme dans le cas scalaire, de la régularité supplémentaire sur le champ électromagnétique est nécessaire pour justifier le calcul de la dérivée de forme. Dans ce but, nous montrons le lemme 6.3.2 dont la preuve s'appuie principalement sur le corollaire 2.15 de [6] que nous rappelons dans la proposition suivante.

**Proposition 6.3.1** *Supposons que  $\Omega$  est un domaine de classe  $C^{m,1}$  pour  $m \geq 1$ . Alors, les espaces de fonction*

$$\{\mathbf{v} \in (L^2(\Omega))^3; \mathbf{rot} \mathbf{v} \in (H^{m-1}(\Omega))^3, \text{div} \mathbf{v} \in H^{m-1}(\Omega) \text{ et } \boldsymbol{\nu} \times \mathbf{v} \in (H^{m-1/2}(\Gamma))^3\}$$

et

$$\{\mathbf{v} \in (L^2(\Omega))^3; \mathbf{rot} \mathbf{v} \in (H^{m-1}(\Omega))^3, \text{div} \mathbf{v} \in H^{m-1}(\Omega) \text{ et } \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{v} \in (H^{m-1/2}(\Gamma))^3\}$$

sont inclus dans  $(H^m(\Omega))^3$ .

Pour plus de simplicité, nous supposons dans cette section que les impédances  $\lambda$  et  $\eta$  sont des fonctions de  $C^\infty(\Gamma)$  et que  $\Gamma$  est de classe  $C^\infty$ . On a alors

**Lemme 6.3.2** *Soit  $f \in \mathbf{V}(\Gamma)^* \cap \mathbf{H}_{\text{div}\Gamma}^{s-1/2}(\Gamma)$  pour  $s \geq 0$ . Tout champ électromagnétique  $(\mathbf{E}, \mathbf{H}) \in \mathbf{H}_{\text{rot}}^{\text{ext}}(\Omega_{\text{ext}}) \times V_{\mathbf{H}}$  satisfaisant*

$$\begin{cases} \mathbf{rot} \mathbf{H} + ik\mathbf{E} = 0 \text{ dans } \Omega_{\text{ext}}, \\ \mathbf{rot} \mathbf{E} - ik\mathbf{H} = 0 \text{ dans } \Omega_{\text{ext}}, \\ \boldsymbol{\nu} \times \mathbf{E} + \mathcal{Z}\mathbf{H}_T = \mathbf{f} \text{ sur } \Gamma, \end{cases}$$

est dans  $(H^{s+3/2}(B_R \setminus \bar{\Omega}))^3 \times (H^{s+1}(B_R \setminus \bar{\Omega}))^3$  pour toute boule  $B_R$  de rayon  $R$  contenant  $\Omega$ .

**Preuve.** Tout d'abord, d'après la condition au bord, comme  $\text{div}_\Gamma \mathbf{rot}_\Gamma = 0$  on a  $\text{div}_\Gamma(\lambda \mathbf{H}_T) = -\text{div}_\Gamma(\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{E}) + \text{div}_\Gamma \mathbf{f} \in H^{-1/2}(\Gamma)$  car  $\mathbf{E} \in \mathbf{H}_{\text{rot}}^{\text{ext}}(\Omega_{\text{ext}})$  et  $\mathbf{f}$  est au moins dans  $\mathbf{H}_{\text{div}\Gamma}^{-1/2}(\Gamma)$ . Mais on a aussi  $\text{rot}_\Gamma(\mathbf{H}_T) \in \mathbf{L}_t^2(\Gamma)$  car  $\mathbf{H} \in V_{\mathbf{H}}$  ce qui implique que  $\mathbf{H}_T \in (H^{1/2}(\Gamma))^3$  d'après la relation

$$\vec{\Delta}_\Gamma = \nabla_\Gamma \text{div}_\Gamma - \mathbf{rot}_\Gamma \mathbf{rot}_\Gamma.$$

Ainsi d'après la proposition 6.3.1, on en déduit que  $\mathbf{H} \in (H^1(B_R \setminus \bar{\Omega}))^3$ . D'un autre côté,  $\mathbf{rot}_\Gamma(\eta \mathbf{rot}_\Gamma \mathbf{H}_T) \in H^{-1/2}(\Gamma)$  donc  $\text{rot}_\Gamma \mathbf{H}_T \in H^{1/2}(\Gamma)$  et comme  $\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{E} = -\frac{1}{ik} \text{rot}_\Gamma \mathbf{H}_T$ , à nouveau en appliquant la proposition 6.3.1 on obtient  $\mathbf{E} \in (H^{3/2}(B_R \setminus \bar{\Omega}))^3$ . On obtient le résultat annoncé en itérant cette procédure. ■

Par conséquent les champs diffractés  $(\mathbf{E}^s(\cdot, \hat{\theta}, \mathbf{p}), \mathbf{H}^s(\cdot, \hat{\theta}, \mathbf{p}))$  et  $(\mathbb{E}^s(\cdot, z, \mathbf{p}), \mathbb{H}^s(\cdot, z, \mathbf{p}))$  sont des fonctions de  $(C^\infty(B_R \setminus \bar{\Omega}))^3$  pour toute boule de rayon  $R$  telle que  $\Omega \subset B_R$  et pour tout  $z \in \Omega_{\text{ext}}$ .

Dorénavant  $\Lambda$  désigne un sous espace de  $C^\infty(\Gamma) \times C^\infty(\Gamma)$  tel que tout  $(\lambda, \eta) \in \Lambda$  satisfait l'hypothèse 2.3.4. Pour tout obstacle  $\Omega$  de frontière  $\Gamma$  de classe  $C^\infty$  et pour tout couple  $(\lambda, \eta) \in \Lambda$ , la dérivée de forme du champ lointain est donnée par la différentielle de Fréchet de l'application

$$\begin{aligned} T_{\lambda, \eta} : B_1^\infty &\longrightarrow \mathbf{L}_t^2(S^2) \\ \varepsilon &\longmapsto T(\lambda_\varepsilon, \eta_\varepsilon, \Gamma_\varepsilon). \end{aligned}$$

Cette application se décompose sous la forme

$$T_{\lambda,\eta} = \mathcal{I} \circ R_{\lambda,\eta}$$

où

$$\begin{aligned} R_{\lambda,\eta} : B_1^\infty &\longrightarrow \mathbf{H}_{\text{div}_{\partial B_R}}^{-1/2}(\partial B_R) \times \mathbf{H}_{\text{div}_{\partial B_R}}^{-1/2}(\partial B_R) \\ \varepsilon &\longmapsto (\hat{x} \times \mathbf{E}_\varepsilon^s(\cdot, \hat{\theta}, \mathbf{p}), \hat{x} \times \mathbf{H}_\varepsilon^s(\cdot, \hat{\theta}, \mathbf{p}))|_{\partial B_R}. \end{aligned}$$

Nous commençons par calculer la différentielle de Fréchet de l'application  $R_{\lambda,\eta}$  en suivant la procédure développée dans le cas scalaire (voir § 4.2) et en nous inspirant de [50]. Supposons pour le moment que  $\bar{\Omega} \subset \Omega_\varepsilon$ . Nous avons un premier lemme de représentation pour la différence entre  $\mathbf{E}_\varepsilon^s$  et  $\mathbf{E}^s$ .

**Lemme 6.3.3** *Pour  $z \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}_\varepsilon$  et  $\mathbf{q} \in S^2$ ,*

$$\begin{aligned} \mathbf{q} \cdot (\mathbf{E}_\varepsilon^s(z) - \mathbf{E}^s(z)) &= - \int_{\Gamma_\varepsilon} \mathbf{H}_\varepsilon(y) \cdot [\boldsymbol{\nu}_\varepsilon \times \mathbb{E}(y, z, \mathbf{q}) \\ &\quad + \mathbf{rot}_{\Gamma_\varepsilon}(\eta_\varepsilon \mathbf{rot}_{\Gamma_\varepsilon} \mathbb{H}_{T_\varepsilon}(y, z, \mathbf{p})) + \lambda_\varepsilon \mathbb{H}_{T_\varepsilon}(y, z, \mathbf{q})] ds_\varepsilon(y). \end{aligned}$$

où  $(\mathbb{E}(y, z, \mathbf{q}), \mathbb{H}(y, z, \mathbf{q}))$  est définie au § 6.2.1 et  $\mathbf{H}_{T_\varepsilon} := (\boldsymbol{\nu}_\varepsilon \times \mathbf{H}) \times \boldsymbol{\nu}_\varepsilon$ .

**Preuve.** Soit  $\mathbf{q} \in S^2$  et  $z \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}_\varepsilon$ . D'après (6.7) on a

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{E}^s(z) = \int_{\Gamma} [\mathbb{H}^i(y, z, \mathbf{q}) \cdot \boldsymbol{\nu}(y) \times \mathbf{E}^s(y) + \mathbb{E}^i(y, z, \mathbf{q}) \cdot \boldsymbol{\nu}(y) \times \mathbf{H}^s(y)] ds(y)$$

et en utilisant le lemme 6.2.2 ceci devient

$$-\mathbf{q} \cdot \mathbf{E}^s(z) = \int_{\Gamma} [\mathbb{H}^s(y, z, \mathbf{q}) \cdot \boldsymbol{\nu}(y) \times \mathbf{E}^i(y) + \mathbb{E}^s(y, z, \mathbf{q}) \cdot \boldsymbol{\nu}(y) \times \mathbf{H}^i(y)] ds(y)$$

puis d'après (6.3)

$$-\mathbf{q} \cdot \mathbf{E}^s(z) = \int_{\Gamma} [\mathbb{H}^s(y, z, \mathbf{q}) \cdot \boldsymbol{\nu}(y) \times \mathbf{E}_\varepsilon(y) + \mathbb{E}^s(y, z, \mathbf{q}) \cdot \boldsymbol{\nu}(y) \times \mathbf{H}_\varepsilon(y)] ds(y).$$

En intégrant par partie dans  $\Omega_\varepsilon \cap \Omega$ , ceci devient finalement

$$-\mathbf{q} \cdot \mathbf{E}^s(z) = \int_{\Gamma_\varepsilon} [\mathbb{H}^s(y, z, \mathbf{q}) \cdot \boldsymbol{\nu}_\varepsilon(y) \times \mathbf{E}_\varepsilon(y) + \mathbb{E}^s(y, z, \mathbf{q}) \cdot \boldsymbol{\nu}_\varepsilon(y) \times \mathbf{H}_\varepsilon(y)] ds_\varepsilon(y). \quad (6.9)$$

D'un autre côté, en utilisant à nouveau (6.7) ainsi que (6.4) on a aussi

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{E}_\varepsilon^s(z) = \int_{\Gamma_\varepsilon} [\mathbb{H}^i(y, z, \mathbf{q}) \cdot \boldsymbol{\nu}_\varepsilon(y) \times \mathbf{E}_\varepsilon(y) + \mathbb{E}^i(y, z, \mathbf{q}) \cdot \boldsymbol{\nu}_\varepsilon(y) \times \mathbf{H}_\varepsilon(y)] ds_\varepsilon(y)$$

et donc en combinant avec (6.9) on obtient

$$\mathbf{q} \cdot (\mathbf{E}_\varepsilon^s(z) - \mathbf{E}^s(z)) = \int_{\Gamma_\varepsilon} [\mathbb{H}(y, z, \mathbf{q}) \cdot \boldsymbol{\nu}_\varepsilon(y) \times \mathbf{E}_\varepsilon(y) + \mathbb{E}(y, z, \mathbf{q}) \cdot \boldsymbol{\nu}_\varepsilon(y) \times \mathbf{H}_\varepsilon(y)] ds_\varepsilon(y).$$

La condition au bord satisfaite par  $(\mathbf{E}_\varepsilon, \mathbf{H}_\varepsilon)$  sur  $\Gamma_\varepsilon$  donne le résultat. ■

Toujours en suivant la procédure présentée dans le cas scalaire, nous allons remplacer  $\mathbf{H}_\varepsilon$  par  $\mathbf{H}$  dans la représentation intégrale donnée dans le lemme précédent. Cette substitution n'est pas exacte, notons  $\mathcal{O}(\cdot)$  une fonction régulière de  $[0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  telle qu'il existe  $C > 0$  telle que pour tout  $x \in [0, +\infty[$  on ait  $|\mathcal{O}(x)| \leq C|x|$ .

**Lemme 6.3.4** *Pour tout  $\mathbf{q} \in S^2$  on a*

$$\begin{aligned} \mathbf{q} \cdot (\mathbf{E}_\varepsilon^s(z) - \mathbf{E}^s(z)) = & - \int_{\Gamma_\varepsilon} \mathbf{H}(y) \cdot [\boldsymbol{\nu}_\varepsilon \times \mathbb{E}(y, z, \mathbf{q}) \\ & + \mathbf{rot}_{\Gamma_\varepsilon}(\eta_\varepsilon \mathbf{rot}_{\Gamma_\varepsilon} \mathbb{H}_{T_\varepsilon}(y, z, \mathbf{p})) + \lambda_\varepsilon \mathbb{H}_{T_\varepsilon}(y, z, \mathbf{q})] ds_\varepsilon(y) + \mathcal{O}(\|\varepsilon\|^2). \end{aligned}$$

uniformément pour  $\mathbf{q}$  et pour  $z$  dans tout ensemble compact  $K \subset \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega_\varepsilon}$ .

**Preuve.** La preuve s'inspire fortement de celle du lemme 4.2.4 dans le cas scalaire, nous ne donnons donc que ses grandes lignes. À partir de la formule de représentation obtenue au lemme 6.3.3, on remplace  $\mathbf{H}_\varepsilon$  par  $\mathbf{H}$  à l'ordre  $\mathcal{O}(\|\varepsilon\|^2)$  en utilisant le résultat de continuité du théorème 6.3.2 ainsi que la condition au bord sur  $\Gamma$  satisfaite par  $(\mathbb{H}, \mathbb{E})$ . ■

Pour la suite du calcul nous avons besoin d'étendre les quantité surfaciques  $\lambda_\varepsilon$ ,  $\eta_\varepsilon$ ,  $\boldsymbol{\nu}_\varepsilon$  et  $\mathbf{rot}_{\Gamma_\varepsilon}$  dans tout le domaine  $\Omega_\varepsilon \setminus \overline{\Omega}$ . Pour le confort du lecteur nous rappelons ici des notions déjà introduites dans le § 4.2.2. Comme  $\Gamma$  est de classe  $C^1$ , pour tout  $x_0 \in \Gamma$ , il existe une fonction  $\varphi$  de classe  $C^1$  et deux ouverts  $U \subset \mathbb{R}^2$  et  $V \subset \mathbb{R}^3$  qui sont des voisinages de 0 et  $x_0$  respectivement tels que  $\varphi(0) = x_0$  et

$$\Gamma \cap V = \{\varphi(\xi); \xi \in U\}.$$

Pour  $t \in [0, 1]$  définissons

$$f_t := \text{Id} + t\varepsilon, \quad \varphi_t := f_t \circ \varphi,$$

la fonction  $\varphi_t$  permet de paramétrer  $\Gamma_t = (\text{Id} + t\varepsilon)(\Gamma)$  au voisinage de  $x_0^t := f_t(x_0)$ , et les vecteurs tangents à  $\Gamma_t$  au point  $x_0^t$  s'écrivent

$$e_j^t = \frac{\partial \varphi_t}{\partial \xi_j} = (\text{Id} + t\nabla\varepsilon) \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_j} = (\text{Id} + t\nabla\varepsilon)e_j, \quad \text{pour } j = 1, 2 \quad (6.10)$$

où  $(\nabla\varepsilon)_{i,j} = \partial\varepsilon_i/\partial x_j$  est la matrice Jacobienne de  $\varepsilon$  et les vecteurs  $e_j = \partial\varphi/\partial\xi_j$  pour  $j = 1, 2$  forment une base du plan tangent à  $\Gamma$  en  $x_0$ . On définit la base covariante  $(e_i^t)$  sur  $\Gamma_t$  au point  $x_0^t$  par

$$e_i^t \cdot e_j^t = \delta_j^i, \quad \text{pour } i, j = 1, 2, \quad (6.11)$$

de plus, la normale unitaire sortante à  $\Gamma_t$  au point  $x_0^t$  est donnée par

$$\boldsymbol{\nu}_t = \frac{e_1^t \times e_2^t}{|e_1^t \times e_2^t|}.$$

Pour le rotationnel surfacique d'un vecteur  $\mathbf{w}$  régulier on utilise la formule

$$\mathbf{rot}_{\Gamma_t} := \boldsymbol{\nu}_t \cdot \mathbf{rot}$$

comme extension. Pour tout  $\mathbf{E} \in (H^1(\Omega_\varepsilon \setminus \overline{\Omega}))^3$  nous notons

$$\mathbf{E}_{T_t} := (\boldsymbol{\nu}_t \times \mathbf{E}) \times \boldsymbol{\nu}_t$$

la projection de  $\mathbf{E}$  sur le plan tangent à  $\Gamma_t$ . Enfin, les fonctions d'impédance  $\lambda$  et  $\eta$  sont étendues dans le volume  $\Omega_\varepsilon \setminus \overline{\Omega}$  à l'aide de la formule

$$\lambda_t = \lambda \circ f_t, \quad \eta_t = \eta \circ f_t.$$

Revenons à la formule de représentation intégrale du lemme 6.3.4 pour  $\mathbf{E}_\varepsilon^s - \mathbf{E}^s$  et transportons-là sur  $\Gamma$ .

**Lemme 6.3.5** *Pour tout  $\mathbf{q} \in S^2$  on a*

$$\begin{aligned} \mathbf{q} \cdot (\mathbf{E}_\varepsilon^s(z) - \mathbf{E}^s(z)) &= - \int_\Gamma (\varepsilon \cdot \boldsymbol{\nu}) \operatorname{div} \{ \mathbb{E}(\cdot, z, \mathbf{q}) \times \mathbf{H} + \lambda_t \mathbb{H}(\cdot, z, \mathbf{q}) \times (\boldsymbol{\nu}_t \times \mathbf{H}) \\ &\quad + (\eta_t \operatorname{rot}_{\Gamma_t} \mathbf{H}_{T_t} \operatorname{rot}_{\Gamma_t} \mathbb{H}_{T_t}(\cdot, z, \mathbf{q})) \boldsymbol{\nu}_t \} |_{t=0} ds + \mathcal{O}(\|\varepsilon\|^2). \end{aligned}$$

uniformément pour  $\mathbf{q}$  et pour  $z$  dans tout ensemble compact  $K \subset \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega_\varepsilon}$ .

**Preuve.** Dorénavant nous ne mentionnons plus explicitement la dépendance de  $\mathbb{E}(y, z, \mathbf{q})$  et  $\mathbb{H}(y, z, \mathbf{q})$  par rapport à  $y, z$  et  $\mathbf{q}$ . D'après le lemme 6.3.4 on a

$$\begin{aligned} \mathbf{q} \cdot (\mathbf{E}_\varepsilon^s(z) - \mathbf{E}^s(z)) &= - \int_{\Gamma_\varepsilon} \mathbf{H} \cdot [\boldsymbol{\nu}_\varepsilon \times \mathbb{E} + \operatorname{rot}_{\Gamma_\varepsilon} (\eta_\varepsilon \operatorname{rot}_{\Gamma_\varepsilon} \mathbb{H}_{T_\varepsilon}) + \lambda_\varepsilon \mathbb{H}_{T_\varepsilon}] ds_\varepsilon + \mathcal{O}(\|\varepsilon\|^2) \\ &= - \int_{\Gamma_\varepsilon} (\mathbb{E} \times \mathbf{H}) \cdot \boldsymbol{\nu}_\varepsilon + \eta_\varepsilon \operatorname{rot}_{\Gamma_\varepsilon} \mathbf{H}_{T_\varepsilon} \operatorname{rot}_{\Gamma_\varepsilon} \mathbb{H}_{T_\varepsilon} \\ &\quad + \lambda_\varepsilon [\mathbb{H} \times (\boldsymbol{\nu}_\varepsilon \times \mathbf{H})] \cdot \boldsymbol{\nu}_\varepsilon ds_\varepsilon + \mathcal{O}(\|\varepsilon\|^2). \end{aligned}$$

En appliquant le théorème de divergence ainsi que la condition sur  $\Gamma$  satisfaite par  $(\mathbb{E}, \mathbb{H})$  ceci devient

$$\begin{aligned} \mathbf{q} \cdot (\mathbf{E}_\varepsilon^s(z) - \mathbf{E}^s(z)) &= - \int_{\Omega_\varepsilon \setminus \overline{\Omega}} \operatorname{div} \{ \mathbb{E} \times \mathbf{H} + (\eta_t \operatorname{rot}_{\Gamma_t} \mathbf{H}_{T_t} \operatorname{rot}_{\Gamma_t} \mathbb{H}_{T_t}) \boldsymbol{\nu}_t + \\ &\quad \lambda_t \mathbb{H} \times (\boldsymbol{\nu}_t \times \mathbf{H}) \} dx + \mathcal{O}(\|\varepsilon\|^2). \end{aligned}$$

Comme dans la preuve du lemme 4.2.5, en utilisant le changement de variable  $(x_\Gamma, t) \mapsto x_\Gamma + t\varepsilon(x_\Gamma)$  on arrive à

$$\begin{aligned} \mathbf{q} \cdot (\mathbf{E}_\varepsilon^s(z) - \mathbf{E}^s(z)) &= - \int_\Gamma (\varepsilon \cdot \boldsymbol{\nu}) \operatorname{div} \{ \mathbb{E} \times \mathbf{H} + (\eta_t \operatorname{rot}_{\Gamma_t} \mathbf{H}_{T_t} \operatorname{rot}_{\Gamma_t} \mathbb{H}_{T_t}) \boldsymbol{\nu}_t + \\ &\quad \lambda_t \mathbb{H} \times (\boldsymbol{\nu}_t \times \mathbf{H}) \} |_{t=0} ds + \mathcal{O}(\|\varepsilon\|^2). \end{aligned}$$

■

Pour développer le terme de divergence nous aurons besoin du lemme technique suivant.

**Lemme 6.3.6** *Soit  $\mathbf{v} \in H^2(\Omega_{\text{ext}})$ ,*

$$\operatorname{rot}(\boldsymbol{\nu}_t \times \mathbf{v})|_{t=0} = \operatorname{div}_\Gamma \mathbf{v}_T \boldsymbol{\nu} + \left( R - 2H - \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\nu}} \right) \mathbf{v}_T + \frac{1}{\boldsymbol{\nu} \cdot \varepsilon} [\nabla_\Gamma (\boldsymbol{\nu} \cdot \varepsilon) \times \mathbf{v}] \times \boldsymbol{\nu} \text{ sur } \Gamma,$$

et

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\nu}} (\operatorname{rot}_{\Gamma_t} \mathbf{v}_{T_t})|_{t=0} = -\operatorname{div}_\Gamma (\operatorname{rot} \mathbf{v})_T - 2H \operatorname{rot}_\Gamma \mathbf{v}_T - \frac{1}{\boldsymbol{\nu} \cdot \varepsilon} \nabla_\Gamma (\boldsymbol{\nu} \cdot \varepsilon) \cdot (\operatorname{rot} \mathbf{v}) \text{ sur } \Gamma$$

où  $R = \nabla_\Gamma \boldsymbol{\nu}$  et  $2H = \operatorname{div}_\Gamma \boldsymbol{\nu}$ .

**Preuve.** Soit  $x_0 \in \Gamma$ , on complète  $(e_1, e_2)$  avec  $e_3 = \varepsilon$ . On associe à cette base de  $\mathbb{R}^3$  une base covariante  $(f^1, f^2, f^3)$  calculée dans la preuve du lemme 4.2.6. Notons aussi  $\tilde{\boldsymbol{\nu}}_t$  l'extension de la normale à  $\Gamma$  en utilisant la paramétrisation  $x = x_\Gamma + t\boldsymbol{\nu}(x_\Gamma)$  introduite au § 1.1.1 :

$$\tilde{\boldsymbol{\nu}}_t(x_\Gamma + t\boldsymbol{\nu}(x_\Gamma)) = \boldsymbol{\nu}(x_\Gamma) \quad \text{pour } x_\Gamma \in \Gamma.$$

Commençons par montrer la première relation. En utilisant le théorème 2.5.20 de [78] on a

$$\operatorname{rot}(\boldsymbol{\nu}_t \times \mathbf{v})|_{t=0} = \operatorname{div}_\Gamma (\mathbf{v}_T) \boldsymbol{\nu} + \left( R - 2H - \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\nu}} \right) [(\boldsymbol{\nu}_t \times \mathbf{v}) \times \tilde{\boldsymbol{\nu}}_t]|_{t=0}$$

car

$$\mathbf{rot}_\Gamma([\boldsymbol{\nu}_t \times \mathbf{v}] \cdot \tilde{\boldsymbol{\nu}}_t)|_{t=0} = \mathbf{rot}_\Gamma([\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{v}] \cdot \boldsymbol{\nu}) = 0.$$

On rappelle que  $R := \nabla_\Gamma \boldsymbol{\nu}$  désigne le tenseur de courbure et  $2H := \operatorname{div}_\Gamma(\boldsymbol{\nu})$  désigne la courbure moyenne. D'un autre côté

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\nu}} [(\boldsymbol{\nu}_t \times \mathbf{v}) \times \tilde{\boldsymbol{\nu}}_t]|_{t=0} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\nu}} [((\boldsymbol{\nu}_t - \tilde{\boldsymbol{\nu}}_t) \times \mathbf{v}) \times \tilde{\boldsymbol{\nu}}_t]|_{t=0} + \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\nu}} \mathbf{v}_T.$$

Mais, pour tout champ de vecteur  $\mathbf{w}$

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \boldsymbol{\nu}}|_\Gamma = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \xi_i} (f^i \cdot \boldsymbol{\nu}) + \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} (f^3 \cdot \boldsymbol{\nu})$$

et donc d'après le lemme 2.3 de [50] on obtient

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\nu}} [((\boldsymbol{\nu}_t - \tilde{\boldsymbol{\nu}}_t) \times \mathbf{v}) \times \tilde{\boldsymbol{\nu}}_t]|_{t=0} = \left[ \frac{\partial}{\partial t} (\boldsymbol{\nu}_t - \tilde{\boldsymbol{\nu}}_t)|_{t=0} \times \mathbf{v} \right] \times \boldsymbol{\nu} = -[\nabla_\Gamma(\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) \times \mathbf{v}] \times \frac{\boldsymbol{\nu}}{\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}}$$

car pour  $i = 1, 2$

$$\frac{\partial}{\partial \xi_i} [((\boldsymbol{\nu}_t - \tilde{\boldsymbol{\nu}}_t) \times \mathbf{v}) \times \tilde{\boldsymbol{\nu}}_t]|_{t=0} = 0.$$

On a ainsi la première relation du lemme.

Passons à la deuxième relation,

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\nu}} (\mathbf{rot}_{\Gamma_t} \mathbf{v}_T)|_{t=0} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\nu}} (\boldsymbol{\nu}_t \cdot \mathbf{rot} \mathbf{v})|_{t=0} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\nu}} (\tilde{\boldsymbol{\nu}}_t \cdot \mathbf{rot} \mathbf{v})|_{t=0} + \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\nu}} [(\boldsymbol{\nu}_t - \tilde{\boldsymbol{\nu}}_t) \cdot \mathbf{rot} \mathbf{v}]|_{t=0}. \quad (6.12)$$

Or, comme précédemment

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\nu}} [(\boldsymbol{\nu}_t - \tilde{\boldsymbol{\nu}}_t) \cdot \mathbf{rot} \mathbf{v}]|_{t=0} = -\frac{1}{\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}} \nabla_\Gamma(\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) \cdot (\mathbf{rot} \mathbf{v})|_\Gamma.$$

Notons

$$\mathbf{rot}_{\tilde{\Gamma}_t} ((\tilde{\boldsymbol{\nu}}_t \times \mathbf{v}) \times \tilde{\boldsymbol{\nu}}_t) := \tilde{\boldsymbol{\nu}}_t \cdot \mathbf{rot} \mathbf{v}$$

et l'opérateur de divergence associé

$$\operatorname{div}_{\tilde{\Gamma}_t} (\mathbf{v} \times \tilde{\boldsymbol{\nu}}_t) := \mathbf{rot}_{\tilde{\Gamma}_t} ((\tilde{\boldsymbol{\nu}}_t \times \mathbf{v}) \times \tilde{\boldsymbol{\nu}}_t).$$

D'après le lemme 2.5.10 de [78] on a

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\nu}} [\operatorname{div}_{\tilde{\Gamma}_t} (\mathbf{v} \times \tilde{\boldsymbol{\nu}}_t)]|_{t=0} - \operatorname{div}_{\tilde{\Gamma}_t} \left[ \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\nu}} (\mathbf{v} \times \tilde{\boldsymbol{\nu}}_t) \right] |_{t=0} = -\operatorname{div}_\Gamma(R\mathbf{v}) + 2[(\mathbf{v} \times \boldsymbol{\nu}) \cdot \nabla_\Gamma H]. \quad (6.13)$$

Or

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_{\tilde{\Gamma}_t} \left[ \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\nu}} (\mathbf{v} \times \tilde{\boldsymbol{\nu}}_t) \right] |_{t=0} &= \operatorname{div}_\Gamma \left[ \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\nu}} (\mathbf{v} \times \boldsymbol{\nu}) \right] \\ &= \operatorname{div}_\Gamma [-\mathbf{rot} \mathbf{v} + (\mathbf{rot}_\Gamma \mathbf{v}_T) \boldsymbol{\nu} + (R - 2H)(\mathbf{v} \times \boldsymbol{\nu})] \end{aligned}$$

et

$$-(\mathbf{rot} \mathbf{v}) \cdot \boldsymbol{\nu} + \mathbf{rot}_\Gamma \mathbf{v}_T = 0$$

donc

$$\operatorname{div}_{\tilde{\Gamma}_t} \left[ \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\nu}} (\mathbf{v} \times \tilde{\boldsymbol{\nu}}_t) \right] |_{t=0} = \operatorname{div}_\Gamma [-\mathbf{rot} \mathbf{v}]_T + (R - 2H)(\mathbf{v} \times \boldsymbol{\nu}).$$

En combinant avec (6.13) on a

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\nu}} [\operatorname{div}_{\tilde{\Gamma}_t} (\mathbf{v} \times \tilde{\boldsymbol{\nu}}_t)]|_{t=0} = -\operatorname{div}_\Gamma[(\mathbf{rot} \mathbf{v})_T] - 2H \operatorname{div}_\Gamma(\mathbf{v} \times \boldsymbol{\nu}).$$

Il suffit alors de revenir à (6.12) pour obtenir la deuxième relation du lemme. ■

Afin de rendre la suite plus lisible, nous séparons en deux le développement du terme de divergence dans l'expression obtenue au lemme 6.3.5. La première partie est développée dans la proposition 6.3.7 alors que la deuxième (qui est en fait la nouveauté de ce travail) est calculée dans la proposition 6.3.8.

**Proposition 6.3.7** *Pour  $(\mathbb{E}, \mathbb{H})$  et  $(\mathbf{E}, \mathbf{H})$  les fonctions du lemme 6.3.5 on a*

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} (\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) \operatorname{div} \{ \mathbb{E} \times \mathbf{H} + \lambda_t \mathbb{H} \times (\boldsymbol{\nu}_t \times \mathbf{H}) \} |_{t=0} ds &= \int_{\Gamma} \mathbb{H} \cdot \{ ik(\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{H}_T \\ &- ik\mathcal{Z}[(\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\varepsilon})(\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{E})] - \operatorname{rot}_{\Gamma}[(\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\varepsilon})(\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{E})] - \lambda(\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\varepsilon})(2R - 2H) \mathbf{H}_T \\ &- ik\lambda(\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\varepsilon})\mathcal{Z}\mathbf{H}_T + \lambda\nabla_{\Gamma}[(\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\varepsilon})(\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{H})] - ik\mathcal{Z}[\lambda(\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{H}_T] - (\nabla_{\Gamma}\lambda \cdot \boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{H}_T \} ds. \end{aligned}$$

**Preuve.** Commençons par rappeler la formule suivante valable pour deux champs de vecteurs  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$  :

$$\operatorname{div}(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \operatorname{rot} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{u} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{v}$$

et pour une fonction  $\varphi$  on a aussi

$$\operatorname{rot}(\varphi \mathbf{v}) = \nabla \varphi \times \mathbf{v} + \varphi \operatorname{rot} \mathbf{v}.$$

Ainsi, en utilisant les équations de Maxwell on obtient

$$\operatorname{div}(\mathbb{E} \times \mathbf{H})|_{t=0} = ik(\mathbb{H} \cdot \mathbf{H} + \mathbb{E} \cdot \mathbf{E})|_{\Gamma}.$$

D'après la condition au bord satisfaite par  $(\mathbf{E}, \mathbf{H})$  et la formule  $\operatorname{rot}_{\Gamma} \mathbf{v} = \boldsymbol{\nu} \times \operatorname{rot}(\mathbf{v})$  on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \cdot \mathbf{E} &= [\boldsymbol{\nu} \times \mathbb{E}] \cdot [\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{E}] + [\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbb{E}] \cdot [\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{E}] \\ &= -\mathcal{Z}\mathbb{H}_T \cdot [\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{E}] - \frac{1}{ik} \operatorname{rot}_{\Gamma}(\mathbb{H}_T) \cdot [\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{E}] \end{aligned}$$

où  $\mathcal{Z} = \operatorname{rot}_{\Gamma} \eta \operatorname{rot}_{\Gamma} + \lambda$ . De même

$$\begin{aligned} \operatorname{div}[\lambda_t \mathbb{H} \times (\boldsymbol{\nu}_t \times \mathbf{H})]|_{t=0} &= (\operatorname{rot} \mathbb{H})|_{\Gamma} \cdot (\lambda \boldsymbol{\nu} \times \mathbf{H})|_{\Gamma} - \mathbb{H}|_{\Gamma} \cdot \operatorname{rot}[\lambda_t (\boldsymbol{\nu}_t \times \mathbf{H})]|_{t=0} \\ &= -ik\lambda[\mathbb{E} \cdot (\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{H})]|_{\Gamma} - \mathbb{H}|_{\Gamma} \cdot \operatorname{rot}[\boldsymbol{\nu}_t \times (\lambda_t \mathbf{H})]|_{t=0}. \end{aligned}$$

En utilisant la première formule du lemme 6.3.6 on obtient

$$\begin{aligned} \operatorname{div}[\lambda_t \mathbb{H} \times (\boldsymbol{\nu}_t \times \mathbf{H})]|_{t=0} &= -ik\lambda[\mathbb{E} \cdot (\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{H})]|_{\Gamma} \\ &- \mathbb{H} \cdot \left\{ \operatorname{div}_{\Gamma}(\lambda \mathbf{H}_T) \boldsymbol{\nu} + \left( R - 2H - \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\nu}} \right) (\lambda_t \mathbf{H}_T)|_{t=0} + \frac{\lambda}{\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}} [\nabla_{\Gamma}(\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) \times \mathbf{H}] \times \boldsymbol{\nu} \right\}. \end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned} \operatorname{div}[\lambda_t \mathbb{H} \times (\boldsymbol{\nu}_t \times \mathbf{H})]|_{t=0} &= -ik\lambda[\mathcal{Z}\mathbb{H} \cdot \mathbf{H}_T]|_{\Gamma} \\ &- \mathbb{H} \cdot \left\{ \operatorname{div}_{\Gamma}(\lambda \mathbf{H}_T) \boldsymbol{\nu} + \left( R - 2H - \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\nu}} \right) (\lambda_t \mathbf{H}_T)|_{t=0} + \frac{\lambda}{\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}} [\nabla_{\Gamma}(\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) \times \mathbf{H}] \times \boldsymbol{\nu} \right\}. \end{aligned}$$

en utilisant la condition au bord. On termine en développant le terme  $\frac{\partial(\lambda_t \mathbf{H}_T)}{\partial \boldsymbol{\nu}}|_{t=0}$  à l'aide du lemme 4.2.6 :

$$\begin{aligned} \operatorname{div}[\lambda_t \mathbb{H} \times (\boldsymbol{\nu}_t \times \mathbf{H})]|_{t=0} &= -ik\lambda[\mathcal{Z}\mathbb{H} \cdot \mathbf{H}_T] - \frac{\nabla_{\Gamma} \lambda \cdot \boldsymbol{\varepsilon}}{\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}} \mathbb{H} \cdot \mathbf{H}_T \\ &- \mathbb{H} \cdot \left\{ \operatorname{div}_{\Gamma}(\lambda \mathbf{H}_T) \boldsymbol{\nu} + \lambda \left( R - 2H - \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\nu}} \right) \mathbf{H}_T + \frac{\lambda}{\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}} [\nabla_{\Gamma}(\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) \times \mathbf{H}] \times \boldsymbol{\nu} \right\}. \end{aligned}$$

Mais, d'après la formule 2.5.225 de [78] et la condition au bord on a

$$-\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\nu}} \mathbf{H}_T = \boldsymbol{\nu} \times \mathbf{rot}(\mathbf{H}) - \nabla_\Gamma(\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{H}) + R\mathbf{H}_T = ik\mathcal{Z}\mathbf{H}_T - \nabla_\Gamma(\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{H}) + R\mathbf{H}_T,$$

et de plus, comme  $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w}$  on a,

$$-\lambda[\nabla_\Gamma(\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) \times \mathbf{H}] \times \boldsymbol{\nu} = \lambda \nabla_\Gamma(\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\varepsilon})(\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{H})$$

et donc

$$-\lambda[\nabla_\Gamma(\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) \times \mathbf{H}] \times \boldsymbol{\nu} + \lambda(\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\varepsilon})\nabla_\Gamma(\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{H}) = \lambda \nabla_\Gamma[(\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\varepsilon})(\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{H})].$$

Ainsi on aboutit à

$$\begin{aligned} \int_\Gamma (\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) \operatorname{div}\{\mathbb{E} \times \mathbf{H} + \lambda_t \mathbb{H} \times (\boldsymbol{\nu}_t \times \mathbf{H})\}|_{t=0} ds &= \int_\Gamma \mathbb{H} \cdot \{ik(\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{H} - (\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\varepsilon})\operatorname{div}_\Gamma(\lambda\mathbf{H}_T)\boldsymbol{\nu} \\ &\quad - ik\mathcal{Z}[(\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\varepsilon})(\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{E})] - \mathbf{rot}_\Gamma[(\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\varepsilon})(\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{E})] - \lambda(\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\varepsilon})(2R - 2H)\mathbf{H}_T \\ &\quad - ik\lambda(\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\varepsilon})\mathcal{Z}\mathbf{H}_T + \lambda \nabla_\Gamma[(\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\varepsilon})(\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{H})] - ik\mathcal{Z}[\lambda(\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{H}_T] - (\nabla_\Gamma \lambda \cdot \boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{H}_T\} ds. \end{aligned}$$

Pour conclure il suffit de remarquer que

$$ik(\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{H}) - \operatorname{div}_\Gamma(\lambda\mathbf{H}_T) = (-\operatorname{div}_\Gamma(\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{E}) - \operatorname{div}_\Gamma(\lambda\mathbf{H}_T)) = \operatorname{div}_\Gamma(\mathbf{rot}_\Gamma(\eta\mathbf{rot}_\Gamma\mathbf{H}_T)) = 0$$

car  $\operatorname{div}_\Gamma \mathbf{rot}_\Gamma = 0$ . ■

**Proposition 6.3.8** *Pour  $(\mathbb{E}, \mathbb{H})$  et  $(\mathbf{E}, \mathbf{H})$  les fonctions du lemme 6.3.5 on a*

$$\begin{aligned} \int_\Gamma (\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) \operatorname{div}\{\eta_t \mathbf{rot}_{\Gamma_t}(\mathbf{H}_{T_t}) \mathbf{rot}_{\Gamma_t}(\mathbb{H}_{T_t}) \boldsymbol{\nu}_t\}|_{t=0} ds &= \int_\Gamma \mathbb{H} \{-2\mathbf{rot}_\Gamma[H(\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\varepsilon})\eta \mathbf{rot}_\Gamma(\mathbf{H}_T)] \\ &\quad - ik\mathcal{Z}[(\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{rot}_\Gamma(\eta \mathbf{rot}_\Gamma\mathbf{H}_T)] - ik\mathbf{rot}_\Gamma[\eta \mathbf{rot}_\Gamma[(\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\varepsilon})\mathcal{Z}(\mathbf{H}_T)]] \\ &\quad - \mathbf{rot}_\Gamma[(\nabla_\Gamma \eta \cdot \boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{rot}_\Gamma(\mathbf{H}_T)]\} ds. \end{aligned}$$

**Preuve.** Tout d'abord

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\{\eta_t \mathbf{rot}_{\Gamma_t}(\mathbf{H}_{T_t}) \mathbf{rot}_{\Gamma_t}(\mathbb{H}_{T_t}) \boldsymbol{\nu}_t\}|_{t=0} &= 2H\eta \mathbf{rot}_\Gamma(\mathbf{H}_T) \mathbf{rot}_\Gamma(\mathbb{H}_T) \\ &\quad + \frac{\partial \eta_t}{\partial \boldsymbol{\nu}}|_{t=0} \mathbf{rot}_\Gamma(\mathbf{H}_T) \mathbf{rot}_\Gamma(\mathbb{H}_T) + \eta \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\nu}}(\mathbf{rot}_{\Gamma_t}(\mathbf{H}_{T_t}) \mathbf{rot}_{\Gamma_t}(\mathbb{H}_{T_t}))|_{t=0}, \end{aligned}$$

et d'après la deuxième relation du lemme 6.3.6 on a en utilisant les équations de Maxwell

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\nu}}[\mathbf{rot}_{\Gamma_t}(\mathbf{H}_{T_t}) \mathbf{rot}_{\Gamma_t}(\mathbb{H}_{T_t})]|_{t=0} &= \mathbf{rot}_\Gamma(\mathbf{H}_T) \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\nu}}(\mathbf{rot}_{\Gamma_t}(\mathbb{H}_{T_t}))|_{t=0} + \mathbf{rot}_\Gamma(\mathbb{H}_T) \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\nu}}(\mathbf{rot}_{\Gamma_t}(\mathbf{H}_{T_t}))|_{t=0} \\ &= \mathbf{rot}_\Gamma(\mathbf{H}_T) \left\{ ik \operatorname{div}_\Gamma[\mathbb{E}_T] - 2H \mathbf{rot}_\Gamma(\mathbb{H}_T) + \frac{ik}{\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}} \nabla_\Gamma(\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) \cdot \mathbb{E} \right\} \\ &\quad + \mathbf{rot}_\Gamma(\mathbb{H}_T) \left\{ ik \operatorname{div}_\Gamma[\mathbf{E}_T] - 2H \mathbf{rot}_\Gamma(\mathbf{H}_T) + \frac{ik}{\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}} \nabla_\Gamma(\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) \cdot \mathbf{E} \right\}. \end{aligned}$$

En utilisant la condition au bord satisfaite par les couples  $(\mathbf{E}, \mathbf{H})$  et  $(\mathbb{E}, \mathbb{H})$  on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\nu}}[\mathbf{rot}_{\Gamma_t}(\mathbf{H}_{T_t}) \mathbf{rot}_{\Gamma_t}(\mathbb{H}_{T_t})]|_{t=0} &= \mathbf{rot}_\Gamma(\mathbf{H}_T) \left\{ -ik \mathbf{rot}_\Gamma[\mathcal{Z}(\mathbb{H}_T)] - 2H \mathbf{rot}_\Gamma(\mathbb{H}_T) + \frac{ik}{\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}} \mathbf{rot}_\Gamma(\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) \cdot (\mathcal{Z}\mathbb{H}_T) \right\} \\ &\quad + \mathbf{rot}_\Gamma(\mathbb{H}_T) \left\{ -ik \mathbf{rot}_\Gamma[\mathcal{Z}(\mathbf{H}_T)] - 2H \mathbf{rot}_\Gamma(\mathbf{H}_T) + \frac{ik}{\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}} \mathbf{rot}_\Gamma(\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) \cdot (\mathcal{Z}\mathbf{H}_T) \right\}. \end{aligned}$$

mais comme pour toute fonction  $\varphi$  et tout champ de vecteurs  $\mathbf{v}$  on a

$$\operatorname{rot}_\Gamma(\varphi \mathbf{v}) = -\mathbf{v} \cdot \operatorname{rot}_\Gamma(\varphi) + \varphi \operatorname{rot}_\Gamma(\mathbf{v}),$$

on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\nu}} [\operatorname{rot}_{\Gamma_t}(\mathbf{H}_{T_t}) \operatorname{rot}_{\Gamma_t}(\mathbb{H}_{T_t})] |_{t=0} &= -4H \operatorname{rot}_\Gamma(\mathbf{H}_T) \operatorname{rot}_\Gamma(\mathbb{H}_T) \\ &\quad - \frac{ik}{\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}} \operatorname{rot}_\Gamma(\mathbf{H}_T) \operatorname{rot}_\Gamma[(\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) \mathcal{Z}(\mathbb{H}_T)] - \frac{ik}{\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}} \operatorname{rot}_\Gamma(\mathbb{H}_T) \operatorname{rot}_\Gamma[(\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) \mathcal{Z}(\mathbf{H}_T)]. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \int_\Gamma (\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) \operatorname{div} \{ \eta_t \operatorname{rot}_{\Gamma_t}(\mathbf{H}_{T_t}) \operatorname{rot}_{\Gamma_t}(\mathbb{H}_{T_t}) \boldsymbol{\nu}_t \} |_{t=0} ds &= \int_\Gamma \{ -2H(\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) \eta \operatorname{rot}_\Gamma(\mathbf{H}_T) \operatorname{rot}_\Gamma(\mathbb{H}_T) \\ &\quad - ik \eta \operatorname{rot}_\Gamma(\mathbf{H}_T) \operatorname{rot}_\Gamma[(\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) \mathcal{Z}(\mathbb{H}_T)] - ik \eta \operatorname{rot}_\Gamma(\mathbb{H}_T) \operatorname{rot}_\Gamma[(\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) \mathcal{Z}(\mathbf{H}_T)] \\ &\quad - (\nabla_\Gamma \eta \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) \operatorname{rot}_\Gamma(\mathbb{H}_T) \operatorname{rot}_\Gamma(\mathbf{H}_T) \} ds \end{aligned}$$

et en intégrant par partie sur  $\Gamma$  ceci devient

$$\begin{aligned} \int_\Gamma (\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) \operatorname{div} \{ \eta_t \operatorname{rot}_{\Gamma_t}(\mathbf{H}_{T_t}) \operatorname{rot}_{\Gamma_t}(\mathbb{H}_{T_t}) \boldsymbol{\nu}_t \} |_{t=0} ds &= \int_\Gamma \mathbb{H} \{ -2 \operatorname{rot}_\Gamma [H(\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) \eta \operatorname{rot}_\Gamma(\mathbf{H}_T)] \\ &\quad - ik \mathcal{Z}[(\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) \operatorname{rot}_\Gamma(\eta \operatorname{rot}_\Gamma \mathbf{H}_T)] - ik \operatorname{rot}_\Gamma[\eta \operatorname{rot}_\Gamma[(\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) \mathcal{Z}(\mathbf{H}_T)]] \\ &\quad - \operatorname{rot}_\Gamma[(\nabla_\Gamma \eta \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) \operatorname{rot}_\Gamma(\mathbf{H}_T)] \} ds. \end{aligned}$$

■

Les propositions 6.3.7 et 6.3.8 permettent d'aboutir au théorème suivant.

**Théorème 6.3.9** *Pour tout  $\mathbf{q} \in S^2$  on a*

$$\mathbf{q} \cdot (\mathbf{E}_\varepsilon^s(z) - \mathbf{E}^s(z)) = \int_\Gamma \mathbb{H}(\cdot, z, \mathbf{q}) B_\varepsilon(\mathbf{E}, \mathbf{H}) ds + \mathcal{O}(\|\varepsilon\|^2)$$

*uniformément pour  $\mathbf{q}$  et pour  $z$  dans tout ensemble compact  $K \subset \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega_\varepsilon}$  et*

$$\begin{aligned} B_\varepsilon(\mathbf{E}, \mathbf{H}) &:= -ik(\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{H}_T + \operatorname{rot}_\Gamma[(\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\varepsilon})(\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{E})] + \lambda(\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) (2R - 2H) \mathbf{H}_T \\ &\quad - \lambda \nabla_\Gamma[(\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\varepsilon})(\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{H})] + 2 \operatorname{rot}_\Gamma[H(\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) \eta \operatorname{rot}_\Gamma(\mathbf{H}_T)] + ik \mathcal{Z}[(\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) \mathcal{Z} \mathbf{H}_T] \\ &\quad + (\nabla_\Gamma \lambda \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{H}_T + \operatorname{rot}_\Gamma[(\nabla_\Gamma \eta \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) \operatorname{rot}_\Gamma(\mathbf{H}_T)]. \end{aligned}$$

*On rappelle que  $\mathcal{Z} \cdot = \operatorname{rot}_\Gamma(\eta \operatorname{rot}_\Gamma \cdot) + \lambda \cdot$ ,  $R = \nabla_\Gamma \boldsymbol{\nu}$  et  $2H = \operatorname{div}_\Gamma \boldsymbol{\nu}$ .*

**Preuve.** Tout d'abord si on regroupe les résultats des propositions 6.3.7 et 6.3.8 on obtient

$$\begin{aligned} &\int_\Gamma (\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\nu}) \operatorname{div} \{ \mathbb{E} \times \mathbf{H} + \lambda_t \mathbb{H} \times (\boldsymbol{\nu}_t \times \mathbf{H}) + (\eta_t \operatorname{rot}_{\Gamma_t} \mathbf{H}_{T_t} \operatorname{rot}_{\Gamma_t} \mathbb{H}_{T_t}) \boldsymbol{\nu}_t \} |_{t=0} ds \\ &= \int_\Gamma \mathbb{H} \cdot \{ ik(\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{H}_T - ik \mathcal{Z}[(\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\varepsilon})(\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{E})] - \operatorname{rot}_\Gamma[(\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\varepsilon})(\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{E})] - \lambda(\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) (2R - 2H) \mathbf{H}_T \\ &\quad - ik \lambda(\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) \mathcal{Z} \mathbf{H}_T + \lambda \nabla_\Gamma[(\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\varepsilon})(\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{H})] - ik \mathcal{Z}[\lambda(\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{H}_T] - (\nabla_\Gamma \lambda \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{H}_T \\ &\quad - 2 \operatorname{rot}_\Gamma[H(\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) \eta \operatorname{rot}_\Gamma(\mathbf{H}_T)] - ik \mathcal{Z}[(\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) \operatorname{rot}_\Gamma(\eta \operatorname{rot}_\Gamma \mathbf{H}_T)] - ik \operatorname{rot}_\Gamma[\eta \operatorname{rot}_\Gamma[(\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) \mathcal{Z}(\mathbf{H}_T)]] \\ &\quad - \operatorname{rot}_\Gamma[(\nabla_\Gamma \eta \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) \operatorname{rot}_\Gamma(\mathbf{H}_T)] \} ds. \end{aligned}$$

Simplifions cette expression. Tout d'abord, d'après la condition au bord

$$-ik \mathcal{Z}[(\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\varepsilon})(\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{E})] - ik \mathcal{Z}[\lambda(\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{H}_T] - ik \mathcal{Z}[(\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) \operatorname{rot}_\Gamma(\eta \operatorname{rot}_\Gamma \mathbf{H}_T)] = 0$$

et de plus

$$-ik \operatorname{rot}_\Gamma[\eta \operatorname{rot}_\Gamma[(\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) \mathcal{Z}(\mathbf{H}_T)]] - ik \lambda(\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) \mathcal{Z} \mathbf{H}_T = -ik \mathcal{Z}[(\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) \mathcal{Z} \mathbf{H}_T].$$

On obtient donc l'expression annoncée à l'aide du lemme 6.3.5. ■

On en déduit la dérivée de forme de l'opérateur  $R_{\lambda,\eta}(\Gamma)$ .

**Corollaire 6.3.10** *Supposons que la forme  $\Gamma$  et les fonctions d'impédance  $\lambda$  et  $\eta$  sont analytiques. Alors l'opérateur  $R_{\lambda,\eta}(\Gamma)$  est différentiable en 0 et sa différentielle de Fréchet est donnée par*

$$R'_{\lambda,\eta}(\Gamma)(0) \cdot \varepsilon = (\mathbf{e}_r \times \mathbf{v}_\varepsilon^s, \mathbf{e}_r \times \mathbf{w}_\varepsilon^s)$$

où  $(\mathbf{v}_\varepsilon^s, \mathbf{w}_\varepsilon^s)$  satisfait (6.1) avec

$$f := B_\varepsilon(\mathbf{E}, \mathbf{H})$$

et  $B_\varepsilon$  est défini dans le théorème 6.3.9.

Comme dans le cas scalaire, pour obtenir ce corollaire nous allons utiliser le lemme de représentation suivant.

**Lemme 6.3.11** *Soit  $\mathbf{f} \in \mathbf{H}_{\text{rot}\Gamma}(\Gamma)^*$ , le champ électrique  $\mathbf{E}_f$  solution de (6.1) satisfait la représentation intégrale suivante : pour tout  $z \in \Omega_{\text{ext}}$  et pour tout  $\mathbf{q} \in S^2$*

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{E}_f(z) = \int_{\Gamma} \mathbb{H}(y, z, \mathbf{q}) \mathbf{f}(y) ds(y).$$

**Preuve.** Rappelons tout d'abord que nous avons la formule de représentation

$$\begin{aligned} \mathbf{q} \cdot \mathbf{E}_f(z) &= \int_{\Gamma} \left[ \mathbb{H}^i(y, z, \mathbf{q}) \cdot \boldsymbol{\nu}(y) \times \mathbf{E}^s(y) + \mathbb{E}^i(y, z, \mathbf{q}) \cdot \boldsymbol{\nu}(y) \times \mathbf{H}^s(y) \right] ds(y) \\ &= \int_{\Gamma} \left[ \mathbb{H}(y, z, \mathbf{q}) \cdot \boldsymbol{\nu}(y) \times \mathbf{E}_f^s(y) + \mathbb{E}(y, z, \mathbf{q}) \cdot \boldsymbol{\nu}(y) \times \mathbf{H}_f^s(y) \right] ds(y). \end{aligned}$$

On obtient le résultat en utilisant la condition au bord satisfaite par  $(\mathbb{E}, \mathbb{H})$  et une intégration par partie. ■

**Preuve du corollaire 6.3.10.** Le corollaire est une conséquence directe du théorème 6.3.9 et du lemme 6.3.11. ■

Enfin, comme on a la décomposition  $T_{\lambda,\eta}(\Gamma) = \mathcal{I} \circ R_{\lambda,\eta}(\Gamma)$  on en déduit le résultat final.

**Corollaire 6.3.12** *Supposons que la forme  $\Gamma$  et les fonctions d'impédance  $\lambda$  et  $\eta$  sont analytiques. Alors l'opérateur  $T_{\lambda,\eta}(\Gamma)$  est différentiable en 0 et sa différentielle de Fréchet est donnée par*

$$T'_{\lambda,\eta}(\Gamma)(0) \cdot \varepsilon = \mathbf{v}_\varepsilon^\infty$$

où  $\mathbf{v}_\varepsilon^\infty$  est le champ lointain de la fonction  $\mathbf{v}_\varepsilon^s$  définie dans le corollaire 6.3.10.

**Remarque 6.3.13** *L'extension de ce calcul au cas d'un opérateur du type  $\nabla_{\Gamma} \gamma \text{div}_{\Gamma}$  n'est pas évident pour des raisons principalement techniques. En effet, le rotationnel surfacique  $\text{rot}_{\Gamma}$  s'exprime simplement et de manière intrinsèque à l'aide de la formule  $\text{rot}_{\Gamma} = \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{rot}$ . Pour l'opérateur de divergence surfacique nous n'avons pas obtenu de formule intrinsèque pour le calcul de*

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\nu}} (\text{div}_{\Gamma_t} \mathbf{v}_{\Gamma_t})|_{t=0}$$

et donc pour l'expression de la différentielle de forme.

## 6.4 Dérivée d'une fonctionnelle moindres carrés

### 6.4.1 Calcul de la dérivée de forme et état adjoint

Dans l'optique de résoudre le problème inverse d'identification de  $\lambda, \eta$  et  $\Gamma$  à partir de la donnée du champ lointain nous allons minimiser la fonctionnelle coût

$$F(\lambda, \eta, \Gamma) := \frac{1}{2} \|T(\lambda, \eta, \Gamma) - \mathbf{E}_{\text{obs}}^\infty\|_{\mathbf{L}_t^2(S^2)}^2$$

où  $\mathbf{E}_{\text{obs}}^\infty$  est le champ lointain correspondant aux impédances et à l'obstacle que l'on souhaite retrouver. Le but final de ce chapitre est de calculer les dérivées partielles de la fonction  $F$ . Comme dans le cas scalaire, la fonction  $F$  est différentiable pour tout  $(\lambda, \eta, \Gamma)$  tels que l'opérateur  $T$  soit différentiable. Ainsi la dérivée partielle de  $F$  par rapport aux fonctions d'impédances  $(\lambda, \eta)$  est donnée par

$$F'_\Gamma(\lambda, \eta) \cdot (h, l) = \mathcal{R}e \left( \int_{S^2} [T'_\Gamma(\lambda, \eta) \cdot (h, l)] \cdot \overline{[T(\lambda, \eta, \Gamma) - \mathbf{E}_{\text{obs}}^\infty]} ds \right)$$

alors que sa dérivée de forme est donnée par

$$F'_{\lambda, \eta}(\Gamma)(0) \cdot (\varepsilon) = \mathcal{R}e \left( \int_{S^2} [T'_{\lambda, \eta}(\Gamma)(0) \cdot \varepsilon] \cdot \overline{[T(\lambda, \eta, \Gamma) - \mathbf{E}_{\text{obs}}^\infty]} ds \right)$$

où  $T'_\Gamma(\lambda, \eta)$  et  $T'_{\lambda, \eta}(\Gamma)(0)$  sont données dans les théorèmes 6.3.1 et 6.3.9 respectivement. Nous souhaitons formuler cette dérivée à l'aide d'un état adjoint, c'est le sujet du théorème suivant.

**Theorem 6.4.1** *Soit  $\Lambda$  un sous espace de  $(L^\infty(\Gamma))^2$  tel que tout  $(\lambda, \eta) \in \Lambda$  satisfait l'hypothèse 6.2.4. Soit  $(\lambda, \eta) \in \Lambda$  deux fonctions analytiques et  $\Gamma$  une frontière analytique, la dérivée de la fonction coût  $F$  par rapport à  $(\lambda, \eta)$  est donnée pour tout  $(h, l) \in (L^\infty(\Gamma))^2$  par*

$$F'_\Gamma(\lambda, \eta) \cdot (h, l) := -\frac{1}{4\pi} \mathcal{R}e \left( \int_\Gamma \mathbf{G}(y) \cdot (\mathbf{rot}_\Gamma(l \mathbf{rot}_\Gamma \mathbf{H}_T) + h \mathbf{H}_T)(y) ds(y) \right)$$

et sa différentielle de forme est elle donnée par

$$F'_{\lambda, \eta}(\Gamma) \cdot \varepsilon := \frac{1}{4\pi} \mathcal{R}e \left( \int_\Gamma \mathbf{G}(y) \cdot (B_\varepsilon \mathbf{H}_T)(y) ds(y) \right) \quad (6.14)$$

où l'opérateur surfacique  $B_\varepsilon$  est donné dans le théorème 6.3.9,  $\mathbf{H}(y) = \mathbf{H}^s(y, \hat{\theta}, \mathbf{p}) + \mathbf{H}^i(y, \hat{\theta}, \mathbf{p})$  et

$$\mathbf{G}(y) = \int_{S^2} \mathbf{H}(y, -\hat{x}, \mathbf{g}(\hat{x})) ds(\hat{x})$$

pour

$$\mathbf{g}(\hat{x}) = \overline{(T(\lambda, \eta, \Gamma) - \mathbf{E}_{\text{obs}}^\infty)}(\hat{x}).$$

**Preuve.** Tout d'abord, pour  $f \in \mathbf{H}_{\text{rot}_\Gamma}(\Gamma)^*$  d'après (6.5) on a la formule de représentation suivante pour le champ lointain  $\mathbf{E}_f^\infty$  associé à la solution de (6.1) :

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{E}_f^\infty(\hat{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_\Gamma \mathbf{H}(y, -\hat{x}, \mathbf{q}) \mathbf{f}(y) ds(y).$$

Ainsi

$$\mathbf{q} \cdot [T'_\Gamma(\lambda, \eta) \cdot (h, l)](\hat{x}) = -\frac{1}{4\pi} \int_\Gamma \mathbf{H}(y, -\hat{x}, \mathbf{q}) (\mathbf{rot}_\Gamma(l \mathbf{rot}_\Gamma \mathbf{H}_T) + h \mathbf{H}_T) ds(y)$$

où  $\mathbf{H} := \mathbf{H}^s(\cdot, \hat{\theta}, \mathbf{p}) + \mathbf{H}^i(\cdot, \hat{\theta}, \mathbf{p})$ . On en déduit que

$$F'_\Gamma(\lambda, \eta) \cdot (h, l) = -\frac{1}{4\pi} \mathcal{R}e \left( \int_{S^2} \int_\Gamma \mathbf{H}(y, -\hat{x}, \mathbf{g}(\hat{x})) (\mathbf{rot}_\Gamma(l \mathbf{rot}_\Gamma \mathbf{H}_T) + h \mathbf{H}_T) ds(y) ds(\hat{x}) \right)$$

où

$$\mathbf{g}(\hat{x}) := \overline{(T(\lambda, \eta, \Gamma) - \mathbf{E}_{\text{obs}}^\infty)}(\hat{x}).$$

En permutant les deux intégrales on en déduit que

$$F'_\Gamma(\lambda, \eta) \cdot (h, l) = -\frac{1}{4\pi} \mathcal{R}e \left( \int_\Gamma \mathbf{G}(y) \cdot (\mathbf{rot}_\Gamma(l \mathbf{rot}_\Gamma \mathbf{H}_T) + h \mathbf{H}_T) ds(y) \right)$$

où

$$\mathbf{G}(y) := \int_{S^2} \mathbf{H}(y, -\hat{x}, \mathbf{g}(\hat{x})) ds(\hat{x}).$$

est solution de (6.1) avec le second membre donné par (6.2) où  $(\mathbf{E}^i(x, \hat{\theta}, \mathbf{p}), \mathbf{H}^i(x, \hat{\theta}, \mathbf{p}))$  est remplacé par l'onde de Herglotz électromagnétique

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_E^i(y) &:= \int_{S^2} \mathbf{E}^i(y, -\hat{x}, \mathbf{g}(\hat{x})) ds(\hat{x}) \\ \mathbf{G}_H^i(y) &:= \int_{S^2} \mathbf{H}^i(y, -\hat{x}, \mathbf{g}(\hat{x})) ds(\hat{x}). \end{aligned}$$

Le résultat pour la différentielle de forme s'obtient de la même manière. ■

#### 6.4.2 Validation numérique de la dérivée de forme

Nous proposons de valider la dérivée de forme donnée dans le théorème 6.4.1 à l'aide d'applications numériques en comparant les valeurs obtenues en évaluant (6.14) pour une direction  $\varepsilon$  donnée et

$$\partial_\varepsilon F(\lambda, \eta, \Gamma) := \frac{F(\lambda, \eta, \Gamma) - F(\lambda, \eta, \Gamma_t)}{t} \quad (6.15)$$

pour  $\Gamma_t := \Gamma + t\varepsilon(\Gamma)$  et  $t$  un réel positif suffisamment petit. Afin d'évaluer (6.14) et (6.15) numériquement nous avons besoin d'un solveur pour le problème direct avec condition d'impédance généralisée.

##### Résolution du problème direct

Comme dans le cas scalaire nous utilisons le logiciel FreeFem++ [91] pour résoudre le problème (6.1) numériquement. Nous commençons par borner le domaine de calcul par une sphère de rayon  $R$  telle que la distance entre l'obstacle et la frontière artificielle soit de l'ordre d'une longueur d'onde. Sur cette sphère nous imposons la condition au bord approchée

$$\hat{x} \times \mathbf{rot} \mathbf{H}^s + ik(\hat{x} \times \mathbf{H}^s) \times \hat{x} = 0 \quad \text{sur } \partial B_R.$$

Nous renvoyons le lecteur à [75, chapitre 13] pour plus de précisions sur ce point. Dans un premier temps nous avons utilisé un opérateur de type Dirichlet-à-Neumann tronqué sur la surface artificielle  $\partial B_R$  mais ceci s'avère très coûteux en terme de résolution du système linéaire associé au problème discret. Ensuite nous discrétisons le domaine de calcul avec des tétraèdres de sorte que l'on ait dix tétraèdres par longueur d'onde (voir figure 6.1). Nous utilisons des éléments finis de Nédélec de première espèce (voir [77] ou bien [75, chapitre 8]) pour discrétiser le problème dans le domaine borné  $\Omega_R := B_R \setminus \bar{\Omega}$ . Enfin, nous calculons le champ lointain à l'aide du champ diffracté en utilisant la formule de représentation intégrale pour le champ lointain et en utilisant les remarques de la section 13.6 de [75]. Lorsque l'obstacle  $\Omega$  est une sphère, nous avons calculé à l'aide des séries de Mie (voir [75, chapitre 9]) la solution du problème (6.1) de manière analytique et ceci nous a permis de valider le solveur direct. Avec les choix présentés ci-dessus, on obtient une précision relative de 5% sur le calcul du champ lointain pour un obstacle sphérique dont le rayon fait la moitié d'une longueur d'onde est des impédances  $\lambda$  et  $\eta$  constantes.

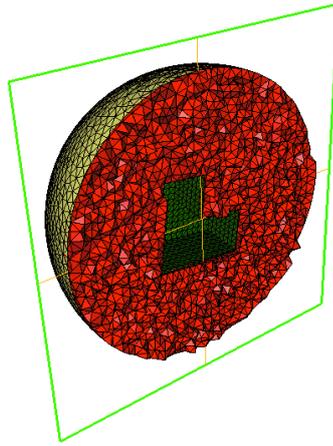


FIGURE 6.1 – Exemple de maillage pour la résolution du problème direct.

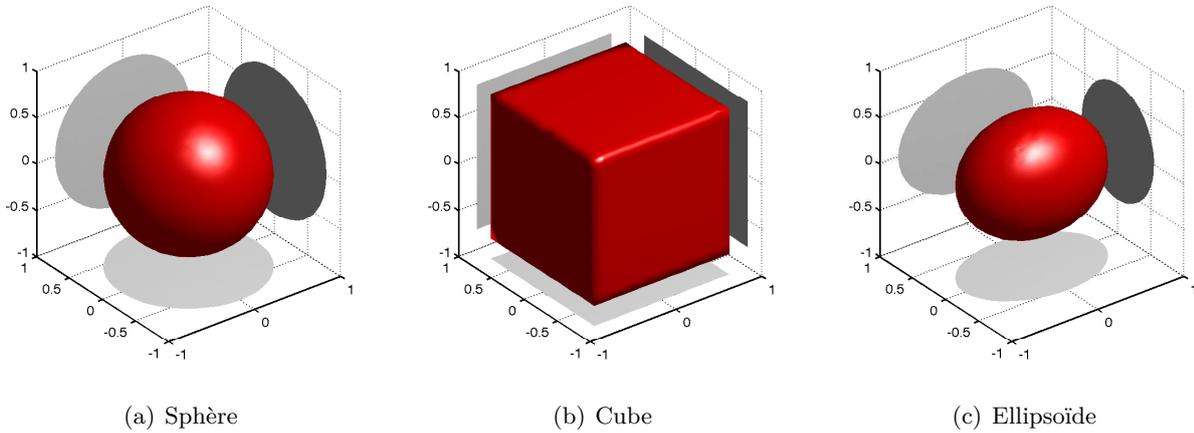


FIGURE 6.2 – Géométries utilisées pour la validation du calcul de la dérivée de forme.

### Résultats numériques

Supposons que la donnée  $\mathbf{E}_{\text{obs}}^\infty$  corresponde à la diffraction d'une onde plane de direction d'incidence  $\hat{\theta} = (0, 0, 1)$  et de polarisation  $\mathbf{p} = (1, 0, 0)$  par deux impédances constantes  $\lambda$  et  $\eta$  et un obstacle  $\Omega_{\text{obs}}$ . L'obstacle exact  $\Omega_{\text{obs}}$  considéré est la sphère de rayon  $0.3l$  où  $l := 2\pi/k$  désigne la longueur d'onde de l'onde incidente. On choisit  $\lambda = \eta = -1/ik$  pour les impédances. Nous allons comparer les valeurs de  $\partial_\varepsilon F$  avec celles données par la formule (6.14) pour les trois géométrie de la figure 6.2 et pour plusieurs directions  $\varepsilon$ .

Nous commençons par prendre pour  $\Omega$  est une sphère de rayon  $0.5l$  (voir figure 6.2(a)) et  $\varepsilon = \hat{x}$ . Dans ce cas, on est en mesure de calculer (6.15) de manière analytique lorsque  $\varepsilon = \hat{x}$  (on note  $\widetilde{\partial F}_\varepsilon$  cette valeur) et nous avons les résultats suivants.

---

Validation pour une sphère :

$$\varepsilon = \hat{x} : \quad \partial_\varepsilon F(\lambda, \eta, \Gamma) = 11.7, \quad \widetilde{\partial F}_\varepsilon(\lambda, \eta, \Gamma) = 11.3, \quad F'_{\lambda, \eta}(\Gamma) = 10.9.$$

---

Ces trois valeurs sont relativement proches (rappelons que dans tous les cas l'erreur commise

lors de la résolution du problème direct est de l'ordre de 5%) et donc l'approche de validation proposée semble valable.

Lorsque  $\Omega$  est un cube de côté  $l$  (voir figure 6.2(b)) nous avons les résultats suivants.

---

Validation pour un cube :

$$\begin{aligned} \varepsilon = [1, 0, 0] & : \quad \partial_\varepsilon F(\lambda, \eta, \Gamma) = 0.5, \quad F'_{\lambda, \eta}(\Gamma) = 0.5, \\ \varepsilon = [0, 1, 0] & : \quad \partial_\varepsilon F(\lambda, \eta, \Gamma) = 0.2, \quad F'_{\lambda, \eta}(\Gamma) = 0.03, \\ \varepsilon = [0, 0, 1] & : \quad \partial_\varepsilon F(\lambda, \eta, \Gamma) = -0.8, \quad F'_{\lambda, \eta}(\Gamma) = -0.9. \end{aligned}$$

---

On remarque que même si le gradient est faible, les deux méthodes donnent plus ou moins les mêmes valeurs sauf la dérivée partielle dans la direction  $y$ . Si on estime que  $F'_{\lambda, \eta}(\Gamma)$  est bien calculée, on a une dérivée partielle faible dans la direction  $y$  et donc il est normal que l'erreur sur la résolution du problème inverse vienne biaiser le calcul de  $\partial_{\hat{x}} F(\lambda, \eta, \Gamma)$ . Il est intéressant de noter que la direction  $[1, 0, 0]$  correspond à la polarisation de l'onde incidente alors que  $[0, 0, 1]$  correspond à la direction d'incidence et que la dérivée de forme est faible seulement dans la direction  $[0, 1, 0]$ .

Passons à un autre exemple,  $\Omega$  est un ellipsoïde (voir figure 6.2(c)) dont la frontière est paramétrée par

$$\Gamma := \{(0.5l \cos(\theta) \cos(\phi), 0.35l \cos(\theta) \sin(\phi), 0.4l \sin(\theta)) \text{ pour } (\theta, \phi) \in [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]\}.$$

---

Validation pour un ellipsoïde :

$$\begin{aligned} \varepsilon = \boldsymbol{\nu} & : \quad \partial_\varepsilon F(\lambda, \eta, \Gamma) = 5.4, \quad F'_{\lambda, \eta}(\Gamma) = 5.6, \\ \varepsilon = [\cos(\arctan(y/x)), 0, 0] & : \quad \partial_\varepsilon F(\lambda, \eta, \Gamma) = 2.6, \quad F'_{\lambda, \eta}(\Gamma) = 2.1, \\ \varepsilon = [1, 1, 1] & : \quad \partial_\varepsilon F(\lambda, \eta, \Gamma) = -1.6, \quad F'_{\lambda, \eta}(\Gamma) = -1.6. \end{aligned}$$

---

Pour cette dernière configuration, les résultats sont tout aussi satisfaisants.

## 6.5 Application à l'identification d'obstacles

### 6.5.1 Méthode de reconstruction

Nous présentons dans la section suivante quelques résultats préliminaires de reconstruction d'un obstacle caractérisé par une condition d'impédance généralisée de la forme

$$\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{E} + \mathbf{rot}_\Gamma(\eta \mathbf{rot}_\Gamma \mathbf{H}_T) + \lambda \mathbf{H}_T = 0 \quad \text{sur } \Gamma$$

à partir de la donnée du champ lointain pour  $I$  ondes incidentes. La technique de résolution du problème inverse utilisée est la même que dans le cas scalaire, c'est-à-dire que nous minimisons la fonctionnelle

$$F(\lambda, \eta, \Gamma) := \frac{1}{2} \sum_{i=1}^I \left\| T(\lambda, \eta, \Gamma, \hat{\theta}_i, \mathbf{p}_i) - \mathbf{E}_{i, \delta}^\infty \right\|_{\mathbf{L}_i^2(S^2)}^2$$

où  $\mathbf{E}_{i, \delta}^\infty$  est la donnée du problème. Les vecteurs  $\hat{\theta}_i$  et  $\mathbf{p}_i$  de  $S^2$  désignent respectivement la direction d'incidence et la direction de polarisation de l'onde incidente. On suppose que pour  $i = 1, \dots, I$ ,

$E_{i,\delta}^\infty$  est un champ lointain admissible, c'est-à-dire qu'il existe  $(\lambda_0, \eta_0)$  un couple d'impédances, une surface  $\Gamma_0$  et  $I$  fonctions (de faible amplitude)  $\delta_i \in \mathbf{L}_t^2(\Gamma)$  tels que

$$E_{i,\delta}^\infty = T(\lambda_0, \eta_0, \Gamma_0, \hat{\theta}_i, \mathbf{p}_i) + \delta_i.$$

Dans la pratique, nous simulons dans un premier temps un jeu de données exactes  $(T(\lambda_0, \eta_0, \Gamma_0, \hat{\theta}_i, \mathbf{p}_i))$  à l'aide du solveur direct décrit dans la section précédente, ensuite nous ajoutons un bruit Gaussien que l'on normalise pour avoir

$$\frac{\|\delta_i\|_{\mathbf{L}_t^2(S^2)}}{\|T(\lambda_0, \eta_0, \Gamma_0, \hat{\theta}_i, \mathbf{p}_i)\|_{\mathbf{L}_t^2(S^2)}} = \delta_0$$

pour un niveau de bruit  $\delta_0 \geq 0$  donné.

Nous nous contentons ici de traiter la reconstruction d'un obstacle en supposant que les impédances sont connues et constantes et nous utilisons une technique de descente de gradient par rapport à la géométrie pour minimiser  $F$  tout en appliquant une régularisation pour le calcul du gradient de forme de  $F$ . Plus précisément, à chaque itération  $n$  on bouge la géométrie  $\Omega_n$  (le maillage) de frontière intérieure  $\Gamma_n$  à l'aide du champ de déformation  $h \in \mathbf{H}_\Gamma^1 := \{v \in (H^1(\Omega_n))^3 \text{ tels que } v|_\Gamma \in \mathbf{H}_t^1(\Gamma_n)\}$  solution de

$$(h, v)_{(H^1(\Omega_n))^3} + \sigma_\Gamma (\nabla_\Gamma h, \nabla_\Gamma v)_{(\mathbf{L}_t^2(\Gamma_n))^3} = F'_{\lambda_0, \eta_0}(\Gamma_n) \cdot v \quad \text{pour tout } v \in \mathbf{H}_\Gamma^1$$

où  $\sigma_\Gamma > 0$  est le coefficient de régularisation et l'expression de  $F'_{\lambda_0, \eta_0}(\Gamma_n) \cdot v$  est donnée dans le théorème 6.4.1. Nous avons utilisé le logiciel mmg3d (voir [43]) pour bouger le maillage volumique, nous tenons à faire remarquer que le problème de déformation de maillages en dimension trois est un problème ardu que nous n'avons pas abordé.

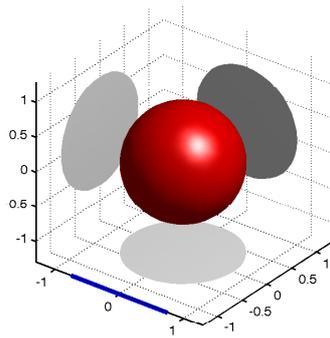
### 6.5.2 Résultats numériques

Nous présentons ici quatre cas tests de reconstruction d'un obstacle, pour chaque exemple nous représentons la géométrie utilisée pour générer les données, puis celle utilisée pour initialiser l'algorithme de minimisation et en troisième nous représentons la géométrie reconstruite après 20 itérations de descente de gradient. Sur ces figures, le trait bleu désigne la longueur d'onde de l'onde incidente, nous l'avons prise égale au diamètre de l'objet cherché. Dans les deux premiers tests, on ne connaît le champ lointain que pour deux ondes incidentes alors que dans les deux derniers tests on connaît le champ lointain pour quatre ondes incidentes. Tous les tests ont été réalisés avec un bruit  $\delta_0 = 2\%$  et en prenant un coefficient de régularisation constant au cours des itérations.

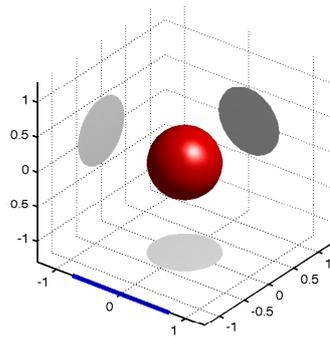
Test 1 :

Paramètres du test :  $I = 2$  ondes incidentes et

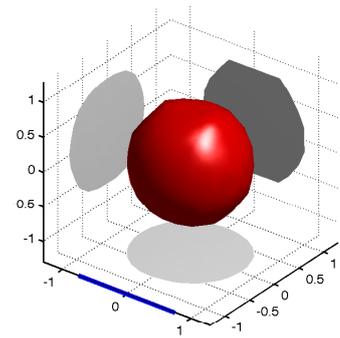
$\hat{\theta}_i$	(0, 0, 1)	(0, 0, -1)
$\mathbf{p}_i$	(0, 1, 0)	(0, 1, 0)
$\lambda$	0.5	
$\eta$	0	



(a) Surface exacte



(b) Surface initiale

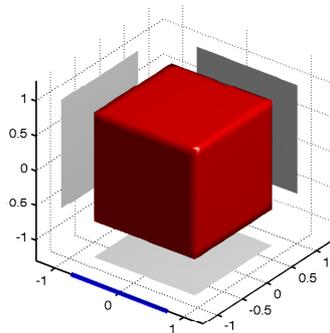


(c) Surface reconstruite

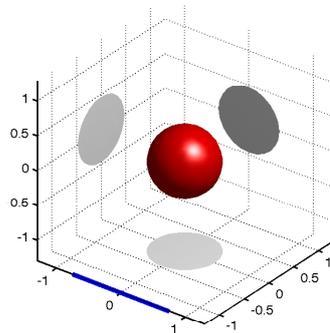
Test 2 :

Paramètres du test :  $I = 2$  ondes incidentes et

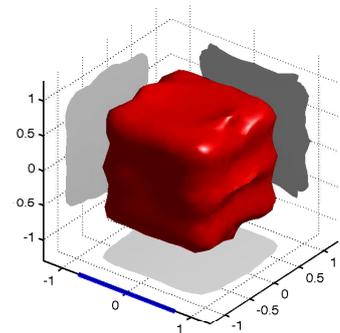
$\hat{\theta}_i$	$(0, 0, 1)$	$(0, 0, -1)$
$\mathbf{p}_i$	$(0, 1, 0)$	$(0, 1, 0)$
$\lambda$	0.5	
$\eta$	0	



(a) Surface exacte



(b) Surface initiale

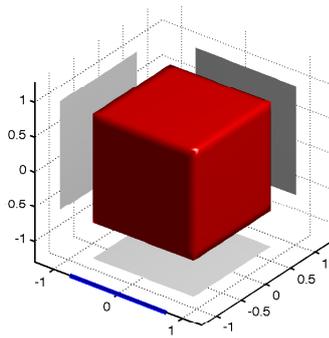


(c) Surface reconstruite

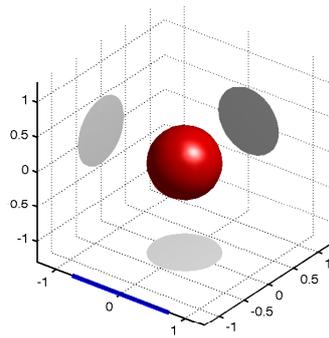
Test 3 :

Paramètres du test :  $I = 4$  ondes incidentes et

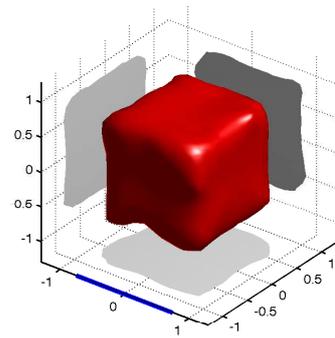
$\hat{\theta}_i$	$(0, 0, 1)$	$(0, 0, -1)$	$(0, 1, 0)$	$(0, -1, 0)$
$\mathbf{p}_i$	$(0, 1, 0)$	$(0, 1, 0)$	$(1, 0, 0)$	$(-1, 0, 0)$
$\lambda$	0.25i			
$\eta$	0			



(a) Surface exacte



(b) Surface initiale

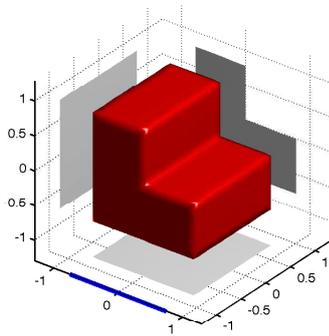


(c) Surface reconstruite

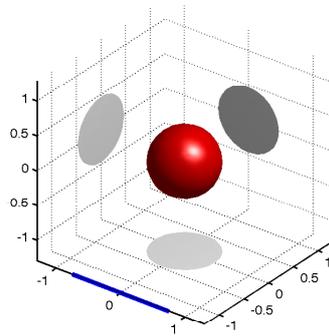
Test 4 :

Paramètres du test :  $I = 4$  ondes incidentes et

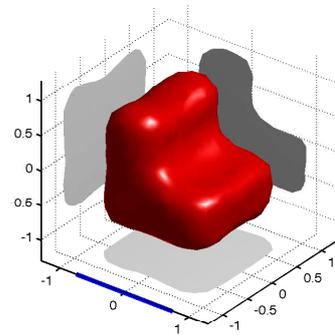
$\hat{\theta}_i$	(0, 0, 1)	(0, 0, -1)	(0, 1, 0)	(0, -1, 0)
$\mathbf{p}_i$	(0, 1, 0)	(0, 1, 0)	(1, 0, 0)	(-1, 0, 0)
$\lambda$	0			
$\eta$	$0.25i$			



(a) Surface exacte



(b) Surface initiale



(c) Surface reconstruite

Tous les exemples de reconstruction présentés sont satisfaisants. Pour le Test 3, nous avons dans un premier considéré seulement 2 ondes incidente (comme dans le Test 2) mais l'algorithme de minimisation convergeait vers une forme très irrégulière. Nous avons donc augmenté le nombre d'ondes incidentes pour faciliter l'inversion. Remarquons que les résultats obtenus sont comparables aux images données par la Linear Sampling Method (voir [36]) qui demande la connaissance d'un nombre beaucoup plus important de champs lointains.

---

---

**TROISIÈME PARTIE**

**MÉTHODES QUALITATIVES POUR LE  
PROBLÈME SCALAIRE**

---

---



# MÉTHODE DE FACTORISATION EN PRÉSENCE D'UNE CONDITION D'IMPÉDANCE GÉNÉRALISÉE

---

## Sommaire

---

<b>7.1</b>	<b>Définition du problème inverse . . . . .</b>	<b>148</b>
<b>7.2</b>	<b>Factorisation de l'opérateur champ lointain . . . . .</b>	<b>150</b>
7.2.1	Factorisation formelle . . . . .	150
7.2.2	Espaces fonctionnels nécessaires à la factorisation . . . . .	151
7.2.3	Caractérisation de l'obstacle . . . . .	154
7.2.4	Quelques applications du théorème de factorisation . . . . .	160
<b>7.3</b>	<b>Application à la reconstruction d'obstacles . . . . .</b>	<b>160</b>
7.3.1	Procédure de reconstruction et régularisation . . . . .	161
7.3.2	Applications numériques . . . . .	166

---

Ce travail a été réalisé lors du stage de Master de Mathieu Chamaillard que j'ai co-encadré avec Housseem Haddar.

**L**ES techniques d'optimisation utilisées dans la Partie II pour résoudre le problème inverse de reconstruction d'un objet diffractant en présence d'une condition au bord de type condition d'impédance généralisée dépendant fortement de la condition au bord que l'on considère. La Partie II présente une extension des résultats existants pour une condition d'impédance classique du type  $\partial u / \partial \nu + \lambda u = 0$  au cas d'une condition au bord du type  $\partial u / \partial \nu + \operatorname{div}_{\Gamma}(\eta \nabla_{\Gamma} u) + \lambda u = 0$ . L'inconvénient des techniques d'optimisation est qu'il est nécessaire d'évaluer la différentielle de forme du champ diffracté, ce qui semble difficile à mettre en place dans le cas d'un opérateur de dérivation surfacique d'ordre supérieur à 2.

Lorsqu'on dispose de la donnée du champ lointain pour une infinité d'ondes incidentes et une infinité de directions d'observation, il existe d'autres méthodes de résolution du problème inverse

que l'on qualifie de « méthodes qualitatives ». L'avantage principal de ce type de techniques est que l'on peut les appliquer avec très peu d'informations a priori sur la condition au bord. Le but de ce chapitre est d'utiliser une de ces méthodes, appelée méthode de factorisation (voir [46] pour une présentation complète de cette méthode), pour montrer un résultat d'unicité et fournir un algorithme de reconstruction numérique d'un obstacle sur lequel on a une condition au bord du type

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} + \mathcal{Z}u = 0 \text{ sur } \Gamma$$

en faisant peu d'hypothèses a priori sur l'opérateur surfacique  $\mathcal{Z}$ . L'application d'une telle méthode à la diffraction inverse en présence d'une condition d'impédance généralisée est une extension du cas de l'impédance classique ( $\mathcal{Z} = \lambda$  pour  $\lambda$  une fonction  $L^\infty$ ) traité dans le chapitre 2 de [46] par exemple. Le fait de considérer un opérateur d'impédance  $\mathcal{Z}$  plus général complique l'analyse mathématique et la justification de la méthode de factorisation.

Le principe de cette méthode est le suivant. Notons  $F : Y \rightarrow Y$  un opérateur construit à partir des données du problème,  $Y$  étant un espace de Hilbert. On commence par factoriser l'opérateur  $F$  sous la forme

$$F = GTG^*$$

pour deux opérateurs  $G$  et  $T$ . L'opérateur  $G$  est choisi de telle sorte que son image caractérise l'obstacle cherché. Ensuite, le théorème qui suit (pour la preuve voir [46, § 2.5]) nous permet de faire le lien entre l'image de  $G$  et l'opérateur  $F$  construit à partir des données du problème inverse, et donc on obtient une caractérisation de l'obstacle à l'aide des données.

**Théorème 7.0.1** *Soit  $X^* \subset U \subset X$  un triplet de Gelfand avec  $U$  un espace de Hilbert et  $X$  un espace de Banach réflexif tels que les inclusions sont continues et denses. Soit  $Y$  un second espace de Hilbert et soit  $F : Y \rightarrow Y$ ,  $\hat{G} : X \rightarrow Y$  et  $\hat{T} : X^* \rightarrow X$  trois opérateurs linéaires et bornés tels que*

$$F = \hat{G}\hat{T}\hat{G}^*.$$

*Supposons que*

- (a)  $\hat{G}$  est compact d'image dense,
- (b) il existe  $t \in [0, 2\pi]$  tel que  $\mathcal{R}e(\exp(it)\hat{T})$  est de la forme  $C + K$  pour un opérateur compact  $K$  et un opérateur autoadjoint et coercif  $C : X^* \rightarrow X$ , i.e., il existe  $c > 0$  telle que

$$\langle C\phi, \phi \rangle \geq c\|\phi\|_{X^*}^2 \text{ pour tout } \phi \in X^*,$$

- (c)  $\mathcal{I}m(\hat{T})$  est compact et positif sur  $\mathcal{R}(\hat{G}^*) \subset X^*$ , i.e.  $\forall \phi \in \mathcal{R}(\hat{G}^*), \langle \mathcal{I}m(\hat{T})\phi, \phi \rangle \geq 0$ ,
- (d)  $\mathcal{R}e(\exp(it)\hat{T})$  est injectif ou bien  $\mathcal{I}m(\hat{T})$  est strictement positif sur la fermeture  $\overline{\mathcal{R}(\hat{G}^*)}$  de  $\mathcal{R}(\hat{G}^*)$ , i.e.  $\forall \phi \neq 0$  tel que  $\phi \in \overline{\mathcal{R}(\hat{G}^*)}$ ,  $\langle \mathcal{I}m(\hat{T})\phi, \phi \rangle > 0$ .

*Alors l'opérateur  $F_{\#} = |\mathcal{R}e(\exp(it)F)| + \mathcal{I}m(F)$  est positif et les images de  $\hat{G} : X \rightarrow Y$  et  $F_{\#}^{1/2} : Y \rightarrow Y$  coïncident. De plus l'opérateur  $F_{\#}^{-1/2}G$  est borné de  $X$  dans  $Y$ .*

Dans la première section nous donnons une description précise du problème inverse que l'on résout, dans la deuxième section nous montrons que la méthode de factorisation s'applique pour tout une classe d'opérateurs d'impédance généralisée, enfin, nous terminons ce chapitre par l'application de la méthode à la reconstruction numérique d'objets diffractants.

## 7.1 Définition du problème inverse

Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^d$  pour  $d = 2, 3$  de frontière  $\Gamma$  de classe  $C^1$ , on note  $\nu$  la normale à  $\Gamma$  dirigée vers l'extérieur de  $\Omega$  et  $\Omega_{\text{ext}} := \mathbb{R}^d \setminus \overline{\Omega}$ . Nous rappelons que le problème de

diffraction en présence d'une condition d'impédance généralisée s'écrit : trouver  $u^s \in H_V := \{v \in \mathcal{D}'(\Omega_{\text{ext}}), \text{ tels que } \varphi v \in H^1(\Omega_{\text{ext}}) \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \text{ et } v|_{\Gamma} \in V(\Gamma)\}$  telle que

$$\begin{cases} \Delta u^s + k^2 u^s = 0 \text{ dans } \Omega_{\text{ext}}, \\ \frac{\partial u^s}{\partial \nu} + \mathcal{Z}_k u^s = f \text{ sur } \Gamma, \\ \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|x|=R} |\partial_r u^s - ik u^s|^2 = 0, \end{cases} \quad (7.1)$$

avec

$$f = - \left( \frac{\partial u^i}{\partial \nu} + \mathcal{Z}_k u^i \right) \quad (7.2)$$

où  $u^i$  désigne l'onde incidente,  $V(\Gamma) \subset L^2(\Gamma)$  est un espace de Hilbert et  $\mathcal{Z}_k : V(\Gamma) \rightarrow V(\Gamma)^*$  désigne un opérateur linéaire et continu. L'indice  $k$  dans la notation de  $\mathcal{Z}_k$  signifie que l'opérateur peut dépendre du nombre d'onde  $k$ .

Dans ce qui suit,  $S_{\Gamma} : H^{1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma)$  désigne l'opérateur de Dirichlet-à-Neumann extérieur à l'obstacle  $\Omega$ . On rappelle que d'après la proposition 1.2.5, le problème (7.1) admet une unique solution dans  $H_V$  si et seulement si l'opérateur  $\mathcal{Z}_k + S_{\Gamma} : V^{1/2}(\Gamma) \rightarrow V^{-1/2}(\Gamma)$  est un isomorphisme pour  $V^{1/2}(\Gamma) := V(\Gamma) \cap H^{1/2}(\Gamma)$  et  $V^{-1/2}(\Gamma) := (V^{1/2}(\Gamma))^*$ . Dans ce qui suit nous supposons que  $\mathcal{Z}_k$  satisfait l'hypothèse suivante.

**Hypothèse 7.1.1** *L'opérateur  $\mathcal{Z}_k$  est symétrique, c'est-à-dire que pour tout  $x \in V(\Gamma)$ ,*

$$\overline{\mathcal{Z}_k x} := \overline{\mathcal{Z}_k \bar{x}} = \mathcal{Z}_k^* x.$$

De plus,

$$\text{Im}(\mathcal{Z}_k) \geq 0$$

et

$$\mathcal{Z}_k + S_{\Gamma} : V^{1/2}(\Gamma) \rightarrow V^{-1/2}(\Gamma)$$

est un isomorphisme.

**Remarque 7.1.2** *Nous montrons par exemple dans le théorème 1.2.8 que  $\mathcal{Z}_k + S_{\Gamma}$  est un isomorphisme dès que*

$$\text{Im}(\mathcal{Z}_k) \geq 0$$

et  $\mathcal{Z}_k = -C_Z + K_Z$  où  $C_Z$  est coercif et  $K_Z$  est un opérateur compact.

Pour une direction  $\hat{\theta}$  dans la sphère unité de  $\mathbb{R}^d$  que l'on note  $S^{d-1}$ , définissons  $u^{\infty}(\cdot, \hat{\theta})$  le champ lointain associé à la diffraction d'une onde plane  $u^i(x) = e^{ik\hat{\theta} \cdot x}$  de direction d'incidence  $\hat{\theta}$ . Dans cette partie, pour des raisons techniques, nous prenons une convention quelque peu différente pour la définition du champ lointain en dimension 2 et 3 puisque nous le définissons à partir du développement asymptotique

$$u^s(x) = \gamma(d) \frac{e^{ikr}}{r^{(d-1)/2}} \left( u^{\infty}(\hat{x}) + O\left(\frac{1}{r}\right) \right) \quad r \longrightarrow +\infty$$

où

$$\gamma(2) = \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{8\pi k}} \quad \text{et} \quad \gamma(3) = \frac{1}{4\pi}.$$

Dans ce chapitre, l'ensemble  $\{u^{\infty}(\hat{x}, \hat{\theta}) \text{ pour } (\hat{x}, \hat{\theta}) \in (S^{d-1})^2\}$ , constitue l'ensemble de données. A partir de ce champ lointain on définit l'opérateur intégral de champ lointain  $F : L^2(S^{d-1}) \rightarrow L^2(S^{d-1})$ ,

$$(Fg)(\hat{x}) = \int_{S^{d-1}} u^{\infty}(\hat{x}, \hat{\theta}) g(\hat{\theta}) d\hat{\theta}, \quad \hat{x} \in S^{d-1}. \quad (7.3)$$

Nous montrons dans la section suivante que cet opérateur se factorise sous la forme

$$F = -GT^*G^*$$

pour deux opérateurs  $G$  et  $T$  définis ci-après. Nous montrons dans un premier temps que  $\Omega$  est caractérisé par l'image de  $G$ , c'est-à-dire que

$$z \in \Omega \iff \phi_z(\hat{x}) \in \mathcal{R}(G)$$

où  $\phi_z(\hat{x}) := \Phi^\infty(z, \hat{x}) = e^{-ik\hat{x}\cdot z}$  est le champ lointain de la fonction de Green sortante de l'équation de Helmholtz défini dans le § 1.2.3 et pour tout opérateur  $T : E \rightarrow F$  on note  $\mathcal{R}(T) = \{x \in F \mid \exists y \in E \text{ tel que } x = Ty\}$  l'image de  $T$ . Ensuite, en appliquant le théorème 7.0.1 avec  $\hat{T} = -T^*$ ,  $\hat{G} = G$  et  $t = \pi$  on montre que

$$\mathcal{R}(G) = \mathcal{R}(F_\#^{1/2})$$

où

$$F_\# = |Re(F)| + Im(F).$$

Ainsi on a l'équivalence

$$z \in \Omega \iff \phi_z(\hat{x}) \in \mathcal{R}(F_\#^{1/2}).$$

Cette caractérisation de  $\Omega$  peut être utilisée en pratique car l'opérateur  $F_\#^{1/2}$  dépend uniquement des données du problème inverse, c'est-à-dire de  $u^\infty(\hat{x}, \hat{\theta})$ . De plus c'est un opérateur autoadjoint et compact, on peut donc utiliser le critère de Picard pour déterminer si un point  $z$  est à l'intérieur ou à l'extérieur de  $\Omega$  (voir § 7.3 pour plus de détails).

## 7.2 Factorisation de l'opérateur champ lointain

### 7.2.1 Factorisation formelle

Dans cette section on factorise de manière formelle l'opérateur  $F$  défini par (7.3) sous la forme  $F = -GT^*G^*$  en s'inspirant du calcul présenté dans [46] dans le cas où  $\mathcal{Z}_k = \lambda$  pour une fonction  $\lambda \in L^\infty(\Gamma)$ . Soient  $G, H_0$  et  $H_1$  trois opérateurs linéaires définis par

- $Gf := u^\infty$  où  $u^\infty$  est le champ lointain associé à la solution  $u^s$  de (7.1),
- $H_0g := \gamma_0 v_g$  où pour  $g \in L^2(S^{d-1})$  on pose

$$v_g(x) := \int_{S^{d-1}} e^{ik\hat{\theta}\cdot x} g(\hat{\theta}) ds(\hat{\theta}),$$

et  $\gamma_0$  désigne l'opérateur de trace sur  $\Gamma$ ,

- et  $H_1g := \gamma_1 v_g$  où pour tout  $v \in \{w \in H^1(\Omega_R) \text{ tels que } \Delta w \in L^2(\Omega_R)\}$  on pose

$$\gamma_1 v := \frac{\partial v}{\partial \nu} \Big|_\Gamma.$$

On a noté  $\Omega_R := B_R \setminus \bar{\Omega}$  où  $B_R$  désigne une boule ouverte de rayon  $R$  tel que  $\Omega \subset B_R$ . Par linéarité,  $Fg$  est le champ lointain associé à la solution de (7.1) où  $f$  est donné par (7.2) pour  $u^i = v_g$ . Ainsi  $Fg = Gf$  pour  $f = -(Z_k H_0 + H_1)g$  et donc

$$F = -G(Z_k H_0 + H_1). \quad (7.4)$$

Les adjoints de  $H_0$  et  $H_1$  sont donnés pour toute fonction  $q$  et tout point  $\hat{x} \in S^{d-1}$  par :

$$\begin{cases} H_0^* q(\hat{x}) = \int_\Gamma e^{-ik\hat{x}y} q(y) ds(y), \\ H_1^* q(\hat{x}) = \int_\Gamma \frac{\partial e^{-ik\hat{x}y}}{\partial \nu(y)} q(y) ds(y), \end{cases}$$

et ainsi

$$(\mathcal{Z}_k H_0 + H_1)^* q(\hat{x}) = \int_{\Gamma} e^{-ik\hat{x}y} \mathcal{Z}_k^* q(y) ds(y) + \int_{\Gamma} \frac{\partial e^{-ik\hat{x}y}}{\partial \nu(y)} q(y) ds(y). \quad (7.5)$$

On reconnaît dans cette expression le champ lointain associé au champ diffracté

$$v := \text{SL}_k(\mathcal{Z}_k^* q) + \text{DL}_k(q), \quad (7.6)$$

où  $\text{SL}_k$  et  $\text{DL}_k$  sont les potentiels de simple et double couche respectivement définis par

$$\begin{cases} \text{SL}_k(q)(x) = \int_{\Gamma} \Phi(x, y) q(y) ds(y), & x \in \mathbb{R}^3 \setminus \Gamma, \\ \text{DL}_k(q)(x) = \int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} q(y) ds(y), & x \in \mathbb{R}^3 \setminus \Gamma, \end{cases}$$

et  $\Phi(x, y) = \frac{i}{4} H_0^1(k|x-y|)$  en dimension 2 et  $\Phi(x, y) = \frac{e^{ik|x-y|}}{4\pi|x-y|}$  en dimension 3 désigne la fonction de Green sortante de  $\Delta + k^2$  associée au point  $y$ . Le champ  $v$  défini par (7.6) est solution de (7.1) avec

$$f = \mathcal{Z}_k v|_{\Gamma} + \frac{\partial v}{\partial \nu}|_{\Gamma} = \mathcal{Z}_k \mathcal{S}_k \mathcal{Z}_k^* q + \mathcal{N}_k q + \mathcal{Z}_k \mathcal{D}_k q + \mathcal{T}_k \mathcal{Z}_k^* q,$$

où

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_k &:= \gamma_0 \text{SL}_k, & \text{et} & & \mathcal{T}_k &:= \gamma_1 \text{SL}_k, \\ \mathcal{D}_k &:= \gamma_0 \text{DL}_k, & & & \mathcal{N}_k &:= \gamma_1 \text{DL}_k. \end{aligned}$$

Ainsi on a

$$(\mathcal{Z}_k H_0 + H_1)^* = GT, \quad (7.7)$$

pour

$$T := \mathcal{Z}_k \mathcal{S}_k \mathcal{Z}_k^* + \mathcal{N}_k + \mathcal{Z}_k \mathcal{D}_k + \mathcal{T}_k \mathcal{Z}_k^* \quad (7.8)$$

et donc

$$F = -GT^* G^*. \quad (7.9)$$

### 7.2.2 Espaces fonctionnels nécessaires à la factorisation

La factorisation (7.9) de l'opérateur  $F$  montre qu'il a la forme requise pour pouvoir appliquer le théorème 7.0.1 et ainsi obtenir une caractérisation de l'obstacle à partir de l'opérateur champ lointain. Il faut aussi trouver deux espaces de Hilbert  $X$  et  $Y$  tels que les opérateurs

$$\begin{aligned} G &: X \longrightarrow Y \\ T^* &: X^* \longrightarrow X \end{aligned}$$

soient continus. L'espace  $X$  doit être un espace de Banach réflexif  $X$  tel que  $X^* \subset U \subset X$  avec injections continues et denses pour  $U$  un espace de Hilbert. Dans notre cas,  $Y = L^2(S^{d-1})$ , il ne reste qu'à choisir  $X$ . L'opérateur  $G$  est un opérateur de résolution du problème direct, il semble donc raisonnable de prendre  $X = V^{-1/2}(\Gamma)$ . Alors,  $T$  devrait être un opérateur borné de  $V^{1/2}(\Gamma)$  dans  $V^{-1/2}(\Gamma)$ . Ceci est en général faux car  $\mathcal{Z}_k \mathcal{S}_k \mathcal{Z}_k^*$  n'est pas nécessairement borné de  $V^{1/2}(\Gamma)$  dans  $V^{-1/2}(\Gamma)$  (voir l'exemple du Laplacien Beltrami ci-après). Afin de contourner cette difficulté introduisons l'espace

$$\Lambda(\Gamma) := \left\{ u \in V^{1/2}(\Gamma), \mathcal{Z}_k^* u \in H^{-1/2}(\Gamma) \right\}$$

muni du produit scalaire

$$(u, v)_{\Lambda(\Gamma)} = (u, v)_{V^{1/2}(\Gamma)} + (\mathcal{Z}_k^* u, \mathcal{Z}_k^* v)_{H^{-1/2}(\Gamma)}.$$

C'est un espace de Hilbert et remarquons que la norme associée à ce produit scalaire, notée  $\|\cdot\|_{\Lambda(\Gamma)}$ , est équivalente à la norme

$$\|\cdot\|_{\Lambda(\Gamma)}^2 := \|\cdot\|_{H^{1/2}(\Gamma)}^2 + \|\mathcal{Z}_k^* \cdot\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}^2.$$

En effet, comme  $\mathcal{Z}_k + S_\Gamma : V^{1/2}(\Gamma) \rightarrow V^{-1/2}(\Gamma)$  est un isomorphisme et comme  $\mathcal{Z}_k^* = \overline{\mathcal{Z}_k}$ , il existe  $C > 0$  telle que pour tout  $u \in \Lambda(\Gamma)$

$$\|u\|_{V^{1/2}(\Gamma)} \leq C\|(\mathcal{Z}_k + S_\Gamma)u\|_{V^{-1/2}(\Gamma)} \leq C\|(\mathcal{Z}_k + S_\Gamma)u\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \leq C\left(\|u\|_{H^{1/2}(\Gamma)} + \|\mathcal{Z}_k u\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}\right)$$

et donc il existe  $C > 0$  telle que pour tout  $u \in \Lambda(\Gamma)$  :

$$\frac{1}{C}\|u\|_{\Lambda(\Gamma)} \leq \|u\|_{\Lambda(\Gamma)} \leq C\|u\|_{\Lambda(\Gamma)}. \quad (7.10)$$

Montrons que  $T : \Lambda(\Gamma) \rightarrow \Lambda(\Gamma)^*$  et  $G : \Lambda(\Gamma) \rightarrow L^2(S^{d-1})$  sont continus.

### Le cas du Laplacien Beltrami

Commençons par le cas particulier de

$$\mathcal{Z}_k = \Delta_\Gamma - 1$$

où  $\Delta_\Gamma = \operatorname{div}_\Gamma \nabla_\Gamma$  désigne l'opérateur de Laplace-Beltrami et supposons que  $\Gamma$  est de classe  $C^2$ . L'opérateur  $\mathcal{Z}_k = \Delta_\Gamma - 1$  est un isomorphisme de  $H^s(\Gamma)$  dans  $H^{s-2}(\Gamma)$  pour  $|s| \leq 2$ , on peut donc prendre  $V(\Gamma) = H^1(\Gamma)$  pour la formulation du problème direct. D'un autre côté,  $\mathcal{S}_k$  est continu de  $H^{s+1/2}(\Gamma)$  dans  $H^{s-1/2}(\Gamma)$  pour  $|s| \leq 1$  (voir [74, théorème 7.2]) et alors  $\mathcal{Z}_k \mathcal{S}_k \mathcal{Z}_k^*$  est un opérateur borné de  $H^1(\Gamma)$  dans  $H^{-2}(\Gamma)$  mais non borné en tant qu'opérateur à valeur dans  $H^{-1}(\Gamma)$ .

Comme  $\mathcal{Z}_k = \Delta_\Gamma - 1$  est un isomorphisme de  $H^{3/2}(\Gamma)$  dans  $H^{-1/2}(\Gamma)$ , l'espace  $\Lambda(\Gamma)$  défini ci-dessus est  $H^{3/2}(\Gamma)$ . Or, d'après le théorème 7.1 de [74], les opérateurs

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_k &: H^{-1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma), \\ \mathcal{T}_k &: H^{-1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma), \\ \mathcal{D}_k &: H^{1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma), \\ \mathcal{N}_k &: H^{1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma), \end{aligned} \quad (7.11)$$

sont bornés. Ainsi  $T : \Lambda(\Gamma) \rightarrow \Lambda(\Gamma)^*$  défini en (7.8) est un opérateur borné. L'opérateur  $G : \Lambda(\Gamma)^* \rightarrow L^2(S^{d-1})$  est lui aussi borné, en effet  $\Delta_\Gamma - 1$  est un isomorphisme de  $H^{1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{-3/2}(\Gamma)$ , donc  $\Delta_\Gamma - 1 + S_\Gamma$  est un isomorphisme de  $H^{1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{-3/2}(\Gamma)$  où on rappelle que  $S_\Gamma : H^{1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma)$  est l'opérateur de Dirichlet-à-Neuman extérieur. Ainsi (7.1) admet une unique solution lorsque  $f \in \Lambda(\Gamma)^* = H^{-3/2}(\Gamma)$ . La factorisation (7.9) a la forme requise par le théorème 7.0.1 avec les espaces  $X = H^{-3/2}(\Gamma)$  et  $Y = L^2(S^{d-1})$ .

### Le cas général

Nous avons le résultat d'injection suivant.

**Lemme 7.2.1** *L'espace  $\Lambda(\Gamma)$  s'injecte de manière dense dans  $H^{1/2}(\Gamma)$  et on la chaîne d'inclusions suivante*

$$\Lambda(\Gamma) \subset V^{1/2}(\Gamma) \subset H^{1/2}(\Gamma) \subset L^2(\Gamma) \subset H^{-1/2}(\Gamma) \subset V^{-1/2}(\Gamma) \subset \Lambda(\Gamma)^*.$$

*De plus, si l'injection de  $V(\Gamma)$  dans  $H^{1/2}(\Gamma)$  est compacte alors  $\Lambda(\Gamma)$  s'injecte de manière compacte dans  $V(\Gamma)$ .*

**Preuve.** Montrons que l'injection de  $\Lambda(\Gamma)$  dans  $V^{1/2}(\Gamma)$  est dense. Soit  $x \in V^{1/2}(\Gamma)$  et  $\epsilon > 0$ . L'injection de  $L^2(\Gamma)$  dans  $V^{-1/2}(\Gamma)$  est dense donc il existe  $y_\epsilon \in L^2(\Gamma)$  tel que :

$$\|(\mathcal{Z}_k + S_\Gamma)^* x - y_\epsilon\|_{V^{-1/2}(\Gamma)} \leq \frac{\epsilon}{\|((\mathcal{Z}_k + S_\Gamma)^{-1})^*\|_{\mathcal{L}(V^{-1/2}(\Gamma), V^{1/2}(\Gamma))}}$$

où pour un espace de Hilbert  $E$ ,  $\mathcal{L}(E, E^*)$  désigne l'ensemble des opérateurs linéaires et continus de  $E$  dans  $E^*$ . Comme  $\mathcal{Z}_k + S_\Gamma$  est un isomorphisme de  $V^{1/2}(\Gamma)$  dans  $V^{-1/2}(\Gamma)$  on a pour  $z_\epsilon := ((\mathcal{Z}_k + S_\Gamma)^{-1})^* y_\epsilon$ ,

$$\|x - z_\epsilon\|_{V^{1/2}(\Gamma)} \leq \|((\mathcal{Z}_k + S_\Gamma)^{-1})^*\|_{\mathcal{L}(V^{-1/2}(\Gamma), V^{1/2}(\Gamma))} \|(\mathcal{Z}_k + S_\Gamma)^* x - y_\epsilon\|_{V^{-1/2}(\Gamma)},$$

et on obtient ainsi

$$\|x - z_\epsilon\|_{V^{1/2}(\Gamma)} \leq \epsilon. \quad (7.12)$$

Or,  $z_\epsilon \in V^{1/2}(\Gamma)$  et

$$\mathcal{Z}_k^* z_\epsilon = (\mathcal{Z}_k^* + S_\Gamma^*) z_\epsilon - S_\Gamma^* z_\epsilon = y_\epsilon - S_\Gamma^* z_\epsilon \in H^{-1/2}(\Gamma).$$

Donc pour tout  $x \in V^{1/2}(\Gamma)$  et pour tout  $\epsilon > 0$  il existe  $z_\epsilon \in \Lambda(\Gamma)$  tel que (7.12) soit satisfaite et ceci montre la densité de l'inclusion de  $\Lambda(\Gamma)$  dans  $V^{1/2}(\Gamma)$ .

Supposons que  $V(\Gamma)$  s'injecte de manière compacte dans  $H^{1/2}(\Gamma)$  et montrons que  $\Lambda(\Gamma)$  s'injecte alors de manière compacte dans  $H^{1/2}(\Gamma)$ . Soit  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite bornée de  $\Lambda(\Gamma)$ , on a

$$\begin{aligned} \|(\mathcal{Z}_k + S_\Gamma)^* x_n\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}^2 &\leq \left( \|\mathcal{Z}_k^* x_n\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} + \|S_\Gamma^* x_n\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \right)^2, \\ &\leq 2 \max \left( 1, \|S_\Gamma\|_{\mathcal{L}(H^{1/2}(\Gamma), H^{-1/2}(\Gamma))} \right) \left( \|\mathcal{Z}_k^* x_n\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}^2 + \|x_n\|_{H^{1/2}(\Gamma)}^2 \right), \end{aligned}$$

alors  $(\mathcal{Z}_k + S_\Gamma)^* x_n$  est bornée dans  $H^{-1/2}(\Gamma)$ . Comme  $H^{-1/2}(\Gamma)$  s'injecte de manière compacte dans  $V(\Gamma)^*$  on en déduit qu'il existe une sous-suite convergente de  $((\mathcal{Z}_k + S_\Gamma)^* x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dans  $V(\Gamma)^*$ . Or  $((\mathcal{Z}_k + S_\Gamma)^*)^{-1} : V(\Gamma)^* \rightarrow V(\Gamma)$  est borné donc on peut extraire de  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une sous-suite qui converge dans  $V(\Gamma)$ . ■

On obtient aussi le lemme suivant.

**Lemme 7.2.2** *L'opérateur  $\mathcal{Z}_k + S_\Gamma$  est un isomorphisme de  $H^{1/2}(\Gamma)$  dans  $\Lambda(\Gamma)^*$ .*

**Preuve.** Montrons dans un premier temps que  $(\mathcal{Z}_k + S_\Gamma)^*$  est un isomorphisme de  $\Lambda(\Gamma)$  dans  $H^{-1/2}(\Gamma)$ . D'après la définition de  $\Lambda(\Gamma)$  on a :

$$\begin{aligned} \Lambda(\Gamma) &= \left\{ u \in V^{1/2}(\Gamma), \mathcal{Z}_k^* u \in H^{-1/2}(\Gamma) \right\}, \\ &= \left\{ u \in V^{1/2}(\Gamma), (\mathcal{Z}_k + S_\Gamma)^* u \in H^{-1/2}(\Gamma) \right\}, \\ &= ((\mathcal{Z}_k + S_\Gamma)^*)^{-1} \left( H^{-1/2}(\Gamma) \right). \end{aligned} \quad (7.13)$$

Comme  $(\mathcal{Z}_k + S_\Gamma)^*$  est un isomorphisme de  $V^{1/2}(\Gamma)$  dans  $V^{-1/2}(\Gamma)$  et  $H^{-1/2}(\Gamma) \subset V^{-1/2}(\Gamma)$ , la relation (7.13) implique que  $(\mathcal{Z}_k + S_\Gamma)^* : \Lambda(\Gamma) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma)$  est bijectif. D'après la définition de la norme de  $\Lambda(\Gamma)$  on obtient aussi la continuité de  $(\mathcal{Z}_k + S_\Gamma)^* : \Lambda(\Gamma) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma)$ . Ainsi,  $(\mathcal{Z}_k + S_\Gamma)^* : \Lambda(\Gamma) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma)$  est un isomorphisme et par conséquent,  $(\mathcal{Z}_k + S_\Gamma) : H^{1/2}(\Gamma) \rightarrow \Lambda(\Gamma)^*$  est lui aussi un isomorphisme. ■

Ceci permet de montrer le résultat de continuité suivant pour les opérateurs  $T$  et  $G$ .

**Proposition 7.2.3** *Les opérateurs  $G$  et  $T$  satisfont les propriétés suivantes :*

- l'opérateur  $G$  est borné de  $\Lambda(\Gamma)^*$  dans  $L^2(S^{d-1})$ ,
- l'opérateur  $T$  est borné de  $\Lambda(\Gamma)$  dans  $\Lambda(\Gamma)^*$ .

**Preuve.** Introduisons l'opérateur borné  $A^\infty : H^{1/2}(\Gamma) \rightarrow L^2(S^{d-1})$  défini par  $A^\infty f = u_f^\infty$  où  $u_f^\infty$  est le champ lointain associé au champ diffracté  $u_f \in \{v \in \mathcal{D}'(\Omega_{\text{ext}}), \text{ tels que } \varphi v \in H^1(\Omega_{\text{ext}}) \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)\}$  solution du problème de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u_f + k^2 u_f = 0 \text{ dans } \Omega_{\text{ext}}, \\ u_f = f \text{ sur } \Gamma, \\ \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|x|=R} |\partial_r u_f - ik u_f|^2 = 0. \end{cases} \quad (7.14)$$

On a alors la factorisation

$$G = A^\infty (\mathcal{Z}_k + S_\Gamma)^{-1} \quad (7.15)$$

et le lemme 7.2.2 permet de montrer le premier point de la proposition.

Rappelons la définition de  $T$  :

$$T = \mathcal{Z}_k S_k \mathcal{Z}_k^* + \mathcal{N}_k + \mathcal{Z}_k \mathcal{D}_k + \mathcal{T}_k \mathcal{Z}_k^*.$$

D'après les lemmes 7.2.1 et 7.2.2,  $\mathcal{Z}_k : H^{1/2}(\Gamma) \rightarrow \Lambda(\Gamma)^*$  et  $\mathcal{Z}_k^* : \Lambda(\Gamma) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma)$  sont deux opérateurs bornés, et d'après (7.11) on en déduit que  $T : \Lambda(\Gamma) \rightarrow \Lambda(\Gamma)^*$  est lui aussi borné. ■

Ainsi, la factorisation (7.9) est de la forme souhaitée pour appliquer le théorème 7.0.1 en prenant  $X = \Lambda(\Gamma)^*$  et  $Y = L^2(S^{d-1})$ .

### 7.2.3 Caractérisation de l'obstacle

Tout d'abord, nous montrons dans le lemme qui suit que  $\Omega$  peut être caractérisé par l'image de  $G$ . Ensuite, nous ferons le lien entre l'image de  $G$  et l'image de  $F_{\#}^{1/2}$  à l'aide du théorème 7.0.1.

**Lemme 7.2.4** *Soit  $\phi_z \in L^2(S^{d-1})$  la fonction définie pour  $(z, \hat{x}) \in \mathbb{R}^3 \times S^{d-1}$  par  $\phi_z(\hat{x}) = e^{-ik\hat{x} \cdot z}$ , on a*

$$z \in \Omega \iff \phi_z \in \mathcal{R}(G).$$

**Preuve.** Nous rappelons dans un premier temps le résultat du théorème 1.12 de [46] :

$$z \in \Omega \iff \phi_z \in \mathcal{R}(A^\infty). \quad (7.16)$$

En effet, si  $z \in \Omega$ , alors  $\phi_z = A^\infty f$  pour  $f = \Phi(\cdot, z)|_\Gamma$ . On démontre la réciproque par l'absurde, supposons que  $z \notin \Omega$  et qu'il existe  $f \in H^{1/2}(\Gamma)$  tel que  $A^\infty f = \phi_z$ . Alors, d'après le lemme de Rellich et le principe de prolongement unique la solution  $u_f$  de (7.14) est telle que

$$u_f(x) = \Phi(x, z) \quad \forall x \in \mathbb{R}^d \setminus (\overline{\Omega} \cup \{z\}).$$

Ceci n'est pas possible à cause du caractère singulier de  $\Phi(\cdot, z)$  en  $z$ .

A partir de (7.16), le lemme 7.2.2 et la factorisation (7.15) donnent le résultat du lemme. ■

Nous prouvons dans les lemmes qui suivent que la factorisation (7.9) vérifie les hypothèses du théorème 7.0.1. Commençons par l'hypothèse (a) avec le lemme suivant.

**Lemme 7.2.5** *L'opérateur  $G : \Lambda(\Gamma)^* \rightarrow L^2(S^{d-1})$  est compact, injectif et d'image dense.*

**Preuve.** D'après le lemme 7.2.2  $(\mathcal{Z}_k + \mathcal{S}_\Gamma)^{-1}$  est un isomorphisme de  $\Lambda(\Gamma)^*$  dans  $H^{1/2}(\Gamma)$ . De plus, d'après le lemme 1.13 de [46] on sait que  $A^\infty : H^{1/2}(\Gamma) \rightarrow L^2(S^{d-1})$  est compact injectif et d'image dense. Alors d'après la factorisation (7.15) on en déduit que  $G : \Lambda(\Gamma)^* \rightarrow L^2(S^{d-1})$  est lui aussi compact et d'image dense. ■

On obtient l'hypothèse (b) à l'aide du résultat ci-dessous.

**Lemme 7.2.6** *Supposons que que l'un des deux points suivants soit satisfait*

1. *l'injection de  $V(\Gamma)$  dans  $H^{1/2}(\Gamma)$  est compacte,*
2. *l'injection de  $H^{1/2}(\Gamma)$  dans  $V(\Gamma)$  est compacte,*

*alors l'opérateur  $T$  s'écrit*

$$T = C_T + K_T$$

où  $C_T : \Lambda(\Gamma) \rightarrow \Lambda(\Gamma)^*$  est autoadjoint et coercif i.e.

$$\exists c > 0, \langle \exp(it)C_T x, x \rangle \geq c \|x\|_{\Lambda(\Gamma)}^2 \quad \forall x \in \Lambda(\Gamma)$$

avec  $t = 0$  si l'hypothèse 1. est satisfaite et  $t = \pi$  si l'hypothèse 2. est satisfaite. De plus,  $K_T$  est un opérateur compact de  $\Lambda(\Gamma)$  dans  $\Lambda(\Gamma)^*$ .

**Preuve.** Tout d'abord, on montre simplement (voir par exemple la preuve du lemme 1.14 de [46]) que  $\mathcal{S}_i : H^{-1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma)$  et  $-\mathcal{N}_i : H^{1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma)$  sont autoadjoints et coercifs, i.e., il existe deux constantes  $c_{\mathcal{S}_i} > 0$  et  $c_{\mathcal{N}_i} > 0$  telles que

$$\begin{cases} \langle \mathcal{S}_i x, x \rangle \geq c_{\mathcal{S}_i} \|x\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}^2 \quad \forall x \in H^{-1/2}(\Gamma), \\ \langle -\mathcal{N}_i x, x \rangle \geq c_{\mathcal{N}_i} \|x\|_{H^{1/2}(\Gamma)}^2 \quad \forall x \in H^{1/2}(\Gamma). \end{cases}$$

Supposons que l'hypothèse 1. est satisfaite. L'opérateur  $T$  se met sous la forme

$$T = \mathcal{Z}_k \mathcal{S}_i \mathcal{Z}_k^* - \mathcal{N}_i + (\mathcal{Z}_k (\mathcal{S}_k - \mathcal{S}_i) \mathcal{Z}_k^* + \mathcal{N}_k + \mathcal{N}_i + \mathcal{Z}_k \mathcal{D}_k + \mathcal{T}_k \mathcal{Z}_k^*).$$

Ainsi  $\mathcal{Z}_k \mathcal{S}_i \mathcal{Z}_k^* - \mathcal{N}_i : \Lambda(\Gamma) \rightarrow \Lambda(\Gamma)^*$  est autoadjoint et pour tout  $x \in \Lambda(\Gamma)$

$$\langle (\mathcal{Z}_k \mathcal{S}_i \mathcal{Z}_k^* - \mathcal{N}_i) x, x \rangle \geq \min(c_{\mathcal{S}_i}, c_{\mathcal{N}_i}) \|x\|_{\Lambda(\Gamma)}^2 \geq \frac{\min(c_{\mathcal{S}_i}, c_{\mathcal{N}_i})}{C} \|x\|_{\Lambda(\Gamma)}^2$$

d'après (7.10). Montrons que

$$K_T := \mathcal{Z}_k (\mathcal{S}_k - \mathcal{S}_i) \mathcal{Z}_k^* + \mathcal{N}_k + \mathcal{N}_i + \mathcal{Z}_k \mathcal{D}_k + \mathcal{T}_k \mathcal{Z}_k^*,$$

est compact en tant qu'opérateur de  $\Lambda(\Gamma)$  dans  $\Lambda(\Gamma)^*$ . Puisque  $(\mathcal{S}_k - \mathcal{S}_i) : H^{-1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma)$  est compact (c'est un opérateur intégral à noyau régulier) on obtient que  $\mathcal{Z}_k (\mathcal{S}_k - \mathcal{S}_i) \mathcal{Z}_k^* : \Lambda(\Gamma) \rightarrow \Lambda(\Gamma)^*$  est lui aussi compact. Les opérateurs

$$\begin{cases} \mathcal{N}_k + \mathcal{N}_i : H^{1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma), \\ \mathcal{Z}_k \mathcal{D}_k : H^{1/2}(\Gamma) \rightarrow \Lambda(\Gamma)^*, \\ \mathcal{T}_k \mathcal{Z}_k^* : \Lambda(\Gamma) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma), \end{cases}$$

sont bornés et comme l'injection de  $\Lambda(\Gamma)$  dans  $H^{1/2}(\Gamma)$  est compacte (lemme 7.2.1) on en déduit que  $\mathcal{K} : \Lambda(\Gamma) \rightarrow \Lambda(\Gamma)^*$  est compact.

Supposons que l'hypothèse 2. soit satisfaite, remarquons que l'on peut écrire  $T$  comme

$$T = \mathcal{N}_i + \mathcal{Z}_k \mathcal{S}_k \mathcal{Z}_k^* + \mathcal{N}_k - \mathcal{N}_i + \mathcal{Z}_k \mathcal{D}_k + \mathcal{T}_k \mathcal{Z}_k^*.$$

L'opérateur  $-\mathcal{N}_i : H^{1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma)$  est autoadjoint et coercif, et  $\mathcal{Z}_k \mathcal{S}_k \mathcal{Z}_k^* + \mathcal{N}_k - \mathcal{N}_i + \mathcal{Z}_k \mathcal{D}_k + \mathcal{T}_k \mathcal{Z}_k^*$  est compact de  $H^{1/2}(\Gamma)$  dans  $H^{-1/2}(\Gamma)$ . En effet  $H^{1/2}(\Gamma)$  est inclus de manière compacte dans  $V(\Gamma)$  donc  $\mathcal{Z}_k \mathcal{S}_k \mathcal{Z}_k^* + \mathcal{Z}_k \mathcal{D}_k + \mathcal{T}_k \mathcal{Z}_k^* : H^{1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma)$  est un opérateur compact et rappelons que  $\mathcal{N}_k - \mathcal{N}_i : H^{1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma)$  est aussi un opérateur compact en tant qu'opérateur intégral à noyau régulier. ■

**Remarque 7.2.7** Si  $H^{1/2}(\Gamma)$  est inclus dans  $V(\Gamma)$ , l'espace  $\Lambda(\Gamma)$  n'est autre que  $H^{1/2}(\Gamma)$  et les normes de  $H^{1/2}(\Gamma)$  et de  $\Lambda(\Gamma)$  sont équivalentes.

Le lemme précédent donne la compacité de  $\mathcal{I}m(-T^*)$ , pour satisfaire l'hypothèse (c) nous avons aussi besoin de sa positivité.

**Lemme 7.2.8** L'opérateur  $\mathcal{I}m(-T^*)$  est positif sur  $R(G^*)$ .

**Preuve.** Tout d'abord, on montre qu'il existe un opérateur positif  $R_{\mathcal{Z}_k} : L^2(S^{d-1}) \rightarrow L^2(S^{d-1})$  tel que

$$\mathcal{I}m(F) = k|\gamma(d)|^2 F^* F + R_{\mathcal{Z}_k} \quad (7.17)$$

où on rappelle que  $\gamma(2) = e^{i\pi/4}/\sqrt{8\pi k}$  et  $\gamma(3) = 1/(4\pi)$ . Pour tout  $g \in L^2(S^{d-1})$  on note  $V_g := v_g^s - v_g$  où  $v_g^s$  est solution de (7.1) pour un second membre  $f$  donné par (7.2) pour  $u^i = v_g$ . Pour tous  $g, h \in L^2(S^{d-1})$  comme  $V_g$  et  $V_h$  satisfont l'équation de Helmholtz à l'extérieur de  $\Omega$  nous avons la relation

$$\int_{\Gamma} V_g \frac{\partial \bar{V}_h}{\partial \nu} - \frac{\partial V_g}{\partial \nu} \bar{V}_h ds = \int_{\partial B_R} V_g \frac{\partial \bar{V}_h}{\partial r} - \frac{\partial V_g}{\partial r} \bar{V}_h ds \quad (7.18)$$

où  $B_R$  est une boule de rayon  $R$  contenant  $\Omega$ . Mais, en utilisant le comportement asymptotique des champs diffractés  $V_h$  et  $V_g$  loin de l'obstacle, on montre comme dans la preuve du théorème 1.8 de [46] que

$$\int_{\partial B_R} V_g \frac{\partial \bar{V}_h}{\partial r} - \frac{\partial V_g}{\partial r} \bar{V}_h ds = -2ik|\gamma(d)|^2 (Fg, Fh)_{L^2(S^{d-1})} - (g, Fh)_{L^2(S^{d-1})} + (Fg, h)_{L^2(S^{d-1})}.$$

Ainsi, en utilisant la condition au bord satisfaite par  $V_g$  et  $V_h$  on obtient (7.17) à partir de (7.18) pour  $R_{\mathcal{Z}_k}$  défini par

$$(R_{\mathcal{Z}_k} g, h)_{L^2(S^{d-1})} := \int_{\Gamma} \mathcal{I}m(\mathcal{Z}_k) V_g \bar{V}_h ds \quad \forall g, h \in L^2(S^{d-1}).$$

Mais pour tout  $x = G^* y$  on a

$$\mathcal{I}m\langle -T^* x, x \rangle = \mathcal{I}m\langle -T^* G^* y, G^* y \rangle = \mathcal{I}m\langle Fy, y \rangle$$

et en utilisant (7.17) ainsi que la positivité de  $R_{\mathcal{Z}_k}$  on obtient :

$$\mathcal{I}m\langle -T^* x, x \rangle \geq k|\gamma(d)|^2 \|Fy\|_{L^2(S^{d-1})}^2 \geq k|\gamma(d)|^2 \|GT^* x\|_{L^2(S^{d-1})}^2 \quad (7.19)$$

ce qui conclut la preuve. ■

Pour terminer, nous montrons que  $\mathcal{I}m(-T^*)$  est coercif et donc que  $-T^*$  satisfait l'hypothèse (d). Ceci n'est pas vrai pour tout nombre d'onde  $k$ , on est contraint d'éliminer certains réels particuliers  $k$ .

**Définition 7.2.9** *On dit que  $k^2$  est une valeur propre de  $-\Delta$  associée à l'opérateur d'impédance  $\mathcal{Z}_k$  si il existe une solution non nulle  $u \in \{v \in H^1(\Omega), v|_\Gamma \in V(\Gamma)\}$  de*

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 u = 0 \text{ dans } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} + \mathcal{Z}_k u = 0 \text{ sur } \Gamma. \end{cases}$$

**Lemme 7.2.10** *Supposons que l'une des deux hypothèse du lemme 7.2.6 soit satisfaite, si de plus  $k^2$  n'est pas une valeur propre de  $-\Delta$  associée à l'opérateur d'impédance  $\mathcal{Z}_k$  alors*

$$\mathcal{I}m\langle -T^* x, x \rangle > 0$$

pour tout  $x \neq 0$  dans  $\overline{\mathcal{R}(G^*)}$ .

**Preuve.** Montrons que  $T^*$  est en fait un isomorphisme. Si ceci est vrai, alors d'après (7.19) et comme  $G$  est injectif, on a

$$\mathcal{I}m\langle -T^* x, x \rangle > 0$$

pour tout  $x \neq 0$  dans  $\overline{\mathcal{R}(G^*)}$ . D'après le lemme 7.2.6 on sait que  $T$  est un opérateur Fredholm d'indice zéro, nous avons donc simplement besoin qu'il soit injectif pour montrer que c'est un isomorphisme. D'après (7.7),  $T$  injectif est équivalent à  $(\mathcal{Z}_k H_0 + H_1)^*$  injectif. Soit  $q \in \Lambda(\Gamma)$  tel que  $(\mathcal{Z}_k H_0 + H_1)^* q = 0$ , la relation (7.5) donne

$$\int_{\Gamma} e^{-ik\hat{x}y} \mathcal{Z}_k^* q(y) ds(y) + \int_{\Gamma} \frac{\partial e^{-ik\hat{x}y}}{\partial \nu(y)} q(y) ds(y) = 0.$$

Le membre de gauche de cette expression est le champ lointain associé à

$$v_+ := \text{SL}_k(\mathcal{Z}_k^* q) + \text{DL}_k(q) \text{ dans } \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}.$$

Définissons aussi

$$v_- := \text{SL}_k(\mathcal{Z}_k^* q) + \text{DL}_k(q) \text{ dans } \Omega,$$

le lemme de Rellich et le principe de prolongement unique impliquent que  $v_+ = 0$  à l'extérieur de  $\Omega$  et d'après les relations de saut pour les potentiels de simple et double couche (voir [74, théorème 6.11]) on a sur  $\Gamma$  :

$$\begin{cases} v_- = v_- - v_+ = -q, \\ \frac{\partial v_-}{\partial \nu} = \frac{\partial v_-}{\partial \nu} - \frac{\partial v_+}{\partial \nu} = \mathcal{Z}_k^* q. \end{cases}$$

L'hypothèse 7.1.1 sur  $\mathcal{Z}_k$  implique que

$$\begin{cases} v_- = -q, \\ \frac{\partial v_-}{\partial \nu} = \overline{\mathcal{Z}_k q} \end{cases}$$

et après conjugaison ceci devient

$$\frac{\partial \overline{v_-}}{\partial \nu} + \mathcal{Z}_k \overline{v_-} = 0.$$

La fonction,  $\overline{v_-}$  est solution de l'équation de Helmholtz à l'intérieur de  $\Omega$  avec un condition d'impédance généralisée sur  $\Gamma$  homogène, donc comme  $k^2$  n'est pas une valeur propre de  $-\Delta$  associée à l'opérateur d'impédance  $\mathcal{Z}_k$  on a nécessairement  $v_- = 0$  dans  $\Omega$  et donc  $q = 0$ . On en déduit que  $T^*$  est un isomorphisme et ceci conclut la preuve. ■

On arrive enfin au théorème principal de ce chapitre.

**Théorème 7.2.11** *Supposons que l'un des deux points suivants soit satisfait :*

1. *l'injection de  $V(\Gamma)$  dans  $H^{1/2}(\Gamma)$  est compacte,*
2. *l'injection de  $H^{1/2}(\Gamma)$  dans  $V(\Gamma)$  est compacte,*

*alors si  $k^2$  n'est pas une valeur propre de  $-\Delta$  associé à l'opérateur d'impédance  $\mathcal{Z}_k$  on a :*

$$\mathcal{R}(G) = \mathcal{R}\left(F_{\#}^{1/2}\right) \quad (7.20)$$

et

$$z \in \Omega \iff \phi_z \in \mathcal{R}\left(F_{\#}^{1/2}\right). \quad (7.21)$$

**Preuve.** Le lemme 7.2.5 montre que l'hypothèse (a) du théorème 7.0.1 est satisfaite. Les lemmes 7.2.6 et 7.2.8 donnent les hypothèses (b) et (c) et on obtient (d) à l'aide de 7.2.10. Ainsi le théorème 7.0.1 s'applique et (7.21) s'obtient à l'aide du lemme 7.2.4. ■

**Remarque 7.2.12** *La relation (7.20) et la décomposition  $G = A^\infty(Z_k + S_\Gamma)^{-1}$  impliquent que l'on peut remplacer la famille de fonctions tests  $(\phi_z)_{z \in \mathbb{R}^3}$  par n'importe quelle famille de fonctions  $(\psi_z)_{z \in \mathbb{R}^3}$  satisfaisant :*

$$z \in \Omega \iff \psi_z \in \mathcal{R}(A^\infty). \quad (7.22)$$

*On appelle  $\phi_{z,p}$  le champ lointain d'un dipôle situé au point  $z$  et de direction  $p$  défini par  $x \mapsto p \cdot \nabla_x \Phi(x, z)$ . Cette famille de fonctions satisfait (7.22) (voir preuve du Lemme 7.2.4 pour plus de détails sur ce résultat) et donc elle satisfait aussi (7.21) et on peut l'utiliser pour caractériser  $\Omega$ . Nous reviendrons sur ce point dans la section numérique.*

**Remarque 7.2.13** *Lorsqu'aucune des deux hypothèses du théorème 7.2.11 n'est satisfaite, on n'est plus en mesure de décomposer la partie principale de  $T$  sous la forme d'un opérateur positif auquel on ajoute un opérateur compact. Par conséquent, on n'est plus en mesure d'appliquer le théorème 7.0.1.*

Nous terminons cette section par un résultat sur les valeurs propre de  $-\Delta$  associées à l'opérateur d'impédance  $\mathcal{Z}_k$ .

**Théorème 7.2.14** *Supposons que  $\mathcal{Z}_k : V^{1/2}(\Gamma) \rightarrow V^{-1/2}(\Gamma)^*$  dépende de manière analytique de  $k$ . Si l'une des deux hypothèses du théorème 7.2.11 est satisfaite, alors l'ensemble des valeurs propres de  $-\Delta$  associées à l'opérateur d'impédance  $\mathcal{Z}_k$  est discret et le seul point d'accumulation possible est  $+\infty$ .*

**Preuve.** L'outil principal de la preuve est l'alternative de Fredholm analytique ([38, théorème 8.26]). Supposons que  $k^2$  n'est pas une valeur propre de Dirichlet pour l'opérateur  $-\Delta$  dans le domaine  $\Omega$ , on peut définir l'opérateur de Dirichlet-à-Neumann intérieur  $n_i(k) : H^{1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma)$  pour  $f \in H^{1/2}(\Gamma)$  par  $n_i(k)f = \partial u / \partial \nu$  où  $u$  est la solution de l'équation de Helmholtz dans  $\Omega$  avec la condition au bord  $u = f$  sur  $\Gamma$ . Le problème du caractère discret des valeurs propres peut se reformuler de la manière suivante : si  $\mathcal{Z}_k + n_i(k)$  est injectif alors  $k^2$  n'est pas une valeur propre de  $-\Delta$  associée à l'opérateur  $\mathcal{Z}_k$ . Il suffit donc de montrer que  $\mathcal{Z}_k + n_i(k)$  est injectif sauf pour un ensemble discret de fréquences  $k$ . C'est pour montrer ceci que nous allons utiliser l'alternative de Fredholm analytique.

Soit  $k_0$  un nombre complexe tel que

$$k_0^2 = -i,$$

supposons que  $V(\Gamma)$  s'injecte de manière compact dans  $H^{1/2}(\Gamma)$ . On décompose  $\mathcal{Z}_k + n_i(k)$  sous la forme

$$\mathcal{Z}_k + n_i(k) = T_k + n_i(k) - n_i(k_0), \quad (7.23)$$

où  $T_k : V(\Gamma) \rightarrow V(\Gamma)^*$  est défini pour  $g \in V(\Gamma)$  par

$$T_k g := \mathcal{Z}_k + n_i(k_0).$$

Montrons que  $T_k$  est un isomorphisme. Comme  $V(\Gamma)$  est inclus de manière compacte dans  $H^{1/2}(\Gamma)$  on a :

$$T_k = \mathcal{Z}_k + S_\Gamma + n_i(k_0) - S_\Gamma,$$

où  $\mathcal{Z}_k + S_\Gamma : V(\Gamma) \rightarrow V(\Gamma)^*$  est un isomorphisme et  $n_i(k_0) - S_\Gamma : V(\Gamma) \rightarrow V(\Gamma)^*$  est compact. Il reste encore à montrer que  $T_k : V(\Gamma) \rightarrow V(\Gamma)^*$  est injectif. Soit  $f \in V(\Gamma)$  tel que  $T_k f = 0$  et  $u_f \in H^1(\Omega)$  tel que

$$\begin{cases} \Delta u_f + k_0^2 u_f = 0 \text{ dans } \Omega, \\ u_f = f \text{ sur } \Gamma. \end{cases}$$

Alors  $\partial u_f / \partial \nu = n_i(k_0) f$  et une formule de Green dans  $\Omega$  donne

$$\int_{\Omega} |\nabla u_f|^2 dx - k_0^2 \int_{\Omega} |u_f|^2 dx + \langle \mathcal{Z}_k u_f, u_f \rangle = 0.$$

Prenons la partie imaginaire de cette équation, on aboutit à

$$\mathcal{I}m(k_0^2) \int_{\Omega} |u_f|^2 dx - \mathcal{I}m \langle \mathcal{Z}_k u_f, u_f \rangle = 0,$$

mais on a supposé que  $\mathcal{Z}_k$  satisfait l'hypothèse 7.1.1 donc  $\mathcal{I}m(\mathcal{Z}_k) \geq 0$  et comme  $k_0^2 = -i$  on obtient

$$\int_{\Omega} |u_f|^2 dx = 0,$$

et donc  $T_k$  est un opérateur injectif, c'est alors un isomorphisme. D'après (7.23) on a :

$$\mathcal{Z}_k + n_i(k) = T_k(I + T_k^{-1}(n_i(k) - n_i(k_0)))$$

et donc  $\mathcal{Z}_k + n_i(k) : V(\Gamma) \rightarrow V(\Gamma)^*$  est injectif si et seulement si

$$I + T_k^{-1}(n_i(k) - n_i(k_0)) : V(\Gamma) \rightarrow V(\Gamma),$$

est injectif. L'opérateur  $n_i(k)$  dépend analytiquement de  $k$  pour  $k$  dans le complémentaire des valeurs propres de Dirichlet de l'opérateur  $-\Delta$  dans  $\Omega$  et d'après les hypothèses du théorème,  $\mathcal{Z}_k$  dépend analytiquement de  $k$  donc  $T_k^{-1}(n_i(k) - n_i(k_0))$  dépend lui aussi analytiquement de  $k$  pour  $k$  dans le complémentaire des valeurs propres de Dirichlet de l'opérateur  $-\Delta$  dans  $\Omega$ . Comme  $T_k^{-1}(n_i(k) - n_i(k_0))$  est un opérateur borné de  $H^{1/2}(\Gamma) \rightarrow V(\Gamma)$ , c'est un opérateur compact de  $V(\Gamma) \rightarrow V(\Gamma)$ . On peut donc appliquer l'alternative de Fredholm analytique à

$$I + T_k^{-1}(n_i(k) - n_i(k_0))$$

et en déduire que les valeurs de  $k$  pour lesquelles  $I + T_k^{-1}(n_i(k) - n_i(k_0))$  n'est pas injectif forment un ensemble discret dont le seul point d'accumulation possible est  $+\infty$ . Ceci permet de conclure dans le cas où  $V(\Gamma)$  s'injecte de manière compacte dans  $H^{1/2}(\Gamma)$ .

Supposons maintenant que  $H^{1/2}(\Gamma)$  s'injecte de manière compacte dans  $V(\Gamma)$  et que  $k^2$  n'est ni une valeur propre de Dirichlet ni une valeur propre de Neumann pour l'opérateur  $-\Delta$  dans  $\Omega$ . L'opérateur  $n_i(k) : H^{1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma)$  est un isomorphisme et on écrit

$$\mathcal{Z}_k + n_i(k) = n_i(k)(I + n_i(k)^{-1} \mathcal{Z}_k).$$

On conclut de la même manière que ci-dessus car  $n_i(k)^{-1} \mathcal{Z}_k : V(\Gamma) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma)$  est continu et c'est donc un opérateur compact de  $H^{1/2}(\Gamma)$  dans lui-même qui dépend analytiquement de  $k$ . ■

### 7.2.4 Quelques applications du théorème de factorisation

L'intérêt du théorème 7.2.11 est double. En effet, on obtient un résultat d'unicité et une méthode simple à implémenter pour reconstruire l'obstacle  $\Omega$ . Pour ce qui est de l'unicité, si deux obstacles  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  associés aux opérateurs d'impédance  $\mathcal{Z}_{k,1}$  et  $\mathcal{Z}_{k,2}$  respectivement produisent le même champ lointain pour toutes les directions d'incidence et toutes les directions d'observation, c'est-à-dire que leurs opérateurs de champ lointain coïncident, alors d'après le théorème 7.2.11 on a

$$\Omega_1 = \Omega_2.$$

Compte tenu des hypothèses faites sur l'opérateur d'impédance et sur l'obstacle  $\Omega$  on obtient un meilleur résultat que celui obtenu au théorème 3.5.2. En effet, pour  $\lambda \in L^\infty(\Gamma)$  et  $\eta \in C_I(\Gamma)$  où on rappelle que  $C_I(\Gamma)$  désigne l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur  $\Gamma$  (voir § 3.2 pour une définition précise de cet espace) tels que

$$\mathcal{I}m(\lambda) \geq 0, \quad \mathcal{I}m(\eta) \leq 0$$

et

$$\mathcal{R}e(\eta) \geq c > 0$$

le théorème 7.2.11 s'applique et on a l'unicité de l'obstacle. L'unicité pour les coefficients d'impédance s'obtient de la même manière que dans la preuve du théorème 3.5.2.

Pour ce qui est de la méthode de reconstruction, nous consacrons la section suivante à la reconstruction du support d'un obstacle sur lequel on a une condition d'impédance généralisée du type

$$\mathcal{Z}_{k\cdot} = \operatorname{div}_\Gamma(\eta \nabla_\Gamma \cdot) + \lambda \cdot$$

en utilisant le critère fourni par le théorème 7.2.11.

## 7.3 Application à la reconstruction d'obstacles

Dans cette section nous supposons que

$$\mathcal{Z}_{k\cdot} := \operatorname{div}_\Gamma(\eta \nabla_\Gamma \cdot) + \lambda \cdot$$

pour deux fonctions  $\lambda$  et  $\eta$  de  $L^\infty(\Gamma)$  telles que

$$\mathcal{I}m(\lambda) \geq 0, \quad \mathcal{I}m(\eta) \leq 0$$

et

$$\mathcal{R}e(\eta) \geq c > 0.$$

Ainsi, les théorèmes 7.2.11 et 7.2.14 s'appliquent pour  $V(\Gamma) := H^1(\Gamma)$  qui s'injecte de manière compacte dans  $H^{1/2}(\Gamma)$  et l'équation

$$F_{\#}^{1/2} g_z = \phi_z, \tag{7.24}$$

admet une unique solution si et seulement si  $z$  est dans  $\Omega$  sauf pour un ensemble discret de fréquences  $k$ . Le but de cette section est d'utiliser ce critère pour identifier la forme d'un objet diffractant à partir de la donnée du champ lointain pour un nombre fini mais grand de directions d'observation et de directions d'incidence. Nous expliquons comment implémenter ce test dans un cadre discret en nous restreignant à la dimension 2.

### 7.3.1 Procédure de reconstruction et régularisation

Comme nous parlons de reconstruction numérique, les données ne correspondent pas à l'opérateur  $F$  mais simplement à une matrice de taille  $n \times n$  notée  $\mathbb{U}^n := (u_{ij}^n)_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$  où  $u_{ij}^n := u^\infty \left( \frac{2\pi(i-1)}{n}, \frac{2\pi(j-1)}{n} \right)$  et  $u^\infty$  est le champ lointain associé à la solution discrète de

$$\begin{cases} \Delta u^s + k^2 u^s = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^2 \setminus \Omega, \\ \frac{\partial u^s}{\partial \nu} + \operatorname{div}_\Gamma(\eta \nabla_\Gamma u^s) + \lambda u^s = - \left( \frac{\partial u^i}{\partial \nu} + \operatorname{div}_\Gamma(\eta \nabla_\Gamma u^i) + \lambda u^i \right) \text{ sur } \Gamma \\ \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|x|=R} |\partial_r u^s - iku^s|^2 = 0 \end{cases} \quad (7.25)$$

pour  $u^i(x) = \exp(ik\hat{\theta} \cdot x)$  où  $\hat{\theta} = (\cos(2\pi(j-1)/n), \sin(2\pi(j-1)/n))$ . Dans la suite nous identifions les vecteurs de  $S^1$  avec l'angle qu'ils forment avec l'axe des abscisses. Pour un niveau de bruit donné,  $\sigma \geq 0$  on perturbe les données en ajoutant un bruit au champ lointain obtenu en résolvant (7.25) :

$$u_{ij}^{n,\delta} \leftarrow u_{ij}^n + \sigma (X_1^{ij} + iX_2^{ij}) u_{ij}^n$$

où  $(X_k^{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n, k \in \{1,2\}}$  sont des nombres aléatoires uniformément répartis sur  $[-1, 1]$ . La matrice contenant les champs lointains bruités est notée  $\mathbb{U}^{n,\delta}$ . On note  $\phi_z^n \in \mathbb{C}^n$  le vecteur de  $\mathbb{C}^n$  défini pour  $1 \leq i \leq n$  par  $\phi_z^n(i) = \phi_z(\frac{2\pi i}{n})$  où  $\phi_z$  est la fonction test du théorème 7.2.11 (voir remarque 7.2.12). On définit aussi la matrice  $\mathbb{U}_\#^{n,\delta} := |\mathcal{R}e(\mathbb{U}^{n,\delta})| + |\mathcal{I}m(\mathbb{U}^{n,\delta})|$  qui est une matrice symétrique réelle dont le système de valeurs propres et de vecteurs propres est noté  $(e_i^n, \lambda_i^n)_{1 \leq i \leq n}$ . On suppose que toutes les valeurs propres de  $\mathbb{U}_\#^{n,\delta}$  sont strictement positives. Ainsi, une manière simple d'implémenter la version discrète du test (7.24) consiste à utiliser une version discrète du critère de Picard :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{j=1}^n \frac{1}{\lambda_j^n} |(\phi_z^n, e_j^n)|^2 \right)^{-1} > 0 \iff z \in \Omega.$$

Pour  $j$  grand, les valeurs propres  $\lambda_j^n$  peuvent être très petites ou nulles car l'opérateur  $F$  est un opérateur compact, nous préférons donc utiliser la fonction

$$w_n(z) := \left( \sum_{j=1}^n \frac{\lambda_j^n}{(\alpha_n + \lambda_j^n)^2} |(\phi_z^n, e_j^n)|^2 \right)^{-1} \quad (7.26)$$

comme fonction indicatrice de l'obstacle,  $\alpha_n$  est le coefficient de régularisation. Remarquons que  $w_n(z)$  n'est autre que l'inverse de la norme au carré de la solution de

$$(\alpha_n \operatorname{Id}_n + \mathbb{U}_\#^{n,\delta}) g_n(z) = (\mathbb{U}_\#^{n,\delta})^{1/2} \phi_z^n,$$

où  $\operatorname{Id}_n$  est l'identité de  $\mathbb{C}^n$ . En introduisant le paramètre  $\alpha_n$  nous avons appliqué une régularisation de Tikhonov à l'équation initiale, une manière de fixer le paramètre de régularisation consiste à appliquer le principe de Morozov (voir [61] par exemple) et donc nous prendrons  $\alpha_n \in ]0, \delta_n \lambda_1^n]$  tel que

$$\sum_{j=1}^n \frac{\alpha_n^2 - \delta_n^2 |\lambda_j^n|^2}{|\alpha_n + \lambda_j^n|^2} |(\phi_z^n, e_j^n)|^2 = 0.$$

où  $\delta^n$  est une borne sur le bruit de mesure et les erreurs de discrétisation. Nous montrons à l'aide de la lemme 7.3.3 qu'un tel  $\alpha_n$  existe nécessairement. Plus précisément, le paramètre  $\delta_n$  est un réel tel que

$$C_3(p) \epsilon_n (u^\infty)^p + \sqrt{2} \frac{\|u^\infty\|_{L^2([0,2\pi]^2)}^{1/2}}{\|\phi_z\|_{L^2([0,2\pi])}} \epsilon_n(\phi_z) \leq \delta_n, \quad (7.27)$$

pour  $0 < p < 1/2$  et  $C_3(p) > 0$  est définie dans le lemme 7.3.2. Notons que  $C_3(p)$  dépend de  $u^\infty$  et tend vers  $+\infty$  lorsque  $p$  tend vers  $1/2$ . La quantité

$$\epsilon_n(u^\infty)^2 := \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \int_{(i-1)\frac{2\pi}{n}, i\frac{2\pi}{n}}^{(j-1)\frac{2\pi}{n}, j\frac{2\pi}{n}} |u^\infty(s, t) - u_{ij}^{\delta, n}|^2 ds dt,$$

mesure l'erreur d'approximation due à la discrétisation du problème de diffraction et la quantité de bruit que l'on a ajouté au champ lointain. De même,

$$\epsilon_n(\phi_z)^2 := \sum_{1 \leq i \leq n} \int_{(i-1)\frac{2\pi}{n}, i\frac{2\pi}{n}} |\phi_z^n(i) - \phi_z(t)|^2 dt.$$

mesure l'erreur d'approximation sur la fonction test  $\phi_z$ . Le théorème suivant justifie l'utilisation de la fonction  $w_n$  pour déterminer la forme de l'obstacle  $\Omega$ .

**Théorème 7.3.1** *Lorsque  $\delta_n$  tend vers 0 et satisfait (7.27) on a la caractérisation suivante pour  $\Omega$  :*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} w_n(z) > 0 \iff z \in \Omega,$$

où  $w_n(z)$  est définie par (7.26).

Afin de démontrer ce théorème nous montrons tout d'abord un lemme de continuité Hölderienne pour l'application

$$F \mapsto F_{\#}^{1/2} = (|\mathcal{R}e(F)| + |\mathcal{I}m(F)|)^{1/2}.$$

Ensuite nous montrons un résultat de convergence pour la régularisation choisie. Ce dernier point a déjà été abordé dans [60] pour des opérateurs à image dense, nous traitons ici le cas d'opérateurs de rang fini. Le lecteur intéressé pourra trouver une discussion complète à propos de l'application de la méthode de factorisation pour le problème de tomographie d'impédance dans [69] dans un cadre discret. Pour tout espace de Hilbert  $E$ , on note  $\mathcal{L}(E)$  l'ensemble des applications linéaires et continues de  $E$  dans  $E$  muni de la norme d'opérateurs continus notée  $\|\cdot\|$ .

**Lemme 7.3.2** *Soit  $E$  un espace de Hilbert,  $A \in \mathcal{L}(E)$  un opérateur compact,  $\varepsilon_0 > 0$ , pour tout  $0 < p < 1/2$  il existe  $C_3(p) > 0$  telle que pour tout opérateur compact  $B \in \mathcal{L}(E)$  satisfaisant*

$$\|A - B\| \leq \varepsilon_0$$

on a

$$\left\| A_{\#}^{1/2} - B_{\#}^{1/2} \right\| \leq C_3(p) \|A - B\|^p. \quad (7.28)$$

**Preuve.** Soit  $A \in \mathcal{L}(E)$ ,  $\varepsilon_0 > 0$ , d'après le lemme 1 de [89], pour tout  $q > 0$  il existe  $C > 0$  tels que pour tout  $B \in \mathcal{L}(E)$  tel que

$$\|A - B\| \leq \varepsilon_0$$

on a l'estimation suivante :

$$\left\| |A|^q - |B|^q \right\| \leq C(1 + |\ln(\|A - B\|)|) \|A - B\|^{\min(1, q)}. \quad (7.29)$$

Notons que la constante  $C$  dépend uniquement de  $A$ ,  $\varepsilon_0$  et  $q$ . Afin de s'affranchir de la partie en « ln » de cette majoration, étudions brièvement la fonction  $f_\eta : \varepsilon \mapsto \varepsilon^\eta \ln(\varepsilon)$  pour  $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$  et  $0 < \eta < 1$ . Tout d'abord, si  $\varepsilon \geq 1$  on a

$$|f_\eta(\varepsilon)| \leq \varepsilon_0 \ln(\varepsilon_0)$$

pour tout  $0 < \eta < 1$ . D'un autre côté, si  $\varepsilon \leq 1$ , la fonction  $f_\eta$  est décroissante sur  $[0, \varepsilon_1(\eta)]$  et croissante sur  $[\varepsilon_1(\eta), 1]$  où

$$\varepsilon_1(\eta) := e^{-1/\eta}.$$

Ainsi, pour tout  $0 < \eta < 1$  et  $\varepsilon \in [0, 1]$ , on a

$$|f_\eta(\varepsilon)| \leq \frac{1}{\eta e}.$$

Notons  $C_1(\eta) := \max(1/(\eta e), \varepsilon_0 \ln(\varepsilon_0))$  pour  $0 < \eta < 1$ . Ainsi (7.29) devient :

$$\||A|^q - |B|^q\| \leq C(\varepsilon_0^\eta + C_1(\eta))\|A - B\|^{\min(q,1)-\eta}, \quad (7.30)$$

pour tout  $0 < \eta < \min(q, 1)$ . Notons

$$C_2(\eta) := C(\varepsilon_0^\eta + C_1(\eta)),$$

nous rappelons que cette constante dépend exclusivement de  $\varepsilon_0$ ,  $A$ ,  $q$  et  $\eta$ .

Remarquons que

$$\begin{aligned} \|A_\# - B_\#\| &= \||\mathcal{R}e(A)| + |\mathcal{I}m(A)| - |\mathcal{R}e(B)| - |\mathcal{I}m(B)|\| \\ &\leq \||\mathcal{R}e(A)| - |\mathcal{R}e(B)|\| + \||\mathcal{I}m(A)| - |\mathcal{I}m(B)|\|, \end{aligned}$$

et en utilisant (7.30) ceci devient :

$$\|A_\# - B_\#\| \leq C_2(\eta) \left( \|\mathcal{R}e(A) - \mathcal{R}e(B)\|^{1-\eta} + \|\mathcal{I}m(A) - \mathcal{I}m(B)\|^{1-\eta} \right) \quad (7.31)$$

pour tout  $0 < \eta < 1$ . Or, pour tout  $A \in \mathcal{L}(E)$  on a

$$\|\mathcal{R}e(A)\| \leq \|A\| \quad \text{et} \quad \|\mathcal{I}m(A)\| \leq \|A\|$$

et en utilisant cette inégalité dans (7.31) on obtient

$$\|A_\# - B_\#\| \leq 2C_2(\eta)\|A - B\|^{1-\eta}.$$

Finalement, en utilisant à nouveau (7.30) avec  $q = 1/2$ ,  $A = A_\#$  et  $B = B_\#$  on a :

$$\begin{aligned} \|A_\#^{1/2} - B_\#^{1/2}\| &\leq C_2(\eta)\|A_\# - B_\#\|^{1/2-\eta}, \\ &\leq 2C_2(\eta)^2\|A - B\|^{1/2-\eta} \end{aligned}$$

pour tout  $0 < \eta < 1/2$ . Le lemme est donc vrai pour  $C_3(p) = 2C_2(1/2 - \eta)^2$  et  $p = 1/2 - \eta$ . ■

**Lemme 7.3.3** *Soit  $E$  un espace de Hilbert muni d'une norme notée  $\|\cdot\|$ ,  $(T_\delta)_{\delta>0}$  une suite d'opérateurs de  $\mathcal{L}(E)$  positifs auto-adjoints et de rang fini  $n_\delta$  et  $T_0 \in \mathcal{L}(E)$  un opérateur positif, compact et injectif tels que*

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} T_\delta = T_0.$$

*Soit  $(y_\delta)_{\delta>0}$  une suite d'éléments de  $\mathcal{R}(T_\delta)$  et  $y_0 \in E$  tels que :*

$$\|T_\delta - T_0\| + \|y_\delta - y_0\| \frac{\|T_0\|}{\|y_0\|} \leq \delta \quad (7.32)$$

*et notons  $(\alpha(\delta), g_\delta) \in \mathbb{R} \times E$  l'unique solution du système de Tikhonov-Morozov*

$$(\alpha(\delta) + T_\delta^* T_\delta) g_\delta = T_\delta^* y_\delta, \quad \|T_\delta g_\delta - y_\delta\| = \delta \|g_\delta\|. \quad (7.33)$$

*On a alors la caractérisation suivante de  $\mathcal{R}(T_0)$  :*

$$y_0 \in \mathcal{R}(T_0) \iff \lim_{\delta \rightarrow 0} \|g_\delta\| < \infty \iff \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{j=1}^{n_\delta} \frac{|\lambda_j^\delta|^2}{(\alpha(\delta) + |\lambda_j^\delta|^2)^2} |(y_\delta, \psi_j^\delta)|^2 < \infty \quad (7.34)$$

*où les  $\lambda_j^\delta$  sont les valeurs propres strictement positives de  $T_\delta$  et les  $\psi_j^\delta$  sont les vecteurs propres associés.*

**Preuve.** La preuve de ce lemme suit les grandes lignes de [60, théorème 5.1]. Nous prouvons dans un premier temps que pour tout  $\delta > 0$  l'équation (7.33) admet une unique solution. Soit  $\delta > 0$  fixé, comme  $y_\delta \in \mathcal{R}(T_\delta)$  on a

$$g_\delta = \sum_{j=1}^{n_\delta} \frac{\lambda_j^\delta}{(\alpha(\delta) + (\lambda_j^\delta)^2)} (y_\delta, \psi_j^\delta) \psi_j^\delta$$

et comme  $\alpha(\delta)$  satisfait le critère de Morozov,  $\alpha(\delta)$  doit annuler la fonction

$$f_\delta(\alpha) := \sum_{j=1}^{n_\delta} \frac{\alpha^2 - \delta^2 |\lambda_j^\delta|^4}{|\alpha + |\lambda_j^\delta|^2|^2} |(y_\delta, \psi_j^\delta)|^2.$$

La fonction  $f_\delta$  est strictement croissante sur l'intervalle  $]0, +\infty[$ ,  $f_\delta(\alpha) \rightarrow -\delta^2 \|y_\delta\|^2$  lorsque  $\alpha \rightarrow 0$  et  $f_\delta(\alpha) \rightarrow \|y_\delta\|^2$  lorsque  $\alpha \rightarrow +\infty$ . Ainsi  $f_\delta$  s'annule pour un unique  $\alpha(\delta)$  et pour tout  $\delta > 0$ ,  $(\alpha(\delta), g_\delta)$  est défini de manière unique.

Montrons l'équivalence (7.34) annoncée. Supposons que  $y_0$  est dans l'image de  $T_0$  et notons  $g_0$  l'unique élément de  $E$  tel que  $T_0 g_0 = y_0$ , on montre que la fonction  $g_\delta$  reste bornée. Par définition,  $g_\delta$  minimise la fonction

$$g \mapsto \alpha(\delta) \|g\|^2 + \|T_\delta g - y_\delta\|^2,$$

et on a donc

$$\alpha(\delta) \|g_\delta\|^2 + \|T_\delta g_\delta - y_\delta\|^2 \leq \alpha(\delta) \|g_0\|^2 + \|T_\delta g_0 - y_\delta\|^2. \quad (7.35)$$

Mais

$$\begin{aligned} \|T_\delta g_0 - y_\delta\| &\leq \|T_\delta g_0 - T_0 g_0\| + \|T_0 g_0 - y_\delta\|, \\ &\leq \|T_\delta - T_0\| \|g_0\| + \|y_0 - y_\delta\|, \\ &\leq \|T_\delta - T_0\| \|g_0\| + \|y_0 - y_\delta\| \frac{\|T_0\|}{\|y_0\|} \|g_0\|, \end{aligned}$$

et d'après (7.32) on obtient

$$\|T_\delta g_0 - y_\delta\| \leq \delta \|g_0\|.$$

Enfin en utilisant (7.35) avec (7.33) ceci implique

$$\|g_\delta\| \leq \|g_0\|.$$

Supposons maintenant que  $y_0$  n'est pas dans l'image de  $T_0$  et montrons par contradiction que  $\|g_\delta\|$  tend vers  $+\infty$ . Supposons qu'il existe une suite  $\delta_j \rightarrow 0$  et une constante  $C > 0$  telles que  $\|g_{\delta_j}\| \leq C$ . Alors  $g_{\delta_j}$  converge faiblement vers un certain  $g_0 \in E$  et comme  $T_0$  est compact,  $T_0 g_{\delta_j} \rightarrow T_0 g_0$  fortement (à une suite extraite près). Or, d'après (7.33) et (7.32) il existe  $C > 0$  telle que pour tout  $\delta > 0$

$$\begin{aligned} \|T_0 g_\delta - y_0\| &\leq \|(T_\delta - T_0)g_\delta\| + \|T_\delta g_\delta - y_\delta\| + \|y_\delta - y_0\|, \\ &\leq \delta \|g_\delta\| + \delta \|g_\delta\| + \delta \frac{\|T_0\|}{\|y_0\|}, \\ &\leq C\delta, \end{aligned}$$

et donc  $T_0 g_0 = y_0$  ce qui contredit l'hypothèse initiale que  $y_0$  n'est pas dans l'image de  $T_0$ . ■

**Preuve du théorème 7.3.1** Pour  $n > 0$ , définissons la famille des fonctions constantes par morceaux  $(L_i)_{1 \leq i \leq n}$  pour  $s \in [0, 2\pi]$  par :

$$L_i(s) := \begin{cases} \sqrt{\frac{n}{2\pi}} \text{ si } \frac{2\pi(i-1)}{n} \leq s \leq \frac{2\pi i}{n}, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

On associe aux valeurs  $(u_{i,j}^{n,\delta})_{i,j=1,\dots,n}$  la fonction  $u^n$  de  $L^2(]0, 2\pi[^2)$  définie par

$$u^n(s, t) := \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} u_{i,j}^{n,\delta} L_i(s) L_j(t),$$

et au vecteur  $\phi_z^n$  on lui associe

$$\Phi_z^n := \sum_{1 \leq i \leq n} \phi_z^n(i) L_i.$$

Ainsi la matrice  $\mathbb{U}^{n,\delta}$  est représentée par

$$\begin{aligned} F_n : L^2(]0, 2\pi[) &\longrightarrow L^2(]0, 2\pi[) \\ v &\longmapsto \int_0^{2\pi} u^n(s, t) v(t) dt. \end{aligned}$$

D'après la définition des indicateurs d'erreur  $\epsilon_n(u^\infty)$  et  $\epsilon_n(\phi_z)$  on a :

$$\|F_n - F\| \leq \|u^n - u^\infty\|_{L^2(]0, 2\pi[^2)} = \epsilon_n(u^\infty) \quad \text{et} \quad \|\Phi_z^n - \phi_z\|_{L^2(]0, 2\pi[^2)} \leq \epsilon_n(\phi_z)$$

où la norme  $\|\cdot\|$  désigne la norme d'opérateur de  $L^2(]0, 2\pi[) \rightarrow L^2(]0, 2\pi[)$  et  $F$  est l'opérateur champ lointain associé à la donnée continue  $u^\infty(\hat{x}, \hat{\theta})$ . En utilisant le lemme 7.3.2 on obtient

$$\left\| (F_n)_{\#}^{1/2} - F_{\#}^{1/2} \right\| \leq C_3(p) \|F_n - F\|^p \leq C_3(p) \epsilon_n(u^\infty)^p$$

pour tout  $0 < p < 1/2$  et  $C_3(p)$  dépend de  $F$ , mais pas de  $F_n$  car  $F_n$  tend vers  $F$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ . De plus, comme  $F$  est un opérateur compact on montre en utilisant sa décomposition en valeurs singulières que

$$\|F_{\#}^{1/2}\| \leq \sqrt{2} \|F\|^{1/2} \leq \sqrt{2} \|u^\infty\|_{L^2(]0, 2\pi[^2)}^{1/2}$$

et donc d'après (7.27) on a

$$\left\| (F_n)_{\#}^{1/2} - F_{\#}^{1/2} \right\| + \frac{\|F_{\#}^{1/2}\|}{\|\phi_z\|} \|\Phi_z^n - \phi_z\|_{L^2(]0, 2\pi[)} \leq \delta_n. \quad (7.36)$$

On peut donc appliquer le lemme 7.3.3 à la suite d'opérateurs  $(F_n)_{\#}^{1/2}$ , et d'après le théorème 7.2.11 on a la caractérisation suivante :

$$z \in \Omega \iff z \in \mathcal{R}(F_{\#}^{1/2}) \iff \lim_{\delta_n \rightarrow 0} \|g_n\|_{L^2(]0, 2\pi[)} < \infty$$

où  $g_n$  correspond au  $g_\delta$  défini dans le lemme 7.3.3 avec  $y_\delta = \Phi_z^n$ .

Pour conclure, remarquons que pour tout  $g \in L^2(]0, 2\pi[)$

$$(F_n)_{\#} g = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} (\mathbb{U}_{\#}^{n,\delta})_{i,j}(g, L_j)_{L^2(]0, 2\pi[)} L_i.$$

Rappelons que  $e_i^n$  désigne le  $i$ -ème vecteur propre de  $\mathbb{U}_{\#}^{n,\delta}$  associé à la valeur propre  $\lambda_i^n$ , pour  $s \in [0, 2\pi]$  on définit

$$v_i(s) := \sum_{j=1}^n (e_i^n)_j L_j(s)$$

et donc pour  $i = 1, \dots, n$

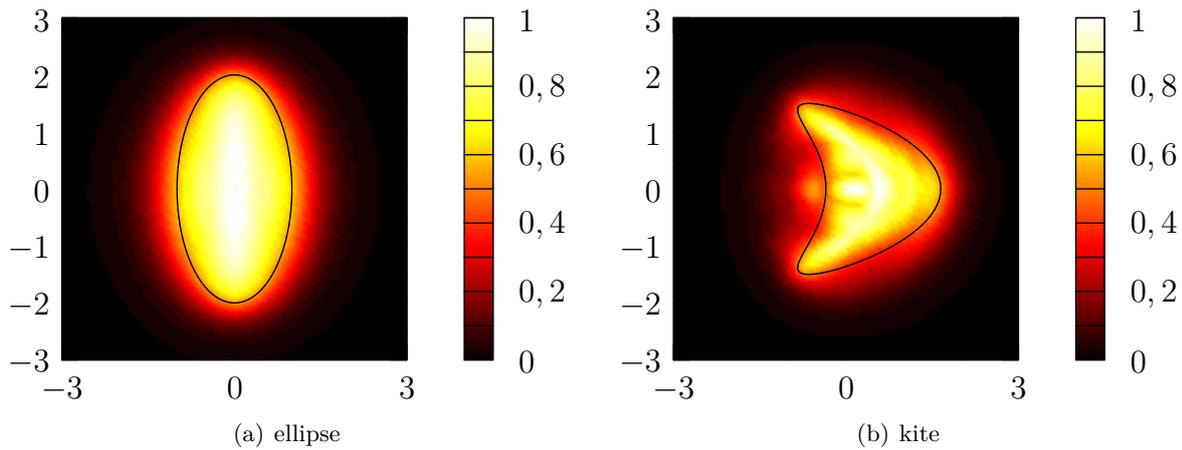
$$(F_n)_{\#} v_i = \lambda_i^n v_i.$$

Ceci permet de montrer que pour tout  $z \in \mathbb{R}^2$

$$\|g_n\|_{L^2(]0, 2\pi[)}^{-2} = w_n(z)$$

et on a le résultat annoncé. ■

**Remarque 7.3.4** En pratique, le choix du  $\delta_n$  satisfaisant 7.27 semble difficile. Nous le prendrons simplement égal au niveau de bruit sur les mesures,  $\sigma$ .

FIGURE 7.1 –  $\eta = 1$ ,  $k = 2$  pas de bruit.

### 7.3.2 Applications numériques

Notons  $w_n(z)$  la fonction introduite à l'équation (7.26) lorsque la fonction test  $\phi_z(\hat{x}) = \Phi^\infty(z, \hat{x}) = e^{-ik\hat{x}\cdot z}$  et  $w_{n,\text{dipole}}^p(z)$  la fonction définie par (7.26) lorsque  $\phi_z(\hat{x}) = \partial\Phi^\infty(z, \hat{x})/\partial p$ . Remarquons qu'à cause de la linéarité du problème de diffraction par rapport à l'onde incidente, il suffit de prendre  $p$  dans l'intervalle  $[0, \pi]$ . On choisit de tester 4 directions de polarisation et on pose

$$w_{n,\text{dipole}} := \max_{p \in \{0, \pi/4, 3\pi/4, \pi\}} w_{n,\text{dipole}}^p.$$

Finalement, on affiche la valeur de

$$W_n(z) := \max \left( \frac{w_n(z)}{\max_z(w_n(z))}, \frac{w_{n,\text{dipole}}(z)}{\max_z(w_{n,\text{dipole}}(z))} \right).$$

On considère deux obstacles différents, le premier est convexe, c'est une ellipse de demi axes (1, 2) alors que le second est non convexe et est donné par

$$\Gamma := \{(\cos(t) + 0.65 \cos(2t), 1.5 \sin(t)) \text{ pour } t \in [0, 2\pi]\}.$$

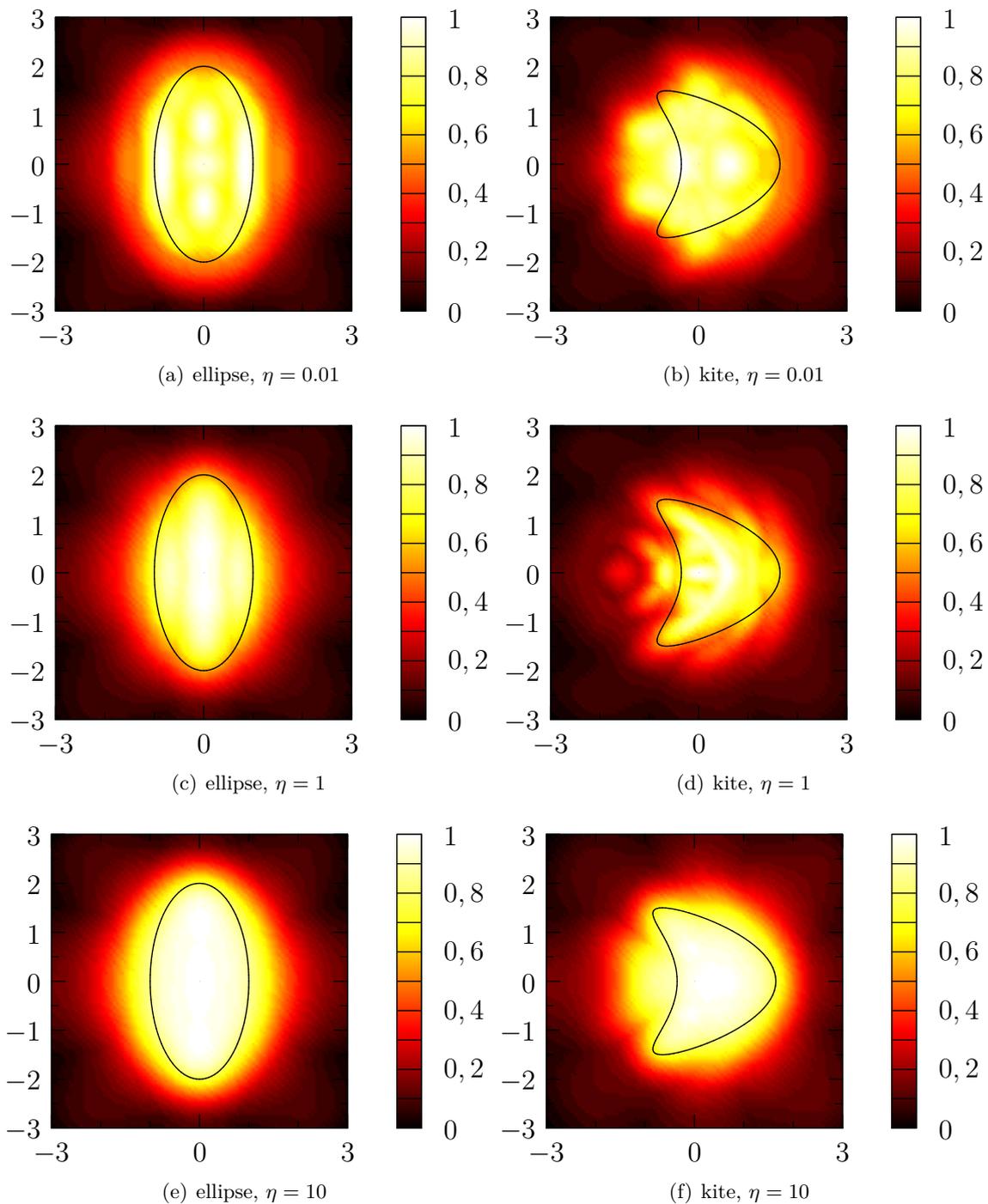
Dans les deux cas la taille de l'obstacle  $\Omega$  est de l'ordre d'une longueur d'onde lorsque la fréquence est égale à 2. Les expériences sont menées dans le cas  $\lambda = 0$ . Le domaine d'échantillonnage est le carré  $[-3, 3]^2$  que l'on discrétise à l'aide de  $80 \times 80$  points  $z$ . Enfin on prend  $n = 100$ , c'est-à-dire que l'on envoie 100 ondes incidentes pour des directions d'incidence uniformément réparties sur le cercle unité et on observe le champ lointain dans les mêmes directions.

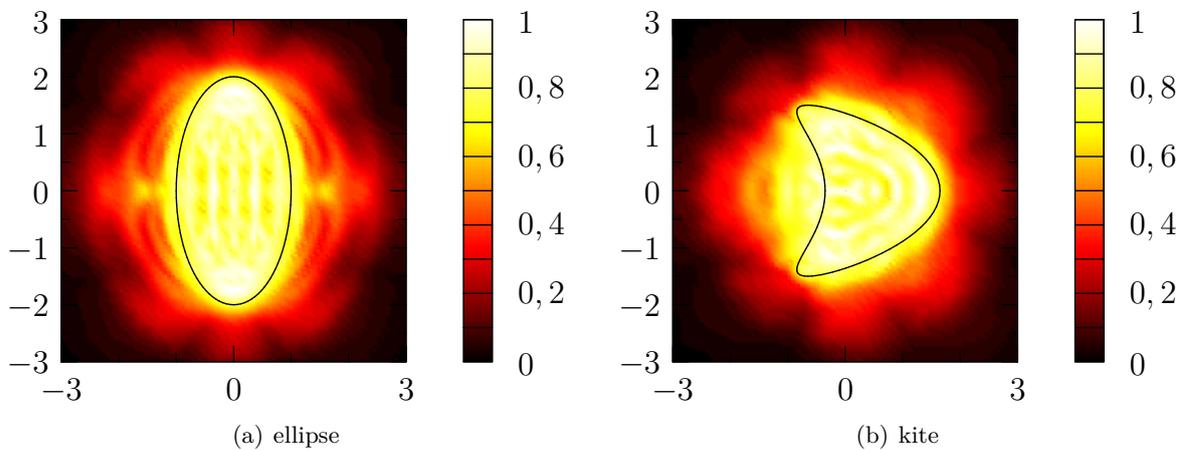
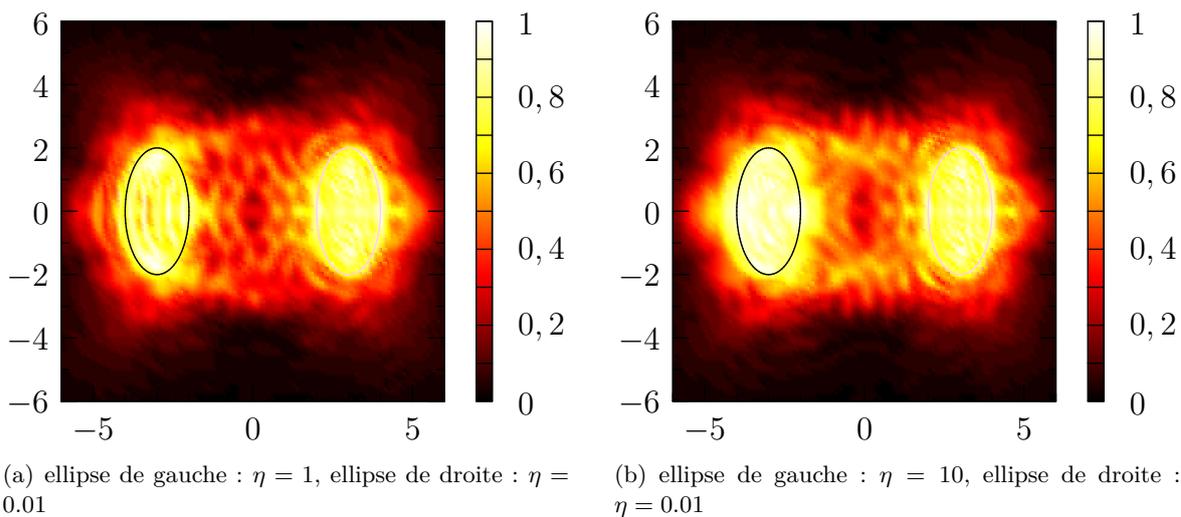
La figure 7.1 donne une idée de la meilleure image que l'on puisse obtenir avec ces paramètres car elle représente la reconstruction lorsque le bruit sur les données est nul. Toutes les autres figures ont été réalisées avec  $\delta = 1\%$  de bruit sur le champ lointain. La figure 7.2 illustre l'influence du coefficient d'impédance généralisée  $\eta$ , plus ce coefficient est grand plus la reconstruction semble floue. La figure 7.3 illustre l'influence de la fréquence, ces figures sont à comparer aux figures 7.2(c) et 7.2(d), le côté convexe du kite semble mieux reconstruit, en revanche on ne capte plus la non convexité. On termine ces expérimentations avec la reconstruction de deux ellipses distantes de 5 longueurs d'onde avec des coefficients  $\eta$  différents (voir figure 7.4).

### Comparaison avec les méthodes d'optimisation

Les résultats que nous obtenons sont à comparer avec ceux présentés dans le chapitre 5. Gardons à l'esprit que la méthode de factorisation nécessite un nombre importante de données (on envoie 100 ondes incidentes) alors que pour l'application des méthodes d'optimisation quelques ondes

incidentes suffisent (2 donnaient déjà des résultats satisfaisant). Du point de vue de la qualité de la reconstruction, les deux méthodes sont comparables même si la méthode de factorisation est plus sensible au bruit. En revanche, pour appliquer cette méthode nous n'avons besoin que de très peu d'informations a priori notamment sur le nombre et la localisation des obstacles.

FIGURE 7.2 –  $k = 2$  avec 1% de bruit.

FIGURE 7.3 –  $\eta = 1$ ,  $k = 5$  avec 1% de bruit.FIGURE 7.4 – Deux ellipses,  $k = 5$  avec 1% de bruit.



# MODÈLE ASYMPTOTIQUE POUR LES VALEURS PROPRES DE TRANSMISSION INTÉRIEURE

---

## Sommaire

---

<b>8.1</b>	<b>ITEP in presence of a thin layer</b>	<b>172</b>
8.1.1	Setting of the problem	172
8.1.2	Existence and discreteness of the transmission eigenvalues	173
<b>8.2</b>	<b>Formal asymptotic development</b>	<b>175</b>
8.2.1	Preliminary material	175
8.2.2	The formal asymptotic development	175
<b>8.3</b>	<b>Convergence analysis</b>	<b>179</b>
8.3.1	Preliminary regularity estimates	179
8.3.2	Convergence of the zero-th order approximation	188
8.3.3	Convergence of the first order approximation	189
8.3.4	Convergence of the second order approximation	192
<b>8.4</b>	<b>Numerical results</b>	<b>197</b>
8.4.1	Computation of the interior transmission eigenvalue	197
8.4.2	Application to inverse problems	198
<b>8.5</b>	<b>Appendix</b>	<b>200</b>

---

Ce chapitre est le fruit de mon séjour de trois mois à l'Université du Delaware sous l'encadrement de Professeur Fioralba Cakoni. La langue de travail ayant été l'anglais nous avons choisi de rédiger ce chapitre en anglais.

**P**OUR conclure cette thèse nous abordons un sujet un peu différent, nous étudions le comportement asymptotique d'un problème spectral. Nous nous intéressons à l'étude des valeurs propres du problème de transmission intérieure dans le cas où l'obstacle diffractant

est constitué d'une couche mince couvrant un conducteur parfait. Ce type de problème spectral est apparu récemment dans de nombreux travaux traitant des problèmes de diffraction inverse (voir [22, 38] par exemple) et suscite l'intérêt de part son caractère non auto-adjoint, voir [27] pour un compte rendu concernant ce problème. De plus, on peut interpréter les valeurs propres de transmission comme des fréquences pour lesquelles une onde incidente bien choisie peut produire un champ diffracté nul (l'obstacle est alors invisible pour cette onde incidente). Une conséquence directe de cette remarque est que pour une telle fréquence la Linear Sampling Method ne fonctionne pas. De plus, ces valeurs propres peuvent être détectées à partir de la donnée du champ lointain produit par une infinité d'ondes incidentes planes pour une plage de fréquence donnée (voir [23]). Ainsi on peut les utiliser pour avoir des informations qualitatives sur le milieu diffractant (voir [20] pour un exemple d'utilisation de ces valeurs propres).

Dans une première section nous donnons plus de détails sur le problème de transmission intérieur en présence d'une couche mince. La deuxième section est consacrée au développement asymptotique formel de la première valeur propre et des vecteurs propres associés par rapport à l'épaisseur de la couche. Nous justifions ensuite dans la troisième section la validité des développements formels. Enfin nous concluons ce chapitre par quelques illustrations numériques.

## 8.1 Interior transmission eigenvalues for a dielectric inhomogeneity with a perfectly conducting inclusion

### 8.1.1 Setting of the problem

We consider the thin layer geometry described in section 1.1.2, the inhomogeneity  $\Omega$  is a bounded of  $\mathbb{R}^2$  simply connected domain of boundary  $\Gamma$  of class  $C^\infty$ . We still denote by  $\mathcal{U}_\delta = \{x \in \Omega \text{ such that } d(x, \Gamma) < \delta\}$  the thin layer of interior boundary  $\Gamma_\delta = \{x \in \Omega \text{ such that } d(x, \Gamma) = \delta\}$  that defines a bounded and simply connected domain  $\Omega_\delta$  (see Figure 1.2). The scattering of an incident wave  $u^i$  by such a structure gives rise to a scattered field  $u^s = u - u^i$  that satisfies

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 n u = 0 \text{ in } \mathcal{U}_\delta, \\ \Delta u + k^2 u = 0 \text{ in } \Omega_{\text{ext}} := \mathbb{R}^d \setminus \overline{\Omega}, \\ \left[ \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} \right] = 0, \quad [u] = 0 \text{ on } \Gamma, \\ u = 0 \text{ on } \Gamma_\delta, \\ \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|x|=R} |\partial_r u^s - i k u^s|^2 ds = 0. \end{cases} \quad (8.1)$$

where  $k$  is the wave number,  $n \in L^\infty(\mathcal{U}_\delta)$  is the index of refraction of the layer,  $\boldsymbol{\nu}$  is the unitary normal to  $\Gamma$  directed outward to  $\Omega$  and  $[v] = v^+ - v^-$  denotes the jump of  $v$  across  $\Gamma$  where  $v^+$  is the exterior trace of  $v$  and  $v^-$  is the interior trace of  $v$  on  $\Gamma$ .

**Remark 8.1.1** *In this chapter, we treat the case of a Dirichlet obstacle. The extension to the results to the case of a Neumann obstacle is not obvious and is still an open question. In particular, there exists no proof about the existence of real interior transmission eigenvalues in this case (corresponding to Theorem 8.1.4).*

For any element  $\hat{\theta}$  of the unit sphere  $S^1$  we define an incident plane wave by  $u^i(x) = e^{ik\hat{\theta} \cdot x}$  and we denote by  $u^\infty(\hat{x}, \hat{\theta}) \in L^2(S^1 \times S^1)$  the far-field pattern associated to the scattered field  $u^s$  solution to (8.1) and defined by

$$u^s(x) = \frac{e^{ik|x|}}{\sqrt{|x|}} \left( u^\infty(x/|x|) + O\left(\frac{1}{|x|}\right) \right) \quad |x| \longrightarrow +\infty.$$

Let us introduce the far-field operator at frequency  $k$

$$F_k : L^2(S^1) \longrightarrow L^2(S^1)$$

$$g \longmapsto \int_{S^1} u^\infty(\hat{x}, \hat{\theta})g(\hat{\theta})d\hat{\theta}.$$

If this operator is injective with dense range, by using the Linear Sampling Method one can determine the shape of the inhomogeneity from the far field pattern  $u^\infty(\hat{x}, \hat{\theta})$  for all directions  $\hat{x}$  and  $\hat{\theta}$ . But  $F_k$  may fail to be injective for special frequencies : the interior transmission eigenvalues. We call an interior transmission eigenvalue a real  $k_\delta$  such that there exists a non trivial solution  $(w_\delta, v_\delta)$  to the following coupled problem

$$\begin{cases} \Delta w_\delta + k_\delta^2 n w_\delta = 0 & \text{in } \mathcal{U}_\delta, \\ \Delta v_\delta + k_\delta^2 v_\delta = 0 & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial v_\delta}{\partial \nu} = \frac{\partial w_\delta}{\partial \nu}, \quad v_\delta = w_\delta & \text{on } \Gamma, \\ w_\delta = 0 & \text{on } \Gamma_\delta. \end{cases} \quad (8.2)$$

**Definition 8.1.2** *The values  $k_\delta^2 > 0$  for which (8.2) has a non trivial solution  $(w_\delta, v_\delta)$  are called interior transmission eigenvalues, the functions  $w_\delta$  and  $v_\delta$  are the associated eigenvectors.*

It seems that these eigenvalues can be determined from the far-field operator (see [23]) and that one can use them to obtain information on the inhomogeneity like its size or bounds on the index of refraction (see [20] for example). We propose to obtain estimates of the thickness  $\delta$  by using an asymptotic development of the first interior transmission eigenvalue of problem (8.2).

### 8.1.2 Existence and discreteness of the transmission eigenvalues

We briefly summarize the results obtained in [26] about transmission eigenvalues for the case of an obstacle contained inside in an inhomogeneous medium. The first step consists in moving from the second order equation (8.2) to a fourth order eigenvalue problem. To do so, we introduce

$$u_\delta = \begin{cases} w_\delta - v_\delta & \text{in } \mathcal{U}_\delta \\ -v_\delta & \text{in } \Omega_\delta \end{cases} \quad (8.3)$$

then

$$(\Delta + k_\delta^2) \frac{1}{1-n} (\Delta + k_\delta^2 n) u_\delta = 0 \quad \text{in } \mathcal{U}_\delta \quad (8.4)$$

and we look for this function in

$$W_\delta := \left\{ u \in H_0^1(\Omega) \cap H_\Delta^1(\mathcal{U}_\delta) \text{ such that } \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ on } \Gamma \right\}.$$

This space is associated with the norm

$$\|u\|_{W_\delta}^2 := \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|\Delta u\|_{L^2(\mathcal{U}_\delta)}^2.$$

Define also the bounded linear operators  $A_{k^2} : W_\delta \rightarrow W_\delta$  and  $B : W_\delta \rightarrow W_\delta$  given by

$$(A_{k^2} u, v)_{W_\delta} := \int_{\mathcal{U}_\delta} \frac{1}{1-n} (\Delta u + k^2 u) (\Delta \bar{v} + k^2 \bar{v}) dx + k^4 \int_{\Omega} u \bar{v} dx + k^2 \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \bar{v} dx$$

$$(B u, v)_{W_\delta} := 2 \int_{\Omega} u \bar{v} dx.$$

As proven in [26, Theorem 2.1], the operators  $A_{k^2}$  and  $B$  satisfy the following proposition.

**Proposition 8.1.3** *Assume that  $0 < n_* < n(x) < n^* < 1$ ,  $B$  is a compact operator and there exists a constant  $C > 0$  such that for all  $\delta > 0$*

$$|(A_{k^2}u, u)_{W_\delta}| \geq C\|u\|_{W_\delta}^2.$$

**Proof.** The proof can be found in [26]. The fact that the coercivity constant is independent of  $\delta$  is clear in this proof. ■

A positive number  $k_\delta^2$  is an interior transmission eigenvalue (according to Definition 8.1.2) associated with the vectors  $(w_\delta, v_\delta)$  if and only if the function  $u_\delta$  defined by (8.3) is solution to

$$A_{k_\delta^2}u_\delta - k_\delta^4 B u_\delta = 0.$$

The vectors  $(w_\delta, v_\delta)$  are obtained from  $u_\delta$  by

$$w_\delta = \frac{1}{k_\delta^2(1-n)}(\Delta u_\delta + k_\delta^2 u_\delta) \quad \text{in } \mathcal{U}_\delta, \quad (8.5)$$

$$v_\delta = \begin{cases} -u_\delta & \text{in } \Omega_\delta, \\ \frac{1}{k_\delta^2(1-n)}(\Delta u_\delta + k_\delta^2 n u_\delta) & \text{in } \mathcal{U}_\delta. \end{cases} \quad (8.6)$$

We recall hereafter one of the results of [26].

**Theorem 8.1.4** *Assume that  $0 < n_* < n(x) < n^* < 1$ . There exist an infinite discrete set of transmission eigenvalues and  $+\infty$  is the only accumulation point.*

In the following we are interested in obtaining an asymptotic development of the first transmission eigenvalue, we denote this eigenvalue by  $\lambda_\delta^1$  instead of  $k_\delta^2$ . The associated eigenvectors will be denoted by  $(w_\delta^1, v_\delta^1)$  and the difference by  $u_\delta^1$ . We chose these eigenvectors such that

$$\|u_\delta^1\|_{W_\delta} = 1$$

and we have the following regularity result for the eigenvectors.

**Lemma 8.1.5** *If  $\Gamma$  is a boundary of class  $C^{k+2}$  with  $k \geq 2$  and  $0 < n < 1$  is constant then  $w_\delta^1 \in H^k(\mathcal{U}_\delta)$  and  $v_\delta^1 \in H^k(\Omega)$ .*

**Proof.** First of all since  $\Delta v_\delta^1 = -\lambda_\delta^1 v_\delta^1$ , using interior elliptic regularity for the Laplacian, we know that  $v_\delta^1 \in C^\infty(\omega)$  for all open set  $\omega \subset\subset \Omega$ . Hence its trace and its normal derivative trace on  $\Gamma_\delta$  are in  $H^{k+2-1/2}(\Gamma_\delta)$  and  $H^{k+2-3/2}(\Gamma_\delta)$  respectively. Using the same argument but this time for the Laplace operator with homogeneous Dirichlet boundary condition on  $\Gamma_\delta$  we can say that the trace of the normal derivative of  $w_\delta^1$  on  $\Gamma_\delta$  is also in  $H^{k+2-3/2}(\Gamma_\delta)$ . We easily deduce that on  $\Gamma_\delta$  we have

$$\begin{cases} \Delta u_\delta^1 \in H^{k+2-1/2}(\Gamma_\delta), \\ \partial_{\nu_\delta}(\Delta u_\delta^1) \in H^{k+2-3/2}(\Gamma_\delta) \end{cases}$$

where  $\nu_\delta$  is the unit normal to  $\Gamma_\delta$  directed toward the interior of  $\Omega_\delta$ . Since  $u_\delta^1$  satisfies (8.4) in  $\mathcal{U}_\delta$  with homogeneous boundary conditions on  $\Gamma$ , regularity results for the bilaplacian (see [90]) implies that  $u_\delta^1$  is in  $H^{k+2}(\mathcal{U}_\delta)$ . We finally get the result by using (8.5) and (8.6). ■

To ensure existence of such an interior transmission eigenvalue we assume in the following that the index of the layer is constant and such that

$$0 < n < 1.$$

## 8.2 Formal asymptotic development

### 8.2.1 Preliminary material

We perform the asymptotic development in dimension 2, the extension to dimension 3 is more technical but the same process would give the expansion. Since we are in dimension 2, there exists  $s_0$  and a  $C^\infty([0; s_0])$  periodic function  $x_\Gamma : [0; s_0] \rightarrow \mathbb{R}^2$  which parameterizes the boundary  $\Gamma$  :

$$\Gamma = \{x_\Gamma(s), s \in [0; s_0]\}.$$

Moreover, we can choose this parameterization such that  $\boldsymbol{\tau}(s) := \frac{dx_\Gamma}{ds}(s)$  the tangent vector to the surface  $\Gamma$  at point  $x_\Gamma(s)$  is unitary. Then we denote by  $\mathbf{n}(s)$  the inward unit normal to  $\Gamma$  at point  $x_\Gamma(s)$  and we define the curvature  $\kappa(s)$  by

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}(s) = \kappa(s)\mathbf{n}(s).$$

By using this parameterization of the curve  $\Gamma$ , for some sufficiently small periodic function  $\delta \in C^0([0; s_0])$  the surface  $\Gamma_\delta$  is parameterized by

$$\Gamma_\delta = \{x_\Gamma(s) + \delta(s)\mathbf{n}(s), s \in [0; s_0]\}. \quad (8.7)$$

Define  $\eta_0 := \inf_{s \in [0, s_0]} \frac{1}{|\kappa(s)|}$ , and  $\Omega_0 := \{x \in \mathbb{R}^2, \text{dist}(x, \Gamma) \leq \eta_0\}$ . Then the map

$$\begin{aligned} \varphi : [0, s_0] \times (-\eta_0, \eta_0) &\longrightarrow \Omega_0 \\ (s, \eta) &\longmapsto x_\Gamma(s) + \eta\mathbf{n}(s) \end{aligned}$$

is a  $C^\infty$ -diffeomorphism. In other words, for every point  $x \in \Omega_0$  there exists  $(s, \eta) \in [0, s_0] \times (-\eta_0, \eta_0)$  such that

$$x = x_\Gamma(s) + \eta\mathbf{n}(s).$$

For any function  $u$  defined on  $\Omega_0$  we define  $\tilde{u}$  on  $[0, s_0] \times (-\eta_0, \eta_0)$  by  $\tilde{u}(s, \eta) := u \circ \varphi(s, \eta)$ . The gradient in this local coordinates writes

$$\nabla u = \frac{1}{(1 + \eta\kappa)} \frac{\partial}{\partial s} \tilde{u} \boldsymbol{\tau} + \frac{\partial}{\partial \eta} \tilde{u} \mathbf{n}$$

and using integration by part we can prove that for  $\vec{u} = u_\tau \boldsymbol{\tau} + u_n \mathbf{n}$  the divergence is

$$\text{div} \vec{u} = \frac{1}{(1 + \eta\kappa)} \frac{\partial}{\partial s} \tilde{u}_\tau + \frac{1}{(1 + \eta\kappa)} \frac{\partial}{\partial \eta} (1 + \eta\kappa) \tilde{u}_n.$$

We finally denote  $J_{s, \eta} := |\det(\nabla \varphi(s, \eta))| = 1 + \eta\kappa(s)$  the Jacobian of the transformation.

### 8.2.2 The formal asymptotic development

Let us go back to our problem. In order to be able perform the computations, we assume that the function  $\delta$  used in (8.7) to define the interior boundary is of the form  $\delta(s) = \delta_0 g(s)$  for some constant  $\delta_0 > 0$  and some strictly positive and continuous function  $g$  which is independent of  $\delta_0$  and such that  $|\delta_0 g(s)| < \eta_0$ . To simplify the notations and because there is no ambiguity, we shall not make the distinction between  $g$  as a function of local or global variables. Then, we postulate the following ansatz for the first interior transmission eigenvalue and the associated eigenvectors :

$$\lambda_\delta^1 = \sum_{j=0}^{\infty} \delta_0^j \lambda_j$$

$$w_\delta^1(x) = \hat{w}_\delta^1(s, \xi) = \sum_{j=0}^{\infty} \delta_0^j \hat{w}_j(s, \xi) \quad (8.8)$$

$$v_\delta^1(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \delta_0^j v_j(x)$$

for  $\xi = \eta/\delta_0$ . Remark that the functions  $w_j$  are defined on  $\mathcal{G} := \{(s, \xi) \in [0, s_0] \times [0, \max(g)]\}$ ,  $\xi \leq g(s)$  which is independent of  $\delta_0$ , we denote  $w_k(x) = \hat{w}_k(s, \eta/\delta_0)$ . Using (8.2) and the expression of the gradient and divergence operators in the local coordinates, we obtain that  $(\hat{w}_\delta^1, v_\delta^1)$  satisfies

$$\frac{1}{(1 + \xi\delta_0\kappa)} \frac{\partial}{\partial s} \frac{1}{(1 + \xi\delta_0\kappa)} \frac{\partial}{\partial s} \hat{w}_\delta^1 + \frac{1}{\delta_0^2(1 + \xi\delta_0\kappa)} \frac{\partial}{\partial \xi} (1 + \xi\delta_0\kappa) \frac{\partial}{\partial \xi} \hat{w}_\delta^1 + \lambda_\delta^1 n \hat{w}_\delta^1 = 0 \text{ in } \mathcal{G} \quad (8.9)$$

together with the boundary conditions

$$\begin{cases} \hat{w}_\delta^1(s, g(s)) = 0 & \forall s \in [0, s_0], \\ \hat{w}_\delta^1(s, 0) = \tilde{v}_\delta^1(s, 0) & \forall s \in [0, s_0], \\ \frac{\partial \tilde{v}_\delta^1}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} = \frac{1}{\delta_0} \frac{\partial \hat{w}_\delta^1}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} & \forall s \in [0, s_0]. \end{cases}$$

Let us rewrite (8.9) in a more convenient way for the formal computations. If we multiply this equality by  $\delta_0^2(1 + \xi\delta_0\kappa)^3$  it writes

$$\sum_{k=0}^5 \delta_0^k A_k \hat{w}_\delta = 0$$

where the  $(A_k)_{k=0, \dots, 5}$  are differential operators of order 2 at maximum. Let us give the expression of the first terms

$$A_0 = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2},$$

$$A_1 = 3\xi\kappa \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \kappa \frac{\partial}{\partial \xi},$$

$$A_2 = 3\xi^2\kappa^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 2\xi\kappa^2 \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \lambda_0 n,$$

$$A_3 = \dots$$

Hence, by equating the terms of same order in  $\delta$ , for  $k \in \mathbb{N}$ , the function  $\hat{w}_k$  solves

$$\begin{cases} A_0 \hat{w}_k = - \sum_{l=1}^5 A_l \hat{w}_{k-l}, & (8.10a) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \hat{w}_k(s, g(s)) = 0, & (8.10b) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \hat{w}_k(s, 0) = \tilde{v}_k(s, 0), & (8.10c) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \hat{w}_k}{\partial \xi}(s, 0) = \frac{\partial \tilde{v}_{k-1}}{\partial \eta}(s, 0), & (8.10d) \end{cases}$$

with the convention that  $\hat{w}_k = v_k = 0$  for negative  $k$ . The functions  $v_k$  satisfy

$$\Delta v_k + \lambda_0 v_k = - \sum_{l=1}^k \lambda_l v_{k-l}. \quad (8.11)$$

**Order 0.**

From (8.10a) we have

$$\frac{\partial^2 \hat{w}_0}{\partial^2 \xi} = 0$$

and using the boundary conditions (8.10b) and (8.10d) we obtain  $\hat{w}_0 = 0$  on  $\mathcal{G}$ . Equation (8.10c) together with (8.11) gives that  $(\lambda_0, v_0)$  solves

$$\begin{cases} \Delta v_0 + \lambda_0 v_0 = 0 & \text{in } \Omega \\ v_0 = 0 & \text{on } \Gamma \end{cases} \quad (8.12)$$

hence we define  $(\lambda_0, v_0)$  as being the first eigenpair of  $-\Delta$  with a Dirichlet boundary condition and  $\|v_0\|_{L^2(\Omega)} = 1$ . Remark that  $v_0$  is uniquely determined up to its sign, this will be clarified during the convergence analysis.

**Order 1.**

Iterating the process, we obtain that  $\hat{w}_1$  is solution to

$$\frac{\partial^2 \hat{w}_1}{\partial \xi^2} = 0$$

and with the boundary conditions we get

$$\hat{w}_1(s, \xi) = \left( \frac{\partial \tilde{v}_0}{\partial \eta} \right) |_{\eta=0} \xi - g(s) \left( \frac{\partial \tilde{v}_0}{\partial \eta} \right) |_{\eta=0}.$$

Finally  $v_1$  solves

$$\begin{cases} \Delta v_1 + \lambda_0 v_1 = -\lambda_1 v_0 & \text{in } \Omega, \\ v_1 = -g \frac{\partial v_0}{\partial \mathbf{n}} & \text{on } \Gamma. \end{cases} \quad (8.13)$$

Since  $\lambda_0$  is an eigenvalue for  $-\Delta$  with a Dirichlet boundary condition, the right hand side of (8.13) has to satisfy a compatibility condition. Namely, it has to be orthogonal to the first eigenvector  $v_0$  (the first eigenvalue  $\lambda_0$  of  $-\Delta$  with Dirichlet boundary conditions is simple for connected domains [52, Theorem 1.2.5]). Let  $\theta_1$  be a lifting of  $-g \partial v_0 / \partial \mathbf{n}$  in  $\Omega$  such that  $\theta_1|_{\Gamma} = -g \partial v_0 / \partial \mathbf{n}$ . Then (8.13) is equivalent to find  $\bar{v}_1 = v_1 - \theta_1$  such that

$$\begin{cases} \Delta \bar{v}_1 + \lambda_0 \bar{v}_1 = -\lambda_1 v_0 - (\Delta + \lambda_0) \theta_1 & \text{in } \Omega, \\ \bar{v}_1 = 0 & \text{on } \Gamma. \end{cases}$$

As a consequence, to ensure existence and uniqueness of  $\bar{v}_1$  we chose  $\lambda_1$  such that the second hand side of this system is orthogonal to  $v_0$  that is

$$\begin{aligned} \lambda_1 &:= \int_{\Omega} \nabla \theta_1 \cdot \nabla v_0 - \lambda_0 \theta_1 v_0 \, dx \\ &= - \int_{\Omega} \theta_1 \Delta v_0 + \lambda_0 \theta_1 v_0 \, dx - \int_{\Gamma} \theta_1 \frac{\partial v_0}{\partial \mathbf{n}} \, ds \\ &= \int_{\Gamma} g \left| \frac{\partial v_0}{\partial \mathbf{n}} \right|^2 \, ds. \end{aligned}$$

Still,  $v_1$  is uniquely determined that is why we also constraint  $v_1$  to be orthogonal to  $v_0$  in  $L^2$ .

**Order 2.**

Let us iterate the process once more,  $\hat{w}_2$  solves

$$\frac{\partial^2 \hat{w}_2}{\partial \xi^2} + \kappa \frac{\partial \hat{w}_1}{\partial \xi} = 0$$

and with the Neuman boundary conditions on  $\Gamma$  and the Dirichlet boundary condition on  $\Gamma_\delta$  we get

$$\hat{w}_2(s, \xi) = -\frac{\kappa}{2} \frac{\partial v_0}{\partial \mathbf{n}} \xi^2 + \frac{\partial v_1}{\partial \mathbf{n}} \xi + \frac{\kappa}{2} \frac{\partial v_0}{\partial \mathbf{n}} g^2 - \frac{\partial v_1}{\partial \mathbf{n}} g.$$

From this we can write the equation that defines  $v_2$

$$\begin{cases} \Delta v_2 + \lambda_0 v_2 = -\lambda_1 v_1 - \lambda_2 v_0 \text{ in } \Omega \\ v_2 = \frac{\kappa}{2} \frac{\partial v_0}{\partial \mathbf{n}} g^2 - \frac{\partial v_1}{\partial \mathbf{n}} g \text{ on } \Gamma. \end{cases} \quad (8.14)$$

As previously, define  $\theta_2$  a lifting of  $v_2$  that satisfies  $\theta_2|_\Gamma = \frac{\kappa}{2} \frac{\partial v_0}{\partial \mathbf{n}} g^2 - \frac{\partial v_1}{\partial \mathbf{n}} g$  and  $\bar{v}_2 := v_2 - \theta_2$ , then (8.14) writes

$$\begin{cases} \Delta \bar{v}_2 + \lambda_0 \bar{v}_2 = -\lambda_1 v_1 - \lambda_2 v_0 - \Delta \theta_2 - \lambda_0 \theta_2 \text{ in } \Omega \\ \bar{v}_2 = 0 \text{ on } \Gamma. \end{cases}$$

Again, to ensure existence and uniqueness of  $\bar{v}_2$  we have to impose a compatibility condition that is that the second hand side has to be orthogonal to  $v_0$  :

$$\begin{aligned} \lambda_2 &= -\lambda_1 \int_{\Omega} v_1 v_0 dx - \int_{\Omega} (\Delta \theta_2 + \lambda_0 \theta_2) v_0 dx \\ &= -\int_{\Gamma} \left( \frac{\kappa}{2} \frac{\partial v_0}{\partial \mathbf{n}} g^2 - \frac{\partial v_1}{\partial \mathbf{n}} g \right) \frac{\partial v_0}{\partial \mathbf{n}} ds. \end{aligned}$$

And we also impose that  $\int_{\Omega} v_2 v_0 dx = 0$  to ensure uniqueness of  $v_2$ .

**Order k.**

Take  $k > 0$  and assume that the functions  $\hat{w}_l$  and  $v_l$  as well as the real numbers  $\lambda_l$  are well defined for  $l < k$ . Assume moreover that for all  $0 < l < k$ ,

$$\int_{\Omega} v_l v_0 dx = 0 \quad (8.15)$$

and that  $\|v_0\|_{L^2(\Omega)} = 1$ . The first step consists in computing  $\hat{w}_k$  by solving (8.10a) together with the boundary conditions (8.10b) and (8.10d). This uniquely determines  $\hat{w}_k$  and one can obtain an explicit formula for  $\hat{w}_k$ . Then, let us denote  $\theta_k$  a lifting function in  $\Omega$  such that

$$\theta_k|_\Gamma = w_k|_\Gamma$$

and  $\bar{v}_k = v_k - \theta_k$  solves

$$\begin{cases} \Delta \bar{v}_k + \lambda_0 \bar{v}_k = -\sum_{l=1}^k \lambda_l v_{k-l} - \Delta \theta_k - \lambda_0 \theta_k \text{ in } \Omega \\ \bar{v}_k = 0 \text{ on } \Gamma. \end{cases}$$

To ensure existence and uniqueness for  $\bar{v}_k$  we impose that the right hand side of this equations is orthogonal to the first Dirichlet eigenvalue  $v_0$  and we have by using (8.15) and the fact that  $v_0$  is of  $L^2$  norm equal to 1,

$$\begin{aligned} \lambda_k &= -\int_{\Omega} (\Delta \theta_k v_0 + \lambda_0 \theta_k v_0) dx \\ &= -\int_{\Gamma} w_k \frac{\partial v_0}{\partial \mathbf{n}} ds. \end{aligned}$$

Hence, the function  $v_k = \bar{v}_k + \theta_k$  solve (8.11) together with (8.10c) but this function is not uniquely determined. To ensure the uniqueness of  $v_k$  we assume in addition that

$$\int_{\Omega} v_k v_0 dx = 0.$$

Hence, from the knowledge of the functions  $\hat{w}_l$  and  $v_l$  and the real numbers  $\lambda_l$  for  $l < k$ , we are able to define the iterate  $k$  uniquely and the orthogonality assumption (8.15) propagates.

**Remark 8.2.1** *These computations are in fact valid for any interior transmission eigenvalue, the difference would be the value of  $\lambda_0$ . In the case of the first transmission eigenvalue, we proposed to take  $\lambda_0$  as being the first eigenvalue of the Dirichlet problem, in the case of another transmission eigenvalue we should take another Dirichlet eigenvalue for  $\lambda_0$ .*

### 8.3 Convergence analysis

To prove the convergence we assume that the thickness of the layer is constant (i.e.  $g \equiv 1$ ). The main objective of this part is to justify the asymptotic development

$$\lambda_{\delta}^1 = \lambda_0 + \delta\lambda_1 + \delta^2\lambda_2 + \mathcal{O}(\delta^3)$$

where  $\mathcal{O}(x)$  stands for a generic function of  $C^{\infty}(\mathbb{R}^+)$  such that there exists a constant  $C > 0$  such that for all  $x \in \mathbb{R}^+$

$$|\mathcal{O}(x)| \leq C.$$

The first step for proving such a result is to obtain a priori estimates for the interior transmission problem

$$\begin{cases} \Delta w_{\delta} + k_{\delta}^2 n w_{\delta} = f \text{ in } \mathcal{U}_{\delta}, \\ \Delta v_{\delta} + k_{\delta}^2 v_{\delta} = g \text{ in } \Omega, \\ \frac{\partial v_{\delta}}{\partial \nu} = \frac{\partial w_{\delta}}{\partial \nu}, \quad v_{\delta} = w_{\delta} \text{ on } \Gamma, \\ w_{\delta} = 0 \text{ on } \Gamma_{\delta}, \end{cases}$$

this is the aim of the next section, the main estimates are stated in Propositions 8.3.6 and 8.3.7.

#### 8.3.1 Preliminary regularity estimates

Let us establish some crucial elliptic regularity estimates with explicit dependence of the constants with respect to  $\delta$ . In the following, we denote by  $C$  a generic constant independent of  $\delta$ . In the next Lemma we adopt the notations and the definitions of [74, section 4] that we recall here in a simplified setting. Let  $\mathcal{O}$  be a connected Lipschitz domain of  $\mathbb{R}^2$  and denote by  $(x_1, x_2)$  the coordinates of  $x$  in some given basis. We define the operator  $\mathcal{P}$  in  $\mathcal{O}$  by

$$\mathcal{P} := - \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_i} a_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_j}$$

where for  $(i, j) \in \{1, 2\}^2$   $a_{i,j} \in C^1(\mathcal{O})$ . We say that  $\mathcal{P}$  is coercive if there exists a constant  $C > 0$  such that for all  $\xi \in \mathbb{R}^2$  and  $x \in \mathcal{O}$

$$\sum_{i,j} a_{i,j}(x) \xi_i \xi_j \geq C |\xi|^2.$$

We call the conormal derivative the operator  $\mathcal{B}_{\nu}$  given by

$$\mathcal{B}_{\nu} := \sum_i \nu_i \gamma_{\partial \mathcal{O}} \left( \sum_j a_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_j} \right)$$

where  $\gamma_{\partial\mathcal{O}}$  is the trace operator on  $\partial\mathcal{O}$  and  $\nu_i$  for  $i = 1, 2$  is the  $i^{\text{th}}$  component of the exterior normal vector to  $\partial\mathcal{O}$ .

**Lemma 8.3.1** *Take  $\delta$  a strictly positive real number,  $g \in H^{1/2}(\mathbb{R})$  and  $f \in L^2(\mathbb{R} \times (0, \delta))$ . Let  $\mathcal{P}$  be coercive operator with coercivity constant independent of  $\delta$ . Let  $\mathcal{B}_\nu$  be the conormal derivative associated with  $\mathcal{P}$  at  $x_2 = 0$ . If  $w \in H_0 := \{w \in H^1(\mathbb{R} \times (0, \delta)), w(x_1, \delta) = 0 \forall x_1 \in \mathbb{R}\}$  solves*

$$\begin{cases} \mathcal{P}w = f \text{ in } \mathbb{R} \times (0, \delta), \\ \mathcal{B}_\nu w(x_1, 0) = g(x_1) \text{ for all } x_1 \in \mathbb{R}, \\ w(x_1, \delta) = 0 \text{ for all } x_1 \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

then there exists a constant  $C > 0$  independent of  $\delta$  such that

$$\|w\|_{H^2(\mathbb{R} \times (0, \delta))} \leq C \left( \|f\|_{L^2(\mathbb{R} \times (0, \delta))} + \|g\|_{H^{1/2}(\mathbb{R})} \right).$$

**Proof.** With the definition of  $\mathcal{P}$  and  $\mathcal{B}_\nu$  we obtain by Green's formula for all  $\psi \in H_0$

$$\int_{\mathbb{R} \times (0, \delta)} \mathcal{P}w\psi \, dx_1 dx_2 = \Phi(w, \psi) - \int_{\mathbb{R}} \mathcal{B}_\nu w(x_1, 0)\psi(x_1, 0) \, dx_1$$

where the bilinear form  $\Phi$  is defined for all functions  $(u, v) \in H_0$  by

$$\Phi(u, v) = \sum_{i,j} \int_{\mathbb{R} \times (0, \delta)} a_{i,j} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} \, dx_1 dx_2.$$

Using the equation satisfied by  $w$  one obtains

$$\int_{\mathbb{R} \times (0, \delta)} f\psi \, dx_1 dx_2 = \Phi(v, \psi) - \int_{\mathbb{R}} g(x_1)\psi(x_1, 0) \, dx_1. \quad (8.16)$$

Let us introduce the difference quotient in the direction  $x_1$  and give some basic properties it satisfies. For  $h \in \mathbb{R}$  and all  $(x_1, x_2) \in \mathbb{R} \times [0, \delta]$  let us define

$$\Delta_h u := \frac{u(x_1 + h, x_2) - u(x_1, x_2)}{h}.$$

By algebraic calculus we prove that the following formulas hold true for all functions  $u$  and  $v$  in  $H_0$

$$\int_{\mathbb{R} \times (0, \delta)} (\Delta_h u)v \, dx_1 dx_2 = - \int_{\mathbb{R} \times (0, \delta)} u(\Delta_{-h} v) \, dx_1 dx_2 \quad (8.17)$$

$$|\Phi(\Delta_h u, v) + \Phi(u, \Delta_{-h} v)| \leq C \|v\|_{H^1(\mathbb{R} \times (0, \delta))} \|u\|_{H^1(\mathbb{R} \times (0, \delta))} \quad (8.18)$$

and moreover there exists another constant  $C > 0$  independent of  $\delta$  such that for all  $u \in H_0$  and  $h$  sufficiently small

$$C \left\| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right\|_{L^2(\mathbb{R} \times (0, \delta))} \leq \|\Delta_h u\|_{L^2(\mathbb{R} \times (0, \delta))} \leq \left\| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right\|_{L^2(\mathbb{R} \times (0, \delta))} \quad (8.19)$$

see [74, Lemma 4.13] for the proof of this last result.

Let us go back to formula (8.16) and make use of (8.17) and (8.18) to obtain for  $\psi = \Delta_{-h} \Delta_h w \in H_0$  and all  $h$  sufficiently small

$$\begin{aligned} |\Phi(\Delta_h w, \Delta_h w)| &\leq C \|w\|_{H^1(\mathbb{R} \times (0, \delta))} \|\Delta_h w\|_{H^1(\mathbb{R} \times (0, \delta))} \\ &+ \left| \int_{\mathbb{R}} g(x_1) (\Delta_{-h} \Delta_h w)(x_1, 0) \, dx_1 + \int_{\mathbb{R} \times (0, \delta)} f(\Delta_{-h} \Delta_h w) \, dx_1 dx_2 \right|. \end{aligned} \quad (8.20)$$

For all  $s \in \mathbb{R}$  if  $\frac{\partial u}{\partial x_1} \in H^s(\mathbb{R})$  we have from [74, Exercise 4.4] that

$$\|\Delta_h u\|_{H^s(\mathbb{R})} \leq \left\| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right\|_{H^s(\mathbb{R})}$$

then the boundary terms in (8.20) can be estimated as follow

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |g(\Delta_{-h}\Delta_h w)| dx_1 &\leq \|g\|_{H^{1/2}(\mathbb{R})} \|(\Delta_{-h}\Delta_h w)\|_{H^{-1/2}(\mathbb{R})} \\ &\leq \|g\|_{H^{1/2}(\mathbb{R})} \|\Delta_h w\|_{H^{1/2}(\mathbb{R})} \\ &\leq C \|g\|_{H^{1/2}(\mathbb{R})} \|\Delta_h w\|_{H^1(\mathbb{R} \times (0, \delta))} \end{aligned} \quad (8.21)$$

with a trace constant  $C > 0$  independent of  $\delta$  and  $h$  (see the trace Lemma 8.3.4 for the last inequality). Finally using (8.19), (8.20) and (8.21) we obtain from the coercivity of  $\mathcal{P}$

$$\|\Delta_h w\|_{H^1(\mathbb{R} \times (0, \delta))} \leq C \left( \|g\|_{H^{1/2}(\mathbb{R})} + \|w\|_{H^1(\mathbb{R} \times (0, \delta))} + \|f\|_{L^2(\mathbb{R} \times (0, \delta))} \right)$$

which gives in regard of [74, Lemma 4.13]

$$\left\| \frac{\partial w}{\partial x_1} \right\|_{H^1(\mathbb{R} \times (0, \delta))} \leq C \left( \|g\|_{H^{1/2}(\mathbb{R})} + \|w\|_{H^1(\mathbb{R} \times (0, \delta))} + \|f\|_{L^2(\mathbb{R} \times (0, \delta))} \right).$$

To estimate the second order derivative with respect to  $x_2$  let us recall that

$$\mathcal{P}w = f$$

hence since  $\mathcal{P}$  is coercive there exists a constant  $C > 0$  that depends on the coefficients  $a_{i,j}$  but not on  $\delta$  such that

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right\|_{L^2(\mathbb{R} \times (0, \delta))} &\leq C \left( \|f\|_{L^2(\mathbb{R} \times (0, \delta))} + \left\| \frac{\partial w}{\partial x_1} \right\|_{H^1(\mathbb{R} \times (0, \delta))} \right) \\ &\leq C \left( \|g\|_{H^{1/2}(\mathbb{R})} + \|w\|_{H^1(\mathbb{R} \times (0, \delta))} + \|f\|_{L^2(\mathbb{R} \times (0, \delta))} \right). \end{aligned}$$

Then the result is a consequence of a the classical a priori estimate for  $\|w\|_{H^1(\mathbb{R} \times (0, \delta))}$  that comes from the coercivity of  $\mathcal{P}$ .  $\blacksquare$

Form this regularity Lemma in a strip we obtain a regularity result in  $\mathcal{U}_\delta$  with homogeneous boundary conditions in a first Lemma and then with inhomogeneous boundary conditions in a second Lemma.

**Lemma 8.3.2** *There exists a constant  $C > 0$  independent of  $\delta$  such that for all  $f \in L^2(\mathcal{U}_\delta)$  the unique solution  $w \in H^1(\mathcal{U}_\delta)$  of*

$$\begin{cases} -\Delta w = f \text{ in } \mathcal{U}_\delta, \\ \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} = 0 \text{ on } \Gamma, \\ w = 0 \text{ on } \Gamma_\delta, \end{cases}$$

satisfies the bound

$$\|w\|_{H^2(\mathcal{U}_\delta)} \leq C \|f\|_{L^2(\mathcal{U}_\delta)}.$$

**Proof.** First of all using a classical a priori estimate for the Laplacian we have

$$\|w\|_{H^1(\mathcal{U}_\delta)} \leq C \|f\|_{L^2(\mathcal{U}_\delta)} \quad (8.22)$$

with a constant  $C > 0$  independent of  $\delta$ . To obtain the  $H^2$  bound we will work locally and apply the

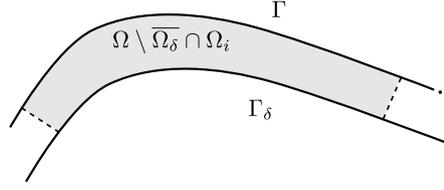


FIGURE 8.1 – Local covering of the layer

Lemma 8.3.1 after having straightened the boundary. Since  $\overline{\mathcal{U}_\delta}$  is compact, there exists an integer  $n$  and a sequence  $(\Omega_i)_{i=1, \dots, n}$  of bounded and connected domains of  $\mathbb{R}^2$  such that  $\overline{\mathcal{U}_\delta} \subset \cup_{i=1}^n \Omega_i$  and this covering is valid for all  $\delta$  sufficiently small. Moreover, we take the  $\Omega_i$  such that for all  $i$  there exists  $s_i > 0$  and a  $C^\infty([-s_i, s_i])$  function  $x_\Gamma$  such that for all  $\delta$  sufficiently small

$$(\mathcal{U}_\delta) \cap \Omega_i = \{x_\Gamma(s) + \eta \mathbf{n}(s), \forall (s, \eta) \in (-s_i, s_i) \times (0, \delta)\}$$

where for all  $s$ ,  $x_\Gamma(s) \in \Gamma$  (see Figure 8.1). In this case and for all  $\delta$  sufficiently small,

$$\begin{aligned} \varphi_i : \quad \overline{(\mathcal{U}_\delta) \cap \Omega_i} &\longrightarrow \widehat{\Omega}_i \\ x &\longmapsto (s, \eta) \end{aligned}$$

is a  $C^2$ -Diffeomorphism where  $\widehat{\Omega}_i := (-s_i, s_i) \times (0, \delta)$ .

Moreover, there exists a sequence of positive  $C^\infty(\mathbb{R}^2)$  functions  $(\phi_i)_{i=1, \dots, n}$  such that  $\text{supp}(\phi_i) \subset \Omega_i$  and  $\sum_i \phi_i = 1$  in  $\overline{\mathcal{U}_\delta}$ . Hence if we define  $w_i := \phi_i w \in H^1(\mathcal{U}_\delta)$  then

$$\|w\|_{H^2(\mathcal{U}_\delta)} \leq \sum_{i=1}^N \|w_i\|_{H^2(\mathcal{U}_\delta)} \quad (8.23)$$

and for every  $i$ ,  $w_i$  is compactly supported in  $\Omega_i$ . Moreover, for all  $i$ ,  $w_i$  solves

$$\begin{cases} -\Delta w_i = f_i & \text{in } \mathcal{U}_\delta, \\ \frac{\partial w_i}{\partial \mathbf{n}} = g_i & \text{on } \Gamma, \\ w_i = 0 & \text{on } \Gamma_\delta, \end{cases}$$

with

$$\begin{aligned} f_i &:= f \phi_i + 2 \nabla w \nabla \phi_i + w \Delta \phi_i, \\ g_i &:= w \frac{\partial \phi_i}{\partial \mathbf{n}}. \end{aligned}$$

In the following, for all function  $U \in L^2((\mathcal{U}_\delta) \cap \Omega_i)$  we denote by  $\tilde{U} \in L^2(\widehat{\Omega}_i)$  the function defined by  $\tilde{U} := U \circ \varphi_i$ . Since the  $W^{2, \infty}$  norm of  $\varphi_i$  and  $\varphi_i^{-1}$  does not depend on  $\delta$  one can prove that there exists a constant  $C > 0$  independent of  $\delta$  such that for all integer  $0 < p \leq 2$  and for all  $U \in H^p((\mathcal{U}_\delta) \cap \Omega_i)$

$$\frac{1}{C} \|\tilde{U}\|_{H^p(\widehat{\Omega}_i)} \leq \|U\|_{H^p((\mathcal{U}_\delta) \cap \Omega_i)} \leq C \|\tilde{U}\|_{H^p(\widehat{\Omega}_i)} \quad (8.24)$$

and for all  $0 < s \leq 2$  and all  $G \in H^s(\Gamma \cap \partial \Omega_i)$

$$\frac{1}{C} \|\tilde{G}\|_{H^s((-s_i, s_i))} \leq \|G\|_{H^s(\Gamma \cap \partial \Omega_i)} \leq C \|\tilde{G}\|_{H^s((-s_i, s_i))}. \quad (8.25)$$

With these notations, we can prove using the computations of section 8.2.2 that  $\tilde{w}_i \in H^1(\widehat{\Omega}_i)$  solves

$$\begin{cases} \mathcal{P} \tilde{w}_i = \tilde{f}_i & \text{in } \widehat{\Omega}_i, \\ (\mathcal{B}_\nu \tilde{w}_i)(s, 0) = \tilde{g}_i(s) & \text{for all } s \in (-s_i, s_i), \\ \tilde{w}_i(s, \delta) = 0 & \text{for all } s \in (-s_i, s_i), \end{cases} \quad (8.26)$$

where  $\tilde{f}_i(s, \eta) := (1 + \eta\kappa(s))(f_i \circ \varphi_i)(s, \eta)$ ,  $\tilde{g}_i(s, \eta) := -(1 + \eta\kappa(s))(g_i \circ \varphi_i)(s, \eta)$  and  $\mathcal{P}$  and  $\mathcal{B}_\nu$  are as in Lemma 8.3.1. Remark that the coercivity constant for  $\mathcal{P}$  does not depend on  $\delta$ . Furthermore since  $\tilde{w}_i$ ,  $\tilde{f}_i$  and  $\tilde{g}_i$  are equal to 0 in a vicinity of  $-s_i$  and  $s_i$  we can extend them by 0 into  $\mathbb{R} \times (0, \delta)$ . We do not change the notations for the extensions and they satisfy the system (8.26) for all  $s \in \mathbb{R}$ . Hence we can apply Lemma 8.3.1 to  $\tilde{w}_i$  and we obtain

$$\|\tilde{w}_i\|_{H^2(\mathbb{R} \times (0, \delta))} \leq C \left( \|\tilde{g}_i\|_{H^{1/2}(\mathbb{R})} + \|\tilde{f}_i\|_{L^2(\mathbb{R} \times (-s_i, s_i))} \right)$$

where  $C$  is independent of  $\delta$  since  $\chi$  is independent of  $\delta$ . By using the equivalence of norms (8.24) and (8.25) and (8.23) together with our first a priori estimate (8.22) we finally obtain the estimate of the Lemma.  $\blacksquare$

If the second hand side is in the boundary condition on  $\Gamma$  we get the following result.

**Lemma 8.3.3** *For any  $g \in H^{1/2}(\Gamma)$  if  $w \in H^1(\mathcal{U}_\delta)$  is solution to*

$$\begin{cases} \Delta w = 0 \text{ in } \mathcal{U}_\delta, \\ \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} = g \text{ on } \Gamma, \\ w = 0 \text{ on } \Gamma_\delta, \end{cases}$$

*then there exists a constant  $C > 0$  such that for all  $\delta > 0$*

$$\|w\|_{H^2(\mathcal{U}_\delta)} \leq C \|g\|_{H^{1/2}(\Gamma)}.$$

*In addition if there exists  $C_g > 0$  such that  $\|g\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \leq C_g$  for all  $\delta > 0$ , then*

$$\|w\|_{H^2(\mathcal{U}_\delta)} \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0.$$

**Proof.** Let us first build a well chosen lifting of  $g$  which is equal to 0 on  $\Gamma_\delta$ . Let us define  $g_i = \phi_i g$  and its local counterpart  $\tilde{g}_i$  using the same partition of unity and local parameterization as in the previous proof. Then we can define an extension of  $\tilde{g}_i$  to  $\mathbb{R}$  that we denote  $\bar{g}_i$  by

$$\bar{g}_i(s) := \begin{cases} \tilde{g}_i(s) & \text{if } s \in [-s_i, s_i], \\ 0 & \text{elsewhere.} \end{cases}$$

For any function  $G \in L^1(\mathbb{R})$  we define its Fourier transform by

$$\mathcal{F}G(\xi) := \int_{\mathbb{R}} G(s) e^{-i2\pi s \xi} ds$$

and the inverse Fourier transform by

$$\mathcal{F}^{-1}G(s) := \int_{\mathbb{R}} G(\xi) e^{i2\pi s \xi} d\xi$$

Since the boundary  $\Gamma$  is  $C^\infty$  and since  $g \in H^{1/2}(\Gamma)$ , from Plancherel Theorem there exists a constant  $C$  independent of  $\delta$  such that

$$\|(1 + \xi^2)^{1/4} \mathcal{F}\bar{g}_i\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq C \|g\|_{H^{1/2}(\Gamma)}. \quad (8.27)$$

For all  $\xi \in \mathbb{R}$  and  $\eta \in [0, \delta]$  let us define

$$w_i(\xi, \eta) := \frac{\mathcal{F}\bar{g}_i(\xi)}{|\xi|} \left( \frac{\sinh(|\xi|(\eta - \delta))}{\cosh(|\xi|\delta)} \right)$$

and

$$\bar{w}_i(s, \eta) := (\mathcal{F}^{-1}w_i)(s, \eta)$$

then  $\bar{w}_i$  satisfies  $\bar{w}_i(s, \delta) = 0$  and  $\frac{\partial \bar{w}_i}{\partial \eta}(s, 0) = \bar{g}_i(s)$  in  $\mathbb{R}$ . Moreover, there exists a constant  $C > 0$  independent of  $\delta$  such that for all  $(\xi, \eta) \in \mathbb{R} \times (0, \delta)$  we have

$$|w_i(\xi, \eta)|^2 \leq C(\mathcal{F}\bar{g}_i(\xi))^2, \quad |\xi w_i(\xi, \eta)|^2 \leq C(\mathcal{F}\bar{g}_i(\xi))^2, \quad \left| \frac{\partial w_i}{\partial \eta}(\xi, \eta) \right|^2 \leq C(\mathcal{F}\bar{g}_i(\xi))^2$$

By integrating these inequalities over  $\mathbb{R} \times (0, \delta)$ , by using the bound (8.27) and the Plancherel Theorem, there exists  $C > 0$  independent of  $\delta$  such that

$$\|\bar{w}_i\|_{H^1(\mathbb{R} \times (0, \delta))}^2 \leq C\delta \|g\|_{H^{1/2}(\Gamma)}^2.$$

Moreover, for all  $(\xi, \eta) \in \mathbb{R} \times (0, \delta)$  we also have

$$\begin{aligned} \xi^2 w_i(\xi, \eta) &= |\xi| \mathcal{F}\bar{g}_i(\xi) \frac{\sinh(|\xi|(\eta - \delta))}{\cosh(|\xi|\delta)}, \\ \xi \frac{\partial w_i}{\partial \eta}(\xi, \eta) &= |\xi| \mathcal{F}\bar{g}_i(\xi) \frac{\cosh(|\xi|(\eta - \delta))}{\cosh(|\xi|\delta)}, \\ \frac{\partial^2 w_i}{\partial \eta^2}(\xi, \eta) &= |\xi| \mathcal{F}\bar{g}_i(\xi) \frac{\sinh(|\xi|(\eta - \delta))}{\cosh(|\xi|\delta)}. \end{aligned}$$

Hence

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \int_0^\delta |\xi|^4 |w_i(\xi, \eta)|^2 d\eta d\xi &= \int_{\mathbb{R}} |\xi|^2 |\mathcal{F}\bar{g}_i(\xi)|^2 \int_0^\delta \frac{\sinh^2(|\xi|(\eta - \delta))}{\cosh^2(|\xi|\delta)} d\eta d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}} |\xi|^2 |\mathcal{F}\bar{g}_i(\xi)|^2 \int_0^\delta \frac{\cosh(2|\xi|(\eta - \delta)) - 1}{2 \cosh(|\xi|\delta)^2} d\eta d\xi \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} |\xi|^2 |\mathcal{F}\bar{g}_i(\xi)|^2 \left( \frac{\sinh(|\xi|\delta)}{|\xi| \cosh(|\xi|\delta)} - \frac{\delta}{\cosh(|\xi|\delta)^2} \right) d\xi \\ &\leq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} |\xi| |\mathcal{F}\bar{g}_i(\xi)|^2 \frac{\sinh(|\xi|\delta)}{\cosh(|\xi|\delta)} d\xi \\ &\leq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} |\xi| |\mathcal{F}\bar{g}_i(\xi)|^2 d\xi, \end{aligned}$$

hence by using (8.27) we have

$$\int_{\mathbb{R}} \int_0^\delta |\xi|^4 |w_i(\xi, \eta)|^2 d\eta d\xi \leq C \|g\|_{H^{1/2}(\Gamma)}^2.$$

We obtain in a similar way that

$$\int_{\mathbb{R}} \int_0^\delta \left| \xi \frac{\partial w_i}{\partial \eta}(\xi, \eta) \right| d\eta d\xi \leq C \|g\|_{H^{1/2}(\Gamma)}^2 \quad \text{and} \quad \int_{\mathbb{R}} \int_0^\delta \left| \frac{\partial^2 w_i}{\partial \eta^2}(\xi, \eta) \right| d\eta d\xi \leq C \|g\|_{H^{1/2}(\Gamma)}^2$$

for another constant  $C$ . Hence, from the Plancherel Theorem we get,

$$\|\bar{w}_i\|_{H^2(\mathbb{R} \times (0, \delta))}^2 \leq C \|g\|_{H^{1/2}(\Gamma)}^2. \quad (8.28)$$

Assume in addition that there exists  $C_g > 0$  such that  $\|g\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \leq C_g$  for all  $\delta > 0$ , then for almost every  $\xi \in \mathbb{R}$ ,

$$|\xi| |\mathcal{F}\bar{g}_i(\xi)|^2 \frac{\sinh(|\xi|\delta)}{\cosh(|\xi|\delta)} \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0$$

and since

$$|\xi| |\mathcal{F}\bar{g}_i(\xi)|^2 \frac{\sinh(|\xi|\delta)}{\cosh(|\xi|\delta)} \leq |\xi| (\mathcal{F}\bar{g}_i(\xi))^2,$$

the Lebesgue dominated convergence theorem implies that

$$\int_{\mathbb{R}} \int_0^\delta |\xi|^4 |w_i(\xi, \eta)|^2 d\eta d\xi \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0$$

We obtain in a similar way that

$$\int_{\mathbb{R}} \int_0^\delta \left| \xi \frac{\partial w_i}{\partial \eta}(\xi, \eta) \right| d\eta d\xi \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0 \quad \text{and} \quad \int_{\mathbb{R}} \int_0^\delta \left| \frac{\partial^2 w_i}{\partial \eta^2}(\xi, \eta) \right| d\eta d\xi \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0.$$

Hence, from the the Plancherel Theorem,

$$\|\bar{w}_i\|_{H^2(\mathbb{R} \times (0, \delta))}^2 \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0. \quad (8.29)$$

Let us go back to the physical domain and define for  $x \in \mathcal{U}_\delta$

$$w_g(x) := \sum_{j \text{ s.t. } x \in \Omega_j} (\bar{w}_j \circ \varphi_j^{-1})(x).$$

then  $w_g$  satisfies  $\frac{\partial w_g}{\partial \mathbf{n}}|_\Gamma = g$  together with  $w_g|_{\Gamma_\delta} = 0$ . Since  $\Gamma$  is  $C^\infty$  and the  $(\bar{w}_i)_i$  satisfy (8.28), there exists a constant  $C > 0$  independent of  $\delta$  such that

$$\|w_g\|_{H^2(\mathcal{U}_\delta)}^2 \leq C \|g\|_{H^{1/2}(\Gamma)}^2. \quad (8.30)$$

If in addition here exists  $C_g > 0$  such that  $\|g\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \leq C_g$  for all  $\delta > 0$ , then from (8.29) we also have

$$\|w_g\|_{H^2(\mathcal{U}_\delta)}^2 \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0. \quad (8.31)$$

Let us consider the function  $W := w - w_g$ .  $W$  solves the following problems

$$\begin{cases} \Delta W = -\Delta w_g \text{ in } \mathcal{U}_\delta, \\ \frac{\partial W}{\partial \mathbf{n}} = 0 \text{ on } \Gamma, \\ W = 0 \text{ on } \Gamma_\delta, \end{cases}$$

From Lemma 8.3.2 there exists a constant  $C$  independent of  $\delta$  such that

$$\|W\|_{H^2(\mathcal{U}_\delta)} \leq C \|w_g\|_{H^2(\mathcal{U}_\delta)}^2.$$

Let us go back to the definition of  $W$  and by using this last estimate together with (8.30) one obtains the existence of a constant  $C$  independent of  $\delta$  such that

$$\|w\|_{H^2(\mathcal{U}_\delta)} \leq C \|g\|_{H^{1/2}(\Gamma)}.$$

and if there exists  $C_g > 0$  such that  $\|g\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \leq C_g$  for all  $\delta > 0$ , then from (8.31)

$$\|w\|_{H^2(\mathcal{U}_\delta)} \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0.$$

■

Let us conclude this section with two trace Lemma with explicit dependence of the constants with respect to  $\delta$ .

**Lemma 8.3.4** *For  $k = 1, 2$ , there exists a constant  $C > 0$  independent of  $\delta$  such that for all  $v \in H^k(\mathcal{U}_\delta)$  with  $v|_{\Gamma_\delta} = 0$*

$$\|v\|_{H^{k-1/2}(\Gamma)} \leq C \|v\|_{H^k(\mathcal{U}_\delta)}.$$

**Proof.** We prove the result for the domain  $\mathbb{R} \times (0, \delta)$  and using the partition of unity and the change of variable introduced in the proof of Lemma 8.3.2 we will obtain the desired result. Take some  $v \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$  with compact support in  $\mathbb{R}^2$ . Let us denote as before by  $\mathcal{F}v$  the Fourier transform of  $v$  along the first variable and by  $\xi$  the dual variable. Using integration by part, we have for all  $\xi \in \mathbb{R}$

$$(1 + \xi^2)^{2(k-1/2)} |\mathcal{F}v(\xi, 0)|^2 = (1 + \xi^2)^{2(k-1/2)} |\mathcal{F}v(\xi, \delta)|^2 - 2\mathcal{R}e \left( \int_0^\delta (1 + \xi^2)^{k-1} \frac{\partial \mathcal{F}v}{\partial \eta}(\xi, \eta) (1 + \xi^2)^k \overline{\mathcal{F}v(\xi, \eta)} d\eta \right).$$

By integrating this equality along  $\mathbb{R}$  and using the Cauchy-Schwartz inequality and the Plancherel Theorem we obtain the existence of  $C > 0$  independent of  $\delta$  such that

$$\|v(s, 0)\|_{H^{k-1/2}(\mathbb{R})} \leq C \left( \|v\|_{H^k(\mathbb{R} \times (0, \delta))} + \|v(s, \delta)\|_{H^{k-1/2}(\mathbb{R})} \right).$$

A density argument gives the validity of this formula for all  $v \in H^2(\mathbb{R} \times (0, \delta))$  and we obtain the result of the Lemma for  $v$  whose trace is 0 on  $\mathbb{R} \times \{\delta\}$ . ■

**Lemma 8.3.5** *For any function  $w \in H^1(\mathcal{U}_\delta)$  we have*

$$\|w\|_{L^2(\mathcal{U}_\delta)} \leq C(\delta^{1/2} \|w\|_{L^2(\Gamma)} + \delta \|w\|_{H^1(\mathcal{U}_\delta)}). \quad (8.32)$$

*For any function  $w \in H^2(\mathcal{U}_\delta)$  such that  $w|_{\Gamma_\delta} = 0$  there exists a constant  $C$  such that for all  $\delta \leq \eta_0$*

$$\|w\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \leq C\delta^{1/2} \|w\|_{H^2(\mathcal{U}_\delta)}. \quad (8.33)$$

**Proof of Lemma 8.3.5** Let us begin with the first inequality. Take  $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$  then using local variables in the layer we have for every  $\eta \leq \delta$

$$\tilde{\phi}(s, \eta) = \tilde{\phi}(s, 0) + \int_0^\eta \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t}(s, t) dt ds.$$

Whence, using the Cauchy-Schwartz inequality

$$|\tilde{\phi}(s, \eta)|^2 \leq C \left( |\tilde{\phi}(s, 0)|^2 + \delta \|\phi\|_{H^1(\mathcal{U}_\delta)}^2 \right)$$

and we obtain the desired estimate for  $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$  by integrating this inequality over  $\Gamma \times [0, \delta]$ . A density argument gives the result for all  $w \in H^1(\mathcal{U}_\delta)$ .

Let us prove the second inequality. Take  $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$  and again using local variables in the layer we have for all  $s \in [0, s_0]$

$$|\tilde{\phi}(s, 0)| \leq |\tilde{\phi}(s, \delta)| + \left| \int_0^\delta \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \eta}(s, \eta) d\eta \right| \leq |\tilde{\phi}(s, \delta)| + \delta^{1/2} \|\phi\|_{H^1(\mathcal{U}_\delta)}$$

which leads to

$$\|\phi\|_{L^2(\Gamma)} \leq C \left( \|\phi\|_{L^2(\Gamma_\delta)} + \delta^{1/2} \|\phi\|_{H^1(\mathcal{U}_\delta)} \right)$$

for some positive C. Similarly we prove that

$$\|\nabla_\Gamma \phi\|_{L^2(\Gamma)} \leq C \left( \|\nabla_\Gamma \phi\|_{L^2(\Gamma_\delta)} + \delta^{1/2} \|\phi\|_{H^2(\mathcal{U}_\delta)} \right).$$

By density, these two inequalities remain true for all  $w \in H^2(\mathcal{U}_\delta)$  and by interpolation we obtain the result of the Lemma when  $w|_{\Gamma_\delta} = 0$ . ■

We gather the technical Lemmas here above into the two next propositions.

**Proposition 8.3.6** *Let  $v_\delta \in H^2(\Omega)$  and  $w_\delta \in H^2(\mathcal{U}_\delta)$  be such that for some  $s \geq 0$*

$$\begin{cases} \|\Delta w_\delta\|_{L^2(\mathcal{U}_\delta)} \leq \mathcal{O}(\delta^s) & (8.34a) \\ w_\delta = 0 \text{ on } \Gamma_\delta & \\ \|\Delta v_\delta\|_{L^2(\Omega)} \leq \mathcal{O}(\delta^s) & (8.34b) \\ \left\| \frac{\partial v_\delta}{\partial \mathbf{n}} - \frac{\partial w_\delta}{\partial \mathbf{n}} \right\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \leq \mathcal{O}(\delta^s) & (8.34c) \\ \|v_\delta - w_\delta\|_{H^{3/2}(\Gamma)} \leq \mathcal{O}(\delta^s) & (8.34d) \end{cases}$$

then

$$\|w_\delta\|_{H^2(\mathcal{U}_\delta)} \leq \mathcal{O}(\delta^s) \text{ and } \|w_\delta\|_{L^2(\mathcal{U}_\delta)} \leq \mathcal{O}(\delta^{s+1}).$$

**Proof.** Let us first prove by contradiction that  $\|w_\delta\|_{H^2(\mathcal{U}_\delta)} \leq \mathcal{O}(\delta^s)$ . Assume that this is not true, then

$$\gamma_\delta := \delta^s \|w_\delta\|_{H^2(\mathcal{U}_\delta)}^{-1} \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0.$$

Since  $w_\delta$  is in  $H^2(\Omega_\delta)$  and since  $\|v_\delta - w_\delta\|_{H^{3/2}(\Gamma)} \leq \mathcal{O}(\delta^s)$ , from elliptic regularity for the Laplacian with Dirichlet boundary condition there exists a constant  $C$  independent of  $\delta$  such that

$$\|v_\delta\|_{H^2(\Omega)} \leq C \left( \|\Delta v_\delta\|_{L^2(\Omega)} + \|w_\delta\|_{H^{3/2}(\Gamma)} + \mathcal{O}(\delta^s) \right)$$

and by using (8.34b), the trace Lemma 8.3.4 and the fact that  $\gamma_\delta$  is bounded when  $\delta$  goes to 0 we deduce that

$$\frac{\|v_\delta\|_{H^2(\Omega)}}{\|w_\delta\|_{H^2(\mathcal{U}_\delta)}} \leq \frac{1}{\|w_\delta\|_{H^2(\mathcal{U}_\delta)}} \left( \mathcal{O}(\delta^s) + C\|w_\delta\|_{H^2(\mathcal{U}_\delta)} + \mathcal{O}(\delta^s) \right) \leq C$$

for  $C > 0$  independent of  $\delta$ . Hence by (8.34c) we deduce that

$$\frac{1}{\|w_\delta\|_{H^2(\mathcal{U}_\delta)}} \left\| \frac{\partial w_\delta}{\partial \mathbf{n}} \right\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \leq C$$

and by applying Lemma 8.3.2 and Lemma 8.3.3 to the function  $w_\delta / \|w_\delta\|_{H^2(\mathcal{U}_\delta)}$  there exists a constant  $C > 0$  independent of  $\delta$  such that

$$1 \leq C \left( \frac{\|\Delta w_\delta\|_{L^2(\mathcal{U}_\delta)}}{\|w_\delta\|_{H^2(\mathcal{U}_\delta)}} + \varepsilon(\delta) \right)$$

where  $\varepsilon(\delta) \rightarrow 0$  when  $\delta$  goes to 0. Hence by using (8.34a) since  $\gamma_\delta = \delta^s \|w_\delta\|_{H^2(\mathcal{U}_\delta)}^{-1}$  goes to 0 when  $\delta$  goes to 0 we get

$$1 \leq \varepsilon(\delta) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0.$$

The first estimate of the Lemma holds and then a use of (8.32) together with (8.33) gives the second estimate.  $\blacksquare$

**Proposition 8.3.7** *Let  $w_\delta \in H^2(\mathcal{U}_\delta)$  be such that for some  $s \geq 0$  we have*

$$\|\Delta w_\delta\|_{L^2(\mathcal{U}_\delta)} \leq \mathcal{O}(\delta^s)$$

and

$$w_\delta = 0 \text{ on } \Gamma_\delta, \quad \left\| \frac{\partial w_\delta}{\partial \mathbf{n}} \right\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \leq \mathcal{O}(\delta^{s+1/2})$$

then

$$\|w_\delta\|_{H^1(\mathcal{U}_\delta)} \leq \mathcal{O}(\delta^{s+1/2}) \text{ and } \|w_\delta\|_{L^2(\mathcal{U}_\delta)} \leq \mathcal{O}(\delta^{s+1}).$$

**Proof.** First of all, by (8.32) and the trace Lemma 8.3.4 there exists  $C > 0$  such that for small  $\delta > 0$  we have

$$\|w_\delta\|_{L^2(\mathcal{U}_\delta)} \leq C\delta^{1/2}\|w_\delta\|_{H^1(\mathcal{U}_\delta)}.$$

A Green formula inside  $\mathcal{U}_\delta$  gives

$$\int_{\mathcal{U}_\delta} |\nabla w_\delta|^2 dx = \int_{\mathcal{U}_\delta} -\Delta w_\delta w_\delta dx - \int_\Gamma \frac{\partial w_\delta}{\partial \mathbf{n}} w_\delta ds$$

and by using the assumptions of the Lemma and the inequality here above we get

$$\int_{\mathcal{U}_\delta} |\nabla w_\delta|^2 \leq \mathcal{O}(\delta^{s+1/2})\|w_\delta\|_{H^1(\mathcal{U}_\delta)}$$

which give the first estimate. We obtain the second one by using (8.32).  $\blacksquare$

### 8.3.2 Convergence of the zero-th order approximation

**Theorem 8.3.8** *Let  $\lambda_\delta^1$  be the first real interior transmission eigenvalue, then*

$$\lambda_\delta^1 = \lambda_0 + \mathcal{O}(\delta).$$

**Proof.** On the first hand, for  $\lambda < \lambda_0$  (we recall that  $\lambda_0$  is the first Dirichlet eigenvalue for  $-\Delta$  in  $\Omega$ ) the operator  $A_\lambda - \lambda^2 B$  is injective. Indeed for all  $u \in W_\delta$ ,

$$\begin{aligned} ((A_\lambda - \lambda^2)Bu, u)_{W_\delta} &= \int_{\mathcal{U}_\delta} \frac{1}{1-n} |\Delta u + \lambda u| dx - \lambda^2 \int_\Omega |u|^2 dx + \lambda \int_\Omega |\nabla u|^2 dx \\ &\geq \lambda \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_0}\right) \end{aligned}$$

by the Poincaré inequality. Hence we necessarily have

$$\lambda_0 \leq \lambda_\delta^1.$$

On the other hand we can characterize  $\lambda_\delta^1$  with the so called max-min principle

$$\begin{aligned} 2(\lambda_\delta^1)^2 &= \inf_{u \in W, \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 = 1} (A_{\lambda_\delta^1} u, u)_{W_\delta} \\ &= \inf_{u \in W, \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 = 1} \int_{\mathcal{U}_\delta} \frac{1}{1-n} |\Delta u + \lambda_\delta^1 u|^2 dx + (\lambda_\delta^1)^2 + \lambda_\delta^1 \int_\Omega |\nabla u|^2 dx. \end{aligned}$$

Now if we take  $u = u_{\delta,D}^1$  where  $u_{\delta,D}^1$  the first Dirichlet eigenvector for  $-\Delta$  in  $\Omega_\delta$  associated to the eigenvalue  $\lambda_{\delta,D}^1$  extended by 0 outside  $\Omega_\delta$  such that  $\|u_{\delta,D}^1\|_{L^2(\Omega_\delta)} = 1$  we obtain

$$(\lambda_\delta^1)^2 \leq \lambda_\delta^1 \lambda_{\delta,D}^1$$

or equivalently

$$\lambda_\delta^1 \leq \lambda_{\delta,D}^1$$

since  $\lambda_\delta^1$  is bounded below. To conclude let us simply remark that the first Dirichlet eigenvalue for  $-\Delta$  is Fréchet differentiable with respect to the shape (see [52]). A consequence of this result is that there exists a constant  $C > 0$  such that for all  $\delta$  sufficiently small

$$|\lambda_{\delta,D}^1 - \lambda_0| \leq C\delta.$$

This point together with the lower and upper bounds given here above for  $\lambda_\delta^1$  ends the proof.  $\blacksquare$

### 8.3.3 Convergence of the first order approximation

To go further in the estimate of the expansion of the eigenvalue we have to prove some estimate on the first order approximation for the eigenvectors. Let us define

$$e_w^1 := w_\delta^1 - \delta w_1 \quad \text{in } \mathcal{U}_\delta$$

extended by 0 in  $\Omega_\delta$  and

$$e_v^1 := v_\delta^1 - v_0 \quad \text{in } \Omega$$

where  $v_0$  is a solution to (8.12) such that  $\|v_0\|_{L^2(\Omega)} = 1$  and  $w_1(x) := \hat{w}_1(s, \xi)$ . We also extend  $w_\delta^1$  by 0 inside  $\Omega_\delta$ . Remark that since  $w_\delta^1$  and  $w_1$  vanish on  $\Gamma_\delta$ , the functions  $e_w^1$  and  $w_\delta^1$  are continuous across the interface  $\Gamma_\delta$ . Let us begin with a Lemma that provides a priori estimates for the function  $w_\delta^1$ . Then we prove estimates for the first order approximation of  $w_\delta^1$  and  $v_\delta^1$ .

**Lemma 8.3.9** *There exists a constant  $C > 0$  such that for all small  $\delta > 0$ ,*

$$\|w_\delta^1\|_{H^2(\mathcal{U}_\delta)} \leq C \quad \text{and} \quad \|w_\delta^1\|_{L^2(\mathcal{U}_\delta)} \leq \mathcal{O}(\delta).$$

**Proof.** We prove that the Proposition 8.3.6 applies to  $(v_\delta^1, w_\delta^1)$  for  $s = 0$ . First of all, since

$$2(\lambda_\delta^1)^2 = (A_{\lambda_\delta^1} u_\delta^1, u_\delta^1)_{W_\delta}$$

and  $A_{\lambda_\delta^1}$  is coercive with a coercivity constant independent of  $\delta$  (see Proposition 8.1.3) there exists a constant  $C$  independent of  $\delta$  such that

$$\|u_\delta^1\|_{H^1(\Omega)} + \|\Delta u_\delta^1\|_{L^2(\mathcal{U}_\delta)} \leq C.$$

A straightforward consequence of this bound is that there exists another constant  $C$  still independent of  $\delta$  such that

$$\|w_\delta^1\|_{L^2(\mathcal{U}_\delta)} \leq C \quad \text{and} \quad \|v_\delta^1\|_{L^2(\Omega)} \leq C.$$

Since  $-\Delta w_\delta^1 = \lambda_\delta^1 n w_\delta^1$ , by using Proposition 8.3.6 with  $s = 0$ , there exists  $C > 0$  such that

$$\|w_\delta^1\|_{H^2(\mathcal{U}_\delta)} \leq C$$

and

$$\|w_\delta^1\|_{L^2(\mathcal{U}_\delta)} \leq \mathcal{O}(\delta).$$

■

**Proposition 8.3.10** *We have the following error estimate*

$$\|e_v^1\|_{H^1(\Omega)} \leq \mathcal{O}(\delta)$$

and

$$\|e_w^1\|_{H^1(\Omega)} \leq \mathcal{O}(\delta), \quad \|e_w^1\|_{L^2(\Omega)} \leq \mathcal{O}(\delta^{3/2}). \quad (8.35)$$

**Proof.** The idea of the proof is to establish that  $v_\delta^1$  is an approximate eigenvector for  $-\Delta$  in the domain  $\Omega$  and apply Lemma 8.5.2. With the first estimate of Lemma 8.3.9 and inequality (8.33) we know that the trace of  $w_\delta^1$  on  $\Gamma$  satisfies

$$\|w_\delta^1\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \leq \mathcal{O}(\delta^{1/2}).$$

Let  $\theta_{w_\delta^1}$  be a lifting of  $w_\delta^1$  in  $H^1(\Omega)$  such that  $\theta_{w_\delta^1}|_\Gamma = w_\delta^1|_\Gamma$  then  $\|\theta_{w_\delta^1}\|_{H^1(\Omega)} \leq \mathcal{O}(\delta^{1/2})$ . Define  $\bar{v}_\delta^1 := v_\delta^1 - \theta_{w_\delta^1}$  and let us prove that  $\bar{v}_\delta^1$  is close to  $v_0$ . For all  $\psi \in H_0^1(\Omega)$

$$\begin{aligned} \left| \int_\Omega \nabla \bar{v}_\delta^1 \cdot \nabla \psi - \lambda_0 \bar{v}_\delta^1 \psi \, dx \right| &= \left| (\lambda_\delta^1 - \lambda_0) \int_\Omega v_\delta^1 \psi \, dx - \int_\Omega (\nabla \theta_{w_\delta^1} \cdot \nabla \psi - \lambda_0 \theta_{w_\delta^1} \psi) \, dx \right| \\ &\leq \mathcal{O}(\delta^{1/2}) \|\psi\|_{H^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Moreover since  $\|u_\delta^1\|_{L^2(\Omega)} = 1$ , from estimate (8.35)

$$\left| \|\bar{v}_\delta^1\|_{L^2(\Omega)} - 1 \right| \leq \mathcal{O}(\delta) \quad (8.36)$$

hence in virtue of Lemma 8.5.2 there exists  $C > 0$  and  $v_0$  solution to (8.12) with  $\|v_0\|_{L^2(\Omega)} = 1$  such that for all  $\delta$  sufficiently small we have

$$\|\bar{v}_\delta^1 - v_0\|_{H^1(\Omega)} \leq \mathcal{O}(\delta).$$

Remark that this last inequality uniquely determines the function  $v_0$ . From the definition of  $\bar{v}_\delta^1$  and the bound on the lifting this becomes

$$\|e_v^1\|_{H^1(\Omega)} \leq \mathcal{O}(\delta^{1/2}).$$

Hence

$$\left\| \frac{\partial e_w^1}{\partial \mathbf{n}} \right\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} = \left\| \frac{\partial e_v^1}{\partial \mathbf{n}} \right\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \leq \mathcal{O}(\delta^{1/2}).$$

But, from the definition of  $w_1$  which solves (8.10a) we have

$$\Delta w_1 = \frac{1}{(1 + \delta \xi \kappa)^3} \left( \sum_{k=0}^5 \delta^{k-2} A_k \hat{w}_1 - \lambda_\delta^1 \varepsilon \hat{w}_1 \right)$$

and we obtain since  $v_0$  is regular and  $A_0 \hat{w}_1 = 0$  :

$$\|\Delta w_1\|_{L^2(\mathcal{U}_\delta)} \leq C(\delta^{-1/2} \|A_1 \hat{w}_1\|_{L^2(\mathcal{G})} + \delta^{1/2} \|\hat{w}_1\|_{L^2(\mathcal{G})}) \leq C\delta^{-1/2}. \quad (8.37)$$

Hence

$$\|\Delta e_w^1\|_{L^2(\mathcal{U}_\delta)} \leq \mathcal{O}(\delta^{1/2}) \quad (8.38)$$

and we also have

$$\|\Delta e_v^1\|_{L^2(\Omega)} \leq \mathcal{O}(\delta^{1/2}), \quad \left\| \frac{\partial e_v^1}{\partial \mathbf{n}} - \frac{\partial e_w^1}{\partial \mathbf{n}} \right\|_{H^{1/2}(\Gamma)} = 0 \quad \text{and} \quad \|e_v^1 - e_w^1\|_{H^{3/2}(\Gamma)} = \|\delta w_1\|_{H^{3/2}(\Gamma)} \leq \mathcal{O}(\delta)$$

hence by applying Proposition 8.3.6 we have

$$\|e_w^1\|_{H^2(\mathcal{U}_\delta)} \leq \mathcal{O}(\delta^{1/2})$$

and then by using (8.33) for  $e_w^1$  we improve the bound on  $w_\delta^1$

$$\|w_\delta^1\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \leq \mathcal{O}(\delta)$$

since  $\|w_1\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \leq C$  for all  $\delta > 0$ . By repeating the first steps of the proof we improve the bound on  $e_v^1$  :

$$\|e_v^1\|_{H^1(\Omega)} \leq \mathcal{O}(\delta).$$

Then, this last inequality together with (8.38) and the fact that

$$\frac{\partial e_v^1}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial e_w^1}{\partial \mathbf{n}} \quad \text{on } \Gamma$$

we obtain the bounds for  $e_w^1$  thanks to Proposition 8.3.7. ■

A consequence of the error estimates derived in Proposition 8.3.10 is the following result.

**Corollary 8.3.11** *The following asymptotic development holds for the first interior transmission eigenvalue*

$$\lambda_\delta^1 = \lambda_0 + \delta\lambda_1 + \mathcal{O}(\delta^2).$$

**Proof.** Denote by  $u_\delta^1$  the first interior transmission eigenvector of unitary  $L^2$ -norm. Then

$$(\lambda_\delta^1)^2 = \int_{\mathcal{U}_\delta} \frac{1}{1-n} |\Delta u_\delta^1 + \lambda_\delta^1 u_\delta^1|^2 dx + \lambda_\delta^1 \int_{\Omega} |\nabla u_\delta^1|^2 dx.$$

and by using the function  $w_\delta^1$  this becomes

$$\lambda_\delta^1 = \int_{\mathcal{U}_\delta} \lambda_1^\delta (1-n) |w_\delta^1|^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla u_\delta^1|^2 dx. \quad (8.39)$$

From the third inequality of Proposition 8.3.10 the first term is of order  $\delta^3$ , we just have to develop the second one :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla u_\delta^1|^2 dx &= \int_{\Omega} |\nabla(e_w^1 - e_v^1 - v_0 + \delta w_1)|^2 dx \\ &= \int_{\Omega} |\nabla e_w^1|^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla e_v^1|^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla v_0|^2 + \delta^2 \int_{\mathcal{U}_\delta} |\nabla w_1|^2 dx \\ &\quad - 2 \int_{\Omega} \nabla v_0 \nabla(w_\delta^1 - e_v^1) dx + 2\delta \int_{\Omega} \nabla(e_w^1 - e_v^1) \nabla w_1 dx - 2 \int_{\Omega} \nabla e_v^1 \nabla e_w^1 dx. \end{aligned}$$

First of all remark that from Propositions 8.3.10 we have

$$\int_{\Omega} |\nabla e_v^1|^2 dx \leq \mathcal{O}(\delta^2), \quad \int_{\Omega} |\nabla e_w^1|^2 dx \leq \mathcal{O}(\delta^2) \quad \text{and} \quad \int_{\Omega} \nabla e_v^1 \nabla e_w^1 dx \leq \mathcal{O}(\delta^2).$$

Moreover, from the definition of  $v_0$  we have

$$\int_{\Omega} |\nabla v_0|^2 = \lambda_0,$$

and from the definition of  $w_1$

$$\delta^2 \int_{\mathcal{U}_\delta} |\nabla w_1|^2 dx = \delta^2 \int_0^{s_0} \left( \left| \frac{\partial v_0}{\partial \mathbf{n}} \right|^2 \int_0^\delta \frac{1}{\delta^2} J_{s,\eta} d\eta \right) ds + \mathcal{O}(\delta^2) = \delta\lambda_1 + \mathcal{O}(\delta^2).$$

But we also know that  $\|u_\delta^1\|_{L^2(\Omega)} = 1$  that is

$$1 = \int_{\Omega} |u_\delta^1|^2 dx = \int_{\Omega} |u_\delta^1 + v_0|^2 + 2(u_\delta^1 + v_0)v_0 + |v_0|^2 dx.$$

The bounds of Proposition 8.3.10, gives that  $\|u_\delta^1 + v_0\|_{L^2(\Omega)} \leq \mathcal{O}(\delta)$  hence since  $\|v_0\|_{L^2(\Omega)} = 1$ ,

$$\left| \int_{\Omega} v_0(u_\delta + v_0) dx \right| \leq \mathcal{O}(\delta^2). \quad (8.40)$$

But  $v_0$  is a Dirichlet eigenvalue for  $-\Delta$ ,

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} \nabla v_0 \nabla(w_\delta^1 - e_v^1) dx \right| &= \left| \int_{\Omega} \nabla v_0 \nabla(u_\delta + v_0) dx \right| \\ &= \lambda_0 \left| \int_{\Omega} v_0(u_\delta + v_0) dx \right| \\ &\leq \mathcal{O}(\delta^2) \end{aligned}$$

from (8.40). Finally let us also remark that

$$\int_{\mathcal{U}_\delta} \nabla(e_w^1 - e_v^1) \nabla w_1 dx = \int_{\mathcal{U}_\delta} -\Delta(e_w^1 - e_v^1) w_1 dx - \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} (e_w^1 - e_v^1) w_1 ds$$

and since  $\frac{\partial e_w^1}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial e_v^1}{\partial \mathbf{n}}$  we have

$$\int_{\mathcal{U}_\delta} \nabla(e_w^1 - e_v^1) \nabla w_1 dx = \int_{\mathcal{U}_\delta} -\Delta(e_w^1 - e_v^1) w_1 dx. \quad (8.41)$$

But

$$\begin{aligned} \|\Delta(e_w^1 - e_v^1)\|_{L^2(\mathcal{U}_\delta)} &\leq \|-\lambda_\delta^1 u_\delta^1 + (n-1)w_\delta^1 + \lambda_0 v_0\|_{L^2(\mathcal{U}_\delta)} + \mathcal{O}(\delta^{1/2}) \\ &\leq C\delta^{1/2} \end{aligned}$$

from Theorem 8.3.8, Proposition 8.3.10 and relations (8.35) and (8.37). This last estimate together with equality (8.41) and  $\|w_1\|_{L^2(\mathcal{U}_\delta)} \leq C\delta^{1/2}$  gives

$$\int_{\mathcal{U}_\delta} \nabla(e_w^1 - e_v^1) \nabla w_1 dx \leq C\delta.$$

If we gather all these computations in the expression (8.39) of  $\lambda_\delta^1$  we obtain

$$\lambda_\delta^1 = \lambda_0 + \delta\lambda_1 + \mathcal{O}(\delta^2).$$

■

### 8.3.4 Convergence of the second order approximation

Before moving to the convergence for the eigenvalues we need to improve the convergence for eigenfunctions. This is possible by adding correcting terms to  $v_\delta^1$  and  $w_\delta^1$ . Let us consider the following error functions

$$e_w^2 := w_\delta^1 - C_\delta^1(\delta w_1 + \delta^2 w_2) \quad \text{in } \mathcal{U}_\delta$$

extended by 0 in  $\Omega_\delta$  and

$$e_v^2 := v_\delta^1 - C_\delta^1(v_0 + \delta v_1) \quad \text{in } \Omega$$

where  $w_2(x) := \hat{w}_2(s, \xi)$  and  $v_1$  are defined in section 8.2.2 and  $C_\delta^1 := \|u_\delta^1 + \delta v_1\|_{L^2(\Omega)}$ . As before, the error  $e_w^2$  is continuous across the interface  $\Gamma_\delta$  since it vanishes on  $\Gamma_\delta$ . Remark that since  $\|u_\delta^1\|_{L^2(\Omega)} = 1$  we have

$$C_\delta^1 = 1 + \mathcal{O}(\delta). \quad (8.42)$$

We proceed as in Proposition 8.3.10 by giving a first estimate on  $e_w^2$  that provide a  $H^1$  bound for  $e_w^2$  and then iterate to obtain the optimal bounds for  $e_w^2$  and  $e_v^2$ .

**Lemma 8.3.12** *There is a constant  $C > 0$  such that for all  $\delta$  sufficiently small*

$$\|e_w^2\|_{H^2(\mathcal{U}_\delta)} \leq C\delta \quad \text{and} \quad \|e_w^2\|_{L^2(\mathcal{U}_\delta)} \leq C\delta^2.$$

**Proof.** First of all, let us recall (8.35)

$$\|w_\delta^1\|_{L^2(\mathcal{U}_\delta)} \leq C\delta^{3/2}$$

and by using the definition of  $w_1$  and  $w_2$  we have

$$\|w_1\|_{L^2(\mathcal{U}_\delta)} \leq C\delta^{1/2}, \quad \|w_2\|_{L^2(\mathcal{U}_\delta)} \leq C\delta^{1/2}. \quad (8.43)$$

Moreover,

$$\Delta(w_1 + \delta w_2) = \frac{1}{(1 + \delta \xi \kappa)^3} \left( \sum_{k=0}^5 \delta^{k-2} A_k(\hat{w}_1 + \delta \hat{w}_2) - \lambda_\delta^1 \varepsilon(\hat{w}_1 + \delta \hat{w}_2) \right)$$

but  $A_0 \hat{w}_1 = 0$  and  $A_0 \hat{w}_2 + A_1 \hat{w}_1 = 0$  hence

$$\Delta(w_1 + \delta w_2) = \frac{1}{(1 + \delta \xi \kappa)^3} \left( A_1 \hat{w}_2 - \lambda_\delta^1 n(\hat{w}_1 + \delta \hat{w}_2) + \sum_{k=2}^5 \delta^{k-2} A_k(\hat{w}_1 + \delta \hat{w}_2) \right)$$

and we obtain

$$\|\Delta e_w^2\|_{L^2(\mathcal{U}_\delta)} \leq C\delta^{3/2}. \quad (8.44)$$

Moreover

$$\|e_w^2 - e_v^2\|_{H^{3/2}(\Gamma)} = \|C_\delta^1 \delta^2 w_2\|_{H^{3/2}(\Gamma)} \leq C\delta^2,$$

$$\frac{\partial e_w^2}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial e_v^2}{\partial \mathbf{n}} \quad \text{on } \Gamma,$$

and

$$\|\Delta e_v^2\|_{L^2(\Omega)} \leq \mathcal{O}(\delta)$$

hence by applying Proposition 8.3.6 with  $s = 1$  we get the result.  $\blacksquare$

Similarly to the previous section we obtain the optimal convergence rates.

**Proposition 8.3.13** *We have the following asymptotic behaviours*

$$\|e_v^2\|_{H^1(\Omega)} \leq C\delta^{3/2},$$

and

$$\|e_w^2\|_{H^1(\Omega)} \leq \mathcal{O}(\delta^{3/2}), \quad \|e_w^2\|_{L^2(\mathcal{U}_\delta)} \leq \mathcal{O}(\delta^{5/2}).$$

**Proof.** We proceed exactly as in the proof of Proposition 8.3.10. Define  $v_2 := (C_\delta^1)^{-1}(v_\delta^1 - \delta v_1)$ . Then since  $C_\delta^1 = 1 + \mathcal{O}(\delta)$ ,

$$\begin{aligned} v_2|_\Gamma &= (C_\delta^1)^{-1}(v_\delta^1|_\Gamma - \delta v_1|_\Gamma - \delta^2 v_2|_\Gamma) + (C_\delta^1)^{-1} \delta^2 v_2|_\Gamma \\ &= (C_\delta^1)^{-1}(v_\delta^1|_\Gamma - C^\delta(\delta v_1|_\Gamma - \delta^2 v_2|_\Gamma)) + \mathcal{O}(\delta^2) \\ &= (C_\delta^1)^{-1} e_w^2 + \mathcal{O}(\delta^2) \end{aligned}$$

and by (8.33) together with Lemma 8.3.12 there exists  $C > 0$  independent of  $\delta$  such that

$$\|v_2\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \leq C\delta^{1/2} \|e_w^2\|_{H^2(\mathcal{U}_\delta)} + \mathcal{O}(\delta^2) \leq C\delta^{3/2}.$$

Let us denote  $\theta_{v_2}$  a lifting of  $v_2$  in  $\Omega$  such that  $\theta_{v_2}|_\Gamma = v_2|_\Gamma$  and  $\|\theta_{v_2}\|_{H^1(\Omega)} \leq C\delta^{3/2}$  and consider  $\bar{v}_2 := v_2 - \theta_{v_2}$ . Obviously  $\bar{v}_2 \in H_0^1(\Omega)$  and for all  $\psi \in H_0^1(\Omega)$  we have

$$\int_\Omega \nabla \bar{v}_2 \cdot \nabla \psi - \lambda_0 \bar{v}_2 \psi \, dx = \int_\Omega \nabla v_2 \cdot \nabla \psi - \lambda_0 v_2 \psi \, dx - \int_\Omega \nabla \theta_{v_2} \cdot \nabla \psi + \lambda_0 \theta_{v_2} \psi \, dx.$$

We can treat the second term easily by using the bound on the lifting

$$\left| \int_\Omega \nabla \theta_{v_2} \cdot \nabla \psi + \lambda_0 \theta_{v_2} \psi \, dx \right| \leq C\delta^{3/2} \|\psi\|_{H^1(\Omega)}.$$

Let us treat the the  $v_2$  term. For all  $\psi \in H_0^1(\Omega)$  one has by using Corollary 8.3.11 and Proposition 8.3.10

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla(v_{\delta}^1 - \delta v_1) \cdot \nabla \psi \, dx &= \lambda_{\delta}^1 \int_{\Omega} v_{\delta}^1 \psi \, dx - \delta \lambda_0 \int_{\Omega} v_1 \psi \, dx - \delta \lambda_1 \int_{\Omega} v_0 \psi \, dx \\ &= (\lambda_0 + \delta \lambda_1) \int_{\Omega} v_{\delta}^1 \psi \, dx - \delta \lambda_0 \int_{\Omega} v_1 \psi \, dx - \delta \lambda_1 \int_{\Omega} v_0 \psi \, dx + \mathcal{O}(\delta^2) \|\psi\|_{H^1(\Omega)} \\ &= \lambda_0 \int_{\Omega} (v_{\delta}^1 - \delta v_1) \psi \, dx + \mathcal{O}(\delta^2) \|\psi\|_{H^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

By using (8.42) we finally obtain for another constant  $C$  still independent of  $\delta$

$$\left| \int_{\Omega} (\nabla v_2 \cdot \nabla \psi - \lambda_0 v_2 \psi) \, dx \right| \leq C \delta^2 \|\psi\|_{H^1(\Omega)}$$

for all  $\psi \in H_0^1(\Omega)$ . We can apply Lemma 8.5.2 to  $\bar{v}_2$  since

$$\|v_2\|_{L^2(\Omega)} = (C_{\delta}^1)^{-1} \|u_{\delta}^1 + \delta v_1\|_{L^2(\mathcal{U}_{\delta})} + (C_{\delta}^1)^{-1} \|w_{\delta}\|_{L^2(\mathcal{U}_{\delta})} = 1 + \mathcal{O}(\delta^{3/2})$$

and we have

$$\|\bar{v}_2 - v_0\|_{H^1(\Omega)} \leq C \delta^{3/2}.$$

But by using the bound on the lifting and (8.42) this becomes

$$\|v_{\delta}^1 - C_{\delta}^1 v_0 - C_{\delta}^1 \delta v_1\|_{H^1(\Omega)} \leq C \delta^{3/2}.$$

Hence, we can improve the bound on  $e_w^2$ , since

$$\|\Delta e_v^2\|_{L^2(\Omega)} \leq \mathcal{O}(\delta^{3/2})$$

we can apply Proposition 8.3.6 with  $s = 3/2$  and

$$\|e_w^2\|_{H^2(\mathcal{U}_{\delta})} \leq \mathcal{O}(\delta^{3/2}) \quad \|e_w^2\|_{L^2(\mathcal{U}_{\delta})} \leq \mathcal{O}(\delta^{5/2}).$$

■

**Remark 8.3.14** *Similarly to Proposition 8.3.10 we can improve the bound on  $e_v^2$  if we choose*

$$C_{\delta}^1 = \|u_{\delta}^1 + \delta v_1 - \delta w_1\|_{L^2(\Omega)}.$$

*Indeed, in this case*

$$\|\bar{v}_2\|_{L^2(\Omega)} = 1 + \mathcal{O}(\delta^2)$$

*and since  $\|e_w^2\|_{H^2(\mathcal{U}_{\delta})} \leq \mathcal{O}(\delta^{3/2})$  we deduce that  $\|e_v^2\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \leq \mathcal{O}(\delta^2)$  which implies that*

$$\|e_v^2\|_{H^1(\Omega)} \leq \mathcal{O}(\delta^2).$$

The estimates obtained in Propositions 8.3.13 lead to the following result.

**Corollary 8.3.15** *We have the following expansion for the first transmission eigenvalue*

$$\lambda_{\delta}^1 = \lambda_0 + \delta \lambda_1 + \delta^2 \lambda_2 + \mathcal{O}(\delta^3).$$

**Proof.** Similarly to the proof of Corollary 8.3.11 we expand the definition of  $\lambda_\delta^1$  by using the approximate eigenvectors

$$\begin{aligned} w_{\text{app}}^2 &:= C_\delta^1(\delta w_1 + \delta^2 w_2), \\ v_{\text{app}}^2 &:= C_\delta^1(v_0 + \delta v_1) \end{aligned}$$

and we extend  $w_{\text{app}}^2$  by 0 inside  $\Omega_\delta$ . From the characterization (8.39) of  $\lambda_\delta^1$  and the bound (8.35) we have

$$\lambda_\delta^1 = \int_{\mathcal{U}_\delta} |\nabla u_\delta^1|^2 dx + \mathcal{O}(\delta^3)$$

that becomes

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla u_\delta^1|^2 dx &= \int_{\Omega} |\nabla(e_w^2 - e_v^2 - v_{\text{app}}^2 + w_{\text{app}}^2)|^2 dx \\ &= \int_{\Omega} |\nabla e_w^2|^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla e_v^2|^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla v_{\text{app}}^2|^2 dx + \int_{\mathcal{U}_\delta} |\nabla w_{\text{app}}^2|^2 dx \\ &\quad - 2 \int_{\Omega} \nabla v_{\text{app}}^2 \nabla(e_w^2 - e_v^2) dx + 2 \int_{\mathcal{U}_\delta} \nabla(e_w^2 - e_v^2) \nabla w_{\text{app}}^2 dx - 2 \int_{\Omega} \nabla e_v^2 \nabla e_w^2 dx. \end{aligned}$$

### Computation of the $\mathcal{O}(\delta^3)$ terms.

From Proposition 8.3.13 we have easily that

$$\int_{\Omega} |\nabla e_w^2|^2 dx = \mathcal{O}(\delta^3), \quad \int_{\Omega} |\nabla e_v^2|^2 dx = \mathcal{O}(\delta^3) \quad \text{and} \quad \int_{\Omega} \nabla e_v^2 \nabla e_w^2 dx = \mathcal{O}(\delta^3).$$

Moreover,

$$\int_{\mathcal{U}_\delta} \nabla(e_w^2 - e_v^2) \nabla w_{\text{app}}^2 dx = - \int_{\mathcal{U}_\delta} \Delta(e_w^2 - e_v^2) w_{\text{app}}^2 dx - \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}(e_w^2 - e_v^2) w_{\text{app}}^2 dx$$

but  $\frac{\partial e_v^2}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial e_w^2}{\partial \mathbf{n}}$  and from (8.44) we have

$$\|\Delta(e_w^2 - e_v^2)\|_{L^2(\mathcal{U}_\delta)} \leq \|\lambda_\delta^1 n w_\delta^1\|_{L^2(\mathcal{U}_\delta)} + \|\lambda_\delta^1 v_\delta^1 - \lambda_0 v_0 - \lambda_0 \delta v_1 - \lambda_1 \delta v_0\|_{L^2(\mathcal{U}_\delta)} + C\delta^{3/2}.$$

Hence by using Corollary 8.3.11, Proposition 8.3.13, (8.35) and (8.43) we have

$$\left| \int_{\mathcal{U}_\delta} \nabla(e_w^2 - e_v^2) \nabla w_{\text{app}}^2 dx \right| \leq C\delta^3.$$

### Computation of $\int_{\mathcal{U}_\delta} |\nabla w_{\text{app}}^2|^2 dx$ .

$$\int_{\mathcal{U}_\delta} |\nabla w_{\text{app}}^2|^2 dx = (C_\delta^1)^2 \delta^2 \int_{\mathcal{U}_\delta} |\nabla w_1|^2 dx + 2(C_\delta^1)^2 \delta^3 \int_{\mathcal{U}_\delta} \nabla w_1 \cdot \nabla w_2 dx + (C_\delta^1)^2 \delta^4 \int_{\mathcal{U}_\delta} |\nabla w_2|^2 dx.$$

From the definition of  $w_1$  and by using local coordinates we have

$$\begin{aligned} \delta^2 \int_{\mathcal{U}_\delta} |\nabla w_1|^2 dx &= \delta^3 \int_0^{s_0} \int_0^1 \frac{1}{\delta^2} \left| \frac{\partial \hat{w}_1}{\partial \xi}(s, \xi) \right|^2 (1 + \delta \kappa \xi) d\xi ds + \mathcal{O}(\delta^3) \\ &= \delta \lambda_1 + \delta^2 \frac{\kappa}{2} \lambda_1 + \mathcal{O}(\delta^3). \end{aligned}$$

With the same method and by using the definition of  $w_2$  we have

$$\begin{aligned} \delta^3 \int_{\mathcal{U}_\delta} \nabla w_1 \cdot \nabla w_2 dx &= \delta^4 \int_0^{s_0} \int_0^1 \frac{1}{\delta^2} \frac{\partial \hat{w}_1}{\partial \xi}(s, \xi) \frac{\partial \hat{w}_2}{\partial \xi}(s, \xi) d\xi ds + \mathcal{O}(\delta^3) \\ &= \delta^2 \int_0^{s_0} \int_0^1 \left( -\kappa \frac{\partial v_0}{\partial \mathbf{n}} \xi + \frac{\partial v_1}{\partial \mathbf{n}} \right) \frac{\partial v_0}{\partial \mathbf{n}} d\xi ds + \mathcal{O}(\delta^3) \\ &= -\delta^2 \frac{\kappa}{2} \lambda_1 + \delta^2 \int_{\Gamma} \frac{\partial v_1}{\partial \mathbf{n}} \frac{\partial v_0}{\partial \mathbf{n}} ds + \mathcal{O}(\delta^3). \end{aligned}$$

For the last term we simply have

$$\delta^4 \int_{\mathcal{U}_\delta} |\nabla w_2|^2 dx \leq C\delta^3.$$

We now have to estimate the constant  $(C_\delta^1)^2$  :

$$\begin{aligned} (C_\delta^1)^2 &= \int_{\Omega} |u_\delta^1 + \delta v_1|^2 dx \\ &= \int_{\Omega} |u_\delta^1|^2 + 2\delta \int_{\Omega} u_\delta^1 v_1 dx + \delta^2 \int_{\Omega} |v_1|^2 dx \\ &= 1 + \delta^2 \int_{\Omega} |v_1|^2 dx + 2\delta \int_{\Omega} (u_\delta^1 + v_0)v_1 dx \\ &= 1 + \mathcal{O}(\delta^2) \end{aligned} \tag{8.45}$$

since  $\|u_\delta^1 + v_0\|_{L^2(\Omega)} \leq C\delta$ . Hence we can conclude on the expression of  $\int_{\mathcal{U}_\delta} |\nabla w_{\text{app}}^2|^2 dx$  by using the expansion (8.45) for  $(C_\delta^1)^2$  :

$$\int_{\mathcal{U}_\delta} |\nabla w_{\text{app}}^2|^2 dx = \delta\lambda_1 + \delta^2 \left( 2 \int_{\Gamma} \frac{\partial v_1}{\partial \mathbf{n}} \frac{\partial v_0}{\partial \mathbf{n}} ds - \frac{\kappa}{2} \lambda_1 \right) + \mathcal{O}(\delta^3).$$

**Computation of  $\int_{\Omega} |\nabla v_{\text{app}}^2|^2 dx$ .**

From its definition we have

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla v_{\text{app}}^2|^2 dx &= (C_\delta^1)^2 \left( \int_{\Omega} |\nabla v_0|^2 dx + 2\delta \int_{\Omega} \nabla v_0 \cdot \nabla v_1 dx + \delta^2 \int_{\Omega} |\nabla v_1|^2 dx \right) \\ &= (C_\delta^1)^2 \left( \lambda_0 + 2\delta\lambda_0 \int_{\Omega} v_0 v_1 dx + 2\delta\lambda_1 + \right. \\ &\quad \left. \delta^2 \int_{\Omega} (\lambda_0 |v_1|^2 + \lambda_1 v_0 v_1) dx + \delta^2 \int_{\Gamma} \frac{\partial v_1}{\partial \mathbf{n}} \frac{\partial v_0}{\partial \mathbf{n}} ds \right) \\ &= \lambda_0 \|v_{\text{app}}^2\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2(C_\delta^1)^2 \delta\lambda_1 + \delta^2 \int_{\Gamma} \frac{\partial v_1}{\partial \mathbf{n}} \frac{\partial v_0}{\partial \mathbf{n}} ds. \end{aligned}$$

**Computation of  $\int_{\Omega} \nabla v_{\text{app}}^2 \cdot \nabla (w_\delta^1 - e_v^2) dx$ .**

To compute this term we make use of the equation satisfied by  $v_{\text{app}}^2$  together with the normalization of  $u_\delta^1$  to simplify it. First of all,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla v_{\text{app}}^2 \cdot \nabla (w_\delta^1 - e_v^2) dx &= - \int_{\Omega} \Delta v_{\text{app}}^2 (w_\delta^1 - e_v^2) dx - \int_{\Gamma} \frac{\partial v_{\text{app}}^2}{\partial \mathbf{n}} v_{\text{app}}^2 \\ &= C_\delta^1 \int_{\Omega} (\lambda_0 v_0 + \delta\lambda_0 v_1 + \delta\lambda_1 v_0) (w_\delta^1 - e_v^2) dx \\ &\quad - (C_\delta^1)^2 \int_{\Omega} \left( \frac{\partial v_0}{\partial \mathbf{n}} + \delta \frac{\partial v_1}{\partial \mathbf{n}} \right) \delta v_1 ds. \end{aligned}$$

From the bound (8.35) and Proposition 8.3.13,

$$C_\delta^1 \delta^2 \int_{\Omega} \lambda_1 v_1 (w_\delta^1 - e_v^2) dx = \mathcal{O}(\delta^3)$$

hence we have

$$\int_{\Omega} \nabla v_{\text{app}}^2 \cdot \nabla (w_\delta^1 - e_v^2) dx = (\lambda_0 + \delta\lambda_1) \int_{\Omega} v_{\text{app}}^2 (w_\delta^1 - e_v^2) dx + (C_\delta^1)^2 \delta\lambda_1 + \delta^2 \int_{\Omega} \frac{\partial v_1}{\partial \mathbf{n}} \frac{\partial v_0}{\partial \mathbf{n}} ds + \mathcal{O}(\delta^3).$$

In order to see better what comes out, we use the normalization on  $u_\delta^1$  :

$$\begin{aligned} \|u_\delta^1\|_{L^2(\Omega)}^2 &= 1 = \int_{\Omega} |u_\delta^1 + v_{\text{app}}^2 - v_{\text{app}}^2|^2 dx \\ &= \int_{\Omega} |u_\delta^1 + v_{\text{app}}^2|^2 dx - 2 \int_{\Omega} v_{\text{app}}^2 (u_\delta^1 + v_{\text{app}}^2) dx + \int_{\Omega} |v_{\text{app}}^2|^2 dx \\ &= \mathcal{O}(\delta^3) - 2 \int_{\Omega} v_{\text{app}}^2 (u_\delta^1 + v_{\text{app}}^2) dx + \int_{\Omega} |v_{\text{app}}^2|^2 dx. \end{aligned} \quad (8.46)$$

Hence since  $u_\delta^1 + v_{\text{app}}^2 = w_\delta^1 - e_v^2$ ,

$$-2 \int_{\Omega} \nabla v_{\text{app}}^2 \cdot \nabla (w_\delta^1 - e_v^2) dx = (\lambda_0 + \delta\lambda_1) \left(1 - \|v_{\text{app}}^2\|_{L^2(\Omega)}^2\right) - 2(C_\delta^1)^2 \delta\lambda_1 - 2\delta^2 \int_{\Omega} \frac{\partial v_1}{\partial \mathbf{n}} \frac{\partial v_0}{\partial \mathbf{n}} ds + \mathcal{O}(\delta^3).$$

But from the expansion (8.42) and the definition of  $v_{\text{app}}^2$  we obtain

$$\left|1 - \|v_{\text{app}}^2\|_{L^2(\Omega)}^2\right| \leq C\delta^2$$

and as a consequence

$$-2 \int_{\Omega} \nabla v_{\text{app}}^2 \cdot \nabla (w_\delta^1 - e_v^2) dx = \lambda_0 \left(1 - \|v_{\text{app}}^2\|_{L^2(\Omega)}^2\right) - 2(C_\delta^1)^2 \delta\lambda_1 - 2\delta^2 \int_{\Omega} \frac{\partial v_1}{\partial \mathbf{n}} \frac{\partial v_0}{\partial \mathbf{n}} ds + \mathcal{O}(\delta^3).$$

### Conclusion

If we gather all the estimates obtained in this part, one has

$$\lambda_\delta^1 = \lambda_0 + \delta\lambda_1 + \delta^2\lambda_2 + \mathcal{O}(\delta^3).$$

■

## 8.4 Numerical results

In this part we propose to use the asymptotic development established in Theorem 8.3.8 to the inverse problem of recovering the thickness of the layer from multi-static far field data. In a first part we recall a well known method to compute interior transmission eigenvalues from the far field map and show some numerical computation of the first eigenvalue in the case of a coated circle (in this case we can compute analytically the first interior transmission eigenvalue). In a second part we show that one can use this first transmission eigenvalue to have an estimate of  $\delta$ .

### 8.4.1 Computation of the interior transmission eigenvalue

Let  $\Omega$  be a circle of radius 1 and take  $\delta = 1$  being a constant. In this case we plot on Figure 8.2 the graph of  $k \mapsto \sum_i \|g_{z_i}(k)\|_{L^2(S^1)}$  where  $S^1$  is the unit circle and  $g_{z_i}(k)$  is a Tikhonov-Morozov regularized solution to the far field equation

$$F_k^b g_{z_i}(k) = \Phi_{z_i}^\infty.$$

The points  $z_i$  are randomly distributed into the scatterer  $\Omega$ . The operator

$$F_k^b : g \longrightarrow \int_{S^1} g(\hat{\theta}) u_b^\infty(\hat{x}, \hat{\theta}) ds(\hat{\theta})$$

is the far field operator associated with the noisy data  $u_b^\infty(\hat{x}, \hat{\theta})$ . By noisy data, we mean that there exists a far-field pattern  $u^\infty$  associated to the scattered field solution to (8.1) such that

$$u_b^\infty(\hat{x}, \hat{\theta}) = u^\infty(\hat{x}, \hat{\theta}) + b(\hat{x}, \hat{\theta})$$

where  $b$  is a small function that represents the noise.

It seems that the norm of the solution blows up for the interior transmission eigenvalues, this is the tool we use in the next section to detect these eigenvalues from multistatic data. We refer to the article [23] for a more detailed discussion on this subject.

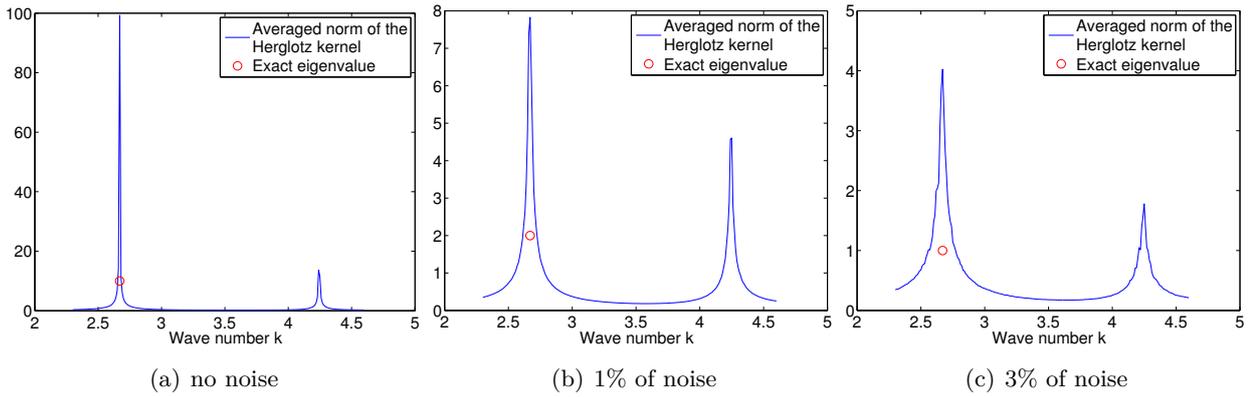


FIGURE 8.2 – Comparison between the computed first eigenvalue and the theoretical one in the case of a circle of radius 1 with  $\delta = 0.1$ , the index of refraction is  $n = 0.5$  and we took 10 angles of observation and incidence.

Noise level \ $\delta$	$\delta$		
	0.1	0.05	0.01
0%	0.11	0.052	0.0099
1%	0.11	0.052	0.0099
3%	0.11	0.052	0.0099

TABLE 8.1 – Estimate of the thickness when  $\Omega$  is a disk of radius 1.

### 8.4.2 Application to inverse problems

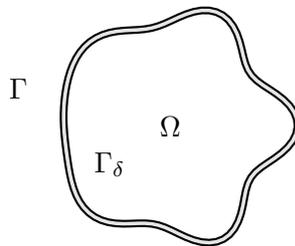


FIGURE 8.3 – Star-shape geometry with  $\delta = 0.05$ .

In this section we present the result given by the inversion formula

$$\delta = \frac{\lambda_\delta^1 - \lambda_0}{\lambda_1}.$$

We compute the interior transmission eigenvalue from the noisy far-field data for a given number of incident directions and directions of observations by using the technique proposed in the previous section. The coefficients  $\lambda_0$  and  $\lambda_1$  are computed numerically by using finite elements implemented in the software FreeFem++ (see [91]). This formula should give an estimate of  $\delta$  with a precision of order  $\delta^2$  if the transmission eigenvalue is well estimated. Tables 8.1 to 8.3 present the inversion results for various configurations.

Noise level \ $\delta$	0.1	0.05	0.01
0%	0.101	0.038	-0.0033
1%	0.097	0.038	-0.014
3%	0.053	0.015	-0.029

TABLE 8.2 – Estimate of the thickness when  $\Omega$  is as in Figure 8.3 with 10 incident and observation angles.

Noise level \ $\delta$	0.1	0.05	0.01
0%	0.109	0.045	0.004
1%	0.084	0.026	-0.021
3%	0.046	0.011	-0.028

TABLE 8.3 – Estimate of the thickness when  $\Omega$  is as in Figure 8.3 with 50 incident and observation angles.

## 8.5 Appendix

Let us recall here some well known results for the convergence of eigenvalues for self adjoint positive and compact operators. This first and fundamental result can be found with its proof in [79, section 3].

**Theorem 8.5.1** *Let  $A : H \rightarrow H$  be a linear self-adjoint positive and compact operator on an Hilbert space  $H$ . Let  $u \in H$  such that  $\|u\|_H = 1$  and  $\lambda, r > 0$  such that*

$$\|Au - \lambda u\| \leq r.$$

*Then there is an eigenvalue  $\lambda_i$  of the operator  $A$  such that*

$$|\lambda - \lambda_i| \leq r.$$

*Moreover, for any  $r^* > r$  there is  $u^* \in H$ , with  $\|u^*\|_H = 1$ ,  $u^*$  belonging to the eigenspace associated with all the eigenvalues of the operator  $A$  lying on the segment  $[\lambda - r^*, \lambda + r^*]$  and such that*

$$\|u - u^*\|_H \leq \frac{2r}{r^*}.$$

From this general result we can obtain the following Lemma for the Laplace operator with Dirichlet boundary conditions.

**Lemma 8.5.2** *Let  $\Omega$  be a Lipschitz bounded domain. Let  $u \in H_0^1(\Omega)$ ,  $\lambda > 0$  and  $c > 0$  such that for all  $r > 0$*

$$\left| \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v - \lambda uv \, dx \right| \leq cr \|v\|_{H^1(\Omega)} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

*and  $|\|u\|_{L^2(\Omega)} - 1| \leq cr$ . Then there is an eigenvalue  $\lambda_i$  of the negative Laplacian with Dirichlet boundary conditions on  $\partial\Omega$  and a constant  $C > 0$  independent of  $r$  such that*

$$|\lambda - \lambda_i| \leq Cr.$$

*Moreover there exists another constant  $C > 0$  and a Dirichlet Laplacian eigenvector  $u_i$  with  $\|u_i\|_{L^2(\Omega)} = 1$  associated to the eigenvalue  $\lambda_i$  such that for all  $r$  sufficiently small*

$$\|u - u_i\|_{H^1(\Omega)} \leq Cr.$$

**Proof.** To prove this result we make use of Theorem 8.5.1. Let us define the operator  $A : H_0^1(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega)$  by

$$(Au, v)_{H_0^1(\Omega)} := (u, v)_{L^2(\Omega)} \quad \forall (u, v) \in H_0^1(\Omega)$$

where for all  $(u, v) \in H_0^1(\Omega)$ ,

$$(u, v)_{H_0^1(\Omega)} := \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx$$

and  $(u, v)_{L^2(\Omega)}$  is the usual  $L^2$  scalar product. Obviously  $A$  is a self-adjoint positive and compact operator of  $H_0^1(\Omega)$  hence it has a discrete spectrum  $(\frac{1}{\lambda_i})_{i=1, \dots, \infty}$  such that

$$\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \dots \xrightarrow{i \rightarrow \infty} \infty$$

and for all  $i$  there is an eigenvector of  $A$ ,  $u_i \in H_0^1(\Omega)$  such that

$$-\Delta u_i = \lambda_i u_i.$$

Assume that there is some  $(\lambda, u)$  that satisfy the hypothesis of the Theorem and define  $\tilde{u} := u/\|u\|_{H_0^1}$ . Then since the  $H^1$  norm and the  $H_0^1$  norm are equivalent, we have

$$\left\| A\tilde{u} - \frac{1}{\lambda}\tilde{u} \right\| \leq \frac{Cr}{\lambda}$$

for another constant  $C$  still independent of  $r$ . Then from Theorem 8.5.1 there is some eigenvalue of  $A$ ,  $\frac{1}{\lambda_i}$ , such that

$$\left| \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_i} \right| \leq \frac{Cr}{\lambda}$$

and consequently

$$|\lambda - \lambda_i| \leq Cr\lambda_i. \quad (8.47)$$

For some  $r_1$  sufficiently small, the second part of the Theorem ensure the existence of  $\tilde{u}_i$  an eigenvector associated with  $\frac{1}{\lambda_i}$  and  $\|\tilde{u}_i\|_{H_0^1(\Omega)} = 1$  such that there exists a constant  $C > 0$  such that for all  $r < r_1$  we have

$$\|\tilde{u} - \tilde{u}_i\|_{H_0^1(\Omega)} \leq Cr.$$

To end the proof we need to renormalize this last inequality. From the definition of  $u$  and by using (8.47) we have  $|\|u\|_{H_0^1(\Omega)} - \lambda_i| \leq Cr$  for some constant  $C$  independent of  $r$ . Moreover, we have  $\|\tilde{u}_i\|_{L^2(\Omega)} = \frac{1}{\lambda_i}$  hence if we define  $u_i := \tilde{u}_i/\|\tilde{u}_i\|_{L^2(\Omega)}$  there exists a constant  $C > 0$  such that for all positive  $r < r_1$  we have

$$\|u - u_i\|_{H_0^1(\Omega)} \leq Cr.$$

■



---

---

# CONCLUSIONS

---

 FIN de clôturer ce document nous rappelons brièvement les principaux résultats obtenus tout en mettant en avant les différents problèmes qui restent ouverts.

Notre étude commence par l'analyse théorique du problème direct de diffraction avec condition d'impédance généralisée. Nous avons montré qu'il est bien posé dans le cas scalaire au chapitre 1 et dans le cas des équations de Maxwell au chapitre 2, en faisant un minimum d'hypothèses sur l'opérateur d'impédance. La méthode utilisée est originale et consiste à formuler le problème de diffraction volumique en un problème surfacique. Ceci permet d'optimiser les hypothèses nécessaires à l'existence et l'unicité de la solution du problème direct, nous avons par exemple pu traiter le cas d'opérateurs d'impédance du « mauvais signe » ne permettant pas d'appliquer directement l'alternative de Fredholm. L'extension au cas des équations de Maxwell est plus qu'une simple généralisation car dans certains cas il nous a fallu introduire une décomposition de Helmholtz surfacique pour être en mesure de montrer le caractère Fredholm du problème. En effet, nous avons été confronté au défaut de compacité de l'injection des fonctions de  $\mathbf{L}_t^2(\Gamma)$  à rotationnel surfacique scalaire dans  $L^2(\Gamma)$  dans l'espace  $\mathbf{L}_t^2(\Gamma)$ . Nous avons volontairement laissé de côté la question de l'approximation numérique d'opérateurs d'impédance d'ordres élevées (contenant un bilaplacien surfacique par exemple) ou de « mauvais signe », il faudrait certainement proposer un cadre adéquat afin de résoudre numériquement de tels problèmes.

Nous nous sommes ensuite concentré sur l'étude du problème inverse de reconstruction d'une forme et de la condition d'impédance dans le cas où la condition au bord se réduit à un opérateur de type Laplacien surfacique. Nous donnons dans le chapitre 3 des résultats d'unicité et de stabilité pour la reconstruction des coefficients d'impédance lorsque le champ lointain est connu pour une seule onde incidente. Bien que satisfaisant nos résultats ne sont pas optimaux, nous n'avons par exemple pas pu conclure sur l'unicité et la stabilité de la reconstruction simultanée de deux fonctions d'impédance à partir de la donnée d'un nombre fini d'onde incidentes. Des résultats encourageant d'unicité ont récemment été obtenus dans [28] (uniquement dans le cas bidimensionnel), les auteurs montrent que trois ondes incidentes suffisent à déterminer de manière unique deux coefficients d'impédance réguliers. Nous avons néanmoins montré que toute propriété de stabilité pour les impédances à obstacle connu peut être utilisée pour montrer un résultat de stabilité pour la reconstruction des impédances sur un obstacle perturbé. Ce type de résultat,

nouveau à notre connaissance, permet de justifier formellement l'utilisation de méthodes itératives pour la reconstruction simultanée des impédances et d'un obstacle sur lequel elles sont définies. Nous concluons l'étude théorique par un résultat d'unicité pour les impédances et l'obstacle pour une infinité d'ondes incidentes. Le chapitre 4 la première étape vers la résolution numérique du problème inverse à l'aide d'une méthode d'optimisation puisque nous y calculons les dérivées partielles du champ diffracté. Le calcul de la dérivée de forme comporte des particularités intéressantes car nous avons considéré le cas de fonctions d'impédance liées à la géométrie et avons introduit en conséquence une nouvelle définition de la dérivée de forme. La conséquence principale de notre choix est que la différentielle de forme fait intervenir les composantes normales et tangentielles de la perturbation représentant la direction de dérivation (classiquement, seule la composante normale de la déformation intervient). Nous pensons que ces termes additionnels peuvent accélérer la convergence d'algorithmes de minimisation mais nous n'avons rien montré dans cette direction. Nous avons ensuite utilisé ces calculs dans le chapitre 5 pour résoudre numériquement le problème inverse en utilisant une méthode de descente de gradient. Bien que non justifiée, la technique de régularisation utilisée (régularisation du gradient et non de la fonctionnelle coût) semble efficace. Son étude théorique semble délicate mais présente un intérêt certain, notamment en ce qui concerne le choix du coefficient de régularisation. Nous avons aussi porté une attention toute particulière au cas de coefficients d'impédance constants par morceaux en adoptant une technique de régularisation issue du milieu du traitement d'images : la régularisation TV. Il s'est avéré judicieux d'utiliser une régularisation TV plutôt qu'une régularisation de type  $H^1$  dans le cas de fonctions d'impédance constantes par morceaux, ceci n'a rien d'étonnant car la régularisation TV est connue pour pénaliser les variations de faible amplitude d'une fonction (liées au bruit) tout en ne pénalisant pas discontinuités (liées à un changement de valeur d'une fonction constante par morceaux). Enfin, nous donnons des exemples de reconstruction simultanée d'un obstacle et de sa condition d'impédance. Au vu de la qualité des reconstructions, nous avons appliqué l'algorithme de minimisation au cas où le champ lointain provient d'un modèle exact de couche mince et nous avons observé que, tandis que l'utilisation d'une condition d'impédance classique pour retrouver la forme de l'obstacle est parfois insuffisante, le modèle d'impédance généralisée donne d'excellents résultats dans tous les cas étudiés. Cette dernière remarque semble justifier pleinement l'utilisation de conditions d'impédance généralisée pour la résolution de problèmes inverses. L'extension de ces travaux au cas des équations de Maxwell 3D est traitée dans le chapitre 6. Nous montrons un résultat d'unicité pour la reconstruction d'une forme et des coefficients d'impédance puis nous calculons les dérivées du champ diffracté par rapport aux coefficients d'impédance et à la forme. Nous utilisons ensuite les résultats obtenus pour reconstruire une forme à partir de la donnée du champ lointain correspondant à la diffraction de quelques ondes incidentes. Même si d'un point de vue théorique l'analyse est très similaire au cas scalaire, nous avons été confronté à d'importantes difficultés techniques pour le calcul de la dérivée de forme et l'implémentation numérique de l'algorithme d'optimisation. L'utilisation d'équations intégrales de frontière pour la résolution du problème direct pourrait très certainement simplifier le processus d'optimisation de forme (voir [35] pour la description d'une méthode d'équations intégrales de frontière pour les équations de Maxwell avec condition d'impédance généralisée). Il serait aussi certainement intéressant d'utiliser une technique de lignes de niveaux qui éviterait d'avoir à remailler le domaine de calcul.

L'application de méthodes d'optimisation pour reconstruire un obstacle avec un opérateur d'impédance faisant intervenir des dérivées surfaciques d'ordre élevé semble très compliqué voire techniquement impossible à mettre en œuvre, c'est en partie pour cette raison que dans la dernière partie de la thèse nous nous sommes penchés sur l'utilisation de méthodes qualitatives. Nous commençons dans le chapitre 7 par montrer que la méthode de factorisation s'applique à toute une classe de problèmes de diffraction avec une condition d'impédance généralisée, cette méthode nous donne une preuve d'identifiabilité de l'obstacle mais aussi un algorithme numérique de reconstruction. Il reste tout de même un cas important que nous n'avons pas traité, celui d'un opérateur d'impédance

---

pseudo-différentiel d'ordre 1. De plus, nous avons tenté d'appliquer les mêmes techniques au cas des équations de Maxwell et mais n'avons pas été en mesure de conclure. En lien avec les méthodes qualitatives, dans le chapitre 8 nous nous sommes penchés sur l'utilisation des valeurs propres de transmission intérieure associées à la diffraction par un revêtement mince pour retrouver des informations sur la couche, comme son épaisseur ou ses propriétés physiques. Dans ce but, nous avons calculé puis justifié un développement asymptotique de la première valeur propre. L'originalité de ce travail réside dans le fait que le problème aux valeurs propres sous-jacent est non linéaire et non auto-adjoint, nous avons donc dû utiliser des méthodes non standard pour justifier le développement asymptotique. Finalement, le développement obtenu aboutit à une formule permettant de déterminer de manière rapide l'épaisseur de la couche à partir de la donnée du champ lointain pour toutes les directions d'incidences et pour une bande de fréquences contenant la première valeur propre de transmission intérieure. Nous sommes actuellement en train de travailler sur le développement d'un modèle d'impédance dont les valeurs propres seraient proche des valeurs propres de transmission intérieure pour le problème de couche mince. De nombreuses pistes restent à explorer, nous n'avons traité que le cas qui nous est apparu le plus abordable, mais on pourrait étendre cette étude à d'autres types de configurations comme un matériaux fortement absorbant. On pourrait aussi considérer le même problème pour les équations de Maxwell.



---

---

# BIBLIOGRAPHIE

---

- [1] M. Abramowitz and I. A. Stegun. *Handbook of mathematical functions*. Dover Publications, 1972.
- [2] G. Alessandrini, L. Del Piero, and L. Rondi. Stable determination of corrosion by a single electrostatic boundary measurement. *Inverse Problems*, 19(4) :973, 2003.
- [3] G. Alessandrini and S. Vessella. Lipschitz stability for the inverse conductivity problem. *Adv. Appl. Math.*, 35(2) :207–241, 2005.
- [4] G. Allaire. *Conception optimale de structures*. Springer-Verlag, 2007.
- [5] H. Ammari and C. Latiri-Grouz. Conditions aux limites approchées pour les couches minces périodiques. *M2AN Math. Model. Numer. Anal.*, 33(4) :673–693, 1999.
- [6] C. Amrouche, C. Bernardi, M. Dauge, and V. Girault. Vector potentials in three dimensional non smooth domains. *Math. Methods Appl. Sci.*, 1998.
- [7] B. Aslanyurek, H. Haddar, and H. Sahinturk. Generalized impedance boundary conditions for thin dielectric coatings with variable thickness. Rapport de recherche RR-7145, INRIA, 2009.
- [8] A. Beck and M. Teboulle. A fast iterative shrinkage-thresholding algorithm for linear inverse problems. *SIAM J. Imaging Sciences*, 2(1) :183–202, 2009.
- [9] A. Bendali and K. Lemrabet. The effect of a thin coating on the scattering of a time-harmonic wave for the Helmholtz equation. *SIAM J. Appl. Math.*, 56 :1664–1693, 1996.
- [10] A. Bendali and K. Lemrabet. Asymptotic analysis of the scattering of a time-harmonic electromagnetic wave by a perfectly conducting metal coated with a thin dielectric shell . *Asymptotic Analysis*, 57(3–4) :199–227, 2008.
- [11] L. Bourgeois. About stability and regularization of ill-posed elliptic Cauchy problems : the case of  $C^{1,1}$  domains. *M2AN Math. Model. Numer. Anal.*, 44-4 :715–735, 2010.
- [12] L. Bourgeois, N. Chaulet, and H. Haddar. Stable reconstruction of generalized impedance boundary conditions. *Inverse Problems*, 27(9), 2011.
- [13] L. Bourgeois, N. Chaulet, and H. Haddar. On simultaneous identification of the shape and generalized impedance boundary condition in obstacle scattering. *SIAM J. Sci. Comput.*, 34(3), 2012.
- [14] L. Bourgeois and H. Haddar. Identification of generalized impedance boundary conditions in inverse scattering problems. *Inverse Problems and Imaging*, 4(1) :19–38, 2010.

- [15] H. Brezis. *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications*. Masson, 1983.
- [16] A. Buffa and P. Ciarlet. On traces for functional spaces related to Maxwell's equations Part I : An integration by parts formula in Lipschitz polyhedra. *Math. Methods Appl. Sci.*, 24(1) :9–30, 2001.
- [17] A. Buffa and P. Ciarlet. On traces for functional spaces related to Maxwell's equations Part II : Hodge decompositions on the boundary of Lipschitz polyhedra and applications. *Math. Methods Appl. Sci.*, 24(1) :31–48, 2001.
- [18] A. Buffa, M. Costabel, and D. Sheen. On traces for  $H(\text{curl}, \Omega)$  in Lipschitz domains. *J. Math. Anal. Appl.*, 276(2) :845–867, 2002.
- [19] I. Bushuyev. Stability of recovering the near-field wave from the scattering amplitude. *Inverse Problems*, 12(6) :859, 1996.
- [20] F. Cakoni, M. Cayoren, and D. Colton. Transmission eigenvalues and the nondestructive testing of dielectrics. *Inverse Problems*, 24, 2008.
- [21] F. Cakoni, N. Chaulet, and H. Haddar. Asymptotic development of the interior transmission eigenvalues for thin layer structures. *En préparation*.
- [22] F. Cakoni and D. Colton. *Qualitative methods in inverse scattering theory*. Springer-Verlag, 2006.
- [23] F. Cakoni, D. Colton, and H. Haddar. On the determination of Dirichlet or transmission eigenvalues from far-field data. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 348 :379–383, 2010.
- [24] F. Cakoni, D. Colton, and P. Monk. The determination of boundary coefficients from far field measurements. *J. Integral Equations Appl.*, 22(2) :167–191, 2010.
- [25] F. Cakoni, D. Colton, and P. Monk. *The linear sampling method in inverse electromagnetic scattering*. CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2011.
- [26] F. Cakoni, A. Cossonière, and H. Haddar. Transmission eigenvalues for an inhomogeneous media containing obstacles. *Inverse Problems and Imaging*, 6(3) :373 – 398, 2012.
- [27] F. Cakoni and H. Haddar. *Transmission eigenvalues in inverse scattering theory*. Inside Out 2. MSRI Publication, à paraître.
- [28] F. Cakoni and R. Kress. Integral equation methods for the inverse obstacle problem with generalized impedance boundary condition. *Soumis*.
- [29] F. Cakoni, R. Kress, and C. Schuft. Simultaneous reconstruction of shape and impedance in corrosion detection. *Methods and Applications of Analysis*, 17(4) :357–378, 2010.
- [30] S. Chaabane, I. Fellah, M. Jaoua, and J. Leblond. Logarithmic stability estimates for a Robin coefficient in 2D Laplace inverse problems. *Inverse Problems*, 20(1) :49–57, 2004.
- [31] M. Chamaillard, N. Chaulet, and H. Haddar. A factorization method for support characterization of an obstacle with a generalized impedance boundary condition. *En préparation*.
- [32] A. Chambolle and T. Pock. A first-order primal-dual algorithm for convex problems with applications to imaging. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 40(1) :120–145, 2011.
- [33] N. Chaulet and H. Haddar. Shape derivative for obstacles with generalized impedance boundary conditions : the Maxwell case. *En préparation*.
- [34] S. Chun, H. Haddar, and J.S. Hesthaven. High-order accurate thin layer approximations for time-domain electromagnetics, PartII : Transmission layers. *J. Comput. Appl. Math.*, 234(8) :25787–2608, 2010.
- [35] F. Collino and B. Despres. Integral equations via saddle point problems for time-harmonic Maxwell's equations. *J. Comput. Appl. Math.*, 2003.

- [36] D. Colton, H. Haddar, and P. Monk. The linear sampling method for solving the electromagnetic inverse scattering problem. *SIAM J. Sci. Comput.*, 24(3), 2003.
- [37] D. Colton and A. Kirsch. The determination of the surface impedance of an obstacle from measurements of the far field pattern. *SIAM J. Appl. Math.*, 41(1) :8–15, 1981.
- [38] D. Colton and R. Kress. *Inverse acoustic and electromagnetic scattering theory*, volume 93 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, second edition, 1998.
- [39] M. Costabel. A remark on the regularity of solutions of Maxwell’s equations on Lipschitz domains. *Math. Methods Appl. Sci.*, pages 365–368, 1990.
- [40] M. Di Cristo and L. Rondi. Examples of exponential instability for inverse inclusion and scattering problems. *Inverse Problems*, 19(3) :685, 2003.
- [41] M. C. Delfour and J.-P. Zolésio. Shape analysis via oriented distance functions. *Journal of Functional Analysis*, 123, 1994.
- [42] B. Delourme. *Modèles et asymptotiques des interfaces fines et périodiques*. PhD thesis, INRIA-Rocquencourt, 2010.
- [43] C. Dobrzynski. Mmg3d : Userguide. Technical report 442, INRIA, 2012.
- [44] M. Duruflé, H. Haddar, and P. Joly. Higher order generalized impedance boundary conditions in electromagnetic scattering problems. *C.R. Physique*, 7(5) :533–542, 2006.
- [45] D. Gilbarg and N.S. Trudinger. *Elliptic partial differential equations of second order*. Springer-Verlag, second edition, 1998.
- [46] N. Grinberg and A. Kirsch. *The factorization method for inverse problems*. Oxford University Press, 2008.
- [47] H. Haddar and P. Joly. Stability of thin layer approximation of electromagnetic waves scattering by linear and nonlinear coatings. *J. Comput. Appl. Math.*, 143 :201–236, 2002.
- [48] H. Haddar, P. Joly, and H.-M. Nguyen. Generalized impedance boundary conditions for scattering by strongly absorbing obstacles : the scalar case. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 15(8) :1273–1300, 2005.
- [49] H. Haddar, P. Joly, and H.-M. Nguyen. Generalized impedance boundary conditions for scattering problems from strongly absorbing obstacles : the case of Maxwell’s equations. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 18(10) :1787–1827, 2008.
- [50] H. Haddar and R. Kress. On the Fréchet derivative for obstacle scattering with an impedance boundary condition. *SIAM J. Appl. Math.*, 65(1), 2004.
- [51] L. He, S. Kindermann, and M. Sini. Reconstruction of shapes and impedance functions using few far-field measurements. *J. Comput. Phys.*, 228(3) :717–730, 2009.
- [52] A. Henrot. *Extremum problems for eigenvalues of elliptic operators*. Birkhäuser, 2006.
- [53] A. Henrot and M. Pierre. *Variation et optimisation de formes*, volume 48 of *Mathématiques & Applications*. Springer-Verlag, 2005.
- [54] F. Hettlich. Fréchet derivatives in inverse obstacle scattering. *Inverse Problems*, 11(2), 1995.
- [55] D. J. Hoppe and Y. Rahmat-Sami. *Impedance boundary conditions in electromagnetics*. Taylor & Francis, 1995.
- [56] G. Inglese. An inverse problem in corrosion detection. *Inverse Problems*, 13(4) :977, 1997.
- [57] V. Isakov. On uniqueness in the inverse transmission scattering problem. *Communications in Partial Differential Equations*, 15(11) :1565–1586, 1990.
- [58] V. Isakov. *Inverse problems for partial differential equations*. Springer, 1998.
- [59] B. Jin and J.Zou. Numerical estimation of piecewise constant Robin coefficient. *SIAM J. Control Optim.*, 48(3), 2009.

- [60] A. Kirsch. Characterization of the shape of a scattering obstacle using the spectral data of the far field operator. *Inverse Problems*, 14(6), 1999.
- [61] A. Kirsch. *An introduction to the mathematical theory of inverse problems, second edition*. Springer, 2011.
- [62] A. Kirsch and R. Kress. Uniqueness in inverse obstacle scattering (acoustics). *Inverse Problems*, 9(2) :285–299, 1993.
- [63] D. Koyama. Error estimates of the DtN finite element method for the exterior Helmholtz problem. *J. Comput. Appl. Math.*, pages 21–31, 2007.
- [64] R. Kress. *Linear integral equations*, volume 82 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, 1989.
- [65] R. Kress. Uniqueness and numerical methods in inverse obstacle scattering. *J. Phys. : Conf.*, 73, 2007.
- [66] R. Kress and L. Päivärinta. On the far field in obstacle scattering. *SIAM J. Appl. Math.*, 59(4), 1999.
- [67] R. Kress and W. Rundell. Inverse scattering for shape and impedance. *Inverse Problems*, 17(4) :1075, 2001.
- [68] C. Labreuche. Stability of the recovery of surface impedances in inverse scattering. *J. Math. Anal. Appl.*, (231) :161–176, 1999.
- [69] A. Lechleiter, N. Hyvönen, and H. Hakula. The factorization method applied to the complete electrode model of impedance tomography. *SIAM J. Appl. Math.*, 68(4) :1097–1121, 2008.
- [70] M. A. Leontovich. Investigations on radiowave propagation, part II. *Printing House of the Academy of Sciences, Moscow*, 1948.
- [71] J. L. Lions and E. Magenes. *Problèmes aux limites non homogènes et application*, volume 1. Dunod, 1968.
- [72] J. J. Liu, G. Nakamura, and M. Sini. Reconstruction of the shape and surface impedance from acoustic scattering data for an arbitrary cylinder. *SIAM J. Appl. Math.*, 67(4) :1124–1146, 2007.
- [73] N. Mandache. Exponential instability in an inverse problem for the Schrödinger equation. *Inverse Problems*, 17(5), 2001.
- [74] W. McLean. *Strongly elliptic systems and boundary integral equations*. Cambridge University Press, 2000.
- [75] P. Monk. *Finite elements methods for Maxwell’s equations*. Calderon Press, Oxford, 2003.
- [76] G. Nakamura and M. Sini. Obstacle and boundary determination from scattering data. *SIAM J. Math. Ana.*, 39(3) :819–837, 2007.
- [77] J.-C. Nédélec. Mixed finite elements in  $\mathbb{R}^3$ . *Numer. Math.*, 35 :315–341, 1980.
- [78] J.-C. Nédélec. *Acoustic and electromagnetic equations*. Springer-Verlag, 2001.
- [79] O. A. Oleinik, A. S. Shamaev, and G. A. Yosifian. *Mathematical problems in elasticity and homogenization*. Elsevier, 1992.
- [80] K.-D. Phung. Remarques sur l’observabilité pour l’équation de Laplace. *ESAIM : COCV*, 9 :621–635, 2003.
- [81] R. Potthast. Fréchet differentiability of boundary integral operators in inverse acoustic scattering. *Inverse Problems*, (10) :431–447, 1994.
- [82] R. Potthast. Fréchet differentiability of the solution to the acoustic Neumann scattering problem with respect to the domain. *J. Inverse Ill-posed Probl.*, (4) :67–84, 1996.
- [83] R. Potthast. *Point sources and multipoles in inverse scattering theory*. Taylor & Francis, 2001.

- 
- [84] L.I. Rudin, S. Osher, and E. Fatemi. Nonlinear total variation based noise removal algorithms. *Physica D*, 60, 1992.
- [85] T. B. A. Senior and J. L. Volakis. *Approximate boundary conditions in electromagnetics*. IEE Electromagnetic Waves Series, 1995.
- [86] P. Serranho. A hybrid method for inverse scattering for shape and impedance. *Inverse Problems*, 22 :663–680, 2006.
- [87] E. Sincich. Stable determination of the surface impedance of an obstacle by far field measurements. *SIAM J. Appl. Math.*, 38(2) :434–451, 2006.
- [88] E. Sincich. Lipschitz stability for the inverse Robin problem. *Inverse Problems*, 23 :1311–1326, 2007.
- [89] G.M. Vainikko. The discrepancy principle for a class of regularization methods. *USSR computational mathematics and mathematical physics*, 22(3) :1–19, 1982.
- [90] J. Wloka. *Partial differential equations*. Cambridge University Press, 1987.
- [91] [www.freefem.org/ff++](http://www.freefem.org/ff++). *FreeFem++*.



**Titre :** Modèles d'impédance généralisée en diffraction inverse

**Résumé :** Le but général de cette thèse est d'exploiter des modélisations asymptotiques pour la résolution de problèmes de diffraction inverse en électromagnétisme. Nous nous intéressons plus particulièrement au cas des conditions d'impédance généralisée qui modélisent notamment des matériaux fortement absorbants ou des revêtements de faible épaisseur. L'expression « impédance généralisée » signifie que la condition au bord fait intervenir un opérateur surfacique. Les conditions dites d'impédance classique entrent dans cette famille de conditions aux bord, dans ce cas, l'opérateur surfacique se réduit à la multiplication par une fonction. Dans le cadre des problèmes inverses, l'utilisation de modèles approchés permet de simplifier aussi bien la résolution numérique que l'analyse mathématique. De nombreux travaux ont été menés en diffraction inverse sur l'utilisation d'une condition d'impédance classique, nous les avons étendus pour des opérateurs surfaciques plus complexes faisant intervenir des dérivées tangentielles. Une partie importante de la thèse est consacrée à la mise en oeuvre des méthodes d'optimisation pour retrouver un obstacle ainsi que les paramètres définissant l'opérateur d'impédance. Nous présentons en particulier un calcul de dérivée de forme dans le cas où les équations de l'électromagnétisme se simplifient en une équation scalaire, nous étendons ensuite ce calcul aux équations de Maxwell vectorielles. Des exemples numériques de reconstruction de forme et de paramètres d'impédance viennent illustrer l'applicabilité des méthodes d'optimisation à notre problème inverse. Afin de compléter cette étude, nous avons utilisé une méthode qualitative – la méthode de factorisation – pour identifier un objet diffractant caractérisé par une condition d'impédance généralisée. Enfin, en relation avec les méthodes qualitatives, nous nous sommes penché sur l'utilisation des valeurs propres de transmission associées au problème de diffraction par des couches minces pour obtenir des informations sur la couche. Dans ce but, nous avons calculé et justifié le développement asymptotique de la première valeur propre de transmission intérieure par rapport à la faible épaisseur du revêtement. Ce développement donne une manière simple de calculer l'épaisseur du revêtement à partir du champ diffracté pour plusieurs fréquences.

**Mots-clés :** Problèmes inverses, électromagnétisme, condition d'impédance généralisée, optimisation de forme, asymptotique de valeurs propres, problème de transmission intérieure, méthode de factorisation.

---

**Title:** Generalized impedance models and inverse scattering

**Abstract:** The main objective of this thesis is to use asymptotic models for the resolution of inverse electromagnetic scattering problems. We consider in particular the case of generalized impedance conditions that are models for thin coatings or strongly absorbing media. The term "generalized impedance" signifies that the boundary condition involves a surface operator. The so-called classical impedance boundary conditions is a particular case of generalized impedance boundary condition where the operator reduces to the multiplication by a function. In the inverse problems context, the use of such approximate models simplifies the numerical resolution as well as the mathematical analysis. In the literature a lot of studies focus on inverse scattering with classical impedance boundary conditions, we extend them to the case of more complex surface operators containing surface derivatives for example. An important part of the thesis deals the application of optimization methods to find both a shape and parameters that characterize the boundary operator. Among others, we present the computation of the shape derivative for Helmholtz' and Maxwell's equations. Numerical illustrations of shape reconstruction and identification of boundary coefficients are also provided. We complement this work by studying a qualitative method – the factorization method – to retrieve a shape with a general form of generalized impedance boundary conditions. In relation with qualitative methods, we investigated the use of the so-called interior transmission eigenvalues associated with thin layer structures to obtain information about the layer thickness and properties. In this view, we derived and justified the full asymptotic development of the first interior transmission eigenvalue with respect to the small thickness of the layer. This development provides a simple procedure to compute the thickness of the layer from multi-static scattered field data.

**Keywords:** Inverse problems, electromagnetism, generalized impedance boundary conditions, shape optimization, asymptotic analysis of eigenvalues, interior transmission problem, factorization method.